



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

POTENCIALES Y POTENCIAS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

PIERRE RENE GREGORY CORNILLE VANDAËLE

PROFESOR GUÍA:
JAIME SAN MARTÍN ARISTEGUI

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JOAQUÍN FONTBONA TORRES
SERVET MARTÍNEZ AGUILERA

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el CMM
Center for Mathematical Modeling

SANTIAGO DE CHILE
2017

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,
MENCION MATEMÁTICAS APLICADAS
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: PIERRE RENE GREGORY CORNILLE VANDAËLE
FECHA: 2017
PROF. GUÍA: JAIME SAN MARTÍN ARISTEGUI

POTENCIALES Y POTENCIAS

Cada semi-grupo tiene asociado un generador infinitesimal. Hille y Yosida descubrieron de manera independiente, alrededor de 1948, una condición necesaria y suficiente para saber cuándo un operador es el generador infinitesimal de un semi-grupo (de clase $\mathcal{C}0$).

Por otro lado, cada semi-grupo tiene asociado un potencial, concepto dual al de generador infinitesimal. Hunt, Meyer y Lion, entre otros, encontraron condiciones para saber cuándo un operador es el potencial de un semi-grupo.

El problema propuesto para esta tesis es el siguiente : dado el núcleo de Green del movimiento browniano en un dominio, ¿ qué potencias de este núcleo y sobre qué clase de dominios generan un potencial de semi-grupo ?

La idea central para resolver este problema es la aproximación del núcleo por procesos discretos, usar resultados conocidos para matrices y extender estos resultados al caso continuo. Para que funcione la aproximación, es necesario restringir la clase de conjuntos considerados, tratando de quedar lo más general posible. En esta tesis damos respuesta para el caso de los abiertos acotados regulares. Los conjuntos regulares son, simplificando, los conjuntos adecuados de la teoría del potencial.

Si se debe resumir la memoria en una palabra sería «aproximación», se trata de reducir el problema a un caso conocido y se busca como extenderlo.

A mis hermanos.

Agradecimientos

Quisiera agradecer a mis profesores de matemáticas que durante toda mi formación me enseñaron y mostraron lo interesante que es esta disciplina. A todos ellos mi reconocimiento.

Sr A. Laissus fue el primero que despertó en mi el deseo de mejorar y no quedar satisfecho únicamente con los conocimientos básicos

Sra C. Leforestier quien me dio las bases necesarias para comenzar las clases preparatorias.

Sr C. Germain a quien debo el rigor de pensamiento y redacción matemática. Su pedagogía impecable y sus clases son una fuente de inspiración para todo alumno que aspira a ser profesor.

Sr M. Cognet quien me mostró que en matemáticas además de ser riguroso es importante plasmar las ideas en dibujos para comprender mejor cada problema.

Sr D. Vergnaud quien revivió en mi el deseo de aprender más sobre matemáticas con su excelente curso de criptografía.

Sr J. San Martín quien me enseñó la teoría de la medida, rama de las matemáticas que encuentro hermosa, y con quien tuve el placer de ser auxiliar del curso durante mi estancia en la universidad de Chile.

Sin olvidar a los profesores A. Daniilidis (Análisis), D. Remenik (Variable compleja) A. Maass y M. Schrauder (Teoría ergódica); y a los profesores de mi comisión S. Martínez et J. Fontbona.

Finalmente quisiera agradecer a mis padres quienes siempre nos enseñaron y mostraron a mis hermanos y a mí con su ejemplo, que aprender es increíble, además de apoyarnos incondicionalmente en nuestra elección profesional.

Un agradecimiento especial a Majo.

A todos y cada uno de ustedes gracias.

Tabla de Contenido

Introducción	1
Notaciones preliminares	3
1. Procesos, núcleo de Green y aproximaciones	4
1.1. Procesos y potenciales	4
1.1.1. Procesos de Markov	6
1.1.2. Procesos de Feller y de Ray	8
1.1.3. Potenciales	10
1.1.4. Potencial discreto y matrices	13
1.2. Núcleos de Green	15
1.2.1. El movimiento browniano parado	15
1.2.2. El camino aleatorio simple	17
1.3. Teorema de Donsker multidimensional	18
2. Potencias del núcleo de Green	22
2.1. Dominio de definición y tiempos de salida	22
2.1.1. Dominios regulares	23
2.1.2. Aproximación de conjuntos	26
2.2. Convergencia en distribución del lugar de salida	30
2.3. Aproximación del núcleo de Green	31
2.4. Ejemplos de aplicaciones	35
2.5. Potencias del núcleo de Green	37
Conclusión	42
Bibliografía	44

Introducción

Una ecuación diferencial del tipo $y'(t) = ay(t)$ tiene una solución de la forma $t \mapsto Ce^{ta}$. Una vez comprendido este concepto se resuelve la misma ecuación en dimension n : $Y' = AY$ y de nuevo aparece el operador exponencial. El exponencial es notable por su propiedad de morfismo, transformando la suma en producto.

La teoría de los semi-grupos que se desarrolló a velocidad «exponencial» desde los trabajos de Hille y Yosida en 1948 se basa sobre esta propiedad. Dada una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de operadores con la propiedad de semi-grupo $P_{t+s} = P_t P_s$ y algunos requisitos extras, si se define el generador infinitesimal como

$$A = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{P_t - \text{Id}}{t} \right).$$

se obtiene formalmente $P_t = \exp(tA)$ (justificado por el teorema de Hille-Yosida) y para toda función f suficiente regular, la función $u : t \mapsto P_t f$ es la solución sobre $[0, \infty)$ del problema

$$\begin{cases} \partial_t u &= Au \\ u_0 &= f \end{cases}.$$

Los matemáticos, empezando con Doob (1953) y Dynkin (1959), se dieron cuenta de que cada semi-grupo genera un proceso estocástico, el cual tiene la propiedad de Markov (sin memoria), lo que forma un puente entre la manera clásica de resolver ecuaciones diferenciales y el cálculo estocástico. Dellacherie y Meyer (1984) trabajaron en modernizar la naciente teoría del potencial. Un buen ejemplo de la unión de ambas ramas es el hecho que el generador infinitesimal asociado al movimiento browniano es el laplaciano Δ .

Dado un semi-grupo, se puede definir el potencial del semi-grupo, que es de manera heurística, la inversa del generador infinitesimal A :

$$U = \int_0^\infty P_t dt.$$

A cada semi-grupo está asociado un potencial. Es entonces que cabe preguntarse: Dado un operador \mathcal{L} cuando es el potencial de un semi-grupo ? Varias respuestas existen en función de las características del operador U , el cual puede provenir de una resolvente, de un proceso de Ray, de Feller, etc... Algunos matemáticos famosos que trabajaron sobre esta pregunta fueron entre otros, Meyer, Hunt y Lion (ver [5]).

El potencial U_D del movimiento browniano parado en salir de un conjunto $D \subset \mathbb{R}^d$ tiene una densidad G_D , llamada núcleo de Green :

$$U_D f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) G_D(x, y) dy.$$

En el trabajo de tesis presente, se estudia para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ y qué conjuntos D , el operador

$$U_D^{(\alpha)} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) G_D^\alpha(x, y) dy.$$

es el potencial de un proceso de Markov.

La memoria está dividida en dos capítulos. El primero sirve para introducir todos los conceptos necesarios que se requerirán en el segundo capítulo, en el cual se demostrará que las potencias adecuadas del núcleo de Green del movimiento browniano parado en un dominio abierto regular acotado es el potencial de un proceso de Ray.

A mayor detalle, en el primer capítulo se abordan los conceptos de procesos de Markov, de Ray y de Feller; cómo se define un potencial a partir de ellos, qué propiedad tiene este potencial. Se presenta entre otros el teorema de Hunt que permite deducir cuándo un operador es el potencial de un proceso de Feller y una versión similar para los procesos de Ray. Los resultados obtenidos en [9] por Dellacherie, Martínez y San Martín sobre las potencias de Hadamard de una matriz potencial son claves para el propósito de la tesis.

En efecto, para probar que las potencias del núcleo de Green generan un semi-grupo, se aproxima dicho núcleo de manera discreta a partir del teorema de Donsker y del camino aleatorio simple, lo que permite usar los resultados conocidos sobre matrices. Para poder aproximar, se necesita considerar un tipo de abierto particular : los abiertos regulares acotados.

Notaciones preliminares

Consideremos \mathbb{R}^d para $d \geq 3$, en dimension 2 la solución fundamental del laplaciano tiene una forma distinta, logarítmica, que requiere un tratamiento distinto.

Se introducen algunas notaciones básicas : el conjunto $\{e_1, \dots, e_d\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^d , $|\cdot|$ la norma euclidiana; para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y $r > 0$, $B(x, r) \subset \mathbb{R}^d$ designa la bola abierta de centro x y radio r . Por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uno se refiere a un producto interno de un espacio de Hilbert adecuado en función del contexto.

Se considera $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, sobre el cual $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de vectores aleatorios a valores en \mathbb{R}^d que son iid tal que :

$$\forall i \in [1, d], \mathbb{P}(\varepsilon_1 = e_i) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = -e_i) = \frac{1}{2d}.$$

Para $t \in \mathbb{R}^+$ y $n \geq 1$, se define $\mathbb{S} = \left(\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ el **camino aleatorio simple** y la **extension normalizada** a la derecha de \mathbb{S} :

$$S_t^n = \sqrt{\frac{d}{n}} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \varepsilon_k.$$

Por $\mathbb{B} = (B_t)_{t \geq 0}$ se designa un movimiento browniano d-dimensional y para todo $t \geq 0$ sea $W_t^n = S_t^n + R_t^n$, donde $R_t^n = \sqrt{\frac{d}{n}}(nt - \lfloor nt \rfloor)\varepsilon_{\lfloor nt \rfloor + 1}$ y $\lfloor \cdot \rfloor$ es la parte entera. \mathbb{W}^n es la **interpolación lineal normalizada** de $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ que, por el teorema de Donsker, aproxima en distribución al movimiento browniano sobre todo compacto de \mathbb{R}^+ . Notar que para todo $\omega \in \Omega$, $\mathbb{W}^n(\omega) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$.

El proceso \mathbb{S}^n no es continuo (solamente càdlàg). Como uno quisiera trabajar en el espacio polaco $\mathcal{C}_d = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ con la topología **compacta-abierta** (de convergencia uniforme sobre compactos) es necesario considerar el proceso \mathbb{W}^n ; \mathcal{B}_d es el conjunto de los borelianos de \mathcal{C}_d con esta topología. Se usa la métrica siguiente que metriza la topología de \mathcal{C}_d :

$$D_d : \begin{cases} \mathcal{C}_d^2 & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (v, w) & \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|v-w\|_{\infty, [0, n]} \wedge 1}{2^n} \end{cases} .$$

Donde $\|u - v\|_{\infty, [0, n]} = \sup_{t \in [0, n]} |u_t - v_t|$.

Capítulo 1

Procesos, núcleo de Green y aproximaciones

Para un estudio de los semi-grupos, que no son presentados en detalles aquí, es agradable consultar la obra de A.Pazy [15] y el seminario [1].

1.1. Procesos y potenciales

En esta parte se definen los procesos de Markov, a tiempo discreto y luego continuo, asociados a una función de transición. Paso a paso se requieren más propiedades para tener procesos suficientemente regulares (al menos càdlàg, que verifican Markov fuerte, etc...).

Hice la elección de presentar los conceptos de esta manera, y no directamente introduciendo los procesos de Feller, para que uno se de cuenta que son estos procesos los que tienen naturalmente las propiedades de regularidad que uno desea en la práctica.

Para las demostraciones, en general omitidas, uno puede referirse a [7], [8], [10], [12] o [13].

Se considera E un espacio **LCHD** (localmente compacto, Hausdorff, segundo numerable), $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$ la σ -álgebra de los borelianos de E y $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espacio filtrado.

Notar que \mathbb{R}^d obviamente es un espacio LCHD.

Definición 1.1 *Un núcleo sobre E es una función $N : E \times \mathcal{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ tal que :*

- Para todo $A \in \mathcal{E}$, $x \mapsto N(x, A)$ es \mathcal{E} -medible.
- Para todo $x \in E$, $A \mapsto N(x, A)$ es una medida.

Un núcleo N se dirá **markoviano** (o simplemente : **de probabilidad**) si para todo $x \in E$, $N(x, E) = 1$.

El núcleo es **finito** si para todo $x \in E$, $N(x, \cdot)$ es una medida finita.

Intuitivamente el núcleo markoviano N traduce la ley de desplazamiento de una partícula, dada una posición inicial $x \in E$. $N(x, \cdot)$ representa la distribución de la posición de la partícula después de un movimiento.

Un núcleo permite actuar sobre funciones medibles, en efecto, si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ es medible acotada (o positiva) entonces $Nf : \begin{cases} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int f(y)N(x, dy) \end{cases}$ es medible acotada (o positiva). Esta transformación se puede interpretar de la siguiente forma, si f es un campo de temperatura, $Nf(x)$ será la temperatura en promedio de la partícula que partió de x después de un movimiento.

Se observa directamente que:

- Para $x \in E$ y $A \in \mathcal{E}$: $N(x, A) = N\mathbb{1}_A(x)$.
- La suma numerable de núcleos es un núcleo.

Se denote por $b(E)$ (resp. $b^+(E)$) el espacio de las funciones \mathcal{E} -medibles acotadas (resp. acotadas y positivas); se tiene una caracterización elegante de los núcleos markovianos :

Proposición 1.2 • Sea N un núcleo markoviano sobre E y se define

$$N : \begin{cases} b^+(E) & \rightarrow & b^+(E) \\ f & \mapsto & Nf \end{cases} .$$

N es lineal tal que $N\mathbb{1} = 1$ y para toda sucesión positiva $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset b^+(E)$

$$f_n \nearrow f \in b^+(E) \implies Nf_n \nearrow Nf \text{ (simplemente)}. \quad (1.1)$$

- También se tiene la recíproca, si $N : b^+(E) \rightarrow b^+(E)$ es un operador lineal tal que $N\mathbb{1} = 1$ y que verifica 1.1 entonces $\begin{cases} E \times \mathcal{E} & \rightarrow & \overline{\mathbb{R}^+} \\ (x, A) & \mapsto & N\mathbb{1}_A(x) \end{cases}$ es un núcleo markoviano sobre E que genera N .

Es igualmente posible construir núcleos gracias al teorema de representación de Riesz, notando que $(\mathcal{C}_0(E), \|\cdot\|_\infty)$ y $(b(E), \|\cdot\|_\infty)$ son espacios de Banach.

Proposición 1.3 La función $N : \mathcal{C}_0(E) \rightarrow b(E)$ es lineal positiva acotada ssi existe un único núcleo finito generando N .

Además este núcleo es markoviano ssi para todo $x \in E$, $\sup_{\substack{f \in \mathcal{C}_0(E) \\ \|f\|_\infty \leq 1}} Nf(x) = 1$.

DEMOSTRACIÓN. Para $x \in E$, la función $\begin{cases} \mathcal{C}_0(E) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & Nf(x) \end{cases}$ es positiva, por el teorema de representación de Riesz existe una única medida μ_x sobre $\mathcal{B}(E)$ que la representa. Como N

es acotada, μ_x es una medida finita. Luego por teorema de la clase monótona uno muestra que para todo $f \in b(E)$, la función $x \mapsto \int f(y) d\mu_x(y)$ es medible y se concluye. \square

Es deseable conocer la posición de una partícula que parte de $x \in E$, después de dos movimientos, entonces es necesario poder calcular N^2 , permitido por :

Proposición/Definición 1.4 Sean M, N núcleos (resp. markovianos) sobre E .

Se define la composición de núcleos :

$$MN : (x, A) \mapsto \int N(y, A)M(x, dy).$$

Es un núcleo (resp. markoviano) y para todo $f \in b^+(E)$, $(MN)f = M(Nf)$.

En el caso $M = N$, se denota $N^2 = NN$.

1.1.1. Procesos de Markov

La siguiente definición es un paso más para formalizar el concepto de desplazamiento de partículas. Se supone que la partícula no tiene memoria, concepto base de los procesos de Markov.

Definición 1.5 Un proceso $\mathbb{X} : \Omega \rightarrow E^{\mathbb{N}}$ adaptado es un \mathbb{F} -proceso de Markov para el núcleo markoviano N si para toda función $f \in b(E)$ y $n \geq m \geq 0$:

$$\mathbb{E}[f(X_n) | \mathcal{F}_m] = N^{n-m}f(X_m).$$

Si se considera un único núcleo, no es posible hablar de movimiento continuo con el tiempo, solo a intervalo discreto.

Uno quisiera saber como varía la posición después de un tiempo continuo $t \geq 0$. Si uno sabe como se mueve la partícula al tiempo t y al tiempo s entonces uno sabe como se mueve al tiempo $s + t$. Se introduce la definición que simplemente traduce este hecho :

Definición 1.6 Una **función de transición** (de probabilidad) es una familia $P = (P_t)_{t \geq 0}$ de núcleos de probabilidad sobre E que satisface la propiedad de semi-grupo

$$\forall t, s \geq 0, P_t P_s = P_{t+s}.$$

Un proceso adaptado $\mathbb{X} : \Omega \rightarrow E^{[0, \infty)}$ es un \mathbb{F} -proceso de Markov para P si para toda función $f \in b(E)$ y $t \geq s \geq 0$:

$$\mathbb{E}[f(X_t) | \mathcal{F}_s] = P_{t-s}f(X_s).$$

Esta definición es muy estándar salvo que no se ha pedido la condición $P_0 = \text{Id}$ que permite tener una pérdida instantánea de «masa» en $t = 0$ y como se mencionará a continuación, un proceso de Ray no lo pide.

A partir de ahora P denota una función de transición sobre E y N un núcleo markoviano.

Siguiendo con la ilustración a partir de partículas, \mathbb{X} es la posición de la partícula en el tiempo. Conociendo la trayectoria hasta el tiempo s , para llegar al tiempo t se compone por P_{t-s} . Notar que se hace el supuesto que solo la posición al tiempo s es relevante : la hipótesis de no memoria de los procesos de Markov.

Si se denota por $\mu = \mathbb{P}_{X_0}$ la distribución inicial del proceso, para todo $f \in b(E^n)$ y $0 = t_0 < \dots < t_n$:

$$\mathbb{E}^\mu[f(X_{t_0}, \dots, X_{t_n})] = \int f(x_0, \dots, x_n) P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) \dots P_{t_1-t_0}(x_0, dx_1) d\mu(x_0).$$

Esta relación caracteriza completamente $\mathbb{P}_{\mathbb{X}}$ así que dos procesos de Markov con misma función de transición y misma distribución inicial son equivalentes.

Afortunadamente tales procesos existen, gracias a la caracterización enunciada y, como siempre, gracias al teorema de consistencia de Kolmogorov.

Teorema 1.7 *Sea P una función de transición y μ una medida de probabilidad sobre E*

Sea $\mathbb{X} = (X_t)_{t \geq 0}$ las proyecciones canónicas de $E^{[0, \infty)}$ y para $t \geq 0$ sea $\mathcal{F}_t = \sigma((X_s)_{s \in [0, t]})$.

Entonces existe una única medida de probabilidad \mathbb{P}^μ sobre $E^{[0, \infty)}$ (considerando la σ -álgebra producto) tal que con respecto a \mathbb{P}^μ , \mathbb{X} es un proceso de Markov a función de transición P y distribución inicial μ .

Se obtienen propiedades inmediatas y muy útiles en la práctica :

- Para $x \in E$ sea \mathbb{P}^x la medida de probabilidad asociada a la distribución inicial $X_0 = x$ (ie $\mu = \delta_x$).

Entonces para toda función $f \in b(E)$ y $t \geq 0$: $\mathbb{E}^x[f(X_t)] = P_t f(x)$; la propiedad de Markov se puede reformular (de la forma como uno la ve por primera vez en general en clase) :

$$\mathbb{E}[f(X_t) | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}^{X_s}[f(X_{t-s})] \text{ cs.}$$

- De manera general si $f : E^{[0, \infty)} \rightarrow \mathbb{R}$ es medible acotada (o positiva) y $t \geq 0$ entonces se tiene la propiedad de **Markov débil**

$$\mathbb{E}[f(\mathbb{X}_{t+}) | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^{X_t}[f(\mathbb{X})] \text{ cs.}$$

La versión análoga del teorema para procesos de Markov a tiempo discreto es cierta, sin sorpresa.

Para poder establecer resultados más fuertes uno desea en general que el proceso de Markov satisfaga la propiedad de Markov fuerte lo que pide una cierta regularidad al movimiento de la partícula.

Definición 1.8 Un proceso adaptado $\mathbb{X} : \Omega \rightarrow E^{[0,\infty)}$ es un **\mathbb{F} -proceso de Markov fuerte para P** si para toda $f \in b(E)$, $t \geq s \geq 0$ y $\mathcal{T} : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ tiempo de parada adaptado :

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\mathcal{T} < \infty} f(X_{t+\mathcal{T}}) | \mathcal{F}_{s+\mathcal{T}}] = \mathbf{1}_{\mathcal{T} < \infty} P_{t-s} f(X_{s+\mathcal{T}}) \text{ cs.}$$

Observar que para evaluar en un tiempo de parada el proceso tiene que ser al menos conjuntamente medible (es justamente el caso de los procesos càdlàg).

Algunas propiedades con respecto a los procesos de Markov fuerte son :

- Un proceso de Markov fuerte para P es de Markov para P .
- Un proceso \mathbb{X} es de Markov fuerte para P ssi para toda $f \in b(E)$, tiempo de parada adaptado finito \mathcal{T} y $t \geq 0$

$$\mathbb{E}[f(X_{t+\mathcal{T}}) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}}] = P_t f(X_{\mathcal{T}}) \text{ cs.}$$

- De manera general si \mathbb{X} es de Markov fuerte entonces para todo $f : E^{[0,\infty)} \rightarrow \mathbb{R}$ medible acotada (o positiva) y $t \geq 0$ se tiene la propiedad de **Markov fuerte** para todo tiempo de parada adaptado \mathcal{T} :

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\mathcal{T} < \infty} f(\mathbb{X}_{\cdot+\mathcal{T}}) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}}] = \mathbf{1}_{\mathcal{T} < \infty} \mathbb{E}^{X_{\mathcal{T}}}[f(\mathbb{X})] \text{ cs.}$$

- Todo proceso de Markov a tiempo discreto (para el núcleo asociado) es de Markov fuerte.

Una condición suficiente sobre la función de transición para tener un proceso de Markov fuerte es por ejemplo la siguiente :

Proposición 1.9 Sea \mathbb{X} un proceso càdlàg de Markov para P tal que para todo $f \in \mathcal{C}_c(E)$ y $t \geq 0$, $P_t f \in \mathcal{C}_b(E)$.

Entonces \mathbb{X} es un proceso de Markov fuerte para P .

DEMOSTRACIÓN. Para \mathcal{T} un tiempo de parada discreto la propiedad de Markov fuerte siempre se tiene.

Luego basta aproximar un tiempo de parada adaptado \mathcal{T} finito por tiempos de paradas discretos decrecientes (para aprovechar del hecho que \mathbb{X} es càdlàg) y por TCD se obtiene para todo $t \geq 0$, $f \in \mathcal{C}_c(E)$:

$$\mathbb{E}[f(X_{t+\mathcal{T}}) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}}] = P_t f(X_{\mathcal{T}}) \text{ cs.}$$

Se concluye por teorema de la clase monótona (pues $\sigma(\mathcal{C}_c(E)) = \mathcal{B}(E)$). □

1.1.2. Procesos de Feller y de Ray

En general se desea tener trayectorias regulares : al menos càdlàg. En efecto, se vio por ejemplo en la proposición 1.9 que esto permite obtener la propiedad de Markov fuerte.

Notar que si para todo $x \in E$, el proceso de Markov \mathbb{X} construido sobre $E^{[0,\infty)}$ asociado a P con distribución inicial δ_x posee una versión càdlàg entonces para todo $f \in \mathcal{C}_b(E)$, $t \mapsto P_t f(x)$ es càdlàg (por TCD).

Estos supuestos se pueden resumir y simplificar gracias al teorema que sigue, justificando la introducción de los procesos de Feller que se distinguen de los procesos de Ray por la condición suplementaria : $P_0 = \text{Id}$.

Teorema 1.10 *Se considera el espacio de Banach $\mathcal{C}_0(E)$ con la norma uniforme.*

Si P es una función de transición sobre E tal que $P_0 = \text{Id}$ y

- *Para todo $t \geq 0$, $P_t : \mathcal{C}_0(E) \rightarrow \mathcal{C}_0(E)$*
- *Para todo $f \in \mathcal{C}_0(E)$, $x \in E$, $t \mapsto P_t f(x)$ es continua a la derecha en 0.*

Entonces para todo $f \in \mathcal{C}_0(E)$, $\left\{ \begin{array}{l} [0, \infty) \rightarrow \mathcal{C}_0(E) \\ t \mapsto P_t f \end{array} \right.$ es continua.

Por lo tanto si uno quiere trabajar con procesos de Markov a trayectorias càdlàg con una función de transición que conserva la continuidad, sin pérdida de masa inicial, uno tiene que trabajar con un proceso de Feller.

Notar que con las hipótesis del teorema anterior para todo μ medida finita, $t \mapsto \int_0^\infty P_t f(x) d\mu(x)$ es continua a la derecha y como el dual de $\mathcal{C}_0(E)$ es el espacio de las medidas finitas con signo sobre $\mathcal{B}(E)$, la continuidad del semi-grupo se obtiene del siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en [19] (Cap IX.1, p233) :

Teorema 1.11 *Si $(P_t)_{t \geq 0}$ es un semi-grupo de operadores lineales continuos sobre un espacio de Banach, débilmente continuo a la derecha, tal que $P_0 = \text{Id}$ entonces es fuertemente continuo.*

Uno se da cuenta de lo fuerte que es la propiedad de semi-grupo, relacionado al operador exponencial.

En lo que sigue se resumen las propiedades notables de los procesos de Feller (o Feller-Dynkin) y uno podría por ejemplo consultar [12] para obtener más detalles.

Definición 1.12 *Una función de transición P sobre E es un **semi-grupo de Feller** si para todo $f \in \mathcal{C}_0(E)$*

- $\forall t \geq 0, P_t f \in \mathcal{C}_0(E)$.
- $\left\{ \begin{array}{l} [0, \infty) \rightarrow \mathcal{C}_0(E) \\ t \mapsto P_t f \end{array} \right.$ es continua.
- $P_0 f = f$

*Un proceso de Markov a función de transición de Feller es un **proceso de Feller**.*

Definición 1.13 Un *semi-grupo de Ray* es una función de transición $(P_t)_{t \geq 0}$ tal que P_0 no es necesariamente la identidad y para todo $f \in \mathcal{C}_b(E)$, $x \in X$ la función $t \mapsto P_t f(x)$ es continua a la derecha.

Un proceso de Markov a función de transición de Ray es un **proceso de Ray**.

Como esperado los procesos de Feller tienen trayectorias regulares :

Teorema 1.14 Todo proceso de Feller posee una versión càdlàg y esta versión es un proceso de Markov fuerte.

La filtración natural (aumentada con los despreciables) de todo proceso de Feller es continua a la derecha.

En particular un proceso de Feller satisface la **ley 0-1 de Blumenthal**.

Se menciona finalmente la **formula de Dynkin**.

Proposición 1.15 Sea \mathbb{X} un proceso de Feller càdlàg con función de transición P .

Sea A el generador infinitesimal asociado y $f \in \mathcal{D}(A)$ donde $\mathcal{D}(A)$ es el dominio de definición de A .

Entonces $\left(f(X_t) - \int_0^t Af(X_s) ds \right)_{t \geq 0}$ es una martingala càdlàg.

1.1.3. Potenciales

Para esta sección, el libro de Marcus y Rosen [13] fue de gran ayuda, en particular para los teoremas menos conocidos con los procesos de Ray.

Se supone que P es un semi-grupo de Ray (o de Feller).

Por lo tanto $(t, x) \mapsto P_t f(x)$ es conjuntamente medible para todo $f \in b(E)$.

Los λ -potenciales provienen de la **transformada de Laplace** :

Definición 1.16 Para $\lambda > 0$ el λ -**potencial de P** (o λ -**resolvente**) es el núcleo U_λ tal que para todo $f \in b(E)$:

$$U_\lambda f : \begin{cases} E & \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+} \\ x & \mapsto \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f(x) dt \end{cases} .$$

Por la caracterización anterior U_λ es efectivamente un núcleo y se define el **potencial de P** como el núcleo limite : $U = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} U_\lambda$, que existe la función $\lambda \mapsto U_\lambda$ es monótona decreciente cuando $\lambda \rightarrow 0^+$).

En particular para todo $f \in b^+(E)$, $Uf = \int_0^\infty P_t f dt$; notar que Uf puede ser una función constante igual a $+\infty$.

Cuando uno se refiere al potencial de una función de Ray, uno habla de U visto como núcleo o como función sobre las funciones medibles positivas dependiendo del contexto.

La familia de resolventes $(U_\lambda)_{\lambda>0}$ satisface algunas propiedades :

- **Ecuación de la resolvente** : Para todo $\lambda, \mu > 0$

$$U_\lambda - U_\mu = (\mu - \lambda)U_\mu U_\lambda. \quad (1.2)$$

Ecuación que queda cierta con $\lambda = 0$ cuando tiene sentido (si Uf no explota).

- Como operador de $b(E)$ en $b(E)$:

$$\forall \lambda > 0, \|\lambda U_\lambda\| \leq 1. \quad (1.3)$$

La familia $(\lambda U_\lambda)_{\lambda>0}$ es **submarkoviana**.

- Si la familia $(U_\lambda)_{\lambda>0}$ proviene de un proceso de Feller entonces para todo $f \in \mathcal{C}_0(E)$, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda U_\lambda f = f$ simplemente y para todo $\lambda > 0$

$$U_\lambda : \mathcal{C}_0(E) \rightarrow \mathcal{C}_0(E).$$

Definición 1.17 Una familia de núcleos $(U_\lambda)_{\lambda>0}$ verificando 1.2 y 1.3 se llama **resolvente de contracción**.

Para toda distribución inicial μ , el proceso \mathbb{X} construido tiene una versión càdlàg, es esta versión (indistinguible de las otras càdlàg) que conviene considerar.

Si $\mathfrak{D} \subset E^{[0,\infty)}$ es el subespacio de las funciones càdlàg sobre cual se considera las σ -álgebra traza de $\mathcal{E}^{[0,\infty)}$ entonces \mathbb{P}^μ puede ser visto como una medida sobre \mathfrak{D} .

Luego para todo $f \in \mathcal{C}_0(E)$, $x \in E$, $U_\lambda f(x) = \mathbb{E}^x \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(X_t) dt \right]$ y si $f \in b^+(E)$, $Uf(x) = \mathbb{E}^x \left[\int_0^\infty f(X_t) dt \right]$.

Como ya dicho, en general el potencial puede no ser finito; si es finito se puede probar el principio del máximo positivo (o **principio del máximo completo CMP**).

Teorema 1.18 Sea P de Feller tal que su potencial $U : \mathcal{C}_0(E) \rightarrow \mathcal{C}_0(E)$ es continuo.

Entonces U verifica el **principio del máximo positivo**, es decir que para todo $f \in \mathcal{C}_0(E)$

$$\sup_{\substack{x \in E \\ f(x) \geq 0}} Uf(x) \leq 1 \implies \sup_{x \in E} Uf(x) \leq 1.$$

Además la imagen $\mathcal{C}_0(E)$ por U es densa en $\mathcal{C}_0(E)$.

Este teorema es una parte importante del teorema de **Hunt** que caracteriza completamente los potenciales que envían $\mathcal{C}_0(E)$ en $\mathcal{C}_0(E)$ (ver [13] Cap 4.1, p130).

En efecto se puede comprobar cuando un núcleo es el potencial de un semi-grupo de Feller.

Teorema 1.19 *Si $U : \mathcal{C}_0(E) \rightarrow \mathcal{C}_0(E)$ es un operador lineal positivo continuo, verifica el principio del máximo positivo y su imagen es densa en $\mathcal{C}_0(E)$ entonces U es el potencial de una función de transición de Feller.*

Es importante notar que la condición ligeramente más débil

$$\sup_{\substack{x \in E \\ f(x) > 0}} Uf(x) \leq 1 \implies \sup_{x \in E} Uf(x) \leq 1.$$

basta pero no se necesita para el trabajo presente.

Si uno no tiene la condición de densidad, el CMP permite por lo menos afirmar que un operador es potencial de una resolvente (ver [13] Cap 4.1, p133) :

Teorema 1.20 *Si $U : \mathcal{C}_0(E) \rightarrow \mathcal{C}_0(E)$ es un operador lineal positivo continuo y verifica el principio del máximo positivo entonces existe una única resolvente de contracción que tiene como potencial el operador U .*

El teorema queda cierto si $U : \mathcal{C}_b(E) \rightarrow \mathcal{C}_b(E)$; esta precisión sirve para considerar el caso de los procesos de Ray; se necesita además la noción de función supermediana (generalizando la noción de función superarmónica).

Definición 1.21 *Dado una resolvente de contracción $(U_\lambda)_{\lambda > 0}$, una función $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ medible se dice **supermediana** si :*

$$\forall \lambda > 0, x \in E, \lambda U_\lambda f(x) \leq f(x).$$

Se denota por \mathcal{M}^+ el espacio de las funciones supermedianas y

$$\mathcal{H}_U = \mathcal{M}^+ \cap \mathcal{C}_0(E) = \mathcal{M}^+ \cap \mathcal{C}_0(E).$$

Gracias a la ecuación de la resolvente, uno se da cuenta que para todo $f \in b^+(E) : Uf$ es una función supermediana.

Como precisado en [13], \mathcal{H}_U es cerrado bajo mín, máx, y contiene las constantes por lo que se puede usar el teorema de Stone-Weierstrass para los retículos.

Proposición 1.22 *\mathcal{H}_U es denso en $\mathcal{C}_0(E)$ ssi \mathcal{H}_U separa los puntos de E .*

La densidad del espacio \mathcal{H}_U es necesaria para decir cuándo una resolvente de contracción proviene de un proceso de Ray y el siguiente teorema relaciona los semi-grupos de Ray y las resolventes de contracción (ver [13] Cap 4.7, p169) :

Teorema 1.23 Sea $(U_\lambda)_{\lambda>0}$ una resolvente de contracción sobre $\mathcal{C}_b(E)$.

Si \mathcal{H}_U es denso en $\mathcal{C}_0(E)$ entonces $(U_\lambda)_{\lambda>0}$ es la resolvente de contracción de un semi-grupo de Ray.

Para concluir esta parte, se enuncia una propiedad simple pero eficaz y que se usará para probar que un operador verifica el CMP.

Proposición 1.24 Sea $\mu : \mathcal{B}(E) \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ una medida que tiene peso en todos los abiertos y $U : \mathcal{C}_0(E) \rightarrow \mathcal{C}_0(E)$ un operador tal que

$$\forall f \in \mathcal{C}_0(E), \int (Uf - 1)^+ f d\mu \geq 0.$$

Entonces U verifica el CMP.

DEMOSTRACIÓN. Si $f \in \mathcal{C}_0(E)$ es tal que $\sup_{\substack{x \in E \\ f(x) \geq 0}} Uf(x) \leq 1$ entonces $\int_{f < 0} (Uf - 1)^+ f d\mu \geq 0$ por lo que $Uf \leq 1$ μ -cs sobre $(f < 0)$.

El μ -cs se puede omitir pues Uf es continua y como μ tiene peso en los abiertos tenemos la desigualdad cierta sobre un denso de E y luego en todas partes. Uno puede concluir : U satisface el CMP. \square

Resultado igualmente cierto con $\mathcal{C}_b(E)$.

1.1.4. Potencial discreto y matrices

Es conveniente referirse a [7] para un estudio de los potenciales discretos; en [9] se estudia de manera exhaustiva las matrices y potenciales sobre un espacio finito, y se introduce por ejemplo las relaciones entre un potencial y una **M-matriz inversa**.

Si uno considera solo un núcleo N submarkoviano ($N1 \leq 1$), para $f \in b^+(E)$, la función $t \mapsto N^{\lfloor t \rfloor} f(x)$ es càdlàg y el potencial asociado es

$$U_N f(x) = \int_0^\infty N^{\lfloor t \rfloor} f(x) dt = \sum_{k=0}^\infty N^k f(x).$$

Cuando tiene sentido : $U_N = (\text{Id} - N)^{-1}$ (es el caso si N es irreducible y submarkoviana).

Ahora uno podría probar todos los resultados necesarios para llegar al principio del máximo positivo en el caso discreto, pasando por las funciones excesivas y el núcleo de reducción; pero como lo indican en [7], U_N es el potencial de la función de transición $(e^{t(N-\text{Id})})_{t \geq 0}$ de Feller (bajo el supuesto que $N : \mathcal{C}_0(E) \rightarrow \mathcal{C}_0(E)$).

Es intuitivamente obvio (pues $\int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \lambda^{-1}$) y se prueba con rigor pasando por las series de las dichas funciones.

Si E es finito y $n = \text{card}(E)$. Entonces $\mathcal{C}_c(E) = \mathcal{C}_0(E) = \mathcal{C}(E) = \mathbb{R}^n$ y las funciones de $\mathcal{C}_0(E)$ en $\mathcal{C}_0(E)$ lineales son las matrices. El teorema de Hunt se reformula simplemente.

Teorema 1.25 *Una matriz $U \in M_n(\mathbb{R})$ es un potencial ssi es invertible y satisface el CMP*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \sup_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i \geq 0}} (Ux)_i \leq 1 \implies Ux \leq 1.$$

El teorema que sigue es clave para esta tesis, es la forma discreta del problema que nos interesa : la potencia (en el sentido de Hadamard) de un potencial sobre un espacio finito es un potencial.

Teorema 1.26 *Sea $N \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz submarkoviana, $U = (Id - N)^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$ el potencial asociado.*

*Entonces para todo $\alpha \geq 1$ existe $Q_\alpha \in M_n(\mathbb{R})$ submarkoviana tal que $U^{(\alpha)} = (Id - Q_\alpha)^{-1}$ donde $U^{(\alpha)} = (U_{ij}^\alpha)_{1 \leq i, j \leq n}$ es la potencia α de **Hadamard** de la matriz.*

En particular $U^{(\alpha)}$ es un potencial y verifica el CMP.

En [9] (Cap 6.2, p172) se encuentra la demostración del teorema y de hecho se obtiene más : si ${}^t N$ es submarkoviana entonces ${}^t Q_\alpha$ también.

Se concluye esta section con un teorema que sera útil para saber cuando una matriz invertible simétrica es un potencial :

Teorema 1.27 *Sea $U \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz invertible y simétrica.*

La matriz U es un potencial ssi para todo $v \in \mathbb{R}^n$, $\langle (Uv - \mathbf{1})^+, v \rangle \geq 0$.

DEMOSTRACIÓN. Si U es un potencial, sean N submarkoviana y $k > 0$ tales que $U = (k(Id - N))^{-1} = M^{-1}$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $\xi = (Uv - \mathbf{1})$.

Luego

$$\begin{aligned} \langle (Uv - \mathbf{1})^+, v \rangle &= \langle \xi^+, v \rangle = \langle \xi^+, M\xi + M\mathbf{1} \rangle \\ &= k\langle \xi^+, \xi \rangle - k\langle \xi^+, N\xi \rangle + \langle \xi^+, M\mathbf{1} \rangle \\ &= k\langle \xi^+, \xi^+ \rangle - k\langle \xi^+, N\xi \rangle + \langle \xi^+, M\mathbf{1} \rangle. \end{aligned}$$

Ahora como N es submarkoviana, $M\mathbf{1} \geq 0$ y así $\langle \xi^+, M\mathbf{1} \rangle \geq 0$.

Además $\langle \xi^+, N\xi \rangle \leq \langle \xi^+, N\xi^+ \rangle \leq \langle \xi^+, \xi^+ \rangle$ (N es simétrica y tiene radio espectral menor que 1).

La recíproca es una aplicación del teorema de Hunt pues por la desigualdad satisfecha, U satisface el CMP. \square

1.2. Núcleos de Green

1.2.1. El movimiento browniano parado

Esta parte se inspira de [14] (Cap 3) y [3] (Cap 2). Muchos resultados ya eran presentados en [18] (Cap 6). El potencial asociado a un movimiento browniano parado posee una densidad y se enuncia propiedades generales al respecto.

Para un conjunto $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, se define $\mathcal{T}_A(\mathbb{B}) = \inf\{t \geq 0 : B_t \in A^c\}$ el **tiempo de salida** de A que es un tiempo de parada por el teorema de Début ([4] Cap 3).

Sea $D \subset \mathbb{R}^d$ abierto acotado o $D = \mathbb{R}^d$ (en este caso $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^d}(\mathbb{B}) = \infty$); por ser abierto D es LCHD.

Proposición 1.28 *Si D es acotado entonces $\mathcal{T}_D(\mathbb{B})$ es un tiempo de parada y para todo $x \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{T}_D(\mathbb{B}) < \infty$, \mathbb{P}^x -cs.*

De hecho como D es acotado : $\mathbb{E}^x[\mathcal{T}_D(\mathbb{B})] = \mathbb{E}^x[B_{\mathcal{T}_D}^2] < \infty$.

Notar que basta que D sea acotado en una dirección $u \in \partial B(0, 1)$ para que $\mathcal{T}_D(\mathbb{B})$ sea finito cs, pues $\langle u, \mathbb{B} \rangle$ es un movimiento browniano unidimensional (y se usa la ley del logaritmo iterado por ejemplo).

Ahora se define el núcleo de Green asociado a D .

Teorema 1.29 *Existe una (única) función medible $G_D : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ tal que para todo $f \in b^+(\mathbb{R}^d)$ y $x \in \mathbb{R}^d$*

$$\mathbb{E}^x \left[\int_0^{\mathcal{T}_D(\mathbb{B})} f(B_t) dt \right] = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) G_D(x, y) dy.$$

G_D se llama el **núcleo de Green** relativo a D .

La unicidad es por supuesto ctp *a priori* pero G_D tiene regularidades que permite olvidar este *a priori*.

En el caso de $D = \mathbb{R}^d$ se puede obtener una fórmula explícita del núcleo de Green :

$$\forall x \neq y \in \mathbb{R}^d, G(x, y) = C_d |x - y|^{2-d}.$$

Donde $C_d = \frac{\Gamma(d/2-1)}{2\pi^{d/2}}$.

Y en el caso de la bola unitaria ([16] p12) :

$$\forall x \neq y \in B(0,1) \setminus \{0\}, G_{B(0,1)}(x,y) = G(x,y) - C_d \left| y|x| - \frac{x}{|x|} \right|^{2-d}.$$

Definición 1.30 Una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es **armónica** si es de clase \mathcal{C}^2 y $\Delta f = 0$ sobre D .

Como sabido, una función armónica sobre D es de clase \mathcal{C}^∞ .

El núcleo de Green satisface las siguientes propiedades :

Proposición 1.31 Sean $x, y \in \mathbb{R}^d$

- Si $x \in D^c$ o $y \in D^c$ entonces $G_D(x, y) = 0$.
- $G_D(x, y) < \infty$ ssi $x \neq y$.
- $G_D(x, y) \leq G(x, y)$.
- G_D es simétrica : $G_D(x, y) = G_D(y, x)$.
- $G_D(\cdot, y)$ es armónica sobre el abierto $D \setminus \{y\}$.

Efectivamente el núcleo de Green genera un núcleo sobre D

$$G_D : \begin{cases} D \times \mathcal{B}(D) & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, A) & \mapsto \int_A G_D(x, y) dy \end{cases}.$$

Se usa la misma notación para el núcleo y para su densidad, el contexto indica cual se usa.

Se puede afirmar que G_D es de hecho el potencial de una función de transición de Feller, a condición de tener un dominio regular. En particular el caso $D = \mathbb{R}^d$ es directo del hecho que el movimiento browniano es un proceso de Feller y G es el potencial asociado.

Definición 1.32 Un punto $x \in \partial D$ es **regular** si $\mathbb{P}^x(\mathcal{T}_{\overline{D}}(\mathbb{B}) = 0) = 1$.

El conjunto D se dice **regular** si todo punto $x \in \partial D$ es regular.

La regularidad traduce el hecho que si el movimiento browniano toca al borde del conjunto entonces tiene que salir de inmediato. Es una característica esencial de los conjuntos sobre los cuales se puede resolver el problema de Dirichlet con unicidad y continuidad hasta la frontera. Este fenómeno ilustra el aporte de las probabilidades a la teoría de ecuaciones diferenciales parciales, los buenos conjuntos sobre los cuales se puede resolver el problema de Dirichlet tienen una interpretación en función de las trayectorias del movimiento browniano.

Teorema 1.33 Sea D acotado regular, se adjunta un punto \dagger (llamado **cementerio**) a D y se define el proceso

$$\forall t \geq 0, B_t^D = B_t \mathbf{1}_{\tau_D(\mathbb{B}) < t} + \dagger \mathbf{1}_{\tau_D(\mathbb{B}) \geq t}.$$

Este proceso se llama **movimiento browniano parado** y es un proceso de Feller de potencial G_D .

El \dagger se introduce para tener un proceso de Markov y no perder masa.

G_D es el potencial asociado a la función de transición $P_t^D(x, A) = \mathbb{P}^x(B_{t \wedge \tau_D} \in A)$ y se puede expresar en función de G el potencial del movimiento browniano sobre todo \mathbb{R}^d : dicho **libre**.

Proposición 1.34 Para todo $x \neq y \in D$, $G_D(x, y) = G(x, y) - \mathbb{E}^x[G(B_{\tau_D}, y)]$.

La regularidad del conjunto nos permite concluir más sobre el núcleo de Green :

Proposición 1.35 Si D es regular acotado entonces para todo $y \in D$, $x_0 \in \partial D$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} G_D(x, y) = 0.$$

De esta proposición se deduce que $G(\cdot, y) - G_D(\cdot, y)$ es la única función armónica sobre $D \setminus \{y\}$ que vale $G(\cdot, y)$ en el borde ∂D (lo cual se observa de manera explícita en el caso de la bola unitaria).

1.2.2. El camino aleatorio simple

Los resultados de esta sección provienen principalmente de [11].

Se considera \mathbb{S} el camino aleatorio simple a valores en \mathbb{Z}^d , $D \subset \mathbb{R}^d$ sigue siendo un abierto acotado (o todo \mathbb{R}^d).

\mathbb{S} un proceso de Markov (discreto) a función de transición N tal que para todo $x, y \in \mathbb{Z}^d$

$$N(x, y) = \frac{1}{2d} \mathbf{1}_{|x-y|=1}.$$

El potencial discreto asociado (llamado **núcleo de Green libre**) es entonces :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^d, \mathcal{G}(x, y) = \mathbb{E}^x \left[\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_y(S_k) \right].$$

Se puede aproximar \mathcal{G} en función del núcleo de Green G del movimiento browniano libre ([11], Cap 4) :

Proposición 1.36 Existe una función $\xi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\xi(t) = O(t)$ (existe $M > 0$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}^+$, $|\xi(t)| \leq Mt$) tal que para todo $x \neq y \in \mathbb{Z}^d$:

$$\mathcal{G}(x, y) = dG(x, y) + \xi(|x - y|^{-d}).$$

En particular existe $M' > 0$ tal que para todo $x \neq y \in \mathbb{Z}^d$: $\mathcal{G}(x, y) \leq M'|x - y|^{2-d}$.

Si se define $\mathcal{T}_D(\mathbb{S}) = \inf\{k \geq 0 : S_k \in D^c\}$, el camino aleatorio parado permite definir el potencial \mathcal{G}_D :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_D(x, y) = \mathbb{E}^x \left[\sum_{k=0}^{\mathcal{T}_D(\mathbb{S})-1} \mathbb{1}_y(S_k) \right].$$

Como el camino aleatorio simple en dimension $d \geq 3$ es transiente, para todo $x \in \mathbb{Z}^d$, $\mathcal{T}_D(\mathbb{S}) < \infty$ \mathbb{P}^x -cs.

\mathcal{G}_D es el potencial asociado al núcleo submarkoviano N_D restricción de N a $(D \cap \mathbb{Z}^d) \times (D \cap \mathbb{Z}^d)$ y sus propiedades son parecidas al caso continuo.

Proposición 1.37 Sean $x, y \in \mathbb{Z}^d$

- Si $x \in D^c$ o $y \in D^c$ entonces $\mathcal{G}_D(x, y) = 0$.
- $\mathcal{G}_D(x, x) < \infty$ y $\mathcal{G}(x, x) < \infty$.
- \mathcal{G}_D es simétrica : $\mathcal{G}_D(x, y) = \mathcal{G}_D(y, x)$.
- $\mathcal{G}_D(x, y) \leq \mathcal{G}(x, y)$.

En particular como D es acotado, por el teorema de Hunt : \mathcal{G}_D es una matriz invertible simétrica de tamaño $|(D \cap \mathbb{Z}^d)|$.

Se expresa en función del núcleo de Green libre.

Proposición 1.38 Para todo $x \neq y \in \mathbb{Z}^d$, $\mathcal{G}_D(x, y) = \mathcal{G}(x, y) - \mathbb{E}^x[\mathcal{G}(S_{\mathcal{T}_D}, y)]$.

Finalmente, como siempre para el caso de la bola, por la simetría radial, se puede obtener formulas más explícitas.

Proposición 1.39 Para todo $n \geq 1$, $x \neq y \in B(0, n) \cap \mathbb{Z}^d$:

$$\mathcal{G}_{B(0, n)}(x, y) = dG_{B(0, n)}(x, y) + O(|x - y|^{-d}) + O(\ln^2(n)(n - |y|)^{1-d}).$$

1.3. Teorema de Donsker multidimensional

Aunque en [11] este presente el teorema de Donsker multidimensional, se presenta aquí una versión simple, siguiendo las herramientas famosas presentadas en [2].

Primero hay que mostrar la convergencia en distribución de las leyes finita-dimensionales; se recuerda que \mathbb{W}^n es la interpolación lineal normalizada de \mathbb{S} en \mathbb{R}^d .

Proposición 1.40 *Para todo $t_1 < \dots < t_p$ en $[0, \infty)$:*

$$(\mathbb{W}_{t_1}^n, \dots, \mathbb{W}_{t_p}^n) \Rightarrow (B_{t_1}, \dots, B_{t_p}).$$

DEMOSTRACIÓN. Se muestra para $t_1 < t_2$ y el método de demostración se generaliza sin problema a $t_1 < \dots < t_p$ en $[0, 1]$.

Se tiene que $(\mathbb{W}_{t_1}^n, \mathbb{W}_{t_2}^n - \mathbb{W}_{t_1}^n) = (S_n(t_1), S_n(t_2) - S_n(t_1)) + R_n$ y $R_n \Rightarrow 0$ ya que converge a 0 en L^1 ; entonces basta probar que $(S_n(t_1), S_n(t_2) - S_n(t_1)) \Rightarrow (B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1})$ para concluir que :

$$(\mathbb{W}_{t_1}^n, \mathbb{W}_{t_2}^n - \mathbb{W}_{t_1}^n) \Rightarrow (B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}).$$

Y luego deducir

$$(\mathbb{W}_{t_1}^n, \mathbb{W}_{t_2}^n) \Rightarrow (B_{t_1}, B_{t_2}).$$

por continuidad de la función $\begin{cases} \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d & \rightarrow & \mathbb{R}^d \\ (x, y) & \mapsto & (x, x + y) \end{cases}$.

Se denota por ϕ la función característica de ε_1 :

$$\begin{aligned} \text{Para } u, v \in \mathbb{R}^d, \phi_{n,t}(u, v) &= \mathbb{E}(e^{i\langle (S_n(t_1), S_n(t_2) - S_n(t_1)), (u, v) \rangle}) \\ &= \left(\mathbb{E}(e^{i\sqrt{\frac{d}{n}} \langle \varepsilon_1, u \rangle}) \right)^{\lfloor nt_1 \rfloor} \left(\mathbb{E}(e^{i\sqrt{\frac{d}{n}} \langle \varepsilon_1, v \rangle}) \right)^{\lfloor nt_2 \rfloor - \lfloor nt_1 \rfloor} \\ &= \left(\phi \left(\sqrt{\frac{d}{n}} u \right) \right)^{\lfloor nt_1 \rfloor} \left(\phi \left(\sqrt{\frac{d}{n}} v \right) \right)^{\lfloor nt_2 \rfloor - \lfloor nt_1 \rfloor} \\ &= \left(1 - \frac{|u|^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)^{\lfloor nt_1 \rfloor} \left(1 - \frac{|v|^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)^{\lfloor nt_2 \rfloor - \lfloor nt_1 \rfloor} \\ &\rightarrow \exp \left(-\frac{|u|^2 t_1}{2} - \frac{|v|^2 (t_2 - t_1)}{2} \right) = \mathbb{E}(e^{i\langle (B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}), (u, v) \rangle}). \end{aligned}$$

Uno puede concluir. □

En lo que sigue se usarán los teoremas clásicos de **Prokhorov** presentados a continuación.

Teorema 1.41 *Sean $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y P medidas de probabilidades sobre $(\mathcal{C}_d, \mathcal{B}_d)$, entonces :*

$$P_n \Rightarrow P$$

ssi las leyes finita-dimensionales de $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergen en distribución a las de P y la familia $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es tensa.

Si $f \in \mathcal{C}_d$ y $\delta, R > 0$, se designa por $\omega_f^R(\delta) = \sup_{\substack{|x-y| < \delta \\ x, y \in [0, R]}} |f(x) - f(y)|$ el **módulo de continuidad** parado a R , que permite enunciar (una traducción del teorema de Arzelà-Ascoli).

Teorema 1.42 *Una familia $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de medidas de probabilidades sobre (\mathcal{C}_d, β_d) es tensa ssi para todo $\eta, \varepsilon, R > 0$, existe $M > 0$, $\delta_R \in (0, 1)$ y $n_0 \geq 1$ tales que*

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_0, \quad P_n(\{f \in \mathcal{C}_d : |f(0)| \geq M\}) &\leq \eta \\ P_n(\{f \in \mathcal{C}_d : \omega_f^R(\delta_R) \geq \varepsilon\}) &\leq \eta. \end{aligned}$$

Finalmente uno necesita el teorema de Donsker unidimensional :

Teorema 1.43 *Sean $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ variables aleatorias iid tales que $\mathbb{E}(Y_1) = 0$ y $\mathbb{E}(Y_1^2) = \sigma^2$.*

$$\text{Para } n \geq 1 \text{ y } t \in \mathbb{R}^+ \text{ se define } \mathbb{W}^n(Y)_t = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} Y_k + (nt - \lfloor nt \rfloor) Y_{\lfloor nt \rfloor + 1} \right).$$

Entonces $\mathbb{W}^n(Y)$ converge en distribución al movimiento browniano unidimensional.

Con todo lo enunciado se puede demostrar la versión multidimensional del teorema de Donsker :

Teorema 1.44 *Con \mathbb{W}^n la interpolación lineal normalizada de \mathbb{S} en $\mathbb{R}^d : \mathbb{W}^n \Rightarrow \mathbb{B}$.*

Por lo que para todo $F : \mathcal{C}_d \rightarrow \mathbb{R}$ continua acotada :

$$\mathbb{E}[F(\mathbb{W}^n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[F(\mathbb{B})].$$

DEMOSTRACIÓN. Para todo $1 \leq j \leq d$, se escribe $\varepsilon_k^j = \langle \varepsilon_k, e_j \rangle$, $\mathbb{B}^j = \langle \mathbb{B}, e_j \rangle$ y

$$\mathbb{W}^n(\varepsilon^j)_t = \sqrt{\frac{d}{n}} \left(\sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \varepsilon_k^j + (nt - \lfloor nt \rfloor) \varepsilon_{\lfloor nt \rfloor + 1}^j \right) = \langle \mathbb{W}_t^n, e_j \rangle.$$

Como las variables $(\varepsilon_k^j)_{k \in \mathbb{N}}$ son iid (pues $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ lo son), $\mathbb{E}(\varepsilon_k^j) = 0$ y $\text{Var}(\varepsilon_k^j) = \frac{1}{d}$, por el teorema 1.43 : $\mathbb{P}_{\mathbb{W}^n(\varepsilon^j)} \Rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{B}^j}$ y por lo tanto la familia $(\mathbb{P}_{\mathbb{W}^n(\varepsilon^j)})_{n \in \mathbb{N}}$ es tensa.

Sean $\eta, \varepsilon, R > 0$, entonces por ser tensa y el teorema 1.42, existen $M > 0$, $\delta_R > 0$ y $n_0 \geq 1$ tales que para todo $1 \leq j \leq d$:

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_0, \quad \mathbb{P}_{\mathbb{W}^n(\varepsilon^j)}(\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+) : |f(0)| \geq M\}) &\leq \eta \\ \mathbb{P}_{\mathbb{W}^n(\varepsilon^j)}(\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+) : \omega_f^R(\delta_R) \geq \varepsilon\}) &\leq \eta. \end{aligned}$$

Por lo tanto para $n \geq n_0$:

$$\mathbb{P}_{\mathbb{W}^n}(\{f \in \mathcal{C}_d : |f(0)| \geq M\}) \leq \sum_{j=1}^d \mathbb{P}_{\mathbb{W}^n(X^j)}(\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+) : |f(0)| \geq M\}) \leq d\eta$$

$$\mathbb{P}_{\mathbb{W}^n}(\{f \in \mathcal{C}_d : \omega_f^R(\delta_R) \geq \varepsilon\}) \leq \sum_{j=1}^d \mathbb{P}_{\mathbb{W}^n(X^j)}(\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+) : \omega_f^R(\delta_R) \geq \varepsilon\}) \leq d\eta.$$

Por ende $(\mathbb{P}_{\mathbb{W}^n})_{n \in \mathbb{N}}$ es tensa, y como ya tenemos la convergencia de las leyes finitadimensionales, se concluye por el teorema 1.41 que :

$$\mathbb{W}^n \Rightarrow \mathbb{B}.$$

□

Se concluye el capítulo con observaciones :

- Para todo $x \in \mathbb{R}^d$, como $\begin{cases} \mathcal{C}_d & \rightarrow & \mathcal{C}_d \\ v & \mapsto & v + x \end{cases}$ es continua entonces $\mathbb{W}^n + x \Rightarrow \mathbb{B} + x$.

Mejor, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de \mathbb{R}^d tal que $x_n \rightarrow x$ entonces $\mathbb{W}^n + x_n \Rightarrow \mathbb{B} + x$.

- Sea $F : \mathcal{C}_d \rightarrow \mathbb{R}$ medible acotada y $D_F = \{v \in \mathcal{C}_d : F \text{ no es continua en } v\}$.

Si $\mathbb{P}^x(\mathbb{B} \in D_F) = 0$ entonces

$$\mathbb{E}[F(\mathbb{W}^n + x_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}^x[F(\mathbb{B})].$$

Capítulo 2

Potencias del núcleo de Green

2.1. Dominio de definición y tiempos de salida

Para poder usar los resultados conocidos de matrices es necesario aproximar el núcleo de Green G_D , lo que se puede hacer con requisitos extras sobre el conjunto D , presentados en esta parte. Se sabe que el camino aleatorio simple aproxima el movimiento browniano en distribución entonces con las funciones continuas adecuadas se puede usar el teorema de Donsker para justificar que el núcleo de Green «discretizado» converge al núcleo de Green simplemente; uno se preguntara también si la convergencia es uniforme.

Definición 2.1 Para $D \subset \mathbb{R}^d$ sea $\mathcal{T}_D : \begin{cases} \mathcal{C}_d & \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+} \\ v & \mapsto \inf\{t \geq 0 : v_t \in D^c\} \end{cases}$ el *tiempo de salida* de la trayectoria v del conjunto D .

Con la convención $\inf(\emptyset) = \infty$.

Para aliviar las notaciones si $v \in \mathcal{C}_d$, se nota $v_{\mathcal{T}_D(v)} = v_{\mathcal{T}_D}$. En la proposición siguiente se resumen propiedades básicas de los tiempos de salida, considerando \mathcal{C}_d con la topología compacta-abierta y la métrica D_d .

Proposición 2.2 Sean $C, D \subset \mathbb{R}^d$

(a) Si $C \subset D$ entonces $\mathcal{T}_C \leq \mathcal{T}_D$.

(b) Sea $v \in \mathcal{C}_d$, si $\mathcal{T}_D(v) < \infty$ entonces $v_{\mathcal{T}_D} \in \overline{D^c}$.

Si además $v_0 \in D$ entonces $v_{\mathcal{T}_D} \in \partial D$.

(c) Si D es cerrado entonces \mathcal{T}_D es semi-continua-superior y por lo tanto medible.

(d) Si D es abierto \mathcal{T}_D es medible.

DEMOSTRACIÓN. Los puntos (a) y (b) son obvios.

(c) Si $\lambda \in (0, \infty)$ y $v \in (\mathcal{T}_D < \lambda)$ entonces existe $t_0 < \lambda$ tal que $v_{t_0} \in D^c$; como D^c es abierto existe $\eta > 0$ tal que $B(v_{t_0}, \eta) \subset D$. Sea $n_0 = \lfloor t_0 \rfloor + 1$.

Luego si $w \in B_{D_d}(v, \frac{\eta}{2^{n_0}})$ entonces $\|v - w\|_{\infty, [0, t_0]} < \eta$, así que, $w_{t_0} \in D^c$ por lo que $\mathcal{T}_D(w) \leq t_0 < \lambda$ y $B_{D_d}(v, \frac{\eta}{2^{n_0}}) \subset (\mathcal{T}_D < \lambda) : (\mathcal{T}_D < \lambda)$ es abierto en \mathcal{C}_d y por lo tanto \mathcal{T}_D es scs.

(d) Para $n \geq 1$, sea $D_n = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, D^c) \geq 1/n\}$.

Esta es una sucesión de conjuntos cerrados que crece a D (pues D es abierto).

Por (a) ya se tiene que $(\mathcal{T}_{D_n})_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente mayorada por \mathcal{T}_D , sea S su limite : $S \leq \mathcal{T}_D$.

Sea $v \in \mathcal{C}_d$. Si para algún $n \geq 1$, $\mathcal{T}_{D_n}(v) = \infty$ o $S(v) = \infty$ entonces $S(v) = T^D(v) = \infty$.

Para $n \geq 1$, por (b) $v_{\mathcal{T}_{D_n}} \in \overline{D_n^c}$ así que $d(v_{\mathcal{T}_{D_n}}, D^c) \leq 1/n$. Tomando limite : $d(v_S, D^c) = 0$, luego $v_S \in D^c$ y $S(v) \geq \mathcal{T}_D(v)$. Como $\mathcal{T}_{D_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}_D$, uno concluye que \mathcal{T}_D es medible.

□

2.1.1. Dominios regulares

A partir de ahora $D \subset \mathbb{R}^d$ designa un conjunto abierto acotado y por lo tanto \mathcal{T}_D et \mathcal{T}_{D^c} son funciones medibles sobre \mathcal{C}_d .

Se necesita la noción de función D -regular : si la trayectoria llega a tocar la frontera, tiene que salir de inmediato. Esto permite como mostrado en la proposición 2.4 que en estas trayectorias, el tiempo de salida es continuo (propiedad crucial para poder aplicar el teorema de Donsker).

Definición 2.3 Una función $v \in \mathcal{C}_d$ se dice **D -regular** si :

$$(\mathcal{T}_D(v) = \mathcal{T}_{\overline{D}}(v) \in \mathbb{R}^+) \quad \text{ssi} \quad (\mathcal{T}_D(v) \in \mathbb{R}^+ \text{ y } \mathcal{T}_{\overline{D}}(v_{\cdot + \mathcal{T}_D}) = 0).$$

Proposición 2.4 \mathcal{T}_D es continua en cada $v \in \mathcal{C}_d$ función D -regular.

DEMOSTRACIÓN. Sea $v \in \mathcal{C}_d$ una función D -regular, $t_0 = \mathcal{T}_D(v) \in \mathbb{R}^+$, $(v^n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de \mathcal{C}_d tal que $v^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$ uniformemente sobre los compactos de \mathbb{R}^d .

En el caso que $t_0 > 0$, sea $\varepsilon \in (0, t_0)$, entonces $v([0, t_0 - \varepsilon]) \subset D$: es un compacto en un abierto, por lo tanto existe $\eta > 0$ tal que

$$v([0, t_0 - \varepsilon]) + B(0, \eta) \subset D$$

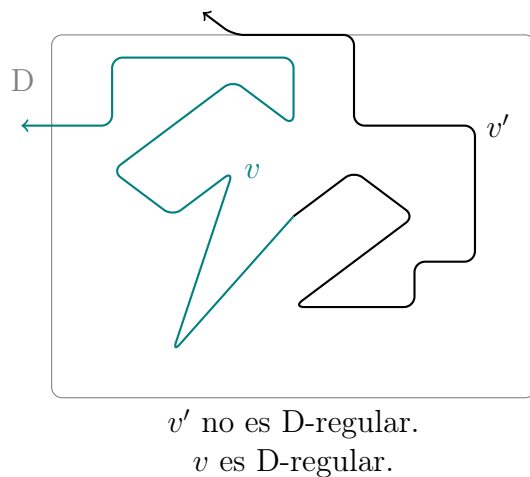


Figura 2.1: Ejemplos de trayectorias

Como v es D -regular, existe $t_1 \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$ tal que $v_{t_1} \in \overline{D}^c$ y por ser abierto existe $\eta' \in (0, \eta)$ tal que $B(v_{t_1}, \eta') \subset \overline{D}^c$.

De la convergencia uniforme de $(v^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sobre $[0, t_0 + \varepsilon]$ existe $n_0 \geq 0$ tal que para todo $n \geq n_0$, $\|v^n - v\|_{\infty, [0, t_0 + \varepsilon]} < \eta'$.

Por lo tanto para $n \geq n_0$, $v^n([0, t_0 - \varepsilon]) \subset D$ y $v_{t_1}^n \in \overline{D}^c$ así que $t_0 - \varepsilon \leq \mathcal{T}_D(v^n) \leq t_1 \leq t_0 + \varepsilon$, \mathcal{T}_D es continua en v .

El caso $t_0 = 0$ es aun más simple. □

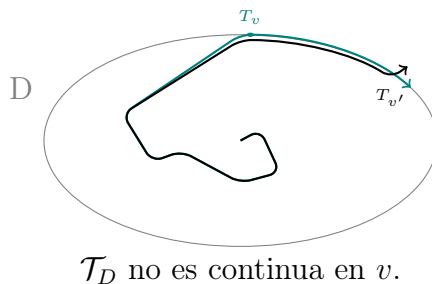


Figura 2.2: No continuidad del tiempo de salida

Se recuerda la definición de punto regular ya mencionada en 1.32 y la proposición asociada.

Definición 2.5 Un punto $x \in \partial D$ es **regular** si $\mathbb{P}^x(\mathcal{T}_D(\mathbb{B}) = 0) = 1$.

D se dice **regular** si todo punto $x \in \partial D$ es regular.

Proposición 2.6 Como D es acotado, para todo $x \in \overline{D} : \mathbb{P}^x(\mathcal{T}_D(\mathbb{B}) < \infty) = 1$.

Los conjuntos regulares son exactamente los conjuntos para los cuales las trayectorias del movimiento browniano son D -regulares, tautología que necesita una pequeña demostración.

Proposición 2.7 D es regular ssi para todo $x \in \overline{D}$ las trayectorias de \mathbb{B} son \mathbb{P}^x -cs D -regulares.

DEMOSTRACIÓN. Se supone que D es regular y $x \in \overline{D}$.

Por proposición 2.6, $\mathcal{T}_D(\mathbb{B})$ es finito \mathbb{P}^x -cs; usando el hecho que las trayectorias de \mathbb{B} son \mathbb{P}^x -cs continuas, $B_{\mathcal{T}_D} \in \partial D$ (pues $B_0 \in \overline{D}$) y la propiedad de Markov fuerte del movimiento browniano :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^x(\mathbb{B} \text{ es } D\text{-regular}) &= \mathbb{P}^x(\mathcal{T}_D(\mathbb{B}) = \mathcal{T}_{\overline{D}}(\mathbb{B})) = \mathbb{P}^x(\mathcal{T}_{\overline{D}}(\mathbb{B}_{+\mathcal{T}_D}) = 0) \\ &= \mathbb{P}^x(\mathcal{T}_{\overline{D}}(\mathbb{B}_{+\mathcal{T}_D} - B_{\mathcal{T}_D} + B_{\mathcal{T}_D}) = 0) \\ &= \mathbb{E}^x[\mathbb{P}^{B_{\mathcal{T}_D}}(\mathcal{T}_{\overline{D}}(\mathbb{B}) = 0)] = \mathbb{E}^x[1] = 1. \end{aligned}$$

La reciproca es trivial. □

El movimiento browniano se comporta de manera «agradable» en los conjuntos regulares, pero ¿ cómo saber en la practica si un conjunto lo es ? Una condición bastante fácil de usar es la condición del cono exterior. Por el ejemplo con el caso de la bola unitaria, es trivial.

Definición 2.8 Se dice que D satisface la **condición del cono exterior** si para todo $x \in \partial D$ existe un cono abierto $V_x \subset \mathbb{R}^d$ y $M_x > 0$ tal que si se denota $C_x = V_x \cap B(0, M_x)$ entonces $x + C_x \subset \overline{D}^c$.

Proposición 2.9 Si D satisface la condición del cono exterior entonces D es regular.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in \partial D$, como V_x es un cono abierto (dado en la definición anterior), existen $n \geq 1$ y $Q_1, \dots, Q_n \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$ tales que $\bigcup_{i=1}^n Q_i C_x = B(0, M_x) \setminus \{0\}$.

Luego como la imagen por una matriz ortogonal de un movimiento browniano es un movimiento browniano :

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}(\mathcal{T}_{\{0\}}(\mathbb{B}) = 0) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\mathcal{T}_{(Q_i C_x)^c}(\mathbb{B}) = 0) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\mathcal{T}_{C_x^c}(Q_i^{-1} \mathbb{B}) = 0) = n \mathbb{P}(\mathcal{T}_{C_x^c}(\mathbb{B}) = 0). \end{aligned}$$

Como $\mathbb{P}(\mathcal{T}_{C_x^c}(\mathbb{B}) = 0) > 0$, la ley 0-1 de Blumenthal permite concluir $\mathbb{P}(\mathcal{T}_{C_x^c}(\mathbb{B}) = 0) = 1$.

Finalmente

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^x(\mathcal{T}_{\overline{D}}(\mathbb{B}) = 0) &= \mathbb{P}(\inf\{t \geq 0 : B_t + x \in \overline{D}^c\} = 0) \\ &\geq \mathbb{P}(\inf\{t \geq 0 : B_t \in C_x\} = 0) = 1. \end{aligned}$$

□

2.1.2. Aproximación de conjuntos

Un conjunto regular permite aplicar el teorema de Donsker para aproximar al movimiento browniano pero en el dicho teorema se considera la interpolación lineal del camino aleatorio simple. Surge la nueva pregunta de ¿cuándo el tiempo de salida del camino aleatorio simple y de su interpolación lineal coinciden? Lo que puede ser un problema, es cuando la interpolación lineal sale del conjunto pero el camino aleatorio simple no. Por eso se introducen los conjuntos «aproximables».

Definición 2.10 *D se dice **aproximable** si existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que para todo $n \geq n_0$, $x, y \in \sqrt{\frac{d}{n}}\mathbb{Z}^d$, si $x, y \in D$ y $|x - y| = \sqrt{\frac{d}{n}}$ entonces $[x, y] \subset D$.*

Se quiere, a priori, evitar este tipo de singularidad :

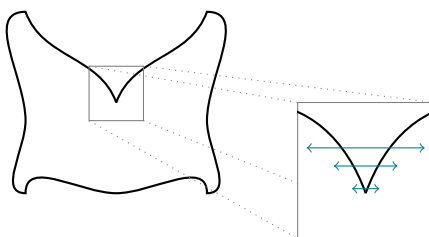


Figura 2.3: Singularidad del conjunto

Se proponen algunos ejemplos :

- Obviamente todo conjunto convexo es aproximable.
- Si para todo $1 \leq i \leq d$ y $x \in \mathbb{R} : D \cap (xe_i + e_i^\perp)$ es convexo entonces D es aproximable (tal conjunto se dice **ortogonalmente convexo**).
- Si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $1 \leq i \leq d$ y $x \in \mathbb{R} : D \cap (xe_i + e_i^\perp)$ es unión de convexos a distancia superior a ε uno del otro entonces D es aproximable.
- El conjunto $B(0, 1) \setminus \{0\}$, sin embargo simple, no es aproximable ni regular.

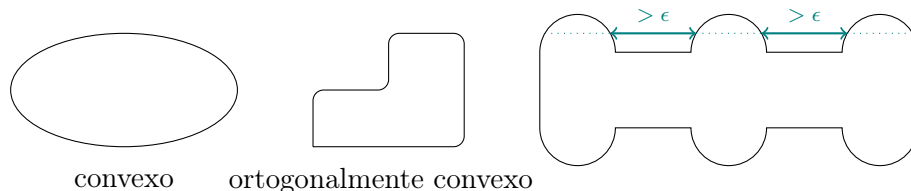


Figura 2.4: Conjuntos aproximables

Basta evitar las singularidades localmente.

Proposición 2.11 Si para todo $a \in \overline{D}$, existe $V \in \mathcal{V}_a$ una vecindad de a y $n_a \geq 1$ tal que para todo $n \geq n_a$, $x, y \in \sqrt{\frac{d}{n}}\mathbb{Z}^d \cap V$, si $x, y \in D$ y $|x - y| = \sqrt{\frac{d}{n}}$ se tiene $[x, y] \subset D$.

Entonces D es aproximable.

DEMOSTRACIÓN. Como \overline{D} es compacto, existe $a_1, \dots, a_r \in \overline{D}$ tales que $\overline{D} \subset \bigcup_{i=1}^r V_{a_i}$.

Sea $\delta > 0$ un número de Lebesgue asociado a este recubrimiento abierto y

$$n_0 = \max_{1 \leq i \leq r} (n_{a_i}) \vee (\lfloor \frac{d}{\delta^2} \rfloor + 1).$$

Uno comprueba sin problema que para todo $n \geq n_0$, $x, y \in \sqrt{\frac{d}{n}}\mathbb{Z}^d$, si $x, y \in D$ y $|x - y| = \sqrt{\frac{d}{n}}$ entonces $[x, y] \subset D$. \square

Si la condición de regularidad no es muy restrictiva, la condición aproximable lo es; por suerte uno puede sortearla aproximando un abierto regular por dentro y por fuera, como se va a detallar a continuación.

Definición 2.12 Sea $n \geq 1$, un conjunto $D_n \subset \mathbb{R}^d$ se dice *n-cúbico* si es unión de cubos di-ádicos cerrados de lado $\frac{1}{2^n}$.

Los cubos di-ádicos cerrados de largo $\frac{1}{2^n}$ tienen sus vertices en $\frac{1}{2^n}\mathbb{Z}^d$.

Proposición 2.13 Sea $n \geq 1$ y D_n un conjunto *n-cúbico* entonces :

- (a) D_n es cerrado.
- (b) $\overset{\circ}{D}_n$ es regular aproximable.
- (c) $\overline{\overset{\circ}{D}_n} = D_n$.

DEMOSTRACIÓN. (a) La colección de cubos di-ádicos de largo fijo es localmente finita.

(b) Claramente $\overset{\circ}{D}_n$ satisface la condición del cono exterior entonces es regular.

Con $\varepsilon = \frac{1}{2^n} > 0$: para todo $1 \leq i \leq d$ y $x \in \mathbb{R} : \overset{\circ}{D}_n \cap (xe_i + e_i^\perp)$ es unión de convexos a distancia superior a ε uno del otro por lo tanto $\overset{\circ}{D}_n$ es aproximable.

(c) Directo. \square

El conjunto D se aproxima primero exteriormente.

Proposición 2.14 *Sea D abierto acotado.*

Existe $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de conjuntos (conexos si D es conexo) tales que

(a) *para todo $n \geq 1$: D_n es n -cúbico acotado.*

(b) *para todo $n \geq 1$: $D \subset \overset{\circ}{D}_n \subset D_n \subset D + B(0, \frac{\sqrt{d}}{2^n})$*

(c) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n = \overline{D}$

DEMOSTRACIÓN. Sea $I_D = D \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^d$.

Para $n \geq 1$ y $x \in I_D$, sea $Q_n(x)$ el único cubo di-ádico cerrado de largo $\frac{1}{2^n}$ que contiene x y se define

$$D_n = \bigcup_{x \in I_D} Q_n(x).$$

Si $x \in I_D$ entonces $Q_{n+1}(x) \subset Q_n(x)$ (la gracia de los cubos di-ádicos) por lo que $D_{n+1} \subset D_n$.

Sea $x \in D$, como D es abierto todos los cubos di-ádicos cerrados de largo $\frac{1}{2^n}$ que intersectan $\{x\}$ están incluidos en D_n así que $D \subset \overset{\circ}{D}_n$.

Como D es acotado y $D_n \subset D + B(0, \frac{\sqrt{d}}{2^n})$, D_n es acotado y entonces es unión finita de cubos di-ádicos.

Por otra parte $D \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(D + B(0, \frac{\sqrt{d}}{2^n}) \right) = \overline{D}$ y como $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n$ es cerrado, se deduce la igualdad deseada.

Finalmente si D es conexo, D_n es conexo por camino, pues D lo es (abierto conexo), cada cubo di-ádico también y cada cubo que forma D_n intersecta D . \square

Proposición 2.15 *Considerando los conjuntos $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la proposición 2.14 si $v \in \mathcal{C}_d$ es D -regular entonces*

$$\mathcal{T}_{D_n}(v) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}_D(v).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $T^n = \mathcal{T}_{D_n}(v)$.

Como $D \subset D_n$ ya se tiene que $\mathcal{T}_D(v) \leq T^n$.

Además v es D -regular y continua : para $\varepsilon > 0$ existe $t_1 \in (\mathcal{T}_D(v), \mathcal{T}_D(v) + \varepsilon)$ tal que $v_{t_1} \in \overline{D}^c$ abierto y por lo tanto existe $\eta > 0$ tal que $B(v_{t_1}, \eta) \subset \overline{D}^c$. Sea $n_0 \geq 1$ tal que para todo $n \geq n_0$, $\frac{\sqrt{d}}{2^n} < \eta$ y así $v_{t_1} \in D_n^c$ por lo que $T^n \leq t_1 \leq \mathcal{T}_D(v) + \varepsilon$. Lo que muestra el resultado. \square

Se presenta el resultado análogo para la aproximación interior :

Proposición 2.16 *Sea D abierto acotado.*

Existe $(D'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente de conjuntos tales que

(a) *para todo $n \geq 1$: D'_n es n -cúbico acotado.*

(b) *para todo $n \geq 1$: $D'_n \subset D$ y para todo $x \in \partial D'_n$, $d(x, \partial D) \leq \frac{\sqrt{d}}{2^n}$*

(c) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{D}'_n = D$

DEMOSTRACIÓN. Sea $I_D^n = \{x \in D \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^d : d(x, \partial D) > \frac{\sqrt{d}}{2^n}\}$.

Para $n \geq 1$ y $x \in I_D^n$, sea $Q_n(x)$ el único cubo di-ádico cerrado de largo $\frac{1}{2^n}$ que contiene x y se define

$$D'_n = \bigcup_{x \in I_D^n} Q_n(x).$$

Como $I_D^n \subset I_D^{n+1}$, obtenemos que $D'_n \subset D'_{n+1} \subset D$.

Sea $x \in \partial D'_n \subset D$, existe una sucesión $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de $D_n^c \cap D \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^d$ tal que $x_p \rightarrow x$ (D es abierto).

Tenemos que $d(x_p, \partial D) \leq \frac{\sqrt{d}}{2^n}$ por construcción de esta sucesión y tomando limite sobre p se obtiene $d(x, \partial D) \leq \frac{\sqrt{d}}{2^n}$.

Obviamente $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{D}'_n \subset D$.

Finalmente si $x \in D$, existe $n \geq 1$ tal que $d(x, \partial D) > 36 \frac{\sqrt{d}}{2^n}$ y por lo tanto todos los cubos di-ádicos cerrados de largo $\frac{1}{2^n}$ que intersectan $\{x\}$ están incluidos en D'_n así que $x \in \overset{\circ}{D}'_n$. \square

Proposición 2.17 *Considerando los conjuntos $(D'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la proposición 2.16 si $v \in \mathcal{C}_d$ y $v_0 \in D$ entonces*

$$\mathcal{T}_{D'_n}(v) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}_D(v).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $T^n = \mathcal{T}_{D'_n}(v)$.

De la inclusión $D'_n \subset D$ ya se tiene que $T^n \leq \mathcal{T}_D(v)$.

Como $(D'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente, $(T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente, sea $S = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n$. Por la desigualdad anterior $S \leq \mathcal{T}_D(v)$.

Así se tiene que $T^n < \infty$ y como $v_0 \in D$, por continuidad de v : $v_{T^n} \in \partial D'_n$ para $n \in \mathbb{N}$ suficiente grande (tal que $v_0 \in D'_n$).

Luego $d(v_{T^n}, \partial D) \leq \frac{\sqrt{d}}{2^n}$ y tomando limite : $d(v_S, \partial D) = 0$ por lo que $v_S \in \partial D \subset D^c$ y

$S \geq \mathcal{T}_D(v)$.

Se concluye. □

2.2. Convergencia en distribución del lugar de salida

Se describieron los tipos de conjuntos sobre los cuales el teorema de Donsker puede funcionar sin obstáculo, ahora se va a aplicar.

Algunas precisiones de notación : cuando se escribe \mathbb{E}^x con un proceso que depende de $\mathbb{S} = (S_k)_{k \in \mathbb{N}}$, se integra con respecto a la medida imagen de \mathbb{P} por $\omega \mapsto \mathbb{S}(\omega) + x$, por lo que si $F : \mathcal{C}_d \rightarrow \mathbb{R}$ medible acotada : $\mathbb{E}^x[F(\mathbb{W}^n)] = \mathbb{E}[F(\mathbb{W}^n + \sqrt{\frac{d}{n}}x)]$. Cuando se escribe \mathbb{E}^x con un proceso que depende de \mathbb{B} , se integra con respecto a la medida imagen de \mathbb{P} por $\omega \mapsto \mathbb{B}(\omega) + x$.

Teorema 2.18 *Sea $D \subset \mathbb{R}^d$ abierto regular acotado, $x \in \overline{D}$, $(d_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de \mathbb{R}^d tal que $c_n(x) = \sqrt{\frac{d}{n}}d_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.*

Se tiene que :

$$\forall h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d), \mathbb{E}^{d_n(x)}[h(\mathbb{W}_{\mathcal{T}_D}^n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x[h(B_{\mathcal{T}_D})].$$

DEMOSTRACIÓN. Como $x \in \overline{D}$ acotado, por proposición 2.6 $\mathcal{T}_D(\mathbb{B}) < \infty$ \mathbb{P}^x -cs.

El camino aleatorio simple en dimension $d \geq 3$ es transiente y $\sqrt{\frac{n}{d}}D$ acotado así que $\mathbb{P}^{d_n(x)}$ -cs $\mathcal{T}_D(\mathbb{W}^n) < \infty$.

Sea $F : \begin{cases} \mathcal{C}_d & \rightarrow & \mathbb{R}^d \\ v & \mapsto & v_{\mathcal{T}_D} \mathbf{1}_{\mathcal{T}_D(v) < \infty} \end{cases}$, es una función medible por composición de medibles (D es abierto).

Por regularidad de D , F es continua para \mathbb{P}^x -cs todas las trayectorias del movimiento browniano : en todo $v \in \mathcal{C}_d$ función D -regular (ver proposiciones 2.4 y 2.7).

Por el teorema de Donsker multidimensional $\mathbb{W}^n + c_n(x) \Rightarrow \mathbb{B} + x$ y se deduce que

$$\forall h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d), \mathbb{E}^{d_n(x)}[h(\mathbb{W}_{\mathcal{T}_D}^n)] = \mathbb{E}[h \circ F(\mathbb{W}^n + c_n(x))] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[h \circ F(\mathbb{B} + x)] = \mathbb{E}^x[h(B_{\mathcal{T}_D})].$$

□

Corolario 2.19 Sea $D \subset \mathbb{R}^d$ abierto acotado regular aproximable, $x \in D$, $(d_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de \mathbb{R}^d tal que

$$c_n(x) = \sqrt{\frac{d}{n}} d_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x.$$

Entonces se tiene que para todo $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continua :

$$\mathbb{E}^{d_n(x)} \left[h \left(\sqrt{\frac{d}{n}} S_{\mathcal{T}_n} \right) \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x [h(B_{\mathcal{T}_D})].$$

Donde $\mathcal{T}_n = \inf(k \geq 0 : \sqrt{\frac{d}{n}} S_k \in D^c) = \mathcal{T}_D(\mathbb{S}^n)$ es finito $\mathbb{P}^{d_n(x)}$ -cs.

DEMOSTRACIÓN. Como ya se ha mencionado \mathcal{T}_n es finito $\mathbb{P}^{d_n(x)}$ -cs (en dimension $d \geq 3$ el camino simple es transiente y $\sqrt{\frac{n}{d}} D^c$ es acotado).

Como D es aproximable se tiene para todo n grande $\mathbb{P}^{d_n(x)}$ -cs que $\left| \sqrt{\frac{d}{n}} S_{\mathcal{T}_n} - \mathbb{W}_{\mathcal{T}_D}^n \right| \leq \sqrt{\frac{d}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Aquí uno se da cuenta que la condición «aproximable» sirve para afirmar que \mathbb{S}^n y \mathbb{W}^n salen de D en la misma etapa.

Por el teorema 2.18 se deduce que para todo $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ uniformemente continua :

$$\mathbb{E}^{d_n(x)} \left[h \left(\sqrt{\frac{d}{n}} S_{\mathcal{T}_n} \right) \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x [h(B_{\mathcal{T}_D})].$$

El resultado queda cierto para todo $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ continua pues como D es acotado existe $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ continua a soporte compacto tal que $\varphi|_{D+B(0,3)} = 1$, φh es uniformemente continua sobre \mathbb{R}^d y coincide con h sobre $D+B(0, 3)$ que contiene $\sqrt{\frac{d}{n}} S_{\mathcal{T}_n}$ para todo $n \geq 1$. \square

Es una parte de lo deseado, el camino aleatorio parado aproxima en distribución al movimiento browniano parado, resultado que se usa en la parte siguiente para probar la convergencia del núcleo de Green aproximado.

2.3. Aproximación del núcleo de Green

Se adoptan algunas notaciones : para $x \in \mathbb{R}^d$ se considera $(c_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera tal que $c_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ y para todo $n \geq 1$, $c_n(x) \in \sqrt{\frac{d}{n}} \mathbb{Z}^d$ y se denota $d_n(x) = \sqrt{\frac{n}{d}} c_n(x) \in \mathbb{Z}^d$. La discretización del espacio permite aproximar el núcleo de Green como se presenta en lo que sigue.

Lema 2.20 *Sea D abierto acotado regular aproximable.*

Entonces para todo $x \neq y \in D$ se tiene

$$\frac{n^{\frac{d}{2}-1}}{d^{\frac{d}{2}}} \mathcal{G}_{\sqrt{\frac{1}{n}}D}(d_n(x), d_n(y)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G_D(x, y).$$

DEMOSTRACIÓN. Como D es abierto, se puede suponer que para todo $n \geq 1$, $c_n(x) \neq c_n(y) \in D$

Se usan las tres formulas enunciadas en la primera parte (proposiciones 1.34, 1.36 y 1.38)

- para todo $x \neq y \in \mathbb{Z}^d$, $\mathcal{G}(x, y) = dG(x, y) + \xi(|x - y|^{-d})$ donde $\xi(t) = O(t)$.
- para todo $x \neq y \in \mathbb{Z}^d$, $\mathcal{G}_D(x, y) = \mathcal{G}(x, y) - \mathbb{E}^x[\mathcal{G}(S_{\mathcal{T}_D}, y)]$.
- para todo $x \neq y \in D$, $G_D(x, y) = G(x, y) - \mathbb{E}^x[G(B_{\mathcal{T}_D}, y)]$.

Como $d_n(x) \neq d_n(y) \in \mathbb{Z}^d$, existe $M > 0$ tal que :

$$\left| \frac{n^{\frac{d}{2}-1}}{d^{\frac{d}{2}}} \mathcal{G}(d_n(x), d_n(y)) - G(c_n(x), c_n(y)) \right| \leq \frac{M}{n} |c_n(x) - c_n(y)|^{-d} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$G(c_n(x), c_n(y)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G(x, y).$$

Como $x, y \in D$, existe $\eta > 0$ tal que : $B(x, \eta) \cup B(y, \eta) \subset D$.

Por el hecho que $(c_n(x), c_n(y)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (x, y)$, existe $n_0 \geq 1$ tal que para todo $n \geq n_0$: $(c_n(x), c_n(y)) \in B(x, \eta) \times B(y, \eta)$.

Además $\mathbb{P}^{d_n(x)}(\mathcal{T}_n < \infty) = 1$ así que $\mathbb{P}^{d_n(x)\text{-cs}} : \left| \sqrt{\frac{d}{n}} S_{\mathcal{T}_n} - c_n(y) \right| > \eta$ y luego :

$$\frac{n^{\frac{d}{2}-1}}{d^{\frac{d}{2}}} \mathbb{E}^{d_n(x)} \left[\xi \left(|S_{\mathcal{T}_n} - d_n(y)|^{-d} \right) \right] \leq \frac{n^{\frac{d}{2}-1}}{d^{\frac{d}{2}}} \mathbb{E}^{d_n(x)} \left[M |S_{\mathcal{T}_n} - d_n(y)|^{-d} \right]$$

$$\leq \frac{M}{n\eta^d} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Finalmente

$$\frac{n^{\frac{d}{2}-1}}{d^{\frac{d}{2}}} \mathbb{E}^{d_n(x)} [dG(S_{\mathcal{T}_n}, d_n(y))] = \mathbb{E}^{d_n(x)} \left[G \left(\sqrt{\frac{d}{n}} S_{\mathcal{T}_n}, c_n(y) \right) \right].$$

Sea $k : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ continua, tal que $k_{|[\eta, M+d]} = 1$ y $\text{sop}(k) \subset [\frac{\eta}{2}, M' + d + 1]$.

Luego $L : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C_d |x|^{2-d} k(|x|) \end{cases}$ es uniformemente continua (continua a soporte compacto) y $G \left(\sqrt{\frac{d}{n}} S_{\mathcal{T}_n}, c_n(y) \right) = L \left(\sqrt{\frac{d}{n}} S_{\mathcal{T}_n} - c_n(y) \right) \mathbb{P}^{d_n(x)\text{-cs}}$.

Como L es uniformemente continua acotada, por el corolario 2.19

$$\mathbb{E}^{d_n(x)} \left[L \left(\sqrt{\frac{d}{n}} S_{\mathcal{T}_n} - y \right) \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x [L(B_{\mathcal{T}_D} - y)] = \mathbb{E}^x [G(B_{\mathcal{T}_D}, y)]$$

Otra vez por el hecho que L es uniformemente continua y $c_n(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$:

$$\mathbb{E}^{d_n(x)} \left[G \left(\sqrt{\frac{d}{n}} S_{\mathcal{T}_n}, c_n(y) \right) \right] = \mathbb{E}^{d_n(x)} \left[L \left(\sqrt{\frac{d}{n}} S_{\mathcal{T}_n} - c_n(y) \right) \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x [G(B_{\mathcal{T}_D}, y)].$$

Juntando todo, uno obtiene lo deseado. \square

Gracias a las aproximaciones presentadas en proposiciones 2.14 y 2.16, la condición «aproximable» es superfluo. Notar que la interpolación lineal normalizada introduce un coeficiente $1/\sqrt{n}$ y en la aproximación del núcleo de Green aparece un factor $n^{\frac{d}{2}-1}$ y no $n^{\frac{d}{2}}$ como uno lo hubiera imaginado por el cambio de escala del espacio.

Teorema 2.21 *Sea D abierto acotado regular.*

Entonces para todo $x \neq y \in D$ se tiene

$$\frac{n^{\frac{d}{2}-1}}{d^{\frac{d}{2}}} \mathcal{G}_{\sqrt{\frac{n}{d}}D}(d_n(x), d_n(y)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G_D(x, y)$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $x \neq y \in D$, $(D_p)_{p \in \mathbb{N}}$ y $(D'_p)_{p \in \mathbb{N}}$ los conjuntos cúbicos aproximando D por fuera y por dentro, sea $p_0 \geq 1$ tal que $x, y \in \overset{\circ}{D}_{p_0}$.

Para $p \geq p_0$, sea $\mathcal{T}_{n,p} = \mathcal{T}_{D_p}(\mathbb{S}^n)$ y $\mathcal{T}'_{n,p} = \mathcal{T}_{D'_p}(\mathbb{S}^n)$ y $\mathcal{G}_{n,p}$, $\mathcal{G}'_{n,p}$ los núcleos de Green asociados.

Como D_p y D'_p son p -cúbicos, $\overset{\circ}{D}_p$ y $\overset{\circ}{D}'_p$ son abiertos acotados regulares aproximables y $\overline{\overset{\circ}{D}'_p} = D'_p$ (resp. $\overline{\overset{\circ}{D}_p} = D_p$). Por el lema 2.20 y regularidad :

$$\begin{aligned} \frac{n^{\frac{d}{2}-1}}{d^{\frac{d}{2}}} \mathcal{G}_{n,p}(d_n(x), d_n(y)) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} G_{D_p}(x, y) \\ \frac{n^{\frac{d}{2}-1}}{d^{\frac{d}{2}}} \mathcal{G}'_{n,p}(d_n(x), d_n(y)) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} G_{D'_p}(x, y). \end{aligned}$$

De la inclusión de los conjuntos se tiene que $\mathcal{G}'_{n,p}(d_n(x), d_n(y)) \leq \mathcal{G}_{\sqrt{\frac{n}{d}}D}(d_n(x), d_n(y)) \leq \mathcal{G}_{n,p}(d_n(x), d_n(y))$ por lo que

$$G_{D'_p}(x, y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{d}{2}-1}}{d^{\frac{d}{2}}} \mathcal{G}_{\sqrt{\frac{n}{d}}D}(d_n(x), d_n(y)) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{d}{2}-1}}{d^{\frac{d}{2}}} \mathcal{G}_{\sqrt{\frac{n}{d}}D}(d_n(x), d_n(y)) \leq G_{D_p}(x, y).$$

Por la manera de aproximar el conjunto D , se mostró en las proposiciones 2.15 y 2.17 que \mathbb{P}^x -cs $\mathcal{T}_{D_p}(\mathbb{B}) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} \mathcal{T}_D(\mathbb{B})$ y $\mathcal{T}_{D'_p}(\mathbb{B}) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} \mathcal{T}_D(\mathbb{B})$.

Luego por TCD (notar que y esta lejos de las fronteras de los conjuntos) y continuidad de las trayectorias de \mathbb{B} :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x[G(B_{\mathcal{T}_{D_p}}, y)] &\xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}^x[G(B_{\mathcal{T}_D}, y)] \\ \mathbb{E}^x[G(B_{\mathcal{T}_{D'_p}}, y)] &\xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}^x[G(B_{\mathcal{T}_D}, y)]. \end{aligned}$$

Permite concluir lo deseado. □

Solo se ha obtenido la convergencia simple del núcleo de Green, ahora obtendremos la convergencia uniforme fuera de la diagonal.

Teorema 2.22 *Sea $D \subset \mathbb{R}^d$ abierto regular acotado y $\varepsilon > 0$. Entonces :*

$$\sup_{\substack{x, y \in D \cap \sqrt{\frac{d}{n}} \mathbb{Z}^d \\ |x-y| > \varepsilon \\ d(x, D^c) > \varepsilon \\ d(y, D^c) > \varepsilon}} \left| \frac{n^{\frac{d}{2}-1}}{d^{\frac{d}{2}}} \mathcal{G}_{\sqrt{\frac{n}{d}} D} \left(\sqrt{\frac{n}{d}} x, \sqrt{\frac{n}{d}} y \right) - G_D(x, y) \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Para $n \geq 1$, como $\sqrt{\frac{n}{d}} D$ es acotado, existe $x_n, y_n \in D \cap \sqrt{\frac{d}{n}} \mathbb{Z}^d$ tal que $R_n =$

$$\sup_{\substack{x, y \in D \cap \sqrt{\frac{d}{n}} \mathbb{Z}^d \\ |x-y| > \varepsilon \\ d(x, D^c) > \varepsilon \\ d(y, D^c) > \varepsilon}} \left| \frac{n^{\frac{d}{2}-1}}{d^{\frac{d}{2}}} \mathcal{G}_{\sqrt{\frac{n}{d}} D} \left(\sqrt{\frac{n}{d}} x, \sqrt{\frac{n}{d}} y \right) - G_D(x, y) \right| = \frac{n^{\frac{d}{2}-1}}{d^{\frac{d}{2}}} \mathcal{G}_{\sqrt{\frac{n}{d}} D} \left(\sqrt{\frac{n}{d}} x_n, \sqrt{\frac{n}{d}} y_n \right) - G_D(x_n, y_n).$$

Como D es acotado, existen subsucesiones convergentes $x_{n_k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$, $y_{n_k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} y$ con $x, y \in D$ pues $\max(d(x, D^c), d(y, D^c)) \geq \varepsilon$.

$$\text{Ahora por teorema 2.21 } \frac{(n_k)^{\frac{d}{2}-1}}{d^{\frac{d}{2}}} \mathcal{G}_{\sqrt{\frac{n_k}{d}} D} \left(\sqrt{\frac{n_k}{d}} x_{n_k}, \sqrt{\frac{n_k}{d}} y_{n_k} \right) \rightarrow G_D(x, y).$$

Como los puntos quedan lejos de la frontera también se tiene que $G_D(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow G_D(x, y)$ (se usa 1.38).

Por lo tanto $R_{n_k} \rightarrow 0$. Así toda subsucesión de $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión que converge a 0 así que $R_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, es lo deseado. □

2.4. Ejemplos de aplicaciones

Ahora que esta probado el teorema de convergencia del núcleo de Green aproximado, se puede usar lo sabido sobre las matrices para deducir resultados en el caso continuo.

En toda esta parte se supone D abierto regular acotado, $\mathcal{C}_0(D) = \overline{\mathcal{C}_c(D)}$ (por la norma uniforme) y $\mathcal{C}_b(D)$ es el conjunto de las continuas acotadas sobre D .

Se recuerda que para $n \geq 1$, $\mathcal{T}_n = \inf(k \geq 0 : \sqrt{\frac{d}{n}} S_k \in D^c) = \mathcal{T}_D(\mathbb{S}^n)$.

Para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y $n \geq 1$ se designa por $K_n(x)$ un cubo cerrado de centro $c_n(x) \in \sqrt{\frac{d}{n}} \mathbb{Z}^d$ y de largo $\sqrt{\frac{d}{n}}$ que contiene x y se denotará $d_n(x) = \sqrt{\frac{n}{d}} c_n(x) \in \mathbb{Z}^d$. Se discretiza el espacio para poder usar de manera adecuada la aproximación del núcleo de Green.

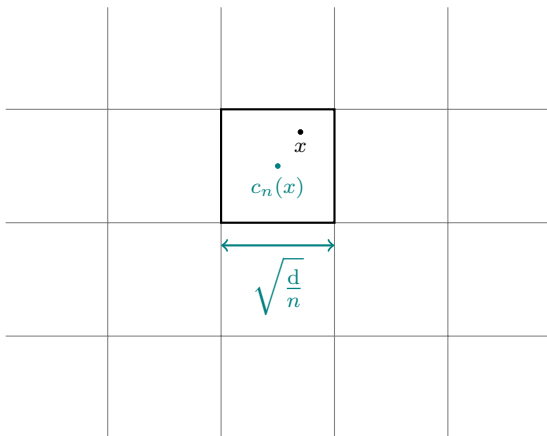


Figura 2.5: Discretización del espacio

Proposición 2.23 Para todo $x \in D$, $f \in \mathcal{C}_b(D)$:

$$\mathbb{E}^{d_n(x)} \left[\int_0^{\frac{\mathcal{T}_n}{n}} f(S^n(t)) dt \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x \left[\int_0^{\mathcal{T}_D} f(B_t) dt \right].$$

DEMOSTRACIÓN. En efecto para $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{d_n(x)} \left[\int_0^{\frac{\tau_n}{n}} f(S_n(t)) dt \right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}^{d_n(x)} \left[\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f \left(\sqrt{\frac{d}{n}} S_k \right) dt \mathbf{1}_{\tau_n > k} \right] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}^{d_n(x)} \left[f \left(\sqrt{\frac{d}{n}} S_k \right) \mathbf{1}_{\tau_n > k} \right] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{y \in \mathbb{Z}^d \cap \sqrt{\frac{n}{d}} D} f \left(\sqrt{\frac{d}{n}} y \right) \mathbb{E}^{d_n(x)} [\mathbf{1}_{S_k=y} \mathbf{1}_{\tau_n > k}] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{y \in \mathbb{Z}^d \cap \sqrt{\frac{n}{d}} D} f \left(\sqrt{\frac{d}{n}} y \right) \mathbb{E}^{d_n(x)} \left[\sum_{k=0}^{\tau_n-1} \mathbf{1}_{S_k=y} \right] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{y \in \mathbb{Z}^d \cap \sqrt{\frac{n}{d}} D} f \left(\sqrt{\frac{d}{n}} y \right) \mathcal{G}_{\sqrt{\frac{n}{d}} D}(d_n(x), y) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{y \in \sqrt{\frac{d}{n}} \mathbb{Z}^d \cap D} f(y) \mathcal{G}_{\sqrt{\frac{n}{d}} D} \left(d_n(x), \sqrt{\frac{n}{d}} y \right) \\
&= \frac{f(c_n(x)) \mathcal{G}_{\sqrt{\frac{n}{d}} D}(d_n(x), d_n(x))}{n} + \int_{\mathbb{R}^d} H_n(u) du.
\end{aligned}$$

Con $H_n(u) = f(c_n(u)) \mathcal{G}_{\sqrt{\frac{n}{d}} D}(d_n(x), d_n(u)) \frac{n^{\frac{d}{2}-1}}{d^{\frac{d}{2}}} \mathbf{1}_{\varkappa_n(x)}(u)$ donde $\varkappa_n(x)$ es el conjunto de todos los cubos salvo el que contiene x para tener una distancia de «seguridad»

$$\varkappa_n(x) = \bigcup_{\substack{a \in D : \\ c_n(a) \in D}} K_n(a) \setminus K_n(x).$$

El intercambio suma/integral se justifica del hecho que f es acotada y como el dominio D es acotado se tiene una suma finita de cantidades finitas :

$$\sum_{y \in \sqrt{\frac{d}{n}} \mathbb{Z}^d \cap D} |f(y)| \mathcal{G}_{\sqrt{\frac{n}{d}} D} \left(d_n(x), \sqrt{\frac{n}{d}} y \right) < \infty.$$

Primero

$$\begin{aligned}
\frac{|f(c_n(x))| \mathcal{G}_{\sqrt{\frac{n}{d}} D}(d_n(x), d_n(x))}{n} &\leq \frac{\|f\|_{\infty} \mathcal{G}_{\sqrt{\frac{n}{d}} D}(d_n(x), d_n(x))}{n} \\
&\leq \frac{\|f\|_{\infty} \mathcal{G}(d_n(x), d_n(x))}{n} = \frac{\|f\|_{\infty} \mathcal{G}(0,0)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Luego como f es continua, $c_n(u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$, $\sqrt{\frac{d}{n}}(d_n(x), d_n(u)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (x, u)$, por el teorema de la parte anterior (D es regular acotado abierto) : $H_n(u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(u) G_D(x, u)$ ctp.

Se necesita una cota para poder usar el TCD.

Si $u \in \varkappa_n(x)$ entonces $u \notin K_n(x)$ de donde $|c_n(x) - c_n(u)| \geq \sqrt{\frac{d}{n}}$ (los centros pertenecen a la red $\sqrt{\frac{d}{n}}\mathbb{Z}^d$); además $|u - c_n(u)| \leq \frac{\sqrt{d}}{2}\sqrt{\frac{d}{n}}$ por Pitágoras así que

$$|u-x| \leq |u-c_n(u)| + |c_n(u)-c_n(x)| + |c_n(x)-x| \leq \sqrt{d}\sqrt{\frac{d}{n}} + |c_n(u)-c_n(x)| \leq (1+\sqrt{d})|c_n(u)-c_n(x)|.$$

Se deduce finalmente que existe $M > 0$ tal que :

$$\begin{aligned} H_n(u) &\leq \frac{\|f\|_\infty M}{d} |c_n(x) - c_n(u)|^{2-d} \mathbf{1}_{\varkappa_n(x)}(u) \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty M (1 + \sqrt{d})^{d-2}}{d} |u - x|^{2-d} \mathbf{1}_{D+B(0,d)}(u) \in L^1(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

Se concluye. □

Vale la pena dejar en proposición la cota obtenida.

Proposición 2.24 Sea $x \in D$ y $\varkappa_n(x) = \bigcup_{\substack{a \in D : \\ c_n(a) \in D}} K_n(a) \setminus K_n(x)$.

Entonces existe $M > 0$ (que solo depende de la dimension) tal que para todo $u \in \varkappa_n(x)$

$$\mathcal{G}_{\sqrt{\frac{n}{d}}D}(d_n(x), d_n(u)) \frac{n^{\frac{d}{2}-1}}{d^{\frac{d}{2}}} \leq M|u-x|^{2-d}.$$

2.5. Potencias del núcleo de Green

Finalmente uno puede atacar al problema original de esta tesis : la potencia (de Hadamard) del núcleo de Green.

Proposición 2.25 Para $f \in \mathcal{C}_b(D)$ y $\alpha \in [1, \frac{d}{d-2})$ se define

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, \forall x \in D, \mathcal{G}_n^{(\alpha)} f(x) &= \sum_{y \in \sqrt{\frac{d}{n}}\mathbb{Z}^d \cap D} \left(\frac{d}{n}\right)^{\frac{d}{2}} f(y) \left(\mathcal{G}_{\sqrt{\frac{n}{d}}D}\left(d_n(x), \sqrt{\frac{n}{d}}y\right) \frac{n^{\frac{d}{2}-1}}{d^{\frac{d}{2}}}\right)^\alpha \\ &= \sum_{y \in \mathbb{Z}^d \cap \sqrt{\frac{n}{d}}D} \left(\frac{d}{n}\right)^{\frac{d}{2}} f\left(\sqrt{\frac{d}{n}}y\right) \left(\mathcal{G}_{\sqrt{\frac{n}{d}}D}(d_n(x), y) \frac{n^{\frac{d}{2}-1}}{d^{\frac{d}{2}}}\right)^\alpha. \end{aligned}$$

Entonces :

(a) $(\mathcal{G}_n^{(\alpha)} f)_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada sobre D .

(b) Para todo $x \in D$

$$\mathcal{G}_n^{(\alpha)} f(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_D f(u) G_D^\alpha(x, u) du = G_D^{(\alpha)} f(x).$$

(c)

$$\sum_{y \in \sqrt{\frac{d}{n}} \mathbb{Z}^d \cap D} \left(\frac{d}{n} \right)^{\frac{d}{2}} (\mathcal{G}_n^{(\alpha)} f(y) - 1)^+ f(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_D (G_D^{(\alpha)} f(y) - 1)^+ f(y) dy.$$

DEMOSTRACIÓN. De la proposición 2.24, existe $M > 0$ tal que $D \subset B(0, M)$ y

$$\mathcal{G}_{\sqrt{\frac{n}{d}} D}(d_n(x), d_n(u)) \frac{n^{\frac{d}{2}-1}}{d^{\frac{d}{2}}} \mathbf{1}_{\mathcal{X}_n(x)}(u) \leq M |u - x|^{2-d} \mathbf{1}_{D+B(0,d)}(u).$$

Luego

$$\begin{aligned} & \mathcal{G}_n^{(\alpha)} f(x) \\ &= \frac{f(c_n(x)) \left(\mathcal{G}_{\sqrt{\frac{n}{d}} D}(d_n(x), d_n(x)) \right)^\alpha d^{\frac{d}{2}(1-\alpha)}}{n^{\frac{d}{2}(1-\alpha)+\alpha}} + \int_{\mathcal{X}_n(x)} f(c_n(u)) \left(\mathcal{G}_{\sqrt{\frac{n}{d}} D}(d_n(x), d_n(u)) \frac{n^{\frac{d}{2}-1}}{d^{\frac{d}{2}}} \right)^\alpha du \\ &\leq \|f\|_\infty \left(\frac{\mathcal{G}(0,0)^\alpha d^{\frac{d}{2}(1-\alpha)}}{n^{\frac{d}{2}(1-\alpha)+\alpha}} + M^\alpha \int_{B(0,2M+d)} |u|^{\alpha(2-d)} du \right). \end{aligned}$$

La condición $\alpha < \frac{d}{d-2}$ es justa la que permite afirmar que

$$\begin{cases} \mathbb{R}^d \setminus \{0\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto |x|^{\alpha(2-d)} \end{cases} \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^d) \text{ y } \frac{d}{2}(1-\alpha) + \alpha > 0.$$

Entonces se obtiene la cota uniforme de la familia $(\mathcal{G}_n^{(\alpha)} f)_{n \in \mathbb{N}}$ y se puede aplicar TCD (la convergencia simple se tiene por teorema 2.21) :

$$\mathcal{G}_n^{(\alpha)} f(x) = \sum_{y \in \sqrt{\frac{d}{n}} \mathbb{Z}^d \cap D} f(y) \left(\frac{d}{n} \right)^{\frac{d}{2}} \left(\mathcal{G}_{\sqrt{\frac{n}{d}} D} \left(d_n(x), \sqrt{\frac{n}{d}} y \right) \frac{n^{\frac{d}{2}-1}}{d^{\frac{d}{2}}} \right)^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_D f(u) G_D^\alpha(x, u) du.$$

□

Uno quisiera estudiar el núcleo $G_D^{(\alpha)}$ para poder precisar si es potencial o no de un semigrupo. Como se va a ver, este núcleo es muy regular : hace continua cualquier función de $L^\infty(D)$.

Lema 2.26 Si $K \subset \mathbb{R}^d$ es acotado medible y $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ entonces $(f(\cdot - x))_{x \in K}$ es uniformemente integrable sobre K .

DEMOSTRACIÓN. Sea $f_x = f(\cdot - x)$ para $x \in K$, μ la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^d .

$$\text{Primero } \sup_{x \in K} \left(\int_K |f_x(y)| dy \right) \leq \int_{K-K} |f(y)| dy < \infty.$$

Luego para $n \geq 1$,

$$\sup_{\substack{C \in \mathcal{B}(K) \\ \mu(C) < 1/n}} \left(\sup_{x \in K} \left(\int_C |f_x(y)| dy \right) \right) \leq \sup_{\substack{C \in \mathcal{B}(K-K) \\ \mu(C) < 1/n}} \left(\int_C |f(y)| dy \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Pues $f \in L^1(K - K)$. Entonces la familia es U.I sobre K . □

Proposición 2.27 Sea un conjunto $D \subset \mathbb{R}^d$ abierto acotado regular, para todo $\alpha \in [1, \frac{d}{d-2})$

$$G_D^{(\alpha)} : L^\infty(D) \rightarrow \mathcal{C}_0(D) \text{ es un operador lineal acotado.}$$

Además para todo $p \in [1, \infty]$:

$$G_D^{(\alpha)} : L^p(D) \rightarrow L^p(D) \text{ es un operador lineal acotado.}$$

DEMOSTRACIÓN. $G_D^{(\alpha)}$ es claramente lineal y sean $f \in L^\infty(D)$, $x \in D$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ tal que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.

Entonces como $G_D(\cdot, y)$ es continua sobre $D \setminus \{y\}$ (de hecho C^∞ , por proposición 1.31), $f(y)G_D^\alpha(x_n, y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(y)G_D^\alpha(x, y)$ para $y \in D$ ctp.

Además $|f(y)G_D^\alpha(x_n, y)| \leq \|f\|_\infty |x_n - y|^{\alpha(2-d)}$ pues $G_D \leq G$ y como $|\cdot|^{\alpha(2-d)} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, por el lema 2.26 la familia $(|f(\cdot)G_D^\alpha(x_n, \cdot)|)_{n \in \mathbb{N}}$ es U.I sobre D .

De eso uno puede afirmar que $G_D^{(\alpha)} f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G_D^{(\alpha)} f(x)$ y así $G_D^{(\alpha)} f$ es continua.

Ahora si $x_0 \in \partial D$, como D es regular acotado, para todo $y \in D$, $\lim_{x \rightarrow x_0} G_D(x, y) = 0$ (proposición 1.35) y de la integrabilidad uniforme se deduce que $\lim_{x \rightarrow x_0} G_D^{(\alpha)} f(x) = 0$ es decir : $G_D^{(\alpha)} f \in \mathcal{C}_0(D)$.

Y como $\|G_D^{(\alpha)} f\|_\infty \leq \|f\|_\infty \int_{D-D} |x|^{\alpha(2-d)} dx$, por ser lineal, $G_D^{(\alpha)}$ es un operador continuo.

Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}^+$ medible, y $p \geq 1$ (con q su conjugado), por desigualdad de Hölder :

$$G_D^{(\alpha)} f \leq \|f\|_p \left(\int G^{\alpha q}(\cdot, y) dy \right)^{1/q}.$$

Entonces por el lema anterior si $\alpha q < \frac{d}{d-2}$ (es decir $p > \frac{d}{d-\alpha(d-2)}$) y $f \in L^p(D)$ entonces $G_D^{(\alpha)} f \in L^\infty(D)$ y $G_D^{(\alpha)}$ define un operador continuo de $L^p(D)$ (se recuerda que D es acotado).

Por otro lado por desigualdad de Minkowski y Hölder :

$$\begin{aligned} \left(\int_D |G_D^{(\alpha)} f(x)|^p dx \right)^{1/p} &\leq \int_D \left(\int_D |f(y)|^p G_D^{\alpha p}(x, y) dx \right)^{1/p} dy \\ &\leq \|f\|_p \left(\int_D \left(\int_D G_D^{\alpha p}(x, y) dx \right)^{q/p} dy \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

De la integrabilidad uniforme se deduce que $G_D^{(\alpha)}$ es un operador continuo de $L^p(D)$ si $p < \frac{d}{\alpha(d-2)}$.

Del teorema de interpolación de Riesz-Thorin se deduce que para todo $p \geq 1$, $G_D^{(\alpha)}$ define un operador lineal continuo de $L^p(D)$. \square

El operador $G_D^{(\alpha)}$ es el potencial de una resolvente de contracción :

Teorema 2.28 Para todo $\alpha \in [1, \frac{d}{d-2})$ y $f \in C_b(D)$:

$$\int_D (G_D^{(\alpha)} f(y) - 1)^+ f(y) dy \geq 0.$$

El operador $G_D^{(\alpha)}$ verifica el CMP, $G_D^{(\alpha)} : C_b(D) \rightarrow C_b(D)$ es continuo y es el potencial de una resolvente de contracción.

DEMOSTRACIÓN. Para $n \geq 1$: $\mathcal{G}_{\sqrt{\frac{n}{d}}D}$ es un potencial simétrico (proposición 1.37) y por lo tanto gracias al teorema clave 1.26 el núcleo $\mathcal{G}_{\sqrt{\frac{n}{d}}D}^{(\alpha)}$ (la potencia α de Hadamard) también.

Así por proposición 1.27 $\sum_{y \in \sqrt{\frac{d}{n}}\mathbb{Z}^d \cap D} \left(\frac{d}{n}\right)^{\frac{d}{2}} (\mathcal{G}_n^{(\alpha)} f(y) - 1)^+ f(y) \geq 0$ y tomando limite con la proposición 2.25 se obtiene la desigualdad deseada.

Luego por 1.24, $G_D^{(\alpha)}$ verifica el CMP sobre $C_b(D)$ y como $G_D^{(\alpha)} : C_b(D) \rightarrow C_b(D)$ es continuo, por teorema 1.20 uno concluye que $G_D^{(\alpha)}$ es el potencial de una resolvente de contracción. \square

Sea $\alpha \in [1, \frac{d}{d-2})$ y \mathcal{M}_α^+ el conjunto de funciones supermedianas con respecto a la resolvente de $G_D^{(\alpha)}$ y $\mathcal{H}_\alpha = \mathcal{M}_\alpha^+ \cap \mathcal{C}_0(D) - \mathcal{M}_\alpha^+ \cap \mathcal{C}_0(D)$.

Proposición 2.29 \mathcal{H}_α es denso en $\mathcal{C}_0(D)$.

DEMOSTRACIÓN. Notar que para todo $f \in \mathcal{C}_b(D)$, $G_D^{(\alpha)} f \in \mathcal{H}_\alpha$.

Además \mathcal{H}_α es un retículo que contiene las constantes, basta comprobar que separa los puntos de D para concluir con la proposición 1.22.

Sean $x \neq z \in D$, como $y \mapsto G_D^{(\alpha)}(z, y)$ es continua sobre $D \setminus \{z\}$, existe $V \in \mathcal{V}_x$ y $c > 0$ tal que para todo $y \in V$: $G_D^{(\alpha)}(z, y) \leq c$. Además como $G_D^{(\alpha)}(x, x) = \infty$, existe $W \subset V$ vecindad de x tal que para todo $y \in W$: $G_D^{(\alpha)}(x, y) \geq 4c$.

Sea $K \subset W$ compacto tal que $\mu(K) \geq \mu(W)/2$.

Finalmente sea $f \in \mathcal{C}_0(D)$ tal que $\text{sop}(f) \subset W$ y $f|_K = 1$.

Luego $G_D^{(\alpha)} f(x) \geq 4c\mu(K) \geq 2c\mu(W)$ y $G_D^{(\alpha)} f(z) \leq c\mu(W)$ por lo que $G_D^{(\alpha)} f(x) \neq G_D^{(\alpha)} f(z)$. \square

Teorema 2.30 Sea $d \geq 3$, $D \subset \mathbb{R}^d$ abierto acotado regular y G_D el núcleo de Green asociado.

Entonces para todo $\alpha \in [1, \frac{d}{d-2})$, la potencia α de Hadamard del núcleo de Green, $G_D^{(\alpha)}$ es el potencial de un semi-grupo de Ray.

DEMOSTRACIÓN. Es la conclusión de la proposición 2.29 y el teorema 1.23. \square

Conclusión

En el trabajo de tesis presente se demostró que para todo $D \subset \mathbb{R}^d$ abierto regular acotado y $\alpha \in [1, \frac{d}{d-2})$, la potencia α del núcleo de Green parado al salir de D , es el potencial de un núcleo de Ray (teorema 2.30). En el camino para obtener el resultado, se ha obtenido la convergencia uniforme (salvo en la diagonal y la frontera) del núcleo de Green discreto al núcleo de Green continuo, resultado esperable por el teorema de Donsker.

Como todo trabajo de investigación, se puede proseguir. Se ha obtenido un proceso de Ray, es natural preguntarse si es de Feller. Lo único que falta para demostrarlo es la densidad de la imagen del operador $G_D^{(\alpha)}$ que parece intuitivamente cierta.

De un punto de vista personal, esta tesis de magister me ha permitido desarrollar una comprensión mejor de la teoría de potencial, descubrir la relación entre la teoría de las ecuaciones diferenciales y las probabilidades, aprender herramientas tal como la convergencia en distribución. Fue un gusto descubrir la teoría de semi-grupos que encuentro hermosa.

Ademas he podido tener un vistazo de qué es el trabajo de un investigador lo que me ayudó en hacerme una idea del futuro profesional que deseo.

Bibliografía

- [1] Wolfgang ARENDT, Ralph CHILL, Christian SEIFERT, Hendrik VOGT, and Jurgen VOIGT. Form methods for evolution equations and applications. 18th Internet Seminar on Evolution Equations, 2015.
- [2] Patrick BILLINGSLEY. *Convergence of Probability Measures*. John WILEY and Sons, USA, 2nd edition, 1999.
- [3] Kai Lai CHUNG and Zhongxin ZHAO. *From Brownian Motion to Schrödinger's Equation*. Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition, 2001.
- [4] Claude DELLACHERIE. *Capacités et processus stochastiques*. Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [5] Claude DELLACHERIE. Sur la caracterisation des noyaux potentiels. In Nicolas BOULEAU, Denis FEYEL, Francis HIRSCH, and Gabriel MOKOBODZKI, editors, *Séminaire de Théorie du Potentiel Paris, No. 9*, pages 78–95. Springer-Verlag, 1989.
- [6] Claude DELLACHERIE, Mauricio DUARTE, Servet MARTINEZ, and Jaime SAN MARTIN. Powers of brownian green functions. Commucación privada.
- [7] Claude DELLACHERIE, Bernard MAISONNEUVE, and Paul-André MEYER. *Probabilités et potentiel*, volume 3. Hermann, Paris, 1983.
- [8] Claude DELLACHERIE, Bernard MAISONNEUVE, and Paul-André MEYER. *Probabilités et potentiel*, volume 4. Hermann, Paris, 1987.
- [9] Claude DELLACHERIE, Servet MARTINEZ, and Jaime SAN MARTIN. *Inverse M-Matrices and Ultrametric Matrices*. Springer, Switzerland, 2010.
- [10] Stewart N. ETHIER and Thomas G. KURTZ. *Markov Processes Characterization and Convergence*. John WILEY and Sons, USA, 1995.
- [11] Gregory F. LAWLER and Vlada LIMIC. *Random Walk : A Modern Introduction*. Cambridge University Press, New York, 2010.
- [12] George LOWTHER. Feller processes. <https://almostsure.wordpress.com/2010/07/14/feller-processes/>. 2010.

- [13] Michael B. MARCUS and Jay ROSEN. *Markov Processes, Gaussian Processes and Local Times*. Cambridge University Press, New York, 2006.
- [14] Peter MÖRTERS and Yuval PERES. *Brownian Motion*. Cambridge University Press, New York, 2010.
- [15] Amnon PAZY. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 1983.
- [16] Nicolas PRIVAULT. Potential theory in classical probability. In Michael SCHÜR-MANN and Uwe FRANZ, editors, *Quantum Potential Theory*, pages 3–58. Springer-Verlag, 2008.
- [17] Philip E. PROTTER. *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition, 2004.
- [18] Murali RAO. *Brownian Motion and Classical Potential Theory*. Aarhus Universitet, Matematisk Institut, Michigan, 1977.
- [19] Kosaku YOSIDA. *Functional Analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 6th edition, 1980.