



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

MODELOS PROBABILÍSTICOS DE RECOMBINACIÓN EN GENÓMICA

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

IAN PATRICK LETTER RESTUCCIA

PROFESOR GUÍA:
SERVET MARTÍNEZ AGUILERA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
ELLEN BAAKE
JAIME SAN MARTÍN ARISTEGUI
MARTÍN MATAMALA VÁSQUEZ

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por CMM- Conicyt PIA AFB170001

SANTIAGO DE CHILE
2018

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR
AL TÍTULO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
MENCION MATEMÁTICAS APLICADAS
RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: IAN PATRICK LETTER RESTUCCIA
FECHA: ENERO 2018
PROF. GUÍA: SR. SERVET MARTÍNEZ AGUILERA

MODELOS PROBABILÍSTICOS DE RECOMBINACIÓN EN GENÓMICA

En este trabajo se estudia la recombinación de genes a tiempo continuo, esto es la evolución bajo la dinámica de recombinación de la distribución genética de una población. Por un lado se cuenta con la generalidad de recombinaciones arbitrarias e incluso permitiendo una cantidad arbitraria de padres. Por otro lado se trabaja bajo la hipótesis de población infinita lo que lleva como ventaja, según lo visto en [17], [11] o [12], que la distribución de genes esté determinada por una ecuación diferencial determinista en el espacio de las medidas. Al resolver esta se obtiene que es la esperanza de un proceso estocástico, conocido como el proceso de fragmentación. Uno de los primeros resultados es una demostración alternativa de este hecho.

Luego se busca una fórmula para la ley del proceso. En un contexto similar el trabajo realizado en [11] da una fórmula recursiva, bajo ciertas hipótesis sobre las tasas de recombinación. Basándonos en las técnicas desarrolladas en ese trabajo y en [12], [25], [4] se deduce otra fórmula que sirve para tasas, recombinaciones y una cantidad de padres arbitraria, bajo hipótesis similares. La clave es relacionar el proceso de fragmentación con una familia de grafos, los cuales denominaremos bosques de fragmentación. Estos fueron propuestos originalmente por Mareike Esser en [12] como generalización de los bosques de segmentación encontrados en [4]. Aquí, salvo modificaciones necesarias para la notación, serán la herramienta principal para obtener los resultados. Además esta fórmula permite apreciar que la hipótesis sobre las tasas es para evitar ciertas singularidades que aparecen al realizar los cálculos en el grafo. Una vez que se entiende esto, se discute como extender las soluciones relajando la condición sobre las tasas.

Además de lo anterior, se investiga el comportamiento asintótico del proceso de fragmentación. Una gran cantidad de resultados interesantes fueron obtenidos por Servet Martínez en [19] para el proceso a tiempo discreto, incluyendo distribución cuasi-estacionaria y una descripción para el Q -proceso. Aquí se obtienen los que son la adaptación natural al tiempo continuo. Es decir, se obtiene un teorema que caracteriza el comportamiento asintótico del proceso de fragmentación y de este se deduce el comportamiento cuasi-estacionario.

Por último se hace una síntesis de los resultados obtenidos y se discuten posibles extensiones a problemas relacionados.

"Science is the slow revelation of God's blueprint." - Hattie Gerst

Agradecimientos

Agradezco a todas las personas que me ayudaron en mi paso por la universidad, que para mi alegría, son bastantes. En primer lugar, a mi familia que siempre me ha brindado su apoyo y amor. En particular, a mi núcleo familiar compuesto por John, Mirtha y Gala. Los dos primeros han sido excelentes padres, que me inculcaron ser buena persona y buscar mi felicidad, labor que siempre me han ayudado a lograr. Y la Gala ha sido la mejor hermana perruna, llenándome de besos al llegar a mi hogar y calentar mis pies en las tardes de estudio. También a Catalina que su amor y apoyo han sido una fuerza que ha sacado siempre lo mejor de mi. Con una persona tan maravillosa han pasado cosas maravillosas. Además, agradecer a Bárbara y Mia que nos han acompañado tantas veces a celebrar cada uno de nuestros pequeños logros.

A mis amigos y compañeros del DIM. Todos ustedes han hecho un agrado ir a la universidad para matraquear, comer, reír y jugar juegos de mesa. Y hacer memes, obviamente. También a mis amigos de tantos años. Muchas gracias a Felipe, Kele y Martín por su humor, buena onda, por las tardes de música y Smash. Un abrazo también a Juan Ignacio, Rolando y Dierk. Después de tanto tiempo son como mis hermanos. A todos tantos otros que no he mencionado, Gustavo, Cesár, Macarena, Valeria son solo algunas de las personas que me han brindado su apoyo y me han ayudado a llegar hasta aquí.

A los académicos que participaron en mi proceso educativo. Muchos de ellos me encantaron con las matemáticas, además que me permitieron crecer y aprender siendo parte del cuerpo docente de sus cursos. Agradezco también a Jorge Pérez que me permitió trabajar con él. Con esto ayudó indirectamente a hacer este trabajo lo que es y a que yo ganara más confianza en mi mismo. Mención también para Ellen Baake, cuyos comentarios y discusiones ayudaron enormemente en los resultados de esa tesis. Además, a Martín Matamala y Jaime San Martín, los otros miembros de mi comisión, cuyos comentarios han ayudado a que esta tesis sea más concisa y elegante. Finalmente, muchas gracias a Servet Martínez que ha participado como mi profesor guía y en todos los procesos anteriormente mencionados. Sus consejos han sido una gran ayuda en el desarrollo de esta tesis y en mi desarrollo profesional.

A los funcionarios del departamento, que siempre han ayudado cuando tenemos problemas administrativos, pero más importante aún, que han sabido siempre dar una sonrisa y ánimo a cada uno de nosotros. El departamento no sería lo mismo sin Gladys, Georgina (la Kuky), Oscar, Eterin, Natasha, Juan y Karen. Muchas gracias por todo.

Finalmente, gracias a mi mismo por haberme soportado tanto tiempo. No fue fácil. Y a los memes por aliviar el estrés cuando la matraca se ponía intensa.

Tabla de Contenido

| | |
|---|-----------|
| Introducción | 1 |
| 1. Preliminares | 3 |
| 1.1. Ecuaciones diferenciales en espacios de Banach | 3 |
| 1.2. Medidas sobre espacios producto | 4 |
| 1.3. Cadenas de Markov | 8 |
| 1.4. Árboles y Posets | 12 |
| 1.4.1. Posets | 12 |
| 1.4.2. Árboles | 13 |
| 2. Recombinación genética y el proceso de fragmentación. | 19 |
| 2.1. Formalización del problema. | 20 |
| 2.2. El proceso de fragmentación. | 22 |
| 3. Ley del proceso de fragmentación | 29 |
| 3.1. Técnica combinatorial | 33 |
| 3.2. Técnica inductiva | 37 |
| 3.3. Posibles extensiones | 48 |
| 4. Comportamiento asintótico del proceso de fragmentación. | 50 |
| Conclusión | 65 |

Introducción

Este trabajo intenta entender en mayor detalle un modelo de genética poblacional, en particular, el modelo bajo recombinación. La teoría de la genética poblacional intenta describir la evolución de la composición genética de una población bajo distintos efectos, como lo son la selección, mutación, migración y recombinación. En este trabajo de tesis nos enfocaremos en el efecto de la recombinación, la cual describiremos, para efectos introductorios, como el intercambio de material genético entre padre y madre durante la reproducción. En este proceso hay un intercambio a nivel de cromosomas que es llamado *crossover* y fue descubierto y descrito por Morgan [20] en 1911. Si bien, éste no tiene un único modelo matemático para su descripción, nos enfocaremos en el llamado modelo de Moran, el que establece que la evolución genética bajo recombinación es indexada por un tiempo continuo y con la posibilidad de que existan individuos de distintas generaciones coexistiendo a la vez. Este modelo y su formulación matemática ha sido estudiado en diversas ocasiones, ver por ejemplo [11], [4] o [3].

Desde el punto de vista matemático, el problema es bastante interesante. Si bien el modelo considera un conjunto finito de sitios para el material genético, la combinatoria asociada al problema hace que obtener una fórmula explícita de la distribución genética sea complejo. En particular, eventos como la coalescencia, que es el evento en que se junta material genético que fue separado en algún ancestro común, crea bastante complicaciones en los cálculos en un problema donde ya hay bastantes elementos que tomar en cuenta. Es por ello que suele asumirse la hipótesis de población infinita. Ésta provoca que los problemas antes mencionados no ocurran, lo que facilita bastante la descripción, ver [17]. Más aún, este supuesto provoca que la distribución de genes sea la solución a una ecuación diferencial determinista (ver [17], [11], [12]) lo que da una herramienta potente para el análisis. Si bien, este supuesto es irrealista desde el punto de vista del problema que estamos modelando es un buen primer enfoque para entender sus dificultades y además los resultados obtenidos pueden ser una buena aproximación para el caso de poblaciones suficientemente grandes. En un contexto como el anterior es que Michael y Ellen Baake en [11] hacen un nexo con las probabilidades; la evolución de la distribución génica es la esperanza de un proceso estocástico, denominado el proceso de fragmentación. Es en base a lo anterior que técnicas probabilistas han sido usadas en [25] y [4] asumiendo hipótesis extras sobre el *crossover*; en particular, que ocurre uno solo en cada recombinación genética. Para el caso general, se ha trabajado con técnicas combinatoriales (en [11] por ejemplo), pero no se ha intentado generalizar las técnicas antes mencionadas. Una explicación para este hecho es que una de las herramientas principales, los denominados árboles de segmentación los cuales ayudan a dar una expresión mas amigable a posibles trayectorias del proceso de fragmentación cuando solo permitimos un *crossover*, no

tienen una generalización obvia al caso de crossover arbitrario.

Esto hasta que a finales del 2016, en [12], se proponen los denominados árboles de fragmentación. En este trabajo se exploran las posibilidades que éstos ofrecen, lo que concluye finalmente en una fórmula explícita para la ley del proceso de fragmentación. Para llegar a ésta es que se utilizan las técnicas vistas en [25] y [4] con estos árboles. Inclusive se considera la generalización donde cada individuo puede tener un número arbitrario de padres. Esto puede no tener un sentido para la aplicación en el caso genético, pero puede servir para explorar posibles aplicaciones en otras áreas.

Si bien, la fórmula obtenida es una solución para el problema, ésta tiene una serie de términos que no dejan ver claro su comportamiento. En particular, no es claro si hay convergencia de algún tipo y menos aún la velocidad de ésta. Como antecedente se tiene el trabajo [19] de Servet Martínez donde se obtienen resultados de este tipo para el proceso de fragmentación a tiempo discreto, como la distribución cuasi-estacionaria o la descripción del Q -proceso. Esto último da información del proceso condicionado a que no ha caído en algún estado absorbente (que de hecho, para el proceso resulta ser un único estado absorbente). En este trabajo además se explora cómo adaptar estos resultados al tiempo continuo. Sorprendentemente éstos resultan ser una adaptación casi directa de los antes mencionados, pero con el cuidado de cambiar diversas técnicas, dada las diferentes descripciones de los dos procesos.

En base a lo anterior la organización de esta memoria es como sigue: en el capítulo 1 se exponen los conocimientos matemáticos necesarios para hacer este trabajo lo más autocontenido posible. En el capítulo 2 se plantea la formalización matemática del problema, se define el proceso de fragmentación y se demuestra la relación entre ambas. En el capítulo 3 se exponen los resultados que conciernen a la ley del proceso de fragmentación y, posteriormente, en el capítulo 4 a su comportamiento asintótico. Finalmente, se hace una síntesis del trabajo y se discuten posibles extensiones.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se exponen las nociones básicas que se utilizan a lo largo de este trabajo. Sin embargo, la totalidad de las demostraciones no son expuestas. Por esto, en cada capítulo se dará una referencia pertinente para encontrar los resultados.

En la sección 1.1 se muestran resultados básicos de la teoría de ecuaciones diferenciales en espacios de Banach. Luego, en la sección 1.2, se presentan distintos resultados sobre medidas y sus propiedades en espacios productos. Después, en la sección 1.3 se presentan resultados de Cadenas de Markov enfocados en el caso a tiempo continuo y estados finitos. Finalmente, en 1.4, se analizan resultados sobre teoría de grafos y conjuntos parcialmente ordenados. Para ser más precisos en 1.4.1 se definen los conjuntos parcialmente ordenados para luego definir los árboles enraizados en 1.4.2 y analizar cómo aparecen los órdenes parciales en estos.

1.1. Ecuaciones diferenciales en espacios de Banach

En esta sección se enuncian los resultados principales de teoría de ecuaciones diferenciales a valores en espacios de Banach. Cualquier detalle puede referirse a [1] o [2].

Primero, recordar la definición que aparece en el nombre de esta sección:

Definición 1.1 *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Éste se dice espacio de Banach si es completo, es decir, si las sucesiones de Cauchy convergen.*

La gracia de los espacios de Banach es que dan un contexto que permite encontrar soluciones a ecuaciones. fácilmente. a través de las sucesiones de Cauchy. En particular, definimos la herramienta que nos interesa de los espacios de Banach: las ecuaciones diferenciales.

Definición 1.2 *Sea E un espacio de Banach y $A : E \rightarrow E$ alguna función del espacio en sí mismo. Una ecuación diferencial en E es el problema de buscar una función $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ tal que:*

$$f'(t) = A(f(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

donde $f'(t)$ es la derivada de f , es decir, $f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$.

No es claro que el problema anterior tenga una solución. Podría ocurrir que la solución no existiese o que ésta no fuese única, incluso fijando un punto inicial para la ecuación. El siguiente teorema da mayor claridad respecto a este punto:

Teorema 1.3 (Teorema existencia y unicidad) *Sea E Banach, $x_0 \in E$ y $A : E \rightarrow E$ globalmente Lipschitz. Entonces existe una única solución $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ tal que:*

$$\begin{cases} f'(t) = A(f(t)) & t \geq 0 \\ f(0) = x_0. \end{cases}$$

Es decir, hay una única solución al problema de la ecuación diferencial con condición inicial x_0 .

1.2. Medidas sobre espacios producto

En esta sección se enuncian resultados necesarios de Teoría de la Medida. En particular se hace hincapié en las propiedades en espacios productos, que es el contexto que se utiliza, posteriormente. Más detalles pueden encontrarse en [19], [18] o [24].

Definición 1.4 *Dado un conjunto Ω , una σ -álgebra \mathcal{F} (sobre Ω) es un subconjunto de $\mathcal{P}(\Omega)$ tal que:*

- $\Omega \in \mathcal{F}$,
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$,
- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

Al par (Ω, \mathcal{F}) se le denomina espacio medible.

Para fijar ideas, note que si Ω es un conjunto cualquiera entonces $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ es un espacio medible. Otro ejemplo de espacio medible es $(\Omega, \{\emptyset, \Omega\})$.

Proposición 1.5 *Sea I un conjunto de índices cualquiera y $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ una colección de σ -álgebras sobre un conjunto Ω . Entonces $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ también es una σ -álgebra sobre Ω .*

Definición 1.6 *Sea Ω un conjunto cualquiera y $\emptyset \neq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Denotamos por $\sigma(\mathcal{C})$ a la σ -álgebra más pequeña que contiene a \mathcal{C} . Es decir;*

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{F} \text{ } \sigma\text{-álgebra} \\ \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}}} \mathcal{F}.$$

Note que lo anterior está bien definido, puesto que siempre consideramos al menos la σ -álgebra $\mathcal{P}(\Omega)$ en aquella intersección. Además, al menos contiene a la σ -álgebra $\{\emptyset, \Omega\}$. Finalmente, por la proposición 1.5 el resultado es una σ -álgebra.

Definición 1.7 Sea I un conjunto de índices finito, que lo llamaremos el conjunto de sitios. Dada una familia $(A_i, \mathcal{F}_i)_{i \in I}$ de espacio medibles definimos el espacio producto $(X_I, \mathcal{F}_I) := (\prod_{i \in I} A_i, \bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i)$, donde:

$$\bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i := \sigma(\{\times_{i \in I} B_i : B_i \in \mathcal{F}_i\}),$$

Los conjuntos de la forma $\times_{i \in I} B_i$ con $B_i \in \mathcal{F}_i$ son llamados rectángulos y se dice que la σ -álgebra producto es generada por los rectángulos.

Con lo anterior hemos definido una estructura para la medibilidad en el conjunto X_I . Posteriormente, I será el conjunto de sitios del gen, así pues la estructura permitirá definir medidas sobre los genes y entender cómo estos se recombinan. Introducimos, por ello, los siguientes conceptos:

Definición 1.8 Dado un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) , una medida con signo es una función $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ es una colección disjunta entonces $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$.

Si μ es siempre positiva, entonces decimos que es una medida. Si además $\mu(\Omega) = 1$, se dice que la medida es de probabilidad.

Ahora notamos el siguiente hecho interesante sobre las medidas. Los detalles de este pueden ser consultados en [18].

Proposición 1.9 Definimos para toda medida con signo μ sobre (X_I, \mathcal{F}_I) :

$$\|\mu\| = |\mu|(X_I) = \mu_+(X_I) + \mu_-(X_I),$$

donde μ_+, μ_- es la parte positiva y negativa de μ respectivamente. Es decir, para todo $E \in \mathcal{F}_I$:

$$\mu_+(E) = \sup_{B \in \mathcal{F}_I, B \subseteq E} \mu(B),$$

$$\mu_-(E) = - \inf_{B \in \mathcal{F}_I, B \subseteq E} \mu(B).$$

Sea \mathcal{M}_I el conjunto de todas las medidas con signo sobre (X_I, \mathcal{F}_I) tal que $\|\mu\| < \infty$. Entonces $(\mathcal{M}_I, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

La propiedad anterior será el nexo de lo visto en la sección 1.1 con lo visto en esta sección cuando queramos definir el problema de recombinación. Otro resultado útil para lo que sigue, pero también técnico, es el siguiente:

Teorema 1.10 Sean μ, ν dos medidas de probabilidad sobre (Ω, \mathcal{F}) y $\pi \subseteq \mathcal{F}$ tal que π es cerrado para la intersección y $\sigma(\pi) = \mathcal{F}$. Luego, si $\mu(A) = \nu(A)$ para todo $A \in \pi$, entonces $\mu(A) = \nu(A)$ para todo $A \in \sigma(\pi)$.

Como consecuencia se tiene lo siguiente: sean μ, ν dos medidas de probabilidad en un espacio producto (X_I, \mathcal{F}_I) tal que coinciden en los rectángulos, es decir:

$$\mu(\times_{i \in I} B_i) = \nu(\times_{i \in I} B_i),$$

para todo $B_i \in \mathcal{F}_i$. Entonces $\mu = \nu$.

Observación La consecuencia es un resultado directo del hecho que el conjunto de los rectángulos es cerrado para la intersección y que estos generan \mathcal{F}_I .

Nuestro objetivo ahora es entender como se comportan medidas que actúan en distintos sitios $J \subseteq I$. Para ello denotamos por $X_J = \prod_{i \in J} A_i$ y $\mathcal{F}_J = \otimes_{i \in J} \mathcal{F}_i$. Además denotamos por \mathcal{P}_I todas las medidas de probabilidad en X_I . Naturalmente se entiende que para $J \subseteq I$ se denota \mathcal{P}_J las medidas de probabilidad X_J .

Definición 1.11 Dada $\mu \in \mathcal{M}_I$ definimos su marginal, $\mu_J \in \mathcal{M}_J$ para todo $C \in \mathcal{F}_J$:

$$\mu_J(C) = \mu(C \times \prod_{i \notin J} A_i),$$

Donde el producto anterior debe interpretarse en el orden natural que tiene los índices J respecto a los índices en I . Note que para $J = I$ claramente $\mu_J = \mu$. Además, por convención se entiende que si $J = \emptyset$ entonces $\mu_\emptyset \equiv 1$.

Definición 1.12 Sea $J, K \subseteq I$ disjuntos y $\mu_J \in \mathcal{M}_J, \mu_K \in \mathcal{M}_K$. Luego, tiene sentido definir $\mu_J \otimes \mu_K$ la medida producto entre ambas, es decir, tiene sentido definir el siguiente operador:

$$\begin{aligned} \otimes : \mathcal{M}_J \times \mathcal{M}_K &\rightarrow \mathcal{M}_{J \cup K} \\ (\mu_J, \mu_K) &\rightarrow \mu_J \otimes \mu_K, \end{aligned}$$

donde para todo $A \in \mathcal{F}_J, B \in \mathcal{F}_K$ se tiene que:

$$\mu_J \otimes \mu_K(A \times B) = \mu_J(A) \mu_K(B).$$

Si bien lo último está definido solo para los rectángulos tiene una única extensión a todo elemento de $\mathcal{F}_{J \cup K}$, extensión que usaremos al referirnos al objeto anterior.

Ver que $\mu_J \otimes \mu_K$ en efecto queda bien definido como una medida, y de forma única, es un argumento un tanto complicado, ver [24] o [18] para este detalle. Note que si $\mu_J \in \mathcal{P}_J, \mu_K \in \mathcal{P}_K$ ésta es una medida de probabilidad, pues $\mu_J \otimes \mu_K(\prod_{i \in J \cup K} A_i) = \mu_J(\prod_{i \in J} A_i) \mu_K(\prod_{i \in K} A_i) = 1$. Veamos más propiedades que serán útiles para este trabajo.

Proposición 1.13 Se tiene que para todo $\mu_J \in \mathcal{M}_J, \mu_K \in \mathcal{M}_K, \mu_L \in \mathcal{M}_L$:

$$\begin{aligned} (\mu_J \otimes \mu_K) \otimes \mu_L &= \mu_J \otimes (\mu_K \otimes \mu_L) \\ \mu_J \otimes \mu_K &= \mu_K \otimes \mu_J \\ \mu_J \otimes \mu_\emptyset &= \mu_\emptyset \otimes \mu_J = \mu_J \end{aligned}$$

Observación En lo anterior estamos abusando notación respecto a \otimes , en el sentido que sus variables no viven en los mismos espacios. Esto no es problema, dado que para μ_J, μ_K se tiene que $\mu_J \otimes \mu_K$ esta únicamente definido y por tanto hay una única forma de darle sentido a aquellas expresiones, sin necesidad de especificar donde viven los argumentos que tome \otimes . En base a esto diremos que \otimes asocia, conmuta y tiene a μ_\emptyset como elemento neutro, teniendo en cuenta que esto es abuso del lenguaje.

DEMOSTRACIÓN. El hecho que μ_\emptyset es el elemento neutro es fácil de verificar. Demostraremos solo que este operador asocia, el hecho que conmuta lo dejamos propuesto, pues es la misma técnica. Sean $J, K, L \subseteq I$ disjuntos y $\mu_J \in \mathcal{P}_J, \mu_K \in \mathcal{P}_K, \mu_L \in \mathcal{P}_L$. Luego queremos demostrar que:

$$(\mu_J \otimes \mu_K) \otimes \mu_L = \mu_J \otimes (\mu_K \otimes \mu_L)$$

Note que ambas son medidas de probabilidad. Por el teorema 1.10 solo necesitamos verificar que coinciden en los rectángulos. Luego, sean $A \in \prod_{i \in J} \mathcal{F}_i, B \in \prod_{i \in K} \mathcal{F}_i, C \in \prod_{i \in L} \mathcal{F}_i$. Entonces;

$$\begin{aligned} (\mu_J \otimes \mu_K) \otimes \mu_L(A \times B \times C) &= (\mu_J \otimes \mu_K)(A \times B) \mu_L(C) = \mu_J(A) \mu_K(B) \mu_L(C) \\ &= \mu_J(A) (\mu_K \otimes \mu_L)(B \times C) = \mu_J \otimes (\mu_K \otimes \mu_L)(A \times B \times C), \end{aligned}$$

de donde tenemos que coinciden en los rectángulos; luego estas medidas son iguales por el teorema ya mencionado. Ahora si μ_J, μ_K, μ_L son solo medidas (no necesariamente de probabilidad) el resultado se extiende dividiendo por $\mu_J(X_J) \mu_K(X_K) \mu_L(X_L)$ en ambos lados de la demostración anterior. Para extender a medidas con signo basta separar cada medida en su parte negativa y positiva, distribuir adecuadamente y usar el resultado ya visto para medidas. \square

Las propiedades anteriores son bastante estándar. Sin embargo, hay una propiedad más particular: ser estable para restricción.

Proposición 1.14 \otimes es estable para restricción es decir, para $J, K, M \subseteq I$, con $J \cap K = \emptyset$ y $M \subseteq K \cup J$,

$$(\mu_J \otimes \mu_K)_M = \mu_{J \cap M} \otimes \mu_{K \cap M}$$

DEMOSTRACIÓN. Usaremos el teorema 1.10, de manera similar a la demostración anterior, para ello primero supongamos $\mu \in \mathcal{P}_I$. Note que $(\mu_J \otimes \mu_K)_M$ y $\mu_{J \cap M} \otimes \mu_{K \cap M}$ son dos medidas de probabilidad en el espacio producto (X_M, \mathcal{F}_M) . Luego solo basta ver que coinciden en los rectángulos. Consideramos sin pérdida de generalidad que estos son de la forma $A_J \times B_K$ donde $A_J \in \mathcal{F}_{J \cap M}$ y $B_K \in \mathcal{F}_{K \cap M}$. Note que para $(\mu_J \otimes \mu_K)_M$ podemos calcular:

$$\begin{aligned} (\mu_J \otimes \mu_K)_M(A_J \times B_K) &= (\mu_J \otimes \mu_K)(A_J \times B_K \times \prod_{i \in (J \cup K) \setminus M} A_i) \\ &= \mu_J(A_J \times \prod_{i \in J \setminus M} A_i) \mu_K(B_K \times \prod_{i \in K \setminus M} A_i) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Donde usamos la definición de la medida producto. Ahora por la definición de marginalización se verifica que el término 1.1 es:

$$\begin{aligned} \mu(A_J \times \prod_{i \in J \setminus M} A_i \times \prod_{i \in I \setminus J} A_i) \mu(B_K \times \prod_{i \in K \setminus M} A_i \times \prod_{i \in I \setminus K} A_i) &= \mu(A_J \times \prod_{i \in I \setminus (J \cap M)} A_i) \mu(B_K \times \prod_{i \in I \setminus (K \cap M)} A_i) \\ &= \mu_{J \cap M}(A_J) \mu_{K \cap M}(B_K) \\ &= \mu_{J \cap M} \otimes \mu_{K \cap M}(A_J \times B_K) \end{aligned}$$

De donde se concluye que:

$$(\mu_J \otimes \mu_K)_M(A_J \times B_K) = \mu_{J \cap M} \otimes \mu_{K \cap M}(A_J \times B_K)$$

Lo que muestra que la evaluación coincide en ambas medidas. Este resultado se generaliza para $\mu \in \mathcal{M}_I$ de forma similar a la demostración anterior. \square

Observación Las propiedades importantes para \otimes es que asocia, conmuta, tiene a μ_\emptyset como elemento neutro y es estable para restricciones. Note además que de la demostración de esta última propiedad se deduce por inducción que si $(J_l)_{l=1}^m$ son subconjuntos de I , disjuntos de a pares, entonces para $M \subseteq \cup_{l=1}^m J_l$:

$$\left(\bigotimes_{l=1}^m \mu_{J_l} \right)_M = \bigotimes_{l=1}^m \mu_{J_l \cap M}$$

A partir de la definición 1.12 se podrían definir distintos operadores interesantes. Para efectos de este trabajo nos enfocamos en el llamado operador de recombinación:

Definición 1.15 Sea δ una partición de I , es decir, $\delta \subseteq \mathcal{P}(I)$ tal que $\forall d_1, d_2 \in \delta$ con $d_1 \neq d_2$ se tiene $d_1 \cap d_2 = \emptyset$ y además $\cup_{d \in \delta} d = I$. Para $\mu \in \mathcal{M}_I$ definimos el operador recombinación según δ :

$$\begin{aligned} R_\delta : \mathcal{M}_I &\rightarrow \mathcal{M}_I \\ \mu &\rightarrow R_\delta \mu = \frac{1}{\|\mu\|^{|\delta|-1}} \bigotimes_{L \in \delta} \mu_L, \end{aligned}$$

donde la operación \otimes se refiere a la medida producto definida anteriormente.

El operador anterior será clave finalmente para hacer la formalización de nuestro problema. Este tiene muchas propiedades interesantes que pueden ser encontradas en [11], aquí enunciamos dos de interés en la siguiente proposición:

Proposición 1.16 Para todo δ partición de I se tiene que R_δ es globalmente Lipschitz de constante $2|\delta| + 1$. Además R_δ es homogéneo de grado 1, es decir, que para todo $a \in \mathbb{R}_+$, $\mu \in \mathcal{M}_I$, $R_\delta(a\mu) = aR_\delta(\mu)$

1.3. Cadenas de Markov

En esta sección se presentan resultados de la teoría de cadenas de Markov a tiempo continuo, haciendo hincapié en el caso a estados finitos que será el utilizado en este trabajo.

Para entrar en detalles de esta teoría puede consultar [21] o [15].

En primer lugar, recordar la terminología introducida en la sección anterior.

Definición 1.17 *Un espacio de probabilidad es una tripleta $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ donde (Ω, \mathcal{F}) es un espacio medible y \mathbb{P} es una medida de probabilidad sobre (Ω, \mathcal{F}) .*

Desde ahora en adelante daremos como conocidos los resultados básicos de teoría de probabilidad, como los conceptos básicos de variable aleatoria, las densidades básicas y la integral de Lebesgue-Stieljes. Estos pueden ser consultados en [23] o [18]

En lo que sigue consideramos E un conjunto finito que será el conjunto de estados posibles de la cadena. Este puede ser dotado de la σ -álgebra $\mathcal{P}(E)$.

Sea ahora $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con X_n variables aleatorias a valores en E . Note que:

$$\begin{aligned} X &: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow E^{\mathbb{N}} \\ \omega &\rightarrow X(\omega) = (X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

Es medible con respecto a la σ -álgebra producto de $E^{\mathbb{N}}$, esto pues para un rectángulo $[i_0, \dots, i_n] = \{x \in E^{\mathbb{N}} : x_k = i_k, k = 0, \dots, n\}$ se tiene que:

$$X^{-1}[i_0, \dots, i_n] = \bigcap_{k=0}^n X_k^{-1}(\{i_k\}) \in \mathcal{F}.$$

Dado que, según vimos en la sección 1.2, los rectángulos generan la σ -álgebra producto esto determina la medibilidad de X . Un proceso X como el anterior se dirá proceso estocástico a tiempo discreto a valores en E . Si bien definir procesos en conjuntos de estados arbitrarios puede ser complicado, en este caso E es finito lo que nos permite hacer bastantes simplificaciones. En particular, la definición que sigue a continuación.

Definición 1.18 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, E finito y $(P_{ij})_{i,j \in E}$ una matriz estocástica, es decir, $\sum_{j \in E} P_{ij} = 1$ para todo $i \in E$. Decimos que un proceso estocástico $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una cadena de Markov homogénea con matriz de transición P si verifica:*

$$\mathbb{P}_i(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = \delta_{i,i_0} P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \dots P_{i_{n-1} i_n}$$

Esto es equivalente que para toda función $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ medible y acotada

$$\mathbb{E}(f(X_n, \dots, X_{n+m}) | \sigma((X_i) : 0 \leq i \leq n)) = \mathbb{E}_{X_n}(f(X_0, \dots, X_m))$$

Donde \mathbb{E}_μ es la esperanza partiendo de la distribución μ , es decir:

$$\mathbb{E}_\mu = \sum_{i \in E} \mu(i) \mathbb{E}_i$$

Intuitivamente; para una Cadena de Markov el futuro es independiente del pasado condicionado al presente.

Observación En la definición anterior estamos suponiendo que, dada una matriz estocástica siempre existe una cadena de Markov asociada. Dado que E es finito esto es cierto y puede construirse explícitamente a partir de variables uniformes.

Lo anterior da un marco teórico para cadenas de Markov a tiempo discreto. Lo deseable es generalizar esto a tiempo continuo, es decir, tener un proceso estocástico $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ que cumpla un símil a la propiedad de Markov. Esto puede ser construido explícitamente y lo reflejamos en la siguiente definición:

Definición 1.19 Sea $Q = (q_{i,j})_{i,j \in E}$ una matriz que cumple que $\sum_{y \in E} q_{i,j} = 0, q_{i,i} \leq 0$ y $q_{i,j} \geq 0$ para todo $i \neq j$ con $i, j \in E$. Definimos la matriz $\Pi = (\pi_{ij})_{i,j \in E}$ dada por:

$$\pi_{ij} = \begin{cases} -\frac{q_{ij}}{q_{ii}} & i \neq j \wedge q_{i,j} \neq 0 \\ 0 & i \neq j \wedge q_{i,i} = 0 \\ 0 & i = j \wedge q_{i,i} \neq 0 \\ 1 & i = j \wedge q_{i,i} = 0 \end{cases}$$

Consideramos $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov con ley inicial μ y matriz de transición Π . Además consideramos variables S_1, \dots, S_n que, condicional a X_0, \dots, X_{n-1} son exponenciales independientes de parámetro $-q_{X_0, X_0}, \dots, -q_{X_{n-1}, X_{n-1}}$ respectivamente. Definiendo $T_n = S_1 + \dots + S_n$ diremos que:

$$Y_t = \sum_{n \in \mathbb{N}} X_n 1_{[T_n, T_{n+1})}(t)$$

es una cadena de Markov a tiempo continuo con ley inicial μ y generador Q . $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es llamada la cadena subyacente y $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ los tiempos de espera de la cadena. Lo anterior se denota como $Y \sim CM(Q, \mu)$.

La pregunta es si lo anterior refleja efectivamente la propiedad de Markov. Esto se responde en el siguiente teorema:

Teorema 1.20 Una cadena de Markov a tiempo continuo $(Y_t)_{t \geq 0}$ definida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a valores en E verifica que para todo $t, s \geq 0$:

$$\mathbb{E}(f(Y_{t+s}) | \sigma((Y_u) : 0 \leq u \leq s)) = \mathbb{E}_{Y_s}(f(Y_t))$$

Con esto se recupera la idea que a la cadena de Markov solo le importa lo que ocurre en el presente para entender lo que pasara en el futuro.

A partir de lo anterior es deseable entender las leyes de la cadena de Markov dado que conocemos su generador Q . Es decir, buscamos entender $p_t(x, y) = \mathbb{P}(Y_t = y | Y_0 = x)$, esta es la llamada función de transición. Para esto se ocupa la siguiente proposición:

Proposición 1.21 Sea $(Y_t)_{t \geq 0}$ una cadena de Markov a tiempo continuo con generador Q . Sea $p_t(x, y) = \mathbb{P}(Y_t = y | Y_0 = x)$ y $q(x, y) = Q_{x,y}$. Entonces se verifica:

- Para todo $x, y \in E$:

$$p_{s+t}(x, y) = \sum_{z \in E} p_s(x, z)p_t(z, y)$$

- Para cada $x \in E$ se tiene:

$$-q(x, x) = -\frac{d}{dt}p_t(x, x)|_{t=0}$$

- Si $-q(x, x) < \infty$ entonces para todo x e $y \neq x$ se tiene que:

$$q(x, y) = \frac{d}{dt}p_t(x, y)|_{t=0}$$

- Si para algún $x \in E$, $-q(x, x) < \infty$ y $\sum_{y \in E} q(x, y) = 0$ entonces $p_t(x, y)$ es diferenciable en t y verifica:

$$\frac{d}{dt}p_t(x, y) = \sum_{z \in E} q(x, z)p_t(z, y)$$

Dado que nuestro trabajo se centra cuando se cumple las condiciones de la proposición anterior entonces esto nos caracteriza la función de transición por la ecuación diferencial:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}P(t) = QP(t) \\ P(0) = I \end{cases}$$

Lo que tiene como única solución, dado que el conjunto de estados es finito, a $P(t) = e^{tQ}$, lo que determina únicamente y explícitamente la función de transición.

De la definición 1.19 las cadenas de Markov a tiempo continuo pueden considerarse como dos procesos simultáneos; por un lado una Cadena de Markov a tiempo discreto que dice a qué estados saltamos y las exponenciales que dan cuanto tiempo se espera para saltar. Esta expresión da una forma de entender las cadenas de Markov y hacer distintos cálculos. Un ejemplo es que, dado que E es finito, la cadena hace una finita cantidad de saltos en tiempo finito, casi seguramente. Otra propiedad interesante, que demostraremos, es la siguiente:

Proposición 1.22 Sea T_k , $k \in E$, variables aleatorias exponenciales de parámetros λ_k tal que $0 < q := \sum_{k \in E} q_k < \infty$ y $T := \inf_{k \in E} T_k$. Luego, este ínfimo es alcanzado por una sola variable K con probabilidad 1 y $T = T_K$ es independiente de K . Más aún, $\mathbb{P}(K = k) = \frac{q_k}{q}$. Como consecuencia: el estado al cual saltamos en una cadena de Markov es independiente de sus tiempos de espera.

DEMOSTRACIÓN. Sea K definida por $K = k$ si $T_k < T_j$ para todo $k \neq j$ y indefinida si lo anterior no ocurre. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(K = k, T \geq t) &= \mathbb{P}(T_k \geq t, T_j > T_k \forall j \neq k) = \int_t^\infty q_k e^{-q_k s} \mathbb{P}(T_j > s \forall j \neq k) ds \\ &= \int_t^\infty q_k e^{-q_k s} \prod_{j \neq k} e^{-q_j s} ds = \int_t^\infty q_k e^{-qs} ds \\ &= \frac{q_k}{q} e^{-qt} = \frac{q_k}{q} \mathbb{P}(T \geq t). \end{aligned}$$

Notemos luego que la densidad conjunta se separa en las densidades individuales y por tanto T y K son independiente de las densidad dichas. En particular note luego la ley de K esta dada por $\mathbb{P}(K = k) = \frac{q_k}{q}$, por tanto $\mathbb{P}(K \in E) = \sum_{k \in E} \frac{q_k}{q} = 1$ y así $K \in E$ casi seguramente. En particular, con probabilidad 1 el ínfimo de T es alcanzado por una sola variable.

Para la consecuencia recuerde que el ínfimo de exponenciales es una exponencial de las suma de los parámetros. Luego para $i \in E$ y $i \neq k$ tomemos T_k exponenciales de parámetro $q_{i,k}$. Luego T es exponencial de parámetro $\sum_{k \in E} q_{i,k} = -q_{i,i}$, que es justamente el tiempo de espera para el salto de la cadena dado por 1.19. Note que entonces podemos usar el resultado recién probado con $K = X_1$ y así

$$\mathbb{P}_i(X_1 = k, T \geq t) = \frac{q_k}{q} e^{-qt} = \mathbb{P}_i(X_1 = k) \mathbb{P}_i(T \geq t).$$

De donde sigue la independencia. □

A partir de lo anterior se pueden probar teoremas aún más potentes para las cadenas de Markov. En particular enunciaremos el teorema de Markov fuerte:

Teorema 1.23 *Decimos que T es tiempo de parada con respecto a una cadena $(Y_t)_{t \geq 0}$ si $\{T \leq t\} \in \sigma((Y_s); 0 \leq s \leq t)$. Sea $(Y_t)_{t \geq 0} \sim CM(Q, \mu)$ y T un tiempo de parada respecto a $(Y_t)_{t \geq 0}$, entonces $\forall t \geq 0$*

$$\mathbb{E}_x(Y_{T+t} | \sigma((Y_s); 0 \leq s \leq T)) = \mathbb{E}_{Y_T}(Y_t).$$

1.4. Árboles y Posets

1.4.1. Posets

En esta subsección, primero, se define lo que es un conjunto parcialmente ordenado, o Poset para acortar (esto viene del inglés por *partial ordered set*). Luego se ven algunas propiedades que son de interés para este trabajo. Más detalles sobre este tópico y las demostraciones pueden encontrarse en [8], [16] o [14].

Definición 1.24 *Un Poset (X, \leq) es un par donde X es un conjunto finito y \leq es un orden parcial sobre X . Es decir, $x \leq y$ verifica:*

- \leq es reflexiva, es decir, $\forall x \in X, x \leq x$,
- \leq es antisimétrica, es decir, para cualquier $x, y \in X$, $x \leq y \wedge y \leq x$ implica que $x = y$,
- \leq es transitiva, es decir, para todo $x, y, z \in X$ si $x \leq y \wedge y \leq z$ implican que $x \leq z$.

Una herramienta de gran utilidad es la fórmula de inversión de Möbius. Esta permite calcular funciones complejas definidas sobre algún Poset.

Definición 1.25 Sea (X, \leq) un Poset cualquiera. Denotamos $x < y$ como que $x \leq y \wedge x \neq y$. Definimos su función de Möbius, μ , recursivamente como:

$$\begin{cases} \mu(x, x) = 1 & \forall x \in X \\ \mu(x, y) = - \sum_{\substack{z \in X \\ x \leq z < y}} \mu(x, z) & x < y \end{cases}$$

Ejemplo Muchas veces esta recursión puede ser resuelta explícitamente. A modo de ejemplo consideremos $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ y el poset $(\mathcal{P}(I_n), \subseteq)$. En aquel caso para $A, B \subset I_n$ se tiene que

$$\mu(A, B) = (-1)^{|B|-|A|} 1_{A \subseteq B}.$$

La utilidad de esta función es justificada por la fórmula de inversión de Möbius.

Teorema 1.26 Sea (X, \leq) un conjunto parcialmente ordenado. Sea μ su función de Möbius y $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función de valores reales definida en X . Definimos la función $G : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$G(x) = \sum_{\substack{z \in X \\ z \leq x}} F(z).$$

Entonces, se puede despejar F en términos de G

$$F(x) = \sum_{\substack{y \in X \\ y \leq x}} G(y) \mu(y, x).$$

Ejemplo Considerando nuevamente el ejemplo $(\mathcal{P}(X_n), \subseteq)$ se obtiene que si $G(A) = \sum_{\substack{B \in \mathcal{P}(X_n) \\ B \subseteq A}} F(B)$

entonces $F(A) = \sum_{\substack{B \in \mathcal{P}(X_n) \\ B \subseteq A}} (-1)^{|A|-|B|} G(B)$. De lo anterior es posible recuperar la fórmula de

inclusión-exclusión, con una buena elección de las funciones F y G . Por este motivo la intuición para la inversión de Möbius es entenderla como un principio de inclusión-exclusión sobre un Poset diferente.

1.4.2. Árboles

En esta sección se define la estructura de árbol y luego, la de Posets sobre éstos. Detalles de teoría de grafos pueden ser consultados en [10] y [7]. Los detalles de los Posets que aparecen en esta sección puede ser consultados en [4] o [12].

Empezamos entonces con las definiciones básicas de teoría de grafos a manejar.

Definición 1.27 Un grafo no dirigido es un par $G = (V, E)$ donde V es un conjunto cualquier y E es un subconjunto vértices de tamaño 2. Se dice que V es el conjunto de nodos o vértices y E el conjunto de arcos o aristas. Notar que todo elemento de E es de la forma

$\{u, v\}$ con $u, v \in V$, lo cual denotaremos uv o vu . Se denota también a $V(G)$ los vértices de G y $E(G)$ los arcos de G .

Observación Los grafos del plano tienen una estructura que permite dibujarlos en el plano considerando V como un conjunto de puntos y E líneas que los conectan. Ponemos como ejemplo la figura 1.1.

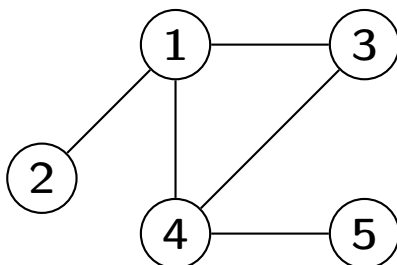


Figura 1.1: Ejemplo de Grafo. $G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$

Estas estructuras admiten una serie de clasificaciones según sus propiedades. Aquí damos las básicas para definir el concepto de árbol enraizado.

Definición 1.28 Sea $G = (V, E)$ un grafo simple no dirigido. Un camino $P = x_1x_2, \dots, x_k$ es un secuencia de nodos de V tal que $x_i x_{i+1} \in E$ para todo $1 \leq i \leq k - 1$ y $x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j$.

Definición 1.29 Si para todo par de nodos $u, v \in V$ existe un camino $P = x_1, \dots, x_k$ tal que $x_1 = u$ y $x_k = v$ decimos que el grafo es conexo.

Por otro lado si para todo par de nodos $u, v \in V$ existe a lo más un camino $P = x_1, \dots, x_k$ tal que $x_1 = u$ y $x_k = v$, entonces decimos que el grafo es un bosque.

Definición 1.30 Sea $G = (V, E)$ un bosque. Decimos además que este es un árbol si es conexo. En este caso normalmente se denota por T en lugar de G (por Tree en inglés). Note que luego entre todo par de vértices en T existe un único camino entre ellos. Note también que los bosques pueden verse como unión vértice disjunta de árboles.

Definición 1.31 Un árbol enraizado es una tripleta $T = (V, E, \gamma)$ donde (V, E) es un árbol y γ es un nodo de V . Al nodo γ se le llama raíz.

Observación Las definiciones anteriores tienen un razón bastante gráfica. Un árbol enraizado puede dibujarse considerando γ como el primer elemento en V y luego dibujar el resto descendientemente. El dibujo resultante tiene una clara similitud con un árbol invertido. Ver 1.2 como ejemplo.

Note que el hecho de tener una raíz induce un Poset natural en un árbol según la distancia que tienen los los caminos que existen desde la raíz. Formalizamos lo anterior con la siguiente proposición:

Proposición 1.32 Sea $T = (V, E, \gamma)$ un árbol enraizado. Definimos en éste la relación \leq en

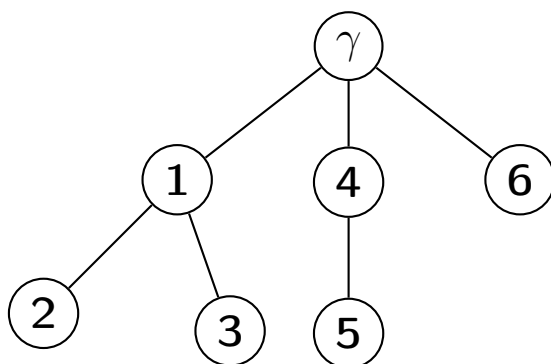


Figura 1.2: Ejemplo de Árbol enraizado con $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \gamma\}$, $E = \{(\gamma, 1), (\gamma, 4), (\gamma, 6), (1, 2), (1, 3), (4, 5)\}$ y raíz γ .

V , dada por que $a \leq b$ si y solo si el único camino desde γ a b pasa por a . Entonces (V, \leq) es un Poset. Si $a \leq b$, con $\{a, b\} \in E$, decimos que b es hijo de a .

Observación De lo anterior podemos orientar el árbol desde la raíz. Es decir, si $T = (V, E, \gamma)$ es un árbol enraizado podemos considerar los elementos de E de la forma (a, b) donde $a \leq b$.

DEMOSTRACIÓN. Primero, es claro que el camino desde γ hasta a pasa por a , así \leq es refleja.

Por otro lado, si $a \leq b$ y $b \leq a$ quiere decir que el camino que pasa de P a b pasa por a y viceversa. Si a fuese distinto de b , entonces cualquier camino P que va desde γ hasta b es de la forma $P = \gamma x_1 \dots x_l a x_{l+1} \dots x_k b$. Luego, podríamos considerar el camino $P = \gamma x_1 \dots x_l a$, que es un camino que va desde γ hasta a sin pasar por b , lo que es una contradicción con que $b \leq a$. Luego, a y b deben ser iguales.

Ahora supongamos que $a \leq b$ y $b \leq c$. Sea P el camino desde γ a c . Luego $P = \gamma x_1, \dots, x_k c$. Como $b \leq c$, entonces b está en P y luego éste es de la forma $P = \gamma x_1, \dots, x_l b x_{l+1}, \dots, x_k c$. Pero luego $\gamma x_1, \dots, x_l b$ es un camino desde γ hasta b , y como $a \leq b$, entonces en aquel camino debe aparecer a . Concluimos que P es de la forma $P = \gamma x_1, \dots, x_j a x_{j+1}, \dots, x_l b x_{l+1}, \dots, x_k c$. En particular, todo camino que va desde γ hasta c pasa por a y así $a \leq c$. \square

Observación Note que todo $e \in E$ es de la forma $e = (a, b)$ con $a \leq b$; luego también tenemos un orden natural en E definido por comparar el elemento maximal de cada arco entre sí. Es decir, $e_1 = (a_1, b_1) \leq e_2 = (a_2, b_2)$ si y solo si $b_1 \leq b_2$ define un orden parcial en E .

Sin embargo, estos no son los únicos Posets que aparecen, más aún, nos interesan otros más complejos.

Definición 1.33 Dado T un árbol enraizado y un subconjunto H de E denotamos por $T - H$ el bosque enraizado producto de borrar todos los elementos H de E y tomar como raíz de cada árbol su elemento minimal. Note que éste es enraizado pues en cada árbol la raíz es el único elemento minimal de ésta. Diremos que H son los arcos de corte.

En lo que sigue, para todo $\alpha \in V$, denotamos $T_\alpha(H)$ el subárbol de $T - H$ que tiene raíz α . Denotamos por $V_\alpha(H)$ a $V(T_\alpha(H))$ y $E_\alpha(H)$ a $E(T_\alpha(H))$. Luego $T - H$ es la unión disjunta de $T_\alpha(H)$ con $\alpha = \gamma$ o bien α es un extremo superior de algún $e \in H$. Note que si $H = E$ entonces $T_\gamma(E) = (\{\gamma\}, \emptyset)$ y así este es siempre no vacío.

Para un árbol T y $H \subseteq E$ fijo, el subárbol que más nos interesa es el que contiene la raíz, $T_\gamma(H)$. Este recibe el nombre de stump tree, y a su conjunto de vértices $V_\gamma(H)$ se le llama stump set. Nos interesa el stump tree al ir cambiando H . Observe que si $H = \{e_1, \dots, e_k\}$ con $e_i = (\alpha_i, \beta_i)$, entonces

$$V_\gamma(H) = V \setminus \{v \in V : \exists i, v \geq \beta_i\}.$$

Definición 1.34 Denotamos el conjunto de todos los posibles stumps sets por

$$\mathcal{R}(T) := \{V_\gamma(H) : H \subseteq E\}.$$

Para cada stump set se puede identificar los arcos que cortan el árbol para formarlo. Para $R \in \mathcal{R}(T)$ denotamos por $\partial(R)$ el conjunto de arcos que separan R de $V \setminus R$, es decir

$$\partial(R) := \{(\alpha, \beta) \in E : \beta \in R, \alpha \in V \setminus R\}.$$

En particular, $\partial(V) = \emptyset$.

Definición 1.35 Definimos $\mathcal{C}(T)$ el conjunto de todos los cortes que forman stumps sets en T , es decir

$$\mathcal{C}(T) := \{\partial(R) : R \in \mathcal{R}(T)\}.$$

Se verifica que $\{e\} \in \mathcal{C}(T)$ para toda $e \in E$. Además, cada $C \in \mathcal{C}(T)$ satisface, trivialmente, que $C = \partial(V_\gamma(C))$.

Proposición 1.36 Sea $H \subseteq E$. Entonces $H \in \mathcal{C}(T)$ si y solo si $H = M(H)$, donde

$$M(H) := \{e \in H : e \text{ minimal en } H \text{ para } \leq\},$$

Con $M(\emptyset) := \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $H \subseteq E$ y supongamos que $H = M(H)$. Entonces para todo par $e_i, e_j \in H$ con $i \neq j$ tenemos que e_i es incomparable respecto a e_j . Note que dado que $V_\gamma(H) = V \setminus \{v \in V : v > \alpha_i\}$, entonces es claro que $\partial(V_\gamma(H)) = H$ y así $H \in \mathcal{C}(T)$.

Ahora para la otra implicancia asuma que $H \neq M(H)$. Luego existe $e_1 = (\alpha_1, \beta_2), e_2 = (\alpha_2, \beta_2) \in H$ tal que $e_1 \leq e_2$. Luego, no existe $R \in \mathcal{R}(T)$ tal que $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ y $\beta_1, \beta_2 \in V \setminus R$ (puesto que como $\beta_1 \leq \beta_2$ entonces $\alpha_2 \in V \setminus R$) y por tanto H no esta en $\mathcal{C}(T)$. \square

Luego, podemos caracterizar $\mathcal{C}(T) = \{H \subseteq E; H = M(H)\}$ y además $\mathcal{R}(T) = \{V_\gamma(C) : C \in \mathcal{C}(T)\}$.

Proposición 1.37 Para cada $H \subseteq E$

(A) Para $\alpha \in V_\gamma(H)$, $K \subseteq E_\gamma(H)$ se tiene que $(T_\gamma(H))_\alpha(K) = T_\alpha(H \cup K)$,

(B) Para $C \in \mathcal{C}(T_\gamma(H))$ y $\alpha \notin V_\gamma(H \cup C)$ se tiene que $T_\alpha(H) = T_\alpha(H \cup C)$.

DEMOSTRACIÓN. (A) es fácil ver que $(T - H)(K) = T - (H \cup K)$ y por tanto el árbol es el mismo en ambos casos.

(B) Note que $C \cap E_\alpha(\emptyset) = \emptyset$ por la proposición anterior. Sin embargo, el subárbol $T_\alpha(H)$ no es afectado por borrar aristas fuera de él, es decir, si $e \notin E_\alpha(\emptyset)$. \square

De lo anterior, se puede probar la siguiente caracterización de los stump set:

Proposición 1.38 Un subconjunto I de vértices de T es un stump set si y sólo si es un ideal no vacío de (V, \preceq) , es decir, cumple que si $\alpha \in I$ y $\beta \preceq \alpha$ entonces $\beta \in I$.

Con esto ya tenemos suficientes herramientas sobre el árbol enraizado T . Por lo que ahora estudiaremos $\mathcal{P}(E)$. Es decir, queremos entender todos los posibles cortes.

Definición 1.39 Introducimos el orden parcial \preceq , donde para $H, K \subseteq E$

$$H \preceq K \Leftrightarrow H = K \cup A, \quad A \subseteq E_\gamma(K).$$

Hacemos énfasis que el conjunto de arcos A de la definición es único y dado por $H \setminus K$. Es decir, se tiene que $H \preceq K \Leftrightarrow H \setminus K \subseteq E_\gamma(K)$,

Proposición 1.40 $(\mathcal{P}(E), \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

DEMOSTRACIÓN. Sea $H \subseteq E$. Luego $H \setminus H = \emptyset \subseteq E_\gamma(H)$. Y por tanto es reflexiva. Para ver que es antisimétrica suponga que $H \preceq J$ y $J \preceq H$. Note que esto implica que $H \subseteq J$ y $J \subseteq H$, en particular $H = J$. Para ver que es transitiva sea además $J, K \subseteq E$ y considere que $H \preceq J$ y que $J \preceq K$. Notemos que esto se traduce en

$$H = J \cup A, \quad A \subseteq E_\gamma(J) \wedge J = K \cup B, \quad B \subseteq E_\gamma(K).$$

Note que $K \subseteq J$ y por tanto $E_\gamma(J) \subseteq E_\gamma(K)$. Luego $A \subseteq E_\gamma(K)$. Considere $A \cup B \subseteq E_\gamma(K)$. Con lo anterior

$$K \cup (A \cup B) = J \cup A = H.$$

Y por tanto $H \preceq K$. Así \preceq es transitiva. \square

Definición 1.41 Al poset $\mathcal{D}(T) = (\mathcal{P}(E), \preceq)$ lo llamaremos el pruning poset o poset de poda de T (intuitivamente los conjuntos más pequeños podan cada vez más el árbol, ver como ejemplo 1.3).

Note que para cada $K \subseteq E$ tenemos el isomorfismo

$$(\{H : H \preceq K\}, \preceq) \sim \mathcal{D}(T_\gamma(K)).$$

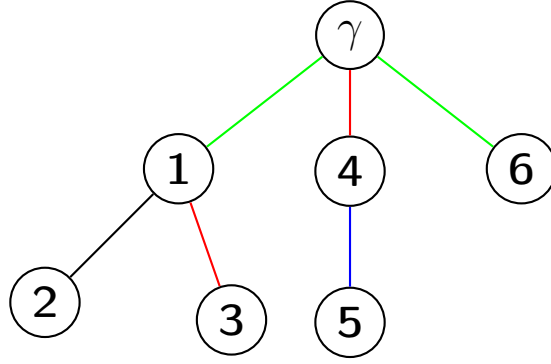


Figura 1.3: Ejemplo de $H, K, J \subseteq E$ para el árbol de la figura 1.2. K en rojo, $H \setminus K$ en verde y $J \setminus K$ en azul. Se tiene que $H \preceq K$ pero $J \not\preceq K$.

A través de la función que a H le asigna $H \setminus K \subseteq E_\gamma(K)$. Note que, en general, $\mathcal{D}(T)$ tiene un elemento maximal obvio \emptyset , pero ningún elemento minimal. Por ello consideramos cada intervalo, definido para $H \preceq K$:

$$[H, K] := (\{I \subseteq E : H \preceq I \preceq K\}, \preceq)$$

el cual tiene un elemento minimal H y uno maximal K . Similarmente a lo anterior se tiene el isomorfismo:

$$[H, K] \sim [H \setminus K, \emptyset].$$

Luego, solo basta estudiar las propiedades de $[H, \emptyset]$ para estudiar los intervalos de este Poset. Con lo anterior se puede caracterizar la función de Möbius, definida en 1.4.1, para el Pruning Poset. Este teorema fue probado por Ellen Baake y Esser en [4] y se enuncia a continuación:

Teorema 1.42 *Para cada $T = (V, E, \gamma)$ la función de Möbius del Pruning Poset $\mathcal{D}(T)$; definida para cada $H, K \subseteq E$ con $H \preceq K$ está dada por*

$$\mu(H, K) = \begin{cases} (-1)^{|H|-|K|} & H \setminus K \in \mathcal{C}(T_\gamma(K)), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Luego, por teorema de inversión de Möbius para $f, g : \mathcal{D}(T) \rightarrow \mathbb{R}$ tenemos que

$$g(K) = \sum_{H \preceq K} f(H) \Leftrightarrow f(K) = \sum_{H \preceq K} \mu(H, K)g(H) = \sum_{H \preceq K} 1_{H \setminus K \in \mathcal{C}(T_\gamma(K))} (-1)^{|H|-|K|} g(H).$$

Observación Uno podría pensar que el teorema anterior se desprende de la función de Möbius para el Poset $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$. Esto no es así y la demostración es bastante más compleja, ver la referencia para este detalle.

Capítulo 2

Recombinación genética y el proceso de fragmentación.

En este capítulo se explican brevemente los modelos genéticos asociados al problema para luego llevarlos a un lenguaje matemático utilizando las herramientas del análisis vistas en 1.2. Posteriormente se define el proceso de fragmentación y se demuestra su relación con la recombinación. Sí bien podríamos desde un comienzo formular todo en lenguaje matemático, el modelo ayuda a entender algunas decisiones usadas para modelar el problema y dará una buena intuición para ciertas definiciones posteriores.

En primer lugar, es necesario explicar el problema que se intenta modelar y para ello hay que introducir el lenguaje biológico adecuado. Se entiende por un *gen* una secuencia de ADN que codifica las proteínas. Cada *gen* tienen cierta diferencia que lo distingue entre individuos, lo que se denomina *alelo*. Cada *gen* almacena esta información en distintos lugares, lo que denominaremos *sitios*. Cada *sitio* puede representar un alelo, una base (Adenina, Citosina, Guanina y Timina son compuestos que son la composición básica del ADN) o alguna otra variable particular. Pensando en posibles aplicaciones más generales, cada *sitio* podría tomar valores en algún espacio arbitrario, como \mathbb{R} .

Durante el proceso de reproducción, dos individuos forman otro a partir de una interacción física de su material genético. Este proceso se denomina recombinación y se basa en los eventos de *crossover*; esto es cuando un pedazo del material genético de los progenitores se rompe en dos partes, que luego intercambian entre sí, formando dos genes que son mitad proveniente del padre y mitad proveniente de la madre. Finalmente, uno de estos genes es elegido y determina el material genético del hijo. Note que múltiples *crossover* pueden ocurrir en una sola recombinación. En aquel caso, decimos que tenemos *crossover* múltiple y en caso contrario solo admitimos *crossover* simple. Nótese además que para generalizar podríamos botar la hipótesis de dos padres y asumir k padres, donde el material genético es dividido en k partes y luego recombinado según la misma regla mencionado anteriormente. Si $k = 2$, decimos que la recombinación es biparental y si $k \geq 3$, decimos que la recombinación es multiparental. Note que luego hay dos clasificaciones: según la cantidad de padres permitidos y según la cantidad de *crossover* en el evento de recombinación.

2.1. Formalización del problema.

Nuestro objetivo ahora es entender la dinámica de una población que evoluciona con las reglas antes mencionadas. ¿Dada la distribución genética de la población inicial, cuál es la distribución a tiempo $t \in \mathbb{R}_+$? Para ello primero consideramos ciertas simplificaciones. En particular, asumiremos que la recombinación es el único efecto sobre los genes y que los individuos son indistinguibles sexualmente (no existen sexos). En segundo lugar, asumiremos que la reproducción sigue el modelo de Moran a población infinita, lo cual permite establecer una ecuación que modela la recombinación. Dentro de esto último, también asumiremos que las recombinaciones ocurren con cierta tasa constante en el tiempo. Estas hipótesis ayudan a simplificar el problema sin perder la esencia que lo hace interesante; que para nosotros es la combinatoria asociada a este.

Ahora damos una formulación matemática a lo anterior. Consideramos $I = \{1, 2, \dots, n\}$ un conjunto finito que es el conjunto de sitios. Para cada $i \in I$ consideramos (A_i, \mathcal{F}_i) un espacio medible, donde A_i es el conjunto posible de valores para el gen en el sitio i . Luego un individuo es un elemento $x \in \prod_{i \in I} A_i$. Recordemos que denotamos, para $J \subseteq I$, $X_J = \prod_{i \in J} A_i$ y $\mathcal{F}_J = \bigotimes_{i \in J} \mathcal{F}_i$.

Nos interesa tener una notación consistente para tratar la recombinación de los genes. Dado que la recombinación se basa en separar subconjuntos de sitios pertenecientes a un mismo gen, es natural pensar en las particiones como un buen ambiente.

Definición 2.1 *Definimos $\mathbb{D}(I)$ el conjunto de particiones de I ,*

$$\mathbb{D}(I) = \{\delta \subseteq \mathcal{P}(I) : \delta \text{ es partición de } I\},$$

luego cada $\delta \in \mathbb{D}(I)$ es un conjunto de partes de I que cumplen la condición de partición, es decir, $\bigcup_{d \in \delta} d = I$ y $\forall d, d' \in \delta$ tal que $d \neq d'$ verifica $d \cap d' = \emptyset$.

Siempre supondremos que $\delta = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$, donde d_1 es el pedazo de I que contiene al menor elemento, d_2 es el que contiene al menor elemento que no está en d_1 y así sucesivamente. Finalmente, decimos que una partición δ de I es ordenada si cada elemento $d \in \delta$ es de la forma $d = \{i \in I : \min_{a \in d} a \leq i \leq \max_{a \in d} a\}$.

Ahora consideramos $\rho = (\rho_\delta : \delta \in \mathbb{D}(I))$ una serie de números reales no negativos, que llamamos las tasas de recombinación. Denotamos por $\mathcal{G}_\rho = \{\delta \in \mathbb{D}(I) : \rho_\delta > 0\}$ el soporte de ρ . Las tasas de recombinación dadas por ρ determinan la clasificación de nuestro modelo, según lo discutido en la introducción, de la siguiente manera:

Definición 2.2 *Si para todo $\delta \in \mathcal{G}_\rho$ se tiene que $|\delta| = 2$ entonces decimos que estamos en el caso de recombinación biparental, y en caso contrario decimos que estamos en el caso de recombinación multiparental.*

Por otro lado, si para todo $\delta \in \mathcal{G}_\rho$ tenemos que δ es una partición ordenada entonces decimos que estamos en el caso de recombinación simple y si no en el caso de recombinación múltiple.

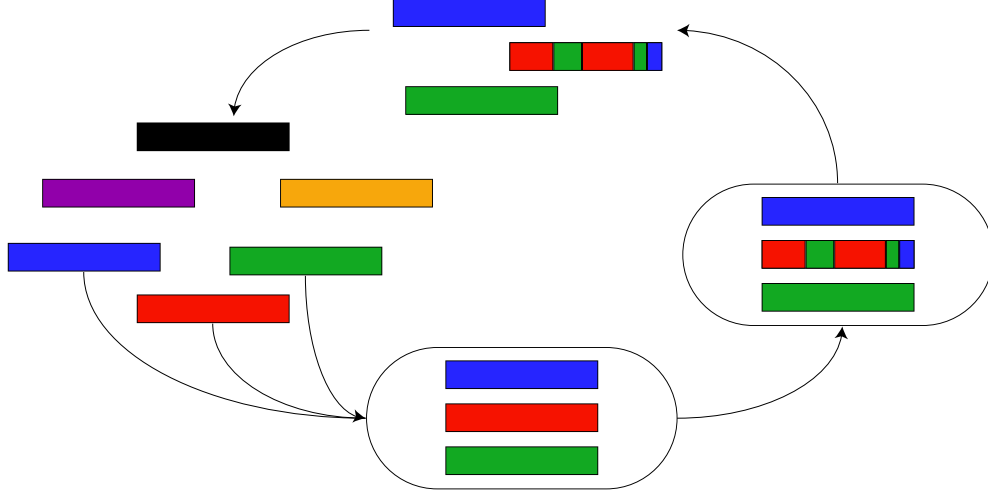


Figura 2.1: Ejemplo del modelo de Morán con $N = 6$. Primero, se tiene una población de N individuos (ver figura de la izquierda), luego un reloj exponencial suena (el del individuo rojo por ejemplo) y son elegidos otros 2 individuos al azar para la recombinación (ver dibujo inferior). Luego, usan sus genes según δ para formar un nuevo individuo que reemplaza al rojo (ver dibujo de la derecha), con esto tenemos un individuo nuevo (ver dibujo superior). Este proceso se repite indefinidamente.

Ahora haremos una breve explicación del modelo de Morán para la recombinación. Más detalles pueden encontrarse en [11], [25], [12] o [17]. Suponemos que partimos en una instante inicial con una población de N individuos, número que permanecerá constante en el tiempo. Por cada uno de ellos y por cada $\delta \in \mathcal{G}_\rho$ se corre un reloj exponencial de parámetro ρ_δ . Cuando alguno de estos relojes suena, supongamos uno indexado por $\delta = \{d_1, d_2, \dots, d_r\}$, se toma al individuo y otros $|\delta| - 1$ individuos al azar, uniforme de la población y se forma un nuevo individuo, que reemplaza al cuyo reloj sonó, según δ . Es decir, el nuevo individuo cumple que los genes en el sitio d_i son heredados del i -ésimo padre. Puede ver la figura 2.1 que ejemplifica el caso con una recombinación con $|\delta| = 3$. En este contexto de N individuos definimos Z_t^N la medida aleatoria que para todo $B \in \mathcal{F}_I$, $Z_t^N(B)$ es la cantidad de individuos en el conjunto B a tiempo t , es decir

$$Z_t^N(B) = |\{x : x \in B, a \text{ tiempo } t\}|.$$

Note que dado que la población es finita lo anterior está bien definido como una medida de conteo. Note que luego $\frac{Z_t^N}{N}$ es una medida de probabilidad, la cual llamamos la distribución genética de la población. Supongamos que $\frac{Z_t^N}{N}$ converge, cuando $N \rightarrow \infty$, a cierta medida de probabilidad $\mu \in \mathcal{P}_I$. Es demostrado en [12] y [17] que entonces $\frac{Z_t^N}{N}$ converge (en probabilidad uniforme en compactos) a la solución de la siguiente ecuación diferencial definida en $(\mathcal{M}_I, \|\cdot\|)$

$$\begin{cases} \dot{\omega} = \sum_{\delta \in \mathcal{G}_\rho} \rho_\delta (R_\delta - 1)\omega, \\ \omega(0) = \mu. \end{cases} \quad (2.1)$$

Donde R_δ fue definido en la sección 1.2 como sigue:

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_I : R_\delta \mu = \frac{1}{\|\mu\|^{|\delta|-1}} \bigotimes_{L \in \delta} \mu_L.$$

Luego, para estudiar la recombinación de genes nos dedicamos a entender la solución de la anterior ecuación. En lo que sigue denotamos a la solución de la ecuación 2.1 con condición inicial μ como $\Xi_t \mu$. Es decir para $B \in \mathcal{F}_I$ tenemos que $\Xi_t \mu(B)$ es la fracción de individuos en B en el instante t , dado que a tiempo 0 era $\mu(B)$. Para entender la evolución de nuestra población bajo recombinación nos basta entender la ecuación 2.1. Lo que haremos en la siguiente sección es dar una descripción explícita de una solución a través de un proceso estocástico.

Observación Muchas variantes del modelo para Z_t^N pueden ser encontrados en la literatura y en particular, en las referencias ya hechas. Sin embargo, independiente de las diferencias que puedan tener, la característica general es que cumplen con la convergencia a las soluciones de la ecuación 2.1. Este modelo en particular fue elegido pues es el más sencillo de explicar sin entrar en detalles técnicos y además permite tener una buena intuición para el proceso que describiremos en la parte siguiente.

2.2. El proceso de fragmentación.

Para definir el proceso estocástico de interés es necesario introducir mayor notación sobre particiones. Denotamos, para dos elementos $\delta, \delta' \in \mathbb{D}(I)$, $\delta \leq \delta'$ si δ' es más fino que δ . También denotamos por $\delta \vee \delta'$ su refinamiento común, es decir, $\delta \vee \delta' = \{d \cap d' : d \in \delta, d' \in \delta'\}$. Ahora definimos inductivamente para $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{D}(I)$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_0(\mathcal{G}) &= \{I\}, \\ \mathcal{Y}_1(\mathcal{G}) &= \mathcal{G}, \\ \forall n > 1; \mathcal{Y}_{n+1}(\mathcal{G}) &= \{\delta' = (\delta \setminus \{d\}) \cup \mathfrak{D}|_a : \mathfrak{D} \in \mathcal{G}, \delta \in \mathcal{Y}_n(\mathcal{G}), d \in \delta\}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde $\mathfrak{D}|_a$ es la restricción de \mathfrak{D} a a . Es decir $\mathfrak{D}|_a = \{d \cap a : d \in \mathfrak{D}\}$. Finalmente, definimos

$$\mathcal{Y}(\mathcal{G}) = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{Y}_n(\mathcal{G}).$$

Nótese que, al ser I finito, lo anterior se estabiliza en un número finito de pasos. Mas aún, para $n \geq 1$ tenemos que $\mathcal{Y}_n(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{Y}_{n+1}(\mathcal{G})$. En efecto, para cualquier $\delta \in \mathcal{Y}_n(\mathcal{G})$ debe existir $\mathfrak{D} \in \mathcal{G}$ tal que $\mathfrak{D} \leq \delta$. Por tanto, para cualquier $a \in \delta$ tenemos que $\delta = (\delta \setminus \{a\}) \cup \mathfrak{D}|_a$, y luego $\delta \in \mathcal{Y}_{n+1}(\mathcal{G})$. Y por tanto existe n_0 tal que $\mathcal{Y}(\mathcal{G}) = \mathcal{Y}_{n_0}(\mathcal{G})$. Lo anterior son todos las posibles fragmentaciones que podemos hacer a nuestro conjunto de sitios I .

Sin embargo hacer algunas demostraciones sobre $\mathcal{Y}(\mathcal{G})$ es engorroso. Por ello definimos, para $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{D}(I)$ $\mathcal{X}(\mathcal{G})$ todas las posibles refinamientos de I a partir de \mathcal{G} . Es decir, definimos

inductivamente $\mathcal{X}_0(\mathcal{G}) = \{I\}$, $\mathcal{X}_1(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$ y

$$\forall n > 1 \quad \mathcal{X}_{n+1}(\mathcal{G}) = \{\mathfrak{D} \vee \delta : \mathfrak{D} \in \mathcal{G}, \delta \in \mathcal{X}_n(\mathcal{G})\},$$

$$\mathcal{X}(\mathcal{G}) = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{X}_n(\mathcal{G}).$$

Es posible notar que como I es finito lo anterior se estabiliza en un número finito de pasos, además del hecho que $\mathcal{X}_n(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{X}_{n+1}(\mathcal{G})$.

Observación Intuitivamente $\mathcal{X}(\mathcal{G})$ son las particiones permitidas a través de refinamientos de \mathcal{G} ; donde todos los refinamientos son simultáneos. $\mathcal{Y}(\mathcal{G})$ es cuando estos son independientes, es decir, permitimos que ciertas secciones se refinan independientemente de las demás. Finalmente $\mathcal{Y}(\mathcal{G})$ representa los cambios que ocurren en una recombinación en un pedazo de gen que ya fue recombinado, $\mathcal{X}(\mathcal{G})$ representa el cambio en el gen completo.

Además, es posible notar que el mayor refinamiento de \mathcal{G} , $\mathcal{D}(\mathcal{G}) = \bigvee_{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}} \mathfrak{D}$ es la partición más fina de $\mathcal{X}(\mathcal{G})$, y por tanto, el elemento maximal en $(\mathcal{X}(\mathcal{G}), \leq)$. Probaremos que $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ también es maximal dentro de $(\mathcal{Y}(\mathcal{G}), \leq)$.

Proposición 2.3 *Tenemos que $\mathcal{X}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{Y}(\mathcal{G})$. Además, para todo $y \in \mathcal{Y}(\mathcal{G})$ existe $x \in \mathcal{X}(\mathcal{G})$ tal que $y \leq x$. Luego $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ es maximal en $(\mathcal{Y}(\mathcal{G}), \leq)$.*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos por inducción que $\mathcal{X}_n(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{Y}(\mathcal{G})$. Nótese que el caso base es trivial.

Ahora sea $x \in \mathcal{X}_{n+1}(\mathcal{G})$. Notar que luego existe $z \in \mathcal{X}_n(\mathcal{G})$ y $\mathfrak{D} \in \mathcal{G}$ tal que $x = z \vee \mathfrak{D}$. Por hipótesis inductiva tenemos que $z \in \mathcal{Y}(\mathcal{G})$.

Ahora dado que I finito entonces $z = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Denotamos por $x_1 = (z \setminus \{z_1\}) \cup \mathfrak{D}|_{z_1}$ y luego $x_i = (x_{i-1} \setminus \{z_i\}) \cup \mathfrak{D}|_{z_i}$ para $2 \leq i \leq k$. Es fácil notar que $x_i \in \mathcal{Y}(\mathcal{G})$ para todo i . En particular $x_k \in \mathcal{Y}(\mathcal{G})$. Veamos que $x_k = x$. En efecto, sea cualquier elemento $a \in x_k$. Esto es si y solo si $a = \mathfrak{D}|_{z_i}$ para algún i . Nótese a que esto equivale a que $a = \{z_i \cap d : d \in \mathfrak{D}\}$ y esto es la definición de que $a \in z \vee \mathfrak{D} = x$.

Con esto tenemos el paso inductivo. Luego, dado que $\{I\} \in \mathcal{Y}(\mathcal{G})$ tenemos que $\mathcal{X}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{Y}(\mathcal{G})$.

La segunda afirmación de la proposición se deduce fácilmente de la demostración anterior; cualquier $y \in \mathcal{Y}(\mathcal{G})$ es o bien $\{I\} \in \mathcal{X}(\mathcal{G})$ o cumple con que $y \in \mathcal{Y}_m(\mathcal{G})$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Luego, existe $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \dots, \mathfrak{D}_m \in \mathcal{G}$ tal que podemos definir

$$z_1 = (\mathfrak{D}_1 \setminus \{a_1\}) \cup \mathfrak{D}_2|_{a_1},$$

$$z_i = (z_{i-1} \setminus \{a_{i-1}\}) \cup \mathfrak{D}_i|_{a_{i-1}} \quad i \in \{2, \dots, m\}$$

donde $a_1 \in \mathfrak{D}_1$ y $a_i \in z_i$ para $2 \leq i \leq m$. Note que $y = z_m$, y considere $\bar{z} = \bigvee_{1 \leq i \leq m} \mathfrak{D}_i$. Por un argumento similar al de antes $y \leq \bar{z}$ y es claro que $\bar{z} \in \mathcal{X}(\mathcal{G})$. \square

Además, denotamos $\delta \rightarrow \delta'$ si existe $\mathfrak{D} \in \mathcal{G}$ tal que $\delta \vee \mathfrak{D} = \delta'$. De forma parecida denotamos $\delta \rightsquigarrow \delta'$ si existe $d \in \delta$ y $\mathfrak{D} \in \mathcal{G}$ tal que $\delta' = (\delta \setminus \{d\}) \cup \mathfrak{D}|_d$. Es decir, $\delta \rightarrow \delta'$ si δ'

es un refinamiento de δ a través del proceso hecho para construir $\mathcal{X}(\mathcal{G})$ y $\delta \rightsquigarrow \delta'$ si δ' es un refinamiento de δ a través del proceso hecho en la construcción de $\mathcal{Y}(\mathcal{G})$. En caso de querer ser mas específico, denotamos $\delta \rightsquigarrow_a \delta'$ si $a \in \delta$ y existe $\mathfrak{D} \in \mathcal{G}$ tal que $(\delta \setminus \{a\}) \cup \mathfrak{D}|_a = \delta'$. Note que si $\delta \rightsquigarrow \delta'$ entonces existe un único $a \in \delta$ tal que $\delta \rightsquigarrow_a \delta'$.

Ahora, tenemos la notación suficiente para definir el proceso estocástico y entender como este se comporta. Para esto consideramos en lo que sigue (y en el resto de este trabajo) un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. En este espacio consideramos la cadena de Markov $(X_t)_{t \geq 0}$ a valores en $\mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)$, con $X_0 = \{I\}$, definida a través de su generador:

$$\begin{aligned} Q_{\delta, \delta'} &= \sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho \\ \exists a \in \delta, (\delta \setminus \{a\}) \cup \mathfrak{D}|_a = \delta'}} \rho(\mathfrak{D}) && \delta, \delta' \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho), \delta' \neq \delta, \delta \rightsquigarrow \delta', \\ Q_{\delta, \delta'} &= 0 && \delta, \delta' \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho), \delta' \neq \delta, \delta \not\rightsquigarrow \delta', \\ Q_{\delta, \delta} &= - \sum_{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho} \sum_{\substack{a \in \delta \\ (\delta \setminus \{a\}) \cup \mathfrak{D}|_a \neq \delta}} \rho(\mathfrak{D}) && \delta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho). \end{aligned}$$

En primer lugar, note que el proceso está bien definido en $\mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)$, esto pues $Q_{\delta, \delta'} > 0 \Leftrightarrow \delta \rightsquigarrow \delta'$. Veamos que lo anterior define una matriz conservativa. En efecto, sea $\delta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G})$

$$\sum_{\delta' \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}), \delta' \neq \delta} Q_{\delta, \delta'} = \sum_{\delta' \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}), \delta' \neq \delta} \sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho \\ \exists a \in \delta, (\delta \setminus \{a\}) \cup \mathfrak{D}|_a = \delta'}} \rho(\mathfrak{D}) = \sum_{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho} \sum_{\substack{a \in \delta \\ (\delta \setminus \{a\}) \cup \mathfrak{D}|_a \neq \delta}} \rho(\mathfrak{D}) = -Q_{\delta, \delta},$$

y por tanto

$$\sum_{\delta' \in \mathcal{Y}(\mathcal{G})} Q_{\delta, \delta'} = \sum_{\delta' \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}), \delta' \neq \delta} Q_{\delta, \delta'} + Q_{\delta, \delta} = -Q_{\delta, \delta} + Q_{\delta, \delta} = 0.$$

Ahora el generador Q define una cadena de Markov donde, puesto que el espacio de estados es finito, cumple que $\mathbb{P}_i(X(t) = j) = (e^{tQ})_{ij}$. Lo anterior lo llamamos el proceso de fragmentación. Ahora enunciamos dos propiedades interesantes para comprender este proceso. Denotamos en lo que sigue $\mathbb{P}_{\delta_0}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot | X_0 = \delta_0)$, es decir, la medida de probabilidad dado que el proceso parte de un estado en un estado $\delta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)$. Además, denotamos

$$P_{\delta, \delta'}^t = \mathbb{P}_\delta(X_t = \delta').$$

Proposición 2.4 Sean $\delta, \delta' \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)$. Si $\delta \not\rightsquigarrow \delta'$ entonces

$$P_{\delta, \delta'}^t = \mathbb{P}_\delta(X_t = \delta') = 0 \quad \forall t > 0.$$

DEMOSTRACIÓN. En efecto; supongamos que no es cierto. Entonces existe algún tiempo $t > 0$ tal que:

$$\mathbb{P}_\delta(X_t = \delta') > 0$$

Pero entonces existe algún $k \geq 0$ y particiones $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \dots, \mathfrak{D}_k$ y tiempo $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t$ tal que

$$0 < \mathbb{P}(X_0 = \delta, X_{t_1} = \mathfrak{D}_1, \dots, X_{t_k} = \mathfrak{D}_k, X_t = \delta'),$$

donde k es maximal con esa propiedad, es decir, X no pasa por otros estados además de esos. Lo último por propiedad de Markov implica que

$$\mathbb{P}_\delta(X_{t_1} = \mathfrak{D}_1) \mathbb{P}_{\mathfrak{D}_1}(X_{t_2-t_1} = \mathfrak{D}_2) \dots \mathbb{P}_{\mathfrak{D}_k}(X_{t-t_k} = \delta') > 0.$$

Luego, deducimos que todos los elementos anterior son estrictamente positivos. Dado que $\mathbb{P}_{\mathfrak{D}}(X_0 = \mathfrak{D}') = 1_{\mathfrak{D}=\mathfrak{D}'}$ y tenemos que $\mathbb{P}_{\mathfrak{D}}(X_t = \mathfrak{D}') = (e^{tQ})_{\mathfrak{D},\mathfrak{D}'}$ y nuestra cadena no pasa por otros estados, concluimos que

$$Q_{\delta\mathfrak{D}_1} > 0 \quad Q_{\mathfrak{D}_i,\mathfrak{D}_{i+1}} > 0 \quad Q_{\mathfrak{D}_k\delta'} > 0 \quad \forall 1 \leq i \leq k-1.$$

Por la definición de nuestra cadena lo anterior implica que $\delta \rightsquigarrow \mathfrak{D}_1$; que para todo $1 \leq i \leq k-1$ tenemos que $\mathfrak{D}_i \rightsquigarrow \mathfrak{D}_{i+1}$ y que $\mathfrak{D}_k \rightsquigarrow \delta'$, donde lo último implica que $\delta \leq \delta'$, llegando a una contradicción. \square

Notamos de la demostración anterior, que si $P_{\delta,\delta'}^t > 0$ para algún $t > 0$ entonces $\delta \leq \delta'$ y por tanto, de la proposición anterior, una vez que abandonamos un estado nunca retornamos a el. La propiedad siguiente solo es enunciada, para más detalles puede referirse a [5].

Proposición 2.5 *Para todo $\delta, \delta' \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)$ tenemos que*

$$\mathbb{P}_\delta(X_t = \delta') = \prod_{S \in \delta} \mathbb{P}_\delta(X_t|_S = \delta'|_S) = \prod_{S \in \delta} \mathbb{P}(X_t|_S = \delta'|_S), \quad (2.3)$$

donde $X_t|_S$ denota el proceso X_t restringido a S . Es decir, los fragmentos que aparecen a través del proceso de fragmentación evolucionan de forma independiente.

Con lo anterior podemos dar una intuición de lo que define este proceso. Dadas las propiedades anteriores podemos pensar que para $S \in X_t$ esta es reemplazada por δ , una partición de S , a tasa $\sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho \\ \mathfrak{D}|_S = \delta}} \rho(\mathfrak{D})$. Esto es similar a pensar como los genes de un individuo son repartidos según sus ancestros en el tiempo. Esto es ejemplificado en la figura 2.2.

Ahora nuestro objetivo es dar una fórmula que relaciona la recombinación de genes con este proceso Markoviano. Para ello veremos primeros las siguientes propiedades básicas:

Proposición 2.6 *Definimos $\mathcal{D}^\rho = \mathcal{D}(\mathcal{G}_\rho) = \bigvee_{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho} \mathfrak{D}$. Luego \mathcal{D}^ρ es un estado absorbente. Más aún, es el único estado absorbente de la cadena.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, lo que haremos es demostrar que $Q_{\mathcal{D}^\rho,\delta} = 0, \forall \delta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)$. Dado que con ello $\mathbb{P}_{\mathcal{D}^\rho}(X_t = \delta)$ es constante, y esta parte siendo $1_{\mathcal{D}^\rho=\delta}$ tendremos el resultado. Recordemos que $\mathcal{D}^\rho \vee \mathfrak{D} = \mathcal{D}^\rho$, para todo $\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho$. Luego no existe $\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho$ tal que $\mathcal{D}^\rho \vee \mathfrak{D} \neq \mathcal{D}^\rho$. En particular, para todo $d \in \mathcal{D}^\rho$ y todo $\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho$ se tiene que $\mathfrak{D}|_d = d$. Así, $Q_{\mathcal{D}^\rho,\delta} = 0$ para todo $\delta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)$ y $Q_{\mathcal{D}^\rho,\mathcal{D}^\rho} = 0$. Por tanto $P_{\mathcal{D}^\rho,\delta'}^t = 1_{\mathcal{D}^\rho,\delta'}$ y así \mathcal{D}^ρ es absorbente.

La unicidad se deduce que sabemos que \mathcal{D}^ρ es el único elemento maximal para \leq en $\mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)$. Si hubiese otro elemento absorbente, digamos A , eso significaría que para todo $\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho$, $a \in A$ tenemos que $(A \setminus \{a\}) \cup \mathfrak{D}|_a = A$. Esto, en particular, implica que $\mathfrak{D} \leq A$ y por tanto, $\mathfrak{D} \vee A = A$ para todo $\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho$, lo que implica que A es maximal para \leq , lo que sabemos implica $A = \mathcal{D}^\rho$. \square

A partir de lo anterior podemos encontrar una solución a 2.1. Para ello consideramos la

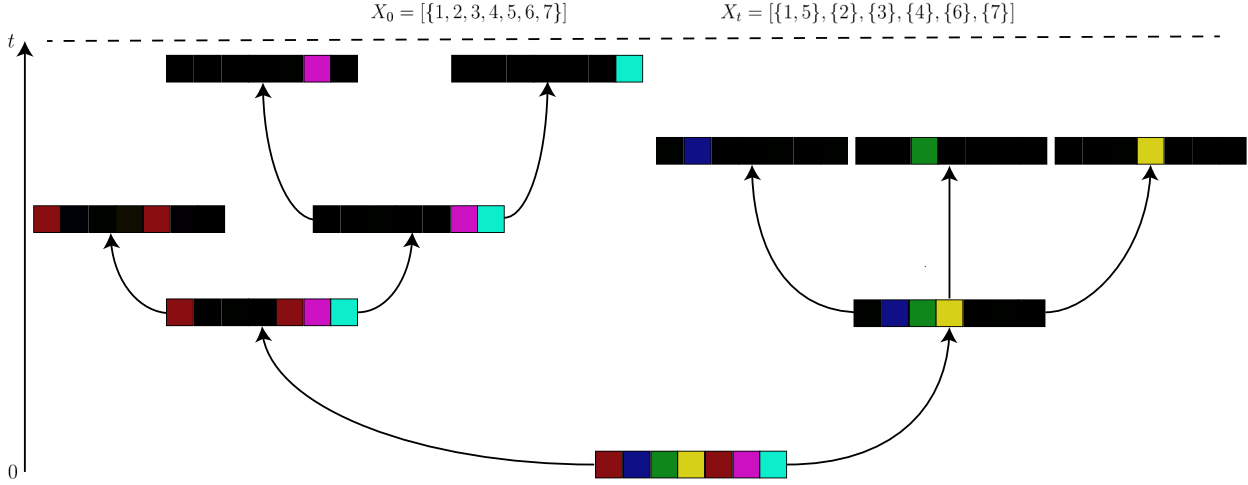


Figura 2.2: Esta figura muestra como se forma un individuo y como el proceso de partición representa como obtuvo sus genes de sus ancestros. Los elementos de X_t representan que en t unidades hacia el pasado el individuo obtuvo los alelos de los sitios en X_t , cada uno, de un ancestro distinto. En la figura el individuo aparece representado abajo y cada color representa que obtuvo ese pedazo de gen de un ancestro distinto; lo que se muestra en la figura ascendentemente. En la parte superior aparece una condición inicial que permite apreciar el ejemplo gráfico de forma más concreta.

medida aleatoria $\mu^{(t)} = \bigotimes_{K \in X_t} \mu_K$. Nótese que al ser X_t una partición lo anterior queda bien definido como medida de probabilidad.

Teorema 2.7 *Tenemos que $\mathbb{E}(\mu^{(t)})$ es la única solución a la ecuación 2.1, con condición inicial $\mu \in \mathcal{P}_I$. Es decir, $\Xi_t \mu = \mathbb{E}(\mu^{(t)})$.*

Observación Si bien lo último fue probado en [11], la demostración se basa en elementos de teoría de ecuaciones diferenciales y combinatoria. Aquí, la demostración es basada en argumentos de la medida producto y probabilidades.

DEMOSTRACIÓN. Denotamos en esta demostración $u(t) = \mathbb{E}(\mu^{(t)})$. La ecuación 2.1 puede ser reescrita como

$$\dot{\omega} = \sum_{\delta \in \mathcal{G}_\rho} \rho_\delta (R_\delta - 1)\omega = (A + B)\omega$$

con $A\omega = -\sum_{\delta \in \mathcal{G}_\rho} \rho_\delta \omega$ y $B\omega = \sum_{\delta \in \mathcal{G}_\rho} \rho_\delta R_\delta \omega$. Notemos que A es un operador lineal continuo. Veamos además, que B es uniformemente Lipschitz. En efecto, recordando que R_δ es Lipschitz de constante $2|\delta| + 1$, entonces podemos obtener que, para todo $u, v \in \mathcal{M}$

$$\|Bu - Bv\| = \left\| \sum_{\delta \in \mathcal{G}_\rho} \rho_\delta R_\delta u - \sum_{\delta \in \mathcal{G}_\rho} \rho_\delta R_\delta v \right\|.$$

Dado que los ρ_δ son positivos podemos acotar superiormente por

$$\sum_{\delta \in \mathcal{G}_\rho} \rho_\delta \|R_\delta u - R_\delta v\| \leq \sum_{\delta \in \mathcal{G}_\rho} \rho_\delta (2|\delta| + 1) \|u - v\|.$$

Y dado que $|\delta| \leq |I|$ se obtiene

$$\|Bu - Bv\| \leq (|I| + 1) \left(\sum_{\delta \in \mathcal{G}_\rho} \rho_\delta \right) \|u - v\| = (|I| + 1) \rho_{tot} \|u - v\|.$$

Luego, B es uniformemente Lipschitz de constante $(|I| + 1) \rho_{tot}$. Así $A + B$ es Lipschitz y por tanto, la ecuación cumple las condiciones del teorema 1.3. Solo falta ver que $u(t) = \mathbb{E}(\mu^{(t)})$ es solución de la ecuación y por tanto tendremos el teorema. En primer lugar,

$$u(0) = \mathbb{E}(\mu^{(0)}) = \sum_{\beta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)} \mathbb{P}(X_0 = \beta) \bigotimes_{L \in \beta} \mu_L = \mu.$$

Y por tanto cumple la condición inicial. Igualamos el lado izquierdo con el derecho de la ecuación 2.1. El lado derecho de la ecuación rescrito en términos de $u(t)$ es

$$\sum_{\delta \in \mathcal{G}_\rho} \rho_\delta R_\delta \mathbb{E}(\mu^{(t)}) - \rho_\delta \mathbb{E}(\mu^{(t)}). \quad (2.4)$$

Ahora notemos que, si $\mu \in \mathcal{P}_I$ entonces $u(t) \in \mathcal{P}_I$, puesto que \mathcal{P}_I es convexo y $u(t)$ es una combinación convexa de elementos de \mathcal{P}_I . Así obtenemos que el término 2.4 es

$$\sum_{\delta \in \mathcal{G}_\rho} \rho_\delta \bigotimes_{S \in \delta} (\mathbb{E}(\mu^{(t)}))_S - \rho_\delta \mathbb{E}(\mu^{(t)}) = \sum_{\delta \in \mathcal{G}_\rho} \rho_\delta \left\{ \bigotimes_{S \in \delta} \left[\sum_{\beta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)} \mathbb{P}(X_t = \beta) \bigotimes_{L \in \beta} \mu_L \right]_S - \sum_{\beta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)} \mathbb{P}(X_t = \beta) \bigotimes_{L \in \beta} \mu_L \right\},$$

donde en el último paso reemplazamos $\mathbb{E}(\mu^{(t)})$ por definición. Notando que la restricción es lineal obtenemos que lo anterior es

$$\sum_{\delta \in \mathcal{G}_\rho} \rho_\delta \left\{ \bigotimes_{S \in \delta} \left[\sum_{\beta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)} \mathbb{P}(X_t = \beta) \left(\bigotimes_{L \in \beta} \mu_L \right)_S \right] \right\} - \rho_{tot} \sum_{\beta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)} \mathbb{P}(X_t = \beta) \bigotimes_{L \in \beta} \mu_L.$$

Distribuyendo cuidadosamente la medida producto sobre la sumatoria en la última expresión se obtiene

$$\sum_{\delta \in \mathcal{G}_\rho} \rho_\delta \left\{ \sum_{\beta_1, \dots, \beta_{|\delta|} \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)} \left(\prod_{j=1}^{|\delta|} \mathbb{P}(X_t = \beta_j) \right) \left[\bigotimes_{i=1}^{|\delta|} \bigotimes_{L \in \beta_i} \mu_{L \cap d_i} \right] \right\} - \rho_{tot} \sum_{\beta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)} \mathbb{P}(X_t = \beta) \bigotimes_{L \in \beta} \mu_L,$$

donde asumimos que $\delta = \{d_1, d_2, \dots, d_r\}$ para algún $r \in \mathbb{N}$. Ahora nuestro objetivo es dar una mejor expresión a $\sum_{\beta_1, \dots, \beta_{|\delta|} \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)} \left(\prod_{j=1}^{|\delta|} \mathbb{P}(X_t = \beta_j) \right) \left[\bigotimes_{i=1}^{|\delta|} \bigotimes_{L \in \beta_i} \mu_{L \cap d_i} \right]$. Para ello note que la medida producto que ahí aparece es de la forma $\bigotimes_{S \in \delta \vee \beta} \mu_S$. Luego podemos hacer un cambio de variable y notar que lo anterior recorre todo posible $\alpha \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)$ tal que $\delta \leq \alpha$. Para ello basta ver que para cada $\beta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)$ el término $\mathbb{P}(X_t = \beta)$ aparecerá una vez por cada vez que restringido a S tengamos lo mismo que α , es decir, una vez por cada β tal que $\beta|_S = \alpha|_S$. Lo anterior nos dice que:

$$\begin{aligned} \sum_{\beta_1, \dots, \beta_{|\delta|} \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)} \left(\prod_{j=1}^{|\delta|} \mathbb{P}(X_t = \beta_j) \right) \left[\bigotimes_{i=1}^{|\delta|} \bigotimes_{L \in \beta_i} \mu_{L \cap d_i} \right] &= \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho) \\ \delta \leq \alpha}} \left[\prod_{s \in \delta} \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho) \\ \beta|_S = \alpha|_S}} \mathbb{P}(X_t = \beta) \right] \bigotimes_{L \in \alpha} \mu_L \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho), \delta \leq \alpha} \left[\prod_{s \in \delta} \mathbb{P}(X_t|_S = \alpha|_S) \right] \bigotimes_{L \in \alpha} \mu_L. \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos que 2.4 es

$$\sum_{\delta \in \mathcal{G}_\rho} \rho_\delta \left\{ \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho) \\ \delta \leq \alpha}} \left[\prod_{s \in \delta} \mathbb{P}(X_t|_s = \alpha|_s) \right] \bigotimes_{L \in \alpha} \mu_L \right\} - \rho_{tot} \sum_{\beta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)} \mathbb{P}(X_t = \beta) \bigotimes_{L \in \beta} \mu_L.$$

Ahora pasamos a calcular el lado izquierdo de la ecuación 2.1. Para ello note primero que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mu^{(t+h)}) - \mathbb{E}(\mu^{(t)}) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)} \mathbb{P}(X_{t+h} = \alpha) \bigotimes_{L \in \alpha} \mu_L - \sum_{\alpha \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)} \mathbb{P}(X_t = \alpha) \bigotimes_{L \in \alpha} \mu_L \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)} (\mathbb{P}(X_{t+h} = \alpha) - \mathbb{P}(X_t = \alpha)) \bigotimes_{L \in \alpha} \mu_L. \end{aligned}$$

Dado que lo anterior solo depende de a h en los coeficientes que acompañan a la medida producto entonces es fácil ver que el lado izquierdo de la ecuación 2.1 es

$$\partial_t \mathbb{E}(\mu^{(t)}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)} \partial_t (\mathbb{P}(X_t = \alpha)) \bigotimes_{L \in \alpha} \mu_L, \quad (2.5)$$

donde, por las ecuaciones vistas en la sección 1.3, tenemos que:

$$\partial_t (\mathbb{P}(X_t = \alpha)) = (P'(t))_{I,\alpha} = (QP(t))_{I,\alpha} = \sum_{\delta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)} Q_{I,\delta} P(t)_{\delta,\alpha}, \quad (2.6)$$

donde notemos que si $I \not\rightsquigarrow \delta$ con $I \neq \delta$ entonces tenemos que $Q_{I,\delta} = 0$. Entonces los únicos términos que $Q_{I,\delta}$ no se anulan son cuando $\delta \in \mathcal{G}_\rho$ o bien $\delta = \{I\}$. Además, si $\delta \not\leq \alpha$ entonces es claro que $P_{\delta,\alpha} \equiv 0$ así que también solo consideramos que $\delta \leq \alpha$. Con eso el término 2.6 es

$$Q_{II} P_{I\alpha}(t) + \sum_{\substack{\delta \in \mathcal{G}_\rho \\ \delta \leq \alpha}} Q_{I,\delta} P(t)_{\delta,\alpha}$$

donde un simple cálculo verifica que $Q_{II} = -\rho_{tot}$. Además, para todo $\delta \in \mathcal{G}_\rho$ tenemos que $Q_{I,\delta} = \rho_\delta$. Con esto y usando la propiedad 2.3 el término 2.5 es finalmente

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)} -\rho_{tot} \mathbb{P}(X_t = \alpha) \bigotimes_{L \in \alpha} \mu_L + \sum_{\delta \in \mathcal{G}_\rho} \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho) \\ \delta \leq \alpha}} \rho_\delta \mathbb{P}_\delta(X_t = \alpha) \bigotimes_{L \in \alpha} \mu_L \\ &= -\rho_{tot} \sum_{\alpha \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)} \mathbb{P}(X_t = \alpha) \bigotimes_{L \in \alpha} \mu_L + \sum_{\delta \in \mathcal{G}_\rho} \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho) \\ \delta \leq \alpha}} \rho_\delta \prod_{s \in \delta} [\mathbb{P}(X_t|_s = \alpha|_s)] \bigotimes_{L \in \alpha} \mu_L. \end{aligned}$$

Que coincide con el término 2.4. Por Teorema de existencia y unicidad tenemos que, entonces $\mathbb{E}(\mu^{(t)})$ es la única solución de la 2.1. \square

Observación Usando de 1.16 el hecho que R_δ es positivamente homogéneo la solución anterior se puede extender a condiciones iniciales que solo sean medidas finitas y no de probabilidad necesariamente.

Dado el teorema 2.7 para entender las soluciones de 2.1, y por tanto la recombinación de genes, nos basta entender el proceso de fragmentación. Por ello primero encontramos una forma explícita para su ley en la sección 3 y posteriormente analizamos su comportamiento asintótico en la sección 4.

Capítulo 3

Ley del proceso de fragmentación

El objetivo de este capítulo será obtener la ley explícita del proceso de fragmentación y por tanto, una fórmula para las soluciones de 2.1 y así de la distribución genética en una población bajo la acción de recombinación. Para hacer esto, la técnica es analizar las trayectorias del proceso, en particular, de la cadena subyacente asociada a este. Para fijar ideas podemos notar que las trayectorias se ven como en el ejemplo mostrado en la figura 3.1; se parte desde el estado I y luego este se divide según alguna partición $\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho$. Luego, cada parte obtenida sigue la misma regla para dividirse, usando independientemente cada una, alguna partición en \mathcal{G}_ρ para cambiar de estado.

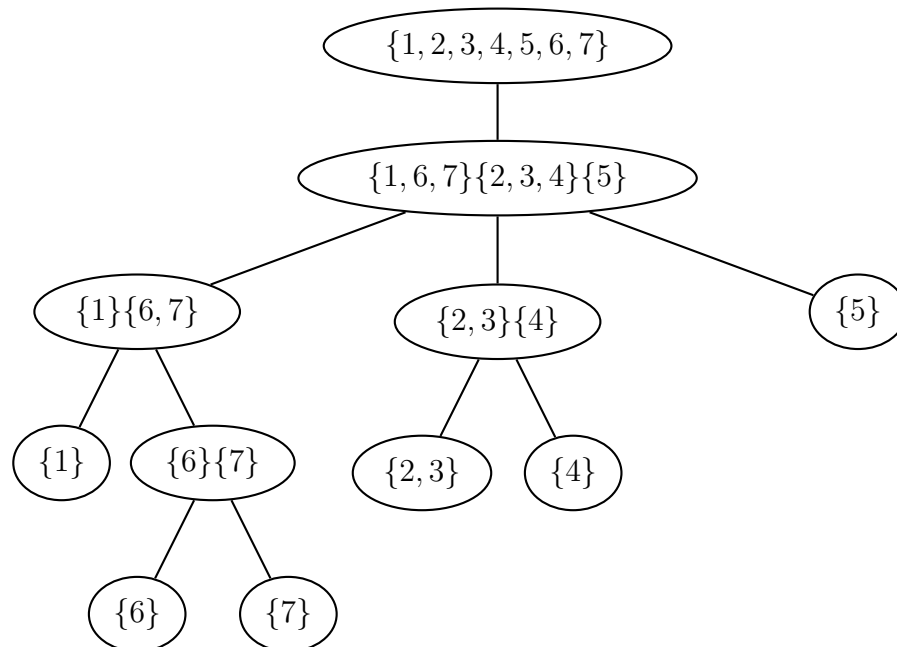


Figura 3.1: Ejemplo de trayectoria para la cadena subyacente. En este caso $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y el estado final del proceso es $[\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}]$

De aquí se aprecia claramente que la cadena subyacente tiene implícitamente una estructura en forma de árbol enraizado. Luego, definiremos árboles que codifiquen correctamente estas trayectorias, con el fin de entender así la ley del proceso. Trabajos usando esta técnica

han sido utilizados con hipótesis mas fuertes, en [4] por ejemplo. Aquí usaremos, salvo algunas modificaciones, los grafos propuestos en [12], que de igual manera, llamaremos árboles y bosques de fragmentación.

Con esto en mente es que nacen las siguientes definiciones. Consideramos árboles enraizados $T = (\mathbb{G}, E, \delta_0)$ que codifiquen las trayectorias de la cadena subyacente del proceso de fragmentación. Primero, el conjunto de nodos \mathbb{G} cumple que para todo $\mathcal{A} \in \mathbb{G}$ tenemos que $\mathcal{A} \in \mathbb{D}(U)$ para algún $U \subseteq I$, es decir, identificamos \mathbb{G} con posibles particiones de subconjuntos de I . En segundo lugar, la raíz, δ_0 es algún elemento de \mathcal{G}_ρ . La raíz será, para las trayectorias, el primer estado al que cambia la cadena subyacente, por lo cual la última restricción es para que el árbol capte que es una transición válida. Note que entonces los árboles que consideramos tienen una dependencia de las tasas $(\rho_\delta)_{\delta \in \mathbb{D}(I)}$, que quedará de forma implícita en lo que sigue.

Además, consideramos solo aquellos árboles que cumplan que $\forall \mathcal{A} \in \mathbb{G}$, el nodo \mathcal{A} tenga a lo más $|\mathcal{A}|$ hijos. Nótese que $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$ para algún $k \in \mathbb{N}$ y luego entonces \mathcal{A} tiene como hijos $(a_i)_{i=1}^r$ con $r \leq k$. Luego, pedimos que para todo i entre 1 y r debe existir $\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho$ y un único j tal que $\mathfrak{D}|_{A_j} \neq \{A_j\}$ y que $\mathfrak{D}|_{A_j} = a_i$. Con ello estamos pidiendo que cada hijo de \mathcal{A} en el árbol (que pueden ser una cantidad arbitraria) cumpla con ser formado por una recombinación permitida de algún fragmento del nodo \mathcal{A} . Esta condición debe respetar el orden de los elementos en \mathcal{A} , es decir, si en aquella definición tomamos $i < i'$, entonces el j y j' tales que $\mathfrak{D}|_{A_j} = a_i$ y $\mathfrak{D}'|_{A_{j'}} = a_{i'}$ cumple que $j < j'$. Note que lo ultimo define los arcos E según los hijos que cada $\mathcal{A} \in \mathbb{G}$ posee.

Consideramos entonces cualquier árbol T que cumpla las restricciones ya dichas y definimos el conjunto

$$\mathcal{S}^I = \{A : A \in \mathcal{A}, \mathcal{A} \in \mathbb{G}\} \cup \{\{I\}\}.$$

Este conjunto son todas las partes de I que el proceso fragmenta cuando sigue la trayectoria dada por T . Modificamos T con el siguiente algoritmo:

1. Agregamos un nodo extra, $r := \{I\}$ y conectamos r con δ_0 por una rama (Notar que *rama* no es lo mismo que arco).
2. Agregamos una rama y una hoja (que distinguiremos de los nodos) desde cada nodo $\mathcal{A} \in \mathbb{G}$ tal que cada uno que exactamente $|\mathcal{A}|$ líneas (líneas son la unión de arcos y ramas) salientes a él y la misma cantidad de hijos.
3. A cada hoja se le identificara con un elemento en \mathcal{S}^I con la siguiente regla. Si la hoja fue agregada significa que su padre tenia, originalmente, menos de $|\mathcal{A}|$ hijos. Eso significa que existe $A_i \in \mathcal{A}$ que no corresponde con ningún hijo de $|\mathcal{A}|$. Luego usamos A_i para identificar la hoja. Si hay más de un hijo lo anterior se hace asegurando que no exista repetición. Además se entiende que lo anterior se hace respetando el orden de los hijos que se le pide al árbol originalmente, es decir, si se le identifica con A_i entonces el vértice es el i -esimo hijo de \mathcal{A} . Note que entonces los vértices originales están identificados con particiones de subconjuntos de I , mientras que los nuevo solo con subconjunto de I .

Denotamos por \mathfrak{R} las ramas que agregamos en aquel proceso al árbol y \mathfrak{H} las hojas. Note que según lo anterior tenemos que:

$$\mathfrak{R} = \{(r, \delta_0)\} \cup \{(\mathcal{A}, \mathcal{B}) : \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{G}, \mathcal{B} \subseteq I\}$$

A través de este proceso, desde T obtenemos un árbol $T^I := (\mathbb{G}, E, \mathfrak{R}, \delta_0)$, donde \mathfrak{R} son las ramas que agregamos.

Definición 3.1 Los árboles $T^I = (\mathbb{G}, E, \mathfrak{R}, \delta_0)$ obtenidos con el procedimiento anterior son llamados árboles de fragmentación, donde δ_0 es la raíz y \mathfrak{R} las ramas.

Observación Los vértices nuevos que fueron agregados no están incluidos en \mathbb{G} en el árbol de fragmentación. Esto hace la notación sea mas sencilla en lo que sigue y por otro por que los nodos que agregamos se deducen fácilmente de los ya existentes.

Finalmente denotamos $\mathcal{L}_{\mathbb{G}}$ como las hojas del árbol fragmentado definido por \mathbb{G} , es decir, los elementos maximales para \leq en \mathbb{G} . Nótese que las ramas, salvo una, son todas incidentes a $\mathcal{L}_{\mathbb{G}}$, es decir, se verifica que:

$$\mathfrak{R} = \{(r, \delta_0)\} \cup \{(\mathcal{A}, \mathcal{B}) : \mathcal{A} \in \mathbb{G}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}}\}$$

Intuitivamente $\mathcal{L}_{\mathbb{G}}$ es el estado final del proceso de fragmentación al seguir la trayectoria codificada por T^I . Se puede ver el ejemplo 3.2 para entender como se modifica T para llegar a T^I y los conceptos antes mencionados.

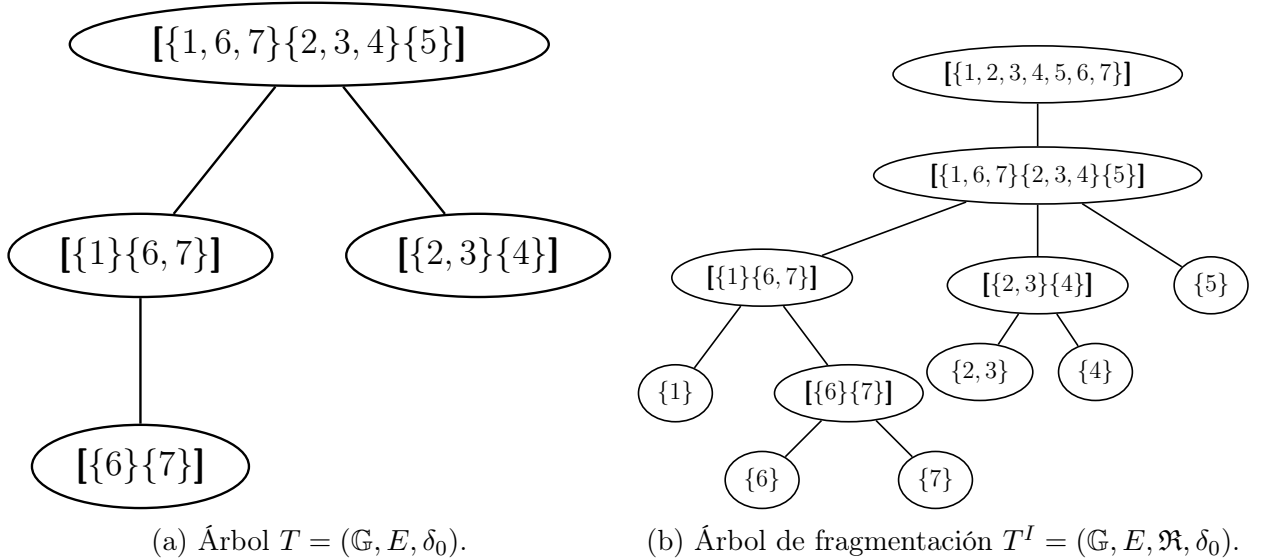


Figura 3.2: En este ejemplo se considera $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $\delta_0 = [\{1, 6, 7\}, \{2, 3, 4\}, \{5\}]$ y tasas tal que $\{\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3\} \subseteq \mathcal{G}_\rho$ con $\mathfrak{D}_1 = [\{1, 6, 7\}, \{2, 3, 4\}, \{5\}]$, $\mathfrak{D}_2 = [\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}]$ y $\mathfrak{D}_3 = [\{1, 2, 3, 4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}]$. En (a) se aprecia T , un árbol que cumple las características anteriormente mencionadas, notar que ambas transiciones de la raíz son hechas por usar \mathfrak{D}_2 pero no tendría por que ser así, y en (b) aparece el árbol de fragmentación asociado a T , en las líneas salen asignados los elementos de \mathcal{S} que corresponden según el algoritmo y se tiene que $\mathcal{L}_{\mathbb{G}} = [\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}]$.

Algo que es importante notar, para trabajar posteriormente con estos árboles, es que los conceptos de *stump set*, *cut set*, etc. definidos en la sección 1.4 solo dependen de los arcos y no

de las ramas. Dado que nuestro algoritmo no afecta los vértices ni los arcos, entonces podemos definir de igual manera, para $H \subseteq E$ y $\mathcal{A} \in \mathbb{G}$ el árbol fragmentado $T_{\mathcal{A}}^I(H)$, notar que éste es el formado por borrar de T los arcos en H y luego a $T_{\mathcal{A}}(H)$ hacerle el procedimiento anterior. Luego, definiendo $I_{\mathcal{A}} = \cup_{A \in \mathcal{A}} A$, tenemos que $T_{\mathcal{A}}^I(H)$ tiene como conjunto de vértices $\mathbb{G}_{\mathcal{A}}(H)$ y contiene información de los fragmentos en $\mathcal{S}^{I_{\mathcal{A}}} = \{B : B \in \mathcal{B}, \mathcal{B} \in \mathbb{G}_{\mathcal{A}}(H) \cup \{\{I_{\mathcal{A}}\}\}$ y tiene nodo extra $r_{\mathcal{A}}$.

Con esto tenemos, además, la noción de bosque fragmentado $T^I - H$ de T^I , es cual es la unión disjunta de los árboles fragmentados $T_{\mathcal{A}}^I(H)$ donde $\mathcal{A} = \delta_0$ o bien \mathcal{A} es el extremo superior de algún arco en H . Nótese que luego tiene sentido definir el Poset de bosques fragmentados $(\{T^I - H : H \subseteq E\}, \preceq_F)$ con la relación isomorfa a $\mathcal{D}(T)$, es decir; $T^I - H \preceq_F T^I - K$ si y solo si $H \preceq K$.

Ahora relacionamos estos conceptos con nuestro problema. Para ello primero definimos tiempos de paradas útiles para relacionar $(X_u)_{0 \leq u \leq t}$ con algún árbol de fragmentación. Considere algún árbol de fragmentación T^I y sea $\mathcal{A} \in \mathbb{G}$. Note que luego, por construcción, existe $U \subseteq I$ tal que $\mathcal{A} \in \mathbb{D}(U)$ y $\mathcal{A} \neq \{U\}$. Luego, tiene sentido definir

$$\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \min\{t \geq 0 : X_t|_U = \mathcal{A}\}.$$

Esta es la primera vez que ocurre una recombinación según \mathcal{A} en el proceso de fragmentación $(X_t)_{t \geq 0}$. Con lo anterior, para todo $U \subseteq I$ tiene sentido definir

$$\mathcal{T}_U = \min\{\mathcal{T}_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \in \mathbb{D}(U), \exists \mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho \text{ t.q. } \mathfrak{D}|_U = \mathcal{B}\},$$

la primera vez que ocurre una recombinación en los sitios U . Con los tiempos de parada anteriores definimos los siguientes eventos de interés, si bien la notación no va a ser clara en este momento va a tomar sentido más adelante:

$$\text{Max}_t(\mathbb{G}) = \{\max\{\mathcal{T}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \in \mathbb{G}\} \leq t < \min\{\mathcal{T}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}}\}\},$$

$$m(\emptyset) = \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathbb{G}} \{\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \min\{\mathcal{T}_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \in \mathbb{G}_{\mathcal{A}}(\emptyset)\}\},$$

donde $\mathbb{G}_{\mathcal{A}}(\emptyset)$ es el subárbol de T^I con raíz \mathcal{A} . $\text{Max}_t(\mathbb{G})$ dice que el proceso de fragmentación a hecho exactamente las transiciones correspondientes al árbol T^I antes del tiempo t , y $m(\emptyset)$ dice que las ha hecho respetando el orden establecido por T^I ; desde la raíz hacia abajo. Luego si ambos eventos se cumplen tenemos que T^I codifica correctamente la trayectoria de la cadena subyacente del proceso de fragmentación. Por lo anterior hacemos la siguiente definición.

Definición 3.2 Llamamos a que $(X_u)_{0 \leq u \leq t}$ calce con el árbol de fragmentación T^I al evento:

$$\mathcal{F}_t(T^I) = \text{Max}_t(\mathbb{G}) \cap m(\emptyset).$$

Es decir, la trayectoria de la cadena subyacente de $(X_u)_{0 \leq u \leq t}$ es justamente codificada por T^I . Note que, en particular $\mathcal{L}_{\mathbb{G}} = X_t$.

Definición 3.3 Para $\delta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)$ definimos como $\tau(\delta)$ el conjunto de todos los árboles de fragmentación tales que $\mathcal{L}_{\mathbb{G}} = \delta$.

Observación Tanto los árboles de fragmentación como el junto $\tau(\delta)$ presentan una dependencia de los sitios I y las tasas ρ , lo que no hacemos explícito para alivianar la notación.

Dado que los árboles de fragmentación codifican la trayectoria de la cadena subyacente hasta el tiempo t se tiene la igualdad:

$$\{X_t = \delta\} = \bigcup_{T^I \in \tau(\delta)} \mathcal{F}_t(T^I),$$

donde es posible notar que aquella unión es disjunta, luego tenemos la fórmula:

$$\mathbb{P}(X_t = \delta) = \sum_{T^I \in \tau(\delta)} \mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I)). \quad (3.1)$$

Así, hemos reducido el problema de obtener la ley del proceso de fragmentación a calcular $\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I))$. Para ello usaremos dos caminos. En primer lugar, se exploran técnicas combinatoriales para llegar a una fórmula para $\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I))$. Esta fórmula, si bien no nos lleva a la fórmula explícita, ayuda a entender que la estructura no es tan diferente a lo encontrado en [4] para el caso de recombinación simple. Así, con esto en mente, es que posteriormente, se desarrolla una técnica inductiva sobre estos árboles, la cual sí lleva a una fórmula explícita.

3.1. Técnica combinatorial

Ahora, busquemos un contexto donde usar la transformada de Möbius para estudiar la probabilidad que buscamos. Sea $T^I = (\mathbb{G}, E, \mathfrak{R}, \delta_0)$ un árbol de fragmentación.

Definición 3.4 *Definimos, para $\mathcal{A} \in \mathbb{G}$ y $H \subseteq E$, $\mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\mathcal{A}}(H)}$ como las hojas del árbol fragmentado $T^I_{\mathcal{A}}(H)$. De lo anterior definimos los eventos*

$$\begin{aligned} \text{Max}_t(\mathbb{G}_{\mathcal{A}}(H)) &= \left\{ \max_{\mathcal{A} \in \mathbb{G}_{\mathcal{A}}(H)} \mathcal{T}_{\mathcal{A}} \leq t < \min_{\mathcal{B} \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\mathcal{A}}(H)}} \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \right\}, \\ \text{Min}_t(\mathbb{G}_{\mathcal{A}}(H)) &= \left\{ \min_{\mathcal{A} \in \mathbb{G}_{\mathcal{A}}(H)} \mathcal{T}_{\mathcal{A}} \leq t < \min_{\mathcal{B} \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\mathcal{A}}(H)}} \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \right\}. \end{aligned}$$

Definición 3.5 *Definimos, para todo $H \subseteq E$, el evento:*

$$m(H) = \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathbb{G}} \left\{ \mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \min_{\mathcal{B} \in \mathbb{G}_{\mathcal{A}}(H)} \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \right\}$$

Observación En la definición de $m(H)$ podemos recorrer los vértices de distinta manera y cambiar como expresar el mínimo y ver que:

$$m(H) = \bigcap_{T_{\alpha}(H) \subseteq T^I - H} \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathbb{G}_{\alpha}(H)} \left\{ \mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \min_{\mathcal{B} \in \mathbb{G}_{\mathcal{A}}(H)} \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \right\} = \bigcap_{T_{\alpha}(H) \in T^I - H} \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathbb{G}_{\alpha}(H)} \bigcap_{\mathcal{B} \in \mathbb{G}_{\mathcal{A}}(H)} \left\{ \mathcal{T}_{\mathcal{A}} \leq \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \right\}.$$

Note que nuestro interés es, entonces, calcular $\mathbb{P}(\text{Max}_t(\mathbb{G}) \cap m(\emptyset))$. Esto pues $\mathcal{F}_t(T^I) = \text{Max}_t(\mathbb{G}) \cap m(\emptyset)$ (y entonces la notación anterior cobra sentido en general). Para ello la técnica

es calcular $\mathbb{P}(\text{Min}_t(\mathbb{G}_{\delta_0}(K)) \cap m(K))$ para $K \subseteq E$ arbitrario, y a través de la transformada de Möbius obtener la probabilidad que nos interesa. Esta técnica ya fue explorada en [4] para recombinaciones simples, por ello se espera que de luces de como se comporta el caso de recombinaciones múltiples. Con esto en mente enunciamos y demostramos el siguiente lema:

Lema 3.6 *Para todo $T^I = (\mathbb{G}, E, \mathfrak{A}, \delta_0)$ árbol de fragmentación y $K \subseteq E$ tenemos que:*

$$\mathbb{P}(\text{Min}_t(\mathbb{G}_{\delta_0}(K)) \cap m(K)) = \sum_{C \in \mathcal{C}(T_{\delta_0}(K))} \mathbb{P}(\text{Max}_t(\mathbb{G}_{\delta_0}(K \cup C)) \cap m(K \cup C)). \quad (3.2)$$

DEMOSTRACIÓN. Primero note que podemos descomponer el mínimo en $\mathbb{G}_{\delta_0}(K)$ según el subconjunto de nodos que lo alcanza:

$$\left\{ \min_{\mathcal{A} \in \mathbb{G}_{\delta_0}(K)} \mathcal{T}_{\mathcal{A}} \leq t \right\} = \dot{\bigcup}_{\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{G}_{\delta_0}(K)} \left\{ \max_{\beta \in A} \mathcal{T}_{\beta} \leq t < \min_{\gamma \in \mathbb{G}_{\delta_0}(K) \setminus A} \mathcal{T}_{\gamma} \right\}, \quad (3.3)$$

donde se tiene que aquella unión es disjunta. Luego, intersectando con $m(K)$ obtenemos que la fórmula 3.3 se transforma en:

$$\left\{ \min_{\mathcal{A} \in \mathbb{G}_{\delta_0}(K)} \mathcal{T}_{\mathcal{A}} \leq t \right\} \cap m(K) = \dot{\bigcup}_{\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{G}_{\delta_0}(K)} \left\{ \max_{\beta \in A} \mathcal{T}_{\beta} \leq t < \min_{\gamma \in \mathbb{G}_{\delta_0}(K) \setminus A} \mathcal{T}_{\gamma} \right\} \cap m(K). \quad (3.4)$$

Note que $m(K)$ implica que $\forall \mathcal{A} \in \mathbb{G}(K)$, para todo $\mathcal{B} \in \mathbb{G}_{\mathcal{A}}(H)$ tenemos que $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} \leq \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Luego, suponga que $A \notin \mathcal{R}(T_{\delta_0}(K))$, es decir, no es un *stump set*. Recordemos que el conjunto de los *stump set* para un árbol T con raíz γ esta dado por:

$$\mathcal{R}(T) := \{V_{\gamma}(H) : H \subseteq E\}.$$

Luego, existe $a \in A, b \in \mathbb{G}_{\delta_0}(K)$ tal que $b \leq a$. Note que, en particular $a \in \mathbb{G}_b(K)$. Por lo anterior $m(K)$ implica que $\mathcal{T}_b \leq \mathcal{T}_a$, y así:

$$m(K) \cap \left\{ \max_{\beta \in A} \mathcal{T}_{\beta} \leq t < \min_{\gamma \in \mathbb{G}_{\delta_0}(K) \setminus A} \mathcal{T}_{\gamma} \right\} \subseteq \left\{ \mathcal{T}_b \leq \mathcal{T}_a \right\} = \emptyset.$$

Luego, podemos asumir que $A \in \mathcal{R}(T_{\delta_0}(K))$. Es decir, la fórmula 3.4 se transforma en:

$$\left\{ \min_{\mathcal{A} \in \mathbb{G}_{\delta_0}(K)} \mathcal{T}_{\mathcal{A}} \leq t \right\} \cap m(K) = \dot{\bigcup}_{A \in \mathcal{R}(T_{\delta_0}(K))} \left\{ \max_{\beta \in A} \mathcal{T}_{\beta} \leq t < \min_{\gamma \in \mathbb{G}_{\delta_0}(K) \setminus A} \mathcal{T}_{\gamma} \right\} \cap m(K).$$

Además note, si definimos $M(\mathbb{G}_{\delta_0}(K) \setminus A)$ como el conjunto de vértices minimal en $\mathbb{G}_{\delta_0}(K) \setminus A$ para \leq se verifica

$$\left\{ \min_{\beta \in \mathbb{G}_{\delta_0}(K) \setminus A} \mathcal{T}_{\beta} \leq t \right\} \cap m(K) = \left\{ \min_{\beta \in M(\mathbb{G}_{\delta_0}(K) \setminus A)} \mathcal{T}_{\beta} \leq t \right\} \cap m(K).$$

En efecto, supongamos que no es así, luego $\exists z \in (\mathbb{G}_{\delta_0}(K) \setminus A) \setminus M(\mathbb{G}_{\delta_0}(K) \setminus A)$ tal que $\min_{\beta \in \mathbb{G}_{\delta_0}(K) \setminus A} \mathcal{T}_{\beta} = \mathcal{T}_z < \min_{\beta \in M(\mathbb{G}_{\delta_0}(K) \setminus A)} \mathcal{T}_{\beta}$. Pero como $z \notin M(\mathbb{G}_{\delta_0}(K) \setminus A)$ entonces $\exists w \in \mathbb{G}_{\delta_0}(K) \setminus A$ tal que $w \leq z$. Note que, en particular, $z \in \mathbb{G}_w(K)$. Luego, $m(K)$ implica que $\mathcal{T}_w \leq \mathcal{T}_z$, lo que es una contradicción, puesto que $w \in M(\mathbb{G}_{\delta_0}(K) \setminus A)$. Así obtenemos de la fórmula 3.4 la identidad:

$$\left\{ \min_{\mathcal{A} \in \mathbb{G}_{\delta_0}(K)} \mathcal{T}_{\mathcal{A}} \leq t \right\} \cap m(K) = \dot{\bigcup}_{A \in \mathcal{R}(T_{\delta_0}(K))} \left\{ \max_{\beta \in A} \mathcal{T}_{\beta} \leq t < \min_{\gamma \in M(\mathbb{G}_{\delta_0}(K) \setminus A)} \mathcal{T}_{\gamma} \right\} \cap m(K),$$

lo que, intersectando con $\{t < \min_{\beta \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\delta_0}(K)}} \mathcal{T}_\beta\}$, implica que:

$$\begin{aligned} \text{Min}_t(\mathbb{G}_{\delta_0}(K)) \cap m(K) &= \{\min_{A \in \mathbb{G}_{\delta_0}(K)} \mathcal{T}_A \leq t < \min_{\beta \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\delta_0}(K)}} \mathcal{T}_\beta\} \cap m(K) \\ &= \dot{\bigcup}_{A \in \mathcal{R}(T_{\delta_0}(K))} \{\max_{\beta \in A} \mathcal{T}_\beta \leq t < \min_{\gamma \in M(\mathbb{G}_{\delta_0}(K) \setminus A)} \mathcal{T}_\gamma\} \cap m(K) \cap \{t < \min_{\beta \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\delta_0}(K)}} \mathcal{T}_\beta\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ahora, note que:

$$m(K) \cap \{t < \min_{\gamma \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\delta_0}(K \cup \partial(A))}} \mathcal{T}_\gamma\} = m(K) \cap \{t < \min_{\gamma \in M(\mathbb{G}_{\delta_0}(K) \setminus A)} \mathcal{T}_\gamma\} \cap \{t < \min_{\beta \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\delta_0}(K)}} \mathcal{T}_\beta\}.$$

Esto pues el evento de la derecha corresponde al hecho que las transiciones del proceso de fragmentación respetan el orden del árbol, salvo que no hace ninguna división pasado los nodos de $M(\mathbb{G}_{\delta_0}(K) \setminus A)$ y no hace ninguna división que no esté en el árbol. Pero, dado que no hace ninguna división extra, es lo mismo que decir que respeta el orden del grafo y que no hace ninguna división en lo que queda después de $\mathbb{G}_{\delta_0}(K) \setminus A = \mathbb{G}_{\delta_0}(K \cup \partial A)$, que es el evento de la izquierda.

Además notando que a cada A *stump set* le podemos asignar $\partial(A) \in \mathcal{C}(T_{\delta_0}(K))$ de forma biyectiva (según lo visto en la sección 1.4). Queda, usando lo anterior en 3.5, que:

$$\begin{aligned} \text{Min}_t(\mathbb{G}_{\delta_0}(K)) \cap m(K) &= \dot{\bigcup}_{C \in \mathcal{C}(T_{\delta_0}(K))} \{\max_{\beta \in \mathbb{G}_{\delta_0}(K \cup C)} \mathcal{T}_\beta \leq t < \min_{\beta \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\delta_0}(K \cup C)}} \mathcal{T}_\beta\} \cap m(K) \\ &= \dot{\bigcup}_{C \in \mathcal{C}(T_{\delta_0}(K))} \text{Max}_t(\mathbb{G}_{\delta_0}(K \cup C)) \cap m(K). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para concluir solo basta ver que:

$$\text{Max}_t(\mathbb{G}_{\delta_0}(K \cup C)) \cap m(K) = \text{Max}_t(\mathbb{G}_{\delta_0}(K \cup C)) \cap m(K \cup C).$$

En efecto; notemos que es claro que el evento de la derecha está contenido en el de la izquierda. Veamos la otra inclusión; supongamos que esta no es cierta. Dado que tenemos $m(K \cup C)$ al lado derecho, entonces existe un evento en que existe $x \leq y$ tal que $x \in \mathbb{G}_{\delta_0}(K \cup C)$, $y \in \mathbb{G}_{\delta_0}(K) \setminus \mathbb{G}_{\delta_0}(K \cup C)$ con $\mathcal{T}_y \leq \mathcal{T}_x$, note como $x \in \mathbb{G}_{\delta_0}(K \cup C)$ entonces $\mathcal{T}_y < t$. Pero por donde vive y tenemos que $\mathcal{T}_y < t \Rightarrow \min_{\beta \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\delta_0}(K \cup C)}} \mathcal{T}_\beta < t$, puesto que debe existir $U \subseteq I$ tal que $y \in \mathbb{D}(U)$. Si ocurre lo anterior, entonces $\min_{\beta \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}_c(K \cup C)}} \mathcal{T}_\beta \leq t$, lo que implica que la intersección con $\text{Max}_t(\mathbb{G}_{\delta_0}(K \cup C))$ es vacía, y así tenemos la contradicción. Usando esto en la identidad 3.6 tenemos, como se esperaba demostrar, que:

$$\mathbb{P}(\text{Min}_t(\mathbb{G}_{\delta_0}(K)) \cap m(K)) = \sum_{C \in \mathcal{C}(T_{\delta_0}(K))} \mathbb{P}(\text{Max}_t(\mathbb{G}_{\delta_0}(K \cup C)) \cap m(K \cup C)).$$

□

Del lema anterior podremos, usando la fórmula de inversión de Möbius, ver el Teorema 1.42, y obtener una fórmula para el evento $\text{Max}_t(\mathbb{G}_{\delta_0}(K)) \cap m(K)$, lo que nos da el primer teorema:

Teorema 3.7 Para cada $K \subseteq E$:

$$\mathbb{P}(\text{Max}_t(\mathbb{G}_{\delta_0}(K)) \cap m(K)) = \sum_{H \subseteq E_{\delta_0}(K)} (-1)^{|H|} \mathbb{P}(\text{Min}_t(\mathbb{G}_{\delta_0}(H \cup K)) \cap m(H \cup K)). \quad (3.7)$$

DEMOSTRACIÓN. De la fórmula 3.2 tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{Min}_t(\mathbb{G}_{\delta_0}(K)) \cap m(K)) &= \sum_{C \in \mathcal{C}(T_{\delta_0}(K))} \mathbb{P}(\text{Max}_t(\mathbb{G}_{\delta_0}(K \cup C)) \cap m(K \cup C)) \\ &= \sum_{\substack{H \subseteq E \\ H \setminus K \in \mathcal{C}(T_{\delta_0}(K))}} \mathbb{P}(\text{Max}_t(\mathbb{G}_{\delta_0}(H)) \cap m(H)), \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde la última igualdad es dado el isomorfismo entre $\mathcal{D}(T_{\delta_0}(K))$ y $\{H : H \preceq K\}$. Nuestro objetivo es usar inversión de Möbius en la expresión anterior. Para ello primero recordemos que por el teorema 1.42 la función de Möbius del Poset $\mathcal{D}(T)$ esta dada por, para $H \preceq K$:

$$\mu(H, K) = \begin{cases} (-1)^{|H|-|K|} & H \setminus K \in \mathcal{C}(T_\gamma(K)) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Luego es posible ver que la función de Möbius cumple $\mu(H, K)(-1)^{|H|-|K|} = 1_{H \setminus K \in \mathcal{C}(T_{\delta_0}(K))}$. En particular, podemos reescribir la fórmula 3.8 como:

$$\begin{aligned} (-1)^{|K|} \mathbb{P}(\text{Min}_t(\mathbb{G}_{\delta_0}(K)), m(K)) &= \sum_{H \subseteq E} (-1)^{|K|} 1_{H \setminus K \in \mathcal{C}(T_{\delta_0}(K))} \mathbb{P}(\text{Max}_t(\mathbb{G}_{\delta_0}(H)) \cap m(H)) \\ &= \sum_{H \preceq K} (-1)^{|H|} \mu(H, K) \mathbb{P}(\text{Max}_t(\mathbb{G}_{\delta_0}(H)) \cap m(H)), \end{aligned}$$

donde la última igualdad es por la definición del orden de \mathcal{D} . Usando inversión de Möbius en la última expresión se deduce que

$$(-1)^{|K|} \mathbb{P}(\text{Max}_t(\mathbb{G}_{\delta_0}(K)) \cap m(K)) = \sum_{H \preceq K} (-1)^{|H|} \mathbb{P}(\text{Min}_t(\mathbb{G}_{\delta_0}(H)) \cap m(H)). \quad (3.9)$$

Utilizando una vez más el isomorfismo de $\mathcal{D}(T_{\delta_0}(K))$ se tiene que el elemento de la derecha de la identidad 3.9 es:

$$\sum_{H \subseteq E_{\delta_0}(K)} (-1)^{|H \cup K|} \mathbb{P}(\text{Min}_t(\mathbb{G}_{\delta_0}(H \cup K)) \cap m(H \cup K)).$$

Con lo que al final deducimos de la identidad 3.9 que:

$$\mathbb{P}(\text{Max}_t(\mathbb{G}_{\delta_0}(K)) \cap m(K)) = \sum_{H \subseteq E_{\delta_0}(K)} (-1)^{|H|} \mathbb{P}(\text{Min}_t(\mathbb{G}_{\delta_0}(H \cup K)) \cap m(H \cup K)).$$

□

Usando lo anterior podemos deducir una identidad para la probabilidad que estamos intentando calcular:

Corolario 3.8 Para todo $T^I = (\mathbb{G}, E, \mathfrak{R}, \delta_0)$ árbol de fragmentación se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I)) &= \sum_{H \subseteq E} (-1)^{|H|} \mathbb{P}(\text{Min}_t(\mathbb{G}_{\delta_0}(H)) \cap m(H)) \\ &= \sum_{H \subseteq E} (-1)^{|H|} \mathbb{P}(\{ \min_{A \in \mathbb{G}_{\delta_0}(H)} \mathcal{T}_A \leq t < \min_{B \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}} \mathcal{T}_B \} \cap \{ \mathcal{T}_A = \min_{B \in \mathbb{G}_A(H)} \mathcal{T}_B, \forall A \in \mathbb{G} \}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

DEMOSTRACIÓN. Por definición $\mathcal{F}_t(T^I) = \text{Max}_t(\mathbb{G}) \cap m(\emptyset)$ y por tanto, evaluando el Teorema 3.7 se sigue la primera igualdad. Para la segunda igualdad basta descomponer por definiciones los eventos $\text{Min}_t(\mathbb{G}_{\delta_0}(H))$ y $m(H)$. \square

Observación Lo esperado era poder obtener una fórmula explícita para $\text{Min}_t(\mathbb{G}_{\delta_0}(H)) \cap m(H)$, lo que lamentablemente es bastante más difícil de lo que aparece, producto que los distintos sitios no son independientes en el proceso de fragmentación. Para notar esto basta considerar $I = \{1, 2, 3, 4\}$ y tasas tales que $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \subseteq \mathcal{G}_\rho$ con $\mathfrak{D}_1 = [\{1\}, \{2, 3, 4\}], \mathfrak{D}_2 = [\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}]$. En aquel caso sabemos que si 3 y 4 están en fragmentos distintos, entonces también lo están 1 y 2, lo que automáticamente descarta independencia entre sitios distintos; lo que es deseable para poder calcular de alguna manera aquella expresión. Más aún, el hecho de que tengamos distintas trayectorias para el estado $[\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}]$ ya hace, de por sí, más difícil los cálculos (y lo cual claramente empeora si consideramos recombinaciones generales). Sin embargo, el corolario anterior ya nos da una buena perspectiva sobre como se comporta el evento $\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I))$; se calcula utilizando una forma del estilo inclusión-exclusión. Esta observación es útil en la siguiente sección, para llegar a la fórmula deseada.

3.2. Técnica inductiva

Ahora, usamos otra técnica para calcular $\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I))$. Sin embargo, para ello debemos introducir mayor notación y propiedades para el proceso de fragmentación.

Primero, debemos entender el generador del proceso restringido a un subconjunto de sitios. Sea $S \subseteq I$ y $\delta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)$ alguna partición tal que $S \in \delta$. ¿Cómo se comporta el proceso $(X_t|_S)_{t \geq 0}$ dado que $X_0 = \delta$? La propiedad básica que necesitamos está enunciada en la siguiente proposición:

Proposición 3.9 Sea $S \subseteq I$. Luego $\forall \delta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)$ tal que $S \in \delta$ se tiene que $\mathbb{P}_\delta(X_t|_S = \{S\})$ es independiente de δ . Más aún, se puede calcular su fórmula explícita y es:

$$\mathbb{P}_\delta(X_t|_S = \{S\}) = \exp \left(-t \sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho \\ \mathfrak{D}|_S \neq \{S\}}} \rho_{\mathfrak{D}} \right). \quad (3.11)$$

Observación En general:

$$\mathbb{P}_\delta(X_t = \delta) = \exp \left(-t \sum_{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho} \sum_{\substack{a \in \delta \\ (\delta \setminus \{a\}) \cup \mathfrak{D} |_{a \neq \delta}}} \rho_{\mathfrak{D}} \right)$$

Luego no es obvio que al marginalizar a ciertos sitios nuestra permanencia no depende de δ .

DEMOSTRACIÓN. Notar que, por teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias, el enunciado es equivalente a probar que:

$$\partial_t \mathbb{P}_\delta(X_t |_{S = \{S\}}) = - \left[\sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho \\ \mathfrak{D} |_{S \neq \{S\}}} \rho_{\mathfrak{D}} \right] \mathbb{P}_\delta(X_t |_{S = \{S\}}),$$

y por lo tanto probaremos esta proposición. En efecto:

$$\partial_t \mathbb{P}_\delta(X_t |_{S = \{S\}}) = \partial_t \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho) \\ S \in \beta}} \mathbb{P}(X_t = \beta | X_0 = \delta) = \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho) \\ S \in \beta}} \partial_t \mathbb{P}(X_t = \beta | X_0 = \delta).$$

Usando la proposición 1.21 y el generador del proceso de fragmentación se obtiene que:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbb{P}_\delta(X_t |_{S = \{S\}}) &= \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho) \\ S \in \beta}} \sum_{\gamma \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)} Q_{\gamma\beta} \mathbb{P}(X_t = \gamma | X_0 = \delta) \\ &= \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho) \\ S \in \beta}} \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho) \\ \gamma \neq \beta}} Q_{\gamma\beta} \mathbb{P}(X_t = \gamma | X_0 = \delta) + \mathbb{P}(X_t = \beta | X_0 = \delta) Q_{\beta\beta}. \end{aligned}$$

Por un lado, se tiene que:

$$\sum_{\substack{\beta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho) \\ S \in \beta}} \mathbb{P}(X_t = \beta | X_0 = \delta) Q_{\beta\beta} = \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho) \\ S \in \beta}} \mathbb{P}(X_t = \beta | X_0 = \delta) \left[- \sum_{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho} \sum_{\substack{a \in \beta \\ (\beta \setminus \{a\}) \cup \mathfrak{D} |_{a \neq \beta}}} \rho_{\mathfrak{D}} \right].$$

Por otro lado, tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho) \\ S \in \beta}} \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho) \\ \gamma \neq \beta}} Q_{\gamma\beta} \mathbb{P}(X_t = \gamma | X_0 = \delta) &= \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho) \\ S \in \gamma}} \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho) \\ S \in \beta, \gamma \neq \beta}} \mathbb{P}(X_t = \gamma | X_0 = \delta) Q_{\gamma\beta} \\ &= \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho) \\ S \in \gamma}} \mathbb{P}(X_t = \gamma | X_0 = \delta) \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho) \\ S \in \beta, \gamma \neq \beta}} \sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho \\ \exists a \in \gamma \\ \gamma \rightsquigarrow \beta}} \rho_{\mathfrak{D}} \\ &= \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho) \\ S \in \gamma}} \mathbb{P}(X_t = \gamma | X_0 = \delta) \left[\sum_{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho} \sum_{\substack{a \in \gamma, a \neq \{S\} \\ (\gamma \setminus \{a\}) \cup \mathfrak{D} |_{a \neq \gamma}}} \rho(\mathfrak{D}) \right]. \end{aligned}$$

Notando que en la suma la variable es muda podemos juntar ambas expresiones y así obtener:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbb{P}_{\mathcal{A}}(X_t|_S = \{S\}) &= \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho) \\ S \in \beta}} \mathbb{P}(X_t = \beta | X_0 = \delta) \left[- \sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho \\ \mathfrak{D}|_S \neq \{S\}}} \rho_{\mathfrak{D}} \right] \\ &= - \left[\sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho \\ \mathfrak{D}|_S \neq \{S\}}} \rho_{\mathfrak{D}} \right] \mathbb{P}_{\mathcal{A}}(X_t|_S = \{S\}), \end{aligned}$$

lo que demuestra la propiedad que necesitábamos. \square

Lo útil de la proposición es que nos permite hacer cálculos sobre el proceso restringido a cierta cantidad de sitios. Para ello definimos la siguiente función auxiliar, con el principal objetivo de facilitar los cálculos.

Definición 3.10 Sean $S \subseteq I$ y $\delta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)$ tal que $S \in \delta$. Definimos $\lambda_S^S(t) := \mathbb{P}_\delta(X_t|_S = \{S\})$. Note que según la fórmula 3.11, esta es independiente de δ y por tanto no hacemos explícita la dependencia de δ .

La función λ_S^S viene a dar la probabilidad con que el fragmento S se queda sin fragmentar. Notemos que esta definición puede ser extendida fácilmente. En particular, para cualquier partición δ de I podemos hacer la extensión utilizando la proposición 2.3:

$$\lambda_\delta^I(t) := \mathbb{P}(X_t = \delta | X_0 = \delta) = \prod_{l \in \delta} \mathbb{P}(X_t|_l = \{l\} | X_0 = \delta) = \prod_{l \in \delta} \lambda_l^l(t).$$

Y se extiende esta para δ' una partición de $S \subseteq I$, usando la proposición 3.9 como:

$$\lambda_{\delta'}^S(t) := \mathbb{P}(X_t|_S = \delta' | X_0 = \delta' \cup \{S^c\}) = \prod_{l \in \delta'} \lambda_l^l(t).$$

Donde nuevamente ocupamos la independencia para la extensión. Luego λ_δ^S viene a ser, intuitivamente, la probabilidad con que el proceso deja sin fragmentar cada elemento en δ' una vez que éste apareció. Además, podemos usar estas funciones para calcular ciertas probabilidades en árboles de fragmentación. Con esta idea hacemos la siguiente definición

Definición 3.11 Sea $T^I = (\mathbb{G}, E, \mathfrak{R}, \delta_0)$ un árbol de fragmentación. Definimos entonces, para $\mathcal{A} \in \mathbb{G}$ y $H \subseteq E$

$$\lambda_{\mathbb{G}_{\mathcal{A}}(H)}^{I_{\mathcal{A}}}(t) := \lambda_{\mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\mathcal{A}}(H)}^{I_{\mathcal{A}}}}(t) = \prod_{l \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\mathcal{A}}(H)}} \lambda_l^l(t).$$

Análogamente, si $(\mathcal{A}_i)_{i=1}^k$ son vértices de T^I tales que $\mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\mathcal{A}_i}(H)}$ son disjuntos de pares, se usa la notación:

$$\lambda_{\bigcup_{i=1}^k \mathbb{G}_{\mathcal{A}_i}(H)}^{\bigcup_{i=1}^k I_{\mathcal{A}_i}}(t) := \lambda_{\bigcup_{i=1}^k \mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\mathcal{A}_i}(H)}}^{\bigcup_{i=1}^k I_{\mathcal{A}_i}}(t).$$

Ahora, hagamos un par de observaciones de las funciones λ . En primer lugar, es claro de la definición, que $\lambda_\delta^S(t) = (\lambda_\delta^S(1))^t$. Luego, denotaremos $\lambda_\delta^S := \lambda_\delta^S(1)$. En segundo lugar hacemos la siguiente observación:

Proposición 3.12 Sean $J, K \subseteq I$ con $J \cap K = \emptyset$. Sean $\delta \in \mathbb{D}(J), \delta' \in \mathbb{D}(K)$. Entonces:

$$\lambda_\delta^J(t)\lambda_{\delta'}^K(t) = \lambda_{\delta \cup \delta'}^{J \cup K}(t).$$

DEMOSTRACIÓN. En efecto;

$$\lambda_{\delta \cup \delta'}^{J \cup K}(t) = \prod_{l \in \delta \cup \delta'} \lambda_l^l(t) = \left(\prod_{l \in \delta} \lambda_l^l(t) \right) \left(\prod_{l \in \delta'} \lambda_l^l(t) \right) = (\lambda_\delta^J(t))(\lambda_{\delta'}^K(t)).$$

Donde usamos solo que δ y δ' son particiones de sitios disjuntos. \square

Ahora; ¿cual es el objetivo de las propiedades anteriores? Es que nos permiten calcular de forma inductiva la ley del proceso de fragmentación. Sea $T^I = (\mathbb{G}, E, \mathfrak{R}, \delta_0)$ un árbol de fragmentación donde δ_0 es la raíz. Luego, tenemos por probabilidades totales, por definición del evento $\mathcal{F}_t(T^I)$ y la independencia en fragmentos disjuntos, que:

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I)) = \int_0^t \mathbb{P}(X_{T_1} = \delta_0) \left[\prod_{i=1}^{|\delta_0|} \mathbb{P}_{\delta_0}(\mathcal{F}_{t-u}(T^{I_{D_i}})) \right] d\mathbb{P}(T_1 = u),$$

donde $(D_i)_{1 \leq i \leq |\delta_0|}$ son los elementos de δ_0 . Note que podemos calcular varios términos, esto según lo visto en la sección 1.3 y dado que una vez que la cadena sale de un estado no vuelve nunca a él

$$\mathbb{P}(X_{T_1} = \delta_0) = \frac{\rho_{\delta_0}}{\rho_{tot}}$$

$$d\mathbb{P}(T_1 = u) = \rho_{tot} e^{-\rho_{tot}u} du.$$

Así tenemos, notando que $\lambda_I^I(u) = e^{-\rho_{tot}u}$:

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I)) = \int_0^t \rho_{\delta_0} \left[\prod_{i=1}^{|\delta_0|} \mathbb{P}_{\delta_0}(\mathcal{F}_{t-u}(T^{I_{D_i}})) \right] \lambda_I^I(u) du. \quad (3.12)$$

Lo importante de lo anterior es que da una estructura claramente inductiva para trabajar el problema. Para ello, primero calculemos lo que sería el caso base, $|\mathbb{G}| = 1$. En aquel caso tenemos que

$$\mathbb{P}_{\delta_0}(\mathcal{F}_{t-u}(T^{I_{D_i}})) = \mathbb{P}_{\delta_0}(X_{t-u}|_{I_{D_i}} = \{I_{D_i}\}) = \lambda_{I_{D_i}}^{I_{D_i}}(t-u).$$

Reemplazando en la fórmula 3.12 y usando la propiedad 3.12 se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I)) &= \rho_{\delta_0} \int_0^t \lambda_I^I(u) \left[\prod_{i=1}^{|\delta_0|} \lambda_{I_{D_i}}^{I_{D_i}}(t-u) \right] du = \rho_{\delta_0} \int_0^t \lambda_I^I(u) \lambda_{\cup_{i=1}^{|\delta_0|} \{I_{D_i}\}}^I(t-u) du \\ &= \rho_{\delta_0} \int_0^t (\lambda_I^I)^u (\lambda_{\cup_{i=1}^{|\delta_0|} \{I_{D_i}\}}^I)^{t-u} du. \end{aligned}$$

Para calcular lo anterior recordemos que:

$$\int_0^t a^u b^{t-u} du = \begin{cases} tb^t & a = b, \\ \frac{b^t - a^t}{\log(b) - \log(a)} & b \neq a. \end{cases} \quad (3.13)$$

Donde el primer caso es el límite del segundo, que puede calcularse por L'Hopital. Suponiendo que $\lambda_I^I \neq \lambda_{\cup_{i=1}^{|\delta_0|} \{I_{D_i}\}}^I$ tendríamos que:

$$\int_0^t (\lambda_I^I)^u (\lambda_{\cup_{i=1}^{|\delta_0|} \{I_{D_i}\}}^I)^{t-u} du = \frac{[\lambda_I^I]^t - [\lambda_{\cup_{i=1}^{|\delta_0|} \{I_{D_i}\}}^I]^t}{[\log(\lambda_I^I) - \log(\lambda_{\cup_{i=1}^{|\delta_0|} \{I_{D_i}\}}^I)]}$$

Así la fórmula 3.12 es:

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I)) = \rho_{\delta_0} \left(\frac{[\lambda_{\cup_{i=1}^{|\delta_0|} \{I_{D_i}\}}^I(1)]^t - [\lambda_I^I(1)]^t}{[\log(\lambda_{\cup_{i=1}^{|\delta_0|} \{I_{D_i}\}}^I(1)) - \log(\lambda_I^I(1))]} \right).$$

Para generalizar lo anterior hacemos dos observaciones. Primero, dado que ahí aparece ρ_{δ_0} que depende, de forma no explícita, de los sitios I . Así, tenemos que, de alguna forma, poder reflejar la inducción en esa parte. Con este objetivo definimos las tasas restringidas:

Definición 3.13 Sea $U \subseteq I$, definimos para todo $\mathfrak{D}' \in \mathbb{D}(U)$:

$$\rho_{\mathfrak{D}'}^J = \sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho \\ \mathfrak{D}|_J = \mathfrak{D}'|_J}} \rho_{\mathfrak{D}}$$

En particular, $\rho_{\mathfrak{D}}^I = \rho_{\mathfrak{D}}$ para todo $\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho$.

Es decir, podemos modificar levemente el cálculo obtenido y decir que, si T^I es un árbol de fragmentación con un solo nodo δ_0 , se tiene que:

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I)) = \rho_{\delta_0}^I \left(\frac{[\lambda_{\cup_{i=1}^{|\delta_0|} \{I_{D_i}\}}^I]^t - [\lambda_I^I]^t}{[\log(\lambda_{\cup_{i=1}^{|\delta_0|} \{I_{D_i}\}}^I) - \log(\lambda_I^I)]} \right). \quad (3.14)$$

Lamentablemente, aun no es claro como ocupar lo anterior en alguna hipótesis inductiva. Esto hasta que hacemos una comparación de la fórmula 3.10 y la fórmula 3.14; ¿Será cierto que entonces $\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I))$ se calcula como la suma que aparece en 3.10 de los términos de la forma que aparecen en 3.14? El teorema principal de esta sección viene a establecer una respuesta afirmativa a esta pregunta.

Teorema 3.14 Sea $T^I = (\mathbb{G}, E, \mathfrak{A}, \delta_0)$ un árbol de fragmentación. Si $|\mathbb{G}| = 0$, entonces $\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I)) = (\lambda_I^I)^t$. En caso contrario, denotamos por δ_0 la raíz de T^I y supongamos que para el árbol T^I se tiene que $\lambda_{\mathbb{G}_{\mathcal{A}}^I(H)}^I \neq \lambda_{I_{\mathcal{A}}}^I$ para todo $\mathcal{A} \in \mathbb{G}, H \subseteq E$. Entonces se tiene que:

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I)) = \sum_{H \subseteq E} (-1)^{|H|} [(\lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0(H)}^I})^t - (\lambda_I^I)^t] \prod_{\mathbb{B} \in \mathbb{G}} \frac{\rho_{\mathbb{B}}^{I_{\mathbb{B}}}}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_{\mathbb{B}}(H)}^{I_{\mathbb{B}}}) - \log(\lambda_{I_{\mathbb{B}}}^{I_{\mathbb{B}}})}. \quad (3.15)$$

DEMOSTRACIÓN. Es fácil chequear que si $|\mathbb{G}| = 0$, entonces $\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I)) = \lambda_I^I(t)$. Además, ya probamos el caso base $|\mathbb{G}| = 1$ en el desarrollo anterior. Debemos solo probar el paso inductivo. De la formula 3.12, tenemos que:

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I)) = \int_0^t \rho^I(\delta_0) \left[\prod_{i=1}^{|\delta_0|} \mathbb{P}_{\delta_0}(\mathcal{F}_{t-u}(T^{I_{D_i}})) \right] \lambda_I^I(u) du.$$

Para ocupar la hipótesis inductiva suponemos que $T^{I_{D_i}}$ tiene al menos un nodo. Esto pues, si alguno es vacío, la demostración siguiente puede adaptarse fácilmente a ese caso, además que considerarlo solo entorpece más la notación. Así la hipótesis inductiva en esa fórmula se obtiene que:

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I)) = \int_0^t \rho^I(\delta_0)(\lambda_I^I)^u \left(\prod_{i=1}^{|\delta_0|} \sum_{H_i \subseteq E_{D_i}} (-1)^{|H_i|} [(\lambda_{\mathbb{G}_{D_i}(H_i)}^{I_{D_i}})^{t-u} - (\lambda_{I_{D_i}}^{I_{D_i}})^{t-u}] \prod_{\mathcal{B} \in \mathbb{G}_{D_i}} \frac{\rho_{\mathcal{B}}^{I_{\mathcal{B}}}}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_{\mathcal{B}}(H_i)}^{I_{\mathcal{B}}}) - \log(\lambda_{I_{\mathcal{B}}}^{I_{\mathcal{B}}})} \right) du,$$

con E_{D_i} los arcos del árbol $T^{I_{D_i}}$ y recordamos que $(D_i)_{i=1}^{|\delta_0|}$ son los elementos de δ_0 . Distribuyendo el producto sobre la sumatoria obtenemos que $\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I))$ es:

$$\int_0^t \rho_{\delta_0}^I(\lambda_I^I)^u \left(\sum_{i=1, \dots, |\mathcal{A}|, H_i \subseteq E_{D_i}} (-1)^{\sum_{i=1}^{|\delta_0|} |H_i|} \prod_{i=1}^{|\delta_0|} [(\lambda_{\mathbb{G}_{D_i}(H_i)}^{I_{D_i}})^{t-u} - (\lambda_{I_{D_i}}^{I_{D_i}})^{t-u}] \prod_{i=1}^{|\delta_0|} \prod_{\mathcal{B} \in \mathbb{G}_{D_i}} \frac{\rho_{\mathcal{B}}^{I_{\mathcal{B}}}}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_{\mathcal{B}}(H_i)}^{I_{\mathcal{B}}}) - \log(\lambda_{I_{\mathcal{B}}}^{I_{\mathcal{B}}})} \right) du$$

Ahora la idea es expandir el término con el producto de las funciones λ . Dado que ahí el álgebra se vuelve complicada primero haremos el caso $|\delta_0| = 2$ para ejemplificar los argumentos. Luego, el caso general será más fácil de entender. En efecto, para $|\delta_0| = 2$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{|\delta_0|} [(\lambda_{\mathbb{G}_{D_i}(H_i)}^{I_{D_i}})^{t-u} - (\lambda_{I_{D_i}}^{I_{D_i}})^{t-u}] &= [(\lambda_{\mathbb{G}_{D_1}(H_1)}^{I_{D_1}})^{t-u} - (\lambda_{I_{D_1}}^{I_{D_1}})^{t-u}] [(\lambda_{\mathbb{G}_{D_2}(H_2)}^{I_{D_2}})^{t-u} - (\lambda_{I_{D_2}}^{I_{D_2}})^{t-u}] \\ &= [(\lambda_{\mathbb{G}_{D_1}(H_1)}^{I_{D_1}} \lambda_{\mathbb{G}_{D_2}(H_2)}^{I_{D_2}})^{t-u} - (\lambda_{\mathbb{G}_{D_1}(H_1)}^{I_{D_1}} \lambda_{I_{D_2}}^{I_{D_2}})^{t-u} - (\lambda_{\mathbb{G}_{D_2}(H_2)}^{I_{D_2}} \lambda_{I_{D_1}}^{I_{D_1}})^{t-u} + (\lambda_{I_{D_1}}^{I_{D_1}} \lambda_{I_{D_2}}^{I_{D_2}})^{t-u}] \\ &= [(\lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H_1 \cup H_2)}^I)^{t-u} - (\lambda_{\mathbb{G}_{D_1}(H_1) \cup \{I_{D_2}\}}^I)^{t-u} - (\lambda_{\mathbb{G}_{D_2}(H_2) \cup \{I_{D_1}\}}^I)^{t-u} + (\lambda_{\delta_0}^I)^{t-u}], \end{aligned}$$

luego en aquel caso nos queda que $\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I))$ es:

$$\begin{aligned} \sum_{H_1 \subseteq E_{D_1}} \sum_{H_2 \subseteq E_{D_2}} (-1)^{|H_1|+|H_2|} \rho_{\delta_0}^I \left(\int_0^t (\lambda_I^I)^u [(\lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H_1 \cup H_2)}^I)^{t-u} - (\lambda_{\mathbb{G}_{D_1}(H_1) \cup \{I_{D_2}\}}^I)^{t-u} - (\lambda_{\mathbb{G}_{D_2}(H_2) \cup \{I_{D_1}\}}^I)^{t-u} + (\lambda_{\delta_0}^I)^{t-u}] du \right) \\ \times \left(\prod_{\mathcal{B} \in \mathbb{G}_{D_1}} \frac{\rho_{\mathcal{B}}^{I_{\mathcal{B}}}}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_{\mathcal{B}}(H_1)}^{I_{\mathcal{B}}}) - \log(\lambda_{I_{\mathcal{B}}}^{I_{\mathcal{B}}})} \prod_{\mathcal{B} \in \mathbb{G}_{D_2}} \frac{\rho_{\mathcal{B}}^{I_{\mathcal{B}}}}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_{\mathcal{B}}(H_2)}^{I_{\mathcal{B}}}) - \log(\lambda_{I_{\mathcal{B}}}^{I_{\mathcal{B}}})} \right), \end{aligned}$$

Resolvemos la integral que aparece en la formula y obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^t (\lambda_I^I)^u [(\lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H_1 \cup H_2)}^I)^{t-u} - (\lambda_{\mathbb{G}_{D_1}(H_1) \cup \{I_{D_2}\}}^I)^{t-u} - (\lambda_{\mathbb{G}_{D_2}(H_2) \cup \{I_{D_1}\}}^I)^{t-u} + (\lambda_{\delta_0}^I)^{t-u}] du \\ = \left[\frac{(\lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H_1 \cup H_2)}^I)^t - (\lambda_I^I)^t}{\log((\lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H_1 \cup H_2)}^I)^t - \log(\lambda_I^I))} \right] - \left[\frac{(\lambda_{\mathbb{G}_{D_1}(H_1) \cup \{I_{D_2}\}}^I)^t - (\lambda_I^I)^t}{\log((\lambda_{\mathbb{G}_{D_1}(H_1) \cup \{I_{D_2}\}}^I)^t - \log(\lambda_I^I))} \right] - \left[\frac{(\lambda_{\mathbb{G}_{D_2}(H_2) \cup \{I_{D_1}\}}^I)^t - (\lambda_I^I)^t}{\log((\lambda_{\mathbb{G}_{D_2}(H_2) \cup \{I_{D_1}\}}^I)^t - \log(\lambda_I^I))} \right] \\ + \left[\frac{(\lambda_{\delta_0}^I)^t - (\lambda_I^I)^t}{\log(\lambda_{\delta_0}^I) - \log(\lambda_I^I)} \right] =: S_1 + S_2 + S_3 + S_4. \end{aligned}$$

Esto nos da que la integral que aparece al calcular $\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I))$ se separa en 4 términos que se suman. Estos términos lo denotamos por S_1, S_2, S_3 y S_4 . Con ello tenemos que $\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I))$ es:

$$\sum_{H_1 \subseteq E_{D_1}} \rho^I(\delta_0) \sum_{H_2 \subseteq E_{D_2}} (-1)^{|H_1 \cup H_2|} [S_1 + S_2 + S_3 + S_4] \left[\prod_{\mathcal{B} \in \mathbb{G}_{D_1}} \frac{\rho_{\mathcal{B}}^{I_{\mathcal{B}}}}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_{\mathcal{B}}(H_1)}^{I_{\mathcal{B}}}) - \log(\lambda_{I_{\mathcal{B}}}^{I_{\mathcal{B}}})} \prod_{\mathcal{B} \in \mathbb{G}_{D_2}} \frac{\rho_{\mathcal{B}}^{I_{\mathcal{B}}}}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_{\mathcal{B}}(H_2)}^{I_{\mathcal{B}}}) - \log(\lambda_{I_{\mathcal{B}}}^{I_{\mathcal{B}}})} \right].$$

Notemos que entre los dos productos que aparecen en la fórmula anterior recorreremos todos los nodos de \mathbb{G} salvo la raíz que es δ_0 . Estos términos que faltan son los denominadores de S_1, S_2, S_3 y S_4 junto con $\rho^I(\delta_0)$. Esto da la idea de usar el cambio $H = H_1 \cup H_2$. Luego, H tiene 4 opciones;

1. No tomar arcos que salen de la raíz,
2. tomar el segundo arco de la raíz,
3. tomar el primero arco de la raíz,
4. tomar ambos arcos de la raíz.

Cada uno de estos casos será cubierto por S_1, S_2, S_3 y S_4 respectivamente. En efecto, veamos estos cambios. El término correspondiente a S_1 es:

$$\sum_{H_1 \subseteq E_{D_1}} \sum_{H_2 \subseteq E_{D_2}} (-1)^{|H_1 \cup H_2|} \rho^I(\delta_0) \left[\frac{(\lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H_1 \cup H_2)}^I)^t - (\lambda_I^I)^t}{\log((\lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H_1 \cup H_2)}^I) - \log(\lambda_I^I))} \right] \\ \times \left[\prod_{B \in \mathbb{G}_{D_1}} \frac{\rho_B^{I_B}}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_B(H_1)}^{I_B}) - \log(\lambda_{I_B}^{I_B})} \right] \left[\prod_{B \in \mathbb{G}_{D_2}} \frac{\rho_B^{I_B}}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_B(H_2)}^{I_B}) - \log(\lambda_{I_B}^{I_B})} \right].$$

Hacemos el cambio de variable $H = H_1 \cup H_2$. Note que la variable $H_1 \cup H_2$ recorre todos los subconjuntos de arcos de $E_{D_1} \cup E_{D_2}$, que son todos los arcos de E , salvo aquellos que contienen los arcos que salen de la raíz. Esto último lo denotaremos $E - \{\delta_0\}$. Además, note que la productoria recorre todos los posibles nodos, salvo la raíz que es δ_0 , pero este término que falta es justamente $\frac{\rho^I(\delta_0)}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}^I) - \log(\lambda_I^I)}$, el cual podemos armar con S_1 . Luego, haciendo el cambio de variable se obtiene que el término que corresponde a S_1 es:

$$\sum_{H \subseteq E - \{\delta_0\}} (-1)^{|H|} [(\lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}^I)^t - (\lambda_I^I)^t] \prod_{B \in \mathbb{G}} \frac{\rho_B^{I_B}}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_B(H)}^{I_B}) - \log(\lambda_{I_B}^{I_B})}.$$

Que es un término de la forma que esperábamos. Ahora, veamos qué ocurre con los otros. El término de $\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I))$, dado por S_2 , es:

$$\sum_{H_1 \subseteq E_{D_1}} \sum_{H_2 \subseteq E_{D_2}} (-1)^{|H_1 \cup H_2| + 1} \rho^I(\delta_0) \left[\frac{(\lambda_{\mathbb{G}_{D_1}(H_1) \cup \{I_{D_2}\}}^I)^t - (\lambda_I^I)^t}{\log((\lambda_{\mathbb{G}_{D_1}(H_1) \cup \{I_{D_2}\}}^I) - \log(\lambda_I^I))} \right] \\ \times \left[\prod_{B \in \mathbb{G}_{D_1}} \frac{\rho_B^{I_B}}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_B(H_1)}^{I_B}) - \log(\lambda_{I_B}^{I_B})} \right] \left[\prod_{B \in \mathbb{G}_{D_2}} \frac{\rho_B^{I_B}}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_B(H_2)}^{I_B}) - \log(\lambda_{I_B}^{I_B})} \right].$$

Inspirados en el término anterior hacemos el mismo cambio de variable. Note que ahora $\lambda_{\mathbb{G}_{D_1}(H_1) \cup \{I_{D_2}\}}^I$ no tiene una dependencia en H_2 , lo que dificulta incluirlo en el cambio. Para solucionar esto notamos que $\lambda_{\mathbb{G}_{D_1}(H_1) \cup \{I_{D_2}\}}^I = \lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H_1 \cup H_2)}^I$, donde H_2 es cualquier conjunto de arcos que contenga el segundo arco que sale de la raíz. En aquel caso haremos el cambio de variable $H = H_1 \cup H_2 \cup e_2$, con e_2 el segundo arco que sale de la raíz (o bien el arco e_2 indexado por I_{D_2} en T^I). Note que en la productoria del final no estamos recorriendo la raíz, luego agregar el arco e_2 no hace ningún cambio en aquellos términos, salvo que ahora

podemos incluir el nuevo término $\frac{\rho^I(\delta_0)}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_{D_1}(H_1) \cup \{I_{D_2}\}}^I) - \log(\lambda_I^I)}$, que después del cambio de variable es $\frac{\rho^I(\delta_0)}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}^I) - \log(\lambda_I^I)}$. Entonces el término asociado a S_2 es:

$$\sum_{H \subseteq E, e_1 \notin H, e_2 \in H} (-1)^{|H|} [(\lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}^I)^t - (\lambda_I^I)^t] \prod_{B \in \mathbb{G}} \frac{\rho_B^{I_B}}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_B(H)}^{I_B}) - \log(\lambda_{I_B}^{I_B})}.$$

Que nuevamente es la forma que esperábamos. Ahora el tercer término, dado por S_3 se obtiene análogamente a S_2 como:

$$\sum_{H \subseteq E, e_2 \notin H, e_1 \in H} (-1)^{|H|} [(\lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}^I)^t - (\lambda_I^I)^t] \prod_{B \in \mathbb{G}} \frac{\rho_B^{I_B}}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_B(H)}^{I_B}) - \log(\lambda_{I_B}^{I_B})}.$$

Así pues, solo nos queda identificar el término dado por S_4 . Recordemos que este es:

$$\begin{aligned} & \sum_{H_1 \subseteq E_{D_1}} \sum_{H_2 \subseteq E_{D_2}} (-1)^{|H_1 \cup H_2|} \rho^I(\delta_0) \left[\frac{(\lambda_{\delta_0}^I)^t - (\lambda_I^I)^t}{\log(\lambda_{\delta_0}^I) - \log(\lambda_I^I)} \right] \\ & \times \left[\prod_{B \in \mathbb{G}_{D_1}} \frac{\rho_B^{I_B}}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_B(H_1)}^{I_B}) - \log(\lambda_{I_B}^{I_B})} \right] \left[\prod_{B \in \mathbb{G}_{D_2}} \frac{\rho_B^{I_B}}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_B(H_2)}^{I_B}) - \log(\lambda_{I_B}^{I_B})} \right]. \end{aligned}$$

Note que el término $\lambda_{\delta_0}^I$, que queremos incluir en la sumatoria, no tiene dependencia respecto a H_1 ni H_2 . Sin embargo, $\lambda_{\delta_0}^I = \lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}^I$, con H cualquier subconjunto de aristas que contiene tanto e_1 como e_2 . Note nuevamente que, la productoria que llevamos no recorre la raíz, luego agregar estos arcos no afecta este término. Así queda que el término dado por S_4 es

$$\sum_{H \subseteq E, e_1, e_2 \in H} (-1)^{|H|+2} [(\lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}^I)^t - (\lambda_I^I)^t] \prod_{B \in \mathbb{G}} \frac{\rho_B^{I_B}}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_B(H)}^{I_B}) - \log(\lambda_{I_B}^{I_B})}.$$

Note que los 4 términos obtenidos recorren distintos conjuntos de arcos de E , pero en total, recorren todos los subconjuntos de arcos posibles. Juntando todos en una sola sumatoria se obtiene el teorema para $|\delta_0| = 2$. A continuación pasaremos al desarrollo para el caso general. Para ello note que podemos desarrollar el producto que aparece en $\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I))$:

$$\prod_{i=1}^{|\delta_0|} [(\lambda_{\mathbb{G}_{D_i}(H_i)}^{I_{D_i}})^{t-u} - (\lambda_{I_{D_i}}^{I_{D_i}})^{t-u}] = \sum_{N \subseteq \{1, 2, \dots, |\delta_0|\}} (-1)^{|\delta_0| - |N|} (\lambda_{[\cup_{i \in N} \mathbb{G}_{D_i}(H_i)] \cup [\cup_{i \notin N} \{I_{D_i}\}]}^I)^{t-u}.$$

Con esto podemos calcular la integral que aparece en $\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I))$ como:

$$\begin{aligned} \int_0^t (\lambda_I^I)^u \prod_{i=1}^{|\delta_0|} [(\lambda_{\mathbb{G}_{D_i}(H_i)}^{I_{D_i}})^{t-u} - (\lambda_{I_{D_i}}^{I_{D_i}})^{t-u}] du &= \sum_{N \subseteq \{1, 2, \dots, |\delta_0|\}} (-1)^{|\delta_0| - |N|} \int_0^t (\lambda_I^I)^u (\lambda_{[\cup_{i \in N} \mathbb{G}_{D_i}(H_i)] \cup [\cup_{i \notin N} \{I_{D_i}\}]}^I)^{t-u} du \\ &= \sum_{N \subseteq \{1, 2, \dots, |\delta_0|\}} (-1)^{|\delta_0| - |N|} \frac{(\lambda_{[\cup_{i \in N} \mathbb{G}_{D_i}(H_i)] \cup [\cup_{i \notin N} \{I_{D_i}\}]}^I)^t - (\lambda_I^I)^t}{\log(\lambda_{[\cup_{i \in N} \mathbb{G}_{D_i}(H_i)] \cup [\cup_{i \notin N} \{I_{D_i}\}]}^I) - \log(\lambda_I^I)}. \end{aligned}$$

Con ello tenemos que $\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I))$ es:

$$\rho_{\delta_0}^I \sum_{i=1, \dots, |\delta_0|, H_i \subseteq E_{D_i}} (-1)^{\sum_{i=1}^{|\delta_0|} |H_i|} \sum_{N \subseteq \{1, 2, \dots, |\delta_0|\}} (-1)^{|\delta_0| - |N|} \frac{(\lambda_{[\cup_{i \in N} \mathbb{G}_{D_i}(H_i)] \cup [\cup_{i \notin N} \{I_{D_i}\}]}^I)^t - (\lambda_I^I)^t}{\log(\lambda_{[\cup_{i \in N} \mathbb{G}_{D_i}(H_i)] \cup [\cup_{i \notin N} \{I_{D_i}\}]}^I) - \log(\lambda_I^I)} \\ \times \prod_{i=1}^{|\delta_0|} \prod_{\mathcal{B} \in \mathbb{G}_{D_i}} \frac{\rho_{\mathcal{B}}^{I_{\mathcal{B}}}}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_{\mathcal{B}}(H_i)}^{I_{\mathcal{B}}}) - \log(\lambda_{I_{\mathcal{B}}}^{I_{\mathcal{B}}})}.$$

Lo que, cambiando las sumatorias, es igual a:

$$\rho_{\delta_0}^I \sum_{N \subseteq \{1, 2, \dots, |\delta_0|\}} \sum_{i=1, \dots, |\delta_0|, H_i \subseteq E_{D_i}} (-1)^{\sum_{i=1}^{|\delta_0|} |H_i|} (-1)^{|\delta_0| - |N|} \frac{(\lambda_{[\cup_{i \in N} \mathbb{G}_{D_i}(H_i)] \cup [\cup_{i \notin N} \{I_{D_i}\}]}^I)^t - (\lambda_I^I)^t}{\log(\lambda_{[\cup_{i \in N} \mathbb{G}_{D_i}(H_i)] \cup [\cup_{i \notin N} \{I_{D_i}\}]}^I) - \log(\lambda_I^I)} \\ \times \prod_{i=1}^{|\delta_0|} \prod_{\mathcal{B} \in \mathbb{G}_{D_i}} \frac{\rho_{\mathcal{B}}^{I_{\mathcal{B}}}}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_{\mathcal{B}}(H_i)}^{I_{\mathcal{B}}}) - \log(\lambda_{I_{\mathcal{B}}}^{I_{\mathcal{B}}})}.$$

Ahora, consideremos algún $N \subseteq \{1, 2, \dots, |\delta_0|\}$ arbitrario y veamos como se ve aquel término. En aquel caso, inspirados en el desarrollo anterior, hacemos el cambio $\hat{H} = \bigcup_{i=1}^{|\delta_0|} H_i$. En aquel caso la productoria del final recorre todos los vértices salvo la raíz que es δ_0 , y que para vértices distintos no les afecta los vértices de otras ramas (por independencia). El único problema es que $(\lambda_{[\cup_{i \in N} \mathbb{G}_{D_i}(H_i)] \cup [\cup_{i \notin N} \{I_{D_i}\}]}^I)$ no depende explícitamente de los H_i con $i \notin N$. Sin embargo, en aquel caso consideramos mejor el cambio $H = \hat{H} \cup [\cup_{i \notin N} e_i]$, donde $\{e_i\}_{i=1}^{|\delta_0|}$ son los arcos que salen de la raíz. Luego $(\lambda_{[\cup_{i \in N} \mathbb{G}_{D_i}(H_i)] \cup [\cup_{i \notin N} \{I_{D_i}\}]}^I) = \lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}^I$, y a la productoria de la derecha no le afecta este cambio pues no ve los arcos que salen de la raíz. Por otro lado, note que $|H| = |\hat{H}| + |\cup_{i \notin N} e_i| = |\hat{H}| + |\delta_0 - N|$ y por tanto, para N fijo, el término de la suma dado por N es:

$$\sum_{H \subseteq E, \forall i \notin N, e_i \in H} (-1)^{|H|} [(\lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}^I) - (\lambda_I^I)^t] \prod_{\mathcal{B} \in \mathbb{G}} \frac{\rho_{\mathcal{B}}^{I_{\mathcal{B}}}}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_{\mathcal{B}}(H)}^{I_{\mathcal{B}}}) - \log(\lambda_{I_{\mathcal{B}}}^{I_{\mathcal{B}}})}.$$

Así, tenemos que $\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I))$ es:

$$\sum_{N \subseteq \{1, 2, \dots, |\delta_0|\}} \sum_{H \subseteq E, \forall i \notin N, e_i \in H} (-1)^{|H|} [(\lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}^I)^t - (\lambda_I^I)^t] \prod_{\mathcal{B} \in \mathbb{G}} \frac{\rho_{\mathcal{B}}^{I_{\mathcal{B}}}}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_{\mathcal{B}}(H)}^{I_{\mathcal{B}}}) - \log(\lambda_{I_{\mathcal{B}}}^{I_{\mathcal{B}}})} \\ = \sum_{\substack{N \subseteq \{1, 2, \dots, |\delta_0|\} \\ H \subseteq E, \forall i \notin N, e_i \in H}} (-1)^{|H|} [(\lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}^I)^t - (\lambda_I^I)^t] \prod_{\mathcal{B} \in \mathbb{G}} \frac{\rho_{\mathcal{B}}^{I_{\mathcal{B}}}}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_{\mathcal{B}}(H)}^{I_{\mathcal{B}}}) - \log(\lambda_{I_{\mathcal{B}}}^{I_{\mathcal{B}}})}.$$

Pero en el término dentro de sumatoria estamos recorriendo todos los posibles subconjuntos de arcos. Concluimos que:

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I)) = \sum_{H \subseteq E} (-1)^{|H|} [(\lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}^I)^t - (\lambda_I^I)^t] \prod_{\mathcal{B} \in \mathbb{G}} \frac{\rho_{\mathcal{B}}^{I_{\mathcal{B}}}}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_{\mathcal{B}}(H)}^{I_{\mathcal{B}}}) - \log(\lambda_{I_{\mathcal{B}}}^{I_{\mathcal{B}}})}$$

Que es la fórmula a la que queríamos llegar. Tenemos así el teorema. \square

Del teorema anterior se obtiene inmediatamente la fórmula para la ley del proceso de fragmentación:

Corolario 3.15 *Sea I un conjunto de sitios, $(\rho_\delta)_{\delta \in \mathbb{D}(I)}$ tasas de recombinación sobre estos sitios y $(X_t)_{t \geq 0}$ un proceso de fragmentación a valores en $\mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)$. Sea $\delta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)$ y $t > 0$. Si $\delta = \{I\}$, entonces $\mathbb{P}(X_t = \delta) = \lambda_I^I(t)$. En caso contrario, sea $\tau(\delta)$ el conjunto de todos los árboles de fragmentación con conjunto de sitios I que cumplen $\mathcal{L}_\mathbb{G} = \delta$ y supongamos que para todo $T^I \in \tau(\delta)$ se tiene que $\lambda_{\mathbb{G}_B(H)}^{I_B} \neq \lambda_{I_B}^{I_B}$ para todo $B \in \mathbb{G}$, $H \subseteq E$. Entonces:*

$$\mathbb{P}(X_t = \delta) = \sum_{T^I \in \tau(\delta)} \sum_{H \subseteq E} (-1)^{|H|} [(\lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}^I)^t - (\lambda_I^I)^t] \prod_{B \in \mathbb{G}} \frac{\rho_B^{I_B}}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_B(H)}^{I_B}) - \log(\lambda_{I_B}^{I_B})}. \quad (3.16)$$

Del teorema es interesante rescatar resultados ya conocidos para la ley del proceso de fragmentación en casos más particulares. El siguiente resultado es un ejemplo de aquello:

Corolario 3.16 *Consideremos el caso de tasas de recombinación $(\rho_\delta)_{\delta \in \mathbb{D}(I)}$ simples y biparentales, el proceso de fragmentación asociado $(X_t)_{t \geq 0}$ y un árbol de fragmentación de este*

$T^I = (\mathbb{G}, E, \mathfrak{A}, \delta_0)$ y $t > 0$ fijo. Si $|\mathbb{G}| = 0$, entonces $\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I)) = \exp\left(-\sum_{\delta \in \mathbb{D}(I)} \rho_\delta t\right)$. En

caso contrario:

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I)) = \sum_{H \subseteq E} (-1)^{|H|} \exp\left(-t \sum_{\substack{D \in \mathcal{G}_\rho \\ \exists l \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}_A(H)}^{t,q}, D|_l \neq \{l\}}} \rho(D)\right) \left(1 - \exp\left(-\sum_{\substack{D \in \mathcal{G}_\rho \\ \forall l \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}_A(H)}, D|_l = \{l\}}} \rho(D)\right)\right) \prod_{B \in \mathbb{G}} \frac{\rho_B}{\eta_B^{T^I(H)}},$$

donde:

$$\eta_B^{T^I(H)} = \sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho \\ \exists C \in \mathbb{G}_B(H)^{t,q}, \mathfrak{D}|_{I_C} = C}} \rho_{\mathfrak{D}}.$$

Observación La fórmula viene a ser la misma que la encontrada en [4], salvo diferencias de notación, en este se ocupan los árboles de segmentación, que son levemente diferentes a los árboles de fragmentación.

DEMOSTRACIÓN. Dado que la recombinación es simple se tienen automáticamente las hipótesis del teorema 3.14. Por ello obtenemos que:

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I)) = \sum_{H \subseteq E} (-1)^{|H|} [(\lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}^I)^t - (\lambda_I^I)^t] \prod_{B \in \mathbb{G}} \frac{\rho_B^{I_B}}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_B(H)}^{I_B}) - \log(\lambda_{I_B}^{I_B})}. \quad (3.17)$$

De la fórmula anterior solo debemos identificar términos, lo cual podemos hacer dado que las tasas son simples. Esto inmediatamente, por definición del proceso de fragmentación, da que la división en cada sitio es independiente del resto (esto puesto que cada una es determinada por una exponencial independiente del resto antes de la división, y luego de la

división tenemos independencia por 2.3). En primer lugar:

$$\begin{aligned}
(\lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}^I)^t &= \prod_{l \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}} \lambda_l^I(t) = \prod_{l \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}} \exp \left(-t \sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G} \\ \mathfrak{D}|_l \neq \{l\}}} \rho_{\mathfrak{D}} \right) \\
&= \exp \left(- \sum_{l \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}} \sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho \\ \mathfrak{D}|_l \neq \{l\}}} \rho_{\mathfrak{D}} t \right) = \exp \left(-t \sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho \\ \exists l \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}^{t,q} \mathfrak{D}|_l \neq \{l\}}} \rho_{\mathfrak{D}} \right),
\end{aligned}$$

donde las últimas dos igualdades se tienen debido a que las tasas son simples, así solo pueden actuar en solo un l en $\mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}$. Por definición, se tiene que:

$$(\lambda_I^I)^t = \exp(-\rho_{tot}t).$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
(\lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}^I)^t - (\lambda_I^I)^t &= \exp \left(-t \sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho \\ \exists l \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}^{t,q} \mathfrak{D}|_l \neq \{l\}}} \rho_{\mathfrak{D}} \right) - \exp(-\rho_{tot}t) \\
&= \exp \left(-t \sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho \\ \exists l \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}^{t,q} \mathfrak{D}|_l \neq \{l\}}} \rho_{\mathfrak{D}} \right) \left(1 - \exp \left(-t \left[\sum_{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho} \rho_{\mathfrak{D}} - \sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho \\ \exists l \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}^{t,q} \mathfrak{D}|_l \neq \{l\}}} \rho_{\mathfrak{D}} \right] \right) \right) \\
&= \exp \left(-t \sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho \\ \exists l \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}^{t,q} \mathfrak{D}|_l \neq \{l\}}} \rho_{\mathfrak{D}} \right) \left(1 - \exp \left(- \sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho \\ \forall l \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)} \mathfrak{D}|_l = \{l\}}} \rho_{\mathfrak{D}} \right) \right).
\end{aligned}$$

Y además:

$$\rho_{\mathcal{B}}^{I_{\mathcal{B}}} = \sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho \\ \mathfrak{D}|_{I_{\mathcal{B}}} = \mathcal{B}|_{I_{\mathcal{B}}}}} \rho_{\mathfrak{D}} = \rho_{\mathcal{B}}.$$

Donde, dado que las tasas son simples, hay una única que causa división entre dos sitios dados. Finalmente, un ultimo calculo da que, para todo $\mathcal{B} \in \mathbb{G}_{\delta_0}(H)$:

$$\log(\lambda_{\mathbb{G}_{\mathcal{B}}(H)}^{I_{\mathcal{B}}}) = \left(- \sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho \\ \exists l \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\mathcal{B}}(H)}^{t,q} \mathfrak{D}|_l \neq \{l\}}} \rho_{\mathfrak{D}} \right).$$

Donde el cálculo es análogo al realizado para calcular $(\lambda_{\mathbb{G}_{\mathcal{A}}(H)}^I)^t$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\log(\lambda_{\mathbb{G}_{\mathcal{B}}(H)}^{I_{\mathcal{B}}}) - \log(\lambda_{I_{\mathcal{B}}}^{I_{\mathcal{B}}}) = - \sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho \\ \exists l \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\mathcal{B}}(H)}^{t,q} \mathfrak{D}|_l \neq \{l\}}} \rho_{\mathfrak{D}} + \sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho \\ \mathfrak{D}|_{I_{\mathcal{B}}} \neq \{I_{\mathcal{B}}\}}} \rho_{\mathfrak{D}}.$$

Ahora, notando que si $l \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\mathcal{B}}(H)}$, entonces $l \subseteq I_{\mathcal{B}}$ podemos separar este término y obtenemos que:

$$\log(\lambda_{\mathbb{G}_{\mathcal{B}}(H)}^{I_{\mathcal{B}}}) - \log(\lambda_{I_{\mathcal{B}}}^{I_{\mathcal{B}}}) = \sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_{\rho} \\ \mathfrak{D}|_{I_{\mathcal{B}}} \neq \{I_{\mathcal{B}}\} \\ \forall l \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\mathcal{B}}(H)} \mathfrak{D}|_l = \{l\}}} \rho_{\mathfrak{D}} = \sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_{\rho} \\ \exists C \in \mathbb{G}_{\mathcal{B}}(H) t.q. \mathfrak{D}|_{I_C} = C}} \rho_{\mathfrak{D}}.$$

Juntando todos los cálculos anteriores y reemplazando en 3.17 tenemos el resultado. \square

3.3. Posibles extensiones

Del teorema 3.14 es importante notar que la hipótesis que hacemos sobre las tasas es bastante fuerte. Una primera forma de relajar esta hipótesis, al menos para el nodo raíz, se deduce de la fórmula 3.13:

Proposición 3.17 *Sea $T^I = (\mathbb{G}, E, \mathfrak{A}, \delta_0,)$ un árbol de fragmentación. Si $|\mathbb{G}| = 0$, entonces $\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I)) = (\lambda_I^I)^t$. En caso contrario, supongamos que para el árbol T^I se tiene que $\lambda_{\mathbb{G}_{\mathcal{B}}(H)}^{I_{\mathcal{B}}} \neq \lambda_{I_{\mathcal{B}}}^{I_{\mathcal{B}}}$ para todo $\mathcal{B} \in \mathbb{G} \setminus \{\delta_0\}, H \subseteq E$. Entonces se tiene que:*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I)) &= \sum_{\substack{H \subseteq E \\ \lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}^I \neq \lambda_I^I}} (-1)^{|H|} [(\lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}^I)^t - (\lambda_I^I)^t] \prod_{\mathcal{B} \in \mathbb{G}} \frac{\rho_{\mathcal{B}}^{I_{\mathcal{B}}}}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_{\mathcal{B}}(H)}^{I_{\mathcal{B}}}) - \log(\lambda_{I_{\mathcal{B}}}^{I_{\mathcal{B}}})} \\ &+ \sum_{\substack{H \subseteq E \\ \lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}^I = \lambda_I^I}} (-1)^{|H|} t (\lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}^I)^t \prod_{\substack{\mathcal{B} \in \mathbb{G} \\ \mathcal{B} \neq \delta_0}} \frac{\rho_{\mathcal{B}}^{I_{\mathcal{B}}}}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_{\mathcal{B}}(H)}^{I_{\mathcal{B}}}) - \log(\lambda_{I_{\mathcal{B}}}^{I_{\mathcal{B}}})}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Sin embargo, al momento de relajar más la hipótesis sobre las tasas esta situación se complica. Del cálculo hecho para el teorema 3.14 y de la proposición 3.18 se pueden extender estas soluciones inductivamente, a través de los niveles en el árbol. Para ello, primero, hacemos una pequeña definición que ayude a ser mas precisos en esta idea:

Definición 3.18 *Diremos que un nodo del árbol de fragmentación T^I es singular si es aquel que viola la hipótesis ya mencionada sobre las tasas. Es decir $\mathcal{B} \in \mathbb{G}$ es singular si $\lambda_{\mathbb{G}_{\mathcal{B}}(H)}^{I_{\mathcal{B}}} = \lambda_{I_{\mathcal{B}}}^{I_{\mathcal{B}}}$.*

De la fórmula de la proposición 3.18 ya sabemos como se ven las soluciones cuando el nodo raíz es singular. Supongamos que ahora, en lugar de el ser singular, uno de sus hijos lo es y supongamos que es el hijo k de δ_0 . Luego, notando que si H_k provoca la singularidad

podemos escribir $(\lambda_{\mathbb{G}_{D_k}(H_k)}^{I_{D_k}})^{t-u} = 2(\lambda_{\mathbb{G}_{D_k}(H_k)}^{I_{D_k}})^{t-u} - (\lambda_{I_{D_k}}^{I_{D_k}})^{t-u}$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
& (t-u)[(\lambda_{\mathbb{G}_{D_k}(H_k)}^{I_{D_k}})^{t-u}] \prod_{i=1, i \neq k}^{|\delta_0|} [(\lambda_{\mathbb{G}_{D_i}(H_i)}^{I_{D_i}})^{t-u} - (\lambda_{I_{D_i}}^{I_{D_i}})^{t-u}] = \\
& (t-u) \sum_{N \subseteq \{1, 2, \dots, |\delta_0|\}, k \notin N} (-1)^{|\delta_0| - |N|} (\lambda_{[\mathbb{G}_{\delta_0}(\cup_{i \in N} H_i)] \cup [\cup_{i \notin N} \{I_{D_i}\}]}^I)^{t-u} \\
& + 2(t-u) \sum_{N \subseteq \{1, 2, \dots, |\delta_0|\}, k \in N} (-1)^{|\delta_0| - |N|} (\lambda_{[\mathbb{G}_{\delta_0}(\cup_{i \in N} H_i)] \cup [\cup_{i \notin N} \{I_{D_i}\}]}^I)^{t-u}.
\end{aligned}$$

Lo anterior puede ser insertado en las fórmulas que ya hicimos en los cálculos del teorema 3.14 y así despejar una expresión para $\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I))$. Es posible notar que la estructura de la solución no es la misma, dado que cambió la integral a calcular. Sin embargo, esta misma idea puede replicarse para obtener $\mathbb{P}(\mathcal{F}_t(T^I))$. Basta usar la proposición 3.18 en los nodos más alejados de la raíz que son singulares y extender inductivamente hacia la raíz. Es deseable que este caso pudiese ser expresable bajo una fórmula cerrada, sin embargo, esto no parece dar una expresión sencilla.

Capítulo 4

Comportamiento asintótico del proceso de fragmentación.

De la fórmula 3.16 tenemos la ley explícita del proceso de fragmentación, pero esta no da mayor información del comportamiento asintótico. En particular, no permite apreciar con claridad que el único estado absorbente es \mathcal{D}^ρ y menos aún la velocidad de convergencia. En la literatura hay numerosos casos de análisis como el que planteamos, ver [22] por ejemplo. El problema es que en estos análisis se supone que la cadena es irreducible (es decir, podemos llegar desde cualquier estado a cualquier otro en alguna cantidad de pasos con probabilidad positiva), condición que esta cadena no satisface. En esta sección nos enfocamos en tratar de entender el comportamiento asintótico y la velocidad de convergencia del proceso. Las ideas de esta sección son similares a las vistas en [19] y las cuales adaptamos desde el caso a tiempo discreto al tiempo continuo.

Definimos para $B \subseteq \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)$, $\tau_B = \inf\{t \geq 0 : X_t \in B\}$. Para simplificar, si $\delta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)$ escribimos $\tau_\delta := \tau_{\{\delta\}}$. Obviamente $\mathbb{P}_\delta(\tau_\delta = 0) = 1$, para todo $\delta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)$. En particular, nos interesa estudiar $\tau := \tau_{\mathcal{D}^\rho}$. Ya sabemos que \mathcal{D}^ρ es el único estado absorbente de la cadena y por tanto $X_{\tau+t} = \mathcal{D}^\rho, \forall t \geq 0$. Para ello definimos los siguientes conjuntos de estados y tasas de interés:

Definición 4.1 *Primero definimos los estados que comunican hacia \mathcal{D}^ρ :*

$$\Delta = \{\delta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho) : \delta \rightsquigarrow \mathcal{D}^\rho, \delta \neq \mathcal{D}^\rho\},$$

y la tasa máxima de permanencia de estos estados:

$$\eta = -\max\{Q_{\delta,\delta}; \delta \in \Delta\},$$

además de los estados que alcanzan esta tasa η :

$$\mathcal{F} = \{\delta \in \Delta, Q_{\delta,\delta} = -\eta\},$$

y finalmente la tasa máxima de los estados fuera de \mathcal{F} :

$$\beta_0 = -\max\{Q_{\delta,\delta} : \delta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho), \delta \neq \mathcal{D}^\rho, \delta \notin \mathcal{F}\}.$$

Todas estas definiciones tienen como intuición intentar revelar el comportamiento asintótico de la cadena, estudiar los estados que llegan al estado absorbente y con qué velocidad lo hace.

Observación En [19] se prueba que en el caso discreto, para todo $t \in \mathbb{N}, t > 0$, $P_{\delta, \delta}^t$ es estrictamente monótona respecto a \rightarrow , para la variable δ . Sin embargo, con un ejemplo podemos ver que eso no es cierto, ni siquiera es monótona respecto a \rightsquigarrow . Ya veremos que la propiedad realmente importante usada en [19] es algo más débil, pero primero veamos el ejemplo en cuestión.

En efecto, consideremos $\mathfrak{D}_1 = [\{1, 2\}, \{3, 4\}]$ y $\mathfrak{D}_2 = [\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}]$, $\mathcal{G}_\rho = \{\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2\}$. y que $\rho(\mathfrak{D}_1) < \rho(\mathfrak{D}_2)$ con $\delta = \{I\}$ y $\delta' = [\{1, 2\}, \{3, 4\}]$. Entonces podemos calcular

$$\begin{aligned} Q_{\delta, \delta} &= -(\rho(\mathfrak{D}_1) + \rho(\mathfrak{D}_2)) \\ Q_{\delta', \delta'} &= -2\rho(\mathfrak{D}_2), \end{aligned}$$

lo que implica, dado que una vez que volvemos a un estado no volvemos a él, que:

$$P_{\delta, \delta}^t > P_{\delta', \delta'}^t.$$

Nótese que $\delta \rightsquigarrow \delta'$ y que $\delta \rightarrow \delta'$. De forma análoga se puede ver que $\hat{\delta} = [\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}]$ cumple que $\delta' \rightarrow \hat{\delta}, \delta' \rightsquigarrow \delta_0 \rightsquigarrow \hat{\delta}$ con $\delta_0 = [\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}]$, pero $P_{\delta', \delta'}^t < P_{\hat{\delta}, \hat{\delta}}^t$. Luego, no hay una monotonía para el operador $P_{\delta, \delta}^t$.

Si bien ya observamos que nuestra cadena no cumple una propiedad de monotonía como en el caso discreto sí cumple una propiedad similar que será suficiente para nuestros propósitos:

Proposición 4.2 *Sea $\delta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)$, $\delta \neq \mathcal{D}^\rho$, $\delta \notin \Delta$. Entonces para todo $\delta' \in \Delta$ tal que:*

$$\mathbb{P}_\delta(\tau_{\delta'} < \infty) > 0,$$

tenemos que, para todo $t > 0$:

$$P_{\delta, \delta}^t < P_{\delta', \delta'}^t.$$

DEMOSTRACIÓN. Note que para esto, dado que una vez que salimos de un estado no volvemos a él, basta ver que $Q_{\delta, \delta} < Q_{\delta', \delta'}$.

En primer lugar, recordemos que $\delta' \rightsquigarrow \mathcal{D}^\rho$. Luego $\exists \bar{d} \in \delta'$ tal que $\delta' \rightsquigarrow_{\bar{d}} \mathcal{D}^\rho$. Note que en particular, $\delta'|_d = \mathcal{D}^\rho|_d$ para todo $d \in \delta'$, $d \neq \bar{d}$. Con ello, para todo $\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho$ y todo $d \in \delta'$, $d \neq \bar{d}$ tenemos que $(\delta' \setminus \{d\}) \cup \mathfrak{D}|_d = \delta'$.

Como $\mathbb{P}_\delta(\tau_{\delta'} < \infty) > 0$ eso significa, en particular, $\delta \leq \delta'$. Luego, para todo $\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho$ tal que $(\delta' \setminus \{\bar{d}\}) \cup \mathfrak{D}|_{\bar{d}} \neq \delta'$ debe existir $\bar{a} \in \delta$ tal que $(\delta \setminus \{\bar{a}\}) \cup \mathfrak{D}|_{\bar{a}} \neq \delta$.

Finalmente, note que $\delta \notin \Delta$, luego existe $\mathfrak{D}_1 \in \mathcal{G}_\rho$ y $d_1 \in \delta$ tal que:

$$(\delta \setminus \{d_1\}) \cup \mathfrak{D}_1|_{d_1} = \delta_1 \neq \delta.$$

Como $\delta \leq \delta'$ sin pérdida de generalidad $\delta_1 \leq \delta'$. Por las observaciones anteriores tenemos que $\forall \hat{d} \in \delta'$ tal que $\hat{d} \subseteq d_1$ se tiene que $(\delta' \setminus \{\hat{d}\}) \cup \mathfrak{D}_1|_{\hat{d}} = \delta'$, pero $(\delta \setminus \{d_1\}) \cup \mathfrak{D}_1|_{d_1} \neq \delta$. Con ello:

$$\begin{aligned} -Q_{\delta', \delta'} &= \sum_{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho} \sum_{\substack{a \in \delta' \\ (\delta' \setminus \{a\}) \cup \mathfrak{D}|_a \neq \delta'}} \rho(\mathfrak{D}) = \sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho \\ (\delta \setminus \{\hat{d}\}) \cup \mathfrak{D}|_{\hat{d}} \neq \delta'}} \rho(\mathfrak{D}) < \sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho \\ (\hat{\delta} \setminus \{\hat{d}\}) \cup \mathfrak{D}|_{\hat{d}} \neq \delta'}} \rho(\mathfrak{D}) + \rho(\mathfrak{D}_1) \\ &\leq \sum_{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho} \sum_{\substack{a \in \delta \\ (\delta \setminus \{a\}) \cup \mathfrak{D}|_a \neq \delta}} \rho(\mathfrak{D}) = -Q_{\delta, \delta}. \end{aligned}$$

Y por tanto, $Q_{\delta, \delta} < Q_{\delta', \delta'}$. Dado que una vez que abandonamos un estado no volvemos a él se sigue la proposición. \square

Ahora establecemos un lema que permite controlar el comportamiento de los estados en \mathcal{F} .

Lema 4.3

$$\forall \delta \in \mathcal{F}, t > 0 : P_{\delta, \delta}^t + P_{\delta, \mathcal{D}^\rho}^t = 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Procedamos por contradicción. Sea $\delta \in \mathcal{F}$ y considere $\delta' \neq \delta$ tal que $\delta \rightsquigarrow \delta'$, $\delta' \neq \mathcal{D}^\rho$ y $P_{\delta, \delta'}^t > 0$. Entonces, en particular, $Q_{\delta, \delta'} > 0$. Dado que \mathcal{D}^ρ es absorbente, debe existir $\hat{\delta} \in \Delta$ tal que $\mathbb{P}_{\delta'}(\tau_{\hat{\delta}} < \infty) > 0$ (podría darse que $\delta' = \hat{\delta}$). Sin embargo, dado que una vez que nuestra cadena sale de un estado nunca regresa, $\delta \neq \hat{\delta}$.

En particular, note que $\delta \leq \hat{\delta}$ donde ambos están en Δ . Luego existen únicos $d_\delta \in \delta$ y $d_{\hat{\delta}} \in \hat{\delta}$ tal que $\delta|_d = \mathcal{D}^\rho|_d$ para todo $d \in \delta, d \neq d_\delta$ y $\hat{\delta}|_{d'} = \mathcal{D}^\rho|_{d'}$ para todo $d' \in \hat{\delta}, d' \neq d_{\hat{\delta}}$. Nótese que $\delta|_d = \hat{\delta}|_d$ para todo $d \in \delta, d \neq d_\delta$. Recuerde que $\delta \rightsquigarrow \delta'$, y luego existe $\mathfrak{D}' \in \mathcal{G}_\rho$ tal que $(\delta \setminus \{d_\delta\}) \cup \mathfrak{D}'|_{d_\delta} = \delta'$. Además, como $\delta' \leq \hat{\delta}$ tenemos que para todo $\hat{d} \in \hat{\delta}, (\hat{\delta} \setminus \{\hat{d}\}) \cup \mathfrak{D}'|_{\hat{d}} = \hat{\delta}$. Entonces

$$\begin{aligned} \eta = -Q_{\delta, \delta} &= \sum_{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho} \sum_{\substack{a \in \delta \\ (\delta \setminus \{a\}) \cup \mathfrak{D}|_a \neq \delta}} \rho(\mathfrak{D}) = \sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho \\ (\delta \setminus \{d_\delta\}) \cup \mathfrak{D}|_{d_\delta} \neq \delta}} \rho(\mathfrak{D}) = \left(\sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho, \mathfrak{D} \neq \mathfrak{D}' \\ (\delta \setminus \{d_\delta\}) \cup \mathfrak{D}|_{d_\delta} \neq \delta}} \rho(\mathfrak{D}) \right) + \rho(\mathfrak{D}') \\ &> \sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho, \mathfrak{D} \neq \mathfrak{D}' \\ (\delta \setminus \{d_\delta\}) \cup \mathfrak{D}|_{d_\delta} \neq \delta}} \rho(\mathfrak{D}) \geq \sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho, \\ (\hat{\delta} \setminus \{d_{\hat{\delta}}\}) \cup \mathfrak{D}|_{d_{\hat{\delta}}} \neq \hat{\delta}}} \rho(\mathfrak{D}) = -Q_{\hat{\delta}, \hat{\delta}}. \end{aligned}$$

Lo que implica que $-\eta = \max\{Q_{\delta, \delta} : \delta \in \Delta\} < Q_{\hat{\delta}, \hat{\delta}}$ con $\hat{\delta} \in \Delta$ lo que es una contradicción. \square

Finalmente, probamos un último lema, que es aquel que permite controlar la velocidad con que la cadena converge al estado absorbente o los estados en \mathcal{F} .

Lema 4.4 *Recordar que definimos $\beta_0 = -\max\{Q_{\delta, \delta} : \delta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho), \delta \neq \mathcal{D}^\rho, \delta \notin \mathcal{F}\}$. Luego se tiene que:*

$$\forall \theta > 0; \exists C = C(\theta) : \mathbb{P}(\forall u \leq t; X_u \notin \mathcal{F} \cup \{\mathcal{D}^\rho\}) \leq C(e^{-\beta_0} + \theta)^t.$$

DEMOSTRACIÓN. En lo que sigue recordemos que θ es un número positivo, fijo y arbitrario.

Sea $U = \mathcal{Y}(\mathcal{G}) \setminus (\mathcal{F} \cup \{\mathcal{D}^\rho\})$. Suponemos que $\mathcal{Y}(\mathcal{G}) \setminus (\mathcal{F} \cup \{\mathcal{D}^\rho\} \cup \{I\}) \neq \emptyset$, si no el resultado es obvio. Luego asumimos que este es no vacío y por tanto U es no vacío. Fijemos en lo que sigue $\delta_1 = \{I\}$ y para cada $s \geq 2$ consideramos la familia de caminos de largo s contenidos en U :

$$\mathcal{C}(U, s) = \{(\delta_1, \dots, \delta_s) \in U^s : \forall r \leq s-1, \delta_r \rightsquigarrow \delta_{r+1} \text{ y } \delta_r \neq \delta_{r+1}\}.$$

Notemos que $Q_{\delta_r, \delta_{r+1}} > 0$ para todo $0 \leq r \leq s-1$. Luego:

$$\{\forall u \leq t : X_u \notin \mathcal{F} \cup \{\mathcal{D}^\rho\}\} = \bigcup_{s \geq 2} \bigcup_{(\delta_1, \dots, \delta_s) \in \mathcal{C}(U, s)} \{(X_u)_{t \geq u \geq 0} \mapsto (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s)\}.$$

Donde entendemos que $(X_u)_{t \geq u \geq 0} \mapsto (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s)$ si toma el camino $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s)$, es decir, si existen tiempo $0 < t_1 < \dots < t_{s-2} < t_{s-1} = t$ tal que $X_0 = \delta_1, X_{t_1} = \delta_2, \dots, X_{t_{s-1}} = \delta_s$ y para todo $0 < w < t$ existe j tal que $X_w = \delta_j$. Así:

$$\mathbb{P}(\forall u \leq t; X_u \notin \mathcal{F} \cup \{\mathcal{D}^\rho\}) \leq \sum_{s \geq 2} \sum_{(\delta_1, \dots, \delta_s) \in \mathcal{C}(U, s)} \mathbb{P}((X_u)_{t \geq u \geq 0} \mapsto (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s))$$

Ahora, usamos probabilidades totales respecto a los tiempos de espera de la cadena $(S_n)_{s-1 \geq n \geq 1}$ y la cadena subyacente (refiérase a la definición 1.19). Para ello definimos la notación:

$$\begin{aligned} \vec{S}(t_1, \dots, t_{s-1}) &:= (S_1 = t_1, S_2 = t_2, \dots, S_{s-1} = t_{s-1}) \\ \vec{X}_T(\delta_{l_1}, \delta_{l_2}, \dots, \delta_{l_{s-1}}) &:= (X_{T_1} = \delta_{l_1}, X_{T_2} = \delta_{l_2}, \dots, X_{T_{s-1}} = \delta_{l_{s-1}}) \\ \mu(t_1, \dots, t_{s-1}, \delta_{l_1}, \delta_{l_2}, \dots, \delta_{l_{s-1}}) &:= \mathbb{P}\left(\vec{S}(t_1, \dots, t_{s-1}), \vec{X}_T(\delta_{l_1}, \delta_{l_2}, \dots, \delta_{l_{s-1}})\right) \end{aligned}$$

Donde $T_{s-1} = \sum_{i=1}^{s-1} S_i$. Denotando $\vec{t} = (t_1, \dots, t_{s-1})$ y $\vec{\delta} = (\delta_{l_1}, \dots, \delta_{l_{s-1}})$ se obtiene, por probabilidades totales;

$$\begin{aligned} &\sum_{s \geq 2} \sum_{(\delta_1, \dots, \delta_s) \in \mathcal{C}(U, s)} \mathbb{P}((X_u)_{t \geq u \geq 0} \mapsto (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s)) \\ = &\sum_{s \geq 2} \sum_{(\delta_1, \dots, \delta_s) \in \mathcal{C}(U, s)} \int_{\substack{0 \leq \sum_{i=1}^{s-1} t_i \leq t \\ 0 \leq t_i}} \sum_{\delta_{l_1}, \dots, \delta_{l_s} \in \mathcal{X}(\mathcal{G}_\rho)} \mathbb{P}\left((X_u)_{t \geq u \geq 0} \mapsto (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s) \mid \vec{S}(\vec{t}), \vec{X}_T(\vec{\delta})\right) d\mu(\vec{t}, \vec{\delta}). \end{aligned}$$

En primer lugar, notemos que si $\delta_{l_i} \neq \delta_{l_{i+1}}$ para algún i entonces la probabilidad anterior es 0. Luego, podemos olvidar la suma interior. Por propiedad de Markov:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}((X_u)_{t \geq u \geq 0} \mapsto (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s) \mid \vec{S}(t_1, \dots, t_{s-1}), \vec{X}_T(\delta_{l_1}, \delta_{l_2}, \dots, \delta_{l_{s-1}})) \\ = &(\mathbb{P}((X_u)_{0 \leq u \leq \sum_{i=1}^{s-1} t_i} \mapsto (\delta_1, \dots, \delta_s) \mid \vec{S}(t_1, \dots, t_{s-1}), \vec{X}_T(\delta_{l_1}, \delta_{l_2}, \dots, \delta_{l_{s-1}})) P_{\delta_s, \delta_s}^{t - \sum_{i=1}^{s-1} t_i} \leq P_{\delta_s, \delta_s}^{t - \sum_{i=1}^{s-1} t_i}). \end{aligned}$$

Notemos que, por definición de β_0 , y como $\delta_s \in U$, tenemos que $P_{\delta_s, \delta_s}^{t - \sum_{i=1}^{s-1} t_i} \leq e^{-\beta_0(t - \sum_{i=1}^{s-1} t_i)}$ y así:

$$\mathbb{P}((X_u)_{t \geq u \geq 0} \mapsto (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s) \mid \vec{S}(t_1, \dots, t_{s-1}), \vec{X}_T(\delta_{l_1}, \delta_{l_2}, \dots, \delta_{l_{s-1}})) \leq e^{-\beta_0(t - \sum_{i=1}^{s-1} t_i)}.$$

En segundo lugar, notemos que si $\mathbb{P}(X_{T_{i-1}} = \delta_i) = 0$ para algún i entonces podemos sacar el término de la sumatoria. Sin pérdida de generalidad este es no nulo y podemos hacer lo siguiente:

$$\begin{aligned} & d\mathbb{P}(T_1 = t_1, \dots, T_{s-1} = t_{s-1}, X_{T_1} = \delta_2, \dots, X_{T_{s-1}} = \delta_s) \\ &= d\mathbb{P}(T_1 = t_1, \dots, T_{s-1} = t_{s-1} | X_{T_1} = \delta_2, \dots, X_{T_{s-1}} = \delta_s) \mathbb{P}(X_{T_1} = \delta_2, \dots, X_{T_{s-1}} = \delta_s) \\ &= \mathbb{P}(X_{T_1} = \delta_2, \dots, X_{T_{s-1}} = \delta_s) \prod_{i=1}^{s-1} f_{T_i | \{X_{T_{i-1}} = \delta_i\}}(t_i) dt_i, \end{aligned}$$

donde usamos que f_{T_i} son variables aleatorias independientes condicional a la cadena subyacente dada por los estados X_T . Más aún, estas tienen como densidad la de una variable aleatoria exponencial de parámetro $-q_{X_{T_{i-1}}, X_{T_{i-1}}}$, y estamos condicionando a que cada $X_{T_{i-1}}$ está en U . Usando nuevamente la definición de β_0 obtenemos:

$$f_{T_i | \{X_{T_{i-1}} = \delta_i\}}(t_i) = -q_{X_{T_{i-1}}, X_{T_{i-1}}} e^{t_i q_{X_{T_{i-1}}, X_{T_{i-1}}}} \leq \left(\max_{\delta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)} -q_{\delta, \delta} \right) e^{-t_i \beta_0}$$

Luego, renombrando $K = \max_{\delta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)} -q_{\delta, \delta}$ y acotando $\mathbb{P}(X_{\hat{T}_1} = \delta_2, \dots, X_{\hat{T}_{s-1}} = \delta_s)$ por 1 obtenemos que:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\forall u \leq t; X_u \notin \mathcal{F} \cup \{D^\rho\}) \\ & \leq \sum_{s \geq 2} \sum_{(\delta_1, \dots, \delta_s) \in \mathcal{C}(U, s)} \int_{0 \leq \sum_{i=1}^{s-1} t_i \leq t, 0 \leq t_i} e^{-\beta(t - \sum_{i=1}^{s-1} t_i)} K^{s-1} \left(\prod_{i=1}^{s-1} e^{-t_i \beta_0} \right) dt_1, \dots, dt_{s-1} \\ & = \sum_{s \geq 2} \sum_{(\delta_1, \dots, \delta_s) \in \mathcal{C}(U, s)} \int_{0 \leq \sum_{i=1}^{s-1} t_i \leq t, 0 \leq t_i} e^{-\beta(t - \sum_{i=1}^{s-1} t_i)} K^{s-1} e^{-\sum_{i=1}^{s-1} t_i \beta_0} dt_1, \dots, dt_{s-1} \\ & = \sum_{s \geq 2} \sum_{(\delta_1, \dots, \delta_s) \in \mathcal{C}(U, s)} \int_{0 \leq \sum_{i=1}^{s-1} t_i \leq t, 0 \leq t_i} e^{-\beta t} K^{s-1} dt_1, \dots, dt_{s-1}. \end{aligned}$$

Ahora, haremos dos cambios. En primer lugar, notar que basta considerar $s \leq |I|$; esto pues no puede haber ningún camino de más de la cantidad de sitios, luego podemos acotar superiormente la primera sumatoria. Además de eso podemos calcular la integral:

$$\int_{0 \leq \sum_{i=1}^{s-1} t_i \leq t, 0 \leq t_i} dt_1, \dots, dt_{s-1} = \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} \int_{0 \leq \sum_{i=1}^{s-1} t_i \leq t, 0 \leq t_i} \frac{(s-1)!}{t^{s-1}} dt_1, \dots, dt_{s-1} = \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}.$$

Lo último pues nos queda la densidad de un vector de uniformes crecientes, la cual integra 1. Ahora podemos considerar $a \in (0, 1)$ arbitrario y con eso podemos obtener:

$$\mathbb{P}(\forall u \leq t; X_u \notin \mathcal{F} \cup \{D^\rho\}) \leq \left(\frac{e^{-\beta}}{a} \right)^t \sum_{s \geq 2} K^{s-1} \sum_{(\delta_1, \dots, \delta_s) \in \mathcal{C}(U, s)} a^t \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}.$$

Sea $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por:

$$\phi(t) = a^t \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}.$$

Es obvio de la definición que es positiva y continua. Demostraremos que, además, se desvanece en infinito. En efecto,

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} a^t \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\exp(t \log(a) - (s-1) \log(t))}{(s-1)!} = 0,$$

donde lo ultimo se va a 0 puesto que $\log(a) < 0$, pues $a < 1$. Por ello $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$. Por tanto, tenemos una función continua y positiva que se desvanece en infinito. Entonces

$$\sup_{t \geq 0} \phi(t) = \sup_{t \geq 0} a^t \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} < \infty.$$

Así podemos definir:

$$C_1(a) = \max_{|I| \geq s \geq 2} \sup_{t \geq 0} K^{s-1} a^t \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} < \infty.$$

Y así se obtiene que:

$$\mathbb{P}(\forall u \leq t : X_u \notin \mathcal{F} \cup \{\mathcal{D}^\rho\}) \leq \left(\frac{e^{-\beta_0}}{a}\right)^t \sum_{s \leq 2} \sum_{(\delta_1, \dots, \delta_s) \in \mathcal{C}(U, s)} C_1(a) = \left(\frac{e^{-\beta_0}}{a}\right)^t C(a),$$

donde:

$$C(a) = \sum_{s \geq 2} \sum_{(\delta_1, \dots, \delta_s) \in \mathcal{C}(U, s)} C_1(a) < \infty$$

Luego, eligiendo a tal que $\frac{e^{-\beta_0}}{a} \leq e^{-\beta_0} + \theta$ y notando que entonces $C(a) = C(\theta)$ concluimos que:

$$\mathbb{P}(\forall u \leq t : X_u \notin \mathcal{F} \cup \{\mathcal{D}^\rho\}) \leq C(\theta)(e^{-\beta_0} + \theta)^t.$$

Que es lo que se quería probar. □

Con los lemas anteriores ya podemos probar el primer teorema. En lo que sigue suponemos que $Q_{\{I\}, \{I\}} < 0$ para que el proceso sea no trivial.

Teorema 4.5 *Se tiene que $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$. Además, recordar que definimos:*

$$\begin{aligned} \Delta &= \{\delta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho) : \delta \rightsquigarrow \mathcal{D}^\rho, \delta \neq \mathcal{D}^\rho\} \\ \eta &= -\max\{Q_{\delta, \delta} : \delta \in \Delta\} \\ \mathcal{F} &= \{\delta \in \Delta : Q_{\delta, \delta} = -\eta\} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\eta > 0 \wedge \mathbb{P}(\tau_{\mathcal{F}} < \infty) > 0$$

Más aún, la tasa de decaimiento exponencial $\mathbb{P}(\tau > t)$ satisface:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\eta t} \mathbb{P}(\tau > t) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\eta t} \mathbb{P}(\tau > t, X_t \in \mathcal{F}) = \mathbb{E}(e^{\eta \tau_{\mathcal{F}}}, \tau_{\mathcal{F}} < \infty) \in (0, \infty) \quad (4.1)$$

Y la distribución cuasi-límite de $(X_t)_{t \geq 0}$ en $\mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)^* = \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho) \setminus (\{\mathcal{D}^\rho\})$ esta dada por:

$$\forall \delta \in \mathcal{F} : \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_t = \delta | \tau > t) = \frac{\mathbb{E}(e^{\eta \tau_\delta}, \tau_\delta < \infty)}{\mathbb{E}(e^{\eta \tau_{\mathcal{F}}}, \tau_{\mathcal{F}} < \infty)} \quad (4.2)$$

$$\forall \delta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)^* \setminus \mathcal{F} : \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_t = \delta | \tau > t) = 0 \quad (4.3)$$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, notemos que para todo $\delta \in \Delta$ tenemos que existe $\bar{\mathfrak{D}} \in \mathcal{G}_\rho$ y un único $\bar{d} \in \delta$ tal que $(\delta \setminus \{\bar{d}\}) \cup \bar{\mathfrak{D}}|_{\bar{d}} = \mathcal{D}^\rho$. En particular, $\delta|_d = \mathcal{D}^\rho|_d$ para todo $d \in \delta, d \neq \bar{d}$. Luego:

$$-Q_{\delta,\delta} = \sum_{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho} \sum_{\substack{a \in \delta \\ (\delta \setminus \{a\}) \cup \mathfrak{D}|_a = \delta}} \rho(\mathfrak{D}) = \sum_{\substack{\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_\rho \\ (\delta \setminus \{\bar{d}\}) \cup \mathfrak{D}|_{\bar{d}} \neq \delta}} \rho(\mathfrak{D}) \geq \rho(\bar{\mathfrak{D}}) > 0.$$

con ello tenemos que $Q_{\delta,\delta} < 0$ para todo $\delta \in \Delta$ y por tanto $\eta > 0$.

Sea ahora $\delta \in \mathcal{F}$ y $t > 0$. De lo anterior es claro que para $t > 0$ tenemos que $1 > P_{\delta,\delta}^t > 0$ y $P_{\delta,\mathcal{D}^\rho}^t > 0$. Además, ya sabemos, del lema 4.3, que $\forall \delta \in \mathcal{F}, t \geq 0 : P_{\delta,\delta}^t + P_{\delta,\mathcal{D}^\rho}^t = 1$. Luego concluimos que $\forall \delta \in \mathcal{F}; \delta \rightsquigarrow \delta', \delta \neq \delta' \Leftrightarrow \delta' = \mathcal{D}^\rho$. Ahora recordemos que definimos en el lema 4.4:

$$\beta_0 = -\max\{Q_{\delta,\delta} : \delta \in \mathcal{X}(\mathcal{G}_\rho), \delta \neq \mathcal{D}^\rho, \delta \notin \mathcal{F}\}.$$

Demostremos que $\eta < \beta_0$. En efecto, supongamos primero que β_0 es la tasa de un elemento $\delta' \in \Delta \setminus \mathcal{F}$ entonces:

$$-\eta = \max\{Q_{\delta',\delta'} : \delta' \in \mathcal{F}\} > Q_{\delta,\delta},$$

tomando el máximo adecuado a la derecha obtenemos:

$$-\eta > -\beta_0 \Leftrightarrow \eta < \beta_0.$$

Si $\delta' \notin \Delta$, entonces, dado que \mathcal{D}^ρ es absorbente, existe un camino en $\mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)$; $\delta \rightsquigarrow \delta_1 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \delta_r$ tal que $\delta_r \in \Delta$, y cada δ_i es distinto. Luego $\mathbb{P}_\delta(\tau_{\delta_r} < \infty) > 0$. Con lo probado en la porposición 4.2, $P_{\delta,\delta}^t < P_{\delta_r,\delta_r}^t$ y, dado que una vez que volvemos un estado nunca regresamos a el, tenemos que:

$$Q_{\delta,\delta} < Q_{\delta_r,\delta_r} \leq -\eta.$$

Tomando máximo en la parte izquierda se deduce que:

$$-\beta_0 < -\eta \Leftrightarrow \eta < \beta_0.$$

Así tenemos lo que queríamos; $\eta < \beta_0$. Ahora, mostraremos que $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$. Recordemos, nuevamente, que X cumple que una vez que vuelve a un estado nunca vuelve a el. Luego, dado que para todo $t > 0$ tenemos que $P_{\delta,\delta}^t < 1$ si $\delta \neq \mathcal{D}^\rho$ y así:

$$\forall \delta \in \mathcal{X}(\mathcal{G}_\rho), \delta \neq \mathcal{D}^\rho; \mathbb{P}_\delta(\inf\{t : X_t \neq \delta\} < \infty) = 1.$$

Es decir, renombrando $L_\delta = \inf\{t : X_t \neq \delta\}$ tenemos que $\mathbb{P}_\delta(L_\delta < \infty) = 1$. Por lo tanto, dado que la cadena tiene finitos estados y una vez que volvemos no retornamos a él:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau < \infty) &= \mathbb{P}(\exists t^* : X_{t^*} = \mathcal{D}^\rho) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\exists \delta \neq \mathcal{D}^\rho, t > 0 : X_t = \delta, \forall s > t, X_s = \delta) \\ &= 1 - \mathbb{P}_\delta(\exists \delta \neq \mathcal{D}^\rho, \forall s > 0, X_s = \delta) \\ &= 1 - \mathbb{P}_\delta(\exists \delta \neq \mathcal{D}^\rho, L_\delta = \infty) = 1. \end{aligned}$$

Donde lo último es puesto que \mathcal{D}^ρ es el único estado absorbente además de la propiedad de Markov. Así τ es finito c.s. Además, dado que existen caminos con probabilidad positiva desde $\{I\}$ hasta \mathcal{F} , entonces tenemos $\mathbb{P}(\tau_{\mathcal{F}} < \infty) > 0$.

Ahora nuestro objetivo es probar las identidades límites 4.1 y 4.2. En primer lugar, notemos que para $\delta \in \mathcal{F}, t > 0$, dado que $P_{\delta, \delta}^t + P_{\delta, \mathcal{D}^{\rho}}^t = 1$ y el estado \mathcal{D}^{ρ} es absorbente, tenemos que:

$$\forall \delta \in \mathcal{F}, t \geq 0 : \mathbb{P}_{\delta}(X_t = \delta) = e^{tQ_{\delta, \delta}} = e^{-t\eta}$$

Nos interesa estudiar:

$$\mathbb{P}(\tau > t) = \mathbb{P}(\tau > t, X_t \notin \mathcal{F}) + \mathbb{P}(\tau > t, X_t \in \mathcal{F}).$$

Demostraremos primero que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\tau > t, X_t \notin \mathcal{F}) = 0.$$

En efecto, dado que hay camino con probabilidad positiva desde $\{I\}$ a cualquier $\delta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_{\rho})$, $\delta \neq \{I\}$ debe existir $t_0 > 0$ tal que:

$$\forall \delta \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(\tau_{\delta} \leq t_0) > 0.$$

Consideramos luego $\alpha(\mathcal{F}) := \min\{\mathbb{P}(\tau_{\delta} < t_0) : \delta \in \mathcal{F}\} > 0$. Notemos que por propiedad de Markov tenemos que, para todo $\delta^* \in \mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau > t) &\geq \int_0^{t_0} \mathbb{P}(\tau > t | \tau_{\delta^*} = s) d\mathbb{P}(\tau_{\delta^*} = s) = \int_0^{t_0} \mathbb{P}_{\delta^*}(\tau > t - s) d\mathbb{P}(\tau_{\delta^*} = s) \\ &= \int_0^{t_0} e^{-\eta(t-s)} d\mathbb{P}(\tau_{\delta^*} = s) \geq e^{-\eta t} \int_0^{t_0} d\mathbb{P}(\tau_{\delta^*} = s) = e^{-\eta t} \mathbb{P}(\tau_{\delta^*} < t_0) \geq e^{-\eta t} \alpha(\mathcal{F}). \end{aligned}$$

Con esto obtenemos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\tau > t) e^{\eta t} \geq \alpha(\mathcal{F}) > 0.$$

Una segunda cota sale del lema 4.4 tomando $0 < \theta < e^{-\eta} - e^{-\beta_0}$ y así

$$\mathbb{P}(X_t \notin \mathcal{F} | \tau > t) = \frac{\mathbb{P}(X_t \notin \mathcal{F}, \tau > t)}{\mathbb{P}(\tau > t)} \leq \frac{C}{\alpha(\mathcal{F})} \left(\frac{e^{-\beta_0} + \theta}{e^{-\eta}} \right)^t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Con ello hemos podemos deducir que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_t \in \mathcal{F} | \tau > t) = 1.$$

Sea ahora $\delta \in \mathcal{F}$, hacemos el siguiente cálculo usando la propiedad de Markov:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau > t, X_t = \delta) &= \int_0^t \mathbb{P}(\tau > t, X_t = \delta | \tau_{\delta} = s) d\mathbb{P}(\tau_{\delta} = s) \\ &= \int_0^t \mathbb{P}(\tau > t | \tau_{\delta} = s) d\mathbb{P}(\tau_{\delta} = s) \\ &= \int_0^t \mathbb{P}_{\delta}(\tau > t - s) d\mathbb{P}(\tau_{\delta} = s) \\ &= \int_0^t \mathbb{P}_{\delta}(X_{t-s} = \delta) d\mathbb{P}(\tau_{\delta} = s) \\ &= \int_0^t e^{-(t-s)\eta} d\mathbb{P}(\tau_{\delta} = s) \\ &= e^{-t\eta} \int_0^t e^{s\eta} d\mathbb{P}(\tau_{\delta} = s). \end{aligned}$$

Ahora, queremos controlar la densidad $d\mathbb{P}(\tau_\delta = s)$. Para ello notemos que usando el la definición 1.19 y expansión de Taylor se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(s < \tau_\delta \leq s + h) &= \sum_{\delta' \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)} \mathbb{P}(s < \tau_\delta \leq s + h | X_s = \delta') \mathbb{P}(X_s = \delta') \\
&= \sum_{\delta' \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)} \mathbb{P}_{\delta'}(0 < \tau_\delta \leq h) \mathbb{P}(X_s = \delta') \\
&= o(h) + \sum_{\substack{\delta' \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho); \\ \delta' \rightsquigarrow \delta}} \mathbb{P}_{\delta'}(\tau_\delta \leq h) \mathbb{P}(X_s = \delta') \\
&= o(h) + \sum_{\substack{\delta' \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho); \\ \delta' \rightsquigarrow \delta}} \mathbb{P}_{\delta'}(X_h = \delta) \mathbb{P}(X_s = \delta') \\
&= o(h) + \sum_{\substack{\delta' \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho), \\ \delta' \rightsquigarrow \delta}} (q_{\delta', \delta} h + o(h)) \mathbb{P}(X_s = \delta').
\end{aligned}$$

Luego,

$$d\mathbb{P}(\tau_\delta = s) \leq \sum_{\substack{\delta' \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho); \\ \delta' \rightsquigarrow \delta}} q_{\delta', \delta} \mathbb{P}(X_s = \delta') ds.$$

Ahora sea $M_\delta = \max\{q_{\delta', \delta} : \delta' \rightsquigarrow \delta\}$; entonces:

$$\begin{aligned}
d\mathbb{P}(\tau_\delta = s) &\leq M_\delta \sum_{\substack{\delta' \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho); \\ \delta' \rightsquigarrow \delta}} \mathbb{P}(X_s = \delta') ds \\
&= M_\delta \mathbb{P} \left(\bigcup_{\substack{\delta' \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho) \\ \delta' \rightsquigarrow \delta}} X_s = \delta' \right) ds.
\end{aligned}$$

Dado que $\delta \in \mathcal{F}$, tenemos que $P_{\delta, \delta}^s + P_{\delta, \mathcal{D}^\rho}^s = 1$, y dado que $\delta \in \mathcal{F} \cup \{\mathcal{D}^\rho\}$, podemos obtener la cota:

$$d\mathbb{P}(\tau_\delta = s) \leq M_\delta \mathbb{P}(\forall u \leq s; X_u \notin \mathcal{F} \cup \mathcal{D}^\rho) ds.$$

Por el lema 4.4 obtenemos que:

$$d\mathbb{P}(\tau_\delta = s) \leq M_\delta C(e^{-\beta_0} + \theta)^s ds,$$

para todo $\theta > 0$. Eligiendo $\theta < e^{-\eta} - e^{-\beta_0}$ se deduce que:

$$\int_0^\infty e^{s\eta} d\mathbb{P}(\tau_\delta = s) \leq C M_\delta \int_0^\infty e^{s\eta} (e^{-\beta_0} + \theta)^s ds < \infty.$$

Con ello tenemos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{t\eta} \mathbb{P}(\tau > t, X(t) = \delta) = \int_0^\infty e^{s\eta} d\mathbb{P}(\tau_\delta = s) = \mathbb{E}(e^{\eta\tau_\delta}, \tau_\delta < \infty) < \infty. \quad (4.4)$$

Dado que $P_{\delta, \delta}^t + P_{\delta, \mathcal{D}^\rho}^t = 1$ para todo $\delta \in \mathcal{F}$, $t \geq 0$ tenemos que, si $\tau_\delta < \infty \Rightarrow \tau_{\mathcal{F}} = \tau_\delta$ y por tanto:

$$e^{\eta\tau_{\mathcal{F}}} 1_{\tau_{\mathcal{F}} < \infty} = \sum_{\delta \in \mathcal{F}} e^{\eta\tau_\delta} 1_{\tau_\delta < \infty}.$$

Lo que permite deducir usando 4.4 que:

$$\mathbb{E}(e^{\eta\tau_{\mathcal{F}}}, \tau_{\mathcal{F}} < \infty) = \sum_{\delta \in \mathcal{F}} \mathbb{E}(e^{\eta\tau_{\delta}}, \tau_{\delta} < \infty) < \infty.$$

Con ello

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\eta t} \mathbb{P}(\tau > t, X_t \in \mathcal{F}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{\delta \in \mathcal{F}} e^{\eta t} \mathbb{P}(\tau > t, X_t = \delta) = \sum_{\delta \in \mathcal{F}} \mathbb{E}(e^{\eta\tau_{\delta}}, \tau_{\delta} < \infty) = \mathbb{E}(e^{\eta\tau_{\mathcal{F}}}, \tau_{\mathcal{F}} < \infty).$$

Ahora, notemos que si $\delta \notin \mathcal{F} \cup \{\mathcal{D}^{\rho}\}$ tenemos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_t = \delta | \tau > t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_t \notin \mathcal{F} | \tau > t) = 0.$$

Y para $\delta \in \mathcal{F}$, notamos que $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\eta t} \mathbb{P}(\tau > n) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\eta t} \mathbb{P}(\tau > n, X_t \in \mathcal{F}) = \mathbb{E}(e^{\eta\tau_{\mathcal{F}}}, \tau_{\mathcal{F}} < \infty) > 0$, y por tanto podemos obtener:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_t = \delta | \tau > n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_t = \delta, \tau > t) e^{\eta t}}{e^{\eta t} \mathbb{P}(\tau > n)} = \frac{\mathbb{E}(e^{\eta\tau_{\delta}}, \tau_{\delta} < \infty)}{\mathbb{E}(e^{\eta\tau_{\mathcal{F}}}, \tau_{\mathcal{F}} < \infty)},$$

lo que nos da 4.2. Además, recordando que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_t \in \mathcal{F} | \tau > t) = 1$, podemos concluir que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\eta t} \mathbb{P}(\tau > n) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\eta t} \mathbb{P}(\tau > t, X_t \in \mathcal{F}) = \mathbb{E}(e^{\eta\tau_{\mathcal{F}}}, \tau_{\mathcal{F}} < \infty) \in (0, \infty).$$

Lo que da 4.1, y con ello se concluye. \square

Observación Sea $(\phi_{\delta})_{\delta \in \mathcal{X}(\mathcal{G})^*}$ la distribución cuasi-límite encontrada en la parte anterior; es decir, $\phi_{\delta} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_t = \delta | \tau > t)$. Se tiene que, en efecto, es distribución en $\mathcal{Y}(\mathcal{G})^*$, según el siguiente cómputo:

$$\begin{aligned} \sum_{\delta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G})^*} \phi_{\delta} &= \sum_{\delta \in \mathcal{F}} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_t = \delta | \tau > t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbb{P}(\tau > t)} \sum_{\delta \in \mathcal{F}} \mathbb{P}(X_t = \delta, \tau > t) \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}(e^{\eta\tau_{\mathcal{F}}}, \tau_{\mathcal{F}} < \infty)} \sum_{\delta \in \mathcal{F}} \mathbb{E}(e^{\eta\tau_{\delta}}, \tau_{\delta} < \infty) = 1. \end{aligned}$$

El teorema anterior nos da información asintótica de la recombinación de genes Ξ_t . Sin embargo, antes de saltar a aquella conclusión nos dedicaremos a entender de mejor manera el comportamiento asintótico del proceso de fragmentación. En particular estudiaremos sus distribuciones cuasi-estacionarias y Q -proceso.

Proposición 4.6 *Se tiene el siguiente ratio de convergencia, para todo $\delta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G})^*$;*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}_{\delta}(\tau > t)}{\mathbb{P}(\tau > t)} = \frac{\mathbb{E}_{\delta}(e^{\eta\tau_{\mathcal{F}}}, \tau_{\mathcal{F}} < \infty)}{\mathbb{E}(e^{\eta\tau_{\mathcal{F}}}, \tau_{\mathcal{F}} < \infty)}.$$

Y ambos ratios son nulos solo cuando $\mathbb{P}_{\delta}(\tau_{\mathcal{F}} < \infty) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Primero, sea δ tal que $\mathbb{P}_\delta(\tau_{\mathcal{F}} < \infty) > 0$. Notemos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\eta t} \mathbb{P}_\delta(\tau > t) = \mathbb{E}_\delta(e^{\eta \tau_{\mathcal{F}}}, \tau_{\mathcal{F}} < \infty) \in (0, \infty).$$

En efecto, tiene sentido hacer los mismos cálculos de la demostración del teorema 4.5 para $\mathbb{P}_\delta(\tau > t, X_t \in \mathcal{F})$ y con ello obtener el resultado de la misma forma que en el teorema anterior. No hacemos estos cálculos para enfocarnos en la demostración de la proposición.

Ahora, sea δ tal que $\mathbb{P}_\delta(\tau_{\mathcal{F}} < \infty) = 0$. En aquel caso es claro que $\mathbb{E}_\delta(e^{\eta \tau_{\mathcal{F}}}, \tau_{\mathcal{F}} < \infty) = 0$ y por tanto el radio de las esperanzas es 0. Probamos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}_\delta(\tau > t)}{\mathbb{P}(\tau > t)} = 0.$$

En efecto, dado que $\mathbb{P}_\delta(\tau_{\mathcal{F}} < \infty) = 0$ entonces:

$$\mathbb{P}_\delta(\tau > t) = \mathbb{P}_\delta(\tau > t, \tau_{\mathcal{F}} > t) \leq \mathbb{P}(\forall s < t; X_s \notin \mathcal{F} \cup \{\mathcal{D}^\rho\}),$$

ocupando el lema 4.4 obtenemos que, para todo $t > 0$

$$\mathbb{P}_\delta(\tau > t) \leq C(e^{-\beta_0} + \theta)^t.$$

Por lo tanto, y dado que $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\eta t} \mathbb{P}(\tau > t) > 0$ obtenemos que, eligiendo $\theta < e^{-\eta} - e^{-\beta}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}_\delta(\tau > t)e^{\eta t}}{\mathbb{P}(\tau > t)e^{\eta t}} \leq \frac{1}{K} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\delta(\tau > t)e^{\eta t} \leq \frac{C}{K} \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-\beta_0} + \theta)^t e^{\eta t} = 0.$$

Y tenemos el limite dicho y así concluimos. \square

Proposición 4.7 Sea $t > 0$. El vector $\varphi = (\varphi_\delta)_{\delta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G})^*}$ dado por:

$$\varphi_\delta = \mathbb{E}_\delta(e^{\eta \tau_{\mathcal{F}}}, \tau_{\mathcal{F}} < \infty).$$

es un vector propio por la derecha del semi-grupo restringido $(P^t)^* = P^t|_{\mathcal{Y}(\mathcal{G})^*}$ con valor propio $e^{-\eta t}$. Más aún, deducimos que φ es vector propio de $Q^* = Q|_{\mathcal{Y}(\mathcal{G})^*}$ con valor propio $-\eta$.

DEMOSTRACIÓN. Separemos en casos, primero sea $\delta \in \mathcal{F}$, luego $\mathbb{P}_\delta(\tau_{\mathcal{F}} = 0) = 1$, lo que implica que $\varphi_\delta = 1$. Recordando que en aquel caso $P_{\delta, \delta}^t = e^{-t\eta}$, obtenemos que:

$$((P^t)^* \varphi)_\delta = \sum_{\substack{\delta' \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho) \\ \delta' \neq \mathcal{D}^\rho, \delta \leq \delta'}} P_{\delta, \delta'}^t \mathbb{E}_{\delta'}(e^{\eta \tau_{\mathcal{F}}}, \tau_{\mathcal{F}} < \infty).$$

Dado que $\delta \in \mathcal{F}$ tenemos que, por el lema 4.3, $P_{\delta, \delta}^t + P_{\delta, \mathcal{D}^\rho}^t = 1$ para todo $t \geq 0$,

$$\sum_{\substack{\delta' \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho) \\ \delta' \neq \mathcal{D}^\rho, \delta \leq \delta'}} P_{\delta, \delta'}^t \mathbb{E}_{\delta'}(e^{\eta \tau_{\mathcal{F}}}, \tau_{\mathcal{F}} < \infty) = P_{\delta, \delta}^t = e^{-t\eta} = e^{-t\eta} \varphi_\delta.$$

Ahora, si $\delta \notin \mathcal{F}$ consideramos dos casos. Primero, si $\mathbb{P}_\delta(\tau_{\mathcal{F}} < \infty) = 0$, entonces tenemos que $\varphi_\delta = 0$. Por lo tanto, para todo $\delta' \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)$ tal que $\delta \leq \delta'$ tenemos que $\mathbb{P}_{\delta'}(\tau_{\mathcal{F}} < \infty) = 0$, pues si no habría un camino con probabilidad positiva de δ a \mathcal{F} , pasando por δ' . Así

$$((P^t)^* \varphi)_\delta = \sum_{\substack{\delta' \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho) \\ \delta' \neq \mathcal{D}^\rho, \delta \leq \delta'}} P_{\delta, \delta'}^t \mathbb{E}_{\delta'}(e^{\eta \tau_{\mathcal{F}}}, \tau_{\mathcal{F}} < \infty) = 0 = e^{-\eta t} \varphi_\delta.$$

Por último consideramos $\delta \notin \mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}_\delta(\tau_{\mathcal{F}} < \infty) > 0$. Luego,

$$e^{-\eta t} \varphi_\delta = e^{-\eta t} \mathbb{E}_\delta(e^{\eta \tau_{\mathcal{F}}}, \tau_{\mathcal{F}} < \infty) = e^{-\eta t} \sum_{\substack{\delta' \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho) \\ \delta' \neq \mathcal{D}^\rho, \delta \leq \delta'}} \mathbb{E}_\delta(e^{\eta \tau_{\mathcal{F}}}, \tau_{\mathcal{F}} < \infty, X_t = \delta').$$

De la última expresión obtenemos por propiedad de Markov que:

$$e^{-\eta t} \varphi_\delta = e^{-\eta t} \sum_{\substack{\delta' \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho) \\ \delta' \neq \mathcal{D}^\rho, \delta \leq \delta'}} P_{\delta, \delta'}^t (e^\eta)^t \mathbb{E}_{\delta'}(e^{\tau_{\mathcal{F}} \eta}, \tau_{\mathcal{F}} < \infty) = ((P^t)^* \varphi)_\delta.$$

Y por tanto concluimos que:

$$(P^t)^* \varphi = e^{-\eta t} \varphi.$$

Lo anterior para todo $t \geq 0$. En particular, podemos derivar y obtener que:

$$Q^*(P^t)^* \varphi = -\eta e^{-\eta t} \varphi,$$

para todo $t > 0$. Tomando limite cuando $t \rightarrow 0$ y por continuidad del semigrupo se tiene que:

$$Q^* \varphi = -\eta \varphi$$

Y así ϕ es vector propio de Q^* con valor propio $-\eta$. □

De la última proposición podemos dar una expresión para el Q -proceso asociado al proceso de fragmentación, es decir, una fórmula para la ley del proceso condicionado a no tocar nunca su estado absorbente.

Teorema 4.8 *Para todo $\{\delta_i\}_{i=1}^k \subseteq \mathcal{Y}(\mathcal{G})^*$ el siguiente límite existe:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_{t_1} = \delta_1, X_{t_2} = \delta_2, \dots, X_{t_k} = \delta_k | \tau > t),$$

y se desvanece si para algún i , $\mathbb{P}_{\delta_i}(\tau_{\mathcal{F}} < \infty) = 0$ o si bien $\delta_i \not\leq \delta_{i+1}$. Denotamos luego $\partial_{\mathcal{F}}$ el conjunto de particiones que pueden llegar a \mathcal{F} , es decir;

$$\partial_{\mathcal{F}} = \{\delta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G})^* : \mathbb{P}_\delta(\tau_{\mathcal{F}} < \infty) > 0\},$$

entonces la matriz $\hat{Q} = (\hat{Q}_{\delta, \delta'}; \delta, \delta' \in \partial_{\mathcal{F}})$ dada por:

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{\delta, \delta'} &= Q_{\delta, \delta'} \frac{\varphi_{\delta'}}{\varphi_\delta} = Q_{\delta, \delta'} \frac{\mathbb{E}_\delta(e^{\eta \tau_{\mathcal{F}}}, \tau_{\mathcal{F}} < \infty)}{\mathbb{E}_{\delta'}(e^{\eta \tau_{\mathcal{F}}}, \tau_{\mathcal{F}} < \infty)} \quad \delta, \delta' \in \partial_{\mathcal{F}}, \delta \neq \delta', \\ \hat{Q}_{\delta, \delta} &= \eta + Q_{\delta, \delta} \quad \delta \in \partial_{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

. Define una generador conservativo en $\partial_{\mathcal{F}}$. Además, satisface que:

$$\forall \delta_i \in \partial_{\mathcal{F}}, i = 0, \dots, j : \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\delta_0}(X_{t_i} = \delta_i, i = 1, \dots, j | \tau > t) = \prod_{i=0}^{j-1} (e^{t_i \hat{Q}})_{\delta_i, \delta_{i+1}}.$$

Es decir, \hat{Q} es el generador de la cadena de Markov que nunca toca el punto absorbente. Además:

$$\begin{aligned} \forall \delta \in \mathcal{F} : \hat{Q}_{\delta, \delta'} &= 0, \quad \forall \delta' \in \partial_{\mathcal{F}}, \\ \forall \delta \in \partial_{\mathcal{F}} \setminus \mathcal{F} : \hat{Q}_{\delta, \delta} &< 0. \end{aligned}$$

Es decir, los elementos de \mathcal{F} son los puntos absorbentes de la cadena definida por \hat{Q} .

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, notamos que \hat{Q} esta bien definida, pues para todo $\delta \in \partial_{\mathcal{F}}$ tenemos que $\varphi_{\delta} \neq 0$. Probemos, primero, que \hat{Q} es conservativa. Dado que φ es vector propio de Q^* , por la proposición 4.7, tenemos que:

$$(Q^* \varphi)_{\delta} = -\eta \varphi_{\delta}.$$

Lo cual, dado que $\varphi_{\delta} = 0$ para todo $\delta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G})^* \setminus \partial_{\mathcal{F}}$, es equivalente a que:

$$\sum_{\delta' \in \partial_{\mathcal{F}}} Q_{\delta, \delta'} \varphi_{\delta'} = -\eta \varphi_{\delta}.$$

Por lo tanto, para todo $\delta \in \partial_{\mathcal{F}}$:

$$\begin{aligned} \sum_{\delta' \in \partial_{\mathcal{F}}} \hat{Q}_{\delta, \delta'} &= \sum_{\delta' \in \partial_{\mathcal{F}}} Q_{\delta, \delta'} \frac{\varphi_{\delta'}}{\varphi_{\delta}} + \eta \\ &= \frac{1}{\varphi_{\delta}} \sum_{\delta' \in \partial_{\mathcal{F}}} Q_{\delta, \delta'} \varphi_{\delta'} + \eta = -\eta + \eta = 0. \end{aligned}$$

Y así esta es conservativa. Para el límite, primero, debemos notar que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}_{\delta'}(\tau > t - s)}{\mathbb{P}_{\delta}(\tau > t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}_{\delta}(\tau > t - s)}{\mathbb{P}_{\delta}(\tau > t - s)} \frac{\mathbb{P}(\tau > t - s)}{\mathbb{P}(\tau > t)} \frac{\mathbb{P}(\tau > t)}{\mathbb{P}_{\delta'}(\tau > t)}.$$

Por el teorema 4.5:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(\tau > t - s)}{\mathbb{P}(\tau > t)} = e^{s\eta} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{(t-s)\eta} \mathbb{P}(\tau > t - s)}{e^{t\eta} \mathbb{P}(\tau > t)} = e^{s\eta},$$

con lo que tenemos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}_{\delta'}(\tau > t - s)}{\mathbb{P}_{\delta}(\tau > t)} = e^{s\eta} \frac{\varphi_{\delta'}}{\varphi_{\delta}}. \quad (4.5)$$

Ahora veamos que el límite del enunciado está bien definido y que cumple la propiedad con el semi-grupo de \hat{Q} . En primer lugar, si $\delta_i \not\leq \delta_{i+1}$ por definición de la cadena X es obvio que el límite se anula. Además, si para algún i tenemos que $\mathbb{P}_{\delta_i}(\tau_{\mathcal{F}} < \infty) = 0$, entonces:

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_{t_1} = \delta_1, \dots, X_{t_k} = \delta_k | \tau > t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_t \notin \mathcal{F} | \tau > t) = 0.$$

Podemos considerar que los estados están en $\partial_{\mathcal{F}}$. En efecto; sean $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t$ y $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_k \in \partial_{\mathcal{F}}$, entonces ocupando la expresión 4.5 tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{i_0}(X_{t_1} = \delta_1, \dots, X_{t_k} = \delta_k | \tau > t) &= \mathbb{P}_{\delta_0}(X_{t_1} = \delta_1, \dots, X_{t_k} = \delta_k) \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}_{\delta_k}(\tau > t - t_k)}{\mathbb{P}_{\delta_0}(\tau > t)} \right) \\ &= e^{\eta t_k} \frac{\varphi_{\delta_k}}{\varphi_{\delta_0}} \mathbb{P}_{\delta_0}(X_{t_1} = \delta_1, \dots, X_{t_k} = \delta_k) = \prod_{l=0}^{k-1} e^{\eta(t_{l+1} - t_l)} \frac{\varphi_{\delta_{l+1}}}{\varphi_{\delta_l}} \mathbb{P}_{\delta_l}(X_{t_{l+1}} = \delta_{l+1}). \end{aligned}$$

Donde lo último es finito y además define una cadena de Markov que tiene como generador \hat{Q} , que es lo queríamos.

Ahora, veamos la última afirmación. Sea $\delta \in \mathcal{F}$. Notemos que:

$$\hat{Q}_{\delta, \delta} = \eta + Q_{\delta, \delta} = \eta - \eta = 0.$$

Y como por el lema 4.3 se tiene que $P_{\delta,\delta}^t + P_{\delta,D^p} = 1$, entonces para todo $\delta' \in \partial\mathcal{F}$ tal que $\delta' \neq \delta$; $Q_{\delta,\delta'} = 0$. Ahora, si $\delta \notin \mathcal{F}$, entonces:

$$\hat{Q}_{\delta,\delta} = \eta + Q_{\delta,\delta} \leq \eta - \beta_0 < 0.$$

Y por tanto, los únicos puntos absorbentes son los puntos en \mathcal{F} . □

Sea $\nu = (\nu_\delta : \delta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G})^*)$ una medida de probabilidad en $\mathcal{Y}(\mathcal{G})^*$. Note que esta puede extenderse naturalmente a $\mathcal{Y}(\mathcal{G})$ si consideramos que $\nu_{D^p} = 0$.

Proposición 4.9 *Cada medida de probabilidad ν en $\mathcal{Y}(\mathcal{G})^*$ soportada en \mathcal{F} es una distribución cuasi-estacionaria para X , es decir, cumple:*

$$\forall t \geq 0, \forall \delta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G})^* : \mathbb{P}_\nu(X_t = \delta | \tau > t) = \nu_\delta.$$

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que para todo $\delta \in \mathcal{F}$, $t \geq 0$ tenemos que $P_{\delta,\delta}^t + P_{\delta,D^p}^t = 1$. Luego, dado que ν soporta en \mathcal{F} tenemos que:

$$\mathbb{P}_\nu(X_t = \delta) = \sum_{\delta' \in \mathcal{F}} \mathbb{P}_{\delta'}(X_t = \delta) \nu_{\delta'} = e^{-t\eta} \nu_\delta. \quad (4.6)$$

Por otro lado, usando el hecho que una vez que salimos de un estado no volvemos a él se desprende que:

$$\mathbb{P}_\nu(\tau > t) = \sum_{\delta \in \mathcal{F}} \mathbb{P}_\delta(\tau > t) \nu_\delta = \sum_{\delta \in \mathcal{F}} \mathbb{P}_\delta(X_t = \delta) \nu_\delta = \sum_{\delta \in \mathcal{F}} (\nu_\delta e^{-\eta t}) = e^{-\eta t}. \quad (4.7)$$

Usando las ecuaciones 4.6 y 4.7 se obtiene:

$$\mathbb{P}_\nu(X_t = \delta, \tau > t) = \mathbb{P}_\nu(X_t = \delta) = e^{-t\eta} \nu_\delta = \mathbb{P}_\nu(\tau > t) \nu_\delta,$$

es decir, concluimos que:

$$\mathbb{P}_\nu(X_t = \delta | \tau > t) = \nu_\delta. \quad \square$$

Con esto tenemos una serie de propiedades para el proceso de fragmentación que son bastante llamativas en si mismas. En particular, la última proposición da un comportamiento para las distribuciones cuasi-estacionarias bastante distintos a los casos habituales con cadenas irreducibles, ver [22] para comparar.

Ahora regresamos a la recombinación de genes y el estudio del operador $\Xi_t \mu$. En particular, de lo que hemos demostrado se pueden obtener con facilidad algunas propiedades interesantes.

Corolario 4.10 *Sea $\mu \in \mathcal{P}_I$ y consideramos $\bar{\mu} = \bigotimes_{J \in \mathcal{D}^p} \mu_J$. Entonces $\bar{\mu}$ es un punto fijo para Ξ , es decir:*

$$\Xi_t(\bar{\mu}) = \bar{\mu} \quad \forall t \geq 0.$$

Más aún, tenemos que $\bar{\mu}$ es atractor para el sistema comenzando en μ , es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Xi_t \mu = \bar{\mu}. \quad (4.8)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $t \geq 0$, entonces:

$$\Xi_t(\bar{\mu}) = \mathbb{E}(\bar{\mu}^{(t)}) = \mathbb{E}\left(\bigotimes_{L \in X_t} \bar{\mu}\right) = \sum_{\beta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)} \mathbb{P}(X_t = \beta) \bigotimes_{L \in \beta} \bigotimes_{J \in \mathcal{D}^\rho} \mu_{J \cap L}. \quad (4.9)$$

Recordemos que \mathcal{D}^ρ es el único elemento maximal de $\mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)$. Luego, $\beta \leq \mathcal{D}^\rho$ para todo $\beta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)$. Como \mathcal{D}^ρ es partición:

$$\bigotimes_{L \in \beta} \mu_{J \cap L} = \begin{cases} \mu_J & J \subseteq L, \\ \mu_\emptyset = 1 & \text{si no.} \end{cases}$$

Así tenemos que el término de la ecuación 4.9 es:

$$\sum_{\beta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)} \mathbb{P}(X_t = \beta) \bigotimes_{J \in \mathcal{D}^\rho} \mu_J = \bar{\mu} \sum_{\beta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)} \mathbb{P}(X_t = \beta) = \bar{\mu}.$$

Para probar la fórmula 4.8 falta notar que para todo $\delta \neq \mathcal{D}^\rho$ se tiene que por el teorema 4.5:

$$0 \leq \mathbb{P}(X_t = \delta) = \mathbb{P}(X_t = \delta, \tau > t) \leq \mathbb{P}(\tau > t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Además, del mismo teorema se desprende:

$$\mathbb{P}(X_t = \mathcal{D}^\rho) = \mathbb{P}(X_t = \mathcal{D}^\rho, \tau \leq t) = \mathbb{P}(\tau \leq t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\tau < \infty) = 1,$$

donde usamos que \mathcal{D}^ρ es absorbente. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \Xi_t \mu &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{\beta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)} \mathbb{P}(X_t = \beta) \bigotimes_{L \in \beta} \mu_L \\ &= \sum_{\beta \in \mathcal{Y}(\mathcal{G}_\rho)} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_t = \beta) \bigotimes_{L \in \beta} \mu_L = \bigotimes_{J \in \mathcal{D}^\rho} \mu_J = \bar{\mu}. \end{aligned}$$

□

El corolario anterior da una expresión asintótica para $\Xi_t \mu$. Sin embargo, 4.8 no da mayores detalles, como por ejemplo, la velocidad de convergencia. El siguiente corolario tiene como objetivo hacer más preciso este punto.

Corolario 4.11 *Se tiene la siguiente aproximación para $\Xi_t \mu$:*

$$\Xi_t \mu = e^{-t\eta} \left[\left(\sum_{\beta \in \mathcal{F}} \mathbb{E}(e^{\eta\tau_\beta}, \tau_\beta < \infty) \bigotimes_{L \in \beta} \mu_L \right) + (e^{t\eta} - \mathbb{E}(e^{\eta\tau_{\mathcal{F}}}, \tau_{\mathcal{F}} < \infty)) \bigotimes_{L \in \mathcal{D}^\rho} \mu_L \right] + o(e^{-t\eta}),$$

donde:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|o(e^{-t\eta})\|}{e^{-t\eta}} = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Note que para todo $\delta \notin \mathcal{F} \cup \{\mathcal{D}^\rho\}$, ocupando el lema 4.4:

$$0 \leq \mathbb{P}(X_t = \delta) = \mathbb{P}(X_t = \delta, \tau > t) \leq \mathbb{P}(X_t \notin \mathcal{F}, \tau > t) \leq C(e^{-\beta_0} + \theta)^t.$$

Tomando $0 < \theta < e^{-\eta} - e^{-\beta_0}$ deducimos que:

$$0 \leq \frac{\mathbb{P}(X_t = \delta)}{e^{-\eta t}} \leq \frac{C(e^{-\beta_0} + \theta)^t}{e^{-\eta t}} \rightarrow 0$$

Y luego $\mathbb{P}(X_t = \delta) = o(e^{-t\eta})$. Por otro lado, si $\beta \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{P}(X_t = \beta) = \mathbb{P}(X_t = \beta, \tau > t) \frac{e^{t\eta}}{e^{t\eta}}.$$

Por lo tanto, $\mathbb{P}(X_t = \beta) = \frac{\mathbb{E}(e^{\eta\tau_\beta}, \tau_\beta < \infty)}{e^{t\eta}} + o(e^{-t\eta})$, en efecto, por el teorema 4.5:

$$\left\| \frac{1}{e^{-t\eta}} (\mathbb{E}(e^{\eta\tau_\beta}, \tau_\beta < \infty) e^{-t\eta} - \mathbb{P}(X_t = \beta)) \right\| = \left\| (\mathbb{E}(e^{\eta\tau_\beta}, \tau_\beta < \infty) - e^{t\eta} \mathbb{P}(X_t = \beta, \tau > t)) \right\| \rightarrow 0.$$

Finalmente:

$$\mathbb{P}(X_t = \mathcal{D}^\rho) = 1 - \mathbb{P}(X_t \neq \mathcal{D}^\rho) = 1 - \mathbb{P}(\tau > t) = 1 - \frac{e^{\eta t}}{e^{\eta t}} \mathbb{P}(\tau > t).$$

Por ello $\mathbb{P}(X_t = \mathcal{D}^\rho) = 1 - \frac{\mathbb{E}(e^{\eta\tau_{\mathcal{F}}}, \tau_{\mathcal{F}} < \infty)}{e^{\eta t}} + o(e^{-t\eta})$, en efecto, usando nuevamente el teorema 4.5:

$$\frac{\left\| \mathbb{P}(X_t = \mathcal{D}^\rho) - \left(1 - \frac{\mathbb{E}(e^{\eta\tau_{\mathcal{F}}}, \tau_{\mathcal{F}} < \infty)}{e^{\eta t}}\right) \right\|}{e^{-t\eta}} = \left\| \mathbb{E}(e^{\eta\tau_{\mathcal{F}}}, \tau_{\mathcal{F}} < \infty) - e^{\eta t} \mathbb{P}(\tau > t) \right\| \rightarrow 0.$$

Juntando todo lo anterior obtenemos finalmente que:

$$\Xi_t \mu = e^{-t\eta} \left[\left(\sum_{\beta \in \mathcal{F}} \mathbb{E}(e^{\eta\tau_\beta}, \tau_\beta < \infty) \right) \bigotimes_{L \in \beta} \mu_L + (e^{\eta t} - \mathbb{E}(e^{\eta\tau_{\mathcal{F}}}, \tau_{\mathcal{F}} < \infty)) \bigotimes_{L \in \mathcal{D}^\rho} \mu_L \right] + o(e^{-t\eta}).$$

□

Conclusión

A modo de conclusión notamos que los resultados obtenidos tanto en la sección 3 como en la sección 4 son de gran interés para entender el problema de la recombinación de genes. En particular, el teorema 3.14 da una fórmula explícita para la ley del proceso de fragmentación, lo que permite a su vez obtener una fórmula explícita para la distribución de genes a través del tiempo, bajo hipótesis razonables. Esto es un avance interesante considerando que se trabajó bajo la hipótesis de recombinaciones arbitrarias y número de padres arbitrarios. Además el teorema 4.5 caracteriza el comportamiento asintótico del proceso de fragmentación, pudiéndose obtener una serie de resultados interesantes como la distribución cuasi-estacionaria y el Q -proceso. Esto a su vez permite entender la dinámica de la población bajo recombinación.

Sin embargo, estos resultados dejan una serie de incógnitas. En primer lugar el teorema 3.14 es producto de hacer un ansatz respecto a los coeficientes del teorema 3.7. Sin embargo, aún queda abierta la pregunta de si los coeficientes son iguales término a término, es decir, si para todo árbol de fragmentación $T^I = (\mathbb{G}, E, \mathfrak{A}, \delta_0)$ y $H \subseteq E$:

$$\mathbb{P}(\{ \min_{\mathcal{A} \in \mathbb{G}_{\delta_0}(H)} \mathcal{T}_{\mathcal{A}} \leq t < \min_{\mathcal{B} \in \mathcal{L}_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}} \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \}, \{ \mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \min_{\mathcal{B} \in \mathbb{G}_{\mathcal{A}}(H)} \mathcal{T}_{\mathcal{B}}, \forall \mathcal{A} \in \mathbb{G} \}) =$$

$$[(\lambda_{\mathbb{G}_{\delta_0}(H)}^I)^t - (\lambda_I^I)^t] \prod_{\mathcal{B} \in \mathbb{G}} \frac{\rho_{\mathcal{B}}^{I_{\mathcal{B}}}}{\log(\lambda_{\mathbb{G}_{\mathcal{B}}(H)}^{I_{\mathcal{B}}}) - \log(\lambda_{I_{\mathcal{B}}}^{I_{\mathcal{B}}})}.$$

Lo esperable, dado el teorema 3.14 y resultados parecidos vistos en [4], es que esto si sea cierto. Sin embargo, para ello habría que entrar a analizar el proceso de fragmentación trajectorialmente, técnica aplicada en el caso discreto y fragmentación simple en [4]. Dentro de un contexto similar es posible que esta técnica ayude a relajar las hipótesis del teorema 3.14 de mejor manera que lo expuesto en la sección 3.3. Si bien, en esta última sección se da una forma de obtener fórmulas para tasas de recombinación arbitrarias el método es bastante engorroso, por lo que es deseable explorar la posibilidad de una forma más simple. Otra posible manera sería intentar relacionar o identificar los polinomios que aparecen con las singularidades en el grafo. Es posible que estos formen una familia de polinomios específicos, sobre los cuales sí se puedan hacer cálculos fácilmente.

Otro aspecto interesante es que en el modelo presentado solo se analiza el efecto de recombinación dentro de la dinámica genética. Sin embargo, hay más efectos de interés; como son la mutación, el evento donde los genes cambian de manera al azar de manera Markoviana, y la selección, que es el hecho que hay individuos que son favorecidos por el medio para reproducirse. Trabajos de esta índole pueden ser encontrados en [3], sin embargo, aquí solo considera recombinación simple. Por ello es interesante explorar si las técnicas desarrolladas

en esta memoria son de utilidad para entender aquellos contextos más generales.

Finalmente es importante notar que los resultados obtenidos están enfocados en el proceso de fragmentación en si mismo y no en el contexto genético. Por tanto es interesante pensar qué dicen estos resultados en otros ámbitos. A modo de ejemplificación, en [6] se hace una conexión entre el movimiento Browniano y los procesos de fragmentación, o bien en [9] se analiza un proceso de fragmentación que aparece en contexto de programación de algoritmos. O también, muchas veces el proceso de fragmentación es visto según el largo de los trozos de los intervalos que lo componen y no en su elementos, ver [13] para un ejemplo de esto. Luego, queda pendiente ver si las técnicas aquí desarrolladas o los resultados obtenidos permiten entender mejor los problemas antes mencionados.

Bibliografía

- [1] A.Avez. *Calcul différentiel*. Masson., 1 edition, 1983.
- [2] Herbert Amann. *Ordinary Diferencial Equations: An introduction to Nonlinear Analysis*. Walter de Gruyter., 2 edition, 1990.
- [3] Ellen Baake and Michael Baake. An exactly solved model for mutation, recombination and selection. *Canadian Journal of Mathematics.*, 55:3–41, 2003.
- [4] Ellen Baake and Mareike Esser. Fragmentation process, pruning poset for rooted forests, and möbius inversion. *arXiv:1702.03173*, 2017.
- [5] Jean Bertoin. *Random fragmentation and coagulation processes*. Cambridge studies in advanced mathematics., 1 edition, 2006.
- [6] Jean Bertoin. A fragmentation process connected to brownian motion. *Probability Theory and Related Fields*, 117, 2000.
- [7] J.A. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph Theory*. Springer, Graduate texts in Mathematics, 1 edition, 2008.
- [8] Richard A. Brualdi. *Introductory Combinatorics*. Peason Education Inc., 5 edition, 2010.
- [9] David S Dean and Satya N Majumdar. Phase transition in a random fragmentation problem with applications to computer science. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 35(32):L501, 2002.
- [10] Reinhard Diestel. *Graph Theory*. Springer, 2 edition, 2000.
- [11] Michael Baake Ellen Baake and Majid Salamat. The general recombination equation in continous time and it’s solution. *arXiv:1502.05194*, 2015.
- [12] Mareike Esser. *Recombination models forward and backward in time*. PhD thesis, Universität Bielefeld Fakultät für Mathematik, 12 2016.
- [13] Jean-Yves Fortin, Sophie Mantelli, and MooYoung Choi. Dynamics of interval fragmentation and asymptotic distributions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46(22):225002, 2013.

- [14] Daniel A. Klain and Gian-Carlo Rota. *Introduction to Geometric Probability*. Lezioni Lincee., 1 edition, 1997.
- [15] Thomas M. Liggett. *Continuous time Markov Process: An introduction*. American Mathematical Society, 1 edition, 2000.
- [16] J.V. Van Lint and R.M. Wilson. *A course in combinatorics*. Cambridge., 2 edition, 2001.
- [17] Sebastian Probst. Mareike Esser and Ellen Baake. Partitioning, duality, and linkage disequilibria in the moran model with recombination. *arXiv:1502.05194*, 2015.
- [18] Jaime San Martín. *Teoría de la Medida*. Departamento de Ingeniería Matemática., 9 edition, 2014.
- [19] Servet Martínez. A probabilistic analysis of a discrete-time evolution in recombination. *Advances in Applied Mathematics*, 91:115–136, 10 2017.
- [20] T.H. Morgan. Random segregation versus coupling in mendelian inheritance. *Science*, pages 384–384, 1911.
- [21] J.R. Norris. *Markov Chains*. Cambridge series in statistical and probabilistic mathematics, The Edinburgh Building, Cambridge CB2 2RU, United Kingdom, 1 edition, 1997.
- [22] Servet Martínez Pierre Collet and Jaime San Martin. *Quasi-Stationary Distributions: Markov Chains, Diffusions and Dynamical Systems*. Springer, 1 edition, 2013.
- [23] Sheldon Ross. *A First Course in Probability*. Prentice-Hall Inc., 5 edition, 1998.
- [24] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., 1 edition, 1987.
- [25] Ellen Baake Ute von Wangenheim and Michael Baake. Single-crossover recombination in discrete time. *Journal of Mathematical Biology*, 60(5):727–760, 5 2010.