



**UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA DE MINAS**

APLICACIÓN DE TRUNCACIÓN PARA LA ESTIMACIÓN DE LEYES

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERA CIVIL DE MINAS

VALENTINA ANDRÉE BUSCAGLIONE BLU

**PROFESOR GUÍA:
XAVIER EMERY**

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
HANS GÖPFERT HIELBIG
JOSÉ SAAVEDRA-ROSAS**

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por AMTC y CONICYT

**SANTIAGO DE CHILE
2016**

**RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR AL
TÍTULO DE:** Ingeniero Civil de Minas
POR: Valentina Andréa Buscaglione Blu
FECHA: Septiembre de 2016
PROFESOR GUÍA: Xavier Emery

APLICACIÓN DE TRUNCACIÓN PARA LA ESTIMACIÓN DE LEYES

La presente investigación busca establecer la aplicabilidad que tiene truncación en la estimación de leyes de recursos minerales; ya que cuando dicha estimación se realiza con valores muy altos, se produce una falta de robustez en análisis variográfico y/o en estimaciones generando cifras consideradas erróneas y que finalmente son omitidas. En los casos donde estos datos no se consideran errados, la situación suele resolverse mediante truncación, que consiste en truncar los valores considerados demasiado altos. Esta técnica, sin embargo, implica una subestimación de los recursos del yacimiento, y la omisión de parte de los datos podría generar sesgo.

Por ello es que se probó y validó la implementación de dos metodologías de truncación, y el método tradicional a una base de datos sintética y a una real. Para el caso sintético, se creó una base de datos con la finalidad de comparar las diferencias entre los valores estimados con cada método con el valor real. Para el caso real, se utilizó una base de datos de un cuerpo mineralizado que contenía tanto cobre como molibdeno. Los resultados de las estimaciones se compararon considerando diferencias principalmente en sesgo y precisión. Los métodos que se evaluaron correspondieron al *kriging* ordinario, truncación simple con un posterior *kriging* ordinario y una metodología de truncación “mejorada” que considera un exceso sobre la ley de truncación.

En el caso sintético, los resultados mostraron que la metodología tradicional presentó un mejor ajuste. Esto puede deberse principalmente a que la distribución de la base de datos no es de “cola pesada”, es decir, con muchos valores extremos, lo que implica un mayor número de valores a truncar. Además, para el método mejorado no se observó mayor facilidad al momento de realizar el análisis variográfico, por lo que no se justifica su utilización en este tipo de bases de datos. A pesar de esto, ambas metodologías que aplican truncación demuestran ser insesgadas y precisas.

Para el caso real, se obtienen resultados diferentes para el cobre y para el molibdeno. En cuanto al cobre, ambos métodos truncados presentaron mejor precisión y menor sesgo con una baja diferencia entre ellos. Para el molibdeno, en cambio, la metodología tradicional mostró un mejor ajuste, lo que puede estar relacionado con la variabilidad que muestran los correlogramas cruzados, la dificultad en el análisis variográfico o bien por la posible falta de estacionaridad de la variable en estudio. Por lo tanto, para el caso real la aplicación de métodos con truncación da como resultado estimaciones más precisas y menos sesgadas. La base de datos presenta distribuciones de “cola pesada”, lo que permite que la aplicación de truncación resulte útil al momento de estimar.

La utilización de métodos con truncación es una herramienta útil a la hora de estimar recursos minerales en presencia de una cantidad considerable de valores extremos, ya que facilita el análisis variográfico para al menos el caso de la truncación simple. Sin embargo, con una base de datos de distribución lognormal que no incluye una cantidad considerable de valores extremos, es recomendable la utilización de la metodología tradicional, a pesar de que los métodos con truncación demuestren ser precisos e insesgados.

ABSTRACT

While estimating mineral resources, outliers produce lack of robustness in variographic analysis and/or estimations. Sometimes, these values are not considered in order to simplify the process. However, in some situations, these values are indeed considered but are cut by a capping method. On the other hand, this method may imply an underestimation of the global resources, and a bias may appear by omitting part of the data.

The objective of this work is to apply two different capping methods and the traditional approach to a synthetic case and a real case. For the first case, a data base is created in order to compare the differences between the estimation methods and the actual value. The real case consists of a copper-molybdenum ore body. The results are compared considering differences in accuracy and precision. The methods to be evaluated consist in an ordinary *kriging*, a simple capping with a subsequent ordinary *kriging*, and an “improved” capping approach which considers an excess above the truncation threshold.

For the synthetic case, the results show that the traditional approach is more accurate and precise for almost all cases. This is explained basically because the data base created does not have a heavy-tailed distribution, which implies that many values have to be cut. Besides, simplicity in variogram modeling is not noticed for the improved capping method, so its use is not justifiable for a data base with this kind of distribution, though both capping methods have proven being accurate and precise.

For the real case, results have turned out to be different for copper and molybdenum. In the copper case, both capping methods turned out to have better accuracy and precision and little difference was found between both of them.

For molybdenum, on the other hand, the simple capping method has shown being more accurate and precise than the other methods. This can be explained by the variability shown by the cross correlograms of the residual values and the molybdenum grade, which implies a dependence relationship between them, also by the complicated variogram analysis and possible non-stationarity of the variables. For the real case, then, the application of truncation methods turned out being more accurate and precise. Databases for both copper and molybdenum have a long-tailed distribution which allows capping methods to be useful.

Using capping methods is a useful tool while estimating mineral resources in the presence of several extreme values, because it helps to make the variogram analysis process simpler at least for the simple capping. However, with a lognormal distribution database that does not include extreme values, it is recommended to stick to the traditional approach even though capping values have shown being accurate and precise.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, agradezco a Dios por haberme dado la oportunidad de estudiar esta carrera y por las personas que puso en mi camino durante este proceso.

Quiero agradecer de forma especial a mi familia. Primero a mis padres, sin los cuales no sería quien soy y no estaría aquí ahora. Por los valores que me inculcaron, el apoyo y al amor que siempre me dan. Son los mejores papás del mundo. A mis hermanas, por enseñarme a luchar frente a lo que se ponga en el camino. Son las personas más fuertes que conozco, me alegran la vida y aunque piensen que lo que estudié es muy “fome” me apoyan en todo y creen en mí. A Quequel, por siempre estar ahí cuando lo necesito. Tampoco estaría aquí si no fuera por ella. A mi abuela por creer en mí y ser parte de mi familia. Y a mi regio, por haber sido el mejor abuelo del mundo y por haber estado presente en cada paso desde el cielo.

A mis amigas del ILC. Gracias por entender las épocas en las que no daba señales de vida y por tantos años de amistad. Las quiero mucho Ale, Barbi, Caro, Feña, Nati, Pao y Trini. A mis amigas Cony, Tamy y Gina (con mi Pauli incluida), por estar siempre ahí, aunque sea difícil vernos muy seguido. Agradezco también a Claudio y a Julio por el apoyo y amistad durante todos estos años, por ser mis hermanos y por ser las mejores bestias de la vida.

A cada beauchefiano que conocí en el camino. Cada uno aportó con su grano de arena a mi vida. A mi querida sección 5 del 2008, principalmente a aquellos con los que más compartí y con los que sigo manteniendo contacto. Especialmente a Piña, Mimí, Dani y Kike, a quienes, a pesar de no seguir la misma carrera, les tengo el mismo cariño de siempre. En cuanto a los mineros, Cami, Nico, Tama, Jany, Hölck, Osvald, Doli y Mono, gracias por el apoyo y amistad sobre todo después de mi llegada de Francia. Gracias por la buena onda y por acompañarme en buenos y malos momentos. Me sentí más parte de mi generación gracias a ustedes. A mis amigos Sibi, Erika y Rozu. Gracias por ser quienes son, por cada informe que nos quedamos haciendo hasta el día siguiente, por cada junta de estudio, por cada vez que Rozu llegó tarde (o no llegó), que Erika se mandó frases para el bronce o que Sibi nos calzó para algo. Cada mal momento en la universidad valió la pena gracias a ustedes. Gracias por estar ahí siempre. Y también gracias a mi compañero pez Patito, por apoyarme especialmente en el desarrollo de esta memoria.

A Xavier Emery, gracias por la paciencia y por darme la oportunidad de desarrollar este proyecto. Le agradezco especialmente por su buena voluntad, por todo lo que he aprendido durante estos años y por ser tan buen docente, con una clara vocación para ello. Agradezco también a Hans Göpfert, por la buena disposición y por la paciencia en el desarrollo de este trabajo y a José Saavedra por los consejos y correcciones para poder entregar un informe lo más completo posible.

Agradezco también al AMTC, y a CONICYT por el financiamiento de esta memoria a través de los proyectos FONDECYT 1130085 y PIA Anillo ACT 1407.

TABLA DE CONTENIDO

1.	Introducción.....	1
1.1.	Motivación del trabajo.....	1
1.2.	Objetivos.....	3
1.2.1.	Objetivo General.....	3
1.2.2.	Objetivos Específicos.....	3
1.3.	Alcances.....	3
2.	Antecedentes.....	4
2.1.	Antecedentes Generales.....	4
2.2.	Definiciones básicas de Geoestadística [2][3][11].....	4
2.2.1.	Variable Regionalizada.....	4
2.2.2.	Función Aleatoria.....	4
2.2.3.	Variografía.....	6
2.2.3.1.	Modelamiento de variogramas.....	8
2.2.4.	Kriging.....	9
2.3.	Calidad de los Datos [2].....	12
2.4.	Manejo de datos atípicos [2] [11].....	13
2.4.1.	Capping o Truncación [5].....	14
2.5.	Metodología de Truncación mejorada.....	14
3.	Metodología.....	16
3.1.	Metodología Caso Sintético.....	16
3.2.	Metodología Caso Real.....	17
4.	Desarrollo de metodología: Caso de estudio I, Base de datos sintética.....	19
4.1.	Creación Base de Datos.....	19
4.1.1.	Creación de grilla.....	19
4.1.2.	Simulación de variable Gaussiana.....	20
4.1.3.	Paso a variable lognormal.....	20
4.2.	Muestreo.....	20
4.3.	Estudio Exploratorio.....	20
4.4.	Elección valores de truncación.....	21
4.5.	Cálculo de Residuos.....	21
4.6.	Correlogramas cruzados.....	22
4.7.	Estimación Tradicional.....	22
4.8.	Estimación con Truncación.....	23
4.9.	Estimación con Truncación mejorada.....	23

4.10. Resultados y Análisis.....	24
5. Desarrollo de metodología: Caso de estudio II, Base de datos Yacimiento las Pascualas....	27
5.1. Yacimiento [8]	27
5.2. Estudio Exploratorio de Datos.....	28
5.2.1. Cobre	28
5.2.2. Molibdeno.....	31
5.2.3. Correlación	34
5.3. Elección valores de truncación	34
5.3.1. Cobre	34
5.3.2. Molibdeno.....	35
5.4. Cálculo de Residuos.....	36
5.4.1. Cobre	36
5.4.2. Molibdeno.....	36
5.5. Estimación Tradicional	36
5.6. Estimación con Truncación	37
5.7. Estimación con Truncación mejorada.....	37
5.8. Resultados y Análisis.....	38
5.8.1. Cobre	38
5.8.2. Molibdeno.....	40
6. Conclusiones.....	44
Bibliografía.....	46
Anexos	47
Anexo A: Caso Sintético	48
Anexo B: Caso Real	54
Estudio Exploratorio cobre.....	54
Estudio Exploratorio molibdeno.....	56

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Etapas de un proyecto minero	1
Figura 2. Etapas en la evaluación de recursos	2
Figura 3. Tipos de tolerancia: <i>I - Construcción según tolerancia angular en torno a la dirección de acimut θ; II - Según ancho de banda; III- Según tolerancia en la distancia; IV - Área de tolerancia final.</i>	7
Figura 4. Modelo de variograma anidado, que consta de un modelo pepítico y dos esféricos	9
Figura 5. Diagrama explicativo exactitud y precisión: <i>a) Caso poco exacto y poco preciso. B) Caso muy exacto, poco preciso; c) Caso poco exacto, muy preciso; d) Caso muy exacto, muy preciso.</i>	13
Figura 6. Leyes truncadas se definen dando el valor z a las leyes mayores a z, consideradas leyes "normales". El exceso es tratado de forma separada. Fuente: Chilès and Delfiner (2012)	15
Figura 7. Esquema metodología caso sintético	17
Figura 8. Esquema metodología caso real	18
Figura 9. Esquema creación de base de datos sintética	19
Figura 10. Histograma distribución de leyes en séptima realización del caso sintético.....	21
Figura 11. Variograma modelado para el caso sin truncar	23
Figura 12. Variogramas modelados para caso sin truncar y truncado en 1%.....	26
Figura 13. Distribución de cola pesada, donde la “cola” está respresentada por el color amarillo.....	26
Figura 14. Cinturón Cu-Mo de inicios del Paleoceno al Eoceno y chimeneas de brechas de turmalina en el norte de Chile y sur de Perú. Fuente: “The Geology Of Chile”, p.184 [8]	27
Figura 15. Histograma de leyes de cobre	29
Figura 16. Mapa de Cobre en dirección Norte-Este	29
Figura 17. Mapa de Cobre en dirección Elevación-Este	30
Figura 18. Mapa de Cobre en dirección Elevación-Norte	30
Figura 19. Mapa de Cobre en 3D	31
Figura 20. Histograma de leyes de molibdeno	32
Figura 21. Mapa de Molibdeno en dirección Norte-Este	32
Figura 22. Mapa de Molibdeno en dirección Elevación-Este	33
Figura 23. Mapa de Molibdeno en dirección Elevación-Norte	33
Figura 24. Mapa de Molibdeno 3D	34
Figura 25. Radio de búsqueda para estimaciones en caso real (validación cruzada)	37
Figura 26. Correlograma residuos cobre truncado en 2%	38
Figura 27. Correlograma cruzado residuo-cobre truncado en 2%	39
Figura 28. Correlograma cruzado residuo-indicador, para el cobre truncado en 2%	39
Figura 29. Correlograma residuos para molibdeno truncado en 600 ppm	41
Figura 30. Correlograma cruzado residuo-molibdeno truncado en 600ppm.....	41
Figura 31. Correlograma cruzado residuo-indicador, para el molibdeno truncado en 600 ppm... ..	42
Figura 32. Box plot para el cobre en caso sintético.....	48
Figura 33. Boxplot Cu	54
Figura 34. Ley media vs. Ley de corte Cu.....	55
Figura 35. Contenido de metal vs. fracción de tonelaje sobre ley de corte Cu	55
Figura 36. Boxplot Mo	56
Figura 37. Ley media vs. Ley de corte Mo.....	57
Figura 38. Contenido de metal vs. fracción de tonelaje sobre ley de corte Mo	57
Figura 39. Correlogramas Cruzados residuos-cobre truncado, residuos-indicador. Ley 4%	58
Figura 40. Correlogramas Cruzados residuos-cobre truncado, residuos-indicador. Ley 5%	59

Figura 41. Correlogramas Cruzados residuos-cobre truncado, residuos-indicador. Ley 6%	60
Figura 42. Correlogramas Cruzados residuos-cobre truncado, residuos-indicador. Ley 7%	61
Figura 43. Correlogramas Cruzados residuos-cobre truncado, residuos-indicador. Ley 8%	62
Figura 44. Correlogramas Cruzados residuos-cobre truncado, residuos-indicador. Ley 9%	63
Figura 45. Correlogramas cruzados residuos-molibdeno truncado, residuos-indicador. Ley 400 ppm.....	64
Figura 46. Correlogramas Cruzados residuos-molibdeno truncado, residuos-indicador. Ley 500 ppm.....	65
Figura 47. Correlogramas Cruzados residuos-molibdeno truncado, residuos-indicador. Ley 700 ppm.....	66
Figura 48. Correlogramas Cruzados residuos-molibdeno truncado, residuos-indicador. Ley 900 ppm.....	67
Figura 49. Correlogramas Cruzados residuos-molibdeno truncado, residuos-indicador. Ley 900 ppm.....	68
Figura 50. Correlogramas Cruzados residuos-molibdeno truncado, residuos-indicador. Ley 1000 ppm.....	69

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Parámetros para creación de la grilla.....	19
Tabla 2. Estadísticas básicas de la muestra	20
Tabla 3. Exceso promedio por ley de truncación (de todas las realizaciones)	22
Tabla 4. Resumen de errores promedio, pendiente e intercepto para ley 1%.....	24
Tabla 5. Resumen de errores promedio, pendiente e intercepto para ley 1.5%.....	24
Tabla 6. Resumen de errores promedio, pendiente e intercepto para ley 2%.....	25
Tabla 7. Estadísticas básicas de la ley de cobre	28
Tabla 8. Estadísticas básicas del molibdeno.....	31
Tabla 9. Matriz de correlación Cu-Mo	34
Tabla 10. Leyes de truncación para el cobre y porcentaje del yacimiento	35
Tabla 11. Leyes de truncación para el molibdeno y porcentaje del yacimiento.....	35
Tabla 12. Exceso promedio por ley de truncación para el cobre.....	36
Tabla 13. Exceso promedio por ley de truncación para el molibdeno	36
Tabla 14. Resumen errores promedio para el cobre truncado en 2%	40
Tabla 15. Resumen de errores promedio para el molibdeno truncado en 600ppm	42
Tabla 16. Excesos promedio para caso I	49

ÍNDICE DE ECUACIONES

Ecuación 1: Definición Distribución Espacial	4
Ecuación 2: Esperanza Matemática	5
Ecuación 3: Varianza.....	5
Ecuación 4: Covarianza	5
Ecuación 5: Correlograma	6
Ecuación 6: Variograma	6
Ecuación 7: Variograma teórico y experimental	6
Ecuación 8: Variograma modelado	9
Ecuación 9: Estimador de <i>kriging</i> simple.....	9
Ecuación 10: Ponderadores del <i>kriging</i>	10
Ecuación 11: Varianza de <i>kriging</i> simple.....	10
Ecuación 12: Sistema de <i>kriging</i> ordinario.....	10
Ecuación 13: Varianza de <i>kriging</i> ordinario.....	11
Ecuación 14: Descomposición propuesta en metodología mejorada	14
Ecuación 15: Función Indicador.....	14
Ecuación 16: Descomposición del Exceso	14
Ecuación 17: Estimación metodología mejorada	15
Ecuación 18: Función exponencial a aplicar	16
Ecuación 19: Ecuación exponencial para paso a variable lognormal.....	20

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Motivación del trabajo

Todo proyecto minero cuenta con cinco etapas principales: Prospección, Exploración, Desarrollo, Explotación y Recuperación. La Prospección se encarga principalmente de la búsqueda de los depósitos minerales identificando las anomalías geológicas. Tras ello, se da paso a la Exploración, cuyo objetivo es determinar la extensión y la ley del mineral de valor económico y concluye con un estudio de factibilidad. Posteriormente, en la etapa de Desarrollo, se construyen los accesos al mineral y se adquieren los derechos necesarios con previa obtención de una EIA. Una vez que se ha accedido al mineral, comienza la etapa de Explotación que corresponde a la extracción de éste. Finalmente, en la Recuperación se busca devolver el medio a una situación lo más cercana a la inicial.



FIGURA 1. ETAPAS DE UN PROYECTO MINERO

Dentro de la exploración minera, a su vez, es posible diferenciar distintas etapas [2] [11].

- **Toma de muestras:** Proceso de obtención del material para la recopilación de datos, que se realiza principalmente mediante muestreos dirigidos de afloramientos, muestras de canales y caminos, realizando mallas de sondajes grandes (por ejemplo, 200m x 200m) o finas en zonas de interés (70m x 70m).
- **Modelamiento geológico:** Permite la representación de un volumen de rocas, que puede comprender la litología, mineralización, alteración u otro tipo de característica geológica del macizo rocoso.
- **Análisis Exploratorio:** Donde se despliegan los datos disponibles en diferentes formas, resumiendo parte de la información contenida en los datos, diferenciando poblaciones estadísticas y/o poblaciones geológicas, definiendo la zona de estudio, verificando la calidad y la representatividad de los datos, entre otros.
- **Variografía:** Análisis de continuidad espacial, ya que la estimación geoestadística se basa en sacar provecho de la continuidad espacial de la variable a estimar. El variograma, la covarianza y el correlograma miden dicha continuidad espacial, encontrando la relación que existe entre pares de datos separados por una cierta distancia.
- **Estimación Local:** Dado que el muestreo es parcial y sólo indica lo que sucede en las posiciones de los datos, es necesario estimar el valor de la ley en puntos sin muestra.

Además, se busca saber el valor de la ley de un bloque de dimensiones diferentes a las de la muestra, lo que lleva a realizar un cambio de soporte.

- **Validación:** Verifica la adecuación entre los datos y los parámetros adoptados, utilizando la técnica de la validación cruzada, cuyo principio es estimar sucesivamente cada dato, considerando sólo los datos restantes.
- **Categorización:** Busca definir el grado de confianza en la estimación de la cantidad y calidad del recurso y satisfacer restricciones impuestas por los mercados financieros y los inversionistas.



FIGURA 2. ETAPAS EN LA EVALUACIÓN DE RECURSOS

En las etapas de variografía y estimación local, existe la factibilidad de que la base de datos contenga valores aberrantes, los que producen dificultades significativas al momento de evaluar los recursos minerales de un yacimiento determinado. Al ser consideradas erróneas, algunas de estas cifras son finalmente omitidas -este es el caso de una base de datos con presencia de valores extremadamente altos-. Sin embargo, pueden existir datos que efectivamente sean reales, por lo que eliminarlos no resulta una opción válida ya que se estarían subestimando los recursos de forma importante, disminuyendo el valor del yacimiento y su atractivo económico.

Resulta vital para un proyecto minero, realizar una adecuada cuantificación de los recursos de leyes minerales al evaluar el yacimiento. Las malas prácticas a la hora de realizar el modelo llevan a pérdidas significativas [4][7], por lo que es importante buscar mejoras continuas para que la estimación resulte cada vez más precisa y exacta.

Para compensar la subestimación de recursos, en aquellos casos donde los datos no se consideran errados, se suele aplicar la técnica de *capping* o truncación que consiste en recortar o truncar los valores considerados demasiado altos. Esta técnica, sin embargo, también implica una

subestimación de los recursos del yacimiento y la omisión de parte de los datos podría generar un sesgo.

Con la intención de disminuir aún más esta subestimación y el posible sesgo, Rivoirard et al (2013) [5] propone una metodología de truncación que consiste en descomponer la variable a estimar y agregar un exceso, para así obtener un valor más preciso y exacto al valor real del yacimiento.

Durante este estudio se aplican ambas metodologías de truncación a un caso sintético y a un caso real, con la finalidad de estudiar los efectos que tiene su utilización en el posterior análisis de datos.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

Probar y validar la implementación de una metodología de *capping* o truncación al momento de estimar leyes.

1.2.2. Objetivos Específicos

- Validar la metodología en cuanto a la obtención de estimaciones insesgadas de leyes.
- Comparar la metodología a estudiar con la tradicional, con el fin de determinar si presenta una mejora significativa.
- Determinar una ley de truncación adecuada.

1.3. Alcances

Se aplican dos metodologías de truncación y la tradicional y sus correspondientes validaciones a un caso sintético con la finalidad de estudiar y analizar los efectos en estimaciones de un yacimiento sintético conocido en su totalidad. Posteriormente se realiza el mismo procedimiento para un yacimiento real, con el objetivo de validar la aplicación de esta metodología a una base de datos cuyos valores no son conocidos en su totalidad.

2. ANTECEDENTES

2.1. Antecedentes Generales

El siguiente capítulo busca contextualizar el trabajo realizado, enfocado principalmente en definiciones básicas de Geoestadística, la presencia de datos atípicos y su manejo al estimar recursos minerales y finalmente la truncación mejorada propuesta a evaluar con el fin de generar un marco conceptual acorde con el propósito de esta investigación.

2.2. Definiciones básicas de Geoestadística [2][3][11]

2.2.1. Variable Regionalizada

Una variable regionalizada es aquella que representa el valor en el espacio (geográfico o temporal) de un atributo asociado a un fenómeno natural (fenómeno regionalizado). Es posible caracterizar una variable regionalizada por:

- Naturaleza: Continua (ej. leyes minerales), discreta, categórica (ej. tipo de roca).
- Campo o dominio de extensión: Dimensiones espaciales abarcadas por la variable.
- Soporte: Volumen sobre el cual es medido la variable. Puede ser puntual o soportes mayores (bloques).

En ciertas ocasiones resulta complejo determinar, completamente y de forma exacta, una variable regionalizada debido a su variabilidad en el espacio.

2.2.2. Función Aleatoria

Se considera al valor $z(x)$ de la variable regionalizada en un lugar x del campo D , como una realización de una variable aleatoria $Z(x)$. Luego, el conjunto de variables aleatorias $Z = \{Z(x): x \in D\}$ constituye una **función aleatoria**.

El grupo de variables aleatorias $\{Z(x_1), \dots, Z(x_k)\}$ se caracteriza por su distribución espacial, que reúne todas las distribuciones finito-dimensionales de la forma:

$$F(z_1, \dots, z_k; x_1, \dots, x_k) = \text{Prob}(Z(x_1) < z_1, \dots, Z(x_k) < z_k) \forall z_1, \dots, z_k \in \mathbb{R} \forall x_1, \dots, x_k \in D$$

ECUACIÓN 1: DEFINICIÓN DISTRIBUCIÓN ESPACIAL

Existen ciertas hipótesis simplificadoras que son generalmente utilizadas para determinar la distribución espacial. Éstas son:

- **Estacionaridad:** La distribución espacial es invariante por traslación en el espacio:

$$F(z_1, \dots, z_k; x_1, \dots, x_k) = F(z_1, \dots, z_k; x_1 + h, \dots, x_k + h) \forall h, z_1, \dots, z_k \in \mathbb{R} \forall x_1, \dots, x_k \in D$$

Esto implica en particular que no existen derivas (tendencias sistemáticas). La estacionaridad es consecuente cuando existe una homogeneidad de las propiedades de la variable regionalizada en el espacio. A menudo es razonable suponer que se cumple a escala local (en la vecindad de *kriging*), por lo que se habla de una estacionaridad local o casi-estacionaridad.

- **Ergodicidad:** Se puede aproximar las esperanzas matemáticas (promedio sobre las realizaciones de la función aleatoria) por un promedio en el espacio. Esto implica que se pueden inferir las distribuciones finito-dimensionales o sus momentos a partir de una muestra (lo suficientemente grande) de una única realización de la función aleatoria.

Producto de la escasez de datos experimentales, resulta imposible inferir la distribución espacial completa. Por consiguiente a menudo sólo se consideran los parámetros más relevantes, los cuales son los momentos de primer y segundo orden. Éstos se detallan a continuación:

- **Momento de primer orden (Esperanza matemática):** Corresponde al valor esperado o media $m(x)$ alrededor de la cual se distribuyen los valores de las realizaciones de la función aleatoria. Se denota m en caso de estacionaridad o $m(x)$ cuando varía en el espacio.

$$m(x) = E[Z(x)]$$

ECUACIÓN 2: ESPERANZA MATEMÁTICA

- **Momentos de segundo orden:** Se consideran igualmente los siguientes momentos de segundo orden.
 - **Varianza:** Constituye una medida de la dispersión de $Z(x)$ en torno a su valor esperado $m(x)$. Su raíz cuadrada corresponde a la desviación estándar.

$$var[Z(x)] = \sigma^2(x) = E\{[Z(x) - m(x)]^2\} = E[Z(x)^2] - m(x)^2$$

ECUACIÓN 3: VARIANZA

- **Covarianza:** Entrega una visión de la interacción entre dos variables aleatorias $Z(x_1)$ y $Z(x_2)$, es decir, mide la relación entre dos variables aleatorias en función de sus posiciones en el espacio.

$$cov[Z(x_1), Z(x_2)] = C(x_1, x_2) = E[Z(x_1)Z(x_2)] - m(x_1)m(x_2)$$

ECUACIÓN 4: COVARIANZA

- **Correlograma:** Se define como el coeficiente de correlación lineal entre dos variables aleatorias $Z(x_1)$ y $Z(x_2)$, y se usa para el control de aleatoriedad en un conjunto de datos.

$$\text{corr}[Z(x_1), Z(x_2)] = \rho(x_1, x_2) = \frac{\text{cov}[Z(x_1), Z(x_2)]}{\sqrt{\text{var}[Z(x_1)]\text{var}[Z(x_2)]}}$$

ECUACIÓN 5: CORRELOGRAMA

Si se utiliza una correlación cruzada (covarianza entre dos vectores aleatorios), el resultado se llama una **correlograma cruzado**.

- **Variograma:** Mide la desviación cuadrática promedio entre dos variables. Indica qué tan distintos son los valores entre dos sitios.

$$\gamma(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \text{var}[Z(x_1) - Z(x_2)]$$

ECUACIÓN 6: VARIOGRAMA

Bajo la hipótesis de estacionaridad, la varianza no depende de x , mientras que la covarianza, el correlograma y el variograma solo dependen de la separación $x_1 - x_2$ entre x_1 y x_2 .

Bajo la hipótesis de estacionaridad, se tiene las siguientes relaciones:

- La varianza es igual a la función de covarianza evaluada para el vector $h = 0$: $\sigma^2 = C(0)$.
- El correlograma es igual a la covarianza dividida por la varianza: $\rho(h) = \frac{C(h)}{C(0)}$.
- El variograma es igual a la varianza menos la covarianza: $\gamma(h) = C(0) - C(h)$.

Cuando la norma del vector de separación h se vuelve infinita, la covarianza tiende a 0 y el variograma es igual a la varianza: $\gamma(\infty) = C(0) = \sigma^2$.

2.2.3. Variografía

La estimación y simulación geoestadística se basa en sacar provecho de la continuidad espacial de la variable regionalizada. El objetivo de la variografía es modelar dicha continuidad de la variable en estudio, debido a que los valores observados en distintos puntos del espacio pueden estar correlacionados. De esta manera es importante estudiar qué tan rápido o lento se pierde esta correlación al aumentar la distancia de separación entre dos puntos. Para desarrollar este estudio se utiliza el variograma que tiene por objetivo medir la variabilidad espacial, lo que considera dicha herramienta es principalmente la diferencia entre pares de datos que se encuentren separados por un cierto vector h . Bajo la hipótesis de estacionaridad, el variograma teórico y su estimador experimental se presentan en la Ecuación 7.

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E\{[Z(x) - Z(x+h)]^2\}$$

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [z(x_i) - z(x_i+h)]^2$$

ECUACIÓN 7: VARIOGRAMA TEÓRICO Y EXPERIMENTAL

Donde $z(x)$ corresponde a la variable regionalizada, $Z(x)$ a la función aleatoria asociada, $N(h)$ al número de pares de datos para una separación dada por un vector h , y $x_i, x_i + h$ a las posiciones de los pares de datos ($i = 1, \dots, N(h)$).

Si se siguen en estricto rigor las definiciones anteriores se puede llegar a variogramas experimentales con pocos pares de datos representativos, así el variograma experimental tendría entonces un aspecto muy errático y resultaría imposible interpretarlo y modelarlo. Para que sea más robusto se suele permitir algunas tolerancias de cálculo sobre las distancias y las direcciones, abarcando así un área definida. Es importante considerar que las tolerancias pueden cambiar las interpretaciones variográficas.

Las diferentes tolerancias atribuibles a los variogramas en 2D y la región de búsqueda de pares de datos se muestran en la Figura 3, donde h corresponde al vector de separación, θ al acimut (contado en el sentido del reloj desde la dirección norte), Δh a la tolerancia en la distancia, $\Delta\theta$ a la tolerancia en el acimut, BW al ancho de banda (*band width*) y $T(h)$ a la región de tolerancia asociada al vector h .

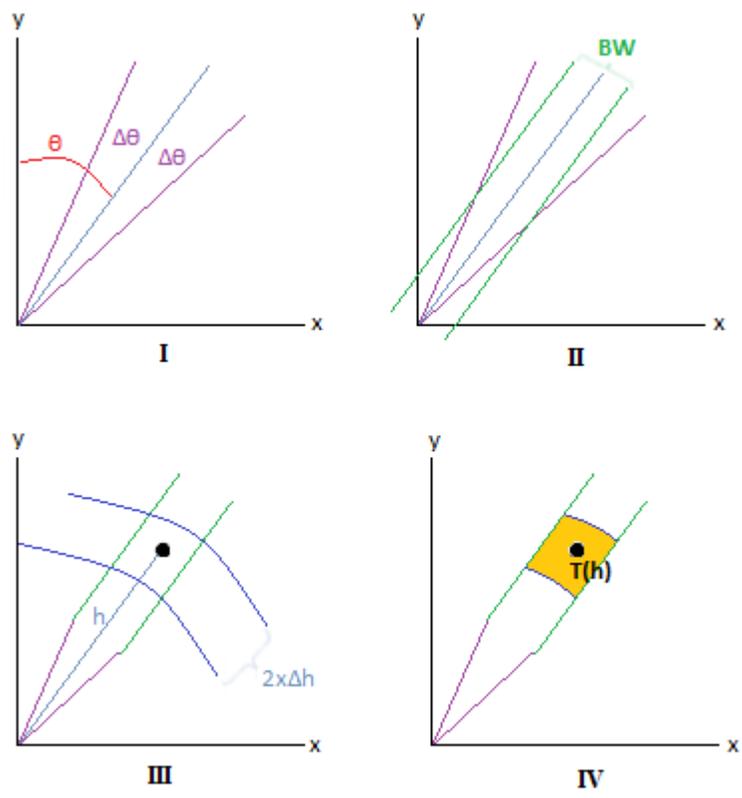


FIGURA 3. TIPOS DE TOLERANCIA: I - CONSTRUCCIÓN SEGÚN TOLERANCIA ANGULAR EN TORNO A LA DIRECCIÓN DE ACIMUT θ ; II - SEGÚN ANCHO DE BANDA; III- SEGÚN TOLERANCIA EN LA DISTANCIA; IV - ÁREA DE TOLERANCIA FINAL.

Al considerar un ancho de banda infinitamente grande y una tolerancia en el acimut de 90° , el variograma experimental depende solamente de la norma del vector h y de la tolerancia en esta norma, no de la dirección de h . Tal variograma experimental se califica de “omnidireccional”.

La definición de tolerancias es más compleja en 3D, donde se agrega una tolerancia en la inclinación (*dip*, contado positivamente desde el plano horizontal hacia arriba) y un alto de banda (*band height*).

Los parámetros a especificar para calcular un variograma experimental son los siguientes:

- Dirección de interés: acimut, inclinación.
- Distancias de interés, en general múltiplos de una distancia elemental (paso).
- Tolerancia en la dirección: tolerancia angular, ancho de banda.
- Tolerancia en las distancias.

El variograma muestra características importantes de la variable regionalizada. El crecimiento indica la velocidad con la cual se “desestructura” la variable en el espacio; así se define como meseta al valor en el cual el variograma se estabiliza, y como alcance a la distancia que se alcanza la meseta.

El cálculo del variograma se realiza a lo largo de distintas direcciones del espacio y evidencia una anisotropía; mientras que el comportamiento cerca del origen, indica qué tan semejantes son dos datos muy cercanos, reflejando la continuidad o regularidad de la variable a pequeña escala.

2.2.3.1. Modelamiento de variogramas

Un variograma experimental requiere ser modelado debido a que se calcula sólo para ciertas direcciones y distancias, dada la variación en la estimación no se garantiza que el variograma sea válido. Algunos métodos estadísticos como el *kriging* se requiere que el variograma a utilizar sea válido, por lo que se ajusta un modelo de variograma, definido en todas las direcciones del espacio y para todas las distancias, en torno al variograma experimental obtenido. Se usará este modelo como si fuera el “verdadero” variograma de la función aleatoria que representa la variable en estudio.

Existe una serie de modelos elementales que, según la forma que presente el variograma experimental, principalmente en el origen, permiten modelarlo. Algunos de ellos son:

- Efecto pepita: Mientras más alto el efecto pepita, mayor es el error a pequeña escala que presenta la variable en estudio.
- Modelo esférico y exponencial: Lineales en el origen.
- Modelo Gaussiano: Parabólico en el origen, implica continuidad de corta escala.

Al momento de generar el modelo variográfico, se debe considerar en general más de un modelo elemental para representar la continuidad espacial, por lo que se generan “modelos anidados” de funciones, tales como las que se mencionaron. Esto permite que existan quiebres de pendiente, que muestran cambios en la continuidad espacial a partir de ciertas distancias. Por lo tanto, el variograma se puede modelar como la suma de varios modelos elementales.

$$\gamma(h) = \gamma_1(h) + \gamma_2(h) + \dots + \gamma_n(h)$$

ECUACIÓN 8: VARIOGRAMA MODELADO

Un ejemplo de un modelo de variograma anidado consistente en un modelo pepítico y dos esféricos se muestra en la Figura 4.

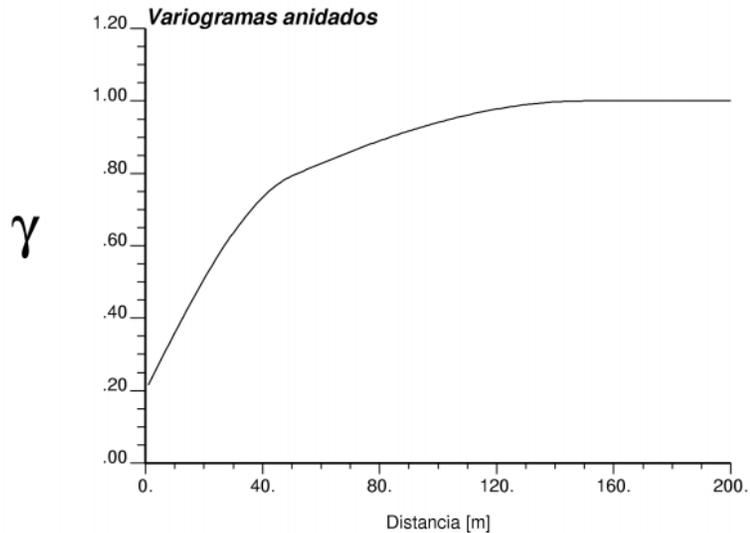


FIGURA 4. MODELO DE VARIOGRAMA ANIDADO, QUE CONSTA DE UN MODELO PEPIÍTICO Y DOS ESFÉRICOS

2.2.4. Kriging

En la actualidad, en la industria minera, la estimación de leyes se realiza con métodos geoestadísticos de *kriging*. Estos métodos consideran la variable a estimar como una realización de una función aleatoria, descrita por su valor esperado y variograma.

Se construye el estimador como una combinación lineal de los datos disponibles y se escogen los pesos bajo un criterio en el cual se considera que dicha estimación es óptima, es decir, sin sesgo y con varianza de error mínima.

Existen diferentes tipos de *kriging*. Los más comunes, *kriging* simple y *kriging* ordinario, se detallan a continuación:

2.2.4.1. Kriging Simple

Sean Z la función aleatoria asociada a la variable regionalizada, m la media conocida, $C(x_\alpha - x_\beta)$ la covarianza entre variables en sitios x_α y x_β , y x_1, \dots, x_n Los sitios con datos con valor de Z conocido. El estimador en un sitio x_o corresponde a:

$$Z^*(x_o) = a + \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha Z(X_\alpha)$$

ECUACIÓN 9: ESTIMADOR DE KRIGING SIMPLE

Además, se tienen la siguiente relación respecto a los ponderadores y el coeficiente aditivo a :

$$\begin{pmatrix} C(x_1 - x_1) & \dots & C(x_1 - x_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ C(x_n - x_1) & \dots & C(x_n - x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(x_1 - x_0) \\ \dots \\ C(x_n - x_0) \end{pmatrix}$$

$$a = \left(1 - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \right) m$$

ECUACIÓN 10: PONDERADORES DEL KRIGING

La varianza del error del *kriging*, que mide la dispersión del error cometido, es:

$$\sigma_{KS}^2(x_0) = C(x_0 - x_0) - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} C(x_{\alpha} - x_0)$$

ECUACIÓN 11: VARIANZA DE KRIGING SIMPLE

2.2.4.2. *Kriging* Ordinario

En esta variante del *kriging* se desconoce la media de la variable, al considerar el valor de la media como desconocido permite generalizar el estimador a situaciones donde esta media no es constante en el espacio: la media puede variar de una región a otra, siempre que sea aproximadamente constante en cada vecindad de *kriging*. Se conoce además el variograma el cual puede o no tener meseta.

Al examinar las condiciones de insesgo y de varianza mínima se obtiene el siguiente sistema de *kriging* ordinario:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j C(x_i - x_j) + \mu = C(x - x_i) \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

ECUACIÓN 12: SISTEMA DE KRIGING ORDINARIO

Donde μ corresponde a un multiplicador de *Lagrange*, x al sitio a estimar y $\{x_i: i = 1, \dots, n\}$ a los sitios con datos vecinos de x . Se puede re-escribir este sistema, reemplazando la función de covarianza C por el opuesto del variograma $(-\gamma)$.

La varianza del error o “varianza de *kriging*” puede calcularse sin conocer los valores de los datos y está dada por:

$$\sigma_{KO}^2(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(x_i - x) - \mu$$

ECUACIÓN 13: VARIANZA DE KRIGING ORDINARIO

En este trabajo se utiliza este tipo de *kriging*, principalmente debido a que la media se asumirá como desconocida.

2.2.4.3. *Cokriging*

Una forma de técnica de *kriging* que involucra múltiples variables.

2.2.4.4. Propiedades del *Kriging*

Sus principales propiedades corresponden a:

- **Interpolación exacta:** La estimación de un sitio con dato es igual al valor del dato, al mismo tiempo que la varianza de *kriging* en esa ubicación es nula.
- **Insesgo:** El error de estimación tiene media nula (por construcción).
- **Precisión:** La varianza de los errores de estimación cometidos es mínima.
- **Aditividad:** La estimación de la ley de un bloque es igual al promedio de las estimaciones de leyes puntuales en ese bloque.
- **Suavizamiento:** La dispersión de los valores estimados es menor a la dispersión de los valores reales, sobre todo en zonas con pocos datos.

En el caso del suavizamiento, el método genera una subestimación de los valores altos y una sobreestimación de los valores bajos, lo que implica una limitación para estimar la variabilidad presente y los valores extremos, generando una complicación en casos donde los valores alejados de la media son importantes, tales como análisis de leyes de corte.

Estas limitaciones hacen que el *kriging* no sea una buena herramienta en la estimación de funciones umbrales, como por ejemplo en la determinación de tonelajes sobre una ley de corte. Para superar estas desventajas se requiere recurrir a técnicas más sofisticadas como las simulaciones, ya que estas reproducen la

variabilidad espacial de los valores reales y no dependen tan fuertemente del número de puntos y de su distribución espacial.

2.2.4.5. Validación del *Kriging*

Para poder validar los parámetros del *kriging* existen variados métodos. Uno de ellos, y que es importante mencionar para efectos de este trabajo, corresponde a la **validación cruzada**, que consiste en estimar sucesivamente cada dato considerando solamente los datos restantes.

Además, existen criterios de validación entre los que se encuentran:

- Medias de los errores y de los errores estandarizados, las que deben ser cercanas a cero para que el estimador sea insesgado.
- Varianza de los errores lo más baja posible, asegurando que el estimador es preciso.
- Varianza de los errores estandarizados cercana a 1, implicando que el variograma cuantifica adecuadamente la incertidumbre.
- Nube de dispersión entre valores reales y estimados cuya regresión debe acercarse a la diagonal.

2.3. Calidad de los Datos [2]

Para poder estudiar la zona de interés se trabaja con un subconjunto de la población original, lo que se denomina muestra. Ahora bien, la muestra debe ser representativa del conjunto de datos con el fin de que, con estos valores, sea posible generalizar el comportamiento de la población y evitar errores sistemáticos. Esta representatividad depende de la realización del muestreo, que debe ser aleatorio y basado en el principio de la equiprobabilidad.

Dentro de la calidad de los datos, es necesario comprender los conceptos de precisión e insesgo que se detallan a continuación. Además, la Figura 5 presenta un diagrama explicativo.

- **Precisión:** Se encarga de medir la dispersión. Se expresa mediante una desviación estándar o una varianza.
- **Insésigo o Exactitud:** Se utiliza para medir la desviación sistemática de la medición con respecto al resultado correcto.

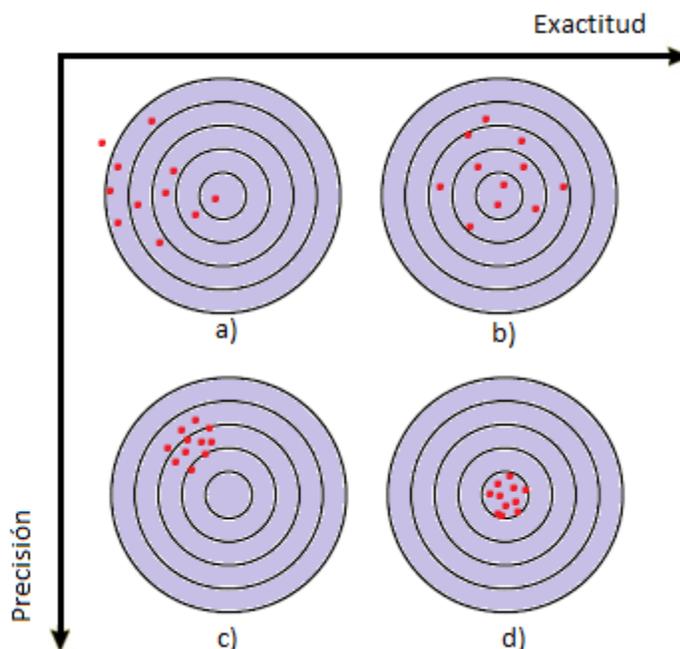


FIGURA 5. DIAGRAMA EXPLICATIVO EXACTITUD Y PRECISIÓN: A) CASO POCO EXACTO Y POCO PRECISO. B) CASO MUY EXACTO, POCO PRECISO; C) CASO POCO EXACTO, MUY PRECISO; D) CASO MUY EXACTO, MUY PRECISO.

2.4. Manejo de datos atípicos [2] [11]

Dentro del análisis exploratorio, se trabaja con bases de datos que cuentan con una cantidad no menor de números. Estos datos generalmente contienen valores, que se encuentran fuera de lo común lo que puede deberse a: errores en la toma de muestras, fallas en los equipos, o bien a valores reales anómalos. La presencia de estos datos con valores extremos, afecta considerablemente las estadísticas básicas y generan problemas al aplicar regresión o construir modelos predictivos.

Para evitar entregar valores erróneos, durante la toma de muestras, se debe cumplir con diversas normativas con el fin de asegurar y controlar la calidad de los datos. Dentro de estas normativas de Aseguramiento de la calidad (*Quality Assurance*, QA) y Control de calidad (*Quality Control* QC) respectivamente, existen protocolos de muestreo que deben seguirse además de controles granulométricos de chancado y molienda, análisis en duplicados, entre otros.

Otra manera de enfrentar los datos anómalos es, al momento de analizar los datos, simplemente remover los valores atípicos. Sin embargo, esto es válido sólo cuando los datos son erróneos, ya que en caso de ser verídicos pueden proveer información crítica para la evaluación del yacimiento.

Si eliminar el valor de la base de datos no es una opción, es posible realizar transformaciones con el fin de reducir su influencia. Para esto generalmente se utilizan métodos con logarítmicos, o de indicadores.

Finalmente queda la opción de disminuir el valor del dato a un máximo razonable, o truncarlo. A esta metodología se le conoce como *Capping* o Truncación.

2.4.1. *Capping* o Truncación [5]

Como se mencionó en el punto anterior, los datos con valores muy altos o extremos presentan dificultades en análisis variográfico y estimaciones en evaluación de las leyes de un yacimiento. Sin embargo, ignorar los valores muy altos puede provocar una subestimación de los recursos. Una alternativa es truncar los valores extremos a un valor de corte. Sin embargo, esto implica la omisión de parte de los datos, lo que podría generar sesgo. Es por esta razón que encontrar el valor de corte óptimo es primordial para minimizar el sesgo.

2.5. Metodología de Truncación mejorada

En Rivoirard et al (2013) [5] se propone realizar una descomposición de la variable a estimar (ley) de la forma:

$$Z(x) = \min\{Z(x), z_e\} + \{Z(x) - z_e\}1_{Z(x)>z_e}$$

ECUACIÓN 14: DESCOMPOSICIÓN PROPUESTA EN METODOLOGÍA MEJORADA

Donde (x) corresponde a la variable a estimar en el sitio, z_e al valor de truncación, la expresión $\min\{Z(x), z_e\}$ a la ley truncada, y la expresión $\{Z(x) - z_e\}1_{Z(x)>z_e}$ corresponde a un exceso, donde $1_{Z(x)>z_e}$ es una función indicador dada por:

$$1_{Z(x)>z_e} = \begin{cases} 1 & \text{si } Z(x) > z_e \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

ECUACIÓN 15: FUNCIÓN INDICADOR

Esto implicaría que el exceso es igual a 0 cuando el valor de la ley a estimar es menor a la ley de truncación.

El exceso, a su vez, puede ser descompuesto en un término medio y un valor residual.

$$Z(x) = \min\{Z(x), z_e\} + \{m^+(z_e) - z_e\}1_{Z(x)>z_e} + R_{z_e}(x)$$

ECUACIÓN 16: DESCOMPOSICIÓN DEL EXCESO

Donde $\{m^+(z_e) - z_e\}$ corresponde al exceso promedio, y $R_{z_e}(x)$ a un valor residual (Residuo).

Esta descomposición puede observarse en la Figura 6, que corresponde a un gráfico de las leyes a estimar en función de x , donde la línea horizontal representa el valor de corte z_e , los cortes de ésta con la curva representan la ley truncada y el área bajo la curva pero sobre la ley de corte representa el exceso.

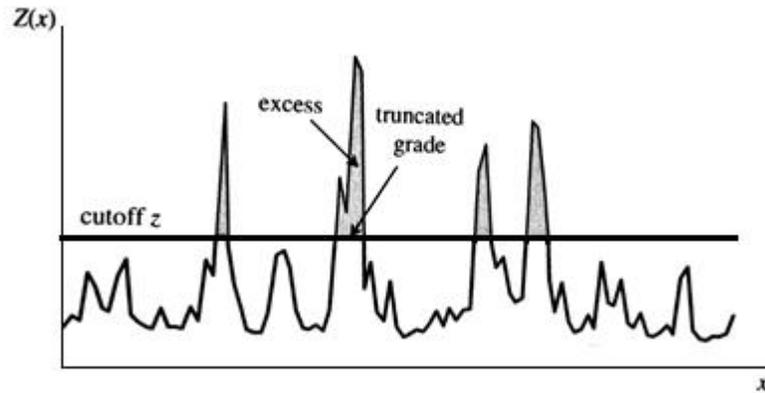


FIGURA 6. LEYES TRUNCADAS SE DEFINEN DANDO EL VALOR Z A LAS LEYES MAYORES A Z, CONSIDERADAS LEYES "NORMALES". EL EXCESO ES TRATADO DE FORMA SEPARADA. FUENTE: CHILÈS AND DELFINER (2012)

La metodología propuesta para realizar esta estimación, corresponde a realizar una estimación inicial de la ley truncada y del indicador, y posteriormente la estimación de la ley no truncada, de la forma:

$$Z(x)^* = \min\{Z(x), z_e\}^* + \{m^+(z_e) - z_e\}1_{Z(x) > z_e}^*$$

ECUACIÓN 17: ESTIMACIÓN METODOLOGÍA MEJORADA

El asterisco (*), de la ecuación 17, indica una estimación por *cokriging* de la ley truncada y del indicador.

Para la elección del valor de corte, se asume que los valores sobre z_e deberían ser independientes de valores menores a éstos y de la geometría de aquellas con valores sobre el de corte. Esto es para que no exista efecto de borde, lo que puede ser verificado con variogramas de indicador. Sin embargo, si se tienen candidatos a leyes de truncación, Maleki et al. (2014) [1] proponen:

1. Calcular ley truncada, indicador y residuo.
2. Calcular correlograma del residuo, el que debería asemejarse a un efecto pepita.
3. Calcular correlograma cruzado entre residuo y valor truncado y entre residuo e indicador.
Si estos valores son cercanos a 0 implica que no existe correlación espacial.

Si los pasos anteriores se cumplen para más de un candidato a ley de truncación, se selecciona el de menor valor.

3. METODOLOGÍA

La complejidad en el tratamiento o bien en la interpretación de datos atípicos durante la evaluación de recursos, ha implicado que se busquen diferentes métodos con el fin de facilitar el análisis variográfico y también la estimación de los datos de los que no se tiene información.

Truncar los valores muy altos es ampliamente utilizado en la industria, ya que simplifica los puntos mencionados anteriormente. Sin embargo, al reemplazar valores altos por otros de menor valor, ocurre una subestimación de recursos que implica una desvalorización del yacimiento.

Para compensar esto, se plantea la metodología que considera tanto la ley truncada como un “exceso”, con el fin de facilitar la evaluación geoestadística del yacimiento y a la vez evitar esta subestimación de los recursos.

Se busca entonces, validar esta metodología propuesta mediante dos casos de estudio: una base de datos sintética y una base de datos real, perteneciente al yacimiento “Las Pascualas”, ubicado al norte de Chile.

3.1. Metodología Caso Sintético

Con la finalidad de contar con una base de datos para realizar este estudio, se simula una variable Gaussiana $y(x)$ utilizando un variograma previamente definido. Posteriormente, a la base de datos obtenida se le aplica una función exponencial para que pase a ser una variable lognormal. La función exponencial aplicada es de la forma:

$$Z(x) = \exp(a * Y(x) + b)$$

ECUACIÓN 18: FUNCIÓN EXPONENCIAL A APLICAR

Donde $Y(x)$ corresponde a la variable Gaussiana, $Z(x)$ a la variable lognormal a obtener, a y b a números previamente definidos.

Luego de esto, se realiza un muestreo de los datos simulados. Con la muestra definida, se seleccionan los valores candidatos a leyes de truncación para realizar las estimaciones con cada una de ellas y posteriormente elegir cuál de ellas es la óptima para cada caso.

En el momento de realizar la estimación tradicional, se realiza un *kriging* de la base de datos tanto de las leyes sin truncar y truncadas, y posteriormente se realiza la estimación mejorada considerando el *cokriging* de las leyes truncadas y el indicador. Finalmente se realiza una validación al comparar los valores estimados con los reales.

La Figura 7 muestra un esquema con la metodología antes explicada de forma resumida, que permite visualizar el proceso descrito.

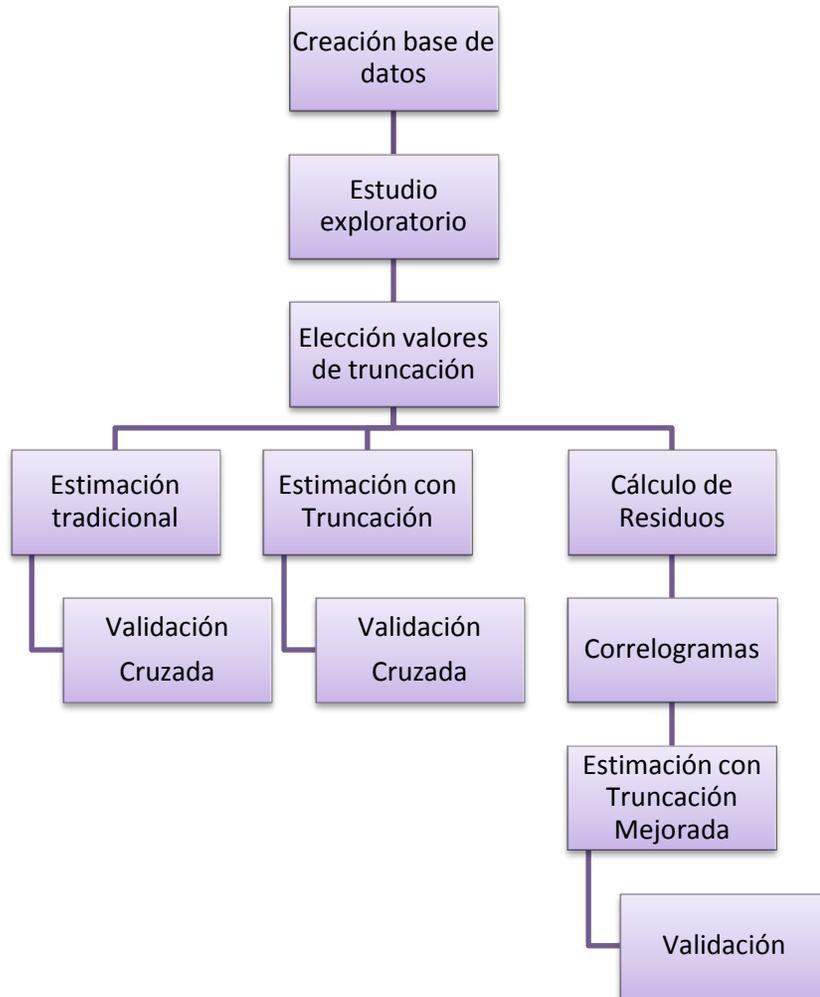


FIGURA 7. ESQUEMA METODOLOGÍA CASO SINTÉTICO

3.2. Metodología Caso Real

Para el caso del yacimiento real, debido a que ya se cuenta con una base de datos, se comienza con un análisis exploratorio de los valores entregados. Posteriormente se deben decidir las leyes de truncación a ser evaluadas.

Al igual que en el caso anterior, se calculan los residuos y se realizan las estimaciones tanto tradicional como mejorada, con sus respectivas validaciones.

Para una mejor comprensión de esta metodología, el proceso se ilustra en la Figura 8.

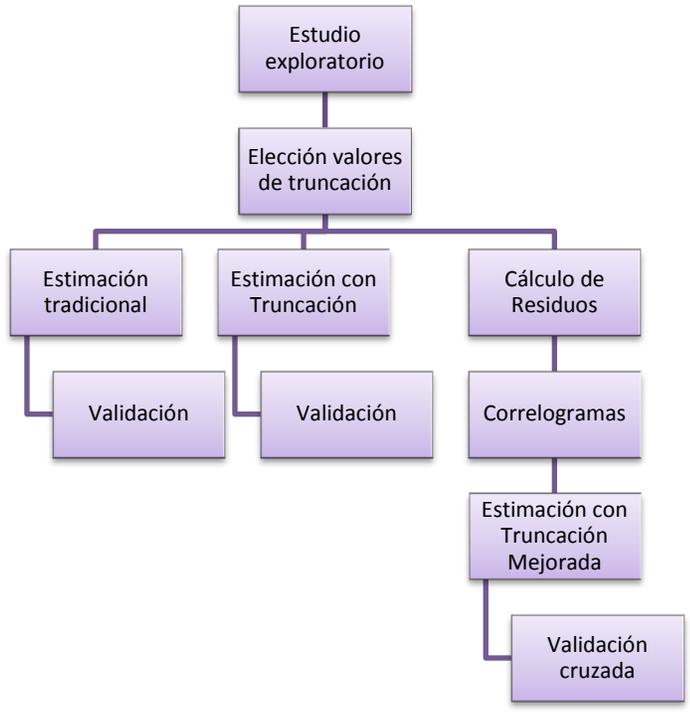


FIGURA 8. ESQUEMA METODOLOGÍA CASO REAL

4. DESARROLLO DE METODOLOGÍA: CASO DE ESTUDIO I, BASE DE DATOS SINTÉTICA

4.1. Creación Base de Datos

Para la creación de la base de datos sintética se requiere seguir una serie de pasos que se ilustran en la Figura 9.

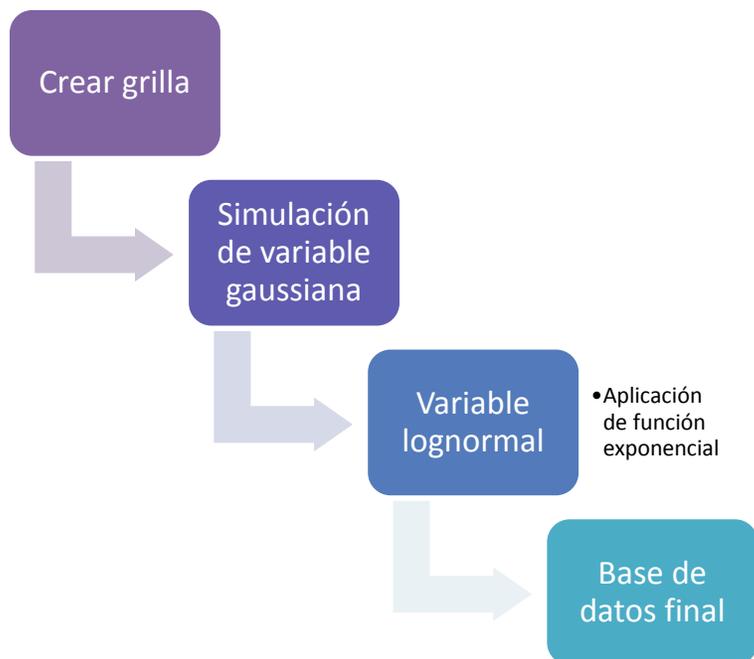


FIGURA 9. ESQUEMA CREACIÓN DE BASE DE DATOS SINTÉTICA

4.1.1. Creación de grilla

Para la creación de la grilla, se utilizan los parámetros detallados en la Tabla 1.

TABLA 1. PARÁMETROS PARA CREACIÓN DE LA GRILLA

Parámetros Grilla	
Grilla	2D
Nodos	1000x1000
Malla	1x1

4.1.2. Simulación de variable Gaussiana

Para realizar este procedimiento, se requiere utilizar un variograma definido anteriormente. El utilizado en este caso corresponde a un variograma esférico isótropo de alcance 250.

Además, se fija un total de 30 realizaciones distintas. Las simulaciones se construyen por el método de las bandas rotantes [13].

4.1.3. Paso a variable lognormal

Para pasar los valores obtenidos en la simulación anterior a una variable lognormal, se utiliza la ecuación de la forma:

$$Z(x) = e^{a*Y(x)+b}$$

ECUACIÓN 19: ECUACIÓN EXPONENCIAL PARA PASO A VARIABLE LOGNORMAL

Donde $Y(x)$ corresponde a la variable Gaussiana obtenida en el punto anterior, $Z(x)$ a la variable lognormal a obtener (emulando una ley de cobre), a y b a números dados. Para este caso de estudio, ambos tomarán el valor de 0.5.

4.2. Muestreo

Luego de creada la base de datos, se cuenta con 1000000 de datos para cada realización. Se busca tener una base de datos para trabajar bastante menor, con el fin de poder estimar los valores que no se consideren y posteriormente comparar ambas bases de datos.

Para ello, se decide tomar al azar un total de 150 datos por realización.

4.3. Estudio Exploratorio

De forma general, considerando todas las realizaciones, las estadísticas básicas se presentan en la Tabla 2.

TABLA 2. ESTADÍSTICAS BÁSICAS DE LA MUESTRA

Estadísticas Muestra	
Ley Media [%]	0.680
Ley máxima [%]	2.794
Ley mínima [%]	0.122
Desviación estándar	0.132

Para tener una mejor comprensión del comportamiento de la base de datos, la Figura 10 muestra un histograma que ilustra la distribución de la séptima realización.

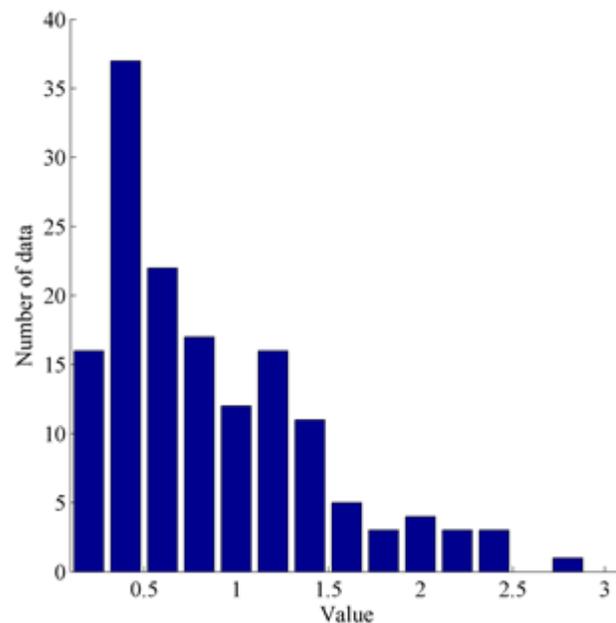


FIGURA 10. HISTOGRAMA DISTRIBUCIÓN DE LEYES EN SÉPTIMA REALIZACIÓN DEL CASO SINTÉTICO

4.4. Elección valores de truncación

Al considerar tanto los valores más altos como la distribución de las leyes en el yacimiento, se consideran los siguientes candidatos para leyes de truncación:

- Ley 1%
- Ley 1.5%
- Ley 2%

Para cada una de estas leyes, se calculan los valores del indicador en cada punto.

4.5. Cálculo de Residuos

Para hacer el cálculo de residuos, primero es necesario obtener el exceso para cada valor que sobrepase la ley de truncación. Luego se calcula un promedio de todos los excesos por cada ley y finalmente el residuo dado por la diferencia entre cada exceso con el exceso promedio.

En la Tabla 3 se muestran los excesos promedios calculados para cada ley de truncación. El detalle por realización se encuentra en el Anexo A.

TABLA 3. EXCESO PROMEDIO POR LEY DE TRUNCACIÓN (DE TODAS LAS REALIZACIONES)

Ley de Truncación [%]	Exceso promedio
2	0.077
1.5	0.169
1	0.232

4.6. Correlogramas cruzados

Con la finalidad de evaluar la factibilidad de cada ley de truncación es necesario realizar correlogramas cruzados, entre el residuo y la ley truncada y entre los residuos y el indicador y corroborar que tiendan a 0.

4.7. Estimación Tradicional

Para la estimación tradicional, se utilizan los valores obtenidos sin ser modificados y se realiza la variografía y posteriormente el *kriging* ordinario.

Para realizar la variografía, se realizan los variogramas tradicionales experimentales de cada realización. Posteriormente, se calcula un promedio de los resultados de los variogramas experimentales. El variograma modelado resultante se ilustra en la Figura 11.

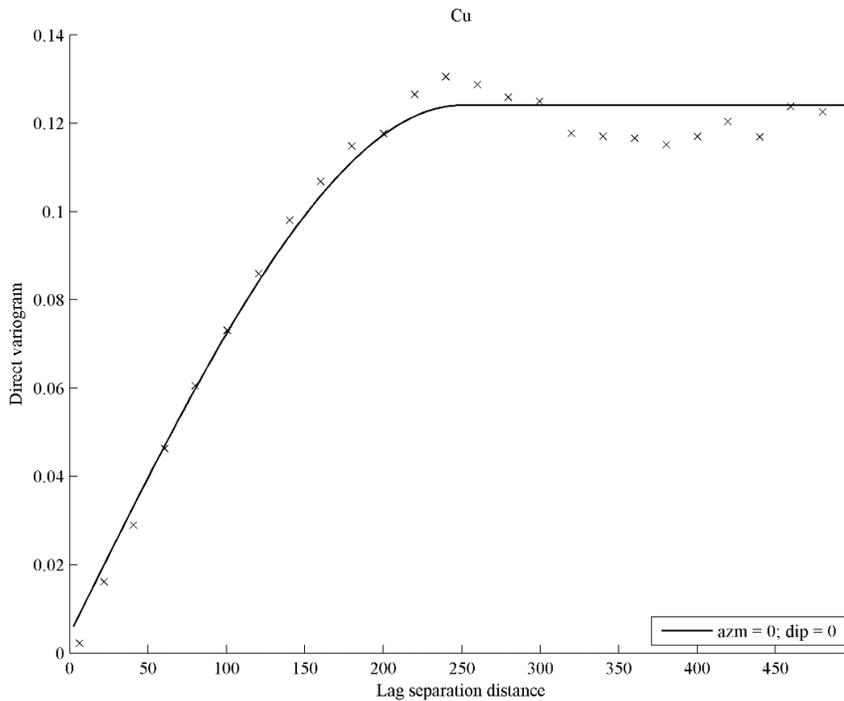


FIGURA 11. VARIOGRAMA MODELADO PARA EL CASO SIN TRUNCAR

4.8. Estimación con Truncación

El primer paso, antes de realizar la estimación de forma habitual, es truncar todos aquellos valores que se encuentran sobre las leyes de truncación definidas. Al haber definido tres leyes de truncación distintas, se generan tres bases de datos a las cuales se les realiza la estimación.

Luego de modificadas las bases de datos, se procede a realizar la variografía. Al igual que en el caso sin truncar, se calcula un promedio de los resultados de los variogramas experimentales con el fin de obtener un solo variograma modelado por ley de truncación. Finalmente se realiza el *kriging* ordinario correspondiente.

4.9. Estimación con Truncación mejorada

Para el caso de la estimación con truncación mejorada, y de la misma forma que en la estimación del caso anterior, se debe comenzar por truncar los valores sobre las leyes de truncación. Ya listas las bases de datos, se calculan los indicadores y los residuos con el fin de, luego de calculados los variogramas experimentales y el modelado promedio de cada ley de truncación, realizar el *cokriging* ordinario.

4.10. Resultados y Análisis

Para poder evaluar la estimación de una forma más práctica, se utilizan los resultados de la validación considerando los distintos errores promedio para cada ley de truncación. Estos resultados se presentan en las Tablas 4, 5 y 6.

TABLA 4. RESUMEN DE ERRORES PROMEDIO, PENDIENTE E INTERCEPTO PARA LEY 1%

Ley de Truncación: 1%			
	Sin Truncación	Con Truncación	Con Truncación Mejorada
Error Promedio	-0.0061	0.0210	0.0177
Error Absoluto Promedio	0.0143	0.0242	0.0227
Error Cuadrático Promedio	0.0003	0.0009	0.0008
Pendiente	0.9556	1.3139	1.0483
Intercepto	0.0212	0.1635	0.0461

Para el caso con ley de truncación 1%, el *kriging* original sin truncar, presenta un mejor comportamiento, ya que tanto el error promedio como los errores absoluto y cuadrático promedio son menores lo que muestra un menor sesgo y una mayor precisión a la hora de estimar. Este método, muestra un menor sesgo condicional representado por la pendiente con valor más cercana a 1, y un menor valor del intercepto.

A pesar de no mostrar una mejora ambos métodos que utilizan truncación, presentan resultados aceptables, ya que las diferencias con el método tradicional son mínimas. El método con truncación, que es utilizado actualmente, resulta ser el más sesgado para esta baja ley de truncación, y el menos preciso de entre las tres metodologías evaluadas.

TABLA 5. RESUMEN DE ERRORES PROMEDIO, PENDIENTE E INTERCEPTO PARA LEY 1.5%

Ley de Truncación: 1.5%			
	Sin Truncación	Con Truncación	Con Truncación Mejorada
Error Promedio	-0.0061	0.0004	-0.0107
Error Absoluto Promedio	0.0143	0.0147	0.0168
Error Cuadrático Promedio	0.0003	0.0003	0.0004
Pendiente	0.9556	1.0451	0.9682
Intercepto	0.0212	0.0270	0.0448

En el caso de la ley de truncación 1.5%, se ve un menor sesgo para la metodología truncada original, mientras que la precisión es levemente mejor en el caso sin truncar. En cuanto al sesgo condicional, tanto la pendiente como el valor del intercepto dan a entender un mejor ajuste en el método sin truncar. En el caso de los métodos que incorporan truncación, el resultado obtenido muestra un mejor ajuste en la truncación tradicional, mientras que la metodología mejorada no presenta mejoras. Sin embargo, al igual que en el caso anterior, para esta ley de truncación los tres métodos evaluados demuestran ser insesgados y precisos.

TABLA 6. RESUMEN DE ERRORES PROMEDIO, PENDIENTE E INTERCEPTO PARA LEY 2%

Ley de Truncación: 2%			
	Sin Truncación	Con Truncación	Con Truncación Mejorada
Error Promedio	-0.00608	-0.00471	-0.00717
Error Absoluto Promedio	0.01431	0.01452	0.01486
Error Cuadrático Promedio	0.00034	0.00034	0.00036
Pendiente	0.98990	0.99220	0.98820
Intercepto	0.02120	0.01230	0.01240

Para la ley de truncación de 2%, se puede observar una menor diferencia entre los tres métodos, lo que se debe principalmente al alto valor de la ley de truncación que se traduce en un menor número de datos truncados. Se observa un menor sesgo en la metodología truncada, una mayor precisión en la metodología sin truncar, y un sesgo condicional menor en el caso de los métodos que incluyen truncación.

Considerando los resultados finales obtenidos para cada ley de truncación, en general la metodología tradicional demuestra ajustarse levemente mejor. Cabe destacar que cada yacimiento es distinto y la distribución que presente la base de datos es determinante a la hora de elegir una metodología de estimación. La base de datos que se utiliza en este caso de estudio presenta una distribución lognormal pero, sin embargo, los valores “extremos” son bastante cercanos a la media, por lo que no necesariamente se justifica la utilización de algún tipo de metodología con truncación. Como se observa en la Tabla 2, la distribución estándar de la base de datos alcanza los 0.132, lo cual es bastante bajo y corrobora lo antes mencionado.

Durante el desarrollo de las distintas metodologías, fue posible apreciar una leve facilidad en el método con truncación al momento de modelar los variogramas, lo que se manifiesta en un variograma modelado más ajustado al variograma experimental. Esto es visible principalmente a menores distancias. A modo de ejemplo, la Figura 12 muestra el variograma modelado para el caso sin truncar y para el caso truncado en 1%.

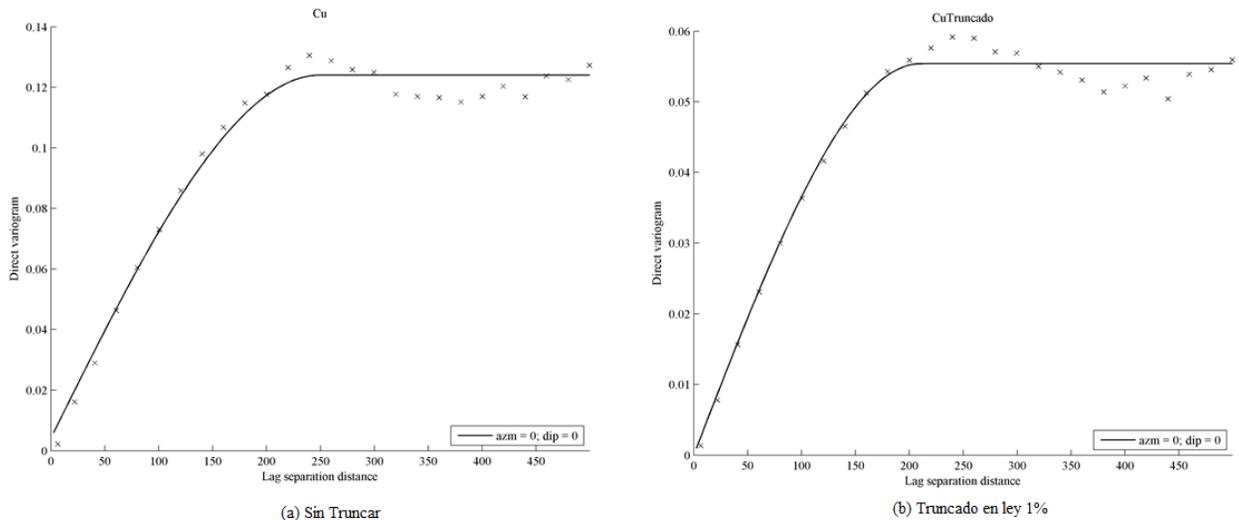


FIGURA 12. VARIOGRAMAS MODELADOS PARA CASO SIN TRUNCAR Y TRUNCADO EN 1%

Durante el desarrollo de la metodología con truncación mejorada, la facilidad antes mencionada no se aprecia. Esto se debe principalmente a que el variograma a modelar corresponde a un variograma cruzado que contempla la variable indicador, añadiéndole complejidad al proceso. Por otro lado, debido a la distribución que presenta esta base de datos en el sentido de no poseer valores extremos alejados de la mayoría, los variogramas experimentales calculados no difieren de forma significativa entre un método y otro, y al utilizar una ley de truncación muy baja, la cantidad de valores a truncar es notablemente alta.

Para este caso de estudio, por lo tanto, se puede señalar a modo general que los mejores resultados se dieron al utilizar el método tradicional, lo cual corrobora su ya demostrado in sesgo y precisión. La base de datos creada presenta una distribución lognormal pero no contiene valores extremos alejados del resto. Esto implica que un mayor número de datos sean truncados. La metodología de *capping*, presenta también resultados precisos y bastante exactos, por lo que su aplicación no perjudicaría de forma importante los resultados de una estimación. No obstante es recomendable su utilización principalmente para bases de datos que presenten, una distribución de “cola pesada” que se caracteriza por una alta frecuencia de leyes bajas, seguida por una baja frecuencia en leyes mayores y más alejadas como se muestra en la Figura 13.

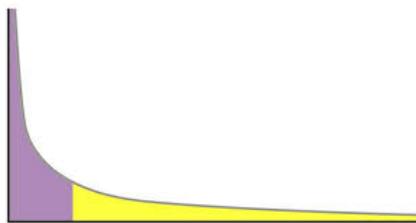


FIGURA 13. DISTRIBUCIÓN DE COLA PESADA, DONDE LA “COLA” ESTÁ REPRESENTADA POR EL COLOR AMARILLO

5. DESARROLLO DE METODOLOGÍA: CASO DE ESTUDIO II, BASE DE DATOS YACIMIENTO LAS PASCUALAS

5.1. Yacimiento [8]

El yacimiento “Las Pascualas” corresponde a un depósito de pórfidos de cobre también conocido como Puquios-Pascuala. Se ubica en el extremo sur del cinturón Cu-Mo de inicios del Paleoceno al Eoceno, en el norte de Chile. Un poco más al norte, este cinturón alberga importantes depósitos de pórfidos de cobre como es el caso de Spence y Cerro Colorado. Esto puede observarse en la Figura 14.

Los depósitos de pórfidos en este cinturón metalogénico son comúnmente albergados, tanto dentro del cuerpo del pórfido intrusivo como también dentro de paquete volcánico Cretácico suprayacente, y se asocian a chimeneas de brechas de turmalina mineralizada.

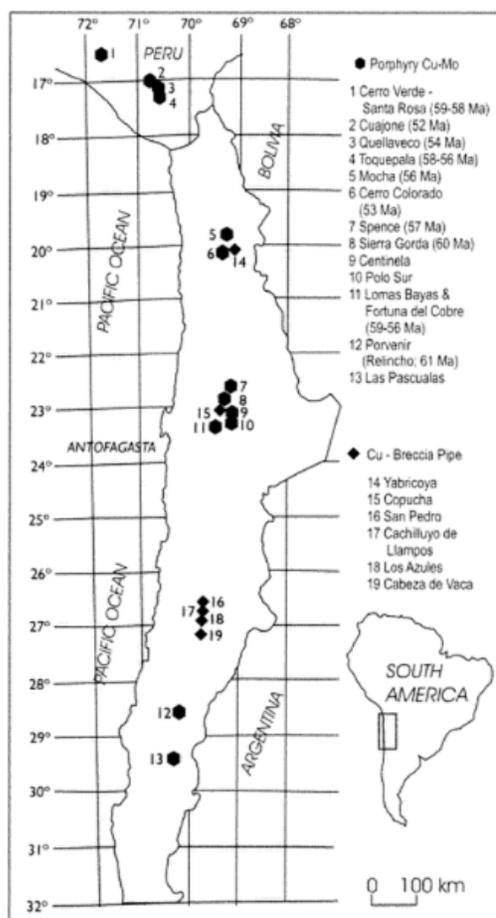


FIGURA 14. CINTURÓN CU-MO DE INICIOS DEL PALEOCENO AL EOCENO Y CHIMENEAS DE BRECHAS DE TURMALINA EN EL NORTE DE CHILE Y SUR DE PERÚ. FUENTE: “THE GEOLOGY OF CHILE”, P.184 [8]

5.2. Estudio Exploratorio de Datos

La base de datos a utilizar contiene datos tanto de ley de cobre como de ley de molibdeno. Es importante mencionar que los datos a utilizar han sido modificados con el fin de resguardar la confidencialidad de la información.

Para cada elemento se realiza un estudio exploratorio que se detalla en los puntos siguientes.

5.2.1. Cobre

Para el caso del cobre, primero se realiza una estadística descriptiva que se ilustra en la Tabla 7. Es importante para este caso observar, de forma más fácil, la distribución de leyes para poder decidir los candidatos a leyes de truncación. Para esto, se realiza un histograma de leyes de cobre presentado en la Figura 15.

Para una mejor comprensión de la ubicación de los sondajes en el espacio, y su distribución en el yacimiento, las Figuras 16, 17, 18 y 19 ilustran los mapas correspondientes para el cobre en direcciones Norte-Este, Elevación-Este, Elevación-Norte y 3D.

TABLA 7. ESTADÍSTICAS BÁSICAS DE LA LEY DE COBRE

<i>Cu</i>	
Promedio	0.399
Mediana	0.164
Moda	0.041
Desviación Estándar	0.657
Varianza	0.431
Kurtosis	29.400
Asimetría	4.225
Rango	11.263
Mínimo	0.002
Máximo	11.265
Cuenta	12716

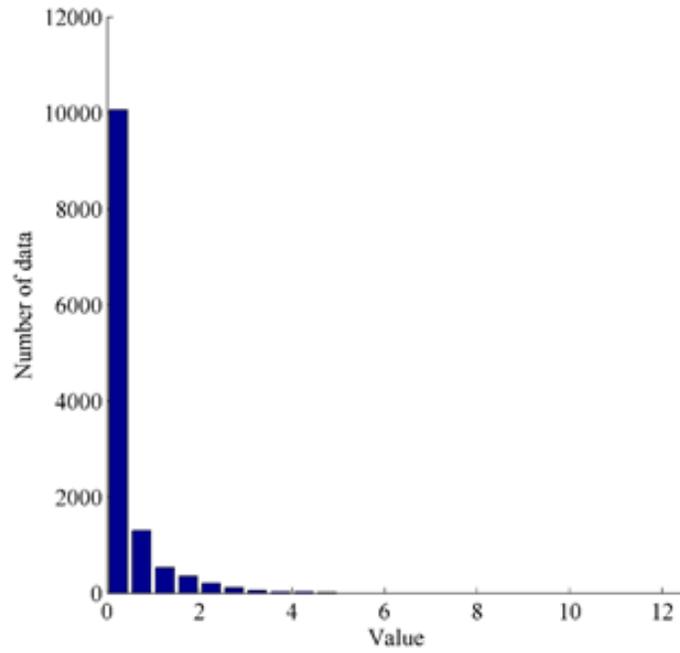


FIGURA 15. HISTOGRAMA DE LEYES DE COBRE

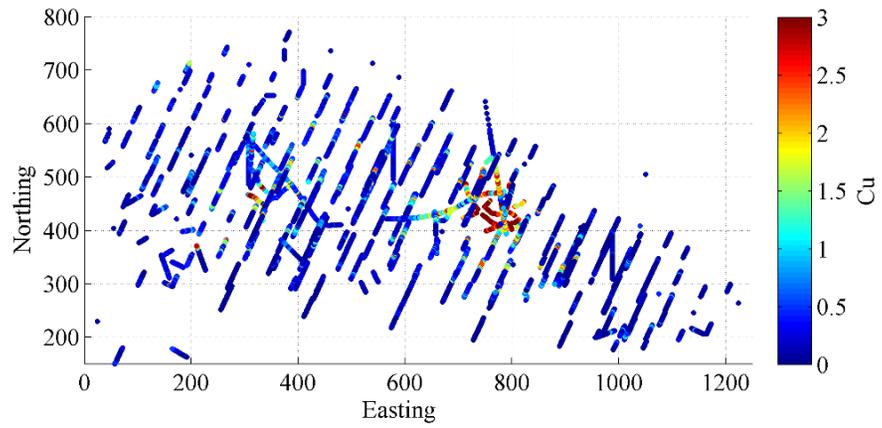


FIGURA 16. MAPA DE COBRE EN DIRECCIÓN NORTE-ESTE

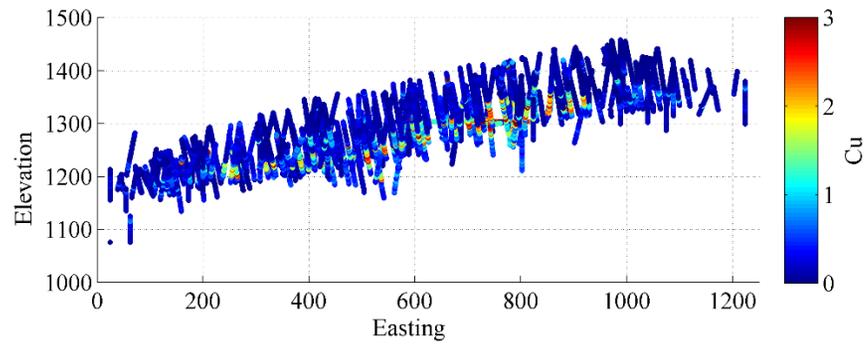


FIGURA 17. MAPA DE COBRE EN DIRECCIÓN ELEVACIÓN-ESTE

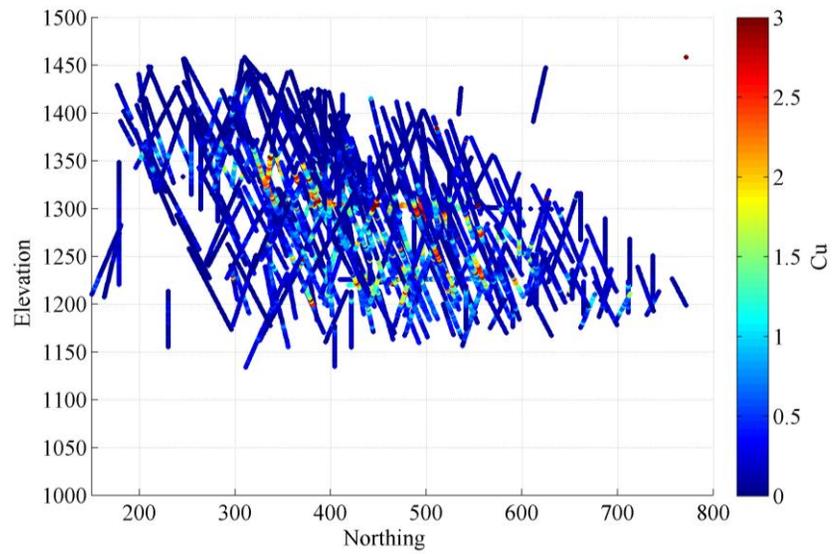


FIGURA 18. MAPA DE COBRE EN DIRECCIÓN ELEVACIÓN-NORTE

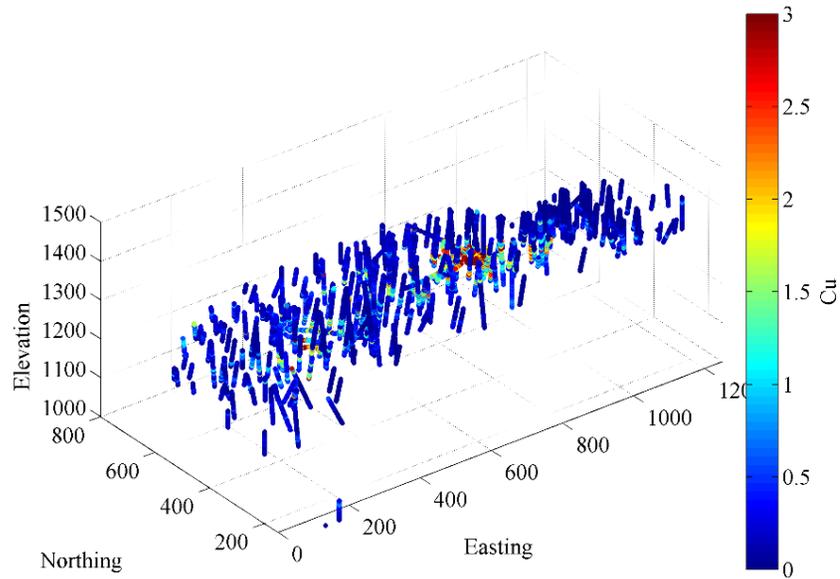


FIGURA 19. MAPA DE COBRE EN 3D

5.2.2. Molibdeno

Al igual que en el caso anterior, se realiza una estadística descriptiva que se detalla en la Tabla 8. Cabe destacar que las leyes están en partes por millón (ppm).

TABLA 8. ESTADÍSTICAS BÁSICAS DEL MOLIBDENO

<i>Mo</i>	
Promedio	127.996
Mediana	86.500
Moda	10.000
Desviación Estándar	158.778
Varianza	25,210.362
Kurtosis	52.940
Asimetría	4.943
Rango	2,899.500
Mínimo	0.500
Máximo	2,900.000
Cuenta	2,263

La distribución de leyes de molibdeno se observa también gracias al histograma ilustrado en la Figura 20.

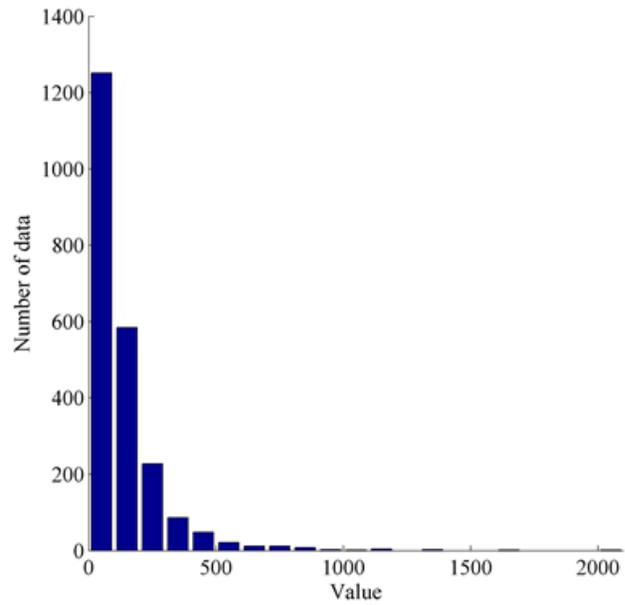


FIGURA 20. HISTOGRAMA DE LEYES DE MOLIBDENO

Al igual que en el caso del cobre, las Figuras 21, 22, 23 y 24 muestran los mapas correspondientes para este metal en las diferentes direcciones.

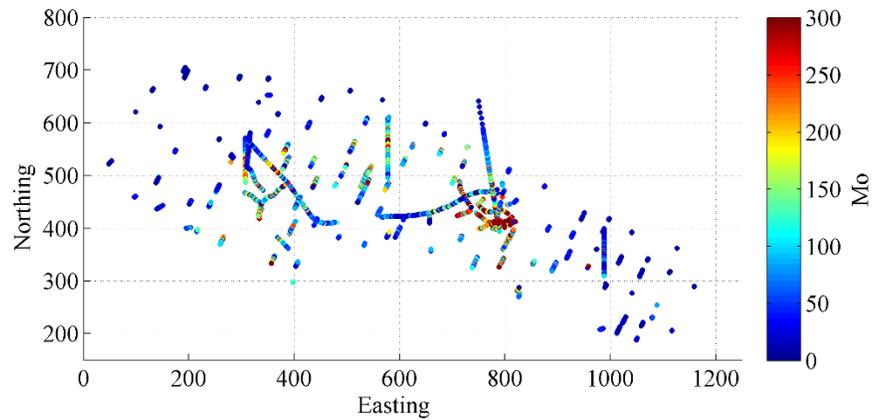


FIGURA 21. MAPA DE MOLIBDENO EN DIRECCIÓN NORTE-ESTE

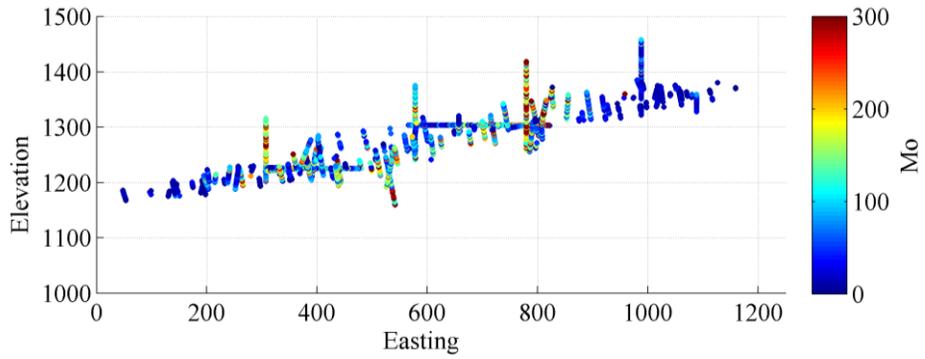


FIGURA 22. MAPA DE MOLIBDENO EN DIRECCIÓN ELEVACIÓN-ESTE

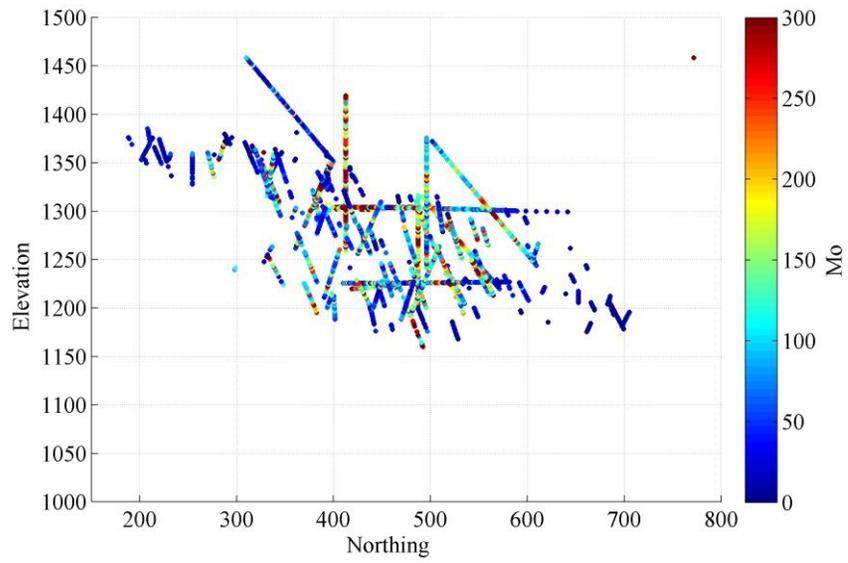


FIGURA 23. MAPA DE MOLIBDENO EN DIRECCIÓN ELEVACIÓN-NORTE

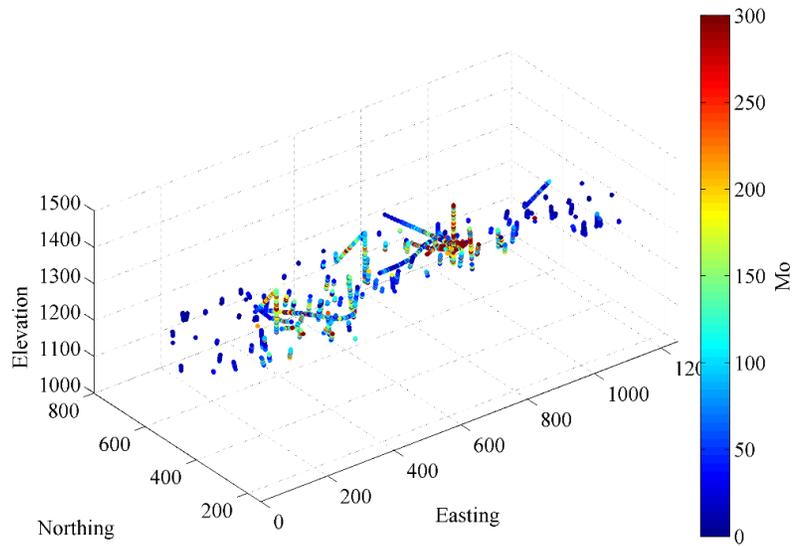


FIGURA 24. MAPA DE MOLIBDENO 3D

5.2.3. Correlación

También es posible observar la correlación entre ambos elementos. Para esto se calcula la matriz de correlación presentada en la Tabla 9, que muestra una baja relación entre ambos elementos.

TABLA 9. MATRIZ DE CORRELACIÓN CU-MO

	Cu	Mo
Cu	1.000	0.263
Mo	0.263	1.000

5.3. Elección valores de truncación

5.3.1. Cobre

Para la elección de los valores de truncación, se utiliza el histograma de leyes de la Figura 15. Finalmente, los valores a ser estudiados son:

- 2%
- 4%
- 5%
- 6%
- 7%
- 8%
- 9%

En la Tabla 10 se muestra el porcentaje de valores truncados para cada ley y el número total de datos que se vieron afectados. Cabe destacar el bajo número de valores a truncar para las leyes mayores a 4%, lo que implica poca influencia en los resultados.

TABLA 10. LEYES DE TRUNCACIÓN PARA EL COBRE Y PORCENTAJE DEL YACIMIENTO

Ley de Truncación [%]	Porcentaje [%]	Número de valores a truncar
2	3.633	462
4	0.472	60
5	0.173	22
6	0.110	14
7	0.071	9
8	0.031	4
9	0.016	2

5.3.2. Molibdeno

Al igual que en el caso del cobre, se utiliza el histograma de leyes para facilitar la elección de los valores de truncación presentado en la Figura 20. Los valores seleccionados son:

- 400 ppm
- 500 ppm
- 600 ppm
- 700 ppm
- 800 ppm
- 900 ppm
- 1000 ppm

Al igual que en caso anterior, en la Tabla 11 se presenta el porcentaje del yacimiento a ser truncado para cada ley seleccionada.

TABLA 11. LEYES DE TRUNCACIÓN PARA EL MOLIBDENO Y PORCENTAJE DEL YACIMIENTO

Ley de Truncación [%]	Porcentaje [%]	Número de valores a truncar
400	4.861	110
500	2.740	62
600	1.723	39
700	1.370	31
800	0.840	19
900	0.486	11
1000	0.398	9

5.4. Cálculo de Residuos

Al igual que en el caso sintético, se calcula el exceso para cada valor que sobrepase la ley de truncación correspondiente. También se calcula el exceso promedio y con esto el valor residual.

5.4.1. Cobre

El exceso promedio de cada ley de truncación se detalla en la Tabla 12.

TABLA 12. EXCESO PROMEDIO POR LEY DE TRUNCACIÓN PARA EL COBRE

Ley de Truncación [%]	Exceso promedio [%]
2	0.940
4	1.278
5	1.770
6	1.579
7	1.207
8	1.391
9	1.583

5.4.2. Molibdeno

El exceso promedio para cada ley de truncación del molibdeno se muestra en Tabla 13.

TABLA 13. EXCESO PROMEDIO POR LEY DE TRUNCACIÓN PARA EL MOLIBDENO

Ley de Truncación [ppm]	Exceso promedio [ppm]
400	233.986
500	281.419
600	310.321
700	280.081
800	330.947
900	434.091
1000	416.111

5.5. Estimación Tradicional

Para la estimación tradicional se utiliza la base de datos original para calcular los variogramas experimentales y los modelados, con los que finalmente se realiza un *kriging* ordinario.

5.6. Estimación con Truncación

Para la estimación con truncación, se toma la base de datos y se truncan los valores que sobrepasen cada ley propuesta. Con esto se obtiene una base de datos distinta para cada ley de truncación, con las que se realiza el mismo procedimiento de estimación que en el punto anterior consistente en variografía y posterior *kriging* ordinario.

Para realizar el *kriging* ordinario, se utiliza un radio de entre 30 y 300 [m] para realizar la estimación, ignorando los datos a menos de 30 [m] del punto a estimar, como indica la Figura 25. Esto se realiza para evitar datos demasiado cercanos al punto a estimar, reduciendo la incertidumbre.



FIGURA 25. RADIO DE BÚSQUEDA PARA ESTIMACIONES EN CASO REAL (VALIDACIÓN CRUZADA)

5.7. Estimación con Truncación mejorada

Para realizar la estimación con la metodología de truncación mejorada, al igual que en el punto anterior, se debe tomar la base de datos original y truncan los valores que sean mayores a las distintas leyes de truncación, generando una base de datos por cada una de ellas.

Luego de esto, se toma una de las bases de datos, se agregan los indicadores y los valores residuales. Realizando los correlogramas cruzados entre los residuos y los indicadores, y entre los residuos y las leyes truncadas, es posible decidir qué ley de truncación cumple con el requerimiento de poseer valores residuales sin correlación espacial, con el fin de calcular los variogramas cruzados experimentales y poder posteriormente modelarlos. Con los resultados de la modelación del variograma correspondiente, se procede a realizar un *cokriging* ordinario entre la ley truncada y el indicador.

Para realizar el *cokriging* ordinario se utilizan los mismos criterios de búsqueda que en el punto anterior ilustrados en la Figura 25.

5.8. Resultados y Análisis

5.8.1. Cobre

Se evalúa principalmente el caso con ley de truncación igual a 2%, debido a que es la ley más baja cuyos correlogramas cruzados entre el valor residual y la ley truncada y entre el valor residual y el indicador son cercanos a cero, lo que corrobora la falta de correlación espacial. Esto puede verse en las Figuras 27 y 28.

La Figura 26 ilustra el correlograma de los residuos para este caso, con la finalidad de mostrar que presenta un efecto pepa puro, pudiendo ser omitido al momento de realizar la validación cruzada.

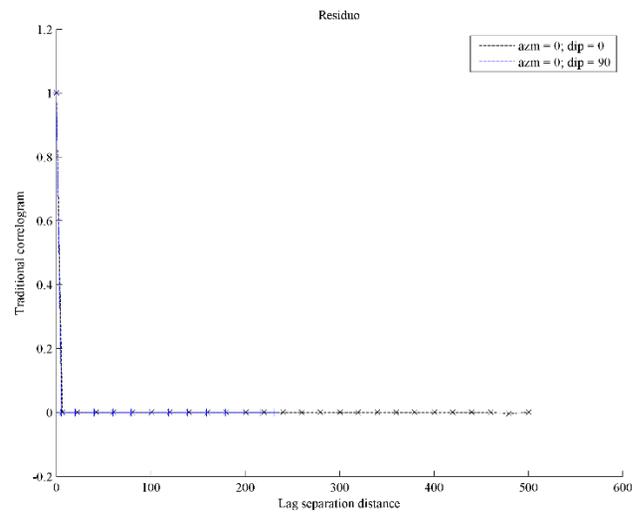


FIGURA 26. CORRELOGRAMA RESIDUOS COBRE TRUNCADO EN 2%

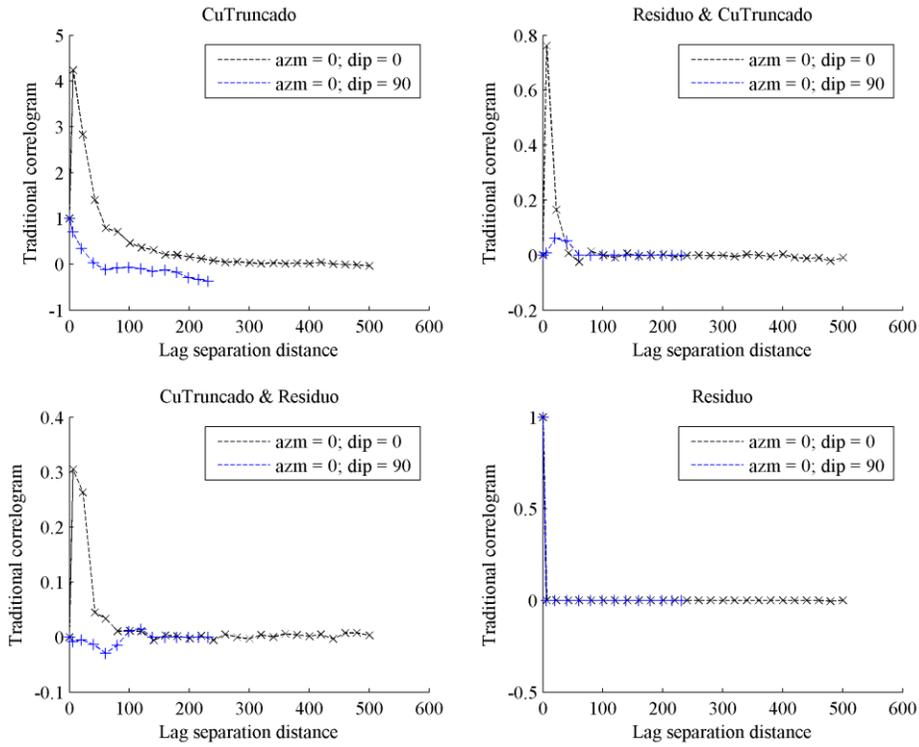


FIGURA 27. CORRELOGRAMA CRUZADO RESIDUO-COBRE TRUNCADO EN 2%

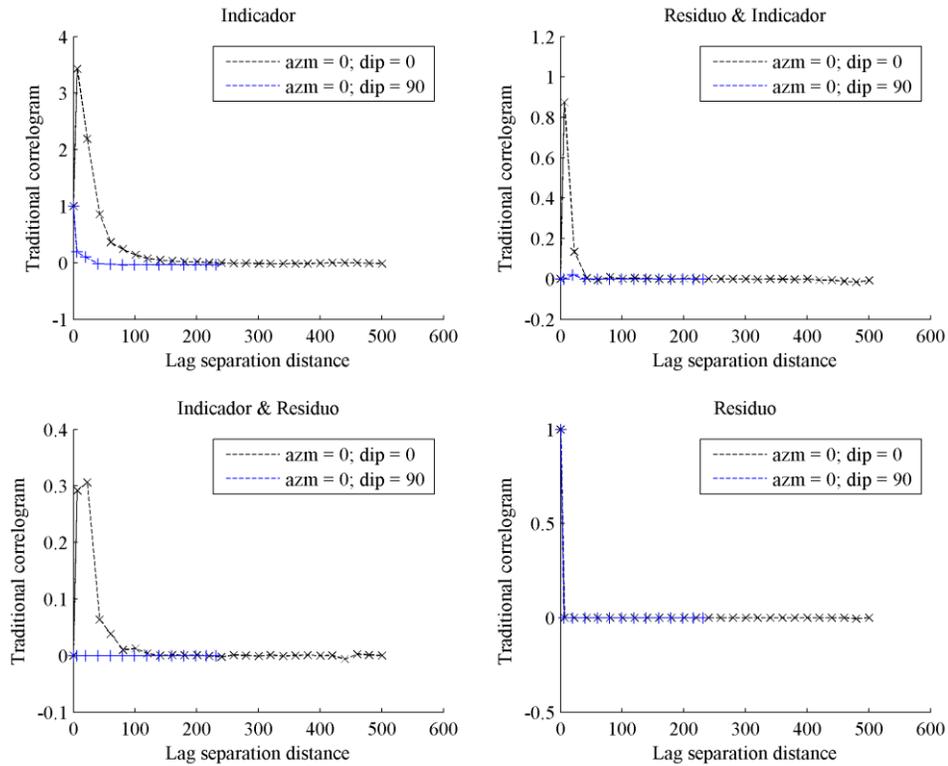


FIGURA 28. CORRELOGRAMA CRUZADO RESIDUO-INDICADOR, PARA EL COBRE TRUNCADO EN 2%

Los correlogramas cruzados correspondientes al resto de las leyes estudiadas se encuentra en Anexo B.

Los resultados de la validación cruzada se presentan en la Tabla 14, donde se muestran las estadísticas de errores promedio, allí se puede observar que, a pesar de que los resultados obtenidos son bastante similares para cada metodología, en general los métodos que utilizan truncación son más precisos y menos sesgados. En cuanto al sesgo, la metodología con truncación mejorada obtiene mejores resultados que las otras metodologías, mientras que en precisión los mejores resultados son obtenidos por el método con truncación original.

Es importante notar que las diferencias en precisión entre ambos métodos que utilizan la truncación no son muy grandes en todos los puntos a evaluar. Estos resultados corroboran la utilidad en la utilización de los métodos truncados al estimar leyes con valores extremos.

TABLA 14. RESUMEN ERRORES PROMEDIO PARA EL COBRE TRUNCADO EN 2%

Ley de Truncación 2%			
	Sin Truncar	Truncado	Truncado Mejorado
Error Promedio	0.0176	0.0216	-0.0117
Error Absoluto Promedio	0.3275	0.2840	0.3008
Error Cuadrático Promedio	0.3561	0.2903	0.3115

5.8.2. *Molibdeno*

En el caso del molibdeno se aprecia una mayor variabilidad en el resultado de los correlogramas cruzados. El seleccionado para continuar con el análisis corresponde a la ley 600 ppm, cuyos correlograma y correlogramas cruzados se presentan en las Figuras 29, 30 y 31 respectivamente. Los correlogramas cruzados correspondientes a las otras leyes de truncación, al igual que en el caso del cobre, se encuentran en Anexo B. Sin embargo, debido a la variabilidad mencionada anteriormente, se procede a realizar los cálculos considerando el valor residual.

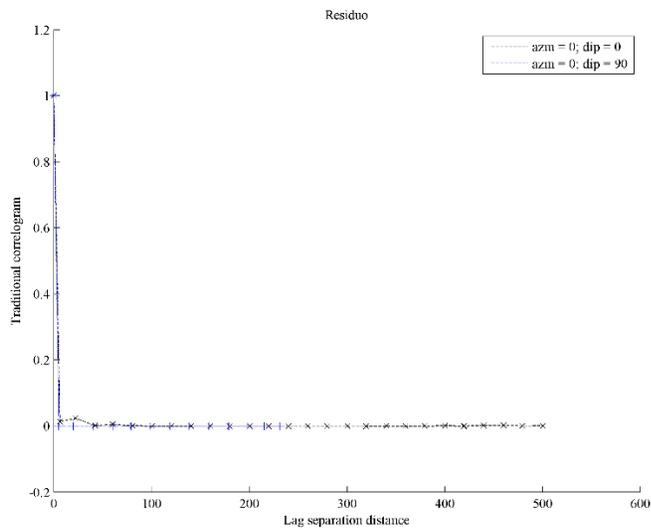


FIGURA 29. CORRELOGRAMA RESIDUOS PARA MOLIBDENO TRUNCADO EN 600 PPM

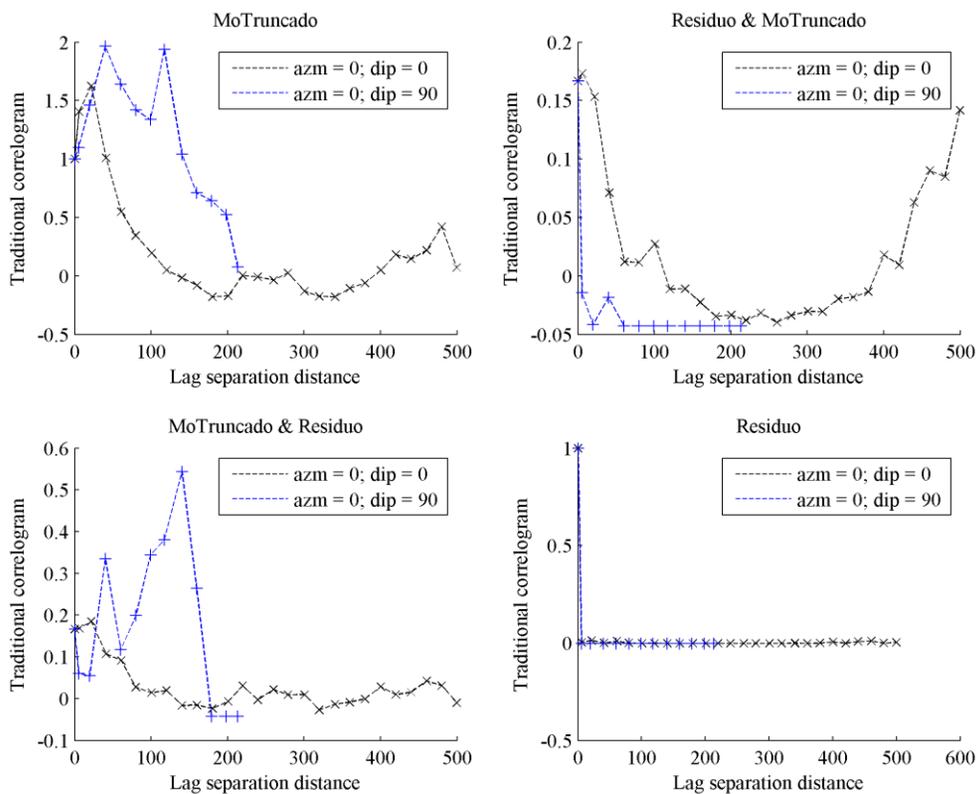


FIGURA 30. CORRELOGRAMA CRUZADO RESIDUO-MOLIBDENO TRUNCADO EN 600PPM

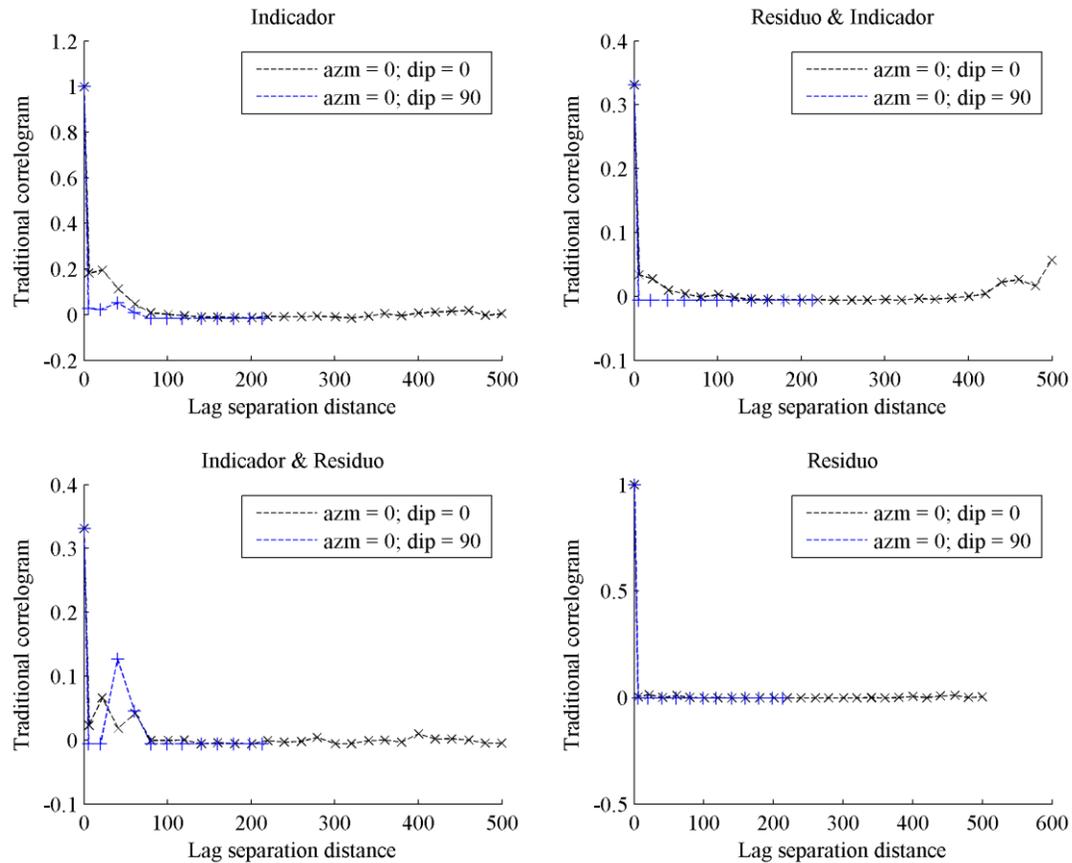


FIGURA 31. CORRELOGRAMA CRUZADO RESIDUO-INDICADOR, PARA EL MOLIBDENO TRUNCADO EN 600 PPM

TABLA 15. RESUMEN DE ERRORES PROMEDIO PARA EL MOLIBDENO TRUNCADO EN 600PPM

Ley de Truncación 600 ppm			
	Sin Truncar	Truncado	Truncado Mejorado
Error Promedio	-11.116	-4.194	-13.634
Error Absoluto Promedio	82.719	79.627	83.634
Error Cuadrático Promedio	20942.8	20379.4	21216.0

Los resultados de la validación cruzada se presentan en la Tabla 15, de la misma forma que el punto anterior. En este caso, el método truncado original presenta resultados mejores que el resto de las metodologías. Mientras la vía tradicional y el método truncado mejorado, muestran tener errores similares, el caso truncado sin indicador exhibe una mayor diferencia y de forma positiva con un sesgo menor y una mayor precisión. A pesar de este contraste, en general, los métodos presentan resultados similares.

La diferencia entre ambos métodos truncados, puede deberse a la dificultad al momento de modelar los variogramas cruzados en el caso de la truncación mejorada, debido a que se agrega la

variable indicador. Puede deberse a que la variabilidad del correlograma cruzado entre el molibdeno truncado y el residuo sea demasiado alta, a pesar de ser cercana a 0 como para permitir que el modelo sea correctamente aplicable, debido a que podría presentar cierta correlación espacial con la ley. Esto podría significar que finalmente se comporte de forma más errática de lo esperado; es posible que no se cumpla la estacionaridad de las variables a analizar, ya que el modelo de la metodología mejorada supone el exceso promedio como constante en el espacio.

A modo general en el caso real, las metodologías que incluyen truncación, demuestran ser más precisas y menos sesgadas que la metodología tradicional, comprobando que el hecho de truncar las leyes muy altas resulta de gran utilidad al estimar recursos con bases de datos que presenten distribuciones de este estilo. No se observan diferencias muy grandes entre los métodos truncados, las que puede deberse a la presencia de correlación espacial en los valores residuales.

6. CONCLUSIONES

Este trabajo probó y validó la utilización de metodologías de truncación, logrando resultados precisos y exactos para todos los casos; así el utilizar el modelo de truncación se presenta como una herramienta útil a la hora de estimar variables que cuentan con valores extremos reales, ya que permite facilitar el análisis variográfico al contar con valores más cercanos al resto, facilitando el cálculo y la modelación de los variogramas.

Es importante destacar que para una base de datos que no posea una distribución de cola pesada o valores extremos que difieran significativamente de la mayoría, como es el caso de la base de datos sintética, la metodología tradicional sin truncación de valores presenta un mejor ajuste. Las metodologías con truncación entregan resultados bastante precisos e insesgados pero éstos no difieren de forma significativa a la metodología aplicada tradicionalmente. Los métodos que utilizan truncación, para este tipo de base de datos, no muestran una facilidad significativa a la hora de realizar el análisis variográfico y en el caso de la truncación mejorada se ve incluso con mayor dificultad. Además, al no poseer una gran variabilidad en los datos, al seleccionar una ley de truncación el número de valores a modificar es considerable.

Cada yacimiento es distinto y la distribución que presente la base de datos es determinante a la hora de elegir una metodología de estimación. La base de datos que se utiliza en este caso de estudio presenta una distribución lognormal pero, sin embargo, los valores “extremos” son bastante cercanos a la media, por lo que no necesariamente se justifica la utilización de algún tipo de metodología con truncación.

En cuanto al caso real, se evalúa una base de datos que contiene tanto mineral de cobre como de molibdeno. Al estudiar el comportamiento del cobre, los resultados obtenidos para las distintas metodologías no difieren de forma significativa entre ellos. A pesar de esto, los métodos truncados exhiben un menor sesgo y una mayor precisión a la hora de estimar, donde la truncación mejorada muestra ser la menos sesgada y la truncación sin indicador la más precisa. Con esto es posible corroborar la utilidad de la truncación al realizar la estimación utilizando bases de datos con distribución de cola pesada.

En el caso del molibdeno, sin embargo, el método truncado mejorado no presenta mejoras importantes en los resultados, es decir, muestra ser levemente menos preciso y más sesgado que las otras dos metodologías. No obstante, la truncación original muestra ser la más precisa y menos sesgada. La diferencia entre ambos puede deberse a la dificultad presentada por la truncación mejorada al modelar variográficamente, a la variabilidad que presentan los correlogramas cruzados entre el metal y el valor residual, o bien a una falta de estacionaridad de la variable en estudio.

De forma general para el caso real, la aplicación de metodologías que incorporen truncación muestran estimar de forma menos sesgada y más precisa. Las bases de datos tanto para el cobre como para el molibdeno, presentan una distribución que permite que estos métodos cumplan la estimación de forma satisfactoria. Sin embargo, como recomendación, es necesario realizar la estimación de forma cuidadosa y poner atención a la distribución que posea la base de datos con la que se va a trabajar y las características únicas del yacimiento a evaluar. Además, se requiere

considerar y estudiar de forma detallada el comportamiento de los valores residuales debido a que pueden presentar efectos de borde, que el modelo asume como inexistente.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] M. Maleki, N. Madani, X. Emery. Capping and *Kriging* grades with long-tailed distributions. The Journal of The Southern African Institute of Mining and Metallurgy, vol. 114, pp. 255-263, 2014.
- [2] J. Ortiz. Apuntes del curso MI5041, Evaluación de Yacimientos. Departamento de Ingeniería de Minas, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile. Santiago 2013.
- [3] J. P. Chilès, P. Delfiner. Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty. New York: Wiley, 2012.
- [4] M. Rossi, C. Deutsch. Mineral Resource Estimation. Springer, New York, 2014.
- [5] J. Rivoirard, C. Demange, X. Freulon, A. Lécureuil, N. Bellot, A Top-Cut Model for Deposits with Heavy-Tailed Grade Distribution. Mathematical Geosciences, vol. 45, no. 8. pp. 967–982, 2013.
- [6] P. Goovaerts, Geostatistics for natural resources evaluation. New York: Oxford University Press, 1997.
- [7] A. Sinclair, G. Blackwell. Applied Mineral Inventory Estimation. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [8] T. Moreno, W. Gibbons. The Geology of Chile. The Geological Society, London 2007.
- [9] X. Emery, *Cokriging* random fields with means related by known linear combinations, Computers & Geosciences, vol. 38, no. 1, pp. 136-144, 2012.
- [10] X. Emery, Fundamentos de Geoestadística. Departamento de Ingeniería de Minas, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Santiago 2011.
- [11] X. Emery, Geoestadística. Departamento de Ingeniería de Minas, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, 149 p. Santiago 2012.
- [12] X. Emery, Simulación Geostadística. Departamento de Ingeniería de Minas, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Santiago 2013.
- [13] X. Emery and C. Lantuéjoul, TBSIM: A computer program for conditional simulation of three-dimensional gaussian random fields via the turning bands method., Computers & Geosciences, vol. 32, no. 10, pp. 1615-1628, 2006.

ANEXOS

Anexo A: Caso Sintético

Box plot para base de datos de Caso sintético

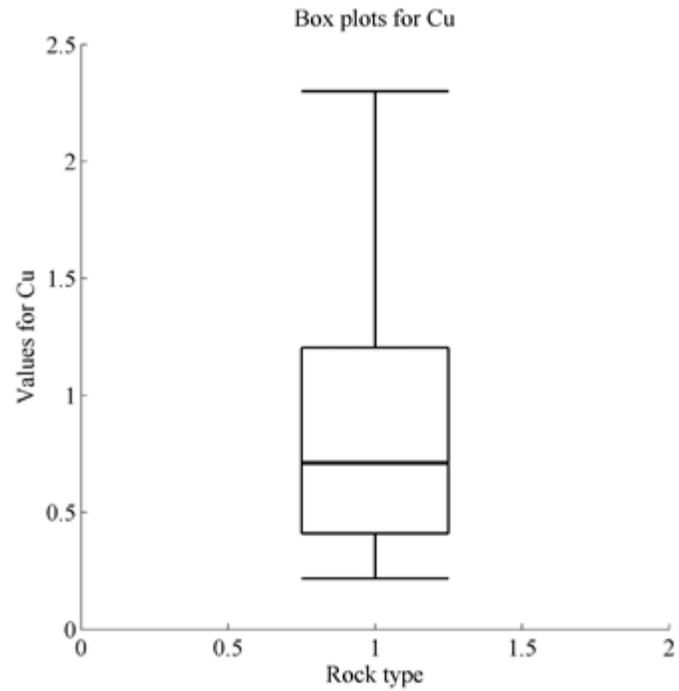


FIGURA 32. BOX PLOT PARA EL COBRE EN CASO SINTÉTICO

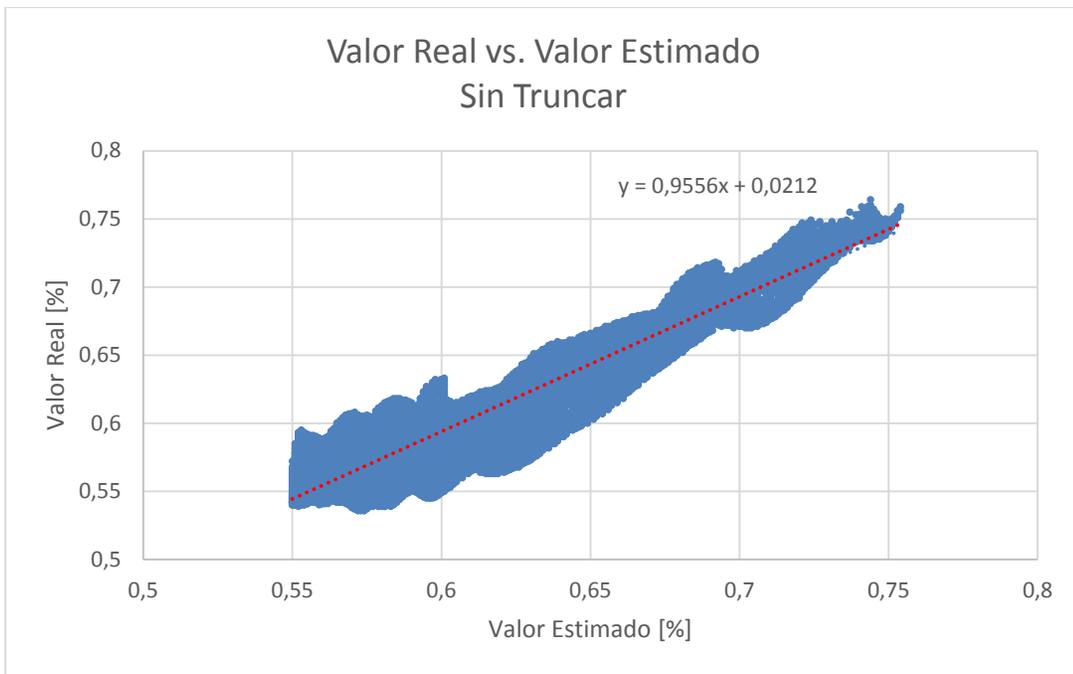
Excesos promedio para base de datos Caso Sintético

TABLA 16. EXCESOS PROMEDIO PARA CASO I

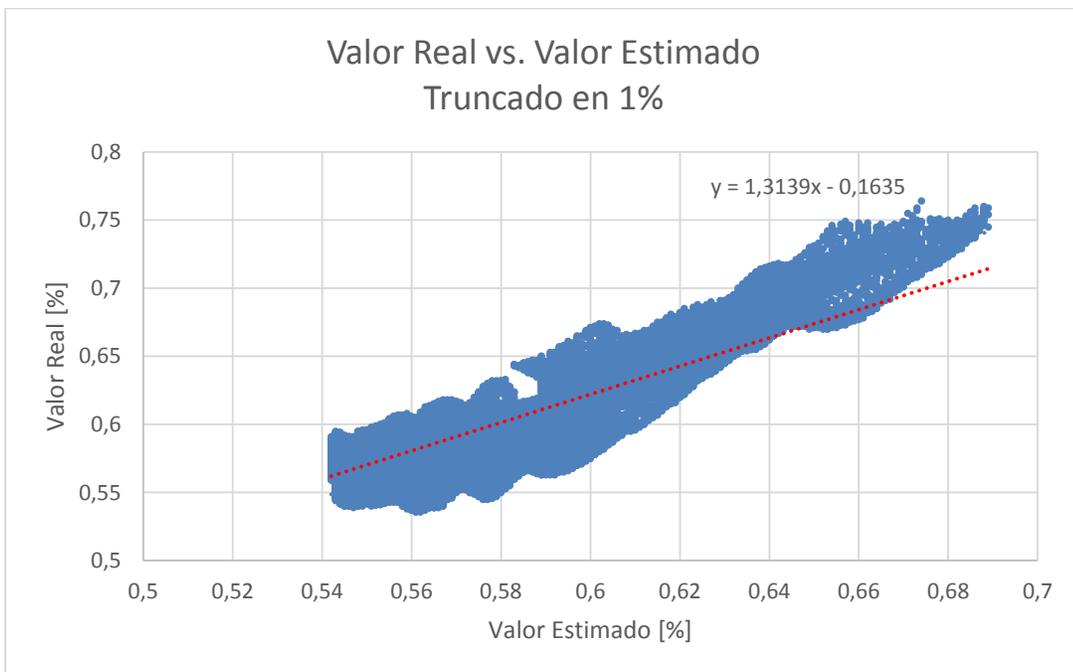
Realizaciones	Ley de truncación		
	2	1.5	1
1	0.235	0.472	0.430
2	0.518	0.437	0.278
3	0.000	0.240	0.169
4	0.000	0.000	0.089
5	0.000	0.000	0.060
6	0.292	0.407	0.600
7	0.255	0.492	0.477
8	0.000	0.000	0.146
9	0.000	0.000	0.090
10	0.000	0.000	0.148
11	0.085	0.212	0.240
12	0.000	0.000	0.116
13	0.000	0.174	0.300
14	0.000	0.215	0.219
15	0.184	0.334	0.441
16	0.000	0.000	0.060
17	0.000	0.131	0.392
18	0.000	0.158	0.309
19	0.000	0.000	0.000
20	0.076	0.253	0.263
21	0.371	0.446	0.568
22	0.000	0.000	0.000
23	0.065	0.565	0.172
24	0.000	0.000	0.029
25	0.222	0.281	0.383
26	0.000	0.036	0.164
27	0.000	0.000	0.190
28	0.000	0.000	0.191
29	0.000	0.000	0.133
30	0.000	0.224	0.310

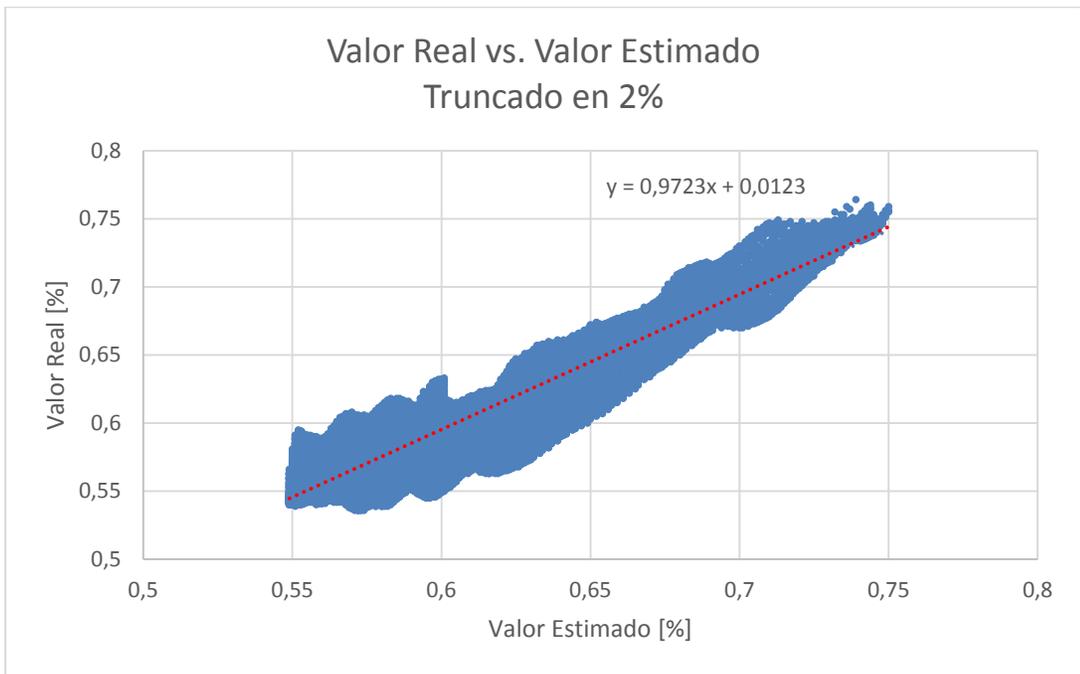
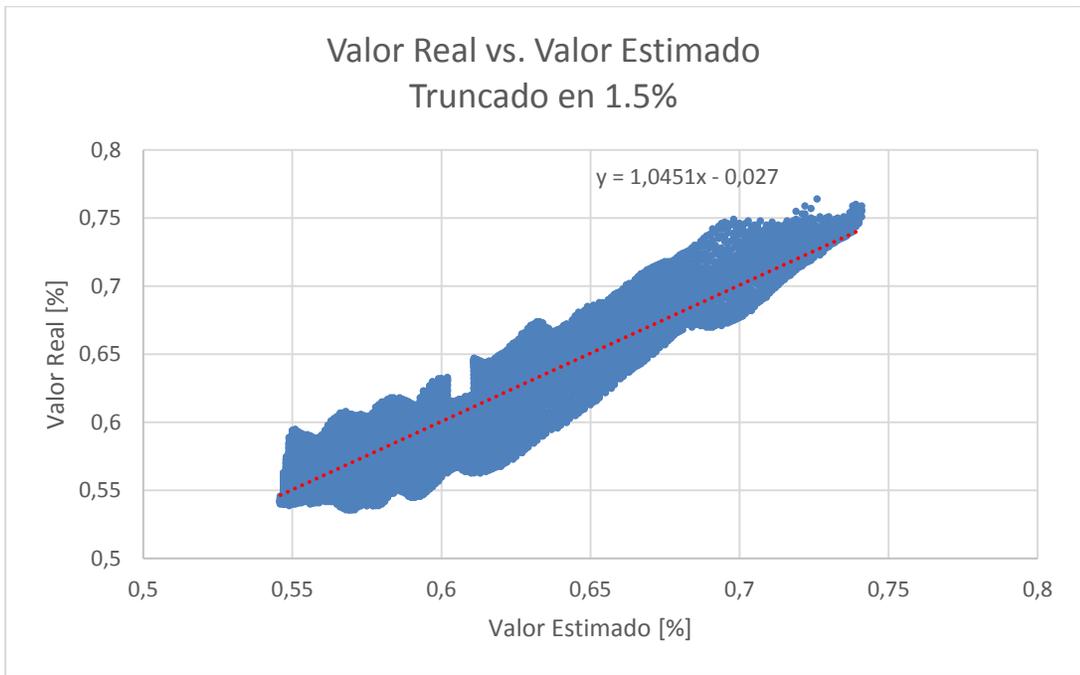
Nubes de dispersión

SIN TRUNCAR

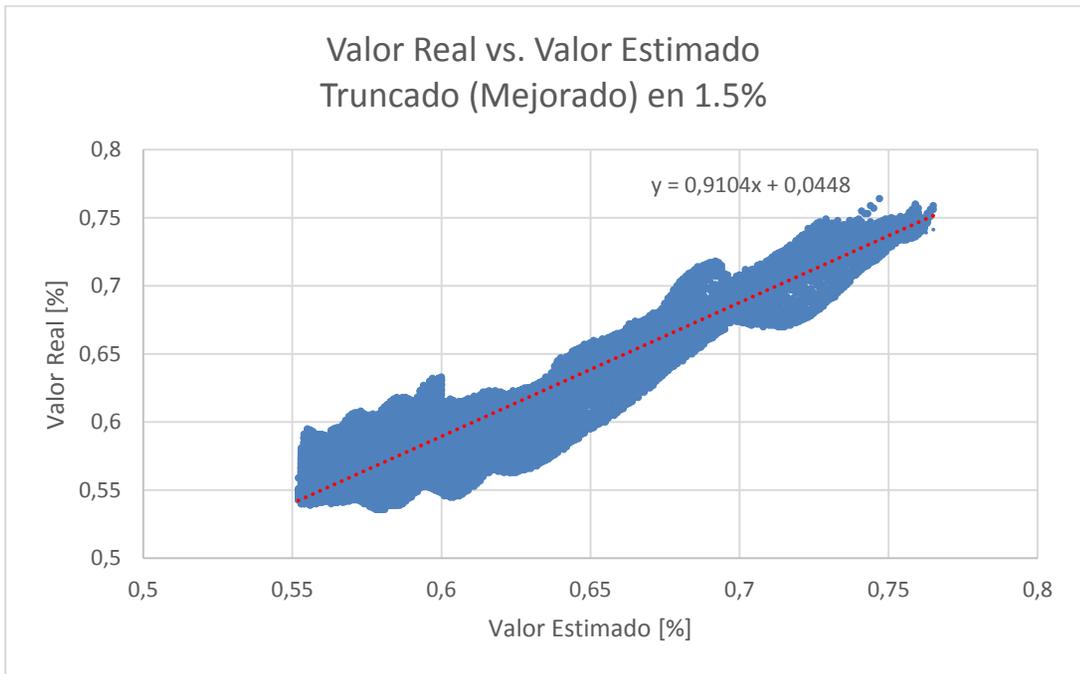
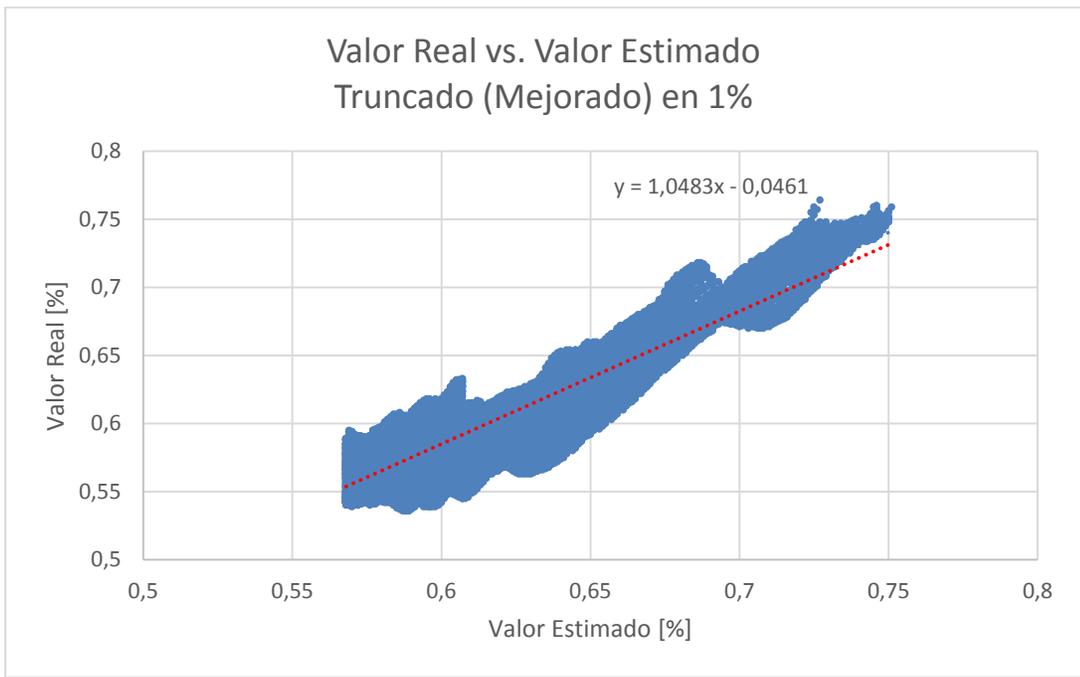


TRUNCACIÓN ORIGINAL

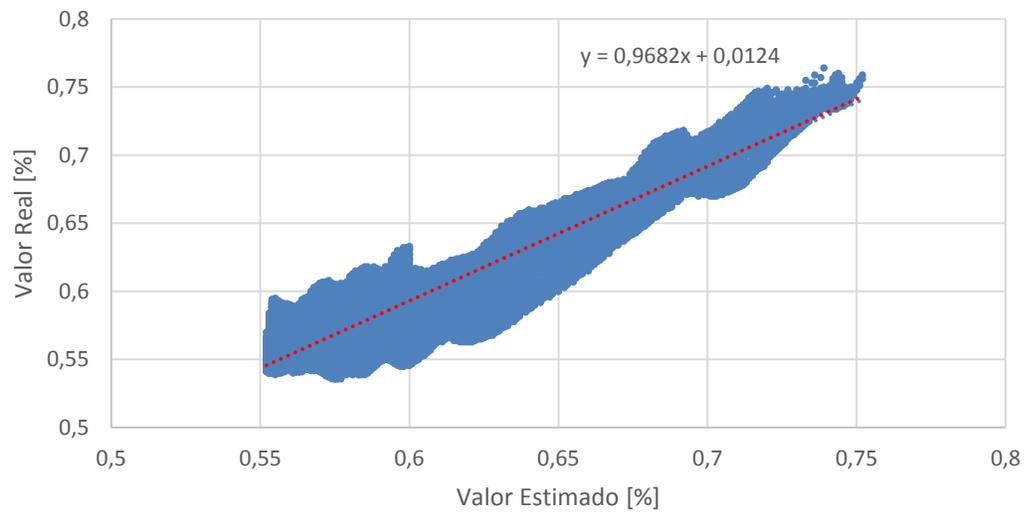




TRUNCACIÓN MEJORADA



Valor Real vs. Valor Estimado Truncado (Mejorado) en 2%



Anexo B: Caso Real

Estudio Exploratorio cobre

Box plot, Ley media vs. Ley de Corte y Metal vs. Tonelaje

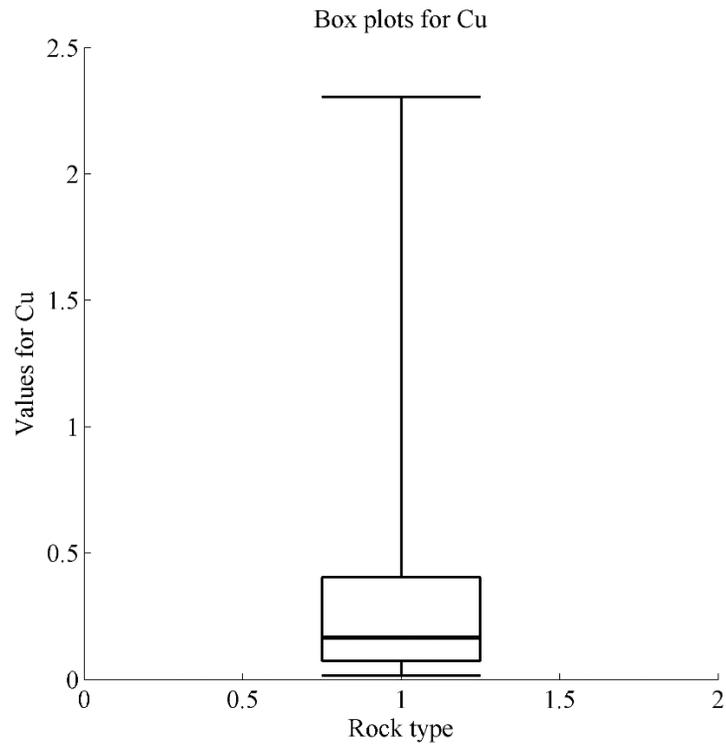


FIGURA 33. BOXPLOT CU

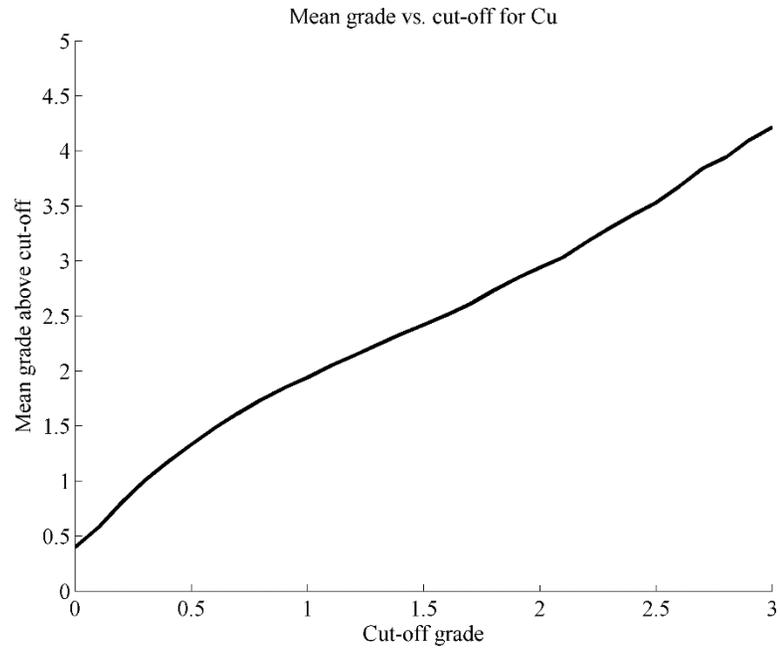


FIGURA 34. LEY MEDIA VS. LEY DE CORTE CU

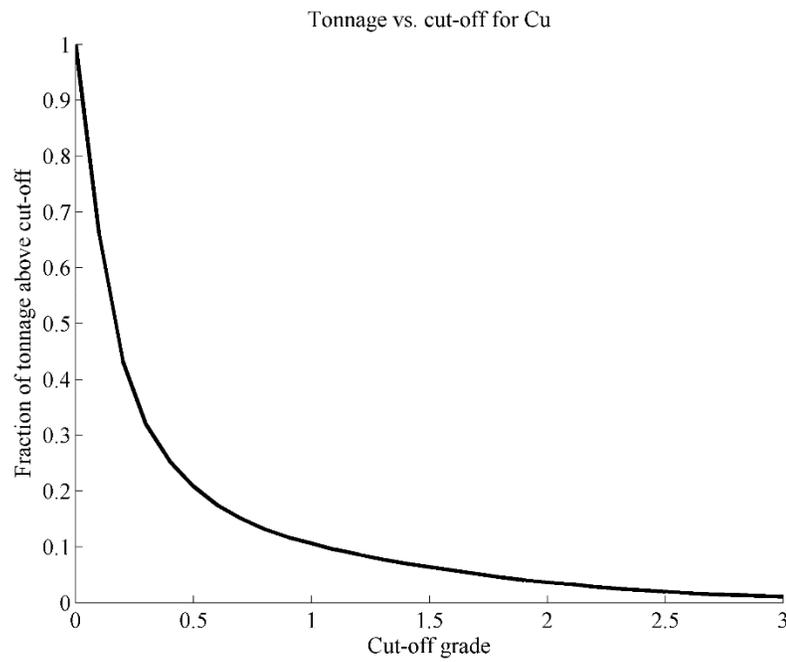


FIGURA 35. CONTENIDO DE METAL VS. FRACCIÓN DE TONELAJE SOBRE LEY DE CORTE CU

Estudio Exploratorio molibdeno

Box plot, Ley media vs. Ley de Corte y Metal vs. Tonelaje

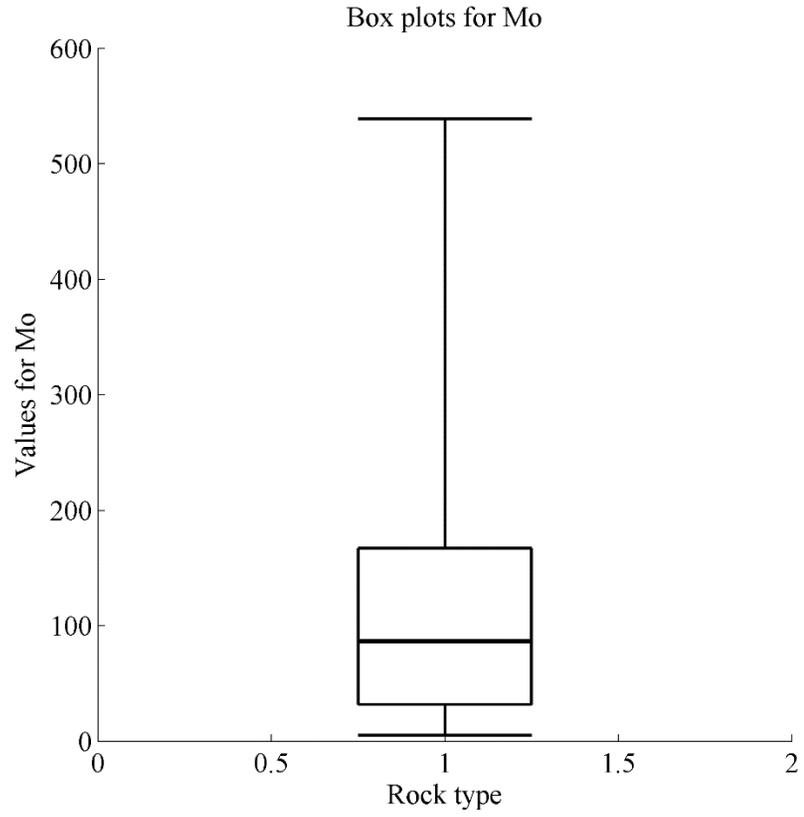


FIGURA 36. BOXPLOT MO

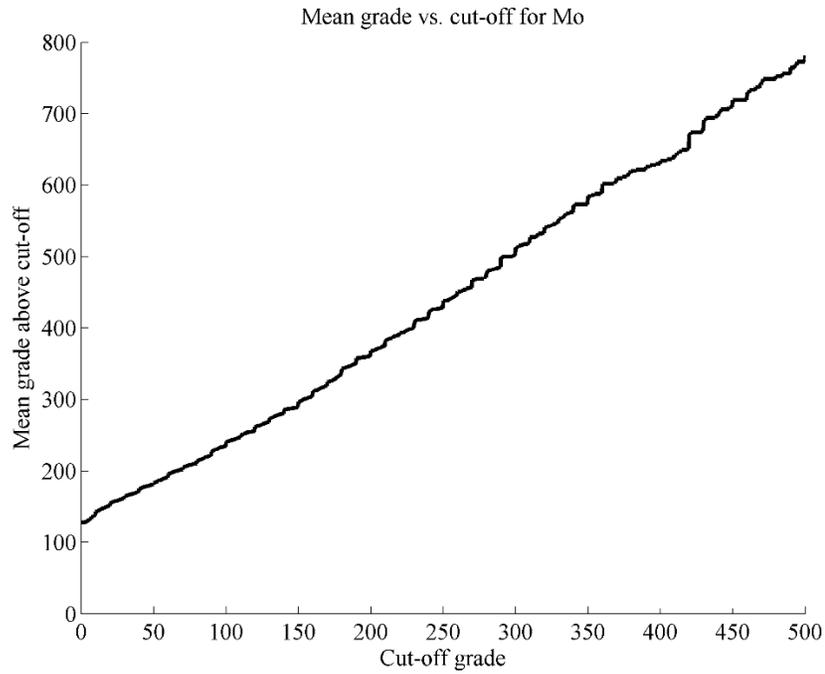


FIGURA 37. LEY MEDIA VS. LEY DE CORTE MO

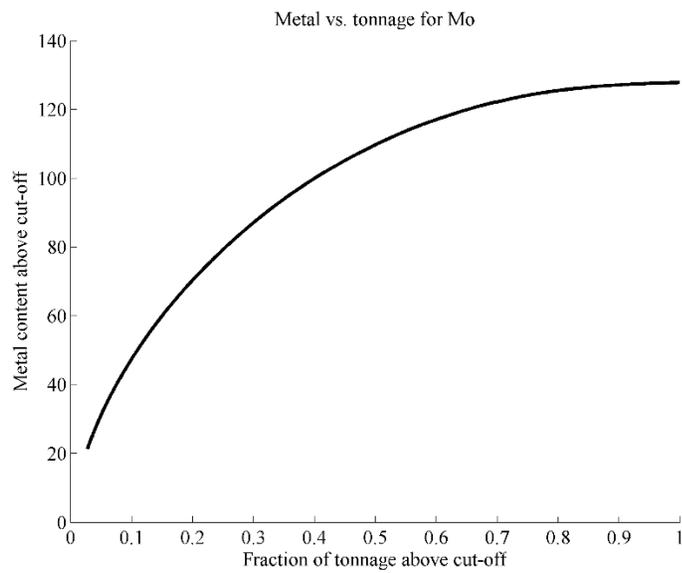


FIGURA 38. CONTENIDO DE METAL VS. FRACCIÓN DE TONELAJE SOBRE LEY DE CORTE MO

Correlogramas Cruzados Residuos-Metal Truncado, Residuos-Indicador

Correlogramas cruzados cobre

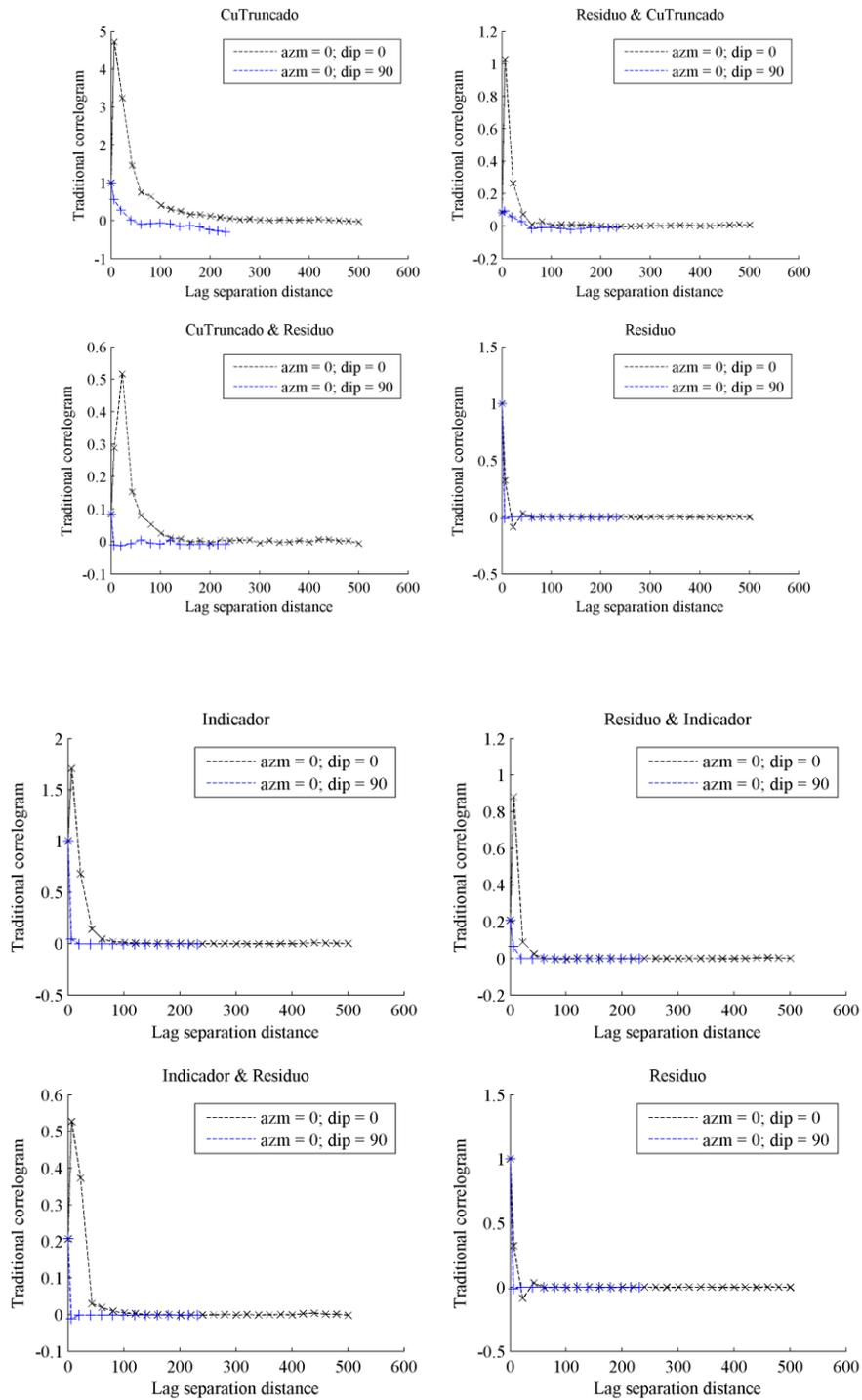


FIGURA 39. CORRELOGRAMAS CRUZADOS RESIDUOS-COBRE TRUNCADO, RESIDUOS-INDICADOR. LEY 4%

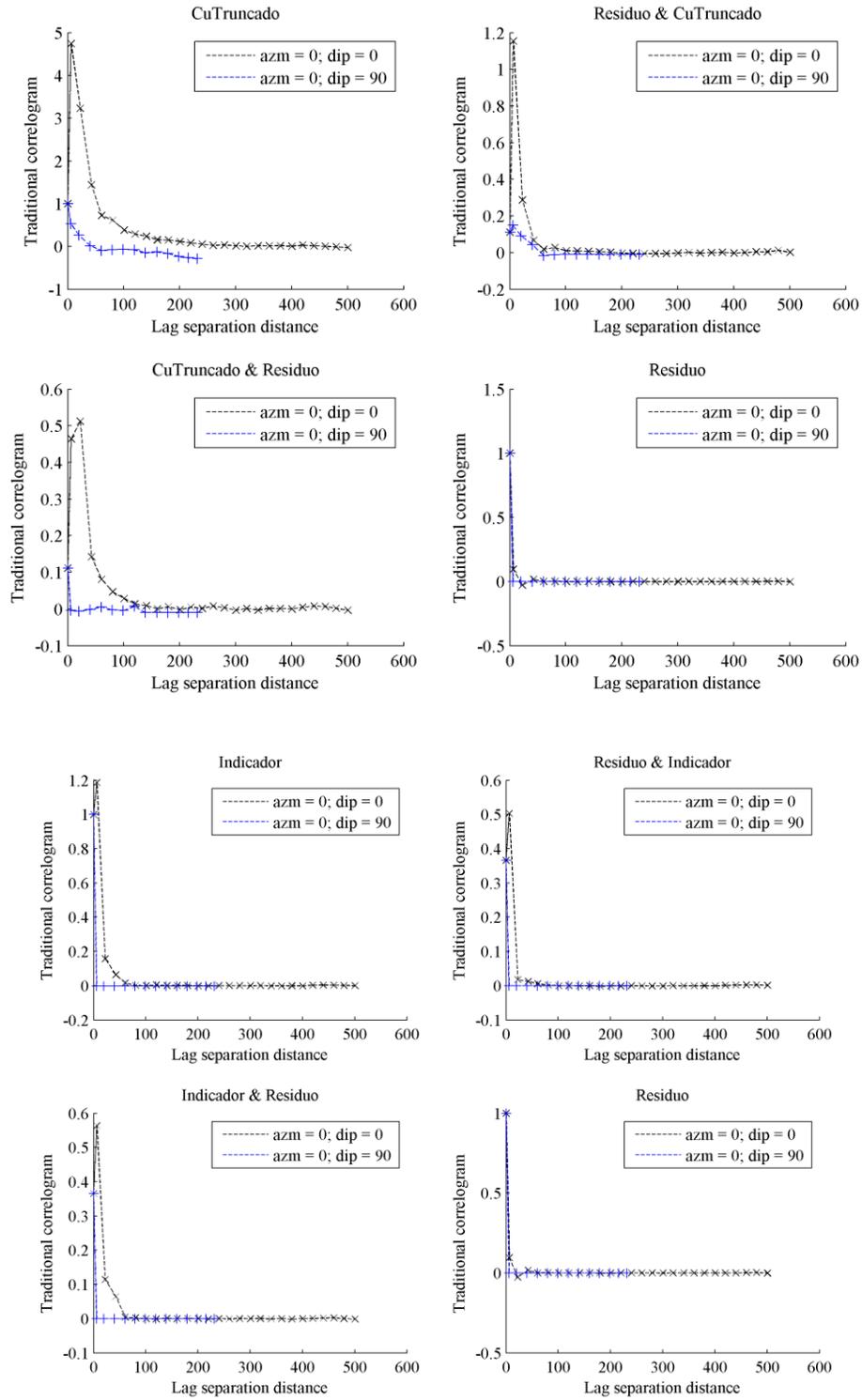


FIGURA 40. CORRELOGRAMAS CRUZADOS RESIDUOS-COBRE TRUNCADO, RESIDUOS-INDICADOR. LEY 5%

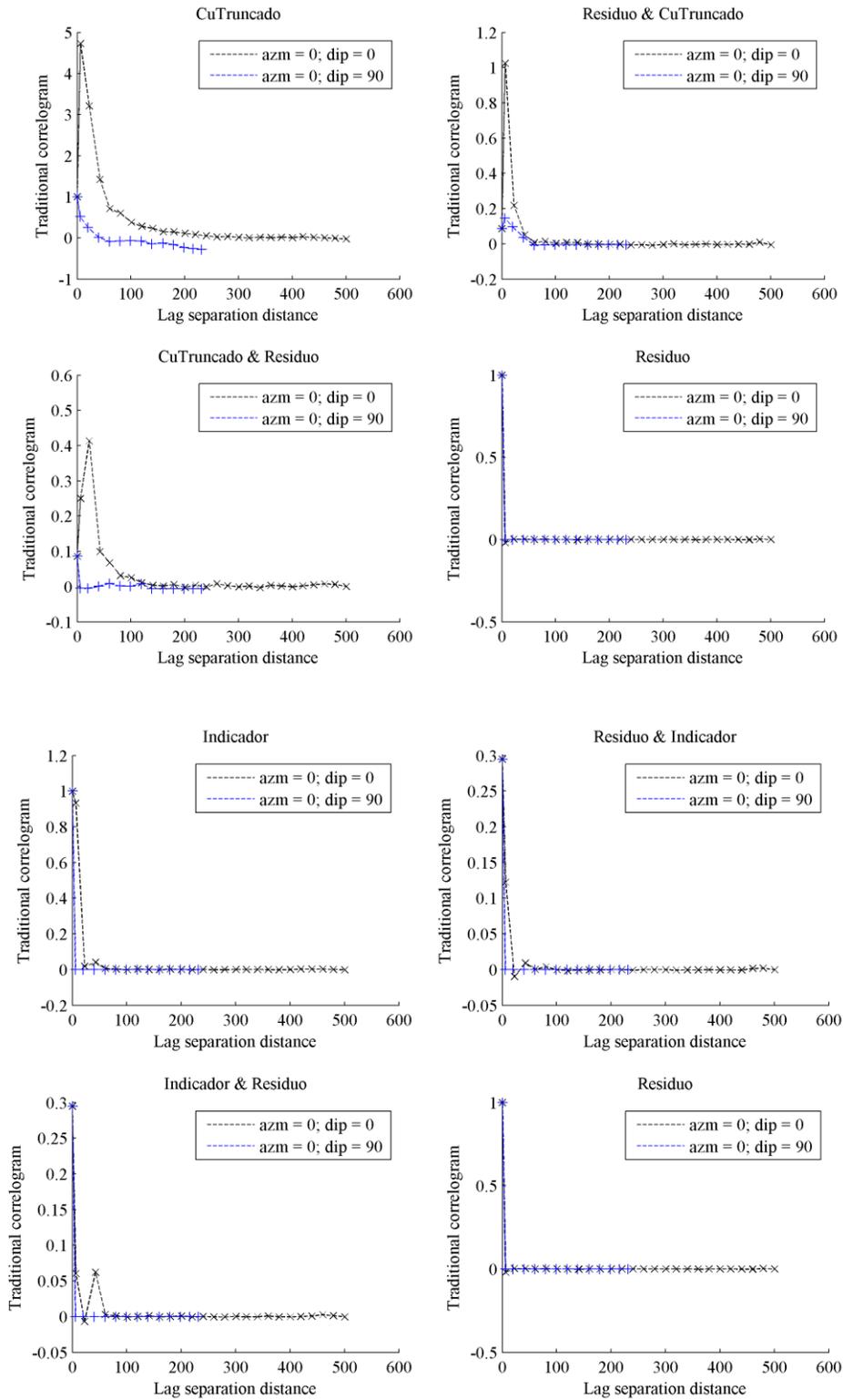


FIGURA 41. CORRELOGRAMAS CRUZADOS RESIDUOS-COBRE TRUNCADO, RESIDUOS-INDICADOR. LEY 6%

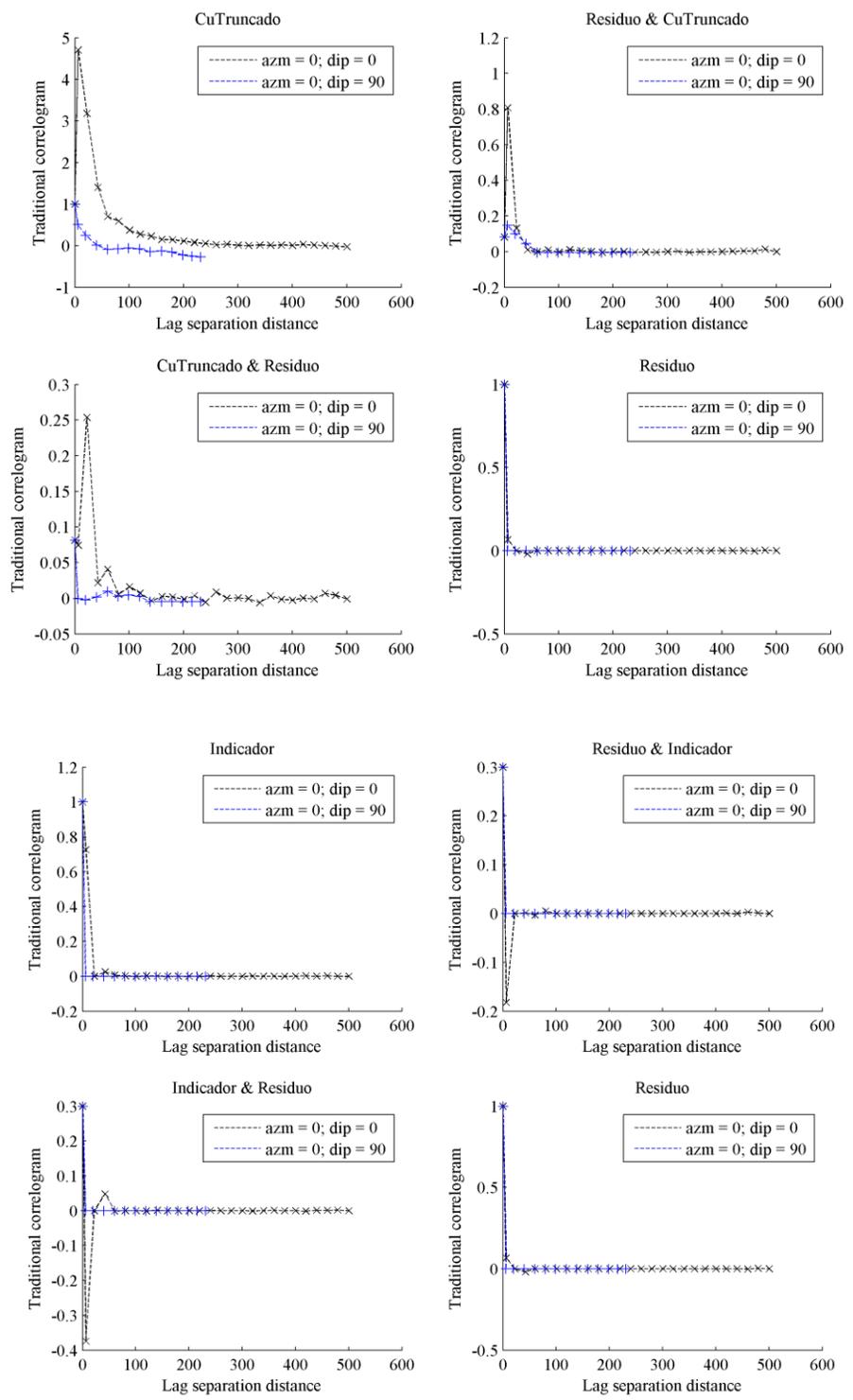


FIGURA 42. CORRELOGRAMAS CRUZADOS RESIDUOS-COBRE TRUNCADO, RESIDUOS-INDICADOR. LEY 7%

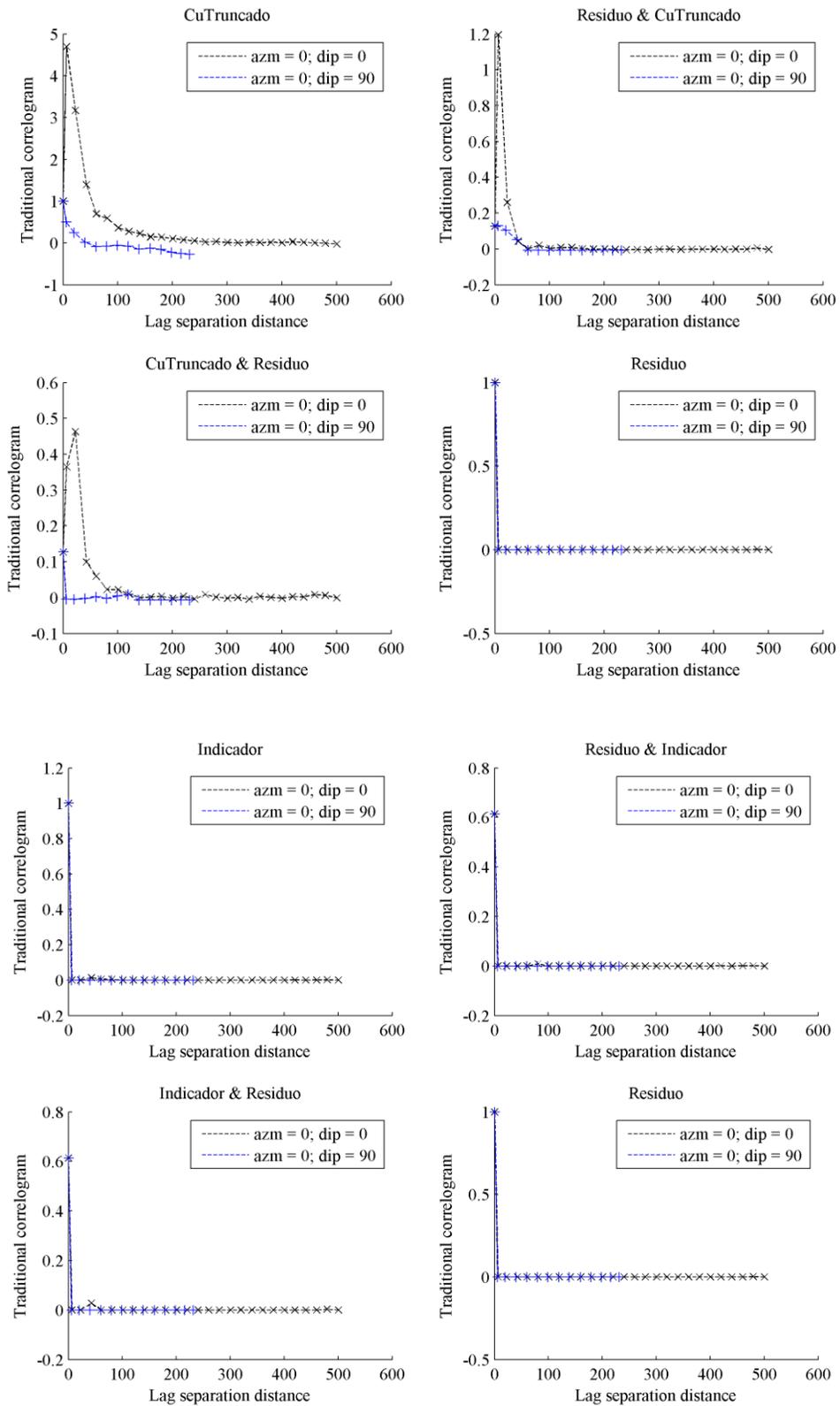


FIGURA 43. CORRELOGRAMAS CRUZADOS RESIDUOS-COBRE TRUNCADO, RESIDUOS-INDICADOR. LEY 8%

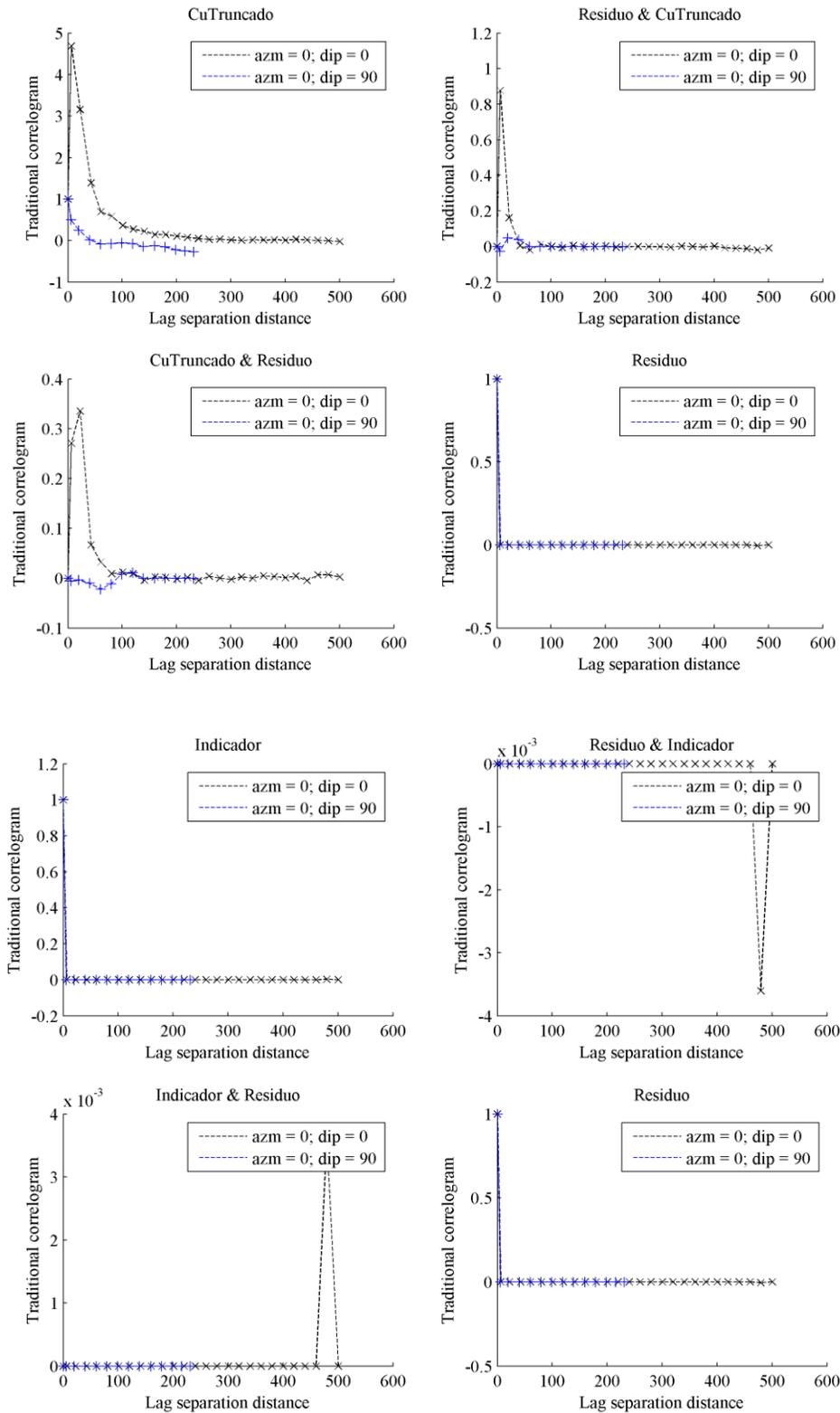


FIGURA 44. CORRELOGRAMAS CRUZADOS RESIDUOS-COBRE TRUNCADO, RESIDUOS-INDICADOR. LEY 9%

Correlograma cruzados Molibdeno

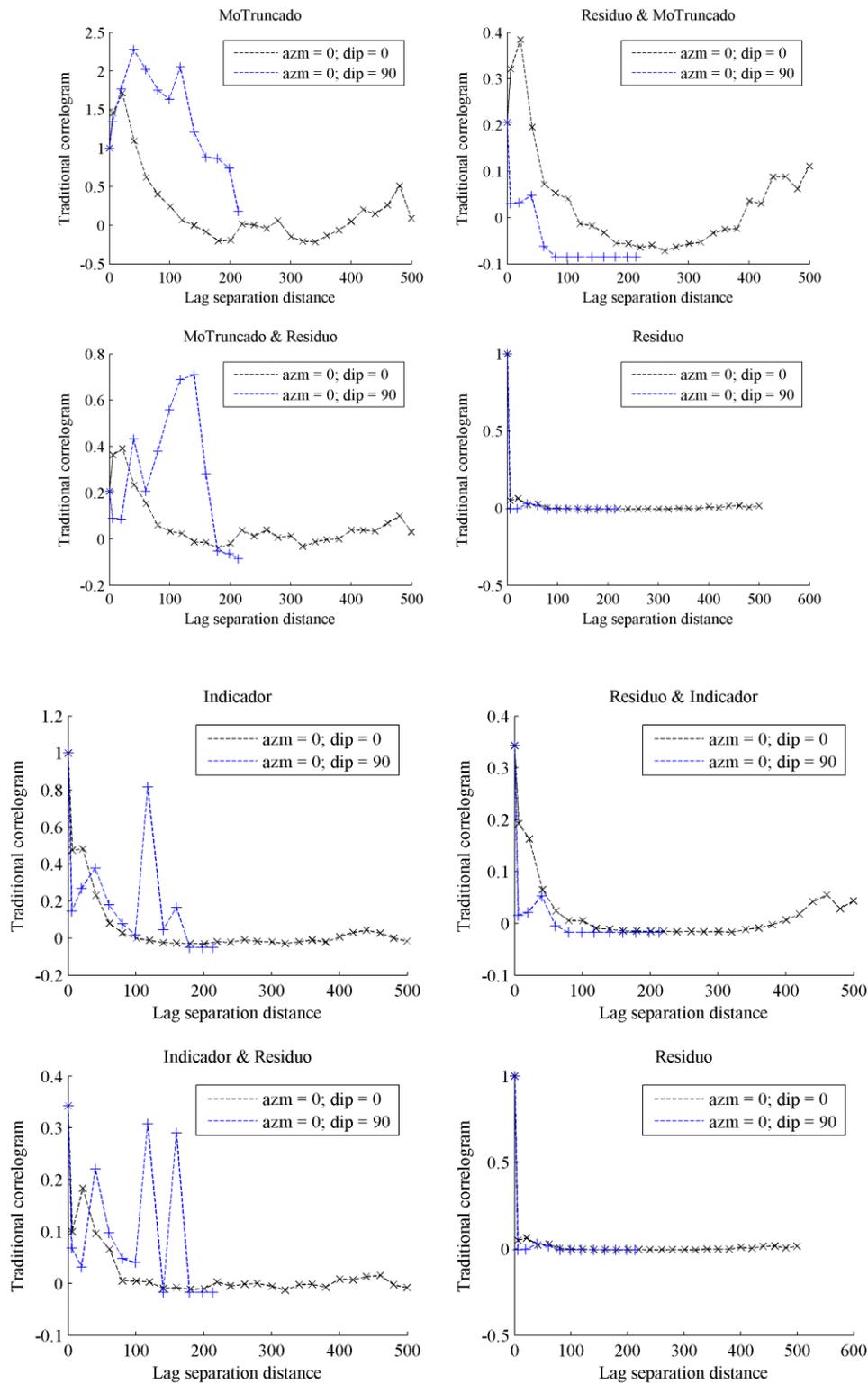


FIGURA 45. CORRELOGRAMAS CRUZADOS RESIDUOS-MOLIBDENO TRUNCADO, RESIDUOS-INDICADOR. LEY 400 PPM

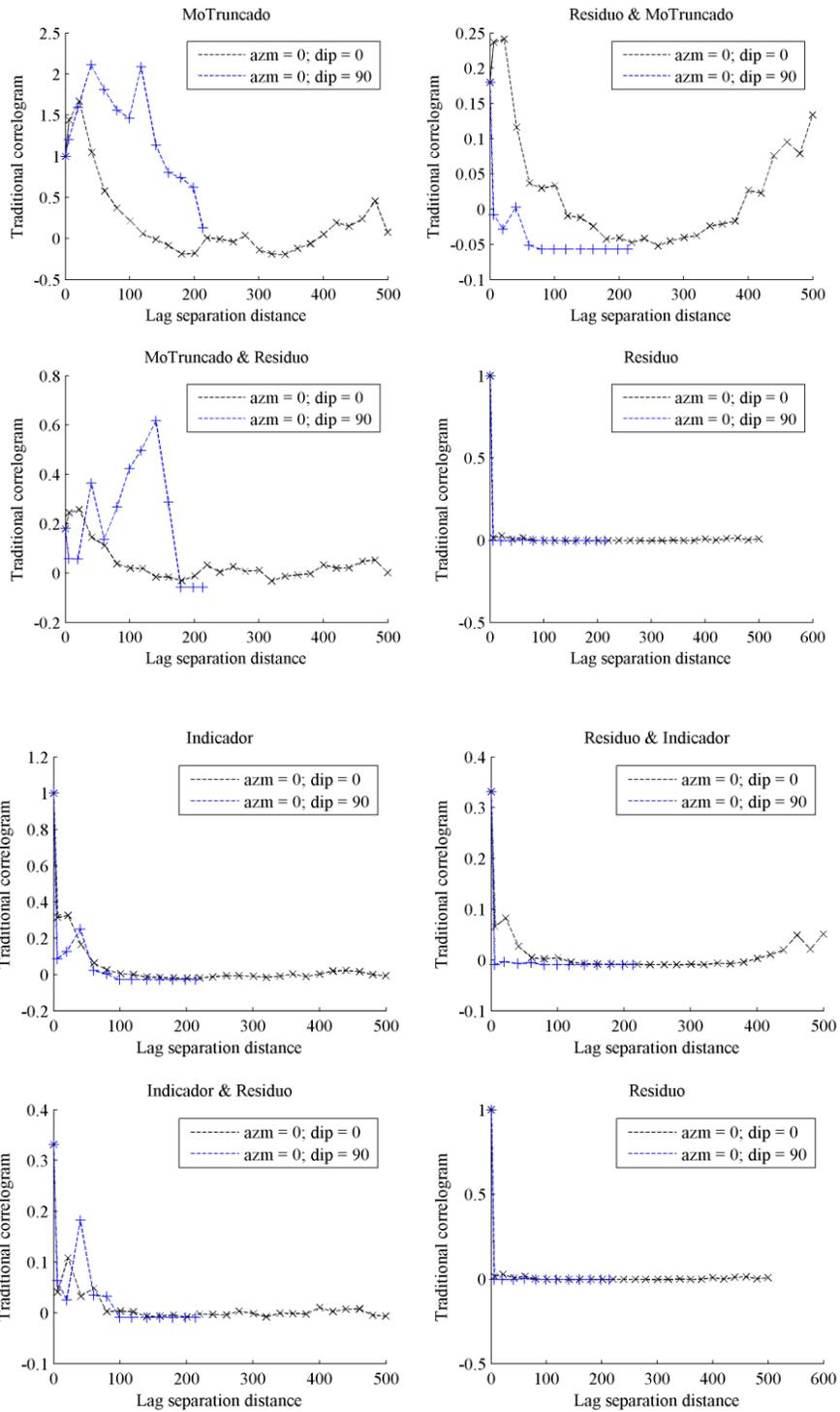


FIGURA 46. CORRELOGRAMAS CRUZADOS RESIDUOS-MOLIBDENO TRUNCADO, RESIDUOS-INDICADOR. LEY 500 PPM

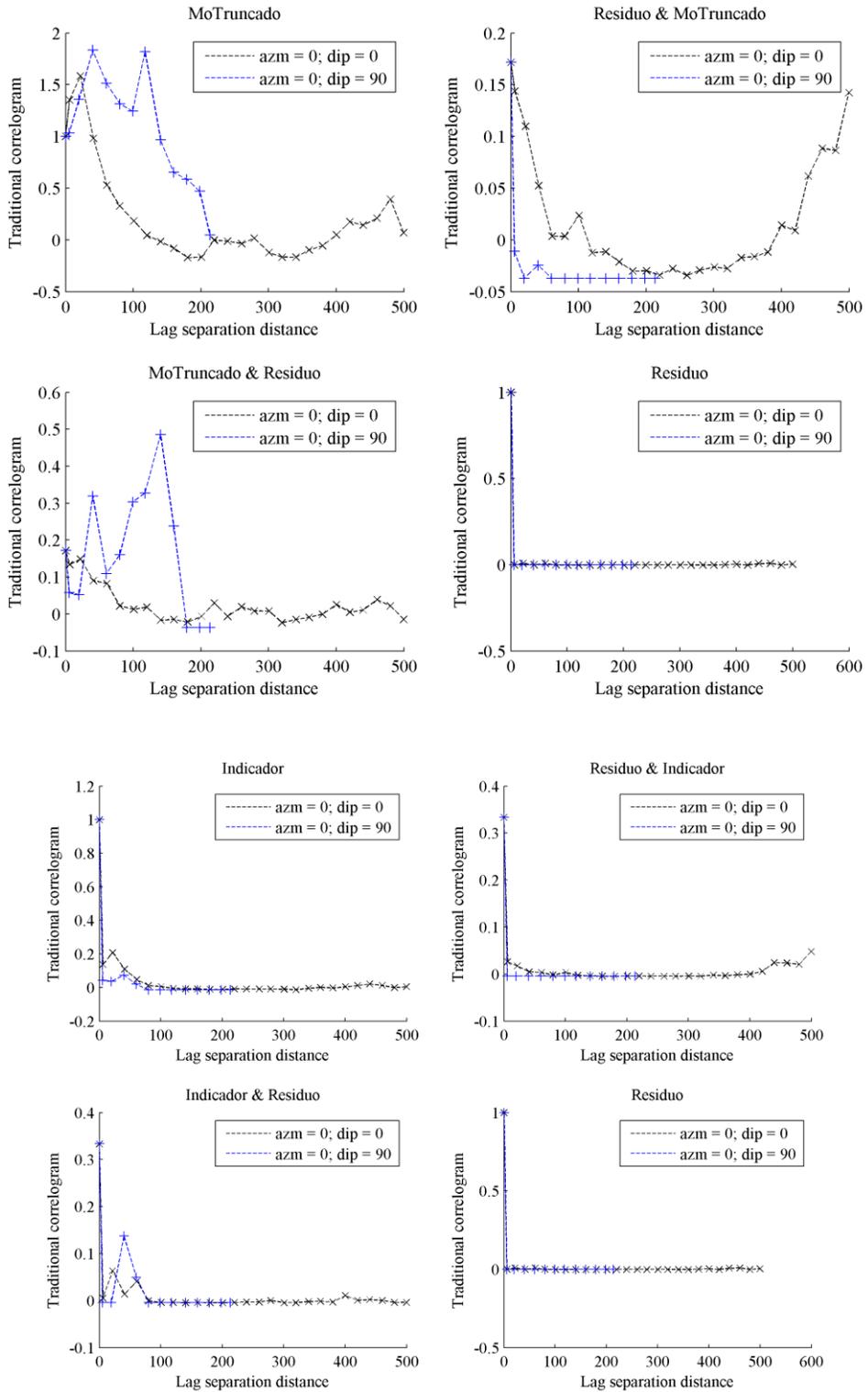


FIGURA 47. CORRELOGRAMAS CRUZADOS RESIDUOS-MOLIBDENO TRUNCADO, RESIDUOS-INDICADOR. LEY 700 PPM

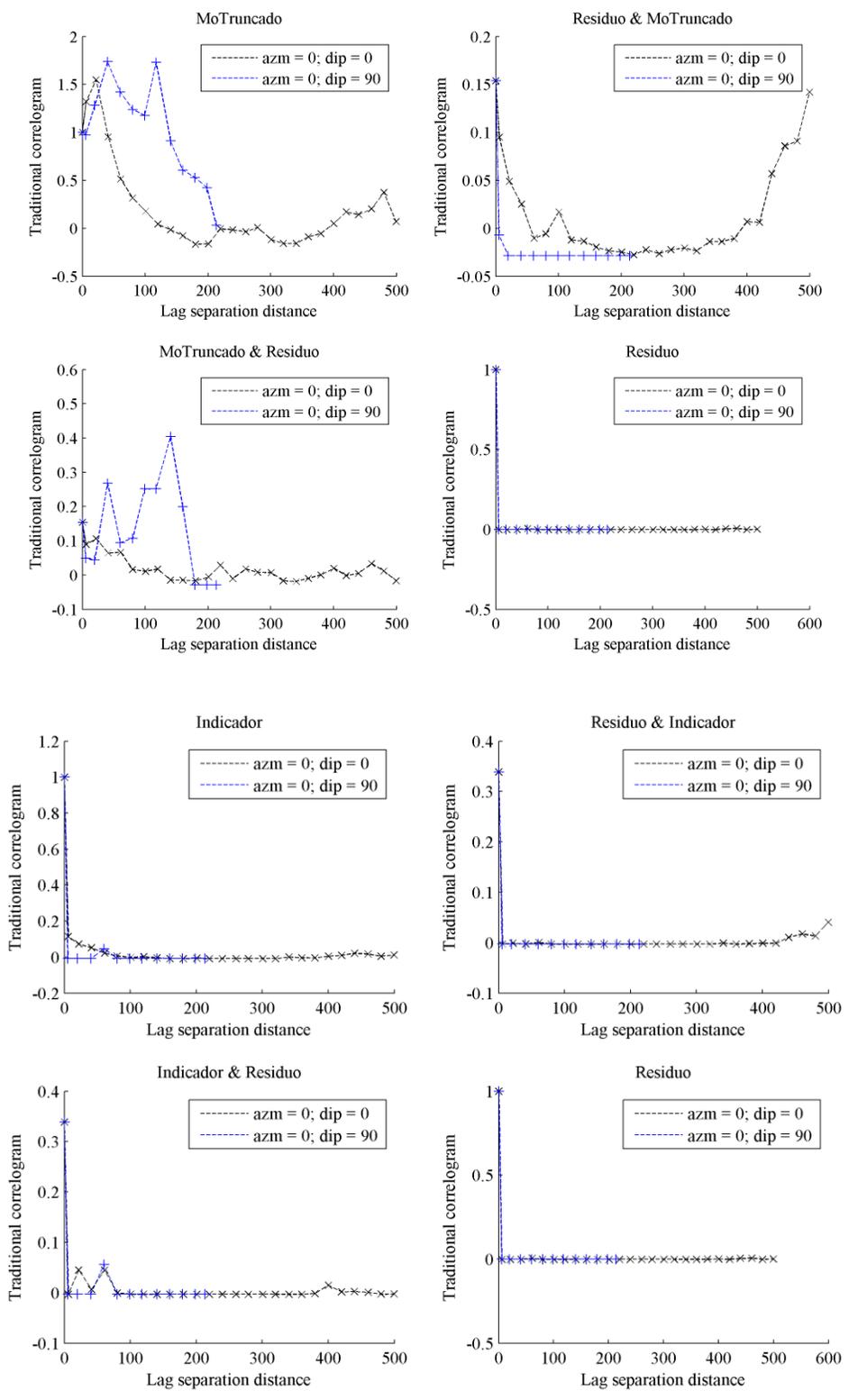


FIGURA 48. CORRELOGRAMAS CRUZADOS RESIDUOS-MOLIBDENO TRUNCADO, RESIDUOS-INDICADOR. LEY 900 PPM

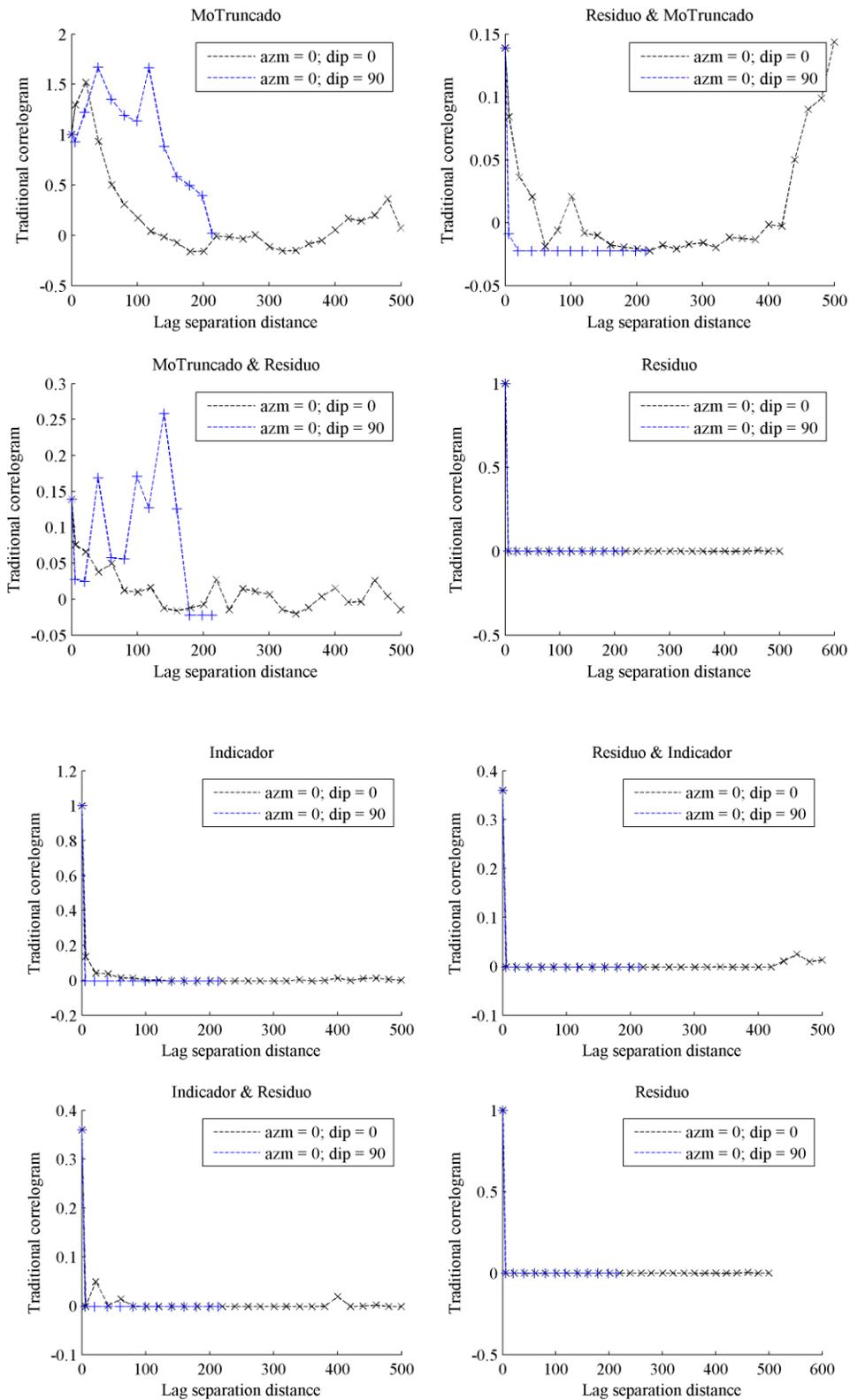


FIGURA 49. CORRELOGRAMAS CRUZADOS RESIDUOS-MOLIBDENO TRUNCADO, RESIDUOS-INDICADOR. LEY 900 PPM

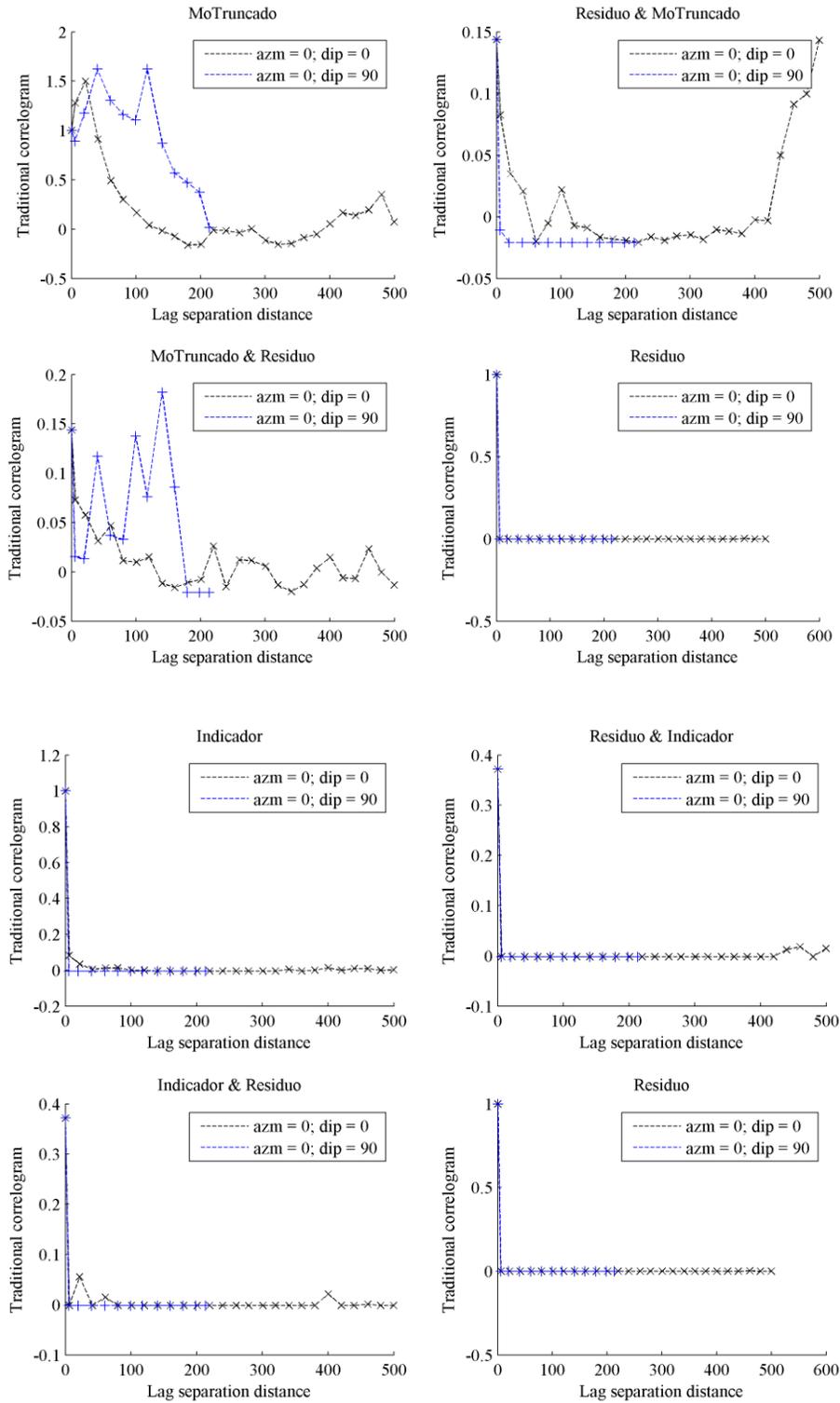


FIGURA 50. CORRELOGRAMAS CRUZADOS RESIDUOS-MOLIBDENO TRUNCADO, RESIDUOS-INDICADOR. LEY 1000 PPM