



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE MINAS

METODOLOGÍA MULTITETAPA PARA LA PLANIFICACIÓN DE LA
PRODUCCIÓN DE LARGO PLAZO EN MINAS A RAJO ABIERTO BAJO
INCERTIDUMBRE GEOLÓGICA

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN
INGENIERÍA DE MINAS

ENRIQUE BORIS JÉLVEZ MONTENEGRO

PROFESOR GUÍA:
JULIÁN ORTIZ CABRERA

PROFESOR CO-GUÍA:
NELSON MORALES VARELA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
EDUARDO MORENO ARAYA
RAFAEL EPSTEIN NUMHAUSER

SANTIAGO DE CHILE

2017

Resumen

Esta tesis aborda el problema de planificación de la producción de largo plazo en minas de cielo abierto, considerando incertidumbre geológica. La solución de este problema define cómo y cuándo se extraerán las reservas mineras, generando una promesa que compromete la producción en el tiempo. Debido a la envergadura del problema es usual dividir en tres etapas el proceso de planificación, generando tres problemas relacionados que son resueltos secuencialmente para obtener un plan de producción tentativo, a saber: (i) la determinación del pit final, que consiste en delimitar la subregión de la mina donde se realizará la extracción; (ii) la selección de pushbacks, que corresponden a una partición del pit final que permiten guiar la secuencia de extracción y controlar el diseño; y por último, (iii) el agendamiento temporal de la producción, que se encarga de definir dentro de cada pushback cuándo serán extraídas las distintas zonas y cuáles de ellas serán procesadas.

Si bien la incertidumbre geológica no es considerada en la metodología tradicional, la mayoría de los esfuerzos realizados para incorporarla sólo lo han hecho dentro de la etapa de agendamiento, definiéndolo dentro de un pit final determinista, en cuyo interior se dispone de un conjunto de escenarios que modelan la incertidumbre. Es más, estos resultados ni siquiera consideran la selección de pushbacks como una etapa dentro del proceso, pasando directamente de una definición determinista de pit final al agendamiento bajo incertidumbre, lo que puede generar resultados difíciles de operativizar. En este trabajo de tesis se propone y evalúa una metodología que incorpora la incertidumbre geológica en las tres etapas mencionadas. Para cada una de ellas, se proponen y evalúan modelos que consideran el riesgo asociado al desconocimiento que se tiene de la zona mineralizada.

Las principales contribuciones de esta investigación son: (i) desarrollo de un modelo multiobjetivo que permite generar la frontera eficiente de alternativas de pit final en el plano valor esperado-riesgo; (ii) definición de un nuevo modelo que automatiza la selección de pushbacks a partir de un conjunto de pits anidados y criterios bien definidos; e (iii) implementación de un modelo que maximiza el valor descontado y, a la vez, minimiza el costo total de la incertidumbre asociado a las desviaciones de los objetivos de producción, cuando se considera un conjunto de escenarios que caracterizan la incertidumbre de leyes.

Estos nuevos modelos consideran la evaluación del riesgo en todas las etapas, permitiendo generar planes de producción más robustos. En el caso de estudio presentado, los resultados muestran que se puede obtener un incremento de valor descontado en 2% y, más importante aún, que el costo total de la incertidumbre se reduce en un 68%, respecto a la metodología usual que no considera la incertidumbre. Por lo tanto, se pueden tomar mejores decisiones en la planificación de la producción de largo plazo de minas a cielo abierto.

Abstract

This thesis addresses the long-term open pit mine production planning problem under geological uncertainty. The solution for this problem defines how and when the mining reserves will be extracted, generating a promise that commits the mine production over time. Usually, due to the complexity of the problem, the planning process is divided into three stages, generating three related problems that are sequentially solved in order to obtain a tentative production plan, that is: (i) determination of the final pit, which consists of delimiting the subregion of the mine where the extraction will be carried out; (ii) pushbacks selection, that corresponds to a partition of the final pit that allows to guide the sequence of extraction and to control the design; and finally, (iii) temporary production scheduling, which defines in every pushback when the different zones will be extracted and which of them will be processed.

Although the geological uncertainty is not considered in the traditional methodology, most of the efforts to incorporate it have been made in the scheduling stage, considering a deterministic final pit as block model, which has a set of scenarios representing the uncertainty within. In fact, these results do not even consider the pushbacks selection as a stage of the process, passing directly from a deterministic definition of final pit to the scheduling under uncertainty, which can generate impractical results. This thesis proposes and evaluates a methodology that incorporates geological uncertainty in the three mentioned stages. For each of them, new models are both proposed and assessed considering risk associated to the ignorance of the mineralized zone.

The main contributions of this research are: (i) development of a multi-objective model that allows to generate the efficient frontier of final pit alternatives in the expected return-risk environment; (ii) definition of a new model that automates the pushbacks selection procedure from a set of nested pits and well-defined criteria; (iii) implementation of a model that maximizes the discounted expected value and simultaneously minimizes the uncertainty total cost associated with the deviations of the production objectives, when a set of scenarios is considered in order to characterize the grade uncertainty.

These new models consider the risk assessment in all stages in order to obtain more robust production plans. In the presented case of study, the results show that it is possible to obtain an discounted expected value increase of 2% and, more importantly, an uncertainty total cost decrease of 68% with respect to the usual methodology. Therefore, better decisions could be taken in the long-term open pit mine production planning.

Agradecimientos

Al terminar esta etapa quiero agradecer muy sinceramente a quienes, mediante su ayuda, consejos, incondicional apoyo y todo cuanto pudieron entregar de corazón, me permitieron crecer y terminar este camino.

A Dios por darme salud y la fuerza necesaria en momentos de dificultad.

Muy especialmente a mi compañera de toda la vida, quien me conoce, me comprende, me apoya y me ama sinceramente. Gracias mi Mary por acompañarme todos estos años, por creer en mí y hacerme feliz.

A mi familia, en especial a mi madre, hermanos y hermanas, por sus buenos deseos e infinita comprensión.

A mis profesores guías: Julián Ortiz, por haber aceptado guiar esta tesis desde un comienzo, y a Nelson Morales, por todo el apoyo incondicional, las oportunidades brindadas e incentivar me siempre a dar lo mejor. Gracias por creer en mí.

A los profesores miembros de la comisión, Eduardo Moreno y Rafael Epstein, por su tiempo y disposición.

A toda la familia Delphos por generar el mejor ambiente para desarrollar investigación y camaradería, cuyo trabajo en equipo ha sido fundamental en este trabajo de tesis. En especial agradezco a Pierre Nancel-Penard, Maximiliano Alarcón, Gonzalo Nelis, Diego Mancilla y Gerson Morales.

A todas las personas del Departamento de Ingeniería de Minas y del AMTC de la Universidad de Chile, tanto profesores, funcionarios y compañeros, en especial a Xavier Emery, Juanita Vergara (QEPD), Lilian Salinas, Manuel Reyes, Mena Valencia, Amin Hekmatnejad, Mohammad Maleki, Amir Adeli, Gonzalo Díaz, Alonso Vives y Eduardo Molina. Valió la pena el esfuerzo, en todos los frentes.

A Hooman Askari-Nasab, quien aceptó mi estadía por un semestre en el Mining Optimization Lab - University of Alberta, gracias a la beca Canada-Chile Leadership Exchange del Gobierno de Canadá. También a todos los integrantes de su laboratorio, quienes me acogieron amistosamente.

Por último, agradezco el financiamiento de CONICYT, Fondo Basal FB0809 del Advanced Mining Technology Center - Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas - Universidad de Chile; a Codelco Chile, quien presentó soporte a través de la Beca de Arancel que gestiona directamente el Departamento de Ingeniería de Minas - Universidad de Chile; y también el apoyo de la Fundación CSIRO Chile, Centro de Excelencia en Minería y Procesamiento de Minerales, y del proyecto CONICYT PIA Anillo ACT1407.

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
1.1. Planificación minera	1
1.2. Incertidumbre en planificación minera	2
1.3. Incertidumbre geológica	4
1.3.1. Generación de las simulaciones geoestadísticas	6
1.3.2. Evaluación de la incertidumbre en las simulaciones	9
1.3.3. Incorporación de la incertidumbre en planificación de la producción minera	9
1.4. Organización de la tesis	12
2. Problema de planificación de la producción de largo plazo en minas de rajo abierto	14
2.1. Antecedentes	14
2.1.1. Ángulo de talud y precedencias de extracción	15
2.1.2. Modelos de valorización de bloques	17
2.2. Problema de pit final	20
2.3. Problema de selección de fases	22
2.4. Problema de agendamiento	23
2.5. Comentarios al problema de planificación de la producción bajo incertidumbre geológica	26
3. Objetivos de la investigación	28
3.1. Objetivo general	28
3.2. Objetivos específicos	28
3.3. Alcances	28
4. Revisión bibliográfica	29

4.1.	Planificación de la producción de minas a rajo abierto: caso determinista	29
4.2.	Planificación de la producción de minas a rajo abierto bajo incertidumbre geológica	31
4.2.1.	Enfoque heurístico	33
4.2.2.	Enfoque metaheurístico	36
4.2.3.	Enfoque estocástico	38
5.	Metodología	46
5.1.	Etapa 1: definición de pit final basado en gestión del beneficio-riesgo	46
5.2.	Etapa 2: Selección automática de fases a partir de pits anidados estocásticos	50
5.2.1.	Introducción a la generación de pits anidados	50
5.2.2.	Formulación del problema de selección automática de fases	52
5.3.	Etapa 3: Agendamiento de la producción	57
5.3.1.	Notación	58
5.3.2.	Sobre el costo de la incertidumbre	59
5.3.3.	Modelos de agendamiento	61
5.3.4.	Estrategias de resolución de los modelos de agendamiento	67
6.	Caso de estudio sintético	70
6.1.	Antecedentes	70
6.1.1.	Modelo de bloques	70
6.1.2.	Modelo de valorización	73
6.1.3.	Parámetros para el control del talud	74
6.1.4.	Recurso computacional	74
6.2.	Etapa 1: Pit final	74
6.3.	Etapa 2: Selección automática de pushbacks	81
6.4.	Etapa 3: Agendamiento de la producción	88

6.4.1.	Modelo de agendamiento fase a fase: implementación y resultados	90
6.4.2.	Modelo de agendamiento equilibrado de fases: implementación y resultados	94
7.	Caso de estudio	98
7.1.	Antecedentes	98
7.1.1.	Sobre el modelo de bloques	98
7.1.2.	Modelo económico de bloques	101
7.1.3.	Parámetros para el control del talud	101
7.1.4.	Sobre el recurso computacional	101
7.2.	Etapa 1: Pit final	102
7.2.1.	Implementación y resultados	102
7.2.2.	Comparación de pit final con la metodología tradicional	107
7.3.	Etapa 2: Selección automática de pushbacks	110
7.3.1.	Implementación y resultados	110
7.3.2.	Comparación de selección automática de pushbacks con la metodología tradicional	117
7.4.	Etapa 3: Agendamiento de la producción	120
7.4.1.	Modelo de agendamiento equilibrado de fases: implementación y resultados	120
7.4.2.	Comparación del agendamiento estocástico con la metodología tradicional	126
8.	Conclusiones y trabajo futuro	132
8.1.	Discusión	132
8.2.	Conclusiones	134
8.2.1.	Etapa 1: Pit final	135
8.2.2.	Etapa 2: Selección de pushbacks	135
8.2.3.	Etapa 3: Agendamiento de bloques	136

8.3. Trabajo futuro	136
Bibliografía	138
9. Anexos	I
9.1. Anexo A: Fundamentos de Programación Lineal	I
9.1.1. Conceptos y Formulaciones	I
9.1.2. Relajación en Programación Lineal Entera	III
9.1.3. Métodos en Programación Entera: <i>Branch & Bound</i>	VI
9.2. Anexo B1: Resultados fronteras eficientes variando el nivel de confianza	XVI
9.3. Anexo B2: Geometrías de pit final para BM-Pórfido	XVIII
9.4. Anexo C: Formulación alternativa al problema de selección de pushbacks.	XXII

Índice de figuras

1.	Mapas obtenidos por kriging (arriba izquierda) y por simulación gaussiana secuencial (tres modelos restantes). Fuente: Ortiz (2006).	5
2.	Diferencias entre metodología tradicional (izquierda) y agendamiento directo de bloques (derecha). Fuente: Jélvez et al. (2013).	15
3.	Moldes de precedencia para extracción desde la superficie: en (a) para extraer el bloque 6 primero se deben haber extraído los 5 bloques superiores; otra alternativa es la mostrada en (b), donde para extraer el bloque 10, primero se deben extraer los 9 bloques superiores. Fuente: Newman et al. (2010).	16
4.	Aproximación de la geometría de extracción basado en distintos criterios para definir el molde de extracción. Por ejemplo, a 45° y considerando distintos niveles de precedencias: dos, siete y veintinueve niveles sobre el bloque ubicado en el vértice y al cual se quiere ganar acceso. Puede verse cómo el número de niveles afecta la forma del pit. Fuente: Espinoza et al. (2013a).	17
5.	Función de valor por tonelada para cada bloque en el modelo económico en función de su ley. En este modelo económico se define una ley de corte crítica (LCC) dada por (4), la cual debe ser suficiente para pagar tanto los costos de extracción como los de procesamiento.	19
6.	Función de valor por tonelada para cada bloque en el modelo económico en función de su ley. En este modelo económico se define una ley de corte marginal (LCM) dada por (7), la cual es suficiente para pagar los costos de extracción.	20
7.	Determinación del pit final considerando distintos escenarios de leyes. Fuente: Deutsch et al. (2015).	21
8.	Planes de producción al considerar la incertidumbre de leyes.	25
9.	Proceso de planificación de la producción de largo plazo en minas a rajo abierto. En (a) se define el pit final y se calculan pits anidados intermedios, luego (b) se definen pushbacks basado en el conjunto de pits anidados, (c) a diferentes cotas se definen los bancos, dando paso a nuevas unidades <i>fases-banco</i> , y (d) las <i>fases-banco</i> se utilizan para realizar el agendamiento temporal. Fuente: Chicoisne et al. (2012).	26
10.	Método de Dowd para la evaluación del riesgo en la planificación de la producción en minas de rajo abierto.	34

11.	Frontera eficiente en el plano valor-riesgo. Cada punto en la frontera representa una alternativa de pit final.	48
12.	Soluciones factibles (A) pueden ser mejoradas conociendo la frontera eficiente, ya sea aumentando el valor y manteniendo el riesgo constante (B), o bien, disminuyendo el riesgo y manteniendo el valor esperado (C).	49
13.	A partir de un conjunto de pits anidados (izquierda), y mediante el uso del modelo que automatiza la selección de fases, se obtiene la solución (derecha) del problema, donde algunos de los pits son elegidos como fases.	56
14.	(a) Conjunto de fases-banco para ser agendados. (b) Estrategia fase a fase. (c) Estrategia equilibrada de fases. Los números indican el orden en que deben ser extraídas las fases-banco.	63
15.	Un ejemplo gráfico de la heurística por ventanas $HV(T', \Delta)$ con $T' = 1$ y $\Delta = 1$. Las capacidades por cada periodo t se muestran como C_t^+	68
16.	Un ejemplo conceptual donde se muestra que la heurística por ventanas no necesariamente produce una solución óptima.	69
17.	Vista en sección de la ley de cobre en el modelo de bloques 2D: simulación 1. . . .	71
18.	Vista en sección de la ley de cobre en el modelo de bloques 2D: simulación 2. . . .	71
19.	Vista en sección de la ley de cobre en el modelo de bloques 2D: simulación 3. . . .	71
20.	Vista en sección de la ley de cobre en el modelo de bloques 2D: ley promedio entre las simulaciones.	72
21.	Histograma de leyes de cobre en modelo de bloques 2D BM-Estra.	73
22.	Frontera eficiente entre valor esperado y riesgo (CVaR) para la decisión de pit final, con un nivel de confianza de 90%.	76
23.	Vistas en sección de las alternativas de pit final del modelo 2D BM-Estra para diferentes valores del parámetro $\mu = 0.01, 0.1, 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2$, y un nivel de confianza del 95%.	79
24.	Vistas en sección de las alternativas de pit final del modelo 2D BM-Estra para diferentes valores del parámetro $\mu = 4, 6, 8, 10, 20, 40, 60, 80$, y un nivel de confianza del 95%.	80
25.	Vista en sección del pit final elegido.	81

26.	Vistas en sección del conjunto de pits anidados dentro del pit final.	82
27.	Gráfico <i>pit by pit</i> : se muestran las variaciones en los tonelajes y valor, producto de los distintos escenarios para cada pit anidado en BM-Estra.	82
28.	Resultados de la selección automática de fases. Se muestran los resultados de las primeras 3 instancias, donde se obtuvieron 4 fases en cada una.	85
29.	Resultados de la selección automática de fases. Se muestran los resultados de las instancias 4, 5 y 6, donde se obtuvieron 3 fases en cada una.	86
30.	Resultados de la selección automática de fases. Se muestran los resultados de las instancias 7, 8 y 9, donde se obtuvieron 3 fases en cada una. Para el caso de la instancia 10 el problema es infactible.	87
31.	Resultados de la selección automática de fases. Se muestran los resultados de las instancias 11 y 12, donde se obtuvieron 2 fases en cada una. Se recuerda que para el caso de la instancia 10, el problema es infactible.	88
32.	Geometría de extracción obtenida con MIP para BM-Estra, siguiendo la estrategia de agendamiento fase a fase: la extracción se debe realizar siguiendo un orden estricto entre fases.	91
33.	Plan de producción obtenido del agendamiento de bloques, obtenida con MIP y utilizando una estrategia fase a fase. Se muestran los tonelajes de mineral (con sus bandas de incertidumbre a lo largo de todos los escenarios), el respectivo tonelaje de estéril y la ley de cabeza, con los percentiles 10 y 90, para cada periodo.	91
34.	Valor descontado acumulado obtenido del agendamiento de bloques, obtenida con MIP y utilizando una estrategia fase a fase. Se muestra el valor esperado, con sus respectivos percentiles 10 y 90, para cada periodo.	93
35.	Geometría de extracción para BM-Estra, obtenida con MIP y siguiendo la estrategia de agendamiento equilibrado de fases: no se permite una diferencia mayor a 10 bancos entre fases consecutivas, lo que obliga ir extrayendo simultáneamente más de una fase.	94
36.	Plan de producción obtenido del agendamiento de bloques obtenido con MIP y utilizando una estrategia equilibrada de fases. Se muestran los tonelajes de mineral (con sus bandas de incertidumbre a lo largo de todos los escenarios), el respectivo tonelaje de estéril y la ley de cabeza, con los percentiles 10 y 90 para cada periodo.	95

37.	Valor descontado acumulado del agendamiento de bloques obtenido con MIP y utilizando una estrategia equilibrada de fases. Se muestra el valor esperado, con sus respectivos percentiles 10 y 90 para cada periodo.	96
38.	Vista en cota Z=2015 de la ley de cobre en el modelo BM-Pórfido: simulación 1. .	99
39.	Vista en cota Z=2015 de la ley de cobre en el modelo BM-Pórfido: simulación 2. .	99
40.	Vista en cota Z=2015 de la ley de cobre en el modelo BM-Pórfido: simulación 3. .	99
41.	Vista en cota Z=2015 de la ley de cobre en el modelo BM-Pórfido: ley promedio entre las simulaciones, define modelo e-type.	100
42.	Histograma de leyes de cobre en el modelo de bloques BM-Pórfido	100
43.	Curvas de tonelaje ley en el modelo de bloques BM-Pórfido. Se muestran las curvas esperadas a lo largo de todos los escenarios, con sus respectivos percentiles P5 y P95, además de las curvas para el caso determinista, cuando el modelo e-type es considerado.	101
44.	Frontera eficiente entre valor esperado y riesgo (CVaR) para la decisión de pit final, con un nivel de confianza de 95 %.	104
45.	Gráfico de tonelajes mineral y estéril para cada alternativa de pit final estocástico en la frontera eficiente para BM-Pórfido y un nivel de confianza de un 95 %. . . .	105
46.	Vistas en planta y corte en sección norte de la alternativa de pit final del modelo BM-Pórfido de parámetro $\mu = 1$ para un nivel de confianza del 95 %.	107
47.	Comparación de pit final determinista (metodología tradicional) en términos de su posición relativa a la frontera eficiente. También se muestran, a modo de referencia, los resultados de pit final de cada escenario.	108
48.	Vistas en planta y sección norte de las alternativas de pit final estocástica y determinista del modelo BM-Pórfido.	109
49.	Vistas en planta y sección norte del conjunto de pits anidados del modelo BM-Pórfido dentro del pit final seleccionado en la etapa anterior.	111
50.	Gráfico <i>pit by pit</i> : muestra tonelajes y valor esperado, para cada pit anidado, producto de los distintos escenarios. Bandas de error P5 y P95 para tonelaje de mineral y valor.	111
51.	Tonelajes de mineral y estéril, además de ley media en una selección de 2 pushbacks.	113

52.	Tonelajes de mineral y estéril, además de ley media en una selección de 3 pushbacks.	114
53.	Tonelajes de mineral y estéril, además de ley media en una selección de 4 pushbacks.	114
54.	Tonelajes de mineral y estéril, además de ley media en una selección de 5 pushbacks.	114
55.	Tonelajes de mineral y estéril, además de ley media en una selección de 6 pushbacks.	115
56.	Vistas en planta y sección norte de la selección de 2 pushbacks del modelo BM-Pórfido dentro del pit final.	115
57.	Vistas en planta y sección norte de la selección de 3 pushbacks del modelo BM-Pórfido dentro del pit final.	116
58.	Vistas en planta y sección norte de la selección de 4 pushbacks del modelo BM-Pórfido dentro del pit final.	116
59.	Vistas en planta y sección norte de la selección de 5 pushbacks del modelo BM-Pórfido dentro del pit final.	116
60.	Vistas en planta y sección norte de la selección de 6 pushbacks del modelo BM-Pórfido dentro del pit final.	117
61.	Comparación de leyes medias y tonelajes de mineral y estéril dentro de cada pushback.	119
62.	Vistas en planta y sección norte de las alternativas de selección de pushbacks estocástica y determinista del modelo BM-Pórfido.	119
63.	Geometría de extracción para BM-Pórfido, obtenida con HV(3,3) y siguiendo la estrategia de agendamiento equilibrado de fases: no se permite una diferencia mayor a 8 bancos entre fases consecutivas, lo que obliga ir extrayendo simultáneamente más de una fase.	122
64.	Plan de producción obtenido con HV(3,3) y utilizando una estrategia equilibrada de fases. Se muestran los tonelajes de mineral, estéril y la ley de cabeza, con los percentiles 5 y 95, para cada periodo.	122
65.	Desviaciones promedio en el tonelaje subproducido de metal, además de sobre/subproducción de mineral enviado a planta para cada periodo en el agendamiento.	123
66.	Flujo esperado descontado acumulado obtenido del agendamiento de bloques mediante HV(3,3) y utilizando una estrategia equilibrada de fases en BM-Pórfido.	125

67.	Comparación de los planes de producción estocástico y determinista, obtenidos del agendamiento de bloques mediante HV(3,3) y utilizando una estrategia equilibrada de fases en BM-Pórfido.	127
68.	Vistas en planta y sección norte de las alternativas de agendamiento estocástica y determinista del modelo BM-Pórfido.	131
69.	Comenzando desde el nodo S^0 , que representa al problema original, se hacen divisiones de la región factible, obteniendo subproblemas S^1 y S^2 . A su vez, cada uno de éstos se separan en subproblemas, dividiendo sus respectivas regiones factibles y obteniendo los subproblemas S^{11}, S^{12} y S^{21}, S^{22} respectivamente.	VII
70.	Esquema del árbol de enumeración para el problema lineal entero binario en el caso bivariado.	VII
71.	Árbol de enumeración para el Ejemplo 9.2.	IX
72.	División de nodo por dicotomía de la variable.	XI
73.	División de nodo por dicotomía (CSG).	XI
74.	División de nodo por enumeración completa de la variable.	XII
75.	Representación de la regla de <i>búsqueda en profundidad con opción de retroceso</i>	XIV
76.	Frontera eficiente entre valor esperado y riesgo (CVaR) para la decisión de pit final, con distintos niveles de confianza.	XVII
77.	Vistas en planta y sección norte de las alternativas de pit final del modelo BM-Pórfido para diferentes valores del parámetro $\mu = 0.001, 0.01, 0.1$ y 1 , para un nivel de confianza del 95%.	XIX
78.	Vistas en planta y sección norte de las alternativas de pit final del modelo BM-Pórfido para diferentes valores del parámetro $\mu = 2, 3, 4$ y 5 , para un nivel de confianza del 95%.	XX
79.	Vistas en planta y sección norte de las alternativas de pit final del modelo BM-Pórfido para diferentes valores del parámetro $\mu = 6, 7, 8$ y 9 , para un nivel de confianza del 95%.	XXI
80.	Vistas en planta y sección norte de las alternativas de pit final del modelo BM-Pórfido para $\mu = 10$, con un nivel de confianza del 95%.	XXII

81. Resultados de la selección automática para la instancia 1. En (a) se muestran los tonelajes promedio de mineral y estéril en cada pushback, junto con sus respectivos rangos de variabilidad. En (b) se muestra la forma de los 2 pushbacks. XXV
82. Resultados de la selección automática para la instancia 2. En (a) se muestran los tonelajes promedio de mineral y estéril en cada pushback, junto con sus respectivos rangos de variabilidad. En (b) se muestra la forma de los 3 pushbacks. XXV
83. Resultados de la selección automática para la instancia 3. En (a) se muestran los tonelajes promedio de mineral y estéril en cada pushback, junto con sus respectivos rangos de variabilidad. En (b) se muestra la forma de los 4 pushbacks. XXVI
84. Resultados de la selección automática para la instancia 4. En (a) se muestran los tonelajes promedio de mineral y estéril en cada pushback, junto con sus respectivos rangos de variabilidad. En (b) se muestra la forma de los 5 pushbacks. XXVI
85. Resultados de la selección automática para la instancia 5. En (a) se muestran los tonelajes promedio de mineral y estéril en cada pushback, junto con sus respectivos rangos de variabilidad. En (b) se muestra la forma de los 6 pushbacks. XXVII

Índice de tablas

1.	Fuentes de incertidumbre interna y algunos ejemplos de cada una. Fuente: Guzmán (2011).	3
2.	Fuentes de incertidumbre externa y algunos ejemplos de cada una. Fuente: Guzmán (2011).	3
3.	Resumen de los principales enfoques para el problema de agendamiento bajo incertidumbre (1/4).	42
4.	Resumen de los principales enfoques para el problema de agendamiento bajo incertidumbre (2/4).	43
5.	Resumen de los principales enfoques para el problema de agendamiento bajo incertidumbre (3/4).	44
6.	Resumen de los principales enfoques para el problema de agendamiento bajo incertidumbre (4/4).	45
7.	Tabla de frecuencias de leyes del modelo de bloques 2D BM-Estra.	72
8.	Parámetros que definen el modelo económico de bloques para el caso de estudio.	73
9.	Resultados numéricos de la frontera eficiente obtenida con un nivel de confianza de 90%.	77
10.	Para cada valor del ponderador μ , se muestra cómo se distribuye el CVaR entre los distintos escenarios.	78
11.	Parámetros técnico-económicos que definen la generación de pits anidados en BM-Estra.	82
12.	Conjunto de instancias del problema de selección automática de fases para BM-Estra. Se evalúan distintos escenarios de tonelajes mínimos y máximos.	83
13.	Parámetros adicionales que definen la instancia de agendamiento para BM-Estra.	89
14.	Desviaciones en el tonelaje de metal subproducido, para cada periodo y escenario (simulación) en el agendamiento, obtenida con MIP y usando la estrategia fase a fase.	92
15.	Comparación de los distintos métodos de resolución del agendamiento fase a fase.	93

16.	Desviaciones en el tonelaje de metal subproducido, para cada periodo y escenario (simulación) en el agendamiento, obtenida con MIP y usando la estrategia equilibrada de fases.	95
17.	Comparación de los distintos métodos de resolución del agendamiento equilibrado de fases.	97
18.	Resultados numéricos de la frontera eficiente para las alternativas de pit final estocástico, obtenida con un nivel de confianza del 95%.	103
19.	Para cada valor del ponderador μ , se muestra cómo los distintos escenarios contribuyen al CVaR.	106
20.	Resultados numéricos de las alternativas estocástica y determinista de pit final. . .	108
21.	Comparación de los tonelajes esperados de mineral, estéril y total para las alternativas de pit final estocástica y determinista.	109
22.	Parámetros técnico-económicos que definen la generación de pits anidados en BM-Pórfido.	111
23.	Número de fases requerido en cada instancia del problema de selección automática de fases para BM-Pórfido.	112
24.	Relación estéril mineral para cada instancia de la selección automática de pushbacks.	113
25.	Parámetros adicionales que definen la instancia de agendamiento para BM-Pórfido.	121
26.	Comparación de los tonelajes de mineral esperado, estéril y total para una ley de corte fija y una ley de corte dinámica.	123
27.	Costo total esperado descontado asociado a las desviaciones en el tonelaje subproducido de metal y de sobre/subproducción de mineral enviado a planta, para cada periodo en el agendamiento obtenido con HV(3,3) y usando la estrategia equilibrada de fases en BM-Pórfido.	124
28.	Principales indicadores económicos del agendamiento equilibrado de fases y su tiempo de cómputo.	125
29.	Comparación de las desviaciones promedio en el tonelaje subproducido de metal, además de sobre y subproducción de mineral enviado a planta, para cada periodo en el agendamiento, obtenido con los enfoques estocástico y determinista, resolviendo los respectivos modelos con HV(3,3) y usando la estrategia equilibrada de fases en BM-Pórfido.	128

30. Comparación de los costos de la incertidumbre asociados a las desviaciones promedio en el tonelaje subproducido de metal, además de sobre y subproducción de mineral enviado a planta, para cada periodo en el agendamiento, obtenido con los enfoques estocástico y determinista, resolviendo los respectivos modelos con HV(3,3) y usando la estrategia equilibrada de fases en BM-Pórfido.	129
31. Comparación de los principales indicadores económicos del agendamiento equilibrado de fases obtenidos mediante un enfoque estocástico y determinista utilizando HV(3,3). También se muestran sus respectivos tiempos de cómputo. . .	130
32. Valores del valor esperado no descontado para distintos valores de ponderación y distintos niveles de confianza.	XVI
33. Valores del riesgo medido en CVaR para distintos valores de ponderación y distintos niveles de confianza.	XVII
34. Número de fases requerido en cada instancia del problema de selección de fases para BM-Estra.	XXIV

1. Introducción

En este capítulo se presentan las primeras ideas que sustentan esta tesis, comenzando por una revisión conceptual de la planificación minera y de los problemas y desafíos que debe enfrentar.

1.1. Planificación minera

La planificación minera es la disciplina de la ingeniería de minas que conjuga los recursos geológicos con el mercado para delinear el mejor negocio productivo para el dueño. Ésta se encarga de generar un plan minero, el que define cómo y cuándo se extraerán las reservas mineras, permitiendo cuantificar el capital humano, económico y técnico, generando el plan de negocios de la compañía. La promesa productiva generada en el plan minero se expresa mediante un plan de producción y es soportado por un agendamiento, el cual compromete la producción en el tiempo, determinando qué porciones de la mina serán extraídas y cuáles de ellas serán procesadas, eligiendo la mejor línea de proceso para cada unidad.

A fin de generar un plan de producción, el yacimiento se discretiza en unidades regulares llamadas bloques y el horizonte de planificación se discretiza en periodos. Es típico que la toma de decisiones se parcialice en distintos horizontes de tiempo, como planificación de largo, mediano y corto plazo (Osanloo et al. 2008): en planificación de largo plazo se define la vida de la mina en función de sus reservas, el método, ritmo y secuencia de explotación, y el perfil de leyes de corte, además de la inversión y los costos necesarios. A su vez, en la planificación de mediano plazo se busca alinear los objetivos de largo plazo con la realidad operacional, dando información más detallada de áreas específicas de la mina, ya sea de la extracción, del diseño, del equipo necesario y de su distribución al interior de la misma. Finalmente, la planificación de corto plazo se encarga de cumplir los objetivos de producción, además de la recopilación y utilización de la información operacional para retroalimentar la planificación de mediano plazo.

El proceso de planificación de minas se ha basado tradicionalmente en modelos geológicos de recursos, contruidos a partir de estimaciones de las características constitutivas de los yacimientos, tales como leyes, densidad de roca, tipo de litología, entre otras, mediante alguna técnica de estimación geoestadística. Esto significa que la información tomada como representación y predicción de la realidad sobre la cual se planifica y opera está conformada por un conjunto de datos exactos, pero generalmente imprecisos, producto de la escasez de información que caracteriza al recurso geológico al utilizar mallas de sondajes. Una excelente referencia para conocer en detalle cómo se realiza tradicionalmente la estimación de recursos es Journel y Huijbregts (1978).

Uno de los problemas más grandes que afectan hoy en día al negocio minero es la desviación de los planes productivos y los resultados de operación (Dimitrakopoulos et al. 2002), reflejado

en altos porcentajes de incumplimiento de metas, malas conciliaciones, alto impacto en los costos reales de operación, y en particular, en lo que respecta la planificación de largo plazo, una gran dificultad para estimar oportunidades de negocios y valorizarlos de manera adecuada.

1.2. Incertidumbre en planificación minera

A lo largo de todo el proceso de planificación de la producción minera se hacen estimaciones de diversos parámetros que alimentan los modelos geológico y económico, por ejemplo, leyes minerales y precios de los metales (*commodities*). Sin embargo, en la realidad estos parámetros no son deterministas y su caracterización es muy difícil, ya sea por la escasez de información, como se dijo antes, o por la imposibilidad de predecir su comportamiento futuro.

El desconocimiento que se tiene de la zona mineralizada se trata de remediar mediante el uso de sondajes que toman muestras del yacimiento y técnicas geoestadísticas que buscan una representación de las zonas no muestreadas, luego, el modelo de bloques que alimenta las etapas de planificación de la producción minera es una estimación de la realidad, produciendo discrepancias entre las producciones planificada y real e implicando un riesgo que debe ser controlado. También la duración de la explotación, que por su gran extensión hace difícil pronosticar confiablemente parámetros relevantes como costos de operación y precios de los metales, de hecho, actualmente se observa en la industria minera cómo algunos proyectos en estudio han visto aplazada su ejecución por los altos costos y bajos precios (RMCh 2016). Según estudios de EY (2014), el 69% de los proyectos mineros en el mundo presentan incrementos en sus costos y en el caso particular de Chile, esto ocurrió en el 75% de los casos.

Algunos autores como Guzmán (2011), clasifican las fuentes de incertidumbre según su origen, pudiendo ser ésta interna o externa. En la Tabla 1 se muestran los principales tipos de incertidumbre interna. A su vez, en la Tabla 2 se detallan los principales tipos de incertidumbre externa que afectan al negocio minero.

Cabe destacar que no todos los tipos de incertidumbre son de fácil incorporación en la evaluación de los proyectos mineros. Algunos ejemplos de este tipo son:

- Disponibilidad energética y de agua: el acceso al agua y la energía es una parte esencial de las operaciones mineras y se está volviendo cada día más difícil y costoso en muchas regiones del mundo. En Chile esto preocupa al sector, ya que las tarifas eléctricas son las segundas más caras del mundo en comparación con otros países productores de cobre. Por otra parte, el uso de agua de mar se ha transformado en la alternativa para disponer de agua en los procesos mineros (Cochilco 2015).
- Problemas con las comunidades: el mejor ejemplo es la experiencia reciente de Barrick Gold

Tipo (Internas)	Incertidumbres más comunes
Geológica	Distribución de leyes, tonelajes de reservas, continuidad de las unidades geológicas.
Geotécnica	Colapso de roca, estallido de roca, fallas en paredes de la mina.
Metalúrgica	Recuperación (%), tiempo de procesamiento, calidad del producto.
Operacionales	Disponibilidad de equipos, disponibilidad de recursos humanos, falla en infraestructuras, variabilidad de la mezcla a planta, disponibilidad de insumos, condiciones climático-ambientales, dilución, productividad de equipos.
Proyectos	Atraso de proyectos, <i>Ramp up</i> , capacidad de extracción y procesamiento.
Organizacionales	Huelgas, productividad laboral.

Tabla 1: Fuentes de incertidumbre interna y algunos ejemplos de cada una. Fuente: Guzmán (2011).

Tipo (Externas)	Incertidumbres más comunes
Económicas	Precio del <i>commodity</i> principal, precio de subproductos, tasa de cambio, precios de energía y otros insumos críticos, costos de mano de obra, monto de la inversión, tasa de descuento.
Financiera	Tasa de interés, disponibilidad de recursos financieros.
Política	Expropiación de recursos, estabilidad gubernamental.
Legislación	Cambio en tasa de impuesto <i>y/o royalties</i> , cambio de leyes laborales.
Sociales	Demandas de la comunidad, estabilidad social.
Ambientales	Cambios en la regulación (material particulado, gaseoso u otros), permisos ambientales.
Comerciales	Cambios en especificaciones de compra.
Industriales	Guerra de precios, producción del resto de los productores, confiabilidad de los proveedores, entrada de nuevos productores, poder de mercado de los clientes, sustitución.
Tecnológicas	Mejoramiento de la tecnología actual, capacidad de tratamiento de nuevo mineral.

Tabla 2: Fuentes de incertidumbre externa y algunos ejemplos de cada una. Fuente: Guzmán (2011).

en Pascua Lama y el proyecto Conga de Newmont¹, donde las protestas de la comunidad han causado demoras indefinidas en proyectos multimillonarios.

De hecho, EY. (2015) identifica los dos anteriores, junto con el acceso y asignación al capital, como las tres principales fuentes de incertidumbre que amenazan la gran industria del cobre en Chile.

La incertidumbre relacionada a los parámetros de entrada al proceso de planificación puede incrementar la diferencia entre el VAN (valor actual neto) planificado y el VAN real. Sin embargo, al considerar la incertidumbre de los datos durante el proceso de planificación se podría disminuir esta diferencia, permitiendo un estudio más robusto. Del conocimiento de los parámetros inciertos, se ha reportado extensamente (ver Smith y Dimitrakopoulos (1999), Dimitrakopoulos et al. (2002), Osanloo et al. (2008) y referencias citadas ahí) que la geología es una de las fuentes de incertidumbre que más contribuye a las diferencias entre las soluciones planificadas y las soluciones operacionales, especialmente en los primeros años del proyecto. Por ejemplo, Vallee (2000) reportó que en el 60 % de un conjunto de minas analizadas, la tasa promedio de producción es menor en un 70 % que las tasas planificadas en los primeros años de producción, lo cual es debido principalmente a la incertidumbre geológica. En consecuencia, la incorporación de la incertidumbre en los procesos de planificación de la producción de minas puede ayudar en la obtención de planes robustos, que maximicen el VAN esperado con un mayor grado de confianza respecto a la metodología usual que considera sólo una estimación determinista.

1.3. Incertidumbre geológica

La incertidumbre geológica representa el grado de ignorancia que se tiene de la caracterización mineralógica, en particular, de los distintos tipos de material y de sus respectivas concentraciones (leyes), así como de la extensión y posición de las unidades geológicas. Dado que las estimaciones son interpolaciones continuas de datos obtenidos de manera discreta, los modelos no capturan la real variabilidad del depósito. La diferencia entre lo que predicen los modelos y lo que realmente contiene el yacimiento hace que el control de esta fuente de incertidumbre sea de gran importancia. En el último tiempo, el uso de herramientas como simulación geostadística ha mostrado mejores resultados a la hora de evaluar, ya que reproducen la variabilidad espacial real de la variable regionalizada. En particular, el uso de simulaciones condicionales (ver, por ejemplo, el trabajo de Emery y Lantuéjoul (2006)) ha permitido incorporar este tipo de incertidumbre.

La Figura 1 muestra la diferencia entre un modelo krigeado (metodología de estimación tradicional) y aquellos obtenidos por simulación condicional, todos para una cota Z dada. Se puede apreciar el efecto del suavizamiento del método de estimación, en contraste a la mejor reproducción

¹<http://www.mining.com/community-opposition-forces-newmont-abandon-conga-project-peru/>

de la variabilidad real del fenómeno en los mapas simulados.

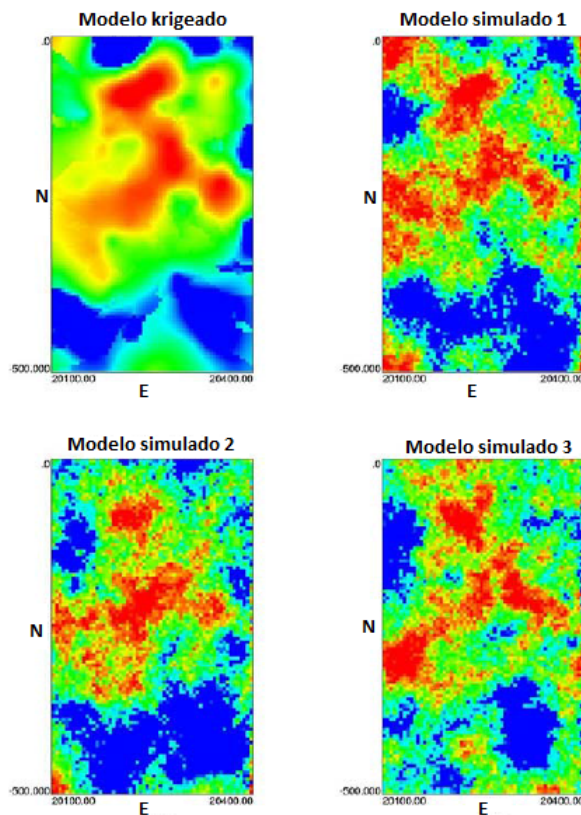


Figura 1: Mapas obtenidos por kriging (arriba izquierda) y por simulación gaussiana secuencial (tres modelos restantes). Fuente: Ortiz (2006).

¿Por qué se debe considerar la incertidumbre geológica y cuáles son sus fuentes?

A través de estimaciones, se determinan inicialmente los recursos geológicos que el yacimiento posee, es decir, la cantidad y calidad del mineral presente en el depósito. En segundo término, se definen las reservas mineras, que corresponden al mineral explotable y del cual se obtendrá beneficio económico. Evaluar la incertidumbre en los recursos y reservas es importante por razones financieras, además de ser útil a la hora de producir. Las plantas de proceso a menudo requieren de niveles mínimos o máximos de algún elemento para su óptimo funcionamiento. La necesidad de crear acopios para mezclar mineral con diferentes características, previo al proceso, puede demostrarse con el uso de simulaciones, como explica Ortiz (2006).

El principal problema que motiva la toma de muestras y el desarrollo de una evaluación de los recursos disponibles es que la variable que interesa estudiar tiene un comportamiento difícil de predecir. Resulta lógico pensar que si dicha variable fuera constante en el depósito, bastaría tomar sólo una muestra para conocer su valor en cualquier punto del yacimiento. Sin embargo, en la práctica, esta situación nunca existe debido a la presencia de una variabilidad que debe ser estudiada para realizar estimaciones en puntos donde la variable no ha sido medida. Esta variabilidad proviene

principalmente de dos fuentes:

- En primer lugar, está la variabilidad inherente del yacimiento, la que se debe a los procesos que produjeron la génesis de esta concentración anómala.
- Por otro lado, está la variabilidad introducida artificialmente a lo largo del estudio que se hace del depósito, mediante errores de toma, preparación y análisis de las muestras.

El análisis de la información disponible permite cuantificar la variabilidad artificial y determinar la calidad de la información con que se realizará la estimación, mientras que el estudio geostatístico (variografía) permitirá resumir las características estructurales del yacimiento (Ortiz 2006).

En la sección 4.2 se presenta una detallada lista de trabajos que incorporan, en particular, la incertidumbre de leyes en el proceso de planificación.

1.3.1. Generación de las simulaciones geostatísticas

Debido a la imposibilidad de un conocimiento exhaustivo de la variable real, ya sea por razones económicas o técnicas, se hace necesario aplicar técnicas que permitan estimar esta variable. Si bien existen métodos de interpolación lineal ponderada entre los datos disponibles (sondajes), el más conocido se llama *kriging* y corresponde al mejor estimador lineal insesgado (Journel y Huijbregts 1978), este tipo de métodos no capturan la real variabilidad de la variable: la dispersión de los valores estimados es menor que la dispersión de los valores reales y, además, su varianza no depende de los valores de los datos sino que de su geometría espacial, por lo que no mide todas las fuentes de incertidumbre.

El principio de una simulación consiste en construir una variable ficticia que reproduce la continuidad/variabilidad espacial de la variable regionalizada $z = \{z(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in E\}$ en el punto \mathbf{x} del espacio E . Esta construcción se basa en la interpretación de z como una realización particular de una función aleatoria $Z = \{Z(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in E\}$. La idea consiste en generar otras realizaciones de esta función aleatoria. Mientras que *kriging* y otros métodos de interpolación conducen a una imagen suavizada de la realidad, las realizaciones de Z presentan la misma variabilidad espacial que la variable regionalizada real, en particular, el mismo histograma y el mismo variograma (Emery 2007). Según Leuangthong et al. (2004), las condiciones mínimas que un modelo de simulación debe reproducir son (i) los valores de los datos muestrales (condicionantes), (ii) la distribución del atributo de interés, y (iii) la continuidad espacial caracterizada por el modelo de variograma. A pesar de lo anterior, las realizaciones no entregan valores precisos, por lo que el error entre el verdadero valor y el valor simulado no tiene una varianza mínima. Lo anterior hace que se

utilicen varias simulaciones para representar la incertidumbre asociada a la variable, y donde cada simulación es un escenario equiprobable.

Si bien existe la simulación no condicional, la que busca construir realizaciones de la función aleatoria que representa la variable regionalizada, pero *sin tomar en cuenta los valores de los datos en los que se tiene una muestra* (sondajes), en este caso se hablará exclusivamente de simulación condicional, debido a que es el caso de interés en esta tesis, es decir, se busca construir una función aleatoria con la misma distribución espacial que Z y conociendo los valores que debe tomar en los puntos que existan datos.

Las distribuciones de probabilidad condicional describen la incertidumbre que se tiene localmente sobre los valores de la variable regionalizada, tomando en cuenta los valores de los datos circundantes. Por ejemplo, en un sitio con dato, no hay incertidumbre y se obtiene el valor del dato en todas las realizaciones. Al contrario, lejos de los datos, la distribución condicional se parece a la distribución a priori (no condicional), de modo que los datos son irrelevantes. Entre otros casos, las distribuciones condicionales suelen tener menos dispersión que las distribuciones a priori, traduciendo que los datos aportan alguna información sobre el valor que se busca caracterizar.

A diferencia del método kriging, que sólo requiere conocer la covarianza o el variograma, la simulación geoestadística necesita caracterizar completamente la función aleatoria que se desea simular. Un modelo sencillo para simular variables continuas es el modelo *multi-gaussiano*, debido a que su definición sólo requiere modelar una distribución univariable y un variograma. Para modelos más generales, de ser posible se busca una transformación que permita trabajar con el modelo *multi-gaussiano*.

Según Emery (2007), las etapas para simular una función aleatoria son las siguientes:

1. *Desagrupar los datos originales*: se ordenan los datos de forma creciente y sus probabilidades de ocurrencia se identifican con los ponderadores de desagrupamiento.
2. *Transformar los datos originales en datos gaussianos*: esta transformación se conoce como *anamorfosis*, donde la variable original se transforma en una variable con distribución marginal gaussiana estándar, y se hace tomando en cuenta los ponderadores de desagrupamiento.
3. *Realizar el análisis variográfico de los datos gaussianos*: se calcula el variograma experimental² $\hat{\gamma}$ entre puntos \mathbf{x}_i mediante

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [Z(\mathbf{x}_i + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{x}_i)]^2$$

²Corresponde a un estimador del variograma teórico $\gamma(h) = \frac{1}{2}E\{[Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{x})]^2\}$

donde $N(\mathbf{h})$ es el número de pares $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i + \mathbf{h})$ separados por una distancia $|\mathbf{h}|$, y a partir de este variograma experimental se ajusta un modelo teórico.

4. *Validar la hipótesis multigaussiana:* por construcción, el histograma de los datos transformados es gaussiano, luego la distribución univariable es consistente. Para órdenes superiores, debido a la limitada disponibilidad de datos es muy difícil y exigente la verificación de esta hipótesis, sin embargo, en la práctica es suficiente comprobarlo para orden 2. Hecho esto, el modelo queda enteramente caracterizado por la función de anamorfosis y por el variograma de los datos gaussianos.
5. *Simular la función aleatoria gaussiana:* se desea simular una función aleatoria multigaussiana Y de media 0 y variograma $\gamma(\mathbf{h})$ en los sitios $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ del espacio, condicionada a los datos gaussianos disponibles en los sitios $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$.

5.1. *Elegir un algoritmo de simulación:* una alternativa sencilla para generar las simulaciones es el algoritmo secuencial, sin embargo, existen varios algoritmos de simulación. Para una lista completa y todos los detalles de cada uno en el caso de variables continuas consultar Deutsch y Journel (1998).

Algoritmo secuencial

Para cada sitio \mathbf{u}_i :

- a) Realizar el kriging de $Y(\mathbf{u}_i)$ a partir de los datos condicionantes $\{Y(\mathbf{x}_1), \dots, Y(\mathbf{x}_n)\}$ y de los valores previamente simulados $\{Y(\mathbf{u}_1), \dots, Y(\mathbf{u}_k)\}$. Como resultado, se obtiene un valor estimado $Y^*(\mathbf{u}_i)$ y una desviación estándar $\sigma^*(\mathbf{u}_i)$.
- b) Simular un valor gaussiano, cuya media es igual a $Y^*(\mathbf{u}_i)$ y cuya desviación estándar es igual a $\sigma^*(\mathbf{u}_i)$:

$$Y(\mathbf{u}_i) = Y^*(\mathbf{u}_i) + \sigma^*(\mathbf{u}_i)N_i$$

donde N_i es una variable aleatoria gaussiana de media 0 y varianza 1, independiente de N_1, \dots, N_{i-1} y de los datos originales $Y(\mathbf{x}_1), \dots, Y(\mathbf{x}_n)$.

Así pues, en la i -ésima etapa, se simula el valor gaussiano en el sitio \mathbf{u}_i y se agrega el valor simulado a los datos condicionantes para simular los sitios siguientes, de donde viene el nombre *secuencial*. En teoría, se requiere usar un *kriging simple* de media 0.

5.2. *Construir varias realizaciones:* para capturar lo mejor posible la incertidumbre.

5.3. *Condicionar a los datos gaussianos disponibles:* si es que el algoritmo escogido no lo hace directamente.

6. *Transformación gaussiana inversa:* para volver a la variable original, ya que los datos están en el espacio gaussiano.

1.3.2. Evaluación de la incertidumbre en las simulaciones

La incertidumbre es representada por medio de las diferencias que presentan un conjunto de escenarios equiprobables generados por simulación condicional, la que busca construir mapas de valores que reproducen la variabilidad real de la variable.

Algunas formas de evaluar la incertidumbre es por medio de la varianza en torno a la ley de cada bloque, el coeficiente de variación o la correlación espacial. Por ejemplo, la varianza de los escenarios incorpora el efecto proporcional, es decir, la variabilidad suele ser mayor en las zonas de leyes altas, y también presenta una menor variabilidad en las cercanías de los datos condicionantes. Si bien los bloques pueden tener una alta incertidumbre, si la correlación espacial es alta, en torno a un bloque de alta ley habrá posiblemente otros bloques de alta ley; si la correlación es baja, habrá una mezcla de bloques de alta y baja ley. En promedio sobre un sector (i) mayor correlación espacial se traduce en que la incertidumbre sobre todos los escenarios va a mostrar una varianza grande, entre las simulaciones y para cada bloque, pues cada uno tiene la posibilidad de tener un valor muy alto o muy bajo, aunque similar a sus vecinos, dada la alta correlación; por otra parte, (ii) menor correlación espacial se traduce en que la incertidumbre sobre todos los escenarios va a mostrar una varianza más baja, respecto al caso de mayor correlación, entre las simulaciones y para cada bloque, pues este último tenderá a un valor promedio, por lo tanto, se homogenizan.

1.3.3. Incorporación de la incertidumbre en planificación de la producción minera

En este trabajo se considera el problema de planificación de la producción de minas a rajo abierto en el largo plazo, desde la definición de pit final y pasando por la selección de pushbacks para guiar la secuencia, considerando la incertidumbre geológica, en particular, de las leyes minerales. Uno de los objetivos de este trabajo es definir nuevas metodologías que incorporen esta incertidumbre en la formulación y resolución de los problemas involucrados en la planificación. Decisiones tales como tamaño de pit final, en el caso de minería a rajo abierto; ritmos de explotación; número, tamaño y forma de fases; agendamiento de la producción, entre otras, se ven directamente afectadas por la cantidad, calidad e interpretación de la información.

La disponibilidad de múltiples escenarios equiprobables que caracterizan a las simulaciones genera la pregunta de cómo utilizar esta información para tomar mejores decisiones, ya que la elaboración de planes mineros de la manera tradicional a partir de cada uno de los escenarios supone igual número de posibles estrategias de extracción, con notables diferencias en tamaño y valor, por lo que cuál de todos los planes considerar como guía de diseño y evaluación, o de qué manera definir la estrategia que permita alcanzar el mayor valor del negocio, es una interesante problemática. Al respecto, se han planteado algunos enfoques de cómo utilizar esta información y a lo largo de este trabajo se hará una revisión de las mismas. Por ejemplo, enfoques heurísticos, en los

cuales planes individuales para cada escenario son utilizados para generar un solo plan final, o bien, enfoques robustos y estocásticos, donde toda la información disponible se utiliza para alimentar un modelo que entregue un plan de una sola vez, permitiendo una mirada más holística del problema; ambos tienen ventajas y desventajas, siendo asunto de este trabajo de tesis analizarlas y proponer recomendaciones a su uso y/o nuevas alternativas. En el contexto de esta tesis, para referirnos a los modelos que incorporan la incertidumbre por medio de escenarios de leyes, se hará un abuso de lenguaje y se agregará el adjetivo *estocástico* o *robusto*, utilizándolos como sinónimos.

1.3.3.1 Introducción a las medidas de riesgo

Los proyectos mineros son negocios muy complejos que demandan una constante evaluación del riesgo, debido a que su valor está afectado por todas las fuentes de incertidumbres descritas, en parte, en la sección 1.2. Por tal razón es importante contar con herramientas que sean capaces de ayudar en la toma de decisiones y que consideren el *trade-off* entre beneficio económico y riesgo de sufrir pérdidas. Una de las herramientas que por años ha sido utilizada por bancos e instituciones financieras para minimizar las pérdidas financieras ocasionadas por un inadecuado monitoreo del riesgo es el *valor en riesgo* (VaR). En términos simples, la medida de riesgo VaR es la máxima pérdida que ocurre en un periodo de tiempo específico a un nivel de confianza dado. Para representar lo anterior en términos más formales, es preciso dar primero algunas definiciones. Sea $\delta \in (0, 1)$ el nivel de confianza y $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ una función de pérdida asociada con un vector de decisión \mathbf{x} y un vector aleatorio \mathbf{y} . Para cada \mathbf{x} , $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es una variable aleatoria que tiene una distribución en \mathbb{R} inducida por la de \mathbf{y} . Por otra parte, $\Psi(\mathbf{x}, \zeta)$ es la probabilidad de que la función de pérdida $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ no exceda un valor umbral ζ , es decir, $\Psi(\mathbf{x}, \zeta) = \mathbb{P}[f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \zeta]$. Como una función de ζ para \mathbf{x} fijo, $\Psi(\mathbf{x}, \zeta)$ es la función de distribución acumulada para la pérdida asociada con \mathbf{x} . Así, el VaR asociado a la variable \mathbf{x} y un nivel de confianza δ viene dado por

$$\text{VaR}_\delta(\mathbf{x}) = \text{mín}\{\zeta \in \mathbb{R} : \Psi(\mathbf{x}, \zeta) \geq \delta\}$$

En otras palabras, VaR se interpreta como el valor de ζ tal que la probabilidad de que la pérdida no exceda ζ es δ . Sin embargo, esta medida de riesgo adolece de algunos inconvenientes: VaR no es una medida de riesgo coherente, lo que se traduce en que el riesgo de un portafolio puede ser más alto que el riesgo de sus componentes (diversificar es más riesgoso que no hacerlo, lo cual es contraintuitivo). Esta razón, junto con otras como la no convexidad, han hecho que se busquen nuevos enfoques para medir el riesgo en portafolios. Además, de especial interés en nuestro caso, es difícil optimizar el VaR para distribuciones discretas a través de escenarios.

Es así como nace una medida de riesgo alternativa al VaR, conocida como *valor condicional en riesgo* (CVaR), la que cuantifica las pérdidas que exceden el VaR y actúa como una cota superior para este último, por lo que portafolios con un bajo CVaR también tienen un bajo VaR. Además, es una medida coherente de riesgo y convexa, lo que permite la implementación de algoritmos de

optimización para su minimización, permitiendo el manejo de portafolios con un gran número de instrumentos y escenarios. Para distribuciones continuas, el CVaR es definido informalmente como el promedio de las $100(1 - \delta)\%$ mayores pérdidas posibles de f , es decir, el CVaR con nivel de riesgo δ asociado a la variable \mathbf{x} viene dado por

$$\text{CVaR}_\delta(\mathbf{x}) = (1 - \delta)^{-1} \int_{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > \text{VaR}_\delta(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

donde $p(\mathbf{y})$ es la densidad de \mathbf{y} . Para evitar complicaciones por la función $\text{VaR}_\delta(\mathbf{x})$ definida implícitamente, en Rockafellar y Uryasev (2000) dan una función alternativa

$$F_\delta(\mathbf{x}, \zeta) = \zeta + (1 - \delta)^{-1} \int_{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > \zeta} [f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \zeta] p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (1)$$

para la cual demuestran que minimizando $F_\delta(\mathbf{x}, \zeta)$ respecto a (\mathbf{x}, ζ) se obtiene el mínimo CVaR, y por lo tanto, su solución. La integral en (1) de la definición de $F_\delta(\mathbf{x}, \zeta)$ puede ser aproximada de varias formas: por ejemplo, muestreando la distribución de \mathbf{y} de acuerdo a su densidad $p(\mathbf{y})$, de la cual se obtiene una colección de vectores $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^R$. Por lo tanto, la aproximación de $F_\delta(\mathbf{x}, \zeta)$ es

$$\tilde{F}_\delta(\mathbf{x}, \zeta) = \zeta + \frac{1}{R(1 - \delta)} \sum_{r=1}^R [f(\mathbf{x}, \mathbf{y}^r) - \zeta]^+$$

donde se asume que todos los escenarios son igualmente probables y $[t]^+ = \max\{t, 0\}$. Note que $\tilde{F}_\delta(\mathbf{x}, \zeta)$ es convexa y lineal por tramos respecto a ζ , y si la función $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es lineal respecto a \mathbf{x} , entonces la función $\tilde{F}_\delta(\mathbf{x}, \zeta)$ es convexa y lineal por tramos, siendo no diferenciable en los puntos donde $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}^r) - \zeta = 0$. Finalmente, se presenta el Teorema clave que permite utilizar las ideas anteriores para minimizar el CVaR, y cuya demostración se puede encontrar en Rockafellar y Uryasev (2000):

Teorema 1.1. *Minimizar el CVaR $_\delta$ de la pérdida asociada con \mathbf{x} sobre todo $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$ es equivalente a minimizar $F_\delta(\mathbf{x}, \zeta)$ sobre todo $(\mathbf{x}, \zeta) \in X \times \mathbb{R}$, en el sentido que*

$$\min_{\mathbf{x} \in X} \text{CVaR}_\delta(\mathbf{x}) = \min_{(\mathbf{x}, \zeta) \in X \times \mathbb{R}} F_\delta(\mathbf{x}, \zeta)$$

De acuerdo al Teorema 1.1, para hallar \mathbf{x} tal que minimice $\text{CVaR}_\delta(\mathbf{x})$, no es necesario trabajar directamente con esta función, ya que puede presentar muchos problemas debido a la naturaleza de su definición en términos de $\text{VaR}_\delta(\mathbf{x})$, sino que es posible trabajar con la expresión más simple $F_\delta(\mathbf{x}, \zeta)$, la cual tiene mayores ventajas, como se explicó antes. Es más, la minimización de $F_\delta(\mathbf{x}, \zeta)$ calcula simultáneamente la decisión \mathbf{x} , el $\text{VaR}_\delta(\mathbf{x})$ y el $\text{CVaR}_\delta(\mathbf{x})$ óptimos. Por lo tanto, combinando estas ideas junto a la aproximación discreta $\tilde{F}_\delta(\mathbf{x}, \zeta)$ que se tiene de $F_\delta(\mathbf{x}, \zeta)$, se pueden adaptar del caso continuo al caso binario en la variable de decisión \mathbf{x} (siendo la variable de decisión típicamente 0-1, de seleccionar (1) o no (0) cada bloque en el pit final), para implementar el cálculo de pit final bajo incertidumbre de leyes, representado mediante escenarios igualmente

probables obtenidos a través de simulaciones condicionales. En el paso del caso continuo al caso discreto se pierden algunas propiedades, siendo la más importante la convexidad, la que permite aplicar toda la teoría de optimización convexa, que caracteriza los trabajos de Rockafellar y Uryasev (2000) y Krokmal et al. (2002). En este trabajo se propone utilizar las expresiones que se tienen del CVaR en el caso discreto para construir modelos que, aproximando dicha medida de riesgo debido a que la representación de la incertidumbre de leyes mediante escenarios es finita, permitan minimizarla y a la vez que maximicen el retorno esperado. Dicho lo anterior, en lo sucesivo cuando se hable de CVaR, se hará un abuso del lenguaje, entendiéndose que se refiere a la aproximación discreta del CVaR.

Finalmente, para evitar la función $[f(\mathbf{x}, \mathbf{y}^r) - \zeta]^+$ en la definición de $\tilde{F}_\delta(\mathbf{x}, \zeta)$, usaremos variables auxiliares $z_r, \forall r \in \mathcal{R}$ y haremos la siguiente equivalencia:

$$[f(\mathbf{x}, \mathbf{y}^r) - \zeta]^+ = \{z_r \geq 0 / z_r \geq f(\mathbf{x}, \mathbf{y}^r) - \zeta\}, \forall r \in \mathcal{R}.$$

1.4. Organización de la tesis

El resto de esta tesis está estructurada del siguiente modo:

En la **Sección 2** se presenta la definición del problema que interesa en este trabajo de tesis. Se hace una descripción por separado de cada una de las etapas que permiten la obtención de un (tentativo) plan de producción para el largo plazo, comenzando con el problema del pit final, seguido del problema de selección de fases y, finalmente, el agendamiento de la producción en el tiempo.

La **Sección 3** define los objetivos general y específicos que se plantean al inicio de este trabajo, así como los alcances que definen el marco donde tienen validez los resultados obtenidos.

En la **Sección 4** se hace una completa revisión bibliográfica del estado del arte del problema definido en el capítulo anterior. En una primera sección se revisan los esfuerzos que se han realizado en los últimos 50 años en el caso determinista, esto es, asumiendo conocimiento perfecto de los datos que alimentan el proceso de planificación; y en una segunda sección se revisa en detalle el caso donde se acepta desconocimiento de las leyes reales del depósito que se quiere explotar, y se describen las distintas técnicas que han usado los investigadores en los últimos 25 años para incorporar la incertidumbre de leyes en el proceso de planificación.

La **Sección 5** presenta la metodología que se propone para enfrentar el problema. Para cada una de las etapas definidas, se presentan nuevos modelos que permiten incorporar la incertidumbre de leyes de manera explícita: (i) para pit final, un modelo que considera dos objetivos típicamente en conflicto, como lo son el valor y el riesgo. Este modelo permite al planificador tomar la decisión de pit final de acuerdo al beneficio-riesgo que esté dispuesto a tomar; (ii) para selección de fases,

se adopta la metodología de pits anidados bajo incertidumbre que luego alimenta un proceso automático que asiste al planificador para decidir cómo particionar el pit final en fases; y (iii) el agendamiento de la producción en el tiempo, utilizando un modelo que controla la desviación de las metas de producción.

En la **Sección 6** se aplica la metodología propuesta a un caso de estudio sintético 2D. Esto permite hacer los ajustes necesarios a los modelos antes de realizar las pruebas en casos de estudio reales.

En la **Sección 7** se aplica la metodología propuesta a un caso de estudio real, para ver su impacto a la hora de generar agendamientos robustos. Esto se hace comparando versus la metodología tradicional en el caso determinista, mostrando su implementación, resultados y comparación.

Finalmente, la **Sección 8** presenta una discusión de los principales resultados, las conclusiones obtenidas y las futuras líneas de investigación propuestas.

2. Problema de planificación de la producción de largo plazo en minas de rajo abierto

En esta sección se revisará el problema de planificación de la producción de largo plazo en minas de rajo abierto a través de una mirada multietapa, considerando desde la definición de pit final, pasando por la generación de fases como guía del diseño y llegando finalmente al agendamiento temporal de bloques, donde se compromete la producción en el tiempo. En cada una de las etapas se mostrará el subproblema respectivo con el enfoque tradicional y sus inconvenientes, haciendo énfasis en la necesidad de incorporar la incertidumbre geológica mediante un conjunto de simulaciones condicionales del yacimiento.

2.1. Antecedentes

Actualmente el proceso de planificación de la producción de largo plazo se lleva a cabo utilizando la metodología de pits anidados, cuyos fundamentos datan desde 1965 (Lerchs y Grossmann (1965), ver sección 4.1).

Uno de los aspectos más importantes a la hora de planificar la producción de una mina es contar con una representación del yacimiento. Usualmente se prepara un modelo discreto del depósito, donde se encuentran los recursos geológicos: haciendo perforaciones en distintos lugares y a distintas profundidades, se obtienen muestras de material que son usadas para caracterizar geológicamente las mineralogías, litologías y tipos de alteración e interpolar concentraciones y densidades. Luego, el depósito se divide en unidades regulares, usualmente llamadas bloques, y a cada una se le asignan distintos atributos como tonelaje, leyes de los elementos de interés, tipos de material, etc. El resultado es uno de los principales datos de entrada que alimentan el proceso de planificación de la producción y se conoce como *modelo de bloques*.

Definido lo anterior, junto con otras importantes decisiones como: *ángulos de talud*, que deben respetarse para proteger la faena de accidentes por causa de fallas en las rocas o derrumbes y *valorización del modelo de bloques*, lo que supone estimar principalmente precios de largo plazo, costos y recuperaciones minero-metalúrgicas, se llega a la primera etapa para delimitar la subregión del yacimiento donde la extracción se llevará a cabo.

Desde la década del sesenta se han utilizado métodos de programación matemática para modelar las diferentes etapas del proceso de producción de minas a rajo abierto, aunque su uso ha sido muy gradual. Este trabajo se enmarca dentro de los métodos de agendamiento directo de bloques, es decir, basados en modelos de optimización que son alimentados por parámetros y restricciones, y que generan planes a soporte de bloques. Un esquema de esto y su diferencia con

la metodología tradicional se puede apreciar en la Figura 2.

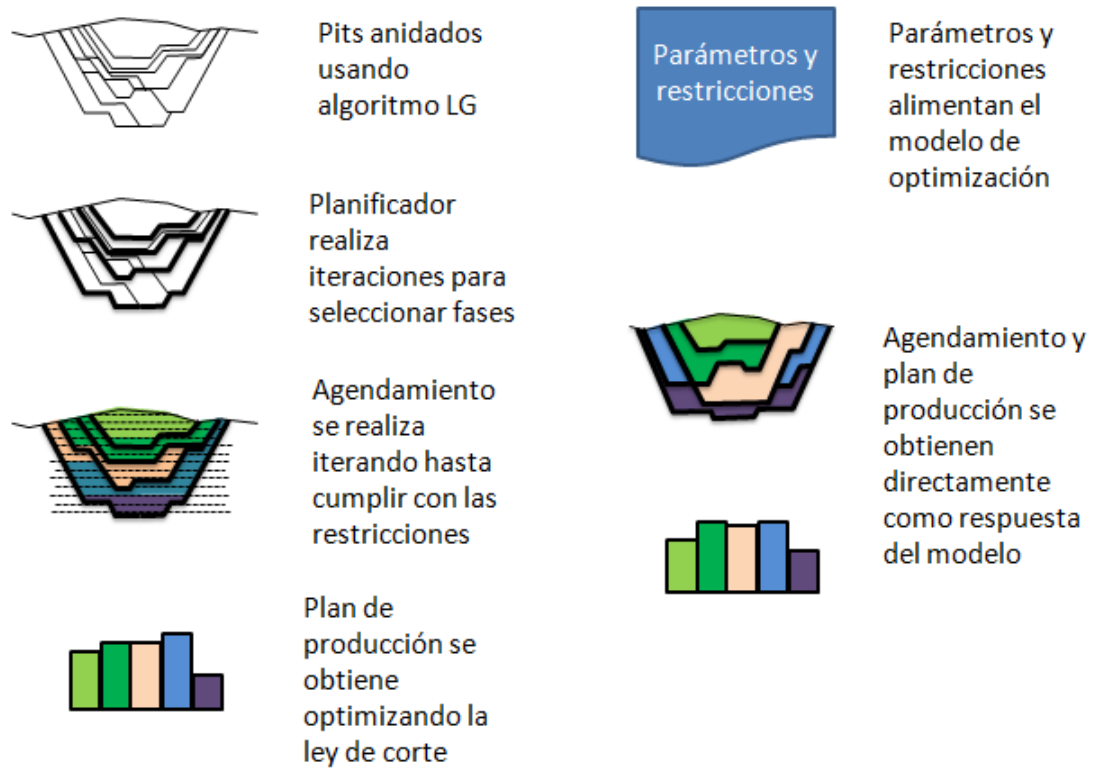


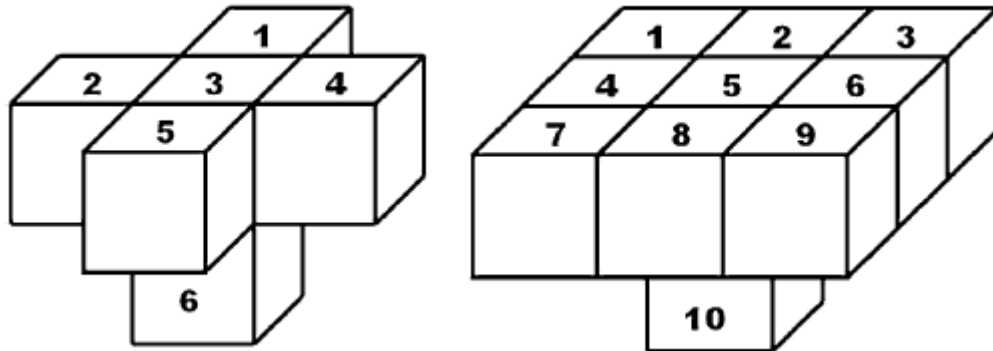
Figura 2: Diferencias entre metodología tradicional (izquierda) y agendamiento directo de bloques (derecha). Fuente: Jélvez et al. (2013).

En el Anexo A se puede encontrar una breve referencia sobre los modelos de optimización basados en programación matemática. Para mayores detalles consultar Nemhauser y Wolsey (1988).

2.1.1. Ángulo de talud y precedencias de extracción

En minería a rajo abierto la extracción se realiza desde la superficie y se profundiza manteniendo ángulos de talud en las paredes del rajo, los que pueden ir variando según las características de la roca y permiten mantener la estabilidad y seguridad en la operación. Estos ángulos de talud constituyen un parámetro muy importante que tiene un impacto económico en el negocio (Hustrulid et al. 2013). Dado que se dispone de una representación discreta del yacimiento usando bloques, una forma de modelar la estabilidad en las paredes del rajo es mediante precedencias entre los bloques: así, para tener acceso a un bloque y poder extraerlo es necesario remover previamente otros bloques que se encuentran sobre el primero. Un buen ejemplo de lo anterior viene dado en la Figura 3, donde se muestran dos casos usuales para definir precedencias entre bloques: en el primer caso (3a), para que la extracción del bloque 6 sea posible, es necesario

extraer los cinco bloques que se encuentran encima (definiendo un molde en forma de cruz), representados con los números del 1 al 5; en el otro caso, (3b), el molde consta de nueve bloques que forman un cuadrado y que deben ser extraídos para acceder al bloque 10.



(a) Precedencias de 5 bloques superiores

(b) Precedencias de 9 bloques superiores

Figura 3: Moldes de precedencia para extracción desde la superficie: en (a) para extraer el bloque 6 primero se deben haber extraído los 5 bloques superiores; otra alternativa es la mostrada en (b), donde para extraer el bloque 10, primero se deben extraer los 9 bloques superiores. Fuente: Newman et al. (2010).

En la práctica, para definir el *molde de precedencias* que debe ser aplicado a cada bloque y así definir cómo será posible acceder a ellos desde la superficie se utilizan conoides invertidos, los que quedan completamente determinados en base a tres componentes:

- **vértice:** corresponde al centro de masa de cada bloque que se quiere tener acceso.
- **roseta:** representan los ángulos de talud ($< 90^\circ$) requeridos para la estabilidad de las distintas paredes del pit, las cuales a su vez se representan por tramos de ángulos (rumbo).
- **altura:** define el número de bancos superiores al vértice que estarán relacionados a éste en virtud de las precedencias. También se conoce como número de niveles y algunos autores consideran el vértice como primer nivel (Espinoza et al. (2013a)).

Definido lo anterior, se tienen moldes de precedencias que son aplicados a los bloques del modelo. Para evitar ambigüedades y definir qué bloques están dentro del molde, basta mirar su centro de masa: todos los bloques cuyos centros de masa se encuentren dentro o en el borde del molde deberán ser extraídos previamente para tener acceso al bloque en su vértice. Cabe destacar el gran impacto que tendrá el parámetro *altura* en la geometría de extracción al definir los moldes de precedencias. En la Figura 4 se muestran 3 moldes de precedencias a 45° de talud global (en todo el rumbo) y diferentes alturas (2 bancos, 7 bancos y 29 bancos superiores al vértice). Se puede

apreciar que entre más niveles son considerados en el parámetro *altura*, mejor queda definido el molde de precedencias, dando al pit una forma más suave.

Para establecer las relaciones entre bloques precedentes dentro del molde se utilizan arcos, los cuales son utilizados en modelos de programación matemática para restringir la geometría de extracción desde la superficie. Los arcos son dirigidos, en el sentido que van desde el bloque inferior al superior (en cota). Por ejemplo, en la Figura (3a) existen 5 arcos dirigidos, los cuales van desde el bloque 6 a cada uno de los bloques superiores. La relación entre bloques precedentes es transitiva, esto quiere decir que si un bloque *a* requiere que un bloque *b* sea extraído, y a su vez, éste último requiere que un bloque *c* sea extraído, entonces el bloque *a* también requiere que el bloque *c* sea extraído: esto permite reducir la representación total de arcos dirigidos, considerando sólo aquellos arcos que no están relacionados por transitividad. En cualquier caso, los moldes de precedencias representan datos de entrada al proceso de planificación de la producción de un rajo.



Figura 4: Aproximación de la geometría de extracción basado en distintos criterios para definir el molde de extracción. Por ejemplo, a 45° y considerando distintos niveles de precedencias: dos, siete y veintinueve niveles sobre el bloque ubicado en el vértice y al cual se quiere ganar acceso. Puede verse cómo el número de niveles afecta la forma del pit. Fuente: Espinoza et al. (2013a).

2.1.2. Modelos de valorización de bloques

Hablar sobre modelos económicos de valorización está directamente relacionado con el concepto de **ley de corte**. Cualquier bloque con una ley inferior a la ley de corte es considerado lastre, sin valor económico. Por el contrario, un bloque con una ley superior a la ley de corte será considerado mineral y será de interés económico. Lane (1988) presentó los fundamentos para el cálculo de leyes de corte.

Ahora se presentarán dos formas de definir leyes de corte, generando a la vez dos metodologías de valorización de bloques. Ambas comparten algunas hipótesis, las que se describen a continuación:

- (a) Esta valorización es una primera aproximación para realizar el cálculo de la envolvente.

Debido a la limitada información que se dispone en esta etapa se puede simplificar el análisis (sin pérdida de generalidad) suponiendo que:

- (i) sólo dos destinos son posibles para los bloques extraídos, pudiendo ser enviados a planta para procesamiento, o bien, ser enviados a botadero;
 - (ii) todos los bloques tienen igual costo de extracción y éste es independiente de su ubicación y profundidad dentro del yacimiento;
 - (iii) los parámetros que alimentan el modelo económico se asumen deterministas.
- (b) El valor de cada bloque debe ser calculado asumiendo que el bloque está descubierto, es decir, el costo requerido para acceder al bloque no debe ser considerado en los costos.
- (c) Para cada bloque, el valor debe ser calculado suponiendo que será explotado: si un bloque contiene más lastre que mineral, no será incluido dentro del pit final, salvo que deba ser extraído para acceder a bloques de mayor valor, por las restricciones de precedencia.

2.1.2.1 Modelo económico basado en ley de corte crítica LCC

La expresión utilizada para generar la valorización v_b para cada bloque b es

$$v_b = \begin{cases} [(P - C_v) \cdot Rec \cdot f \cdot y_b - C_m - C_p] \cdot ton_b & , \text{ si } y_b \geq \frac{C_m + C_p}{(P - C_v) \cdot Rec \cdot f} \\ -C_m \cdot ton_b & , \text{ en otro caso.} \end{cases} \quad (2)$$

donde P es el precio del metal de interés, C_v es el costo de venta, fundición y refinación, Rec es la recuperación metalúrgica, f es un factor que ajusta la unidades, y_b es la ley del bloque b , C_m es el costo de extracción, C_p es el costo de procesamiento y ton_b es el tonelaje del bloque b .

En este caso, la ley de corte crítica (LCC) se obtiene a partir del beneficio nulo, es decir, aquella ley que hace que los beneficios reportados cancelen los costos de procesamiento y extracción. Por lo tanto, se tiene

$$(P - C_v) \cdot Rec \cdot f \cdot y_b - C_m - C_p = 0 \quad \forall b \in \mathcal{B}. \quad (3)$$

Despejando la ley de la ecuación (3) se obtiene la ley de corte crítica asociada a este modelo económico de bloques:

$$LCC = \frac{C_m + C_p}{(P - C_v) \cdot Rec \cdot f}. \quad (4)$$

Note que el lado derecho de (4) aparece en la fórmula de valorización (2) para discriminar cuándo un bloque es clasificado como mineral en función de su ley. En la Figura 5 se puede apreciar la función de beneficio neto por tonelada en función de su ley, la cual permite clasificar el material entre mineral y lastre.

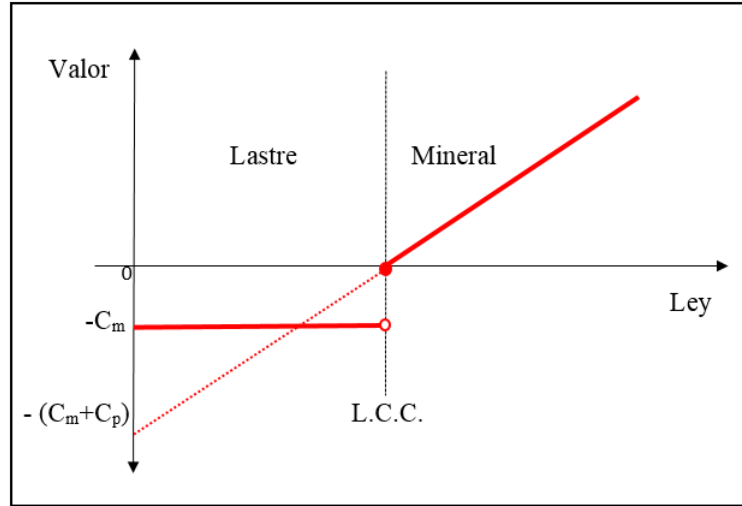


Figura 5: Función de valor por tonelada para cada bloque en el modelo económico en función de su ley. En este modelo económico se define una ley de corte crítica (LCC) dada por (4), la cual debe ser suficiente para pagar tanto los costos de extracción como los de procesamiento.

2.1.2.2 Modelo económico basado en ley de corte marginal LCM

Basados en la notación anterior del modelo LCC, la expresión utilizada para generar la valorización v_b para cada bloque b es

$$v_b = \max\{[(P - C_v) \cdot Rec \cdot f \cdot y_b - C_m - C_p] \cdot ton_b, -C_m \cdot ton_b\} \quad \forall b \in \mathcal{B}. \quad (5)$$

En este caso, la ley de corte marginal (LCM) se obtiene a partir del equilibrio entre el beneficio neto y el costo de extracción, a saber

$$(P - C_v) \cdot Rec \cdot f \cdot y_b - C_m - C_p = -C_m \quad \forall b \in \mathcal{B}. \quad (6)$$

Despejando la ley de la ecuación (6) se obtiene la ley de corte marginal asociada a este modelo económico de bloques

$$LCM = \frac{C_p}{(P - C_v) \cdot Rec \cdot f}. \quad (7)$$

Cualquier bloque para el cual su ley es inferior a la ley de corte marginal no será procesado y por lo tanto será enviado a botadero. Por otra parte, si la ley de algunos bloques es mayor que la ley de corte marginal, pero inferior a la ley de corte crítica, generan un valor negativo. Sin embargo, procesar esos bloques reduce el impacto negativo del costo de extracción, por lo que resulta mejor económicamente procesar esos bloques.

En la Figura 6 se puede apreciar la función de beneficio neto por tonelada en función de su ley, la cual permite clasificar en una primera etapa el material entre mineral y lastre.

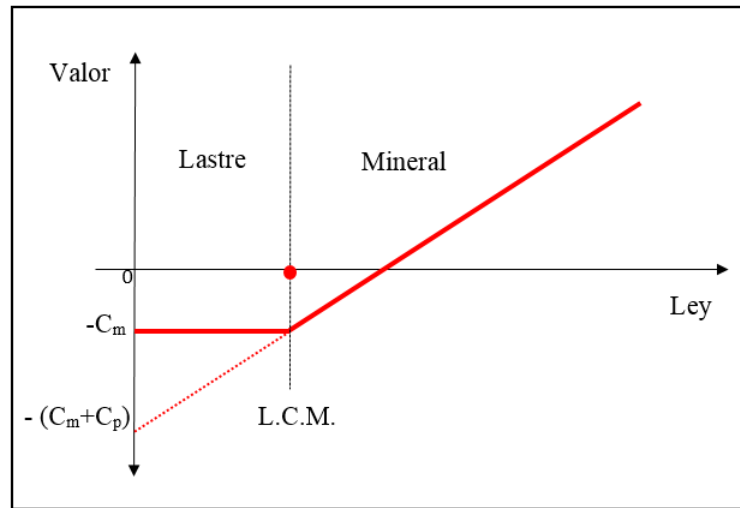


Figura 6: Función de valor por tonelada para cada bloque en el modelo económico en función de su ley. En este modelo económico se define una ley de corte marginal (LCM) dada por (7), la cual es suficiente para pagar los costos de extracción.

Nótese que no se usó el criterio de beneficio nulo, el cual indica que serán clasificados como mineral todos los bloques que paguen sus costos de extracción y tratamiento. Por el contrario, en este criterio todos los bloques que cubran los costos de tratamiento serán clasificados como mineral. Esta clasificación es preliminar, puesto que a medida que se disponga de mayor información el destino final de cada bloque puede ser distinto de esta clasificación inicial.

2.2. Problema de pit final

En términos simples se puede definir el problema de pit final como la determinación del subconjunto de bloques del yacimiento que maximiza el valor económico no descontado, respetando las restricciones de precedencias para asegurar la estabilidad del rajo (Hartman 1992). Sirve para delimitar la subregión del yacimiento donde se realizará la explotación. No hay consideraciones temporales ni de capacidades de extracción en esta etapa. En el caso determinista, y utilizando las herramientas de programación lineal entera, el pit final se obtiene resolviendo el siguiente problema

$$(PPF) \text{ máx } \sum_{b \in \mathcal{B}} v_b x_b \quad (8)$$

$$\text{s.a. } x_b \leq x_{b'} \quad \forall b \in \mathcal{B}, b' \in \text{PREC}(b) \quad (9)$$

$$x_b \in \{0, 1\} \quad \forall b \in \mathcal{B} \quad (10)$$

donde b, b' representan los bloques, \mathcal{B} es el conjunto de bloques, $PREC(b)$ es el molde de precedencias del bloque b , v_b representa la valorización del bloque b (por ejemplo, utilizando (2) ó (5)) y x_b es una variable binaria (10) que toma valor uno cuando el bloque b es incluido en el pit final y cero cuando no. El objetivo (8) representa el valor total no descontado de los bloques extraídos. La restricción (9) asegura que para extraer un bloque, primero se deben haber extraído sus bloques precedentes.

Uno de los principales inconvenientes con la metodología de pit final anterior es que no toma en cuenta la incertidumbre geológica. Suponiendo que se dispone de un conjunto de escenarios que representan la incertidumbre (por ejemplo: ley, tipo de roca, etc.), cabe preguntarse cómo utilizar esta información de los distintos escenarios para evaluar el impacto de la incertidumbre: una opción es obtener un pit para cada escenario por separado y, a partir de eso, tomar una decisión de un único pit final; otra opción es considerar un modelo alternativo que acepte todos los escenarios a la vez para calcular un solo pit final robusto. Siendo el pit final una de las decisiones con mayor impacto en el valor del negocio (Hartman 1992), dada la cadena de implicancias que acarrea, surgen preguntas del tipo: ¿qué pit final deberá escogerse para un nivel de confianza dado en términos de valor o de metal?, o bien, ¿cómo cambiaría la forma del pit final si la variabilidad de las leyes es mayor de lo esperado?. Lamentablemente, la metodología tradicional para calcular pit final no puede dar respuestas a este tipo de preguntas. Por tal razón es fundamental generar una metodología de pit final robusta que considere todos los escenarios geológicos para su determinación.

En la Figura 7 se puede apreciar cómo distintos escenarios de leyes determinan distintas envolventes, definiendo para cada bloque, una *probabilidad* de pertenecer al pit final, según con qué frecuencia perteneció a los pit finales obtenidos a lo largo de los escenarios. El contorno dibujado en negro determina la elección de un único pit final, basados en algún criterio, por ejemplo, aquellos bloques cuya *probabilidad* de pertenecer al pit final es mayor a 85 %.

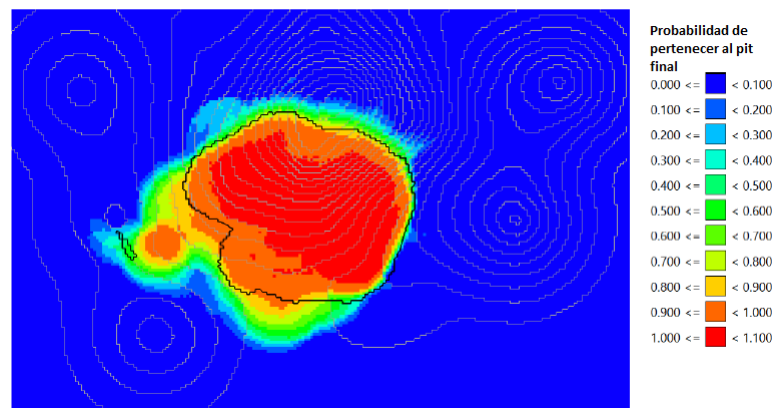


Figura 7: Determinación del pit final considerando distintos escenarios de leyes. Fuente: Deutsch et al. (2015).

2.3. Problema de selección de fases

En la sección anterior se mencionó el problema de pit final considerando la incertidumbre geológica. Ahora se presenta el problema de selección de fases, conocidas también como secuencias, expansiones o pushbacks (Hustrulid et al. 2013), y que son utilizadas para guiar la extracción de bloques de un yacimiento dentro del pit final, definiendo dónde comienza y dónde finaliza el proceso de extracción. El diseño de fases es esencial para el agendamiento de la producción en un rajo en el largo plazo, debido a que discretiza la envolvente económica en unidades de planificación más manejables, con su propia frente de trabajo y control de la producción de mineral y lastre. Adicionalmente las fases aseguran pendientes seguras, asisten al planificador en los objetivos de cumplir la producción comprometida, en lo posible postergando la extracción de lastre y proporcionan un mínimo ancho operativo con el fin de instalar los equipos y permitir su movilidad (Albor Consuegra y Dimitrakopoulos 2010). Por lo tanto, el diseño de fases juega un rol fundamental en definir los flujos descontados futuros, ya que condiciona la forma en que se realizará la etapa final de agendamiento de la producción en el tiempo.

Respecto a esto último, es intuitivo que el mayor valor descontado en la etapa de agendamiento temporal de bloques se tendrá si el mineral es alcanzado en los primeros años de producción, atrasando la extracción del material estéril: esto no quiere decir necesariamente que se deben extraer primero las zonas de leyes más altas, ya que esto puede estar asociado a una (también) alta relación estéril mineral (REM), lo cual puede reducir el valor descontado del mineral recuperado por debajo del valor obtenido con la extracción inicial de otras zonas de material de menor ley, pero con REM mucho menor.

Tradicionalmente, la selección de fases se hace manualmente y es realizada por ingenieros en planificación de minas, basados en un conjunto de pits anidados que se obtienen utilizando la metodología de Lerchs y Grossmann (1965). De estos pits se seleccionan algunos para determinar las fases, basados en distintos criterios como tamaños, tonelajes y espacios operacionales, entre otros. La generación de pits anidados se realiza escalando el precio del metal principal por un parámetro $\lambda \in (0, 1]$ conocido como *revenue factor*: por ejemplo, en el caso del modelo LCC (2), se tendría

$$v_b^\lambda = \begin{cases} [(P \cdot \lambda - C_v) \cdot Rec \cdot f \cdot y_b - C_m - C_p] \cdot ton_b & , \text{ si } y_b \geq \frac{C_m + C_p}{(P \cdot \lambda - C_v) \cdot Rec \cdot f} \\ -C_m \cdot ton_b & , \text{ en otro caso.} \end{cases} \quad (11)$$

y luego resolviendo el problema (PPF) para cada valor del *revenue factor* λ , es decir

$$(PPF_\lambda) \quad \text{máx} \quad \sum_{b \in \mathcal{B}} v_b^\lambda x_b \quad (12)$$

$$\text{s.a. } x_b \leq x_{b'} \quad \forall b \in \mathcal{B}, b' \in \text{PREC}(b) \quad (13)$$

$$x_b \in \{0, 1\} \quad \forall b \in \mathcal{B} \quad (14)$$

Lerchs y Grossmann (1965) demostraron que si se considera una secuencia creciente de parámetros $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k$, existen soluciones óptimas \mathbf{x}^i para cada problema (PPF $_{\lambda_i}$) tales que $\mathbf{x}^1 \leq \mathbf{x}^2 \leq \dots \leq \mathbf{x}^k$, es decir, se obtiene una secuencia de pits anidados.

Sin embargo, este procedimiento tiene importantes limitaciones: (i) es posible que existan grandes diferencias de tamaño entre fases consecutivas, lo cual es comúnmente conocido como el *problema del gap* (Meagher et al. 2014); (ii) no es seguro que la relación estéril mineral sea uniformemente distribuida entre las fases, lo cual podría afectar la etapa posterior de agendamiento; (iii) la incertidumbre geológica no es tomada en cuenta, así que no es posible medir la confiabilidad de los tonelajes de mineral; y (iv) no hay consideración del tiempo en su definición, lo que condiciona fuertemente la etapa siguiente de agendamiento temporal de bloques, entre otras. En consecuencia, se hace necesario desarrollar nuevas metodologías que se hagan cargo de los principales inconvenientes que tiene la etapa de diseño de fases.

2.4. Problema de agendamiento

Una vez definidas la envolvente económica y la selección de fases, se procede a agendar la extracción de las distintas zonas de la mina con el fin de generar un plan de producción, respetando el diseño impuesto anteriormente. En esta etapa se compromete la producción en el tiempo con el objetivo de maximizar el valor del negocio para los dueños.

En la metodología tradicional esta etapa requiere de procesos iterativos, donde el planificador experto va ajustando a partir de las fases, por prueba y error, los criterios operacionales que se deben respetar, tales como capacidades de extracción y procesamiento, espacios operacionales, entre otros, asistido por *software* de planificación estratégica.

Después que las fases son definidas, se hace una partición en franjas horizontales llamadas bancos, lo que lleva a nuevas unidades llamadas *fases-banco*, las que en la práctica son agendadas, es decir, un grupo de bloques constituye una fase-banco.

Considere un conjunto de bloques \mathcal{B} , un conjunto de periodos de tiempo $\mathcal{T} = \{1, \dots, T\}$ y un conjunto \mathcal{D} de posibles destinos para cada bloque. La siguiente definición fue tomada del trabajo de Jélvez et al. (2016)

Definición 2.1. *Un agendamiento de bloques es una función definida por $\phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{T} \times \mathcal{D} \cup \{+\infty\}$, donde para cada bloque $b \in \mathcal{B}$, la imagen $\phi(b) = (t, d)$ indica el periodo t en que el bloque b es extraído y el destino d al cual es enviado. $\phi(b) = +\infty$ significa que el bloque b nunca es extraído.*

Luego, es posible identificar las porciones de la mina que son agendadas por periodo y por

destino. Para cada $t \in \mathcal{T}$, el conjunto de bloques extraídos en el periodo t viene dado por

$$\mathcal{B}(t) = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} \phi^{-1}(t, d) \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

Al contrario, si se quiere identificar las zonas de la mina por destino, se considera lo siguiente:

$$\mathcal{B}(d) = \bigcup_{t \in \mathcal{T}} \phi^{-1}(t, d) \quad \forall d \in \mathcal{D}$$

Algunos ejemplos de destinos para los bloques extraídos en el caso del cobre se tienen: planta concentradora, lixiviación, botaderos o acopios. Las definiciones anteriores aplican al caso en que cada bloque se supone *indivisible*, es decir, que es extraído y enviado a un solo destino. La extensión a otros casos, por ejemplo, en que el bloque es extraído en un periodo, pero se puede particionar para ser enviado a distintos destinos implica reescribir el espacio de llegada considerando las porciones del bloque que son asignadas a cada uno.

Este agendamiento no se realiza de manera arbitraria: debe satisfacer un conjunto de restricciones geotécnicas y económicas, relacionadas a la cantidad y calidad del material extraído en cada periodo $t \in \mathcal{T}$ y se hace persiguiendo algún objetivo estratégico como maximizar el VAN del proyecto. A continuación, se describen las principales consideraciones que deben respetarse a la hora de realizar un agendamiento:

- **Precedencias:** como se ha explicado antes, para extraer un bloque se deben haber extraído previamente todos los bloques que se encuentren dentro de su molde de precedencias.
- **Consumo de recursos para extracción:** existen límites máximos a la cantidad de material que puede ser minado, por ejemplo, dado por la capacidad de los equipos (palas y camiones). También es posible imponer consumos mínimos de los recursos mina para evitar los costos de oportunidad asociados a la subutilización de los equipos disponibles.
- **Consumos de recursos para procesamiento:** ídem a lo anterior, pero referido a la planta de procesamiento (por ejemplo: chancador, molino, celdas).
- **Calidad del material a proceso:** es usual que el mineral que entra en proceso deba reunir ciertos requisitos para que la planta opere de manera eficiente (Hartman 1992): leyes del elemento de interés, contaminantes, arcillas y humedad son algunos ejemplos de aspectos que deben controlarse, permitiéndoles ciertos rangos (valores máximos y/o mínimos) de aceptabilidad.

Otro tipo de restricciones que son muy importantes tienen relación con la geometría de extracción y espacios operacionales mínimos que deben existir para asegurar la operación de los

equipos dispuestos para la explotación. Estas consideraciones se incluyen de manera implícita en la etapa anterior de selección de fases y en la etapa de agendamiento se traducen, por ejemplo, en: (i) sólo un número de fases activas pueden coexistir en un periodo dado; y (ii) se permite una pared de profundidad máxima en la secuencia de explotación, evitando que se profundice arbitrariamente en un periodo dado. También existen condiciones lógicas que deben respetarse, como por ejemplo, que un bloque no puede ser minado más de una vez.

Es importante recordar que el resultado obtenido en esta etapa soporta el plan de producción, generando la promesa productiva a lo largo del horizonte de vida del proyecto y es fundamental para la elaboración del plan minero, el que define cómo y cuándo se extraerán las reservas mineras, permitiendo cuantificar el capital humano, técnico y económico necesarios.

Sin embargo, la metodología tradicional considera una sola representación como realidad del yacimiento, asumiendo que existe conocimiento perfecto de la geología, pero eso dista de la realidad: la incertidumbre geológica puede causar diferencias entre la producción planificada y la real. Por tal razón es importante desarrollar modelos que incorporen esta incertidumbre en la generación de los planes de producción. Un ejemplo de lo anterior se puede apreciar en Albor Consuegra y Dimitrakopoulos (2009): la Figura 8 muestra la producción en toneladas (izquierda) y el valor descontado acumulado (derecha) de un proyecto considerando la incertidumbre de las leyes en el agendamiento. Primero se obtiene el agendamiento usando la metodología tradicional, es decir, un modelo krigeado, y los resultados en cada caso se representan en línea verde; luego se compara este agendamiento en términos de producción y valor descontado contra varios escenarios simulados del mismo yacimiento, permitiendo evaluar el impacto de la incertidumbre de leyes en el agendamiento. Las líneas punteadas muestran los resultados de los percentiles 10 y 90 y la línea roja el promedio entre todas las simulaciones. Los resultados de este ejercicio indican que en el caso tradicional los objetivos de producción no podrán cumplirse y que además se subestima el flujo de caja pronosticado.

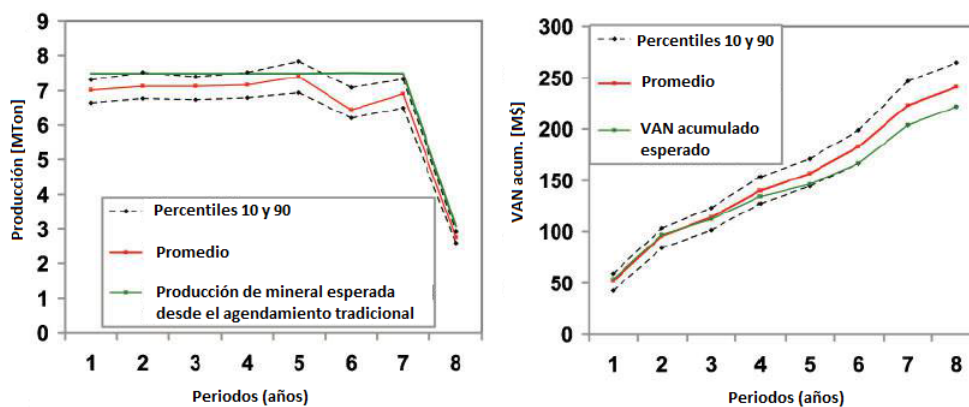


Figura 8: Planes de producción al considerar la incertidumbre de leyes.

2.5. Comentarios al problema de planificación de la producción bajo incertidumbre geológica

Uno de los inconvenientes que tienen en común las etapas anteriores que forman tradicionalmente el proceso de planificación en el largo plazo de la producción de minas a rajo abierto es que en ninguna de ellas la incertidumbre geológica es tomada en cuenta.

En la metodología tradicional, es usual que las tres etapas anteriores son resueltas utilizando algún *software* de planificación estratégica, por ejemplo, uno de los más utilizados es Whittle (Geovia 2015), que se basa en el algoritmo de Lerchs y Grossmann (1965), para la generación de pit final y pits anidados para la selección de pushbacks, además de algoritmos específicos como Milawa para generar agendamientos basados en consideraciones de valor descontado, geometría de extracción y/o capacidades de producción. Según la revisión de las herramientas comerciales de planificación estratégica de minas a rajo abierto, la mayoría de éstas trabajan con el algoritmo LG de pits anidados.

En la Figura 9 se puede ver una muestra esquemática de todas las etapas según la metodología de pits anidados: se define el pit final y se calculan pits anidados, luego (b) se definen pushbacks, y (c) a diferentes cotas se definen los bancos, dando paso a las *fases-banco*, y (d) éstas se utilizan para realizar el agendamiento haciendo cumplir los diferentes requerimientos operacionales.

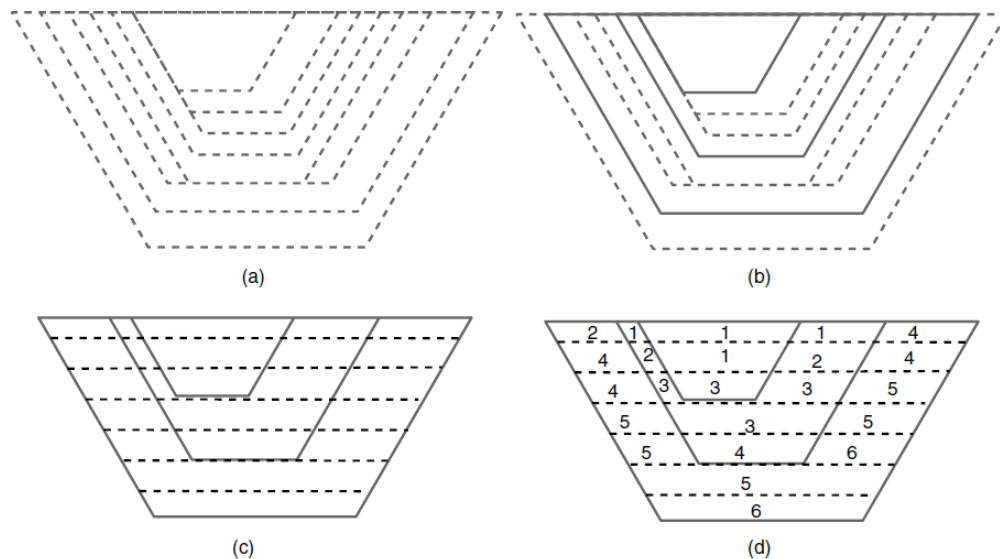


Figura 9: Proceso de planificación de la producción de largo plazo en minas a rajo abierto. En (a) se define el pit final y se calculan pits anidados intermedios, luego (b) se definen pushbacks basado en el conjunto de pits anidados, (c) a diferentes cotas se definen los bancos, dando paso a nuevas unidades *fases-banco*, y (d) las *fases-banco* se utilizan para realizar el agendamiento temporal. Fuente: Chicoisne et al. (2012).

Lo anterior se realiza sin tomar en cuenta la incertidumbre geológica en todo el proceso. Lamentablemente, la gran mayoría de los esfuerzos que se han realizado para incorporar este tipo de incertidumbre, sólo han evaluado su impacto en la etapa final de agendamiento temporal, pero desatendiendo su impacto en etapas anteriores. Como se vio en cada una de las subsecciones anteriores, ignorar la incertidumbre puede tener consecuencias a distinta escala: en etapas tempranas del proyecto, en la determinación de pit final, donde la incertidumbre es mayor, aumenta el riesgo de pérdidas y condiciona fuertemente el resto de la operación; en la generación de fases, no identifica las zonas de mayor riesgo al interior del pit final, lo que puede presentar desviaciones en la etapa final de agendamiento.

Por todo lo anterior, utilizando las herramientas de investigación de operaciones basadas en programación matemática, se busca replicar la metodología tradicional (uso de pit final, pits anidados, pushbacks, fases-banco, etc.), y adicional a ello, proponer nuevos modelos que permitan introducir la incertidumbre geológica en cada una de las etapas, con el objetivo de maximizar el valor del negocio y, a la vez, minimizar el riesgo asociado a la incertidumbre.

3. Objetivos de la investigación

En esta sección se presentan los objetivos de este trabajo, clasificados entre objetivos generales y objetivos específicos. Además, se enumeran los principales aspectos que representan el alcance de la tesis.

3.1. Objetivo general

Diseñar una metodología multietapa para la planificación de la producción de largo plazo en minas a rajo abierto, incorporando incertidumbre geológica.

3.2. Objetivos específicos

- Desarrollar modelos para las etapas de pit final, selección de fases y agendamiento que incorporen la incertidumbre geológica en cada una de ellas.
- Desarrollar algoritmos que permitan resolver instancias reales para cada etapa anterior.
- Aplicar los modelos y herramientas propuestas a casos de estudio reales.
- Comparar los resultados de la metodología tradicional con la propuesta basada en incertidumbre, para determinar el valor de la misma.

3.3. Alcances

El presente trabajo de investigación se enmarca dentro de los siguientes alcances:

- Planificación de la producción de largo plazo de minas a rajo abierto, considerando incertidumbre geológica.
- La incertidumbre geológica es representada por un conjunto finito de escenarios, obtenidos con simulación condicional, los cuales son dados.
- Se asumen fijos los parámetros asociados a precios de los metales y costos en las valorizaciones, así como las capacidades de mina, planta y ángulos de talud.
- No se consideran aspectos de diseño, tales como rampas o accesos en la formulación de los problemas.
- No se considera disponibilidad de acopios en la etapa de agendamiento.

4. Revisión bibliográfica

En esta sección se hará una completa revisión de los principales desarrollos y resultados relacionados a planificación de largo plazo de la producción de minas a rajo abierto. Se pueden distinguir: (i) un enfoque determinista, en el cual se asumen conocidos todos los parámetros del problema (leyes, densidades, horizonte, precios, costos, etc.), aunque sea a su valor medio; y (ii) un enfoque basado en incertidumbre (estocástico), donde no se conocen los valores exactos de sus parámetros, pero se consideran como variables aleatorias y se asumen conocidas sus distribuciones, siendo habitual suponerlas discretas, con un número finito de estados posibles.

A continuación, se hará una breve revisión de los resultados más importantes en planificación de la producción de largo plazo de minas a rajo abierto con enfoque determinista, para luego continuar con una completa revisión del enfoque estocástico.

4.1. Planificación de la producción de minas a rajo abierto: caso determinista

Los trabajos pioneros de Lerchs y Grossmann (1965) sentaron las bases para resolver el problema del pit final (PPF), el cual fue resuelto eficientemente utilizando un algoritmo polinomial. Los autores también mostraron una importante propiedad: si se calculan los valores de los bloques con una serie creciente de precios $p_1 < \dots < p_k$, los pits P_{p_i} asociados a cada valorización p_i son anidados $P_{p_1} \subset \dots \subset P_{p_k}$. Lo anterior permite, por ensayo y error, la introducción de tiempo y agendar bloques que satisfagan otras restricciones como capacidades de producción. La mayoría de los *software* comerciales de hoy en día, como Geovia (2015), se basan en estos hechos. Picard (1976) también mostró que (PPF) es equivalente a un problema de clausura máxima: dado un grafo dirigido $G = (V, A)$ con función de peso w definida sobre los nodos, se busca un subconjunto de nodos $U \subset V$ tal que $\sum_{u \in U} w(u)$ es máxima, pero $u \in U, (u, v) \in A \Rightarrow v \in U$. El problema de clausura máxima, a su vez, se puede reducir a un problema de corte mínimo (para más detalles, ver Nemhauser y Wolsey (1988)). Usando estos hechos, Underwood y Tolwinski (1998), y Hochbaum y Chen (2000) proponen utilizar algoritmos más eficientes para este problema.

El primer esfuerzo por considerar el problema de agendamiento de minas a rajo abierto de manera integrada se debe a Johnson (1968), quien presenta una formulación muy general en base a programación lineal, considerando restricciones de talud, capacidades y mezcla, esta última dada para asegurar ciertos rangos de ley a procesamiento. Sin embargo, dado que su formulación considera variables continuas, su modelo tiene algunas inconsistencias: permite extraer porciones de bloques sin haber extraído toda su sobrecarga. Otras versiones del modelo de Johnson, en base a programación lineal, tanto entera como mixta, son: Gershon (1983), quien incorpora nuevas

variables (binarias) para resolver el problema de extracción parcial de bloques; Caccetta e Hill (2003), quienes usan una estrategia de *Branch & Cut* y explotan la estructura de la matriz de coeficientes en las precedencias; Fricke (2006) agrega restricciones que ajustan de mejor forma la relajación lineal del problema, obteniendo mejores cotas; Bley et al. (2010) presentan una formulación más ajustada, agregando cortes por la combinación de restricciones de precedencia y capacidad; Gaupp (2008) fija variables según los límites de capacidad de extracción, reduciendo el tamaño del problema, y luego aplicando relajación Lagrangiana para resolverlo. Cullenbine et al. (2011) proponen una heurística que combina una estrategia incremental por ventanas junto con relajación Lagrangiana sobre restricciones de capacidad y relajación lineal sobre algunas variables.

En los últimos años, el desarrollo de nuevos algoritmos que permiten resolver instancias más grandes del problema de agendamiento y en menor tiempo, ha permitido dar un gran paso en esta línea: Chicoisne et al. (2012) desarrollan un algoritmo para resolver la relajación lineal de una versión simplificada del modelo de Johnson (ley de corte fija y sólo una restricción de capacidad por periodo), el cual combinan con una heurística basada en ordenamiento topológico para obtener soluciones factibles (agendamiento de bloques) con múltiples restricciones de capacidad por periodo. Por otra parte, Bienstock y Zuckerberg (2010) también desarrollan un algoritmo para el problema general (enfoque multidestino, con todas las restricciones de precedencia, capacidad y mezcla), al cual se llamará en lo sucesivo *BZ*, logrando importantes avances en tiempos de ejecución para resolver su relajación lineal. Muñoz (2012) presenta algunas mejoras al algoritmo *BZ*. Espinoza et al. (2013a) publicaron una librería de instancias para distintos problemas (pit final, agendamiento con ley de corte fija (CPIT) y con ley de corte variable (PCPSP)) llamada *Minelib*, para las cuales también reportaron buenas soluciones factibles.

Lamghari et al. (2014) utilizan un método híbrido, basado en programación lineal y un método de descenso; los autores reportan mejores resultados para algunas instancias de *Minelib* y otros casos particulares. Jélvez et al. (2016) desarrollan un algoritmo basado en agregación de bloques, el cual resuelve instancias agregadas, fija variables y recupera el soporte original, encontrando buenas soluciones factibles en corto tiempo; este algoritmo fue probado en todas las instancias de *Minelib* para el caso CPIT, y logró mejorar 9 de los 11 resultados publicados (en términos de valor descontado acumulado y tiempos de cómputo), actualizando los mejores resultados publicados a la fecha. Por otra parte, Jélvez et al. (2017) mejoraron los resultados publicados en la librería para el caso PCPSP, utilizando una heurística que fija variables, por medio de ventanas incrementales y tiempos esperados de extracción, para todos los casos disponibles en la librería. Para otros enfoques basados en agregación, ver Dagdelen y Johnson (1986), Dagdelen y Akaike (1999), Ramazan et al. (2005) y Boland et al. (2009).

También se pueden encontrar en la literatura trabajos basados en metaheurísticas: para algoritmos genéticos se puede consultar Denby y Schofield (1993), Denby y Schofield (1994), Denby et al. (1996), Zhang (2006), y Tabesh y Askari-Nasab (2011); para *simulated annealing*

existen referencias como Sattarvand y Niemann-Delius (2008), Kumral y Dowd (2005) y Kumral (2013). Para un resumen de métodos metaheurísticos se puede consultar la referencia de Sattarvand y Niemann-Delius (2013).

Finalmente, un excelente resumen de modelos y algoritmos para agendamiento de la producción de largo plazo de minas a rajo abierto es Osanloo et al. (2008), y para minería en general, Newman et al. (2010). Una lectura clásica en temas de planificación y diseño de minas a rajo abierto es Hustrulid et al. (2013).

4.2. Planificación de la producción de minas a rajo abierto bajo incertidumbre geológica

Desde los años sesenta la metodología basada en el algoritmo de Lerchs y Grossmann (1965) ha sido la base para hacer diseño y agendar la producción de minas a rajo abierto. Sin embargo, los métodos tradicionales no consideran la incertidumbre asociada a los parámetros de entrada, tales como leyes minerales o precios de los metales, lo cual puede producir grandes desviaciones de los objetivos de producción. En los últimos años algunos autores han reconocido la importancia de tomar en cuenta las múltiples fuentes de incertidumbre e incluirlas en el proceso de optimización, por ejemplo, Dimitrakopoulos (1998) y Dimitrakopoulos et al. (2002) han mostrado las consecuencias de considerar un único modelo de bloques como entrada al proceso de agendamiento, el cual es descrito como una función de transferencia no lineal.

La incertidumbre geológica es la mayor fuente de discrepancias entre la planificación esperada y la producción real, especialmente en los primeros años de la vida de la mina (Osanloo et al. 2008). Dado que su distribución es desconocida, la forma de tratar con este tipo de incertidumbre es por medio de múltiples escenarios igualmente probables del yacimiento, obtenidos a través de simulaciones condicionales; la disponibilidad de estos escenarios permite a los planificadores mineros evaluar la sensibilidad del diseño y agendamiento de la producción a la incertidumbre. Este enfoque ha sido propuesto por muchos autores desde los años noventa, por citar algunos: Ravenscroft (1992), Dowd (1994) y Denby y Schofield (1995).

Para el problema de pit final, uno de los primeros esfuerzos en incluir la incertidumbre geológica a través de escenarios de leyes en su determinación se debe a Whittle y Bozorgebrahimi (2004), quienes presentaron un enfoque basado en *pits híbridos* dentro de un marco bien definido de teoría de conjuntos: los autores calculan los N pits finales obtenidos para un conjunto de N simulaciones condicionales y, basados en esto, definen el pit híbrido de orden m (denotado H-Pit(m)) como aquel pit formado por todos los bloques cuya frecuencia relativa de pertenecer al pit final a lo largo de los N escenarios es de al menos m/N . Note que es posible definir N pits híbridos, uno para cada orden $m = 1, \dots, N$. Sin embargo, no es claro cómo elegir un único pit

final. Dimitrakopoulos et al. (2007) propusieron el uso de uno de los pits obtenidos desde las simulaciones como el mejor diseño de pit, capturando el potencial de crecimiento del depósito y minimizando el riesgo. La principal ventaja de los enfoques mencionados es que pueden ser usados como una guía para evaluar el riesgo asociado a la incertidumbre (de leyes), sin embargo, el riesgo no se toma en cuenta explícitamente en el proceso de optimización, debido a que la solución se obtiene después de resolver una serie de subproblemas para obtener los pit finales de cada escenario. Marcotte y Caron (2013) utilizaron un enfoque promedio, basados en el beneficio esperado en vez de hacerlo con la ley esperada, a partir de un conjunto de simulaciones condicionales. Por su parte, Vielma et al. (2009) propuso una formulación que incorpora el riesgo de pérdidas de manera explícita en el proceso de optimización usando restricciones de probabilidad, pero esta formulación no controla pérdidas extremas; Espinoza et al. (2013b) incorporan la incertidumbre asociada a las leyes en una versión modificada del problema de pit final, donde las decisiones de extracción y procesamiento se toman por separado, con lo cual proponen un esquema en dos etapas y utilizan medidas de riesgo como CVaR (valor condicional en riesgo) para mejorar la formulación anterior. Desafortunadamente, ambas estrategias requieren mucho tiempo de cómputo, haciéndolas difícil de implementar en la práctica para grandes yacimientos y cuando el número de escenarios crece. Amankwah et al. (2013) presentan varios modelos que incorporan la incertidumbre de leyes y precios de los metales, considerando el CVaR como medida de riesgo, pero lamentablemente sólo muestran su desempeño en casos hipotéticos 2D. Jélvez et al. (2015) presentaron una comparación de los diferentes enfoques para calcular pit final considerando la incertidumbre de leyes, basados en simulaciones condicionales de un yacimiento y evaluaron una formulación que maximiza valor y simultáneamente minimiza el CVaR como medida de riesgo, buscando un balance entre esos objetivos en conflicto, mostrando aplicaciones en casos reales de la industria.

Respecto al proceso de selección de fases incorporando incertidumbre geológica, Gholamnejad y Osanloo (2007) introdujeron un algoritmo que incorpora la incertidumbre de leyes durante el proceso de diseño de fases, tratando de retrasar el agendamiento de los bloques más riesgosos en la secuencia de extracción. Sin embargo, ellos sólo proporcionan un ejemplo 2D como caso estudio. Por otra parte, Albor Consuegra y Dimitrakopoulos (2010) propusieron una metodología secuencial para la generación de fases, a partir del escenario promedio, la cual consiste en: (i) generación de pits anidados, (ii) selección de algunos de ellos como fases (esto se hace mediante algún criterio), y (iii) define la cantidad óptima de fases a partir del subconjunto seleccionado anteriormente que satisface algunas restricciones de valor, de relación estéril mineral, entre otras.

Por otra parte, Asad y Dimitrakopoulos (2013) presentan una metodología que considera tanto la incertidumbre geológica como la incertidumbre en el precio e incorpora valores descontados de los bloques en el diseño del pit final y de las fases, considerando restricciones de capacidad. Ellos representan lo anterior con una estructura de grafos y utilizan un algoritmo paramétrico de flujo máximo, que combinan con relajación Lagrangiana y el método de subgradiente para

obtener diseños operativos. Luego, Asad et al. (2014) propusieron un enfoque basado en flujo en redes estocástico que integra incertidumbre de leyes y múltiples destinos de procesamiento en el desarrollo de fases y límite del pit final.

También utilizando técnicas como *simulated annealing*, Goodfellow y Dimitrakopoulos (2013) modifican un diseño de fases existente para reducir el riesgo, en términos de no cumplir con las metas de producción, en una mina con múltiples elementos. Finalmente, una completa referencia para el diseño de fases en el caso determinista, con algunos comentarios al caso estocástico, se puede encontrar en Meagher et al. (2014), donde se revisan todas las técnicas para resolver el problema de generación de fases, analizando sus ventajas y desventajas.

Por último, para el problema de agendamiento de minas a rajo abierto, la mayoría de los modelos están basados en programación matemática, optimizando alguna función objetivo sujeta a restricciones. Sin embargo, existen diferentes enfoques para resolverlo: desde complejos modelos soportados por un marco teórico bien definido utilizando métodos exactos, pasando por metaheurísticas, donde técnicas genéricas son aplicadas, y hasta heurísticas, donde técnicas específicas son adaptadas, todas con el fin de hallar una solución óptima, o al menos, una buena solución factible. En la práctica, una buena combinación entre calidad de la solución (desde el punto de vista minero) y tiempo de cómputo son necesarias para elegir un enfoque.

4.2.1. Enfoque heurístico

Este tipo de métodos son llamados heurísticos porque no pueden asegurar soluciones óptimas en su resolución. Normalmente son usados cuando el enfoque exacto no es práctico, lo cual es usual debido a los tamaños de los problemas reales de planificación minera y agendamiento de la producción. En esta categoría están incluidos los métodos que incluyen procesos secuenciales y/o enfoques híbridos, porque no pueden asegurar un agendamiento óptimo en presencia de incertidumbre. La mayoría de los trabajos publicados a la fecha están en esta categoría.

Ravenscroft (1992) aplicó simulación condicional, generando representaciones equiprobables de la distribución de leyes del yacimiento. En otras palabras, cada simulación puede ser vista como una imagen del depósito. El autor mostró el impacto de la incertidumbre geológica sobre el plan de producción, comparando los planes obtenidos para cada depósito simulado con el caso base obtenido con el método de estimación Kriging. Una de las ventajas de este método es su capacidad para mostrar el impacto de la incertidumbre geológica sobre el plan de producción, dado que respeta las correlaciones espaciales. Dentro de las desventajas, podemos mencionar que no permite cuantificar el riesgo del proyecto y el uso de simulaciones para generar distintos planes de producción puede tomar mucho tiempo. Desde hace casi dos décadas, la mayoría de los modelos estocásticos se basan en el enfoque de Ravenscroft, los cuales presentan heurísticas usando un conjunto de escenarios predefinidos, o bien, asumiendo que la función de distribución viene dada.

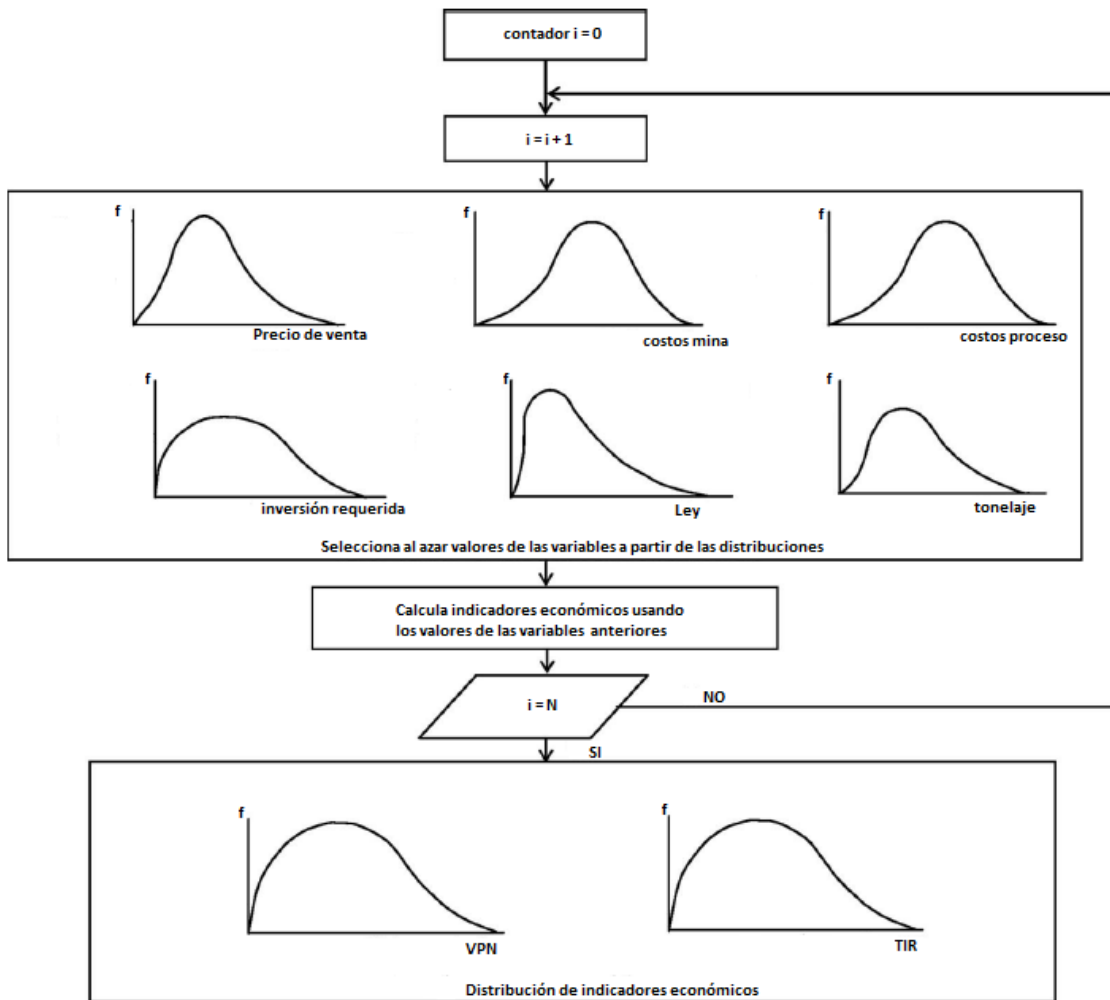


Figura 10: Método de Dowd para la evaluación del riesgo en la planificación de la producción en minas de rajo abierto.

Dowd (1994) propone un enfoque para la evaluación del riesgo en minas de rajo abierto, reforzando la importancia de las simulaciones estocásticas como entradas para el análisis de riesgo. En este método, algunas variables tales como precios de metal, costos de minado y procesado, inversiones, leyes, etc. fueron consideradas estocásticamente con una distribución predefinida. Combinando M modelos de bloques y N diferentes combinaciones seleccionadas de la correspondiente función de distribución produce un nuevo modelo de bloques. Después de la determinación del pit final para cada modelo, se agendan pits óptimos usando programación dinámica. Luego, la distribución de los indicadores económicos de interés (VAN, TIR, etc.) permite obtener el riesgo asociado. La Figura 10 muestra un esquema de lo anterior. La ventaja que se puede apreciar con este enfoque es su capacidad para cuantificar el riesgo asociado con un proyecto. Entre las desventajas, podemos mencionar que no se entrega un criterio de aceptación o rechazo del riesgo, por lo que es difícil tomar decisiones.

Dimitrakopoulos y Ramazan (2004) utilizan programación lineal e introducen la tasa de

descuento asociada al riesgo geológico (GRD), la cual según sus autores permite el manejo del riesgo para ser distribuido entre periodos; si un alto GRD es usado, las áreas de menor riesgo en términos de cumplir los objetivos de producción serán extraídas antes, y las partes más riesgosas serán dejadas para periodos posteriores. Si un bajo GRD es elegido, el riesgo será distribuido en una tasa más balanceada entre los periodos de producción. Los autores minimizan las desviaciones de obtener un agendamiento conexo (en el sentido de evitar las extracciones en diferentes zonas aisladas en un mismo periodo), además de minimizar las desviaciones de leyes de las planificadas, sujeto a restricciones de capacidad de mina y planta, mezcla, precedencias y accesos. Uno de los inconvenientes de este enfoque es la asignación a priori de probabilidades de riesgo para cada bloque, ya que la incertidumbre debe ser evaluada conjuntamente. No se hace cargo de la extracción completa de bloques (variables continuas), además de definir una ley de corte fija.

Ramazan y Dimitrakopoulos (2004) desarrollaron un enfoque híbrido usando un conjunto de simulaciones condicionales de un depósito calculan agendamientos para cada uno usando métodos tradicionales, entonces resuelven un nuevo agendamiento usando la información de los anteriores, calculando la frecuencia de cada bloque de ser minado en un periodo dado, maximizando la frecuencia y el valor descontado con un control del riesgo de no generar un agendamiento conexo, utilizando una ley de corte fija.

Dimitrakopoulos et al. (2007) propusieron un enfoque basado en diseños que capturen simultáneamente el máximo potencial mientras minimizan el riesgo, tomando las salidas desde cada agendamiento generado con las simulaciones, usando el algoritmo LG con el agendador Milawa de Geovia (2015), y comparándolos con un punto de referencia como retorno mínimo. Como resultado se selecciona uno de los agendamientos testeados, pero no necesariamente el óptimo. La utilidad de este enfoque permite el uso de herramientas de optimización/agendamiento disponibles en la industria para manejar el riesgo y potencialmente producir mejores diseños. Sin embargo, el procedimiento podría ser operacionalmente tedioso, particularmente en el caso de yacimientos grandes. Además, no puede asegurarse que el enfoque generará el mejor diseño y agendamiento para los criterios usados.

Albor Consuegra y Dimitrakopoulos (2010) propusieron un procedimiento secuencial para generar fases y luego agendamiento basado en dicho diseño de fases. El procedimiento consiste de una parametrización para generar un conjunto de pits anidados, agrupando éstos en un número predefinido de fases y luego usando programación estocástica para generar un agendamiento que maximiza el valor descontado mientras satisface los objetivos de producción.

Lamghari et al. (2013) manejan la incertidumbre de leyes usando programación estocástica en dos etapas. Para resolver su modelo, los autores proponen un algoritmo de búsqueda local que mejora una solución factible inicial, la cual es dada por un enfoque incremental por ventanas, similar a Jélvez et al. (2016). Ellos reportan tiempos de cómputo razonables y calidad de la solución en términos de gap respecto a la cota superior proporcionada por el *software* optimizador. Sin

embargo, como es típico, el procedimiento no garantiza la obtención de soluciones óptimas, si es que existen, y tampoco se refieren a la geometría de las soluciones. En la misma línea está el trabajo de Silva et al. (2015), donde proponen un procedimiento de búsqueda en vecindad basado en un algoritmo de flujo en redes para mejorar una solución inicial, la cual es generada mediante un enfoque incremental. Su modelo incluye incertidumbre de leyes, múltiples procesos y acopios. Ellos también reportan mejoras en los tiempos de cómputo, pero tampoco pueden asegurar soluciones óptimas.

4.2.2. Enfoque metaheurístico

Diferentes técnicas metaheurísticas han sido usadas para generar un agendamiento en planificación de minas a rajo abierto. Denby y Schofield (1995) incluyeron incertidumbre en un algoritmo genético, sin fijar precisamente el marco probabilístico. Ellos propusieron un modelo que incluye varianzas de leyes, maximizando valor y minimizando riesgo simultáneamente, el que resuelven usando algoritmos genéticos. Las ventajas de este método son: el modelo agenda bloques riesgosos en periodos posteriores, así que la medida de riesgo es la suma de la incertidumbre asociada con cada bloque en la secuencia de extracción; este algoritmo converge rápidamente a una solución factible, sin necesidad de repetidas simulaciones como entradas al proceso. Por otra parte, el procedimiento no garantiza soluciones óptimas y el riesgo geológico no es incorporado en el proceso de optimización explícitamente.

Simulated annealing es un método de optimización metaheurístico que debe su nombre a un algoritmo que simula el enfriamiento de un material y está basado en el principio de permitir movimientos que empeoran la función objetivo para escapar de óptimos locales. En la búsqueda local, se perturba paulatinamente una solución mientras se produce una mejora de modo que el proceso acaba en un óptimo local. Para evitar que quede atrapado en soluciones locales, esta técnica permite movimientos hacia soluciones peores, pero estos movimientos deben controlarse adecuadamente para no desviar la búsqueda cuando se dirija hacia una buena solución. Para ello, se utiliza una función de probabilidad que disminuye la probabilidad de movimientos de escape cuando la búsqueda avanza. Para más detalles revisar Kirkpatrick et al. (1983).

Godoy (2003) desarrolló un enfoque basado en *simulated annealing* para resolver el problema de agendamiento de la producción de minas a rajo abierto en el largo plazo. Considerando un conjunto de S modelos de bloques igualmente probables obtenidos por simulación condicional, los cuales se agendan utilizando algún *software* tradicional, existe un conjunto de bloques que siempre serán agendados en los mismos periodos (probabilidad 1) y otros para los cuales la probabilidad de ser asignado a cierto periodo es menor a uno. Para manejar la incertidumbre en los bloques que tienen probabilidad menor que 1, *simulated annealing* intercambia esos bloques entre distintos periodos (candidatos), de tal forma de minimizar la desviación promedio del objetivo de producción

para T periodos sobre los S modelos de bloques, es decir

$$\text{mín } O = \sum_{t=1}^T \left(\frac{1}{S} \sum_{s=1}^S |\theta_t^*(s) - \theta_t(s)| + \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S |\omega_t^*(s) - \omega_t(s)| \right)$$

donde $\theta_t^*(s)$ y $\omega_t^*(s)$ son las metas de producción de mineral y lastre, respectivamente, y $\theta_t(s)$ y $\omega_t(s)$ representan las respectivas producciones reales de mineral y lastre. El método comienza fijando aquellos bloques que tienen probabilidad 1 de ser asignados a cierto periodo; los restantes bloques entran al proceso, en el cual los bloques son elegidos de manera aleatoria e intercambiados de periodo agendado con otro candidato (perturbación), respetando las restricciones de talud y evaluando las probabilidades de transición. Aquellas perturbaciones que mejoran la función objetivo siempre se aceptan; otras perturbaciones se aceptan de acuerdo a una distribución de probabilidad exponencial (distribución de Boltzmann), la cual varía en el tiempo con el parámetro de control v (temperatura) y depende del nivel de deterioro de la solución actual

$$\mathbb{P}(\text{aceptar perturbación}) = \begin{cases} 1 & , O_{new} \leq O_{old} \\ e^{-\frac{O_{old} - O_{new}}{v}} & , e.o.c. \end{cases} \quad (15)$$

Respecto a (15), si la temperatura es alta y la diferencia entre las soluciones actual y perturbada es menor a cierto umbral, la probabilidad de aceptar una perturbación desfavorable crece. El método debe comenzar con altas temperaturas para permitir que explore diferentes partes del espacio de soluciones. Note que las temperaturas deberían decrecer en el tiempo, permitiendo menos deterioro, con más énfasis en perturbaciones favorables.

Otros trabajos en los que se desarrolla esta idea son: Godoy y Dimitrakopoulos (2004), donde primero calculan el dominio de solución estable (dominio que proporciona un 100% de confiabilidad en las reservas contenidas, para un conjunto dado de simulaciones) y las tasas de extracción. Luego aplican el procedimiento explicado arriba basado en *simulated annealing*; Leite y Dimitrakopoulos (2007), quienes además realizan análisis de sensibilidad sobre un conjunto de 20 simulaciones, comparando con el agendamiento obtenido con la metodología tradicional del algoritmo LG; y Albor Consuegra y Dimitrakopoulos (2009), donde determinaron que sólo un conjunto de 10 simulaciones eran necesarias para el caso estudio. Algunas ventajas: produce sólo un agendamiento de la producción bajo incertidumbre. Sin embargo, no se garantizan soluciones óptimas. Además, esas técnicas pueden ser difíciles de implementar, debido a que se necesitan ajustar muchos parámetros para obtener una buena solución.

Lamghari y Dimitrakopoulos (2012) usan un algoritmo *Tabu search* (búsqueda Tabú) para el problema de agendamiento de la producción de minas a rajo abierto, maximizando valor descontado y minimizando las desviaciones en los objetivos de producción de mineral. El procedimiento comienza con una solución factible inicial, la cual es calculada de dos formas: la primera explota la memoria de largo plazo de la historia de búsqueda; la segunda se basa en el método de búsqueda

de vecinos variables. Luego se usa una búsqueda Tabú para mejorar esta solución factible inicial, aumentando el valor descontado y reduciendo las desviaciones de los objetivos de producción. Los autores también prueban una búsqueda Tabú pura para propósitos comparativos, concluyendo que la combinación de los enfoques de memoria de largo plazo de la historia de búsqueda y el algoritmo *Tabu search* muestran el mejor rendimiento. Desafortunadamente, esta metodología no garantiza soluciones óptimas.

4.2.3. Enfoque estocástico

En los últimos 10 años, las técnicas de programación estocástica han sido aplicadas para modelar el diseño de minas a rajo abierto y problemas de agendamiento de la producción. La programación estocástica es una rama de la programación matemática donde los datos incorporados como entradas en la función objetivo y/o restricciones son inciertos. La forma de introducir la incertidumbre en los modelos de planificación minera es considerando un conjunto de posibles escenarios simultáneamente, bajo la hipótesis que dichos escenarios representan la incertidumbre.

Otros autores como Gholamnejad et al. (2006) y Boland et al. (2008) han desarrollado estrategias basadas en escenarios con un marco matemático bien definido: Gholamnejad et al. propusieron un enfoque basado en restricciones de probabilidad para agendamiento de bloques por periodo, donde maximizan valor descontado esperado y simultáneamente minimizan la función de varianza; adicionalmente, los autores incluyen acceso y movilidad de equipos mediante restricciones operacionales. Las restricciones de probabilidad especifican, para cada periodo, que las leyes promedio de los bloques extraídos en dicho periodo podrían exceder cierto umbral con una probabilidad predefinida, sin embargo, la clasificación de bloques como mineral o lastre se hace a priori y sin considerar la incertidumbre de las leyes y de la zona mineralizada, forzando una ley de corte fija. Además, los equivalentes deterministas de esos problemas con restricciones de probabilidad en la mezcla son no lineales, haciendo el problema mucho más difícil de resolver, sin mencionar que utilizaron hipótesis de normalidad. Tampoco muestran un caso de estudio, sólo presentan la formulación del problema. Por otra parte, en un trabajo no publicado, Boland et al. desarrollaron un modelo de programación estocástica multietapa, con el objetivo de maximizar el valor descontado esperado; su modelo maneja la incertidumbre como una función de las decisiones 'hasta ahora' (incertidumbre endógena) y las decisiones de minar y procesar son tomadas de forma separada, considerando dos pasos: en el primero, sólo las decisiones de procesamiento dependen de los escenarios, en el segundo, todas las decisiones (extracción y procesamiento) dependen de los escenarios. La idea de lo anterior es tener flexibilidad en las decisiones de extracción y procesamiento, teniendo la capacidad de alterar esas decisiones en la medida que se disponga de nueva información geológica, permitiendo la optimización simultánea de la ley de corte.

Otro enfoque basado en optimización estocástica aversa al riesgo ha sido seguido por otros

autores: Lagos et al. (2011) consideraron una versión del problema, en el cual las decisiones de extracción y procesamiento se toman de forma separada, incluyendo restricciones de capacidad máxima sobre el consumo de recursos (extracción y procesamiento), pero sin restricciones de mezcla. Tres modelos son propuestos: minimización de valor en riesgo (VaR), de valor condicional en riesgo (CVaR) y un enfoque robusto, el cual los autores abrevian como MCH, y que consiste en la maximización en el peor caso del parámetro incierto; la comparación muestra que CVaR y MCH tuvieron mejor desempeño averso al riesgo en comparación con el modelo VaR. Otro trabajo en la línea de CVaR es presentado por Amankwah et al. (2013), pero los autores sólo consideran diseño de pits (pits anidados y pit final), aunque su estudio incluye incertidumbre en el precio del metal y en las leyes. Desafortunadamente no se realiza un caso de estudio real para evaluar el impacto de este enfoque.

Menabde et al. (2007) proponen un modelo general que incluyen la información de múltiples realizaciones condicionales y ley de corte variable. Su estudio comparó tres casos: en el primero (caso base), donde la ley de corte es fija, ellos calculan un agendamiento por escenario; el segundo fue hecho usando ley de corte variable, pero se basó en un único modelo de bloques (promedio de las realizaciones); y el tercero, donde el modelo es evaluado a través de todo el conjunto de simulaciones y optimizando la ley de corte, produciendo el mejor valor descontado esperado en presencia de incertidumbre de leyes: los resultados muestran un impacto de un 20% del caso 2 respecto al caso 1, y 4% del caso 3 respecto al caso 2. Uno de los mayores logros de este trabajo es que considera una ley de corte variable en presencia de incertidumbre en el proceso de optimización. Sin embargo, la metodología podría ser muy sensible al número de escenarios y los autores sólo utilizan 10 escenarios. Los autores no se refieren al tiempo de cómputo ni a la geometría del agendamiento.

Ramazan y Dimitrakopoulos (2007) desarrollaron un modelo de programación entera estocástica, donde las simulaciones de leyes son usadas directamente como entradas en el proceso de optimización del agendamiento de bloques en un rajo. La función objetivo consiste en maximizar el valor descontado con un riesgo controlado de no cumplir los objetivos de producción en términos de toneladas de mineral y metal, además de las leyes minerales. El caso de estudio corresponde a una mina hipotética 2D, para ilustrar en términos académicos cómo funciona el modelo. Dimitrakopoulos y Ramazan (2008) usaron la misma formulación, pero controlando las desviaciones de tonelajes de mineral y leyes: en su estudio se presentan dos casos 3D y muestran las ventajas sobre la metodología tradicional. Leite y Dimitrakopoulos (2014) presentaron el mismo modelo, pero controlando las toneladas de mineral y testearon sobre un depósito de cobre las ventajas sobre la metodología usual de pits anidados. Todos estos trabajos utilizan la tasa de descuento geológico GRD. Como ya se comentó, el inconveniente con este enfoque es la asignación a priori de probabilidades de riesgo para cada bloque y en todos ellos se usa una ley de corte fija.

Ramazan y Dimitrakopoulos (2013) implementaron un modelo de programación entera

estocástica en dos etapas, el cual optimiza el agendamiento de bloques de un rajo incluyendo acopios y simultáneamente maximizando el beneficio descontado y minimizando el riesgo de no alcanzar los objetivos de producción. Sin embargo, la definición de bloques de mineral y lastre es hecha a priori y sin consideración de la incertidumbre, fijando una ley de corte fija, para reducir el número de variables enteras. Benndorf y Dimitrakopoulos (2013) muestran una aplicación en un depósito de hierro, maximizando el valor descontado esperado y controlando las desviaciones en los objetivos de calidad sobre múltiples elementos. Además consideran penalizaciones para las configuraciones de extracción que no son operativas. También usan la tasa de descuento geológica GRD y la ley de corte fija.

Kumral (2010) desarrolló un enfoque de optimización robusta para el problema de agendamiento de la producción de minas a rajo abierto, en el sentido que la solución es invariable a cambios acotados en los datos de entrada. En este trabajo se maximiza el valor descontado esperado de tal forma de forzar menos bloques variables en periodos iniciales y minimizar las desviaciones en las capacidades del consumo de recursos (extracción y procesamiento). También incluye dos tipos de incertidumbre: de leyes y de precios de los metales. El problema es resuelto por el método de penalizaciones, resolviendo diferentes casos variando los ponderadores. Uno de los inconvenientes de este método es que no es claro cómo seleccionar los ponderadores, además de que la formulación considera ley de corte fija. Es difícil de aplicar en instancias grandes.

Koushavand et al. (2014) presentaron un modelo de programación entera mixta que considera acopios con dos objetivos simultáneos: maximizar el valor descontado esperado y minimizar el costo de la incertidumbre, basado en las desviaciones de los objetivos de producción. También estudian la capacidad óptima de extracción considerando la incertidumbre. La idea clave de su trabajo es que la incertidumbre podría incurrir en un costo y éste debería ser aplazado. Utilizaron una técnica de agrupación de bloques basada en un índice de similaridad, el que depende de las leyes, distancias entre bloques y tipos de roca, con lo cual reducen el número de variables y suavizan el agendamiento generado. Las ventajas de este método son: los destinos de los bloques son incluidos en el proceso de optimización (ley de corte variable), el agendamiento es llevado a cabo tomando en cuenta aspectos geométricos, lo cual es más realista desde el punto de vista minero. Sin embargo, este modelo suaviza la solución imponiendo restricciones de capacidad de proceso en el escenario promedio, la cual es más fuerte que la que permite desviaciones. Tampoco es claro cómo ajustar los parámetros del índice de similaridad.

Como comentario final, podemos decir que la principal desventaja de los trabajos anteriores es su incapacidad de tratar problemas de gran tamaño. Además, la mayoría de los métodos muestran el efecto de la incertidumbre sobre el plan minero, pero no sugieren una forma de minimizar el riesgo. Tampoco muestran flexibilidad para incorporar la nueva información que se va generando a medida que el proceso de extracción transcurre. No obstante, las comparaciones muestran un mayor valor esperado (alrededor de un 25 %) y un menor riesgo de incumplimiento de los objetivos

de producción que el enfoque tradicional (ver por ejemplo: Godoy y Dimitrakopoulos (2004), Menabde et al. (2007), Ramazan y Dimitrakopoulos (2007), Albor Consuegra y Dimitrakopoulos (2009)), pero estos resultados no son directamente escalables a instancias de mayor tamaño y desafortunadamente no se disponen de las instancias para reproducir estos experimentos.

Tipo de modelo	Autor	Año	Método	Ventajas	Desventajas
Análisis de riesgo usando algoritmo determinista	Ravenscroft	1992	Simulación condicional	* Muestra el impacto de la incertidumbre de leyes sobre el plan de largo plazo.	* No cuantifica el riesgo de un proyecto. * No asegura optimalidad.
Análisis de riesgo usando programación dinámica	Dowd	1994	Simulación condicional	* Es capaz de cuantificar el riesgo de un proyecto.	* No entrega un criterio para aceptar o rechazar el riesgo. * No asegura optimalidad.
Programación lineal	Dimitrakopoulos y Ramazan	2004	Minimización del riesgo sujeto a restricciones	* Introduce la tasa de descuento geológica, que permite reducir el riesgo en periodos iniciales. * Considera espacios operacionales.	* Permite extracción parcial de bloques. * No es claro cómo seleccionar la tasa de descuento geológica. * Considera ley de corte fija.
Programación entera mixta	Ramazan y Dimitrakopoulos	2004	Maximiza valor descontado esperado sujeto a restricciones	* Incorpora restricciones de espacios operacionales. * Resuelve con variables enteras la desventaja de extraer porciones de bloques.	* No considera explícitamente los escenarios geológicos. * No presenta caso real de estudio. * Aplica ley de corte fija.

Tabla 3: Resumen de los principales enfoques para el problema de agendamiento bajo incertidumbre (1/4).

Tipo de modelo	Autor	Año	Método	Ventajas	Desventajas
Análisis de riesgo usando algoritmo determinista	Dimitrakopoulos et al.	2007	Simulación condicional + <i>software</i> de planificación estratégica	<ul style="list-style-type: none"> * Es capaz de cuantificar el riesgo geológico. * Entrega un criterio para aceptar o rechazar el riesgo. 	<ul style="list-style-type: none"> * No genera resultados óptimos. * No asegura el mejor diseño para los criterios utilizados.
Modelo de programación estocástica	Lamghari et al.	2013	Heurísticas de búsqueda local	<ul style="list-style-type: none"> * Mejora soluciones iniciales. * Obtienen buenas soluciones, en términos de valor y tiempo. 	<ul style="list-style-type: none"> * No puede garantizar soluciones óptimas. * No considera restricciones operacionales. * Destino es prefijado.
Metaheurística	Denby y Schofield	1995	Algoritmos genéticos	<ul style="list-style-type: none"> * Se posterga la extracción de los bloques más riesgosos. * El algoritmo converge rápidamente. * Genera una política de valor-riesgo para la toma de decisiones. 	<ul style="list-style-type: none"> * No se puede garantizar optimalidad. * No se puede garantizar que en presencia de incertidumbre se satisfagan las restricciones de capacidad. * La incertidumbre no se introduce de manera explícita.

Tabla 4: Resumen de los principales enfoques para el problema de agendamiento bajo incertidumbre (2/4).

Tipo de modelo	Autor	Año	Método	Ventajas	Desventajas
Metaheurística	Godoy	2003	Simulación condicional y <i>simulated annealing</i>	<ul style="list-style-type: none"> * Produce un único agendamiento en presencia de incertidumbre. * Genera ritmos de extracción óptimos para la vida de la mina. 	<ul style="list-style-type: none"> * No garantiza optimalidad. * La implementación puede resultar muy tediosa. * No considera aspectos operacionales. * No considera de manera explícita el riesgo geológico.
Metaheurística	Lamghari y Dimitrakopoulos	2012	<i>Tabu Search</i>	<ul style="list-style-type: none"> * Algoritmo mejora soluciones factibles. * Obtienen buenos resultados en términos de valor y tiempo. 	<ul style="list-style-type: none"> * No puede garantizar soluciones óptimas. * No considera restricciones operacionales. * Destino es prefijado.
Programación probabilística	Gholamnejad et al.	2006	Optimización multiobjetivo	<ul style="list-style-type: none"> * La incertidumbre geológica se incorpora al modelo. * Modelo considera aspectos operacionales. 	<ul style="list-style-type: none"> * Utilizan hipótesis de normalidad. * Fijan a priori leyes de corte. * No se presentan casos de estudio.

Tabla 5: Resumen de los principales enfoques para el problema de agendamiento bajo incertidumbre (3/4).

Tipo de modelo	Autor	Año	Método	Ventajas	Desventajas
Optimización estocástica aversa al riesgo	Lagos et al.	2011	Minimización de CVaR, sujeto a restricciones	<ul style="list-style-type: none"> * Permite cuantificar y evaluar el riesgo de manera explícita. * Separa las decisiones de extracción y procesamiento. 	<ul style="list-style-type: none"> * No aplicable a grandes instancias. * Presentan una versión simplificada en términos de requerimientos.
Optimización estocástica robusta	Kumral	2010	Optimización multiobjetivo	<ul style="list-style-type: none"> * Incorpora incertidumbre en las leyes y en los precios de los metales. * Permite generar una política de valor-riesgo. 	<ul style="list-style-type: none"> * No es claro cómo seleccionar los ponderadores de las medidas de robustez. * La ley de corte es prefijada. * No es aplicable a instancias grandes.
Programación entera estocástica en dos etapas con recurso	Dimitrakopoulos y Ramazan	2013	Optimización multiobjetivo	<ul style="list-style-type: none"> * Incluye acopios en su formulación. * Aplica la metodología en un caso estudio. * Utiliza todos los escenarios geológicos en el modelo. 	<ul style="list-style-type: none"> * Fija a priori el destino de cada bloque. * No es claro cómo seleccionar la tasa de descuento geológica. * No es aplicable a grandes depósitos.

Tabla 6: Resumen de los principales enfoques para el problema de agendamiento bajo incertidumbre (4/4).

5. Metodología

La metodología para el presente trabajo de tesis se basará principalmente en un desarrollo secuencial para el proceso de planificación de la producción en el largo plazo de una mina a rajo abierto, considerando la incertidumbre geológica representada por una serie de simulaciones condicionales del modelo de bloques. Esta metodología secuencial incluye desarrollar nuevas estrategias para cada una de las etapas, a saber: (i) definición de pit final, (ii) selección de fases, y (iii) agendamiento en el tiempo de la producción.

A continuación, se mostrarán los detalles de las metodologías utilizadas en cada una de las etapas. Para ello, sea \mathcal{B} un modelo de bloques. Cada bloque será denotado por b, b' , los cuales son identificados por las coordenadas de su centro $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Múltiples realizaciones (simulaciones condicionales) del modelo de recursos son generadas para representar la incertidumbre geológica, las cuales están indexadas por $\mathcal{R} = \{1, \dots, R\}$.

5.1. Etapa 1: definición de pit final basado en gestión del beneficio-riesgo

En esta tesis se propone una metodología para calcular la envolvente económica considerando la incertidumbre geológica incluida de manera explícita, por medio de simulaciones de la ley, basado en el desarrollo hecho en Jélvez et al. (2015), quienes realizan una comparación de los distintos enfoques para este problema y proponen una formulación que busca un equilibrio entre maximizar el valor y minimizar el riesgo de pérdidas asociadas al incumplimiento del compromiso productivo. En adelante, cada vez que se use el término *riesgo*, se entenderá que es en el contexto de las pérdidas económicas ocasionadas por una mala estimación de las reservas. En particular, se desarrolla un modelo de optimización multiobjetivo que maximiza el beneficio esperado y minimiza el riesgo, expresado en términos del Valor Condicional en Riesgo (CVaR), en el problema de pit final. Para comenzar es necesario reforzar alguna notación: al igual que antes, el escenario geológico $r \in \mathcal{R}$ se traduce en el valor económico v_{br} , utilizando la valorización (2) o (5) con la ley y_{br} del bloque b y escenario r . Luego, a lo largo de todos los escenarios, se puede calcular el valor esperado para cada bloque b promediando los valores v_{br} , el cual se denota como \bar{v}_b .

En este caso, la variable de decisión viene dada por

$$x_b = \begin{cases} 1 & \text{si el bloque } b \text{ pertenece al pit final,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (16)$$

Conceptualmente, el interés está en resolver el siguiente problema

$$\max_{\mathbf{x} \in X} [\text{Valor}(\mathbf{x}) - \mu \cdot \text{CVaR}_\delta(\mathbf{x})], \quad \mu \geq 0. \quad (17)$$

Como se demuestra en Krokmal et al. (2002), el Teorema 1.1 se puede extender a optimización multiobjetivo y la componente $\text{CVaR}_\delta(\mathbf{x})$ del modelo (17) puede sustituirse en el caso discreto por $\tilde{F}_\delta(\mathbf{x}, \zeta)$, ampliando el espacio de búsqueda por $X \times \mathbb{R}$. En consecuencia, se tiene la siguiente formulación

$$(\text{PPF}_\mu) \quad \text{máx} \quad \left[\sum_{b \in \mathcal{B}} \bar{v}_b x_b - \mu \left(\zeta + \frac{1}{R(1-\delta)} \sum_{r \in \mathcal{R}} z_r \right) \right] \quad (18)$$

$$\text{s.a.} \quad x_b \leq x_{b'} \quad \forall b \in \mathcal{B}, b' \in \text{PREC}(b) \quad (19)$$

$$z_r \geq f(\mathbf{x}, \mathbf{y}^r) - \zeta \quad \forall r \in \mathcal{R} \quad (20)$$

$$z_r \geq 0 \quad \forall r \in \mathcal{R} \quad (21)$$

$$x_b \in \{0, 1\} \quad \forall b \in \mathcal{B} \quad (22)$$

Es importante destacar que una solución óptima $(\mathbf{x}^*, \zeta^*, \mathbf{z}^*)$ al problema (PPF_μ) determina qué bloques pertenecen al pit final, cuál es el VaR y CVaR asociados y cómo se distribuye el impacto de cada escenario en el CVaR. También se destaca que la formulación se planteó en términos generales, pues depende de cómo se defina la función de pérdida. En este trabajo de tesis interesa medir las pérdidas asociadas a las desviaciones a partir de la información de los escenarios de leyes respecto a la información del modelo krigeado, o en su defecto, del escenario promedio. En consecuencia, se define la siguiente función de pérdida

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}^r) = \sum_{b \in \mathcal{B}} (P - C_v) \cdot \text{Rec} \cdot f \cdot [\bar{l}_b - y_{br}] \cdot \text{ton}_b \cdot x_b \quad (23)$$

donde y_{br} representa la ley del bloque b cuando se considera el escenario r , \bar{l}_b puede representar la ley del bloque b en el modelo krigeado, o en su defecto, la ley esperada a lo largo de todos los escenarios. Esta función se puede interpretar como la pérdida obtenida en el escenario r respecto al escenario base (metodología tradicional).

El último aspecto que merece atención en el modelo (PPF_μ) es el parámetro μ que multiplica la aproximación del CVaR en la función objetivo. Variando el valor de este parámetro es posible analizar el *trade-off* entre los dos objetivos en conflicto: maximizar el valor esperado del pit final y minimizar el CVaR, obteniendo para un nivel de confianza dado, la frontera eficiente. Esta frontera es el conjunto de puntos del plano de valor-riesgo, en el cual están todas las opciones de pit final que tienen un equilibrio óptimo entre máximo beneficio y mínimo riesgo. Esta frontera permite al inversionista (evaluador) tomar la mejor decisión sobre cuál es el pit final de máximo beneficio, dado un nivel de riesgo, o bien, minimizar el riesgo si se espera un retorno determinado. La Figura 11 muestra la forma típica que se obtiene de una curva de frontera eficiente al variar el parámetro μ .

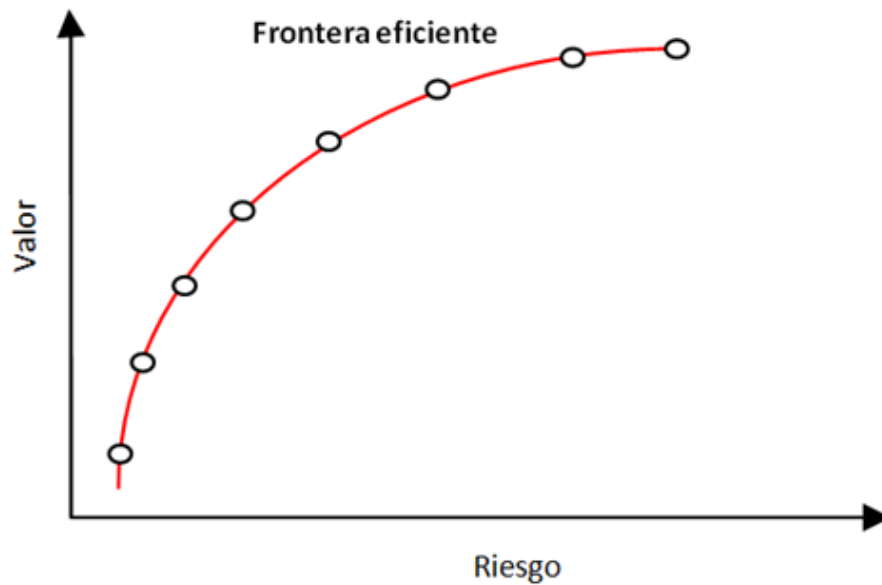


Figura 11: Frontera eficiente en el plano valor-riesgo. Cada punto en la frontera representa una alternativa de pit final.

La importancia de este gráfico es interesante: por un lado, permite al evaluador considerar alternativas de pit final en función del riesgo que el dueño esté dispuesto a asumir, con cierta promesa de valor esperado. Por otra parte, su estructura permite comparar cualquier alternativa determinista que se tenga (por ejemplo, con el modelo krigeado) sin consideración del riesgo, con el objetivo de saber en qué parte de la región factible se encuentra esta alternativa, o dicho de otra manera, qué tan alejada de la frontera eficiente se encuentra, y a la vez, buscar alternativas de pit final que permitan, bien aumentar el valor manteniendo el riesgo, o bien, disminuir el riesgo manteniendo el valor, como muestra la Figura 12: el punto A representa una alternativa de pit final determinista que no es óptima en términos de balancear el valor esperado y el riesgo. Conociendo la frontera eficiente, es posible encontrar dos puntos en la frontera que sirven de alternativas directas para la solución A, a saber, (i) manteniendo constante el riesgo, se puede **aumentar** el valor esperado de esta alternativa, lo cual se representa con un movimiento vertical desde el punto A hasta llegar al punto B de la frontera; o bien, (ii) manteniendo constante el valor y **disminuyendo** el riesgo de pérdidas debido a la mala caracterización respecto a los escenarios, donde en tal caso se debe realizar un movimiento horizontal desde el punto A hasta el punto C.

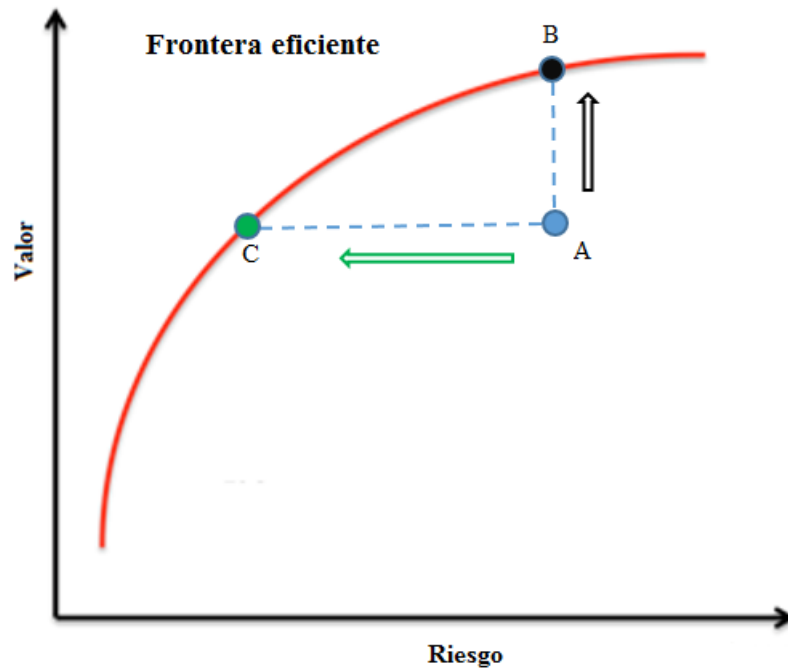


Figura 12: Soluciones factibles (A) pueden ser mejoradas conociendo la frontera eficiente, ya sea aumentando el valor y manteniendo el riesgo constante (B), o bien, disminuyendo el riesgo y manteniendo el valor esperado (C).

Algunos de los criterios, entre muchos otros, que puede utilizar el evaluador para decidir qué pit final elegir son

- (i) Analizar el *ratio* CVaR/Valor y elegir aquel que no supere cierto umbral predefinido por el evaluador.
- (ii) Elegir el pit final que reporte mayor diferencia entre valor esperado y CVaR. Utilizando este criterio, el pit final será, por definición, aquel obtenido con $\mu = 1$.
- (iii) A priori, es posible que por políticas internas de la empresa, el evaluador no pueda aceptar proyectos con riesgo superior a un valor dado R^+ : en este caso, el criterio será elegir la alternativa con mayor valor y riesgo acotado por R^+ .
- (iv) Contrario al caso anterior, puede ocurrir que el evaluador quiera minimizar el riesgo, pero asegurar un retorno mínimo V^- : en este caso, el criterio será seleccionar el pit final con mínimo CVaR de modo tal que el valor esperado sea mayor o igual que V^- .

Los resultados de interés en la frontera eficiente se encuentran en la p-meseta (puntos de la frontera que se encuentran en el p% de mayor valor esperado). En general, la decisión de pit final se tomará dentro de esta meseta, buscando la alternativa que mantenga un alto valor esperado

y reduzca el riesgo asociado. De todas formas, siempre es importante realizar comparaciones absolutas, dada la naturaleza de las variables económicas de interés, por ejemplo, como se hace en el criterio (ii). Por último, se debe evitar la comparación entre los valores de VaR y CVaR para un mismo nivel de confianza, debido a que no se puede olvidar que ellos están indicando información de distintas partes de la distribución de pérdidas.

5.2. Etapa 2: Selección automática de fases a partir de pits anidados estocásticos

En la etapa 2 se propone una nueva formulación para la selección automática de fases, a partir de una serie de pits anidados que son generados considerando los distintos escenarios geológicos. En este enfoque se incorporan elementos de automatización a la metodología tradicional (generación de pits anidados y selección de fases), haciéndolo muy atractivo como aplicación a escala industrial.

5.2.1. Introducción a la generación de pits anidados

La metodología que se desarrolla en esta sección se basa en las siguientes hipótesis y notación para la generación de los pits anidados:

1. Existencia de un pit final, obtenido en la etapa anterior, el cual denotaremos sin pérdida de generalidad como \mathcal{B} .
2. Los pits anidados se generan utilizando una parametrización sobre el precio del metal y un modelo económico de bloques.
 - 2.1 **Parametrización:** se define una secuencia de *revenue factors* $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$, los cuales son usados para escalar el precio del metal, con $\lambda_i \in (0, 1]$, $i = 1, \dots, N$. Para caracterizar esta familia de *revenue factors* se deben definir cuántos valores se van a utilizar (en este caso N) y los valores inicial y final, los cuales son a elección del planificador, no existiendo criterios objetivos que aseguren una adecuada generación de pits anidados en el sentido de evitar el problema del gap.
 - 2.2 **Modelo económico:** el valor económico v_{br}^i del bloque b asociado al *revenue factor* λ_i en el escenario r se obtiene valorizando con el modelo (2) o (5), según se utilizó en la sección 5.1, donde el precio P debe escalarse por el factor λ_i en cada escenario y luego obtener el valor esperado a lo largo de todos los escenarios. Por ejemplo, utilizando la ley de corte crítica LCC

$$v_{br}^i = \begin{cases} [(P \cdot \lambda_i - C_v) \cdot Rec \cdot f \cdot y_{br} - C_m - C_p] \cdot \tau_{onb} & , \text{ si } y_{br} \geq \frac{C_p + C_m}{(P \cdot \lambda_i - C_v) \cdot Rec \cdot f} \\ -C_m \cdot \tau_{onb} & , \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Se asume que todos los factores están en unidades bien definidas y que la ley de corte seleccionada está en concordancia con aquella seleccionada en la valorización de la etapa anterior. Ahora se obtiene el valor esperado de cada bloque asociado al *revenue factor* λ_i

$$v_b^i = \frac{1}{R} \sum_{r \in \mathcal{R}} v_{br}^i$$

3. Se resuelve sucesivamente una serie de problemas de tipo pit final para obtener una familia de pits anidados

$$\begin{aligned} (\text{PPF}_{\lambda_i}) \quad & \text{máx} \quad \sum_{b \in \mathcal{B}} v_b^i x_b^i \\ \text{s.a.} \quad & x_b^i \leq x_{b'}^i \quad \forall b \in \mathcal{B}, b' \in \text{PREC}(b) \\ & x_b^i \in \{0, 1\} \quad \forall b \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

En este modelo, x_b^i es una variable binaria que es igual a 1 si el bloque b pertenece al i -ésimo pit anidado, y 0 si no.

En el paso de parametrización se mencionó la imposibilidad de asegurar un control en los incrementos de tonelajes entre dos pits consecutivos (*gap problem*). Una forma simple para refinar (potencialmente) estos incrementos se puede lograr mediante el siguiente procedimiento:

Procedimiento 5.1. *Pasos para refinar pits en términos de volumen y tonelaje.*

1. **Identificar dónde se desea refinar:** suponga que se identifican dos valores consecutivos de *revenue factors* donde se desea refinar; por ejemplo, para fijar ideas λ_k y λ_{k+1} , con una diferencia de $d_k = \lambda_{k+1} - \lambda_k$. Se desea refinar en M partes iguales.
2. **Calcular los nuevos *revenue factors* intermedios:** para ello se utiliza la siguiente expresión:

$$\lambda(j) = \frac{\lambda_k}{N} + d_k \frac{j}{MN} \quad \forall j \in \{1, \dots, M-1\}$$

3. **Reordenar los pits anidados:** si es posible obtener pits intermedios entre dos pits consecutivos, es necesario renombrar los pits, sólo para mantener un orden en la sucesión creciente de los pits anidados.

Es muy importante destacar que este procedimiento no garantiza reducir el gap entre los volúmenes de pits consecutivos, debido a que esto depende fuertemente de la distribución de

mineral dentro del pit final, por ejemplo, en depósitos con grandes volúmenes de material estéril entre zonas mineralizadas no es posible garantizar el refinamiento.

Como el pit obtenido con $\lambda = 1$ no necesariamente coincide exactamente con la decisión de pit final tomada en la etapa anterior es posible que se deba ajustar la envolvente total con el último pit anidado. Esto puede suceder en los siguientes casos.

- (i) Cuando el pit final de la etapa 1 se alcanza con un $\lambda \leq 1$: tal caso no presenta problemas, en el mejor de los casos se podría realizar una refinación entre pits intermedios, como se explica en el Procedimiento 5.1, el cual no siempre es factible.
- (ii) Cuando el pit final de la etapa 1 no se alcanza con un $\lambda \leq 1$: en tal caso se puede seguir escalando con el mismo paso de *revenue factors* hasta alcanzar la envolvente final, o bien, definir un $(N + 1)$ -ésimo pit que incluya el complemento de una sola vez, de modo tal que coincida con el pit final. Esto se recomienda cuando el complemento consta de una pequeña cantidad de bloques.

Los pasos anteriores permiten generar una serie de pits anidados para el caso estocástico: básicamente esta es la forma en que Marcotte y Caron (2013) generan una valorización estocástica para el cálculo de pit final (modelo base que se utiliza en este trabajo para generar pits anidados), considerando todos los escenarios. En el caso determinista, Lerchs y Grossmann (1965) fueron los primeros en observar que obtener los pits anidados es equivalente a encontrar la clausura máxima de un grafo y propusieron un algoritmo para resolverlo. Para una revisión de algoritmos modernos que resuelven problemas de este tipo, ver Chandran y Hochbaum (2009).

5.2.2. Formulación del problema de selección automática de fases

Una vez definido el conjunto de pits anidados en base a todos los escenarios, cabe preguntarse cómo utilizar estos pits para seleccionar fases que ayuden al control de la producción. En la sección 2.3 se mencionó cómo se realiza esta tarea bajo la metodología tradicional, además de las dificultades y limitaciones que enfrenta: una de ellas está relacionada con que no se aplican criterios bien definidos para seleccionar pits que representen las fases, y su éxito depende de la experiencia del planificador en controlar indicadores claves, tales como relaciones estéril mineral, espacios operacionales, diferencias de tonelajes, entre otros. En este trabajo de tesis se propone un modelo que, caracterizando las fases a partir del conjunto de pits anidados, permite encontrar la mejor combinación de fases que satisface una serie de criterios y que están relacionados a los indicadores claves mencionados.

Primero se procede a definir la notación y posterior formulación del modelo que automatiza la selección de fases con criterios bien definidos. Para ello, sea P_i el i -ésimo pit anidado, con

$i = 1, \dots, N$. Para ser consistentes con la notación es necesario definir un pit auxiliar vacío (sin bloques), el cual será denotado como P_o . La propiedad de pits anidados (Lerchs y Grossmann 1965) permite escribir

$$P_o \subseteq P_1 \subseteq \dots \subseteq P_N$$

Dada esta propiedad, se pueden formalizar las fases como el conjunto de bloques dentro de la diferencia entre dos pits, esto es

$$F_{ij} = P_i \setminus P_j \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, j \in \{0, \dots, i-1\}.$$

Algunas consideraciones respecto a las fases:

- (i) El conjunto de fases será denotado como \mathcal{F} .
- (ii) Dados N pits anidados distintos, el número total de fases posibles teóricamente es $\frac{N(N+1)}{2}$.
- (iii) Para N pits anidados distintos, existen 2^{N-1} formas diferentes de seleccionar una partición del pit final en términos de fases.

Claramente es imposible aplicar un esquema enumerativo y probar todas las combinaciones para encontrar el mejor diseño de fases. Por ejemplo, para un caso donde se tienen 30 pits anidados, el número de combinaciones posibles es superior a los 500 millones.

Ahora, para cada fase se define $r_{ton_{ij}}$ como el tonelaje total de la fase F_{ij} . Similarmente, $o_{ton_{ij}}$ representa el tonelaje de mineral (según la ley de corte aplicada) en la fase F_{ij} . Suponiendo que se desea mantener un control en los tonelajes de las fases, los valores máximos y mínimos que acotan la fase F_{ij} vienen dados, respectivamente, por: (i) RT_{ij}^+ y RT_{ij}^- para el tonalaje total de roca, y (ii) OT_{ij}^+ y OT_{ij}^- para el tonalaje de mineral. Cabe mencionar que los tonelajes referidos en esta etapa toman en cuenta todos los escenarios en su definición, tomando tonelajes esperados previa clasificación inicial entre estéril y mineral, según la instancia de modelo económico inicial y los escenarios de leyes.

El conjunto de fases predecesoras a una fase dada $F_{i_o j_o}$, donde $i_o = 2, \dots, N$ y $j_o = 1, \dots, i_o - 1$ se denota mediante

$$PREC_{i_o j_o} = \{F_{ij} \in \mathcal{F} : i = j_o, j \in \{0, \dots, j_o - 1\}\}.$$

De manera similar, el conjunto de fases sucesoras a una fase dada $F_{i_o j_o}$, donde $i_o = 1, \dots, N - 1$ y $j_o = 0, \dots, i_o - 1$ se define por

$$SUC_{i_o j_o} = \{F_{ij} \in \mathcal{F} : i \in \{i_o + 1, \dots, N\}, j = i_o, \}.$$

Ahora se presenta el modelo para selección automática de fases, mostrando cómo definir las variables, cuáles son algunos de los posibles objetivos a elegir y qué restricciones se deben cumplir.

5.2.2.1 Variables

Las variables están relacionadas a la decisión de si seleccionar o no una fase dada.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la fase } F_{ij} \text{ pertenece a la selección de fases,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (24)$$

5.2.2.2 Función objetivo

Existen varias alternativas para definir la función objetivo, donde la elección particular dependerá de los objetivos del planificador y del caso de estudio particular. En general, las recomendaciones para realizar una buena elección pasan por asegurar la extracción de mineral lo antes posible, lo que de alguna forma viene asegurado por los pits anidados, pero también por asegurar equilibrios de movimientos de mineral y estéril a lo largo de la vida de la mina, a la vez que el diseño propuesto asegure espacios operacionales mínimos. Algunos ejemplos de función objetivo se dan a continuación.

- (i) Minimizar las diferencias de los tonelajes entre las fases, ya sea de mineral o total (problema del gap).
- (ii) Minimizar la relación estéril mineral (REM) en las primeras fases, retrasando lo más posible la extracción de estéril.
- (iii) Optimizar el número de fases requeridas, por ejemplo, cuál es el número mínimo de fases que satisface los requerimientos dados en las restricciones.
- (iv) Definir una métrica de diseño operacional, con la cual se busque maximizar el ancho de fase en una dirección dada.

En la sección 6.3 se mostrará una aplicación de este modelo de selección automática de fases, cuyo objetivo es como el ejemplo (iii), mientras que en la sección 7.3 se muestra otra aplicación, pero utilizando el objetivo (i), cuya formulación se presenta en el Anexo C. Lo importante es mostrar la versatilidad del modelo, adaptándose a las necesidades del planificador y al caso de estudio particular.

5.2.2.3 Restricciones

Las restricciones se clasifican en **estructurales** (a.1 - a.3), las que siempre se aplican y hacen que la selección automática de fases esté bien definida; **especiales** (b.1 - b.2), las que imponen

condiciones a las fases y se aplican en la medida que no estén en conflicto con el objetivo; y las **simplificadoras** (c.1 - c.2), que buscan fijar variables aprovechando la estructura del problema y reduciendo el espacio de búsqueda.

(a) **Estructurales:** la selección de fases debe ser una partición del pit final. Por lo tanto, se deben imponer siempre las siguientes restricciones:

(a.1) *Fases con inicio y fin:* la selección de fases debe considerar una fase inicial F_{i0} y una fase final F_{Nj} en la partición, por lo que

$$\sum_{i=1}^N x_{i0} = 1 \quad (25)$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} x_{Nj} = 1 \quad (26)$$

(a.2) *Relación con fases predecesoras:* para seleccionar una fase F_{ij} , debe haber sido seleccionada una y sólo una de sus fases predecesoras

$$x_{ij} \leq \sum_{F_{uv} \in \text{PREC}_{ij}} x_{uv} \quad \forall i \in \{2, \dots, N\}, j \in \{1, \dots, i-1\} \quad (27)$$

$$\sum_{F_{uv} \in \text{PREC}_{ij}} x_{uv} \leq 1 \quad \forall i \in \{2, \dots, N\}, j \in \{1, \dots, i-1\} \quad (28)$$

(a.3) *Relación con fases sucesoras:* para seleccionar una fase F_{ij} , debe haber sido seleccionada una y sólo una de sus fases sucesoras

$$x_{ij} \leq \sum_{F_{uv} \in \text{SUC}_{ij}} x_{uv} \quad \forall i \in \{1, \dots, N-1\}, j \in \{0, \dots, i-1\} \quad (29)$$

$$\sum_{F_{uv} \in \text{SUC}_{ij}} x_{uv} \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, N-1\}, j \in \{0, \dots, i-1\} \quad (30)$$

(b) **Especiales:** se refiere al tipo de restricciones opcionales que afectan algún atributo de las fases, tales como:

(b.1) *Número de fases predefinido:* si en vez de optimizar el número de fases, como en el ejemplo (iii) de función objetivo, éste es un dato que se desea fijar de antemano, supongamos n_o , donde $1 \leq n_o \leq N$, la restricción asociada es

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{i-1} x_{ij} = n_o \quad (31)$$

Por supuesto, es posible ser menos estricto con esta condición, imponiendo cotas máximas y/o mínimas al número de fases requerido.

(b.2) *Tonelajes de las fases*: el tonelaje de mineral y roca total (mineral + estéril) deben estar acotados para controlar el problema del gap. Para ello se hace, respectivamente

$$OT_{ij}^- x_{ij} \leq o_{ton_{ij}} x_{ij} \leq OT_{ij}^+ \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, j \in \{0, \dots, i-1\} \quad (32)$$

$$RT_{ij}^- x_{ij} \leq r_{ton_{ij}} x_{ij} \leq RT_{ij}^+ \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, j \in \{0, \dots, i-1\} \quad (33)$$

(c) **Simplificadoras**: este tipo de restricciones busca fijar variables para reducir el espacio de búsqueda de soluciones factibles. Básicamente se aprovechan de que no es posible asegurar la existencia de pits con tonelaje positivo al considerar una serie de *revenue factors*.

(c.1) *Fijar variables I*: si se asume que los $K < N$ primeros *revenue factors* entregan pits vacíos $P_1 = \dots = P_K = P_o$, entonces es posible fijar las fases asociadas a esos pits, por lo que se puede hacer lo siguiente

$$x_{ij} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, K\}, j \in \{0, \dots, i-1\} \quad (34)$$

(c.2) *Fijar variables II*: si los primeros K pits son vacíos, las fases F_{ij} asociadas a $i = K + 1, \dots, N$ serán todas iguales, con $j = 0$, por lo tanto, es posible fijar las variables restantes

$$x_{ij} = 0 \quad \forall i \in \{K + 1, \dots, N\}, j \in \{1, \dots, i-1\} \quad (35)$$

Si al inicio del proceso se eliminan los pits vacíos, no es necesario imponer las restricciones simplificadoras, sin embargo, se presenta así porque el objetivo es automatizar el proceso desde el inicio.

La Figura 13 muestra de forma simple el concepto fundamental de esta sección: desde un conjunto de pits anidados y aplicando el modelo desarrollado en base a criterios bien definidos, se obtiene una solución al problema de selección de fases.

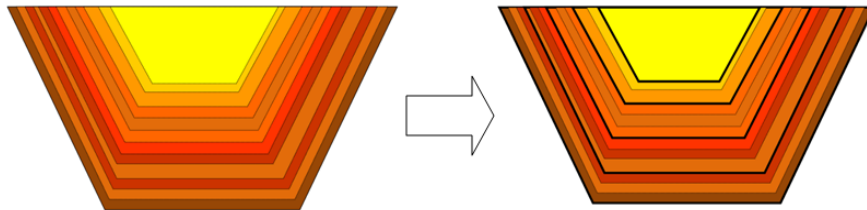


Figura 13: A partir de un conjunto de pits anidados (izquierda), y mediante el uso del modelo que automatiza la selección de fases, se obtiene la solución (derecha) del problema, donde algunos de los pits son elegidos como fases.

En el Anexo C (sección 9.4) se presenta una formulación alternativa del modelo presentado en esta sección para seleccionar fases de forma automática, buscando como objetivo minimizar

las diferencias entre los tonelajes esperados de las fases, considerando un conjunto de escenarios geológicos.

Dado que no hay consideraciones temporales en la etapa de selección de pushbacks y no se consideran todos los factores en su determinación resulta imposible asegurar cuál es la mejor elección de fases que asegure el mayor valor descontado del proyecto en la etapa de agendamiento. La metodología propuesta en esta sección busca, por una parte, incluir los distintos escenarios de leyes en los pits anidados que sirven de base para la selección de fases, y por otra, proponer un modelo que asista de manera rápida y objetiva en la tarea de seleccionar fases en base a criterios bien definidos. Como la incertidumbre geológica se considera solamente en la generación de pits, el modelo que automatiza la selección de fases puede ser aplicado incluso al caso determinista.

Al terminar este capítulo, cabe recordar que la forma de modelar el problema de selección automática de fases depende de los objetivos que quiera implementar el planificador: tanto en la presente sección como en el Anexo C se dan ejemplos de formulaciones particulares, definiendo ciertos objetivos y restricciones, pero la caracterización de las fases a partir de los pits anidados es el núcleo de la contribución de esta etapa.

5.3. Etapa 3: Agendamiento de la producción

Definida la envolvente económica y en su interior la selección de fases, en esta sección se mostrará la metodología para agendar la producción en el tiempo, con el fin de generar un plan de producción tentativo, respetando el diseño impuesto en las etapas anteriores. El modelo de agendamiento presenta las siguientes características:

- **Multiperiodo:** la dimensión temporal es incluida en el agendamiento de bloques, permitiendo que el modelo decida cuál es el mejor periodo de extracción para cada bloque, dentro de un horizonte de planificación y considerando una tasa de descuento.
- **Multidestino:** a diferencia de muchos modelos existentes en la literatura que consideran una ley de corte fija para decidir el destino de cada bloque, en esta formulación es el modelo quien decide cuál es el mejor destino para cada bloque.
- **Considera escenarios geológicos explícitamente:** la información dada por las simulaciones condicionales es entregada directamente al modelo para que las considere simultáneamente y se tome la mejor decisión de agendamiento, minimizando las desviaciones de los objetivos de producción a lo largo de todos los escenarios.
- **Respeto el diseño de fases:** la extracción sigue la secuencia impuesta por las fases. Existen varias opciones de orden que se pueden seguir, por ejemplo: (i) modalidad de orden estricto,

esto es, que para comenzar la extracción en una fase, primero se debe haber extraído completamente la fase anterior, o bien, (ii) modalidad de extracción simultánea en más de una fase, respetando una mínima/máxima diferencia de alturas (bancos) entre ellas.

- **Respetar la capacidad de mina:** los equipos de carguío y transporte definen una capacidad máxima de material que puede ser extraído desde la mina. Además, es deseable entre los distintos periodos imponer requerimientos mínimos de extracción, con el fin de evitar la capacidad ociosa de los equipos.
- **Respetar la capacidad de planta de procesamiento:** similar al caso anterior, un chancador por ejemplo, tiene una capacidad máxima para procesar mineral, sin embargo, imponer restricciones de procesamiento mínimo también es importante para evitar capacidad ociosa.
- **Respetar las restricciones de mezcla:** la calidad del material que es procesado debe ser controlado para un funcionamiento óptimo de la planta. Un buen ejemplo de esto es la presencia de impurezas o contaminantes en el concentrado, como el arsénico.

En la literatura existen versiones simplificadas al modelo que se presentará (por ejemplo, ver Ramazan y Dimitrakopoulos (2007) o Leite y Dimitrakopoulos (2014)), en las que básicamente castigan las desviaciones de los objetivos de producción a lo largo de todos los escenarios que representan la variabilidad geológica, pero que no optimizan la ley de corte, o realizan el agendamiento desde un pit final determinista, sin consideración de la incertidumbre en etapas tempranas, entre otros aspectos que son ignorados.

A continuación, se dará la notación complementaria a la dada en las secciones anteriores para definir el lenguaje que permitirá presentar el modelo de agendamiento bajo incertidumbre geológica.

5.3.1. Notación

Dado que el depósito fue particionado en un conjunto de n_0 fases, para tener control sobre la geometría de extracción y organizar los equipos, la p -ésima fase es denotada como \mathcal{B}_p y $\mathcal{B} = \bigcup_{p=1}^{n_0} \mathcal{B}_p$, donde n_0 es el número total de fases. Además, se definen los *bancos* como el conjunto de todos los bloques que tienen la misma coordenada z , en otras palabras, un banco es cada una de las secciones horizontales del modelo de bloques. Intersectando fases y bancos es posible obtener otras unidades llamadas paneles (fase-banco), las cuales serán denotadas por

$$\mathcal{B}_p^j := \{(x, y, z) \in \mathcal{B}_p : z = z(j)\} \quad \forall j = 1, \dots, J_p$$

donde J_p representa el número de bancos dentro de la fase p . La correspondencia entre los índices $j = 1, \dots, J_p$ y cada fase-banco será descendente, es decir,

$$z(1) > z(2) > \dots > z(J_p)$$

por lo que es posible identificar cada fase-banco con un índice $j = 1, \dots, J_p$. Otra forma abreviada de escribir esto es $j \in \overline{1, J_p}$.

Se recuerda que múltiples realizaciones (simulaciones condicionales) del modelo de recursos son consideradas para tomar en cuenta la incertidumbre geológica y son indexadas por $\mathcal{R} = \{1, \dots, R\}$. El conjunto de periodos es denotado por $\mathcal{T} = \{1, \dots, T\}$. También existe un conjunto de destinos $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cup \mathcal{W}$, compuesto de: plantas de proceso $\mathcal{P} = \{1, \dots, P\}$ y botaderos $\mathcal{W} = \{1, \dots, W\}$. En el caso general, los destinos pueden ser identificados por $\mathcal{D} = \{1, \dots, D\}$. El beneficio neto percibido si un bloque $b \in \mathcal{B}$ en el escenario $r \in \mathcal{R}$ es enviado al destino $d \in \mathcal{D}$ en el periodo $t \in \mathcal{T}$ es dado por v_{brdt} . Luego, el valor esperado \bar{v}_{brdt} se obtiene promediando sobre todos los escenarios geológicos.

Es posible identificar, para cada bloque, dos conjuntos de atributos: (i) aquellos relacionados a la cantidad de material y que participan en las restricciones de capacidad, como tonelajes de mineral y estéril; y otros (ii) identificados con la calidad del material que se relacionan a los atributos que son promediados, como leyes de mineral o contaminantes. En particular, definimos rton_b como el tonelaje total (mineral + estéril) del bloque b . Dado que existe incertidumbre dentro de la zona mineralizada, tanto las leyes como los tonelajes de mineral de cada bloque dependen del escenario considerado. Por esto, se define ley_{ebr} y oton_{br} como la ley del elemento e y el tonelaje de mineral, respectivamente, de cada bloque b cuando se considera el escenario r ; esto será útil para controlar las desviaciones de los objetivos de producción. Los límites superior e inferior son denotados, respectivamente, por: (i) capacidad de mina en el periodo t , MC_t^+ y MC_t^- ; (ii) capacidad del proceso $d \in \mathcal{P}$ en el periodo t , PC_{dt}^+ y PC_{dt}^- ; y (iii) calidad del elemento $e \in \mathcal{E}$ que debe controlarse en el periodo t en el proceso d , BC_{edt}^+ y BC_{edt}^- .

5.3.2. Sobre el costo de la incertidumbre

Debido a la incertidumbre geológica, los planes de producción pueden sufrir desviaciones respecto a lo planificado, teniendo que lidiar con problemas de subproducción o sobreproducción de mineral a proceso, o bien, problemas de la calidad del mismo (ley de cabeza) que no se encuentre en el rango de aceptación.

La forma de incluir la incertidumbre en los modelos de esta sección se basa en la incorporación de penalizaciones que castigan el valor económico cuando los objetivos de producción no son alcanzados. Estos modelos se basan en optimización multiobjetivo: apuntan a maximizar el valor descontado acumulado y, simultáneamente, minimizar los efectos negativos de la incertidumbre. En esta formulación se considerará:

- Incertidumbre en el tonelaje de mineral: esto se traduce en desviaciones del tonelaje que alimenta la planta respecto a los objetivos de cada periodo. Las desviaciones referidas pueden

ser de dos tipos:

(i) por exceso, o sobreproducción: un exceso de producción respecto a lo planificado implica un costo relacionado al manejo que debe darse a ese material, ya que operación lo debe apilar para un procesamiento futuro, lo cual implica un costo asociado a la tasa de descuento (pérdida de valor por un beneficio postergado) y un costo de remanaje. En ausencia de acopios y holgura de capacidad de procesamiento, se debe asumir que el mineral extra debe ser enviado a botadero: en este caso, el costo asociado se puede evaluar como la pérdida de valor.

(ii) por defecto, o subproducción: este costo está relacionado a la pérdida de valor debido al incumplimiento del requerimiento mínimo de la planta de proceso, lo que causa que ésta opere de manera subóptima. En casos reales, las operaciones mineras pueden hacer ajustes en sus planes de corto plazo para evitar estas pérdidas, pero de todos modos esto implicará un ajuste que inevitablemente tendrá un costo.

- Incertidumbre en las concentraciones del metal de interés: afectan las leyes medias deseadas en cada periodo, por lo que puede medirse en términos de las desviaciones en la cantidad de fino producido respecto a la promesa de producción. Al igual que el caso anterior, se pueden tener desviaciones por exceso y por defecto.

Es necesario definir variables continuas para representar las desviaciones de los objetivos de producción a controlar, tanto de la cantidad como de la calidad del tonelaje de mineral. Para cada una de las variables de desviación de los tonelajes existen costos unitarios asociados con el fin de penalizar la función objetivo.

La notación para cada una es:

u_{rt}^- = subproducción de mineral en periodo t y escenario r .

cp_{rt}^- = costo unit. de subproducción de mineral en periodo t y escenario r .

u_{rt}^+ = sobreproducción de mineral en periodo t y escenario r .

cp_{rt}^+ = costo unit. de sobreproducción en periodo t y escenario r .

v_{rt}^- = subproducción de metal en periodo t y escenario r .

cg_{rt}^- = costo unit. de subproducción de metal en periodo t y escenario r .

v_{rt}^+ = sobreproducción de metal en periodo t y escenario r .

cg_{rt}^+ = costo unit. de sobreproducción de metal en periodo t y escenario r .

Estos costos relacionados a la incertidumbre geológica son calculados, en general, para todos los periodos, excepto para el periodo final, debido a que puede distorsionar el costo de la incertidumbre si no se ajustan apropiadamente las capacidades de dicho periodo. La forma en que

se fijan estos costos es de suma importancia, pues determina las penalizaciones que afectan el costo total de la incertidumbre. En rigor, se hablará del costo total descontado de la incertidumbre de leyes. En aplicaciones de esta metodología en casos reales es importante identificar cuáles son los costos en los que se incurre cuando se produce alguna desviación (positiva o negativa) en las metas de producción y el enfoque propuesto permite bandas de aceptabilidad para el tonelaje de mineral y leyes en la mezcla. Cualquier unidad de desviación será penalizada por un costo unitario.

En esta tesis no se consideran acopios, por lo que será necesario imponer como hipótesis que los costos de sub y sobreproducción de mineral son iguales a la pérdida de valor relacionada a ese tonelaje no planificado, es decir

$$cp_{rt}^+ = cp_{rt}^- = \frac{1}{(1+dr)^t} [(P - C_v) \cdot Rec \cdot f \cdot \overline{ley}_{rt} - C_p] \quad (36)$$

donde \overline{ley}_{rt} es la ley de cabeza del periodo t en el escenario r . Esto requiere conocer *a priori* la ley de alimentación a planta para cada escenario en cada periodo, lo cual es imposible pues depende de la solución, sin embargo, esto puede estimarse a partir de iteraciones del modelo, o bien, tomando una aproximación a partir de las cotas de la respectiva restricción en el modelo de agendamiento, la que restringe precisamente la ley de alimentación a planta.

En general, se deben considerar cotas para medir las desviaciones en los niveles aceptables de concentraciones de los elementos de interés: por ejemplo, es claro que la presencia de contaminantes por encima de lo planificado hará incurrir en un costo adicional para volver a la norma; del mismo modo, una concentración de metal por debajo de lo planificado llevará, al menos, una pérdida no considerada, aun cuando en la práctica los acopios sirven para hacer frente a estas situaciones, es inevitable considerar costos no planificados. En particular para el caso de subproducción de metal respecto a lo planificado se puede considerar

$$cg_{rt}^- = \frac{1}{(1+dr)^t} [(P - C_v) \cdot Rec \cdot f] \quad (37)$$

5.3.3. Modelos de agendamiento

Para un modelo de agendamiento es necesario definir variables que permitan decidir qué bloques extraer, cuándo hacerlo y qué hacer con ellos posteriormente. En este trabajo, las decisiones relacionadas a la extracción y elección de destino se toman en forma separada, usando variables binarias para la primera y variables continuas para la segunda, generando una formulación mixta: así, mientras la extracción de un bloque se hace enteramente en un periodo, se permite que distintas porciones de dicho bloque vayan a diferentes destinos, pero en el mismo periodo.

Respecto a la función objetivo, ésta corresponde a la maximización de la esperanza de valor

descontado acumulado, entre todos los escenarios, pero simultáneamente minimizando el costo total asociado a las desviaciones de los objetivos de producción.

Considere para cada bloque $b \in \mathcal{B}$ y periodo $t \in \mathcal{T}$ las siguientes variables

$$x_{bt} = \begin{cases} 1 & \text{si el bloque } b \text{ es extraído durante el periodo } t \text{ o antes,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (38)$$

La interpretación de la variable x_{bt} es acumulativa en t , esto es, $x_{bt} = 1$ si y sólo si la unidad b ha sido extraída en algún periodo \bar{t} , con $1 \leq \bar{t} \leq t$. La razón por la cual resulta conveniente definir de esta forma las variables asociadas a la extracción obedece a razones puramente matemáticas y serán más claras cuando se describa el modelo de optimización: la matriz de coeficientes asociada a las restricciones de precedencia queda con una estructura totalmente unimodular, lo que la hace más conveniente a la hora de resolver el modelo.

Es útil introducir las siguientes variables auxiliares para cada bloque $b \in \mathcal{B}$: $\Delta x_{b1} = x_{b1}$, y $\Delta x_{bt} = x_{bt} - x_{b(t-1)}$ para $t = 2, 3, \dots, T$. Luego, se tiene que $\Delta x_{bt} = 1$ si y sólo si el bloque b es extraído exactamente en el periodo t : este cambio de variable sirve para volver a una descripción más natural del periodo de extracción del bloque b .

Ahora, se consideran para cada bloque $b \in \mathcal{B}$, destino $d \in \mathcal{D}$ y periodo $t \in \mathcal{T}$ las siguientes variables

$$y_{bdt} = \text{fracción del bloque } b \text{ enviado al destino } d \text{ en el periodo } t. \quad (39)$$

Estas variables continuas sirven para decidir qué porciones de cada bloque b son enviadas a cada destino, una vez que b ha sido minado.

Finalmente, para cada fase p , banco j y periodo t se definen las siguientes variables

$$z_{pjt} = \begin{cases} 1 & \text{si la fase-banco } \mathcal{B}_p^j \text{ es extraída completamente durante el periodo } t \text{ o antes,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (40)$$

Estas variables son utilizadas para controlar las relaciones de precedencia entre fases-banco, ya sea dentro de una misma fase, o bien, entre fases contiguas.

Como se dijo al inicio, el agendamiento debe respetar el diseño de fases: si bien el soporte es a nivel de bloques, la extracción se hará respetando unidades de fases-banco (Figura 14a). En un primer caso, se presentará un modelo que requiere extracción en serie de las fases, es decir, para extraer una fase dada, primero se debe haber extraído completamente la fase anterior, similar al escenario *Best Case* del *software* GEOVIA WhittleTM, como se muestra en la Figura 14b. Una segunda estrategia de extracción se plantea para controlar el avance de fases sucesivas, definiendo un número fijo de bancos, que al ser extraídos dentro de una fase, permite la extracción de la

fase siguiente, y de ahí en adelante genera una extracción que mantiene la diferencia (desfase) en cota, similar a las opciones *min/max lead* del *software* GEOVIA Whittle™, ver por ejemplo, la Figura 14c. Ambos modelos son casi idénticos en su formulación, sólo se diferencian en la forma que se definen sus restricciones de precedencias entre fases-banco.

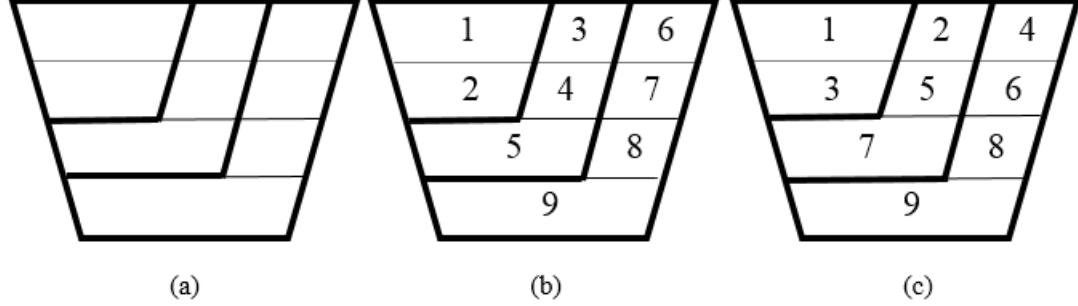


Figura 14: (a) Conjunto de fases-banco para ser agendados. (b) Estrategia fase a fase. (c) Estrategia equilibrada de fases. Los números indican el orden en que deben ser extraídas las fases-banco.

5.3.3.1 Modelo de agendamiento fase a fase

El modelo de optimización para el agendamiento de bloques siguiendo un orden en serie de las fases, viene dado por

$$(P1) \quad \max \sum_{\substack{t \in \mathcal{T}, \\ d \in \mathcal{D}, \\ b \in \mathcal{B}}} \bar{v}_{bdt} y_{bdt} - \frac{1}{R} \sum_{\substack{t \in \mathcal{T}, \\ r \in \mathcal{R}}} c p_{rt}^+ u_{rt}^+ + c p_{rt}^- u_{rt}^- + c g_{rt}^+ v_{rt}^+ + c g_{rt}^- v_{rt}^- \quad (41)$$

$$\text{s.a. } \Delta x_{bt} \geq 0 \quad \forall b \in \mathcal{B}, t \in \mathcal{T} \quad (42)$$

$$\Delta x_{bt} = \sum_{d \in \mathcal{D}} y_{bdt} \quad \forall b \in \mathcal{B}, t \in \mathcal{T} \quad (43)$$

$$z_{p(j-1)t} \leq x_{bt} \quad \forall b \in \mathcal{B}_p^{j-1}, t \in \mathcal{T}, p \in \overline{1, n_o}, j \in \overline{2, J_p} \quad (44)$$

$$x_{bt} \leq z_{p(j-1)t} \quad \forall b \in \mathcal{B}_p^j, t \in \mathcal{T}, p \in \overline{1, n_o}, j \in \overline{2, J_p} \quad (45)$$

$$z_{(p-1)jt} \leq x_{bt} \quad \forall b \in \mathcal{B}_{p-1}^j, t \in \mathcal{T}, p \in \overline{2, n_o}, j = J_p \quad (46)$$

$$x_{bt} \leq z_{(p-1)jt} \quad \forall b \in \mathcal{B}_p^1, t \in \mathcal{T}, p \in \overline{2, n_o}, j = J_{p-1} \quad (47)$$

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} r \text{ton}_b \Delta x_{bt} \leq MC_t^+ \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (48)$$

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} r \text{ton}_b \Delta x_{bt} \geq MC_t^- \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (49)$$

$$\sum_{\substack{b \in \mathcal{B}, \\ d \in \mathcal{D}}} o \text{ton}_{br} y_{bdt} - u_{tr}^+ \leq PC_t^+ \quad \forall r \in \mathcal{R}, t \in \mathcal{T} \quad (50)$$

$$\sum_{\substack{b \in \mathcal{B}, \\ d \in \mathcal{D}}} o \text{ton}_{br} y_{bdt} + u_{tr}^- \geq PC_t^- \quad \forall r \in \mathcal{R}, t \in \mathcal{T} \quad (51)$$

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} [1ey_{ebr} - BC_{edt}^+] o_{ton_{br}} y_{bdt} \leq v_{tr}^+ \quad \forall r \in \mathcal{R}, d \in \mathcal{D}, t \in \mathcal{T}, e \in \mathcal{E} \quad (52)$$

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} [BC_{edt}^- - 1ey_{ebr}] o_{ton_{br}} y_{bdt} \leq v_{tr}^- \quad \forall r \in \mathcal{R}, d \in \mathcal{D}, t \in \mathcal{T}, e \in \mathcal{E} \quad (53)$$

$$x_{bt} \in \{0, 1\} \quad \forall b \in \mathcal{B}, t \in \mathcal{T} \quad (54)$$

$$z_{pjt} \in \{0, 1\} \quad \forall p \in \overline{1, n_o}, j \in \overline{1, J_p}, t \in \mathcal{T} \quad (55)$$

$$y_{bdt} \in [0, 1] \quad \forall b \in \mathcal{B}, d \in \mathcal{D}, t \in \mathcal{T} \quad (56)$$

$$u_{tr}^+, u_{tr}^-, v_{tr}^+, v_{tr}^- \geq 0 \quad \forall r \in \mathcal{R}, t \in \mathcal{T} \quad (57)$$

La expresión (41) presenta la función objetivo, la cual es el valor esperado descontado acumulado percibido de los bloques extraídos sobre el horizonte de planificación T menos el costo total asociado a las desviaciones de los objetivos de producción. (42) restringe a cada bloque ser extraído sólo una vez y (43) requiere que los valores de las variables de extracción y procesamiento sean consistentes, esto es, si un bloque es extraído, entonces éste debe repartirse entre los posibles destinos. A su vez, (44) - (45) corresponden a las restricciones de precedencia verticales entre bancos y (46) - (47) impone un orden en la secuencia de extracción entre fases. Además, (48) y (49) limitan el máximo y mínimo consumo de recursos de mina en cada periodo, respectivamente. A su vez, (50) y (51) limitan el máximo y mínimo consumo de recursos de procesamiento en cada periodo y escenario, respectivamente. De manera similar, (52) y (53) representan las restricciones de mezcla, máxima y mínima ley promedio del elemento e en el destino d para cada escenario r y para cada periodo t . Finalmente, (54) establece que todas las variables asociadas a la extracción asumen valores binarios, (55) representa las variables binarias que controlan las precedencias entre bancos, (56) indica que las variables de procesamiento son continuas y (57) representa las desviaciones en los objetivos de producción.

5.3.3.2 Modelo de agendamiento equilibrado de fases

El modelo de optimización para el agendamiento de bloques siguiendo un orden equilibrado de las fases, no permitiendo una profundidad mayor a cierto umbral Γ entre fases consecutivas, viene dado por

$$(P2) \quad \max \sum_{\substack{t \in \mathcal{T}, \\ d \in \mathcal{D}, \\ b \in \mathcal{B}}} \bar{v}_{bdt} y_{bdt} - \frac{1}{R} \sum_{\substack{t \in \mathcal{T}, \\ r \in \mathcal{R}}} cp_{rt}^+ u_{rt}^+ + cp_{rt}^- u_{rt}^- + cg_{rt}^+ v_{rt}^+ + cg_{rt}^- v_{rt}^- \quad (58)$$

$$\text{s.a. } \Delta x_{bt} \geq 0 \quad \forall b \in \mathcal{B}, t \in \mathcal{T} \quad (59)$$

$$\Delta x_{bt} = \sum_{d \in \mathcal{D}} y_{bdt} \quad \forall b \in \mathcal{B}, t \in \mathcal{T} \quad (60)$$

$$z_{p(j-1)t} \leq x_{bt} \quad \forall b \in \mathcal{B}_p^{j-1}, t \in \mathcal{T}, p \in \overline{1, n_o}, j \in \overline{2, J_p} \quad (61)$$

$$x_{bt} \leq z_{p(j-1)t} \quad \forall b \in \mathcal{B}_p^j, t \in \mathcal{T}, p \in \overline{1, n_o}, j \in \overline{2, J_p} \quad (62)$$

$$x_{bt} \leq z_{p(j-\Gamma)t} \quad \forall b \in \mathcal{B}_{p-1}^j, t \in \mathcal{T}, p \in \overline{2, n_o}, j \in \overline{\Gamma+1, J_{p-1}} \quad (63)$$

$$x_{bt} \leq z_{(p-1)jt} \quad \forall b \in \mathcal{B}_p^{j-\Gamma+1}, t \in \mathcal{T}, p \in \overline{2, n_o}, j \in \overline{\Gamma, J_{p-1}} \quad (64)$$

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} r_{ton_b} \Delta x_{bt} \leq MC_t^+ \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (65)$$

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} r_{ton_b} \Delta x_{bt} \geq MC_t^- \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (66)$$

$$\sum_{\substack{b \in \mathcal{B}, \\ d \in \mathcal{D}}} o_{ton_{br}} y_{bdt} - u_{tr}^+ \leq PC_t^+ \quad \forall r \in \mathcal{R}, t \in \mathcal{T} \quad (67)$$

$$\sum_{\substack{b \in \mathcal{B}, \\ d \in \mathcal{D}}} o_{ton_{br}} y_{bdt} + u_{tr}^- \geq PC_t^- \quad \forall r \in \mathcal{R}, t \in \mathcal{T} \quad (68)$$

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} [\text{ley}_{ebr} - BC_{edt}^+] o_{ton_{br}} y_{bdt} \leq v_{tr}^+ \quad \forall r \in \mathcal{R}, d \in \mathcal{D}, t \in \mathcal{T}, e \in \mathcal{E} \quad (69)$$

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} [BC_{edt}^- - \text{ley}_{ebr}] o_{ton_{br}} y_{bdt} \leq v_{tr}^- \quad \forall r \in \mathcal{R}, d \in \mathcal{D}, t \in \mathcal{T}, e \in \mathcal{E} \quad (70)$$

$$x_{bt} \in \{0, 1\} \quad \forall b \in \mathcal{B}, t \in \mathcal{T} \quad (71)$$

$$z_{pjt} \in \{0, 1\} \quad \forall p \in \overline{1, n_o}, j \in \overline{1, J_p}, t \in \mathcal{T} \quad (72)$$

$$y_{bdt} \in [0, 1] \quad \forall b \in \mathcal{B}, d \in \mathcal{D}, t \in \mathcal{T} \quad (73)$$

$$u_{tr}^+, u_{tr}^-, v_{tr}^+, v_{tr}^- \geq 0 \quad \forall r \in \mathcal{R}, t \in \mathcal{T} \quad (74)$$

La expresión (58) presenta la función objetivo, la cual es el valor esperado descontado acumulado percibido de los bloques extraídos sobre el horizonte de planificación T menos el costo total asociado a las desviaciones de los objetivos de producción. (59) restringe a cada bloque ser extraído sólo una vez y (60) requiere que los valores de las variables de extracción y procesamiento sean consistentes, esto es, si un bloque es extraído, entonces éste debe repartirse entre los posibles destinos. A su vez, (61) - (62) corresponden a las restricciones de precedencia verticales entre bancos y (63) - (64) imponen un orden en la secuencia equilibrada de extracción entre fase-bancos. Además, (65) y (66) limitan el máximo y mínimo consumo de recursos de mina en cada periodo, respectivamente. A su vez, (67) y (68) limitan el máximo y mínimo consumo de recursos de procesamiento en cada periodo y escenario, respectivamente. De manera similar, (69) y (70) representan las restricciones de mezcla, máxima y mínima ley promedio del elemento e en el destino d para cada escenario r y para cada periodo t . Finalmente, (71) establece que todas las variables asociadas a la extracción asumen valores binarios, (72) representa las variables binarias que controlan las precedencias entre bancos, (73) indica que las variables de procesamiento son continuas y (74) representa las desviaciones en los objetivos de producción.

De especial interés para la sección 7.4 resulta el equivalente determinista de este problema, que no considera un conjunto de escenarios geológicos como representación de la incertidumbre. Considerando las mismas variables de extracción (38), procesamiento (39) y control de precedencias (40) que fueron utilizadas en los modelos (P1) y (P2), para encontrar el agendamiento

determinista se utilizará el siguiente modelo

$$(P3) \quad \max \sum_{\substack{t \in \mathcal{T}, \\ d \in \mathcal{D}, \\ b \in \mathcal{B}}} v_{bdt} y_{bdt} \quad (75)$$

$$\text{s.a. } \Delta x_{bt} \geq 0 \quad \forall b \in \mathcal{B}, t \in \mathcal{T} \quad (76)$$

$$\Delta x_{bt} = \sum_{d \in \mathcal{D}} y_{bdt} \quad \forall b \in \mathcal{B}, t \in \mathcal{T} \quad (77)$$

$$z_{p(j-1)t} \leq x_{bt} \quad \forall b \in \mathcal{B}_p^{j-1}, t \in \mathcal{T}, p \in \overline{1, n_o}, j \in \overline{2, J_p} \quad (78)$$

$$x_{bt} \leq z_{p(j-1)t} \quad \forall b \in \mathcal{B}_p^j, t \in \mathcal{T}, p \in \overline{1, n_o}, j \in \overline{2, J_p} \quad (79)$$

$$x_{bt} \leq z_{p(j-\Gamma)t} \quad \forall b \in \mathcal{B}_{p-1}^j, t \in \mathcal{T}, p \in \overline{2, n_o}, j \in \overline{\Gamma+1, J_{p-1}} \quad (80)$$

$$x_{bt} \leq z_{(p-1)jt} \quad \forall b \in \mathcal{B}_p^{j-\Gamma+1}, t \in \mathcal{T}, p \in \overline{2, n_o}, j \in \overline{\Gamma, J_{p-1}} \quad (81)$$

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} r_{ton_b} \Delta x_{bt} \leq MC_t^+ \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (82)$$

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} r_{ton_b} \Delta x_{bt} \geq MC_t^- \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (83)$$

$$\sum_{\substack{b \in \mathcal{B}, \\ d \in \mathcal{D}}} o_{ton_b} y_{bdt} \leq PC_t^+ \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (84)$$

$$\sum_{\substack{b \in \mathcal{B}, \\ d \in \mathcal{D}}} o_{ton_b} y_{bdt} \geq PC_t^- \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (85)$$

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} [\text{ley}_{eb} - BC_{edt}^+] o_{ton_b} y_{bdt} \leq 0 \quad \forall d \in \mathcal{D}, t \in \mathcal{T}, e \in \mathcal{E} \quad (86)$$

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} [BC_{edt}^- - \text{ley}_{eb}] o_{ton_b} y_{bdt} \leq 0 \quad \forall d \in \mathcal{D}, t \in \mathcal{T}, e \in \mathcal{E} \quad (87)$$

$$x_{bt} \in \{0, 1\} \quad \forall b \in \mathcal{B}, t \in \mathcal{T} \quad (88)$$

$$z_{pjt} \in \{0, 1\} \quad \forall p \in \overline{1, n_o}, j \in \overline{1, J_p}, t \in \mathcal{T} \quad (89)$$

$$y_{bdt} \in [0, 1] \quad \forall b \in \mathcal{B}, d \in \mathcal{D}, t \in \mathcal{T} \quad (90)$$

donde v_{bdt} representa el valor del bloque b cuando es enviado al destino d en el periodo t . La expresión (75) presenta la función objetivo, la cual es el valor esperado descontado acumulado percibido de los bloques extraídos sobre el horizonte de planificación T . La ecuación (76) restringe a cada bloque ser extraído sólo una vez y (77) requiere que los valores de las variables de extracción y procesamiento sean consistentes, esto es, si un bloque es extraído, entonces éste debe repartirse entre los posibles destinos. A su vez, (78) - (79) corresponden a las restricciones de precedencia verticales entre bancos y (80) - (81) imponen un orden en la secuencia equilibrada de extracción entre fase-bancos. Además, (82) y (83) limitan el máximo y mínimo consumo de recursos de mina en cada periodo, respectivamente. A su vez, (84) y (85) limitan el máximo y mínimo consumo de recursos de procesamiento en cada periodo, respectivamente. De manera similar, (86) y (87) representan las restricciones de mezcla, máxima y mínima ley promedio del elemento e en el destino d y para cada periodo t . Finalmente, (88) establece que todas las variables asociadas

a la extracción asumen valores binarios, (89) representa las variables binarias que controlan las precedencias entre fases-banco y (90) indica que las variables de procesamiento son continuas.

5.3.4. Estrategias de resolución de los modelos de agendamiento

Se ha reportado extensamente sobre la dificultad de resolver directamente los modelos de agendamiento, incluso sus versiones deterministas, debido al gran número de variables y restricciones de sus modelos. Por ello, es que los esfuerzos de los investigadores de todo el mundo se han volcado a desarrollar algoritmos que exploten la estructura del problema para reducir el esfuerzo computacional y permitir hallar, al menos, buenas soluciones aproximadas. Una completa revisión de los modelos y algoritmos, tanto para el caso determinista como para el caso estocástico, fue detallado en la sección 4.

Una forma simple de reducir la dificultad computacional a la hora de resolver los modelos de agendamiento es disminuyendo el número de variables del mismo. Dado que las variables de decisión que interesan están relacionadas al número de bloques, horizonte de planificación (número de periodos) y conjunto de destinos, es que una reducción de estos conjuntos puede hacer disminuir el número de variables, para efectos del modelo. Dado que el número de bloques es considerablemente mayor que el número de periodos, una reducción en este último puede tener un gran impacto en reducir la cantidad total de variables y restricciones. Basándose en esta idea, Jélvez et al. (2016) y Jélvez et al. (2017) desarrollan varias estrategias heurísticas que permiten reducir las instancias de los modelos de agendamiento, reportando buenas soluciones factibles (menores a un 1% del óptimo en promedio) para una librería completa de problemas de agendamiento, presentando los mejores resultados publicados a la fecha. A continuación, se mostrarán los fundamentos que sustentan estas estrategias: para mayores detalles y casos de estudio, consultar la bibliografía respectiva.

5.3.4.1 Heurística por ventanas: $HV(T', \Delta)$

Esta heurística propone resolver el problema de manera incremental: considera sólo un menor número de periodos $T' < T$ como el horizonte temporal, al cual se conoce como ventana de tiempo, o simplemente ventana; luego, la heurística resuelve para dicho horizonte T' , fijando completa o parcialmente la solución para $\Delta \leq T'$ y removiendo los bloques agendados y fijados. El proceso se repite con los bloques restantes para los periodos siguientes, ajustando las restricciones de manera apropiada y moviendo la ventana hasta que el horizonte de planificación se completa. Para fijar ideas, el caso más simple consiste en fijar ventanas de longitud 1 y resolver el problema periodo a periodo. En este caso se anota $HV(1, 1)$.

Más precisamente, considere una instancia de agendamiento con bloques en \mathcal{B} , periodos en

\mathcal{T} y destinos en \mathcal{D} , y un conjunto de restricciones que se deben cumplir sobre \mathcal{B} , \mathcal{T} y \mathcal{D} y que denotaremos como X . Por simplicidad de notación, esto se anotará como $\text{IA}_X(\mathcal{B}, \mathcal{T}, \mathcal{D})$.

Suponga que la instancia de agendamiento no puede ser resuelta para un horizonte T , pero sí para un horizonte menor T' , es decir, $T' < T$. Por simplicidad, la heurística se describe para $T/T' = m \in \mathbb{N}$ y $T' = \Delta$. Luego, la heurística funciona como sigue:

1. Fijar $m = T/T'$, $k = 1$, $P_0 = \emptyset$.
2. Mientras $k \leq m$:
 - a) Fijar $B(k) = \mathcal{B} \setminus P_{k-1}$.
 - b) Fijar $T(k) = \{(k-1)T' + 1, \dots, kT'\}$
 - c) Resolver $\text{IA}_X(B(k), T(k), \mathcal{D})$.
 - d) Sea $\Omega_k = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} \bigcup_{t=(k-1)T'+1}^{kT'} \phi^{-1}(t, d)$ el conjunto de bloques extraídos. Fijar $P_k = P_{k-1} \cup \Omega_k$.
 - e) $k \leftarrow k + 1$.
3. Retornar el agendamiento ϕ , para todos los bloques $b \in \mathcal{B}$.

La Figura 15 ilustra cómo se genera una solución factible utilizando la heurística descrita, con un horizonte $T = 3$ y una ventana $T' = 1$, fijando esta solución y moviendo la ventana en consecuencia $\Delta = 1$: en el primer periodo los bloques extraídos corresponde al conjunto P_1 . Luego, esos bloques son removidos y el procedimiento se repite para el segundo periodo. Durante el segundo periodo, los bloques minados corresponden al conjunto $P_2 \setminus P_1$. Finalmente, el proceso se repite para el tercer y último periodo.

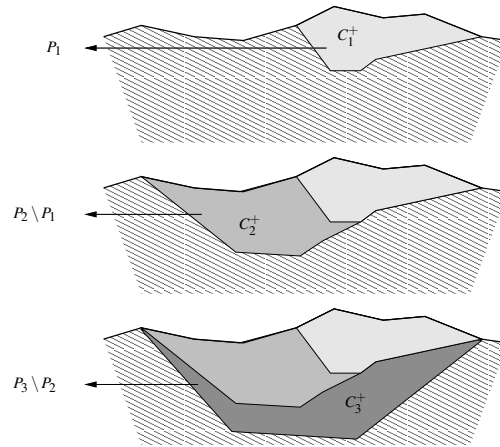


Figura 15: Un ejemplo gráfico de la heurística por ventanas $\text{HV}(T', \Delta)$ con $T' = 1$ y $\Delta = 1$. Las capacidades por cada periodo t se muestran como C_t^+ .

Aunque este procedimiento no necesariamente produce resultados óptimos (ver Ejemplo 5.1), puede dar muy buenas soluciones factibles, como se muestra en los trabajos de Jélvez et al. (2016) y Jélvez et al. (2017).

Ejemplo 5.1. *La mina ficticia 2D que se muestra en la Figura 16 es explotada en 5 periodos. Cada número al interior de los bloques representa el mayor valor económico entre los destinos posibles. Por simplicidad se asume que la capacidad de cada periodo permite que solamente un bloque pueda ser extraído por periodo. No se aplica tasa de descuento. Para denotar las coordenadas de cada bloque se utiliza la notación usual de matrices, es decir, el bloque superior a la izquierda tiene coordenadas $(1, 1)$ y el bloque inferior a la derecha tiene coordenadas $(2, 4)$. Si el ángulo de talud se fija en 45° , para extraer el bloque (x, y) primero se deben extraer los bloques $(x - 1, y - 1)$, $(x - 1, y)$ y $(x - 1, y + 1)$ si $x = 2$ (cuando tales bloques existen).*

En base a lo anterior y sin considerar otras restricciones, el agendamiento óptimo consiste en extraer los bloques $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$ en cualquier orden durante los primeros cuatro periodos, y luego extraer el bloque $(2, 3)$ en el periodo 5. El valor correspondiente es $NPV = 1 + (-1) + (-1) + (-1) + 10 = 8$. Sin embargo, la heurística por ventanas $HV(1, 1)$ seleccionará el bloque $(1, 1)$ en la primera iteración y ningún bloque después. El valor de esta solución es 1, el cual es subóptimo.

1	-1	-1	-1
-1	-1	10	-1

Figura 16: Un ejemplo conceptual donde se muestra que la heurística por ventanas no necesariamente produce una solución óptima.

Existen varias extensiones de las ideas aquí presentadas. Parte de la bibliografía importante sobre esta heurística y su aplicación a problemas de agendamiento de bloques en minas a rajo abierto se puede hallar, como ya se mencionó, en Jélvez et al. (2017) y Jélvez et al. (2016), además de Cullenbine et al. (2011).

6. Caso de estudio sintético

En este capítulo la metodología propuesta será implementada y probada en un caso de estudio sintético 2D con el fin de mostrar su comportamiento, además de analizar posibles ajustes para el correcto funcionamiento de los modelos. Primero se entregan todos los detalles que permitirán definir el caso de estudio sintético donde se aplicará la metodología desarrollada, luego en secciones posteriores se aplican los modelos de cada etapa al caso estudio 2D.

6.1. Antecedentes

A continuación, se mostrará el modelo de bloques y los parámetros que definen el caso de estudio sintético utilizados para validar la metodología desarrollada en la sección 5. La sección 6.1.1 entrega los antecedentes del modelo de bloques; en la sección 6.1.2 se muestran la expresión y los parámetros que definen el modelo económico de bloques (valorización), que serán utilizados para definir la envolvente bajo incertidumbre; en la sección 6.1.3 se presentan los parámetros geotécnicos que definen la relación de precedencia entre bloques para su extracción dentro del yacimiento; y en la sección 6.1.4 se describen los recursos computacionales que fueron utilizados en los experimentos.

6.1.1. Modelo de bloques

El modelo de bloques 2D utilizado en este capítulo corresponde a un corte transversal de un yacimiento de tipo estratoligado de cobre y se obtuvo fijando la coordenada norte en 885[m]. Se dispone de un conjunto de 10 simulaciones condicionales que serán utilizadas para reproducir la variabilidad real de la variable ley de cobre, que será utilizada como representación de la incertidumbre geológica. Este modelo consta de 7.654 bloques de 10x10x10: 3.600 bloques corresponden a bloques dentro de la zona mineralizada, cuyas leyes fueron simuladas, el resto de bloques de material estéril fueron agregados para asegurar el acceso por talud a los bloques de interés. En adelante, este modelo de bloques será llamado BM-Estra. En las Figuras 17 a 20 se pueden ver, a modo de referencia, distintas simulaciones y la ley promedio en vistas del corte transversal. Este modelo cuenta, para cada bloque, con información de:

- * coordenadas espaciales x, y, z
- * tonelaje total
- * 10 simulaciones condicionales de la ley de cobre
- * ley promedio entre los 10 escenarios

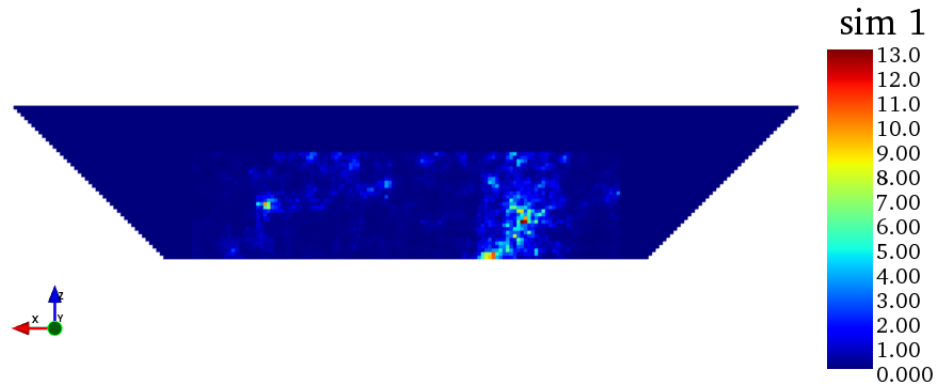


Figura 17: Vista en sección de la ley de cobre en el modelo de bloques 2D: simulación 1.

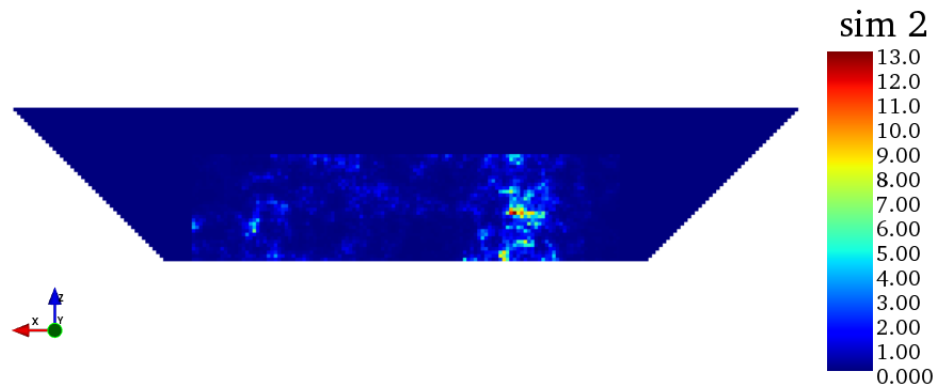


Figura 18: Vista en sección de la ley de cobre en el modelo de bloques 2D: simulación 2.

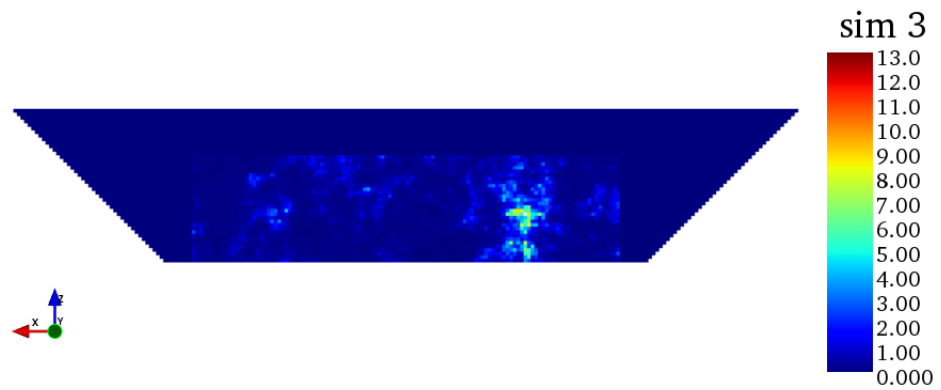


Figura 19: Vista en sección de la ley de cobre en el modelo de bloques 2D: simulación 3.

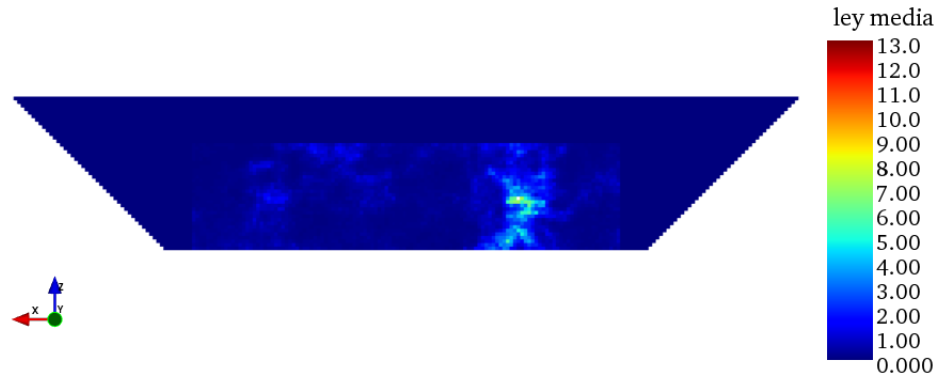


Figura 20: Vista en sección de la ley de cobre en el modelo de bloques 2D: ley promedio entre las simulaciones.

En la Tabla 7 se puede ver en detalle la distribución de las leyes. Por su parte, en la Figura 21 se puede ver el histograma promedio de leyes, con sus respectivas barras de error que muestra el rango (mínimo y máximo) en cada intervalo a lo largo de todos los escenarios.

marca de clase	frecuencia esperada	frecuencia mínima	frecuencia máxima	marca de clase	frecuencia esperada	frecuencia mínima	frecuencia máxima
0.05	630	443	907	1.65	22	14	34
0.15	990	882	1068	1.75	18	12	25
0.25	526	458	594	1.85	17	12	23
0.35	305	233	349	1.95	17	14	21
0.45	197	165	229	2.05	15	11	24
0.55	145	119	168	2.15	13	7	18
0.65	107	94	131	2.25	11	5	18
0.75	88	70	117	2.35	12	6	22
0.85	64	56	81	2.45	11	5	18
0.95	56	45	68	2.55	8	4	13
1.05	51	39	60	2.65	7	4	11
1.15	41	29	54	2.75	8	4	13
1.25	35	28	43	2.85	7	3	11
1.35	26	20	36	2.95	6	3	10
1.45	23	18	32	> 3.00	107	88	119
1.55	25	19	33				

Tabla 7: Tabla de frecuencias de leyes del modelo de bloques 2D BM-Estra.

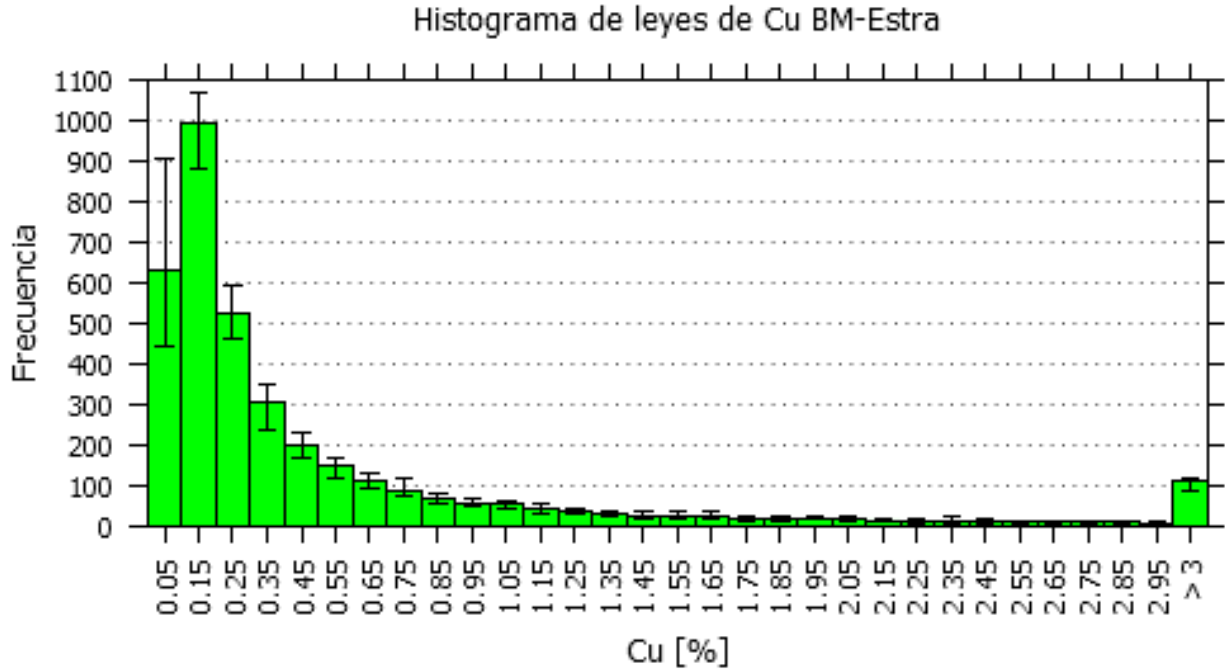


Figura 21: Histograma de leyes de cobre en modelo de bloques 2D BM-Estra.

6.1.2. Modelo de valorización

La expresión utilizada para generar la valorización v_{br} para cada bloque b , según la ley del escenario r es (5). Los parámetros utilizados en la valorización se muestran en la Tabla 8. Los valores para el precio y los costos se tomaron como referencia de SONAMI (2014) para la minería de cobre.

Parámetro	Símbolo	Valor
Precio (USD/lb)	P	2.5
Recup. metalúrgica	Rec	0.85
Costo extracción (USD/Ton)	C_m	3.2
Costo proceso (USD/Ton)	C_p	9.0
Costo de venta, fund. y refin. (USD/lb)	C_v	0.4
Factor de conversión	f	2,204.6

Tabla 8: Parámetros que definen el modelo económico de bloques para el caso de estudio.

6.1.3. Parámetros para el control del talud

Según la descripción de la sección 2.1.1, el molde de precedencias que se definirá para este modelo de bloques 2D será de 45° y 1 nivel. Esto equivale a decir que para extraer un bloque dado, primero se deben extraer los 3 bloques que se encuentran inmediatamente sobre éste. Es importante destacar que no es necesario implementar más niveles para el caso 2D.

6.1.4. Recurso computacional

Para implementar los distintos modelos en cada una de las etapas se hará uso del lenguaje de programación de código abierto *Python*®, versión 2.7.11 (Python 2015). En particular, se utilizarán las siguientes librerías:

1. MineLink: desarrollada en el Laboratorio Delphos de la Universidad de Chile, esta librería implementa estructuras de datos para almacenar el modelo de bloques y los arcos de precedencia (Delphos 2015).
2. PuLP: es una librería para Python que permite a los usuarios describir modelos matemáticos basados en programación lineal, entera o mixta (Mitchell et al. 2011).

El *software* de optimización que resuelve los modelos implementados será Gurobi®, versión 5.6.3 (Gurobi Optimization 2015). La herramienta de visualización utilizada para las geometrías es DOPPLER®, desarrollada en el Laboratorio Delphos de la Universidad de Chile: posee herramientas que permiten interactuar con los modelos de bloques y sus atributos, tiene incorporado un motor de visualización 3D que permite mostrar vistas en planta y secciones del modelo (Delphos 2015). Los gráficos se obtuvieron con *gnuplot*, version 4.6 (Crawford 2014).

Por último, los experimentos de esta sección serán ejecutados en una máquina Intel Core i7-4510U, 8 Gb de memoria ram, con 4 núcleos a 3.1 GHz, en ambiente Windows 8.1.

6.2. Etapa 1: Pit final

Ahora corresponde aplicar la metodología propuesta en 5.1 para encontrar la frontera eficiente que permite tomar una decisión de pit final que considera el *trade-off* entre dos objetivos en conflicto: valor esperado como beneficio de la explotación y riesgo asociado al considerar múltiples escenarios en vez de uno determinístico, como es el caso de la metodología usual mediante el krigado, o en su defecto para este estudio, el promedio de las realizaciones.

En esta sección se mostrarán los resultados obtenidos para pit final considerando un nivel de confianza de un 90% en la evaluación del riesgo a través del CVaR. En el Anexo B se podrán encontrar más detalles de los resultados obtenidos para éste y otros niveles de confianza (70%, 75%, 80%, 85%, 90% y 95%) y distintos valores del parámetro μ que pondera los objetivos en conflicto.

En la Tabla 9 se pueden apreciar los principales resultados numéricos obtenidos: la primera columna indica el ponderador μ que pondera el riesgo medido por el CVaR en la función objetivo; la segunda columna muestra el Valor en Riesgo (VaR); la tercera columna muestra el Valor Condicional en Riesgo (CVaR); luego se muestra el valor esperado de pit final y finalmente la última columna muestra el gap de optimalidad de la solución obtenida. Se tomaron de manera arbitraria los valores para el ponderador de la forma $\mu = 10^n$, donde $n \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Si existe un entero n de modo tal que se cumpla que la diferencia entre valores consecutivos de CVaR o valor esperado sea mayor a cierto umbral predefinido, se procederá a refinar el respectivo intervalo. Los valores umbrales mencionados serán definidos por el evaluador después de obtener los resultados con los valores de inicio.

En el caso de estudio de esta sección fue posible aplicar la estrategia anterior en los siguientes casos, como se puede apreciar en la Tabla 9:

1. Primera iteración: [0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, 100, 1000].
2. Segunda iteración: identifica opción de refinamiento en [1, 10] y [10, 100]. Luego, agrega los puntos [2, 4, 6, 8] y [20, 40, 60, 80].
3. Tercera iteración: Identifica opción de refinamiento entre [1, 2]. Agrega los puntos [1.2, 1.4, 1.6, 1.8].

Los valores de VaR, CVaR y valor esperado se obtienen directamente del proceso de optimización. Estos resultados permiten graficar el par (valor esperado, CVaR) en un gráfico que muestra la forma de la frontera eficiente, tal como se muestra en la Figura 22: los puntos representan distintas alternativas de pit final con sus respectivos valores esperados y riesgos asociados. Para mostrar de una forma más clara la frontera eficiente, se trazó una interpolación polinómica entre los puntos. Nótese que para valores suficientemente grandes del ponderador μ , la decisión de pit final es no realizar la explotación.

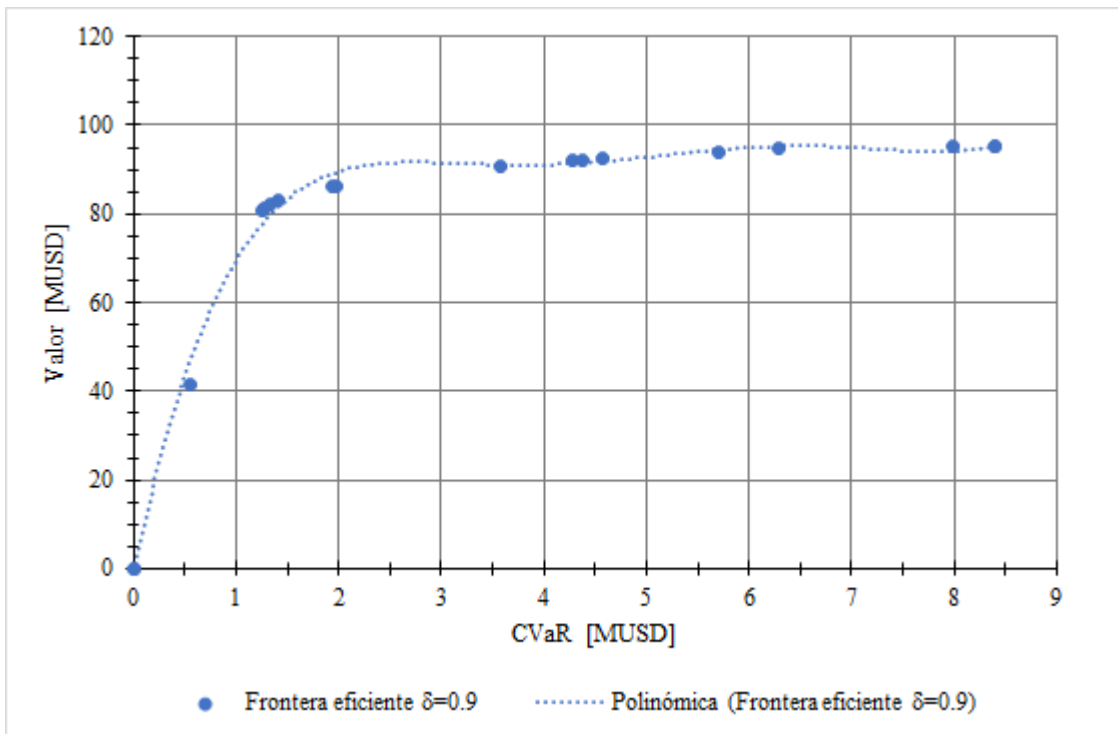


Figura 22: Frontera eficiente entre valor esperado y riesgo (CVaR) para la decisión de pit final, con un nivel de confianza de 90%.

Algunas observaciones de los resultados de pit final:

- En el caso particular de BM-Estra, si se considera una 10-meseta, en la cual se tiene una reducción de hasta un 10% de valor, se encuentran todas las alternativas de pit final de parámetros $\mu = 0,001$ hasta $\mu = 6$. El caso límite ($\mu = 6$) incluye el pit final cuyo riesgo se ve reducido en un 77%, mientras que el valor esperado cae sólo un 9%.
- En todos los casos, los resultados obtenidos son óptimos, como se puede apreciar en la última columna de la Tabla 9, llamada *GAP*.

Frontera eficiente para un nivel de confianza $\delta = 90\%$				
μ	VaR [USD]	CVaR [USD]	Valor [USD]	GAP [%]
0.001	6,547,529	8,394,273	95,140,538	0.0000
0.01	6,547,529	8,394,273	95,140,538	0.0000
0.1	6,755,834	7,996,311	95,121,477	0.0000
1	6,293,476	6,298,265	94,576,455	0.0079
1.2	5,702,252	5,707,564	93,936,387	0.0081
1.4	4,564,594	4,565,125	92,490,470	0.0097
1.6	4,383,043	4,383,043	92,211,263	0.0095
1.8	4,284,357	4,284,357	92,049,674	0.0045
2	3,576,802	3,577,333	90,673,823	0.0096
4	1,977,655	1,977,655	86,408,021	0.0081
6	1,938,852	1,940,765	86,227,872	0.0000
8	1,409,968	1,409,968	82,856,303	0.0063
10	1,341,819	1,341,819	82,218,598	0.0084
20	1,267,783	1,267,783	81,115,703	0.0000
40	1,254,959	1,254,959	80,789,295	0.0000
60	556,892	556,892	41,491,053	0.0000
80	0	0	0	0.0000
100	0	0	0	0.0000
1000	0	0	0	0.0000

Tabla 9: Resultados numéricos de la frontera eficiente obtenida con un nivel de confianza de 90%.

Otro aspecto interesante es saber cuánto contribuyó cada escenario a la composición del CVaR: esto se muestra en la Tabla 10, donde para cada valor de μ se muestra el valor de z_r , para todo escenario r . Estos valores son los que generan las diferencias entre las columnas VaR y CVaR de la Tabla 9: en nuestro caso particular, en cada alternativa de pit final a lo más un escenario contribuye al CVaR.

Ahora corresponde analizar la geometría de extracción, mediante vistas en sección del modelo de bloques 2D. Para ello, se han dispuesto en las Figuras 23 y 24 todas las alternativas de pit final que pertenecen a la frontera eficiente de la Tabla 9, exceptuando las que generan resultados ya obtenidos con otro valor del parámetro μ . Dicho lo anterior, se omiten las vistas en sección de los resultados con $\mu = 0.001 - 100 - 1000$. El color verde representa aquellos bloques que pertenecen al pit final, y en azul se muestran los que no pertenecen.

En la Figura 23 se pueden ver las geometrías de pit final obtenidas para varios valores de μ , desde 0.01 hasta 2: las diferencias más notorias se observan en el fondo, no observándose diferencias en las paredes del pit.

μ	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9	z_{10}
0.001	0	0	0	0	1,846,743	0	0	0	0	0
0.01	0	0	0	0	1,846,743	0	0	0	0	0
0.1	0	0	0	0	1,240,477	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	4,789	0	0	0	0	0
1.2	0	0	5,313	0	0	0	0	0	0	0
1.4	0	0	0	0	531	0	0	0	0	0
1.6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	531
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	1,913	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
60	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
80	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 10: Para cada valor del ponderador μ , se muestra cómo se distribuye el CVaR entre los distintos escenarios.

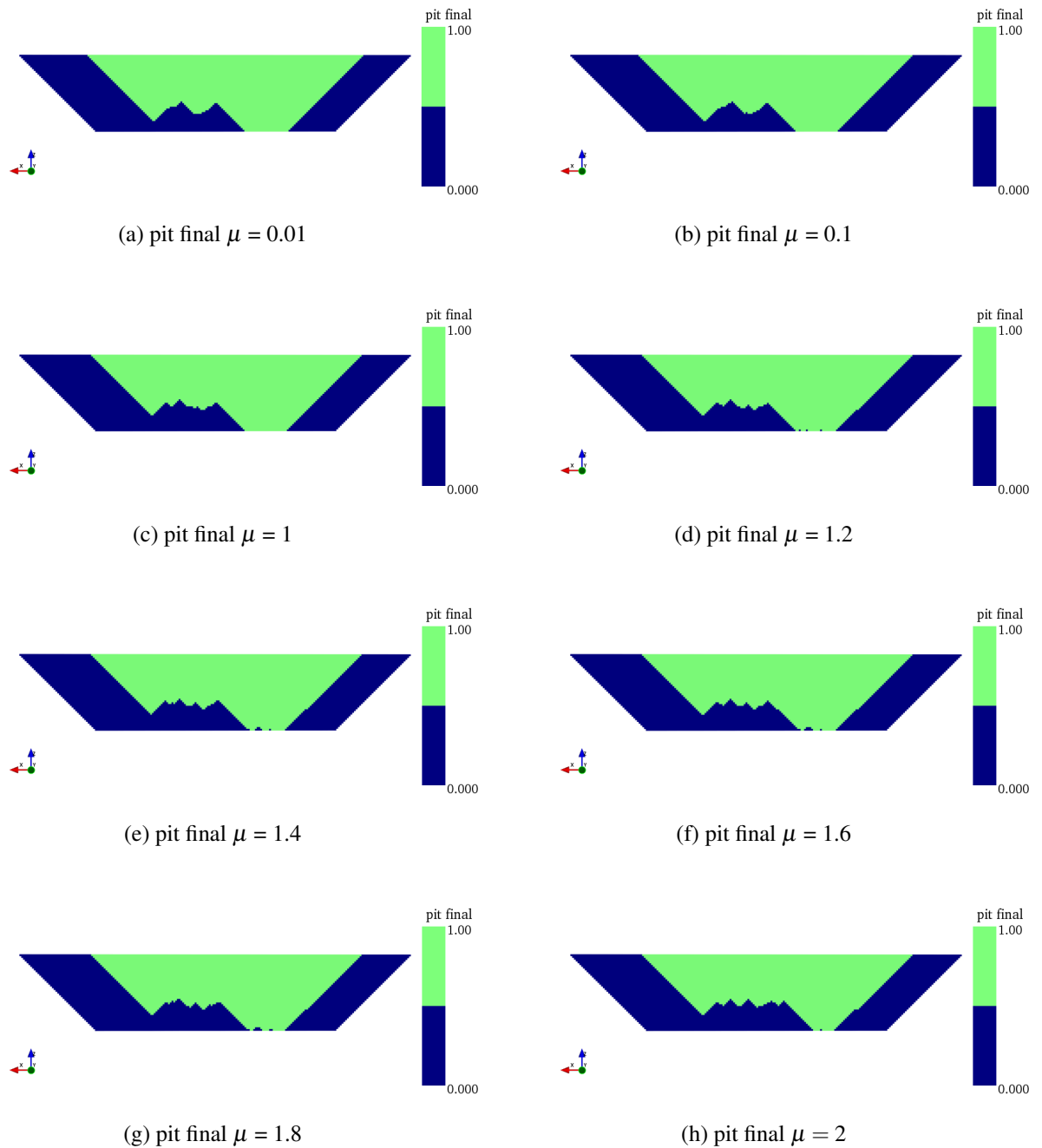


Figura 23: Vistas en sección de las alternativas de pit final del modelo 2D BM-Estra para diferentes valores del parámetro $\mu = 0.01, 0.1, 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2$, y un nivel de confianza del 95 %.

Por otra parte, en la Figura 24 se muestran los pit finales para ponderaciones μ que van desde 4 hasta 80: este último, es el primer caso obtenido para el cual la ponderación es tan alta en la función objetivo que la mejor decisión de pit final es no realizar la extracción. A diferencia del caso anterior, acá se pueden apreciar diferencias notorias en la geometría, tanto del fondo de los pits como de su extensión, abriéndose en la dirección oeste en los casos $\mu = 8, 10, 20$ y 40.

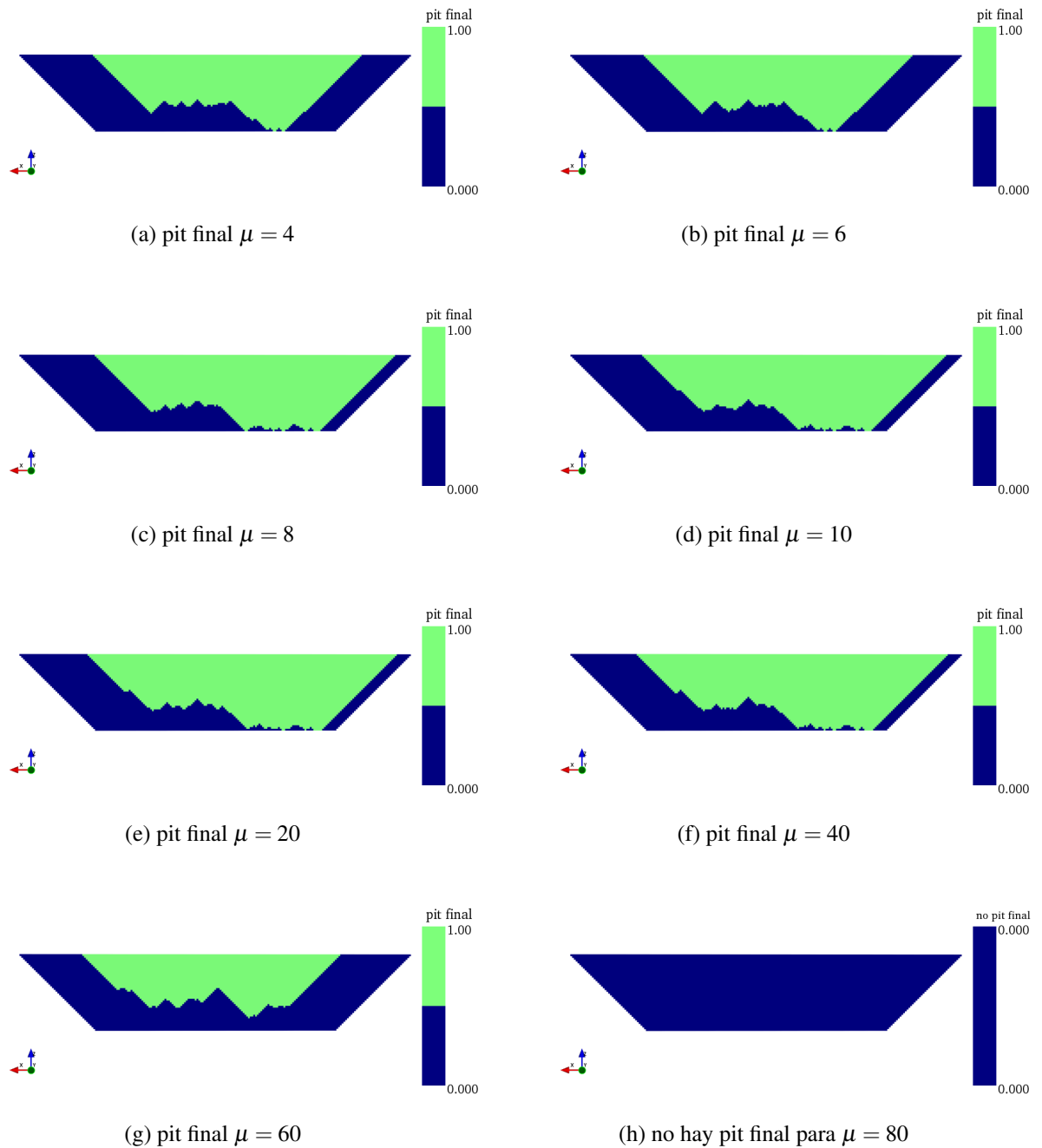


Figura 24: Vistas en sección de las alternativas de pit final del modelo 2D BM-Estra para diferentes valores del parámetro $\mu = 4, 6, 8, 10, 20, 40, 60, 80$, y un nivel de confianza del 95 %.

Analizando tanto los valores de la Tabla 9, aplicando el criterio de máxima diferencia entre valor esperado y CVaR, además de la forma de los pits (geometrías de extracción), se concluye en esta etapa seleccionar el pit correspondiente a un ponderador $\mu = 1$ para seguir a la etapa de selección de pushbacks. Lo más importante de esta sección es destacar que el modelo de generación de la frontera eficiente en el plano beneficio-riesgo funciona, obteniendo simultáneamente el VaR,

el CVaR, el valor esperado y la contribución de cada escenario al CVaR.

6.3. Etapa 2: Selección automática de pushbacks

Ahora se procede a la segunda etapa, relacionada a la selección de pushbacks dentro del pit final. En la Figura 25 se muestra el pit final seleccionado en la etapa anterior. El primer paso para generar los pits anidados es definir una serie de *revenue factors* (λ_i) que servirán para escalar el precio del metal y mediante el modelo económico seleccionado, generar una serie de pits anidados, tal como se expuso en la sección 5.2.



Figura 25: Vista en sección del pit final elegido.

La Tabla 11 muestra los parámetros técnico-económicos que definen la instancia de generación de pits anidados en este caso. Pruebas preliminares indican que el pit final no se alcanza con un $\lambda = 1$, por lo que será necesario adaptar la estrategia para alcanzar la envolvente, como se explicó en el punto (ii) de la sección 5.2.1. En particular, en esta parte se aplicará la estrategia de agregar un pit adicional que incluya el complemento de bloques no clasificados para que coincida con el pit final. Se utilizarán 69 valores regularmente espaciados para los *revenue factors*, generando 69 pits anidados, y el pit 70 será aquel que coincida con la envolvente final.

La Figura 26 muestra la secuencia de pits anidados obtenida. El primer pit no vacío se obtuvo para un $\lambda = \frac{27}{69} \approx 0,39$: se trató de aplicar el Procedimiento 5.1 para generar un refinamiento entre los pits que cumplen las condiciones (en este caso: (26, 27), (46, 47) y (58, 59)). Desafortunadamente, no fue posible obtener pit intermedios en tres iteraciones. En la Figura 26 se muestra un gráfico (usualmente llamado *pit by pit*) con los tonelajes esperados de mineral y estéril, con barras de error para sus valores extremos, además de los valores económicos esperados, con su respectiva banda interdecil para cada pit.

Parámetro	Símbolo	Valor
Precio (USD/lb)	P	2.5
Recup. metalúrgica	Rec	0.85
Costo extracción (USD/Ton)	C_m	3.2
Costo proceso (USD/Ton)	C_p	9.0
Costo de venta, fund. y refin. (USD/lb)	C_v	0.4
Factor de conversión	f	2,204.6
Ángulo de talud, niveles	-	45°, 1
Número de <i>revenue factors</i>	N	69

Tabla 11: Parámetros técnico-económicos que definen la generación de pits anidados en BM-Estra.



Figura 26: Vistas en sección del conjunto de pits anidados dentro del pit final.

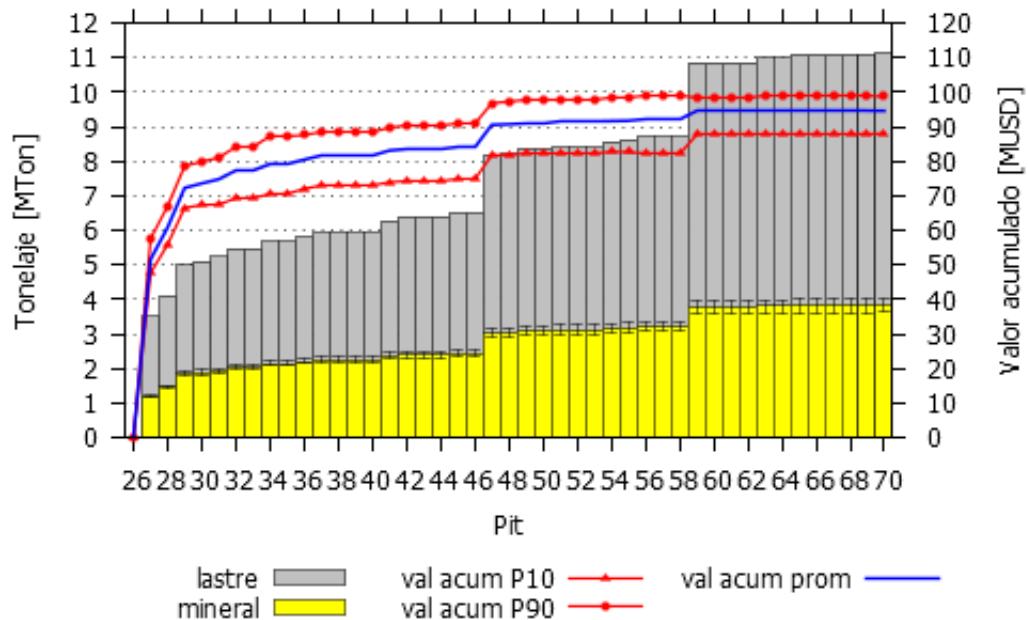


Figura 27: Gráfico *pit by pit*: se muestran las variaciones en los tonelajes y valor, producto de los distintos escenarios para cada pit anidado en BM-Estra.

Instancia	Tonelaje mineral [KTon]		Tonelaje roca [KTon]	
	mínimo	máximo	mínimo	máximo
1	0	1,200	0	3,600
2	600	1,500	2,000	4,000
3	600	1,500	2,000	4,500
4	700	1,500	2,000	4,800
5	700	1,800	2,000	4,800
6	750	2,400	2,400	4,800
7	800	3,600	2,400	4,800
8	800	2,400	2,700	5,500
9	900	3,600	2,700	5,500
10	1,200	4,800	2,700	5,500
11	1,000	2,000	3,000	6,000
12	1,200	3,000	3,000	6,000

Tabla 12: Conjunto de instancias del problema de selección automática de fases para BM-Estra. Se evalúan distintos escenarios de tonelajes mínimos y máximos.

Ahora corresponde aplicar el modelo de selección automática de fases al conjunto de pits anidados. Para ello, se deben definir los criterios que fijarán el objetivo y las restricciones del mismo: principalmente se tratará de controlar los tonelajes esperados de mineral y estéril dentro de cada fase. Se harán varias pruebas, considerando distintos rangos de tonelajes permitidos por fase, los que se muestran en la Tabla 12.

A continuación, se definirá la función objetivo a partir de las alternativas vistas en la sección 5.2.2, además de los parámetros necesarios para las restricciones.

Función objetivo: minimizar el número de fases. Se conjetura que utilizando esta función objetivo, los tonelajes de los pushbacks se ajusten a los valores de cota superior.

Restricciones: las restricciones mencionadas en esta parte hacen referencia a la sección 5.2.2.

1. Estructurales (25) - (30): éstas forman parte de la estructura del modelo, por lo que no dependen de parámetros que se deban prefijar.
2. Especiales: éstas son opcionales. En este caso
 - 2.1 Número de fases predefinido (31): esta restricción no aplica, dada la elección de la función objetivo.
 - 2.2 Tonelajes acotados (32) - (33): las cotas superiores e inferiores que definen este conjunto de restricciones son presentadas en la Tabla 12.
3. Simplificadoras (34) - (35): éstas sirven para fijar variables y simplificar el problema. En este

caso, $K = 26$ corresponde a los primeros pit vacíos.

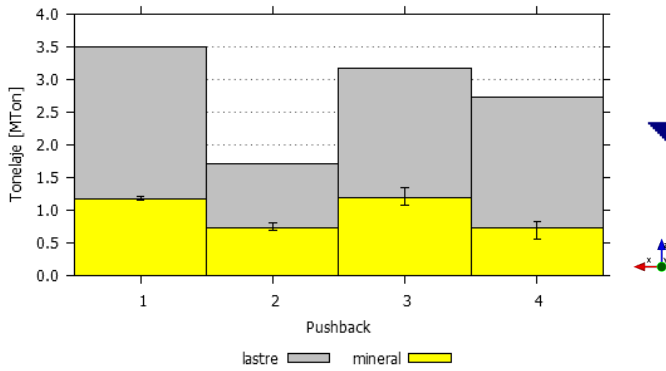
En resumen, se dispone de un modelo que minimiza el número de fases y que restringe la decisión a los tonelajes dispuestos en la Tabla 12.

Ahora se muestran los resultados obtenidos para cada una de las instancias definidas: todas fueron resueltas, excepto la instancia 10, para la cual no existen soluciones factibles (esto quiere decir que no existe una configuración de fases que satisfaga las restricciones de tonelajes impuesta). Cabe mencionar que en esta parte sólo se tratarán los siguientes aspectos en los resultados: (i) número de fases; (ii) tonelajes de mineral y estéril; y (iii) geometría de las soluciones. Las Figuras 28 a 31 muestran de manera gráfica los aspectos de interés definidos: por un lado, a la izquierda se tienen los gráficos de mineral y lastre esperados por pushback, considerando la variación de los respectivos tonelajes entre todos los escenarios, representando el rango por barras de error. Por otra parte, a la derecha se tienen las vistas de las geometrías de las fases en las distintas instancias.

La Figura 28 muestra los resultados de las instancias 1, 2 y 3, para las cuales se obtuvieron 4 fases en cada una. Las Figuras 29 y 30 muestran las soluciones desde la instancia 4 hasta la instancia 9, donde se obtuvieron 3 fases en cada una de ellas. Se recuerda que la instancia 10 es infactible. Finalmente, la Figura 31 representa las soluciones de las dos últimas instancias, 11 y 12, con 2 fases cada una.

Así, se tienen distintas configuraciones de fases respetando los tonelajes mínimos y máximos impuestos, tanto para el tonelaje de mineral como para el tonelaje total. Los experimentos muestran que el modelo se ajusta a los resultados esperados: (i) la implementación permite al evaluador probar múltiples escenarios (instancias) de manera rápida, que servirán de base para tomar la mejor decisión de selección de fases; (ii) la facilidad de uso es una característica importante así como su capacidad de expansión para incluir nuevos criterios.

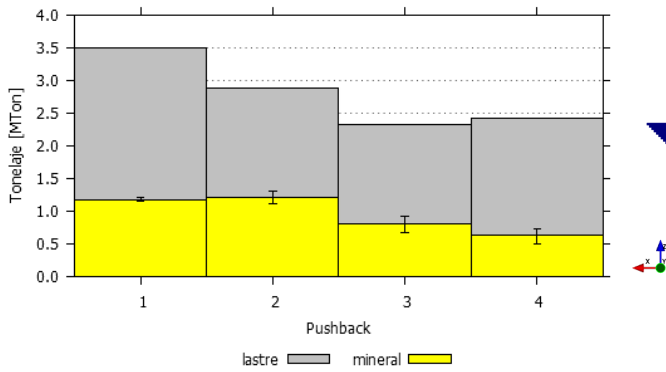
Dado que el modelo opera a soporte de pits y no a soporte de bloques, se pueden generar y entregar una gran cantidad de pits anidados al modelo, porque el número de variables asociadas es, a lo más, $\frac{N(N+1)}{2}$, donde N es el número de pits generados. Note que de ser posible, las restricciones simplificadoras permiten reducir la cantidad de variables del modelo. Como las soluciones dependen del soporte elegido (pits anidados), es claro que esto resulta en una limitante para generar soluciones de mejor calidad, o bien, que se adapten mejor a las condiciones o criterios impuestos, lo que podría hacer considerar otras alternativas al soporte utilizado, o bien, definir nuevas estrategias de refinación de los pits, por ejemplo, distintos al Procedimiento 5.1.



(a) tonelajes mineral y lastre, instancia 1



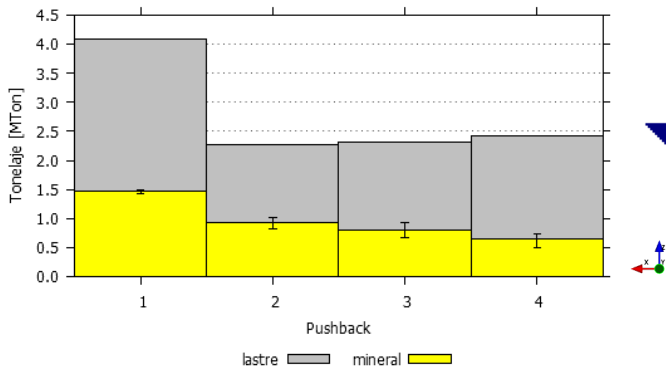
(b) vista en sección pushbacks, instancia 1



(c) tonelajes mineral y lastre, instancia 2



(d) vista en sección pushbacks, instancia 2

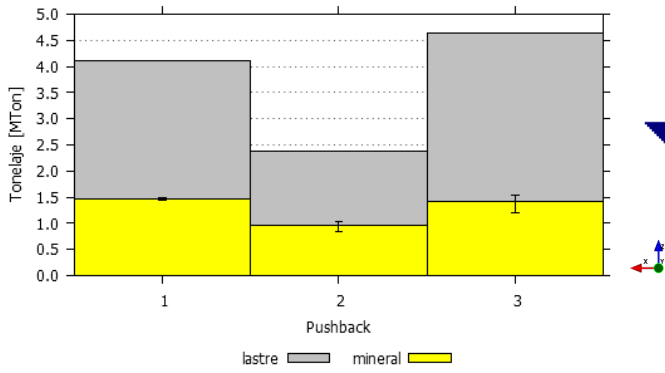


(e) tonelajes mineral y lastre, instancia 3



(f) vista en sección pushbacks, instancia 3

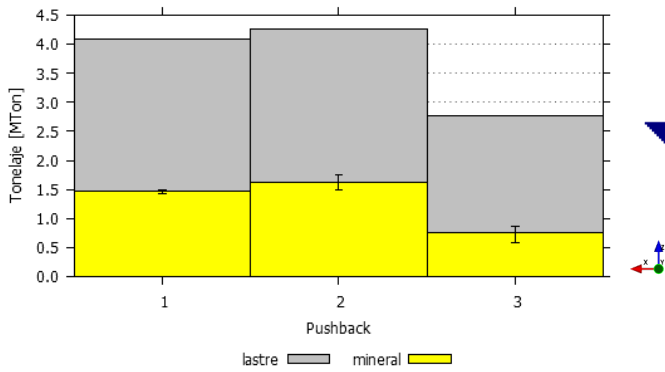
Figura 28: Resultados de la selección automática de fases. Se muestran los resultados de las primeras 3 instancias, donde se obtuvieron 4 fases en cada una.



(a) tonelajes mineral y lastre, instancia 4



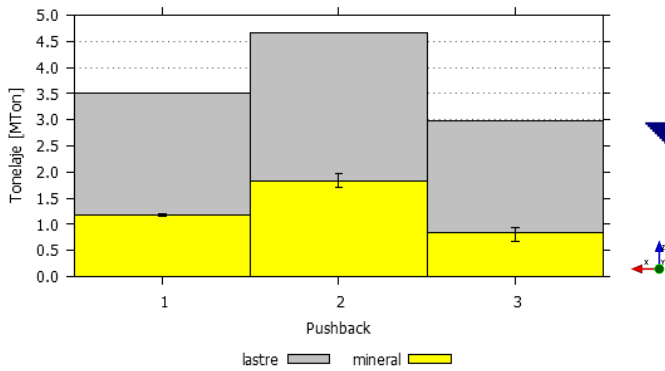
(b) vista en sección pushbacks, instancia 4



(c) tonelajes mineral y lastre, instancia 5



(d) vista en sección pushbacks, instancia 5

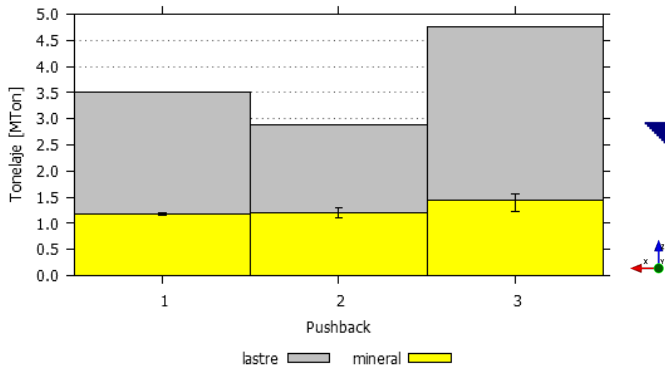


(e) tonelajes mineral y lastre, instancia 6



(f) vista en sección pushbacks, instancia 6

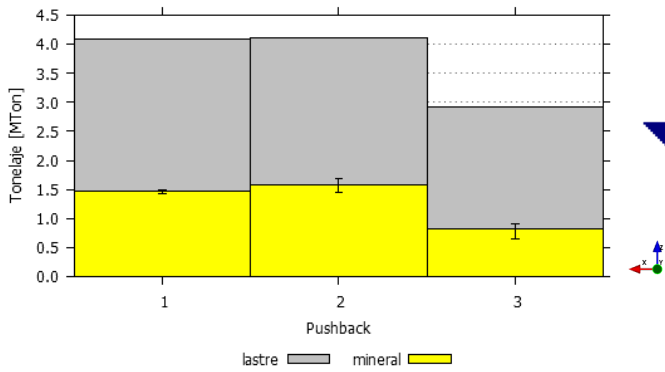
Figura 29: Resultados de la selección automática de fases. Se muestran los resultados de las instancias 4, 5 y 6, donde se obtuvieron 3 fases en cada una.



(a) tonelajes mineral y lastre, instancia 7



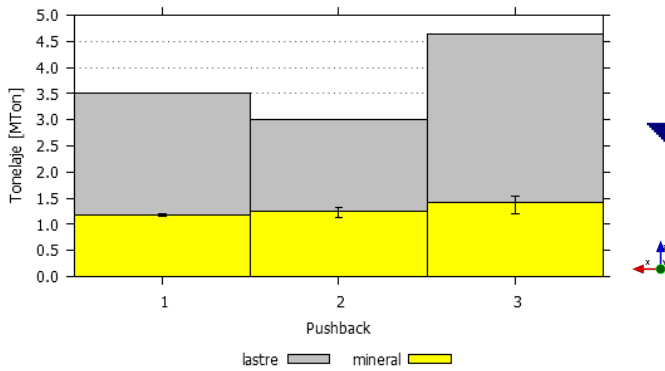
(b) vista en sección pushbacks, instancia 7



(c) tonelajes mineral y lastre, instancia 8



(d) vista en sección pushbacks, instancia 8

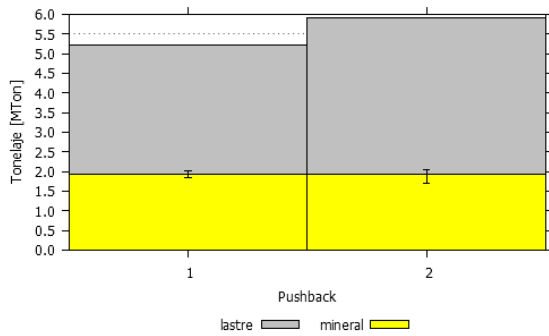


(e) tonelajes mineral y lastre, instancia 9



(f) vista en sección pushbacks, instancia 9

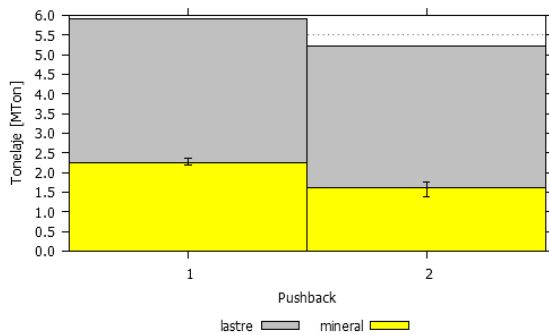
Figura 30: Resultados de la selección automática de fases. Se muestran los resultados de las instancias 7, 8 y 9, donde se obtuvieron 3 fases en cada una. Para el caso de la instancia 10 el problema es infactible.



(a) tonelajes mineral y lastre, instancia 11



(b) vista en sección pushbacks, instancia 11



(c) tonelajes mineral y lastre, instancia 12



(d) vista en sección pushbacks, instancia 12

Figura 31: Resultados de la selección automática de fases. Se muestran los resultados de las instancias 11 y 12, donde se obtuvieron 2 fases en cada una. Se recuerda que para el caso de la instancia 10, el problema es infactible.

En el Anexo C (sección 9.4) se presenta la implementación de una formulación alternativa al modelo base presentado en esta sección para seleccionar fases, pero buscando otro objetivo: minimizar las diferencias entre los tonelajes esperados de las fases, considerando un conjunto de escenarios geológicos.

Finalmente, se debe seleccionar un conjunto de fases para alimentar la etapa final de agendamiento de la producción. Aun cuando en este caso de estudio interesa principalmente implementar los modelos propuestos para hacer los ajustes necesarios, se considera la instancia 8 para ser agendada por presentar mejor espacios operacionales entre sus fases y un buen equilibrio en los tonelajes para evaluar las diferencias entre las estrategias de extracción en la etapa siguiente.

6.4. Etapa 3: Agendamiento de la producción

Ahora corresponde implementar los modelos de agendamiento de bloques. Para ello, existen dos estrategias: (i) extracción estricta de cada fase, y (ii) extracción equilibrada, en el sentido que para no profundizar más de un número fijo de bancos por fase se debe mantener una diferencia de

altura entre fases. Para el agendamiento se considerarán dos destinos posibles: un botadero y una planta de procesamiento. No se consideran pilas de acopio. La valorización por destino d de cada bloque extraído b , según el escenario r , viene dado por

$$v_{brd} = \begin{cases} [(P - C_v) \cdot Rec \cdot f \cdot y_{br} - C_m - C_p] \cdot \tau_{on_b} & , \text{ si } b \text{ es enviado a } d = \text{planta,} \\ -C_m \cdot \tau_{on_b} & , \text{ si } b \text{ es enviado a } d = \text{botadero.} \end{cases} \quad (91)$$

Luego, el valor esperado \bar{v}_{bd} de cada bloque b que se envía al destino d se toma promediando los valores entre los R escenarios.

Los parámetros económicos utilizados para realizar la valorización por destino son los mismos que fueron presentados en la Tabla 8. Para incorporar la dimensión temporal, se introduce una tasa de descuento $dr = 10\%$. En consecuencia, la valorización temporal viene dada por

$$\bar{v}_{bdt} = \frac{1}{(1 + dr)^t} \bar{v}_{bd} \quad (92)$$

No se considera costo capital en la valorización. Respecto a los parámetros técnicos como capacidades de extracción y procesamiento, se muestran en la Tabla 13.

Parámetro	Símbolo	Valor
Ton minado máx (MTon)	MC^+	1.1
Ton minado mín (MTon)	MC^-	1.0
Ton proceso máx (MTon)	CP^+	0.5
Ton proceso mín (MTon)	CP^-	0.0
Ley de cabeza mín (%)	BC^-	0.7
Profundidad máxima	Γ	10
Horizonte (años)	T	11
Número de destinos	D	2
Número de escenarios	R	10
Costo de sobreproducción de mineral	cp_{r0}^+	50
Costo de subproducción de mineral	cp_{r0}^-	50
Costo de sobreproducción de metal	cg_{r0}^+	0
Costo de subproducción de metal	cg_{r0}^-	80

Tabla 13: Parámetros adicionales que definen la instancia de agendamiento para BM-Estra.

Se aplican restricciones para acotar superior e inferiormente el movimiento mina. Respecto a las restricciones de capacidad de proceso, en este caso sólo se limita superiormente, sin aplicar cotas inferiores, debido a la presencia de un periodo de *ramp-up* en los primeros años de producción. Del mismo modo, se busca asegurar una alimentación de mineral de calidad suficiente a planta, aplicando una cota inferior a la ley de cabeza. En este caso estudio se hace necesario dejar una primera etapa de movimiento de tierras estériles (*prestripping*) hasta alcanzar la zona mineralizada,

correspondiente a 2 años de extracción. En consecuencia, las restricciones de capacidad de proceso y mezcla definidas no son aplicadas durante estos dos primeros años. Debido al tonelaje total disponible dentro del pit final, la cota inferior de minado no se aplica en el último periodo, para evitar infactibilidades. Los costos de sub y sobreproducción presentados en la Tabla 13 deben ser descontados a la misma tasa de descuento dr . En este caso particular, estos valores fueron elegidos de manera subjetiva, pues en este caso sólo se quiere evaluar el buen funcionamiento del modelo.

Existen dos modelos de agendamiento que serán implementados, los cuales fueron detallados en la sección 5.3. Dado que el tamaño de los modelos resultantes en el caso de estudio sintético permite resolver directamente, sin necesidad de aplicar algún algoritmo o heurística de reducción, como los vistos en la sección 5.3.4, en cada estrategia de extracción se procederá como sigue:

1. Solución MIP: representa la solución del modelo, ya sea fase a fase o equilibrado de fases, cuando es resuelto directamente para hallar la solución óptima, sin necesidad de simplificarlo por problemas de recurso computacional. Este es el caso ideal, pues la decisión sobre qué bloques deben extraerse, cuándo hacerlo y dónde enviarlos se hace considerando el problema como un todo.
2. Solución $HV(T', \Delta)$: este caso representa la solución del modelo cuando se aplica la heurística por ventanas de longitud T' , fijando los primeros Δ periodos de la ventana para ir formando la solución factible hasta alcanzar el horizonte de planificación T , con $\Delta \leq T' \leq T$. Esta heurística no puede garantizar la obtención de soluciones óptimas, como se vio en 5.3.4. Notar que $HV(T, T) = \text{MIP}$.

6.4.1. Modelo de agendamiento fase a fase: implementación y resultados

El modelo de agendamiento fase a fase fue implementado y los resultados se muestran a continuación. En la Figura 32 se muestra la geometría de agendamiento obtenida con el método MIP. Se observa que la extracción se realiza siguiendo una secuencia fase a fase, en el sentido que la extracción de una fase dada debe comenzar cuando la fase inmediatamente anterior ha sido extraída completamente, tal como fue impuesto en las restricciones de precedencias.

Ahora corresponde analizar el plan de producción de largo plazo (ver Figura 33), uno de los resultados más importantes de la etapa de agendamiento. Éste permite, junto con la identificación de los sectores a explotar dados en la figura anterior, identificar los ritmos de producción (toneladas de mineral y estéril), leyes esperadas y destinos de los diferentes materiales que se extraen, todo para cada periodo planificado. Hay varios aspectos del modelo implementado que son importantes de destacar en los resultados obtenidos: ya se vio en la geometría de extracción que la secuencia respeta las restricciones de precedencia entre fases. En el plan de producción también se puede ver que se cumplen los límites impuestos en los tonelajes de minado, que deben encontrarse entre

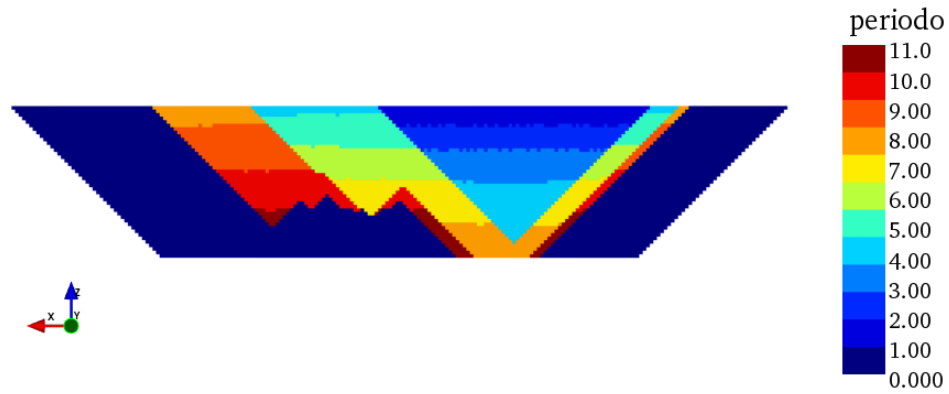


Figura 32: Geometría de extracción obtenida con MIP para BM-Estra, siguiendo la estrategia de agendamiento fase a fase: la extracción se debe realizar siguiendo un orden estricto entre fases.

1.0 y 1.1 [MTon] por periodo, excepto en el último periodo donde la restricción de cota inferior no aplica. Sin embargo, los tonelajes de alimentación a planta no son regulares, dejando periodos sin producción (periodo 5) o de muy baja producción (periodo 9). Esto se tiene debido a la capa de gravas estériles que tiene el yacimiento en su superficie, y con las cuales el agendamiento debe lidiar al comenzar la extracción de cada fase, según la estrategia utilizada.

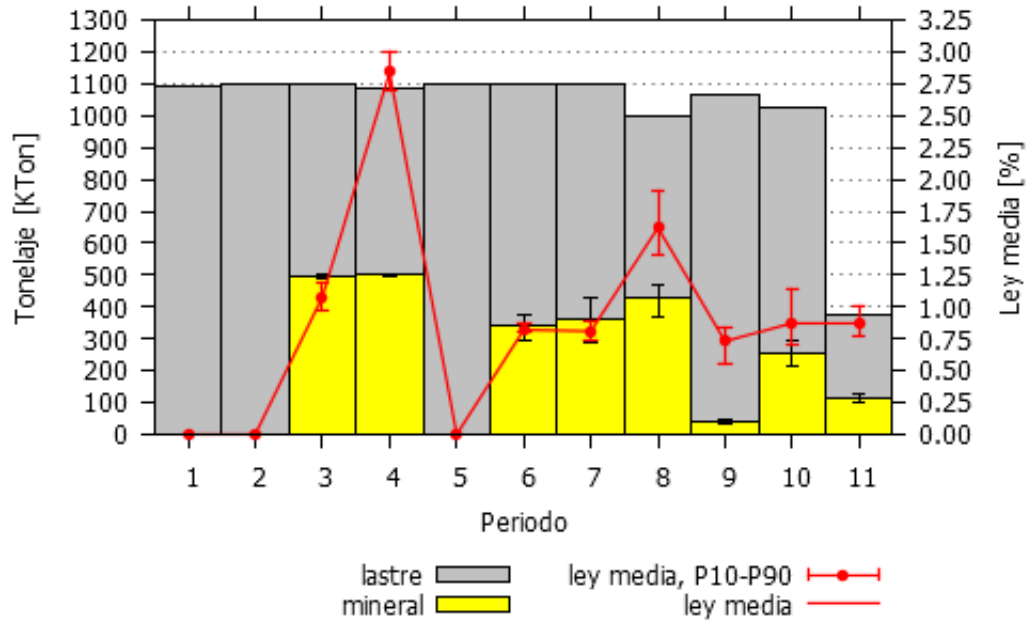


Figura 33: Plan de producción obtenido del agendamiento de bloques, obtenida con MIP y utilizando una estrategia fase a fase. Se muestran los tonelajes de mineral (con sus bandas de incertidumbre a lo largo de todos los escenarios), el respectivo tonelaje de estéril y la ley de cabeza, con los percentiles 10 y 90, para cada periodo.

Para los tonelajes de mineral existe una desviación de sobreproducción en el periodo 3 y

simulación 6 de 5,400 [Ton]. Respecto a las leyes de cabeza enviadas a planta, que se traducen en el metal recuperado, existen desviaciones en algunos periodos y escenarios, las que se muestran detalladamente en la Tabla 14.

Periodo	Simulación	Tonelaje metal subproducción
6	3	13,007
	2	22,118
7	4	24,440
	9	36,057
9	1	502
	2	10,314
	4	5,000
	6	871
	7	690
	8	11,849
10	10	4,972
	4	6,958
	7	19,535
	8	12,901
11	9	34,495
	1	869
	4	28,895

Tabla 14: Desviaciones en el tonelaje de metal subproducido, para cada periodo y escenario (simulación) en el agendamiento, obtenida con MIP y usando la estrategia fase a fase.

Por otra parte, en la Figura 34 se muestra el valor descontado acumulado (VDA) esperado del proyecto. Se puede ver un flujo negativo los primeros 2 años, producto del *prestripping*. El VDA esperado alcanza casi los 50 [MUSD], con un rango interdecil de 8 [MUSD]. Es importante no comparar este valor con el valor obtenido en el pit final, cuyo valor es cercano a los 90 [MUSD]: algunos factores que explican esta diferencia son (i) la tasa de descuento aplicada a la valorización en el agendamiento, (ii) la ley de corte estática utilizada en la etapa de pit final para decidir qué era mineral y qué era lastre, y (iii) la ley de corte dinámica que se utilizó en el agendamiento.

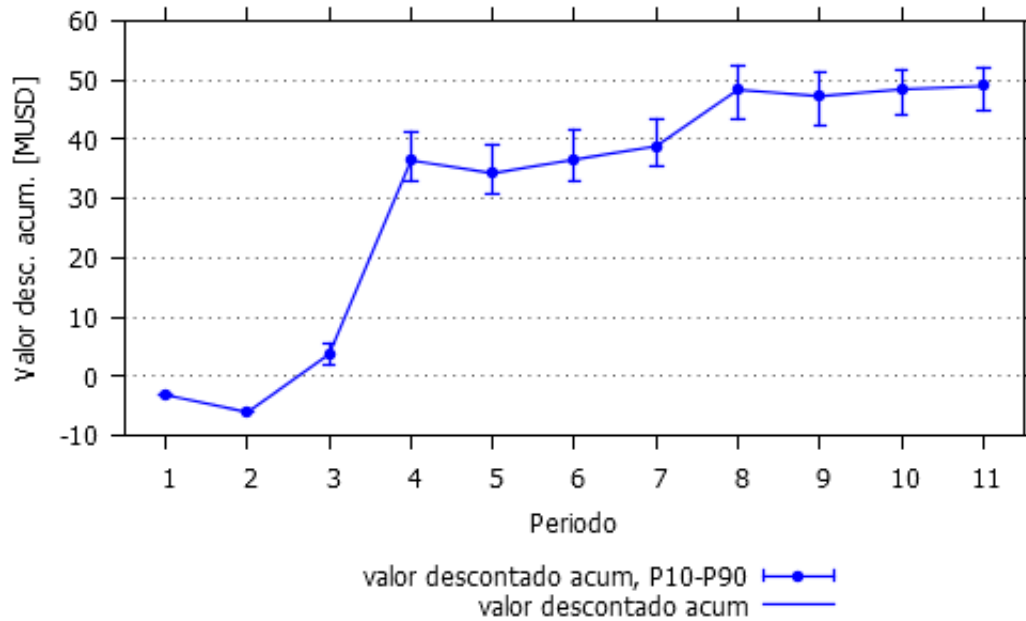


Figura 34: Valor descontado acumulado obtenido del agendamiento de bloques, obtenida con MIP y utilizando una estrategia fase a fase. Se muestra el valor esperado, con sus respectivos percentiles 10 y 90, para cada periodo.

Todos los detalles del resultado mostrado hasta acá representan la solución obtenida con el método MIP, a un 0.1% del óptimo, explicado al inicio. Sin embargo, es importante analizar los resultados obtenidos al aplicar las estrategias heurísticas que permiten hallar soluciones aproximadas, ya que éstas se transforman en la alternativa factible cuando se tiene una instancia de agendamiento que no se puede resolver directamente mediante el método MIP. En la Tabla 15 se puede apreciar el resumen de dicha comparación. Para cada método se tiene, de izquierda a derecha, en porcentaje normalizado respecto al mejor caso (MIP): (i) el VDA esperado, $\mathbb{E}(\text{VDA})$; (ii) el costo total de la incertidumbre, CTI; (iii) el valor objetivo; y (iv) los tiempos de ejecución de los métodos.

	$\mathbb{E}(\text{VDA})$ [%]	CTI [%]	Valor objetivo [%]	Tiempo [s]
MIP	100.00	100.00	100.00	2,993.00
HV(1,1)	94.93	206.39	92.97	4.91
HV(2,1)	97.67	177.48	96.27	86.17
HV(2,2)	95.32	197.26	93.53	27.34
HV(3,1)	96.77	174.33	95.40	435.18
HV(3,3)	99.36	191.40	97.75	212.63
HV(4,1)	98.00	180.41	96.55	1,351.93
HV(4,2)	97.39	186.55	95.82	595.94
HV(4,4)	100.38	191.01	98.79	491.78

Tabla 15: Comparación de los distintos métodos de resolución del agendamiento fase a fase.

El principal aspecto que se destaca en esta comparación es cómo el valor objetivo de las instancias heurísticas se acerca a la solución óptima a medida que se consideran ventanas de mayor longitud. En particular, resulta mejor en este caso fijar toda la ventana, esto es, $T' = \Delta$ al construir la solución factible, en vez de tomar ventanas de longitud T' , resolver y luego fijar sólo una porción $\Delta < T'$ de ésta.

6.4.2. Modelo de agendamiento equilibrado de fases: implementación y resultados

Por su parte, el modelo de agendamiento equilibrado de fases también fue implementado y los resultados se muestran en lo que sigue. Al igual que el caso anterior, se mostrarán todos los detalles del resultado obtenido con el método MIP, dejando para el final una comparación de los principales valores económicos de la instancia al utilizar distintas estrategias heurísticas. En la Figura 35 se muestra la geometría de agendamiento obtenida con MIP. Se observa que la extracción se realiza siguiendo una secuencia equilibrada de fases, a partir de alcanzar cierta profundidad predefinida, en este caso 10 bancos por fase. El modelo fue implementado para que todas sus fases fueran equilibradas; es posible restringir esta elección a un número menor de fases, según los requerimientos del evaluador.

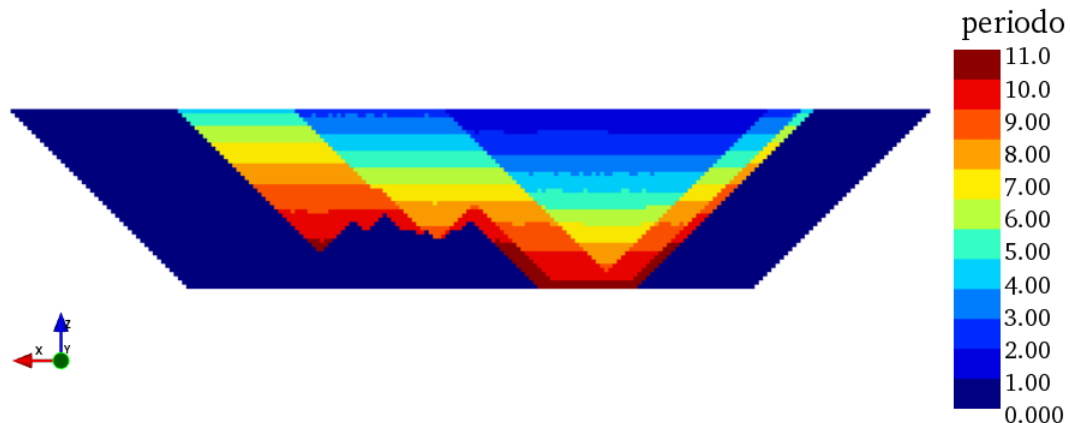


Figura 35: Geometría de extracción para BM-Estra, obtenida con MIP y siguiendo la estrategia de agendamiento equilibrado de fases: no se permite una diferencia mayor a 10 bancos entre fases consecutivas, lo que obliga ir extrayendo simultáneamente más de una fase.

Respecto al plan de producción de largo plazo, que se muestra en la Figura 36, se puede ver que se cumplen los límites impuestos en los tonelajes de minado, que deben encontrarse entre 1.0 y 1.1 [MTon] por periodo, excepto en el último año, donde la restricción de cota inferior no aplica. Respecto a los tonelajes enviados a planta se puede ver una alimentación más cercana a la realidad, en el sentido de un *ramp-up* entre los periodos 3 y 5, alcanzando un régimen de producción entre las 400 y 500 [KTon], salvo el último periodo, presentando una mejora operacional respecto al caso anterior. En cuanto a las desviaciones que minimizan el costo de la incertidumbre, en este caso sólo

se presentan desviaciones en el metal obtenido, los cuales son mostrados en la Tabla 16; esto es un resultado particular de la instancia, donde los escenarios de leyes y parámetros impuestos al modelo permitieron encontrar una solución, cuyo valor descontado acumulado no fue castigado por desviaciones en el tonelaje de mineral a planta a lo largo de los escenarios considerados.

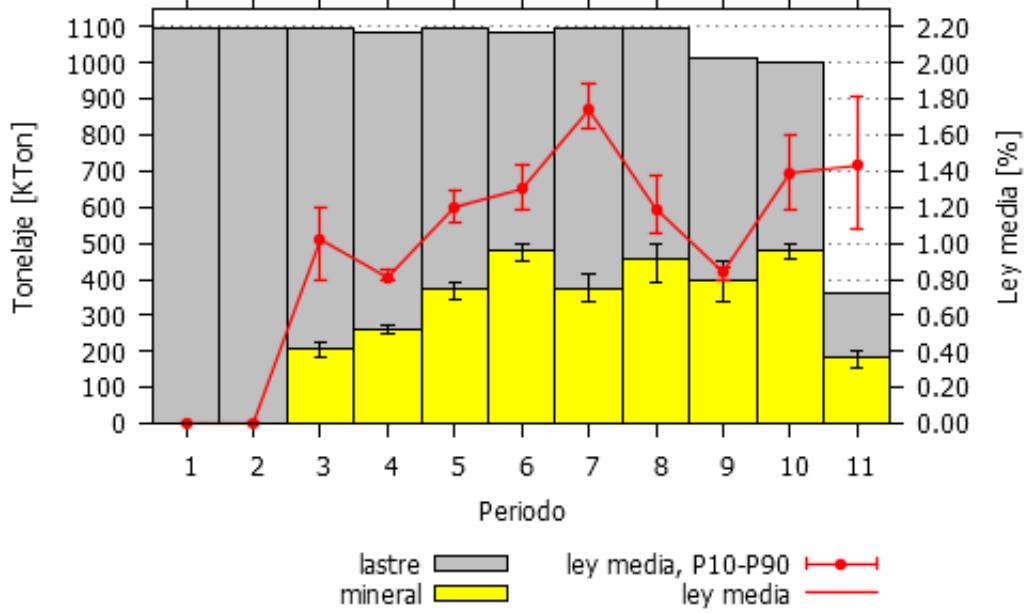


Figura 36: Plan de producción obtenido del agendamiento de bloques obtenido con MIP y utilizando una estrategia equilibrada de fases. Se muestran los tonelajes de mineral (con sus bandas de incertidumbre a lo largo de todos los escenarios), el respectivo tonelaje de estéril y la ley de cabeza, con los percentiles 10 y 90 para cada periodo.

Periodo	Simulación	Tonelaje metal subproducción
3	3	17,337
4	3	50
4	10	16,588

Tabla 16: Desviaciones en el tonelaje de metal subproducido, para cada periodo y escenario (simulación) en el agendamiento, obtenida con MIP y usando la estrategia equilibrada de fases.

Por otra parte, en la Figura 37 se muestra el valor descontado acumulado del proyecto. Se puede ver un flujo negativo los primeros 4 periodos, pasando a ser positivo desde el periodo 5. El valor final alcanza un total cercano a los 42 [MUSD], con un rango interdecil de 6 [MUSD].

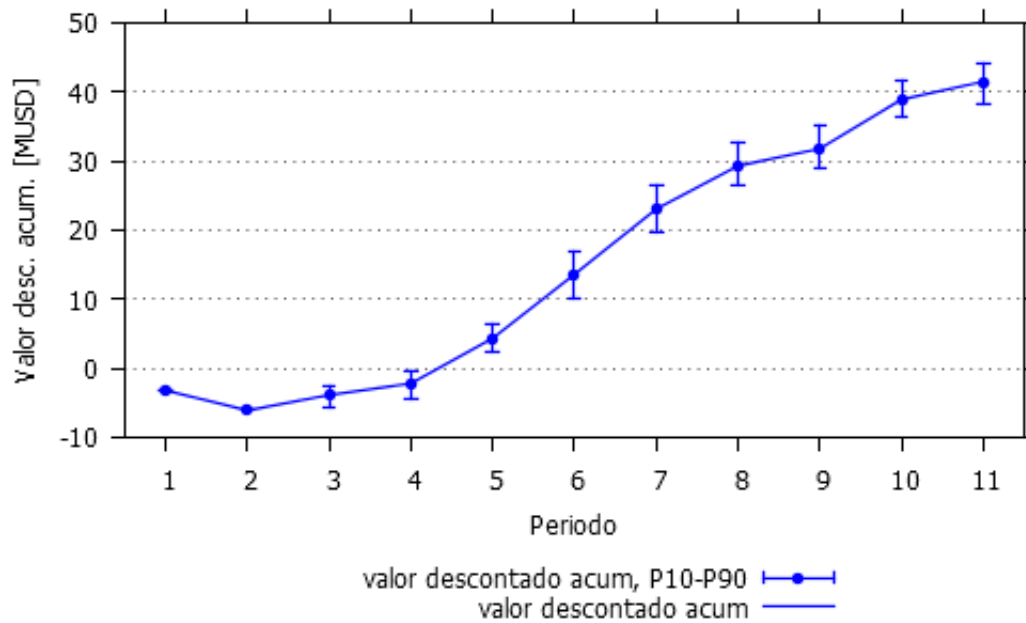


Figura 37: Valor descontado acumulado del agendamiento de bloques obtenido con MIP y utilizando una estrategia equilibrada de fases. Se muestra el valor esperado, con sus respectivos percentiles 10 y 90 para cada periodo.

Ahora se procede a comparar la solución hallada mediante el método MIP, que se obtuvo con un gap de optimalidad de un 0.1%, versus las distintas instancias de la heurística por ventanas. Se insiste en la importancia de analizar los resultados obtenidos al aplicar las estrategias heurísticas que permiten hallar soluciones aproximadas, ya que éstas se transforman en la alternativa factible cuando se tiene una instancia de agendamiento que no se puede resolver directamente mediante el método MIP. En la Tabla 17 se presenta la comparación. Para cada método se tiene, de izquierda a derecha: (i) el VDA esperado, $\mathbb{E}(\text{VDA})$; (ii) el costo total de la incertidumbre, CTI; (iii) el valor objetivo; y (iv) el tiempo de ejecución, en segundos, de los distintos métodos.

Similar al caso del agendamiento fase a fase, el principal aspecto que se destaca en esta comparación, es cómo el valor objetivo de las instancias heurísticas se acerca a la solución óptima a medida que se consideran ventanas de mayor longitud. Si bien en este caso la mejor aproximación se logró al considerar ventanas de longitud 3 en vez de 4, pero sólo un 0.14% mejor, también resulta mejor fijar toda la ventana, esto es, $T' = \Delta$.

	$\mathbb{E}(\text{VDA})$ [%]	CTI [%]	Valor objetivo [%]	Tiempo [s]
MIP	100.00	100.00	100.00	119.74
HV(1,1)	97.93	238.77	97.27	3.38
HV(2,1)	96.89	256.98	96.14	111.11
HV(2,2)	96.48	201.57	95.98	35.49
HV(3,1)	98.77	229.13	98.16	645.70
HV(3,3)	99.20	275.94	98.37	285.96
HV(4,1)	99.41	263.86	98.63	3,596.78
HV(4,2)	98.85	308.51	97.86	2,140.26
HV(4,4)	98.98	258.35	98.23	938.30

Tabla 17: Comparación de los distintos métodos de resolución del agendamiento equilibrado de fases.

A lo largo de este capítulo, hemos implementado los distintos modelos para cada una de las tres etapas normalmente utilizadas en la planificación de la producción de largo plazo de minas a rajo abierto, pero considerando la incertidumbre de leyes en cada una de ellas. Esta implementación permitió realizar los ajustes necesarios a las distintas instancias de cada uno de los subproblemas considerados. Ahora, en el siguiente capítulo, se aplicará toda la metodología propuesta y validada en esta sección a un caso de estudio real.

7. Caso de estudio

En este capítulo se aplicará la metodología de la sección 5 que considera la incertidumbre de leyes en la determinación del pit final, en la selección de fases y en el agendamiento de bloques, todo sobre un caso de estudio real. En la sección 7.1 se entregan todos los detalles que permitirán definir el caso de estudio; en la sección 7.2 se muestran los resultados de la etapa de pit final, donde destaca la obtención de la frontera eficiente con la mejor estrategia de beneficio-riesgo; en la sección 7.3 se presentan los resultados de la selección automática de fases, cuyo principal resultado es la solución propuesta al problema del gap. Finalmente, en la sección 7.4 se muestran los resultados del agendamiento de bloques, que incorpora el costo de la incertidumbre. Además, junto con los resultados de cada una de las etapas, también se presenta una comparación con la metodología tradicional (determinista), donde se utiliza como única representación o estimación del depósito, el modelo kriging, o en su defecto, el promedio entre todas las realizaciones, usualmente conocido como modelo *e-type*.

7.1. Antecedentes

A continuación, se mostrará el modelo de bloques y los parámetros que definen el caso de estudio presente. La sección 7.1.1 entrega los antecedentes del modelo de bloques; en la sección 7.1.2 se muestran la fórmula de valorización y los parámetros que definen el modelo económico; en la sección 7.1.3 se presentan los parámetros geotécnicos que definen la relación de precedencia entre bloques dentro del yacimiento para su extracción; y en la sección 7.1.4 se describen los recursos computacionales que fueron utilizados en los experimentos.

7.1.1. Sobre el modelo de bloques

El modelo de bloques utilizado en este capítulo corresponde a un yacimiento pórfido de cobre. En adelante, este modelo de bloques será llamado BM-Pórfido. Se dispone de un conjunto de 50 simulaciones condicionales, y dado que no se cuenta con la ley de kriging, se utilizará el modelo *e-type* como representación base de la ley para la metodología tradicional. Se asume en este caso de estudio que el conjunto de 50 simulaciones es suficiente para capturar o reproducir la variabilidad real de la ley de cobre. El modelo consta de 407.179 bloques de 10x10x10. En las Figuras 38 a 41 se pueden apreciar tres distintas simulaciones de la ley, además de la ley promedio para una vista en planta en cota $Z = 2015$. Este modelo cuenta, para cada bloque, con información de:

- * coordenadas espaciales x, y, z
- * 50 simulaciones condicionales de la ley de cobre
- * densidad
- * ley promedio entre los 50 escenarios

Lamentablemente, por razones de confidencialidad, no se pueden detallar otros aspectos específicos del modelo de bloques, como propietario, ubicación, etc. Por la misma razón, se amplificaron las leyes por una constante y se trasladaron las coordenadas espaciales.

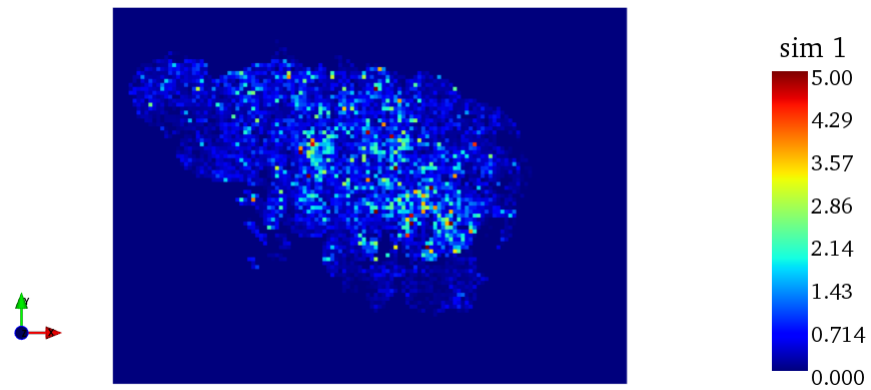


Figura 38: Vista en cota Z=2015 de la ley de cobre en el modelo BM-Pórfido: simulación 1.

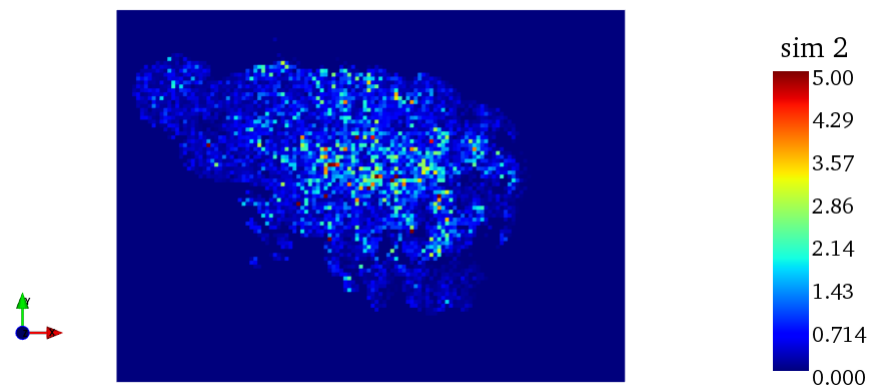


Figura 39: Vista en cota Z=2015 de la ley de cobre en el modelo BM-Pórfido: simulación 2.

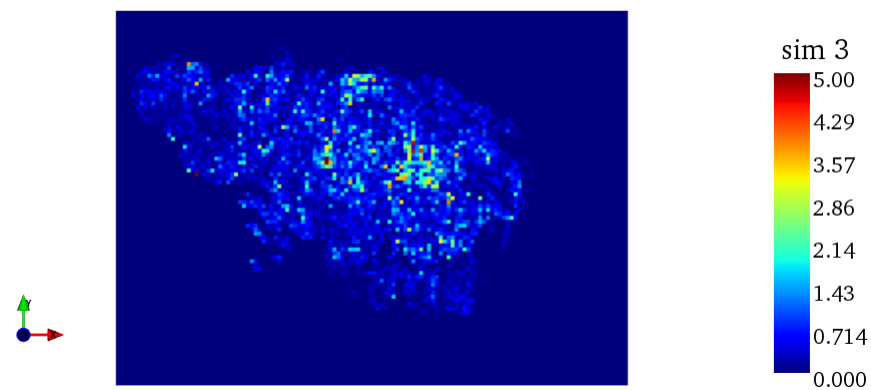


Figura 40: Vista en cota Z=2015 de la ley de cobre en el modelo BM-Pórfido: simulación 3.

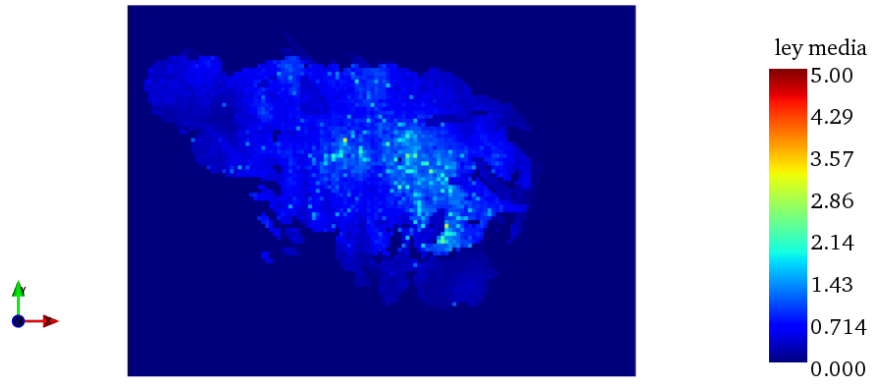


Figura 41: Vista en cota Z=2015 de la ley de cobre en el modelo BM-Pórfido: ley promedio entre las simulaciones, define modelo e-type.

En la Figura 42 se puede ver el histograma promedio de leyes, con sus respectivas barras de error que muestra el rango (mínimo y máximo) en cada intervalo a lo largo de todos los escenarios.

Finalmente, se construyen las curvas de tonelaje-ley para cuantificar las reservas para distintas leyes de corte. Esto se logra a través del inventario de reservas del yacimiento que se encuentran bajo una ley de corte dada y calculando la ley media de todos los recursos cuya ley es superior o igual al mismo valor. En la Figura 43 se pueden apreciar las curvas de tonelaje-ley para todos los escenarios y para el modelo e-type.

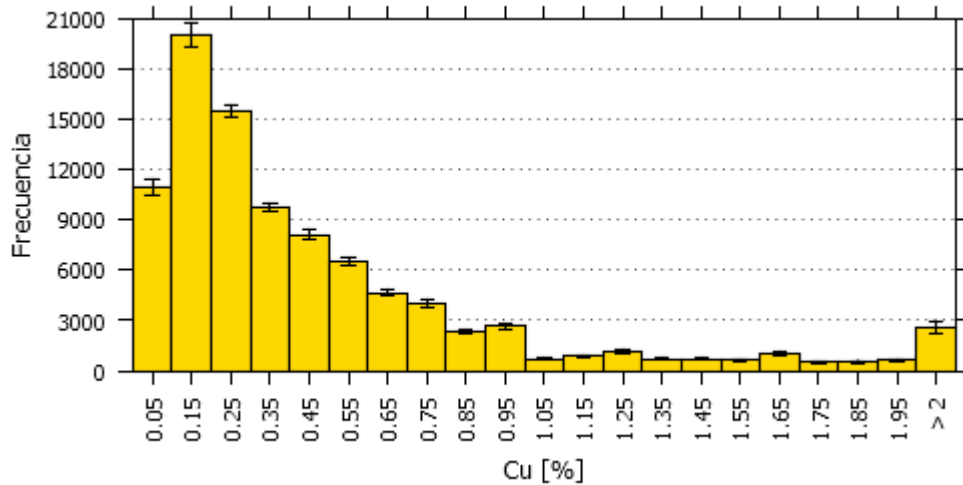


Figura 42: Histograma de leyes de cobre en el modelo de bloques BM-Pórfido

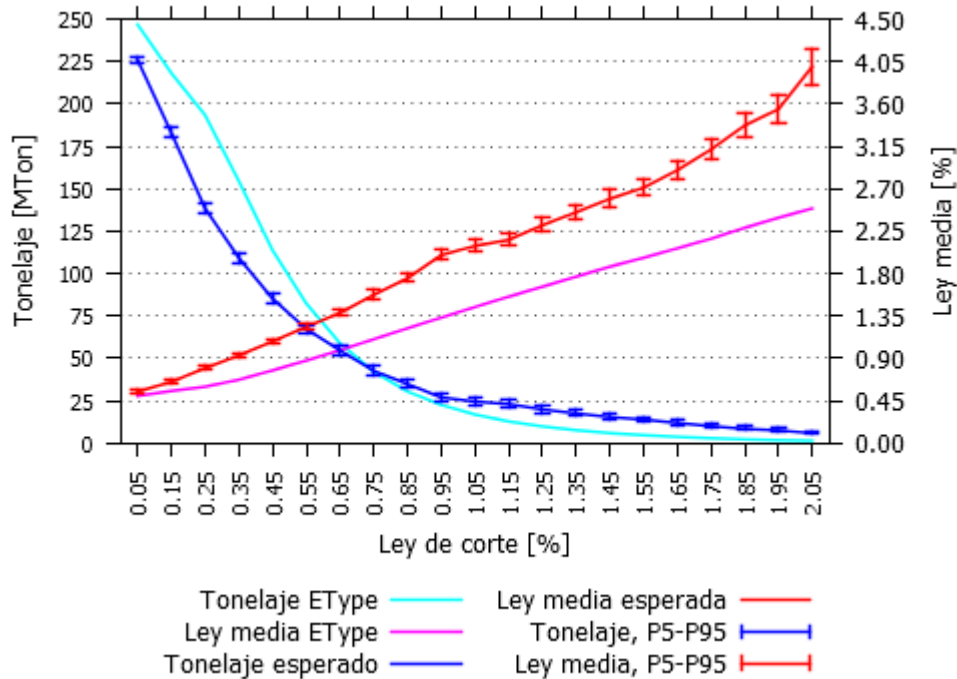


Figura 43: Curvas de tonelaje ley en el modelo de bloques BM-Pórfido. Se muestran las curvas esperadas a lo largo de todos los escenarios, con sus respectivos percentiles P5 y P95, además de las curvas para el caso determinista, cuando el modelo e-type es considerado.

7.1.2. Modelo económico de bloques

La expresión utilizada para generar la valorización v_{br} para cada bloque b en cada escenario r viene dada por (2). Los parámetros utilizados en la valorización se muestran en la Tabla 8.

7.1.3. Parámetros para el control del talud

Según la descripción de la sección 2.1.1, el molde de precedencias que se definirá para este modelo de bloques 3D será de 45° de talud global y 5 niveles. Esto equivale a decir que para extraer un bloque b , primero se deben extraer todos los bloques cuyos centros de masa se encuentren dentro del cono invertido con vértice en b , altura 5 bancos y ángulo 45° . No se asume ninguna consideración adicional sobre la geomecánica en las paredes del pit.

7.1.4. Sobre el recurso computacional

Para implementar los modelos en cada una de las etapas se harán uso de los mismos *software* que en el caso de estudio sintético (sección 6.1.4), sin embargo, los experimentos fueron ejecutados

en un computador con las siguientes características: máquina Intel Xeon CPU E5-2660 v3, 256 Gb de memoria ram, con 20 núcleos a 2.6 GHz, en ambiente Windows 10 Pro.

7.2. Etapa 1: Pit final

Ahora corresponde aplicar la metodología propuesta en 5.1, para encontrar la frontera eficiente que permite tomar una decisión de pit final, considerando el *trade-off* entre dos objetivos en conflicto: valor esperado como beneficio de la explotación y riesgo asociado al considerar múltiples escenarios en vez de uno determinístico, como es el caso de la metodología usual mediante el krigado, o en su defecto para este estudio, el promedio de las realizaciones.

7.2.1. Implementación y resultados

En esta sección se mostrarán los resultados obtenidos para pit final considerando un nivel de confianza de un 95% en la evaluación del riesgo a través del CVaR. En la Tabla 18 se pueden apreciar los principales resultados numéricos obtenidos: la primera columna indica el parámetro μ que pondera la medida de riesgo en la función objetivo; la segunda columna muestra el Valor en Riesgo (VaR); la tercera columna muestra la medida de riesgo de interés en esta tesis, el Valor Condicional en Riesgo (CVaR); luego se muestra el valor esperado de pit final; después se tiene la diferencia absoluta entre valor y CVaR como criterio de decisión; y finalmente, la última columna muestra el tiempo de ejecución de la solución obtenida. Todos los resultados se encuentran dentro de un gap de optimalidad de un 1%. La estrategia para definir los parámetros μ que se muestran en los resultados sigue el siguiente procedimiento:

Procedimiento 7.1. *Generación de parámetros que pondera la función objetivo.*

1. **Inicio:** generar números $\mu = 10^n$, donde $n \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. En otros casos de estudio podría ser necesario ampliar o disminuir este rango de enteros inicial.

2. **Refinamiento:** si existe un entero n de modo tal que se cumpla al menos una de las siguientes:

$$(i) \text{CVaR}(\mu_n) - \text{CVaR}(\mu_{n+1}) > K_{\text{CVaR}},$$

$$(ii) \text{EVal}(\mu_n) - \text{EVal}(\mu_{n+1}) > K_{\text{EVal}},$$

es decir, que la diferencia entre valores consecutivos de CVaR o valor esperado (respectivamente) sea mayor a cierto umbral predefinido, se procederá a refinar el respectivo intervalo $[L_{\text{inf}}, L_{\text{sup}}]$, agregando 8 valores adicionales de la forma $\frac{L_{\text{sup}}}{10} \cdot i$, donde $i = 2, \dots, 9$. Los valores umbrales mencionados serán definidos por el evaluador después de obtener los resultados con los valores de inicio. Cabe destacar que este refinamiento debe realizarse en las zonas de interés, como por ejemplo, dentro de la p -meseta.

3. **Finalización:** se repite el paso de refinamiento según alguno de los respectivos criterios de CVaR o valor esperado se cumpla. Sin embargo, esta secuencia de pasos no asegura el refinamiento de valores consecutivos, pues esto depende de la factibilidad del problema y de la distribución del mineral en el yacimiento, por lo tanto, el criterio del evaluador es muy importante.

En el caso de estudio de esta sección, fue posible aplicar la estrategia anterior en los siguientes casos, como se puede apreciar en la Tabla 18:

1. Primera iteración: [0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, 100, 1000].
2. Segunda iteración: identifica opción de refinamiento entre [1, 10]. Se considera que valores mayores a 10 están fuera de la zona de interés. Luego, se agregan los puntos [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9].

Los valores de VaR, CVaR y valor esperado se obtienen directamente del proceso de optimización. Estos resultados permiten graficar el par (valor esperado, CVaR) en un gráfico que muestra la forma de la frontera eficiente, tal como se muestra en la Figura 44: los puntos representan distintas alternativas de pit final, cada uno con su respectivo valor esperado y riesgo asociados. Para mostrar de una forma más clara la frontera eficiente, se trazó una interpolación polinómica entre los puntos. Nótese que para valores suficientemente grandes del ponderador μ ($\mu = 100$), la decisión de pit final es no realizar la explotación.

Frontera eficiente para un nivel de confianza $\delta = 95\%$					
μ	VaR [USD]	CVaR [USD]	Valor [USD]	Diferencia absoluta [USD]	Tiempo [s]
0.001	161,164,316	197,506,401	2,095,497,612	1,897,991,212	3,202
0.01	160,871,905	197,073,531	2,095,494,459	1,898,420,928	3,329
0.1	161,910,451	195,578,947	2,095,409,255	1,899,830,309	4,347
1	144,991,563	165,999,267	2,078,057,898	1,912,058,632	14,881
2	124,853,605	128,280,711	2,024,276,680	1,895,995,968	24,450
3	114,381,423	114,400,383	1,989,675,906	1,875,275,523	35,199
4	101,848,864	107,438,753	1,953,801,418	1,846,362,664	48,904
5	94,520,276	97,039,768	1,901,123,843	1,804,084,075	271,182
6	89,818,105	89,818,105	1,889,891,822	1,800,073,717	165,854
7	87,602,530	87,602,530	1,867,169,755	1,779,567,225	399,162
8	77,013,552	77,013,598	1,790,925,106	1,713,909,508	265,470
9	29,045,227	29,048,761	1,402,294,467	1,373,245,706	513,727
10	26,166,323	26,167,549	1,377,194,293	1,351,026,744	187,754
100	0	0	0	0	211,356

Tabla 18: Resultados numéricos de la frontera eficiente para las alternativas de pit final estocástico, obtenida con un nivel de confianza del 95%.

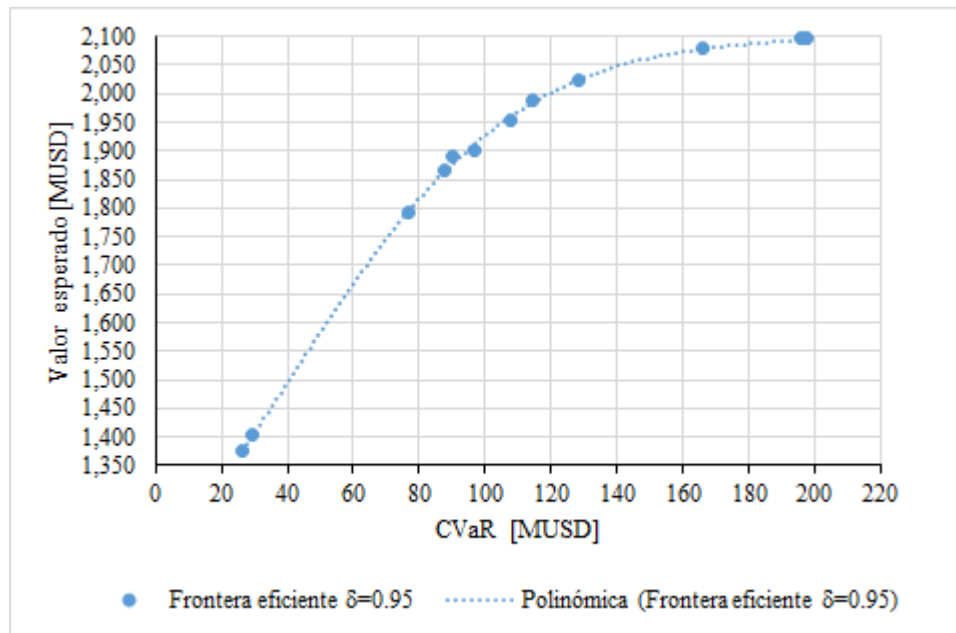


Figura 44: Frontera eficiente entre valor esperado y riesgo (CVaR) para la decisión de pit final, con un nivel de confianza de 95 %.

Algunas observaciones de los resultados de pit final:

- La importancia de la frontera eficiente es que permite al evaluador considerar alternativas de pit final en función del riesgo que el dueño esté dispuesto a asumir, con cierta promesa de valor esperado.
- Como se mencionó en la sección 5.1, algunos de los criterios que puede utilizar el evaluador para decidir qué pit final elegir, podemos mencionar:
 - (i) analizar el *ratio* CVaR/Valor y elegir aquel que no supere cierto umbral predefinido por el evaluador.
 - (ii) elegir el pit final que reporte mayor diferencia entre valor esperado y CVaR. Utilizando este criterio, el pit final será, por definición, aquel obtenido con $\mu = 1$.
 - (iii) a priori, es posible que por políticas internas de la empresa, el evaluador no pueda aceptar proyectos con riesgo superior a un valor dado R^+ : en este caso, el criterio será elegir la alternativa con mayor valor y riesgo acotado por R^+ .
 - (iv) contrario al caso anterior, puede ocurrir que el evaluador quiera minimizar el riesgo, pero asegurar un retorno mínimo V^- : en este caso, el criterio será seleccionar el pit final con mínimo CVaR de modo tal que el valor esperado sea mayor que V^- .

En este caso, se tomará el criterio (ii) de mayor diferencia absoluta entre valor esperado y CVaR para elegir la mejor decisión de pit final.

- Los resultados de interés en la frontera eficiente se encuentran en la p-meseta (puntos de la frontera que se encuentran en el p% de mayor valor esperado). En general, la decisión de pit final se tomará dentro de esta meseta, buscando la alternativa que mantenga un alto valor esperado y reduzca el riesgo asociado: en el caso particular de BM-Pórfido, si se considera una 10-meseta, en la cual se tiene una reducción de hasta un 10% de valor, se encuentran todas las alternativas de pit final de parámetros $\mu = 0,001$ hasta $\mu = 5$. El caso límite ($\mu = 5$), incluye el pit final cuyo riesgo se ve reducido en un 50% aproximadamente, mientras que el valor esperado cae sólo un 9.5%. De todas formas, siempre es importante realizar comparaciones absolutas, dada la naturaleza de las variables económicas de interés, por ejemplo, como se hace en el criterio (ii).

Respecto a los tonelajes esperados de mineral y estéril, para cada alternativa de pit final que se encuentra en la frontera eficiente, se representa en la Figura 45 un gráfico que muestra cómo los tonelajes esperados van decreciendo a medida que aumenta el ponderador de la medida de riesgo: esto se traduce como una renuncia a zonas más riesgosas del depósito. En el mismo gráfico se muestran las desviaciones del tonelaje de mineral para cada opción de pit final, representado como barras de error los percentiles 5 y 95. Del mismo modo, se muestra la ley media de cada pit final, también con sus barras de error mediante percentiles 5 y 95, a lo largo de todos los escenarios.

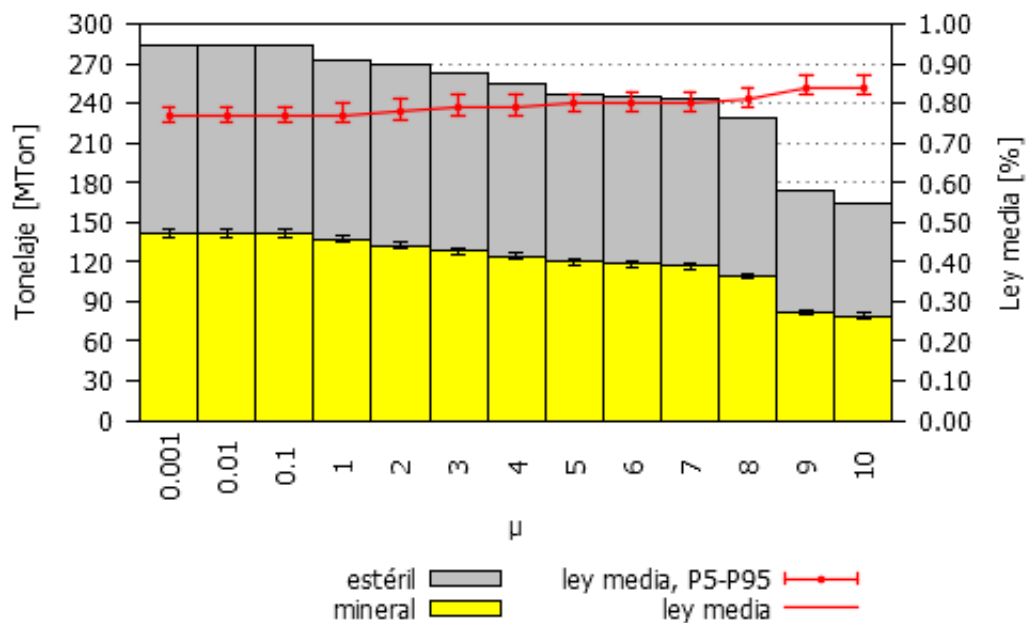


Figura 45: Gráfico de tonelajes mineral y estéril para cada alternativa de pit final estocástico en la frontera eficiente para BM-Pórfido y un nivel de confianza de un 95%.

El indicador de riesgo (CVaR) utilizado en esta tesis mide las pérdidas que se encuentran más allá del VaR, para un nivel de confianza dado. Como se vio en la sección 5.1, el CVaR se compone

del VaR más un 'promedio' de las contribuciones por pérdidas asociadas a los distintos escenarios. Para recordar:

$$CVaR = VaR + \frac{1}{R(1-\alpha)} \sum_{r \in \mathcal{R}} z_r$$

donde R representa el número de escenarios, δ es el nivel de confianza y z_r el aporte de cada escenario r al CVaR. Entonces, resulta interesante analizar qué tanto contribuyó cada escenario a la composición del CVaR: esto se muestra en la Tabla 19, donde para cada valor de μ se muestra el valor de $\frac{z_r}{R(1-\delta)}$, para todo escenario r . Estos valores son los que generan las diferencias entre las columnas VaR y CVaR de la Tabla 18: en nuestro caso particular, no todos los escenarios de leyes contribuyen al CVaR, siendo el escenario 5 aquel que presenta las mayores pérdidas respecto al valor estimado. Otros escenarios también presentan pérdidas, las que van decreciendo a medida que el ponderador va aumentando. Nótese que sólo 8 escenarios del total presentan valores positivos. Para el pit final elegido ($\mu = 1$), el escenario 5 representa el 99.5% de la contribución al CVaR sobre el VaR.

μ	z_3	z_5	z_{19}	z_{20}	z_{28}	z_{36}	z_{37}	z_{39}
0.001	0	31,177,831	0	0	0	5,164,254	0	0
0.01	0	30,970,286	0	0	0	5,231,340	0	0
0.1	0	29,517,467	0	0	0	4,151,028	0	0
1	88,302	20,916,133	0	0	0	3,269	0	0
2	1,365	3,408,921	0	0	0	16,820	0	0
3	18,960	0	0	0	0	0	0	0
4	23,287	4,572,141	0	0	0	14,339	980,122	0
5	28,708	6,909	0	2,449,675	0	2,804	0	31,395
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	2,023	0	0	0	23	0	0
9	0	0	0	0	3,534	0	0	0
10	0	0	1,227	0	0	0	0	0

Tabla 19: Para cada valor del ponderador μ , se muestra cómo los distintos escenarios contribuyen al CVaR.

Ahora corresponde mostrar la geometría de extracción. Para ello, se ha dispuesto en la Figura 46 la geometría de la alternativa de pit final que pertenece a la frontera eficiente de la Tabla 18 para $\mu = 1$. Una muestra completa de las geometrías de pit final para todos los valores de ponderadores μ se muestran en el Anexo B2, sección 9.3. El color verde representa aquellos bloques que pertenecen al pit final y en azul se muestran los que no pertenecen.

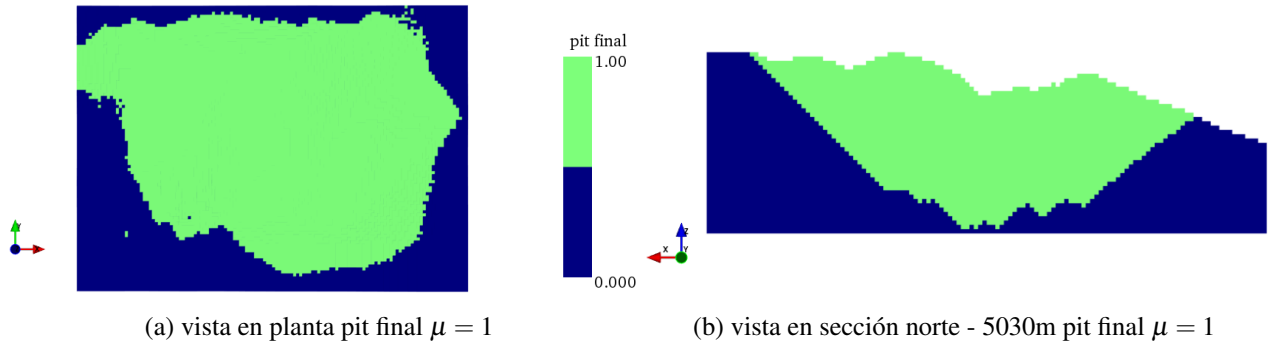


Figura 46: Vistas en planta y corte en sección norte de la alternativa de pit final del modelo BM-Pórfido de parámetro $\mu = 1$ para un nivel de confianza del 95 %.

7.2.2. Comparación de pit final con la metodología tradicional

Conocida la frontera eficiente resulta interesante saber cuál es la posición del pit final determinista, aquel que se obtiene considerando sólo un escenario de leyes como el krigeado o e-type, en la región factible dentro del plano beneficio-riesgo. Para ello, se considera:

- Un modelo de bloques e-type (promedio de todas los escenarios de leyes).
- Un modelo económico basado en la ley de corte crítica (LCC) de la sección 2.1.2 y parámetros según la Tabla 8.
- Una relación de precedencia dada por un ángulo de talud global de 45° y 5 niveles.
- Un programa de optimización (PPF), como el definido en la sección 2.1.

Lo anterior busca replicar el equivalente determinista del problema de pit final usando los mismos parámetros que dieron origen a la frontera eficiente. El objetivo es que el pit final tradicional basado sólo en un escenario sea comparado en términos cualitativo y cuantitativo con aquel obtenido en la frontera eficiente con parámetro $\mu = 1$, seleccionado como el mejor pit final estocástico. Además, se agregará la nube de puntos de los pit finales de cada escenario en la región factible del plano beneficio-riesgo, es decir, se repite el procedimiento anterior, pero reemplazando el modelo de bloques con la ley de cada escenario.

Una vez obtenidos los pit finales deterministas, para cada escenario por separado, se debe resolver nuevamente el modelo (PPF2) de la sección 5.1, pero fijando la variable x_b asociada a la decisión de pit final, dejando que el modelo resuelva solamente para z_r : con esto, se puede calcular el CVaR asociado y el valor esperado de pit final que permiten hacer la comparación. En la Figura 47 se puede ver la parte de interés del plano beneficio-riesgo, donde se muestra la frontera

eficiente, la nube de puntos de los pit finales para todos los escenarios y el pit final del modelo e-type.

Comparando el rendimiento de la alternativa de pit final estocástico (punto de la frontera eficiente con $\mu = 1$) con la de pit final determinista (obtenido con modelo e-type), se tiene que el primero muestra un doble mejor desempeño que el segundo, en términos de un mayor valor esperado (0.4%) y un menor riesgo (-15.7%). Si se realiza la comparación respecto al criterio de mayor diferencia, se tiene que la alternativa estocástica presenta un 2.1% mejor rendimiento que la alternativa determinista, que equivale a 39 [MUSD] de mayor valor, con un 95% de nivel de confianza. La Tabla 20 muestra los principales indicadores al respecto.

Tipo	VaR [USD]	CVaR [USD]	Valor [USD]	Diferencia abs. [MUSD]
Pit final estoc.	144,991,563	165,999,267	2,078,057,898	1,912,058,632
Pit final det.	155,721,720	197,008,150	2,070,051,678	1,873,043,529

Tabla 20: Resultados numéricos de las alternativas estocástica y determinista de pit final.

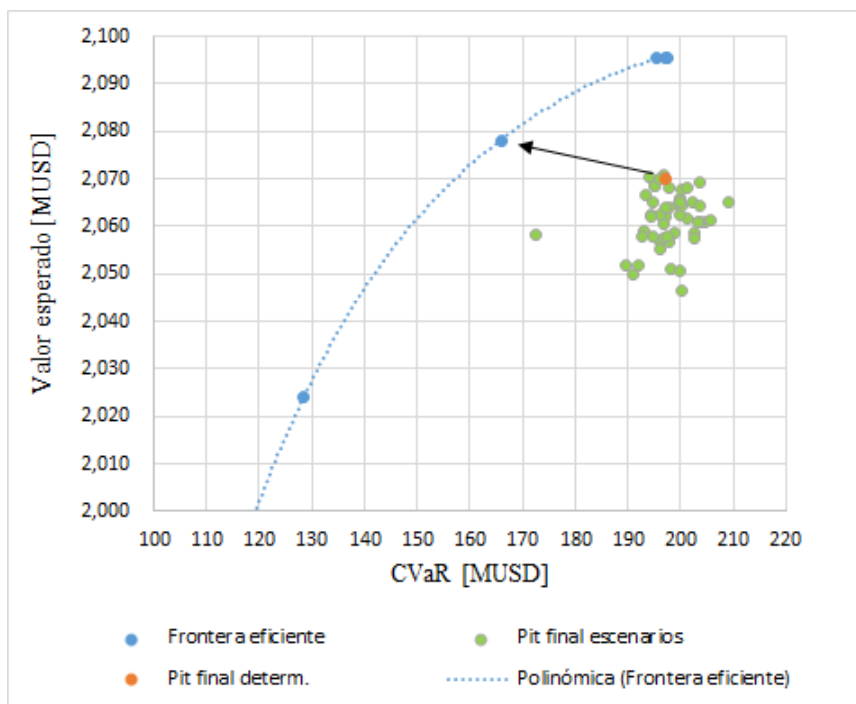


Figura 47: Comparación de pit final determinista (metodología tradicional) en términos de su posición relativa a la frontera eficiente. También se muestran, a modo de referencia, los resultados de pit final de cada escenario.

Respecto a los tonelajes esperados dentro del pit final, se tiene que la alternativa estocástica presenta un 5.3% de mayor tonelaje mineral y un 9% de mayor tonelaje total respecto a la

alternativa determinista. La Tabla 21 muestra el detalle de los distintos tonelajes esperados: para ambas alternativas se muestran sus respectivos tonelajes de mineral, estéril y total, además de las variaciones relativa porcentual de la opción estocástica respecto a la opción tradicional. Finalmente, se presentan la comparación de las geometrías de pit final entre ambas alternativas de pit final. En la Figura 48 se muestran las vistas en planta y sección de cada caso, donde se aprecian las diferencias en sus contornos.

Tonelaje esperado	Pit final		
	estocástico	determinista	VRP [%]
Mineral	137,516,747	130,599,709	5.3
Estéril	135,674,073	120,043,781	13.0
Total	273,190,820	250,643,490	9.0

Tabla 21: Comparación de los tonelajes esperados de mineral, estéril y total para las alternativas de pit final estocástica y determinista.

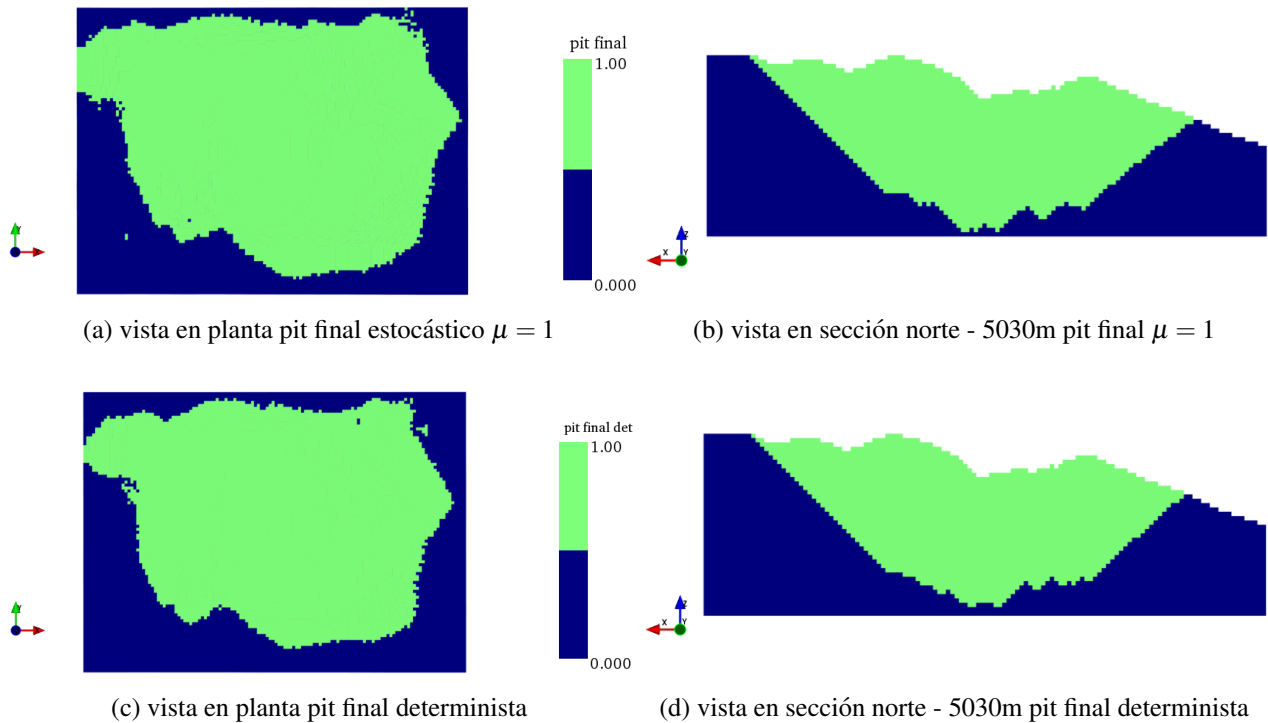


Figura 48: Vistas en planta y sección norte de las alternativas de pit final estocástica y determinista del modelo BM-Pórfido.

En consecuencia, el pit final en la frontera eficiente ofrece mayor valor esperado y menor riesgo en términos de CVaR, además de pits más grandes, con mayores tonelajes de mineral esperado.

7.3. Etapa 2: Selección automática de pushbacks

Una vez definida la envoltura económica de pit final, considerando el riesgo asociado a las pérdidas por no tomar en cuenta la variabilidad local de las leyes, se procede a la segunda etapa, relacionada a la selección de pushbacks dentro del pit final.

7.3.1. Implementación y resultados

El primer paso para generar los pits anidados es definir una serie de *revenue factors* (λ) que servirán de base para escalar el precio del metal y, mediante el modelo económico seleccionado, generar una serie de problemas de tipo pit final que entregarán sucesivamente los pits anidados, tal como se expuso en la sección 5.2.

La Tabla 22 muestra los parámetros técnico-económicos que definen la instancia de generación de pits anidados en este caso. Pruebas preliminares indican que el pit final no se alcanza con un $\lambda = 1$, por lo que será necesario adaptar la estrategia para alcanzar la envolvente, como se explicó en el punto (ii) de la sección 5.2.1. En particular, en esta parte se aplicará la estrategia de agregar un pit adicional que incluya el complemento de bloques no clasificados para que coincida con el pit final. Se utilizarán 89 valores regularmente espaciados para los λ , generando 89 pits anidados, y el pit 90 será aquel que coincida con la envolvente final.

La Figura 49 muestra la secuencia de pits anidados obtenida. El primer pit no vacío se obtuvo para un $\lambda = \frac{17}{89} \approx 0,19$: dado que los incrementos de tonelajes entre pits sucesivos no presentan aumentos de volumen que justifiquen un refinamiento, no es necesario en este caso aplicar el Procedimiento 5.1 para generar pits intermedios. En la Figura 50 se muestra un gráfico con los tonelajes esperados de mineral y estéril, además del valor de cada pit, con sus bandas de error. Note que tanto el tonelaje esperado de estéril como el de mineral son estrictamente crecientes, pero el primero tiene una mayor tasa de crecimiento respecto al segundo, lo que en general indica que las opciones de pushbacks presentarán una REM creciente, de hecho, el primer pit presentará una REM muy baja, escenario ideal para asegurar un agendamiento (etapa posterior) que maximice el valor esperado descontado acumulado, sujeto a las restricciones operacionales.

Parámetro	Símbolo	Valor
Precio (USD/lb)	P	2.5
Recup. metalúrgica	Rec	0.85
Costo extracción (USD/Ton)	C_m	3.2
Costo proceso (USD/Ton)	C_p	9.0
Costo de venta, fund. y refin. (USD/lb)	C_v	0.4
Ángulo de talud, niveles	-	45°, 5
Número de <i>revenue factors</i>	N	89

Tabla 22: Parámetros técnico-económicos que definen la generación de pits anidados en BM-Pórfido.

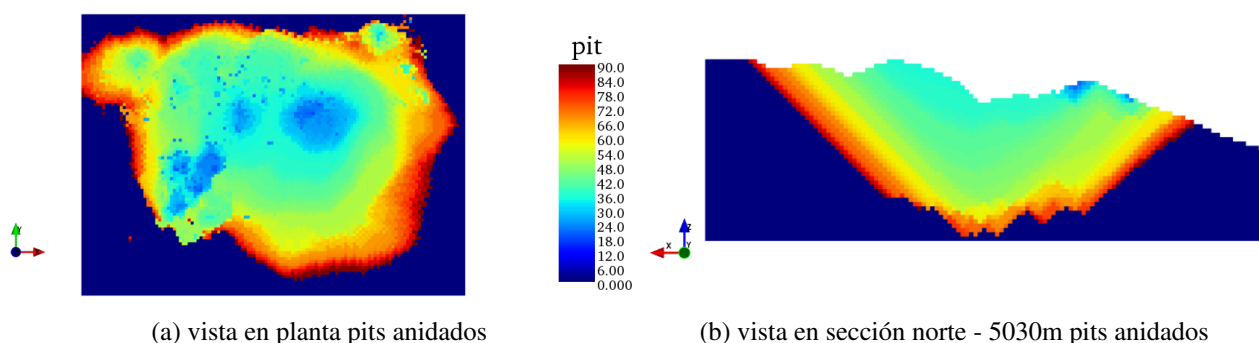


Figura 49: Vistas en planta y sección norte del conjunto de pits anidados del modelo BM-Pórfido dentro del pit final seleccionado en la etapa anterior.

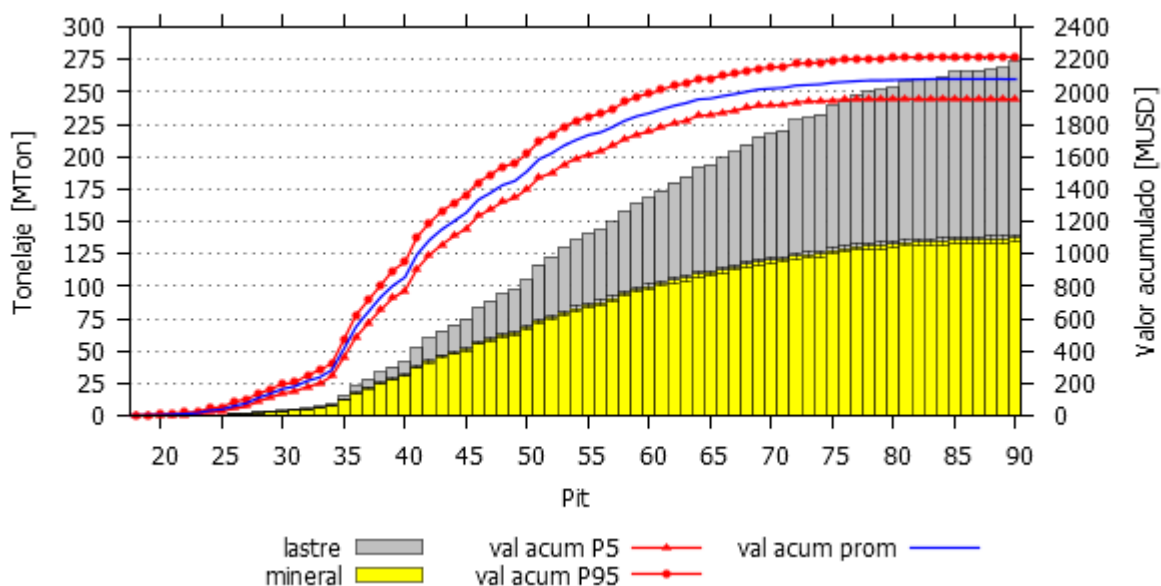


Figura 50: Gráfico *pit by pit*: muestra tonelajes y valor esperado, para cada pit anidado, producto de los distintos escenarios. Bandas de error P5 y P95 para tonelaje de mineral y valor.

Ahora corresponde aplicar el modelo de selección automática de fases a partir del conjunto de pits anidados. Para ello, se deben definir los criterios que fijarán el objetivo y las restricciones del mismo: como se vio en la Figura 50, los primeros pushbacks aseguran una baja REM, por lo que el objetivo será controlar las diferencias en los tonelajes totales entre los distintos pushbacks de la selección, ayudando a reducir el impacto del *problema del gap*, como se reportó en la sección 2.3. Se definirán distintas instancias del mismo problema, modificando el número de pushbacks requerido en cada una. En particular, se utilizará la formulación del problema (PSP) vista en el Anexo C (sección 9.4).

Función objetivo: se buscará la minimización de las diferencias en tonelajes de la selección de pushbacks, medido en términos de la desviación media absoluta, según la ecuación (129) del Anexo C.

Restricciones: las restricciones mencionadas en esta parte hacen referencia al modelo (PSP) del Anexo C.

1. Estructurales (132) - (135): éstas forman parte de la estructura del modelo, por lo que no dependen de parámetros que se deban prefijar.
2. Especiales: éstas son opcionales. En este caso
 - 2.1 Número de fases predefinido (136): se impondrá una partición del pit final en n_o pushbacks. Se definieron 5 instancias del problema, donde en cada una se pide el número de fases descrito en la Tabla 23.
 - 2.2 Tonelajes acotados: esta restricción no aplica, dada la elección de la función objetivo.
3. Simplificadoras (137) - (138): éstas sirven para fijar variables y simplificar el problema. En este caso, $K = 16$ corresponde a los primeros pit vacíos.

Instancia	Número de fases n_o
SP1	2
SP2	3
SP3	4
SP4	5
SP5	6

Tabla 23: Número de fases requerido en cada instancia del problema de selección automática de fases para BM-Pórfido.

Ahora se muestran los resultados obtenidos para cada una de las instancias definidas. En las Figuras 51 a 55 se tiene, para cada instancia definida, un gráfico de tonelajes de mineral esperado,

con sus respectivas barras de error representando el rango, además del tonelaje de material estéril. Adicionalmente, en eje secundario, se muestra la ley media por pushback, junto con sus percentiles 5 y 95.

En cada instancia los pushbacks presentan tonelajes totales similares, según se impuso como objetivo minimizar las diferencias de tonelaje (mineral + estéril). En todas las instancias se tiene un tonelaje de mineral y leyes medias decrecientes a lo largo de los pushbacks. La Tabla 24 muestra las relaciones de estéril mineral (REM) en todos los casos: para cada instancia se tiene una relación creciente, desde el primer pushback hasta el respectivo pushback final, lo que indica el retraso de la extracción del material estéril, ayudando a la maximización del valor descontado. En estricto rigor, es necesario realizar el agendamiento de la producción de cada alternativa de pushbacks para saber cuál es el mejor diseño en términos que aporta mayor VDA. Se insiste en que lo interesante de esta metodología es que automatiza la selección de fases en muy poco tiempo en base a criterios bien definidos y permite realizar diferentes diseños, por ejemplo, reduciendo las diferencias en tonelajes (problema del gap) y las REM en las primeras fases, lo que ayuda a maximizar el valor total.

Instancia	Número de pushbacks					
	1	2	3	4	5	6
SP1	0.64	1.51	-	-	-	-
SP2	0.50	1.01	1.83	-	-	-
SP3	0.44	0.92	1.15	2.00	-	-
SP4	0.39	0.71	1.04	1.39	2.14	-
SP5	0.33	0.68	1.00	1.03	1.58	2.16

Tabla 24: Relación estéril mineral para cada instancia de la selección automática de pushbacks.

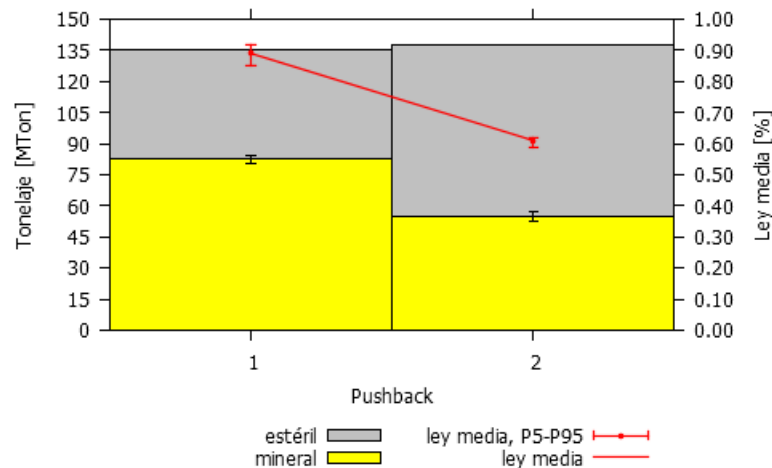


Figura 51: Tonelajes de mineral y estéril, además de ley media en una selección de 2 pushbacks.

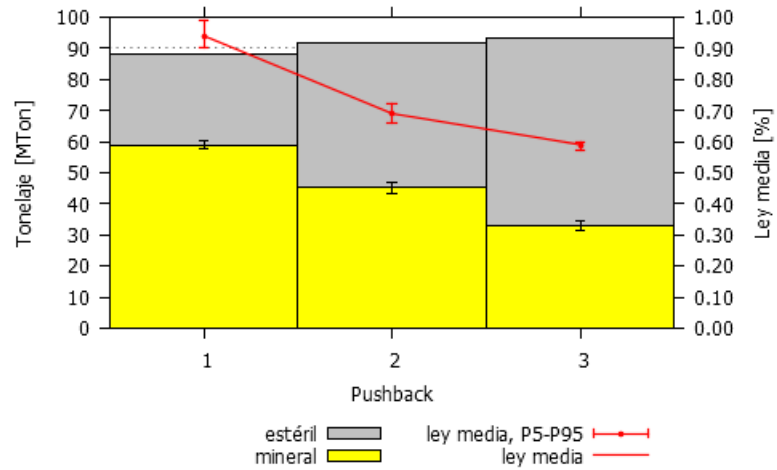


Figura 52: Tonelajes de mineral y estéril, además de ley media en una selección de 3 pushbacks.

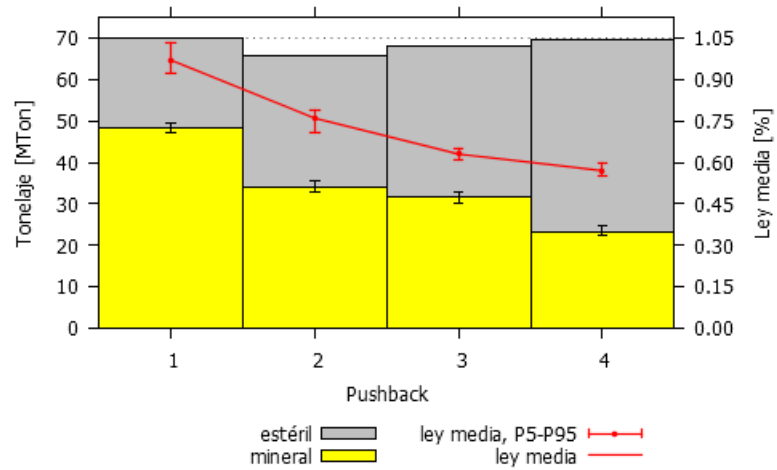


Figura 53: Tonelajes de mineral y estéril, además de ley media en una selección de 4 pushbacks.

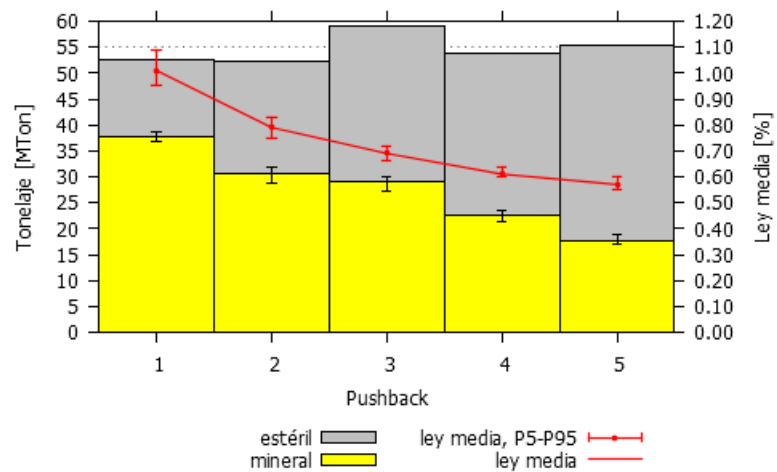


Figura 54: Tonelajes de mineral y estéril, además de ley media en una selección de 5 pushbacks.

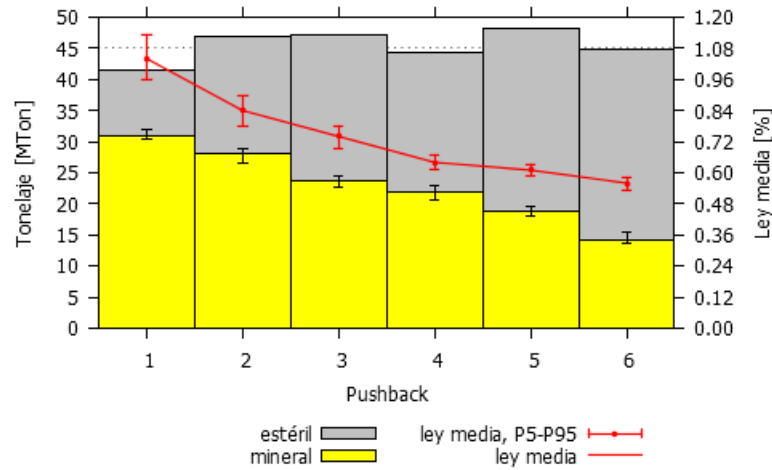


Figura 55: Tonelajes de mineral y estéril, además de ley media en una selección de 6 pushbacks.

Visto el buen desempeño de los objetivos planteados para hacerse cargo del *problema del gap* en la selección de fases, ahora corresponde mirar la geometría de los pushbacks obtenidos, lo cual se muestra en las Figuras 56 a 60, para distintas configuraciones: es muy importante considerar espacios que aseguren la operación de los equipos dentro de cada fase, aun cuando no fue impuesto como criterio dentro del modelo de selección, tiene que ser revisado a posteriori. Como trabajo futuro resulta un gran desafío incorporar este tipo de restricciones que se hagan cargo de los aspectos operacionales, sobretodo considerando que es un problema muy difícil de modelar en términos generales, sin embargo, como ejemplo, se pueden definir direcciones preferenciales para asegurar estos anchos mínimos de operación.

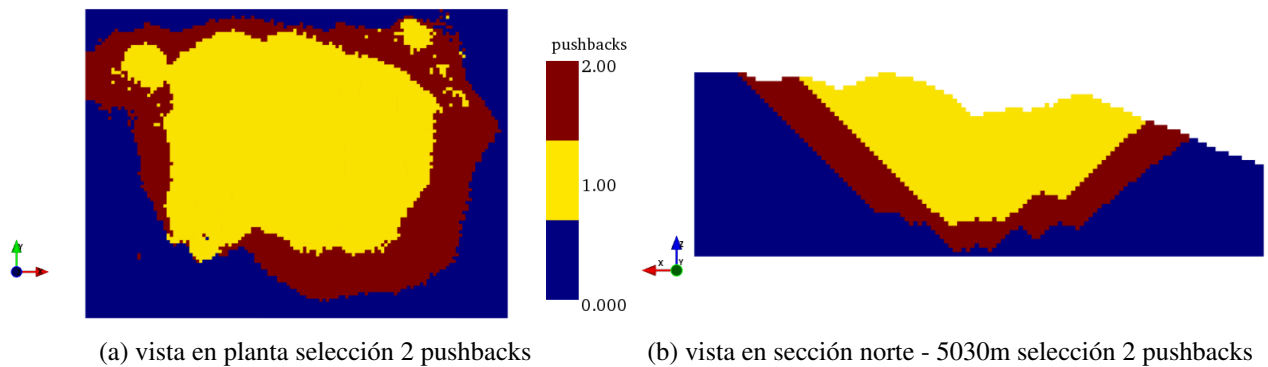


Figura 56: Vistas en planta y sección norte de la selección de 2 pushbacks del modelo BM-Pórfido dentro del pit final.

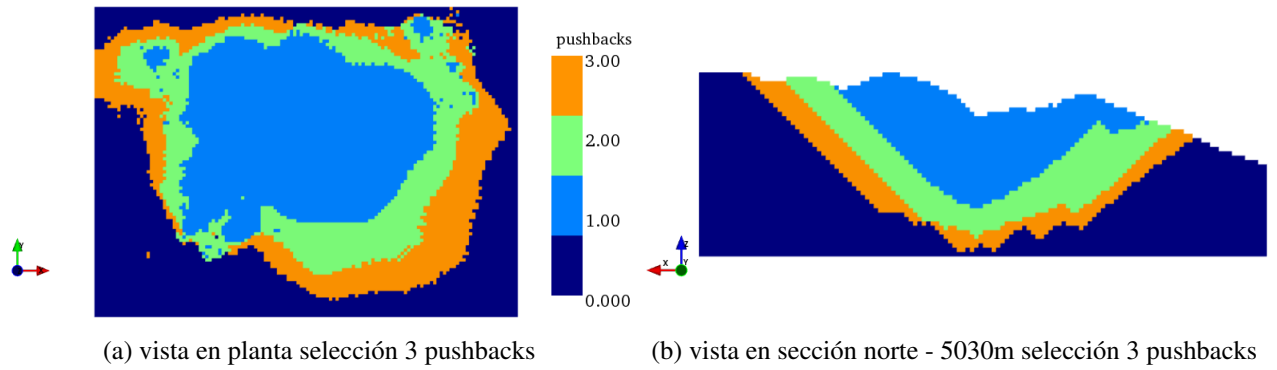


Figura 57: Vistas en planta y sección norte de la selección de 3 pushbacks del modelo BM-Pórfido dentro del pit final.

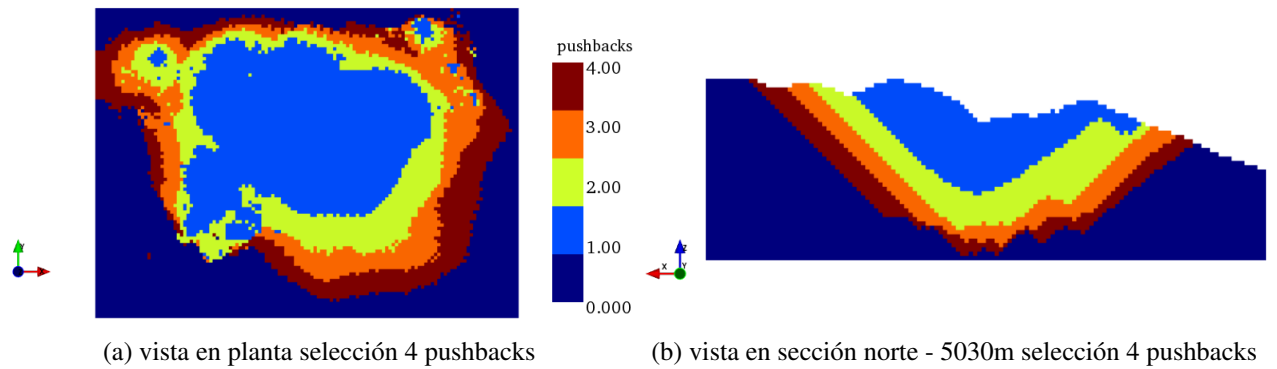


Figura 58: Vistas en planta y sección norte de la selección de 4 pushbacks del modelo BM-Pórfido dentro del pit final.

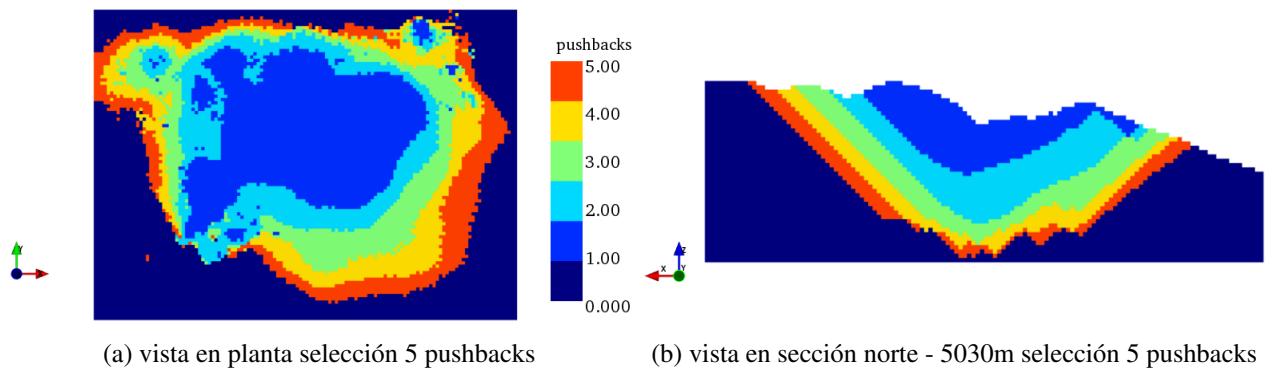
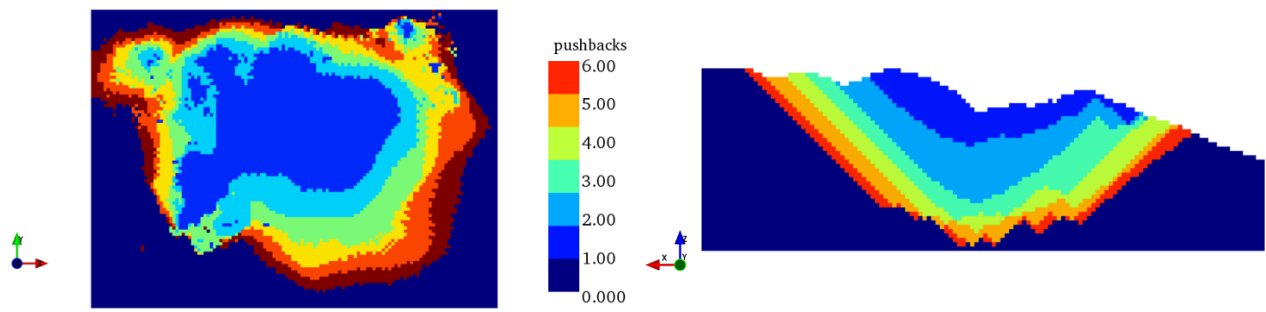


Figura 59: Vistas en planta y sección norte de la selección de 5 pushbacks del modelo BM-Pórfido dentro del pit final.



(a) vista en planta selección 6 pushbacks

(b) vista en sección norte - 5030m selección 6 pushbacks

Figura 60: Vistas en planta y sección norte de la selección de 6 pushbacks del modelo BM-Pórfido dentro del pit final.

Cabe mencionar que en todos los casos la solución encontrada fue óptima. El tiempo de ejecución de cada instancia para realizar la selección automática de pushbacks fue inferior a 10 [s]. De hecho, toma más tiempo en generar la secuencia de 90 pits anidados (30 min. usando PuLP+Gurobi, o 5 min. usando DOPPLER, que posee una estructura más eficiente) que posteriormente elegir pushbacks. La clave de esta reducción radica, como se dijo en la sección 5.2.2, en que la decisión se hace a soporte de pits, y no a soporte de bloques: en este caso estudio, para 6 pushbacks y con 90 pits anidados, el modelo tiene a lo más 4,095 variables, a diferencia de hacerlo con bloques, en cuyo caso serían más de 600,000 variables.

En virtud de los criterios utilizados y las geometrías obtenidas, se selecciona la instancia SP3 de 4 pushbacks para continuar a la etapa 3 de agendamiento temporal, puesto que presenta un buen equilibrio entre número de fases, espacios operacionales, tonelajes de mineral y estéril, y REM de sus fases.

7.3.2. Comparación de selección automática de pushbacks con la metodología tradicional

El modelo propuesto en esta tesis tiene una doble ventaja frente a la forma tradicional de generación de pushbacks: (i) por un lado, la generación de los pits anidados se hace considerando la incertidumbre geológica, siempre que ésta se pueda representar mediante un conjunto de escenarios; y por otro lado, (ii) el proceso de seleccionar los mejores pits candidatos como pushbacks ya no depende de criterios subjetivos³, sino que se hace automáticamente en base a un modelo con objetivos y restricciones definidas. Si bien existen en la actualidad algunos *software* como Geovia-Whittle, NPV Scheduler o MineMax, entre otros, que incorporan la opción de generación de pushbacks, éstos no son completamente automáticos, haciendo por lo general una selección manual de cuáles pits son elegidos como potenciales pushbacks. Una excepción a esto

³Esto quiere decir que al ser manual la selección de pushbacks, el éxito de esta tarea dependerá fuertemente de la preparación y experiencia del planificador.

podría ser DeepMine, una herramienta de planificación estratégica relativamente nueva que trabaja en base a programación dinámica, por lo tanto, no se basa en el algoritmo LG de pits anidados, diseñando pushbacks de forma automática (Juárez et al. 2014), pero no es claro cómo se definen los criterios que se utilizan para generarlos.

Los principales indicadores para comparar ambas metodologías son: (i) tonelajes esperados de mineral y estéril, además de las leyes medias por pushback, y (ii) geometría de pushbacks.

En la Figura 61 se tiene una comparación de los pushbacks obtenidos con y sin incertidumbre de leyes: en el eje principal se muestran los tonelajes esperados de mineral y estéril junto con sus rangos, y en el eje secundario se muestra la ley media de cada pushback junto a sus bandas de error P5 y P95. La alternativa que considera la incertidumbre presenta pushbacks de mayor tamaño (tonelaje total) respecto a su equivalente determinista. Estas diferencias se explican por los tonelajes de las envolventes, que como se mostró en la Tabla 21, la alternativa bajo incertidumbre presenta un 9% mayor de tonelaje total: dado que el modelo minimiza la esperanza de las diferencias absolutas respecto al tonelaje ideal en cada pushback (ver ecuación (129) en la sección 9.4), el que depende del tonelaje total, esta referencia es mayor en la medida que también el pit final sea de mayor tamaño.

En la Figura 62 se muestran las geometrías de la selección de pushbacks, tanto para el caso bajo incertidumbre como para el caso determinista. Para hacer más objetiva la comparación, ambas selecciones se obtuvieron con el modelo que automatiza este proceso, según la formulación expuesta en el Anexo C, con la diferencia de que los pits anidados del caso sin incertidumbre se obtuvieron a partir de un solo modelo económico usando *e-type*. La principal diferencia se aprecia en el primer pushback: en el caso determinista es más pequeño en un 14%, además de presentar una forma irregular en el sector norte, respecto al caso bajo incertidumbre. Ambos se hacen cargo del problema del gap, y esto obedece a la formulación de la selección automática propuesta en esta tesis. Por lo tanto, contar con una metodología que automatice con criterios bien definidos la forma usual de seleccionar pushbacks basado en pits anidados, es una de las principales contribuciones de esta tesis, incluso para el caso determinista, sin considerar la incertidumbre geológica.

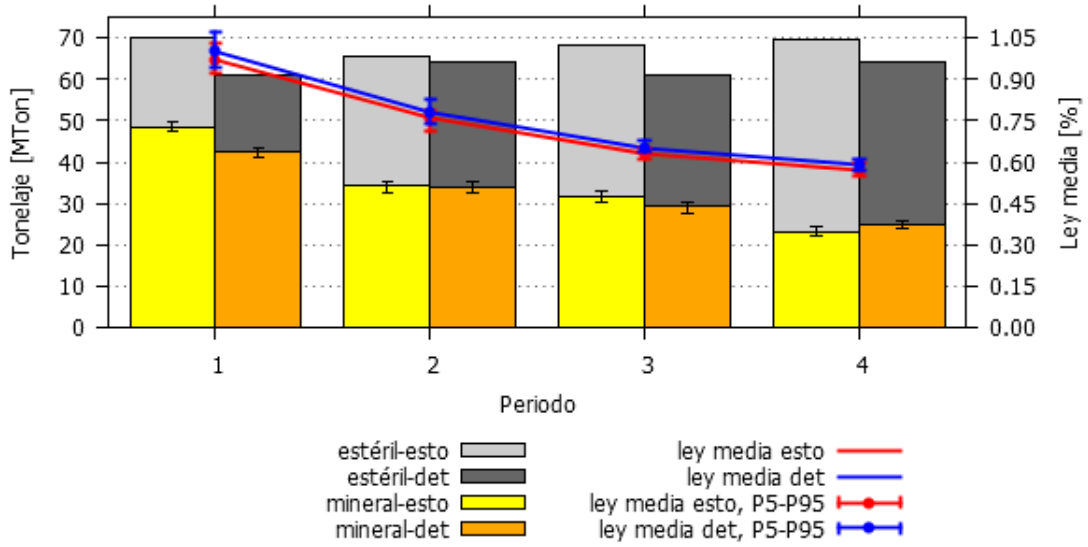


Figura 61: Comparación de leyes medias y tonelajes de mineral y estéril dentro de cada pushback.

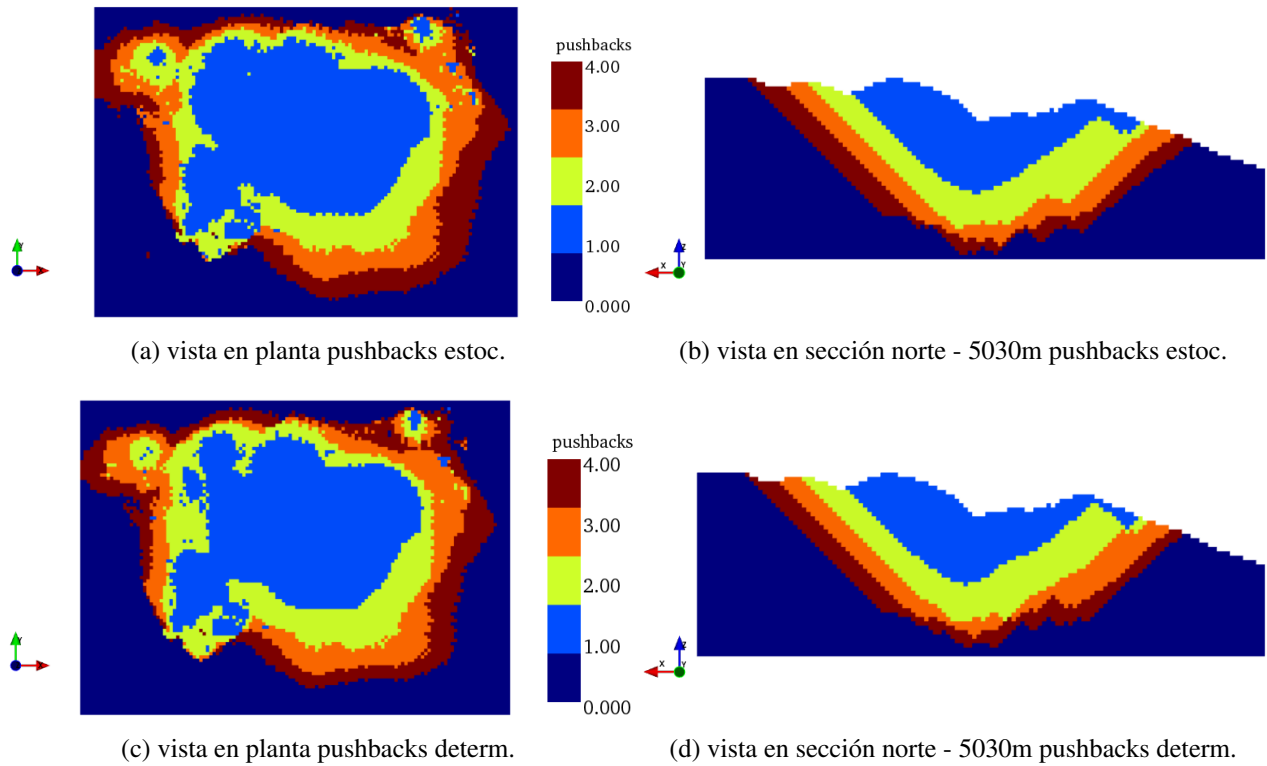


Figura 62: Vistas en planta y sección norte de las alternativas de selección de pushbacks estocástica y determinista del modelo BM-Pórfido.

7.4. Etapa 3: Agendamiento de la producción

En esta sección se implementan los modelos de agendamiento de bloques desarrollados en la sección 5.3, siguiendo el diseño de pushbacks de la Etapa 2, donde se seleccionaron cuatro fases. Si bien se desarrollaron dos estrategias, a saber: (i) extracción fase a fase, donde existe una secuencia estricta, y (ii) extracción equilibrada de fases, donde se deben extraer más de una fase simultáneamente para evitar sobrepasar un límite de profundidad, se elige la segunda estrategia para realizar el agendamiento, ya que presenta resultados más estables en términos del plan de producción y se acerca mejor a la realidad desde el punto de vista de la operación.

7.4.1. Modelo de agendamiento equilibrado de fases: implementación y resultados

Para el agendamiento se considerarán dos destinos posibles: un botadero y una planta de procesamiento. No se consideran pilas de acopio. La valorización v_{brd} por destino d de cada bloque extraído b , según el escenario r , viene dado por (91). Luego, el valor esperado \bar{v}_{bd} de cada bloque se toma promediando a lo largo de los R escenarios. Los parámetros económicos utilizados para realizar la valorización por destino son presentados en la Tabla 8.

Para incorporar la dimensión temporal se introduce una tasa de descuento $dr = 10\%$. En consecuencia, la valorización que incorpora la pérdida de valor en el tiempo viene dada por (92). No se considera costo capital en la valorización.

Respecto a los parámetros técnicos, como capacidades de extracción y procesamiento, entre otros, se muestran en la Tabla 25. Estos parámetros se fijaron para asegurar una vida de la mina mayor a 20 años. En particular, la ley mínima exigida se toma como referencia a partir de la información obtenida en la selección de fases, donde se vio que a medida se avanza en los pushbacks la ley va decreciendo.

Se aplican restricciones para acotar superior e inferiormente, tanto el movimiento mina como el movimiento a planta. Del mismo modo, se busca asegurar una alimentación de mineral de calidad suficiente a planta aplicando una cota inferior a la ley de cabeza, la cual es decreciente, según se vio en la Etapa 2: se aplica una cota de 0.8 para los primeros 7 periodos, y una de 0.7, 0.6 y 0.5 para cada uno de los siguientes 3 quinquenios. En este caso estudio no se hace necesario dejar una primera etapa de movimiento de tierras estériles (*prestripping*) hasta alcanzar la zona mineralizada. Debido al tonelaje total disponible dentro del pit final, la cota inferior de minado no se aplica en el último periodo para evitar infactibilidades. Los costos de sub y sobreproducción presentados en la Tabla 25 fueron calculados según las expresiones (36) y (37) de la sección 5.3.2 y deben ser descontados a la misma tasa de descuento dr .

La estrategia de agendamiento que será implementada en este caso estudio será el modelo

Parámetro	Símbolo	Valor
Ton minado máx (MTon)	MC^+	13.0
Ton minado mín (MTon)	MC^-	0.0
Ton proceso máx (MTon)	CP^+	7.0
Ton proceso mín (MTon)	CP^-	6.0
Ley de cabeza mín (%)	BC^-	0.8-0.5
Profundidad máxima	Γ	8
Horizonte (años)	T	22
Número de destinos	D	2
Número de escenarios	R	50
Costo de sobreproducción de mineral	cp_{r0}^+	18.5
Costo de subproducción de mineral	cp_{r0}^-	18.5
Costo de sobreproducción de metal	cg_{r0}^+	0.0
Costo de subproducción de metal	cg_{r0}^-	39.0

Tabla 25: Parámetros adicionales que definen la instancia de agendamiento para BM-Pórfido.

equilibrado de fases, el cual fue detallado en la sección 5.3. Dado que el tamaño de la instancia resultante en el presente caso de estudio no permite resolverla directamente, considerando como referencia que consta de 6.6 M de variables y 4.7 M de restricciones, se hace necesario aplicar algún algoritmo o heurística de reducción, como el visto en la sección 5.3.4: se recuerda que $HV(T', \Delta)$ corresponde a la heurística por ventanas de longitud T' , fijando los primeros Δ periodos para ir formando la solución factible, hasta alcanzar el horizonte de planificación T , con $\Delta \leq T' \leq T$.

El modelo de agendamiento equilibrado de fases fue implementado con el método $HV(3, 3)$ y los resultados se detallan a continuación. Los parámetros de la heurística fueron seleccionados según las conclusiones del capítulo anterior, donde para el caso sintético se vio que resultaba mejor fijar como subsolución la ventana completa y no una porción menor, esto es, $T' = \Delta$, además del *trade-off* entre longitud de la ventana y tiempo de cómputo: se consideraron ventanas de distintas longitudes, pero finalmente $T' = 3$ fue la mayor ventana que arrojó resultados dentro del tiempo límite considerado, en este caso, 24 horas. En la Figura 63 se muestra la geometría de agendamiento obtenida: se observa que la extracción se realiza siguiendo una secuencia equilibrada de fases, a partir de alcanzar cierta profundidad predefinida, en este caso, 8 bancos por fase. El modelo fue implementado para que todas sus fases fueran equilibradas; es posible restringir esta elección a un número menor de fases y cambiar la profundidad dependiendo de la fase considerada, todo según los requerimientos del evaluador. Esto permite un diseño más cercano a la realidad, respecto a los que se encuentran en la literatura sobre aplicación de modelos de programación entera mixta al problema de agendamiento de bloques en el largo plazo, donde la búsqueda por lograr un alto VAN hace encontrar soluciones que después son difíciles o imposibles de realizar en la práctica.

Respecto al plan de producción de largo plazo, que se muestra en la Figura 64, se cumplen los

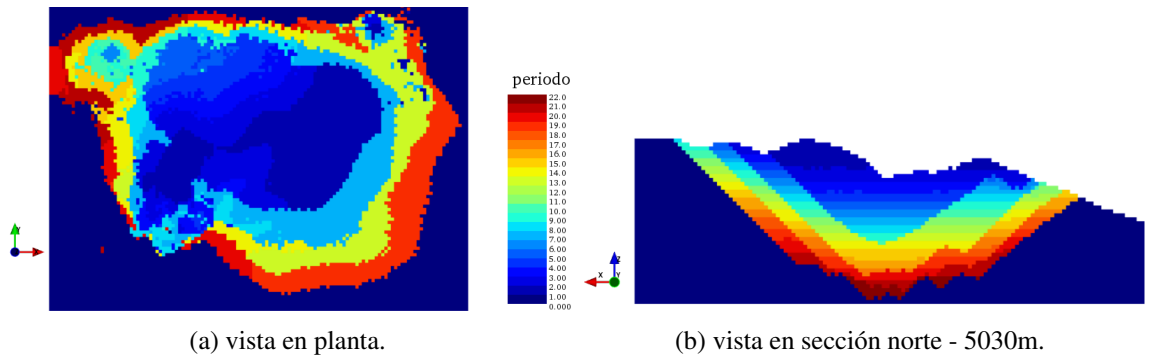


Figura 63: Geometría de extracción para BM-Pórfido, obtenida con HV(3,3) y siguiendo la estrategia de agendamiento equilibrado de fases: no se permite una diferencia mayor a 8 bancos entre fases consecutivas, lo que obliga ir extrayendo simultáneamente más de una fase.

límites impuestos en los tonelajes de minado, que deben ser inferiores a 13.0 [MTon] por periodo. El tonelaje total de las 4 fases es agendado, es decir, las 273.2 [MTon] dentro del pit final fueron extraídas. Respecto a los tonelajes enviados a planta, se puede ver una alimentación esperada en torno a las 6.2 [MTon], dentro del rango impuesto en promedio: se presentan desviaciones en la mayoría de los periodos, tanto de sobreproducción como de subproducción, siendo esta última la más frecuente, presentándose en 13 periodos, mientras que la primera se presentó en 7 periodos. El año 2 es el único periodo en el cual ningún escenario sobrepasó los límites impuestos: en el plan de producción esto se representa con la barra de error correspondiente al rango (máximo y mínimo valor de tonelaje a planta entre todos los escenarios) que se encuentra completamente dentro de los límites impuestos. En el periodo 22 no se aplicaron las restricciones asociadas a las desviaciones, puesto que no hay suficiente material en la mina para alcanzar las metas de producción del periodo.

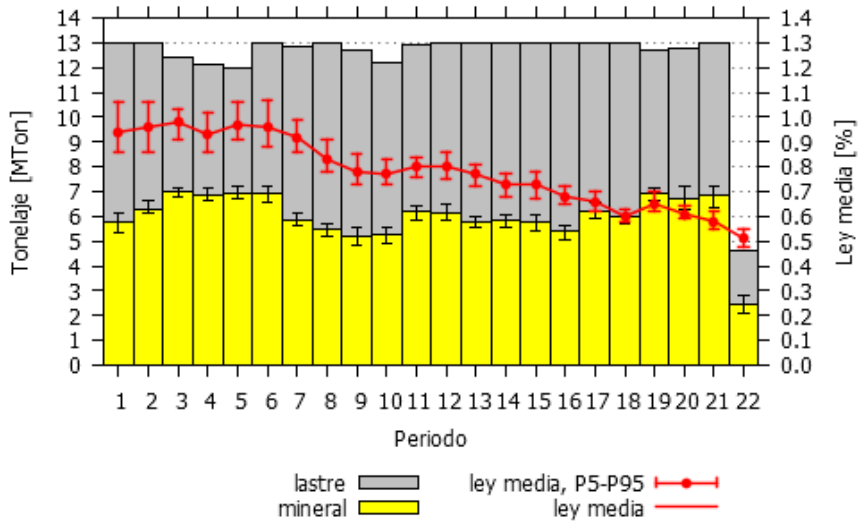


Figura 64: Plan de producción obtenido con HV(3,3) y utilizando una estrategia equilibrada de fases. Se muestran los tonelajes de mineral, estéril y la ley de cabeza, con los percentiles 5 y 95, para cada periodo.

Un aspecto interesante es comparar el tonelaje de mineral definido en el agendamiento mediante una ley de corte dinámica, donde el modelo de optimización asigna el mejor destino para cada unidad, a diferencia de cómo se asignaron los bloques entre mineral y lastre en la etapa de pit final, utilizando una ley de corte fija. En la Tabla 26 se muestran los tonelajes esperados para cada estrategia de asignación: hay 5.8 [MTon] de mineral rechazado, pues en el pit final se reportaron 137.5 [MTon] de mineral, pero en el agendamiento se enviaron a planta sólo 131.7 [MTon]. Los tonelajes totales coinciden, lo que muestra que el pit final fue agendado completamente.

Tonelaje esperado	Ley de corte		Diferencia [Ton]	VRP%
	fija	dinámica		
Mineral	137,516,747	131,725,361	5,791,386	4.4
Estéril	135,674,073	141,465,459	-5,791,386	-4.1
Total	273,190,820	273,190,820	0	0.0

Tabla 26: Comparación de los tonelajes de mineral esperado, estéril y total para una ley de corte fija y una ley de corte dinámica.

Ahora se analizarán en detalle los tonelajes promedios de mineral y metal que se encuentran en sub/sobreproducción y que minimizan el costo de la incertidumbre. La Figura 65 muestra el detalle para cada periodo y tipo de tonelaje desviado. Únicamente los periodos 9, 10 y 11 presentan desviaciones en el contenido de metal mínimo impuesto, mientras que en términos del tonelaje de mineral que alimenta a planta, como ya se mencionó, sólo un periodo (segundo año) no presenta desviaciones superior ni inferior, el resto de los periodos considerados presentan, de manera excluyente claro está, alguna desviación. Del total de tonelaje de mineral desviado, un 97% representa la subproducción, mientras que el 3% restante representa la sobreproducción: resulta particularmente difícil cumplir con el requerimiento mínimo de alimentación a planta.

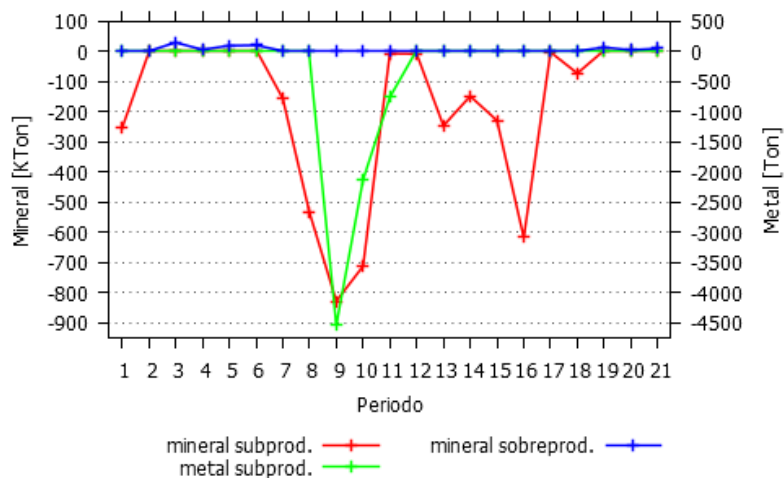


Figura 65: Desviaciones promedio en el tonelaje subproducido de metal, además de sobre/subproducción de mineral enviado a planta para cada periodo en el agendamiento.

Por otra parte, las desviaciones descritas anteriormente implican una serie de costos asociados a la incertidumbre. En la Tabla 27 se puede ver una descripción completa de los costos esperados descontados, asociado a cada tipo de desviación de los objetivos. Con esto se puede obtener el costo total de la incertidumbre, que se compone en un 0.4 % de las desviaciones en la cantidad de metal, en un 3.7 % en las desviaciones de sobreproducción de mineral y un 95.9 % en la subproducción de mineral enviado a planta.

Periodo	Costo total esperado descontado		
	Metal [USD]	Mineral [USD]	
	subproducción	sobreproducción	subproducción
1	0	0	4,263,813
2	0	0	0
3	0	430,535	0
4	0	89,448	0
5	0	233,677	0
6	0	228,434	0
7	0	0	1,468,429
8	0	0	4,610,534
9	75,084	0	6,498,552
10	31,968	0	5,079,020
11	10,302	0	36,723
12	0	0	38,712
13	0	0	1,317,143
14	0	0	719,315
15	0	0	1,010,840
16	0	0	2,483,180
17	0	0	5,537
18	0	0	238,212
19	0	44,422	0
20	0	16,688	0
21	0	27,138	0
Total	117,354	1,070,343	27,770,008

Tabla 27: Costo total esperado descontado asociado a las desviaciones en el tonelaje subproducido de metal y de sobre/subproducción de mineral enviado a planta, para cada periodo en el agendamiento obtenido con HV (3, 3) y usando la estrategia equilibrada de fases en BM-Pórfido.

Por otra parte, en la Figura 66 se muestra el flujo descontado acumulado del proyecto. Se puede ver una curva estrictamente creciente. El valor esperado total acumulado descontado alcanza los 916.5 [MUSD].

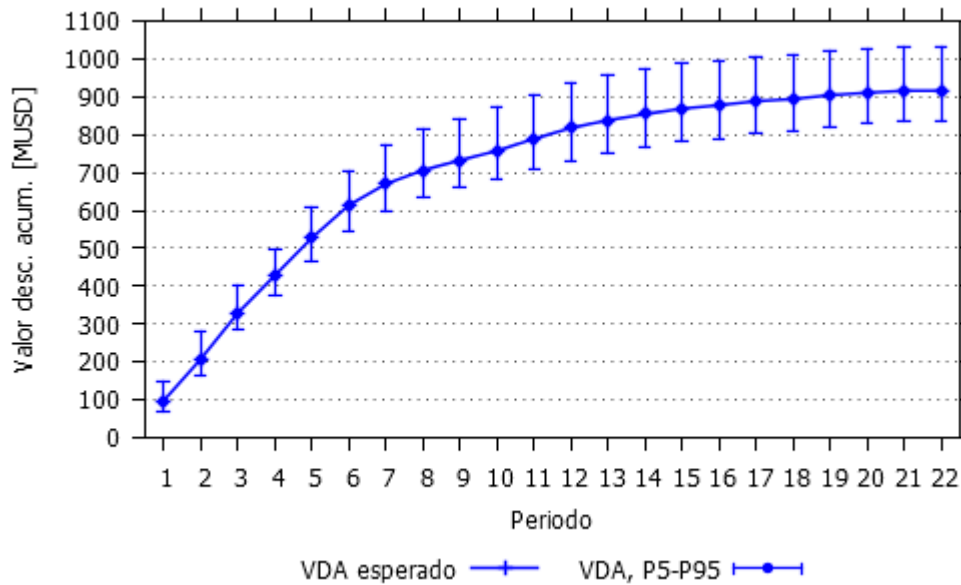


Figura 66: Flujo esperado descontado acumulado obtenido del agendamiento de bloques mediante HV(3,3) y utilizando una estrategia equilibrada de fases en BM-Pórfido.

Finalmente, en la Tabla 28 se presenta el principal resumen económico de esta sección, además del tiempo de ejecución del algoritmo HV en la instancia definida. Para el agendamiento equilibrado de fases obtenido se tiene, de izquierda a derecha: (i) el VDA esperado, $\mathbb{E}(\text{VDA})$; (ii) el costo total de la incertidumbre, CTI; (iii) el valor objetivo, y (iv) el tiempo de cómputo. El agendamiento estocástico equilibrado de fases se obtuvo en 19.5 [h].

	$\mathbb{E}(\text{VAN})$ [USD]	CTI [USD]	Valor objetivo [USD]	Tiempo [s]
HV(3,3)	916,499,031	28,957,704	887,541,327	70,417

Tabla 28: Principales indicadores económicos del agendamiento equilibrado de fases y su tiempo de cómputo.

El costo total de la incertidumbre representa, en orden de magnitud, un 3% del VDA esperado. El uso de acopios reduciría el costo de la incertidumbre, por lo que su consideración como trabajo futuro es de mucha importancia, así como una descripción más completa del costo unitario asociado a las desviaciones: para ello, es necesario considerar muchos más elementos en la etapa de agendamiento, lo que si bien genera modelos más completos, también son más difíciles de resolver: es necesario un adecuado equilibrio en identificar las variables claves que impacten mayormente en los indicadores de desempeño.

7.4.2. Comparación del agendamiento estocástico con la metodología tradicional

A continuación se hará una comparación del agendamiento estocástico, que considera un conjunto equiprobable de escenarios de leyes en base a simulación condicional y el agendamiento determinista, que considera sólo una representación del modelo de bloques como la realidad del yacimiento. Para ello se utilizará el modelo determinista (P3), definido en la sección 5.3.3.2, como el *equivalente* al utilizado en la subsección anterior, en el cual no existan variables que consideren desviaciones de los objetivos de producción ni costos asociados a la incertidumbre. Dado que se quiere evaluar cómo afecta la incertidumbre en el agendamiento, es preferible utilizar el modelo (P3) en vez de algún *software* de planificación estratégica para realizar el agendamiento determinista, debido a que la mayoría de estas herramientas no son completamente automáticas y dependen fuertemente de la experiencia del evaluador, lo que podía condicionar subjetivamente los resultados de dicha comparación.

Utilizando el modelo de bloques *e-type* y los mismos parámetros económicos que el caso estocástico (ver Tabla 8) se define el modelo económico mediante (91). Del mismo modo, los atributos de tonelajes mineral y total son definidos considerando sólo el escenario promedio. Los parámetros de la Tabla 25 tales como capacidades, periodos y destinos, entre otros que no dependen del escenario, se utilizan para definir la instancia determinista. Para evitar infactibilidades, no se imponen capacidades mínimas de procesamiento: el agendamiento que maximiza el valor descontado acumulado siempre tratará de saturar la capacidad máxima de procesamiento, por lo que de manera implícita el modelo se debería ajustar bien sin esta restricción, en la medida que exista material extraído en cada periodo.

Con esto, el problema de agendamiento de largo plazo de la producción de bloques en un rajo se resuelve en su versión determinista. Para realizar la comparación con el caso estocástico, la decisión de agendamiento determinista es evaluada utilizando todos los escenarios: esto se logra fijando las variables obtenidas con el modelo (P3) en el modelo (P2) y resolviendo este último para las variables asociadas a las desviaciones en los objetivos de producción: así se obtiene un plan de producción con indicadores sobre los cuales se basará la comparación:

- Plan de producción: se pretende analizar las diferencias en tonelajes de mineral y estéril para cada periodo, así como las leyes esperadas.
- Valor descontado acumulado: considerando todos los escenarios en la evaluación económica de cada agendamiento, se puede obtener el valor esperado junto con alguna medida de dispersión, por ejemplo, el rango interdecil. Se introduce el concepto de valor de la solución estocástica como el costo de no considerar la incertidumbre en el agendamiento y se evalúa con las soluciones obtenidas.
- Geometría de agendamiento: dentro de las diferencias en la selección de pushbacks definidos

como entrada en el proceso de agendamiento de cada enfoque (con y sin incertidumbre), resulta interesante buscar diferencias en las zonas de la mina que son asignadas a distintos periodos y destinos.

En la Figura 67 se muestra una comparación de los planes de producción de ambas estrategias, a saber, del agendamiento estocástico y del agendamiento determinista: los movimientos mina son similares hasta el periodo 17, desde el cual comienzan a decrecer los tonelajes en el caso determinista hasta el último periodo. Respecto al mineral, en la gran mayoría de los periodos el tonelaje esperado de mineral del caso estocástico se encuentra sobre su respectivo en el caso determinista (excepto en los periodos 9 y 10).

Lo anterior se combina con la Tabla 29: para cada agendamiento y por cada periodo, excepto el último donde no se miden las desviaciones, se tienen 3 columnas de tonelajes, tanto para metal subproducido como tonelajes de mineral sub/sobrepuesto. Se muestran los tonelajes esperados, considerando las desviaciones de cada escenario y promediando sobre el total de simulaciones. Lo más importante se puede ver en la última fila, en los tonelajes totales: nótese la gran diferencia, cercana a los 12.1 [Ton] de subproducción de mineral, presentando el agendamiento estocástico 3.8 [Ton] desviadas y el agendamiento determinista 15.9 [Ton] del mismo tipo.

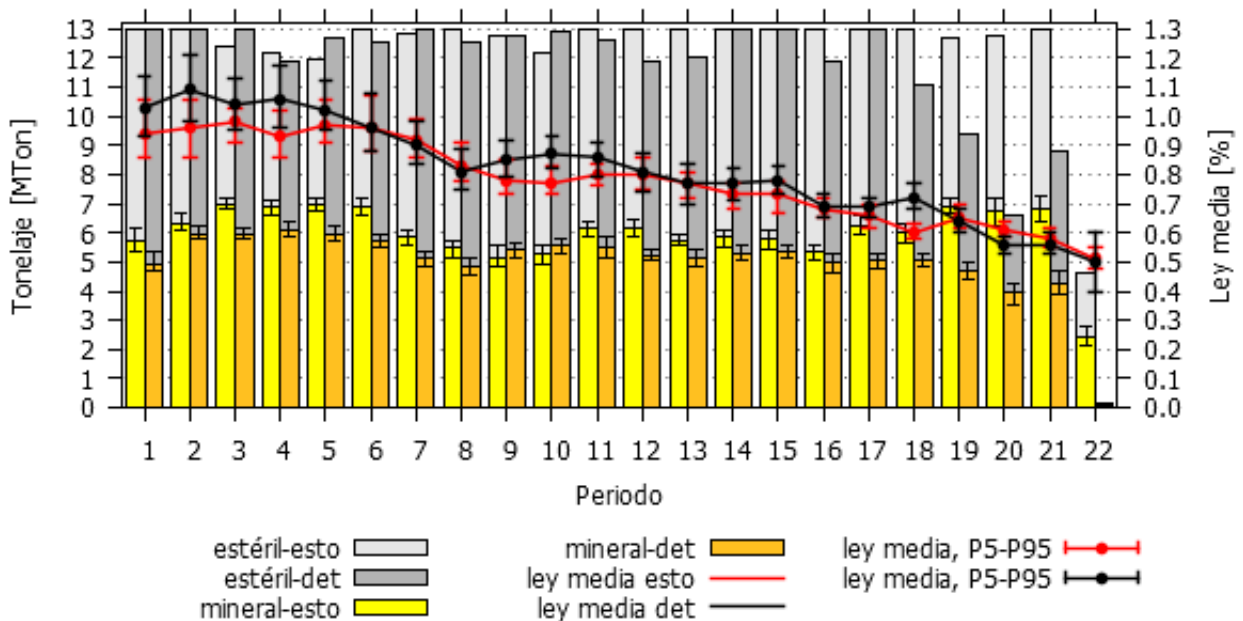


Figura 67: Comparación de los planes de producción estocástico y determinista, obtenidos del agendamiento de bloques mediante HV(3,3) y utilizando una estrategia equilibrada de fases en BM-Pórfido.

Por otra parte se deben comparar los costos asociados a las desviaciones anteriores: la Tabla 30 tiene la misma estructura que la Tabla 29, pero muestra para todos los periodos salvo el último, los

costos descontados para cada tipo de tonelaje desviado. Mientras el caso estocástico presenta un costo total de la incertidumbre de casi 29 [MUSD], la alternativa determinista tiene 92 [MUSD] de costo asociado a la incertidumbre, lo que representa un 217% más respecto a la alternativa estocástica que minimiza este costo.

Periodo	Ton. esperados (estocástico)			Ton. esperados (determinista)		
	Metal [Ton]		Mineral [Ton]	Metal [Ton]		Mineral [Ton]
	subprod.	sobrepod.	subprod.	subprod.	sobrepod.	subprod.
1	0	0	253,524	0	0	1,062,283
2	0	0	0	0	0	72,758
3	0	30,975	0	0	0	55,874
4	0	7,079	0	0	0	10,836
5	0	20,343	0	0	0	62,023
6	0	21,875	0	0	0	282,153
7	0	0	154,679	2,263	0	883,773
8	0	0	534,221	0	0	1,148,082
9	4,540	0	828,284	0	0	536,900
10	2,126	0	712,090	0	0	399,458
11	754	0	5,664	0	0	492,043
12	0	0	6,567	0	0	761,313
13	0	0	245,791	0	0	874,398
14	0	0	147,654	0	0	679,686
15	0	0	228,245	0	0	638,093
16	0	0	616,765	0	0	993,993
17	0	0	1,513	0	0	972,884
18	0	0	71,591	0	0	935,574
19	0	14,686	0	0	0	1,317,921
20	0	6,069	0	0	0	2,037,935
21	0	10,856	0	0	0	1,748,136
Total	7,419	111,882	3,806,586	2,263	0	15,966,119

Tabla 29: Comparación de las desviaciones promedio en el tonelaje subproducido de metal, además de sobre y subproducción de mineral enviado a planta, para cada periodo en el agendamiento, obtenido con los enfoques estocástico y determinista, resolviendo los respectivos modelos con HV(3,3) y usando la estrategia equilibrada de fases en BM-Pórfido.

Periodo	Costos esperados (estocástico)			Costos esperados (determinista)		
	Metal [USD]		Mineral [USD]	Metal [USD]		Mineral [USD]
	subprod.	sobrepod.	subprod.	subprod.	sobrepod.	subprod.
1	0	0	4,263,813	0	0	17,865,669
2	0	0	0	0	0	1,112,419
3	0	430,535	0	0	0	776,604
4	0	89,448	0	0	0	136,918
5	0	233,677	0	0	0	712,461
6	0	228,434	0	0	0	2,946,456
7	0	0	1,468,429	45,294	0	8,390,030
8	0	0	4,610,534	0	0	9,908,394
9	75,084	0	6,498,552	0	0	4,212,415
10	31,968	0	5,079,020	0	0	2,849,157
11	10,302	0	36,723	0	0	3,190,476
12	0	0	38,712	0	0	4,487,688
13	0	0	1,317,143	0	0	4,685,719
14	0	0	719,315	0	0	3,311,179
15	0	0	1,010,840	0	0	2,825,955
16	0	0	2,483,180	0	0	4,001,954
17	0	0	5,537	0	0	3,560,877
18	0	0	238,212	0	0	3,113,018
19	0	44,422	0	0	0	3,986,576
20	0	16,688	0	0	0	5,604,131
21	0	27,138	0	0	0	4,370,193
Total	117,354	1,070,343	27,770,008	45,294	0	92,048,288

Tabla 30: Comparación de los costos de la incertidumbre asociados a las desviaciones promedio en el tonelaje subproducido de metal, además de sobre y subproducción de mineral enviado a planta, para cada periodo en el agendamiento, obtenido con los enfoques estocástico y determinista, resolviendo los respectivos modelos con HV(3,3) y usando la estrategia equilibrada de fases en BM-Pórfido.

Para realizar una comparación adecuada de ambos agendamientos, se calculará el VDA esperado a cada uno considerando todos los escenarios. La diferencia básica es que un agendamiento se realiza considerando la información de todos los escenarios simultáneamente, mientras que el segundo se hace considerando solamente un escenario estimado. Para ello, sea ϕ_e el agendamiento de bloques que se obtuvo en el caso estocástico y ϕ_d el correspondiente agendamiento determinista. Luego, para cada tipo de agendamiento se calculará el VDA según el modelo económico de cada escenario r , obteniendo $VDA(\phi_e, r)$ y $VDA(\phi_d, r)$, respectivamente. Luego, la ganancia esperada que se obtiene al considerar la incertidumbre local viene dada por el

promedio de la diferencia entre ambos valores y se conoce como **valor de la solución estocástica VSE**

$$VSE = \frac{1}{R} \sum_{r \in \mathcal{R}} (\text{VDA}(\phi_e, r) - \text{VDA}(\phi_d, r)) \quad (93)$$

Otra forma de interpretar el indicador VSE puede ser como el costo de ignorar la incertidumbre en la toma de decisiones, o también, como el valor de la información. Note que VSE podría ser cero para aquellos casos en los que la solución óptima no es sensible a las variables inciertas, lo cual claramente no es el caso en planificación de la producción minera, donde las soluciones obtenidas dependen de las leyes y la calidad de los parámetros considerados.

La Tabla 31 muestra los principales indicadores económicos de la comparación: para cada agendamiento se muestra (i) el VDA esperado, (ii) el costo total de la incertidumbre CTI, (iii) el valor objetivo, como la diferencia entre VDA esperado y CTI. Además se muestra el tiempo de cómputo de cada alternativa. El agendamiento estocástico muestra un 1.3% de mayor VDA esperado y un 68% de menor CTI, respecto al agendamiento determinista y, además, el valor de la información VSE asciende a 12 [MUSD]. Este es uno de los principales resultados de la tesis, debido a que son los indicadores de la etapa final del proceso de planificación de la producción de largo plazo en un rajo bajo incertidumbre de leyes y muestra el gran impacto que puede tener el no considerar la información generada en base a simulación condicional.

	$\mathbb{E}(\text{VDA})$ [USD]	CTI [USD]	Valor objetivo [USD]	Tiempo [s]
HV(3,3) estoc.	916,499,031	28,957,704	887,541,327	70,417
HV(3,3) determ.	904,406,550	92,093,582	812,312,968	24,868

Tabla 31: Comparación de los principales indicadores económicos del agendamiento equilibrado de fases obtenidos mediante un enfoque estocástico y determinista utilizando HV(3,3). También se muestran sus respectivos tiempos de cómputo.

Finalmente, se presentan la comparación de las geometrías de agendamiento entre ambas alternativas, estocástica y determinista. En la Figura 68 se muestran las vistas en planta y sección de cada caso, donde se aprecian notables diferencias en sus geometrías, especialmente en la superficie, lo que obedece al diseño de fases: en el caso determinista las primeras fases son menos profundas, y debido a las restricciones que obligan una secuencia equilibrada de fases, se tiene que las fases posteriores se activan antes que en el caso estocástico.

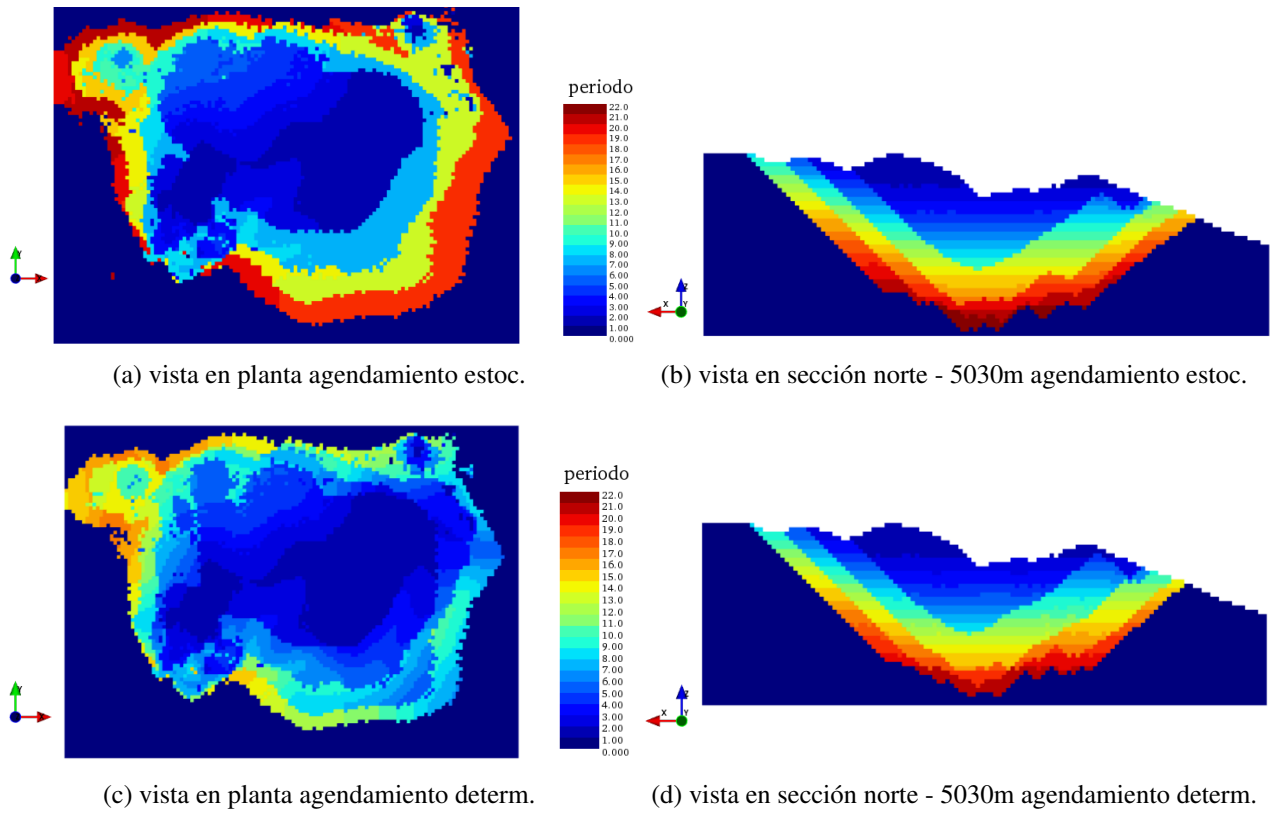


Figura 68: Vistas en planta y sección norte de las alternativas de agendamiento estocástica y determinista del modelo BM-Pórfido.

8. Conclusiones y trabajo futuro

8.1. Discusión

El problema de planificación de la producción de largo plazo de minas a cielo abierto es central en el negocio minero, definiendo los tonelajes de mineral y estéril, y la ley de cabeza que alimenta el proceso de recuperación del material de valor económico para cada periodo dentro de la vida de la mina.

En la metodología tradicional de planificación de minas en el largo plazo, un modelo de bloques con ciertos atributos de densidad y leyes, entre otros, es la principal entrada al proceso, que usualmente busca maximizar el valor presente neto del negocio. Es un problema desafiante, puesto que intervienen muchas variables de distinta índole, en particular, la complejidad natural del depósito mineral lo hace muy difícil: debido a esta complejidad, es usual dividir el problema en tres etapas relacionadas, y existen modelos y algoritmos que se encargan en forma secuencial de generar un plan factible. Las tres etapas son: (i) definición de pit final, (ii) selección de pushbacks y (iii) agendamiento temporal. El modelo de bloques se construye mediante técnicas geoestadísticas a partir de muestras del depósito: sin embargo, la incertidumbre en el modelo de bloques es inevitable debido a que el muestreo no es exhaustivo, luego, la calidad del plan de producción se ve afectada por esta incertidumbre. Por esta razón es tan importante considerar la incertidumbre geológica en la generación del plan de producción. Lamentablemente, los pocos esfuerzos que se han hecho a la fecha para incorporar la incertidumbre, en particular, la incertidumbre de leyes en la generación de dicho plan, ha sido solamente en la etapa de agendamiento, es decir, al final del proceso, con lo cual esta valiosa información no es utilizada en la definición de la envolvente ni en el diseño de fases.

Por lo anterior, fue necesario desarrollar una metodología que considere la incertidumbre de leyes en la determinación de cada una de las etapas. Si bien es posible encontrar en la literatura especializada algunos esfuerzos por incluir la incertidumbre de leyes sólo en alguna de las etapas, según la revisión del estado del arte de esta tesis no se ha evaluado su incorporación en las tres etapas del proceso. Además, la metodología propuesta presenta nuevos modelos en cada etapa, que representan una alternativa novedosa para plantear cada uno de los problemas de forma separada.

Los resultados de la implementación de los modelos propuestos en esta tesis para el caso de estudio realizado muestran buen desempeño: en términos generales, al comparar la metodología propuesta que incorpora de manera explícita la incertidumbre de leyes con la metodología tradicional sin considerar incertidumbre, la primera presenta respecto a la segunda: (i) mayores tonelajes esperados de mineral en cada una de las etapas, tanto en la envolvente, los pushbacks y el agendamiento; (ii) mayor valor esperado (no)descontado acumulado, y (iii) menor riesgo

de pérdidas relacionadas a las desviaciones de los objetivos planificados. El plan de producción con la metodología propuesta muestra, en promedio, un 5.3% de mayor tonelaje de mineral; un 1.3% mayor valor descontado acumulado, con un valor de la información de 12 [MUSD]; y el riesgo de incumplimiento de las metas de producción de un 68% menos, respecto a la metodología determinista.

La aplicación de estos modelos basados en programación matemática permiten reducir el riesgo y maximizar el valor esperado, pero la cuantificación de este mejor desempeño dependerá de la distribución de leyes, la representación de la incertidumbre y los parámetros utilizados en cada caso de estudio particular.

Estos resultados se enmarcan dentro de los alcances definidos en la sección 3.3. La metodología tradicional fue llamada *determinista* en virtud de que utiliza un único modelo de bloques como entrada al proceso de cada una de las etapas; por otro lado, la metodología propuesta se identificó con el nombre de *estocástica*, suponiendo que los escenarios representan completamente la incertidumbre del depósito, sin embargo, un nombre más apropiado podría ser *robusto*, dado que varios escenarios de leyes son considerados simultáneamente para la definición de las etapas, pero en realidad no se tiene una distribución de leyes.

Para el caso del pit final, la mayor ventaja de la metodología propuesta es la generación de una política para gestionar la relación beneficio-riesgo, representada por la frontera eficiente, la que permite al evaluador tomar la mejor decisión según sus intereses y aversión al riesgo. Por otro lado, uno de los principales inconvenientes es la generación de los ponderadores del CVaR: no es claro cómo hacer esta selección en términos generales de modo tal que siempre aseguren una distribución *equiespaciada* de puntos sobre la frontera eficiente. En esta tesis se propone un algoritmo heurístico (Procedimiento 7.1), pero en general depende de valores iniciales definidos por el evaluador.

En la selección de pushbacks la metodología propuesta tiene dos ventajas: una es la consideración de los escenarios para definir los pits anidados que son el soporte de los pushbacks, y segundo, como uno de los principales resultados, es la automatización de la etapa de selección basada en criterios bien definidos. En los resultados mostrados, el principal inconveniente radica en la forma que se incorporan los escenarios para calcular los pits anidados, tomando una valorización promedio, por lo que se hace necesario proponer alternativas más elaboradas para calcular *pits anidados robustos*, que consideren la correlación espacial y que no sea neutra al riesgo. Sin embargo, se conjetura que esto no debiera tener un impacto muy grande en los resultados, pero es necesario evaluarlo.

Finalmente, respecto a la etapa de agendamiento temporal, si bien la incertidumbre es considerada de manera explícita a través de desviaciones del agendamiento en cada escenario y se avanza en considerar restricciones que respeten las relaciones entre fases-banco, el principal inconveniente de este modelo es la definición de los costos unitarios de toneladas desviadas. Más

que un problema del modelo, es un problema en cómo se ajustan estos parámetros que alimentan el modelo, aun cuando la estructura lineal utilizada para el costo total podría ser cuestionable.

Por último, muy necesario de comentar, el enfoque utilizado en esta tesis es el tradicional, que consiste en separar el problema en tres etapas relacionadas. Si bien esto no asegura optimalidad del plan es necesario avanzar en esta línea, incluyendo una dimensión adicional en el estado del arte, incorporando la incertidumbre de leyes en cada subproblema y evaluarlo en conjunto. La experiencia indica que aún existe una gran brecha en términos de modelación y recurso computacional para el diseño de un único modelo que incorpore todas las etapas en un solo proceso, que no necesite, por ejemplo, filtrar la subregión de la mina donde se concentrará la explotación (pit final) y que no necesite definir pushbacks para asegurar mínimas condiciones operacionales, como espacios para los equipos o conectividad de las zonas explotadas, y más aún algo que no fue considerado en este trabajo, la mejor ubicación de rampas y accesos, pues esto último puede impactar en gran medida el valor del negocio: por ejemplo, la elección de fases condiciona fuertemente la etapa de agendamiento temporal y a eso se le suma la consideración de la posición de la rampa posterior a la determinación del plan, lo que puede causar que zonas de alta ley no puedan ser removidas (rampa intra pit) o que se deba expandir el pit, aumentando la remoción de estéril (rampa extra pit). Pese a todo lo anterior, se muestran importantes avances en esta tesis para mejorar la evaluación de la relación entre las diferentes etapas y se incorporan nuevos modelos.

8.2. Conclusiones

En esta tesis se abordó el problema de planificación de la producción de largo plazo en minas de rajo abierto bajo incertidumbre de leyes, utilizando un enfoque multietapa, esto es: definición de pit final, luego selección de pushbacks y finalmente agendamiento de la producción en el tiempo. El objetivo fue investigar los efectos negativos de la incertidumbre de leyes y se propusieron modelos robustos que incorporan esta representación de la incertidumbre en la planificación.

Se hace una propuesta conceptual de una metodología multietapa, donde la incertidumbre de leyes es incorporada no sólo en la etapa de agendamiento, como es usual ver en el estado del arte, sino que permite también definir un pit final y una selección de fases de manera robusta, permitiendo generar un plan de producción que incorpora la incertidumbre de leyes en etapas tempranas de la planificación. Cabe destacar que los escenarios que representan la incertidumbre alimentan simultáneamente los modelos.

Las principales contribuciones de este trabajo para cada etapa son:

8.2.1. Etapa 1: Pit final

- Desarrollo de un modelo multiobjetivo de pit final estocástico, que considera un *trade-off* entre la maximización de la esperanza de valor no descontado y la minimización del riesgo de pérdida por incumplimiento respecto del caso base (krigeado o e-type), medido en términos de una medida de riesgo CVaR. Simultáneamente, entrega la mejor decisión de pit final, el riesgo medido como VaR y CVaR y la contribución de cada escenario al CVaR.
- Esta metodología permite identificar la **frontera eficiente** donde se encuentran los resultados óptimos entre los objetivos en conflicto, permitiendo al evaluador definir una política que gestione la relación beneficio-riesgo según sus intereses.
- Los resultados muestran que el modelo puede producir pits robustos, en promedio, con mayor valor no descontado y mayor tonelaje de mineral, además de un menor riesgo en términos de CVaR, considerando todos los escenarios respecto a la metodología tradicional.

8.2.2. Etapa 2: Selección de pushbacks

- Caracterización del conjunto de pushbacks con soporte de pit anidados. Esto permite modelar la partición del conjunto de bloques (selección de pushbacks) basados en pits anidados, unidad muy extendida en la industria, y en base a la cual la mayoría de los *software* realizan planificación de la producción en un rajo. Esta caracterización puede servir de base para el desarrollo de una familia de modelos que permitirán avanzar en nuevos algoritmos para la generación de pushbacks de manera más eficiente.
- La forma en que se incorpora la información de los distintos escenarios es en la generación de los pits anidados.
- Desarrollo de un modelo que automatiza la tarea de seleccionar pushbacks a partir de un conjunto de pit anidados. Se presentan dos formulaciones con distintas funciones objetivos: una de ellas apunta a dar solución, en caso de existir, al problema del gap, referido en la sección 4.2. La mayor contribución de este modelo es que automatiza una tarea que usualmente se realiza de forma manual, pues si bien la mayoría de los *software* cuentan con un módulo de generación de fases, éstos no son completamente automáticos y requieren mucho cálculo manual, en base a ensayo y error, del planificador experto. El modelo propuesto ha sido testeado y los resultados muestran su capacidad en términos de rapidez y que funciona basado en criterios objetivos, además de su potencial expansión para ser incluido en cualquier herramienta existente, como por ejemplo en DOPPLER® (Delphos 2015).

8.2.3. Etapa 3: Agendamiento de bloques

- Desarrollo de un modelo multiobjetivo de agendamiento de largo plazo, multiperiodo y multidestino que incorpora el *trade-off* entre maximizar el valor descontado acumulado esperado y el costo total de la incertidumbre, asociado a las desviaciones del programa debido a la incertidumbre de leyes.
- El uso de una ley de corte variable permite al modelo clasificar mejor el mineral del estéril. Al utilizar variables enteras para la extracción y continuas para el proceso no es claro que se tenga tal nivel de selectividad, pero el uso de fases-banco permite un mejor control.
- La incorporación de restricciones de extracción equilibrada de fases, permitiendo una profundidad máxima en términos de bancos por fase es un importante avance en la generación de diseños más cercanos a la operación.
- El uso de algoritmos especiales que aprovechan la estructura del problema permiten hallar soluciones factibles cuando el tamaño de la instancia no permite hacerlo directamente.

8.3. Trabajo futuro

Aún cuando los modelos que fueron desarrollados en este trabajo representan importantes avances en el estado del arte para transferir el impacto de la incertidumbre en los planes de producción, es necesario seguir investigando sobre el desarrollo de modelos y algoritmos que permitan incorporar y evaluar el efecto de la incertidumbre en el contexto de la planificación minera, así como su mejor caracterización. Al respecto, algunas líneas que se recomienda seguir:

- Extender el alcance de este trabajo a los modelos propuestos: (i) incluir la incertidumbre del tipo de roca mediante escenarios, y dentro de cada tipo, generar escenarios de leyes; en general, no se requiere un cambio significativo en la metodología propuesta para aplicarlas, en particular, la incorporación de incertidumbre mediante el uso de escenarios es lo suficientemente general como para incluir variabilidad en leyes, en geología, en propiedades geometalúrgicas, etc. No se requeriría un cambio metodológico para incorporarlas, en la medida que se manifiesten mediante un conjunto de escenarios; (ii) estudiar el impacto del número de escenarios como representación de la incertidumbre: al respecto de esto último, el uso de simulaciones antitéticas como se muestra en Nelis (2016) puede servir como alternativa.
- En el caso de pit final, se hace necesario desarrollar un algoritmo que permita una adecuada generación de puntos que caracterizan la frontera eficiente. También podría ser interesante en vez de maximizar valor no descontado, maximizar reservas. A la vez, comparar los

resultados del modelo propuesto (multiobjetivo) con aquellos que consideran el valor o el riesgo (excluyente) como restricción.

- Una limitante reportada en el modelo de selección de pushbacks, no menor, es la fuerte dependencia del soporte de pits anidados utilizado. Se hace necesario, entonces, avanzar en la búsqueda de soportes alternativos que garanticen buenas soluciones factibles.
- Uno de los mayores inconvenientes con la selección de pushbacks, es que restringe al agendamiento de alcanzar el mayor VDA posible, en otras palabras, no hay garantías de que el diseño impuesto garantice máximo VDA. Esto es, en gran medida, por la no consideración del tiempo en su definición. Una propuesta concreta de trabajo futuro para incluir el tiempo en esta etapa, es a través del concepto de *tiempo esperado*, como se muestra en Chicoisne et al. (2012), resolviendo la relajación LP de un problema adaptado y utilizando su solución para fijar potenciales pushbacks.
- Estudiar y proponer una mejor representación de la forma que se modela el impacto de la incertidumbre de leyes en el valor del negocio, incluso pensando en modelos no lineales y estudiar su comportamiento y (des)ventajas con el modelo lineal propuesto.
- Avanzar en la creación de un modelo integrado que genere agendamientos temporales sin la necesidad de pasar previamente por pushbacks, sino más bien que éstos sean considerados simultáneamente con el agendamiento, pasando a una metodología en dos etapas, manteniendo la etapa de pit final. El uso de las herramientas de investigación de operaciones puede ser de mucha ayuda como se ha demostrado, primero para el caso determinista y luego para el que considera incertidumbre; en otras palabras, se espera agregar restricciones relacionadas a condiciones operacionales.
- Incluir acopios en el modelamiento para dar una mejor aproximación a la realidad, lo que permite un mejor manejo de las desviaciones del plan de producción. Esto ayudaría al impacto negativo que tiene la incertidumbre mediante las penalizaciones al valor esperado que se busca maximizar. En esta línea, en el caso determinista, se puede considerar el trabajo de Moreno et al. (2017) y en el caso con incertidumbre el trabajo de Koushavand et al. (2014).

Bibliografía

- Albor Consuegra, F y Dimitrakopoulos, R (2009). «Stochastic mine design optimisation based on simulated annealing: pit limits, production schedules, multiple orebody scenarios and sensitivity analysis». En: *Mining Technology* 118.2, págs. 79-90.
- Albor Consuegra, F. y Dimitrakopoulos, R. (2010). «Algorithmic approach to pushback design based on stochastic programming: method, application and comparisons». En: *Mining Technology* 119.2, págs. 88-101.
- Amankwah, H., Larsson, T. y Textorius, B. (2013). «Open-pit mining with uncertainty: A conditional value-at-risk approach». En: *Optimization Theory, Decision Making, and Operations Research Applications*. Springer, págs. 117-139.
- Asad, M. y Dimitrakopoulos, R. (2013). «Implementing a parametric maximum flow algorithm for optimal open pit mine design under uncertain supply and demand». En: *Journal of the Operational Research Society* 64.2, págs. 185-197.
- Asad, M., Dimitrakopoulos, R. y Eldert, J. (2014). «Stochastic production phase design for an open pit mining complex with multiple processing streams». En: *Engineering Optimization* 46.8, págs. 1139-1152.
- Benndorf, J. y Dimitrakopoulos, R. (2013). «Stochastic long-term production scheduling of iron ore deposits: Integrating joint multi-element geological uncertainty». En: *Journal of Mining Science* 49.1, págs. 68-81.
- Bertsimas, D. y Tsitsiklis, J. (1997). *Introduction to linear optimization*. Vol. 6. Athena Scientific Belmont, MA.
- Bienstock, D. y Zuckerberg, M. (2010). «Solving LP Relaxations of Large-Scale Precedence Constrained Problems». En: *IPCO*, págs. 1-14.
- Bley, A., Boland, N., Fricke, C. y Froyland, G. (2010). «A strengthened formulation and cutting planes for the open pit mine production scheduling problem». En: *Computers & Operations Research* 37.9, págs. 1641-1647.
- Boland, N., Dumitrescu, I. y Froyland, G. (2008). «A multistage stochastic programming approach to open pit mine production scheduling with uncertain geology». En: *Optimization Online*.
- Boland, N., Dumitrescu, I., Froyland, G. y Gleixner, A. (2009). «LP-based disaggregation approaches to solving the open pit mining production scheduling problem with block processing selectivity». En: *Computers & Operations Research* 36.4, págs. 1064-1089.
- Caccetta, L. e Hill, S. (2003). «An application of branch and cut to open-pit mine scheduling». En: *Journal of Global Optimization* 27, págs. 349-365.
- Chandran, B. y Hochbaum, D. (2009). «A computational study of the pseudoflow and push-relabel algorithms for the maximum flow problem». En: *Operations Research* 57.2, págs. 358-376.

- Chicoisne, R., Espinoza, D., Goycoolea, M., Moreno, E. y Rubio, E. (2012). «A new algorithm for the open-pit mine production scheduling problem». En: *Operations Research* 60.3, págs. 517-528.
- Cochilco (2015). *Proyección de consumo de agua en la minería del cobre al 2026*. DEPP 16/2015. Dirección de Estudios y Políticas Públicas, Cochilco, págs. 1-26.
- Crawford, D. (2014). *Gnuplot: An Interactive Plotting Program Manual*. URL: http://www.gnuplot.info/docs_4.6.
- Cullenbine, C., Wood, R. y Newman, A. (2011). «A sliding time window heuristic for open pit mine block sequencing». En: *Optimization Letters* 5.3, págs. 365-377.
- Dagdelen, K. y Akaike, A. (1999). «A strategic production scheduling method for an open pit mine». En: *Proc. 28th Internat. Appl. Comput. Oper. Res. Mineral Indust. (APCOM) Sympos. SME*. Littleton, CO, págs. 729 -738.
- Dagdelen, K. y Johnson, T. (1986). «Optimum open pit mine production scheduling by Lagrangian parameterization». En: *Proc. 19th Internat. Appl. Comput. Oper. Res. Mineral Indust. (APCOM) Sympos. SME*. Littleton, CO, págs. 127 -141.
- De Lara, M. y Doyen, L. (2008). *Sustainable management of natural resources: mathematical models and methods*. Springer Science & Business Media.
- Delphos, M. P. L. (2015). *MineLink Library*. <http://delphos.dmi.uchile.cl>. URL: <http://delphos.dmi.uchile.cl>.
- Denby, B y Schofield, D. (1993). «Genetic algorithms: A new approach to pit optimization». En: *Proc. 24th Int. APCOM Symp*, págs. 126-133.
- Denby, B. y Schofield, D (1994). «Open-pit design and scheduling by use of genetic algorithms». En: *Transactions of the Institution of Mining and Metallurgy. Section A. Mining Industry* 103.
- Denby, B. y Schofield, D. (1995). «Inclusion of risk assessment in open-pit design and scheduling». En: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics Abstracts*. Vol. 32. Elsevier Science.
- Denby, B., Schofield, D. y Hunter, G. (1996). «Genetic algorithms for open pit scheduling-extension into 3-dimensions». En: *Proc. 5th International Symposium on Mine Planning and Equipment Selection*.
- Deutsch, C. V. y Journel, A. (1998). «GSLib». En: *Geostatistical software library and user's guide* 369.
- Deutsch, M., González, E. y Williams, M. (2015). «Using simulation to quantify uncertainty in ultimate-pit limits and inform infrastructure placement.» En: *Mining Engineering* 67.12.
- Dimitrakopoulos, R. (1998). «Conditional simulation algorithms for modelling orebody uncertainty in open pit optimisation». En: *International Journal of Surface Mining, Reclamation and Environment* 12.4, págs. 173-179.
- Dimitrakopoulos, R y Ramazan, S. (2004). «Uncertainty based production scheduling in open pit mining». En: *SME Transactions* 316.

- Dimitrakopoulos, R. y Ramazan, S. (2008). «Stochastic integer programming for optimising long term production schedules of open pit mines: methods, application and value of stochastic solutions». En: *Mining Technology* 117.4, págs. 155-160.
- Dimitrakopoulos, R., Farrelly, C. y Godoy, M. (2002). «Moving forward from traditional optimization: grade uncertainty and risk effects in open-pit design». En: *Mining Technology* 111.1, págs. 82-88.
- Dimitrakopoulos, R., Martinez, L. y Ramazan, S. (2007). «A maximum upside/minimum downside approach to the traditional optimization of open pit mine design». En: *Journal of Mining Science* 43.1, págs. 73-82.
- Dowd, P. (1994). «Risk assessment in reserve estimation and open-pit planning». En: *Transactions of the Institution of Mining and Metallurgy. Section A. Mining Industry* 103.
- EY (2014). *Riesgos de minería y metales 2014–2015*. ER0170-CSG/GSC2014/1393438, págs. 1-43.
- EY. (2015). *Business risks facing mining and metals 2015–2016*. EYGM no. ER0256, págs. 1-43.
- Emery, X (2007). «Apunte de Geoestadística». En: *Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. Universidad de Chile*.
- Emery, X. y Lantuéjoul, C. (2006). «TBSIM: A computer program for conditional simulation of three-dimensional gaussian random fields via the turning bands method». En: *Computers & Geosciences* 32.10, págs. 1615-1628.
- Espinoza, D., Goycoolea, M., Moreno, E. y Newman, A. (2013a). «Minelib: a library of open pit mining problems». En: *Annals of Operations Research* 206.1, págs. 93-114.
- Espinoza, D., Lagos, G., Moreno, E. y Vielma, J. (2013b). «Risk averse approaches in open-pit production planning under ore grade uncertainty: a ultimate pit study». En: *Proc. 36th Int. APCOM Symp*, págs. 492-501.
- Fricke, C. (2006). «Applications of integer programming in open pit mining». Tesis doct. Department of Mathematics y Statistics, University of Melbourne, Australia.
- Gaupp, M. (2008). «Methods for improving the tractability of the block sequencing problem for open pit mining». Tesis doct. Colorado School of Mines, United States.
- Geovia (2015). *Geovia Whittle™ Strategic Mine Planning software*. <http://es.geovia.com/productos/whittle>.
- Gershon, M. (1983). «Optimal mine production scheduling: evaluation of large scale mathematical programming approaches». En: *International Journal of Mining Engineering* 1.4, págs. 315-329.
- Gholamnejad, J. y Osanloo, M. (2007). «Incorporation of ore grade uncertainty into the push back design process». En: *Journal of the South African Institute of Mining & Metallurgy* 107.3, pág. 177.
- Gholamnejad, J., Osanloo, M. y Karimi, B. (2006). «A chance-constrained programming approach for open pit long-term production scheduling in stochastic environments». En: *Journal South African Institute of Mining and Metallurgy* 106.2, pág. 105.

- Godoy, M. (2003). «The efficient management of geological risk in long-term production scheduling of open pit mines». Tesis de Doctorado. University of Queensland, Brisbane, Australia.
- Godoy, M. y Dimitrakopoulos, R. (2004). «Managing risk and waste mining in long-term production scheduling of open-pit mines». En: *Transactions* 316.
- Goodfellow, R. y Dimitrakopoulos, R. (2013). «Algorithmic integration of geological uncertainty in pushback designs for complex multiprocess open pit mines». En: *Mining Technology* 122.2, págs. 67-77.
- Gurobi Optimization, I. (2015). *Gurobi Optimizer Reference Manual*. URL: <http://www.gurobi.com>.
- Guzmán, J. (2011). «Inversión bajo incertidumbre: capítulo 2». En: *Revista Minería Chilena* 359.1, págs. 146-147.
- Hartman, H. (1992). *SME Mining Engineering Handbook*. Vol. 2. [Associate Editors: Britton, S., Gentry, D., Karmis, M., Mutmanský, J., Schlitt, W. y Singh, M.]. Society for Mining, Metallurgy and Exploration, Inc. Littleton, Colorado.
- Hochbaum, D. y Chen, A. (2000). «Performance Analysis and best implementation of old and new algorithms for the open-pit mining problem». En: *Operations Research* 48, págs. 894-914.
- Hustrulid, W., Kuchta, M. y Martin, R. (2013). *Open Pit Mine Planning and Design*. Vol. 1 Fundamentals. 3rd edition. CRC Press.
- Jélvez, E., Morales, N., Nancel-Penard, P., Marinho, A. y Guimaraes, O. (2013). «A Comparison of Conventional and Direct Block Scheduling Methods for Open Pit Mine Production Scheduling». En: *Proceedings of the 36th International Symposium APCOM 2013*, págs. 456-464.
- Jélvez, E., Morales, N. y Sepúlveda, G. (2015). «Comparación de distintas aproximaciones para calcular pit final robusto bajo incertidumbre de leyes». En: *4th International Seminar on Mine Planning*.
- Jélvez, E., Morales, N., Nancel-Penard, P., Peypouquet, J. y Reyes, P. (2016). «Aggregation heuristic for the open-pit block scheduling problem». En: *European Journal of Operational Research* 249.3, págs. 1169-1177.
- Jélvez, E., Morales, N., Nancel-Penard, P. y Cornillier, F. (2017). «A new heuristic and results for the Precedence Constrained Production Scheduling Problem». Submitted.
- Johnson, T. (1968). «Optimum open-pit mine production scheduling». Tesis de Doctorado. Operations Research Department, University of California, Berkeley, United States.
- Journel, A. G. y Huijbregts, C. J. (1978). *Mining geostatistics*. Academic press.
- Juárez, G., Dodds, R., Echeverría, A., Guzmán, J., Recabarren, M., Ronda, J. y Vila, E. (2014). «Open pit strategic mine planning with automatic phase generation». En: *Orebody Modelling and Strategic Mine Planning Symposium 2014*, págs. 147-154.
- Kirkpatrick, S., Gelatt, C. y Vecchi, M. (1983). «Optimization by simulated annealing». En: *Science* 220.4598, págs. 671-680.

- Koushavand, B., Askari-Nasab, H. y Deutsch, C. (2014). «A linear programming model for long-term mine planning in the presence of grade uncertainty and a stockpile». En: *International Journal of Mining Science and Technology* 24.4, págs. 451-459.
- Krokhmal, P., Palmquist, J. y Uryasev, S. (2002). «Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints». En: *Journal of Risk* 4, págs. 43-68.
- Kumral, M (2010). «Robust stochastic mine production scheduling». En: *Engineering Optimization* 42.6, págs. 567-579.
- Kumral, M. (2013). «Optimizing ore–waste discrimination and block sequencing through simulated annealing». En: *Applied Soft Computing* 13.8, págs. 3737-3744.
- Kumral, M. y Dowd, P. (2005). «A simulated annealing approach to mine production scheduling». En: *Journal of the Operational Research Society* 56.8, págs. 922-930.
- Lagos, G., Espinoza, D., Moreno, E. y Amaya, J. (2011). «Robust planning for an open-pit mining problem under ore-grade uncertainty». En: *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 37, págs. 15-20.
- Lamghari, A. y Dimitrakopoulos, R. (2012). «A diversified Tabu search approach for the open-pit mine production scheduling problem with metal uncertainty». En: *European Journal of Operational Research* 222.3, págs. 642-652.
- Lamghari, A, Dimitrakopoulos, R. y Ferland, J. (2013). «A variable neighbourhood descent algorithm for the open-pit mine production scheduling problem with metal uncertainty». En: *Journal of the Operational Research Society*.
- Lamghari, A., Dimitrakopoulos, R. y Ferland, J. (2014). «A hybrid method based on linear programming and variable neighborhood descent for scheduling production in open-pit mines». En: *Journal of Global Optimization*, págs. 1-28.
- Lane, K. (1988). *The economic definition of ore: cut-off grades in theory and practice*. Mining Journal Books.
- Leite, A y Dimitrakopoulos, R. (2007). «Stochastic optimisation model for open pit mine planning: application and risk analysis at copper deposit». En: *Mining Technology* 116.3, págs. 109-118.
- Leite, A. y Dimitrakopoulos, R. (2014). «Stochastic optimization of mine production scheduling with uncertain ore/metal/waste supply». En: *International Journal of Mining Science and Technology* 24.6, págs. 755-762.
- Leuchs, H. y Grossmann, I. (1965). «Optimal design of open-pit mines». En: *Transactions C.I.M.* 68, págs. 17-24.
- Leuangthong, O., McLennan, J. A. y Deutsch, C. V. (2004). «Minimum acceptance criteria for geostatistical realizations». En: *Natural Resources Research* 13.3, págs. 131-141.
- Marcotte, D. y Caron, J. (2013). «Ultimate open pit stochastic optimization». En: *Computers & Geosciences* 51, págs. 238-246.
- Meagher, C., Dimitrakopoulos, R. y Avis, D. (2014). «Optimized open pit mine design, pushbacks and the gap problem: A review». En: *Journal of Mining Science* 50.3, págs. 508-526.

- Menabde, M., Froyland, G., Stone, P. y Yeates, G. (2007). «Mining schedule optimisation for conditionally simulated orebodies». En: *The Australian Institute of Mining and Metallurgy, Spectrum Series* 14.1, págs. 1-12.
- Mitchell, S., OSullivan, M. y Dunning, I. (2011). «PuLP: a linear programming toolkit for python». En: *The University of Auckland, Auckland, New Zealand*, http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2011/09/3178.pdf.
- Moreno, E., Rezakhah, M., Newman, A. y Ferreira, F. (2017). «Linear models for stockpiling in open-pit mine production scheduling problems». En: 260.1, págs. 212-221.
- Muñoz, G. (2012). «Modelos de optimización lineal entera y aplicaciones a la minería». Trabajo de memoria de título de ingeniería civil matemática. Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile, Chile.
- Nelis, G. (2016). «Planificación adaptativa utilizando simulación geoestadística antitética». Tesis de Magíster. Departamento de Ingeniería de Minas, Universidad de Chile, Chile.
- Nemhauser, G. y Wolsey, L. (1988). *Integer and Combinatorial Optimization*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons.
- Newman, A., Rubio, E., Caro, R., Weintraub, A. y Eurek, K. (2010). «A Review of Operations Research in Mine Planning». En: *Interfaces* 40.3, págs. 222-245.
- Ortiz, J. (2006). «Apuntes de simulación geoestadística». En: *Apuntes de Cátedra Evaluación de Yacimientos* Departamento de Ingeniería de Minas, Universidad de Chile.1, págs. 1-170.
- Osanloo, M., Gholamnejad, J. y Karimi, B. (2008). «Long-term open pit mine production planning: a review of models and algorithms». En: *International Journal of Mining, Reclamation and Environment* 22.1, págs. 3-35.
- Picard, J. (1976). «Maximal Closure of a Graph and Applications to Combinatorial Problems». En: *Management Science* 22.11, págs. 1268-1272.
- Python, S. F. (2015). *Python™ Programming language*. <http://www.python.org>.
- RMCh (2016). «El Panorama de proyectos mineros». En: *Reportaje central-Especial proyectos-Revista Minería Chilena* 415.1, págs. 14-31.
- Ramazan, S y Dimitrakopoulos, R. (2004). «Traditional and new MIP models for production scheduling with in-situ grade variability». En: *International Journal of Surface Mining* 18.2, págs. 85-98.
- Ramazan, S. y Dimitrakopoulos, R (2007). «Stochastic optimisation of long-term production scheduling for open pit mines with a new integer programming formulation». En: *Orebody Modelling and Strategic Mine Planning, Spectrum Series* 14, págs. 359-365.
- Ramazan, S. y Dimitrakopoulos, R. (2013). «Production scheduling with uncertain supply: a new solution to the open pit mining problem». En: *Optimization and Engineering* 14.2, págs. 361-380.
- Ramazan, S., Dagdelen, K. y Johnson, T. (2005). «Fundamental tree algorithm in optimising production scheduling for open pit mine design». En: *Mining Technology* 114.1, págs. 45-54.

- Ravenscroft, P. (1992). «Risk analysis for mine scheduling by conditional simulation». En: *Transactions of the Institution of Mining and Metallurgy. Section A. Mining Industry* 101.
- Rockafellar, R. y Uryasev, S. (2000). «Optimization of conditional value-at-risk». En: *Journal of Risk* 2, págs. 21-42.
- SONAMI (2014). *Guía de conversión de unidades en la minería del cobre*. Sociedad Nacional de Minería, págs. 1-20.
- Sattarvand, J y Niemann-Delius, C. (2008). «Perspective of metaheuristic optimization methods in open pit production planning». En: *Gospodarka Surowcami Mineralnymi* 24.4, págs. 143-156.
- Sattarvand, J. y Niemann-Delius, C. (2013). «Past, Present and Future of Metaheuristic Optimization Methods in Long-Term Production Planning of Open Pits». En: *BHM Berg-und Hüttenmännische Monatshefte* 158.4, págs. 146-154.
- Silva, M., Dimitrakopoulos, R. y Lamghari, A. (2015). «Solving a large SIP model for production scheduling at a gold mine with multiple processing streams and uncertain geology». En: *Mining Technology* 124.1, págs. 24-33.
- Smith, M. y Dimitrakopoulos, R. (1999). «The influence of deposit uncertainty on mine production scheduling». En: *International Journal of Surface Mining, Reclamation and Environment* 13.4, págs. 173-178.
- Tabesh, M. y Askari-Nasab, H. (2011). «Two-stage clustering algorithm for block aggregation in open pit mines». En: *Mining Technology* 120.3, págs. 158-169.
- Underwood, R. y Tolwinski, B. (1998). «A mathematical programming viewpoint for solving the ultimate pit problem». En: *European Journal of Operational Research* 107.1, págs. 96-107.
- Vallee, M. (2000). «Mineral resource+ engineering, economic and legal feasibility». En: *CIM bulletin* 93.1038, págs. 53-61.
- Vielma, J., Espinoza, D. y Moreno, E. (2009). «Risk control in ultimate pits using conditional simulations». En: *Proc. 34th Int. APCOM Symp*, págs. 107-114.
- Whittle, D. y Bozorgebrahimi, A. (2004). «Hybrid Pits-Linking Conditional Simulation and Lerchs-Grossmann Through Set Theory». En: *AusIMM (Ed.), Orebody Modelling and Strategic Mine Planning*, págs. 399-404.
- Williams, H. (2013). *Model building in mathematical programming*. John Wiley & Sons.
- Wolsey, L. A. (1998). *Integer programming*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons.
- Zhang, M. (2006). «Combining genetic algorithms and topological sort to optimize open-pit mine plans». En: *Proc. 15th Internat. Sympos. Mine Planning Equipment Selection (MPES)*, M. Cardu, R. Ciccu, E. Lovera, E. Michelotti, eds., *FIORDO S.r.l., Torino, Italy*, págs. 1234 -1239.

9. Anexos

9.1. Anexo A: Fundamentos de Programación Lineal

9.1.1. Conceptos y Formulaciones

La programación lineal entera mixta (PEM) trata con problemas de maximización o minimización de una función de una o más variables, sujeto a restricciones de (des)igualdad y a que alguna de las variables tomen valores enteros. Debido a la robustez del modelo general, una gran variedad de problemas pueden encontrar una representación muy natural utilizando modelos PEM; por otra parte, el pago por esta flexibilidad de representación es que la resolución de este tipo de problemas es muy difícil y en la práctica presenta un alto costo computacional en comparación a los problemas de programación lineal, donde la variable puede tomar cualquier valor positivo. La causa del incremento en el costo computacional se debe a que se pierde la deseable propiedad existente en los problemas de programación lineal, a saber, de que al menos una solución óptima del problema se encuentra en un punto extremo (Bertsimas y Tsitsiklis 1997). En los modelos PEM, los conjuntos ya no tienen por qué ser conexos (pueden estar definidos a trozos) y mucho menos ser convexos, con lo que la idea de punto extremo tal y como se presenta en Bertsimas y Tsitsiklis (1997) o Nemhauser y Wolsey (1988) desaparece; de todos modos, para su resolución aún se pueden utilizar técnicas basadas en el método simplex (Wolsey 1998).

Una extensa e importante área de aplicación incluye la gestión y uso eficiente de recursos no renovables a fin de incrementar su productividad (De Lara y Doyen 2008), siendo una de ellas la explotación de minas a rajo abierto; este problema encuentra una representación muy adecuada utilizando el lenguaje de la programación lineal entera mixta. A continuación se vera la notación y formulación del problema desde un enfoque muy general.

Dado un vector de beneficios $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$, se desea maximizar una función lineal $\mathbf{v}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n v_i x_i$ sobre todos los vectores $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)'$ sujeto a un conjunto de restricciones. En particular, sean M_1, M_2, M_3 conjuntos finitos de índices y suponiendo que para cada $i \in M_j$, se tiene un vector \mathbf{a}_i y un escalar b_i que serán usados para formar la i -ésima restricción. Finalmente, sean N_1 y N_2 conjuntos finitos de índices. Así, se tiene la formulación general

$$(P) \quad \text{máx } \mathbf{v}\mathbf{x} \quad (94)$$

$$\text{s.a. } \mathbf{a}_i\mathbf{x} \geq b_i \quad i \in M_1 \quad (95)$$

$$\mathbf{a}_i\mathbf{x} \leq b_i \quad i \in M_2 \quad (96)$$

$$\mathbf{a}_i\mathbf{x} = b_i \quad i \in M_3 \quad (97)$$

$$x_j \geq 0 \quad j \in N_1 \quad (98)$$

$$x_j \leq 0 \quad j \in N_2 \quad (99)$$

Las variables x_1, \dots, x_n son llamadas *variables de decisión* y un vector \mathbf{x} que satisface todas las restricciones se llama *vector factible* o *solución factible*⁴. El conjunto de todos los vectores factibles se conoce por *región factible*. Si $j \notin N_1 \cup N_2$ entonces no hay restricciones sobre el signo de x_j y en consecuencia es una *variable libre* o *irrestringida*. La función $\mathbf{v}\mathbf{x}$ es llamada *función objetivo*. Un vector factible \mathbf{x}^* que maximice la función objetivo (esto es, $\mathbf{v}\mathbf{x}^* \geq \mathbf{v}\mathbf{x}$, para todo \mathbf{x} factible) se llama *solución óptima*⁵. El valor de $\mathbf{v}\mathbf{x}^*$ es entonces llamado *valor óptimo*. Por otra parte, si para cada número real K se puede encontrar un vector factible \mathbf{x} cuyo objetivo es mayor que K , se dirá que el valor óptimo es $+\infty$ o que la función objetivo no está acotada superiormente. Finalmente se destaca que no hay necesidad de estudiar problemas de minimización por separado (por ejemplo, si en vez de maximizar los beneficios se busca minimizar los costos de producción), pues si se llama X a la región factible

$$\min_{\mathbf{x} \in X} \mathbf{v}\mathbf{x} = - \max_{\mathbf{x} \in X} -\mathbf{v}\mathbf{x} \quad (100)$$

Dado que una restricción de igualdad $\mathbf{a}_i\mathbf{x} = b_i$ es equivalente a las dos restricciones $\mathbf{a}_i\mathbf{x} \leq b_i$ y $\mathbf{a}_i\mathbf{x} \geq b_i$ y cualquier restricción de la forma $\mathbf{a}_i\mathbf{x} \geq b_i$ puede ser reescrita como $(-\mathbf{a}_i)\mathbf{x} \leq -b_i$, se concluye que la región factible puede ser expresada exclusivamente en términos de restricciones de desigualdad de la forma $\mathbf{a}_i\mathbf{x} \leq b_i$. Así, supongamos que hay en total m restricciones, formando el vector $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$ y sea \mathbf{A} la matriz $m \times n$ cuyas filas son los vectores filas $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$; luego, las restricciones $\mathbf{a}_i\mathbf{x} \leq b_i, i = 1, \dots, m$, pueden ser expresadas de la forma más compacta $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$. Finalmente, si se considera el poliedro $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ como el conjunto de puntos que satisface un número finito de desigualdades lineales, esto es, $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$, se puede formular el problema general de programación lineal y algunos casos especiales como sigue: considere una descripción de (P) como

$$(P) \quad \max \{\mathbf{v}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathcal{P} \cap \mathcal{K}\} \quad (101)$$

- Si $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n$, entonces (P) es un problema de programación lineal (*PL*).
- Si $\mathcal{K} = \mathbb{Z}^n$, entonces (P) es un problema de programación lineal entera (*PE*).
- Si $\mathcal{K} = \{0, 1\}^n$, entonces (P) es un problema de programación lineal entera binaria (*PEB*).
- Si $\mathcal{K} = \mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^q$ (con $p + q = n$), entonces (P) es un problema de programación lineal entera mixta (*PEM*).

⁴El autor cree que el nombre de *solución factible* es inapropiado, pues *solución* debiese reservarse para aquel vector que maximice el objetivo, no para cualquiera que sólo satisfaga las restricciones, pero se presenta de todas formas por lo extendido de su uso.

⁵En rigor, debiese llamarse sólo *solución*, pero se presenta así por lo extendido de su nombre

Por ejemplo, para el problema de pit final sin considerar incertidumbre, es usual definir $\mathcal{K} = \{0, 1\}^n$. Como otro ejemplo, en el agendamiento de la sección 5.3 se utiliza $\mathcal{K} = \mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^q$. En adelante, salvo que se diga otra cosa, por generalidad se asumirá el caso $\mathcal{K} = \mathbb{Z}^n$. Las demostraciones de las proposiciones que se verán en adelante se pueden encontrar en Nemhauser y Wolsey (1988).

9.1.2. Relajación en Programación Lineal Entera

Considere el problema

$$(PE) \quad z = \text{máx} \{ \mathbf{v}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n \} \quad (102)$$

donde $\mathcal{P} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \}$. Como se ha adelantado, este problema puede ser muy difícil de resolver (la razón se verá más adelante). Una alternativa sería (i) agrandar la región factible, o bien, (ii) reemplazar la función objetivo por otra que tenga valores al menos tan grandes como la original. De hecho, se tiene la siguiente definición.

Definición 9.1. *Se dirá que el problema*

$$(PR) \quad z_R = \text{máx} \{ z_R(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in T \subseteq \mathbb{R}^n \} \quad (103)$$

es una relajación de (PE) si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n \subseteq T$
2. $\mathbf{v}\mathbf{x} \leq z_R(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n$

Proposición 9.1. *Si (PR) es una relajación de (PE), entonces $z \leq z_R$.*

Algunas relaciones importantes entre la factibilidad y soluciones de un problema entero y una relajación es lo que se tiene en el siguiente resultado.

Proposición 9.2. *Considerando las definiciones anteriores:*

1. *Si una relajación (PR) es infactible, entonces el problema original (PE) es infactible.*
2. *Sea \mathbf{x}^* la solución de la relajación (PR). Si $\mathbf{x}^* \in \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n$ y $\mathbf{v}\mathbf{x}^* = z_R(\mathbf{x}^*)$, entonces \mathbf{x}^* es solución para (PE).*

La importancia de las relajaciones es que permiten hallar cotas superiores para el problema (PE). Una pregunta natural es cómo construir relajaciones interesantes. Una de las más útiles es la relajación de la programación lineal⁶, que consiste en ignorar la restricción de integridad de las variables.

⁶También se conoce simplemente como relajación lineal o relajación LP.

9.1.2.1 Relajación Lineal

A continuación se presentan las definiciones, ejemplos y aplicaciones de la relajación lineal. Primero, se define la relajación LP de un problema de programación con variables enteras.

Definición 9.2. *La relajación lineal de (PE) es el problema de programación lineal*

$$(RL) \quad z_{LP} = \text{máx} \{ \mathbf{v}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathcal{P} \} \quad (104)$$

Ahora se muestra un ejemplo de relajación lineal que es útil para el problema de pit final.

Ejemplo 9.1. *Considere el problema con variables binarias*

$$(PB) \quad \text{máx} \{ \mathbf{v}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathcal{P} \cap \{0, 1\}^n \} \quad (105)$$

La relajación lineal de este problema binario viene dada por

$$(RLB) \quad \text{máx} \{ \mathbf{v}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathcal{P} \cap [0, 1]^n \} \quad (106)$$

Una pregunta interesante es bajo qué condiciones la relajación lineal de (PE) tendrá una solución óptima que es entera. Del teorema fundamental de la programación lineal se sabe que las soluciones básicas factibles son de la forma: $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N) = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0})$, donde la base óptima \mathbf{B} es una submatriz de orden $m \times m$ no singular de $(\mathbf{A}, \mathbf{I}_m)$. Si la base óptima tiene $\det(\mathbf{B}) = \pm 1$, entonces la relajación lineal resuelve (PE) (Bertsimas y Tsitsiklis 1997).

Definición 9.3. *Una matriz A es totalmente unimodular (TU) si cada submatriz cuadrada de A tiene determinante 1, -1 ó 0.*

Proposición 9.3. *Si A es TU, entonces $A_{ij} \in \{1, -1, 0\}$, $\forall i, j$.*

Proposición 9.4. *Una matriz A es TU si:*

1. $A_{ij} \in \{1, -1, 0\}$, para todo i, j .
2. Cada columna contiene a lo más dos coeficientes no nulos.
3. Existe una partición (F_1, F_2) del conjunto de filas tales que cada columna j contiene dos coeficientes no nulos que satisfacen

$$\sum_{i \in F_1} A_{ij} - \sum_{i \in F_2} A_{ij} = 0 \quad (107)$$

Finalmente respondemos la pregunta: ¿cómo asegurar que la relajación lineal resuelve (PE)?

Proposición 9.5. *El problema de programación lineal*

$$\text{máx } \{ \mathbf{v}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n \} \quad (108)$$

tiene una solución entera para todos los vectores \mathbf{b} para los cuales tiene un valor óptimo finito si y sólo si \mathbf{A} es TU.

Es interesante notar que hay muchos problemas que en su formulación presentan la estructura anteriormente descrita en su matriz de atributos del conjunto de restricciones, por ejemplo, problemas de transporte, de asignación y de flujos de costo mínimo. Para más detalles y otros ejemplos, ver Williams (2013). En particular, el problema de pit final de la sección 2.2 tiene esta estructura. Este tipo de resultados son un buen ejemplo de cómo aprovechar la estructura de un problema a la hora de generar algoritmos para resolverlos.

9.1.2.2 Relajación Lagrangiana

Considere el problema (PE) presentado en la ecuación (102), el cual puede ser reescrito como

$$(PE) \quad z = \text{máx } \mathbf{v}\mathbf{x} \quad (109)$$

$$\text{s.a. } \mathbf{A}_1\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_1 \quad (\text{restricciones «complicadas»}) \quad (110)$$

$$\mathbf{A}_2\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_2 \quad (\text{restricciones «ideales»}) \quad (111)$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^n \quad (112)$$

donde $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2)'$ y $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2)'$. Supongamos que $\mathbf{A}_2\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_2$ son $m - m_1$ restricciones «ideales», en el sentido que un problema de programación entera con sólo estas restricciones es más fácil de resolver, como por ejemplo, que \mathbf{A}_2 sea totalmente unimodular. Eliminando las m_1 restricciones «complicadas» $\mathbf{A}_1\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_1$, se obtiene una relajación del problema original que es más fácil de resolver. En la literatura, se pueden encontrar muchos problemas para los cuales las restricciones se pueden particionar de esta forma (Nemhauser y Wolsey 1988). Sin embargo, la cota superior resultante de la relajación podría ser débil, debido a que algunas restricciones fueron ignoradas. Una manera de compensar la eliminación de las m_1 restricciones $\mathbf{A}_1\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_1$ es incluir esta información en la función objetivo junto con ponderadores o multiplicadores de Lagrange (variables duales). Previo a lo anterior, se escribe el problema (PE_Q) de una manera levemente diferente:

$$(PE_Q) \quad z = \text{máx } \mathbf{v}\mathbf{x} \quad (113)$$

$$\text{s.a. } \mathbf{A}_1\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_1 \quad (114)$$

$$\mathbf{x} \in Q \quad (115)$$

donde $Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^n : \mathbf{A}_2 \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_2\} \neq \emptyset$. Así, para un vector de variables duales $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_{m_1}) \geq \mathbf{0}$ se define el problema

$$(RL_{\boldsymbol{\mu}}) \quad z_{RL}(\boldsymbol{\mu}) = \max \quad \mathbf{v}\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{A}_1 \mathbf{x})' \quad (116)$$

$$\text{s.a. } \mathbf{x} \in Q \quad (117)$$

El problema $(RL_{\boldsymbol{\mu}})$ se conoce como la *relajación Lagrangiana* de (PE_Q) con respecto a $\mathbf{A}_1 \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_1$. Esta terminología es usada debido a que el vector $\boldsymbol{\mu}$ juega un rol en $(RL_{\boldsymbol{\mu}})$ similar al rol de los multiplicadores de Lagrange en los problemas de optimización continua con restricciones. $(RL_{\boldsymbol{\mu}})$ no contiene las restricciones «complicadas», en vez de eso las incluye en la función objetivo con el término de penalización en la forma $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{A}_1 \mathbf{x})'$.

Proposición 9.6. $(RL_{\boldsymbol{\mu}})$ es una relajación de (PE_Q) para todo $\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$.

Una consecuencia importante de la Proposición 9.6 es que $z_{RL}(\boldsymbol{\mu}) \geq z_{PE}$ para todo $\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$. La menor cota superior disponible de la infinita familia de relajaciones $\{(RL_{\boldsymbol{\mu}})\}_{\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}}$ es $z_{RL}(\boldsymbol{\mu}^*)$, donde $\boldsymbol{\mu}^*$ es una solución óptima de

$$(DL) \quad z_{DL} = \min_{\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}} z_{RL}(\boldsymbol{\mu}) \quad (118)$$

El problema (DL) se conoce como *dual Lagrangiano* de (PE_Q) con respecto a las restricciones $\mathbf{A}_1 \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_1$.

9.1.3. Métodos en Programación Entera: *Branch & Bound*

En esta sección se revisará uno de los algoritmos de relajación más importantes que utilizan un enfoque de enumeración: ***Branch & Bound***. La mayoría de los *software* utilizan estas ideas para resolver problemas con variables enteras. Para mayores detalles y revisar las pruebas de las proposiciones, ver Nemhauser y Wolsey (1988).

Sea S un conjunto no vacío. Diremos que $\{S^i\}_{i=1}^k$ es una *división* de S si $\bigcup_{i=1}^k S^i = S$. Si además se cumple que $S^i \cap S^j = \emptyset$ para $i \neq j$ se tiene una *partición* de S .

Proposición 9.7. *Sea*

$$(PE^i) \quad z^i = \max \{ \mathbf{v}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in S^i \} \quad (119)$$

donde $\{S^i\}_{i=1}^k$ es una división de S . Entonces $z = \max \{z^i : i = 1, \dots, k\}$

La Proposición 9.7 expresa el concepto familiar de *divide y vencerás*, en otras palabras, si es muy difícil optimizar sobre S , quizás el problema puede ser resuelto optimizando sobre conjuntos más pequeños y luego juntar los resultados.

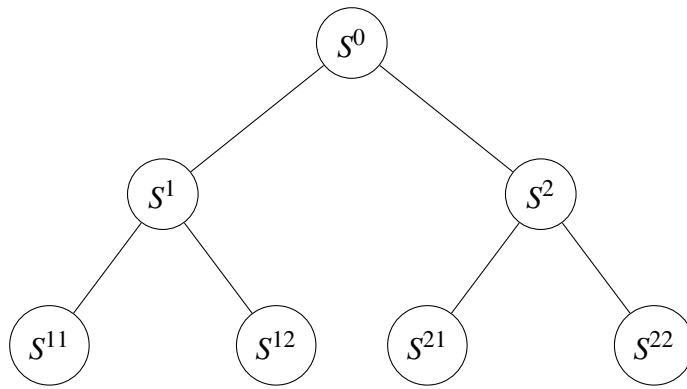


Figura 69: Comenzando desde el nodo S^0 , que representa al problema original, se hacen divisiones de la región factible, obteniendo subproblemas S^1 y S^2 . A su vez, cada uno de éstos se separan en subproblemas, dividiendo sus respectivas regiones factibles y obteniendo los subproblemas S^{11} , S^{12} y S^{21} , S^{22} respectivamente.

La división se hace como se muestra en la Figura 69. Aquí, los «hijos» de un nodo representan una división de la región factible de su «padre».

Cuando $S \subseteq \{0, 1\}^n$ una forma simple de hacer la división recursiva se muestra en la Figura 70. Aquí

$$S^{\delta_1 \dots \delta_k} = S \cap \{ \mathbf{x} \in \{0, 1\}^n : x_j = \delta_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, k \} \quad (120)$$

y la división es una partición de S .

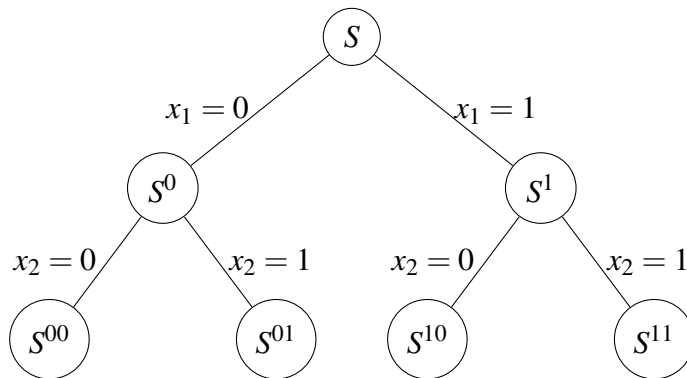


Figura 70: Esquema del árbol de enumeración para el problema lineal entero binario en el caso bivariado.

Llevado al extremo, la división puede ser vista como la enumeración total de los elementos de S , sin embargo, esto no es viable para problemas con un alto número de variables: en el caso binario, para n variables, el número de nodos es 2^n . Luego, para tener la esperanza de que funcione el enfoque enumerativo, se necesita evitar dividir el conjunto inicial en muchos subconjuntos.

Suponga que S ha sido dividido en subconjuntos $\{S^1, \dots, S^k\}$; si de alguna manera se establece

que no se puede subdividir S^i , se dice que el árbol de enumeración puede ser **podado** (*branching*) en el nodo correspondiente a S^i ⁷.

Proposición 9.8. *El árbol de enumeración puede ser podado en el nodo S^i si cualquiera de las siguientes tres condiciones se cumple:*

1. *Por infactibilidad: si $S^i = \emptyset$.*
2. *Por optimalidad: si se halla una solución óptima del problema (PE^i) .*
3. *Por acotamiento: si $z^i \leq \mathbf{v}\mathbf{x}_f$, donde \mathbf{x}_f es una solución factible conocida de (PE) .*

Sería ideal aplicar la Proposición 9.8 sin tener que resolver (PE^i) ; para lograr esto, se usa relajación. Sea (PR^i) una relajación de (PE^i) con $S^i \subseteq S_R^i$ y $z_R^i(\mathbf{x}) \geq \mathbf{v}\mathbf{x}$, para $\mathbf{x} \in S^i$.

Proposición 9.9. *El árbol de enumeración puede ser podado en el nodo S^i si cualquiera de las siguientes tres condiciones se cumple:*

1. *Infactibilidad: (PR^i) es infactible.*
2. *Optimalidad: una solución óptima \mathbf{x}_R^i de (PR^i) satisface $\mathbf{x}_R^i \in S^i$ y $z_R^i = \mathbf{v}\mathbf{x}_R^i$.*
3. *Acotamiento: $z_R^i \leq \mathbf{v}\mathbf{x}_f$, donde \mathbf{x}_f es una solución factible conocida de (PE) .*

Ahora se presenta un ejemplo de aplicación del método Branch & Bound.

Ejemplo 9.2.

$$\begin{aligned}
 (P) \quad & \text{máx} \quad -100x_1 + 72x_2 + 36x_3 \\
 \text{s.a.} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 0 \\
 & -4x_1 + x_3 \leq 0 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\
 & x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Una división se muestra en el árbol de la Figura 71. Se usa relajación lineal y la Proposición 9.9 para podar. En efecto, la condición de infactibilidad se cumple para S^0 , dado que

$$S_R^0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^3 : x_1 = 0, x_2 \leq 0, x_3 \leq 0, x_2 + x_3 \geq 1\} = \emptyset \quad (121)$$

Por otra parte, la condición de optimalidad se cumple para S^{110} y S^{111} , dado que esos conjuntos contienen las soluciones (únicas) $(1, 1, 0)$ y $(1, 1, 1)$, respectivamente. Dado que $z_{PE}^{110} < z_{PE}^{111} = 8$,

⁷Por simplicidad, se dirá: el nodo S^i .

se usará z_{PE}^{111} para comparar; ahora podemos aplicar el criterio de acotamiento a S^{10} , dado que $z_R^{10} = -64 < z_{PE}^{111}$. Por lo tanto, $x^0 = (1, 1, 1)$ es una solución óptima de (PE) con $z_{PE} = 8$.

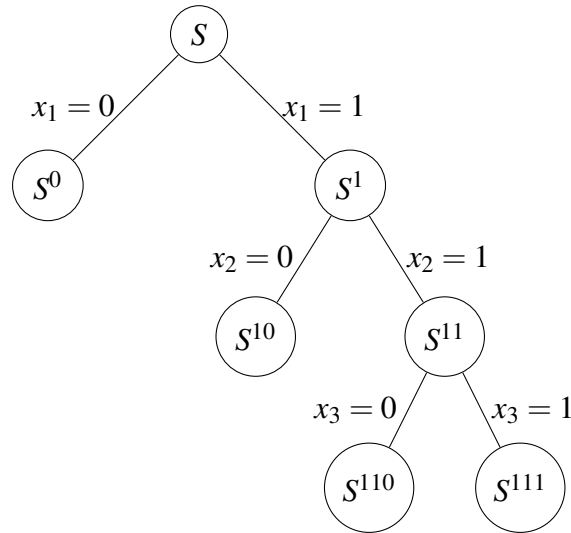


Figura 71: Árbol de enumeración para el Ejemplo 9.2.

Cuando las relajaciones se utilizan para podar, el enfoque enumerativo se ajusta al contexto de los algoritmos de relajación. Suponga que se ha resuelto una relajación de (PE^i) ; en el paso de refinamiento, primero se divide S^i , digamos $S^i = \cup_{j=1}^k S^{ij}$ y luego se forman relajaciones para los conjuntos S^{ij} en forma tal que $\cup_{j=1}^k S_R^{ij} \subset S_R^i$.

Los algoritmos de relajación enumerativos se conocen de manera genérica como **Branch & Bound** (o **enumeración implícita**). A continuación se presenta el algoritmo general **Branch & Bound** para resolver (PE) . En la descripción del algoritmo, \mathcal{L} es una colección de problemas de programación entera $\{(PE^i)\}_{i=1}^k$, cada uno de los cuales es de la forma $z_{PE}^i = \max \{ \mathbf{v}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in S^i \}$, donde $S^i \subseteq S$. Asociado a cada problema en \mathcal{L} existe una cota superior $\bar{z}^i \geq z_{PE}^i$.

Seudo-algoritmo general de **Branch & Bound**

Paso 1 (Inicialización): $\mathcal{L} = \{(PE^i)\}_{i=1}^k, S^0 = S, \bar{z}^0 = \infty$ y $z_{PE} = -\infty$.

Paso 2 (Test de finalización): si $\mathcal{L} = \emptyset$, entonces el vector \mathbf{x}^i tal que $z_{PE} = \mathbf{v}\mathbf{x}^i$ es solución óptima.

Paso 3 (Selección de un subproblema y relajación): selecciona (y elimina) un subproblema (PE^i) de \mathcal{L} y resuelve su relajación (PR^i) . Sea z_R^i el valor óptimo de la relajación y sea \mathbf{x}_R^i la solución óptima, si es que existe.

Paso 4 (Poda)

- Si $z_R^i \leq z_{PE}$ ir al Paso 2.

- Si $x_R^i \notin S^i$, ir al Paso 5.
- Si $\mathbf{x}_R^i \in S^i$ y $\mathbf{v}\mathbf{x}_R^i > \underline{z}_{PE}$, se fija $\underline{z}_{PE} = \mathbf{v}\mathbf{x}_R^i$ (bounding). Eliminar de \mathcal{L} todos los problemas con $\bar{z}^i \leq \underline{z}_{PE}$. Si $\mathbf{v}\mathbf{x}_R^i = \underline{z}_{PE}$, ir al Paso 2; de otra forma ir al Paso 5.

Paso 5 (División): sea $\{S^{ij}\}_{j=1}^k$ una división de S^i . Agregar problemas $\{(PE^{ij})\}_{j=1}^k$ a \mathcal{L} , donde $\bar{z}^{ij} = z_R^i$ para $j = 1, \dots, k$. Ir al Paso 3.

9.1.3.1 *Branch & Bound* mediante Relajación Lineal

Para el problema de programación entera (PE) se estudiará su solución por medio del algoritmo *Branch & Bound* que utiliza relajación lineal. Cabe destacar que este es el algoritmo básico utilizado por la mayoría de los *software* comerciales para resolver problemas de programación con variables enteras (Nemhauser y Wolsey 1988). Por simplicidad de notación, se abordarán problemas de programación entera: esta configuración es lo suficientemente general como para que podamos hablar sobre varias propiedades del algoritmo *Branch & Bound* tales como tipos de divisiones, estrategias de desarrollo de árboles, finitud del árbol resultante, árbol más pequeño posible, etc. Lo anterior es porque todas las ideas expuestas se pueden aplicar a problemas de programación lineal entera mixta. En la relajación inicial, S es reemplazado por $S_{LP}^0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$. También tomaremos $z_R(x) = \mathbf{v}\mathbf{x}$ en cada iteración.

Criterios de Poda

Cuando utilizamos relajación lineal en el algoritmo *Branch & Bound*, los criterios de poda por infactibilidad, optimalidad o acotamiento dados en las Proposiciones 9.8 y 9.9 se pueden aplicar directamente. De hecho, suponga que la relajación lineal en el nodo i del árbol de enumeración es

$$(RL^i) \quad z_{LP}^i = \max \{ \mathbf{v}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in S_{LP}^i \} \quad (122)$$

donde $S_{LP}^i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : \mathbf{A}^i\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^i\}$. Si el respectivo problema (PE^i) tiene una solución óptima, la denotaremos por \mathbf{x}^i . Entonces, las condiciones de poda quedan como:

1. $S_{LP}^i = \emptyset$ (infactibilidad).
2. $\mathbf{x}^i \in \mathbb{Z}_+^n$ (optimalidad).
3. $z_{LP}^i \leq \underline{z}$ donde \underline{z} es el valor objetivo de un vector factible conocido de (PE) (acotamiento).

División

Dado que se utiliza relajación lineal en cada nodo, la división se hace agregando restricciones lineales. Una forma obvia de hacer esto es tomar $S = S^1 \cup S^2$ con $S^1 = S \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : \mathbf{d}\mathbf{x} \leq d_0\}$ y $S^2 = S \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : \mathbf{d}\mathbf{x} \geq d_0 + 1\}$ donde $(\mathbf{d}, d_0) \in \mathbb{Z}^{n+1}$. Si \mathbf{x}^0 es la solución de la relajación

$$(RL^0) \quad z_{LP}^0 = \max \{ \mathbf{v}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n, \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \} \quad (123)$$

se puede elegir (\mathbf{d}, d_0) de manera que $d_0 < \mathbf{d}\mathbf{x}^0 < d_0 + 1$. Esto es altamente deseable, dado que produce $\mathbf{x}^0 \notin S_{LP}^1 \cup S_{LP}^2$ y, por lo tanto, da la posibilidad que para $i = 1, 2$ se obtenga $z_{LP}^i = \max \{ \mathbf{v}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in S_{LP}^i \} < z_{LP}^0$ (las cotas superiores obtenidas son estrictamente decrecientes). En la práctica, las elecciones del par (\mathbf{d}, d_0) son muy particulares:

1. Dicotomía de la variable: acá $\mathbf{d} = \mathbf{e}_j$ (j -ésimo vector canónico) para algún $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Entonces \mathbf{x}^0 será infactible en la relajación resultante si $x_j^0 \notin \mathbb{Z}$ y $d_0 = \lfloor x_j^0 \rfloor$ (ver Figura 72). Note que si $x_j \in \{0, 1\}$, entonces la rama izquierda entrega $x_j = 0$ y la rama derecha entrega $x_j = 1$. Una importante ventaja práctica de esta división es que sólo se agregan restricciones de cotas superior e inferior a la relajación lineal y, en consecuencia, sólo es necesario hacer un seguimiento de las cotas, ya que el tamaño de la base no aumenta.
2. Dicotomía CSG: suponga que el problema contiene la restricción de cota superior generalizada (CSG) $\sum_{j \in Q} x_j = 1$ para algún $Q \subseteq N$. La división se muestra en la Figura 73. Note que \mathbf{x}^0 será infactible en la relajación resultante si $0 < \sum_{j \in Q_1} x_j^0 < 1$, donde Q_1 es un subconjunto no vacío de Q .
3. Enumeración completa: asumiendo que x_j es acotado ($0 \leq x_j \leq k_j$), se puede considerar cada valor entero de x_j separadamente (ver Figura 74). Este enfoque, sin embargo, no es usado en los *software* comerciales de programación entera.

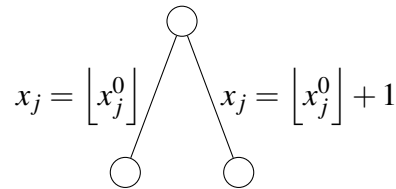


Figura 72: División de nodo por dicotomía de la variable.

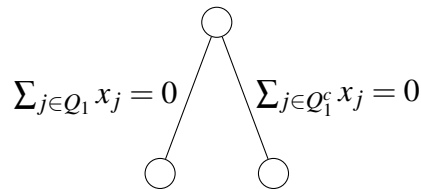


Figura 73: División de nodo por dicotomía (CSG).

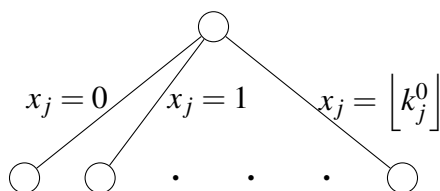


Figura 74: División de nodo por enumeración completa de la variable.

Nótese que cada una de las divisiones anteriores es una partición. Ahora considere el tamaño del árbol de enumeración: en lo sucesivo se asumirá que la división es hecha por dicotomía de la variable.

Proposición 9.10. *Si el poliedro $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$ es acotado, un árbol de enumeración desarrollado sobre las variables dicotómicas será finito siempre que para cada nodo i que requiera división, se elija una dicotomía de la forma*

$$(x_j \leq \lfloor x_j^i \rfloor, x_j \geq \lfloor x_j^i \rfloor + 1),$$

donde x_j^i no es entero. En particular, si se cumple que $\omega_j = \lceil \max \{x_j : \mathbf{x} \in \mathcal{P}\} \rceil$, ninguna «trayectoria» del árbol puede contener más de $\sum_{j \in N} \omega_j$ «ejes»⁸.

El tamaño del árbol de enumeración depende fuertemente de la calidad de las cotas obtenidas por la relajación lineal. En particular, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 9.11. *Si el nodo i del árbol de enumeración con restricciones dadas por el conjunto S^i es tal que $\max \{\mathbf{v}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in S_{LP}^i\} > z$, entonces el nodo i no puede ser podado.*

La Proposición 9.11 indica que, sin tener en cuenta cómo se desarrolle el árbol, las cotas (calidad de las relajaciones) son el principal factor en la eficiencia de un algoritmo *Branch & Bound*. Sin embargo, también es importante considerar distintas estrategias de desarrollo del árbol de enumeración, tales como: (i) ¿qué subproblema correspondiente a un nodo no podado debería ser considerado primero?, y (ii) ¿qué variable fraccional debería seleccionarse por la división dicotómica?. Esto se ve a continuación.

Selección de Nodo

Dada una lista \mathcal{L} de nodos activos⁹, la cuestión es decidir qué nodo debería ser examinado a continuación. Aquí hay dos opciones básicas: (i) considerar *reglas a priori*, que determinen anticipadamente el orden en el cual el árbol debe ser desarrollado; y (ii) *reglas adaptativas*, que eligen un nodo usando información (cotas, por ejemplo) del estado de los nodos activos.

⁸En el árbol de enumeración, los ejes representan las divisiones que se hacen de un problema. Una trayectoria representa una secuencia de ejes, sin repetición. Los nodos representan los (sub)problemas.

⁹Se refiere a aquellos subproblemas que no han sido podados.

Una *regla a priori* ampliamente usada es conocida como *búsqueda en profundidad*, pero acá se considera con *opción de retroceso*; esta combinación también se conoce como (*LIFO*)¹⁰. En la *búsqueda en profundidad*, si el nodo actual no es podado, el nodo siguiente que se considera es uno de sus dos hijos. En caso que sea podado, se aplica la *opción de retroceso* desde el nodo podado y sobre el camino, hasta que se encuentre el primer nodo (si lo hay) que tenga un hijo que no ha sido aún considerado. La regla mixta que combina *búsqueda en profundidad* con *opción de retroceso* se transforma en una *regla a priori* si se fija un criterio para elegir las variables de ramificación y se especifica, por ejemplo, que el hijo izquierdo sea considerado antes que el hijo derecho. Un ejemplo de esta regla es dada en la Figura 9, donde los nodos son enumerados en el orden que se consideran. Se supone que los nodos subrayados han sido podados. La búsqueda en profundidad tiene dos principales ventajas:

1. La relajación lineal para un hijo se obtiene de la relajación lineal de su padre por la adición de una restricción de cota superior o inferior.
2. La experiencia parece indicar que es más probable de que las soluciones factibles se encuentren «muy abajo» en el árbol y no cerca del nodo raíz. **El éxito de un algoritmo *Branch & Bound* depende fuertemente de tener una buena cota inferior \underline{z} para podar por acotamiento**¹¹.

La opción por defecto de la mayoría de los *software* comerciales es *búsqueda en profundidad* cuando el nodo actual no es podado y al menos un hijo es considerado inmediatamente. Sin embargo, cuando un nodo es podado, el nodo siguiente generalmente no se determina utilizando *opción de retroceso*. Antes de explicar cómo se resuelve esta selección, se mencionará otra *regla a priori*, la cual es opuesta a la *búsqueda en profundidad*: el nivel de un nodo en un árbol de enumeración se define como el número de ejes en el único camino entre éste y el nodo raíz. En la *búsqueda en amplitud*, todos los nodos a un nivel dado son considerados antes que cualquier nodo en el nivel más bajo siguiente. Mientras que esta forma de selección de nodo no es práctica para resolver problemas de programación entera usando relajación lineal, tiene algunas propiedades interesantes (Nemhauser y Wolsey 1988). Varios criterios razonables pueden darse para elegir un nodo activo:

- Elegir un nodo que tiene que ser considerado en cualquier caso: si hay un único nodo con la mayor cota superior, éste debe ser considerado; este argumento mitiga la regla de la *mejor cota superior*; esto es, cuando un nodo ha sido podado, el siguiente nodo se selecciona de entre todos los nodos activos como aquel que tenga la mayor cota superior. Así, si \mathcal{L} es el conjunto de nodos activos, se selecciona un $i \in \mathcal{L}$ que maximice \bar{z}^i .

¹⁰Del inglés: last in, first out

¹¹Cota inferior se refiere al valor objetivo obtenido con una solución factible de (*PE*), ya que $\underline{z} \leq z$.

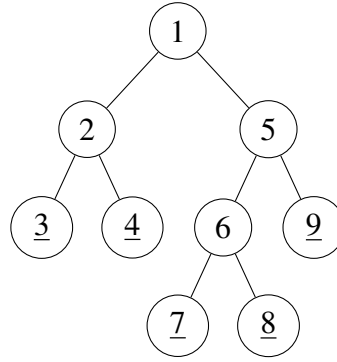


Figura 75: Representación de la regla de *búsqueda en profundidad* con opción de retroceso.

- Elegir un nodo en el que es muy probable hallar una solución óptima: la razón para esto es que una vez hallada una solución óptima, incluso si se es incapaz de probar inmediatamente que es óptima, se habrá obtenido el mayor valor posible de \underline{z} , lo cual es muy importante para podas posteriores. Supongamos que $\hat{z}^i \leq \bar{z}^i$ es una aproximación de z^i ; la *regla de mejor estimación* consiste en elegir un $i \in \mathcal{L}$ que maximice \hat{z}^i .
- Aunque tratar de hallar una solución óptima es altamente deseable, podría ser más práctico tratar de encontrar rápidamente una solución factible \hat{x} tal que $\mathbf{v}\hat{x} > \underline{z}$. El criterio

$$\max_{i \in \mathcal{L}} \frac{\bar{z}^i - \underline{z}}{\bar{z}^i - \hat{z}^i} \quad (124)$$

llamado *mejoramiento rápido*, apunta a lograr este objetivo. Note que el nodo i con $\hat{z}^i > \underline{z}$ será preferido al nodo j con $\hat{z}^j \leq \underline{z}$. Por lo tanto, se dará preferencia a los nodos para los cuales $\bar{z}^i - \hat{z}^i$ es pequeño, esperando que tales nodos produzcan una solución factible rápidamente. La estrategia de *mejoramiento rápido* es utilizada en algunos *software* comerciales como la opción por defecto cuando se ha encontrado una solución factible.

Selección de variable de ramificación

Suponga que se ha elegido un nodo activo i y la solución del problema (RL^i) correspondiente es \mathbf{x}^i . Luego se debe elegir una variable para definir la división, restringiendo esto al conjunto de índices $N^i = \{j \in N : x_j^i \notin \mathbb{Z}\}$. La evidencia empírica muestra que la elección de un $j \in N^i$ puede ser muy importante para el tiempo de ejecución del algoritmo (Nemhauser y Wolsey 1988). Con frecuencia, hay pocas variables que necesiten fijarse a valores enteros y el resto resultan ser valores enteros en soluciones de (RL) . Debido a que a la fecha no se han establecido métodos robustos que identifiquen tales variables, una forma usual de elegir una variable de ramificación es siguiendo las prioridades especificadas por el usuario; esto significa que un ordenamiento de las variables se especifica como parte de las entradas y que las variables de ramificación son seleccionadas de N^i de acuerdo a este orden. Por ejemplo, una variable binaria correspondiente a la decisión de si un proyecto debería llevarse a cabo o no, se le daría mayor importancia que a las variables binarias

correspondientes a las decisiones específicas dentro del proyecto. Otras posibilidades involucran *degradaciones* o *penalizaciones*.

Las *degradaciones* intentan estimar la disminución en \bar{z}^i , a causa del requerimiento a x_j de que sea entero. Suponga que $x_j = x_j^i = \lfloor x_j^i \rfloor + f_j^i$ y $f_j^i > 0$, luego, ramificando sobre x_j se estima una disminución de $D_j^{-i} = p_j^{-i} f_j^i$ para el «hijo» izquierdo y $D_j^{+i} = p_j^{+i} (1 - f_j^i)$ para el «hijo» derecho. Los coeficientes $\{p_j^{-i}, p_j^{+i}\}$ se pueden especificar como parte de la entrada, o bien, ser estimados en diferentes formas, por ejemplo, usando información sobre ramificaciones anteriores que involucren a x_j .

Por su parte, las *penalizaciones* involucran cálculos más elaborados para determinar los coeficientes $\{p_j^{-i}, p_j^{+i}\}$ y producen una cota inferior sobre la disminución en \bar{z}^i . Esta estrategia fue usada en los primeros *software* comerciales, pero están cada vez más en desuso porque son muy costosos computacionalmente en relación al valor de la información que proporcionan (Nemhauser y Wolsey 1988).

Dado $\{D_j^{-i}, D_j^{+i}\}$, con $j \in N^i$, una forma de elegir la variable de ramificación es mediante el criterio máx – mín:

$$\text{máx} \left\{ \text{mín} \left\{ D_j^{-i}, D_j^{+i} \right\} : j \in N^i \right\} \quad (125)$$

Cuando $D_j^{-i} = f_j^i$ y $D_j^{+i} = 1 - f_j^i$, el criterio máx – mín se conoce como *criterio de infactibilidad del máximo entero*. Otras reglas también se utilizan, por ejemplo, un criterio máx – máx:

$$\text{máx} \left\{ \text{máx} \left\{ D_j^{-i}, D_j^{+i} \right\} : j \in N^i \right\} \quad (126)$$

Acá, la idea es que una «rama» se pueda podar fácilmente por acotamiento.

Cuando la variable de ramificación se elige por el criterio máx – mín, se recomienda que en el próximo paso se considere el subproblema correspondiente al «hijo» que produzca la menor *degradación*. Así, se selecciona el subproblema correspondiente al «hijo» izquierdo si y sólo si $D_j^{-i} \leq D_j^{+i}$.

Ahora se puede calcular \hat{z}^i asumiendo que las *degradaciones* para cada variable son independientes. Luego, si $D_j^{-i} \leq D_j^{+i}$ se estima

$$\hat{z}^i = z_{LP}^i - D_j^{-i} - \sum_{k \in N^i \setminus \{j\}} \text{mín} D_j^{-i} \leq D_j^{+i}. \quad (127)$$

Note que si se requiere «ramificar» al hijo derecho del nodo i , la estimación se convierte en

$$\hat{z}^i = z_{LP}^i - D_j^{+i} - \sum_{k \in N^i \setminus \{j\}} \text{mín} D_j^{-i} \leq D_j^{+i}. \quad (128)$$

9.2. Anexo B1: Resultados fronteras eficientes variando el nivel de confianza

En esta sección se muestran algunos resultados adicionales de las fronteras eficientes que se obtuvieron para el caso de estudio sintético BM-Estra a partir de distintos niveles de confianza.

La Tabla 32 muestra los valores no descontados en promedio que se obtuvieron para cada valor del parámetro μ y cada valor del nivel de confianza.

Por su parte, la Tabla 33 muestra los valores del riesgo en términos de CVaR que se obtuvieron para cada valor del parámetro μ y cada valor del nivel de confianza.

Finalmente, en la Figura 76 se muestran las fronteras eficientes para cada nivel de confianza, desde 0.7 hasta 0.95, con paso de 0.05. Para este caso en particular, no se observan grandes diferencias en las fronteras eficientes para cada valor de nivel de confianza, pero note el alcance mayor en riesgo que cada una tiene a medida que se acepta un mayor nivel de confianza. En las Tablas 32 y 33 se pueden apreciar diferencias de orden menores a 10^5 .

μ	Valor [USD] frontera eficiente					
	$\delta=0.70$	$\delta=0.75$	$\delta=0.80$	$\delta=0.85$	$\delta=0.90$	$\delta=0.95$
0.001	95,140,538	95,140,538	95,140,538	95,140,538	95,140,538	95,140,538
0.01	95,140,538	95,140,538	95,140,538	95,140,538	95,140,538	95,140,538
0.1	95,139,684	95,139,684	95,139,684	95,139,684	95,121,477	95,121,477
1	94,592,895	94,603,156	94,490,710	94,516,030	94,576,455	94,570,637
1.2	92,918,368	93,028,884	93,458,997	93,936,387	93,936,387	93,936,387
1.4	91,592,372	92,749,416	92,735,231	92,559,107	92,490,470	92,495,257
1.6	91,467,249	92,333,328	92,735,231	92,552,623	92,211,263	92,154,388
1.8	91,467,249	91,375,818	92,260,331	92,072,105	92,049,674	92,049,674
2	91,256,168	90,997,032	91,502,569	90,842,531	90,673,823	90,848,519
4	87,845,085	87,756,642	86,407,478	86,408,021	86,408,021	86,408,021
6	87,081,655	86,214,365	86,227,872	86,227,872	86,227,872	86,227,872
8	86,467,118	82,846,163	82,856,303	82,856,303	82,856,303	82,856,303
10	82,229,158	82,234,654	82,234,654	82,218,598	82,218,598	82,218,598
20	81,132,055	81,115,703	81,115,703	81,115,703	81,115,703	81,115,703
40	80,633,191	80,897,540	80,789,295	80,789,295	80,789,295	80,789,295
60	40,243,387	41,497,835	41,497,835	41,497,835	41,491,053	41,491,053
80	0	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	0	0

Tabla 32: Valores del valor esperado no descontado para distintos valores de ponderación y distintos niveles de confianza.

CVaR [USD] frontera eficiente						
μ	$\delta=0.70$	$\delta=0.75$	$\delta=0.80$	$\delta=0.85$	$\delta=0.90$	$\delta=0.95$
0.001	7,140,975	7,272,945	7,470,901	7,778,691	8,394,273	8,394,273
0.01	7,140,975	7,272,945	7,470,901	7,778,691	8,394,273	8,394,273
0.1	7,124,169	7,256,317	7,454,538	7,761,815	7,996,311	7,996,311
1	5,957,044	6,094,657	6,095,602	6,215,432	6,298,265	6,287,204
1.2	4,484,258	4,730,311	5,206,114	5,705,793	5,707,564	5,707,564
1.4	3,488,341	4,507,866	4,632,020	4,594,641	4,565,125	4,567,611
1.6	3,405,802	4,234,420	4,632,020	4,590,583	4,383,043	4,347,184
1.8	3,405,802	3,656,044	4,351,880	4,291,115	4,284,357	4,284,357
2	3,296,396	3,455,985	3,931,541	3,660,935	3,577,333	3,662,674
4	2,090,971	2,234,718	1,976,146	1,976,911	1,977,655	1,977,655
6	1,927,643	1,935,866	1,939,808	1,940,127	1,940,765	1,940,765
8	1,825,833	1,406,844	1,409,862	1,409,897	1,409,968	1,409,968
10	1,340,990	1,342,116	1,342,839	1,341,642	1,341,819	1,341,819
20	1,266,136	1,266,126	1,266,774	1,267,110	1,267,783	1,267,783
40	1,246,997	1,256,531	1,254,640	1,254,746	1,254,959	1,254,959
60	530,630	555,192	555,681	556,212	556,892	556,892
80	0	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	0	0

Tabla 33: Valores del riesgo medido en CVaR para distintos valores de ponderación y distintos niveles de confianza.

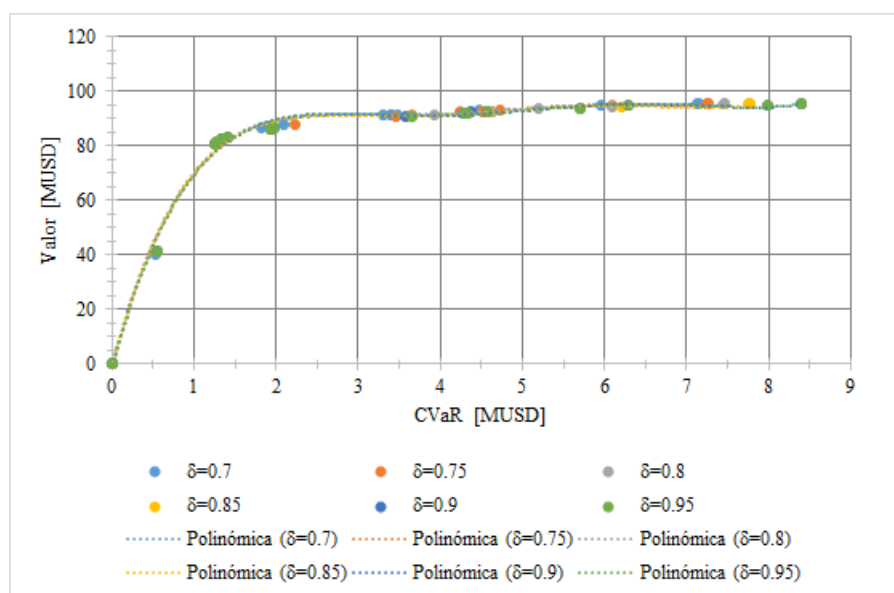


Figura 76: Frontera eficiente entre valor esperado y riesgo (CVaR) para la decisión de pit final, con distintos niveles de confianza.

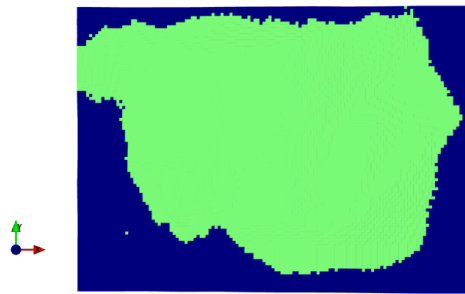
9.3. Anexo B2: Geometrías de pit final para BM-Pórfido

A continuación se han dispuesto en las Figuras 77 a 79 todas las alternativas de pit final que pertenecen a la frontera eficiente de la Tabla 18. El color verde representa aquellos bloques que pertenecen al pit final, y en azul se muestran los que no pertenecen.

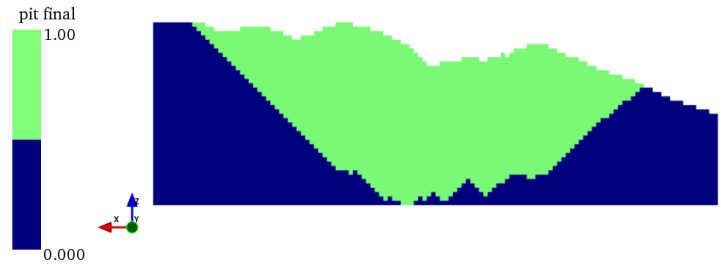
En la Figura 77 se pueden ver las geometrías de pit final obtenidas para varios valores de μ , desde 0.001 hasta 1: se aprecian leves diferencias en los contornos de los pits en las distintas vistas en planta, al igual que en las vistas en sección norte. Recordemos que estos casos son aquellos de mayor similitud en términos de tonelajes.

Por otra parte, en la Figura 78 se muestran los pit finales para ponderaciones μ que van desde 2 hasta 5, con un paso de 1: similar al caso anterior, no se producen decrecimientos bruscos de los tonelajes, por lo que sus contornos en planta presentan leves diferencias puntuales en algunas zonas, similar al caso de la vista en sección, donde se aprecian mejor las diferencias en sus contornos finales.

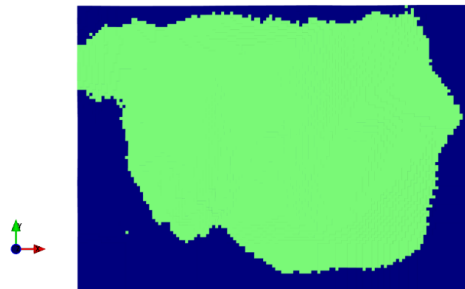
Finalmente, en las Figuras 79 y 80 se tienen los casos de pit final para $\mu = 6, 7, 8, 9, 10$. Acá resultan más evidentes las diferencias en las geometrías de pit final, tanto en las vistas en planta como en las vistas en sección. La principal causa de la forma irregular del contorno de pit final es que la decisión se tomó considerando la incertidumbre in-situ, mediante los distintos escenarios de leyes.



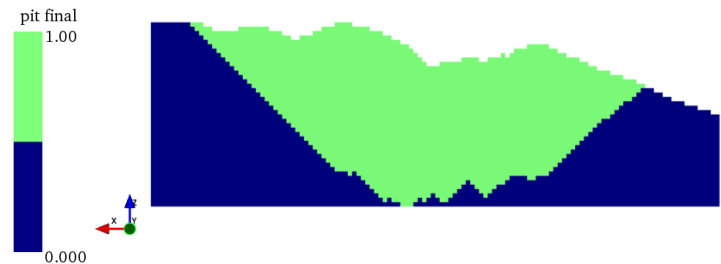
(a) vista en planta pit final $\mu = 0,001$



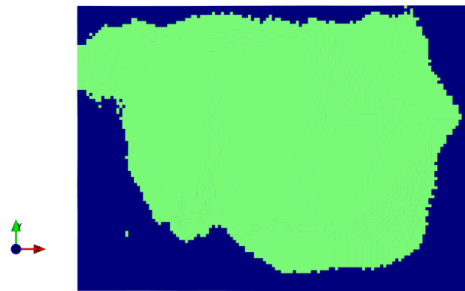
(b) vista en sección norte - 5030m pit final $\mu = 0,001$



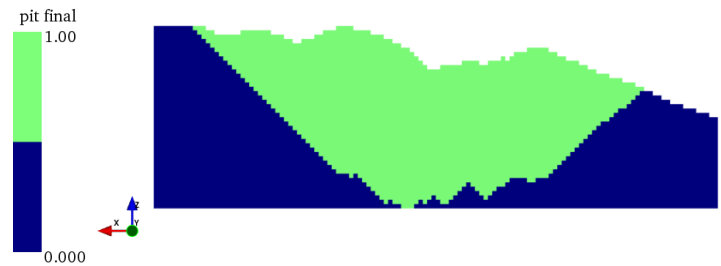
(c) vista en planta pit final $\mu = 0,01$



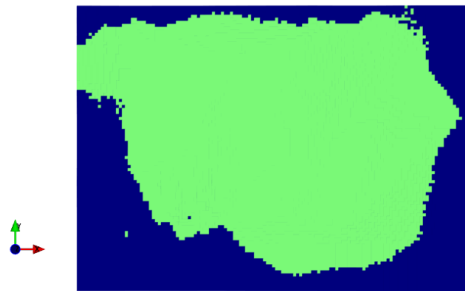
(d) vista en sección norte - 5030m pit final $\mu = 0,01$



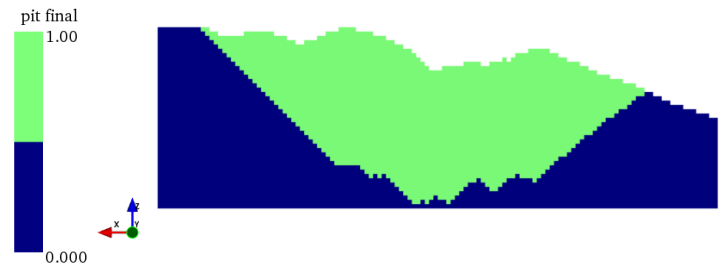
(e) vista en planta pit final $\mu = 0,1$



(f) vista en sección norte - 5030m pit final $\mu = 0,1$



(g) vista en planta pit final $\mu = 1$



(h) vista en sección norte - 5030m pit final $\mu = 1$

Figura 77: Vistas en planta y sección norte de las alternativas de pit final del modelo BM-Pórfido para diferentes valores del parámetro $\mu = 0.001, 0.01, 0.1$ y 1 , para un nivel de confianza del 95% .

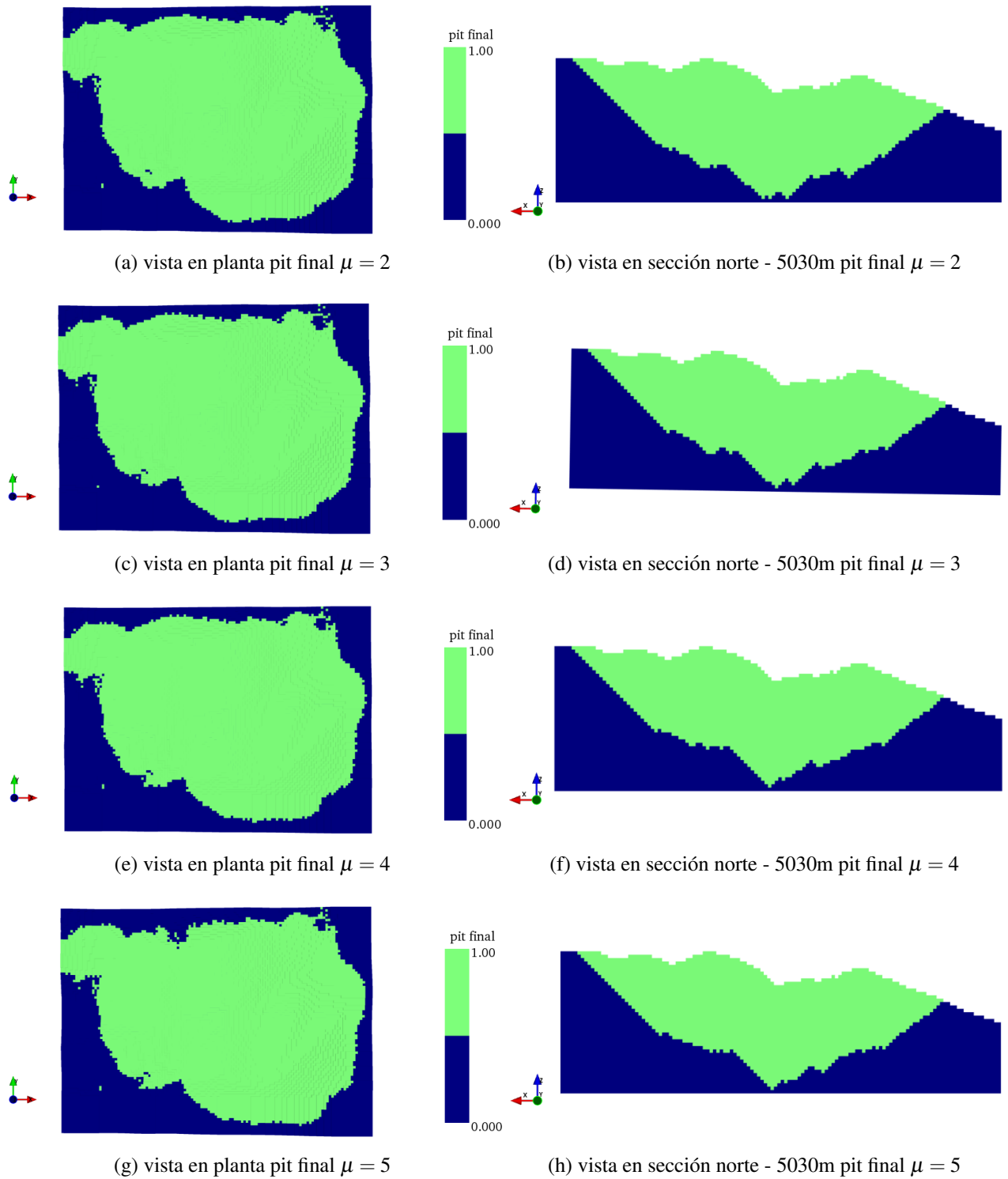


Figura 78: Vistas en planta y sección norte de las alternativas de pit final del modelo BM-Pórfido para diferentes valores del parámetro $\mu = 2, 3, 4$ y 5 , para un nivel de confianza del 95%.

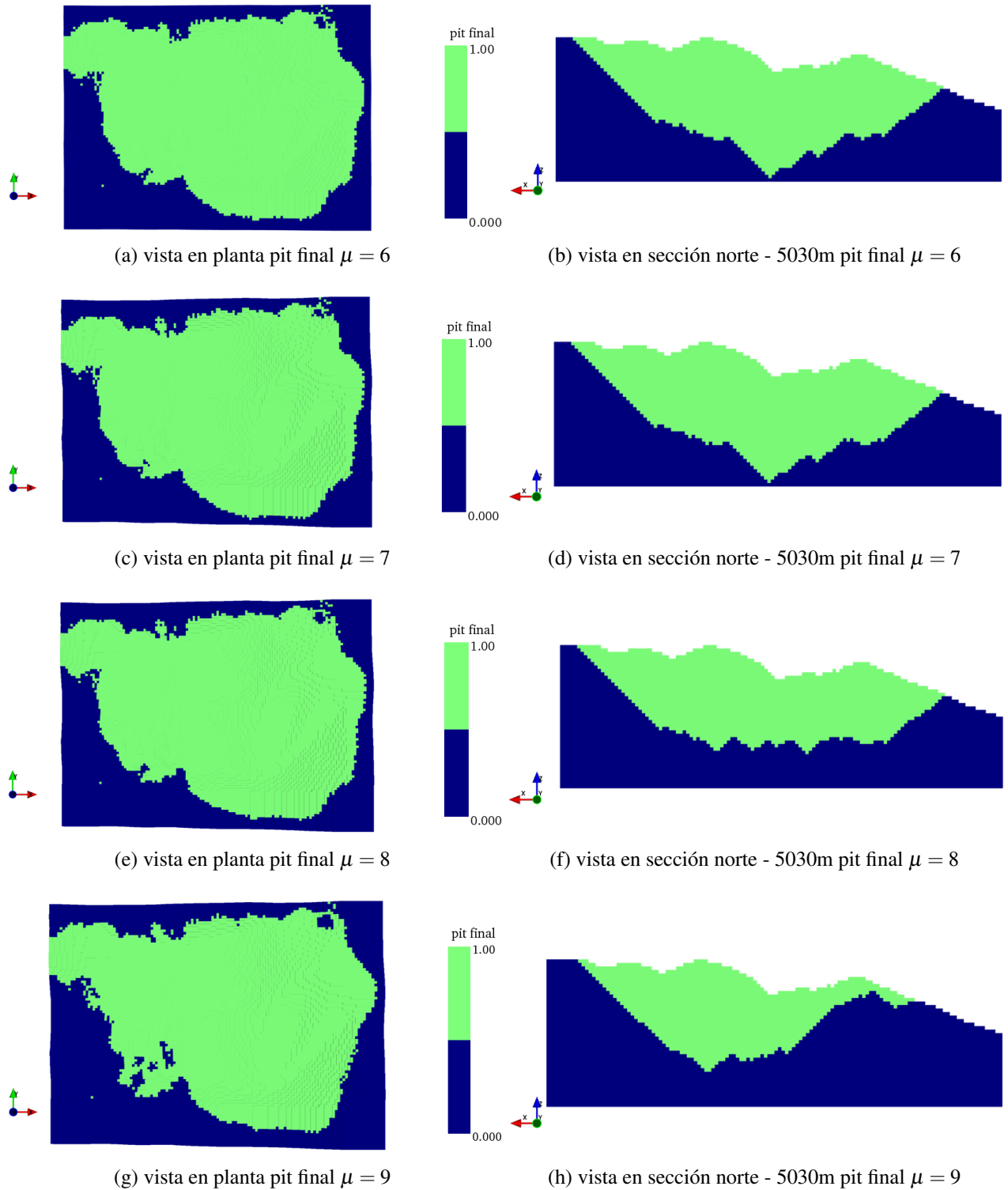


Figura 79: Vistas en planta y sección norte de las alternativas de pit final del modelo BM-Pórfido para diferentes valores del parámetro $\mu = 6, 7, 8$ y 9 , para un nivel de confianza del 95 %.

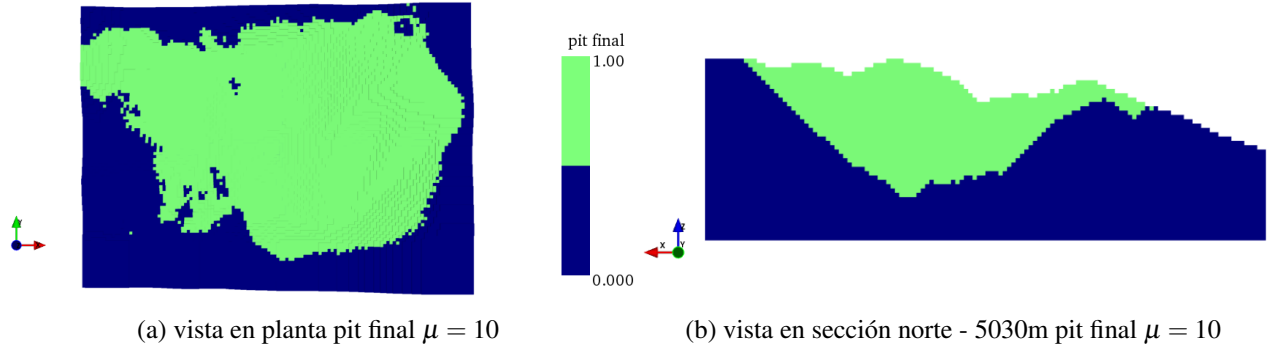


Figura 80: Vistas en planta y sección norte de las alternativas de pit final del modelo BM-Pórfido para $\mu = 10$, con un nivel de confianza del 95 %.

9.4. Anexo C: Formulación alternativa al problema de selección de pushbacks.

En esta sección se presentará una formulación alternativa al problema de selección automática de pushbacks (o fases). El objetivo es desarrollar un modelo alternativo al implementado en la sección 6.3, aplicando nuevas restricciones y función objetivo, para mostrar la versatilidad que presenta el modelo desarrollado en 5.2. En este caso, se buscará minimizar las diferencias en tonelajes de la selección, y para ello, será necesario utilizar alguna medida de variabilidad que represente las desviaciones de los tonelajes respecto a un valor de referencia.

La notación utilizada en esta parte sigue lo visto en la sección 5.2.2. Considere N pits anidados y sea n_o el número requerido de pushbacks. Además, se puede asumir sin pérdida de generalidad que existe $K < N$ de manera tal que todos los pits hasta el K -ésimo son vacíos, es decir, $P_1 = \dots = P_K = P_0$ (esto sirve para fijar variables). Finalmente, recordamos la notación para el tonelaje total $r_{ton_{ij}}$ dentro de la fase F_{ij} : en particular, $r_{ton_{N0}}$ denota el tonelaje total dentro del pit final.

Para representar la función objetivo deseada, es decir, desviaciones de los tonelajes respecto a un valor de referencia, la que se desea minimizar, es necesario tener en cuenta el marco teórico donde se enmarca este trabajo, esto es, modelos de programación lineal entera-mixta. Se debe evitar, por ejemplo, trabajar con funciones cuadráticas (como la varianza para medir las desviaciones). Una alternativa es la desviación media absoluta, la cual mide el promedio de las desviaciones (en módulo) de cierto atributo respecto a un valor de referencia. Más precisamente, en este caso se tiene lo siguiente

$$DMA = \frac{1}{n_o} \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{i-1} \left| r_{ton_{ij}} x_{ij} - \frac{r_{ton_{N0}}}{n_o} \right|. \quad (129)$$

El valor de referencia corresponde al tonelaje ideal en cada fase cuando se tiene una partición del pit final en n_o pushbacks, el que viene dado por $\frac{r_{tonN0}}{n_o}$. Así, la desviación media absoluta sirve como medida de variabilidad que puede ser minimizada a la hora de seleccionar un conjunto de fases desde los pits anidados.

Si bien la función de valor absoluto (129) es no lineal, se puede plantear una formulación equivalente, dado el hecho que para un $z > 0$, $|ax - b| \leq z \Leftrightarrow -z \leq ax - b \leq z$. Por lo tanto, incluyendo $\frac{N(N+1)}{2}$ variables auxiliares $z_k \geq 0$, los siguientes problemas son equivalentes

$$\min_x \left\{ \sum_k |ax_k - b| : x \in X \right\} \iff \min_{(x,z)} \left\{ \sum_k z_k : x \in X, -z_k \leq ax_k - b \leq z_k, z \geq 0 \right\} \quad (130)$$

Más allá del abuso de notación (por razones de simplicidad se omitieron los detalles), lo importante de la equivalencia (130) es que permite pasar de un programa no lineal con función objetivo DMA en un programa lineal equivalente, que puede ser planteado y resuelto con las herramientas que se enmarcan en este trabajo de tesis.

A partir de lo anterior, se presenta la formulación lineal del problema que minimiza DMA.

$$(PSP) \quad \min \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{i-1} z_{ij} \quad (131)$$

s.a. :

$$\sum_{i=1}^N x_{i0} = 1 \quad (132)$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} x_{Nj} = 1 \quad (133)$$

$$x_{ij} \leq \sum_{F_{uv} \in \text{PREC}_{ij}} x_{uv} \leq 1 \quad \forall i \in \overline{2, N}, j \in \overline{1, i-1} \quad (134)$$

$$x_{ij} \leq \sum_{F_{uv} \in \text{SUC}_{ij}} x_{uv} \leq 1 \quad \forall i \in \overline{1, N-1}, j \in \overline{0, i-1} \quad (135)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{i-1} x_{ij} = n_o \quad (136)$$

$$x_{ij} = 0 \quad \forall i \in \overline{1, K}, j \in \overline{0, i-1} \quad (137)$$

$$x_{ij} = 0 \quad \forall i \in \overline{K+1, N}, j \in \overline{0, i-1} \quad (138)$$

$$\left(r_{ton_{ij}} - \frac{r_{ton_{N0}}}{n_o} \right) x_{ij} \leq n_o z_{ij} \quad \forall i \in \overline{1, N}, j \in \overline{0, i-1} \quad (139)$$

$$\left(\frac{r_{ton_{N0}}}{n_o} - r_{ton_{ij}} \right) x_{ij} \leq n_o z_{ij} \quad \forall i \in \overline{1, N}, j \in \overline{0, i-1} \quad (140)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \overline{1, N}, j \in \overline{0, i-1} \quad (141)$$

$$z_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in \overline{1, N}, j \in \overline{0, i-1} \quad (142)$$

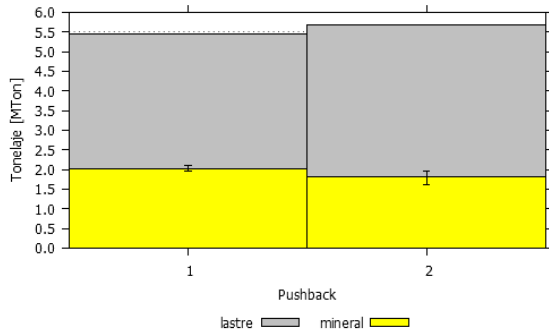
La expresión (131) representa la función objetivo, donde se minimiza la suma de variables auxiliares que son cota superior de las desviaciones entre tonelajes de fases; las restricciones (132) - (135) se encargan de que el proceso sea una partición del pit final; (136) permite asegurar una selección de exactamente n_o fases; (137) y (138) permiten reducir el número de variables, fijando sus valores; (139) y (140) relacionan las variables auxiliares con la función DMA; y finalmente (141) y (142) denotan la naturaleza de las variables.

La implementación del modelo se hizo con los mismos parámetros utilizados en la sección 6.3, a diferencia del número de fases requeridas, que en este caso se impone como una restricción del modelo. En esta formulación no se requieren las restricciones de tonelaje, por lo que las cotas expresadas en la Tabla 12 no se utilizan en estos experimentos. Para tal efecto, se crearon 5 instancias del problema, donde en cada una se pide el número de fases descrito en la Tabla 34.

Instancia	Número de fases
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6

Tabla 34: Número de fases requerido en cada instancia del problema de selección de fases para BM-Estra.

Los resultados para cada instancia se pueden observar en las Figuras (81) a (85). En cada una de ellas, se muestran los tonelajes esperados de mineral y lastre por fase, junto con sus respectivos rangos de variabilidad considerando todos los escenarios. Además, se muestran las geometrías de las fases. Se recuerda que en cada caso (número requerido de fases), la selección de fases es aquella que minimiza la suma de las desviaciones de los tonelajes totales de las fases respecto a un tonelaje ideal usado de referencia. En tal caso, podría decirse que bajo la limitación de usar pits anidados, esta formulación es una buena opción entre las existentes para generar diseño de fases que reduzcan el efecto indeseado del problema del gap.

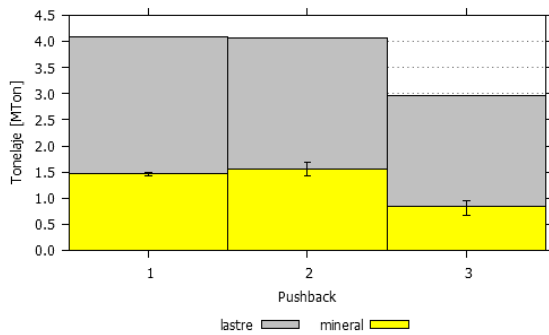


(a) tonelajes mineral y lastre, para una selección de 2 pushbacks



(b) vista en sección de 2 pushbacks

Figura 81: Resultados de la selección automática para la instancia 1. En (a) se muestran los tonelajes promedio de mineral y estéril en cada pushback, junto con sus respectivos rangos de variabilidad. En (b) se muestra la forma de los 2 pushbacks.

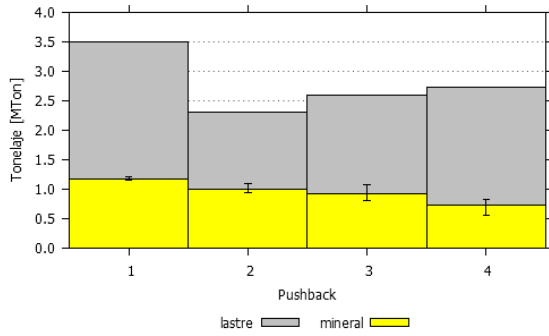


(a) tonelajes mineral y lastre, para una selección de 3 pushbacks



(b) vista en sección de 3 pushbacks

Figura 82: Resultados de la selección automática para la instancia 2. En (a) se muestran los tonelajes promedio de mineral y estéril en cada pushback, junto con sus respectivos rangos de variabilidad. En (b) se muestra la forma de los 3 pushbacks.

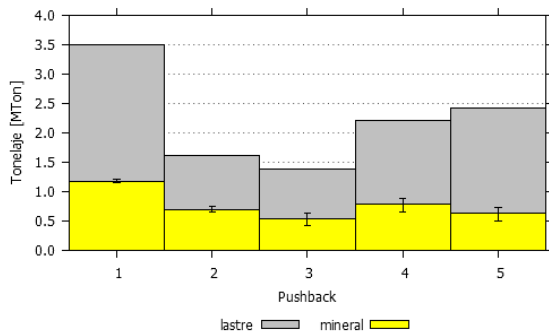


(a) tonelajes mineral y lastre, para una selección de 4 pushbacks



(b) vista en sección de 4 pushbacks

Figura 83: Resultados de la selección automática para la instancia 3. En (a) se muestran los tonelajes promedio de mineral y estéril en cada pushback, junto con sus respectivos rangos de variabilidad. En (b) se muestra la forma de los 4 pushbacks.

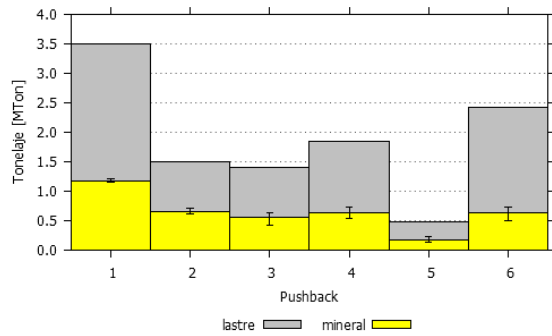


(a) tonelajes mineral y lastre, para una selección de 5 pushbacks



(b) vista en sección de 5 pushbacks

Figura 84: Resultados de la selección automática para la instancia 4. En (a) se muestran los tonelajes promedio de mineral y estéril en cada pushback, junto con sus respectivos rangos de variabilidad. En (b) se muestra la forma de los 5 pushbacks.



(a) toneladas mineral y lastre, para una selección de 6 pushbacks



(b) vista en sección de 6 pushbacks

Figura 85: Resultados de la selección automática para la instancia 5. En (a) se muestran los tonelajes promedio de mineral y estéril en cada pushback, junto con sus respectivos rangos de variabilidad. En (b) se muestra la forma de los 6 pushbacks.