



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

ESQUEMA NUMÉRICO DE PROYECCIÓN NODAL PARA LA PLACA DE
REISSNER-MINDLIN UTILIZANDO MÉTODOS SIN MALLA

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO

PHILIP KÖBRICH ECHAVARRI

PROFESOR GUÍA:
ALEJANDRO ORTIZ BERNARDIN

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
VIVIANA MERUANE NARANJO
ELENA ATROSHCHENKO

SANTIAGO DE CHILE
2017

ESQUEMA NUMÉRICO DE PROYECCIÓN NODAL PARA LA PLACA DE REISSNER-MINDLIN UTILIZANDO MÉTODOS SIN MALLA

En la práctica de la ingeniería el método de elementos finitos o MEF se utiliza para realizar cálculos cuando resulta difícil o ineficiente obtener una solución analítica.

En los últimos años se ha popularizado el uso de los métodos sin malla ya que estos entregan soluciones más exactas además de ser menos sensibles a las distorsiones de los elementos. Esto último se debe a que los métodos sin malla utilizan un vecindario de nodos para construir la aproximación de las variables, eliminando la necesidad de conexiones elementales (mallado) entre los nodos.

La placa de Reissner-Mindlin (RM) se utiliza para el análisis de esfuerzos y deformaciones en placas gruesas. Este modelo supone que la deformación a lo largo del espesor varía en forma lineal además supone que la componente σ_{zz} del esfuerzo es nula. Sin embargo, la placa RM presenta el problema de bloqueo por corte, donde la rigidez de la placa aumenta drásticamente a medida que se disminuye el espesor.

El objetivo de este trabajo es solucionar el bloqueo por corte mediante la proyección nodal, la cual ya ha sido utilizada para solucionar el bloqueo volumétrico en elasticidad incompresible (análogo al bloqueo por corte). Para este propósito se formula la proyección nodal para el problema de la placa RM.

La proyección nodal se formula a partir de la formulación mixta eliminando los grados de libertad de corte S a partir de la discretización de los desplazamientos adyacentes disminuyendo el número de ecuaciones por resolver.

Se implementa el esquema para la proyección nodal sin malla con funciones de base de máxima entropía utilizando el software Matlab.

Se realizaron experimentos numéricos sobre problemas cuya solución analítica es conocida y se evaluó la convergencia y sensibilidad a distorsiones para la proyección nodal y métodos tradicionales. La proyección nodal converge óptimamente para la norma L^2 del error y para la semi-norma H^1 del error. La proyección nodal es menos sensible a distorsiones geométricas en la malla base que métodos MEF tradicionales.

Se concluye que la proyección nodal soluciona el problema de bloqueo por corte utilizando métodos sin malla. Se consigue una mejor convergencia con respecto a los métodos tradicionales además de disminuir la sensibilidad a distorsiones geométricas.

Agradecimientos

Gracias a mi profesor guía Alejandro Ortiz por guiarme en la realización de este trabajo y por darme distintos puntos de vista cuando me encontraba estancado o sin claridad acerca del próximo paso. Gracias a los docentes y funcionarios del departamento que nos entregan las herramientas y espacios necesarios para que desarrollemos nuestros estudios.

Gracias a mis compañeros de oficina que me acompañaron durante todo el trabajo y en algunos casos durante toda la carrera. Son ustedes los que convirtieron la oficina y el 5to/4to en un hogar donde daban ganas de venir a trabajar y a aprender. Entre todos hicimos de nuestro espacio un lugar que invitaba tanto al trabajo duro y auto-superación como a la relajación ya sea mediante una partida de ajedrez, un par de memes o una carrera de CTR.

Gracias a mi familia que me ha apoyado desde antes que comencé la carrera y han entendido cuando me pierdo comidas familiares o estoy agotado por el trabajo. Muchas gracias por siempre dejar un plato de comida listo para cuando llegue esos días en que volvía tarde y frustrado por que no conseguía encontrar un error en mi código. Agradezco que me digan "Si, muy interesante tu memoria" cuando no tienen idea de lo que estoy hablando.

Finalmente muchísimas gracias a Daniela Artigas por animarme cuando estaba decaído por que nada funcionaba. Por motivarme a dar todo lo que puedo y no bloquearme tanto a mi mismo. Por estar siempre ahí cuando necesito desahogarme o cambiar de tema. Gracias por ser la mejor compañera que pude desear.

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes Generales	1
1.2. Motivación	2
1.3. Objetivos	2
1.4. Alcances	2
2. Metodología	5
3. Antecedentes	7
3.1. Método de Elementos Finitos	7
3.2. Método sin Malla	8
3.3. Formulación de la Placa RM	9
3.3.1. Formulación Irreducible	11
3.3.2. Bloqueo por Corte	14
3.3.3. Integración Reducida	16
3.3.4. Formulación Mixta para Elementos Finitos	17
3.3.5. Formulación Mixta sin Malla	18
3.4. Pruebas de Validación del Modelo	20
3.4.1. Test de la Parcela	20
3.4.2. Test de Conteo de Parcela	21
3.4.3. Normas de Convergencia	21
4. Formulación e Implementación	23
4.1. Formulación de la Proyección Nodal	23
4.2. Implementación del Algoritmo	26
4.2.1. Generación de la Malla	27
4.2.2. Puntos de Integración	28
4.2.3. Cálculo de Funciones de Base	30
4.2.4. Cálculo de Matriz de Rigidez y Vector de Fuerzas	30
4.2.5. Imposición de Condiciones de Borde	34
4.3. Selección del Elemento Mixto	35
5. Resultados	37
5.1. Experimentos Numéricos	37
5.1.1. Soluciones Analíticas	37
5.1.2. Resultados Numéricos	41
5.1.3. Convergencia	45

5.1.4. Sensibilidad a Distorsiones	53
6. Conclusiones	55
Bibliografía	57

Capítulo 1

Introducción

A medida de que los problemas de ingeniería van aumentando en complejidad se requieren nuevos métodos de cálculo. Por otro lado, los avances en la computación permiten realizar una gran cantidad de cálculos en cortos periodos de tiempo. Los métodos de cálculo numérico de solución son una herramienta invaluable para los ingenieros.

1.1. Antecedentes Generales

Uno de los métodos más utilizados para cálculo es el método De elementos finitos o MEF el cual se basa en dividir el dominio físico en una cantidad finita de elementos discretos, los cuales se encuentran definidos por nodos y conectividad o mallado, lo que representa la conectividad entre nodos. La solución se calcula en los nodos y luego se extrapola al elemento completo a partir de funciones de forma.

El método sin malla o *meshfree* es una modificación al método MEF tradicional donde se elimina el mallado y calcula la solución en el interior del espacio utilizando funciones de base asociados a los nodos que se encuentran en la vecindad del punto evaluado. Al eliminar el mallado se mejora tanto la exactitud de la solución y se disminuye el error debido a la distorsión geométrica de los elementos.

La teoría de Reissner-Mindlin (RM) se utiliza para modelar esfuerzos y deformaciones en placas gruesas. La teoría se basa en dos supuestos. Primero que la deformación a lo largo del espesor se comporta de manera lineal, y segundo que la componente σ_{zz} del esfuerzo es nula (esta suposición también se utiliza en teoría de vigas).

La Figura 1.1 muestra como se pueden utilizar métodos numéricos para modelar una placa con forma, fuerzas y condiciones de borde arbitrarias utilizando los métodos discutidos en este trabajo.

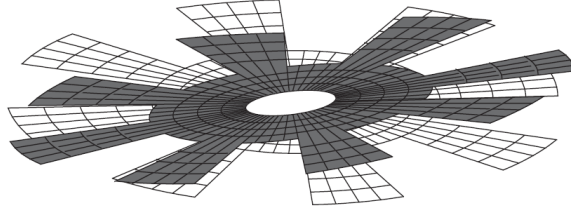


Figura 1.1: Primer modo de vibración de una pieza de un micro motor utilizando MEF para la placa RM. Fuente: [1].

1.2. Motivación

Al trabajar numéricamente, la placa RM lleva comúnmente a un problema de bloqueo por corte (*shear-locking*) cuando el espesor de la placa t tiende a cero debido a que el elemento utilizado no es capaz de recrear correctamente la deformación de la placa. Este evento es análogo al bloqueo volumétrico que ocurre en sólidos incompresibles. Al ocurrir el bloqueo los resultados entregados por el modelo son erróneos y no contienen información utilizable. El problema de bloqueo se puede solucionar mediante varios métodos como por ejemplo integración reducida [2] y formulación mixta [3, 4]. Una solución alternativa para el bloqueo volumétrico en elasticidad incompresibles trabajada por Ortiz et al. es la proyección nodal [5], la cual se busca adaptar para el problema de la placa RM en este trabajo.

1.3. Objetivos

En este trabajo se busca cumplir con el siguiente objetivo general:

- Desarrollar un esquema numérico de proyección nodal para la placa de RM utilizando métodos sin malla.

Además se establecen los siguientes objetivos específicos:

- Implementar proyección nodal utilizando un método sin mallas a la placa RM utilizando funciones de base de máxima entropía.
- Comparar los resultados con diferentes soluciones obtenidas por métodos basados en MEF.

1.4. Alcances

El alcance de este trabajo es desarrollar un esquema numérico de proyección nodal para la placa de RM utilizando métodos sin malla, específicamente funciones de base de la máxima entropía; comparar resultados del método de proyección nodal con métodos MEF tradicio-

nales evaluando convergencia a medida que se refina la malla y sensibilidad a distorsiones geométricas de los elementos para placa cuadrada y circular empotradas.

Capítulo 2

Metodología

El primer paso de este trabajo es la formulación de la proyección nodal para el problema de la placa RM. Para esto se sigue la metodología utilizada por Ortiz-Bernardin et al. [5] para elasticidad incompresible y se adapta para el uso en la placa RM. La formulación entrega expresiones para el cálculo de la matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales.

Una vez que se tiene la formulación se construye una rutina para generar una malla personalizada utilizando el software de pre y post proceso GiD [6] que permita asignar propiedades del material, condiciones borde y fuerzas aplicadas. Los parámetros entregados por el programa GiD son leídos utilizando un código programado en Matlab[®] y luego se construyen la matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales mediante integración numérica para una malla de soporte destinada para este efecto. Finalmente se calcula la solución en los nodos para determinar la solución al problema.

La calidad de la solución se evalúa utilizando soluciones numéricas obtenidas mediante el software comercial ADINA [7] y soluciones analíticas. Se evalúa la convergencia del método y la sensibilidad a las distorsiones de los elementos en la malla de integración numérica. Estos resultados se comparan con otros métodos tradicionales.

La Figura 2.1 muestra esquema que presenta gráficamente como se realizará el trabajo.

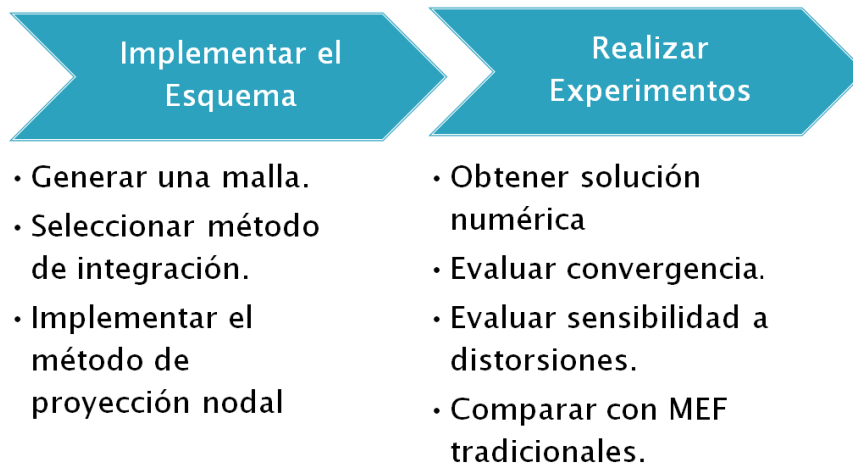


Figura 2.1: Esquema de la metodología utilizada. Fuente: Elaboración propia.

Capítulo 3

Antecedentes

3.1. Método de Elementos Finitos

El Método de Elementos Finitos o MEF (FEM en inglés) se utiliza para obtener soluciones a problemas diferenciales donde el desarrollo analítico es complejo o imposible. El método consiste en dividir el dominio físico en una cantidad finita de elementos discretos. La solución se calcula en una cantidad finita de puntos en cada elemento conocidos como nodos.

Luego la solución en el interior del elemento se calcula a partir de las soluciones nodales de cada elemento utilizando funciones de forma. En el caso de MEF las funciones de forma más utilizadas son lineales conocidas como funciones “Hat”. Las conexiones que definen los elementos se conoce como mallado. La Figura 3.1 muestra un mallado en un espacio bidimensional con elementos triangulares, conocidos como T3, utilizando una función de forma de tipo “Hat” las cuales son funciones polinomiales de primer orden.

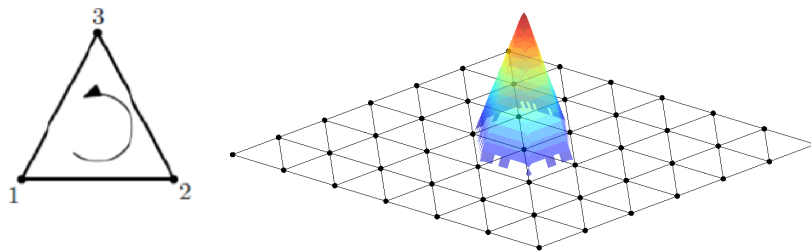


Figura 3.1: Elemento triangular utilizado en elementos finitos con representación visual de una función de forma lineal. Fuente: Elaboración Propia

Una vez que se conocen las soluciones nodales, en el caso bidimensional con dos grados de libertad (en este caso desplazamiento u) se tiene que la solución dentro del elemento se calcula utilizando la Ecuación (3.1), donde N_i son las funciones de forma.

$$\mathbf{u}^h = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{bmatrix} = \mathbf{N}_e \mathbf{u}_e \quad (3.1)$$

3.2. Método sin Malla

En MEF tradicional se tiene que la solución dentro de un elemento se calcula a partir de los nodos que definen el elemento utilizando las funciones de forma descritas en la sección anterior. En el caso de los métodos sin malla se utilizan los nodos que se encuentran en la vecindad del punto donde se evalúa. Debido a esto, las funciones de forma utilizadas son de mayor complejidad por lo que se requiere un mayor tiempo de proceso. La Figura 3.2 muestra una función de forma de un método sin malla sobre un espacio bidimensional.

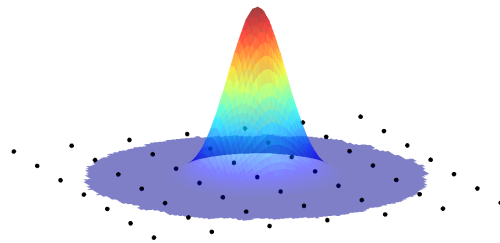


Figura 3.2: Función de base utilizada en métodos sin malla. Fuente: Elaboración Propia

El método sin malla tiene varias mejoras con respecto al MEF tradicional. Al aumentar el soporte se tiene mejor exactitud en la solución, además de ser más adecuado para modelar grandes deformaciones. La eliminación del mallado disminuye la sensibilidad a las distorsiones geométricas en los elementos.

A pesar de que los métodos sin malla no utilizan el mallado para la obtención de la solución, es conveniente utilizar un mallado para realizar integración de Gauss en los elementos. En el método es necesario integrar para calcular las matrices de rigidez y vectores de fuerza elementales.

Las funciones de base que se utilizará en este trabajo son funciones de máxima entropía [8][9]. Estas funciones se derivan a partir distribuciones probabilísticas que maximizan la

entropía. sujeto a que la suma de las funciones de forma en cada punto sea igual a la unidad y que la esperanza en un punto sea el punto. La Ecuación (3.2) muestra las condiciones que definen la función de máxima entropía donde Φ_a es la función de base del nodo a y m_a es el prior que se desea utilizar. En este trabajo se utilizara una función prior m_a gaussiana donde β_a controla el tamaño del soporte utilizado y donde h_a es el espaciado nodal característico y γ_a es un parámetro introducido por el usuario para asignar el tamaño del soporte.

$$\text{Maximizar } H(\Phi_a, m_a) = - \sum_{a=1}^n \Phi_a \ln \left(\frac{\Phi_a}{m_a} \right) \quad (3.2)$$

$$\text{sujeto a } \sum_{a=1}^n \Phi_a(\mathbf{x}) = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{a=1}^n \mathbf{x}_a \Phi_a(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

$$\text{con } m_a(\mathbf{x}) = e^{-\beta_a \|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}\|^2} \quad \text{donde } \beta_a = \gamma_a / h_a^2$$

3.3. Formulación de la Placa RM

La teoría de Reissner-Mindlin (RM) se utiliza para modelar esfuerzos y deformaciones en placas gruesas. La placa se modela como una superficie bidimensional con una variable de espesor en una placa como la que se muestra en la Figura 3.3. Para convertir a coordenadas cartesianas se utiliza la transformación que se muestra en la Ecuación (3.3), donde u , v , w son las deformaciones en coordenadas cartesianas y θ_x , θ_y son las deformaciones rotacionales en dirección x e y respectivamente como se muestran en la Figura 3.4.

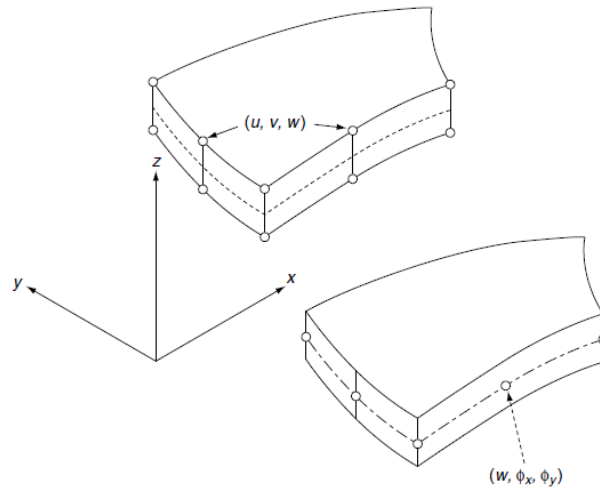


Figura 3.3: Elemento tridimensional isoparamétrico con un espesor dado y elemento de placa RM. Fuente:[4]

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z\theta_x \\ z\theta_y \\ w \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

La teoría se basa en dos supuestos, primero en que la deformación a lo largo del espesor se comporta de manera lineal y segundo en que la componente σ_{zz} del esfuerzo es nula (esta suposición también se utiliza en teoría de vigas).

La placa RM se define por tres variables de posición θ_x , θ_y (aveces se utiliza ϕ_x y ϕ_y utilizando el cambio de variable que se muestra en la ecuación (3.4) dependiendo de la preferencia del autor) y w . La Figura 3.4 muestra un esquema de estas variables que se utilizan en la placa RM.

$$\begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

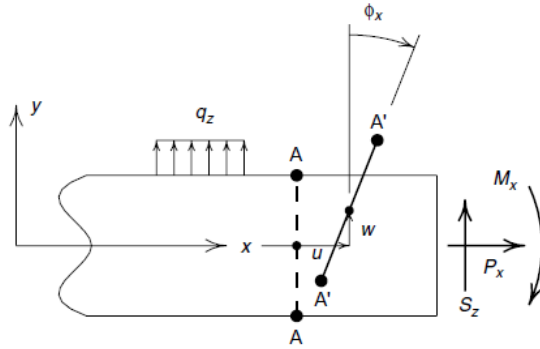


Figura 3.4: Esquema de las variables y fuerzas que actúan sobre la placa RM.[4]

El problema de la placa RM se encuentra definido por las ecuaciones de equilibrio de fuerzas de corte (3.5), equilibrio de momento (3.6), ecuaciones constitutivas de corte (3.7) y momento(3.8).

$$\nabla^T \mathbf{S} + \mathbf{q} = 0 \quad (3.5)$$

$$\mathcal{L}^T \mathbf{M} + \mathbf{S} = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{\alpha} \mathbf{S} - \theta - \nabla w = 0 \quad (3.7)$$

$$\mathbf{M} - \mathbf{D} \mathcal{L} \theta = 0 \quad (3.8)$$

con

$$\mathbf{D} = \frac{Et^3}{12(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad \mathcal{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} G\kappa t$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Donde M_x y M_y son los momentos internos en las direcciones x e y y S_x y S_y son los esfuerzos de corte en las direcciones x e y . E es el módulo de Young, ν es el módulo de Poisson, G es el módulo de corte del material, κ es el factor de corte que vale 5/6 y t es el espesor de la placa.

Para la formulación del problema resulta conveniente eliminar las el momento M utilizando las Ecuaciones (3.8) y (3.6) simplificando el problema.

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}\mathcal{L}\theta \Rightarrow \mathcal{L}^T\mathbf{D}\mathcal{L}\theta + \mathbf{S} = 0 \quad (3.10)$$

Utilizando las Ecuaciones (3.5), (3.7) y (3.10) se llega a la forma débil del problema de la placa RM.

$$\int_{\Omega} \delta w [\nabla^T \mathbf{S} + q] d\Omega = 0 \quad (3.11)$$

$$\int_{\Omega} \delta \theta^T [\mathcal{L}^T \mathbf{D} \mathcal{L} \theta + \mathbf{S}] d\Omega = 0 \quad (3.12)$$

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{S}^T \left[-\frac{1}{\alpha} \mathbf{S} + \theta + \nabla w \right] d\Omega = 0 \quad (3.13)$$

Además se define la variable γ como:

$$\gamma = \nabla w + \theta = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

3.3.1. Formulación Irreducible

De la forma débil mostrada en la sección anterior se puede eliminar el esfuerzo de corte \mathbf{S} para llegar a la formulación irreducible. Para esto se utiliza la ecuación (3.7).

$$\mathbf{S} = \alpha(\nabla w + \theta) = \alpha \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \alpha \mathbf{F} \mathbf{u} = \alpha \gamma \quad (3.15)$$

Se discretizan las variables de desplazamiento utilizando las funciones de forma lineales $N_a(x)$, donde a indica a que nodo corresponde la función de base y n es el número de nodos del elemento donde se evalúa la solución.

$$\mathbf{u}_h(x) = \begin{bmatrix} w^h(x) \\ \theta_x^h(x) \\ \theta_y^h(x) \end{bmatrix} = \sum_{a=1}^n \begin{bmatrix} N_a(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_a(x) & 0 \\ 0 & 0 & N_a(x) \end{bmatrix} u_a = \sum_{a=1}^n \mathbf{H}_a(x) \mathbf{u}_a \quad (3.16)$$

donde

$$\mathbf{H}_a(x) = \begin{bmatrix} N_a(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_a(x) & 0 \\ 0 & 0 & N_a(x) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Entonces, se tiene cada variable discretizada del siguiente modo:

$$w^h(x) = \sum_{a=1}^n \mathbf{g} \mathbf{H}_a(x) \mathbf{u}_a \quad (3.18)$$

$$\delta w^h(x) = \sum_{a=1}^n \mathbf{g} \mathbf{H}_a(x) \delta \mathbf{u}_a \quad (3.19)$$

con

$$\mathbf{g} = [1 \quad 0 \quad 0] \quad (3.20)$$

Y de la misma manera para θ

$$\theta^h(x) = \sum_{a=1}^n \mathbf{b} \mathbf{H}_a(x) \mathbf{u}_a \quad (3.21)$$

$$\delta \theta^h(x) = \sum_{a=1}^n \mathbf{b} \mathbf{H}_a(x) \delta \mathbf{u}_a \quad (3.22)$$

con

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Utilizando esta discretización se calcula \mathbf{S} como sigue:

$$\mathbf{S}^h = \sum_{a=1}^n \alpha \begin{bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial x} & N_a & 0 \\ \frac{\partial N_a}{\partial y} & 0 & N_a \end{bmatrix} \mathbf{u}_a = \alpha \sum_{a=1}^n \mathbf{V}_a u_a = \alpha \gamma_h \quad (3.24)$$

Integrando por partes la forma débil relacionada a los momentos (3.12) se obtiene (3.25), donde $\bar{\mathbf{m}}$ es el momento prescrito y Γ_n es el borde donde se aplica este momento.

$$\int_{\Gamma_n} \delta \theta^T \bar{\mathbf{m}} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \theta^T [\mathcal{L}^T D \mathcal{L} \theta - \mathbf{S}] d\Omega = 0 \quad (3.25)$$

Reemplazando esta discretización en (3.25) se obtiene:

$$\int_{\Omega} (\delta \mathbf{u}_b)^T (\mathbf{bH}_b(x))^T [\mathcal{L}^T \mathbf{D} \mathcal{L} \mathbf{bH}_a(x) - \alpha \mathbf{V}_a(x)] \mathbf{u}_a d\Omega = \int_{\Gamma_n} (\delta \mathbf{u}_b)^T [\mathbf{bH}_b(x)]^T \bar{\mathbf{m}} d\Gamma_n \quad (3.26)$$

Entonces, se definen las matrices de rigidez \mathbf{K}^1 , \mathbf{K}^2 y \mathbf{f}_θ como:

$$\mathbf{K}_{ab}^1 = \int_{\Omega} (\mathcal{L} \mathbf{bH}_b(x))^T \mathbf{D} \mathcal{L} \mathbf{bH}_a(x) d\Omega \quad (3.27)$$

$$\mathbf{K}_{ab}^2 = \int_{\Omega} (\mathbf{bH}_b(x))^T \alpha \mathbf{V}_a(x) d\Omega \quad (3.28)$$

$$\mathbf{f}_\theta = \int_{\Gamma_m} [\mathbf{bH}_b(x)]^T \bar{\mathbf{m}} d\Gamma \quad (3.29)$$

Integrando por partes la forma débil de equilibrio de corte (3.11), donde $\bar{\mathbf{S}}$ es la condición de borde de corte y Γ_s la superficie donde se prescribe el corte, se tiene

$$\int_{\Omega} \delta w [\nabla^T \mathbf{S} + q] d\Omega = \int_{\Gamma} \delta w^T \bar{\mathbf{S}}_n d\Gamma - \int_{\Omega} [\nabla(\delta w)]^T \mathbf{S} d\Omega + \int_{\Omega} \delta w^T q d\Omega = 0 \quad (3.30)$$

Entonces reemplazando las variables discretizadas a (3.30) escribimos:

$$\int_{\Omega} (\delta \mathbf{u}_b)^T [\nabla(\mathbf{gH}_b(x))]^T \alpha \mathbf{V}_a(x) u_a d\Omega = \int_{\Gamma_s} (\delta \mathbf{u}_b)^T [\mathbf{gH}_b(x)]^T \bar{\mathbf{S}}_n d\Gamma - \int_{\Omega} (\delta \mathbf{u}_b)^T [\mathbf{gH}_b(x)]^T q d\Omega \quad (3.31)$$

Resultando en las siguientes matrices:

$$\mathbf{K}_{ab}^3 = \int_{\Omega} [\nabla(\mathbf{gH}_b(x))]^T \alpha \mathbf{V}_a(x) d\Omega \quad (3.32)$$

$$\mathbf{f}_w = \int_{\Gamma_s} [\mathbf{gH}_b(x)]^T \bar{\mathbf{S}}_n d\Gamma + \int_{\Omega} [\mathbf{gH}_b(x)]^T q d\Omega \quad (3.33)$$

Finalmente las soluciones nodales \mathbf{u}_h se calculan a partir del siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$(\mathbf{K}^1 + \mathbf{K}^2 + \mathbf{K}^3)\mathbf{u}_h = \mathbf{f}_\theta + \mathbf{f}_w \quad (3.34)$$

Para poder implementar esta solución se debe realizar integración numérica para obtener las matrices de rigidez y el vector de fuerzas nodales. En este trabajo la integración se realiza mediante cuadratura de Gauss.

Esta formulación de la placa RM presenta lo que se conoce como bloqueo por corte. Esto ocurre porque cuando el espesor de la placa tiende a cero, la matriz de rigidez se sobre-rigidiza causando que los resultados calculados sean erróneamente cercanos a cero. La estrategia más utilizada para solucionar parcialmente este efecto es la integración reducida cuando se utiliza MEF tradicional [2].

3.3.2. Bloqueo por Corte

El bloqueo por corte ocurre cuando el espesor de la placa disminuye, causando que el la rigidez de la placa aumente de manera errónea haciendo que las deflexiones sean menores a lo que se espera. Esto ocurre debido a que el elemento propuesto para la formulación irreducible es incapaz de modelar correctamente placas finas. La Figura 3.5 muestra como un elemento placa unidimensional con un grado de libertad θ y un grado de libertad de tipo desplazamiento transversal w no puede modelar correctamente deflexión. Como se puede ver en la figura, si la placa es más delgada la diferencia entre la placa real y la placa RM aumenta lo cual se observa en la solución final como un aumento excesivo de rigidez conocida como bloqueo por corte.

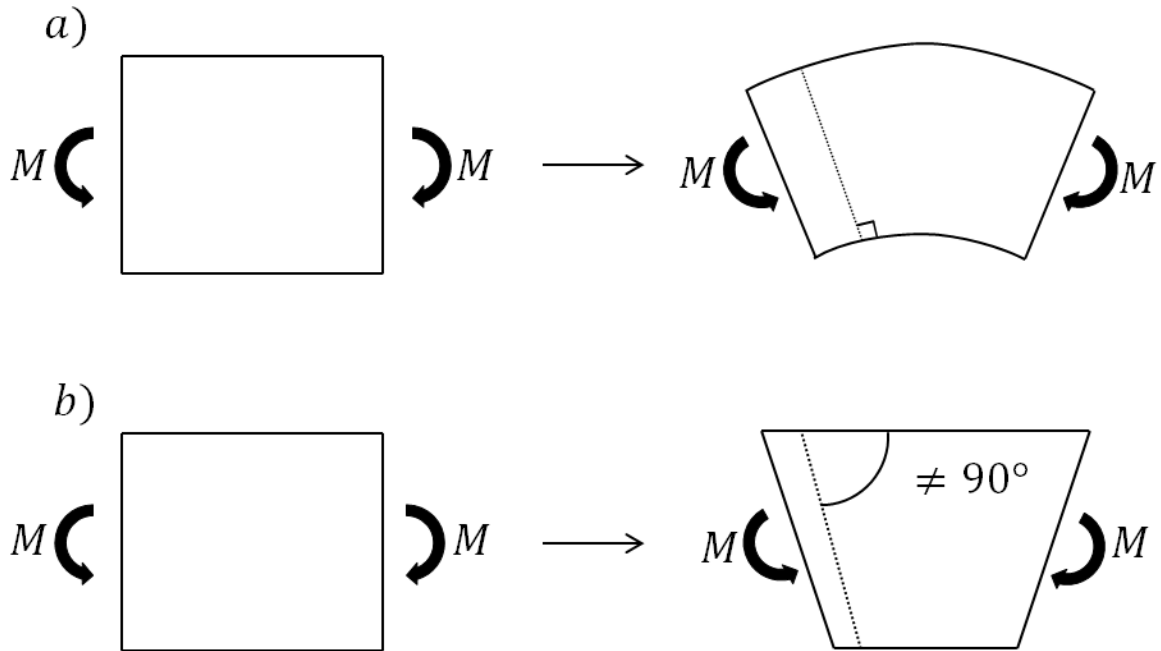


Figura 3.5: Diferencia entre una placa real a) y una placa RM b) bajo deflexión. Fuente: Elaboración propia

En la Figura 3.6 muestra como varía la solución obtenidos utilizando MEF tradicional (sin integración reducida) y resultados obtenidos con ADINA para una placa cuadrada empotrada bajo carga uniforme. ADINA soluciona el bloqueo de corte gracias a que utiliza elementos MITC3 y MITC4 [7] los cuales provienen de la formulación mixta que se describe más adelante. Como se puede ver a medida que se disminuye el espesor, la solución tiende a cero con respecto a lo esperado.

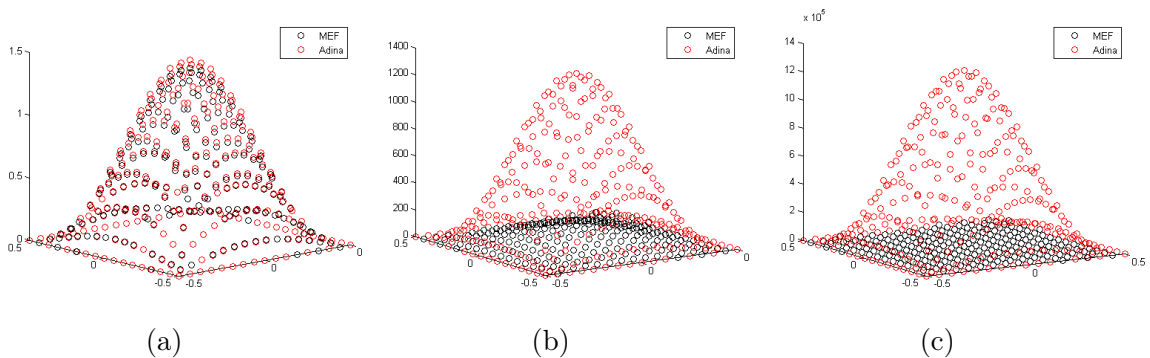


Figura 3.6: Solución utilizando integración completa para una placa cuadrada de $L = 1 [m]$ empotrada a medida que disminuye el espesor disminuye. (a) $t = 0.1 [m]$ (b) $t = 0.01 [m]$ y (c) $t = 0.001 [m]$. Fuente: Elaboración propia.

3.3.3. Integración Reducida

La integración reducida consiste en reducir la cantidad de puntos de Gauss utilizados al calcular las integrales de \mathbf{K}^2 y \mathbf{K}^3 de tal manera que la integral no tenga una solución numérica exacta. Por lo general se utiliza con elementos cuadrados de cuatro nodos conocidos como Q4, el cual se muestra en la Figura 3.7, utilizando un solo punto de Gauss en vez de los cuatro requeridos para la integración exacta de las funciones de forma lineales.

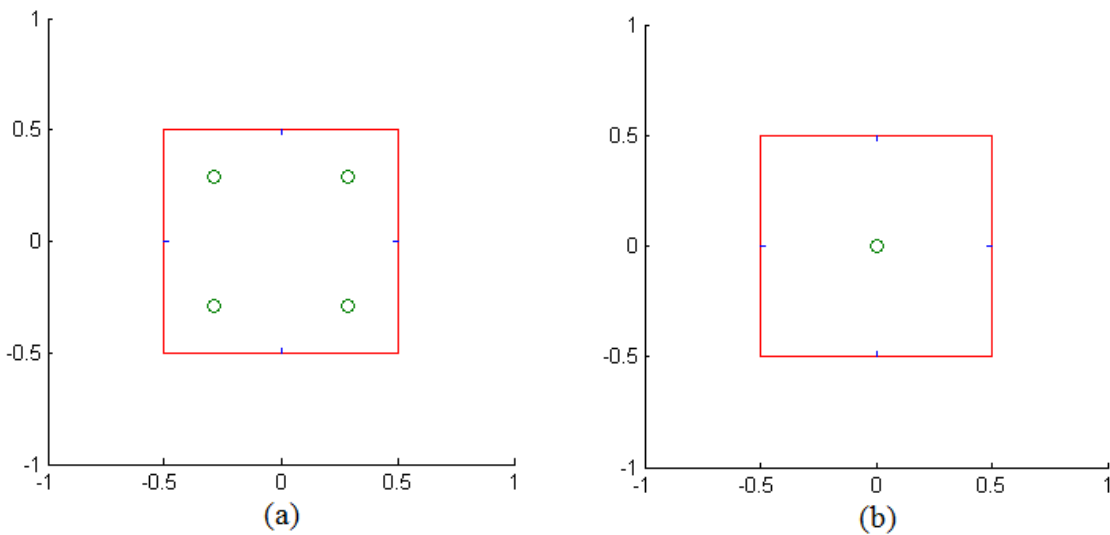


Figura 3.7: Elementos Q4 con 4 puntos de Gauss, círculos verdes, para integración completa (a) y con un punto de Gauss para integración reducida (b). Fuente: Elaboración propia

Como se ve en la Figura 3.8, al utilizar integración reducida para el caso con mayor bloqueo, placa fina con $t = 0.001 [m]$, se elimina el bloqueo de corte para la formulación irreducible.

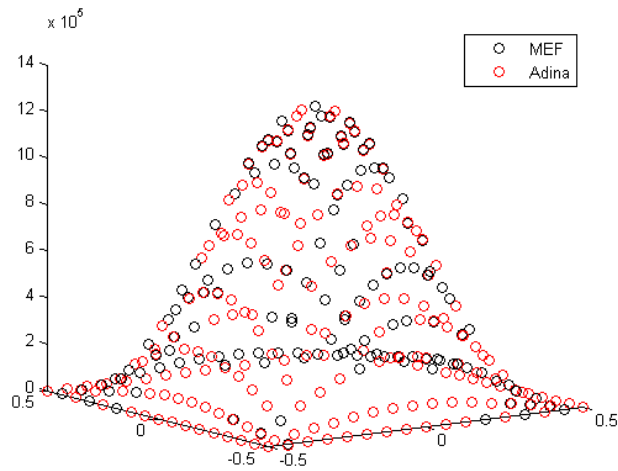


Figura 3.8: Comparación entre solución MEF tradicional con integración reducida con respecto a la solución con software Adina para $t = 0.001 [m]$. Fuente: Elaboración propia.

3.3.4. Formulación Mixta para Elementos Finitos

La formulación mixta intenta aliviar el problema del bloqueo por corte agregando nodos adicionales con un grado de libertad adicional, en el caso de la placa RM nodos de esfuerzo de corte \mathbf{S} . A diferencia de la formulación irreducible, no se simplifica el esfuerzo de corte, sino que se adopta como una variable adicional. Debido a la adición de grados de libertad y nodo, se requiere mayor tiempo de computación. La Figura 3.9 muestra posibles elementos mixtos.

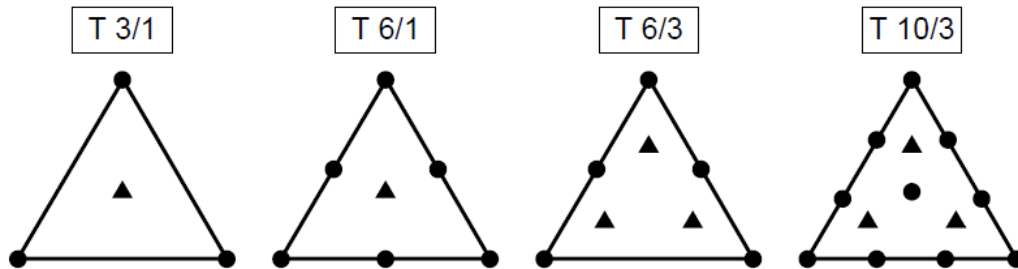


Figura 3.9: Elementos comunmente utilizados en la formulación mixta (Nodos \bullet de desplazamiento w, θ y \blacktriangle de corte \mathbf{S}). Fuente: [10].

Se discretiza \mathbf{S} utilizando las funciones de forma $N^s(x)$ pertinente al elemento seleccionado donde n_s es el número de nodos de corte \mathbf{S} por elemento.

$$\mathbf{S}_h(x) = \sum_{a=1}^{n_s} N_a^s(x) \mathbf{S}_a \quad (3.35)$$

$$\delta \mathbf{S}_h(x) = \sum_{b=1}^{n_s} N_b^s(x) \delta \mathbf{S}_b \quad (3.36)$$

Análogamente al caso irreducible se obtienen las expresiones para la matriz de rigidez y vector de fuerzas que se muestran en la ecuación (3.37). La obtención de las matrices de rigidez se puede encontrar en Referencia [4], Capítulo 12.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & E^T \\ 0 & A & C^T \\ E & C & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_h \\ \theta_h \\ S_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_w \\ f_\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{A}_{ab} = \int_{\Omega} [\mathcal{L} \mathbf{b} \mathbf{H}_a(x)]^T \mathbf{D} [\mathcal{L} \mathbf{b} \mathbf{H}_b(x)] d\Omega \quad (3.38)$$

$$\mathbf{E}_{ab} = \int_{\Omega} [\mathbf{I} N_a^s(x)]^T \nabla [\mathbf{g} \mathbf{H}_b(x)] d\Omega \quad (3.39)$$

$$\mathbf{C}_{ab} = \int_{\Omega} [\mathbf{I} N_a^s(x)]^T [\mathbf{b} \mathbf{H}_b](x) d\Omega \quad (3.40)$$

$$\mathbf{H}_{ab} = - \int_{\Omega} [\mathbf{I} N_a^s(x)]^T \frac{1}{\alpha} [\mathbf{I} N_b^s(x)] d\Omega \quad (3.41)$$

$$\mathbf{f}_w = \int_{\Gamma_s} [\mathbf{g} \mathbf{H}_b(x)]^T \bar{\mathbf{S}}_n d\Gamma + \int_{\Omega} [\mathbf{g} \mathbf{H}_b(x)]^T q d\Omega \quad (3.42)$$

$$\mathbf{f}_\theta = \int_{\Gamma_m} [\mathbf{b} \mathbf{H}_b(x)]^T \bar{\mathbf{m}} d\Gamma \quad (3.43)$$

3.3.5. Formulación Mixta sin Malla

Para los métodos sin malla no se utilizan funciones de forma que dependen del mallado sino que se utilizan funciones de base que utilizan los nodos que se encuentra en su vecindad. Un nodo a contribuye a la solución en el punto x cuando el nodo a se encuentra en la vecindad de x . En este trabajo se utilizan como funciones de base las funciones de máxima entropía utilizando un prior gaussiano que se describe en la sección 3.2. El tamaño de la vecindad depende del valor de γ .

Utilizando las funciones de máxima entropía como funciones de base se discretizan los desplazamientos, donde $\Phi_a(x)$, $\varphi_a(x)$ y $\psi_a(x)$ son las funciones de máxima entropía para el

nodo a y n es el número de nodos que contribuye a x . Se define entonces la matriz $\mathbf{H}_a(x)$ en función de las funciones de base:

$$\mathbf{u}_h(x) = \begin{bmatrix} w^h(x) \\ \theta_x^h(x) \\ \theta_y^h(x) \end{bmatrix} = \sum_{a=1}^n \begin{bmatrix} \Phi_a(x) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_a(x) & 0 \\ 0 & 0 & \psi_a(x) \end{bmatrix} u_a = \sum_{a=1}^n \mathbf{H}_a(x) \mathbf{u}_a \quad (3.44)$$

Como se trata de un método mixto, también se discretiza el esfuerzo de corte \mathbf{S} utilizando funciones de máxima entropía. Ahora $\rho_a(x)$ es una función de base de máxima entropía correspondiente al nodo a y no depende de la malla y n_s corresponde al número de nodos de corte en la vecindad de x .

$$\mathbf{S}_h(x) = \sum_{a=1}^{n_s} \rho_a(x) \mathbf{S}_a \quad (3.45)$$

$$\delta \mathbf{S}_h(x) = \sum_{b=1}^{n_s} \rho_b(x) \delta \mathbf{S}_b \quad (3.46)$$

La matriz de rigidez se calculan de manera análoga al caso de elementos finitos solo que ahora se utilizan funciones de base sin malla.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & E^T \\ 0 & A & C^T \\ E & C & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_h \\ \theta_h \\ S_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_w \\ f_\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$\mathbf{A}_{ab} = \int_{\Omega} [\mathcal{L} \mathbf{b} \mathbf{H}_a(x)]^T \mathbf{D} [\mathcal{L} \mathbf{b} \mathbf{H}_b(x)] d\Omega \quad (3.48)$$

$$\mathbf{E}_{ab} = \int_{\Omega} [\mathbf{I} \rho_a(x)]^T \nabla [\mathbf{g} \mathbf{H}_b(x)] d\Omega \quad (3.49)$$

$$\mathbf{C}_{ab} = \int_{\Omega} [\mathbf{I} \rho_a(x)]^T [\mathbf{b} \mathbf{H}_b(x)] d\Omega \quad (3.50)$$

$$\mathbf{H}_{ab} = - \int_{\Omega} [\mathbf{I} \rho_a(x)]^T \frac{1}{\alpha} [\mathbf{I} \rho_b(x)] d\Omega \quad (3.51)$$

$$\mathbf{f}_w = \int_{\Gamma_s} [\mathbf{g} \mathbf{H}_b(x)]^T \bar{\mathbf{S}}_n d\Gamma + \int_{\Omega} [\mathbf{g} \mathbf{H}_b(x)]^T q d\Omega \quad (3.52)$$

$$\mathbf{f}_\theta = \int_{\Gamma_m} [\mathbf{b} \mathbf{H}_b(x)]^T \bar{\mathbf{m}} d\Gamma \quad (3.53)$$

El cálculo de la matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales requiere de integración numérica. Para realizar la integración se utiliza la cuadratura de Gauss. Para poder realizar integración de Gauss se ha generado una malla que solo se utiliza para este efecto.

3.4. Pruebas de Validación del Modelo

En esta sección se describen distintas pruebas que se realizan al modelo para validarlo. En este trabajo se utilizan cuatro pruebas que se describen a continuación.

3.4.1. Test de la Parcela

El test de la parcela “Patch Test” se utiliza para verificar la convergencia o consistencia de un elemento o formulación. El test consiste en generar una malla cuadrada de bajos elementos como la que se muestra en la Figura 3.10, a la cual se le asigna una condición de borde lineal arbitraria, como se muestra en la ecuación (3.54), donde \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} son vectores de constantes arbitrarias. La solución dentro de la malla debe ser exactamente igual a la ecuación (3.54) para satisfacer el test.

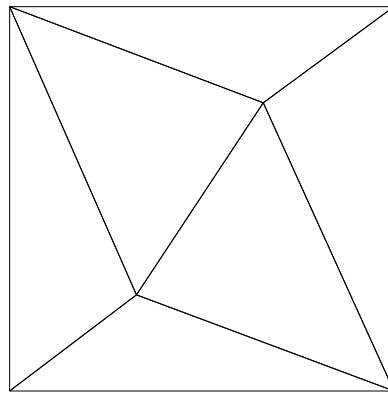


Figura 3.10: Malla de triángulos utilizada para el Test de la Parcela. Fuente: Elaboración propia.

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}x + \mathbf{b}y + \mathbf{c} \tag{3.54}$$

La satisfacción del test de la parcela es condición necesaria para la convergencia del método y del tipo de elemento utilizado. Además permite validar la programación del algoritmo.

En el caso de la placa RM se requiere que la condición de borde impuesta para el desplazamiento impuesta sobre w sea de un orden mayor a el orden de la condición impuesta sobre las rotaciones θ_x y θ_y [11]. Por lo tanto la condición impuesta para las rotaciones debe

ser constante, dejando la condición impuesta según la Ecuación (3.55), donde a , b y c son constantes arbitrarias.

$$\begin{aligned} w &= ax + by + c \\ \theta_x &= a \\ \theta_y &= b \end{aligned} \tag{3.55}$$

3.4.2. Test de Conteo de Parcela

Para diseñar elementos mixtos útiles se utiliza el test de conteo de parcela o "Patch Count Test". Este test busca identificar si las condiciones de borde entregan suficiente información al problema para resolver el sistema de ecuaciones y así evitar inestabilidad. El test se realiza generando una malla de un elemento y otro de 4 elementos (mallas cuadradas) o 6 elementos (mallas triangulares). A estas mallas se les impone una condición de borde de empotramiento $w = 0$, $\theta_x = 0$ y $\theta_y = 0$, las cuales se imponen en todo el contorno (restringido, designado por el subíndice C) o en un solo nodo (relajado, designado por el subíndice R). El test se pasa satisfactoriamente para la placa RM si se cumplen las siguientes condiciones, donde n_w , n_θ y n_S son el número de grados de libertad w , θ y S respectivamente:

$$\alpha_p \equiv \frac{n_\theta + n_w}{n_s} \geq 1 \quad \beta_p \equiv \frac{n_s}{n_w} \geq 1 \tag{3.56}$$

Para evaluar la tendencia del elemento a solucionar el bloqueo se existe el test de conteo de restricciones. Para este test se define la relación de restricciones r como se muestra en la Ecuación 3.57, donde n_{eq} es el numero de ecuaciones y n_c es el numero de restricciones. Se llega a un caso ideal si $r = 2$ y si $r < 1$ ocurrirá bloqueo[12].

$$r_p = \frac{n_{eq}}{n_c} \tag{3.57}$$

Hay que notar que estos tests muestran una tendencia del elemento a satisfacer las condiciones probada, sin embargo no son información suficiente para validar le elemento.

3.4.3. Normas de Convergencia

La solución calculada debe converger a la solución exacta a medida que se refina el mallado (se aumenta el número de nodos, como es el caso del método sin mallas). Para esto se utilizan la norma L^2 y la semi-norma H^1 .

La norma L^2 se deduce a partir de los espacios L^p también conocidos como espacios de Lebesgue. Se define la norma L^p de f como:

$$\|f(\mathbf{x})\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} f(\mathbf{x})^p d\Omega \right)^{1/p} \quad (3.58)$$

A partir del Ecuación (3.58) se define la norma L^2 del error de la solución dividiendo $\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{L^2}$ por $\|(\mathbf{u})\|_{L^2}$, donde \mathbf{u} es la solución analítica y \mathbf{u}_h es la solución calculada:

$$\frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2}}{\|\mathbf{u}\|_{L^2}} = \left(\frac{\int_{\Omega} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) d\Omega}{\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} d\Omega} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.59)$$

De manera similar se define a partir de los espacios de Hilbert la semi-norma energética del error H^1 , la cual evalúa la convergencia de las derivadas de la solución:

$$\frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1}}{\|\mathbf{u}\|_{H^1}} = \left(\frac{\int_{\Omega} (\mathbf{u}' - \mathbf{u}'_h) \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}'_h) d\Omega}{\int_{\Omega} \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}' d\Omega} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.60)$$

Capítulo 4

Formulación e Implementación

4.1. Formulación de la Proyección Nodal

La proyección nodal fue desarrollada por Ortiz-Bernardin [5] para el problema de elasticidad lineal incompresible, el cual presenta bloqueo volumétrico cuando se utilizan métodos tradicionales. Esta formulación presentó mejor convergencia al comparar con la formulación mixta tradicional.

La proyección nodal busca pasar de la formulación mixta sin malla a una formulación en función de los desplazamientos eliminando de esta la necesidad calcular el esfuerzo de corte \mathbf{S} nodal y bajar el tamaño de la matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales.

Para este propósito se comienza la formulación utilizando la misma discretización utilizada por la formulación mixta sin malla, donde n_w , n_θ y n_S son los nodos pertenecientes a la contribución de w , θ y \mathbf{S} en el punto \mathbf{x} respectivamente:

$$w_h(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^{n_w} \Phi_a(\mathbf{x}) w_a \quad \partial w_h(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^{n_w} \Phi_a(\mathbf{x}) \partial w_a \quad (4.1)$$

$$\theta_h(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^{n_\theta} \varphi_a(\mathbf{x}) \theta_a \quad \partial \theta_h(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^{n_\theta} \varphi_a(\mathbf{x}) \partial \theta_a \quad (4.2)$$

$$\mathbf{S}_h(x) = \sum_{a=1}^{n_S} \rho_a(\mathbf{x}) \mathbf{S}_a \quad \delta \mathbf{S}_h(x) = \sum_{b=1}^{n_S} \rho_b(\mathbf{x}) \delta \mathbf{S}_b \quad (4.3)$$

Luego se discretiza la variable γ definida en (3.16),

$$\gamma_h = \sum_{a=1}^{n_w} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_a(\mathbf{x})}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_a(\mathbf{x})}{\partial y} \end{bmatrix} w_a + \sum_{a=1}^{n_\theta} \begin{bmatrix} \varphi_a(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \varphi_a(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \theta_a = \sum_{a=1}^{n_w} \mathbf{C}_a(\mathbf{x}) w_a + \sum_{a=1}^{n_\theta} \mathbf{G}_a(\mathbf{x}) \theta_a \quad (4.4)$$

Ahora se busca eliminar la dependencia de las soluciones nodales \mathbf{S}_a reemplazando en la Ecuación (3.13) las variables discretizadas y despejando \mathbf{S}_a . Este proceso se conoce como proyección nodal.

$$\sum_{b=1}^{n_w} \int_{\Omega} \rho_a(\mathbf{x}) \mathbf{C}_b(\mathbf{x}) w_b d\Omega + \sum_{b=1}^{n_\theta} \int_{\Omega} \rho_a(\mathbf{x}) \mathbf{G}_b(\mathbf{x}) \theta_b d\Omega - \frac{1}{\alpha} \sum_{a=1}^{n_s} \int_{\Omega} \rho_a(\mathbf{x}) \rho_b(\mathbf{x}) \mathbf{S}_b d\Omega = 0 \quad (4.5)$$

Realizando suma de filas en la parte del esfuerzo de corte se obtiene (4.6). Se debe notar que el área de integración Ω ha cambiado por Ω_c el cual representa la unión de los elementos adyacentes al nodo evaluado c como se muestra en la Figura 4.1 [13].

$$\sum_{b=1}^{n_w} \left(\int_{\Omega_c} \rho_a(\mathbf{x}) \mathbf{C}_b(\mathbf{x}) d\Omega \right) w_b + \sum_{b=1}^{n_\theta} \left(\int_{\Omega_c} \rho_a(\mathbf{x}) \mathbf{G}_b(\mathbf{x}) d\Omega \right) \theta_b = \left(\frac{1}{\alpha} \int_{\Omega_c} \rho_a(\mathbf{x}) d\Omega \right) \mathbf{S}_a \quad (4.6)$$

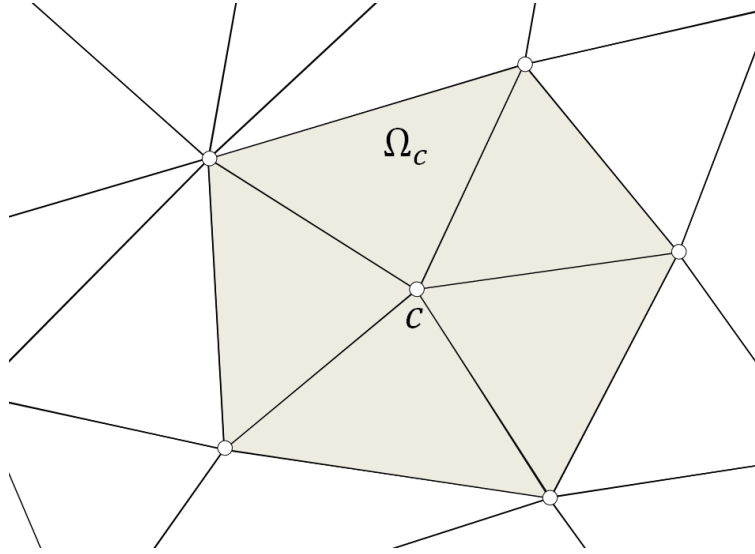


Figura 4.1: Área de integración Ω_c del nodo c . Fuente: Elaboración propia basado en [13].

Reemplazando S_a ,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ax} \\ \mathbf{S}_{ay} \end{bmatrix} \left(\frac{1}{\alpha} \int_{\Omega_c} \rho_a(\mathbf{x}) d\Omega \right) = \sum_{b=1}^{n_w} \left(\int_{\Omega_c} \rho_a(\mathbf{x}) \mathbf{C}_b(\mathbf{x}) d\Omega \right) w_b + \sum_{b=1}^{n_\theta} \left(\int_{\Omega_c} \rho_a(\mathbf{x}) \mathbf{G}_b(\mathbf{x}) d\Omega \right) \theta_b \quad (4.7)$$

Finalmente, se obtiene,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ax} \\ \mathbf{S}_{ay} \end{bmatrix} = \alpha \sum_{b=1}^{n_w} \frac{\int_{\Omega_c} \rho_a(\mathbf{x}) \mathbf{C}_b(\mathbf{x}) d\Omega}{\int_{\Omega_c} \rho_a(\mathbf{x}) d\Omega} w_b + \alpha \sum_{b=1}^{n_\theta} \frac{\int_{\Omega_c} \rho_a(\mathbf{x}) \mathbf{G}_b(\mathbf{x}) d\Omega}{\int_{\Omega_c} \rho_a(\mathbf{x}) d\Omega} \theta_b \quad (4.8)$$

La Ecuación 4.8 entrega una expresión para las soluciones nodales \mathbf{S}_a a partir de las soluciones nodales de desplazamiento y las funciones de base de desplazamiento y esfuerzo lo cual se conoce como proyección. Por simplicidad se define el operador de proyección nodal $\pi_c[\cdot]$ como:

$$\pi_a[\cdot] = \frac{\int_{\Omega_c} \rho_a(x) [\cdot] d\Omega}{\int_{\Omega_c} \rho_a(x) d\Omega} \quad (4.9)$$

Entonces el esfuerzo de corte discretizado \mathbf{S}_h se expresa de la siguiente manera:

$$\mathbf{S}_h(x) = \alpha \sum_{c=1}^{n_S} \rho_c(\mathbf{x}) \pi_c \left[\sum_{a=1}^{n_w} \mathbf{C}_a(\mathbf{x}) w_a + \sum_{a=1}^{n_\theta} \mathbf{G}_a(\mathbf{x}) \theta_a \right] \quad (4.10)$$

$$\Rightarrow \mathbf{S}_h(x) = \alpha \sum_{a=1}^{n_w} \left[\sum_{c=1}^{n_S} \rho_c(\mathbf{x}) \pi_c [\mathbf{C}_a(\mathbf{x})] \right] w_a + \alpha \sum_{a=1}^{n_\theta} \left[\sum_{c=1}^{n_S} \rho_c(\mathbf{x}) \pi_c [\mathbf{G}_a(\mathbf{x})] \right] \theta_a \quad (4.11)$$

Esta expresión entrega una discretización de S que no depende de las soluciones nodales \mathbf{S}_a si no que de las soluciones nodales de los desplazamientos w_a y θ_a . Ahora, remplazando las discretizaciones w_h , θ_h y S_h en las Ecuaciones (3.25) y (3.30) se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\delta\theta_b)^T (\mathbf{G}_b(\mathbf{x}))^T [\mathcal{L}^T \mathbf{D} \mathcal{L} \mathbf{G}_b(\mathbf{x})] \theta_a - \alpha \sum_{c=1}^{n_s} \rho_c(\mathbf{x}) \pi_c [\mathbf{C}_b(\mathbf{x})] w_a \\ & - \alpha \sum_{c=1}^{n_s} \rho_c(\mathbf{x}) \pi_c [\mathbf{G}_b(\mathbf{x})] \theta_a d\Omega = \int_{\Gamma_n} (\delta\theta_b)^T (\mathbf{G}_b(\mathbf{x}))^T \bar{\mathbf{m}} d\Gamma_n \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\delta w_b)^T [\mathbf{C}_b(x)]^T \left[\alpha \sum_{c=1}^{n_s} \rho_c(\mathbf{x}) \pi_c [\mathbf{C}_b(\mathbf{x})] w_a - \alpha \sum_{c=1}^{n_s} \rho_c(\mathbf{x}) \pi_c [\mathbf{G}_b(\mathbf{x})] \theta_a \right] d\Omega \\ & = \int_{\Gamma_s} (\delta w_b)^T [\Phi_b(x)]^T \bar{\mathbf{S}}_n d\Gamma - \int_{\Omega} (\delta w_b)^T [\Phi_b(x)]^T q d\Omega \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ahora se construyen las matrices de rigidez \mathbf{K}^b , \mathbf{K}_{ww}^s , $\mathbf{K}_{\theta w}^s$ y $\mathbf{K}_{w\theta}^s$ y $\mathbf{K}_{\theta\theta}^s$, además de los vectores de fuerzas \mathbf{f}_θ y \mathbf{f}_w a partir de las Ecuaciones (4.12) y (4.13). El proceso es análogo a la formulación irreducible. Las matrices son:

$$\mathbf{K}^b = \int_{\Omega} (\mathcal{L}\mathbf{G}_b(\mathbf{x}))^T \mathbf{D} \mathcal{L}\mathbf{G}_a(\mathbf{x}) d\Omega \quad (4.14)$$

$$\mathbf{K}_{ww}^s = \int_{\Omega} \mathbf{C}_b(\mathbf{x})^T \alpha \sum_{c=1}^{n_S} [\rho_c(\mathbf{x}) \pi_c[\mathbf{C}_a(\mathbf{x})]] d\Omega \quad (4.15)$$

$$\mathbf{K}_{\theta w}^s = \int_{\Omega} \mathbf{G}_b(\mathbf{x})^T \alpha \sum_{c=1}^{n_S} [\rho_c(\mathbf{x}) \pi_c[\mathbf{C}_a(\mathbf{x})]] d\Omega \quad (4.16)$$

$$\mathbf{K}_{w\theta}^s = \int_{\Omega} \mathbf{C}_b(\mathbf{x})^T \alpha \sum_{c=1}^{n_S} [\rho_c(\mathbf{x}) \pi_c[\mathbf{G}_a(\mathbf{x})]] d\Omega \quad (4.17)$$

$$\mathbf{K}_{\theta\theta}^s = \int_{\Omega} \mathbf{G}_b(\mathbf{x})^T \alpha \sum_{c=1}^{n_S} [\rho_c(\mathbf{x}) \pi_c[\mathbf{G}_a(\mathbf{x})]] d\Omega \quad (4.18)$$

$$\mathbf{f}_{\theta} = \int_{\Gamma_m} [\mathbf{G}_b(\mathbf{x})]^T \bar{\mathbf{m}} d\Gamma \quad (4.19)$$

$$\mathbf{f}_w = \int_{\Gamma_s} [\Psi_b(\mathbf{x})]^T \bar{\mathbf{S}}_n d\Gamma + \int_{\Omega} [\Psi_b(\mathbf{x})]^T q d\Omega \quad (4.20)$$

Finalmente, se tiene que la solución nodal del problema se obtiene resolviendo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ww}^s & \mathbf{K}_{w\theta}^s \\ \mathbf{K}_{\theta w}^s & \mathbf{K}_{\theta\theta}^s + \mathbf{K}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_w \\ \mathbf{f}_{\theta} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

4.2. Implementación del Algoritmo

Como se vio en la sección anterior, para obtener la solución al problema se debe construir la matriz de rigidez y el vector de fuerza del problema. Para esto primero se debe generar un mallado del problema. Si bien se trabaja con el método sin malla, la malla solo se utiliza para la integración numérica. La aproximación de las variables de campo se hace utilizando los nodos de la malla sin usar en este calculo la noción de elemento.

La Figura 4.2 muestra cada una de las etapas del algoritmo a utilizar. El algoritmo es implementado en Matlab mientras que para generar la malla se utiliza el software GiD [6] de pre y post proceso.

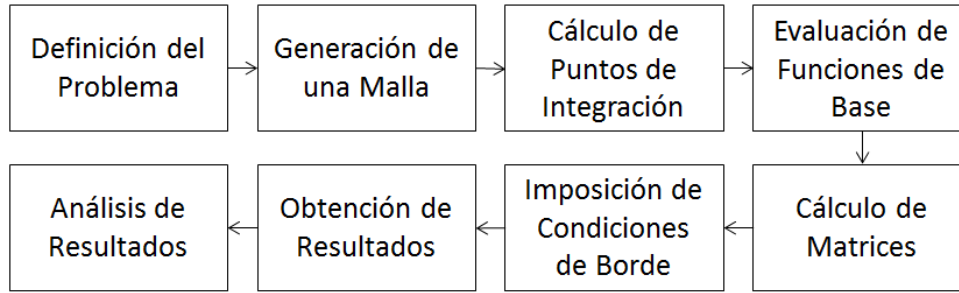


Figura 4.2: Esquema del algoritmo de Proyección Nodal. Fuente: Elaboración propia.

4.2.1. Generación de la Malla

La malla se genera a partir del software GiD [6]. El software permite generar mallas personalizadas (de triángulos o cuadrados, estructuradas, no estructuradas, distorsionadas, etc.), establecer condiciones de borde en nodos, líneas y elementos, propiedades del material y parámetros del problema.

Para aprovechar esta funcionalidad del software se debe crear una rutina que contenga los parámetros para la placa Reissner Mindlin. Se definen condiciones de borde para θ , w , M y S . Se asigna un valor de carga superficial q , espesor t , módulo de Young E y módulo de Poisson ν a cada elemento. Finalmente las coordenadas nodales, elementos y demás parámetros se imprimen en un archivo de texto el cual se lee en Matlab. La Figura 4.3 muestra un mallado de elementos triangulares a un círculo. Finalmente se le añaden nodos centrales en el centro de cada elemento para la formulación mixta.

En el caso de utilizar MEF tradicional con integración reducida, se necesitan utilizar elementos cuadrados, ya que en elementos triangulares un punto de Gauss sería suficiente para la integración exacta de las funciones de forma.

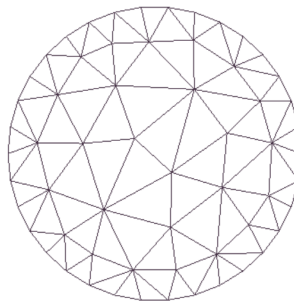


Figura 4.3: Mallado circular utilizando elementos triangulares utilizando el software GiD. Fuente: Elaboración propia.

4.2.2. Puntos de Integración

Las matrices de rigidez y vectores de fuerza se calculan utilizando integración de Gauss. Los puntos de Gauss y pesos de Gauss se calculan en cada elemento previo a la integración y se guardan debido a que son útiles en el cálculo de normas. La Figura 4.4 muestra los puntos de Gauss generados para integración en una malla de elementos triangulares cuando se utilizan 3 puntos por elemento.

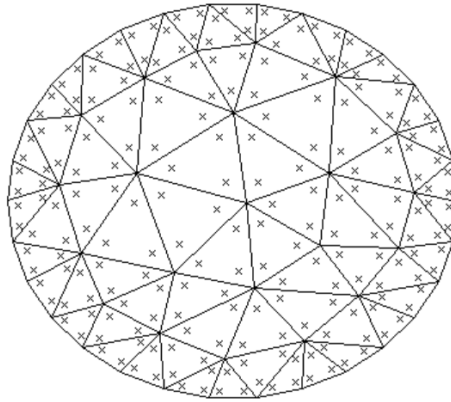


Figura 4.4: Esquema del algoritmo de Proyección Nodal. Fuente: Elaboración propia.

Se debe notar que en el caso de MEF, se utiliza integración reducida para el cálculo de las matrices de rigidez \mathbf{K}^2 y \mathbf{K}^3 y así evitar el bloqueo por corte.

Corrección de Derivadas

Las funciones de máxima entropía son racionales por lo que la cuadratura de Gauss presenta errores de integración [14]. Para aliviar este error se utiliza la corrección a las derivadas en los puntos de integración propuesta por Duan et. al.[15].

La corrección consiste en obtener el valor de las derivadas en el interior del triángulo a partir de la integral en el contorno. Esta corrección se obtiene utilizando el teorema de Green que relaciona el valor de la integral de las derivadas de una función al interior de una superficie con la integral de la función en el contorno. En el trabajo realizado por Duan et. al. se utiliza para calcular las derivadas de una función de base utilizando el valor de esta en puntos de gauss en el interior y contorno del triángulo de integración. La Figura 4.5 muestra la cuadratura utilizada.

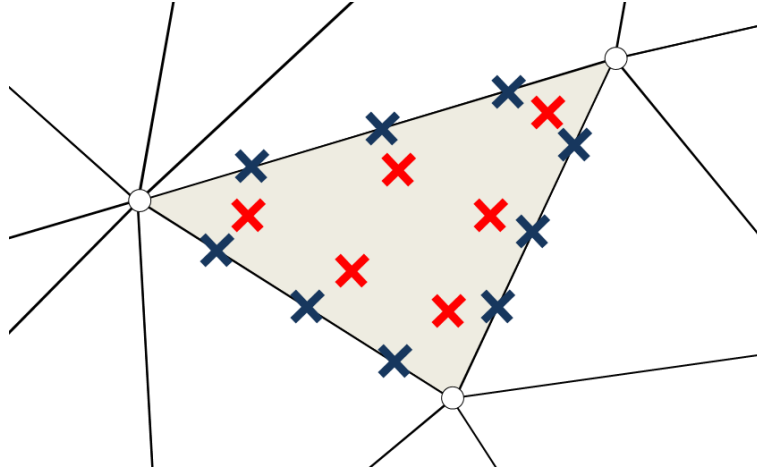


Figura 4.5: Puntos de Gauss para corrección de derivada: \times rojos puntos internos, \times azules puntos en el contorno .Fuente: Elaboración propia.

Las derivadas con respecto a la dirección i en cada punto de Gauss se calcula siguiendo la Ecuación (4.22).

$$\mathbf{Q}\mathbf{d}_i = \mathbf{f}_i \quad \text{con} \quad \mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} \Phi_{I,x}(\mathbf{x}_1) \\ \Phi_{I,x}(\mathbf{x}_2) \\ \Phi_{I,x}(\mathbf{x}_3) \\ \Phi_{I,x}(\mathbf{x}_4) \\ \Phi_{I,x}(\mathbf{x}_5) \\ \Phi_{I,x}(\mathbf{x}_6) \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

La matriz \mathbf{Q} se calcula a partir de las coordenadas y pesos de los puntos de Gauss al interior del triángulo y \mathbf{f}_i a partir de la integral de Gauss del contorno e interior del triángulo donde n_i^e es la componente i de la normal.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 & W_3 & W_4 & W_5 & W_6 \\ W_1x_1 & W_2x_2 & W_3x_3 & W_4x_4 & W_5x_5 & W_6x_6 \\ W_1y_1 & W_2y_2 & W_3y_3 & W_4y_4 & W_5y_5 & W_6y_6 \\ W_1x_1^2 & W_2x_2^2 & W_3x_3^2 & W_4x_4^2 & W_5x_5^2 & W_6x_6^2 \\ W_1x_1y_1 & W_2x_2y_2 & W_3x_3y_3 & W_4x_4y_4 & W_5x_5y_5 & W_6x_6y_6 \\ W_1y_1^2 & W_2y_2^2 & W_3y_3^2 & W_4y_4^2 & W_5y_5^2 & W_6y_6^2 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

donde W_D son los pesos de la cuadratura en el interior y w_b son los pesos de la cuadratura en el contorno. Como se puede observar, este método de integración numérica no requiere de la derivada de las funciones de base. En cambio, solo utiliza la función de base directamente.

$$\mathbf{f}_x = \begin{bmatrix} \sum_{e=1}^3 \sum_{b=1}^{n_\Gamma} w_b \Phi_I(\mathbf{x}_b) n_x^e \\ \sum_{e=1}^3 \sum_{b=1}^{n_\Gamma} w_b \Phi_I(\mathbf{x}_b) x_b n_x^e - \sum_{D=1}^{n_\Omega} W_D \Phi_i(\mathbf{x}_D) \\ \sum_{e=1}^3 \sum_{b=1}^{n_\Gamma} w_b \Phi_I(\mathbf{x}_b) y_b n_x^e \\ \sum_{e=1}^3 \sum_{b=1}^{n_\Gamma} w_b \Phi_I(\mathbf{x}_b) x_b^2 n_x^e - \sum_{D=1}^{n_\Omega} W_D \Phi_i(\mathbf{x}_D) 2x_D \\ \sum_{e=1}^3 \sum_{b=1}^{n_\Gamma} w_b \Phi_I(\mathbf{x}_b) x_b y_b n_x^e - \sum_{D=1}^{n_\Omega} W_D \Phi_i(\mathbf{x}_D) y_D \\ \sum_{e=1}^3 \sum_{b=1}^{n_\Gamma} w_b \Phi_I(\mathbf{x}_b) y_b^2 n_x^e \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{f}_y = \begin{bmatrix} \sum_{e=1}^3 \sum_{b=1}^{n_\Gamma} w_b \Phi_I(\mathbf{x}_b) n_y^e \\ \sum_{e=1}^3 \sum_{b=1}^{n_\Gamma} w_b \Phi_I(\mathbf{x}_b) x_b n_y^e \\ \sum_{e=1}^3 \sum_{b=1}^{n_\Gamma} w_b \Phi_I(\mathbf{x}_b) y_b n_y^e - \sum_{D=1}^{n_\Omega} W_D \Phi_i(\mathbf{x}_D) \\ \sum_{e=1}^3 \sum_{b=1}^{n_\Gamma} w_b \Phi_I(\mathbf{x}_b) x_b^2 n_y^e \\ \sum_{e=1}^3 \sum_{b=1}^{n_\Gamma} w_b \Phi_I(\mathbf{x}_b) x_b y_b n_y^e - \sum_{D=1}^{n_\Omega} W_D \Phi_i(\mathbf{x}_D) x_D \\ \sum_{e=1}^3 \sum_{b=1}^{n_\Gamma} w_b \Phi_I(\mathbf{x}_b) y_b^2 n_y^e - \sum_{D=1}^{n_\Omega} W_D \Phi_i(\mathbf{x}_D) 2y_D \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

4.2.3. Cálculo de Funciones de Base

El cálculo de las funciones de base de máxima entropía se realiza sobre cada punto de Gauss. Estas son evaluadas utilizando la función MAXENT disponible en línea [16]. La función entrega los valores de las funciones de base evaluadas en el punto Gauss junto con sus derivadas en x e y , además de los nodos que se encuentran en la contribución de la función de base. Sin embargo, debido a que en este trabajo se utiliza la integración de Duan et al. [15], solamente se requiere de las funciones de base y no de sus derivadas. La Figura 4.6 muestra las funciones de base de máxima entropía utilizando una malla de triángulos con $\gamma = 4$ para mejor visualización.

4.2.4. Cálculo de Matriz de Rigidez y Vector de Fuerzas

Para disminuir el tiempo de computación se calculan los factores de proyección nodal que se presentan en las Ecuaciones (4.26) y (4.27) fuera del ciclo para calcular la matriz de rigidez. Para esto se realiza el un ciclo sobre los puntos de Gauss que pertenecen Ω_c . Esto se realiza siguiendo el Algoritmo 1.

$$\pi_c[\mathbf{C}_a(\mathbf{x})] = \frac{\int_{\Omega_c} \rho_c(\mathbf{x}) [\mathbf{C}_a(\mathbf{x})] d\Omega}{\int_{\Omega_c} \rho_c(\mathbf{x}) d\Omega} \quad (4.26)$$

$$\pi_c[\mathbf{G}_a(\mathbf{x})] = \frac{\int_{\Omega_c} \rho_c(\mathbf{x}) [\mathbf{G}_a(\mathbf{x})] d\Omega}{\int_{\Omega_c} \rho_c(\mathbf{x}) d\Omega} \quad (4.27)$$

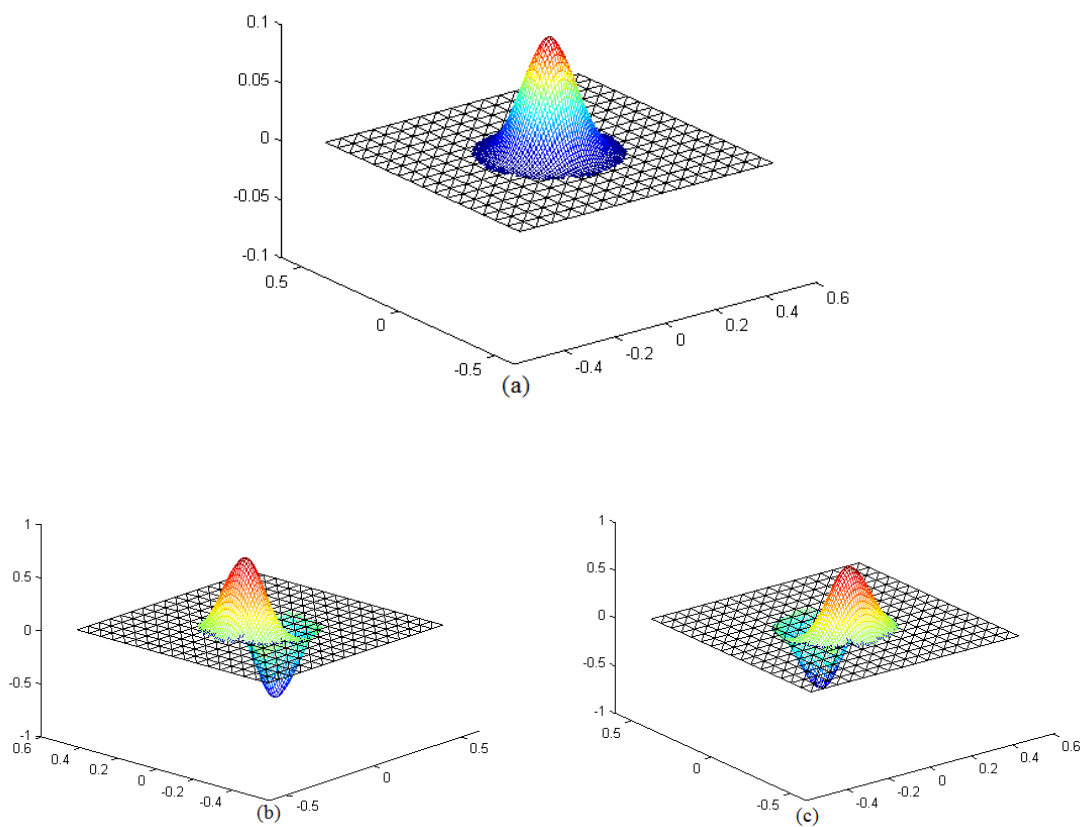


Figura 4.6: Función de máxima entropía Φ del nodo central sobre una malla de triángulos (a) y sus derivada con respecto a x (b) y su derivada con respecto a y (c), utilizando $\gamma = 4$ para fines demostrativos. Fuente: Elaboración propia.

Algoritmo 1: Pseudo código para el cálculo de los factores de Proyección Nodal.

Entrada: Elementos y Nodos, Puntos y pesos de Gauss, Funciones de Base, Propiedades del Material

Salida: $\mathbf{NP}_C(c, a) = \pi_c[\mathbf{G}_a(\mathbf{x})]$ y $\mathbf{NP}_G(c, a) = \pi_c[\mathbf{G}_a(\mathbf{x})]$

```
1 Inicializa  $\mathbf{NP}_C$  como Celda de  $N_S$  por  $N_w$ 
2 Inicializa  $\mathbf{NP}_G$  como Celda de  $N_S$  por  $N_\theta$ 
3 Inicializa  $\mathbf{Div}$  como vector de ceros de  $N_S$ 
4 for Cada Punto de Gauss do
5   Obtener funciones de base y sus derivadas evaluadas en el punto de Gauss Obtener
   nodos en la contribución for  $c = \text{Contribución de } S$  do
6     if Punto no pertenece a  $\Omega_c$  then
7       | Pasar al siguiente  $c$ 
8     end
9     for  $a = \text{Contribución de } w$  do
10    |  $\mathbf{NP}_C(c, a) = \mathbf{NP}_C(c, a) + \rho_c(\mathbf{x})\mathbf{C}_a(\mathbf{x}) \cdot \text{PesoDeGauss}$ 
11    end
12    for  $a = \text{Contribución de } \theta$  do
13    |  $\mathbf{NP}_G(c, a) = \mathbf{NP}_G(c, a) + \rho_c(\mathbf{x})\mathbf{G}_a(\mathbf{x}) \cdot \text{PesoDeGauss}$ 
14    end
15     $\mathbf{Div}(c) = \mathbf{Div}(c) + \rho_c(\mathbf{x}) \cdot \text{PesoDeGauss}$ 
16  end
17 end
18 for  $c = 1 : N_S$  do
19   for  $a = 1 : N_w$  do
20    |  $\mathbf{NP}_C(c, a) = \mathbf{NP}_C(c, a) / \mathbf{Div}(c)$ 
21   end
22   for  $a = 1 : N_\theta$  do
23    |  $\mathbf{NP}_G(c, a) = \mathbf{NP}_G(c, a) / \mathbf{Div}(c)$ 
24   end
25 end
```

El ensamble de la matriz de rigidez calcula utilizando la integración de Gauss. Para esto se cicla sobre todos los puntos de Gauss evaluando cada una de las contribuciones de las funciones de base para luego ensamblar la matriz completa. El Algoritmo 2 muestra el pseudo

código utilizado.

Algoritmo 2: Pseudo código para el cálculo de la Matriz de Rigidez.

Entrada: Elementos y Nodos, Puntos y pesos de Gauss, Funciones de Base, Propiedades del Material

Salida: Matriz de Rigidez \mathbf{K}

```
1 Inicializa  $\mathbf{K}$  como Matriz de ceros for Cada Punto de Gauss do
2   | Obtener funciones de base y sus derivadas evaluadas en el punto de Gauss
3   | Obtener nodos en la contribución
4   for  $b = \text{Contribución de } w$  do
5     |  $\mathbf{NP}_w = 0$  for  $c = \text{Contribución}$  do
6       |  $\mathbf{NP}_w = \mathbf{NP}_w + \rho_c(\mathbf{x})\mathbf{NP}_C(c, b)$ 
7     end
8     for  $a = \text{Contribución de } w$  do
9       | Calcular  $K_{ww}^s(a, b) \cdot \text{PesoDeGauss}$ 
10      | Ensamblar en  $K$ 
11     end
12     for  $a = \text{Contribución de } \theta$  do
13       | Calcular  $K_{w\theta}^s(a, b) \cdot \text{PesoDeGauss}$ 
14       | Ensamblar en  $K$ 
15     end
16   end
17   for  $b = \text{Contribución de } \theta$  do
18     |  $\mathbf{NP}_\theta = 0$  for  $c = \text{Contribución}$  do
19       |  $\mathbf{NP}_\theta = \mathbf{NP}_\theta + \rho_c(\mathbf{x})\mathbf{NP}_C(c, b)$ 
20     end
21     for  $a = \text{Contribución de } w$  do
22       | Calcular  $K_{\theta w}^s(a, b) \cdot \text{PesoDeGauss}$ 
23       | Ensamblar en  $K$ 
24     end
25     for  $a = \text{Contribución de } \theta$  do
26       | Calcular  $K_{\theta\theta}^s(a, b) \cdot \text{PesoDeGauss}$  y  $K^b(a, b) \cdot \text{PesoDeGauss}$ 
27       | Ensamblar en  $K$ 
28     end
29   end
30 end
```

De la misma manera se obtiene el vector de fuerzas, como se muestra en el Algoritmo 3.

Algoritmo 3: Pseudo código para el cálculo del vector de fuerzas.

Entrada: Elementos y Nodos, Puntos y pesos de Gauss, Funciones de Base, Propiedades del Material

Salida: Vector de fuerzas \mathbf{f}

```

1 Inicializa  $\mathbf{f}$  como vector de ceros
2 for Cada Punto de Gauss do
3   | Obtener funciones de base y sus derivadas evaluadas en el punto de Gauss
4   | Obtener nodos en la contribución
5   | for  $a=Contribución\ de\ w$  do
6   |   | Calcular  $\mathbf{f}^w \cdot PesoDeGauss$  Ensamblar en  $f$ 
7   |   | end
8   |   | for  $a=Contribución\ de\ \theta$  do
9   |   |   | Calcular  $f^\theta \cdot PesoDeGauss$ 
10  |   |   | Ensamblar en  $f$ 
11  |   |   | end
12 end

```

4.2.5. Imposición de Condiciones de Borde

Existen dos tipos de condiciones de borde en el problema, las naturales o de Neumann y las esenciales o de Dirichlet. Las condiciones esenciales vienen de la formulación del problema y son condiciones de esfuerzo de corte $\bar{\mathbf{S}}$ y de momento $\bar{\mathbf{m}}$ por lo que se imponen durante la construcción del vector de fuerzas \mathbf{f} . Por otro lado, las condiciones esenciales se deben imponer después de construir \mathbf{K} y \mathbf{f} y corresponden a los desplazamientos θ_x , θ_y y w . Las Ecuaciones (4.28) y (4.29) muestra como se impone la condición de borde $u_i = u_0$ en el grado de libertad del índice i .

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1,i-1} & 0 & K_{1,i+1} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & & K_{2,i-1} & 0 & K_{2,i+1} & & K_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ K_{i-1,1} & K_{i-1,2} & & K_{i-1,i-1} & 0 & K_{i-1,i+1} & & K_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ K_{i+1,1} & K_{i+1,2} & & K_{i+1,i-1} & 0 & K_{i+1,i+1} & & K_{i+1,n} \\ \vdots & & & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{n,i-1} & 0 & K_{n,i+1} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 - K_{1,i}u_0 \\ f_2 - K_{2,i}u_0 \\ \vdots \\ f_{i-1} - K_{i-1,i}u_0 \\ u_0 \\ f_{i+1} - K_{i+1,i}u_0 \\ \vdots \\ f_n - K_{n,i}u_0 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

4.3. Selección del Elemento Mixto

Existe gran variedad de elementos que se pueden utilizar para la formulación mixta. La forma débil del problema expuesta en las ecuaciones (3.11,) (3.12) y (3.13) exige que las aproximaciones de la traslación w y rotaciones θ tengan derivadas, las cuales no necesariamente deben ser continuas por lo que se suele ocupar aproximación lineal. En el caso del esfuerzo de corte S no se existe requerimiento sobre las derivadas por lo que se suele utilizar una aproximación constante con un nodo en el centro del elemento como el elemento T 3/1 que se muestra en la Figura 3.9.

El elemento que más se utiliza que soluciona el bloqueo de corte es el elemento T3S1B1L tiene nodos w y θ en las esquinas, un nodo burbuja θ en el centro y un nodo central de esfuerzo de corte S constante [4]. Este elemento se muestra en la Figura 4.7.

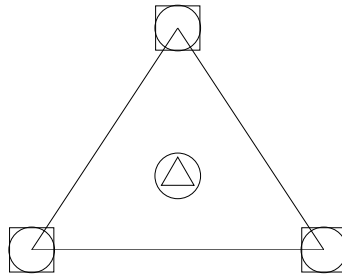


Figura 4.7: Elementos T3S1B1L utilizado en la formulación mixta. Nodos \square de desplazamiento w , nodos \circ de rotación θ y nodos \triangle de corte S . Fuente: Elaboración propia.

Para la proyección nodal se utilizan métodos sin malla con funciones de base de máxima entropía. Para poder utilizar estas funciones para la aproximación del esfuerzo de corte se necesitan nodos en el contorno de la malla. Se propone mallar con un nuevo elemento triangular, el cual tiene nodos de desplazamiento w , rotación θ y corte S en las esquinas y un nodo burbuja de rotación θ en el centro.

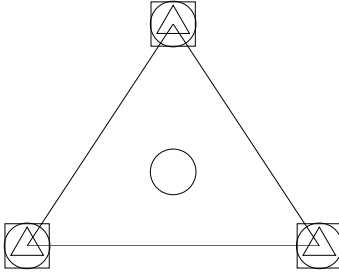


Figura 4.8: Elemento propuesto en la formulación mixta. Nodos \square de desplazamiento w , nodos \circ de rotación θ y nodos \triangle de corte S . Fuente: Elaboración propia.

Al realizar el test de la parcela utilizando el nuevo elemento se calculó la norma del error L^2 y H^1 utilizando el elemento propuesto. El error calculado es de $L^2 = 8.2667e - 16$ y $H^1 = 2.9925e - 14$ utilizando formulación mixta y funciones de base lineales, y error $L^2 = 1.5053e - 11$ y $H^1 = 5.5300e - 10$ cuando se utiliza proyección nodal. El error entregado es muy pequeño y corresponde principalmente a error computacional. Tanto el elemento seleccionado como la proyección nodal satisfacen el test de la parcela.

Por otro lado, se realizaron los tests de conteo de parcela expuestos en la Sección 3.4.2. Los resultados de estos se exponen en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1: Test Conteo de Parcela para el elemento propuesto. Fuente: Elaboración propia.

	α_C	β_C	r_C	α_R	β_R	r_R
Parcela de un Elemento	$\frac{2}{6} < 1$	$\frac{6}{0} > 1$	$\frac{11}{9} > 1$	$\frac{8}{6} > 1$	$\frac{6}{2} > 1$	$\frac{11}{3} > 1$
Parcela de seis Elementos	$\frac{15}{14} > 1$	$\frac{14}{1} > 1$	$\frac{33}{18} > 1$	$\frac{30}{14} > 1$	$\frac{14}{7} > 1$	$\frac{33}{3} > 1$

Como se puede el modelo planteado pasa todas las pruebas de conteo realizados, excepto la condición α_C para la parcela de un elemento. El resultado de estos tests indican el buen potencial del elemento propuesto. Como estos tests no son suficientes para demostrar la factibilidad del elemento se requiere realizar experimentos numéricos donde la solución es conocida.

Capítulo 5

Resultados

5.1. Experimentos Numéricos

Habiendo implementado la proyección nodal para se deben realizar experimentos para evaluar la calidad de la solución. Para esto se realizan cuenta con dos soluciones analíticas diferentes:

- Solución analítica sobre todo el dominio para una placa cuadrada con bordes empotrados bajo una carga específica para θ y w .
- Solución analítica sobre todo el dominio para una placa circular con borde empotrado bajo carga uniforme para θ y w .

5.1.1. Soluciones Analíticas

El primer caso estudiado es una placa cuadrada de de lado $1[m]$ cuyo borde se encuentra empotrado, es decir $\theta_x = 0$, $\theta_y = 0$ y $w = 0$ en cada lado. Las condiciones de borde que se muestran en la Figura 5.1. La esquina inferior izquierda se encuentra en el origen del eje cartesiano.

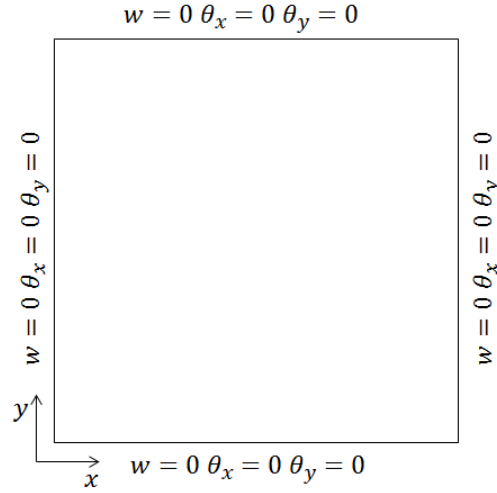


Figura 5.1: Diagrama de la placa cuadrada con las condiciones de borde de empotramiento. Fuente: Elaboración propia.

La solución analítica de este problema se obtiene de [17]. El problema de la placa RM es complejo de trabajar de manera analítica. Para que sea posible encontrar una solución analítica se recurre a aplicar una carga q específica que facilite el cálculo. La carga q escogida es:

$$\begin{aligned}
 q(x, y) = & \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} [12y(y-1)(5x^2-5x+1)(2y^2(y-1)^2 \\
 & + x(x-1)(5y^2-5y+1)) \\
 & + 12x(x-1)(5y^2-5y+1)(2x^2(x-1)^2 \\
 & + y(y-1)(5x^2-5x+1))]
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

A partir resolviendo el problema de la placa RM se llega a,

$$\begin{aligned}
 w(x, y) = & \frac{1}{3}x^3(x-1)^3y^3(y-1)^3 \\
 & - \frac{2t^2}{5(1-\nu)} [y^3(y-1)^3x(x-1)(5x^2-5x+1) \\
 & + x^3(x-1)^3y(y-1)(5y^2-5y+1)]
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\theta_x(x, y) = y^3(y-1)^3x^2(x-1)^2(2x-1) \tag{5.3}$$

$$\theta_y(x, y) = X^3(x-1)^3y^2(y-1)^2(2y-1) \tag{5.4}$$

Derivando parcialmente se tienen las derivadas parciales con respecto a las direcciones x e y :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x}(x, y) &= x^2 y^3 (x-1)^3 (y-1)^3 \\
&+ x^3 y^3 (x-1)^2 (y-1)^3 \\
&+ \frac{1}{175} [-x y^3 (y-1)^3 (5x^2 - 5x + 1) \\
&- y^3 (x-1) (y-1)^3 (5x^2 - 5x + 1) \\
&- 3x^2 y (x-1)^3 (y-1) (5y^2 - 5y + 1) \\
&- 3x^3 y (x-1)^2 (y-1) (5y^2 - 5y + 1) \\
&- x y^3 (10x - 5) (x-1) (y-1)^3]
\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial y}(x, y) &= x^3 y^3 (x-1)^3 (y-1)^2 \\
&- x^3 y^2 (x-1)^3 (y-1)^3 \\
&- \frac{1}{175} [x^3 y (x-1)^3 (5y^2 - 5y + 1) \\
&- x^3 (x-1)^3 (y-1) (5y^2 - 5y + 1) \\
&- 3x y^2 (x-1) (y-1)^3 (5x^2 - 5x + 1) \\
&- 3x y^3 (x-1) (y-1)^2 (5x^2 - 5x + 1) \\
&- x^3 y (10y - 5) (x-1)^3 (y-1)]
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta_x}{\partial x}(x, y) &= -2x^2 y^3 (x-1)^2 (y-1)^3 \\
&- 2x y^3 (2x-1) (x-1)^2 (y-1)^3 \\
&- x^2 y^3 (2x-1) (2x-2) (y-1)^3
\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta_x}{\partial y}(x, y) &= -3x^2 y^2 (2x-1) (x-1)^2 (y-1)^3 \\
&- 3x^2 y^3 (2x-1) (x-1)^2 (y-1)^2
\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta_y}{\partial x}(x, y) &= -3x^2 y^2 (2y-1) (x-1)^3 (y-1)^2 \\
&- 3x^3 y^2 (2y-1) (x-1)^2 (y-1)^2
\end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta_y}{\partial y}(x, y) &= -2x^3 y^2 (x-1)^3 (y-1)^2 \\
&- 2x^3 y (2y-1) (x-1)^3 (y-1)^2 \\
&- x^3 y^2 (2y-1) (2y-2) (x-1)^3
\end{aligned} \tag{5.10}$$

El segundo caso que se estudiar es el de una placa circular de radio $1[m]$ empotrada ($\theta_x = 0$, $\theta_y = 0$ y $w = 0$ en el contorno) bajo una carga uniforme la cual se muestra en la Figura 5.2. Gracias a la simetría rotacional del problema se conoce la solución analítica para $\theta(x, y)$ y $w(x, y)$ [18], la cual se muestra en la Ecuación (5.11).

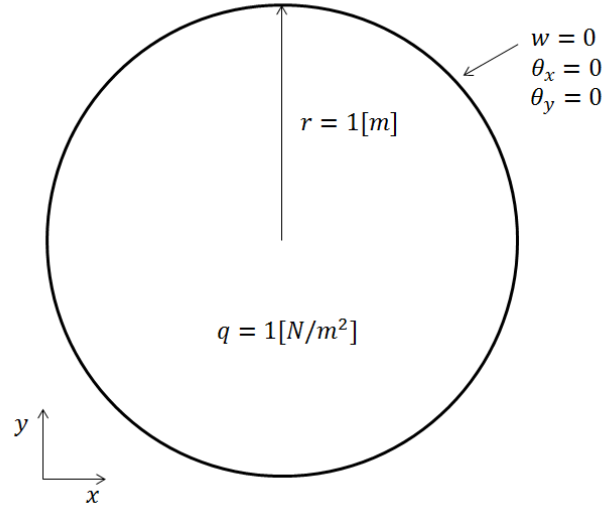


Figura 5.2: Diagrama de la placa circular empotrada bajo carga constante. Fuente: Elaboración propia.

$$\begin{aligned}
 w(x, y) &= \frac{(x^2+y^2)^2}{64D} - (x^2 + y^2) \left(\frac{t^2}{4\alpha} + \frac{1}{32D} \right) + \frac{t^2}{4\alpha} + \frac{1}{64D} \\
 \theta_x(x, y) &= -\frac{x(x^2+y^2-1)}{16D} \\
 \theta_y(x, y) &= -\frac{y(x^2+y^2-1)}{16D}
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

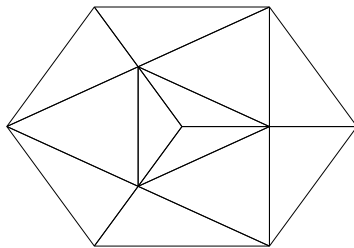
Las derivadas parciales de la solución con respecto a x e y ,

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dx} &= \frac{x(x^2+y^2)}{16D} - 2x \left(\frac{t^2}{4\alpha} + \frac{1}{32D} \right) \\
\frac{dw}{dy} &= \frac{y(x^2+y^2)}{16D} - 2y \left(\frac{t^2}{4\alpha} + \frac{1}{32D} \right) \\
\frac{d\theta_x}{dx} &= -\frac{3x^2+y^2-1}{16D} \\
\frac{d\theta_x}{dy} &= -\frac{xy}{8D} \\
\frac{d\theta_x}{dx} &= -\frac{xy}{8D} \\
\frac{d\theta_x}{dy} &= -\frac{x^2+3y^2-1}{16D}
\end{aligned} \tag{5.12}$$

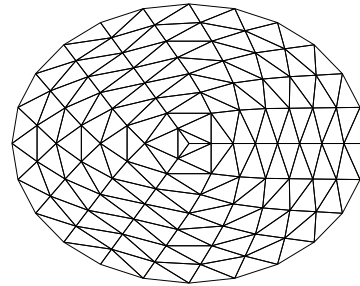
Ambas soluciones se encuentran definidas en todo el dominio, permiten calcular la norma del error L^2 , utilizando las soluciones para θ y w , y semi-norma H^1 utilizando las derivadas parciales.

5.1.2. Resultados Numéricos

Primero se realizan experimentos numéricos para la placa circular de radio $1[m]$ empotrada en el borde bajo una carga uniforme de $1[N/m^2]$. Esto se realizó para una placa gruesa $t = 0.1[m]$ y para una placa delgada $t = 0.001[m]$ y para mallas de distintas densidades mostradas en la Figura 5.3. Para la proyección nodal la malla solo se utiliza para obtener la posición de los nodos a partir de los elementos mixtos además de facilitar la integración de Gauss.



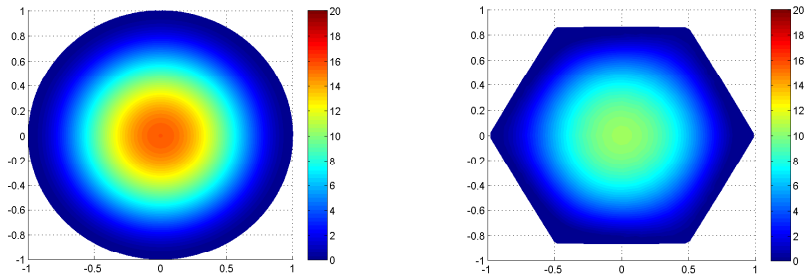
(a) Malla de 12 elementos.



(b) Malla de 192 elementos.

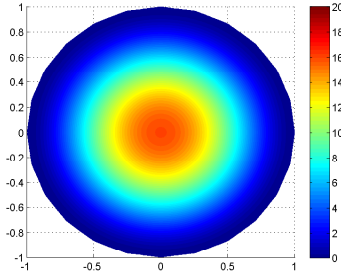
Figura 5.3: Mallas utilizadas con distinta densidad de elementos. Fuente: Elaboración Propia.

A continuación se muestran los resultados obtenidos en las Figuras 5.4 a 5.9.



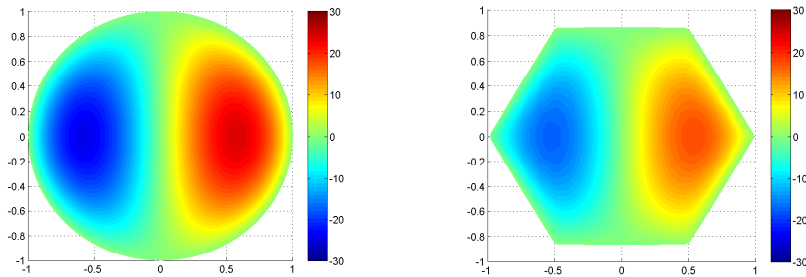
(a) Solución Analítica.

(b) Malla de 12 elementos.



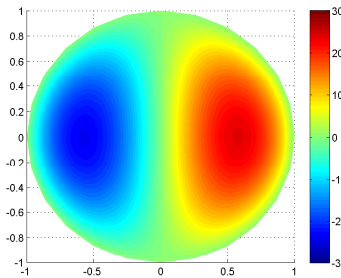
(c) Malla de 192 elementos.

Figura 5.4: Desplazamiento $w[m]$ analítico y calculado utilizando proyección nodal para una placa gruesa de espesor $t = 0.1[m]$. Fuente: Elaboración Propia.



(a) Solución Analítica.

(b) Malla de 12 elementos.



(c) Malla de 192 elementos.

Figura 5.5: Desplazamiento $\theta_x[rad]$ analítico y calculado utilizando proyección nodal para una placa gruesa de espesor $t = 0.1[m]$. Fuente: Elaboración Propia.

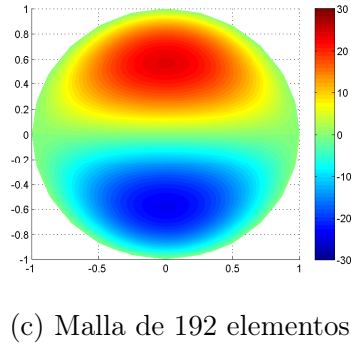
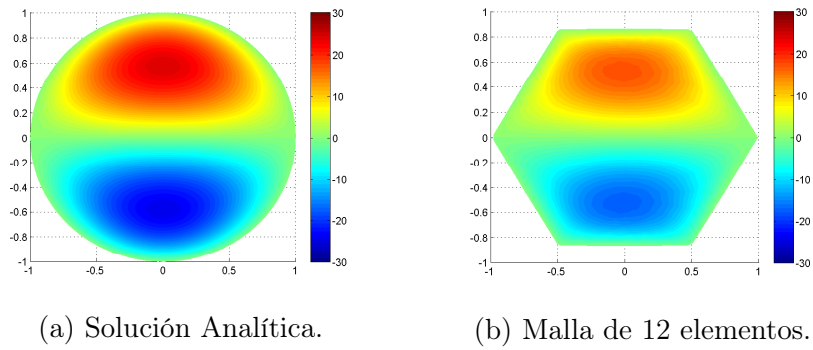


Figura 5.6: Desplazamiento θ_y [rad] analítico y calculado utilizando proyección nodal para una placa gruesa de espesor $t = 0.1$ [m]. Fuente: Elaboración Propia.

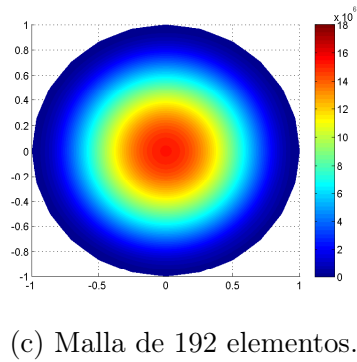
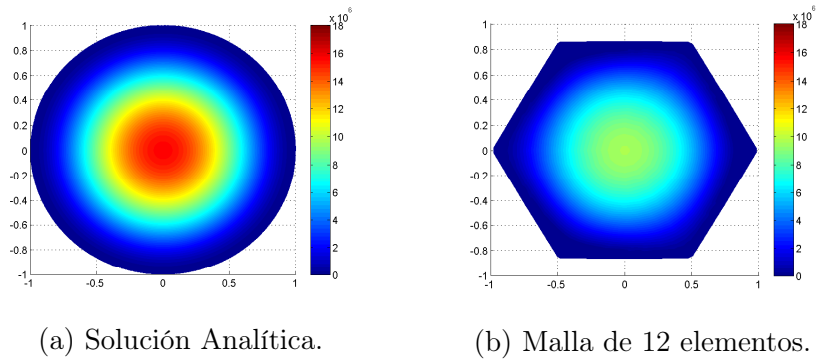
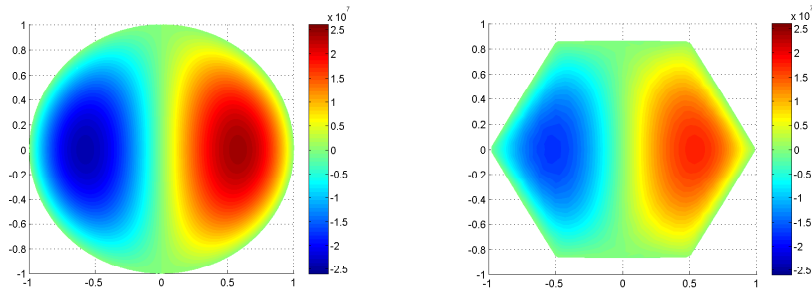
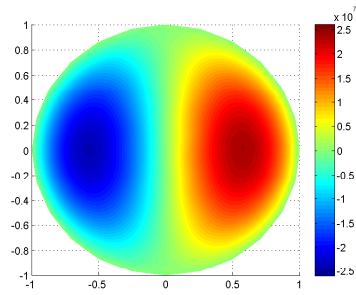


Figura 5.7: Desplazamiento w [m] analítico y calculado utilizando proyección nodal para una placa delgada de espesor $t = 0.001$ [m]. Fuente: Elaboración Propia.



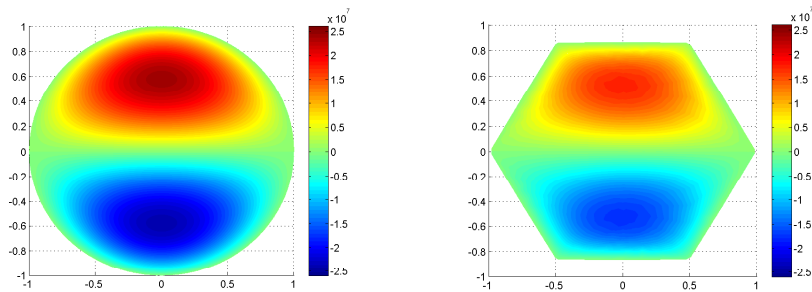
(a) Solución Analítica.

(b) Malla de 12 elementos.



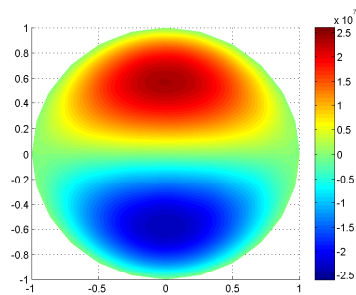
(c) Malla de 192 elementos.

Figura 5.8: Desplazamiento θ_x [rad] analítico y calculado utilizando proyección nodal para una placa delgada de espesor $t = 0.001$ [m]. Fuente Elaboración Propia



(a) Solución Analítica.

(b) Malla de 12 elementos.



(c) Malla de 192 elementos.

Figura 5.9: Desplazamiento θ_y [rad] analítico y calculado utilizando proyección nodal para una placa delgada de espesor $t = 0.001$ [m]. Fuente Elaboración Propia

La solución calculada mediante proyección nodal converge a la solución analítica a medida

que se refina la malla. Para la placa circular aparte de existir el error de aproximación inherente a los métodos numéricos basados en espacios discretizados, existe un error en aproximación a la geometría triangular al utilizar un mallado de triángulos.

5.1.3. Convergencia

Para evaluar la convergencia se utilizan las soluciones analíticas descritas en la Sección 5.1.1. Todos los experimentos se realizan utilizando un módulo de Young $E = 10.92[N/m^2]$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$, factor de corte $k = 5/6$ y son sometidos a una presión uniforme $q = 1[N/m^2]$.

Para cada problema se compara la proyección nodal con tres otras formulaciones:

- Método de elementos finitos utilizando formulación irreducible e integración reducida.
- Método de elementos finitos utilizando formulación mixta y el elemento propuesto.
- Método sin malla utilizando formulación mixta y funciones de base de máxima entropía y el elemento propuesto.

Para los métodos basados en la formulación mixta y para la proyección nodal se utilizan mallas de triángulos. Para la formulación irreducible utilizando MEF tradicional con integración reducida se deben utilizar mallas de cuadrados. A continuación se muestran las mallas que se van a utilizar en este trabajo. Las Figuras 5.10 y 5.11 muestran las mallas utilizadas para el problema de la placa cuadrada mientras que las Figuras 5.12 y 5.13 muestran las mallas utilizadas en el problema de la placa circular. Un común problema para la integración reducida es la dificultad de generar una malla de cuadrados para formas redondas, lo cual se ve en la Figura 5.13 al observar la variación en el tamaño de los elementos dentro de una misma malla. El efecto de este problema de mallado en la solución se aprecia al evaluar la convergencia de las normas que se exponen más adelante en esta sección (Figuras 5.18 a 5.21). Una malla de triángulos puede adaptarse mejor a formas complejas.

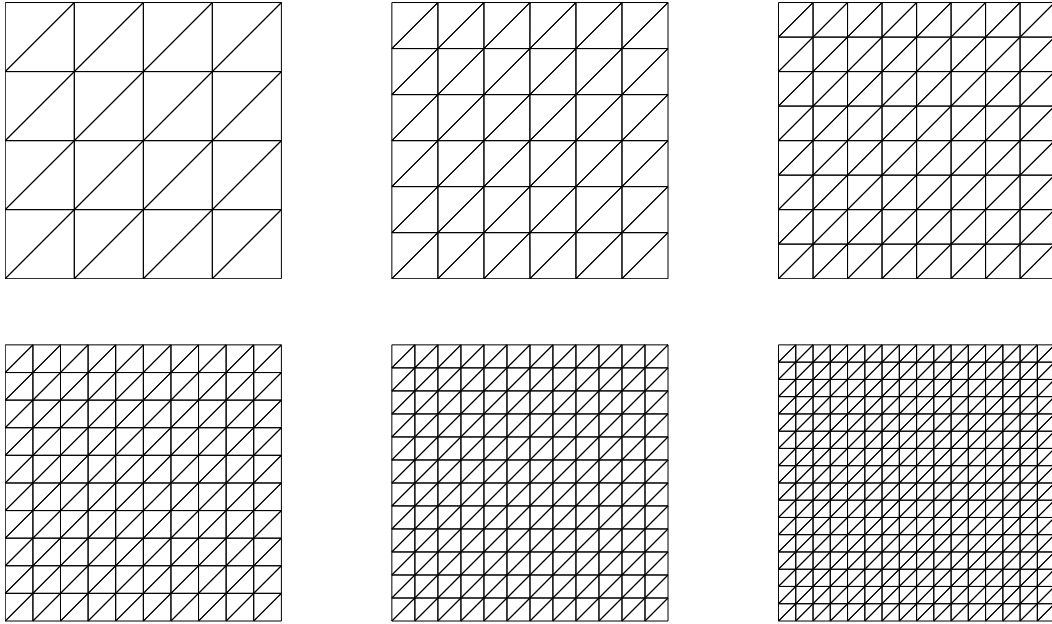


Figura 5.10: Mallas utilizadas para evaluar convergencia en la placa cuadrada con los métodos mixtos y protección nodal. Fuente: Elaboración propia.

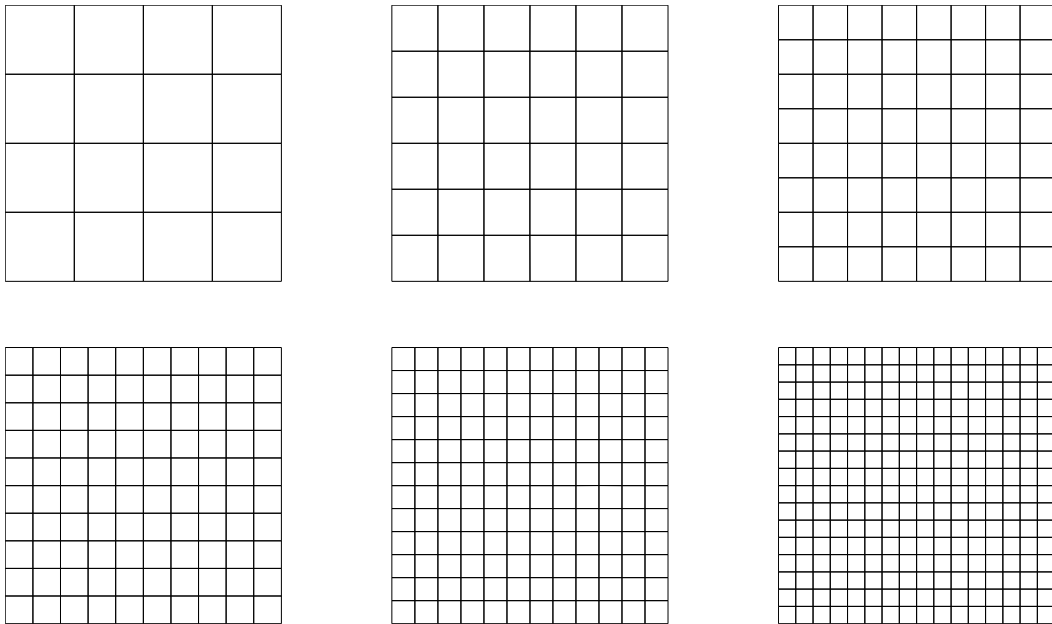


Figura 5.11: Mallas utilizadas para evaluar convergencia en la placa cuadrada con MEF tradicional utilizando integración reducida. Fuente: Elaboración propia.

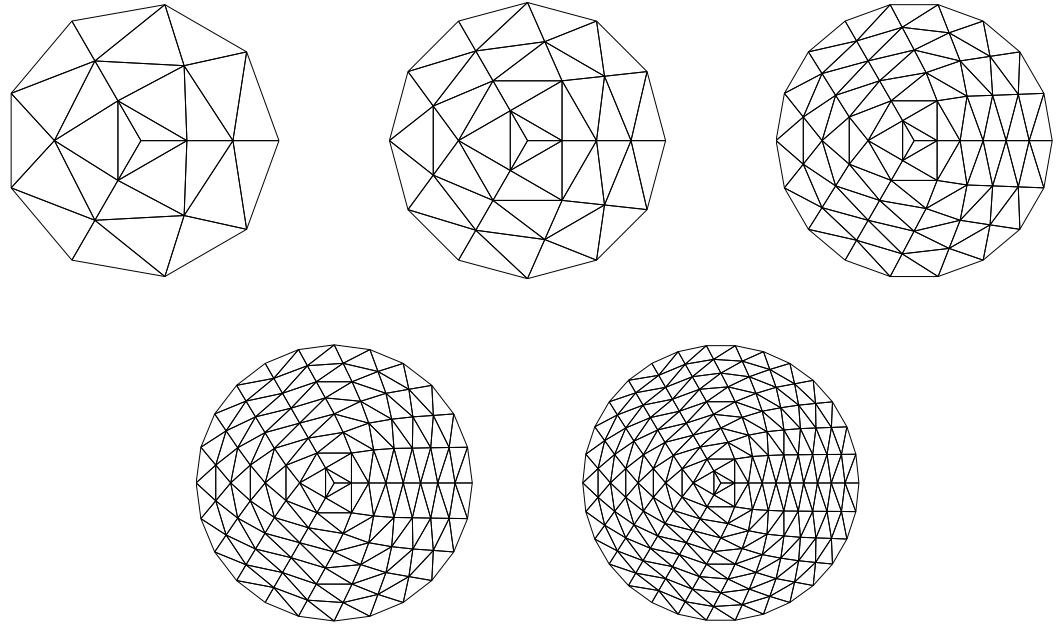


Figura 5.12: Mallas utilizadas para evaluar convergencia en la placa circular con los métodos mixtos y proyección nodal. Fuente: Elaboración propia.

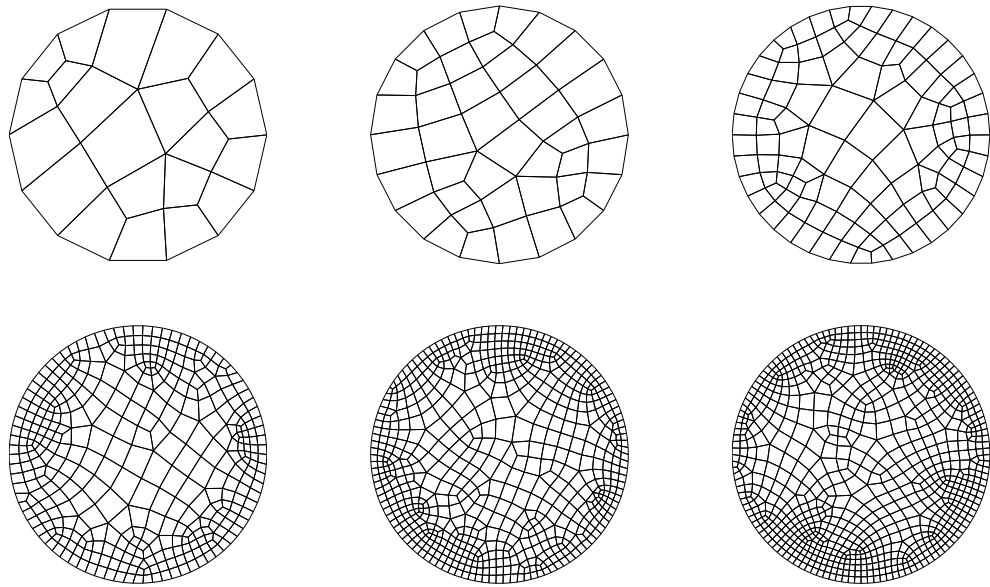


Figura 5.13: Mallas utilizadas para evaluar convergencia en la placa circular con MEF tradicional utilizando integración reducida. Fuente: Elaboración propia.

La solución analítica para la placa cuadrada la placa cuadrada de lado $1[m]$ descrita en la Sección 5.1.1. Para los experimentos numéricos se utilizaron como propiedades mecánicas un módulo de Young $E = 10.92[Pa]$, un módulo de Poisson $\nu = 0.3$ y un espesor $t = 0.1[m]$ para placas gruesas y $t = 0.001[m]$ para placas delgadas.

A partir de las soluciones para los desplazamientos analíticos y numéricos calculados mediante los cuatro métodos se calcula la norma L^2 del error. De manera similar, pero utilizando las soluciones numéricas y analíticas de las derivadas, se obtiene la semi-norma H^1 que se presentan en las Figuras 5.15 y 5.15 para placa gruesa y delgada respectivamente.

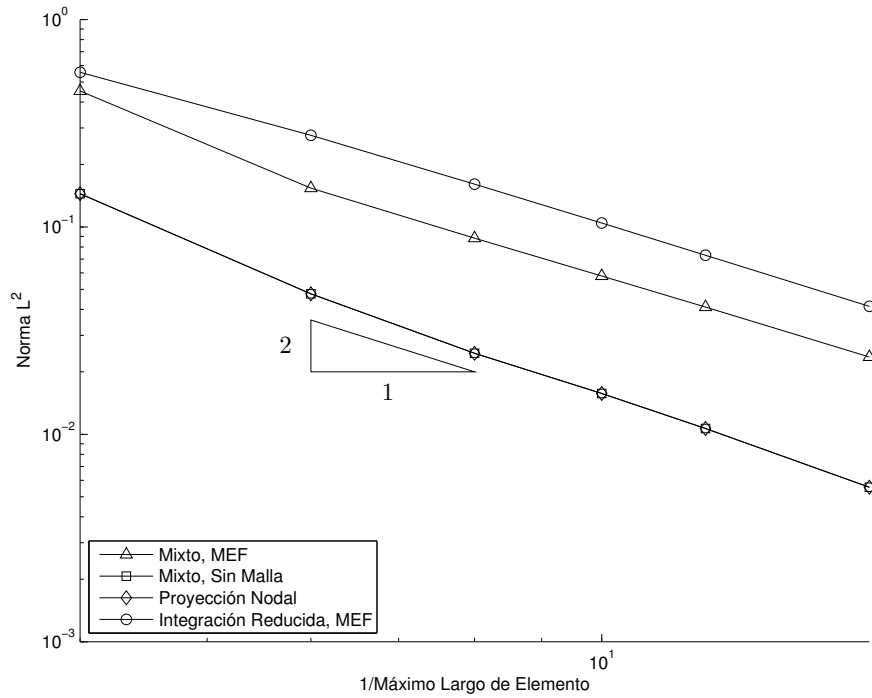


Figura 5.14: Norma L^2 con respecto al tamaño máximo de elemento para una placa cuadrada empotrada bajo carga $q(x, y)$ de espesor $t = 0.1[m]$. Fuente: Elaboración Propia.

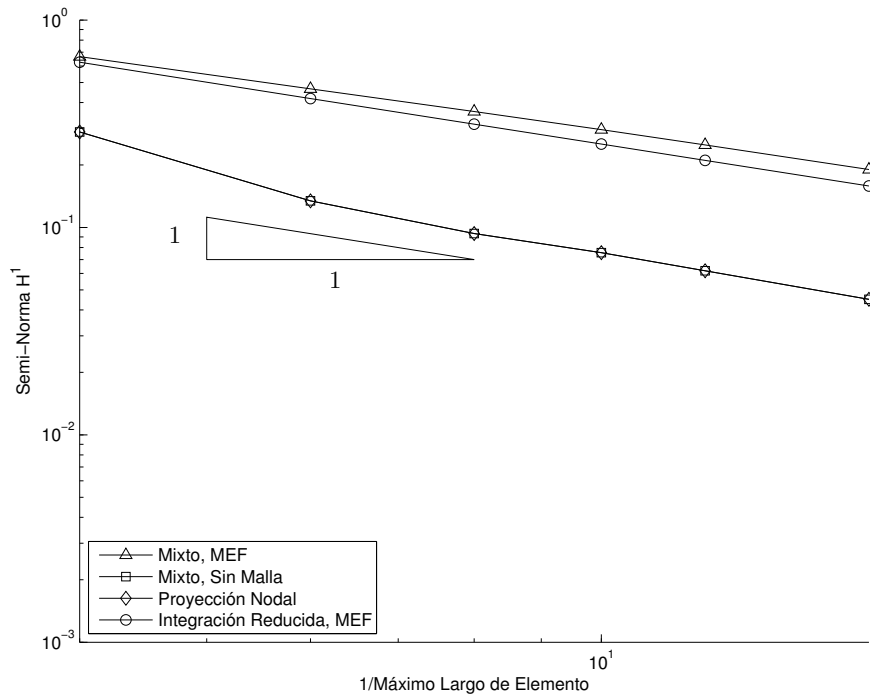


Figura 5.15: Semi-norma H^1 con respecto al tamaño máximo de elemento para una placa cuadrada empotrada bajo carga $q(x, y)$ uniforme de espesor $t = 0.1[m]$. Fuente: Elaboración Propia.

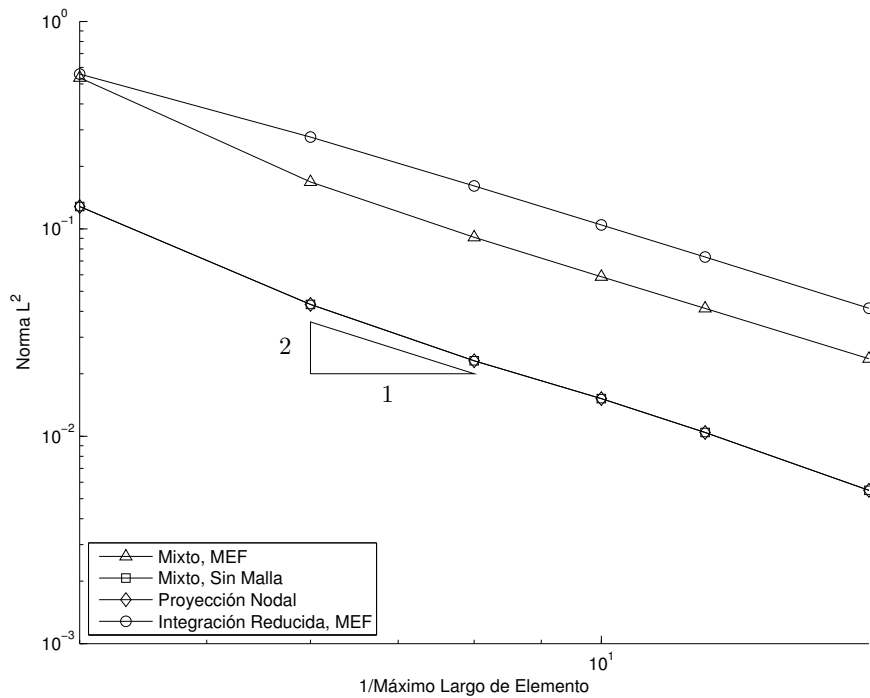


Figura 5.16: Norma L^2 con respecto al tamaño máximo de elemento para una placa cuadrada empotrada bajo carga $q(x, y)$ de espesor $t = 0.001[m]$. Fuente: Elaboración Propia.

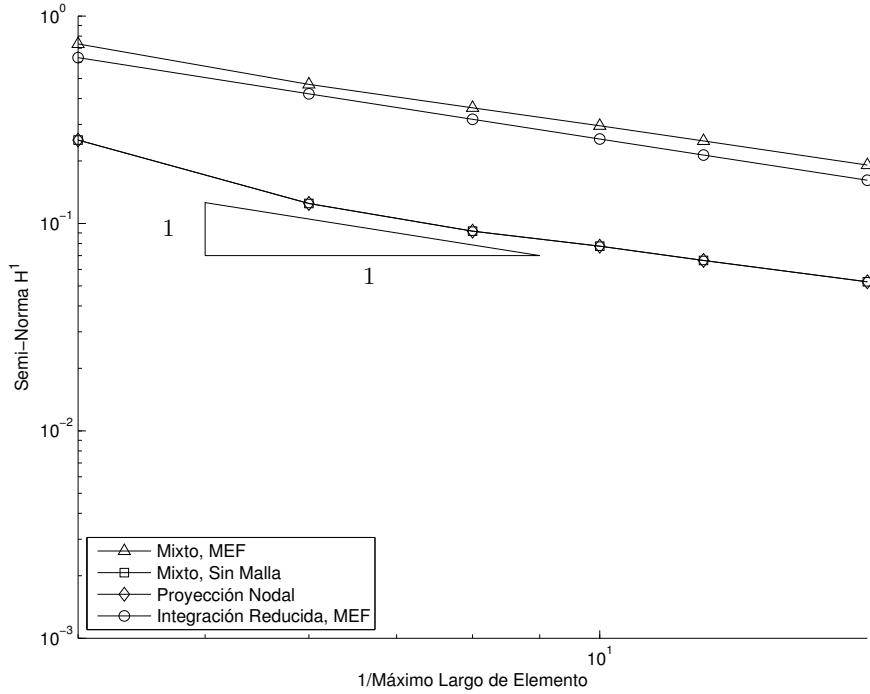


Figura 5.17: Semi-norma H^1 con respecto al tamaño máximo de elemento para una placa cuadrada empotrada bajo carga $q(x, y)$ de espesor $t = 0.001[m]$. Fuente: Elaboración Propia.

Como se puede observar, todos los métodos utilizados convergen a medida que se densifica la malla. Cuando se gráfica la norma L^2 del error con respecto a el inverso del máximo lago de elemento, se tiene que la tasa de convergencia óptima es de 2 cuando se utilizan elementos lineales[12]. De manera similar la tasa de convergencia óptima para la semi-norma H^1 del error es de 1. La proyección nodal tiene una tasa de convergencia de óptima para la norma L^2 y la semi-norma H^1 tanto para placas gruesas como para placas delgadas. Esto indica que la proyección nodal elimina satisfactoriamente el bloqueo por corte.

Todas los métodos convergen de con una tasa óptima siendo la proyección nodal y la formulación mixta sin mallas las que entregan mejor convergencia. Hay que notar que la proyección nodal y la formulación mixta sin malla ya que la proyección nodal se obtiene a partir de la formulación mixta si malla y ocupan las mismas funciones de base. La principal ventaja de la proyección nodal sobre el método mixto sin malla es el menor tamaño de la matriz \mathbf{K} y vector f debido a la eliminación de los grados de libertad de corte S .

En la tesis doctoral de J.S.B. Hale [3] se estudió este mismo problema, pero no se consiguió convergencia óptima para la norma H^1 para los grados de libertad de rotación. A diferencia con este trabajo, el elemento mixto utilizado por Hale para la placa RM tiene un nodo central de desplazamiento transversal en vez de ser un nodo de rotación. Este elemento no es ideal ya que no satisface el test de conteo de parcela de seis elementos lo cual podría explicar el comportamiento experimentado por Hale. En este trabajo la semi-norma H^1 converge óptimamente gracias a la selección de un elemento más adecuado.

Los resultado de la norma L^2 del error y semi-norma H^2 del error para la placa redonda bajo carga uniforme $q = 1[Pa]$ se presentan en las Figuras 5.18 a 5.21 muestran los resultados

obtenidos para placas gruesas $t = 0.1[m]$ y delgadas $t = 0.001[m]$. Para el experimento se utiliza un módulo de Young de $E = 10.92[Pa]$ y módulo de Poisson de $\nu = 0.3$.

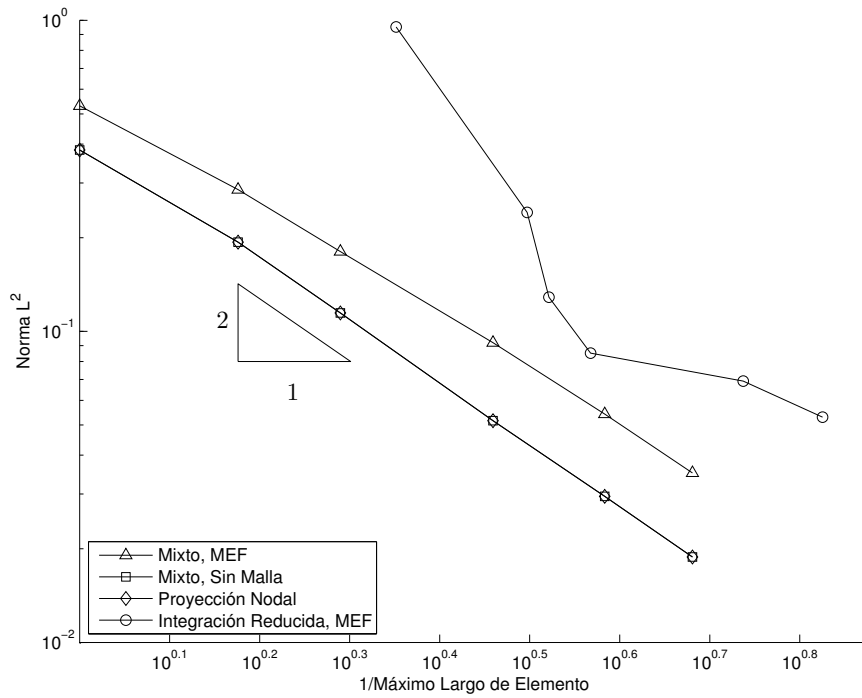


Figura 5.18: Norma L^2 con respecto al tamaño máximo de elemento para una placa circular empotrada bajo presión uniforme de espesor $t = 0.1[m]$. Fuente: Elaboración Propia.

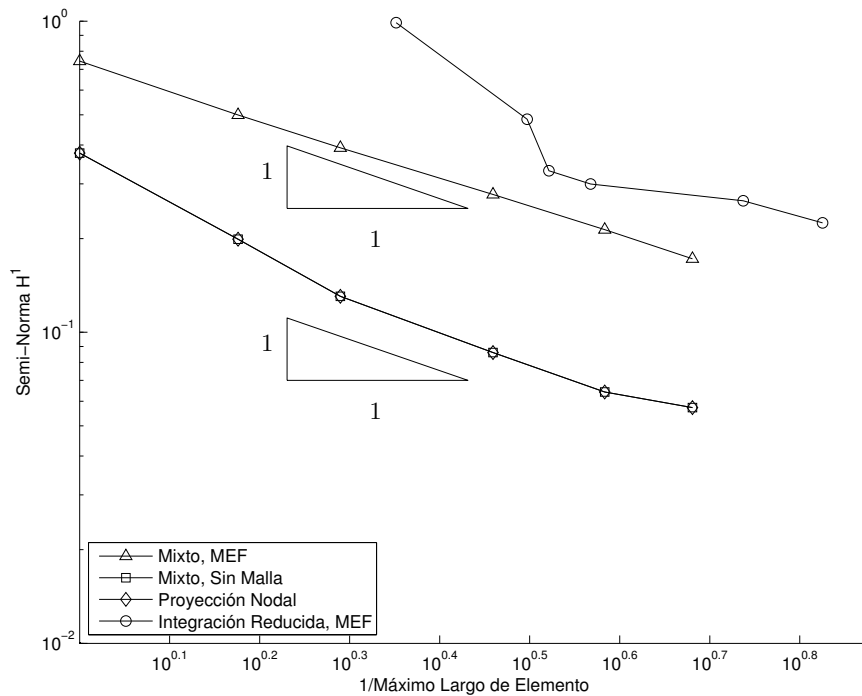


Figura 5.19: Semi-norma H^1 con respecto al tamaño máximo de elemento para una placa circular empotrada bajo presión uniforme de espesor $t = 0.1[m]$. Fuente: Elaboración Propia.

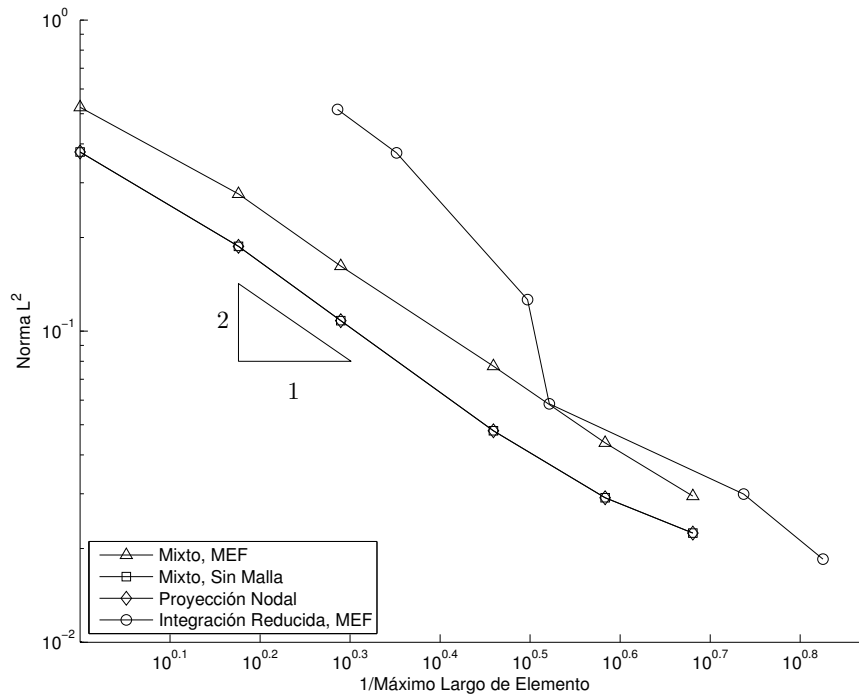


Figura 5.20: Norma L^2 con respecto al tamaño máximo de elemento para una placa circular empotrada bajo presión uniforme de espesor $t = 0.001[m]$. Fuente: Elaboración Propia.

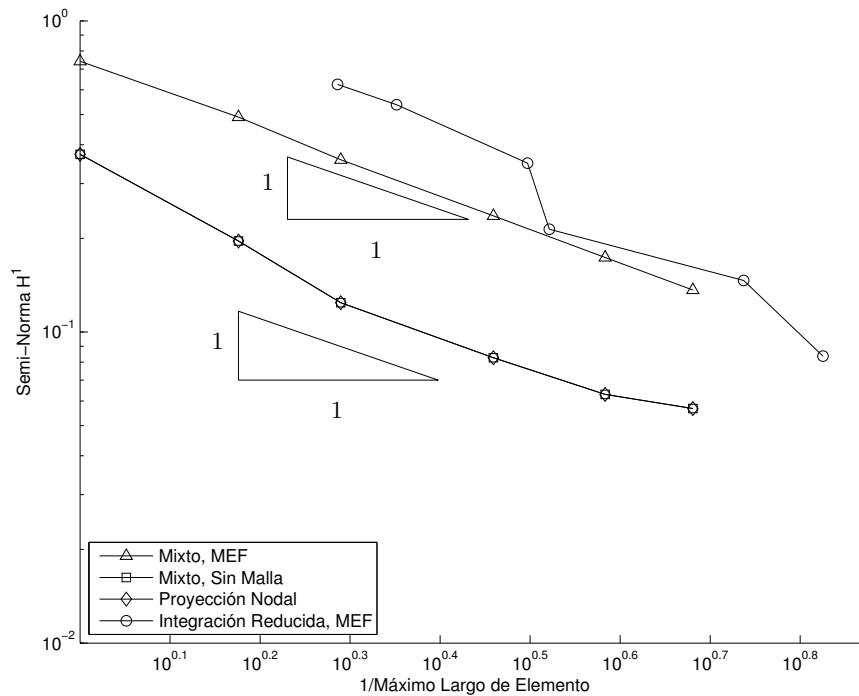


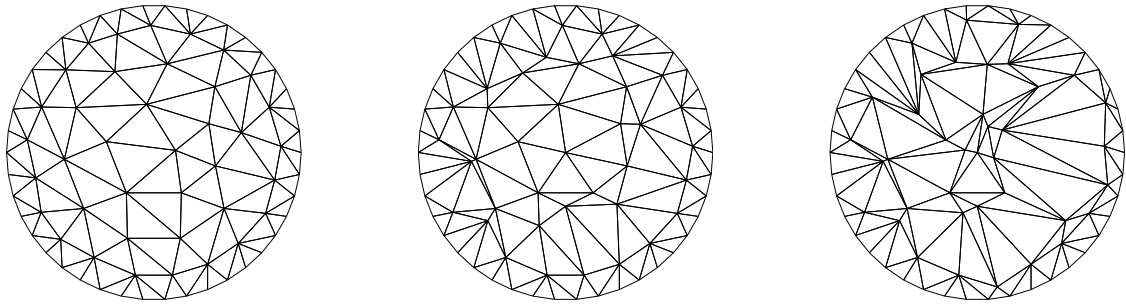
Figura 5.21: Semi-norma H^1 con respecto al tamaño máximo de elemento para una placa circular empotrada bajo presión uniforme de espesor $t = 0.001[m]$. Fuente: Elaboración Propia.

Nuevamente, tanto la norma L^2 y semi-norma H^1 son idénticas para la proyección nodal

y para el método mixto sin malla convergiendo ambas con tasa óptima para placa gruesa y placa delgada. Además se puede observar los errores adicionales que ocurren cuando se distorsiona la malla de cuadrados para MEF con integración reducida.

5.1.4. Sensibilidad a Distorsiones

Para evaluar la sensibilidad a las distorsiones de la proyección nodal se generan tres mallas con la misma cantidad de elementos con distintos niveles de distorsión en los elementos. Se utilizan las mallas A B y C que se exponen en la Figura 5.22. Se soluciona el problema de placa circular delgada utilizando MEF mixto y proyección nodal, y se calcula el error en la norma L^2 y semi-norma H^1 . Estos resultados se muestran en la Tabla 5.1.



(a) Malla A: Sin distinciones significativas. (b) Malla B: Bajo nivel de distorsiones. (c) Malla C: Alto nivel de distorsiones.

Figura 5.22: Mallas con distintos niveles de distorsión en los elementos. Fuente: Elaboración Propia.

Tabla 5.1: Normas del error para las mallas A, B y C utilizando proyección nodal y MEF mixto. Fuente: Elaboración Propia.

	Proyección Nodal		MEF, Mixto	
	L^2	H^1	L^2	H^1
Malla A	0.05349673	0.26484972	0.22351154	0.55797367
Malla B	0.03924036	0.24547909	0.35507783	0.68853535
Malla C	0.03371927	0.12775169	0.54686970	0.81565788
Desviación	0.01020518	0.07419662	0.16261114	0.12884593

A medida que se distorsiona la malla el método MEF mixto empeora considerablemente la solución debido a su dependencia a la forma del elemento. Por otro lado, el error calculado utilizando proyección nodal no cambia drásticamente al distorsionar la malla y en algunos casos hasta mejora la solución.

Capítulo 6

Conclusiones

Se ha formulado la proyección nodal requiriendo la construcción de un nuevo elemento que tuviese continuidad en S en el borde de los elementos. El elemento propuesto satisface los criterios de conteo de parcela y conteo de restricciones además de el test de la parcela.

Como funciones base para los métodos sin malla de formulación mixta y proyección nodal se han utilizado las funciones de máxima entropía.

Se ha desarrollado correctamente implementación de la proyección nodal y se ha puesto a prueba para los problemas de cuadrada empotrada bajo una carga específica y de la placa redonda empotrada bajo carga uniforme. Los resultados fueron comparados con respecto a la formulación irreducible utilizando integración reducida y formulación mixta utilizando MEF y método sin malla.

La proyección nodal soluciona satisfactoriamente el problema de bloqueo por corte sin agregar grados de libertad adicionales al vector de variables.

Al comparar la formulación mixta sin mallas y la proyección nodal para una misma malla se obtienen resultados idénticos como se muestra en las Figuras 5.18 a 5.21. Esto ocurre ya que la proyección nodal es equivalente a la formulación mixta. Sin embargo, la proyección nodal es más ventajosa elimina los grados de libertad S de la formulación.

Se resolvieron mediante proyección nodal problemas de la placa cuadrada empotrada y placa redonda empotrada para obtener la convergencia de la norma L^2 del error y la semi-norma H^1 del error. La convergencia de la norma L^2 y semi-norma H^1 mostró que la proyección nodal converge de manera óptima tanto para placa gruesa como delgada además de converger antes que los métodos tradicionales. La convergencia óptima para la semi-norma H^1 muestra que el elemento seleccionado soluciona el problema de convergencia encontrado en [3].

Se observó menor variación en el error al aumentar la distorsión de la malla para la proyección nodal con respecto al método MEF mixto para la misma malla.

Se concluye que el elemento diseñado para la proyección nodal entrega resultados positivos lo cual valida su diseño. La proyección nodal converge de manera óptima y obtiene resultados

equivalentes a a la formulación mixta sin malla con menor número de grados de libertad.

Bibliografía

- [1] G.-R. Liu and S. S. Quek, *The Finite Element Method: a Practical Course*. Butterworth-Heinemann, 2013.
- [2] O. Zienkiewicz, R. Taylor, and J. Too, “Reduced integration technique in general analysis of plates and shells,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 3, no. 2, pp. 275–290, 1971.
- [3] J. S. B. Hale, “Meshless methods for shear-deformable beams and plates based on mixed weak forms,” *doctoral thesis*, 2013.
- [4] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *The Finite Element Method: Solid Mechanics*, vol. 2. Butterworth-heinemann, 2000.
- [5] A. Ortiz-Bernardin, J. Hale, and C. J. Cyron, “Volume-averaged nodal projection method for nearly-incompressible elasticity using meshfree and bubble basis functions,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 285, pp. 427–451, 2015.
- [6] A. Coll, R. Ribó, M. Pasenau, E. Escolano, J. Perez, A. Melendo, A. Monros, and J. Gárate, *GiD v.13 Reference Manual*, 2016.
- [7] R. ADINA, “Inc.(2003),” *ADINA User Interface Command Reference Manual*, vol. 1, pp. 03–2.
- [8] L. Yaw, N. Sukumar, and S. Kunnath, “Meshfree co-rotational formulation for two-dimensional continua,” *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 79, no. 8, p. 979, 2009.
- [9] M. Arroyo and M. Ortiz, “Local maximum-entropy approximation schemes: a seamless bridge between finite elements and meshfree methods,” *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 65, no. 13, pp. 2167–2202, 2006.
- [10] O. Zienkiewicz, Z. Taylor, and J. Zhu, *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. 6th ed., 2005.
- [11] W. Chen, J. Wang, and J. Zhao, “Functions for patch test in finite element analysis of the mindlin plate and the thin cylindrical shell,” *Science in China Series G: Physics, Mechanics and Astronomy*, vol. 52, no. 5, pp. 762–767, 2009.

- [12] T. J. Hughes, *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Courier Corporation, 2012.
- [13] A. Ortiz, M. Puso, and N. Sukumar, “Maximum-entropy meshfree method for incompressible media problems,” *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 47, no. 6, pp. 572–585, 2011.
- [14] A. Ortiz, M. Puso, and N. Sukumar, “Maximum-entropy meshfree method for compressible and near-incompressible elasticity,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, no. 25, pp. 1859–1871, 2010.
- [15] Q. Duan, X. Gao, B. Wang, X. Li, H. Zhang, T. Belytschko, and Y. Shao, “Consistent element-free galerkin method,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 99, no. 2, pp. 79–101, 2014.
- [16] “Computational and applied mechanics lab.” <http://camlab.cl/research/software/>, oct 2016.
- [17] C. Chinosi and C. Lovadina, “Numerical analysis of some mixed finite element methods for reissner-mindlin plates,” *Computational Mechanics*, vol. 16, no. 1, pp. 36–44, 1995.
- [18] R. Falk and T. Tu, “Locking-free finite elements for the reissner-mindlin plate,” *Mathematics of Computation of the American Mathematical Society*, vol. 69, no. 231, pp. 911–928, 2000.