



# Estudio de la propagación de luz en sistemas periódicos discretos con no linealidad cúbica y saturable

Tesis  
entregada a la  
Universidad de Chile  
en cumplimiento parcial de los requisitos  
para optar al grado de  
Magíster en Ciencias Físicas  
Facultad de Ciencias

por

**Diego Andrés Guzmán Silva**

Abril, 2014

Director de Tesis: **Dr. Rodrigo Vicencio**

FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN  
TESIS DE MAGÍSTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

**Diego Andrés Guzmán Silva**

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias Físicas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 16 de Abril de 2014.

**Director de Tesis**

Dr. Rodrigo Vicencio

---

**Comisión de Evaluación de la Tesis**

Dr. Edward Arevalo

---

Dr. Claudio Falcón (Presidente)

---

## BIOGRAFÍA



Todo parte por el año 1987, fecha en que llegué al mundo, en la ciudad de Santiago de Chile. Durante el transcurso de mi niñez y juventud, nació y creció en mi la idea de ser un “científico”, y así comprender los distintos fenómenos que existen en nuestro mundo. Por ese motivo decidí entrar a la carrera de Licenciatura en Ciencias con mención en Física en el año 2006. Adentro, mi interés se volcó en el área de la óptica por lo que me uní al grupo de Óptica No lineal, lugar donde fui muy bien recibido y dentro del cual pude desarrollarme como investigador. Para finales del año 2010 obtengo el grado de licenciado, para el año siguiente inscribirme en el programa de Magíster en Física, previo viaje a la Universidad Helmut Schmidt en Hamburgo, lugar en el que di mis primeros pasos como investigador experimental. Dentro de mi estancia en el Magíster, el año 2013 se convierte en uno muy especial, pues recibo la noticia de poder continuar mi formación como físico, estudiando un doctorado en la Universidad de Jena en Alemania y porque en diciembre concreté matrimonio con Valeria Randolph, a quien va dedicado este trabajo. Actualmente me encuentro en la fase final de defensa de tesis del Magíster y ad portas de iniciar una nueva etapa de mi vida en Alemania.

## AGRADECIMIENTOS

Agradezco en primer lugar a Dios por guiar mis pasos en la vida y llegar a buen puerto en este trabajo.

Quisiera agradecer también a cada de una de las personas que ayudaron a que esta etapa esté finalizando con éxito, en particular a mi director de tesis Rodrigo Vicencio quien confió en mis capacidades y guió y apoyó con entusiasmo este trabajo. También por el apoyo recibido por el profesor Mario Molina y el Grupo de Óptica No Lineal. Deseo agradecer además, a mi familia, por estar siempre a mi lado y apoyarme en cada de mis metas. Y a mi esposa Valeria por todo el amor, cariño y paciencia que me ha dado durante este tiempo.

Mi permanencia en el programa de magíster fue posible gracias a una Beca de Magíster CONICYT. También gracias al financiamiento parcial otorgado por Iniciativa Científica Milenio Proyecto ICM No. P10-030-F, Programa de Financiamiento Basal de CONICYT (FB0824/2008), proyecto FONDECYT No. 1110142 y beca del departamento de Física de la facultad de Ciencias de la Universidad de Chile.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Fundamentos</b>	<b>6</b>
2.1. Propagación lineal de luz en medios periódicos . . . . .	6
2.1.1. Ecuación de onda . . . . .	7
2.1.2. Medios periódicos débilmente acoplados: modelo discreto . . .	9
2.1.3. Difracción de la luz en arreglos periódicos . . . . .	12
2.1.4. Modos de Floquet-Bloch . . . . .	16
2.2. Propagación no lineal de luz en arreglos periódicos . . . . .	22
2.2.1. No linealidad cúbica o tipo Kerr . . . . .	22
2.2.2. No linealidad saturable . . . . .	26
<b>3. No linealidad cúbica: condiciones para auto-atrapamiento de la luz en arreglos de guías de ondas, con excitación inicial de sólo una guía</b>	<b>33</b>
3.1. Modelo . . . . .	34
3.2. Propagación numérica . . . . .	38
3.3. Frecuencia efectiva y frecuencia promedio . . . . .	41
3.4. Transición de autoatrapamiento y valores de $\gamma_c$ . . . . .	43

<b>4. No linealidad saturable: solución intermedia en un sistema de dos guías de ondas débilmente acopladas</b>	<b>49</b>
4.1. Modelo . . . . .	50
4.2. Potencial efectivo . . . . .	55
4.3. Análisis numérico . . . . .	59
4.4. Resultados experimentales . . . . .	61
<b>5. Trabajo experimental en guías de ondas y formación de solitones</b>	<b>66</b>
5.1. Formación de un solitón continuo en cristal SBN . . . . .	66
5.2. Técnica de guías de ondas inducidas ópticamente en un cristal SBN .	69
5.2.1. Implementación experimental . . . . .	72
5.2.2. Redes inducidas ópticamente . . . . .	75
5.2.3. Propagación no lineal: Solitón discreto . . . . .	81
<b>6. Conclusiones</b>	<b>84</b>
<b>A. Apéndice</b>	<b>87</b>
<b>Publicaciones</b>	<b>90</b>

## RESUMEN

En esta tesis se estudian algunas propiedades de la propagación de luz en arreglos periódicos de guías de ondas no lineales, con diferentes topologías y dimensiones, tanto teórica como experimentalmente. Nos enfocamos en los siguientes 3 temas: en arreglos discretos con no linealidad cúbica, exploramos el problema de localización dinámica de la luz, analizando la región de parámetros y valores críticos para su formación. Analizamos un sistema de dos guías de onda con no linealidad saturable, donde se estudian las distintas soluciones y regiones de multiestabilidad mediante un análisis teórico, numérico y experimental. Se aborda el problema de la formación experimental de guías de ondas. Para ello implementamos la técnica de guías de ondas ópticamente inducidas en un cristal fotorefractivo.

## ABSTRACT

In this thesis some properties of light wave propagation in periodically nonlinear wave-guided arrays, with different topologies and dimensions are studied, both analytically and experimentally. We focus in the following 3 topics: in discrete arrays with cubic nonlinearity, we explore the problem of dynamical localization of light, analyzing the region of parameters and critical values related its formation. We analyze a dimer with saturable nonlinearity, where the different solutions and multi-stability regions are studied through an theoretic, numeric, and experimental analysis. The problem of experimental fabrication of waveguides is approached. For this, we implement the technique of optically induced waveguides in a photorefractive crystal.

# Capítulo 1

## Introducción

El estudio de la propagación de ondas de luz en medios periódicos no lineales, se ha ido desarrollándose a lo largo del siglo XX, por trabajos que en principio no estaban emparentados, pero que han permitido un gran avance en cómo entendemos hoy la propagación de la luz. Y hablamos del siglo veinte, puesto que fue a mediados de este siglo en que se empezó a formular y materializar la idea de una óptica *no lineal*. Uno de los experimentos que marcó el inicio de la óptica no lineal fue llevado a cabo por Franken et al [1] en el año 1961. En este experimento la luz de un láser fue focalizada en un cuarzo cristalino, obteniéndose una onda transmitida con una longitud de onda igual a la mitad de la longitud de onda del láser usado. Esto se conoce como generación de segundo armónico y es un claro efecto no lineal, ya que se produce por una mezcla de frecuencias, la cual no es posible en un régimen lineal donde existe el principio de superposición. Cabe destacar que el primer láser operativo [2] fue obtenido sólo un año antes de este experimento, y hasta el día de hoy, es parte fundamental de la mayoría de experimentos en óptica, otras áreas de la Física y en tecnología. Este aparato es capaz de entregar luz coherente, colimada y focalizada, pudiendo alcanzar grandes valores de intensidad óptica (alrededor de cientos de Watts en una pequeña área de unos cuantos  $\mu\text{m}^2$ ). Y es la intensidad precisamente unos



de los parámetros clave en fenómenos no lineales ya que grandes valores de ésta permiten modificar el índice de refracción en ciertos materiales. Tomando esta idea, Chiao et al [3] en el año 1964 muestra que es posible hacer que un haz de luz se auto-atrape, o sea que cambie el índice de refracción por sí mismo, y logre propagarse sin alterar su forma. Este tipo especial de modo no lineal se denomina solitón continuo. Y es efectivamente la no linealidad quien compensa la difracción que sufre la luz, permitiendo que el haz se mantenga localizado.

Por otro lado, la propagación de luz en arreglos periódicos de guías de ondas difiere bastante de la propagación en un medio continuo siendo una de sus propiedades, que no existe en medios continuos, la formación de bandas y *gaps* (brechas). Es así que los conceptos de bandas y *gaps*, desarrollados por Bloch [4] para explicar la propagación de electrones en cristales con potenciales periódicos, pueden ser aplicables a la propagación de un haz de luz en arreglos periódicos de guías de ondas. Estos conceptos se ven reflejados después de los trabajos de Yablonovith [5] y John [6] que proponen el uso de estructuras dieléctricas con índice de refracción espacialmente modulado, llamadas guías de ondas planares, para la propagación de luz. Estas estructuras soportan la formación de bandas y *gaps*, y se les llama comúnmente como cristales fotónicos. Dada esta analogía entre bandas y *gaps* de electrones y fotones es que se acuña el término fotónica, con lo cual se espera en el futuro, un gran control del flujo de la luz en circuitos completamente ópticos, tal como se ha hecho en dispositivos electrónicos [7, 8].

Una teoría que ha permitido describir bastante bien los sistemas de guías de ondas, es la teoría de modos acoplados [9], análoga al concepto de *tight binding* de Física del Estado Sólido, con la cual se deriva una ecuación dinámica llamada ecuación Discreta No Lineal de Schrödinger (DNLS) [10]. Bajo este modelo se tiene un set

de  $N$  ecuaciones acopladas que representan a las  $N$  guías, o sea el sistema ahora es considerado *discreto*. Ésta ecuación ha sido ampliamente estudiada, mostrando una muy rica fenomenología y plasticidad frente a cambios de parámetros, permitiendo describir no tan sólo arreglos de guías de ondas, sino que también una gran cantidad de otros sistemas, como polarones [11], transporte de energía en moléculas [12], condensados Bose-Einstein en redes ópticas [13], etc. En particular se ha encontrado que estos sistemas, modelados a través de la DNLS son capaces de tener soluciones tipo solitón, denominado como solitón discreto [10], los cuales han sido observados experimentalmente [14–18].

Como dijimos antes, la formación de un solitón se debe a efectos no lineales, donde tiene que existir un preciso balance entre la difracción y la no linealidad del sistema. Por ello es que ha sido materia de estudio determinar el espacio de parámetros en que se obtiene este tipo de soluciones [19]. Entre las no linealidades estudiadas, destacan la cúbica o tipo Kerr, en que el cambio del índice de refracción depende linealmente de la intensidad  $I$ , i.e.  $\Delta n \sim I/I_0$ , con  $I \sim |E|^2$ . Otra es la no linealidad saturable que describe la fenomenología de materiales fotorefractivos o fotovoltaicos. A diferencia del caso anterior, el índice de refracción depende de manera proporcional al inverso de la intensidad, de la forma  $\Delta n \sim I_0/(I_0 + I)$ . Debido a esta naturaleza saturable, la no linealidad no crece monótonamente como en el caso cúbico, abriendo la posibilidad de observar una nueva fenomenología, como por ejemplo observar la llamada solución intermedia [20].

Se han desarrollado diversos métodos para construir arreglos periódicos de guías de ondas y así poder observar experimentalmente las predicciones teóricas. Uno de ellos consiste en construir las guías por medio de capas de distintos elementos como, por ejemplo, capas de arseniuro de aluminio y galio (AlGaAs) [14]; también, se han

fabricado arreglos de niobato de litio ( $\text{LiNbO}_3$ ) [21], en las cuales la no linealidad crece con el tiempo de exposición. Otro método es de “escribir” directamente las guías en placas de sílica con un láser de femtosegundos [18] y también se ha desarrollado un método en que las guías son inducidas ópticamente en un cristal fotorefractivo, como el cristal de niobato de bario y estroncio (SBN) [16]. En particular este método tiene la ventaja de ser muy versátil, pues se puede cambiar fácilmente el tipo de red que se desea crear, pudiendo ser unidimensional, bidimensional e inclusive tridimensional [22], donde se puede ajustar la no linealidad en tamaño y signo, mediante un voltaje externo.

La organización de esta tesis es como sigue: toda la formulación del problema de propagación de haces en arreglos de guías de ondas es presentada en el Capítulo 2. Partiendo desde las ecuaciones de Maxwell se encuentra una ecuación de onda lineal, la que se muestra que presenta formación de bandas y *gaps*. Se explica con detalle la obtención de la ecuación DNLS para sistemas discretos, mostrando sus propiedades como, por ejemplo, la difracción discreta. También se explica la propagación de luz en un régimen no lineal, considerando dos tipos de no linealidades, la cúbica y la saturable.

En el Capítulo 3, se estudia cómo la no linealidad cúbica puede afectar la formación de soluciones localizadas. Se encuentran parámetros que definen completamente la dinámica de estados localizados, abarcando redes de distintas componentes y dimensiones. Se introduce el concepto de frecuencia efectiva y se discute su validez. También se encuentran valores críticos de no linealidad para la formación de soluciones localizadas.

El estudio de sistemas con no linealidad saturable es mostrado en el Capítulo 4. Se estudia como afecta esta no linealidad a un sistema compuesto de dos guías

de ondas llamado dímero y se compara con un sistema con no linealidad cúbica. Se encuentra y analiza un tipo de solución llamada intermedia, característica de sistemas saturables. Se hace un completo análisis teórico y computacional, incluyendo el uso de un potencial efectivo. Además se muestra la verificación experimental hecha en guías de niobato de litio ( $\text{LiNbO}_3$ ).

Capítulo 5 se centra en un plano experimental. Se presenta la formación de un solitón continuo en cristales SBN. Se estudia e implementa la técnica de guías de ondas ópticamente inducidas en cristales SBN. Se presenta el esquema utilizado y se detallan los pasos para su obtención. Los resultados experimentales obtenidos son presentados, como también sus características. También se muestra la propagación de un haz en un régimen no lineal y la formación de un solitón discreto en dos dimensiones.

Conclusiones finales y resumen del trabajo son mostrados en el Capítulo 6.

# Capítulo 2

## Fundamentos

En en este capítulo analizaremos la propagación de la luz en medios periódicos continuos como también discretos. Encontraremos una estructura de bandas y gaps para ellos. Y también veremos como influyen efectos no lineales en la propagación de luz.

### 2.1. Propagación lineal de luz en medios periódicos

Para el entendimiento de la Física no lineal que veremos en esta tesis, es fundamental entender primeramente la Física lineal del problema. Para ello, comenzaremos detallando cómo se propaga la luz en un medio, con un índice de refracción periódico en la dirección transversal al de propagación. Veremos dos modelos distintos para describirlo: uno completamente continuo, donde existen un conjunto infinito de bandas y gaps, y otro modelo discreto, en que las guías de ondas estan discretizadas en el espacio y que por su derivación, describe sólo la primera banda del sistema completo.

### 2.1.1. Ecuación de onda

Para estudiar la propagación de la luz en un medio, iniciamos usando las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J},\end{aligned}$$

donde  $\vec{D}$  es el vector desplazamiento eléctrico,  $\vec{B}$  es la inducción magnética,  $\vec{E}$  es el campo eléctrico y  $\vec{H}$  es el campo magnético. Asumiendo que no hay portadores de cargas libres  $\rho = 0$ , ni corrientes libres  $\vec{J} = 0$  y, además, que es un material no magnético  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ , con  $\mu_0$  la permeabilidad del vacío, podemos obtener la ecuación de ondas para el campo eléctrico

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (2.1)$$

que es la llamada ecuación de onda con fuente ( $\vec{P} \neq 0$ ), con  $\vec{P}$  la polarización inducida en el medio y  $\epsilon_0$  es la permitividad del vacío. Para esto, hemos usado la relación constitutiva  $\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}(\vec{r}, t)$  y que  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  corresponde a la velocidad de la luz en el vacío. Para medios con respuesta lineal e isotrópica se tiene que  $\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0(1 + \chi^{(1)})\vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r(r)\vec{E} = \epsilon(r)\vec{E}$ , con  $\chi^{(1)}$  la susceptibilidad eléctrica. Luego la ecuación de onda queda como

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{n(r)^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (2.2)$$

con  $n(r) = \sqrt{\epsilon(r)}$  el índice de refracción del medio. En esta derivación usamos la relación  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \nabla(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$ , pero despreciamos el término  $\nabla(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$ , pues

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{E} \cdot \vec{\nabla}(\ln \epsilon)$  y  $\ln \epsilon$  varía lentamente para los casos típicos, por lo cual usamos  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ . Asumiendo que el campo eléctrico oscila en el tiempo con una frecuencia  $\omega$  (onda monocromática), tenemos  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t} + c.c.$ , con *c.c.* el complejo conjugado, luego reemplazando en la ecuación (2.2) podemos obtener la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + k_0^2 n(r)^2 \vec{E}(\vec{r}) = 0, \quad (2.3)$$

con  $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda_0$  el número de onda en el vacío. Escribiremos el campo eléctrico como una función envolvente que varía lentamente en la dirección de propagación  $\hat{z}$ , lo cual es válido para ondas con un ancho de banda pequeño como ondas monocromáticas, y polarizado linealmente  $A(x, y, z)\hat{e}_x$ , y un término  $e^{ikz}$ , es decir

$$\vec{E}(\vec{r}) = Re\{A(x, y, z)e^{ikz}\hat{e}_x\},$$

con  $k = k_0 n_{eff}$  la constante de propagación y  $n_{eff}$  el índice de refracción efectivo (o no perturbado) que es constante a lo largo de la propagación y *Re* la parte real. Reemplazando en la ec. (2.3) obtenemos

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial A}{\partial z} + k_0^2 [n(x, y)^2 - n_{eff}^2] A = 0. \quad (2.4)$$

Como la variación de la amplitud de  $A$  varía lentamente en la dirección de propagación  $z$ , podemos asumir que

$$\left| \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right| \ll \left| 2k \frac{\partial A}{\partial z} \right|, \quad (2.5)$$

obteniendo

$$i \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{2k} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) + \frac{k_0^2}{2k} [n(x, y)^2 - n_{eff}^2] A = 0. \quad (2.6)$$

Nuestro estudio estará centrado en medios periódicos, tales como sistemas de guías de ondas acopladas, en que el índice de refracción varía periódicamente en las direcciones transversales a la de propagación:  $n = n(x, y) = n(x + \Lambda_x, y + \Lambda_y)$  con  $\Lambda_x, \Lambda_y$  los

periodos de red en los ejes  $x$  e  $y$  respectivamente. Consideraremos el caso unidimensional en las siguientes ecuaciones, donde el caso dos dimensional puede ser fácilmente derivado. A continuación, diremos que  $n$  se puede escribir como el índice de refracción efectivo  $n_{eff}$  más un pequeño cambio periódico  $n_l$ , o sea  $n(x) = n_{eff} + n_l(x)$ .

Luego

$$\frac{k_0^2}{2k}[n(x)^2 - n_{eff}^2] = \frac{k_0^2}{2k}[(n_{eff} + n_l(x))^2 - n_{eff}^2] \quad (2.7)$$

$$= \frac{k_0}{2n_{eff}}[2n_{eff}n_l(x) + n_l(x)^2] \quad (2.8)$$

$$\approx \frac{kn_l(x)}{n_{eff}}, \quad (2.9)$$

donde hemos despreciado  $n_l^2$  ya que las variaciones son del orden de  $10^{-3} - 10^{-4}$ . La ecuación de onda en una dimensión es

$$i\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{2k}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{kn_l(x)}{n_{eff}}A = 0, \quad (2.10)$$

que es la ecuación de onda paraxial lineal. Si  $x = sx_0$  y  $z = k\xi x_0^2$ , con  $x_0$  un factor de escala arbitrario, obtenemos la versión adimensional de la ecuación de onda

$$i\frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial s^2} + V(s)A = 0, \quad (2.11)$$

con  $V(s) = k^2 x_0^2 n_l(sx_0)/n_{eff}$ . En esta sección hemos hecho un análisis sólo con términos lineales con  $E$ , pues como veremos en secciones siguientes, la inclusión de términos no lineales como, por ejemplo en la polarización  $\vec{P}(E) \propto |\vec{E}|^2 \vec{E}$ , generará un término no lineal en la ecuación de onda.

### 2.1.2. Medios periódicos débilmente acoplados: modelo discreto

Como vimos en la sección anterior, la propagación de luz en medios continuos con índice de refracción periódico puede ser caracterizado por una ecuación de onda



paraxial. En los arreglos de guías de ondas débilmente acoplados existe un traslape espacial de los campos modales de cada guía a través de campos evanescentes, que conlleva un intercambio de energía entre las guías cercanas (ver Fig. 1), donde es posible ocupar la teoría de modos acoplados, obteniendo una ecuación de onda discreta [23, 24]. La derivación del modelo discreto aquí descrito, está basado en

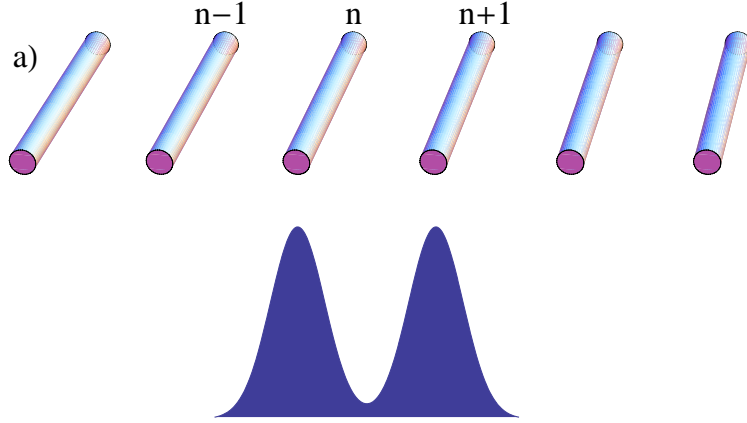


Fig. 1. Arreglo periódico de guías de ondas. Arriba: esquema de las  $N$  guías de ondas. Abajo: traslape de las colas de los campos eléctricos de las guías  $n$  y  $n + 1$ .

el trabajo de tesis doctoral de la Ref. [25]. Comenzamos descomponiendo el campo eléctrico en la guía  $n$ , como una suma de eigenmodos de la forma

$$\vec{E}_n(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_j \left[ \vec{f}_{nj}(x, y) a_{nj}(z) e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c. \right], \quad (2.12)$$

donde  $k_j$  y  $\omega_j$  son la constante de propagación y frecuencia del modo  $j$  respectivamente.  $\vec{f}(x, y)$  indicará la forma transversal del campo con componentes en  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  y  $a(z)$  su forma longitudinal. Asumiremos nuevamente, al igual que en el caso continuo, que el campo varía lentamente en la dirección de propagación  $z$  [ver ec. (2.5)]. Como consideramos guías de ondas que están débilmente acopladas unas con otras,

sólo habrá interacciones a los vecinos más cercanos. Reemplazando en la ec. (2.1)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{\partial^2 \vec{P}_n}{\partial t^2} &= \nabla^2 \vec{E}_n - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_n}{\partial t^2} \\
&= \left( \nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{E}_n - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_n}{\partial t^2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_j \left\{ \left[ a_{nj}(z) \left( \nabla_{\perp}^2 - k_j^2 + \frac{\omega_j^2}{c^2} \right) \vec{f}_{nj}(x, y) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left( \frac{\partial^2 a_{nj}}{\partial z^2} + 2ik_j \frac{\partial a_{nj}}{\partial z} \right) \vec{f}_{nj}(x, y) \right] e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c. \right\} \quad (2.13)
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{\partial^2 \vec{P}_n}{\partial t^2} \approx \frac{1}{2} \sum_j \left( 2ik_j \vec{f}_{nj} \frac{\partial a_{nj}}{\partial z} e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c. \right). \quad (2.14)$$

En esta derivación hemos usado la aproximación (2.5), y que el primer sumando de (2.13) es igual a cero, relación que se deriva de la ec. (2.1) con  $\vec{P} = 0$  y eigenmodos  $\vec{f}_j$ . Por simplicidad analizaremos el caso de dos guías de ondas el cual puede ser extendido fácilmente a  $N$  guías de ondas [24,25]. El vector de polarización en la guía uno ( $n = 1$ ), para el modo  $j$ , lo podemos escribir como

$$\vec{P}_j = \epsilon_0 \chi_{1j}^{(1)} \vec{E}_j = \frac{1}{2} \epsilon_0 \chi_{1j}^{(1)} (\vec{f}_{1j} a_{1j} + \vec{f}_{2j} a_{2j}) e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c., \quad (2.15)$$

donde hemos considerado todas las posibles contribuciones, incluyendo el campo de la guía y el campo que proviene de la guía aledaña. Luego (2.14) queda como

$$\frac{1}{2} \sum_j \left\{ \left( 2ik_j \vec{f}_{1j} \frac{\partial a_{1j}}{\partial z} + \frac{\omega_j^2}{c^2} \chi_{1j}^{(1)} (\vec{f}_{1j} a_{1j} + \vec{f}_{2j} a_{2j}) \right) e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c. \right\} = 0. \quad (2.16)$$

Hasta ahora hemos considerado una suma de los distintos modos dado por el índice  $j$ . Diferentes modos representarán distintas interacciones que en el caso no lineal, implicarán mezcla de ondas. Consideraremos, de ahora en adelante, sólo un modo ( $j = 1$ ), correspondiente al modo fundamental de la guía y sólo una polarización  $\hat{x}$ .

Así (2.16) queda como

$$\frac{1}{2} \left\{ \left( 2ik f_1 \frac{\partial a_1}{\partial z} + \frac{\omega^2}{c^2} \chi_1^{(1)} (f_1 a_1 + f_2 a_2) \right) e^{i(kz - \omega t)} \hat{x} + c.c. \right\} = 0. \quad (2.17)$$

Multiplicando la ec. (2.17) por el conjugado de  $f_1$  e integrando luego en el plano  $x - y$  para eliminar la dependencia transversal, obtenemos la siguiente ecuación para el sitio uno

$$i \frac{\partial a_1}{\partial z} + \beta a_1 + C_2 a_2 = 0 , \quad (2.18)$$

donde hemos definido la constante de propagación

$$\beta = \frac{\omega^2}{2kc^2} \chi^{(1)} , \quad (2.19)$$

y el coeficiente de acoplamiento como

$$C_2 = \beta V_2 , \quad (2.20)$$

con

$$V_2 = \frac{\int \int f_2 f_1^* dx dy}{\int \int |f_1|^2 dx dy} = \frac{1}{p} \int \int f_2 f_1^* dx dy ,$$

que define la integral de superposición o acoplamiento de los campos de guías vecinas, tal que:  $V \rightarrow 0$  para separación infinita y  $p$  corresponde a una integral de potencia. Análogamente para el sitio dos obtenemos

$$i \frac{\partial a_2}{\partial z} + \beta a_2 + C_1 a_1 = 0 . \quad (2.21)$$

Asumiendo que las guías están equispaciadas  $C_1 = C_2 \equiv C$ . Esto se puede generalizar a un sistema de  $N$  sitios, obteniendo finalmente

$$i \frac{\partial a_n}{\partial z} + \beta a_n + C(a_{n+1} + a_{n-1}) = 0 . \quad (2.22)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación discreta lineal de Schrödinger.

### 2.1.3. Difracción de la luz en arreglos periódicos

Usando el modelo discreto dado por la ec. (2.22) para describir la propagación de la luz en arreglos periódicos, veremos que tendrá propiedades distintas a las de un

sistema continuo. Esa ecuación tiene una solución analítica [24] para el caso de que un sólo sitio en el centro de un arreglo infinito,  $n = [-\infty, \infty]$ , es excitado inicialmente, es decir  $a_{n=0}(z = 0) = A$  y  $a_{n \neq 0}(z = 0) = 0$  dado por

$$a_n(z) = Ai^n J_n(2Cz)e^{i\beta z}, \quad (2.23)$$

donde  $J_n(2Cz)$  es la función de Bessel del primer tipo de orden  $n$ . La evolución de la intensidad de esta solución esta mostrada en la Fig. 2. Esta propagación está caracterizada por dos lóbulos de mayor energía que se alejan del centro. A esta difracción la conocemos como difracción discreta y es completamente opuesta al caso de sistemas continuos, donde la mayor parte de la energía reside en el centro durante

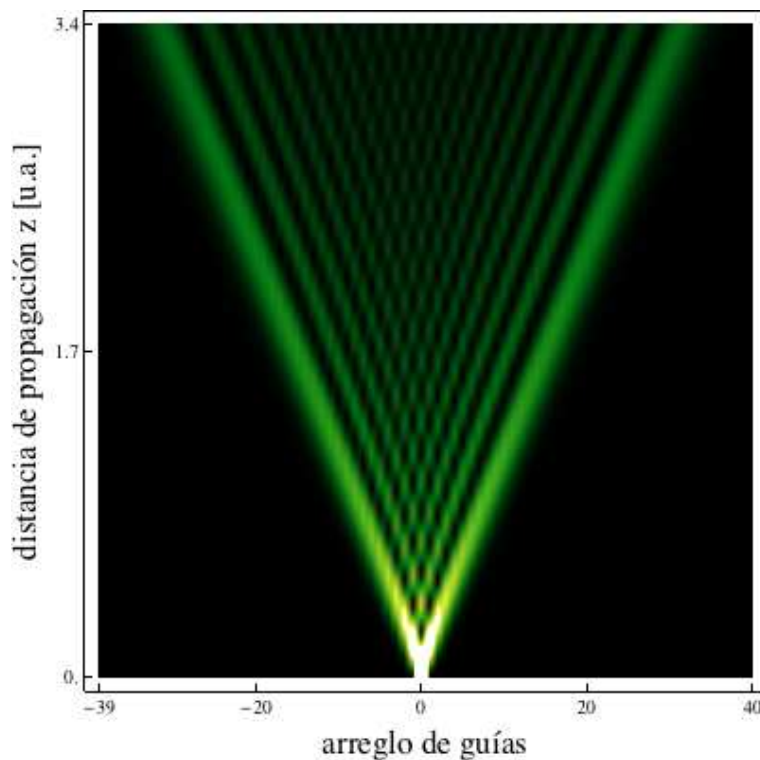


Fig. 2. Propagación de la luz en un arreglo periódico dado por (2.23) : difracción discreta.

la propagación. Para comprender más profundamente la difracción discreta, veamos

que sucede con la difracción normal en un sistema homogéneo (es decir cuando no hay un índice de refracción periódico, por ejemplo el espacio libre con  $n = n_0$ ). Una solución para (2.3) está dada por una onda plana  $A(x, z) = A_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = A_0 e^{i(k_x x + k_z z)}$ , donde hemos descompuesto el vector de onda  $\vec{k}$  en una componente transversal  $k_x$  y una componente longitudinal  $k_z$  y se tiene que  $|\vec{k}| = k = k_0 n_0$ . Reemplazando se obtiene la relación de difracción

$$k_z(k_x) = \sqrt{k^2 - k_x^2}. \quad (2.24)$$

Si usamos la aproximación paraxial, o sea que la onda se propaga con un pequeño ángulo  $\theta$  con respecto a  $z$ , se tiene  $k_z = k \cos \theta \approx k(\theta - \theta^2/2)$  y  $k_x = k \sin \theta \approx k\theta$ , por lo cual tenemos que  $k \gg k_x$  pues  $\theta \ll 1$ , entonces la relación de difracción queda como

$$k_z(k_x) \approx k - \frac{k_x^2}{2k}. \quad (2.25)$$

Un haz puede ser descompuesto como una suma de ondas planas con distintos valores de  $k_x$ . A medida que avanza una distancia  $z$ , la fase de cada onda plana cambia de manera diferente dado por  $\phi(k_x, z) = k_z(k_x)z$ . Para un paquete de ondas centrado en  $k_x$ , un corrimiento transversal ocurre debido a la fase acumulada de diferentes frecuencias espaciales, dado por  $\Delta x = \frac{\partial \phi}{\partial k_x} = z \frac{\partial k_z}{\partial k_x}$  [26]. Esto es análogo al concepto de velocidad de grupo [27], salvo que ahora  $z$  representa el tiempo  $t$  (analogías de este tipo veremos en la sección siguiente). Debido a este corrimiento que depende de la frecuencia espacial, un haz se ensancha durante su propagación. La magnitud de esta difracción está dada por el coeficiente de difracción

$$D = \frac{\partial^2 k_z}{\partial k_x^2}. \quad (2.26)$$

Este coeficiente es un indicador de las propiedades de difracción. En el caso de luz propagándose en el espacio libre, usando la aproximación paraxial, el valor del

coeficiente de difracción es  $D = -\frac{1}{k}$ . Vemos que no tiene dependencia de  $k_x$  y es siempre negativo: diremos que el haz experimenta difracción normal. Un comportamiento muy distinto ocurre para el caso discreto. Asumiendo la misma solución que en el caso continuo, salvo que ahora está discretizado el espaciado en  $x$ , tenemos  $a_n = A \exp[i(nk_x\Lambda + \beta z)]$ , donde  $\Lambda$  es la distancia entre los centros de cada guía y hemos usado  $\beta$  por  $k_z$  para hacer referencia que estamos en el caso discreto. Reemplazando en la ecuación (2.22) se obtiene

$$\beta(k_x) = 2C \cos(k_x\Lambda), \quad (2.27)$$

la que se muestra en la Fig. 3. De esta manera, el coeficiente de difracción queda como

$$D = -2C\Lambda^2 \cos(k_x\Lambda). \quad (2.28)$$

Por lo tanto, al difractar el haz durante su propagación, este presentará distintos

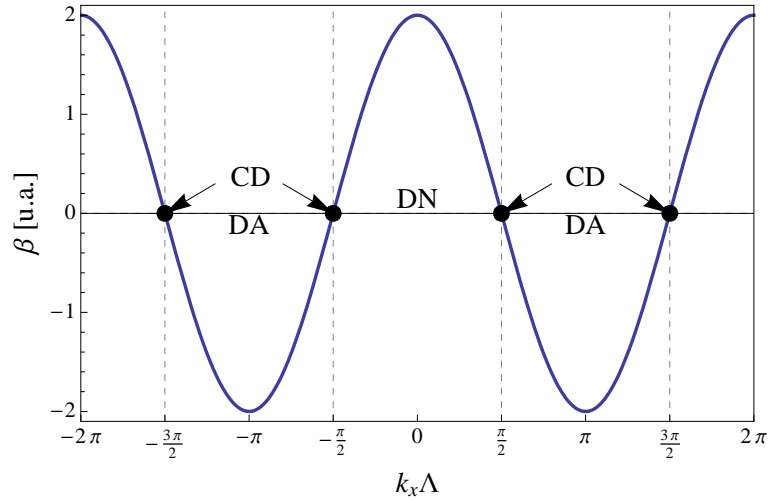


Fig. 3. Relación de dispersión  $\beta$  vs  $k_x$ . Regiones de diferente difracción han sido marcadas con líneas punteadas: DN difracción normal y DA difracción anómala. Los puntos corresponden a lugares con cero difracción (CD).  $C = 1$

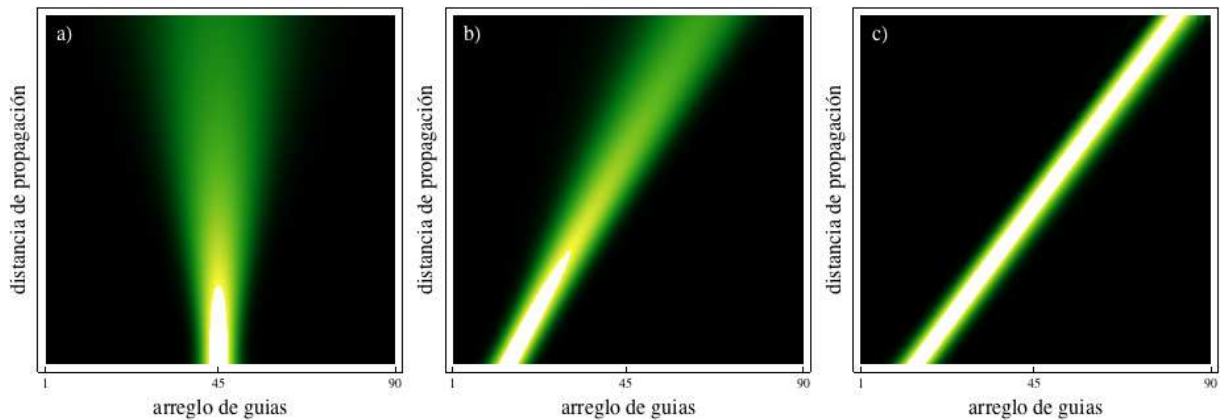


Fig. 4. Propagación de la luz en arreglos de guías de ondas para distintos valores de  $k_x$ : a)  $k_x = 0$ , b)  $k_x = \pi/4$  y c)  $k_x = \pi/2$ .

tipos de difracción dependiendo de la variación del coeficiente  $D$ . Como esta variación es periódica y simétrica, nos restringiremos al caso en que  $0 \leq k_x \Lambda \leq \pi$  [que corresponde a la mitad positiva de la primera zona de Brillouin (ZB)]. En el intervalo  $0 \leq k_x \Lambda < \pi/2$ ,  $D < 0$ , y la difracción experimentada será normal (ver DN en Fig. 3). Este régimen se caracteriza porque su frente de onda tiene una curvatura cóncava. Cuando  $D > 0$ , en el intervalo  $\pi/2 < k_x \Lambda \leq \pi$ , hay difracción anómala y los frentes de onda tienen una curvatura convexa. Existen puntos específicos en donde hay difracción nula,  $k_x \Lambda = \pi/2$ . El frente de onda se mantiene plano y se propaga sin difractar. Esto es mostrado en la Fig. 4 y su comprobación experimental puede ser observada en [28].

#### 2.1.4. Modos de Floquet-Bloch

Previo a la descripción de los modos de Floquet-Bloch (FB) ópticos, iniciaremos la discusión en el campo de la cuántica, pues es ahí donde se encontraron inicialmente estas soluciones y de ellas podemos construir una analogía para el caso óptico. El

movimiento de un electrón dentro de un potencial  $U$ , está dada por la ecuación de Schrödinger tiempo dependiente

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - U(x)\psi(x, t) = 0 . \quad (2.29)$$

Si  $U(x) = 0$ , las soluciones son ondas planas dadas por  $\psi(x, t) = \psi_0 e^{i\tilde{k}x} e^{-iEt/\hbar}$ , con  $\tilde{k}$  el *cuasi-momento*, obteniéndose la relación

$$E(\tilde{k}) = \frac{\hbar^2 \tilde{k}^2}{2m} ,$$

que es una relación continua entre  $E$  y  $k$ ; para cada valor de  $k$  hay un valor posible de  $E$  [muy similar al caso óptico de la ec. (2.25)]. Ahora bien, si el potencial es distinto de cero y varía de forma periódica en el espacio  $U(x + \Lambda) = U(x)$ , podemos aplicar el teorema de Bloch [29, 30], por lo que las soluciones serán los modos de Bloch multiplicados por un propagador temporal dado por

$$\psi_{\tilde{k}}(x, t) = u_{\tilde{k}}(x) e^{i\tilde{k}x} e^{-iEt/\hbar} , \quad (2.30)$$

donde  $u_{\tilde{k}}(x)$  tiene la misma periodicidad que el potencial  $U(x)$ . Al reemplazar esta solución en la ecuación de Schrödinger obtenemos la siguiente ecuación de autovalores

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{i\hbar^2 \tilde{k}}{m} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\hbar^2}{2m} [\tilde{k}^2 + \frac{2m}{\hbar^2} U(x)] \right\} u_{\tilde{k}}(x) = E u_{\tilde{k}}(x) . \quad (2.31)$$

Resolviendo esta ecuación para cada valor de  $\tilde{k}$ , uno encuentra los autovalores  $E$  y las correspondientes autofunciones  $u_{\tilde{k}}$ , que son los modos de Bloch para cada autovalor de energía  $E$ . Como resultado,  $E$  ya no varía de forma continua con  $\tilde{k}$ ; se formarán regiones de propagación, llamadas bandas, y zonas prohibidas donde no se propagarán ondas, llamados *gaps*, tal como lo muestra la Fig. 5. Como hemos visto, la introducción de un potencial periódico, introdujo un cambio significativo



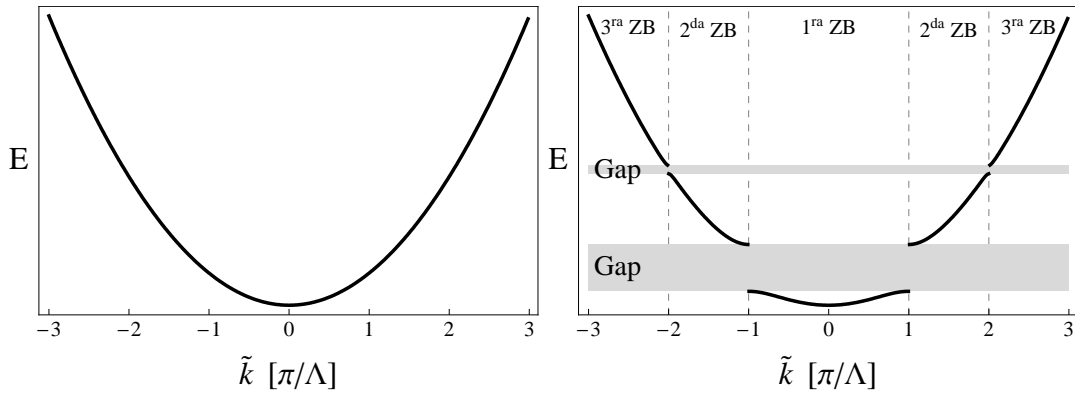


Fig. 5. Diagrama de energía  $E$  como función de  $\tilde{k}$ . A la izquierda el cuadro para electrones libres y a la derecha cuando hay electrones dentro de un potencial periódico. Esto es mostrado en una zona extendida de Brillouin, donde las líneas punteadas denotan la primera, segunda y tercera zona de Brillouin.

en la relación entre  $E$  y  $\tilde{k}$ . Cabe hacerse la pregunta si sucederá lo mismo en la propagación de un haz de luz en un medio periódico. Para responder esa pregunta, notemos que si hacemos los siguientes cambios a la ec. (2.29)

$$\begin{aligned}
 t &\Leftrightarrow z \\
 \frac{\hbar^2}{2m} &\Leftrightarrow \frac{1}{2k} \\
 i\hbar &\Leftrightarrow i \\
 U(x) &\Leftrightarrow \frac{k}{n_{eff}} n_l(x) \\
 \psi(x, t) &\Leftrightarrow A(x, z) ,
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

obtenemos

$$i \frac{\partial A(x, z)}{\partial z} + \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 A(x, z)}{\partial x^2} + \frac{k n_l(x)}{n_{eff}} A(x, z) = 0 ,$$

que es la misma ecuación encontrada previamente en (2.10). Por tanto, modos de FB son soluciones para la ecuación de onda paraxial, donde el índice de refracción  $n_l(x)$  juega el rol del potencial  $U(x)$ ,  $\beta$  la constante de propagación ocupa el lugar

de la energía  $E$  y la componente transversal del vector de onda  $k_x$  corresponde al cuasi momento  $\tilde{k}$ . Los modos de FB ópticos para distintas bandas dependerán completamente de cómo se relaciona  $\beta$  y  $k_x$ . Para calcular esta relación haremos uso de la ec. (2.11). Luego expandimos nuestro modo de FB como una serie de Fourier [29, 31], método conocido como “*Plane wave method*” (PWM). Diremos que el modo de FB se escribe como

$$A_{k_s}(s, \xi) = u_{k_s}(s) e^{i(k_s s + \beta \xi)} = e^{i(k_s s + \beta \xi)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n, k_s} e^{inGs}, \quad (2.33)$$

con  $G = 2\pi x_0/\Lambda$ , que corresponde a un vector de la red recíproca en el espacio de frecuencias. El índice de refracción también lo escribimos como una serie de Fourier

$$V(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_m e^{imGs}. \quad (2.34)$$

Reemplazando en (2.11), obtenemos

$$\sum_n -\frac{1}{2}(k_s + nG)^2 c_{n, k_s} e^{i(k_s + nG)s} + \sum_m v_m e^{imGs} \sum_n c_{n, k_s} e^{i(k_s + nG)s} = \beta \sum_n c_{n, k_s} e^{i(k_s + nG)s}. \quad (2.35)$$

El segundo factor a la izquierda lo podemos escribir como

$$\begin{aligned} \sum_n \sum_m v_m e^{imGs} c_{n, k_s} e^{i(k_s + nG)s} &= \sum_n \sum_m v_m c_{n, k_s} e^{i(k_s + (m+n)Gs)} \\ &= \sum_{n'} \sum_m v_m c_{n'-m, k_s} e^{i(k_s + n'G)s}, \end{aligned}$$

con  $n' = n + m$ . Ahora haciendo un nuevo cambio de índice  $m = n' - m'$ , obtenemos

$$\sum_{n'} \sum_m v_m c_{n'-m, k_s} e^{i(k_s + n'G)s} = \sum_{n'} \sum_{m'} v_{n'-m'} c_{m', k_s} e^{i(k_s + n'G)s}. \quad (2.36)$$

Luego:

$$\sum_n -\frac{1}{2}(k_s + nG)^2 c_{n, k_s} e^{i(k_s + nG)s} + \sum_{n'} \sum_{m'} v_{n'-m'} c_{m', k_s} e^{i(k_s + n'G)s} = \beta \sum_n c_{n, k_s} e^{i(k_s + nG)s}. \quad (2.37)$$

Como los índices de las sumatorias son mudos obtenemos finalmente

$$\sum_n \left( -\frac{1}{2}(k_s + nG)^2 c_{n,k_s} + \sum_{m'} v_{n-m'} c_{m',k_s} \right) e^{i(k_s+nG)s} = \sum_n \beta c_{n,k_s} e^{i(k_s+nG)s} \quad (2.38)$$

$$-\frac{1}{2}(k_s + nG)^2 c_{n,k_s} + \sum_{m'} v_{n-m'} c_{m',k_s} = \beta c_{n,k_s} . \quad (2.39)$$

Para resolver este problema, truncamos esta ecuación matricial, hasta un cierto valor  $M$ , obteniendo un set de  $2M + 1$  ecuaciones, donde  $\beta$  corresponde al autovalor de cada ecuación. Si  $M = 2$ , y considerando un índice de refracción de la forma  $V(s) = V_0 \cos^2(\pi s x_0 / \Lambda)$ , por lo cual los únicos coeficientes distintos de cero son  $v_0 = V_0/2$  y  $v_{-1} = v_1 = V_0/4$ , obtenemos

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{-2} + v_0 & v_{-1} & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & \epsilon_{-1} + v_0 & v_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & v_1 & \epsilon_0 + v_0 & v_{-1} & 0 \\ 0 & 0 & v_1 & \epsilon_1 + v_0 & v_{-1} \\ 0 & 0 & 0 & v_1 & \epsilon_2 + v_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{-2,k_s} \\ c_{-1,k_s} \\ c_{0,k_s} \\ c_{1,k_s} \\ c_{2,k_s} \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} c_{-2,k_s} \\ c_{-1,k_s} \\ c_{0,k_s} \\ c_{1,k_s} \\ c_{2,k_s} \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Con  $\epsilon_n = -\frac{1}{2}(k_s - nG)$ . Haciendo un barrido para distintos valores de  $k_s$ , obtenemos el cuadro de bandas y *gaps*, mostrado en la Fig. 6. La forma de este gráfico depende

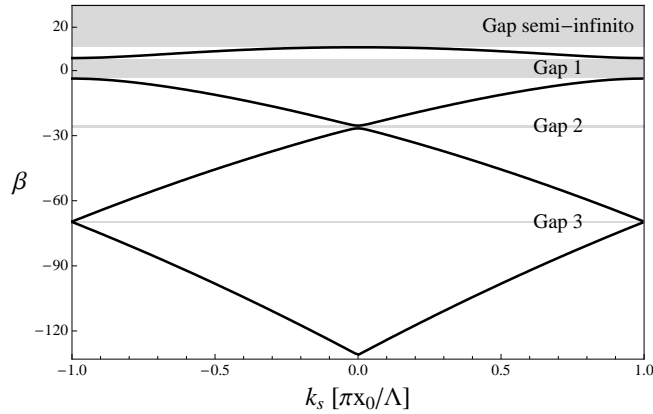


Fig. 6. Diagrama de bandas y *gaps* en la zona reducida de Brillouin. Se muestran las primeras cuatro bandas y *gaps*.

en gran medida de acuerdo al tamaño del contraste del índice de refracción, como también del ancho de las guías. Para este caso utilizamos  $V_0 = 19$ ,  $\Lambda = 6\mu\text{m}$  y  $x_0 = 8\mu\text{m}$ . Notemos que la primera banda tiene una forma sinusoidal que coincide con lo encontrado en el modelo discreto [ec. (2.27)]. También se aprecia que a medida que disminuye  $\beta$ , el tamaño de los *gaps* se ve reducido y por el contrario, el de las bandas se ve aumentado. El *gap* que se encuentra por encima de la primera banda, es llamado semi-infinito, y abarca desde donde termina la primera banda hasta infinito. Podemos obtener también la forma de los modos en distintas bandas para cada valor de  $k_s$  (ver Fig. 7), lo que ha sido demostrado experimentalmente [32,33]. Cabe notar

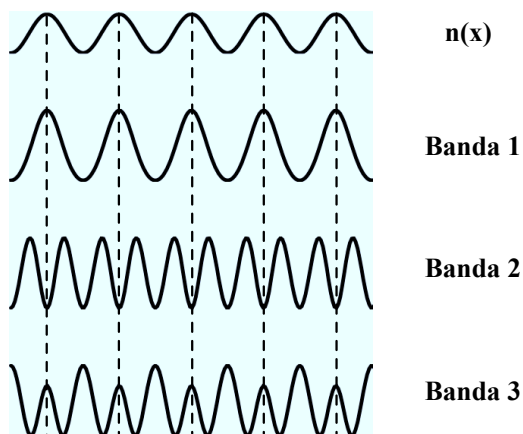


Fig. 7. Perfiles de intensidad de modos de FB para las primeras tres bandas.

Las líneas punteadas indican el periodo de la red. Se usó en todos ellos  $k_s = 0$ .

que además de observar un cambio en los perfiles de intensidad de los modos de FB para distintas bandas, también poseen una relación de fase que varía de acuerdo al valor de  $k_s$ . Esto puede ser visto en la Fig. 8.

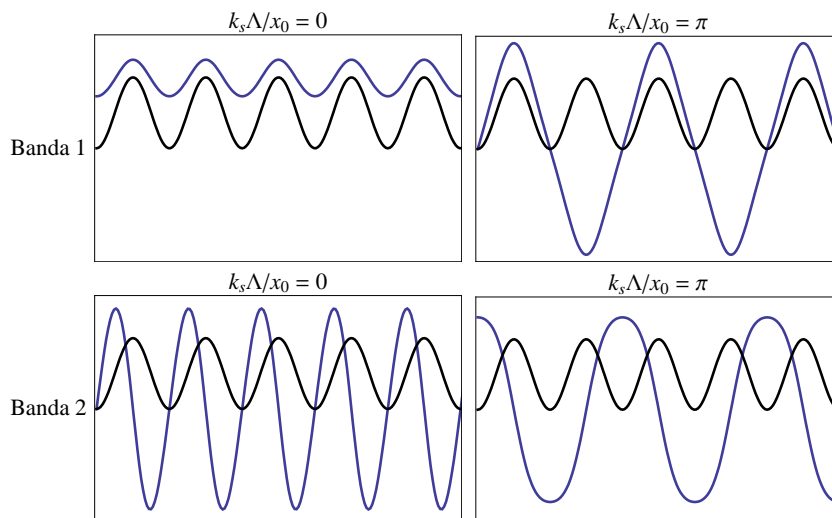


Fig. 8. Modos de FB de las primeras dos bandas, para el caso  $k_x\Lambda = 0$  y  $k_x\Lambda = \pi$ . La línea clara representa al modo, y la negra el perfil del índice de refracción.

## 2.2. Propagación no lineal de luz en arreglos periódicos

Fenómenos no lineales surgirán cuando la potencia óptica del haz que se propaga en un medio sea lo suficientemente alta como para que la respuesta no lineal del medio deje de ser despreciable, siendo esta respuesta proporcional a la intensidad del haz  $|E|^2$ . Esto da a lugar a variados fenómenos como, por ejemplo, auto-localización de la luz. Explicaremos dos tipos distintos de no linealidades: la cúbica o tipo Kerr y la saturable.

### 2.2.1. No linealidad cúbica o tipo Kerr

La no linealidad tipo Kerr se caracteriza por ser lineal y local con respecto a la intensidad  $I$ . Esto generará un cambio no lineal en el índice de refracción dado por  $n_{nlin} = n_2 I$ , cambio que pasaremos a explicar ahora.

De manera general podemos escribir la polarización  $P$  como una serie de potencias del campo eléctrico  $E$ , dado por

$$P = \epsilon_0(\chi^{(1)}E + \chi^{(2)}E^2 + \chi^{(3)}E^3 + \dots), \quad (2.41)$$

donde las susceptibilidades de menor orden son más grandes que las de órdenes superiores  $\chi^{(1)} > \chi^{(2)} > \chi^{(3)} > \dots$ . Cuando dedujimos la ecuación de onda paraxial lineal para el caso continuo (2.10) o la ecuación discreta lineal de Schrödinger para el caso discreto (2.22) usamos una dependencia lineal entre  $P$  y  $E$ :  $P = \epsilon_0\chi^{(1)}E$ , que llamaremos  $P_{lin}$ , y que corresponde al primer término la serie (2.41), despreciando términos superiores. Ahora, queremos incluir términos no lineales de esta serie, a los cuales llamaremos  $P_{nlin}$ . Si estamos en un medio centrosimétrico que posee simetría de inversión, se cumple que  $\chi^{(2)} = 0$ , por lo que el primer término no lineal relevante es de orden tres, que corresponde a

$$\begin{aligned} P_{nlin} &= \epsilon_0\chi^{(3)}E^3 \\ &= \epsilon_0\chi^{(3)}(Ae^{ikz}e^{-i\omega t} + c.c.)^3 \\ P_{nlin} &= 3\epsilon_0\chi^{(3)}|A|^2 Ae^{ikz}e^{-i\omega t} + \epsilon_0\chi^{(3)}A^3 e^{3ikz}e^{-3i\omega t} + c.c. \end{aligned} \quad (2.42)$$

No consideraremos el término de tercera armónica porque hay una muy baja eficiencia de la conversión de frecuencia debido a su gran *phase mismatch* o desajuste de fase [27, 34], por lo cual usaremos sólo el primer sumando de la ecuación de arriba. Éste término modifica la propagación de la onda de frecuencia  $\omega$  de manera no lineal (proporcional a la intensidad  $|A|^2$ ), por lo que hay un cambio en el índice de refracción a frecuencia  $\omega$ . Diremos que el índice de refracción  $n$  tiene una parte lineal más una parte no lineal

$$n = n_{lin} + n_{nlin} \quad (2.43)$$

$$n = \sqrt{1 + \chi_{eff}}, \quad (2.44)$$

con  $\chi_{eff} = \chi^{(1)} + 3\chi^{(3)}|A|^2$ . Luego

$$\begin{aligned} n^2 &= (n_{lin} + n_{nlin})^2 \\ n^2 &= n_{lin}^2 + 2n_{lin}n_{nlin}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

donde hemos despreciado términos no lineales de orden 2. Entonces se tiene que

$$n_{lin}^2 + 2n_{lin}n_{nlin} = 1 + \chi^{(1)} + 3\chi^{(3)}|A|^2, \quad (2.46)$$

pero  $n_{lin}^2 = 1 + \chi^{(1)}$ , entonces

$$2n_{lin}n_{nlin} = 3\chi^{(3)}|A|^2 \quad (2.47)$$

$$n_{nlin} = \frac{3\chi^{(3)}|A|^2}{2n_{lin}}. \quad (2.48)$$

Esto puede ser reescrito en función de la intensidad  $I$ , como  $n_{nlin} = n_2 I$ , con

$$n_2 = \frac{3\chi^{(3)}}{4n_{lin}^2 c \epsilon_0}, \quad (2.49)$$

y la intensidad  $I = 2|A|^2 n_{lin} c \epsilon_0$ . Por lo tanto, nuestra ecuación de onda quedaría como

$$i \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{k}{n_{eff}} (n_l + n_2 I) A = 0. \quad (2.50)$$

Notemos que esta ecuación, haciendo algunos cambios como los mostrados en (2.32), es análoga a la ecuación de Gross-Pitaevskii que describe un condensado de Bose-Einstein en una red óptica [35].

Para el caso discreto, la inclusión de este término no lineal podemos desarrollarlo desde la ec. (2.17). Ahora tenemos que  $P = P_{lin} + P_{nlin}$ , la parte lineal sigue el mismo tratamiento ahí explicado, pero la parte no lineal, queda como

$$\frac{1}{2} \left\{ \left( 2ikf_1 \frac{\partial a_1}{\partial z} + \frac{\omega^2}{c^2} \chi_1^{(1)} (f_1 a_1 + f_2 a_2) \right) e^{i(kz - \omega t)} \hat{x} + c.c. \right\} = \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{\partial^2 \vec{P}_{nlin}}{\partial t^2}. \quad (2.51)$$

La polarización no lineal, por ser local, la podemos expresar como

$$\vec{P}_{nlin} = \epsilon_0 \chi^{(3)} |\vec{E}_1|^2 \vec{E}_1 = \frac{\epsilon_0}{8} [3\chi^{(3)} |f_1|^2 |a_1|^2 f_1 a_1 e^{i(kz - \omega t)} \hat{x} + c.c.] , \quad (2.52)$$

donde no hemos considerado término de tercera armónica. Por lo tanto ec. (2.51) queda como

$$f_1 2ik \frac{\partial a_1}{\partial z} + \frac{\omega^2}{c^2} \chi^{(1)} (f_1 a_1 + f_2 a_2) + \frac{3\omega^2}{4c^2} \chi^{(3)} |f_1|^2 |a_1|^2 f_1 a_1 = 0 . \quad (2.53)$$

Procediendo de manera análoga a lo hecho en la sección 2.1.2, multiplicamos por  $f_1^*$  e integramos, obteniendo

$$i \frac{\partial a_1}{\partial z} + \beta a_1 + C_2 a_2 + \gamma |a_1|^2 a_1 = 0 , \quad (2.54)$$

donde los primeros tres sumandos son los mismos que en (2.18), y

$$\gamma = \frac{3\omega^2}{8kc^2p} \chi^{(3)} \int \int |f_1^1|^4 dx dy = \frac{\omega n_2}{2c\eta} \phi , \quad (2.55)$$

con  $n_2 = \frac{3\chi^{(3)}}{4n^2\epsilon_0c}$  el coeficiente no lineal,  $\phi = \frac{1}{p} \int \int |f_1^1|^4 dx dy$  y  $\eta \equiv \eta_0/n = \sqrt{\mu_0}/(\sqrt{\epsilon_0}n)$  la impedancia del medio. Se puede generalizar para la guía  $n$ , en un arreglo de  $N$  guías (asumiendo nuevamente que  $C_2 = C_1 \equiv C$ ), quedando finalmente

$$i \frac{\partial a_n}{\partial z} + \beta a_n + C(a_{n-1} + a_{n+1}) + \gamma |a_n|^2 a_n = 0 . \quad (2.56)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación discreta no lineal de Schrödinger (DNLS por sus siglas en inglés) [10] que corresponde a una versión discreta de la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS por sus siglas en inglés) [36]. Para obtener una versión adimensionalizada de esta ecuación comenzaremos haciendo la transformación  $a_n = \sqrt{2\eta/p} B_n e^{i\beta z}$ , reemplazando se obtiene

$$i \frac{\partial B_n}{\partial z} + C(B_{n+1} + B_{n-1}) + \gamma_{eff} |B_n|^2 B_n = 0 , \quad (2.57)$$



con  $\gamma_{eff} = \frac{\omega n_2}{c A_{eff}}$  y  $A_{eff} = \frac{p}{\phi}$  es la área efectiva del modo en la guía [37]. Notemos que las dimensiones de las variables son

$$[B_n] = W^{1/2} \quad [C] = m^{-1}$$

$$[z] = m \quad [\gamma_{eff}] = m^{-1} W^{-1} .$$

Luego si  $B_n = A_p u_n$  con  $A_p$  amplitud del peak del haz y  $z = z' L_0$  con  $L_0$  longitud característica, reemplazando se obtiene

$$i \frac{\partial u_n}{\partial z'} + C'(u_{n+1} + u_{n-1}) + \gamma' |u_n|^2 u_n = 0 , \quad (2.58)$$

con  $C' = C L_0$  y  $\gamma' = \gamma_{eff} |A_p|^2 L_0$  y

$$[u_n] = [z'] = [C'] = [\gamma'] = [1] .$$

Por lo tanto ec. (2.58) corresponde a la DNLS sin dimensiones. Como esta ecuación será ampliamente utilizada a través de esta tesis, eliminaremos las primas por conveniencia práctica.

### 2.2.2. No linealidad saturable

La no linealidad saturable describe el comportamiento de ciertos materiales tales como cristales fotorefractivos y fotovoltaicos, en los que su índice de refracción cambia de manera proporcional al inverso de la intensidad, por lo que la no linealidad satura en cierto rango de potencia, y no sigue creciendo indefinidamente como en el caso cúbico. Comenzaremos explicando el efecto fotorefractivo y como da origen a una no linealidad tipo saturable. El efecto fotorefractivo describe el cambio local en el índice de refracción como resultado de una redistribución de los portadores de carga inducida ópticamente. El origen de este efecto está esquematizado en la Fig. 9. Estos

materiales están dopados con aceptores que atrapan cargas, así como también con donadores que entregan cargas. Una vez iluminado el cristal, los electrones son fotoexcitados desde los donadores y llegan a la banda de conducción, donde se mueven por diferentes mecanismos de transporte de carga como *drift* (deriva) aplicado por un campo externo  $E_0$ , difusión térmica y efecto fotovoltaico, luego de lo cual son atrapados por los aceptores. Este proceso de excitación y captura de cargas genera un *space-charge field* (campo de carga espacial)  $E_{sc}$  que modifica el índice de refracción a través del efecto electro-óptico lineal.

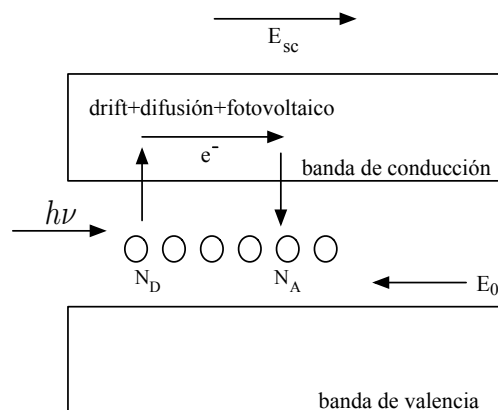


Fig. 9. Esquema del proceso de formación de  $E_{sc}$ , a través de un transporte de cargas, dentro un cristal fotorefractivo.

El efecto electro-óptico describe como cambia la permitividad  $\epsilon$  debido a la presencia de un campo eléctrico estático aplicado externamente. Esto puede ser escrito a través del tensor de impermeabilidad [38]

$$\Delta\eta_{ij} = \Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_{ij} = \sum_k r_{ijk}E_k + \sum_{kl} s_{ijkl}E_kE_l + \dots, \quad (2.59)$$

donde  $r_{ijk}$  son los coeficientes del tensor electro-óptico lineal,  $s_{ijkl}$  son los coeficientes del tensor electro-óptico cuadrático y se cumple  $\eta_{ij} = 1/\epsilon_{ij}$ . Sólo usaremos el caso

lineal, conocido como efecto Pockels. Luego el cambio en la permitividad está dado por [39]

$$\Delta\epsilon_{ij} = -\epsilon_0 n_i^2 n_j^2 \Delta\eta_{ij} . \quad (2.60)$$

Como el tensor permitividad es real y simétrico, el tensor electro-óptico tiene que ser simétrico en los dos primeros índices. Por esta razón, es conveniente escribir el tensor de rango 3  $r_{ijk}$  como una matrix de dos dimensiones  $r_{hk}$  usando una notación contraída dada por

$$\begin{aligned} h = 1 & \quad \text{para } ij = 11 \\ h = 2 & \quad \text{para } ij = 22 \\ h = 3 & \quad \text{para } ij = 33 \\ h = 4 & \quad \text{para } ij = 23 \text{ o } ij = 32 \\ h = 5 & \quad \text{para } ij = 13 \text{ o } ij = 31 \\ h = 6 & \quad \text{para } ij = 12 \text{ o } ij = 21 . \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_i = \sum_j r_{ij} E_j , \quad (2.61)$$

que de manera explícita queda como

$$\begin{pmatrix} \Delta(1/n^2)_1 \\ \Delta(1/n^2)_2 \\ \Delta(1/n^2)_3 \\ \Delta(1/n^2)_4 \\ \Delta(1/n^2)_5 \\ \Delta(1/n^2)_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} . \quad (2.62)$$

Dependiendo del material y la orientación del mismo, algunos coeficientes  $r_{ij}$  se anulan. Para el caso del cristal SBN, utilizado para la técnica de inducción [40], el coeficiente electro-óptico relevante para polarización extraordinaria, es el  $r_{33}$ . Si la luz que incide al material es extraordinariamente polarizada, el cambio del índice de refracción estará dado por

$$\Delta n^2 = -n_0^4 r_{33} E_{sc} . \quad (2.63)$$

El modelo que describe la dinámica de los portadores de carga dentro de los materiales fotorefractivos está dado por el modelo de Kukhtarev et al [41]. Consideraremos

como portadores móviles sólo a los electrones. La tasa de generación de electrones estará dada por la tasa de generación de impurezas donadoras  $N_D^+$  menos la tasa de captura de electrones, que corresponde a la tasa de cambio de la densidad de impurezas ionizadas  $N_D^+$

$$\frac{\partial N_D^+}{\partial t} = \hat{s}(I + I_d)(N_D - N_D^+) - \gamma_R N_e N_D^+, \quad (2.64)$$

donde  $N_e$  es la densidad de electrones en la banda de conducción,  $N_D$  es la densidad de impurezas donadoras,  $\gamma_R$  la tasa de recombinación de los portadores de carga,  $\hat{s}$  es la sección transversal de foto-ionización,  $I$  es la intensidad óptica del haz que viaja por el medio y  $I_d$  es la llamada *dark intensity* (intensidad de fondo). La densidad de corriente  $J$  está dada por tres efectos: *drift*, difusión térmica y efecto fotovoltaico

$$\vec{J} = eN_e\mu\vec{E} + k_bT\mu\vec{\nabla}N_e + \kappa_{eff}\hat{s}(N_D - N_D^+)I\hat{c}, \quad (2.65)$$

con  $\mu$  la movilidad del electron,  $k_b$  la constante de Boltzmann,  $T$  la temperatura,  $\kappa_{eff}$  es la constante fotovoltaica del material y  $\hat{c}$  es un vector unitario a lo largo del eje  $c$  del material. Como estamos interesados en trabajar en cristales SBN, sólo consideraremos los términos de *drift* y difusión para la densidad de corriente, al contrario de otros materiales como  $\text{LiNbO}_3$  donde el efecto fotovoltaico es importante. Asumiendo que todos los aceptores  $N_A$  están ionizados, la densidad  $\rho$  queda como

$$\rho = e(N_D^+ - N_A - N_e), \quad (2.66)$$

y se cumple la ley de Gauss

$$\nabla \cdot (\epsilon E) = \rho = e(N_D^+ - N_A - N_e). \quad (2.67)$$

Como sólo los electrones se consideran portadores de carga móviles, asumimos impurezas donadoras o aceptoras estacionarias, por consiguiente la ecuación de conti-

nidad queda como

$$\frac{\partial}{\partial t}(N_D^+ - N_e) + \frac{1}{e}\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0, \quad (2.68)$$

con  $e$  la carga elemental. Este set de ecuaciones dan cuenta del modelo de Kukhtarév de materiales fotorefractivos. Haciendo uso de la aproximación isotrópica [40], diremos que

$$N_D, N_A \ll N_e \quad N_D^+ \ll N_e,$$

por lo tanto de (2.67), obtenemos

$$N_D^+ = N_A \left( 1 + \frac{\epsilon}{eN_A} \frac{\partial E_{sc}}{\partial x} \right), \quad (2.69)$$

donde hemos considerado  $E_{sc}$  en una sola dirección  $x$ . También tomaremos condiciones *steady-state* (estacionarias), por lo que desde (2.64) encontramos que

$$N_e = \frac{\hat{s}(N_D - N_A)}{\gamma_R N_A} (I + I_d) \left( 1 + \frac{\epsilon}{eN_A} \frac{\partial E_{sc}}{\partial x} \right)^{-1}. \quad (2.70)$$

Asumiendo que la intensidad  $I$  del haz que pasa por el cristal tiende asintóticamente en los bordes del mismo a un valor constante  $I(x \rightarrow \pm\infty) = I_\infty$  y que en esta región  $E_{sc}(x \rightarrow \pm\infty) = E_0$ , la densidad de electrones libres en los bordes del cristal  $N_{e0}$  queda como

$$N_{e0} = \frac{\hat{s}(N_D - N_A)}{\gamma_R N_A} (I_\infty + I_d). \quad (2.71)$$

Tomando en cuenta que estamos en *steady-state*:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$  y  $J$  es constante en todos los lugares del cristal, en particular lo es también en los bordes, por lo tanto de (2.68)

$$N_{e0}E_0 = N_e E_{sc} + \frac{k_b T}{e} \frac{\partial N_e}{\partial x}, \quad (2.72)$$

de donde se obtiene que

$$E_{sc} = \frac{N_{e0}E_0}{N_e} - \frac{k_b T}{eN_e} \frac{\partial N_e}{\partial x}. \quad (2.73)$$

Reemplazando la ec. (2.70) en la última ecuación y usando (2.71), obtenemos finalmente

$$E_{sc} = E_0 \frac{I_\infty + I_d}{I + I_d} \left( 1 + \frac{\epsilon}{eN_A} \frac{\partial E_{sc}}{\partial x} \right) - \frac{k_b T}{e} \frac{\partial I / \partial x}{(I + I_d)} + \frac{k_b T \epsilon}{e^2 N_A} \left( 1 + \frac{\epsilon}{eN_A} \frac{\partial E_{sc}}{\partial x} \right)^{-1} \frac{\partial^2 E_{sc}}{\partial x^2}. \quad (2.74)$$

Considerando que el efecto de *drift* es el dominante, al no considerar términos de difusión a temperatura ambiente, y además si la intensidad  $I$  del haz varía lentamente con respecto a  $x$ , se tiene  $(\epsilon/eN_A)\partial E_{sc}/\partial x \ll 1$  [40], obtenemos una expresión final para el *space charge field*  $E_{sc}$  generado dentro del cristal, dado por

$$E_{sc} = E_0 \frac{I_\infty + I_d}{I + I_d}. \quad (2.75)$$

Para configuraciones típicas de laboratorio en que se usan haces gaussianos, podemos asumir  $I_\infty = 0$  ( $I_\infty$  puede ser distinto de cero para configuraciones especiales, como *dark solitons* [40]), por ende  $E_{sc}$  queda como

$$E_{sc} = E_0 \frac{I_d}{I + I_d}. \quad (2.76)$$

Para la obtención de una ecuación que estudie la dinámica de un haz de luz en un cristal fotorefractivo, partiremos de la ecuación de Helmholtz (2.3). Haciendo ahora incapie que hay dos casos, uno para cuando el haz tenga polarización vertical y el otro para el caso horizontal, debido a los distintos valores de los coeficientes electro-ópticos. Tenemos

$$\nabla^2 \vec{E} + k_0^2 n_{e,o}^2 \vec{E} = 0, \quad (2.77)$$

con  $n_e$  haciendo referencia para el caso de polarización extraordinaria y  $n_o$  para el caso de polarización ordinaria. Como vimos antes, el índice de refracción inducido está dado en la ec. (2.63), por tanto  $n_{e,o}^2 = n_{eff}^2 + \Delta n^2 = n_{eff}^2 - n_{e,o}^4 r_{33,13} E_{sc}$ . Ocupando

el mismo desarrollo que en la Sec. 2.1.1, diremos que el campo eléctrico se puede escribir como  $\vec{E} = A(x, z)e^{ikz}\hat{e}_x$ , reemplazando en (2.77), obtenemos [40, 42]

$$i\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{2k_{e,o}}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{k_0}{2}n_{e,o}^3 r_{e,o} E_{sc} A = 0, \quad (2.78)$$

con  $r_e = r_{33}$  y  $r_o = r_{13}$ . Usando la relación encontrada en (2.76) para el *space charge field*, que es para el caso  $n_e$ , podemos normalizar la ecuación, diciendo que  $x = sx_0$ ,  $z = k\xi x_0^2$ ,  $I = n_e|A|^2/2\eta_0$  y  $A = U\sqrt{2I_d\eta_0/n_e}$ , con  $x_0$  un ancho espacial arbitrario, obteniendo

$$i\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} - \gamma\frac{U}{1+|U|^2} = 0, \quad (2.79)$$

con  $\gamma = \frac{(k_0 x_0)^2 n_e^4 r_{33} E_0}{2}$ .

Discretizando la red como  $U(nd) = a_n$ , con  $d$  un espaciado de red adimensional, tenemos que  $\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} = a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n$ . Si usamos que  $u_n = a_n e^{2iz}$ , obtenemos una ecuación tipo DNLS, con no linealidad saturable [43]

$$i\frac{\partial a_n}{\partial z} + a_{n+1} + a_{n-1} - \gamma\frac{a_n}{1+|a_n|^2} = 0. \quad (2.80)$$

## Capítulo 3

# No linealidad cúbica: condiciones para auto-atrapamiento de la luz en arreglos de guías de ondas, con excitación inicial de sólo una guía

El auto-atrapamiento o localización de haces de luz en un medio no lineal ha sido ampliamente estudiado, desde su formulación en el trabajo de Chiao et al [3] hasta la fecha [17, 44–49]. El auto-atrapamiento ocurre cuando se cumple un preciso balance entre la dispersión, que hace que el haz de luz se expanda, y la no linealidad, la cual hace que el haz se localice. A estos paquetes de ondas auto-atrapados, se les llama solitones ópticos, y se caracterizan por mantener una forma constante a medida que se propagan, pudiéndolos también encontrar en sistemas discretos [10]. Modos localizados son un caso especial, y aunque exista no linealidad, pueda que no sea suficiente para su formación, y ocurra que el haz de luz tienda a expandirse por todo el arreglo, donde claramente no preserva su forma inicial. Pero si se aumenta la no linealidad, pasará de estar deslocalizado por todo el arreglo a localizarse en unos pocos sitios. Entonces una pregunta que nos formulamos es ¿qué valor de no linealidad es necesaria para localizar una excitación inicialmente muy localizada?



Han habido trabajos tratando de responder esta pregunta, como el de la Ref. [50] donde encuentran que la transición hacia la localización en un sistema de dos guías de ondas con no linealidad cúbica está caracterizado por un valor crítico de no linealidad  $\gamma_c = 4$ . En la Ref. [19] se exploran sistemas más grandes, donde se encuentra que a medida que aumenta el número de sitios, el valor de  $\gamma_c$  tiende al valor encontrado para el caso de dos guías de ondas. En la Ref. [51] se desarrolló un criterio que les permitió encontrar un valor de  $\gamma_c = 4$  para el caso de una dimensión y  $\gamma_c = 7.3$  para redes dos dimensionales.

En este capítulo propondremos un criterio que define un espacio de parámetros en donde ocurre la transición desde un estado deslocalizado a uno localizado, para redes con distinta topologías y dimensiones, con no linealidad cúbica. Estudiaremos la frecuencia efectiva y el grado de participación, con lo cual podremos determinar cuando un paquete de ondas se localiza en el arreglo, encontrando un valor crítico para la no linealidad.

### 3.1. Modelo

La propagación de ondas en guías de ondas débilmente acopladas con no linealidad cúbica es descrita por la ec. (2.56) para el caso de una dimensión, la cual puede ser generalizada a más dimensiones:

$$i \frac{\partial u_{\vec{n}}}{\partial z} + \epsilon_{\vec{n}} u_{\vec{n}} + C \sum_{\vec{m} \neq \vec{n}} u_{\vec{m}} + \gamma |u_{\vec{n}}|^2 u_{\vec{n}} = 0, \quad (3.1)$$

con  $\epsilon_{\vec{n}}$  la energía de sitio [corresponde a la constante de propagación  $\beta$  en la ec. (2.56)] o energía *on-site*. Se hace hincapié ahora que el arreglo puede estar en distintas configuraciones y dimensiones dado por el subíndice  $\vec{n}$ . Esto se encuentra patente en la sumatoria, pues por ejemplo para el caso de una dimensión éste término sería

$C(u_{n+1} + u_{n-1})$ , pero para una red rectangular isotrópica en dos dimensiones sería  $C(u_{n+1,m} + u_{n-1,m}, u_{n,m+1} + u_{n,m-1})$ . Estamos interesados en particular en 5 diferentes tipos de redes: uni-dimensional (1D), dos-dimensional cuadrada (2D-s), 2D hexagonal (2D-h), 2D honeycomb (2D-hc) y tri-dimensional (3D) cúbica<sup>1</sup> [ver Fig. 10].

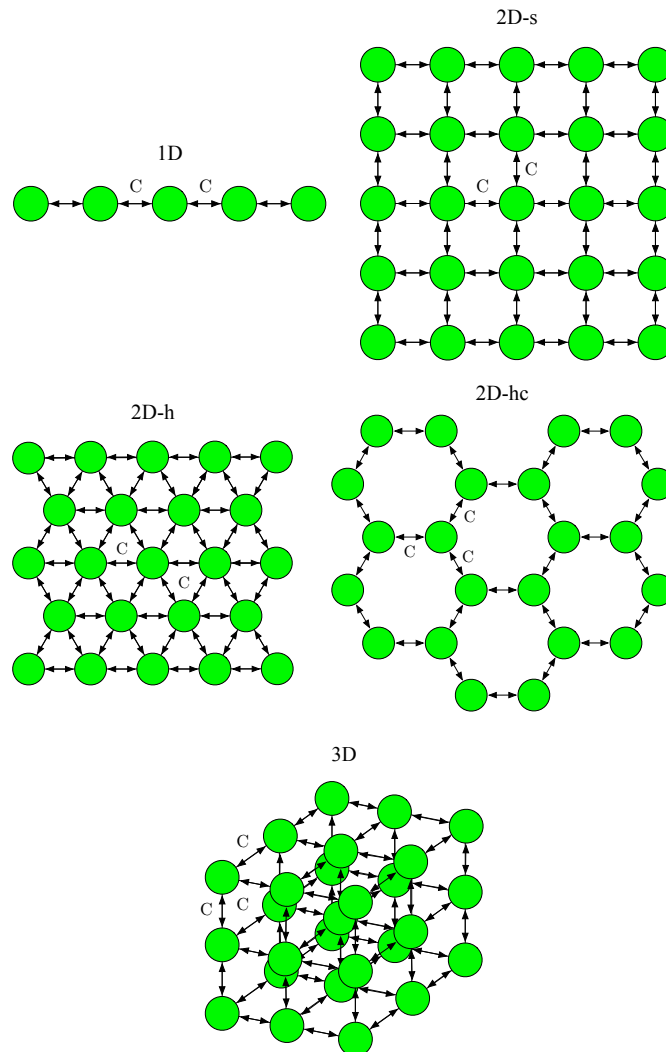


Fig. 10. Esquema de las distintas redes usadas: 1D, 2D-s, 2D-h 2D-hc y 3D.

El acoplamiento entre vecinos está dado por  $C$ .

<sup>1</sup>El caso 3D cúbico corresponde a condensados de Bose-Einstein atrapados en redes ópticas profundas

Este modelo posee dos cantidades conservadas. Una es la Potencia (Norma)

$$P = \sum_{\vec{n}} |u_{\vec{n}}|^2, \quad (3.2)$$

y la otra es el Hamiltoniano

$$H = \sum_{\vec{n}} \left[ \epsilon_{\vec{n}} |u_{\vec{n}}|^2 + \left( \sum_{\vec{m}} u_{\vec{m}} u_{\vec{n}}^* + c.c. \right) + \frac{\gamma}{2} |u_{\vec{n}}|^4 \right], \quad (3.3)$$

donde hemos usado sin pérdida de generalidad  $C = 1$ . Es importante definir la banda lineal del sistema, para ello en el régimen lineal ( $\gamma = 0$ ) buscamos soluciones estacionarias extendidas (ondas planas) del sistema tipo  $u_{\vec{n}}(z) = u_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ . Reemplazando en (3.1), para el caso 1D encontramos la relación ya encontrada en (2.27),  $\lambda(k_x) = 2 \cos(k_x \Lambda_x)$ , donde llamaremos  $\lambda_{top}$  a  $\lambda = 2$  como la cota superior y  $\lambda_{bot}$  para  $\lambda = -2$  como la cota inferior. Haciendo esto mismo para las demás redes encontramos para una red 2D honeycomb:  $\lambda(k_x, k_y) = e^{k_x \Lambda_x} + 2 \cos(\sqrt{3} k_y \Lambda_y / 2)$  y  $\lambda_{top} = 3$ , 2D cuadrada:  $\lambda(k_x, k_y) = 2[\cos(k_x \Lambda_x) + \cos(k_y \Lambda_y)]$  y  $\lambda_{top} = 4$ , 2D hexagonal:  $\lambda(k_x, k_y) = 2[\cos(k_x \Lambda_x) + \cos(k_x \Lambda_x / 2) + \cos(\sqrt{3} k_y \Lambda_y / 2)]$  y  $\lambda_{top} = 6$  y 3D cúbica  $\lambda(k_x, k_y, k_z) = 2[\cos(k_x \Lambda_x) + \cos(k_y \Lambda_y) + \cos(k_z \Lambda_z)]$  y  $\lambda_{top} = 6$ . Soluciones dentro de la banda lineal se caracterizan por ser soluciones extendidas, por lo tanto soluciones localizadas (soluciones que abarcan muy pocos sitios excitados), las cuales estamos interesados en encontrar, deben estar fuera de esta banda lineal. La condición inicial que estudiaremos, es la excitación inicial de sólo una guía  $u_{\vec{n}}(0) = \delta_{\vec{n}, \vec{n}_0}$ , por lo que el Hamiltoniano y la Potencia quedan fijos al ser constantes dinámicas. Tendremos

$$P = P_0 = 1, \quad (3.4)$$

y

$$H = H_0 = \epsilon_{\vec{n}_0} + \gamma/2. \quad (3.5)$$

Como un indicador del grado de localización o auto-atrapamiento de la onda que se propaga en el arreglo, usaremos el grado de participación  $R$ , definido como

$$R(z) \equiv \frac{(\sum_{\vec{n}} |u_{\vec{n}}(z)|^2)^2}{\sum_{\vec{n}} |u_{\vec{n}}(z)|^4} = \frac{P^2}{\sum_{\vec{n}} |u_{\vec{n}}(z)|^4} . \quad (3.6)$$

Cuando este valor tiende a 1 implica que la onda propagante está localizada en un sólo sitio, puesto que

$$R(\delta_{\vec{n}, \vec{n}_0}) = 1 / \sum_{\vec{n}} |u_{\vec{n}}|^4 = 1 / (0 + \dots + 0 + 1 + 0 + \dots + 0) = 1 ,$$

en cambio tenderá a  $N$ , con  $N$  el número de guías de ondas, si las guías de ondas están todas igualmente excitadas, puesto que

$$R(\delta_{\vec{n}, \vec{n}_0}) = 1 / \sum_{\vec{n}} |u_{\vec{n}}|^4 = 1 / \left( \frac{1}{N^2} + \frac{1}{N^2} + \dots + \frac{1}{N^2} \right) = N .$$

Este valor será un buen indicador de cuando se están excitando frecuencias no lineales, puesto que su valor tenderá a 1 y los perfiles serán localizados, pero no nos entrega información directa acerca del valor de las frecuencias excitadas. Para ello consideraremos la aproximación dada en [52, 53]. Consiste en asumir cualquier perfil estacionario como un set de diferentes modos estacionarios, lineal y no lineal caracterizados por una frecuencia efectiva instantánea. Sea un modo estacionario de la forma  $u_{\vec{n}}(z) = u_{\vec{n}} e^{i\lambda_e z}$ , con  $\lambda_e$  la frecuencia efectiva. Luego lo reemplazamos en (3.1) y multiplicamos por  $u_{\vec{n}}^*$  y sumamos sobre todos los sitios del arreglo, obtenemos una expresión dada por

$$\lambda_e(z)P = H + \frac{\gamma P^2}{2R(z)} . \quad (3.7)$$

Pero los valores de  $P$  y  $H$  ya están definidos por (3.4) y (3.5), por lo tanto obtenemos una expresión más compacta para la frecuencia efectiva

$$\lambda_e(z) = \epsilon_{\vec{n}_0} + \frac{\gamma}{2} \left( 1 + \frac{1}{R(z)} \right) . \quad (3.8)$$

Antes de la transición de auto-atrapamiento en que el paquete de ondas se localiza en pocos sitios del arreglo, el haz difracta (difracción normal) abarcando gran parte del arreglo, por lo que en  $z_{max}$  (distancia escogida de tal manera que el paquete de ondas llega al borde del arreglo en el régimen lineal) tenemos que  $R(z_{max}) \rightarrow N \gg 1$ , entonces (3.8) queda como

$$\lambda_e(z_{max}) \approx \epsilon_{\bar{n}_0} + \frac{\gamma}{2}.$$

Al contrario, cuando hay localización del haz, tenemos que  $R(z_{max}) \rightarrow 1$ , por lo cual (3.8) queda como

$$\lambda_e(z_{max}) \approx \epsilon_{\bar{n}_0} + \gamma.$$

Por lo tanto, respecto a las frecuencias excitadas, toda la dinámica en arreglos de guías de ondas, con no linealidad cúbica, está contenida dentro de la siguiente región de parámetros:

$$\frac{\gamma}{2} \leq \lambda_e - \epsilon_{\bar{n}_0} \leq \gamma. \quad (3.9)$$

## 3.2. Propagación numérica

Para corroborar lo antes dicho, es que efectuamos distintas simulaciones computacionales de la dinámica envuelta en este problema para las distintas configuraciones escogidas. Los resultados, a modo de ejemplo, para el caso de una red 2D cuadrada son mostrados en la Fig. 11. Podemos ver la propagación del paquete de ondas para distintos valores de  $\gamma$  en (c), (d) y (e). En (c) y (d) notamos que el haz aun no se localiza (difracta), lo cual se ve reflejado en como se comportan los valores de  $R$  y  $\lambda_e$  (línea negra continua, azul segmentada y verde continua en Fig. 11). Estos valores de  $\gamma$  usados están dentro de la región de parámetros previo a la zona de auto-atrapamiento, donde los valores de la frecuencia efectiva se caracterizan por decrecer

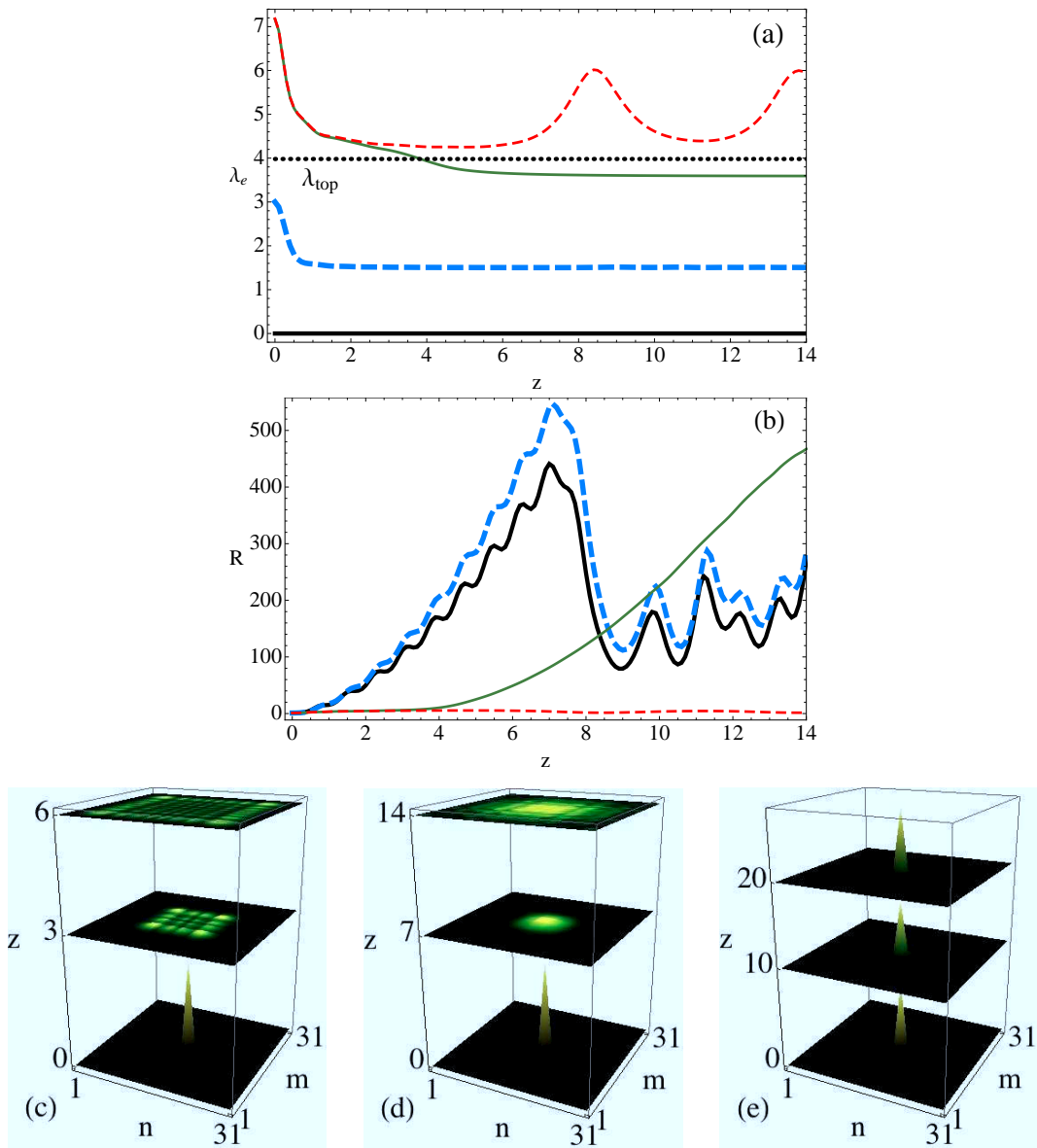


Fig. 11. Gráficos correspondientes al caso 2D cuadrado: (a)  $\lambda_e$  y (b)  $R$  vs  $z$  para  $\gamma = 0, 3, 7.17, 7.18$  representados por líneas negra continua, azul segmentada, verde continua y roja segmentada, respectivamente. Evolución dinámica de  $|u_{n,m}(z)|^2$  para (c)  $\gamma = 3$ , (d)  $\gamma = 7.17$  y (e)  $\gamma = 7.18$ . Se usó un arreglo de  $N = 31 \times 31$  sitios y  $\epsilon_{\vec{n}} = 0$ .

desde  $\gamma(z = 0)$  hasta  $\approx \gamma/2(z = z_{max})$ , y los del grado de participación desde  $R = 1$  hasta  $R \sim N \gg 1$ . Este comportamiento es entendido calculando la tasa de cambio de  $\lambda_e$ : derivando (3.8) con respecto a  $z$  obtenemos  $\partial\lambda_e/\partial z = -(\gamma/2R^2)\partial R/\partial z$ , por lo cual antes de la transición tenemos un valor decreciente en  $\lambda_e$  y creciente en  $R$  (asumiendo  $\gamma > 0$ ). Para este ejemplo  $z_{max} \approx 7$ , por lo cual valores de  $z$  mayores que  $z_{max}$  indican que el paquete rebotó en los bordes del arreglo, y por consiguiente pueden haber algunos cambios en las curvaturas, como en el caso de  $R$ . Cuando el valor de  $\gamma$  sobrepasa cierto valor crítico, las frecuencias no lineales excitadas son las predominantes, por lo que el perfil de la onda empieza a localizarse y el auto-atrapamiento empieza a ocurrir, implicando que  $\lambda_e$  es mayor que  $\gamma/2$  y su valor está fuera de la banda lineal ( $\lambda_e > \lambda_{top}$ ). Para el caso de una red 2D cuadrada, el valor crítico de  $\gamma$  es  $\gamma_c = 7.18$ . Es importante notar que hay ciertas oscilaciones del valor de  $\lambda_e$  alrededor de un valor promedio (ver Fig. 12), puesto que asumimos un perfil instantáneo con una frecuencia promedio de todas las frecuencias excitadas, y que analizaremos su validez en la siguiente sección. Además,  $\lambda$  no es una cantidad

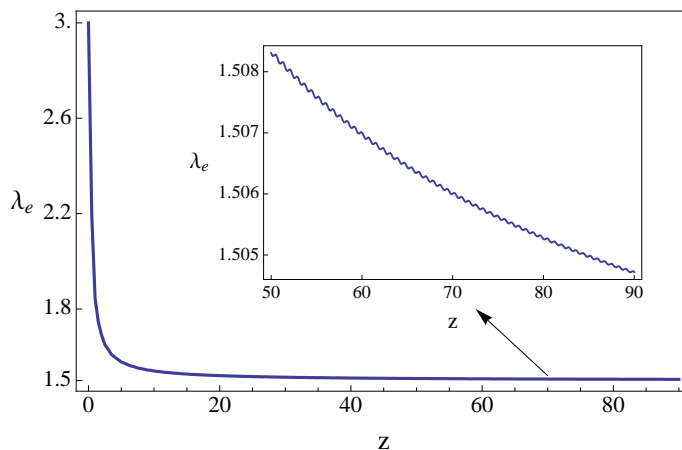


Fig. 12.  $\lambda_e$  vs  $z$  para una red 1D, usando  $\gamma = 3$  y  $\epsilon_{\vec{n}} = 0$ . El recuadro insertado corresponde a un zoom del gráfico mostrado.

conservada en la dinámica, por lo que se espera que varíe constantemente en  $z$ .

### 3.3. Frecuencia efectiva y frecuencia promedio

Para validar la interpretación de que  $\lambda_e$  es una frecuencia promedio del perfil que incluye todos los modos excitados durante la propagación, haremos lo siguiente: primeramente efectuamos una propagación numérica del sistema para obtener la amplitud  $u_n(z)$ . Luego, construimos una tabla para distintos valores equispaciados de  $z$  desde 0 hasta  $z_{max}$ , después calculamos la transformada de Fourier discreta longitudinal de cada guía de onda, definida como

$$\tilde{u}_n(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{z_{max}}} \sum_{r=1}^{z_{max}} u_{n,r} e^{2\pi i(r-1)(\lambda-1)/z_{max}}, \quad (3.10)$$

y posteriormente obtenemos una densidad espectral normalizada de la forma

$$g(\lambda, \gamma) = \frac{\sum_n |\tilde{u}_n(\lambda)|^2}{\sum_{n,\lambda_i} |\tilde{u}_n(\lambda_i)|^2}. \quad (3.11)$$

También calculamos una frecuencia promedio, definida como

$$\langle \lambda \rangle = \sum_{\lambda} \lambda g(\lambda, \gamma). \quad (3.12)$$

Gráficos de  $g(\lambda, \gamma)$  y  $\langle \lambda \rangle$  son mostrados en la Fig. 13. La figura a) muestra  $g(\lambda, \gamma)$  para el caso 1D. Vemos que a medida que crece el valor de  $\gamma$  empiezan a excitarse más modos del borde de la banda lineal  $\lambda_{top} = 2$ . Cuando  $\gamma$  sobrepasa un valor crítico, que para este caso de una dimensión corresponde a  $\gamma_c \gtrsim 3.6$ , marcado con una línea horizontal en Fig. 13(a), emerge un modo no lineal que es fuertemente excitado, puesto que es un *peak* grande y se tiene localización. Para valores mayores que  $\gamma_c$ , el auto-atrapamiento continúa y se aprecia que el valor de  $\lambda$  tiende a  $\gamma$  tal como lo predice nuestra predicción analítica (3.9). En la Fig. 13(b), comparamos la



frecuencia efectiva  $\lambda_e$  y la frecuencia promedio  $\langle \lambda \rangle$  donde notamos que hay un muy buen ajuste entre ambas. Vemos como ambas frecuencias se despegan de la recta  $\gamma/2$  hacia  $\gamma$  casi simultáneamente, exceptuando los puntos superiores cercanos a  $\gamma_c$ , debido a las fluctuaciones de  $\lambda_e$ . Para dimensiones mayores estas curvas se ajustan aun más, debido a que las fluctuaciones en la transición de localización son menores (como se mostrará a continuación), por lo cual nos lleva a validar nuestra suposición de  $\lambda_e$  como una frecuencia promedio y efectiva.

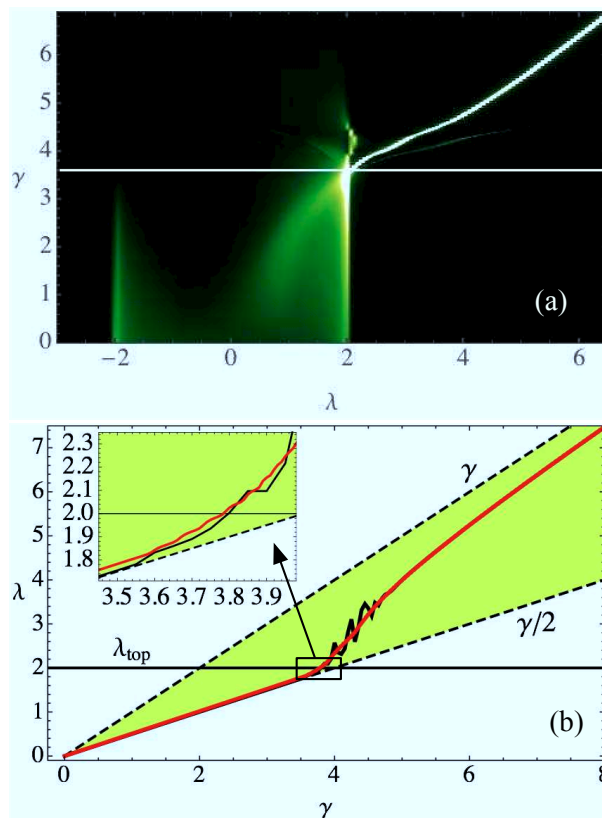


Fig. 13. (a) densidad espectral normalizada  $g(\lambda, \gamma)$  en función de  $\gamma$  y  $\lambda$ . (b)  $\lambda_e(z_{max})$  (línea negra) y  $\langle \lambda \rangle$  (línea roja) vs  $\gamma$ , donde se ha achurado la región dada por ec. (3.9) (líneas segmentadas). Ambas curvas fueron hechas en una red 1D con  $N = 401$  y  $\epsilon_{\bar{n}} = 0$ .

### 3.4. Transición de autoatrapamiento y valores de $\gamma_c$

Ahora procedemos a calcular  $\lambda_e$  para todos los arreglos en consideración, donde los resultados se encuentran en la Fig. 14(a). Se puede observar claramente que toda la dinámica está contenida dentro de la región de parámetros dado por (3.9). Se observa la transición desde  $\lambda_e \approx \gamma/2$ , o sea no linealidad pequeña, hasta  $\lambda_e \approx \gamma$ , cuando

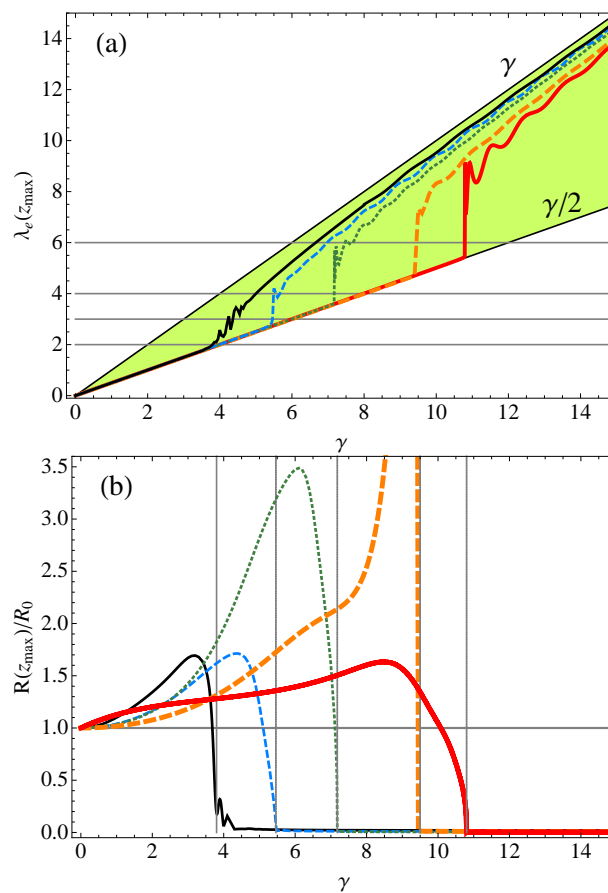


Fig. 14. Gráficos de (a)  $\lambda_e(z_{max})$  y (b)  $R(z_{max})/R_0$  vs  $\gamma$  para redes 1D (línea negra), 2D honeycomb (línea azul), 2D cuadrada (línea verde), 2D triangular (línea roja) y 3D (línea naranja). Se encuentran marcados valores de  $\lambda_{top}$  en (a) con líneas horizontales. Líneas verticales en (b) indican  $\gamma_c$ . Se usó  $\epsilon_{\vec{n}_0} = 0$

la no linealidad es suficientemente grande como para tener modos localizados. Esta transición es más suave para el caso 1D, debido a que no existe un umbral de potencia para modos localizados estacionarios no lineales [54, 55]. Para dimensiones mayores existe un umbral de potencia para excitar modos no lineales estacionarios [54], causando esto una brusca y abrupta transición en  $\lambda_e$ , así como también en  $R$ . Otra manera de ver la zona de auto-atrapamiento, es utilizando el grado de participación visto en la Fig. 14(b). Se utiliza  $R$  normalizado a  $R_0 = R(\gamma = 0, z_{max})$ . Acá la curvatura es aun más pronunciada entre un perfil deslocalizado a uno localizado, y los valores de  $R$  muestran claramente la transición hacia el auto-atrapamiento, donde  $R$  es pequeño con muy pocos sitios excitados. Notamos que también a medida que crecen las dimensiones del sistema, el cambio es más abrupto. De esta manera podemos calcular el  $\gamma_c$  para el cual tenemos modos localizados, el que ocurre cuando  $\lambda_{top} \approx \lambda_e(z_{max})$ . Estos valores de  $\gamma_c$  se encuentran en la Tabla 3.1. Notamos que para obtener  $\gamma_c$ , usamos que  $\lambda_e = \lambda_{top}$ , donde nuestra hipótesis es si la frecuencia efectiva está dentro de la banda lineal, el perfil interactúa con más modos lineales, tendiendo a deslocalizarse; en cambio, cuando la frecuencia efectiva está afuera de la banda lineal, el perfil interactúa con más modos no lineales y tiende a localizarse.

Tabla 3.1: Valores numéricos de  $\gamma_c$  y  $R_c$ .

Redes	1D	2D-hc	2D-s	2D-h	3D
$\gamma_c$	3.8	5.46	7.18	10.8	9.5
$R_c$	19	10.1	8.8	9	3.8

Este criterio puede ser aplicado para sistemas con bandas lineales simétricas con respecto a  $\lambda = 0$  (i.e.  $|\lambda_{top}| = |\lambda_{bot}|$ ). En este caso el valor de  $\gamma_c$  es independiente del signo de la no linealidad. Por lo tanto los valores encontrados de  $\gamma_c$  también aplican

para  $\gamma < 0$ . Para sistemas con bandas lineales no simétricas, este criterio también aplica, pero  $\gamma_c$  dependerá del signo de la no linealidad. Con este criterio podemos obtener una expresión para  $\gamma_c$  utilizando (3.8) dada por

$$\lambda_e = \lambda_{top} \Rightarrow \gamma_c = 2(\lambda_{top} - \epsilon_{\bar{n}_0}) \left( \frac{R_c}{1 + R_c} \right). \quad (3.13)$$

Notamos que obtenemos un nuevo parámetro extra,  $R_c$ , el cual decimos que corresponde a un tamaño crítico del paquete de ondas para el cual el auto-atrapamiento puede comenzar a ocurrir. Los valores de  $R_c$  para los arreglos están mostrados en la Tabla 3.1, donde se usó (3.13) y los valores de  $\gamma_c$  encontrados numéricamente. Se puede observar como a medida que aumenta la dimensión, los valores de  $R_c$  disminuyen. Un caso interesante es el de las redes 2D, por que el valor de  $R_c$  es muy similar para las redes estudiadas, tomando un valor cercano a 10. Usando este valor, se llega a una estimación de que  $\gamma_c$  corresponde aproximadamente a un  $\approx 90\%$  de las predicciones analíticas previas [51]. Para testear la validez de nuestros supuestos, es que analizaremos nuestro criterio en una red más compleja, la llamada red binaria diatómica [56]. Esta red está representada en la Fig. 15 y se caracteriza porque la energía de sitio  $\epsilon$  cambia periódicamente entre los sitios del arreglo, en nuestro caso tendremos  $\epsilon_{2\bar{n}+1} = 0$  y  $\epsilon_{2\bar{n}} = \Delta\epsilon$ , siendo  $\Delta\epsilon$  la diferencia de energía de sitio. Ahora la localización de la excitación inicial en el arreglo tendrá importancia, puesto que  $\epsilon$  varia de sitio a sitio y por lo tanto el factor  $\lambda_{top} - \epsilon_{\bar{n}_0}$  cambiará. Para obtener la expresión de  $\lambda_{top}$  para este caso, comenzamos escribiendo la ecuación lineal para los sitios con  $\epsilon = 0$  y  $\epsilon = \Delta\epsilon$  dada por la ec. (3.1)

$$\begin{aligned} i \frac{\partial u_{n,m}}{\partial z} + u_{n,m+1} + u_{n,m-1} + u_{n+1,m} + u_{n-1,m} &= 0, \\ i \frac{\partial w_{n,m}}{\partial z} + \Delta\epsilon w_{n,m} + u_{n,m+1} + u_{n,m-1} + u_{n+1,m} + u_{n-1,m} &= 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

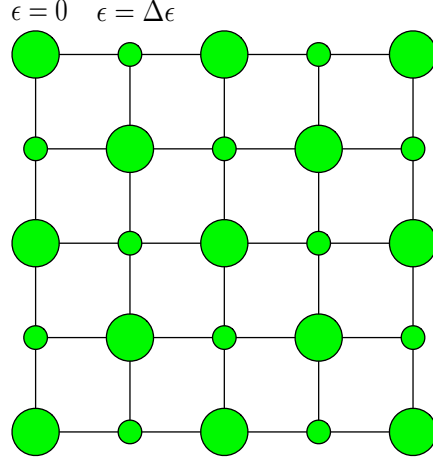


Fig. 15. Esquema de una red binaria 2D cuadrada.

donde  $u_{n,m}$  y  $w_{n,m}$  representan la amplitud en los sitios  $\epsilon = 0$  y  $\epsilon = \Delta\epsilon$  respectivamente. Usando soluciones estacionarias de la forma

$$u_{n,m} = B e^{i(\lambda z + k_x n + k_y m)},$$

$$w_{n,m} = A e^{i(\lambda z + k_x n + k_y m)},$$

las reemplazamos en la ec. (3.14), obteniéndose la relación de dispersión

$$\lambda(k_x, k_y) = \frac{\Delta\epsilon \pm \sqrt{\Delta\epsilon^2 + 16[\cos(k_x) + \cos(k_y)]^2}}{2}. \quad (3.15)$$

Por lo tanto  $\lambda_{top}$  ( $k_x = k_y = 0$ ) queda como

$$\lambda_{top} = \frac{\Delta\epsilon + \sqrt{\Delta\epsilon^2 + 64}}{2} \quad (3.16)$$

Usando (3.13) y tomando  $R_c = 10$ , obtenemos una estimación para no linealidad crítica, dada por

$$\gamma_c \approx 0.9(\sqrt{\Delta\epsilon^2 + 64} + \Delta\epsilon - 2\epsilon_{\bar{n}_0}) \quad (3.17)$$

De esta expresión notamos que para  $\epsilon_{\bar{n}_0} = \Delta\epsilon$ ,  $\gamma_c$  disminuirá si  $\Delta\epsilon$  aumenta. En

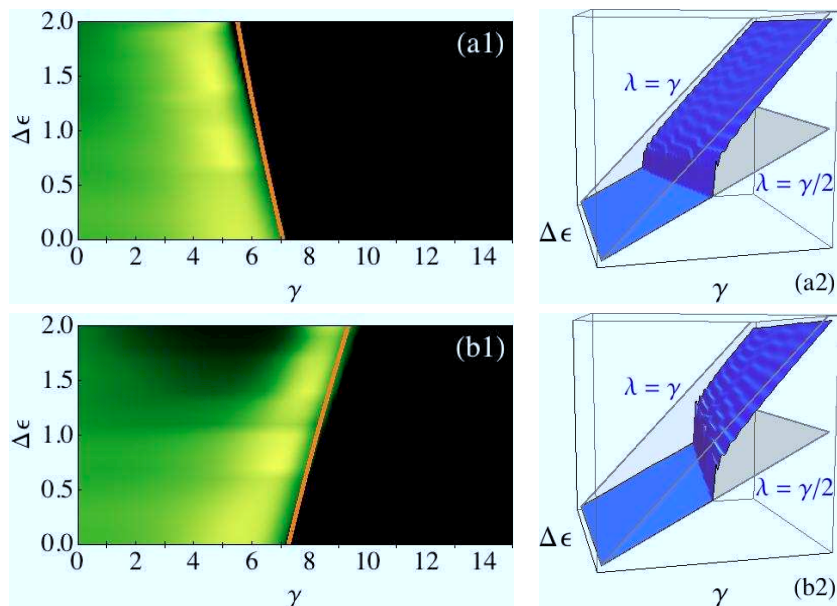


Fig. 16. Gráficos de  $R(z_{max})$  en función de  $\gamma$  y  $\Delta\epsilon$  para (a1)  $\epsilon_{\bar{n}_0} = \Delta\epsilon$  y (b1)  $\epsilon_{\bar{n}_0} = 0$  y  $\lambda_e(z_{max}) - \epsilon_{\bar{n}_0}$  en función de  $\gamma$  y  $\Delta\epsilon$  para (a2)  $\epsilon_{\bar{n}_0} = \Delta\epsilon$  y (b2)  $\epsilon_{\bar{n}_0} = 0$  para el caso de una red 2D binaria con  $N = 31 \times 31$  sitios.

cambio para  $\epsilon_{\bar{n}_0} = 0$ ,  $\gamma_c$  aumentará si  $\Delta\epsilon$  aumenta. En la Fig. 16 podemos observar nuestros resultados numéricos. En estos gráficos (a1,b1) se muestra  $R$  en función de  $\gamma$  y  $\Delta\epsilon$ , donde colores oscuros significan un valor de  $R$  pequeño y colores claros significan un valor de  $R$  grande y también en naranja se encuentra la expresión dada por (3.17). Se puede observar que nuestra estimación se ajusta casi exactamente a la transición observada numéricamente, confirmando nuestra estimación de un valor constante  $R_c$  para redes 2D. Figuras 16(a2,b2) muestran  $\lambda_e(z_{max}) - \epsilon_{\bar{n}_0}$  en función de  $\gamma$  y  $\Delta\epsilon$ . Podemos notar como el valor de  $\lambda_e(z_{max}) - \epsilon_{\bar{n}_0}$  (superficie azulada) tiende de  $\gamma/2$  a  $\gamma$  (límites graficados como superficies de color gris). Cabe recalcar que los gráficos mostrados en Fig. 16 muestran que la transición hacia un perfil localizado es abrupto (al igual que en los casos vistos en Fig. 14) y confirman lo dicho en (3.17),

en que se tienen resultados opuestos dependiendo de la condición inicial.

En resumen, el problema del auto-atrapamiento o localización de luz en distintas redes no lineales cúbicas fue estudiado para excitaciones iniciales de sólo un sitio, de manera analítica como numérica, encontrándose que toda la dinámica está contenida en una bien definida región de parámetros. Se encontraron valores numéricos de la no linealidad crítica para que ocurriera esta transición. También se mostró que el uso de la frecuencia efectiva da una buena intuición de las frecuencias que participan en la dinámica. Y se dió uso de un parámetro extra  $R_c$  que da cuenta del tamaño crítico del paquete de ondas para que ocurra el auto-atrapamiento, hallándose que su valor es casi constante en redes 2D, lo cual permitió describir muy bien una red binaria.

## Capítulo 4

# No linealidad saturable: solución intermedia en un sistema de dos guías de ondas débilmente acopladas

Los primeros efectos no lineales estudiados en sistemas de guías de ondas débilmente acopladas fueron hechos con una no linealidad tipo Kerr, con la cual se llega a una ecuación tipo Schrödinger no lineal, llamada DNLS por sus siglas en inglés [ver ec. (2.58)] y que ha sido ampliamente utilizada en distintos campos de la Física con resultados experimentales que le entregan gran validez a su uso. Posteriormente nuevos tipos de no linealidades fueron objeto de estudio, entre ellas la saturable. En parte esto es debido a que en la fabricación de guías de ondas, nuevos materiales fueron utilizados no presentando un comportamiento no lineal cúbico ( $n_{nlin} \propto I$ ) sino que de tipo saturable ( $n_{nlin} \propto 1/(1 + I)$ ), como por ejemplo guías de ondas de niobato de litio [21] o guías de ondas inducidas ópticamente en cristales fotorefractivos [16]. Por consiguiente, para el estudio de este nuevo sistema se ha hecho uso de una ecuación tipo DNLS pero con no linealidad saturable (ver Sec. 2.2.2 y Refs. [43, 57]). Uno de los temas de estudio en los sistemas de arreglos de guías de ondas con no



linealidad cúbica y que ahora se estudia en sistemas saturables es la movilidad de modos fundamentales dentro del arreglo a medida que se propagan a través de éste [20, 58, 59]. En estos trabajos se introduce la llamada solución intermedia (SI), que corresponde a una solución estacionaria asimétrica y que se caracteriza por aparecer cuando dos modos fundamentales son estables simultáneamente o, en otros casos [60], cuando dos modos fundamentales son inestables simultáneamente; en ambos casos, la SI conecta dos soluciones estacionarias del sistema y aparece en zonas de multiestabilidad. Cabe recalcar que la SI es inherente a sistemas saturables y que ha sido estudiada en arreglos de muchas guías de ondas. Por ende una pregunta que cabe hacerse es si esta fenomenología aparece en arreglos pequeños de guías de ondas. Es por ello que el propósito de este capítulo estará centrado en la búsqueda de esta solución y abordará el problema usando el arreglo de guías de ondas más pequeño posible: un sistema de sólo dos guías de ondas llamado dímero o *coupler*, donde se hará un estudio completo de este sistema, que contempla un análisis analítico, dinámico y experimental para verificar su existencia.

## 4.1. Modelo

Las ecuaciones que gobiernan la dinámica de un arreglo de dos guías de ondas débilmente acopladas con no linealidad saturable desenfocante están dadas por (2.80)

$$\begin{aligned} i\frac{\partial u_1}{\partial z} + u_2 + \gamma\frac{u_1}{1+|u_1|^2} &= 0, \\ i\frac{\partial u_2}{\partial z} + u_1 + \gamma\frac{u_2}{1+|u_2|^2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Este sistema posee dos cantidades conservadas (lo que también es válido para  $N$  guías de ondas), una es la Potencia (Norma)

$$P = |u_1|^2 + |u_2|^2, \quad (4.2)$$

y la otra es el Hamiltoniano

$$H = u_1 u_2^* + u_1^* u_2 + \gamma \ln[(1 + |u_1|^2)(1 + |u_2|^2)] . \quad (4.3)$$

Estamos interesados en soluciones estacionarias de la forma  $u_n(z) = u_n e^{i\lambda z}$ , con  $\lambda$  la frecuencia espacial. Debido a que es un sistema saturable, existen 2 regímenes de soluciones lineales; uno para potencias muy bajas, en que tenemos para la guía uno

$$i \frac{\partial u_1}{\partial z} + u_2 + \gamma u_1 = 0 , \quad (4.4)$$

puesto que  $\gamma u_1 / (1 + |u_1|^2) \rightarrow \gamma u_1$  para  $|u_1|^2 \ll 1$ . Procediendo de manera análoga para la guía dos, obtenemos

$$i \frac{\partial u_2}{\partial z} + u_1 + \gamma u_2 = 0 . \quad (4.5)$$

Reemplazando la solución estacionaria  $u_n(z) = u_n e^{i\lambda z}$  en (4.4),(4.5) y escribiendo estas 2 ecuaciones de forma matricial tenemos

$$\begin{pmatrix} \lambda - \gamma & -1 \\ -1 & \lambda - \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (4.6)$$

Para que no hayan soluciones triviales, el determinante tiene que ser igual a cero, obteniendo

$$(\lambda - \gamma)^2 - 1 = 0 ,$$

con lo cual obtenemos 2 frecuencias lineales, una es  $\lambda = \gamma + 1$  y la otra es  $\lambda = \gamma - 1$ .

Ahora haciendo este mismo análisis para potencias muy altas, obtenemos en la guía uno y dos respectivamente

$$\begin{aligned} i \frac{\partial u_1}{\partial z} + u_2 &= 0 \\ i \frac{\partial u_2}{\partial z} + u_1 &= 0 , \end{aligned}$$

puesto que  $\gamma u_{1,2}/(1 + |u_{1,2}|^2) \rightarrow 0$  para  $|u_{1,2}|^2 \gg 1$ , luego

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Imponiendo el determinante igual a cero,

$$\lambda^2 - 1 = 0 ,$$

con lo que obtenemos las frecuencias lineales  $\lambda = 1$  y  $\lambda = -1$ . Reemplazando los valores de  $\lambda$ , encontramos que en ambos regímenes las soluciones estacionarias son dos, la solución simétrica (sym)  $u_1 = u_2$  y la solución antisimétrica (ant)  $u_1 = -u_2$ , ambas mostradas en la Fig. 17. Para encontrar soluciones en el régimen no lineal, usaremos el ansatz  $u_1 = A$  y  $u_2 = \alpha A$ , donde  $A$  es una amplitud positiva y  $\alpha$  corresponde a la razón de amplitudes entre los dos sitios. Reemplazando en (4.1) se obtiene

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha + \frac{\gamma}{1 + A^2} , \\ \lambda &= \frac{1}{\alpha} + \frac{\gamma}{1 + \alpha^2 A^2} , \end{aligned} \quad (4.7)$$

despejando para  $\alpha$  se obtienen cuatro soluciones. Dos de ellas son  $\alpha = 1$  y  $\alpha = -1$ , por lo que las soluciones sym  $u_1 = u_2$  y ant  $u_1 = -u_2$  que habíamos encontrado en el régimen lineal, también son soluciones para el régimen no lineal. Las otras dos soluciones están dadas por

$$\alpha(\gamma, A) = \frac{-\gamma A \pm \sqrt{\gamma^2 A^2 - 4(1 + A^2)^2}}{2A(1 + A^2)} . \quad (4.8)$$

Ambas soluciones se caracterizan por ser no simétricas, donde el signo “+” en (4.8) corresponde a la solución asimétrica (asy) y el signo “-” corresponde a la llamada solución intermedia [20, 58, 59]. Todas estas soluciones están mostradas en la Fig. 17. Notemos que para el dímero con no linealidad cúbica desenfocante dado por (2.58),

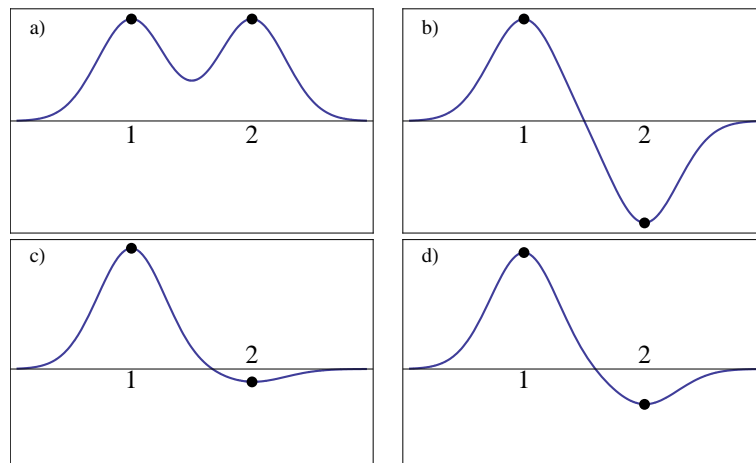


Fig. 17. Perfiles de soluciones estacionarias lineales y no lineales: a) sol. simétrica, b) sol. antisimétrica, c) sol. asimétrica y sol. intermedia. Los puntos indican la amplitud de  $u_{1,2}$  y para una mejor visualización hemos usado un perfil gaussiano en cada sitio.

las soluciones  $sym$  y  $ant$  existen para el régimen lineal como el no lineal (al igual a lo encontrado en el caso saturable), y existe una tercera solución no lineal dada por  $\alpha(\gamma, A) = -1/\gamma|A|^2$  que tiene un perfil asimétrico. No existe la SI en este caso.

Para ver la región de existencia de las soluciones, analizamos la relación entre la Potencia y  $\lambda$ . Recordemos que la Potencia está dada por

$$P = |u_1|^2 + |u_2|^2 = A^2(1 + \alpha^2)$$

teniéndose para las soluciones simétrica y antisimétrica  $P_{sym,ant} = 2|A|^2$  y usando (4.7), podemos encontrar las relaciones

$$P_{sym} = \frac{2(\gamma - \lambda + 1)}{\lambda - 1}, \quad (4.9)$$

$$P_{ant} = \frac{2(\gamma - \lambda - 1)}{\lambda + 1}, \quad (4.10)$$

las cuales se encuentran en la Fig. 18. En ésta figura se encuentran además las so-

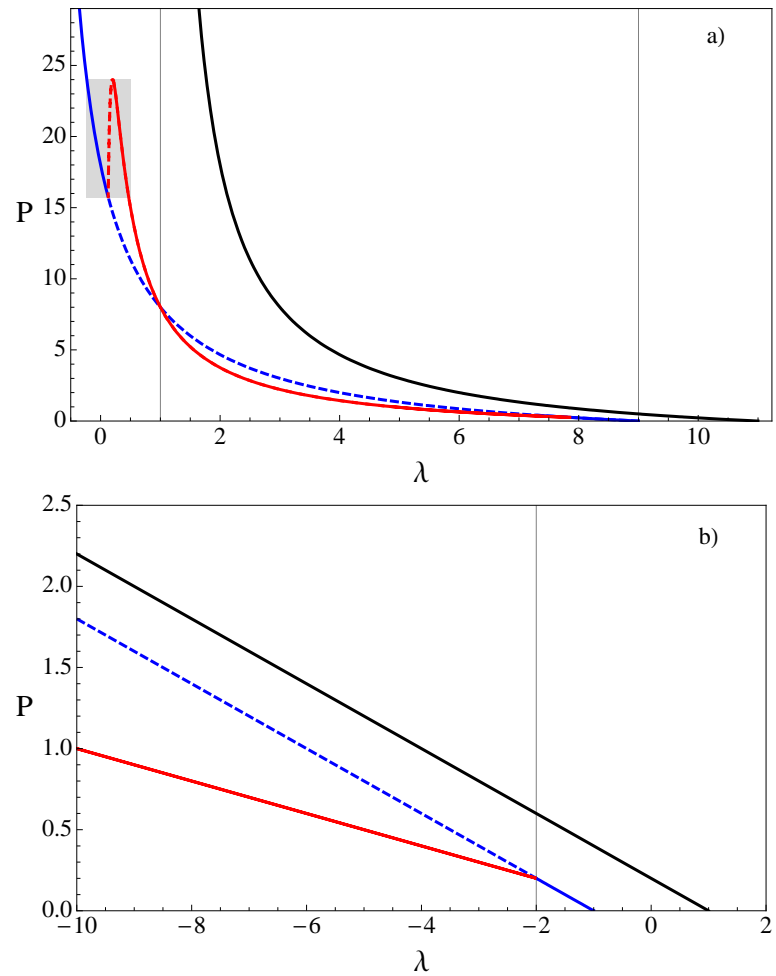


Fig. 18. Gráfico de  $P$  vs  $\lambda$  para el caso saturable (a) y caso cúbico (b). Para ambos casos: línea negra corresponde a la solución simétrica, la roja continua a la asimétrica, la azul continua y segmentada corresponden a las soluciones antisimétrica estable y antisimétrica inestable respectivamente. Para el caso saturable se tiene además una línea roja segmentada que es la SI. Líneas verticales indican frecuencias lineales. Se usó  $\gamma = 10$  para ambos casos.

luciones asimétrica e intermedia. Notamos de esta figura, para el caso saturable, que la solución asimétrica bifurca de la solución antisimétrica para valores de potencia muy bajos. A partir de ese punto, la solución asimétrica es estable y la solución anti-

simétrica pasa a ser inestable (se efectuó un análisis estándar de estabilidad lineal, ver Apéndice). Este modo crece monóticamente hasta alcanzar un valor máximo. Acá se aprecia un decaimiento en potencia y aparece un modo inestable, que corresponde a la solución intermedia, hasta que se fusiona con la solución antisimétrica y ésta pasa a ser la solución estable para potencias mayores. Cabe destacar que cuando la solución antisimétrica comienza a ser estable ( $P \approx 16$ ), la solución asimétrica también lo es, siendo ambas estables en un rango desde  $P \approx 16$  hasta  $P = 24$ , lo cual implica que este sistema saturable de sólo dos guías de ondas también presenta multiestabilidad. La solución inestable que conecta estas dos soluciones estables, en el mismo rango de potencia, es la solución intermedia.

En comparación con el régimen saturable, vemos que en el régimen cúbico una vez que solución antisimétrica se vuelve inestable, lo sigue siendo para potencias mayores, al contrario que en el caso saturable que después de una cierta potencia, vuelve a ser la solución estable (lo que da cuenta de que el sistema satura) y además el caso cúbico no presenta regiones de multiestabilidad.

## 4.2. Potencial efectivo

Una manera de estudiar las soluciones estacionarias sym, ant, asy, SI y su dinámica es a través de un Hamiltoniano, tal que los puntos críticos de este Hamiltoniano sean las soluciones estacionarias ya encontradas. Para nuestro caso es posible encontrar este nuevo Hamiltoniano, llamado potencial efectivo, a través del método del constraint [20,61,62]. Como nuestro modelo (4.1) es integrable, podemos obtener analíticamente el potencial efectivo. Para comenzar, dada una potencia  $P$  definiremos

el centro de masa de la luz como

$$x = \frac{\sum_n n |u_n|^2}{\sum_n |u_n|^2} = \frac{\sum_n n |u_n|^2}{P}, \quad (4.11)$$

donde ahora haremos un cambio del índice de guía  $n = 1, 2$  por  $n = 0, 1$  o sea  $u_1 \rightarrow u_0$  y  $u_2 \rightarrow u_1$ . Por conveniencia práctica seguiremos usando  $u_1$  (y no  $u_0$ ) para la guía uno y  $u_2$  para la guía dos. Luego (4.11) queda como

$$x = \frac{u_2^2}{P}. \quad (4.12)$$

El valor de  $x$  será un indicador de dónde se encuentra (en que guía) la luz. Definida de esta forma, si  $x = 1$  implica que  $P = u_2^2$  y toda la luz está en la guía dos, por el contrario si  $x = 0$  implica que toda la luz está en la guía uno y  $P = u_1^2$ . Un caso intermedio es cuando la luz está en la misma proporción en ambas guías, o sea  $x = 0.5$  y  $u_1^2 = u_2^2 = P/2$  que sería el caso de una solución simétrica o antisimétrica. Estudiaremos el caso de soluciones escalonadas (llamadas así porque las componentes de su perfil no están en fase, que en nuestro caso serían la solución antisimétrica, asimétrica e intermedia); o sea para  $\alpha$  negativo. De (4.12) obtenemos

$$u_2 = \mp \sqrt{xP},$$

y como se cumple que  $u_1^2 = P - u_2^2$  se obtiene

$$u_1 = \pm \sqrt{P(1-x)}.$$

Colocando estas expresiones en el Hamiltoniano (4.3), obtenemos

$$H(x, P, \gamma) = -2P\sqrt{x-x^2} + \gamma \ln(1 + P + P^2[x-x^2]). \quad (4.13)$$

De este Hamiltoniano podemos conocer las diferentes soluciones estacionarias, calculando los puntos críticos  $\partial H/\partial x = 0$ . Calculando estos puntos críticos, encontramos

que uno corresponde a  $x = 1/2$ , el cual ya sabemos que corresponde a la solución antisimétrica. Existen 4 puntos críticos más dados por

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{P^2 - 2\gamma^2 + 4(P + 1) \pm 2\gamma\sqrt{\gamma^2 - 4(P + 1)}}. \quad (4.14)$$

Notamos que estas soluciones estacionarias están simétricamente localizadas con respecto a la solución antisimétrica  $x = 1/2$  dado por el primer signo  $\pm$  en (4.14). La solución asimétrica corresponde al signo más dentro de la raíz cuadrada en (4.14). De esta expresión podemos calcular las regiones de existencia de estas soluciones, pues al ser  $x$  una cantidad real, podemos imponer para que valores esta raíz es real, encontrando que la potencia mínima de existencia para la solución asimétrica es  $P_{asy,min} = \gamma - 2 - \sqrt{\gamma^2 - 2\gamma}$ , que es justo donde la solución antisimétrica pasa de ser un mínimo, única solución estacionaria, a un máximo, solución inestable. La solución intermedia corresponde al signo menos dentro de la raíz cuadrada en (4.14) y existe por encima de un valor de potencia mínimo dado por  $P_{SI,min} = \gamma - 2 + \sqrt{\gamma^2 - 2\gamma}$ . Ambas soluciones existen hasta un valor máximo en potencia, que se puede desprender calculando para que valores de  $P$ , la raíz interna de (4.14) es real, obteniéndose que  $P_{asy,SI,max} = \gamma^2/4 - 1$ . Gráficos del potencial efectivo para distintos rangos de potencia se encuentran en la Fig. 19. Este cuadro muestra claramente el comportamiento saturable de este sistema; para valores bajo  $P_{asi,min}$  (línea punteada), existe solo una solución estable, la antisimétrica. Luego para valores de potencia entre  $P_{asi,min}$  y  $P_{SI,min}$  (línea segmentada), tenemos que la solución estable es la asimétrica y la inestable es la antisimétrica, tal como en un régimen con no linealidad cúbica. Pero por encima de este valor de potencia, aparecen dos mínimos simultáneamente, las soluciones asimétrica y antisimétrica, ambas estables, con un máximo entre ellas, que corresponde a la solución intermedia, la que es inestable. Esto es un indi-



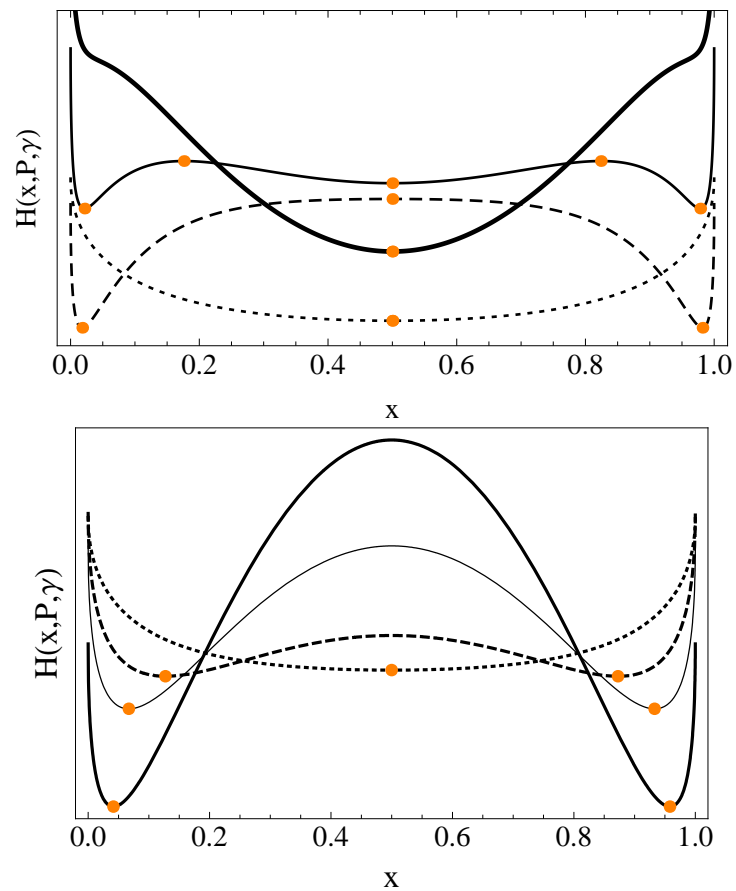


Fig. 19. Gráficos del potencial efectivo en el caso saturable (arriba) y caso cúbico (abajo) para distintas potencias. Arriba:  $P = 0.15$  (línea punteada),  $P = 15$  (línea segmentada),  $P = 19$  (línea continua delgada) y  $P = 26$  (línea continua gruesa). Abajo:  $P = 0.15$  (línea punteada),  $P = 0.3$  (línea segmentada),  $P = 0.4$  (línea continua delgada) y  $P = 0.5$  (línea continua gruesa). Los valores de  $H$  están normalizados para una mejor comprensión. Círculos indican soluciones estacionarias. Se usó  $\gamma = 10$  en ambos casos.

cio de la saturabilidad del sistema y que no aparece en sistemas con no linealidad cúbica. Más aun, subiendo en potencia, notamos que por sobre  $P_{asi,SI,max}$  las soluciones antisimétricas y asimétricas desaparecen completamente dejando solo a la

solución antisimétrica como la estable, puesto que para potencias grandes el sistema se comporta como un sistema lineal, y la solución antisimétrica es solución en ambos regímenes, lineal y no lineal.

A modo de verificación del distinto comportamiento entre el dímero cúbico y el dímero saturable, presentamos el cuadro del potencial efectivo para el caso cúbico (ver Fig. 19). Notamos que difiere del caso saturable, puesto que una vez se tiene una solución localizada asimétrica, se mantiene para cualquier potencia mayor, por tanto no presenta regiones de multiestabilidad, al contrario del caso saturable.

### 4.3. Análisis numérico

Usando los análisis previos hechos, donde encontramos soluciones estacionarias estables e inestables para ciertos rangos de potencia, haremos un estudio numérico de estas soluciones. Para ello simularemos la propagación de luz en este sistema dímero, para distintas condiciones iniciales y analizaremos la luz que sale al final, luego de una cierta distancia de propagación. La condición inicial está dada por:  $u_1(0) = A$  y  $u_2(0) = \alpha A$ , con  $-1 \leq \alpha \leq 0$ , lo cual nos permite barrer todas las diferentes soluciones escalonadas. La distancia de propagación estará dada por  $z_{max} = 5l_c$ , con  $l_c$  el largo de acoplamiento ( $l_c$  es la distancia necesaria para que la luz se transfiera completamente de una guía a otra, en el régimen lineal). Se pueden tomar otros valores de  $z_{max}$  siendo los resultados muy similares. Los resultados de la propagación dinámica se muestran en la Fig. 20, en un gráfico de densidad de  $x_{out} = |u_2(z_{max})|^2/P$ , en función de la potencia inicial  $P = A^2(1 + \alpha^2)$  y  $\alpha$ . La escala de colores en la Fig. 20 corresponde a lo siguiente: colores entre la gama del morado y azul representan soluciones localizadas cercanas al sitio uno ( $x_{out} \lesssim 0.2$ ), colores cercanos a la tonalidad verde representan soluciones antisimétricas ( $0.4 \lesssim x_{out} \lesssim 0.6$ )

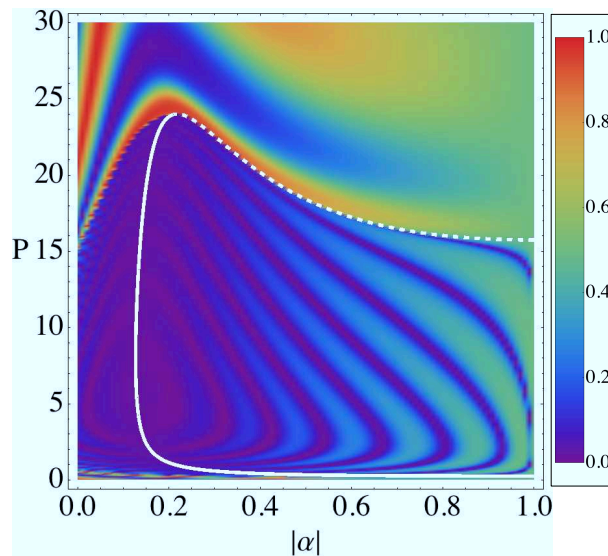


Fig. 20. Gráfico de densidad de  $x_{out}$  en función de  $P$  y  $|\alpha|$  para  $\gamma = 10$ . Línea blanca continua y segmentada corresponden a la solución asimétrica e intermedia respectivamente. La escala de colores indica el valor de  $x_{out}$  en  $z_{max}$ .

y colores entre la gama del naranja y rojo representan soluciones localizadas cercanas al sitio dos ( $x_{out} \gtrsim 0.8$ ). De este gráfico encontramos que para  $P \lesssim 1$  si  $|\alpha| \sim 0$  (perfil asimétrico) la luz oscila de una guía a otra, puesto que esta solución no es una solución estacionaria (de hecho, es combinación lineal de los 2 modos lineales del sistema). En cambio para  $|\alpha| \sim 1$  vemos un color verdoso, lo cual indica un perfil antisimétrico, que es la única solución estacionaria (escalonada) a este valor de  $P$ , y que es representado por la línea punteada en Fig. 19 como un mínimo. Para  $1 \lesssim P \lesssim 15$  vemos que si  $|\alpha| \lesssim 0.4$  la luz se encuentra localizada cercana al sitio uno, lo cual es indicio inequívoco de la excitación de un modo asimétrico estable. Para  $|\alpha| \sim 1$  hay oscilaciones de  $x_{out}$  lo cual es predecible para una solución inestable, como la antisimétrica. Este cuadro puede ser inferido desde la forma del potencial

correspondiente a la línea segmentada en la Fig. 19. En la región de potencia entre  $P \approx 16$  y  $P \approx 24$  encontramos que las dos soluciones, antisimétrica ( $|\alpha| \approx 1$ ) y asimétrica ( $|\alpha| \approx 0.15$ ) se propagan estables *simultáneamente*, puesto que mantienen su misma tonalidad de color en esta región. Este cuadro es bien descrito por la línea continua delgada en la Fig. 19 del potencial efectivo. Como hay dos mínimos que representan dos soluciones estacionarias estables, hay al menos un máximo que los conecte, una solución estacionaria inestable, que es la SI, representada por una línea punteada en la Fig. 20, y que se ajusta perfectamente a la región de parámetros en que son estables la solución antisimétrica y asimétrica lo que corresponde a una evidencia indirecta de la existencia de esta solución intermedia. Para  $P \gtrsim 24$  si  $|\alpha| \lesssim 0.8$  vemos una oscilación entre una guía y otra pero en cambio para  $|\alpha| \gtrsim 0.8$  notamos un solo color (tonalidad verde) que representa un modo antisimétrico estable, lo que corresponde a la línea continua gruesa en la Fig. 19. Cabe destacar que todos estos resultados de propagación numérica están en completa concordancia con el análisis del potencial efectivo, mostrado en la Fig. 19, y el análisis analítico mostrado en la Fig. 18.

#### 4.4. Resultados experimentales

Se realizaron experimentos para corroborar lo expuesto anteriormente. Esto se logró en mi estadía científica en la Helmut Schmidt University, ubicada en Hamburgo, Alemania, con un grupo de trabajo liderado por el Dr. Detlef Kip. El setup experimental que usamos está mostrado en la Fig. 21. Un láser de luz continua de 532 nm de longitud de onda se propaga a través de una máscara de fase, la cual hace que la mitad del haz se desfase con respecto a la otra, y se obtenga un perfil escalonado como input. Luego con un sistema de imagen llamado 4f compuesta por

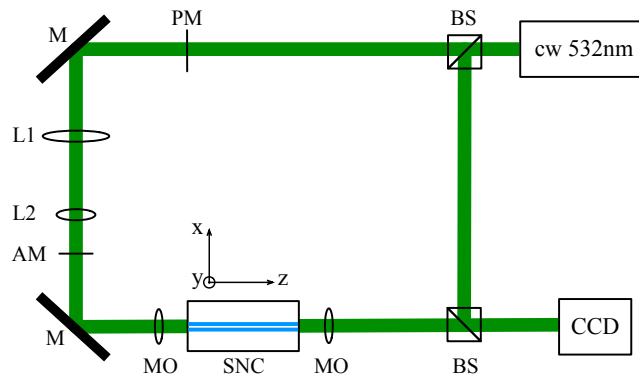


Fig. 21. Setup experimental. Láser continuo de 532 nm, separadores de haces BS, máscara de fase PM, espejos M, lentes L, máscara de amplitud AM, objetivo de microscopio MO, muestra de un acoplador (dímero) no lineal SNC, cámara CCD.

las lentes L1 y L2, el haz es proyectado en una máscara de amplitud de doble agujero, para así controlar la intensidad de la luz en cada sitio y por consiguiente variar en amplitud la forma del input. El input es inyectado en la muestra no lineal (dímero) a través de un objetivo de microscopio. La muestra fue fabricada en titanio mediante difusión en un substrato de niobato de litio dopado con hierro. Finalmente la luz que sale del arreglo es monitoreada por una cámara CCD. Se colocó un separador de haces entre la muestra y la cámara CCD para hacer interferencia entre la luz que sale del arreglo y luz del laser separada del setup por el primer separador de haces para verificar que efectivamente es un modo escalonado el que se está propagando por el arreglo. El ancho de cada guía es de  $4.0 \mu\text{m}$  con una separación de  $2.2 \mu\text{m}$ . En estas muestras la no linealidad crece con el tiempo de manera exponencial dado por  $\gamma(t) = \gamma(1 - \exp[-t/\tau])$ , con  $\tau$  el tiempo de respuesta dieléctrico [63]. Es por ello que para este experimento, el tiempo necesario para lograr una condición estacionaria (*steady-state*) fué de unos 25 minutos aproximadamente. Los datos experimentales

que se tomaron fueron obtenidos promediando los últimos 10 minutos de cada experimento, donde se colocaron distintas condiciones iniciales y que son mostrados en la Fig. 22. Los resultados están marcados por puntos conectados por una línea continua, mientras que las condiciones iniciales están conectados por una línea segmentada. Además se agregaron barras de error para indicación de cuán estable era la salida: una pequeña barra de error indica un perfil dinámicamente estable (una solución estacionaria estable), mientras que una gran barra de error indica todo lo contrario, es una gran oscilación en torno a la solución estacionaria estable. Para bajas potencias (100 y 200 nW) ambos perfiles (antisimétrico y asimétrico) se propagan a través del arreglo de manera esencialmente estable, coincidiendo con nuestro análisis en la zona de más baja potencia en que nace la solución asimétrica desde la antisimétrica y la desestabiliza sólo débilmente. Luego, para rangos de potencia entre 300 y 1300 nW, el modo asimétrico es estable y el antisimétrico es inestable. Pero este comportamiento tiene su punto de inflexión en 1300 nW de potencia. Desde este valor hasta 2300 nW observamos que ambas soluciones no lineales son estables simultáneamente. De esta manera, hemos observado experimentalmente un régimen multiestable, lo cual es una evidencia indirecta de la existencia de la solución intermedia en regímenes saturables. Por sobre este valor de potencia, la única solución estable es el modo antisimétrico, lo cual evidencia que el sistema ha saturado. Todos estos resultados experimentales muestran una muy buena concordancia con lo hecho analíticamente en la Fig. 18, en que en un rango de potencia sólo la solución asimétrica es la estable, luego para ciertos valores de potencia se observa multiestabilidad y, finalmente, para potencias más grandes sólo la solución antisimétrica es estable. También, muestran una concordancia con lo estudiado vía el potencial efectivo en la Fig. 19, el cual refleja qué soluciones estables (mínimos del potencial) se propagan

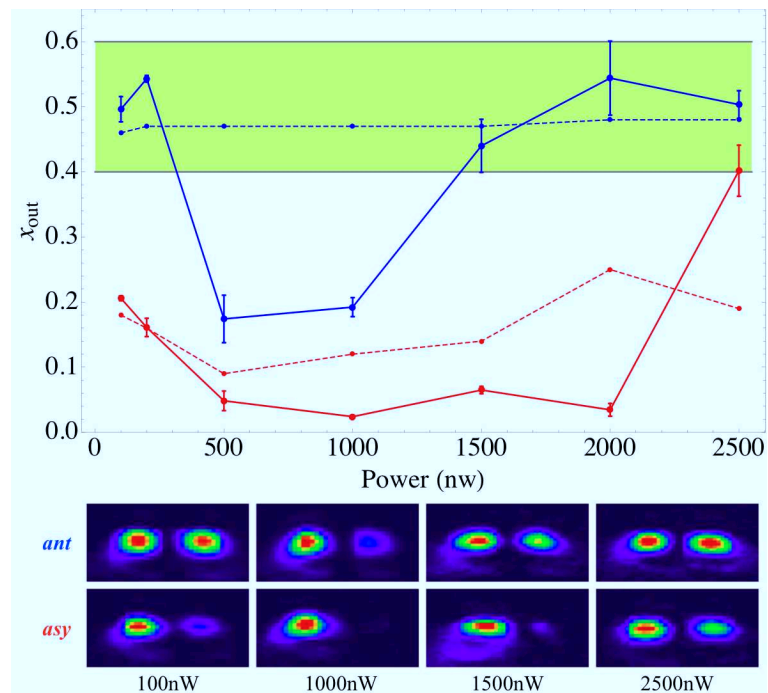


Fig. 22.  $x_{out}$  promediado en los tiempos finales vs la potencia inicial. Puntos conectados por una línea continua azul y roja representan el output medido para una condición inicial antisimétrica y asimétrica, los cuales tienen una condición inicial mostrada con puntos conectados por una línea segmentada azul y roja respectivamente. La parte de abajo de esta figura muestra imágenes reales tomadas del experimento (sin promediar), para los distintos valores de potencia que se usaron, donde se distinguen perfiles antisimétricos y asimétricos. El área achurada entre  $x_{out} = 0.6$  y  $x_{out} = 0.4$  es donde se considera tener un perfil antisimétrico.

por este sistema, y cuáles lo hacen de manera inestable (máximos del potencial). También notamos que los mínimos que representan las soluciones asimétricas son profundos lo cual se refleja en pequeñas barras de error, pero los mínimos que representan la solución antisimétrica tienen una forma más plana y podemos observar que

las barras de error de este modo son considerablemente más grandes que del modo asimétrico.

En conclusión, encontramos la solución intermedia y observamos un régimen de multiestabilidad para un dímero saturable. Se encontraron las soluciones estacionarias lineales y no lineales del sistema mediante métodos analíticos y uso de un potencial efectivo, pudiendo ver su región de existencia y estabilidad. Esto fue chequeado numéricamente, donde se encontró una muy buena concordancia. Se realizó una comprobación experimental a través de una muestra de niobato de litio, donde se observó una propagación estable de los modos asimétrico y antisimétrico para una misma potencia. Esto constituye una evidencia experimental de la existencia de la solución intermedia.



# Capítulo 5

## Trabajo experimental en guías de ondas y formación de solitones

Este capítulo tratará de la implementación experimental para la formación de guías de ondas, algunas de sus propiedades y formación de solitones en cristales SBN. La elección de estos cristales es debido a su alta plasticidad, pudiendo en teoría crear cualquier tipo de red periódica o aperiódica. Es así como nos propusimos poder aplicar esta técnica y centrarnos en la obtención de diversas redes. Todas las imágenes experimentales tomadas en este capítulo fueron obtenidas en el Laboratorio de Óptica no Lineal.

### 5.1. Formación de un solitón continuo en cristal SBN

La formación de solitones en cristales SBN (conocidos como *screening solitons*), puede generar soluciones estables [solitón en estado estacionario o *steady-state soliton* (SE)] o inestables [solitón en estado casi-estacionario o *quasi-steady-state soliton* (SCE)]. El proceso de formación de estos solitones es descrita a continuación. Un haz de luz incidiendo en un cristal fotorefractivo SBN produce la excitación de electrones desde donadores a la banda de conducción, los cuales se mueven por una fuerza de

*drift* debido a un voltaje externo, hasta que son atrapados por aceptores, causando la formación de un *space charge field* que apantalla (*screening*) parcialmente el campo externo aplicado (de ahí el nombre de *screening soliton*). Este campo resultante cambia el índice de refracción a través del efecto Pockels (2.63) y en consecuencia, el haz de luz modifica a si mismo el índice de refracción, lo que le permite auto-atraparse y desplazarse en el medio sin cambiar su forma, es decir un haz auto-localizado o solitón espacial. En el trabajo [64], encuentran una expresión analítica para un solitón, partiendo de la ecuación de onda no lineal saturable (2.79). Aquí los únicos parámetros críticos son el campo aplicado externo  $E_0$  y la razón entre la intensidad  $I(x)$  del haz y la dark irradiance  $I_d$  [64, 65]. Un punto muy importante es que los primeros experimentos donde se vieron auto-enfoque de luz [66], fueron hechos en un régimen con  $I_d$  muy pequeño, puesto que no tenían control experimental de esta variable. Esto producía solitones estables por un corto tiempo  $\sim 130$  milisegundos. A estos solitones se les conoce como SCE. Una manera de observar efectivamente un SE fue propuesta en [67] donde iluminaron completamente al cristal SBN con una luz de fondo o *background* de intensidad  $I_b$ . Esto produce que la razón entre las intensidades  $r = I(x)/I_d$  cambie a  $I(x)/(I_d + I_b)$ , con  $I_d \ll I_b$ , generando un mejor control de la no linealidad efectiva e impidiendo que el solitón se destabilice permaneciendo estable [68, 69]. En este trabajo de tesis, se reprodujeron los dos casos de *screening soliton*, donde los esquemas experimentales se encuentran en la Fig. 23. Un haz láser de  $\lambda = 532$  nm es enviado a través de un PBS, generándose 2 haces, cada uno con polarizaciones ortogonales, donde el haz con polarización extraordinaria (que coincide con la dirección del alto voltaje HV y el eje cristalino del cristal) es enviado a través de una lente convergente a la cara frontal del cristal SBN:65 con dimensiones de  $5 \times 5 \times 5$  mm<sup>3</sup> (también se realizaron experimentos con un cristal SBN:75 de  $10 \times 2 \times 5$

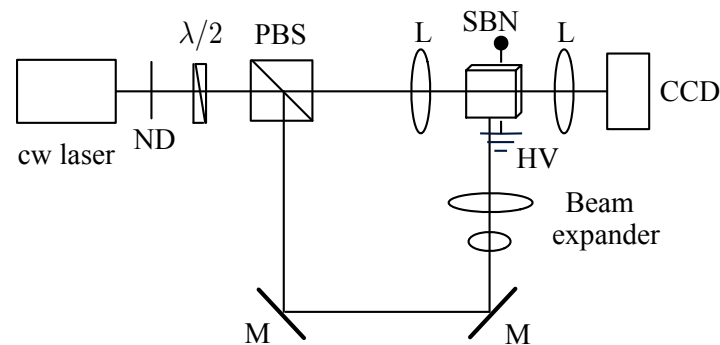


Fig. 23. Montaje experimental para la observación de un solitón continuo: filtro de densidad neutral ND, retardador de media onda  $\lambda/2$ , polarizador y separador de haces PBS, espejos M, lentes L, expansor de haz Beam Expander, cristal SBN, alto voltaje HV, cámara CCD.

$\text{mm}^3$ ). Este cristal al mismo tiempo es completamente iluminado lateralmente con el haz con polarización ordinaria (lo que previene la posibilidad de interferencia entre estos 2 haces). Cortando el paso de este haz, se obtiene el esquema de un SCE. Luego se aplica un voltaje que depende de la altura del cristal, con valores entre  $E_0 = 4-5$  kV/cm para el cristal de 5 mm de altura y  $E_0 = 0.5 - 1$  kV/cm para el cristal de 2 mm de altura. Imágenes tomadas a la entrada y salida del cristal se encuentran en la Fig. 24, donde podemos ver como en la ausencia de alto voltaje (caso lineal), el haz sufre difracción normal, pero cuando es activado el alto voltaje (caso no lineal), el haz empieza a localizarse y termina finalmente formando un *screening soliton*.

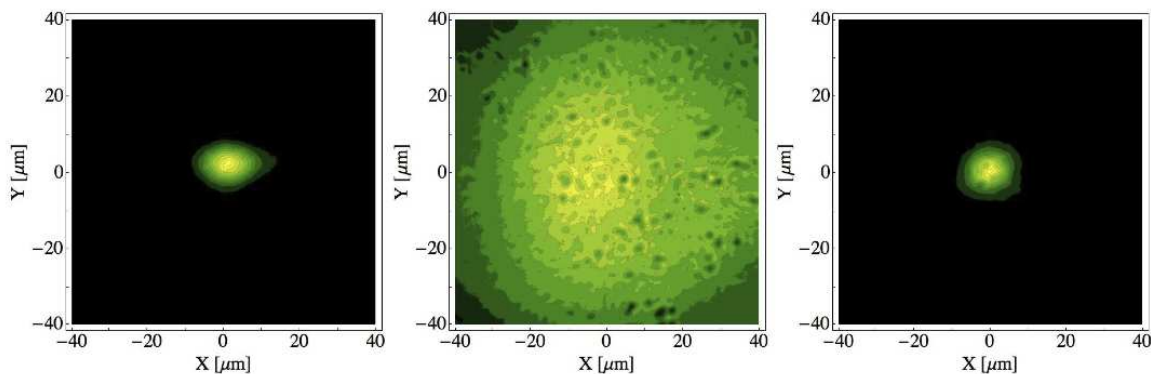


Fig. 24. Resultados experimentales de la formación de un solitón en un cristal SBN. De izquierda a derecha: imagen del haz tomada en la cara de entrada del cristal, luego imagen tomada a la salida del cristal con voltaje  $V = 0$  kV y finalmente imagen a la salida del cristal con  $V = 2$  kV.

## 5.2. Técnica de guías de ondas inducidas ópticamente en un cristal SBN

Como vimos en la sección anterior, una particularidad del cristal SBN es que al iluminarlo, aplicando además un cierto voltaje, es posible modificar su índice de refracción. La *técnica de inducción de guías de ondas* [16] ocupa este efecto en cristales fotorefractivos en especial en cristales SBN creando estructuras al interior del cristal que son capaces de guiar luz, cuya descripción es como sigue: Primeramente para crear una red periódica, necesitamos modificar el índice de refracción en varios puntos del cristal fotorefractivo, y que esta red sea invariante a lo largo del cristal. Esto es factible iluminando el cristal SBN con un patrón de interferencia formado con diversos haces y aplicando alto voltaje. De ahí el nombre de guías de ondas inducidas ópticamente. Una vez formada la red es posible propagar un haz (llamado haz de

prueba) a través de esta red inducida el que enfrentará un medio periódico, permitiendo el acople entre guías cercanas y al mismo tiempo, propagándose de manera no lineal, siempre y cuando se aumente la intensidad del haz de prueba o el alto voltaje igual que para la formación de un soliton continuo. También, podemos cambiar el signo de la no linealidad (enfocante o desenfocante) cambiando la polaridad del voltaje aplicado. El éxito de esta técnica radica en que la red inducida se comporte de manera lineal y el haz de prueba sea el que experimente una propagación no lineal. Esto es posible debido a una característica de los cristales SBN, que es que sus coeficientes electro-ópticos cumplan la relación  $r_{13} \ll r_{33}$ , por lo cual el efecto no lineal dado por (2.63) es mucho más fuerte para las ondas polarizadas extraordinariamente (haz de prueba) que para los haces que forman la red (polarizadas ordinariamente). Un punto importante es que para que las redes sean invariantes a lo largo del cristal es necesario que las ondas que forman el patrón periódico tengan la misma componente  $k_z$ , siendo  $z$  la coordenada de propagación a través del cristal. Esto es factible si las componentes de Fourier de cada una de las ondas que interfieren pertenecen a un mismo anillo (mismo radio) en este espacio, tal como en la Fig. 25. Esto se debe a que el vector de onda cumple la relación

$$|\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{2\pi}{\lambda},$$

con  $2\pi/\lambda$  constante, puesto que  $\lambda$  lo fija el láser. Así, para  $k_x, k_y$  pertenecientes a un anillo en el plano de Fourier,  $k_z$  será igual para todo haz perteneciente a ese anillo. Como resultado el patrón de interferencia será constante en la dirección de propagación  $z$ , generándose una estructura del índice de refracción invariante en esa dirección; es decir una red estacionaria.

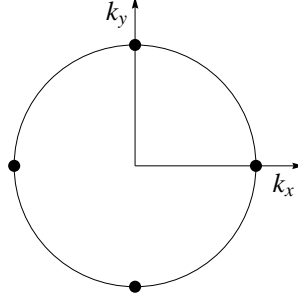


Fig. 25. Plano de Fourier con cuatro haces pertenecientes a un mismo anillo.

La ecuación dinámica que rige a estas dos ondas (tomando el caso 2D) son dadas por (2.78)

$$i\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2k_e} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0 n_e^3 r_{33} E_{sc}}{2} u = 0, \quad (5.1)$$

$$i\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{2k_o} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0 n_o^3 r_{13} E_{sc}}{2} v = 0, \quad (5.2)$$

donde  $u$  representa la envolvente del campo eléctrico del haz de prueba y  $v$  la envolvente del campo eléctrico de los haces que forman la red. A modo de ejemplo, podemos considerar la interferencia de cuatro haces y obtener una red 2D dada por  $|v(x, y)|^2 = I_v \cos^2(\pi x/D) \cos^2(\pi y/D)$  con  $D$  el periodo espacial de la red. La expresión del *space charge field* lo encontramos en (2.76), considerando ahora que la intensidad  $I$  es la suma de ambos haces  $I(x, y) = |u|^2 + |v(x, y)|^2$ . Tenemos

$$i\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2k_e} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0 n_e^3 r_{33} E_0}{2} \frac{u}{1 + [|u|^2 + I_v \cos^2(\pi x/D) \cos^2(\pi y/D)]/I_d} = 0 \quad (5.3)$$

$$i\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{2k_o} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (5.4)$$

Notemos que en la ecuación para  $v$ , hemos despreciado el término saturable puesto que  $r_{13} \ll r_{33}$ . La ecuación del haz de prueba puede tener un comportamiento lineal, que es cuando  $|u|^2 \ll I_v$  o puede ser no lineal que es cuando la intensidad del haz de prueba es comparable a la intensidad de la red.

### 5.2.1. Implementación experimental

El esquema experimental usado en esta tesis está ilustrado en la Fig. 26. Un haz de un laser COHERENT modelo Verdi G2, con  $\lambda = 532$  nm, es enviado a través de un filtro de densidad neutral (ND) y un retardador de media onda ( $\lambda/2$ ), para así controlar la intensidad de las distintas polarizaciones (ordinaria y extraordinaria). Luego pasa por un prisma Wollastom (WP) obteniéndose 2 haces, uno con polarización ordinaria que será el haz de red, y el otro haz con polarización extraordinaria que será el haz de prueba. El haz de red es enviado a un modulador espacial de luz

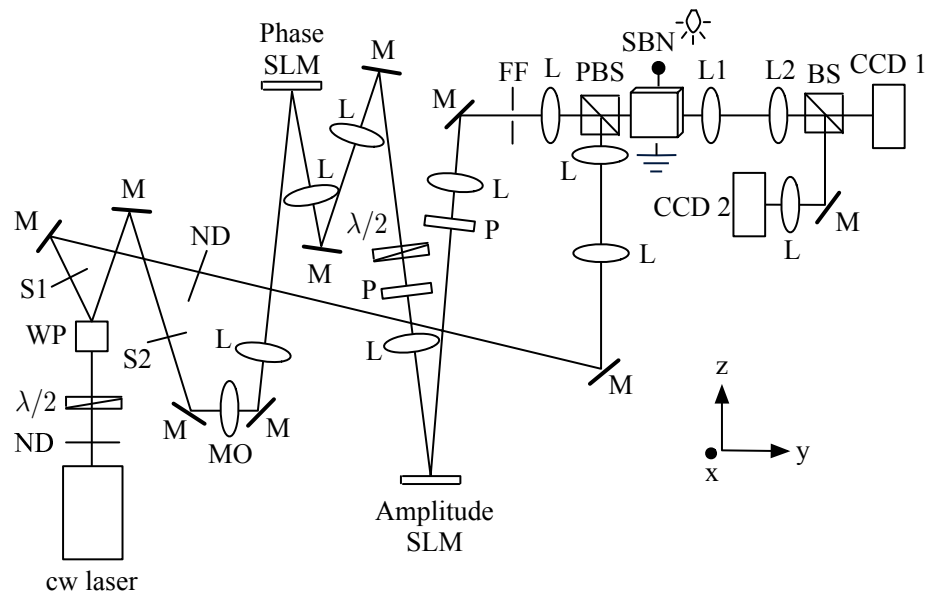


Fig. 26. Montaje experimental de una red inducida ópticamente: filtro de densidad neutral ND, retardadores de media onda  $\lambda/2$ , prisma Wollastom WP, obturadores S, espejos M, objetivo de microscopio MO, lentes L, modulador de fase Phase SLM, modulador de intensidad Amplitude SLM, polarizadores P, filtro de Fourier FF, polarizador y separador de haces PBS, cristal SBN, alto voltaje HV, separador de haces BS, cámara CCD.

(SLM), modelo PLUTO (HOLOEYE). Este modulador es capaz de modular la fase, con lo cual es factible crear un arreglo de diversas topologías y dimensiones. Así, por ejemplo, si se requiere una red cuadrada 2D, como el de la Fig. 27a [formada por la interferencia de 4 ondas planas  $v(x, y) = I_v(e^{ik_x x} + e^{-ik_x x} + e^{ik_y y} + e^{-ik_y y})$ , las cuales en el espacio de Fourier están sobre un mismo anillo (ver Fig. 27b), y que por lo tanto comparten el mismo  $k_z$ ], es necesario programar al modulador PLUTO con una imagen con la fase de la red requerida, calculada vía  $Arg(v)$ , lo que es mostrado en la Fig. 27c. El haz que sale de este SLM es enviado a un segundo modulador, modelo LCR-1080 (HOLOEYE) que puede modular en intensidad y funcionar como una máscara de amplitud. Allí se realiza una transformada de Fourier de la imagen generada por el primer modulador. Esto se hace para poder filtrar (en intensidad) en el espacio de Fourier haces que corresponden a ordenes de difracción mayores que se forman de manera natural al pasar por el modulador PLUTO, pero que al interferir forman un arreglo distinto al deseado, debido a la adición de otros haces. Por lo tanto, es necesario enviar a este modulador una imagen del anillo en el espacio de Fourier como el de la Fig. 27b, de tal manera que sólo refleje las componentes de Fourier que estén en este anillo, y reduzca en gran medida cualquier otra componente parásita. Notamos que previo y posterior al segundo modulador hay un  $\lambda/2$  y unos polarizadores, los cuales son necesarios para el correcto funcionamiento de este SLM. También se hace uso de un filtro de Fourier (FF) manual para bloquear completamente cualquier haz innecesario para la formación de la red. El haz de red es finalmente enviado a un cristal SBN:75 de dimensiones  $10 \times 5 \times 2 \text{ mm}^3$  con coeficientes electro-ópticos  $r_{33} = 1340 \text{ pm/V}$  y  $r_{13} = 67 \text{ pm/V}$ . A este cristal le es aplicado un campo eléctrico externo  $E_0$  de valores entre  $|E_0| = 1 - 2 \text{ kV/cm}$ . Cabe recalcar que la dirección con que se aplica  $E_0$  corresponde a la misma dirección de polarización



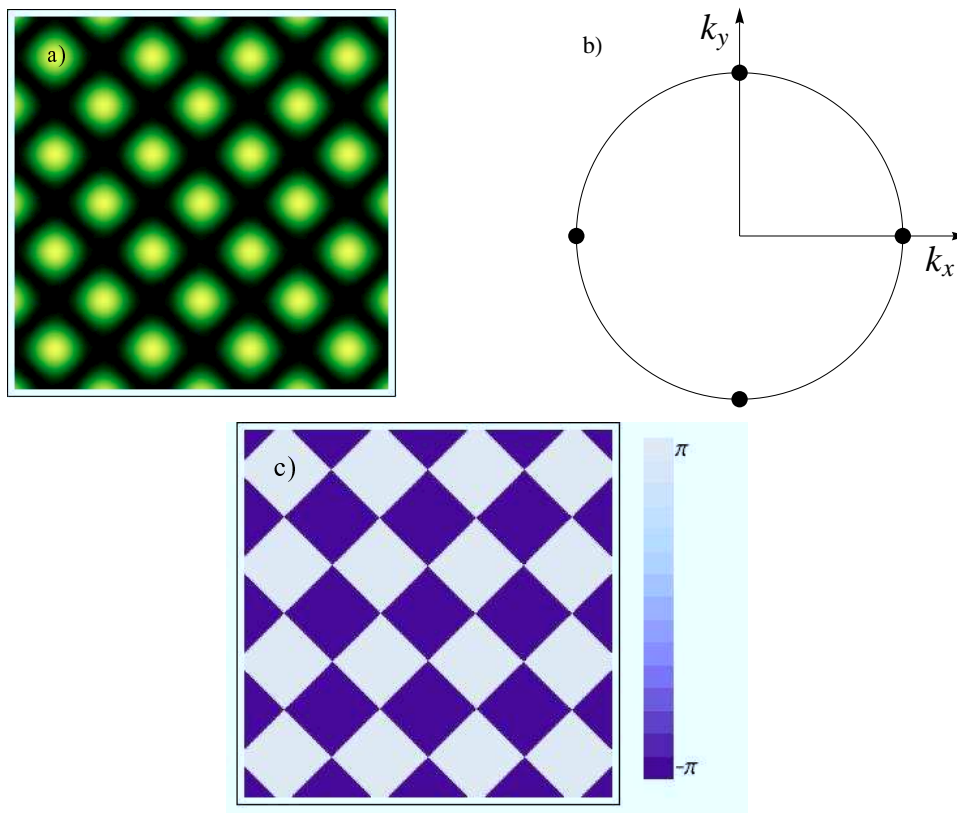


Fig. 27. Esquema de funcionamiento SLM PLUTO: a) red cuadrada 2D que se desea inducir, b) anillo en el espacio de Fourier, con las 4 componentes que forman la red y c) mapa de fase de la red.

del haz de prueba. Una vez que el arreglo está formado en el cristal (tiempo estimado de al menos 30 segundos), el haz de prueba es lanzado (esto se logra abriendo el obturador S1). El haz pasa por un filtro ND, con lo que podemos regular su intensidad. Luego pasa por un sistema de lentes con el que podemos obtener distintos tamaños de haces, desde un haz muy localizado del tamaño de un sitio de la red, o uno bastante grande que puede ser tratado como una onda plana para el sistema. Los resultados del experimento son tomados a través de una cámara CCD que toma imágenes de la cara de entrada y salida del SBN (esto es logrado desplazando la lente L1 para

así enfocar distintos lugares del cristal) con una magnificación dada por la razón entre los focos de las lentes  $f_{L2}/f_{L1}$ . Estas imágenes pueden ser en el espacio real (CCD 1) o en el espacio de Fourier (CCD 2), donde podemos tomar imágenes tanto de la red, del haz de prueba o de ambos haces juntos controlando los obturadores 1 y 2. Las redes que se forman en el cristal pueden quedar inducidas durante varios días, por ende si uno quiere hacer una nueva red, se debe borrar completamente la red anterior. Para ello utilizamos luz blanca iluminando por completo al cristal. De esta manera, el índice de refracción vuelve a ser homogéneo al interior del cristal y una nueva red puede ser inducida.

### 5.2.2. Redes inducidas ópticamente

El hecho de construir las redes con un modulador que cambia la fase, permite una gran plasticidad y sencillez en el proceso, ya que sólo cambiando computacionalmente la cantidad de haces y la fase entre ellos es posible generar redes complejas. A continuación presentaremos imágenes experimentales de algunas de las redes inducidas, mostrando una imagen de la red teórica, su mapa de fase y una figura de los haces que componen la red en el espacio de Fourier. Ya mostrada anteriormente tenemos la red cuadrada diagonal presentada en la Fig. 28.

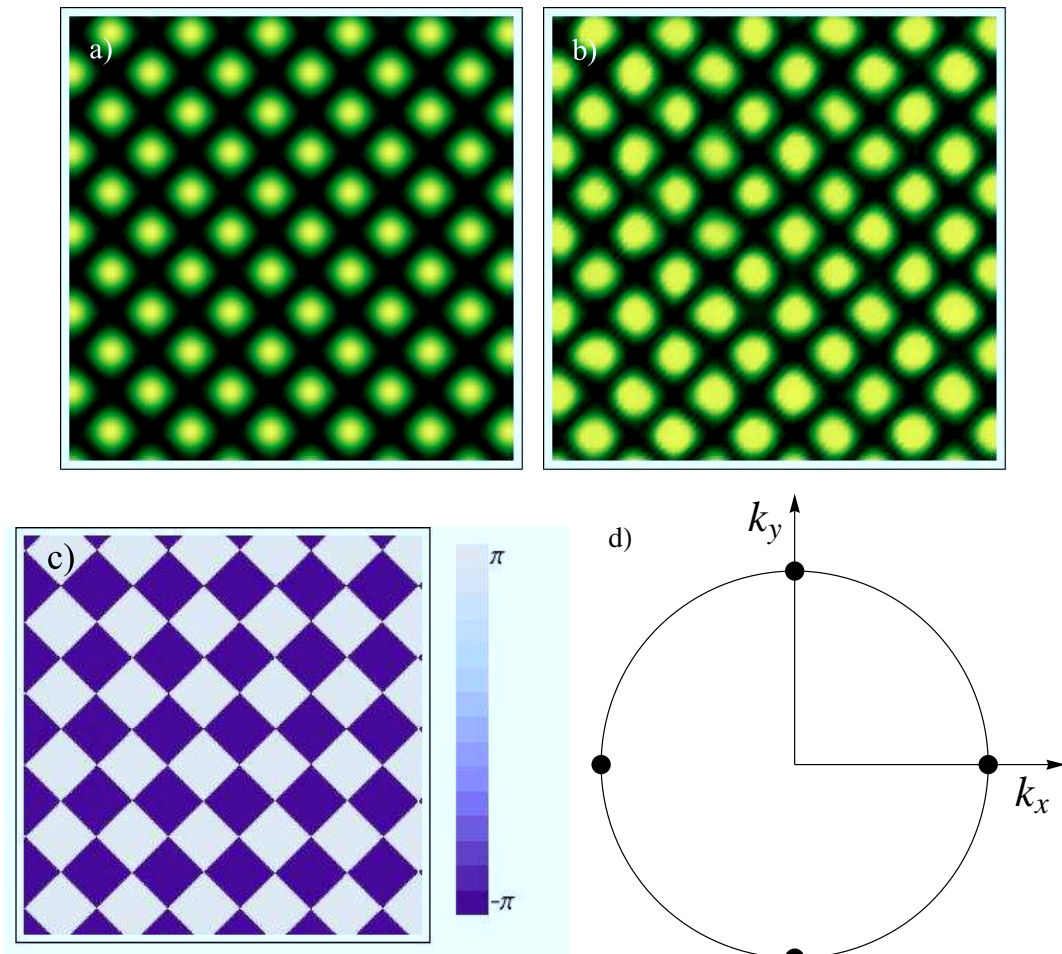


Fig. 28. Red cuadrada inducida de espaciado  $11.9 \mu\text{m}$ : a) red cuadrada simulada, b) red cuadrada experimental, c) mapa de la fase de la red cuadrada y d) componentes de Fourier de los cuatro haces.

A continuación se presenta una red hexagonal, que se encuentra en la Fig. 29. La red hexagonal puede ser formada por la interferencia de 3 haces:

$$v(x, y) = I_{hex} (e^{ik_x x} + e^{ik_x \cos(4\pi/3)x} e^{ik_y \sin(4\pi/3)y} + e^{ik_x \cos(4\pi/3)x} e^{-ik_y \sin(4\pi/3)y}) .$$

En Fig. 29a se tiene la red simulada y en b) la red experimental. También se pueden ver su mapa de fase y el espacio de Fourier con sus componentes.

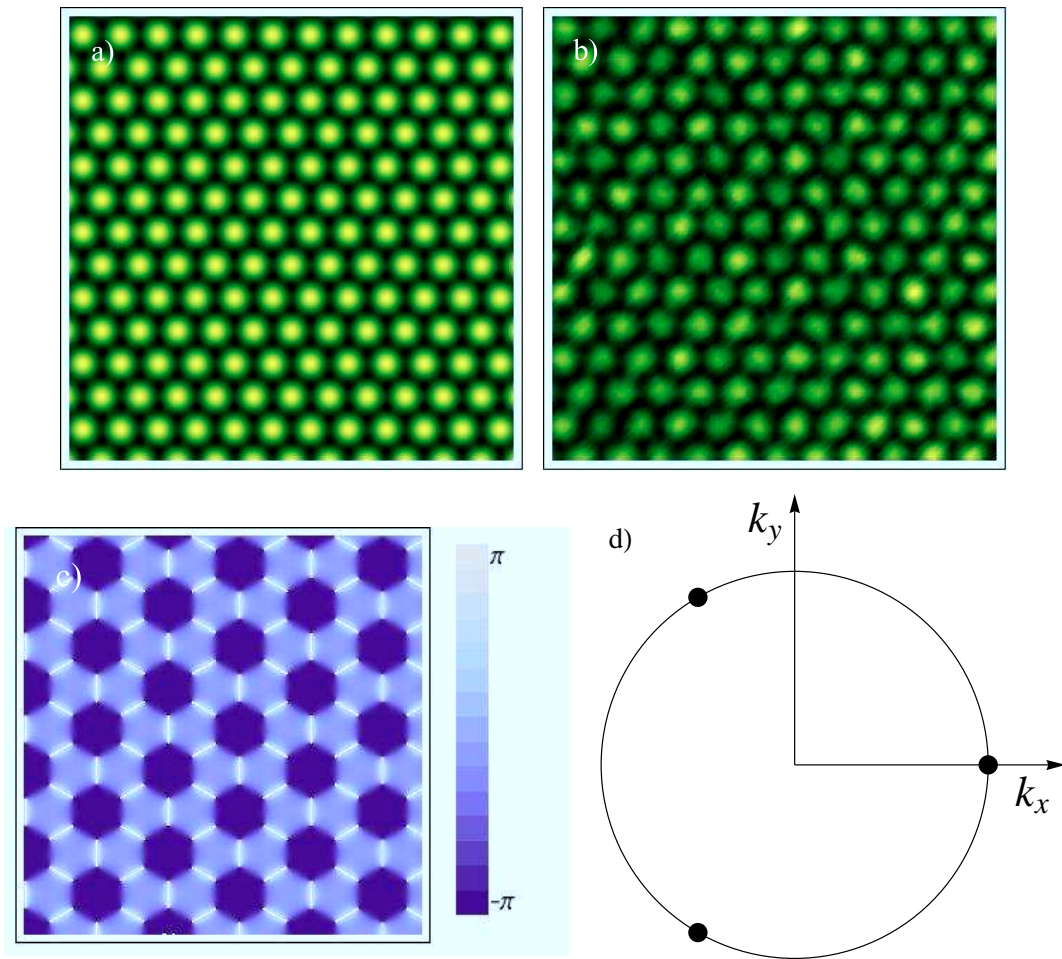


Fig. 29. Red hexagonal inducida de espaciado  $10.2 \mu\text{m}$ : a) red hexagonal simulada, b) red hexagonal experimental, c) mapa de la fase de la red hexagonal y d) componentes de Fourier de los tres haces.

También fue posible hacer una red honeycomb (ver Fig. 30), con una interferencia de haces de la forma

$$v(x, y) = I_{hc} (e^{ik_x x} + e^{ik_x \cos(\pi/3)x} e^{ik_y \sin(\pi/3)y} e^{i\pi} + e^{-ik_x \cos(\pi/3)x} e^{ik_y \sin(\pi/3)y} + e^{-ik_x x} e^{i\pi} + e^{-ik_x \cos(\pi/3)x} e^{-ik_y \sin(\pi/3)y} + e^{ik_x \cos(\pi/3)x} e^{-ik_y \sin(\pi/3)y}) .$$

Notemos que hay presente una fase  $\pi$  entre cada uno de los sitios. El que haya una

fase entre los haces abre la posibilidad de intrincadas redes, que poseen características especiales como la red Kagome [70].

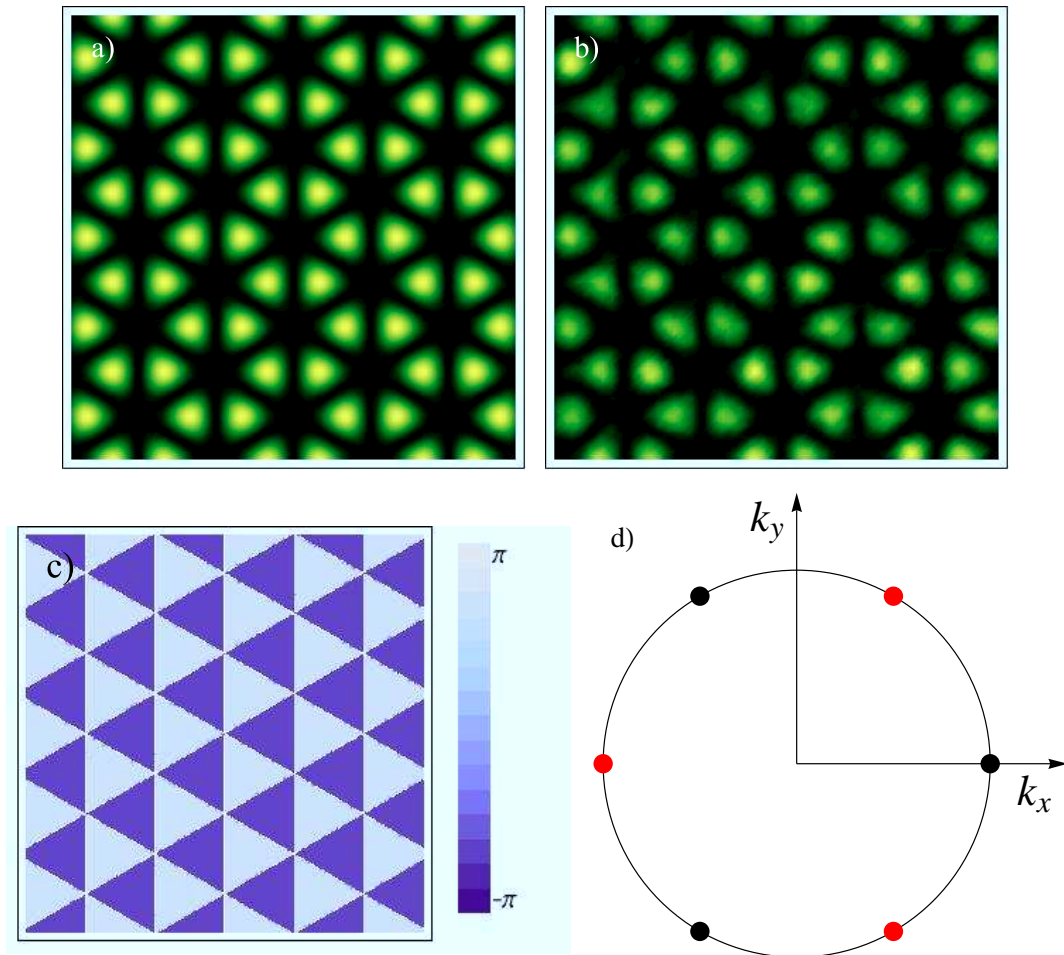


Fig. 30. Red honeycomb inducida de espaciado  $17 \mu\text{m}$ : a) red honeycomb simulada, b) red honeycomb experimental, c) mapa de la fase de la red honeycomb y d) componentes de Fourier de los seis haces. Los puntos rojos hacen referencia a la fase  $\pi$  entre los haces.

Una vez que la red ha sido inducida, una manera de testear como se propaga un haz dentro las guías de ondas es lanzando una onda plana en un régimen lineal. Esta onda plana ilumina casi por completo el arreglo, por lo tanto podemos chequear por donde efectivamente se guía la luz. En la Fig. 31 vemos la propagación de una onda plana en una red cuadrada de espaciado  $34\mu\text{m}$  y una red hexagonal de espaciado  $20.4\mu\text{m}$

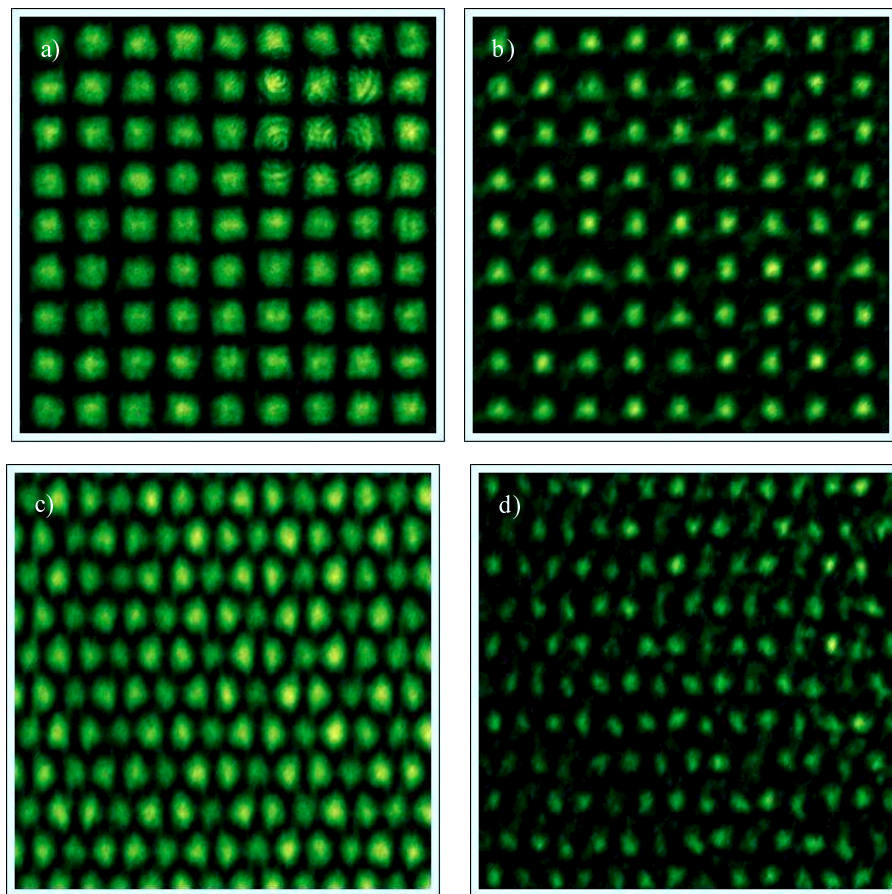


Fig. 31. Redes inducidas (izq) y la propagación de una onda plana (der) para una red cuadrada (a,b) y una red hexagonal (c,d).



Otra manera de testear una red es la técnica presentada en [71], conocida como espectroscopia de Brillouin. La manera en como funciona ésta técnica se explica como sigue: como vimos en la Sec. 2.1.4, la solución de una onda pasando por un medio periódico (en nuestro caso la red inducida ópticamente) viene dada por los modos de Bloch que definen zonas de bandas y *gaps*. En los *gaps* no hay propagación lineal de luz, y se delimita la separación entre una banda y otra. Por lo tanto, al propagar

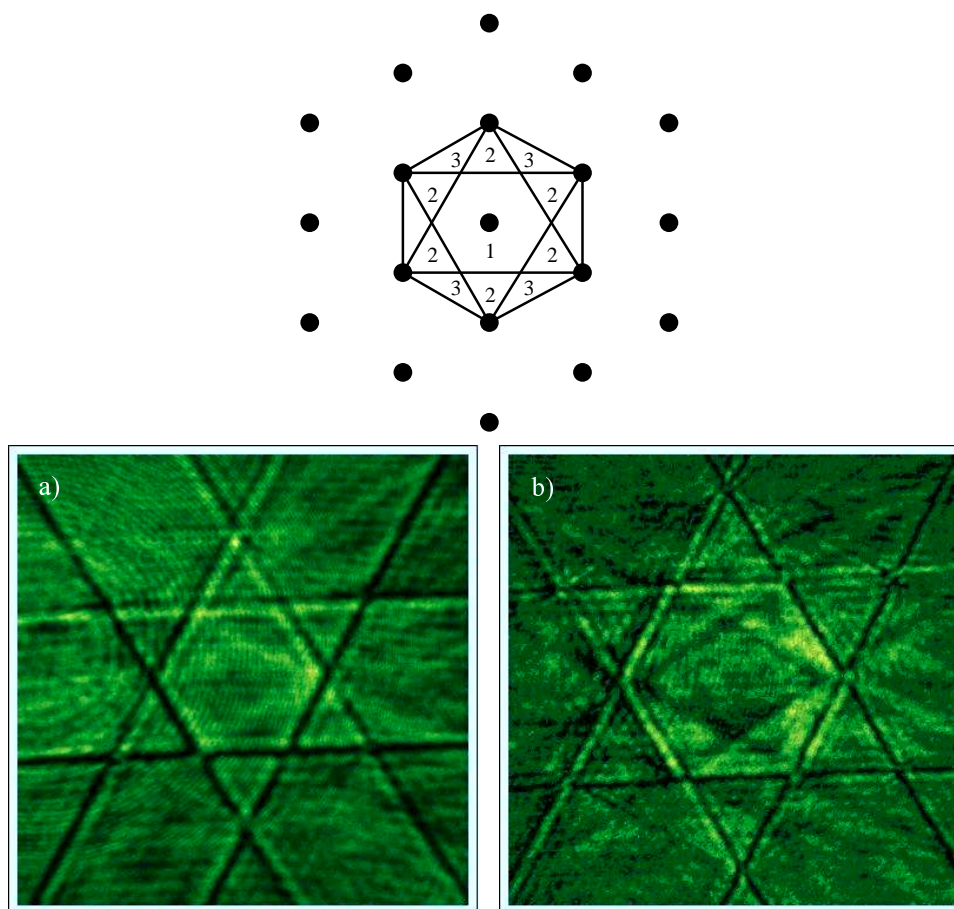


Fig. 32. Espectroscopia de Brillouin. Arriba: esquema de las tres primeras zonas de Brillouin para una red hexagonal (en el espacio recíproco). Abajo: a) Figura obtenida en el espacio de Fourier de una haz de prueba al pasar una red hexagonal de periodo a)  $D = 13.6 \mu\text{m}$  y b)  $D = 10.2 \mu\text{m}$ .

una haz que posea varios modos de Bloch, que pertenezcan a distintas bandas (un tipo de haz que cumple esas condiciones es un haz muy localizado), algunas de sus componentes no se propagarán puesto que residen en un *gap*. Esto experimentalmente significa que habrán zonas oscuras (*gaps*), de muy poca iluminación que definen el borde de una banda. Por tanto la imagen obtenida representará las zonas de propagación y no propagación delimitadas por los bordes de bandas en el espacio de Fourier, o sea esta imagen corresponde a las zonas de Brillouin del arreglo. En la primera fila de la Fig. 32 se muestra un esquema de la red recíproca de una red hexagonal (que sigue siendo hexagonal), donde se marcan las tres primeras zonas de Brillouin. Abajo se muestran imágenes experimentales en el espacio de Fourier tomadas por la cámara CCD 2 para redes hexagonales de espaciado: a)  $D = 13.6 \mu\text{m}$  y b)  $D = 10.2 \mu\text{m}$ , donde podemos ver claramente la demarcación entre las distintas bandas y la semejanza con las zonas de Brillouin teóricas mostradas arriba.

### 5.2.3. Propagación no lineal: Solitón discreto

Hasta ahora hemos analizado solamente propagación lineal en las redes inducidas ópticamente. Pero como vimos en el Cap. 3, es posible lograr la formación de un solitón en una red discreta, llamado solitón discreto, el cual ha sido demostrado experimentalmente en Refs. [15, 72]. En el trabajo realizado durante esta tesis, fuimos capaces de excitar un solitón discreto de la siguiente manera: primero inducimos una red 2D cuadrada diagonal (para que así la anisotropía del cristal tenga un efecto menos fuerte [73]), con un espaciado nominal de  $D = 11.9 \mu\text{m}$  y potencia  $P_{red} = 45 \mu\text{W}$ , mostrado en la Fig. 33a. Luego se lanza un haz con una cintura del tamaño de un sitio de la red, en el centro de ésta (también es posible estudiar fenómenos que se dan en los bordes del arreglo [74]), manteniendo el haz de red iluminando el cristal



y el alto voltaje. Este haz es lanzado sin ángulo (normal a la cara incidente), o sea en el centro de la 1<sup>ra</sup> zona de Brillouin; por tanto el solitón que puede formarse es denominado como *bright soliton*, puesto que su constante de propagación estará en el gap semi-infinito (ver Fig. 6). En el régimen de bajas potencias y bajo voltaje, o sea en el régimen lineal, se puede observar difracción discreta dos-dimensional, que se caracteriza por cuatro lóbulos de mayor intensidad que se encuentran alejados del centro, tal como en la Fig. 33b. La intensidad del haz de prueba es de  $I_p = 45$  nW, y el voltaje aplicado es de 50 V. Para observar un régimen no lineal, incrementamos

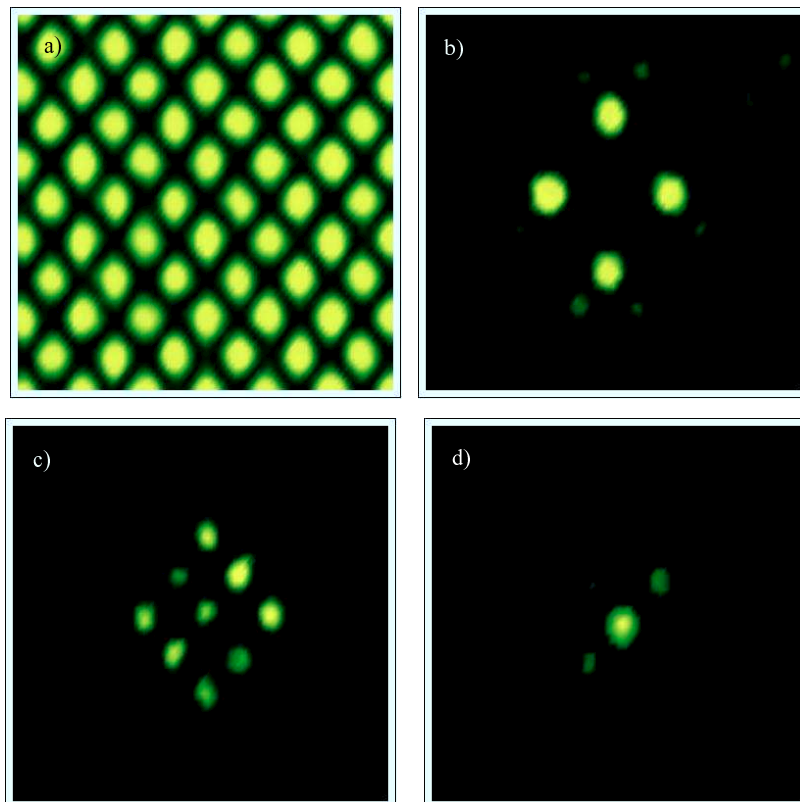


Fig. 33. Formación de un soliton discreto: a) Red cuadrada diagonal, b) Difracción discreta, c) Transición hacia la formación de un soliton y d) Soliton discreto 2D.

el alto voltaje a unos 200 V, donde se observa un estado intermedio en la Fig. 33c, y después de unos 300 segundos, se observa un solitón discreto mostrado en Fig. 33d. En resumen, distintos tipos de redes fueron inducidas en un cristal SBN. En ellas propagamos haces en régimen lineal observando guiaje de la luz, excitación de distintas bandas y difracción discreta. En régimen no lineal observamos la formación de un solitón continuo y de un solitón discreto en una red cuadrada dos-dimensional.

# Capítulo 6

## Conclusiones

Este trabajo de tesis estuvo focalizado en la propagación de luz en arreglos periódicos de guías de ondas no lineales, analizando sus propiedades con un modelo discreto, a través de la ecuación Discreta No Lineal de Schrödinger. Las principales áreas de estudios fueron la localización de luz en arreglos con no linealidad cúbica, regiones de multiestabilidad y solución intermedia en un dímero con no linealidad saturable y la realización experimental de guías de ondas inducidas ópticamente. Dentro de estos temas, se estudiaron los distintos modos lineales y no lineales para distintas configuraciones con especial interés en modos estacionarios y localizados, desde una perspectiva teórica como experimental.

En el Capítulo 2 se entregó una completa descripción de la teoría de propagación de ondas de luz en medios lineales y no lineales. Se presentó el modelo discreto y como éste puede ser usado en la descripción de la propagación de luz en guías de ondas, mostrando sus propiedades y validez. Se discutió la analogía entre electrones propagándose en potenciales periódicos y haces de luz propagándose en arreglos periódicos, lo cual derivó en la formación de bandas y *gaps* que dió origen al concepto de fotónica. También se presentó todo el cuadro teórico para la formación de un régimen no lineal en cristales fotorefractivos.

Capítulo 3 se discutió el problema de localización o *self-trapping* de la luz en distintos tipos de arreglos con no linealidad cúbica, para excitaciones iniciales de en un sólo sitio. Para ello se hizo uso de una frecuencia efectiva que da cuenta de los diferentes modos excitados, los cuales están caracterizados por esta frecuencia. De esta manera fue posible obtener una región bien definida de parámetros que da cuenta de toda la dinámica envuelta en este problema. Con ello pudimos encontrar numéricamente los valores críticos de no linealidad para que se produzca la localización de un haz. Interesantemente para el caso dos-dimensional se encontró un valor casi constante del grado de participación crítico.

En el Capítulo 4 se realizó un estudio analítico y dinámico a un sistema de dos guías de ondas, llamado dímero, con no linealidad saturable. Se encontraron zonas de multiestabilidad, en que dos soluciones estacionarias se propagan de manera estable para un mismo valor de potencia, existiendo entre ellas una tercera solución, llamada intermedia, que conecta ambas soluciones. Para ello se hizo uso de un potencial efectivo que mostró clara concordancia con lo analizado previamente. Para verificar lo encontrado se realizó un experimento en guías de niobato de litio, donde se propagaron los dos modos estudiados para una misma potencia, obteniéndose que ambos modos se propagaron de manera estable, lo que evidencia un régimen de multiestabilidad y verifica de manera indirecta la existencia de la solución intermedia.

Capítulo 5 se centró en la realización experimental de guías de ondas en cristales SBN, mediante la técnica de inducción óptica de guías de ondas. Se describió completamente esta técnica, tomando en cuenta consideraciones especiales, como por ejemplo que los haces tengan una misma constante de propagación, y como esto fue llevado a un setup experimental, describiendo cada una de las componentes utilizadas. Se presentaron los resultados de los distintos tipos de redes realizados durante

la tesis. Cabe destacar la exploración de la técnica llamada espectroscopía de Brillouin, con la cual pudimos caracterizar una red. También fue posible acceder a un régimen no lineal, logrando obtener un solitón continuo y un solitón discreto en una red cuadrada dos-dimensional.

# Apéndice A

## Análisis de estabilidad lineal

Consideraremos la ecuación DNLS cúbica para una geometría general dado por

$$i \frac{\partial \tilde{u}_{n,m}}{\partial z} + \Delta \tilde{u}_{n,m} + \gamma |\tilde{u}_{n,m}|^2 \tilde{u}_{nm} = 0, \quad (\text{A.1})$$

donde  $\Delta \tilde{u}_{n,m}$  indica el acoplamiento a sitios vecinos cercanos [por ejemplo para una red 2D cuadrada  $\Delta \tilde{u}_{n,m} = C(\tilde{u}_{n+1,m} + \tilde{u}_{n-1,m} + \tilde{u}_{n,m+1} + \tilde{u}_{n,m-1})$ ]. Perturbamos una solución estacionaria de la forma

$$\tilde{u}_{n,m} = (u_{n,m} + \delta_{n,m}(z)) e^{i\lambda z}, \quad (\text{A.2})$$

con  $\delta_{n,m}$  una pequeña perturbación lineal. Reemplazando en (A.1), obtenemos

$$\left[ -\lambda(u_{n,m} + \delta_{n,m}) + i \frac{\partial \delta_{n,m}}{\partial z} + \Delta u_{n,m} + \Delta \delta_{n,m} + \gamma |u_{n,m}|^2 u_{n,m} + 2\gamma |u_{n,m}|^2 \delta_{n,m} + \gamma u_{n,m}^2 \delta_{n,m}^* \right] e^{i\lambda z} = 0, \quad (\text{A.3})$$

donde hemos despreciado términos  $\delta_{n,m}^2$ . Notemos que  $-\lambda u_{n,m} + \Delta u_{n,m} + \gamma |u_{n,m}|^2 u_{n,m} = 0$  por (2.58). Luego

$$i \frac{\partial \delta_{n,m}}{\partial z} + \Delta \delta_{n,m} + (2\gamma |u_{n,m}|^2 - \lambda) \delta_{n,m} + \gamma u_{n,m}^2 \delta_{n,m}^* = 0, \quad (\text{A.4})$$

Ahora separamos la perturbación en una parte real e imaginaria  $\delta_{n,m} = x_{n,m} + iy_{n,m}$ , con  $x, y \in \mathbb{R}$  obteniendo

$$i(\dot{x}_{n,m} + i\dot{y}_{n,m}) + \Delta(x_{n,m} + iy_{n,m}) + (2\gamma|u_{n,m}|^2 - \lambda)(x_{n,m} + iy_{n,m}) + \gamma u_{n,m}^2(x_{n,m} - iy_{n,m}) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Escribiendo por separado las ecuaciones para la parte real e imaginaria

$$\dot{x}_{n,m} + \Delta y_{n,m} + (2\gamma|u_{n,m}|^2 - \gamma u_{n,m}^2 - \lambda)y_{n,m} = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$\dot{y}_{n,m} - \Delta x_{n,m} - (2\gamma|u_{n,m}|^2 + \gamma u_{n,m}^2 - \lambda)x_{n,m} = 0, \quad (\text{A.7})$$

lo cual puede ser escrito de forma matricial

$$\begin{aligned} \dot{\vec{X}} + A\vec{Y} &= 0, \\ \dot{\vec{Y}} - B\vec{X} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

donde hemos definido los vectores  $\vec{X} = (x_{1,1}, \dots, x_{N,M})$ ,  $\vec{Y} = (y_{1,1}, \dots, y_{N,M})$  y las matrices  $A, B$  están dadas por

$$A_{n,m} = \Delta\delta_{n,m} + (2\gamma|u_{n,m}|^2 - \gamma u_{n,m}^2 - \lambda)\delta_{n,m}, \quad (\text{A.9})$$

$$B_{n,m} = \Delta\delta_{n,m} + (2\gamma|u_{n,m}|^2 + \gamma u_{n,m}^2 - \lambda)\delta_{n,m}, \quad (\text{A.10})$$

con  $\delta_{m,m}$  la delta de Kronecker. De la ec. (A.8) podemos obtener una ecuación tipo oscilador armónico

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{X}} + AB\vec{X} &= 0, \\ \ddot{\vec{Y}} + BA\vec{Y} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Las soluciones a esta ecuación son del tipo  $\sim C_1 e^{i\omega_0 z} + C_2 e^{i\omega_0 z}$  donde  $\omega_0^2$  son los autovalores de  $AB$  y  $BA$  (autovalores de  $AB$  y  $BA$  son iguales). Por lo tanto si  $\omega_0 \in \mathbb{R}$  la perturbación está acotada y será estable, por el contrario si  $\omega_0 \in \mathbb{I}$  la

perturbación no está acotada y será inestable. Para encontrar si  $\omega_0$  tiene una parte imaginaria distinta de cero, escribimos

$$\omega_0^2 = c + id \quad c, d \in \mathbb{R},$$

o

$$\omega_0 = a + ib \quad a, b \in \mathbb{R},$$

entonces

$$\omega_0^2 = a^2 - b^2 + 2iab = c + id,$$

por lo tanto  $a^2 - b^2 = c$  y  $2ab = d$ . Luego  $d^2/4b^2 - b^2 = c$ , de donde se obtiene finalmente una ecuación para  $b$

$$b = \sqrt{\frac{\sqrt{c^2 + d^2} - c}{2}}. \quad (\text{A.12})$$

Como  $b$  corresponde a la parte imaginaria de  $\omega_0$ , si  $b = 0$ , la solución es estable.

Este posible hacer este mismo procedimiento para la DNLS con no linealidad saturable, obteniendo las matrices  $A, B$

$$A_{n,m} = \Delta\delta_{n,m} - \left( \frac{\gamma}{(1 + |u_{n,m}|^2)^2} + \frac{\gamma u_{n,m}^2}{(1 + |u_{n,m}|^2)^2} + \lambda \right) \delta_{n,m}, \quad (\text{A.13})$$

$$B_{n,m} = \Delta\delta_{n,m} - \left( \frac{\gamma}{(1 + |u_{n,m}|^2)^2} - \frac{\gamma u_{n,m}^2}{(1 + |u_{n,m}|^2)^2} + \lambda \right) \delta_{n,m}. \quad (\text{A.14})$$



# Publicaciones

PHYSICAL REVIEW A **87**, 043837 (2013)

### Multistable regime and intermediate solutions in a nonlinear saturable coupler

Diego Guzmán-Silva,<sup>1</sup> Cibo Lou,<sup>2</sup> Uta Naether,<sup>1</sup> Christian E. Rüter,<sup>2</sup> Detlef Kip,<sup>2</sup> and Rodrigo A. Vicencio<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Departamento de Física, MSI-Nucleus on Advanced Optics, and Center for Optics and Photonics, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, Santiago, Chile*

<sup>2</sup>*Faculty of Electrical Engineering, Helmut Schmidt University, 22043 Hamburg, Germany*

(Received 29 January 2013; published 25 April 2013)

We show, theoretically and experimentally, the existence of a multistable regime in a nonlinear saturable coupler. In spite of its simplicity, we found that this model shows generic and fundamental properties of extended saturable lattices. The study of this basic unit becomes crucial to understanding localization mechanisms and dynamical properties of extended discrete nonlinear saturable systems. We theoretically predict the regions of existence of intermediate solutions and experimentally confirm them by observing a multistable propagation regime in a LiNbO<sub>3</sub> saturable coupler. This constitutes an experimental evidence of the existence of these unstable symmetry-broken stationary solutions.

DOI: [10.1103/PhysRevA.87.043837](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.87.043837)

PACS number(s): 42.65.Wi, 63.20.Pw, 63.20.Ry, 05.45.Yv

PHYSICAL REVIEW E **87**, 062914 (2013)

### Self-trapping transition in nonlinear cubic lattices

Uta Naether,\* Alejandro J. Martínez, Diego Guzmán-Silva, Mario I. Molina, and Rodrigo A. Vicencio

*Departamento de Física, MSI-Nucleus on Advanced Optics, and Center for Optics and Photonics, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, Santiago, Chile*

(Received 11 December 2012; revised manuscript received 17 April 2013; published 19 June 2013)

We explore the fundamental question of the critical nonlinearity value needed to dynamically localize energy in discrete nonlinear cubic (Kerr) lattices. We focus on the effective frequency and participation ratio of the profile to determine the transition into localization in one-, two-, and three-dimensional lattices. A simple and general criterion is developed, for the case of an initially localized excitation, to define the transition region in parameter space (“dynamical tongue”) from a delocalized to a localized profile. We introduce a method for computing the dynamically excited frequencies, which helps us validate our stationary ansatz approach and the effective frequency concept. A general analytical estimate of the critical nonlinearity is obtained, with an extra parameter to be determined. We find this parameter to be almost constant for two-dimensional systems and prove its validity by applying it successfully to two-dimensional binary lattices.

DOI: [10.1103/PhysRevE.87.062914](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.87.062914)

PACS number(s): 05.45.–a, 42.25.Dd, 42.65.Tg, 72.15.Rn

## Experimental observation of bulk and edge transport in photonic Lieb lattices

D. Guzmán-Silva<sup>1</sup>, C. Mejía-Cortés<sup>1</sup>, M.A. Bandres<sup>2</sup>,  
M.C. Rechtsman<sup>2</sup>, S. Weimann<sup>3</sup>, S. Nolte<sup>3</sup>, M. Segev<sup>2</sup>,  
A. Szameit<sup>3</sup>, and R. A. Vicencio<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Física, MSI-Nucleus on Advanced Optics, and Center for Optics and Photonics (CEFOP), Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, Santiago, Chile

<sup>2</sup>Physics Department and Solid State Institute, Technion, 32000 Haifa, Israel

<sup>3</sup>Institute of Applied Physics, Friedrich-Schiller-Universität Jena, Max-Wien-Platz 1, 07743 Jena, Germany

E-mail: vicenciorodrigo1@gmail.com

**Abstract.** We analyze the transport of light in the bulk and at the edge of photonic Lieb lattices, whose unique feature is the existence of a flat band representing stationary states in the middle of the band structure that can form localized bulk states. We find that transport in bulk Lieb lattices is significantly affected by the particular excitation site within the unit cell, due to overlap with the flat band states. Additionally, we demonstrate the existence of new edge states in anisotropic Lieb lattices. These states arise due to a virtual defect at the lattice edges and are not described by the standard tight-binding model.

# Referencias

- [1] P. A. Franken, A. E. Hill, C. W. Peters y G. Weinreich, *Generation of Optical Harmonics*, Phys. Rev. Lett. **7**, 118 (1961).
- [2] T. H. Maimam, *Stimulated Optical Radiation in Ruby*, Nature **187**, 493 (1960).
- [3] R. Y. Chiao, E. Garmire y C. H. Townes, *Self-Trapping of Optical Beams.*, Phys. Rev. Lett. **14**, 1056 (1965).
- [4] F. Bloch, *Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern*, Z. Phys. **52**, 555 (1928).
- [5] E. Yablonovitch, *Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics*, Phys. Rev. Lett. **58**, 2059 (1987).
- [6] S. John, *Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices*, Phys. Rev. Lett. **58**, 2486 (1987).
- [7] M. Soljačić, C. Luo, J. D. Joannopoulos y S. Fan, *Nonlinear photonic crystal microdevices for optical integration*, Opt. Lett. **28**, 637 (2003).
- [8] V. R. Almeida, C. A. Barrios, R. R. Panepucci y M. Lipson, *All-optical control of light on a silicon chip*, Nature **431**, 1081 (2004).

- [9] A. Yariv, *Coupled-mode theory for guided-wave optics*, Quantum Electronics, IEEE Journal of **9**, 919 (1973).
- [10] D. N. Christodoulides y R. I. Joseph, *Discrete self-focusing in nonlinear arrays of coupled waveguides*, Opt. Lett. **13**, 794 (1988).
- [11] T. Holstein, *Studies of polaron motion: Part I. The molecular-crystal model*, Annals of Physics **8**, 325 (1959).
- [12] A. S. Davydov, *Theory of contraction of proteins under their excitation*, J. Theor. Biol. **38**, 559 (1973).
- [13] A. Trombettoni y A. Smerzi, *Discrete Solitons and Breathers with Dilute Bose-Einstein Condensates*, Phys. Rev. Lett. **86**, 2353 (2001).
- [14] H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti, A. R. Boyd y J. S. Aitchison, *Discrete Spatial Optical Solitons in Waveguide Arrays*, Phys. Rev. Lett. **81**, 3383 (1998).
- [15] Z. Chen, H. Martin, E. Eugenieva, J. Xu y J. Yang, *Formation of discrete solitons in light-induced photonic lattices*, Opt. Express **13**, 1816 (2005).
- [16] J. W. Fleischer, T. Carmon, M. Segev, N. K. Efremidis y D. N. Christodoulides, *Observation of Discrete Solitons in Optically Induced Real Time Waveguide Arrays*, Phys. Rev. Lett. **90**, 023902 (2003).
- [17] D. Neshev, E. Ostrovskaya, Y. Kivshar y W. Krolikowski, *Spatial solitons in optically induced gratings*, Opt. Lett. **28**, 710 (May 2003).

- [18] A. Szameit, D. Blömer, J. Burghoff, T. Schreiber, T. Pertsch, S. Nolte, A. Tünnermann y F. Lederer, *Discrete Nonlinear Localization in Femtosecond Laser Written Waveguides in Fused Silica*, Opt. Express **13**, 10552 (2005).
- [19] M. Molina y G. Tsironis, *Dynamics of self-trapping in the discrete nonlinear Schrödinger equation*, Physica D: Nonlinear Phenomena **65**, 267 (1993).
- [20] U. Naether, R. A. Vicencio y M. Stepic, *Mobility of high-power solitons in saturable nonlinear photonic lattices*, Opt. Lett. **36**, 1467 (2011).
- [21] R. Dong, C. E. Rüter, D. Kip, O. Manela, M. Segev, C. Yang y J. Xu, *Spatial Frequency Combs and Supercontinuum Generation in One-Dimensional Photonic Lattices*, Phys. Rev. Lett. **101**, 183903 (2008).
- [22] P. Zhang, N. Efremidis, A. Miller, P. Ni y Z. Chen, *Reconfigurable 3D photonic lattices by optical induction for optical control of beam propagation*, Applied Physics B **104**, 553 (2011).
- [23] S. Somekh, E. Garmire, A. Yariv, H. Garvin y R. Hunsperger, *Channel optical waveguide directional couplers*, Appl. Phys. Lett. **22**, 46 (1973).
- [24] A. L. Jones, *Coupling of Optical Fibers and Scattering in Fibers*, J. Opt. Soc. Am. **55**, 261 (1965).
- [25] R. A. Vicencio, Tesis Doctoral, Universidad de Chile (2004).
- [26] H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti y J. S. Aitchison, *Diffraction Management*, Phys. Rev. Lett. **85**, 1863 (2000).
- [27] B. Saleh y M. Teich, *Fundamentals of photonics* (Wiley, 1991).

- [28] T. Pertsch, T. Zentgraf, U. Peschel, A. Bräuer y F. Lederer, *Anomalous Refraction and Diffraction in Discrete Optical Systems*, Phys. Rev. Lett. **88**, 093901 (2002).
- [29] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics* (Wiley, 2004).
- [30] N. W. Ashcroft y N. D. Mermin, *Solid State Physics* (Holt, Rinehart and Winston, 1976).
- [31] N. K. Efremidis y D. N. Christodoulides, *Lattice solitons in Bose-Einstein condensates*, Phys. Rev. A **67**, 063608 (2003).
- [32] D. Mandelik, H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti y J. S. Aitchison, *Band-Gap Structure of Waveguide Arrays and Excitation of Floquet-Bloch Solitons*, Phys. Rev. Lett. **90**, 053902 (2003).
- [33] R. Dong, Tesis Doctoral, Technical University Clausthal (2011).
- [34] S. Flach y A. V. Gorbach, *Discrete breathers Advances in theory and applications*, Physics Reports **467**, 1 (2008).
- [35] E. A. Ostrovskaya y Y. S. Kivshar, *Matter-Wave Gap Solitons in Atomic Band-Gap Structures*, Phys. Rev. Lett. **90**, 160407 (2003).
- [36] P. L. Kelley, *Self-Focusing of Optical Beams*, Phys. Rev. Lett. **15**, 1005 (1965).
- [37] A. Sukhorukov, Y. S. Kivshar, H. Eisenberg y Y. Silberberg, *Spatial optical solitons in waveguide arrays*, Quantum Electronics, IEEE Journal of **39**, 31 (2003).
- [38] R. W. Boyd, *Nonlinear Optics* (Academic Press, 2008).

- [39] P. Yeh, *Introduction to photorefractive nonlinear optics* (Wiley, 1993).
- [40] D. N. Christodoulides y M. I. Carvalho, *Bright, dark, and gray spatial soliton states in photorefractive media*, J. Opt. Soc. Am. B **12**, 1628 (1995).
- [41] N. Kukhtarev, V. Markov, S. Odulov, M. Soskin y V. Vinetskii, *Holographic storage in electrooptic crystals. I. steady state. II. beam coupling and light amplification*, Ferroelectrics **22** (1979).
- [42] N. K. Efremidis, S. Sears, D. N. Christodoulides, J. W. Fleischer y M. Segev, *Discrete solitons in photorefractive optically induced photonic lattices*, Phys. Rev. E **66**, 046602 (2002).
- [43] L. c. v. Hadžievski, A. Maluckov, M. Stepić y D. Kip, *Power Controlled Soliton Stability and Steering in Lattices with Saturable Nonlinearity*, Phys. Rev. Lett. **93**, 033901 (2004).
- [44] A. Shabat y V. Zakharov, *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media*, Soviet Physics JETP **34**, 62 (1972).
- [45] V. Zakharov y A. Shabat, *Interaction between solitons in a stable medium*, Sov. Phys. JETP **37**, 823 (1973).
- [46] S. Maueuf y F. Reynaud, *Quasi-steady state self-trapping of first, second and third order subnanosecond soliton beams*, Optics Communications **66**, 325 (1988).
- [47] J. S. Aitchison, A. M. Weiner, Y. Silberberg, D. E. Leaird, M. K. Oliver, J. L. Jackel y P. W. E. Smith, *Experimental observation of spatial soliton interactions*, Opt. Lett. **16**, 15 (Jan 1991).



- [48] M. Mitchell, Z. Chen, M.-f. Shih y M. Segev, *Self-Trapping of Partially Spatially Incoherent Light*, Phys. Rev. Lett. **77**, 490 (Jul 1996).
- [49] Z. Chen, M. Segev y D. N. Christodoulides, *Optical spatial solitons: historical overview and recent advances*, Reports on Progress in Physics **75**, 086401 (2012).
- [50] V. Kenkre y D. Campbell, *Self-trapping on a dimer: time-dependent solutions of a discrete nonlinear Schrödinger equation*, Physical Review B **34**, 4959 (1986).
- [51] P. Kevrekidis, J. Espinola-Rocha, Y. Drossinos y A. Stefanov, *Dynamical barrier for the formation of solitary waves in discrete lattices*, Physics Letters A **372**, 2247 (2008).
- [52] R. A. Vicencio y S. Flach, *Control of wave packet spreading in nonlinear finite disordered lattices*, Phys. Rev. E **79**, 016217 (2009).
- [53] U. Naether, M. Heinrich, Y. Lahini, S. Nolte, R. A. Vicencio, M. I. Molina y A. Szameit, *Self-trapping threshold in disordered nonlinear photonic lattices*, Opt. Lett. **38**, 1518 (2013).
- [54] S. Flach, K. Kladko y R. S. MacKay, *Energy Thresholds for Discrete Breathers in One-, Two-, and Three-Dimensional Lattices*, Phys. Rev. Lett. **78**, 1207 (1997).
- [55] G. Kalosakas, K. O. Rasmussen y A. R. Bishop, *Delocalizing Transition of Bose-Einstein Condensates in Optical Lattices*, Phys. Rev. Lett. **89**, 030402 (2002).
- [56] P. Zhang, S. Liu, C. Lou, F. Xiao, X. Wang, J. Zhao, J. Xu y Z. Chen, *Incomplete Brillouin-zone spectra and controlled Bragg reflection with ionic-type photonic lattices*, Phys. Rev. A **81**, 041801 (Apr 2010).

- [57] M. Stepić, D. Kip, L. c. v. Hadžievski y A. Maluckov, *One-dimensional bright discrete solitons in media with saturable nonlinearity*, Phys. Rev. E **69**, 066618 (2004).
- [58] R. A. Vicencio y M. Johansson, *Discrete soliton mobility in two-dimensional waveguide arrays with saturable nonlinearity*, Phys. Rev. E **73**, 046602 (2006).
- [59] U. Naether, R. A. Vicencio y M. Johansson, *Peierls-Nabarro energy surfaces and directional mobility of discrete solitons in two-dimensional saturable nonlinear Schrödinger lattices*, Phys. Rev. E **83**, 036601 (2011).
- [60] S. Rojas-Rojas, R. A. Vicencio, M. I. Molina y F. K. Abdullaev, *Nonlinear localized modes in dipolar Bose-Einstein condensates in optical lattices*, Phys. Rev. A **84**, 033621 (2011).
- [61] M. I. Molina, R. A. Vicencio y Y. S. Kivshar, *Discrete solitons and nonlinear surface modes in semi-infinite waveguide arrays*, Opt. Lett. **31**, 1693 (2006).
- [62] C. R. Rosberg, D. N. Neshev, W. Krolikowski, A. Mitchell, R. A. Vicencio, M. I. Molina y Y. S. Kivshar, *Observation of Surface Gap Solitons in Semi-Infinite Waveguide Arrays*, Phys. Rev. Lett. **97**, 083901 (2006).
- [63] M. Wesner, C. Herden, R. Pankrath, D. Kip y P. Moretti, *Temporal development of photorefractive solitons up to telecommunication wavelengths in strontium-barium niobate waveguides*, Phys. Rev. E **64**, 036613 (2001).
- [64] S. Singh y D. Christodoulides, *Evolution of spatial optical solitons in biased photorefractive media under steady state conditions*, Optics Communications **118**, 569 (1995).

- [65] D. N. Christodoulides y M. Carvalho, *Bright, dark, and gray spatial soliton states in photorefractive media*, JOSA B **12**, 1628 (1995).
- [66] G. C. Duree, J. L. Shultz, G. J. Salamo, M. Segev, A. Yariv, B. Crosignani, P. Di Porto, E. J. Sharp y R. R. Neurgaonkar, *Observation of self-trapping of an optical beam due to the photorefractive effect*, Phys. Rev. Lett. **71**, 533 (1993).
- [67] M. Iturbe Castillo, P. A. M. Aguilar, J. Sanchez?Mondragon, S. Stepanov y V. Vysloukh, *Spatial solitons in photorefractive  $Bi_{12}TiO_{20}$  with drift mechanism of nonlinearity*, Appl. Phys. Lett. **64**, 408 (Jan 1994).
- [68] M. feng Shih, M. H. Garrett, G. Salamo, G. C. Valley, P. Leach y M. Segev, *Two-dimensional steady-state photorefractive screening solitons*, Opt. Lett. **21**, 324 (1996).
- [69] M. Segev, G. C. Valley, B. Crosignani, P. DiPorto y A. Yariv, *Steady-State Spatial Screening Solitons in Photorefractive Materials with External Applied Field*, Phys. Rev. Lett. **73**, 3211 (1994).
- [70] R. A. Vicencio y M. Johansson, *Discrete flat-band solitons in the kagome lattice*, Phys. Rev. A **87**, 061803 (2013).
- [71] G. Bartal, O. Cohen, H. Buljan, J. W. Fleischer, O. Manela y M. Segev, *Brillouin Zone Spectroscopy of Nonlinear Photonic Lattices*, Phys. Rev. Lett. **94**, 163902 (2005).
- [72] J. W. Fleischer, M. Segev, N. K. Efremidis y D. N. Christodoulides, *Observation of two-dimensional discrete solitons in optically induced nonlinear photonic lattices*, Nature **422**, 147 (2003).

- [73] B. Terhalle, A. Desyatnikov, C. Bersch, D. Trger, L. Tang, J. Imbrock, Y. Kivshar y C. Denz, *Anisotropic photonic lattices and discrete solitons in photorefractive media*, Applied Physics B **86**, 399 (2007).
- [74] X. Wang, A. Bezryadina, Z. Chen, K. Makris, D. Christodoulides y G. Stegeman, *Observation of two-dimensional surface solitons*, Physical review letters **98**, 123903 (2007).