UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

ESTABILIDAD Y ALEATORIEDAD EN ADMISIÓN ESCOLAR

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN GESTIÓN DE OPERACIONES

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

ANDRÉS IGNACIO CRISTI ESPINOSA

PROFESOR GUÍA:
JOSÉ RAFAEL CORREA HAEUSSLER

PROFESOR CO-GUÍA:
JOSÉ SOTO SAN MARTÍN

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JUAN ESCOBAR CASTRO
SERVET MARTÍNEZ AGUILERA

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por CONICYT y el Núcleo Milenio Información y Coordinación en Redes.

SANTIAGO DE CHILE
2018

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR
AL GRADO DE MAGÍSTER EN GESTIÓN DE OPERACIONES
POR: ANDRÉS IGNACIO CRISTI ESPINOSA
FECHA: 2018
PROF. GUÍA: JOSÉ RAFAEL CORREA HAEUSSLER

ESTABILIDAD Y ALEATORIEDAD EN ADMISIÓN ESCOLAR

En este trabajo se estudian dos preguntas surgidas durante la implementación del Sistema de Admisión Escolar chileno, el cual asigna de manera centralizada estudiantes a colegios según sus preferencias, usando el algoritmo de Aceptación Diferida y una regla de rompimiento de empates aleatoria.

La primera pregunta tratada es sobre la existencia de asignaciones estables cuando las familias prefieren que sus hijos estudien en un mismo colegio en lugar de separados. Primeramente damos una definición formal de la estabilidad en este contexto, que llamamos *estabilidad familiar*. Probamos luego que si las preferencias de los colegios son sobre los estudiantes no necesariamente existe asignación estable, incluso si son todas iguales. Probamos que si las preferencias de los colegios son todas iguales y según un orden sobre las familias entonces siempre existe asignación con *estabilidad familiar*, incluso si las preferencias de las familias son arbitrarias sobre todas las posibles asignaciones. En el caso en que las preferencias de los colegios pueden ser distintas y según órdenes sobre las familias, mostramos que no siempre existe asignación, incluso si las familias son indiferentes al colegio, condicional en que todos los hijos están en el mismo. Si en este último caso se agrega que los colegios prefieren siempre recibir completas a las familias con más de un hijo, entonces se garantiza estabilidad pero las familias tienen claros incentivos para mentir sobre su composición.

La segunda pregunta estudiada es sobre la cantidad de asignaciones estables en un mercado bipartito con preferencias aleatorias cuando el número de agentes no es igual a ambos lados. A este respecto, extendemos al caso de preferencias aleatorias no uniformes, bajo el modelo de popularidades propuesto por Immorlica et al. [11], el resultado de Ashlagi et al. [4] que establece que la proporción de agentes con múltiples parejas estables tiende a 0 cuando las preferencias son uniformes y el mercado es desbalanceado. Mediante una adaptación de la demostración del resultado para preferencias uniformes y un resultado sobre el problema del Coleccionista de Cupones, encontramos condiciones necesarias sobre la dispersión de las popularidades y la popularidad del exceso de agentes en el lado largo del mercado, para que la proporción antes mencionada tienda a 0.

Agradecimientos

Agradezco a mi familia por su constante apoyo y cariño. En especial a mi mamá, quien me enseñó el valor de la constancia y el esfuerzo y puso todo de sí para que pudiera desarrollar mi potencial. A mi papá, quien me enseñó el gusto por entender y descubrir. A mis hermanos por su alegría y amistad. A Nicol por su amor y su apoyo que han sido fundamentales.

A los profesores del DIM y el DII por los conocimientos que me han transmitido durante la carrera y el magíster. Especialmente a José Correa, José Soto y Servet Martínez, con quienes he trabajado y compartido y me han dado su apoyo y valiosos consejos.

Agradezco a mis amigos por tantos buenos momentos y por lo grato que es aprender acompañado.

Gracias también a los funcionarios del DIM y el DII por su labor diario que hace que la Universidad funcione.

Finalmente, agradezco al Núcleo Milenio de Información y Coordinación en Redes y a Conicyt por el financiamiento que me permitió trabajar en este proyecto.

Tabla de Contenido

Índice de Ilustraciones

Capítulo 1

Introducción

Muchos ejemplos existen de situaciones que se pueden modelar como un mercado bipartito, es decir, como dos grupos de agentes que se conectan de alguna forma entre sí, cada uno con sus propios intereses. Ya sea el mercado de trabajo, donde se conectan trabajadores y compañías, en la educación escolar y superior, donde se conectan estudiantes y colegios, caso que estudia el presente trabajo, incluso en el sistema de transplantes en que se conectan donantes con receptores; se puede decir que cada agente tiene algún tipo de preferencia por cómo resulta conectado y que por lo tanto no hay una solución única al problema de hacer las conexiones.

Hay muchos mercados que se resuelven por sí mismos, de manera descentralizada, así como los hay muchos en que hay una autoridad central que decide la asignación. En el primer caso es interesante poder predecir cómo será la solución que se alcance, qué estructura tiene, quiénes quedarán contentos o contentas. El segundo es un problema de diseño de mecanismos: es importante preguntarse cuál de las posibles asignaciones es en algún sentido más justa, cuál es más socialmente eficiente, o si los agentes tendrán incentivos para desacatar el resultado o intentar engañar al sistema.

Los primeros en estudiar formalmente las soluciones a estas situaciones fueron Gale y Shapley [8], quienes definieron las asignaciones estables como aquellas en que no existen lo que llamaron *pares de bloqueo*, una pareja que se prefiere mutuamente por sobre sus respectivas asignaciones. Las asignaciones estables son un buen predictor del equilibrio de mercados que se resuelven de manera descentralizada y la estabilidad es una cualidad escencial que deben cumplir las soluciones centralizadas para ser exitosas.

En este estudio el interés es en particular por el caso de la admisión escolar, es decir, la asignación de estudiantes a colegios, el que tiene algunas características similares a otros mercados bipartitos, así como cualidades especiales que le son propias. En las siguientes páginas intentamos ayudar a entender algunas de las características del problema de la admisión escolar y en específico el caso del Sistema de Admisión Escolar chileno.

1.1. El nuevo Sistema de Admisión Escolar en Chile

El presente trabajo se desarrolló en paralelo a la implementación del nuevo Sistema de Admisión Escolar en Chile y de ésta proviene su motivación. La llamada Ley de Inclusión que crea dicho sistema fue aprobada el año 2015 y establece el fin al lucro, al copago y a la selección en los colegios. En particular respecto del fin a la selección, esta ley establece que los niños y niñas podrán postular a cualquier colegio que reciba aportes del Estado sin ser discriminados arbitrariamente y que será considerado el que las familias prefieran que sus hijos estudien en un mismo colegio.

De lo anterior derivan varias interrogantes. Este trabajo intenta aportar a la comprensión de dos de ellas. La primera pregunta es de qué manera puede propiciar el sistema que hermanos sean asignados al mismo colegio. Siendo esta una pregunta importante en la implementación, la ley no establece una respuesta clara. Otra pregunta relevante es qué implica el que el sistema utilice la aleatoriedad para asignar estudiantes a colegios de manera no arbitraria en el caso natural de que se llenen los cupos de algunos establecimientos.

Puesto que el sistema chileno implementa una asignación estable, resulta poco trivial considerar las coaliciones que se generan al haber hermanos que quieren estudiar juntos manteniendo y al mismo tiempo mantener la propiedad de estabilidad. Sin duda esto significa en primer lugar definir qué se entiende por estabilidad en este contexto. En este estudio consideramos distintas maneras de formalizar esta situación y damos respuesta negativa para las más naturales, en el sentido de que no se puede garantizar la existencia de una solución. Este aporte ayudó a definir la solución que finalmente se implementó en el sistema de admisión para el problema de los hermanos, que no es estable en el sentido general.

La aleatoriedad en las asignaciones estables se ha estudiado principalmente con el fin de modelar las preferencias de los agentes en los mercados bipartitos y así comprender mejor las propiedades de las soluciones. Estudiamos cómo se comporta el tamaño del conjunto de asignaciones estables, lo cual tiene implicancias en la compatibilidad de incentivos del sistema como probaron Immorlica et al. [11]. Extendemos resultados anteriores que se refieren a preferencias uniformes, lo cual se cumple en el sistema chileno para el caso de los colegios pero no parece un supuesto razonable por el lado de los estudiantes.

1.2. Experiencia internacional: uso de asignaciones estables

Muchos ejemplos de implementación de asignaciones estables en mercados emparejamiento centralizados existen alrededor del mundo. Entre otros se incluyen el *National Residency Matching Program* que asigna a los estudiantes de medicina a los hospitales en EE.UU. (ver los estudios de Roth [18, 19] y Roth y Peranson [20]), el programa de intercambio de riñones que asigna donantes a pacientes, también en EE.UU. (estudiado por Abraham et al. [3] y Roth et al. [21, 22, 23]), el sistema de admisión vía PSU en Chile y programas de asignación esolar en distintas ciudades del mundo.

Casos de su uso en asignación escolar importantes en la literatura son el sistema de Boston, EE.UU., que inicialmente implementó el llamado "Mecanismo de Boston" que luego de fallar rotundamente fue cambiado por un mecanismo de asignación estable, desarrollado por Abdulkadiroglu et al. [1]; el sistema de Nueva York en EE.UU. estudiado por Abdulkadiroglu et al. [2] y el sistema de Ámsterdam en Holanda, estudiado por Gautier et al. [9], el cual rompe empates aleatoriamente como el sistema implementado en Chile.

1.3. Muy pocas asignaciones estables en mercados de gran tamaño

Empíricamente se ha observado que en mercados bipartitos de gran tamaño la cantidad de soluciones estables es pequeña, lo que resulta en pocas posibilidades para manipulación estraégica del mecanismo. Roth y Peranson [20] por ejemplo describen este fenómeno en el caso del *National Resident Matching Program* y lo que ello significó en el sistema mismo.

Como explicaciones teóricas de este fenómeno se ha propuesto el hecho de que las listas de preferencias que se reportan en general son acotadas a un número pequeño relativo al número total de agentes, lo cual es tratado por Immorlica et al. [11]. Se ha propuesto también como causa la diferencia entre el número de agentes a cada lado del mercado, lo cual es estudiado por Ashlagi et al. [4], bajo el modelo de preferencias aleatorias. El resultado de este último estudio es el que extendemos en el Capítulo 4 a un modelo más amplio.

1.4. Estructura y contribuciones de este trabajo

En el Capítulo 2 se presenta el contexto formal de las asignaciones estables y algunos resultados importantes al respecto, importantes para la comprensión de los resultados de este trabajo y sus demostraciones.

En el Capítulo 3 se estudia el problema de la asignación estable de hermanos. Primeramente se define en la Sección 3.1 en general el concepto de *estabilidad familiar* para formalizar el problema. En las secciones posteriores se consideran sucesivamente distintos supuestos sobre la estructura de las preferencias de las familias y sobre la manera en que se implementa las preferencias aleatorias de los colegios. Se prueba la existencia de solución para el caso de preferencias iguales por parte de los colegios y se muestran contraejemplos a la existencia para el resto de los casos. Finalmente, en la Sección 3.5 se presenta un problema abierto que surge del estudio de la asignación con hermanos.

En el Capítulo 4 se estudia cómo afecta el desbalance en el número de agentes a un mercado bipartito con preferencias aleatorias. En primer lugar se detalla en la Sección 4.1 el *modelo de popularidades* para las preferencias aleatorias y en la Sección 4.2 se listan los resultados asintóticos (en el número total de agentes) previos sobre mercados aleatorios. En las secciones siguientes se demuestra que bajo ciertas condiciones sobre las popularidades, la cantidad de soluciones estables se reduce dramáticamente, extendiendo el resultado de Ashlagi et al. [4] sobre preferencias uniformes.

Capítulo 2

Preliminares sobre Asignaciones Estables

Llamamos Asignación Estable a un emparejamiento entre agentes de dos conjuntos distintos tal que al juntar dos agentes que no estaban emparejados entre sí, al menos uno de los dos empeora respecto de su pareja original. En el caso que motiva este trabajo los conjuntos corresponden a estudiantes y colegios, sin embargo, como es tradición en la literatura sobre asignaciones estables, hablaremos de hombres y mujeres.

Formalmente, consideramos dos conjuntos de igual tamaño W y M, de mujeres y hombres respectivamente, y órdenes de preferencias estrictas $<_m$ sobre W para cada $m \in M$ y $<_w$ sobre M para cada $w \in W$ (donde $a_1 >_b a_2$ significa que el agente b prefiere a a_1 por sobre a_2). Un emparejamiento es una función $\mu : W \cup M \to W \cup M$ tal que $\mu(w) \in M$ para todo $w \in W$ y $\mu(m) \in W$ para todo $m \in M$ y además $\mu(\mu(\mathrm{i})) = \mathrm{i}$ para todo agente i. Es decir, una función que para cada agente entrega a su pareja. Diremos que un emparejamiento μ es una asignación estable si para cualquier par mujer y hombre w, m, se tiene que $\mu(w) >_w m$ o $\mu(m) >_m w$.

En 1962, Gale y Shapley [8] propusieron esta definición de asignación estable y demostraron que siempre existe. Más aún, presentaron el Algoritmo 1 de Aceptación Diferida, el cual encuentra una asignación estable que además es óptima en cierto sentido.

Algoritmo 1 Aceptación Diferida (versión hombres proponen)

Al inicio todo agente está sin pareja.
while Haya algún hombre sin pareja **do**
  Cada hombre sin pareja se le propone a la mujer que prefiere entre las que no han recibido propuesta de él.
  Cada mujer se queda con el que prefiere más entre los hombres que se le propusieron y rechaza al resto.
end while

El resultado de Gale y Shapley se puede resumir en el siguiente teorema.

Teorema 2.1 *El Algoritmo 1 siempre termina y su resultado es una asignación estable entre hombres y mujeres. Además, cada hombre $m \in M$ está emparejado con la mujer que más* *prefiere de $A(m)$, donde $A(m)$ es el conjunto de mujeres con las que está emparejado m en alguna asignación estable.*

Posteriormente Dubins y Freedman [6] probaron que el Algoritmo 1 en su versión hombres proponen es a prueba de estrategias para los hombres:

Teorema 2.2 *Sea $m \in M$ un hombre que participa en la asignación con el Algoritmo 1. Si al participar con un orden de preferencias falso queda emparejado con una mujer w' y al participar con su orden de preferencias verdadero queda con una mujer w, entonces $w \geq_m w'$.*

Para fijar ideas hemos presentado el caso en que ambos conjuntos son de igual tamaño y en que las listas de preferencia son completas (nadie prefiere estar solo), sin embargo, estas condiciones no son requisito para la validez de los teoremas antes mencionados. Más aún, estos resultados se pueden extender también al caso de estudiantes y colegios, en que lo usual es que haya varios cupos por colegio, lo que sería equivalente a permitir que las mujeres o los hombres estuvieran emparejados a varios agentes.

Capítulo 3

Asignación Estable de Hermanos

Empíricamente se ha observado que la estabilidad es una propiedad clave en el diseño de mercados bipartitos, pero en su definición original se refiere al caso en que los agentes son individuos con un orden de preferencia sobre sus posibles parejas. En el caso de la asignación escolar quienes hacen la postulación no son los mismos estudiantes sino sus *familias* (sus tutores, sus padres), que en general pueden contener a más de un postulante. Esto significa que los agentes son las familias y que por tanto sus preferencias pueden ser más complejas, un orden sobre todas las posibles combinaciones: por ejemplo para una familia puede ser importante que el hijo mayor estudie en un buen colegio y que el menor quede en un colegio cercano al del mayor.

Escenarios relacionados han sido estudiados. El problema en su versión más general, en que cada agente es asignado a varios agentes del lado contrario del mercado ha sido estudiado y se ha definido de más de una forma la estabilidad. Kelso y Crawford [12] probaron que bajo una condición llamada *sustitubilidad* se puede probar la existencia de asignaciones estables, las cuales no existen en general. Una revisión sobre este problema general hace Sotomayor [24]. En un contexto más parecido al del presente trabajo, Roth [18] estudió la asignación de médicos a hospitales el caso en que hay parejas de médicos que desean trabajar en hospitales cercanos, probando que no necesariamente existe una asignación estable si cada hospital tiene preferencias sobre cada médico y cada pareja un orden sobre cada posible par de hospitales. Llendo más allá, McDermid y Manlove [15] probaron que decidir si una instancia de la asignación de médicos a hospitales con parejas admite asignación estable es NP-completo.

Es natural entonces la pregunta de cómo definir la estabilidad de la asignación en el escenario de estudiantes y colegios con preferencias familiares. En lo que sigue definimos la *estabilidad familiar* y estudiamos la existencia de asignaciones que la cumplan, bajo distintos supuestos sobre las preferencias de los colegios y de las familias. Estudiamos los casos en que las preferencias de los colegios son sobre el conjunto de estudiantes o sobre el conjunto de familias, cuando son todas iguales o distintas para cada colegio, así como los casos en que las preferencias de las familias son sobre todas las posibles combinaciones de colegios o si simplemente prefieren que sus hijos estén juntos. Resumimos estos resultados en la Tabla 3.1. Finalmente presentamos un problema abierto inspirado en la asignación de familias.

Tabla 3.1: Resumen de resultados sobre existencia de asignaciones estables.

Familias / Colegios	Sobre estudiantes	Sobre familias		
	Única o por colegio	Única	Por colegio	Por colegio, preferencia por familias completas
General	No	Sí	No	No
Hermanos juntos	No	Sí	No	No
Hermanos juntos débil	No	Sí	No	Sí

3.1. Definición de la *estabilidad familiar*

Consideramos los conjuntos de estudiantes S_k, con $k = 1...K$ el nivel al que postulan los estudiantes, $\mathcal{S} = \cup_{k=1}^{K} S_k$ el universo de estudiantes y el conjunto C de colegios, con $V_k(c) \in \mathbb{N}$ la cantidad de vacantes del colegio c en el nivel k. Existe además una familia no vacía de conjuntos disjuntos $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{S})$ que particiona a $\mathcal{S}$, que serán los conjuntos de hermanos o familias.

Existe además para cada familia $A \in \mathcal{F}$ un orden de preferencias $<_A$ (no necesariamente completo) sobre las posibles asignaciones de sus hijos $(C \cup \{\emptyset\})^A$ y para cada colegio $c \in C$ y nivel $k \in [K]$ un orden de preferencias estrictas $<_c^k$ sobre E_k. En esta notación $a < b$ significa que b es preferido por sobre a. Llamamos de **hermanos juntos** al caso particular en que las preferencias de las familias son tales que primero están las asignaciones en que todos los hijos están en un mismo colegio y luego las en que están separados, y siguiendo un orden único sobre los colegios.

Definición 3.1 *Una función $\mu : \mathcal{S} \to C$ es una **asignación factible** si para todo $c \in C, k \in [K]$, se cumple que $|\{s \in S_k : \mu(s) = c\}| \leq V_k(c)$, es decir, respeta el límite de vacantes. Usamos además la notación $\mu_k(c) := \{s \in S_k : \mu(s) = c\}$ y $\mu(c) := \{s \in \mathcal{S} : \mu(s) = c\}$.*

Definición 3.2 *Una asignación factible μ tiene **estabilidad familiar** si para toda familia $A \in \mathcal{F}$ y asignación $x \in (C \cup \{\emptyset\})^A$ que prefiera por sobre μ, es decir, $\mu\big|_A <_A x$ existe un hijo $s \in A$ de algún nivel k que no es aceptado por el colegio $c = x(s)$, es decir, $|\mu_k(c)| = V_k(c)$ y $s <_c s'$ para todo estudiante $s' \in \mu_k(c)$.*

La ley que crea el sistema de asignación escolar chileno mandata que se debe considerar la posibilidad de que las familias prefieran que sus hijos estudien en un mismo colegio. Esto motiva a que la mayor parte de los casos estudiados en las secciones siguientes se use el supuesto de que las preferencias de las familias son de *hermanos juntos*. A continuación se caracteriza la *estabilidad familiar* cuando se cumple este supuesto.

Proposición 3.3 *Si las preferencias de las familias son de* hermanos juntos*, entonces una asignación factible μ cumple **estabilidad familiar** si y sólo si para toda familia $A \in \mathcal{F}$:*

1. *Si no están todos en el mismo colegio, es decir, $A \not\subseteq \mu(c), \forall c \in C$, entonces*
   - *para todo colegio $c \in C$, c no acepta completa a la familia A y*
   - *cumplen la estabilidad en el sentido individual, es decir, para todo $s \in A$ y todo*

$c \in C$ tales que $c >_A \mu(s)$, entonces $s' >_c^k s, \forall s' \in \mu_k(c)$ y $|\mu_k(c)| = V_k(c)$, donde k es el nivel al que pertenece s.

2. *Si están todos en el mismo colegio, es decir, existe $c \in C$ tal que $A \subseteq \mu(c)$, entonces no quedan juntos en ningún colegio que prefieran más que c, es decir, $\forall c' >_A c$, c' no acepta completa a la familia A.*

Donde que $c \in C$ no acepte a A completa significa que existe un nivel $k \in [K]$ tal que no hay suficientes cupos, es decir $|\mu_k(c) \cup (A \cap S_k)| > V_k(c)$ y que existe $s \in A \cap S_k$ tal que s no está entre los mejores $V_k(c)$ estudiantes de $\mu_k(c) \cup (A \cap S_k)$ en términos de $(<_c^k)$.

3.2. Preferencias iguales para los colegios

Un supuesto posible, aunque muy limitante, es que los colegios siguen todos el mismo orden de preferencias. Bajo un sistema de preferencias aleatorias esto significa que existe una única tómbola para todos los colegios. Bajo un sistema con selección significa que los colegios prefieren y observan a los estudiantes según un único atributo, por ejemplo el puntaje de una prueba. A continuación mostramos que si el orden sobre los estudiantes es inducido por un orden sobre las familias entonces siempre hay una asignación estable y para el caso contrario mostramos una instancia que no posee asignación con *estabilidad familiar*.

3.2.1. Preferencias sobre las familias

Decimos que un orden de preferencia sobre los estudiantes $<_S$ es inducido por un orden sobre las familias si existe un orden $<_{\mathcal{F}}$ sobre $\mathcal{F}$ tal que $A <_{\mathcal{F}} B$ implica que $a <_S b$ para todo $a \in A, b \in B$.

El siguiente es el único resultado positivo encontrado respecto de la *estabilidad familiar*.

Teorema 3.4 *Si las preferencias de los colegios son todas iguales y son inducidas por un orden sobre las familias, entonces existe una asignación μ con* estabilidad familiar*.*

DEMOSTRACIÓN. Construimos la asignación μ con el siguiente algoritmo, donde $<_{\mathcal{F}}$ es el orden sobre las familias que induce las preferencias de los colegios.

1. A es la mejor familia según $<_{\mathcal{F}}$ y μ es una asignación vacía.
2. Se fija $\mu\big|_A$ como una asignación maximal según $<_A$ entre los cupos que no han sido asignados.
3. Si quedan familias, se toma A como la siguiente mejor familia según $<_{\mathcal{F}}$ y se vuelve al punto anterior.

Es directo que la asignación μ resultante cumple la *estabilidad familiar*. □

3.2.2. Preferencias sobre los estudiantes

En el contexto inicial se ha permitido que las preferencias de los colegios sean independientes por nivel, es decir, los colegios tienen órdenes de preferencia sobre los estudiantes en lugar de las familias, lo que no es muy relevante cuando no hay selección pero es natural cuando los colegios pueden seleccionar a sus estudiantes. El siguiente contraejemplo muestra que en este contexto es fácil construir una instancia en la que no existe ninguna asignación con *estabilidad familiar*, incluso cuando las preferencias de las familias son de *hermanos juntos* y todas ordenan a los colegios de la misma forma.

Consideremos una instancia de tres niveles, con dos colegios que tienen un cupo por cada nivel y tres familias, cada una con dos hermanos postulando a niveles distintos, como se muestra en la figura 3.1. En el esquema los rectángulos celestes representan los niveles, los cuadrados blancos representan postulaciones de familias (filas) a colegios (columnas). Las flechas apuntan en el sentido de las preferencias.

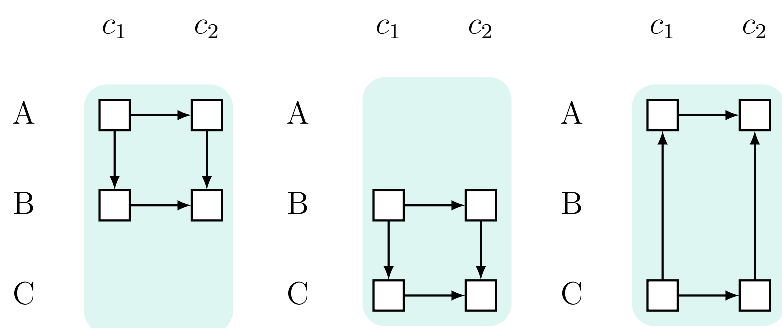

Figura 3.1: Contraejemplo para estabilidad con preferencias independientes por nivel.

Para ver que en esta instancia no existen asignaciones estables, notemos que las tres familias A, B y C son la primera preferencia para ambos colegios en algún nivel. Esto implica que en cualquier asignación estable los hermanos de una misma familia quedan juntos. Para ver esto, supongamos que la familia A queda separada. Como en el tercer nivel tiene la prioridad, entonces el estudiante tiene derecho a moverse al mismo colegio que su hermano (como se observa en la figura 3.2).

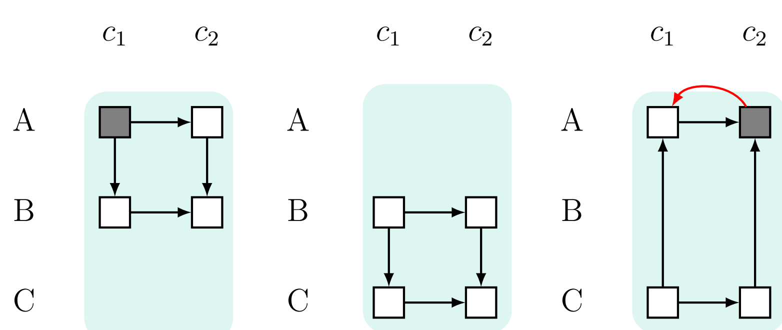

Figura 3.2: La familia A siempre tiene derecho a mover al hermano del tercer nivel a c_1.

Además, no puede quedar ningún estudiante sin colegio, puesto que si alguno está fuera entonces necesariamente hay un colegio en su nivel que tiene una vacante disponible.

Juntando las dos condiciones anteriores es fácil notar que no existe ninguna asignación factible que las cumpla y por tanto no existe asignación estable.

3.3. Preferencias distintas por cada colegio

En esta sección consideramos el caso en que las preferencias de los colegios son iducidas por órdenes sobre las familias pero no necesariamente todas iguales. A su vez, restringimos las preferencias de las familias a ser de *hermanos juntos*. Mostramos que no es posible garantizar existencia de asignación estable cuando existe un solo nivel ni cuando hay más de uno pero cada familia tiene a lo más un hijo por nivel.

3.3.1. Mellizos: hermanos en un mismo nivel

En el contexto original se permite que existan familias con varios estudiantes en un mismo nivel, es decir familias $A \in \mathcal{F}$ tal que $|A \cap S_k| > 1$ para algún $k \in [K]$. A continuación se muestra una instancia en la que este hecho provoca que no exista asignación estable.

En el ejemplo que se muestra en la figura 3.3 hay tres familias y tres colegios en un solo nivel. Sólo una de las familias está compuesta por dos hermanos, lo que es representado por un rectángulo blanco en lugar de un cuadrado blanco, y dos de los tres colegios tienen dos cupos.

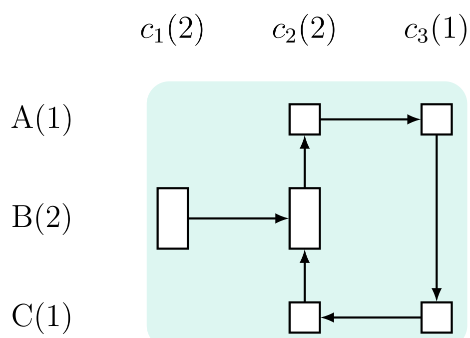

Figura 3.3: Contraejemplo para estabilidad con mellizos .

Para ver que en esta instancia no existe asignación estable, notemos primero que todas las familias son la primera preferencia de alguno de los colegios y por lo tanto en toda asignación estable todos los estudiantes están asignados a algún colegio. En particular, la familia B tiene asegurados los dos cupos del colegio c_1 y por tanto en cualquier asignación estable los hermanos de esta familia están juntos (si no están los dos en c_2 siempre pueden estar juntos en c_1).

Tenemos entonces dos casos posibles para la familia B: que ambos hermanos estén en c_1 o

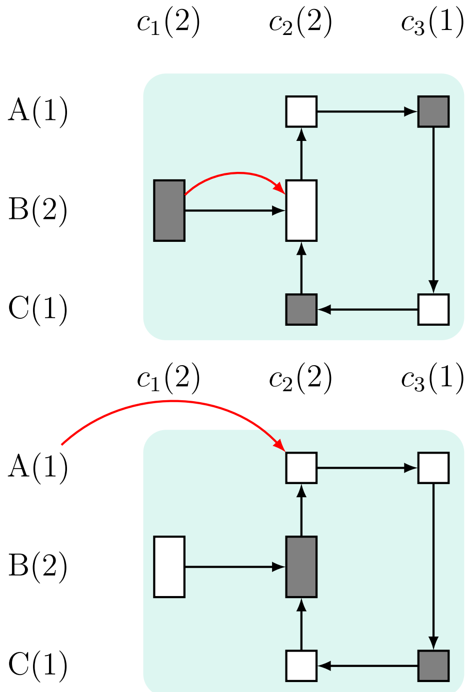

Figura 3.4: Ambos casos posibles, B en c_1 y B en c_2 llevan a inestabilidad.

que ambos estén en c_2. Como vemos en la figura 3.4 ambos casos resultan en una asignación inestable. Si B está en c_1, entonces A y C pueden estar en sus colegios favoritos pero B tiene derecho a subir a c_2 y si B está en c_2, entonces alguna de las otras dos familias se queda sin colegio, lo que ya se mostró que no puede pasar en una asignación estable.

3.3.2. Inestabilidad en dos niveles

Observando el ejemplo anterior, podemos notar que la clave está en que la familia A cuando está en el colegio c_2 le abre un cupo a la familia C y cuando se va, se le niega el cupo para dárselo a B.

Podemos entonces replicar esta idea en un ejemplo de dos niveles en que no se permiten hermanos en un mismo nivel, completando el conjunto de contraejemplos de existencia de asignaciones estables.

En la Figura 3.5 se muestra una instancia con dos niveles, con sólo cuatro familias y cuatro colegios, los cuales tienen todos exactamente un cupo por nivel.

Para ver que en la instancia de la Figura 3.5 no existe asignación estable con hermanos seguimos el mismo razonamiento que en el caso anterior: todas los postulantes tienen que estar asignados a algún colegio y los hermanos de las familias B y D tienen que estar juntos.

Entonces, al igual que antes, si la familia B está en c_1, entonces el resto de las familias está en su mejor opción y entonces B tiene derecho a mejorar subiendo a c_2. Y si la familia

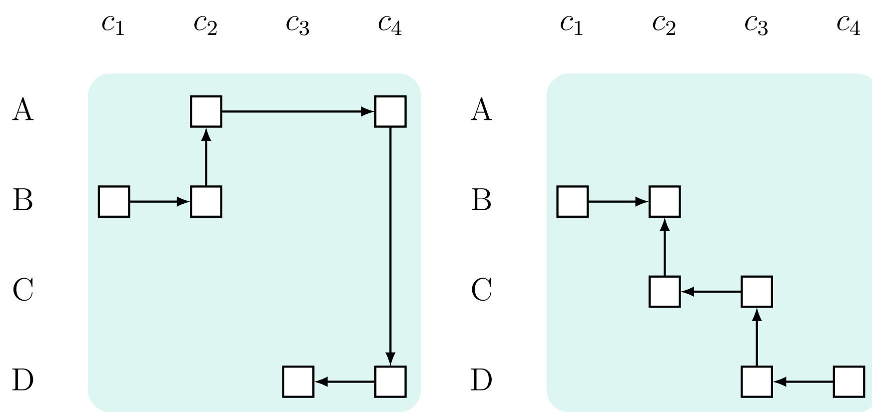

Figura 3.5: Contraejemplo para estabilidad con familias.

B está en c_2, entonces las familias C y D están aseguradas en sus segundas opciones y A queda sin colegio, lo que no puede ocurrir.

3.4. Supuestos alternativos sobre las preferencias

Una vez probado que bajo la noción más natural presentada en la sección anterior no se puede garantizar la existencia de solución estable, se hace interesante la pregunta sobre nociones alternativas que puedan ser utilizadas en el sistema que motiva este trabajo.

A continuación presentamos dos nociones alternativas, probamos que por separado no pueden garantizar la existencia de asignación estable pero que juntas sí lo hacen. En este último caso, no obstante, existen claros incentivos para que las familias mientan sobre su composición.

3.4.1. Privilegio para hermanos por parte de los colegios

Bajo el supuesto de que se quiere privilegiar que los hermanos que quieren estar juntos lo estén y en la búsqueda de simetría en el problema de asignación, se podría agregar a la definición de estabilidad que los colegios están dispuestos a aceptar a familias A, con $|A| > 1$, que están más abajo en la lista de preferencias con tal de que entren completas.

Esta definición puede formalizarse, pero no es necesario para notar que en una instancia en que todas las familias tienen más de un estudiante y están aseguradas para entrar completas en algún colegio, esta noción es equivalente a la anterior.

Mostramos entonces en la Figura 3.6 una instancia con cuatro niveles inspirada en los contraejemplos de la sección anterior, en que todas las familias tienen más de un estudiante y no existe asignación estable con hermanos.

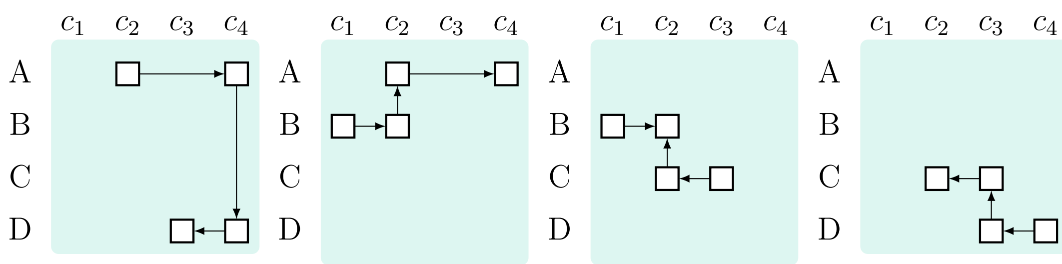

Figura 3.6: Contraejemplo para estabilidad con familias dobles .

La demostración de que no existe asignación estable con hermanos es similar a la anterior puesto que las familias A, B, C y D cumplen exactamente los mismos roles que antes.

3.4.2. Debilitamiento de preferencias de las familias

Un debilitamiento en cierta medida razonable de la estabilidad es que a las familias que prefieren que sus hijos estén juntos les basta que estén juntos y son indiferentes del colegio en que esto ocurre. Llamamos a este caso de *de hermanos juntos débil*, puesto que las asignaciones que eran estables antes lo siguen siendo con este supuesto.

Proposición 3.5 *Si las preferencias de las familias son de* hermanos juntos débil*, una asignación factible μ cumple* estabilidad familiar *si y sólo si para toda familia $A \in \mathcal{F}$: Si no están todos en el mismo colegio, es decir, $A \not\subseteq \mu(c), \forall c \in C$, entonces*

- *para todo colegio $c \in C$, c no acepta completa a la familia A y*
- *cumplen la estabilidad en el sentido individual, es decir, para todo $s \in A$ y todo $c \in C$ tales que $c >_A \mu(s)$, entonces $s' >_c^k s, \forall s' \in \mu_k(c)$ y $|\mu_k(c)| = V_k(c)$, donde k es el nivel al que pertenece s.*

En la Figura 3.7 se muestra un contraejemplo para la existencia de asignaciones débilmente estables con hermanos.

En esta instancia, los colegios c_0 y c_1 siempre tienen un espacio ocupado por las familias D y E. Por lo tanto, la familia B siempre prefiere ir junta al colegio c_2 si es que puede, y si no puede, se separa entre el colegio c_0 y c_1.

Con lo anterior y notando que las familias A y C se comportan igual que en los ejemplos anteriores, concluimos que no existe asignación débilmente estable con hermanos.

3.4.3. Privilegio para hermanos y preferencias familiares débiles

Consideramos ahora el caso en que los dos supuestos alternativos se cumplen. Bajo este contexto especial se puede garantizar la existencia de asignación estable:

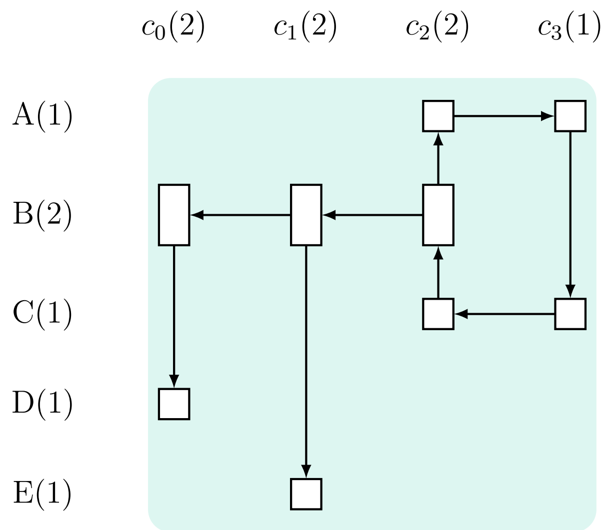

Figura 3.7: Contraejemplo para estabilidad debilitada .

Teorema 3.6 *Si las preferencias de las familias son de* hermanos juntos débil *y además los colegios privilegian a las familias con más de un hijo, entonces siempre existe una asignación con* estabilidad familiar*.*

Demostración. Sea μ la asignación construida mediante el siguiente algoritmo:

1. Siguiendo un orden arbitrario sobre C, asignar cada colegio c con las familias con más de un hijo que más prefiere entre las que quedan sin asignar, hasta que no pueda recibir a ninguna completa.
2. En la instancia que resulta de considerar sólo los cupos que quedan del paso anterior y de dividir las familias que quedan sin asignar en estudiantes individuales encontrar una asignación estable.

Por definición de las preferencias de *hermanos juntos débil* las familias que están completas asignadas a un mismo colegio en μ están contentas y por tanto no forman parte de *pares de bloqueo*. Sea A una familia que está asingada en μ separada. Como está separada, no fue asignada en el primer paso del algoritmo, y por tanto todos los colegios que está dispuesta a aceptar han completado sus cupos con familias completas que prefieren por sobre A.

Queda sólo por analizar a los estudiantes de manera individual. Sea s un estudiante cuya familia está asignada separada en μ o está compuesta sólo por s y sea c un colegio tal que $c >_s \mu(s)$. Claramente c tiene sus cupos completos con familias completas y estudiantes que prefiere por sobre s. □

Este contexto permite garantizar la existencia de asignaciones estables, pero además de ser poco razonable, desde el punto de vista del diseño de mecanismos, si el sistema usa estos supuestos entonces una familia podría tener incentivos para mentir sobre su composición. Supongamos por ejemplo que la familia A está compuesta por cuatro hermanos y no queda completa en ningún colegio y por lo tanto es asignada de manera individual en la segunda etapa del algoritmo. Es posible que separándose en dos familias A_1 y A_2 de dos hermanos cada una obtenga una mejor asignación porque siguen siendo privilegiadas en el primer paso y a diferencia de antes ahora podría quedar espacio para asignar dos hermanos juntos en vez de cuatro, obteniendo así una mejor asignación.

3.5. Maximización de cantidad de hermanos juntos

A la vista de los resultados negativos presentados en las secciones anteriores, planteamos a continuación un problema abierto relacionado.

Consideraremos el problema de encontrar una asignación que maximice la cantidad de familias que quedan juntas. Tenemos nuevamente los conjuntos de estudiantes S_k, con $k = 1...K$ el nivel al que postulan los estudiantes, $\mathcal{S} = \cup_{k=1}^{K} S_k$ el universo de estudiantes y el conjunto C de colegios, con $V_k(c) \in \mathbb{N}$ la cantidad de vacantes del colegio c en el nivel k. Existe además una familia no vacía de conjuntos disjuntos $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{S})$ que particiona a $\mathcal{S}$, que serán los conjuntos de hermanos o familias.

Ahora no consideramos las preferencias de las familias, sino sólamente a qué colegios están dispuestas a enviar a sus hijos, que notamos por el conjunto $D(s) \subseteq C, s \in \mathcal{S}$. En este nuevo contexto debemos cambiar la definición de asignación estable:

Definición 3.7 *Una función $\mu : \mathcal{S} \to C$ es una **asignación factible** si para todo $c \in C, k \in [K]$, se cumple que $|\{s \in S_k : \mu(s) = c\}| \leq V_k(c)$ y para todo estudiante $s \in \mathcal{S}, \mu(s) \in D(s)$, es decir, respeta el límite de vacantes y envía a cada estudiante a un colegio al que está dispuesto a asistir. Usamos además la notación $\mu_k(c) := \{s \in S_k : \mu(s) = c\}$ y $\mu(c) := \{s \in \mathcal{S} : \mu(s) = c\}$.*

Observación: Notar que bajo esta definición, en una asignación factible todos los estudiantes están asignados a algún colegio.

Definimos ahora el conjunto de familias que envían a los hermanos juntos:

Definición 3.8 *Dada una asignación factible μ, definimos el conjunto de familias juntas $H(\mu) = \{F \in \mathcal{F} : \forall s_1, s_2 \in F, \mu(s_1) = \mu(s_2)\}$. Denotamos además el cardinal de este conjunto como $h(\mu) = |H(\mu)|$.*

El problema de maximización de hermanos juntos consiste entonces en encontrar una asignación factible μ^* tal que $h(\mu^*) = \max\limits_{\mu \text{ factible}} h(\mu)$. Durante el curso de esta tesis no hemos encontrado un algoritmo que resuelva este problema en tiempo polinomial y parece no tener una solución sencilla, incluso en la simplificación que presentamos en lo que sigue.

3.5.1. Maximización en dos niveles y sin mellizos

Una versión particular del problema de maximización de hermanos juntos que puede formularse de manera un poco más sencilla como una pregunta sobre un cierto grafo es el caso en que sólo hay dos niveles, no hay mellizos y los colegios tienen a lo más un cupo por nivel.

Sea $G = (V, E)$ un grafo bipartito, con colores S y C y dos subconjuntos de aristas $E_1 \cup E_2 = E$ tales que para todo vértice $v \in S$ si $\delta(v) \cap E_\mathrm{i} \neq \emptyset$ para algún i, entonces $\delta(v) \subseteq E_\mathrm{i}$. En este esquema S representa a las familias de estudiantes, C a los colegios y E_1 y E_2 representan a las postulaciones en cada uno de los niveles.

En lo anterior una asignación factible es un par (M_1, M_2) tal que M_i es un emparejamiento en $G_\mathrm{i} = (V, E_\mathrm{i})$ que cubre a todo nodo no aislado de S en G_i, con $\mathrm{i} = 1, 2$. El problema consiste entonces en encontrar una asignación factible (M_1^*, M_2^*) que maximice $|M_1^* \cap M_2^*|$.

Capítulo 4

Competencia en Mercados Aleatorios Desbalanceados

¿Cuántas asignaciones estables distintas puede haber en un mercado bipartito? Potencialmente una cantidad exponencial sobre el número de agentes. En tal caso puede resultar cuestionable el que se implemente una particular en lugar de otra, siendo que la estabilidad de dos asignaciones distintas implica que en ambas hay al menos un agente que está peor que en la otra. En la práctica lo que se ha observado, sin embargo, es que casi siempre hay muy pocas asignaciones estables y pocos agentes tienen más de una pareja estable.

Para entender este fenómeno y bajo qué condiciones ocurre se ha utilizado el modelo de preferencias aleatorias, el cual presentamos en la Sección 4.1 bajo el nombre de modelo de *popularidades*. Se ha logrado probar que listas de preferencias acotadas, así como desbalance en los lados del mercado implican la existencia de pocas asignaciones estables. El efecto de esta segunda condición puede entenderse como consecuencia de añadir competencia al sistema. Una revisión de estos resultados se presenta en la Sección 4.2.

El aporte de este capítulo se presenta en las secciones 4.4 y 4.5, donde se extiende una parte del Teorema 4.3 mostrado por Ashlagi et al. [4]. Ésta dice que en un mercado con preferencias aleatorias y uniformes, si hay más agentes a un lado del mercado que al otro entonces la proporción esperada de agentes con más de una pareja estable tiende a cero. La extensión es al caso en que las preferencias son aleatorias pero no uniformes, obteniéndose restricciones sobre cuán lejos de lo uniforme está la distribución de las preferencias y sobre el desbalance del mercado.

Para probar esta extensión hacemos uso de una versión modificada del esquema de demostración de Ashlagi et al., adaptada al caso no uniforme, además de un resultado sobre el *Problema del Coleccionista de Cupones*, el que es descrito en la Sección 4.5.1.

El resultado presentado en este capítulo es además un paso hacia la comprensión del efecto que tiene la aleatoriedad en el Sistema de Admisión Escolar chileno: la aleatoriedad en las preferencias de los colegios se traduce directamente al esquema usado, en forma de preferencias uniformes, y las preferencias de los estudiantes a su vez se pueden modelar como preferencias no uniformes.

4.1. Mercados de Asignación Aleatorios: el modelo de popularidades

El estudio de las propiedades de los mercados bipartitos aleatorios comenzó con los trabajos de Pittel [17] y de Knuth, Motwani y Pittel [13], con el interés de modelar el comportamiento de los mercados bipartitos reales. En dichos trabajos se consideró el caso en que las preferencias de los agentes son generadas de manera uniforme e independiente. Más generalmente, se puede considerar que las preferencias son generadas de manera independiente e idénticamente distribuida pero no uniforme, modelo que fue introducido por Immorlica y Mahdian [11] y que presentamos a continuación.

Sean W y M los conjuntos de hombres y mujeres, con $|M| = n$ y $|W| = n + k$, con k un entero no negativo que puede depender de n. Consideramos que existen además ciertos valores positivos $(p_w)_{w \in W}$ y $(p_m)_{m \in M}$ que llamamos popularidades y por conveniencia asumimos que están normalizados, es decir, $\sum_{w \in W} p_w = 1$ y $\sum_{m \in M} p_m = 1$. Las preferencias de cada mujer w son un orden estricto aleatorio sobre M, escogido de manera independiente y proporcional a $(p_m)_{m \in M}$. Así mismo se generan las preferencias de cada hombre m según $(p_w)_{w \in W}$.

Decimos que las preferencias son *uniformes* en el caso particular en que las popularidades son iguales. Decimos además que el mercado es *balanceado* si $k = 0$ y *desbalanceado* si $k > 0$.

4.2. Resultados Asintóticos Previos

Pioneros en la dirección de este estudio, son los ya mencionados trabajos de Pittel [17] y de Knuth, Motwani y Pittel [13], los que analizan el comportamiento asintótico de mercados aleatorios balanceados con preferencias uniformes y caracterizan el conjunto de asignaciones estables. En el primero se muestra que, en un mercado de n mujeres y n hombres, el número esperado de asignaciones estables distintas es asintóticamente $\mathrm{e}^{-1} n \log n$ y que con alta probabilidad en la asignación estable óptima para los hombres, éstos están en promedio con la $\log n$- ésima mujer en su lista de preferencias y las mujeres en promedio con el $n/\log n$-ésimo hombre de sus listas. En el segundo se demuestra que la proporción de agentes con múltiples parejas estables tiende a 1 cuando n crece.

Ambos resultados coinciden en apuntar a que en un mercado de asignación grande debería haber muchas posibles soluciones y que la situación de los agentes podría variar mucho dependiendo de cuál es la solución estable que se elige. Contrariamente, las aplicaciones prácticas han mostrado consistentemente que el conjunto de soluciones es en realidad muy pequeño, por lo que en 1999 Roth y Peranson [20] conjeturaron que el hecho de que las listas de preferencias fueran acotadas en los sistemas de asignación sería la razón de esta diferencia. Más formalmente, conjeturaron lo siguiente.

Conjetura 4.1 ([20]) *Consideramos un mercado bipartito aleatorio* balanceado*, con* n *agentes por lado, con preferencias* uniformes*. Si se truncan las listas de los hombres a sus* ℓ *primeras preferencias y llamamos* $c_\ell(n)$ *al número de mujeres que tienen más de un esposo estable, entonces para todo* ℓ *fijo,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}(c_\ell(n))}{n} = 0.$$

En 2015 Immorlica y Mahdian [11] mostraron que esta conjetura es cierta y probaron un resultado aún más fuerte.

Teorema 4.2 ([11]) *Consideramos un mercado bipartito* balanceado*, con preferencias arbitrarias para las mujeres y preferencias según el modelo de popularidades para los hombres. Si se truncan las listas de los hombres a sus primeras* ℓ *preferencias, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}(c_\ell(n))}{n} = 0.$$

Ashlagi, Kanoria y Leshno [4] por su parte dieron una explicación alternativa a lo observado en la práctica sobre el tamaño del conjunto de soluciones. Ellos mostraron en 2016 que aún si las listas de preferencia son completas, el solo hecho de que el mercado sea desbalanceado provoca que el conjunto de soluciones se contraiga drásticamente respecto del caso balanceado. Más aún, probaron que el desbalance beneficia ampliamente al lado corto del mercado.

Teorema 4.3 ([4]) *Consideramos un mercado bipartito aleatorio* desbalanceado*, con* n *hombres y* $n+1$ *mujeres y preferencias* uniformes*. Sea* $\varepsilon > 0$*. Si* n *es suficientemente grande, con probabilidad al menos* $1 - \exp\{-(\log n)^{0,4}\}$ *se tiene que*

1. *si llamamos* $c(n)$ *al número de mujeres que tienen más de un esposo estable, entonces*

$$\frac{c(n)}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{\log n}};$$

2. *para todo matching estable* μ*, si* $R_M(\mu)$ *(*$R_W(\mu)$ *respectivamente) es la posición promedio de las parejas de los hombres (mujeres respectivamente) en sus listas, entonces*

$$R_M(\mu) \leq (1+\varepsilon)\log n$$
$$R_W(\mu) \geq n/[1+(1+\varepsilon)\log n].$$

4.3. El Algoritmo de Divorcios y el principio de decisiones diferidas

El algoritmo de divorcios de Knuth, Motwani y Pittel [13] encuentra en el problema de asignación estable todas las parejas estables de una mujer dada. Este algoritmo es escencial para los resultados presentados en el apartado anterior.

A continuación presentamos una variante de dicho algoritmo que decide si una mujer $\bar{w}$ fija tiene o no múltiples parejas estables. La idea detrás del algoritmo es continuar con las propuestas del algoritmo de aceptación diferida después de que $\bar{w}$ se *divorcia* de su pareja estable. A lo largo del algoritmo mantenemos una asignación parcial y P es el rol del hombre que está temporalmente sin pareja.

Algoritmo 2 Algoritmo de divorcios para encontrar parejas estables de $\bar{w}$.

1: Encontrar la asignación estable óptima para los hombres mediante el algoritmo de aceptación diferida en que los hombres proponen. Si $\bar{w}$ queda sin pareja en este paso, entonces el algoritmo termina y $\bar{w}$ tiene 0 parejas estables.
2: *Divorcio:* la mujer $\bar{w}$ rechaza a su pareja estable m, que toma el rol de P.
3: P se le propone a w, la mujer que prefiere entre las que no lo han rechazado hasta ahora. Si ya había sido rechazado por todas, entonces el algoritmo termina y $\bar{w}$ sólo tenía una pareja estable. Si $w = \bar{w}$, entonces el algoritmo termina y $\bar{w}$ tiene más de una pareja estable (P es su segunda peor pareja estable).
4: w decide entre su actual pareja y P. Si w no tenía pareja estable antes, el algoritmo termina y $\bar{w}$ sólo tenía una pareja estable. Si no, quien es rechazado tiene ahora el rol de P y el algoritmo continúa en el paso 3.

Como hemos mencionado antes, el Algoritmo 2 es fundamental para los resultados anteriores y lo es también para este trabajo, en combinación con las siguientes observaciones.

Observación El resultado del Algoritmo 1 no depende del orden en que se hagan las propuestas.

Observación *Principio de decisiones diferidas.* En un mercado de asignación aleatorio generado con el modelo de popularidades el resultado de aplicar el Algoritmo 2 habiendo realizado las preferencias al comienzo distribuye igual que el resultado de realizar las preferencias a medida que son requeridas por el algoritmo.

La Observación 4.3 implica que para estudiar cómo se comportan las asignaciones estables en un mercado aleatorio, podemos estudiar las versiones aleatorizadas de los algoritmos. Nos interesa poder generar entonces, bajo el modelo de popularidades, los dos tipos de consulta a las preferencias que hacen los algoritmos: (i) cuál es la siguiente mujer en la lista de preferencias de un hombre y (ii) si el hombre proponiendo es el preferido entre los que se han propuesto a dicha mujer; en ambos casos condicional a las preferencias que se han revelado hasta el momento.

En el primer caso, consideramos a un hombre m y a $R(m)$ como el conjunto de mujeres que le han rechazado. Entonces la siguiente mujer en la lista de preferencias de m será $\bar{w} \in R(m)$ con probabilidad $p_{\bar{w}}/\sum_{w\in W\setminus R(m)} p_w$. Esto es claro del hecho de que un orden de preferencia proporcional a $(p_m)_{m\in M}$ se puede ver como tomar consecutivamente bolas al azar sin reposición y proporcional a $(p_m)_{m\in M}$.

En el segundo caso, consideramos a una mujer w y a $V(w) \neq \emptyset$ como el conjunto de hombres que se han propuesto a w. Si $\bar{m} \in M \setminus V(w)$ se propone a w, entonces ella lo acepta con probabilidad $\dfrac{p_{\bar{m}}}{p_{\bar{w}} + \sum_{m \in V(w)} p_m}$ y lo rechaza en caso contrario. Esto es consecuencia de que el evento de que $\bar{m}$ va primero en el conjunto $V(w) \cup \{\bar{m}\}$ es independiente del orden relativo entre los hombres en $V(w)$.

4.4. Desbalance bajo preferencias no uniformes: extensión desde el caso uniforme

Para extender el resultado de Ashlagi, Kanoria y Leshno [4] sobre el tamaño del conjunto de soluciones (ver Teorema 4.3) al caso no uniforme, consideremos una secuencia de mercados bipartitos aleatorios desbalanceados, con n hombres y $n+k$ mujeres, con $k > 1$, y preferencias proporcionales a las popularidades $(p_w)_{w \in W}$ y $(p_m)_{m \in M}$ (omitimos la dependencia en n por simplicidad en la notación). Parametrizamos la distancia al caso uniforme al definir las secuencias $\alpha_M(n)$ y $\alpha_W(n)$ tales que

$$\begin{aligned} \alpha_M(n) &\leq \frac{\text{máx}_{m \in M} p_m}{\text{mín}_{m \in M} p_m}, \\ \alpha_W(n) &\leq \frac{\text{máx}_{w \in W} p_w}{\text{mín}_{w \in W} p_w}. \end{aligned}$$

En lo que sigue usamos la versión aleatorizada del Algoritmo 1, de aceptación diferida, para encontrar la asignación estable óptima para los hombres. Usamos la versión aleatorizada del Algoritmo 2, de divorcios, para decidir si una mujer dada posee más de una pareja estable. Haremos además uso intensivo de la Observación 4.3.

Dada una asignación μ, para un hombre $m \in M$ decimos que el *rango* de esposa de m en μ es la posición que tiene $\mu(m)$ en la lista de preferencias de m. A continuación estudiamos el comportamiento de la suma de los rangos.

Lema 4.4 *Sea $\varepsilon > 0$ y μ la asignación estable óptima para los hombres. La suma de los rangos de esposas de los hombres en μ es a lo más*

$$\alpha_W(n) \cdot (1+\varepsilon)(n+k) \log\left(\frac{n+k}{k}\right)$$

con probabilidad al menos $1 - \left(\dfrac{n+k}{k}\right)^{-\varepsilon}$.

Demostración. El Teorema 2.1 establece que el Algoritmo 1 de aceptación diferida en su versión hombres proponen encuentra la asignación estable óptima para los hombres. Notemos que con cada propuesta de un hombre m en el Algoritmo 1, m baja una posición en su lista de preferencias, lo que significa que el rango de su esposa estable será igual al número de propuestas que hizo durante el Algoritmo 1. La idea tras esta demostración es comparar el proceso de propuestas del Algoritmo 1 con una suma de variables aleatorias geométricas, con un análisis similar al que se puede hacer con el *Problema del Coleccionista de Cupones*, y usar una cota de concentración tipo Chernoff para mostrar que esta suma de variables geométricas no es mucho mayor a su valor esperado.

Dividimos entonces el algoritmo de aceptación diferida, en su versión hombres proponen, en n etapas en que se va agregando uno por uno los hombres al sistema. Dado un orden fijo en M (rocordemos que por la Observación 4.3 dicho orden puede ser arbitrario), la primera etapa se compone sólo de la propuesta del primer hombre, que es aceptada inmediatamente. La i-ésima etapa parte con la primera propuesta del i-ésimo hombre, la que posiblemente va a una mujer ya emparejada y por lo tanto *provoca* otra propuesta del mismo hombre o de uno anterior, y termina cuando los i primeros hombres fueron aceptados, es decir, cuando la cadena de propuestas *provocadas* cae en una mujer sin pareja.

Durante la i-ésima etapa hay $n+k-\mathrm{i}+1$ mujeres sin pareja y, por lo tanto, cada propuesta va a una de ellas con probabilidad al menos

$$\frac{(n+k-\mathrm{i}+1)}{(n+k)} \cdot \frac{\min_{w\in W} p_w}{\max_{w\in W} p_w} \geq \frac{(n+k-\mathrm{i}+1)}{(n+k)\alpha_W(n)}.$$

Lo anterior implica que la cantidad de propuestas en la i-ésima etapa está dominada estocásticamente por $X_\mathrm{i} \sim \text{Geométrica}\left(\frac{(n+k-\mathrm{i}+1)}{(n+k)\cdot\alpha_W(n)}\right)$ y que en consecuencia el número total de propuestas está dominado por $X = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} X_\mathrm{i}$. El valor esperado de X es

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} \frac{\alpha_W(n)\cdot(n+k)}{n+k-\mathrm{i}+1} \tag{4.1}$$

$$= \alpha\cdot(n+k)\sum_{\mathrm{i}=1}^{n}\frac{1}{k+\mathrm{i}} \tag{4.2}$$

$$= \alpha_W(n)\cdot(n+k)\log\left(\frac{n+k}{k}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\log n}\right)\right). \tag{4.3}$$

Acotamos ahora la probabilidad de que X sea mucho mayor que la cantidad en (4.3) aplicando el mtodo de Chernoff. Sean $A = \alpha_W(n)\cdot(1+\varepsilon)(n+k)\log(\frac{n+k}{k})$, s un valor positivo por fijar y $g_\mathrm{i} = \frac{(n+k-\mathrm{i}+1)}{(n+k)\cdot\alpha_W(n)}$ el parámetro asociado a X_i.

$$\mathbb{P}(X \geq A) = \mathbb{P}\left(\prod_{\mathrm{i}=1}^{n} \mathrm{e}^{sX_\mathrm{i}} \geq \mathrm{e}^{sA}\right) \tag{4.4}$$

$$\leq \frac{\mathbb{E}\left(\prod_{\mathrm{i}=1}^{n}\mathrm{e}^{sX_\mathrm{i}}\right)}{\mathrm{e}^{sA}} \tag{4.5}$$

$$= \mathrm{e}^{-sA}\prod_{\mathrm{i}=1}^{n}\frac{g_\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{-s}-(1-g_\mathrm{i})}. \tag{4.6}$$

En lo anterior (4.5) se tiene por la desigualdad de Markov y (4.6) viene de simplemente reemplazar la fórmula de la función generadora de momentos de una variable aleatoria geométrica, la cual es válida siempre que se cumpla la desigualdad $\mathrm{e}^{-s}+g_\mathrm{i}-1>0$. Consideramos ahora $s = 1/(n+k)\alpha_W(n)$. Como $\mathrm{e}^{-s} \geq 1 - s$,

$$\mathrm{e}^{-sA} \prod_{\mathrm{i}=1}^{n} \frac{g_{\mathrm{i}}}{\mathrm{e}^{-s} - (1 - g_{\mathrm{i}})} \leq \mathrm{e}^{-sA} \prod_{\mathrm{i}=1}^{n} \frac{g_{\mathrm{i}}}{g_{\mathrm{i}} - s} \tag{4.7}$$

$$= \mathrm{e}^{-sA} \prod_{\mathrm{i}=1}^{n} \frac{n + k - \mathrm{i} + 1}{n + k - \mathrm{i}} \tag{4.8}$$

$$= \mathrm{e}^{-sA} \cdot \frac{n+k}{k} \tag{4.9}$$

$$= \mathrm{e}^{-(1+\varepsilon)\log\left(\frac{n+k}{k}\right)} \cdot \frac{n+k}{k} \tag{4.10}$$

$$= \left(\frac{n+k}{k}\right)^{-\varepsilon} \tag{4.11}$$

donde (4.8) sigue de reemplazar el valor de g_{i} y s, y (4.9) se obtiene mediante un argunmento telescópico.

□

Lema 4.5 *Si $k \leq n^{0,1}$ y $\alpha_M(n)\cdot\alpha_W^3(n)\cdot\log^2 n$ es $o(n)$, entonces si n es suficientemente grande ningún hombre hace más de $10\alpha_M(n) \cdot \alpha_W^3(n) \cdot \log^2 n$ propuestas durante el Algoritmo 1, con probabilidad al menos $1 - 1/n^{0,2}$.*

Demostración. Consideramos una versión truncada del Algoritmo 1 que calcula la asignación óptima para los hombres, con la excepción de que si se supera un límite prefijado de T^* propuestas el algoritmo termina con un estado de falla. Es claro que siempre que el algoritmo entregue una asignación, entonces es la misma que entrega el Algoritmo 1 original y el número de propuestas es el mismo para cada hombre. Fijamos T^* como

$$T^* = 2{,}39(n+k)\log\left(\frac{n+k}{k}\right) \tag{4.12}$$

$$\leq 2{,}4n\log n \tag{4.13}$$

Notemos que debido al Lema 4.4, la probabilidad de que este límite sea excedido es a lo más $\left(\frac{n+k}{k}\right)^{-1,39} \leq \left(\frac{n+n^{0,1}}{n^{0,1}}\right)^{-1,39} \leq 1/n^{1,25}$. Sea ahora m el últmo hombre considerado por el algoritmo y sea $\mathrm{i} \leq 10\alpha_M(n) \cdot \alpha_W^3(n) \cdot \log^2 n$. Sea w una mujer que no ha recibido ninguna de las $\mathrm{i} - 1$ primeras propuestas de m y $V(w)$ el conjunto de hommbres que se han propuesto a w hasta el momento. Condicional en que la i-ésima propuesta de m va a w, la probabilidad de que dicha propuesta sea aceptada es

$$\frac{p_m}{p_m + \sum_{m' \in V(w)} p_{m'}} \geq \frac{1}{1 + \alpha_M(n)|V(w)|}, \tag{4.14}$$

y condicional en que la i-ésima propuesta de m va a w y es aceptada, la probabilidad de que la cadena de propuestas que siguen termine en una de las $k+1$ mujeres sin pareja en lugar de caer nuevamente en w es al menos

$$\frac{(k+1)\cdot \min\limits_{w'\in W} p_{w'}}{p_w + (k+1)\cdot \min\limits_{w'\in W} p_{w'}} \geq \frac{1}{2\alpha_W(n)}. \tag{4.15}$$

Multiplicando las expresiones en (4.14) y en (4.15) obtenemos una cota inferior para la probabilidad de que, condicional en que la i-ésima propuesta de m va a w, la consiguiente cadena de propuestas termine en una mujer sin pareja. Sea ahora $\mathcal{B}_{\mathrm{i}}$ el evento en que la i-ésima propuesta de m es la última hecha por m, es decir, que la cadena que viene después de la i-ésima propuesta termina en una mujer sin pareja; y $R(m)$ el conjunto de mujeres que han recibido una de las primeras $\mathrm{i}-1$ propuesta de m. Entonces condicionando en cada mujer que no ha recibido propuestas de m,

$$\begin{align}
\mathbb{P}(\mathcal{B}_{\mathrm{i}}) &\geq \sum_{w\in\mathcal{W}\setminus R(m)} \frac{p_w}{\sum_{w'\in\mathcal{W}\setminus R(m)} p_{w'}} \cdot \frac{1}{2\alpha_W(n)} \cdot \frac{1}{1+\alpha_M(n)|V(w)|} \tag{4.16}\\
&\geq \frac{1}{2\alpha_W^2(n)} \sum_{w\in\mathcal{W}\setminus R(m)} \frac{1}{|\mathcal{W}\setminus R(m)|} \cdot \frac{1}{1+\alpha_M(n)|V(w)|} \tag{4.17}
\end{align}$$

Ahora, como consecuencia de la desigualdad de Jensen, podemos acotar inferiormente la suma en (4.17) usando el valor promedio de $|V(w)|$ en el conjunto $\mathcal{W}\setminus R(m)$, que es a lo más $T^*/(n+k-10\alpha_M(n)\cdot\alpha_W^3(n)\cdot\log^2 n)$. Y entonces, para n suficientemente grande,

$$\begin{align}
\sum_{w\in\mathcal{W}\setminus R(m)} \frac{1}{|\mathcal{W}\setminus R(m)|} \cdot \frac{1}{1+\alpha_M(n)|V(w)|} &\geq \frac{1}{1+\dfrac{\alpha_M(n)}{|\mathcal{W}\setminus R(m)|}\displaystyle\sum_{w\in\mathcal{W}\setminus R(m)} |V(w)|} \tag{4.18}\\
&\geq \frac{1}{1+\dfrac{2{,}4\alpha_M(n)\alpha_W(n) n\log n}{(n+k-10\alpha_M(n)\alpha_W^3(n)\log^2 n)}} \tag{4.19}\\
&\geq \frac{1}{2{,}5\alpha_M(n)\alpha_W(n)\log n} \tag{4.20}
\end{align}$$

donde (4.20) se tiene cuando n es suficientemente grande por la suposición de que $\alpha_M(n)\cdot\alpha_W^3(n)\cdot\log^2 n$ está en $o(n)$. Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}_{\mathrm{i}}) \geq \frac{1}{5\alpha_M(n)\alpha_W^3(n)\log n}.$$

Con esto concluimos que la probabilidad de que m tenga que hacer más que $10\alpha_M(n)\cdot\alpha_W^3(n)\cdot\log^2 n$ propuestas en el algoritmo truncado es a lo más

$$\begin{align}
\left(1-\frac{1}{5\alpha_M(n)\alpha_W^3(n)\log n}\right)^{10\alpha_M(n)\cdot\alpha_W^3(n)\cdot\log^2 n} &\leq \exp\left(-\frac{10\alpha_M(n)\alpha_W^3(n)\log^2 n}{5\alpha_M(n)\alpha_W^3(n)\log n}\right) \tag{4.21}\\
&\leq \frac{1}{n^2}. \tag{4.22}
\end{align}$$

Finalmente, la probabilidad de que m haga más de $10\alpha_M(n) \cdot \alpha_W^3(n) \cdot \log^2 n$ propuestas en el Algoritmo 1 es, a lo más, la probabilidad de que el algoritmo truncado termine con falla más la probabilidad de que haga más propuestas en el algoritmo truncado, lo que es a lo sumo $1/n^{1{,}25} + 1/n^2 \leq 1/n^{1{,}2}$. Recordando la Observación 4.3, la elección del último hombre a considerar es arbitraria y por lo tanto la cota se cumple para todos los hombres. Usando una cota de la unión, concluimos que la probabilidad de que algún hombre haga más de $10\alpha_M(n) \cdot \alpha_W^3(n) \cdot \log^2 n$ propuestas es a lo más $1/n^{0{,}2}$.

$\square$

Lema 4.6 *Sea $\varepsilon > 0$ y μ la asignación estable óptima para los hombres. Si $\alpha_M(n)\alpha_W^3(n)\log^3(n)$ está en $o(n)$ y n es suficientemente grande, entonces la suma de los rangos de las esposas de los hombres en μ es al menos*

$$(1-\varepsilon)\frac{(n+k)}{\alpha_W(n)}\log\left(\frac{n+k}{k}\right)$$

con probabilidad al menos $1 - 1/n^{0{,}2} - 3\left(\frac{n+k}{k}\right)^{-\varepsilon}$.

Demostración. Seguimos en esta demostración un procedimiento similar al usado en el Lema 4.4. Consideramos nuevamente el algoritmo de aceptación diferida. Por el Lema 4.5, para cualquier hombre $m \in M$ hay en todo momento al menos $n + k - 10\alpha_M(n) \cdot \alpha_W^3(n) \cdot \log^2 n$ mujeres que no han recibido ninguna propuesta de m. Como consecuencia de lo anterior, una propuesta hecha en la i-ésima etapa (definidas en la demostración del Lema 4.4) va a una mujer sin pareja con probabilidad a lo más

$$g_{\mathrm{i}} = \min\left\{1,\ \alpha_W(n)\frac{n+k-\mathrm{i}+1}{n+k-10\alpha_M(n)\alpha_W^3(n)\log^2(n)}\right\}.$$

Claramente el número total de propuestas domina a $X = \sum_{\mathrm{i}=1} nX_{\mathrm{i}}$, donde $X_{\mathrm{i}} \sim \text{Geométrica}(g_{\mathrm{i}})$, todas independientes. Fijemos $\varepsilon > 0$ y sea $A = (1-\varepsilon)\frac{(n+k)}{\alpha_W(n)}\log\left(\frac{n+k}{k}\right)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq A) &= \mathbb{P}(-X \geq -A) && (4.23)\\
&= \mathbb{P}\left(\prod_{\mathrm{i}=1}^{n} \mathrm{e}^{-sX_{\mathrm{i}}} \geq r^{-sA}\right) && (4.24)\\
&\leq \frac{1}{\mathrm{e}^{-sA}}\mathbb{E}\left(\prod_{\mathrm{i}=1}^{n} \mathrm{e}^{-sX_{\mathrm{i}}}\right) && (4.25)\\
&= \mathrm{e}^{sA}\prod_{\mathrm{i}=1}^{n}\frac{g_{\mathrm{i}}}{\mathrm{e}^{s}-(1-g_{\mathrm{i}})}, && (4.26)
\end{aligned}$$

donde (4.25) se tiene por la desigualdad de Markov y (4.26) sigue luego de reemplazar la fórmula de la función generadora de momentos de una variable aleatoria geométrica, la cual es válida siempre que $\mathrm{e}^s - (1-g_{\mathrm{i}})$. Tomamos ahora s igual a $\alpha_W(n)/(n+k-10\alpha_M(n)\alpha_W^3(n)\log^2(n))$.

Como $\mathrm{e}^s \geq 1+s$,

$$\mathrm{e}^{sA}\prod_{\mathrm{i}=1}^{n}\frac{g_{\mathrm{i}}}{\mathrm{e}^s-(1-g_{\mathrm{i}})} \leq \mathrm{e}^{sA}\prod_{\mathrm{i}=1}^{n}\frac{g_{\mathrm{i}}}{g_{\mathrm{i}}+s} \tag{4.27}$$

$$\leq \mathrm{e}^{sA}\frac{k+1}{n+k+1} \tag{4.28}$$

$$= \exp\left((1-\varepsilon)\frac{(n+k)\log\left(\frac{n+k}{k}\right)}{(n+k-10\alpha_M(n)\alpha_W^3(n)\log^2(n))} - \log\left(\frac{n+k+1}{k+1}\right)\right) \tag{4.29}$$

$$\leq \left(\frac{n+k}{k}\right)^{-\varepsilon}\exp\left(\frac{10\log(n+k)\alpha_M(n)\alpha_W^3(n)\log^2(n)}{n+k-10\alpha_M(n)\alpha_W^3(n)\log^2(n)}+1\right) \tag{4.30}$$

$$\leq 3\left(\frac{n+k}{k}\right)^{-\varepsilon} \tag{4.31}$$

donde (4.28) viene de acotar g_{i} superiormente por el segundo término de su definición y usar un argumento telescópico en i. La parte (4.31) se cumple para n suficientemente grande, consecuencia del supuesto de que $\alpha_M(n)\alpha_W^3(n)\cdot\log^3(n)$ está en $o(n)$.

$\square$

Lema 4.7 *Supongamos que $k \leq n^{0,1}$ y que $\alpha_W^3(n)$ está en $o(\log(n))$. Entonces con probabilidad que tiende a 1 con n, el número de mujeres que recibe cada una menos de*

$$\frac{\log n}{6\cdot\alpha_W^2(n)}$$

propuestas durante el Algoritmo 1 es a lo más $n\exp(-\sqrt[4]{\log(n)}) \in o(n)$.

Demostración. Fijamos una mujer $w \in W$. Consideremos un momento durante el algoritmo de aceptación diferida en que $V(w)$, el conjunto de hombres que se han propuesto a w, contiene menos de $\frac{\log n}{6\cdot\alpha_W^2(n)}$ hombres. Es decir, w ha recibido menos de $\frac{\log n}{6\cdot\alpha_W^2(n)}$ propuestas. Por el Lema 4.5 sabemos que ningún hombre, en particular ninguno de los de $V(w)$, ha hecho más de $10\alpha_M(n)\alpha_W^3(n)\log^2(n)$ propuestas y entonces el número total de propuestas hechas por hombres que hasta este punto han hecho una propuesta a w es a lo más $2\alpha_M(n)\alpha_W(n)\log^3(n)$.

Por el Lema 4.6, el número total de propuestas hechas durante el algoritmo de aceptación diferida es al menos $(1-\varepsilon)\frac{(n+k)}{\alpha_W(n)}\log\left(\frac{n+k}{k}\right)$. Tomando $\varepsilon = 1/2$, el número de propuestas que podrían ir a w es al menos $\frac{1}{2}\frac{(n+k)}{\alpha_W(n)}\log\left(\frac{n+k}{k}\right) - 2\alpha_M(n)\alpha_W(n)\log^3(n)$. Para n grande el número anterior es a lo menos $\frac{1}{3}\frac{n}{\alpha_W(n)}\cdot\log(n)$.

Ahora consideremos un hombre m que no se le ha propuesto aún a w. La probabilidad de que una propuesta de m vaya a w es al menos $q = 1/(n\alpha_W(n))$. Por lo tanto, la probabilidad de que w reciba menos de $r = \frac{\log n}{6\cdot\alpha_W^2(n)}$ propuestas es a lo sumo la prbabilidad de que una binomial negativa de parámetros r y q sea más grande que $2\frac{r}{q} = \frac{1}{3}\frac{n}{\alpha_W(n)}\log(n)$.

$$\mathbb{P}\left(NB(r,q) > (1+\delta)\frac{r}{q}\right) \leq \exp\left(-\frac{\delta^2(r-1)}{2(1+\delta)}\right) \tag{4.32}$$
$$= \exp\left(-\frac{\log(n)}{24\alpha_W^2(n)}\right) \tag{4.33}$$
$$\leq \exp(-\sqrt[3]{\log(n)}) \tag{4.34}$$

donde (4.32) es una cota de Chernoff para una binomial negativa (para una referencia ver Teorema 1.14 en [5]).

Sea X el número de mujeres que recibe menos de $\frac{\log n}{6\cdot\alpha_W^2(n)}$ propuestas. Como X se puede escribir como la suma sobre todas las mujeres de la indicatriz de recibir menos que $\frac{\log n}{6\cdot\alpha_W^2(n)}$ propuestas, la esperanza de X es la suma de las probabilidades individuales. Por lo tanto, $\mathbb{E}(X)$ es a lo más $n\exp(-\sqrt[3]{\log(n)})$. Usando la desigualdad de Markov, podemos concluir que

$$\mathbb{P}(X > n\exp(-\sqrt[4]{\log(n)})) \leq \exp(\sqrt[4]{\log(n)} - \sqrt[3]{\log(n)}) \tag{4.35}$$
$$\leq \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\log(n)}\right). \tag{4.36}$$

□

Teorema 4.8 *La proporción esperada de agentes con múltiples parejas estables está en*

$$O\left(\exp(-\sqrt[4]{\log(n)}) + \frac{\alpha_M(n)\cdot\alpha_W^3(n)}{\log n}\right)$$

y por lo tanto tiende a 0 *si* $\alpha_M(n)\cdot\alpha_W^3(n)$ *está en* $o(\log n)$.

Demostración. En la demostración de este teorema es donde finalmente usaremos el Algoritmo 2, de divorcios. En términos gruesos la demostración sigue el siguiente esquema: aplicamos el Algoritmo 2 en una mujer w, la cual se *divorcia* de su pareja estable, lo cual provoca una cadena de propuestas. Dicha cadena puede terminar de nuevo en w o en una mujer sin pareja. Condicional en que una propuesta de la cadena va a w o una mujer sin pareja, irá a una de estas últimas con probabilidad al menos $1/\alpha_W(n)$. Ahora bien, cuando cae en una mujer sin pareja, el algoritmo termina inmediatamente, concluyendo que w tiene una sola pareja estable; pero si la propuesta va a w, ella puede aceptarla o rechazarla. Suponiendo que w ya recibió varias propuestas durante el Algoritmo 1, entonces con alta probabilidad va a rechazar. Por lo tanto, habrá varias oportunidades de caer en una mujer sin pareja y entonces que pase alguna vez se hace probable.

Sea H el conjunto de mujeres que recibieron varias propuestas durante el Algoritmo 1, digamos, más de $\frac{\log n}{6\cdot\alpha_W^2(n)}$. Como dice el Lema 4.7, el tamaño del conjunto $W \setminus H$ es a lo más $n\exp(-\sqrt[4]{\log(n)})$, que está en $o(n)$. Lo que queda entonces por hacer es estudiar la probabilidad de que una mujer en H tenga múltiples parejas estables. Sea w una mujer en H y apliquemos el Algoritmo 2. Nos interesa acotar la probabilidad de que la cadena que provoca el divorcio de w termine con una propuesta a la misma mujer w siendo aceptada.

Sea S el conjunto de mujeres que no tiene pareja en la asignación estable óptima para los hombres. Condicional en que una propuesta de la cadena que sigue del divorcio de w cae en el conjunto $S \cup \{w\}$, dicha propuesta va a una mujer sin pareja con probabilidad al menos $1/\alpha_W(n)$. Como w recibió más que $\frac{\log n}{6 \cdot \alpha_W^2(n)}$ propuestas durante el algoritmo de aceptación diferida, una propuesta a ella será aceptada con probabilidad a lo más $\frac{6\alpha_W^2(n)\alpha_M(n)}{\log(n)}$.

Tenemos entonce que la probabilidad de que w tenga múltiples parejas estables es a lo más la probabilidad de que una variable aleatoria $X \sim$Geométrica$(p = 1/\alpha_W(n))$ sea mayor que una variable aleatoria independiente $Y \sim$Geométrica$(q = \frac{6\alpha_W^2(n)\alpha_M(n)}{\log(n)})$. Pero,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y < X) &= \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{P}(t < X)\mathbb{P}(Y = t) && (4.37)\\
&= (1-p)q \sum_{t=1}^{\infty} [(1-p)(1-q)]^{t-1} && (4.38)\\
&= \frac{(1-p)q}{1-(1-p)(1-q)} && (4.39)\\
&\leq \frac{q}{p} && (4.40)\\
&= \frac{6\alpha_W^3(n)\alpha_M(n)}{\log(n)} && (4.41)
\end{aligned}
$$

lo cual está en $O\left(\frac{\alpha_M(n) \cdot \alpha_W^3(n)}{\log n}\right)$ y entonces, si Z es el número de mujeres que tiene múltiples parejas estables,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathbb{E}(Z)}{n+k} &\leq \frac{1}{n} \sum_{w \in W} \mathbb{P}(w \text{ has multiple stable partners}) && (4.42)\\
&\leq \frac{|W \setminus H|}{n} + \frac{1}{n} \sum_{w \in H} \mathbb{P}(w \text{ has multiple stable partners}) && (4.43)\\
&\leq O(\exp(-\sqrt[4]{\log(n)}) + \frac{|H|}{n} \cdot O\left(\frac{\alpha_M(n) \cdot \alpha_W^3(n)}{\log n}\right) && (4.44)\\
&\leq O\left(\exp(-\sqrt[4]{\log(n)}) + \frac{\alpha_M(n) \cdot \alpha_W^3(n)}{\log n}\right) && (4.45)
\end{aligned}
$$

Como el número de hombres con múltiples parejas estables es el mismo que el número de mujeres con múltiples parejas estables, concluimos que la cota en (4.45) es válida para la proporción de agentes en general.

□

4.5. Extensión más allá mediante el Problema del Coleccionista de Cupones

En la presente sección nos ocupamos de extender aún más el resultado de la sección anterior, obteniendo condiciones más laxas sobre $\alpha_M(n)$, $\alpha_W(n)$ y sobre un nuevo parámetro que llamamos $\Delta(n)$ que corresponde a la suma de los k menores valores de p_w, que es, en cierto sentido, la popularidad total de los agentes extra.

El teorema principal de esta sección y que se demuestra al final de la Sección 4.5.2 es el siguiente.

Teorema 4.9 *Supongamos que $k \leq n^{0,1}$ y que $\alpha_M(n)\alpha_W^4(n) \leq \dfrac{n}{30\log^3(n)}$. Sea $\Delta(n)$ la suma de los k menores valores de p_w. Si*

$$\Delta(n) = \Omega\left(\frac{\alpha_M(n)}{n\log^{1-\varepsilon} n}\right)$$

para algún $\varepsilon > 0$, entonces la proporción esperada de agentes con múltiples parejas estables tiende a 0.

Las primeras dos condiciones del teorema son escencialmente heredadas del Lemma 4.5. La primera restringe el tamaño del desbalance, que es de alguna forma el caso interesante. La segunda acota cuán distintas pueden ser las popularidades en la instancia, lo cual puede pensarse como una manera de evitar que la instancia sea una composición de sub mercados separados. La restricción principal sobre $\Delta(n)$ es la condición para que el desbalance sea efectivo, es decir, que los k agentes extra creen suficiente competencia para provocar la contracción del conjunto de soluciones.

En una instancia con preferencias uniformes $\Delta(n) = k/n$ por lo que, como dice el Teorema 4.3, basta un solo agente extra para generar competencia suficiente. Si los agentes sobrantes fueran muy impopulares podría ser que la instancia se comportara como un mercado balanceado. ¿Cuán desbalanceado tiene que ser entonces el mercado para que haya pocas soluciones? el Teorema 4.9 entrega una garantía para que los agentes sobrantes aún puedan generar competencia si son suficientes en número.

Para la demostración de este teorema hacemos uso del Corolario 4.13, para el cual debemos introducir el *Problema del Coleccionista de Cupones* en la Sección 4.5.1. En la Sección 4.5.2 demostramos nuevos lemas que usamos para concluir la demostración del Teorema 4.9.

4.5.1. El Problema del Coleccionista de Cupones y la Schur concavidad

El *Problema del Coleccionista de Cupones* es un problema clásico de probabilidades y ha sido bastamente estudiado [25, 7, 14]. Puede ser descrito de la siguiente manera. Un coleccionista recibe cada día un cupón de entre n cupones distintos de manera aleatoria e independiente de acuerdo a una distribución de probabilidad $p = (p_1, \ldots, p_n)$. En general nos preguntamos cuántos días X_k tienen que pasar hasta recolectar $1 < k \leq n$ cupones distintos.

A continuación presentamos una extensión de un resultado de Holst [10], que mostramos mediante una adaptación de la prueba dada por Nakata [16], que hace uso de la Schur concavidad.

Definición 4.10 *Consideramos p, p' dos vectores de probabilidad de largo n. Decimos que p mayoriza a p' (lo que también denotamos por $p' \prec p$) si*

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{j} p_{(\mathrm{i})} \geq \sum_{\mathrm{i}=1}^{j} p'_{(\mathrm{i})},\ \forall 1 \leq j \leq n$$

donde $p_{(\mathrm{i})}$ denota el valor de la i*-ésima mayor componente de p.*

Definición 4.11 *Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es Schur cóncava si para todo par de vectores de probabilidad $p' \prec p$ se tiene que $f(p') \geq f(p)$.*

Lema 4.12 *En el* Problema del Coleccionista de Cupones *con n cupones distintos y vector p de probabilidades para los cupones, si X_k es el número de días que pasan hasta que k cupones diferentes son recolectados, entonces $\mathbb{P}_p(X_k \leq m)$ es Schur cóncava como función de p.*

Demostración. Es claro que $\mathbb{P}_p(X_k \leq m)$ es simétrica en p. Si denotamos como L_A al conjunto de funciones sobreyectivas de $[m]$ en A, entonces podemos escribir

$$\mathbb{P}_p(X_k \leq m) = \sum_{j=k}^{n} \sum_{A \in \binom{[n]}{j}} \sum_{\ell \in L_A} p_{\ell(1)} \cdots p_{\ell(m)}$$

y ahora podemos reescribir esta fórmula para obtener

$$\mathbb{P}_p(X_k \leq m) = \sum_{j=k}^{n} \sum_{A \in \binom{[n]}{j}} m![z^m] \prod_{\mathrm{i} \in A} (\mathrm{e}^{z p_\mathrm{i}} - 1)$$

donde $[z^m]g(z)$ denota al coeficiente que acompaña a z^m en el polinomio $g(z)$. Si ahora usamos la notación $f(p) = \mathbb{P}_p(X_k \leq m)$, la derivada de f es

$$\frac{\partial}{\partial p_1} f(p) = \sum_{j=k}^{n} \sum_{A \in \binom{[n] \setminus \{1\}}{j-1}} m![z^m] z \mathrm{e}^{z p_1} \prod_{\mathrm{i} \in A} (\mathrm{e}^{z p_\mathrm{i}} - 1).$$

Usando la fórmula anterior, podemos concluir que la diferencia $\frac{\partial}{\partial p_1} f(p) - \frac{\partial}{\partial p_2} f(p)$ puede ser reescrita como

$$m![z^{m-1}](\mathrm{e}^{zp_1}-\mathrm{e}^{zp_2})\sum_{j=k}^{n}\left(\sum_{A\in\binom{[n]\setminus\{1,2\}}{j-1}}\prod_{\mathrm{i}\in A}(\mathrm{e}^{zp_\mathrm{i}}-1)-\sum_{A\in\binom{[n]\setminus\{1,2\}}{j-2}}\prod_{\mathrm{i}\in A}(\mathrm{e}^{zp_\mathrm{i}}-1)\right) \tag{4.46}$$

$$=-m![z^{m-1}](\mathrm{e}^{zp_1}-\mathrm{e}^{zp_2})\sum_{A\in\binom{[n]\setminus\{1,2\}}{k-2}}\prod_{\mathrm{i}\in A}(\mathrm{e}^{zp_\mathrm{i}}-1), \tag{4.47}$$

donde el último paso resulta de usar un argumento telescópico sobre j. A partir de esta fórmula podemos concluir que $\left(\frac{\partial}{\partial p_1}f(p)-\frac{\partial}{\partial p_2}f(p)\right)=-(p_1-p_2)h(p)$, donde h es una cierta función no negativa. Finalmente, tenemos que para todo vector p se cumple la desigualdad

$$\left(\frac{\partial}{\partial p_1}f(p)-\frac{\partial}{\partial p_2}f(p)\right)(p_1-p_2)\leq 0$$

lo cual es una condición suficiente para la Schur concavidad. □

El anterior lema tiene como consecuencia el siguiente corolario, el cual usaremos como herramienta importante en el resultado de la siguiente sección.

Corolario 4.13 *Si $p'\prec p$ entonces X_k obtenido con la distribución p domina estocásticamente a X'_k obtenido con la distribución p'. En particular, esto es cierto si p' es la distribución uniforme.*

4.5.2. Análisis

Lema 4.14 *Si se cumplen las condiciones del Lema 4.5 y además $10\alpha_M(n)\alpha_W^4(n)\cdot\log^3(n)\leq n/3$, entonces la suma de los rangos de las esposas de los hombres en μ es al menos*

$$\frac{(1-\varepsilon)}{2}(n+k)\log\left(\frac{n+k}{k}\right)$$

con probabilidad al menos $1-2\left(\frac{n+k}{k}\right)^{-\varepsilon}$.

Demostración. Usando un argumento tipo Chernoff como en el Lema 4.4, concluimos que con probabilidad al menos $1-\left(\frac{n+k}{k}\right)^{-\varepsilon}$, se debe sacar más de

$$(1-\varepsilon)(n+k)\log\left(\frac{n+k}{k}\right)$$

veces en el *Problema del Coleccionista de Cupones* en $n+k$ cupones con probabilidades uniformes, hasta que n diferentes son encontrados. Por el Corolario 4.13 esta misma cota es cierta cuando las probabilidades de cada cupon no son todas iguales.

Ahora podemos acoplar las propuestas del Algoritmo 1 con sacar cupones en una instancia del *Coleccionista de Cupones* donde cada cupón es asignado a una mujer w y sale con probabilidad p_w y además omitimos cada cupón que corresponde a repetir una propuesta de un mismo hombre a una misma mujer. El número de propuestas será entonces el número de cupones a sacar menos el número de propuestas repetidas. Por el Lema 4.5, ningún hombre hace más de $10\alpha_M(n)\alpha_W^3(n)\log^3(n)$ propuestas, y entonces la probabilidad de repetir será a lo más $\frac{10}{n}\alpha_M(n)\alpha_W^4(n)\log^3(n) \leq 1/3$. Por lo tanto, usando una cota de concentración (para una referencia revisar libro de Doerr [5]) para una variable aleatoria Binomial $\left((1-\varepsilon)(n+k)\log\left(\frac{n+k}{k}\right), 2/3\right)$, concluimos que se hacen a lo menos

$$\frac{(1-\varepsilon)}{2}(n+k)\log\left(\frac{n+k}{k}\right)$$

propuestas con probabilidad mayor a $1-\left(\frac{n+k}{k}\right)^{-\varepsilon}$.

□

Lema 4.15 *Sea $\varepsilon > 0$. Supongamos que se cumplen las condiciones del Lema 4.5. Con probabilidad que tiende a 1 con n, el número de mujeres w tales que $p_w \geq 1/n(\log n)^{1-\varepsilon}$ que recibe cada una menos de*

$$p_w \cdot \frac{1}{12} n \log n$$

propuestas durante el Algoritmo 1 es a lo más $n/\mathrm{e}^{(\log n)^{\varepsilon/2}} \in o(n)$.

Demostración. Seguimos la misma idea de la demostración del Lema 4.7. Fijamos una mujer $w \in W$ tal que $p_w \geq 1/n(\log n)^{1-\varepsilon}$. Consideremos un momento durante el algoritmo de aceptación diferida en que $V(w)$, el conjunto de hombres que se han propuesto a w, contiene menos de $p_w \cdot \frac{1}{12} n \log n$ hombres. Es decir, w ha recibido menos de $p_w \cdot \frac{1}{12} n \log n$ propuestas. Por el Lema 4.5 sabemos que ningún hombre, en particular ninguno de los de $V(w)$, ha hecho más de $10\alpha_M(n)\alpha_W^3(n)\log^2(n)$ propuestas y entonces el número total de propuestas hechas por hombres que hasta este punto han hecho una propuesta a w es a lo más $p_w \cdot \alpha_M(n)\alpha_W^3(n) n \log^3(n)$.

Por el Lema 4.14, el número total de propuestas hechas durante el algoritmo de aceptación diferida es al menos $(1-\bar{\varepsilon})\frac{(n+k)}{2}\log\left(\frac{n+k}{k}\right)$. Tomando $\bar{\varepsilon} = 1/2$, el número de propuestas que podrían ir a w es al menos $\frac{1}{5} n \log n - p_w \alpha_M(n)\alpha_W^3(n)\log^3(n)$. Como $p_w \leq 1$ y $\alpha_M(n)\alpha_W^3(n)\log^2(n)$ está en $o(n)$, para n grande el número de propuestas que podrían ir a w es a lo menos $\frac{1}{6} n \log n$.

Ahora consideremos un hombre m que no se le ha propuesto aún a w. La probabilidad de que una propuesta de m vaya a w es al menos $q = p_w$. Por lo tanto, la probabilidad de que w reciba menos de $r = p_w \cdot \frac{1}{12} n \log n$ propuestas es a lo sumo la prbabilidad de que una binomial negativa de parámetros r y q sea más grande que $2\frac{r}{q} = \frac{1}{6} n \log n$. Y entonces

$$\mathbb{P}\left(NB(r,q) > (1+\delta)\frac{r}{q}\right) \leq \exp\left(-\frac{\delta^2(r-1)}{2(1+\delta)}\right) \tag{4.48}$$

$$\leq \exp\left(-\frac{p_w n \log(n)}{48}\right) \tag{4.49}$$

$$\leq \exp\left(-\frac{c \cdot (\log n)^{\varepsilon}}{48}\right) \tag{4.50}$$

donde (4.48) es una cota de Chernoff para una binomial negativa (para una referencia ver Teorema 1.14 en [5]).

Sea X el número de mujeres con $p_w \geq 1/n(\log n)^{1-\varepsilon}$ y que recibe menos de $p_w \cdot \frac{1}{12} n \log n$ propuestas. Como X se puede escribir como la suma sobre todas las mujeres de la indicatriz de recibir menos que $p_w \cdot \frac{1}{12} n \log n$ propuestas, la esperanza de X es la suma de las probabilidades individuales. Por lo tanto, $\mathbb{E}(X)$ es a lo más $n \exp\left(-\frac{c \cdot (\log n)^{\varepsilon}}{48}\right)$. Usando la desigualdad de Markov, podemos concluir que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X > \frac{n}{\mathrm{e}^{(\log n)^{\varepsilon/2}}}\right) &\leq \mathbb{E}(X) \frac{\mathrm{e}^{(\log n)^{\varepsilon/2}}}{n} && (4.51)\\
&\leq \exp\left((\log n)^{\varepsilon/2} - \frac{c}{48}(\log n)^{\varepsilon}\right) && (4.52)\\
&\leq \exp\left(-\frac{1}{50}(\log n)^{\varepsilon}\right). && (4.53)
\end{aligned}
$$

□

Teniendo ya los resultados anteriores estamos en posición de demostrar el Teorema 4.9.

Demostración. Para esta demostración, seguimos el mismo camino que para el Teorema 4.8 pero consideramos ahora el conjunto $H \subseteq W$ como las mujeres tales que (i) $p_w \geq \dfrac{\alpha_M(n)}{n(\log n)^{1-\varepsilon/2}}$ y que (ii) recibieron durante el Algoritmo 1 más de $\frac{p_w}{12} n \log n$ propuestas. La candidad de mujeres en $W \setminus H$ que cumplen la condición (i) es $o(n)$ como consecuencia del Lema 4.15. Como hay una constante $c > 0$ tal que $\Delta(n) \geq \frac{c \cdot \alpha_M}{n(\log n)^{1-\varepsilon}}$, la probabilidad de que luego del divorcio de una mujer w con $p_w < \alpha_M/n(\log n)^{1-\varepsilon/2}$ una propuesta caiga de nuevo en w antes de ir a una mujer sin pareja tiende a 0.

Nos preocupa ahora solamente el conjunto H. Como en la demostración del Teorema 4.8, la probabilidad de que una mujer fija $w \in H$ tenga múltiples parejas estables es a lo más la probabilidad de que una variable aleatoria $X \sim$ Geométrica $\left(p = \frac{\Delta(n)}{\Delta(n)+p_w}\right)$ sea mayor que una variable aleatoria independiente $Y \sim$ Geométrica $\left(q = \frac{12\alpha_M(n)}{p_w n \log n}\right)$. Pero,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y < X) &\leq \frac{q}{p} && (4.54)\\
&= \frac{12\alpha_M(n)(\Delta(n) + p_w)}{\Delta(n) p_w n \log n} && (4.55)\\
&= 12\left(\frac{1}{\Delta(n)} + \frac{1}{p_w}\right)\alpha_M(n)\frac{1}{n \log n} && (4.56)\\
&\leq \frac{12(1 + 1/c)}{(\log n)^{\varepsilon/2}} && (4.57)
\end{aligned}
$$

lo cual tiende a 0 con n y por lo tanto el número esperado de agentes con múltiples parejas estables tiende a 0. □

Capítulo 5

Conclusión

En el problema de admisión escolar no se puede garantizar la existencia de asignación estable si existen familias que prefieren que sus hijos estén en el mismo colegio, en general ni bajo una serie de supuestos naturales sobre las preferencias. Siempre existe si las preferencias de los colegios son todas iguales e inducidas por un orden sobre el conjunto de familias. Siempre existe si los colegios prefieren aceptar completas a familias con más de un hijo y al mismo tiempo las familias son indiferentes del colegio si es que todos sus hijos están juntos. En este último caso las familias tienen incentivos para mentir sobre su composición.

Queda abierta la pregunta sobre la probabilidad de existencia de asignación con *estabilidad familiar* si las preferencias de los colegios son aleatorias. Si esta probabilidad fuese siempre mayor a una constante positiva e independiente de la instancia, entonces podría plantearse un mecanismo que buscara una realización con asignación estable.

Una segunda pregunta relacionada es sobre la complejidad computacional del problema de decidir si una instancia dada de admisión escolar posee una asignación con *estabilidad familiar*. Es esperable que, como probaran McDermid et al. [15] para el problema de asignación de médicos a hospitales con parejas, éste sea NP-completo.

Hemos encontrado condiciones bajo las cuales los mercados bipartitos desbalanceados con preferencias según el modelo de popularidades poseen pocas soluciones estables. Moralmente la condición escencial establece que si la popularidad conjunta del exceso de agentes del lado más largo del mercado es mayor que $\alpha_M/n \log n$, donde α_M es la razón entre la popularidad más grande y la más pequeña en el lado corto del mercado. Interpretamos esta condición como la cantidad necesaria de exceso para que haya competencia.

La primera pregunta natural es si es necesaria la dependencia en α_M de la condición, puesto que parece poco natural. Un camino que podría servir para evitar la aparición de este término sería trabajar con la cantidad de popularidad que acumula cada mujer en propuestas en lugar del número de propuestas que recibe durante el algoritmo de aceptación diferida.

Tan natural como la primera es la pregunta de si la condición es ajustada cuando $\alpha_M = 1$, es decir, cuando todos los agentes del lado corto son igual de populares. Consideremos una instancia con n hombres y $n+1$ mujeres en que todos los agentes son igual de populares, salvo la $n+1$-ésima mujer, que es muy impopular. Es esperable que exista un punto en que el exceso sea tan pequeño que la instancia se comporte como una balanceada, es decir, que la proporción de agentes con múltiples parejas estables tienda a 1.

Bibliografía

[1] Atila Abdulkadiroglu, Parag Pathak, Alvin E. Roth, and Tayfun Sonmez. Changing the Boston School Choice Mechanism. Technical Report 11965, January 2006. DOI: 10.3386/w11965.

[2] Atila Abdulkadiroglu, Parag A. Pathak, and Alvin E. Roth. Strategy-Proofness versus Efficiency in Matching with Indifferences: Redesigning the NYC High School Match. *The American Economic Review; Nashville*, 99(5):1954–1978, 2009.

[3] David J. Abraham, Avrim Blum, and Tuomas Sandholm. Clearing Algorithms for Barter Exchange Markets: Enabling Nationwide Kidney Exchanges. In *Proceedings of the 8th ACM Conference on Electronic Commerce*, EC '07, pages 295–304, New York, NY, USA, 2007. ACM.

[4] Itai Ashlagi, Yash Kanoria, and Jacob D. Leshno. Unbalanced random matching markets: The stark effect of competition. *Journal of Political Economy*, 125(1):69–98, 2017.

[5] Benjamin Doerr. Analyzing randomized search heuristics: Tools from probability theory. In Anne Auger and Benjamin Doerr, editors, *Theory of Randomized Search Heuristics*, chapter 1, pages 1–20. World Scientific, 2012.

[6] Lester E. Dubins and David A. Freedman. Machiavelli and the gale-shapley algorithm. *The American Mathematical Monthly*, 88(7):485–494, 1981.

[7] Philippe Flajolet, Danièle Gardy, and Loÿs Thimonier. Birthday paradox, coupon collectors, caching algorithms and self-organizing search. *Discrete Applied Mathematics*, 39(3):207 – 229, 1992.

[8] David Gale and Lloyd S. Shapley. College admissions and the stability of marriage. *The American Mathematical Monthly*, 69(1):9–15, 1962.

[9] Pieter A. Gautier, Monique De Haan, Bas Van der Klaauw, and Hessel Oosterbeek. Eerste Analyse Matching en Loting Voortgezet Onderwijs Amsterdam 2016*. Technical report, 2016.

[10] Lars Holst. The general birthday problem. *Random Structures & Algorithms*, 6(2-3):201–208, March 1995.

[11] Nicole Immorlica and Mohammad Mahdian. Incentives in large random two-sided mar-

kets. *ACM Transactions on Economics and Computation*, 3(3):14:1–14:25, June 2015.

[12] Alexander S. Kelso and Vincent P. Crawford. Job Matching, Coalition Formation, and Gross Substitutes. *Econometrica*, 50(6):1483–1504, 1982.

[13] Donald E. Knuth, Rajeev Motwani, and Boris Pittel. Stable husbands. In *Proceedings of the First Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, SODA '90, pages 397–404, Philadelphia, PA, USA, 1990. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[14] Servet Martinez. Some bounds on the coupon collector problem. *Random Structures & Algorithms*, 25(2):208–226, September 2004.

[15] Eric J. McDermid and David F. Manlove. Keeping partners together: algorithmic results for the hospitals/residents problem with couples. *Journal of Combinatorial Optimization*, 19(3):279–303, April 2010.

[16] Toshio Nakata. Coupon collector's problem with unlike probabilities. `http://w3-fue.fukuoka-edu.ac.jp/~nakata/papers/coumaj.pdf`, June 2008.

[17] Boris Pittel. The average number of stable matchings. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 2(4):530–549, 1989.

[18] Alvin E. Roth. The Evolution of the Labor Market for Medical Interns and Residents: A Case Study in Game Theory. *Journal of Political Economy*, 92(6):991–1016, 1984.

[19] Alvin E. Roth. The Origins, History, and Design of the Resident Match. *Journal of the American Medical Association*, 289(7):909–912, February 2003.

[20] Alvin E. Roth and Elliott Peranson. The redesign of the matching market for american physicians: Some engineering aspects of economic design. *American Economic Review*, 89(4):748–780, September 1999.

[21] Alvin E. Roth, Tayfun Sönmez, and M. Utku Ünver. Kidney Exchange. *The Quarterly Journal of Economics*, 119(2):457–488, 2004.

[22] Alvin E. Roth, Tayfun Sönmez, and M. Utku Ünver. A Kidney Exchange Clearinghouse in New England. *The American Economic Review*, 95(2):376–380, 2005.

[23] Alvin E. Roth, Tayfun Sönmez, and M. Utku Ünver. Efficient Kidney Exchange: Coincidence of Wants in Markets with Compatibility-Based Preferences. *The American Economic Review*, 97(3):828–851, 2007.

[24] Marilda Sotomayor. Three remarks on the many-to-many stable matching problem. *Mathematical Social Sciences*, 38(1):55 – 70, 1999.

[25] Herman Von Schelling. Coupon Collecting for Unequal Probabilities. *The American Mathematical Monthly*, 61(5):306–311, 1954.