UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

DISTRIBUCIONES CUASI-ESTACIONARIAS PARA EL PROCESO DE BESSEL EN EL INTERVALO $(0, 1]$

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

FELIPE ANDRÉS CAMPOS VERGARA

PROFESOR GUÍA:
JAIME SAN MARTÍN ARISTEGUI

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
SERVET MARTÍNEZ AGUILERA
JOAQUÍN FONTBONA TORRES

SANTIAGO DE CHILE
2017

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,
MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS
AL TÍTULO DE INGENIERIO CIVIL MATEMÁTICO
POR: FELIPE ANDRÉS CAMPOS VERGARA
FECHA: 2017
PROF. GUÍA: SR. JAIME SAN MARTÍN ARISTEGUI

DISTRIBUCIONES CUASI-ESTACIONARIAS PARA EL PROCESO DE BESSEL EN EL INTERVALO $(0,1]$

En la presente tesis se estudian las distribuciones cuasi-estacionarias para el proceso de Bessel en el intervalo $(0,1]$. Este proceso corresponde a una difusión uni-dimensional con coeficiente de drift singular en 0, la cual se extingue al llegar a 1.

Debido a la naturaleza del problema, se hace un estudio sobre difusiones uni-dimensionales, tocando temas tales como condiciones de explosión, existencia y unicidad. Posteriormente se trata el problema en cuestión. La principal herramienta consiste en una representación espectral adecuada para el núcleo de transición del proceso de Bessel, obtenido a partir del Movimiento Browniano en la bola unitaria que se extingue al llegar a la frontera. Se demuestra que existe una única distribución cuasi-estacionaria para el proceso, que además resulta ser su límite de Yaglom.

Se tocan algunos tópicos adicionales sobre el proceso de Bessel tales como su tipo de frontera y operadores diferenciales asociados. Esto dará orientación a una posible generalización de estos resultados a difusiones más generales.

A mis padres,

Tabla de Contenido

Introducción

El concepto de distribución cuasi-estacionaria (o q.s.d. por sus siglas en inglés) ha concitado el interés de la comunidad matemática dentro de la teoría de Probabilidades pues se presenta como el análogo a las distribuciones estacionarias para procesos que se *extinguirán* casi-seguramente. Esto permite modelar una vasta gama de fenómenos, como por ejemplo, dinámicas de poblaciones (vea [15] y [3]).

En el estudio de distribuciones cuasi-estacionarias ha resultado provechoso restringirse a determinados contextos. En Collet, Martínez & San Martín [6], capítulo 6, se estudia este objeto en difusiones uni-dimensionales de la forma:

$$dX_t = -\alpha(X_t)dt + dB_t,$$

donde $\alpha \in C^1([0, b])$. En este caso, el proceso X vive en $[0, b]$ y es absorbido en los estados $\{0, b\}$. En [6] se demuestra que existe una única distribución cuasi-estacionaria para X, la cual también resulta ser su límite de Yaglom.

Resulta natural entonces preguntarse por difusiones de la forma:

$$dX_t = -q(X_t)dt + dW_t, \tag{1}$$

donde $q \in C^1(0, 1]$ y posee una singularidad en 0. Suponemos que esta difusión vive en $(0, 1]$ y se extingue al llegar a $\{1\}$. En este contexto, el proceso de Bessel en $(0, 1]$, absorbido en 1, es una de estas difusiones (teorema 3.1), por lo que entender este modelo arrojará luces sobre (1).

El objetivo de esta tesis es el estudio de distribuciones cuasi-estacionarias para el proceso de Bessel en $(0, 1]$. Se trabajará en procesos de Bessel de orden $\beta = d/2 - 1$ para $d \geq 2$ entero (vea [2] y (3.9)), los cuales corresponden a la norma euclidiana de un movimiento Browniano d-dimensional. Se demostrará que para esta difusión existe una única distribución cuasi-estacionaria ν, la cual es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue. Adicionalmente, ν resulta ser el límite de Yaglom para el proceso. La principal herramienta a usar consiste en una representación espectral adecuada para el núcleo de transición del proceso de Bessel, obtenida a partir del movimiento Browniano en la bola unitaria que se extingue al llegar a la frontera.

Con el fin de entender el contexto de (1), se hace una revisión bibliográfica sobre ecuaciones diferenciales estocásticas en una dimensión. En los teoremas 2.9 y 2.21 se dan condiciones de existencia y unicidad para estas ecuaciones. En la sección 1.2.5 se introduce el concepto de solución en un intervalo y se define el tiempo de explosión como el momento en que la difusión escapa del intervalo. Luego, en la sección 2.3.3 se dan condiciones para que haya o no haya explosión, entre las que destaca el Test de Feller (teorema 2.35). Finalmente, en la sección 2.3.2 se presentan criterios para estudiar por donde explotará la difusión. Esto sentará la bases para trabajar con distribuciones cuasi-estacionarias, dando herramientas para el estudio correcto de (1) y, en consecuencia, del proceso de Bessel.

Este documento se organiza de la siguiente forma. En el capítulo 1 se exponen conceptos preliminares que serán usados a lo largo del documento. En el capítulo 2 se estudiarán exhaustivamente algunos aspectos sobre las difusiones uni-dimensionales. En el capítulo 3 se demuestra el resultado principal de esta tesis, además de tratar algunos tópicos adicionales sobre el proceso de Bessel tales como su tipo de frontera y operadores diferenciales asociados. Vale la pena recalcar que el trabajo original de esta tesis consiste en el capítulo 3.

Capítulo 1

Preliminares

En el presente capítulo se enunciarán las principales nociones y herramientas a emplear en esta tesis. Se omitirán las demostraciones, pues este material se encuentra bien desarrollado en la literatura.

Para comenzar, daremos nociones básicas sobre la teoría de Semigrupos y como estos se relacionan con Procesos de Markov. La formalización de estos conceptos será el punto de partida en el estudio de distribuciones cuasi-estacionarias. En segundo lugar, presentaremos algunas herramientas del Cálculo Estocástico que serán utilizadas en el Capítulo 2, entre las que destaca una generalización de la Fórmula de Itô y el concepto de Ecuación Diferencial Estocástica. En la sección final se expondrán resultados básicos sobre Distribuciones Cuasi-Estacionarias, para finalizar con la revisión de un caso particular: difusiones regulares en un intervalo acotado.

1.1. Semigrupos y Procesos de Markov

Lo que sigue se puede encontrar en Williams & Rogers [13] y Blumenthal & Getoor [1]. A continuación, considere un espacio medible $(E, \mathcal{E})$.

Definición 1.1 *La familia de kernels* $\{P_t\}_{t\geq 0}$ *se llamará* ***función de transición*** *si*

$$\begin{aligned} P_t : E \times \mathcal{E} &\longrightarrow [0,1] \\ (x,\Gamma) &\mapsto P_t(x,\Gamma) \end{aligned}$$

- $\forall t \geq 0,\ x \in E, \quad P_t(x,\cdot)$ *es una medida de subprobabilidad en* $\mathcal{E}$.
- $\forall t \geq 0,\ \Gamma \in \mathcal{E} \quad x \mapsto P_t(x,\Gamma)$ *es* $\mathcal{E}$*- medible*
- $\forall s,t \geq 0,\ x \in E,\ \Gamma \in \mathcal{E}$

$$P_{t+s}(x,\Gamma) = \int_E P_s(x,dy)P_t(y,\Gamma) \tag{1.1}$$

$(E, \mathcal{E})$ representa al espacio de estados para un proceso. A su vez, $P_t(x, \Gamma)$ se interpreta como la probabilidad de llegar de x a Γ en t unidades de tiempo. La ecuación (1.1) se conoce como *Ecuación de Chapman-Kolmogorov.*

Una función de transición $\{P_t\}_{t\geq 0}$ se denominará **honesta, markoviana o conservativa** si $P_t(x, E) = 1 \ \forall t \geq 0,\ x \in E$. A su vez, se dirá que $\{P_t\}_{t\geq 0}$ es **normal** si $P_0(x, \cdot) = \delta_x(\cdot) \ \forall x \in E$. Denote por $\mathcal{M}_b(\mathcal{E})$ al espacio de funciones $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que son $\mathcal{E}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ medibles y acotadas. $\mathcal{M}_b(\mathcal{E})$ es un espacio de Banach con la norma $||f||_\infty = \sup_{x\in E} |f(x)| < \infty$. Para $\{P_t\}_{t\geq 0}$ función de transición y $f \in \mathcal{M}_b(\mathcal{E})$, defina:

$$P_t f(x) := \int_E f(y) P_t(x, dy), \qquad x \in E. \tag{1.2}$$

Comenzando por funciones indicatrices, se puede demostrar que $P_t f \in \mathcal{M}_b(\mathcal{E})$. De esta forma, cada función de transición induce una familia de operadores $P_t : \mathcal{M}_b(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{M}_b(\mathcal{E})$. Esta familia será lo que se conoce como **Semigrupo Sub-markoviano**.

Definición 1.2 *La familia $(P_t)_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{M}_b(\mathcal{E}), \mathcal{M}_b(\mathcal{E}))$ se llamará **Semigrupo Submarkoviano** si*

(i) $\forall f \in \mathcal{M}_b(\mathcal{E}) \quad 0 \leq f \leq 1 \Rightarrow 0 \leq P_t f \leq 1$

(ii) $\forall s, t \geq 0 \quad P_{s+t} = P_s P_t$

(iii) $\forall t \geq 0 \quad f_n \searrow 0 \Rightarrow P_t f_n \searrow 0$

La condición (ii) se conoce como **propiedad del semigrupo**. No es difícil ver que (1.2) efectivamente define un semigrupo sub-markoviano. Por otro lado, un semigrupo sub-markoviano siempre proviene de una función de transición, como lo señala el siguiente teorema.

Teorema 1.3 *Para $(P_t)_{t\geq 0}$ semigrupo sub-markoviano, defina $P_t(x, \Gamma) := P_t \mathbb{1}_\Gamma(x)$. Entonces, $P_t(x, \Gamma)$ es una función de transición tal que:*

$$P_t f(x) = \int_E f(y) P_t(x, dy)$$

$\forall f \in \mathcal{M}_b(\mathcal{E}),\ t \geq 0,\ x \in E$. Además, esta función de transición es la única que permite representar al semigrupo.

Ejemplo Considere como espacio medible $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Se define para $x \in \mathbb{R}^d$ y $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$:

$$P_t(x, \Gamma) := \begin{cases} \displaystyle\int_\Gamma (2\pi t)^{-d/2} \exp\left(-\frac{|y - x|^2}{2t}\right) dy & \text{si } t > 0 \\ \delta_x(\Gamma) & \text{si } t = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

donde $|y| = (\sum_{i=1}^d y_i^2)^{1/2}$ es la norma euclidiana. $P_t(x, \Gamma)$ es una función de transición y corresponde a $\mathbb{P}_x(B_t \in \Gamma)$, donde B_t es un Movimiento Browniano d-dimensional. Note que para $t > 0$ la medida $P_t(x, .)$ posee una densidad $p_t(x, y)$ con respecto a la medida de Lebesgue. Así:

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) p_t(x, y) dy. \tag{1.4}$$

En lo que sigue, sea $(X, ||.||)$ un espacio de Banach.

Definición 1.4 *La familia* $(P_t)_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{L}(X, X)$ *será llamada* ***Semigrupo de Contracción*** *si:*

(i) $\forall t \geq 0 \quad ||P_t|| \leq 1$

(ii) $\forall s, t \geq 0 \quad P_{s+t} = P_s P_t$

Más aún, se llamará ***Semigrupo de Contracción Fuertemente Continuo*** *(**SCCSG** por sus siglas en inglés) si*

(iii) $\forall f \in X \quad ||P_t f - f|| \longrightarrow 0$ *cuando* $t \longrightarrow 0$.

Esta noción de semigrupo posee una estrecha relación con ecuaciones diferenciales parabólicas (vea por ejemplo [4] y [9]). Para nuestros propósitos, será de gran utilidad pues permite introducir la noción de *generador infinitesimal.*

Definición 1.5 *Considere a* $(P_t)_{t\geq 0}$ *un SCCSG en* X. *Se define el* ***generador infinitesimal*** *de* $(P_t)_{t\geq 0}$ *como*

$$\mathcal{G}f := \lim_{h \searrow 0} \frac{P_h f - f}{h} \ , \tag{1.5}$$

donde el límite es en X *y* f *es tal que el límite existe. Se define el* ***dominio del generador*** *como* $\mathcal{D}(\mathcal{G}) := \{f \in X \mid \lim_{h\searrow 0} \frac{P_h f - f}{h}$ *existe* $\}$.

Es directo ver que $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ es un subespacio vectorial y $\mathcal{G} : \mathcal{D}(\mathcal{G}) \longrightarrow X$ es un operador lineal no acotado. A continuación, se enunciarán algunas propiedades de $\mathcal{G}$.

Proposición 1.6 *En el contexto anterior:*

(i) $(\mathcal{G}, \mathcal{D}(\mathcal{G}))$ *es un operador cerrado y densamente definido.*

(ii) Si $f \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$, *entonces* $P_t f \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ *para todo* $t \geq 0$ *y el mapeo* $t \mapsto P_t f$ *es diferenciable.*

(iii) Si $f \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$, *denotamos por* $\frac{d}{dt}P_t f$ *a la derivada de* $t \mapsto P_t f$ *evaluada en* t. *Se tiene entonces que :*

$$\frac{d}{dt} P_t f = P_t \mathcal{G} f = \mathcal{G} P_t f \tag{1.6}$$

para todo $t \geq 0$.

(iv) Si $f \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$, *entonces:*

$$P_t f - f = \int_0^t P_s \mathcal{G} f ds = \int_0^t \mathcal{G} P_s f ds \tag{1.7}$$

para todo $t \geq 0$.

En la teoría de Semigrupos, resulta clave el Teorema de Hille-Yosida-Phillips (vea teorema 3.4.4 de Haraux & Cazanave [4]) el cual caracteriza a los operadores no acotados que son generadores de semigrupos.

Ejemplo Continuando con el ejemplo anterior, considere $X = C_0(\mathbb{R}^d)$, el espacio de funciones continuas de $\mathbb{R}^d$ a $\mathbb{R}$ tales que desvanecen en el infinito. X es un espacio de Banach bajo la norma uniforme. El semigrupo $(P_t)_{t\geq 0}$ definido en (1.4) resulta ser un SCCSG en X. En el caso $d = 1$, su generador resulta ser $\mathcal{G} = \frac{1}{2}\Delta$ con $\mathcal{D}(\mathcal{G}) = \{f \in X \mid \Delta f \text{ existe y está en } X\}$.

La noción de semigrupo está directamente relacionada con los Procesos de Markov a tiempo continuo. En efecto, la ecuación de Chapman-Kolmogorov ((1.1)) sugiere cierta *pérdida de memoria* para el proceso. En lo que sigue, considere un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ dotado de una filtración $\{\mathcal{M}_t\}_{t\geq 0}$ en $\mathcal{M}$.

Definición 1.7 (Primera definición) *Sea $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico definido en $(\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, \mathbb{P})$, adaptado a $\mathcal{M}_t$ y a valores en $(E, \mathcal{E})$. X se dirá **Proceso de Markov** con función de transición honesta $P_t(x, A)$ si:*

$$\forall s, t \geq 0,\ f \in \mathcal{M}_b(\mathcal{E}) \quad \mathbb{E}[f(X_{s+t})|\mathcal{M}_t] = P_s f(X_t). \tag{1.8}$$

La ecuación (1.8) sugiere que bajo la información que provee $\mathcal{M}_t$, la ley de la transición en s unidades de tiempo está determinada por el operador P_s. Note que esta transición no depende de t.

Esta definición resulta insuficiente para muchas aplicaciones, pues considera una única medida de probabilidad. En general, se buscará que el proceso comience de un punto arbitrario, dando origen a múltiples medidas de probabilidad. La siguiente definición nos brinda esta y más herramientas. Entre ellas, se hace cargo del problema de *explosión* para un Proceso de Markov. En lo que sigue considere $\mathbf{T} = [0, \infty]$.

Definición 1.8 (Segunda definición) *$X = (\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, X_t, \theta_t, \mathbb{P}^x)$ se dirá **Proceso de Markov** a valores en $(E, \mathcal{E})$ si cumple:*

Axioma 0:

- *Considere $E_\Delta := E \cup \{\Delta\}$ y $\mathcal{E}_\Delta = \sigma(\mathcal{E})$*
- *$(\Omega, \mathcal{M})$ es un espacio medible y $\{\mathcal{M}_t : t \in \mathbf{T}\}$ una filtración en $(\Omega, \mathcal{M})$. Considere un punto $\omega_\Delta \in \Omega$.*
- *$\{X_t : t \in \mathbf{T}\}$ es una colección de funciones $X_t : \Omega \longrightarrow E_\Delta$ tal que para todo ω, si $X_t(\omega) = \Delta$, entonces $X_s(\omega) = \Delta\ \forall s \geq t$. Además, X_∞ es constante igual a Δ y $X_0(\omega_\Delta) = \Delta$.*
- *$\{\theta_t : t \in \mathbf{T}\}$ es una colección de funciones $\theta_t : \Omega \longrightarrow \Omega$ tal que $\theta_\infty(\omega) = \omega_\Delta$.*
- *$\{\mathbb{P}^x\}_{x\in E_\Delta}$ es una familia de medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{M})$.*

Axioma R:

- *$\forall t \in \mathbf{T}: \quad X_t$ es $\mathcal{M}_t/\mathcal{E}_\Delta$ medible.*
- *$\forall B \in \mathcal{E},\ t \geq 0, \quad x \mapsto \mathbb{P}^x(X_t \in B)$ es $\mathcal{E}$ medible.*
- *$\mathbb{P}^\Delta(X_0 = \Delta) = 1$.*

Axioma H:

- *Para todo* $t, h \in \mathbf{T}: \quad X_t \circ \theta_h = X_{t+h}$.

Axioma M: *(Propiedad de Markov)*

- $\forall x \in E_\Delta, B \in \mathcal{E}_\Delta$ *y* $t, s \in \mathbf{T}$:

$$\mathbb{P}^x(X_{t+s} \in B | \mathcal{M}_t) = \mathbb{P}^{X(t)}(X_s \in B). \tag{1.9}$$

El estado Δ corresponde a un *estado de extinción*. Se dirá que el proceso X *explota* cuando llega a Δ. De esta forma, se define el *tiempo de explosión* para X como:

$$\zeta := \text{ínf}\{t \geq 0 \mid X_t = \Delta\}. \tag{1.10}$$

Para $x \in E_\Delta$, se suele interpretar a $\mathbb{P}^x$ como la medida del proceso X al comenzar en x. Esto no se desprende de la definición anterior, por lo que es necesario introducir el siguiente concepto.

Definición 1.9 *Un Proceso de Markov* $X = (\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, X_t, \theta_t, \mathbb{P}^x)$ *se dirá* ***Normal*** *si* $\forall x \in E$, $\{x\} \in \mathcal{E}$ *y* $\mathbb{P}^x(X_0 = x) = 1$.

En lo que sigue, considere un Proceso de Markov $X = (\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, X_t, \theta_t, \mathbb{P}^x)$ a valores en $(E, \mathcal{E})$.

Proposición 1.10

(i) $\forall f \in \mathcal{M}_b(\mathcal{E}_\Delta)$, $t \in \mathbf{T} \quad x \mapsto \mathbb{E}^x[f(X_t)]$ *es* $\mathcal{E}_\Delta$ *medible.*

(ii) Bajo el Axioma 0, R y H, Axioma M es equivalente a :

$$\mathbb{E}^x[f(X_{t+s})|\mathcal{M}_t] = \mathbb{E}^{X(t)}[f(X_s)] \tag{1.11}$$

$\forall x \in E_\Delta$, $s, t \in \mathbf{T}$, $f \in \mathcal{M}_b(\mathcal{E}_\Delta)$.

A cada proceso de Markov se le puede asociar un semigrupo. Este semigrupo (junto con la ley inicial) determina de forma única a la ley del proceso.

Teorema 1.11 *Considere*

$$N_t(x, A) := \mathbb{P}^x(X_t \in A) \tag{1.12}$$

para $t \geq 0$, $x \in E_\Delta$ *y* $A \in \mathcal{E}_\Delta$. *Entonces :*

(i) $\{N_t\}_{t \geq 0}$ *es una función de transición en* $(E_\Delta, \mathcal{E}_\Delta)$.

(ii) $\forall t \geq 0$, $x \in E$, $f \in \mathcal{M}_b(\mathcal{E}_\Delta)$:

$$\mathbb{E}^x[f(X_t)] = N_t f(x). \tag{1.13}$$

Así, (1.13) *define un semigrupo markoviano.*

La ecuación (1.11) se puede generalizar a funcionales de toda la trayectoria. A esto se le llamará la **Propiedad de Markov**. Defina las σ-álgebras $\mathcal{F}_t^\circ := \sigma(X_s : s \leq t)$ para $t \geq 0$ y $\mathcal{F}^\circ := \sigma(X_s : s \in \mathbf{T})$. Empleando el Axioma R junto al Teorema de la Clase Monótona Funcional, se puede demostrar que $x \mapsto \mathbb{E}^x(Y)$ es $\mathcal{E}_\Delta$ medible para todo $Y \in \mathcal{M}_b(\mathcal{F}^\circ)$.

Teorema 1.12 (Propiedad de Markov) $\forall x \in E_\Delta,\ t \in \mathbf{T},\ Y \in \mathcal{M}_b(\mathcal{F}^\circ)$*:*

$$\mathbb{E}^x[Y \circ \theta_t | \mathcal{M}_t] = \mathbb{E}^{X(t)}[Y]. \tag{1.14}$$

La generalización de esta propiedad a $\mathcal{M}_t$-tiempos de parada se conoce como la **Propiedad de Markov Fuerte**. En lo que sigue, se denota por $\mathcal{E}^*_\Delta$ a la *completación universal* de $\mathcal{E}_\Delta$ (vea [1] pág. 26).

Definición 1.13 *Se dirá que* $X = (\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, X_t, \theta_t, \mathbb{P}^x)$ *posee la* ***Propiedad de Markov Fuerte*** *si para todo* $\mathcal{M}_t$*-tiempo de parada* T*:*

- $X_T \in \mathcal{M}_T / \mathcal{E}^*_\Delta$
- $\forall f \in \mathcal{M}_b(\mathcal{E}_\Delta),\ t \geq 0,\ x \in E_\Delta$*:*

$$\mathbb{E}^x[f(X_{t+T}) | \mathcal{M}_T] = \mathbb{E}^{X(T)}[f(X_t)] \tag{1.15}$$

Si X posee esta propiedad, se dirá que X es un **Proceso de Markov Fuerte**. Si así lo fuera, la ecuación (1.15) se puede generalizar a funcionales $Y \in \mathcal{M}_b(\mathcal{F}^\circ)$ (vea proposición 8.4 en [1]).

Definición 1.14 *Sea* E_Δ *un espacio métrico tal que* $\mathcal{B}(E_\Delta) \subseteq \mathcal{E}_\Delta$*. Se dirá que* X *es* ***quasi-left-continuous*** *si para todo tiempo de parada* T *:*

- $X_T \in \mathcal{M}_T / \mathcal{E}^*_\Delta$
- $\forall (T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *secuencia creciente de tiempos de parada con límite* T*, se tiene que* $X(T_n) \longrightarrow X(T)$ *casi seguramente en* $\{T < \zeta\}$*.*

Todas las definiciones anteriores se funden en la noción de **Proceso Estándar**. Este tipo de proceso es suficientemente rico como para solucionar múltiples problemas técnicos y a la vez, suficientemente general como para cubrir una gran gama de aplicaciones.

Definición 1.15 *Un proceso de Markov normal* $X = (\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, X_t, \theta_t, \mathbb{P}^x)$ *a valores en* $(E, \mathcal{E})$ *se dirá* **Proceso Estándar** *si:*

(i) E *es un espacio topológico localmente compacto y de base numerable (LCCB), con* $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$*. Considere a* E_Δ *dotado de la topología de la compactificación en un punto.*

(ii) $\mathcal{M}_{t^+} = \mathcal{M}_t = \overline{\mathcal{M}_t}$*. Donde* $\overline{\mathcal{M}_t}$ *es la completación construida en [1], página 26 y 27.*

(iii) La trayectorias $t \mapsto X_t(\omega)$ *son continuas por la derecha en* $[0, \infty)$ *y poseen límite por la izquierda casi seguramente en* $[0, \zeta)$*.*

(iv) X *es Markov Fuerte.*

(v) X *es quasi-left-continous.*

Sea $(P_t)_{t\geq 0}$ un semigrupo submarkoviano. Empleando el teorema de Kolmogorov, se puede construir un proceso de Markov X (bajo la definición 1.7) que tenga a P_t como semigrupo asociado. De mayor complejidad resulta demostrar, bajo ciertas condiciones de regularidad, que se puede construir un Proceso Estándar X que tenga a $(P_t)_{t\geq 0}$ como semigrupo asociado.

Teorema 1.16 *Sea E un LCCB y $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$. Denote por $C_0(E)$ al espacio de funciones continuas que se desvanecen en el infinito. Sea $P_t(x, A)$ una función de transición en $(E, \mathcal{E})$ con semigrupo asociado $(P_t)_{t\geq 0}$ tal que:*

(i) $P_0 = I$.

(ii) $P_t : C_0(E) \longrightarrow C_0(E) \quad \forall t \geq 0$.

(iii) $\forall f \in C_0(E) \quad ||P_t f - f||_\infty \longrightarrow 0$ *cuando* $t \longrightarrow 0$.

Entonces, existe un proceso estándar X con función de transición $P_t(x, A)$.

1.2. Elementos de Cálculo Estocástico

Lo que sigue se puede encontrar en Karatzas & Shreve [11], capítulo 3. Considere un entero $d \geq 1$, un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ una filtración en $\mathcal{F}$.

Definición 1.17 *Sea μ una medida de probabilidad en $\mathbb{R}^d$. Un proceso $W = \{W_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ adaptado, a valores en $\mathbb{R}^d$, se dirá **Movimiento Browniano** de ley inicial μ si:*

(i) W *posee trayectorias continuas.*

(ii) $\mathbb{P}(W_0 \in \Gamma) = \mu(\Gamma)$ *para todo* $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

(iii) $\forall 0 \leq s \leq t \quad W_t - W_s$ *es independiente de* $\mathcal{F}_s$.

(iv) $\forall 0 \leq s < t \quad W_t - W_s$ *posee una distribución normal multivariada de media* 0 *y covarianza* $(t - s)I$.

Si $d = 1$, se hablará de movimiento Browniano **unidimensional**. Además, si $\mu = \delta_0$ se dirá que W es un movimiento Browniano **estándar**. Note que esta definición involucra también a la filtración.

Definición 1.18 *Sea $X := \{X_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ un proceso a trayectorias continuas tal que $X_0 = 0$ c.s. Suponga que existe una secuencia creciente $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{\mathcal{F}_t\}$ tiempos de parada tales que:*

$$\{X_{t\wedge T_n}, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\} \text{ es una martingala} \tag{1.16}$$

*$\forall n \geq 1$ y tales que $\mathbb{P}[\lim_{n\to\infty} T_n = \infty] = 1$. Entonces, se dirá que X es una **martingala local continua**, lo cual se escribe como $X \in \mathcal{M}^{c,loc}$.*

1.2.1. Representación de Martingalas Locales

Los siguientes teoremas nos permiten representar martingalas locales como integrales estocásticas o cambios de tiempo del movimiento Browniano. Para esto, será clave introducir la noción de **extensión de espacio de probabilidad**. Con esta idea buscamos *hacer aparecer un movimiento Browniano independiente* en nuestro proceso. En esta sección asumimos que todas las filtraciones de partida cumplen las condiciones usuales.

Sea $X = \{X_t, \mathcal{F}_t; 0 \le t < \infty\}$ un proceso adaptado , definido en un espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Sea además, $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{P}})$ otro espacio de probabilidad con un movimiento Browniano $d-$dimensional $\hat{B} = \{B_t, \hat{\mathcal{F}}_t; 0 \le t < \infty\}$. Se define: $\tilde{\Omega} := \Omega \times \hat{\Omega}$, $\tilde{\mathcal{G}} := \mathcal{F} \otimes \hat{\mathcal{F}}$, $\tilde{\mathbb{P}} := \mathbb{P} \otimes \hat{\mathbb{P}}$, $\tilde{\mathcal{G}}_t := \mathcal{F}_t \otimes \hat{\mathcal{F}}_t$. Resulta que $\{\tilde{\mathcal{G}}_t\}_{t\ge 0}$ es una filtración en $\tilde{\mathcal{G}}$ que quizás no cumple las condiciones usuales. Sea $\mathcal{N}$ la colección de $\tilde{\mathbb{P}}$-despreciables de $\tilde{\mathcal{G}}$, entonces se define $\tilde{\mathcal{F}}_t := \cap_{s>t} \sigma(\tilde{\mathcal{G}}_s \cup \mathcal{N})$ y $\tilde{\mathcal{F}} := \sigma(\tilde{\mathcal{G}} \cup \mathcal{N})$. Se puede probar que $\{\tilde{\mathcal{F}}_t\}_{t\ge 0}$ es una filtración en $\tilde{\mathcal{F}}$ que cumple las condiciones usuales. Además, se define $\forall(\omega, \hat{\omega}) \in \tilde{\Omega}$:

$$\tilde{X}_t(\omega, \hat{\omega}) := X_t(\omega) \quad \tilde{B}_t(\omega, \hat{\omega}) := B_t(\hat{\omega})$$

$\tilde{B} := \{\tilde{B}_t, \tilde{\mathcal{F}}_t; 0 \le t < \infty\}$ y $\tilde{X} := \{\tilde{X}_t, \tilde{\mathcal{F}}_t; 0 \le t < \infty\}$ son procesos adaptados. Es más, $\tilde{B}$ es un Movimiento Browniano d-dimensional independiente de $\tilde{X}$. Además, la ley de $\tilde{X}$ es igual a la de X.

El siguiente teorema caracteriza a las martingalas locales con variación cuadrática absolutamente continua como integrales estocásticas. Esto será fundamental para demostrar el teorema 2.9.

Teorema 1.19 *Sea $M = \{M_t, \mathcal{F}_t; 0 \le t < \infty\}$ una martingala local continua definida en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que $t \mapsto \langle M \rangle_t$ es absolutamente continua. Entonces, existe una extensión $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ en donde existe un movimiento browniano uni-dimensional $W := \{W_t, \tilde{\mathcal{F}}_t; 0 \le t < \infty\}$ y un proceso $X := \{X_t, \tilde{\mathcal{F}}_t; 0 \le t < \infty\}$ medible y adaptado tal que:*

(i) $\forall 0 \le t < \infty \quad \tilde{\mathbb{P}}[\int_0^t X_s^2 ds < \infty] = 1$

(ii) $\tilde{\mathbb{P}}$-*c.s.* $\forall 0 \le t < \infty$:

$$M_t = \int_0^t X_s dW_s \tag{1.17}$$

(iii) $\tilde{\mathbb{P}}$-*c.s.* $\forall 0 \le t < \infty$:

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t X_s^2 ds \tag{1.18}$$

El siguiente teorema nos dice que toda martingala local tal que $\langle M \rangle_\infty = \infty$ es un *cambio de tiempo* del movimiento Browniano.

Teorema 1.20 (Dambis, Dubins, Schwarz) *Sea $M = \{M_t, \mathcal{F}_t; 0 \le t < \infty\} \in \mathcal{M}^{c,loc}$ definida en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que $\lim_{t\to\infty} \langle M \rangle_t = +\infty$ $\mathbb{P}$-c.s. Defina:*

$$T(s) := \inf\{t \ge 0 \mid \langle M \rangle_t > s\}, \qquad 0 \le s < \infty$$

Entonces, el proceso $B_s := M_{T(s)}$, $\mathcal{G}_s := \mathcal{F}_{T(s)}$ es un movimiento browniano estándar. Además, $\mathbb{P}$-c.s.

$$M_t = B_{\langle M \rangle_t} \quad \forall 0 \le t < \infty \tag{1.19}$$

Podemos debilitar la hipótesis sobre el límite de la variación cuadrática.

Teorema 1.21 *Sea $M := \{M_t, \mathcal{F}_t; 0 \le t < \infty\} \in \mathcal{M}^{c,loc}$ definida en un espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Entonces, existe una extensión $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ y un movimiento Browniano B allí tal que $\tilde{\mathbb{P}}$-c.s.*

$$M_t = B_{\langle M \rangle_t} \quad \forall 0 \le t < \infty.$$

1.2.2. Tiempo Local para el Movimiento Browniano

Considere la familia Browniana en una dimensión: $\{W_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}, (\Omega, \mathcal{F}), \{\mathbb{P}^x\}_{x\in\mathbb{R}}$ donde $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ es la intersección de todas las aumentaciones $\mathcal{F}_t^\mu$ para medidas finitas. Se tiene que esta filtración es continua por derecha.

Definición 1.22 *Sea $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Se define el **tiempo de ocupación** de B como:*

$$\Gamma_t(B) := \int_0^t \mathbb{1}_B(W_s)ds$$

Note que $\Gamma_t(B) = \lambda\left(\{0 \leq s \leq t \mid W_s \in B\}\right)$, donde λ es la medida de Lebesgue. Asi, $\Gamma_t(B)$ mide la cantidad tiempo que ha estado W en el conjunto B en el horizonte de tiempo $[0,t]$. Veremos que $\Gamma_t(\bullet)$ posee una densidad con respecto a la medida de Lebesgue, la cual será conocida como **tiempo local**.

Definición 1.23 *Sea $L = \{L_t(x,\omega) \mid t \in [0,\infty),\ x \in \mathbb{R},\ \omega \in \Omega\}$ un proceso a valores en $[0,\infty)$ tal que para todo par (t,x) , $L_t(x)$ es una variable $\mathcal{F}_t$-medible. Se dirá que L es un **tiempo local para el movimiento Browniano** si existe un $\Omega^* \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}^z(\Omega^*) = 1$ para todo $z \in \mathbb{R}$ y tal que:*

(i) $\forall\omega \in \Omega^* \quad (t,x) \mapsto L_t(x,\omega)$ *es continuo.*

(ii) $\forall\omega \in \Omega^*,\ 0 \leq t < \infty,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\Gamma_t(B,\omega) = \int_B L_t(x,\omega)dx \tag{1.20}$$

La existencia del tiempo local fue probada por Trotter en 1958 usando una versión del criterio de continuidad de Kolmogorov. El tiempo local no necesariamente es único , pero dos versiones de él son iguales para todo (t,x) con probabilidad 1, para toda medida $\mathbb{P}^z$. Para efectos prácticos, se hablará de un único tiempo local.

El tiempo local nos permite hablar del tiempo que pasa el movimiento Browniano en un punto x. En efecto, de la definición es fácil ver que para todo $z \in \mathbb{R}$, de forma $\mathbb{P}^z$-c.s $L_t(x) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon}\lambda\left(\{0 \leq s \leq t \mid |W_s - x| \leq \varepsilon\}\right)$. Además, (1.20) puede extenderse de la siguiente forma.

Proposición 1.24 *Existe un $\Omega^* \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}^z(\Omega^*) = 1$ para todo $z \in \mathbb{R}$ y tal que:*

$$\int_0^t f(W_t(\omega))ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)L_t(x,\omega)dx \tag{1.21}$$

$\forall f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{B}(\mathbb{R})),\ 0 \leq t < \infty,\ \omega \in \Omega^*$.

La siguiente fórmula permite dar una representación de $L_t(a)$ en términos de W. En lo que sigue considere un $a \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.25 (Fórmula de Tanaka) *Para $a \in \mathbb{R}$ considere el proceso $L(a) = \{L_t(a), \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ continuo y a valores no negativos. Para este proceso se cumple que para todo $z \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}^z$-c.s $\forall 0 \leq t < \infty$:*

(i) $L_t(a) = \frac{1}{2}\left((W_t - a)^+ - (z-a)^+ - \int_0^t \mathbb{1}_{(a,\infty)}(W_s)dW_s\right)$

(ii) $L_t(a) = \frac{1}{2}\left((W_t - a)^- - (z-a)^- + \int_0^t \mathbb{1}_{(-\infty,a]}(W_s)dW_s\right)$

(iii) $L_t(a) = |W_t - a| - |z-a| - \int_0^t sgn(W_s - a)dW_s$

La fórmula anterior permite concluir que $\mathbb{E}^z[L_t(a)] < \infty$ para todo $z \in \mathbb{R}$. A continuación enunciamos otras propiedades.

Proposición 1.26 *El proceso $L(a) = \{L_t(a), \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ cumple para todo $z \in \mathbb{R}$:*

(i) $L_0(a) = 0 \quad \mathbb{P}^z - c.s.$

(ii) $t \mapsto L_t(a)$ *es creciente* $\mathbb{P}^z - c.s.$

(iii) Se tiene que:

$$\int_0^\infty \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\{a\}}(W_t)dL_t(a) = 0 \quad \mathbb{P}^z - c.s. \tag{1.22}$$

(iv) $\mathbb{P}^0[\forall t > 0 \; L_t(0) > 0] = 1.$

El tiempo local resulta fundamental para estudiar variables de la forma:

$$A_t = \int_0^t f(W_s)ds \tag{1.23}$$

Lema 1.27 *Sea $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $x \in \mathbb{R}$ y T un tiempo aleatorio tal que:*

$$\mathbb{P}^0[0 < T < \infty] = 1, \quad \mathbb{P}^0[\int_0^T f(x + W_s)ds < \infty] > 0$$

Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+y)dy < \infty$.

Lo anterior señala que para una función f que no es integrable entorno a x, el movimiento Browniano hará a (1.23) igual a ∞ c.s. Usando este hecho se puede demostrar.

Teorema 1.28 (Ley 0-1 de Engelbert-Schimdt) *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$ una función Borel medible. Son equivalentes:*

(i) $\mathbb{P}^0[\int_0^t f(W_s)ds < \infty; \quad \forall 0 \leq t < \infty] > 0$

(ii) $\mathbb{P}^0[\int_0^t f(W_s)ds < \infty; \quad \forall 0 \leq t < \infty] = 1$

(iii) $\mathbb{P}^x[\int_0^t f(W_s)ds < \infty; \quad \forall 0 \leq t < \infty] = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(iv) f es localmente integrable.

La recurrencia del movimiento Browniano sugiere el siguiente resultado.

Proposición 1.29 *Sea $B = \{B_t, \mathcal{F}_t; 0 \le t < \infty\}$ un Movimiento Browniano en una dimensión de ley inicial μ, definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Sea $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tal que $\lambda(\{y \in \mathbb{R} \mid f(y) > 0\}) > 0$. Entonces:*

$$\int_0^\infty f(B_s)ds = \infty \quad \mathbb{P}- \ c.s. \tag{1.24}$$

1.2.3. Tiempo Local para Semimartingalas y Regla de Itô General

El concepto de tiempo local se puede extender a semi-martingalas X. Esto permitirá lidiar de mejor forma con expresiones del estilo:

$$\int_0^t f(X_s)d\langle X\rangle_s$$

Considere un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con una filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ que cumple las condiciones usuales. Sea $X = \{X_t = X_0 + M_t + V_t, \mathcal{F}_t; 0 \le t < \infty\}$ una semimartingala continua donde $M = \{M_t, \mathcal{F}_t; 0 \le t < \infty\} \in \mathcal{M}^{c,loc}$ y $V = \{V_t, \mathcal{F}_t; 0 \le t < \infty\}$ es un proceso continuo, a variación acotada y adaptado tal que $V_0 = 0$ c.s.

Definición 1.30 *Se dirá que:*

$$\Lambda = \{\Lambda_t(a, \omega) \mid t \in [0, \infty),\ a \in \mathbb{R},\ \omega \in \Omega\} \tag{1.25}$$

*es un **tiempo local para** X si:*

(i) $(t, a, \omega) \mapsto \Lambda_t(a, \omega)$ *es medible y* $\omega \mapsto \Lambda_t(a, \omega)$ *es* $\mathcal{F}_t$*-medible. Además,* $\Lambda_t(a, \omega) \ge 0$ *para todo* a, t, ω.

(ii) $\forall a \in \mathbb{R}$ *fijo, se tiene* $\mathbb{P}$*-c.s. que* $t \mapsto \Lambda_t(a, \omega)$ *es continuo y creciente, con* $\Lambda_0(a, \omega) = 0$ *y*

$$\int_0^\infty \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\{a\}}(X_s(\omega))d\Lambda_t(a, \omega) = 0 \tag{1.26}$$

(iii) Para todo $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ *Borel-medible se tiene que:*

$$\int_0^t f(X_s(\omega))d\langle M\rangle_s(\omega) = \int_{-\infty}^\infty f(a)\Lambda_t(a, \omega)da \tag{1.27}$$

Para todo $0 \le t < \infty$ *y para todo* ω $\mathbb{P}$*-c.s.*

(iv) Para todo ω, $\mathbb{P}$*-c.s. los siguientes límites existen para todo* $(t, a) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$

$$\lim_{\substack{\tau\to t \\ b\searrow a}} \Lambda_\tau(b, \omega) = \Lambda_t(a, \omega), \qquad \lim_{\substack{\tau\to t \\ b\nearrow a}} \Lambda_\tau(b, \omega) = \Lambda_t(a^-, \omega)$$

Hay continuidad en t para el tiempo local. En la coordenada espacial, sólo tenemos la propiedad cadlag. La existencia del tiempo local en este caso resulta aún más difícil.

Teorema 1.31 *Sea X una semimartingala. Entonces, su tiempo local existe.*

En el caso de una martingala local, ($V \equiv 0$) podemos obtener más propiedades.

Proposición 1.32 *Si $X_t = X_0 + M_t$, entonces $(t,a) \mapsto \Lambda_t(a,\omega)$ es continuo para todo $\omega - \mathbb{P}$ c.s. Además, se tiene la Fórmula de Tanaka-Meyer:*

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t sgn(X_s - a)dM_s + \Lambda_t(a) \tag{1.28}$$

Mediante (1.28) se puede demostrar que el tiempo local para un movimiento Browniano W coincide con la definición hecha en el capítulo anterior. Además, para una martingala local M_t podemos demostrar que

Proposición 1.33 *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función en $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Entonces*

$$\int_0^t f(X_s)d\langle M\rangle_s \tag{1.29}$$

Existe para todo $0 \leq t < \infty$, $\mathbb{P}$-c.s.

Más aún, podemos trabajar con la igualdad ctp de forma satisfactoria.

Proposición 1.34 *Sea $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones en $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tales que $f = g$ ctp. Entonces, $\mathbb{P}$-c.s $\forall 0 \leq t < \infty$ se tiene que:*

$$\int_0^t f(X_s)d\langle M\rangle_s = \int_0^t g(X_s)d\langle M\rangle_s \tag{1.30}$$

Sea f una función absolutamente continua. Se sabe que su derivada existe ctp f', y esta es integrable en compactos. Esto permite definir: $\int_0^t f'(X_s)d\langle M\rangle_s$. Este es simplemente el primer paso para una generalización de la Fórmula de Itô.

Teorema 1.35 (Fórmula de Itô General) *Sea $X = X_0 + M_t + V_t$ una semimartingala definida en el contexto anterior. Sea además, $f \in C^1(\mathbb{R})$ con f' absolutamente continua. Entonces, se tiene $\mathbb{P}$-c.s. que:*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dM_s + \int_0^t f'(X_s)dV_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle M\rangle_s$$

Para todo $t \geq 0$.

1.2.4. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

En esta tesis, el objeto de estudio es lo que llamamos difusiones. De forma informal, diremos que una difusión es una solución a una **Ecuación Diferencial Estocástica**. Estas se ven como:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \tag{1.31}$$

Buscamos darle sentido a esta expresión. Para esto, considere r y d enteros positivos. Además:

$$\begin{aligned} b_i :& [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (t,x) \mapsto b_i(t,x) \end{aligned}$$

donde b_i es Borel medible $\forall i \in \{1..d\}$. Llamaremos **vector de drift** a $b(t,x) := (b_i(t,x))_{i=1}^d$. Además, considere $\forall i \in \{1..d\}$ y $\forall j \in \{1..r\}$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} :& [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (t,x) \mapsto \sigma_{ij}(t,x) \end{aligned}$$

Donde σ_{ij} son funciones Borel medibles. Llamaremos **matriz de dispersión** a $\sigma(t,x) = \{\sigma_{ij}(t,x)\}_{1\le i\le d, 1\le j\le r}$ matriz de $d \times r$. Los términos b y σ se llamarán **coeficientes** de la ecuación (1.31). En este contexto, definimos la **matriz de difusión** de la ecuación (1.31) como:

$$a(t,x) = \sigma(t,x)\sigma^T(t,x)$$

donde $\sigma^T(t,x)$ es la matriz traspuesta $\sigma(t,x)$. Note que $a(t,x)$ es una matriz de $d \times d$ simétrica y semidefinida positiva para todo (t,x).

A continuación construiremos la noción de **solución fuerte** para (1.31). Considere $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad completo y $W = \{W_t, \mathcal{F}_t^W; 0 \le t < \infty\}$ un movimiento Browniano r-dimensional que parte en el origen en él. Además, asumimos que existe un vector aleatorio ξ a valores en $\mathbb{R}^d$ tal que: ξ es independiente de $\mathcal{F}_\infty^W$ y $\mathbb{P}[\xi \in \Gamma] = \mu(\Gamma)$ $\forall \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, donde μ es una medida de probabilidad dada en $\mathbb{R}^d$.

Consideramos las tribus: $\mathcal{G}_t := \sigma(\xi) \vee \mathcal{F}_t^W = \sigma(\xi, W_s; 0 \le s \le t)$. Es fácil ver que $\{\mathcal{G}_t\}_{t\ge 0}$ es una filtración en $\mathcal{F}$. Además, se puede probar que $\mathcal{G}_\infty = \sigma(\xi) \vee \mathcal{F}_\infty^W$.Considere la colección: $\mathcal{N} := \{N \subseteq \Omega \mid \exists G \in \mathcal{G}_\infty \ : N \subseteq G \text{ y } \mathbb{P}(G) = 0\}$ con la *filtración aumentada*: $\mathcal{F}_t := \sigma(\mathcal{G}_t \cup \mathcal{N}) \quad 0 \le t < \infty$ con $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\bigcup_{t\ge 0} \mathcal{F}_t)$. Entonces, de la completitud se tiene que $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$ es una filtración en $\mathcal{F}$. Más aún, se puede demostrar que $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$ cumple las condiciones usuales y que ξ es $\mathcal{F}_0$-medible. Por último, se obtiene que $\{W_t, \mathcal{F}_t; 0 \le t < \infty\}$ es un movimiento Browniano r-dimensional.

Note que la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$ es simplemente aumentar la filtración natural $\mathcal{F}_t^W$, incluyendo a ξ y luego completando. Por tanto, ser adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$ se puede pensar como ser función del movimiento Browniano W.

Definición 1.36 *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$ *el contexto descrito anteriormente con movimiento Browniano* $W := \{W_t, \mathcal{F}_t; 0 \le t < \infty\}$ *y condición inicial* ξ. *Una* ***solución fuerte*** *de la ecuación*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \tag{1.32}$$

es un proceso $X = \{X_t, \mathcal{F}_t; 0 \le t < \infty\}$ *tal que:*

(i) X *es adaptado y posee trayectorias continuas.*

(ii) $\mathbb{P}[X_0 = \xi] = 1$

(iii) $\forall 1 \le i \le d \quad \forall 1 \le j \le r \quad \forall 0 \le t < \infty$*:*

$$\mathbb{P}[\int_0^t |b_i(s, X_s)| + \sigma_{ij}^2(s, X_s)ds < \infty] = 1$$

(iv) $\mathbb{P}$ *c.s. y* $\forall 1 \leq i \leq d \quad \forall 0 \leq t < \infty$.

$$X_t^{(i)} = X_0^{(i)} + \int_0^t b_i(s, X_s)ds + \sum_{j=1}^{r} \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s)dW_s^{(j)} \tag{1.33}$$

La clave de esta defininción es la condición (i). Esta nos dice, que el proceso X_t es adaptado a $\mathcal{F}_t$. Por tanto, se puede ver a X como un *output* de W y ξ. El concepto de unicidad para estas ecuaciones es el siguiente.

Definición 1.37 *Diremos que la ecuación* (1.31) *posee* ***unicidad fuerte*** *si para todo contexto* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}, W, \xi)$ *y para todo par de soluciones fuertes* X *y* $\tilde{X}$ *allí se tiene que:*

$$\mathbb{P}[X_t = \tilde{X}_t; 0 \leq t < \infty] = 1 \tag{1.34}$$

Es decir, si existe unicidad fuerte, entonces dos soluciones serán indistinguibles. Ahora, introducimos una noción de solución más débil. De hecho, esta será la noción de solución que usaremos a lo largo de este texto.

Definición 1.38 *Una solución débil de* (1.31) *es una tripleta:*

$$(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\} \tag{1.35}$$

donde:

(i) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *es un espacio de probabilidad y* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *es una filtración en* $\mathcal{F}$ *que satisface las condiciones usuales.*

(ii) $X = \{X_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ *es un proceso adaptado a valores en* $\mathbb{R}^d$ *y a trayectorias continuas.* $W = \{W_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ *es un movimiento Browniano* r*-dimensional.*

(iii) $\forall 1 \leq i \leq d \quad \forall 1 \leq j \leq r \quad \forall 0 \leq t < \infty$*:*

$$\mathbb{P}[\int_0^t |b_i(s, X_s)| + \sigma_{ij}^2(s, X_s)ds < \infty] = 1 \tag{1.36}$$

(iv) $\mathbb{P}$ *c.s. y* $\forall 1 \leq i \leq d \quad \forall 0 \leq t < \infty$*:*

$$X_t^{(i)} = X_0^{(i)} + \int_0^t b_i(s, X_s)ds + \sum_{j=1}^{r} \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s)dW_s^{(j)} \tag{1.37}$$

Para una solución débil, definimos la **distribución inicial** de la solución como la medida de probabilidad μ en $\mathbb{R}^d$ dada por $\mu(\Gamma) = \mathbb{P}(X_0 \in \Gamma)$ para todo $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Definición 1.39 *Diremos que existe* ***Unicidad Trayectorial*** *para la ecuación* (1.31) *si para todo par de soluciones débiles:*

$$(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\} \text{ y } (\tilde{X}, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\tilde{\mathcal{F}}_t\} \tag{1.38}$$

Con movimiento Browniano W *común y espacio* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *común, tales que* $\mathbb{P}[X_0 = \tilde{X}_0] = 1$ *se tiene que* $\mathbb{P}[X_t = \tilde{X}_t \ ; \ \forall 0 \leq t < \infty] = 1$.

Al momento de probar la unicidad trayectorial se puede suponer que $\{\mathcal{F}_t\} = \{\tilde{\mathcal{F}}_t\}$. Esto pues, se puede considerar la filtración $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \cup \tilde{\mathcal{F}}_t$ y completarla adecuadamente. Se debe probar que W es un movimiento Browniano bajo esta filtración.

El siguiente teorema nos da condiciones para asegurar unicidad trayectorial en una dimensión.

Proposición 1.40 (Yamada & Watanabe) *Considere la ecuación* (1.31) *con* $d = r = 1$ *donde los coeficientes satisfacen:*

$$|b(t,x) - b(t,y)| \leq K|x-y|, \ |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq h(|x-y|)$$

Para todo $0 \leq t < \infty$ *y para todo* $x, y \in \mathbb{R}$ *donde* K *es una constante positiva y* $h : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ *es una función estrictamente creciente con* $h(0) = 0$ *y tal que:*

$$\int_0^{\varepsilon} h^{-2}(u)du = \infty \quad \forall \varepsilon > 0$$

Entonces hay unicidad trayectorial para (1.31).

La siguiente noción de unicidad resultará clave también.

Definición 1.41 *Diremos que existe* ***Unicidad en Ley*** *para la ecuación* (1.31) *si para todo par de soluciones débiles:*

$$(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\} \ y \ (\tilde{X}, \tilde{W}), (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}), \{\tilde{\mathcal{F}}_t\} \tag{1.39}$$

tales que $\mathbb{P}[X_0 \in \Gamma] = \tilde{\mathbb{P}}[\tilde{X}_0 \in \Gamma]$ *para todo* $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, *se tiene que* X *y* $\tilde{X}$ *poseen la misma ley.*

Enunciemos el teorema que relaciona ambos conceptos:

Teorema 1.42 (Yamada & Watanabe) *En la ecuación* (1.31), *la Unicidad Trayectorial implica la Unicidad en Ley. Además, si la ecuación* (1.31) *posee existencia débil y unicidad trayectorial, entonces posee existencia fuerte.*

De manera informal, se puede decir que las soluciones a ecuaciones diferenciales estocásticas son procesos de Markov. Para una precisión sobre esta afirmación vea por ejemplo Karatzas & Shreve [11], capítulo 5.4.

1.2.5. Soluciones hasta Tiempo de Explosión

A continuación definimos el concepto de solución débil en el intervalo. Este será un proceso X a valores en un intervalo cerrado, donde se considera que X *explota* al llegar a la frontera.

Considere un intervalo abierto $I = (l, r) \subseteq \mathbb{R}$ con $-\infty \leq l < r \leq \infty$, con funciones $b, \sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}$ Borel medibles. Consideramos la ecuación:

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \tag{1.40}$$

Definición 1.43 *Una solución débil en el intervalo $I = (l, r)$ de la ecuación* (1.40) *es una tripleta $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$ donde:*

(i) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *es un espacio de probabilidad y $\{\mathcal{F}_t\}$ es una filtración allí, que satisface las condiciones usuales.*

(ii) $X = \{X_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ *es un proceso a valores en $[l, r]$, adaptado y continuo (en la topología de $[l, r]$) tal que $\mathbb{P}(X_0 \in I) = 1$. $W = \{W_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ es un movimiento Browniano estándar uno-dimensional.*

Sea $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ una secuencia estrictamente decreciente tal que $\lim_{n\to\infty} l_n = l$ y $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ una secuencia estrictamente creciente tal que $\lim_{n\to\infty} r_n = r$ y $l < l_n < r_n < r$ para todo $n \geq 1$. Se define para $n \geq 1$, entero:

$$S_n := \inf\{t \geq 0 \mid X_t \notin (l_n, r_n)\} \tag{1.41}$$

(iii) Se tiene para todo $n \geq 1$ y para todo $t \geq 0$:

$$\mathbb{P}[\int_0^t (|b(X_s)| + \sigma^2(X_s))\mathbb{1}_{\{s \leq S_n\}} ds < \infty] = 1 \tag{1.42}$$

(iv) Se tiene $\forall n \geq 1$:

$$\mathbb{P}[X_{t\wedge S_n} = X_0 + \int_0^t b(X_s)\mathbb{1}_{\{s\leq S_n\}} ds + \int_0^t \sigma(X_s)\mathbb{1}_{\{s\leq S_n\}} dW_s \quad \forall 0 \leq t < \infty] = 1 \tag{1.43}$$

Considere además,

$$S := \lim_{n\to\infty} S_n$$

(v) Se tiene $\mathbb{P}$-c.s. en $\{S < \infty\}$ que:

$$X_t = X_S \qquad \forall t \geq S$$

No es difícil ver que la definición anterior funciona independiente de las secuencia $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elegidas. Además, se puede probar que $S = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \notin I\}$. Por esto, hablamos de S como el **tiempo de explosión** para el proceso X. En el caso en que $I = \mathbb{R}$ se tiene que este proceso realmente explota como una ecuación diferencial.

Es de bastante utilidad considerar que X^{S_n} es una semimartingala y está dada por:

$$X_t^{S_n} = X_0 + \int_0^t b(X_s^{S_n})\mathbb{1}_{\{s\leq S_n\}} ds + \int_0^t \sigma(X_s^{S_n})\mathbb{1}_{\{s\leq S_n\}} dW_s \tag{1.44}$$

para todo $t \geq 0$, $\mathbb{P}$-c.s. Además, se puede probar que X es una solución en el sentido tradicional hasta el tiempo de explosión, es decir: $\mathbb{P}$-c.s.

$$\forall 0 \leq t < S \quad X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s$$

1.3. Distribuciones Cuasi-Estacionarias

En esta sección se desarrollará el concepto de distribución cuasi-estacionaria. En primera instancia trataremos el caso general, para pasar rápidamente al caso de interés: difusiones en una dimensión. Para esto, seguimos a Collet, Martínez & San Martín [6].

1.3.1. El caso general

Sea E un espacio polaco localmente compacto con su tribu boreliana $\mathcal{B}(E)$. Considere un proceso de Markov Estándar (1.15) $Y = (\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, Y_t, \theta_t, \mathbb{P}_x)$ a valores en E. Considere un conjunto $\partial E \in \mathcal{B}(E)$ de **estados prohibidos**, el cual se asume $\phi \neq \partial E \neq E$ y cerrado en E. Denotamos $E^a := E \setminus \partial E$ y lo llamamos conjunto de **estados permitidos**. Se define además:

$$T := \text{ínf}\{t \geq 0 \mid Y_t \in \partial E\} \tag{1.45}$$

T será llamado **tiempo de extinción** y representa el momento en que Y llega a un *estado absorbente*. Supondremos que el proceso *muere* al llegar a ∂E. En otras palabras, $Y_t = Y_T \quad \forall t \geq T$ de forma $\mathbb{P}_x$-c.s. para todo $x \in E$. Por último, suponemos que el proceso se extingue en tiempo finito.

$$\forall x \in E^a \quad \mathbb{P}_x(T < \infty) = 1 \tag{1.46}$$

Denote por $\mathcal{P}(E^a)$ al espacio de medidas de probabilidad ρ en E^a. Como es usual, para $\rho \in \mathcal{P}(E^a)$ se define la medida $\mathbb{P}_\rho := \int_{E^a} \mathbb{P}_x \rho(dx)$. Es fácil ver que bajo (1.46) no pueden existir distribuciones estacionarias $\rho \in \mathcal{P}(E^a)$. Por esto, se introduce la noción de distribución *cuasi-estacionaria*.

Definición 1.44 *La medida $\nu \in \mathcal{P}(E^a)$ se llamará **distribución cuasi-estacionaria** (o **q.s.d** por sus siglas en inglés) para el proceso Y extinguido en ∂E si:*

$$\mathbb{P}_\nu(Y_t \in B \mid T > t) = \nu(B) \qquad \forall B \in \mathcal{B}(E^a),\ t \geq 0 \tag{1.47}$$

*Por otro lado, ν se llamará **límite de Yaglom** para el proceso Y extinguido en ∂E si:*

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{P}_x(Y_t \in B \mid T > t) = \nu(B) \qquad \forall B \in \mathcal{B}(E^a),\ x \in E \tag{1.48}$$

Dado que ∂E es cerrado, (1.47) es equivalente a que $\mathbb{P}_\nu(Y_t \in B) = \nu(B)\mathbb{P}_\nu(T > t)$ para todo $B \in \mathcal{B}(E^a)$ y $t \geq 0$. La noción de límite de Yaglom recoje la idea de como se comporta el proceso *condicionado a no morir*. Esto es interesante, pues no morir es un evento de medida nula.

A continuación se enunciarán algunas propiedades elementales sobre distribuciones cuasi-estacionarias. Estas se pueden encontrar en [6], capítulo 2.

Teorema 1.45 *Sea ν una q.s.d. Entonces existe $\theta(\nu) \geq 0$ tal que:*

$$\mathbb{P}_\nu(T > t) = e^{-\theta(\nu)t} \qquad \forall t \geq 0 \tag{1.49}$$

Es decir, comenzando bajo ν, T está distribuido exponencialmente con parámetro $\theta(\nu)$.

Si ν es cuasi-estacionaria, entonces $\theta(\nu) := -\frac{1}{t} \log \mathbb{P}_\nu(T > t),\ \forall t > 0$. Por esto, $\theta(\nu)$ recibirá el nombre de **tasa exponencial de supervivencia**. Además, esta exponencial no es degenerada, es decir, $\theta(\nu) \in (0, \infty)$. Juntando todo, se puede probar que $\nu \in \mathcal{P}(E^a)$ es una q.s.d. sí y sólo si:

$$\exists \theta \in (0, \infty) \qquad \mathbb{P}_\nu(Y_t \in B, T > t) = \nu(B)e^{-\theta t} \tag{1.50}$$

En la búsqueda de distribuciones cuasi-estacionarias resulta clave estudiar el siguiente operador:

$$P_t f(x) = \mathbb{E}_x[f(Y_t)\mathbb{1}_{t<T}] \tag{1.51}$$

Donde $f \in \mathcal{M}_b(E^a)$ o $f \in \mathcal{M}_+(E^a)$ y $t \geq 0,\ x \in E^a$. Usando la propiedad de Markov, se puede probar que $(P_t)_{t\geq 0}$ es un semigrupo submarkoviano (1.2) en $(E^a, \mathcal{B}(E^a))$. Note además que $P_t(x, E^a) = P_t\mathbb{1}(x) = \mathbb{P}_x(T > t)$. Así, de (1.46) se desprende que esta función de transición *perderá masa* para un $t > 0$ suficientemente grande.

A continuación, enunciamos una caracterización para distribuciones cuasi-estacionarias en base al semigrupo P_t. Esto guiará buena parte del trabajo en el capítulo 3.

Proposición 1.46 $\nu \in \mathcal{P}(E^a)$ *es una distribución cuasi-estacionaria si y sólo si:*

$$\exists \theta > 0 \qquad \int P_t f(x)\nu(dx) = e^{-\theta t}\int f(x)\nu(dx) \tag{1.52}$$

$\forall f \in \mathcal{M}_b(E^a)$, $\forall t \geq 0$. *Además,* θ *corresponde a la tasa exponencial de supervivencia.*

La demostración de este hecho proviene de (1.50) y de la linealidad en f de (1.52).

1.3.2. Difusiones Regulares en $[0, b]$

En esta sección se estudiarán difusiones en el intervalo $[0, b]$ donde $\{0, b\}$ constituye el estado absorbente. Considere $\alpha : [0, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^1[0, b]$, es decir α es $C^1(0, b)$ y posee derivada por la derecha en 0 y por izquierda en b. Además, estas derivadas laterales extienden continuamente a α'. Para $x \in (0, b)$, considere la ecuación diferencial:

$$dX_t = -\alpha(X_t)dt + dB_t \tag{1.53}$$

Con condición inicial $X_0 = x$. Para todo $x \in (0, b)$ existe una solución fuerte hasta tiempo de explosión de (1.53). Además, la solución es única en el sentido trayectorial. Recuerde que las soluciones en el intervalo se extinguen en la frontera.

Pasando al espacio canónico, podemos construir un espacio filtrado con medidas de probabilidad y operadores de shift $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, \mathbb{P}_x)$ y un proceso adaptado $B = \{B_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ tal que B es un movimiento Browniano que bajo $\mathbb{P}_x$, para todo $x \in (0, b)$. Además, $\mathbb{P}_x$ -c.s. se cumplirá

$$X_t = -\int_0^t \alpha(X_s)ds + B_t$$

Para todo $t < T := \inf\{t \geq 0 \mid X_t \notin (0, b)\}$. Se puede demostrar que $X = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, \mathbb{P}_x)$ es un proceso de Markov Estándar.

En [6] se demuestra que existe una única distribución cuasi-estacionaria ν para el proceso X. Además, ν resulta ser absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue. A continuación, expondremos parte de la técnica que lleva a este resultado, la cual, guía en gran medida el trabajo original de esta tesis.

De la continuidad de α en el 0 podemos definir:

$$\gamma(x) = 2\int_0^x \alpha(z)dz, \qquad \Lambda(x) = \int_0^x e^{\gamma(z)}dz$$

Resulta que Λ es una *función de escala* (vea (2.72)) para la ecuación (1.53). Así, $\Lambda \in C^1[0,b]$, $\Lambda(0) = 0$, es estrictamente creciente y además $(\frac{1}{2}\partial_{xx} - \alpha\partial_x)\Lambda = 0$. Además, $\Lambda'(x) = e^{\gamma(x)}$. Considere la medida:

$$d\mu(y) := e^{-\gamma(y)}dy \tag{1.54}$$

La cual es finita y consiste en la mitad de la medida de velocidad (vea la definición (2.107)). Por la regularidad de α se puede probar (mediante el teorema 2.36) que el proceso X casi-seguramente abandona el intervalo $(0,b)$. Considere el semigrupo:

$$P_t f(x) := \mathbb{E}_x[f(X_t)\mathbb{1}_{t<T}]$$

Usando el teorema de Girsanov, se puede demostrar que para todo $t > 0$, P_t posee un kernel con respecto a la medida μ, dado por:

$$r_t^{(b)}(x,y) = e^{\frac{1}{2}(\gamma(x)+\gamma(y))}\mathbb{E}_x(e^{-\int_0^t \wp(B_s)ds}\mathbb{1}_{t<T}|B_t = y)\frac{e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}$$

Donde $\wp = \frac{1}{2}(\alpha^2 - \alpha')$ y $x, y \in (0,b)$. Para cada $t > 0$ y $x \in (0,b)$ se tiene que la función $r_t^{(b)}$ está bien definida dy-c.s. Buscaremos una versión suave para el kernel r, la cual resultará simétrica. Definimos $C = C(b) = \max\{-\frac{1}{2}(\alpha^2(x) - \alpha'(x)) \ : \ 0 \leq x \leq b\}$ que por regularidad está bien definido. Obtenemos las siguientes cotas para r.

$$\begin{aligned} r_t^{(b)}(x,y) &\leq e^{\frac{1}{2}(\gamma(x)+\gamma(y)+Ct)}\frac{e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} \\ &\leq \kappa(t,b) = \max_{x,y\in[0,b]^2} e^{\frac{1}{2}(\gamma(x)+\gamma(y)+Ct)}\frac{e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} \end{aligned}$$

Por tanto, r_t^b tendrá una *cota gaussiana*, la cual permitirá extender este semigrupo. Para esto, considere el problema de valores propios:

$$\pi : \begin{cases} -\mathcal{A}u = \lambda u \\ u(0) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{1.55}$$

Donde $\mathcal{A}$ es el operador:

$$\mathcal{A}u = \frac{1}{2}\partial_{xx}u + \frac{1}{2}(\partial_x\alpha - \alpha^2)u \tag{1.56}$$

De la teoría expuesta en Coddington & Levinson [5], capítulo 7, se tiene que π es un problema autoadjunto de valores propios. Por ende, sus valores propios son reales. Además, las funciones propias $\{\theta_{n,b}\}_{n=1,..}$ forman una base ortonormal de $L^2[0,b]$. Estas funciones se pueden representar como $\theta_{n,b}(x) = r_{n,b}u(x,\lambda_{n,b})$. Donde $u(.,\lambda)$ es la solución de $-\mathcal{A}u = \lambda u$ con $u(0) = 0$ y $u'(0) = 1$. Es más, podemos establecer que el espectro es de la forma:

$$0 < \lambda_{1,b} < \lambda_{2,b} < ... < \lambda_{n,b} \longrightarrow \infty$$

Donde además, cada valor propio es simple. Se define la transformada:

$$g(\lambda) := \int_0^b f(t)u(t,\lambda)dt \tag{1.57}$$

Para $f \in L^2[0,b]$. Además, considere la la distribución discreta Γ_b en $\mathbb{R}$ dada por masas de tamaño $|r_{n,b}|^2$ en $\lambda_{n,b}$. El soporte de esta ley es $\{\lambda_{n,b} : n \geq 1\}$. De [5] obtenemos:

$$\int_0^b |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2 \Gamma_b(d\lambda) \tag{1.58}$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t,\lambda)g(\lambda)\Gamma_b(d\lambda) \tag{1.59}$$

Donde (1.59) es en L^2. Con estas herramientas, en [6] se genera una familia de resolventes de contracción, los cuales, mediante el teorema de Hille-Yosida (teorema 3.4.4 de Haraux & Cazanave [4]), generan un semigrupo de contracción fuertemente continuo en $L^2([0,b], d\mu)$ al que llamamos $(T_t^{(b)})_{t\geq 0}$. Resulta que:

Teorema 1.47 *$\forall t \geq 0, x \in [0,b]$ y $h \in L^2([0,b], d\mu)$ se tiene que:*

$$\mathbb{E}_x[h(X_t)\mathbb{1}_{t<T}] = T_t^{(b)} h(x) \tag{1.60}$$

Considere el generador de la difusión dado por $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_{xx} - \alpha\partial_x$. De la regularidad de los coeficientes, podemos considerar soluciones ψ_λ de clase $C^1[0,b]$ a $\mathcal{L}\psi_\lambda = -\lambda\psi_\lambda$ con condiciones $\psi_\lambda(0) = 0$ y $\psi'_\lambda(0) = 1$. Con mucho trabajo se demuestra el siguiente resultado.

Teorema 1.48 *Tenemos la representación $\forall t > 0$ y $dx \otimes dy c.s.$:*

$$r_t^{(b)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} |r_{n,b}|^2 e^{-\lambda_{n,b} t} \psi_{\lambda_{n,b}}(x)\psi_{\lambda_{n,b}}(y) \tag{1.61}$$

Donde la serie converge uniformemente en $[\varepsilon,\infty) \times [0,b]^2$ para todo $\varepsilon > 0$. Esta representación nos da una versión continua no negativa del kernel de transición $r^{(b)}$ en $(0,\infty) \times [0,b]^2$.

Desde ahora, usaremos la versión continua de $r^{(b)}$ dada por (1.61). Considere a continuación:

$$\underline{\lambda} := \lambda_{1,b}$$
$$\overline{\psi} = r_{1,b}\psi_{\lambda_{1,b}}$$

Esta función cumple $\mathcal{L}\overline{\psi} = -\underline{\lambda}\overline{\psi}$, $\overline{\psi}(0) = \overline{\psi}(b) = 0$, $\int_0^b \overline{\psi}^2(y)d\mu(y) = 1$ y $\overline{\psi}'(0) > 0$.

Teorema 1.49 *(Existencia de QSD) Uniformemente en $(x,y) \in [0,b]^2$:*

$$\lim_{t\to\infty} e^{\underline{\lambda} t} r_t^{(b)}(x,y) = \overline{\psi}(x)\overline{\psi}(y) \tag{1.62}$$

En particular $\overline{\psi}(x) > 0$ *para todo* $x \in (0,b)$. *Además, la medida* ν *en* $(0,b)$ *con densidad:*

$$\nu(dz) = \frac{\overline{\psi}(z)e^{-\gamma(z)}}{\int \overline{\psi}(y)e^{-\gamma(y)}dy}dz \tag{1.63}$$

es una distribución cuasi-estacionaria para el proceso $X_{t\wedge T}$. *Además, la tasa exponencial de supervivencia es igual a* $\underline{\lambda}$.

Para demostrar (1.62), resulta crucial la representación (1.61). Este hecho, resultará esencial para demostrar la unicidad.

Teorema 1.50 (Convergencia y unicidad) *En el contexto anterior:*

(i) Para todo $h \in L^2([0,b], d\mu)$ *y uniformemente en* x *se tiene*

$$\lim_{t\to\infty} e^{\underline{\lambda}t}\mathbb{E}_x(h(X_t), t < T) = \overline{\psi}(x) \int h(y)\overline{\psi}(y)d\mu(y) \tag{1.64}$$

(ii) $\forall h \in \mathcal{M}_b([0,b])$ *y para todo* $x \in (0,b)$ *se tiene:*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x(h(X_t) \mid t < T) = \int h(y)d\nu(y) \tag{1.65}$$

Es decir, ν *es el límite de Yaglom para* $X_{t\wedge T}$. *Además, el límite anterior es uniforme en* x *en compactos de* $(0,b)$.

(iii) Sea ξ *una medida de probabilidad con soporte en* $(0,b)$. *Entonces, para todo* $h \in L^2([0,b], d\mu)$:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_\xi(h(X_t) \mid t < T) = \int h(y)d\nu(y) \tag{1.66}$$

En particular ν *es la única q.s.d para* $X_{t\wedge T}$.

Capítulo 2

Difusiones en una Dimensión

En el presente capítulo se estudiarán algunos aspectos sobre difusiones en una dimensión. Todo lo que sigue existe en la literatura y se encuentra recopilado en Karatzas & Shreve [11], capítulo 5.5. Se usará la noción de solución y explosión expuestas en el Capítulo 1.

Este capítulo provee el primer paso para entender el fenómeno de distribuciones cuasi-estacionarias en difusiones de $(0,1]$ con drift singular en 0. Más adelante, veremos que el proceso de Bessel en el intervalo $(0,1]$ es una difusión de esta clase (teorema 3.1). Algunas ideas de este capítulo resultarán clave para nuestro resultado principal, entre las que destacan la *función de escala*, la *medida de velocidad* y la *función de Green*.

Comenzamos por introducir un cambio de tiempo adecuado para el movimiento Browniano, el cual dará condiciones para la existencia y unicidad de soluciones a ecuaciones con coeficiente de drift $b = 0$. Luego, se introduce el concepto de *función de escala* y *medida de velocidad*. Estos elementos darán condiciones de existencia y unicidad para ecuaciones en el caso general. Por último, trabajamos en condiciones de explosión para estas difusiones.

2.1. El Método del Cambio de Tiempo

En esta sección estudiaremos la ecuación:

$$dX_t = \sigma(X_t)dW_t \tag{2.1}$$

Donde $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función medible. Denotamos por $Z(\sigma) := \{x \in \mathbb{R} \mid \sigma(x) = 0\}$. Si $x \in Z(\sigma)$, entonces existe una solución débil que consiste en: $Y_t = x \quad \forall t \geq 0$. De forma recíproca, si $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$ es una solución débil de (2.1) tal que $X_t = x \ \forall t \geq 0 \ \mathbb{P} - c.s.$, entonces $x \in Z(\sigma)$. A continuación demostraremos que las soluciones de (2.1) nunca explotan. Comenzamos considerando el siguiente lema:

Lema 2.1 *Considere* $W = \{W_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ *un Movimiento Browniano estándar y* $X = \{X_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ *un proceso progresivamente medible, definido en un espacio* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

donde $\{\mathcal{F}_t\}$ cumple las condiciones usuales. Considere un $\{\mathcal{F}_t\}$-tiempo de parada T, finito c.s. tal que $\mathbb{P}$-c.s.

$$\int_0^t X_s^2 ds < \infty \quad \forall t < T \tag{2.2}$$

Entonces, se tiene c.s en $\{\int_0^T X_s^2 ds = \infty\}$ que

$$\limsup_{t \nearrow T} \int_0^t X_s dW_s = \infty, \quad \liminf_{t \nearrow T} \int_0^t X_s dW_s = -\infty$$

La intuición de este lema proviene de la representación $M_t = B_{\langle M \rangle_t}$ del teorema 1.21. La demostración en sí resulta ser altamente técnica y por lo tanto se omite.

Teorema 2.2 *Sea $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$ una solución débil hasta tiempo de explosión de* (2.1). *Entonces* $\mathbb{P}[S = \infty] = 1$.

Demostración. Considere para $t \geq 0$, $E_t := \{\int_0^{t \wedge S} \sigma^2(X_s) ds = \infty\}$. Por hipótesis se sabe que $\mathbb{P}$-c.s. $\int_0^{t \wedge S_n} \sigma^2(X_s) ds < \infty$. Así, de forma $\mathbb{P}$-c.s. en E_t, $t \wedge S_n < t \wedge S$ y del lema 2.1 se deduce que:

$$\limsup_{n \to \infty} X_{t \wedge S_n} = X_0 + \limsup_{n \to \infty} \int_0^{t \wedge S_n} \sigma(X_s) dW_s = \infty \quad \mathbb{P} - \text{c.s. en } E_t$$

$$\liminf_{n \to \infty} X_{t \wedge S_n} = X_0 + \liminf_{n \to \infty} \int_0^{t \wedge S_n} \sigma(X_s) dW_s = -\infty \quad \mathbb{P} - \text{c.s. en } E_t$$

Si $\mathbb{P}(E_t) > 0$, entonces habría un conjunto de medida positiva donde no hay continuidad para $X_{t \wedge S_n}$ cuando $n \to \infty$. Esto es una contradicción con la definición, por lo que $\mathbb{P}(E_t) = 0$. De esta forma, para todo $t \geq 0$, $\int_0^{t \wedge S} \sigma^2(X_s) ds < \infty \quad \mathbb{P} - c.s.$ y se puede hablar de $\int_0^{t \wedge S} \sigma(X_s) dW_s$. En particular, por la continuidad de la integral:

$$X_{t \wedge S} = X_0 + \int_0^{t \wedge S} \sigma(X_s) dW_s$$

Con lo que $|X_{t \wedge S}| < \infty$. de forma $\mathbb{P} - c.s.$. Notando que $\{S < \infty\} \subseteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{|X_{m \wedge S}| = \infty\}$ se concluye que $\mathbb{P}[S < \infty] = 0$. $\square$

Si X es una solución de (2.1) entonces $X_t - X_0$ es una martingala local y por 1.21 es un cambio de tiempo del movimiento Browniano. Esto lleva a pensar que se puede construir una solución a (2.1) directamente mediante un movimiento Browniano y un cambio de tiempo. Esto es lo que haremos a continuación.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad con un movimiento Browniano estándar unidimensional $B := \{B_t, \mathcal{F}_t^B; 0 \leq t < \infty\}$ y una variable aleatoria real ξ independiente de $\mathcal{F}_\infty^B$ y con ley μ. Considere una filtración $\{\mathcal{G}_t\}_{t \geq 0}$ en $\mathcal{F}$ que satisface las condiciones usuales y tal que $\{B_t, \mathcal{G}_t; 0 \leq t < \infty\}$ es un Movimiento Browniano y ξ es $\mathcal{G}_0$ medible. Defina el proceso:

$$\tilde{B} := \{\xi + B_t, \mathcal{G}_t; 0 \leq t < \infty\} \tag{2.3}$$

el cual resulta ser un movimiento Browniano con ley inicial μ. Considere:

$$T_s := \int_0^{s+} \frac{du}{\sigma^2(\xi + B_u)}, \qquad 0 \leq s < \infty \tag{2.4}$$

Con la convención de que $\frac{1}{\sigma^2(x)} = +\infty$ cuando $\sigma^2(x) = 0$, la integral $T_s(\omega)$ está bien definida en $\bar{\mathbb{R}}_+$ para todo $\omega \in \Omega$. Además $\{T_s, \mathcal{G}_s; 0 \leq s < \infty\}$ es un proceso adaptado y creciente a valores en $[0, \infty]$ con trayectorias continuas por la derecha en la topología de $[0, \infty]$.

Proposición 2.3 $T_\infty := \text{lím}_{s\to\infty} T_s = +\infty \quad \mathbb{P}$*-c.s.*

Demostración. Note que $T_\infty = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma^2(\xi+B_u)} du$. Como $\frac{1}{\sigma^2(x)} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y como $\tilde{B}$ es un movimiento Browniano, de 1.29 se concluye que $\mathbb{P}(T_\infty = \infty) = 1$. □

En este contexto, se define *la inversa* de T_s como:

$$A_t := \text{ínf}\{s \geq 0 \mid T_s > t\} \quad 0 \leq t < \infty \tag{2.5}$$

Más adelante veremos que en cierto sentido $A_t = T_t^{-1}$. Observe que A_t es el *hitting time* del abierto $(t, \infty]$ por parte del proceso $\{T_s, \mathcal{G}_s; 0 \leq s < \infty\}$, por lo que es un $\{\mathcal{G}_{s^+}\}$ tiempo de parada. De las condiciones usuales, se tiene que A_t es un $\{\mathcal{G}_s\}$ tiempo de parada. Como proceso, $(A_t)_{t\geq 0}$ es creciente, lo que permite definir en $\bar{\mathbb{R}}_+$:

$$A_\infty := \lim_{t\to\infty} A_t \tag{2.6}$$

A continuación enunciamos algunas propiedades básicas de A_t.

Proposición 2.4 *En el contexto anterior:*

(i) $A_0 = 0$

(ii) $A_t < \infty$ *para todo* $0 \leq t < \infty$, $\mathbb{P}$ *-c.s.*

(iii) A_t *es un* $\{\mathcal{G}_s\}$ *tiempo de parada, para todo* $0 \leq t < \infty$.

(iv) $A_\infty = \text{ínf}\{s \geq 0 \mid T_s = \infty\}$

(v) $T_{A_\infty} = \infty \quad \mathbb{P}$*-c.s.*

Demostración. Para (i) observe que $\frac{1}{\sigma^2(x)} > 0$, lo que implica que que $T_s(\omega) > 0$ para todo $s > 0$. Por tanto $A_0(\omega) \leq s$ para todo $s > 0$, lo que implica que $A_0(\omega) = 0$. Para (ii) observe que:

$$\{T_\infty = \infty\} \subseteq \bigcap_{t\geq 0} \{A_t < \infty\} \tag{2.7}$$

Del lema 2.3 se concluye. Para (iii), considere $t \geq 0$ fijo. Observe que $\{A_t < s\} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}_+} \{T_{s-q} > t\}$. Por esto $\{A_t < s\} \in \mathcal{G}_s$. De las condiciones usuales, se concluye que A_t es un $\{\mathcal{G}_s\}$ tiempo de parada.

Finalmente, para (iv), considere $\omega \in \{\text{ínf}\{s \geq 0 \mid T_s = \infty\} = \infty\}$. Entonces, se tiene que para todo $s \geq 0$ $T_s(\omega) < \infty$. Entonces, estamos en el caso en que el proceso es estrictamente creciente. Sea $M > 0$ arbitrario y $t = T_M(\omega)$. Entonces, para todo $s > M$ se tendrá que $T_s(\omega) > t$. Por lo tanto $A_t \geq M$ y de esta forma $A_\infty \geq M$ para todo $M > 0$. Por tanto $A_\infty(\omega) = \infty$. Ahora, considere $\omega \in \{\inf\{s \geq 0 \mid T_s = \infty\} < \infty\}$. Sea $s \geq 0$ tal que $T_s(\omega) = \infty > t$ para todo t. Por tanto $A_t \leq s$ para todo t lo que implica que $A_\infty \leq s \Rightarrow A_\infty \leq \inf\{s \geq 0 \mid T_s = \infty\}$.

Considere también que $A_t \leq A_\infty < A_\infty + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $t \geq 0$. Así, $\forall t \geq 0 \, \exists \delta > 0 \; T_{A_\infty + \varepsilon - \delta}(\omega) > t$. Así, $T_{A_\infty + \varepsilon} > t$ para todo t y por ende $T_{A_\infty + \varepsilon} = \infty$. Usando la continuidad por derecha de $T_{A_\infty} = \infty$. Esto implica en particular que $A_\infty \geq \inf\{s \geq 0 \mid T_s = \infty\}$ y se tiene la igualdad. El punto (v) se desprende de lo anterior y de la proposición 2.3. $\square$

Por esto, hablamos de A_∞ como el **tiempo de explosión** para el proceso T_s. A continuación estudiamos propiedades trayectoriales del proceso $(T_s)_{s \geq 0}$ y $(A_t)_{t \geq 0}$.

Proposición 2.5 *En el contexto anterior:*

(i) *La trayectorias $s \mapsto T_s$ son continuas y estrictamente crecientes en $[0, A_\infty)$.*

(ii) *El siguiente límite existe en $\bar{\mathbb{R}}_+$*

$$T_{A_\infty^-} := \lim_{s \nearrow A_\infty} T_s \tag{2.8}$$

Además, $s \mapsto T_s$ es una biyección de $[0, A_\infty)$ a $[0, T_{A_\infty^-})$.

(iii) *$\mathbb{P}$-c.s., las trayectorias $t \mapsto A_t$ son continuas y estrictamente crecientes en $[0, T_{A_\infty^-})$*

(iv) *$\forall t \geq T_{A_\infty^-} : \; A_t = A_\infty$.*

Demostración. Para $s < A_\infty$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $s < s + \varepsilon < A_\infty$ por lo que $T_s \leq T_{s+\varepsilon} < \infty$. Por tanto, $T_s = \int_0^s \frac{du}{\sigma^2(\xi + B_u)}$, de donde se concluye la continuidad y el crecimiento estricto. Esto demuestra (i). Para (ii), el crecimiento estricto entrega la existencia del límite, el hecho de que $s \mapsto T_s$ es inyectiva en $[0, A_\infty)$ y que $T_s < T_{A_\infty^-}$. De la continuidad se tiene la sobreyectividad.

Veamos (iii). De la proposición anterior, para $\omega \in \{T_\infty = \infty\}$ se tiene que $A_t(\omega) < \infty$ para todo $t \geq 0$. Sea $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $t_n \nearrow t$ y $t_n < t$. Como el proceso $(A_t)_{t \geq 0}$ es creciente, $\lim_{n \to \infty} A_{t_n} \leq A_t$. Por otro lado, considere para $\varepsilon > 0$, un $s(\varepsilon) \in (A_t - \varepsilon, A_t)$. Entonces, $T_{s(\varepsilon)} \leq t$. Del crecimiento estricto, podemos tomar $s(\varepsilon)$ tal que $T_{s(\varepsilon)} < t$. Así, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N \quad T_{s(\varepsilon)} < t_n < t$ y por tanto $s(\varepsilon) \leq A_{t_n}$. Así, $A_t - \varepsilon < s(\varepsilon) \leq \lim_{n \to \infty} A_{t_n}$. Llevando el ε a 0, obtenemos que $A_t \leq \lim_{n \to \infty} A_{t_n}$.

Suponga que $t \geq 0$ y sea $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que $t_n \searrow t$ y $t_n > t$. Del crecimiento, se dedue que $A_t \leq \lim_{n \to \infty} A_{t_n}$. Dada la finitud de los tiempos (A_t), para todo $\varepsilon > 0$ existe $s(\varepsilon) \in [A_t, A_t + \varepsilon)$ tal que $T_{s(\varepsilon)} > t$. Así, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $t < t_n < T_{s(\varepsilon)}$ para todo $n \geq N$. Así, $A_{t_n} \leq s(\varepsilon) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} A_{t_n} \leq s(\varepsilon)$. Llevando $\varepsilon \to 0$, se obtiene que $\lim_{n \to \infty} A_{t_n} \leq A_t$. Con esto se concluye la continuidad.

Para el crecimiento estricto, considere $t_1 < t_2 \in [0, T_{A_\infty^-})$. De lo anterior, existe $s_1 < s_2$ tal que $T_{s_1} = t_1 < T_{s_2} = t_2$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $s_1 < s_1 + \varepsilon < A_\infty(\omega)$ por estricto crecimiento $t_1 < T_{s_1 + \varepsilon}$. Así $A_{t_1} \leq s_1 + \varepsilon \Rightarrow A_{t_1} \leq s_1$. Por otro lado , si $A_{t_1} < s_1$ entonces existe un momento $A_{t_1} < r < s_1$ tal que $T_r > t_1$ lo cual no puede ser por crecimiento. Así, concluimos que $s_1 = A_{t_1}$. De forma análoga $s_2 = A_{t_2}$. Así, $A_{t_1} < A_{t_2}$. Con esto se obtiene (iii).

Por último, considere $t \geq T_{A_\infty^-}$, entonces $\forall s < A_\infty \quad T_s < t$ lo que implica que $A_t \geq s$. Como es para todo s. Para $s \to A_\infty$ se tiene que $A_t \geq A_\infty$. □

Note que $T_{A_\infty^-}$ puede ser finito como infinito. Esto depende de cuanto vale la integral T_s al momento de explotar. La variable $T_{A_\infty^-}$ se interpreta como el momento en que (A_t) toca A_∞. En efecto, con lo anterior se puede demostrar que:

$$T_{A_\infty^-} = \inf\{t \geq 0 \mid A_t = A_\infty\} \tag{2.9}$$

A continuación vemos que A_t y T_s se comportan como inversas.

Proposición 2.6 *Para todo $\omega \in \Omega$:*

(i) $T_{A_t} = t \quad \forall 0 \leq t < T_{A_\infty^-}$
(ii) $A_{T_s} = s \quad \forall 0 \leq s < A_\infty$

Demostración. Para (i) suponga que $T_{A_\infty^-}(\omega) > 0$ y por tanto $A_\infty(\omega) > 0$. Sea $0 \leq t < T_{A_\infty^-}(\omega)$. Entonces, existe $s \in [0, A_\infty(\omega))$ tal que $T_s = t$. En particular $A_t(\omega) < A_\infty(\omega) \leq \infty$. Si $t = 0$, entonces $T_{A_0} = T_0 = 0$. Si $t > 0$, entonces $A_t(\omega) > 0$. Dado que $s \mapsto T_s$ es continuo en $[0, A_\infty(\omega))$, y $0 < A_t(\omega) < \infty$, de las propiedades de un *hitting time* se tiene que $T_{A_t}(\omega) \in \partial[t, \infty) = \{t\}$. Para (ii), considere que $s \mapsto T_s(\omega)$ es una biyección. Tomando inversa por la derecha en (i), se concluye. □

Terminamos esta sección con algunos lemas que serán de utilidad en el futuro. Las demostraciones son similares a lo hecho anteriormente y por lo tanto se omiten.

Lema 2.7

(i) $T_s = \inf\{t \geq 0 \mid A_t > s\} \quad \forall 0 \leq s < \infty$
(ii) Defina las σ-álgebras $\mathcal{F}_t := \mathcal{G}_{A_t} \quad \forall t \geq 0$. Entonces $\{\mathcal{F}_t\}$ es una filtración en $\mathcal{F}$ que cumple las condiciones usuales.
(iii) T_s es un $\{\mathcal{G}_{A_t}\}_{t\geq 0}$ tiempo de parada $\forall s \geq 0$.
(iv) $\forall t, s \geq 0 \quad A_{t \wedge T_s} = A_t \wedge s$.

2.1.1. Los Teoremas de Engelbert y Schimdt : Existencia

A continuación se introduce un conjunto de gran importancia en lo que viene. Defina:

$$I(\sigma) := \{x \in \mathbb{R} \mid \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dy}{\sigma^2(x+y)} = \infty \quad \forall \varepsilon > 0\} \tag{2.10}$$

En otras palabras, $I(\sigma)$ es la colección de puntos donde $x \mapsto \frac{1}{\sigma^2(x)}$ no es localmente integrable. Se puede esperar que los ceros de σ correspondan a puntos de $I(\sigma)$. Esto no es siempre así, como lo muestra el siguiente hecho:

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \begin{cases} < \infty & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ = \infty & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases} \tag{2.11}$$

Analizando $\mathbb{R} \setminus I(\sigma)$, es directo ver que $I(\sigma)$ es un cerrado. Defina:

$$R := \text{ínf}\{s \geq 0 \mid \xi + B_s \in I(\sigma)\} \tag{2.12}$$

R es el *hitting time* del conjunto $I(\sigma)$ por parte de $\tilde{B}$. Así, R es un $\{\mathcal{G}_s\}$ tiempo de parada. Además, de la recurrencia del movimiento Browniano se desprende que $I(\sigma) \neq \phi \Rightarrow \mathbb{P}(R < \infty) = 1$.

El siguiente lema relaciona R con el proceso $(T_s)_{s \geq 0}$ definido en (2.4).

Lema 2.8 $R = A_{\infty}$ $\mathbb{P}$-*c.s. En particular:*

$$\int_0^{R^+} \frac{du}{\sigma^2(\xi + B_u)} = \infty \quad \mathbb{P}\text{-}c.s. \tag{2.13}$$

Es decir, el momento en que explota el proceso T es justamente cuando el proceso $\xi + B$ llega a $I(\sigma)$. Aunque esto parece intuitivo, su demostración requiere de algunos tecnicismos.

Demostración. Veamos primero que $A_{\infty} \leq R$ c.s. Si $I(\sigma) = \phi$ no hay nada que probar. Para $I(\sigma) \neq \phi \Rightarrow \mathbb{P}[R < \infty] = 1$. Además, para $s > 0$ se tiene de forma $\mathbb{P}$-c.s.

$$\int_0^{R+s} \frac{du}{\sigma^2(\xi + B_u)} \geq \int_R^{R+s} \frac{du}{\sigma^2(\xi + B_u)} = \int_0^s \frac{du}{\sigma^2(\xi + B_{R+u})} = \int_0^s \frac{du}{\sigma^2(\xi + B_R + W_u)} \tag{2.14}$$

Donde $W_u = B_{R+u} - B_R$ es un movimiento Browniano estándar. Inspirados por la ley 0-1 de Engelbert-Schmidt 1.28, pensamos que la última expresión de (2.14) es infinita. Concretamente, para $x \in I(\sigma)$:

$$\mathbb{P}[\int_0^s \frac{du}{\sigma^2(x + W_u)} = \infty] = \mathbb{P}W^{-1}[\{\omega : \int_0^s \frac{du}{\sigma^2(x + \omega(u))} = \infty] = \mathbb{P}^0[\int_0^s \frac{du}{\sigma^2(x + \omega(u))} = \infty]$$

Donde pasamos al espacio canónico con $\mathbb{P}^0$ la medida de Wiener. Si $\mathbb{P}^0[\int_0^s \frac{du}{\sigma^2(x+\omega(u))} = \infty] < 1$, entonces por 1.27 debe existir un $\varepsilon > 0$ tal que $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{du}{\sigma^2(x+y)} dy < \infty$ lo cual contradice el hecho que $x \in I(\sigma)$. Por tanto $\mathbb{P}[\int_0^s \frac{du}{\sigma^2(x+W_u)} = \infty] = 1$ para todo $x \in I(\sigma)$.

Ahora, razonamos guiados por la noción de probabilidades totales. Considere el proceso $Y_t := \xi + B_R$ para $t \geq 0$. Se tiene que $\mathcal{F}_{\infty}^Y \subseteq \mathcal{G}_R$. De la propiedad de Markov, obtenemos que Y es independiente de W. Defina:

$$\Phi(Y, W) := \begin{cases} 1 & \text{si } \int_0^s \frac{du}{\sigma^2(Y_u + W_u)} = \infty \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \tag{2.15}$$

De esta forma:

$$\mathbb{P}\left(\int_0^s \frac{du}{\sigma^2(\xi + B_R + W_u)} = \infty\right) = \mathbb{E}[\Phi(Y,W)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(Y,W)|Y]]$$
$$= \int_{C[0,\infty)} \mathbb{E}[\Phi(Y,W)|Y=y]\mu_Y(dy) = \int_{C[0,\infty)} \mathbb{E}[\Phi(y,W)]\mu_Y(dy) = \int_{\{y:y_0\in I(\sigma)\}} \mathbb{E}[\Phi(y,W)]\mu_Y(dy)$$
$$= \int_{\{y:y_0\in I(\sigma)\}} \mathbb{P}\left(\int_0^s \frac{du}{\sigma^2(y_0+W_u)} = \infty\right)\mu_Y(dy) = 1$$

Considere $s_n = \frac{1}{n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Entonces, combinando lo anterior con (2.14) se obtiene:

$$\mathbb{P}\text{-c.s. } \forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{R+s_n} \frac{du}{\sigma^2(\xi + B_u)} = \infty \tag{2.16}$$

En este conjunto se tiene que $\int_0^{R^+} \frac{du}{\sigma^2(\xi+B_u)} = \infty$ y por lo tanto $A_\infty \leq R$ de forma $\mathbb{P}$-c.s..

Para $R \leq A_\infty$, considere primero el caso $I(\sigma) = \phi$. Bajo este supuesto, la función $x \mapsto \frac{1}{\sigma^2(x)}$ es localmente integrable. De la la Ley 0-1 de Engelbert-Schmidt 1.28, se concluye que T_s es finito para todo $s \geq 0$, lo que implica que $A_\infty = \infty$.

En el caso $I(\sigma) \neq \phi$, defina:

$$\Gamma_n := \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, I(\sigma)) \leq \frac{1}{n}\} \quad n \geq 1 \tag{2.17}$$

Donde $d(x, I(\sigma)) := \inf_{y\in I(\sigma)} |x-y|$. Recuerde que $d(., I(\sigma))$ es una funcion continua, por lo que Γ_n es un cerrado. Además, $(\Gamma_n)_{n\geq1}$ es una familia decreciente tal que $I(\sigma) = \bigcap_{n\geq1}\Gamma_n$. En esto se usa el hecho que $I(\sigma)$ es cerrado. Definimos:

$$R_n := \inf\{s \geq 0 \mid \xi + B_s \in \Gamma_n\} \tag{2.18}$$

$(R_n)_{n\geq1}$ es una secuencia creciente de $\{\mathcal{G}_s\}$ tiempos de parada. Por tanto, su límite existe en $\overline{\mathbb{R}}_+$ y resulta que: $\lim_{n\to\infty} R_n = R$. Ahora, defina:

$$\sigma_n(x) := \begin{cases} \sigma(x) & d(x, I(\sigma)) \geq \frac{1}{n} \\ 1 & d(x, I(\sigma)) < \frac{1}{n} \end{cases} \tag{2.19}$$

No es difícil verificar que σ_n^{-2} es localmente integrable. De nuevo, del teorema 1.28 se concluye que $\mathbb{P}$-c.s.

$$\forall 0 \leq s < \infty \quad \int_0^s \frac{du}{\sigma_n^2(\xi + B_u)} < \infty \tag{2.20}$$

El conjunto donde esto pasa lo llamaremos Ω^*. Considere $\omega \in \Omega^*$, $s \geq 0$ y $n \geq 1$. Entonces se tiene que:

$$\int_0^{R_n(\omega)\wedge s} \frac{du}{\sigma^2(\xi(\omega) + B_u(\omega))} = \int_0^{R_n(\omega)\wedge s} \frac{du}{\sigma_n^2(\xi(\omega) + B_u(\omega))} \leq \int_0^s \frac{du}{\sigma_n^2(\xi(\omega) + B_u(\omega))} < \infty \tag{2.21}$$

Sea $s < R(\omega)$. De esta forma $u \mapsto \xi(\omega) + B_u(\omega)$ no visita $I(\sigma)$ en $[0,s]$. Por continuidad, la imagen de $\widetilde{B}(\omega)[0,s]$ es un compacto y existe una distancia positiva a $I(\sigma)$. De esta forma, existe un $N \geq 1$ tal que $d(\xi(\omega) + B_u(\omega), I(\sigma)) \geq 1/N$ para todo $u \in [0, s]$. De esta forma, para todo $n \geq N$:

$$\int_0^s \frac{du}{\sigma_n^2(\xi(\omega) + B_u(\omega))} = \int_0^s \frac{du}{\sigma_N^2(\xi(\omega) + B_u(\omega))} < \infty \tag{2.22}$$

Así, llevando $n \to \infty$:

$$\int_0^s \frac{du}{\sigma^2(\xi(\omega) + B_u(\omega))} \leq \int_0^s \frac{du}{\sigma_N^2(\xi(\omega) + B_u(\omega))} < \infty \tag{2.23}$$

Para $s + \varepsilon < R(\omega)$ también es válido el hecho anterior, por lo que $T_s(\omega) = \int_0^s \frac{du}{\sigma^2(\xi(\omega)+B_u(\omega))} < \infty$ para todo $s < R(\omega)$. Así, $R(\omega) \leq A_\infty(\omega)$ en Ω^*. Es decir, $R \leq A_\infty$, $\mathbb{P}$ -c.s. □

En la sección anterior, introducimos los *ceros de* σ como:

$$Z(\sigma) := \{x \in \mathbb{R} \mid \sigma(x) = 0\} \tag{2.24}$$

El siguiente teorema nos brinda una condición necesaria y suficiente para la existencia de soluciones débiles de (2.1). En esta construcción será clave los procesos T y A.

Teorema 2.9 (Engelbert & Schimdt) *La ecuación* (2.1) *posee una solución débil para toda distribución inicial* μ *si y sólo si*

$$I(\sigma) \subseteq Z(\sigma) \tag{2.25}$$

Demostración. Veamos que (2.25) implica la existencia. Suponga el contexto del comienzo del capítulo. Definimos $\Omega^* = \bigcap_{t \geq 0} \{A_t < \infty\} \in \mathcal{F}$. De la proposición 2.4, sabemos que $\mathbb{P}(\Omega^*) = 1$. Con esto, defina:

$$M_t(\omega) := \begin{cases} B_{A_t}(\omega) & \text{si } \omega \in \Omega^* \\ 0 & \text{si } \omega \notin \Omega^* \end{cases} \tag{2.26}$$

$$X_t := \xi + M_t, \qquad \mathcal{F}_t := \mathcal{G}_{A_t} \tag{2.27}$$

Del lema 2.7, $\{\mathcal{F}_t\}$ es una filtración en $\mathcal{F}$ que cumple las condiciones usuales. Demostraremos que:

$M := \{M_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ es un proceso adaptado y una martingala local continua.

Ser adaptado proviene de las condiciones usuales de $\{\mathcal{F}_t\}$. La continuidad es directa de la continuidad de $t \mapsto A_t$. Además, $M_0 = 0 \quad \mathbb{P}-c.s.$ Considere los tiempos $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definidos en (2.4). De 2.7, cada uno es un $\{\mathcal{F}_t\}$ tiempo de parada. Además, son crecientes y $\mathbb{P}[\text{lím}_n T_n = \infty] = 1$. Veamos que $\{M_{t \wedge T_n}, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ es una martingala. Recuerde que por 2.7, de forma $\mathbb{P} - c.s.$: $M_{t \wedge T_n} = B_{A_{t \wedge T_n}} = B_{A_t \wedge n}$ para todo $t \geq 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Así, $M_{t \wedge T_n}$ es integrable. Usando el teorema de Parada Opcional de Doob:

$$\mathbb{E}[M_{t_2 \wedge T_n} | \mathcal{F}_{t_1}] = \mathbb{E}[B_{A_{t_2} \wedge n} | \mathcal{G}_{A_{t_1}}] = B_{A_{t_1} \wedge n} = M_{t_1 \wedge T_n}$$

De donde concluimos que $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$.

Hacemos el siguiente claim en relación a $\langle M \rangle$.

$$\mathbb{P}[\ \forall t \geq 0 \quad \langle M \rangle_t = A_t] = 1 \tag{2.28}$$

Para esto, consideramos las variables:

$$\tilde{A}_t(\omega) := \begin{cases} A_t(\omega) & \text{si } \omega \in \Omega^* \\ 0 & \text{si } \omega \notin \Omega^* \end{cases} \tag{2.29}$$

$\tilde{A} := \{\tilde{A}_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ es un proceso adaptado, a trayectorias continuas, reales, indistinguible de A y tal que $\tilde{A}_0 = 0 \quad \mathbb{P}$-c.s. Debemos probar que el proceso: $\{M_t^2 - \tilde{A}_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ es una martingala local. Análogo a lo hecho anteriormente, escogemos los tiempos de parada $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Considere que $\mathbb{P}$-c.s.

$$M_{t \wedge T_n}^2 - \tilde{A}_{t \wedge T_n} = B_{A_{t \wedge T_n}}^2 - A_{t \wedge T_n} = B_{A_t \wedge n}^2 - A_t \wedge n$$

De donde obtenemos que $M_{t \wedge T_n}^2 - \tilde{A}_{t \wedge T_n}$ es integrable para todo $t \geq 0$. Además, del teorema de Parada Opcional de Doob (en la martingala $B_{t \wedge n}^2 - t \wedge n$), se tiene que:

$$\mathbb{E}[M_{t_2 \wedge T_n}^2 - \tilde{A}_{t_2 \wedge T_n} | \mathcal{F}_{t_1}] = \mathbb{E}[B_{A_{t_2} \wedge n}^2 - A_{t_2} \wedge n | \mathcal{G}_{A_{t_1}}] = B_{A_{t_1} \wedge n}^2 - (A_{t_1} \wedge n) = M_{t_1 \wedge T_n}^2 - \tilde{A}_{t_1 \wedge T_n}$$

para $0 \leq t_1 \leq t_2 < \infty$. Así, $\{M_t^2 - \tilde{A}_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ es una martingala local, por lo que $\tilde{A}$ es una versión de $\langle M \rangle$, y en consecuencia A es una versión de $\langle M \rangle$.

El siguiente paso es ver que esta variación posee una versión a trayectorias absolutamente continuas. Nuestro siguiente claim es:

$$A_t = \int_0^t \sigma^2(X_v) dv \quad \forall 0 \leq t < \infty \quad \mathbb{P}\text{ - c.s.} \tag{2.30}$$

Sea $\omega \in \{R = A_\infty\} \cap \Omega^*$. Para $s < A_\infty(\omega)$ se tiene que $u \mapsto T_u(\omega)$ desde $[0, s]$ es finito y está dado por:

$$T_u(\omega) = \int_0^u \frac{dy}{\sigma^2(\xi(\omega) + B_y(\omega))} < \infty \quad \forall 0 \leq u \leq s \tag{2.31}$$

Por tanto $u \mapsto T_u(\omega)$ es absolutamente continua en $[0, s]$ y su derivada está definida ctp. Un representante es $T_u'(\omega) = \frac{1}{\sigma^2(\xi(\omega) + B_u(\omega))} \quad \forall u \in [0, s]$ ctp . Por la integrabilidad $\sigma^2(\xi(\omega) + B_u(\omega)) > 0$ de forma u-ctp y por tanto $\sigma^2(\xi(\omega) + B_u(\omega)) T_u'(\omega) = 1$ u-ctp. Además, se tiene para $u \leq s$ que $X_{T_u}(\omega) = \xi(\omega) + M(\omega, T_u(\omega)) = \xi(\omega) + B(\omega, A_{T_u}(\omega)) = \xi(\omega) + B(\omega, u)$. Consideremos un tiempo t tal que $A_t(\omega) < A_\infty(\omega)$. Entonces, para $s = A_t(\omega)$

$$A_t(\omega) = \int_0^{A_t(\omega)} du = \int_0^{A_t(\omega)} \sigma^2(\xi(\omega) + B_u(\omega)) T_u'(\omega) du = \int_0^{A_t(\omega)} \sigma^2(X_{T_u}(\omega)) T_u'(\omega) du$$
$$\int_{T_0(\omega)}^{T_{A_t}(\omega)} \sigma^2(X_v(\omega)) dv = \int_0^t \sigma^2(X_v(\omega)) dv$$

Defina el tiempo $\tau(\omega) := T_{A_\infty^-}(\omega)$. Para $t < \tau(\omega)$ se tiene que $A_t(\omega) < A_\infty(\omega)$. Si $\tau(\omega) = \infty$, entonces tenemos la proposición para todo $t \geq 0$.

Supongamos ahora que $\tau(\omega) < \infty$. Esto implica en particular que $A_\infty(\omega) < \infty$. Entonces podemos definir $A_{\tau(\omega)}$ que por continuidad resulta ser $A_\infty(\omega)$. Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $t_n \nearrow \tau(\omega)$ por continuidad se tiene que:

$$A_\tau(\omega) = \int_0^{\tau(\omega)} \sigma^2(X_v(\omega))dv \tag{2.32}$$

Entonces se tiene para $t = \tau(\omega)$. Considere que $t \geq \tau(\omega)$ entonces,

$$X_t(\omega) = \xi(\omega) + B_{A_t}(\omega) = \xi(\omega) + B_{A_\infty}(\omega) = \xi(\omega) + B_R(\omega) \in I(\sigma) \tag{2.33}$$

Pues $I(\sigma)$ es cerrado y $R(\omega) < \infty$. Por hipótesis $\xi(\omega) + B_R(\omega) \in Z(\sigma)$ y $\sigma(X_t(\omega)) = 0$. De esta forma para $t \geq \tau(\omega)$ la integral no suma más. Por lo tanto:

$$\int_0^t \sigma(X_v(\omega))dv = \int_0^{\tau(\omega)} \sigma(X_v(\omega))dv + \int_{\tau(\omega)}^t \sigma(X_v(\omega))dv = \int_0^{\tau(\omega)} \sigma(X_v(\omega))dv = A_{\tau(\omega)} = A_t(\omega)$$

De esta forma, se concluye (2.30).

Así, M es una martingala local con variación cuadrática igual a $\int_0^t \sigma^2(X_v)dv$, la cual posee trayectorias absolutamente continuas. Del Teorema de Representación de Martingalas 1.19, existe un espacio $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ con una filtración allí $\{\tilde{\mathcal{F}}_t\}$ que cumple las condiciones usuales, un movimiento Browniano estándar $\tilde{W} = \{\tilde{W}_t, \tilde{\mathcal{F}}_t; 0 \leq t < \infty\}$ y un proceso medible y adaptado $\rho = \{\rho_t, \tilde{\mathcal{F}}_t; 0 \leq t < \infty\}$ tal que $\tilde{\mathbb{P}}[\int_0^t \rho^2 dv < \infty] = 1 \quad \forall 0 \leq t < \infty$. Extendemos M (y lo volvemos a llamar M) y de 1.19 se obtiene que $\mathbb{P} - c.s.$:

$$M_t = \int_0^t \rho_v d\tilde{W}_v \quad \langle M \rangle_t = \int_0^t \rho_v^2 dv \quad \forall 0 \leq t < \infty \tag{2.34}$$

También se extiende X y se obtiene

$$\tilde{\mathbb{P}}\left[\forall t \geq 0 \ \int_0^t \sigma^2(X_v)dv = \int_0^t \rho_v^2 dv < \infty\right] = 1 \tag{2.35}$$

De donde se desprende que $\tilde{\mathbb{P}}[\sigma^2(X_v) = \rho_v^2 \quad \forall v \geq 0 \ \text{ ctp }] = 1$. Esto nos hace pensar que el movimiento Browniano que buscamos es $\tilde{W}$. La verdad es que no es así y se debe hacer una pequeña modificación. Defina $W_t = \int_0^t sgn(\rho_v \sigma(X_v))d\tilde{W}_v$, donde

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \tag{2.36}$$

Del teorema de Levy, se observa que $W = \{W_t, \tilde{\mathcal{F}}_t; 0 \leq t < \infty\}$ es un movimiento Browniano estándar. Ahora, tenemos los ingredientes para nuestro claim final:

$$(X, W), (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}), \{\tilde{\mathcal{F}}_t\}_{t\geq 0} \tag{2.37}$$

Es solución débil de (2.1) con ley inicial μ.

Veamos cada ítem:

(i) $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ es un espacio de probabilidad con $\{\tilde{\mathcal{F}}_t\}_{t\geq 0}$ filtración allí que satisface las condiciones usuales.

(ii) $X_t(\omega, \hat{\omega}) = \xi(\omega, \hat{\omega}) + M_t(\omega, \hat{\omega})$ es un proceso a trayectorias continuas y adaptado a $\{\tilde{\mathcal{F}}_t\}_{t\geq 0}$. Es fácil ver que ξ extendido es medible en $\tilde{\mathcal{F}}_0$. Además, $W = \{W_t, \tilde{\mathcal{F}}_t; 0 \leq t < \infty\}$ es un Movimiento Browniano.

(iii) Para $t \geq 0$ se tiene que $\int_0^t \sigma^2(X_v)dv = A_t$ c.s. Además esta variable es finita c.s. por lo que $\tilde{\mathbb{P}}[\int_0^t \sigma^2(X_v)dv < \infty] = 1$.

(iv) Sea $t \geq 0$ fijo. Se tiene que:

$$\mathbb{E}[(\int_0^t \sigma(X_v)dW_v - \int_0^t \rho_v d\tilde{W}_v)^2] = \mathbb{E}[(\int_0^t \sigma(X_v)sgn(\sigma(X_v)\rho_v) - \rho_v d\tilde{W}_v)^2]$$
$$= \mathbb{E}[\int_0^t (\sigma(X_v)sgn(\sigma(X_v)\rho_v) - \rho_v)^2 dv] + \mathbb{E}[\int_0^t \sigma(X_v)^2 - 2\sigma(X_v)\rho_v sgn(\sigma(X_v)\rho_v) + \rho_v^2 dv]$$
$$= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\rho_u^2 = \sigma^2(X_u), u-ctp\}} \int_0^t 2\rho_v^2 - 2\sigma(X_v)\rho_v sgn(\sigma(X_v)\rho_v)dv]$$

Sea $\omega \in \{\rho_u^2 = \sigma^2(X_u), u - ctp\}$. Particionando en $v \in \{\rho_v(\omega) = \sigma(X_v(\omega))\}$ y $v \in \{\rho_v(\omega) \neq \sigma(X_v(\omega))\}$ se concluye que:

$$\int_0^t 2\rho_v(\omega)^2 - 2\sigma(X_v(\omega))\rho_v(\omega)sgn(\sigma(X_v(\omega))\rho_v(\omega))dv = 0$$

De esto se concluye que $\int_0^t \sigma(X_v)dW_v = \int_0^t \rho_v d\tilde{W}_v \quad \mathbb{P} - c.s.$ Así, $\mathbb{P}$ -c.s. se tiene que $\forall 0 \leq t < \infty$:

$$\int_0^t \sigma(X_v)dW_v = \int_0^t \rho_v d\tilde{W}_v = M_t = \xi + M_t - \xi = X_t - X_0 \tag{2.38}$$

(v) Por último $\tilde{\mathbb{P}}(X_0 \in \Gamma) = \mathbb{P}(X_0 \in \Gamma) = \mathbb{P}(\xi + M_0 \in \Gamma) = \mathbb{P}(\xi \in \Gamma) = \mu(\Gamma)$ y la ley inicial es μ.

Veamos que la existencia implica $I(\sigma) \subseteq Z(\sigma)$. Para $x \in \mathbb{R}$ existe una solución débil: $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ de la ecuación (2.1) tal que $\mathbb{P}(X_0 = x) = 1$. Defina:

$$M_t := X_t - X_0 = \int_0^t \sigma(X_v)dW_v \tag{2.39}$$

Se tiene que $M := \{M_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\} \in \mathcal{M}^{c,loc}$. Además , su variación está dada por $\int_0^t \sigma^2(X_v)dv$. Defina:

$$T_s = \inf\{t \geq 0 \mid \langle M \rangle_t > s\} \tag{2.40}$$

Se puede verificar que:

$$s \wedge \langle M \rangle_\infty = \langle M \rangle_{T_s} \quad \forall 0 \leq s < \infty \quad \mathbb{P} - \text{ c.s.} \tag{2.41}$$

Ahora, empleando el teorema de Dambis, Dubins & Schwarz 1.20 (o su análogo 1.21), obtenemos una extensión y un movimiento Browniano B definido allí tal que $B_{\langle M \rangle_t} = M_t$. Con lo anterior podemos hacer el siguiente cálculo:

$$\int_0^{s\wedge\langle M \rangle_\infty} \frac{du}{\sigma^2(X_0 + B_u)} = \int_0^{\langle M \rangle_{T_s}} \frac{du}{\sigma^2(X_0 + B_u)} = \int_0^{T_s} \frac{d\langle M \rangle_v}{\sigma^2(X_0 + M_v)}$$
$$= \int_0^{T_s} \frac{d\langle M \rangle_v}{\sigma^2(X_v)} = \int_0^{T_s} \mathbb{1}_{\{\sigma^2(X_v)\neq 0\}}dv \leq T_s$$

Sea $x \in Z(\sigma)^c$. Entonces X no es una solución constante y en consecuencia $\mathbb{P}[\langle M\rangle_\infty > 0] > 0$. Es más:

$$\exists s > 0 \quad \mathbb{P}[\langle M\rangle_\infty > s] > 0 \tag{2.42}$$

De lo contrario, para todo $s > 0$ se tiene que $\mathbb{P}[\langle M\rangle_\infty \leq s] = 1$. Tomando una secuencia descendiente a 0 se tiene que $\mathbb{P}[\langle M\rangle_\infty = 0] = 1$ lo cual es una contradicción. Además, observe que $\langle M\rangle_\infty > s \Rightarrow T_s < \infty$ y :

$$\int_0^s \frac{du}{\sigma^2(x+B_u)} = \int_0^{s\wedge\langle M\rangle_\infty} \frac{du}{\sigma^2(x+B_u)} \leq T_s < \infty \quad \mathbb{P}-c.s. \text{ en } \{\langle M\rangle_\infty > s\} \tag{2.43}$$

Así, $\mathbb{P}[\int_0^s \frac{du}{\sigma^2(x+B_u)} < \infty] > 0$. Usando el lema 1.27 se tiene que $x \in I(\sigma)^c$. De esta forma $Z(\sigma)^c \subseteq I(\sigma)^c$ y por tanto $I(\sigma) \subseteq Z(\sigma)$. $\square$

Este teorema brinda una condición fácil de verificar para deducir existencia de soluciones. Por ejemplo, $\sigma(x) = sgn(x)$ cumple con la hipótesis mientras que $\sigma(x) = \mathbb{1}_0(x)$ no. También, es fácil verificar el siguiente hecho:

$$\sigma \text{ es continua } \Rightarrow I(\sigma) \subseteq Z(\sigma)$$

De esta forma, existe solución débil para toda ecuación de la forma:

$$dX_t = |X_t|^\alpha dW_t \tag{2.44}$$

Donde $\alpha > 0$. Sin embargo, como veremos más adelante, no existe unicidad en ley para todo $\alpha > 0$.

2.1.2. Los Teoremas de Engelbert y Schimdt : Unicidad

Hasta ahora, hemos logrado construir una solución a (2.1) bajo la condición $I(\sigma) \subseteq Z(\sigma)$. Para la solución X anteriormente construida, defina:

$$\tau := \inf\{t \geq 0 \mid X_t \in I(\sigma)\} \tag{2.45}$$

Lema 2.10

(i) $\tau = T_{A_\infty^-} \quad \mathbb{P}-c.s.$

(ii) $X_t = X_\tau$ *para todo* $t \geq \tau$ *c.s. en* $\{\tau < \infty\}$

(iii) $\mathbb{P}[\tau > 0\, , \forall t < \tau\ X_t = X_0] = 0$

Demostración. Veamos (i). Consideremos $\omega \in \{T_\infty = \infty\} \cap \{R = A_\infty\}$. Comenzemos viendo que $T_{A_\infty^-}(\omega) \leq \tau(\omega)$. Si $\tau(\omega) = \infty$ es directo. En el caso contrario, suponga que existe $t \geq 0$ tal que $X_t(\omega) \in I(\sigma)$. Entonces $\xi(\omega) + B_{A_t}(\omega) \in I(\sigma) \Rightarrow R(\omega) \leq A_t(\omega) \Rightarrow A_\infty(\omega) \leq A_t(\omega)$. De acá se desprende que $T_{A_\infty^-}(\omega) \leq t \Rightarrow T_{A_\infty^-}(\omega) \leq \tau(\omega)$. Para la desigualdad $\tau(\omega) \leq T_{A_\infty^-}(\omega)$ suponemos que $T_{A_\infty^-}(\omega) < \infty$. En este caso se tendrá que $X_{T_{A_\infty^-}}(\omega) = \xi(\omega) + B_{A_{T_{A_\infty^-}}}(\omega) = \xi(\omega) + B_{A_\infty}(\omega) = \xi(\omega) + B_R(\omega) \in I(\sigma)$. De esta forma $\tau(\omega) \leq T_{A_\infty^-}(\omega)$.

Para (ii), si $\tau < \infty$, de lo anterior se obtiene que $X_\tau = \xi + B_R$ c.s. Ahora , sea $t \geq \tau$. Para $\omega \in \{T_\infty = \infty\} \cap \{R = A_\infty\}$ se tiene que $X_t = \xi + B_{A_t} = \xi + B_{A_\infty} = X_\tau$.

Para (iii) basta probar que $\mathbb{P}[\tau > 0 \ , \forall t < \tau \ X_t = X_0, R = A_\infty, T_\infty = \infty, \tau = T_{A_\infty^-}] = 0$. Sea un ω en este conjunto. Acá, $B_{A_t}(\omega) = 0$ para todo $t \geq 0$. Como $\tau(\omega) > 0$ se tiene que $A_\infty(\omega) > 0$. Demostremos que:

$$t \mapsto B_t(\omega) \text{ es constante en } [0, A_\infty(\omega)) \tag{2.46}$$

Por contradicción, si no lo fuera sea $0 \leq u < A_\infty$ tal que $B_u \neq 0$. Por continuidad, $u = A_t$ para algún t y se tendría la contradicción. Así, nuestro conjunto es subconjunto de $\{\omega \in \Omega \mid \exists s > 0 \ t \mapsto B_t(\omega) \text{ es constante en } [0, s)\}$. Esto es de medida 0 debido a que el movimiento Browniano osicila infinta veces entorno al 0. $\square$

Con esto, ya contamos con los ingredientes para demostrar el principal teorema de existencia y unicidad en esta sección:

Teorema 2.11 (Engelbert & Schmidt) *La ecuación* (2.1) *posee una solución débil única en ley para toda ley inicial* μ *si y sólo si:*

$$I(\sigma) = Z(\sigma) \tag{2.47}$$

Demostración. Suponga que existe una solución única en ley, para toda ley inicial μ. De la existencia se obtiene $I(\sigma) \subseteq Z(\sigma)$. Supongamos por contradicción que $\exists x \in Z(\sigma) \backslash I(\sigma)$. Entonces, como $\sigma(x) = 0$ podemos construir una solución débil $(Y, \tilde{W}), (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}), \{\tilde{\mathcal{F}_t}\}$ tal que $Y_t = x \quad \forall t \geq 0$. Por otro lado, consideremos la solución antes construida $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\{\mathcal{F}_t\}$ con ley inicial $\mathbb{P}(X_0 = x) = 1$. Como $I(\sigma)$ es cerrado, se tiene que $\mathbb{P}[\tau > 0] = 1$. Del lema 2.10, se tiene que: $\mathbb{P}[X_t = x \quad \forall t \geq 0] \leq \mathbb{P}[\tau > 0, \forall t < \tau \ X_t = X_0] = 0$. Esto contradice la unicidad en ley.

Veamos $\Leftarrow$. De $I(\sigma) \subseteq Z(\sigma)$ se obtiene la existencia. Veamos que $Z(\sigma) \subseteq I(\sigma)$ implica la unicidad. Considere $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$ una solución débil de la ecuación (2.1) con ley inicial μ. Así, análogo a la demostración anterior, considere la martingala local $M := \{M_t := X_t - X_0 \ , \mathcal{F}_t \ 0 \leq t < \infty\}$ con variación $\langle M \rangle_t = \int_0^t \sigma^2(X_s) ds$. Del teorema de Representación, se puede obtener un movimiento Browniano $B = \{B_s, \mathcal{G}_s; 0 \leq s < \infty\}$ en un espacio extendido tal que:

$$M_t = B_{\langle M \rangle_t} \quad \forall 0 \leq t < \infty \quad \mathbb{P} - c.s. \tag{2.48}$$

Se puede probar (resulta muy técnico) que X_0 es $\mathcal{G}_0$ medible , por lo que $(B_s)_{s \geq 0}$ es independiente de X_0. Así, $\{X_0 + B_s, \mathcal{G}_s \ ; \ 0 \leq s < \infty\}$ es un movimiento Browniano de ley inicial $\mathbb{P}X_0^{-1}$. Defina $T_s = \text{ínf}\{t \geq 0 \mid \langle M \rangle_t > s\}$. De la demostración anterior recogemos que $\forall s \geq 0 \quad \mathbb{P} - c.s$:

$$\int_0^{s \wedge \langle M \rangle_\infty} \frac{du}{\sigma^2(X_0 + B_u)} = \int_0^{T_s} \mathbb{1}_{\{\sigma^2(X_v) \neq 0\}} dv \leq T_s \tag{2.49}$$

También consideramos $\tau := \text{ínf}\{t \geq 0 \mid X_t \in I(\sigma)\}$. En $\{\tau > 0\}$ se tiene que $X_t(\omega) \notin I(\sigma)$, lo que implica que $X_t(\omega) \notin Z(\sigma)$. De esta forma $\sigma^2(X_t) > 0$ y $\langle M \rangle_t$ es estrictamente creciente en $[0, \tau]$, $\mathbb{P}$-c.s.

Defina $R := \inf\{s \geq \ |X_0 + B_s \in I(\sigma)\}$. Del lema 2.8 se desprende que $\int_0^{R^+} \frac{du}{\sigma^2(X_0+B_u)} = \infty$ c.s.. Hacemos el siguiente claim :

$$R = \langle M \rangle_\tau \text{ c.s. en } \{\tau < \infty\} \tag{2.50}$$

En efecto, si $\omega \in \{\tau < \infty\}$ se tiene que $X_0(\omega) + B_{\langle M \rangle_\tau}(\omega) = X_0(\omega) + M_\tau(\omega) = X_\tau(\omega) \in I(\sigma)$ para todo ω c.s., por lo que $\langle M \rangle_\tau \geq R$. Entonces, por continuidad, existe un $t(\omega)$ tal que $R(\omega) = \langle M \rangle_{t(\omega)}(\omega)$. Así $X_0(\omega) + B_{\langle M \rangle_{t(\omega)}}(\omega) = X_{t(\omega)} \in I(\sigma)$. De esta forma $t(\omega) \geq \tau(\omega) \Rightarrow \langle M \rangle_{t(\omega)}(\omega) \geq \langle M \rangle_\tau(\omega) \Rightarrow R(\omega) \geq \langle M \rangle_\tau(\omega)$.

Veamos ahora que $R = \langle M \rangle_\infty$. c.s. En efecto, para $\omega \in \{R < \langle M \rangle_\infty\}$ se tiene que $T_R < \infty$. Entonces, podemos considerar una sucesión de números positivos $(s_n) \searrow 0$ tales que $R(\omega) + s_n < \langle M \rangle_\infty(\omega)$. Entonces

$$\int_0^{R(\omega)+s_n} \frac{du}{\sigma^2(X_0(\omega) + B_u(\omega))} \leq T_{R+s_n}(\omega) \tag{2.51}$$

Usando la continuidad por derecha, se deduce que: $\int_0^{R^+} \frac{du}{\sigma^2(X_0+B_u)} \leq T_R$. Pero por el lema anterior, esto sucede en un conjunto de medida 0. Por lo tanto $\mathbb{P}[R \geq \langle M \rangle_\infty] = 1$. Ahora, si $\tau < \infty$, entonces $R = \langle M \rangle_\tau \leq \langle M \rangle_\infty$ c.s. Si $\tau = \infty$ entonces $\int_0^{\langle M \rangle_\infty} \frac{du}{\sigma^2(X_0(\omega)+B_u(\omega))} = T_{\langle M \rangle_\infty} = \infty$. Así, $\int_0^{\langle M \rangle_\infty^+} \frac{du}{\sigma^2(X_0(\omega)+B_u(\omega))} = \infty$. Del lema anterior , sabemos que R es el primer momento en que el límite por derecha de la integral se hace infinito. Por lo tanto $R \leq \langle M \rangle_\infty$ c.s.

Hacemos el siguiente Claim:

$$\int_0^{s^+} \frac{du}{\sigma^2(X_0 + B_u)} = T_s \quad \forall 0 \leq s < \infty \quad \mathbb{P} - c.s. \tag{2.52}$$

Consideremos en primer lugar un $s < \langle M \rangle_\infty$. Entonces $T_s < \infty$. Además: $T_s < \tau$. En efecto, si $T_s \geq \tau \Rightarrow \langle M \rangle_{T_s} \geq \langle M \rangle_\tau \Rightarrow s \geq R \geq \langle M \rangle_\infty$ lo cual es una contradicción. Como $T_s < \tau$ entonces para $v \leq T_s$ se tiene que $X_v \notin I(\sigma) \Rightarrow X_v \notin Z(\sigma)$. De esta forma:

$$\int_0^s \frac{du}{\sigma^2(X_0 + B_u)} = \int_0^{T_s} \mathbb{1}_{\{\sigma^2(X_v) \neq 0\}} dv = T_s < \infty \quad \mathbb{P} - c.s. \tag{2.53}$$

Lo mismo se puede hacer para $s + \varepsilon < \langle M \rangle_\infty$. Usando la finitud, concluimos que $T_s = \int_0^{s^+} \frac{du}{\sigma^2(X_0+B_u)}$. Si $s = \langle M \rangle_\infty = R$ se tendrá entonces que $T_s = \infty$y por otro lado la integral $\int_0^{R+} \frac{du}{\sigma^2(X_0+B_u)} = \infty$. Por crecimiento, de aquí en adelante serán ambas infinito.

Análogo a 2.7, se puede demostrar que $\langle M \rangle_t = \inf\{s \geq 0 \mid T_s > t\}$. De esta forma, $\langle M \rangle_t = \inf\{s \geq 0 \mid \int_0^{s^+} \frac{du}{\sigma^2(X_0+B_u)} > t\}$. Con esto, nos damos cuenta de que $X_t = X_0 + B_{\langle M \rangle_t} = \phi_t(X_0, B.)$ Es decir, cada variable es función de X_0 y del movimiento Browniano. Por tanto, se pueden determinar las leyes finito dimensionales de X en función de X_0 y B. Así, la ley de X queda completamente determinada si se determina X_0. $\square$

De (2.11) se concluye que la ecuación $dX_t = |X_t|^\alpha dW_t$ posee unicidad en ley si $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Además de estos resultados, podemos concluir algunas cosas sobre las soluciones. Por ejemplo, si $I(\sigma) = Z(\sigma) = \phi$, entonces se tendrá que $R = A_\infty = \infty$ con probabilidad 1. Por lo tanto, nuestro reloj A_t crecerá sin cota. Así, $X_\infty = \xi + B_{A_\infty} = \xi + B_\infty$ de donde se concluye la recurrencia de X.

La siguiente proposición nos da condiciones para la unicidad trayectorial de las soluciones. Estas se inspiran en el resultado 1.40. Para esto, será fundamental el uso del tiempo local para martingalas locales, el cual es tratado en la sección 1.2.3.

Teorema 2.12 *Suponga que existen funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$ y $h : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ tales que:*

(i) Para todo $x \in I(\sigma)^c$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que:

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \left(\frac{f(y)}{\sigma(y)}\right)^2 dy < \infty \tag{2.54}$$

(ii) La función h es estrictamente creciente, satisface $h(0) = 0$ y es tal que:

$$\int_0^\varepsilon \frac{du}{h^2(u)} = \infty \quad \forall \varepsilon > 0 \tag{2.55}$$

(iii) Existe un $a > 0$ tal que:

$$|\sigma(x+y) - \sigma(x)| \leq f(x)h(|y|) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in [-a,a] \tag{2.56}$$

Entonces existe unicidad trayectorial para (2.1).

Demostración. Comencemos viendo que bajo estas hipótesis se tiene que $Z(\sigma) \subseteq I(\sigma)$. En efecto si $\sigma(x) = 0$ se tiene que $|\sigma(x+y)| \leq f(x)h(|y|) \Rightarrow |\sigma(x+y)|^2 \leq f^2(x)h^2(|y|) \longrightarrow \frac{1}{\sigma^2(x+y)} \geq \frac{1}{(f(x)h(|y|))^2}$. De esta forma, para todo $\varepsilon > 0$ se tendrá que:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dy}{\sigma^2(x+y)} \geq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dy}{(f(x)h(|y|))^2} \geq f^{-2}(x) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dy}{h^2(|y|)} = 2f^{-2}(x) \int_0^\varepsilon h^{-2}(y)dy = \infty$$

Entonces, se tendrá que $x \in I(\sigma)$.

Así, para nuestras soluciones débiles podemos recuperar la construcción hecha en la demostración del teorema anterior. En particular, para $(X,W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$ solución débil, podemos considerar τ como en (2.45) y demostrar que $\mathbb{P}$-c.s.

$$X_t = X_{t\wedge\tau} \qquad \forall 0 \leq t < \infty, \quad \mathbb{P} - c.s. \tag{2.57}$$

En efecto, suponga que $\tau < \infty$. Entonces $\langle M \rangle_\tau = R = \langle M \rangle_\infty$ de forma $\mathbb{P}$-c.s. Así, para $t \geq \tau$ $\langle M \rangle_t = \langle M \rangle_\infty$ y por tanto $X_t = X_0 + B_{\langle M \rangle_t} = X_0 + B_R = X_\tau$.

Considere $(X^{(1)}, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$ y $(X^{(2)}, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$ soluciones débiles de la ecuación. Recuerde que podemos suponer la misma filtración para ambas (comentario luego de 1.39). Además, suponga que $\mathbb{P}[X_0^{(1)} = X_0^{(2)}] = 1$. Definimos para $i = 1, 2 \quad \tau^{(i)} := \inf\{t \geq 0 \,|\, X_t^{(i)} \in I(\sigma)\}$. Ya sabemos que $X_t^{(i)} = X_{t\wedge\tau^{(i)}}^{(i)}$. Además, veamos que basta probar que:

$$X_{t\wedge\tau^{(1)}}^{(1)} = X_{t\wedge\tau^{(1)}}^{(2)} \quad \forall t \geq 0 \quad \mathbb{P} - c.s. \tag{2.58}$$

Si esto ocurre, y $\tau^{(1)} = \infty$ entonces se tiene. Si no, se tendrá que $X_{\tau^{(1)}}^{(2)} \in I(\sigma)$ y por tanto $\tau^{(2)} \leq \tau^{(1)}$. Entonces tambien se tiene para $\tau^{(2)}$ y $X_{\tau^{(2)}}^{(1)} \in I(\sigma)$ por lo que $\tau^{(2)} \leq \tau^{(1)} \quad \mathbb{P}$-c.s. Así, $\tau^{(2)} = \tau^{(1)} \quad \mathbb{P} - c.s$. Una vez que esto se tiene, entonces ambos procesos parados son iguales.

Considere $\Delta_t := X_t^{(1)} - X_t^{(2)}$. Entonces, tendremos que:

$$\Delta_t = \int_0^t \sigma(X_s^{(1)}) - \sigma(X_s^{(2)}) dW_s, \qquad \langle\Delta\rangle_t = \int_0^t [\sigma(X_s^{(1)}) - \sigma(X_s^{(2)})]^2 ds \tag{2.59}$$

Así , el proceso $\Delta := \{\Delta_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ es una martingala local continua. Por tanto se puede considerar su tiempo local $\Lambda_t^\Delta(x)$, el cual es continuo $\mathbb{P}$-c.s. Además, tenemos la fórmula de Tanaka-Meyer (1.28): Para todo ω $\mathbb{P}$-c.s. se tiene que para todo $t \geq 0$:

$$|\Delta_t| = |\Delta_0| + \int_0^t sgn(\Delta_s) d\Delta_s + \Lambda_t^\Delta(0) \tag{2.60}$$

Hacemos el siguiente Claim:

$$\text{Basta con demostrar que} : \Lambda_{\tau^{(1)}}^\Delta(0) = 0 \quad \mathbb{P} - c.s \tag{2.61}$$

En efecto , como $\Delta_0 = 0$ de forma c.s. y como se tiene para todo t en un conjunto de medida 1.

$$\begin{aligned} |\Delta_{t\wedge\tau^{(1)}}| &= \int_0^{t\wedge\tau^{(1)}} sgn(\Delta_s) d\Delta_s + \Lambda_{t\wedge\tau^{(1)}}^\Delta(0) \\ &= \int_0^{t\wedge\tau^{(1)}} sgn(\Delta_s)(\sigma(X_s^{(1)}) - \sigma(X_s^{(2)})) dW_s + \Lambda_{t\wedge\tau^{(1)}}^\Delta(0) \end{aligned}$$

Como $\Lambda_{\tau^{(1)}}^\Delta(0) = 0 \quad \mathbb{P}$-c.s. , por crecimiento del tiempo local se tiene que $\Lambda_{t\wedge\tau^{(1)}}^\Delta(0) = 0$ de forma $\mathbb{P}$-c.s. De esta forma $|\Delta_{t\wedge\tau^{(1)}}| = \int_0^{t\wedge\tau^{(1)}} sgn(\Delta_s)(\sigma(X_s^{(1)}) - \sigma(X_s^{(2)})) dW_s$. De esta forma, la integral estocástica es una martingala local no negativa, es decir es una supermartingala. Así, para todo $t \geq 0, \quad \mathbb{E}[|\Delta_{t\wedge\tau^{(1)}}|] \leq \mathbb{E}[|\Delta_{0\wedge\tau^{(1)}}|] = 0$. De esta forma, $X_{t\wedge\tau^{(1)}}^{(1)} = X_{t\wedge\tau^{(1)}}^{(2)} \quad \mathbb{P} - c.s.$ para todo t. De la continuidad de las trayectorias y (2.58) se concluye el claim.

Procedamos entonces a demostrar que $\Lambda_{\tau^{(1)}}^\Delta(0) = 0$ de forma $\mathbb{P}$-c.s. Considere k un entero mayor a $1/a$. De (2.55) se obtiene la existencia de un $\varepsilon_k > 0$ tal que $\int_{\varepsilon_k}^{1/k} h^{-2}(u) du = k$. Tomemos un ω tal que $\Lambda_t^\Delta(x, \omega)$ es conjuntamente continua en (t, x). Además, consideramos un tiempo aleatorio $\tau < \infty$. Entonces, se tiene que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{k} \int_{\varepsilon_k}^{1/k} h^{-2}(x) \Lambda_{\tau(\omega)}^\Delta(x, \omega) dx - \Lambda_t^\Delta(0, \omega) \right| &\leq \frac{1}{k} \int_{\varepsilon_k}^{1/k} h^{-2}(x) |\Lambda_{\tau(\omega)}^\Delta(x, \omega) - \Lambda_{\tau(\omega)}^\Delta(0, \omega)| dx \\ &\leq |\Lambda_{\tau(\omega)}^\Delta(x_k, \omega) - \Lambda_{\tau(\omega)}^\Delta(0, \omega)| \end{aligned}$$

Donde $x_k \leq 1/k$ tal que se alcanza el máximo de $|\Lambda^{\Delta}_{\tau(\omega)}(x,\omega) - \Lambda^{\Delta}_{\tau(\omega)}(0,\omega)|$. Hemos probado que:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\int_{\varepsilon_k}^{1/k} h^{-2}(x)\Lambda^{\Delta}_{\tau}(x)dx = \Lambda^{\Delta}_{\tau}(0) \quad \mathbb{P}-c.s. \tag{2.62}$$

Sabemos por propiedad del tiempo local que existe un Ω^* tal que $\forall \omega \in \Omega^*$ se tiene que:

$$\int_0^t g(\Delta_s(\omega))d\langle\Delta\rangle_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\Lambda^{\Delta}_t(u,\omega)du \quad \forall t \geq 0 \tag{2.63}$$

para $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$ boreliana. Ahora, tomemos un ω en este conjunto y sea $t = \tau(\omega)$. Se tendrá entonces que:

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon_k}^{1/k} h^{-2}(x)\Lambda^{\Delta}_{\tau(\omega)}(x,\omega)dx &= \int_0^{\tau(\omega)} h^{-2}(\Delta_s(\omega))\mathbb{1}_{[\varepsilon_k,1/k]}(\Delta_s(\omega))d\langle\Delta\rangle_s(\omega) \\
&= \int_0^{\tau(\omega)} h^{-2}(\Delta_s(\omega))\mathbb{1}_{[\varepsilon_k,1/k]}(\Delta_s(\omega))[\sigma(X^{(1)}_s(\omega)) - \sigma(X^{(2)}_s(\omega))]^2 ds \\
&\leq \int_0^{\tau(\omega)} f^2(X^{(1)}_s)ds
\end{aligned}$$

Esta última desigualdad viene de considerar que para $\Delta_s(\omega) \in [\varepsilon_k, 1/k]$ se tiene en particular que $|\Delta_s(\omega)| \leq a$. Además, si consideramos $X^{(2)}_t = X^{(1)}_t - \Delta_t(\omega)$. De esta forma $|\sigma(X^{(2)}_t) - \sigma(X^{(1)}_t)| = |\sigma(X^{(1)}_t - \Delta_t(\omega)) - \sigma(X^{(1)}_t(\omega))| \leq f(X^{(1)}_t(\omega))h(\Delta_t(\omega))$. Combinando todo lo anterior, se tiene que $\Lambda^{\Delta}_{\tau}(0) \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{k}\int_0^{\tau} f^2(X^{(1)}_s)ds \quad \mathbb{P}-c.s.$.

Considere $M_t = X^{(1)}_t - X^{(1)}_0$, proceso que es una $\mathcal{M}^{c,loc}$. Entonces, M admite la representación usual en el espacio extendido, con B un movimiento Browniano: $M_t = B_{\langle M\rangle_t}$. Además, $\langle M\rangle_t = \int_0^t \sigma^2(X^{(1)}_s)ds$. Además, $\sigma^2(X^{(1)}_v) > 0$ para $0 \leq v < \tau^{(1)}$. Así, con un cambio de variable:

$$\int_0^t f^2(X^{(1)}_v)dv = \int_0^{\langle M\rangle_t} f^2(X^{(1)}_0 + B_u)\sigma^{-2}(X^{(1)}_0 + B_u)du \quad \forall 0 \leq t < \tau^{(1)} \tag{2.64}$$

Definamos los tiempos de parada:

$$\tau_n := \inf\{t \geq 0 \mid d(X^{(1)}_t, I(\sigma)) \leq \frac{1}{n}\}, \quad R_n := \inf\{s \geq 0 \mid d(X^{(1)}_0 + B_s, I(\sigma)) \leq \frac{1}{n}\} \tag{2.65}$$

Análogo al caso $\langle M\rangle_\tau = R$ se tiene que $R_n = \langle M\rangle_{\tau_n}$ c.s. en $\{\tau_n < \infty\}$. Supongamos el caso en que $I(\sigma) \neq \phi$. En este caso se tendrá que $X_t = X_0 + B_{\langle M\rangle_t} \longrightarrow X_0 + B_R \in I(\sigma)$. Por lo tanto $\tau_n < \infty$ para todo n, $\mathbb{P}$-c.s. De esta forma R_n será finito también. En este caso definimos:

$$f_n(x) = \sigma_n(x) = 1 \text{ si } d(x, I(\sigma)) < \frac{1}{n}$$

$$f_n(x) = f(x) \quad \sigma_n(x) = \sigma(x) \text{ si } d(x, I(\sigma)) \geq \frac{1}{n}$$

Por la hipótesis (i) se tiene que $\frac{f_n^2}{\sigma_n^2}$ es una función localmente integrable. (Se hace lo mismo que en el caso del lema anterior). Supongamos que $\tau > 0$ (si no es trivial). Ahora, usamos la ley $0-1$ de Engelbert y Schmidt 1.28 y obtenemos que $\int_0^{\tau_n} f^2(X_v^{(1)})dv = \int_0^{R_n} f^2(X_0^{(1)} + B_u)\sigma^{-2}(X_0^{(1)} + B_u)du = \int_0^{R_n} f_n^2(X_0^{(1)} + B_u)\sigma_n^{-2}(X_0^{(1)} + B_u)du < \infty$ $\mathbb{P}$-c.s. Así, usando la desigualdad anterior, concluimos que $\Lambda_{\tau_n}^{\Delta}(0) = 0 \quad \mathbb{P}$-c.s. Como $\tau_n \longrightarrow \tau$, se tiene que $\Lambda_{\tau}^{\Delta}(0) = 0 \quad \mathbb{P}$-c.s. (Este puede ser infinito, de todas formas se tiene).

Si $I(\sigma) = \phi$ se tiene que $\tau^{(1)} = \infty$. Entonces, siempre $\sigma^2(X_v^{(1)}) > 0$ para todo v. Además, $f^2\sigma^{-2}$ es localmente integrable. De esta forma :

$$\int_0^t f^2(X_v^{(1)})dv = \int_0^{\langle M\rangle_t} f^2(X_0^{(1)} + B_u)\sigma^{-2}(X_0^{(1)} + B_u)du < \infty \tag{2.66}$$

De esta forma $\Lambda_t^{\Delta}(0) = 0 \quad \mathbb{P}$-c.s. y esto para todo t. En particular, el límite creciente se tiene que $\Lambda_{\infty}^{\Delta}(0) = 0 \quad \mathbb{P}$-c.s. $\square$

El teorema de Yamada & Watanabe 1.42 nos permite concluir la existencia y unicidad de soluciones fuertes para esta ecuación.

Corolario 2.13 *Bajo las condiciones (E) y $(i)-(iii)$ se tendrá que la ecuación (2.1) posee una única solución fuerte para toda ley inicial μ.*

Ejemplo Considere la ecuación exponencial:

$$dX_t = X_t dW_t \tag{2.67}$$

Aquí, σ es la identidad, por lo que $I(\sigma) = Z(\sigma) = \{0\}$. Además, usando $f(x) = 1$ y $h = id$ se tienen las condiciones del teorema 2.12. De aquí se obtiene la existencia de una única solución unica fuerte para esta ecuación. Para $X_0 = 1$, esta solución es $X_t = e^{W_t - \frac{1}{2}t}$.

Ejemplo La ecuación

$$dX_t = |X_t|^{\alpha} dW_t \tag{2.68}$$

Posee una única solución fuerte para $\alpha > 1$. Sabemos que para $\alpha \geq 1/2$ se cumplen las condiciones $I(\sigma) = Z(\sigma)$. En este caso $\sigma \in C^1(\mathbb{R})$ (pues $\alpha > 1$) y $\sigma'(x) = \alpha|x|^{\alpha-1}$. Escojamos un $a > 0$ cualquiera. Entonces, para $y \in [-a, a]$ se tendrá que existe un $\xi \in [x-a, x+a]$ tal que :

$$\left|\frac{\sigma(x+y) - \sigma(x)}{y}\right| = \alpha|\xi|^{\alpha-1}$$

De esta forma, para todo y se tiene que: $|\sigma(x+y) - \sigma(x)| \leq |y| \sup_{\xi\in[x-a,x+a]} \alpha|\xi|^{\alpha-1} = |y|\alpha[|x-a|^{\alpha-1} \vee |x+a|^{\alpha-1}]$. De esta forma , definimos $h(y) = y$ y $f(x) = \alpha[|x-a|^{\alpha-1} \vee |x+a|^{\alpha-1}]$ la cual es una función continua y por ende localmente acotada. Por 2.12 se concluye.

2.2. El Método de Remoción del Drift

En esta sección volvemos a la ecuación general en una dimensión:

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \tag{2.69}$$

Consideraremos como noción de solución a esta ecuación la de solución débil en el intervalo I (definición 1.43). A continuación estudiamos existencia y unicidad para (2.69). Recuerde que lo que sigue es una revisión de Karatzas & Shreve [11], capítulo 5.5.

2.2.1. Preliminares

Por esto, consideraremos un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y $b, \sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}$ coeficientes medibles. Nuestra estrategia es hacer una transformación en nuestras soluciones para reducirnos al caso anterior, es decir, buscamos *remover el drift*. Asumimos dos hipótesis en lo que sigue:

(i) **Non-Degeneracy (ND) :**

$$\sigma^2(x) > 0 \quad \forall x \in I \tag{2.70}$$

(ii) **Local Integrability (LI) :**

$$\forall x \in I \; \exists \varepsilon > 0 \quad \text{tal que} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{|b(y)|}{\sigma^2(y)} dy < \infty \tag{2.71}$$

Desde luego, este $\varepsilon > 0$ debe ser tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq I$. La condición (i) nos dice que el coeficiente de dispersión no posee ceros. Esto hará algunas cosas más fáciles. La condición (ii) es equivalente a pedir que $y \mapsto \frac{b(y)}{\sigma^2(y)}$ sea una función en $L^1_{loc}(I)$.

La siguiente definición será clave en lo que sigue y en el capítulo 3.

Definición 2.14 *Sea $c \in I$ un real fijo. Bajo las condiciones anteriores se define la **función de escala** como:*

$$p(x) := \int_c^x \exp\{-2 \int_c^u \frac{b(s)}{\sigma^2(s)} ds\} du \quad x \in I \tag{2.72}$$

La función $g(u) := \int_c^u \frac{b(s)}{\sigma^2(s)} ds$ está bien definida gracias a la hipótesis anteriores y resulta ser absolutamente continua con $g'(u) = \frac{b(u)}{\sigma^2(u)}$ ctp en I. Veamos algunas propiedades de p.

Proposición 2.15 *En el contexto anterior:*

(i) $p \in C^1(I)$ y $p'(x) > 0$ para todo $x \in I$

(ii) p es estrictamente creciente.

(iii) p' es derivable ctp en I y su derivada satisface:

$$\frac{\sigma^2(x)}{2} p''(x) + b(x) p'(x) = 0 \quad \text{ctp en } I \tag{2.73}$$

Estas propiedades son fáciles de verificar. Por lo tanto, su demostración se omite.

La función de escala depende de el valor $c \in I$ escogido. Se puede pensar en p como la solución de la ecuación diferencial (2.73), con $p(c) = 0$ y $p'(c) = 1$. Claramente, las propiedades anteriores son válidas para todo c elegido como *pivote*. Hacemos explícita la dependencia al nombrar como $p_c(x)$ a la función de escala. En la siguiente proposición explicitamos la relación:

Lema 2.16 $\forall a, c \in I$

$$p_a(x) = p_a(c) + p_a'(c)p_c(x) \quad \forall x \in I \tag{2.74}$$

La cual también es fácil de chequear. Esto nos dice que al cambiar el *pivote* se encontrará una transformación lineal afín positiva de $p_c(x)$. Como veremos más adelante, estudiaremos propiedades de la función de escala que no dependerán de el *pivote* elegido. Esto gracias a (2.74).

A continuación, nos reducimos al caso $I = \mathbb{R}$. Nuestro objetivo es buscar soluciones débiles hasta tiempo de explosión. Como la función $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es creciente, podemos definir los siguientes límites en $\overline{\mathbb{R}}$.

$$p(\infty) := \lim_{t\to\infty} p(t), \quad p(-\infty) := \lim_{t\to-\infty} p(t)$$

Si algún límite es infinito entonces crece o decrece sin cota. Si son acotadas, entonces crece con asíntota. De esta forma, podemos indentificar la imagen de p de la forma $p(\mathbb{R}) = (p(-\infty), p(\infty))$. Del estricto crecimiento, se tiene que la función p es inyectiva y por tanto se puede invertir en su imagen. De esta forma definimos:

$$q : (p(-\infty), p(\infty)) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Como la inversa de p. Enumeramos sus propiedades a continuación.

Proposición 2.17 *En el contexto anterior:*

(i) $q \in C^1(p(-\infty), p(\infty))$ *y* $q'(y) > 0$ *para todo* $y \in (p(-\infty), p(\infty))$

(ii) q *es estrictamente creciente.*

(iii) q' *es derivable ctp y su derivada satisface:*

$$q''(y) - \frac{2b(q(y))}{\sigma^2(q(y))}(q'(y))^2 = 0 \quad \textit{ctp en } (p(-\infty), p(\infty)) \tag{2.75}$$

Demostración. Como $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua e inyectiva, su inversa q es continua. Además, por ser p diferenciable, de la formula de la derivada de la inversa, tenemos que:

$$q'(y) = \frac{1}{p'(q(y))} \quad \forall y \in p(\mathbb{R}) \tag{2.76}$$

Esto tiene sentido pues $p' > 0$. Ahora, esto nos dice que q' es continua y estrictamente positiva. Con esto tenemos (i). Además, de la derivada sabemos que q es estrictamente creciente. Esto es (ii). Para (iii), consideremos el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid p''(x) \text{ existe }\}$. Entonces A^c es un conjunto despreciable. Dado que p es C^1, en particular es absolutamente continua, por lo tanto $p(A^c)$ es despreciable en $p(\mathbb{R})$. Además, $p(A^c) = p(\mathbb{R})\backslash p(A)$. Así, sea $y \in p(A)$, entonces $y = p(x) \Rightarrow q(y) = x$, por lo que $q(y)$ es un punto de derivabilidad de p'. Aquí,

$$q''(y) = \frac{-1}{[p'(q(y))]^2}p''(q(y))q'(y) = \frac{2b(q(y))}{\sigma^2(q(y))}\frac{p'(q(y))}{[p'(q(y))]^2}q'(y) = \frac{2b(q(y))}{\sigma^2(q(y))}(q'(y))^2 \tag{2.77}$$

Todo esto en $p(A)$, de complemento $p(\mathbb{R})\backslash p(A) = p(A^c)$, despreciable por lo anterior. Así, la ecuación se tiene c.s. en $p(\mathbb{R})$. □

Podemos extender la función p a $[-\infty, \infty]$ con la notación $p(-\infty), p(\infty)$. Esto deja a la función extendida p como continua. De la misma forma, se puede extender q a $[p(-\infty), p(\infty)]$, definiendo $q(p(-\infty)) := -\infty$ y $q(p(\infty)) := \infty$.

Consideremos el siguiente ejemplo en $I = \mathbb{R}$

Ejemplo

$$dX_t = sgn(X_t)dt + \sigma dW_t \tag{2.78}$$

con $\sigma > 0$. En esta ecuación $b(x) = sgn(x)$ y $\sigma(x) = \sigma > 0$. De esto se desprende la no degenerancia. Además, $\frac{|b(y)|}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}$ lo cual es localmente integrable. Para calcular la función de escala, consideremos $c = 0$. Así, para $x \geq 0$:

$$p(x) = \int_0^x e^{\frac{-2u}{\sigma^2}} du = -\frac{\sigma^2}{2} e^{\frac{-2u}{\sigma^2}} |_0^x = \frac{\sigma^2}{2}(1 - e^{\frac{-2x}{\sigma^2}})$$

De esta forma, se obtiene:

$$p(x) = \frac{\sigma^2}{2} sgn(x)(1 - e^{\frac{-2|x|}{\sigma^2}})$$

En este caso $p(\infty) = \frac{\sigma^2}{2}$ y $p(-\infty) = -\frac{\sigma^2}{2}$.

Ejemplo Consideremos la ecuación del Movimiento Browniano con drift $\mu > 0$ y dispersión $\sigma > 0$

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t \tag{2.79}$$

Con $I = \mathbb{R}$. Para el pivote $c = 0$ encontramos que la función de escala está dada por

$$p(x) = \frac{\sigma^2}{2\mu}(1 - e^{-\frac{2\mu}{\sigma^2}x}) \quad x \in \mathbb{R}$$

En este caso $p(\infty) = \frac{\sigma^2}{2\mu}$ y $p(-\infty) = -\infty$.

2.2.2. Remover el Drift

En esta sección desarrollamos teoremas de existencia y unicidad para la ecuación:

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \tag{2.80}$$

Con $I = \mathbb{R}$ y bajo las condiciones de **(ND)** y **(LI)**. Se define:

$$\tilde{\sigma}(y) := \begin{cases} p'(q(y))\sigma(q(y)) & \text{si } p(-\infty) < y < p(\infty) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{2.81}$$

Proposición 2.18 *Sea $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$ una solución débil hasta tiempo de explosión de* (2.80)*, bajo las condiciones* ***(ND)*** *y* ***(LI)****. Entonces, el proceso $Y = \{Y_t := p(X_t), \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ en la tupla anterior, es una solución débil de:*

$$dY_t = \tilde{\sigma}(Y_t)dW_t \tag{2.82}$$

con $p(-\infty) < Y_0 < p(\infty) \quad \mathbb{P} - c.s$

La conclusión análoga se tiene en el caso en que X sea una solución fuerte hasta tiempo de explosión de (2.80). Entonces, $Y_t = p(X_t)$ será una solución fuerte de de (2.82).

Demostración. Debemos demostrar que $(Y, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$ es una solución débil de (2.82). El ítem (i) se tiene de forma directa. Para (ii), considere que $p : [-\infty, \infty] \longrightarrow [p(-\infty), p(\infty)]$ es una función continua. Por esto, se tiene que $Y_t = p(X_t)$ está bien definida y posee trayectorias continuas a valores en $[p(-\infty), p(\infty)] \subseteq \bar{\mathbb{R}}$. Claramente, $\{Y_t := p(X_t), \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ es adaptado.

Si $|X_0| < \infty$ entonces $Y_0 = p(X_0) \in (p(-\infty), p(\infty))$. Por tanto $p(-\infty) < Y_0 < p(\infty)$ de forma $\mathbb{P}$-c.s. Para (iii) y (iv), considere el proceso X^{S_n}, para un $n \geq 1$. Usamos la fórmula de Ito General (1.35) en $p(X^{S_n})$ junto a (2.73) y obtenemos:

$$
\begin{aligned}
p(X_t^{S_n}) &= p(X_0) + \int_0^t p'(X_s^{S_n}) dX_s^{S_n} + \frac{1}{2}\int_0^t p''(X_s^{S_n}) d\langle X^{S_n}\rangle_s \\
&= p(X_0) + \int_0^t p'(X_{s\wedge S_n}) b(X_s) \mathbb{1}_{\{s\leq S_n\}} ds + \int_0^t p'(X_{s\wedge S_n})\sigma(X_s)\mathbb{1}_{\{s\leq S_n\}} dW_s \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{-2b(X_{s\wedge S_n})}{\sigma^2(X_{s\wedge S_n})} p'(X_{s\wedge S_n}) d\langle X^{S_n}\rangle_s \\
&= p(X_0) + \int_0^t p'(X_{s\wedge S_n}) b(X_s) \mathbb{1}_{\{s\leq S_n\}} ds + \int_0^t p'(X_{s\wedge S_n})\sigma(X_s)\mathbb{1}_{\{s\leq S_n\}} dW_s \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{-2b(X_{s\wedge S_n})}{\sigma^2(X_{s\wedge S_n})} p'(X_{s\wedge S_n}) \sigma^2(X_s)\mathbb{1}_{\{s\leq S_n\}} ds \\
&= p(X_0) + \int_0^t p'(X_{s\wedge S_n}) b(X_{s\wedge S_n}) \mathbb{1}_{\{s\leq S_n\}} ds + \int_0^t p'(X_{s\wedge S_n})\sigma(X_{s\wedge S_n})\mathbb{1}_{\{s\leq S_n\}} dW_s \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{-2b(X_{s\wedge S_n})}{\sigma^2(X_{s\wedge S_n})} p'(X_{s\wedge S_n}) \sigma^2(X_{s\wedge S_n})\mathbb{1}_{\{s\leq S_n\}} ds \\
&= p(X_0) + \int_0^t p'(X_{s\wedge S_n})\sigma(X_{s\wedge S_n})\mathbb{1}_{\{s\leq S_n\}} dW_s = p(X_0) + \int_0^t p'(X_s)\sigma(X_s)\mathbb{1}_{\{s\leq S_n\}} dW_s
\end{aligned}
$$

De esta forma, identificamos $p(X_t) = Y_t$, de donde obtenemos que $X_t = q(Y_t)$. Así:

$$
Y_{t\wedge S_n} = Y_0 + \int_0^t p'(q(Y_s))\sigma(q(Y_s))\mathbb{1}_{\{s\leq S_n\}} dW_s \tag{2.83}
$$

Si $S_n > 0$, entonces se tendrá que $|X_s| \leq n$ para $0 \leq s \leq S_n$. En particular, X_s será real e $Y_s = p(X_s) \in (p(-\infty), p(\infty))$. Por esto $p'(q(Y_s))\sigma(q(Y_s))\mathbb{1}_{\{s\leq S_n\}} = \tilde{\sigma}(Y_s)\mathbb{1}_{\{s\leq S_n\}}$. Con esto, se tiene que para todo $n \geq 1$ y $t \geq 0$:

$$
Y_{t\wedge S_n} = Y_0 + \int_0^{t\wedge S_n} \tilde{\sigma}(Y_s) dW_s \tag{2.84}
$$

Si $S_n = 0$ también se tiene. Por continuidad de las trayectoria $Y_{t\wedge S_n} \longrightarrow Y_{t\wedge S}$, lo que implica que el lado derecho de la ecuación también debe converger. Del lema 2.1 sabemos que en

$\{\int_0^{t\wedge S} \tilde{\sigma}^2(Y_s)ds = \infty\}$ el límite $\lim_{n\to\infty} Y_{t\wedge S_n}$ no va a existir en $\bar{\mathbb{R}}$ lo cual es una contradicción con la continuidad. Esto implica que para todo $t \geq 0$

$$\int_0^{t\wedge S} \tilde{\sigma}^2(Y_s)ds < \infty \quad \mathbb{P} - c.s. \tag{2.85}$$

En $\{S < \infty\}$ se tiene que $X_t = X_S$ para todo $t \geq S$. Por tanto, para $t \geq S \quad Y_t = p(X_t) = p(X_S) = Y_S$. Así, $Y_t = Y_{t\wedge S}$ para todo $t \geq 0$. Ahora, se tiene que $|X_S| = \infty$, por tanto $Y_S \in \{p(-\infty), p(\infty)\}$, de esta forma $\tilde{\sigma}(Y_S) = 0$. Así, se tiene $\forall t \geq S \quad \tilde{\sigma}(Y_t) = 0$ en $\{S < \infty\}$. Es decir, la dispersión auxiliar $\tilde{\sigma}(Y_s)$ se desvanece en S.

Probaremos ahora (iii). Considere $t \geq 0$. Si $t \leq S$, entonces se tiene que $\int_0^t \tilde{\sigma}^2(Y_s)ds = \int_0^{t\wedge S} \tilde{\sigma}^2(Y_s)ds < \infty$ de forma $\mathbb{P}$-c.s.En $\{S < t\}$ se tiene que:

$$\int_0^t \tilde{\sigma}^2(Y_s)ds = \int_0^S \tilde{\sigma}^2(Y_s)ds + \int_t^S \tilde{\sigma}^2(Y_s)ds = \int_0^{S\wedge t} \tilde{\sigma}^2(Y_s)ds < \infty \tag{2.86}$$

Así, se tiene (iii) y $\mathbb{P}$-c.s:

$$\int_0^t \tilde{\sigma}^2(Y_s)ds < \infty \quad \forall t \geq 0 \tag{2.87}$$

De esta forma, queda bien definido el proceso $\int_0^t \tilde{\sigma}(Y_s)dW_s$ a valores reales y con trayectorias continuas. Por lo tanto, llevando al límite la ecuación (2.84) se tiene que $\mathbb{P}$-c.s. para todo $t \geq 0$:

$$Y_{t\wedge S} = Y_0 + \int_0^{t\wedge S} \tilde{\sigma}(Y_s)dW_s \tag{2.88}$$

Note que de lo anterior $Y_t = Y_{t\wedge S}$ posee valores reales para todo $t \geq 0$. Veamos que se cumple (iv). De la observación anterior tenemos que para todo $t \geq 0$: $Y_t = Y_0 + \int_0^{t\wedge S} \tilde{\sigma}(Y_s)dW_s$. Si $S = \infty$ se cumple (iv). Si $S < \infty$ se tendrá la ecuación para $t \leq S$, si $t > S$, se tendrá que:

$$Y_t = Y_0 + \int_0^S \tilde{\sigma}(Y_s)dW_s + \int_S^t \tilde{\sigma}(Y_s)dW_s = Y_0 + \int_0^t \tilde{\sigma}(Y_s)dW_s \tag{2.89}$$

$\square$

Esta proposición nos dice que una solución a nuestra EDE, mediante un cambio, se transforma en solución a otra ecuación. Será muy importante la discusión sobre el tiempo de explosión para nuestras soluciones. Esta proposición nos da una primera guía. Sea X una solución hasta tiempo de explosión de (2.80) bajo las condiciones (ND) y (LI), entonces:

$$p(\pm\infty) = \pm\infty \Rightarrow \mathbb{P}[S = \infty] = 1 \tag{2.90}$$

Esto pues, en $\{S < \infty\}$ se tendrá que $|Y_S| = |p(X_S)| = \infty$. Si $\mathbb{P}[S < \infty] > 0$ entonces Y_t explotará con probabilidad positiva. Esto contradice al teorema 2.2. Esta es una condición suficiente para asegurar la no explosión, pero como veremos luego, no es necesaria.

Ahora, buscamos la conversa a la proposición anterior, tomando como punto de partida una solución de (2.82). Comenzamos con el siguiente lema:

Lema 2.19 *En el contexto anterior, considere* $(Z, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$ *una solución débil de* (2.82)*, con* $p(-\infty) < Z_0 < p(\infty) \quad \mathbb{P} - c.s.$ *Se define:*

$$T := \inf\{t \geq 0 \mid Z_t \notin (p(-\infty), p(\infty))\} \tag{2.91}$$

Entonces, $Z_{t\wedge T}$ *es solución débil de* (2.82).

Demostración. Se observa que T es el hitting time de un cerrado. Por esto, de la condición de partida se tiene que $\mathbb{P}[T > 0] = 1$. Se define $Z^T := \{Z_{t\wedge T}, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ el cual es un proceso adaptado y a trayectorias continuas. De esto, se desprende (i) y (ii). En $\{T < \infty\}$ se tendrá que $Z_T \notin (p(-\infty), p(\infty))$ por lo que $\tilde{\sigma}(Z_T) = 0$. Así, $\tilde{\sigma}(Z_{t\wedge T}) = \tilde{\sigma}(Z_t)\mathbb{1}_{\{t<T\}}$. De esta forma, para todo $t \geq 0$: $\int_0^t \tilde{\sigma}^2(Z_{s\wedge T})ds \leq \int_0^t \tilde{\sigma}^2(Z_s)\mathbb{1}_{\{s<T\}}ds \leq \int_0^t \tilde{\sigma}^2(Z_s)ds < \infty$. De donde se tiene (iii).

Además, para (iv) considere

$$\int_0^t \tilde{\sigma}(Z_{s\wedge T})ds = \int_0^t \tilde{\sigma}(Z_s)\mathbb{1}_{\{s<T\}}ds = \int_0^{t\wedge T} \tilde{\sigma}(Z_s)ds = Z_{t\wedge T} \tag{2.92}$$

Por lo tanto $Z_{t\wedge T}$ también es solución. Además, su condición inicial también es Z_0 y esta c.s. en $(p(-\infty), p(\infty))$. □

La ventaja de la solución $Z_{t\wedge T}$ es que dado que $\mathbb{P}[T > 0] = 1$ se tiene que $Z_{t\wedge T}$ se queda estacionada al llegar a la frontera de $[p(-\infty), p(\infty)]$ y cumple que $\mathbb{P}$-c.s.

$$Z_{t\wedge T} \in [p(-\infty), p(\infty)] \quad \forall t \geq 0 \tag{2.93}$$

Proposición 2.20 *Considere* $(Y, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$ *una solución débil de* (2.82)*, con* $p(-\infty) < Y_0 < p(\infty) \quad \mathbb{P} - c.s.$ *Se puede suponer que* Y *es de la forma descrita en el lema anterior. Entonces, el proceso*

$$X := \{X_t := q(Y_t), \mathcal{F}_t \,;\; 0 \leq t < \infty\} \tag{2.94}$$

está bien definido y $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$ *es una solución débil hasta tiempo de explosión de* (2.80).

Demostración. Del lema anterior, sabemos que $\mathbb{P}$-c.s. las trayectorias de Y se mantienen en $[p(-\infty), p(\infty)]$. Llamemos a este conjunto A. Se tiene que $\mathbb{P}(A) = 1$. Entonces, se define para todo $t \geq 0$.

$$X_t(\omega) := \begin{cases} q(Y_t(\omega)) & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{2.95}$$

Es decir, es la versión de $q(Y_t)$ parchada donde hayan problemas. Por esto, $X = \{X_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ es un proceso a valores en $\bar{\mathbb{R}}$, y con trayectorias continuas. Por las condiciones usuales, se tiene que X es adaptado. De esta forma, se tiene (i) y (ii).

Como $p(-\infty) < Y_0 < p(\infty)$ de forma $\mathbb{P}$-c.s. se tiene que $\mathbb{P}(|X_0| < \infty) = 1$. De esta forma , definimos las variables $S_n = \inf\{t \geq 0 \mid |X_t| \geq n\}$, las cuales son $\{\mathcal{F}_t\}$ tiempos de paradas. Nos gustaría usar la fórmula de Ito en $q(Y)$ pero , el problema es que cuando Y está en la frontera, la función arroja valores al infinito. Debemos introducir un tipo de control. Consideremos el proceso:

$$Y_t^{S_n} = Y_0 + \int_0^{t\wedge S_n} \tilde{\sigma}(Y_s)dWs = \int_0^t \tilde{\sigma}(Y_s)\mathbb{1}_{\{s\leq S_n\}}dWs \tag{2.96}$$

Por lo que $\langle Y^{S_n}\rangle_t = \int_0^t \tilde{\sigma}^2(Y_s)\mathbb{1}_{\{s\leq S_n\}}ds$. Además, se tiene para todo $n \geq 1$ que $\mathbb{P}$-c.s. se tiene que $Y_t^{S_n} \in (p(-\infty), p(\infty)) \quad \forall t \geq 0$. Considere que el conjunto donde $|X_s| < \infty$ para todo $s \leq S_n$. Este posee medida 1. Entonces, para $s \leq S_n$ se tiene que $Y_s \in (p(-\infty), p(\infty))$, pues de otra forma Y tendría un valor de frontera con lo que $|X_s| = |q(Y_s)| = |q(p(\pm\infty))| = \infty$.

Así, se puede aplicar la fórmula de Itô generalizada en Y^{S_n}, con lo que se obtiene que:

$$\begin{aligned}
X_{s\wedge S_n} &:= q(Y_0) + \int_0^t q'(Y_{s\wedge S_n})dY_s^{S_n} + \int_0^t q''(Y_{s\wedge S_n})d\langle Y^{S_n}\rangle_s \\
&:= X_0 + \int_0^t q'(Y_{s\wedge S_n})\tilde{\sigma}(Y_s)\mathbb{1}_{\{s\leq S_n\}}dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t q''(Y_{s\wedge S_n})\tilde{\sigma}^2(Y_s)\mathbb{1}_{\{s\leq S_n\}}ds \\
&:= X_0 + \int_0^{t\wedge S_n} q'(Y_s)\tilde{\sigma}(Y_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge S_n} q''(Y_s)\tilde{\sigma}^2(Y_s)ds \\
&:= X_0 + \int_0^{t\wedge S_n} q'(Y_s)p'(q(Y_s))\sigma(q(Y_s))dW_s + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge S_n} q''(Y_s)[p'(q(Y_s))]^2\sigma^2(q(Y_s))ds \\
&:= X_0 + \int_0^{t\wedge S_n} \frac{1}{p'(q(Y_s))}p'(q(Y_s))\sigma(X_s)dW_s \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge S_n} \frac{2b(q(Y_s))}{[p'(q(Y_s))]^2\sigma^2(q(Y_s))}[p'(q(Y_s))]^2\sigma^2(q(Y_s))ds \\
&= X_0 + \int_0^{t\wedge S_n} \sigma(X_s)dW_s + \int_0^{t\wedge S_n} b(X_s)ds
\end{aligned}$$

De esto se desprende en particular que $\int_0^t q''(Y_{s\wedge S_n})d\langle Y^{S_n}\rangle_s = \int_0^{t\wedge S_n} b(X_s)ds$ de forma c.s. La parte izquierda de la ecuación es la integral de una función L^1_{loc} (derivada de función absolutamente continua) con respecto a una variación cuadrática. Esto es finito c.s. según el lema 1.33. Así, se tiene que $\int_0^{t\wedge S_n} |b(X_s)|ds < \infty \quad \mathbb{P}$-c.s.

De forma similar, como la integral del cuadrado $q'(Y_s)$ esta bien definida, se tiene que $\int_0^t q'^2(Y_{s\wedge S_n})d\langle Y^{S_n}\rangle_s$ está bien definida. De esto se obtiene que $\int_0^{t\wedge S_n} \sigma^2(X_s)ds < \infty \quad \mathbb{P}$-c.s.

Veamos (v). Considere el tiempo de salida de $(p(-\infty), p(\infty))$ por Y denominado T. En $\{S < \infty\}$ se tiene que $|q(Y_S)| = |X_S| = \infty$. Por tanto Y_S está en la forntera del intervalo. Así $S \geq T$. De esta forma sea $t \geq S$. Entonces $X_t = q(Y_t) = q(Y_S) = X_S$, pues luego de T el proceso Y se queda parado. □

Este teorema es de extrema utilidad pues nos permite buscar soluciones a la EDE general observando el caso sin drift. Este caso está estudiado ampliamente en la sección anterior. La idea es ver bajo que hipótesis la ecuación $dY_t = \tilde{\sigma}(Y_t)dt$ posee solución y tomar la solución construida y obtener una solución al caso general. Esto lo haremos en el siguiente teorema:

Teorema 2.21 *Considere la ecuación* (2.80) *bajo las condiciones **(ND)** y **(LI)**. Suponga además que σ^{-2} es localmente integrable. Entonces* (2.80) *posee solución débil hasta tiempo de explosión para toda ley inicial μ. Además, esta solución es única en ley.*

Demostración. Bajo las condiciones anteriores, considere la ecuación auxiliar $dY_t = \tilde{\sigma}(Y_t)dt$. Demostremos que $I(\tilde{\sigma}) = Z(\tilde{\sigma})$.

Dada las condicion de (ND) se tiene que $\sigma(q(y)) \neq 0$ por lo que $Z(\tilde{\sigma}) = (p(-\infty), p(\infty))^c$. Si $Z(\tilde{\sigma}) \neq \phi$, escojamos un punto y_0 aquí. Entonces $\tilde{\sigma}(y)$ será cero en un ε a la derecha de y_0 o a la izquierda de y_0 o ambos. En cualquier caso, será identico igual a 0 en un continuo en la bola $B(y_0, \varepsilon)$ lo que implica que $y_0 \in I(\tilde{\sigma})$. Por lo tanto, $Z(\tilde{\sigma}) \subseteq I(\tilde{\sigma})$. Si $Z(\tilde{\sigma}) = \phi$, también se tiene.

Por otro lado sea $y_0 \in (p(-\infty), p(\infty))$. Escogemos $\varepsilon > 0$ tal que:

$$p(-\infty) < y_0 - \varepsilon < y_0 < y_0 + \varepsilon < p(\infty) \tag{2.97}$$

Entonces $\int_{y_0-\varepsilon}^{y_0+\varepsilon} \frac{dy}{\tilde{\sigma}^2(y)} = \int_{y_0-\varepsilon}^{y_0+\varepsilon} \frac{dy}{(p'(q(y)))^2\sigma^2(q(y))}$. Realizamos un cambio de variable con $q(y) = x$ la cual es C^1 y creciente en el intervalo. Así $q'(y)dy = dx \Rightarrow \frac{1}{p'(q(y))}dy = dx$. Así:

$$\int_{y_0-\varepsilon}^{y_0+\varepsilon} \frac{dy}{\tilde{\sigma}^2(y)} = \int_{q(y_0-\varepsilon)}^{q(y_0+\varepsilon)} \frac{dx}{p'(x)\sigma^2(x)} \leq \frac{1}{c} \int_{q(y_0-\varepsilon)}^{q(y_0+\varepsilon)} \frac{dx}{\sigma^2(x)} < \infty \tag{2.98}$$

Donde $c = \inf_{x \in [q(y_0-\varepsilon), q(y_0+\varepsilon)]} p'(x) > 0$. De esta forma, $Z(\tilde{\sigma})^c \subseteq I(\tilde{\sigma})^c$. Así, se tiene que $I(\tilde{\sigma}) = Z(\tilde{\sigma})$. Considere una ley inicial μ en $\mathbb{R}$. Entonces definimos la ley $\nu(\cdot) := \mu(p^{-1}(\cdot))$ la cual concentra en $(p(-\infty), p(\infty))$. En efecto $\nu(p(\mathbb{R})) = \mu(p^{-1}(p(\mathbb{R}))) = \mu(\mathbb{R}) = 1$.

Por el Teorema de Existencia de Engelbert & Schmidt, existe una solución débil (Y, W), $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\{\mathcal{F}_t\}$ de (2.82) con ley inicial ν. Se tiene que Y_0 está en $(p(-\infty), p(\infty))$ de forma $\mathbb{P}$-c.s. y que presenta el comportamiento requerido debido a la unicidad. De la proposición anterior, mediante q, obtenemos una solución débil hasta tiempo de explosión $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$ a la EDE (2.80).

Además, para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ se tiene que:

$$\mathbb{P}[X_0 \in A] = \mathbb{P}q(Y_0)^{-1}A = \mathbb{P}Y_0^{-1}q^{-1}A = \nu(p(A)) = \mu(p^{-1}p(A)) = \mu(A) \tag{2.99}$$

pues p es inyectiva. Así, la ley de X_0 es μ.

Veamos la unicidad en ley. Considere dos soluciones $X^{(1)}$ y $X^{(2)}$ hasta tiempo de explosión de la ecuación (2.80), ambas con la misma ley μ. Entonces de la proposición 2.18, sabemos que $p(X^{(1)})$ y $p(X^{(2)})$ son soluciones débiles de la ecuación sin drift (2.82) con la misma ley inicial. Por el Teorema de Unicidad de Engelbert & Schmidt, las soluciones $p(X^{(1)})$ y $p(X^{(2)})$ poseen la misma ley. Así, considere $A \in \mathcal{B}(C[0,\infty), \bar{\mathbb{R}})$. Como p es inyectiva, $\{X^{(1)} \in A\} = \{p(X^{(1)}) \in p(A)\}$. Así:

$$\mathbb{P}^{(1)}[X^{(1)} \in A] = \mathbb{P}^{(1)}[p(X^{(1)}) \in p(A)] = \mathbb{P}^{(2)}[p(X^{(2)}) \in p(A)] = \mathbb{P}^{(2)}[X^{(2)} \in A] \tag{2.100}$$

Así, hay unicidad en ley. $\square$

Volvamos al ejemplo discutido anteriormente:

$$dX_t = sgn(X_t)dt + \sigma dW_t \tag{2.101}$$

con $\sigma > 0$. Ya vimos que este cumple las condiciones **(ND)** y **(LI)**. Además, $\frac{1}{\sigma^2}$ es localmente integrable. Por lo tanto, para toda ley inicial μ existe solución débil hasta tiempo de explosión.

A continuación enunciamos resultados sobre unicidad trayectorial para la ecuación (2.69). Referenciamos las demostraciones a Karatzas & Shreve [11], capítulo 5.5 B. El siguiente resultado está basado en el teorema 1.40.

Corolario 2.22 *Asuma que la ecuación* (2.80) *cumple la condición de **(ND)**, **(LI)** y σ^{-2} es localmente integrable. Además, asuma que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple que:*

$$|b(x) - b(y)| \leq K|x - y|, \quad |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq h(|x - y|) \tag{2.102}$$

Donde $K > 0$ es una constante y h una función como en 1.40. Entonces, hay unicidad trayectorial para soluciones hasta tiempo de explosión de la ecuación (2.80)*.*

Adaptando el teorema de Yamada & Watanabe a este caso, se obtiene la existencia y unicidad trayectorial para soluciones fuertes hasta tiempo de explosión, de la ecuación (2.80).Veamos el ejemplo:

Ejemplo Considere la ecuación:

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t \tag{2.103}$$

Con $\mu \neq 0$ y $\sigma > 0$

En esta ecuación $b(x) = \mu$ y $\sigma(x) > 0$. De aquí, se observan las condiciones **(ND)** y **(LI)**. Claramente σ^{-2} es localmente integrable. Además, el drift y la dispersión es Lipschitz. Por el teorema anterior, para esta ecuación existe una única solución fuerte hasta tiempo de explosión. Esta corresponde al movimiento Browniano con drift $X_t = \xi + \mu t + \sigma W_t$.

Volvamos a nuestro ejemplo: $dX_t = sgn(X_t)dt + \sigma dW_t$, con $\sigma > 0$. En este caso el drift $b(x) = sgn(x)$ no es continuo por lo que no podemos aplicar el teorema anterior. El siguiente teorema nos permite trabajar con este caso.

Proposición 2.23 *Considere b acotada y σ una función Lipschitz-continua tal que $\sigma(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces, la ecuación* (2.80) *posee una única solución fuerte.*

2.3. Test de Feller para Explosiones

2.3.1. Preliminares

En esta sección, estudiaremos procesos a valores en un intervalo $I = (l, r)$ con $-\infty \leq l < r \leq \infty$. Para esto, considere las funciones $b, \sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}$ Borel medibles. Consideramos la ecuación diferencial estocástica en una dimensión:

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \tag{2.104}$$

donde la noción de solución es la de solución débil en un intervalo (1.43). En lo que sigue, consideramos las siguientes hipótesis.

(i) **Non-Degeneracy (ND)' :**

$$\sigma^2(x) > 0 \quad \forall x \in I \tag{2.105}$$

(ii) **Local Integrability (LI)' :**

$$\forall x \in I\ \exists \varepsilon > 0 \quad \text{ tal que } \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{1+|b(y)|}{\sigma^2(y)} dy < \infty, \tag{2.106}$$

donde $B(x,\varepsilon) \subseteq I$.

Esto es equivalente a que $y \mapsto \frac{1+|b(y)|}{\sigma^2(y)}$ es una función $L^1_{loc}(I)$. Esto nos dice que $y \mapsto \frac{b(y)}{\sigma^2(y)}$ y que $y \mapsto \frac{1}{\sigma^2(y)}$ están en $L^1_{loc}(I)$. Por tanto, estamos también en el caso (LI). Note que bajo las condiciones anteriores $I(\sigma) = Z(\sigma) = \phi$.

Para $c \in I$, consideramos la **función de escala** $p \in C^1(I)$ definida en (2.72). Recuerde que $p'(x) > 0$ para todo $x \in I$ y es solución de $\frac{\sigma^2(x)}{2}p''(x) + b(x)p'(x) = 0 \quad$ ctp en I.

Definición 2.24 *Se define la* ***medida de velocidad*** *en este contexto como la medida m en $(I, \mathcal{B}(I))$ dada por la densidad:*

$$m(dx) := \frac{2dx}{p'(x)\sigma^2(x)} \tag{2.107}$$

para $x \in I$.

Se ve que la densidad está bien definida y $m(dx) > 0$ para todo $x \in I$. Por esto, está bien definida la medida. Además, para todo compacto $K \subseteq I$ se tiene que $m(K) < \infty$. En efecto, podemos considerar $C := \operatorname{ínf}_{x\in K} p'(x) > 0$ y obtener que $\frac{1}{p'(x)} \leq \frac{1}{C}$. De esta forma, gracias a $(LI)'$:

$$m(K) = \int_K m(dx) = \int_K \frac{2dx}{p'(x)\sigma^2(x)} \leq \frac{2}{C}\int_K \frac{dx}{\sigma^2(x)} < \infty.$$

De esto se desprende que la medida es σ-finita.

Definición 2.25 *Considere $[a,b] \subseteq I$ con $a < b$, se define la* ***función de Green*** *en $[a,b]$ como $G_{a,b} : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ donde*

$$G_{a,b}(x,y) = \frac{(p(x\wedge y) - p(a))(p(b) - p(x \vee y))}{p(b) - p(a)} \tag{2.108}$$

para todo $x, y \in [a,b]$.

Se observa que $G_{a,b}$ es una función no-negativa y acotada. Esto último pues p es una función acotada en $[a,b]$.

Definición 2.26 *En el contexto anterior, se define:*

$$M_{a,b}(x) := \int_a^b G_{a,b}(x,y)m(dy) \tag{2.109}$$

para todo $x \in [a,b]$.

Es directo obtener la siguiente fórmula para $M_{a,b}$.

Lema 2.27 *En el contexto anterior, para todo $x \in [a,b]$:*

$$M_{a,b}(x) = -\int_a^x p(x) - p(y)m(dy) + \frac{p(x)-p(a)}{p(b)-p(a)} \int_a^b p(b) - p(y)m(dy).$$

A partir de esto, se puede obtener:

Proposición 2.28 *La función $M_{a,b} \in C^1([a,b])$, con derivada $M'_{a,b}$ absolutamente continua. Además $M_{a,b}(x)$ es solución del problema:*

$$\frac{\sigma^2(x)}{2} M''_{a,b}(x) + b(x)M'_{a,b}(x) = -1 \quad \forall x \in (a,b) \text{ } ctp \tag{2.110}$$

con $M_{a,b}(a) = M_{a,b}(b) = 0$.

2.3.2. Propiedades de las Soluciones

A continuación, usamos las funciones construidas anteriormente para obtener propiedades de nuestras soluciones en el intervalo. En especial, nos interesa estudiar el problema de la salida de una solución por un intervalo (a,b). En lo que sigue, considere un intervalo $I = (l,r) \subseteq \mathbb{R}$ y dos reales a, b tal que $l < a < b < r$.

Teorema 2.29 *Sea $(X,W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$ una solución débil en el intervalo I de 2.104 tal que $X_0 = x \quad \mathbb{P} - c.s$ con $x \in (a,b)$. Se define:*

$$T_{a,b} := \text{ínf}\{t \geq 0 \mid X_t \notin (a,b)\}. \tag{2.111}$$

Entonces:

(i) $\mathbb{E}[T_{a,b}] < \infty$.

(ii) $\mathbb{E}[T_{a,b}] = M_{a,b}(x)$.

(iii) La variable $X_{T_{a,b}}$ está bien definida $\mathbb{P}$-c.s. y

$$\mathbb{P}[X_{T_{a,b}} = a] = \frac{p(b)-p(x)}{p(b)-p(a)} \qquad \mathbb{P}[X_{T_{a,b}} = b] = \frac{p(x)-p(a)}{p(b)-p(a)} \tag{2.112}$$

Demostración. Dado que $X_0 = x$ c.s se tiene que $\mathbb{P}[T_{a,b} > 0] = 1$. Por esto , las trayectorias del proceso $X^{T_{a,b}}$ está en $[a,b]$ de forma c.s. De las hipótesis se tiene que:

$$X_t^{T_{a,b}} = X_0^{T_{a,b}} + \int_0^t b(X_s^{T_{a,b}}) \mathbb{1}_{\{s \leq T_{a,b}\}} ds + \int_0^t \sigma(X_s^{T_{a,b}}) \mathbb{1}_{\{s \leq T_{a,b}\}} dW_s.$$

Por lo que la semimartingala posee variación igual a $\langle X^{T_{a,b}}\rangle_t = \int_0^t \sigma^2(X_s^{T_{a,b}})\mathbb{1}_{\{s\leq T_{a,b}\}}ds$. Usando la fórmula de Itô generalizada en $M_{a,b}$ se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
M_{a,b}(X_t^{T_{a,b}}) &= M_{a,b}(X_0^{T_{a,b}}) + \int_0^t M'_{a,b}(X_s^{T_{a,b}})dX_s^{T_{a,b}} + \frac{1}{2}\int_0^t M''_{a,b}(X_s^{T_{a,b}})d\langle X^{T_{a,b}}\rangle_s \\
&= M_{a,b}(x) + \int_0^t M'_{a,b}(X_s^{T_{a,b}})b(X_s^{T_{a,b}})\mathbb{1}_{\{s\leq T_{a,b}\}}ds + \int_0^t M'_{a,b}(X_s^{T_{a,b}})\sigma(X_s^{T_{a,b}})\mathbb{1}_{\{s\leq T_{a,b}\}}dW_s \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t M''_{a,b}(X_s^{T_{a,b}})\sigma^2(X_s^{T_{a,b}})\mathbb{1}_{\{s\leq T_{a,b}\}}ds \\
&= M_{a,b}(x) + \int_0^{t\wedge T_{a,b}} M'_{a,b}(X_s^{T_{a,b}})b(X_s^{T_{a,b}}) + \frac{\sigma^2(X_s^{T_{a,b}})}{2}M''_{a,b}(X_s^{T_{a,b}})ds \\
&+ \int_0^{t\wedge T_{a,b}} M'_{a,b}(X_s^{T_{a,b}})\sigma(X_s^{T_{a,b}})dW_s \\
&= M_{a,b}(x) - (t\wedge T_{a,b}) + \int_0^{t\wedge T_{a,b}} M'_{a,b}(X_s^{T_{a,b}})\sigma(X_s^{T_{a,b}})dW_s.
\end{aligned}
$$

Considere los tiempos de parada:

$$
\tau_n := \text{ínf}\{t\geq 0 \mid \int_0^t \sigma^2(X_s^{T_{a,b}})ds \geq n\}.
$$

De esta forma, se obtiene que

$$
M_{a,b}(X_{T_{a,b}\wedge t\wedge\tau_n}) = M_{a,b}(x) - (t\wedge T_{a,b}\wedge\tau_n) + \int_0^{t\wedge T_{a,b}\wedge\tau_n} M'_{a,b}(X_s^{T_{a,b}})\sigma(X_s^{T_{a,b}})dW_s.
$$

Pero $\int_0^{t\wedge T_{a,b}\wedge\tau_n} M'_{a,b}(X_s^{T_{a,b}})^2\sigma^2(X_s^{T_{a,b}})ds \leq ||M'_{a,b}||_\infty^2 \int_0^{t\wedge\tau_n\wedge T_{a,b}} \sigma^2(X_s^{T_{a,b}})ds \leq ||M'_{a,b}||_\infty^2 n$. Por lo tanto, la variación es acotada, por BDG la integral estocástica posee todos sus momentos acotados de forma uniforme. Por tanto es una martingala.

En particular $\mathbb{E}[\int_0^{t\wedge T_{a,b}\wedge\tau_n} M'_{a,b}(X_s^{T_{a,b}})\sigma(X_s^{T_{a,b}})dW_s] = 0$. De esta forma, obtenemos que:

$$
\mathbb{E}[M_{a,b}(X_{T_{a,b}\wedge t\wedge\tau_n})] = M_{a,b}(x) - \mathbb{E}[t\wedge T_{a,b}\wedge\tau_n].
$$

Se tiene que τ_n converge al tiempo de explosión de la integral, llamemos a esto τ. Ahora, por la hipótesis (iii) se tiene que la integral a $t\wedge T_{a,b}$ es finita. Por esto $t\wedge T_{a,b} < \tau$. Por tanto $T_{a,b}\wedge t\wedge\tau_n \longrightarrow T_{a,b}\wedge t\wedge\tau = T_{a,b}\wedge t$. Dado que $M_{a,b}$ es acotado, se tiene por TCD que $\mathbb{E}[M_{a,b}(X_{T_{a,b}\wedge t\wedge\tau_n})] \longrightarrow \mathbb{E}[M_{a,b}(X_{T_{a,b}\wedge t})]$. Y dado que $t\wedge T_{a,b}\wedge\tau_n \leq t$ acotado, también por TCD se tiene que: $\mathbb{E}[t\wedge T_{a,b}\wedge\tau_n] \longrightarrow \mathbb{E}[t\wedge T_{a,b}]$. Así, obtenemos que:

$$
\mathbb{E}[M_{a,b}(X_{T_{a,b}\wedge t})] = M_{a,b}(x) - \mathbb{E}[t\wedge T_{a,b}]
$$

Ahora, queremos que $t\to\infty$. Así, $t\wedge T_{a,b} \longrightarrow T_{a,b}$ y de forma creciente. Por TCM se tiene la convergencia de $\mathbb{E}[t\wedge T_{a,b}] \longrightarrow \mathbb{E}[T_{a,b}]$. Además,

$$
\mathbb{E}[t\wedge T_{a,b}] = M_{a,b}(x) - \mathbb{E}[M_{a,b}(X_{T_{a,b}\wedge t})] \leq M_{a,b}(x)
$$

Por lo que $\mathbb{E}[T_{a,b}] \leq M_{a,b}(x) < \infty$. Esto implica que el tiempo $T_{a,b}$ es finto c.s. De esta forma, está bien defino el límite $X_{T_{a,b}\wedge t} \longrightarrow X_{T_{a,b}}$. Por TCD se tiene que: $M_{a,b}(X_{T_{a,b}})] = M_{a,b}(x) - \mathbb{E}[T_{a,b}]$. Como $\mathbb{P}[0 < T_{a,b} < \infty] = 1$ se tiene que $X_{T_{a,b}} \in \{a, b\}$ de forma $\mathbb{P}$-c.s. Dado que $M_{a,b}$ vale 0 en la frontera, se tiene que$\mathbb{E}[M_{a,b}(X_{T_{a,b}})] = 0$. De esto se concluye que $\mathbb{E}[T_{a,b}] = M_{a,b}(x)$.

Para (iii), obervemos que de lo anterior $\mathbb{P}[X_{T_{a,b}} \in \{a, b\}] = 1$. Por lo que la variable es integrable y

$$\mathbb{E}[p(X_{T_{a,b}})] = p(a)\mathbb{P}[X_{T_{a,b}} = a] + p(b)\mathbb{P}[X_{T_{a,b}} = b]$$

Como dijimos anteriormente, $\mathbb{P}$-c.s. el proceso $X^{T_{a,b}}$ está en $[a, b]$, en particular en I. Usamos la fórmula de Itô de la misma forma que en la sección anterior y obtenemos:

$$\begin{aligned} p(X_t^{T_{a,b}}) &= p(X_0^{T_{a,b}}) + \int_0^t p'(X_s^{T_{a,b}})dX_s^{T_{a,b}} + \frac{1}{2}\int_0^t p''(X_s^{T_{a,b}})d\langle X^{T_{a,b}}\rangle_s \\ &= p(x) + \int_0^t p'(X_s^{T_{a,b}})\sigma(X_s^{T_{a,b}})\mathbb{1}_{\{s\leq T_{a,b}\}}dW_s \end{aligned}$$

Ahora, usando los tiempos anteriores:

$$p(X_{t\wedge\tau_n\wedge T_{a,b}}) = p(x) + \int_0^{t\wedge\tau_n\wedge T_{a,b}} p'(X_s^{T_{a,b}})\sigma(X_s^{T_{a,b}})dW_s$$

De forma análoga a lo anterior, obtenemos que $\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge T_{a,b}} p'(X_s^{T_{a,b}})^2\sigma^2(X_s^{T_{a,b}})ds \leq ||p'||^2_{L^\infty[a,b]}n$, y por lo tanto, la esperanza de la integral es 0.

$$\mathbb{E}[p(X_{t\wedge\tau_n\wedge T_{a,b}})] = p(x)$$

Como el proceso vive en $[a, b]$ se tiene que la función de escala p es continua y acotada acá. Así usando TCD y llevando $n \to \infty$ se tiene que $\mathbb{E}[p(X_{t\wedge T_{a,b}})] = p(x)$. De igual forma podemos llevar $t \to \infty$ y concluir que $\mathbb{E}[p(X_{T_{a,b}})] = p(x)$. De esta forma:

$$\begin{aligned} &p(x) = p(a)\mathbb{P}[X_{T_{a,b}} = a] + p(b)\mathbb{P}[X_{T_{a,b}} = b] = p(a)\mathbb{P}[X_{T_{a,b}} = a] + p(b) - p(b)\mathbb{P}[X_{T_{a,b}} = a] \\ &\Rightarrow \mathbb{P}[X_{T_{a,b}} = a] = \frac{p(x) - p(b)}{p(a) - p(b)} = \frac{p(b) - p(x)}{p(b) - p(a)} \end{aligned}$$

□

Esto nos dice en particular que $T_{a,b} < \infty, \mathbb{P} - c.s.$. Es decir, las soluciones en el intervalo escapan de todo compacto en torno a la partida con probabilidad 1. Note que esto no significa que tocará todo punto del intervalo, pues puede escapar de todo compacto siempre hacia un lado.

Ejemplo Considere un Movimiento Browniano $W = \{W_t, \mathcal{F}_t \mid 0 \leq t < \infty\}$ definido en un espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con las condiciones usuales. W_t es solución de la EDE homogénea con $b(x) = 0$ y $\sigma(x) = 1$. De esta forma $I = \mathbb{R}$ y se tienen las condiciones de $(LI)'$ y $(ND)'$. Con esto, la función de escala para $c = 0$ consite de $p(x) = x$ la identidad. La medida de velocidad es $m(dx) = 2dx$. Además, se puede demostrar que:

$$\mathbb{E}[T_{a,b}] = (x - a)(b - x) \qquad \mathbb{P}[W_{T_{a,b}} = a] = \frac{b - x}{b - a} \tag{2.113}$$

Cabe observar que para ecuaciones sin drift se tiene que $p(x) = x$. Es decir, X ya se encuentra en su *escala natural*. En este caso es un movimiento Browniano con un reloj estocástico. Ahora, este reloj lo lleva en parte la medida de velocidad.

El siguiente teorema nos da propiedades cualitativas de nuestras soluciones. Además de una primera aproximación al problema de explosión. Consideramos nuestro intervalo $I = (l, r) \subseteq \mathbb{R}$. Como la función de escala p es creciente podemos definir los siguiente límites en $\bar{\mathbb{R}}$.

$$p(r-) := \lim_{x \nearrow r} p(x) \qquad p(l+) := \lim_{x \searrow l} p(x) \tag{2.114}$$

Teorema 2.30 *Sea $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$ una solución débil en el intervalo I de 2.104 tal que $X_0 = x \in I \quad \mathbb{P} - c.s.$ Tenemos los siguientes casos:*

(a) Si $p(l+) = -\infty$, $p(r-) = \infty$, entonces:

$$\mathbb{P}[S = \infty] = \mathbb{P}\left[\sup_{0 \leq t < \infty} X_t = r\right] = \mathbb{P}\left[\inf_{0 \leq t < \infty} X_t = l\right] = 1$$

(b) Si $p(l+) > -\infty$, $p(r-) = \infty$, entonces:

$$\mathbb{P}\left[\lim_{t \nearrow S} X_t = l\right] = \mathbb{P}\left[\sup_{0 \leq t < S} X_t < r\right] = 1$$

(c) Si $p(l+) = -\infty$, $p(r-) < \infty$, entonces:

$$\mathbb{P}\left[\lim_{t \nearrow S} X_t = r\right] = \mathbb{P}\left[\inf_{0 \leq t < S} X_t > l\right] = 1$$

(d) Si $p(l+) > -\infty$, $p(r-) < \infty$, entonces:

$$\mathbb{P}\left[\lim_{t \nearrow S} X_t = l\right] = 1 - \mathbb{P}\left[\lim_{t \nearrow S} X_t = r\right] = \frac{p(r-) - p(x)}{p(r-) - p(l+)}$$

Demostración. Considere en el intervalo $I = (l, r)$, reales $a < b$ tales que $l < a < x < b < r$. Observemos primero que en todos los casos $T_{a,b} < S$ de forma $\mathbb{P}$-c.s. Sabemos que $T_{a,b}$ es finito c.s. Por esto, si $S = \infty$ se tiene. Además, si $S < \infty$ entonces existe un S_n tal que $T_{a,b} \leq S_n \leq S$. Si $T_{a,b} = S$ entonces el valor serían los extremos del intervalo, pero esto es un evento de probabilidad 0. Por tanto $\mathbb{P}[T_{a,b} < S] = 1$.

Hagamos el caso (a). Consideremos entonces el evento $\{X_{T_{a,b}} = a\}$. En este evento ,se tiene que existe un valor $t = T_{a,b}(\omega)$ tal que $X_t = a$, todo esto con probabilidad 1. Por tanto, se tendrá en este caso que $\{\inf_{0 \leq t < S} X_t \leq a\}$. Note que además, $T_{a,b} < S$. Así:

$$\mathbb{P}[\inf_{0 \leq t < S} X_t \leq a] \geq \mathbb{P}[X_{T_{a,b}} = a] = \frac{1 - p(x)/p(b)}{1 - p(a)/p(b)} \tag{2.115}$$

Llevando el $b \nearrow r$ se concluye que $\mathbb{P}[\inf_{0 \leq t < S} X_t \leq a] = 1$. Como esto es para todo a podemos tomar una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que decrezca a l. Haciendo una intersección numerable se tiene que:

$$\mathbb{P}\left[\forall n \geq 1 \ : \inf_{0\leq t<S} X_t \leq a_n\right] = 1 \tag{2.116}$$

En este conjunto, se tendrá que $\inf_{0\leq t<S} X_t \leq l$. Además, todo valor $X_t \geq l$ por tanto $\inf_{0\leq t<S} X_t \geq l$ es directa. Así, se obtiene que: $\mathbb{P}\left[\inf_{0\leq t<S} X_t = l\right] = 1$.

De forma análoga se tiene que $\{X_{T_{a,b}} = b\} \subseteq \{\sup_{0\leq t<S} X_t \geq b\}$. Así, se tiene que:

$$\mathbb{P}[\sup_{0\leq t<S} X_t \geq b] \geq \mathbb{P}[X_{T_{a,b}} = b] = \frac{p(x)/p(a)-1}{p(b)/p(a)-1} \tag{2.117}$$

Llevando $a \longrightarrow l$ se tiene que que $\mathbb{P}[\sup_{0\leq t<S} X_t \geq b] = 1$. Tomando una sucesión creciente a r. Se obtiene que $\mathbb{P}[\sup_{0\leq t<S} X_t \geq r] = 1$. Además, como cada valor es menor que r se tiene que $\mathbb{P}[\sup_{0\leq t<S} X_t = r] = 1$.

Si $\{S < \infty\}$ se tendrá que el límite de X_t existe. Este límite es l o r. Si el límite es r entonces por la continuidad de las trayectorias, el ínfimo antes de la explosión se alcanza: $\inf_{0<t<S} X_t = \min_{0<t<S} X_t$ y es mayor que l. Esto pues, estoy antes de la explosión, por tanto, estoy en el interior del intervalo. De esta forma $\inf_{0<t<S} X_t > l$. Si el límite es l, entonces de forma análoga se tendrá que $\sup_{0\leq t<S} X_t < r$. De esta forma: $\{S < \infty\} \subseteq \{\sup_{0\leq t<S} X_t < r\} \cup \{\inf_{0\leq t<S} X_t > l\}$. Los cuales son eventos de probablidad 0. Así $\mathbb{P}[S < \infty] = 0$ y $\mathbb{P}[S = \infty] = 1$.

Note que hemos desmotrado que:

$$p(r-) = \infty \Rightarrow \mathbb{P}\left[\inf_{0\leq t<S} X_t = l\right] = 1 \qquad p(l+) = -\infty \Rightarrow \mathbb{P}\left[\sup_{0\leq t<S} X_t = r\right] = 1 \tag{2.118}$$

Veamos el caso (b). Dado que $p(r-) = \infty$, se tiene que $\mathbb{P}[\inf_{0\leq t<S} X_t = l] = 1$. Considere una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x > a_n \searrow l$. Considere un real $b \in I$. Demostremos el claim de que:

$$\{X_{T_{a_n,b}} = b\} \nearrow \{\exists 0 \leq t < S \ X_t = b\} \tag{2.119}$$

El evento $A_n = \{X_{T_{a_n,b}} = b\}$ se lee como llegar a b antes que a a_n. Ahora, si se llega a b antes que a_n entonces se llega a b antes que a_{n+1}. Esto pues $a_{n+1} \leq a_n$. Así $A_n \subseteq A_{n+1}$. Veamos que el límite creciente es $\{\exists 0 \leq t < S \ X_t = b\}$. Claramente $\{X_{T_{a_n,b}} = b\} \subseteq \{\exists 0 \leq t < S \ X_t = b\}$ para todo a_n por lo que: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \{\exists 0 \leq t < S \ X_t = b\}$. Por otro lado, si antes de explotar $X_t = b$, entonces existe un límite inferior que no fue tocado. Este es el mínimo de una función continua (que se alcanza) por lo que tiene que estar en I. Así, debe haber un a_n abajo de él. Así, $\{\exists 0 \leq t < S \ X_t = b\} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Queda demostrado el claim.

Por la continuidad de la medida , se tiene que: $\mathbb{P}[\exists 0 \leq t < S \ : X_t = b] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_{T_{a_n,b}} = b] = \lim_{n\to\infty} \frac{p(x)-p(a_n)}{p(b)-p(a_n)} = \frac{p(x)-p(l+)}{p(b)-p(l+)}$. Ahora, considere una sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x < b_n \nearrow r$. Hacemos el siguiente claim:

$$\{\exists 0 \leq t < S \ X_t = b_n\} \searrow \{\sup_{0\leq t<S} X_t = r\} \tag{2.120}$$

Llamemos $B_n = \{\exists 0 \leq t < S \ X_t = b_n\}$. Entonces si existió un momento en que toqué b_{n+1} toque todo punto intermedio entre x y b_{n+1} (por continuidad), entonces también toqué

b_n. Así $B_{n+1} \subseteq B_n$, por lo que la familia es decreciente. Veamos que este límite es lo que corresponde. Si $\{\sup_{0\leq t<S} X_t = r\}$ entonces estoy tan cerca de r como quiera, por lo tanto toco todo punto entremedio (todo punto en $[x, r)$), en particular todos los b_n. Así,

$$\{\sup_{0\leq t<S} X_t = r\} \subseteq \bigcap_{n\geq 1}\{\exists 0 \leq t < S \; X_t = b_n\} \tag{2.121}$$

Por otro lado si toco b_n , entonces $\sup_{0\leq t<S} X_t \geq b_n$. Llevando esto al límite se tiene que $\sup_{0\leq t<S} X_t = r$. Con esto se tiene el claim. Por continuidad de la medida se tiene que:

$$\mathbb{P}[\sup_{0\leq t<S} X_t = r] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\exists 0 \leq t < S \; X_t = b_n] = \lim_{n\to\infty} \frac{p(x) - p(l+)}{p(b_n) - p(l+)} = 0 \tag{2.122}$$

Por tanto se tiene que $\mathbb{P}[\sup_{0\leq t<S} X_t < r] = 1$. Veamos a continuación la existencia del límite. De la Fórmula de Ito sabemos que el proceso $p(X_{t\wedge S_n}) - p(x)$ es una martingala local. Como X^{S_n} vive e un intervalo compacto, este proceso es acotado y se tiene que es una martingala. Definamos

$$Y_t^{(n)} = p(X_{t\wedge S_n}) - p(l+)$$

Así $Y^{(n)}$ es una martingala no negativa. Podemos tomar límite y obtener el proceso $Y_t = p(X_{t\wedge S}) - p(l+)$. Esto pues $p : [l, r] \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ sigue siendo continua. Como c.s. el supremo de X_t no es r, si ocurre explosión, esta no será por r. De esta forma $X_{t\wedge S}$ toma valores en $[l, r)$ y por hipótesis $p(X_{t\wedge S})$ posee valores reales.

Consideremos $s \leq t$. Usando el lema de Fatou:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[p(X_{t\wedge S}) - p(l+)] = \mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty} p(X_{t\wedge S_n}) - p(l+)] \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[p(X_{t\wedge S_n}) - p(l+)] = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[p(X_0) - p(l+)] = p(x) - p(l+)
\end{aligned}$$

Por lo que las variables Y_t son integrables. Además:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[p(X_{t\wedge S}) - p(l+)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty} p(X_{t\wedge S_n}) - p(l+)|\mathcal{F}_s] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[p(X_{t\wedge S_n}) - p(l+)|\mathcal{F}_s] \\
&= \liminf_{n\to\infty} p(X_{s\wedge S_n}) - p(l+) = p(X_{s\wedge S}) - p(l+)
\end{aligned}$$

Por tanto Y_t es una supermartingala no negativa y por tanto posee límite. Sumando $p(l+)$ se obtiene que $\lim_{t\to\infty} p(X_{t\wedge S}) \quad$ existe $\mathbb{P} - c.s.$. Si $S < \infty$ entonces el límite del proceso Y_t existe hacia S. Si $S = \infty$, entonces el teorema anterior nos dice que existe el límite hacia S. Así.

$$\lim_{t\nearrow S} p(X_t) \quad \text{existe } \mathbb{P} - c.s. \tag{2.123}$$

Como $p : [l, r) \longrightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente creciente, podemos obtenere una inversa continua $q : p([l, r)) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow [l, r)$ y obtener que: $\lim_{t\nearrow S} X_t \quad$ existe $\mathbb{P} - c.s.$. Veamos que este límite es l. Por una parte, necesariamente $\lim_{t\nearrow S} X_t \geq l$. Pero además, si no fuera l entonces el ínfimo no sería l. De esto se concluye:

$$\mathbb{P}\left[\lim_{t\nearrow S} X_t = l\right] = 1$$

Con esto se concluye el caso (b). Los casos (c) y (d) son análogos. $\square$

Veamos el caso (a). Este es el único caso donde se nos habla de el tiempo de explosión. Cuando los valores límites son infinitos, entonces la solución no explota. Esto generaliza la propiedad en el caso $I = \mathbb{R}$. Además, el proceso se acerca arbitrariamente a los límites. A pesar de esto, no los toca (pues no explota). Esto implica un comportamiento *recurrente* de la solución. Pasa por todos los puntos una infinidad de veces. En particular, el límite no existe para estos procesos.

Ejemplo Considere un Movimiento Browniano $(W_t)_{t\geq 0}$. Entonces, consideramos la martingala exponencial Z_t, la cual es solución de

$$dZ_t = Z_t dW_t$$

La cual es solución bajo el intervalo $I = (0, \infty)$. De esta manera, $\sigma(x) \neq 0$. Se puede probar que la función de escala en este caso es $p(x) = x - 1$. Por tanto $p(0-) = -1 > -\infty$ y $p(\infty) = \infty$. Por esto, la martingala exponencial cae en la categoría b). Además, sabemos que no explota por lo que si $X_0 = x$ c.s., se tiene que

$$Z_t \longrightarrow 0$$

como ya sabíamos.

Ejemplo Veamos nuestro clásico ejemplo:

$$dX_t = sgn(X_t)dt + \sigma dW_t$$

con $\sigma > 0$. De la sección anterior sabemos que $p(x) = \frac{\sigma^2}{2} sgn(x)(1 - e^{\frac{-2|x|}{\sigma^2}})$. En este caso $p(\infty) = \frac{\sigma^2}{2}$ y $p(-\infty) = -\frac{\sigma^2}{2}$. Por tanto estamos en el caso $I = (-\infty, \infty)$ y en el caso (d).

De (2.23) sabemos que esta solución no explota. Del teorema anterior tenemos que el proceso puede converger a ∞ o a $-\infty$. Supongamos que nuestro proceso comienza en 0. Entonces:

$$\mathbb{P}[\lim_{t\to\infty} X_t = \infty] = 1 - \frac{p(r-) - p(x)}{p(r-) - p(l+)} = \frac{1}{2} \tag{2.124}$$

2.3.3. Teorema de Feller

En esta sección estableceremos el *Teorema de Feller* o *Test de Feller para Explosiones*, el cual nos da condiciones necesarias y suficientes para la explosión. Consideramos una ecuación en el intervalo I con coeficientes que cumplen las hipótesis **(ND')** y **(LI')**.

En este marco, será clave construir una función que satisfaga una ecuación diferencial adecuada, para obtener propiedades mediante la fórmula de Itô. Se define recursivamente la familia de funciones $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ tales que $u_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Fijando $u_0(x) := 1$ para todo $x \in I$ y

$$u_n(x) := \int_c^x p'(y) \int_c^y u_{n-1}(z) m(dz) dy \quad x \in I \,, n \geq 1 \tag{2.125}$$

Donde c es un real fijo en I. En particular, definimos $v := u_1$. Usando el Teorema de Fubini, escribimos

$$v(x) := \int_c^x p'(y) \int_c^y u_0(z) m(dz) dy = \int_c^x p(x) - p(z) m(dz) \tag{2.126}$$

Lema 2.31 *En el contexto anterior:*

(i) *Para todo* $n \geq 0 \quad u_n \in C^1(I)$ *y* u_n' *es absolutamente continua.*

(ii) $u_n(x) \geq 0$ *para todo* $x \in I$ *y* $n \geq 0$.

(iii) u_n *es estrictamente decreciente en* (l, c) *y estrictamente creciente en* (c, r) *para* $n \geq 1$.

(iv) *Para todo* $n \geq 1$ *se cumple la ecuación:*

$$\frac{\sigma^2(x)}{2} u_n''(x) + b(x) u_n'(x) = u_{n-1}(x) \quad \forall x \text{ ctp en } I \tag{2.127}$$

Estas funciones son el primer ingrediente para nuestro teorema.

Lema 2.32 *En el contexto anterior, la serie:*

$$u(x) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \tag{2.128}$$

converge para todo $x \in I$. *Además:*

(i) $u(x) \in C^1(I)$ *y* $u'(x)$ *es absolutamente continua.*

(ii) u *es estrictamente decreciente en* (l, c) *y estrictamente creciente en* (c, r).

(iii) u *satisface la ecuación:*

$$\frac{\sigma^2(x)}{2} u''(x) + b(x) u'(x) = u(x) \quad \forall x \text{ ctp en } I \tag{2.129}$$

Con $u(c) = 1$ *y* $u'(c) = 0$

(iv) *Para todo* $x \in I$ *se tiene que:*

$$1 + v(x) \leq u(x) \leq e^{v(x)} \tag{2.130}$$

Demostración. Comenzemos obervando que:

$$v'(x) = \begin{cases} p'(x) m((c, x)) & \text{si } c \leq x \\ -p'(x) m((x, c)) & \text{si } x < c \end{cases} \tag{2.131}$$

En efecto, sabemos que para puntos $x \geq c$ se tiene que $v(x) = \int_c^x p'(y) \int_c^y m(dz) dy = \int_c^x p'(y) m((c, y)) dy$. De esta forma $v'(x) = p'(x) m((c, x))$. Para $x < c$, usando el TFC se obtiene que $v'(x) = p'(x) g_1(x) = p'(x) \int_c^x m(dz) = -p'(x) \int_x^c m(dz) = -p'(x) m((x, c))$.

Hacemos el siguiente claim:

$$\forall n \geq 0 \quad u_n(x) \leq \frac{v^n(x)}{n!} \tag{2.132}$$

El caso $n = 0$ y $n = 1$ es inmediato. Razonamos por inducción. Sea $n \geq 2$. Considere primero el caso $c \leq x$. En este caso.

$$
\begin{aligned}
u_n(x) &= \int_c^x p'(y)\int_c^y u_{n-1}(z)m(dz)dy \leq \int_c^x p'(y)\int_c^y \frac{v^{n-1}(z)}{(n-1)!}m(dz)dy \\
&\leq \frac{1}{(n-1)!}\int_c^x p'(y)v^{n-1}(y)\int_c^y m(dz)dy \leq \frac{1}{(n-1)!}\int_c^x v^{n-1}(y)p'(y)m((c,y))dy \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_c^x v^{n-1}(y)v'(y)dy = \frac{1}{(n-1)!}\int_{v(c)}^{v(x)} u^{n-1}du = \frac{1}{(n-1)!}(\frac{u^n}{n})|_0^{v(x)} = \frac{v^n(x)}{n!}
\end{aligned}
$$

Para $x < c$ es análogo. De aquí se tiene que para todo $x \in I$ $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n(x)}{n!} = e^{v(x)} < \infty$. Por esto, la función converge para todo punto, y está bien definida la función u. Además, como todos los términos de las serie son positivos, se tiene que $1 + v(x) \leq u(x)$. De esta forma obtenemos (iv).

A continuación hacemos el siguiente claim:

$$
|u_n'(x)| \leq |v'(x)|\frac{v^{n-1}(x)}{(n-1)!} \quad \forall n \geq 1 \; \forall x \in I \tag{2.133}
$$

En efecto, sea $x > c$, entonces $|u_n'(x)| = p'(x)\int_c^x u_{n-1}(z)m(dz) \leq p'(x)u_{n-1}(x)m((c,x)) \leq v'(x)\frac{v^{n-1}(x)}{(n-1)!} = |v'(x)|\frac{v^{n-1}(x)}{(n-1)!}$. Para $x < c$ se tiene que $|u_n'(x)| = -u_n'(x) = p'(x)\int_x^c u_{n-1}(z)m(dz)$ $\leq p'(x)u_{n-1}(x)m((x,c)) = -v'(x)u_{n-1}(x) \leq |v'(x)|\frac{v^{n-1}(x)}{(n-1)!}$.

Sea K un compacto, entonces podemos considerar el espacio $C^1(K)$ el cual es un Espacio de Banach con la norma $||f||_{C^1} = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$. Sea K un compacto. Entonces se tiene que $u_n(x) \leq \frac{v^n(x)}{n!}$ por lo que $||u_n||_\infty \leq \frac{||v^n||_\infty}{n!}$. Usando la continuidad de v se obtiene que $||v||_\infty^n = ||v^n||_\infty$. De esta forma: $||u_n||_\infty \leq \frac{||v||_\infty^n}{n!}$. De forma análoga $||u_n'||_\infty \leq ||v'||_\infty \frac{||v||_\infty^{n-1}}{(n-1)!}$. Usando esto, no es difícil ver que:

$$
\sum_{n=0}^{\infty} ||u_n||_{C^1} = e^{||v||_\infty}(1 + ||v'||_\infty) < \infty \tag{2.134}
$$

Como la serie de las normas converge entonces la serie converge en el espacio $C^1(K)$. Como el límite es uniforme y este implica el puntual, se tiene que el límite es $u|_K$. De esta forma, la función u es continua y posee derivada en todo punto. Además, esta derivada es continua. De esta forma $u \in C^1(I)$. Por tanto, obtenemos la función u'. Usando las cotas y el TFC no es dífícl ver que:

$$
u'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x) \tag{2.135}
$$

Considere $a < b$, entonces se tiene que el espacio de las funciones absolutamente continuas $AC[a,b]$ con la norma $||f||_{AC[a,b]} := \int_a^b |f(t)|dt + \int_a^b |f'(t)|dt$ es un espacio de Banach (este es igual a $W^{1,1}[a,b]$). Con esto, queremos probar que u' es absolutamente continua. Sea $a < b$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} ||u_n'||_{AC[a,b]} &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b |u_n'(t)|dt + \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b |u_n''(t)|dt \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty}(b-a)||u_n'||_\infty + \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b \frac{2}{\sigma^2(t)}|u_{n-1}(t)| + \frac{2|b(t)|}{\sigma^2(t)}|u_n'(t)|dt \\ &\leq (b-a)||v'||_\infty e^{||v||_\infty} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b \frac{2}{\sigma^2(t)}||u_{n-1}||_\infty + \frac{2|b(t)|}{\sigma^2(t)}||u_n'||_\infty dt \\ &\leq (b-a)||v'||_\infty e^{||v||_\infty} + e^{||v||_\infty}\int_a^b \frac{2}{\sigma^2(t)}dt + ||v'||_\infty e^{||v||_\infty}\int_a^b \frac{2|b(t)|}{\sigma^2(t)}dt\end{aligned}$$

La expresión de la derecha es finita por la hipotesis (LI'). De esta forma u' es absolutamente continua. Esto prueba (i). Para (ii) observemos que para $x > c$ se tiene que $u'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x) > 0$ y para $x < c$ se tiene que $u'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x) < 0$. Esto, junto a la hipótesis de ser C^1 nos arroja (ii).

Veamos que $u'' = \sum_{n=0}^{\infty} u_n''(x)$. ctp. Primero, de la EDO podemos observar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n''(x) = \frac{2}{\sigma^2(x)}[\sum_{n=0}^{\infty} u_{n-1}(x) - b(x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x)] \tag{2.136}$$

Por lo que la serie converge puntualmente ctp. Ahora

$$|\sum_{n=0}^{N} u_n''(x)| \leq \frac{2}{\sigma^2(x)}e^{||v||} + \frac{2|b(x)|}{\sigma^2(x)}||v'||e^{||v||} \tag{2.137}$$

lo cual es L^1_{loc} debido a las hipótesis. Por tanto para $a < x$ se tiene que:

$$\int_a^x \sum_{n=0}^{\infty} u_n''(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^x u_n''(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x) - u_n'(a) = u'(x) - u'(a) \tag{2.138}$$

Usando el TFC en su versión ctp se concluye que:

$$u''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n''(x) \tag{2.139}$$

De esta forma, podemos sumar en la edo y obtener

$$\begin{gathered}\frac{\sigma^2(x)}{2}u_n''(x) + b(x)u_n'(x) = u_{n-1}(x) \\ \frac{\sigma^2(x)}{2}\sum_{n=1}^{\infty} u_n''(x) + b(x)\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{n-1}(x) \\ \frac{\sigma^2(x)}{2}u''(x) + b(x)u'(x) = u(x)\end{gathered}$$

Además, $u(c) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(c) = u_0(c) = 1$ y $u'(c) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(c) = 0$. Con esto, obtenemos (iii) y podemos concluir. □

Ahora vemos que

Lema 2.33

$$p(r-) = \infty \Rightarrow v(r-) = \infty \tag{2.140}$$

$$p(l+) = -\infty \Rightarrow v(l+) = \infty \tag{2.141}$$

Demostración. Sea $c < x$. Entonces podemos considerar un $\varepsilon > 0$ tal que $c + \varepsilon < x$. Así, $v(x) = \int_c^x p'(y) \int_c^y m(dz)dy = \int_c^x p'(y)f(y)dy$. Donde $f(y) = \int_c^y m(dz)$ es una función continua. Obtenemos que $v(x) = \int_c^x p'(y)f(y)dy \geq \int_{c+\varepsilon}^x p'(y)f(y)dy = f(\xi_{c+\varepsilon,x}) \int_{c+\varepsilon}^x p'(y)dy \geq f(c+\varepsilon)(p(x) - p(c+\varepsilon))$. De donde $p(r-) = \infty \Rightarrow v(r-) = \infty$.

Si $x < c - \varepsilon < c$, entonces $v(x) = \int_x^c p'(y) \int_y^c m(dz)dy \geq \int_x^{c-\varepsilon} p'(y) \int_y^c m(dz)dy = \int_{\xi_{x,c-\varepsilon}}^c m(dz) \int_x^{c-\varepsilon} p'(y)dy \geq \int_{c-\varepsilon}^c m(dz)[p(c-\varepsilon) - p(x)]$. □

De nuevo, podemos preguntarnos como afecta la dependencia en c a nuestra función v. Esto lo explicitamos en la siguiente propiedad:

Proposición 2.34 *Sea $a, c \in I$, entonces:*

$$v_a(x) = v_a(c) + v_a'(c)p_c(x) + v_c(x) \quad x \in I \tag{2.142}$$

En particular, la finitud o no de $v_c(r-)$ y $v_c(l+)$ es independiente de c.

Demostración. Probemos la independencia, basada en la fórmula. Supongamos que $v_a(r-) = \infty$ para algún $a \in \mathbb{R}$. Probemos que $v_c(r-) = \infty$ para todo $c \in \mathbb{R}$. En efecto, de a ecuación anterior:

$$v_a(x) \leq v_a(c) + |v_a'(c)||p_c(x)| + v_c(x) \tag{2.143}$$

Si $p_c(r-) = \infty$ entonces se concluye por el lema anterior. Si no, existe un $K > 0$ tal que: $v_a(x) \leq K + v_c(x)$. Para todo $x > c$. Se concluye que $v_c(r-) = \infty$. El caso de $v_a(l+) = \infty$ es análogo. En efecto, si $p_c(l+) = \infty$ se concluye por el lema anterior. Si no, para $x < c$ se tiene que $v_a(x) \leq K + v_c(x)$ para un K. De esta forma $v_c(l+) = \infty$.

De esta forma, si algún límite fuera finito para v_a, entonces todos lo serán. De lo contrario, existiría uno infinito y v_a será infinito, lo cual es una contradicción. □

Ahora estamos en condiciones de establecer el resultado más importante de esta sección.

Teorema 2.35 (Test de Feller para explosiones) *Sea $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$ una solución débil en $I = (l, r)$ bajo las condiciones $(ND)'$ y $(LI)'$. Considere además que $X_0 = x \in I$ $\mathbb{P}$-c.s. Entonces:*

$$\mathbb{P}[S = \infty] = 1 \Leftrightarrow v(l+) = v(r-) = \infty \tag{2.144}$$

Demostración. Considere la semimartingala $X_s^{S_n}$ que como sabemos está bien definida a valores en I de forma c.s. Defina $f(t,x) = e^{-t}u(x)$. Usando la fórmula de Itô:

$$\begin{aligned}
f(t, X_t^{S_n}) &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(s, X_s^{S_n}) ds + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(s, X_s^{S_n}) dX_s^{S_n} + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, X_s^{S_n}) d\langle X^{S_n}\rangle_s \\
&= u(x) - \int_0^t e^{-s} u(X_s^{S_n}) ds + \int_0^{t\wedge S_n} e^{-s} u'(X_s^{S_n}) b(X_s) ds + \int_0^{t\wedge S_n} e^{-s} u'(X_s^{S_n}) \sigma(X_s) dW_s \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge S_n} e^{-s} u''(X_s^{S_n}) \sigma^2(X_s) ds \\
&= u(x) + \int_0^t e^{-s} \left(-u(X_s^{S_n}) + u'(X_s) b(X_s) \mathbb{1}_{\{s\leq S_n\}} + \frac{\sigma^2(X_s)}{2} u''(X_s) \mathbb{1}_{\{s \leq S_n\}} \right) ds \\
&+ \int_0^{t\wedge S_n} e^{-s} u'(X_s)\sigma(X_s) dW_s
\end{aligned}$$

Como esto es una igualdad de procesos c.s., reemplazamos t por $t \wedge S_n$. Con esto, la integral de Lebesgue se hace 0. Lo que resulta es:

$$e^{-(t\wedge S_n)} u(X_{t\wedge S_n}) = u(x) + \int_0^{t\wedge S_n} e^{-s} u'(X_s)\sigma(X_s) dW_s \tag{2.145}$$

Consideremos $M_t^{(n)} := e^{-(t\wedge S_n)} u(X_{S_n \wedge t})$. Entonces se tiene que:

$$M_t^{(n)} = M_0^{(n)} + \int_0^{t\wedge S_n} e^{-s} u'(X_s)\sigma(X_s) dW_s \tag{2.146}$$

Entonces $M_t^{(n)} - u(x)$ es una martingala local. Además, $|M_t^{(n)} - u(x)| = |e^{-(t\wedge S_n)} u(X_{S_n\wedge t}) - u(x)| \leq |u(X_{S_n \wedge t})| + u(x) \leq ||u||_{L^\infty[l_n, r_n]} + u(x) < \infty$. Por tanto $M_t^{(n)} - u(x)$ es una martingala. Así, $M_t^{(n)}$ es una martingala con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}$ (filtración que lleva a W y a X). Extendemos u, dandole valores $u(l+)$ y $u(r-)$ en los extremos del intervalo. Esta extensión hace de $u : [l, r] \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ continua. De esta forma se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} M_t^{(n)} = e^{-(t\wedge S)} u(X_{t\wedge S}) \tag{2.147}$$

Donde este límite es a valores en $\bar{\mathbb{R}}_+$. Veremos que en realidad toma valore reales. Definimos el proceso: $M_t = \lim_{n\to\infty} M_t^{(n)}$. Hacemos el claim: M_t es una supermartingala con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$.

Primero, cada $M_t^{(n)}$ es $\mathcal{F}_t$ medible. Por tanto el límite M_t es $\mathcal{F}_t$ medible. Segundo, usando el lema de Fatou:

$$\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} e^{(t\wedge S_n)} u(X_{t\wedge S_n})] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[e^{(t\wedge S_n)} u(X_{t\wedge S_n})] = u(x) \tag{2.148}$$

Por lo que las variables son L^1. Por último, para $t > s \geq 0$:

$$\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] =\leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[e^{(t\wedge S_n)} u(X_{t\wedge S_n})|\mathcal{F}_s] = \liminf_{n\to\infty} e^{(s\wedge S_n)} u(X_{s\wedge S_n}) = M_s \tag{2.149}$$

Y se demuestra el claim. Note que las variables M_t al ser L^1 en particular son finitas c.s. Al ser M_t una supermartingala positiva, posee límite c.s.

$$M_\infty := \lim_{t\to\infty} e^{-(t\wedge S)}u(X_{t\wedge S}) \tag{2.150}$$

Además, este límite es integrable. En particular, finito c.s.

Veamos $\Leftarrow$. Si $v(l+) = v(r-) = \infty$, entonces de la desigualdad $1 + v(x) \leq u(x)$ se tiene que $u(l+) = u(r-) = \infty$. De esta forma, en el evento $\{S < \infty\}$ se tiene que $M_\infty = e^{-S}u(X_S) = \infty$. Es decir $\{S < \infty\} \subseteq \{M_\infty = \infty\}$. Así $\mathbb{P}[S < \infty] = 0$ y $\mathbb{P}[S = \infty] = 1$.

Para $\Rightarrow$, argumentamos por contrarrecíproca, es decir, suponemos que $v(r-) < \infty$ o $v(l+) < \infty$. Supongamos que $v(r-) < \infty$. Además, podemos considerar, sin pérdida de generalidad, que $c < x < r$. Esto pues, para otro c se tendrá que tambien posee límite por derecha finito, y genera una función u que cumple con las edo y con el tratamiento antes expuesto. Definimos el tiempo de parada $T_c = \inf\{t \geq 0 \mid X_t = c\}$. Entonces, hacemos el siguiente claim: el proceso

$$M_{t\wedge T_c} = e^{-(t\wedge T_c\wedge S)}u(X_{t\wedge T_c\wedge S}) \tag{2.151}$$

Es una martingala acotada. En efecto, como consiste en parar una $\{\mathcal{F}_t\}$ supermatingala con un $\{\mathcal{F}_t\}$ tiempo de parada, entonces es una supermartingala. Veamos que también es submartingala. En efecto, sabemos que $e^{-(t\wedge S_n\wedge T_c)}u(X_{t\wedge S_n\wedge T_c})$ es martingala, por lo que $-e^{-(t\wedge S_n\wedge T_c)}u(X_{t\wedge S_n\wedge T_c})$ es martingala. Además,

$$e^{-(t\wedge S_n\wedge T_c)}u(X_{t\wedge S_n\wedge T_c}) \leq u(r-) \tag{2.152}$$

Esto pues X toma valores en $[c, r]$ donde la función es estrictamente creciente. Por tanto $u(r-) - e^{-(t\wedge S_n\wedge T_c)}u(X_{t\wedge S_n\wedge T_c})$ es una martingala no negativa. Por lo tanto, haciendo un argumento análogo al anterior, el proceso:

$$u(r-) - e^{-(t\wedge S\wedge T_c)}u(X_{t\wedge S\wedge T_c}) \tag{2.153}$$

es una supermartingala. Así $-e^{-(t\wedge S\wedge T_c)}\, u(X_{t\wedge S\wedge T_c})$ es una supermartingala. De esta forma, $e^{-(t\wedge S\wedge T_c)}u(X_{t\wedge S\wedge T_c})$ es martingala. De la desigualdad anterior se desprende que:

$$0 \leq e^{-(t\wedge S\wedge T_c)}u(X_{t\wedge S\wedge T_c}) \leq u(r-) \tag{2.154}$$

Por lo que es acotada. Así, queda demostrado el claim.

De lo anterior, se tiene que la martingala es uniformemente integrable y por tanto posee límite c.s. y en L^1. De esta forma:

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathbb{E}[e^{-(S\wedge T_c)}u(X_{S\wedge T_c})] = \mathbb{E}[e^{-S}u(X_S)\mathbb{1}_{S\leq T_c}] + \mathbb{E}[e^{-T_c}u(X_{T_c})\mathbb{1}_{T_c<S}] \\ &= u(r-)\mathbb{E}[e^{-S}\mathbb{1}_{S\leq T_c}] + u(c)\mathbb{E}[e^{-T_c}\mathbb{1}_{T_c<S}] \end{aligned}$$

Si $\mathbb{P}[S = \infty] = 1$, entonces $u(x) = u(c)\mathbb{E}[e^{-T_c}] \leq u(c)$ lo que contradice el hecho de que u es estrictamente creciente en $[c, x]$. Por tanto $\mathbb{P}[S < \infty] < 1$. Si $u(l+) < \infty$ la deducción es análoga. □

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo (Movimiento Browniano) En este caso $b(x) = 0$ y $\sigma(x) = 1$ se tiene que $p(x) = x$ y $m(dx) = 2dx$. De esta forma:

$$v(x) = \int_0^x p(x) - p(y)m(dy) = \int_0^x 2(x-y)dy = -(x-y)^2|_0^x = x^2 \tag{2.155}$$

Así, se tiene que $v(\pm\infty) = \infty$.

Ejemplo (Martingala exponencial.) En este caso $b(x) = 0$ y $\sigma(x) = x$ se tiene que $p(x) = x$ y $m(dx) = \frac{2dx}{x^2}$. En este caso, se tiene que $v(x) = 2(x - \log x - 1)$. Se puede demostrar que efectivamente $v(\infty) = \infty$ tomando $e^{v(x)}$ y usando la Regla de L'Hopital. Además, claramente $v(0-) = \infty$.

Ejemplo Consideremos:

$$dX_t = \frac{3}{2}X_t^2 dt + dW_t \tag{2.156}$$

Con $I = (-\infty, \infty)$. Se tiene para $x \in \mathbb{R}$ que $p(x) = \int_0^x e^{-u^3}du$ con $c = 0$. De esta forma $m(dx) = 2e^{x^3}dx$. De esta forma:

$$v(x) = \int_0^x e^{-y^3} \int_0^y 2e^{z^3}dzdy \tag{2.157}$$

Veamos que $v(\infty) < \infty$. Considere el integrando , usando la regla de L'Hopital:

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\int_0^y 2e^{z^3}}{e^{y^3}} = \lim_{y\to\infty} \frac{2e^{y^3}}{e^{y^3}3y^2} = \lim_{y\to\infty} \frac{2}{3y^2} = 0 \tag{2.158}$$

Esto nos suguiere que $e^{-y^3}\int_0^y e^{z^3} \sim \frac{1}{y^2}$ cuando $y \to \infty$. En efecto:

$$\begin{aligned}\lim_{y\to\infty} \frac{y^2\int_0^y e^{z^3}}{e^{y^3}} &= \lim_{y\to\infty} \frac{e^{y^3}y^2 + 2y\int_0^y e^{z^3}dz}{3y^2e^{y^3}} = \lim_{y\to\infty} \frac{2\int_0^y e^{z^3}dz}{3ye^{y^3}} + \frac{1}{3}\\ &= \lim_{y\to\infty} \frac{2e^{y^3}}{3e^{y^3} + 9y^2e^{y^3}} + \frac{1}{3} = \lim_{y\to\infty} \frac{2}{3+9y^2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Llamemos $e^{-y^3}\int_0^y e^{z^3} = g(y)$, entonces $3g(y)y^2 \longrightarrow 1$ cuando $y \to \infty$. Considere $\varepsilon = 1$, entonces existe un $M > 0$ tal que para todo $y \geq M$ se tiene que:

$$|3g(y)y^2 - 1| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 3g(y)y^2 - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 3g(y)y^2 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq g(y) \leq \frac{2}{3y^2}$$

De esta forma,

$$v(\infty) = \int_0^\infty 2g(y)dy = \int_0^M 2g(y)dy + \int_M^\infty 2g(y)dy \leq \int_0^M 2g(y)dy + \int_M^\infty \frac{4}{3y^2}dy < \infty \tag{2.159}$$

Por Test de Feller, concluimos que $\mathbb{P}[S < \infty] > 0$.

A continuación, veremos cuando podemos asegurar que $\mathbb{P}[S < \infty] = 1$.

Teorema 2.36 *Sea $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$ una solución débil en $I = (l, r)$ bajo las condiciones $(ND)'$ y $(LI)'$. Considere además que $X_0 = x \quad \mathbb{P}$-c.s. para $x \in I$. Entonces se tendrá que $\mathbb{P}[S < \infty] = 1$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

(i) $v(r-) < \infty$ *y* $v(l+) < \infty$

(ii) $v(r-) < \infty$ *y* $p(l+) = -\infty$

(iii) $v(l+) < \infty$ *y* $p(r-) = \infty$

En el primer caso, se tiene además que $\mathbb{E}[S] < \infty$.

Esto no elimina todas la posibilidades. De lo anterior, se tendrá que si $v(r-) < \infty$ y $v(l+) = \infty$ pero $p(l+) < \infty$, entonces $0 < \mathbb{P}[S < \infty] < 1$.

Demostración. Comenzemos viendo $\Leftarrow$. Supongamos que (i), entonces, en particular se tiene que $p(r-) < \infty$ y $p(l+) > -\infty$. Por esto, se puede extender la función de Green de la siguiente forma:

$$G(x, y) = \frac{(p(x \wedge y) - p(l+))(p(r-) - p(x \vee y))}{p(r-) - p(l+)} \tag{2.160}$$

Donde todo está bien definido en $\mathbb{R}$. Definimos $M(x) = \int_l^r G(x, y)m(dy)$. Para $x \in I$. Veamos que bajo las hipótesis de (i) se tiene que $M(x) < \infty$. En efecto, $G(x, y) \geq 0$, por lo que calculamos:

$$\begin{aligned} M(x) &= \int_l^x \frac{p(y) - p(l+)(p(r-) - p(x))}{p(r-) - p(l+)} m(dy) + \int_x^r \frac{p(x) - p(l+)(p(r-) - p(y))}{p(r-) - p(l+)} m(dy) \\ &= \frac{(p(r-) - p(x)) \int_l^x p(y) - p(l+) m(dy) + (p(x) - p(l+)) \int_x^r p(r-) - p(y) m(dy)}{p(r-) - p(l+)} \end{aligned}$$

Consideramos que $p(y) = ap_x(y) + b$ para todo $y \in I$ donde p_x es la función de escala con constante x, y $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$. De esta forma $p'(y) = ap'_x(y)$. Así $m(dy) = \frac{1}{a} m_x(dy)$. De esta forma:

$$\begin{aligned} \int_l^x p(y) - p(l+) m(dy) = \int_l^x a(p_x(y) - p_x(l+)) \frac{1}{a} m_x(dy) &= \int_l^x p_x(y) - p_x(l+) m_x(dy) \\ &\int_x^l p_x(l+) - p_x(y) m_x(dy) = v_x(l+) < \infty \end{aligned}$$

De forma análoga $\int_x^r p(r-) - p(y)m(dy) = \int_x^r p_x(r-) - p_x(y)m_x(dy) = v_x(r-) < \infty$. Con lo que concluimos que $M(x) < \infty$.

Ahora, buscamos tomar límite en la expresión $\mathbb{E}[T_{a,b}] = M_{a,b}(x)$. Consideremos una sucesión (l_n, r_n) que se abre a (l, r). Por un lado: $M_{l_n,r_n}(x) = \int_I \mathbb{1}_{[l_n,r_n]}(y) G_{l_n,r_n}(x, y)m(dy)$. Donde debido a la continuidad de p: $\mathbb{1}_{[l_n,r_n]}(y) G_{l_n,r_n}(x, y) \longrightarrow G(x, y)$ puntualmente en y.

Además para $n \in \mathbb{N}$ tal que $l_n < x < r_n$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{[l_n,r_n]}(y)G_{l_n,r_n}(x,y) &\leq \frac{(p(x \wedge y) - p(l_n))(p(r_n) - p(x \vee y))}{p(r_n) - p(l_n)} \\
&\leq \frac{(p(x \wedge y) - p(l+))(p(r-) - p(x \vee y))}{p(r_0) - p(l_0)} \\
&\leq \frac{p(r-) - p(l+)}{p(r_0) - p(l_0)} G(x,y)
\end{aligned}$$

Que como vimos es integrable con respecto a $m(dy)$. Usando el Teorema de Convergencia Dominada se tiene que $M_{l_n,r_n}(x) \longrightarrow M(x)$. Por otro lado $S_n \nearrow S$. Por TCM se tiene que $\mathbb{E}[S_n] \nearrow \mathbb{E}[S]$. Tomando límite en la expresión $\mathbb{E}[S_n] = M_{l_n,r_n}(x)$ se obtiene que: $\mathbb{E}[S] = M(x) < \infty$. Por tanto S es integrable. En particular $\mathbb{P}[S < \infty] = 1$.

Para el caso (ii) consideramos una secuencia $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $l_n \searrow l$. Definimos los tiempos:

$$T_r = \text{ínf}\{t \geq 0 \mid X_t = r\} \qquad R_n = \text{ínf}\{t \geq 0 \mid X_t = l_n\} \tag{2.161}$$

Como $v(r-) < \infty$ y $v(l_n) < \infty$ se tiene de forma análoga a lo anterior que $\mathbb{E}[R_n \wedge T_r] < \infty$. Por tanto, se tiene que:

$$\mathbb{P}[\forall n \geq 1 \; R_n \wedge T_r < \infty] = 1 \tag{2.162}$$

Ahora, como $v(r-) < \infty$ se tiene que $p(r-) < \infty$. Además, de la hipótesis $p(l-) = \infty$ se ve que estamos en el caso (c) del teorema anterior. Así, el proceso posee límite igual a r y su ínfimo es mayor a l de forma c.s. Esto hace que $T_r = S$ de forma $\mathbb{P} - c.s.$ En particular:

$$\mathbb{P}[\exists n_0 \geq 1 \text{ tal que } \forall n \geq n_0 \; R_n = \infty] = 1 \tag{2.163}$$

En el evento $\{S = \infty\}$ se tiene que que c.s. $R_n \wedge T_r = R_n \wedge S = R_n$ para todo n. Así, estas variables, por un lado serán todas finitas y por otro existirá un punto donde todas son infinitas. Esto es una contadicción. Por tanto $\mathbb{P}[S = \infty] = 0$. Así $\mathbb{P}[S < \infty] = 1$.

El caso (iii) es análogo. $\square$

Veamos algunos ejemplos

Ejemplo Volvamos a ver

$$dX_t = \frac{3}{2} X_t^2 dt + dW_t \tag{2.164}$$

en $I = (-\infty, \infty)$. Ya hemos visto que $v(\infty) < \infty$. Por otro lado $p(x) = \int_0^x e^{-u^3} du$ por lo que $p(-\infty) = -\infty$. Así, por el teorema anterior se tiene que $S < \infty$ c.s. De esta forma, siempre debemos esperar explosión para estas soluciones.

Ejemplo

$$dX_t = 2X_t^3 dt + dW_t \tag{2.165}$$

En $I = \mathbb{R}$. Se tiene que $p(x) = \int_0^x e^{-u^4} du$ y que $m(dx) = 2e^{x^4} dx$. Además:

$$v(x) = \int_0^x e^{-y^4} \int_0^y 2e^{z^4} dz dy \tag{2.166}$$

Mediante la Regla de LHopital podemos ver que $e^{-y^4}\int_0^y 2e^{z^4} \sim \frac{1}{2y^3}$ cuando $y \to \infty$, por lo que $v(\infty) < \infty$. Para $x < 0$ se tiene que

$$v(x) = \int_x^0 e^{-y^4} \int_y^0 2e^{z^4} dz dy \tag{2.167}$$

Mediante la Regla de LHopital podemos ver que $e^{-y^4}\int_y^0 2e^{z^4} \sim \frac{-1}{2y^3}$ con lo que $v(-\infty) < \infty$. Note que en este caso p es más simetrica (debido a la paridad de y^4). Así, esto corresponde al caso (i) anterior. De esta forma: $\mathbb{E}[S] < \infty$.

Cabe mencionar que las condiciones sobre v y p para estudiar la explosión guardan relación con la clasificación de frontera hecha por Feller en [9]. Para una aplicación a difusiones vea la sección 4.5 del Apéndice.

Capítulo 3

Distribuciones Cuasi-Estacionarias para el Proceso de Bessel

En esta sección se trabajará el problema principal de esta tesis. Comenzamos estableciendo algunos hechos sobre el proceso de Bessel X en el intervalo $(0, 1]$, para luego enunciar el resultado principal. En la sección 3.1.1 se calcula la función de escala y la medida de velocidad para X. Con esto, en la sección 3.2 se construye una medida cuasi-estacionaria ν analizando al movimiento Browniano B en la bola unitaria, el cual se extingue en la frontera de la bola. Para demostrar la unicidad se requerirá un análisis más fino de B, el cuál se hace en la sección 3.3. Empleando estos resultados, se demuestra que ν es la única distribución cuasi-estacionaria y que corresponde al límite de Yaglom para X. Por último, se tocan algunos tópicos adicionales, los cuales orientarán el trabajo futuro.

3.1. Preliminares

Sea $d \geq 2$ un entero. Consideremos $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible con medidas de probabilidad $\{\mathbb{P}_x\}_{x\in\mathbb{R}^d}$. Sea además $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ una filtración y $B = \{B_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ un proceso adaptado, a trayectorias continuas, $d-$dimensional, y tal que B es un movimiento Browniano bajo $\mathbb{P}_x$ con $\mathbb{P}_x[B_0 = x] = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Esta construcción se puede hacer usando el espacio canónico (vea por ejemplo Karatzas & Shreve [11], página 73). En este caso $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathcal{C}[0, \infty)^d)$ y $\mathcal{F}_t$ es la filtración natural del proceso. En este caso $x \mapsto \mathbb{P}_x(F)$ es Borel-medible para todo $F \in \mathcal{F}$. Además, consideramos la completación $\mathcal{F}^x := \bar{\mathcal{F}}^{\mathbb{P}_x}$ con la aumentación $\mathcal{F}_t^x := \mathcal{F}_t \vee \mathcal{N}_x$ donde $\mathcal{N}_x$ son los $\mathbb{P}_x$ despreciables de $\mathcal{F}$. Como B es un proceso de Levy, se tiene que $\{\mathcal{F}_t^x\}$ cumple las condiciones usuales (vea Protter [12], teorema 31).

En este contexto, se define el **proceso de Bessel de dimensión** d como $X_t = |B_t|$ donde $|.|$ es la norma euclidiana en $\mathbb{R}^d$. Es conocido el hecho que para $d \geq 2$, el movimiento Browniano no llega a ningún punto en particular con probabilidad positiva (fuera del punto de partida). En particular, si $T_0 = \text{ínf}\{t \geq 0 \mid X_t = 0\}$ se tiene que:

$$\mathbb{P}_x(T_0 = \infty) = 1 \qquad \forall x \neq 0 \tag{3.1}$$

Como anunciamos en un comienzo, el proceso de Bessel es solución de una ecuación estocástica, cuyo coeficiente de drift es singular en 0.

Teorema 3.1 *En el contexto anterior, $\forall x \neq 0$ existe un movimiento Browniano estándar $W = \{W_t, \mathcal{F}_t^x; 0 \leq t < \infty\}$ tal que $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}^x, \mathbb{P}_x), \{\mathcal{F}_t^x\}$ es una solución débil en el intervalo $I = (0, \infty)$ de:*

$$dX_t = \frac{d-1}{2X_t}dt + dW_t \tag{3.2}$$

Demostración. De lo anterior, $\{\mathcal{F}_t^x\}$ es una filtración que cumple las condiciones usuales en $(\Omega, \mathcal{F}^x, \mathbb{P}_x)$. El proceso $X = \{X_t, \mathcal{F}_t^x; 0 \leq t < \infty\}$ es un proceso adaptado, a valores en $[0, \infty)$ y a trayectorias continuas. Considere:

$$W_t := \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{B_s^{(i)}}{|B_s|} dB_s^{(i)} \tag{3.3}$$

De (3.1) se obtiene que $\frac{B_s^{(i)}}{|B_s|}$ está bien definido $\mathbb{P}_x$-c.s. De la continuidad de las trayectorias continuas, se observa que $\mathbb{P}_x[\int_0^t (\frac{B_s^{(i)}}{|B_s|})^2 ds < \infty] = 1$, por lo que la integral estocástica está bien definida para todo i. De esta forma, W_t es una $\mathcal{F}_t^x$ martingala local continua tal que $W_0 = 0 \quad \mathbb{P}_x - c.s.$ Usando el teorema de Kunita-Watanabe:

$$[\sum_{i=1}^{d} \int_0^\bullet \frac{B_s^{(i)}}{|B_s|} dB_s^{(i)}]_t = \sum_{i,j=1}^{d} [\int_0^\bullet \frac{B_s^{(i)}}{|B_s|} dB_s^{(i)}, \int_0^\bullet \frac{B_s^{(j)}}{|B_s|} dB_s^{(j)}]_t = \sum_{i,j=1}^{d} \int_0^t \frac{B_s^{(i)} B_s^{(j)}}{|B_s|^2} d[B^{(i)}, B^{(j)}]_s$$
$$= \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{(B^{(i)})_s^2}{|B_s|^2} ds = \int_0^t \sum_{i=1}^{d} \frac{(B^{(i)})_s^2}{|B_s|^2} ds = \int_0^t ds = t$$

Del teorema de Levy, se concluye que $W := \{W_t, \mathcal{F}_t^x; 0 \leq t < \infty\}$ es un movimiento Browniano estándar.

Considere $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ una secuencia estrictamente decreciente tal que $\lim_{n \to \infty} l_n = 0$ y $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ una secuencia estrictamente creciente tal que $\lim_{n \to \infty} r_n = \infty$ y $0 < l_n < r_n < \infty$ para todo $n \geq 1$. Se define para $n \geq 1$, entero, $S_n := \inf\{t \geq 0 \mid X_t \notin (l_n, r_n)\}$. Entonces para $\omega \in \{X_0 = |x|\}$ se tiene que:

$$\int_0^t \left(|b(X_s)| + \sigma^2(X_s)\right) \mathbb{1}_{\{s \leq S_n\}} ds = \int_0^t \left(\frac{d-1}{2X_s} + 1\right) \mathbb{1}_{\{s \leq S_n\}} ds \leq \int_0^t \left(\frac{d-1}{2(|x| \wedge l_n)} + 1\right) ds < \infty$$

De donde se desprende (1.42). Para (1.43), considere la función $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$, la cual es de clase $C^2(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. Para $i, j = 1...d$, se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{x_i}{|x|}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \begin{cases} \frac{-x_i x_j}{|x|^3} & \text{si } i \neq j \\ \frac{|x|^2 - x_i^2}{|x|^3} & \text{si } i = j \end{cases} \tag{3.4}$$

En particular, $\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{|x|^2 - x_i^2}{|x|^3} = \frac{1}{|x|^3}(d|x|^2 - |x|^2) = \frac{d-1}{|x|}$. Considere el proceso B^{S_n} para $n \geq 1$, el cual es un vector de martingalas locales. Este proceso vive en la corona

$\{y \in \mathbb{R}^d \mid l_n \leq |y| \leq r_n\}$ por lo que B^{S_n} se mantiene alejado acotadamente del 0. De la fórmula de Itô:

$$\begin{aligned}
f(B^{S_n}) &= f(B_0) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(B_s^{S_n}) dB_s^{(i),S_n} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1\ldots d} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(B_s^{S_n}) d[B^{(i),S_n}, B^{(j),S_n}]_s \\
&= |x| + \sum_{i=1}^{d} \int_0^{t\wedge S_n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(B_s) dB_s^{(i)} + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta f(B_s^{S_n}) d(s \wedge S_n) \\
&= |x| + \sum_{i=1}^{d} \int_0^{t\wedge S_n} \frac{B_s^{(i)}}{|B_s|} dB_s^{(i)} + \frac{1}{2} \int_0^{t\wedge S_n} \Delta f(B_s) ds \\
&= |x| + W_{t\wedge S_n} + \int_0^{t\wedge S_n} \frac{d-1}{2|B_s|} ds = |x| + \int_0^{t\wedge S_n} dW_s + \int_0^{t\wedge S_n} \frac{d-1}{2X_s} ds
\end{aligned}$$

□

La ecuación (3.2) es una ecuación hasta tiempo de explosión en el intervalo $I = (0, \infty)$. Para la construcción que hicimos, $\mathbb{P}[S < \infty] = 0$ donde $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ es el tiempo de explosión. Los coeficientes $b(x) = \frac{d-1}{2x}$ y $\sigma(x) = 1$ cumplen con las condiciones **(ND)'** (2.105) y **(LI)'** (2.106), lo que implica, mediante el teorema 2.21, que hay unicidad en ley para la ecuación (3.2).

Esto tiene una consecuencia de gran importancia. Considere $x, y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tales que $|x| = |y|$. Bajo $\mathbb{P}_x$ y $\mathbb{P}_y$, el proceso X_t es solución de (3.2) con $X_0 = |x| = |y|$. Como la condición inicial es la misma y hay unicidad en ley, se tiene que X posee la misma ley bajo $\mathbb{P}_x$ y $\mathbb{P}_y$, es decir:

Corolario 3.2 *En el contexto anterior, sea $F : C[0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ medible y acotada. Sea además $x, y \in \mathbb{R}^d$ tales que $|x| = |y|$, entonces:*

$$\mathbb{E}_x[F(X)] = \mathbb{E}_y[F(X)] \tag{3.5}$$

Veamos a continuación que X es un proceso de Markov Fuerte en el sentido de 1.8 y 1.13. Considere como espacio de estados $((0, \infty), \mathcal{B}(0, \infty))$. Dado que el proceso X siempre se mantiene en $(0, \infty)$, no agregamos un estado de extinción Δ ni una variable X_∞. Considere el operador de shift $(\theta_t)_{t\geq 0}$ en $\Omega = C[0, \infty)$ y defina para $r > 0$ la medida $\mathbb{P}_r := \mathbb{P}_{(r,0,\ldots,0)}$.

Proposición 3.3 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \theta_t, X_t, \mathbb{P}_r)$ *es un proceso de Markov Fuerte en* $(0, \infty)$. *Además, su semigrupo es normal y conservativo.*

Demostración. Muchas de las condiciones de 1.8 son directas de la construcción. Además, ignoramos las que hacen alusión a Δ. Veamos las más interesantes.

De la medibilidad de $x \mapsto \mathbb{P}_x(B_t \in B)$ se obtiene la medibilidad del mapeo $r \mapsto \mathbb{P}_r(X_t \in A)$ en $(0, \infty)$ para todo $t \geq 0$ y $A \in \mathcal{B}(0, \infty)$. Para 1.13 considere que X posee trayectorias continuas lo que hace al proceso progresivamente medible. Esto implica que X es progresivamente medible con la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$. Empleando el teorema 6.11 en Blumenthal & Getoor [1], se deduce que para T un $\{\mathcal{F}_t\}$ tiempo de parada, se tiene que X_T es $\mathcal{F}_T/\mathcal{B}(0,\infty)$ medible.

Demostremos la propiedad de Markov fuerte para $t \geq 0$, $r > 0$ y T un $\mathcal{F}_t$ tiempo de parada tal que $\mathbb{P}_r(T < \infty) = 1$. Considere además $f \in \mathcal{M}_b(\mathcal{B}(0,\infty))$. Usando el corolario 3.2:

$$\mathbb{E}_r[f(X_{t+T})|\mathcal{F}_T] = \mathbb{E}_r[f(|B_{t+T}|)|\mathcal{F}_T] = \mathbb{E}_{B(T)}[f(|B_t|)] = \mathbb{E}_{|B(T)|}[f(|B_t|)] = \mathbb{E}_{X(T)}[f(X_t)]$$

$\square$

Consideraremos el proceso de Bessel que inicia en $(0,1]$ y tiene a $\{1\}$ como estado absorbente. Defina:

$$T := \text{ínf}\{t \geq 0 \mid X_t = 1\} \tag{3.6}$$

Estudiaremos las distribuciones cuasi-estacionarias del proceso $X_{t\wedge T}$ bajo las medidas de probabilidad $\{\mathbb{P}_r\}_{r\in(0,1]}$. Esto lo denominamos como el *Proceso de Bessel en el intervalo* $(0,1]$. Por propiedades del movimiento Browniano, se tiene que $\mathbb{P}_r(T < \infty) = 1$ para todo $r \in (0,1]$. Así, este proceso se extinguirá casi seguramente por el 1 y nunca por el 0.

En lo que sigue, será de gran importancia el semigrupo submarkoviano:

$$T_t f(r) := \mathbb{E}_r[f(X_t)\mathbb{1}_{t<T}] \tag{3.7}$$

Donde $f \in \mathcal{M}_b(\mathcal{B}(0,1))$, $t \geq 0, r \in (0,1)$. De 3.2 se desprende que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d \quad |x| = |y| \Rightarrow \mathbb{E}_x[f(X_t)\mathbb{1}_{t<T}] = \mathbb{E}_y[f(X_t)\mathbb{1}_{t<T}] \tag{3.8}$$

Cabe mencionar que el proceso de Bessel admite una definición más general. En Borodin & Salminen [2], página 73, se define el proceso de Bessel X de orden $\beta \in \mathbb{R}$ como la solución a la ecuación

$$dX_t = \frac{2\beta + 1}{2X_t}dt + dW_t \tag{3.9}$$

para los β que permiten solución única hasta tiempo de explosión en $[0,\infty]$. En este contexto, los procesos de Bessel que se consideran a continuación son los de orden $\beta = \frac{d}{2} - 1$ donde $d \geq 2$ es un entero. Vea el final de este capítulo para una discusión de nuestros resultados en el contexto de $\beta \in \mathbb{R}$.

3.1.1. Escala y Medida de Velocidad

A continuación se estudiará el generador asociado al proceso de Bessel. Por 3.1 se obtiene que este corresponde al operador diferencial:

$$\mathcal{L}u(x) := \frac{1}{2}u''(x) + \frac{d-1}{2x}u'(x) \tag{3.10}$$

Donde $d \geq 2$ es un entero. En la notación de Collet, Martínez y San Martín [6], $\alpha(x) = -\frac{d-1}{2x}$. Note que $\alpha \in C^1(0,1]$ y que posee una singularidad en el 0. La función de escala para la difusión viene dada por:

$$p_c(x) = \int_c^x \exp\{-2\int_c^u \frac{b(s)}{\sigma^2(s)}ds\}du = \int_c^x e^{2\int_c^u \alpha(s)ds}du \tag{3.11}$$

Donde $c \in (0,1)$. Ahora, de la regularidad de α en 1, se tiene que $p_c(1-) < \infty$ y por tanto se puede considerar la función de escala con $c = 1$, la cual se denotará por p.

$$p(x) := \int_1^x \exp\{2\int_1^u \alpha(s)ds\}du, \qquad x \in (0,1] \tag{3.12}$$

La función p es de clase $C^2(0,1]$, estrictamente creciente, y tal que $\mathcal{L}p = 0$ con $p(1) = 0$. Además, para $z \in (0,1]$ se define la función $\gamma(z) = 2\int_1^z \alpha(s)ds$. De esta forma, $p(x) = \int_1^x e^{\gamma(z)}dz$. Para el caso de $\mathcal{L}$ se puede hacer este cálculo de forma explícita.

Lema 3.4 *Sea $d \geq 2$ un entero. Entonces:*

$$\gamma(x) = -(d-1)\log x, \qquad e^{\gamma(x)} = \frac{1}{x^{d-1}}, \qquad e^{-\gamma(x)} = x^{d-1} \tag{3.13}$$

$$p(x) = \begin{cases} \log x & si\ d = 2 \\ \frac{1}{d-2}\left(1 - \frac{1}{x^{d-2}}\right) & si\ d \geq 3 \end{cases} \tag{3.14}$$

Demostración. Para $x \in (0,1)$ se tiene que $\gamma(x) = 2\int_1^x \alpha(s)ds = -2\int_x^1 \alpha(s)ds = 2\int_x^1 \frac{d-1}{2s}ds = \int_x^1 \frac{d-1}{s}ds = (d-1)[\log 1 - \log x] = -(d-1)\log x$. Así, $e^{\gamma(x)} = \exp\{\log x^{-(d-1)}\} = x^{-(d-1)}$ y $e^{-\gamma(x)} = x^{d-1}$. Si $d = 2$ se tiene que: $p(x) = \int_1^x e^{\gamma(u)}du = -\int_x^1 \frac{du}{u} = \log x$. En cambio, si $d = 3$, $p(x) = -\int_x^1 u^{-(d-1)}du = -\left.\frac{u^{1-(d-1)}}{1-(d-1)}\right|_x^1 = -\left.\frac{u^{2-d}}{2-d}\right|_x^1 = -\left(\frac{1}{2-d} - \frac{x^{2-d}}{2-d}\right) = \frac{1}{d-2}\left(1 - \frac{1}{x^{d-2}}\right)$. □

De lo anterior se observa que γ y e^{γ} poseen singularidad en 0, mientras que $e^{-\gamma}$ resulta ser $C[0,1]$. Siguiendo a [6] y a [11], se define la medida de velocidad m y la medida μ como:

$$m(dx) := \frac{2dx}{p'(x)\sigma^2(x)} = \frac{2dx}{e^{\gamma(x)}} = 2e^{-\gamma(x)}dx \tag{3.15}$$

$$\mu(dx) := e^{-\gamma(x)}dx = x^{d-1}dx \tag{3.16}$$

Ambas son medidas en $((0,1), \mathcal{B}(0,1))$. Note que la medida μ es finita en $(0,1)$ a pesar de la singularidad en 0 de α. Resulta de interés la función v definida en (2.126):

$$v_c(x) = \int_c^x p'(y)\int_c^y m(dz)dy = 2\int_c^x e^{\gamma(y)}\int_c^y e^{-\gamma(z)}dzdy$$

Dada la regularidad de α, se puede trabajar con $c = 1$. A esta función la denominaremos v.

Lema 3.5 *En el contexto anterior:*

$$v(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2 - 2\log x - 1) & si\ d = 2 \\ \frac{2x^{-(d-2)} + (d-2)x^2 - d}{d(d-2)} & si\ d \geq 3 \end{cases} \tag{3.17}$$

Demostración. $v(x)=\int_1^x\int_1^y p'(y)m(dz)dy=\int_x^1 p'(y)\int_y^1 m(dz)dy=2\int_x^1 e^{\gamma(y)}\int_y^1 e^{-\gamma(z)}dzdy=2\int_x^1\frac{1}{y^{d-1}}\int_y^1 z^{d-1}dzdy=2\int_x^1\frac{1}{y^{d-1}}\left.\frac{z^d}{d}\right|_y^1 dy=2\int_x^1\frac{1}{y^{d-1}}\left(\frac{1}{d}-\frac{y^d}{d}\right)dy=\frac{2}{d}\int_x^1\frac{1}{y^{d-1}}-ydy.$

Si $d=2$, entonces $v(x)=\int_x^1\frac{1}{y}-ydy=\left.[\log y-\frac{y^2}{2}]\right|_x^1=(-\frac{1}{2}-\log x+\frac{x^2}{2})=\frac{1}{2}(x^2-2\log x-1)$. Si $d\geq 3$, se tiene entonces que $v(x)=\frac{2}{d}\int_x^1\frac{1}{y^{d-1}}-ydy=\frac{2}{d}\left.\left(\frac{y^{2-d}}{2-d}-\frac{y^2}{2}\right)\right|_x^1=\frac{2}{d}\left(\frac{1}{2-d}-\frac{1}{2}-\frac{x^{2-d}}{2-d}+\frac{x^2}{2}\right)=\frac{2}{d}\left(\frac{2-(2-d)-2x^{2-d}+(2-d)x^2}{2(2-d)}\right)=\frac{d-2x^{-(d-2)}-(d-2)x^2}{d(2-d)}=\frac{2x^{-(d-2)}+(d-2)x^2-d}{d(d-2)}$.

□

De lo anterior, note que $v(1),p(1)<\infty$ mientras que $v(0)=\infty$ y $p(0)=-\infty$. Empleando 2.30 y 2.36, se confirma el hecho que el proceso abandonará el intervalo $(0,1)$ y lo hará siempre por el 1.

3.2. QSD para el proceso de Bessel: Existencia

En esta sección se demostrará que existe una q.s.d. para el proceso de Bessel, sin importar su dimensión. Para esto, se utilizará la teoría espectral de operadores elípticos con condiciones de borde Dirichlet. Esto se puede encontrar en Evans [8], capítulo 6.5. y en el apéndice 4.3. Considere el problema:

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}\Delta w=\lambda w & \text{en } U\\ w=0 & \text{en } \partial U\end{cases}\tag{3.18}$$

Donde $U=\{x\in\mathbb{R}^d\mid |x|<1\}$ es la bola unitaria abierta en $\mathbb{R}^d$, bajo la norma euclidiana. El operador $L=-\frac{1}{2}\Delta$ es uniformemente elíptico y simétrico, por lo que aplica la teoría de 4.3. De esta forma, el espectro Σ es real, discreto y se puede ver como:

$$0<\lambda_1<\lambda_2\leq\lambda_3\leq\ldots\lambda_k\to\infty\tag{3.19}$$

Además, existe una base ortonormal $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ de $L^2(U)$ donde $\psi_k\in C^\infty(\overline{U})$ es una función propia de λ_k, para todo $k\geq 1$. El *valor propio principal* λ_1 es estrictamente positivo y simple. Por último, su función propia ψ_1 se puede elegir (y lo haremos) positiva en U.

Note que λ_1 corresponde a $\frac{\overline{\lambda}}{2}$ donde $\overline{\lambda}$ es el valor propio principal del problema:

$$\begin{cases}-\Delta w=\lambda w & \text{en } U\\ w=0 & \text{en } \partial U\end{cases}\tag{3.20}$$

Como $-\frac{1}{2}\Delta\psi_1=\lambda_1\psi_1$ se tiene que $-\Delta\psi_1=\overline{\lambda}\psi_1$. De esta forma, ψ_1 es también función propia de $\overline{\lambda}$.

Considere a B, el movimiento Browniano construido en la sección 3.1. Estudiaremos el proceso $B_{t\wedge T}$, donde T se puede reformular como $\inf\{t\geq 0\mid B_t\in\partial U\}$, para medidas $\mathbb{P}_x$ con $x\in U$. En otras palabras, estudiamos el movimiento Browniano en la bola unitaria que se extingue en la frontera. El siguiente resultado para $B_{t\wedge T}$ se encuentra en [6], página 9.

Teorema 3.6 *$B_{t\wedge T}$ posee una q.s.d. η absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, con densidad dada por:*

$$\eta(dx) = \frac{u(x)}{\int_U u(y)dy}dx \tag{3.21}$$

Donde $u \geq 0$ es la solución de 3.20 con $\lambda = \overline{\lambda}$. Además, la tasa exponencial de supervivencia está dada por $\frac{\overline{\lambda}}{2}$.

De esta forma, la tasa exponencial de supervivencia está dada por λ_1 y la densidad dada por $\frac{\psi_1}{||\psi_1||_1}$. A continuación, buscamos una propiedad adicional para ψ_1.

Definición 3.7 *Diremos que $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ posee* ***simetría radial*** *o es* ***radialmente simétrica*** *si para todo $x, y \in \overline{U}$ tal que $|x| = |y|$ se tiene que $f(x) = f(y)$.*

Si f es radialmente simétrica, entonces sólo es función del radio. Por tanto, podemos definir la función asociada $F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(r) := f((r, 0 \ldots 0))$. Queremos ver que ψ_1 es radialmente simétrica. Para esto considere:

Teorema 3.8 (Gidas, Ni & Niremberg ([10])) *En la bola $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < R\}$, sea $u > 0$ una solución positiva en $C^2(\overline{\Omega})$ de:*

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & en\ \Omega \\ u = 0 & en\ \partial\Omega \end{cases} \tag{3.22}$$

Con f de clase C^1. Entonces, u es radialmente simétrica y $\frac{\partial u}{\partial r} < 0$ para $0 < r < R$.

El resultado anterior también se encuentra en [8] página 558. Como ψ_1 es una solución positiva de (3.22) para $f(u) = 2\lambda_1 u$, se concluye que ψ_1 es radialmente simétrica. Entonces, se define:

$$\psi_1(r) := \psi_1((r, 0 \ldots 0)) \qquad r \in [0,1] \tag{3.23}$$

Así, $\psi_1(r)$ es una función estrictamente decreciente de clase $C^2[0,1]$. En particular $\psi_1(r) > 0$ para todo $r \in [0,1)$.

Teorema 3.9 (Existencia) *La medida ν en $(0,1)$ con densidad:*

$$\nu(dr) = \frac{\psi_1(r) r^{d-1}}{\int_0^1 \psi_1(v) v^{d-1} dv} dr \tag{3.24}$$

es una distribución cuasi-estacionaria para el proceso $X_{t\wedge T}$. Bajo ν, la tasa exponencial de supervivencia es igual a λ_1.

Demostración. De 3.2 se obtiene que la función $x \mapsto \mathbb{E}_x[f(X_t)\mathbb{1}_{T>t}]$ es radialmente simétrica. Usando coordenadas esféricas (vea 4.4), se deduce que $\mathbb{E}_{r\hat{\phi}}[f(X_t)\mathbb{1}_{T>t}]$ es constante como función de $\hat{\phi} \in S^{d-1} = \partial U$. De esta forma, para todo $r \in (0,1]$:

$$\mathbb{E}_r[f(X_t)\mathbb{1}_{T>t}] = \frac{1}{|S^{d-1}|} \int_{S^{d-1}} \mathbb{E}_{r\hat{\phi}}[f(X_t)\mathbb{1}_{T>t}] dS^{d-1} \tag{3.25}$$

Denote por $C := \int_0^1 \psi_1(r) r^{d-1} dr$. Sea $f \in \mathcal{M}_b((0,1))$ y $t \geq 0$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_\nu[f(X_t)\mathbb{1}_{T>t}] &= \int_0^1 \mathbb{E}_r[f(X_t)\mathbb{1}_{T>t}]\nu(dr) = \frac{1}{C}\int_0^1 \mathbb{E}_r[f(X_t)\mathbb{1}_{T>t}]\psi_1(r)r^{d-1}dr \\
&= \frac{1}{C}\int_0^1 \frac{1}{|S^{d-1}|}\int_{S^{d-1}} \mathbb{E}_{r\hat{\phi}}[f(X_t)\mathbb{1}_{T>t}]dS^{d-1}\psi_1(r)r^{d-1}dr \\
&= \frac{1}{C|S^{d-1}|}\int_0^1 \int_{S^{d-1}} \mathbb{E}_{r\hat{\phi}}[f(X_t)\mathbb{1}_{T>t}]\psi_1(r)r^{d-1}dS^{d-1}dr \\
&= \frac{1}{C|S^{d-1}|}\int_0^1 \int_{S^{d-1}} \mathbb{E}_{r\hat{\phi}}[f(|B_t|)\mathbb{1}_{T>t}]\psi_1(r)r^{d-1}dS^{d-1}dr \\
&= \frac{1}{C|S^{d-1}|}\int_U \mathbb{E}_x[f(|B_t|)\mathbb{1}_{T>t}]\psi_1(x)dx = \frac{\int_U \psi_1(x)dx}{C|S^{d-1}|}\int_U \mathbb{E}_x[f(|B_t|)\mathbb{1}_{T>t}]\eta(dx) \\
&= \frac{\int_U \psi_1(x)dx}{C|S^{d-1}|}\mathbb{E}_\eta[f(|B_t|)\mathbb{1}_{T>t}]
\end{aligned}
$$

Usando 3.6:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\int_U \psi_1(x)dx}{C|S^{d-1}|}\mathbb{E}_\eta[f(|B_t|)\mathbb{1}_{T>t}] = \frac{\int_U \psi_1(x)dx}{C|S^{d-1}|}e^{-\lambda_1 t}\int_U f(|x|)\eta(dx) \\
&= \frac{1}{C|S^{d-1}|}e^{-\lambda_1 t}\int_U f(|x|)\psi_1(x)dx = \frac{1}{C|S^{d-1}|}e^{-\lambda_1 t}\int_0^1\int_{S^{d-1}} f(r)\psi_1(r)r^{d-1}dS^{d-1}dr \\
&= \frac{1}{C}e^{-\lambda_1 t}\int_0^1 f(r)\psi_1(r)r^{d-1}dr = e^{-\lambda_1 t}\int_0^1 f(r)\nu(dr)
\end{aligned}
$$

De la proposición 1.46 se concluye. □

Note que $e^{-\gamma(r)} = r^{d-1}$ por lo que esta q.s.d. es proporcional a $\psi_1(r)\mu(dr)$.

3.3. El Proceso $B_{t\wedge T}$

En esta sección se estudiará el proceso $B_{t\wedge T}$, al cual hace alusión el teorema 3.6. Concretamente, estudiaremos el semigrupo:

$$P_t f(x) := \mathbb{E}_x[f(B_t)\mathbb{1}_{t<T}] \tag{3.26}$$

Donde $f \in \mathcal{M}_b(U)$ y $x \in U$. $(P_t)_{t\geq 0}$ es un semigrupo submarkoviano actuando en $\mathcal{M}_b(U)$, donde U es la bola unitaria abierta de $\mathbb{R}^d$. Lo primero es demostrar que P_t posee una densidad con respecto a la medida de Lebesgue.

Proposición 3.10 *Existe un núcleo $p_t(x,y)$ el cual para cada $t > 0$ y $x \in U$ está definido dy-c.s. tal que*

$$P_t f(x) = \int_U f(y)p_t(x,y)dy \tag{3.27}$$

$\forall f \in \mathcal{M}_b(U),\ t > 0,\ x \in U$. Además, para todo $x \in U,\ t > 0$:

$$p_t(x,y) \leq \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right) \tag{3.28}$$

De forma dy-c.s.

En lo que sigue, denote por $k_t(x,y) := \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right)$.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{M}_+(U)$. Se define $\overline{f} := f\mathbb{1}_U \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d)$. Note que:

$$f(B_t)\mathbb{1}_{t<T} \leq \overline{f}(B_t) \tag{3.29}$$

En efecto, si $t < T$ se tiene la igualdad en (3.29). Así:

$$\mathbb{E}_x[f(B_t)\mathbb{1}_{t<T}] \leq \mathbb{E}_x[\overline{f}(B_t)] = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f}(y)k_t(x,y)dy = \int_U f(y)k_t(x,y)dy \tag{3.30}$$

Como el semigrupo P_t es sub-markoviano, de la proposición (1.3) se obtiene que el kernel $q_t(x,\Gamma) := P_t\mathbb{1}_\Gamma(x)$ es una función de transición tal que: $P_tf(x) = \int_U f(y)q_t(x,dy)$ para toda $f \in \mathcal{M}_b(U)$. Para $B \in \mathcal{B}(U)$, se tiene que: $q_t(x,B) = P_t\mathbb{1}_B(x) \leq \int_U \mathbb{1}_B k_t(x,y)dy = \int_B k_t(x,y)dy$. Si B posee medida de Lebesgue 0 entonces $q_t(x,B) = 0$. Mediante el teorema de Radon-Nykodim, $q_t(x,\bullet)$ posee una densidad con respecto a la medida de Lebesgue, $p_t(x,y) \geq 0$, la cual está definida dy-c.s. De esta forma:

$$P_tf(x) = \int_U f(y)p_t(x,y)dy \leq \int_U f(y)k_t(x,y)dy \tag{3.31}$$

Para $f \in \mathcal{M}_b(U)$ y no negativa. Tomando $f = \mathbb{1}_B$ donde $B \in \mathcal{B}(U)$, se obtiene que $\int_B p_t(x,y)dy \leq \int_B k_t(x,y)dy$ para todo $B \in \mathcal{B}(U)$. Usando la Proposición 2.4.14 en [14], se concluye que $p_t(x,\bullet) \leq k_t(x,\bullet)$ dy-c.s. □

A continuación buscamos extender el semigrupo P_t a $L^2(U)$. Con este fin, considere:

$$c_t := \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \tag{3.32}$$

Note que $\sup_{x,y\in U} \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp(-\frac{|y-x|^2}{2t}) = c_t$. Así:

$$p_t(x,y) \leq c_t \tag{3.33}$$

De forma dy-c.s. De esta forma, $p_t(x,\bullet) \in L^\infty$ y $||p_t(x,\bullet)||_\infty \leq c_t$.

Proposición 3.11 *En el contexto anterior:*

(i) $\forall f \in \mathcal{L}^2(U)$ se tiene que $\mathbb{E}_x[|f(B_t)\mathbb{1}_{t<T}|] < \infty$. De esta forma, se define: $P_tf(x) := \mathbb{E}_x[f(B_t)\mathbb{1}_{t<T}]$ en $\mathcal{L}^2(U)$.

(ii) $\forall f \in \mathcal{L}^2(U)$ se tiene que $P_tf(x) = \int_U f(y)p_t(x,y)dy$, por lo que P_t está bien definido desde $L^2(U)$.

(iii) $\forall t > 0$, P_t *es un operador lineal tal que* $\forall f \in L^2(U)$*:*

$$||P_t f||_\infty \leq c_t ||f||_{L^1(U)} \tag{3.34}$$

$$||P_t f||_\infty \leq c_t |U|^{1/2} ||f||_{L^2(U)} \tag{3.35}$$

$$||P_t f||_{L^2(U)} \leq c_t |U| ||f||_{L^2(U)} \tag{3.36}$$

Donde $|U|$ *el volumen de* U*.*

Demostración. Para (i), considere $f \in \mathcal{L}^2(U)$. Entonces, mediante (3.30):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x[|f(B_t)\mathbb{1}_{t<T}|] = \mathbb{E}_x[|f|(B_t)\mathbb{1}_{t<T}] &\leq \int_U |f|(y)k_t(x,y)dy \leq ||f||_{L^2(U)} \left(\int_U k_t^2(x,y)dy\right)^{1/2} \\ &\leq ||f||_{L^2(U)} \left(\int_U c_t^2 dy\right)^{1/2} = ||f||_{L^2(U)} c_t |U|^{1/2} < \infty\end{aligned}$$

Para (ii), considere que si $f \in \mathcal{L}^2(U)$ se tiene que $\int_U |f(y)|p_t(x,y)dy \leq \int_U |f(y)|c_t dy \leq ||f||_{L^2(U)} c_t |U|^{1/2}$. Por esto, la expresión $\int_U f(y)p_t(x,y)dy$ tiene sentido. Sea $f \in \mathcal{M}_+(U)$, entonces $f_m = f \wedge m$ es una secuencia de funciones acotadas tales que $f_m \nearrow f$ cuando $m \to \infty$. Por convergencia monótona:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x[f(B_t)\mathbb{1}_{t<T}] &= \mathbb{E}_x[\lim_{m\to\infty} f_m(B_t)\mathbb{1}_{t<T}] = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}_x[f_m(B_t)\mathbb{1}_{t<T}] \\ &= \lim_{m\to\infty} \int_U f_m(y)p_t(x,y)dy = \int_U f(y)p_t(x,y)dy\end{aligned}$$

Si $f \in \mathcal{L}^2(U)$ entonces, $f = f_+ - f_-$ donde ambas funciones son de clase $\mathcal{L}^2(U)$. Entonces:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x[f(B_t)\mathbb{1}_{t<T}] &= \mathbb{E}_x[(f_+ - f_-)(B_t)\mathbb{1}_{t<T}] = \mathbb{E}_x[f_+(B_t)\mathbb{1}_{t<T}] - \mathbb{E}_x[f_-(B_t)\mathbb{1}_{t<T}] \\ &= \int_U f_+(y)p_t(x,y)dy - \int_U f_-(y)p_t(x,y)dy = \int_U f(y)p_t(x,y)dy\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene para $f \in \mathcal{L}^2(U)$ que $P_t f(x) = \int_U f(y)p_t(x,y)dy$. Si $f = g$ son iguales dx-c.s, entonces $P_t f(x) = P_t g(x)$. Por tanto, P_t está bien definida desde $L^2(U)$ a $\mathcal{M}(U)$.

Para (iii), de la representación de P_t se desprende que el operador es lineal. Sea $f \in L^2(U)$, entonces en particular está en $L^1(U)$. Para (3.34) considere:

$$|P_t f(x)| \leq \int_U |f(y)|p_t(x,y)dy \leq c_t \int_U |f(y)|dy = ||f||_{L^1(U)} c_t \tag{3.37}$$

Tomando supremo en $x \in U$ se obtiene $||P_t f||_\infty \leq ||f||_{L^1(U)} c_t$. Para (3.35), considere:

$$|P_t f(x)| \leq \int_U |f(y)|p_t(x,y)dy \leq ||f||_{L^2(U)} \left(\int_U p_t(x,y)^2 dy\right)^{1/2} \leq ||f||_{L^2(U)} c_t |U|^{1/2} \tag{3.38}$$

Tomando supremo se concluye. Por último, para (3.36) se obtiene que:

$$\begin{aligned}||P_t f||^2_{L^2(U)} &= \int_U (P_t f(x))^2 dx \leq \int_U \left(||f||_{L^2(U)} c_t |U|^{1/2}\right)^2 dx \\ &\leq ||f||^2_{L^2(U)} c_t^2 |U| \int_U dx \leq ||f||^2_{L^2(U)} c_t^2 |U|^2\end{aligned}$$

De esta forma, $||P_t f||_{L^2(U)} \leq ||f||_{L^2(U)} c_t |U|$. $\square$

Así, P_t es un operador lineal y continuo de L^2 a L^2. Un hecho importante es cómo se comporta este semigrupo en $\{\psi_k\}_{k\geq 1}$, las funciones propias de 3.18.

Lema 3.12 *$\forall k \geq 1,\ t > 0,\ x \in U$:*

$$P_t\psi_k(x) = e^{-\lambda_k t}\psi_k(x) \tag{3.39}$$

Demostración. Recuerde que $\{\psi_k\}_{k\geq 1}$ es una colección de funciones $C^\infty(\overline{U})$ tales que $-\frac{1}{2}\Delta\psi_k = \lambda_k\psi_k$ en U. Considere los tiempos $T_n := \inf\{t \geq 0 \mid B_t \notin B(0, 1-\frac{1}{n})\}$ para $n \geq 2$. Para $x \in U$ se tiene que $T_n \nearrow T$ de forma $\mathbb{P}_x$-c.s. En lo que sigue, considere $n \geq n_0$, donde $n_0 \geq 2$ es tal que $x \in B(0, 1-\frac{1}{n_0})$. De esta forma $\mathbb{P}_x(T_n > 0) = 1$. Considere bajo la medida $\mathbb{P}_x$, el proceso $B_{t\wedge T_n} = (B^{(1)}_{t\wedge T_n}, \ldots, B^{(d)}_{t\wedge T_n})$ el cual es un vector de martingalas. Usando la fórmula de Itô en $f(t,x) := e^{\lambda_k t}\psi_k(x)$,

$$\begin{aligned}
e^{\lambda_k t}\psi_k(B_{t\wedge T_n}) &= \psi_k(x) + \int_0^t \lambda_k e^{\lambda_k s}\psi_k(B_{s\wedge T_n})ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t e^{\lambda_k s}\frac{\partial\psi_k}{\partial x_i}(B_{s\wedge T_n})dB_s^{T_n,(i)} \\
&+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \int_0^t e^{\lambda_k s}\frac{\partial^2\psi_k}{\partial x_i\partial x_j}(B_{s\wedge T_n})d\langle B^{T_n,(i)}, B^{T_n,(j)}\rangle_s \\
&= \psi_k(x) + \int_0^t \lambda_k e^{\lambda_k s}\psi_k(B_{s\wedge T_n})ds + \sum_{i=1}^d \int_0^{t\wedge T_n} e^{\lambda_k s}\frac{\partial\psi_k}{\partial x_i}(B_{s\wedge T_n})dB_s^{(i)} \\
&+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \int_0^{t\wedge T_n} e^{\lambda_k s}\frac{\partial^2\psi_k}{\partial x_i\partial x_j}(B_{s\wedge T_n})d\langle B^{(i)}, B^{(j)}\rangle_s \\
&= \psi_k(x) + \int_0^t \lambda_k e^{\lambda_k s}\psi_k(B_{s\wedge T_n})ds + \sum_{i=1}^d \int_0^{t\wedge T_n} e^{\lambda_k s}\frac{\partial\psi_k}{\partial x_i}(B_{s\wedge T_n})dB_s^{(i)} \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge T_n} e^{\lambda_k s}\Delta\psi_k(B_{s\wedge T_n})ds
\end{aligned}$$

Se denota $M_t := \sum_{i=1}^d \int_0^{t\wedge T_n} e^{\lambda_k s}\frac{\partial\psi_k}{\partial x_i}(B_{s\wedge T_n})dB_s^{(i)}$. Así:

$$\begin{aligned}
e^{\lambda_k(t\wedge T_n)}\psi_k(B_{t\wedge T_n}) &= \psi_k(x) + \int_0^{t\wedge T_n} \lambda_k e^{\lambda_k s}\psi_k(B_{s\wedge T_n})ds + \int_0^{t\wedge T_n} e^{\lambda_k s}\frac{1}{2}\Delta\psi_k(B_{s\wedge T_n})ds + M_t \\
&= \psi_k(x) + \int_0^{t\wedge T_n} e^{\lambda_k s}\left(\lambda_k\psi_k(B_{s\wedge T_n}) + \frac{1}{2}\Delta\psi_k(B_{s\wedge T_n})\right)ds + M_t \\
&= \psi_k(x) + M_t
\end{aligned}$$

Queremos chequear que $\mathbb{E}_x[M_t] = 0$. Para esto, considere que $M_t = \sum_{i=1}^d M_t^{(i)}$ donde

$M_t^{(i)} = \int_0^t e^{\lambda_k s} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}(B_{s\wedge T_n}) \mathbb{1}_{s\leq T_n} dB_s^{(i)}$. Se calcula:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[\int_0^t e^{2\lambda_k s}\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}(B_{s\wedge T_n})\right)^2 \mathbb{1}_{s\leq T_n} ds\right] &\leq \mathbb{E}_x\left[e^{2\lambda_k t}\int_0^t \left|\left|\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}\right|\right|^2_{L^\infty(\overline{U})} ds\right] \\
&= te^{2\lambda_k t}\left|\left|\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}\right|\right|^2_{L^\infty(\overline{U})} < \infty
\end{aligned}$$

Por lo que $\mathbb{E}_x[M_t^{(i)}] = 0$. De esta forma,

$$\mathbb{E}_x[e^{\lambda_k(t\wedge T_n)}\psi_k(B_{t\wedge T_n})] = \psi_k(x) \tag{3.40}$$

Entonces, por Convergencia Dominada se obtiene que $\mathbb{E}_x[e^{\lambda_k(t\wedge T)}\psi_k(B_{t\wedge T})] = \psi_k(x)$. De esta forma:

$$\begin{aligned}
\psi_k(x) = \mathbb{E}_x[e^{\lambda_k(t\wedge T)}\psi_k(B_{t\wedge T})] &= \mathbb{E}_x[e^{\lambda_k(t\wedge T)}\psi_k(B_{t\wedge T})\mathbb{1}_{t<T}] + \mathbb{E}_x[e^{\lambda_k(t\wedge T)}\psi_k(B_{t\wedge T})\mathbb{1}_{T\leq t}] \\
&= \mathbb{E}_x[e^{\lambda_k t}\psi_k(B_t)\mathbb{1}_{t<T}] + \mathbb{E}_x[e^{\lambda_k T}\psi_k(B_T)\mathbb{1}_{T\leq t}] = e^{\lambda_k t}\mathbb{E}_x[\psi_k(B_t)\mathbb{1}_{t<T}] \\
&= e^{\lambda_k t}P_t\psi_k(x)
\end{aligned}$$

Así, se concluye que $P_t\psi_k(x) = e^{-\lambda_k t}\psi_k(x)$. □

Mediante el lema anterior, se obtiene una cómoda representación para P_t. Sea $f \in L^2(U)$, entonces:

$$\begin{aligned}
P_t f = P_t\left(\sum_{k=1}^{\infty}(f,\psi_k)\psi_k\right) &= P_t\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(f,\psi_k)\psi_k\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}P_t\left((f,\psi_k)\psi_k\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(f,\psi_k)P_t\psi_k = \sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda_k t}(f,\psi_k)\psi_k
\end{aligned}$$

De esta manera:

$$P_t f = \sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda_k t}(f,\psi_k)\psi_k, \qquad \forall f\in L^2(U) \tag{3.41}$$

Donde la igualdad es en L^2. Este hecho permitirá decir aún más.

Proposición 3.13 *$\forall t > 0$ el operador P_t es autoadjunto en $L^2(U)$. Además, $(P_t)_{t\geq 0}$ es un Semigrupo de Contracción Fuertemente Continuo en $L^2(U)$ (vea 1.4).*

Demostración. Sea $f, g \in L^2(U)$, entonces:

$$(P_t f, g) = (\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda_k t}(f,\psi_k)\psi_k, g) = \sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda_k t}(f,\psi_k)(\psi_k, g) \tag{3.42}$$

$$= (f, \sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda_k t}(g,\psi_k)\psi_k) = (f, P_t g) \tag{3.43}$$

Ya se sabe que $P_t \in \mathcal{L}(L^2(U), L^2(U))$ para todo $t > 0$. Además, $P_0 f(x) = \mathbb{E}_x[f(B_0)\mathbb{1}_{0<T}] = \mathbb{E}_x[f(B_0)] = f(x)$, por lo que $P_0 = I$. Se calcula:

$$\begin{aligned}||P_t f||^2_{L^2(U)} &= \sum_{k=1}^{\infty} |(P_t f, \psi_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, P_t \psi_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\lambda_k t} |(f, \psi_k)|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |(f, \psi_k)|^2 \\ &= ||f||^2_{L^2(U)}\end{aligned}$$

De donde se obtiene que $||P_t|| \leq 1$. Para la propiedad del semigrupo considere:

$$\begin{aligned}P_t P_s f &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} (P_s f, \psi_k)\psi_k = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} (f, P_s \psi_k)\psi_k = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} e^{-\lambda_k s} (f, \psi_k)\psi_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k (t+s)} (f, \psi_k)\psi_k = P_{t+s} f\end{aligned}$$

Para la continuidad fuerte, note que $(P_t f - f, \psi_k) = (P_t f, \psi_k) - (f, \psi_k) = (f, P_t \psi_k) - (f, \psi_k) = e^{-\lambda_k t}(f, \psi_k) - (f, \psi_k) = (e^{-\lambda_k t} - 1)(f, \psi_k)$. De esta forma:

$$||P_t f - f||^2_{L^2(U)} = \sum_{k=1}^{\infty} |(P_t f - f, \psi_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - e^{-\lambda_k t}\right)^2 |(f, \psi_k)|^2$$

Donde $(1 - e^{-\lambda_k t})^2 |(f, \psi_k)|^2 \longrightarrow 0$ de cuando $t \searrow 0$. Ahora, para $t_0 > 0$ fijo y para $t \leq t_0$ se tiene que $0 \leq 1 - e^{-\lambda_k t} \leq 1 - e^{-\lambda_k t_0}$. Como $(1 - e^{-\lambda_k t})^2 |(f, \psi_k)|^2 \leq (1 - e^{-\lambda_k t_0})^2 |(f, \psi_k)|^2$ y $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda_k t_0})^2 |(f, \psi_k)|^2 < \infty$, por Convergencia Dominada se concluye que $||P_t f - f||^2_{L^2(U)} \longrightarrow 0$ cuando $t \searrow 0$. □

Con lo anterior, se puede construir una versión regular del kernel de transición $p_t(x, y)$. Defina:

$$\zeta(t, x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \psi_k(x)\psi_k(y) \tag{3.44}$$

Para $t > 0,\ x, y \in U$.

Lema 3.14 *La serie* (3.44) *es convergente* $\forall t > 0,\ x, y \in U$. *Es más,* ζ *converge de forma uniforme en* $[\alpha, \infty) \times U \times U$ *para todo* $\alpha > 0$.

Demostración. Por (3.42), se tiene que $(P_t f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} |(f, \psi_k)|^2 < \infty$ para toda $f \in L^2(U)$. Es más, usando (3.34) se obtiene:

$$(P_t f, f) \leq \int_U |P_t f(x)||f(x)| dx \leq ||P_t f||_{\infty} ||f||_{L^1(U)} \leq c_t ||f||^2_{L^1(U)} \tag{3.45}$$

Considere $z \in U$ fijo y denote por $|B(z, \frac{1}{n})|$ al volumen de la bola $B(z, \frac{1}{n})$. Considere $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{B(z, \frac{1}{n_0})} \subseteq U$. Entonces se define para todo $n \geq n_0$ las funciones $f_n(x) = \frac{1}{|B(z, \frac{1}{n})|} \mathbb{1}_{B(z, \frac{1}{n})}(x)$. Esta es una colección de funciones acotadas y tales que $||f_n||_{L^1(U)} = \frac{1}{|B(z, \frac{1}{n})|} \int_{B(z, \frac{1}{n})} dy = 1$. Por (3.45):

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} |(f_n, \psi_k)|^2 \leq c_t \tag{3.46}$$

Para todo $n \geq n_0$. Además, $(f_n, \psi_k) = \frac{1}{|B(z,1/n)|} \int_{B(z,1/n)} \psi_k(y)dy = \psi_k(z_{n,k})$, donde $z_{n,k}$ es un punto en $\overline{B(z,1/n)}$ (vea 4.1). Cuando $n \to \infty$, ocurre que $z_{n,k} \to z$ y $(f_n, \psi_k) = \psi_k(z_{n,k}) \longrightarrow \psi_k(z)$. Usando el Lema de Fatou:

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} |\psi_k(z)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \lim_{n \to \infty} |(f_n, \psi_k)|^2 \leq \liminf_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} |(f_n, \psi_k)|^2 \leq c_t \tag{3.47}$$

De esta forma, lo anterior se tiene para todo $z \in U$. Ahora, para $x, y \in U$, usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} |\psi_k(x)\psi_k(y)| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \psi_k^2(x) \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \psi_k^2(y) \right)^{1/2} \leq c_t \tag{3.48}$$

Por lo tanto, se tiene la convergencia de la serie asociada a ζ. Es más, $|\zeta(t, x, y)| \leq c_t$ para todo $t > 0,\ x, y \in U$. Para la convergencia uniforme nos guiamos por el teorema 2.1.4 en Davies [7]. Observe que $\zeta(t, x, x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \psi_k^2(x)$ es acotada en x y por tanto, integrable. Así:

$$\int_U \zeta(t, x, x)dx = \int_U \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} |\psi_k(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \int_U |\psi_k(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} < \infty \tag{3.49}$$

Ahora, para $t \geq \alpha > 0$ y $x, y \in U$:

$$\begin{aligned}
|e^{-\lambda_k t} \psi_k(x)\psi_k(y)| &= e^{-\lambda_k t/3} |e^{-\lambda_k t/3} \psi_k(x)| |e^{-\lambda_k t/3} \psi_k(y)| \\
&= e^{-\lambda_k t/3} |P_{t/3}\psi_k(x)| |P_{t/3}\psi_k(y)| \leq e^{-\lambda_k t/3} ||P_{t/3}\psi_k||_\infty ||P_{t/3}\psi_k||_\infty \\
&\leq e^{-\lambda_k t/3} c_{t/3} |U|^{1/2} ||\psi_k||_{L^2(U)} c_{t/3} |U|^{1/2} ||\psi_k||_{L^2(U)} \leq |U| c_{t/3}^2 e^{-\lambda_k t/3} \\
&\leq |U| c_{\alpha/3}^2 e^{-\lambda_k \alpha/3}
\end{aligned}$$

Donde se usó (3.35) y el hecho que c_t es decreciente en t. En particular:

$$e^{-\lambda_k t} ||\psi_k||_\infty^2 \leq |U| c_{t/3}^2 e^{-\lambda_k t/3} \tag{3.50}$$

Tomando supremo, en $[\alpha, \infty) \times U \times U$ se obtiene:

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||e^{-\lambda_k \bullet} \psi_k(\bullet)\psi_k(\bullet)||_{L^\infty} \leq |U| c_{\alpha/3}^2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k \alpha/3} < \infty \tag{3.51}$$

□

De esta forma, el núcleo ζ está bien definido y $\zeta(t, \bullet, \bullet)$ es acotado. Además, como cada sumando es continuo, se obtiene que ζ es una función continua en $(0, \infty) \times U \times U$. El siguiente teorema prueba que $\zeta(t, x, y)$ es una versión de $p_t(x, y)$.

Teorema 3.15 *$\forall f \in L^2(U),\ t > 0,\ x \in U$:*

$$P_t f(x) = \int_U f(y)\zeta(t, x, y)dy \tag{3.52}$$

Demostración. Sea $t > 0$ y $x \in U$ fijo. Para $f \in L^2(U)$, note que $\zeta(t, x, \bullet)$ es acotada por lo que $f(\bullet)\zeta(t, x, \bullet)$ es integrable. Ahora:

$$\int_U f(y)\zeta(t, x, y)dy = \int_U \sum_{k=1}^{\infty} f(y)e^{-\lambda_k t}\psi_k(x)\psi_k(y)dy \tag{3.53}$$

Usando (3.48), se obtiene $|\sum_{k=1}^{n} f(y)e^{-\lambda_k t}\psi_k(x)\psi_k(y)| \leq |f(y)|c_t$, lo cual es integrable. Por Convergencia Dominada:

$$\int_U f(y)\zeta(t, x, y)dy = \sum_{k=1}^{\infty} \int_U f(y)e^{-\lambda_k t}\psi_k(x)\psi_k(y)dy = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}(f, \psi_k)\psi_k(x) \tag{3.54}$$

Ahora, si $f = \psi_i$

$$\int_U \psi_i(y)\zeta(t, x, y)dy = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}(\psi_i, \psi_k)\psi_k(x) = e^{-\lambda_i t}\psi_i(x) = P_t\psi_i(x)$$

Por lo tanto, (3.52) es cierta en la familia $\{\psi_k\}_{k\geq 1}$. Por linealidad, (3.52) es cierta para las combinaciones lineales finitas de elementos de $\{\psi_k\}_{k\geq 1}$. Este conjunto es denso en $L^2(U)$. Sea entonces $f \in L^2(U)$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones que cumplen (3.52) y convergen a f. Por un lado:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_U f(y)\zeta(t, x, y)dy - \int_U f_n(y)\zeta(t, x, y)dy\right| = \left|\int_U (f - f_n)(y)\zeta(t, x, y)dy\right| \\
&\leq \int_U |f - f_n|(y)|\zeta(t, x, y)|dy \leq ||f - f_n||_{L^2(U)} \left(\int_U \zeta^2(t, x, y)dy\right)^{1/2} \\
&\leq c_t|U|^{1/2}||f - f_n||_{L^2} \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

Por otro lado, usando (3.35) se obtiene que $|P_t f_n(x) - P_t f(x)| = |P_t(f_n - f)(x)| \leq ||P_t(f_n - f)||_\infty \leq c_t|U|^{1/2}||f_n - f||_{L^2(U)} \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$. Tomando límite en la expresión $\int_U f_n(y)\zeta(t, x, y)dy = P_t f_n(x)$, se concluye que $\int_U f(y)\zeta(t, x, y)dy = P_t f(x)$ para toda $f \in L^2(U)$. □

Si considera $f = \mathbb{1}_B$ para $B \in \mathcal{B}(U)$, se obtiene que $\int_B \zeta(t, x, y)dy = P_t\mathbb{1}_B(x) \geq 0$. Esto implica que $\zeta(t, x, \bullet) \geq 0$ de forma dy-c.s. Dada la regularidad de ζ, se concluye que $\zeta(t, x, y) \geq 0$ para todo $t > 0$, $x, y \in U$.

3.4. QSD para el proceso de Bessel: Unicidad

En esta sección se demostrará que ν es la única distribución cuasi-estacionaria para el proceso $X_{t\wedge T}$. Para esto, se construirá un núcleo regular para el semigrupo $\mathbb{E}_v[f(X_t)\mathbb{1}_{t<T}]$. Considere:

$$p_t(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}\psi_k(x)\psi_k(y) \tag{3.55}$$

Para $t > 0,\ x, y \in U$. En la sección anterior se demostró que $p_t(x, y)$ es una densidad continua y no negativa para el semigrupo $P_t f(x) = \mathbb{E}_x[f(B_t)\mathbb{1}_{t<T}]$. Además:

$$p_t(x, y) \leq c_t = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \qquad \forall x, y \in U \tag{3.56}$$

Cabe mencionar que $p_t(x, y)$ es *simétrico*, es decir: $p_t(x, y) = p_t(y, x)\ \forall x, y \in U$. De esta forma, para $t > 0,\ y \in U,\ v \in (0, 1)$, se define:

$$Q_t(y, v) := \int_{S^{d-1}} p_t(y, v\hat{\phi}) dS^{d-1} \tag{3.57}$$

Note que:

$$Q_t(y, v) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} p_t(y, v\hat{\phi}) g(\hat{\phi}) d\phi_1 d\phi_2 \ldots d\phi_{d-1} \tag{3.58}$$

Donde $g(\hat{\phi}) = \sin^{d-2}(\phi_1)\sin^{d-3}(\phi_2)\ldots\sin(\phi_{d-2})$. Así, $p_t(y, v\hat{\phi})|g(\hat{\phi})| \leq c_t$ por lo que la integral en (3.58) está bien definida.

Lema 3.16 *$Q_t(y, \bullet)$ es una función continua.*

Demostración. Sea $t > 0,\ y \in U$ fijo. Considere $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $(0, 1)$ que converge a $v \in (0, 1)$. Entonces, $\forall \hat{\phi} \in S^{d-1} :\ v_n\hat{\phi} \longrightarrow v\hat{\phi}$. De la continuidad de p_t se obtiene: $p_t(y, v_n\hat{\phi}) \longrightarrow p_t(y, v\hat{\phi})$. Note que $|p_t(y, v_n\hat{\phi})g(\hat{\phi})| \leq c_t$. Mediante (3.58) y Convergencia Dominada, se concluye que $Q_t(y, v_n) \longrightarrow Q_t(y, v)$. □

Lema 3.17 *$Q_t(\bullet, v)$ es radialmente simétrico.*

Demostración. Considere $y, z \in U$ tales que $|y| = |z|$. Defina para $v \in (0, 1)$ y $\varepsilon > 0$, el conjunto $D_\varepsilon = \{x \in U \mid v < |x| < v + \varepsilon\}$. De 3.2 se obtiene que:

$$\mathbb{P}_y(X_t \in (v, v+\varepsilon)) = \mathbb{P}_z(X_t \in (v, v+\varepsilon)) \tag{3.59}$$

Además,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_y(X_t \in (v, v+\varepsilon)) = \mathbb{P}_y(B_t \in D_\varepsilon) = \mathbb{P}_y(B_t \in D_\varepsilon, T > t) = \mathbb{E}_y[\mathbb{1}_{D_\varepsilon}(B_t)\mathbb{1}_{T>t}] \\
&= \int_U \mathbb{1}_{D_\varepsilon}(x) p_t(y, x) dx = \int_U \mathbb{1}_{(v,v+\varepsilon)}(|x|) p_t(y, x) dx = \int_0^1 \int_{S^{d-1}} \mathbb{1}_{(v,v+\varepsilon)}(r) p_t(y, r\hat{\phi}) r^{d-1} dS^{d-1} dr \\
&= \int_0^1 \mathbb{1}_{(v,v+\varepsilon)}(r) r^{d-1} \int_{S^{d-1}} p_t(y, r\hat{\phi}) dS^{d-1} dr = \int_v^{v+\varepsilon} r^{d-1} Q_t(y, r) dr
\end{aligned}$$

De la continuidad de $Q_t(u, \bullet)$ se obtiene:

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{P}_y(X_t \in (v, v+\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_v^{v+\varepsilon} r^{d-1} Q_t(y, r) dr = v^{d-1} Q_t(y, v) \tag{3.60}$$

De (3.59) se obtiene que este límite es también igual a $v^{d-1}Q_t(z, v)$. Así $Q_t(y, v) = Q_t(z, v)$. □

De esta forma, para $t > 0,\ w, v \in (0,1)$ se define:

$$r_t(w,v) := Q_t(we_1, v) \tag{3.61}$$

donde $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. A continuación se demostrará que r_t es un núcleo de transición simétrico para el semigrupo $\mathbb{E}_v[f(X_t)\mathbb{1}_{t<T}]$, con respecto a la medida μ.

Lema 3.18 *$r_t(w,v)$ es simétrico.*

Demostración. Sea $t > 0,\ w, v \in (0,1)$. Usando el lema 3.17,

$$\begin{aligned}
r_t(w,v) &= \frac{1}{|S^{d-1}|}\int_{S^{d-1}} Q_t(w\hat{\psi}, v)dS_\psi^{d-1} = \frac{1}{|S^{d-1}|}\int_{S^{d-1}}\int_{S^{d-1}} p_t(w\hat{\psi}, v\hat{\phi})dS_\phi^{d-1}dS_\psi^{d-1} \\
&= \frac{1}{|S^{d-1}|}\int_{S^{d-1}}\int_{S^{d-1}} p_t(v\hat{\phi}, w\hat{\psi})dS_\phi^{d-1}dS_\psi^{d-1} = \frac{1}{|S^{d-1}|}\int_{S^{d-1}}\int_{S^{d-1}} p_t(v\hat{\phi}, w\hat{\psi})dS_\psi^{d-1}dS_\phi^{d-1} \\
&= \frac{1}{|S^{d-1}|}\int_{S^{d-1}} Q_t(v\hat{\phi}, w)dS_\phi^{d-1} = \frac{r_t(v,w)}{|S^{d-1}|}\int_{S^{d-1}} dS_\phi^{d-1} = r_t(v,w)
\end{aligned}$$

□

Considere para $w \in (0,1)$:

$$\overline{\psi}(w) := \sqrt{|S^{d-1}|}\psi_1(w) \tag{3.62}$$

Teorema 3.19 *$\forall f \in \mathcal{M}_b((0,1)),\ t > 0,\ v \in (0,1)$:*

$$\mathbb{E}_v[f(X_t)\mathbb{1}_{t<T}] = \int_0^1 f(w)r_t(v,w)d\mu(w) \tag{3.63}$$

Además, $\forall v, w \in (0,1)$:

$$\lim_{t\to\infty} e^{\lambda_1 t} r_t(v,w) = \overline{\psi}(v)\overline{\psi}(w) \tag{3.64}$$

Demostración. Usando el corolario 3.2:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_v[f(X_t)\mathbb{1}_{t<T}] &= \frac{1}{|S^{d-1}|}\int_{S^{d-1}} \mathbb{E}_{v\hat{\phi}}[f(|B_t|)\mathbb{1}_{t<T}]dS^{d-1} = \frac{1}{|S^{d-1}|}\int_{S^{d-1}}\int_U f(|y|)p_t(v\hat{\phi}, y)dydS^{d-1} \\
&= \frac{1}{|S^{d-1}|}\int_U\int_{S^{d-1}} f(|y|)p_t(y, v\hat{\phi})dS^{d-1}dy = \frac{1}{|S^{d-1}|}\int_U f(|y|)Q_t(y,v)dy \\
&= \frac{1}{|S^{d-1}|}\int_0^1\int_{S^{d-1}} f(w)Q_t(w\hat{\phi}, v)w^{d-1}dS^{d-1}dw \\
&= \frac{1}{|S^{d-1}|}\left(\int_0^1 f(w)r_t(w,v)w^{d-1}dw\right)\int_{S^{d-1}} dS^{d-1} \\
&= \int_0^1 f(w)r_t(w,v)d\mu(w)
\end{aligned}$$

Considere $v, w \in (0,1)$:

$$\begin{aligned}
e^{\lambda_1 t} r_t(v,w) = e^{\lambda_1 t} Q_t(ve_1, w) &= e^{\lambda_1 t}\int_{S^{d-1}} p_t(ve_1, w\hat{\phi})dS^{d-1} \\
&= e^{\lambda_1 t}\int_{S^{d-1}}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}\psi_k(ve_1)\psi_k(w\hat{\phi})dS^{d-1}
\end{aligned}$$

Por medio de (3.48) se obtiene que $|\sum_{k=1}^n e^{-\lambda_k t}\psi_k(ve_1)\psi_k(w\hat{\phi})| \leq c_t$. Usando el Teorema de Convergencia Dominada, se obtiene:

$$\begin{aligned}
e^{\lambda_1 t} r_t(v,w) &= e^{\lambda_1 t}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{S^{d-1}} e^{-\lambda_k t}\psi_k(ve_1)\psi_k(w\hat{\phi})dS^{d-1} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{(\lambda_1-\lambda_k)t}\psi_k(ve_1)\int_{S^{d-1}}\psi_k(w\hat{\phi})dS^{d-1}\\
&= \psi_1(ve_1)\int_{S^{d-1}}\psi_1(w\hat{\phi})dS^{d-1} + \sum_{k=2}^{\infty} e^{(\lambda_1-\lambda_k)t}\psi_k(ve_1)\int_{S^{d-1}}\psi_k(w\hat{\phi})dS^{d-1}\\
&= \psi_1(v)\psi_1(w)|S^{d-1}| + \sum_{k=2}^{\infty} e^{(\lambda_1-\lambda_k)t}\psi_k(ve_1)\int_{S^{d-1}}\psi_k(w\hat{\phi})dS^{d-1}
\end{aligned}$$

Donde se usó la simetría radial de ψ_1 (recuerde (3.22)). Como λ_1 es simple, $e^{(\lambda_1-\lambda_k)t}\psi_k(ve_1)$ $\int_{S^{d-1}}\psi_k(w\hat{\phi})dS^{d-1} \longrightarrow 0$ cuando $t\to\infty$, para $k\geq 2$. Además, para todo $t \geq t_0 > 0$:

$$\begin{aligned}
&|e^{(\lambda_1-\lambda_k)t}\psi_k(ve_1)\int_{S^{d-1}}\psi_k(w\hat{\phi})dS^{d-1}| \leq e^{(\lambda_1-\lambda_k)t}|\psi_k(ve_1)|\int_{S^{d-1}}|\psi_k(w\hat{\phi})||dS^{d-1}|\\
&\leq e^{(\lambda_1-\lambda_k)t_0}|\psi_k(ve_1)|\int_{S^{d-1}}|\psi_k(w\hat{\phi})||dS^{d-1}| \leq e^{\lambda_1 t_0}e^{-\lambda_k t_0}||\psi_k||_\infty^2\int_{S^{d-1}}|dS^{d-1}|\\
&\leq e^{\lambda_1 t_0}\int_{S^{d-1}}|dS^{d-1}||U|c_{t_0/3}^2 e^{-\lambda_k t_0/3}
\end{aligned}$$

Donde se usó (3.50). Este término es sumable en k debido a (3.49). Por Convergencia Dominada:

$$e^{\lambda_1 t} r_t(v,w) = \psi_1(v)\psi_1(w)|S^{d-1}| + \sum_{k=2}^{\infty} e^{(\lambda_1-\lambda_k)t}\psi_k(ve_1)\int_{S^{d-1}}\psi_k(w\hat{\phi})dS^{d-1} \longrightarrow \overline{\psi}(v)\overline{\psi}(w) \tag{3.65}$$

□

A continuación se demuestra que ν es un *Límite de Yaglom* para el Proceso de Bessel. Adicionalmente, es la única distribución cuasi-estacionaria.

Teorema 3.20 (Convergencia y Unicidad)

(i) $\forall h \in \mathcal{M}_b((0,1)),\ v \in (0,1)$*:*

$$\lim_{t\to\infty} e^{\lambda_1 t}\mathbb{E}_v(h(X_t), t < T) = \overline{\psi}(v)\int h(w)\overline{\psi}(w)d\mu(w) \tag{3.66}$$

(ii) $\forall h \in \mathcal{M}_b((0,1)),\ v \in (0,1)$*:*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_v(h(X_t) \mid T > t) = \int h(w)d\nu(w) \tag{3.67}$$

Donde ν es la medida de probabilidad definida en (3.24).

(iii) Sea ξ una medida de probabilidad con soporte en $(0,1)$*. Entonces,* $\forall h \in \mathcal{M}_b((0,1))$*:*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_\xi(h(X_t) \mid T > t) = \int h(w)d\nu(w) \tag{3.68}$$

En particular ν es la única q.s.d para $X_{t\wedge T}$.

Demostración. De la demostración anterior, para $t > t_0 \geq 0$:

$$\begin{aligned}
e^{\lambda_1 t} r_t(v,w) &= \psi_1(v)\psi_1(w)|S^{d-1}| + \sum_{k=2}^{\infty} e^{(\lambda_1-\lambda_k)t}\psi_k(ve_1)\int_{S^{d-1}} \psi_k(w\hat{\phi})dS^{d-1} \\
&\leq ||\overline{\psi}||_\infty^2 + \sum_{k=2}^{\infty} e^{(\lambda_1-\lambda_k)t}|\psi_k(ve_1)\int_{S^{d-1}} \psi_k(w\hat{\phi})dS^{d-1}| \\
&\leq ||\overline{\psi}||_\infty^2 + e^{\lambda_1 t_0}\int_{S^{d-1}} |dS^{d-1}||U|c_{t_0/3}^2 \sum_{k=2}^{\infty} e^{-\lambda_k t_0/3} =: M_{t_0} < \infty
\end{aligned}$$

Sea $h \in \mathcal{M}_b((0,1))$ y $v \in (0,1)$. De lo anterior se desprende que $|h(w)e^{\lambda_1 t} r_t(v,w)| \leq ||h||_\infty M_{t_0}$. Para (i), recuerde que μ es una medida finita. Entonces, por Convergencia Dominada:

$$\begin{aligned}
e^{\lambda_1 t}\mathbb{E}_v(h(X_t)\mathbb{1}_{t<T}) = e^{\lambda_1 t}\int_0^1 h(w)r_t(v,w)\mu(dw) &\longrightarrow \int_0^1 h(w)\overline{\psi}(v)\overline{\psi}(w)\mu(dw) \\
&= \overline{\psi}(v)\int h(w)\overline{\psi}(w)d\mu(w)
\end{aligned}$$

Para (ii), si $h = 1$, se obtiene: $\lim_{t\to\infty} e^{\lambda_1 t}\mathbb{P}_v(T > t) = \overline{\psi}(v)\int \overline{\psi}(w)d\mu(w) > 0$. Esto implica que para $v \in (0,1)$ existe un t_0 tal que $\forall t \geq t_0$ se tiene $\mathbb{P}_v(T > t) > 0$. Esto implica que $\mathbb{P}_v(T > t) > 0$ para todo $t \geq 0$. Esto le da sentido a la expresión $\mathbb{E}_v(h(X_t) \mid T > t)$. Ahora:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_v(h(X_t) \mid T > t) = \frac{\mathbb{E}_v(h(X_t), T > t)}{\mathbb{P}_v(T > t)} &= \frac{e^{\lambda_1 t}\mathbb{E}_v(h(X_t), T > t)}{e^{\lambda_1 t}\mathbb{P}_v(T > t)} \\
&\longrightarrow \frac{\overline{\psi}(v)\int_0^1 h(w)\overline{\psi}(w)d\mu(w)}{\overline{\psi}(v)\int_0^1 \overline{\psi}(w)d\mu(w)} = \int_0^1 h(y)\nu(dy)
\end{aligned}$$

Para (iii), considere ξ una medida de probabilidad tal que $\xi(0,1) = 1$. Entonces:

$$\mathbb{E}_\xi(h(X_t) \mid T > t) = \frac{\mathbb{E}_\xi(h(X_t)\mathbb{1}_{T>t})}{\mathbb{P}_\xi(T > t)} = \frac{\int_0^1 \mathbb{E}_v(h(X_t)\mathbb{1}_{T>t})\xi(dv)}{\int_0^1 \mathbb{P}_v(T > t)\xi(dv)} = \frac{\int_0^1 e^{\lambda_1 t}\mathbb{E}_v(h(X_t)\mathbb{1}_{T>t})\xi(dv)}{\int_0^1 e^{\lambda_1 t}\mathbb{P}_v(T > t)\xi(dv)}$$

Para $t \geq t_0 > 0 :$ $|e^{\lambda_1 t}\mathbb{E}_v(h(X_t)\mathbb{1}_{t<T})| \leq \int_0^1 |h(w)e^{\lambda_1 t} r_t(v,w)|\mu(dw) \leq ||h||_\infty M_{t_0}\mu((0,1))$. Como ξ es una medida de probabilidad, esta cota es integrable. Así,

$$\begin{aligned}
&\frac{\int_0^1 e^{\lambda_1 t}\mathbb{E}_v(h(X_t)\mathbb{1}_{T>t})\xi(dv)}{\int_0^1 e^{\lambda_1 t}\mathbb{P}_v(T > t)\xi(dv)} \longrightarrow \frac{\int_0^1 \overline{\psi}(v)\left(\int_0^1 h(w)\overline{\psi}(w)d\mu(w)\right)\xi(dv)}{\int_0^1 \overline{\psi}(v)\left(\int_0^1 \overline{\psi}(w)d\mu(w)\right)\xi(dv)} \\
&= \frac{\int_0^1 h(w)\overline{\psi}(w)d\mu(w)}{\int_0^1 \overline{\psi}(w)d\mu(w)} = \int_0^1 h(w)d\nu(w)
\end{aligned}$$

Por último, veamos que ν es la única q.s.d. Sea ξ una medida de probabilidad en $(0,1)$. Para $B \in \mathcal{B}((0,1))$, considere $h = \mathbb{1}_B$. Entonces $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_\xi(X_t \in B \mid T > t) = \nu(B)$. Si ξ fuera una q.s.d. entonces se tendría que $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_\xi(X_t \in B \mid T > t) = \xi(B) = \nu(B)$. De donde se concluye la unicidad. $\square$

La densidad con respecto a la medida Lebesgue para el límite de Yaglom es $f(r) = \psi_1(r)r^{d-1}$. Note que f es de clase $C^\infty[0,1]$ y $f(0) = f(1) = 0$. De esta forma, cuando el Proceso de Bessel ha conseguido sobrevivir mucho tiempo lo más probable es que se encuentre en un punto $r^* \in argmax_{r\in(0,1)} f(r)$ el cual está en $(0,1)$. ¿Será único este punto? ¿Si lo es, cual será?

3.5. Tópicos Adicionales

En esta sección tocamos algunos tópicos adicionales sobre el proceso $X_{t\wedge T}$. Comenzamos analizando el operador $\mathcal{A}$, el cual es usado en (1.56) para estudiar difusiones regulares en el intervalo acotado. Para atacar el caso $[0,\infty)$, en Collet, Martínez & San Martín [6], capítulo 6, se trabaja con $\mathcal{A}$ de tipo *limit-point at infinity*. Por esto, nos interesa saber, según la clasificación propuesta por Weyl (vea [5], capítulo 9 y 4.2 en el apéndice), a que tipo corresponde $\mathcal{A}$. Así, se responderá a la pregunta: ¿Es $\mathcal{A}$ de tipo Limit-point o Limit-circle ? Recuerde:

$$\mathcal{A}u = \frac{1}{2}u'' + \frac{1}{2}(\partial_x \alpha - \alpha^2)u \tag{3.69}$$

Donde $\alpha(x) = -\frac{d-1}{2x}$ es de clase $C^1(0,1]$. Por lo tanto $\mathcal{A}u(x)$ tiene sentido para $x \in (0,1]$. Resulta interesante estudiar $-\mathcal{A}$ pues este se escribe como $-\mathcal{A}u = -(pu')' + qu$ donde $p(x) = \frac{1}{2}$ y $q(x) = -\frac{1}{2}(\partial_x\alpha(x) - \alpha^2(x))$. Así, $-\mathcal{A}$ es *formalmente autoadjunto*. Note que la singularidad de α en 0 impide (a priori) estudiar el operador como se hace en [5], capítulo 7. Considere para $x \in (0,1]$:

$$\begin{aligned}
q(x) &= \frac{-1}{2}\left(\partial_x\alpha(x) - \alpha^2(x)\right) = \frac{1}{2}\left(\alpha^2(x) - \partial_x\alpha(x)\right) = \frac{1}{2}\left((-\frac{d-1}{2x})^2 - (-\frac{d-1}{2x})'\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(d-1)^2}{4x^2} - (\frac{d-1}{2x^2})\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(d-1)^2}{4x^2} - \frac{2d-2}{4x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2-2d+1-2d+2}{4x^2}\right) \\
&= \frac{d^2-4d+3}{8x^2} = \frac{(d-1)(d-3)}{8x^2} = \frac{r(d)}{x^2}
\end{aligned}$$

Donde $r(d) := \frac{(d-1)(d-3)}{8}$. De esta forma:

$$-\mathcal{A}u(x) = -\frac{1}{2}u''(x) + \frac{r(d)}{x^2}u(x) \tag{3.70}$$

Observe que el coeficiente $q(x)$ posee una singularidad en el 0, la cual no es integrable, por lo que debe ser tratada como un caso singular (ver [5], capítulo 9), excepto si $d = 3$, entonces se tiene que $q(x) = 0$ y $-\mathcal{A}u = \frac{1}{2}u''$. Note que para $d \geq 3$ $q(x) \geq 0$ y si $d \geq 4$ entonces $q(x) \longrightarrow +\infty$ cuando $x \searrow 0$. Por otro lado cuando $d = 2$ se tiene que $r(d) = -\frac{1}{8}$ y por consiguiente:

$$q_2(x) := \frac{r(2)}{x^2} = -\frac{1}{8x^2} \tag{3.71}$$

Se pueden estudiar las soluciones de $\mathcal{A}u = \lambda u$ mediante el generador $\mathcal{L}$. La relación está dada por el siguiente lema:

Lema 3.21 *Sea $\psi \in C^2(0,1]$ una solución del problema $\mathcal{L}\psi = \lambda\psi$ para $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, $u(x) = \psi(x)e^{-\gamma(x)/2}$ pertenece a $C^2(0,1]$ y es solución de $\mathcal{A}u = \lambda u$.*

Demostración. Como ψ y $e^{-\gamma}$ son de clase $C^2(0,1]$ entonces $\sqrt{e^{-\gamma}} = e^{-\gamma/2} \in C^2(0,1]$ por lo que $u \in C^2(0,1]$. Así, para $x \in (0,1)$ se tiene que: $u' = \psi' e^{-\gamma/2} + \psi(e^{-\gamma/2})' = \psi' e^{-\gamma/2} + \psi e^{-\gamma/2}\left(\frac{-\gamma'}{2}\right) = \psi' e^{-\gamma/2} + \psi e^{-\gamma/2}(-\alpha) = e^{-\gamma/2}(\psi' - \psi\alpha)$ y por tanto: $u'' = e^{-\gamma/2}(\psi'' - \psi'\alpha - \psi\alpha') + e^{-\gamma/2}(-\alpha)(\psi' - \psi\alpha) = e^{-\gamma/2}(\psi'' - \psi'\alpha - \psi\alpha' - \alpha\psi'\psi\alpha^2) = e^{-\gamma/2}(\psi'' - 2\alpha\psi' - \psi\alpha' + \psi\alpha^2) = e^{-\gamma/2}(\psi'' - 2\alpha\psi' - \psi(\alpha' - \alpha^2))$. Así $\frac{1}{2}u'' = e^{-\gamma/2}\left(\frac{1}{2}\psi'' - \alpha\psi' - \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha^2)\psi\right) = e^{-\gamma/2}(\lambda\psi) - \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha^2)u = \lambda u - \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha^2)u$. □

Lema 3.22

$$\begin{cases} \int_0^1 p^2(x)d\mu(x) < \infty & si\ d = 2,3. \\ \int_0^1 p^2(x)d\mu(x) = \infty & si\ d \geq 4. \end{cases} \tag{3.72}$$

Demostración. Considere la función $\phi(x) = -x\log x$. Se sabe que esta función posee límite en 0 igual a 0. Así, ϕ es una función continua no negativa en $[0,1]$. Se denota $||\phi||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |\phi(x)|$.

Si $d = 2$: $\int_0^1 p^2(x)e^{-\gamma(x)}dx = \int_0^1 x\log^2 x dx = \int_0^1 -x\log x\ (-\log x)dx = \int_0^1 \phi(x)(-\log x)dx \leq ||\phi||_\infty \int_0^1 -\log x dx = ||\phi||_\infty\ (x - x\log x)|_0^1 = ||\phi||_\infty[1 - 0 - 0 + 0] = ||\phi||_\infty < \infty$.

Si $d \geq 3$: $\int_0^1 p^2(x)e^{-\gamma(x)}dx = \frac{1}{(d-2)^2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^{d-2}}\right)^2 x^{d-1}dx = \frac{1}{(d-2)^2}\int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x^{d-2}} + \frac{1}{x^{2d-4}}\right) x^{d-1}dx = \frac{1}{(d-2)^2}\int_0^1 x^{d-1} - 2x + \frac{1}{x^{2d-4+1-d}}dx = \frac{1}{(d-2)^2}\int_0^1 x^{d-1} - 2x + \frac{1}{x^{d-3}}dx$.

Por lo tanto, para $d = 3$: $\int_0^1 p^2(x)e^{-\gamma(x)}dx = \frac{1}{(d-2)^2}\int_0^1 x^2 - 2x + 1dx < \infty$. En cambio, para $d \geq 4 : \int_0^1 p^2(x)e^{-\gamma(x)}dx = \frac{1}{(d-2)^2}\left(C + \int_0^1 \frac{1}{x^{d-3}}dx\right) = \infty$. □

Con lo anterior, podemos clasificar $\mathcal{A}$ como *Limit-point* o *Limit-circle*. Vea la sección 4.2 en el Apéndice para una breve descripción de estos conceptos.

Teorema 3.23 *El operador $\mathcal{A}$ en $(0,1]$ es de clase Limit-point si $d \geq 4$ y Limit-circle si $d = 2,3$.*

Demostración. Considere la función de escala p, la cual es solución de $\mathcal{L}p = 0$. Entonces del lema 3.21 la función $u(x) = p(x)e^{-\gamma(x)/2}$ es solución de $\mathcal{A}u = 0$. Si $d \geq 4$, se tiene que $\int_0^1 u^2(x)dx = \int_0^1 p^2(x)e^{-\gamma(x)}dx = \infty$, donde se emplea el lema 3.22. Así, para $\lambda = 0$ se tiene que existe una solución a $-\mathcal{A}u = \lambda u$ que no es de cuadrado integrable. Por tanto, $-\mathcal{A}$ es tipo *limit-point*.

Si $d = 3$, entonces $-\mathcal{A}u = -\frac{1}{2}u''$. Consideremos $\lambda = -\frac{1}{2}$. Entonces $-\mathcal{A}u = \lambda u$ no es más que $u'' = u$. Dos soluciones linealmente independientes de este problema son $\cos t$ y $\sin t$, ambas de clase $L^2(0,1]$. Por tanto, toda solución a $-\mathcal{A}u = \lambda u$ es de cuadrado integrable. Así $-\mathcal{A}$ es de tipo *limit-circle*.

Para $d = 2$ sabemos que $p(x) = \log x$. Así $u_1(x) := p(x)e^{-\gamma(x)/2} = x^{1/2}\log x = \sqrt{x}\log x$ es solución de $\mathcal{A}u_1 = 0$ y por el lema 3.22: $\int_0^1 u_1^2(x)dx = \int_0^1 p^2(x)d\mu(x) < \infty$.

Notemos que $1 - \log x$ también es solución de $\mathcal{L}v = 0$. Por tanto $u_2(x) = \sqrt{x}(1 - \log x)$ es solución de $\mathcal{A}u_2(x) = 0$. Además, $u_2(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x}\log x = \sqrt{x} - u_1(x)$. Es fácil ver que u_1 y u_2 son dos soluciones L^2 linealmente independientes de $\mathcal{A}u = 0$. Así para $\lambda = 0$ toda solución de $-\mathcal{A}u = \lambda u$ es de cuadrado integrable. Se concluye que $-\mathcal{A}$ es de tipo *limit-circle*. $\square$

Otro aspecto a analizar es el tipo de frontera que posee el operador $\mathcal{L}$ actuando en $(0, 1)$. Nos remitimos a la clasificación de frontera presentada por Feller en [9] y enunciada en el apéndice 4.5. En particular, estudiaremos la función W y $a^{-1}W^{-1}$ definidas en la sección 4.5.

Teorema 3.24 *Para $d \geq 2$ se tiene que 0 es una frontera* ***Entrance*** *mientras que 1 es una frontera* ***Regular****.*

Demostración. Consideremos un punto $c \in (0, 1)$ y calculemos para $x \in (0, 1)$ la función $W(x) = \exp\{-\int_c^x \frac{b(s)}{a(s)}ds\} = \exp\{-\int_c^x \frac{d-1}{2s(1/2)}ds\} = \exp\{-\int_c^x \frac{d-1}{s}ds\} = \exp\{-(d-1)[\log x - \log c]\} = \exp\{-(d-1)\log\left(\frac{x}{c}\right)\} = \exp\{\log\left(\frac{x}{c}\right)^{-(d-1)}\} = \left(\frac{x}{c}\right)^{-(d-1)}$.

De esta forma $a^{-1}(x)W^{-1}(x) = 2\left(\frac{x}{c}\right)^{d-1}$. Ambas funciones son continuas en el 1 y por tanto integrables en $[c, 1]$. Así, 1 es una frontera regular. Para el 0 considere $-\int_c^0 W(x)dx = \int_0^c \left(\frac{x}{c}\right)^{-(d-1)} dx = c^{d-1}\int_0^c \frac{dx}{x^{d-1}} = \infty$.

Por otro lado, $a^{-1}W^{-1}$ sí es integrable al 0, pues es continua. Calculamos para $x < c$: $-a^{-1}(x)W^{-1}(x)\int_c^x W(s)ds = 2\left(\frac{x}{c}\right)^{d-1}\int_x^c \left(\frac{s}{c}\right)^{-(d-1)} ds = 2\left(\frac{x}{c}\right)^{d-1} c^{d-1}\int_x^c \frac{ds}{s^{d-1}} = 2x^{d-1}\int_x^c \frac{ds}{s^{d-1}}$.

Si $d \geq 3$, entonces: $-a^{-1}(x)W^{-1}(x)\int_c^x W(s)ds = 2x^{d-1}\left(\frac{x^{2-d}-c^{2-d}}{2-d}\right) = \frac{2x^{d-1}c^{2-d}-2x}{d-2}$. La cual es continua en el 0 y por tanto, integrable. Para $d = 2$, se tiene que $-a^{-1}(x)W^{-1}(x)\int_c^x W(s)ds = 2x(\log c - \log x) = 2x\log c - 2x\log x$. La cual también es continua en el 0 y por lo tanto, integrable. Así, se comprueba que esta frontera es **Entrance**. $\square$

Considerando $c = 1$ lo anterior se puede escribir como:

$$\int_0^1 e^{\gamma(z)}dz = \infty \qquad \int_0^1 e^{-\gamma(x)}\int_x^1 e^{\gamma(z)}dzdx < \infty \tag{3.73}$$

Si ν es una q.s.d. para el proceso de Bessel, entonces T posee ley exponencial bajo $\mathbb{P}_\nu$ y por ende $\mathbb{E}_x(T) < \infty$ para todo $x \in (0, 1)$ de forma ν-c.s. A continuación, probaremos que T posee esperanza finita bajo toda medida $\mathbb{P}_x$ y daremos una fórmula explícita para calcularla.

Considere la función de escala p. Se define el núcleo $G(x, y) = -p(x \vee y)$ para $x, y \in (0, 1)$ y la función $M(x) = \int_0^1 G(x, y)m(dy)$ para $x \in (0, 1)$.

Proposición 3.25 *En el contexto anterior, $M(x) < \infty$ para todo $x \in (0, 1)$. Además:*

$$\mathbb{E}_x(T) = M(x) = \frac{1 - x^2}{d} \qquad \forall x \in (0, 1) \tag{3.74}$$

Demostración. Para $x, y \in (0,1)$ se tiene que $G(x,y) \geq 0$. Además:

$$\begin{aligned} M(x) &= \int_0^1 -p(x \vee y) 2 e^{-\gamma(y)} dy = \int_0^x -2p(x) e^{-\gamma(y)} dy + \int_x^1 -2p(y) e^{-\gamma(y)} dy \\ &= -2p(x) \int_0^x e^{-\gamma(y)} dy + 2 \int_x^1 -p(y) e^{-\gamma(y)} dy \end{aligned}$$

Dado que m es una medida finita, se tiene que la primera integral es finita. La segunda es finita por la continuidad de p y γ en 1.

Para calcular $M(x)$ nos guiamos por lo hecho en el capítulo 2, particularmente 2.29. Para $x \in (0,1)$ fijo, recuerde que X_t es solución de (3.2) bajo $\mathbb{P}_x$ con condición inicial x. Considere sucesiones $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}, \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ estrictamente monótonas tales que $l_1 < x < r_1$, $l_n < r_n$, $l_n \searrow 0$ y $r_n \nearrow 1$. Se define $S_n = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \notin (l_n, r_n)\}$ y $S := \inf\{t \geq 0 \mid X_t \notin (0,1)\} = \lim_{n\to\infty} S_n$. Se sabe que $\mathbb{P}_x(S = T) = 1$. Considere además:

$$\begin{aligned} G_{l_n,r_n}(y,z) &:= \frac{(p(y \wedge z) - p(l_n))(p(r_n) - p(y \vee z))}{p(r_n) - p(l_n)} \qquad y, z \in (0,1) \\ M_{l_n,r_n}(y) &:= \int_{l_n}^{r_n} G_{l_n,r_n}(y,z) m(dz) \qquad y \in (0,1) \end{aligned}$$

En 2.29 se prueba que $\mathbb{E}_x[S_n] = M_{l_n,r_n}(x)$. A continuación se tomará límite en esta expresión. Veamos primero que: $\mathbb{1}_{[l_n,r_n]}(y) G_{l_n,r_n}(x,y) \longrightarrow G(x,y)$ puntualmente en y. En efecto sea $y \in (0,1)$. Entonces $\exists n_0$ tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene que $y \in [l_n, r_n]$. Así, para $n \geq n_0$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{[l_n,r_n]}(y) G_{l_n,r_n}(x,y) &= \frac{(p(x \wedge y) - p(l_n))(p(r_n) - p(x \vee y))}{p(r_n) - p(l_n)} \\ &= (p(r_n) - p(x \vee y)) \frac{p(x \wedge y)/p(l_n) - 1}{p(r_n)/p(l_n) - 1} \\ &\longrightarrow (p(1) - p(x \vee y)) \frac{-1}{-1} = -p(x \vee y) \end{aligned}$$

Considere $0 < z \leq w \leq 1$. Entonces $p(z), p(w) \leq 0$ y $p(z) \leq p(w)$ por lo que $p(w)/p(z) \leq 1$. De esta forma $0 \leq p(w)/p(z) \leq 1$. Además, $\lim_{n\to\infty} \frac{p(r_n)}{p(l_n)} = \frac{p(1)}{p(0)} = \frac{0}{-\infty} = 0$. Por tanto, para $\varepsilon < 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0 :\ \frac{p(r_n)}{p(l_n)} < \varepsilon$. De esta forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{[l_n,r_n]}(y) G_{l_n,r_n}(x,y) &\leq [p(r_n) - p(x \vee y)] \frac{p(x \wedge y) - p(l_n)}{p(r_n) - p(l_n)} \leq -p(x \vee y) \frac{p(x \wedge y)/p(l_n) - 1}{p(r_n)/p(l_n) - 1} \\ &= -p(x \vee y) \frac{1 - p(x \wedge y)/p(l_n)}{1 - p(r_n)/p(l_n)} \leq \frac{1}{1 - p(r_n)/p(l_n)} G(x,y) \\ &\leq \frac{1}{1-\varepsilon} G(x,y) \end{aligned}$$

Lo cual es integrable con respecto a $m(dy)$. Usando el Teorema de Convergencia Dominada se tiene que $M_{l_n,r_n}(x) \longrightarrow M(x)$. Por otro lado, $S_n \nearrow S$. Por Teorema de Convergencia Monótona: $\mathbb{E}_x(S_n) \nearrow \mathbb{E}_x(S) = \mathbb{E}_x(T)$. Tomando límite en $\mathbb{E}_x(S_n) = M_{l_n,r_n}(x)$, se obtiene que: $\mathbb{E}_x(T) = M(x) < \infty$.

Para realizar el cálculo explícito, considere $d = 2$. Entonces:

$$\begin{aligned}
M(x) &= -2p(x)\int_0^x e^{-\gamma(y)}dy + 2\int_x^1 -p(y)e^{-\gamma(y)}dy = -2\log x\int_0^x ydy - 2\int_x^1 y\log ydy \\
&= -\log x\int_0^x 2ydy - \int_x^1 2y\log ydy = -x^2\log x - \left(y^2\log y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_x^1 \\
&= -x^2\log x - \left(0 - \frac{1}{2} - x^2\log x + \frac{x^2}{2}\right) = -x^2\log x + \frac{1}{2} + x^2\log x - \frac{x^2}{2} = \frac{1-x^2}{2}
\end{aligned}$$

Si $d \geq 3$. Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
M(x) &= -2p(x)\int_0^x e^{-\gamma(y)}dy + 2\int_x^1 -p(y)e^{-\gamma(y)}dy \\
&= -\frac{2}{d-2}\left(1 - \frac{1}{x^{d-2}}\right)\int_0^x y^{d-1}dy - \frac{2}{d-2}\int_x^1 \left(1 - \frac{1}{y^{d-2}}\right)y^{d-1}dy \\
&= -\frac{2}{d-2}\left(1 - \frac{1}{x^{d-2}}\right)\int_0^x y^{d-1}dy - \frac{2}{d-2}\int_x^1 y^{d-1} - ydy \\
&= -\frac{2}{d-2}\left[\left(1 - \frac{1}{x^{d-2}}\right)\frac{x^d}{d} + \left(\frac{y^d}{d} - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_x^1\right] = -\frac{2}{d-2}\left(\frac{x^d}{d} - \frac{x^2}{d} + \frac{1}{d} - \frac{1}{2} - \frac{x^d}{d} + \frac{x^2}{2}\right) \\
&= -\frac{2}{d-2}\left(\frac{1-x^2}{d} + \frac{x^2-1}{2}\right) = -\frac{2}{2d(d-2)}\left(2(1-x^2) + d(x^2-1)\right) \\
&= -\frac{1}{d(d-2)}\left(2(1-x^2) - d(1-x^2)\right) = \frac{1}{d(d-2)}\left(d(1-x^2) - 2(1-x^2)\right) = \frac{1-x^2}{d}
\end{aligned}$$

□

Por último, consideramos una pregunta natural: ¿Es posible generalizar estos resultados a procesos de Bessel de orden $\beta \in \mathbb{R}$? Siguiendo a Borodin & Salminen [2], en (3.9) se definió el proceso de Bessel X de orden $\beta \in \mathbb{R}$. De [2], páginas 73-76 , se obtiene que sólo para $\beta \geq 0$ el 0 es una frontera de entrada. Además, la función de escala para $\beta > 0$ es regular en 1, por lo que el estudio de distribuciones cuasi-estacionarias en $(0, 1]$ sólo tiene sentido para $\beta \geq 0$.

Ahora, encontrar distribuciones cuasi-estacionarias para $\beta \geq 0$ resulta difícil de lograr a partir de los resultados anteriores. Esto pues, en este trabajo se ha explotado fuertemente el hecho que $X_t = |W_t|$ donde W_t es un movimiento Browniano d-dimensional. Esta representación no es posible para otros valores de β.

Conclusión

En la presente tesis se estableció la existencia y unicidad de distribuciones cuasi- estacionarias para el proceso de Bessel en el intervalo $(0, 1]$. La técnica utilizada sigue la línea del caso regular (sección 1.3.2) en cuanto construye una representación espectral para la densidad del semigrupo P_t. Adicionalmente, hay rasgos clave que permiten proceder con el trabajo técnico, entre los que destacan la simetría radial de ψ_1 (teorema 3.8), la desigualdad (3.33) y el hecho que trabajamos en un espacio de medida finita: la bola unitaria. Note que, más que la ecuación diferencial que satisface el proceso de Bessel, se usó el hecho de que este proviene de el movimiento Browniano.

El trabajo futuro consiste en hacer una teoría general de distribuciones cuasi-estacionarias para difusiones en un intervalo con coeficiente de drift singular. Dado que las herramientas utilizadas en esta tesis descansan fuertemente en la estructura del proceso de Bessel, este trabajo debe verse como un ejemplo para guiar la futura investigación. Siguiendo el trabajo expuesto en Collet, Martínez & San Martín [6] con respecto al caso $[0, \infty)$, resulta razonable establecer alguna condición de frontera en 0. Como el 0 es una frontera de tipo *entrance* para el proceso de Bessel (teorema 3.24), se sugiere comenzar por este caso. En particular, por el caso de procesos de Bessel de orden $\beta \geq 0$ (vea (3.9)).

Glosario

Sea $(E, \mathcal{E})$ un espacio medible.

- $\mathcal{E}^* := \cap_{\mu \in U} \mathcal{E}^\mu$ donde U es la familia de todas las medidas finitas en $(E, \mathcal{E})$.
- $\mathcal{M}_b(\mathcal{E}) := \{f : E \longrightarrow \mathbb{R} \mid f$ es $\mathcal{E}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ medible y acotada $\}$
- $\mathcal{M}_+(\mathcal{E}) := \{f : E \longrightarrow \mathbb{R} \mid f$ es $\mathcal{E}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ medible y no negativa $\}$

Sea X un espacio de Banach.

- $\mathcal{L}(X, X) := \{T : X \longrightarrow X \mid T$ es lineal y continuo $\}$

Bibliografía

[1] Robert McCallum Blumenthal and Ronald Kay Getoor. *Markov processes and potential theory*. Courier Corporation, 2007.

[2] Andrei N Borodin and Paavo Salminen. *Handbook of Brownian motion-facts and formulae*. Birkhäuser, 2012.

[3] Patrick Cattiaux, Pierre Collet, Amaury Lambert, Servet Martínez, Sylvie Méléard, and Jaime San Martín. Quasi-stationary distributions and diffusion models in population dynamics. *The Annals of Probability*, pages 1926–1969, 2009.

[4] Thierry Cazenave and Alain Haraux. *An introduction to semilinear evolution equations*. Oxford University Press on Demand, 1998.

[5] Earl A Coddington and Norman Levinson. *Theory of ordinary differential equations*. Tata McGraw-Hill Education, 1955.

[6] Pierre Collet, Servet Martínez, and Jaime San Martín. *Quasi-stationary distributions: Markov chains, diffusions and dynamical systems*. Springer Science & Business Media, 2012.

[7] Edward Brian Davies. *Heat kernels and spectral theory*, volume 92. Cambridge University Press, 1990.

[8] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2nd edition, 2010.

[9] William Feller. The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations. *Annals of Mathematics*, pages 468–519, 1952.

[10] Basilis Gidas, Wei-Ming Ni, and Louis Nirenberg. Symmetry and related properties via the maximum principle. *Communications in Mathematical Physics*, 68(3):209–243, 1979.

[11] Ioannis Karatzas. and Steven E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, Berlin, 2nd edition, 2000.

[12] Philip Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer, 1990.

[13] L Chris G Rogers and David Williams. *Diffusions, Markov processes, and martingales.*

Vol. 1, Foundations. Wiley, 1979.

[14] Jaime San Martín. *Teoría de la Medida: Apuntes del Curso*. Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile, 2010.

[15] David Steinsaltz and Steven N Evans. Markov mortality models: implications of quasistationarity and varying initial distributions. *Theoretical Population Biology*, 65(4):319–337, 2004.

Capítulo 4

Anexo

4.1. Análisis Real

Proposición 4.1 *Sea K un compacto conexo en $\mathbb{R}^d$ y $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces, existe un punto $\xi \in K$ tal que:*

$$f(\xi) = \frac{1}{|K|} \int_K f(y)dy \tag{4.1}$$

Demostración. Como K es compacto, los supremos e ínfimos de f en K se alcanzan. Así,

$$-\infty < \inf_{x \in K} f(x) \leq \frac{1}{|K|} \int_K f(x)dx \leq \sup_{x \in U} f(x) < \infty \tag{4.2}$$

Además, como f es continua, se tiene que $f(K)$ es un conexo compacto. Es decir $f(K)$ es un intervalo acotado cerrado. Es más, $f(K) = [\inf_{x \in K} f(x), \sup_{x \in K} f(x)]$. De lo anterior, deducimos que $\frac{1}{|K|} \int_K f(x)dx \in f(K)$, lo que implica que $\frac{1}{|K|} \int_K f(x)dx = f(\xi)$ para algún $\xi \in K$. $\square$

4.2. Problema Singular de Valores Propios

En esta sección adaptamos la clasificación *Limit-point* y *Limit-circle* hecha en [5], capítulo 9, al caso de un intervalo acotado. Considere un intervalo real (a, b) y un operador:

$$Lx := -(px')' + qx \tag{4.3}$$

Donde p, p' y q son reales y continuas en $(a, b]$. Además, $p(t) > 0 \; \forall t \in (a, b]$. Se estudiará el problema de valores propios: $Lx = lx$ para $t \in (a, b]$ y $l \in \mathbb{C}$.

Definición 4.2 *Se dirá que el operador L es de tipo **Limit-circle** si:*

$$\exists l_0 \in \mathbb{C} \; \forall \varphi \in C^2(a, b] \text{ solución de } Lx = l_0 x \; : \int_a^b |\varphi|^2 dt < \infty \tag{4.4}$$

*Si no es Limit-circle, se dirá que L es de tipo **Limit-point**.*

De esta forma, L es Limit-point si:

$$\forall l_0 \in \mathbb{C}\ \exists \varphi \in C^2(a,b] \text{ solución de } Lx = l_0 x\ :\int_a^b |\varphi|^2 dt = \infty \tag{4.5}$$

Teorema 4.3 *L es Limit-circle si y sólo si:*

$$\forall l_0 \in \mathbb{C}\ \forall \varphi \in C^2(a,b] \textit{ solución de } Lx = l_0 x\ :\int_a^b |\varphi|^2 dt < \infty \tag{4.6}$$

De forma análoga, L será Limit-point si:

$$\exists l_0 \in \mathbb{C}\ \exists \varphi \in C^2(a,b] \text{ solución de } Lx = l_0 x\ :\int_a^b |\varphi|^2 dt = \infty \tag{4.7}$$

4.3. Valores Propios para Operadores Elípticos y Simétricos

Considere:

$$\begin{cases} Lw = \lambda w & \text{en } U \\ w = 0 & \text{en } \partial U \end{cases} \tag{4.8}$$

Donde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado conexo y L un operador diferencial de la forma:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij} u_{x_i})_{x_j} \tag{4.9}$$

Donde $a^{ij} \in C^\infty(\overline{U})$ para $i, j = 1 \ldots n$. Se supone a L uniformemente elíptico y simétrico. Esto último corresponde a $a^{ij} = a^{ji}$ para $i, j = 1 \ldots n$. Diremos que λ es un *valor propio* si existe una solución $w \in H_0^1(U)$ no trivial de 4.8. Esta solución se llamará *función propia* asociada a λ. Note que en el caso $a^{ij} = \delta_{ij}$ se cumplen los supuestos y se tiene que $Lu = -\Delta u$.

Teorema 4.4 *En el contexto anterior:*

(i) Cada valor propio de L es real.

(ii) Si repetimos cada valor propio de acuerdo a su multiplicidad, la cual es finita, se obtiene que $\Sigma = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$. Donde:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots \tag{4.10}$$

y

$$\lambda_k \to \infty \ \ \textit{cuando } k \to \infty \tag{4.11}$$

(iii) Finalmente, existe una base ortonormal $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ de $L^2(U)$ donde $w_k \in H_0^1(U)$ es una función propia de λ_k, para todo $k \geq 1$.

Por resultados de regularidad, obtenemos que $w_k \in C^\infty(U)$. Si ∂U es suficientemente regular, se tendrá de hecho que $w_k \in C^\infty(\overline{U})$. Será de gran importancia el primer valor propio $\lambda_1 > 0$, también llamado *valor propio principal*.

Teorema 4.5 *En el contexto anterior:*

(i)

$$\lambda_1 = \text{mín}\{B[u,u] \mid u \in H_0^1(U)\ ,\ ||u||_{L^2} = 1\} \tag{4.12}$$

(ii) El mínimo anterior es alcanzado por una función $w_1 \in H_0^1(U)$, positiva en U y función propia de λ_1.

(iii) El valor propio λ_1 es simple. Es decir, para cualquier solución $u \in H_0^1(U)$ de 4.8 con $\lambda = \lambda_1$ se tiene que u es un múltiplo de w_1.

De lo anterior, el espectro Σ se ve como:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots \lambda_k \to \infty \tag{4.13}$$

Recuerde que $B[u,v] = \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx$. La ecuación 4.12 se conoce como *Fórmula de Rayleigh* y se puede escribir como:

$$\lambda_1 = \underset{u \in H_0^1(U)\setminus\{0\}}{\text{mín}} \frac{B[u,u]}{||u||^2_{L^2(U)}} \tag{4.14}$$

En el caso del Laplaciano, $B[u,u] = \int_U \sum_{i=1}^n u_{x_i} u_{x_i} dx = \int_U |\nabla u|^2 dx$. Así, la fórmula de Rayleigh queda como:

$$\lambda_1 = \underset{u \in H_0^1(U)\setminus\{0\}}{\text{mín}} \frac{||\nabla u||^2_{L^2(U)}}{||u||^2_{L^2(U)}} \tag{4.15}$$

4.4. Coordenadas Esféricas

Sea U la bola unitaria en $\mathbb{R}^d$. Denotamos por $S^{d-1} = \partial U$, a la esfera $d-1$ dimensional. Consideramos el cambio de coordenadas de $x = (x_1, ...x_d)$ a $(r, \phi_1, ...\phi_{d-1})$ por medio de:

$$\begin{aligned}
&x_1 = r\cos(\phi_1)\\
&x_2 = r\sin(\phi_1)\cos(\phi_2)\\
&x_3 = r\sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\cos(\phi_3)\\
&...\\
&x_d = r\sin(\phi_1)\ldots\sin(\phi_{d-2})\sin(\phi_{d-1})
\end{aligned}$$

Diremos que $x = r\hat{\phi}$. El elemento de volumen está dado por:

$$d^dV := r^{d-1}\sin^{d-2}(\phi_1)\sin^{d-3}(\phi_2)...\sin(\phi_{d-2})drd\phi_1 d\phi_2\ldots d\phi_{d-1} \tag{4.16}$$

El elemento de volumen de la esfera S^{d-1} está dado por:

$$dS^{d-1} := \sin^{d-2}(\phi_1)\sin^{d-3}(\phi_2)...\sin(\phi_{d-2})d\phi_1 d\phi_2\ldots d\phi_{d-1} \tag{4.17}$$

De esta forma, para una función $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada consideramos:

$$\int_{S^{d-1}} f(r\hat{\phi})dS^{d-1} =$$
$$\int_{\phi_{d-1}=0}^{2\pi}\int_{\phi_{d-2}=0}^{\pi}\cdots\int_{\phi_1=0}^{\pi} f(r\hat{\phi})\sin^{d-2}(\phi_1)\sin^{d-3}(\phi_2)...\sin(\phi_{d-2})d\phi_1 d\phi_2\ldots d\phi_{d-1}$$

4.5. Clasificación de Frontera en Difusiones

A continuación se enuncia la clasificación de frontera propuesta por Feller en [9] con el fin de estudiar ciertas difusiones. Considere el intervalo $-\infty \leq r_1 < x < r_2 \leq \infty$ y la ecuación:

$$a(x)u_{xx} + b(x)u_x = 0 \tag{4.18}$$

Donde a, a', b son continuas en (r_1, r_2) y $a(x) > 0$ para todo $x \in (r_1, r_2)$.

Definición 4.6 *En el contexto anterior, defina:*

$$W(x) := \exp\{-\int_{x_0}^{x} b(s)a^{-1}(s)ds\} \qquad x \in (r_1, r_2) \tag{4.19}$$

Donde $x_0 \in (r_1, r_2)$ está fijo. Se tiene entonces que:

*(i) r_j es **Regular** si:*

$$W(x) \in L^1(x_0, r_j), \qquad a^{-1}(x)W^{-1}(x) \in L^1(x_0, r_j) \tag{4.20}$$

*(ii) r_j es **Exit** si:*

$$a^{-1}(x)W^{-1}(x) \notin L^1(x_0, r_j), \qquad W(x)\int_{x_0}^{x} a^{-1}(s)W^{-1}(s)ds \in L^1(x_0, r_j) \tag{4.21}$$

*(iii) r_j es **Entrance** si:*

$$W(x) \notin L^1(x_0, r_j), \qquad a^{-1}W^{-1}(x)\int_{x_0}^{x} W(s)ds \in L^1(x_0, r_j) \tag{4.22}$$

*(iv) r_j es **Natural** en cualquier otro caso.*

Para $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, donde $I = (r_1, r_2)$, se considera la ecuación diferencial hasta tiempo de explosión: $dX_t = -\alpha(X_t)dt + dB_t$, la cual posee como generador a:

$$\mathcal{L}u = \frac{1}{2}u'' - \alpha u' \tag{4.23}$$

Se enunciará la clasificación de frontera para el operador $\mathcal{L}$. Para esto, considere un valor fijo $c \in I$. Entonces:

$$W(x) = \exp\{-\int_c^x \frac{b(s)}{a(s)}ds\} = \exp\{-\int_c^x \frac{-\alpha(s)}{1/2}ds\} = \exp\{2\int_c^x \alpha(s)ds\} = e^{\gamma(x)}$$

Observe que la función de escala corresponde a $p(x) = \int_c^x W(s)ds$. Además:

$$W^{-1}(x)a^{-1}(x) = 2e^{-\gamma(x)}$$

Es decir, $W^{-1}a^{-1}$ corresponde a la densidad de la medida de velocidad. La clasificación entonces es:

Teorema 4.7 (Tipos de Frontera) *La frontera r_j se clasificará para el operador $\mathcal{L}$ como:*

(i) ***Regular*** *si:*

$$e^{\gamma(x)} \in L^1(c, r_j), \qquad e^{-\gamma(x)} \in L^1(c, r_j) \tag{4.24}$$

(ii) ***Exit*** *si:*

$$e^{-\gamma(x)} \notin L^1(c, r_j), \qquad e^{\gamma(x)} \int_c^x e^{-\gamma(s)} ds \in L^1(c, r_j) \tag{4.25}$$

(iii) ***Entrance*** *si:*

$$e^{\gamma(x)} \notin L^1(c, r_j), \qquad e^{-\gamma(x)} \int_c^x e^{\gamma(s)} ds \in L^1(c, r_j) \tag{4.26}$$

(iv) ***Natural*** *en cualquier otro caso.*