



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE GEOFÍSICA

MODELO FLEXURAL DE LA PLACA SUBDUCTANTE

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS, MENCIÓN GEOFÍSICA

JEREMÍAS ESTEBAN GARAY LABRA

PROFESOR GUÍA:
EDUARDO CONTRERAS REYES

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JAVIER RUIZ PAREDES
AXEL OSSES ALVARADO

SANTIAGO DE CHILE
2017

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR
AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS, MENCIÓN GEOFÍSICA
POR: JEREMÍAS ESTEBAN GARAY LABRA
FECHA: JUNIO 2017
PROF. GUÍA: EDUARDO CONTRERAS REYES

MODELO FLEXURAL DE LA PLACA SUBDUCTANTE

El presente trabajo tiene como objetivo estudiar y comparar distintos modelos de la flexión de la litósfera oceánica en un ambiente de subducción o margen convergente. Dichos modelos provienen del estudio de la elasticidad para el equilibrio de placas y/o barras delgadas. Además se han incorporado las fuerzas involucradas como el *Slab-pull* y *Ridge-push*, siendo estas las más dominantes en un proceso de subducción. En segunda instancia se modeló el contacto entre dicha placa y la litósfera continental, al introducir una restricción al problema, que es que la litósfera oceánica no se traslape con otra función que se encarga de simular el continente. Este problema es matemáticamente conocido como el problema del obstáculo.

Inicialmente se exploran los modelos unidimensionales clásicos encontrados en la literatura, para variar de ellos las condiciones de borde usadas proponiendo a partir de esto un modelo para las fuerzas involucradas. Al hacer esto y comparar la flexión con perfiles batimétricos se pueden analizar los modelos y su alcance para describir observaciones relevantes en un ambiente de subducción, además de inferir valores para los parámetros utilizados. Esto es comparado con trabajos similares dentro del estudio flexural de la litósfera oceánica.

Por otro lado, la investigación hecha con el obstáculo genera soluciones interesantes desde el punto de vista tectónico, entregando estas un conjunto de máximos y mínimos en los esfuerzos, interpretados estos como zonas donde la placa está propensa a fracturamiento. El modelar mecánicamente la zona interplaca es nuevo y abre la puerta a nuevos modelos que puedan dar cuenta de la fenomenología esperada. Además, como variante se ha hecho esta modelación usando fuerzas de contacto, incorporando así una interacción proveniente del estudio de la elasticidad, hecho por primera vez por Hertz en 1882. La modelación 2D de este problema es hecha usando el método de elementos finitos, siendo este método capaz de, a partir de la formulación variacional del problema, entregar la solución. Este resultado no muestra demasiada variación con los resultados obtenidos de modelos de obstáculo 1D, pero muestra mayor versatilidad a la hora de escoger distintos dominios y condiciones de borde.

Cómo resultado de este trabajo se llega a que los distintos modelos 1D pueden modelar no de manera única la flexión de la litósfera oceánica con un error de las decenas de metros. Se propone una solución mixta donde es permitida la reducción de la rigidez en la cercanía de la fosa y además la incorporación de fuerzas oblicuas para modelar el *Slab-pull*, permitiendo así que los esfuerzos no se sobrevaloren y no perder la dinámica de la interacción.

*A Jesús, el Rey de Gloria.
(Sl. 24, ~ 1000 AC).*

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis profesores Eduardo Contreras Reyes y Axel Osses por su inmensa paciencia y ayuda en este trabajo. Muchas gracias por la motivación, ayuda, crítica y enseñanza en este proceso. Sin duda son grandes profesores y guías. También quiero mencionar al profesor Marcel Clerc, por darme apoyo en todo lo concerniente a la academia y haber sido de gran ayuda en mi vuelta a la universidad, y a Javier Ruiz por su ayuda en la parte formativa del magister

Quiero también agradecer a mis amigos que han servido como fuente de inspiración y ayuda en mi vida: A Gucci y Carla, Vito, Perro Bomba, Nemo, Gabi y Sophia Garay y sus tijeras. A Juana por ayudar infinitamente, al Tebo y su familia. A Clau y Ely por su ayuda bilingüe, a Vicky y a Sofy Leegstra y Carlos Saji por su ayuda matemática, a los habitantes de la Cueva por darme soporte sentimental, a Rulo, Fabían y al pelado Tørben por el *kickstart*. A Rufo y su hijo Forrest, por ser acompañantes infalibles. A Jocelyn Dunstan por ayudarme y guiarme a lo largo de gran parte de mi carrera, y a Michele Ferrero, el creador de la *Nutella*.

También quiero agradecer a mis padres Carlos y Lola por brindarme apoyo, consejería, ayuda e inspiración. A Ferni por su amor, amistad, paciencia y hacerme tan feliz a pesar de la gran cordillera que nos separa aún. Por último a Dios, quién se lleva toda la gloria siempre en todas las situaciones.

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
1.1. Subducción	1
1.2. Objetivos	3
2. Flexión en la litósfera oceánica 1D	5
2.1. Primera Solución Analítica	5
2.2. Dependencia con las Condiciones de Borde	7
2.2.1. Sensibilidad del modelo frente a fuerzas oblicuas	10
2.3. Modelo I: Fuerza dependiente del espacio	11
2.3.1. Localización y dispersión de la Fuerza	12
2.3.2. Resultados	14
2.3.3. Influencia del Centro de Expansión	15
2.4. Modelo II: Carga de sedimentos	17
2.4.1. Resultados	18
2.5. Modelo III: Reducción del Espesor Elástico y Fuerzas Nulas	19
2.5.1. Resultados	20
2.6. Conclusiones y Discusión	21
3. El Problema del Obstáculo	23
3.1. Introducción	23
3.2. Obstáculo Rígido: Parámetros del modelo	25
3.2.1. Forma del contacto	25
3.2.2. Flotabilidad variable	25
3.2.3. El algoritmo de Penalización	26
3.2.4. Resultados	27
3.3. Obstáculo Elástico	30
3.3.1. Resultados	30
3.4. Discusiones y Conclusiones	34
4. Flexión en la litósfera oceánica 2D	37
4.1. Introducción	37
4.2. El Método de Elementos Finitos (MEF)	38
4.2.1. Formulación Variacional	39
4.2.2. Algoritmo de Penalización	40
4.2.3. Obstáculo	40
4.2.4. Contraste de Densidad	40

4.3. Resultados y Discusiones	40
4.4. Variación de la Condición de Borde	42
5. Conclusiones y Discusión	45
5.1. Fuerzas y Modelos 1D	45
5.2. Modelo de Contacto	47
5.3. Conclusiones	50
A. Elasticidad lineal	51
A.1. Elasticidad lineal	51
A.1.1. Deformación	51
A.1.2. Esfuerzos	52
A.1.3. Elasticidad	54
B. Modelo de Kirchhoff-Love	55
B.0.1. Principio variacional	55
B.0.2. Condiciones de Borde	60
B.0.3. Ecuaciones de equilibrio	61
B.0.4. Modelo con rigidez variable y fuerzas horizontales	62
C. Solución Analítica de la ecuación de placas 1D	64
C.1. Distintas Condiciones de Borde	66
D. El Método de Diferencias Finitas	70
E. Fuerzas de Contacto	73
E.1. Introducción	73
E.2. Fuerzas entre cuerpos elásticos	73
E.3. Modelo para Placas en Contacto	76
E.4. Metodología	78
E.5. Resultados y Conclusiones	78
Bibliografía	84

Índice de Tablas

2.1. Parámetros físicos utilizados	7
2.2. Variación del error frente a una perturbación	14
2.3. Resultados de ajuste a perfiles usando fuerzas horizontales	15
2.4. Resultados de ajuste a perfiles con carga de sedimentos	18
2.5. Resultados de ajuste a perfiles reduciendo el espesor	20
3.1. Valores característicos con un obstáculo rígido	27
3.2. Valores característicos con obstáculo elástico (a)	31
3.3. Valores característicos con obstáculo elástico (b)	31
3.4. Valores característicos con obstáculo elástico (c)	31
E.1. Valores característicos con obstáculo rígido y fuerzas de contacto (a)	79
E.2. Valores característicos con obstáculo rígido y fuerzas de contacto (b)	79
E.3. Valores característicos con obstáculo rígido y fuerzas de contacto (c)	83

Índice de Ilustraciones

1.1. Esquema general de subducción	2
2.1. Esquema de placa elástica 1D	5
2.2. Flexión analítica con fuerza horizontal constante	7
2.3. Descomposición de fuerzas en la placa	11
2.4. Fuerza dependiente del espacio	12
2.5. Perfiles batimétricos	13
2.6. Flexión analítica con fuerza horizontal constante	13
2.7. Ajuste para la flexión de la litósfera usando batimetría	15
2.8. Variación de la solución para diferentes centros de expansión	16
2.9. Carga generada por los sedimentos	18
2.10. Ajuste para la flexión de la litósfera agregando sedimentos	19
2.11. Ajuste para la flexión de la litósfera reduciendo el espesor	20
2.12. Comparación entre los 3 modelos	21
3.1. Modelo de contacto rígido	24
3.2. Forma del obstáculo 1D	25
3.3. Tres dominios para la flotabilidad	26
3.4. Mapa de esfuerzos usando un obstáculo rígido	28
3.5. Esfuerzos máximos encontrados	29
3.6. Mapa de esfuerzos σ_{xx} usando un obstáculo elástico. $E_2/E_1 = 0,2$	32
3.7. Mapa de esfuerzos σ_{xx} usando un obstáculo elástico. $E_2/E_1 = 0,6$	33
3.8. Mapa de esfuerzos σ_{xx} usando un obstáculo elástico. $E_2/E_1 = 0,8$	34
3.9. Esfuerzos máximos encontrados con obstáculo elástico	35
4.1. Malla de MEF	38
4.2. Forma del obstáculo 2D	40
4.3. Solución con obstáculo rígido	41
4.4. Solución 2D con diferentes espesores elásticos	42
4.5. Esfuerzos máximos en cada placa	43
4.6. Deformación variando el momento	43
4.7. Esfuerzos variando el momento	44
5.1. Esquema de incorporación de la YSE	46
5.2. Comportamiento de los puntos críticos	48
A.1. Cuerpo sólido en deformación	53

B.1. Superficie neutra	56
B.2. Distintas condiciones de borde	61
E.1. Punto y Superficie de Contacto entre dos cuerpos	74
E.2. Zona de contacto entre placas	76
E.3. Mapa de esfuerzos usando un obstáculo rígido y fuerzas de contacto. $E_2/E_1 = 0,2$	80
E.4. Mapa de esfuerzos usando un obstáculo rígido y fuerzas de contacto. $E_2/E_1 = 0,6$	81
E.5. Mapa de esfuerzos usando un obstáculo rígido y fuerzas de contacto. $E_2/E_1 = 0,8$	82

Capítulo 1

Introducción

1.1. Subducción

Llamamos subducción al proceso donde una placa tectónica se hunde respecto a otra, introduciéndose dentro del manto terrestre. Este proceso tiene como consecuencia múltiples expresiones en la superficie terrestre, como por ejemplo la formación de relieve, deformaciones de la litósfera oceánica y continental, alto índice de sismicidad y generación de arco-volcanismo. El lugar donde este proceso ocurre es llamado zona de subducción y corresponde a la manifestación en profundidad de una convergencia entre placas tectónicas. Además es en estas zonas donde se desarrolla un reciclaje de la litosfera oceánica y sedimentos, hundiéndose este material dentro del manto y transformándose en magma, en donde podrá resurgir en forma de pluma mantélica (Kennett y Bunge, 2008; Stern, 2002).

De las múltiples características de la subducción, la de mayor interés en esta tesis será la de la deformación de la litósfera oceánica o flexión de la placa debido a las fuerzas y cargas involucradas. Esto último ha sido durante las últimas décadas, un tema de investigación pues aún no está del todo claro, cómo a partir de observaciones batimétricas o topográficas, se pueden inferir propiedades físicas de la litósfera y de la zona de subducción en general. A esto llamamos estudio flexural de la litósfera y ha sido estudiado ampliamente por Bodine y Watts, (1979), Caldwell et al. (1976), Contreras-Reyes y Osses, (2010), Hunter y Watts, (2016), Manríquez et al. (2014), McAdoo et al. (1978) y Watts et al. (1975).

Observaciones tanto geológicas como geofísicas dan evidencia de que la litósfera es capaz de responder a fuerzas horizontales y verticales, pudiendo propagar esfuerzos por varios cientos de kilómetros. Esta evidencia incluye la existencia de una zona de abombamiento tras la fosa oceánica llamada *Outer-Rise* (Contreras-Reyes y Osses, 2010; Mueller y Phillips, 1995; Parsons y Molnar, 1976), caracterizada por poseer sismicidad intraplaca (Moscoso y Contreras-Reyes, 2012; Moscoso y Grevemeyer, 2015; Ruiz y Contreras-Reyes, 2015; Tilmann et al. 2008) y también las observaciones muestran una variada topografía que se origina como una respuesta de la placa a cargas verticales, como lo son los montes submarinos y se-

dimentos acumulados (Buitter et al. 1998; Contreras-Reyes y Osses, 2010; Karner et al. 1993; Manríquez et al. 2014).

También aún se investiga cuales serían las principales fuerzas e interacciones responsables de generar la subducción. De acuerdo con Forsyth y Uyeda, (1975), las fuerzas tectónicas actuantes en la placa provienen: (a) del centro de expansión, también llamado *Ridge-push* (Wilson y Burke, 1973), (b) de la fuerza llamada *Slab-pull*, proveniente del exceso de peso que tendría la parte de la placa que se introduce al manto (McKenzie, 1969), (c) de la oposición que ofrece el manto al comportarse como un fluido de alta viscosidad, esta fuerza es llamada *Drag force*, la oposición que ofrece la astenósfera a la parte más profunda de la placa que está subductándose llamada *Slab-resistence* y (d) la resistencia que ofrece el continente en sí, responsable de la mayoría de sismos de poca profundidad, llamada *Colliding Resistence*. (ver Figura 1.1).

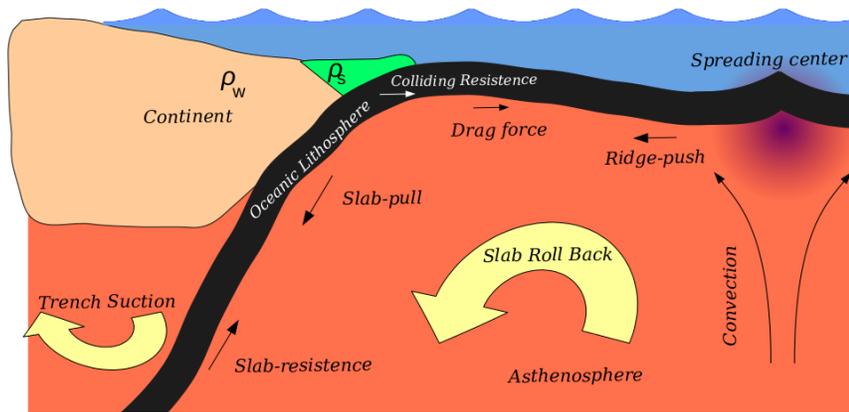


Figura 1.1: Dibujo general de un proceso de subducción. La litósfera oceánica es deformada por los esfuerzos tectónicos. Las principales dos fuerzas involucradas son el *Ridge-push* y el *Slab-pull*, ambas explicadas en los próximos capítulos. Se dibuja el principal comportamiento del fluido astenosférico. Además se dibuja la carga vertical de los sedimentos caracterizados por una densidad ρ_s .

Se sabe que el gran motor del movimiento de las placas es el fenómeno de convección en el manto generado la mayoría de las veces en la interfaz núcleo externo y manto inferior, debido al calentamiento del manto inferior, lo que genera ascenso de magma astenosférico hacia la superficie. Esta es la dinámica fundamental de un centro de expansión de litósfera oceánica y por consiguiente del *Ridge-push*. También se tiene que la placa al subductar, muchas veces puede descender más rápido que la tasa de convergencia de las placas, siendo afectada por fuerzas contrarias a la convergencia, aumentando el ángulo de subducción. A esta fuerza se le denomina *Slab Roll Back*, y tiene como consecuencia directa la generación de fuerzas de succión en la parte superior de la placa y la corriente llamada *Trench Suction*, también representada en la Figura 1.1.

Por otro lado, la importancia de cómo afecta el espesor de la litósfera a su capacidad

de respuesta no ha sido del todo comprendida. Durante las últimas décadas se han desarrollado tanto modelos elásticos, viscosos, visco-elásticos y elásto-plásticos para entender bien las propiedades mecánicas de la litósfera. A esto le llamamos reología y ha sido una rama de investigación hasta la fecha, siendo uno de sus objetivos el establecer un espesor efectivo para la litósfera, el cuál se ha visto que depende de otros parámetros, tal como la edad y el régimen termal de la placa y ya no cómo una consideración meramente geométrica (Bodine et al. 1981; Caldwell y Turcotte, 1979; Hunter y Watts, 2016).

Finalmente la mayoría de los modelos flexurales para la litósfera oceánica en subducción consideran dominios que excluyen el contacto entre las placas, al ser este demasiado complejo y por existir múltiples factores involucrados, como la presencia de fluidos, reacciones químicas en profundidad, fallamiento, sismicidad, etc. En este trabajo se quiere estudiar el efecto de agregar de manera simple un contacto interplaca, estudiando su consecuencia en la flexión de la placa oceánica y en sus propiedades físicas más importantes.

1.2. Objetivos

Los principales objetivos de esta tesis son:

- a) Modelar las fuerzas internas más importantes que actúan en la litósfera oceánica tales como el *Slab-pull* y el *Ridge-push* (Forsyth y Uyeda, 1975) estudiando el efecto en la flexión de la placa y en los esfuerzos al interior de ella.
- b) Simular dinámicamente el contacto entre las placas (tanto para el problema 1D como para uno 2D) utilizando tanto un criterio matemático (problema del obstáculo) como un principio físico (fuerzas de contacto). Esto permitiría tener una idea de cómo se manifiesta la interacción *Colliding Resistance* en la deformación de la litósfera oceánica.

Una de las hipótesis de este trabajo es que los datos de deformación observados en la litósfera oceánica pueden ser descritos por un modelo elástico estándar pero no con una única elección de condiciones de borde, y también la incorporación de fuerzas horizontales puede ser reemplazada por alguna variación de parámetros. Otra hipótesis para el segundo objetivo mostrado anteriormente, es que la forma de equilibrio que adquiere la litósfera oceánica al adquirir un contact, es altamente sensible a la geometría de este, en al menos los primeros 100 *km*. Esto tendrá repercusiones en cómo será su abombamiento y también en las distribuciones de esfuerzos internos en la placa, tanto en su intensidad y localización.

El trabajo de esta tesis proseguirá como sigue: en el Capítulo 2 se aplicará la teoría de placas delgadas detallada en el Apéndice B para el caso de la litósfera oceánica unidimensional, proponiendo condiciones de borde adecuadas con el fin de obtener alguna información para las fuerzas horizontales que afectan la placa. En el Capítulo 3 se extenderá el dominio para considerar el contacto entre la placa y el continente en un ambiente de subducción. Se modelará este resolviendo un problema con obstáculo. En el Capítulo 4 se extenderá a una placa bidimensional utilizando el método de elementos finitos. Las conclusiones y líneas

futuras de investigación serán presentadas en el Capítulo 5.

Capítulo 2

Flexión en la litósfera oceánica 1D

2.1. Primera Solución Analítica

En esta sección se presenta tanto una solución analítica como numérica para la flexión de la litósfera oceánica bajo ciertas hipótesis. Un resultado clásico de la teoría de la elasticidad lineal para la forma que adquiere una placa o barra en equilibrio es la que describe la Ecuación 2.1, en donde w es la flexión desde la posición de equilibrio (para más detalle ver Apéndice B). Se resolverá en este capítulo un problema 1D con coeficientes constantes, cuyo esquema se muestra en la Figura 2.1, por lo que asumiendo un espesor T_e e intensidad de las fuerzas horizontales F , se tiene que la flexión w satisface:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + F \frac{d^2 w}{dx^2} = q \quad x \in (0, L)$$

En donde $x = 0$ representa la ubicación de la fosa, $x = L$ un punto suficientemente alejado de la fosa y D es la rigidez flexural de la placa que asumimos constante. De aquí en adelante se usará la convención de signos: $F > 0$ para una fuerza compresional y $F < 0$ para una fuerza tensional. Por otro lado q son las cargas verticales sobre la placa y se puede demostrar que para el caso de la litósfera esta se puede descomponer en (Turcotte y Schubert, 2002):

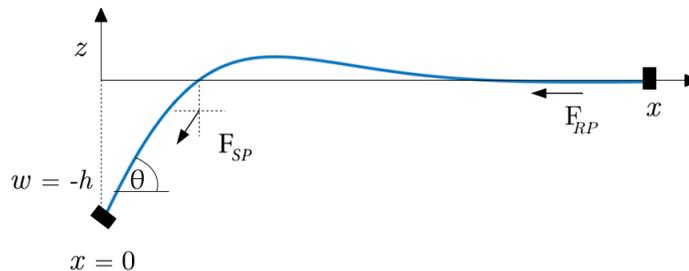


Figura 2.1: Esquema de modelo 1D. F_{SP} representa la fuerza *Slab-pull* y F_{RP} la fuerza *Ridge-push*.

$$q = q_{ef} - \Delta\rho gw$$

En donde q_{ef} son las cargas verticales externas al problema y el término $\Delta\rho gw$ viene del hecho de que la placa al hundirse experimentará una fuerza de flotabilidad proveniente del contraste de densidad del material sobre y por debajo de ella. Si asumimos que el mar tiene densidad constante ρ_w , el manto densidad ρ_m y aproximadamente la placa posee la misma densidad del manto, entonces simplemente $\Delta\rho = \rho_m - \rho_w$ y la placa al hundirse experimentará una fuerza vertical hacia arriba. En conclusión nuestro problema unidimensional es de la forma:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + F \frac{d^2 w}{dx^2} + \Delta\rho gw = q_{ef} \quad x \in (0, L) \quad (2.1)$$

Además se han elegido condiciones de borde de extremos fijos en ambos lados de la forma:

$$\begin{aligned} w(0) &= -h, & \frac{dw}{dx}(0) &= \tan(\theta) \\ w(L) &= 0, & \frac{dw}{dx}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

En donde h representa la profundidad de la fosa respecto al nivel del mar y θ el ángulo inicial de subducción (el que se tiene directamente en la fosa y corresponde al manteo de la falla de subducción). Este problema con fuerzas horizontales constantes ha sido estudiado analíticamente por Caldwell y Turcotte, (1979) y Parsons y Molnar, (1976), aunque no con estas condiciones de borde, sino usando bordes libres en la fosa. La solución analítica al problema anterior asumiendo $q_{ef} = 0$, viene dada por (ver Apéndice C):

$$w(x) = \left\{ \frac{(\alpha \tan(\theta) + \eta h)}{\beta} \sin\left(\beta \frac{x}{\alpha}\right) + h \cos\left(\beta \frac{x}{\alpha}\right) \right\} \cdot e^{-\eta x / \alpha} \quad (2.3)$$

En donde: $\beta = \left(1 + \frac{F}{F_{max}}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\eta = \left(1 - \frac{F}{F_{max}}\right)^{\frac{1}{2}}$, $F_{max} = (4\Delta\rho g D)^{1/2}$ es la fuerza máxima soportada antes de que la placa se pliegue, pues η pasa a ser imaginario (fenómeno de *folding*) y $\alpha = \left(\frac{4D}{\Delta\rho g}\right)^{1/4}$ que es la longitud característica de la flexión. Llamando γ al parámetro adimensional que controla la intensidad del forzamiento horizontal, $\gamma \equiv F/F_{max}$, usando un espesor elástico de $T_e = 40 \text{ km}$ y condiciones de borde: $h = -2,6 \text{ km}$ y $\theta = 2,3^\circ$, la solución para distintos valores de γ se representa gráficamente en la Figura 2.2. En la Tabla 2.1 se muestran los parámetros elásticos usados para la litósfera oceánica.

A manera de ejemplo, usando los valores de la Tabla 2.1, $\gamma = 0,8$ equivale a una fuerza constante de $1,5 \cdot 10^{14} \text{ N/m}$. En este caso, sería un valor poco realista a las fuerzas esperadas de acuerdo a Forsyth y Uyeda, (1975), que son del orden de los 10^{12} N/m . Además podemos

Nombre	Símbolo	Valor	Unidades
Módulo de Young	E	70×10^9	Pa
Aceleración de gravedad	g	9.81	m s^{-2}
Razón de Poisson	ν	0.25	
Densidad del Manto	ρ_m	3300	kg m^{-3}
Densidad del agua	ρ_w	1030	kg m^{-3}

Tabla 2.1: Valores de los parámetros usados

calcular el esfuerzo normal en la placa de la forma: $\sigma = F/T_e$, lo que para este ejemplo nos daría del orden de 10^3 MPa , lo que es un orden de magnitud más que las decenas a cientos de MPa que soportarían rocas mantélicas similares a las que se encuentran en la placa (peridotita húmeda) antes de fracturarse (en relación al trabajo de Goetze y Evans, (1979)). Esto abre la necesidad de generar un modelo más realista que pueda capturar la física más importante en un proceso de subducción entre placas tectónicas.

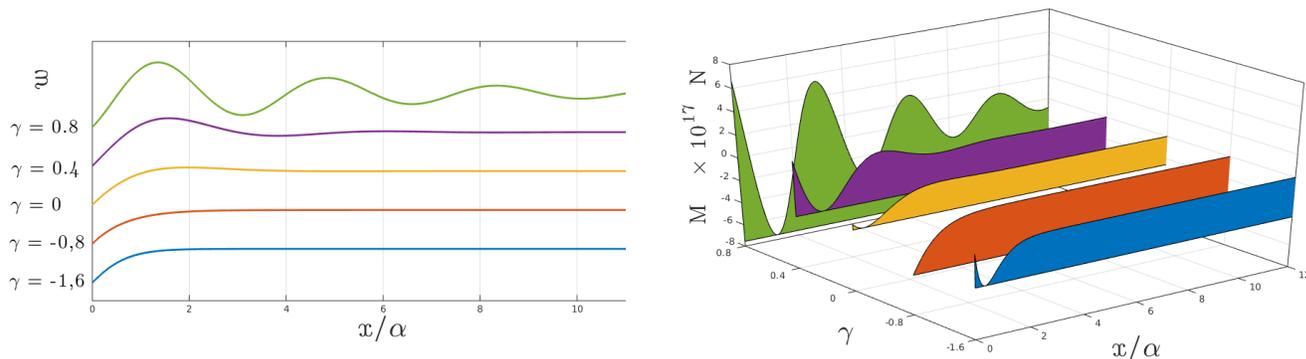


Figura 2.2: Solución analítica con fuerza horizontal constante. (Izq.) Se grafica la flexión w para distintos valores de γ . Tan sólo $\gamma > 0$ posee inestabilidad para una cierta intensidad ($\gamma = 1$). (Der.) Momentos correspondientes a las flexiones calculadas.

2.2. Dependencia con las Condiciones de Borde

Varios autores proponen modelos elásticos 1D similares para modelar la flexión de la litósfera oceánica (Caldwell y Turcotte, 1979; Contreras-Reyes y Osses, 2010; Parsons y Molnar, 1976) pero no se ve uniformidad en la elección de las condiciones de borde para la placa en el punto cercano a la fosa. En esta sección hará un estudio de cómo afecta esta elección a la solución y que ventajas presenta la elección aquí utilizada.

Para el caso de fuerzas horizontales constantes a lo largo de la placa, la solución es analítica y nos permite hacer una comparación a primer orden. Se separan las distintas condiciones de borde en $x = 0$ encontradas clásicamente en la literatura en cuatro casos numerados de 0 a 3, cuya obtención se encuentra detallada en el Apéndice C:

Caso 0 : $\{w = h, \frac{dw}{dx} = \tan(\theta)\}$ La solución analítica es la usada en este trabajo y mostrada en la Ecuación 2.3.

$$w(x) = \left\{ \frac{(\alpha \tan(\theta) + \eta h)}{\beta} \sin\left(\beta \frac{x}{\alpha}\right) + h \cos\left(\beta \frac{x}{\alpha}\right) \right\} \cdot e^{-\eta x/\alpha}$$

Caso 1 : $\{w = h, M = M_0\}$ La solución analítica es la presentada en Parsons y Molnar, (1976). Usando nuestra misma convención de parámetros utilizados en la sección 2,1 se escribe de la forma:

$$w(x) = \left\{ \frac{\alpha^2}{2\beta\eta D} \left(M_0 + \frac{Fh}{2} \right) \sin\left(\beta \frac{x}{\alpha}\right) + h \cos\left(\beta \frac{x}{\alpha}\right) \right\} \cdot e^{-\eta x/\alpha} \quad (2.4)$$

Caso 2 : $\{w = h, V = -V_0\}$ La solución analítica es:

$$w(x) = \left\{ \frac{\alpha^3}{2\beta} \left(\frac{V_0}{D} - \frac{2\eta h}{\alpha^3} \right) \sin\left(\beta \frac{x}{\alpha}\right) + h \cos\left(\beta \frac{x}{\alpha}\right) \right\} \cdot e^{-\eta x/\alpha} \quad (2.5)$$

Caso 3 : $\{M = M_0, V = -V_0\}$ Estas son las condiciones utilizadas por Turcotte y Schubert, (2002), Contreras-Reyes y Osses, (2010) y por Hunter y Watts, (2016). La solución analítica incluyendo fuerzas horizontales es de la forma:

$$w(x) = \frac{\alpha^2}{2\beta D} \left\{ \left(V_0 \alpha \gamma + M_0 \eta \right) \sin\left(\beta \frac{x}{\alpha}\right) + \left(V_0 \alpha \beta \eta - M_0 \beta \right) \cos\left(\beta \frac{x}{\alpha}\right) \right\} \cdot e^{-\eta x/\alpha} \quad (2.6)$$

Una característica común de estas soluciones es la formación de un abombamiento cercano a la fosa, que típicamente recibe el nombre de *Outer-Rise*. Esta característica de la litósfera oceánica fue apuntada por primera vez por Walcott, (1970), estudiando la fosa de las Kuriles en la placa del Pacífico. Además la zona del *Outer-rise* es el mejor lugar donde poder estudiar la deformación de la litósfera oceánica, pues en esta zona la placa se encuentra menos interferida por el centro de expansión y/o cargas submarinas (Hunter y Watts, 2016). Caracterizando en primer lugar el ancho Δx del *Outer-rise*, podemos estimarlo como la distancia entre el primer y el segundo cero de la función $w(x)$. Para todos los casos analíticos expuestos anteriormente, esta distancia es la misma y es simplemente:

$$\Delta x = \frac{\alpha\pi}{\beta} = \frac{\alpha\pi}{\sqrt{1+\gamma}} \quad (2.7)$$

Puesto que γ debe ser menor a 1 antes del pliegamiento, vemos que el ancho del *Outer-rise* a lo más puede sufrir una reducción en un factor $1/\sqrt{2} \approx 0,71$. Por lo que el ancho se mantiene aproximadamente constante al variar la magnitud de las fuerzas horizontales en un rango realista y al cambiar las condiciones de borde en la fosa.

Otro factor de interés es la altura que alcanza el *Outer-rise*, pues sabemos que al aumentar las fuerzas horizontales este debería crecer. Además, la discusión principal de Parsons y Molnar, (1976) es que este puede ser mantenido aún con fuerza nula pero con un momento en la fosa equivalente, reduciendo así en parte o totalmente las fuerzas horizontales en

la placa, pues es común para todo modelo elástico la sobre estimación de los esfuerzos (De Bremaecker, 1977) superando los límites experimentales encontrados para rocas mantélicas semejantes, por ejemplo, en el trabajo de Goetze y Evans, (1979). Es por esto que los autores típicamente prefieren los casos en donde se puede prescindir de las fuerzas horizontales. Si hacemos las fuerzas nulas, es decir $\gamma = 0$, y por consecuencia $\eta = \beta = 1$, podemos escribir los coeficientes \mathbb{A}_i que acompañan a la función $\sin()$ en el caso i -ésimo, de la forma (se ha ignorado la solución completa para simplificar el análisis):

$$\mathbb{A}_0 = \alpha \tan(\theta) + h \quad , \quad \mathbb{A}_1 = \frac{\alpha^2}{2D} M_0$$

$$\mathbb{A}_2 = \frac{\alpha^3 V_0}{2D} - h \quad , \quad \mathbb{A}_3 = \frac{\alpha^2}{2D} M_0$$

Estos coeficientes dan alguna idea de cómo se comporta la altura del *Outer-rise*. Para el caso 0 vemos que la ausencia de fuerzas limita el crecimiento del *Outer-rise* pues al ser los parámetros θ y h obtenidos desde los perfiles, en principio no podemos variarlos arbitrariamente. Para el caso 2 podemos utilizar la fuerza de cizalle aplicada en la fosa, V_0 , manteniendo así efectivamente la amplitud. Finalmente para el caso 1 y 3 el coeficiente es el mismo y el *Outer-rise* puede ser mantenido por un momento equivalente aplicado en la fosa.

Por otro lado, tal cómo es advertido por Parsons y Molnar, (1976), el *Outer-rise* es más eficientemente mantenido por una fuerza horizontal no nula, pues este afecta tanto el coeficiente de amplitud relacionado con los factores \mathbb{A}_i mostrados anteriormente y el factor de decaimiento exponencial η . Para ver este efecto, consideramos un forzamiento débil, es decir: $\gamma \approx 0$ y vemos su efecto en la solución. Expandiendo el factor exponencial que multiplica la solución en potencias de γ :

$$e^{-\eta \frac{x}{\alpha}} = e^{-\sqrt{1-\gamma} \frac{x}{\alpha}} = e^{-\frac{x}{\alpha}} \cdot \left(1 + \frac{x}{2\alpha} \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2)\right)$$

Usando esto, vemos por ejemplo que para un espesor de $Te = 25 \text{ km}$ y un factor $\gamma = 0,1$ (esto es una fuerza horizontal máxima de $9 \cdot 10^{12} \text{ N/m}$ y un esfuerzo máximo de 360 MPa), el término x/α en el máximo es aproximadamente 2, por lo que la amplitud del *Outer-rise* a primer orden crece un 10% (la ponderación queda con un factor 1,1). Esto muestra que una pequeña fuerza horizontal genera cambios más significativos en la placa, y no así el momento y/o la fuerza de cizalle en la fosa.

Dada la discusión anterior vemos que la elección de condiciones de borde que menos parámetros arbitrarios posee es la utilizada aquí (caso 0), con la utilización de los parámetros θ y h de carácter puramente geométricos. Se ve que aunque los esfuerzos pueden ser grandes dentro de la placa, la justificación de las condiciones de borde y la estimación de los parámetros es hecha de una manera más simple que con condiciones más dinámicas, como lo es el momento y la fuerza de cizalle en el punto específico de la fosa oceánica. De esta manera,

al utilizar estas condiciones de borde tan sólo tenemos como parámetro libre la intensidad γ para un espesor de placa realista.

2.2.1. Sensibilidad del modelo frente a fuerzas oblicuas

Al considerar un modelo de fuerza *Slab-pull* en la dirección de la placa, la fuerza tendrá componentes tanto de manera horizontal como en la vertical, traduciéndose esta última en una carga para la placa. (ver Figura 2.1), por lo que asumir fuerzas horizontales nulas simplifica mucho el problema. Para entender la sensibilidad del modelo frente a fuerzas en ambas direcciones se puede estudiar los términos de la Ecuación 3.2 y el orden de magnitud de los parámetros involucrados.

Suponiendo que en la cercanía de la fosa el ángulo de subducción es φ y la intensidad de la fuerza de *Slab-pull* es F , podemos descomponer esta fuerza en una horizontal y en otra vertical. La horizontal será de intensidad:

$$f_x = F \cdot \cos(\varphi) = 2\gamma^* \sqrt{\Delta\rho g D} \cdot \cos(\varphi)$$

Con γ^* un número adimensional entre 0 y 1 (será la unidad si el punto está justo en la fosa). Para la fuerza en la vertical es de manera análoga, sólo con la diferencia que debemos dividir por el largo del sistema, pues q representa las fuerzas aplicadas por unidad de largo. De esta forma:

$$q = F/L \cdot \sin(\varphi) = 2\gamma^* \sqrt{\Delta\rho g D} \cdot \sin(\varphi)/L$$

Al considerar los miembros de la Ecuación 2.1 vemos que los términos que compiten son $F \frac{d^2w}{dx^2}$ con q . Reescalando los términos con la longitud α y usando unidades tal que w sea de orden 1 (típicamente kilómetros), tenemos que los términos se ven de la siguiente forma simplificada:

$$\gamma^* \cos(\varphi) \frac{d^2w}{d\chi^2} \quad \text{y} \quad \frac{\gamma^* \alpha^2}{L} \sin(\varphi)$$

En donde χ es la variable independiente adimensional de orden 1. De esto podemos ver que el primer término será de orden γ^* y por lo tanto bastante relevante, pues como vimos en anteriormente, un $\gamma^* \sim 0,1$ puede variar al menos un 10% la altura del *Outer-rise*. El segundo término en cambio será de orden $\frac{\alpha^2}{L} \gamma^*$, con α en kilómetros. Considerando un $\alpha \approx 65 \text{ km}$ y un largo total de unos 719,000 *km* (caso chileno), nos da del orden de 0,007 γ^* , por lo que el modelo no es sensible en la fuerza vertical al no ser por una intensidad de unos tres órdenes de magnitud más. Esta intuición es útil antes de simular, pues nos da una idea por ejemplo que las cargas verticales tan sólo serán relevantes si son del tipo $\rho g w$, como lo puede

ser la carga litostática de sedimentos acumulados en la placa, como se estudió en secciones anteriores, y no por cargas provenientes de otros forzamientos.

A continuación se presentarán 3 modelos que puedan dar una mirada más amplia en la modelación y permitan incorporar nuevos conceptos, tales como fuerzas horizontales dependientes del espacio, cargas verticales provenientes de los sedimentos acumulados en la fosa oceánica y reducción del espesor elástico de la placa en la cercanía de la fosa.

2.3. Modelo I: Fuerza dependiente del espacio

Por otro lado, asumir fuerzas horizontales constantes en toda la placa es poco realista, ya que uno esperaría que el *Slab pull* y el *Ridge push* aumentaran en la cercanía de la fosa y del centro de expansión respectivamente. Considerando esto, en esta sección se plantea un modelo que de cuenta de esta situación. De acuerdo a Forsyth y Uyeda, (1975), las fuerzas más dominantes en la subducción son las nombradas anteriormente, y se estima que la intensidad de la primera es aproximadamente un orden de magnitud mayor que la segunda. Por lo tanto se plantea resolver el problema 2.1 con una fuerza dependiente de la coordenada x , siendo esta concentrada en los dos extremos de la placa. Proponiendo una fuerza similar a la propuesta en Kennett y Bunge, (2008) (Ecuación 12.3.2 de su libro *Geophysical Continua: Deformation in the Earth's Interior*), tomamos $F(x)$ de la forma:

$$\vec{F}(x) = F_{SP} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_1}{\sigma_1}\right)^2} \hat{t} + F_{RP} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_2}{\sigma_2}\right)^2} \hat{t} \quad (2.8)$$

En donde F_{SP} y F_{RP} son las intensidades de las fuerzas antes mencionadas, los parámetros x_1 , x_2 , σ_1 y σ_2 son las localizaciones y dispersiones de la fuerza tipo gaussiana. Además el vector \hat{t} es el tangente en la dirección de la placa, por lo que la fuerza *Slab-pull* tendrá componentes tanto horizontales y verticales, mientras que el *Ridge-push* tan sólo en la horizontal (ver figura 2.3).



Figura 2.3: Descomposición del *Slab-pull* (F_{SP}) y *Ridge-push* (F_{RP}) en la placa. La primera tiene componentes en la horizontal y la vertical, mientras que la segunda tan sólo en la horizontal.

Introduciendo la fuerza de 2.8 en la Ecuación 2.1, la solución del problema ya deja de ser

analítica y se necesita de un método numérico para encontrar una solución. Se plantea un método basado en diferencias finitas (MDF) detallado en el Apéndice D y similar al utilizado por Contreras-Reyes y Osses, (2010). Con el objetivo de encontrar la intensidad de estas fuerzas y su mejor localización en el espacio, se utilizan perfiles batimétricos en el margen convergente chileno, que permitan hacer un ajuste a los parámetros buscados (obtenidos del trabajo de Contreras-Reyes y Osses, (ibíd.)). Estos perfiles se han tomado en diferentes puntos de la costa chilena (ver Figura 2.5). Llamamos ahora γ a la intensidad de la fuerza relativa respecto al valor máximo encontrado en la sección anterior, es decir, $\gamma = F/F_{max}$, dependiendo esta ahora del espacio. Podemos visualizar esta dependencia en la Figura 2.4.

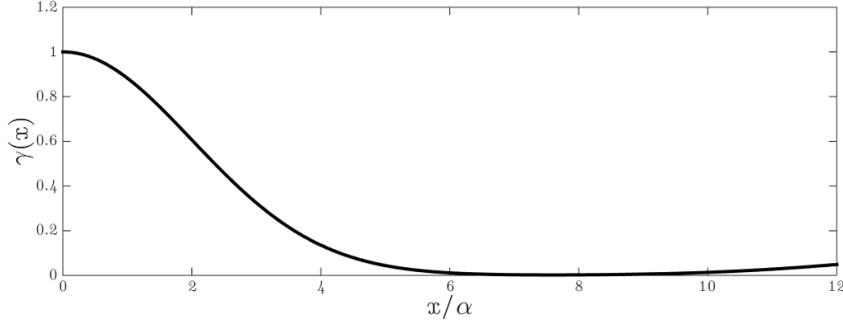


Figura 2.4: Gráfica de la intensidad relativa $\gamma(x)$ concentrada en los extremos de acuerdo a una forma gaussiana. Se utilizó $\gamma_{max} = 1$ (equivalente a una fuerza máxima de $9,3 \cdot 10^{13} \text{ N/m}$), $x_1 = 0$, $x_2 = 15\alpha$, $\sigma_1 = 2\alpha$ y $\sigma_2 = 2,5\alpha$ en unidades de la longitud característica α .

2.3.1. Localización y dispersión de la Fuerza

Para toda la simulación se utilizó una localización para el *Slab-pull* de acuerdo con la Ecuación 2.8, de $x_1 = 0$ y una dispersión de $\sigma_1 = 2\alpha$. Para comprobar cómo afectan esta elección de parámetros a las soluciones entregadas por el método, se graficó la solución entregada para el perfil P06 con una perturbación a estos valores de la forma: $\sigma \pm \Delta\sigma$ y $x_1 \pm \Delta x_1$, con $\Delta\sigma = \alpha$ y $\Delta x_1 = 2\alpha$.

La variación del error RMS frente a la perturbación total (considerando tanto variaciones en la localización y la dispersión) varió en un 6,7%.¹ Sólo se verificó variación en la deformación de la placa en torno al máximo de ella. Además se utilizó una intensidad máxima para las fuerzas de: $F_{SP} = -21 \times 10^{12} \text{ N/m}$ y $F_{RP} = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}$ tomados de la Tabla 2.3.

¹Se midió esta variación porcentual de la forma:

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$$

en donde p_1 es el error porcentual al tomar $-\Delta\sigma, x_1$, y p_2 al tomar $+\Delta\sigma, x_1$.

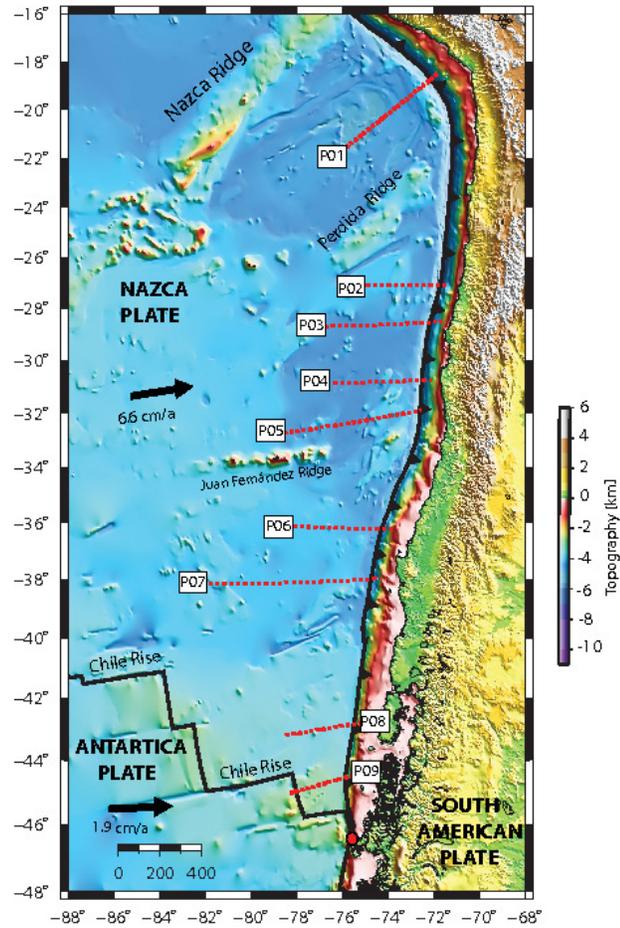


Figura 2.5: Datos batimétricos tomados de Contreras-Reyes y Osses, (2010). Para el ajuste se han tomados los perfiles $P01$ hasta el $P09$, utilizando la profundidad medida para la litósfera oceánica.

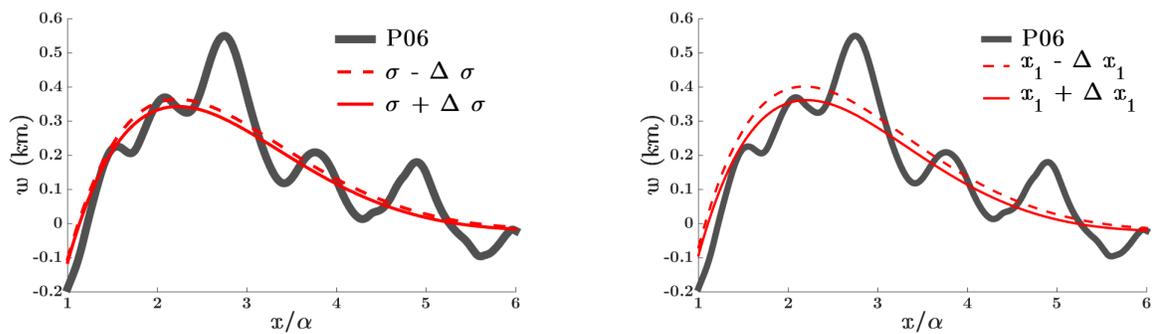


Figura 2.6: Variación de la flexión en función de x/α al modificar el valor de la dispersión de la fuerza y manteniendo la localización constante. $\Delta\sigma$ tuvo un valor de 2α . (der) Variación de la flexión en función de x/α al modificar la localización de la fuerza manteniendo σ constante.

	$\sigma - \Delta\sigma$	$\sigma + \Delta\sigma$	$x_1 - \Delta x_1$	$x_1 + \Delta x_1$
$\varepsilon_{rms} (m)$	87,920	87,937	88,057	85,572

Tabla 2.2: Valores del error cuadrático medio al perturbar la localización y dispersión de la fuerza *Slab-pull* tipo gaussiana

Los errores medidos en ambas perturbaciones se muestran en la Tabla 2.2. De acuerdo a esto, podemos escoger los parámetros $\sigma = 2\alpha$ y $x_1 = 0$ como representativos por generar pequeño error en los resultados y al perturbar tenemos variaciones relativas pequeñas.

2.3.2. Resultados

Ajustando la intensidad relativa γ y también el espesor elástico de la placa T_e , se obtuvieron perfiles sintéticos para los nueve perfiles obtenidos de Contreras-Reyes y Osses, (2010). El vector tangente de la Ecuación 2.8 se tomó del caso con fuerzas nulas por simplificación. Además se registró el error cuadrático medio entre el perfil sintético w y real w_P de la forma:

$$\varepsilon_{rms} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^N (w(i) - w_P(i))^2}{N}} \quad (2.9)$$

En donde N es el largo total del arreglo. En los perfiles que presentaron mucho ruido en la batimetría y/o grandes perturbaciones en la forma del suelo marino, se ignoraron estos efectos en el cálculo del error, pues sólo nos interesará la forma que adquiere la placa a gran escala. Por otro lado estos efectos podrían afectar la deformación de la placa, al ejercer cargas verticales no nulas, pero se ha despreciado este efecto con el objetivo de no sacrificar la simplicidad del modelo.

Se utilizó una localización y dispersión para la fuerza de acuerdo a la Figura 2.4. Los resultados obtenidos tanto para el espesor elástico de la placa T_e , la máxima intensidad de la fuerza γ_{max} , el ángulo de subducción en la fosa θ y el error cuadrático medio (RMS), son mostrados en la Tabla 2.3. Los perfiles sintéticos y sus batimetrías correspondientes están mostradas en la Figura 2.7.

Vemos que para estos perfiles en general se encontró un mejor ajuste con $\gamma_{max} < 0$ en la cercanía de la fosa, por lo que se esperaría encontrar fuerzas de caracter tensional por sobre las compresionales.

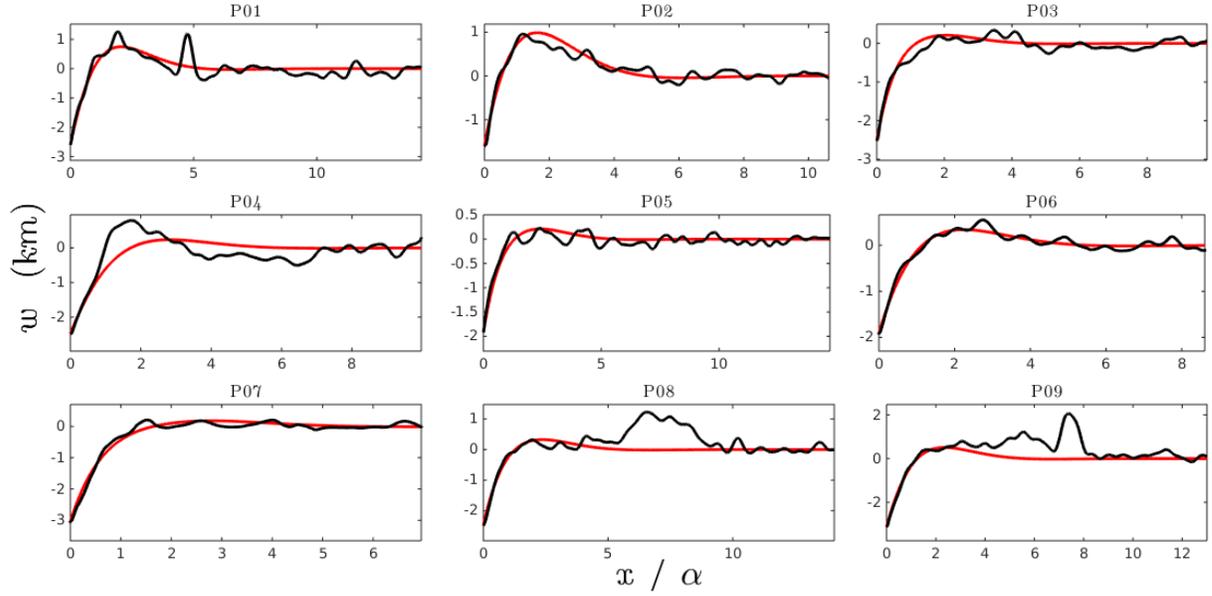


Figura 2.7: Ajuste para los perfiles topográficos utilizados. La línea roja representa la flexión sintética y la línea negra los datos. Se grafica la flexión en función del largo característico, es decir, la variable adimensional x/α .

Perfil	γ_{max}	$F_{max}(N/m)$	$T_e(km)$	$h(km)$	θ	$\epsilon_{rms}(km)$
P01	0,13	15×10^{12}	29	-2,6	$5,7^\circ$	0,181
P02	-0,01	-9×10^{11}	22	-1,6	$5,1^\circ$	0,095
P03	-1,84	-244×10^{12}	32	-2,6	$5,0^\circ$	0,134
P04	-0,10	-9×10^{12}	24	-2,5	$3,8^\circ$	0,182
P05	-0,69	-53×10^{12}	22	-1,9	$3,0^\circ$	0,101
P06	-0,23	-21×10^{12}	25	-1,9	$3,5^\circ$	0,087
P07	-1,26	-210×10^{12}	37	-3,0	$3,6^\circ$	0,253
P08	-0,46	-54×10^{12}	29	-2,5	$4,4^\circ$	0,122
P09	-0,10	-14×10^{12}	32	-3,1	$5,5^\circ$	0,185

Tabla 2.3: Parámetros encontrados para ajustes a perfiles batimétricos usando fuerzas horizontales.

2.3.3. Influencia del Centro de Expansión

Finalmente se quiere decir algo de cómo afecta el centro de expansión a la deformación de la placa, pues en principio, podríamos decir que para una placa más joven (más cerca del centro de expansión) este será más importante para la deformación que para una placa más vieja, al encontrarse esta última más alejada de esta zona.

Para esto se ha variado tanto la posición del centro de expansión y la intensidad de su forzamiento utilizando el modelo de la expresión 2.8 graficándose las distintas soluciones en la

Figura 2.8. Se calculó una solución sin considerar la fuerza *Ridge-push* y otra considerándolo con una intensidad igual al *Slab-pull* (y no un 10%), calculando un error RMS entre ellas para placas de distinto tamaño, que también está mostrado en la Figura 2.8.

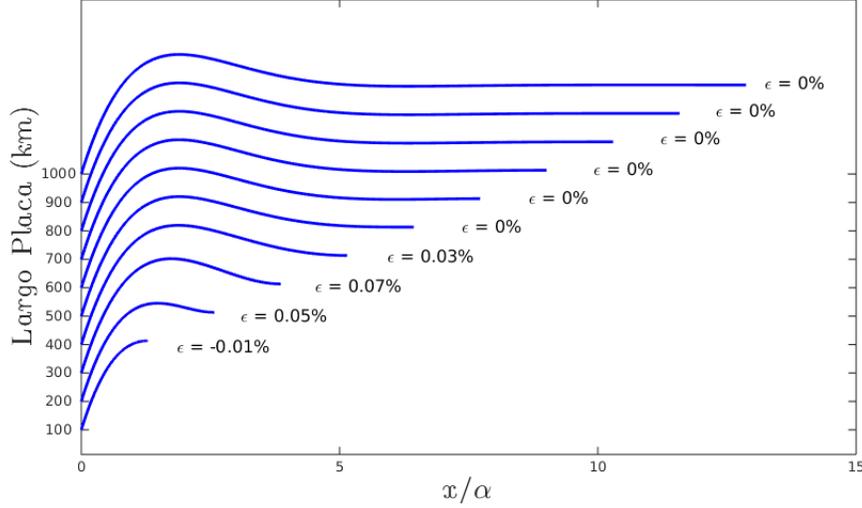


Figura 2.8: Variación de la solución con $\gamma_{max} = -0,1$ (P09) para diferentes tamaños de la placa. La solución con y sin la fuerza *Ridge-push* son practicamente iguales. Se grafica el error porcentual entre ambas.

Se definió un error porcentual de la forma:

$$\varepsilon = 100 \cdot \frac{\|w^{RP}\|_2 - \|w^L\|_2}{\|w^L\|_2} \quad (2.10)$$

En donde w^{RP} es la solución considerando la fuerza del centro de expansión, w^L es la solución libre que no lo considera y $\|\cdot\|_2$ es la norma definida de la forma: $\|\cdot\|_2 = \sqrt{\sum_i w(x_i)^2}$ sobre todo el largo del sistema. Este valor es indicado en cada placa de la Figura 2.8 con una aproximación de dos decimales y es en la mayoría de los casos positivo, indicando que casi siempre la solución que incluye el *Ridge-push* está por encima que la solución libre, lo cual era de esperarse, esto es, de que el centro de expansión eleve a la litósfera oceánica.

Una de las conclusiones directas tomadas de este análisis es que el centro de expansión es más influyente para placas de edad intermedia que para las de edad más extrema. Esto se ve pues el valor del error porcentual es máximo en placas con largo en el rango 250 – 300 km ($\varepsilon = 0,07\%$) y luego tiende a cero en los extremos. Para una placa mucho mayor es claro que una fuerza en un extremo tiene un efecto menor, y que la forma de ella es más dominada por la condición de borde y el *Slab-pull*, pero para una placa muy joven el modelo elástico muestra que ella tampoco presenta mucha variación y se comporta más rígida, algo semejante a la gran resistencia que muestran los materiales a flectarse, al tener ellos poca extensión. De todas maneras el efecto es pequeño y en el caso de máximo error, la altura del máximo varió 3,2 m.

También al comparar la forma de la placa para diferentes largos puede verse que para las placas menores no existe *Outer-rise*, sino que este empieza a exhibirse desde los 175 *km* de largo. Para tener una idea aproximada de este fenómeno podemos verlo desde la solución analítica de la Ecuación 2.3. Al calcular el primer cero de la función $w(x)$, usando super-índices para indicarlo, se encuentra que este ocurre en:

$$x_0^1 = \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{atan}\left(-\frac{\beta h}{\alpha \tan\theta + h\eta}\right) \quad (2.11)$$

Luego el segundo cero es dado usando la periodicidad de la función \tan , por lo tanto tenemos que: $x_0^2 = x_0^1 + \frac{\alpha}{\beta}\pi$. Dado todo esto, se tendrá que la solución exhibirá *Outer-rise* si el largo del sistema alcanza a contener al menos dos ceros. Esto es si el largo L del sistema cumple con:

$$L \geq \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{atan}\left(-\frac{\beta h}{\alpha \tan\theta + h\eta}\right) + \frac{\alpha}{\beta}\pi \quad (2.12)$$

Usando esto por ejemplo para el perfil P09, se tiene que recién el *Outer-rise* se muestra para un largo de unos $L_{\min} = 327 \text{ km}$. Finalmente, al usar una fuerza dependiente del espacio y no homogénea, este largo mínimo no varía demasiado.

2.4. Modelo II: Carga de sedimentos

Por último se agregará a la placa una carga extra debida al peso de sedimentos en la fosa. De acuerdo con Contreras-Reyes y Osses, (2010), una densidad apropiada para los sedimentos acumulados en la fosa sería de $\rho_s = 2000 \text{ km}/\text{m}^3$, y simplificando el dominio donde estarían los sedimentos, se puede decir que esta carga se aplicará sobre la placa de la forma:

$$q_s(x) = \begin{cases} (\rho_s - \rho_w)gw & \text{si } x < x^* \\ 0 & \text{si } x \geq x^* \end{cases} \quad (2.13)$$

En donde x^* es el primer paso por cero de la flexión. La Figura 2.9 representa gráficamente la idea anterior. Usando esta fuerza se realizó un ajuste de la misma forma que en la sección anterior, moviendo la intensidad γ y el espesor elástico. Los resultados del ajuste y sus errores asociados son mostrados en la Tabla 2.4. Además se muestran los perfiles sintéticos y los datos en la Figura 2.10.

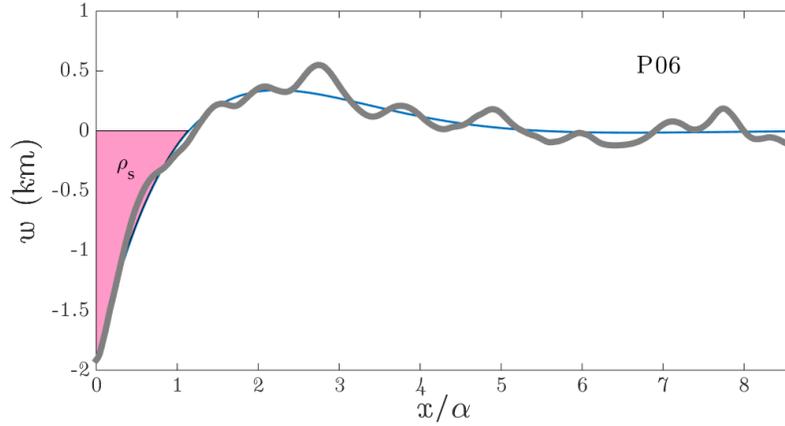


Figura 2.9: Ejemplo de un modelo de placa con una carga generada por los sedimentos en la fosa. Se tomó como ejemplo el perfil P06.

2.4.1. Resultados

En general los resultados son similares a los obtenidos en la sección anterior, salvo que el error calculado aumentó un 7,4 %. Por otro lado, en ambas modelaciones las fuerzas son mayormente tensionales en la fosa, salvo en el perfil P11 en donde se encuentra una fuerza compresional que mejora el ajuste ($\gamma_{max} > 0$). Las intensidades de las fuerzas también en general son mayores que en el primer caso sin sedimentos. Finalmente los espesores encontrados son mayores cerca de un 11 % que los encontrados en la sección anterior.

Perfil	γ_{max}	$F_{max}(N/m)$	$T_e(km)$	θ	$\epsilon_{rms}(km)$
P01	-0,23	-33×10^{12}	34	$4,8^\circ$	0,187
P02	-0,56	-53×10^{12}	25	$5,6^\circ$	0,113
P03	-1,38	-95×10^{12}	20	$6,4^\circ$	0,120
P04	-0,22	-20×10^{12}	28	$3,4^\circ$	0,197
P05	-1,15	-111×10^{12}	26	$4,2^\circ$	0,103
P06	-0,23	-21×10^{12}	25	$3,6^\circ$	0,088
P07	-1,15	-144×10^{12}	30	$5,5^\circ$	0,184
P08	-0,92	-161×10^{12}	38	$3,9^\circ$	0,147
P09	-0,23	-56×10^{12}	47	$3,6^\circ$	0,280

Tabla 2.4: Parámetros encontrados para ajustes a perfiles batimétricos con carga de sedimentos

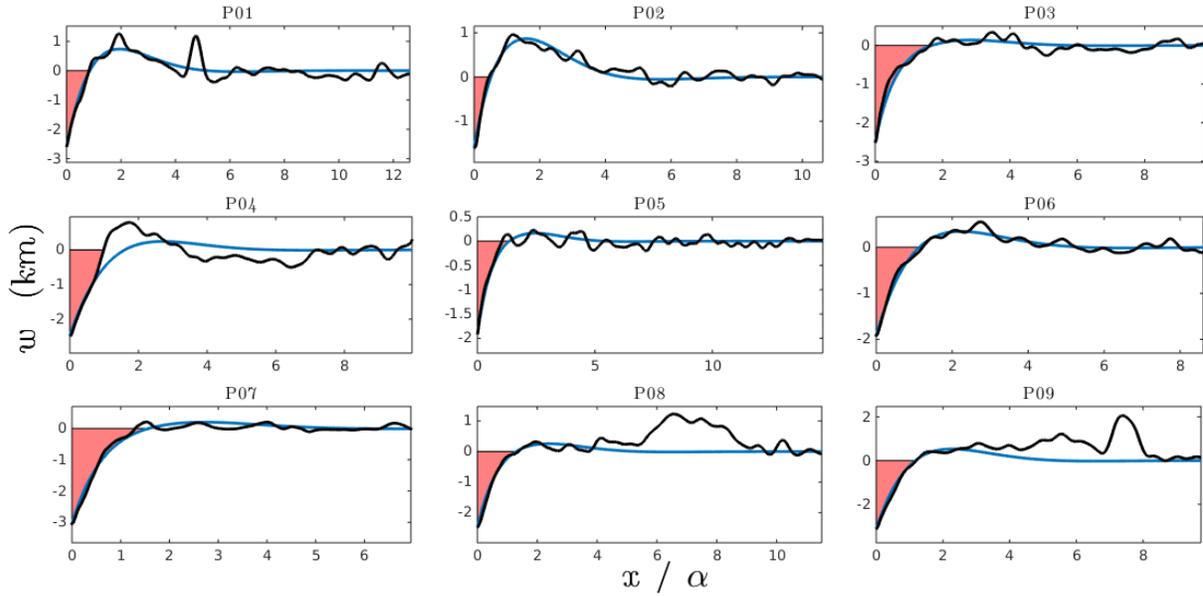


Figura 2.10: Ajuste para los perfiles topográficos utilizados. La línea azul representa la flexión sintética y la línea negra los datos. La zona coloreada representa el lugar de acumulación de sedimentos, ejerciendo estos una carga vertical hacia abajo sobre la placa. Se grafica la flexión en unidades de largo característico, es decir, x/α sin unidades

2.5. Modelo III: Reducción del Espesor Elástico y Fuerzas Nulas

Una visión paralela del problema surge cuando se busca eliminar el problema de tener fuerzas demasiado grandes, que por consecuencia generan esfuerzos del orden de los GPa . Esto es posible si uno cambia las condiciones de borde como vimos en la sección 2.2 o de manera alternativa, se permite reducción del espesor elástico en la cercanía de la fosa oceánica, de acuerdo al trabajo de Contreras-Reyes y Osses, (2010) y Manríquez et al. (2014). Aquí se querrá permitir una reducción del espesor elástico en la cercanía de la fosa y ver el efecto que esto produce en la solución al considerar al mismo tiempo fuerzas horizontales nulas.

Para este ajuste se utilizaron los mismos ángulos en la fosa que en 2.3.2 y se permitió variación tanto en el espesor máximo como en el porcentaje de reducción μ en la cercanía de la fosa, siguiendo la simulación hecha en Contreras-Reyes y Osses, (2010). Para todos los perfiles se escogió la misma zona de reducción (para poder disminuir la elección de parámetros libres) y se buscaron: el valor del espesor elástico final y su porcentaje de reducción en la cercanía de la fosa para cada perfil, disminuyendo el error cuadrático medio entre el perfil sintético y la batimetría utilizada.

2.5.1. Resultados

El espesor elástico mínimo se calcula de la forma: $T_e \cdot \frac{(1-\mu)}{100}$, y para todos los perfiles la zona de reducción se escogió entre los 15 y 90 kilómetros después de la fosa (que por definición es en $x = 0$). Los errores mostrados en la Tabla 2.5 también han sido modificados ignorando grandes perturbaciones en los perfiles como en los casos anteriores.

Perfil	T_e (km)	μ	θ	ε_{rms} (km)
P01	32	30 %	5,7°	0,147
P02	29	30 %	5,1°	0,100
P03	11	45 %	5,0°	0,151
P04	15	30 %	3,8°	0,171
P05	14	45 %	3,0°	0,092
P06	14	20 %	3,5°	0,156
P07	12	80 %	3,6°	0,079
P08	12	25 %	4,4°	0,086
P09	20	20 %	5,5°	0,211

Tabla 2.5: Parámetros encontrados para ajustes a perfiles batimétricos reduciendo el espesor elástico en la cercanía de la fosa.

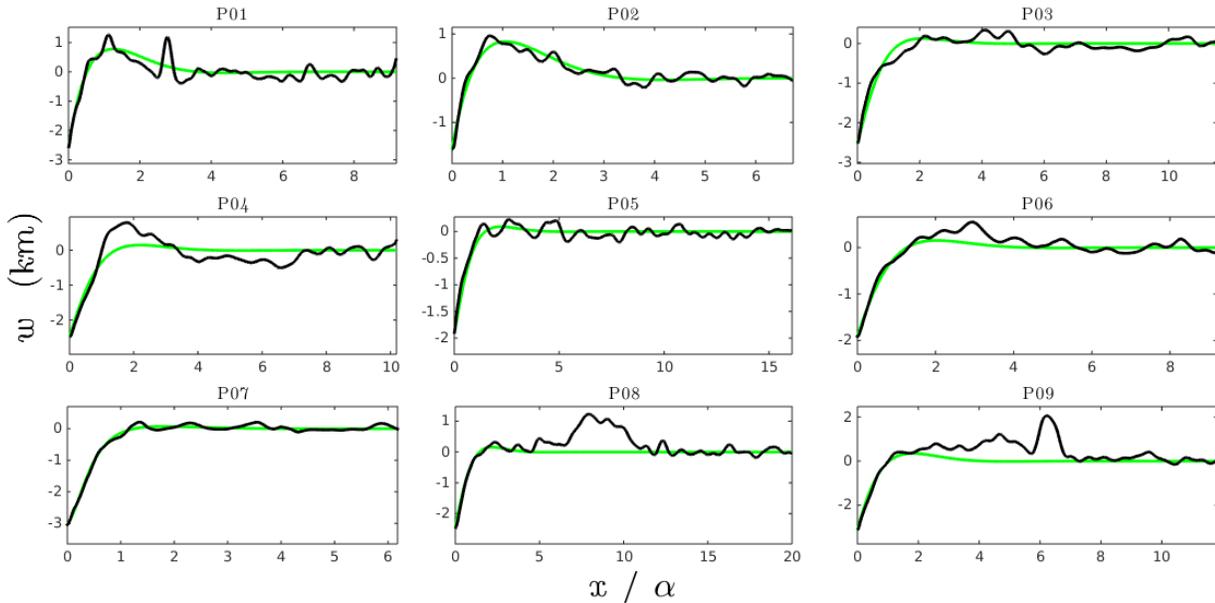


Figura 2.11: Ajuste para los perfiles topográficos utilizados. La línea verde representa la flexión sintética y la línea negra los datos. Se grafica la función en unidades de largo característico, es decir, x/α sin unidades.

A partir de estos resultados se ve que en la mayoría de los perfiles se puede reproducir bastante bien la forma de la placa utilizando un modelo con fuerzas horizontales nulas y con una reducción del espesor elástico en la cercanía de la fosa. Tan sólo el ajuste al perfil *P03*

presenta una mayor diferencia con los datos que el resto de los ajustes, y esto es en la zona del *Outer-rise*, es decir, en los primeros kilómetros desde la fosa.

A manera de comparación se muestran los errores cuadráticos medios calculados en los 3 modelos: con fuerzas horizontales, incluyendo carga de sedimentos y reduciendo el espesor, ambos graficados en la Figura 2.12.

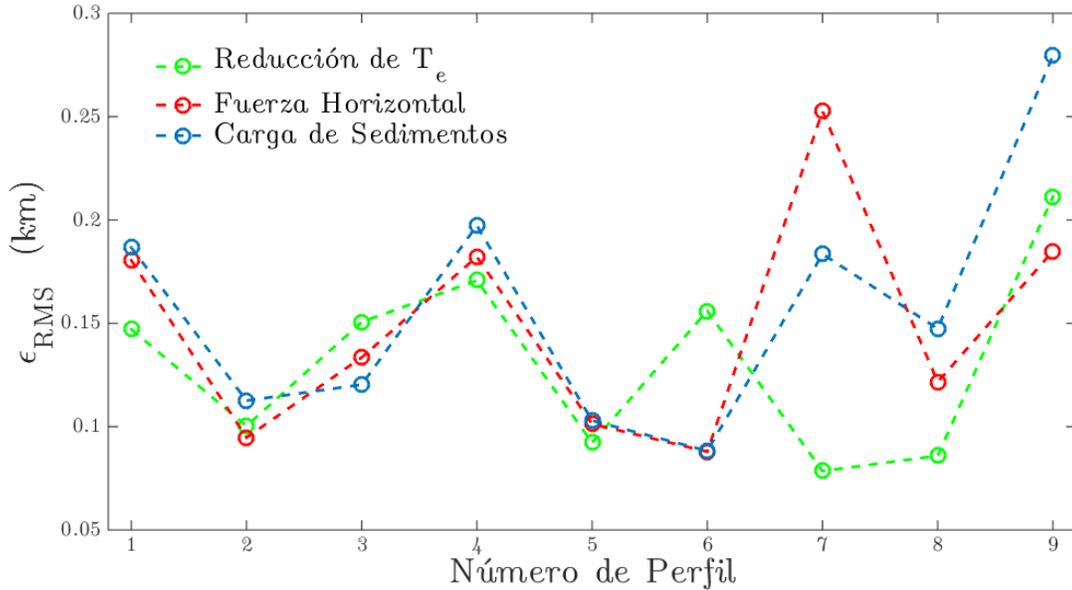


Figura 2.12: Errores cuadráticos medios de los 3 modelos utilizados en este capítulo: (rojo) usando fuerzas horizontales, (azul) incluyendo carga de sedimentos y (verde) usando reducción del espesor elástico en la cercanía de la fosa y usando fuerzas nulas.

De aquí se puede ver que esta aproximación posee en general menor error que las anteriores, y aunque no es una diferencia muy considerable, posee la ventaja que anula completamente las fuerzas horizontales que generaban esfuerzos fuera del rango realista o esperable para la litósfera oceánica.

2.6. Conclusiones y Discusión

En primer lugar podemos comparar los resultados obtenidos en los modelos I y II, donde ambos incorporan fuerzas horizontales. Al comparar las Tablas 2.3 y 2.4, se aprecia que los ajustes con carga de sedimentos produjeron mayores errores y mayores intensidades en las fuerzas. Por otro lado, ambos modelos muestran una necesaria naturaleza tensional de la fuerza en el borde, es decir, $\gamma < 0$ en la mayoría de los ajustes a los perfiles. De acuerdo a García-Castellanos et al. (2000) y sus modelaciones para la fosa de Tonga-Kermadec en la placa del Pacífico, al introducir una fuerza horizontal tensional en la fosa, esta produce un

mejor ajuste con la batimetría utilizada. La conclusión directa de ellos, es que el *Slab-pull* domina sobre las otras fuerzas y favorece el movimiento de la placa. Además la intensidad para la fuerza en la fosa obtenida por ellos es de $F = -4 \cdot 10^{12} \text{ N/m}$ (equivalente a un $\gamma = -0,1$), para una placa de espesor $T_e = 17 \text{ km}$. La diferencia con las intensidades obtenidas en este trabajo proviene de que ellos realizaron una modelación elasto-plástica, por lo que las fuerzas se ven reducidas en comparación a cuando se utiliza un modelo sólo elástico, siendo este ya conocido que sobrevalora los esfuerzos y las fuerzas involucradas (De Bremaecker, 1977; Turcotte y Schubert, 2002).

Por otro lado, solamente observando lo obtenido en el modelo III, vemos que se pueden generar flexuras que se ajustan a las observaciones haciendo una reducción del espesor elástico en la cercanía de la fosa. Esto genera un efecto similar a una fuerza horizontal y tensional en esa zona, sin necesidad de tener un esfuerzo poco realista asociado. En algunos casos esta reducción fue bastante abrupta como la usada para el perfil *P07*, con una reducción de $\mu = 80\%$. Otra diferencia importante de este modelo y los anteriores fue que los espesores elásticos fueron en general menores a los usados en M2 y M1. Puesto que uno esperaría que en realidad si existen fuerzas horizontales dada la dinámica ya conocida en un margen de subducción, se podría proponer un modelo mixto que incluya la reducción del espesor, causado por fracturas e hidratación de la placa en esa zona (Contreras-Reyes y Osses, 2010) y la dinámica del *Slab-pull* descrito por Forsyth y Uyeda, (1975) y utilizado en las simulaciones de García-Castellanos et al. 2000.

Finalmente se tiene que aún para modelos bastante simplificados, no es directo entender cuáles son los principales factores que dominan la dinámica de la subducción y cómo afectan a la deformación de la litósfera oceánica. Vemos que en todas las modelaciones, las fuerzas horizontales producían una gran deformación para pequeñas intensidades, mientras que las cargas verticales debían ser mucho mayores para afectar la flexión, lo cuál coincide con el trabajo de Karner et al. (1993), quienes estudiaron de manera más completa el cómo afectan las fuerzas horizontales a la deformación de la placa. Esta diferencia de sensibilidad es la expuesta en la sección 2.2.1. En cuanto a la modelación que permite reducción del espesor elástico, esta se ve como una posible solución para intentar reducir las fuerzas involucradas del modelo elástico. Es sabido que al cambiar la reología de la placa de una elástica a una frágil-dúctil, los esfuerzos disminuyen (Buiter et al. 1998; Goetze y Evans, 1979; McAdoo et al. 1978), por lo cual se visualiza un nuevo camino gradual, introduciendo reducción del espesor además de cambiar la reología en el sistema, estudiando los efectos en la litósfera oceánica y en la generación de perfiles sintéticos a partir del modelo.

Capítulo 3

El Problema del Obstáculo

3.1. Introducción

En este capítulo se presenta un primer desarrollo del problema de flexión de placas en un ambiente de subducción. La idea central es extender el dominio del problema de flexión de placas del capítulo anterior de $\Omega = (0, L) \rightarrow (-L_1, L_2)$, incluyendo la zona de contacto entre la litósfera oceánica y la placa continental, denominada zona interplaca. Con el objetivo de modelar el contacto y la interacción entre las placas, en este capítulo se aproximará el problema principal a resolver la flexión de la litósfera oceánica en presencia de un obstáculo rígido o elástico (esto será explicado en las próximas secciones), siendo el obstáculo la placa continental. Siguiendo el planteamiento matemático capítulo anterior, se quiere resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + F \frac{d^2 w}{dx^2} + \Delta \rho(x) g w = q \quad \forall x \in \Omega \quad (3.1)$$
$$\text{s.a } w(x) \leq g(x) \quad \forall x \in \Omega$$

En donde $x = 0$ corresponde a la ubicación de la fosa, $x = L_2$ un punto suficientemente alejado de todo el proceso de subducción y $x = -L_1$ un punto donde las placas ya están desacopladas en la astenósfera en profundidad (típicamente a una profundidad de unos 200 km). Además ahora se agrega que la flexión está sujeta a (s.a) la restricción de ser siempre menor o igual a la función $g(x)$, que modela el borde inferior de la placa continental que entra en contacto con la litósfera oceánica. También se asume que la rigidez D de la placa es constante en todo el dominio.

Otro cambio considerable es que ahora el contraste de densidad $\Delta \rho$ es función de x , pues no en todo el dominio se tiene el mismo material por sobre y debajo de la placa. El cómo se tomará este término será tratado en las próximas secciones. Por último, falta agregar las nuevas condiciones de borde para este problema que se tomaron de borde libre en $x = L_2$ y

tipo bisagra en $x = -L_1$, es decir:

$$\begin{aligned} w(-L_1) &= h, & M(-L_1) &= M_0 \\ w(L_2) &= 0, & \frac{dw}{dx}(L_2) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

La justificación de las condiciones de borde impuestas en $x = -L_1$ viene de que suponemos que a gran profundidad la litósfera oceánica ya no siente ningún contacto con la placa continental. La Figura 3.1 representa la interacción entre el obstáculo y la litósfera oceánica propuesta en este modelo.

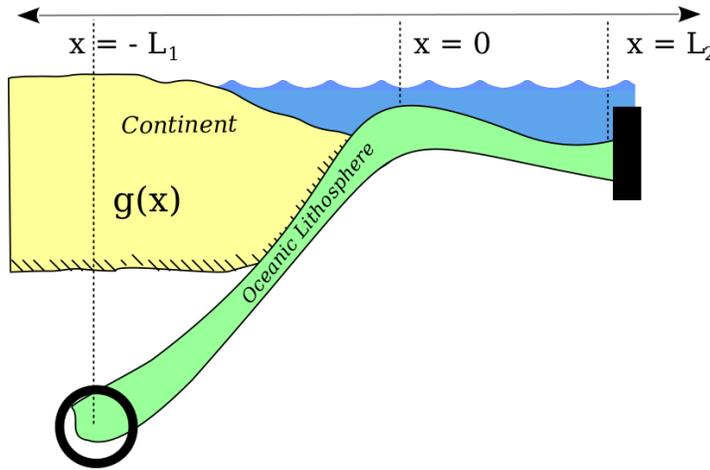


Figura 3.1: Esquema de un contacto rígido entre las dos placas. La litósfera oceánica no podrá sobrepasar el contacto con la placa continental representado por $g(x)$.

La forma de tratar la restricción será el incorporar en el programa de diferencias finitas del Apéndice D un algoritmo extra de penalización a la solución, hasta obtener convergencia bajo alguna tolerancia, obteniendo así una nueva solución que se adapte al obstáculo.

Por otro lado, será de interés también calcular los esfuerzos internos en la placa para tener alguna referencia sobre que tan realista es la solución en acorde con trabajos de resistencia de rocas similares antes del fallamiento (Bodine y Watts, 1979; Goetze y Evans, 1979). Para un caso 1D estos se calculan fácilmente haciendo uso de la Fórmula A.6 y usando B.2 se obtiene:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1 - \nu^2} \varepsilon_{xx} = -\frac{E}{1 - \nu^2} \cdot z \frac{d^2w}{dx^2}$$

Finalmente usando que $M(x) = -D \frac{d^2w}{dx^2}$, es decir que el momento en la placa es directamente proporcional a la curvatura (consecuencia directa en un modelo elástico) podemos escribir que el esfuerzo interno en la placa es:

$$\sigma_{xx}(x, z) = 12 \frac{M(x)}{T_e^3} z \quad (3.3)$$

3.2. Obstáculo Rígido: Parámetros del modelo

3.2.1. Forma del contacto

El modelo depende fuertemente de la elección de la función obstáculo $g(x)$, pues se espera que la placa en una cierta región del dominio se adapte a este. Para la modelación se ha elegido un contacto suave que pueda ser representativo de una zona interplaca típica en un margen de subducción, esto es una función del tipo:

$$g(x) = \begin{cases} -y_o & x \in (-L_2, x_o] \\ -y_o + c_1(e^{x-x_o} - 1) & x \in (x_o, x_1] \\ y_1 - c_2 \cdot \ln(x - x_1 + 1) & x \in (x_1, x_2] \end{cases}$$

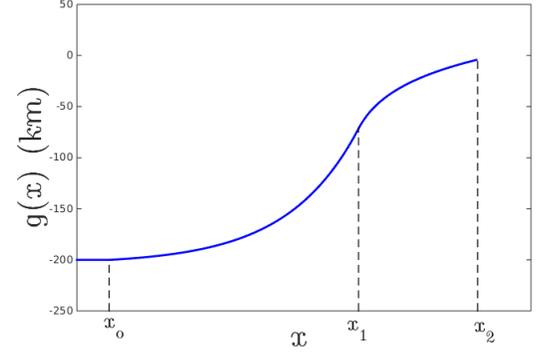


Figura 3.2: Forma del obstáculo 1D utilizado en la modelación. Se tiene un crecimiento exponencial entre x_o y x_1 y luego un cambio de curvatura a un crecimiento logarítmico entre x_1 y x_2 . Las constantes: y_o , y_1 , c_1 , c_2 se toman garantizando continuidad y diferenciabilidad de la función $g(x)$ en todo el dominio.

3.2.2. Flotabilidad variable

Puesto que el contraste de densidad entre los materiales por sobre y por debajo de la placa varían a lo largo de la placa, el coeficiente $\Delta\rho$ es función de x . Además se sabe que la densidad del manto debe ser función de la profundidad a la que se encuentra la placa, por lo que no es directo cómo escoger este término de forma que capture la correcta flotabilidad que sufrirá esta. Una aproximación posible a este problema es dividir el dominio en 3 sectores: uno antes de que comience el contacto, otro en la zona interplaca y finalmente uno tras la fosa, tal como indica la Figura 3.3. Aproximando la densidad del manto como uniforme e independiente de la profundidad, y simplificando el primer contraste como la mitad del segundo, se tiene que los contrastes serían: $\Delta\rho_{III} = \rho_m - \rho_w$, $\Delta\rho_{II} = \rho_{lc} - \rho_w$ y $\Delta\rho_I = \frac{1}{2}\Delta\rho_{II}$. De donde ρ_w es la densidad del mar, ρ_m la densidad del manto astenosférico y ρ_{lc} la densidad de la litósfera continental.

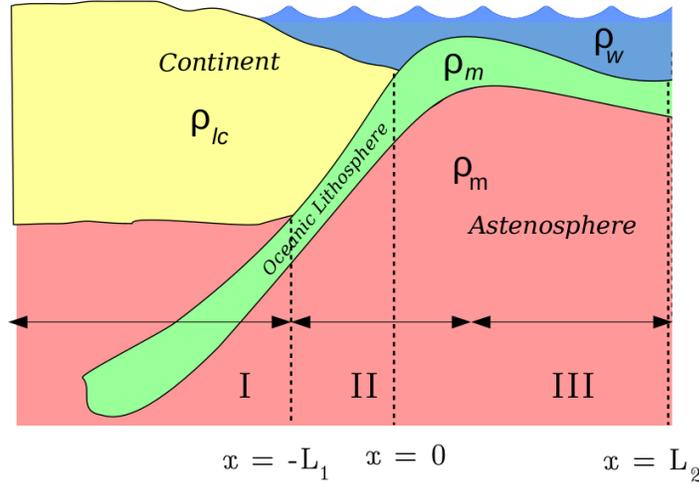


Figura 3.3: Esquema de un contacto rígido entre las dos placas. La litósfera oceánica no podrá sobrepasar el contacto con la placa continental representado por $g(x)$. Se denotan los dominios por los números I, II y III.

3.2.3. El algoritmo de Penalización

La forma de interacción entre la placa y el obstáculo que se plantea en este trabajo es mediante un algoritmo iterativo de tres pasos, en que se trata de penalizar la solución mediante una fuerza ficticia que aparece en los lugares donde la restricción inicial es violada (para mayor detalle ver el Capítulo V de Bartels, 2016). Esto se realiza incorporando al método de diferencias finitas del Apéndice D, el siguiente esquema:

- paso 1:* Se resuelve mediante diferencias finitas (ver Apéndice D) la Ecuación 3.1 con las condiciones de borde 3.2 sin ninguna restricción, esto es resolver: $\mathbb{A}^1 w = b^1$. De aquí se obtiene la solución $w^1(x)$ para el paso 1.
- paso 2:* Se define el conjunto de todos los puntos donde $w^1 > g$, es decir donde la restricción es violada. Una vez hecho esto, se perturba la matriz del sistema original y su lado derecho de la forma:

$$\begin{aligned}\mathbb{A}^2 &= \mathbb{A}^1 + \varepsilon \cdot \text{diag}(\mathbf{1}_{\{w_1 > g\}}) \\ b^2 &= b^1 + \varepsilon \cdot g \cdot \mathbf{1}_{\{w_1 > g\}}\end{aligned}$$

Esto se hace para hacer aparecer una fuerza proporcional a w en la ecuación que hace disminuir la zona de violación de la restricción. En donde ε representa la intensidad de esta fuerza y es encontrado mediante prueba y error. En esta modelación se utilizó $\varepsilon = 10^{-2}$ (Este valor podría haberse reducido pero se escogió de tal forma de generar un sutil traslape, evitando generar artefactos en los esfuerzos).

- paso 3:* Se calcula una nueva solución proveniente de $\mathbb{A}^2 w = b^2$. Esta es llamada w^2 . Con esta se calcula una nueva indicatriz y así se repite el proceso.

Este algoritmo se repite n -veces, hasta que no se perciba variación entre w^{n-1} y w^n , es decir cuando $\|w^n - w^{n-1}\|$ sea menor que una cierta tolerancia escogida en todos los casos igual a 10^{-8} .

3.2.4. Resultados

Se propuso una placa continental con máxima profundidad de 200 km , para asegurar que la litósfera oceánica en la parte más profunda se encuentre desacoplada. Se usaron condiciones de borde en $x = -L_1$ de $w = -250 km$ y por simplicidad momento nulo $M|_{x=-L_1} = 0$, por lo tanto la placa puede rotar libremente en ese extremo.¹ Se utilizaron además los parámetros elásticos de la Tabla 2.1 con espesores elásticos de $T_e = 10, 25$ y $40 km$, que originan valores para α de 32, 65 y 92 km . Además se ha supuesto una densidad para la placa continental de $\rho_{lc} = 2800 kg/m^3$. A manera de convención, para la discusión se utiliza que un esfuerzo positivo es de carácter compresional, es decir acorta las fibras, y un esfuerzo negativo es de carácter tensional, es decir extiende el tamaño de las fibras elásticas

Se grafica en la Figura 3.4 la solución entregada por el método además de los esfuerzos σ_{xx} distribuidos al interior de la litósfera oceánica. Puesto que en la deducción de la ecuación ya habíamos despreciado el espesor, considerando tan sólo la placa como una superficie geométrica, el mapa de esfuerzos se obtiene integrando 3.1 entre $-T_e/2$ y $T_e/2$, por lo tanto crece de forma lineal al separarse de la superficie neutra fijada en $z = 0$.

Se han omitido los esfuerzos que se ubican cerca del extremo izquierdo por ser demasiado altos y por depender fuertemente de la posición en que se fije la placa, en contraste con la zona cerca a $x = -6\alpha$, en donde esta zona es más bien independiente de las condiciones de borde, pero sí de la forma en que se fije el obstáculo. En la Figura 3.5 se grafican además el valor de los esfuerzos en la primera fibra de la placa, es decir el valor extremo que estos alcanzan en la placa en $z = T_e/2$.

	$T_e = 10 km$	$T_e = 25 km$	$T_e = 40 km$
M_{fosa}	$-2,0 \times 10^{16} N$	$-7,9 \times 10^{16} N$	$-16 \times 10^{16} N$
V_{fosa}	$-1,5 \times 10^{17} N/m$	$-5,9 \times 10^{17} N/m$	$-12 \times 10^{17} N/m$
θ_{fosa}	$6,8^\circ$	$3,4^\circ$	$2,4^\circ$
w_{fosa}	$-3,9 km$	$-3,9 km$	$-3,9 km$
$max w(x)$	$0,42 km$	$0,42 km$	$0,42 km$
ℓ_c	$698 km$	$1371 km$	$1806 km$

Tabla 3.1: Valores característicos de la solución usando un obstáculo rígido. Se muestra el valor medido en la fosa del momento de flexión (M_{fosa}), la fuerza de cizalle (V_{fosa}), el ángulo de subducción (θ_{fosa}), la profundidad (w_{fosa}), el máximo de la flexión ($max w$) y el largo del contacto (ℓ_c).

¹Más adelante se discutirá este punto y se estudiará el comportamiento al variar este valor, pues es sabido que en la astenósfera hay flujos que pueden dar un momento no nulo a la placa

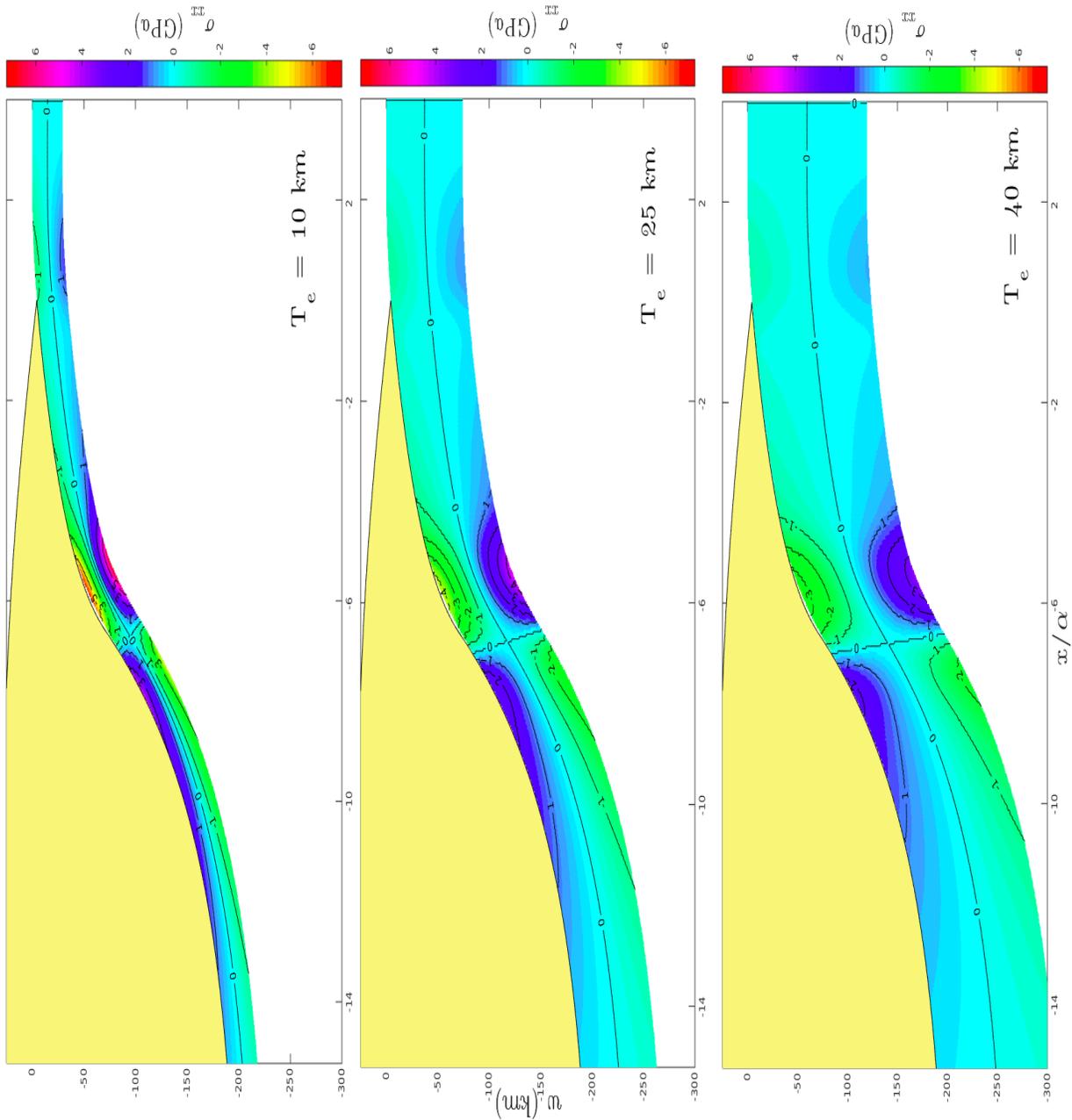


Figura 3.4: Mapas de la distribución de esfuerzos al interior de la placa con un obstáculo rígido. El grosor de las placas está exagerado para una mejor visualización

Podemos detectar que todos tienen un cambio en el signo justo después de alcanzar el valor máximo. También es en este lugar donde el obstáculo cambia de curvatura, por lo que vemos que la solución es fuertemente dependiente de la forma escogida del obstáculo. Por último, vemos que la forma de los esfuerzos se mantiene independiente del espesor escogido y que el valor global de los esfuerzos disminuye al crecer el espesor pero su forma se mantiene más bien independiente, pues al ver la ecuación 3.3 vemos que la dependencia es del tipo

$$\sigma_{max} \sim \frac{1}{T_e^2}.$$

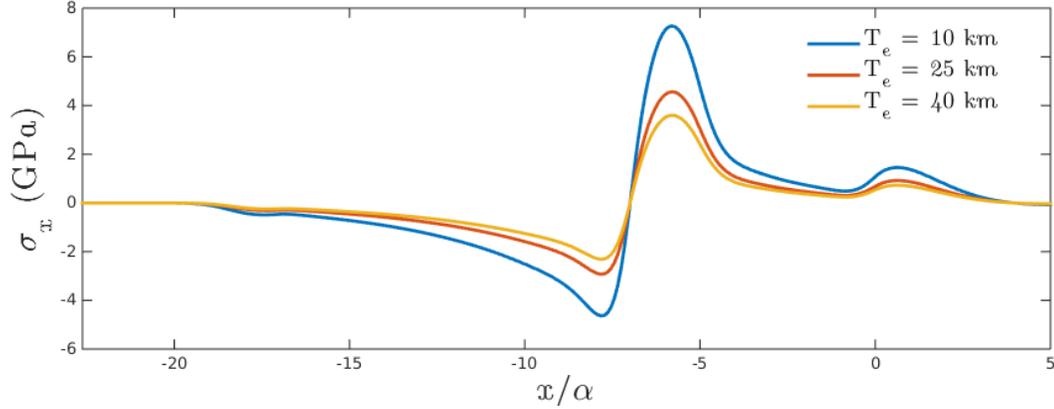


Figura 3.5: Valor del esfuerzo máximo en la placa (es decir para $z = T_e/2$) para los distintos espesores utilizados, en función de x/α . Se omite el valor en los primeros kilómetros por depender fuertemente de la posición en que se fije la placa, lo cuál en este modelo es arbitrario.

A grandes rasgos vemos que existen dos zonas importantes dentro de la placa, una en donde el obstáculo cambia de curvatura y otra en el *Outer-rise* fijado en $x = 0$. En la primera parte tenemos un cambio de signo en el esfuerzo y dos zonas de máximo y mínimo. Al seguir el esfuerzo en la primera fibra tenemos que se pasa abruptamente de compresión a tensión (de negativo a positivo). Esto ocurre aproximadamente en $x/\alpha = -6$ acompañado de una zona pequeña de despegue entre las placas. A pesar de que en principio no se sabe exactamente donde ocurre para un caso realista este cambio, se espera que la placa tenga un comportamiento similar en esta zona y que en un cierto despegue los esfuerzos aumenten considerablemente. Lo otro notable es un segundo máximo ubicado en el comienzo del contacto ($x/\alpha \sim 1$), es decir, en la fosa, en donde tenemos tensión en la placa, esperando fallas del mismo tipo en las cercanías del *Outer-rise*. Luego los esfuerzos aumentan cambiando de signo levemente ya en el extremo derecho de la placa. Podríamos inferir fallas de tipo compresional en las ceranías del centro de expansión.

Finalmente a modo de comparación con los modelos futuros se calcularon valores significativos de la solución tales como el largo del contacto, valor de la altura máxima en la deformación, profundidad de la fosa y la intensidad del momento y la fuerza de cizalle en la fosa mostrados en la Tabla 3.1.

Los valores obtenidos para M y V en la fosa son semejantes a los obtenidos por Contreras-Reyes y Osses, (2010) y Manríquez et al. (2014). Por otro lado, el ángulo inicial de subducción medido en la fosa es siempre menor a 10° lo cual está de acuerdo con los trabajos y estudios similares del margen chileno de Contreras-Reyes et al. (2013, 2015) y Contreras-Reyes et al. (2010); no así el largo del contacto, en donde se esperaría un largo estimado de unos 200 km . Podemos atribuir esta diferencia con la simplicidad del modelo, pues existe una gran zona en donde las dos placas están totalmente acopladas eliminando toda interacción. Finalmente a pesar de ser un modelo bastante simplificado nos entrega una familia de máximos y mínimos en la distribución de los esfuerzos internos, pudiendo ser estos interpretados como zonas de debilidad en la placa, pues el valor encontrado excede los valores esperados y realistas en un contexto geofísico y tectónico, por ejemplo del caso chileno. Esto sugiere una variación al

modelo que se detallará en la próxima sección.

3.3. Obstáculo Elástico

Se llamará obstáculo elástico a la función $g(x)$ que puede adaptarse a la forma de la litósfera oceánica en medio de la simulación. En otras palabras, se plantea una simulación en donde en cada paso iterativo el continente puede ser visto como una placa elástica que se adapta a la forma de nuestra placa principal.

Esto no puede ser modelado sin antes tomar varias hipótesis previas y asumir parámetros elásticos nuevos para el continente. Para esto se asumió que el borde inferior del continente se comporta como una placa elástica con un módulo de Young E_2 equivalente a un 20%, 60% y un 80% el de la litósfera oceánica. Los espesores elásticos se fijaron variables para la litósfera oceánica entre los valores $T_{e,1} = 10, 25$ y 40 km y para la placa continental un valor fijo de $T_{e,2} = 125 \text{ km}$. Por último, asumiremos que el borde inferior de la placa continental que llamaremos $w_{lc}(x)$ satisface una ecuación análoga a la de la placa oceánica en un dominio menor e igual a $\Omega_2 = (-L_1, 0)$. Las condiciones de borde $w_{lc}(x)$ se escogieron tipo bisagra en ambos lados de la forma:

$$\begin{aligned} w_{lc}(-L_1) &= h_2, & M_{lc}(-L_1) &= 0 \\ w_{lc}(0) &= 0, & M_{lc}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.3.1. Resultados

La solución para los distintos espesores y módulos de Young están graficados en la Figura 3.6, 3.7 y 3.8. A simple vista notamos que el continente al ser elástico, reduce considerablemente el largo del contacto y reduce los esfuerzos almacenados en la litósfera oceánica, almacenándose la energía elástica ahora en ambos cuerpos y no tan sólo en la litósfera oceánica. Además la zona de concentración de estos es desplazada hacia la fosa respecto al primer modelo. Por otro lado vemos que al dejar interactuar el obstáculo con la placa se elimina el cambio de curvatura encontrado en el caso anterior, quedando solamente la placa continental de forma cóncava. Esto tiene su consecuencia en los esfuerzos, siendo estos monótonos y positivos en la placa en toda la zona interplaca, quedando esta por consecuencia dominada por tensión. De acuerdo a la Figura 3.9, tan sólo se tiene un cambio de signo en la zona $x > 2\alpha$.

Al aumentar el módulo de Young de la placa continental vemos que el valor de los esfuerzos en la litósfera oceánica disminuye globalmente. Atribuimos este efecto a que ahora el continente empieza a llevarse la energía elástica, al ser este más rígido. Por otro lado, al aumentar el espesor de la litósfera oceánica observamos cambio en la deformación y en los esfuerzos, aumentando estos ahora cuando aumenta el espesor (fenómeno inverso a lo observado en el

modelo anterior) y reduciéndose el largo del contacto al aumentar el espesor de la litósfera oceánica.

Cabe notar que no se han graficado los esfuerzos del borde izquierdo de la litósfera oceánica al depender estos fuertemente de la posición de la placa, al igual que en caso con obstáculo rígido. Estos se han llevado linealmente a cero desde el comienzo del contacto al borde izquierdo, de ahí que el comienzo del crecimiento de las curvas de la Figura 3.9 sean en línea recta. Al seguir los esfuerzos de esta figura vemos que en la zona interplaca existen dos máximos de esfuerzo tensional (positivo) tan sólo para un espesor alto, siendo este uno sólo para los espesores menores. Luego tras la fosa se tiene una caída de esfuerzos considerable, llegando a ser estos negativos, es decir generando compresión en el borde superior de la litósfera oceánica. Finalmente los esfuerzos se estabilizan en cero.

(a)	$T_e = 10 \text{ km}$	$T_e = 25 \text{ km}$	$T_e = 40 \text{ km}$
M_{fosa}	$7,2 \times 10^{16} \text{ N}$	$8,6 \times 10^{17} \text{ N}$	$15 \times 10^{17} \text{ N}$
V_{fosa}	$4,1 \times 10^{17} \text{ N/m}$	$42,9 \times 10^{17} \text{ N/m}$	$194 \times 10^{17} \text{ N/m}$
θ_{fosa}	$7,8^\circ$	$14,2^\circ$	$3,7^\circ$
w_{fosa}	$-0,5 \text{ km}$	$-4,6 \text{ km}$	$-6,7 \text{ km}$
$max w(x)$	$1,6 \text{ km}$	$4,9 \text{ km}$	$8,2 \text{ km}$
ℓ_c	238 km	160 km	119 km

Tabla 3.2: (a). Valores característicos usando un obstáculo elástico en donde $E_2/E_1 = 0,2$

(b)	$T_e = 10 \text{ km}$	$T_e = 25 \text{ km}$	$T_e = 40 \text{ km}$
M_{fosa}	$5,0 \times 10^{16} \text{ N}$	$5,0 \times 10^{17} \text{ N}$	$14 \times 10^{17} \text{ N}$
V_{fosa}	$3,1 \times 10^{17} \text{ N/m}$	$29 \times 10^{17} \text{ N/m}$	$84 \times 10^{17} \text{ N/m}$
θ_{fosa}	$5,2^\circ$	$7,8^\circ$	$8,3^\circ$
w_{fosa}	$-0,2 \text{ km}$	$-1,9 \text{ km}$	$-3,5 \text{ km}$
$max w(x)$	$1,1 \text{ km}$	$2,9 \text{ km}$	$4,2 \text{ km}$
ℓ_c	320 km	1003 km	1393 km

Tabla 3.3: (b). Valores característicos usando un obstáculo elástico en donde $E_2/E_1 = 0,6$

(c)	$T_e = 10 \text{ km}$	$T_e = 25 \text{ km}$	$T_e = 40 \text{ km}$
M_{fosa}	$4,6 \times 10^{16} \text{ N}$	$4,4 \times 10^{17} \text{ N}$	$17 \times 10^{17} \text{ N}$
V_{fosa}	$2,8 \times 10^{17} \text{ N/m}$	$18 \times 10^{17} \text{ N/m}$	$85 \times 10^{17} \text{ N/m}$
θ_{fosa}	$4,9^\circ$	$7,8^\circ$	$10,2^\circ$
w_{fosa}	$-0,3 \text{ km}$	$-3,0 \text{ km}$	$-5,4 \text{ km}$
$max w(x)$	$1,0 \text{ km}$	$2,4 \text{ km}$	$4,7 \text{ km}$
ℓ_c	348 km	1025 km	1473 km

Tabla 3.4: (c). Valores característicos usando un obstáculo elástico en donde $E_2/E_1 = 0,8$

Por último, al considerar los valores de la Tabla 3.4 y compararlos con el caso anterior, vemos que los valores del momento y la fuerza de cizalle medidos en la fosa crecen al crecer el

espesor elástico de la litósfera oceánica, como también lo es el máximo valor de la deformación, la profundidad de la fosa y el ángulo de subducción.

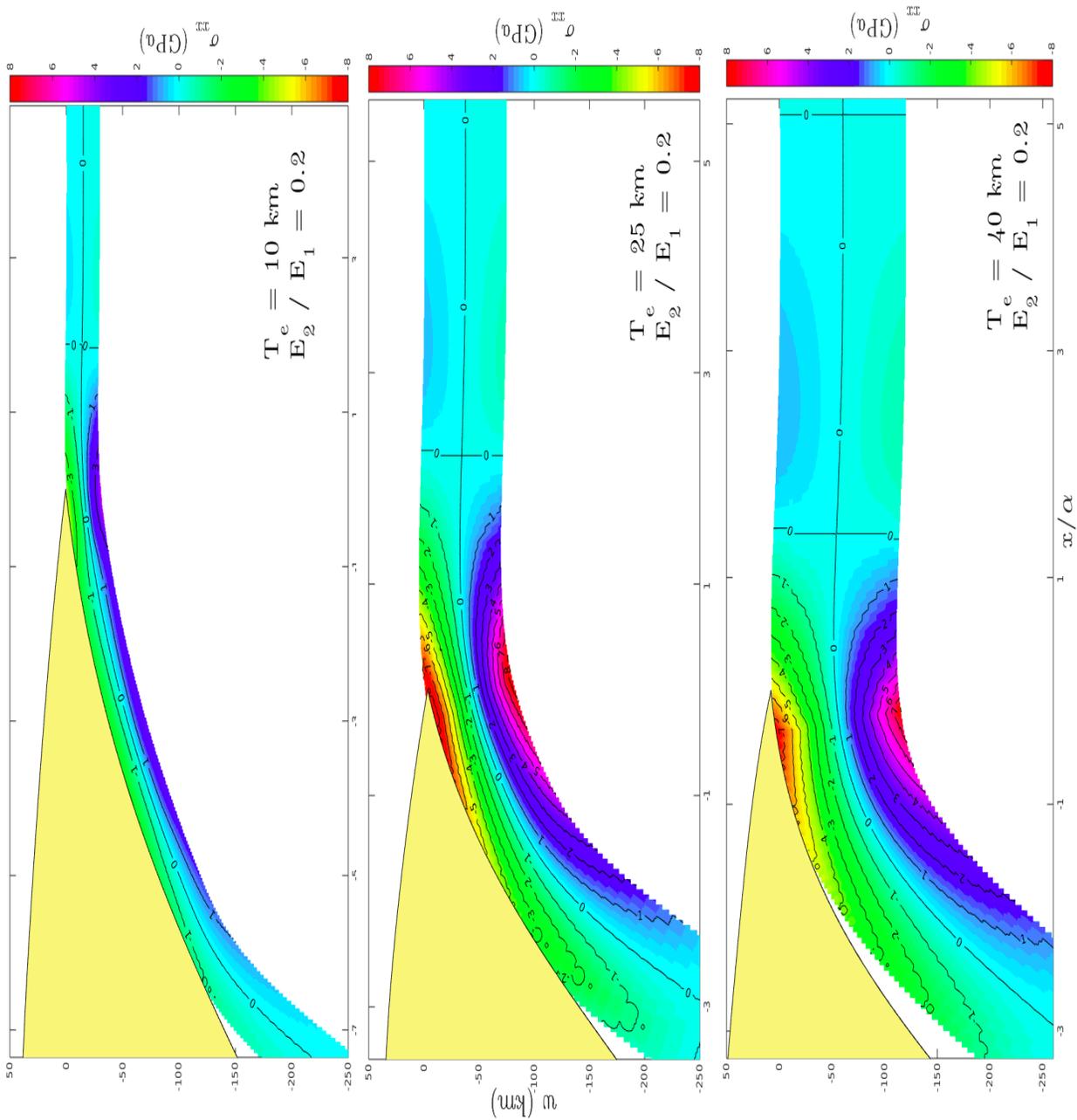


Figura 3.6: Mapas de la distribución de esfuerzos σ_{xx} al interior de la placa con un obstáculo elástico ($E_2/E_1 = 0,2$). El grosor de las placas está exagerado para una mejor visualización.

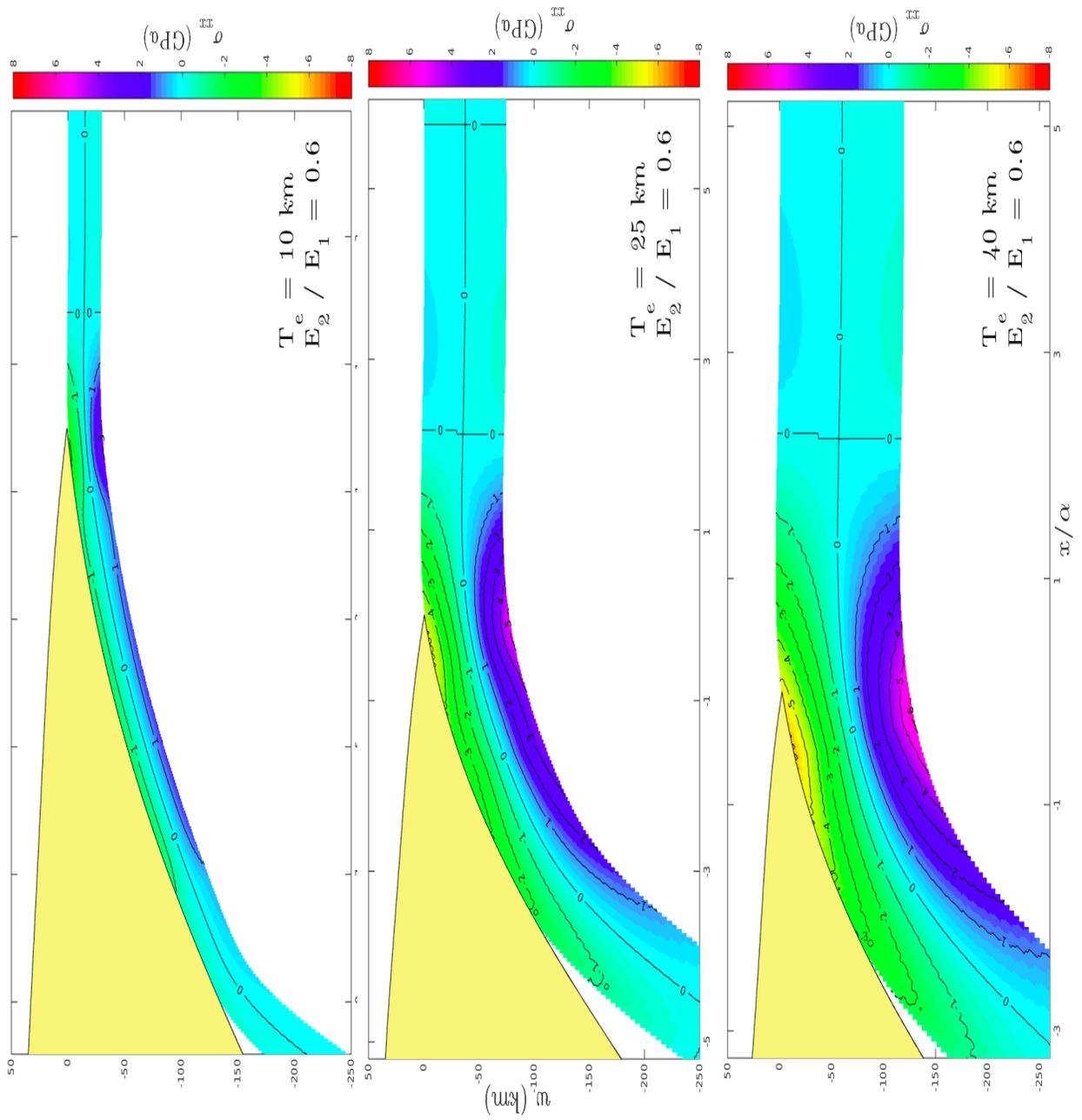


Figura 3.7: Mapas de la distribución de esfuerzos σ_{xx} al interior de la placa con un obstáculo elástico ($E_2/E_1 = 0,6$). El grosor de las placas está exagerado para una mejor visualización.

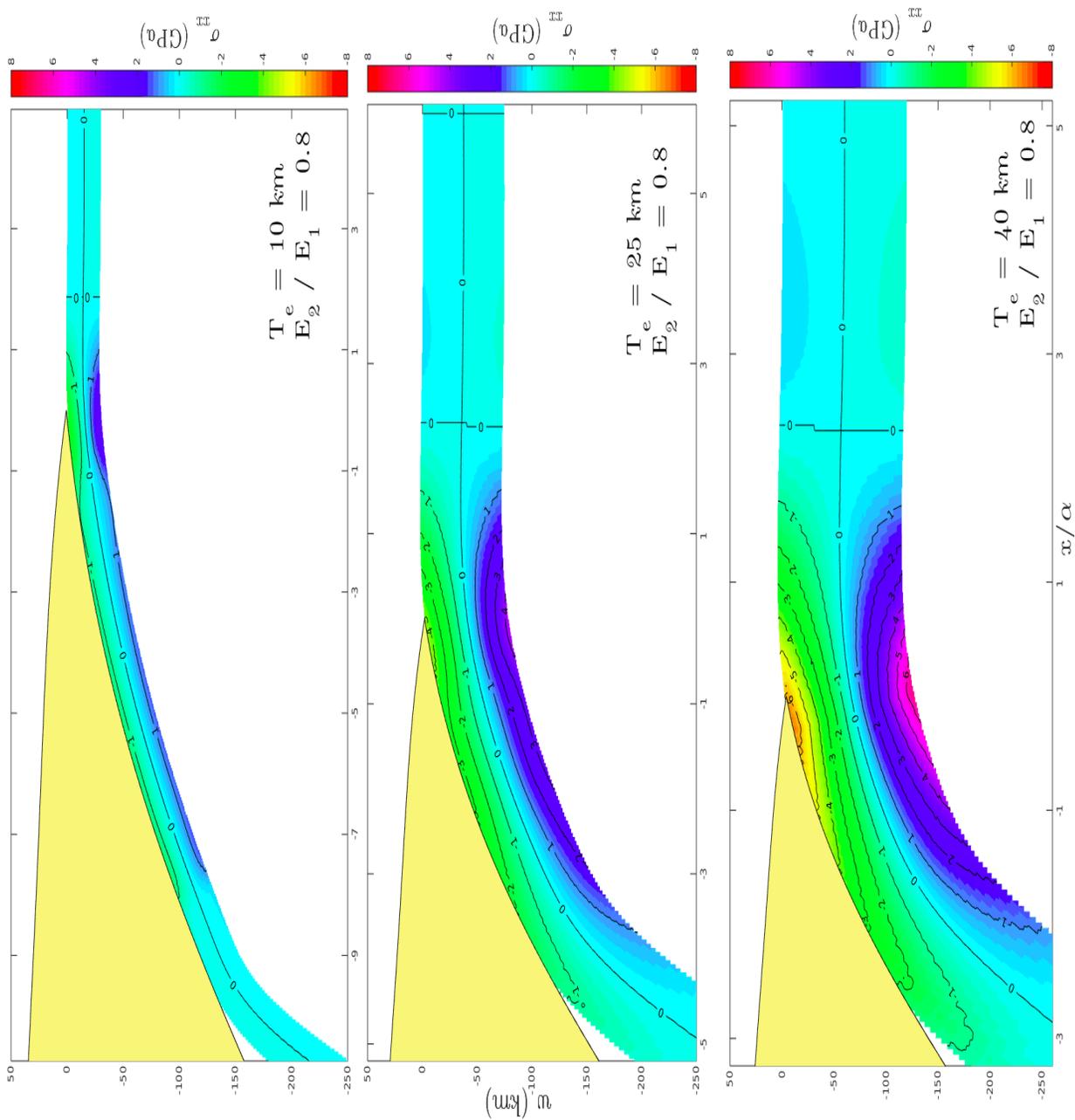


Figura 3.8: Mapas de la distribución de esfuerzos σ_{xx} al interior de la placa con un obstáculo elástico ($E_2/E_1 = 0,8$). El grosor de las placas está exagerado para una mejor visualización.

3.4. Discusiones y Conclusiones

Vemos que al modelar de forma simple la zona de contacto en un ambiente de subducción y la interacción entre las placas de forma meramente mecánica, el problema no es simple y se generan interrogantes que los modelos elásticos no son capaces de abarcar y describir totalmente. Al considerar una aproximación más matemática como la recientemente expuesta,

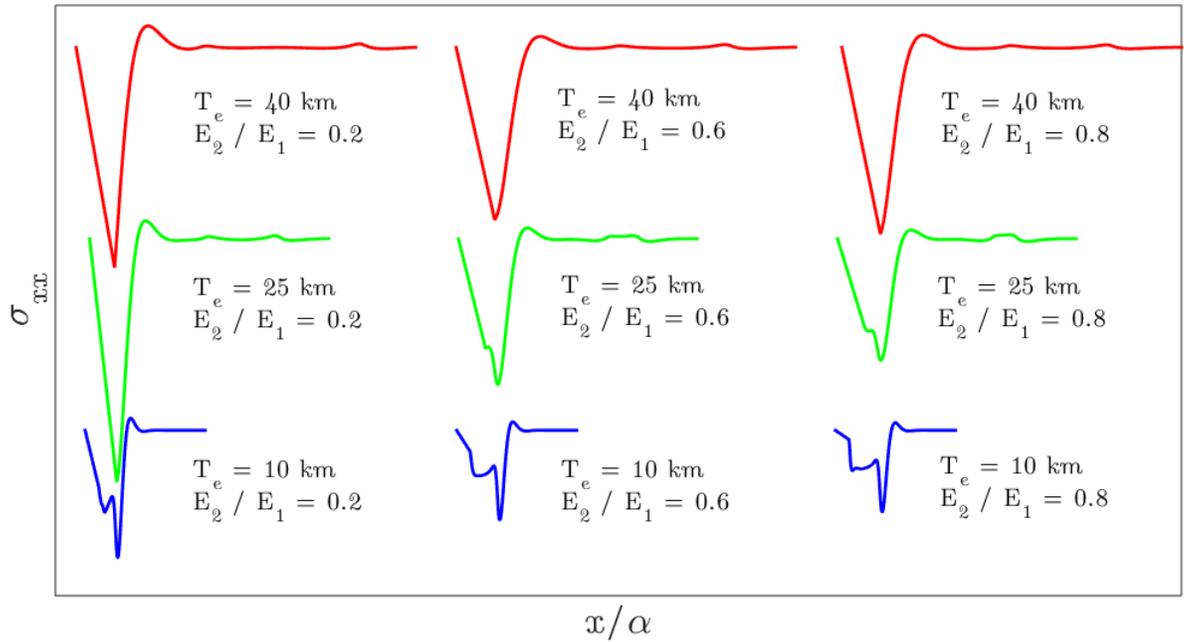


Figura 3.9: Forma de los esfuerzos en el techo de la litósfera oceánica. Se llevan a cero linealmente en los primeros kilómetros por haber una fuerte dependencia de la posición en que se fije la placa, lo cuál en este modelo, es arbitrario.

es decir, introduciendo restricciones a la ecuación para la deformación, vemos que de forma simple se obtiene una no trivial acumulación de esfuerzos dentro de la placa, lo que nos puede dar una idea de cómo y donde se espera fallamiento en la litósfera oceánica al menos a primer orden.

También podemos dar una primera aproximación de la dinámica en el contacto y cómo depende la deformación de la litósfera en profundidad. Vemos que escoger un obstáculo de antemano simplifica mucho el problema y que tiene más sentido darle alguna interacción. Esto produjo reducción del contacto y de la intensidad de los esfuerzos al permitir una interacción bastante simple como lo es la elástica. También los esfuerzos se distribuyeron por toda la placa y no quedaron de forma tan localizada como lo fue la solución con obstáculo rígido. Vemos que un contacto con cambio de curvatura no es favorable para el sistema y este fácilmente se elimina al considerar interacción elástica entre los cuerpos; en consecuencia los esfuerzos serán monótonos al interior de la placa habiendo reducción de ellos en los bordes de desacoplamiento.

Una modelación similar se ha propuesto en el Apéndice E, en donde se ha modelado la interacción entre la litósfera oceánica y el continente usando la teoría de contacto de Hertz, (1882). Proponiendo una interacción entre dos placas de sección rectangular se llegó a resultados análogos a los encontrados en este capítulo tan sólo que con resultados menos regulares. La modelación en detalle con su respectiva discusión está realizada en el Apéndice E.

Finalmente los parámetros elásticos que se asumieron para el continente fueron poco explorados en esta tesis, salvo la rigidez de ambas placas (E y T_e). Se propone una línea futura de investigación para poder comprobar y testear con observaciones alguno de estos parámetros con más detalle, pudiendo obtener así información mecánica y elástica relevante del contacto entre ambas placas.

Capítulo 4

Flexión en la litósfera oceánica 2D

4.1. Introducción

El estudiar la flexión de una placa elástica bidimensional, es decir, considerándola cómo una superficie en \mathbb{R}^2 , suele ser un desafío mayor y con varias preguntas abiertas, desde el punto de vista teórico y numérico de lo que implica generar un modelo que pueda reproducir observaciones y predecir comportamientos. En este capítulo se quiere plantear un modelo 2D, incorporando una zona de contacto entre la litósfera oceánica y la placa continental además de cambiar la forma de calcular la solución, dejando el método de diferencias finitas y migrando a un método de elementos finitos utilizando el *software* libre *FreeFem++*.

Al tomar la Ecuación 3.1 y llevarla a un caso 2D de acuerdo al modelo de Kirchhof-Love detallado en el Capítulo 1, podemos escribir que para un caso con T_e homogéneo en el espacio y para una placa sumergida en un fluido con un contraste de densidad $\Delta\rho$, tenemos:

$$D\Delta^2 w + \operatorname{div}(F\nabla w) + \Delta\rho g w = q \quad \text{en } \Omega \quad (4.1)$$

En donde $\Omega = (-L_1, L_2) \times (-L_3, L_3)$ representa el dominio utilizado para este problema. El sistema es homogéneo en la coordenada y , que es variada entre $-L_3$ y L_3 , y pasa a ser la dimensión extra en este caso. Además, ahora la restricción de obstáculo se representa de la forma:

$$\text{s.a } w(x, y) \leq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

En donde la litósfera oceánica está sujeta a no sobrepasar la superficie $g(x, y)$ que modela la placa continental y pasa a ser nuestro obstáculo en la simulación. Antes de hablar de las condiciones de borde utilizadas, podemos descomponer el borde de Ω de la siguiente forma: $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, de esta forma podemos separar en distintas zonas definidas tal como sigue:

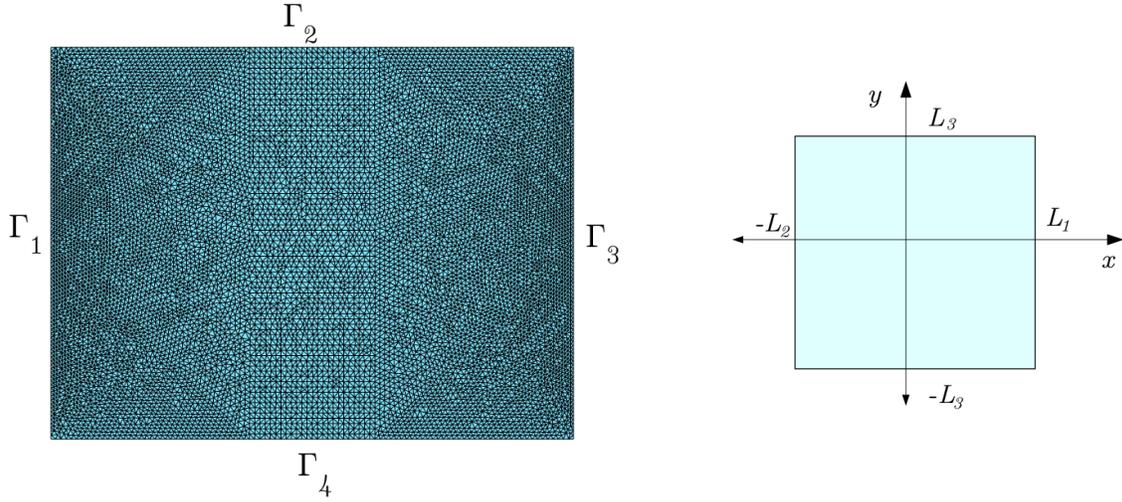


Figura 4.1: Malla utilizada para el método de Elementos Finitos. El dominio Ω es descompuesto en 4 curvas rectas.

- i) $\Gamma_1 = \{(x, y) \in \Gamma_1 \mid x = -L_2, \quad y \in (-L_3, L_3)\}$
- ii) $\Gamma_2 = \{(x, y) \in \Gamma_2 \mid x \in (-L_2, L_1), \quad y = L_3\}$
- iii) $\Gamma_3 = \{(x, y) \in \Gamma_3 \mid x = L_1, \quad y \in (-L_3, L_3)\}$
- iv) $\Gamma_4 = \{(x, y) \in \Gamma_4 \mid x \in (-L_2, L_1), \quad y = -L_3\}$

Recordando que $M = -D\Delta^2 w$ y que $V = \frac{\partial M}{\partial n} - F \frac{\partial w}{\partial n}$, las condiciones utilizadas en cada uno de los bordes fueron:

$$\begin{aligned}
 w(x, y) = h, \quad M(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma_1 \\
 M(x, y) = 0, \quad V(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \\
 w(x, y) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma_3
 \end{aligned}$$

Es decir la placa se mantiene empotrada y horizontal suficientemente lejos del proceso de subducción, y en profundidad las condiciones son tipo bisagra (recordando B.0.2). En los otros dos bordes restantes se asumió la placa libre.

4.2. El Método de Elementos Finitos (MEF)

La forma estándar de desarrollar este método es plantear una formulación variacional de la ecuación a derivadas parciales que se desea trabajar. De esta forma la aproximación ya no es en los operadores diferenciales como en el método de diferencias finitas (MDF) sino que se aproxima directamente el espacio donde se encuentra la solución. Para tener una exposición general de este método ver por ejemplo Allaire, (2012) y Ciarlet, (2002). Para el caso específico de flexión de placas ver por ejemplo Bartels, (2016) y Braess, (2007).

4.2.1. Formulación Variacional

Puesto que se está trabajando con una ecuación que implica derivadas de cuarto orden en donde la incógnita es w , podemos pasar a un sistema de ecuaciones con segundas derivadas, en donde las incógnitas son (w, M) de la forma:

$$\begin{aligned} -\nabla^2 M + \operatorname{div}(F\nabla w) + \Delta \rho g w &= q \\ M + D\nabla^2 w &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Para escribir la formulación variacional de 4.2 debemos definir los siguientes espacios de Sobolev: $H_w(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \in \Gamma_3 \wedge v = h \in \Gamma_1\}$ y $H_M(\Omega) = \{P \in H^1(\Omega) \mid P = 0 \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3\}$, es decir los espacios donde viven las funciones *test* referidas a la flexión w y al momento M . Multiplicando la primera de estas ecuaciones por $v \in H_w$ y la segunda por $P \in H_M$ e integrando en todo Ω obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\nabla^2 M v + \int_{\Omega} \operatorname{div}(F\nabla w)v + \int_{\Omega} \Delta \rho g w v &= \int_{\Omega} q v \\ \int_{\Omega} M P + \int_{\Omega} D\nabla^2 w P &= 0 \end{aligned}$$

Integrando por partes y usando que las funciones *test* satisfacen las condiciones de borde:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla M \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial M}{\partial n} \nabla v - \int_{\Omega} F\nabla w \nabla v + \int_{\partial\Omega} F \frac{\partial w}{\partial n} v + \int_{\Omega} \Delta \rho g w v &= \int_{\Omega} q v \\ \int_{\Omega} M P - \int_{\Omega} D\nabla w \cdot \nabla P + \int_{\partial\Omega} D \frac{\partial w}{\partial n} P &= 0 \\ \int_{\Omega} \left(\nabla M \cdot \nabla v - F\nabla w \nabla v + \Delta \rho g w v \right) - \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial M}{\partial n} - F \frac{\partial w}{\partial n} \right) h &= \int_{\Omega} q v \\ \int_{\Omega} M P - \int_{\Omega} D\nabla w \cdot \nabla P &= 0 \end{aligned}$$

Restando ahora ambas ecuaciones llegamos a la formulación variacional siguiente: encontrar $(w, M) \in H_w \times H_M$ tal que lo siguiente se cumpla para todo (v, P) en el mismo espacio:

$$\begin{aligned} \mathcal{PV} : \quad & \int_{\Omega} \left(\nabla M \cdot \nabla v - F\nabla w \nabla v + \Delta \rho g w v \right) - \int_{\Omega} \left(M P - D\nabla w \cdot \nabla P \right) \\ & - \int_{\Gamma_1} V \cdot h - \int_{\Omega} q v = 0 \\ \text{s.a} \quad & w(x, y) \leq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega \end{aligned}$$

4.2.2. Algoritmo de Penalización

Al igual que en la sección 3.2.3, la forma de incorporar el obstáculo en el problema es incorporar un algoritmo que penalice la solución nodo por nodo de los elementos finitos. Esto se hace incorporando un término extra en ambos lados de la ecuación. Esto no es sin antes determinar el subconjunto del dominio en donde la restricción se viola y es en esa zona donde se agrega un término que puede interpretarse como una fuerza de magnitud ε que tiende a separar la solución del obstáculo.

4.2.3. Obstáculo

Se utilizó un obstáculo rígido para la simulación, análogo al utilizado en 3.2.1 pero extendido a \mathbb{R}^2 , es decir, visto como una superficie homogénea en una dimensión, tal como lo muestra la Figura 4.2. Se utilizó una profundidad máxima de 200 *km* y una mínima de 9,6 *km*, siendo este punto la profundidad de fosa oceánica, en $x = 0$.

$$g(x) = \begin{cases} -y_o & x \in (-L_2, x_o] \\ -y_o + c_1(e^{(x-x_o)} - 1) & x \in (x_o, x_1] \\ y_1 - c_2 \cdot \ln(x - x_1 + 1) & x \in (x_1, x_2] \end{cases}$$

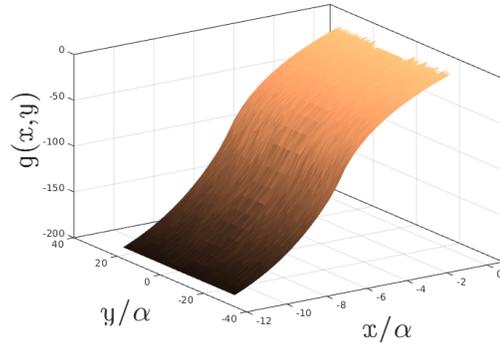


Figura 4.2: Obstáculo utilizado para la simulación. Se utilizó la misma expresión algebraica del Capítulo 3.

4.2.4. Contraste de Densidad

No se pudo utilizar un contraste de densidad $\Delta\rho(x)$ que pudiera dar cuenta de un cambio en la densidad del manto en profundidad o de la diferencia de material que se encuentra sobre la litósfera oceánica, por lo que dejó este parámetro constante explorando tan sólo el comportamiento mecánico de la placa. Sin duda una fuente de investigación sería incorporar al modelo estos cambios y explorar su efecto en la deformación.

4.3. Resultados y Discusiones

Se programó la formulación 4.2.1 con el algoritmo de penalización usando *FreeFem++*. Una dificultad encontrada en la implementación del método fue que aunque se consideró fuer-

za horizontal nula en principio, se debió utilizar una fuerza horizontal no nula pero pequeña con el fin de generar resultados realistas. Al considerar $F = 0$ se generaban deformaciones mucho más pequeñas que las esperadas, lo que se atribuyó como una consecuencia del fenómeno de *locking* en la ecuación. Esto ocurre cuando la convergencia de la solución de elementos finitos hacia la verdadera no ocurre de manera uniforme cuando $h \rightarrow 0$ (Braess, 2007; Manríquez et al. 2014). Una solución que se propuso fue agregar un término pequeño para las fuerzas horizontales, entrando ahora en juego el término que involucra el gradiente de w .

Se graficaron las deformaciones para 3 distintos espesores de la litósfera oceánica: $T_e = 10$, 25 y 40 km, usando el mismo obstáculo para los tres casos. Las soluciones son mostradas en las Figuras 4.3 y 4.4. Los momentos de flexión también fueron calculados y se muestran en la Figura 4.5. Además, con estos se puede determinar los esfuerzos máximos para los distintos espesores, acumulados en la primera fibra, es decir, para $z = \frac{T_e}{2}$ que es el techo de la placa.

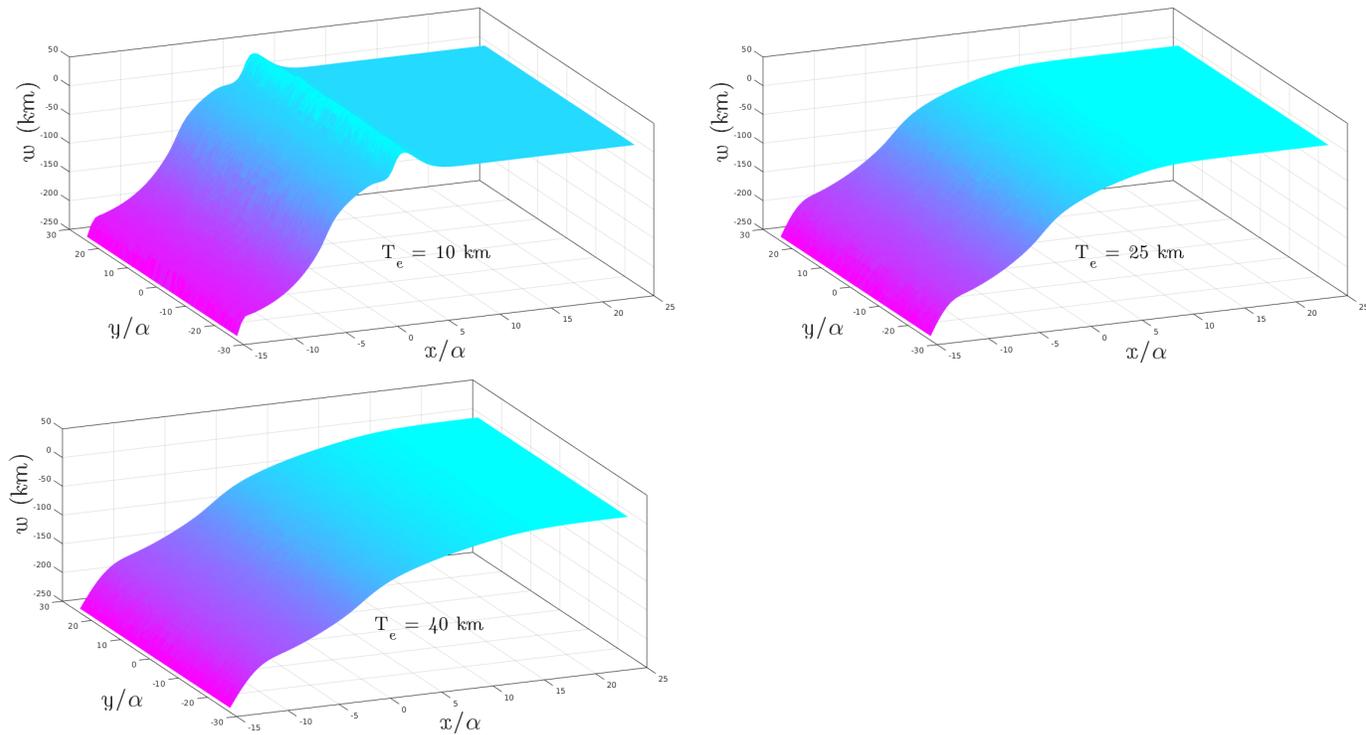


Figura 4.3: Flexión de la litósfera oceánica debido a la presencia de un obstáculo rígido mostrando también la grilla usada. Los espesores usados son de $T_e = 10$, 25 y 40 km.

Podemos notar que el valor de los esfuerzos tiende a ser mayor que los encontrados en el caso 1D en el Capítulo 3. Vemos que al disminuir el espesor, la litósfera oceánica exhibe un gran *Outer-rise* y el efecto del obstáculo es más notorio en la placa. Para mayores espesores esta adopta una forma más suave con poco abombamiento en la cercanía de la fosa. Para un mayor espesor elástico, la placa es más rígida y no permite fácilmente la formación de máximos localizados.

Las Figuras 4.4 y 4.5 muestran la comparación entre las distintas soluciones para distintos espesores. Vemos que los esfuerzos en el techo de la litósfera oceánica disminuyen al aumentar el espesor y tienen un cambio de signo en el cambio de curvatura del obstáculo $g(x, y)$ (aproximadamente en $x = -6\alpha$) y otro en la fosa oceánica ($x = 0$).

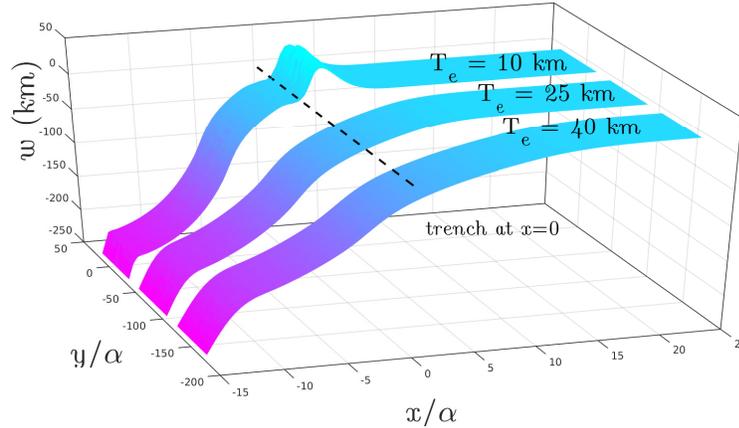


Figura 4.4: Flexión de la litósfera oceánica debido a la presencia de un obstáculo rígido. Los espesores usados son de $T_e = 10, 25$ y 40 km

Vale la pena notar que no se trabajó en un planteamiento paralelo de modelo de contacto usando fuerzas de contacto para el caso 2D. Esto es discutido y planteado como una línea futura de investigación en el Capítulo 5.

4.4. Variación de la Condición de Borde

Se exploró cómo cambia la forma de la solución al variar distintos valores del momento en la curva Γ_1 , es decir en el extremo izquierdo de la placa al considerarla de manera unidimensional, como lo hecho en los capítulos anteriores. Si definimos la cantidad constante $m = 1,2 \times 10^{19} \text{ N}$, se utilizaron: a) $M_0 = -3m$, b) $M_0 = -2m$, c) $M_0 = -m$, d) $M_0 = 0$, e) $M_0 = m$, f) $M_0 = 2m$ y g) $M_0 = 3m$, cuyos perfiles están graficados en la Figura 4.6. Los esfuerzos generados están graficados en la Figura 4.7.

Vemos claramente que al variar el momento en el extremo de la litósfera oceánica se altera la deformación en la primera parte. Luego de unos pocos largos característicos todas las flexuras se unifican y siguen la forma del obstáculo. Al ver los esfuerzos vemos que los momentos negativos generan mayores esfuerzos máximos y no tan así los positivos, por lo que la primera parte de la solución depende de la condición de borde y el resto de la flexura de la forma del obstáculo.

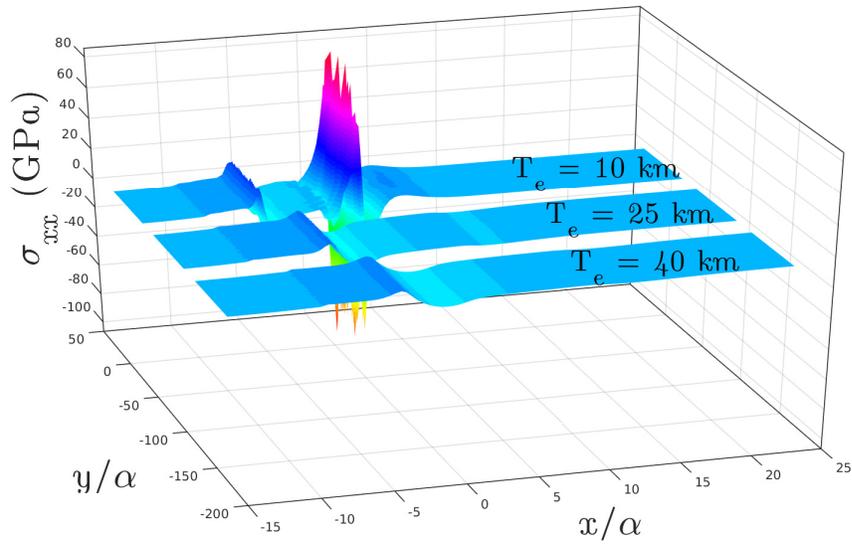


Figura 4.5: Esfuerzos máximos de la litósfera oceánica debido a la presencia de un obstáculo rígido. Los espesores usados son de $T_e = 10, 25$ y 40 km

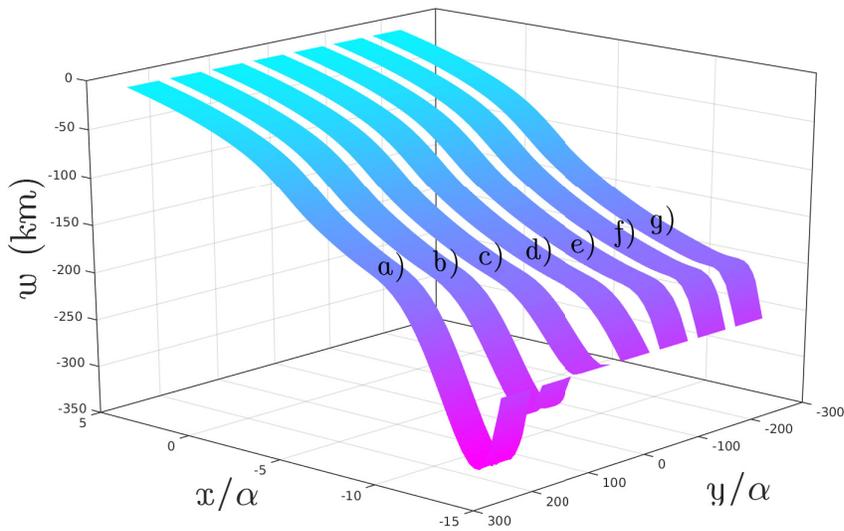


Figura 4.6: Flexión de la placa al variar el momento en Γ_1 .

En general se observa que al generar un modelo 2D usando elementos finitos al problema de flexión de placas en presencia de un obstáculo rígido, se generan soluciones bastante similares al perfil 1D encontrado usando diferencias finitas. No se tiene ninguna diferencia cualitativa de la solución, tan sólo la dificultad de generar un *Outer-rise* para largos espesores elásticos.

El alcance de generar un modelo 2D es mucho mayor que el de un perfil unidimensional. Por un lado es posible estudiar más a fondo los efectos en la deformación de la litósfera

oceánica en presencia de montes submarinos, obstáculos de cualquier tipo y además permite modificar fácilmente el dominio y las condiciones de borde que se generan al considerar un dominio curvo.

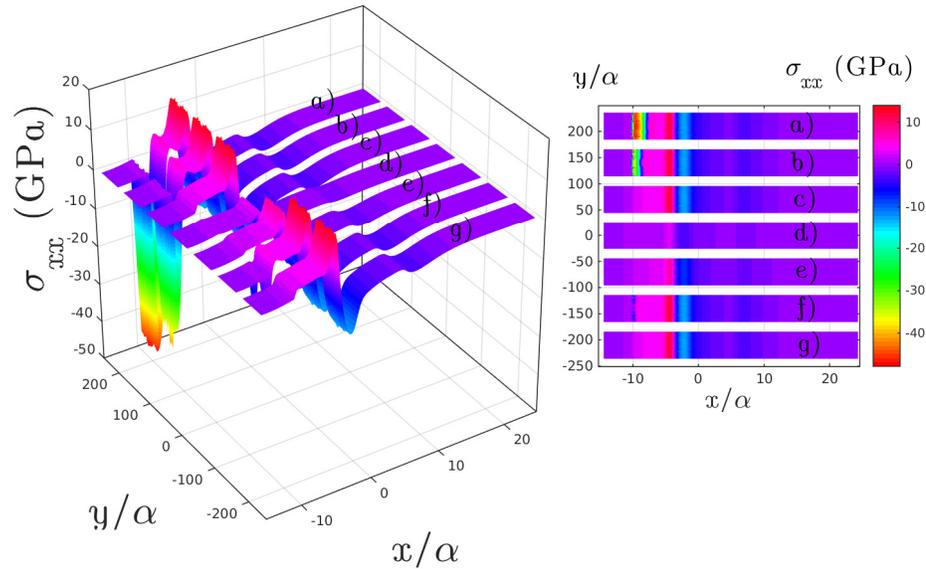


Figura 4.7: Esfuerzos máximos en la placa al variar el momento en Γ_1 .

Por otro lado el valor de los esfuerzos encontrados al interior de la placa fueron mayores que el obtenido en los modelos anteriores, por lo que vemos que es necesario incorporar al modelo 2D nuevas restricciones o aproximaciones que permitan generar una solución más apegada a las observaciones y evidencias pasadas. Un cambio de reología y/o permitir variación de los parámetros podría ayudar en este sentido.

En general se introdujo una nueva herramienta al cálculo de la deformación al introducir el efecto de un obstáculo en la ecuación y poder estudiar el efecto de este en la solución.

Capítulo 5

Conclusiones y Discusión

El estudio de la deformación de la litósfera oceánica en un ambiente de subducción tiene múltiples áreas y aplicaciones dentro de las ciencias geofísicas como también en la ingeniería. Un correcto entendimiento de los principales factores involucrados en este proceso y su efecto en la deformación de las placas tectónicas mantiene actualmente a muchos investigadores activos en un mejor entendimiento de los fenómenos geodinámicos tales como los flujos astenosféricos, enfriamiento de la litósfera oceánica y las fuerzas involucradas en un margen convergente. Este trabajo consistió en proponer un modelo flexural para la litósfera oceánica o placa subductante, que describa de forma simple el efecto de las distintas fuerzas involucradas, y también se exploró el cómo afecta una zona de contacto, desde el punto de vista geofísico y mecánico.

5.1. Fuerzas y Modelos 1D

Al explorar los modelos usados en el Capítulo 2, podemos ver que existen distintas formas de modelar la flexión de la litósfera oceánica y la generación de un perfil sintético que pueda ajustarse a uno que proviene de datos batimétricos, no tiene solución única. Es en esta etapa del estudio en donde deben usarse los conocimientos y resultados de otras ramas de la geociencia tales como la geología y sus argumentos reológicos para buscar apoyo y dilucidar el tema. Además es importante tener en cuenta el contexto geofísico de la subducción para poder inclinarse por un modelo u otro, pudiendo analizar los resultados y ver si caen dentro de lo que llamaríamos esperable dada el contexto geodinámico de la subducción.

Dado lo anterior, en este trabajo vimos dos posibles formas de modelar: la primera es incluyendo las fuerzas dominantes en la subducción, introduciendo fuerzas horizontales y cargas verticales. Ya se mostró que el sistema tiene distintas sensibilidades a estas dos componentes, pero es inevitable que se generen esfuerzos no realistas (Caldwell y Turcotte, 1979; Parsons y Molnar, 1976). La otra forma es eliminar estas fuerzas aceptando variación en el parámetro de la rigidez, justificada por una mayor porosidad e infiltración de fluidos de la litósfera oceánica en la cercanía de la fosa o alguna alteración termal (Bry y White, 2007; Burov

y Diament, 1995; Contreras-Reyes y Osses, 2010; Manríquez et al. 2014; McNutt y Menard, 1982). Esto tiene un efecto similar al primero ayudándonos a eliminar total o parcialmente los esfuerzos internos.

El cambio en la reología no fue explorado y se propone una línea de trabajo que conlleve el poder relajar las hipótesis del modelo elástico. Explotar el modelo 1D puede traer buenos frutos en el campo del estudio flexural y en el entendimiento de cómo la litósfera oceánica puede ser modelada como una barra delgada con pequeñas deformaciones respecto a su largo y su espesor, pero es sabido que al usar estas hipótesis los esfuerzos se sobre estiman (Capitanio et al. 2009; McAdoo et al. 1978). Por lo tanto se propone incorporar a la modelación procesos de deformación frágil-dúctil como lo han hecho ya varios autores (Buitter et al. 1998; Goetze y Evans, 1979; Hunter y Watts, 2016; McAdoo et al. 1978). Básicamente es un cambio en la forma en que se obtiene el momento de flexión $M(x)$, donde ya no es simplemente proporcional a la segunda derivada de w , sino que es obtenido de una integración numérica de los esfuerzos siguiendo un modelo de curva de resistencia o más bien conocida como *Yield Strength Envelope* (YSE). De esta forma se obtiene un momento de flexión total $M_{tot}(x)$ que nos entrega una rigidez efectiva que puede ser calculada de la forma (en donde se ha llevado al primer orden de aproximación): $D_{efe}(x) = M_{tot}/w''$. Esto nos permite recalcular la flexión usando como *input* esta nueva rigidez y así iterar el proceso hasta no percibir cambios significativos en la solución final. Usando esta metodología los esfuerzos se reducen y se encuentra un nuevo espesor elástico, menor que el que se consideraría con un modelo puramente mecánico. Lo anterior está representado en el siguiente esquema:

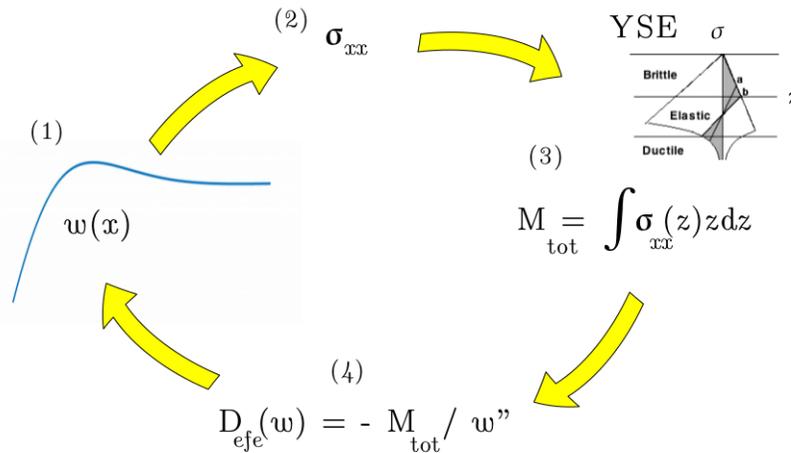


Figura 5.1: Esquema representativo de la incorporación de la curva de rendimiento (YSE). (1) Se obtiene una solución $w(x)$ con rigidez constante. (2) A partir de esto se calculan los esfuerzos internos en la placa σ_{xx} . (3) Usando un modelo de curva de rendimiento y los esfuerzos se obtiene mediante integración numérica el momento de flexión total M_{tot} . (4) Usando esto se calcula una nueva rigidez que en general es dependiente del espacio. Esta rigidez es utilizada para calcular una nueva solución $\bar{w}(x)$. Se itera el proceso hasta obtener convergencia.

5.2. Modelo de Contacto

En este trabajo de tesis se ha propuesto una forma de modelar la zona de contacto entre las litósferas oceánica y continental agregando un obstáculo (ver también el tratamiento vía fuerzas de contacto realizado en el Apéndice E). Vemos que al introducir una simple restricción a la ecuación de equilibrio para una placa en un dominio extendido, se genera una solución no trivial que puede ayudar a entender mejor la dinámica de un contacto. Se registró una dependencia a la forma que adopta el continente y un favorecimiento a un contacto de forma cóncavo cuando se permitió interacción entre los cuerpos. Al cambiar la forma de modelar introduciendo fuerzas de contacto en vez de la restricción, vemos una solución similar, con un contacto más débil y esfuerzos más elevados producto de la existencia de zonas de desacople entre las placas.

El modelo entrega un mapa de esfuerzos internos en la litósfera oceánica que es de interés cuando se quiera estudiar qué zonas estarían sobre máximos de tensión/compresión y que fallamiento uno esperaría dada la geometría y mecánica del contacto. Esto puede ser acompañado de un estudio sismológico y tectónico en la zona y específicamente dentro de la placa, obteniendo una retroalimentación valiosa para la validación, como lo hecho por García-Castellanos et al. (2000).

Una forma de vincular lo hecho en estas secciones con la primera parte de esta tesis es estudiar los máximos y mínimos del momento de flexión de la placa (o también llamado *bending moment*). En el caso analítico que se ha graficado para distintas intensidades de la fuerza horizontal en la Figura 2.2, vemos que por ejemplo, si las fuerzas horizontales pueden ser despreciables (es decir que $F \ll F_{max}$ o directamente $\gamma = 0$) el *bending moment* tendrá un punto de máximo y mínimo cercano a la fosa. Este valor puede ser calculado al buscar los ceros de la función $V = \frac{dM}{dx}$. Al realizar esto llegamos a una ecuación trascendental que puede ser analizada gráficamente. Si x^*/α es el punto crítico cercano a la fosa, este cumple con:

$$\tan(x^*/\alpha) = \frac{h(\beta^2\eta - \eta^3 + 2\beta^2\eta) + A(\beta\eta^2 - \beta^3 + 2\beta\eta^2)}{h(\beta\eta^2 - \beta^3 + 2\beta\eta^2) + A(-\beta^2\eta + \eta^3 - 2\beta^2\eta)} = \frac{h + A}{h - A} = -\frac{2h + \alpha \tan\theta}{\alpha \tan\theta} \quad (5.1)$$

En donde los factores η y β toman el valor unitario por ser el caso sin fuerzas horizontales y en este caso $A = \alpha \tan\theta + h$, es un factor que depende de las condiciones de borde. Para entender cómo se comporta este valor se ha calculado su posición para distintas variaciones de las condiciones de borde y espesor elástico, graficándose en la Figura 5.2. En el eje horizontal se grafica la posición del punto crítico y en el vertical (punto azul) el valor del parámetro variado según corresponda, coincidiendo con el mínimo del *bending moment*.

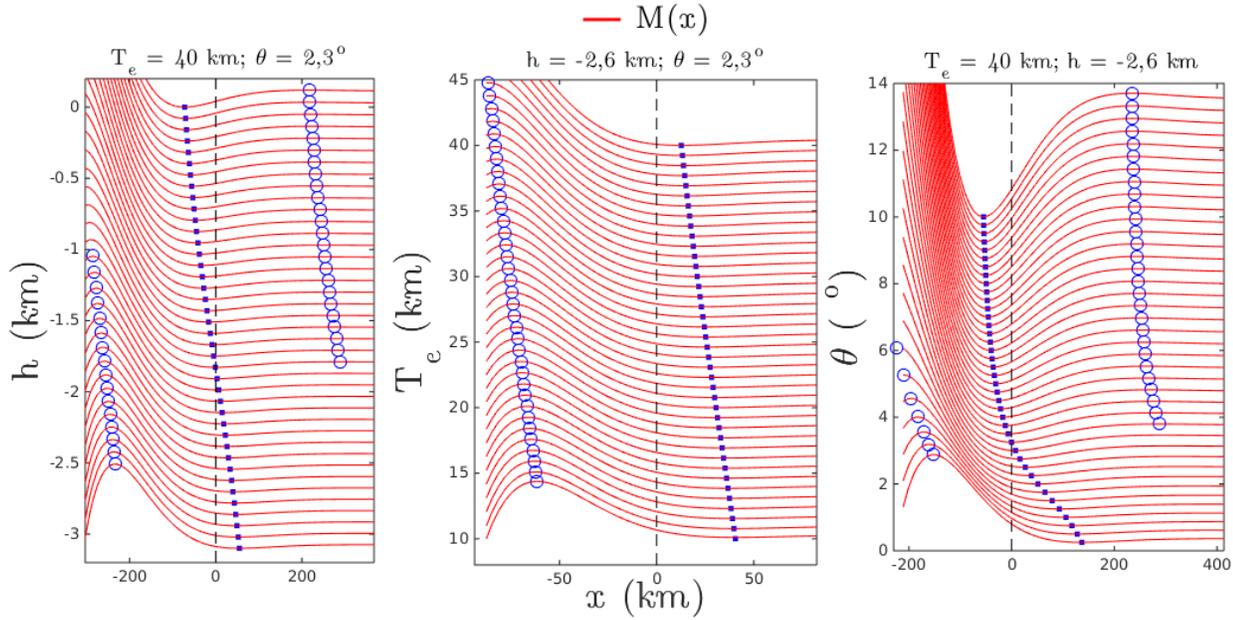


Figura 5.2: Puntos críticos (mínimos: puntos azules, máximos: círculos azules) para el *bending moment* generado por la solución analítica del Capítulo 2 con $\gamma = 0$. (Iz.) Se permite variación de la posición inicial h , (Cent.) se permite variación del espesor elástico T_e y (Der.) se permite variación del ángulo inicial de subducción θ . La altura de los puntos azules indican el valor del parámetro móvil. En líneas rojas se muestra la forma que adopta el *bending moment* en unidades normalizadas, producto de las variaciones de los parámetros.

Se puede apreciar que en la cercanía de la fosa siempre habrán un máximo y un mínimo, cambiando el orden en que aparecen según la elección de los parámetros. La distancia entre ellos es constante e igual a $\alpha\pi/2$, debido a la periodicidad de la función tangente de 5.1. Estos puntos serían zonas de máxima concentración de esfuerzos tensionales o compresionales, esperándose en ellos zonas de máximo fracturamiento acompañados de sismicidad inter e intraplaca.

Al estudiar el mínimo del *bending moment* (punto azul), vemos que este se mueve de forma similar al variar cada uno de los tres parámetros escogidos, es decir, como una función decreciente al aumentar la posición que se encuentra de el mínimo de la fosa. Es notable que solamente al variar el espesor, no existe intercambio de la posición en que aparece el mínimo y el máximo. Por otro lado la variación en el ángulo genera una cierta saturación al aumentar el ángulo sobre los 3° , por lo tanto, que el mínimo quede en la zona interplaca ($x < 0$) dependería de la variación de h y se daría en placas con una fosa no tan profunda, sino más bien con una profundidad menor que los 2 km (también podría darse con fosas más profundas pero con ángulos iniciales de subducción mayores).

También se muestra en cada caso el valor del momento o *bending moment*. De esto se puede ver la existencia de un máximo cercano a la fosa para placas más profundas ($h < -3 \text{ km}$). Esto mostraría que placas con una fosa suficientemente profunda tendrían un rápido cambio

de curvatura en la zona interplaca. Esto fue también visto en los modelos de contacto del Capítulo 3. Vemos también que al aumentar el ángulo inicial de subducción se genera un cada vez mayor máximo en la zona tras la fosa, por lo que placas muy empinadas al subducir tendrían mayor fallamiento en la zona del *Outer-rise*. Por último al variar el espesor vemos un comportamiento mas monótono en el *bending moment*. Tan sólo vemos que para placas menos rígidas, el punto crítico se aleja de la fosa de forma proporcional. Podríamos interpretar que de acuerdo al modelo elástico, placas más rígidas tenderían a acumular mucha energía por la deformación en la fosa y no así las con menor espesor.

A manera de ejemplo se toma la combinación de parámetros: $h = -2,6 \text{ km}$, $\theta = 2,3^\circ$ y $T_e = 40 \text{ km}$. Al evaluar esto en el momento crítico se obtuvo un valor de $M_{crit} = -3,2 \times 10^{16} \text{ N}$ en aproximadamente $x/\alpha = 0,4$, que generaría un esfuerzo máximo de acuerdo con la Ecuación 3.3 de $\sigma_{max} = -0,9 \text{ GPa}$, de carácter tensional como era de esperarse en la parte superior de la litósfera oceánica. Por otro lado al estudiar las soluciones para los esfuerzos obtenidas al utilizar un obstáculo elástico en la sección 3.3, se obtuvo algo similar, con un máximo de tensión en la zona interplaca, tan sólo que el valor es algo mayor y cercano a los -6 GPa , pero se mantiene del mismo orden. Lo sorprendente que la teoría 1D sin considerar el obstáculo predice un máximo en las cercanías de la fosa que no es tan alejado de los que se dan al introducir un obstáculo ficticio que pueda caracterizar la geometría del contacto en esa zona.

Un asunto que también se generó pero ahora al estudiar como fueron las distribuciones de esfuerzos para el obstáculo elástico del Capítulo 3, en 3.3, fue la movilidad que sufrió el máximo de esfuerzo cercano a la fosa. Esto puede visualizarse al ver los mínimos y su variación al cambiar el espesor elástico de la Figura 3.9. Al analizar los cambios en la forma de los esfuerzos vemos que para poco espesor existen dos mínimos y ellos pasan a ser uno al aumentar el espesor de la litósfera. Es decir al aumentar el espesor (y por consecuencia el largo característico α) la placa se vuelve menos propensa a mantener esfuerzos localizados sino que favorece su propagación a todo el sistema, lo que es esperable también a partir de los resultados del Capítulo 4.

La extensión 2D expuesta en el Capítulo 4 en primera instancia no mostró cualitativamente nada novedoso, sino más bien abrió las puertas a una modelación más potente, pudiendo estudiar el problema de una placa en presencia de un obstáculo en distintos dominios y con diversas geometrías, dándole al problema un carácter más versátil y adaptable a futuras investigaciones del comportamiento de la litósfera oceánica. Por otro lado, se propone también la implementación de un modelo de fuerzas de contacto 2D, como el planteado en el Apéndice E, pudiendo tener el método de elementos finitos un caracter más robusto que el de diferencias finitas en este tema, permitiendo mejores resultados que los expuestos aquí para el caso unidimensional.

Un factor no considerado en este trabajo fue el permitir variación de los parámetros elásticos con la profundidad, pues como es sabido el módulo de Young depende de la densidad de la roca, la velocidad de la onda P y la razón de Poisson. Es sabido que en zonas donde

el *bending moment* es máximo, existe mayor fallamiento y por lo tanto existe infiltración de fluidos, disminución de la velocidad de la onda P (Christensen, 1996; Contreras-Reyes et al. 2008) y disminución de la densidad del manto (Ranero y Sallares, 2004). Por otro lado el espesor elástico para la litósfera oceánica fue tan sólo exploratorio y no provino de ningún análisis más exhaustivo ni que involucrara factores tectónicos o geólogos. Una línea futura interesante sería asociar esto a algún régimen termal o introduciendo como un factor para la modelación la edad de la placa, pues cómo también es sabido, la placa al pasar el tiempo se vuelve cada vez más rígida (Billen y Gurnis, 2005).

5.3. Conclusiones

Se ha indagado en el alcance de los modelos 1D para la flexión de la litósfera oceánica encontrando distintas formas de modelar y poder ajustarse a perfiles batimétricos. Las soluciones analíticas sirvieron como una primera aproximación para entender el comportamiento a nivel cualitativo de la flexión y su *Outer-rise*. Se exploraron las condiciones de borde y su posible equivalencia.

Las fuerzas horizontales no pueden ser descartadas del todo sino más bien buscar en el futuro una modelación mixta que las considere y también permita variación en la rigidez por factores geológicos. El sistema posee distinta sensibilidad frente a cargas y fuerzas horizontales, siendo estas últimas las que afectan de mayor manera a la flexión. Esto pone a prueba la hipótesis de pequeñas deformaciones (comparadas con el espesor y largo del sistema) y que la fuerza es simplemente proporcional al gradiente de la profundidad (factor $F\nabla w$ que aparece en la ecuación). Se propone estudiar esto desde un modelo menos simplificado que no considere esta simplificación como las ecuaciones de Föppl-von Kármán, ecuaciones no lineales que describen el equilibrio de placas y barras fuertemente deformadas. (Föppl, 1907; Kármán, 1910).

Por último el efecto de una restricción en la ecuación que modele un obstáculo ha sido ampliamente estudiado, permitiendo interacción entre los cuerpos y ampliando la modelación a \mathbb{R}^2 usando elementos finitos. Se ha visto acuerdo con la modelación 1D y un comportamiento más bien genérico que es propio del modelo: un favorecimiento de una geometría cóncava y un máximo de esfuerzo tensional cercano a la fosa.

Apéndice A

Elasticidad lineal

A.1. Elasticidad lineal

El uso de la elasticidad lineal ha sido uno de los principales focos de atención en este tipo de problemas, pues nos dan una aproximación de primer orden al problema de flexión de placas, que suele ser bastante acorde con las observaciones, pues sus hipótesis atingen de buena manera las condiciones que se dan en la deformación de la litósfera oceánica. Esta estudia la mecánica de cuerpos sólidos considerándolos como un continuo y fue desarrollada por Cauchy y Poisson en la década del 1820. En esta sección mostraremos los principales resultados de la teoría de elasticidad lineal.

A.1.1. Deformación

Consideremos un sólido en que sus partículas pueden ser rotuladas mediante su vector posición \vec{r} , con el origen de coordenadas en algún lugar arbitrario. Podemos decir que al deformarse, todas sus partículas cambian de posición a unas nuevas, rotuladas mediante \vec{r}' . Definimos el vector desplazamiento:

$$\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r} \tag{A.1}$$

Notar que una vez efectuada la deformación, la distancia entre las partículas cambia. Si consideramos dos partículas infinitesimalmente separadas antes de la deformación, la distancia entre ellas es de $dl = \sqrt{dx_i dx_i}$, en donde se ha usado la convención de índices repetidos de Einstein.¹ Una vez realizada la deformación, la nueva distancia entre estas partículas será de $dl' = \sqrt{dx'_i dx'_i}$, que diferenciando la ecuación A.1 y elevando al cuadrado obtenemos:

¹De acuerdo a esta notación tenemos que $u_i v_i = \sum_{i=1}^N u_i v_i$. Esta notación fue introducida por primera vez en 1916 por Albert Einstein.

$$dl'^2 = dx_i'^2 = (du_i - dx_i)^2 = du_i^2 + 2du_i dx_i + dx_i^2$$

$$dl'^2 = dl^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} dx_j dx_k$$

Escribiendo el segundo término como $(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) dx_i dx_j$, podemos finalmente escribir

$$dl'^2 = dl^2 + 2\varepsilon_{ij} dx_i dx_j$$

En donde se intercambi6 indices k con i en el tercer sumando. El tensor de segundo orden simétrico ε_{ij} es llamado tensor de deformaci6n y se define:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (\text{A.2})$$

Al trabajar bajo el supuesto de elasticidad lineal, consideramos tan s6lo peque6os desplazamientos entre las part6culas, por lo que podemos despreciar el 6ltimo t6rmino.

Podemos definir la transformaci6n χ que lleva las coordenadas antiguas del s6lido a las coordenadas nuevas. Este debe ser: $\vec{r}' = \chi(\vec{r}) = \vec{r} + \vec{u}$, por lo que si queremos estudiar el nuevo elemento de volumen, debemos ver el valor absoluto del jacobiano de esta transformaci6n. Lo anterior es equivalente a:

$$\left| \frac{\partial x'_i}{\partial x_i} \right| = \left| 1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right| = |1 + tr(\varepsilon)|$$

En donde $tr(\varepsilon)$ corresponde a la traza del tensor. Entonces el elemento de volumen para el nuevo s6lido es $dV' = dV(1 + tr(\varepsilon))$, de donde viene que si el tensor de deformaci6n tiene traza nula, la deformaci6n no afecta el volumen, sino que tan s6lo su forma (transformaci6n isoc6rica).

A.1.2. Esfuerzos

Consideremos un s6lido como el de la figura A.1, bajo el efecto de fuerzas volumétricas f_i y bajo fuerzas de superficie, tambi6n llamadas tracciones $T_i^{(n)}$, que dependen de la normal exterior al cuerpo.

Haciendo un balance de fuerzas en el s6lido tenemos para la componente i -ésima:

$$F_i = \int_V f_i dV + \int_{\partial V} T_i^{(n)} dA$$

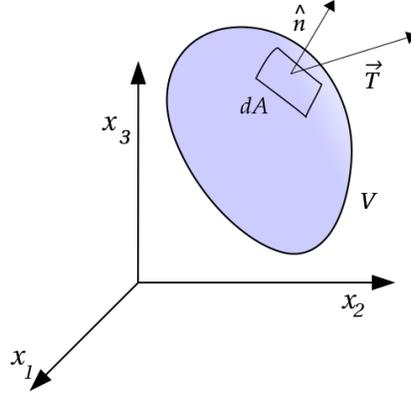


Figura A.1: Cuerpo continuo en cual se calculan las fuerzas de superficie dadas por $\sigma \hat{n}$ y las fuerzas volumétricas dadas por f_i

Puesto que las tracciones dependen del sistema coordenado que estamos usando, podemos definir un elemento más fundamental, σ , independiente del sistema de referencias, el cuál es llamado tensor de esfuerzos de Cauchy, que cumple la relación:

$$\vec{T}^{(n)} = \sigma \hat{n} \quad (\text{A.3})$$

Por lo que tenemos:

$$F_i = \int_V f_i dV + \int_{\partial V} \sigma_{ij} n_j dA$$

$$F_i = \int_V f_i dV + \int_V (\nabla \cdot \sigma)_i dV$$

En donde se usó el teorema de la divergencia para escribir el segundo término y se ha tomado la divergencia por filas del tensor de esfuerzos. En caso de que el sólido esté en equilibrio, la fuerza total de cada elemento de volumen debe ser nula, por lo que debe cumplirse que el integral debe ser nula para cualquier volumen. Lo anterior se cumple si se tiene:

$$f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{A.4})$$

La Ecuación A.4 es la ecuación fundamental para la elastoestática, y permite encontrar la configuración de equilibrio de un sólido en presencia de una fuerza externa \vec{f} arbitraria. Además se puede demostrar que si imponemos momento nulo sobre el sólido, es decir, el momento total es cero (despreciando cualquier efecto de rotación), el tensor de esfuerzos debe ser simétrico:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

A.1.3. Elasticidad

Llamamos relación constitutiva a todo vínculo entre dos cantidades termodinámicas o mecánicas, que tan sólo depende de la organización molecular interna, no deducible de principios universales ni de algún principio de conservación. De esta manera podemos relacionar esfuerzos con deformación, asumiendo el comportamiento global del cuerpo y su respuesta física.

El supuesto de elasticidad lineal será el de considerar que los esfuerzos son la causa directa de la deformación y que además se relacionan de manera lineal de la forma:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (\text{A.5})$$

La ecuación A.5 se conoce como ley generalizada de Hooke, en honor a Robert Hooke (1635 – 1703) y a su trabajo en elasticidad. El elemento C_{ijkl} es un tensor de cuarto orden que posee en principio 81 componentes independientes. Este conecta linealmente los esfuerzos con deformación. Usando argumentos de simetría de los tensores ε y σ , además de conservación de la energía, podemos reducir las constantes a 21 independientes. Por último usando la hipótesis de que estamos en un sólido isótropo, podemos reducir las constantes a tan sólo dos. De esta forma podemos escribir:

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (\text{A.6})$$

En donde el tensor δ_{ij} es la llamada delta de Kronecker y es el tensor identidad de segundo orden. Además, las constantes λ y μ son llamadas constantes de Lamé, en donde la primera tendrá su importancia en las deformaciones volumétricas y la segunda en las deformaciones por cizalle.

Al invertir la ecuación A.6 se obtiene:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}[(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}] \quad (\text{A.7})$$

En donde E es el módulo de Young y ν es la razón de Poisson. La relación con las constantes de Lamé viene dada por:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad E = \frac{(3\lambda + 2\mu)\mu}{\lambda + \mu}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (\text{A.8})$$

Apéndice B

Modelo de Kirchhoff-Love

B.0.1. Principio variacional

En esta parte se quiere deducir las ecuaciones que gobiernan el equilibrio para una placa delgada (o barra para el caso unidimensional) a partir de la teoría de la elasticidad lineal descrita en el Apéndice A. Consideraremos una placa de espesor T_e y de dimensiones mayores en su ancho y largo, por lo que la placa define un dominio $\Omega = (-\frac{T_e}{2}, \frac{T_e}{2}) \times L$, con $L \in \mathbb{R}^2$.

Cuando decimos que una placa es delgada quiere decir que su espesor es mucho menor comparado con las otras dimensiones de la placa. Considerando deformaciones pequeñas, podemos inferir que los desplazamientos en la placa también son pequeños en comparación con su espesor. La estrategia para obtener sus ecuaciones será el de encontrar la energía dentro de la placa y plantear un principio de mínima energía para ella (Landau y Lifshitz, 1986).

Cuando una placa se deforma, surgen dentro de ella tanto compresiones como tensiones. Así, en la cara cóncava de la placa surgirá una compresión y a medida de que se profundiza, esta compresión irá disminuyendo y apareciendo continuamente una dilatación en el material. Dado lo anterior y por continuidad de los esfuerzos, deberá existir entonces dentro de la placa una fibra tal que en ella no existan ni dilataciones ni compresiones, esto es llamado la superficie neutra, la cuál se representa en la Figura B.1

Por comodidad se elije un sistema de coordenadas con origen en algún punto de la superficie neutra y su eje z perpendicular a ella, de esta manera el plano xy coincide con el plano de la placa sin deformar. Llamando w al desplazamiento vertical de los puntos del plano, podemos suponer, asumiendo pequeñas deformaciones, que los puntos de la superficie neutra tan sólo poseen desplazamiento vertical, y todo otro desplazamiento en el plano xy es de segundo orden en comparación a w . Es decir:

$$u_x = 0 \quad , \quad u_y = 0 \quad , \quad u_z = w(x, y)$$

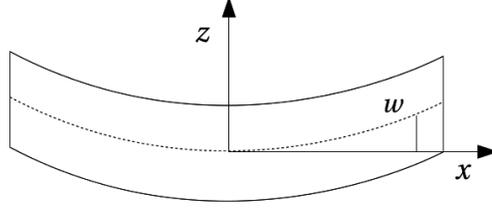


Figura B.1: Superficie neutra (línea punteada) para una placa deformada. En la cara superior tenemos una compresión y en la cara inferior una tensión. Por continuidad de esfuerzos, debe existir un plano que no se ha deformado.

Ahora, como la placa es delgada, podemos suponer además que para deformarla se necesita de pequeñas fuerzas, comparadas con las fuerzas internas que surgen en la placa. De esta forma podemos despreciar el término f_i de la ecuación A.4, resultando $\sigma_{ij}n_j = 0$ en ambas caras de la placa. Notar que si la placa se deforma poco, podemos asumir que $\hat{n} = \hat{z}$. Por último, considerando que el espesor es pequeño, podemos asumir que lo último se cumple también dentro de la placa, es decir, esas componentes son despreciables en comparación a las otras componentes de σ , esto es:

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (\text{B.1})$$

Usando la Ecuación A.6 para estas componentes se obtiene:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= 2\mu\varepsilon_{xz} & \sigma_{yz} &= 2\mu\varepsilon_{yz} \\ \sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz} + 2\mu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Y anulando estas componentes de acuerdo a la condición B.1 se obtiene:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (\text{B.3})$$

Para estas dos primeras condiciones, usando la hipótesis B.0.1, podemos reemplazar u_z por $w(x, y)$. Integrando se obtiene:

$$u_x = -z\frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_y = -z\frac{\partial w}{\partial y}$$

Las constantes de integración se toman nulas para cumplir B.0.1. Conociendo estas dos componentes, podemos determinar todas las componentes del tensor de deformación ε :

$$\varepsilon_{xx} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \varepsilon_{xy} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0, \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu}z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \quad (\text{B.4})$$

Puesto que ya tenemos el tensor de deformación, tenemos que buscar la forma que tendrá la energía acumulada en la placa debido a esta deformación. Puesto que ella debe ser un escalar, tan sólo podemos formar dos escalares independientes a partir de un tensor simétrico ε_{ij} , que son el cuadrado de la suma de sus componentes, y el cuadrado de su traza, por lo que la densidad de energía en la placa tendrá la forma:

$$e = \frac{E}{2(1+\nu)}\left\{\varepsilon_{ij}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}^2\right\} \quad (\text{B.5})$$

En donde los factores usados son por convención. Integrando la densidad en el dominio Ω y reemplazando las componentes de acuerdo a B.4 obtenemos la energía total acumulada en la placa (ver Landau y Lifshitz, (1986)):

$$E[w] = \int_{\Omega} z^2 \frac{E}{1+\nu} \left\{ \frac{1}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} \quad (\text{B.6})$$

Integrando z desde $-\frac{T_e}{2}$ hasta $\frac{T_e}{2}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} E[w] &= \frac{ET_e^3}{24(1-\nu^2)} \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

En donde se ha descompuesto la energía en dos integrales que se tratarán por separado.

Una vez integrado en z , se puede considerar la placa sin espesor y tan sólo como una superficie geométrica porque sólo interesa la forma que toma bajo la acción de las fuerzas y no la distribución de deformaciones dentro de la placa. Además w será el desplazamiento de los puntos de la placa considerada como una superficie.

Resta ahora variar esta expresión para encontrar la ecuación que debe satisfacer la configuración que minimiza la energía. Hacemos esto por etapas:

$$\delta \int_{\Omega} (\Delta w)^2 dx dy = 2 \int_{\Omega} \Delta w \Delta \delta w dx dy = 2 \int_{\Omega} \text{div}(\Delta w \nabla \delta w) dx dy - 2 \int_{\Omega} \nabla \Delta w \cdot \nabla \delta dx dy$$

En donde se integró por partes y se utilizó que $\Delta = \text{div}(\nabla)$. La primera integral del último miembro puede ser escrita en términos de una integral de línea de la forma:

$$\int_{\Omega} \text{div}(\Delta w \nabla \delta w) \, dx dy = \int_{\partial\Omega} \Delta w (\hat{n} \cdot \nabla \delta w) \, dl = \int_{\partial\Omega} \Delta w \frac{\partial \delta w}{\partial n} \, dl$$

Ahora la segunda integral puede ser escrita de la forma:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \Delta w \cdot \nabla \delta w \, dx dy &= \int_{\Omega} \nabla(\nabla \Delta w \delta w) \, dx dy - \int_{\Omega} \delta w \Delta^2 w \, dx dy \\ &= \int_{\partial\Omega} \delta w (\hat{n} \cdot \nabla) \Delta w \, dl - \int_{\Omega} \delta w \Delta^2 w \, dx dy \\ &= \int_{\partial\Omega} \delta w \frac{\partial \Delta w}{\partial n} \, dl - \int_{\Omega} \delta w \Delta^2 w \, dx dy \end{aligned}$$

En donde se llamó $\Delta^2 = \text{div}(\nabla(\Delta))$, el operador bilaplaciano. Resumiendo estos resultados para I_1 , podemos escribir la variación de la energía como la variación de los dos términos:

$$\begin{aligned} \delta E &= \delta I_1 + \delta I_2 = \delta \frac{D}{2} \int (\Delta w)^2 + \delta \int 2(1 - \nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ &= D \int_{\Omega} \delta w \Delta^2 w \, dx dy - \int_{\partial\Omega} \delta w \frac{\partial D \Delta w}{\partial n} \, dl + \int_{\partial\Omega} D \Delta w \frac{\partial \delta w}{\partial n} \, dl + \delta I_2 \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

En donde se ha definido $D \equiv \frac{ET_e^3}{12(1 - \nu^2)}$, el cuál es llamado rigidez y tendrá suma importancia en los análisis posteriores. Este parámetro nos indicará con qué facilidad una placa puede deformarse y cuanta distancia es capaz de propagar un esfuerzo dado.

El segundo término δI_2 para variar puede ser escrito de la forma:

$$\delta \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \, dx dy = \int_{\Omega} \left\{ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \, dx dy$$

De acuerdo a Landau y Lifshitz, (1986) el integrando se puede escribir como la divergencia de un vector \vec{A} de la forma:

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \delta w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

Por lo que la variación anterior puede ser escrita mediante una integral de borde usando nuevamente el teorema de la divergencia:

$$\delta I_2 = \int_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\partial\Omega} \left\{ \frac{\partial\delta w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial\delta w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} n_x dl + \int_{\partial\Omega} \left\{ \frac{\partial\delta w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial\delta w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} n_y dl$$

Una forma mas simple de trabajar con esta expresión es usando derivadas respecto al contorno, es decir, usando derivadas respecto a la coordenada normal y tangencial del contorno. De esta forma podemos modificar las derivadas respecto a x e y que se efectúan a δw , y dejarlas en función de n y t usando:

$$\frac{\partial}{\partial x} = n_x \frac{\partial}{\partial n} + t_x \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = n_y \frac{\partial}{\partial n} + t_y \frac{\partial}{\partial t}$$

Finalmente usando que $\hat{n} = (n_1, n_2)$ y que $\hat{t} = (-n_2, n_1)$ e integrando por partes podemos escribir este término de la forma:

$$\begin{aligned} \delta I_2 &= (1 - \nu) \int_{\partial\Omega} \left(2n_1 n_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - n_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - n_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial\delta w}{\partial n} dl + \\ &(1 - \nu) \int_{\partial\Omega} \left((n_1^2 - n_2^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - n_1 n_2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right) \frac{\partial\delta w}{\partial t} dl \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Por otro lado, podemos simplificar la notación usando que nos referiremos a dominios suaves tal que podamos conmutar las derivadas normales con las tangenciales, de esta forma (ver Sweers, (2009)):

$$\begin{aligned} 2n_1 n_2 u_{xy} - n_2^2 u_{xx} - n_1^2 u_{yy} &= u_{nn} - \Delta u \\ (n_1^2 - n_2^2) u_{xy} - n_1 n_2 (u_{xx} - u_{yy}) &= u_{tn} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Además de:

$$\int_{\partial\Omega} w_{tn} \delta w_t dl = - \int_{\partial\Omega} w_{ttn} \delta w dl \quad (\text{B.11})$$

En donde se ha utilizado que $w_\mu = \frac{\partial w}{\partial \mu}$ para simplificar la notación. De esta forma escribimos:

$$\delta I_2 = \int_{\partial\Omega} (1 - \nu) (u_{nn} - \Delta u) \frac{\partial\delta w}{\partial n} dl - \int_{\partial\Omega} (1 - \nu) u_{ttn} \delta w dl$$

En este punto faltaría agregar a la variación de la energía, la variación que producen las fuerzas externas a la placa en forma de trabajo. Sea q las fuerzas externas por unidad de área

en la dirección normal a la superficie, que actúan en la placa. Entonces el trabajo virtual que estas realizan frente a una perturbación δw es:

$$\delta W = - \int_{\Omega} q \delta w \, dx dy \quad (\text{B.12})$$

De esta forma sumando todas las variaciones δE y δW e igualando a cero, pues la solución de equilibrio debe ser un extremo de este funcional, debe cumplirse que (se ha dividido por el factor común D en δE):

$$\int_{\Omega} \left(\Delta^2 w - \frac{q}{D} \right) \delta w \, dx dy + \int_{\partial\Omega} \left(\nu \Delta w + (1-\nu) \partial_{nn} w \right) \frac{\partial \delta w}{\partial n} \, dl - \int_{\partial\Omega} \left((1-\nu) \partial_{tn} w + \frac{\partial \Delta w}{\partial n} \right) \delta w \, dl = 0 \quad (\text{B.13})$$

Como la variación debe ser nula para cualquier perturbación a la posición de equilibrio δw y su derivada normal $\frac{\partial \delta w}{\partial n}$, obtenemos las ecuaciones que gobiernan la placa anulando los integrandos. Las condiciones de borde del problema están dadas al anular las integrales de contorno, de modo que vale la pena detallar un poco más esta última parte.

B.0.2. Condiciones de Borde

Las condiciones más usadas para los problemas de elasticidad en placas y barras, en donde la flexión es representada por w , son las siguientes:

- a) Extremos fijos: tanto la flexión como su derivada normal son nulas. También son conocidas como condiciones tipo Dirichlet. En un caso unidimensional con dominio (a, b) y homogéneo tenemos:

$$w(a) = w'(a) = 0$$

- b) Tipo bisagra: tanto la flexión como su segunda derivada (proporcional a la curvatura) son nulas. Es decir la placa tiene momento nulo en el borde, permitiéndole así girar libremente sin flectarse, en un punto fijo. En un caso unidimensional con dominio (a, b) y homogéneo tenemos:

$$w(a) = w''(a) = 0$$

- c) Extremo libre: tanto la segunda derivada como la tercera son nulas. También conocidas como condiciones tipo Neumann. En un caso unidimensional con dominio (a, b) y homogéneo tenemos:

$$w''(a) = w'''(a) = 0$$

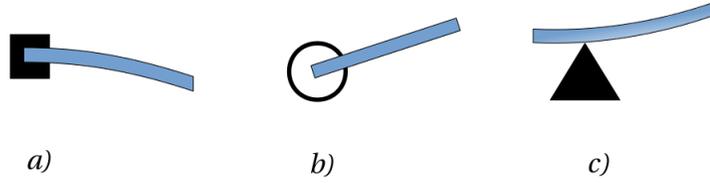


Figura B.2: Condiciones de borde más usadas para el problema de placas: a) bordes fijos, b) bordes tipo bisagra y c) bordes libres

B.0.3. Ecuaciones de equilibrio

Siguiendo el principio de mínima energía, encontramos las ecuaciones deseadas al anular los integrandos de B.13. Por lo que la ecuación para placas en todo el dominio es:

$$D\Delta^2 w - q = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (\text{B.14})$$

Para tratar el tema de las condiciones de borde, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\partial\Omega$ se puede descomponer en 3 tipos de curvas Γ_1 , Γ_2 y Γ_3 de manera que ambas cumplan respectivamente las condiciones de borde antes mencionadas, por lo que podemos descomponer el borde de la forma: $\partial\Omega = \cup_{i=1}^3 \Gamma_i$. Separamos por casos y sólo tratamos el caso homogéneo, pues siempre podemos transformar el problema a uno de este tipo (estas condiciones de borde son una generalización del caso unidimensional):

a) Γ_1 (Caso Dirichlet) : tanto u como su derivada normal deben anularse.

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{en } \Gamma_1 \quad (\text{B.15})$$

b) Γ_2 (Caso Bisagra): la perturbación δw es nula, por lo que debe anularse en este borde:

$$w = \Delta w + (1 - \nu)\partial_{nn}w = 0 = 0 \quad \text{en } \Gamma_2 \quad (\text{B.16})$$

Podemos también escribir el segundo término en función de la curvatura con signo ¹ del borde, κ , usando que en el borde de Γ_2 se cumple que (para mayor discusión ver Destuynder y Salaun, (1996)):

$$\Delta u = \partial_{nn}u + \kappa\partial_n u \quad (\text{B.17})$$

Por lo que podemos escribir de manera más simple:

¹Para una curva parametrizada por t de la forma $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, la curvatura con signo es:

$$\kappa = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

$$\Delta w - (1 - \nu)\kappa\partial_n w = 0 \quad (\text{B.18})$$

c) Γ_3 (Caso Neumann): ninguna perturbación en principio debe ser nula, por lo que deben anularse las siguientes expresiones:

$$\Delta w - (1 - \nu)\kappa\partial_n w = 0 \quad (\text{B.19})$$

$$\partial_n \Delta w + (1 - \nu)\partial_{ttn} w = 0 \quad (\text{B.20})$$

Resumiendo podemos escribir el modelo de Kirchhoff-Love para la flección de la placa de la forma:

$$\mathcal{P}_{\kappa\mathcal{L}} \begin{cases} \Delta^2 w = q & \text{en } \Omega \\ u = \partial_n u = 0 & \text{en } \Gamma_1 \\ u = \Delta w - (1 - \nu)\kappa\partial_n w = 0 & \text{en } \Gamma_2 \\ \Delta u - (1 - \nu)\kappa\partial_n w = \partial_n \Delta w - (1 - \nu)\partial_{ttn} w = 0 & \text{en } \Gamma_3 \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

Si se tiene un dominio poligonal, es decir de bordes rectos donde la curvatura es nula, podemos escribir de manera simplificada las ecuaciones para la placa:

$$\mathcal{P}'_{\kappa\mathcal{L}} \begin{cases} \Delta^2 w = q & \text{en } \Omega \\ u = \partial_n u = 0 & \text{en } \Gamma_1 \\ u = \Delta w = 0 & \text{en } \Gamma_2 \\ \Delta u = \partial_n \Delta w = 0 & \text{en } \Gamma_3 \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

B.0.4. Modelo con rigidez variable y fuerzas horizontales

Finalmente se puede agregar al modelo el efecto de una fuerza horizontal F afectando las ecuaciones y la energía de la placa, además de un espesor elástico variable, afectando así fuertemente el valor de la rigidez de la placa. Esto ha sido estudiado y usado necesariamente para el caso de la modelación de la placa en la cercanía de la fosa (Contreras-Reyes y Osses, 2010; Manríquez et al. 2014). Se puede demostrar que al escribir las nuevas ecuaciones estas son (ver Caldwell et al. (1976) y Turcotte y Schubert, (2002)):

$$\Delta(D\Delta w) + \text{div}(F\nabla w) = q \quad \text{en } \Omega \quad (\text{B.23})$$

En donde se ha escrito considerando también posibles variaciones en la rigidez D . Agregando las condiciones de borde y considerando de aquí en adelante tan solo dominios poligonales, estas se modifican de la forma:

$$u = \partial_n u = 0 \quad \text{en } \Gamma_1$$

$$u = M = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_2$$

$$M = V = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_3$$

En donde se han definido las cantidades: $M = -D\Delta w$ como el momento de la placa o *bending moment* y $V = \partial_n M - F\partial_n w$ como la fuerza interna de cizalle o *shear force*. En conclusión, la teoría aquí expuesta es la estándar para determinar la posición de equilibrio tanto de placas como barras en un régimen de elasticidad lineal.

Apéndice C

Solución Analítica de la ecuación de placas 1D

Se quiere resolver analíticamente el problema de la flexión de una placa $w(x)$ unidimensional con coeficientes constantes modelada por:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + F \frac{d^2 w}{dx^2} + \Delta \rho g w = q(x) \quad (\text{C.1})$$

Donde D es el parámetro flexural: $D = \frac{ET_e^3}{12(1-\nu^2)}$, F es la fuerza horizontal, $\Delta \rho$ es el contraste de densidad, g es la aceleración de gravedad y $q(x)$ es la carga sobre la placa. Para simplificar el problema asumimos $q = 0$, y dividiendo por $\Delta \rho g$ podemos escribir la ecuación anterior de la forma:

$$\frac{D}{\Delta \rho g} \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{F}{\Delta \rho g} \frac{d^2 w}{dx^2} + w = 0 \quad (\text{C.2})$$

Una forma de simplificar la notación es normalizar el espacio haciendo el cambio de variable independiente: $x \rightarrow \chi \cdot \sqrt[4]{\frac{D}{\Delta \rho g}}$, por lo que $dx = d\chi \cdot \sqrt[4]{\frac{D}{\Delta \rho g}}$, resultando la ecuación:

$$\frac{d^4 w}{d\chi^4} + \frac{F}{(\Delta \rho g D)^{1/2}} \cdot \frac{d^2 w}{d\chi^2} + w = 0$$

Definiendo la fuerza adimensional $\gamma = \frac{F}{(4\Delta \rho g D)^{1/2}}$, la ecuación normalizada finalmente resulta:

$$\frac{d^4 w}{d\chi^4} w + 2\gamma \cdot \frac{d^2 w}{d\chi^2} + w = 0 \quad (\text{C.3})$$

Sujeto a las condiciones de Borde: $w(0) = h$, $\frac{dw}{d\chi}(0) = \tan(\theta) \sqrt[4]{\frac{D}{\Delta \rho g}}$, $w(\infty) = 0$ y $\frac{dw}{d\chi}(\infty) = 0$. Buscamos soluciones del tipo: $w(\chi) = \Phi(\chi) + \Omega(\chi) = e^{n\chi} \cos(\beta\chi) + e^{n\chi} \sin(\beta\chi)$, por lo que derivando estas últimas expresiones:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\chi^2}\Phi &= \eta^2 e^{\eta\chi} \cos(\beta\chi) - 2\eta\beta e^{\eta\chi} \sin(\beta\chi) - \beta^2 e^{\eta\chi} \cos(\beta\chi) \\ \frac{d^2}{d\chi^2}\Omega &= \eta^2 e^{\eta\chi} \sin(\beta\chi) + 2\eta\beta e^{\eta\chi} \cos(\beta\chi) - \beta^2 e^{\eta\chi} \sin(\beta\chi)\end{aligned}$$

y las cuartas derivadas:

$$\frac{d^4}{d\chi^4}\Phi = \eta^4 e^{\eta\chi} \cos(\beta\chi) - 4\eta^3 \beta e^{\eta\chi} \sin(\beta\chi) - 6\eta^2 \beta^2 e^{\eta\chi} \cos(\beta\chi) + 4\eta \beta^3 e^{\eta\chi} \sin(\beta\chi) + \beta^4 e^{\eta\chi} \cos(\beta\chi)$$

$$\frac{d^4}{d\chi^4}\Omega = \eta^4 e^{\eta\chi} \sin(\beta\chi) + 4\eta^3 \beta e^{\eta\chi} \cos(\beta\chi) - 6\eta^2 \beta^2 e^{\eta\chi} \sin(\beta\chi) - 4\eta \beta^3 e^{\eta\chi} \cos(\beta\chi) + \beta^4 e^{\eta\chi} \sin(\beta\chi)$$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación y agrupando los términos se tiene:

$$e^{\eta x} \cos(\beta x) \mathbf{P}(\eta, \beta) + e^{\eta x} \sin(\beta x) \mathbf{Q}(\eta, \beta) = 0$$

En donde \mathbf{P} y \mathbf{Q} son polinomios que deben anularse simultáneamente. Imponiendo esto se obtienen las siguientes ecuaciones para los parámetros:

1. $8\eta^3\beta - 8\eta\beta^3 + 8\gamma\eta\beta = 0$
2. $\eta^4 - 6\eta^2\beta^2 + \beta^4 - 2\gamma^2 + 1 = 0$

Se obtiene una ecuación bicuadrática para β que determina el valor de η . Las soluciones son:

$$\beta = \pm \sqrt{\frac{\gamma \pm 1}{2}} \tag{C.4}$$

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{1 - \gamma}{2}} \tag{C.5}$$

Esto implica que la solución tiene la forma

$$\begin{aligned}w(x) &= Ae^{\sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}x} \cos\left(\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}x\right) + Be^{\sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}x} \sin\left(\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}x\right) + \\ &Ce^{-\sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}x} \cos\left(\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}x\right) + De^{-\sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}x} \sin\left(\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}x\right)\end{aligned}$$

Puesto que la solución y su derivada en $x = +\infty$ se anulan, los coeficientes A y B deben también anularse. Ahora usamos la condición de $w(0) = h$, por lo que:

$$C = h$$

Usando la condición de: $\frac{dw}{d\chi} = \tan(\theta) \sqrt[4]{\frac{D}{\Delta\rho g}}$ se tiene:

$$-\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot h + \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot D = \tan(\theta) \frac{D}{\Delta\rho g}$$

De donde se obtiene fácilmente el coeficiente D . La solución finalmente en un espacio normalizado es:

$$w(\chi) = \left\{ h \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}\chi\right) + \left(\tan(\theta) \sqrt[4]{\frac{D}{\Delta\rho g}} \sqrt{\frac{2}{1+\gamma}} + \sqrt{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}} h \right) \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}\chi\right) \right\} e^{-\sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}\chi}$$

Finalmente usando los coeficientes $\eta = \sqrt{1-\gamma}$, $\beta = \sqrt{1+\gamma}$ y el largo característico $\alpha \equiv \sqrt[4]{\frac{4D}{\Delta\rho g}}$, cumpliéndose de esta manera $\frac{\chi}{\sqrt{2}} = \frac{x}{\alpha}$, podemos escribir de forma simplificada la solución en el espacio físico como:

$$w(x) = \left\{ \left(\tan(\theta) \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\eta}{\beta} h \right) \sin\left(\beta \frac{x}{\alpha}\right) + h \cos\left(\beta \frac{x}{\alpha}\right) \right\} e^{-\eta x/\alpha} \quad (\text{C.6})$$

C.1. Distintas Condiciones de Borde

Podemos encontrar soluciones similares al variar las condiciones de borde en el extremo izquierdo de la placa. Puesto que en general se tiene una solución de la forma:

$$w(x) = \left\{ \mathbb{A}_0 \sin\left(\beta \frac{x}{\alpha}\right) + \mathbb{B}_0 \cos\left(\beta \frac{x}{\alpha}\right) \right\} e^{-\eta x/\alpha} \quad (\text{C.7})$$

Al derivar esta expresión se tiene:

$$w^{(1)}(x) = \left\{ \mathbb{A}_1 \sin\left(\beta \frac{x}{\alpha}\right) + \mathbb{B}_1 \cos\left(\beta \frac{x}{\alpha}\right) \right\} e^{-\eta x/\alpha} \quad (\text{C.8})$$

En donde los nuevos coeficientes se escriben en función de los primeros de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_1 &= -\frac{1}{\alpha} (\mathbb{A}_0 \eta + \mathbb{B}_0 \beta) \\ \mathbb{B}_1 &= \frac{1}{\alpha} (\mathbb{A}_0 \beta - \mathbb{B}_0 \eta) \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

De esta forma encontramos una recurrencia en el cálculo de los coeficientes de la solución analítica y su enésima derivada de la forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}_n \\ \mathbb{B}_n \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n \begin{bmatrix} -\eta & -\beta \\ \beta & -\eta \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \mathbb{A}_0 \\ \mathbb{B}_0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

Dado esto podemos separar en casos:

Caso 1 : $\{w|_0 = h, M|_0 = M_0\}$

Es directo que $\mathbb{B}_0 = h$. El otro coeficiente viene de que tenemos: $M = -Dw''$. Al evaluar en $x = 0$ se tiene:

$$M_0 = -D \cdot \mathbb{B}_2 \quad (\text{C.11})$$

Por lo tanto al aplicar C.10 para este caso:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}_2 \\ \mathbb{B}_2 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \begin{bmatrix} -\eta & -\beta \\ \beta & -\eta \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \mathbb{A}_0 \\ \mathbb{B}_0 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \begin{bmatrix} \eta^2 - \beta^2 & 2\eta\beta \\ -2\eta\beta & -(\eta^2 - \beta^2) \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \mathbb{A}_0 \\ h \end{bmatrix} \quad (\text{C.12})$$

Por lo tanto \mathbb{A}_0 se despeja de:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\alpha^2}(2\eta\beta\mathbb{A}_0 + (\eta^2 - \beta^2)h) &= -\frac{M_0}{D} \\ 2\eta\beta\mathbb{A}_0 &= \frac{M_0\alpha^2}{D} - (\eta^2 - \beta^2)h \\ \mathbb{A}_0 &= \frac{M_0\alpha^2}{2\eta\beta D} - \frac{\eta^2 - \beta^2}{2\eta\beta}h \\ \mathbb{A}_0 &= \frac{M_0\alpha^2}{2\eta\beta D} + \frac{F}{F_{max}\eta\beta}h \\ \mathbb{A}_0 &= \frac{M_0\alpha^2}{2\eta\beta D} + \frac{F\alpha^2}{4D\eta\beta}h \\ \mathbb{A}_0 &= \frac{\alpha^2}{2\beta\eta D} \left(M_0 + \frac{Fh}{2} \right) \end{aligned}$$

En donde se usó que F_{max} puede ser escrito también de la forma: $F_{max} = \frac{4D^2}{\alpha^2}$. De esta forma la solución analítica correspondiente al Caso 1 es:

$$w(x) = \left\{ \frac{\alpha^2}{2\beta\eta D} \left(M_0 + \frac{Fh}{2} \right) \sin\left(\beta\frac{x}{\alpha}\right) + h\cos\left(\beta\frac{x}{\alpha}\right) \right\} \cdot e^{-\eta x/\alpha} \quad (\text{C.13})$$

Caso 2 : $\{w|_0 = h, V|_0 = -V_0\}$

Al igual que en el caso anterior, se tiene directamente que $\mathbb{B}_0 = h$. Puesto que $V = M' - Fw'$, tenemos que:

$$D \cdot \mathbb{B}_3 + F \cdot \mathbb{B}_1 = V_0 \quad (\text{C.14})$$

Desarrollando esta ecuación y recordando que $\beta = \sqrt{1 + \frac{F}{F_{max}}}$ y $\eta = \sqrt{1 - \frac{F}{F_{max}}}$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{D}{\alpha^3} \left(h(\eta(\beta^2 - \eta^2) + 2\beta^2\eta) \right) - \frac{D}{\alpha^3} \left(\mathbb{A}_0(\beta(\beta^2 - \eta^2) - 2\beta\eta^2) \right) + \frac{\mathbb{A}_0 F \beta}{\alpha D} - \frac{F \eta h}{\alpha D} &= V_0 \\
\left(\frac{h\eta}{2\beta} \left(\frac{2F}{F_{max}} + 2\beta^2 \right) \right) - \left(\mathbb{A}_0 \frac{F}{F_{max}} - \eta^2 \right) + \frac{\alpha^2 \mathbb{A}_0 F}{2D} - \frac{\alpha^2 F \eta h}{2\beta D} &= \frac{\alpha^3 V_0}{2\beta D} \\
\frac{h\eta}{2\beta} \left(\frac{2F}{F_{max}} + 2 + \frac{2F}{F_{max}} \right) - \mathbb{A}_0 \left(\frac{F}{F_{max}} - 1 + \frac{F}{F_{max}} \right) + \frac{\alpha^2 \mathbb{A}_0 F}{2D} - \frac{\alpha^2 F \eta h}{2\beta D} &= \frac{\alpha^3 V_0}{2\beta D} \\
\frac{h\eta}{\beta} \frac{2F}{F_{max}} + \frac{h\eta}{\beta} + \mathbb{A}_0 - \mathbb{A}_0 \frac{2F}{F_{max}} + \frac{\mathbb{A}_0 \alpha^2 F}{2D} - \frac{\alpha^2 F \eta h}{2\beta D} &= \frac{\alpha^3 V_0}{2\beta D} \\
\cancel{\frac{h\eta}{\beta} \frac{\alpha^2 F}{2D}} + \frac{h\eta}{\beta} + \mathbb{A}_0 - \cancel{\mathbb{A}_0 \frac{\alpha^2 F}{2D}} + \cancel{\frac{\mathbb{A}_0 \alpha^2 F}{2D}} - \cancel{\frac{\alpha^2 F \eta h}{2\beta D}} &= \frac{\alpha^3 V_0}{2\beta D} \\
\mathbb{A}_0 &= \frac{\alpha^3 V_0}{2\beta D} - \frac{h\eta}{\beta} \\
\mathbb{A}_0 &= \frac{\alpha^3}{2\beta} \left(\frac{V_0}{D} - \frac{2\eta h}{\alpha^3} \right)
\end{aligned}$$

De esta manera la solución analítica resulta:

$$w(x) = \left\{ \frac{\alpha^3}{2\beta} \left(\frac{V_0}{D} - \frac{2\eta h}{\alpha^3} \right) \sin\left(\beta \frac{x}{\alpha}\right) + h \cos\left(\beta \frac{x}{\alpha}\right) \right\} \cdot e^{-\eta x / \alpha} \quad (\text{C.15})$$

Caso 3 : $\{M|_0 = M_0, V|_0 = -V_0\}$

Usando la definición del momento y la fuerza de cizalle tenemos que deben cumplirse simultáneamente:

$$-D \cdot \mathbb{B}_2 = M_0$$

$$D \cdot \mathbb{B}_3 + F \cdot \mathbb{B}_1 = V_0 \quad (\text{C.16})$$

Tomando la primera de estas ecuaciones llegamos a que por un lado \mathbb{A}_0 y \mathbb{B}_0 deben cumplir:

$$\mathbb{A}_0 - \frac{F \alpha^2}{4D\eta\beta} \mathbb{B}_0 = \frac{M_0 \alpha^2}{2\eta\beta D} \quad (\text{C.17})$$

Y al considerar el cálculo hecho en el caso anterior, la expresión anterior puede escribirse de la forma:

$$\mathbb{A}_0 + \frac{\eta}{\beta} \mathbb{B}_0 = \frac{\alpha^3 V_0}{2\beta D} \quad (\text{C.18})$$

Restando C.18 con C.17 podemos escribir:

$$\begin{aligned}
\frac{\eta}{\beta} \mathbb{B}_0 + \frac{F\alpha^2}{4D\eta\beta} \mathbb{B}_0 &= \frac{\alpha^3 V_0}{2\beta D} - \frac{M_0 \alpha^2}{2\eta\beta D} \\
\left(\frac{4D\eta^2 + F\alpha^2}{4D\eta\beta} \right) \mathbb{B}_0 &= \frac{\alpha^3 V_0 \eta - \alpha^2 M_0}{2\eta\beta D} \\
\frac{1}{\eta\beta} \mathbb{B}_0 &= \frac{\alpha^3 V_0 \eta - \alpha^2 M_0}{2\eta\beta D} \\
\mathbb{B}_0 &= \frac{\alpha^2 (\alpha V_0 \eta - M_0)}{2D}
\end{aligned}$$

Introduciendo esto en C.18 se encuentra el valor de \mathbb{A}_0 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}_0 &= \frac{\alpha^3 V_0}{2\beta D} - \frac{\eta}{\beta} \mathbb{B}_0 \\
\mathbb{A}_0 &= \frac{\alpha^3 V_0}{2\beta D} - \frac{\eta}{\beta} \frac{\alpha^2 (\alpha V_0 \eta - M_0)}{2D} \\
\mathbb{A}_0 &= \frac{\alpha^3 V_0 - \alpha^3 V_0 \eta^2 + \alpha^2 \eta M_0}{2\beta D} \\
\mathbb{A}_0 &= \frac{\alpha^3 V_0 \gamma + \alpha^2 \eta M_0}{2\beta D}
\end{aligned}$$

De esta forma la solución analítica de este caso resulta de la forma:

$$w(x) = \frac{\alpha^2}{2\beta D} \left\{ \left(V_0 \alpha \gamma + M_0 \eta \right) \sin\left(\beta \frac{x}{\alpha}\right) + \left(V_0 \alpha \beta \eta - M_0 \beta \right) \cos\left(\beta \frac{x}{\alpha}\right) \right\} \cdot e^{-\eta x / \alpha} \quad (\text{C.19})$$

Apéndice D

El Método de Diferencias Finitas

Este método consiste en discretizar los operadores diferenciales con tal de transformar la ecuación diferencial en un sistema lineal. Tomando la Ecuación C.1 con cargas distintas de cero, y normalizando por la distancia característica α , tenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta\rho g} \frac{d^2}{dx^2} \left(D \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \frac{1}{\Delta\rho g} \frac{d}{dx} \left(F \frac{dw}{dx} \right) + w &= \frac{q}{\Delta\rho g} \\ \frac{D_0}{\Delta\rho g} \frac{d^2}{dx^2} \left(\delta(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \frac{F_0}{\Delta\rho g} \frac{d}{dx} \left(f \frac{dw}{dx} \right) + w &= \frac{q}{\Delta\rho g} \\ \frac{1}{4} \frac{d^2}{dz^2} \left(\delta \frac{d^2 w}{dz^2} \right) + \gamma \frac{d}{dz} \left(f \frac{dw}{dz} \right) + w &= \bar{q}\end{aligned}$$

En donde $D = D_0\delta(x)$ y $F = F_0f(x)$, son los parámetros en función del espacio, D_0 es un valor medio y $\delta(x)$ una función adimensional que representa la distribución de la rigidez en toda la placa, asimismo F_0 y $f(x)$. También hemos definido $z = x/\alpha$, $\gamma = F_0/\sqrt{4D\Delta\rho g}$, $\bar{q} = q/\Delta\rho g$ y $\alpha = \sqrt[4]{\frac{4D}{\Delta\rho g}}$. Haciendo abuso de notación para volver a usar las letras x y q , podemos escribir que el problema de placas normalizado puede escribirse como:

$$\frac{1}{4} \frac{d^2}{dx^2} \left(\delta \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \gamma \frac{d}{dx} \left(f \frac{dw}{dx} \right) + w = q \quad (\text{D.1})$$

Ahora, la Ecuación de orden superior D.1 puede escribirse como 4 ecuaciones de primer orden pero a coeficientes variables de la siguiente forma:

$$\frac{dw}{dx} = \zeta \quad , \quad \frac{d\zeta}{dx} = -\frac{4}{\delta}m \quad , \quad \frac{dm}{dx} = \gamma f\zeta + r \quad , \quad \frac{dr}{dx} = w - q$$

Esto es, de manera condensada:

$$\frac{dS}{dx} + \mathbb{P}(x)S = Q(x) \quad (\text{D.2})$$

donde

$$\mathbb{A}1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\Delta x/\delta(x_1) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbb{A}_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\Delta x/\delta(x_N) & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\Delta x \end{pmatrix} \quad (\text{D.6})$$

y

$$B_1 = (h, u, h + \Delta x \cdot u, u)^t, \quad B_N = (0, 0, 0, 0)^t. \quad (\text{D.7})$$

Una vez que el sistema se resuelve, se obtiene la aproximación de la solución w (y respectivamente el momento normalizado m) en cada punto x_n del intervalo $[0, L]$ desde la primera componente (y respectivamente desde la tercera) de S_n , $n = 1, \dots, N$, esto es

$$w = \mathbb{C}S, \quad \mathbb{C}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 4i - 3 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, 4N \quad (\text{D.8})$$

y $m = \mathbb{D}S$, usando una matriz \mathbb{D} análoga a la anterior, tan sólo realizando el cambio de $4j - 3$ por $4j - 1$.

Apéndice E

Fuerzas de Contacto

E.1. Introducción

En esta sección se quiere hacer una modificación importante al modelo planteado en el capítulo anterior, cambiando la interacción entre los dos cuerpos de una manera puramente geométrica a otra utilizando fuerzas de contacto entre ambas placas, siendo estas capaces de acoplarse y ejercerse fuerza mutuamente. La motivación principal de todo esto es la necesidad de generar un modelo que provenga de principios físicos, pudiendo así inferir propiedades del contacto tales como su largo y los esfuerzos internos que genera, su efecto en la deformación y por otro lado, investigar el alcance de los modelos elásticos para este tipo de problemas.

La idea es plantear un modelo de interacción entre dos cuerpos desde la teoría de la elasticidad, e introducir esto al algoritmo de Diferencias Finitas con el cuál se ha estado trabajando (detallado en el Apéndice D). Se querrá analizar la dependencia de la solución a los parámetros del modelo y en particular cómo cambia la distribución de los esfuerzos internos resultantes dentro de la litósfera oceánica. El poder analizar la solución obtenida servirá también para comprobar el límite que tiene un modelo elástico en un problema de contacto entre placas tectónicas.

E.2. Fuerzas entre cuerpos elásticos

Al estar dos sólidos en contacto se genera una interfaz entre ellos en donde ambos cuerpos permanecen deformados. Si asumimos elasticidad, esta deformación desaparecerá si los cuerpos son alejados uno del otro. Esta deformación causará una distribución de esfuerzos en ambos cuerpos y una distribución de presión en la zona de contacto. El cálculo de estas cantidades ha tenido principal importancia en la ingeniería de materiales, pues permite saber en donde las piezas por ejemplo de una máquina se verán mas forzadas y en donde podría generarse una ruptura.

El problema de encontrar el campo de deformación entre dos cuerpos elásticos en contacto fue planteado inicialmente por Heinrich Hertz en 1882, (Hertz, 1882). Las hipótesis que se asumen es que ambos cuerpos se encuentran en régimen elástico, sus superficies son continuas y el área de contacto es mucho menor que las dimensiones características de ambos cuerpos, cada cuerpo puede ser considerado como un semiespacio y que en la región de contacto no hay fricción. Si el contacto de los cuerpos cumple con todo lo anterior se dice que el contacto es hertziano. Con el objetivo de calcular los desplazamientos, seguimos los cálculos referidos en Landau y Lifshitz, (1986).

Consideremos dos cuerpos elásticos en contacto en un punto que no es singular. Las dos superficies de ambos cuerpos poseen en este punto un plano tangente que llamaremos el plano xy . Usamos además la convención de llamar eje z al eje que apunta al interior de los cuerpos, por lo cuál tendremos dos semi-ejes z y z' . Cómo el contacto no es en un punto singular, podemos describir la superficie de ambos cuerpos como una forma cuadrática del tipo:

$$z = \chi_{ij}x_i x_j \quad (\text{E.1})$$

En donde χ_{ij} es un tensor simétrico que da cuenta de la curvatura del cuerpo. Los valores propios de este tensor son: $\frac{1}{2R_1}$ y $\frac{1}{2R_2}$, con R_1 y R_2 los radios principales de curvatura en el punto de contacto. De igual manera tenemos:

$$z' = \chi'_{ij}x_i x_j \quad (\text{E.2})$$

Suponemos ahora que ambos cuerpos son comprimidos uno contra el otro mediante fuerzas aplicadas, deformándose ambos cuerpos y acercándose una distancia h , definiéndose ahora una superficie de contacto como lo muestra la Figura E.1. De esta misma se obtiene que en todos los puntos de la región de contacto se cumple que:

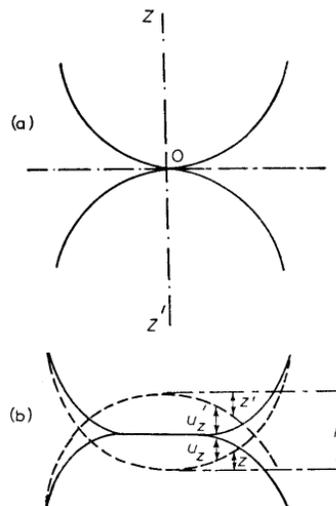


Figura E.1: (a) Esquema de ambos cuerpos con un punto de contacto. (b) Esquema de ambos cuerpos presionados uno con el otro con una superficie de contacto. h es la indentación. Imagen tomada de Landau y Lifshitz, (1986).

$$(u_z + z) + (u'_z + z') = h \quad (\text{E.3})$$

A la distancia h se le llama también indentación. Usando las ecuaciones E.1 y E.2, podemos escribir: $(\chi_{ij} + \chi'_{ij})x_i x_j + u_z + u'_z = h$. Ahora usando los ejes x e y como los ejes principales del tensor $\chi_{ij} + \chi'_{ij}$, la ecuación se reduce a:

$$Ax^2 + By^2 + u_z + u'_z = h \quad (\text{E.4})$$

En donde A y B están relacionados con los radios de curvatura de ambos cuerpos (ver ibíd., capítulo 1, sección 9). Usando esto y la aproximación de considerar la superficie de contacto como plana, se puede mostrar que si llamamos $P_z(x, y)$ a la presión entre los dos cuerpos deformados, los desplazamientos u_z y u'_z quedan de la forma:

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \int \int \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy' \\ u'_z &= \frac{1 - \nu'^2}{\pi E'} \int \int \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy' \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

La zona de integración de estas expresiones es tan sólo en la zona de contacto pues P_z es diferente de cero tan sólo en el contacto. Introduciendo esto en la Ecuación E.4, podemos escribir que en la zona de contacto debe cumplirse:

$$\frac{1}{\pi} \left(\frac{1 - \nu^2}{E} + \frac{1 - \nu'^2}{E'} \right) \int \int \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy' = h - Ax^2 - By^2 \quad (\text{E.6})$$

Esta ecuación determina la distribución de presión P_z sobre la región de contacto. Una forma astuta de encontrar una solución es usando una analogía con el potencial electrostático generado por un elipsoide uniformemente cargado, al hacer tender una de sus dimensiones a cero. Al hacer este cálculo se llega a las siguientes conclusiones válidas para cualquier contacto generado por dos cuerpos finitos:

- La región de contacto está limitada por una elipse de la forma: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- La presión es de la forma: $P_z = \text{const} \cdot \sqrt{(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2})}$, dependiendo de una constante arbitraria de normalización. Típicamente se define $F \equiv \int \int P dx dy$, en donde F es la intensidad de la fuerza total del contacto. De aquí se obtiene el valor de la constante.
- Sabiendo la geometría de los cuerpos se puede obtener A y B de forma relativamente sencilla. Usando eso, h , a y b son obtenidos de las siguientes fórmulas:

$$h = \frac{FD}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\sigma}{\sqrt{(a^2 + \sigma)(b^2 + \sigma)\sigma}}$$

$$A = \frac{FD}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\sigma}{(a^2 + \sigma)\sqrt{(a^2 + \sigma)(b^2 + \sigma)\sigma}}$$

$$B = \frac{FD}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\sigma}{(b^2 + \sigma)\sqrt{(a^2 + \sigma)(b^2 + \sigma)\sigma}}$$

En donde $D = \frac{3}{4} \left(\frac{1-\nu^2}{E} + \frac{1-\nu'^2}{E'} \right)$ es una constante elástica que liga ambos cuerpos.

Tomando en cuenta lo anterior, se puede decir que el problema de dos cuerpos bajo las hipótesis de contacto hertziano está totalmente resuelto y tan sólo depende de la geometría y constantes elásticas de ambos cuerpos.

E.3. Modelo para Placas en Contacto

En esta sección se trabajará la expresión que nos permitirá calcular la intensidad de la fuerza de contacto entre dos placas (para un mayor y exhaustivo análisis ver Norden, 1973). Tomando que ambas placas tienen sección rectangular, la superficie de contacto será también un rectángulo \mathcal{R} , cuyas dimensiones son su grosor $2b$ y su largo ℓ_c , como lo muestra la Figura E.2.

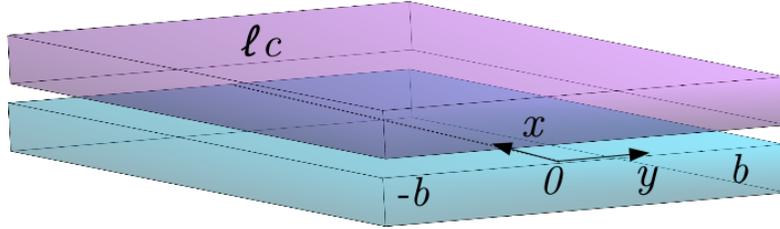


Figura E.2: (a) Esquema de la superficie de contacto entre ambas placas. La zona es un rectángulo $\mathcal{R} = (0, \ell_c) \times (-b, b)$

Asumiendo las dimensiones de esta zona conocida, definimos la presión dentro del rectángulo de acuerdo a un modelo de contacto hertziano de la forma:

$$p(y) = C \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \quad (\text{E.7})$$

Siendo p con dimensiones de presión. Además se dedujo que la presión no puede tener dependencia explícita de la coordenada x , pues el sistema en esa dirección es homogéneo. Al integrar en todo el rectángulo y definiendo que esta integral debe valer P (con dimensiones de presión \times área), la presión total del contacto, se puede calcular la constante C resultando:

$$C = \frac{2P}{\pi b \ell_c}$$

De esta forma el máximo esfuerzo compresional o presión se dá cuando $y = 0$ y vale: $\sigma_{max} = \frac{2P}{\pi b \ell_c}$. Este valor es importante en cualquier problema de contacto pues la superficie de contacto es pequeña y puede generar grandes esfuerzos aun cuando las cargas sean leves. Si σ_{max} excede cierto límite del material, entonces puede ocurrir deformación permanente.

Retomando la Ecuación E.6, definiendo $\varrho \equiv \frac{\pi \nu}{E}$ y evaluando en $x = 0$ podemos escribir equivalentemente que debe cumplirse:

$$(\varrho_1 + \varrho_2) \int \int_{\mathcal{R}} \frac{p(y') dx' dy'}{r} = h - B y^2 \quad (\text{E.8})$$

Desarrollando primero la integral del lado izquierdo:

$$\begin{aligned} \int \int \frac{p(y')}{r} dx' dy' &= \int_{-b}^b p(y') 2 \int_0^{\ell_c/2} \frac{1}{\sqrt{(y-y')^2 + x^2}} dx' dy' \\ &= \int_{-b}^b 2p(y') \cdot \ln \left(\frac{\frac{\ell_c}{2} + \sqrt{(y-y')^2 + (\frac{\ell_c}{2})^2}}{|y-y'|} \right) dy' \end{aligned}$$

y usando que $\ell_c/2 \gg y - y'$, tenemos:

$$= \int_{-b}^b 2p(y') \ln \left(\frac{\ell_c}{y-y'} \right) dy'$$

Ahora evaluamos en $y = 0$ resultando:

$$\begin{aligned} \int_{-b}^b 2p(y') \ln \left(\frac{\ell_c}{-y'} \right) dy' &= \frac{h}{(\varrho_1 + \varrho_2)} \\ 2 \ln \ell_c \int_{-b}^b p(y') dy' - 2 \int_{-b}^b p(y') \ln y' dy' &= \frac{h}{(\varrho_1 + \varrho_2)} \\ 2 \frac{P}{L} \ln \ell_c - \frac{2P}{\pi b \ell_c} \int_{-b}^b \sqrt{1 - \frac{y'^2}{b^2}} \ln y'^2 dy' &= \frac{h}{(\varrho_1 + \varrho_2)} \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable trigonométrico, la última integral del lado derecho se lleva a dos integrales. Una es trivial y la otra ha sido evaluada por Haan D., (1957).¹ Usando todo esto el segundo miembro del lado derecho se reduce a: $\pi b \ln b - \frac{\pi b}{2}(1 + \ln 4)$. Finalmente,

¹ $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta \ln |\sin \theta| d\theta = -\frac{\pi}{4}(1 + \ln 4)$

podemos reordenar los términos encontrando una fórmula más sencilla para la presión total del contacto:

$$P = h \cdot \frac{\ell_c}{(\varrho_1 + \varrho_1) \left(1 + \ln \frac{4\ell_c^2}{b^2}\right)} \quad (\text{E.9})$$

A manera de ejemplo dos placas elásticas iguales, con parámetros elásticos iguales a los mostrados en la Tabla 2.1, con una indentación de $h = 1 \text{ m}$, con un largo de contacto de 100 m y un grosor de 100 m sentirán una presión total de: $P = 187 \text{ MPa}$.

E.4. Metodología

Para incorporar la interacción entre las placas al modelo se ha desarrollado un algoritmo que permite calcular la intensidad de la fuerza localmente en cada paso. Para esto se utiliza el mismo obstáculo rígido del Capítulo 3 y se integra separadamente la ecuación para la litósfera oceánica. Una vez hecho esto, se enfrentan ambas curvas lentamente hasta encontrar un traslape entre ambas curvas. Esta distancia es la llamada indentación h que de acuerdo a E.9 genera una fuerza que se calcula:

$$\vec{f}(t) = \frac{P}{\ell_c} = h \cdot \frac{1}{(\varrho_1 + \varrho_1) \left(1 + \ln \frac{4\ell_c^2}{b^2}\right)} \hat{n}(t) \quad (\text{E.10})$$

En donde el punto de traslape es llamado t . Cabe notar que esta fuerza tiene dimensiones de N/m , su dirección será normal a la superficie de contacto (es decir proporcional a la normal unitaria \hat{n} en el punto t) y su sentido de repulsión entre ambas placas.

Una vez descompuesta esta fuerza de acuerdo al vector normal, se calcula una nueva ecuación para la deformación, con fuerzas horizontales y cargas verticales no necesariamente nulas ni homogéneas. La forma de encontrar la carga vertical será de dividir una vez más por el largo del contacto, pues se debe recordar que $q(x)$ tiene dimensiones de N/m^2 . Una vez resuelta la ecuación diferencial con estos términos extras, se desplaza nuevamente el obstáculo, encontrando así nuevas zonas de indentación y por lo tanto nuevas zonas donde existirá fuerza de contacto entre ambos cuerpos. El desplazamiento se hace hasta que no se detecte ya cambios en la litósfera oceánica llegando así a una configuración de equilibrio.

E.5. Resultados y Conclusiones

Para esta modelación no se ha incorporado ningún modelo de fuerza *Slab-pull* en la cercanía de la fosa ni fuerzas tipo *Ridge-push* en el extremo derecho de la litósfera oceánica, para poder aislar el efecto del contacto en la generación de esfuerzos al interior de la placa. Se

utilizaron además los mismos rangos de parámetros de la simulación del Capítulo 3, es decir, espesores para la litósfera oceánica de: $T_e = 10, 25$ y 40 km , y módulos de Young para la litósfera continental de un: 20, 60 y 80 % del de la litósfera oceánica. El espesor elástico usado para el continente es de $T_e = 125 \text{ km}$. Para la zona de contacto se usó un rectángulo de dimensiones $(2b, \ell_c)$, con $b = 50 \text{ m}$ y ℓ_c se tomó constante para todo el proceso e igual a 100 km .

Nuevamente los esfuerzos en el extremo izquierdo han sido reducidos a cero por depender de la condición de borde. Tan sólo nos interesa el comportamiento de estos en el contacto y tras la fosa. Las distintas soluciones entregadas se grafican en las Figuras E.3, E.4 y E.5. Por razones de estabilidad en el código se ha escogido el término $\Delta\rho(x)$ homogéneo en el espacio, lo cuál es una falencia del programa y que amerita mayor investigación. Los valores representativos de cada solución son mostrados en las Tablas E.1, E.2 y E.3.

(a)	$T_e = 10 \text{ km}$	$T_e = 25 \text{ km}$	$T_e = 40 \text{ km}$
M_{fosa}	$9,9 \times 10^{16} \text{ N}$	$3,9 \times 10^{17} \text{ N}$	$4,6 \times 10^{17} \text{ N}$
V_{fosa}	$6,4 \times 10^{17} \text{ N/m}$	$-1,6 \times 10^{17} \text{ N/m}$	$21,8 \times 10^{17} \text{ N/m}$
θ_{fosa}	$9,8^\circ$	$8,0^\circ$	$4,4^\circ$
w_{fosa}	$-4,7 \text{ km}$	$-5,1 \text{ km}$	$-5,2 \text{ km}$
$max w(x)$	$0,7 \text{ km}$	$2,9 \text{ km}$	$0,9 \text{ km}$
ℓ_c	549 km	821 km	1033 km

Tabla E.1: (a). Valores característicos con obstáculo rígido y fuerzas de contacto en donde $E_2/E_1 = 0,2$

(b)	$T_e = 10 \text{ km}$	$T_e = 25 \text{ km}$	$T_e = 40 \text{ km}$
M_{fosa}	$-1,0 \times 10^{15} \text{ N}$	$6,2 \times 10^{17} \text{ N}$	$3,9 \times 10^{17} \text{ N}$
V_{fosa}	$14,4 \times 10^{17} \text{ N/m}$	$-23,2 \times 10^{17} \text{ N/m}$	$24,5 \times 10^{17} \text{ N/m}$
θ_{fosa}	$8,8^\circ$	$9,0^\circ$	$4,1^\circ$
w_{fosa}	$-7,6 \text{ km}$	$-4,3 \text{ km}$	$-5,4 \text{ km}$
$max w(x)$	$0,5 \text{ km}$	$2,4 \text{ km}$	$0,8 \text{ km}$
ℓ_c	510 km	767 km	955 km

Tabla E.2: (b). Valores característicos con obstáculo rígido y fuerzas de contacto en donde $E_2/E_1 = 0,6$

Vemos que los resultados entregados presentan características comunes a los del Capítulo 3 y algunas diferencias. Por ejemplo vemos que la forma de la solución es semejante, pero los esfuerzos son más elevados en este caso que en los obtenidos en el caso con un obstáculo rígido. También vemos que existe mayor desacople entre ambas placas lo cual como ya era advertido, tendía a subir los esfuerzos y a cambiar el signo de ellos. Esto se muestra más notoriamente en las litósferas oceánicas de poco espesor elástico ($T_e = 10 \text{ km}$), no existiendo incluso contacto en la zona que esperaríamos que sea la fosa oceánica.

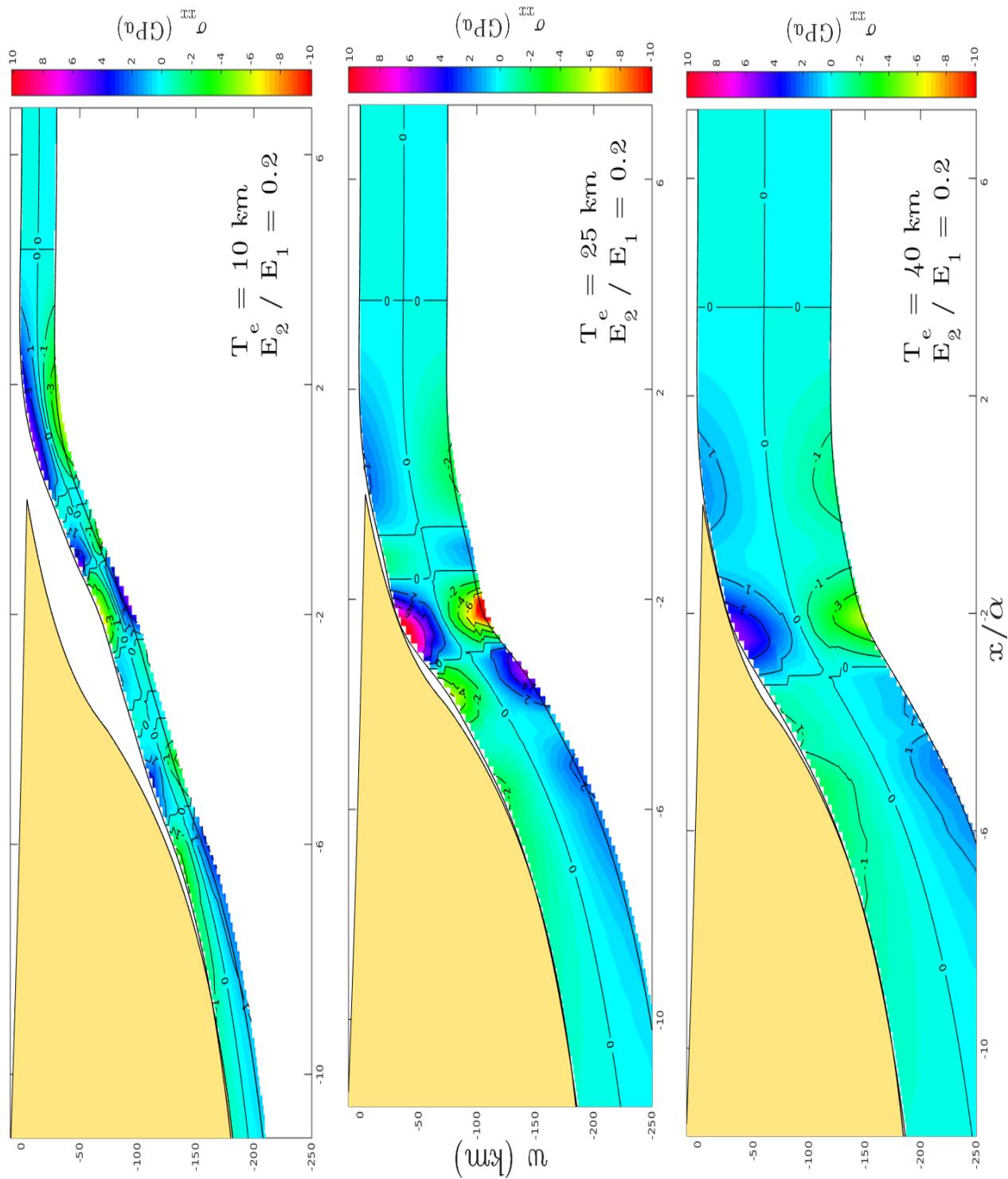


Figura E.3: Mapa de esfuerzos calculados usando fuerzas de contacto y distintos espesores elásticos. $E_2/E_1 = 0,2$

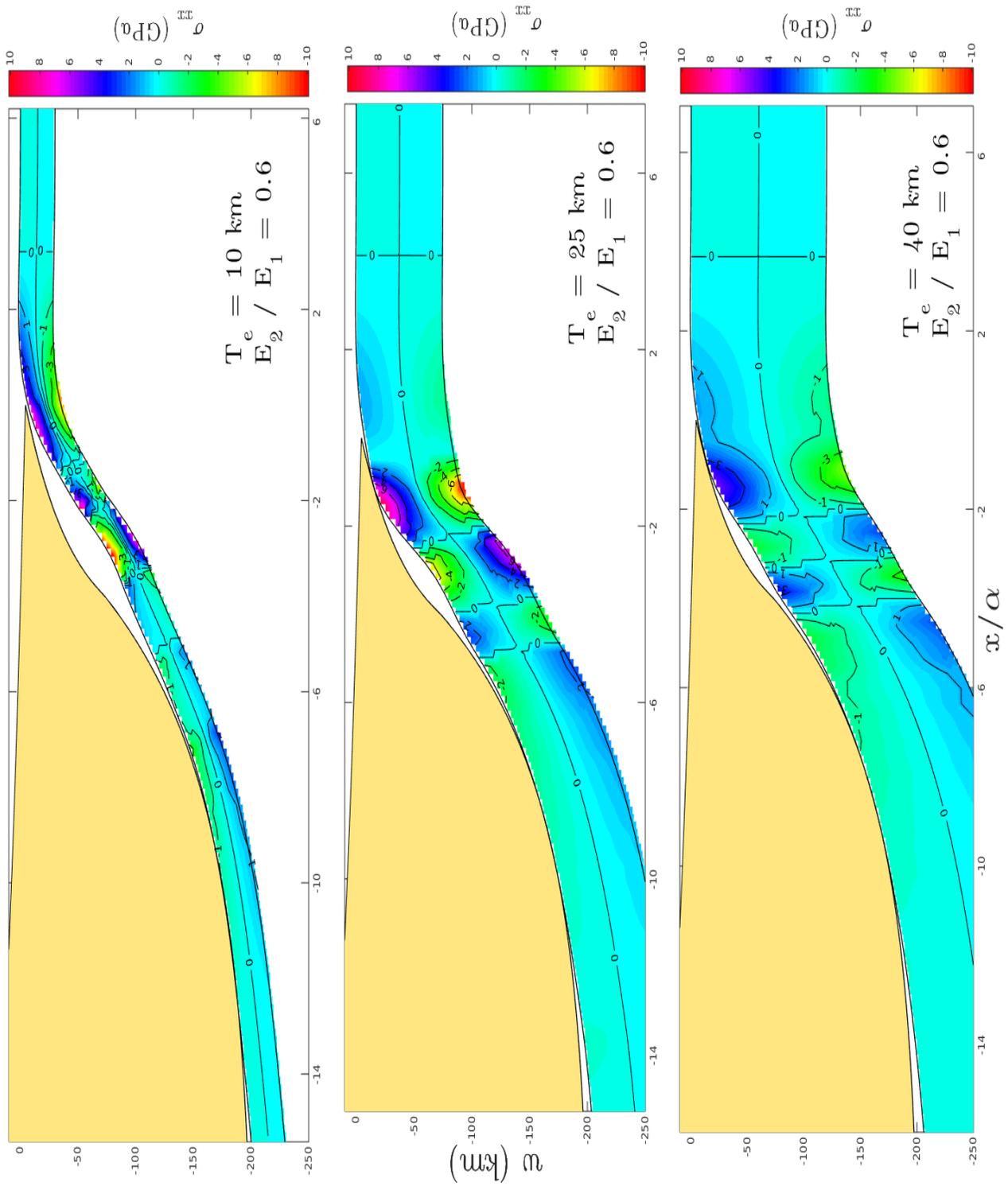


Figura E.4: Mapa de esfuerzos calculados usando fuerzas de contacto y distintos espesores elásticos. $E_2/E_1 = 0,6$

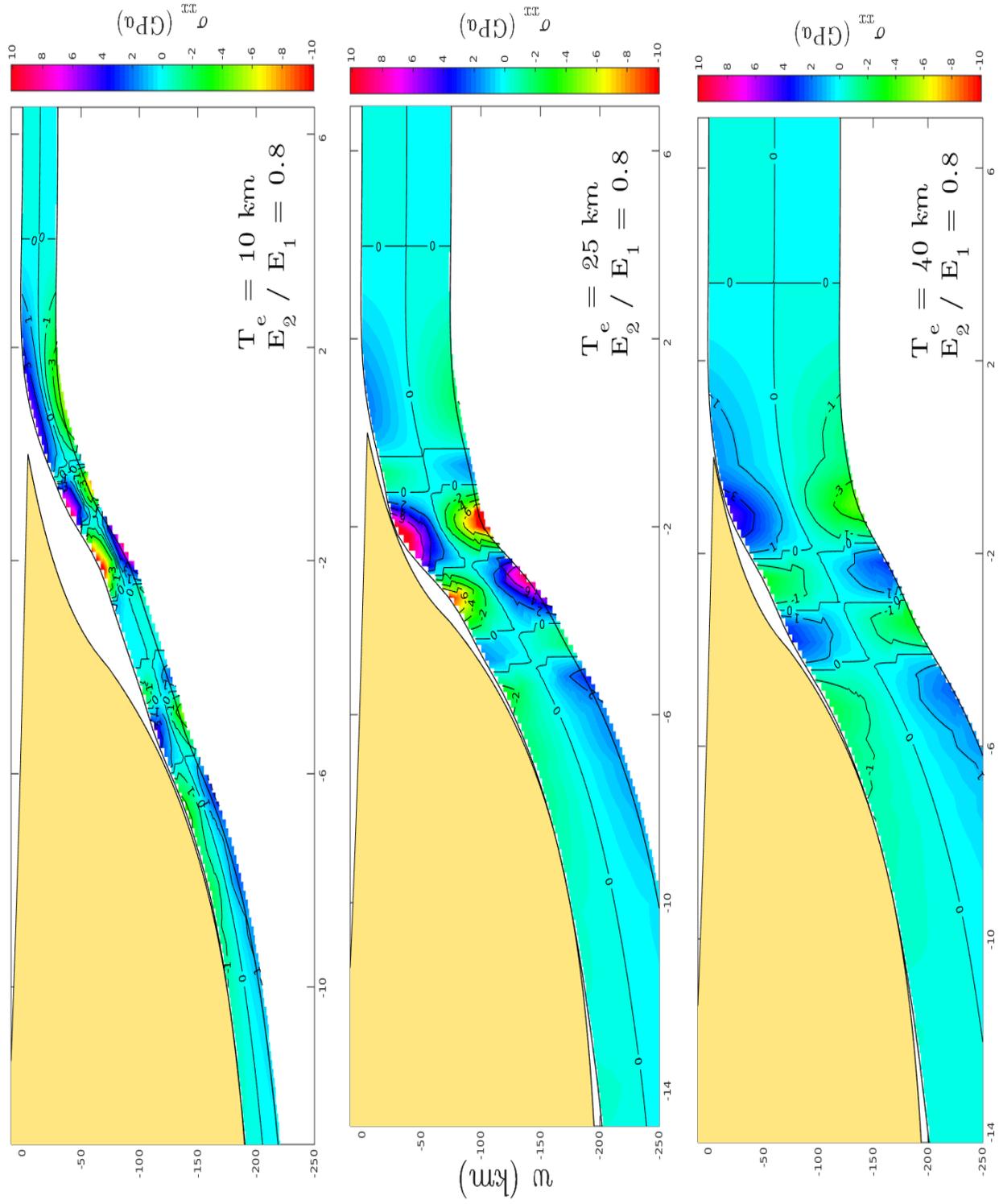


Figura E.5: Mapa de esfuerzos calculados usando fuerzas de contacto y distintos espesores elásticos. $E_2/E_1 = 0,8$

Para una litósfera oceánica de mayor espesor ($T_e = 40 \text{ km}$) vemos un mayor contacto y por consiguiente menor concentración de esfuerzos. Por otro lado no vemos mayor variación al hacer la litósfera continental más o menos rígida al aumentar su módulo de Young. Esto es atribuido a que en esta simulación tan sólo afectaría este cambio al cálculo de la fuerza de contacto y no a una dinámica distinta de la litósfera continental.

(c)	$T_e = 10 \text{ km}$	$T_e = 25 \text{ km}$	$T_e = 40 \text{ km}$
M_{fosa}	$6,0 \times 10^{16} \text{ N}$	$3,5 \times 10^{17} \text{ N}$	$7,1 \times 10^{17} \text{ N}$
V_{fosa}	$5,5 \times 10^{17} \text{ N/m}$	$10,3 \times 10^{17} \text{ N/m}$	$-8,4 \times 10^{17} \text{ N/m}$
θ_{fosa}	$10,1^\circ$	$9,0^\circ$	$5,0^\circ$
w_{fosa}	$-5,3 \text{ km}$	$-6,9 \text{ km}$	$-4,5 \text{ km}$
$\max w(x)$	$0,6 \text{ km}$	$1,6 \text{ km}$	$1,5 \text{ km}$
ℓ_c	527 km	756 km	940 km

Tabla E.3: (c). Valores característicos con obstáculo rígido y fuerzas de contacto en donde $E_2/E_1 = 0,8$

Una simulación considerando un obstáculo elástico como lo hecho en el Capítulo 3 no fue posible por encontrar inestabilidad en el algoritmo de interacción. Una solución posible a esto es simplificar la simulación eliminando fuerzas externas y generar una interacción menos invasiva que confrontar ambas placas buscando zonas de indentación.

Finalmente intentar buscar un modelo de interacción usando la teoría de la elasticidad entre placas sigue siendo una forma abierta de llegar al problema de la subducción, pues nuevas líneas se abren en esta dirección, tales como buscar cambios en la reología, relajando las hipótesis de elasticidad y permitir algún régimen dúctil; variar las hipótesis del contacto permitiendo fricción y/o adherencia entre las placas, usar herramientas de la elasticidad no-lineal generando mejores métodos numéricos tanto para problemas 1D y 2D, entre otras, siendo estos últimos poco explorados en esta Tesis.

Bibliografía

- Allaire, G. (2012). *Analyse numérique et optimisation*. Éditions de l'École Polytechnique. ISBN: 2730212558.
- Bartels, S. (2016). *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer. ISBN: 9783319137964.
- Billen, M.I. y M. Gurnis (2005). "Constraints on subducting plate strength within the Kermadec trench". En: *J. Geophys. Res.* 110.
- Bodine, J.H. y A.B. Watts (1979). "On lithospheric flexure seaward of the Bonin and Mariana trenches". En: *Earth and Planetary Science Letters* 43.1, págs. 132-148.
- Bodine, J.H., M.S. Steckler y A.B. Watts (1981). "Observations of the Flexure and the Reology of the Oceanic Lithosphere". En: *J. Geophys. Res.* 86, págs. 3695-3707.
- Braess, D. (2007). *Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Elasticity Theory*. Cambridge University Press. ISBN: 9780415061391.
- Bry, M. y N. White (2007). "Reappraising elastic thickness variation at oceanic trenches". En: *J. Geophys. Res.* 112.
- Buiter, S.J.H., M.J.R Wortel y R. Govers (1998). "The role of subduction in the evolution of the Apennines foreland basin". En: *Tectonophysics* 296, págs. 249-268.
- Burov, E.B. y M. Diament (1995). "The effective elastic thickness (t_e) of continental lithosphere: What does it really mean?" En: *J. Geophys. Res.* 100, págs. 3905-3927.
- Caldwell, J.G. y D.L. Turcotte (1979). "Dependence of the thickness of the elastic oceanic lithosphere on age". En: *J. Geophys. Res.* 84, págs. 7572-7576.
- Caldwell, J.G., W.F. Haxby, D.E. Karig y D.L. Turcotte (1976). "On the applicability of a universal elastic trench profile". En: *Earth and Planetary Science Letters* 31, págs. 239-246.
- Capitanio, F.A., G. Morra y S. Goes (2009). "Dynamics of plate bending at the trench and slab-plate coupling". En: *Geochemistry Geophysics Geosystems* 10.
- Christensen, N.I. (1996). "Poisson's ratio and crustal seismology". En: *J. Geophys. Res.* 101.
- Ciarlet, Ph. G. (2002). *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. Siam. ISBN: 0898715148.
- Contreras-Reyes, E. y A. Osses (2010). "Lithospheric flexure modelling seaward of the Chile trench: implications for oceanic plate weakening in the Trench Outer Rise region". En: *Geophys. J. Int.* 182, págs. 97-112.
- Contreras-Reyes, E., I. Grevemeyer, E.R. Flueh y C. Reichert (2008). "Upper lithospheric structure of the subduction zone offshore of southern Arauco peninsula, Chile, at 38° S." En: *J. Geophys. Res.* 113.
- Contreras-Reyes, E., E.R. Flueh e I. Grevemeyer (2010). "Tectonic control on sediment accretion and subduction off south central Chile: implications for coseismic rupture processes of the 1969 and 2010 megathrust earthquakes". En: *Tectonics* 29.

- Contreras-Reyes, E., J. Jara, A. Maksymowicz y W. Weinrebe (2013). "Sediment loading at the southern Chile trench and its tectonic implications". En: *Journal of Geodynamics* 66, págs. 134-145.
- Contreras-Reyes, E., J. Ruiz, Koop H. Becerra J., C. Reichert, A. Maksymowicz y C. Arriagada (2015). "Structure and tectonics of the central Chilean margin (31-33S): implications for subduction erosion and shallow crustal seismicity". En: *Geophys. J. Int* 653, págs. 776-791.
- De Bremaecker, J. C. (1977). "Is the oceanic lithosphere elastic or viscous?" En: *J. Geophys. Res.* 82, págs. 2001 -2004.
- Destuynder, Ph. y M. Salaun (1996). *Mathematical analysis of thin plate models*. Vol. 24 of Mathématiques and Applications (Berlin). Springer-Verlag (Berlin).
- Forsyth, Donald y Seiya Uyeda (1975). "On the Relative Importance of the Driving Forces of Plate Motion". En: *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 43, págs. 163-200.
- Föppl, A. (1907). "Vorlesungen über technische Mechanik". En: *B.G. Teubner* 5.
- García-Castellanos, D., M. Torne y M. Fernández (2000). "Slab pull effects from a flexural analysis of the Tonga and Kermadec trenches (Pacific Plate)". En: *Geophys. J. Int* 141, págs. 479-484.
- Goetze, C. y B. Evans (1979). "Stress and temperature in the bending lithosphere as constrained by experimental rock mechanics". En: *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 59, págs. 463-478.
- Haan D., Bierens de (1957). *Nouvelles Tables d'Integrales Définies*. Hafner, New York. ISBN: 9781271629800.
- Hertz, H. (1882). "Ueber die Beruehrung elastischer Koerper (On Contact Between Elastic Bodies)". En: *Gesammelte Werke (Collected Works)* 1.
- Hunter, J. y A.B. Watts (2016). "Gravity anomalies, flexure and mantle rheology seaward of circum-Pacific trenches". En: *Geophysical Journal International* 207, págs. 288-316.
- Karner, G.D., N.W. Driscoll y J.K. Weissel (1993). "Response of the lithosphere to in-plane force variations". En: *Earth and Planetary Science Letters* 114, págs. 397-416.
- Kennett, B.L.N. y H.P. Bunge (2008). *Geophysical Continua: Deformation in the Earth's Interior*. Cambridge University Press. ISBN: 0521865530.
- Kármán, T. von (1910). "Festigkeitsproblem im Maschinenbau". En: *Encyk. D. Math. Wiss.* 4, págs. 311-385.
- Landau, L.D y E.M. Lifshitz (1986). *Theory of Elasticity*. third edition. Butterworth-Heinemann.
- Manríquez, P., E. Contreras-Reyes y A. Osses (2014). "Lithospheric 3D flexure modelling seaward of the oceanic plate seaward of the trench using variable elastic thickness". En: *Geophys. J. Int* 196, págs. 681-693.
- McAdoo, D.C., J.G. Caldwell y D.L. Turcotte (1978). "On the elastic-perfectly plastic bending of the lithosphere under generalized loading with application to the Kuril Trenches". En: *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 54, págs. 11-26.
- McKenzie, D.P. (1969). "Speculations on the consequences and causes of plate motions". En: *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 18, págs. 1-32.
- McNutt, M.K. y H.V. Menard (1982). "Constraints on yield strength in the oceanic lithosphere derived from observations of flexure". En: *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 71, págs. 363-394.
- Moscoso, E. y E. Contreras-Reyes (2012). "Outer rise seismicity related to the maule, Chile 2010 megathrust earthquake and hydration of the incoming oceanic lithosphere". En: *Andean Geology* 39(3), págs. 563 -571.
- Moscoso, E. e I. Grevemeyer (2015). "Bending-related faulting of the incoming oceanic plate and its effect on lithospheric hydration and seismicity: A passive and active seismological study offshore Maule, Chile". En: *Journal of Geodynamics* 90, págs. 58 -70.

- Mueller, S. y R.J Phillips (1995). "On the reliability of lithospheric constraints derived from models of outer-rise flexure". En: *Geophys. J. Int* 123, págs. 887-902.
- Norden, B. Nelson (1973). *On the Compression of a Cylinder in Contact with a Plane Surface*. Institute for Basic Standards, NBS.
- Parsons, B. y P. Molnar (1976). "The Origin of Outer Topographic Rises Associated with Trenches". En: *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 45, págs. 707-712.
- Ranero, C.R. y V. Sallares (2004). "Geophysical evidence for alteration of the crust and mantle of the Nazca Plate during bending at the north Chile trench". En: *Geology*. 32, págs. 594-552.
- Ruiz, J. y E. Contreras-Reyes (2015). "Outer rise seismicity boosted by the Maule 2010 Mw 8.8 megathrust earthquake". En: *Tectonophysics* 653, págs. 127 -139.
- Stern, Robert J. (2002). "Subduction Zones". En: *Reviews of Geophysics* 40.4, págs. 3-1-3-38.
- Sweers, Guido (2009). "A survey on boundary conditions for the biharmonic". En: *Complex Variables and Elliptic Equations* 54, págs. 79-93.
- Tilmann, F.J., I. Grevemeyer, E. Flueh, T. Dahm y J. Goffler (2008). "Seismicity in the outer rise offshore southern Chile: Indication of fluid effects in crust and mantle". En: *Earth Planet. Sci.* 269, págs. 41 -55.
- Turcotte, D.L. y G. Schubert (2002). *Geodynamics*. 3.^a ed. Vol. 4. 10. Cambridge University Press. ISBN: 9780521666244.
- Walcott, R.I. (1970). "Flexural rigidity, thickness, and viscosity of the lithosphere". En: *J. Geophys. Res.* 75, págs. 3941 -3954.
- Watts, A.B., J.R. Cochran y G. Selze (1975). "Gravity anomalies and flexure of the lithosphere: three-dimensional study of the great meteor seamount, Northeast Atlantic". En: *J. Geophys. Res.* 80.11, págs. 1391-1398.
- Wilson, J.T. y K. Burke (1973). "Plate tectonics and plume mechanics". En: *Trans. Am. Geophys. Un.* 54, págs. 238-239.