



UNIVERSIDAD DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE MINAS

**APLICACIÓN DEL MUESTREADOR DE GIBBS A LA
SIMULACIÓN CONDICIONAL DE UNIDADES GEOLÓGICAS**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN MINERÍA
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL DE MINAS

ALAN CRISTÓBAL TRONCOSO MORALES

PROFESOR GUÍA

XAVIER EMERY

MIEMBROS DE LA COMISIÓN

ALEJANDRO CÁCERES SAAVEDRA

NELSON MORALES VARELA

DAISY ARROYO FERNÁNDEZ

SANTIAGO DE CHILE

2016

Resumen

La determinación de unidades geológicas (tales como litologías, alteraciones y zonas minerales) tiene una gran importancia en diversos ámbitos. En el específico de un yacimiento minero, permite optimizar diversas operaciones unitarias tales como la compra eficiente de explosivos, que depende de la dureza de las rocas en las minas, o el uso adecuado de reactivos químicos (espumantes, colectores y modificadores) para el proceso de flotación en las plantas de sulfuros de cobre.

Es por esto que se han elaborado técnicas para modelar esta propiedad, desde estimaciones e interpretaciones determinísticas hasta técnicas de simulación estocástica. Las estimaciones tienen problemas asociados al suavizamiento entre contactos geológicos. Las simulaciones han dado mejor respuesta, al reproducir la continuidad espacial de las unidades geológicas y al permitir tener múltiples escenarios para medir incertidumbre y realizar análisis de riesgos. Entre los modelos para simular unidades geológicas destacan dos modelos basados en el formalismo de las funciones aleatorias Gaussianas: el modelo Gaussiano truncado y el plurigaussiano.

En la aplicación de ambos modelos, se utiliza el muestreador de Gibbs, algoritmo iterativo que permite simular los elementos de un vector Gaussiano condicionado a ciertas restricciones. Este algoritmo es utilizado para convertir los datos de entrada (sobre unidades geológicas) en datos Gaussianos condicionados a estructuras geológicas y/o espaciales inferidas a partir de los datos de sondajes presentes en el yacimiento. Para ello, el muestreador de Gibbs requiere utilizar kriging simple para determinar los sucesivos valores del vector Gaussiano a simular. A su vez, esta práctica requiere invertir una matriz de varianza-covarianza, lo cual es a menudo prohibitivo en términos de recursos computacionales. Es por esta razón que se suele utilizar una alternativa, el muestreador de Gibbs tradicional, que utiliza una vecindad móvil para usar un subconjunto de todos los datos. Sin embargo, los vectores aleatorios Gaussianos obtenidos por esta metodología no convergen en distribución a medida que aumentan las iteraciones.

Por lo anterior, se propone estudiar un nuevo algoritmo, el muestreador de Gibbs dual, el cual evade la inversión de esta matriz, utilizando toda la información disponible para su aplicación. Para el caso de la simulación no condicional, esta metodología da buenos resultados, ya que se obtiene una mejor convergencia al aumentar las iteraciones. En esta tesis, se examina la convergencia del algoritmo para el caso de la simulación condicional.

Se estudia dos tipos de yacimiento, uno sintético en el cual se conocen todos los parámetros, y uno real de hierro. En ambos casos, se comprueba que el muestreador de Gibbs tradicional no converge a la distribución deseada a medida que las iteraciones aumentan, mientras que los resultados del muestreador de Gibbs dual mejoran consistentemente a medida que las iteraciones avanzan. Se corrobora entonces que esta última metodología funciona de una mejor manera que aquella usada actualmente, contribuyendo así a mejorar las aplicaciones industriales dando una alternativa a la existente, aunque el costo computacional es mayor.

Abstract

The determination of geological units (such as lithology, alterations and mineral zones) has a huge value in different fields. In the specific case of an ore deposit, it allows the optimization of different mining operations, for instance, the efficient purchase of mining explosives, which depend of the rock type, or the best way to use different froth flotation chemical reactivés (frothers, collectors and modifiers), etc.

This is why different techniques have been created to model this property, from estimations and deterministic interpretations to stochastic simulation techniques. Estimations have issues related to the smoothing of geological contacts. On the other hand, simulations have better outcomes, giving a good reproduction of the spatial continuity between the geological units, allowing having many scenarios in order to measure the uncertainty and to perform a risk analysis. There are many models for simulating geological units, but two of them (the truncated Gaussian and the plurigaussian) will stand out in this work, both based on the Gaussian random field model.

To carry out the simulation in both models, the Gibbs sampler has to be used. This is an iterative algorithm that allows simulating a Gaussian vector conditioned to certain constraints. This algorithm is meant to transform the input data (on the occurrence of geological units) into Gaussian data, conditioned to the geological and/or spatial structures inferred from the drill hole data of the ore deposit. To this end, the Gibbs sampler uses simple kriging to obtain the successive values of the Gaussian vector to simulate. This system requires the inversion of a variance-covariance matrix, which often requires prohibitive computer resources. This is the main reason for the use of an alternative method, called traditional Gibbs sampler, which relies on a moving neighborhood in order to use a subset of the data. Nevertheless, the Gaussian random vectors obtained with this methodology do not converge in distribution as the number of iterations increases.

This is why the study of a new algorithm, the dual Gibbs sampler, is proposed, which evades the inversion of this matrix using all the available information for its application. For non-conditional simulations, this methodology gives good outcomes, since the convergence is guaranteed as the number of iterations increases. This work examines the convergence results for the conditional simulation case.

Two ore deposits, a synthetic one for which all the parameters are known and a real iron deposit, are considered. In both cases, it is checked that the traditional Gibbs sampler does not converge to the desired distribution as the number of iterations increases in both, whereas the dual Gibbs sampler shows a consistent improvement of the outputs as the number of iterations increases. This corroborates that the latter methodology works in a better way than the former one, contributing thus to better industrial applications by giving an improved alternative, although at a higher computer cost.

Dedicatoria

A mi tata que ya no se encuentra conmigo, pero está en mi corazón A mi mamá y papá, abuelos, tíos, primo, amigos, profesores.

Al profesor guía Xavier Emery, quien me prestó su apoyo y conocimiento en todo momento para la finalización de este trabajo.

A las diversas personas que de alguna manera u otra estuvieron ahí aportando de acuerdo a sus posibilidades.

“Una simulación es una mentira que intenta decir la verdad”

Xavier Emery, 2015

Agradecimientos

A las primeras personas que quiero agradecer este trabajo, que es el producto final de un largo camino, es mi familia, en específico, a mis papás. A mi mamá, quien siempre, hasta el día de hoy, ha sido la persona que me ha apoyado guiándome y aconsejándome en cada decisión que he tomado. A mi papá, quien influyó en mi manera de ver la vida de manera más pragmática y racional, lo cual estoy gratamente agradecido. A mi familia materna, que incluye a mi mami, quien me recibe con la mejor sonrisa cada vez que voy a Ovalle y me cocina las mejores comidas, mi tío Pato y tía Paola, que brindan su apoyo y compañía cada vez que los veo, mi tía Pelu que sigue cada capricho que se me ocurre y mi primo Felipe que me acompañó desde la niñez como un hermano, el cual nunca tuve. La familia de mi padre, que incluye a mi nona y mi tía Gigi, que estuvieron en esos momentos críticos y álgidos de la vida universitaria y me acompañaron como pudieron dándome consejos y visitándome.

Al profesor Xavier Emery, quien es a mí parecer, uno de los mejores académicos que la universidad tiene. Como profesor guía un siete, siempre atento a las inquietudes que me surgían a medida que avanzaba en este trabajo de tesis. Como su auxiliar, preocupado del aprendizaje de sus alumnos y como persona, una de las mejores que he conocido. Siempre dispuesto a ayudar, incluso a las 10 de la noche en su oficina y respondiendo mails en la madrugada. Al profesor Co-guía, Alejandro Cáceres, por sus comentarios y aportes que añadieron más profundidad a este trabajo. A Daisy Arroyo quien aportó con sus comentarios acertados frente a definiciones no completas o poco claras en los inicios de este trabajo.

A mis amigos que me acompañaron en este proceso. A los de sección: Pachao, Mafiu, Mario y Estargio¹ por hacer esos años de plan común, y los actuales, positivos y felices. A mis amigos mineros que conocí al entrar al departamento de minería: Xonpa, Triple C, Diago, Lefonse, Bonno, Tomenos, Seviene, CZ, Ybach y otros². Además, de aquellos que hice a lo largo de los años dentro del departamento de minas: Jamirer, Maria Camila, Ticket, Andalén, Manotro³ y otros. Además, a las personas que están a mi lado y me acompañan que no están nombradas. Todas ellas son igualmente importantes.

No puedo olvidar quien ha sido un modelo a seguir en el ámbito laboral. Mi tutor de las prácticas I y III de Codelco, el Sr. Rubén Miranda Vega. Agradecer su confianza y preocupación en el tiempo que estuve trabajando junto a él. Además, incluir a los distintos profesores en los que he sido su auxiliar o ayudante que contribuyeron a mi crecimiento como persona dándome la oportunidad de educar a distintos alumnos de esta escuela. A la prestigiosa Universidad de Chile, que, a pesar de su alta exigencia en términos académicos, me ha entregado las herramientas necesarias para ser un buen profesional. Al DIMIN que me permitió completar la ingeniería civil de minas y el magister en minería. Al DCM por darme las herramientas para terminar el minor en ingeniería de materiales.

Finalmente, al financiamiento de la Fundación COPEC-UC, vía el proyecto 2014.J.057, y de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica, vía los proyectos CONICYT / Fondecyt / Regular / N°1130085 y CONICYT PIA Anillo ACT1407.

¹ Paola Rojas, Matías Riquelme, Mario Aguilar y Sergio Liberman.

² Francisco Miranda, Camila Contreras, Diego Barrera, Alfonso Abarca, José Ignacio Bonzi, Tomás Hidalgo, Sebastián López, Cristóbal Zúñiga, José Joaquín Obach.

³ Javier Pérez, María Camila Grigaliunas, Valentina Buscaglione, Belén Marchant, Pietro Cayo.

Tabla de Contenido

1	Introducción	1
2	Objetivos.....	2
2.1	General.....	2
2.2	Específicos	2
3	Alcances	3
4	Antecedentes Generales	4
4.1	Función Aleatoria e Hipótesis de Estacionaridad	4
4.2	Variograma y Covarianza	4
4.2.1	Variograma	4
4.2.2	Covarianza	6
4.3	Simulación v/s Estimación	6
4.4	Modelo Multi-Gaussiano	6
4.4.1	Algoritmo de Bandas Rotantes	7
4.4.2	Condicionamiento.....	8
4.5	Modelo Gaussiano Truncado.....	8
4.5.1	Análisis Variográfico	8
4.5.2	Pasos para Obtener los Tipos de Roca en una Región de Interés.....	9
4.6	Modelo Plurigaussiano	9
5	Muestreador de Gibbs	10
5.1	Principio de las Cadenas de Markov.....	10
5.1.1	Propiedad de Markov.....	10
5.1.2	Homogeneidad	10
5.1.3	Convergencia	11
5.2	Simulación de un Vector Gaussiano	11
5.2.1	Simulación no Condicional.....	12

5.2.2	Simulación Condicional	16
6	Caso Sintético	20
6.1	Función Aleatoria Sin Efecto Pepita.....	20
6.1.1	Muestreador de Gibbs Tradicional	21
6.1.2	Muestreador de Gibbs Dual	25
6.2	Función Aleatoria con Efecto Pepita	26
6.2.1	Muestreador de Gibbs Tradicional	27
6.2.2	Muestreador de Gibbs Dual	31
6.3	Análisis Caso Sintético: Tiempo Computacional y Convergencia.....	33
6.3.1	Tiempo Computacional.....	33
6.3.2	Convergencia; Máximos y Mínimos	35
6.3.3	Convergencia; Test de Kolmogorov-Smirnov (K-S test).....	40
6.3.4	Convergencia; Valores Propios	42
6.3.5	Conclusiones	42
7	Caso Real.....	44
7.1	Geología de la Zona	44
7.2	Minerales de Hierro	45
7.3	Base de Datos	45
7.4	Modelamiento y Simulación del Tipo de Roca	50
7.4.1	Regla de Truncación.....	50
7.4.2	Umbral de Truncación.....	57
7.4.3	Análisis Variográfico	58
7.4.4	Simulación	62
7.5	Resultados de la Simulación del Caso Real.....	63
7.5.1	Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m] Muestreador de Gibbs Tradicional	64
7.5.2	Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m] Muestreador de Gibbs Dual	66

7.6	Análisis de Muestreador de Gibbs Caso Real.....	67
7.6.1	Muestreador de Gibbs Tradicional.....	67
7.6.2	Muestreador de Gibbs Dual.....	75
8	Conclusiones.....	81
9	Bibliografía.....	83
10	Anexos.....	86
10.1	Resultados de la Simulación del Caso Real.....	86
10.1.1	Radio de Búsqueda (300, 300, 100) [m].....	86
10.1.2	Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m] Muestreador de Gibbs Tradicional	88
10.1.3	Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m] Muestreador de Gibbs Dual	92
10.1.4	Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m] Muestreador de Gibbs Dual	95
10.2	Análisis de muestreador de Gibbs Caso Real.....	99
10.2.1	Muestreador de Gibbs Tradicional.....	99
10.2.2	Muestreador de Gibbs Dual.....	115

Índice de Tablas

Tabla I: Variograma Caso Sintético sin Efecto pepita	21
Tabla II: Condiciones de Simulación no Condicional para Muestreador de Gibbs Tradicional sin Efecto Pepita	21
Tabla III: Variograma Caso Sintético con Efecto Pepita	27
Tabla IV: Estadísticas Computacionales Caso Sintético Gibbs Tradicional.....	33
Tabla V: Estadísticas Computacionales Caso Sintético Gibbs Dual.....	34
Tabla VI: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional sin Efecto Pepita	35
Tabla VII: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Dual sin Efecto Pepita.....	36
Tabla VIII: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional con Efecto Pepita	38
Tabla IX: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Dual con Efecto Pepita	39
Tabla X: Test de Kolmogorov-Smirnov	40
Tabla XI: Valores Propios Caso Sintético Muestreador de Gibbs Tradicional	42
Tabla XII: Definición de las Variables de Estudio	45
Tabla XIII: Codificación de Tipos de Roca y Valor Variable Categórica	48
Tabla XIV: División Primer Vector Aleatorio Gaussiano	51
Tabla XV: División Segundo Vector Aleatorio Gaussiano	52
Tabla XVI: División Tercer Vector Aleatorio Gaussiano	53
Tabla XVII: División Cuarto Vector Aleatorio Gaussiano	54
Tabla XVIII: División Quinto Vector Aleatorio Gaussiano	55
Tabla XIX: División Sexto Vector Aleatorio Gaussiano.....	56
Tabla XX: Codificación de Tipo de Roca en la Variable Indicador [22].....	58
Tabla XXI: Parámetros de los Variogramas Modelados [22]	60
Tabla XXII: Radios de Búsqueda y Cantidad de Datos en la Elipsoide	62
Tabla XXIII: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 24 Datos, Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m]:.....	68

Tabla XXIV: Estadísticas Básicas Muestreador de Gibbs Tradicional, 24 Datos, Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m].....	70
Tabla XXV: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 96 Datos, Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m].....	72
Tabla XXVI: Estadísticas Básicas Muestreador de Gibbs Tradicional, 96 Datos, Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m].....	74
Tabla XXVII: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Dual, Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m]	76
Tabla XXVIII: Estadísticas Básicas Muestreador de Gibbs Dual, Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m]	78
Tabla XXIX: Resumen Estadísticas 1000 Iteraciones Muestreador de Gibbs Tradicional y Dual 1000 Iteraciones Caso Real.....	79
Tabla XXX: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 24 Datos, Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m].....	99
Tabla XXXI: Estadísticas Básicas Muestreador de Gibbs Tradicional, 24 Datos, Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m].....	101
Tabla XXXII: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 48 Datos, Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m].....	102
Tabla XXXIII: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 48 Datos, Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m].....	103
Tabla XXXIV: Estadísticas Básicas Muestreador de Gibbs Tradicional, 48 Datos, Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m].....	105
Tabla XXXV: Estadísticas Básicas Muestreador de Gibbs Tradicional, 48 Datos, Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m].....	106
Tabla XXXVI: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 96 Datos, Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m].....	107
Tabla XXXVII: Estadísticas Básicas Muestreador de Gibbs Tradicional, 96 Datos, Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m].....	109
Tabla XXXVIII: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 192 Datos, Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m].....	110
Tabla XXXIX: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 192 Datos, Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m].....	111
Tabla XL: Estadísticas Básicas Muestreador de Gibbs Tradicional, 192 Datos, Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m].....	113

Tabla XLI: Estadísticas Básicas Muestreador de Gibbs Tradicional, 192 Datos, Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m]..... 114

Tabla XLII: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Dual, Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m] 115

Tabla XLIII: Estadísticas Básicas Muestreador de Gibbs Dual, Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m] 117

Índice de Ilustraciones

Ilustración 1: Modelos Elementales para la Construcción de Variogramas Modelados	5
Ilustración 2: Variograma Objetivo de Simulación Caso Sintético sin Efecto Pepita, Dirección E-O y N-S Respectivamente	22
Ilustración 3: Simulaciones de Tipo de Roca Caso sin Efecto Pepita a Partir del Variograma Respectivo.....	22
Ilustración 4: Resultado Muestreador de Gibbs Tradicional, 1, 10, 100 ,1000 y 10000 Iteraciones Respectivamente en la Dirección E-O	23
Ilustración 5: Resultado Muestreador de Gibbs Tradicional, 1, 10, 100, 1000 y 10000 Iteraciones Respectivamente en la Dirección N-S.....	24
Ilustración 6: Resultado Muestreador de Gibbs Dual, 1, 10, 100, 1000 y 10000 Iteraciones Respectivamente en la Dirección E-O	25
Ilustración 7: Resultado Muestreador de Gibbs Dual, 1, 10, 100, 1000 y 10000 Iteraciones Respectivamente en la Dirección N-S.....	26
Ilustración 8: Variograma Objetivo de Simulación Caso Sintético con Efecto Pepita, Dirección E-O y N-S Respectivamente	27
Ilustración 9: Simulaciones de Tipo de Roca Caso sin Efecto Pepita a Partir del Variograma Respectivo.....	28
Ilustración 10: Resultado Muestreador de Gibbs Tradicional, 1, 10, 100, 1000 y 10000 Iteraciones Respectivamente en la Dirección E-O	29
Ilustración 11: Resultado Muestreador de Gibbs Tradicional, 1, 10, 100, 1000 y 10000 Iteraciones Respectivamente en la Dirección N-S	30
Ilustración 12: Resultado Muestreador de Gibbs Dual, 1, 10, 100, 1000 y 10000 Iteraciones Respectivamente en la Dirección E-O	31
Ilustración 13: Resultado Muestreador de Gibbs Dual, 1, 10, 100, 1000 y 10000 Iteraciones Respectivamente en la Dirección N-S.....	32
Ilustración 14: Muestreador de Gibbs Tradicional vs Dual Términos Computacionales.....	34
Ilustración 15: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional sin Efecto Pepita.....	36
Ilustración 16: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Dual sin Efecto Pepita Dual	37
Ilustración 17: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional con Efecto Pepita	38
Ilustración 18: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Dual con Efecto Pepita	39
Ilustración 19: K-S Test Muestreador de Gibbs Sin Efecto Pepita.....	41

Ilustración 20: K-S Test Muestreador de Gibbs Con Efecto Pepita	41
Ilustración 21: Caso Real: Campaña de Sondajes. Tipos de Roca [22]	47
Ilustración 22: Esquema Regla de Truncación Caso Real [22].....	51
Ilustración 23: Bandera de Truncación Caso Real [22]	57
Ilustración 24: Variogramas Experimentales y Modelados Gaussianos [22].....	61
Ilustración 25: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Tradicional, 24 Datos, (300, 300, 50) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones.....	64
Ilustración 26: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Tradicional, 96 Datos, (300, 300, 50) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones.....	65
Ilustración 27: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Dual, 96 Datos, (300, 300, 50) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones.....	66
Ilustración 28: Gráfico Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 24 Datos, Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m].....	69
Ilustración 29: Gráfico Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 96 Datos, Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m].....	73
Ilustración 30: Gráfico Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Dual, Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m]	77
Ilustración 31: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Tradicional, 48 Datos, (300, 300, 50) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones.....	86
Ilustración 32: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Tradicional, 192 Datos, (300, 300, 50) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones.....	87
Ilustración 33: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Tradicional, 24 Datos, (600, 600, 100) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones.....	88
Ilustración 34: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Tradicional, 48 Datos, (600, 600, 100) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones.....	89
Ilustración 35: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Tradicional, 96 Datos, (600, 600, 100) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones.....	90
Ilustración 36: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Tradicional, 192 Datos, (600, 600, 100) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones.....	91
Ilustración 37: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Dual, 24 Datos, (300, 300, 50) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones.....	92
Ilustración 38: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Dual, 48 Datos, (300, 300, 50) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones.....	93

Ilustración 39: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Dual, 192 Datos, (300, 300, 50) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones.....	94
Ilustración 40: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Dual, 24 Datos, (600, 600, 100) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones.....	95
Ilustración 41: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Dual, 48 Datos, (600, 600, 100) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones.....	96
Ilustración 42: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Dual, 96 Datos, (600, 600, 100) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones.....	97
Ilustración 43: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Dual, 192 Datos, (600, 600, 100) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones.....	98
Ilustración 44: Gráfico Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 24 Datos, Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m].....	100
Ilustración 45: Gráfico Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 48 Datos, Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m].....	104
Ilustración 46: Gráfico Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 24 Datos, Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m].....	104
Ilustración 47: Gráfico Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 96 Datos, Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m].....	108
Ilustración 48: Gráfico Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 192 Datos, Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m].....	112
Ilustración 49: Gráfico Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 192 Datos, Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m].....	112
Ilustración 50: Gráfico Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Dual, Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m]	116

1 Introducción

La simulación de vectores aleatorios Gaussianos se utiliza en muchas disciplinas de las ciencias de la tierra, en particular, para modelar fenómenos espaciales y/o temporales. Para lograr lo anterior, se han propuesto muchos algoritmos, pero en este trabajo se aborda el llamado "Muestreador de Gibbs" [1] [2]. El algoritmo consiste en comenzar con un vector arbitrario del mismo tamaño del vector deseado, actualizando iterativamente sus componentes condicionalmente a las otras del vector. En el caso Gaussiano, se utiliza el *muestreador de Gibbs tradicional con vecindad única*, que actualiza las componentes a partir del kriging simple y de una matriz de varianza-covarianza igual a la matriz de varianza-covarianza del error de predicción [3]. Estos se obtienen luego de resolver el sistema del kriging simple. Una aplicación del muestreador de Gibbs se encuentra para simular tipos de roca vía los modelos Gaussiano truncado y plurigaussiano [4] ya que para ambos se necesita tener los datos transformados a Gaussianos a partir de los datos entregados por geología de forma categórica.

A pesar de que el muestreador de Gibbs tradicional con vecindad única plantea una solución al problema en términos matemáticos, ha sido impracticable su aplicación real debido al uso excesivo de costo computacional. En efecto, se requiere invertir la matriz de varianza-covarianza de los datos disponibles, la cual se hace insostenible computacionalmente a partir de unos pocos miles de datos, siendo ésta la razón principal del uso de una versión implementable, llamada desde ahora en adelante *muestreador de Gibbs tradicional*, que utiliza kriging en una vecindad móvil, que hace una selección de datos utilizando un radio de búsqueda para resolver el sistema del kriging.

La industria tiende a pensar que el uso del muestreador de Gibbs tradicional funciona de manera perfecta, donde la selección del radio de búsqueda y cantidad de datos a utilizar son los únicos parámetros que se tienen como inputs. Sin embargo, se ha demostrado que, independiente del radio de búsqueda utilizado para la implementación, el resultado del vector (o vectores Gaussianos) tiende a diverger en el tiempo independiente de los parámetros utilizados a medida que las iteraciones avanzan [5] lo cual trae como consecuencia resultados erróneos.

Se construye así un algoritmo alternativo, implementable en la práctica que utiliza todos los datos disponibles donde se evade la necesidad de invertir la matriz de varianza-covarianza [6]. Este algoritmo ha sido mejorado simulando directamente el vector deseado sin utilizar uno auxiliar [7] llamándose *muestreador de Gibbs dual*.

Al utilizar restricciones de indicador asociados a los tipos de roca presentes en los datos conocidos, se hace necesario realizar simulación condicional. Se plantea así la utilización de una variante del algoritmo de simulación con restricciones en la matriz de transición [5].

Lo que no se ha estudiado a cabalidad es el comportamiento del muestreador de Gibbs dual en función a la cantidad de iteraciones que se deben realizar para lograr el cometido como tampoco el efecto de los vectores Gaussianos en el muestreador de Gibbs tradicional para obtener los tipos de roca al verse en evidencia la divergencia de estos y la comparación de tiempos computacionales entre el muestreador de Gibbs tradicional y el muestreador de Gibbs dual. Esta tesis busca ahondar sobre los temas antes mencionados a través de diversos análisis matemáticos y estadísticos.

2 Objetivos

2.1 General

Probar una versión alternativa del muestreador de Gibbs para la simulación de tipos de roca o, más generalmente, unidades geológicas, a través de casos de estudio, sintéticos y reales.

2.2 Específicos

Determinar el efecto de la versión alternativa en los resultados de simulaciones frente a la metodología actual, comparando variables como costo computacional, tiempos, número de iteraciones, radios de búsquedas y calidad de los resultados.

3 Alcances

Se evaluarán dos casos:

1. Yacimiento sintético con dos unidades geológicas, obtenido mediante el modelo Gaussiano truncado.
2. Yacimiento real con diez unidades geológicas, el que se simulará vía el modelo plurigaussiano.

En el caso sintético se evaluará el comportamiento de 100 realizaciones obtenidos del muestreador de Gibbs, tanto tradicional como dual, estudiándose los variogramas resultantes, los máximos y mínimos de los vectores simulados y el costo computacional.

En el caso real se evaluará el muestreador de Gibbs tradicional utilizando dos radios de búsqueda, con cantidades variables de datos dentro de la vecindad. El muestreador de Gibbs dual se evalúa con dos semillas iniciales para agregar diversidad al estudio. Para el vector Gaussiano resultante se le evalúa el mínimo, máximo y estadísticas básicas. Además, se realiza el procedimiento completo de resultados de tipos de roca utilizando ambas metodologías.

4 Antecedentes Generales

4.1 Función Aleatoria e Hipótesis de Estacionaridad

Dentro de la disciplina de la geoestadística se estudia las llamadas variables regionalizadas, es decir, variables distribuidas en el espacio, conocidas a través de una toma de muestras.

Dentro de las variables regionalizadas se encuentran:

- Variables regionalizadas continuas: Se caracterizan por pertenecer al conjunto de los números reales. Las leyes de minerales es un ejemplo de esto.
- Variables regionalizadas categóricas: Se caracterizan por pertenecer al conjunto de los números naturales. Tipos de roca o dominio geológico son ejemplos de este tipo.

Se interpreta el valor de la variable regionalizada en un determinado sitio x como una realización de una variable aleatoria $Z(x)$. El conjunto de variables aleatorias $\{Z(x): x \in \mathbb{R}\}$ constituye lo que se llama función aleatoria.

Esta función se caracteriza por su distribución espacial, que reúne todas las distribuciones de probabilidad de la forma:

$$F(Z_1, \dots, Z_n; x_1, \dots, x_n) = P(Z(x_1) < z_1, \dots, Z(x_n) < z_n)$$

Ecuación 1: Distribución Espacial de una Función Aleatoria

para todo conjunto de sitios x_1, \dots, x_n y de umbrales z_1, \dots, z_n .

Para la inferencia estadística, se suele adoptar la hipótesis de estacionaridad, la cual postula que las distribuciones y/o momentos son invariantes por una traslación en el espacio.

4.2 Variograma y Covarianza

En la búsqueda de caracterizar la dependencia espacial de las variables aleatorias en función de la correlación existente entre ellas, se utilizan los momentos de segundo orden, variogramas y covarianza [8].

4.2.1 Variograma

Es una de las herramientas más utilizadas en el estudio variográfico, tanto en su versión directa, (univariable), como cruzada (multivariable). Corresponde a una medida de desestructuramiento de una variable regionalizada en el espacio. El variograma experimental directo se muestra a continuación:

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2|N(h)|} \sum_{N(h)} [z(x_a) - z(x_a + h)]^2$$

Ecuación 2: Variograma Experimental Directo

donde la variable regionalizada es $z(x)$, $N(h)$ corresponde al número de pares de datos disponibles para una separación dada por un vector h , siendo $\{(x_a, x_a + h), a = 1, \dots, N(h)\}$ las posiciones de estos pares de datos.

El variograma cruzado, para el caso multivariable, se define entre dos variables regionalizadas z_i y z_j como:

$$\widehat{\gamma}_{ij}(h) = \frac{1}{N(h)} \sum [z_i(x_a) - z_i(x_a + h)][z_j(x_a) - z_j(x_a + h)]$$

Ecuación 3: Variograma Experimental Cruzado

Los variogramas antes mostrados se obtienen de manera experimental ya que considera solamente determinadas distancias y orientaciones de acuerdo al vector h . Para ser utilizados en cálculos posteriores, deben modelarse debido a que se necesitan en forma continua. Se utilizan así variogramas anidados.

Entre los más comunes están: el variograma esférico, exponencial y Gaussiano. Se considera la definición de un efecto pepita para efectos de discontinuidad en el origen.

A continuación, se muestran figuras de variogramas típicos:

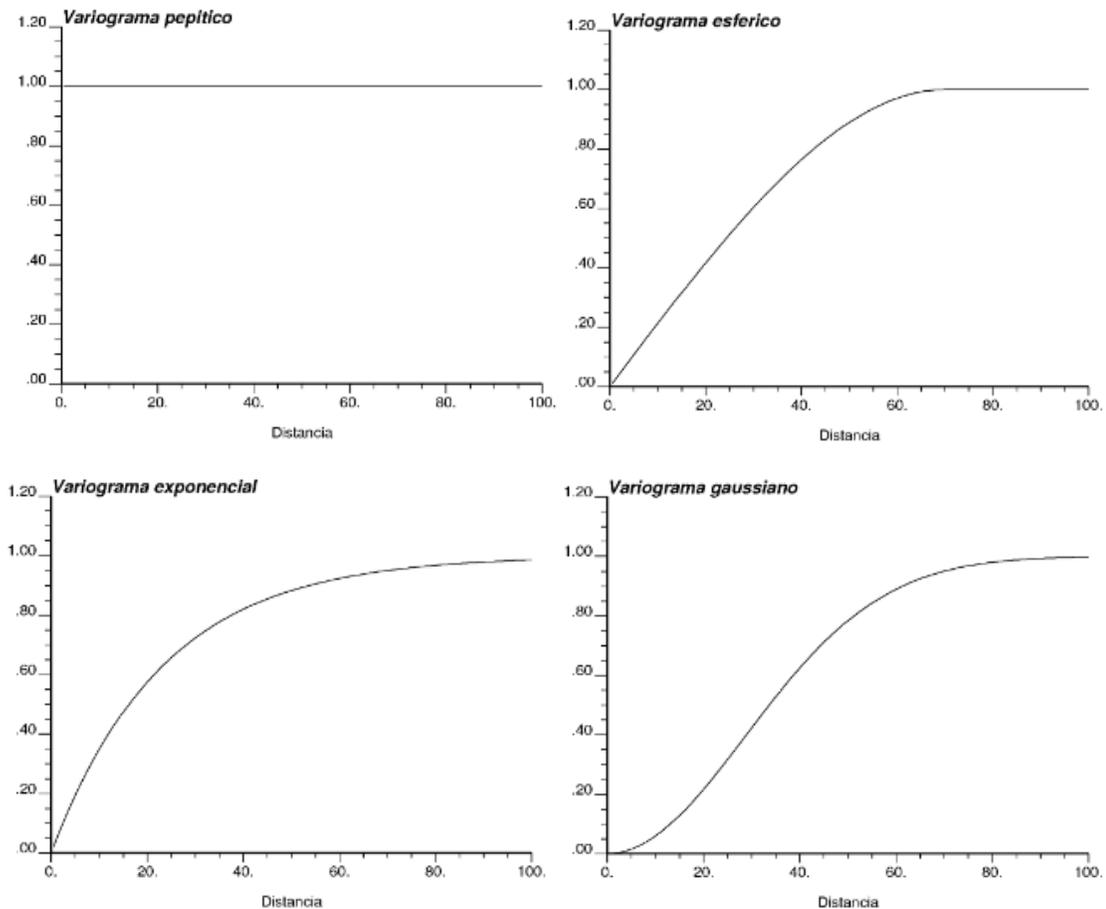


Ilustración 1: Modelos Elementales para la Construcción de Variogramas Modelados

4.2.2 Covarianza

La función covarianza permite medir el grado de similitud entre dos variables regionalizadas z_i y z_j medidas en x_a y x_{a+h} respectivamente. La función experimental se representa mediante la siguiente expresión:

$$\widehat{C}_{ij}(h) = \frac{1}{|N_{ij}(h)|} \sum_{N_{ij}(h)} [z_i(x_a) - m_i][z_j(x_{a+h}) - m_j]$$

Ecuación 4: Covarianza Experimental

donde $N_{ij}(h)$ es análogo al representado en la sección de variograma y m_i, m_j representan las medias de las variables z_i y z_j respectivamente.

En esta tesis se utiliza el principio de estacionaridad de segundo orden y paridad, por ende, el variograma cruzado y la covarianza cruzada se relacionan mediante la siguiente expresión:

$$\gamma_{ij}(h) = C_{ij}(0) - C_{ij}(h)$$

Ecuación 5: Relación Variograma y Covarianza

Al igual que el variograma, la función covarianza considera los mismos parámetros para su modelamiento.

4.3 Simulación v/s Estimación

Las técnicas de determinación de tipos de rocas se dividen en modelos determinísticos y modelos estocásticos. Mientras que los primeros se basan en la experiencia operacional, métodos manuales, técnicas gráficas e interpretaciones de vista y secciones, los segundos se dividen en estimaciones y simulaciones, los cuales utilizan herramientas matemáticas para obtener resultados cuantificables capaces de reproducir la variabilidad del fenómeno geológico.

En el contexto del presente trabajo, se puede definir simulación como un modelo numérico que trata de reproducir la variable regionalizada de estudio, es decir, reproduce sus características estadísticas y espaciales. Las técnicas de simulación se basan en la interpretación de la variable regionalizada como una realización de una función aleatoria y en el modelamiento de su distribución espacial. La finalidad es generar otras realizaciones de esta función aleatoria independientes con la misma distribución espacial. Mientras que el kriging y otros métodos de interpolación (estimación) suavizan la realidad, por ejemplo, los contactos geológicos, las realizaciones presentan la misma variabilidad espacial de la variable regionalizada real. [9].

4.4 Modelo Multi-Gaussiano

Las técnicas de simulación tienen como objetivo reproducir la distribución espacial de la función aleatoria estudiada, sin embargo, esta restricción es muy fuerte, pues en general no es posible inferir una distribución a partir de una cierta cantidad de datos (sondajes de diamantina, por ejemplo). Una excepción lo constituye el caso de las funciones aleatorias multi-Gaussianas, para las cuales la distribución espacial queda enteramente caracterizada por sus dos primeros

momentos, luego el modelo se reduce a especificar una esperanza y una función de covarianza o un variograma.

Como la distribución de la función aleatoria $\{Z(x): x \in \mathbb{R}^d\}$ que se desea simular no tiene distribución Gaussiana, no se trabaja directamente sobre ella, sino que sobre su transformada Gaussiana $\{Y(x): x \in \mathbb{R}^d\}$, definida por:

$$Z(x) = \Phi[Y(x)]$$

Ecuación 6: Transformada Gaussiana

con $\Phi = F^{-1} \circ G$ (función de anamorfosis Gaussiana), donde F y G son las funciones de distribución de $Z(x)$ y de la Gaussiana estándar respectivamente.

Al hacer la hipótesis que $\{Y(x): x \in \mathbb{R}^d, d \in Z^+\}$ tiene una distribución multi-Gaussiana implica que la densidad de probabilidad de un conjunto de valores ubicados en los sitios $\{x_1, \dots, x_n\}$ es de la forma:

$$g(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sqrt{\det(C)}} \exp\left\{-\frac{1}{2} y^t C^{-1} y\right\}$$

Ecuación 7: Densidad de Probabilidad Multi-Gaussiana

con $y = (y_1, \dots, y_n)^t$ y C la matriz de varianza-covarianza de $(Y(x_1), \dots, Y(x_n))$. Las distribuciones de probabilidad solo dependen de las varianzas y covarianzas, por lo que el modelo queda enteramente determinado una vez que se ha ajustado la función de covarianza o, equivalentemente, el variograma de los datos transformados [9].

En la búsqueda de encontrar un algoritmo multi-Gaussiano que permita reproducir los tipos de rocas en sectores sin información necesario para el paso dos de la subsección 4.5.2, se utiliza el algoritmo de bandas rotantes debido a su rapidez, reproducción exacta de la covarianza (variograma) deseada y obtención de una función analítica de la función aleatoria buscada. Su implementación y condicionamiento se muestra en las dos subsecciones siguientes.

4.4.1 Algoritmo de Bandas Rotantes

Este algoritmo de simulación reduce el problema de la simulación en un espacio de varias dimensiones a un problema de simulación unidimensional, permitiendo utilizar ventajosamente algoritmos de simulación limitados a espacios de una dimensión o demasiado lentos de poner en marcha en espacios de varias dimensiones. En su esencia, el método consiste en construir simulaciones a lo largo de rectas que discretizan el espacio, esparcir estas simulaciones al espacio entero y sumarlas:

$$Y(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N Y_i^1(\langle X|u_i \rangle)$$

Ecuación 8: Algoritmo de Bandas Rotantes

donde $\{u_i: i = 1, \dots, N\}$ son direcciones del espacio, $\{Y_i^1: i = 1, \dots, N\}$ son simulaciones unidimensionales independientes y $\langle \cdot | \cdot \rangle$ representa el producto escalar usual. Los vectores se pueden elegir con direcciones uniformes o, preferentemente, casi regularmente distribuidas. El número de direcciones a utilizar se elige usualmente en varios miles a cientos de miles.

4.4.2 Condicionamiento

Una simulación se dice condicional cuando restituye los valores de los datos de los sitios de muestreo $\{X_\alpha: \alpha = 1, \dots, n\}$. Si bien algunos algoritmos permiten obtener directamente simulaciones condicionales, existe un procedimiento general basado en una etapa de kriging, que permite convertir una simulación no condicional a una condicional [8].

4.5 Modelo Gaussiano Truncado

Se define una función aleatoria categórica (indicador) al truncar una función aleatoria continua $\{Y(x): x \in \mathbb{R}^d\}$ de distribución espacial multi-Gaussiana

$$I(x; y) = \begin{cases} 1 & \text{si } Y(x) < y \\ 2 & \text{si } Y(x) \geq y \end{cases}$$

Ecuación 9: Modelo Gaussiano Truncado 2 Tipos de Roca

donde el valor del umbral y define la proporción del espacio ocupada por cada unidad geológica de acuerdo a una distribución normal estándar.

4.5.1 Análisis Variográfico

En la práctica se tienen datos del indicador de las unidades geológicas (1 o 2, en este caso) en los sitios donde se realiza el muestreo, por ende, se puede calcular $\gamma_{I,y}(h)$ de la variable categórica mediante la Ecuación 10.

$$\gamma_{I,y}(h) = G(y)[1 - G(y)] - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\arcsen[1-y(h)]} \exp\left[-\frac{y^2}{1 + \sen\theta}\right] d\theta$$

Ecuación 10: Relación Entre Variograma Indicador y Variograma Gaussiano, Caso Gaussiano Truncado

Sin embargo, la expresión anterior es compleja de desarrollar, por lo tanto, se suele utilizar un desarrollo de polinomios de Hermite $\{H_p, p \in \mathbb{N}\}$ mostrado en la Ecuación 11.

$$\gamma_{I,y}(h) = G(y)[1 - G(y)] - g(y)^2 \sum_{p=1}^{\inf} \frac{1}{p} H_{p-1}^2(y) [1 - \gamma(h)]^2$$

Ecuación 11: Polinomios de Hermite para Cálculo de Variograma de Indicador

donde H_p corresponde al polinomio de Hermite normalizado de grado p .

Este variograma controla la regularidad de las fronteras de las dos unidades geológicas.

Además, el variograma es el encargado de dar la forma a la matriz de varianza-covarianza que se usa a futuro.

4.5.2 Pasos para Obtener los Tipos de Roca en una Región de Interés

Una vez determinado el modelo variográfico, se puede definir la simulación de la variable indicador [10]. Sea d un entero positivo y considérese una variable indicador obtenida por la truncación de una función aleatoria gaussiana estacionaria $Y = \{Y(x): x \in \mathbb{R}^d\}$ dado un umbral $y \in \mathbb{R}$.

1. Simular $Y(x)$ en los sitios con datos, de acuerdo a la variable indicador $I(x; y)$ (Muestreador de Gibbs que se describirá en el capítulo siguiente).
2. Simular $Y(x)$ en los sitios donde se busca simular la variable indicador condicionalmente a los datos obtenidos de la etapa anterior (Cualquier algoritmo de simulación, como el algoritmo de bandas rotantes).
3. Truncar $Y(x)$ simulada, para obtener una simulación de $I(x; y)$.

4.6 Modelo Plurigaussiano

Para dar mayor flexibilidad al tener más de dos unidades geológicas, se plantea la idea de trabajar con varias funciones aleatorias Gaussianas. Para tres tipos de unidades se plantea

$$I(x; y_1, y_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } Y_1(x) < y_1 \\ 2 & \text{si } Y_1(x) \geq y_1 \text{ e } Y_2(x) < y_2 \\ 3 & \text{si } Y_1(x) \geq y_1 \text{ e } Y_2(x) \geq y_2 \end{cases}$$

Ecuación 12: Variables Indicador Modelo Plurigaussiano

Se tienen amplios parámetros libres, como el número de funciones aleatorias Gaussianas, sus variogramas, la definición de truncación, etc. En la práctica, se utiliza una “bandera de truncación” que influye en los contactos entre unidades geológicas y en sus jerarquías. Los umbrales influyen en las proporciones del espacio ocupadas por las unidades geológicas y los variogramas de las funciones aleatorias Gaussianas influyen en los variogramas de los indicadores de cada unidad geológica.

Los siguientes pasos de simular en sectores sin información y luego truncar es un símil del modelo Gaussiano truncado.

5 Muestreador de Gibbs

5.1 Principio de las Cadenas de Markov

El objetivo es simular un vector aleatorio X con valores en un espacio Ω y función distribución de probabilidad π dada. Para simplificar, se supondrá que π es estrictamente positiva sobre Ω y que Ω es finito o numerable, pero la teoría se extiende a espacios más complejos.

El principio de simulación iterativa es construir una sucesión de vectores aleatorios $\{X_k: k \in \mathbb{N}\}$ cuyas distribuciones convergen hacia π cuando k tiende a infinito.

Se consideran las siguientes hipótesis simplificadoras para la sucesión de estados.

5.1.1 Propiedad de Markov

El vector X_k sólo depende del vector anterior X_{k-1} . Más precisamente:

$$(X_k | X_0, \dots, X_{k-1}) = (X_k | X_{k-1})$$

Ecuación 13: Propiedad de Markov

5.1.2 Homogeneidad

La distribución de probabilidad para pasar de X_{k-1} a X_k (llamado matriz o núcleo de transición) no depende de k :

$$\forall x, y \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N}, P(x, y) = P(X_k = y | X_{k-1} = x)$$

Ecuación 14: Homogeneidad

Se puede construir realizaciones de los vectores $\{X_k: k \in \mathbb{N}\}$ conociendo:

- Un vector inicial $X_0 = x_0$
- Un núcleo de transición P

La transición de orden k se escribe

$$P(X_k = y | X_0 = x) = P^k(x, y)$$

Ecuación 15: Transición de Orden k

La distribución de X_k converge hacia la distribución π deseada, independientemente del vector inicial, si y sólo si

$$\forall x, y \in \Omega, \lim_{k \rightarrow \infty} P^k(x, y) = \pi(y)$$

Ecuación 16: Convergencia de la Cadena de Markov

5.1.3 Convergencia

Para asegurar que la distribución de los vectores de la cadena converja hacia la distribución π deseada, con π llamado límite ergódico del núcleo P , se hace necesario y suficiente que tres propiedades se cumplan

- Irreductibilidad

Todos los vectores en Ω comunican entre sí, es decir, se puede pasar de cualquier vector a cualquier otro en un número finito de transiciones, es decir,

$$\forall x, y \in \Omega \times \Omega, \exists k, P^k(x, y) > 0$$

Ecuación 17: Irreductibilidad

- Aperiodicidad

La cadena no está forzada en hacer ciclos periódicos de transiciones. Esta propiedad se debe a que:

$$\forall x, y \in \Omega \times \Omega, \exists k > k_0, P^k(x, y) > 0$$

Ecuación 18: Aperiodicidad

- Invarianza de π por el núcleo de transición

La distribución π es invariante por el núcleo P si X_k tiene distribución π . Esto implica que X_{k+1} tiene distribución π . Lo anterior se traduce como sigue

$$\forall y \in \Omega, \sum_{x \in \Omega} \pi(x)P(x, y) = \pi(y)$$

Ecuación 19: Invarianza de la Distribución

Si estas tres propiedades se cumplen, se tiene la convergencia de acuerdo a la Ecuación 16.

5.2 Simulación de un Vector Gaussiano

El algoritmo comienza con un vector arbitrario, llamado en esta tesis $Y^{(0)}$, que se actualiza sucesivamente, ya sea, una o más componentes del vector condicionadas a las otras componentes. Debido al hecho de que se utiliza el kriging simple para actualizar las componentes asociadas a coordenadas espaciales (caso de una función aleatoria Gaussiana), buscándose los ponderadores de este para resolver el sistema, en la práctica se utilizan algunas simplificaciones, como la utilización de las componentes más cercanas ya que se requiere invertir la matriz de varianza-covarianza que, sobre pocos miles de componentes, se hace impracticable (Kriging en vecindad móvil) [11]. Sin embargo, la convergencia del muestreador de Gibbs no está asegurada bajo esta metodología [10] ya que como se revisa en la subsección 5.1.3, se deben cumplir tres propiedades. La metodología del muestreador de Gibbs con vecindad móvil no cumple la última de ellas.

Como consecuencia de lo anterior, se investiga el uso de una variante del muestreador de Gibbs que utiliza todas las componentes de la región para actualizar una componente a la vez de manera iterativa creándose un algoritmo llamado muestreador de Gibbs dual [6].

En este trabajo de tesis se llama iteración a la actualización de todas las componentes del vector Gaussiano, esto es, si se realizan n iteraciones, cada componente del vector Gaussiano se actualiza n veces.

A continuación se describe el muestreador de Gibbs en sus versiones no condicional y condicional.

5.2.1 Simulación no Condicional

Es de interés simular un vector aleatorio Gaussiano $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ con media 0 y matriz de varianza-covarianza $C = [C_{i,j}]_{i,j=1,\dots,n}$ teniendo en sus diagonales el valor de uno (varianza), esto es, $\forall i \in \{1, \dots, n\}, C_{ii} = 1$.

Se presentan una serie de algoritmos que realizan una simulación no condicional donde se dan detalles de su implementación.

5.2.1.1 Algoritmo 1: Muestreador de Gibbs Tradicional con Vecindad Única

Para simular Y se define el siguiente algoritmo:

- 1) Se inicializa la simulación mediante un vector arbitrario $Y^{(0)}$ (por ejemplo, un vector de ceros) del mismo tamaño del vector a simular, es decir, n componentes.

$$Y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 2) Para $k = 1, 2, \dots, K$:
 - a) Se selecciona un índice $i \in (1, 2, \dots, n)$ del vector que puede ser tomada ya sea de una forma regular o al azar [6] [12].
 - b) Se resuelve el sistema de kriging simple para predecir la componente Y_i a partir del resto de las componentes, es decir, de $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \dots, Y_n)$. Para $j \neq i$, se denota $\lambda_{j,i}$ el ponderador asignado a Y_j cuando realiza el Kriging a la variable Y_i y por σ_i^2 a la varianza del error del kriging.
 - c) Se actualiza el vector aleatorio:

$$Y^{(k)} = \begin{pmatrix} Y_1^{(k-1)} \\ \vdots \\ Y_{i-1}^{(k-1)} \\ Y_i^{(k)} \\ Y_{i+1}^{(k-1)} \\ \vdots \\ Y_n^{(k-1)} \end{pmatrix}$$

Con $Y_i^{(k)} = \sum_{j \neq i} \lambda_{j,i} Y_j^{(k-1)} + \sigma_i U^{(k)}$ con $U^{(k)}$ una variable aleatoria Gaussiana estándar independiente de $\{Y_j^{(k-1)}: j \neq i\}$.

Cuando K tiende al infinito, el vector $Y^{(k)}$ converge en distribución a un vector aleatorio Gaussiano de media 0 y matriz de varianza y covarianza C [6].

Para realizar esto, solo se requiere la determinación de los ponderadores del kriging y la varianza del kriging en el paso 2b. Esto se puede hacer calculando la inversa de la matriz de varianza y covarianza, es decir, la inversa de C [13]:

$$B = C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & \dots & -\frac{\lambda_{j,1}}{\sigma_1^2} & \dots & -\frac{\lambda_{n,1}}{\sigma_1^2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\lambda_{1,i}}{\sigma_i^2} & \dots & \frac{1}{\sigma_i^2} & \dots & -\frac{\lambda_{n,i}}{\sigma_i^2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\lambda_{1,n}}{\sigma_n^2} & \dots & -\frac{\lambda_{j,n}}{\sigma_n^2} & \dots & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{pmatrix}$$

La secuencia del vector simulado $\{Y^{(k)}: k \in \mathbb{N}\}$ forma una cadena de Markov de vectores en \mathbb{R}^n . La cadena es aperiódica e irreductible, esto es, cualquier vector puede ser alcanzado desde cualquier otro en un número finito de pasos. La distribución Gaussiana objetivo es invariante para la matriz de transición de la cadena. Juntas, estas tres propiedades (irreductibilidad, aperiodicidad y existencia de una distribución invariante) implican que la cadena converge en distribución a un vector aleatorio Gaussiano de media cero y matriz varianza-covarianza C [10] [14] [15].

El problema de la metodología es obtener la matriz B ya que se requiere invertir la matriz C lo cual en términos computacionales es muy demandante cuando el número de componentes del vector es grande (n es mayor a pocos miles de datos) [5].

Para llevar a la práctica el algoritmo, cuando los vectores están asociados a coordenadas, se utiliza una versión llamada Muestreador de Gibbs Tradicional no condicional que utiliza una vecindad móvil. Este algoritmo utiliza un radio de búsqueda con la finalidad de utilizar una menor cantidad de datos y hacer más accesible el algoritmo, como se explica a continuación.

5.2.1.2 Algoritmo 2: Muestreador de Gibbs Tradicional (Muestreador de Gibbs Tradicional con Vecindad Móvil)

Se define el algoritmo como sigue:

- 1) Se inicializa la simulación mediante un vector arbitrario, $Y^{(0)}$ de las mismas características del algoritmo anterior.

$$Y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 2) Para $k = 1, 2, \dots, K$:
- Se selecciona un índice $i \in (1, 2, \dots, n)$.
 - Se encuentra un sub-set J de índices tal que $\{X_j: j \in J\}$ pertenecen a la vecindad centrada en x_i dadas ciertas características (máxima distancia de x_i a través de la dirección, separación en sectores angulares, máximos número de componentes dentro de cada sector, etc).
 - Se fija $Y^{(k)} = Y^{(k-1)}$

$$Y^{(k)} = \begin{pmatrix} Y_1^{(k-1)} \\ \vdots \\ Y_{i-1}^{(k-1)} \\ Y_i^{(k)} \\ Y_{i+1}^{(k-1)} \\ \vdots \\ Y_n^{(k-1)} \end{pmatrix}$$

excepto en la i –ésima componente que es remplazada por

$$Y_i^{(k)} = \sum_{j \neq i} \tilde{\lambda}_{j,i} Y_j^{(k-1)} + \tilde{\sigma}_i U^{(k)}$$

Ecuación 20: Actualización Componente i Vecindad Móvil

donde $\tilde{\lambda}_{j,i}$ y $\tilde{\sigma}_i^2$ son los ponderadores del kriging simple y la varianza del kriging simple obtenidas cuando se estima Y_i de $\{Y_j: j \in J, j \neq i\}$ y $U^{(k)}$ es una variable aleatoria Gaussiana estándar independiente de $\{Y_j^{(k-1)}: j \neq i\}$. En la Ecuación 20, la convención es $\tilde{\lambda}_{i,k} = 0$ para $i \neq j$.

J .

- 3) Se obtiene $Y^{(k)}$

En el caso del primer algoritmo, con la vecindad única, la cadena converge en distribución a un vector aleatorio Gaussiano con media cero y matriz de varianza y covarianza C . Sin embargo, en el algoritmo 2, la cadena puede no converger en distribución, porque \tilde{C} puede no ser una matriz válida de varianza-covarianza, esto es, simétrica semi definida positiva.

Las condiciones para la existencia de una distribución límite son:

- \tilde{B} es una matriz simétrica.
- Los valores propios de \tilde{B} son no negativos.

Se demuestra que para el caso de vecindad móvil, en general ninguna de las dos condiciones anteriores se cumple [5]. La convergencia solo se da en situaciones puntuales tales como al utilizar variogramas puramente pepiticos, pero en la práctica de la evaluación de yacimientos, esto no se da.

5.2.1.3 Algoritmo 3: Muestreador de Gibbs Dual [6]

Se define el siguiente algoritmo:

- 1) Se inicializa la simulación con un vector auxiliar arbitrario X de tamaño n (mismo tamaño que el vector Y), por ejemplo, un vector de ceros.

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para $k = 1, 2, \dots, K$;

Se selecciona un índice $i \in (1, 2, \dots, n)$ del vector que puede ser tomada ya sea de una forma regular o al azar [12] [6]

Se actualiza el vector aleatorio simulado colocando:

$$X^{(k)} = \begin{pmatrix} X_1^{(k-1)} \\ \vdots \\ X_{i-1}^{(k-1)} \\ X_i^{(k)} \\ X_{i+1}^{(k-1)} \\ \vdots \\ X_n^{(k-1)} \end{pmatrix}$$

Con $X_i^{(k)} = \sum_{j \neq i} \omega_{j,i} X_j^{(k-1)} + s_i U^{(k)}$ con $U^{(k)}$ una variable aleatoria Gaussiana estándar independiente de $\{X_j^{(k-1)} : j \neq i\}$. Se define $\omega_{j,i}$ y s_i como

$$B^{-1} = C = \begin{pmatrix} \frac{1}{s_1^2} & \dots & -\frac{\omega_{j,1}}{s_1^2} & \dots & -\frac{\omega_{n,1}}{s_1^2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \ddots \\ -\frac{\omega_{1,i}}{s_i^2} & \dots & \frac{1}{s_i^2} & \dots & -\frac{\omega_{n,i}}{s_i^2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \ddots \\ -\frac{\omega_{1,n}}{s_n^2} & \dots & -\frac{\omega_{j,n}}{s_n^2} & \dots & \frac{1}{s_n^2} \end{pmatrix}$$

- 2) Calcular $Y^{(k)} = CX^{(k)}$

Cuando K tiende a infinito, el vector $X^{(k)}$ converge en distribución a un vector aleatorio Gaussiano con media cero y matriz de varianza y covarianza B , así, por consiguiente, $Y^{(k)}$ tiende en distribución a un vector aleatorio Gaussiano con media cero y matriz de varianza y covarianza C .

La ventaja de este algoritmo frente a los dos anteriores, es que no se requiere invertir C , lo cual es el impedimento principal de implementación del algoritmo 1.

Se muestra un algoritmo similar a este, el cual simula directamente el vector Y ahorrando tiempo computacional.

5.2.1.4 Algoritmo 4: Muestreador de Gibbs Dual Simulando Y Directamente [6]

Se define el siguiente algoritmo:

- 1) Se inicializa la simulación con un vector arbitrario de tamaño n (mismo tamaño que el vector Y), por ejemplo, un vector de ceros.

$$Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 2) Para $k = 1, 2, \dots, K$;
 - a) Se selecciona un índice $i \in \{1, \dots, n\}$.
 - b) Se define $Y^{(k)} = Y^{(k-1)} + \delta C_i$ donde C_i es la i -ésima columna de C , $\delta = -Y_i^{(k-1)} + V^{(k)}$, $V^{(k)}$ es una variable aleatoria Gaussiana estándar independiente de $Y^{(k-1)}$.
- 3) Obtener $Y^{(k)}$.

Este algoritmo ha sido recientemente propuesto [7] [16].

5.2.2 Simulación Condicional

En la búsqueda de la realización de una simulación Gaussiana utilizando los modelos Gaussiano truncado y plurigaussiano, es necesario simular el vector Gaussiano Y sujeto a restricciones de inequaciones en sus componentes correspondiente a datos que entrega geología de los tipos de roca ubicados en algunos sectores del yacimiento de interés. Es así como se utiliza la siguiente ecuación para el objetivo antes mencionado:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i < Y_i < b_i$$

Ecuación 21: Restricciones Simulación Condicional Componente a Componente

donde las fronteras $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ son números reales o el valor infinito. Dos formas de simulación condicional han sido exploradas.

5.2.2.1 Recocido Simulado

El recocido simulado es un procedimiento iterativo que puede ser usado para simular vectores aleatorios sujetos a restricciones condicionantes complejas [8] [10]. El algoritmo se basa en tres fases:

- a) La cadena de Markov tiene distribución no condicional con π como su distribución límite (muestreador de Gibbs).
- b) La función objetivo $O(\cdot)$ que mide la discrepancia entre el vector simulado y las restricciones condicionantes.
- c) El protocolo de enfriamiento que define la temperatura t_k en la k -ésima iteración del algoritmo.

La función objetivo, se puede definir, como:

$$O(Y) = \sum_{i=1}^n (\max\{a_i - Y_i, 0\} + \max\{Y_i - b_i, 0\})$$

Ecuación 22: Función Objetivo Recocido Simulado

Con esto, se tiene que $O(Y) \geq 0$, donde la igualdad se cumple si todas las restricciones son satisfechas. Para el tema de la temperatura, un ejemplo es considerar el protocolo de enfriamiento de la forma

$$\forall k > 0, t_k = t_0 \alpha^k$$

con valores dados de t_0 en $]0, \text{inf} + [$ y α en $]0, 1[$.

5.2.2.2 Algoritmo 5: Muestreador de Gibbs Dual Combinado con el Recocido Simulado

Se utiliza lo expuesto en la subsección 5.2.2.1 en combinación con el algoritmo 4 para crear un algoritmo de simulación condicional:

- 1) Se comienza la simulación con un vector arbitrario $Y^{(0)}$ de tamaño N , por ejemplo, un vector de ceros o una realización no condicional de Y .
- 2) Para $k = 1, 2, \dots, K$;
 - a) Seleccionar un índice $i \in \{1, \dots, n\}$
 - b) Sea $Y' = Y^{(k-1)} + \delta C_i$, donde C_i es la i -ésima columna de C , $\delta = -Y_i^{(k-1)} + V^{(k)}$ y $V^{(k)}$ una variable Gaussiana estándar uniformemente distribuida en $[0, 1]$.
 - c) Simular una variable aleatoria U uniformemente distribuida en $[0, 1]$.
 - d) Calcular la temperatura actual t_k , de acuerdo al protocolo de enfriamiento elegido.
 - e) Si $U < \exp\left\{\frac{o(Y^{(k-1)}) - o(Y')}{t_k}\right\}$, se fija $Y^{(k)} = Y'$, sino $Y^{(k)} = Y^{(k-1)}$.
- 3) Entregar $Y^{(K)}$.

Un problema del algoritmo es que la tasa de convergencia de la distribución condicional objetivo puede ser lenta, dependiendo del estado inicial elegido y del protocolo de enfriamiento. Si el algoritmo es detenido luego de un número finito (K) de iteraciones, se podría obtener el vector aleatorio $Y^{(K)}$ que no satisface todas las restricciones presentadas, con lo cual entregaría resultados pocos satisfactorios.

5.2.2.3 Restricción a la Matriz de Transición

La idea de restringir la matriz de transición para el muestreador de Gibbs ha sido propuesta por muchos autores [17] [18] [19] [20] quienes modificaron el algoritmo 1 para prohibir cualquier estado de transición que no satisfaga las restricciones condicionantes de la Ecuación 21. En la práctica, cuando el número de componentes del vector n es grande, una vecindad única es impráctica y la vecindad móvil es usada [18] pero como se ha visto antes, el uso de la vecindad móvil tiende a que el vector simulado no converja en distribución a lo buscado.

Se muestra a continuación dos algoritmos de simulación con restricción a la matriz de transición para el muestreador de Gibbs dual. El muestreador de Gibbs tradicional utilizando la restricción a la matriz de transición tiene como base el algoritmo 2 y se añade una restricción al vector U

(variable aleatoria Gaussiana) con la finalidad de que cada componente Y_i cumpla las restricciones de la Ecuación 21.

5.2.2.4 Algoritmo 6: Muestreador de Gibbs Dual en X con Restricción a la Matriz de Transición

A partir de la subsección 5.2.2.3, se crea un algoritmo utilizando como base el algoritmo 3.

- 1) Se inicializa la simulación con un vector $X^{(0)}$ que satisface las restricciones condicionantes. Esto requiere encontrar una solución al siguiente sistema de inecuaciones lineales

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i < \sum_{j=1}^n C_{ij} X_j < b_i$$

Ecuación 23: Restricciones Lineales, Muestreador de Gibbs con Restricción a la Matriz de Transición

El set de soluciones del sistema es una región convexa abierta en \mathbb{R}^n , delimitada por los hiperplanos definidos por las ecuaciones $\sum_{j=1}^n C_{ij} X_j = b_i$ y $\sum_{j=1}^n C_{ij} X_j = a_i$ para todos los índices i y l tales que a_l y b_l son finitos.

- 2) Para $k = 1, 2, \dots, K$;
 - a) Seleccionar un índice $i \in \{1, \dots, n\}$
 - b) Se define $X^{(k)} = X^{(k-1)}$, excepto en la i -ésima componente que es reemplazada por

$$X_i^{(k)} = \sum_{j \neq i} \bar{\omega}_{j,i} X_j^{(k-1)} + V^{(k)}$$

Ecuación 24: Ecuación i -ésima Componente Algoritmo 6

donde $\bar{\omega}_{j,i}$ es el ponderador del kriging simple asignado a X_j cuando se estima X_i y $V^{(k)}$ es una variable aleatoria Gaussiana estándar independiente de $\{X_j^{(k-1)} : j \neq i\}$ que satisface las restricciones de la Ecuación 23. El vector $V^{(k)}$ tiene una distribución Gaussiana truncada cuyos rangos de valores se mueven en un intervalo caracterizado por

$$y \quad \max_{p \in \{1, \dots, n\} : C_{pi} \neq 0} \left\{ \min \left(\frac{a_p - \beta_{pi}}{C_{pi}}, \frac{b_p - \beta_{pi}}{C_{pi}} \right) \right\}$$

$$\min_{p \in \{1, \dots, n\} : C_{pi} \neq 0} \left\{ \max \left(\frac{a_p - \beta_{pi}}{C_{pi}}, \frac{b_p - \beta_{pi}}{C_{pi}} \right) \right\}$$

Ecuación 25: Intervalos de $V^{(k)}$

$$\text{con } \beta_{pi} = \sum_{j \neq i} (C_{pj} + C_{pi} \bar{\omega}_{j,i}) X_j^{(k-1)}$$

- c) Definir $Y^{(k)} = CX^{(k)}$
- 3) Obtener $Y^{(k)}$.

La secuencia de vectores simulados $\{X^{(k)} : k \in \mathbb{N}\}$ forma una cadena de Markov que es aperiódica e irreducible. Sin importar el estado actual, cualquier punto de la solución en la región abierta convexa de la Ecuación 23 puede ser alcanzado en un número finito de iteraciones. Además, sea $X = BY$ un vector aleatorio Gaussiano de media cero y matriz de

varianza-covarianza $B = C^{-1}$ y asumamos que $X^{(k-1)}$ es un vector aleatorio con la distribución de X condicionada por las restricciones de desigualdad de la Ecuación 23. Debido a que la matriz de transición en el paso 2, es idéntica a la matriz de transición del algoritmo 3, excepto en la restricción de la Ecuación 25 eso hace a $X^{(k)}$ satisfacer la Ecuación 23, la distribución de $X^{(k)}$ es la misma que $X^{(k-1)}$, esto es, la distribución es invariante para la matriz de transición. Así, las condiciones de convergencia (irreducibilidad, aperiodicidad y existencia de una distribución invariante) son satisfechas [10]: La cadena $\{X^{(k)}: k \in \mathbb{N}\}$ converge en distribución a un vector aleatorio Gaussiano de media 0 y matriz de varianza-covarianza B condicionada por las restricciones de la Ecuación 23. Equivalentemente, la cadena $\{Y^{(k)}: k \in \mathbb{N}\}$ converge en distribución a un vector aleatorio Gaussiano de media cero y matriz de varianza-covarianza C condicionadas a las restricciones de la Ecuación 21. En la práctica, la principal dificultad de este algoritmo es el paso inicial, ya que se requiere resolver un sistema grande de desigualdades lineales. Para evitar esto, se puede simular directamente Y mostrado a continuación.

5.2.2.5 Algoritmo 7: Muestreador de Gibbs Dual en Y con restricción a la matriz de transición

- 1) Se inicializa la simulación con un vector $Y^{(0)}$ que satisface las restricciones condicionantes de la Ecuación 21
- 2) Para $k = 1, 2, \dots, K$;
 - a) Seleccionar un índice $i \in \{1, \dots, n\}$
 - b) Definir $Y^{(k)} = Y^{(k-1)} + \delta C_i$, donde C_i es la i -ésima columna de C , $\delta = -Y_i^{(k-1)} + V^{(k)}$. $V^{(k)}$ es una variable aleatoria Gaussiana estándar independiente de $Y^{(k-1)}$, tales que las restricciones condicionantes de Ecuación 21 sean satisfechas. Los límites para $V^{(k)}$ son:

$$y \quad \max_{j \in \{1, \dots, n\}: C_{ij} \neq 0} \left\{ \min \left(\frac{a_j - \gamma_{ij}}{C_{ij}}, \frac{b_j - \gamma_{ij}}{C_{ij}} \right) \right\}$$

$$\quad \min_{j \in \{1, \dots, n\}: C_{ij} \neq 0} \left\{ \max \left(\frac{a_j - \gamma_{ij}}{C_{ij}}, \frac{b_j - \gamma_{ij}}{C_{ij}} \right) \right\}$$

$$\text{con } \gamma_{ij} = Y_j^{(k-1)} - C_{ij} Y_i^{(k-1)}$$

- 3) Regresar $Y^{(k)}$.

Este algoritmo es formalmente equivalente al algoritmo 6, la cadena $\{Y^{(k)}: k \in \mathbb{N}\}$ converge en distribución a un vector aleatorio Gaussiano de media cero y matriz de varianza-covarianza C condicionada a las restricciones de la Ecuación 21.

En el presente trabajo de tesis, el algoritmo 7 es el considerado muestreador de Gibbs dual para realizar los casos estudios tanto del yacimiento sintético como del yacimiento real con sus respectivos análisis. El muestreador de Gibbs tradicional es el descrito en la subsección 5.2.2.3.

6 Caso Sintético

Se desea estudiar el efecto del muestreador de Gibbs utilizando ambas metodologías descritas en las secciones previas (tradicional y dual) para comprobar distintos comportamientos dependiendo de los inputs entregados. Es así como se utilizan casos sintéticos lo cual es la fabricación de una especie de yacimiento en el cual se conoce toda la información para así comprobar el desempeño del muestreador de Gibbs conociendo los outputs.

Para comenzar con el análisis numérico se describen los pasos utilizados:

- 1) Creación de una grilla de $10 \times 10 \times 1$ [m] con 50 nodos en las dos primeras direcciones y un nodo en la dirección vertical (yacimiento con datos en la superficie 2D).
- 2) Creación de variogramas modelados Gaussianos (dos, en este caso, uno sin efecto pepita y uno con efecto pepita) con alcance 200 [m] y meseta 1.
- 3) 100 realizaciones de simulación no condicional con el método de bandas rotantes a partir de los variogramas antes creados en los nodos del primer paso. Se muestran los variogramas de las 100 realizaciones junto con su promedio y además el variograma esperado a partir del input de la parte 2.
- 4) Truncar las 100 realizaciones con una regla de truncación arbitraria que por simplicidad se elige en 0, es decir, 50 [%] de las rocas son de tipo 1 y el complemento de tipo 2. Se tienen 100 escenarios con tipos de rocas que serán utilizados como inputs para el muestreador de Gibbs tradicional y el muestreador de Gibbs Dual.
- 5) Realizar la rutina del muestreador de Gibbs (tradicional y dual) condicionado a los tipos de roca que se obtuvieron en el paso anterior. Se obtienen 100 resultados de esto a partir de las 100 simulaciones no condicionales del paso 3.
- 6) Analizar los variogramas respectivos del muestreador de Gibbs tradicional y muestreador de Gibbs dual de las 100 realizaciones (y el promedio de estos) para ver el funcionamiento del algoritmo.

Sobre el paso 2, se crean dos variogramas Gaussianos que se describen a continuación para dar un enfoque más completo al trabajo.

6.1 Función Aleatoria Sin Efecto Pepita

El primer procedimiento consiste en crear una serie de datos Gaussianos conocidos de cierta distribución en una grilla a elección a partir de un variograma que tiene ciertas características.

Para comenzar, se crea un variograma con la siguiente descripción:

Tabla I: Variograma Caso Sintético sin Efecto pepita

Efecto Pepita	0
Tipo de Variograma	Esférico
Meseta	1
Alcance [m]	200

El siguiente procedimiento es realizar 100 simulaciones no condicionales de acuerdo al variograma que se ha construido mediante el algoritmo de bandas rotantes (con 1000 direcciones). Cada realización se trunca para obtener tipos de roca (1 o 2), los cuales se utilizan como datos condicionantes para el muestreador de Gibbs tradicional y dual. Para el muestreador de Gibbs tradicional, se utiliza los siguientes parámetros de vecindad móvil:

Tabla II: Condiciones de Simulación no Condicional para Muestreador de Gibbs Tradicional sin Efecto Pepita

División por Octantes	Si
Cantidad de Datos Óptimos	20
Radio Máximo de Búsqueda en x,y,z	200,200,0 [m]

Para cada realización de tipo de roca condicionante, se construye una realización del vector Gaussiano subyacente, obteniendo un total de 100 realizaciones de este vector Gaussiano en ambas variantes del muestreador de Gibbs (tradicional y dual).

Los resultados y análisis se describen a continuación.

6.1.1 Muestreador de Gibbs Tradicional

Se utiliza la metodología tradicional mostrándose en la Ilustración 2 los variogramas objetivos de la simulación condicional (azul) en ambas direcciones además de los variogramas de las 100 realizaciones del algoritmo de bandas rotantes y el promedio de estos (verde y negro, respectivamente).

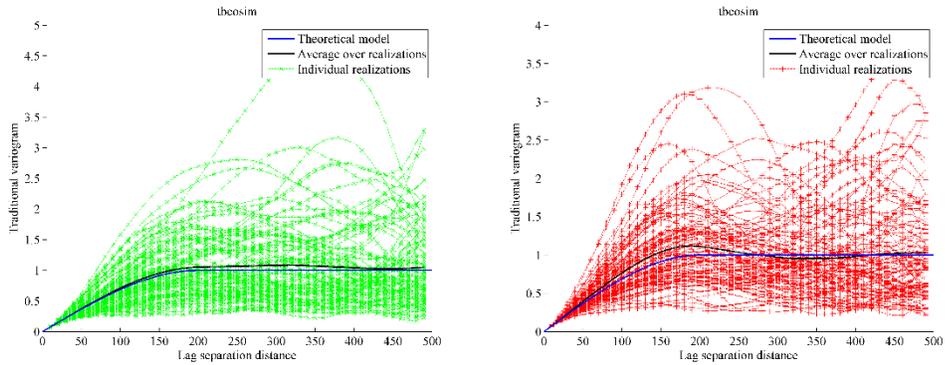


Ilustración 2: Variograma Objetivo de Simulación Caso Sintético sin Efecto Pepita, Dirección E-O y N-S Respectivamente

Se muestra además algunas imágenes de los tipos de roca al hacer simulaciones de acuerdo a al variograma antes mencionado:

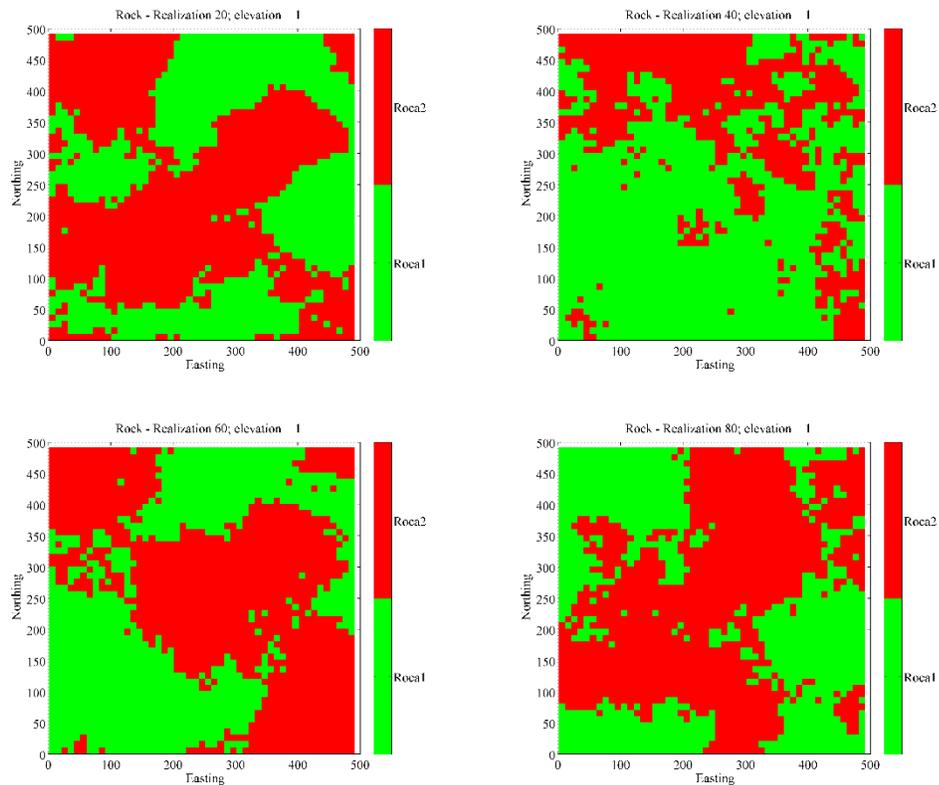


Ilustración 3: Simulaciones de Tipo de Roca Caso sin Efecto Pepita a Partir del Variograma Respectivo

En las imágenes siguientes, se muestra la convergencia de la metodología muestreador de Gibbs tradicional frente al aumento de las iteraciones, donde en azul se muestra el variograma objetivo (teórico), en verde las 100 realizaciones del muestreador de Gibbs respectivo y en negro el promedio de estos.

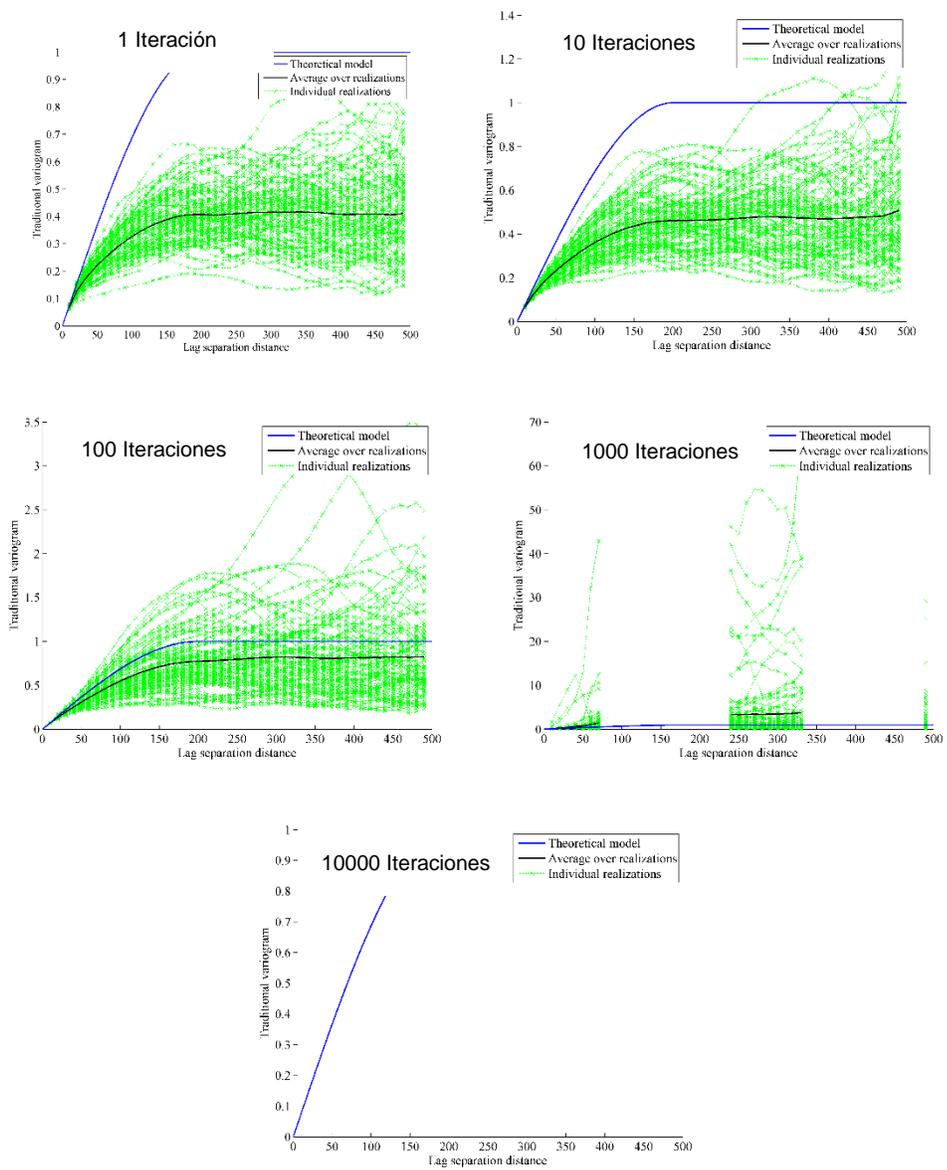


Ilustración 4: Resultado Muestreador de Gibbs Tradicional, 1, 10, 100, 1000 y 10000 Iteraciones Respectivamente en la Dirección E-O

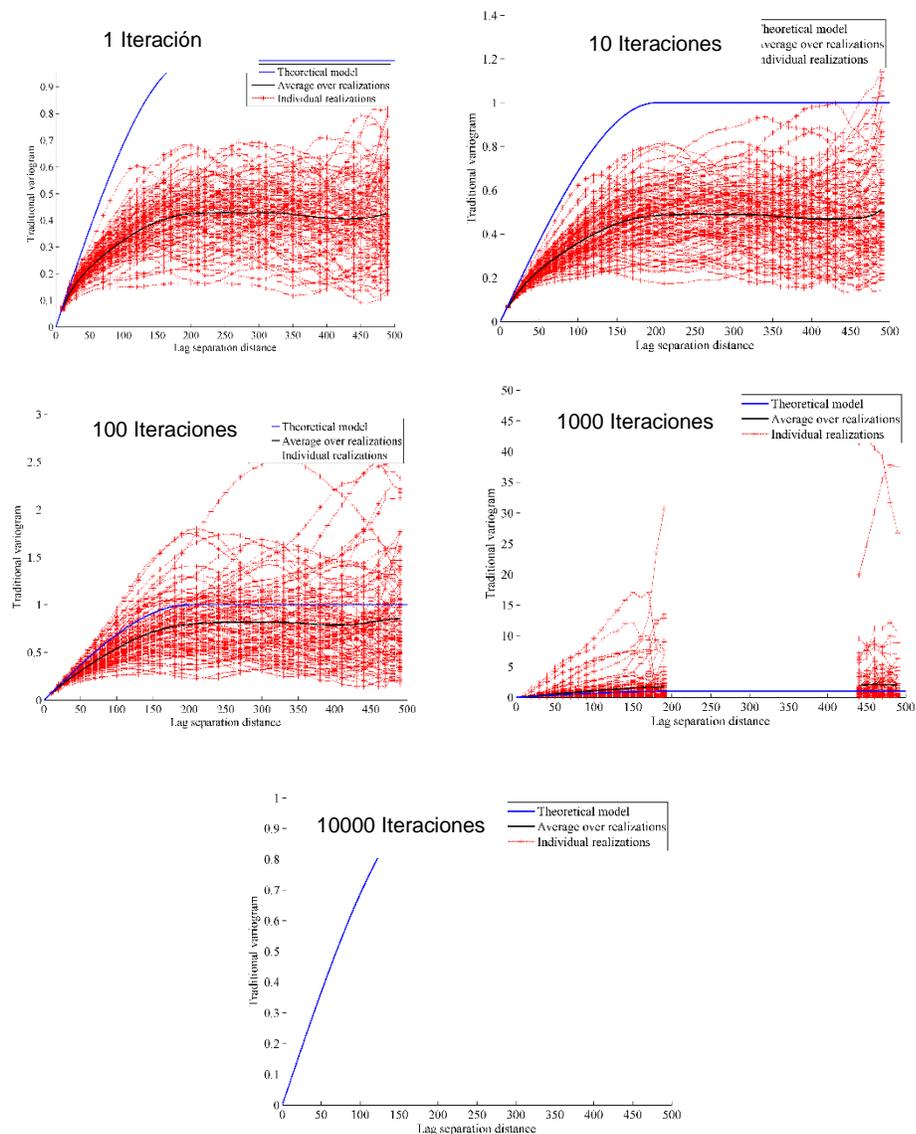


Ilustración 5: Resultado Muestreador de Gibbs Tradicional, 1, 10, 100, 1000 y 10000 Iteraciones Respectivamente en la Dirección N-S

Se observa que a medida que aumenta las iteraciones, hasta la 100, la convergencia parece conseguirse, sin embargo, al aumentar a 1000 iteraciones, existe una divergencia en el variograma para ambas direcciones. Esto es debido a que computacionalmente no es posible construir el variograma bajo ciertas distancias ya que algunos componentes de los vectores aleatorios Gaussianos toman valores demasiado grandes. Prueba de esto son los valores muy altos de la meseta que toman algunos variogramas bajo ciertas distancias en la iteración 1000. En la iteración 10000 ya es imposible construir el variograma para cualquier paso. Debido a esto, están en blanco, solo mostrando el variograma objetivo.

Se muestra a continuación los resultados de utilizar el muestreador de Gibbs dual.

6.1.2 Muestreador de Gibbs Dual

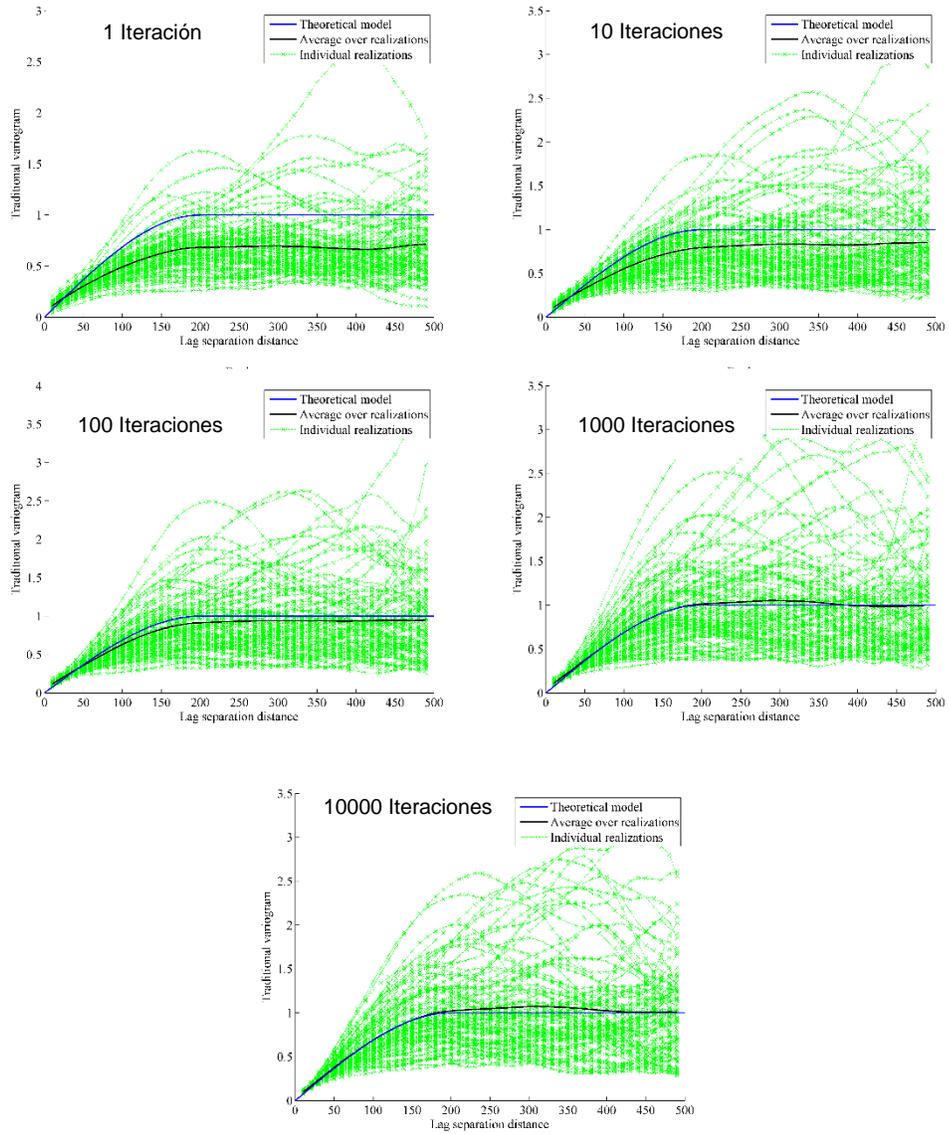


Ilustración 6: Resultado Muestreador de Gibbs Dual, 1, 10, 100, 1000 y 10000 Iteraciones Respectivamente en la Dirección E-O

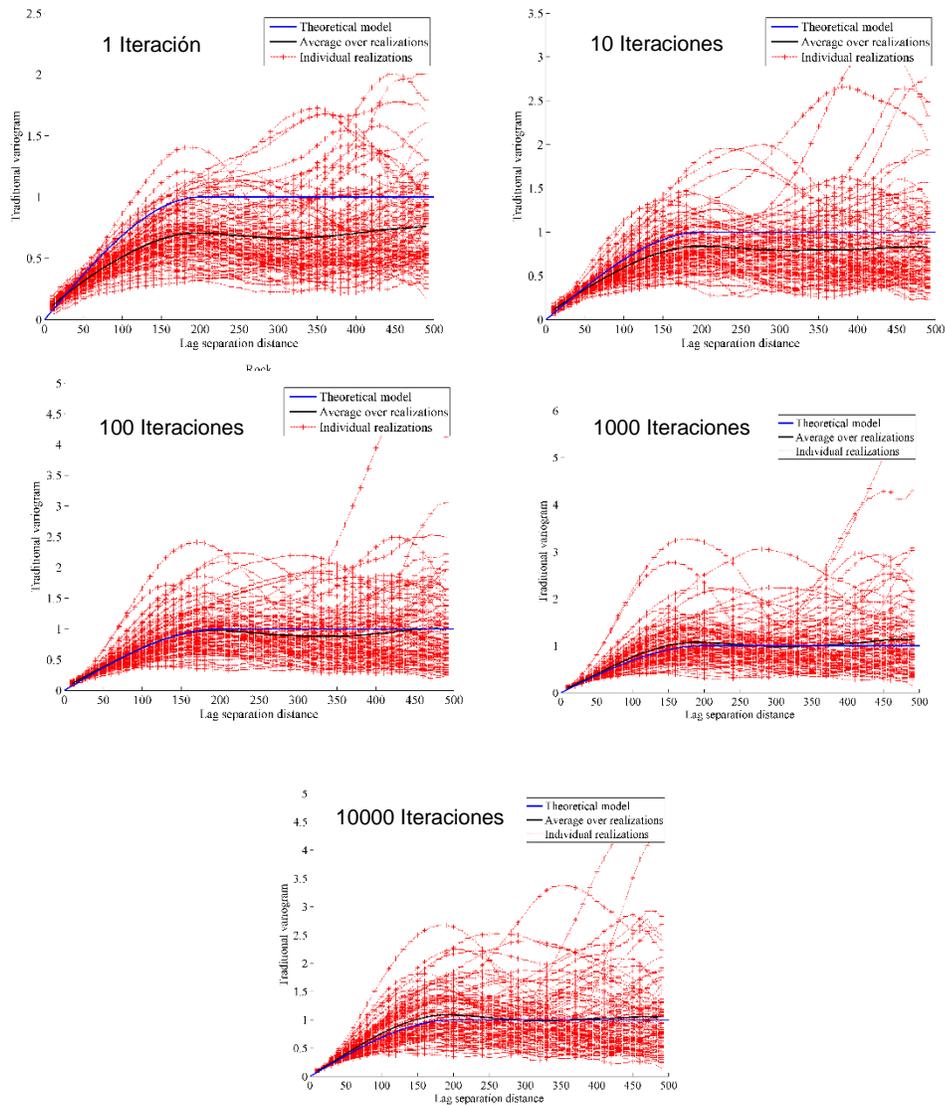


Ilustración 7: Resultado Muestreador de Gibbs Dual, 1, 10, 100, 1000 y 10000 Iteraciones Respectivamente en la Dirección N-S

Se puede observar que, en ambas direcciones, el variograma promedio de las 100 realizaciones en el caso del muestreador de Gibbs dual tiende a converger al variograma original, esto es, un variograma de alcance 200 [m] y meseta 1.

Este análisis permite demostrar que a medida que las iteraciones van en aumento, la convergencia del muestreador del Gibbs dual se va haciendo cada vez mejor no viéndose indicios de una posible divergencia.

6.2 Función Aleatoria con Efecto Pepita

El procedimiento es igual al descrito en la parte anterior con excepción del variograma, el que tiene las siguientes características:

Tabla III: Variograma Caso Sintético con Efecto Pepita

Efecto Pepita	0.3
Tipo de Variograma	Esférico
Meseta	1
Alcance [m]	200

Nuevamente, el factor a considerar es el número de iteraciones y como cambia el resultado al cambiar este parámetro.

6.2.1 Muestreador de Gibbs Tradicional

Se utiliza la metodología tradicional mostrándose en la Ilustración 8 los variogramas objetivos de la simulación en ambas direcciones (azul) junto con los variogramas de las 100 realizaciones por el algoritmo de bandas rotantes y el variograma promedio (verde y negro, respectivamente).

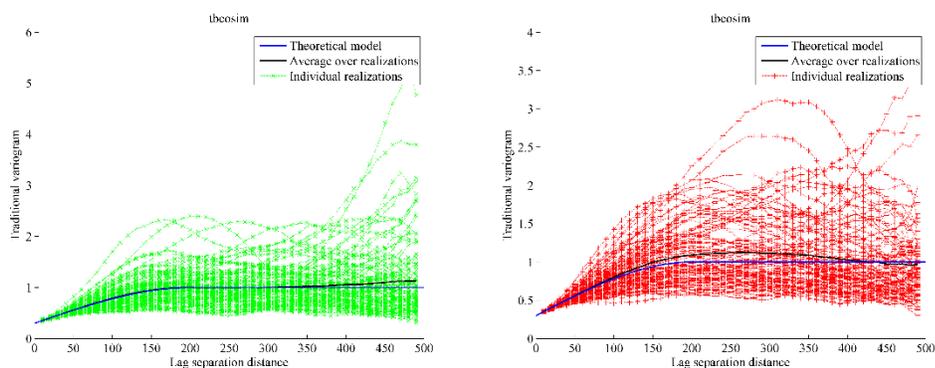


Ilustración 8: Variograma Objetivo de Simulación Caso Sintético con Efecto Pepita, Dirección E-O y N-S Respectivamente

Se muestra además algunas imágenes de los tipos de roca al hacer simulaciones de acuerdo al variograma antes mencionado

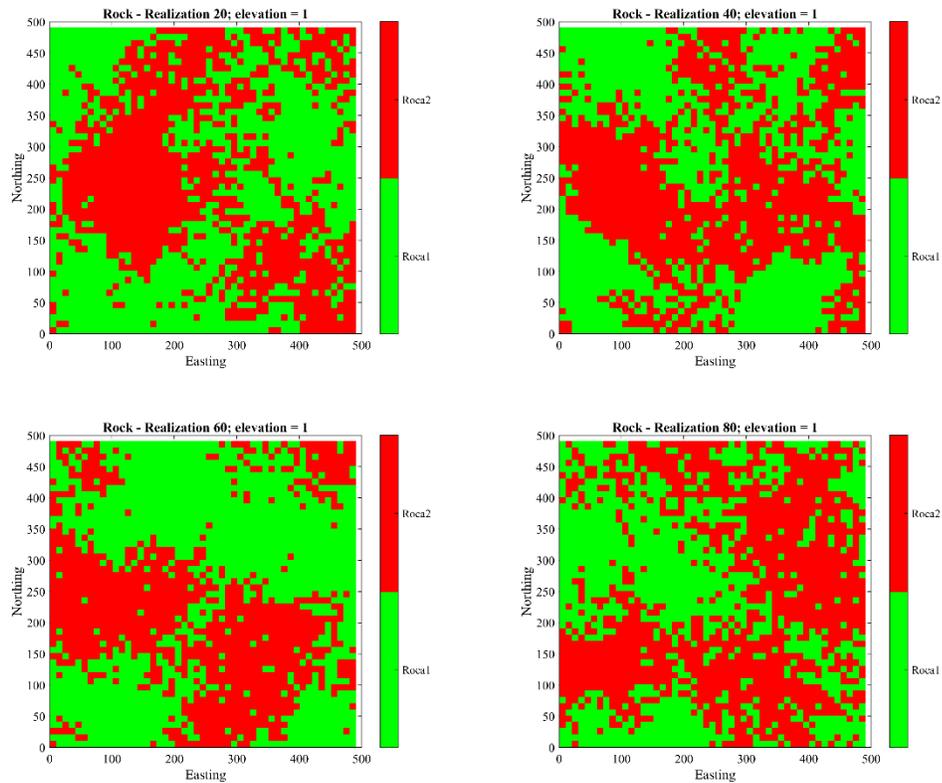


Ilustración 9: Simulaciones de Tipo de Roca Caso sin Efecto Pepita a Partir del Variograma Respectivo

En las ilustraciones siguientes, se muestra la convergencia del muestreador de Gibbs tradicional frente al aumento de las iteraciones, donde en azul se muestra el variograma objetivo (teórico), en verde las 100 realizaciones del muestreador de Gibbs respectivo y en negro el promedio de estos.

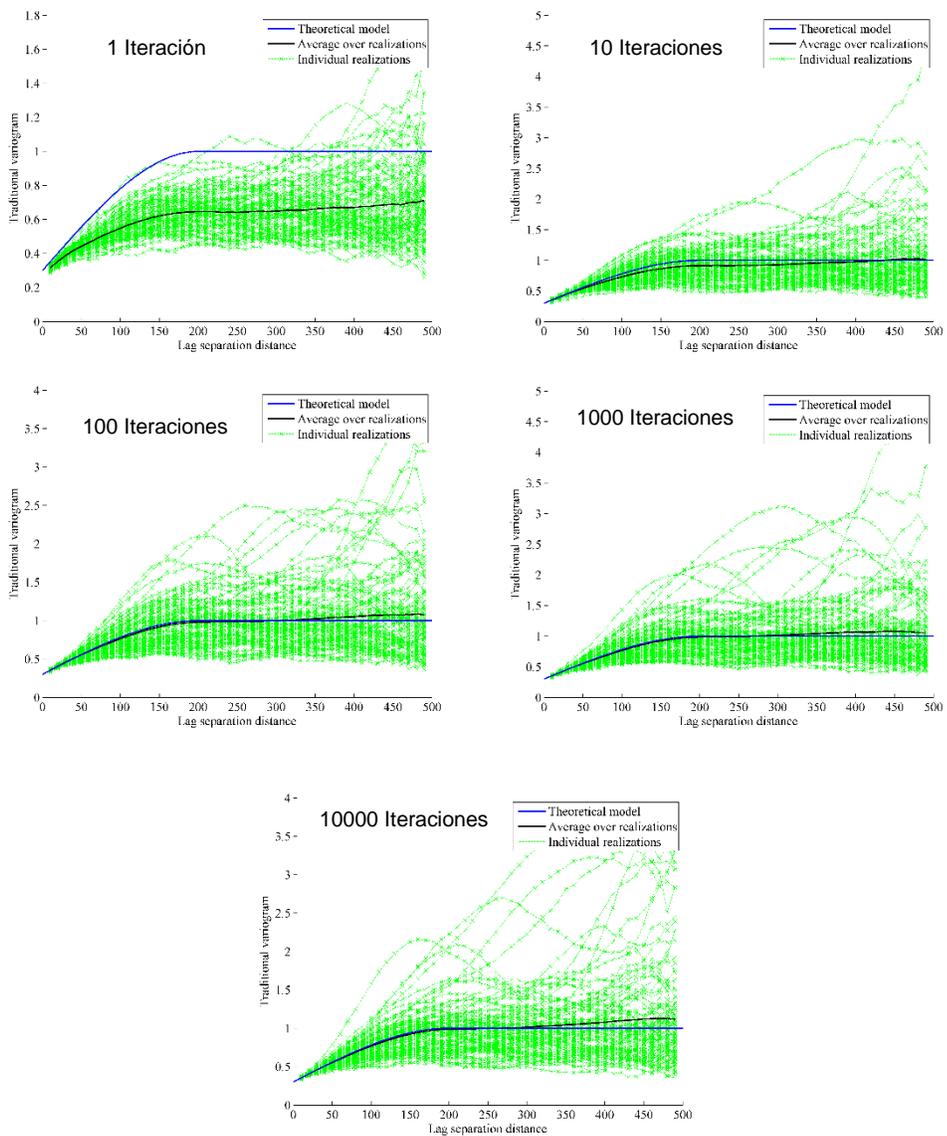


Ilustración 10: Resultado Muestreador de Gibbs Tradicional, 1, 10, 100, 1000 y 10000 Iteraciones Respectivamente en la Dirección E-O

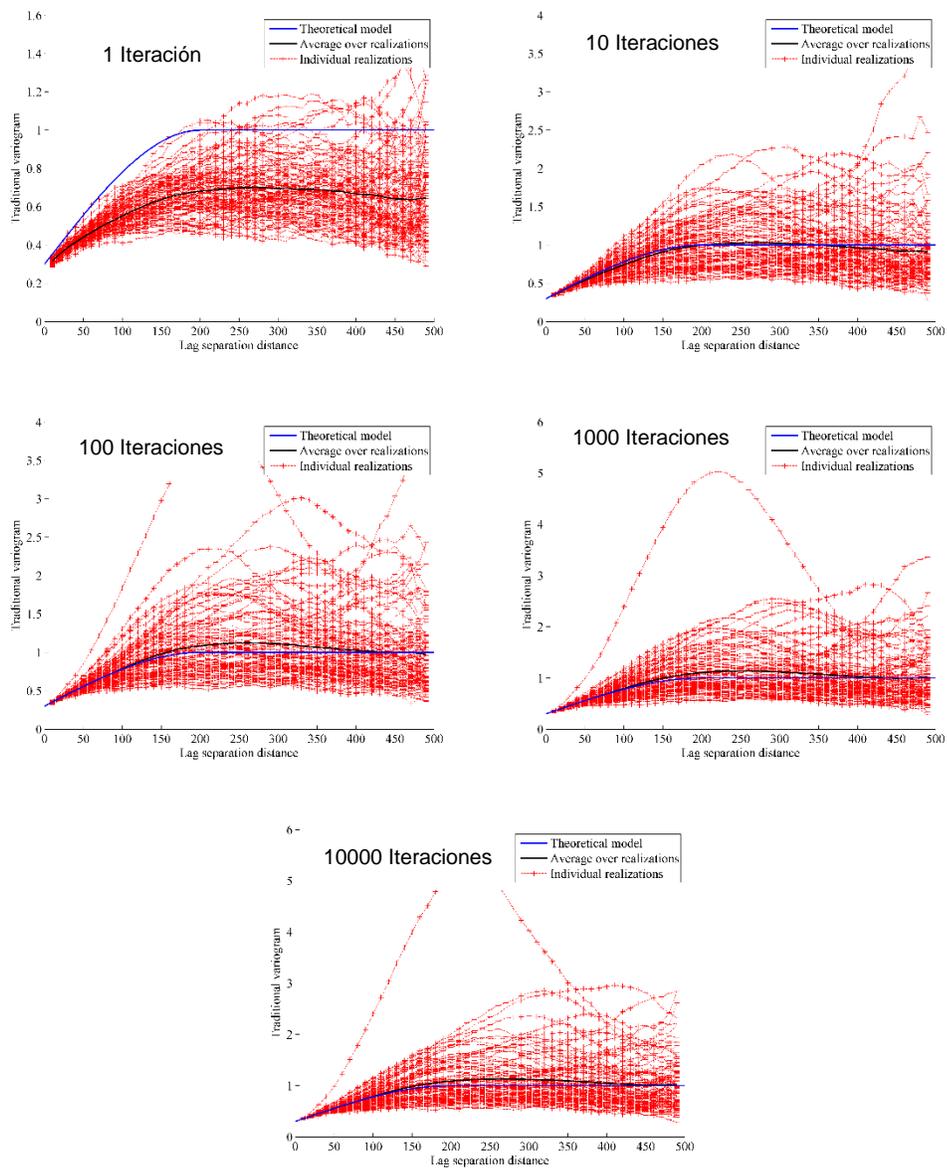


Ilustración 11: Resultado Muestreador de Gibbs Tradicional, 1, 10, 100, 1000 y 10000 Iteraciones Respectivamente en la Dirección N-S

Se puede observar que, a diferencia de la parte anterior, el muestreador de Gibbs tradicional no muestra signos de divergencia; se mantiene estable dando un resultado muy similar a los variogramas objetivos para las 10000 iteraciones. Esto puede dar una falsa expectativa de convergencia al notar que al aumentar las iteraciones el variograma da buenos resultados, sin embargo, de acuerdo a lo nombrado en la parte teórica, la no convergencia es inminente. Una posible explicación al fenómeno de no convergencia tardío frente al caso sin efecto pepita puede ser la robustez, es decir, la poca sensibilidad a la divergencia que se produce para llegar a la distribución objetivo utilizando el muestreador de Gibbs tradicional, que se añade al agregar el efecto pepita en los variogramas.

6.2.2 Muestreador de Gibbs Dual

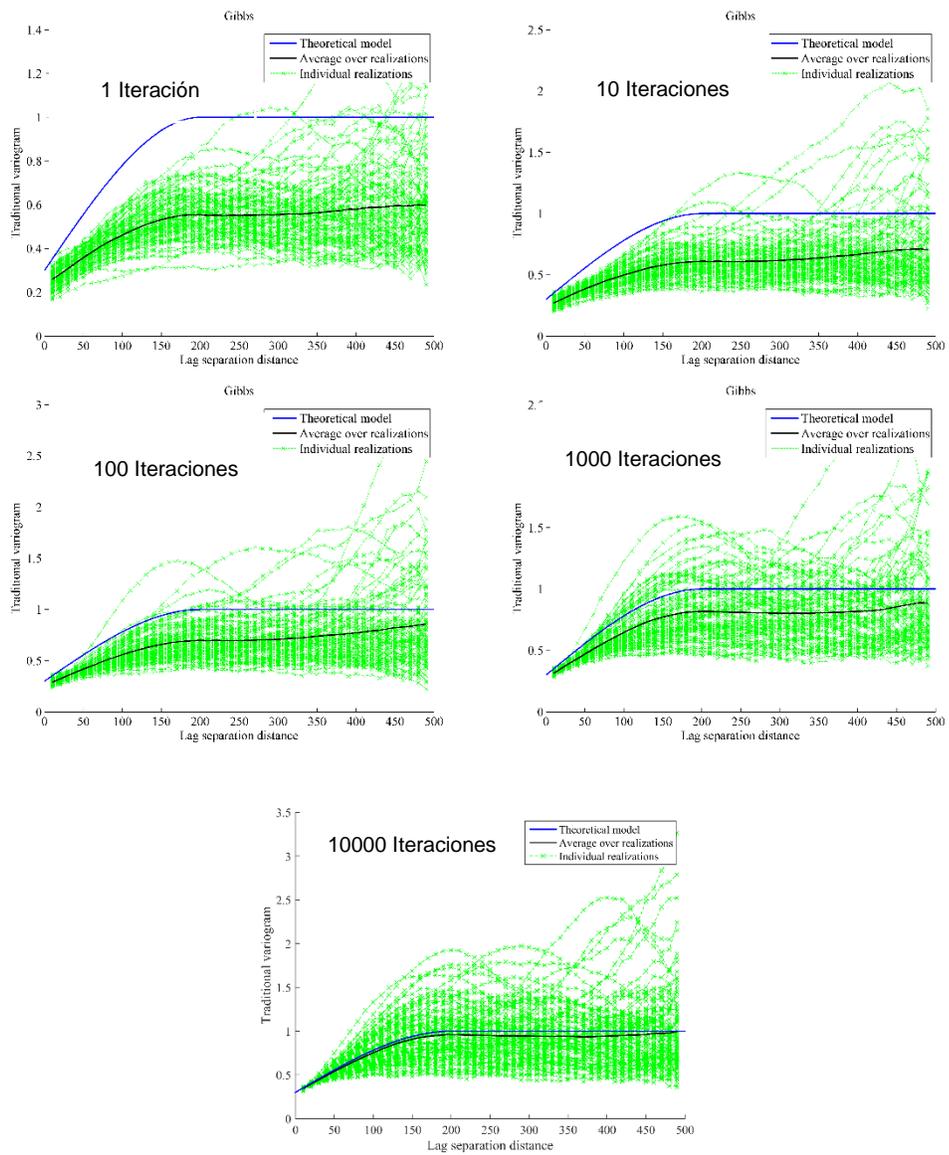


Ilustración 12: Resultado Muestreador de Gibbs Dual, 1, 10, 100, 1000 y 10000 Iteraciones Respectivamente en la Dirección E-O

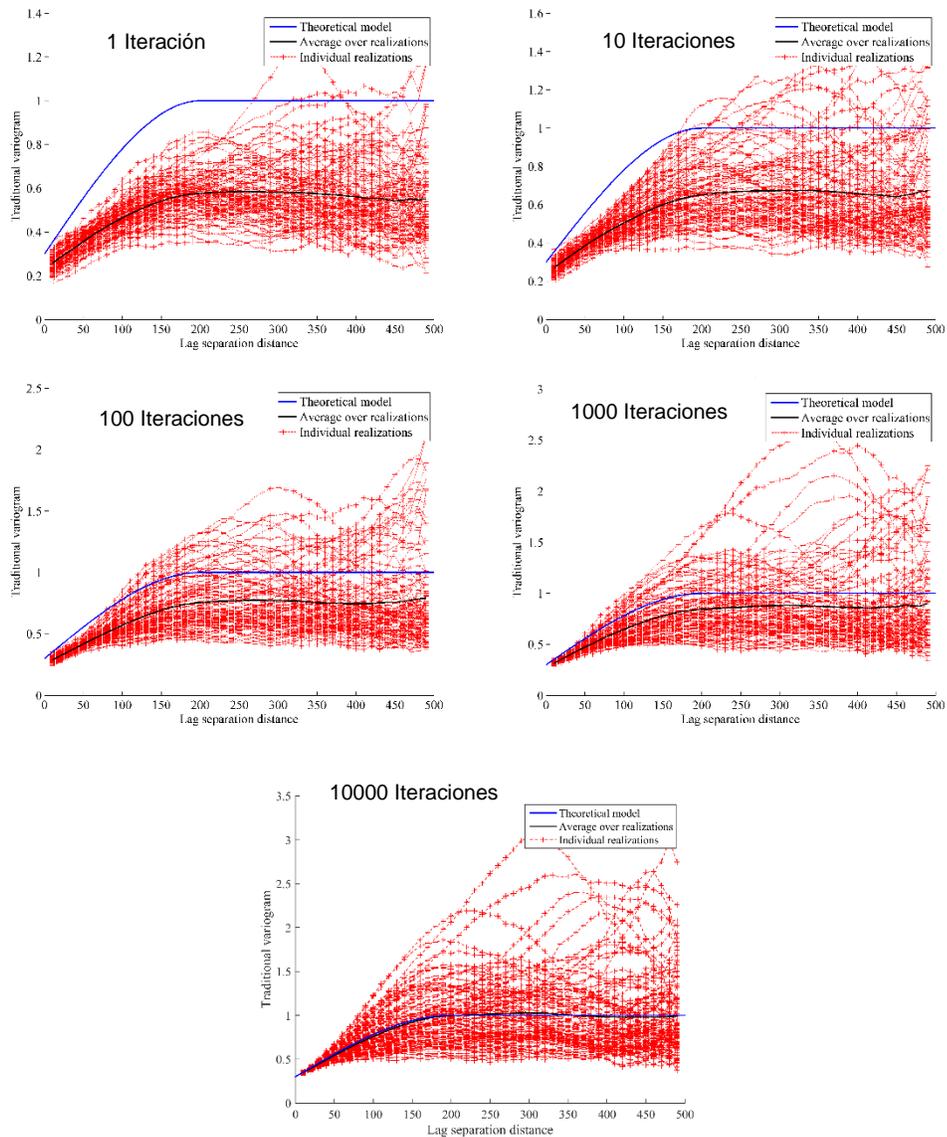


Ilustración 13: Resultado Muestreador de Gibbs Dual, 1, 10, 100, 1000 y 10000 Iteraciones Respectivamente en la Dirección N-S

Se puede observar que, al igual que el caso sin pepita, el muestreador de Gibbs dual muestra convergencia a medida que las iteraciones van en aumento siendo el comportamiento ideal que se espera de una simulación basada en cadenas de Markov. Sin embargo, un detalle que se puede tomar en cuenta es la lentitud aparente en llegar a la meseta en la iteración 10000. Esto puede dar indicios de que el muestreador de Gibbs dual puede ser más lento en convergencia bajo la misma cantidad de iteraciones mostradas en el caso anterior. Sin embargo, basta con aumentar el número de iteraciones ya que el resultado siempre mejorara frente al otro algoritmo que divergerá en algún momento.

A continuación, se muestra un análisis más exhaustivo a los valores del muestreador de Gibbs dual y tradicional para analizar los resultados anteriores de una manera más cuantitativa. Además, se muestra la relación de costo computacional empleado en ambas metodologías.

6.3 Análisis Caso Sintético: Tiempo Computacional y Convergencia

En esta sección se evaluará el tiempo computacional que emplea el muestreador de Gibbs tanto tradicional como dual como el análisis de convergencia respectivo analizando cuantitativamente los vectores aleatorios Gaussianos asociados.

6.3.1 Tiempo Computacional

Para analizar los tiempos computacionales de cada método (Gibbs Tradicional y Gibbs Dual) se muestran tablas que reflejan el tiempo computacional promedio de las 100 realizaciones que se requieren para realizar el trabajo anterior. Debido a que no hay diferencias significativas entre el caso sin efecto pepita al caso con efecto pepita, solo se muestran los tiempos del caso sin efecto pepita.

Tabla IV: Estadísticas Computacionales Caso Sintético Gibbs Tradicional

Número de iteraciones	Tiempo Promedio por cada Muestreador de Gibbs (s)
1	3.6
10	6.1
100	30.0
1000	274.5
10000	2711.2

Tabla V: Estadísticas Computacionales Caso Sintético Gibbs Dual

Número de Iteraciones	Tiempo Promedio por cada Muestreador de Gibbs (s)
1	2.3
10	18.8
100	185.1
1000	1465.2
10000	14864.0

A partir de la Tabla IV y Tabla V se puede observar que utilizar el muestreador de Gibbs tradicional o el muestreador de Gibbs dual con una iteración no muestra una gran diferencia en tiempo computacional, siendo el caso Dual un poco más rápido que el Tradicional (2.3 [s] vs 3.6 [s]). Sin embargo, a medida que se utilizan más iteraciones, el uso del Muestreador de Gibbs Dual se va haciendo cada vez más costoso en términos computacionales, siendo con 10000 iteraciones un poco mayor a 5 veces más lento que el tradicional.

La Ilustración 14 muestra el comportamiento en un gráfico log-log:

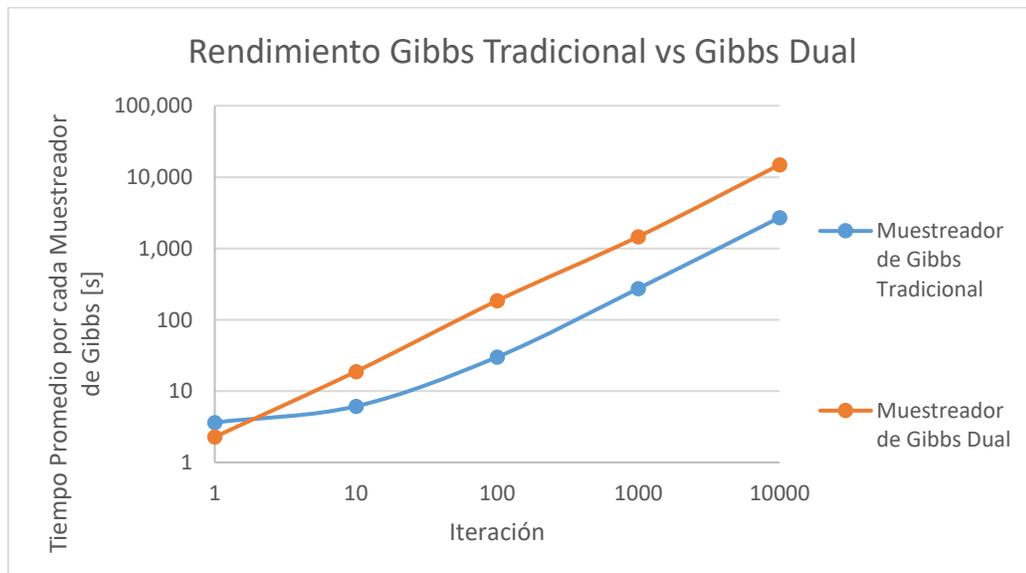


Ilustración 14: Muestreador de Gibbs Tradicional vs Dual Términos Computacionales

6.3.2 Convergencia; Máximos y Mínimos

Tal como se discute en los aspectos matemáticos, el muestreador de Gibbs tradicional no asegura su convergencia mientras que el dual sí [5]. Para llevar a cabo la prueba, se examina el mínimo y el máximo de las 100 simulaciones del muestreador de Gibbs para el caso sin efecto pepita y con efecto pepita, y posteriormente se toma el mínimo total y el máximo total. Se realiza adicionalmente variados test de Kolmogorov-Smirnov el cual analiza si los datos siguen una distribución normal estándar. Finalmente, se ven los valores propios de la matriz de varianza-covarianza C para el muestreador de Gibbs tradicional para poner a prueba la hipótesis 3 de las cadenas de Markov:

6.3.2.1 Sin Efecto Pepita

Tabla VI: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional sin Efecto Pepita

Iteraciones	Min	Max
1	-1.966	1.942
10	-2.376	2.278
100	-3.493	3.401
1000	-23.093	29.988
10000	-2.47E+11	2.67E+12

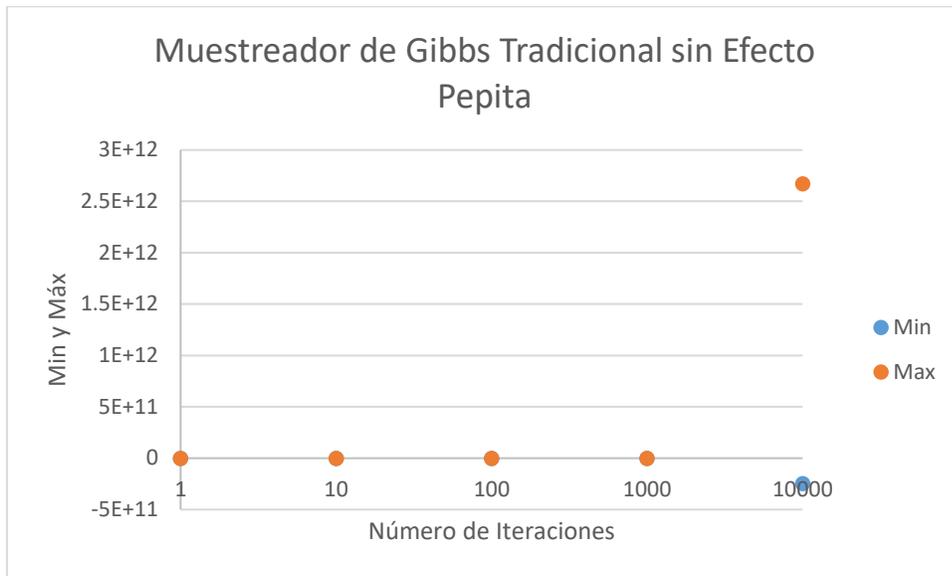


Ilustración 15: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional sin Efecto Pepita

Tabla VII: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Dual sin Efecto Pepita

Número de Iteraciones	Min	Max
1	-3.436	3.566
10	-3.894	4.038
100	-4.258	3.853
1000	-3.887	5.25
10000	-4.499	4.342

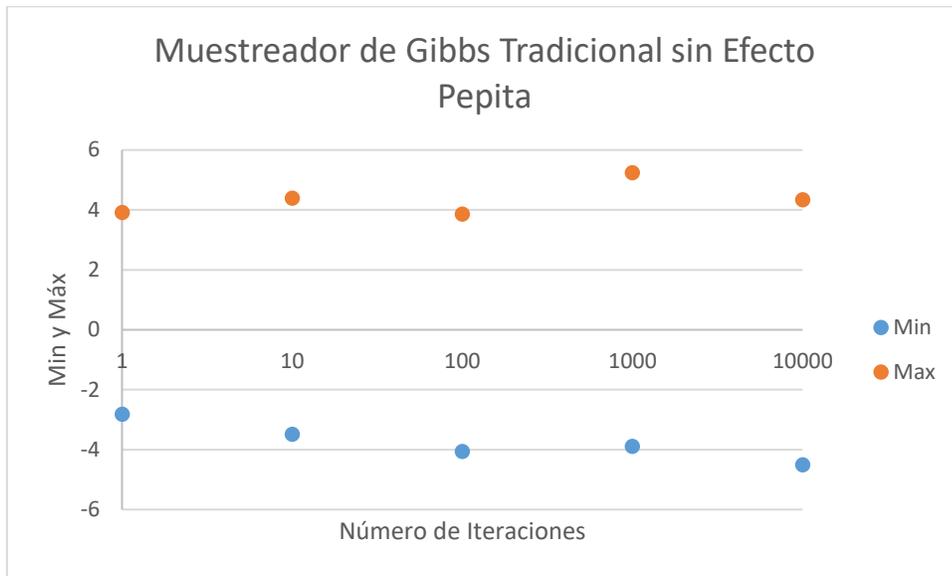


Ilustración 16: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Dual sin Efecto Pepita Dual

Se observa que, a medida que las iteraciones avanzan, el muestreador de Gibbs tradicional muestra un mínimo y máximo en constante aumento de su magnitud, siendo su culmine la iteración 10000, dándose un indicador de la divergencia a medida que aumentan las iteraciones. Este resultado es comparable con la Ilustración 4 y la Ilustración 5, que muestran la divergencia frente a las mil iteraciones del muestreador de Gibbs Tradicional.

Por otro lado, los extremos obtenidos por el muestreador de Gibbs dual se mantienen estables frente a la cantidad de iteraciones, corroborando así su capacidad de convergencia a medida que aumentan las iteraciones. Esto se observa también en la Ilustración 12 y la Ilustración 13 donde los variogramas van convergiendo a medida que aumentan las iteraciones.

6.3.2.2 Con Efecto Pepita

Tabla VIII: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional con Efecto Pepita

Número de Iteraciones	Min	Max
1	-3.293	3.440
10	-4.203	4.383
100	-5.877	4.444
1000	-6.435	4.152
10000	-6.574	4.197

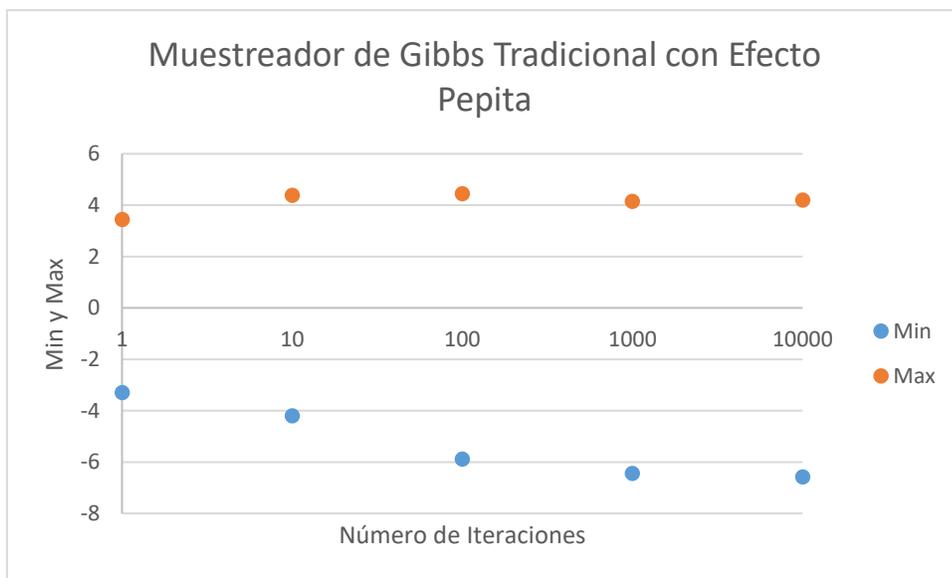


Ilustración 17: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional con Efecto Pepita

Tabla IX: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Dual con Efecto Pepita

Iteraciones	Min	Max
1	-2.635	2.464
10	-3.138	3.252
100	-4.428	3.967
1000	-3.183	2.538
10000	-4.263	4.569

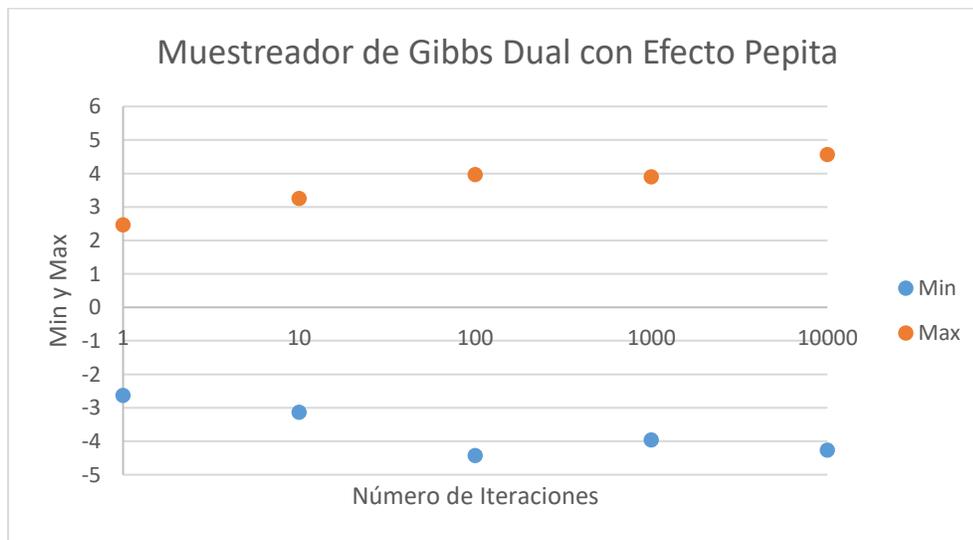


Ilustración 18: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Dual con Efecto Pepita

Agregar un efecto pepita ocasiona que el muestreador de Gibbs tradicional sea más robusto, por ende, a pesar de usarse 10000 iteraciones, no se observa una fluctuación importante en el máximo para asumir una divergencia para esta cantidad de iteraciones. El mínimo tiende a ir aumentando en valor absoluto a medida que las iteraciones avanzan, dando un posible indicador de divergencia, pero no se observa de manera clara en el variograma de la Ilustración 17.

El muestreador de Gibbs dual se muestra relativamente estable, pero tiene vaivenes a medida que las iteraciones avanzan. Debido a las hipótesis de Markov, no debiese existir divergencia y efectivamente, no se ve evidencia de ello.

6.3.3 Convergencia; Test de Kolmogorov-Smirnov (K-S test)

En la búsqueda de utilizar un test para demostrar de manera empírica la convergencia del muestreador de Gibbs dual y la divergencia del muestreador de Gibbs tradicional, se propone utilizar el K-S test. El objetivo es analizar si los resultados del muestreador de Gibbs siguen o no una distribución normal a medida que se aumentan las iteraciones.

La hipótesis del K-S test es que los datos sean independientes entre sí, lo cual no se cumple para las componentes del vector simulado. Para solucionar esto, se realiza el test examinando cada componente i a través de las 100 simulaciones. Esto es posible, debido a que cada simulación del muestreador de Gibbs es independiente de las otras, pues toma como datos condicionantes 100 escenarios distintos que no tienen relación entre ellos.

Es así como se crean 2500 vectores (cantidad de datos de cada vector original) de 100 datos cada uno y se realiza el K-S test con un riesgo de primera especie de 5%, contando la cantidad de veces que se acepta el test (arroja 0) y las que se rechaza (arroja 1).

Se espera que el 5% de los vectores entren en la categoría de rechazo para validar empíricamente el muestreador de Gibbs. El 5% en este caso representa que 125 vectores salgan rechazados.

Se muestra una tabla con los resultados obtenidos:

Tabla X: Test de Kolmogorov-Smirnov

		Número de Iteraciones				
		1	100	100	1000	10000
Cantidad de Rechazos en K-S test	Muestreador de Gibbs Dual Sin Efecto Pepita	932	969	882	706	394
	Muestreador de Gibbs Dual Con Efecto Pepita	1687	1106	707	240	155
	Muestreador de Gibbs Tradicional Sin Efecto Pepita	1992	867	171	180	973
	Muestreador de Gibbs Tradicional Con Efecto Pepita	346	242	254	259	223

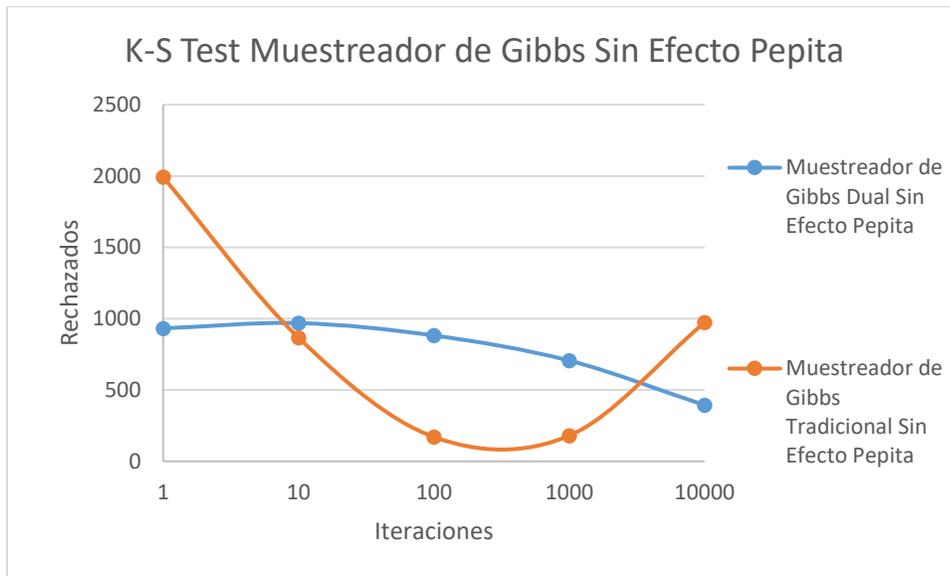


Ilustración 19: K-S Test Muestreador de Gibbs Sin Efecto Pepita

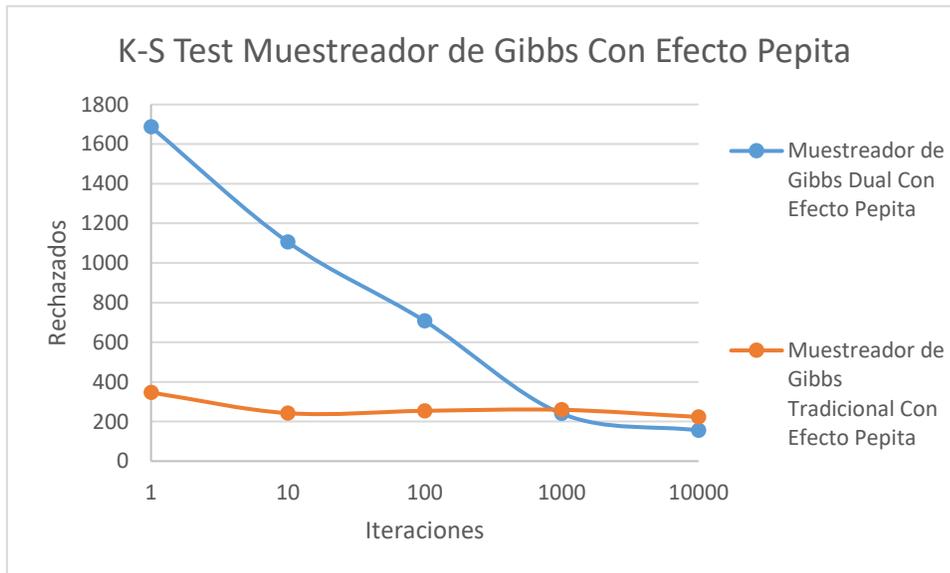


Ilustración 20: K-S Test Muestreador de Gibbs Con Efecto Pepita

A medida que las iteraciones avanzan, el muestreador de Gibbs dual sin efecto pepita va mostrando un buen comportamiento, es decir, los valores simulados se van acercando a una distribución normal estándar. Sin embargo, no se logran los 125 rechazos en la iteración 10000, si no que existen 394. A pesar de lo anterior, se espera que a medida que aumenten las iteraciones, este valor siga bajando. Por otro lado, la variante tradicional muestra un aumento muy fuerte en los rechazos en la iteración 10000 mostrando así que llega un punto en la cantidad de iteraciones donde los datos se alejan de dicha distribución, notándose una divergencia.

Al analizar el efecto de ambas variantes utilizando un efecto pepita, se observa que el muestreador de Gibbs dual va bajando sus rechazos llegando en la iteración 10000 a 155,

bastante cercano los 125 correspondientes al 5% del total. La variante tradicional también va mostrando una consistencia en la cantidad de rechazos, siendo menor en la iteración 10000 que en las anteriores, pero no bajando demasiado a medida que las iteraciones avanzan. Esto corrobora la mayor robustez que provoca el efecto pepita.

6.3.4 Convergencia; Valores Propios

Tal como se menciona en la subsección 5.2.1.2, para evidenciar la no convergencia del muestreador de Gibbs tradicional se debe demostrar ya sea la no simetría de la hipotética matriz de varianza-covarianza (C) o que al menos un valor propio de esta matriz sea negativo, o ambas. Con esto en mente se calcula los valores propios de las dos matrices de varianza-covarianza, para el caso sin efecto pepita y el con efecto pepita de las secciones 6.1.1 y 6.2.1. Los resultados se muestran en la Tabla XI:

Tabla XI: Valores Propios Caso Sintético Muestreador de Gibbs Tradicional

Muestreador de Gibbs Tradicional	Sin Efecto Pepita	Con Efecto Pepita
Número de Valores Propios no Reales	48	1380
Parte Imaginaria del Máximo Valor Propio No Real	0,013	0,047
Mínimo Valor Propio Real	-0,047	-0,027

Se observa que en ambos casos existen valores propios no reales y además existe al menos un valor propio real de signo negativo, por ende, se puede decir que en ambos casos el muestreador de Gibbs tradicional no va a converger a la distribución deseada, ya que no se cumple la propiedad de Invarianza de esta distribución por el núcleo de transición. Este resultado es muy importante ya que da una demostración práctica del riesgo de este algoritmo que la industria utiliza en la actualidad.

6.3.5 Conclusiones

En conclusión, se demuestra que al utilizar el muestreador de Gibbs tradicional para un caso sin efecto pepita, para 1000 iteraciones, se observa divergencia en los variogramas resultantes, en los máximos y mínimos del vector Gaussiano simulado (valores absolutos demasiado altos), en la cantidad de rechazos del K-S test y, además, en la matriz de varianza-covarianza que tiene al menos un valor propio negativo. Por otro lado, el muestreador de Gibbs tradicional con efecto pepita no muestra una divergencia visual en los variogramas, sin embargo, al analizar el mínimo del vector Gaussiano al aumentar las iteraciones, se observa un incremento constante dándose indicios de divergencia, aunque no queda demostrado en el K-S test. Todo se confirma con el análisis de los valores propios de la matriz de varianza-covarianza que tiene al menos un valor propio negativo.

El muestreador de Gibbs dual muestra un buen comportamiento para ambos casos. El primero (sin efecto pepita) converge visualmente en los variogramas en la iteración 10000, los máximos y mínimos permanecen estables. Para el caso con efecto pepita, los variogramas tienen una convergencia más lenta si se comparan ambas versiones bajo la misma cantidad de iteraciones, pero los máximos y mínimos permanecen estables. Esto es un indicador de falta de iteraciones, pero no de falla en la convergencia a lo deseado.

7 Caso Real

En la búsqueda de llevar ambas metodologías propuestas en el trabajo de tesis se desea realizar el procedimiento de simulación de tipos de rocas en un yacimiento real.

Se describe a continuación la geología del yacimiento y las variables de estudios.

Algunos nombres técnicos como también características geológicas se mantendrán en reserva en el desarrollo de esta tesis.

7.1 Geología de la Zona

El depósito está ubicado en el estado de Minas Gerais, Brasil, y está conformado en bandas de hierro alojado en itabiritas del Supergrupo Minas, el cual abarca tres secuencias del Paleoproterozoico, teniendo una antigüedad de entre 2600 a 2000 millones de años. A escala regional se presentan cinco unidades estratigráficas: Basamento cristalino, Supergrupo Rio das Velhas, Supergrupo Minas, Intrusivos del Post-Minas y Grupo Itacolomi. Las dimensiones del yacimiento son aproximadamente 2000 [m] en la dirección este-oeste, 1000 [m] en la dirección norte sur y 500 [m] en la dirección vertical.

La base del yacimiento se encuentra formado por conglomerados aluviales y piedra arenisca sobre lutitas de aguas poco profundas. El grupo intermedio corresponde a una extensa región de *BIF* (Banded Iron Formations) constituidas por rocas químicas sedimentarias metalíferas donde el hierro fue depositado de forma autóctona a partir de concentraciones altas, mediante saturación en cuencas marinas.

Al estar el yacimiento alojado en itabiritas, esta forma parte significativa de la formación geológica. En consecuencia, define en gran medida la mineralización, estructuras y minerales de interés. Las itabiritas corresponden a BIF oxidadas, metamorizadas y deformadas, contenidas en depósitos con una distribución discontinua. Debido a diversos factores o procesos geológicos asociados, como altos esfuerzos, es difícil determinar sus características primarias.

En un aspecto mineralógico, el cuarzo destaca en el yacimiento, el cual está presente recristalizado de forma granular. El hierro, por su parte, se presenta como hematita, magnetita o martita. La itabirita dolomítica consiste en bandas alternadas de carbonatos rojos y hierro oxidado negro, mientras que la itabirita anfibolítica consiste en bandas de diversos tipos de anfibolitas (grunerita, tremolita, cummintonita, antofilita y/o actinolita) y bandas con hierro oxidado.

Tal como se menciona anteriormente, el yacimiento presenta mineral de hematita el cual es el principal mineral de hierro, presentándose como martita, hematita granular y especularita. El cuarzo corresponde a la principal ganga, seguido por la dolomita y anfibolita. Además, como ganga, aparece en menor cantidad la clorita, apatita y otros minerales silicatados.

7.2 Minerales de Hierro

La formación de los minerales de hierro está asociado a un enriquecimiento del BIF. La división de estos está asociada a la concentración de Hierro presente en los minerales. El principal mineral de hierro es la hematita (alta ley) y la itabirita (baja ley). La transición desde la alta ley (mayor a 62 [%] de hierro) a la baja ley (entre 32 [%] y 62 [%] de hierro) está principalmente caracterizada por un incremento en la cantidad de contaminantes siendo el cuarzo el principal de estos.

Los minerales de alta ley de hierro pueden presentarse de manera compacta, suave o intermedia. El primer grupo son densos aglomerados de hematita y cristales de martita, mientras que los últimos son friable y corresponden a agregados de hematita con una considerable cantidad de poros.

Los minerales de baja ley se encuentran disperso a través de todo el depósito, usualmente gradando a los minerales suaves de alta ley o al conjunto cuarzo itabirita que se encuentra protegido del ambiente. De acuerdo a la cantidad de hematita, goethita y óxidos de manganeso, se pueden clasificar los minerales de baja ley en ricos en itabirita, itabirita limonítica o itabirita manganesífera.

Además, el depósito está bajo una capa supérgena (conocida como ganga superficial), formada de fragmentos ricos en hierro e itabirita cementada con goethita derivada de meteorización de la formación de hierro [21].

La ganga superficial tiene una presencia similar a las itabiritas, es decir, aparece poco en los minerales de alta ley de Hierro consistente en cuarzo, dolomita, clorita y talco y a medida que el mineral es menos rico en hierro, aparece más.

7.3 Base de Datos

La campaña de exploración consiste en aproximadamente 1700 sondajes de diamantina con la intención de cuantificar y reconocer el yacimiento. La grilla de sondajes es cuasi regular, con una separación horizontal que va de 50x50 [m] hasta los 100x100 [m]. A lo largo de los sondajes, 4465 compósitos se obtienen con información de la ley de cinco elementos de interés que se muestran a continuación con sus respectivas siglas que se usan a lo largo de la presente tesis:

Tabla XII: Definición de las Variables de Estudio

Elemento de Interés	Simbología
Hierro	Fe
Sílice	Si

Fósforo	P
Aluminio	Al
Manganeso	Mn
Pérdida de Fuego	Pf
Granulometría	G1

Mientras que la granulometría corresponde a la fracción granulométrica del mineral sobre los 6.3 [mm], la pérdida de fuego está asociada al porcentaje de masa perdido por un elemento de interés sometido a una temperatura específica. Este último proceso permite que las sustancias volátiles escapen siendo de mucha importancia en el caso particular de la goethita ya que sirve para realizar un análisis granuloquímico.

La información de la campaña de sondajes con los tipos de roca se muestra en la Ilustración 21.

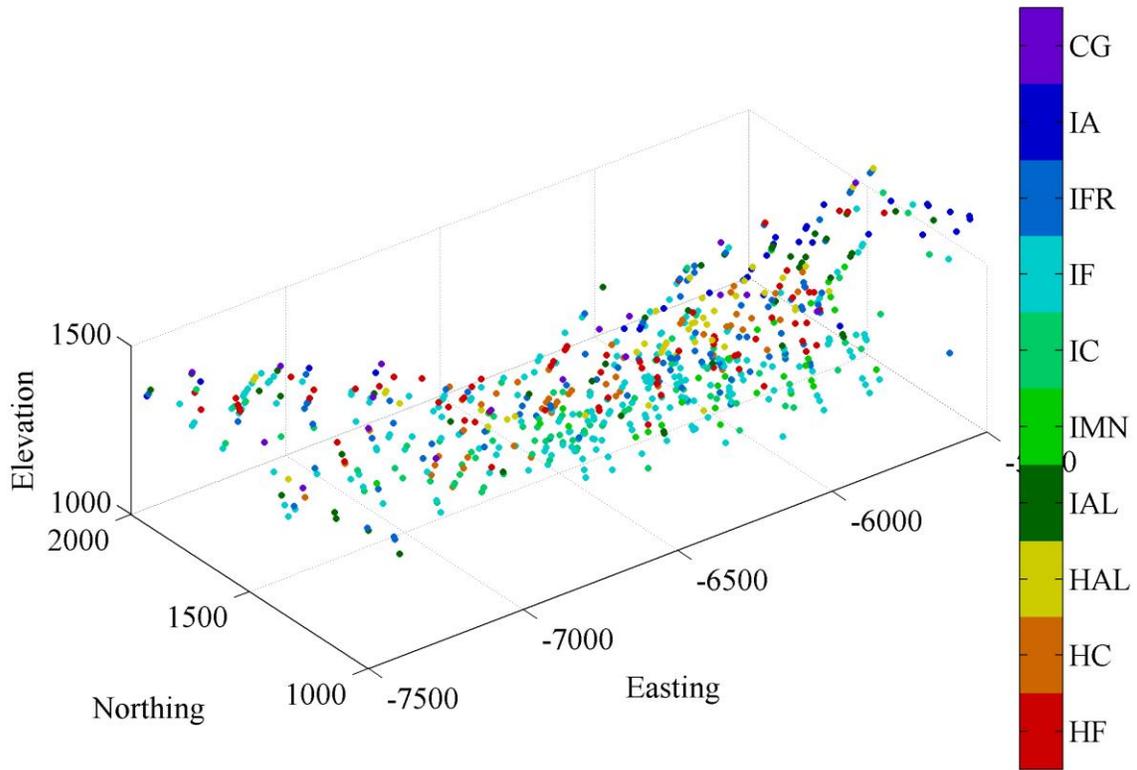


Ilustración 21: Caso Real: Campaña de Sondajes. Tipos de Roca [22]

En la Tabla XIII se presenta los tipos de roca con la codificación numérica respectiva y el porcentaje de las variables mencionadas previamente en cada tipo de roca. La quinta columna muestra la presencia porcentual del tipo de roca en los sondajes.

Tabla XIII: Codificación de Tipos de Roca y Valor Variable Categórica

Tipo	Tipo de Roca	Simbología	Código	[%]	Fe [%]	P [%]	Al [%]	Mn [%]	Pf [%]	G1 [%]
Hematita	Hematita Friable	HF	1	10.2	≥ 62		> 2.5	< 1	< 3.5	< 50
	Hematita Compacta	HC	2	6.9						≥ 50
	Hematita Rica en Aluminio	HAL	3	5.4			> 0.12	< 2.5	≥ 1	≥ 3.5
Itabirita	Itabirita Rica en Aluminio	IAL	4	7.0	≥ 30 < 62		> 2.5	< 1	≥ 3.5 < 5	
	Itabirita Rica en Manganeso	IMN	5	4.6				≥ 1		
	Itabirita Compacta	IC	6	10.9			< 0.2	< 2.5		< 3.5

7.4 Modelamiento y Simulación del Tipo de Roca

De acuerdo a la información de los sondajes y al entendimiento del depósito, el layout espacial de los tipos de roca se ha modelado en una grilla regular de espaciamiento 10x10x10 [m]; 219, 108 y 55 nodos en las direcciones este, norte y elevación, respectivamente.

Se utiliza un modelo plurigaussiano para realizar simulaciones en la grilla antes mencionada para modelar de mejor manera los distintos tipos de roca con sus contactos permitidos. En la siguiente sección se comenta la regla de truncación que se utiliza (modelo plurigaussiano).

7.4.1 Regla de Truncación

El modelo plurigaussiano define una variable categórica (tipo de roca para el caso de estudio) a través de la truncación de funciones aleatorias Gaussianas. La regla de truncación es elegida para satisfacer los contactos entre tipos de roca los cuales están relacionados con las transiciones de granulometría, pérdidas por ignición y ley del elemento de interés (baja y alta ley). Es así como se crean los umbrales de truncación, basadas en 6 funciones aleatorias gaussianas, denotadas desde ahora en adelante como Y_1, \dots, Y_6 . Una visión gráfica se muestra a continuación:

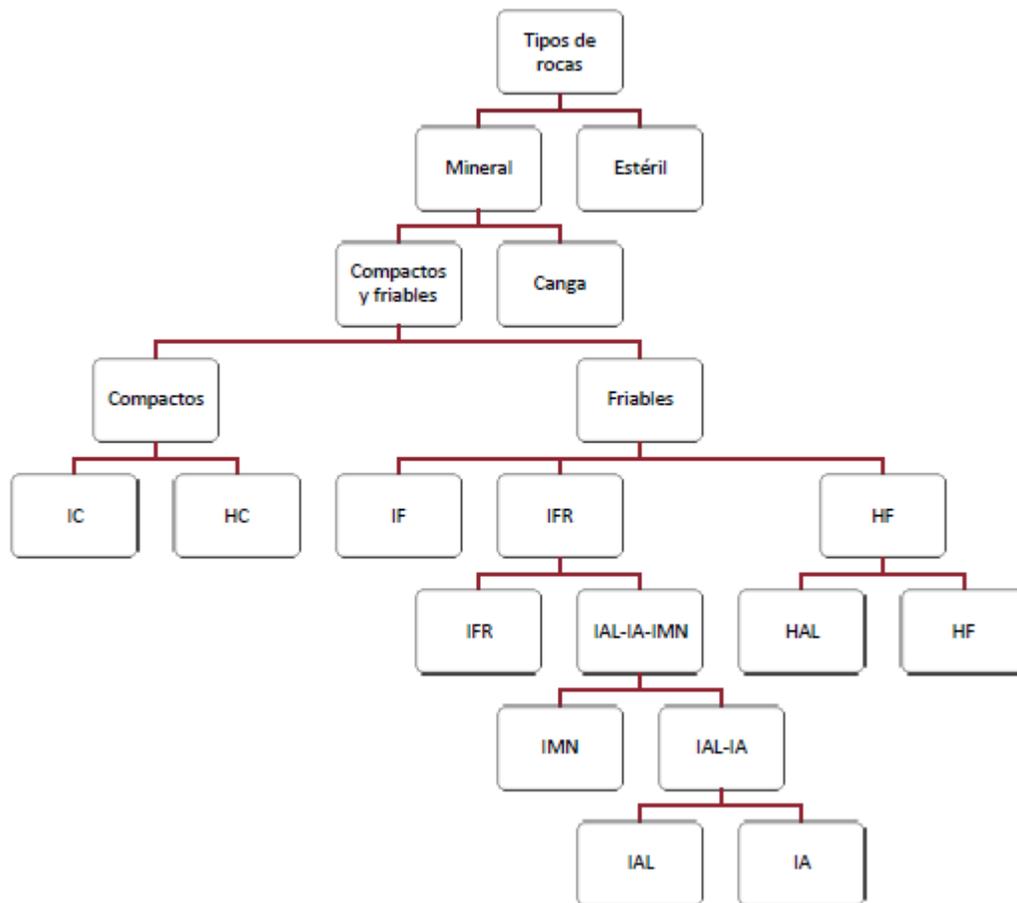


Ilustración 22: Esquema Regla de Truncación Caso Real [22]

Se muestran los umbrales de truncación de cada vector aleatorio Gaussiano en las siguientes subsecciones.

7.4.1.1 Primer Vector Aleatorio Gaussiano: Separación Entre Mineral y Ganga

Es de interés separar el mineral de interés de la ganga debido a la naturaleza y al aporte económico que la primera trae. Debido a esto, se decide que ambos se simulen de manera independiente. Se muestra a continuación el agrupamiento que tienen los tipos de roca con esta nueva división.

Tabla XIV: División Primer Vector Aleatorio Gaussiano

Tipo de Roca	Simbología	Código de Roca Asociado
Ganga	CG	10

Mineral	HF, HC, HAL, IAL, IMN, IC, IF, IFR, IA	1,2,3,4,5,6,7,8,9
---------	--	-------------------

De acuerdo a la información de sondajes, la proporción de la ganga es igual a 3.70 [%] del total de datos a simular. Como consecuencia se tiene que el umbral de truncación t_1 está definido con un valor de -1.993 para el vector aleatorio Gaussiano Y_1 . donde Y_1 está asociado al primer vector aleatorio Gaussiano asociado a la separación entre mineral y ganga.

7.4.1.2 Segundo Vector Aleatorio Gaussiano: Separación Basada en Granulometría

Dentro de la geología zonal, los minerales compactos y friables pueden ser divididos de acuerdo a la granulometría G1 que presentan. Los compactos están asociados a valores mayores de G1, mientras que los friables a un valor menor que la variable antes mencionada.

Se puede resumir lo anterior en la siguiente tabla:

Tabla XV: División Segundo Vector Aleatorio Gaussiano

Tipo de Roca	Simbología	Código de Roca Asociado
Compactos	HC, IC	2,6
Friables	HF, HAL, IAL, IMN, IF, IFR, IA	1,3,4,5,7,8,9

De acuerdo la información entregada por sondajes, los tipos de roca compactas representan el 19.22 [%] del total de mineral. Como consecuencia, el umbral t_2 asociado al vector aleatorio Gaussiano Y_2 tiene un valor de -0.870 , donde Y_2 corresponde al segundo vector aleatorio Gaussiano asociado a la separación basada en granulometría.

7.4.1.3 Tercer Vector Aleatorio Gaussiano: Separación Basada en la Ley de Hierro

Dentro de los sub grupos compactos y friables, existen diferencias considerables respecto a la cantidad de hierro asociados a los tipos de rocas. En los compactos, se distingue la itabirita de la hematita. Mientras que la primera presenta leyes de hierro menores a 62 [%], la segunda posee leyes mayores a dicho valor. Dentro de las rocas friables, se distinguen dos sub grupos, las hematitas y las itabiritas. Estas últimas, a su vez, se dividen en dos sub grupos más: Las itabiritas con bajo contenido de hierro (IF con leyes inferiores a 52 [%]) y las itabiritas ricas en hierro (IFR, IAL, IMN e IA) con leyes entre 52 [%] y 62 [%].

Lo anterior se muestra en la siguiente tabla:

Tabla XVI: División Tercer Vector Aleatorio Gaussiano

Tipo de Roca	Sub Grupo	Simbología	Código de Roca Asociado
Compactos	Compactos Ricos en Hierro	HC	2
	Compactos Pobres en Hierro	IC	6
Friables	Hematitas Ricas en Hierro	HF, HAL	1,3
	Itabiritas Friables Ricas	IAL, IMN, IFR, IA,	4,5,8,9
	Itabiritas Friables pobres	IF	7

Es importante señalar que el departamento de geología advierte que hay grupos de tipos de roca que tenderán a no estar en contacto. Las hematitas ricas en hierro no tendrán contacto con las itabiritas friables pobres en hierro. Además, dependiendo de las proporciones, es probable que la itabirita compacta no esté en contacto con las hematitas friables ricas en hierro, considerándose que estos grupos se diferencian por su contenido de hierro lo cual hace mucho sentido.

En consecuencia, dentro del grupo de las rocas friables se observa que la proporción de las hematitas ricas en hierro es de un 21.07 [%], las Itabiritas friables ricas representan un 41.16 [%] y las Itabiritas friables pobres representan por su lado un 37.77 [%].

Analizando las rocas compactas, se tiene que los compactos ricos en hierro representan un 39.60 [%] mientras que los compactos pobres en hierro representan el complemento.

Ahora se pueden obtener los umbrales de truncación para el vector aleatorio Gaussiano Y_3 asociado a la ley de Hierro.

En las rocas friables, el umbral t_3 tiene un valor de -0.80 separando las hematitas ricas de hierro del resto. El umbral t_3' separa las Itabiritas friables pobres de las hematitas ricas en hierro y de las Itabiritas ricas teniendo un umbral de 0.31 . Dentro de las rocas compactas, el umbral t_3'' separa las rocas compactas ricas en hierro de las compactas pobres en hierro, teniendo el valor de -0.26 .

7.4.1.4 Cuarto Vector Aleatorio Gaussiano: Separación Basada en la Ley de Aluminio

Dentro de los subgrupos de la subsección anterior, existen diferencias en las leyes de aluminio, en especial dentro de las Itabiritas friables ricas y las hematitas ricas en hierro. Se muestra la subdivisión dentro los grupos mencionados previamente:

Tabla XVII: División Cuarto Vector Aleatorio Gaussiano

Tipo de Roca	Sub Grupo	Simbología	Código de Roca Asociado
Hematitas Ricas en Hierro	Hematita Rica en Aluminio	HAL	3
	Hematita Friable	HF	1
Itabiritas Friables Ricas	Itabirita Friable Rica	IFR	8
	Otras Itabiritas Friables	IAL, IMN, IA	4,5,9

Se observa que las hematitas ricas en hierro se dividen en dos grupos, la hematita rica en aluminio y la hematita friable (bajo contenido en aluminio), mientras que las Itabiritas friables ricas se dividen a su vez en las de alta ley de aluminio (IAL, IMN, IA) y las de baja ley en este elemento (IFR).

Dentro del grupo de las hematitas ricas en hierro, la hematita rica en aluminio representa el 35.90 [%] mientras que la hematita friable representa el complemento, es decir, el 57.55 [%]. A su vez, dentro del grupo de las Itabiritas friables ricas, la itabirita friable rica representa el 42.45 [%] del grupo, mientras que el grupo de alta ley en aluminio (otras Itabiritas friables) representa el 57.55 [%].

Se obtienen los umbrales de truncación asociados a los porcentajes anteriores para el vector aleatorio Gaussiano Y_4 el cual representa la separación de acuerdo a la concentración de aluminio.

El umbral de truncación t_4 que separa el grupo de las Itabiritas friables ricas tiene un valor de -0.19 mientras que el umbral t'_4 separa el grupo de las hematitas rica en hierro, teniendo un valor de 0.36 .

7.4.1.5 Quinto Vector Aleatorio Gaussiano: Separación Basada en la Ley de Manganeso

El grupo de las Itabiritas friables ricas en aluminio pueden ser sub divididas de acuerdo a la ley de manganeso presente en las rocas. Es así como se puede efectuar la división de este grupo en las Itabiritas ricas en manganeso y las Itabiritas pobres en este elemento. La siguiente tabla muestra el resultado de esta división:

Tabla XVIII: División Quinto Vector Aleatorio Gaussiano

Tipo de Roca	Sub Grupo	Simbología	Código de Roca Asociado
Itabiritas friables ricas en aluminio	Itabirita Rica en Manganeso	IMN	5
	Itabiritas Pobres en Manganeso	IAL, IA	4,9

Dentro del grupo de las Itabiritas friables ricas en aluminio, la itabirita rica en manganeso representa el 27.76 [%] del grupo mientras que el subgrupo de las Itabiritas pobres en manganeso representan el 72.24 [%].

Es así como se logra obtener el umbral de truncación t_5 para el vector Y_5 , el cual separa de acuerdo a la ley de manganeso, t_5 , tiene un valor de -0.59 .

7.4.1.6 Sexto Vector Aleatorio Gaussiano: Separación Basada en la Pérdida de Fuego

El grupo de las Itabiritas pobres en manganeso se pueden subdividir de acuerdo al contenido de pérdida de fuego. Es así como se presenta la división considerando un 5[%] de esta variable donde la itabirita anfibolítica presenta pérdidas mayores a este umbral y la itabirita rica en aluminio presenta pérdidas menores a este rango. Esta división se presenta en la siguiente tabla:

Tabla XIX: División Sexto Vector Aleatorio Gaussiano

Tipo de Roca	Sub Grupo	Simbología	Código de Roca Asociado
Itabiritas Pobres en Manganeso	Itabirita Anfibolítica	IA	9
	Itabirita Rica en Aluminio	IAL	4

Como consecuencia, se obtienen las proporciones que toman estos tipos de roca en el grupo de las Itabiritas pobres en manganeso. La itabirita anfibolítica representa el 44.21 [%] del total, mientras que la itabirita rica en aluminio representa el complemento, es decir, 55.79 [%].

Se calcula el umbral para truncar el vector aleatorio Y_6 , el cual separa por pérdida de fuego.

El umbral t_6 tiene un valor de 0.14 donde los valores menores a este umbral corresponden a la itabirita rica en aluminio.

Todo lo resumido anteriormente se muestra en los siguientes esquemas:

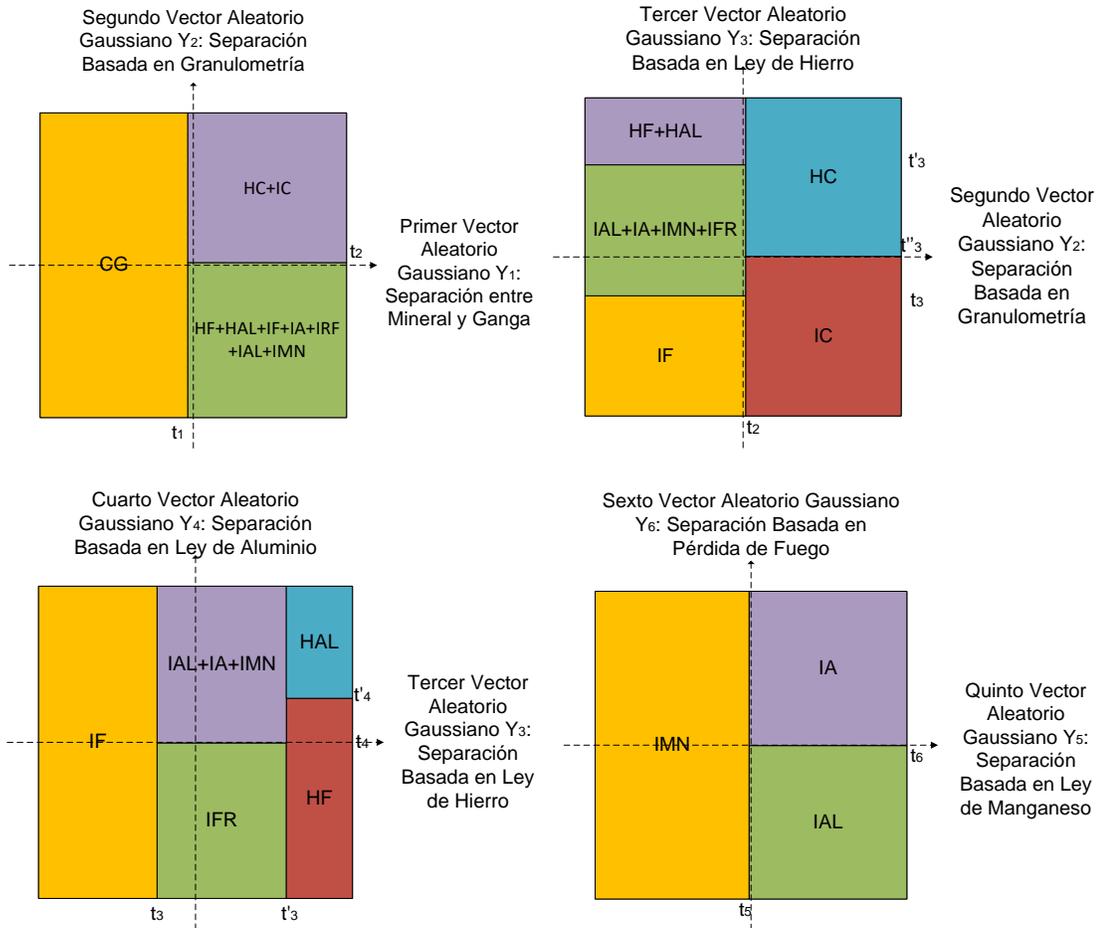


Ilustración 23: Bandera de Truncación Caso Real [22]

7.4.2 Umbrales de Truncación

Las reglas de truncación dependen de nueve umbrales $\{t_1, t_2, t_3, t'_3, t_4, t'_4, t_5, t_6\}$, los cuales son descritos en la subsección anterior, que delimitan la partición del espacio de seis dimensiones en paralelotos. Se define p_1, \dots, p_{10} a la proporción de los 10 tipos de roca de interés (valores medios de la variable indicador asociado a cada tipo de roca) ordenados de acuerdo a la Tabla XIII.

Asumiendo que las funciones aleatorias Gaussianas Y_1, \dots, Y_6 son independientes entre sí y denotando por G a la función distribución normal acumulada, se puede seguir la siguiente relación entre el tipo de roca y el umbral de truncación.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 p_1 = [1 - G(t_1)]G(t_2)[1 - G(t'_3)]G(t'_4) \\
 p_2 = [1 - G(t_1)][1 - G(t_2)][1 - G(t''_3)] \\
 p_3 = [1 - G(t_1)]G(t_2)[1 - G(t'_3)][1 - G(t'_4)] \\
 p_4 = [1 - G(t_1)]G(t_2)[G(t'_3) - G(t_3)][1 - G(t_4)][1 - G(t_5)]G(t_6) \\
 p_5 = [1 - G(t_1)]G(t_2)[G(t'_3) - G(t_3)][1 - G(t_4)G(t_5)] \\
 p_6 = [1 - G(t_1)][1 - G(t_2)]G(t'_3) \\
 p_7 = [1 - G(t_1)]G(t_2)G(t_3) \\
 p_8 = [1 - G(t_1)]G(t_2)[G(t'_3) - G(t_3)]G(t_4) \\
 p_9 = [1 - G(t_1)]G(t_2)[G(t'_3) - G(t_3)][1 - G(t_4)][1 - G(t_5)][1 - G(t_6)] \\
 p_{10} = G(t_1)
 \end{array} \right.$$

Ecuación 26: Relación entre Tipo de Roca y Umbral de Truncación [22]

Mediante esta relación, se puede obtener el umbral de truncación conociendo la proporción del tipo de roca presente.

En esta tesis, la proporción de tipo de roca se define como estacionaria, es decir, la proporción no varía en el espacio. A pesar de que desde un punto geológico no es homogénea en el depósito, en la práctica, se utiliza esta hipótesis para realizar la labor requerida. Se utiliza así proporciones globales para el depósito, donde en cualquier parte del sector del yacimiento, la proporción de cada tipo de roca es constante.

7.4.3 Análisis Variográfico

Para cada función aleatoria Gaussiana y cada umbral de truncación, los tipos de roca se pueden codificar en indicadores, ya sea 0, 1 o desconocido, de acuerdo a la Tabla XX.

Tabla XX: Codificación de Tipo de Roca en la Variable Indicador [22]

Tipo de Roca	$Y_1 < t_1$	$Y_2 < t_2$	$Y_3 < t_3$	$Y_3 < t'_3$	$Y_3 < t''_3$	$Y_4 < t_4$	$Y_4 < t'_4$	$Y_5 < t_5$	$Y_6 < t_6$
HF	0	1	0	0	-	-	1	-	-
HC	0	0	-	-	0	-	-	-	-
HAL	0	1	0	0	-	-	0	-	-
IAL	0	1	0	1	-	0	-	0	1

IMN	0	1	0	1	-	0	-	1	-
IC	0	0	-	-	1	-	-	-	-
IF	0	1	1	1	-	-	-	-	-
IFR	0	1	0	1	-	1	-	-	-
IA	0	1	0	1	-	0	-	0	0
CG	1	-	-	-	-	-	-	-	-

Los variogramas experimentales del indicador previamente definidos, son calculados a lo largo de dos direcciones. En el plano horizontal con pasos de 50 metros y la dirección vertical con pasos cada 10 [m] con una tolerancia angular de 90 [°] para el azimut y de 20 [°] para el dip, en ambos. El siguiente paso consiste en convertir estos variogramas experimentales a variogramas Gaussianos usando la relación que existe entre estos [23] [24] y finalmente modelarlos utilizando variogramas anidados.

El ajuste de cada variograma es descrito en la Tabla XXI y las imágenes de estos se muestran en la Ilustración 24.

Tabla XXI: Parámetros de los Variogramas Modelados [22]

Función Aleatoria Gaussiana	Estructura Básica Anidada	Alcance Horizontal (m)	Alcance Vertical (m)	Meseta
1	Cúbico	100	150	0.271
	Cúbico	1000	150	0.729
2	Cúbico	25	15	0.765
	Cúbico	550	100	0.235
3	Exponencial	110	85	0.761
	Cúbico	700	165	0.239
4	Exponencial	200	200	1.000
5	Esférico	520	520	1.000
6	Cúbico	65	30	0.903
	Cúbico	600	35	0.097

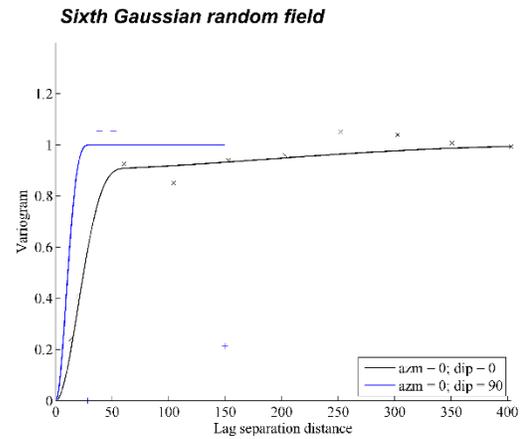
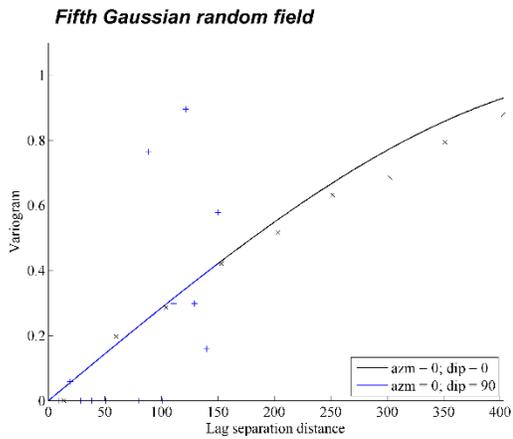
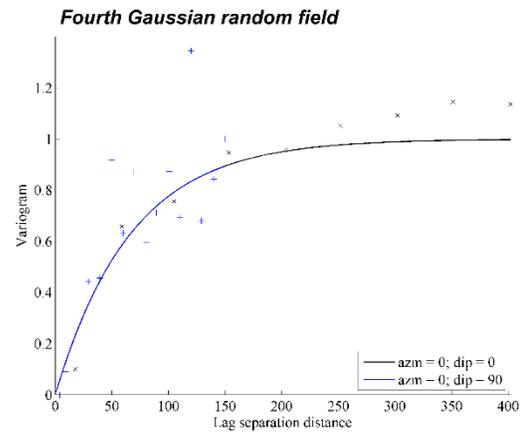
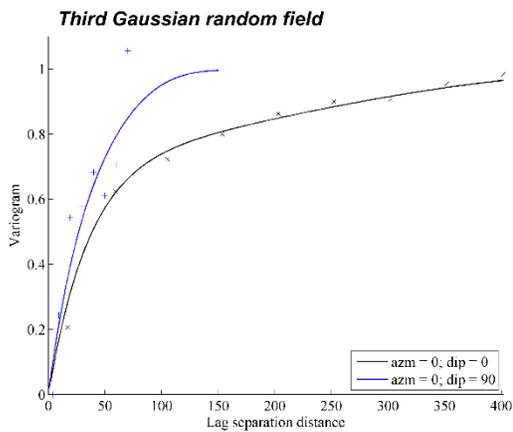
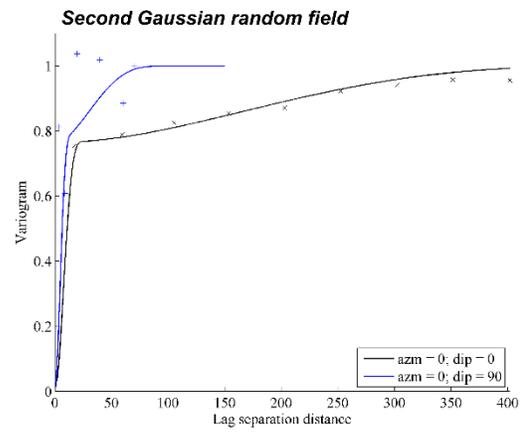
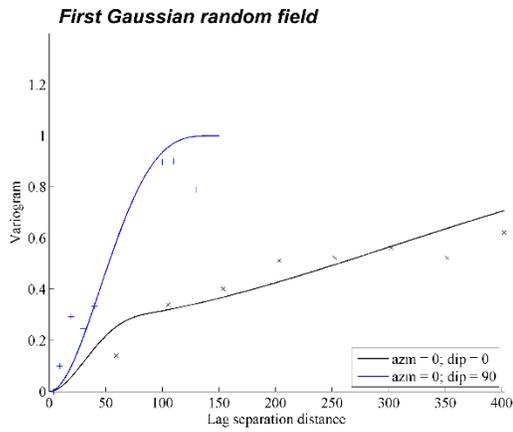


Ilustración 24: Variogramas Experimentales y Modelados Gaussianos [22]

El ajuste es realizado por un algoritmo semi automático asegurando que la meseta de cada variograma sea igual a 1 [25] ya que las funciones aleatorias Gaussianas son asumidas con

varianza igual a 1. Los variogramas cruzados de las funciones aleatorias Gaussianas son idénticos a la función cero en tanto que estas funciones son asumidas independientes.

7.4.4 Simulación

Tal como se menciona en la sección 4.5.2, la simulación se hace en tres pasos:

- 1) Las seis funciones aleatorias Gaussianas subyacentes (o vectores) Y_1, \dots, Y_6 son primero simuladas en las áreas que se tiene información, condicionadas a las variables indicadores de acuerdo a la Tabla XX utilizando el muestreador de Gibbs (tradicional o dual) mencionado en los capítulos anteriores. Para el caso de estudio, se prueba 1, 10, 100 y 1000 iteraciones para ambas metodologías.
- 2) Las funciones aleatorias Gaussianas son simuladas en la grilla que propone el geólogo, condicionalmente a los datos Gaussianos producidos por el muestreador de Gibbs (tradicional o dual). Las realizaciones no-condicionales de cada función aleatoria Gaussianas son construidas con el algoritmo de bandas rotantes referido en la sección 4.4.1 [26] y convertidas a realizaciones condicionales por el kriging residual [8].
- 3) Las funciones aleatorias Gaussianas simuladas son finalmente truncadas para así obtener los dominios geológicos (tipos de roca) de acuerdo a la regla de truncación definida previamente (Ilustración 23).

Se realizan 20 realizaciones del tipo de roca cambiando la semilla para la misma grilla. La metodología para obtener el tipo de roca esperado en los sectores sin información consiste en tomar el tipo de roca más probable de las 20 realizaciones en el mismo punto de la grilla para así graficar los resultados finales. Se realizan 1, 10, 100 y 1000 iteraciones para el muestreador de Gibbs y se utiliza los siguientes parámetros de búsqueda para el muestreador de Gibbs tradicional y para el kriging residual.

Es importante señalar que el muestreador de Gibbs dual utiliza todos los datos para esta metodología, pero en el paso 2 de la parte anterior, se requiere utilizar un algoritmo de bandas rotantes y luego kriging residual. Este último utiliza un radio de búsqueda y es por esto que en el presente trabajo de tesis, el muestreador de Gibbs dual tiene asociado un radio de búsqueda, no siendo utilizado para sí mismo, si no como el paso posterior de la simulación.

Tabla XXII: Radios de Búsqueda y Cantidad de Datos en la Elipsoide

Radio de Búsqueda [m]	(300,300,50)	(600,600,100)
Cantidad de Datos	24	24
Cantidad de Datos	48	48
Cantidad de Datos	96	96
Cantidad de Datos	192	192

7.5 Resultados de la Simulación del Caso Real

Tal como se menciona anteriormente, se hacen 20 realizaciones cambiando la cantidad de datos a considerar para el muestreador de Gibbs tradicional y muestreador de Gibbs dual; y la cantidad de iteraciones asociadas.

En la primera sección se evalúa el resultado de la simulación luego de realizar todos los procedimientos, es decir:

- 1) Utilización del muestreador de Gibbs correspondiente (tradicional y dual).
- 2) Utilización del algoritmo de bandas rotantes para obtener información de los sectores sin información y kriging residual.
- 3) Truncar los valores para obtener el tipo de roca.

En esta parte, al tener 20 realizaciones en total, se tendrán un conjunto de escenarios para la misma zona, de hecho, 20 resultados (tipos de roca) para el mismo sector a estudiar. La metodología para decidir cuál es el correcto es seleccionar el tipo de roca con mayor frecuencia como se menciona previamente.

Luego de analizar los resultados, se procede a estudiar el muestreador de Gibbs en sí para hacer un estudio en profundidad de los resultados obtenidos en la parte anterior ya que se observan anomalías en algunos casos a medida que aumentan las iteraciones en el muestreador de Gibbs tradicional. Además se estudia el muestreador de Gibbs dual para dar un análisis comparativo con su estudio respectivo.

Es importante señalar que el estudio se concentra solo en los 24 y 96 datos con el radio de búsqueda (300, 300, 50) [m]. Las razones son las siguientes:

- 1) El estudio del muestreador de Gibbs tradicional con 24 datos con radios de búsqueda (300, 300, 50) [m] tiene el mismo comportamiento bajo las mismas iteraciones que el de 24 datos con radios (600, 600, 100) [m] y el de 48 datos con ambos radios de búsqueda.
- 2) El estudio del muestreador de Gibbs tradicional con 96 datos con el radio de búsqueda (300, 300, 50) [m] tiene un resultado muy similar bajo las mismas iteraciones que el de 96 datos con radios (600, 600, 100) [m] y 192 datos con ambos radios de búsqueda.

Es por esto que los restos de los casos estarán en anexos.

Para el muestreador de Gibbs dual, se muestra el resultado del análisis al considerar el radio de búsqueda (300, 300, 50) [m] para el algoritmo de bandas rotantes más el kriging para condicionar. Los resultados utilizando el otro radio de búsqueda muestran similitudes ya que sólo se cambia la semilla para comenzar el algoritmo y la vecindad de la etapa del kriging. Estarán las imágenes y tablas respectivas en anexos.

7.5.1 Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m] Muestreador de Gibbs Tradicional

7.5.1.1 Muestreador de Gibbs Tradicional 24 Datos

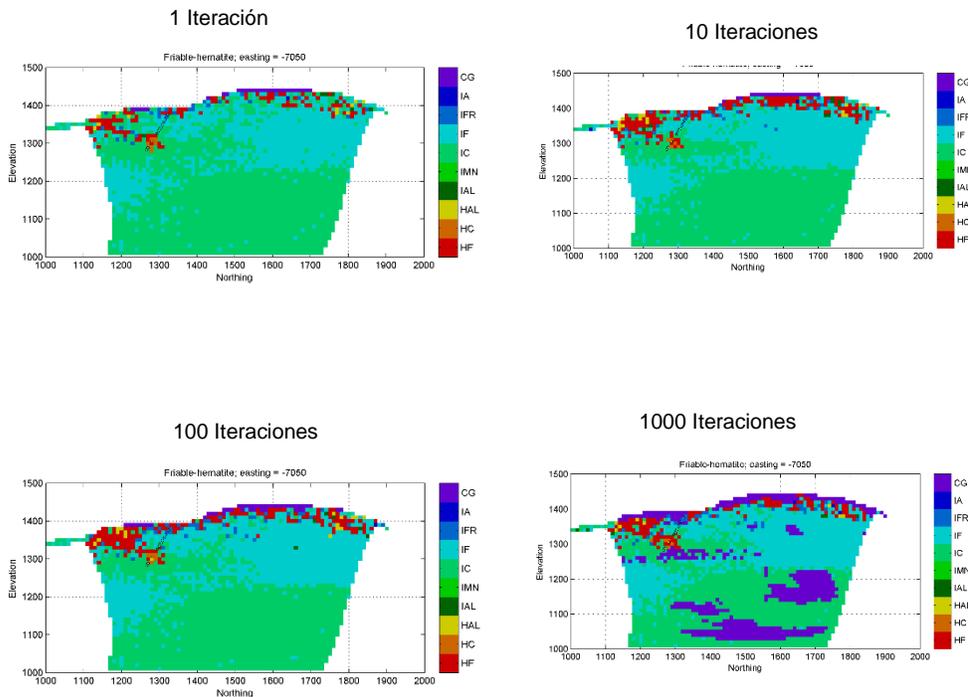


Ilustración 25: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Tradicional, 24 Datos, (300, 300, 50) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones

Aunque se puede observar en este caso que el muestreador de Gibbs se comporta de una manera aparentemente estable a medida que las iteraciones avanzan, en la iteración 1000 aparece una fenomenología bastante peculiar. La ganga aparece repentinamente en la parte inferior del yacimiento. Desde un punto de vista geológico, esto es poco probable, ya que de acuerdo a las características del yacimiento, la ganga debería aparecer solo superficialmente. Desde un punto de vista de la información entregada por los sondajes e interpretación geológica, no existen datos de ganga en la parte inferior del yacimiento. En las primeras iteraciones aparece HF y la ganga de manera muy pepítica cerca de la superficie, y a medida que avanzan las iteraciones (100) va tomando más continuidad. En la iteración 1000, HF se ve de manera granular en la zona superior derecha, tomando forma pepítica nuevamente.

Se puede notar una divergencia con la aparición sorpresiva del tipo de roca ganga que se debe al comportamiento del muestreador de Gibbs tradicional ante esta cantidad de datos tomados. La discusión de este comportamiento particular se encuentra en la sección siguiente

7.5.1.2 Muestreador de Gibbs Tradicional 96 Datos

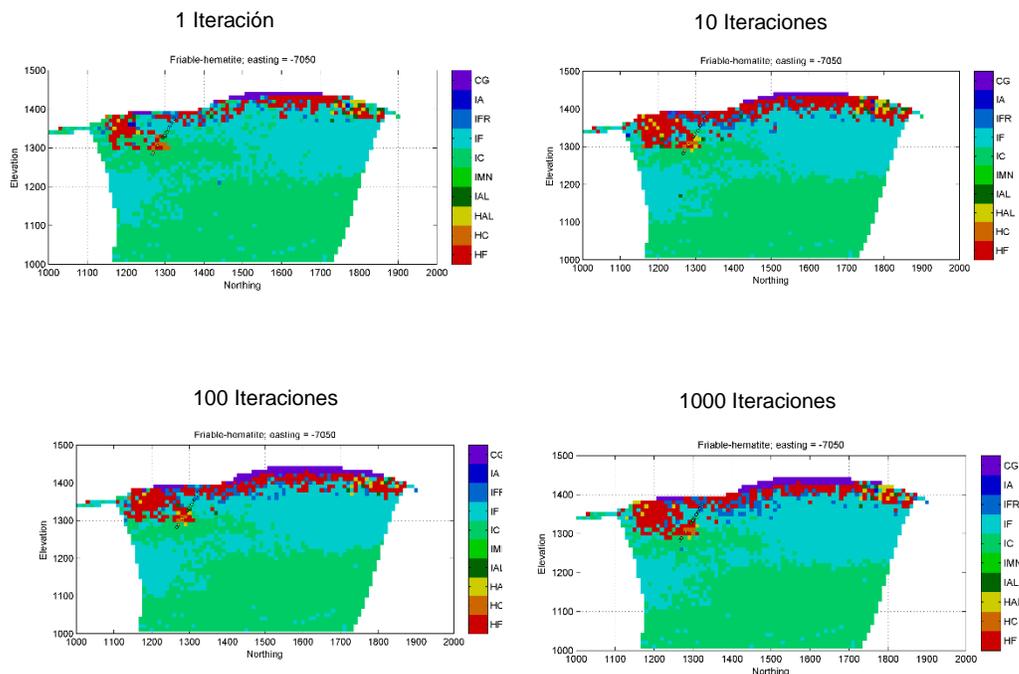


Ilustración 26: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Tradicional, 96 Datos, (300, 300, 50) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones

En este caso, se puede observar un comportamiento relativamente estable de los tipos de roca. En la primera iteración, cerca de la zona superior, HF, CG y HAL aparecen de forma pepítica, pero a medida que las iteraciones avanzan toman rápidamente una forma más regular. IF también toma una forma más continua a medida que las iteraciones aumentan y HF aparece con mayor fuerza en la zona superior izquierda, de manera más continua además.

A pesar de que no se ven indicios de divergencia, como en el caso anterior donde la ganga aparece en la zona inferior del yacimiento, el fenómeno es inminente ya que no se cumple la tercera hipótesis de Markov mencionada previamente relativa a la matriz de varianza-covarianza C . El estudio del muestreador de Gibbs asociado está en la sección siguiente.

7.5.2 Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m] Muestreador de Gibbs Dual

7.5.2.1 Muestreador de Gibbs Dual 96 Datos

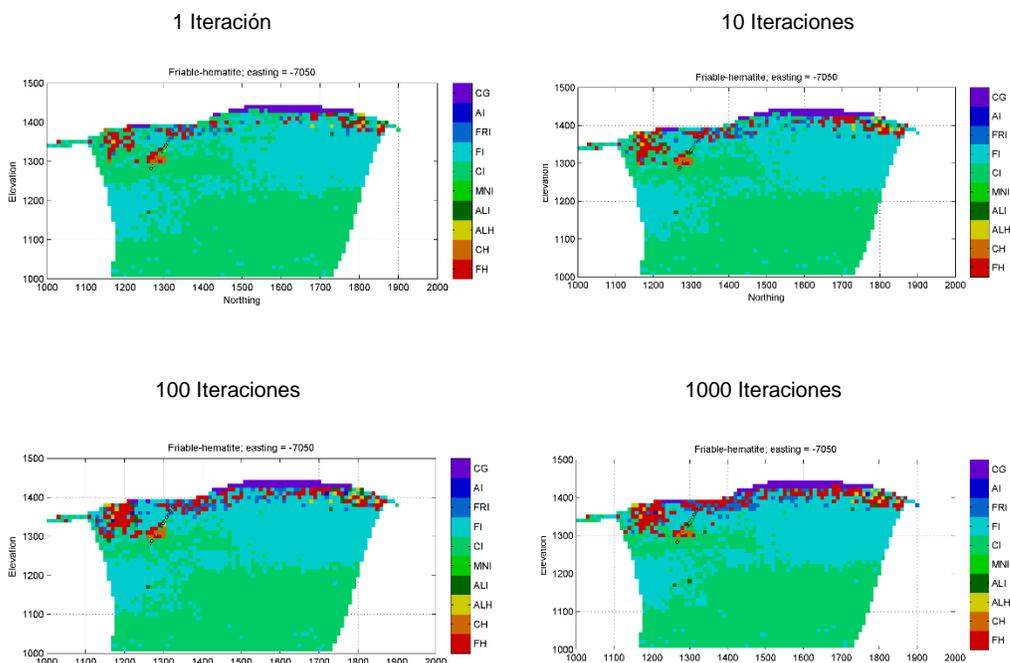


Ilustración 27: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Dual, 96 Datos, (300, 300, 50) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones

Se observa que el tipo de roca HF aparece de forma pepítica a medida que las iteraciones avanzan en la zona superior derecha, pero en la zona superior izquierda, a partir de la iteración 100, toma más continuidad, lo que se debe a la actualización del muestreador de Gibbs dual. Por otro lado, IF va tomando cada vez mayor continuidad a medida que las iteraciones avanzan, lo cual da una noción de convergencia. Asimismo, se observa un desarrollo en la ganga superficial en el yacimiento lo cual va acorde al modelo geológico.

Se puede decir que el modelo presenta en su mayoría efecto pepítico en general, pero a medida que se utilizan más iteraciones, van a dar mejores resultados.

Respecto a las proporciones globales resultantes de los tipos de roca simulados, se observa que son bastante estables y fluctúan en torno a las proporciones a priori del modelo, por ende, no se realiza un análisis en profundidad de estos.

En la sección siguiente se estudian los vectores Gaussianos resultantes de los muestreadores de Gibbs utilizados en este caso.

7.6 Análisis de Muestreador de Gibbs Caso Real

Al igual que en el caso sintético, se puede analizar el muestreador de Gibbs para encontrar una explicación a los fenómenos encontrados en los resultados de la simulación, esto es, una no concordancia entre lo que la teoría geológica dice y la aparición de tipos de rocas en algunos sectores.

A continuación, se muestra un análisis completo de los vectores Gaussianos resultantes (antes de truncar), los cuales, tal como se menciona anteriormente son seis por iteración y muestreador.

7.6.1 Muestreador de Gibbs Tradicional

Al observar las ilustraciones asociadas a los resultados de la simulación a los radios de búsqueda (300, 300, 50) [m] y (600, 600, 100) [m] (Anexos) respectivamente, se puede observar que con 24 y 48 (Anexo) datos los resultados son extraños para el muestreador de Gibbs tradicional con 1000 iteraciones ya que aparece el tipo de roca ganga en zonas poco probables según geología lo cual hace suponer una divergencia en la metodología.

Se realiza un análisis estadístico para encontrar explicaciones a los fenómenos observados y así mostrar un estudio detallado de estos resultados mediante el análisis del muestreador de Gibbs utilizado en todos los casos.

El procedimiento consiste en analizar el muestreador de Gibbs a través del mínimo y máximo alcanzado junto con estadísticas básicas.

Cabe destacar que se realizan 20 realizaciones del muestreador de Gibbs, tanto tradicional como dual, en cada caso, por ende, la metodología utilizada trata de utilizar la mayor cantidad de datos posibles. Es así como se decide tomar cada realización del vector Y_i , $i \in \{1, \dots, 6\}$ y crear un vector Y_{super_i} que contiene todas las realizaciones para el mismo vector.

Además, para completar el estudio, los resultados en el muestreador de Gibbs tradicional para ambos radios de búsqueda son bastante similares, por ende, sin pérdida de generalidad, se analiza solo el radio de búsqueda (300, 300, 50) [m] con 24 y 96 datos. El resto permanece en anexos. Para el caso del muestreador de Gibbs dual, se analiza solo el caso con radio de búsqueda (300, 300, 50) [m] ya que el caso de (600, 600, 100) [m] es muy similar.

Finalmente, se puede dar una razón consistente del comportamiento observado en las simulaciones anteriores donde se observan fenómenos atípicos a la realidad en el muestreador de Gibbs tradicional y se explica el comportamiento del muestreador de Gibbs dual mostrando sus propiedades.

7.6.1.1 24 Datos

Se presentan resultados estadísticos al utilizar el muestreador de Gibbs tradicional con 24 datos con el radio de búsqueda (300, 300, 50) [m] con un análisis de máximos y mínimos tratando de explicar el fenómeno visto en los resultados de la simulación.

Tabla XXIII: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 24 Datos, Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m]:

	Número de Iteraciones			
24 Datos	1	10	100	1000
Min Y1	-4.09	-3.33	-3.08	-6.41E+04
Max Y1	1.38	1.24	3.94	3.17E+06
Min Y2	-3.63	-4.03	-3.64	-3.36
Max Y2	4.39	5.33	5.16	5.30
Min Y3	-4.48	-5.39	-5.54	-6.30
Max Y3	3.04	3.61	3.68	3.48
Min Y4	-2.75	-3.53	-4.08	-3.78
Max Y4	2.23	3.50	4.48	8.25
Min Y5	-2.02	-2.63	-3.09	-4.88
Max Y5	1.83	1.83	2.17	2.70
Min Y6	-3.11	-5.83	-1070.3	-2.70E+26
Max Y6	2.93	5.07	994.25	9.89E+26

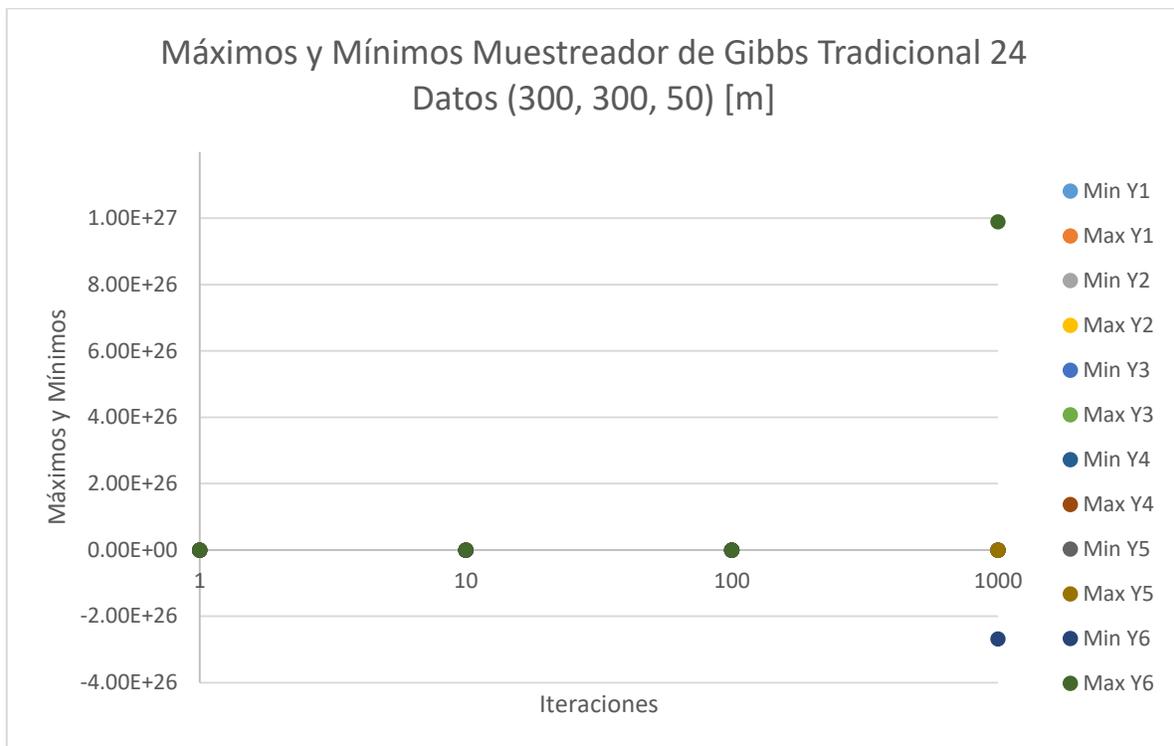


Ilustración 28: Gráfico Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 24 Datos, Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m]

Se puede apreciar que en el caso del vector Y_1 y en mayor medida, en Y_6 , se ve un aumento en los máximos y mínimos de sus valores a medida que las iteraciones aumentan. De hecho, en la iteración 1000, estos valores alcanzan magnitudes gigantescas. A la vez, Y_3 presenta un aumento consistente en su mínimo, mientras que Y_4 lo hace en su máximo. Por otra parte, Y_5 también presenta un aumento en ambos valores a medida que aumentan las iteraciones, sin embargo, en estos últimos 3 vectores, el aumento no es demasiado dramático como en los dos primeros.

Claramente, al menos en Y_1 e Y_6 , se ve una divergencia a medida que aumentan las iteraciones en términos de distribución. A pesar de que este aumento descontrolado el en máximo y mínimo solo ocurre en dos de los seis vectores Gaussianos, en la ilustración 21 se ve un cambio importante como la aparición de la ganga en las profundidades del yacimiento. El peligro de que estos extremos aumenten sin tener certeza sobre qué vectores Gaussianos Y_i se ven afectados es un hecho bastante preocupante ya que no permite tener una predicción.

Para completar el análisis, se presenta una tabla de estadísticas básicas para reafirmar lo dicho previamente:

Tabla XXIV: Estadísticas Básicas Muestreador de Gibbs Tradicional, 24 Datos, Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m]

1it	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6
Media	-0.01	0.77	-0.77	0.05	-0.05	0.00
Des Est	0.35	0.84	0.97	0.57	0.33	0.54
Curtosis	31.29	0.61	-0.60	0.02	4.70	1.35
Asimetría Estadística	-5.27	-0.29	-0.07	-0.08	-1.82	-0.14
10it						
Media	-0.03	1.02	-0.85	0.12	-0.12	0.02
Des Est	0.39	1.00	1.10	0.79	0.46	0.94
Curtosis	12.46	0.15	-0.11	-0.02	0.59	0.46
Asimetría Estadística	-3.17	-0.15	-0.07	-0.12	-0.66	0.01
100it						
Media	-0.06	1.04	-0.85	0.27	-0.33	0.42
Des Est	0.65	1.01	1.13	1.00	0.64	24.21
Curtosis	1.33	0.13	-0.02	-0.09	-0.07	585.91
Asimetría Estadística	-0.47	-0.15	-0.04	-0.03	-0.26	7.93
1000it						
Media	9.63E+03	1.04	-0.84	0.51	-0.90	2.91E+23
Des Est	7.68E+04	1.01	1.14	1.30	0.90	1.61E+25
Curtosis	513.32	0.10	0.03	1.63	0.10	1458.88
Asimetría Estadística	18.92	-0.14	-0.03	0.81	0.05	31.25

La media y la desviación estándar del vector Y_1 permanecen relativamente constantes hasta la iteración 100, siendo la primera cercana a 0 y la segunda con valores pequeños, pero en la

iteración 1000, la media tiene un valor alto con una desviación estándar mayor a lo visto anteriormente. Claramente el vector Gaussiano Y_1 deja de tener la distribución deseada.

Un análisis similar se puede hacer en el caso de Y_6 el cual hasta la iteración 100 tiene una media cercana a 0, con una desviación estándar bastante más alta que en la iteración anterior. Esto se debe a que la distribución se ensancha y se observa en los valores de máximo y mínimo que alcanza. En la iteración 1000 los valores se disparan completamente alejándose de la distribución requerida.

A pesar de que los otros vectores tienen un comportamiento bastante estándar, es de suponer que en algún momento entrarán en situación similar afectando todavía más a la simulación al aumentar las iteraciones.

7.6.1.2 96 Datos

Al igual que en la parte anterior, se presenta el estudio del muestreador de Gibbs tradicional con radio de búsqueda (300, 300, 50) [m] analizando primero los máximos y mínimos de cada vector Gaussiano.

Tabla XXV: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 96 Datos, Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m]

	Número de Iteraciones			
96 Datos	1	10	100	1000
Min Y1	-3.82	-3.55	-3.31	-4.45
Max Y1	0.92	1.31	2.01	26.19
Min Y2	-3.06	-3.10	-3.38	-3.73
Max Y2	4.66	6.35	8.20	8.34
Min Y3	-4.48	-5.26	-5.27	-5.39
Max Y3	3.03	3.80	3.77	4.63
Min Y4	-2.70	-3.31	-3.90	-4.15
Max Y4	2.52	3.25	4.59	4.62
Min Y5	-2.08	-2.37	-3.11	-4.39
Max Y5	1.48	1.77	2.42	3.25
Min Y6	-3.18	-4.53	-4.29	-4.00
Max Y6	3.10	4.12	4.07	4.86

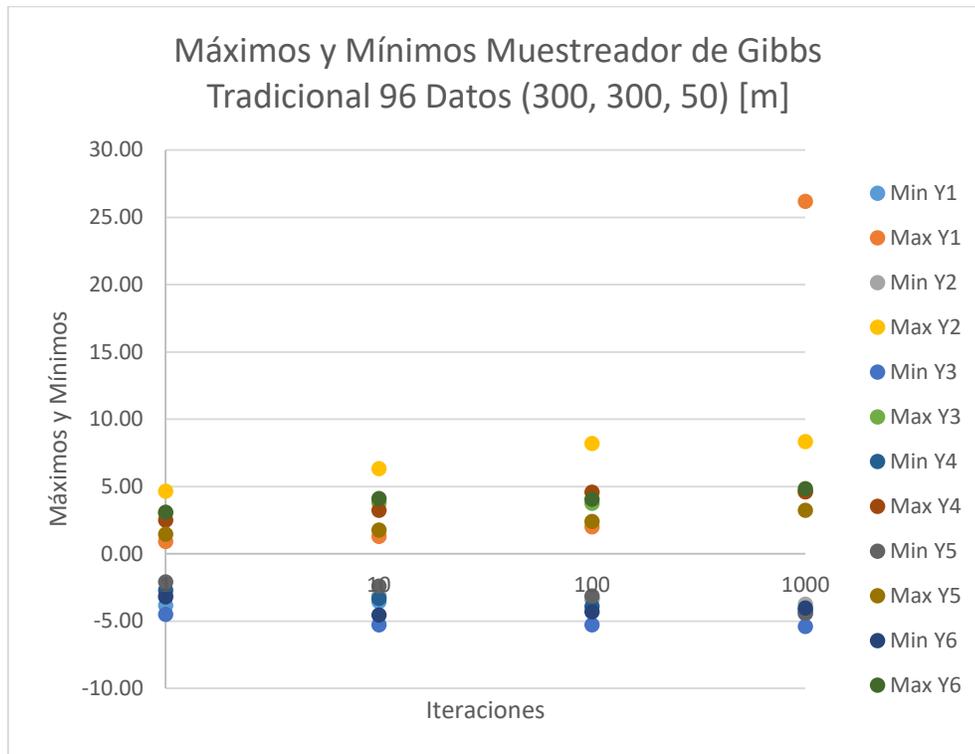


Ilustración 29: Gráfico Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 96 Datos, Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m]

Se puede observar que el vector con un cambio más fuerte, en su máximo, es Y_1 el cual en la iteración 1000 alcanza un valor de 26.19. Además, Y_2 e Y_5 presentan un aumento sostenido en tanto su máximo y mínimo, mientras que Y_3 e Y_4 no lo hacen. Esto puede dar luces de una divergencia inminente. A pesar de esto, al menos en el corte analizado en la Ilustración 26, no se ve un indicio evidente fuerte de divergencia como en el caso de 24 datos. Sin embargo, a futuro, se puede decir sin falta a la verdad, que a partir de mil iteraciones, se espera que los valores extremos de los vectores antes mencionados, tiendan a ser de magnitudes más grandes, creándose una catástrofe posterior en términos de simulación de tipos de rocas.

A continuación, se muestran las estadísticas básicas asociadas:

Tabla XXVI: Estadísticas Básicas Muestreador de Gibbs Tradicional, 96 Datos, Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m]

1it	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6
Media	-0.01	0.80	-0.77	0.05	-0.05	0.00
Des Est	0.35	0.85	0.97	0.57	0.33	0.53
Curtosis	30.43	0.51	-0.62	0.03	4.73	1.38
Asimetría Estadística	-5.22	-0.25	-0.08	-0.08	-1.84	-0.07
10it						
Media	-0.02	1.25	-0.85	0.11	-0.11	0.00
Des Est	0.39	1.13	1.10	0.79	0.45	0.87
Curtosis	13.80	-0.14	-0.12	-0.04	0.61	0.23
Asimetría Estadística	-3.30	-0.04	-0.06	-0.13	-0.67	-0.02
100it						
Media	-0.06	1.49	-0.84	0.24	-0.29	0.05
Des Est	0.54	1.38	1.14	1.01	0.65	1.01
Curtosis	2.80	0.20	-0.03	-0.02	-0.09	0.01
Asimetría Estadística	-1.26	0.36	0.01	-0.04	-0.21	-0.03
1000it						
Media	0.23	1.50	-0.84	0.30	-0.44	0.07
Des Est	1.59	1.41	1.14	1.06	0.92	1.02
Curtosis	24.72	0.52	0.00	-0.05	0.24	0.01
Asimetría Estadística	3.45	0.47	-0.01	0.04	0.21	0.01

Se puede observar ahora que la media de los valores de cada vector no es tan distinta entre iteraciones para cada uno de los vectores. Sin embargo, la desviación estándar comienza a aumentar a medida que las iteraciones avanzan.

Como se menciona anteriormente, por utilizar una matriz no simétrica \tilde{C} y con valores propios negativos, el muestreador de Gibbs no converge a medida que las iteraciones aumentan, dando una falsa esperanza de obtener lo deseado. Esto coincide con el aumento dramático del máximo en Y_1 para la iteración 1000.

Puede que la truncación posterior oculte el hecho de la divergencia, pero claramente ésta es inminente.

7.6.2 Muestreador de Gibbs Dual

Tal como se menciona anteriormente, se analiza el caso con el radio de búsqueda (300, 300, 50) [m]. Es así como se obtienen las mismas estadísticas que en el caso anterior para realizar un análisis comparativo entre ambas metodologías expuestas. Se muestran a continuación los máximos y mínimos de cada vector Gaussiano.

Tabla XXVII: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Dual, Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m]

	Número de Iteraciones			
	1	10	100	1000
Min Y1	-4.45	-4.46	-4.39	-4.56
Max Y1	5.94	6.73	6.30	6.04
Min Y2	-4.01	-4.04	-4.46	-3.31
Max Y2	4.97	5.57	5.22	5.40
Min Y3	-4.90	-4.91	-4.92	-5.32
Max Y3	4.09	4.44	4.42	4.42
Min Y4	-4.50	-4.60	-4.75	-4.20
Max Y4	5.33	4.80	6.06	5.29
Min Y5	-4.16	-4.63	-4.81	-5.08
Max Y5	6.03	5.77	4.79	4.25
Min Y6	-5.32	-5.57	-4.64	-4.26
Max Y6	6.21	5.84	4.74	4.23

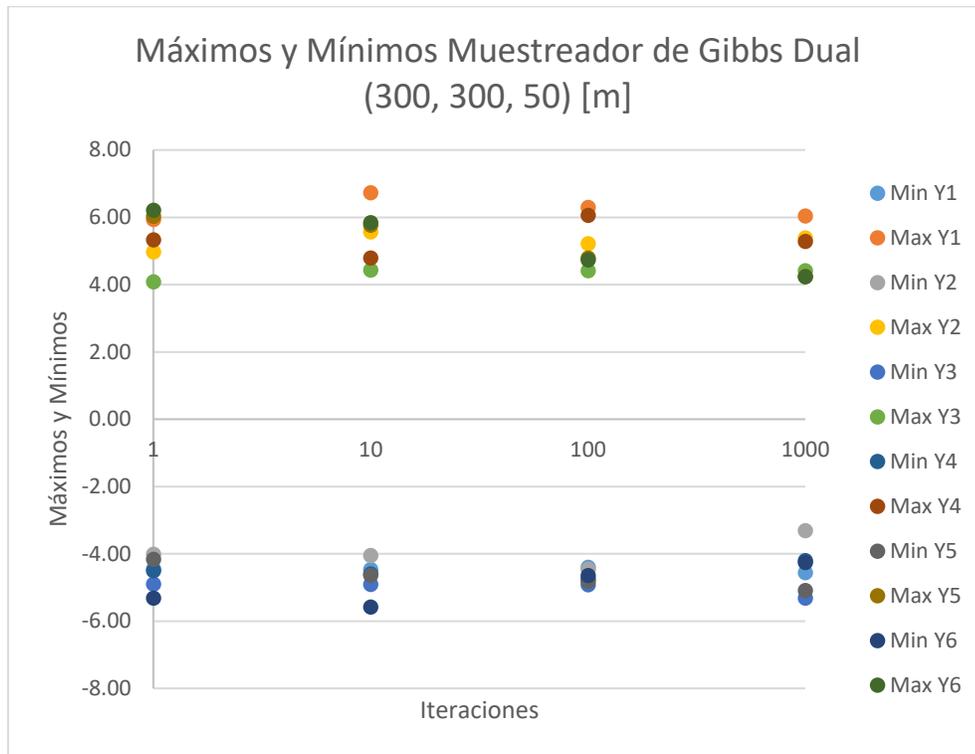


Ilustración 30: Gráfico Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Dual, Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m]

A diferencia del muestreador de Gibbs tradicional, el muestreador de Gibbs dual no muestra un atisbo de máximos y mínimos fuera de una escala racional. Se tienden a mantener estables a pesar del aumento de las iteraciones.

Los máximos de Y_5 e Y_6 tienden a hacerse más pequeños, pero el que no lo haga el resto no significa divergencia, solo los datos están actualizándose a medida que las iteraciones avanzan teniendo como consecuencia que el vector Gaussiano converja en distribución a lo deseado.

A continuación, se muestran las estadísticas básicas para una mejor comprensión:

Tabla XXVIII: Estadísticas Básicas Muestreador de Gibbs Dual, Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m]

1it	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6
Media	0.77	0.72	-0.63	0.10	0.12	0.04
Des Est	1.22	0.91	1.16	1.07	1.16	1.26
Curtosis	0.20	1.10	-0.29	-0.04	0.09	0.27
Asimetría Estadística	0.11	-0.55	0.28	-0.01	0.11	0.00
10it						
Media	0.85	0.85	-0.63	0.16	0.11	0.06
Des Est	1.27	0.97	1.18	1.17	1.19	1.12
Curtosis	0.21	0.78	-0.30	-0.08	0.06	0.14
Asimetría Estadística	0.11	-0.41	0.29	0.00	0.06	-0.02
100it						
Media	0.86	1.04	-0.63	0.24	0.14	0.06
Des Est	1.24	1.05	1.23	1.21	1.19	1.02
Curtosis	0.36	0.30	-0.31	-0.10	-0.01	0.00
Asimetría Estadística	0.05	-0.25	0.28	0.02	-0.06	-0.01
1000it						
Media	0.74	1.09	-0.68	0.27	-0.06	0.05
Des Est	1.16	1.05	1.24	1.12	1.12	1.01
Curtosis	0.34	0.05	-0.28	-0.15	-0.05	-0.04
Asimetría Estadística	-0.03	-0.13	0.21	-0.03	-0.14	-0.01

Se puede observar que el valor de las medias, desviaciones estándar, curtosis y el factor de asimetría estadística no varían demasiado a medida que las iteraciones aumentan, lo cual da un indicio de que cada vector Gaussiano se comporta como tal, con la distribución acomodándose

a lo buscado, no escapándose en órdenes de magnitud como en el caso del muestreador de Gibbs tradicional. Esto es positivo, ya que permite estar confiado en la metodología del muestreador de Gibbs dual.

Un detalle a considerar es que, en los resultados de la simulación del caso Muestreador de Gibbs dual, se veía un efecto pepítico marcado incluso en la iteración 1000, pero esto se debe a que la convergencia no se ha logrado todavía.

Se puede decir que el muestreador de Gibbs dual está mostrando un comportamiento de no divergencia a diferencia del muestreador de Gibbs tradicional, donde a medida que se utilizan distinta cantidad de datos para la vecindad móvil, el comportamiento varía drásticamente.

Además, en el ámbito de estadísticas básicas, el muestreador de Gibbs dual no da señales de divergencia, si no de falta de iteraciones. Sin embargo, no se puede decir lo mismo del muestreador de Gibbs tradicional, el cual a medida que se seleccionan distintas cantidades de datos y radios de búsqueda, produce un vector simulado cuya distribución tiene formas extrañas en las iteraciones grandes, alejándose de lo requerido.

Se agrega un cuadro resumen que analiza los dos vectores problemáticos, es decir, Y_1 e Y_6 en las versiones muestreador de Gibbs dual y tradicional para 24 y 96 datos.

Tabla XXIX: Resumen Estadísticas 1000 Iteraciones Muestreador de Gibbs Tradicional y Dual 1000 Iteraciones Caso Real

24 Datos 1000 Iteraciones	Y_1 Dual	Y_1 Tradicional	Y_6 Dual	Y_6 Tradicional
Media	0.74	9.63E+03	0.05	2.91E+23
Desv. Estándar	1.16	7.68E+04	1.01	1.61E+25
Mínimo	-5.32	-6.41E+04	-4.26	-2.70E+26
Máximo	6.21	3.17E+06	4.23	9.89E+26
96 Datos 1000 Iteraciones				
Media	0.74	0.23	0.05	0.07
Desv. Estándar	1.16	1.59	1.01	1.02

Mínimo	-5.32	-4.45	-4.26	-4
Máximo	6.21	26.19	4.23	4.86

8 Conclusiones

La industria ha utilizado por mucho tiempo el muestreador de Gibbs tradicional con el fin de simular los tipos de roca en los yacimientos por el modelo Gaussiano truncado o plurigaussiano. Sin embargo, presenta problemas de convergencia a medida que se cambia la cantidad de datos a considerar, el radio de búsqueda para los datos y el número de iteraciones. Sin importar los arreglos o combinaciones que se realicen de estos parámetros, la metodología tiende a no converger hacia la distribución deseada ya que no cumple una de las hipótesis de Markov de convergencia.

Es así como se propone una nueva metodología llamada muestreador de Gibbs dual, el cual logra cumplir todas las hipótesis necesarias de convergencia convirtiéndose en una herramienta superior a la anterior ya que tiene una convergencia asegurada al aumentar las iteraciones, dando resultados fidedignos a la realidad y quitando parámetros que utiliza el muestreador de Gibbs tradicional (radio de búsqueda y cantidad de datos para la vecindad móvil).

Se ahonda en el estudio de dos casos, uno sintético y uno real, donde en el primero se conoce todos los parámetros (tipos de roca distribuidos en una grilla regular en 2D) para utilizar las dos variantes del muestreador de Gibbs. El estudio sintético contiene dos modelos variográficos esféricos, uno con efecto pepita y otro sin él. Es así como se concluye que al aumentar las iteraciones en el caso sin efecto pepita, el muestreador de Gibbs tradicional presenta picos muy altos en los variogramas mostrando signos de divergencia, pero para el caso con efecto pepita, todavía sigue siendo estable en términos de variogramas. Este fenómeno se debe a la robustez que añade el efecto pepita. Por otro lado, el muestreador de Gibbs dual presenta una convergencia consistente para ambos casos, siendo, para el caso con efecto pepita, más lento que el muestreador de Gibbs tradicional, sin embargo, no se dan luces de divergencia a diferencia del otro.

Al analizar cuantitativamente ambas metodologías, se estudia el máximo y mínimo de los valores Gaussianos de las dos variantes del muestreador de Gibbs. Para el caso del muestreador de Gibbs tradicional se muestran valores demasiado altos en magnitud ya en las 1000 iteraciones en el caso sin efecto pepita (consistente con los variogramas), pero para el caso con efecto pepita, todavía, para 10000 iteraciones, no se tiene valores tan extremos (consistente con lo visto en los variogramas) debido al posible efecto de la robustez que añade este efecto pepita. Por otra parte, el muestreador de Gibbs dual muestra un máximo y mínimo similar para ambos casos, sin efecto pepita y con efecto pepita, siendo acorde con lo visto en los variogramas, mostrando una convergencia clara. Además, se realiza un test de Kolmogórov-Smirnov el cual analiza los datos para comprobar, con un 95% de confianza, si estos siguen una distribución normal estándar. Se puede observar que el rechazo del test, es decir, los datos no siguen dicha distribución, aumenta en la iteración 10000 de manera dramática para el muestreador de Gibbs sin efecto pepita tradicional, mientras que para la versión dual, la cantidad de rechazos va disminuyendo a medida que las iteraciones avanzan. Para el caso de añadir un efecto pepita, el muestreador de Gibbs dual también muestra menos rechazos a medida que las iteraciones avanzan, mientras que la versión tradicional no muestra grandes mejoras a partir de la iteración 10.

Respecto al costo computacional, el muestreador de Gibbs dual es más demandante en recursos que el tradicional, siendo más lento para terminar las distintas iteraciones (Un poco más de 5 veces más lento para el caso de 10000 iteraciones). Sin embargo, el trade-off debe

tomarse en cuenta, de tomar una metodología que va a fallar vs una más lenta que siempre va a resultar con mejores resultados.

Al analizar los valores propios de la hipotética matriz de varianza-covarianza C del caso sin efecto pepita y con efecto pepita, se puede observar que para ambos casos se presenta al menos un valor propio negativo, siendo un indicador de no cumplimiento de la tercera hipótesis de convergencia de las cadenas de Markov. Esto conlleva a la divergencia o a la convergencia a otra distribución inminente al aumentar el número de iteraciones.

Al estudiar un caso de un yacimiento de hierro real, se realizan ejercicios similares a los anteriores comparando ambas metodologías. Se utiliza el muestreador de Gibbs tradicional y dual, con distintos radios de búsqueda, distinta cantidad de datos a considerar y distintas iteraciones para un estudio acabado del fenómeno.

Es así como se observa una aparición desconcertante y poco probable ganga en la zona inferior del yacimiento al utilizar el muestreador de Gibbs tradicional en la iteración 1000, siendo un resultado bastante inconsistente de acuerdo al departamento de geología. Al estudiar el muestreador de Gibbs en términos estadísticos, se concluye que el máximo y mínimo de 2 de los 6 vectores aleatorios Gaussianos utilizados para el modelo plurigaussiano, muestran un comportamiento errático. Al aumentar la cantidad de datos (96 y 192 (en anexos)) se puede observar una posible consistencia, pero es de esperar que a medida que aumenten las iteraciones, los máximos, mínimos y la forma de la distribución varíen de manera drástica, que es lo visto al utilizar una menor cantidad de datos.

Por otra parte, el muestreador de Gibbs dual presenta resultados consistentes, los máximos y mínimos no salen de los rangos estándares, la media comienza a acercarse en distribución a lo deseado, pero de manera lenta notándose tipos de roca en forma pepítica incluso para 1000 iteraciones.

Se puede concluir que el muestreador de Gibbs dual necesita una mayor cantidad de iteraciones para obtener un resultado más cercano a la realidad en este yacimiento (más de 1000).

Finalmente, el estudio de los tipos de roca muestra que la industria está cometiendo un error al utilizar una metodología que falla independientemente de los parámetros utilizados. Lo dramático de la situación es que se tiende a pensar que al aumentar las iteraciones mejora el resultado de la simulación, pero se incurre en un error, ya que se ha demostrado que independiente de la cantidad de iteraciones u otros factores como el radio de elipsoide o la cantidad de datos a considerar dentro de ésta, la divergencia es inminente, dando una falsa esperanza de buenos resultados. Al final del estudio, se plantea una metodología llamada muestreador de Gibbs dual que siempre funciona, quita parámetros (radio de búsqueda y cantidad de datos dentro de esta) para mostrar que al aumentar las iteraciones efectivamente se va convergiendo a la distribución deseada.

9 Bibliografía

- [1] S. Geman y D. Geman, «Stochastic Relaxation, Gibbs Distribution and the Bayesian Restoration of images,» *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, pp. 721-741, 1984.
- [2] G. Casella y E. George, «Explaining the Gibbs Sampler,» *American Statistician*, pp. 167-174, 1992.
- [3] T. Anderson, «An Introduction to Multivariate Statistical Analysis,» New Jersey, Wiley, 2003, p. 721.
- [4] M. Armstrong, A. Galli, H. Beucher, G. Le Loc'h, D. Renard, B. Doligez, R. Eschard and F. Geffroy, *Plurigaussian simulation in geosciences*, Berlin: Springer, 2011.
- [5] X. Emery, D. Arroyo and M. Peláez, "Simulating Large Gaussian Random Vectors Subject to Inequality Constraints by Gibbs Sampling," *Mathematical Geosciences*, vol. 46, pp. 265-283, 2014.
- [6] A. Galli y H. Gao, «Rate of Convergence of the Gibbs Sampler in the Gaussian Case,» *Mathematical Geology*, vol. 33, p. 6, 2001.
- [7] D. Arroyo, X. Emery y M. Peláez, «An enhanced Gibbs sampler algorithm for non-conditional simulation of Gaussian random vectors,» *Computers and Geosciences*, vol. 46, pp. 138-148, 2012.
- [8] J. Chilès y P. Delfiner, «Geostatistics: modeling spatial uncertainty,» *Wiley*, 2012.
- [9] X. Emery, *Simulación geoestadística*, Santiago: Universidad de Chile, 2015.
- [10] C. Lantuéjoul, «Geostatistical Simulation: Models and Algorithms,» *Springer*, p. 256, 2002.
- [11] M. David, «The practice of kriging,» de *Advanced Geostatistics in the Mining Industry*, Dordrecht, Reidel, 1976, pp. 31-48.

- [12] G. Roberts y S. Sahu, «Updating Schemes, Correlation Structure, Blocking and Parametrization for the Gibbs Sampler,» *Journal of the Royal Statistical Society*, pp. 291-317, 1997.
- [13] O. Dubrule, «Cross-validation of kriging in a unique neighbourhood,» *Mathematical Geology* 15, pp. 687-699, 1987.
- [14] L. Tierney, «Markov chains for exploring posterior distribution,» *Ann Stat* 22(4), pp. 1701-1762, 1994.
- [15] G. Roberts, «Markov chain concepts related to sampling algorithms,» de *Markov chain Monte Carlo in practice*, Boca Raton, Chapman & Hall/CRC, 1996, pp. 45-57.
- [16] C. Lantuéjoul y N. Desassis, «Simulation of a Gaussian random vector: a propagative version of the Gibbs sampler,» de *The 9th International Geostatistics Congress*, Oslo, The 9th International Geostatistics Congress, 2012.
- [17] J. Geweke, «Efficient simulation from the multivariate normal and student-t distributions subject to linear constraints and the evaluation of constraint probabilities,» de *Computing science and statistics: proceedings of the twenty-third symposium on the interface*, Fairfax Station, Va: Interface Foundation of North America, 1991, pp. 571-578.
- [18] X. Freulon y C. de Fouquet, «Conditioning a Gaussian model with inequalities,» de *Geostatistics Tróia'92*, Dordrecht, Kluwer Academic, 1993, pp. 201-212.
- [19] J. Kotecha y P. Djuric, «Gibbs sampling approach for generation of truncated multivariate Gaussian random variables,» de *Proceedings of the 1999 IEEE international conference on acoustics, speech and signal Processing*, Washington, IEEE Comput Soc, 1999, p. 1757-1760.
- [20] S. Wilhelm y B. Manjunath, «Tmvtnorm: truncated multivariate normal and Student t distribution,» 2 July 2011. [En línea]. Available: <http://cran.r-project.org/package=tmvtnorm>.
- [21] J. Dorr, «Supergene iron ores of Minas Gerais,» *Economic Geology*, pp. 1203-1240, 1964.
- [22] N. Mery, X. Emery, A. Cáceres, D. Ribeiro y E. Cunha, «Geostatistical modeling of geological uncertainty in an iron ore deposit,» *Sometido a Mathematical Geosciences*, 2016.

- [23] P. Kyriakidis, C. Deutsch y M. Grant, «Calculation of the normal scores variogram used for truncated Gaussian lithofacies simulation: theory and FORTRAN code,» *Computers & Geosciences*, pp. 161-169, 1999.
- [24] X. Emery, «Simulation of geological domains using the plurigaussian model: New developments and computer programs,» *Computers & Geosciences*, pp. 1189-1201, 2007.
- [25] X. Emery, «Iterative Algorithms for fitting a linear model of coregionalization,» *Computers & Geosciences*, pp. 1150-1160, 2010.
- [26] X. Emery, D. Arroyo y E. Porcu, «An improved spectral turning bands algorithm for simulating stationary vector Gaussian random fields,» *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, vol. 30, pp. 1863-1873, 2016.
- [27] X. Freulon, «Conditional simulation of a Gaussian random vector with nonlinear and/or noisy observations,» de *Geostatistical simulations*, Dordrecht, Kluwer Academic, 1994, pp. 57-71.

10 Anexos

10.1 Resultados de la Simulación del Caso Real

10.1.1 Radio de Búsqueda (300, 300, 100) [m]

10.1.1.1 48 Datos

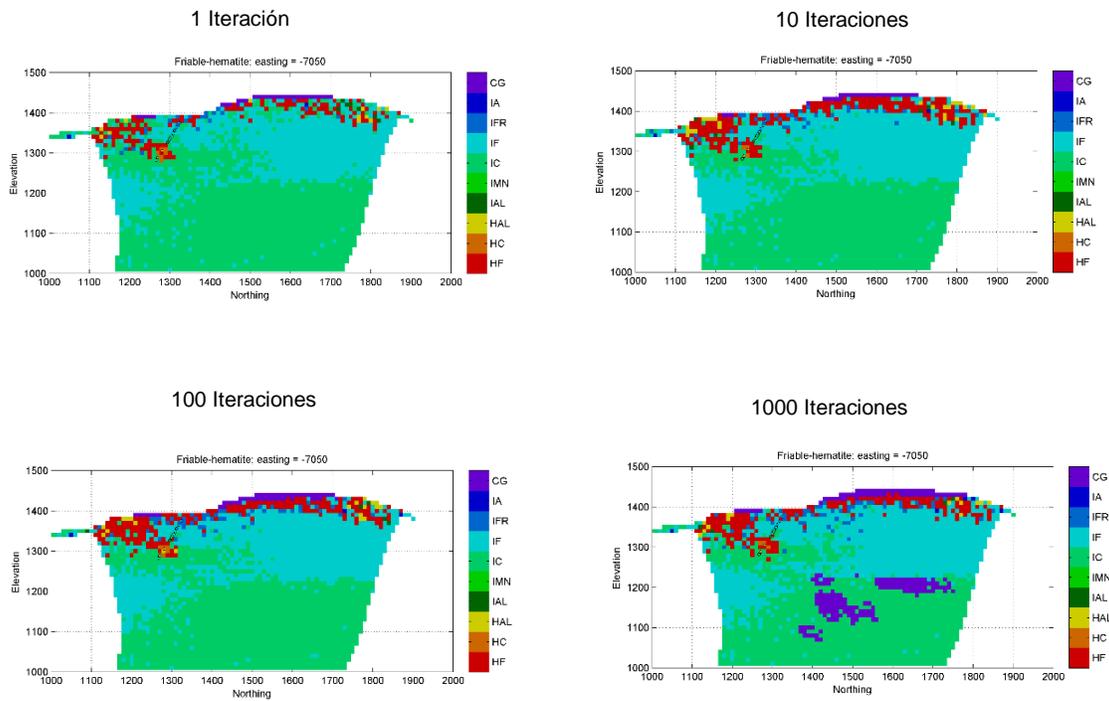


Ilustración 31: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Tradicional, 48 Datos, (300, 300, 50) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones

10.1.1.2 Muestreador de Gibbs Tradicional 192 Datos

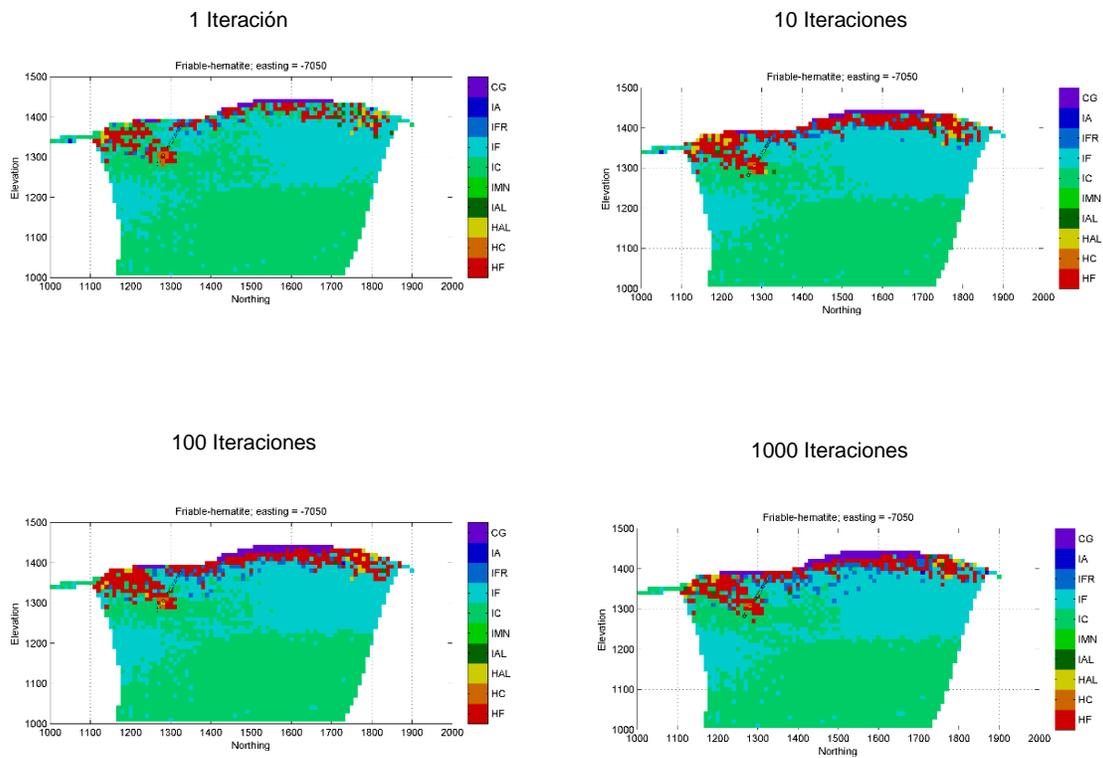


Ilustración 32: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Tradicional, 192 Datos, (300, 300, 50) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones

10.1.2 Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m] Muestreador de Gibbs Tradicional

10.1.2.1 Muestreador de Gibbs Tradicional 24 Datos

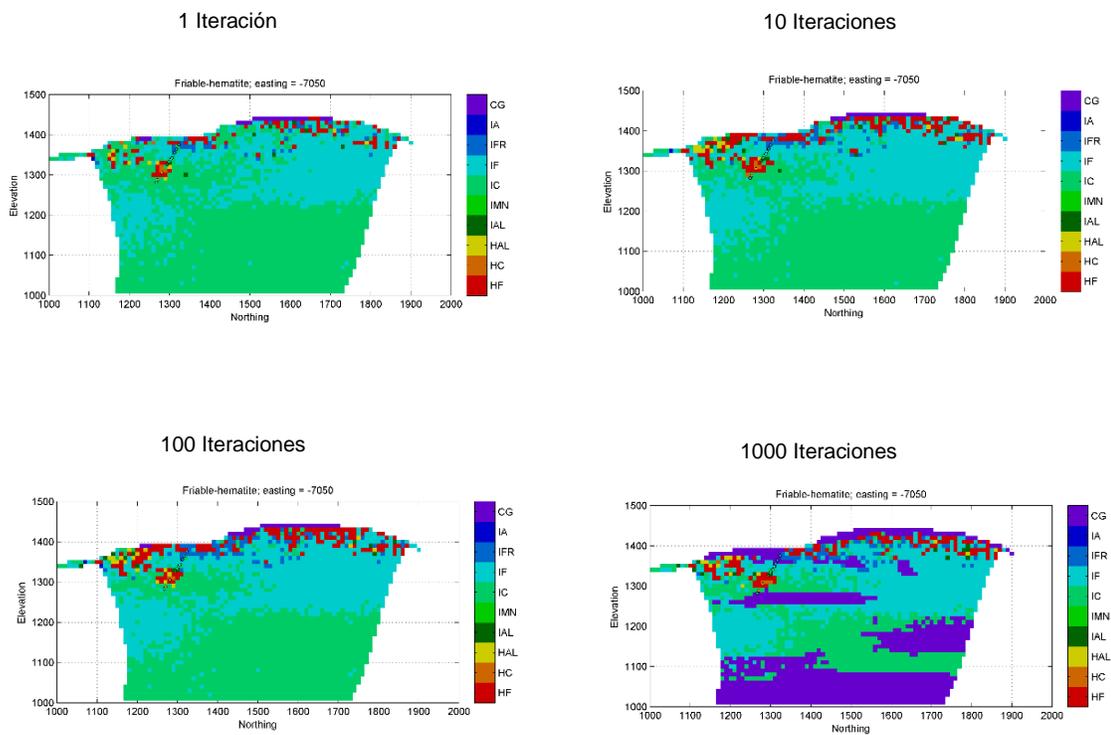


Ilustración 33: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Tradicional, 24 Datos, (600, 600, 100) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones

10.1.2.2 Muestreador de Gibbs Tradicional 48 Datos

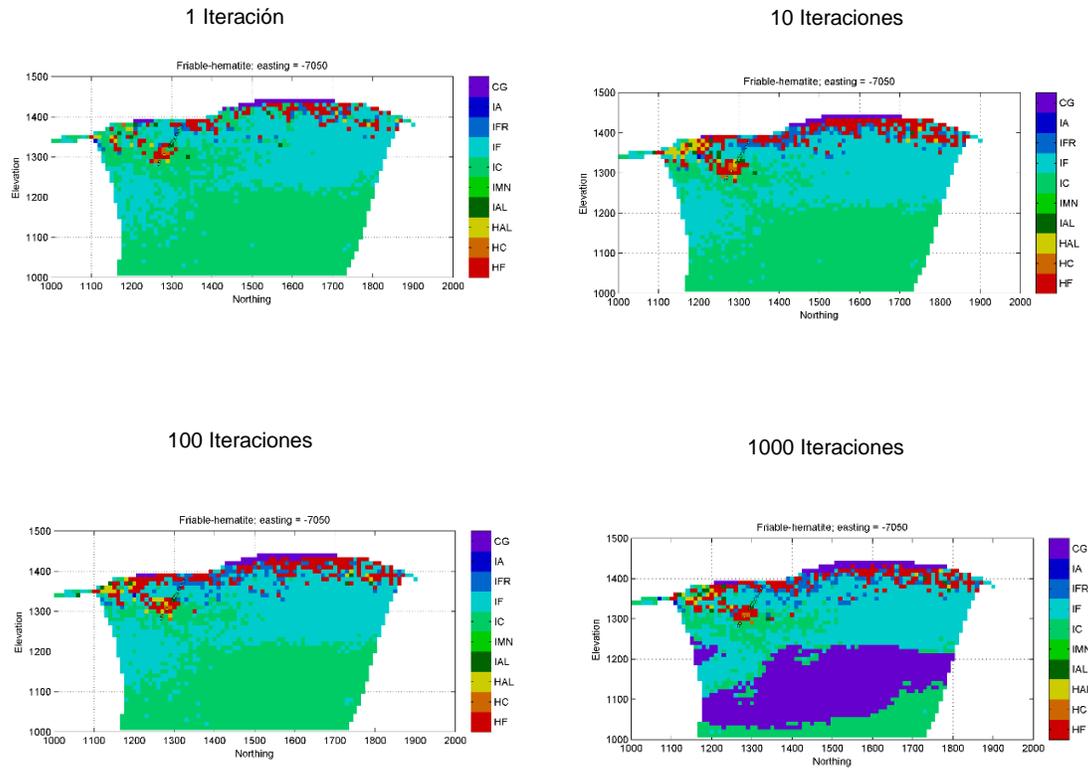


Ilustración 34: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Tradicional, 48 Datos, (600, 600, 100) [m]
Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones

10.1.2.3 Muestreador de Gibbs Tradicional 96 Datos

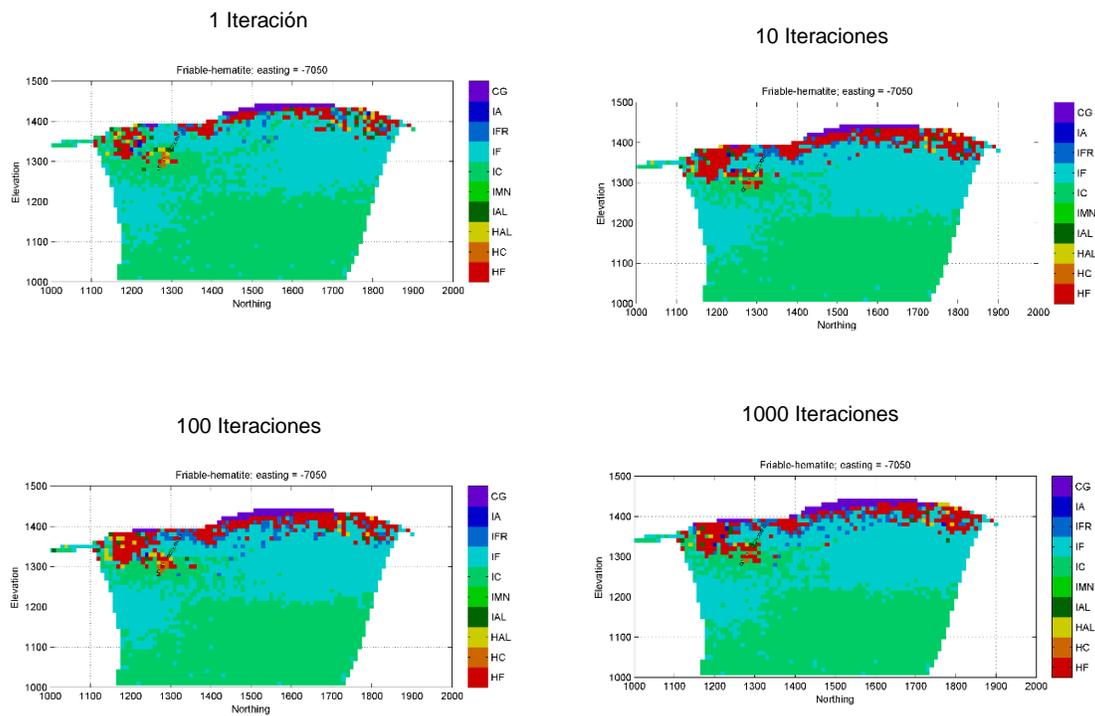


Ilustración 35: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Tradicional, 96 Datos, (600, 600, 100) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones

10.1.2.4 Muestreador de Gibbs Tradicional 192 Datos

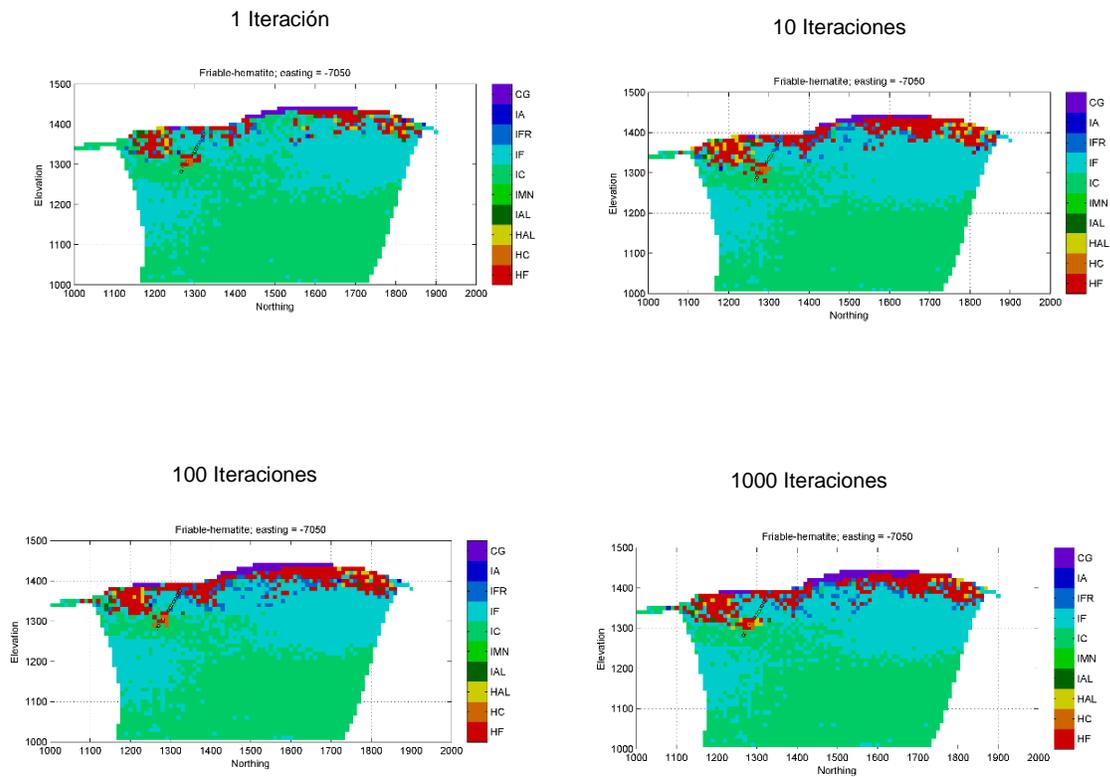


Ilustración 36: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Tradicional, 192 Datos, (600, 600, 100) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones

10.1.3 Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m] Muestreador de Gibbs Dual

10.1.3.1 Muestreador de Gibbs Dual 24 Datos

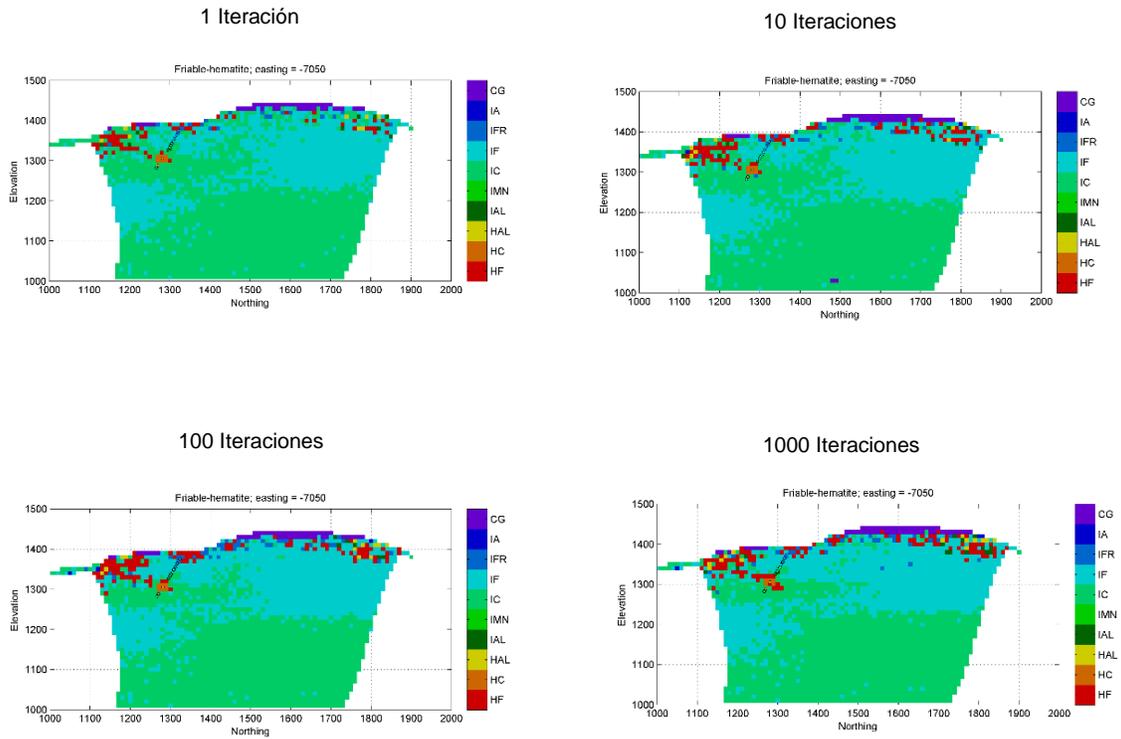


Ilustración 37: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Dual, 24 Datos, (300, 300, 50) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones

10.1.3.2 Muestreador de Gibbs Dual 48 Datos

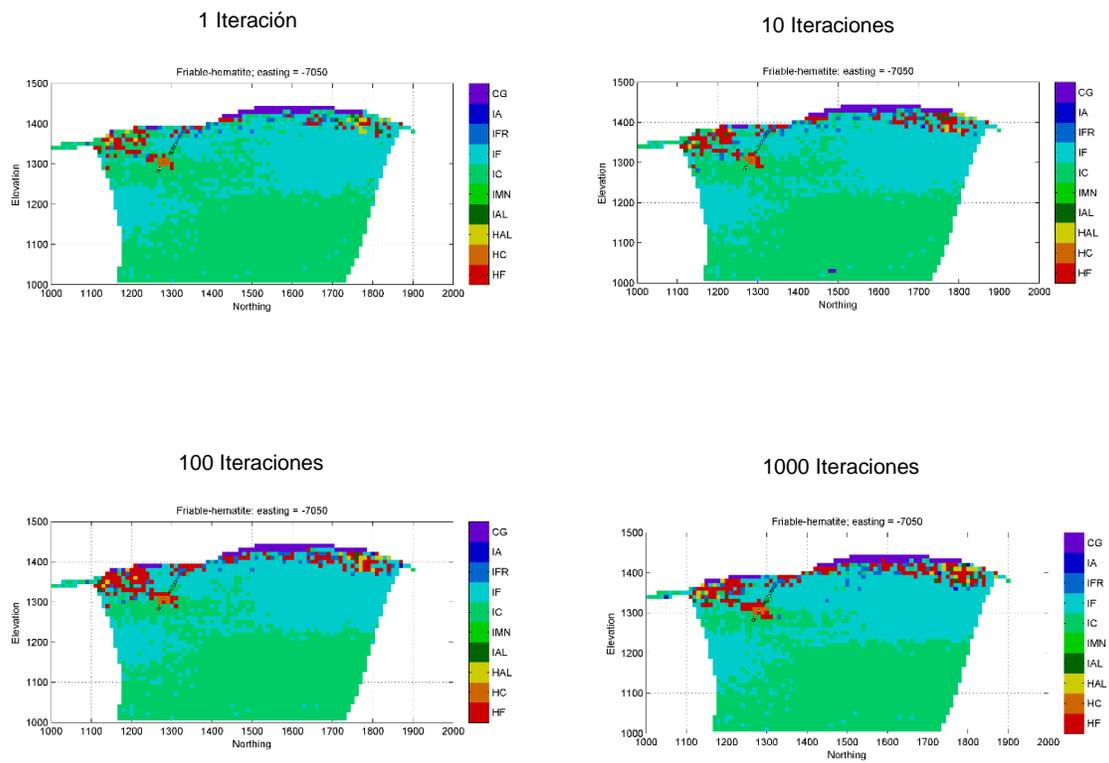


Ilustración 38: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Dual, 48 Datos, (300, 300, 50) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones

10.1.3.3 Muestreador de Gibbs Dual 192 Datos

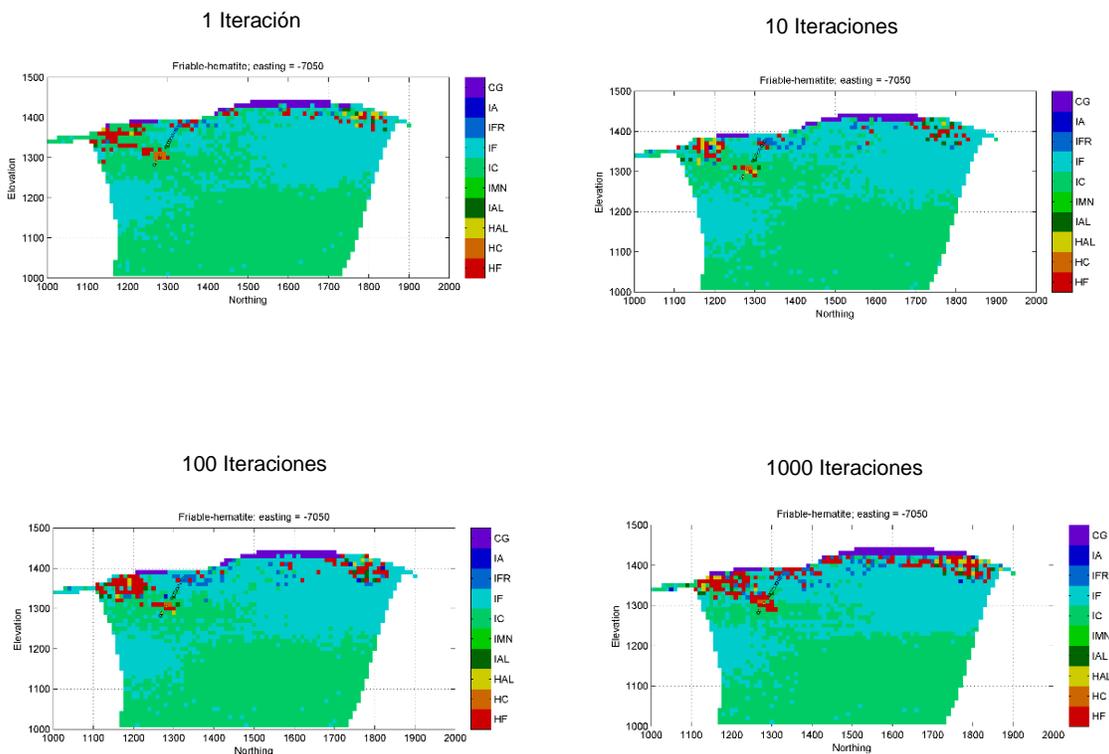


Ilustración 39: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Dual, 192 Datos, (300, 300, 50) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones

10.1.4 Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m] Muestreador de Gibbs Dual

10.1.4.1 24 Datos

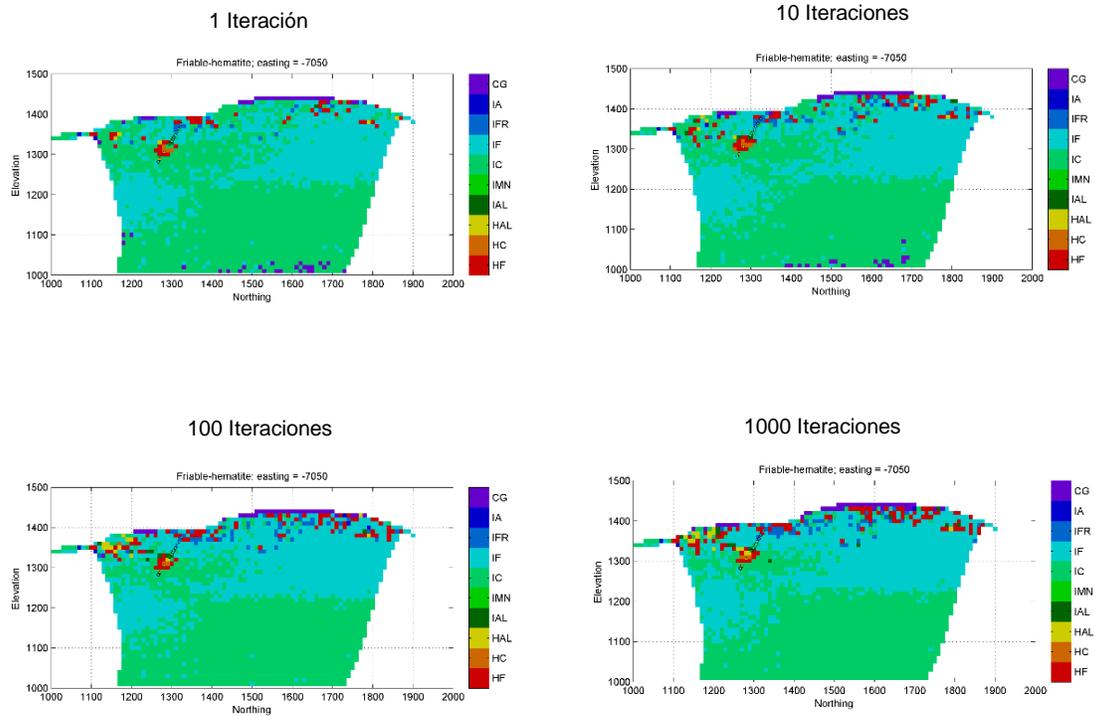


Ilustración 40: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Dual, 24 Datos, (600, 600, 100) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones

10.1.4.2 48 Datos

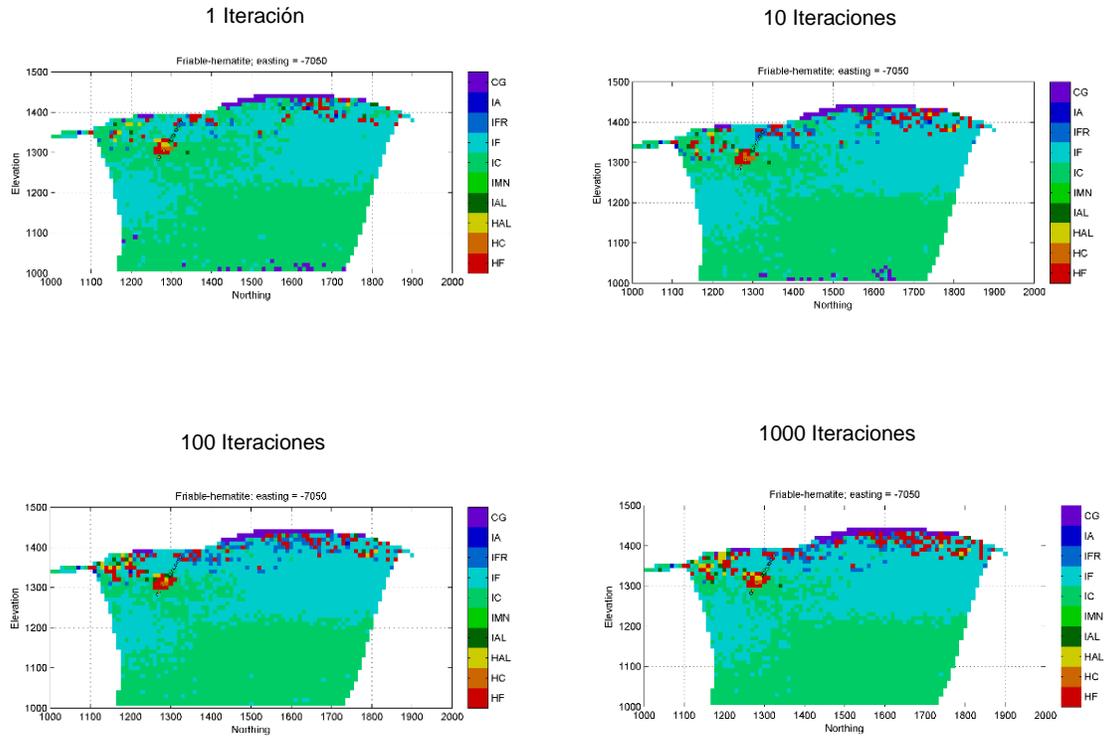


Ilustración 41: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Dual, 48 Datos, (600, 600, 100) [m]
Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones

10.1.4.3 96 Datos

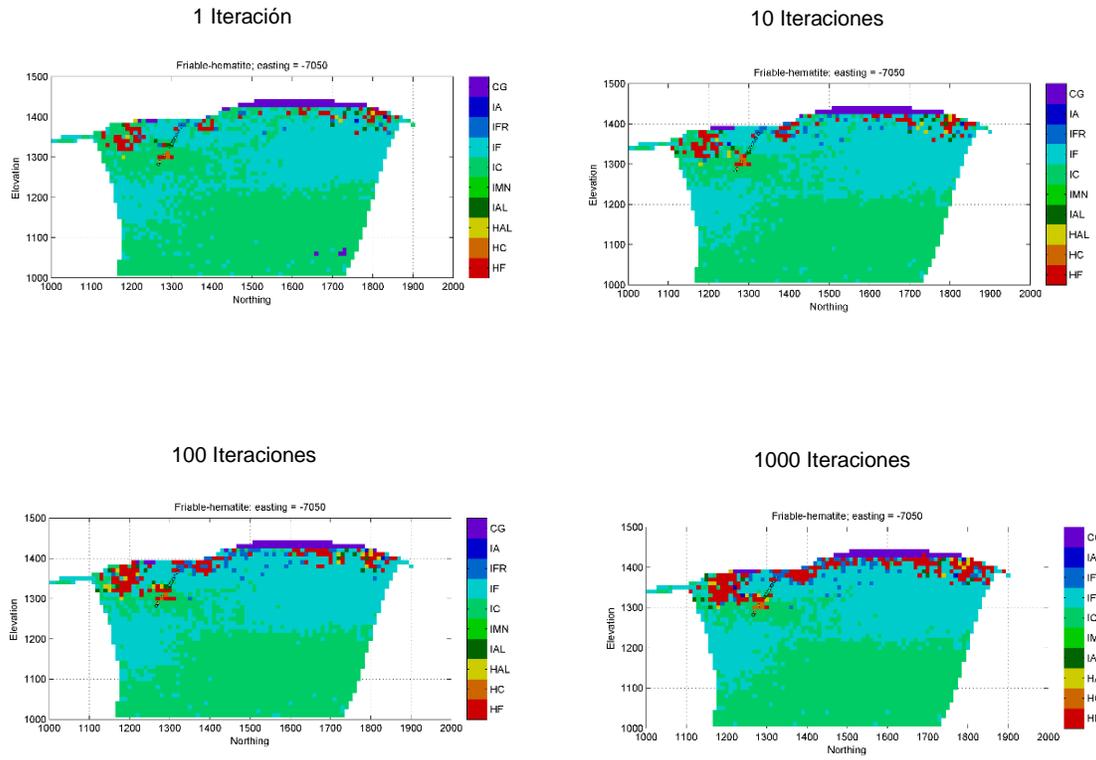


Ilustración 42: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Dual, 96 Datos, (600, 600, 100) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones

10.1.4.4 192 Datos

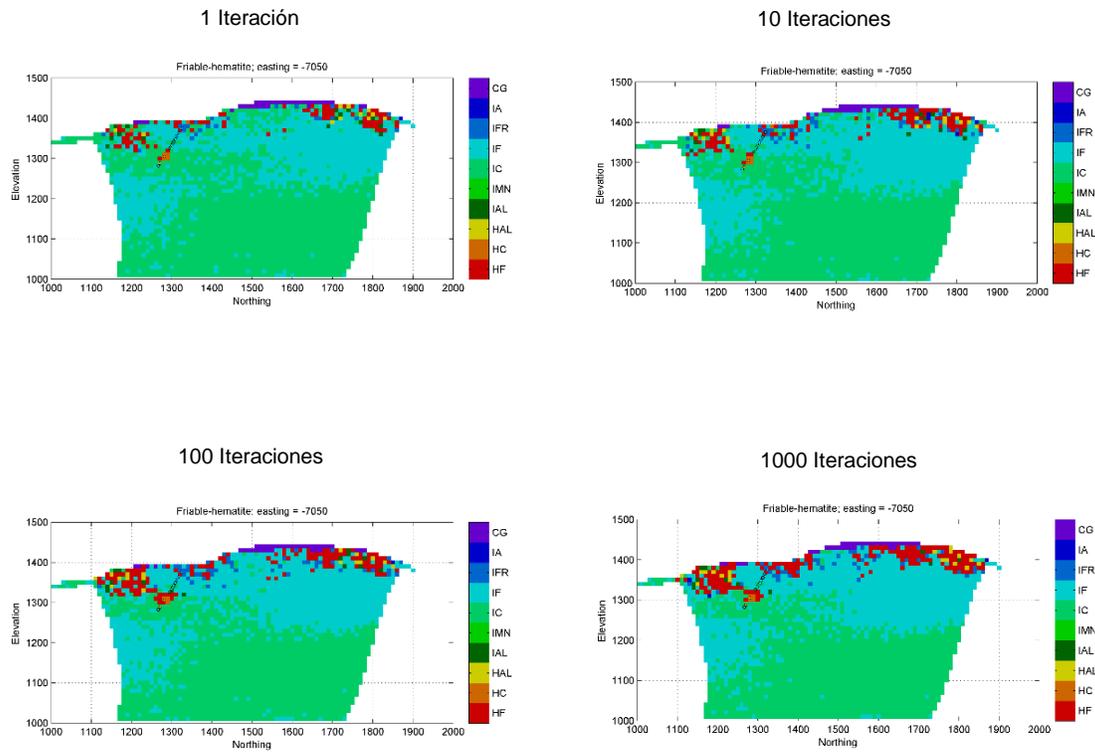


Ilustración 43: Resultado de Simulación Muestreador de Gibbs Dual, 192 Datos, (600, 600, 100) [m] Vista en Corte Norte-Elevación, 1, 10, 100 y 1000 iteraciones

10.2 Análisis de muestreador de Gibbs Caso Real

10.2.1 Muestreador de Gibbs Tradicional

10.2.1.1 24 Datos

Tabla XXX: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 24 Datos, Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m]

	Número de Iteraciones			
24 Datos	1	10	100	1000
Min Y1	-3.99	-3.17	-3.10	-6.35E+04
Max Y1	1.22	1.27	4.41	3.82E+06
Min Y2	-3.48	-4.23	-3.35	-3.18
Max Y2	4.89	5.42	5.05	5.42
Min Y3	-4.19	-5.26	-5.26	-5.43
Max Y3	2.47	3.37	3.37	4.50
Min Y4	-2.33	-3.21	-3.97	-3.92
Max Y4	2.34	3.25	4.28	7.93
Min Y5	-2.23	-2.41	-2.76	-4.79
Max Y5	1.40	1.71	2.28	3.23
Min Y6	-3.86	-5.79	-537.44	-5.10E+26
Max Y6	3.05	4.86	949.89	1.81E+27

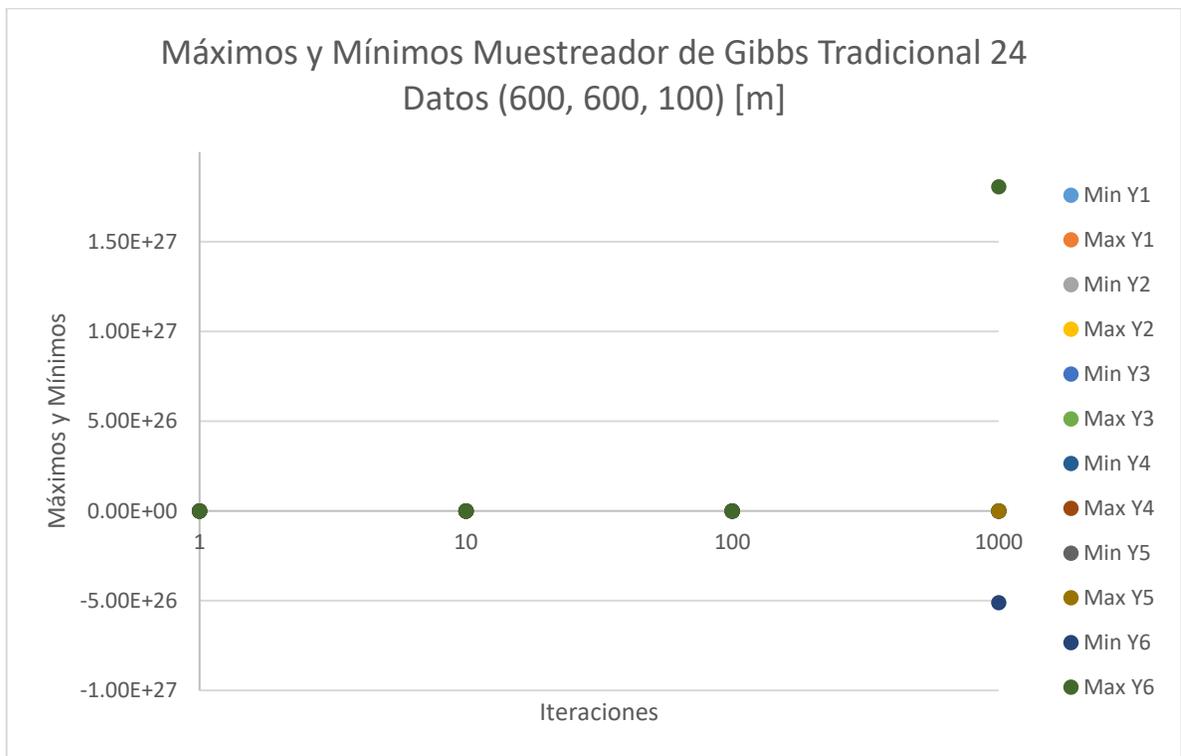


Ilustración 44: Gráfico Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 24 Datos, Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m]

Tabla XXXI: Estadísticas Básicas Muestreador de Gibbs Tradicional, 24 Datos, Radio de Búsqueda (600, 600, 100)
[m]

1it	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6
Media	-0.01	0.80	-0.77	0.06	-0.05	0.00
Des Est	0.35	0.84	0.97	0.57	0.33	0.53
Curtosis	31.77	0.55	-0.60	0.01	4.78	1.25
Asimetría Estadística	-5.30	-0.24	-0.08	-0.09	-1.84	-0.10
10it						
Media	-0.02	1.17	-0.85	0.12	-0.12	0.01
Des Est	0.39	1.08	1.10	0.80	0.45	0.90
Curtosis	12.97	-0.06	-0.12	-0.04	0.62	0.25
Asimetría Estadística	-3.21	-0.07	-0.06	-0.12	-0.66	-0.02
100it						
Media	-0.01	1.23	-0.85	0.25	-0.31	0.03
Des Est	0.60	1.14	1.13	1.00	0.64	1.13
Curtosis	1.98	-0.07	-0.03	-0.08	-0.10	2.14
Asimetría Estadística	-0.82	-0.01	-0.04	-0.05	-0.27	-0.07
1000it						
Media	152.61	1.23	-0.84	0.39	-0.55	-0.28
Des Est	1.29E+03	1.14	1.14	1.13	0.93	2.07E+04
Curtosis	210.6	-0.1	0.0	0.2	0.0	577.2
Asimetría Estadística	13.8	0.0	0.0	0.2	0.1	-2.1

10.2.1.2 48 Datos

Se presentan resultados estadísticos al utilizar el muestreador de Gibbs tradicional con 48 datos con ambos radios de búsquedas, es decir, (300, 300, 50) [m] y (600, 600, 100) [m] con sus respectivos análisis de resultados.

Tabla XXXII: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 48 Datos, Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m]

48 Datos	Número de Iteraciones			
	1it	10it	100it	1000it
Min Y1	-4.15	-3.53	-3.43	-321.53
Max Y1	1.29	1.13	3.27	3.48E+04
Min Y2	-3.55	-4.05	-3.62	-3.32
Max Y2	4.40	5.89	6.23	6.10
Min Y3	-4.48	-5.40	-5.44	-6.47
Max Y3	3.04	3.55	3.68	3.47
Min Y4	-2.76	-3.52	-4.06	-3.89
Max Y4	2.23	3.55	4.47	5.82
Min Y5	-2.01	-2.58	-3.11	-4.50
Max Y5	1.87	1.80	2.15	2.87
Min Y6	-3.10	-3.93	-10.02	-6.52E+05
Max Y6	2.94	4.74	12.98	5.23E+05

Tabla XXXIII: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 48 Datos, Radio de Búsqueda (600, 600, 100)
[m]

48 Datos	1it	10it	100it	1000it
Min Y1	-4.00	-3.23	-3.43	-268.08
Max Y1	1.03	1.48	3.27	2.94E+04
Min Y2	-3.54	-3.52	-3.62	-3.35
Max Y2	4.27	5.56	6.23	6.23
Min Y3	-4.02	-4.91	-5.44	-5.63
Max Y3	2.64	3.33	3.68	4.50
Min Y4	-2.66	-3.95	-4.06	-4.03
Max Y4	2.31	3.21	4.47	5.81
Min Y5	-2.32	-2.53	-3.11	-4.24
Max Y5	1.33	1.71	2.15	3.31
Min Y6	-3.76	-4.02	-10.02	-1.04E+06
Max Y6	2.82	4.01	12.98	8.33E+05

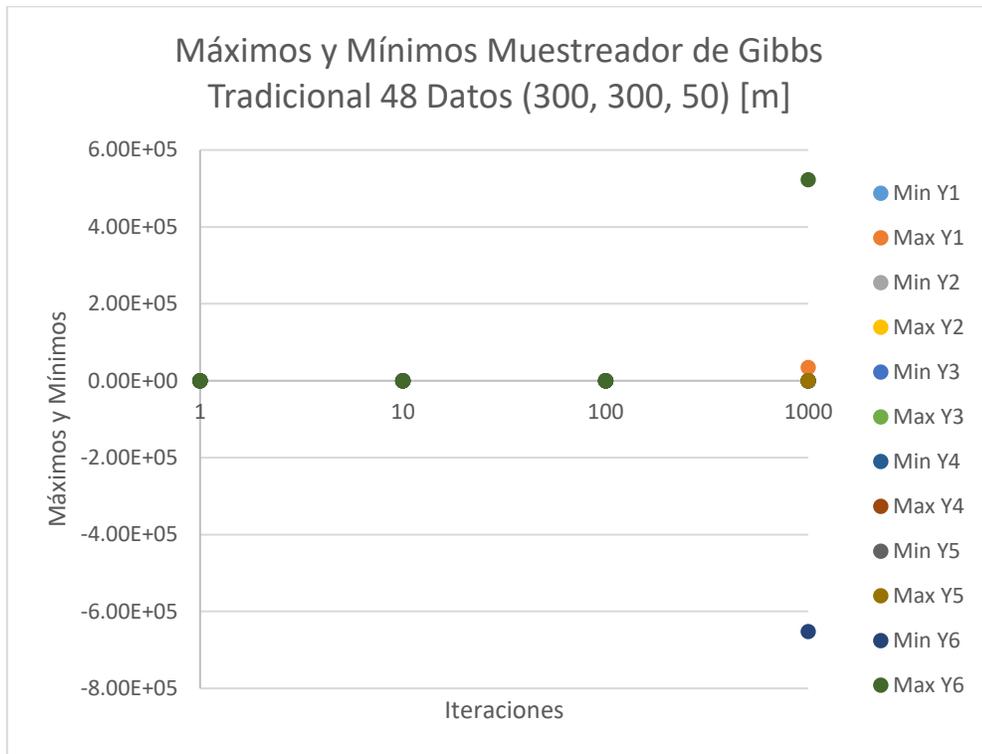


Ilustración 45: Gráfico Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 48 Datos, Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m]

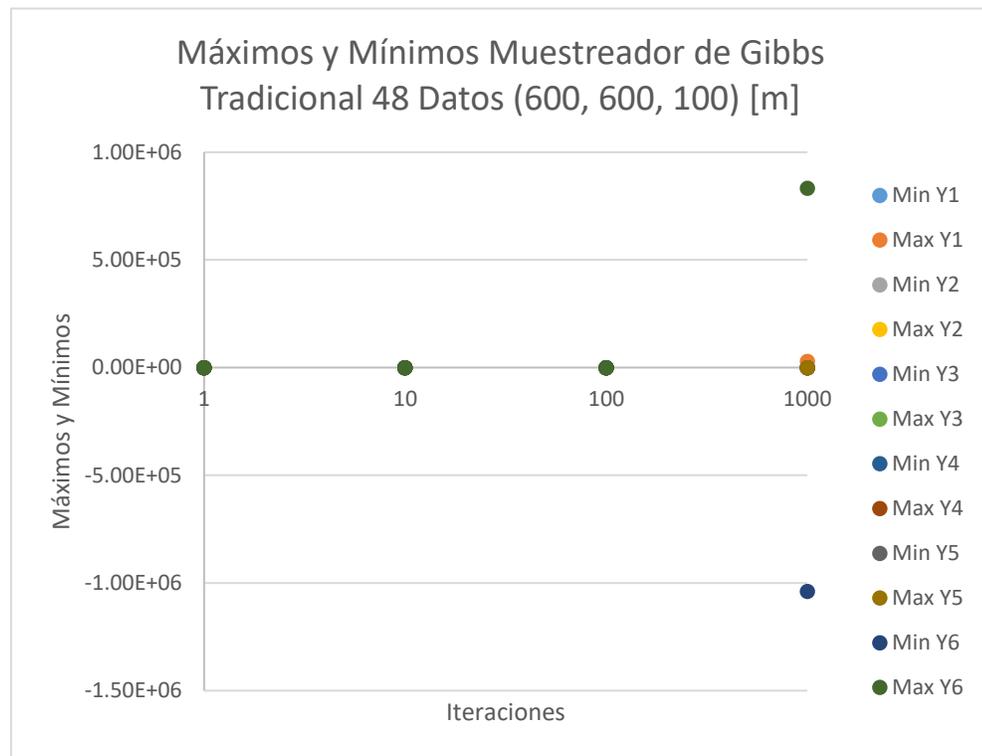


Ilustración 46: Gráfico Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 24 Datos, Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m]

Tabla XXXIV: Estadísticas Básicas Muestreador de Gibbs Tradicional, 48 Datos, Radio de Búsqueda (300, 300, 50)
[m]

1it	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6
Media	-0.01	0.80	-0.77	0.05	-0.05	0.00
Des Est	0.36	0.85	0.97	0.57	0.33	0.53
Curtosis	32.46	0.55	-0.60	0.02	4.68	1.37
Asimetría Estadística	-5.35	-0.26	-0.07	-0.08	-1.82	-0.15
10it						
Media	-0.02	1.16	-0.86	0.11	-0.11	0.02
Des Est	0.39	1.07	1.10	0.79	0.46	0.90
Curtosis	13.22	-0.05	-0.12	-0.02	0.59	0.26
Asimetría Estadística	-3.24	-0.09	-0.07	-0.13	-0.66	0.00
100it						
Media	-0.01	1.23	-0.85	0.25	-0.31	0.03
Des Est	0.60	1.14	1.13	1.00	0.64	1.13
Curtosis	1.98	-0.07	-0.03	-0.08	-0.10	2.14
Asimetría Estadística	-0.82	-0.01	-0.04	-0.05	-0.27	-0.07
1000it						
Media	140.31	1.24	-0.84	0.39	-0.58	-5.41
Des Est	1.22E+03	1.14	1.14	1.12	0.89	1.55E+04
Curtosis	237.19	-0.08	0.01	0.24	0.09	377.79
Asimetría Estadística	14.36	0.01	-0.03	0.25	0.07	-1.75

Tabla XXXV: Estadísticas Básicas Muestreador de Gibbs Tradicional, 48 Datos, Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m]

1it	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6
Media	-0.01	0.80	-0.77	0.06	-0.05	0.00
Des Est	0.35	0.84	0.97	0.57	0.33	0.53
Curtosis	31.77	0.55	-0.60	0.01	4.78	1.25
Asimetría Estadística	-5.30	-0.24	-0.08	-0.09	-1.84	-0.10
10it						
Media	-0.02	1.17	-0.85	0.12	-0.12	0.01
Des Est	0.39	1.08	1.10	0.80	0.45	0.90
Curtosis	12.97	-0.06	-0.12	-0.04	0.62	0.25
Asimetría Estadística	-3.21	-0.07	-0.06	-0.12	-0.66	-0.02
100it						
Media	-0.01	1.23	-0.85	0.25	-0.31	0.03
Des Est	0.60	1.14	1.13	1.00	0.64	1.13
Curtosis	1.98	-0.07	-0.03	-0.08	-0.10	2.14
Asimetría Estadística	-0.82	-0.01	-0.04	-0.05	-0.27	-0.07
1000it						
Media	152.61	1.23	-0.84	0.39	-0.55	-0.28
Des Est	1.29E+03	1.14	1.14	1.13	0.93	2.07E+04
Curtosis	210.6	-0.1	0.0	0.2	0.0	577.2
Asimetría Estadística	13.8	0.0	0.0	0.2	0.1	-2.1

10.2.1.3 96 Datos

Tabla XXXVI: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 96 Datos, Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m]

	Número de Iteraciones			
96 Datos	1	10	100	1000
Min Y1	-3.99	-3.46	-3.38	-4.23
Max Y1	1.15	1.24	2.16	32.65
Min Y2	-3.32	-3.37	-3.95	-3.59
Max Y2	4.80	5.81	8.17	8.49
Min Y3	-4.06	-5.56	-5.44	-5.49
Max Y3	2.30	3.22	3.56	3.74
Min Y4	-2.86	-3.69	-4.03	-4.40
Max Y4	2.77	3.21	4.38	4.76
Min Y5	-2.01	-2.34	-2.77	-4.41
Max Y5	1.35	1.53	3.07	3.62
Min Y6	-3.31	-4.98	-4.50	-4.10
Max Y6	3.10	4.01	4.80	4.26

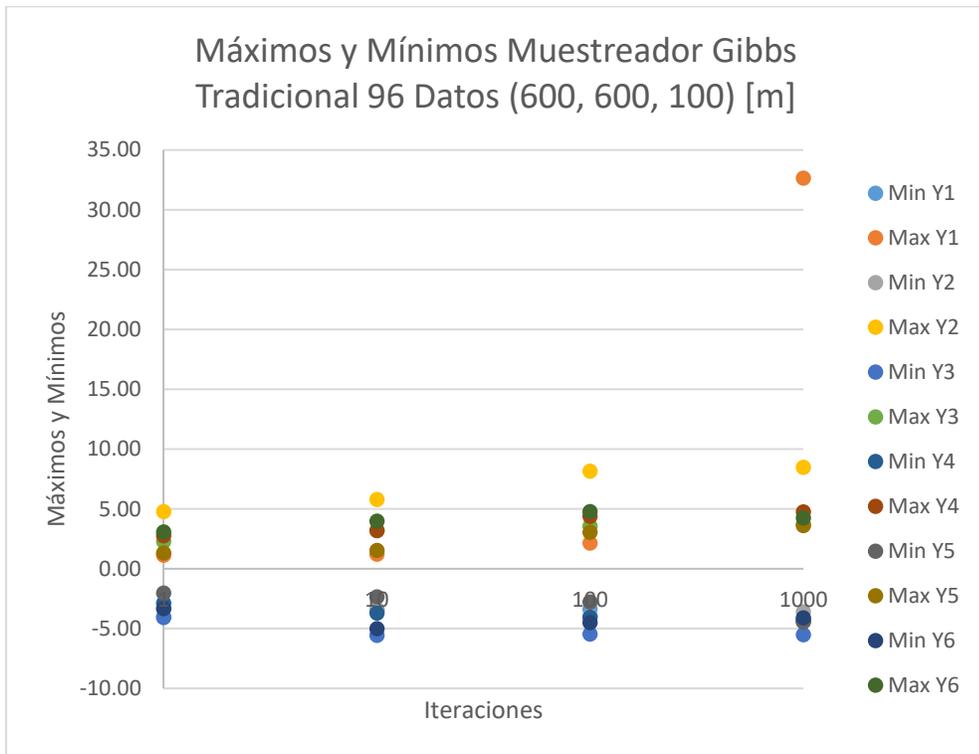


Ilustración 47: Gráfico Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 96 Datos, Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m]

Tabla XXXVII: Estadísticas Básicas Muestreador de Gibbs Tradicional, 96 Datos, Radio de Búsqueda (600, 600, 100)
[m]

1it	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6
Media	-0.01	0.81	-0.77	0.05	-0.05	0.00
Des Est	0.35	0.85	0.97	0.57	0.33	0.53
Curtosis	30.98	0.54	-0.61	0.04	4.83	1.35
Asimetría Estadística	-5.26	-0.23	-0.08	-0.08	-1.87	-0.12
10it						
Media	-0.02	1.24	-0.85	0.11	-0.12	0.01
Des Est	0.39	1.12	1.10	0.79	0.45	0.88
Curtosis	13.90	-0.12	-0.14	-0.03	0.60	0.22
Asimetría Estadística	-3.31	-0.04	-0.08	-0.12	-0.65	-0.02
100it						
Media	-0.05	1.50	-0.84	0.25	-0.28	0.04
Des Est	0.55	1.39	1.14	1.01	0.65	1.02
Curtosis	2.86	0.27	-0.02	-0.08	-0.11	-0.01
Asimetría Estadística	-1.28	0.40	-0.03	-0.05	-0.22	0.00
1000it						
Media	0.24	1.53	-0.84	0.33	-0.42	0.03
Des Est	1.81	1.44	1.14	1.09	0.90	1.01
Curtosis	50.8	0.5	0.0	0.0	0.1	0.0
Asimetría Estadística	5.2	0.5	0.0	0.1	0.2	0.0

10.2.1.4 192 Datos

Tabla XXXVIII: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 192 Datos, Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m]

	Número de Iteraciones			
192 Datos	1	10	100	1000
Min Y1	-4.13	-3.66	-3.19	-3.06
Max Y1	1.25	1.25	1.83	7.19
Min Y2	-3.55	-4.08	-3.62	-3.31
Max Y2	4.37	5.71	6.57	5.90
Min Y3	-4.49	-5.41	-5.21	-6.39
Max Y3	3.04	3.53	3.68	3.54
Min Y4	-2.74	-3.52	-4.04	-3.90
Max Y4	2.23	3.55	4.28	4.97
Min Y5	-2.01	-2.56	-3.10	-4.02
Max Y5	2.02	1.79	2.15	2.90
Min Y6	-3.02	-3.96	-4.23	-4.22
Max Y6	2.88	3.65	4.05	4.37

Tabla XXXIX: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 192 Datos, Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m]

	Número de Iteraciones			
192 Datos	1	10	100	1000
Min Y1	-3.99	-3.60	-3.36	-3.03
Max Y1	1.00	1.31	1.60	2.89
Min Y2	-3.25	-3.42	-3.96	-3.52
Max Y2	4.36	5.42	5.94	5.93
Min Y3	-3.97	-5.09	-5.73	-5.23
Max Y3	2.49	3.27	3.80	3.93
Min Y4	-3.25	-3.56	-4.65	-3.81
Max Y4	2.43	3.16	4.39	4.82
Min Y5	-1.91	-2.26	-2.75	-3.89
Max Y5	1.79	1.68	2.21	3.76
Min Y6	-3.37	-4.21	-4.28	-4.14
Max Y6	3.73	4.01	4.05	4.55

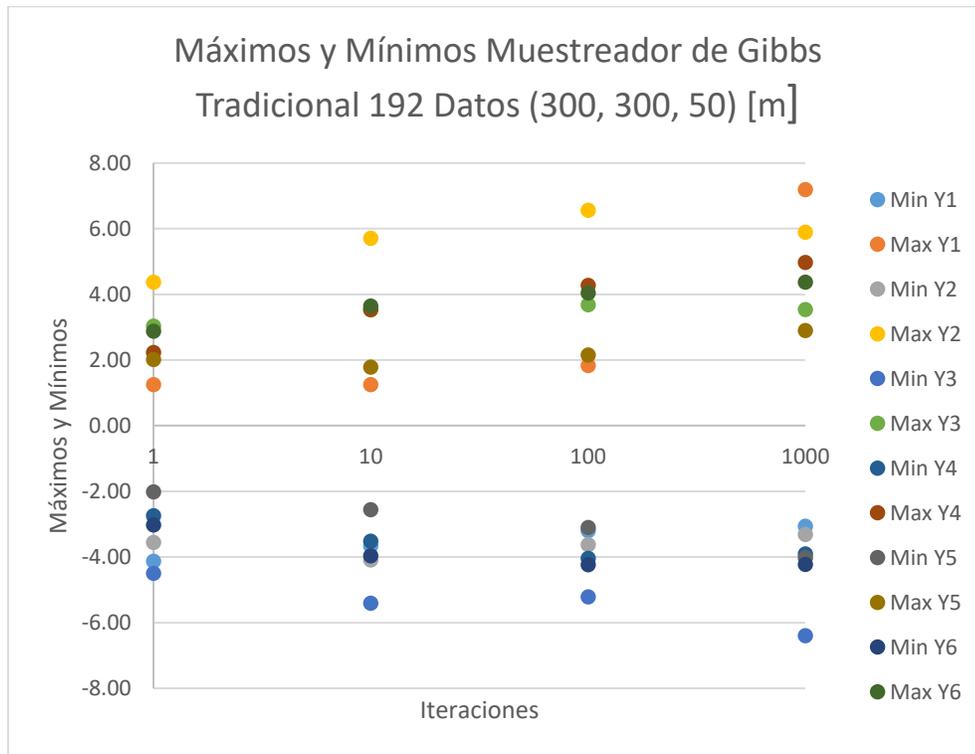


Ilustración 48: Gráfico Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 192 Datos, Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m]

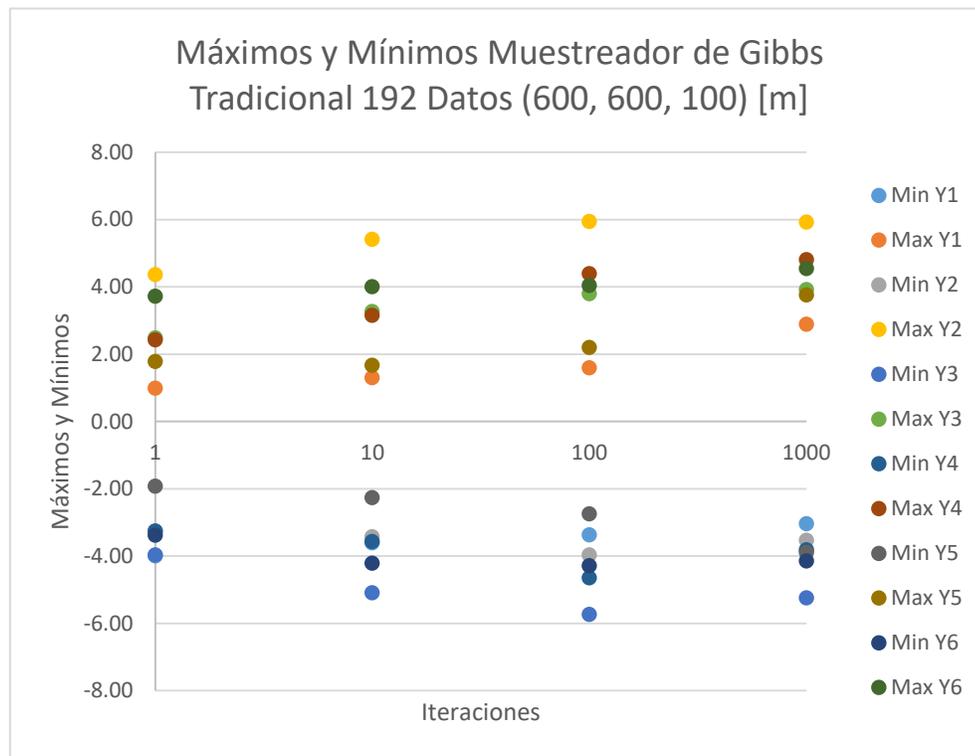


Ilustración 49: Gráfico Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Tradicional, 192 Datos, Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m]

Tabla XL: Estadísticas Básicas Muestreador de Gibbs Tradicional, 192 Datos, Radio de Búsqueda (300, 300, 50) [m]

1it	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6
Media	-0.01	0.80	-0.77	0.05	-0.05	0.00
Des Est	0.36	0.85	0.97	0.57	0.33	0.53
Curtosis	32.28	0.54	-0.61	0.01	4.70	1.38
Asimetría Estadística	-5.35	-0.26	-0.07	-0.07	-1.82	-0.15
10it						
Media	-0.03	1.18	-0.85	0.11	-0.11	0.02
Des Est	0.39	1.09	1.10	0.79	0.46	0.87
Curtosis	14.09	-0.08	-0.12	-0.02	0.62	0.20
Asimetría Estadística	-3.35	-0.06	-0.07	-0.12	-0.68	0.00
100it						
Media	-0.09	1.28	-0.85	0.24	-0.29	0.03
Des Est	0.52	1.17	1.14	0.99	0.64	1.01
Curtosis	2.96	-0.12	-0.05	-0.09	-0.10	0.00
Asimetría Estadística	-1.37	0.02	-0.03	-0.06	-0.28	-0.02
1000it						
Media	-0.21	1.29	-0.84	0.32	-0.43	0.04
Des Est	0.68	1.18	1.15	1.05	0.85	1.00
Curtosis	0.47	-0.15	0.00	-0.07	0.02	0.03
Asimetría Estadística	-0.20	0.04	-0.02	0.05	0.09	-0.02

Tabla XLI: Estadísticas Básicas Muestreador de Gibbs Tradicional, 192 Datos, Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m]

1it	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6
Media	-0.01	0.80	-0.77	0.05	-0.05	0.00
Des Est	0.35	0.85	0.97	0.57	0.33	0.52
Curtosis	32.01	0.51	-0.60	0.02	4.51	1.32
Asimetría Estadística	-5.33	-0.25	-0.08	-0.07	-1.78	-0.13
10it						
Media	-0.03	1.16	-0.85	0.11	-0.11	0.01
Des Est	0.39	1.08	1.11	0.79	0.46	0.87
Curtosis	14.10	-0.05	-0.13	-0.05	0.64	0.21
Asimetría Estadística	-3.34	-0.07	-0.05	-0.10	-0.69	-0.01
100it						
Media	-0.08	1.26	-0.84	0.25	-0.27	0.04
Des Est	0.52	1.16	1.14	1.00	0.65	1.01
Curtosis	3.06	-0.09	-0.04	-0.06	-0.13	-0.04
Asimetría Estadística	-1.40	0.04	-0.01	-0.04	-0.21	-0.01
1000it						
Media	-0.19	1.26	-0.84	0.30	-0.41	0.05
Des Est	0.68	1.15	1.15	1.05	0.89	1.00
Curtosis	0.0	-0.1	0.0	-0.1	0.0	0.0
Asimetría Estadística	-0.3	0.0	0.0	0.0	0.2	0.0

10.2.2 Muestreador de Gibbs Dual

Tabla XLII: Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Dual, Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m]

	Número de Iteraciones			
Y1	1	10	100	1000
Min Y1	-3.83	-4.12	-4.35	-4.19
Max Y1	7.65	6.64	6.09	6.33
Y2	1	10	100	1000
Min Y2	-4.41	-4.10	-4.09	-3.57
Max Y2	4.35	5.49	5.50	5.47
Y3	1	10	100	1000
Min Y3	-5.06	-5.09	-4.95	-4.97
Max Y3	4.30	4.46	4.83	5.02
Y4	1	10	100	1000
Min Y4	-4.63	-5.16	-4.47	-4.07
Max Y4	4.73	5.28	5.33	5.45
Y5	1	10	100	1000
Min Y5	-5.25	-5.02	-4.67	-4.84
Max Y5	6.11	6.27	5.44	5.01
Y6	1	10	100	1000
Min Y6	-5.88	-4.84	-4.06	-4.13
Max Y6	5.63	5.10	4.56	4.83

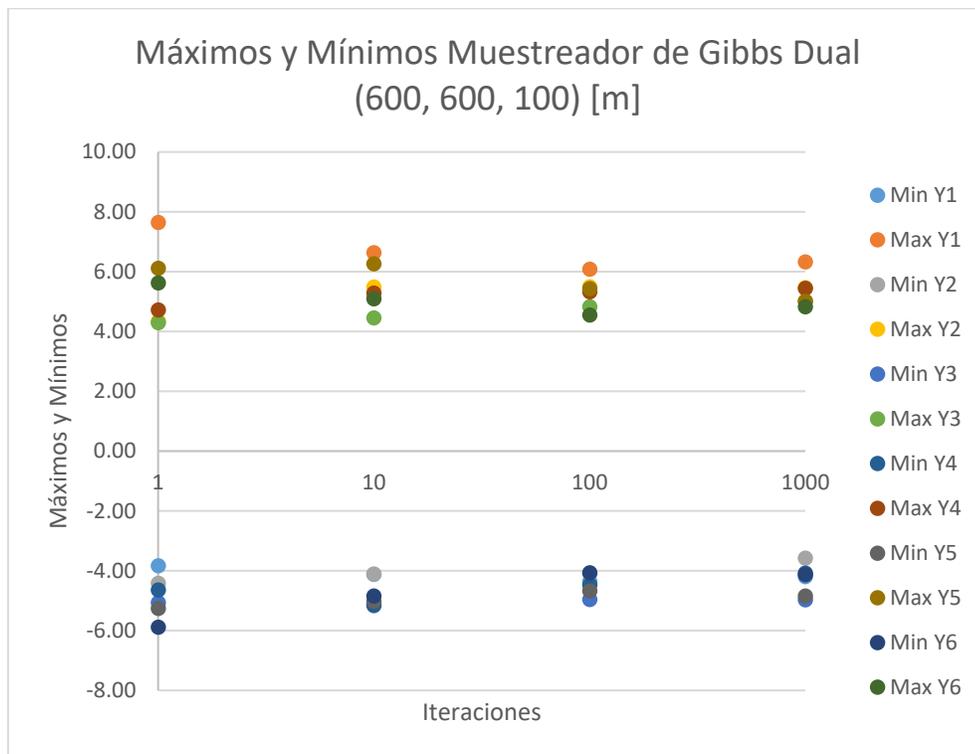


Ilustración 50: Gráfico Máximos y Mínimos Muestreador de Gibbs Dual, Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m]

Tabla XLIII: Estadísticas Básicas Muestreador de Gibbs Dual, Radio de Búsqueda (600, 600, 100) [m]

1it	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6
Media	0.75	0.72	-0.63	0.09	0.09	0.08
Des Est	1.23	0.91	1.15	1.08	1.14	1.25
Curtosis	0.17	1.14	-0.27	-0.05	0.11	0.27
Asimetría Estadística	0.15	-0.53	0.28	-0.03	0.10	0.01
10it						
Media	0.81	0.85	-0.63	0.16	0.16	0.06
Des Est	1.23	0.97	1.18	1.19	1.24	1.11
Curtosis	0.23	0.79	-0.27	-0.04	0.15	0.09
Asimetría Estadística	0.08	-0.41	0.29	-0.01	0.13	0.02
100it						
Media	0.97	1.05	-0.64	0.23	0.10	0.06
Des Est	1.26	1.05	1.22	1.20	1.21	1.02
Curtosis	0.19	0.29	-0.29	-0.18	-0.03	-0.02
Asimetría Estadística	-0.02	-0.22	0.28	0.00	-0.06	0.00
1000it						
Media	0.87	1.09	-0.68	0.29	-0.06	0.04
Des Est	1.21	1.06	1.24	1.11	1.12	1.01
Curtosis	0.33	0.06	-0.28	-0.17	0.00	0.01
Asimetría Estadística	-0.05	-0.12	0.21	-0.03	-0.10	-0.02