



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

MODELO EXTENDIDO Y ESTABILIZACION DEL OLEAJE AL INTERIOR DE UN
CONVERTIDOR DE COBRE. CONTROL ROBUSTO Y MODELACIÓN DEL CHORRO
EN LA SUPERFICIE DEL BAÑO

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

FELIPE ANTONIO SALAS BRAVO

PROFESOR GUÍA:
AXEL OSSES ALVARADO
PROFESOR CO-GUÍA:
PATRICIO TORRES TAPIA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JAIME ORTEGA PALMA
MARCO ROSALES VERA

Este trabajo ha sido financiado por Codelco a través de la beca PiensaCobre

SANTIAGO DE CHILE
2017

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR
AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,
MENCION MATEMÁTICAS APLICADAS
RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: FELIPE ANTONIO SALAS BRAVO
FECHA: 2017
PROF. GUÍA: SR. AXEL OSSES ALVARADO
PROF. CO-GUÍA: SR. PATRICIO TORRES TAPIA

MODELO EXTENDIDO Y ESTABILIZACION DEL OLEAJE AL INTERIOR DE UN
CONVERTIDOR DE COBRE. CONTROL ROBUSTO Y MODELACIÓN DEL CHORRO
EN LA SUPERFICIE DEL BAÑO

El convertidor teniente es un horno usado en el proceso de purificación del cobre, cuyo funcionamiento se basa en la inyección de aire enriquecido con oxígeno (a través de toberas) en un baño de material fundido, produciendo reacciones indispensables para su depuración y generando energía, la que es aprovechada para mantener los niveles de temperatura adecuados al interior del convertidor. Debido a la inyección de aire se produce un fenómeno de acoplamiento entre el chorro de burbujas y la oscilación presente en la superficie del baño, produciendo un fenómeno de resonancia el cual genera ondas de gran amplitud en la superficie, las que producen desgaste sobre las paredes internas del convertidor. Este desgaste acorta los tiempos de producción, ya que es necesario recubrir con nuevos ladrillos el interior del convertidor.

En esta tesis se proponen dos estrategias de control para prevenir y minimizar el oleaje en la superficie. En primer lugar se desarrolla un control retroalimentado con comportamiento robusto. Esta robustez permite el control usando modelos inciertos del sistema original, sin perder rendimiento ni estabilidad.

En segundo lugar se propone un control pasivo por medio de un segundo chorro de aire (una segunda tobera) el cual disminuye los modos de oscilación de gran amplitud, disminuyendo la energía de las oscilaciones sobre la superficie. Para ello se modela la interacción que hay entre la excitación de las ondas superficiales y la presencia de inyección de chorros de aire en el baño. Modelando un segundo chorro de burbujas es posible replicar datos experimentales en los que se logra estabilizar el oleaje por medio de una segunda tobera.

A mi familia y amigos.

Agradecimientos

En las siguientes líneas espero transmitir el profundo agradecimiento que siento hacia la vida. Sintiendo afortunado por lograr llegar a donde estoy, sé que esto fue posible gracias a un conjunto de circunstancias que me han guiado hasta acá.

El apoyo de mi familia en todos los proyectos que he emprendido, su preocupación y respeto con respecto a las decisiones que he tomado ha sido fundamental.

Las amistades que he logrado a lo largo de mi vida son mi gran orgullo y las valoro a cada una de ellas. Espero poder tener la oportunidad de seguir disfrutando como lo he hecho con todos mis amigos y amigas.

Agradezco a mis profesores guías Axel y Patricio por todo su apoyo y enseñanzas a lo largo de este año. Gracias a ellos logré terminar de un modo satisfactorio mi trabajo de tesis, proceso a través del cual aprendí muchísimo y me dio seguridad en mi mismo.

Le agradezco a Codelco y al CMM por la beca Piensacobre, que me permitió tener la oportunidad de irme a vivir solo, además de poder ahorrar para realizar el viaje de mis sueños, que llevo años pensándolo.

Tabla de Contenido

| | |
|---|-----------|
| Tabla de Contenido | ix |
| Introducción | 1 |
| 1. Primer Modelo del Convertidor | 7 |
| 1.1. Modelo Matemático | 7 |
| 1.1.1. Análisis Espectral | 9 |
| 1.1.2. Energía | 10 |
| 1.1.3. Resolución del Problema de Evolución | 11 |
| 1.1.4. Operador Dirichlet-Neumann | 12 |
| 1.1.5. Modelo unidimensional y resolución espectral | 12 |
| 1.1.6. Reducción a un sistema lineal de EDOs y representación en espacios de estado | 14 |
| 2. Control Robusto | 17 |
| 2.1. Introducción al Control Robusto | 17 |
| 2.2. Modelo de perturbaciones y fuentes de incerteza del modelo | 18 |
| 2.3. El problema estándar de control \mathcal{H}^∞ | 20 |
| 2.4. Solución para sistemas en representación de espacio de estado para el problema estándar \mathcal{H}^∞ | 21 |
| 2.5. Control \mathcal{H}^∞ de sensibilidad mixta | 22 |
| 2.5.1. Respuesta en frecuencia y asignación parcial de polos | 25 |
| 3. Control Robusto del Convertidor Teniente | 28 |
| 3.1. Modelo de Perturbaciones para el Convertidor Teniente | 28 |
| 3.2. Elección de las funciones de peso y parámetros relevantes | 31 |
| 3.3. Verificación de hipótesis para el diseño del controlador | 34 |
| 3.4. Solución | 34 |
| 4. Resultados del primer modelo | 36 |
| 4.1. Resultados control robusto | 36 |
| 4.2. Comparación Control Robusto y LQG | 39 |
| 4.3. Comparación Robusto y PID con variación de parámetros. | 40 |
| 4.4. Discusión. | 42 |
| 5. Segundo Modelo del convertidor | 43 |
| 5.1. Modelación de la salida del Chorro | 44 |

| | |
|---|-----------|
| 5.2. Determinación de término forzante. | 46 |
| 5.3. Método de solución via MEF. | 46 |
| 6. Control en lazo abierto del Convertidor Teniente | 47 |
| 6.1. Control usando cambios en la posición de la salida del jet | 47 |
| 6.2. Resultados y comparación para el caso sin control | 48 |
| 6.2.1. Generación del segundo modo | 49 |
| 6.2.2. Tobera Lateral | 51 |
| 6.2.3. Tobera Centrada | 53 |
| 6.2.4. Resultados de control pasivo | 54 |
| 6.3. Discusión | 57 |
| Conclusión | 59 |
| 6.4. Trabajo a Futuro. | 60 |
| Bibliografía | 63 |

Índice de Ilustraciones

| | | |
|------|--|----|
| 1. | Convertidor Teniente división Ventanas | 2 |
| 2. | Primeros 6 modos de oscilación | 3 |
| 1.1. | Geometría del dominio | 7 |
| 2.1. | Diagrama de bode de una función de transferencia y su norma infinito | 18 |
| 2.2. | Modelo de perturbaciones básico | 19 |
| 2.3. | Configuración estándar del problema \mathcal{H}^∞ | 20 |
| 2.4. | Diagrama de control de sistema | 23 |
| 2.5. | Diagrama de las funciones de sensibilidad, sensibilidad complementaria y KS | 24 |
| 2.6. | El esquema de sensibilidad mixto | 24 |
| 3.1. | a) sistema nominal, b) modelo de incerteza aditiva | 29 |
| 3.2. | Diagrama de bloque con perturbaciones en las frecuencias | 30 |
| 3.3. | Convertidor con frecuencias perturbadas | 30 |
| 3.4. | El esquema de sensibilidad mixto | 32 |
| 3.5. | Función de sensibilidad y función KS deseadas | 33 |
| 3.6. | Diagrama de bode de las funciones de peso usadas | 33 |
| 3.7. | Diagrama de bode de las funciones KS , S y T obtenidas | 35 |
| 4.1. | Señal de salida y control para la planta nominal (sin perturbaciones ni ruido) | 38 |
| 4.2. | Señal de salida y control para planta perturbada y sin ruido | 38 |
| 4.3. | Señal de salida y control para planta perturbada y con ruido | 38 |
| 4.4. | Comparación para señal de salida y de control ante planta perturbada y sin ruido | 39 |
| 4.5. | Comparación para señal de salida y de control ante planta perturbada y con ruido | 39 |
| 4.6. | Comparación para señal de salida y control ante planta perturbada y sin ruido | 41 |
| 4.7. | Comparación para señal de salida y control ante planta perturbada y con ruido | 41 |
| 4.8. | Comparación para señal de salida y control ante planta perturbada y con ruido, para señal previamente filtrada | 41 |
| 5.1. | Función ε | 45 |
| 6.1. | Segundo modo dominando cuando solo la tobera lateral está insuflando | 47 |
| 6.2. | Ambas toberas funcionando, período de transición | 48 |
| 6.3. | Ambas toberas funcionando, con fluido estabilizado | 48 |
| 6.4. | Evolución del oleaje en 0 y 4 seg | 50 |

| | |
|---|----|
| 6.5. Evolución del oleaje en 8 y 12 seg | 50 |
| 6.6. Energía de borde en los primeros 20 seg | 50 |
| 6.7. Evolución del oleaje en 0 y 5 seg | 52 |
| 6.8. Evolución del oleaje en 10 y 15 seg | 52 |
| 6.9. Energía de borde en los primeros 20 seg | 52 |
| 6.10. Evolución del oleaje en 0 y 5 seg | 54 |
| 6.11. Evolución del oleaje en 10 y 15 seg | 54 |
| 6.12. Energía de borde en los primeros 20 seg | 54 |
| 6.13. Evolución del oleaje en 0 y 5 seg | 56 |
| 6.14. Evolución del oleaje en 10 y 15 seg | 56 |
| 6.15. Evolución del oleaje en 20 seg, y energía de borde en los primeros 20 seg | 56 |
| 6.16. Evolución del oleaje en 1 y 2 seg después de que la segunda tobera se activa | 57 |
| 6.17. Evolución del oleaje en 3 y 4 seg después de que la segunda tobera se activa | 57 |
| 6.18. Evolución del oleaje después de 5 seg, energía de borde entre 22 seg y 35 seg | 57 |
| 6.19. Función base | 61 |

Introducción

El Convertidor tipo Teniente (CT)

El Convertidor Teniente es un reactor piro metalúrgico desarrollado y patentado por la división El Teniente de Codelco en la década de los 70 y cuya función principal es la purificación del concentrado de cobre. El convertidor está formado por un cilindro metálico de 5 m de diámetro por 22 m de largo, dispuesto en posición horizontal y revestido internamente por *ladrillos refractarios* sobre los cuales descansa el material fundido.

El convertidor Teniente es cargado en forma continua con concentrado de cobre y sílice (cuarzo) por una abertura ubicada en su parte superior hasta un *nivel determinado* de llenado. La sílice tiene por objeto captar el hierro contenido en los minerales sulfurados fundidos y concentrarlo a través de sus propiedades magnéticas en escoria.

El Convertidor Teniente tiene un sistema de cañerías en el interior (que llamamos **toberrras**), las cuales insuflan aire enriquecido con oxígeno, el cual penetra dentro de la mezcla e induce *movimiento y agitación* en ella, permitiendo la oxidación del hierro y del azufre presentes en los minerales que constituyen el concentrado fundido. El hierro forma magnetita, que se concentra en la escoria, y el azufre al oxidarse forma gases (óxidos de azufre) los cuales son evacuados a través de gigantescas chimeneas, donde son captados para reutilizarlos en la producción de ácido sulfúrico (H_2SO_4), insumo necesario en la industria del cobre.

Algunas de las reacciones que se producen producto de la oxidación de los distintos elementos son reacciones exotérmicas, aportando con energía al sistema que es aprovechada para mantener los niveles adecuados de temperatura del baño gracias al revestimiento de *ladrillos refractarios*.

En el Convertidor Teniente los elementos se concentran en fases, de acuerdo a su peso:

Metal blanco: corresponde a la parte más pesada del material fundido y que se encuentra en la parte baja del convertidor. Llega a contener una pureza máxima de un 70 % de cobre.



Figura 1: Convertidor Teniente división Ventanas

Escoria: es la parte más liviana del fundido, la cual se concentra en la superficie del baño. Esta se envía de vuelta al horno de reverbero o a hornos destinados a limpieza de escoria para recuperar el contenido de cobre que aún le queda.

Una vez purificada la mezcla de cobre, esta se traslada a un Convertidor Pierce Smith (CPS) que continúa con el proceso de purificación para obtener cobre blister, con un 99,5 % de pureza (ver [10]).

El Convertidor Teniente ha llegado a posicionarse como una de las principales alternativas de fusión-conversión a nivel internacional, llegando a encontrarse en algunas fundiciones en el extranjero.

Motivación

Por otro lado, debido a la inyección constante de aire a través de las toberas laterales, se induce un estado de oscilación permanente del material fundido en el que se produce oleaje en la superficie libre del baño, el que desgasta excesivamente las paredes interiores de ladrillos refractarios. Debido a este desgaste, es necesario detener la producción cada cierto tiempo para retirar los ladrillos dañados y forrar el interior con un nuevo recubrimiento, lo que reduce los tiempos de producción y aumenta los costos de reparación y mantención (ver [17]).

En este contexto es de interés prevenir el estado de oscilación en la superficie del material fundido dentro del convertidor. Para ello en esta tesis se propone modelar el fenómeno de formación de oleaje para tener una mejor comprensión del mismo y además la aplicación de técnicas de control avanzado para prevenir su formación. Este trabajo es la continuación de investigaciones previas sobre el convertidor, dentro de lo que se incluyen modelos matemáticos ya desarrollados y la implementación de un control LQG (Linear Quadratic Gaussian) que logra estabilizar el oleaje bajo condiciones de funcionamiento ruidoso (ver [8]).

Por otra parte, en el modelo matemático presentado en [9] el comportamiento del oleaje al interior del convertidor modela como una combinación de modos normales de oscilación en distintas frecuencias. Los frecuencias de oscilación ahí obtenidas concuerdan con datos experimentales obtenidas en un modelo a escala desarrollado en [14]. Estos datos también se validaron usando un modelo analítico de una sección del convertidor (ver [18]), por lo que este modelo es aceptado como válido para el convertidor y será usado para el diseño de controladores robustos en la primera parte de esta tesis.

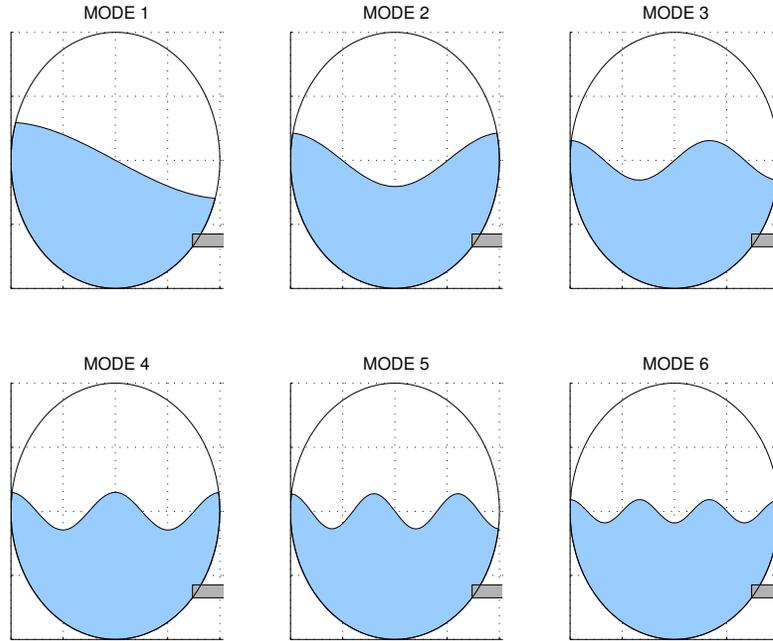


Figura 2: Primeros 6 modos de oscilación

En [8] también se desarrolla un sistema de control retroalimentado usando la altura del oleaje como señal medida y el flujo inyectado a través de la tobera como señal de control. Para ello, la estrategia usada en [8], (control Lineal Cuadrático Gaussiano (LQG)) estima el estado por medio del *filtro de Kalman* para luego retroalimentar el estado a través de un controlador. Para ello, el objetivo del control LQG es minimizar la energía del sistema más un penalizador sobre la energía de control. Los resultados obtenidos por el autor son muy positivos ya que se logra estabilizar el oleaje al interior del Convertidor.

La efectividad del control LQG [9] depende negativamente en gran parte en el conocimiento del sistema a controlar, que en nuestro caso se traduce en conocer los valores exactos de los parámetros del problema, tales como la geometría del convertidor, el nivel de llenado, etc. La falta de un conocimiento exacto de estos valores se interpreta como una incerteza en los parámetros del problema, lo que afecta el desempeño del control LQG. Teniendo entonces en cuenta que los parámetros físicos de la planta y del modelo no son siempre de naturaleza exacta, la existencia de cambios en condiciones ambientales o regímenes de operación diferentes, pueden incidir en el rendimiento del control LQG, llegando a generar inestabilidad en

lazo cerrado.

Por ello es necesario el diseño de controladores que sean *robustos* y que permitan sortear las dificultades antes mencionadas. Es decir, se desea diseñar un controlador que mantenga la estabilidad interna del sistema en el caso de incerteza en los parámetros físicos de la planta, existencia de dinámicas no modeladas y perturbaciones externas.

Principales contribuciones de esta tesis

En este contexto se trabajará con la técnica de optimización \mathcal{H}^∞ que es una herramienta de diseño para control multivariable, la cual permite incluir dentro de su formulación requerimientos de robustez, atenuación de perturbaciones en ciertas bandas de frecuencias, seguimiento de referencias, entre otros requerimientos deseados [1]. La existencia de incertidumbres en el convertidor son modeladas mediante un modelo de perturbaciones sobre el cual es posible modelar el problema como uno de sensibilidad mixta. Tal tipo de problemas permiten diseñar la respuesta de controlador a través de funciones de peso obtenidas de forma heurística siguiendo formas definidas para obtener determinados comportamientos en el control (ver [21]). Esto permite que nuestro controlador posea todas las características deseadas antes mencionadas. El modelo de perturbaciones a considerar es aquel en que las incertezas están en las frecuencias de los modos normales de oscilación. El motivo de esta elección de incertidumbre radica en que las frecuencias dependen paramétricamente de la geometría del convertidor y del nivel de llenado del baño, es decir cualquier incerteza tanto en geometría como en conocimiento de la altura del baño se traduce en incertezas sobre las frecuencias de los modos normales. Una vez obtenido el controlador se pondrá a prueba su robustez, además de comparar su desempeño con el del control LQG ante plantas nominales y en plantas con presencia de perturbaciones.

Por otro lado, se desarrollará un segundo modelo matemático del Convertidor Teniente el que contempla diferentes aspectos que el primer modelo no considera. En particular se estudia es el comportamiento de un baño sometido a la inyección de un chorro de burbujas desde una tobera, el cual emerge en la superficie libre del fluido, y una estrategia de control pasivo por medio de una segunda línea de toberas.

La idea básica consiste en modelar la inyección de aire y la zona turbulenta en la superficie producto de la salida del chorro como una zona de alta disipación. Esto se traducirá en las ecuaciones en un término disipativo que depende de la posición y el tiempo y que actúa como una entrada adicional al sistema.

Cabe mencionar que este aspecto no es considerado en [9], donde la inyección de aire se toma como un flujo de entrada adicional (en este caso agua) y que no emerge en la superficie

del baño, lo que representa una desventaja ya que la oscilación de la salida del jet es un fenómeno observado previamente en [19].

Es más, a través de este segundo modelo se buscan replicar datos experimentales obtenidos a partir de la maqueta presentada en [19], los cuales contemplan una rutina de control pasivo mediante la inyección de aire a través de dos toberas, la tobera lateral y una nueva tobera ubicada en el fondo del convertidor.

En resumen, las principales contribuciones de esta tesis son el diseño de un controlador robusto para el CT. Esto es, se obtuvo un controlador retroalimentado con la altura del oleaje en un punto arbitrario de la superficie del baño cuya acción de control se establece a través de la cantidad de flujo que se inyecta a través de las toberas que presenta robustez en rendimiento y en estabilidad al someter el sistema a perturbaciones, ya sean incertezas modeladas como perturbaciones, o entradas externas a la planta, además de atenuar ruido de mediciones.

A través de un segundo modelo del convertidor, el cual incluye características de la interacción que ocurre entre el chorro de burbujas y la onda superficial, además de considerar dentro de la modelación del jet el comportamiento experimental del jet visto en una maqueta 1:5. Luego de validar el segundo modelo se plantea una rutina de control pasiva que considera una segunda tobera que inyecta aire desde el fondo del convertidor, tras la cual sobreviven sólo modos de baja amplitud en la superficie libre.

Contenido general de la tesis

En el primer capítulo se presentará el modelo matemático usado y desarrollado por Godoy en [9], además se mostrará cómo se resuelve el problema y finalmente se dejará planteado el problema puesto en espacios de estados.

En el segundo capítulo se introducirá la herramienta de optimización \mathcal{H}_∞ , junto a las herramientas necesarias para poder trabajar y plantear el problema de obtener un controlador robusto.

En el tercer capítulo se presenta el modelo de perturbaciones del control robusto, sobre el que se realizan las técnicas descritas en el capítulo anterior, se verifican las hipótesis y se muestra el controlador obtenido.

En el cuarto capítulo se presentan resultados del primer modelo, se pone a prueba el controlador y se compara con otros controladores para evaluar su robustez.

En el quinto capítulo se presenta un nuevo modelo del convertidor, en el cual se modela la salida del jet como una zona de alta disipación y se considera un comportamiento más realista para chorro de burbujas y su interacción con el baño en la excitación de ciertos modos.

En el sexto capítulo se propone una estrategia de control pasivo del oleaje por medio del uso de una segunda línea de toberas ubicadas en el fondo, y se presentan los resultados del nuevo modelo.

Capítulo 1

Primer Modelo del Convertidor

A continuación se describe el modelo matemático de ondas gravitacionales (ver [5]) aplicado al Convertidor cuya forma es de un contenedor cilíndrico en dos dimensiones, donde las ondas se generan debido a la inyección de aire. Se utilizará el modelo matemático desarrollado por ([8]), y se incluirán los principales resultados debido a que este modelo se utilizará para el diseño de controladores robustos. Se supone que el fluido al interior del convertidor es invíscido, irrotacional e incompresible, y además se modela la inyección de burbujas como una inyección de fluido a través de la tobera. Para evitar los problemas de conservación de masa al interior del baño, se agrega una tobera encargada de sacar el fluido agregado por la primera tobera.

1.1. Modelo Matemático

Consideremos un corte transversal del contenedor con líquido en su interior. El dominio corresponde a la zona ocupada por el fluido hasta cierto nivel de llenado, en estado de reposo (ver figura 1.1), donde Ω corresponde al interior del dominio, Γ_0 es el borde rígido inferior del convertidor (pared de ladrillos refractarios), Γ es la superficie libre del líquido, $\gamma \subseteq \Gamma_0$ es la tobera lateral de entrada, y $\gamma_0 \subseteq \Gamma_0$ es la tobera inferior de salida.

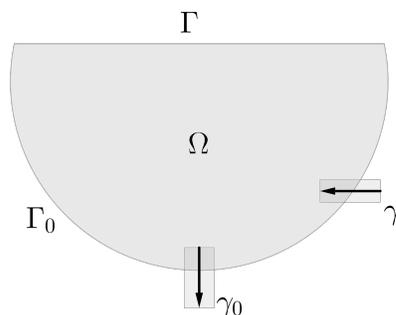


Figura 1.1: Geometría del dominio

Dadas las hipótesis sobre el fluido, podemos asegurar la existencia de un potencial de velocidades ϕ que satisface las siguientes ecuaciones en Ω , donde \mathbf{v} corresponde a la velocidad:

$$\mathbf{v} = \nabla \phi, \quad (1.1)$$

$$\Delta \phi = 0. \quad (1.2)$$

La condición de borde sobre el borde rígido es la siguiente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \begin{cases} 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \setminus (\gamma \cup \gamma_0) \\ u(t)V & \text{sobre } \gamma \\ u(t)V_0 & \text{sobre } \gamma_0, \end{cases} \quad (1.3)$$

donde n es el vector unitario normal exterior al dominio, V, V_0 son las velocidades de referencia constantes y $u(t)$ es la función escalar del tiempo que se asume conocida. La dependencia temporal de ambos flujos es la misma, pues la tobera inferior debe extraer el flujo que inyecta la tobera lateral en todo instante de tiempo.

Sobre la superficie libre Γ , se deben cumplir dos condiciones. Sea η la elevación de la superficie libre con respecto a la posición de equilibrio. En primer lugar:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \eta_t \quad (1.4)$$

donde el subíndice t denota la derivada temporal. En segundo lugar, a partir de la ecuación de Bernoulli, asumiendo que las velocidades son pequeñas (despreciando término cuadrático) y además que la presión sobre la superficie libre es igual a la presión atmosférica, se tiene:

$$\phi_t + g\eta = 0, \quad (1.5)$$

donde g es la aceleración de gravedad, lo cual es una condición de tipo dinámica. Derivando con respecto al tiempo (1.5) y reemplazando (1.4) se tiene

$$\frac{1}{g}\phi_{tt} + \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0. \quad (1.6)$$

Adicionalmente se debe cumplir una condición de conservación de volumen, lo cual puede ser expresado por

$$\int_{\Gamma} \eta \, ds = -\frac{1}{g} \int_{\Gamma} \phi_t \, ds = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Gamma} \phi \, ds = 0. \quad (1.7)$$

Esta integral puede tomar un valor arbitrario y se escoge como cero, es decir, ϕ tiene que ser a media nula sobre Γ .

Para caracterizar el flujo que pasa por la tobera, podemos relacionarlo con el *número de Froude*, el cual está definido en forma adimensional:

$$\text{Fr}(t) = u(t) \frac{|V|}{\sqrt{gd}}. \quad (1.8)$$

Por otra parte, para que nuestro sistema disipe energía se agrega un término de amortiguamiento local de *Kelvin-Voigt* (ver [3]) al lado izquierdo de (1.6). En nuestro modelo tal amortiguamiento corresponde a un término proporcional a $\partial\phi_t/\partial n$, quedando:

$$\frac{1}{g}\phi_{tt} + \varepsilon\frac{\partial\phi_t}{\partial n} + \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (1.9)$$

donde $\varepsilon > 0$ es un parámetro pequeño que determina la magnitud del amortiguamiento. Se considera ε como una constante pequeña para asumir que (1.5) se sigue cumpliendo.

Por último, agregando condiciones iniciales, se tiene que el modelo para las ondas gravitacionales sobre la superficie del líquido debido a la inyección de **fluido** está dado por:

$$\Delta\phi = 0, \quad \text{en } \Omega \times (0, \infty) \quad (1.10)$$

$$\frac{1}{g}\phi_{tt} + \varepsilon\frac{\partial\phi_t}{\partial n} + \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0, \quad \text{en } \Gamma \times (0, \infty) \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0, \quad \text{en } \Gamma_0 \setminus (\gamma \cup \gamma_0) \times (0, \infty) \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = u(t)V, \quad \text{en } \gamma \times (0, \infty) \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = u(t)V_0, \quad \text{en } \gamma_0 \times (0, \infty) \quad (1.14)$$

$$\phi(0) = \phi^0, \quad \text{en } \Omega \quad (1.15)$$

$$\phi_t(0) = \phi^1, \quad \text{en } \Omega \quad (1.16)$$

$$\int_{\Gamma} \phi \, ds = 0. \quad (1.17)$$

Por otro lado, para calcular η , se usa (1.5):

$$\eta = -\frac{1}{g}\phi_t. \quad (1.18)$$

1.1.1. Análisis Espectral

Para el análisis, se considera el modelo (1.10-1.17) para el caso no disipativo ($\varepsilon = 0$) y sin inyección de fluido ($u \equiv 0$). Luego, se asume dependencia periódica en el tiempo de las funciones ϕ y η , tal como sigue:

$$\phi(x, t) = \phi(x)e^{-i\omega t}, \quad (1.19)$$

$$\eta(x, t) = \eta(x)e^{-i\omega t}. \quad (1.20)$$

Con ello se obtiene que la parte espacial de ϕ satisface el siguiente *problema diferencial espectral*:

$$\Delta\phi = 0, \quad \text{en } \Omega \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \lambda\phi, \quad \text{en } \Gamma \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0, \quad \text{en } \Gamma_0 \quad (1.23)$$

$$\int_{\Gamma} \phi \, ds = 0, \quad (1.24)$$

donde $\lambda = \frac{\omega^2}{g}$ corresponde a un valor propio del problema y ϕ es su función propia asociada. Este problema puede ser resuelto obteniendo la formulación variacional del problema sobre el espacio de todas las funciones en $H^1(\Omega)$ que son a media nula sobre Γ . Dada la formulación, es posible, a partir del lema de Lax-Milgram y del teorema de Hilbert-Schmidt (ver [2]) demostrar que la solución de la formulación variacional está dada por pares de valores y funciones propias $(\lambda_k, \phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente positiva, creciente y no acotada. Las frecuencias naturales ω_k se definen a partir de los valores propios como:

$$\omega_k = \sqrt{\lambda_k g}. \quad (1.25)$$

Más aún, las funciones propias $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ son tales que sus trazes sobre Γ forman una base ortogonal de $L_0^2(\Gamma)$. Los modos normales η_k se definen a partir de las funciones propias como:

$$\eta_k = \frac{\omega_k}{g}. \quad (1.26)$$

1.1.2. Energía

La energía de sistema se define como

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{K}(t) + \mathcal{U}(t) \quad (1.27)$$

donde \mathcal{K} corresponde a la energía cinética y \mathcal{U} al potencial de energía de deformación de la superficie libre:

$$\mathcal{K}(t) = \frac{1}{2}\rho \int_{\Omega} |\nabla\phi|^2 dx, \quad (1.28)$$

$$\mathcal{U}(t) = \frac{1}{2g}\rho \int_{\Gamma} |\phi_t|^2 ds. \quad (1.29)$$

Usando la fórmula de Green, (1.10) y reemplazando además (1.12), (1.13) y (1.14), se obtiene que la energía cinética $\mathcal{K}(t)$ puede ser expresada como una suma de integrales de borde:

$$\mathcal{K}(t) = \frac{1}{2}\rho \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial\phi}{\partial n} ds + \frac{1}{2}\rho u(t) \left(V \int_{\gamma} \phi ds + V_0 \int_{\gamma_0} \phi ds \right). \quad (1.30)$$

Asumiendo que no hay inyección de fluido ($u \equiv 0$), se mostrará que el término local de amortiguamiento del sistema produce disipación de energía. En efecto, calculando la energía de sistema, multiplicando (1.10) por ϕ_t e integrando en el espacio, se aplica fórmula de Green y se reemplazan las condiciones de borde, es posible llegar a:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 + \frac{1}{2g} \int_{\Gamma} |\phi_t|^2 ds \right) = -\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \phi_t|^2 dx. \quad (1.31)$$

Luego, multiplicando por la densidad ρ se obtiene que:

$$\dot{\mathcal{E}}(t) = -\rho\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \phi_t|^2 dx < 0. \quad (1.32)$$

Consecuentemente, como la derivada de la energía con respecto al tiempo es negativa, se concluye que el sistema es disipativo.

1.1.3. Resolución del Problema de Evolución

El problema (1.10)-(1.17) se resuelve en forma espectral. Para esto primero se deben desacoplar las condiciones de borde sobre Γ y sobre Γ_0 . Esto se logra considerando el siguiente problema diferencial:

$$\Delta \psi = 0, \quad \text{en } \Omega \quad (1.33)$$

$$\psi = 0, \quad \text{en } \Gamma \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad \text{en } \Gamma_0 \setminus (\gamma \cup \gamma_0) \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = V, \quad \text{en } \gamma \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = V_0, \quad \text{en } \gamma_0 \quad (1.37)$$

en donde la función $\tilde{\phi}(x, t) = \phi(x, t) - u(t)\psi(x)$, y ϕ es solución de (1.10)-(1.17). Es posible notar que $\tilde{\phi}$ satisface el problema:

$$\Delta \tilde{\phi}(x, t) = 0, \quad \text{en } \Omega \times (0, \infty) \quad (1.38)$$

$$\frac{1}{g} \tilde{\phi}_{tt}(x, t) + \varepsilon \frac{\partial \tilde{\phi}_t}{\partial n}(x, t) + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n}(x, t) = - (u(t) + \varepsilon \dot{u}(t)) \frac{\partial \psi}{\partial n}(x), \quad \text{en } \Gamma \times (0, \infty) \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n}(x, t) = 0, \quad \text{en } \Gamma_0 \times (0, \infty) \quad (1.40)$$

$$\tilde{\phi}(x, 0) = \phi^0(x) - u(0)\psi(x), \quad \text{en } \Omega \quad (1.41)$$

$$\tilde{\phi}_t(x, 0) = \phi^1(x) - \dot{u}(0)\psi(x), \quad \text{en } \Omega \quad (1.42)$$

$$\int_{\Gamma} \tilde{\phi} ds = 0. \quad (1.43)$$

Entonces el problema de resolver (1.10)-(1.17) se ha reducido a la resolución de dos problemas diferenciales. El primero de ellos está dado por resolver (1.33)-(1.37) el cual es

un problema estacionario con condiciones Neumann no homogéneas en Γ_0 y condiciones de borde tipo Dirichlet homogénea sobre Γ . El segundo problema dado por (1.38)-(1.43) es un problema de evolución muy similar a (1.10)-(1.17), pero tiene condiciones de borde tipo Neumann homogéneas sobre Γ_0 . Obteniendo cada solución, ψ y $\tilde{\phi}$, se puede obtener la solución de (1.10)-(1.17) por medio de:

$$\phi(x, t) = \tilde{\phi}(x, t) + u(t)\psi(x). \quad (1.44)$$

De esta forma, se han logrado desacoplar las condiciones de borde sobre Γ_0 del modelo (1.10)-(1.17). Esto es necesario para el método de resolución que se utilizará más adelante.

1.1.4. Operador Dirichlet-Neumann

Para una función φ a media nula sobre Γ , se define $\mathcal{A}\varphi$ como sigue:

$$\mathcal{A}\varphi := \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{\Gamma}, \quad (1.45)$$

donde Φ es la solución única del problema:

$$\Delta \Phi = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (1.46)$$

$$\Phi = \varphi \quad \text{en } \Gamma \quad (1.47)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{\Gamma_0} = 0 \quad \text{en } \Gamma_0. \quad (1.48)$$

El operador \mathcal{A} se conoce como el operador Dirichlet-Neumann, el cual es un operador pseudo diferencial, lineal continuo de $H^1(\Gamma)$ a $L^2(\Gamma)$.

Los valores propios de \mathcal{A} están dados por la sucesión $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ya definida, y las funciones propias de \mathcal{A} , las que llamamos $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$, están relacionadas con las funciones propias $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de (1.21) - (1.24) por la relación:

$$\varphi_k = \phi_k|_{\Gamma}. \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (1.49)$$

Más aún, las funciones $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ constituyen una base ortogonal del espacio $L^2_0(\Gamma)$, i.e.:

$$\int_{\Gamma} \varphi_k \varphi_l ds = \delta_{kl} \|\varphi_k\|_{0,\Gamma}^2 \quad (1.50)$$

con $\|\cdot\|_{0,\Gamma}$ la norma en $L^2(\Gamma)$ y δ_{kl} denota el tensor delta de Kronecker.

1.1.5. Modelo unidimensional y resolución espectral

A partir del operador \mathcal{A} es posible expresar el modelo (1.38)-(1.43) como un ecuación diferencial de evolución puesta sobre la superficie libre Γ . Para esto se define φ como la restricción de $\tilde{\phi}$ a Γ , i.e.:

$$\varphi = \tilde{\phi}|_{\Gamma}. \quad (1.51)$$

Luego, por definición del operador \mathcal{A} y usando que ψ es a media nula, se tiene que (1.38)-(1.43) puede ser expresado como el siguiente problema diferencial:

$$\frac{1}{g} \ddot{\varphi} + \varepsilon \mathcal{A} \dot{\varphi} + \mathcal{A} \varphi = -(u(t) + \varepsilon \dot{u}(t)) \frac{\partial \psi}{\partial n}, \quad \text{en } \Gamma \times (0, \infty) \quad (1.52)$$

$$\varphi(0) = \varphi^0, \quad \text{en } \Gamma \quad (1.53)$$

$$\dot{\varphi}(0) = \varphi^1, \quad \text{en } \Gamma. \quad (1.54)$$

con condiciones iniciales dadas por $\varphi^0 = \phi^0|_{\Gamma}$ y $\varphi^1 = \phi^1|_{\Gamma}$. Por otro lado, la elevación de la superficie libre puede obtenerse usando (1.18):

$$\eta = -\frac{1}{g} \dot{\varphi}. \quad (1.55)$$

El sistema (1.52)-(1.54) corresponde a las ecuaciones (1.38)-(1.43) puestas en una dimensión, dado que la solución φ está definida en una curva de una dimensión como Γ . Este sistema diferencial se resuelve en forma espectral, proponiendo una solución aproximada a la ecuación diferencial (1.52) como una combinación lineal de una cantidad finita de funciones propias $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

$$\varphi(x, t) = \sum_{k=1}^N z_k(t) \varphi_k(x) \quad (1.56)$$

con $z_k(t)$ funciones dependientes del tiempo a priori desconocidas y por determinar. Se espera que si N es suficientemente grande, la solución obtenida será cercana a la solución exacta. Aproximando las condiciones iniciales y la función derivada normal de ψ en la misma base, se obtiene que:

$$\varphi^0(x) = \sum_{l=1}^N z_l^0 \varphi_l(x), \quad (1.57)$$

$$\varphi^1(x) = \sum_{l=1}^N z_l^1 \varphi_l(x), \quad (1.58)$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial n}(x, t) = \sum_{l=1}^N \beta_l \varphi_l(x), \quad (1.59)$$

donde z_l^0 y z_l^1 , β_l son los coeficientes asociados a cada función de la base apropiada. Para determinar estos coeficientes se multiplican las ecuaciones (1.57) y (1.58) por ϕ_k y se integra en Γ usando (1.50):

$$z_k^i = \frac{1}{\|\varphi_k\|_{0,\Gamma}^2} \int_{\Gamma} \varphi^i \varphi_k ds \quad i = 0, 1. \quad (1.60)$$

$$\beta_k = \frac{-1}{\|\varphi_k\|_{0,\Gamma}^2} \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial n} \varphi_k ds. \quad (1.61)$$

Más aún, reemplazando (1.56) en (1.52) se obtiene que:

$$\frac{1}{g} \sum_{k=1}^N \ddot{z}_k \varphi_k + \varepsilon \sum_{k=1}^N \dot{z}_k \mathcal{A} \varphi_k + \sum_{k=1}^N z_k \mathcal{A} \varphi_k = (u + \varepsilon \dot{u}) \sum_{k=1}^N \beta_k \varphi_k, \quad (1.62)$$

y usando que φ_k es una función propia de \mathcal{A} , con valor propio λ_k , multiplicando por g y usando la relación $\omega_k^2 = \lambda_k g$, se llega a que:

$$\sum_{k=1}^N (\ddot{z}_k + \varepsilon \omega_k^2 \dot{z}_k + \omega_k^2 z_k - g \beta_k (u + \varepsilon \dot{u})) \varphi_k = 0, \quad (1.63)$$

pero como las funciones propias φ_k forman una base, el término contenido entre paréntesis es nulo para todo k . Entonces, se concluye que las funciones $z_k(t)$ deben satisfacer el siguiente problema diferencial de segundo orden con condiciones iniciales, para todo $1 \leq k \leq N$:

$$\ddot{z}_k + \varepsilon \omega_k^2 \dot{z}_k + \omega_k^2 z_k = g \beta_k (u + \varepsilon \dot{u}) \quad (1.64)$$

$$z_k(0) = z_k^0 \quad (1.65)$$

$$\dot{z}_k(0) = \dot{z}_k^1. \quad (1.66)$$

Además, es posible expresar la energía en función de z_k y φ_k :

$$E(t) = \frac{1}{2} \frac{\rho}{g} \sum_{k=1}^N (\dot{z}_k(t)^2 + \omega_k^2 z_k(t)^2) \|\varphi_k\|_{0,\Gamma}^2. \quad (1.67)$$

1.1.6. Reducción a un sistema lineal de EDOs y representación en espacios de estado

El conjunto de N EDO's de segundo orden de (1.64)-(1.66) se expresa de la siguiente forma:

$$\ddot{z}_k = -\varepsilon \omega_k^2 \dot{z}_k - \omega_k^2 z_k + g \beta_k (u + \varepsilon \dot{u}). \quad (1.68)$$

Así se define entonces $x(t) = \{z_1, \dot{z}_1, z_2, \dot{z}_2, \dots, z_n, \dot{z}_n\}$, y $x_k = (z_k \dot{z}_k)^T$ los estados del sistema, con condición inicial $x_0 = (z_1^0, \dot{z}_1^1, \dots, z_N^0, \dot{z}_N^1)$. Luego es posible expresar el sistema de edos como una ecuación en representación de espacio de estado de la siguiente forma:

$$\dot{x}_k = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_k^2 & -\varepsilon \omega_k^2 \end{pmatrix}}_{a_k} \underbrace{\begin{pmatrix} z_k \\ \dot{z}_k \end{pmatrix}}_{x_k} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ g \beta_k \end{pmatrix}}_{b_k} (u + \varepsilon \dot{u}). \quad (1.69)$$

Agrupando las n ecuaciones se obtiene:

$$\dot{x} = A_N x + B_N (u + \varepsilon \dot{u}), \quad (1.70)$$

$$x(0) = x_0, \quad (1.71)$$

en donde:

$$A_N = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & a_N \end{pmatrix} \quad y \quad B_N = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}. \quad (1.72)$$

Por otro lado, se observa que en (1.70) aparece un término \dot{u} (derivada de la señal de control que puede resultar desfavorable para el diseño de controladores). Esto se puede solucionar considerando el siguiente cambio de variables:

$$x^\varepsilon = x - \varepsilon B_N u(t). \quad (1.73)$$

Al reemplazar en (1.70) y (1.71) se llega al siguiente sistema lineal para x^ε :

$$\dot{x}^\varepsilon = A_n x^\varepsilon + \underbrace{(B_N + \varepsilon A_N B_N)}_{:=B_N^\varepsilon} u, \quad (1.74)$$

$$x^\varepsilon(0) = \underbrace{x_0 + \varepsilon B_N u(0)}_{:=x_0^\varepsilon}. \quad (1.75)$$

El sistema (1.74) -(1.75) depende sólo de u y no de \dot{u} . Además se añade una salida y que corresponde a una medición física del sistema. Esta salida será la elevación η de la superficie libre en el punto correspondiente al extremo opuesto a la tobera de inyección, punto que denotamos por \bar{x} . Así, se quiere obtener $y = \eta(\bar{x})$ en función de x^ε y u . De (1.55) y (1.56) se tiene que:

$$y = \eta(\bar{x}, t) = -\frac{1}{g} \sum_{k=1}^N \dot{z}_k(t) \varphi_k(\bar{x}), \quad (1.76)$$

$$(1.77)$$

el cual en términos del vector de estados $x(t)$ puede ser expresado por

$$y = C_N x \quad (1.78)$$

con

$$C_N = (c_1, c_2, \dots, c_N), \quad (1.79)$$

$$c_k = \left(0, -\frac{1}{g} \varphi_k(\bar{x}) \right). \quad (1.80)$$

Luego, expresando en función de $x^\varepsilon(t)$, $y(t)$ se tiene que:

$$y = C_N x^\varepsilon + \underbrace{\varepsilon C_N B_N}_{:=D_N^\varepsilon} u. \quad (1.81)$$

Por otro lado, la energía $E(t)$ expresada en función de $x(t)$ y $u(t)$ se escribe como:

$$E(t) = x(t)^T Q_N x(t) \quad (1.82)$$

donde la matriz Q_N está dada por:

$$Q_N = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_N \end{bmatrix} \quad (1.83)$$

y:

$$q_k = \frac{1}{2} \frac{\rho}{g} \|\varphi_k\|_{0,\Gamma}^2 \begin{pmatrix} \omega_k^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.84)$$

Finalmente, $E(t)$ puede escribirse en término de $x^\varepsilon(t)$ de la siguiente manera:

$$E(t) = x^\varepsilon(t)^T Q_N x^\varepsilon(t) + 2x^\varepsilon(t)^T M_N^\varepsilon u(t), \quad (1.85)$$

en donde:

$$M_N^\varepsilon = \varepsilon Q_N B_N \quad (1.86)$$

y se han despreciado los términos cuadráticos en ε .

Considerando el modelo para el convertidor obtenido por (1.74), (1.75) y (1.81), la idea consiste en diseñar un control robusto que permita estabilizar el oleaje incluso en caso de existir incertezas en los parámetros del modelo y mediciones ruidosas de la elevación.

Capítulo 2

Control Robusto

En el año 1883 se desarrollaron algoritmos eficientes para diseñar controladores que estabilizan el sistema en condiciones de incerteza paramétrica o del modelo, así como en ambientes ruidosos (control \mathcal{H}^∞). Desde entonces las aplicaciones del control \mathcal{H}^∞ han demostrado el gran potencial de esas técnicas.

En este capítulo se estudiará el problema estándar \mathcal{H}_∞ , que permite encontrar controladores robustos para sistemas en representación de espacio de estado.

Además se discutirá el **problema de sensibilidad mixta**. Esta técnica de optimización \mathcal{H}_∞ es una importante herramienta de diseño, ya que permite lograr una respuesta en frecuencia deseada y será muy útil para el control del Convertidor Teniente.

2.1. Introducción al Control Robusto

A continuación se introducirá una herramienta de diseño para sistemas de control multivariable conocida como control \mathcal{H}_∞ . El nombre deriva de que el espacio funcional sobre el que se optimiza; \mathcal{H}_∞ es el espacio de todas las funciones matriciales que son analíticas y acotadas en el lado derecho del plano complejo definido por $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > 0\}$;

Se define la norma \mathcal{H}_∞ como:

$$\|G\|_\infty := \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}|G(i\omega)|, \quad \bar{\sigma} \text{ corresponde al máximo valor singular} \quad (2.1)$$

Al trabajar con funciones de transferencia, la norma H_∞ puede ser interpretada como la máxima ganancia en cualquier dirección y en cualquier frecuencia; para sistemas SISO, es efectivamente la magnitud máxima de la respuesta en frecuencia como se muestra en el ejemplo de la figura 2.1:

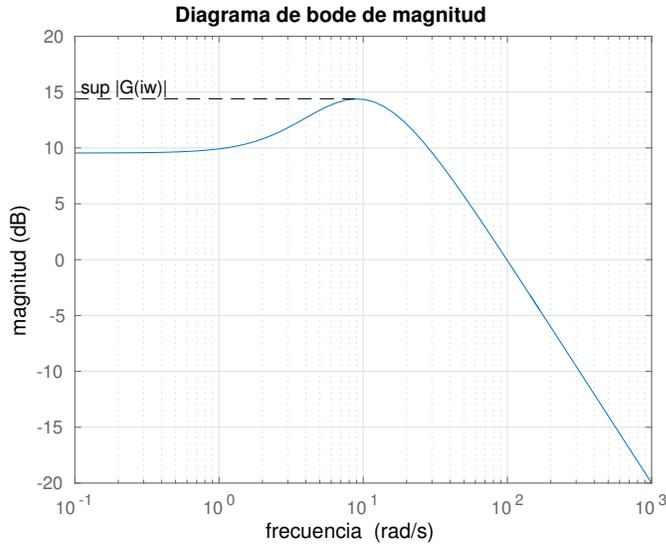


Figura 2.1: Diagrama de bode de una función de transferencia y su norma infinito

Las técnicas \mathcal{H}_∞ pueden ser usadas para minimizar el impacto que tiene una perturbación sobre un sistema a lazo cerrado. El problema estándar \mathcal{H}_∞ es, dado $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, encontrar todos los controladores tal que la norma \mathcal{H}_∞ de la función de transferencia de lazo cerrado del sistema de control sea menor que γ . Un controlador existe sí y sólo si es la única solución estabilizante de dos ecuaciones de Riccati que es definida positiva y además el radio espectral de su producto es menor que γ^2 (ver [7]).

2.2. Modelo de perturbaciones y fuentes de incerteza del modelo

Con el fin de modelar la incerteza en un sistema se consideran dos tipos de incertidumbres, las estructuradas (o paramétricas) y las no estructuradas. La suposición común en Control Robusto es que las incertidumbres se pueden modelar como un sistema separado del resto del sistema original. Esto simplifica la representación de las incertidumbres en el sistema como se puede ver en la figura (2.2). En el esquema de la figura, H es la matriz de transferencia (que vive en \mathcal{H}_∞) del sistema cuya estabilidad robusta está bajo investigación. El bloque Δ_H es la matriz de transferencia que representa las incertidumbres en la dinámica del sistema. A esto se le conoce con el nombre de modelo básico de perturbaciones (MBP).

Las incertezas no estructuradas, son aquellas modeladas como perturbaciones acotadas en la norma \mathcal{H}_∞ , y pueden involucrar cambios esenciales en la dinámica de la planta (usualmente representadas por ecuaciones diferenciales y/o funciones de transferencia desconocidas), mientras que las perturbaciones estructuradas son modeladas como variaciones paramétricas en los coeficientes de la planta, las que representan una falta de conocimiento preciso de los parámetros del sistema (ver [4]).

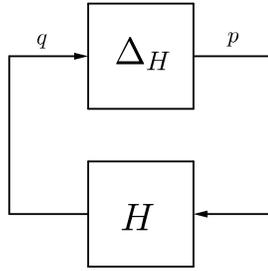


Figura 2.2: Modelo de perturbaciones básico

De esta forma, la idea es conocer bajo qué condiciones o valores de Δ_H el sistema interconectado descrito en la figura 2.2 permanece estable. La respuesta a esta pregunta viene dada por el siguiente teorema:

Teorema 2.1 (Teorema de la pequeña ganancia para MBP:) Supongamos que en el esquema de la figura (2.2) tanto H como Δ_H son \mathcal{L}_2 estables.

1. Una condición suficiente para estabilidad interna es que

$$\bar{\sigma}(\Delta_H(i\omega)) < \frac{1}{\bar{\sigma}(H(i\omega))} \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad (2.2)$$

con $\bar{\sigma}$ denotando el mayor valor singular.

2. Otra condición suficiente para estabilidad interna es

$$\|\Delta_H\|_\infty < \frac{1}{\|H\|_\infty}. \quad (2.3)$$

Teorema 2.2 (condiciones suficientes y necesarias para estabilidad) Supongamos que en el MBP, tanto H como Δ_H son estables. Sea γ una constante positiva. Entonces

1. El MBP es internamente estable para todas Δ_H con $\|\Delta_H\| \leq 1/\gamma$ ssi $\|H\|_\infty < \gamma$
2. El MBP es internamente estable para todas Δ_H con $\|\Delta_H\| < 1/\gamma$ ssi $\|H\|_\infty \leq \gamma$

De la condición 1 y 2 del teorema 2.2 se observa que es deseable minimizar el valor de γ con el fin de alcanzar estabilidad interna con mínima energía (es decir, con ganancia $\|H\|_\infty$ pequeña) y con el máximo rango de variación admisible para la perturbación Δ_H (incerteza del modelo). Para lograr este objetivo se propone incluir un controlador representado por una función o matriz de transferencia K) en el sistema H tal como se muestra en la sección siguiente.

2.3. El problema estándar de control \mathcal{H}^∞

Este problema se define por la configuración general de la figura 2.3. La “planta” es un sistema dado con dos conjuntos de entradas y dos conjuntos de salidas. Usualmente se conoce como *planta generalizada*. El bloque G representa la función de transferencia de la planta generalizada y $K(s)$ es una función de transferencia lineal que describe el controlador. En este esquema general, w representa las entradas externas, entre las que se incluyen señales de referencia, perturbaciones y ruido afectando diferentes componentes del sistema, señales que provienen de componentes del sistema que son inciertas o cuyos parámetros no se conocen con exactitud, señales que salen del bloque de perturbaciones Δ_H por ejemplo, etc., y u representa la entrada de control. La salida z denota las variables de desempeño (por ejemplo, errores de seguimiento y variables de rendimiento), e y representa las mediciones de las variables de salida que están disponibles para retroalimentar el controlador. Así la planta G tiene dos entradas (w y u) y dos salidas (z e y), y puede ser descompuesta en cuatro sub-matrices de transferencia,

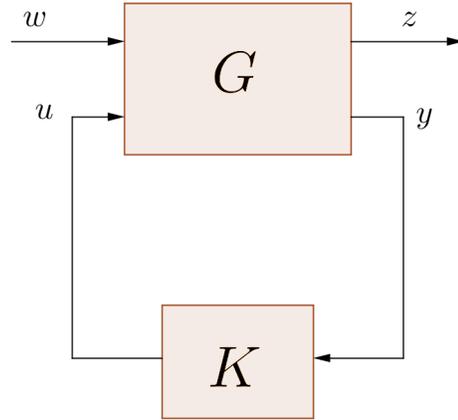


Figura 2.3: Configuración estándar del problema \mathcal{H}^∞

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

en la que G_{ij} es la función de transferencia particular entre la entrada i -ésima y la salida j -ésima. Cerrando el lazo de retroalimentación,

$$u = Ky \quad (2.5)$$

es posible calcular el mapeo que hay desde la entrada w a la salida z , H , es la llamada matriz de transferencia de lazo cerrado H .

$$z = \underbrace{[G_{11} + G_{12}K(I - G_{22})^{-1}G_{21}]}_H w. \quad (2.6)$$

El problema estándar de regulación \mathcal{H}^∞ consiste en de determinar un control con una función de transferencia K tal que:

1. Estabiliza internamente el sistema en lazo cerrado y
2. Minimiza la norma $\|H\|_\infty$ de la matriz de transferencia de lazo cerrado H desde las entradas externas w hasta el las variables de desempeño z .

2.4. Solución para sistemas en representación de espacio de estado para el problema estándar \mathcal{H}^∞

Dentro de varias soluciones del problema estándar \mathcal{H}^∞ , se trabajará con una de las más populares, propuesta por Doyle y Stoorvogel en 1992 (ver [6]). Para esto se asume que la planta generalizada es propia (no diverge en altas frecuencias¹). Además se asume que la planta tiene una realización en espacio de estado de la forma²:

$$\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u, \quad (2.7)$$

$$z = C_1x + D_{11}w + D_{12}u, \quad (2.8)$$

$$y = C_2x + D_{21}w + D_{22}u. \quad (2.9)$$

Además es necesario que las siguientes condiciones sean satisfechas:

1. (A, B_2) es estabilizable y (C_2, A) es detectable.
2. $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ tiene rango completo para las columnas, $\forall \omega \in \mathbb{R}$.
3. $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ tiene rango completo para las filas, $\forall \omega \in \mathbb{R}$.
4. D_{12} y D_{21} tienen rango completo.

La primera de estas suposiciones es natural pues de otra forma el sistema no sería controlable ni observable. Las demás suposiciones aseguran que G_{12} y G_{21} tengan rango completo para las columnas y las filas respectivamente. En caso de no cumplirse la cuarta hipótesis, puede ocurrir que la ganancia en alta frecuencia del controlador sea no acotada.

Solución del problema estándar \mathcal{H}^∞ Se considera la configuración de la figura 2.3 y se asume que son válidas las hipótesis anteriores, y por simplicidad se supone que³

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad D_{12}^T [C_1 \ D_{12}] = [0 \ I]. \quad (2.10)$$

Entonces existe un controlador estabilizante para el cual $\|H\|_\infty < \gamma$ ssi las siguientes condiciones se cumplen:

¹Es decir, que el número de polos del sistema es mayor o igual que el número de ceros

²Notar que pasar de representación en funciones de transferencia a representación en espacio de estado es posible para este caso

³Estas condiciones no son una restricción debido a que la solución para el problema general también existe.

1. $AQ + QA^T + Q \left(\frac{1}{\gamma^2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \right) Q + B_1 B_1^T = 0$ tiene una solución estable y $Q \geq 0$,
2. $PA + A^T P + P \left(\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right) P + C_1^T C_1 = 0$ tiene una solución estable y $P \geq 0$,
3. Todos los valores propios de QP tienen magnitud menor que γ^2 .

Si las tres condiciones se satisfacen, entonces un controlador $u = Ky$ que estabiliza el sistema y logra que $\|H\|_\infty < \gamma$ es el controlador cuya realización es:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \left(A + \left[\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right] P \right) \hat{x} + \left(I - \frac{1}{\gamma^2} QP \right)^{-1} Q C_2^T (I - C_2 \hat{x}) \\ u = -B_2^T P \hat{x}. \end{cases} \quad (2.11)$$

La demostración de este resultado fue presentada por Doyle en 1989 y puede ser vista en [7].

Para obtener el controlador se utiliza en el caso de una implementación real la función de μ -toolbox `HinfSyn` que consiste en la implementación del algoritmo descrito anteriormente y que entrega el controlador y la constante γ de forma automática. En general, en la práctica además de lograr estabilidad interna bajo ciertos rangos de perturbaciones, se desea cumplir con ciertos requerimientos de control, como atenuación del ruido de medición, seguimiento de referencias, atenuación de perturbaciones de baja frecuencia en la salida, etc. Para esto, se puede incluir en la formulación del problema estándar general descrito en esta sección la modelación en frecuencia de la forma de las funciones de transferencia que afectan directamente cada uno de los requerimientos descritos y que además aseguran estabilidad interna bajo incertezas o perturbaciones. A esta técnica se le conoce como control \mathcal{H}_∞ de sensibilidad mixta y se describe a continuación.

2.5. Control \mathcal{H}^∞ de sensibilidad mixta

En este caso se considera que el sistema incluye perturbaciones sobre la salida (d), ruido de medición (η) y una referencia (r). Las salidas en este caso serán la señal (y , por ejemplo la altura en un estanque), el error (e , que corresponde a la diferencia entre la salida y la referencia) y el control (u). Se asume que tanto las perturbaciones como las referencias son señales con contenidos de frecuencia bajos, mientras que el ruido en las observaciones tiene contenidos de frecuencia altos.

Calculando las funciones de transferencia que relacionan las entradas y las salidas se llega a las siguientes relaciones:

$$y = [I + GK]^{-1} (GKr + d - GK\eta), \quad (2.12)$$

$$e = [I + GK]^{-1} (r - d - \eta), \quad (2.13)$$

$$u = [I + GK]^{-1} K (r - d - \eta), \quad (2.14)$$

en donde $S = (I + GK)^{-1}$ se conoce como función de sensibilidad, $T = GK(I + GK)^{-1}$ como función de sensibilidad complementaria y $L = GK$ como ganancia de lazo cerrado.

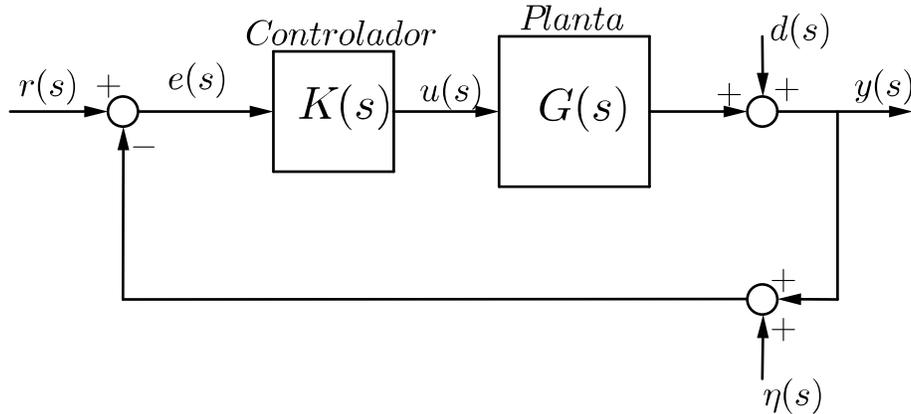


Figura 2.4: Diagrama de control de sistema

En general, los requerimientos deseados en el diseño del controlador pueden resumirse en los siguientes puntos:

- **Seguimiento de Referencia:** Para buen seguimiento de la referencia, $S(i\omega) \simeq 0$ en la banda de bajas frecuencias. Para lograr esto, se debe cumplir que $G(i\omega)K(i\omega) \gg 1$ en este rango (se aume que la señal de referencia es de baja frecuencia).
- **Disipación de perturbaciones:** Para buena disipación de perturbaciones, se debe minimizar el efecto de d sobre y . Entonces se necesita que $S(i\omega) \simeq 0$ en bajas frecuencias (se supone que la señal d tiene mayoritariamente contenido de baja frecuencia).
- **Atenuación del Ruido de Sensor:** Se desea que el ruido del sensor de las observaciones tenga un efecto pequeño sobre las salidas del sistema. Para que esto suceda $T(i\omega)$ tiene que ser pequeño en el rango de alta frecuencia.
- **Minimización de la Sensibilidad del Control:** Se desea mantener la señal de control acotada dentro del rango de funcionamiento de los actuadores y además atenuar los componentes de frecuencias mayores al ancho de banda de la planta (para evitar saturación). Para que esto suceda, KS debe ser cercano a 0 para frecuencias mayores al ancho de banda de la planta o de los actuadores.

En general, se requiere que la función de sensibilidad S , sensibilidad complementaria T y sensibilidad de entrada KS tengan formas en frecuencia indicada en la figura 2.5

Para lograr dar forma a las funciones S , T y KS en el dominio de la frecuencia se utilizará el esquema de la figura 2.6, el que incluye funciones de peso (filtros) en las entradas y salidas del sistema. En este caso la señal externa w genera la perturbación v después de pasar a través de un filtro de peso con matriz de transferencia V . El 'error de control' z tiene dos componentes, z_1 y z_2 . La primera componente z_1 es la salida del sistema de control después de pasar a través de un filtro con matriz de transferencia W_1 . La segunda componente z_2 es la entrada de la planta u después de pasar a través de un filtro de peso con matriz de transferencia W_2 .

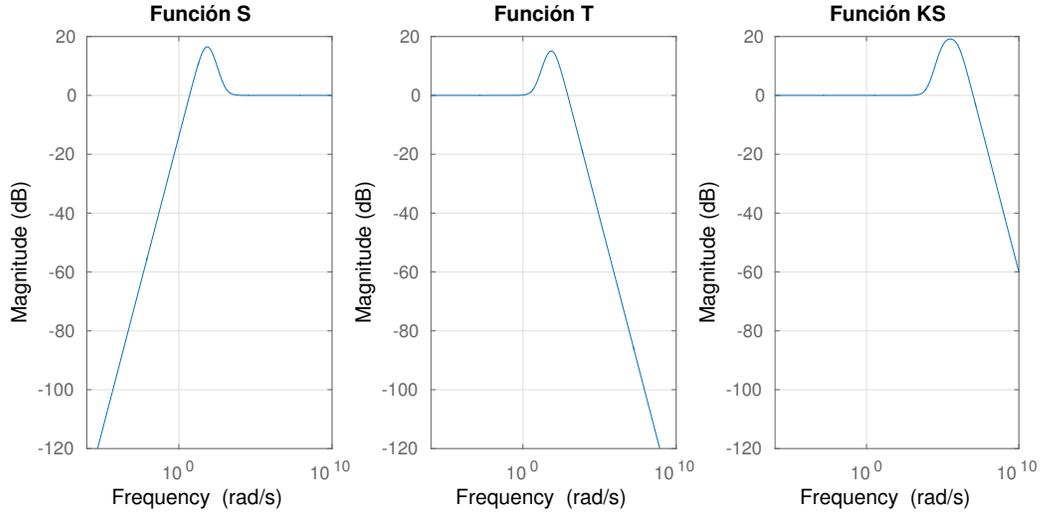


Figura 2.5: Diagrama de las funciones de sensibilidad, sensibilidad complementaria y KS

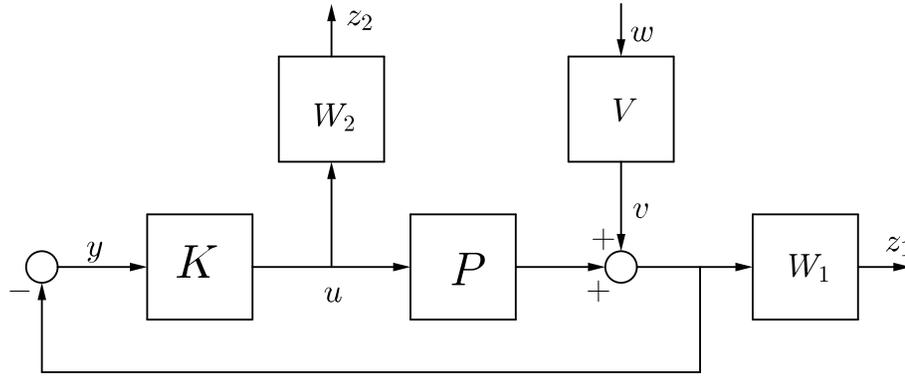


Figura 2.6: El esquema de sensibilidad mixto

Es fácil verificar que para el sistema a lazo cerrado se cumple que:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} W_1 S V \\ -W_2 K S V \end{bmatrix}}_H w. \quad (2.15)$$

Entonces la minimización de la norma ∞ de la matriz de transferencia de lazo cerrado H lleva a la minimización de:

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1 S V \\ -W_2 K S V \end{bmatrix} \right\|_{\infty}. \quad (2.16)$$

Definiendo $s := i\omega$, el mayor valor singular de $H(s)$, es igual a la raíz del mayor valor propio de

$$H^{*T}(-s)H(s) = V^T(-s) \left[S^T(-s)W_1^T(-s)W_1(s)S(s) + K S^T(-s)W_2^T(-s)W_2(s)K S(s) \right] V(s), \quad (2.17)$$

y para sistemas SISO:

$$H^{*T}(-s)H(s) = |V(s)|^2 [|S(s)|^2|W_1(s)|^2 + |KS(s)|^2|W_2(s)|^2]. \quad (2.18)$$

y de esta forma,

$$\|H\|_\infty^2 = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |V(i\omega)|^2 [|S(i\omega)|^2|W_1(i\omega)|^2 + |KS(i\omega)|^2|W_2(i\omega)|^2]. \quad (2.19)$$

Notar que en el diagrama de la figura 2.6, y denota la entrada al controlador y no la salida del sistema directamente. Además, a partir del diagrama es posible obtener:

$$\begin{aligned} z_1 &= W_1Vw + W_1Pu, \\ z_2 &= W_2u, \\ y &= -Vw - Pu. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Finalmente es posible escribir la matriz de lazo abierto G para el problema estándar como:

$$G = \left[\begin{array}{c|c} W_1V & W_1P \\ \hline 0 & W_2 \\ \hline -V & -P \end{array} \right]. \quad (2.21)$$

Cabe señalar que los filtros se usan exclusivamente en la etapa de diseño (para dar forma en frecuencia a las funciones de transferencia) y no en la implementación final del control (equivalen a los pesos en problemas de optimización).

2.5.1. Respuesta en frecuencia y asignación parcial de polos

El esquema de sensibilidad mixto expuesto en la figura 2.6 puede ser usado para darle forma simultáneamente a la función de sensibilidad y a la función de sensibilidad de entrada (función KS). El motivo es que la solución del controlador K que minimiza (2.16) tiene una propiedad conocida como *ecualización*. Esta propiedad implica que la función dependiente de la frecuencia:

$$|W_1(i\omega)S(i\omega)V(i\omega)|^2 + |W_2(i\omega)KS(i\omega)V(i\omega)|^2, \quad (2.22)$$

cuyo máximo valor es minimizado, es aproximadamente una constante (demostrado por Kwakernaak en 1985, ver [12]). Si denotamos esta constante por γ^2 , con γ no negativo, entonces:

$$|W_1(i\omega)S(i\omega)V(i\omega)|^2 + |W_2(i\omega)K(i\omega)S(i\omega)V(i\omega)|^2 \simeq \gamma^2. \quad (2.23)$$

Por lo tanto para una solución óptima:

$$|W_1(i\omega)S(i\omega)V(i\omega)|^2 \leq \gamma^2, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (2.24)$$

$$|W_2(i\omega)K(i\omega)S(i\omega)V(i\omega)|^2 \leq \gamma^2, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (2.25)$$

$$(2.26)$$

con lo cual:

$$|S(i\omega)| \leq \frac{\gamma}{|W_1(i\omega)V(i\omega)|}, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (2.27)$$

$$|K(i\omega)S(i\omega)| \leq \frac{\gamma}{|W_2(i\omega)V(i\omega)|}, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (2.28)$$

$$(2.29)$$

Así, escogiendo los filtros W_1 , W_2 , V correctamente es posible forzar a las funciones S y KS a ser pequeñas los rangos de frecuencia descritos anteriormente.

En particular, si las funciones de peso son apropiadamente escogidas (con W_1V grande en bajas frecuencias y W_2V grande en altas frecuencias), entonces la solución del problema de sensibilidad mixta tiene la propiedad de que el primer término del criterio domina a bajas frecuencias y el segundo a altas frecuencias:

$$\underbrace{|W_1(i\omega)S(i\omega)V(i\omega)|^2}_{\text{domina en bajas frecuencias}} + \underbrace{|W_2(i\omega)K(i\omega)S(i\omega)V(i\omega)|^2}_{\text{domina en altas frecuencias}} = \gamma^2. \quad (2.30)$$

De donde se obtiene:

$$|S(i\omega)| \approx \frac{\gamma}{|W_1(i\omega)V(i\omega)|}, \quad \text{para } \omega \text{ pequeño}, \quad (2.31)$$

$$|K(i\omega)S(i\omega)| \approx \frac{\gamma}{|W_2(i\omega)V(i\omega)|}, \quad \text{para } \omega \text{ grande}. \quad (2.32)$$

Por lo tanto, este resultado permite un control efectivo sobre la forma de la función de sensibilidad y la forma de la función de sensibilidad de entrada.

Otra propiedad importante del problema de sensibilidad mixto es la cancelación de polos. De la propiedad de ecualización tenemos que:

$$W_1(s)W_1(-s)S(s)S(-s)V(s)V(-s) + W_2(s)W_2(-s)KS(s)KS(-s)V(s)V(-s) = \gamma^2, \quad (2.33)$$

en donde $s = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$. Si escribimos las funciones P , W_1 , W_2 , V y K en su forma racional se obtiene:

$$P = \frac{N}{D}, \quad W_1 = \frac{A_1}{B_1}, \quad W_2 = \frac{A_2}{B_2}, \quad V = \frac{M}{E}, \quad K = \frac{X}{Y} \quad (2.34)$$

con todos los numeradores y denominadores polinomios en s . De lo anterior se obtiene que:

$$S = \frac{DX}{DX + NY}, \quad (2.35)$$

$$KS = \frac{DY}{DX + NY}, \quad (2.36)$$

en donde el denominador

$$D_{cl} = DX + NY \quad (2.37)$$

es el polinomio característico de lazo cerrado del sistema retroalimentado. Sustituyendo S y KS en (2.33) se obtiene:

$$\frac{D \sim D \cdot M \sim M \cdot (A_1 \sim A_1 B_2 \sim B_2 X \sim X + A_2 \sim A_2 B_1 \sim B_1 Y \sim Y)}{E \sim E \cdot B_1 \sim B_1 \cdot B_2 \sim B_2 \cdot D_{cl} \sim D_{cl}} = \gamma^2. \quad (2.38)$$

Luego, debido a que el lado derecho de (2.38) es una constante, todos los factores polinómicos del numerador de la función racional en la izquierda se cancelan con su correspondiente factor en el denominador. En particular, el factor $D \sim D$ se cancela. Si es que no hay cancelación entre $D \sim D$ y $E \sim E B_1 \sim B_1 B_2 \sim B_2$ entonces el polinomio característico de lazo cerrado D_{cl} (el cual por estabilidad tiene solo raíces en el lado izquierdo del plano complejo) necesariamente tiene entre sus raíces las raíces de D . Esto significa que los polos de lazo abierto (las raíces de D), *reaparecen* como polos de lazo cerrado.

Este fenómeno, el cual no es propicio para un buen diseño, se puede prevenir escogiendo el denominador de V igual al numerador de la planta D ($V = M/D$). Con esta elección del denominador de V , el polinomio E se cancela contra D en el lado izquierdo de (2.38), y entonces los polos de lazo abierto *no* reaparecen como polos de lazo cerrado.

Por otra parte, si no hay cancelación entre $M \sim M$ y $E \sim E B_1 \sim B_1 B_2 \sim B_2$ y se asume sin pérdida de generalidad que M tiene raíces en el lado izquierdo del plano complejo, entonces el polinomio M se cancela contra un factor en D_{cl} . Además, se elige V como una función *propia* (lo cual asegura que $V(j\omega)$ es finita en altas frecuencias) entonces el polinomio M tiene el mismo grado que D .

Esto significa que eligiendo:

$$V = \frac{M}{D}, \quad (2.39)$$

los polos de lazo abierto (las raíces de D) son reasignadas a las locaciones de las raíces de M después del diseño del controlador. Finalmente si las funciones de peso W_1 y W_2 se eligen de forma adecuada, dichas raíces pueden ser colocadas como los polos dominantes.

Esta técnica conocida como *partial pole placement* (ver [13]) permite un mayor grado de flexibilidad sobre el diseño. Es muy útil también para acelerar los tiempos de convergencia.

Cabe destacar que el esquema de sensibilidad mixto también puede ser resuelto usando el algoritmo detallado en la sección (2.4). Para ello basta con encontrar una representación en espacio de estado válida para la planta y las funciones de peso en cuestión.

Capítulo 3

Control Robusto del Convertidor Teniente

En este capítulo se presenta el modelo de perturbaciones del convertidor y el diseño del control robusto usando la técnica de sensibilidad mixta \mathcal{H}^∞ .

Para ello se utilizará la herramienta numérica Matlab que permite el cálculo de controladores robustos de este tipo, y permite su implementación en forma directa.

3.1. Modelo de Perturbaciones para el Convertidor Teniente

En el caso del convertidor se consideran principalmente las incertezas asociadas a los parámetros del problema, tales como las dimensiones físicas del cilindro, las constantes que caracterizan el fluido, el desconocimiento exacto del nivel de llenado del convertidor, los que finalmente se traducen en incertezas en las frecuencias naturales y en los modos normales de oscilación del baño. Debido a lo anterior, el modelo de perturbaciones para el convertidor considera cambios en las frecuencias de oscilación con respecto a los valores originales. Dichos cambios se modelan como una cantidad que se agrega al valor original (nominal), cambiando su valor dentro de un intervalo, lo que permite modelarlo como una perturbación aditiva.

Si se considera el sistema de la figura 3.1a), con f función de transferencia que satisface $y = fu$, se perturba de forma aditiva como se indica en la figura 3.1b) de tal forma que $y = (f + \Delta_f)u$. En nuestro caso f representa una frecuencia a perturbar. Se perturban sólo las dos primeras frecuencias del baño, ya que son las que contienen mayor energía y amplitud. Las demás frecuencias de menor amplitud se desprecian.

Para escribir el modelo de perturbaciones se expanden las ecuaciones (1.74) y (1.81),

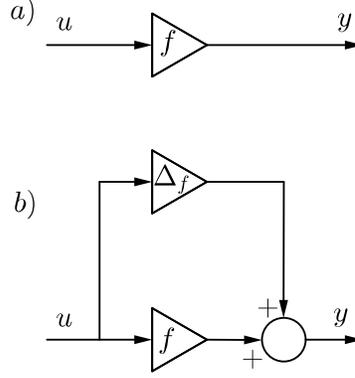


Figura 3.1: a) sistema nominal, b) modelo de incerteza aditiva

definiendo $\tilde{c}_i = \varphi_i(\bar{x})$:

$$x_{i1}^\varepsilon = x_{i2}^\varepsilon + \varepsilon g \beta_i u, \quad (3.1)$$

$$\dot{x}_{i2}^\varepsilon = -\varepsilon g f_i x_{i2}^\varepsilon - g f_i x_{i1}^\varepsilon + (g \beta_i - \varepsilon^2 g^2 \beta_i f_i) u, \quad (3.2)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_{i2}^\varepsilon = f_i(-g x_{i1}^\varepsilon - \varepsilon g x_{i2}^\varepsilon - \varepsilon^2 g^2 \beta_i u) + g \beta_i u, \quad (3.3)$$

$$y = -\frac{\tilde{c}_1}{g} x_{12}^\varepsilon - \varepsilon \tilde{c}_1 \beta_1 u - \frac{\tilde{c}_2}{g} x_{22}^\varepsilon - \varepsilon \tilde{c}_2 \beta_2 u, \quad (3.4)$$

en donde $\omega_i^2 = g f_i$, $\tilde{c}_i := \varphi_i(\bar{x})$ e $i = 1, 2$. Consideraremos además $y_i = -\frac{\tilde{c}_i}{g} x_{i2}^\varepsilon - \varepsilon \tilde{c}_i \beta_i u$.

A partir de (3.2), (3.3) y (3.4) se obtiene el diagrama de bloques de la figura (3.2):

Como se indica en la figura 3.2 se usan filtros de entrada y de salida (μ_1 y ρ_1 en el esquema) de tal forma que los bloques de perturbación $\Delta_{f_i} \in [-1, 1]$, $i = 1, 2$ cambian el valor de la frecuencia en hasta un 30% de su valor nominal f_i , $i = 1, 2$. Es decir, el controlador deberá estabilizar las oscilaciones, incluso cuando las frecuencias naturales han cambiado hasta en un 30% de su valor nominal.

Luego, es necesario escribir el sistema de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \omega \\ u \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

en donde $\omega = [p_1, p_2]^T$, $z = [q_1, q_2]^T$ son las entradas y salidas externas adicionales del modelo planteado en (2.7)-(2.9), que corresponden a las entradas y salidas del bloque de perturbaciones (ver figura 3.5) Δ_{f_i} .

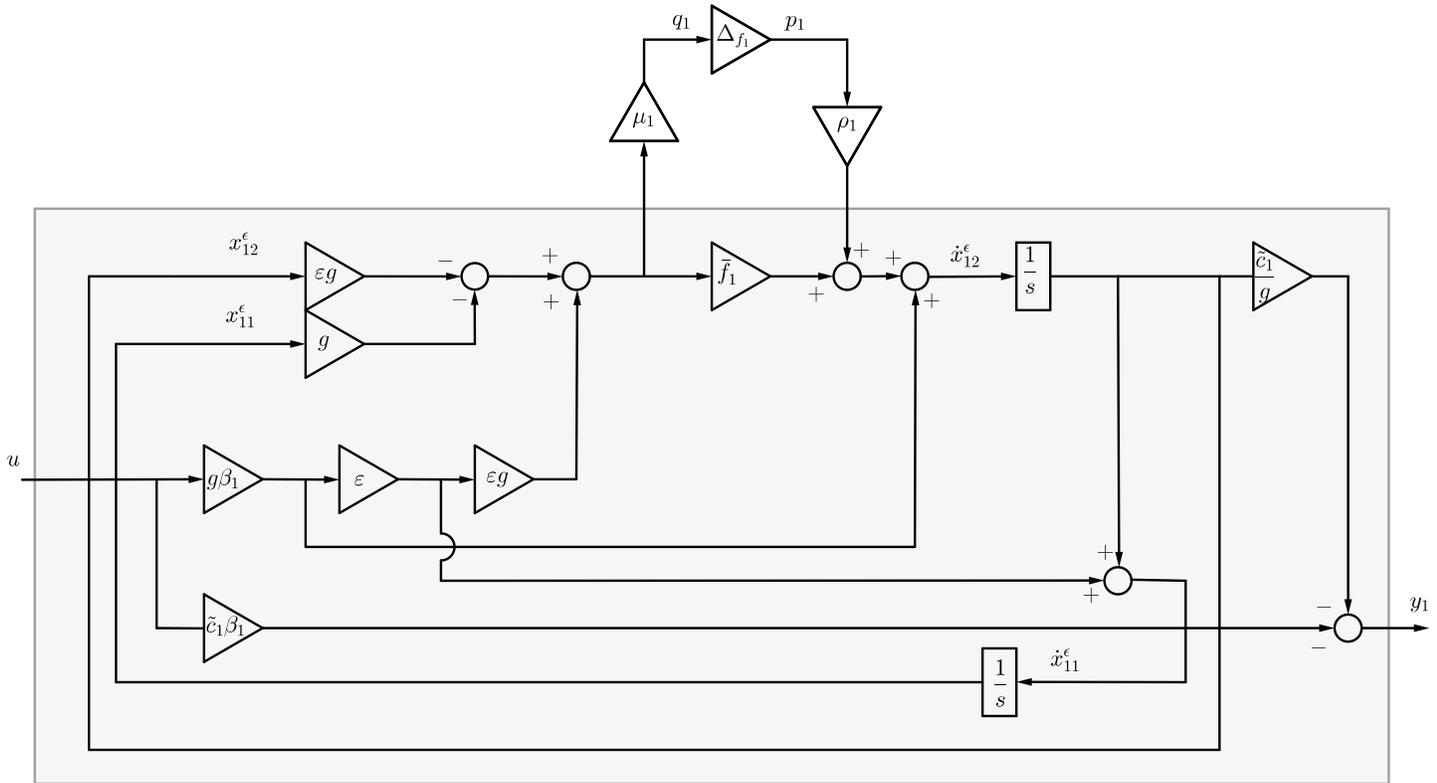


Figura 3.2: Diagrama de bloque con perturbaciones en las frecuencias

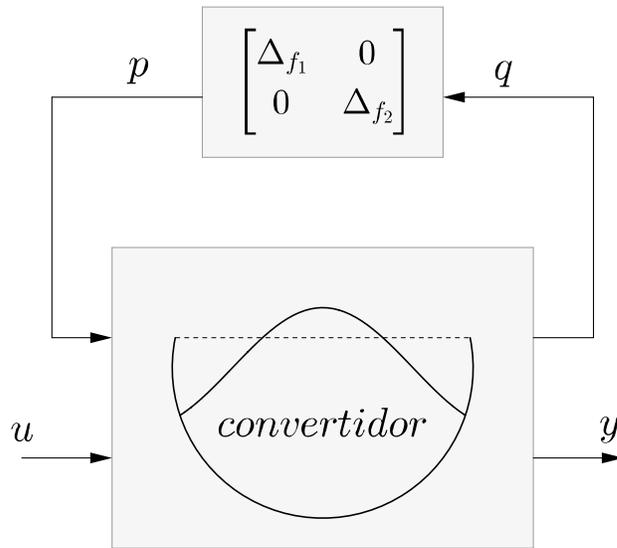


Figura 3.3: Convertidor con frecuencias perturbadas

Finalmente, aislando el bloque de perturbaciones se obtiene:

$$\dot{x}_{i1}^{\epsilon} = x_{i2}^{\epsilon} + \epsilon g \beta_1 u, \quad (3.6)$$

$$\dot{x}_{i2}^{\epsilon} = \bar{f}_i(-g x_{i1}^{\epsilon} - \epsilon g x_{i2}^{\epsilon} - \epsilon^2 g^2 \beta_1 u) + g \beta_1 u + \rho_i p_i, \quad (3.7)$$

$$q_i = \rho_i(-g x_{i1}^{\epsilon} - \epsilon g x_{i2}^{\epsilon} - \epsilon^2 g^2 \beta_1 u), \quad (3.8)$$

con:

$$\dot{x}_1^\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -g\bar{f}_1 & -\varepsilon g\bar{f}_1 \end{pmatrix} x_1^\varepsilon + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \rho_1 & 0 \end{pmatrix} \omega + \begin{pmatrix} \varepsilon g\beta_1 \\ -\varepsilon^2 g^2 \beta_1 \bar{f}_1 + g\beta_1 \end{pmatrix} u, \quad (3.9)$$

$$\dot{x}_2^\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -g\bar{f}_2 & -\varepsilon g\bar{f}_2 \end{pmatrix} x_2^\varepsilon + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix} \omega + \begin{pmatrix} \varepsilon g\beta_2 \\ -\varepsilon^2 g^2 \beta_2 \bar{f}_2 + g\beta_2 \end{pmatrix} u, \quad (3.10)$$

$$z = \begin{pmatrix} -g\mu_1 & -\varepsilon g\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g\mu_2 & -\varepsilon g\mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^\varepsilon \\ x_2^\varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\varepsilon^2 g^2 \beta_1 \mu_1 \\ -\varepsilon^2 g^2 \beta_2 \mu_2 \end{pmatrix} u. \quad (3.11)$$

Y escribiéndola de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^\varepsilon \\ z \\ y \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|cc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon g\beta_1 & & \\ -g\bar{f}_1 & -\varepsilon g\bar{f}_1 & 0 & 0 & \rho_1 & 0 & -\varepsilon^2 g^2 \beta_1 \bar{f}_1 + g\beta_1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \varepsilon g\beta_2 & & \\ 0 & 0 & -g\bar{f}_2 & -\varepsilon g\bar{f}_2 & 0 & \rho_2 & -\varepsilon^2 g^2 \beta_2 \bar{f}_2 + g\beta_2 & & \\ \hline -g\mu_1 & -\varepsilon g\mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon^2 g^2 \beta_1 \mu_1 & & \\ 0 & 0 & -g\mu_2 & -\varepsilon g\mu_2 & 0 & 0 & -\varepsilon^2 g^2 \beta_2 \mu_2 & & \\ \hline 0 & -\frac{1}{g}\psi_1(\bar{x}) & 0 & -\frac{1}{g}\psi_2(\bar{x}) & 0 & 0 & \varepsilon(\psi_1(\bar{x})\beta_1 - \psi_2(\bar{x})\beta_2) & & \end{array} \right) \begin{pmatrix} x^\varepsilon \\ w \\ u \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

donde nuestro bloque de perturbaciones Δ_f será

$$\Delta_f = \begin{pmatrix} \Delta_{f_1} & 0 \\ 0 & \Delta_{f_2} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

de forma que

$$\|\Delta_f\|_\infty = \bar{\sigma}(\Delta_f), \quad (3.14)$$

que corresponde al mayor valor singular, es decir, $\bar{\sigma} = \sqrt{\bar{\lambda}}$, con $\bar{\lambda}$ el mayor valor propio de Δ_f^2 . Como los valores propios de Δ_f^2 son $\Delta_{f_i}^2$ y estos a su vez están acotados por 1, se concluye que

$$\|\Delta_f\|_\infty \leq 1 \quad (3.15)$$

3.2. Elección de las funciones de peso y parámetros relevantes

En este caso, el problema se abordará usando el esquema de sensibilidad mixto, por lo que las funciones de peso se elegirán de tal forma de lograr objetivos de control adecuados para el convertidor.

En el contexto de nuestro problema no se desea seguir una señal específica de referencia, dado que estabilizar el oleaje en torno a 0 es suficiente, por lo que nos enfocaremos en los siguientes objetivos:

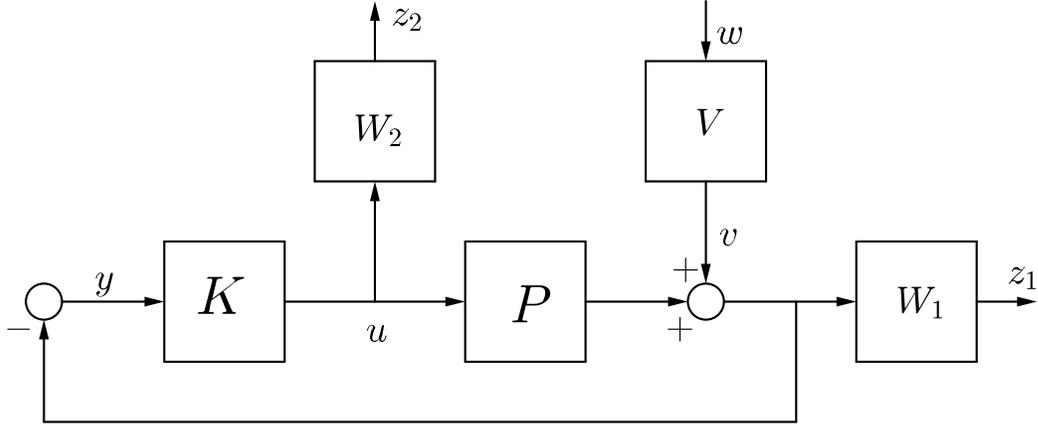


Figura 3.4: El esquema de sensibilidad mixto

1. Atenuar ruido de medición, específicamente en la banda de alta frecuencia (se asume que la mayor parte del ruido que contamina la medición del nivel del oleaje es de alta frecuencia).
2. Limitar la banda de frecuencia de la señal de control (con el fin de evitar saturación de los actuadores).
3. Mantener la energía de control acotada (si es posible en niveles bajos, en la banda de baja frecuencia).
4. Tiempo de estabilización bajo.

Para lograr atenuación del ruido se requiere que la ganancia de alta frecuencia de la función de sensibilidad sea del orden de los 0 dB (ver figura 3.5). En cambio, para lograr el objetivo 2. y 3. se modela la función KS de tal forma que la ganancia de baja frecuencia sea del orden de los 0 dB, una frecuencia de corte en el ancho de banda deseado para la señal de control y una atenuación (*roll-off*) mayor o igual a los 20 dB/dec (ver [15]), como se muestra en la figura 3.5.

Finalmente, para lograr tiempos que aseguran convergencia rápida se propone un método de asignación parcial de polos (ver 2.38).

Para lograr los objetivos propuestos se proponen las siguientes funciones de peso (ver figura 3.6)

$$W_1 = 1, \tag{3.16}$$

$$W_2 = \left(\frac{150000}{27} \right)^2 \frac{(s + 27)^2}{(s + 150000)^2}, \tag{3.17}$$

$$V = \frac{(s + 20)^4}{(s^2 + 0,014s + 34,7644)(s^2 + 0,0324s + 81,2246)}, \tag{3.18}$$

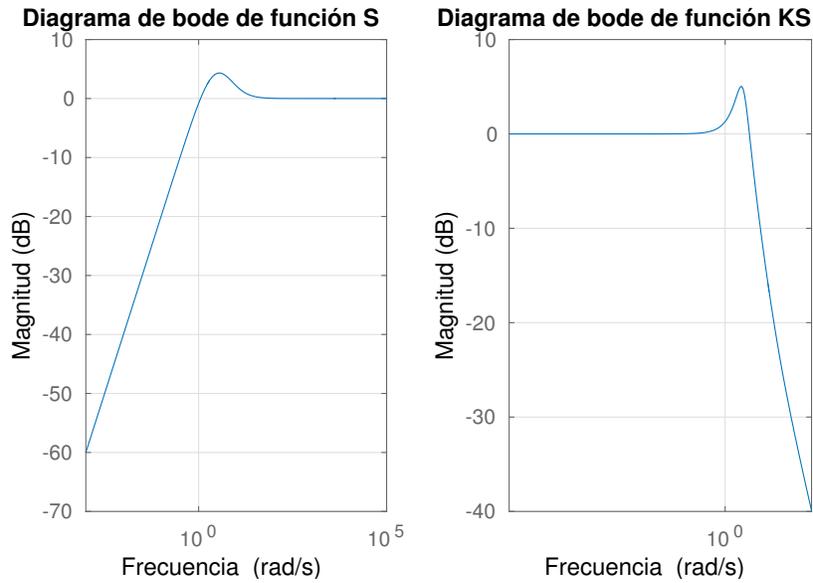


Figura 3.5: Función de sensibilidad y función KS deseadas

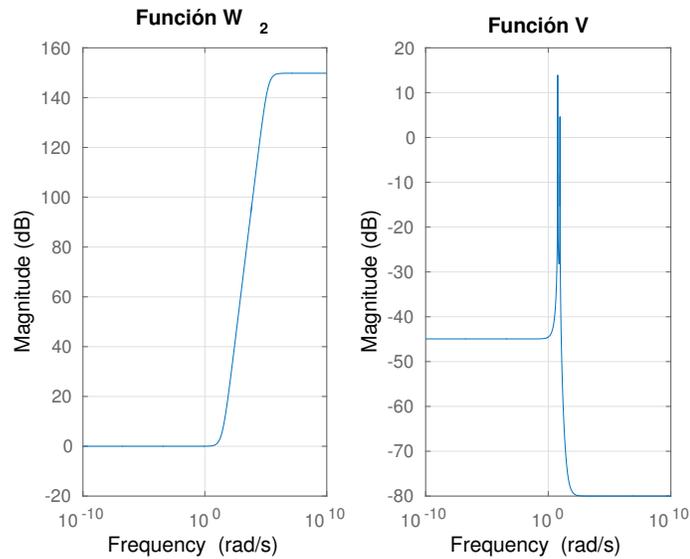


Figura 3.6: Diagrama de bode de las funciones de peso usadas

En donde el problema de sensibilidad mixto considera la minimización de la siguiente norma (la cual incluye explícitamente la función KS y es equivalente al diagrama de la figura 3.4)

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1 S V \\ -W_2 K S V \end{bmatrix} \right\|_{\infty}. \quad (3.19)$$

3.3. Verificación de hipótesis para el diseño del controlador

Considerando las ecuaciones (3.9) y (3.11), además de las funciones de peso (3.17) y (3.18) es posible identificar las matrices A , B_1 , B_2 , C_1 , D_{11} , D_{12} , D_{21} , D_{22} y verificar las hipótesis necesarias para que el problema estándar \mathcal{H}_∞ tenga solución:

1. En este caso se verifica que (A, B_2) es estabilizable por el criterio de Hautus (ver [22]) : se verifica que $(A - \lambda I, B_2)$ tiene rango completo en filas $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ con $Re(\lambda) > 0$.

Se verifica que (C_2, A) es detectable por el criterio de Hautus: es decir, $\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C_2 \end{bmatrix}$ tiene rango completo en columnas $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ con $Re(\lambda) > 0$.

2. Se verifica que $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ tiene rango completo para las columnas $\forall \omega \in \mathbb{R}$.
3. Se verifica que $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ tiene rango completo para las filas $\forall \omega \in \mathbb{R}$.
4. D_{12} tiene rango completo, pero D_{21} no.

A pesar de no cumplir con la última hipótesis, el toolbox de Matlab es capaz de encontrar un controlador con la limitante que la ganancia de alta frecuencia puede ser grande. Sin embargo, este no es el caso para ninguno de los controladores encontrados, por lo que esto no representó ningún problema.

3.4. Solución

Para el cálculo de la solución se usó el μ -toolbox de Matlab de control (ver [11]) que trae implementado el algoritmo en (2.3). Así, el controlador resultante tiene la siguiente forma $K(s) = \frac{K_N(s)}{K_D(s)}$, con:

$$K_N(s) = 1,6 \cdot 10^{-5} s^9 + 4,9 s^8 + 3,7 \cdot 10^5 s^7 + 4,4 \cdot 10^6 s^6 + 10^8 s^5 + 6,6 \cdot 10^8 s^4 + 8 \cdot 10^9 s^3 + 3 \cdot 10^{10} s^2 + 1,7 \cdot 10^{11} s + 4,1 \cdot 10^{11} \quad (3.20)$$

$$K_D(s) = s^{10} + 134 s^9 + 7620 s^8 + 2,3 \cdot 10^5 s^7 + 4,5 \cdot 10^6 s^6 + 5,9 \cdot 10^7 s^5 + 5,6 \cdot 10^8 s^4 + 4,9 \cdot 10^9 s^3 + 2,4 \cdot 10^{10} s^2 + 9,1 \cdot 10^{10} s + 3,3 \cdot 10^{11} \quad (3.21)$$

Además, en el diseño se obtiene una constante $\gamma = 0,6883$. Al ser este valor menor que $\frac{\sqrt{2}}{2}$, de acuerdo a la cota para las normas de los bloques de perturbaciones, **asegura robustez del sistema ante incertezas en los parámetros así como estabilidad interna.**

Es decir, con este valor de γ se asegura estabilidad para las perturbaciones asociadas a las dos primeras frecuencias del problema, es decir, el esquema de control será internamente estable para frecuencias que se alejen hasta en un 30 % de su valor original.

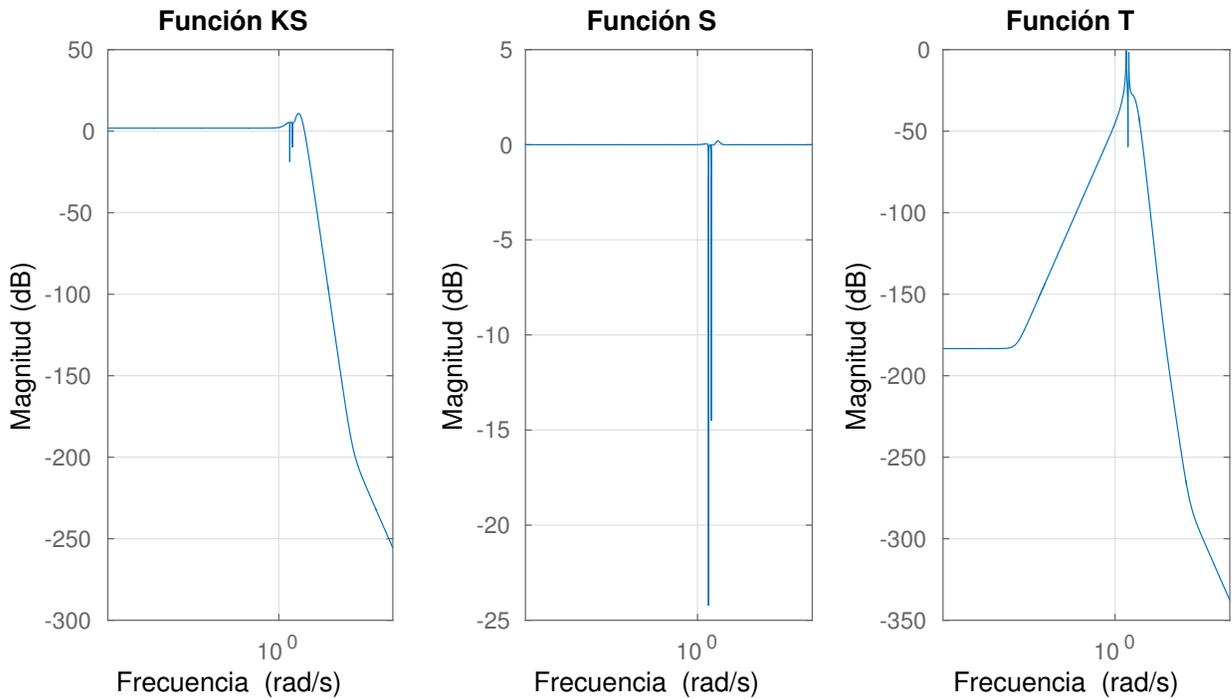


Figura 3.7: Diagrama de bode de las funciones KS , S y T obtenidas

Por otra parte, la función KS y la función de sensibilidad complementaria $T = (1 - S)$ se muestran en la figura 3.7. se observa de la función KS que el ancho de banda de la señal de control está dado por $B \approx 60$ [rad/seg] (ver gráfico), y que la amplitud en baja frecuencia se mantiene en niveles aceptables (amplificada en el orden de 2 dB). Además, se observa atenuación del ruido de medición (ver función T) en todo el espectro y especialmente a partir de los ω mayores a 10 [rad/seg]

Capítulo 4

Resultados del primer modelo

En este capítulo se presentarán los siguientes resultados

1. Resultados Control Robusto
2. Resultados de comparación Control Robusto y LQG
3. Resultados de comparación Control Robusto y PID

4.1. Resultados control robusto

A continuación se presenta el desempeño del controlador robusto, para la señal de salida y la señal de control.

Los parámetros usados en las simulaciones son:

| Parámetro | valor |
|----------------------------|-------------------|
| ε (disipación) | $4 \cdot 10^{-4}$ |
| Radio convertidor | 0,356 <i>m</i> |
| Parámetro llenado | 0,4171 |
| Radio convertidor | 0,356 <i>m</i> |
| Diámetro tobera | 0,00745 <i>m</i> |
| Submergencia tobera | 0,173 <i>m</i> |
| Número de Froude | 10.26 |
| ω_1 | 5.8 <i>hz</i> |
| ω_2 | 8.9 <i>hz</i> |

Las pruebas de robustez realizadas consisten en controlar una planta perturbada, cuyas frecuencias de oscilación sean un 30 % distintas a las originales. También se evalúa el desempeño del controlador al añadir ruido blanco gaussiano de media 0 y desviación estándar 0,01 en las mediciones. Finalmente se controla una planta perturbada con ruido en las mediciones.

En primer lugar se presentan los resultados del control robusto sin perturbaciones en las frecuencias ni ruido de medición. A continuación se presentan las señales de salida del sistema para una planta perturbada, cuyas dos principales frecuencias de oscilación fueron alteradas en un 30% y además se añade ruido blanco en las mediciones. Finalmente se presentan las señales de salida del sistema cuando se añade ruido blanco en las mediciones.

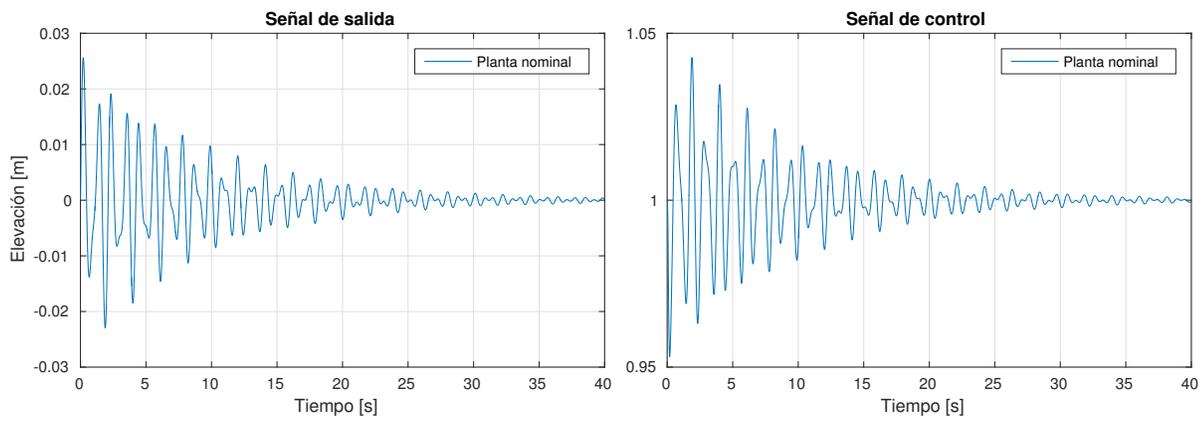


Figura 4.1: Señal de salida y control para la planta nominal (sin perturbaciones ni ruido)

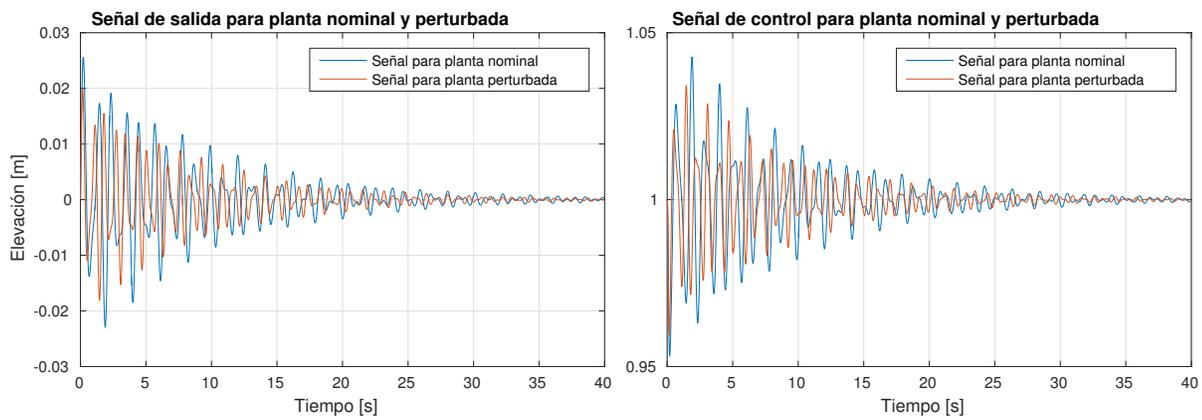


Figura 4.2: Señal de salida y control para planta perturbada y sin ruido

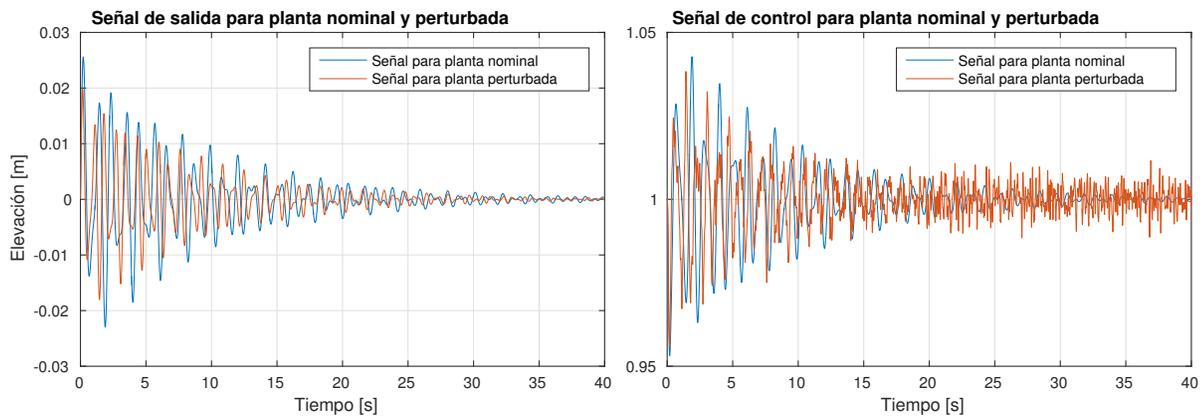


Figura 4.3: Señal de salida y control para planta perturbada y con ruido

4.2. Comparación Control Robusto y LQG

A continuación se presenta una comparación entre el desempeño del control robusto y el control LQG, tanto en la señal observada como en la señal de control, al controlar una planta perturbada, cuyas dos principales frecuencias de oscilación fueron alteradas en un 30 %.

A continuación se presenta una comparación entre el desempeño del control robusto y el control LQG, tanto en la señal observada como en la señal de control, al controlar una planta perturbada, cuyas dos principales frecuencias de oscilación fueron alteradas en un 30 %, y que además se le añade ruido blanco en las mediciones.

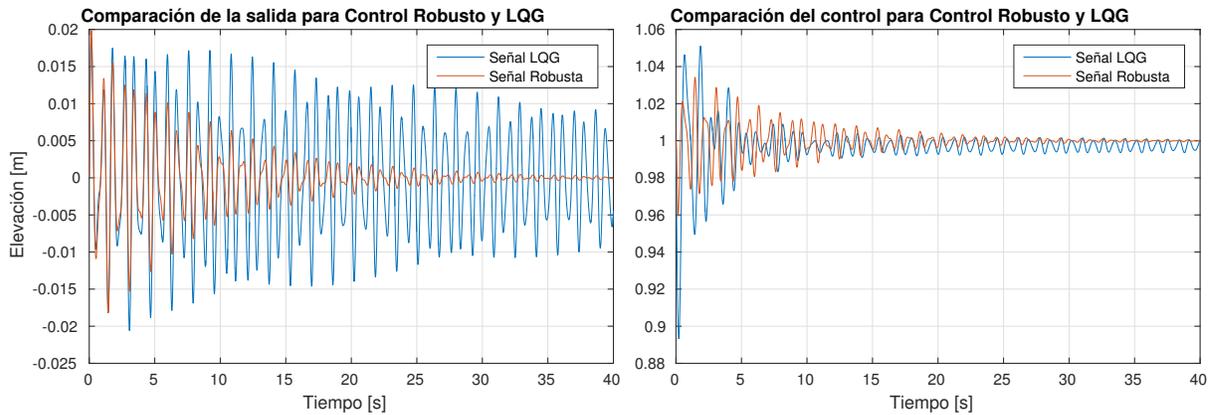


Figura 4.4: Comparación para señal de salida y de control ante planta perturbada y sin ruido

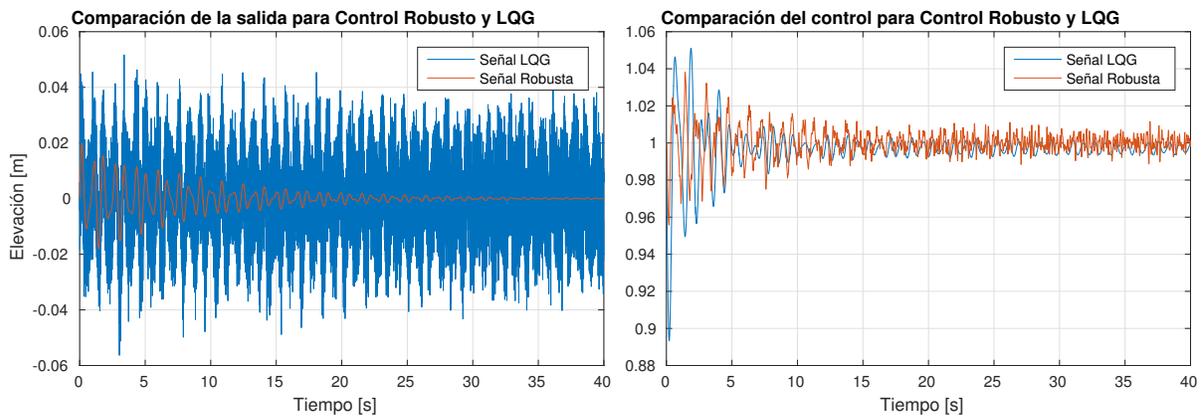


Figura 4.5: Comparación para señal de salida y de control ante planta perturbada y con ruido

4.3. Comparación Robusto y PID con variación de parámetros.

Los controladores PID son aquellos que son combinación de tres componentes, un componente proporcional, uno derivativo y uno integrador y su forma general es (ver [16]),

$$K = K_p (1 + k_D s + K_I/s) \quad (4.1)$$

Dada la forma de nuestra planta se diseñó un control tipo PI, el cual es de la forma $K = k_p + \frac{k_i}{s}$, donde los parámetros k_p , k_i fueron escogidos de forma de obtener un desempeño similar al del control LQG ($k_p = 3$, $k_i = 0,1$). Luego se comparó el desempeño del PI con el control robusto, tanto en la señal observada como en la señal de control, al controlar una planta perturbada, cuyas dos principales frecuencias de oscilación fueron alteradas en un 30 %.

A continuación se presenta una comparación entre el desempeño del control robusto y el control PID, tanto en la señal observada como en la señal de control, al controlar una planta perturbada, cuyas dos principales frecuencias de oscilación fueron alteradas en un 30 %, y que además se le añade ruido blanco en las mediciones.

Debido al mal comportamiento del control PI ante ruido en las mediciones (todo se transfiere en la señal de control) es que se modifica el esquema de control con un filtro pasa bajo que filtra los contenidos altos en frecuencia de la señal antes de entregárselos al controlador. Bajo estas condiciones se presenta una comparación entre el desempeño del control robusto y el control PI filtrado, tanto en la señal observada como en la señal de control, al controlar una planta perturbada, cuyas dos principales frecuencias de oscilación fueron alteradas en un 30 %, y que además se le añade ruido blanco en las mediciones.

Se utilizan los mismos parámetros expuestos al comienzo del capítulo, con $K_p = 3$, $K_I = 0,033$ los parámetros del control PID. El filtro usado para el ruido es el siguiente:

$$F_b(s) = \frac{0,7w_c^4}{s^4 + 4w_c s^3 + 6w_c^2 s^2 + 4w_c^3 s + w_c^4}, \quad \text{con } w_c = 60. \quad (4.2)$$

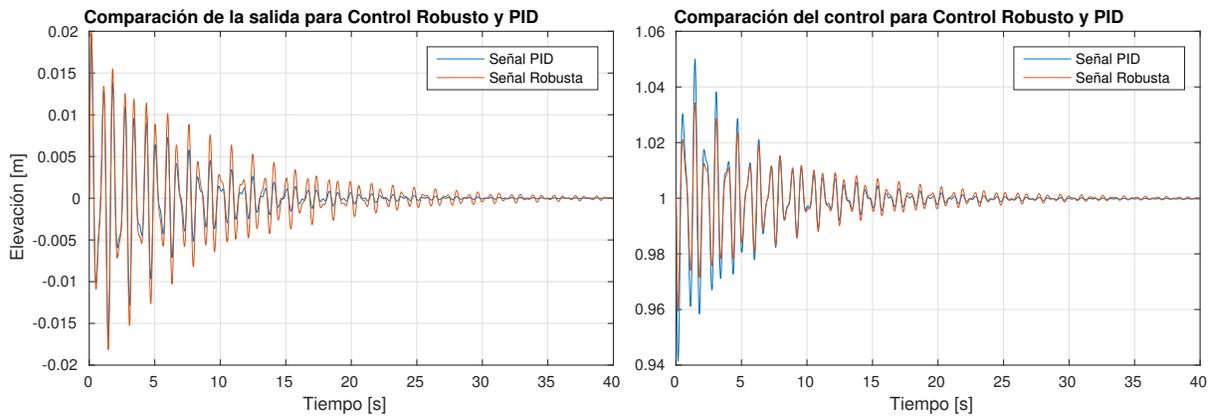


Figura 4.6: Comparación para señal de salida y control ante planta perturbada y sin ruido

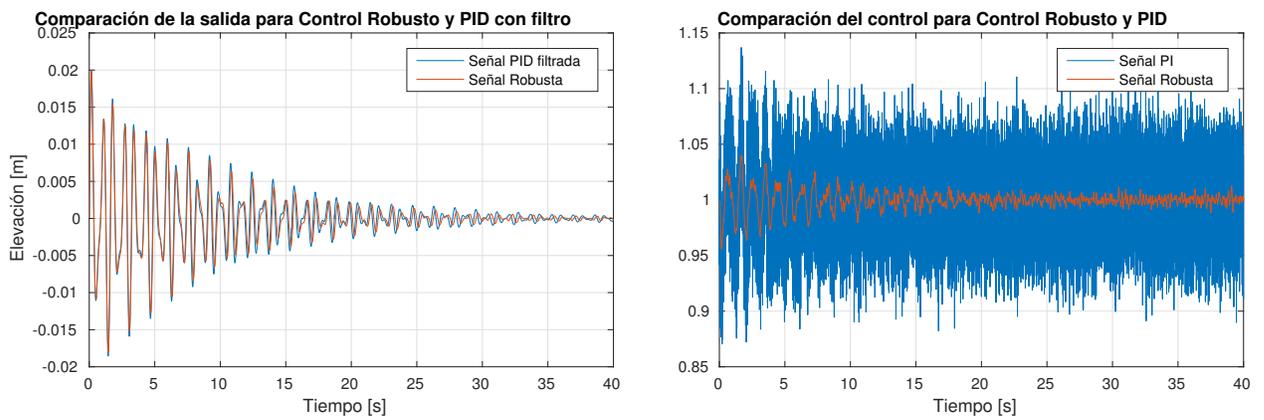


Figura 4.7: Comparación para señal de salida y control ante planta perturbada y con ruido

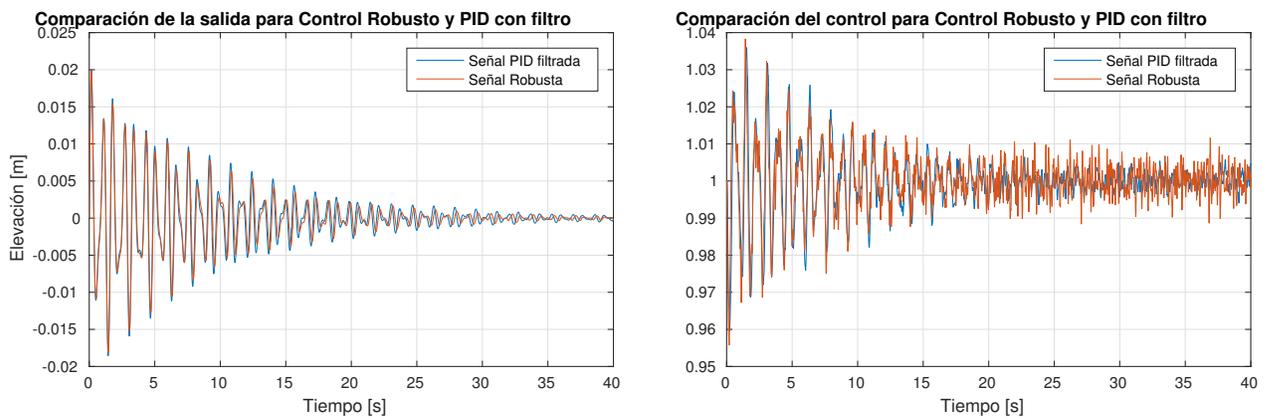


Figura 4.8: Comparación para señal de salida y control ante planta perturbada y con ruido, para señal previamente filtrada

4.4. Discusión.

De acuerdo a los resultados obtenidos se verifica que el control propuesto es robusto ante variaciones en los parámetros del modelo original y logra la atenuación de la mayor parte del ruido de medición en la salida y en la señal de control.

Una vez confirmada la robustez del control diseñado, se efectuaron comparaciones con dos controladores distintos: el control LQG y el control PI. Si bien ambos tienen velocidades de convergencia al equilibrio similares a la del control robusto, ante perturbaciones en los parámetros y ruidos de medición su desempeño disminuye en forma considerable.

Para plantas con perturbaciones de un 30 % en sus frecuencias el control LQG no logra disminuir el oleaje en la superficie del fluido de forma rápida, como se observa en la figura 4.4. En cambio el control robusto es capaz de controlar el oleaje de forma satisfactoria, sin empeorar su velocidad de convergencia (ver figura 4.2).

Por otro lado se observa de los resultados (ver figura 4.5) que para el control LQG el ruido de medición afecta en forma significativa la salida de la planta. Por el contrario, el control robusto atenúa en gran medida el ruido de medición en la salida del sistema.

Incluso cuando el control PID exhibe robustez con respecto a la variación de los parámetros del modelo (al igual que el diseño robusto) tal como se muestra en la figura 4.6, se observa que ante la existencia de ruido de medición la señal de control resulta contaminada significativamente (ver figura 4.7). Por otra parte, el control robusto atenúa en gran medida el ruido sobre la señal de control. Se observa de la figura 4.8 que un nivel de atenuación similar puede ser alcanzado por el control PID intercalando un filtro pasa-bajo adicional en la entrada del controlador.

Capítulo 5

Segundo Modelo del convertidor

A pesar de los buenos resultados del primer modelo del convertidor, hay algunos inconvenientes con las hipótesis hechas para resolver el problema. En primer lugar, se asume que la inyección a través de la tobera es agua en vez de aire. Esto significa que hay que incluir una segunda tobera encargada de sacar el fluido que la primera agrega, lo que genera dinámicas al interior del convertidor que no están presentes. En segundo lugar no se considera el fenómeno de movimiento en el chorro a lo largo de la superficie, es decir, se deja fija la zona de salida del chorro, mientras que se ha observado experimentalmente que la posición del chorro varía en el tiempo. Debido a lo anterior, es de interés desarrollar un nuevo modelo matemático que permita incluir la modelación del chorro dentro de las ecuaciones que describen el fenómeno.

Para ello se buscan replicar los resultados experimentales desarrollados por Rosales en [19] en una maqueta a escala 1:5 de un corte transversal del convertidor. Estos resultados muestran que la onda predominante en la superficie libre del fluido corresponde al segundo modo y además muestran una forma de control pasivo sobre la superficie que consiste en una segunda línea de toberas inyectando aire, ubicadas en el fondo del convertidor. La combinación de la inyección de la tobera lateral y la del fondo produce una reducción de la amplitud del oleaje en la superficie, interfiriendo con el segundo modo que domina el movimiento.

Para poder lograr esto último, se realizará una nueva modelación de las ondas gravitacionales en la superficie libre del fluido, y se efectuarán simulaciones de la evolución de la onda en la superficie para cualquier configuración de toberas, esto es, se desea poder incluir una segunda línea de toberas en el modelo.

Esta nueva modelación considera las ondas de superficie formadas en baños agitados por medio de inyección de gas. En [20] el autor explica la creación de ondas bajo dicho régimen, y establece que bajo ciertas condiciones, se genera una oscilación auto-sostenida que conduce a un estado de resonancia, el cual es diferente de la oscilación libre (i.e. oscilación del baño en ausencia de inyección). En particular, [20] describe el movimiento que describe el jet de burbujas, además de explicar por qué ciertos modos de oscilación son preferidos en el borde

libre. Esto tiene una aplicación directa en el problema de modelar la formación y evolución de ondas al interior del CT.

En [20] se estableció que para la existencia de una oscilación auto-sostenida tiene que satisfacerse una condición entre el tiempo que tardan las burbujas en llegar a la superficie, y el periodo de oscilación, así, el fenómeno de resonancia ocurre cuando $\tau = h/V_B = T/2$, donde τ es el tiempo de viaje de las burbujas, h es la profundidad de la tobera, V_B es la velocidad de ascensión de las burbujas y T es el período de la onda. Además se estableció que el área donde el jet emerge define cuáles modos de oscilación estarán presentes o ausentes y estableció que el jet excitará exclusivamente a aquellos modos de oscilación que tengan un nodo en la posición en la que emerge el jet donde el movimiento que describe la posición en la que emerge el jet es un movimiento oscilatorio acoplado a la onda de la superficie.

Estos fenómenos aparecen también en el fluido al interior del modelo a escala descrito en [19] y por ello se desean agregar a la modelación. Es decir, se desea modelar la interacción entre el jet de burbujas y el baño a través de los siguientes supuestos:

- El jet excita sólo algunos modos normales.
- La posición de salida del jet oscila acoplada a la onda.

5.1. Modelación de la salida del Chorro

Para distinguir la posición en la que emerge el jet del resto del borde libre, es necesario establecer alguna condición matemática sobre tal trozo de borde. Para ello se toma en cuenta la turbulencia que hay en el lugar donde emerge el chorro vista en [19]. Esta zona es descrita como altamente turbulenta y por ello se modelará como una zona de alta disipación.

Recordemos que la disipación está incluida en la ecuación que describe la oscilación libre, en (1.11):

$$\frac{1}{g}u_{tt} + \varepsilon\frac{\partial u_t}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma \quad (5.1)$$

donde ε representa la disipación de Kelvin-Voight (ver [3]). En el primer modelo (ver capítulo 1), ε era considerado una constante. Ya que ahora el área donde emerge el jet se considerará como un área de alta disipación, se traduce en que la constante ε dejará de serlo y su forma determinará la magnitud y las zonas de alta o baja disipación. Así que se considerará a $\varepsilon = \varepsilon(x, t)$ como una función que depende del tiempo y la posición.

Por simplicidad se considerará la función ε como una función escalón, tal como se muestra en la figura 5,1:

donde ε_{max} es el valor en la disipación en la región de salida del jet, mientras que ε_0 es un

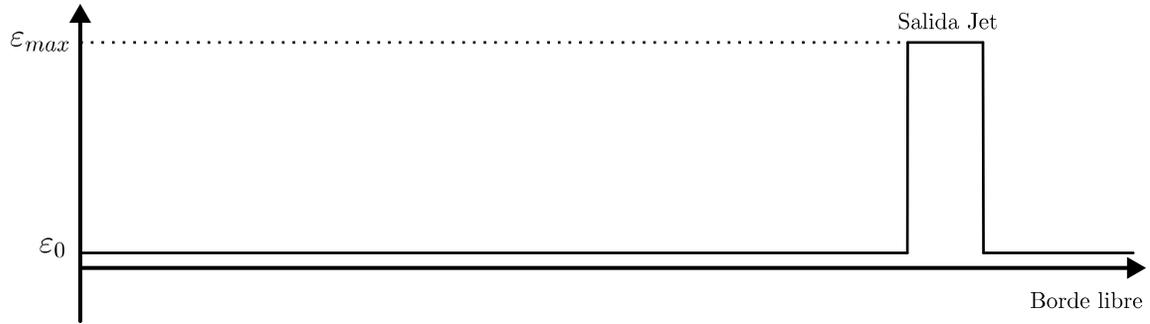


Figura 5.1: Función ε

valor constante y pequeño para el resto del borde libre. De esta forma, la posición del escalón representa la salida del chorro.

Una ventaja de este modelo es que a través de la forma de la función ε se puede modelar cualquier configuración de toberas y de jets emergiendo en la superficie. Más aún, es posible modelar aún mejor el chorro al introducir el movimiento oscilatorio visto por [19] y descrito por [20], el cual ocurre cuando el chorro se acopla a la onda superficial. Este hecho representa una ventaja con respecto al primer modelo, puesto que en este se consideraba un chorro estático.

Además, componiendo la función ε como dos escalones oscilatorios es posible generar la misma configuración de doble tobera utilizada en el modelo a escala, con una tobera adicional en el fondo del convertidor.

Como ya se mencionó anteriormente, en el modelo a escala descrito en [19] el segundo modo es el predominante al interior de la maqueta. Al momento de introducir movimiento a la salida del jet, este debe estar acoplado a la onda de la superficie y debe oscilar a la misma frecuencia. Debido a la predominancia del segundo modo, es que se usará su frecuencia para hacer oscilar la salida del jet. De esta forma se está considerando dentro de la modelación la interacción que hay entre el modo de mayor amplitud y la posición del chorro de burbujas.

Además, esta elección está en concordancia con el mecanismo propuesto en [20], en donde se estableció que los modos excitados son aquellos cuyos nodos están en la posición en la que emerge el jet, en concordancia con lo observado en el convertidor, donde la salida de la tobera lateral coincide con un nodo del segundo modo de oscilación.

5.2. Determinación de término forzante.

Sin bien ya se logró describir adecuadamente la interacción entre el chorro y la onda superficial, es necesario incluir un término que sea capaz de forzar el sistema a un estado de oscilación permanente como ocurre en la realidad. Como solo se ha introducido un fenómeno disipativo, debemos incluir en las ecuaciones un término que sea el encargado de forzar el sistema a la oscilación auto-generada y sostenida.

En vista que al interior del convertidor el modo al que es forzado el sistema a oscilar es el segundo modo, se forzarán nuestro sistema para que presente este mismo comportamiento. Para ello se modifica el lado derecho de la ecuación (1.10) de la forma:

$$\Delta\phi = \phi_2 e^{i\omega_2 t}, \quad \text{en } \Omega \times (0, \infty) \quad (5.2)$$

$$\frac{1}{g}\phi_{tt} + \varepsilon \frac{\partial\phi_t}{\partial n} + \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0, \quad \text{en } \Gamma \times (0, \infty) \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0, \quad \text{en } \Gamma_0 \quad (5.4)$$

$$\int_{\Gamma} \phi \, ds = 0. \quad (5.5)$$

Es decir, se está forzando el sistema para que aparezca una oscilación con la frecuencia del segundo modo (debido al término $e^{i\omega_2 t}$), y con la forma del segundo modo (debido al término ϕ_2).

5.3. Método de solución via MEF.

Para obtener la solución se plantea la formulación variacional del problema (5.2)-(5.5) y se discretiza por medio del Método de Elementos Finitos (FEM), llevando el problema a una EDO con respecto al tiempo, la cual se resuelve usando el solver ODE45 de MATLAB.

Se escoge la función ε con un ancho de escalón equivalente a un 10% del largo de la superficie libre (datos obtenidos de [8]), donde el escalón está centrado en torno a un punto $\bar{x}_c(t)$ el cual se hace oscilar periódicamente con la misma frecuencia que el segundo modo para producir un fenómeno de acoplamiento:

$$x_c(t) = \bar{x}_c + a \sin(\omega_2 t) \quad (5.6)$$

donde a es un parámetro que representa una amplitud pequeña. Así se puede definir la función epsilon como:

$$\varepsilon(x, t) = \begin{cases} 500\varepsilon_0 & \text{si } |x - \overbrace{(\bar{x}_c + a \sin(\omega_2 t))}^{x_c}| \leq \delta \\ \varepsilon_0 & \text{si } |x - x_c(t)| > \delta \end{cases} \quad (5.7)$$

donde δ es un parámetro que define el largo del escalón.

Capítulo 6

Control en lazo abierto del Convertidor Teniente

A continuación se describe una metodología de validación para el modelo matemático, para luego presentar una rutina de control pasiva, integrando una segunda tobera, que espera disminuir las oscilaciones de gran amplitud al interior del convertidor. En [19] los autores logran un control pasivo sobre el oleaje al añadir una segunda tobera al fondo del convertidor. El objetivo del segundo modelo es, por medio de la modelación de dos chorros de burbujas saliendo a la superficie, lograr controlar el oleaje al igual que en la maqueta.

6.1. Control usando cambios en la posición de la salida del jet

Para validar nuestro modelo esperamos poder reproducir comportamientos vistos en la maqueta presentada en [19], así como predichos en [20]. Para ello se muestra en las siguientes figuras, y las principales fases por las que pasa la maqueta.

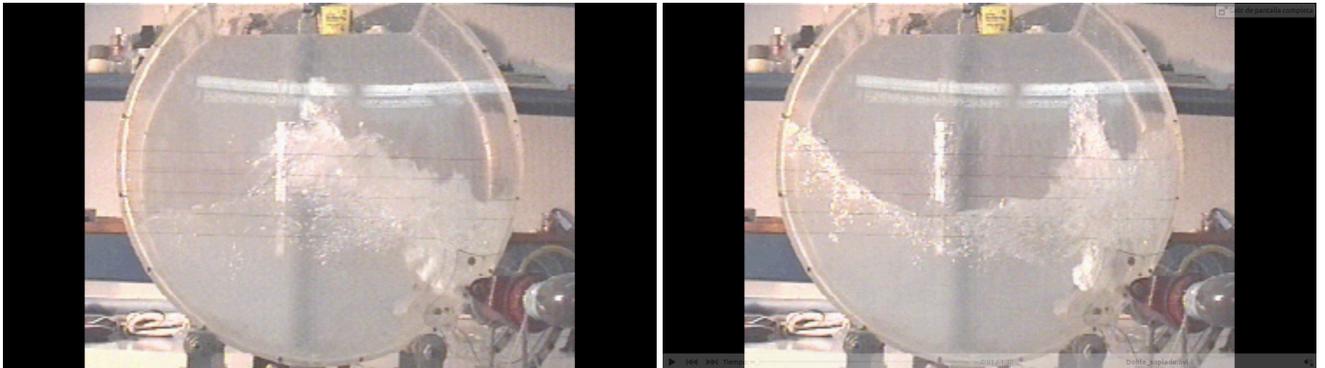


Figura 6.1: Segundo modo dominando cuando solo la tobera lateral está insuflando

En la figuras 6.1 se observa al segundo modo dominando la oscilación de la superficie,

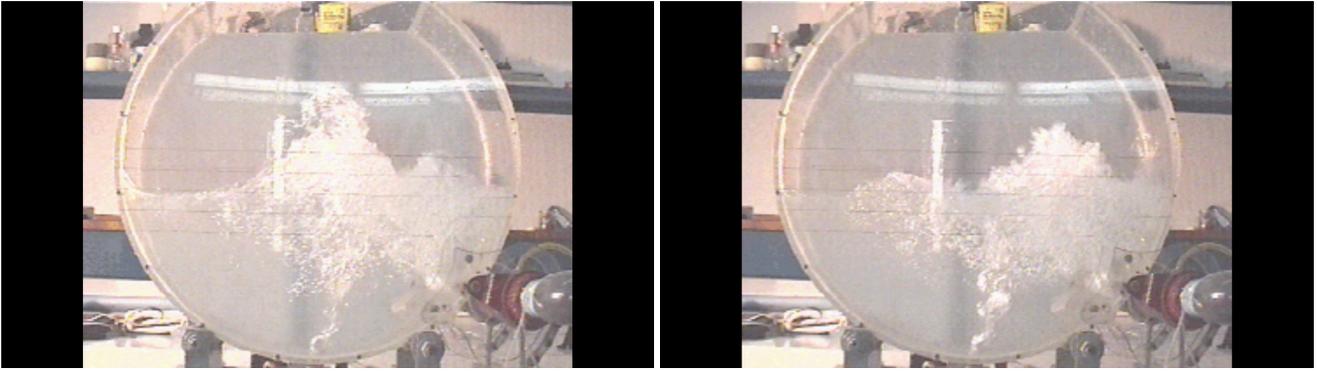


Figura 6.2: Ambas toberas funcionando, período de transición

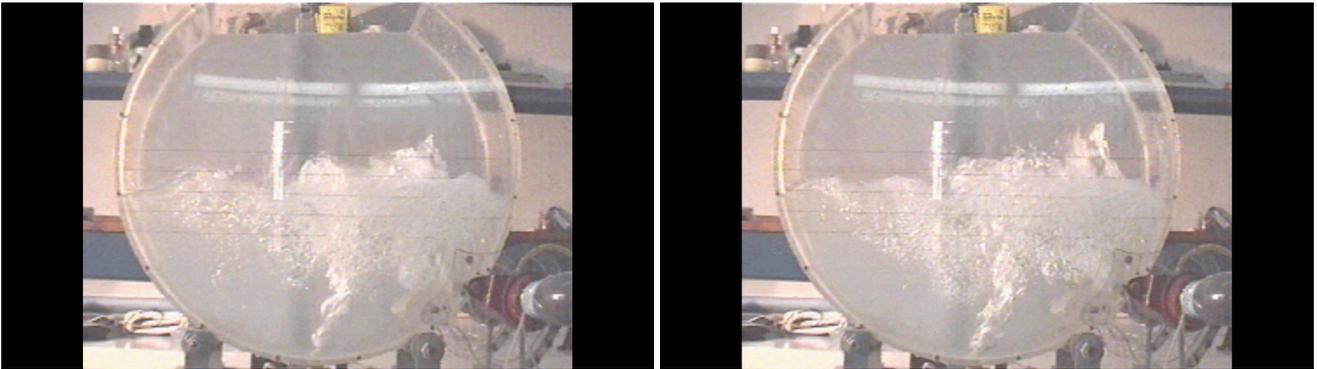


Figura 6.3: Ambas toberas funcionando, con fluido estabilizado

en las figuras 6.2 aparecen los momentos posteriores al funcionamiento de la segunda tobera ubicada al fondo, y en las figuras 6.3 se observa el oleaje estabilizado, con oscilaciones de menor amplitud. Es por ello que se espera de parte del modelo que:

1. El jet excite una onda si emerge en un nodo de la onda. Para ello se probarán dos configuraciones, poniendo la salida del jet en un nodo y en un anti-nodo y analizando la evolución en el tiempo,
2. el segundo modo de oscilación necesita aparecer y dominar la superficie tal como ocurre en la maqueta; para ello se consideran dos condiciones iniciales distintas sobre las cuales se deja evolucionar el sistema en el tiempo esperando la aparición del segundo modo.
3. La acción de una segunda tobera ubicada en el fondo sobre la superficie debe disipar los modos de oscilación de gran amplitud, estabilizando el oleaje.

6.2. Resultados y comparación para el caso sin control

Los resultados presentados a continuación representan una validación del modelo al imitar comportamientos vistos en el modelo a escala del convertidor.

En primer lugar se mostrará la aparición del segundo modo en la superficie libre cuando se

deja evolucionar el sistema a partir del equilibrio (condición inicial nula). En segundo lugar, se mostrará la evolución de la onda superficial para dos configuraciones de toberas:

- Una tobera **lateral**, cuyo chorro emerge coincidente con un nodo del segundo modo, y
- Una tobera **centrada**, ubicada al fondo del convertidor, cuyo chorro emerge coincidente con un anti-nodo del segundo modo.

Para cada realización se presentan gráficos del borde libre, además de presentar gráficos de la energía en el borde; la que se desea mantener mínima.

Los parámetros usados para la simulación fueron:

| Parámetro | valor |
|--|----------------|
| ε_0^1 | 0,0001 |
| ε_{max}^2 | 0,035 |
| δ (largo escalón) | 0.04 |
| a (amplitud oscilación ε) | 0.04 |
| Posición salida tobera lateral | $x = 0$ |
| Posición salida tobera del fondo | $x = 0,1843$ |
| Radio convertidor | 0,356 <i>m</i> |
| Parámetro llenado | 0,4171 |
| Radio convertidor | 0,356 <i>m</i> |
| ω_2 | 8.9 <i>hz</i> |

6.2.1. Generación del segundo modo

Se presentan los resultados de la generación del segundo modo en las figuras 6.4, 6.5, además de un gráfico de la energía de borde en la figura 6.6.

¹Corresponde a la disipación base, vista en la figura 5.1

²Corresponde a la disipación máxima, alcanzada en la posición de salida del chorro de burbujas, vista en la figura 5.1

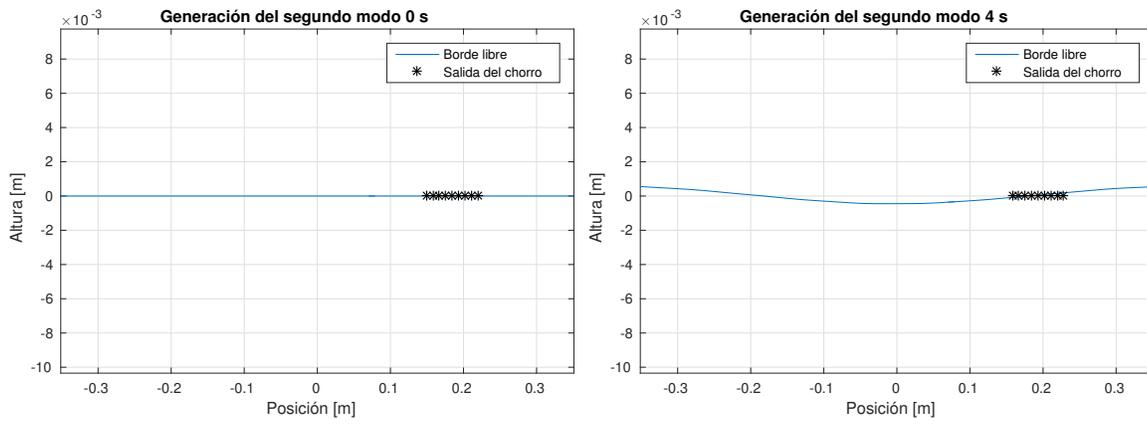


Figura 6.4: Evolución del oleaje en 0 y 4 seg

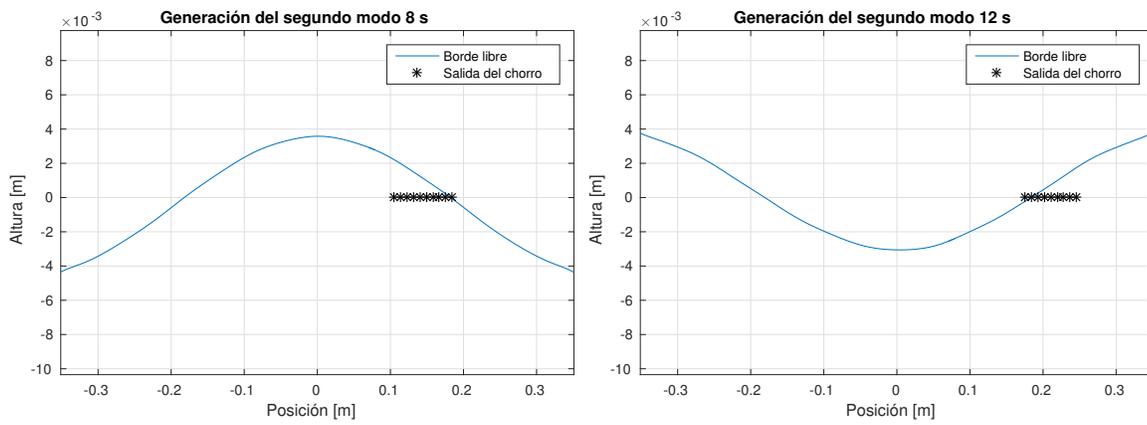


Figura 6.5: Evolución del oleaje en 8 y 12 seg

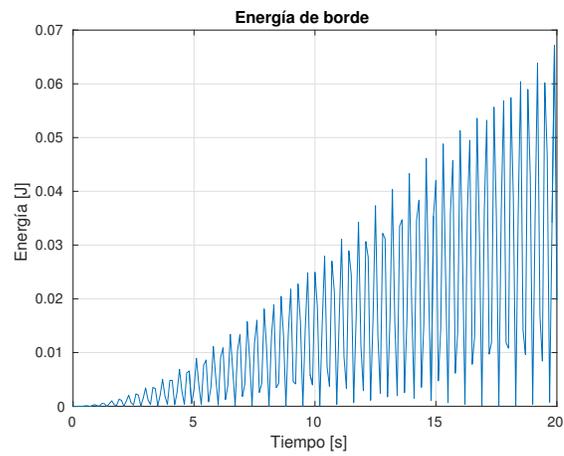


Figura 6.6: Energía de borde en los primeros 20 seg

6.2.2. Tobera Lateral

Se considera la evolución de la superficie libre para una configuración con una tobera lateral, con condición inicial igual al segundo modo. Para poder comparar, se presenta en conjunto a una referencia. La referencia es la solución a partir de la misma condición inicial pero sin considerar la acción del chorro sobre la superficie, es decir, la referencia se obtiene considerando la función ε constante. En las figuras 6.7, 6.8 se presentan resultados de la evolución del oleaje para distintos tiempos, además de un gráfico de energía de borde en la figura 6.9.

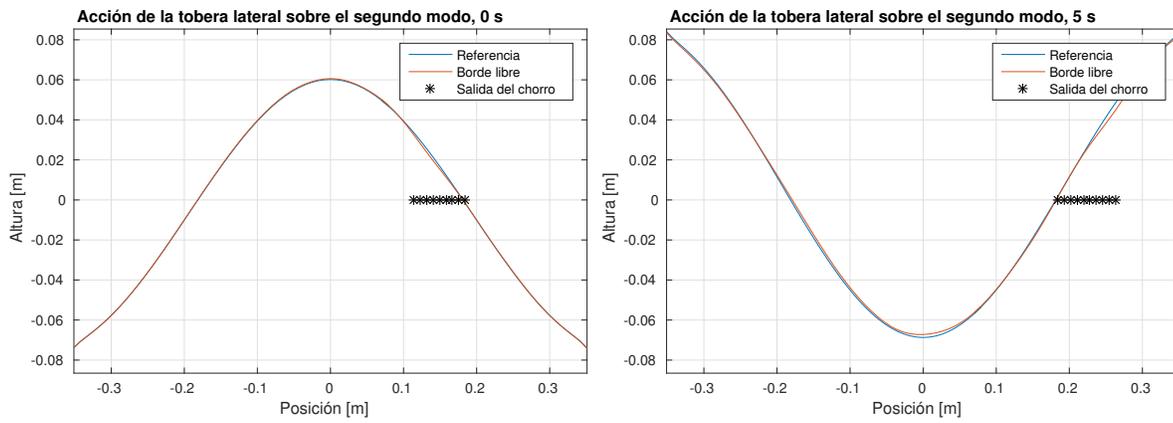


Figura 6.7: Evolución del oleaje en 0 y 5 seg

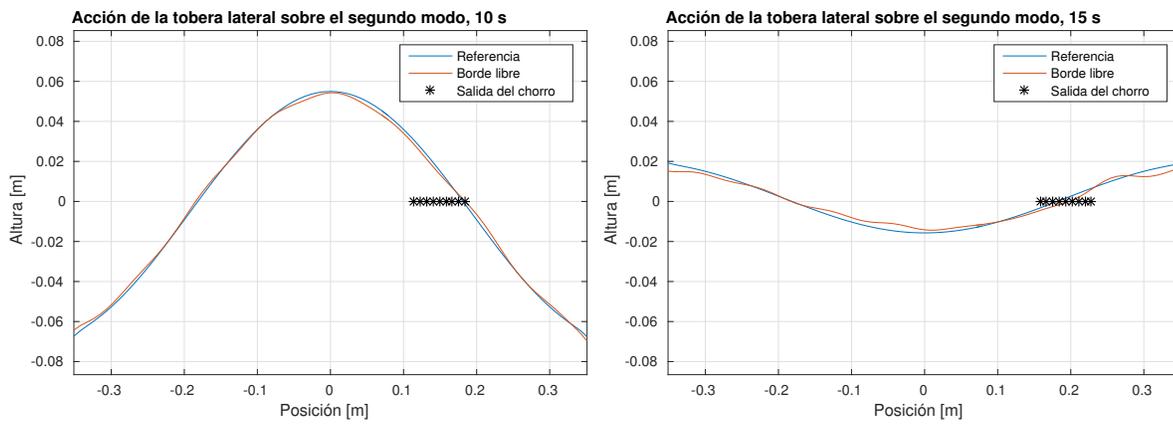


Figura 6.8: Evolución del oleaje en 10 y 15 seg

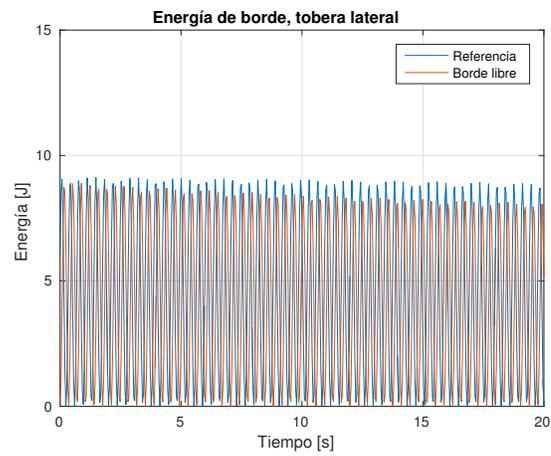


Figura 6.9: Energía de borde en los primeros 20 seg

6.2.3. Tobera Centrada

Se considera la evolución de la superficie libre para una configuración con una tobera centrada ubicada al fondo del convertidor, con condición inicial igual al segundo modo. Para poder comparar, se presenta en conjunto a una referencia; la referencia es una evolución a partir de la misma condición inicial pero sin considerar la acción del chorro sobre la superficie, es decir, la referencia se obtiene considerando la función ε constante. Se presentan resultados de la evolución del oleaje para distintos tiempos, en las figuras 6.10, 6.11, además de un gráfico de energía de borde en la figura 6.12.

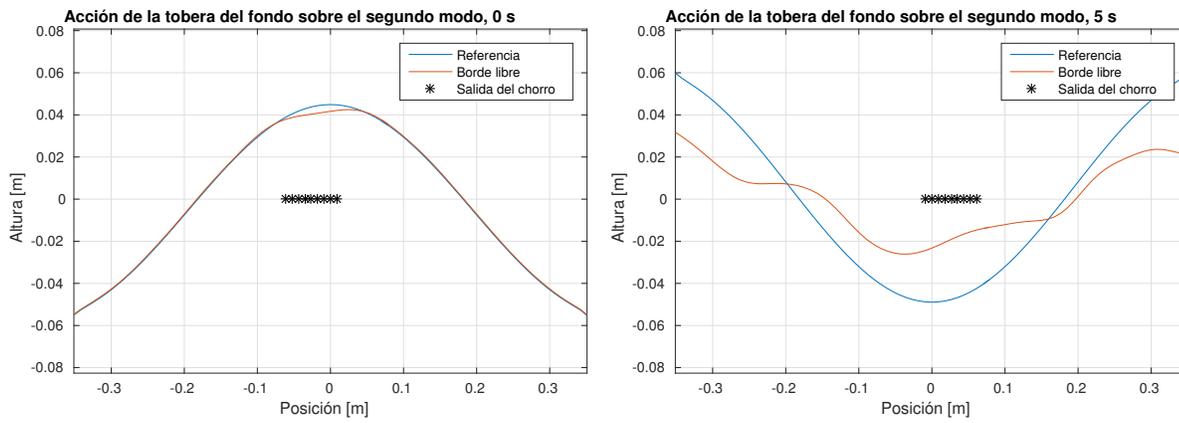


Figura 6.10: Evolución del oleaje en 0 y 5 seg

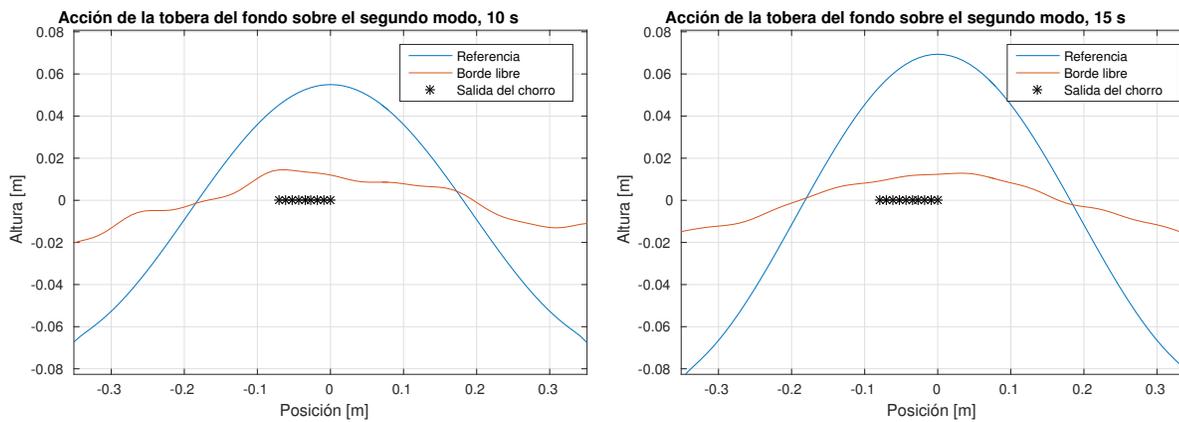


Figura 6.11: Evolución del oleaje en 10 y 15 seg

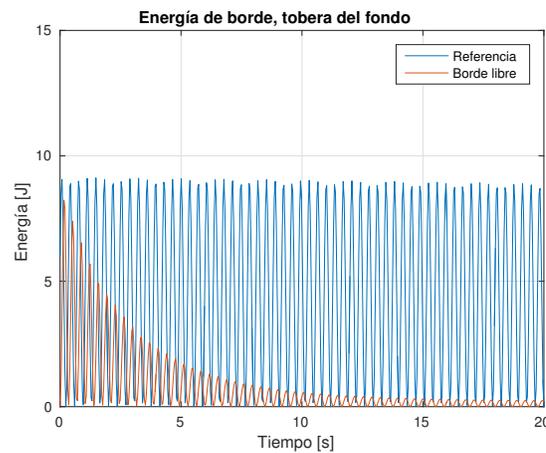


Figura 6.12: Energía de borde en los primeros 20 seg

6.2.4. Resultados de control pasivo

Finalmente se desea replicar los resultados experimentales para el control del convertidor. La rutina de control sobre la maqueta 1:5 (ver [19]) considera la evolución del baño debi-

do a la inyección de aire por la tobera lateral, con el segundo modo fácilmente reconocible como el modo predominante en la onda superficial. Una vez que el segundo modo domina la oscilación, se abre la segunda tobera ubicada al fondo del convertidor, permitiendo que las burbujas penetren el baño y disminuyan la amplitud de la oscilación, consiguiendo así la estabilización del oleaje en la superficie.

La simulación aquí generada considera una condición inicial agitada (una onda que contiene en igual medida los 4 primeros modos de oscilación) y dejándose evolucionar por 5 segundos, en los cuales comienza a funcionar la tobera lateral. Después de 20 segundos de evolución, la segunda tobera ubicada en el fondo comienza a funcionar y registrándose su evolución por 20 segundos más. Se presenta como resultados la evolución del oleaje en 35 segundos de simulación.

Tobera lateral funcionando

En esta sección se presentan los primeros 20 segundos de evolución. En $t=5$ seg la tobera lateral comienza a funcionar. Se presentan 5 instantes de evolución en las figuras 6.13, 6.14 y 6.15 además un gráfico de la energía de borde.

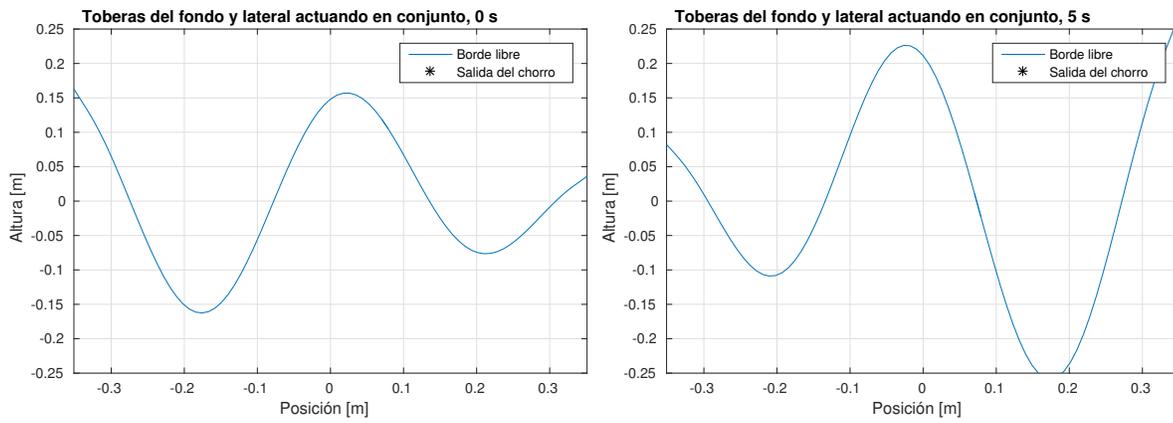


Figura 6.13: Evolución del oleaje en 0 y 5 seg

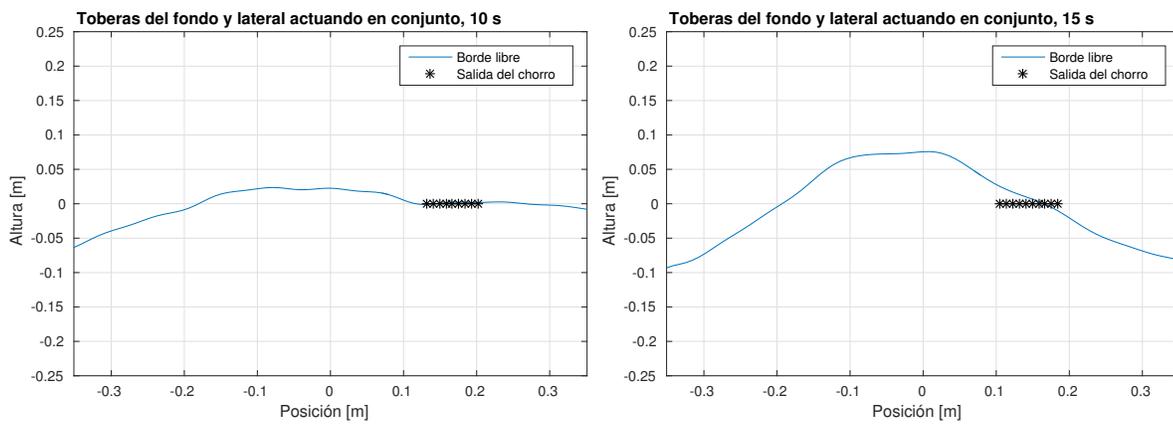


Figura 6.14: Evolución del oleaje en 10 y 15 seg

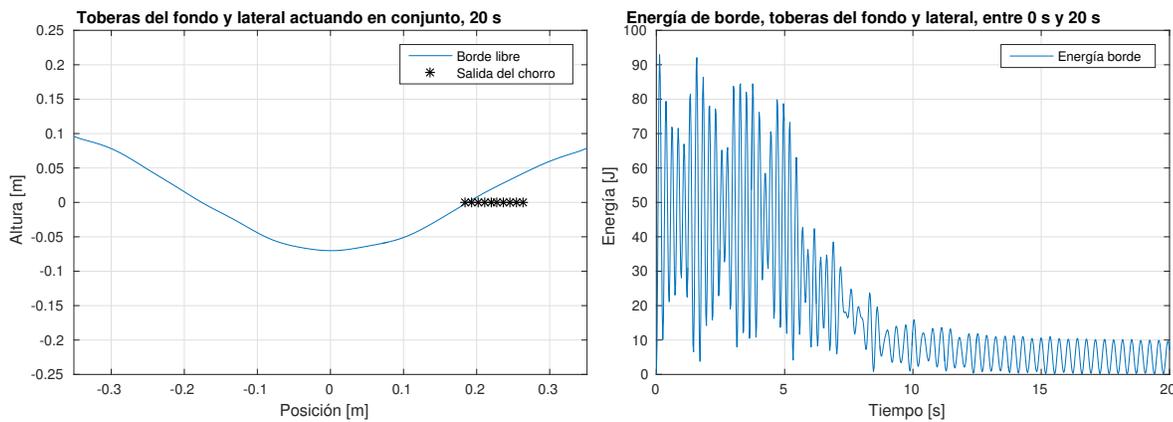


Figura 6.15: Evolución del oleaje en 20 seg, y energía de borde en los primeros 20 seg

Ambas toberas funcionando

Después de los 25 primeros segundos de evolución, la segunda tobera comienza a funcionar. Se presentan 5 instantes de evolución en las figuras 6.16, 6.17 y 6.18, además de presentar un gráfico de la energía de borde.

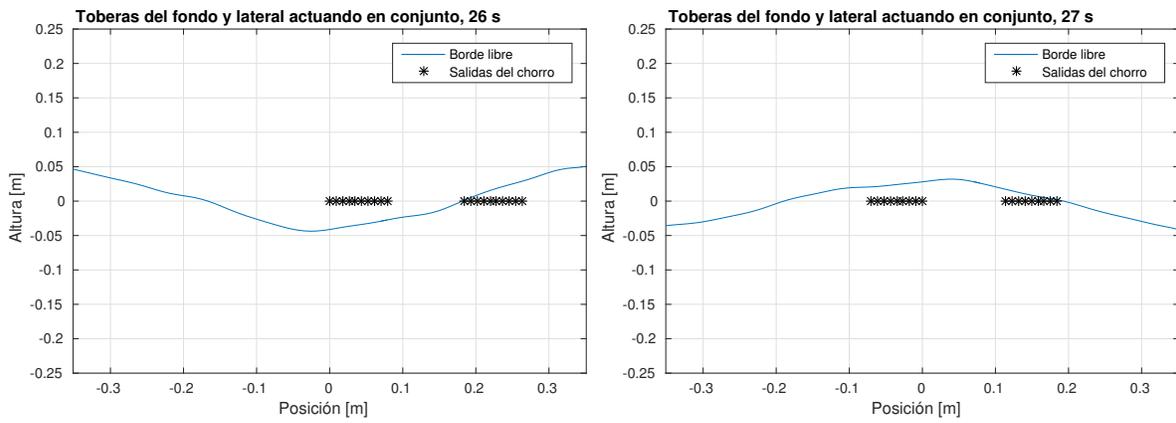


Figura 6.16: Evolución del oleaje en 1 y 2 seg después de que la segunda tobera se activa

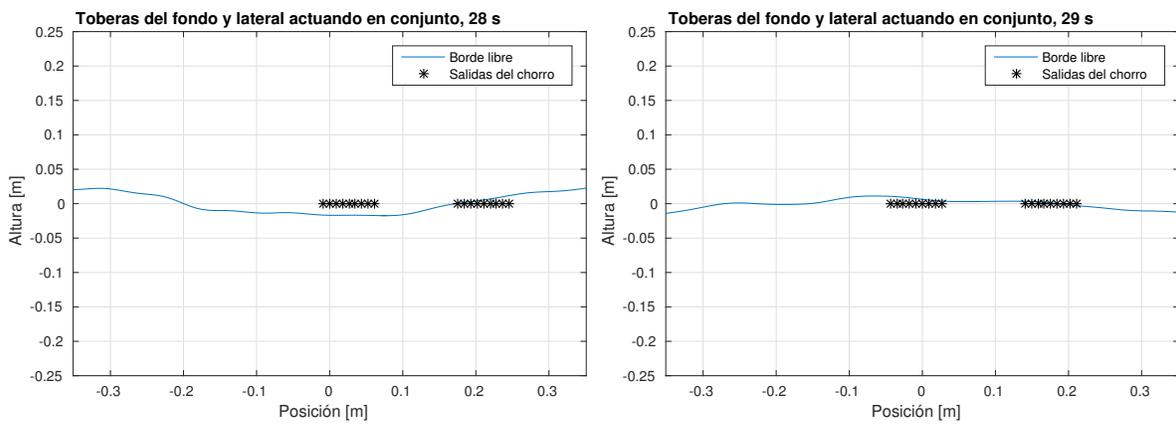


Figura 6.17: Evolución del oleaje en 3 y 4 seg después de que la segunda tobera se activa

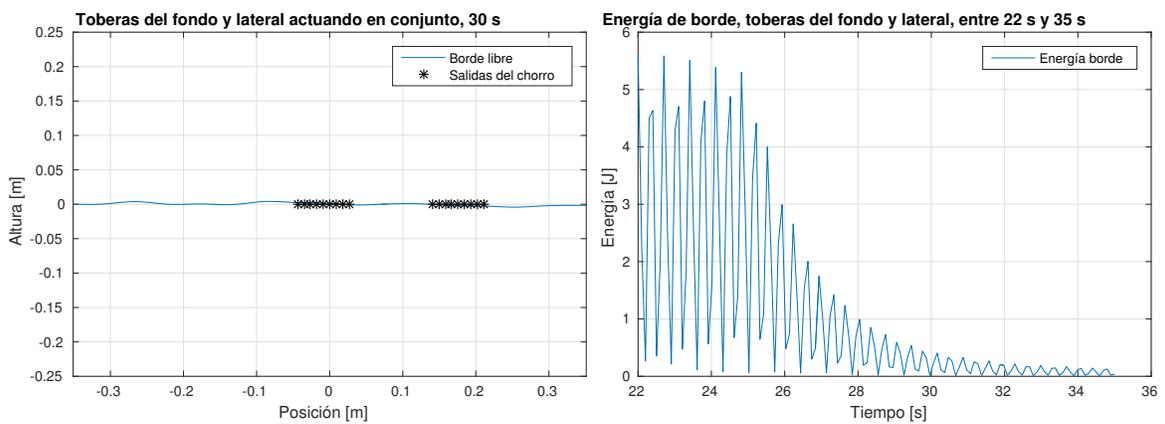


Figura 6.18: Evolución del oleaje después de 5 seg, energía de borde entre 22 seg y 35 seg

6.3. Discusión

Las simulaciones realizadas muestran que el forzamiento del segundo modo es efectivo. Tanto en (6.2.1) como en (6.2.4) es posible ver que el segundo modo termina dominando la

oscilación, tanto para una condición inicial nula como para una condición inicial agitada.

Cambiando la forma de la función ε es posible considerar distintas configuraciones de toberas que se manifiestan en distintas zonas donde emerge el jet. Para ello se realizaron dos simulaciones con el segundo modo como condición inicial, además de presentar una curva de referencia que representa la evolución del oleaje con disipación constante en la superficie del fluido. En la primera de ellas se considera una tobera lateral cuyo jet emerge coincidente con el nodo del segundo modo. Es posible observar en (6.2.2) que el jet no afecta notoriamente a la onda superficial, ya que no hay gran diferencia entre la referencia y la curva. Más aún, las gráficas de energía son coincidentes también. Por otro lado, al considerar una tobera en el fondo como en (6.2.3), para la misma condición inicial, es posible ver cómo rápidamente la onda es disipada, puesto de manifiesto también en su gráfica de energía.

Como fué predicho en [20], el jet excitará solo aquellas ondas con nodo coincidente con la salida del jet, mientras que disipará una onda si el jet coincide con el anti-nodo. Esto explica por qué el segundo modo es el predominante en la maqueta. Así, cambiando la posición de la salida del jet es posible excitar o disipar ciertos modos de oscilación.

Finalmente, en (6.2.4) se desea replicar el el comportamiento exhibido por la maqueta. Considerando la evolución del fluido con una condición inicial que contiene en igual medida los cuatro primeros modos, al momento de activar la tobera en $t=5$, es directo de las figuras que los modos presentes en la condición inicial son disipados, dejando sólo el segundo modo dominando la oscilación. Este fenómeno se justifica debido a que ninguno de los demás modos presentes en la onda tienen nodos cerca de la salida del jet y por tanto son eliminados. A los 25 segundos una segunda tobera empieza a funcionar y logra disipar satisfactoriamente el segundo modo y deja sólo oscilaciones de pequeña amplitud en la superficie, lo cual representa una buena aproximación a los resultados observados experimentalmente.

Conclusión

En el primer modelo de control del convertidor se halló un controlador robusto para el problema de la estabilización del oleaje al interior del baño. Para ello se utilizaron técnicas de Control \mathcal{H}_∞ la cual es una útil herramienta de diseño de controladores robustos. En particular se utilizó el esquema de sensibilidad mixto, el que permite incluir requerimientos sobre el controlador dentro de su diseño y es además un útil modelo para el problema del convertidor, ya que es posible añadir perturbaciones, ruido en las mediciones y requerimientos de control. Se propone un modelo de perturbaciones basado en cambios en las frecuencias de oscilación de los modos normales, el que permite modelar plantas *perturbadas*, que representan convertidores cuyos parámetros difieren de los de la planta nominal, lo que se modela como cambios en las frecuencias.

El control propuesto fue sometido a pruebas de robustez, demostrando buen desempeño en control para plantas con frecuencias alteradas en hasta un 30 %. Además, logró resultados similares al momento de controlar plantas perturbadas con mediciones ruidosas.

Al comparar el desempeño del controlador propuesto con controles clásicos como el LQG y PID, es claro que el desempeño del control robusto es mejor. Al comparar con el control LQG, nuestro control logra tiempos de convergencias similares al del LQG, pero este último pierde al no ser robusto y no lograr estabilizar plantas perturbadas ni ser capaz de filtrar el ruido presente en las señales de medición. Al comparar el Control Robusto con el control PID, ante plantas perturbadas tienen un comportamiento similar en robustez, pero el control PID no logra disipar el ruido presente en las mediciones, entregando señales de control altamente ruidosas. Para prevenir esto es posible filtrar la señal de las mediciones que retroalimenta el control PID fijando un filtro pasa bajo, con lo cual mejora bastante su desempeño, sin embargo, no logra el desempeño presente en el control robusto, ya que gracias al diseño de este último es capaz filtrar gran parte del rango de frecuencias de ruido en las mediciones, y el filtro del PID está fijo.

Por lo tanto, se ha visto que el Control Robusto propuesto en esta tesis logra muy buen rendimiento y además robustez ante cambios en los parámetros. Al comparar su desempeño con otros controladores también mostró el mejor comportamiento de todos. Un inconveniente de estilo de control sobre el oleaje, es la inexistencia de sensores que sean capaces de determinar el nivel del baño, debido a su alta temperatura. Para sortear este inconveniente es que se generó una segunda alternativa de control pasivo sobre el convertidor.

En términos generales se observa que el segundo modelo propuesto provee una buena caracterización para la interacción que hay entre el baño y el chorro de burbujas, en la que se han incluido los fenómenos de **disipación, excitación y movimiento del jet** que antes no habían sido considerados. Gracias a esto es que el modelo propuesto exhibe comportamientos predichos en [20] para la excitación de ondas superficiales en baños sometidos a inyección de gas, además de conseguir replicar a grandes rasgos los resultados experimentales obtenidos en [19].

En el modelo propuesto en esta tesis se considera la posición en la que emerge el jet como una zona altamente disipativa, debido a la turbulencia presente en esta parte del fluido. La excitación del modelo considera un forzamiento de parte del jet hacia el baño para la aparición del segundo modo como el predominante, mientras que el movimiento del jet se introduce al acoplar la salida del jet a las ondas superficiales, haciéndola oscilar armónicamente con la misma frecuencia que la superficie.

Consecuentemente, el segundo modelo desarrollado en esta tesis es un modelo más realista y efectivo de control sobre el oleaje al interior del convertidor por medio de una segunda tobera en el fondo.

6.4. Trabajo a Futuro.

A pesar de la efectividad del modelo propuesto en esta tesis, en la práctica se observa un fenómeno de acoplamiento que no está siendo descrito. Por una parte, la posición de salida del jet determina qué modos son excitados y qué modos son disipados por el chorro de burbujas. Al mismo tiempo, el movimiento del fluido al oscilar libremente afecta la posición del jet y cambia su posición de salida, determinando a su vez la frecuencia con la cual oscilará.

En el trabajo futuro se propone estudiar un modelo más general que incluya en su formulación este fenómeno de acoplamiento. Para ello consideremos la función auxiliar ε_0 dada por la figura 6.19, la cual es una campana centrada en 0, representando un término de disipación y representará una disipación.

Consideremos además que el centro de la posición de la salida del jet está dada por un punto x_0 . Definiendo el conjunto:

$$\mathcal{N}_k = \{x : x \text{ es un nodo de } \phi_k\}, \quad (6.1)$$

el modelo puede ser replanteado de la siguiente manera:

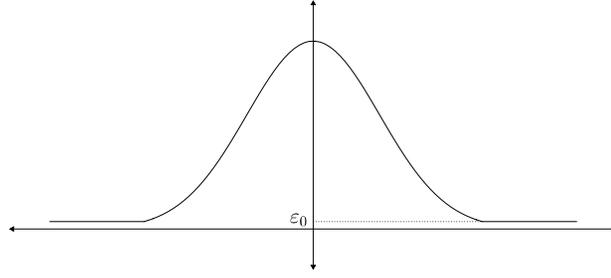


Figura 6.19: Función base

$$\Delta u = f_{x_0}(x, t), \quad \text{en } \Omega \times (0, \infty) \quad (6.2)$$

$$\frac{1}{g} u_{tt} + \varepsilon(x, x_0, t) \frac{\partial u_t}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \text{en } \Gamma \times (0, \infty) \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \text{en } \Gamma_0 \quad (6.4)$$

$$\int_{\Gamma} u \, ds = 0, \quad (6.5)$$

donde $f_{x_0}(x, t)$ es una función que fuerza el sistema para que aparezcan aquellos modos que tienen un nodo cercano a x_0 . Definiendo la forma general de esta función como:

$$f_{x_0}(x, t) = \sum_{k=1}^N A_{x_0}^k \phi_k e^{i\omega_k t} \quad (6.6)$$

donde $A_{x_0}^k$ es un ponderador para el modo k -ésimo, que aporta peso si algún punto de \mathcal{N}_k está suficientemente cerca de x_0 , se tiene que:

$$A_{x_0}^k = c_k \sum_{x_i \in \mathcal{N}_k} e^{-\delta(x_0 - x_i)^2}, \quad (6.7)$$

donde c_k y δ son parámetros que hay que ajustar.

Además se necesita describir la función ε que modela la disipación. Para ello se podría utilizar la función auxiliar ε_0 de la forma:

$$\varepsilon(x, x_0, t) = \varepsilon_0(x - x_0 - \tilde{x}) \quad (6.8)$$

donde $\tilde{x}(t)$ es una función periódica del tiempo que introduce movimiento oscilatorio en la salida del jet, que además debe cumplir con:

$$\tilde{x}'' + k\tilde{x} = f_{x_0}(x, t) \quad (6.9)$$

De esta forma es posible acoplar el sistema para que el forzamiento no esté definido a priori y sea determinado naturalmente por el punto x_0 , así como la frecuencia inducida sobre el

movimiento del jet.

Además, se desea investigar la futura implementación de controladores retroalimentados sobre el modelo mejorado, a diferencia del control pasivo (en lazo abierto) propuesto como primera aproximación en este trabajo.

Bibliografía

- [1] O. H Bosgra, H. Kwakernaak, and G. Meinsma. Design methods for control systems. *Notes for a Course of the Dutch Institute of Systems and Control, Winter term, 2002, 2001.*
- [2] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Springer Science & Business Media, 2010.
- [3] J. A Burns and B. King. A note on the mathematical modelling of damped second order systems. Technical report, DTIC Document, 1997.
- [4] H. Chapellat, MA. Dahleh, and SP. Bhattacharyya. Robust stability under structured and unstructured perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(10):1100–1108, 1990.
- [5] Iain G Currie. *Fundamental mechanics of fluids.* CRC Press, 2012.
- [6] J. Doyle et al. Lecture notes in advances in multivariable control. In *ONR/Honeywell workshop.* Minneapolis, USA, 1984.
- [7] J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, and B. Francis. State-space solutions to standard h₂ and h_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic control*, 34(8):831–847, 1989.
- [8] E. Godoy. Modelacion y control del oleaje producido en modelos del convertidor teniente. 2004.
- [9] E. Godoy, A. Osses, J. Ortega, and A. Valencia. Modeling and control of surface gravity waves in a model of a copper converter. *Applied Mathematical Modelling*, 32(9):1696–1710, 2008.
- [10] A. González. Riquezas minerales de chile a nivel mundial. *Santiago: Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas: Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas,*, 288, 2000.
- [11] Da-Wei Gu, Petko Petkov, and Mihail M Konstantinov. *Robust control design with MATLAB®.* Springer Science & Business Media, 2005.
- [12] H. Kwakernaak. Minimax frequency domain performance and robustness optimization

- of linear feedback systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(10):994–1004, 1985.
- [13] H. Kwakernaak. A polynomial approach to minimax frequency domain optimization of multivariable feedback systems. *International Journal of Control*, 44(1):117–156, 1986.
- [14] J Martín, M. Cruz, and P. Lara. Modelamiento de la inyección de burbujas en el convertidor teniente. Technical report, FONDEF DOOI-1068, 2003.
- [15] G Meinsma. *Frequency domain methods in H [infinite] control*. [SI]: Meinsma, 1993.
- [16] Katsuhiko Ogata. *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación, 2003.
- [17] C. Orellana. Estudio de la fluidodinamica y de modos de inyección en modelos 3d del convertidor de cobre tipo teniente. 2007.
- [18] M. Rosales, P. Ruz, R. Fuentes, A. Valencia, A. Moyano, and J. Bobadilla. Gravity waves in the teniente converter. *Pyrometallurgy of Copper*, 4:485–498, 2003.
- [19] M. Rosales, A. Valencia, and R. Fuentes. A methodology for controlling slopping in copper converters by using lateral and bottom gas injection. *International Journal of Chemical Reactor Engineering*, 7(1), 2009.
- [20] MP. Schwartz. Sloshing waves formed in gas-agitated baths. *Chemical Engineering Science*, 45(7):1765–1777, 1990.
- [21] Sigurd Skogestad and Ian Postlethwaite. *Multivariable feedback control: analysis and design*, volume 2. Wiley New York, 2007.
- [22] Emmanuel Trélat. *Contrôle optimal: théorie & applications*. Vuibert, 2008.