



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

UN TEOREMA TIPO BANACH-STONE PARA VARIETADES DE FINSLER

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

FRANCISCO JAVIER ANTONIO VENEGAS MARTÍNEZ

PROFESOR GUÍA:
ARIS DANIILIDIS

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JESÚS JARAMILLO AGUADO
CLAUDIO MUÑOZ CERON
JAIME ORTEGA PALMA

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por CMM- Conicyt PIA AFB170001

SANTIAGO DE CHILE

2018

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: FRANCISCO JAVIER ANTONIO VENEGAS
MARTÍNEZ
FECHA: 2018
PROF. GUÍA: SR. ARIS DANILIDIS

UN TEOREMA TIPO BANACH-STONE PARA VARIEDADES DE FINSLER

Uno de los resultados clásicos dentro de la teoría de espacios topológicos y funciones continuas es el Teorema de Banach-Stone, el cual relaciona la estructura topológica de un espacio compacto X con la estructura de espacio vectorial normado del espacio de funciones continuas a valores reales $(C(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. A partir de este teorema surgieron diversos resultados en el mismo espíritu: caracterizar la estructura de un espacio a través de la estructura de un espacio de funciones adecuado. A estos resultados se les conoce como “teoremas tipo Banach-Stone”.

En 2017, J. Cabello y J.A. Jaramillo [4] probaron un teorema tipo Banach-Stone para espacios cuasi-métricos completos, usando el espacio de funciones 1-semi-Lipschitz a valores reales $SLip_1(X)$, el cual fue dotado de estructura de lattice convexo.

Esta tesis se centra en estudiar la estructura de las variedades de Finsler, las cuales son una generalización de las variedades Riemannianas. Dichas variedades poseen una estructura cuasi-métrica íntimamente relacionada con su estructura de variedad diferenciable.

Con el fin de estudiar estas variedades, basándonos en las ideas de [4], definimos un subespacio de funciones suaves de $SLip_1(X)$, denotado por $SC_1^1(X)$, el cual dotamos de estructura convexa y de orden parcial (lo cual es estrictamente más débil que una estructura de lattice). Usando teoremas de aproximación suave de funciones Lipschitz, y adaptándolos para funcionar en el contexto asimétrico, se logró suplir la falta de estructura de lattice del espacio $SC_1^1(X)$, obteniendo así un teorema tipo Banach-Stone para variedades de Finsler conexas y completas, similar al presentado en [4]. La demostración del teorema principal de este trabajo puede adaptarse para funcionar en dos clases de espacios de Banach de dimensión infinita: espacios de Hilbert y espacios de Asplund separables cuyos espacios duales sean localmente uniformemente rotundos.

A mi familia y amigos

Tabla de Contenido

Introducción	1
1. Preliminares	5
1.1. Espacios cuasi-métricos	5
1.2. Variedades de Finsler	8
1.3. Funciones Lipschitz y semi-Lipschitz	12
1.3.1. Funciones Lipschitz y semi-Lipschitz de clase C^1	16
1.3.2. Funciones bump en espacios de Banach.	17
1.3.3. Teoremas de aproximación suave de funciones Lipschitz y semi-Lipschitz	18
1.4. Conjuntos co-zero de funciones suaves en variedades de Finsler	24
2. Demostración del teorema principal	27
2.1. Orden, convexidad y topología	28
2.2. Forma explícita del isomorfismo de orden convexo	37
2.3. Relaciones métricas y casi isométricas	41
Conclusiones y trabajo futuro	45
Bibliografía	49

Introducción

Motivación

El Teorema de Banach-Stone es un resultado clásico de la teoría de espacios topológicos y funciones continuas. Dicho resultado relaciona la estructura topológica de un espacio compacto con la estructura métrica del espacio de funciones continuas a valores reales asociado, de la siguiente manera:

Teorema: (Banach-Stone)[2][17] Sean X e Y espacios topológicos compactos, y $T : (C(Y, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ una isometría lineal sobreyectiva. Entonces existe un homeomorfismo $\tau : X \rightarrow Y$ y una función $a \in C(X, \mathbb{R})$, con $|a(x)| = 1$ para todo $x \in X$ tales que, para cada $f \in C(Y, \mathbb{R})$ y $x \in X$:

$$Tf(x) = a(x)f(\tau(x)).$$

Este teorema fué originalmente demostrado para espacios métricos compactos por Stefan Banach, y luego fué generalizado a espacios topológicos compactos por Marshall Stone. El teorema de Banach-Stone motivó el desarrollo de dos importantes resultados obtenidos por Kaplansky, Gelfand y Kolmogorov respectivamente:

Teorema: (Kaplansky)[12] Sean X e Y espacios topológicos compactos, y $T : C(Y, \mathbb{R}) \rightarrow C(X, \mathbb{R})$ un isomorfismo de lattices. Entonces existe un homeomorfismo $\tau : X \rightarrow Y$. Más aún, si T es aditiva, entonces existe $a \in C(X, \mathbb{R})$, con $a > 0$ tal que para cada $f \in C(Y, \mathbb{R})$ y $x \in X$:

$$Tf(x) = a(x)f(\tau(x)).$$

Teorema: (Gelfand-Kolmogorov)[9] Sean X e Y espacios topológicos compactos, y $T : C(Y, \mathbb{R}) \rightarrow C(X, \mathbb{R})$ un isomorfismo de álgebras. Entonces existe un homeomorfismo $\tau : X \rightarrow Y$ tal que, para cada $f \in C(Y, \mathbb{R})$ y $x \in X$:

$$Tf(x) = f(\tau(x)).$$

Estos resultados muestran que no solo la estructura métrica de $(C(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ determina la topología de X , sino que también las estructuras de lattice y de álgebra del espacio $C(X, \mathbb{R})$ pueden cumplir el mismo rol. La similitud entre el espíritu de estos tres teoremas hizo surgir el término “Teoremas tipo Banach-Stone”, para referirse a resultados que busquen caracterizar cierta estructura de un espacio X (dicha estructura puede ser topológica,

métrica, de espacio vectorial, variedad diferenciable, etc) en términos de alguna estructura (topológica, algebraica, de orden, etc) del espacio $C(X, \mathbb{R})$, o de alguna subfamilia adecuada de éste.

Diversos resultados han sido obtenidos en esta línea, se sugiere al lector ver [8] para mayor información al respecto.

El objetivo de este trabajo es encontrar un teorema tipo Banach-Stone para la estructura cuasi-métrica y diferenciable de las llamadas *Variedades de Finsler*. Estas variedades son una generalización de las variedades Riemannianas, donde en lugar de ser localmente Euclidea, la variedad se comporta localmente como un espacio de Minkowski. Esto permite a las variedades de Finsler modelar problemas que presenten asimetrías intrínsecas.

Problemas de diversa índole pueden ser modelados usando variedades de Finsler, por ejemplo:

- En óptica: la velocidad de la luz en un medio anisotrópico depende de la dirección en que ésta esté viajando. La estructura de una variedad de Finsler permite calcular magnitudes tales como el tiempo que necesita la luz para viajar entre dos puntos en un medio posiblemente curvo.
- En optimización: suponga que desea subir una montaña de pendiente irregular, de modo que la velocidad de viaje depende de la dirección del movimiento. El problema de encontrar un camino que minimize el tiempo de viaje a la cima puede ser modelado usando geometría de Finsler.
- En ecología matemática: considere una especie en un estado x . El “costo energético” de evolucionar desde el estado x a un estado y puede ser escrito en función de los costos locales de evolucionar de un estado z a un estado $z + \delta z$, por lo que el costo energético total de evolucionar del estado x al estado y puede calcularse como una integral en términos de una estructura de Finsler.

Se sugiere al lector ver la sección 1.0 de [3] para más detalles sobre estos y otros ejemplos.

Otro tipo de estructura íntimamente relacionada con las variedades de Finsler son los espacios cuasi-métricos, los cuales generalizan a los espacios métricos, eliminando la condición de simetría en la definición de métrica. Toda variedad de Finsler conexa tiene una cuasi-métrica asociada, y la estructura cuasi-métrica inducida por ella tiene una profunda relación con la estructura diferenciable de la variedad. En vista de esto, con el objetivo de estudiar las casi-isometrías entre variedades de Finsler, definimos un espacio adecuado de funciones suaves, al cual dotaremos de estructura algebraica (convexidad) y de orden. Luego, mostraremos como la estructura de este espacio de funciones se relaciona con la estructura cuasi-métrica (y por lo tanto, diferenciable) de la variedad de Finsler.

Organización

Esta tesis consta de dos capítulos. En el Capítulo 1, en las Secciones 1.1,1.2,1.3 se entregan las definiciones y los resultados previos necesarios para entender el problema a trabajar. En la Subsección 1.3.1 se define el espacio de funciones a ser usado para el teorema tipo Banach-

Stone buscado. En la Sección 1.4 se presenta una modificación de un resultado clásico de geometría diferencial, el cual será necesario para la demostración del Teorema principal de esta tesis. Finalmente, en la Sección 1.3.3 se presentan resultados de aproximación suave de funciones Lipschitz encontrados en la literatura, algunos de ellos ligeramente modificados para funcionar en el contexto asimétrico. En el Capítulo 2 se desarrolla la demostración del teorema principal, la cual se divide en tres secciones. Dicha demostración es replicable reemplazando las variedades de Finsler por ciertas clases de espacios de Banach de dimensión infinita, por lo que la demostración seguirá un tronco común que englobará ambos casos, y se harán proposiciones separando por casos cuando sea necesario. Al final de la Sección 2.3 se presentan Corolarios de ambas versiones (Finsler y Banach) del teorema principal.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentarán las definiciones básicas y los resultados previos necesarios para el desarrollo de este trabajo. En la Subsección 1.3.1 se define el espacio de funciones sobre el cual se trabajará en el Capítulo 2.

1.1. Espacios cuasi-métricos

Definición 1.1 Sea X un conjunto no vacío. Se llamará *cuasi-métrica* a una función $d_X : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ que cumpla las siguientes propiedades:

- (i) **Positividad:** $d_X(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.
- (ii) **Desigualdad triangular:** $d_X(x, y) \leq d_X(x, z) + d_X(z, y)$ para todo $x, y, z \in X$.

Al par (X, d_X) se le denominará *espacio cuasi-métrico*.

Si la cuasi-métrica d_X cumple adicionalmente que $d_X(x, y) = d_X(y, x)$ para todo $x, y \in X$, diremos que la distancia d_X es simétrica, en cuyo caso (X, d_X) es un espacio métrico en el sentido usual.

Definición 1.2 Sea (X, d_X) un espacio cuasi-métrico. Para $x \in X$ y $r > 0$ se definen:

$$B_{d_X}^+(x, r) = \{y \in X : d_X(x, y) < r\},$$

$$B_{d_X}^-(x, r) = \{y \in X : d_X(y, x) < r\},$$

las cuales se denominarán bolas *forward* y *backward* de centro x y radio r respectivamente. El espacio cuasi-métrico (X, d_X) será dotado de la topología generada por la familia

$$\{B_{d_X}^+(x, r) \cap B_{d_X}^-(x, r) : x \in X, r > 0\}.$$

Definición 1.3 Sea (X, d_X) un espacio cuasi-métrico. Se define la *distancia simetrizada* asociada a d_X como

$$\widetilde{d}_X(x, y) = \frac{1}{2}(d_X(x, y) + d_X(y, x)).$$

Claramente, \widetilde{d}_X es una métrica sobre X .

Observación: La topología dada en la Definición 1.2 coincide con la topología inducida por la distancia simetrizada \widetilde{d}_X . En consecuencia, se llamará *bola de centro x y radio $r > 0$* al conjunto

$$B(x, r) = \{y \in X : \widetilde{d}_X(x, y) < r\}.$$

Definición 1.4 Sea (X, d_X) un espacio cuasi-métrico. Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se dice *de Cauchy* si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $d_X(x_n, x_m) < \varepsilon$ para cada $n, m \geq N$. El espacio cuasi-métrico (X, d_X) se dirá *completo* si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Proposición 1.5 [11, Lema 2.5] Sea (X, d_X) un espacio cuasi-métrico. Entonces (X, d_X) es completo si y solo si (X, \widetilde{d}_X) es completo.

Definición 1.6 Sea (X, d_X) un espacio cuasi-métrico. Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se dice *forward Cauchy* (respectivamente *backward Cauchy*) si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $d_X(x_n, x_m) < \varepsilon$ para $N \leq n < m$ (respectivamente $N \leq m < n$). El espacio (X, d_X) se dirá *forward completo* (respectivamente *backward completo*) si toda sucesión forward (respectivamente backward) Cauchy es convergente.

Observación: Si un espacio cuasi-métrico (X, d_X) es forward y backward completo, entonces (X, d_X) es completo. La recíproca no es necesariamente cierta. Un ejemplo de esto puede construirse dotando al conjunto de los racionales \mathbb{Q} con la cuasi-métrica de Sorgenfrey, definida en el Ejemplo 1 de la Sección 1.3. El espacio cuasi-métrico resultante es completo, pues su métrica simetrizada es discreta, pero falla en ser forward completo.

Definición 1.7 Sea (X, d_X) un espacio cuasi-métrico. Se define la *función triangular* $\text{Tr}_X : X \times X \times X \rightarrow [0, \infty)$, dada por

$$\text{Tr}_X(x_1, x_2, x_3) = d_X(x_1, x_2) + d_X(x_2, x_3) - d_X(x_1, x_3).$$

Definición 1.8 Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios cuasi-métricos. Una biyección $\tau : X \rightarrow Y$ se dirá *casi isometría* si

$$\text{Tr}_Y(\tau(x_1), \tau(x_2), \tau(x_3)) = \text{Tr}_X(x_1, x_2, x_3)$$

para todo $x_1, x_2, x_3 \in X$.

Proposición 1.9 Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios cuasi-métricos y $\tau : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ una casi isometría. Entonces τ es una isometría entre los espacios simetrizados (X, \widetilde{d}_X) e (Y, \widetilde{d}_Y) . En particular, toda casi isometría entre espacios métricos es una isometría.

Demostración. Sean $x, x' \in X$. Entonces

$$d_X(x, x') = \text{Tr}_X(x, x', x) = \text{Tr}_Y(\tau(x), \tau(x'), \tau(x)) = d_Y(\tau(x), \tau(x')).$$

□

Proposición 1.10 [11, Proposición 2.8] Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios cuasi-métricos. Una biyección $\tau : X \rightarrow Y$ es una casi isometría si y solo si existe una función $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$d_Y(\tau(x_1), \tau(x_2)) = d_X(x_1, x_2) + \phi(x_2) - \phi(x_1)$$

para todo $x_1, x_2 \in X$.

Más aún, fijando cualquier punto $x_0 \in X$, la función ϕ queda determinada salvo constantes aditivas por $\phi(x) = d_X(x, x_0) - d_Y(\tau(x), \tau(x_0))$.

Proposición 1.11 Sea (X, d_X) un espacio cuasi-métrico y $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $\phi(x) - \phi(x') < d_X(x, x')$ para todo $x, x' \in X$ tales que $x \neq x'$. Entonces la función $d'_X : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ definida por $d'_X(x, x') = d_X(x, x') + \phi(x') - \phi(x)$ es una cuasi-métrica sobre X tal que (X, d_X) es casi isométrico a (X, d'_X) .

Demostración. Sean $x, x' \in X$ tales que $x \neq x'$. Entonces

$$d'_X(x, x') = d_X(x, x') + \phi(x') - \phi(x) > d_X(x, x') - d_X(x, x') = 0,$$

por lo que $d'_X(x, x) > 0$ para todo $x \neq x'$. Claramente $d'_X(x, x) = 0$ para todo $x \in X$, y por lo anterior tenemos que $d'_X(x, x') = 0$ si y solo si $x = x'$. Para verificar la desigualdad triangular, sean $x_1, x_2, x_3 \in X$. Entonces

$$d'_X(x_1, x_3) \leq [d_X(x_1, x_2) + d_X(x_2, x_3)] + \phi(x_3) - \phi(x_1) + [\phi(x_2) - \phi(x_2)] = d'_X(x_1, x_2) + d'_X(x_2, x_3).$$

Se concluye que d'_X es una cuasi métrica sobre X . Por la Proposición 1.10, la identidad $i : (X, d_X) \rightarrow (X, d'_X)$ es una casi isometría. □

Definición 1.12 Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios cuasi-métricos. Una biyección $\tau : X \rightarrow Y$ se dirá *isometría* si $d_X(x, x') = d_Y(\tau(x), \tau(x'))$ para todo $x, x' \in X$.

A pesar de que tanto la Definición 1.8 como la Definición 1.12 generalizan la noción usual de isometría entre espacios métricos al contexto de los espacios cuasi-métricos, la noción de casi isometría es estrictamente más débil. En efecto, dado un espacio cuasi-métrico (X, d_X) , la Proposición 1.11 nos permite construir otro espacio cuasi-métrico (X, d'_X) casi isométrico al original, pero si la función ϕ usada para definir d'_X no es constante, el espacio (X, d'_X) no será isométrico a (X, d_X) . Otro aspecto de interés de las casi isometrías es su relación con las curvas geodésicas, explicada a continuación.

Definición 1.13 Sea (X, d_X) un espacio cuasi-métrico. Se define el largo de una curva continua $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ como

$$\ell(\gamma) = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^n d_X(\gamma(x_i), \gamma(x_{i+1})),$$

donde \mathcal{P} es el conjunto de particiones $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$, con $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$ y $n \in \mathbb{N}$. La curva γ se dirá *rectificable* si $\ell(\gamma)$ es finito.

Definición 1.14 Sea (X, d_X) un espacio cuasi-métrico y $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ una curva continua. Se dirá que γ es una *geodésica minimizante* entre $p = \gamma(a)$ y $q = \gamma(b)$ si $\ell(\gamma) = d_X(p, q)$.

Proposición 1.15 [11, Proposición 2.3] Sea (X, d_X) un espacio cuasi-métrico y $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ una curva continua. Entonces γ es una geodésica minimizante si y solo si $\text{Tr}_X(\gamma(t_1), \gamma(t_2), \gamma(t_3)) = 0$ para cada $a \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq b$. En particular, las casi isometrías preservan geodésicas minimizantes.

1.2. Variedades de Finsler

Definición 1.16 Un espacio topológico Hausdorff y segundo contable M se dirá *variedad diferenciable de clase C^∞ de dimensión n* si existe un recubrimiento abierto $\{U_\alpha\}$ de M y una familia de mapeos $\{\varphi_\alpha\}$ tales que cada φ_α es un homeomorfismo entre U_α y un abierto de \mathbb{R}^n , y los mapeos de transición $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ son de clase C^∞ para cada α y β . A cada par $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ se le dirá *carta local* de la variedad, y al conjunto de todas las cartas locales se le llamará *atlas* de la variedad.

Definición 1.17 Sea M una variedad diferenciable de clase C^∞ de dimensión n , y sea $x \in M$. Sea (φ, U) una carta local tal que $x \in U$. Considere el conjunto de curvas diferenciables iniciadas en x :

$$C_x = \{\gamma : (-1, 1) \rightarrow M \mid \gamma \text{ es una curva tal que } \varphi \circ \gamma \text{ es diferenciable y } \gamma(0) = x\}.$$

Se define la relación de equivalencia \sim sobre C_x dada por

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff (\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0).$$

Finalmente, se define el *espacio tangente a M en el punto x* , denotado por $T_x M$, como el conjunto cociente de la relación \sim sobre C_x . Se puede mostrar que $T_x M$ es un espacio vectorial de dimensión n para cada $x \in M$.

Definición 1.18 Sea M una variedad diferenciable de clase C^∞ de dimensión n . Se define el *fibrado tangente de M* , denotado por TM , como la unión disjunta de los espacios tangentes a cada $x \in M$, es decir,

$$TM = \bigcup_{x \in M} (x \times T_x M) = \{(x, v) : x \in M, v \in T_x M\}.$$

Se denotará por $TM \setminus \{0\}$ al conjunto $\{(x, v) : x \in M, v \in T_x M \setminus \{0\}\}$.

Definición 1.19 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Una función $F : V \rightarrow [0, \infty)$ se dirá *norma de Minkowski* sobre V si cumple que:

- (i) **Positividad:** $F(v) = 0$ si y solo si $v = 0$.
- (ii) **Desigualdad triangular:** $F(u + v) \leq F(u) + F(v)$ para todo $u, v \in V$.
- (iii) **Positiva homogeneidad:** $F(\lambda v) = \lambda F(v)$ para todo $v \in V$ y todo $\lambda > 0$.
- (iv) **Regularidad:** F es continua en todo V y de clase C^∞ en $V \setminus \{0\}$.
- (v) **Convexidad fuerte:** Para cada $v \in V \setminus \{0\}$, la forma cuadrática g_v asociada a la segunda derivada de F^2 , es decir,

$$g_v = \frac{1}{2} d^2 [F^2] (v),$$

es definida positiva en V .

Adicionalmente, diremos que F es simétrica o absolutamente homogénea si

$$F(\lambda v) = |\lambda| F(v), \quad \text{para cada } v \in V \text{ y cada } \lambda \in \mathbb{R}.$$

En este caso, F es una norma en el sentido usual.

Observación: Como puede verse en [3, Teorema 1.2.2], las condiciones (i) y (ii) son consecuencia de las condiciones (iii), (iv) y (v).

Definición 1.20 Una *variedad de Finsler* es un par (M, F) , donde M es una variedad diferenciable de clase C^∞ de dimensión n y $F : TM \rightarrow [0, \infty)$ es una función continua definida sobre el fibrado tangente TM que cumpla las siguientes condiciones:

- (i) F es de clase C^∞ en $TM \setminus \{0\}$.
- (ii) Para cada $x \in M$, la función $F(x, \cdot) : T_x M \rightarrow [0, \infty)$ es una norma de Minkowski sobre el espacio tangente $T_x M$.

Si además $F(x, \cdot)$ es simétrica para cada $x \in M$, diremos que la variedad de Finsler (M, F) es reversible.

En particular, toda variedad Riemanniana es una variedad de Finsler reversible, donde la norma de Minkowski en cada espacio tangente es dada por un producto interno. Algunos

ejemplos interesantes de variedades de Finsler no reversibles son los espacios de Randers y los espacios de Berwald, ambos estudiados en [3].

Definición 1.21 Sea (M, F) una variedad de Finsler y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 . Se define la norma de su diferencial df en el punto $x \in M$ como

$$\|df(x)\|_F = \sup\{|df(x)(v)| : v \in T_x M, F(x, v) \leq 1\} \in [0, \infty],$$

y la norma del supremo del diferencial df como

$$\|df\|_\infty = \sup\{\|df(x)\|_F : x \in M\} \in [0, \infty].$$

Definición 1.22 Sea (M, F) una variedad de Finsler conexa. Se define la *distancia de Finsler* sobre M dada por

$$d_F(x, y) = \inf \{ \ell_F(\gamma) : \gamma \text{ es una curva de clase } C^1 \text{ por partes de } x \text{ a } y \},$$

donde el *largo de Finsler* de una curva de clase C^1 por partes $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ está dado por:

$$\ell_F(\gamma) = \int_a^b F(\gamma(t), \gamma'(t)) dt.$$

Como se menciona en [3, Capítulo 6.2], si (M, F) es una variedad de Finsler conexa, entonces (M, d_F) es un espacio cuasi-métrico. Si (M, F) es reversible, entonces (M, d_F) es un espacio métrico en el sentido usual.

Proposición 1.23 [3, Sección 6.2 C] Sea (M, F) una variedad de Finsler. Entonces la topología de la variedad M coincide con la topología generada por las bolas forward.

Notación: Sea (X, F) una variedad de Finsler. En lo que sigue, dado que este trabajo se centra en estudiar la estructura cuasi-métrica de las variedades de Finsler, llamaremos también variedad de Finsler al par (X, d_X) , donde d_X es la distancia de Finsler asociada a F .

Lema 1.24 [11, Lema 3.1] Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) variedades de Finsler y sea $\tau : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ una casi isometría. Entonces $\tau : (X, \widetilde{d}_X) \rightarrow (Y, \widetilde{d}_Y)$ es una isometría suave.

Este resultado es de gran importancia, pues nos dice que la estructura de variedad diferenciable de una variedad de Finsler queda determinada por su estructura cuasi-métrica.

Proposición 1.25 [11, Proposición 3.2] Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) variedades de Finsler y sea $\tau : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ una casi isometría. Entonces la función $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ que induce la casi isometría en el sentido de la Propiedad 1.10 es suave.

Definición 1.26 Sea (M, F) una variedad de Finsler y sea $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva parametrizada de modo que su velocidad sea constante. La curva γ se dirá *geodésica* si sus segmentos $\gamma|_{[c,d]}$ de largo suficientemente pequeño son geodésicas minimizante, es decir,

$$d_F(\gamma(c), \gamma(d)) = \ell_F(\gamma|_{[c,d]}).$$

De manera equivalente, γ se dirá geodésica si es estacionaria para el funcional de energía dado por

$$E[\gamma] = \frac{1}{2} \int_a^b F^2(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt.$$

Definición 1.27 Una variedad de Finsler (M, F) se dirá *forward geodésicamente completa* si toda geodésica en M definida en un intervalo $[a, b]$ puede extenderse a una geodésica en M definida en $[a, \infty)$.

De manera similar a la geometría Riemanniana, las curvas geodésicas tienen un rol muy importante en la geometría de las variedades de Finsler. La siguiente proposición nos dice que, en variedades de Finsler forward completas, dichas geodésicas pueden elegirse de modo que sean geodésicas minimizantes en el sentido de la Definición 1.14, lo cual reafirma la importancia de las casi-isometrías entre variedades de Finsler.

Proposición 1.28 [3, Proposición 6.5.1] *Sea (M, F) una variedad de Finsler conexa y forward completa. Entonces para todo par de puntos $p, q \in M$ existe una geodésica minimizante entre p y q .*

Al igual que en geometría Riemanniana, el Teorema de Hopf-Rinow relaciona la completitud geodésica con la completitud cuasi-métrica de la variedad [5, Teoremas 10.4.12 y 10.4.13].

Teorema 1.29 (Teorema de Hopf-Rinow) *Sea (M, F) una variedad de Finsler conexa. Entonces las siguientes son equivalentes:*

- (i) *El espacio cuasi-métrico (M, d_F) es forward completo.*
- (ii) *La variedad de Finsler (M, F) es forward geodésicamente completa.*
- (iii) *Para cada punto $x \in M$, el mapeo exponencial \exp_x está definido en todo $T_x M$.*
- (iv) *Existe un punto $x \in M$ tal que el mapeo exponencial \exp_x está definido en todo $T_x M$.*
- (v) *Todo subconjunto cerrado y forward acotado (es decir, contenido en una bola forward) de (M, d_F) es compacto.*

1.3. Funciones Lipschitz y semi-Lipschitz

Definición 1.30 Sea (X, d_X) un espacio cuasi-métrico. Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se dirá *semi-Lipschitz* si existe una constante $L \geq 0$ tal que

$$f(x) - f(x') \leq L \cdot d_X(x, x') \quad (1.1)$$

para todo $x, x' \in X$. La menor constante que cumpla (1.1) se llamará *constante semi-Lipschitz* de f y se denotará por $\text{SLip}(f)$. El conjunto de todas las funciones semi-Lipschitz sobre X se denotará por $\text{SLip}(X)$. Se dirá también que f es L -semi-Lipschitz si $\text{SLip}(f) \leq L$.

Definición 1.31 Sea (X, d_X) un espacio cuasi-métrico. Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se dirá *Lipschitz* si existe una constante $L \geq 0$ tal que

$$|f(x) - f(x')| \leq L \cdot d_X(x, x') \quad (1.2)$$

para todo $x, x' \in X$. La menor constante que cumpla (1.2) se llamará *constante Lipschitz* de f y se denotará por $\text{Lip}(f)$. El conjunto de todas las funciones Lipschitz sobre X se denotará por $\text{Lip}(X)$. Se dirá también que f es L -Lipschitz si $\text{Lip}(f) \leq L$.

Proposición 1.32 Sea (X, d_X) un espacio cuasi-métrico. Toda función Lipschitz $f : (X, d_X) \rightarrow \mathbb{R}$ es semi-Lipschitz, con $\text{SLip}(f) \leq \text{Lip}(f)$. Más aún, toda función semi-Lipschitz $f : (X, d_X) \rightarrow \mathbb{R}$ es Lipschitz para la distancia simetrizada \widetilde{d}_X , con

$$\text{Lip}_{\widetilde{d}_X}(f) \leq 2\text{SLip}_{d_X}(f),$$

donde $\text{Lip}_d(f)$ y $\text{SLip}_d(f)$ representan las constantes Lipschitz y semi-Lipschitz de f calculadas con la cuasi-métrica d . En particular, toda función semi-Lipschitz es continua para la topología del espacio cuasi métrico.

Demostración. La primera afirmación se desprende directamente de las Definiciones 1.30 y 1.31. Para la segunda afirmación, sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ función semi-Lipschitz y $x, x' \in X$. Entonces

$$f(x) - f(x') \leq \text{SLip}(f)d_X(x, x') \leq \text{SLip}(f)2\widetilde{d}_X(x, x').$$

Del mismo modo, $f(x') - f(x) \leq \text{SLip}(f)2\widetilde{d}_X(x, x')$, por lo que f es Lipschitz para la métrica \widetilde{d}_X y $\text{Lip}_{\widetilde{d}_X}(f) \leq 2\text{SLip}_{d_X}(f)$.

□

Ejemplo 1 La relación $\text{Lip}(X) \subset \text{SLip}(X)$ puede ser estricta. Consideremos la recta real \mathbb{R} dotada de la cuasi-métrica de Sorgenfrey d_S , definida por

$$d_S(x, x') = \begin{cases} x - x' & \text{si } x \geq x' \\ 1 & \text{si } x < x' \end{cases}$$

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ fijo, y consideremos la función $f(x) = d_S(x, x_0)$. Esta función pertenece a $\text{SLip}(X)$, pero no a $\text{Lip}(X)$. En efecto, $f \in \text{SLip}(X)$ como consecuencia directa de la desigualdad triangular. Supongamos que $f \in \text{Lip}(X)$. Luego, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$f(x) - f(y) = d_S(x, x_0) - d_S(y, x_0) \leq \text{Lip}(f)d_S(y, x). \quad (1.3)$$

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión tal que $x_n < x_0$ para todo n y $x_n \rightarrow x_0$ en la topología usual de \mathbb{R} . Con esto, $d_S(x_0, x_n) = x_0 - x_n$ converge a 0. Por otro lado, $f(x_n) - f(x_0) = d_S(x_n, x_0) = 1$, pues $x_n < x_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Combinando esto con la desigualdad (1.3), obtenemos que $1 \leq \text{Lip}(f)d_S(x_0, x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y tomando límite en n se obtiene una contradicción. Se concluye que $f \in \text{SLip}(X) \setminus \text{Lip}(X)$.

Proposición 1.33 [4, Lema 2.5] *Sea (X, d_X) un espacio cuasi-métrico y $A \subset X$ un subconjunto no vacío. Entonces las funciones $f(x) = d_X(x, A)$, $g(x) = -d_X(A, x)$ pertenecen a $\text{SLip}(X)$ y tienen constante de semi-Lipschitz menor o igual a 1.*

Proposición 1.34 [4, Lema 2.6] *Sea (X, d_X) un espacio cuasi-métrico y $A \subset X$ un subconjunto abierto no vacío. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función semi-Lipschitz de constante L . Entonces la función $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\tilde{f}(x) = \inf\{f(a) + Ld_X(x, a) : a \in A\}$$

es una extensión semi-Lipschitz de f de constante L .

Proposición 1.35 [7, Proposición 6] *Sea (X, d_X) una variedad de Finsler conexa, $C > 0$ y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces f es C -Lipschitz si y solo si f es localmente C -Lipschitz, es decir, para cada $p \in X$ existe una vecindad U^p de p tal que para todo $x, y \in U^p$,*

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot d_X(x, y).$$

Proposición 1.36 *Sea (X, d_X) una variedad de Finsler conexa y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces f es C -semi-Lipschitz si y solo si f es localmente C -semi-Lipschitz, es decir, cada $p \in X$ tiene una vecindad U^p tal que para todo $x, y \in U^p$,*

$$f(x) - f(y) \leq C \cdot d_X(x, y).$$

Demostración. La siguiente demostración está fuertemente basada en la demostración de la Proposición 6 de [7].

Supongamos que f es localmente C -semi-Lipschitz. Sean $x, y \in X$ y $\varepsilon > 0$, y sea $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ una curva de clase C^1 de x a y tal que su largo de Finsler $\ell_X(\gamma)$ cumpla que

$$\ell_X(\gamma) \leq d_X(x, y) + \varepsilon.$$

Por hipótesis, cada punto $p \in \gamma([a, b])$ posee una vecindad U^p en la cual f es C -semi-Lipschitz. Por compacidad de $\gamma([a, b])$, sea $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ una partición del intervalo $[a, b]$

tal que, para todo $i = 1, \dots, k$, $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ está contenido en U^p para algún $p \in \gamma([a, b])$. Entonces

$$\begin{aligned}
f(x) - f(y) &\leq \sum_{i=1}^k f(\gamma(t_{i-1})) - f(\gamma(t_i)) \\
&\leq C \cdot \sum_{i=1}^k d_X(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \\
&\leq C \cdot \sum_{i=1}^k \ell_X(\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}) \\
&= C \cdot \ell_X(\gamma) \\
&\leq C \cdot (d_X(x, y) + \varepsilon).
\end{aligned}$$

Se concluye que f es C -semi-Lipschitz. La recíproca es evidente. \square

Definición 1.37 Sea (X, d_X) un espacio cuasi-métrico. Se define el conjunto de las funciones semi-Lipschitz de constante menor o igual a 1:

$$\text{SLip}_1(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f(x) - f(x') \leq d_X(x, x'), \forall x, x' \in X\}.$$

Se define también el conjunto de las funciones Lipschitz de constante menor o igual a 1:

$$\text{Lip}_1(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : |f(x) - f(x')| \leq d_X(x, x'), \forall x, x' \in X\}.$$

Ambos conjuntos son cerrados para combinaciones convexas, y son parcialmente ordenados bajo el orden usual de \mathbb{R}^X .

Observación: Claramente $\text{Lip}_1(X) \subset \text{SLip}_1(X)$ para cualquier espacio cuasi-métrico (X, d_X) . Si la distancia d_X es simétrica, entonces $\text{SLip}_1(X) = \text{Lip}_1(X)$.

Definición 1.38 Sea X un conjunto y \leq una relación de orden parcial sobre X . Se dirá que el par (X, \leq) es un *lattice* si

- Para todo $x, y \in X$ existe una mayor cota inferior del conjunto $\{x, y\}$, denotada por $x \wedge y$.
- Para todo $x, y \in X$ existe una menor cota superior del conjunto $\{x, y\}$, denotada por $x \vee y$.

Ejemplo 2 Sea X un espacio topológico. Entonces $(C(X), \leq)$ es un lattice, con $(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x)$ y $(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x)$ para $f, g \in C(X)$ y $x \in X$.

La estructura de lattice de $C(X)$ tiene una profunda relación con la topología de X . Kaplansky demostró en [12] que para un espacio topológico compacto X , la estructura de lattice del espacio $C(X)$ determina completamente la topología de X .

Proposición 1.39 Sea (X, d_X) un espacio cuasi-métrico. Entonces $\text{SLip}(X)$ y $\text{Lip}(X)$ son lattices con el orden usual de \mathbb{R}^X , y

- $\text{máx}\{\text{SLip}(f \wedge g), \text{SLip}(f \vee g)\} \leq \text{máx}\{\text{SLip}(f), \text{SLip}(g)\}$ para todo $f, g \in \text{SLip}(X)$.
- $\text{máx}\{\text{Lip}(f \wedge g), \text{Lip}(f \vee g)\} \leq \text{máx}\{\text{Lip}(f), \text{Lip}(g)\}$ para todo $f, g \in \text{Lip}(X)$.

Demostración. Sean $f, g \in \text{SLip}(X)$ y sean $x, x' \in X$. Sin perder generalidad, podemos asumir que $(f \vee g)(x) \geq (f \vee g)(x')$ y que $(f \vee g)(x) = f(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} (f \vee g)(x) - (f \vee g)(x') &= f(x) \vee g(x) - f(x') \vee g(x') \\ &= f(x) - f(x') \vee g(x') \\ &\leq f(x) - f(x') \\ &\leq (\text{SLip}(f) \vee \text{SLip}(g))d_X(x, x'). \end{aligned}$$

Tomando supremo sobre $x, x' \in X$, se obtiene que $\text{SLip}(f \vee g) \leq \text{SLip}(f) \vee \text{SLip}(g)$. Para la afirmación análoga para $f \wedge g$, sean $x, x' \in X$. Sin perder generalidad, podemos asumir que $(f \wedge g)(x) \geq (f \wedge g)(x')$ y que $(f \wedge g)(x) = f(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} (f \wedge g)(x) - (f \wedge g)(x') &= f(x) \wedge g(x) - f(x') \wedge g(x') \\ &= f(x) \wedge g(x) - f(x') \\ &\leq f(x) - f(x') \\ &\leq (\text{SLip}(f) \vee \text{SLip}(g))d_X(x, x'). \end{aligned}$$

Tomando supremo sobre $x, x' \in X$, sigue que $\text{SLip}(f \wedge g) \leq \text{SLip}(f) \vee \text{SLip}(g)$. Las afirmaciones para $\text{Lip}(X)$ se obtienen de manera análoga. \square

Definición 1.40 Sea (X, d_X) un espacio cuasi-métrico. Dado que $\text{SLip}_1(X)$ es un lattice cerrado para combinaciones convexas, diremos que tiene estructura de *lattice convexo*. Sea (Y, d_Y) otro espacio cuasi métrico. Diremos que una biyección $T : \text{SLip}_1(Y) \rightarrow \text{SLip}_1(X)$ es un *isomorfismo de lattices convexos* si cumple que

- $T(\lambda f + (1 - \lambda)g) = \lambda Tf + (1 - \lambda)Tg$ para todo $f, g \in \text{SLip}_1(Y)$ y $\lambda \in [0, 1]$.
- $f \leq g$ si y solo si $Tf \leq Tg$.

Observación: Todo isomorfismo de lattices convexos $T : \text{SLip}_1(Y) \rightarrow \text{SLip}_1(X)$ cumple que $T(f \wedge g) = Tf \wedge Tg$ y $T(f \vee g) = Tf \vee Tg$, es decir, preserva la estructura de lattice de los espacios $\text{SLip}_1(Y)$ y $\text{SLip}_1(X)$.

La estructura de lattice convexo de $\text{SLip}_1(X)$ se relaciona naturalmente con casi isometrías sobre X , de la siguiente manera:

Proposición 1.41 Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios cuasi-métricos, $\tau : X \rightarrow Y$ una casi isometría y sea $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $d_Y(\tau(x_1), \tau(x_2)) = d_X(x_1, x_2) + \phi(x_2) - \phi(x_1)$ para todo $x_1, x_2 \in X$. Entonces el mapeo $T : \text{SLip}_1(Y) \rightarrow \text{SLip}_1(X)$ definido por $Tf = f \circ \tau + \phi$ es un isomorfismo de lattices convexos.

Demostración. Veamos que $Tf \in \text{SLip}_1(X)$ para cada $f \in \text{SLip}_1(Y)$. Sean $x, x' \in X$. Entonces

$$\begin{aligned} Tf(x) - Tf(x') &= f(\tau(x)) + \phi(x) - f(\tau(x')) - \phi(x') \\ &\leq d_Y(\tau(x), \tau(x')) + \phi(x) - \phi(x') \\ &= d_Y(\tau(x), \tau(x')) + d_X(x, x') - d_Y(\tau(x), \tau(x')) \\ &= d_X(x, x'). \end{aligned}$$

Se concluye que $Tf \in \text{SLip}_1(X)$. Claramente T es inyectiva, y por simetría, se obtiene que T es biyectiva. Sean $f, g \in \text{SLip}_1(Y)$. Entonces

$$Tf \leq Tg \iff f \circ \tau + \phi \leq g \circ \tau + \phi \iff f \leq g.$$

Finalmente, sea $\lambda \in [0, 1]$. Entonces

$$\lambda Tf + (1 - \lambda)Tg = \lambda(f \circ \tau + \phi) + (1 - \lambda)(g \circ \tau + \phi) = (\lambda f + (1 - \lambda)g) \circ \tau + \phi = T(\lambda f + (1 - \lambda)g).$$

Por lo tanto, T es un isomorfismo de lattices convexos. \square

Proposición 1.42 [4] Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios cuasi métricos, $\alpha \in (0, \infty)$, $\tau : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ una isometría y $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi(x) - \phi(x') < d_X(x, x')$ para todo $x, x' \in X$ tales que $x \neq x'$. Entonces, definiendo $d'_X(x, x') = d_X(x, x') + \phi(x') - \phi(x)$, las funciones

- $T_1 : \text{SLip}_1(Y, d_Y) \rightarrow \text{SLip}_1(X, d_X)$ definida por $T_1f = f \circ \tau$,
- $T_2 : \text{SLip}_1(X, d_X) \rightarrow \text{SLip}_1(X, c \cdot d_X)$ definida por $T_2f = cf$,
- $T_3 : \text{SLip}_1(X, d_X) \rightarrow \text{SLip}_1(X, d'_X)$ definida por $T_3f = f + \phi$

son isomorfismos de lattices convexos.

En [4], J. Cabello y J.A. Jaramillo probaron que para espacios cuasi-métricos completos (X, d_X) e (Y, d_Y) , todo isomorfismo de lattices convexos $T : \text{SLip}_1(Y) \rightarrow \text{SLip}_1(X)$ es una composición de los isomorfismos mencionados en la Proposición 1.42, es decir, T es de la forma $Tf = c \cdot (f \circ \tau) + \phi$.

1.3.1. Funciones Lipschitz y semi-Lipschitz de clase C^1

Definición 1.43 Sea (X, d_X) una variedad de Finsler o un espacio de Banach. Se define el conjunto de las funciones semi-Lipschitz de constante menor o igual a 1 y de clase C^1 :

$$SC_1^1(X) = \{f \in C^1(X) : f(x) - f(x') \leq d_X(x, x'), \forall x, x' \in X\} = C^1(X) \cap \text{SLip}_1(X).$$

Se define también el conjunto de funciones Lipschitz de constante menor o igual a 1 y de clase C^1 :

$$C_1^1(X) = \{f \in C^1(X) : |f(x) - f(x')| \leq d_X(x, x'), \forall x, x' \in X\} = C^1(X) \cap \text{Lip}_1(X).$$

Ambos conjuntos son cerrados para combinaciones convexas, y son parcialmente ordenados bajo el orden usual de \mathbb{R}^X , pero a diferencia de $\text{SLip}_1(X)$ y $\text{Lip}_1(X)$, los espacios $SC_1^1(X)$ y $C_1^1(X)$ no son lattices, pues la diferenciabilidad no se preserva al tomar máximos y mínimos.

Cabe destacar que al tratarse de funciones semi-Lipschitz y diferenciables, las funciones de los espacios $SC(X)_1^1$ y $C_1^1(X)$ son continuas tanto para la topología del espacio cuasi-métrico (X, d_X) (por la Proposición 1.32) como para la topología de variedad de X (como consecuencia de la diferenciabilidad).

Teorema 1.44 [7, Teorema 5] Sea (X, d_X) una variedad de Finsler conexa y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 . Entonces

$$\text{Lip}(f) = \|df\|_\infty.$$

En consecuencia, si (X, d_X) es una variedad de Finsler conexa, entonces $C_1^1(X) = \{f \in C^1(X) : \|df\|_\infty \leq 1\}$. Lo mismo ocurre si X es un espacio de Banach, en virtud del Teorema del valor medio.

Observación: Notar que si (X, d_X) es una variedad de Finsler conexa y reversible, o un espacio de Banach, entonces $SC_1^1(X) = C_1^1(X)$.

Definición 1.45 Sean X e Y variedades de Finsler o espacios de Banach. En vista de que los espacios $SC_1^1(X)$ y $SC_1^1(Y)$ son conjuntos parcialmente ordenados cerrados para combinaciones convexas, diremos que tienen estructura de *conjunto parcialmente ordenado convexo*. Una biyección $T : SC_1^1(Y) \rightarrow SC_1^1(X)$ se dirá *isomorfismo de orden convexo* si preserva combinaciones convexas y orden entre los espacios $SC_1^1(Y)$ y $SC_1^1(X)$, es decir, si cumple

- (i) $T(\lambda f + (1 - \lambda)g) = \lambda Tf + (1 - \lambda)Tg$ para todo $f, g \in SC_1^1(Y)$ y para todo $\lambda \in [0, 1]$,
- (ii) $f \leq g \iff Tf \leq Tg$ para todo $f, g \in SC_1^1(Y)$.

1.3.2. Funciones bump en espacios de Banach.

Definición 1.46 Sea X un espacio de Banach. Una función $b : X \rightarrow \mathbb{R}$ se dirá función *bump* si su soporte $\text{supp}(b) = \overline{\{x \in X : b(x) \neq 0\}}$ es acotado y no vacío.

Definición 1.47 Un espacio de Banach X se dirá *espacio de Asplund* si para cada subconjunto abierto, convexo y no vacío $C \subset X$ y cada función convexa continua $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ existe un subconjunto G_δ denso $D \subset C$ tal que f es Frechét diferenciable en D .

Definición 1.48 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Se dirá que $\|\cdot\|$ es *localmente uniformemente rotunda* (LUR) si para cada $x \in X$ y cada sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $(2\|x\|^2 + 2\|x_n\|^2 - \|x + x_n\|^2) \rightarrow 0$, se cumple que $\|x - x_n\| \rightarrow 0$. Cuando esto se cumpla, se dirá que X es un espacio de Banach localmente uniformemente rotundo, o simplemente que X es LUR.

Teorema 1.49 [6, Teorema 8.6]: Sea X un espacio de Banach separable. Las siguientes son equivalentes:

- (i) X es un espacio de Asplund.
- (ii) X admite una función bump Lipschitz de clase C^1 .
- (iii) X admite una norma equivalente, cuya norma dual es LUR.

Observación: Las tres propiedades nombradas en el Teorema 1.49 no coinciden para espacios de Banach no separables. En este contexto, se conoce que (iii) \implies (ii) \implies (i).

Proposición 1.50 Sea H un espacio de Hilbert. Entonces

- (i) H admite una función bump Lipschitz de clase C^∞ .
- (ii) El dual de H , que es isométricamente isomorfo a H , es LUR.

Demostración. Para la primera afirmación, basta considerar la función bump $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Psi(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right) & \text{para } t \in (-1, 1) \\ 0 & \text{para } t \notin (-1, 1) \end{cases},$$

y definir $b(x) = \Psi(\|x\|)$.

La segunda afirmación es consecuencia directa de que H es uniformemente convexo y que H^* es isométricamente isomorfo a H . \square

1.3.3. Teoremas de aproximación suave de funciones Lipschitz y semi-Lipschitz

En esta sección se presentan diversos resultados de aproximación suave de funciones Lipschitz y semi-Lipschitz recopilados de la literatura, los cuales serán claves para compensar la

falta de estructura de lattice de los espacios $SC_1^1(X)$ y $C_1^1(X)$, pues en virtud de la Proposición 1.39, los máximos y mínimos entre funciones Lipschitz (respectivamente semi-Lipschitz) son también funciones Lipschitz (respectivamente semi-Lipschitz). Algunos de estos resultados debieron ser modificados para funcionar con funciones semi-Lipschitz en lugar de Lipschitz, por lo que se incluyen las demostraciones correspondientes.

Teorema 1.51 [7, Teorema 8]: *Sea X una variedad de Finsler conexa, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función Lipschitz, $\varepsilon : X \rightarrow (0, +\infty)$ una función continua y $r > 0$. Entonces, existe una función Lipschitz $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que:*

$$(i) \quad |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon(x) \quad \forall x \in X.$$

$$(ii) \quad \text{Lip}(g) \leq \text{Lip}(f) + r.$$

Lema 1.52 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y F una norma de Minkowski sobre V . Sea $A \subset V$ un subconjunto abierto no vacío y $\delta > 0$. Considere*

$$A_\delta = \{v + w : v \in A, F(w) < \delta\} = \bigcup_{v \in A} B(v, \delta),$$

donde $B(v, \delta) = \{x \in V : F(v - x) < \delta\}$ es la bola forward del espacio de Minkowski.

Entonces, para cada función semi-Lipschitz $f : A_\delta \rightarrow \mathbb{R}$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe una función semi-Lipschitz $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que

- $|f(v) - g(v)| \leq \varepsilon$ para cada $v \in A$.
- $\text{SLip}(g|_A) \leq \text{SLip}(f|_A)$.

Demostración. La siguiente demostración está fuertemente basada en la demostración del Lema 7 de [7].

Sin perder generalidad, podemos asumir que $V = \mathbb{R}^n$. Por compacidad local de (\mathbb{R}^n, F) , sigue que la norma de Minkowski F es equivalente a la norma Euclídeana $|\cdot|$, es decir, existe $R \geq 1$ tal que

$$\frac{1}{R}|v| \leq F(v) \leq R|v|$$

para cada $v \in \mathbb{R}^n$. Luego, si $f : A_\delta \rightarrow \mathbb{R}$ es semi-Lipschitz de constante C para la norma de Minkowski F , entonces es semi-Lipschitz de constante $C \cdot R$ para la norma Euclídeana, y en particular es uniformemente continua para dicha norma. Sea $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la extensión semi-Lipschitz (con la norma Euclídeana) de f entregada por la Proposición 1.34.

Considere una secuencia $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ regularizadora de clase C^∞ sobre \mathbb{R}^n , donde cada función φ_k es no negativa, $\text{supp}(\varphi_k)$ está contenido en la bola Euclídeana de centro 0 y radio $1/k$ $B(0, 1/k)$, y $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k = 1$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_k(v) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(v + w)\varphi(w)dw.$$

Entonces cada f_k es de clase C^∞ , y gracias a que \tilde{f} es uniformemente continua, tenemos que la sucesión (f_k) converge uniformemente a \tilde{f} en \mathbb{R}^n . Dado $\varepsilon > 0$, sea $k > R/\delta$ suficientemente

grande de modo que $\|f_k - f\|_\infty < \varepsilon$, y sea $g = f_k$. Entonces, para $u, v \in A$,

$$\begin{aligned}
g(u) - g(v) &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(u+w)\varphi(w)dw - \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(v+w)\varphi(w)dw \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\tilde{f}(u+w) - \tilde{f}(v+w))\varphi(w)dw \\
&= \int_{B(0, \frac{1}{k})} (f(u+w) - f(v+w))\varphi(w)dw \\
&\leq C \cdot F(v-u) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(w)dw \\
&\leq C \cdot d_F(u, v).
\end{aligned}$$

Luego $\text{SLip}(g|_A) \leq C = \text{SLip}(f|_A)$. □

Corolario 1.53 *Sea X una variedad de Finsler conexa, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función semi-Lipschitz, $\varepsilon : X \rightarrow (0, +\infty)$ una función continua y $r > 0$. Entonces, existe una función semi-Lipschitz $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que:*

(i) $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon(x) \quad \forall x \in X.$

(ii) $\text{SLip}(g) \leq \text{SLip}(f) + r.$

Demostración. La siguiente demostración está fuertemente basada en la demostración del Teorema 8 de [7].

Sea $C = \text{SLip}(f)$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que para cada $x \in X$, $\varepsilon(x)$ es suficientemente pequeño, de modo que $\varepsilon \leq \frac{r}{2}$ y

$$C(1 + \varepsilon(x))^2 < C + \frac{r}{2}. \tag{1.4}$$

Usando el resultado de [7, Corolario 4], para cada $x \in X$ podemos escoger $\delta_x > 0$ tal que el mapeo exponencial \exp_x sea un difeomorfismo $(1 + \varepsilon(x))$ -bi-Lipschitz de clase C^1 entre la bola $B_x(0_x, 3\delta_x) = \{v \in T_x X : F(x, v) < 3\delta_x\}$ del espacio de Minkowski $T_x X$ y la bola forward $B^+(x, 3\delta_x) \subset X$, donde 0_x denota al vector $0 \in T_x X$. Más aún, por continuidad de f y ε , podemos asumir que $\varepsilon(y) \geq \frac{\varepsilon(x)}{2}$ y $f(x) - f(y) \leq \frac{\varepsilon(x)}{2}$ para cada $y \in B_x(0_x, 3\delta_x)$.

Como X es segundo contable, existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ tal que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_n, \delta_n),$$

donde $\delta_n = \delta_{x_n}$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $f_n : B_{x_n}(0_{x_n}, 3\delta_n) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(v) = f(\exp_{x_n}(v)).$$

Con esto, f_n es $C(1 + \varepsilon(x_n))$ -semi-Lipschitz.

Ahora, se debe construir una partición de la unidad subordinada al recubrimiento

$\{B^+(x_n, 2\delta_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de X , controlando la constante de Lipschitz de las funciones de la partición. Para $n \in \mathbb{N}$, sea $\theta_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ una función de clase C^∞ tal que

$$\theta_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (-\infty, \delta_n] \\ 0 & \text{si } x \in [2\delta_n, \infty) \end{cases},$$

y definamos $\varphi_n : X \rightarrow [0, 1]$ como

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \theta_n(F(x_n, \exp_{x_n}^{-1}(x))) & \text{si } x \in B^+(x_n, 3\delta_n) \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Es claro que cada φ_n es de clase C^1 y Lipschitz. Más aún, $\varphi_n = 1$ en la bola forward $B^+(x_n, \delta_n)$ y $\varphi_n = 0$ en $X \setminus B^+(x_n, 2\delta_n)$. Se definen ahora las funciones $\psi_n : X \rightarrow [0, 1]$ de la siguiente manera: $\psi_1 = \varphi_1$ y, para $n \geq 2$,

$$\psi_n = \varphi_n \cdot \prod_{j < n} (1 - \varphi_j).$$

Luego, es fácil verificar que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

- (i) ψ_n es de clase C^1 y C_n -Lipschitz, con $C_n = \sum_{j \leq n} \text{Lip}(\varphi_j)$.
- (ii) $\text{supp}(\psi_n) \subset \text{supp}(\varphi_n) \subset B^+(x_n, 2\delta_n)$.
- (iii) $\psi_m = 0$ en $B^+(x_n, \delta_n)$, para todo $m > n$.

Con esto, $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es la partición de la unidad buscada. En efecto, para cada $x \in X$, sea $n = n(x)$ el primer natural tal que $x \in B^+(x_n, \delta_n)$. Entonces $\varphi_n(x) = 1$ y $\psi_m(B^+(x_n, \delta_n)) = 0$ para cada $m > n$. Entonces, la familia $\{\text{supp}(\psi_m)\}_m$ es localmente finita. Más aún, $\sum_n \psi_m(x) = 1$, pues

$$\begin{aligned} \sum_m \psi_m(x) &= \psi_1(x) + \psi_2(x) + \dots + \psi_n(x) \\ &= \psi_1(x) + \psi_2(x) + \dots + \psi_{n-1} + \varphi_n(x) \prod_{j < n} (1 - \varphi_j(x)) \\ &= \psi_1(x) + \psi_2(x) + \dots + \varphi_{n-1}(x) \prod_{j < n-1} (1 - \varphi_j(x)) + \prod_{j < n} (1 - \varphi(x)_j) \\ &= \psi_1(x) + \psi_2(x) + \dots + \varphi_{n-2}(x) \prod_{j < n-2} (1 - \varphi_j(x)) + \prod_{j < n-1} (1 - \varphi(x)_j) \\ &\quad \vdots \\ &= \varphi_1(x) + (1 - \varphi_1(x)) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ahora, usando el Lema 1.52, podemos encontrar, para cada $n \in \mathbb{N}$, una función $g_n : T_{x_n} X \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que

$$|g_n(v) - f_n(v)| \leq \frac{\varepsilon(x_n)}{2^{n+2}(C_n + 1)} \quad (1.5)$$

para cada $v \in B(0_{x_n}, 2\delta_n)$, y

$$\text{SLip}(g_n|_{B(0_{x_n}, 2\delta_n)}) \leq \text{SLip}(f_n|_{B(0_{x_n}, 2\delta_n)}) \leq C \cdot (1 + \varepsilon(x_n)). \quad (1.6)$$

Luego, se define la aproximación $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \psi_n(x) \cdot g_n(\exp_{x_n}^{-1}(x))$$

para cada $x \in X$. Como el mapeo exponencial \exp_{x_n} es un difeomorfismo de clase C^1 entre $B(0_{x_n}, 3\delta_n)$ y $B^+(x_n, 3\delta_n)$, la expresión $\psi_n(x) \cdot g_n(\exp_{x_n}^{-1}(x))$ está bien definida para $x \in B^+(x_n, 3\delta_n)$ y es de clase C^1 en $B^+(x_n, 3\delta_n)$. Por otro lado, si $x \notin B^+(x_n, 2\delta_n) \supset \text{supp}(\psi_n)$, entonces $\psi_n(x) = 0$. Por lo tanto, para cada $x \notin B^+(x_n, 3\delta_n)$, podemos asumir que $\psi_n(x) \cdot g_n(\exp_{x_n}^{-1}(x))$ es cero. Con esta convención, y recordando que $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una partición de la unidad de clase C^1 , obtenemos que g está bien definida y es de clase C^1 en X .

Veremos ahora que g y $\text{SLip}(g)$ aproximan a f y $\text{SLip}(f)$ respectivamente. Sea $x \in X$ fijo, y consideremos nuevamente $n = n(x)$ el primer natural tal que $x \in B^+(x_n, \delta_n)$. Denotemos $v_m = \exp_{x_m}^{-1}(x) \in T_{x_m}X$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= \sum_{m \leq n} \psi_m(x) \cdot g_m(\exp_{x_m}^{-1}(x)) - f(x) \\ &= \sum_{m \leq n} \psi_m(x) \cdot g_m(v_m) - f(x) \\ &= \sum_{m \leq n} \psi_m(x) \cdot g_m(v_m) - f_m(v_m) \\ &\leq \sum_{m \leq n} \psi_m(x) \frac{\varepsilon(x_m)}{2^{m+2}(C_m + 1)} \\ &\leq \sum_{m \leq n} \psi_m(x) \frac{\varepsilon(x_m)}{2} \\ &\leq \sum_{m \leq n} \psi_m(x) \varepsilon(x) \\ &\leq \varepsilon(x). \end{aligned}$$

Finalmente, verifiquemos que g es $(C + r)$ -semi-Lipschitz, y por ende que $\text{SLip}(g) \leq \text{SLip}(f) + r$. Por [7, Proposición 6], basta verificar que g es localmente $(C + r)$ -semi-Lipschitz. Sea $z \in X$ fijo, y consideremos nuevamente $n = n(z)$ el primer natural tal que $z \in B^+(x_n, \delta_n)$. Probaremos que g es $(C + r)$ -semi-Lipschitz en el conjunto abierto $U^z = B^+(z, \delta_z) \cap B^-(z, \delta_z)$, donde

$$\delta_z = \frac{1}{2} \min\{\delta_1, \dots, \delta_n, \delta_n - d_F(x_n, z)\}.$$

Para cada $x, y \in X$, denotemos

$$P_{x,y} = \{m \in \{1, \dots, n\} : B^+(x_m, 2\delta_m) \cap \{x, y\} \neq \emptyset\}.$$

Entonces, siempre que $x, y \in U^z$, se tiene que:

- (1) Si $m \in \{1, \dots, n\}$ e $y \in B^+(x_m, 2\delta_m)$, entonces $x \in B^+(x_m, 3\delta_m)$. En efecto, si $x, y \in U^z$, entonces $d_F(y, x) < 2\delta_z \leq \delta_m$. Luego, si $y \in B^+(x_m, 2\delta_m)$, tenemos que

$$d_F(x_m, x) \leq d_F(x_m, y) + d_F(y, x) < 2\delta_m + \delta_m = 3\delta_m,$$

y por lo tanto $x \in B^+(x_m, 3\delta_m)$.

- (2) Para cada $m \in P_{x,y}$ tenemos que $x, y \in B^+(x_m, 3\delta_m)$. En particular, si $m \in P_{x,y}$, entonces $v_m = \exp_{x_m}^{-1}(x)$ y $w_m = \exp_{x_m}^{-1}(y)$ están bien definidos. Usando (1.6) y que $\exp_{x_m}^{-1} : B^+(x_m, 3\delta_m) \rightarrow B_{x_m}(0_{x_m}, 3\delta_m)$ es $(1 + \varepsilon(x_m))$ -Lipschitz, tenemos que

$$\begin{aligned} g_m(v_m) - g_m(w_m) &\leq C \cdot (1 + \varepsilon(x_m)) d_F(\exp_{x_m}^{-1}(x), \exp_{x_m}^{-1}(y)) \\ &\leq C \cdot (1 + \varepsilon(x_m))^2 d_F(x, y). \end{aligned}$$

- (3) Si $m \in \mathbb{N} \setminus P_{x,y}$, entonces $\psi_m(x) = 0 = \psi_m(y)$, pues $\text{supp}(\psi_m) \subset B^+(x_m, 2\delta_m)$ y $\text{supp}(\psi_l) \cap B^+(x_m, \delta_m) = \emptyset$ para cada $l > m$.

En consecuencia, para cada $x, y \in U^z$, y denotando $v_m = \exp_{x_m}^{-1}(x)$ y $w_m = \exp_{x_m}^{-1}(y)$ tenemos que:

$$(i) \quad g(x) = \sum_{m \in P_{x,y}} \psi(x) \cdot g_m(v_m),$$

$$(ii) \quad g(y) = \sum_{m \in P_{x,y}} \psi(y) \cdot g_m(w_m),$$

$$(iii) \quad \sum_{m \in P_{x,y}} \psi(x) = 1 = \sum_{m \in P_{x,y}} \psi(y),$$

$$(iv) \quad g_m(v_m) - g_m(w_m) \leq C \cdot (1 + \varepsilon(x_m))^2 d_F(x, y), \text{ para todo } m \in P_{x,y}.$$

Entonces, como

$$\sum_{m \in P_{x,y}} (\psi_m(x) - \psi_m(y)) \cdot f(x) = 0,$$

se deduce que

$$\begin{aligned} g(x) - g(y) &= \sum_{m \in P_{x,y}} \psi_m(x) \cdot g_m(v_m) - \sum_{m \in P_{x,y}} \psi_m(y) \cdot g_m(w_m) \\ &= \sum_{m \in P_{x,y}} (\psi_m(x) - \psi_m(y)) \cdot (g_m(v_m) - f(x)) + \sum_{m \in P_{x,y}} \psi_m(y) \cdot (g_m(v_m) - g_m(w_m)). \end{aligned}$$

Finalmente, usando (1.4), (1.5), y que ψ_m es C_m -Lipschitz, obtenemos que

$$\begin{aligned} g(x) - g(y) &= \sum_{m \in P_{x,y}} (\psi_m(x) - \psi_m(y)) \cdot (g_m(v_m) - f(x)) + \sum_{m \in P_{x,y}} \psi_m(y) \cdot (g_m(v_m) - g_m(w_m)) \\ &\leq \sum_{m \leq n} \frac{C_m \cdot \varepsilon(x_m)}{(C_m + 1) 2^{m+2}} d_F(x, y) + \sum_{m \leq n} \psi_m(y) \left(C + \frac{r}{2} \right) d_F(x, y) \\ &\leq \sum_{m \leq n} \frac{\varepsilon(z)}{2^{m+1}} d_F(x, y) + \left(C + \frac{r}{2} \right) d_F(x, y) \\ &\leq (C + r) \cdot d_F(x, y), \end{aligned}$$

pues

$$\sum_{m \leq n} \left(\frac{\varepsilon(z)}{2^{m+1}} \right) \leq \varepsilon(z) \leq \frac{r}{2}.$$

Se concluye que g es localmente $(C+r)$ -Lipschitz, y por la Proposición 1.36 se concluye. \square

Teorema 1.54 [10, Teorema 3.0.5](basado en [13]): Sea X un espacio de Hilbert. Entonces, para toda función Lipschitz $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe una función Lipschitz $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que:

(i) $|f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X.$

(ii) $\text{Lip}(g) \leq \text{Lip}(f).$

Teorema 1.55 [10, Teorema 3.1.1]: Sea X un espacio de Banach separable que admita una función bump Lipschitz de clase C^k , con $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Entonces, para cada función Lipschitz $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ y para todo $r > 0$, existe una función Lipschitz $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^k tal que:

(i) $|f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X.$

(ii) $\text{Lip}_{\|\cdot\|}(g) \leq (4+r)\text{Lip}_{\|\cdot\|}(f),$

donde $\text{Lip}_{\|\cdot\|}(f)$ es la constante de Lipschitz de f calculada usando cualquier norma equivalente $\|\cdot\|$ sobre X .

Teorema 1.56 [1, Corolario 3]: Sea U un subconjunto abierto convexo de un espacio de Banach X tal que su dual X^* es LUR. Entonces, para cada función convexa $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ que sea acotada en subconjuntos acotados $B \subset U$ tales que $\text{dist}(B, \partial U) > 0$, y para cada $\varepsilon > 0$ existe una función convexa $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que:

(i) $f - \varepsilon \leq g \leq f.$

(ii) $\text{Lip}(g|_B) \leq \text{Lip}(f|_B)$ para toda bola $B \subset U$.

Observación: Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa y Lipschitz, entonces cumple las hipótesis del Teorema 1.56, y g también será Lipschitz, con $\text{Lip}(g) \leq \text{Lip}(f)$.

1.4. Conjuntos co-zero de funciones suaves en variedades de Finsler

Es un resultado conocido que todo subconjunto abierto U de \mathbb{R}^n puede escribirse como el conjunto *co-zero* de una función suave, es decir, existe una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ suave

tal que $U = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\}$. Este resultado se extiende a variedades diferenciables, y guarda relación con el llamado *Lema de Urysohn suave* [5, Corolario 3.5.5].

En esta sección se probará que el mismo resultado es aplicable a variedades de Finsler, controlando adicionalmente la norma del supremo de la derivada de la función f , garantizando de este modo que f esté en $C_1^1(M)$, y por lo tanto, en $SC_1^1(M)$. La demostración se divide en las siguientes proposiciones:

Proposición 1.57 *Sea O un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n tal que O es de la forma $O = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$, para $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ para todo i en $\{1, \dots, n\}$. Entonces existe una función suave $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ tal que $O = f^{-1}((0, \infty)) = \{f > 0\}$. Más aún, f puede escogerse de modo que $\|df\|_\infty \leq 1$.*

Demostración. Considere funciones bump $f_i : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ tales que $\{f_i > 0\} = (a_i, b_i)$ para cada i en $\{1, \dots, n\}$. Entonces la función $f(x) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$ cumple que $\{f > 0\} = O$.

Claramente $\|df\|_\infty$ es finito, por lo que reemplazando f por $(\|df\|_\infty)^{-1}f$ se concluye. \square

Proposición 1.58 *Sea O un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Entonces existe una función suave $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ tal que $O = \{f > 0\}$. Más aún, f puede escogerse de modo que $\|df\|_\infty \leq 1$.*

Demostración. Sea $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un recubrimiento abierto localmente finito de O tal que cada conjunto U_i es de la forma $(a_1^i, b_1^i) \times \dots \times (a_n^i, b_n^i)$, con $a_j^i, b_j^i \in \mathbb{R}$ y $a_j^i < b_j^i$ para todo j en $\{1, \dots, n\}$ e $i \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 1.57, para cada i en \mathbb{N} existe una función suave f_i tal que $U_i = \{f_i > 0\}$, con $\|df_i\|_\infty \leq 1$. Sea $f = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} f_i$, y denotando $I(x) = \{i \in \mathbb{N} : f_i(x) > 0\}$, se tiene que para cualquier x en \mathbb{R}^n :

$$\|df(x)\| = \left\| \sum_{i \in I(x)} 2^{-i} df_i(x) \right\| \leq \sum_{i \in I(x)} 2^{-i} \|df_i(x)\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \|df_i(x)\| \leq 1.$$

\square

Proposición 1.59 *Sean M una variedad de Finsler de dimensión n y U un subconjunto abierto de M tal que existe una carta local (φ, V) tal que $\bar{U} \subset V$. Entonces existe una función suave $f : M \rightarrow [0, \infty)$ tal que $U = \{f > 0\}$. Más aún, f puede escogerse de modo que $\|df\|_\infty \leq 1$.*

Demostración. Basta tomar la función $g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ dada por la Proposición 1.58, de modo que $\varphi(U) = \{g > 0\}$. Luego, se define $f : U \rightarrow [0, \infty)$ dada por $f(x) = g(\varphi(x))$, y se extiende a M tomando el valor 0 en U^c . Para verificar que f es suave en todo M , basta

estudiar su derivada en la frontera ∂U de U . Con este fin, sea $p \in \partial U$, (W, ψ) una carta local en torno a p y $h \in \mathbb{R}^n$. Si $\psi^{-1}(\psi(p) + h) \in U^c$, entonces

$$\frac{f(\psi^{-1}(\psi(p) + h)) - f(p)}{|h|} = 0,$$

por definición de f en U^c . En caso contrario, es decir, si $\psi^{-1}(\psi(p) + h) \in U$, entonces

$$\frac{f(\psi^{-1}(\psi(p) + h)) - f(p)}{|h|} = \frac{g(\varphi(\psi^{-1}(\psi(p) + h)))}{|h|} = \frac{g(\varphi(\psi^{-1}(\psi(p) + h))) - g(\varphi(p))}{|h|},$$

donde en la última igualdad se restó $g(\varphi(p)) = 0$, pues $\varphi(p) \in \partial\varphi(U)$ y $g \equiv 0$ en $\varphi(U)^c$.

Luego,

$$\frac{f(\psi^{-1}(\psi(p) + h)) - f(p)}{|h|} = \frac{g \circ (\varphi \circ \psi^{-1})[\psi(p) + h] - g \circ (\varphi \circ \psi^{-1})[\psi(p)]}{|h|}$$

para todo $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $\psi^{-1}(\psi(p) + h) \in U$. Pero, al tomar límite cuando h tiende a 0, la última expresión converge a

$$d(g \circ (\varphi \circ \psi^{-1}))[\psi(p)] = dg(\varphi(p)) \circ d(\varphi \circ \psi^{-1})[\psi(p)] = 0,$$

pues $dg(\varphi(p)) = 0$. Con esto, tenemos que para todo $p \in \partial U$,

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{f(\psi^{-1}(\psi(p) + h)) - f(p)}{|h|} = 0,$$

por lo que $df(p) = 0$, con lo que f es de clase C^1 en todo M . Iterando el mismo argumento se concluye que f es suave.

Finalmente, reemplazando f por $(\|df\|_\infty)^{-1}f$, se concluye que $f \in C_1^1(M)$. \square

Lema 1.60 *Sea M una variedad de Finsler de dimensión n y U un subconjunto abierto de M . Entonces existe una función suave $f : M \rightarrow [0, \infty)$ tal que $U = \{f > 0\}$. Más aún, f puede escogerse de modo que $\|df\|_\infty \leq 1$.*

Demostración. Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto localmente finito de U , donde cada U_i es un abierto tal que $\overline{U_i}$ está contenido en una carta local. Como la dimensión topológica (también llamada dimensión de cubrimiento) de la variedad topológica de dimensión n es n , existe un refinamiento $\{W_j\}_{j \in J}$ de orden $n+1$ del recubrimiento $\{U_i\}_{i \in I}$, es decir, $\{W_j\}_{j \in J}$ es un recubrimiento abierto de U tal que para cada j en J existe i en I tal que $W_j \subset U_i$, y cada x en U pertenece a no más de $n+1$ conjuntos W_j del refinamiento. Como la adherencia de cada W_j está contenida en alguna carta local, aplicando la Proposición 1.59, sigue que para cada j en J existe una función suave f_j tal que $\{f_j > 0\} = W_j$, las cuales podemos escoger de modo que $\|df_j\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}$. Definiendo $f = \sum_{j \in J} f_j$, y denotando $J(x) = \{j \in J : f_j(x) > 0\}$,

obtenemos que

$$\|df(x)\| \leq \sum_{j \in J(x)} \|df_j(x)\| \leq (n+1) \frac{1}{n+1} = 1.$$

Por lo que $f \in C_1^1(M)$, y $U = \{f > 0\}$. \square

Capítulo 2

Demostración del teorema principal

En este capítulo demostraremos el resultado principal de este trabajo:

Teorema: Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) variedades de Finsler conexas y completas (vistas como espacios cuasi-métricos). Supongamos que existe un isomorfismo de orden convexo $T : SC_1^1(Y) \rightarrow SC_1^1(X)$ tal que $SLip(T) < 1$. Entonces existen $\alpha > 0$, una cuasi-métrica d'_X sobre X y una biyección $\tau : X \rightarrow Y$ tales que:

- (i) (X, d_X) es casi isométrico a (X, d'_X) .
- (ii) (Y, d_Y) es isométrico a $(X, \alpha d'_X)$ vía τ .
- (iii) X es difeomorfo a Y vía τ .
- (iv) $\forall f \in SC_1^1(Y)$, $Tf = c \cdot (f \circ \tau) + \phi$, con $c = \frac{1}{\alpha}$ y $\phi = T0$.

Más aún, la función $\phi = T0$ debe ser suave.

Gran parte de los argumentos de la demostración de este teorema son replicables en dos clases de espacios de Banach de dimensión infinita: espacios de Hilbert y espacios de Asplund separables cuyos espacios duales sean LUR (ver Definición 1.48). En vista de eso, este capítulo sigue el siguiente esquema: El tronco principal de la demostración está compuesto por proposiciones, lemas y corolarios cuyos argumentos funcionen en ambos contextos (variedades de Finsler y espacios de Banach). Cuando sea necesario, se escribirán proposiciones y demostraciones independientes para los casos Finsler y Banach, escritas una a continuación de la otra, manteniendo así el orden de la demostración. Para facilitar la lectura, se resumen las hipótesis que más usaremos en la siguiente nota:

Nota 2.1 En lo que sigue, X e Y serán simultáneamente alguna de las siguientes estructuras, salvo cuando se indique lo contrario y se especifique sobre cuál de ellas se está trabajando:

1. Variedades de Finsler.
2. Espacios de Hilbert.
3. Espacios de Asplund separables cuyos espacios duales sean LUR,

y $T : SC_1^1(Y) \rightarrow SC_1^1(X)$ será un isomorfismo de orden convexo tal que $SLip(T) < 1$. Cabe destacar que en los casos Hilbert y Asplund, los espacios $SC_1^1(Y)$ y $SC_1^1(X)$ se reducen a $C_1^1(Y)$ y $C_1^1(X)$ respectivamente.

La demostración del teorema principal se divide en tres secciones. La primera sección se centra en relacionar la estructura de conjunto parcialmente ordenado convexo de los espacios $SC_1^1(Y)$ y $SC_1^1(X)$ con la topología de las variedades (o espacios de Banach) correspondientes. La segunda sección consiste en utilizar la relación topológica encontrada en la primera sección para describir de que forma actúa el isomorfismo de orden convexo T . Finalmente, la tercera sección utiliza lo obtenido en las secciones anteriores para encontrar relaciones métricas y cuasi-métricas entre los espacios X e Y .

2.1. Orden, convexidad y topología

El objetivo de esta sección es utilizar las funciones de $SC_1^1(Y)$ y $SC_1^1(X)$ para construir bases adecuadas para las topologías de (Y, d_Y) y (X, d_X) respectivamente. Cabe destacar que las topologías consideradas son las de (Y, d_Y) y (X, d_X) vistos como espacios cuasi-métricos, es decir, las inducidas por las distancias simetrizadas \widetilde{d}_Y y \widetilde{d}_X respectivamente. Dichas topologías pueden no coincidir con las topologías de variedad diferenciable asociadas a X e Y , que corresponden a las generadas por las bolas forward.

Luego, se mostrará que, al ordenar estas bases por inclusión, hay una biyección natural entre ellas que preserva dicha estructura de orden, lo cual permite finalmente obtener subconjuntos densos $X' \subset X$ e $Y' \subset Y$ tales que X' es homeomorfo a Y' , obteniendo así una relación topológica entre (X, d_X) e (Y, d_Y) .

Definición 2.2 Sean X, Y y T como en la Nota 2.1. Para $h \in SC_1^1(Y)$ tal que $SLip(h) < 1$ se definen:

$$SC_1^1(Y)_h = \{f \in SC_1^1(Y) : f \geq h\},$$

$$SC_1^1(X)_{Th} = \{g \in SC_1^1(X) : g \geq Th\} = T(SC_1^1(Y)_h).$$

Luego, para $f \in SC_1^1(Y)_h$, se denotará:

$$\text{supp}_h(f) = \overline{\{y \in Y : f(y) > h(y)\}},$$

$$\text{supp}_{Th}(Tf) = \overline{\{x \in X : Tf(x) > Th(x)\}},$$

$$V_h^f = \text{int}(\text{supp}_h(f)),$$

$$U_{Th}^{Tf} = \text{int}(\text{supp}_{Th}(Tf)).$$

Observación: Tomando $h = 0$ (respectivamente $Th = 0$) en la Definición 2.2, se recupera la definición usual de soporte para funciones positivas en $SC_1^1(Y)$ (respectivamente $SC_1^1(X)$).

Proposición 2.3 Sean X, Y y T como en la Nota 2.1, y sea $h \in SC_1^1(Y)$ tal que $SLip(h) < 1$. Entonces la familia

$$\mathcal{B}_h(Y) = \{V_h^f : f \in SC_1^1(Y)_h\}$$

es una base para la topología de (Y, d_Y) .

Demostración. Dados $y_0 \in Y$ y una bola B que contenga a y_0 , basta tomar una función bump $b \in SC_1^1(Y)_0$, tal que $\text{supp}(b) \subset B$, $b(y_0) > 0$ y $SLip(b) + SLip(h) \leq 1$. Con esto, definiendo $f = h + b$, se tiene que $y_0 \in V_h^f \subset B$. \square

Proposición 2.4 Sean X, Y y T como en la Nota 2.1, y sea $h \in SC_1^1(Y)$ tal que $SLip(h) < 1$. Entonces la familia

$$\mathcal{B}_h(X) = \{U_{Th}^{Tf} : f \in SC_1^1(Y)_h\}$$

es una base para la topología de (X, d_X) .

Demostración. Como $SLip(h) < 1$, existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que $\frac{h}{\lambda} \in SC_1^1(Y)$. Con esto, usando la convexidad de T :

$$\begin{aligned} SLip(Th) &= SLip\left(T\left(\lambda\frac{h}{\lambda}\right)\right) \\ &= SLip\left(T\left(\lambda\frac{h}{\lambda} + (1-\lambda)0\right)\right) \\ &= SLip\left(\lambda T\left(\frac{h}{\lambda}\right) + (1-\lambda)T0\right) \\ &\leq \lambda SLip\left(T\left(\frac{h}{\lambda}\right)\right) + (1-\lambda)SLip(T0) \\ &< 1. \end{aligned}$$

De manera análoga a la Proposición 2.3, dados $x_0 \in X$ y una bola B que contenga a x_0 , sea $b \in SC_1^1(X)_0$ tal que $\text{supp}(b) \subset B$, $b(x_0) > 0$ y $SLip(b) + SLip(Th) \leq 1$. Como $Th + b \geq Th$ y T es isomorfismo de orden convexo, existe $f \in SC_1^1(Y)_h$ tal que $Tf = Th + b$. Así, $x_0 \in U_{Th}^{Tf} \subset B$, por lo que se concluye. \square

Para cada $h \in SC_1^1(Y)$ tal que $SLip(h) < 1$, hemos construido bases $\mathcal{B}_h(X)$ y $\mathcal{B}_h(Y)$ para las topologías de (X, d_X) e (Y, d_Y) respectivamente. Observando cómo están definidos los conjuntos de dichas bases, es evidente la existencia de una biyección natural entre $\mathcal{B}_h(Y)$ y $\mathcal{B}_h(X)$:

Definición 2.5 Sean X, Y y T como en la Nota 2.1. Para $h \in SC_1^1(Y)$ tal que $SLip(h) < 1$, se define

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_h : \mathcal{B}_h(Y) &\rightarrow \mathcal{B}_h(X) \\ V_h^f &\rightarrow U_{Th}^{Tf} \end{aligned}$$

A continuación se probará que, para cada $h \in SC_1^1(Y)$ tal que $SLip(h) < 1$, la biyección \mathcal{I}_h respeta la estructura de orden de los conjuntos parcialmente ordenados $(\mathcal{B}_h(Y), \subset)$ y $(\mathcal{B}_h(X), \subset)$. Para esto, será necesario introducir algunas notaciones:

Notación: *Basándonos en las ideas de [15], se introducen las siguientes notaciones, para X, Y y T como en la Nota 2.1, $h \in SC_1^1(Y)$ tal que $SLip(h) < 1$, y $f, g \in SC_1^1(Y)_h$:*

$$(i) \quad f \sqcap_h g = \{u \in SC_1^1(Y)_h : u \leq f, u \leq g\}.$$

$$(ii) \quad f \sqsubset_h g \text{ si para todo } u \in SC_1^1(Y)_h, u \sqcap_h g = \{h\} \implies u \sqcap_h f = \{h\}.$$

$$(iii) \quad Tf \sqcap_{Th} Tg = \{v \in SC_1^1(X)_{Th} : v \leq Tf, v \leq Tg\}.$$

$$(iv) \quad Tf \sqsubset_{Th} Tg \text{ si para todo } v \in SC_1^1(X)_{Th}, v \sqcap_{Th} Tg = \{Th\} \implies v \sqcap_{Th} Tf = \{Th\}.$$

Proposición 2.6 *Sean X, Y y T como en la Nota 2.1, $h \in SC_1^1(Y)$ tal que $SLip(h) < 1$ y sean $f, g \in SC_1^1(Y)_h$. Entonces*

$$(i) \quad f \sqcap_h g = \{h\} \iff V_h^f \cap V_h^g = \emptyset.$$

$$(ii) \quad f \sqsubset_h g \iff V_h^f \subset V_h^g \iff \text{supp}_h(f) \subset \text{supp}_h(g).$$

$$(iii) \quad Tf \sqcap_{Th} Tg = \{Th\} \iff U_{Th}^{Tf} \cap U_{Th}^{Tg} = \emptyset.$$

$$(iv) \quad Tf \sqsubset_{Th} Tg \iff U_{Th}^{Tf} \subset U_{Th}^{Tg} \iff \text{supp}_{Th}(Tf) \subset \text{supp}_{Th}(Tg).$$

Demostración. (i) Para la suficiencia, si $V_h^f \cap V_h^g = \emptyset$ y $u \in f \sqcap_h g$, entonces $u(y) \leq f(y) \wedge g(y)$ para todo $y \in (V_h^f)^c \cup (V_h^g)^c = Y$, con lo que $u = h$.

Para la necesidad, supongamos que $V_h^f \cap V_h^g \neq \emptyset$ y sea $y \in V_h^f \cap V_h^g$. Como $y \in \text{supp}_h(f)$, existe una sucesión $(y_n) \subset \{y : f(y) > h(y)\}$, con $y_n \rightarrow y$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_N \in V_h^f \cap V_h^g$, y $f(y_N) > h(y_N)$. Como $y_N \in \text{supp}_h(g)$, existe una sucesión $(y^j) \subset \{y : g(y) > h(y)\}$ tal que $y^j \rightarrow y_N$, y existe $J \in \mathbb{N}$ tal que $y^J \in (f - h)^{-1}(0, \infty) \cap V_h^f \cap V_h^g$, con lo que $f(y^J) \vee g(y^J) > h(y^J)$. Tomando una función bump $b \in SC_1^1(Y)_0$ adecuada que tenga valor positivo en el punto y^J , se tiene que $h \lesssim b + h \in f \sqcap_h g$, por lo que se concluye que $f \sqcap_h g \neq \{h\}$.

(ii) Sean $f, g \in SC_1^1(Y)_h$

$$\begin{aligned} f \sqsubset_h g &\iff [\forall u \in SC_1^1(Y)_h, u \sqcap_h g = \{h\} \implies u \sqcap_h f = \{h\}], \\ &\iff [\forall u \in SC_1^1(Y)_h, V_h^u \cap V_h^g = \emptyset \implies V_h^u \cap V_h^f = \emptyset], \\ &\iff [\forall u \in SC_1^1(Y)_h, V_h^g \subset (V_h^u)^c \implies V_h^f \subset (V_h^u)^c]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Con esto, claramente $V_h^f \subset V_h^g$ implica $f \sqsubset_h g$. Por otro lado, como $\mathcal{B}_h(Y)$ es base de abiertos, podemos escribir el cerrado $\overline{V_h^g}$ como intersección de conjuntos de la forma

$(V_h^u)^c$. Sea $\mathcal{H} \subset SC_1^1(Y)_h$ tal que $\overline{V_h^g} = \bigcap_{u \in \mathcal{H}} (V_h^u)^c$. Luego, por la expresión (2.1):

$$f \sqsubset_h g \implies \forall u \in \mathcal{H} V_h^g \subset (V_h^u)^c \implies V_h^f \subset (V_h^u)^c,$$

con lo que

$$V_h^f \subset \overline{V_h^g} \implies \overline{V_h^f} \subset \overline{V_h^g} \implies V_h^f \subset V_h^g,$$

pues los elementos de $\mathcal{B}_h(Y)$ son abiertos regulares (es decir, coinciden con el interior de su adherencia).

Las demostraciones de (iii) y (iv) son análogas a las de (i) y (ii). \square

Con esto, hemos mostrado que las inclusiones entre elementos de la familia $\mathcal{B}_h(Y)$ pueden ser descritas mediante de la relación \sqsubset_h sobre $SC_1^1(Y)_h$, y lo mismo para las inclusiones entre elementos de $\mathcal{B}_h(X)$, usando en este caso la relación \sqsubset_{Th} sobre $SC_1^1(X)_h$. Usando que ambas relaciones dependen exclusivamente de las estructuras de orden de $SC_1^1(Y)$ y $SC_1^1(X)$, mostraremos a continuación que podemos usar el isomorfismo T para relacionar las inclusiones entre los miembros de cada base.

Proposición 2.7 Sean X, Y y T como en la Nota 2.1, $h \in SC_1^1(Y)$ tal que $\text{SLip}(h) < 1$ y sean $f, g \in SC_1^1(Y)_h$. Entonces

$$f \sqsubset_h g \iff Tf \sqsubset_{Th} Tg.$$

En consecuencia,

$$V_h^f \subset V_h^g \iff U_{Th}^{Tf} \subset U_{Th}^{Tg}.$$

Demostración. Sean $f, g \in SC_1^1(Y)_h$. Usando que T es biyección que preserva orden, se obtiene sucesivamente:

$$\begin{aligned} f \sqsubset_h g &\iff [\forall u \in SC_1^1(Y)_h, u \sqcap_h g = \{h\} \implies u \sqcap_h f = \{h\}], \\ &\iff [\forall u \in SC_1^1(Y)_h, \{v \in SC_1^1(Y)_h : v \leq u \wedge g\} = \{h\} \implies \\ &\quad \{v \in SC_1^1(Y)_h : v \leq u \wedge f\} = \{h\}], \\ &\iff [\forall Tu \in SC_1^1(X)_{Th}, \{Tv \in SC_1^1(X)_{Th} : Tv \leq Tu \wedge Tg\} = \{Th\} \implies \\ &\quad \{Tv \in SC_1^1(X)_{Th} : Tv \leq Tu \wedge Tf\} = \{Th\}], \\ &\iff Tf \sqsubset_{Th} Tg. \end{aligned}$$

La segunda afirmación es consecuencia directa de la Proposición 2.6. \square

Corolario 2.8 Sean X, Y y T como en la Nota 2.1, y $h \in SC_1^1(Y)$ tal que $\text{SLip}(h) < 1$. Entonces la función $\mathcal{I}_h : \mathcal{B}_h(Y) \rightarrow \mathcal{B}_h(X)$ definida por $\mathcal{I}_h(V_h^f) = U_{Th}^{Tf}$ es una biyección que preserva inclusiones, es decir, para $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_h(Y)$, $V_1 \subset V_2 \iff \mathcal{I}_h(V_1) \subset \mathcal{I}_h(V_2)$.

A continuación, se mostrará que las mayoraciones locales entre elementos de $SC_1^1(Y)$ pueden caracterizarse usando la estructura de conjunto parcialmente ordenado convexo de $SC_1^1(Y)$.

Notación: Para $h \in SC_1^1(Y)$ fijo, $g \in SC_1^1(Y)_h$ y $\lambda \in [0, 1]$, se denotará por g_λ a la función $\lambda g + (1 - \lambda)h$.

Proposición 2.9 Sean X, Y y T como en la Nota 2.1, y $h \in SC_1^1(Y)$ tal que $SLip(h) < 1$. Sean $\varphi, \psi, f \in SC_1^1(Y)_h$. Entonces:

$$\varphi \geq \psi \text{ en } V_h^f \iff \forall \lambda \in [0, 1], \forall u \sqsubset_h f, \psi_\lambda \sqcap_h u \subset \varphi_\lambda \sqcap_h u.$$

Demostración. Para la implicancia de derecha a izquierda, supongamos que existe $y_0 \in V_h^f$ tal que $\psi(y_0) > \varphi(y_0)$. Entonces, existe una bola B que contiene a y_0 tal que $\psi > \varphi$ en B . Más aún, podemos tomar $u \in SC_1^1(Y)_h$ definida por $u = h + b$, con $b : Y \rightarrow [0, \varepsilon]$ función bump C^1 Lipschitz con soporte en B tal que $b(y_0) = \varepsilon > 0$. Con esto, $u(y_0) = \alpha > h(y_0)$ e $y_0 \in \overline{V_h^u} \subset B \subset V_h^f$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $\psi(y_0) > \alpha$. Sea $\lambda \in [0, 1]$ tal que $\psi_\lambda(y_0) > \alpha > \varphi_\lambda(y_0)$. Sea $\eta : Y \rightarrow [0, 1]$ función bump C^1 Lipschitz tal que $\eta|_{\{\psi_\lambda < u\}} = 0$, $\eta(y_0) = 1$, y definamos $v = \eta b + h$. Notemos que v es semi-Lipschitz: En efecto, sean $y, y' \in Y$:

$$\begin{aligned} v(y') - v(y) &= \eta(y')b(y') + h(y') - \eta(y)b(y) - h(y) \\ &= \eta(y')b(y') - \eta(y')b(y) + \eta(y')b(y) - \eta(y)b(y) + h(y') - h(y) \\ &\leq \|\eta\|_\infty(b(y') - b(y)) + \|b\|_\infty(\eta(y') - \eta(y)) + SLip(h)d_Y(y', y) \\ &\leq (\text{Lip}(b) + \varepsilon\text{Lip}(\eta) + SLip(h))d_Y(y', y). \end{aligned}$$

Sea $t \in [0, 1]$ tal que $v_t \in SC_1^1(Y)$. Notando que para $g \in SC_1^1(Y)$ y $\lambda \in [0, 1]$,

$$(g_\lambda)_t = tg_\lambda + (1 - t)h = \lambda tg + (1 - \lambda t)h = g_{\lambda t},$$

se tiene que:

- $v_t \in SC_1^1(Y)_h$,
- $v_t \sqsubset_h f$, pues $\text{supp}_h(v_t) \subset \text{supp}(b) \subset B \subset \text{supp}_h(f)$,
- $v_t(y) \leq \psi_{\lambda t}(y) \quad \forall y \in Y$,
- $v_t(y_0) = u_t(y_0) > \varphi_{\lambda t}(y_0)$.

Se concluye que $v_t \in (\psi_{\lambda t} \sqcap_h v_t) \setminus (\varphi_{\lambda t} \sqcap_h v_t)$, lo que contradice la hipótesis. La implicancia de izquierda a derecha es directa. \square

Lema 2.10 Sean X, Y y T como en la Nota 2.1, y $h \in SC_1^1(Y)$ tal que $SLip(h) < 1$. Sean $\varphi, \psi, f \in SC_1^1(Y)_h$. Entonces:

$$\varphi \geq \psi \text{ en } V_h^f \iff T\varphi \geq T\psi \text{ en } U_{Th}^{Tf}.$$

Demostración. Se desprende de la Proposición 2.9, dado que el lado derecho de ésta involucra solo la estructura de orden convexo de $SC_1^1(Y)$, la cual es preservada por el isomorfismo T . En concreto, basta notar que para $u, v, f, g \in C_1^1(Y)_h$,

$$\begin{aligned} u \sqsubset_h f &\iff Tu \sqsubset_h Tf, \\ v \in f \sqcap_h g &\iff Tv \in Tf \sqcap_h Tg, \end{aligned}$$

y que $(T\varphi)_\lambda = T(\varphi_\lambda)$, para toda $\varphi \in SC_1^1(Y)_h$ y todo $\lambda \in [0, 1]$. \square

El lema anterior es un resultado muy interesante, pues muestra un “comportamiento local” del isomorfismo T . En un comienzo, solo teníamos información sobre mayoraciones entre $T\varphi$ y $T\psi$ para funciones que cumplieren $\varphi \leq \psi$ o bien $\varphi \geq \psi$. Gracias al Lema 2.10, podemos afirmar que el isomorfismo T preserva mayoraciones locales sobre elementos de las bases $\mathcal{B}_h(Y)$ y $\mathcal{B}_h(X)$, lo cual es mucho más fuerte que lo garantizado por la definición de isomorfismo de orden convexo. Esto será de vital importancia en la siguiente sección.

A continuación se mostrará que las bases $\mathcal{B}_h(Y)$, $\mathcal{B}_h(X)$ y la biyección \mathcal{I}_h no dependen de la elección de h . Para esto, en el caso Finsler, será fundamental el resultado entregado por el Lema 1.60.

Proposición 2.11 Sean X, Y y T como en la Nota 2.1, y $h \in SC_1^1(Y)$ tal que $SLip(h) < 1$. Entonces

$$\mathcal{B}_h(Y) = \mathcal{B}_0(Y) := \mathcal{B}(Y).$$

Demostración. Sea $V_0^f \in \mathcal{B}(X)$. Como $SLip(h) < 1$, existe $\lambda \in (0, 1]$ tal que $\lambda f + h \in SC_1^1(Y)$, con lo que $\{f > 0\} = \{\lambda f + h > h\}$, y en consecuencia obtenemos que $V_0^f = V_h^{\lambda f + h} \in \mathcal{B}_h(Y)$.

Recíprocamente, sea $V_h^g \in \mathcal{B}_h(Y)$. Si Y es una variedad de Finsler, como el conjunto $\{g > h\}$ es abierto, existe $f \in SC_1^1(Y)_0$ tal que $\{f > 0\} = \{g > h\}$. Sigue que $V_h^g = V_0^f \in \mathcal{B}(Y)$.

Si Y es un espacio de Banach, basta considerar $f = \lambda(g - h)$, con $\lambda \in (0, 1)$ suficientemente chico de modo que $f \in C_1^1(Y)$. Esto es posible, pues cuando la distancia asociada es simétrica, $SC_1^1(Y) = C_1^1(Y)$, y la diferencia de dos funciones Lipschitz es también una función Lipschitz, lo cual no necesariamente ocurre para funciones semi-Lipschitz en espacios cuasi-métricos. \square

Proposición 2.12 Sean X, Y y T como en la Nota 2.1, y $h \in SC_1^1(Y)$ tal que $SLip(h) < 1$. Entonces

$$\mathcal{B}_h(X) = \mathcal{B}_0(X) := \mathcal{B}(X).$$

Demostración. Consideramos primero el caso en que X es una variedad de Finsler:

Sea $U_{T0}^{Tf} \in \mathcal{B}(X)$. Aplicando el Lema 1.60 existe $g \in SC_1^1(X)_0$ tal que $\{Tf > T0\} = \{g > 0\}$. Tomando $\lambda \in (0, 1]$ tal que $\lambda g + Th \in SC_1^1(X)$, notamos que como $\lambda g + Th \geq Th$, existe $\tilde{f} \in SC_1^1(Y)$, con $\tilde{f} \geq h$, tal que $T\tilde{f} = \lambda g + Th$. Con esto, $\{Tf > T0\} = \{T\tilde{f} > Th\}$ y $U_{T0}^{Tf} = U_{Th}^{T\tilde{f}} \in \mathcal{B}_h(X)$.

Recíprocamente, sea $U_{Th}^{Tf} \in \mathcal{B}_h(X)$ y $g \in SC_1^1(X)_0$, obtenida gracias al Lema 1.60, tal que $\{Tf > Th\} = \{g > 0\}$. Tomando $\lambda \in (0, 1]$ tal que $\lambda g + T0 \in SC_1^1(X)$, se concluye que $U_{Th}^{Tf} = U_{T0}^{\lambda g + T0} \in \mathcal{B}(X)$.

Supongamos ahora que X es un espacio de Banach, dado $U_{T0}^{Tf} \in \mathcal{B}(X)$, entonces para $\lambda \in (0, 1)$ tal que $\lambda(Tf - T0) + Th \in C_1^1(X)$, existe $g \in C_1^1(Y)$ tal que $Tg = \lambda(Tf - T0) + Th$. Más aún, como $\lambda(Tf - T0) + Th \geq Th$, necesariamente $g \geq h$. Entonces, $U_{T0}^{Tf} = U_{Th}^{Tg}$ pertenece a $\mathcal{B}_h(X)$.

Recíprocamente, dado $U_{Th}^{Tf} \in \mathcal{B}_h(X)$, tomando $\lambda \in (0, 1)$ tal que $T0 + \lambda(Tf - Th) \in C_1^1(X)$, y como $T0 + \lambda(Tf - Th) \geq T0$, sigue que existe $g \in C_1^1(Y)_0$ tal que $Tg = T0 + \lambda(Tf - Th)$, con lo que $U_{Th}^{Tf} = U_{T0}^{Tg} \in \mathcal{B}(X)$. \square

Proposición 2.13 Sean X, Y y T como en la Nota 2.1, $h \in SC_1^1(Y)$ tal que $SLip(h) < 1$ y $U \in \mathcal{B}(X)$. Entonces, $V = \mathcal{I}_h^{-1}(U)$ es el único conjunto en $\mathcal{B}(Y)$ tal que para todo $\varphi, \psi \in SC_1^1(Y)_h$

$$\varphi \geq \psi \text{ en } V \iff T\varphi \geq T\psi \text{ en } U. \quad (2.2)$$

Demostración. En virtud del Lema 2.10, sabemos que V cumple la propiedad (2.2). Sea $\tilde{V} \neq V$ en $\mathcal{B}(Y)$ que también cumpla dicha propiedad. Sin perder generalidad, podemos asumir que $V \setminus \tilde{V} \neq \emptyset$. Como ambos conjuntos son abiertos regulares (es decir, coinciden con el interior de su adherencia), existen $y \in V \setminus \tilde{V}$ y $\varepsilon > 0$ tal que $B(y, \varepsilon) := B$ está contenido en $V \setminus \tilde{V}$. En efecto, en caso contrario para cada $y \in V$, $d(y, \tilde{V}) = 0$, con lo cual $V \subset \tilde{V}$ y por ende $V \subset \tilde{V}$, lo cual es una contradicción.

Dados $y_1 \neq y_2$ en B , es posible tomar $\varphi, \psi \in SC_1^1(Y)_h$ tales que $\text{supp}_h(\varphi), \text{supp}_h(\psi) \subset B$, $\varphi(y_1) < \psi(y_1)$ y $\psi(y_2) < \varphi(y_2)$. Con esto, $\varphi \not\geq \psi$ en $B \subset V$, pero $\varphi \geq \psi$ en \tilde{V} , y usando la propiedad (2.2) se obtiene que $T\varphi \geq T\psi$ en U y en consecuencia $\varphi \geq \psi$ en V , lo cual es una contradicción. Se concluye que $V = \tilde{V}$. \square

La Proposición 2.13 nos dice que el conjunto $V = \mathcal{I}_h^{-1}(U)$ queda caracterizado por la propiedad (2.2). Usaremos esto para probar que $\mathcal{I}_{h_1} = \mathcal{I}_{h_2}$ para todo $h_1, h_2 \in SC_1^1(Y)$ tales que $\text{máx}\{SLip(h_1), SLip(h_2)\} < 1$. Primero se probará para un caso particular.

Proposición 2.14 Sean X, Y y T como en la Nota 2.1, y $h_1, h_2 \in SC_1^1(Y)$, tales que $h_1 \leq h_2$ y $\text{máx}\{SLip(h_1), SLip(h_2)\} < 1$. Entonces $\mathcal{I}_{h_1} = \mathcal{I}_{h_2}$.

Demostración. Sean $U \in \mathcal{B}(X)$. Se mostrará que $\mathcal{I}_{h_1}^{-1}(U) = \mathcal{I}_{h_2}^{-1}(U)$. Para esto, sean $\varphi, \psi \in SC_1^1(Y)_{h_2}$ tales que $\varphi \geq \psi$ en $V_2 := \mathcal{I}_{h_2}^{-1}(U)$. Luego, por el Lema 2.10, $T\varphi \geq T\psi$ en U . Con esto, y como $h_1 \leq h_2$, $\varphi, \psi \in SC_1^1(Y)_{h_1}$, y por el Lema 2.10 se tiene que $\varphi \geq \psi$ en $V_1 := \mathcal{I}_{h_1}^{-1}(U)$. Por la Proposición 2.13, $V_1 = V_2$, es decir, $\mathcal{I}_{h_1} = \mathcal{I}_{h_2}$. \square

Para pasar al caso general, será necesario recurrir a los Teoremas de aproximación suave de funciones Lipschitz y semi-Lipschitz vistos en la Sección 1.3.3. En vista de esto, será necesario

tratar por separado los casos Finsler, Hilbert y Asplund separable cuando sea pertinente. En lo que sigue, salvo que se diga lo contrario, las variedades de Finsler X e Y se asumirán conexas.

Corolario 2.15 Sean X, Y variedades de Finsler y T como en la Nota 2.1. Sea $h \in SC_1^1(Y)$ tal que $SLip(h) < 1$. Entonces

$$\mathcal{I}_h = \mathcal{I}_0 := \mathcal{I}.$$

Demostración. Sea $h \vee 0$ la función máximo entre h y 0 , la cual pertenece a $SLip_1(Y)$ y cumple que $SLip(h \vee 0) \leq SLip(h) < 1$. Sea entonces $\eta > 0$ tal que $SLip(h) + \eta < 1$ y $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ aproximación semi-Lipschitz de clase C^1 entregada por el Corolario 1.53, usando $\varepsilon = \frac{\eta}{2}$ y $r = \eta$. Reemplazando g por $g + \varepsilon$ se obtiene una aproximación por arriba de $h \vee 0$, es decir:

- $g \geq h \vee 0$.
- $g(y) - (h \vee 0)(y) \leq \eta \quad \forall y \in Y$.
- $SLip(g) \leq SLip(h \vee 0) + \eta < 1$.

Con esto, $g \in SC_1^1(Y)$, $SLip(g) < 1$ y $g \geq h, 0$. Por la Proposición 2.14, $\mathcal{I}_h = \mathcal{I}_g = \mathcal{I}_0$. \square

Corolario 2.16 Sean X e Y espacios de Hilbert (respectivamente espacios de Asplund separables) y T como en la Nota 2.1. Sea $h \in C_1^1(Y)$ tal que $Lip(h) < 1$. Entonces

$$\mathcal{I}_h = \mathcal{I}_0 := \mathcal{I}.$$

Demostración. La demostración es análoga al corolario anterior, pero debe usarse otro resultado de aproximación. Sea $r > 0$ arbitrario y $K = 4 + r$.

Si $Lip(h) < \frac{1}{K}$, la función $h \vee 0$ pertenece a $Lip_1(Y)$ y cumple que $Lip(h \vee 0) \leq Lip(h) < \frac{1}{K}$. Sea entonces $g \in C^1(Y)$ aproximación Lipschitz por arriba (obtenida utilizando el Teorema 1.54 o el Teorema 1.55 para los casos Hilbert y Banach respectivamente) de $h \vee 0$, es decir:

- $g \geq h \vee 0$.
- $g(y) - (h \vee 0)(y) \leq \varepsilon \quad \forall y \in Y$.
- $SLip(g) \leq K Lip(h \vee 0) < 1$.

Con esto, $g \in C_1^1(Y)$, $Lip(g) < 1$ y $g \geq h, 0$. Por la Proposición 2.14, $\mathcal{I}_h = \mathcal{I}_g = \mathcal{I}_0$.

Si $Lip(h) \geq \frac{1}{K}$, entonces consideramos $\lambda \in (0, 1)$ tal que $Lip(\lambda h) < \frac{1}{K}$ para reducir al caso anterior, con lo que $\mathcal{I}_{\lambda h} = \mathcal{I}_g = \mathcal{I}_0$. Finalmente, notando que, dado $f \in SC_1^1(Y)_h$, $V_h^f = V_{\lambda h}^{\lambda f}$

y que

$$\begin{aligned}
U_{T(\lambda h)}^{T(\lambda f)} &= \text{int} \left(\overline{\{T(\lambda f) > T(\lambda h)\}} \right) \\
&= \text{int} \left(\overline{\{\lambda T f + (1 - \lambda)T 0 > \lambda T h + (1 - \lambda)T 0\}} \right) \\
&= \text{int} \left(\overline{\{T f > T h\}} \right) \\
&= U_{T h}^{T f},
\end{aligned}$$

se obtiene que

$$\mathcal{I}_{\lambda h} \left(V_h^f \right) = U_{T(\lambda h)}^{T(\lambda f)} = U_{T h}^{T f} = \mathcal{I}_h \left(V_h^f \right),$$

por lo que $\mathcal{I}_{\lambda h} = \mathcal{I}_h = \mathcal{I}_0$. □

En vista del resultado anterior, se trabajará con $\mathcal{B}(Y)$, $\mathcal{B}(X)$ e $\mathcal{I} : \mathcal{B}(Y) \rightarrow \mathcal{B}(X)$. En lo que sigue, cuando X e Y sean variedades de Finsler, estas se asumirán completas (en el sentido de los espacios cuasi-métricos). El siguiente lema será de vital importancia en lo que resta de este capítulo, por lo que se incluirá la demostración presentada en [16].

Lema 2.17 [16, Lema 6] Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios métricos completos, y sean $B(X)$, $B(Y)$ bases para las topologías de (X, d_X) e (Y, d_Y) respectivamente. Si $\mathcal{I} : B(Y) \rightarrow B(X)$ es una biyección que preserva inclusiones, entonces existen subconjuntos densos $X' \subset X$ e $Y' \subset Y$ y un homeomorfismo $\tau : X' \rightarrow Y'$ tales que, para cada $x \in X'$ y $V \in B(Y)$

$$\tau(x) \in V \iff x \in \mathcal{I}(V).$$

Demostración. Sea $(x, y) \in X \times Y$. Escribiremos $x \sim y$ si

$$\bigcap_{y \in V} \mathcal{I}(V) = \{x\} \quad \text{y} \quad \bigcap_{x \in U} \mathcal{I}^{-1}(U) = \{y\}.$$

Notemos que si $x \sim y$ y $x \sim y'$, necesariamente $y = y'$. Del mismo modo, si $x \sim y$ y $x' \sim y$, entonces $x = x'$. Sea X' el subconjunto de todos los $x \in X$ tales que existe un $y \in Y$ tal que $x \sim y$, y sea Y' el subconjunto de los $y \in Y$ tales que existe un $x \in X$ tal que $x \sim y$. Veamos que la función $\tau : X' \rightarrow Y'$ tal que $\tau(x)$ es el único elemento en Y' tal que $x \sim \tau(x)$ es un homeomorfismo. En efecto, sea (x_n) una sucesión en X' tal que $x_n \rightarrow x \in X'$. Para cualquier vecindad V de $\tau(x)$ podemos escoger $V_1 \in B(Y)$ tal que $\tau(x) \in V_1 \subset V$. Luego, $\mathcal{I}(V_1)$ es vecindad de x (pues $\{x\} \subset \mathcal{I}(V_1)$), por lo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in \mathcal{I}(V_1)$ para todo $n \geq N$, y por ende $\{\tau(x_n)\} \subset \mathcal{I}^{-1}(\mathcal{I}(V_1)) = V_1$. La continuidad de τ^{-1} sigue por simetría.

Falta verificar que Y' es denso en Y , pues la densidad de X' en X se tendrá por simetría.

Sea \tilde{V} subconjunto abierto no vacío de Y . Mostraremos que $\tilde{V} \cap Y' \neq \emptyset$. Sea $V_1 \in B(Y)$ no vacío tal que $\overline{V_1} \subset \tilde{V}$ y $\text{diam}(V_1) \leq 1$. Sea $U_1 \in B(X)$ no vacío tal que $U_1 \subset \mathcal{I}(V_1)$ y $\text{diam}(U_1) \leq 1$. Luego, escogemos $V_2 \in B(Y)$ no vacío tal que $V_2 \subset \mathcal{I}^{-1}(U_1)$, $\overline{V_2} \subset V_1$ y $\text{diam}(V_2) \leq 1/2$. Sea entonces $U_2 \in B(X)$ no vacío tal que $U_2 \subset \mathcal{I}(V_2)$, $\overline{U_2} \subset U_1$ y $\text{diam}(U_2) \leq 1/2$. Continuando este proceso, obtenemos sucesiones (V_n) y (U_n) en $B(Y)$ y $B(X)$ respectivamente, tales que para cada $n \in \mathbb{N}$:

- $\overline{V_{n+1}} \subset V_n$ y $\overline{U_{n+1}} \subset U_n$.
- V_n y U_n tienen diámetro menor o igual a $1/n$.
- $\mathcal{I}(V_{n+1}) \subset U_n \subset \mathcal{I}(V_n)$.

Con esto, existen $y \in Y$ y $x \in X$ tales que

$$\{y\} = \bigcap_n \overline{V_n} = \bigcap_n V_n \quad \text{y} \quad \{x\} = \bigcap_n \overline{U_n} = \bigcap_n U_n.$$

Notando que

$$\{x\} = \bigcap_n \mathcal{I}(V_n) \supset \bigcap_{y \in V} \mathcal{I}(V)$$

y que para cada $V \in \mathcal{B}(Y)$ tal que $y \in V$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y \in V_n \subset V$, usando que \mathcal{I} preserva inclusiones

$$\mathcal{I}(V) \supset \mathcal{I}(V_n) \supset U_n \ni x.$$

Por lo que $\bigcap_{y \in V} \mathcal{I}(V) = \{x\}$. De manera análoga se obtiene que $\bigcap_{x \in U} \mathcal{I}^{-1}(U) = \{y\}$, por lo que $x \sim y$. Se concluye que $y \in Y' \cap \widetilde{V}$, y por lo tanto que Y' es denso. \square

Aplicando el Lema 2.17 a los espacios métricos completos (X, \widetilde{d}_X) e (Y, \widetilde{d}_Y) , con bases $\mathcal{B}(X)$, $\mathcal{B}(Y)$ y biyección que preserva inclusiones \mathcal{I} , obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 2.18 Sean X, Y y T como en la Nota 2.1. Entonces existen subconjuntos densos $X' \subset X$, $Y' \subset Y$ y un homeomorfismo $\tau : X' \rightarrow Y'$ tales que para cada $x \in X'$ y $V \in \mathcal{B}(Y)$

$$\tau(x) \in V \iff x \in \mathcal{I}(V). \quad (2.3)$$

2.2. Forma explícita del isomorfismo de orden convexo

En esta sección se obtendrá una fórmula explícita para calcular el valor de la imagen vía el isomorfismo de orden convexo T de una función $f \in SC_1^1(Y)$, en cada punto x_0 del subconjunto denso X' entregado por el Corolario 2.18. Con este fin, a partir del “comportamiento local” del isomorfismo T entregado por el Lema 2.10 y la propiedad (2.3) de homeomorfismo obtenido en la sección anterior, se deducirá un “comportamiento puntual” del isomorfismo T con respecto a los puntos del denso X' . También se estudiará la acción de T sobre el conjunto de las funciones constantes, donde la convexidad de T será clave. Combinando estos resultados se llegará la fórmula buscada.

Comenzaremos estudiando el “comportamiento puntual” de T :

Lema 2.19 Sean X, Y y T como en la Nota 2.1, y sea $h \in SC_1^1(Y)$ tal que $SLip(h) < 1$. Sean $f, g \in SC_1^1(Y)_h$, $X' \subset X$ el denso entregado por el Corolario 2.18 y $x_0 \in X'$. Entonces,

$$f(\tau(x_0)) = g(\tau(x_0)) \iff Tf(x_0) = Tg(x_0).$$

Demostración. Denotaremos $y_0 = \tau(x_0)$. Es suficiente probar que $f(y_0) \leq g(y_0)$ implica $Tf(x_0) \leq Tg(x_0)$, o equivalentemente, que $Tf(x_0) > Tg(x_0)$ implica $f(y_0) > g(y_0)$. En efecto, supongamos que $Tf(x_0) > Tg(x_0)$ y $f(y_0) \leq g(y_0)$. Como la relación $Tf > Tg$ se cumple en una vecindad de x_0 , deducimos que la relación $f \geq g$ se cumple en una vecindad de y_0 . Con esto, $f(y_0) = g(y_0)$, e y_0 es mínimo local de la función $f - g$, y por ende $df(y_0) = dg(y_0)$. Sea $\varphi \in SC_1^1(Y)_h$ tal que $\varphi(y_0) = f(y_0)$ y $d\varphi(y_0) \neq df(y_0)$. Luego, toda vecindad de y_0 contiene puntos (y por lo tanto vecindades) en las cuales $\varphi > f$, $\varphi > g$. Ambos tipos de puntos pueden ser tomados en Y' por densidad. Tomando sucesiones de estos puntos que aproximen a y_0 , y aplicando el Lema 2.10, sigue que $Tf(x_0) \leq T\varphi(x_0) \leq Tg(x_0)$, lo cual es una contradicción. La recíproca se tiene por simetría. \square

Una desventaja del Lema 2.19 es que tanto f como g deben ser mayores a una función h , con $SLip(h) < 1$. Para obtener un resultado similar aplicable a cualquier par de funciones $f, g \in SC_1^1(Y)$, se debe agregar una hipótesis sobre las constantes semi-Lipschitz de f y g , con el fin de eliminar la dependencia de h . Nuevamente, será necesario tratar por separado los casos Finsler, Hilbert y Asplund separable.

Corolario 2.20 Sean X e Y variedades de Finsler y T como en la Nota 2.1. Sea $X' \subset X$ el subconjunto denso entregado por el Corolario 2.18 y sean $f, g \in SC_1^1(Y)$ tales que $\max\{SLip(f), SLip(g)\} < 1$ y $x_0 \in X'$. Entonces

$$f(\tau(x_0)) = g(\tau(x_0)) \iff Tf(x_0) = Tg(x_0).$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ tal que $\max\{SLip(f), SLip(g)\} + \varepsilon < 1$, basta tomar, en virtud del Corolario 1.53, una aproximación $h \in C^1(Y)$ de $f \wedge g$ tal que

- $h \leq f \wedge g$.
- $SLip(h) \leq \max\{SLip(f), SLip(g)\} + \varepsilon < 1$.

Con esto, $h \in SC_1^1(Y)$ y $f, g \in SC_1^1(Y)_h$. Aplicando el Lema 2.19, se concluye. \square

Corolario 2.21 Sean X e Y espacios de Hilbert, (respectivamente espacios de Asplund separables) y T como en la Nota 2.1. Sean $r > 0$ arbitrario, $K = 4 + r$, $f, g \in C_1^1(Y)$ tales que $\max\{Lip(f), Lip(g)\} < \frac{1}{K}$, y sea $X' \subset X$ el denso entregado por el Corolario 2.18. Entonces para todo $x_0 \in X'$ se tiene que

$$f(\tau(x_0)) = g(\tau(x_0)) \iff Tf(x_0) = Tg(x_0).$$

Demostración. La demostración es análoga a la del Corolario 2.20, utilizando el Teorema 1.54 o el Teorema 1.55 para aproximar $f \wedge g$, según corresponda. \square

La siguiente proposición muestra cómo se comporta el isomorfismo T sobre las funciones constantes, mediante una fórmula explícita. Cabe destacar que es la convexidad del isomorfismo T es lo que determina la acción del mismo sobre las funciones constantes.

Proposición 2.22 Sean X, Y y T como en la Nota 2.1, y sea $g \in SC_1^1(Y)$. Entonces $Tg - T0$ es constante si y solo si g lo es. Más aún, existe $\alpha > 0$ tal que, denotando por λ a la función constante con valor $\lambda \in \mathbb{R}$

$$T\lambda = T0 + \frac{\lambda}{\alpha}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $g^\lambda \in SC_1^1(Y)$ tal que $Tg^\lambda = T0 + \lambda$.

Consideramos primero el caso $\lambda \geq 1$:

$$\begin{aligned} T\left(\frac{1}{\lambda}g^\lambda\right) &= T\left(\frac{1}{\lambda}g^\lambda + \frac{(\lambda-1)}{\lambda}0\right) \\ &= \frac{1}{\lambda}Tg^\lambda + \frac{(\lambda-1)}{\lambda}T0 \\ &= \frac{1}{\lambda}T0 + 1 + \frac{(\lambda-1)}{\lambda}T0 \\ &= T0 + 1 \\ &= Tg^1. \end{aligned}$$

Como T es biyección, $\lambda g^1 = g^\lambda$ para todo $\lambda \geq 1$. Con esto, y usando que $\text{SLip}(g^\lambda) \leq 1$, obtenemos que $\text{SLip}(g^1) = \text{SLip}\left(\frac{g^\lambda}{\lambda}\right) \leq \frac{1}{\lambda}$ para todo $\lambda \geq 1$, y por lo tanto la función g^1 debe ser constante. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ dicha constante, con lo que $g^\lambda = \alpha\lambda$ para todo $\lambda \geq 1$. Notando que $Tg^1 = T0 + 1 > T0$, necesariamente $\alpha > 0$.

Para $\lambda \in [0, 1)$:

$$T(\lambda g^1) = \lambda Tg^1 + (1 - \lambda)T0 = \lambda + T0 = T(g^\lambda).$$

Sigue que $\lambda g^1 = \lambda\alpha = g^\lambda$ para todo $\lambda \in [0, 1)$.

Con esto, $g^\lambda = \lambda\alpha$ para todo $\lambda \geq 0$. En particular, $T\left(g^{\frac{\lambda}{\alpha}}\right) = T0 + \frac{\lambda}{\alpha} = T\lambda$ para todo $\lambda \geq 0$. Más aún:

$$\begin{aligned} T0 &= T\left(\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}(-\lambda)\right) \\ &= \frac{1}{2}T\lambda + \frac{1}{2}T(-\lambda) \\ &= \frac{1}{2}\left(T0 + \frac{\lambda}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}T(-\lambda), \end{aligned}$$

por lo que $T(-\lambda) = T0 - \frac{\lambda}{\alpha}$. □

Combinando la Proposición 2.22 con los Corolarios 2.20 y 2.21 obtenemos los siguientes lemas:

Lema 2.23 Sean X e Y variedades de Finsler y T como en la Nota 2.1. Sean $f \in SC_1^1(Y)$ tal que $\text{SLip}(f) < 1$, $X' \subset X$ el subconjunto denso entregado por el Corolario 2.18 y $x_0 \in X'$. Denotando $c = \frac{1}{\alpha} = T1 - T0$, $\phi = T0$, se cumple que

$$Tf(x_0) = c \cdot f(\tau(x_0)) + \phi(x_0).$$

Demostración. Aplicando el Corolario 2.20 a las funciones f y a la constante $f(\tau(x_0))$ se obtiene que

$$Tf(x_0) = Tg(x_0) = T0(x_0) + \frac{1}{\alpha}f(\tau(x_0)) = cf(\tau(x_0)) + \phi(x_0).$$

□

Lema 2.24 Sean X e Y espacios de Hilbert (respectivamente espacios de Asplund separables) y T como en la Nota 2.1. Sean $r > 0$ arbitrario, $K = 4 + r$, $f \in C_1^1(Y)$ tal que $\text{Lip}(f) < \frac{1}{K}$, $X' \subset X$ el subconjunto denso entregado por el Corolario 2.18 y $x_0 \in X'$. Denotando $c = \frac{1}{\alpha} = T1 - T0$ y $\phi = T0$ se cumple que

$$Tf(x_0) = c \cdot f(\tau(x_0)) + \phi(x_0).$$

Demostración. La demostración es análoga a la del Lema 2.23, utilizando el Corolario 2.21 en lugar de el Corolario 2.20. □

Finalmente, utilizando la convexidad de T , se elimina la restricción sobre la constante semi-Lipschitz de f , obteniendo una fórmula aplicable a cualquier función en $SC_1^1(Y)$, tanto para el caso Finsler como para los casos Hilbert y Asplund separable.

Corolario 2.25 Sean X , Y y T como en la Nota 2.1. Sean $f \in SC_1^1(Y)$, $X' \subset X$ el subconjunto denso entregado por el Corolario 2.18 y $x_0 \in X'$. Denotando $c = \frac{1}{\alpha} = T1 - T0$ y $\phi = T0$, se cumple que

$$Tf(x_0) = c \cdot f(\tau(x_0)) + \phi(x_0).$$

Demostración. Consideramos primero el caso en que X e Y son variedades de Finsler. Aplicando el Lema 2.23 a la función λf , para $\lambda \in (0, 1)$ arbitrario, se obtiene que

$$T(\lambda f)(x_0) = c\lambda f(\tau(x_0)) + \phi(x_0).$$

Por otro lado

$$T(\lambda f)(x_0) = \lambda Tf(x_0) + (1 - \lambda)T0(x_0).$$

Igualando ambas ecuaciones:

$$Tf(x_0) = \frac{1}{\lambda}(c\lambda f(\tau(x_0)) + T0(x_0)) + \frac{(\lambda - 1)}{\lambda}T0(x_0) = cf(\tau(x_0)) + \phi(x_0).$$

Consideramos ahora el caso en que X e Y son espacios de Hilbert (respectivamente espacios de Asplund separables). Aplicando el Lema 2.24 a la función λf , para $r > 0$ y $\lambda \in (0, 1)$ tal que $\text{Lip}(\lambda f) < \frac{1}{(4+r)}$ se obtiene la misma conclusión mediante un desarrollo análogo. □

2.3. Relaciones métricas y casi isométricas

En esta sección se concluirá la demostración del teorema principal de este trabajo, combinando la relación topológica encontrada en Sección 2.1 y la forma explícita del isomorfismo de orden convexo vista en la Sección 2.2, obteniendo así relaciones casi isométricas, casi isométricas y difeomorfias entre los espacios involucrados. Para esto, serán de vital importancia los teoremas de aproximación vistos en la Sección 1.3.3. Un punto fundamental de esta demostración es que pese a no asumir ninguna hipótesis de continuidad del isomorfismo T (de hecho, los espacios $SC_1^1(Y)$ y $SC_1^1(X)$ no fueron dotados de ninguna topología), la forma explícita encontrada en la Sección 2.2 nos permitirá “preservar” aproximaciones puntuales (sobre los densos X' e Y') a través de T . Se demostrará también la versión equivalente del Teorema 2.26 para los casos Hilbert y Asplund separable con duales LUR, así como algunos corolarios interesantes, incluyendo caracterizaciones de isometrías para los casos simétricos.

Teorema 2.26 *Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) variedades de Finsler conexas y completas (vistas como espacios cuasi-métricos). Supongamos que existe un isomorfismo de orden convexo $T : SC_1^1(Y) \rightarrow SC_1^1(X)$ tal que $SLip(T0) < 1$. Entonces existen $\alpha > 0$, una cuasi-métrica d'_X sobre X y una biyección $\tau : X \rightarrow Y$ tales que:*

- (i) (X, d_X) es casi isométrico a (X, d'_X) .
- (ii) (Y, d_Y) es isométrico a $(X, \alpha d'_X)$ vía τ .
- (iii) X es difeomorfo a Y vía τ .
- (iv) $\forall f \in SC_1^1(Y)$, $Tf = c \cdot (f \circ \tau) + \phi$, con $c = \frac{1}{\alpha}$ y $\phi = T0$.

Más aún, la función $\phi = T0$ debe ser suave.

Demostración. Sean $c = \frac{1}{\alpha} = T1 - T0$ y $\phi = T0$.

Por hipótesis tenemos que $SLip(\phi) < 1$, y en particular $\phi(x_1) - \phi(x_2) < d_X(x_1, x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \neq x_2$. Luego, por la Proposición 1.11, la función $d'_X(x_1, x_2) = d_X(x_1, x_2) + \phi(x_2) - \phi(x_1)$ es una cuasi-métrica sobre X tal que (X, d_X) es casi isométrico a (X, d'_X) .

Se definen las siguientes funciones, con el fin de modificar el isomorfismo T :

$$\begin{aligned} R : SC_1^1(X, d_X) &\rightarrow SC_1^1(X, d'_X) \\ g &\rightarrow g - \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S : SC_1^1(X, d'_X) &\rightarrow SC_1^1(X, \alpha d'_X) \\ h &\rightarrow \alpha h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{T} : SC_1^1(Y, d_Y) &\rightarrow SC_1^1(X, \alpha d'_X) \\ f &\rightarrow S \circ R \circ T(f) \end{aligned}$$

Notemos que R está bien definida, pues dados $x_1, x_2 \in X$ y $g \in SC_1^1(X, d_X)$, se tiene que

$$\begin{aligned} R(g)(x_1) - R(g)(x_2) &= g(x_1) - g(x_2) + \phi(x_2) - \phi(x_1) \\ &\leq d_X(x_1, x_2) + \phi(x_2) - \phi(x_1) \\ &= d'_X(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Probaremos que, tanto la composición \hat{T} como su inversa \hat{T}^{-1} , se comportan como un operador de composición. En efecto, por construcción, dados $f \in SC_1^1(Y)$ y $x_0 \in X'$, tenemos que:

$$\hat{T}f(x_0) = S \circ R \circ T(f)(x_0) = \alpha \left(\frac{1}{\alpha} f(\tau(x_0)) + \phi - \phi \right) = f(\tau(x_0)).$$

Por otro lado, dados $g \in SC_1^1(X, \alpha d'_X)$ e $y_0 \in Y'$, se cumple que

$$\hat{T}^{-1}g(y_0) = T^{-1} \circ R^{-1} \circ S^{-1}(g)(y_0) = T^{-1} \left(\frac{g}{\alpha} + \phi \right) (y_0).$$

Como $\frac{g}{\alpha} + \phi \in SC_1^1(X, d_X)$, existe $f \in SC_1^1(Y, d_Y)$ tal que $Tf = \frac{g}{\alpha} + \phi$. Luego, denotando $x_0 = \tau^{-1}(y_0)$ tenemos que

$$\frac{1}{\alpha}g(x_0) + \phi(x_0) = Tf(x_0) = \frac{1}{\alpha}f(y_0) + \phi(x_0),$$

gracias al Corolario 2.25, con lo que $f(y_0) = g(x_0)$. Finalmente

$$\hat{T}^{-1}g(y_0) = T^{-1}(Tf)(y_0) = g(x_0) = g(\tau^{-1}(y_0)).$$

Para probar que $\tau : (X', \alpha d'_X) \rightarrow (Y', d_Y)$ es una isometría, sean $x_1, x_2 \in X'$, $y_1 = \tau(x_1)$, $y_2 = \tau(x_2)$. Primero, usando que \hat{T} se comporta como una composición, y aproximando de manera adecuada la función $d_Y(\cdot, y_2)$, probaremos que $\alpha d'_X(x_1, x_2) \geq d_Y(y_1, y_2)$.

Sean $\lambda \in (0, 1)$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\lambda + \varepsilon \leq 1$, y consideremos la función $f_\lambda(\cdot) = \lambda d_Y(\cdot, y_2)$. Notemos que dicha función cumple que $SLip(f_\lambda) = \lambda < 1$, por lo que podemos aplicar el Corolario 1.53, obteniendo así una función $g \in C^1(Y)$ tal que:

- $|g(y) - f_\lambda(y)| < \varepsilon \quad \forall y \in Y$.
- $SLip(g) \leq \lambda + \varepsilon \leq 1$

La segunda condición garantiza que $g \in SC_1^1(Y, d_Y)$. De la primera condición podemos deducir que:

- $|g(y_2)| < \varepsilon$.
- $g(y_1) > \lambda d_Y(y_1, y_2) - \varepsilon$.

Sigue entonces que

$$\begin{aligned} \alpha d'_X(x_1, x_2) &\geq \hat{T}g(x_1) - \hat{T}g(x_2), \\ &= g(y_1) - g(y_2), \\ &\geq \lambda d_Y(y_1, y_2) - 2\varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon + \lambda \leq 1$, por lo que

$$\alpha d'_X(x_1, x_2) \geq \lambda d_Y(y_1, y_2),$$

para todo $\lambda \in (0, 1)$, y por lo tanto

$$\alpha d'_X(x_1, x_2) \geq d_Y(y_1, y_2).$$

Para la desigualdad restante, de manera similar a la desigualdad anterior, usaremos que \hat{T}^{-1} se comporta como una composición, y trabajaremos con una aproximación adecuada de la función $\lambda d_X(\cdot, x_2)$, para finalmente concluir que $\alpha d'_X(x_1, x_2) \leq d_Y(y_1, y_2)$.

Sean entonces $\lambda \in (0, 1)$, $\varepsilon > 0$ tales que $\lambda + \varepsilon \leq 1$, y $f_\lambda(\cdot) = \lambda d_X(\cdot, x_2)$, la cual cumple que $\text{SLip}(f_\lambda) = \lambda < 1$. Aplicando el Corolario 1.53 a f_λ , se obtiene una función $g \in C^1(X)$ tal que:

- $|g(x) - f_\lambda(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X$.
- $\text{SLip}(g) \leq \lambda + \varepsilon \leq 1$

Sea $\tilde{g} = \alpha(g - \phi) + \alpha\lambda\phi(x_2)$, la cual claramente pertenece a $C^1(X)$. Más aún, tenemos que $\tilde{g} \in SC_1^1(X, \alpha d'_X)$, pues

$$\tilde{g} = S \circ R(g) + \alpha\lambda\phi(x_2).$$

Notando que:

$$\begin{aligned} |\tilde{g}(x_1) - \lambda\alpha d'_X(x_1, x_2)| &= |\alpha(g(x_1) - \lambda d_X(x_1, x_2)) - \alpha\phi(x_1) - \lambda\alpha\phi(x_1)| \\ &\leq \alpha\varepsilon + \alpha(1 - \lambda)|\phi(x_1)|, \end{aligned}$$

y que por otro lado:

$$\begin{aligned} |\tilde{g}(x_2)| &= |\alpha g(x_2) - \alpha\phi(x_2) + \alpha\lambda\phi(x_2)| \\ &\leq \alpha\varepsilon + \alpha(1 - \lambda)|\phi(x_2)|, \end{aligned}$$

sigue que

$$\begin{aligned} d_Y(y_1, y_2) &\geq \hat{T}^{-1}\tilde{g}(x_1) - \hat{T}^{-1}\tilde{g}(x_2) \\ &= \tilde{g}(x_1) - \tilde{g}(x_2) \\ &\geq \lambda\alpha d'_X(x_1, x_2) - 2\alpha\varepsilon - \alpha(1 - \lambda)(|\phi(x_1)| + |\phi(x_2)|), \end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon + \lambda \leq 1$.

Luego,

$$d_Y(y_1, y_2) \geq \alpha d'_X(x_1, x_2) - \alpha(1 - \lambda)(|\phi(x_1)| + |\phi(x_2)|),$$

para todo $\lambda \in (0, 1)$, con lo que finalmente obtenemos:

$$d_Y(y_1, y_2) \geq \alpha d'_X(x_1, x_2).$$

Se concluye entonces que $\tau : (X', \alpha d'_X) \rightarrow (Y', d_Y)$ es una isometría, y por ende se extiende a una isometría (que seguiremos llamando τ) entre los espacios $(X, \alpha d'_X)$ e (Y, d_Y) . Usando

la continuidad de las funciones involucradas, se deduce que para todo $f \in SC_1^1(Y)$ y para todo $x \in X$,

$$Tf(x) = c \cdot f(\tau(x)) + \phi(x).$$

Más aún, como τ es una casi-isometría entre las variedades de Finsler (X, d_X) e $(Y, \frac{d_Y}{\alpha})$, tanto τ como la función ϕ que induce la casi isometría deben ser suaves, gracias al Lema 1.24 y a la Proposición 1.25 respectivamente. \square

Definición 2.27 Un isomorfismo de orden convexo $T : SC_1^1(Y) \rightarrow SC_1^1(X)$ se dirá *casi unital* si $T1 - T0 = 1$.

Corolario 2.28 Sean (X, d_X) , (Y, d_Y) variedades de Finsler conexas y completas (vistas como espacios cuasi-métricos). Supongamos que existe un isomorfismo de orden convexo casi unital $T : SC_1^1(Y) \rightarrow SC_1^1(X)$ tal que $SLip(T0) < 1$. Entonces existen una biyección $\tau : X \rightarrow Y$ y $\phi \in SC_1^1(X)$ suave, tales que:

- (i) (X, d_X) e (Y, d_Y) son casi isométricos y difeomorfos vía τ .
- (ii) $\forall f \in SC_1^1(Y)$, $Tf = f \circ \tau + \phi$.

Corolario 2.29 Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) variedades de Finsler conexas, completas (vistas como espacios cuasi-métricos) y reversibles. Supongamos que existe un isomorfismo de orden convexo $T : C_1^1(Y) \rightarrow C_1^1(X)$ tal que $Lip(T0) < 1$. Entonces existen $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$, y una biyección $\tau : X \rightarrow Y$, tales que:

- (i) (Y, d_Y) es isométrico a $(X, \alpha d_X)$ vía τ .
- (ii) (X, d_X) es difeomorfo a (Y, d_Y) vía τ .
- (iii) $\forall f \in C_1^1(Y)$, $Tf = c \cdot (f \circ \tau) + \beta$, con $c = \frac{1}{\alpha}$ y $\beta = T0$.

Demostración. Basta aplicar el Teorema 2.26, y notar que, como (Y, d_Y) es simétrico, (X, d'_X) también lo es, y por lo tanto ϕ debe ser constante. \square

El siguiente corolario caracteriza las isometrías entre variedades de Finsler conexas, completas y reversibles:

Corolario 2.30 Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) variedades de Finsler conexas, completas (vistas como espacios cuasi-métricos) y reversibles. Entonces (X, d_X) e (Y, d_Y) son isométricamente difeomorfas si y solo si existe un isomorfismo de orden convexo casi unital $T : C_1^1(Y) \rightarrow C_1^1(X)$ tal que $Lip(T0) < 1$. Más aún, para dicho isomorfismo existen $\tau : X \rightarrow Y$ y $\beta \in \mathbb{R}$, tales que:

- (i) (X, d_X) e (Y, d_Y) son isométricos y difeomorfos vía τ .
- (ii) $\forall f \in C_1^1(Y)$, $Tf = f \circ \tau + \beta$.

Demostración. Si (X, d_X) e (Y, d_Y) son isométricas vía $\tau : X \rightarrow Y$, entonces es fácil verificar que $T : C_1^1(Y) \rightarrow C_1^1(X)$ definido por $Tf = f \circ \tau$ es un isomorfismo de orden convexo. Más aún, T cumple que $T0 = 0$ y $T1 = 1$, por lo que las condiciones $\text{Lip}(T0) < 1$ y $T1 - T0 = 1$ se cumplen trivialmente. La recíproca se deduce del Corolario 2.29. \square

Teorema 2.31 Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios de Hilbert (respectivamente espacios de Asplund separables cuyos espacios duales sean LUR). Supongamos que existe un isomorfismo de orden convexo $T : C_1^1(Y) \rightarrow C_1^1(X)$ tal que $\text{Lip}(T0) < 1$. Entonces existen $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ y una isometría sobreyectiva $\tau : (X, \alpha\|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ tales que

$$\forall f \in C_1^1(Y), Tf = c \cdot (f \circ \tau) + \beta, \text{ con } \beta = T0 \text{ y } c = \frac{1}{\alpha}$$

Demostración. La demostración es análoga al Teorema 2.26, salvo que basta considerar $f = d(\cdot, x_2)$ en lugar de f_λ , y aproximar dicha función usando el Teorema 1.56. El hecho de que $\phi = T0$ sea constante se deduce de la simetría de los espacios involucrados, de manera análoga al Corolario 2.29. \square

Observación: Gracias al Teorema 1.49, dados $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios de Asplund separables, es posible renormar ambos espacios de modo que sus duales sean LUR, y de este modo, aplicar el Teorema 2.31 a X e Y con sus normas equivalentes. Notar que al renormar X e Y las constantes de Lipschitz de las funciones sobre estos espacios cambian, y en consecuencia los espacios $C_1^1(X)$ y $C_1^1(Y)$ también cambian.

El siguiente corolario caracteriza las isometrías sobreyectivas entre espacios de Hilbert, y entre espacios de Asplund separables cuyos duales sean LUR:

Corolario 2.32 Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios de Hilbert (respectivamente espacios de Asplund separables cuyos espacios duales sean LUR). Entonces $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ son isométricos si y solo si existe un isomorfismo de orden convexo casi unital $T : C_1^1(Y) \rightarrow C_1^1(X)$ tal que $\text{Lip}(T0) < 1$. Más aún, para dicho isomorfismo existen una isometría sobreyectiva $\tau : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\forall f \in C_1^1(Y) Tf = f \circ \tau + \beta,$$

Demostración. De manera análoga al Corolario 2.30, si $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ son isométricos vía $\tau : X \rightarrow Y$, entonces $T : C_1^1(Y) \rightarrow C_1^1(X)$ definido por $Tf = f \circ \tau$ es un isomorfismo de orden convexo. Más aún, T cumple que $T0 = 0$ y $T1 = 1$, por lo que las condiciones $\text{Lip}(T0) < 1$ y $T1 - T0 = 1$ se cumplen trivialmente. La recíproca se deduce del Teorema 2.31. \square

Observación: Todas las isometrías entre espacios de Banach obtenidas en el Teorema 2.31 y el Corolario 2.32 son lineales afines, en virtud del Teorema de Mazur-Ulam [14], y en consecuencia son también difeomorfismos.

Conclusiones y trabajo futuro

El objetivo de esta tesis era estudiar las casi isometrías entre variedades de Finsler, y definir un espacio de funciones suaves adecuado, el cual determinase la estructura cuasi-métrica y diferenciable de dichas variedades mediante un teorema tipo Banach-Stone. Para esto, basándonos en las ideas de [4], definimos el espacio $SC_1^1(X)$, el cual fue dotado de estructura convexa y de orden.

Para obtener el teorema tipo Banach-Stone deseado, fue necesario agregar la hipótesis adicional de que $SLip(T0) < 1$. Esta hipótesis fue fundamental para construir las topologías usadas en la Sección 2.1 del Capítulo 2. Como trabajo futuro, una pregunta natural es si dicha hipótesis es estrictamente necesaria, es decir, ¿Existen variedades de Finsler X e Y , conexas y completas, y un isomorfismo de orden convexo $T : SC_1^1(Y) \rightarrow SC_1^1(X)$ tal que $SLip(T0) = 1$?

Si la respuesta a esta pregunta fuese negativa, se podría establecer la recíproca del Corolario 2.28, con lo que tendríamos que dos variedades de Finsler X e Y , conexas y completas son casi isométricas si y solo si existe un isomorfismo de orden convexo casi unital $T : SC_1^1(Y) \rightarrow SC_1^1(X)$, obteniendo así una caracterización similar a las obtenidas en los casos simétricos (Corolarios 2.30 y 2.32).

En caso contrario, sería interesante buscar formas de prescindir de la hipótesis sobre $SLip(T0)$, pero esto requeriría hacer cambios significativos en la técnica usada en la Sección 2.1 de la demostración del teorema principal.

Otra pregunta interesante es si es posible obtener un resultado similar para variedades de Finsler de dimensión infinita, también conocidas como variedades de Banach-Finsler (ver [10] para las distintas definiciones usadas). Una dificultad importante de esta pregunta es que la mayoría de los resultados de aproximación suave de funciones Lipschitz en dimensión infinita encontrados en la literatura (ver [10] para ejemplos concretos) involucran un aumento en la constante de Lipschitz de la función que se desea aproximar, multiplicando por ésta por una constante $C \geq 1$ que depende del espacio, lo cual dificulta que dichas aproximaciones estén en el espacio $SC_1^1(X)$. Este fue el principal motivo que nos llevó a limitarnos a los casos Hilbert y Asplund separable, pues esta dificultad no existe en el caso Hilbert (pues $C = 1$ para cualquier espacio de Hilbert), y para espacios de Asplund separables es manejable, pues la constante C en este caso no depende del espacio.

Bibliografía

- [1] Daniel Azagra. Global and fine approximation of convex functions. *Proc. London Math. Soc.*, 107(4):799–824, 2013.
- [2] Stefan Banach. *Théorie des opérations linéaires*. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1993. Reprint of the 1932 original.
- [3] David Bao, S-S Chern, and Zhongmin Shen. *An introduction to Riemann-Finsler geometry*, volume 200. Springer Science & Business Media, 2012.
- [4] Javier Cabello Sánchez and Jesús A. Jaramillo. A functional representation of almost isometries. *J. Math. Anal. Appl.*, 445(2):1243–1257, 2017.
- [5] Lawrence Conlon. *Differentiable Manifolds; a First Course*. Birkhäuser, 1993.
- [6] Marián Fabian, Petr Habala, Petr Hájek, Vicente Montesinos, and Václav Zizler. *Banach space theory: the basis for linear and nonlinear analysis*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [7] M. Isabel Garrido, Jesús A. Jaramillo, and Yenny C. Rangel. Smooth approximation of Lipschitz functions on Finsler manifolds. *J. Func. Spaces Appl.*, 2013:10p, 2013.
- [8] M. Isabel Garrido and Jesús A. Jaramillo. Variations on the Banach-Stone theorem. *Extracta Math.*, 17(3):351–383, 2002.
- [9] I. Gelfand and A. Kolmogoroff. On rings of continuous functions on topological spaces. In *The Mathematical Legacy of Eduard Čech*, pages 62–66. Springer, 1993.
- [10] Luis Sánchez González and Mar Jiménez Sevilla. On smooth approximation and extension on Banach spaces and applications to Banach-Finsler manifolds. *Preprint 2012 (UCM)*.
- [11] Miguel Angel Javaloyes, Leandro Lichtenfelz, and Paolo Piccione. Almost isometries of non-reversible metrics with applications to stationary spacetimes. *J. Geom. Phys.*, 89:38–49, 2015.
- [12] Irving Kaplansky. Lattices of continuous functions. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 53(6):617–623, 1947.
- [13] Jean-Michel Lasry and Pierre-Louis Lions. A remark on regularization in Hilbert spaces. *Israel J. Math.*, 55(3):257–266, 1986.
- [14] Stanisław Mazur and Stanisław Ulam. Sur les transformations isométriques d’espaces

vectoriels normés. *CR Acad. Sci. Paris*, 194(946-948):116, 1932.

- [15] Félix Cabello Sánchez and Javier Cabello Sánchez. Some preserver problems on algebras of smooth functions. *Ark. Mat.*, 48(2):289–300, 2010.
- [16] Félix Cabello Sánchez and Javier Cabello Sánchez. Nonlinear isomorphisms of lattices of Lipschitz functions. *Houston J. Math*, 37(1):181–202, 2011.
- [17] Marshall H Stone. Applications of the theory of boolean rings to general topology. *Transactions of the American Mathematical Society*, 41(3):375–481, 1937.