



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

PROGRAMAS DE VIAJERO FRECUENTE BAJO RIESGO MORAL Y SELECCIÓN  
ADVERSA: PROGRAMAS POR DÓLAR Y POR DISTANCIA

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA, MENCIÓN TRANSPORTE

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

RAÚL ALEJANDRO PEZOA ZAMORANO

PROFESOR GUÍA:  
LEONARDO BASSO SOTZ

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
ALEJANDRO JOFRÉ CÁCERES  
MARCELO OLIVARES ACUÑA  
HUGO SILVA MONTALVA

SANTIAGO DE CHILE  
2018

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR  
AL TÍTULO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN TRANSPORTE  
POR: RAÚL ALEJANDRO PEZOA ZAMORANO  
FECHA: 2018  
PROF. GUÍA: SR. LEONARDO BASSO SOTZ

## PROGRAMAS DE VIAJERO FRECUENTE BAJO RIESGO MORAL Y SELECCIÓN ADVERSA: PROGRAMAS POR DÓLAR Y POR DISTANCIA

En este trabajo se propone un modelo teórico que considera la existencia de dos tipos de viajeros, de negocio y de ocio, quienes no son distinguibles por la aerolínea monopólica ex-ante, lo que es la fuente de un problema de selección adversa. Consideramos también que los viajeros de negocio no pagan la totalidad de su ticket, el que es financiado total o parcialmente por su empleador, lo que genera un problema tipo principal-agente entre ellos. Se modela el problema de discriminación de precios de segundo grado de la aerolínea, la cual ofrece un programa de viajeros frecuentes y que intenta separar a las clases de viajeros ofreciendo diferentes combinaciones de precios y recompensas, enfocado en el caso donde las recompensas están ligadas a alguna variable del problema, a saber, distancia volada o tarifa pagada.

Inicialmente se analiza el caso donde la aerolínea sirve a un único mercado, encontrando que en la fase de diseño del programa, cuando los parámetros de demanda son tomados como sus valores esperados (el escenario ex-ante), estos programas son equivalentes a aquel en donde las recompensas pueden ser movidas libremente. Sin embargo, mostramos que el programa basado en la tarifa pagada le permite a la aerolínea responder a cambios en la demanda de manera más cercana a la óptima que el programa por distancia volada, lo que implica que, bajo ciertas condiciones, alcance un profit estrictamente mayor en el escenario ex-post. Respecto de la asignación de recompensas, se observa que la existencia de un tercer pagador genera ineficiencias económicas, en tanto que a los viajeros de negocio se le asignan más recompensas que lo óptimo socialmente, como medio para cobrar tarifas mayores.

Posteriormente, se estudia el comportamiento de la firma al servir a dos mercados, con la posibilidad de ajustar un único programa. Al estudiar el programa por distancia volada se aprecia que este asigna recompensas más altas que lo óptimo para ambas clases del mercado con la distancia más larga, y menores que lo óptimo para el mercado con la distancia más corta. Este hecho provoca que los precios sigan la misma tendencia, siendo subóptimamente altos en el mercado con la mayor distancia. Por otro lado, el programa por tarifa pagada termina considerando ambos mercados como uno único, realizando asignaciones intermedias de precios y recompensas para ambas clases respecto al comportamiento óptimo, no existiendo por tanto dispersión de precios versus distancias de los mercados. Mostramos que al introducir elasticidad, bajo ambos programas existe dispersión de precios versus distancia, siendo mayor bajo un programa por distancia volada, lo que es consistente con la data recolectada para Southwest Airlines. Finalmente, se prueba que si las distancias de los mercados son muy cercanas, puede ser conveniente utilizar un programa por distancia volada, pero para redes de destinos muy heterogéneas en distancia, el programa por tarifa pagada le permite a la firma alcanzar un mayor profit.

# Agradecimientos

Agradezco a mi familia por su apoyo incondicional ante cada paso que he dado, el camino no siempre ha sido fácil y sin ustedes nada de esto sería posible. Agradezco cada esfuerzo realizado por ti, mamá para brindarnos las mejores oportunidades, todo tu esfuerzo valió la pena.

Agradezco a Leo, mi profesor guía, por su apoyo durante todo este proceso, por impulsarme siempre a realizar un mejor trabajo, por su confianza que me ha permitido darme cuenta de que soy capaz de más y de qué es lo que quiero para mi futuro.

Agradezco a María Piera, quien me ha acompañado en todo este proceso, gracias por hacerme feliz y hacerme crecer como persona.

# Tabla de Contenido

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Introducción</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1. Motivación . . . . .  | 1         |
| 1.2. Objetivos . . . . .   | 3         |
| 1.3. Estructura de la tesis . . . . .  | 3         |
| <b>2. Revisión Bibliográfica</b>   | <b>4</b>  |
| 2.1. Programas de Viajeros Frecuentes . . . . .                                | 4         |
| 2.2. Riesgo Moral . . . . .  | 9         |
| 2.3. Selección Adversa . . . . .   | 12        |
| <b>3. Programas Reales y Monopolio Sirviendo a un Único Mercado</b>            | <b>18</b> |
| 3.1. Elementos Básicos . . . . .   | 19        |
| 3.1.1. Composición del Mercado . . . . .                                       | 19        |
| 3.1.2. Función de Utilidad . . . . .   | 19        |
| 3.1.3. Función de Costos de la Firma y Utilidad de Recompensas . . . . .       | 20        |
| 3.1.4. Restricciones . . . . .   | 21        |
| 3.2. Monopolio Bajo Programa Óptimo, Sin Precio de Reserva, Demanda Inelástica | 21        |
| 3.2.1. Estática Comparativa . . . . .  | 23        |
| 3.2.2. Condición de Cierre de Clase . . . . .                                  | 23        |
| 3.3. Programas Reales Ex-Ante . . . . .  | 26        |
| 3.3.1. Recompensas por Distancia . . . . .                                     | 26        |
| 3.3.1.1. Condición de Cierre de Clase . . . . .                                | 28        |
| 3.3.2. Recompensas por Tarifa . . . . .  | 28        |
| 3.3.2.1. Condición de Cierre de Clase . . . . .                                | 30        |
| 3.4. Programas Reales Ex Post - Estática Comparativa . . . . .                 | 30        |
| 3.4.1. Recompensas por Distancia . . . . .                                     | 31        |
| 3.4.2. Recompensas por Tarifa . . . . .  | 33        |
| 3.5. Programas Reales Ex Post - Soluciones . . . . .                           | 36        |
| 3.5.1. Recompensas por Distancia . . . . .                                     | 36        |
| 3.5.2. Recompensas por Tarifa . . . . .  | 37        |
| 3.5.3. Comparación de Cierre de Clases . . . . .                               | 40        |
| 3.5.4. Comparación de Profits . . . . .  | 41        |
| 3.5.4.1. Viajeros de Ocio . . . . .  | 41        |
| 3.5.4.2. Viajeros de Negocio . . . . .   | 45        |
| 3.5.4.3. Síntesis - Profit Total . . . . .                                     | 50        |
| 3.6. Simulaciones - Demanda Inelástica . . . . .                               | 50        |

|   |            |
|---|------------|
| 3.6.1. Resultados . . . . .   | 52         |
| 3.7. Evidencia Sugestiva . . . . .  | 57         |
| 3.8. Monopolio Bajo Programa Óptimo, Demanda Elástica . . . . .   | 59         |
| 3.9. Simulaciones - Demanda Elástica . . . . .  | 67         |
| 3.9.1. Resultados . . . . .   | 67         |
| 3.10. Síntesis . . . . .  | 74         |
| <b>4. Programas Reales y Monopolio Sirviendo a Dos Mercados</b>   | <b>77</b>  |
| 4.1. Elementos Básicos . . . . .  | 78         |
| 4.1.1. Composición de los Mercados . . . . .  | 78         |
| 4.1.2. Función de Utilidad . . . . .  | 78         |
| 4.1.3. Función de Costos de la Firma y Utilidad de Recompensas . . . . .                                  | 78         |
| 4.1.4. Restricciones . . . . .  | 79         |
| 4.2. Monopolio Bajo Programa Óptimo . . . . .   | 79         |
| 4.3. Programas Reales . . . . .   | 82         |
| 4.3.1. Recompensas Por Distancia . . . . .  | 82         |
| 4.3.2. Recompensas Por Tarifa . . . . .   | 88         |
| 4.3.3. Comparación de Profits . . . . .   | 93         |
| 4.4. Simulaciones . . . . .   | 98         |
| 4.4.1. Demanda Inelástica . . . . .   | 98         |
| 4.4.2. Demanda Elástica . . . . .   | 102        |
| 4.5. Evidencia Sugestiva . . . . .  | 107        |
| 4.6. Síntesis . . . . .   | 111        |
| <b>5. Conclusiones y Líneas Futuras de Investigación</b>  | <b>113</b> |
| 5.1. Modelo de un mercado con demanda inelástica . . . . .  | 114        |
| 5.2. Modelo de un mercado con demanda elástica . . . . .  | 115        |
| 5.3. Modelo de dos mercados . . . . .   | 116        |
| 5.4. Líneas futuras de investigación . . . . .  | 117        |
| <b>Bibliografía</b>   | <b>119</b> |
| <b>Apéndices</b>  | <b>122</b> |
| <b>A. Estática Comparativa Capítulo 3</b>   | <b>123</b> |
| A.1. Programa Óptimo Subsección 3.2.1 . . . . .   | 123        |
| A.2. Programa por Distancia Sección 3.4.1 . . . . .   | 127        |
| A.3. Programa por Tarifa Sección 3.4.2 . . . . .  | 128        |
| <b>B. Resolución Programa por Tarifa Ex - Post Subsección 3.5.2</b>                                       | <b>132</b> |
| <b>C. Condiciones para <math>\pi_{\text{Tarifa}} \geq \pi_{\text{Distancia}}</math>, Subsección 3.5.4</b> | <b>137</b> |
| <b>D. Monopolio Bajo Programa Óptimo, Demanda Elástica Sección 3.8</b>                                    | <b>138</b> |
| <b>E. Programas Reales y Monopolio Sirviendo a Dos Mercados</b>   | <b>142</b> |
| <b>F. Códigos Simulación</b>  | <b>156</b> |
| F.1. Un Mercado Inelástico . . . . .  | 156        |

|  |     |
|--|-----|
| F.1.1. Programa Óptimo . . . . .                     | 156 |
| F.1.2. Programa Por Tarifa . . . . .                 | 156 |
| F.1.3. Programa Por Distancia . . . . .              | 157 |
| F.2. Dos Mercados - Programa Óptimo . . . . .        | 158 |
| F.3. Dos Mercados - Programa por Distancia . . . . . | 158 |
| F.4. Dos Mercados - Programa por Dólar . . . . .     | 159 |

# Índice de Tablas

|   |     |
|---|-----|
| 3.1. Estática Comparativa, Programa Óptimo. . . . .                                       | 23  |
| 3.2. Respuestas ex-post para programa óptimo y programa por distancia. . . . .            | 32  |
| 3.3. Respuestas ex-post para programa óptimo y programa por tarifa. . . . .               | 35  |
| 3.4. Funciones y Parámetros Utilizados en Simulación. . . . .                             | 51  |
| 3.5. Resultados Simulación - Fase de Diseño. . . . .                                      | 52  |
| 3.6. Porcentaje de disponibilidad de clases - LATAM Airlines. . . . .                     | 58  |
| 3.7. Porcentaje de disponibilidad de clases - Air Canada. . . . .                         | 58  |
| 3.8. Porcentaje de disponibilidad de clases - Southwest Airlines. . . . .                 | 58  |
| 3.9. Resultados Simulación - Fase de Diseño. . . . .                                      | 68  |
| 3.10. Caracterización de Soluciones, Fase de Diseño. . . . .                              | 75  |
| 3.11. Caracterización de Soluciones, Fase Ex-Post. . . . .                                | 75  |
| 3.12. Caracterización de Soluciones, Fase de Diseño, Demandas Elásticas. . . . .          | 76  |
| 4.1. Funciones y Parámetros Utilizados en Simulación. . . . .                             | 98  |
| 4.2. Funciones y Parámetros Utilizados en Simulación. . . . .                             | 103 |
| 4.3. Ejemplo Metodología Evidencia Sugestiva, $M_1$ : SMF-SAN, $M_2$ : MCI - STL. . . . . | 108 |
| 4.4. Resultados Regresión . . . . .   | 110 |
| 4.5. Caracterización de Soluciones, Programa Óptimo. . . . .                              | 111 |
| 4.6. Caracterización de Soluciones, Programa por Distancia. . . . .                       | 112 |
| 4.7. Caracterización de Soluciones, Programa por Tarifa. . . . .                          | 112 |

# Índice de Ilustraciones

|   |     |
|---|-----|
| 3.1. Condición Gráfica $\pi_{\text{Tarifa}_L} \geq \pi_{\text{Distancia}_L}$ al considerar $\tilde{\theta}_L > \theta_L^{EA}$ . . . . . | 44  |
| 3.2. Condición Gráfica $\pi_{\text{Tarifa}_L} \geq \pi_{\text{Distancia}_L}$ al considerar $\tilde{\theta}_L < \theta_L^{EA}$ . . . . . | 44  |
| 3.3. Comportamiento $\bar{F}_H$ vs $\tilde{\theta}_L$ . . . . .   | 46  |
| 3.4. Condición Gráfica $\pi_{\text{Tarifa}_H} \geq \pi_{\text{Distancia}_H}$ al considerar $\tilde{\zeta}_H > \zeta_H^{EA}$ . . . . .   | 49  |
| 3.5. Condición Gráfica $\pi_{\text{Tarifa}_H} \geq \pi_{\text{Distancia}_H}$ al considerar $\tilde{\zeta}_H < \zeta_H^{EA}$ . . . . .   | 49  |
| 3.6. Comparación de profits versus cambio en $\theta_L^{EA}$ . . . . .  | 53  |
| 3.7. $\pi_{\text{Tarifa}} - \pi_{\text{Distancia}}$ versus cambio en $\theta_L^{EA}$ . . . . .  | 54  |
| 3.8. $F_L$ versus cambio en $\theta_L^{EA}$ . . . . .   | 54  |
| 3.9. $P_L$ versus cambio en $\theta_L^{EA}$ . . . . .   | 54  |
| 3.10. $F_H$ versus cambio en $\theta_L^{EA}$ . . . . .  | 55  |
| 3.11. $P_H$ versus cambio en $\theta_L^{EA}$ . . . . .  | 55  |
| 3.12. Comparación de profits versus cambio en $\theta_H^{EA}$ . . . . .   | 55  |
| 3.13. $\pi_{\text{Tarifa}} - \pi_{\text{Distancia}}$ versus cambio en $\theta_H^{EA}$ . . . . .   | 56  |
| 3.14. $F_L$ versus cambio en $\theta_H^{EA}$ . . . . .  | 56  |
| 3.15. $P_L$ versus cambio en $\theta_H^{EA}$ . . . . .  | 56  |
| 3.16. $F_H$ versus cambio en $\theta_H^{EA}$ . . . . .  | 57  |
| 3.17. $P_H$ versus cambio en $\theta_H^{EA}$ . . . . .  | 57  |
| 3.18. Evolución Profit y $z$ Programa Óptimo Ex-Ante vs $c_{op}$ . . . . .  | 68  |
| 3.19. Evolución Recompensas Programa Óptimo Ex-Ante vs $c_{op}$ . . . . .   | 69  |
| 3.20. Evolución Precios Programa Óptimo Ex-Ante vs $c_{op}$ . . . . .   | 69  |
| 3.21. Comparación de profits versus cambio en $\theta_L^{EA}$ , Demandas Elásticas. . . . .   | 71  |
| 3.22. $F_L$ versus cambio en $\theta_L^{EA}$ . . . . .  | 71  |
| 3.23. $P_L$ versus cambio en $\theta_L^{EA}$ . . . . .  | 71  |
| 3.24. $F_H$ versus cambio en $\theta_L^{EA}$ . . . . .  | 72  |
| 3.25. $P_H$ versus cambio en $\theta_L^{EA}$ . . . . .  | 72  |
| 3.26. Comparación de profits versus cambio en $\theta_H^{EA}$ , Demandas Elásticas. . . . .   | 72  |
| 3.27. $F_L$ versus cambio en $\theta_H^{EA}$ . . . . .  | 73  |
| 3.28. $P_L$ versus cambio en $\theta_H^{EA}$ . . . . .  | 73  |
| 3.29. $F_H$ versus cambio en $\theta_H^{EA}$ . . . . .  | 73  |
| 3.30. $P_H$ versus cambio en $\theta_H^{EA}$ . . . . .  | 73  |
| 3.31. Profits versus cambio en $\theta_H^{EA}$ variando $\underline{R}, \bar{R}$ , Demandas Elásticas. . . . .                          | 74  |
| 4.1. Posibles comportamientos de $\pi_{\text{Distancia}}$ versus $\pi_{\text{Tarifa}}$ en torno a $D_1 = D_2$ . . . . .                 | 96  |
| 4.2. Comportamiento cóncavo de $\pi_{\text{Distancia}}$ versus $\pi_{\text{Tarifa}}$ en torno a $D_1 = D_2$ . . . . .                   | 97  |
| 4.3. $\frac{N_L}{N_H}$ versus distancia del vuelo, Southwest, encuesta D1B1 2017 Q1. . . . .  | 99  |
| 4.4. Comparación profits versus $D_2$ . . . . .   | 100 |



|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 4.5.  | $F_{L1}$ versus cambio en $D_2$ .   | 101 |
| 4.6.  | $F_{L2}$ versus cambio en $D_2$ .   | 101 |
| 4.7.  | $F_{H1}$ versus cambio en $D_2$ .   | 101 |
| 4.8.  | $F_{H2}$ versus cambio en $D_2$ .   | 101 |
| 4.9.  | Diferencias en tarifa promedio entre mercados versus diferencias entre $D_1$ y $D_2$ .  | 102 |
| 4.10. | Comparación profits versus $D_2$ ( $140 \leq D_2 \leq 600$ ).   | 105 |
| 4.11. | Comparación profits versus $D_2$ ( $380 \leq D_2 \leq 480$ ).   | 105 |
| 4.12. | $F_{L1}$ versus cambio en $D_2$ .   | 106 |
| 4.13. | $F_{L2}$ versus cambio en $D_2$ .   | 106 |
| 4.14. | $F_{H1}$ versus cambio en $D_2$ .   | 106 |
| 4.15. | $F_{H2}$ versus cambio en $D_2$ .   | 106 |
| 4.16. | Diferencias en tarifa promedio entre mercados versus diferencias entre $D_1$ y $D_2$ .  | 107 |
| 4.17. | Market Share doméstico USA, Top 4 aerolíneas, basado en Revenue Passenger Miles. Fuente: Bureau of Transportation Statistics. | 108 |
| 4.18. | $\Delta$ Precio versus $\Delta$ Distancia, 2008-2016 Southwest, con líneas de regresión.                                      | 109 |
| E.1.  | Comportamiento (PC-L1).   | 149 |
| E.2.  | Comportamiento (IC-H2).   | 151 |

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

Los programas de viajeros frecuentes (PVF), introducidos en los años 80, se han convertido en una de las estrategias de marketing más fuertes y efectivas del mundo. Desde su inicio con AAdvantage por American Airlines, han introducido distintas técnicas que buscan aumentar las ganancias de la aerolínea, reducir la fuga de pasajeros, mejorar la eficacia de marketing dirigido e incrementar el reconocimiento de la marca por parte de los consumidores (De Boer y Gudmundsson, 2012). Las exploraciones iniciales de la literatura se centran principalmente los factores anti o pro competencia que pueden tener estas estrategias, comenzando por Banerjee y Summers (1987), quienes muestran que la implementación de estos programas genera incentivos a la colusión. Otros autores exploran la misma línea, como por ejemplo Caminal y Claici (2007), Hartmann y Viard (2008), Lederman (2007), Agostini et al. (2015), los cuales enfatizan además los potenciales *switching cost* que pueden crear los PVF, es decir las pérdidas de beneficios sufridas por los consumidores al cambiarse a otra aerolínea.

Un enfoque distinto es el realizado por Basso et al. (2009), quienes suponen la existencia de dos tipos de pasajeros: los con objetivo de negocio, quienes pagan solo una fracción de su pasaje, ya que el resto es pagado por su empleador, lo que genera un problema de riesgo moral; y los con objetivo de ocio, que pagan la totalidad de su ticket. Luego, Basso et al. (2009) muestran que el hecho de que los pasajeros de negocio no paguen la totalidad de su pasaje provoca una distorsión al alza sobre la cantidad de premios recibidos por éstos, ya que su análisis enfatiza que los empleados pueden no querer escoger el ticket más barato, sino que buscan maximizar su utilización personal. Basso et al. (2009) muestran que en esta situación, si una sola aerolínea ofrece PVF, puede sacar provecho de esta situación con un pagador externo. Sin embargo, si todas las aerolíneas ofrecen PVF, los premios se convierten simplemente en un nuevo instrumento competitivo que permite una competencia más dura, disminuyendo los profits.

Basso et al. (2009) suponen sin embargo que las aerolíneas son capaces de discriminar perfectamente a los pasajeros con objetivo de negocio de los con objetivo de ocio, que pagan su tarifa completa. En la realidad sin embargo, las aerolíneas no pueden distinguir a las

dos clases de viajeros, lo que implica que la aerolínea enfrenta además un problema de selección adversa, caracterizado por la existencia de asimetrías de información, en donde los consumidores poseen información privada sobre sus preferencias que la firma no es capaz de identificar. Este problema se relaciona con discriminación de precios de segundo grado, en donde la firma ofrece a los consumidores (heterogéneos) distintos menús de precios y premios, con la intención de inducir auto selección y por tanto maximizar profits. La literatura al respecto es amplia, comenzando con el trabajo de Mussa y Rosen (1978), siendo muy bien tratado además por Rochet y Stole (2002) y Stole (2007).

Feres (2013) aborda este problema, encontrando que la inclusión de riesgo moral induce una distorsión al alza en los premios a los usuarios con objetivo de negocio, con una interpretación similar a lo encontrado por Basso et al. (2009). Sin embargo, también profundiza la clásica distorsión a la baja generada por un problema de selección adversa, es decir produce recompensas aún menores para los usuarios de ocio. En este trabajo sin embargo, Feres (2013) supone que la aerolínea puede mover precios y recompensas de manera independiente, lo que permite responder de manera óptima a cambios en los parámetros del problema. Sin embargo, en este caso los premios asignados pueden parecer arbitrarios para los viajeros y Berman (2006) muestra que un cambio de reglas en los programas de lealtad provoca descontento en los usuarios, lo que induce un cambio de compañía. Henderson et al. (2011) comenta sobre el perjuicio en los beneficios de un programa de lealtad si las reglas hacia los consumidores son irregulares o percibidas como procedimentalmente injustas.

De hecho, en la industria aeronáutica existen dos clases de programas, los que efectivamente tienen relacionados de manera explícita las condiciones del pasaje y las recompensas. Por una parte existen programas clásicos, en que las recompensas están ligadas a la distancia volada (de ahí la idea de millas o kilómetros como premio); por otro lado, y de manera más reciente, algunas aerolíneas han ligado sus recompensas a la tarifa pagada. Ambas alternativas han sido escasamente exploradas, pese a que la tendencia actual de la industria aeronáutica ha sido cambiar desde el primer tipo de programas hacia el segundo: en 2015, Delta siguió los pasos de Southwest y Jetblue y modificó su programa *SkyMiles* a un sistema basado en la tarifa pagada<sup>1</sup>. United luego siguió el mismo camino<sup>2</sup>, al igual que American Airlines<sup>3</sup> y LATAM<sup>4</sup> de manera reciente. Kumar y Shah (2004) abordan los cambios de programas por distancia volada a programas por tarifa pagada desde el punto de vista de ligar de alguna manera las recompensas entregadas con el profit de la aerolínea, discutiendo que los programas por distancia corren el riesgo de fracasar al presentar inconsistencias en las recompensas por factores como plataforma de compra. Veeraraghavan et al. (2014) desarrollan un algoritmo que realiza una asignación de premios que no depende solo de la distancia volada, sino que también de la frecuencia del vuelo y el factor de carga de éste, encontrando que alcanza profits mayores que el enfoque usual por distancia.

---

<sup>1</sup> e.g. <https://www.usatoday.com/story/travel/flights/2014/02/26/delta-frequent-flier/5815425/>

<sup>2</sup> e.g. <https://www.usatoday.com/story/todayinthesky/2014/06/10/united-fliers-to-earn-miles-based-on-fare-not-distance/10270819/>

<sup>3</sup> e.g. <http://www.businesstravelnews.com/Business-Travel/american-airlines-becomes-last-of-big-three-to-shift-to-revenue-based-rewards>

<sup>4</sup> e.g. [https://www.latam.com/es\\_cl/laser\\_latam\\_pass/mailv/juntosmaslejosvoladores/](https://www.latam.com/es_cl/laser_latam_pass/mailv/juntosmaslejosvoladores/)

## 1.2. Objetivos

En esta tesis se busca ahondar el enfoque realizado por Feres (2013) en el que la aerolínea enfrenta de manera conjunta un problema de riesgo moral y uno de selección adversa, pero esta vez analizando programas de lealtad reales, en los cuales los premios están ligados a algún parámetro establecido. De esta manera, a través de un modelo teórico, se busca entender los cambios ya mencionados en la industria aeronáutica desde programas por distancia volada a programas por tarifa pagada.

Los objetivos específicos son los siguientes:

- Utilizar el modelo construido según el objetivo general para establecer condiciones bajo las cuales una sola aerolínea monopólica prefiera utilizar un programa asociado a la tarifa pagada sobre uno asociado a la distancia volada.
- Extender el modelo a una situación en donde la aerolínea sirve múltiples mercados heterogéneos, analizando condiciones de red es conveniente para una aerolínea ofrecer un programa por tarifa pagada versus uno por distancia volada.
- Realizar simulaciones que provean información sobre casos reales de estudio y el comportamiento de los programas.
- Sugerir nuevas líneas de investigación en base a los resultados obtenidos.

## 1.3. Estructura de la tesis

Este trabajo consta de 5 capítulos. En el capítulo 2 se realiza una revisión bibliográfica a la literatura de viajeros frecuentes, tanto desde un punto de vista económico, como desde el enfoque del marketing. Además se estudia el estado del arte con respecto a discriminación de precios de segundo grado y riesgo moral.

En el capítulo 3 se estudia el caso de una aerolínea monopólica sirviendo a un mercado, comparando el comportamiento bajo un programa por distancia volada y por tarifa pagada. Posteriormente, se presentan los resultados y análisis al considerar demanda doblemente elástica.

En el capítulo 4 se extiende lo realizado en el capítulo anterior al caso de una aerolínea sirviendo dos mercados heterogéneos, con la restricción de que es capaz de ajustar un único programa de lealtad. Se estudian los profits bajo cada uno de los programas, entregando condiciones bajo las cuales cada uno de los programas es preferible por la firma.

En el capítulo 5 se realiza una síntesis de lo desarrollado, presentando las conclusiones y futuras líneas de investigación que surgen de estas.

# Capítulo 2

## Revisión Bibliográfica

En este capítulo se presenta una revisión bibliográfica general de los temas tratados en esta tesis. En particular, se presentarán los principales trabajos en programas de lealtad y programas de viajeros frecuentes, los cuales desde un punto de vista teórico han sido estudiados principalmente como un factor anti competencia, a través de la creación de barreras de entradas y *switching costs*. Desde el punto de vista del marketing, existe escasa evidencia empírica que refuerce la efectividad de esta clase de programas en términos de comportamiento de los consumidores, situación similar a la económica, donde el impacto en beneficios no ha sido cuantificado.

Posteriormente, se revisan los trabajos relevantes en el ámbito del problema de riesgo moral presente en la clase de negocios al existir un programa de lealtad, el cual ha sido comentado ampliamente en la literatura, pero poco abordado. En este sentido, resulta fundamental comprender el trabajo de Basso et al. (2009), en tanto que presenta muchos análogos a lo estudiado en esta tesis. Finalmente, se estudia el problema de selección adversa, donde la literatura es amplia, pero en un contexto genérico, que no aborda las particularidades propias de la industria aérea. Se pondrá especial énfasis en el trabajo de Feres (2013), en tanto que el trabajo planteado constituye una extensión de este.

### 2.1. Programas de Viajeros Frecuentes

La literatura referente a los programas de lealtad en general, y a los programas de viajeros frecuentes en particular es amplia, aunque abordada desde enfoques muy disímiles. Uno de los primeros esfuerzos teóricos es el correspondiente a Banerjee y Summers (1987), quienes modelan un programa de viajeros frecuentes mediante un juego de dos etapas entre dos firmas, las que compiten en precios y recompensas, las que son percibidas en la forma de un descuento a los viajeros que participan de ambos períodos. Banerjee y Summers (1987) luego prueban que, en ausencia de programa de lealtad, los profits son cero debido a la competencia tipo Bertrand, pero que al existir cupones de descuento orientados a usuarios frecuentes, los profits son mayores a cero, tal como si existiese colusión. La intuición de este resultado es simple: los programas de lealtad les permiten a las firmas separar el mercado y

cobrar precios mayores, debido a que la reducción de precios como en competencia perfecta es menos atractiva cuando el *switching cost* de los usuarios entre los productos aumenta.

Este enfoque, orientado a los efectos anti competencia de los programas de viajeros frecuentes (colusión tácita) fue posteriormente extendido por múltiples autores. Por ejemplo, Kim et al. (2001) modela la situación nuevamente como un juego de dos períodos, donde existen dos tipos de usuarios: consumidores usuales, que consumen en ambos períodos, y consumidores ocasionales, que consumen solo en la primera etapa. Estos consumidores están ubicados a lo largo de una línea de Hotelling, con las firmas a los extremos. La resolución del equilibrio permite concluir que la inclusión de recompensas debilita la competencia en precios por exactamente el mismo hecho comentado anteriormente: al ofrecer incentivos para compras repetidas, los programas de lealtad aumentan el costo de atraer a los consumidores cautivos de la firma competidora. Este trabajo además entrega intuiciones importantes respecto al diseño de los programas de lealtad: cuando los consumidores usuales representan una baja proporción y son mucho más sensibles al precio que los usuarios ocasionales, la estrategia óptima de la firma implica entregar recompensas con alto costo para la firma en comparación al costo real (e.g. transferencias directas de dinero). La intuición es que al ofrecer este tipo de recompensas, la competencia en precios es mucho más débil y las firmas pueden aprovecharse de los usuarios ocasionales poco sensibles al precio. En caso contrario, la estrategia óptima de la firma implica entregar recompensas con costo para la firma menor al costo real (e.g. vuelos gratis, que se basan en la capacidad sobrante), lo que parece ser el caso más cercano a la realidad.

Borenstein (1996), a través de un modelo de compras repetidas muestra que este tipo de programas pueden bloquear la entrada de un nuevo actor al mercado. En particular, modela la existencia de dos mercados, servidos inicialmente por una firma monopólica, donde en el segundo mercado es posible que aparezca una firma entrante con un costo marginal menor que el de la firma incumbente, pero sin programa de lealtad. Para su análisis es clave la existencia de costos hundidos asociados a la entrada a un mercado. Los consumidores realizan una compra por período y tienen cierto precio de reserva o valoración  $R$  por esta unidad, pero reciben una unidad adicional gratuita una vez que alcanzan cierto nivel de compras (e.g. un vuelo gratis en nuestro contexto después de acumular suficientes millas), la cual valoran  $V < R$  debido a que se trata de una segunda unidad en el mismo período. Luego, Borenstein (1996) muestra que debido al “apego” que produce estar cerca del número de compras necesarias para el canje de una unidad gratuita, es posible que la firma entrante no obtenga beneficios para cualquier nivel de precios debido al costo hundido. Más aún, incluso para apuntar a los consumidores que acaban de recibir una unidad gratuita, y por lo tanto no tienen apego, es necesario que la firma entrante ofrezca un precio mucho más bajo que la firma incumbente para compensar el valor futuro de las recompensas.

Además, Borenstein (1996) argumenta que para que el programa de lealtad sea efectivo, es necesario que la valoración  $V$  de las recompensas por parte de los consumidores sea mayor al costo marginal de producción. Por tanto, la firma entrante no se podría beneficiar de crear su propio programa de lealtad, en tanto que, aún cuando pueda entrar al mercado, fijará un precio para su producto muy cercano a su costo marginal de producción para compensar la ventaja de la firma incumbente, y por tanto terminará con un producto que es poco atractivo como recompensa. Este es precisamente el caso en el mercado aéreo, donde el problema

principal-agente existente entre los empleadores y viajeros de negocio provoca un aumento en la valoración  $V$  de las recompensas por parte del agente, además que en este contexto las recompensas le cuestan poco a la firma en tanto que se basan usualmente en la capacidad sobrante.

Finalmente, este artículo formaliza un hecho importante, el que resume Lederman (2007): el efecto de la dominación en aeropuertos sobre los PVF. Un consumidor preferirá viajar y enrolarse en el programa de lealtad que provea la red más densa desde su aeropuerto de origen, debido a que le permitirá tener el espectro más amplio de posibilidades de canje de las recompensas. Por tanto, la aerolínea dominante en un aeropuerto ofrecerá el PVF más atractivo para los viajeros con dicho origen, por lo que es capaz de cobrar precios mayores, pero sin crear un *umbrella effect*, al contrario, ya que los competidores deberán ofrecer precios más bajos para compensar el atractivo del PVF de la firma dominante. Esto efectivamente puede disuadir la entrada al mercado de otros actores, lo que provoca que en muchos aeropuertos existan firmas capaces de cobrar mayores tarifas y aún así obtener la mayoría del market share.

Lederman (2007) estudia este efecto de los PVF sobre el poder de mercado en aeropuertos dominados, aunque desde un enfoque empírico. Para esto, usó información de pasajeros y tickets vendidos provenientes de la encuesta DB1A del Department of Transportation's Origin and Destination Survey correspondiente a los años 1996 a 2000, la cual constituye una muestra aleatoria del 10% de los tickets vendidos en el mercado doméstico de USA por carriers domésticos. La información de los PVF de seis aerolíneas (American Airlines, Continental Airlines, Delta Airlines, Northwest Airlines, United Airlines, y US Airways) provino de distintas revistas y publicaciones de carácter mensual y anual. Posteriormente, a través de ecuaciones de forma reducida, estima el efecto de lo que él llama *escala del PVF* sobre la demanda por vuelos y tarifa en los hubs de las aerolíneas. La *escala del PVF* la define simplemente como el número de vuelos disponibles semanalmente a través de partners del programa a destinos internacionales, y puede ser incrementada por tanto aumentando las frecuencias, números de destinos o número de alianzas. Esta estimación cifró el aumento de demanda en un 2.2% y el aumento en tarifa en un 0.32% por cada mil vuelos adicionales (semanales) ofrecidos por la alianza, encontrando además que la elasticidad precio de la demanda disminuye a medida que la dominación de una aerolínea en un aeropuerto crece. En resumen, sus resultados sugieren que mejoras en los PVF, a través de más y mejores alianzas, están asociadas a aumentos en la demanda en aeropuertos dominados por la aerolínea que ofrece el programa, lo que a su vez implica un nuevo equilibrio en el que menos pasajeros son transportados pero con tarifas mayores.

Un punto de vista distinto es el propuesto por Caminal y Claici (2007), quienes critican el enfoque tradicional orientado a un caso extremo como es un duopolio con productos que son sustitutos perfectos. Los autores desarrollan un modelo de dos periodos, donde existen  $n$  firmas ubicadas en los extremos de  $n$  líneas de largo  $\frac{1}{2}$  que parten del mismo punto, como una generalización de una línea de Hotelling, de manera de que exista competencia simétrica entre las firmas, la cual aproxima a competencia monopolística para  $n$  lo suficientemente grande. Inicialmente estudian descuentos en un caso de compromiso total, es decir cuando la firma es capaz de discriminar a los compradores usuales (que compran en ambos periodos) de los ocasionales y les ofrece un precio más bajo a los del primer tipo en el segundo periodo, los

que son anunciados al comienzo del juego, concluyendo que los consumidores están mejor que en el caso sin compromiso (donde la firma no puede distinguirlos), pero las firmas presentan menores profits. Posteriormente, estudian el caso de compromiso parcial, donde los precios a los usuarios frecuentes son anunciados al comienzo del juego, pero los precios para los que se incorporan en la segunda etapa son anunciados al comienzo de esta, donde se repite la misma conclusión, aunque con consumidores y firmas en mejor situación que bajo compromiso total. Como tercer escenario, analizan descuentos lineales, donde la firma en el primer período se compromete al precio fijado en la primera etapa y al descuento para los compradores frecuentes sobre el precio de la segunda etapa, el cual es anunciado al final del primer período y no al comienzo, estrategia que resulta equivalente al compromiso completo.

El análisis de Caminal y Claici (2007) muestra por tanto que los programas de lealtad son estrategias dominantes para cada firma, pero que en el equilibrio competitivo se convierten en un método que aumenta la competencia, causando menores tarifas promedio y mayores excedente de los consumidores y que por tanto hacen que todas las firmas estén peor, en un clásico dilema del prisionero. Estas conclusiones son muy similares a las realizadas por Basso et al. (2009), trabajo que será estudiado posteriormente en detalle.

Como última evidencia de los efectos pro o anti competencia de los PVF, se propone el trabajo de Agostini et al. (2015), los cuales estudian de manera empírica el efecto del programa de lealtad ofrecido por LAN en las tarifas del mercado doméstico chileno, con la particularidad de que en este mercado no existen otras aerolíneas que ofrezcan un PVF, además de que existe un único hub (Santiago). Los autores se enfocaron en dos tipos de períodos: fines de semana, donde predominan los viajeros de ocio y días de semana, donde los vuelos están orientados principalmente a viajeros de negocios, y a través de regresiones estiman el efecto del PVF en un *premium* en la tarifa de un 35 % en los viajes orientados a estos últimos.

Por otro lado, la evidencia empírica respecto al efecto de los programas de lealtad sobre el comportamiento de los consumidores es más bien escasa, y en la práctica, el impacto económico rara vez alcanza las expectativas. En la literatura de marketing es posible encontrar algunas referencias al respecto: Sharp y Sharp (1997) realizan un estudio sobre el impacto del lanzamiento del programa *Fly Buys*, el programa más importante de lealtad de Australia, el cual cubre más del 20 % del gasto en retail y enrola al 25 % de la población australiana. Este programa recompensa a los consumidores al realizar compras en comercios y marcas asociadas. Los resultados obtenidos de la data recolectada mostraron que no hubo grandes diferencias en los patrones de compra de los usuarios, siendo el único efecto detectado la existencia marginal de un “exceso de lealtad” hacia las marcas asociadas al programa, es decir, frecuencias de compras promedio más altas que las esperadas según su nivel de penetración en el mercado, efecto que sin embargo es mínimo y posible de asociar a errores de medición, en tanto que también existió en algunas marcas no asociadas. East et al. (1998) estudian las ganancias asociadas al programa de lealtad de Tesco usando data de 1994, 1996 y 1997, concluyendo que, con la evidencia disponible, existió poco impacto en la lealtad de los consumidores.

Dowling y Uncles (1997) afirman que “dada la popularidad de los programas de lealtad, son sorprendentemente inefectivos”. Los autores, a través de una revisión de la literatura describen la creación de los programas de lealtad sobre la base de estudios de marketing



de los años 70, los cuales concluían que las firmas que forman relaciones cercanas con sus consumidores tienden a tener “mejores” y más leales consumidores, de los que es posible extraer mayores beneficios debido a que tienden a ser menos sensibles al precio. Sin embargo, discuten, los programas de lealtad terminan siendo una medida principalmente defensiva: las firmas quieren anticiparse a programas similares ofrecidos por la competencia, o bien responder a un programa ya instaurado, lo que resulta concordante con los resultados teóricos descritos anteriormente, donde por ejemplo Caminal y Claici (2007) y Basso et al. (2009) muestran que las firmas están mejor sin programas de lealtad, pero deciden implementarlos debido a un problema típico de Dilema del Prisionero. Dowling y Uncles (1997) concluyen notando que, desde el punto de vista de comportamiento, la lealtad de los consumidores proviene más del propio servicio o producto ofrecido que de la existencia de un programa de lealtad, el cual simplemente incrementará los costos de la firma a través de recompensas.

En referencia a la estructura y sistema de acumulación de puntos de los programas, la literatura es escasa. Drèze y Nunes (2008) a través de un estudio experimental realizado a estudiantes de pregrado de negocio en The Wharton School of the University of Pennsylvania comprueban un resultado intuitivo: en un programa con categorías (donde una mayor frecuencia de compras implica un mayor status, con mejores beneficios) entre más exclusivo es la primera categoría (i.e. entre menor porcentaje del total de clientes pertenece a ella) mayor es la sensación de superioridad de sus integrantes. Además, esta sensación aumenta cuando se introduce una segunda categoría bajo esta, pero este efecto no se replica al introducir una tercera, en tanto que, según argumentan los autores, los integrantes de la categoría más alta no se sienten lo suficientemente parecidos a una tercera categoría como para compararse con estos.

Kopalle et al. (2012) estudian el efecto conjunto de la inclusión de diferentes categorías y la acumulación de recompensas asociadas a la frecuencia de compra, donde ejemplifican con el caso de Delta Airlines, que (a la fecha del artículo) ofrece cuatro categorías (Silver, Gold, Platinum, Diamond) con beneficios diferentes, pero donde los clientes además acumulan millas dependiendo de cuánto vuelan. Para esto, ajustaron un modelo tipo Logit anidado aplicado a la industria hotelera, usando data de 2002 a 2003, donde los diferentes nidos del modelo corresponden a las opciones de no alojarse en el hotel, alojarse pagando tarifa completa o alojarse a través del canje de recompensas. Este trabajo resulta interesante en tanto que endogeniza la decisión del canje de recompensas, y porque además presenta el mismo problema principal-agente ya comentado, debido a que para viajes de negocio es posible que el empleador sea quien costee la estadía. Los autores a través de esto encuentran que el efecto de *points pressure* – bajo el cual los consumidores consumen más cuando están cerca de canjear un producto gratis – también está presente para las categorías, es decir, consumidores también consumen más o con mayor frecuencia cuando están cerca del límite para aumento de categoría. Además, encuentran que ambos elementos (la inclusión de categorías y acumulación por frecuencia) conducen a un aumento en las compras por parte de los integrantes del programa de lealtad, y que su uso conjunto produce un efecto ligeramente mayor en este sentido.

Finalmente, respecto de la forma de acumulación de recompensas en la industria aérea, la literatura que formalice los hechos es prácticamente inexistente. Kumar (2010) comenta de manera vaga sobre el cambio anunciado para el año 2011 por parte de Southwest Airlines desde recompensas ligadas a la distancia volada a recompensas ligadas a tarifa pagada,

analogándolo al movimiento inicial de los PVF desde recompensas iguales a la distancia para todos los pasajeros, a recompensas ligadas a la distancia pero a través de un multiplicador dependiente de la clase del ticket. Kumar (2010) argumenta que a través de estos cambios las aerolíneas son capaces de separar a los pasajeros que tienen una disposición a pagar más alta que el viajero promedio de aquellos con alta sensibilidad al precio, maximizando de esta forma los beneficios a los consumidores más rentables, y minimizando las recompensas asignadas (y por tanto, el costo) a los viajeros ocasionales. de Boer (2017) discute que el cambio de los PVF, ya sea diferenciando por clases en un enfoque basado en distancia o bien con un enfoque por tarifa pagado, fueron estimulados por la noción de que el comportamiento original de estos programas, entregando una milla por cada milla volada, no hace justicia al verdadero valor de los consumidores, ya que no tiene sentido económico entregarle las mismas recompensas a dos personas que pagaron diferentes cantidades. Chun y Ovchinnikov (2015) abordan una problemática similar a la de esta tesis, aunque desde un enfoque distinto: los autores modelan el comportamiento de una aerolínea monopólica a través de un modelo de compras repetidas, donde los viajeros tienen una utilidad que aumenta a tasas decrecientes de manera cuadrática con el número de compras, hasta un nivel de saciedad. Además, consideran que algunos viajeros poseen un status premium, lo que les implica una mayor utilidad por cada unidad comprada y por tanto una mayor disposición a pagar. Luego, muestran que bajo este enfoque, cuando las aerolíneas usan un programa basado en cantidad (e.g. por distancia), puede resultar óptimo para algunos consumidores consumir más, de manera de alcanzar el *threshold* para el status premium. Por otro lado, muestran que en un programa por tarifa pagada se repite el mismo patrón para algunos consumidores, pero sin embargo otros encuentran óptimo consumir lo mismo pero a precios más altos para alcanzar dicho *threshold*, que es una de las principales razones que causan, en el análisis de este artículo, que los profits de la aerolínea monopólica sean más altos bajo este último tipo de programa, debido a que la firma se enfrenta a menos transacciones y por tanto a una reducción en los costos. Un resultado interesante además de este trabajo es que el uso de un programa por tarifa puede resultar una mejora de pareto sobre un programa por distancia, i.e. la firma puede incrementar su beneficio sin perjudicar a ningún viajero. Sin embargo, para que se de esta situación, la firma debe aceptar alcanzar un profit menor que el óptimo que podría alcanzar.

## 2.2. Riesgo Moral

El problema de riesgo moral existente entre los viajeros de negocios, quienes realizan la compra y viajan, y sus empleadores, quienes pagan por dicha compra, fue comentado inicialmente (aunque de manera vaga) por Levine (1986) y Banerjee y Summers (1987), argumentando que es una de las posibles razones por las cuales las recompensas son entregadas en la forma de *millas* o *puntos* por sobre productos o dinero, de manera que no puedan ser auditadas por la empresa. Borenstein (1989) comenta además sobre el aumento en la efectividad de los PVF cuando la valoración del viajero por las recompensas es inusualmente alta relativa a la valoración por pagos marginales sobre el ticket, situación dada en el problema principal-agente existente entre el empleador y el empleado que viaja, y que por tanto, argumenta, implicará mayores costos para la firma que financia el viaje.

Deane (1988) aborda el problema ético existente en los PVF, y es uno de los primeros en catalogar las recompensas como “sobornos descarados”. El autor se refiere a cuatro puntos críticos que generan esta clase de programas:

- a) Ineficiencias en la selección de viajes: un empleado con puntos acumulados en alguna aerolínea puede terminar escogiéndola para un viaje futuro pese a que pueda ser realizado de manera más conveniente, eficiente o económica en otro carrier. Adicionalmente, existen incentivos para tomar un viaje menos eficiente (más largo) con el mismo carrier, solo para acumular puntos. El autor entrega múltiples ejemplos anecdóticos de este efecto, conocido como *mileage runs*.
- b) Subsidio de precios, donde argumenta que el costo de los PVF son principalmente absorbidos por los viajeros de ocio, los cuales perciben un alza en el precio debido a la inclusión de estos programas, pero que aún cuando sean parte de este, nunca serán capaces de canjear las recompensas acumuladas.
- c) Evasión de impuestos, ya que tanto el costo de los pasajes, como especialmente las recompensas entregadas no son declaradas como ingreso, lo que en argumentos del autor, beneficia al sector más pudiente de la población a costa del sector más vulnerable.
- d) Distorsiona la competencia, donde según argumentos similares a los presentados anteriormente, pone en ventaja competitiva a las aerolíneas con mayor densidad de su red, al permitirles ofrecer un PVF más atractivo.

Posteriormente, se describen los resultados de una encuesta realizada a potenciales viajeros de negocio, con 625 respuestas válidas, de donde concluyen que la mayoría de estos ve su decisión de viaje influenciada por los PVF, aunque en general no reconocen la existencia de un problema ético, lo que según el autor tiene relación con la actitud de la empresa: si el empleador condona este comportamiento y lo considera normal, los empleados tendrán la misma percepción.

Arnesen et al. (1997) utilizan un enfoque similar, destacando los mismos problemas éticos ya comentados, donde además realizan diferentes encuestas a aerolíneas, firmas y viajeros. De los resultados, destaca el hecho de que un 62% de los viajeros de negocio encuestados declaran que las recompensas de los PVF influyen su decisión de aerolínea, porcentaje que baja a un 8% al consultarles sobre el mismo escenario, pero en el caso en que las recompensas son propiedad de su empleador. Además, encuentran que un 82% de los empleadores decide ejercer algún tipo de control sobre las reservas de vuelos de sus empleados, a fin de combatir la percepción extendida de que estos tipos de programas aumentan los costos asociados a viajes de la firma.

Desde el punto de vista teórico, los esfuerzos por estudiar el problema principal-agente existente son acotados. En este sentido, destaca el trabajo de Cairns y Galbraith (1990), quienes reconocen la existencia de dos tipos de viajeros: aquellos que pagan la totalidad de su ticket y aquellos que perciben solo una fracción  $\alpha < 1$ , es decir los cuales presentan el problema ya descrito. Los autores modelan a los consumidores, a los cuales la firma es capaz de reconocer, a través de utilidades indirectas distintas, y con esto describen el escenario resultante cuando intenta ingresar una nueva firma a un mercado originalmente monopolístico: en el equilibrio de Bertrand no existe colusión ni barreras de entrada, y los profits serán cero para ambas firmas debido a que los precios serán iguales a los costos marginales (iguales para ambas firmas). Sin

embargo, es posible que la firma incumbente al ofrecer un programa de lealtad, sea capaz de bloquear la entrada al mercado de la nueva firma, al aprovecharse fuertemente del problema de riesgo moral existente en la clase de negocio. En efecto, los casos analizados por Cairns y Galbraith (1990) son:

- Si la firma entrante no ofrece un programa de lealtad, entonces la firma incumbente puede ofrecer un precio  $p_j^2$  mayor al precio de profits nulos a los viajeros de negocio, entregándoles un cupón  $\gamma_j$  como recompensa, a ser utilizado en la red de la aerolínea. Debido a esta restricción, los viajeros valoran a los cupones solo en una fracción  $\beta < 1$  del valor nominal, luego, pueden ser usados por la aerolínea como método para subir precios si  $\alpha < \beta$ , es decir si la valoración por recompensas es mayor que el porcentaje que perciben efectivamente del ticket.
- Si la firma entrante ofrece un programa de lealtad, pero posee una red de servicios estrictamente contenida en la red de servicios de la firma incumbente, entonces esta última puede aprovecharse del hecho de que sus cupones le producen mayor utilidad a los viajeros, al brindarles más opciones de canje, causando que la firma entrante no puede ofrecer ningún paquete de precios y cupones que capture consumidores.
- Si la firma entrante posee la misma red de destinos que la firma incumbente, y además los viajeros de negocio valoran lo suficiente a las recompensas o bien pagan una fracción del ticket lo suficientemente pequeña ( $\alpha < \beta$ ), entonces el equilibrio de Bertrand-Nash implica el uso de un programa de lealtad por ambas firmas, las que obtienen profits nulos.

Finalmente, Cairns y Galbraith (1990) muestran que en el caso en el que existen tres firmas,  $A$ ,  $B$  y  $C$  con redes  $\Omega_A$ ,  $\Omega_B$  y  $\Omega_C$  no anidadas (es decir, ninguna red de destinos contiene a la red de un competidor), el equilibrio de Bertrand-Nash involucra el uso de programas de lealtad, pero con profits que no son necesariamente cero. Además, muestran que si la redes de  $B$  y  $C$  están contenidas en la de  $A$ , pero  $\Omega_A \subset \Omega_B \cup \Omega_C$ , entonces las firmas  $B$  y  $C$  pueden aumentar sus profits formando una alianza, de manera de dominar a la tercera firma.

Por otro lado, el problema principal-agente también fue estudiado de manera teórica por Basso et al. (2009). En este trabajo se considera nuevamente la existencia de viajeros de negocio, los que perciben únicamente una fracción  $\alpha$  del ticket, y se modela la competencia entre dos aerolíneas ubicadas a los extremos de una línea de Hotelling. El juego estudiado es descrito a través de dos etapas, en la primera las firmas deciden si implementar o no un PVF, mientras que en la segunda deciden precios, y si corresponde, el nivel de recompensas entregadas a los viajeros, las cuales son consideradas simplemente como transferencias de dinero. Además, se excluye del modelamiento a viajeros de ocio, con lo que la utilidad de los consumidores si compran a la aerolínea  $i$  resulta simplemente

$$U = W - \alpha P_i - z_i t + F_i$$

con  $W$  la utilidad proveniente del viaje,  $P_i$  el precio del ticket,  $z_i$  la distancia a la firma,  $t$  el costo de transporte y  $F_i$  las recompensas recibidas.

Además, se considera que el costo de proveer recompensas  $F$  a los viajeros es  $\gamma F$ . Por tanto, si la aerolínea hace uso de, por ejemplo, capacidad sobrante para entregar recompensas, percibe  $\gamma < 1$ , mientras que si el programa es costoso de establecer y mantener, puede percibir  $\gamma > 1$ .

Se asume además que el empleador (principal) no puede observar los precios a los que se enfrenta su empleado (agente), y tan solo pueden rechazar su decisión en caso de que el precio escogido sea mayor a un precio de reserva  $R$ . Los autores posteriormente analizan tres casos:

- 0-PVF: Si ninguna de las aerolíneas ofrece un PVF, entonces los precios cargados por ambas son iguales a  $\frac{t}{\alpha}$ , es decir, entre menor porcentaje del precio perciban los viajeros más altas serán las tarifas cobradas, hasta alcanzar el precio de reserva del empleador. Este hecho ilustra el problema de riesgo moral con un tercer pagador con productos diferenciados, donde la demanda por viajes del empleado resulta menos elástica aún sin PVF.
- 2-PVF: Cuando ambas aerolíneas deciden ofrecer PVF, pueden ocurrir dos escenarios: si el costo de proveer recompensas es alto ( $\gamma > \frac{1}{\alpha}$ ), es más conveniente para la aerolínea ofrecer menores precios para atraer a los viajeros de negocio que ofrecer recompensas, por los que se retorna al escenario de 0-PVF, aunque esta vez de manera endógena. Si por otro lado, los costos del PVF son bajos, ambas aerolíneas ofrecerán recompensas no nulas a los viajeros, cobrándoles el precio de reserva de su empleador. Lo interesante de este resultado es que los profits resultan ser crecientes con  $\gamma$ , i.e. entre más caro es el programa, mayor beneficio obtienen las aerolíneas, y más aún, si  $\gamma \leq 1$ , el escenario donde ambas firmas ofrecen un PVF entrega menores profits que cuando ninguna ofrece, en una situación de Dilema del Prisionero. La intuición de este resultado es clara: debido a que las recompensas son modeladas como una transferencia directa de dinero a los viajeros, la competencia entre las firmas se endurece, anteriormente competían en precios, ahora compiten en precios y recompensas. Bajo este escenario, tanto firmas como empleadores están peor, estos últimos debido a que perciben siempre un precio igual a su precio de reserva, los únicos beneficiados por estos programas resultan ser los empleados que viajan y reciben recompensas.
- 1-PVF: Finalmente, para ciertos valores intermedios del costo de proveer recompensas  $\gamma$  la solución del juego completo estudiado involucra a una sola aerolínea ofreciendo un PVF, ya que para la segunda no resulta rentable ofrecerlo (una situación de *juego del gallina*). En este caso, la firma que ofrece un programa de lealtad es capaz de utilizarlo como ventaja competitiva, incrementando su profit con respecto a la situación 0-PVF.

## 2.3. Selección Adversa

La literatura de discriminación de precios de segundo grado se remonta a los años 70 con el trabajo de Mussa y Rosen (1978). En este trabajo, los autores suponen un mercado en donde se transa un bien, el cual puede ser producido en diferentes variedades las cuales son caracterizadas por un parámetro de calidad  $q$ . Los consumidores compran una unidad de este bien y presentan diferentes valoraciones  $\theta$  sobre la calidad, donde  $\theta$  se distribuye con densidad  $f(\theta)$  en un soporte compacto  $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ , por tanto, la utilidad de los consumidores resulta

$$U = x + \theta q$$

donde  $x$  representa el consumo agregado de los bienes distintos al analizado. Bajo este enfoque, los autores resumen el comportamiento clásico bajo competencia: a los consumidores se

les asigna la calidad eficiente, i.e.  $C'(q) = \theta$ , donde  $C(q)$  es el costo de ofrecer una unidad del bien con calidad  $q$ . Al mismo tiempo, el precio cobrado a los usuarios es tal que asegura profits nulos, es decir  $P(q) = C(q)$ . Cuando el escenario cambia a un monopolio perfectamente discriminante, la firma sigue ofreciendo calidades eficientes a todos sus consumidores, pero cobra precios tales que extraen todo el excedente de estos, es decir  $P(q) = \theta q$ .

Sin embargo, cuando el escenario es un monopolio que no puede discriminar perfectamente, y que por tanto ofrece múltiples combinaciones de cualidades  $\{q_i\}$  con precios correspondientes  $\{P(q_i)\}$  disponibles por todos los consumidores, la situación cambia: la combinación precio-calidad que ofrecería un monopolio perfectamente discriminante a cierto grupo de consumidores (con cierta valoración  $\theta_i$ ) resulta más atractiva para los consumidores con valoración  $\theta_j > \theta_i$  que la combinación que les ofrecería el monopolio perfectamente discriminante, debido a que con esta última obtienen una utilidad nula, mientras que con la primera una utilidad estrictamente positiva. Es por esto que la combinación precio-calidad ofrecida a los usuarios con menor valoración  $\theta$  interfiere con la habilidad del monopolio de cobrar tarifas mayores a los consumidores con valoraciones mayores.

Por tanto, Mussa y Rosen (1978) estudian este problema, donde la firma monopólica que no es capaz de discriminar perfectamente debe maximizar su profit, pero donde los consumidores escogerán la combinación precio-calidad que les otorgue la mayor utilidad. Bajo esto, las conclusiones obtenidas son las siguientes:

- A los consumidores con la valoración más alta  $\bar{\theta}$  se les asigna la calidad eficiente, es decir  $C'(q(\bar{\theta})) = \bar{\theta}$ , al igual que con competencia. A todo el resto de consumidores se les asigna una calidad menor que la eficiente, y más aún, algunos consumidores con valoración lo suficientemente baja, que comprarían en el caso con competencia, son excluidos del mercado por el monopolio. Esto último se debe a que estos usuarios son los que interfieren de mayor manera en la habilidad de la firma para cobrar precios mayores a los consumidores con valoraciones más altas, por lo que puede ser conveniente no servirlos.
- La pérdida de consumer surplus con respecto al caso con competencia es creciente con la valoración  $\theta$ , y por tanto es máxima para los consumidores con valoración  $\bar{\theta}$ , aún cuando estos reciben calidad eficiente.
- Para cualquier calidad  $q > 0$  vendida bajo competencia y bajo monopolio, el precio cobrado por el monopolio es mayor que el cobrado bajo competencia, y el diferencial es creciente con  $q$ . Por tanto, como bajo competencia el precio cobrado equivale al costo unitario, esta conclusión nos dice que, bajo monopolio, el markup del bien es creciente con la calidad.
- La solución óptima no necesariamente implica asignaciones distintas de calidad para consumidores con distintas valoraciones, muchas veces es conveniente para la firma agrupar usuarios con valoraciones distintas y ofrecerles una misma combinación precio-calidad, en un fenómeno conocido como *bunching*.

Posteriormente, Tirole (1988) introduce conceptos y notaciones que serán de vital relevancia en este trabajo: en el mismo contexto que Mussa y Rosen (1978), describe el caso donde las firmas ofrecen distintas combinaciones  $\{P, q\}$ , donde en este caso  $q$  corresponde a cantidad del bien comprada, no calidad, en otras palabras los consumidores deciden cuánto consumir

de un bien de una sola variedad ofrecido por el monopolio. Con esto, la utilidad percibida por los usuarios resulta

$$U = \begin{cases} \theta V(q) - P & \text{si pagan } P \text{ y consumen } q \text{ unidades} \\ 0 & \text{si no compran} \end{cases}$$

donde  $V(0) = 0$ ,  $V'(q) > 0$ ,  $V''(q) < 0$ , es decir, los consumidores aumentan su utilidad con el consumo a tasas decrecientes. Luego, analiza en detalle dos casos:

- Cuando existen dos tipos de consumidores, con proporciones  $\lambda$  y  $1 - \lambda$  y con preferencias  $\theta_1, \theta_2$ , con  $\theta_2 > \theta_1$ , la firma ofrece dos menús,  $(q_1, P_1)$  orientado al primer tipo y  $(q_2, P_2)$  al segundo. Luego, introduce explícitamente las restricciones a las que se enfrenta la firma, en primer lugar a una restricción de participación de los consumidores de tipo 1

$$\theta_1 V(q_1) - P_1 \geq 0$$

Si esta restricción se cumple, automáticamente los consumidores de tipo 2 participan del mercado, en tanto que pueden comprar el menú  $(q_1, P_1)$  y obtener utilidad estrictamente positiva. Posteriormente, introduce las restricciones de compatibilidad de incentivos

$$\theta_1 V(q_1) - P_1 \geq \theta_1 V(q_2) - P_2 \quad (\text{IC-1})$$

$$\theta_2 V(q_2) - P_2 \geq \theta_2 V(q_1) - P_1 \quad (\text{IC-2})$$

que aseguran que los consumidores no ejercen arbitraje personal, es decir escogen el menú diseñado para ellos. Tirole (1988) discute que en general la restricción de compatibilidad de incentivos para la clase 1 (IC-1) no debiese ser relevante, ya que la idea es hacer que los viajeros con alta valoración revelen su condición para extraerles su mayor disposición a pagar, lo que es logrado a través de la restricción (IC-2), no que no los de baja valoración lo hagan. Más aún, el menú  $(q_2, P_2)$  posee un markup mayor (en la línea de lo probado por Mussa y Rosen (1978)) por lo que no es problema que los consumidores de baja valoración escojan este menú sobre el diseñado para ellos. En la práctica, el cumplimiento de la restricción (IC-2) trae implícita el cumplimiento de la restricción (IC-1), i.e. los consumidores de tipo 1 no encontrarán en ningún caso atractivo el otro menú. A partir de esto, el proceso de optimización genera las siguientes condiciones

$$\theta_1 V'(q_1) = \frac{c}{1 - \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_1}}$$

$$\theta_2 V'(q_2) = c$$

donde  $c$  es el costo marginal de producción. Es decir, a los consumidores con la valoración más alta se les entrega una cantidad eficiente del producto, pero a los otros se les entrega una cantidad distorsionada a la baja, lo que recupera el resultado de Mussa y Rosen (1978).

- Cuando existe un continuo de consumidores, con preferencias distribuidas sobre un intervalo  $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ , las restricciones de compatibilidad de incentivos se escriben

$$\theta V(q(\theta)) - P(q(\theta)) = \max_{\tilde{\theta} \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]} \tilde{\theta} V(q(\tilde{\theta})) - P(q(\tilde{\theta}))$$

Debido a que estas restricciones son difíciles de analizar en esta forma, el autor muestra que una condición necesaria y suficiente para su cumplimiento es que  $q(\theta)$  esté caracterizado por

$$\theta V'(q(\theta)) = P'(q(\theta))$$

es decir, un incremento marginal en la cantidad consumida por los consumidores de tipo  $\theta$  genera una utilidad marginal de  $\theta V'(q(\theta))$ , que es igual al pago marginal  $P'(q(\theta))$ . Por tanto, los consumidores no quieren modificar su consumo en el margen. Con esto, el autor prueba que se tiene el mismo resultado: los consumidores con la valoración más alta consume una cantidad eficiente del bien, pero al resto se le ofrece una cantidad distorsionada la baja. También, se muestra que el precio promedio por unidad  $\frac{P(q)}{q}$  es decreciente con  $q$ , un resultado clásico bajo un enfoque de descuento por cantidad.

Rochet y Stole (2002) estudian un problema similar, aunque en este caso introduciendo un término al que llaman *participación aleatoria*. En particular, consideran que la utilidad de un individuo con valoración  $\theta$  por calidad, que consume una combinación  $(P, q)$  de precio-calidad es

$$U = \theta q - P - x$$

donde  $x$  representa un costo de oportunidad externo, tal que se distribuye de alguna forma sobre los consumidores. Con esto, denotando  $u = \theta q - P(q)$  la utilidad indirecta del consumidor de tipo  $\theta$ , la probabilidad de que este consuma resulta

$$M(u, t) := \Pr[(x, t) | x \leq u]$$

Posteriormente, los autores proveen un análisis de dos escenarios

- Cuando existen dos tipos de consumidores, con preferencias  $\theta_1, \theta_2$ , con  $\theta_2 > \theta_1$ , los autores prueban que si los márgenes monopólicos clásicos son crecientes con la valoración, es decir si

$$\pi_2 = P_2 - C(q_2) > P_1 - C(q_1) = \pi_1$$

entonces la restricción de compatibilidad de incentivos para los consumidores con menor valoración siempre es inactiva, lo que en este contexto implica que, nuevamente, los consumidores con la mayor valoración reciben una calidad eficiente del bien. Lo interesante es que en este trabajo es posible encontrar condiciones (principalmente sobre la distribución de  $x$ ) tal que la clase con menor valoración también recibe una calidad no distorsionada, aunque en la mayoría de los casos se repite el resultado de trabajos anteriores, calidad distorsionada a la baja para estos consumidores. Posteriormente los autores introducen el caso de un monopolio, con firmas ubicadas a los extremos de una línea de Hotelling, concluyendo que si los costos de transporte son lo suficientemente altos, entonces los consumidores solo decidirán entre comprar a la firma más cercana o no comprar, por lo que existen monopolios locales y se recupera el resultado anterior, donde es posible que se asignen calidades eficientes a ambos tipos de consumidores.

Por otro lado, cuando el costo de transporte es lo suficientemente pequeño, la opción de no comprar estará siempre dominada por la opción de comprar a la firma más



alejada, un caso de competencia total, bajo el cual se llega a la conclusión de que ambas firmas terminan ofreciendo calidades iguales y no distorsionadas a ambos tipos de consumidores, y donde las tarifas son simplemente el costo de producción más una tasa constante para cada firma.

- Posteriormente estudian el caso donde existe un continuo de valoraciones distribuidas uniformemente sobre  $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$  por parte de los consumidores, donde prueban que, en el caso de monopolio, la asignación de calidad de la firma cumplirá

$$q(\theta) \in (2\theta - \bar{\theta}, \bar{\theta}]$$

por lo que nuevamente se tiene asignación eficiente de calidad para los consumidores con valoración  $\bar{\theta}$ , y posibles distorsiones a la baja para el resto. En el caso de duopolio se mantiene el resultado del caso discreto: si el costo de transporte es lo suficientemente bajo, tal que existe competencia total, entonces ambas firmas terminan ofreciendo calidades iguales y no distorsionadas a ambos tipos de consumidores, y donde las tarifas son simplemente el costo de producción más una tasa constante para cada firma.

Finalmente, el trabajo de Feres (2013) resulta fundamental de analizar, en tanto que esta tesis constituye una extensión de este. El autor modela el comportamiento de una aerolínea enfrentada a dos clases de viajeros: de negocio (H), los cuales perciben solo una fracción  $\alpha$  del ticket, y de ocio (L), quienes pagan la totalidad de su pasaje. La firma, que actúa como monopolio con un PVF, no es capaz de diferenciar a los pasajeros por lo que ofrece menús de precio-recompensas de manera de inducir autoselección. La utilidad de los viajeros resulta muy similar a la utilizada por Tirole (1988):

$$\begin{aligned} U_L &= U_0 + \theta_L V(F) - P \\ U_H &= \theta_H V(F) - \alpha P \end{aligned}$$

con  $F$  el número de recompensas (millas, puntos) recibidas, y  $\theta_L$ ,  $\theta_H$  la valoración de los consumidores por las mismas, donde se supone  $\theta_H > \theta_L$ . La firma se enfrenta a las mismas restricciones de compatibilidad de incentivos propuestas por Tirole (1988), y los viajeros de ocio presenta igualmente una restricción de participación, solo viajan si su utilidad es no negativa. Sin embargo, para el caso de los viajeros de negocio no se introduce una restricción de ese estilo ya que el viaje es una condición de su trabajo, pero si se introduce un precio de reserva del empleador, que como en un enfoque clásico de problema principal-agente, no puede ver las posibles alternativas que enfrenta el empleado pero si puede rechazar su decisión si el precio es muy alto. Los resultados principales vienen del lado de la asignación de recompensas: cuando el precio fijado por la aerolínea a los viajeros de negocio es menor que el precio de reserva de sus empleadores, las recompensas asignadas cumplen

$$\begin{aligned} \theta_L V'(F_L) &= \frac{C'_L(F_L)}{1 - \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{\theta_H - \theta_L}{\theta_L}} \\ \frac{\theta_H}{\alpha} V'(F_H) &= C'_H(F_H) \end{aligned}$$

es decir, si el viajero de negocio paga la totalidad de su ticket ( $\alpha = 1$ ), entonces reciben una cantidad eficiente de recompensas, mientras que los viajeros de ocio reciben una cantidad distorsionada a la baja, exactamente el mismo resultado obtenido en la literatura comentada.

Sin embargo, cuando  $\alpha < 1$ , los viajeros de negocio reciben una cantidad mayor que la eficiente de recompensas, mientras que los viajeros de ocio reciben aún menos. Este resultado muestra por tanto el efecto del problema de riesgo moral, más aún cuando el precio cobrado a la clase de negocio es decreciente con  $\alpha$ : la aerolínea utiliza las recompensas como un soborno para cobrar tarifas mayores a los viajeros de negocio, poco sensibles al precio, hasta fijar eventualmente el precio de reserva del empleador. Posteriormente se introduce elasticidad sobre la demanda de los viajeros de ocio, distribuyéndolos a lo largo de una línea de Hotelling, manteniendo inelástica la demanda de los viajeros de negocio, donde los resultados muestran que nuevamente las recompensas ofrecidas a los viajeros de negocios están por sobre las eficientes y las recompensas de los viajeros de ocio son menores a las eficientes, dejando a estos últimos con un mercado menos cubierto y con menores utilidades.

## Capítulo 3

# Programas Reales y Monopolio Sirviendo a un Único Mercado

Este capítulo presenta la extensión natural de lo realizado por Feres (2013), quien aborda el problema que resuelve una aerolínea monopólica enfrentada simultáneamente a un problema de riesgo moral y a uno de selección adversa, el primero presente debido a la existencia de viajeros de negocios que no pagan la totalidad de su pasaje, el cual es financiado (total o parcialmente) por su empleador; mientras que el segundo proviene de la existencia de dos tipos de viajeros: los ya mencionados con objetivo de negocio y los con objetivo de ocio. La aerolínea, que no es capaz de distinguir a estas dos clases, debe entonces ofrecer menús de precios y recompensas que tienen como objetivo inducir autoselección.

Los supuestos iniciales son similares a los utilizados por Feres (2013): la aerolínea monopólica enfrenta una demanda inelástica compuesta por dos tipos de viajeros que eligen sus pasajes libremente maximizando su utilidad personal. Como ya se mencionó, los pasajeros de negocio perciben solo una fracción del precio, mientras que los con objetivo de ocio pagan la totalidad de su pasaje. Se considerará en principio que los pasajeros de negocio tienen la obligación de viajar debido a que es una condición de su trabajo. Posteriormente se muestra que este supuesto es fácilmente relajable y de esta forma se puede recuperar la situación en la que realizarán el viaje solo si su utilidad es no negativa.

La firma, que además conoce el número de viajeros de cada clase, ofrece un programa de viajeros frecuentes con dos alternativas de precios y recompensas a fin de separar a las dos clases. En este punto se introduce la gran diferencia con lo realizado por Feres (2013): en ese trabajo se supone que la firma monopólica puede asignar precios y recompensas de manera independiente, logrando por tanto un escenario “óptimo”. En este capítulo sin embargo se aborda desde el punto de vista de programas reales, en los cuales las recompensas están ligadas a la distancia volada o a la tarifa pagada, y que por tanto podrían resultar subóptimos en comparación a lo encontrado por Feres (2013).

## 3.1. Elementos Básicos

El modelo utiliza supuestos muy similares a los usados por Feres (2013), los cuales son presentados a continuación por completitud:

### 3.1.1. Composición del Mercado

El mercado está compuesto por  $N_H$  pasajeros con objetivo de negocio y  $N_L$  con objetivo, cuyos valores esperados son conocidos por la firma. Suponemos inicialmente que las demandas de ambos grupos son inelásticas.

### 3.1.2. Función de Utilidad

Tal como es propuesto por Tirole (1988), basado en parte en el trabajo de Mussa y Rosen (1978), y posteriormente usado por Rochet y Stole (1997) y Rochet y Stole (2002), la función de utilidad de los viajeros es lineal en la tarifa pagada.

Además, se considera que los viajeros de negocio perciben solo una fracción  $\alpha$  de la tarifa real, debido a la existencia de un pagador externo (su empleador), según el enfoque de Cairns y Galbraith (1990) y Basso et al. (2009).

Finalmente, se fija la utilidad inicial de los viajeros de ocio a un nivel  $U_0 > 0$  de manera de inducir la realización de viajes para un menú sin recompensas pero con precio lo suficientemente pequeño, entendiendo que para los pasajeros de ocio el viaje es un medio para acceder a otras actividades recreativas, y por tanto su demanda es derivada (por ejemplo, Mokhtarian y Salomon (2001) comentan sobre la realización de viajes de ocio cuando el atractivo del destino compensa la desutilidad del viaje requerido para llegar a él). Distinta es la situación para los viajeros de negocio, para los cuales fijamos la utilidad a cero, en tanto que la realización del viaje es una condición de su trabajo y no presenta valor agregado adicional a ser un medio de transporte.

Con esto, la utilidad de los viajeros de ocio viene dada por

$$U_L(P_L, F_L) = U_0 + \theta_L V(F_L) - P_L$$

mientras que la de los viajeros de negocio es

$$U_H(P_H, F_H) = \theta_H V(F_H) - \alpha P_H$$

donde  $P_i$  corresponde a la tarifa pagada y  $F_i$  al nivel de recompensas recibido. Notemos que dadas estas formas funcionales, la demandas son del tipo todo o nada, ya que solo existen dos opciones: viaja la totalidad de pasajeros de ocio (respectivamente de negocio si relajamos la obligatoriedad del viaje) si su utilidad es no negativa; no viaja ningún pasajero de ocio

(respectivamente de negocio) en caso contrario. Asumimos además que

$$\begin{aligned}\theta_L &\leq \theta_H^1 \\ 0 &\leq \alpha \leq 1 \\ U_0 &> 0\end{aligned}$$

### 3.1.3. Función de Costos de la Firma y Utilidad de Recompensas

Suponemos que la firma posee una tecnología de manera que la función de costos de las recompensas entregadas es estrictamente separable, esto es

$$C(F_L, F_H) = C_L(F_L) + C_H(F_H)$$

En general estas funciones no debiesen ser equivalentes dado que es más probable que un viajero de negocio utilice sus recompensas que un viajero de ocio, por lo que entregar una milla (o una unidad del puntaje usado por la aerolínea como recompensa) a estos últimos puede resultar menos costoso.

Asumimos además que estas funciones son estrictamente crecientes y convexas, de manera que el problema de la firma se traduce en maximizar una función cóncava lo que descarta la existencia de soluciones locales. Explícitamente, requerimos:

$$\begin{aligned}C'_L, C'_H &> 0 \\ C''_L, C''_H &\geq 0\end{aligned}$$

Por su parte, la función de utilidad  $V$  asociada a las recompensas, que cumple  $V(0) = 0$ , será asumida creciente a tasas decrecientes (por tanto, cóncava), es decir

$$\begin{aligned}V' &> 0 \\ V'' &\leq 0\end{aligned}$$

Además, en  $F = 0$  asumimos que la utilidad marginal de las recompensas es mayor al costo marginal, de manera de asegurar la no optimalidad de no asignar recompensas:

$$\begin{aligned}\theta_L V'(0) &> C'_L(0) \\ \theta_H V'(0) &> C'_H(0)\end{aligned}$$

Finalmente, a diferencia de lo realizado por Feres (2013), introduciremos explícitamente un término no nulo que representa el costo de proveer y operar el vuelo por parte de la aerolínea, i.e. un costo de la forma

$$C_{op}(N_L + N_H)$$

Estos costos están casi totalmente determinados por los costos fijos que enfrenta la aerolínea (combustible, equipo de trabajo, etc.), siendo poco relevantes los costos variables (principalmente servicios a los pasajeros). Esto provoca que el costo medio por pasajero de un vuelo

<sup>1</sup> Tirole (1988) interpreta  $\theta_i$  como la inversa de la utilidad marginal del ingreso del consumidor  $i$ .

esté determinado casi completamente por los costos fijos medios (O'Connor, 2001), por lo que asumiremos un costo de la forma

$$C_{op}(N_L + N_H) = c_{op} \cdot (N_L + N_H)$$

es decir con un costo medio de operar constante e igual a  $c_{op}$ .

### 3.1.4. Restricciones

Como ya se describió, la firma reconoce la existencia de dos clases de pasajeros, pero no es capaz de diferenciarlos. Por esto, bajo un enfoque clásico de selección adversa, debe ofrecer menús de precios y recompensas que induzcan autoselección, i.e. debe satisfacer:

$$\begin{aligned} U_L(P_L, F_L) &\geq U_L(P_H, F_H) \\ U_H(P_H, F_H) &\geq U_H(P_L, F_L) \end{aligned}$$

Además, la firma monopólica debe asegurar la participación de los viajeros de ocio en el mercado<sup>2</sup>, por lo que debe cumplir:

$$U_L(P_L, F_L) \geq 0$$

Como se comentó, inicialmente exigimos que los pasajeros de negocio viajen. Luego, esto se extenderá al caso en donde el pasajero de negocio no está obligado a viajar, i.e. donde debemos incluir la restricción de participación:

$$U_H(P_H, F_H) \geq 0$$

Por último, cuando se indique explícitamente, consideraremos un precio de reserva  $R$  en la tarifa de los pasajeros de negocio:

$$P_H \leq R$$

Esta restricción está justificada por el hecho de que en la realidad el empleador no está dispuesto a pagar cualquier precio que su empleado proponga para un viaje de negocio, sino que tiene un techo para éste.

## 3.2. Monopolio Bajo Programa Óptimo, Sin Precio de Reserva, Demanda Inelástica

A fin de tener un *benchmark* sobre el cual comparar los resultados obtenidos para programas reales, se resumen en esta sección los resultados obtenidos por Feres (2013) para el programa

---

<sup>2</sup> A menos que a la firma le convenga cerrar dicha clase, como se analiza en la Subsección 3.2.2.

óptimo, en el cual la aerolínea puede escoger precios y recompensas de manera independiente, es decir resuelve:

$$\begin{aligned}
(\text{Ópt.}) \quad & \text{máx} \quad \pi(P_H, P_L, F_H, F_L) = N_L(P_L - C_L(F_L)) + N_H(P_H - C_H(F_H)) \\
& \quad \quad \quad - c_{op} \cdot (N_L + N_H) \\
\text{s.a.} \quad & \theta_H V(F_H) - \alpha P_H \geq \theta_H V(F_L) - \alpha P_L & (\text{IC-H}) \\
& \theta_L V(F_L) - P_L \geq \theta_L V(F_H) - P_H & (\text{IC-L}) \\
& U_0 + \theta_L V(F_L) - P_L \geq 0 & (\text{PC-L}) \\
& F_H, F_L^3 \geq 0
\end{aligned}$$

de donde la asignación óptima de precios y recompensas viene dada por:

$$\frac{\theta_H}{\alpha} V'(F_H^*) = C'_H(F_H^*) \quad (3.1)$$

$$\theta_L V'(F_L^*) = \frac{C'_L(F_L^*) - B}{1 - \frac{N_H}{N_L} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha}} \quad (3.2)$$

$$P_L^* = U_0 + \theta_L V(F_L^*) \quad (3.3)$$

$$P_H^* = \frac{\theta_H}{\alpha} (V(F_H^*) - V(F_L^*)) + \theta_L V(F_L^*) + U_0 \quad (3.4)$$

Con  $B$  el multiplicador asociado a la no negatividad de  $F_L$ . Notemos que Feres (2013) resuelve el problema sin incluir la restricción de participación de los viajeros de negocio (tal como se hará en general en este trabajo)

$$\theta_H V(F_H) - \alpha P_H \geq 0$$

asumiendo que es una condición del trabajo el realizar un viaje, pero es fácil notar que esta solución cumple dicha restricción con desigualdad estricta para  $U_0$  lo suficientemente pequeño. En efecto, es fácil mostrar que la utilidad de los viajeros de negocio viene dada por

$$U_H(P_H^*, F_H^*) = \alpha \left( V(F_L^*) \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) - U_0 \right)$$

que es en general positiva, pues la aerolínea para inducir autoselección en el caso de selección adversa, debe dejar a este tipo de consumidores con rentas informacionales.

Además, más importante aún, Feres (2013) no incluye el costo de operar el vuelo  $c_{op} \cdot (N_L + N_H)$ , lo que sin embargo no resulta relevante en el caso con demanda inelástica, debido a que este termino es efectivamente una constante y puede ser obviada del problema de optimización<sup>4</sup>.

<sup>3</sup> En todos los problemas ignoraremos las restricciones de no negatividad de los precios, en cuanto es claramente subóptimo asignar precios negativos.

<sup>4</sup> Resulta relevante sin embargo en la decisión de cerrar o no la clase más baja, aún con demanda inelástica.

### 3.2.1. Estática Comparativa

Con los resultados obtenidos por Feres (2013) es posible realizar un análisis de estática comparativa sobre esta solución, esto es analizar la dirección de los movimientos en precios y recompensas cuando cambia alguno de los parámetros  $(\alpha, \theta_H, \theta_L, N_H, N_L)$  del problema.

Con algunos cálculos triviales pero tediosos (que son presentados en Apéndice A.1), es posible llegar a los siguientes resultados que muestran el cambio en los precios  $P_H, P_L$  y recompensas  $F_H, F_L$  óptimas cuando cambia alguno de los mencionados parámetros del problema con todo el resto constante:

Tabla 3.1: Estática Comparativa, Programa Óptimo.

| $\frac{d}{dx}$ | $F_H$    | $F_L$    | $P_H$    | $P_L$    |
|----------------|----------|----------|----------|----------|
| $\alpha$       | $\leq 0$ | $\geq 0$ | $\leq 0$ | $\geq 0$ |
| $\theta_H$     | $\geq 0$ | $\leq 0$ | $\geq 0$ | $\leq 0$ |
| $\theta_L$     | $= 0$    | $\geq 0$ | Depende  | $\geq 0$ |
| $N_H$          | $= 0$    | $\leq 0$ | $\geq 0$ | $\leq 0$ |
| $N_L$          | $= 0$    | $\geq 0$ | $\leq 0$ | $\geq 0$ |

### 3.2.2. Condición de Cierre de Clase

Los resultados obtenidos por Feres (2013) y presentados en las secciones anteriores son válidos solo cuando es conveniente para la aerolínea servir a ambas clases de pasajeros. Esto sin embargo no es, de momento, válido para toda configuración de parámetros del problema. En efecto, si para los parámetros del problema se cumple la siguiente condición:

$$N_L(P_L^* - C_L(F_L^*) - c_{op}) + N_H(P_H^* - C_H(F_H^*) - c_{op}) < N_H(P_H^{**} - C_H(F_H^{**}) - c_{op})$$

donde  $P_H^{**}$  y  $F_H^{**}$  son el precio y las recompensas ofrecidas a los pasajeros de negocio en ausencia de pasajeros de ocio, entonces la clase baja es cerrada y solo los pasajeros de negocio son servidos.

La intuición es la siguiente: al cerrar una clase la aerolínea enfrenta un tradeoff, por un lado deja de percibir los beneficios asociados a servir a la clase más baja, pero por otro lado esta situación le entrega más libertad a fin de extraer de mejor manera el excedente de los usuarios



de negocio, al no requerir separar clases que como se mostró, en general deja a este tipo de viajeros con utilidad estrictamente positiva ligada a rentas informacionales.

Así, el problema adicional que resuelve la aerolínea a fin de decidir sobre el cierre de clase es:

$$\begin{aligned} (\text{Ópt. Cierre}) \quad & \text{máx} \quad \pi(P_H, F_H) = N_H(P_H - C_H(F_H) - c_{op}) \\ & F_H \geq 0 \end{aligned}$$

Es evidente que la solución de este problema es fijar  $P_H \rightarrow \infty$  y  $F_H = 0$ , en tanto que no requerimos ninguna restricción. Como esta solución es poco natural, consideraremos (aún sin introducir un precio de reserva) la restricción de participación de los usuarios de negocio, esto es, que para que realicen el viaje deben presentar utilidad no negativa:

$$\begin{aligned} (\text{Ópt. Cierre - PC}) \quad & \text{máx} \quad \pi(P_H, F_H) = N_H(P_H - C_H(F_H) - c_{op}) \\ & \theta_H V(F_H) - \alpha P_H \geq 0 \\ & F_H \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{PC-H})$$

Es evidente que la única restricción presente es activa en el óptimo, en efecto, supongamos que no lo es. Sin embargo en este caso podemos aumentar  $P_H$  manteniendo  $F_H$  constante hasta activarla, alcanzando así un mayor valor de la función objetivo. Luego, el problema se reduce a

$$\text{máx} \quad \pi(F_H) = N_H \left( \frac{\theta_H}{\alpha} V(F_H) - C_H(F_H) - c_{op} \right)$$

De la condición necesaria de optimalidad de primer orden obtenemos

$$\frac{\theta_H}{\alpha} V'(F_H^{**}) = C'_H(F_H^{**}) \quad (3.5)$$

Debido a que este problema es convexo, pues  $\pi(F_H) = N_H \left( \frac{\theta_H}{\alpha} V(F_H) - C_H(F_H) - c_{op} \right)$  es cóncava dada la concavidad de  $V$  y la convexidad de  $C_H$ , entonces la condición necesaria de primer orden es también una condición suficiente para la optimalidad global, y por tanto el punto encontrado anteriormente, caracterizado por la ecuación 3.5 alcanza el óptimo global del problema con cierre de clase y restricción de participación. Además,  $F_H^{**}$  está caracterizado por

$$F_H^{**} = \frac{\theta_H}{\alpha} V(F_H^{**})$$

y el profit alcanzado bajo cierre de clases es por tanto

$$\pi_{\text{Cierre}} = N_H \left( \frac{\theta_H}{\alpha} V(F_H^{**}) - C_H(F_H^{**}) - c_{op} \right)$$

Veamos que dado este resultado, en este enfoque se tiene la siguiente proposición:

**Proposición 3.1** Cuando consideramos  $c_{op} = 0$ , una firma bajo un programa con recompensas que pueden ser movidas libremente, enfrentada a demanda inelástica, y sin precio de reserva, pero con restricción de participación para los pasajeros con objetivo de negocio nunca cierra la clase más baja.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la siguiente combinación de precios y recompensas donde se sirven ambas clases:

$$\begin{aligned}\bar{F}_H &= F_H^{**} \\ \bar{F}_L &= 0 \\ \bar{P}_H &= P_H^{**} \\ \bar{P}_L &= \min \left\{ U_0, \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) V(F_H^{**}) \right\} > 0\end{aligned}$$

Veamos que estas asignaciones son factibles para el problema (**Ópt.**). En efecto, (PC-H) se cumple naturalmente de manera activa según la definición de  $P_H^{**}$  y  $F_H^{**}$ . Además,

$$\underbrace{(\theta_H V(\bar{F}_H) - \alpha \bar{P}_H)}_0 - (\theta_H V(\bar{F}_L) - \alpha \bar{P}_L) = \alpha \bar{P}_L - \theta_H V(0) = \alpha \bar{P}_L \geq 0 \quad (\text{IC-H})$$

$$(\theta_L V(\bar{F}_L) - \bar{P}_L) - (\theta_L V(\bar{F}_H) - \bar{P}_H) = \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) V(F_H^{**}) - \bar{P}_L \geq 0 \quad (\text{IC-L})$$

$$U_0 + \theta_L V(\bar{F}_L) - \bar{P}_L = U_0 - \bar{P}_L \geq 0 \quad (\text{PC-L})$$

Finalmente, basta notar que el profit alcanzado por esta asignación es

$$\bar{\pi} = N_L \cdot \min \left\{ U_0, \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) V(F_H^{**}) \right\} + N_H \left( \frac{\theta_H}{\alpha} V(F_H^{**}) - C_H(F_H^{**}) \right) > \pi_{\text{Cierre}}$$

□

Evidentemente, la proposición anterior sigue cumpliéndose para

$$c_{op} \leq \min \left\{ U_0, \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) V(F_H^{**}) \right\}$$

en cuyo caso la aerolínea sigue utilizando la misma asignación propuesta, alcanzando el profit máximo posible asociado a la clase de negocio, y un profit mayor o igual a cero asociado a la clase de ocio. Además, no es difícil ver que en el caso en el que incluimos un precio de reserva para la clase alta, pero no una restricción de participación en la forma de utilidad no negativa, es decir donde el problema con cierre de clase se ve

$$\begin{aligned}(\text{Ópt. Cierre - PC}) \quad \max \quad & \pi(P_H, F_H) = N_H(P_H - C_H(F_H) - c_{op}) \\ & P_H \leq R \\ & F_H \geq 0\end{aligned} \quad (\text{PC-H})$$

la solución será trivialmente  $(P_H^{**}, F_H^{**}) = (R, 0)$ , por lo que la misma proposición puede ser hecha si se tiene  $R \leq U_0$  al considerar la asignación a la clase baja  $(P_L, F_L) = (R, 0)$ .

**Proposición 3.2** Cuando consideramos  $c_{op} = 0$ , una firma bajo un programa con recompensas que pueden ser movidas libremente, enfrentada a demanda inelástica, y con precio de reserva  $R \leq U_0$  para los pasajeros con objetivo de negocio, nunca cierra la clase más baja.

### 3.3. Programas Reales Ex-Ante

#### 3.3.1. Recompensas por Distancia

Ahora nos enfocamos en analizar el comportamiento de programas observados en la realidad, estudiando la situación ex-ante, en donde la aerolínea diseña el programa para los valores esperados de los parámetros. En primer lugar se analizará el programa más clásico y antiguo en la industria, en donde las recompensas están ligadas a la distancia volada (de ahí la idea de kilómetros o millas como premio). De manera más precisa, en este programa se tienen la relaciones:

$$F_L = k_L^D \cdot D$$

$$F_H = k_H^D \cdot D$$

donde  $D$  es la distancia volada y  $k_L^D, k_H^D$  los multiplicadores asociados a cada clase. El problema inicial en la fase de diseño, donde la aerolínea decide  $P_H, P_L, k_H^D, k_L^D$  es escrito como

$$\begin{aligned}
 \text{(Dist EA)} \quad \text{máx} \quad & \pi(P_H, P_L, k_H^D, k_L^D) &= N_L(P_L - C_L(k_L^D \cdot D)) + N_H(P_H - C_H(k_H^D \cdot D)) \\
 & & - c_{op} \cdot (N_L + N_H) \\
 \text{s.a.} \quad & \theta_H V(k_H^D \cdot D) - \alpha P_H &\geq \theta_H V(k_L^D \cdot D) - \alpha P_L & \text{(IC-H)} \\
 & \theta_L V(k_L^D \cdot D) - P_L &\geq \theta_L V(k_H^D \cdot D) - P_H & \text{(IC-L)} \\
 & U_0 + \theta_L V(k_L^D \cdot D) - P_L &\geq 0 & \text{(PC-L)} \\
 & k_H^D, k_L^D &\geq 0 &
 \end{aligned}$$

Es fácil notar que cuando la aerolínea tiene la libertad de mover tanto  $k_L^D$  como  $k_H^D$ , tiene la misma libertad que si pudiera mover  $F_L$  y  $F_H$ . En otras palabras, el problema **(Dist EA)** es equivalente al problema **(Ópt.)**, ya que sus puntos factibles están en relación 1-1 según

$$P_H = P_H$$

$$P_L = P_L$$

$$k_H^D = \frac{F_H}{D}$$

$$k_L^D = \frac{F_L}{D}$$

y alcanzan el mismo valor óptimo.

Luego, el programa por distancia ex-ante sin cierre de clases es equivalente al programa óptimo, con solución dada por

$$\bar{P}_H^D = \frac{\theta_H}{\alpha} (V(F_H^*) - V(F_L^*)) + \theta_L V(F_L^*) + U_0$$

$$\bar{P}_L^D = U_0 + \theta_L V(F_L^*)$$

$$\bar{k}_H^D = \frac{F_H^*}{D} \tag{3.6}$$

$$\bar{k}_L^D = \frac{F_L^*}{D} \tag{3.7}$$

donde  $F_H^*$  y  $F_L^*$  son las recompensas del programa óptimo caracterizadas por (3.1) y (3.2).

Veamos que las expresiones recién presentadas nos permiten tener el siguiente resultado:

**Proposición 3.3** Si  $C'_L \equiv C'_H \equiv c$  constante, los multiplicadores óptimos escogidos durante la fase de diseño por la firma para el programa por distancia cumplen  $\bar{k}_L^D < \bar{k}_H^D$ .

DEMOSTRACIÓN. Si  $F_L^* = 0$ , se sigue naturalmente el resultado pues  $\bar{k}_L^D = 0$  y  $\bar{k}_H^D > 0$ . Supongamos por tanto  $F_L^* > 0$ , de manera que el multiplicador  $B$  asociado a la no negatividad de este valor resulta nulo. De (3.1), (3.2), (3.6) y (3.7), tenemos que

$$\begin{aligned} V'(\bar{k}_L^D \cdot D) &= V'(F_L^*) = \frac{C'_L(F_L^*)}{\theta_L \left(1 - \frac{N_H}{N_L} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha}\right)} \\ &> \frac{\alpha}{\theta_H} C'_H(F_H^*) \\ &= V'(F_H^*) \\ &= V'(\bar{k}_H^D \cdot D) \end{aligned}$$

luego,  $V'(\bar{k}_L^D \cdot D) > V'(\bar{k}_H^D \cdot D)$ , y como  $V$  es cóncava, se sigue que  $\bar{k}_L^D < \bar{k}_H^D$ .  $\square$

Es claro que existen condiciones más débiles que no requieren costos lineales, ya que tan solo se necesita

$$\begin{aligned} \frac{C'_L(F_L^*)}{\theta_L \left(1 - \frac{N_H}{N_L} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha}\right)} &> \frac{\alpha}{\theta_H} C'_H(F_H^*) \\ \Leftrightarrow \frac{C'_L(F_L^*)}{C'_H(F_H^*)} &> \underbrace{\alpha \frac{\theta_L}{\theta_H} \left(1 - \frac{N_H}{N_L} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha}\right)}_{\ll 1} \end{aligned}$$

es decir, requerimos que el costo marginal de las millas asignadas a los viajeros de ocio en  $F_L^*$  no sea demasiado pequeño en comparación al costo marginal de las millas asignadas a los viajeros de negocio en  $F_H^*$ . Una relajación natural es exigir costos marginales constantes, pero no iguales, i.e. considerar

$$\begin{aligned} C'_H &\equiv m \\ C'_L &\equiv ml \end{aligned}$$

con  $l \in \left(\alpha \frac{\theta_L}{\theta_H} \left(1 - \frac{N_H}{N_L} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha}\right), 1\right)$ . Esto nos permite tener la propiedad descrita en la Subsección 3.1.3: el costo de ofrecer millas a los viajeros de negocio es en general mayor al de ofrecer millas a los viajeros de ocio, ya que es menos probable que estos últimos sean capaces de canjearlas.

### 3.3.1.1. Condición de Cierre de Clase

Es fácil notar que si para ciertos valores de los parámetros fuera conveniente para la aerolínea cerrar la clase de ocio bajo un programa óptimo, también sería el caso bajo un programa por distancia. En ese caso, la aerolínea escogería la misma tarifa  $P_H^{**}$  del programa óptimo con cierre de clase, fijando  $k_H^D = \frac{F_H^{**}}{D}$ . En otras palabras, independiente de si separar o cerrar una clase fuera más conveniente para la aerolínea, el programa por distancia puede replicar el programa óptimo ex-ante.

**Proposición 3.4** Un programa por distancia volada es equivalente a un programa óptimo ex-ante, tanto con separación como con cierre de clases. Más aún, por esto, el programa por distancia ex-ante con restricción de participación o precio de reserva  $R \leq U_0$  para los viajeros de negocio nunca realiza el cierre de la clase más baja cuando consideramos  $c_{op} = 0$ .

### 3.3.2. Recompensas por Tarifa

Ahora se analizará el programa más reciente instaurado en la industria, en donde las recompensas están ligadas a la tarifa pagada (y donde por tanto las recompensas son usualmente puntos o dólares). De manera más precisa, en este programa se tienen la relaciones:

$$\begin{aligned} F_L &= k_L^T P_L \\ F_H &= k_H^T P_H \end{aligned}$$

donde  $k_L^T, k_H^T$  los multiplicadores asociados a cada clase (con superíndice  $T$  para diferenciarlos de los asociados al programa por distancia). El problema inicial en la fase de diseño, donde la aerolínea decide  $P_H, P_L, k_H^T, k_L^T$  es escrito como

$$\begin{aligned} (\mathbf{Tar EA}) \quad \max \quad & \pi(P_H, P_L, k_H^T, k_L^T) = N_L(P_L - C_L(k_L^T P_L)) + N_H(P_H - C_H(k_H^T P_H)) \\ & - c_{op} \cdot (N_L + N_H) \\ \text{s.a.} \quad & \theta_H V(k_H^T P_H) - \alpha P_H \geq \theta_H V(k_L^T P_L) - \alpha P_L \quad (\text{IC-H}) \\ & \theta_L V(k_L^T P_L) - P_L \geq \theta_L V(k_H^T P_H) - P_H \quad (\text{IC-L}) \\ & U_0 + \theta_L V(k_L^T P_L) - P_L \geq 0 \quad (\text{PC-L}) \\ & k_H^T, k_L^T \geq 0 \end{aligned}$$

Nuevamente es fácil notar que cuando la aerolínea tiene la libertad de mover tanto  $k_L^T$  como  $k_H^T$ , tiene la misma libertad que si pudiera mover  $F_L$  y  $F_H$ . En otras palabras, el problema **(Tar EA)** es equivalente al problema **(Ópt.)**, ya que sus puntos factibles están en relación 1-1 según

$$\begin{aligned} P_H &= P_H \\ P_L &= P_L \\ k_H^T &= \frac{F_H}{P_H} \\ k_L^T &= \frac{F_L}{P_L} \end{aligned}$$

y alcanzan el mismo valor óptimo.

Luego, el programa por distancia ex-ante sin cierre de clases es equivalente al programa óptimo, con solución dada por

$$\begin{aligned}\bar{P}_H^T &= \frac{\theta_H}{\alpha} (V(F_H^*) - V(F_L^*)) + \theta_L V(F_L^*) + U_0 \\ \bar{P}_L &= U_0 + \theta_L V(F_L^*) \\ \bar{k}_H^T &= \frac{F_H^*}{\frac{\theta_H}{\alpha} (V(F_H^*) - V(F_L^*)) + \theta_L V(F_L^*) + U_0}\end{aligned}\tag{3.8}$$

$$\bar{k}_L^T = \frac{F_L^*}{U_0 + \theta_L V(F_L^*)}\tag{3.9}$$

donde  $F_H^*$  y  $F_L^*$  son las recompensas del programa óptimo caracterizadas por (3.1) y (3.2).

Veamos que las expresiones recién presentadas nos permiten tener el siguiente resultado:

**Proposición 3.5** Si  $V$  es tal que se cumple la desigualdad

$$\frac{V(F_H^*)}{F_H^*} < \frac{V(F_L^*)}{F_L^*} \left( \alpha \frac{\theta_L}{\theta_H} + \left( 1 - \alpha \frac{\theta_L}{\theta_H} \right) \frac{F_L^*}{F_H^*} \right)\tag{3.10}$$

entonces los multiplicadores óptimos escogidos durante la fase de diseño por la firma para el programa por tarifa cumplen  $\bar{k}_L^T < \bar{k}_H^T$ .

DEMOSTRACIÓN. Notemos que según las Ecuaciones (3.8) y (3.9) se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\bar{k}_H^T} &= \frac{\frac{\theta_H}{\alpha} (V(F_H^*) - V(F_L^*)) + \theta_L V(F_L^*) + U_0}{F_H^*} \\ \frac{1}{\bar{k}_L^T} &= \frac{U_0 + \theta_L V(F_L^*)}{F_L^*}\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\bar{k}_L^T < \bar{k}_H^T &\Leftrightarrow \frac{1}{\bar{k}_H^T} < \frac{1}{\bar{k}_L^T} \\ &\Leftrightarrow \frac{\frac{\theta_H}{\alpha} (V(F_H^*) - V(F_L^*)) + \theta_L V(F_L^*) + U_0}{F_H^*} < \frac{U_0 + \theta_L V(F_L^*)}{F_L^*} \\ &\Leftrightarrow \frac{V(F_H^*)}{F_H^*} < \frac{V(F_L^*)}{F_L^*} \left( \alpha \frac{\theta_L}{\theta_H} + \left( 1 - \alpha \frac{\theta_L}{\theta_H} \right) \frac{F_L^*}{F_H^*} \right) + \underbrace{\frac{\alpha}{\theta_H} U_0 \left( \frac{1}{F_L^*} - \frac{1}{F_H^*} \right)}_{\geq 0}\end{aligned}$$

De donde es claro que (3.10) es una condición suficiente. □

Notemos que la condición dada por (3.10) está relacionada con la concavidad de  $V$ . En efecto, dada la concavidad de  $V$  se tiene que (Boyd y Vandenberghe, 2004):

$$\frac{V(F_H^*)}{F_H^*} \leq \frac{V(F_L^*)}{F_L^*} \quad (3.11)$$

Luego, notemos que debido a que  $F_L^* \leq F_H^*$ :

$$\left( \alpha \frac{\theta_L}{\theta_H} + \left( 1 - \alpha \frac{\theta_L}{\theta_H} \right) \frac{F_L^*}{F_H^*} \right) \leq 1$$

por lo que es posible escribir (3.10) como

$$\frac{V(F_H^*)}{F_H^*} < \frac{V(F_L^*)}{F_L^*} \gamma$$

con  $\gamma \in (0, 1)$ . Es decir, (3.10) es una condición de concavidad fuerte, que requiere una condición más restrictiva que incluso concavidad estricta (pues exigimos la existencia de un *gap* en la condición natural de concavidad 3.11). Sin embargo, de manera análoga al caso del programa por distancia y las condiciones sobre  $C_H$  y  $C_L$ , existen condiciones más débiles sobre  $V$  que esta concavidad fuerte, pues, como se explicitó en la Proposición 3.5, requerimos dicha desigualdad solo en los puntos  $F_H^*$  y  $F_L^*$ , no en todo el dominio de  $V$ .

### 3.3.2.1. Condición de Cierre de Clase

Es fácil notar que si para ciertos valores de los parámetros fuera conveniente para la aerolínea cerrar la clase de ocio bajo un programa óptimo, también sería el caso bajo un programa por tarifa. En ese caso, la aerolínea escogería la misma tarifa  $P_H^{**}$  del programa óptimo con cierre de clase, fijando  $k_H^T = \frac{F_H^{**}}{P_H^{**}}$ . En otras palabras, independiente de si separar o cerrar una clase fuera más conveniente para la aerolínea, el programa por tarifa puede replicar el programa óptimo ex-ante.

**Proposición 3.6** Un programa por tarifa pagada es equivalente a un programa óptimo ex-ante, tanto con separación como con cierre de clases. Más aún, por esto, el programa por tarifa ex-ante con restricción de participación o precio de reserva  $R \leq U_0$  para los viajeros de negocio nunca realiza el cierre de la clase más baja cuando consideramos  $c_{op} = 0$ .

## 3.4. Programas Reales Ex Post - Estática Comparativa

El segundo escenario a analizar es la situación ex-post. Con esto nos referimos a que, después de diseñar el programa, los parámetros reales de demanda o preferencias  $(\alpha, \theta_H, \theta_L, N_H, N_L)$  pueden diferir de los valores esperados por la aerolínea. En el programa óptimo analizado en la Sección 3.2, la aerolínea desearía modificar tanto recompensas como precios como muestra la Tabla 3.1, sin embargo, en los programas reales no puede modificar los porcentajes de

millas entregadas  $\bar{k}_H^D, \bar{k}_L^D$  en el caso del programa por distancia, o los multiplicadores  $\bar{k}_H^T, \bar{k}_L^T$  en el caso del programa por tarifa: Berman (2006) comenta sobre una encuesta realizada en el año 2003 por *Maritz* en donde se reveló que cuatro de diez americanos participantes de programas de lealtad renunciaron al menos a uno, por, entre otros motivos, cambios en las reglas. Henderson et al. (2011) comenta sobre la disminución en la efectividad de los programas de lealtad si las reglas son percibidas como procedimentalmente injustas.

Existe aún más evidencia empírica respecto a lo anterior, la encuesta de satisfacción de programas de viajeros frecuentes (MileCards.Com, 2014) muestra que la segunda frustración más importante para los pasajeros es el cambio de reglas y/o precios de canje, con un 29% de respuestas positivas, lo que resulta ser uno de los factores que determinan que los pasajeros frecuentes activos encuestados confíen más en sus bancos, compañías de teléfono y aseguradoras de vehículos que en sus programas de viajeros frecuentes (solo los planes de salud presentaron menores tasas de confianza). Además, siguiendo la devaluación en los puntos/millas acumuladas por, entre otros, Southwest y Delta (2015), la encuesta de satisfacción realizada en 2016 (MileCards.Com, 2016) muestra que un 26% de los encuestados está preocupado por el aumento en la dificultad de canje de las recompensas.

Es por esto que nuestro análisis ex-post considera que la aerolínea está amarrada a los multiplicadores obtenidos en la fase de diseño para ambos tipos de programas, y por tanto puede ajustar de manera imperfecta las tarifas y recompensas entregadas frente a un cambio en los parámetros ya mencionados.

En principio se analizará la factibilidad de replicar los movimientos presentados en la Tabla 3.1, i.e. se estudiará bajo cuáles condiciones (si hubiera) cada uno de los programas reales es capaz de mover precios y recompensas en las mismas direcciones que el programa óptimo de la Sección 3.2, ignorando de momento si esto es óptimo o no para dicho programa real<sup>5</sup>.

### 3.4.1. Recompensas por Distancia

Dados que el contrato entre la aerolínea y los consumidores está establecido en esta etapa, consideramos que los parámetros de demanda cambian marginalmente, pero la aerolínea no puede modificar los porcentajes de millas entregadas  $\bar{k}_L^D, \bar{k}_H^D$ . La implicancia más directa es que bajo este enfoque la aerolínea no puede modificar las recompensas, porque las distancias están evidentemente fijas, y por tanto puede responder a los cambios solo a través de los precios.

---

<sup>5</sup> Por ejemplo, en el programa óptimo la respuesta óptima a un aumento en  $\alpha$  es disminuir  $P_H$ . Se analizará la factibilidad de replicar este movimiento, aún cuando es posible que para alguno de los programas reales la respuesta óptima sea, por ejemplo, aumentar  $P_H$ .



La firma resuelve:

$$\begin{aligned}
(\text{Dist EP}) \quad \text{máx} \quad & \pi(P_H, P_L) = N_L(P_L - C_L(\bar{k}_L^D \cdot D)) + N_H(P_H - C_H(\bar{k}_H^D \cdot D)) \\
& \quad \quad \quad - c_{op} \cdot (N_L + N_H) \\
\text{s.a.} \quad & \theta_H V(\bar{k}_H^D \cdot D) - \alpha P_H \geq \theta_H V(\bar{k}_L^D \cdot D) - \alpha P_L & (\text{IC-H}) \\
& \theta_L V(\bar{k}_L^D \cdot D) - P_L \geq \theta_L V(\bar{k}_H^D \cdot D) - P_H & (\text{IC-L}) \\
& U_0 + \theta_L V(\bar{k}_L^D \cdot D) - P_L \geq 0 & (\text{PC-L})
\end{aligned}$$

Lo que hacemos entonces es, comenzando desde la solución del problema ex-ante, donde la restricción de compatibilidad de incentivos de la clase H y la restricción de participación de la clase L son activas, analizar cambios marginales sobre el set de parámetros de demanda<sup>6</sup> y sus impactos sobre las restricciones. Luego, intentamos mover los precios en la mismas direcciones que lo mostrado para el programa óptimo en la Tabla 3.1 manteniendo factibilidad. Los cálculos son presentados en el Apéndice A.2.

La Tabla 3.2, donde la primera columna muestra la respuesta en el programa óptimo y la segunda la respuesta en el programa por distancia, nos permite mostrar cuando este programa puede mover, ex-post, las variables en la dirección correcta (en verde) y cuando no puede hacerlo (en rojo). Es importante notar que una celda en verde significa solo que puede mover dicha variable en la dirección correcta, no necesariamente que puede hacerlo en la misma magnitud que bajo el programa óptimo.

Tabla 3.2: Respuestas ex-post para programa óptimo y programa por distancia.

| $\frac{d}{dx}$ | $F_H$    |       | $F_L$    |       | $P_H$    |                  | $P_L$    |          |
|----------------|----------|-------|----------|-------|----------|------------------|----------|----------|
| $\alpha$       | $\leq 0$ | $= 0$ | $\geq 0$ | $= 0$ | $\leq 0$ | $\leq 0$         | $\geq 0$ | $\leq 0$ |
| $\theta_H$     | $\geq 0$ | $= 0$ | $\leq 0$ | $= 0$ | $\geq 0$ | $\geq 0$         | $\leq 0$ | $\leq 0$ |
| $\theta_L$     | $= 0$    | $= 0$ | $\geq 0$ | $= 0$ | Depende  | $\leq 0, \geq 0$ | $\geq 0$ | $\geq 0$ |
| $-\theta_L$    | $= 0$    | $= 0$ | $\leq 0$ | $= 0$ | Depende  | $\leq 0$         | $\leq 0$ | $\leq 0$ |
| $N_H$          | $= 0$    | $= 0$ | $\leq 0$ | $= 0$ | $\geq 0$ | $\leq 0$         | $\leq 0$ | $\leq 0$ |
| $N_L$          | $= 0$    | $= 0$ | $\geq 0$ | $= 0$ | $\leq 0$ | $\leq 0$         | $\geq 0$ | $\leq 0$ |

Dicha tabla se reduce únicamente a las respuestas cuando alguna de las variables aumenta marginalmente, no cuando disminuye. Así, por ejemplo es posible observar que el programa

<sup>6</sup> Uno a uno *ceteris paribus* al igual que lo realizado para el programa óptimo

por distancia no es capaz de reaccionar de manera correcta sobre  $P_L$  a un aumento marginal en  $\alpha$ , sin embargo es posible mostrar que si puede hacerlo cuando el cambio es una disminución en  $\alpha$ . Esta información se omite debido a que una disminución marginal en  $\alpha$  puede ser vista como un aumento marginal en  $\theta_H^7$ , por lo está recogida en la fila correspondiente de  $\theta_H$ . La misma observación es aplicable a los cambios sobre  $N_L$  y  $N_H$ . La única variable en donde se separan los efectos es  $\theta_L$ , ya que esa información no está contenida en el resto de filas.

### 3.4.2. Recompensas por Tarifa

De manera análoga a la subsección anterior, consideramos que los parámetros de demanda cambian marginalmente, pero la aerolínea no puede modificar los multiplicadores de puntos entregados  $\bar{k}_L^T, \bar{k}_H^T$ . La gran diferencia en comparación al programa por distancia es que la aerolínea puede cambiar las recompensas a medida que cambia los precios, aunque a una tasa constante.

La firma resuelve:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{Tar EP}) \quad \max \quad & \pi(P_H, P_L) = N_L(P_L - C_L(\bar{k}_L^T \cdot P_L)) + N_H(P_H - C_H(\bar{k}_H^T \cdot P_H)) \\
& \quad \quad \quad - c_{op} \cdot (N_L + N_H) \\
\text{s.a.} \quad & \theta_H V(\bar{k}_H^T \cdot P_H) - \alpha P_H \geq \theta_H V(\bar{k}_L^T \cdot P_L) - \alpha P_L & (\text{IC-H}) \\
& \theta_L V(\bar{k}_L^T \cdot P_L) - P_L \geq \theta_L V(\bar{k}_H^T \cdot P_H) - P_H & (\text{IC-L}) \\
& U_0 + \theta_L V(\bar{k}_L^T \cdot P_L) - P_L \geq 0 & (\text{PC-L})
\end{aligned}$$

Nuevamente, comenzando desde la solución del problema ex-ante, analizamos cambios marginales sobre el set de parámetros de demanda y sus impactos sobre las restricciones, para luego intentar mover los precios y recompensas en la mismas direcciones que lo mostrado para el programa óptimo en la Tabla 3.1 manteniendo factibilidad, lo que induce en algunos casos condiciones sobre la forma funcional de  $V$  en ciertos puntos de evaluación. Los cálculos son presentados en el Apéndice A.3.

Se muestra que bajo la siguiente condición:

$$V'(F_H^*) < \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_H^T}$$

donde  $F_H^*$  es el dado por la Ecuación (3.1), la aerolínea puede mover  $F_H$  (y por tanto,  $P_H$ ) en la misma dirección del programa óptimo al enfrentar aumentos marginales sobre  $\alpha$ . Condiciones necesarias para que este programa mover también  $F_L$  (y por tanto,  $P_L$ ) en la

<sup>7</sup> Debido a que en las soluciones del problema solo influye el cociente  $\frac{\theta_H}{\alpha}$ . De la misma forma, solo influye el cociente  $\frac{N_H}{N_L}$ , no los valores individuales.

dirección correcta ante un aumento marginal en  $\alpha$  son:

$$V'(F_H^*) < \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_H^T} - \delta \left( \frac{1}{\theta_L \bar{k}_L^T} - \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_L^T} \right) \quad (3.12)$$

$$V'(F_L^*) \in \left( \frac{1}{\theta_L \bar{k}_L^T}, \frac{1}{\delta} \left[ \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_H^T} - V'(F_H^*) \right] + \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_L^T} \right) \quad (3.13)$$

con  $F_L^*$  dado por la Ecuación (3.2) y  $\delta$  la magnitud del movimiento sobre  $F_L$  comparado a la magnitud del movimiento sobre  $F_H$ . Pese a que es fácil mostrar que la condición (3.12) y la cota superior de (3.13) son fácilmente obtenibles si se tiene  $U_0$  lo suficientemente grande, la cota inferior de (3.13) es imposible de cumplir. En efecto, dada la concavidad de  $V$  y que  $V(0) = 0$ , se tiene que (Boyd y Vandenberghe, 2004):

$$\begin{aligned} V'(F_L^*) &\leq \frac{V(F_L^*)}{F_L^*} \\ &= \frac{V(F_L^*)}{\bar{k}_L^T \cdot P_L^*} \\ &\stackrel{(3.4)}{=} \frac{1}{\bar{k}_L^T} \frac{V(F_L^*)}{U_0 + \theta_L V(F_L^*)} \\ &< \frac{1}{\theta_L \bar{k}_L^T} \end{aligned}$$

Por tanto, el programa por tarifa pagada nunca logra responder de manera correcta en  $F_L, P_L$  a aumentos marginales sobre  $\alpha$ <sup>8</sup>.

Esta condición sin embargo le permite responder de manera correcta a aumentos marginales sobre  $\theta_H$ . Si además tenemos la condición más fuerte

$$V'(F_L^*) < \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_L^T}$$

la firma responde de manera correcta a aumentos marginales sobre  $\theta_L$ . En caso de no tener esta desigualdad, la firma puede responder de manera correcta a disminuciones marginales sobre  $\theta_L$ , pero no a aumentos.

Por último, la aerolínea puede reaccionar de manera correcta a aumentos marginales sobre  $N_H$  si

$$V'(F_L^*) > \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_L^T}$$

o bien

$$V'(F_L^*) < \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_L^T} \wedge V'(F_H^*) > \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_H^T}$$

<sup>8</sup> O equivalentemente, disminuciones marginales en  $\theta_H$ .

La Tabla 3.3, donde la primera columna muestra la respuesta en el programa óptimo y la segunda la respuesta en el programa por tarifa, nos permite mostrar cuando este programa puede mover, ex-post, las variables en la dirección correcta (en verde, sujeto a las condiciones mencionadas) y cuando no puede hacerlo (en rojo), mostrando además cuando existen múltiples posibilidades. Es importante notar que una celda en verde significa solo que puede mover dicha variable en la dirección correcta, no necesariamente que puede hacerlo en la misma magnitud.

Tabla 3.3: Respuestas ex-post para programa óptimo y programa por tarifa.

| $\frac{d}{dx}$ | $F_H$    |                            | $F_L$    |                    | $P_H$    |                            | $P_L$    |                    |
|----------------|----------|----------------------------|----------|--------------------|----------|----------------------------|----------|--------------------|
|                | $\leq 0$ | $\leq 0$                   | $\geq 0$ | $\leq 0$           | $\leq 0$ | $\leq 0$                   | $\geq 0$ | $\leq 0$           |
| $\alpha$       | $\leq 0$ | $\leq 0$                   | $\geq 0$ | $\leq 0$           | $\leq 0$ | $\leq 0$                   | $\geq 0$ | $\leq 0$           |
| $\theta_H$     | $\geq 0$ | $\geq 0$                   | $\leq 0$ | $\leq 0$           | $\geq 0$ | $\geq 0$                   | $\leq 0$ | $\leq 0$           |
| $+\theta_L$    | $= 0$    | $\leq 0, \geq 0$<br>$(=0)$ | $\geq 0$ | $\geq 0$<br>$(=0)$ | Depende  | $\leq 0, \geq 0$<br>$(=0)$ | $\geq 0$ | $\geq 0$<br>$(=0)$ |
| $-\theta_L$    | $= 0$    | $(=0)$<br>$\leq 0, \geq 0$ | $\leq 0$ | $(=0)$<br>$\leq 0$ | Depende  | $(=0)$<br>$\leq 0, \geq 0$ | $\leq 0$ | $(=0)$<br>$\leq 0$ |
| $N_H$          | $= 0$    | $\geq 0$                   | $\leq 0$ | $\leq 0$           | $\geq 0$ | $\geq 0$                   | $\leq 0$ | $\leq 0$           |
| $N_L$          | $= 0$    | $= 0$                      | $\geq 0$ | $= 0$              | $\leq 0$ | $= 0$                      | $\geq 0$ | $= 0$              |

En dicha tabla, las dos filas en  $+\theta_L$  y  $-\theta_L$  son excluyentes: bajo ciertas condiciones se dan los resultados de la primera fila para ambos, bajo el complemento de estas condiciones, se dan los resultados de la segunda fila.

Comparando los resultados de las Tablas 3.2 y 3.3, se observa que el programa por distancia es capaz de replicar 12 de 24 movimientos del programa óptimo, mientras que el programa por tarifa es capaz de replicar 14. Esto es el primer acercamiento a mostrar que el programa por tarifa presenta mayor flexibilidad y cercanía al programa óptimo ante cambios marginales en los parámetros de demanda.

## 3.5. Programas Reales Ex Post - Soluciones

Extendiendo lo anterior, nos enfocamos en el escenario ex-post en donde uno o más de los parámetros de demanda cambia de manera no necesariamente marginal, y en donde nuevamente la aerolínea está condicionada por los multiplicadores escogidos durante la fase de diseño para cada uno de los programas. Para realizar este análisis se resolverán los problemas que enfrenta la firma para cada uno de los programas.

### 3.5.1. Recompensas por Distancia

Dados que el contrato entre la aerolínea y los consumidores está establecido en esta etapa, consideramos que los parámetros no necesariamente son los mismos de la fase de diseño, pero la aerolínea no puede modificar los porcentajes de millas entregadas  $\bar{k}_L^D, \bar{k}_H^D$ . Al igual que en el análisis de la Subsección 3.4.1, bajo este enfoque la aerolínea no puede modificar las recompensas, y por tanto sus únicos elementos de decisión son los precios.

La firma resuelve:

$$\begin{aligned}
 \text{(Dist EP)} \quad \text{máx} \quad & \pi(P_H, P_L) = \tilde{N}_L(P_L - C_L(\bar{k}_L^D \cdot D)) + \tilde{N}_H(P_H - C_H(\bar{k}_H^D \cdot D)) \\
 & \quad - c_{op} \cdot (N_L + N_H) \\
 \text{s.a.} \quad & \tilde{\theta}_H V(\bar{k}_H^D \cdot D) - \tilde{\alpha} P_H \geq \tilde{\theta}_H V(\bar{k}_L^D \cdot D) - \tilde{\alpha} P_L & \text{(IC-H)} \\
 & \tilde{\theta}_L V(\bar{k}_L^D \cdot D) - P_L \geq \tilde{\theta}_L V(\bar{k}_H^D \cdot D) - P_H & \text{(IC-L)} \\
 & U_0 + \tilde{\theta}_L V(\bar{k}_L^D \cdot D) - P_L \geq 0 & \text{(PC-L)}
 \end{aligned}$$

donde el conjunto  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\theta}_H, \tilde{\theta}_L, \tilde{N}_H, \tilde{N}_L)$  puede no coincidir en ninguna de sus componentes con los valores esperados por la aerolínea ex-ante  $(\alpha, \theta_H, \theta_L, N_H, N_L)$ .

Este problema es fácil de resolver una vez que consideramos que la aerolínea puede mover solo los precios. En efecto, reescribiendo la restricción de participación de la clase L (PC-L) y la restricción de compatibilidad de incentivos de la clase H (IC-H) como

$$P_L \leq U_0 + \tilde{\theta}_L V(\bar{k}_L^D \cdot D) \quad (3.14)$$

$$P_H \leq \frac{\tilde{\theta}_H}{\tilde{\alpha}} \left( V(\bar{k}_H^D \cdot D) - V(\bar{k}_L^D \cdot D) \right) + P_L \quad (3.15)$$

y notando que mayores precios siempre producen mayores profits, es claro que en el óptimo (3.14) es activa, ya que maximiza  $P_L$ , a la vez que aumenta la holgura de (3.15). Con esto, también es directo que (3.15) es activa en el óptimo.

Con esto, la solución del problema viene dada por:

$$P_L^{*D} = U_0 + \tilde{\theta}_L V(\bar{k}_L^D \cdot D) \quad (3.16)$$

$$P_H^{*D} = \frac{\tilde{\theta}_H}{\tilde{\alpha}} \left( V(\bar{k}_H^D \cdot D) - V(\bar{k}_L^D \cdot D) \right) + U_0 + \tilde{\theta}_L V(\bar{k}_L^D \cdot D) \quad (3.17)$$

donde por construcción en la fase ex-ante

$$\begin{aligned}\bar{k}_L^D \cdot D &= F_L^* \\ \bar{k}_H^D \cdot D &= F_H^*\end{aligned}$$

con  $F_L^*, F_H^*$  dados por las Ecuaciones (3.1) y (3.2).

A partir de esta solución es fácil notar que los cambios ex-post en  $N_L, N_H$  no influyen en el comportamiento de la aerolínea. Pese a esto, es necesario que el conjunto completo de parámetros de demanda  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\theta}_H, \tilde{\theta}_L, \tilde{N}_H, \tilde{N}_L)$  coincida con los valores esperados ex-ante<sup>9</sup> para que el comportamiento de la aerolínea sea óptimo (equivalente al programa óptimo), ya que si, por ejemplo,  $\tilde{N}_L$  es más pequeño que el valor esperado ex-ante  $N_L$  se le estarían entregando una cantidad ineficientemente alta de recompensas a los usuarios de clase L, lo que es fijado en la fase de diseño y no puede ser ajustado en la situación ex-post, y que determina que el precio fijado a estos usuarios sea también ineficientemente alto.

Esto da una nueva intuición sobre la mayor flexibilidad del programa por tarifa pagada: las tarifas que maximizan el profit en este contexto subóptimo del escenario ex-post resultarán ser en la mayoría de los casos ineficientemente altas o bajas, pero lo aerolínea no es capaz de hacer nada mejor debido a que para esto es necesario modificar el nivel de recompensas, un imposible bajo un programa por distancia.

### 3.5.2. Recompensas por Tarifa

Análogamente al programa por distancia, consideramos que los parámetros no necesariamente son los mismos de la fase de diseño, pero la aerolínea no puede modificar los multiplicadores de puntos entregados  $\bar{k}_L^T, \bar{k}_H^T$ . Al igual que en el análisis de la Subsección 3.4.2, la aerolínea es capaz de modificar las recompensas a medida que mueve los precios, aunque a una tasa fija.

La firma resuelve:

$$\begin{aligned}(\mathbf{Tar EP}) \quad \text{máx} \quad & \pi(P_H, P_L) = \tilde{N}_L(P_L - C_L(\bar{k}_L^T \cdot P_L)) + \tilde{N}_H(P_H - C_H(\bar{k}_H^T \cdot P_H)) \\ & - c_{op} \cdot (N_L + N_H) \\ \text{s.a.} \quad & \tilde{\theta}_H V(\bar{k}_H^T \cdot P_H) - \tilde{\alpha} P_H \geq \tilde{\theta}_H V(\bar{k}_L^T \cdot P_L) - \tilde{\alpha} P_L & (\text{IC-H}) \\ & \tilde{\theta}_L V(\bar{k}_L^T \cdot P_L) - P_L \geq \tilde{\theta}_L V(\bar{k}_H^T \cdot P_H) - P_H & (\text{IC-L}) \\ & U_0 + \tilde{\theta}_L V(\bar{k}_L^T \cdot P_L) - P_L \geq 0 & (\text{PC-L})\end{aligned}$$

donde el conjunto  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\theta}_H, \tilde{\theta}_L, \tilde{N}_H, \tilde{N}_L)$  puede no coincidir en ninguna de sus componentes con los valores esperados por la aerolínea ex-ante  $(\alpha, \theta_H, \theta_L, N_H, N_L)$ .

Este problema es más complejo de resolver, debido a que no es directo decidir cuáles restricciones son activas para cualquier set de parámetros  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\theta}_H, \tilde{\theta}_L, \tilde{N}_H, \tilde{N}_L)$ : en el programa óptimo las recompensas y tarifas pueden ser cambiadas independientemente, lo que conduce

<sup>9</sup> En realidad, basta con que  $(\frac{\tilde{\theta}_H}{\tilde{\alpha}}, \tilde{\theta}_L, \frac{\tilde{N}_H}{\tilde{N}_L})$  coincida con los valores ex-ante de  $(\frac{\theta_H}{\alpha}, \theta_L, \frac{N_H}{N_L})$ .

a que solo dos restricciones sean activas en el óptimo. En el programa por distancia ex-post solo los precios puede ser modificados, lo que nuevamente hace evidente que las mismas restricciones son activas en el óptimo ex-post. Sin embargo, en ese caso los precios y recompensas se mueven de manera conjunta a una tasa fija, y por tanto cuáles restricciones son activas está lejos de ser obvio.

Ante esto, estableceremos condiciones suficientes bajo las cuales las mismas restricciones (IC-H) y (PC-L) son activas en general, entendiendo que esto no siempre será el caso.

**Proposición 3.7** Sea  $\bar{F}_L$  el nivel de recompensas caracterizado por

$$U_0 + \tilde{\theta}_L V(\bar{F}_L) - \frac{\bar{F}_L}{k_L} = 0 \quad (3.18)$$

y  $\bar{F}_H$  caracterizado por

$$\tilde{\theta}_H V(\bar{F}_H) - \tilde{\alpha} \frac{\bar{F}_H}{k_H} = \tilde{\theta}_H V(\bar{F}_L) - \tilde{\alpha} \frac{\bar{F}_L}{k_L}$$

es decir las recompensas que activan (PC-L) y (IC-H) en el programa por distancia ex-post. Bajo condiciones naturales del problemas, si se cumplen las siguientes desigualdades

$$V'(\bar{F}_H) < \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\theta}_H k_H} \quad (3.19)$$

$$C'_L(\bar{F}_L) \leq \frac{1}{k_L} \quad (3.20)$$

$$C'_H(\bar{F}_H) \leq \frac{1}{k_H} \quad (3.21)$$

entonces en el óptimo del problema por tarifa ex-post (PC-L) y (IC-H) son activas, y por tanto los precios y recompensas fijadas son precisamente  $\bar{P}_H = \frac{\bar{F}_H}{k_H}$  y  $\bar{P}_L = \frac{\bar{F}_L}{k_L}$ ,  $\bar{F}_H, \bar{F}_L$ .

DEMOSTRACIÓN. Apéndice B. □

Notemos que las condiciones exigidas en la proposición anterior son naturales en muchos casos: las condiciones (3.20) y (3.21) aseguran que la firma asigna recompensas solo hasta cuando el beneficio marginal de hacerlo es no negativo<sup>10</sup>. En efecto, dicho beneficio marginal corresponde a

$$\frac{\partial P_i}{\partial F_i} - C'_i = \frac{1}{k_i} - C'_i$$

Más aún, cuando los costos de proveer recompensas  $C_H, C_L$  son lineales, las condiciones (3.20) y (3.21) son necesarias para asegurar una asignación no nula de recompensas a ambas clases,

<sup>10</sup> Beneficio marginal entendido como la diferencia en el tradeoff asociado a entregar más recompensas (mayor costo) y la posibilidad de cobrar una tarifa mayor (mayor revenue).

ya que bajo dichas formas funcionales el beneficio marginal es constante e igual  $\frac{1}{\bar{k}_i} - C'_i$ . De no tener dichas desigualdades en el caso de costos lineales, cualquier nivel de recompensas distintas de cero para cualquiera de las clases provoca pérdidas, y la aerolínea por tanto actúa como si no ofreciera un programa de lealtad.

Por otro lado la condición (3.19) es fácilmente obtenible si  $V$  es lo suficientemente cóncava. En efecto,  $\bar{F}_H$  está caracterizado por

$$\begin{aligned} \frac{\bar{F}_H}{\bar{k}_H} &= \frac{\tilde{\theta}_H}{\tilde{\alpha}} (V(\bar{F}_H) - V(\bar{F}_L)) + U_0 + \tilde{\theta}_L V(\bar{F}_L) \\ \Leftrightarrow \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\theta}_H \bar{k}_H} &= \frac{V(\bar{F}_H)}{\bar{F}_H} - \frac{1}{\bar{F}_H} \underbrace{\tilde{\alpha} \left( \left( \frac{\tilde{\theta}_H}{\tilde{\alpha}} - \tilde{\theta}_L \right) V(\bar{F}_L) - U_0 \right)}_{U_H(\bar{P}_H, \bar{F}_H) \geq 0} \\ \Leftrightarrow \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\theta}_H \bar{k}_H} + \frac{U_H(\bar{P}_H, \bar{F}_H)}{\bar{F}_H} &= \frac{V(\bar{F}_H)}{\bar{F}_H} \\ \Rightarrow \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\theta}_H \bar{k}_H} + \frac{U_H(\bar{P}_H, \bar{F}_H)}{\bar{F}_H} &\geq V'(\bar{F}_H) \end{aligned}$$

Donde para la última desigualdad ocupamos la propiedad usual de concavidad  $\frac{V(\bar{F}_H)}{\bar{F}_H} \geq V'(\bar{F}_H)$ , dado que  $\bar{F}_H > 0$ . Si  $V$  es entonces lo suficientemente cóncava, de manera de tener

$$\frac{V(\bar{F}_H)}{\bar{F}_H} \geq V'(\bar{F}_H) + \frac{U_H(\bar{P}_H, \bar{F}_H)}{\bar{F}_H}$$

entonces la condición (3.19) se satisface sin otros requerimientos.

Finalmente, es natural preguntarse sobre la existencia y unicidad de  $\bar{F}_L = \bar{F}_L(\tilde{\theta}_L)$  tal que resuelve la Ecuación (3.18). Esto es efectivamente posible de asegurar al menos en una vecindad del valor ex-ante de  $\theta_L$ : Definiendo

$$f(\theta_L, F_L) := U_0 + \theta_L V(F_L) - \frac{F_L}{\bar{k}_L}$$

se tiene que  $f(\theta_L^{EA}, F_L^*) = 0$ , con  $\theta_L^{EA}$  el valor ex-ante de  $\theta_L$  y  $F_L^*$  el nivel de recompensas del programa óptimo dado por (3.2). Lo anterior es debido a que la restricción de participación de los viajeros L está activa en el programa óptimo ex-ante. Además,

$$\frac{\partial f(\theta_L, F_L)}{\partial F_L} = \theta_L V'(F_L) - \frac{1}{\bar{k}_L} < 0$$

por lo que según el Teorema de la Función Implícita (e.g. Krantz y Parks (2012)) existe una vecindad  $V$  en torno a  $\theta_L^{EA}$  tal que existe una única función continuamente diferenciable  $g : V \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que  $g(\theta_L^{EA}) = F_L^*$  y

$$f(\theta_L, g(\theta_L)) = 0 \quad \forall \theta_L \in V$$



Por tanto, esta función será precisamente la que nos entregará la existencia y unicidad de  $\bar{F}_L$ , i.e.  $\bar{F}_L = g(\tilde{\theta}_L) \forall \tilde{\theta}_L \in V$ . Con esto además obtenemos

$$\frac{\partial \bar{F}_L}{\partial \tilde{\theta}_L} = -\frac{\frac{\partial f(\theta_L, g(\theta_L))}{\partial \theta_L}}{\frac{\partial f(\theta_L, g(\theta_L))}{\partial F_L}} = -\frac{V(\bar{F}_L)}{\tilde{\theta}_L V'(\bar{F}_L) - \frac{1}{\bar{k}_L}} > 0 \quad (3.22)$$

### 3.5.3. Comparación de Cierre de Clases

Como se comentó en la Subsección 3.2.2, es posible que para ciertas configuraciones de parámetros de preferencias sea preferible para la aerolínea servir solo a la clase alta, cerrando la clase baja. En el escenario ex-ante, los dos programas reales son equivalentes, aún en este sentido, al programa óptimo, y más aún, al considerar una restricción de participación de los viajeros de negocio (en la forma de no negatividad de su utilidad, o bien de un precio de reserva) y  $c_{op} = 0$ , es posible mostrar que los programas no cierran nunca la clase baja.

Ahora comparamos las condiciones de cierre de clase ex-post. Supongamos que ex-ante, para los valores esperados de los parámetros, la aerolínea decide diseñar su programa para separar clases, pero al enfrentarse a los valores ex-post de los parámetros debe reconsiderar su decisión. La condición general bajo la cual la aerolínea decide cerrar la clase baja es:

$$N_L(P_L^* - C_L(F_L^*) - c_{op}) + N_H(P_H^* - C_H(F_H^*) - c_{op}) < N_H(P_H^{**} - C_H(F_H^{**}) - c_{op})$$

donde \* denota los valores fijados bajo separación y \*\* los que se escogerían cerrando la clase L. Para el caso del programa por distancia sin embargo, ex-post solo las tarifas pueden ser ajustadas, no las recompensas, y por tanto  $F_H^* = F_H^{**}$  lo que implica que la condición de cierre de clase para el programa por distancia en el escenario ex-post es:

$$N_L(P_L^* - C_L(F_L^*) - c_{op}) < N_H(P_H^{**} - P_H^* - c_{op}) \quad (3.23)$$

En el programa por tarifa pagada sin embargo, ex-post se tiene

$$F_H^* = \bar{k}_H^T P_H^* < \bar{k}_H^T P_H^{**} = F_H^{**}$$

por lo que la condición de cierre de clase para el programa por tarifa pagada en la situación ex-post es:

$$N_L(P_L^* - C_L(F_L^*) - c_{op}) < N_H(P_H^{**} - P_H^* - c_{op}) - \underbrace{N_H(C_H(\bar{k}_H^T P_H^{**}) - C_H(\bar{k}_H^T P_H^*))}_{>0} \quad (3.24)$$

Podemos ver que esta condición (3.24) es en general más estricta que la del programa por distancia (3.23): cobrar un precio mayor  $P_H^{**} > P_H^*$  a los pasajeros de negocio tiene una desventaja bajo un programa por tarifa pagada, ya que la aerolínea tiene que ofrecer las recompensas adicionales correspondientes y enfrentar un costo  $C_H(\bar{k}_H^T P_H^{**}) > C_H(\bar{k}_H^T P_H^*)$ . Más aún, si por ejemplo los valores ex-post de  $\theta_H$  y  $\alpha$  coinciden con los valores utilizados durante la fase de diseño, al considerar una restricción de utilidad no negativa para los viajeros

de negocio, el programa por distancia con cierre de clase es capaz de replicar perfectamente al programa óptimo con cierre de clase, al seguir ofreciendo la cantidad óptima de recompensas tal que

$$\frac{\theta_H}{\alpha} V'(F_H^*) = C'_H(F_H^*)$$

extrayendo posteriormente todo el excedente de este tipo de pasajeros. Sin embargo, el programa por tarifa pagada con cierre se ve obligado a entregar una cantidad ineficientemente alta de recompensas al incrementar la tarifa, lo que se traduce en un profit mucho más bajo.

Por tanto, el modelo predice que bajo un programa por tarifa pagada, el cierre de la clase baja será menos común que bajo un programa por distancia volada.

### 3.5.4. Comparación de Profits

En la Sección 3.4 se discutió y comentó sobre la mayor flexibilidad del programa por tarifa pagada sobre el programa por distancia volada en términos de la capacidad de replicar (al menos parcialmente) las respuestas del programa óptimo ante cambios en el conjunto de parámetros de demanda y preferencias. Esto resulta intuitivamente obvio si consideramos que bajo el programa óptimo la aerolínea desearía cambiar precios y recompensas ante alguno de estos cambios, lo que es factible en el programa por tarifa (aunque con una relación fija entre precios y recompensas), pero imposible en el programa por distancia volada, en el cual las recompensas quedan fijas en la fase de diseño.

Pese a lo anterior, no es directo que el profit alcanzado por una aerolínea bajo un programa por tarifa sea estrictamente mayor al de bajo un programa por distancia volada, en cuanto el análisis realizado en la sección Sección 3.4 estudia solo movimientos, no magnitudes.

En esta subsección por tanto se aborda dicho problema, comparando los profits alcanzados por cada programa, basados en las soluciones analíticas exactas encontradas en las Subsecciones 3.5.1 y 3.5.2, concluyendo que, bajo ciertas condiciones, el programa por tarifa pagada siempre domina al programa por distancia volada.

Separaremos el análisis en el comportamiento del profit unitario asociado a los viajeros de ocio y a los viajeros de negocio, analizando posteriormente la relación entre ellos y el comportamiento del profit global.

#### 3.5.4.1. Viajeros de Ocio

Según lo obtenido en las Ecuaciones (3.16) y (3.17), y recordando que las millas están fijas desde la etapa de diseño en el programa por distancia (y por tanto son iguales a las recompensas del programa óptimo ex-ante), el profit unitario asociado a los viajeros de ocio para el programa por distancia corresponde a:

$$\pi_{\text{Distancia}_L} = U_0 + \tilde{\theta}_L V(F_L^*) - C_L(F_L^*)$$

con  $F_L^*$  dado por la Ecuación (3.2).

Por otro lado, siguiendo lo mostrado en la Proposición 3.7, bajo ciertas condiciones naturales, el profit unitario asociado a los viajeros de ocio para el programa por tarifa corresponde a:

$$\pi_{\text{Tarifa}_L} = U_0 + \tilde{\theta}_L V(\bar{F}_L) - C_L(\bar{F}_L)$$

con  $\bar{F}_L$  el nivel de recompensas que resuelve

$$U_0 + \tilde{\theta}_L V(\bar{F}_L) - \frac{\bar{F}_L}{k_L} = 0$$

Estos profits varían únicamente con  $\tilde{\theta}_L$  en la fase ex-post, por lo que denotaremos

$$\begin{aligned}\pi_{\text{Distancia}_L} &:= \pi_{\text{Distancia}_L}(\tilde{\theta}_L) \\ \pi_{\text{Tarifa}_L} &:= \pi_{\text{Tarifa}_L}(\tilde{\theta}_L)\end{aligned}$$

Además, se estableció en la Sección 3.3 que ambos programas son equivalentes en la fase de diseño al programa óptimo, y por tanto, entre ellos, por lo que es directo que

$$\pi_{\text{Distancia}_L}(\theta_L^{EA}) = \pi_{\text{Tarifa}_L}(\theta_L^{EA})$$

con  $\theta_L^{EA}$  el parámetro ex-ante. Estudiaremos entonces el comportamiento de  $\pi_{\text{Distancia}_L}(\tilde{\theta}_L) - \pi_{\text{Tarifa}_L}(\tilde{\theta}_L)$  al realizar aumentos y disminuciones en torno el valor ex-ante  $\theta_L^{EA}$ :

Notemos que  $f(\theta_L, F_L) := U_0 + \theta_L V(F_L) - \frac{F_L}{k_L}$  cumple:

- $f(\theta_L^{EA}, F_L^*) = 0$
- $\frac{\partial f(\theta_L, F_L)}{\partial \theta_L} > 0$
- $\frac{\partial f(\theta_L, F_L)}{\partial F_L} < 0$

Luego, como  $\bar{F}_L = \bar{F}_L(\tilde{\theta}_L)$  está caracterizado por  $f(\tilde{\theta}_L, \bar{F}_L) = 0$ , tenemos que  $\frac{\partial \bar{F}_L}{\partial \tilde{\theta}_L} > 0$ , i.e. al realizar un aumento en el valor ex-ante  $\theta_L^{EA}$ ,  $\bar{F}_L$  aumenta, y cuando realizamos una disminución sobre  $\theta_L^{EA}$ ,  $\bar{F}_L$  disminuye.

Al comparar ambos profit obtenemos entonces

$$\begin{aligned}\pi_{\text{Tarifa}_L}(\tilde{\theta}_L) - \pi_{\text{Distancia}_L}(\tilde{\theta}_L) &= \tilde{\theta}_L \left( V(\bar{F}_L(\tilde{\theta}_L)) - V(F_L^*) \right) - \left( C_L(\bar{F}_L(\tilde{\theta}_L)) - C_L(F_L^*) \right) \\ &= \tilde{\theta}_L \left( V(\bar{F}_L(\tilde{\theta}_L)) - V(\bar{F}_L(\theta_L^{EA})) \right) - \left( C_L(\bar{F}_L(\tilde{\theta}_L)) - C_L(\bar{F}_L(\theta_L^{EA})) \right)\end{aligned}\quad (3.25)$$

Por el análisis anterior, al considerar  $\tilde{\theta}_L > \theta_L^{EA}$ , es claro que el primer término de la expresión anterior es positivo, mientras que el segundo<sup>11</sup> es negativo, por lo que es necesario comparar

<sup>11</sup> Incluyendo el signo menos.

sus magnitudes. Si el aumento sobre  $\theta_L^{EA}$  es marginal, para tener  $\pi_{\text{Tarifa}_L} - \pi_{\text{Distancia}_L} > 0$  requerimos

$$\theta_L^{EA} V'(F_L^*) > C'_L(F_L^*)$$

Pero esto lo tenemos directamente del hecho de que  $F_L^*$  proviene del programa óptimo y está caracterizado por (3.2)

$$\theta_L^{EA} V'(F_L^*) = \frac{C'(F_L^*)}{1 - \frac{N_H^{EA} \left( \frac{\theta_H^{EA}}{\alpha^{EA}} - \theta_L^{EA} \right)}{N_L^{EA} \theta_L^{EA}}} > C'(F_L^*)$$

De forma general, para que el profit en el programa por tarifa sea mayor al programa por distancia al considerar  $\tilde{\theta}_L > \theta_L^{EA}$ , requerimos que

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_L V(\bar{F}_L(\tilde{\theta}_L)) - V(\bar{F}_L(\theta_L^{EA})) &> C_L(\bar{F}_L(\tilde{\theta}_L)) - C_L(\bar{F}_L(\theta_L^{EA})) \\ \Leftrightarrow \tilde{\theta}_L \underbrace{\frac{V(\bar{F}_L(\tilde{\theta}_L)) - V(\bar{F}_L(\theta_L^{EA}))}{\bar{F}_L(\tilde{\theta}_L) - \bar{F}_L(\theta_L^{EA})}}_{:=G_1(\tilde{\theta}_L)} &> \underbrace{\frac{C_L(\bar{F}_L(\tilde{\theta}_L)) - C_L(\bar{F}_L(\theta_L^{EA}))}{\bar{F}_L(\tilde{\theta}_L) - \bar{F}_L(\theta_L^{EA})}}_{:=G_2(\tilde{\theta}_L)} \end{aligned} \quad (3.26)$$

lo que se cumple para  $\tilde{\theta}_L = \theta_L^{EA} + \varepsilon$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Escrita de esta forma, la condición es fácil de interpretar:  $G_1(\tilde{\theta}_L)$  corresponde a la pendiente de  $V$  (decreciente, pues  $V$  es cóncava) y  $G_2(\tilde{\theta}_L)$  corresponde a la pendiente de  $C_L$  (creciente, pues  $C_L$  es convexa). Entonces, si  $\frac{G_1(\tilde{\theta}_L)}{G_2(\tilde{\theta}_L)}$  decrece de manera menos que lineal, la condición se cumple para  $\tilde{\theta}_L \in [\theta_L^{EA}, +\infty)^{12}$ .

Visto de otra forma,  $\tilde{\theta}_L G_1(\tilde{\theta}_L)$  corresponde a la pendiente de la recta que une los puntos  $(F_L^*, \tilde{\theta}_L V(F_L^*))$  y  $(\bar{F}_L(\tilde{\theta}_L), \tilde{\theta}_L V(\bar{F}_L(\tilde{\theta}_L)))$ , mientras que  $G_2(\tilde{\theta}_L)$  corresponde a la pendiente de la recta que une los puntos  $(F_L^*, C_L(F_L^*))$  y  $(\bar{F}_L(\tilde{\theta}_L), C_L(\bar{F}_L(\tilde{\theta}_L)))$ . Esto se ilustra en la Figura 3.1, en donde la condición para  $\pi_{\text{Tarifa}_L}(\tilde{\theta}_L) \geq \pi_{\text{Distancia}_L}(\tilde{\theta}_L)$  es  $m_1 \geq m_2$ .

Naturalmente, si consideramos  $\tilde{\theta}_L < \theta_L^{EA}$  ocurre lo contrario, ya que volviendo a la diferencia en profits (3.25), en este caso el primer término resulta negativo, y el segundo positivo. Por lo que la condición para que una reducción marginal en  $\theta_L^{EA}$  produzca un profit mayor en el programa por tarifa es

$$\theta_L^{EA} V'(F_L^*) < C'_L(F_L^*)$$

que no se tiene, por lo que el profit del programa por distancia es mayor, por continuidad, en al menos un intervalo  $(\theta_L^{EA} - \gamma, \theta_L^{EA})$ ,  $\gamma > 0$ . Si volvemos a considerar la condición (3.25), es posible notar que ahora el primer término es negativo y el segundo positivo, por lo que la condición (3.26) se transforma al considerar  $\tilde{\theta}_L < \theta_L^{EA}$  en:

<sup>12</sup> La condición de decrecimiento es con  $G_1, G_2$  como función de  $\tilde{\theta}_L$ , no como función de  $\bar{F}_L$ .

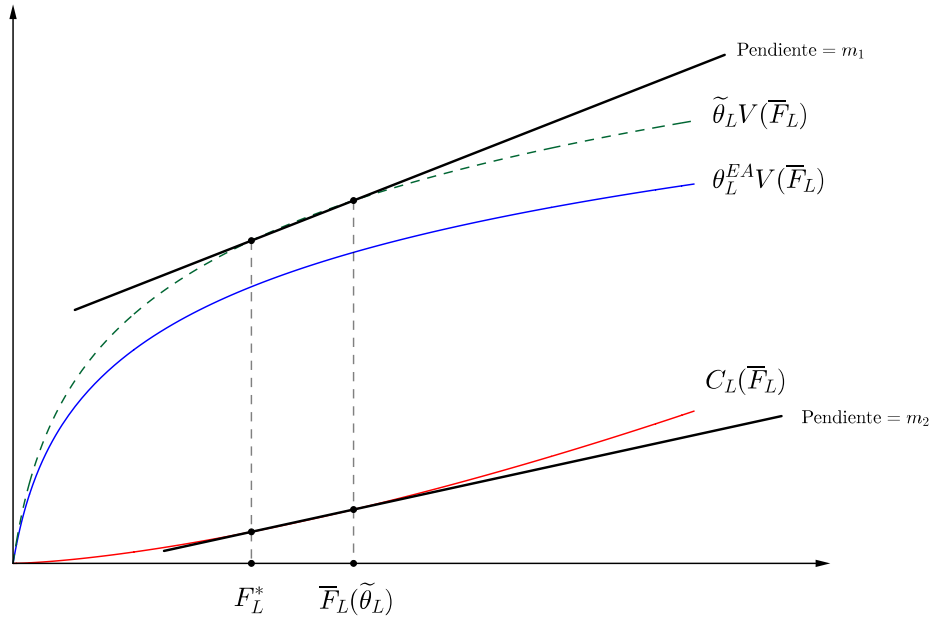


Figura 3.1: Condición Gráfica  $\pi_{\text{Tarifa}_L} \geq \pi_{\text{Distancia}_L}$  al considerar  $\tilde{\theta}_L > \theta_L^{EA}$ .

$$\frac{C_L(\bar{F}_L(\theta_L^{EA})) - C_L(\bar{F}_L(\tilde{\theta}_L))}{\bar{F}_L(\theta_L^{EA}) - \bar{F}_L(\tilde{\theta}_L)} > \tilde{\theta}_L \frac{V(\bar{F}_L(\theta_L^{EA})) - V(\bar{F}_L(\tilde{\theta}_L))}{\bar{F}_L(\theta_L^{EA}) - \bar{F}_L(\tilde{\theta}_L)}$$

Por tanto, la condición es la extensión natural por continuidad de la condición anterior: la pendiente de la curva que une los puntos debe ser menor a la pendiente de la curva de costos, como se aprecia en la Figura 3.2.

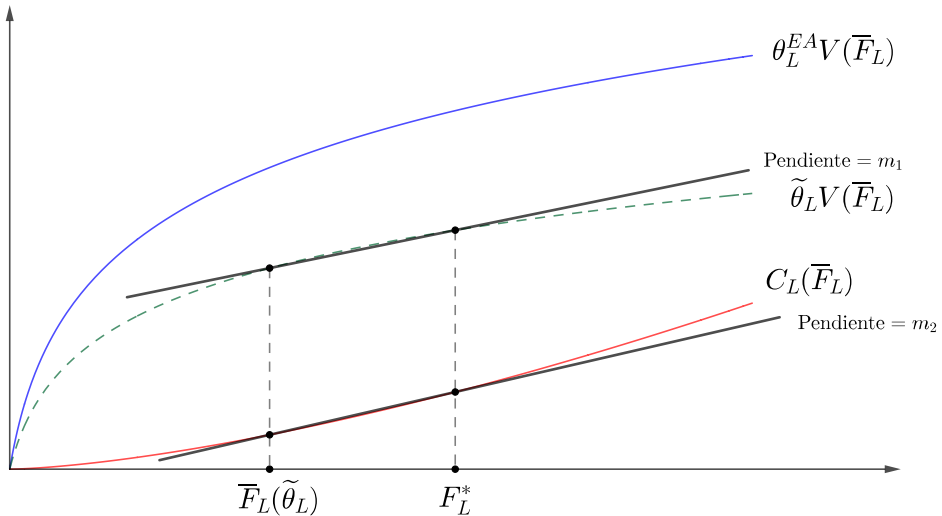


Figura 3.2: Condición Gráfica  $\pi_{\text{Tarifa}_L} \geq \pi_{\text{Distancia}_L}$  al considerar  $\tilde{\theta}_L < \theta_L^{EA}$ .

**Proposición 3.8** Para cualquier  $\tilde{\theta}_L \in (0, \infty)$ , una condición necesaria y suficiente para que

$\pi_{\text{Tarifa}_L}(\tilde{\theta}_L) \geq \pi_{\text{Distancia}_L}(\tilde{\theta}_L)$  es

$$\tilde{\theta}_L V'(\bar{F}_L(\tilde{\theta}_L)) \geq C'_L(\bar{F}_L(\tilde{\theta}_L))$$

DEMOSTRACIÓN. Apéndice C. □

### 3.5.4.2. Viajeros de Negocio

Nuevamente según lo obtenido en las Ecuaciones (3.16) y (3.17), el profit unitario asociado a los viajeros de negocio para el programa por distancia corresponde a:

$$\pi_{\text{Distancia}_H} = \frac{\tilde{\theta}_H}{\tilde{\alpha}} (V(F_H^*) - V(F_L^*)) + \tilde{\theta}_L V(F_L^*) + U_0 - C_H(F_H^*)$$

con  $F_H^*, F_L^*$  las recompensas del programa óptimo dadas por (3.1) y (3.2).

Bajo las condiciones de la Proposición 3.7, el profit unitario asociado a los viajeros de negocio para el programa por tarifa pagada resulta:

$$\pi_{\text{Tarifa}_H} = \frac{\tilde{\theta}_H}{\tilde{\alpha}} (V(\bar{F}_H) - V(\bar{F}_L)) + \tilde{\theta}_L V(\bar{F}_L) + U_0 - C_H(\bar{F}_H)$$

Con  $\bar{F}_H, \bar{F}_L$  los niveles de recompensas que activan (IC-H) y (PC-H) en **(Tar EP)**.

Con esto, obtenemos entonces

$$\begin{aligned} \pi_{\text{Tarifa}_H}(\tilde{\theta}_L, \tilde{\theta}_H, \tilde{\alpha}) - \pi_{\text{Distancia}_H}(\tilde{\theta}_L, \tilde{\theta}_H, \tilde{\alpha}) &= \frac{\tilde{\theta}_H}{\tilde{\alpha}} (V(\bar{F}_H) - V(F_H^*)) \\ &\quad - \left( \frac{\tilde{\theta}_H}{\tilde{\alpha}} - \tilde{\theta}_L \right) (V(\bar{F}_L) - V(F_L^*)) \quad (3.27) \\ &\quad - (C_H(\bar{F}_H) - C_H(F_H^*)) \end{aligned}$$

Estudiemos inicialmente un cambio en  $\theta_L^{EA}$  ceteris paribus:

Analicemos primero el signo de  $\frac{\partial \bar{F}_H}{\partial \tilde{\theta}_L}$ . Utilizando que  $\bar{F}_H = \bar{F}_H(\tilde{\theta}_L, \tilde{\theta}_H, \tilde{\alpha})$  está caracterizado por

$$\tilde{\theta}_H V(\bar{F}_H) - \tilde{\alpha} \frac{\bar{F}_H}{\bar{k}_H^T} = \tilde{\theta}_H V(\bar{F}_L) - \tilde{\alpha} \frac{\bar{F}_L}{\bar{k}_L^T}$$

es fácil obtener

$$\frac{\partial \bar{F}_H}{\partial \tilde{\theta}_L} = \frac{\partial \bar{F}_L}{\partial \tilde{\theta}_L} \frac{V'(\bar{F}_L) - \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\theta}_H \bar{k}_L^T}}{V'(\bar{F}_H) - \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\theta}_H \bar{k}_H^T}}$$

Usando que  $\frac{\partial \bar{F}_L}{\partial \theta_L} > 0$  y el supuesto (3.19) de la Proposición 3.7, tenemos que el signo de  $\frac{\partial \bar{F}_H}{\partial \tilde{\theta}_L}$  depende de la relación de orden de  $V'(\bar{F}_L)$  versus  $\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\theta}_H \bar{k}_L^T}$ . Pese a que esta relación de orden no es dada, aún en el valor ex-ante de  $\theta_L^{EA}$ , si es posible decir algo: cuando  $\tilde{\theta}_L \gg \theta_L^{EA}$ , se tiene  $\bar{F}_L \gg F_L^*$  y por tanto  $V'(\bar{F}_L) < \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\theta}_H \bar{k}_L^T}$ , gracias a la concavidad de  $V$ , lo que implica  $\frac{\partial \bar{F}_H}{\partial \tilde{\theta}_L} > 0$ .

De la misma forma, cuando  $\tilde{\theta}_L \ll \theta_L^{EA}$ , se tiene  $\bar{F}_L \ll F_L^*$  y por tanto  $V'(\bar{F}_L) > \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\theta}_H \bar{k}_L^T}$ , gracias a la concavidad de  $V$ , lo que implica  $\frac{\partial \bar{F}_H}{\partial \tilde{\theta}_L} < 0$ .

El comportamiento anterior se muestra en la Figura 3.3.

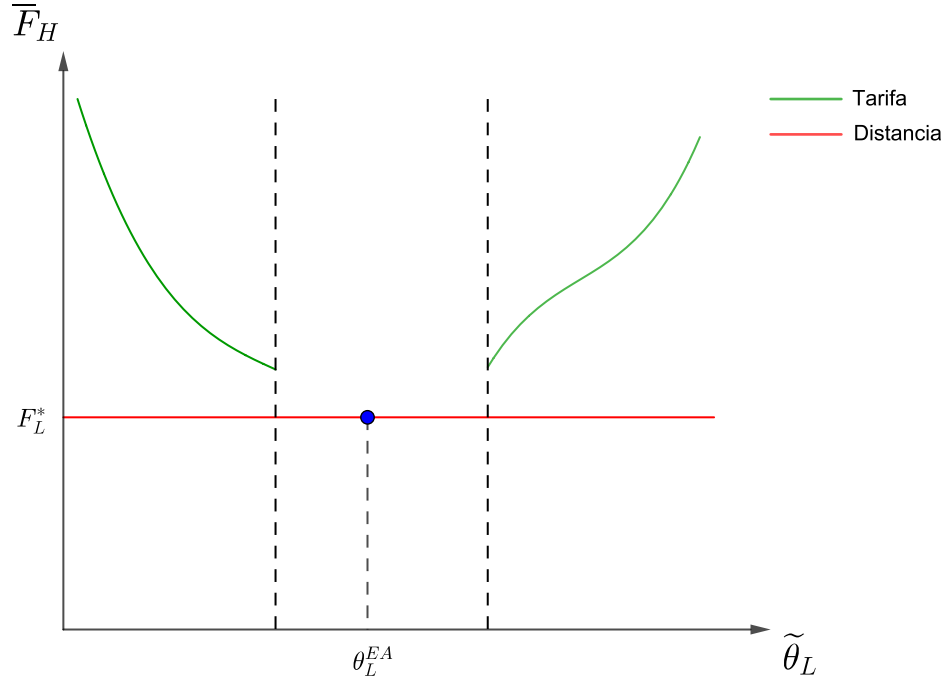


Figura 3.3: Comportamiento  $\bar{F}_H$  vs  $\tilde{\theta}_L$ .

Con esto, es posible analizar la diferencia en profits ante cambios no marginales sobre  $\theta_L^{EA}$ :

- Al considerar  $\tilde{\theta}_L \ll \theta_L^{EA}$ , el programa por distancia naturalmente mantiene el nivel de recompensas  $F_H^*$  a los usuarios de negocio, mientras que reduce el precio asignado a los mismos (Tabla 3.2), lo que se traduce en

<sup>13</sup> En cuyo caso solo tenemos la desigualdad más débil  $V'(\bar{F}_L) < \frac{1}{\theta_L^{EA} \bar{k}_L^T}$ .

$$\pi_{\text{Distancia}_H}(\tilde{\theta}_L, \theta_H^{EA}, \alpha^{EA}) < \pi_{\text{Distancia}_H}(\theta_L^{EA}, \theta_H^{EA}, \alpha^{EA})$$

Por otro lado, el programa por tarifa asigna mayores precios y recompensas a esta clase a medida que  $\tilde{\theta}_L$  disminuye (Figura 3.3), pero si tenemos la condición (3.21) de la Proposición 3.7, esto es conveniente en términos de profit, i.e. el mayor precio a cargar a los usuarios de negocio al subir el número de millas compensa el costo adicional asociado a las mismas, es decir se tiene

$$\pi_{\text{Tarifa}_H}(\tilde{\theta}_L, \theta_H^{EA}, \alpha^{EA}) > \pi_{\text{Tarifa}_H}(\theta_L^{EA}, \theta_H^{EA}, \alpha^{EA})$$

Finalmente, dado que  $\pi_{\text{Tarifa}_H}(\theta_L^{EA}, \theta_H^{EA}, \alpha^{EA}) = \pi_{\text{Distancia}_H}(\theta_L^{EA}, \theta_H^{EA}, \alpha^{EA})$ , concluimos que el profit alcanzado bajo un programa por tarifa es estrictamente mayor al alcanzado bajo un programa por distancia en este caso.

- Al considerar  $\tilde{\theta}_L \gg \theta_L^{EA}$ , el mismo argumento anterior para el caso del programa por tarifa se tiene, esto es el aumento en millas entregadas a los usuarios de negocio (Figura 3.3) provoca un aumento en el profit asociado a esta clase bajo la condición (3.21) por lo que

$$\pi_{\text{Tarifa}_H}(\tilde{\theta}_L, \theta_H^{EA}, \alpha^{EA}) > \pi_{\text{Tarifa}_H}(\theta_L^{EA}, \theta_H^{EA}, \alpha^{EA}) \quad (3.28)$$

Sin embargo la situación para el programa por distancia cambia: en este caso la aerolínea aumentará el precio cargado a la clase de negocio (Tabla 3.2), manteniendo recompensas, por lo que no incurrirá en el aumento en costos presente en el programa por tarifa, por lo que:

$$\pi_{\text{Distancia}_H}(\tilde{\theta}_L, \theta_H^{EA}, \alpha^{EA}) \gg \pi_{\text{Distancia}_H}(\theta_L^{EA}, \theta_H^{EA}, \alpha^{EA}) \quad (3.29)$$

Este caso se diferencia fundamentalmente del análisis comparativo de  $\pi_{\text{Distancia}_L}$  vs  $\pi_{\text{Tarifa}_L}$  ante aumentos en  $\theta_L^{EA}$ , en donde la aerolínea en el caso del programa por tarifa aumentaba precios y recompensas a la clase baja, pero aún así existían condiciones bajo las cuales este programa dominaba en profit al programa por distancia, que aumentaba solo precios. Esto se debe a que en ese caso, las recompensas ofrecidas por el programa por distancia ( $F_L^*$ ) resultaban “ineficientemente” bajas al considerar el aumento sobre  $\theta_L^{EA}$ , por lo que la aerolínea bajo un programa por tarifa se aprovechaba de este hecho aumentando recompensas, replicando el comportamiento del programa óptimo. Sin embargo, aquí la cantidad “eficiente” de millas a entregar sigue siendo  $F_H^*$ , que cumple

$$\frac{\theta_H^{EA}}{\alpha^{EA}} V'(F_H^*) = C'_H(F_H^*)$$

independiente del valor de  $\tilde{\theta}_L$ . Por tanto, la aerolínea al aumentar las recompensas está incurriendo en un comportamiento subóptimo, lo que se traduce en que, pese a que aumenta el profit (Ecuación (3.28)), alcanza un resultado peor que el programa por distancia (Ecuación (3.29)), que replica de mejor manera el comportamiento del programa óptimo.

Estudiemos ahora las diferencias en profits ante cambios en  $\theta_H^{EA}$  y/o  $\alpha^{EA}$  ceteris paribus:



Al considerar estos cambios, se tendrá

$$\tilde{\theta}_L = \theta_L^{EA}$$

y por tanto

$$\bar{F}_L = F_L^*$$

de donde se sigue según la ecuación (3.27) que

$$\pi_{\text{Tarifa}_H}(\theta_L^{EA}, \tilde{\theta}_H, \tilde{\alpha}) - \pi_{\text{Distancia}_H}(\theta_L^{EA}, \tilde{\theta}_H, \tilde{\alpha}) = \frac{\tilde{\theta}_H}{\tilde{\alpha}} (V(\bar{F}_H) - V(F_H^*)) - (C_H(\bar{F}_H) - C_H(F_H^*)) \quad (3.30)$$

Por comodidad, llamemos  $\tilde{\zeta}_H := \frac{\tilde{\theta}_H}{\tilde{\alpha}}$ . Abordaremos el análisis de cambios sobre  $\theta_H^{EA}$  y/o  $\alpha^{EA}$  a través cambios sobre  $\zeta_H^{EA} = \frac{\theta_H^{EA}}{\alpha^{EA}}$ .

Veamos primero que  $\frac{d\bar{F}_H}{d\tilde{\zeta}_H} > 0$ . En efecto,  $\bar{F}_H$  está caracterizado por

$$\tilde{\zeta}_H V(\bar{F}_H) - \frac{\bar{F}_H}{\bar{k}_H} = \tilde{\zeta}_H V(\bar{F}_L) - \frac{\bar{F}_L}{\bar{k}_L}$$

de donde, notando que  $\bar{F}_L$  no depende de  $\tilde{\zeta}_H$ , es fácil obtener

$$\frac{d\bar{F}_H}{d\tilde{\zeta}_H} = -\frac{V(\bar{F}_H) - V(\bar{F}_L)}{\tilde{\zeta}_H V'(\bar{F}_H) - \frac{1}{\bar{k}_H}} > 0$$

donde la última desigualdad proviene del supuesto (3.19) de la Proposición 3.7, que establece precisamente

$$\tilde{\zeta}_H V'(\bar{F}_H) - \frac{1}{\bar{k}_H} < 0$$

De este análisis, al realizar un aumento en  $\zeta_H^{EA}$ , el primer término de (3.30) es positivo, mientras que el segundo es negativo, por lo que es necesario comparar sus magnitudes. Si el cambio sobre  $\zeta_H^{EA}$  es marginal, para tener  $\pi_{\text{Tarifa}_H} - \pi_{\text{Distancia}_H} > 0$  se requiere

$$\zeta_H^{EA} V'(F_H^*) > C'_H(F_H^*)$$

Pero sabemos que  $F_H^*$  está caracterizado por la Ecuación (3.1), i.e.

$$\zeta_H^{EA} V'(F_H^*) = C'_H(F_H^*)$$

por lo que cambios marginales sobre  $\zeta_H^{EA}$  no cambian  $\pi_{\text{Tarifa}_H} = \pi_{\text{Distancia}_H}$ .

Al considerar cambios no marginales sobre  $\zeta_H^{EA}$  es fácil ver que este caso es totalmente análogo al realizado anteriormente al comparar  $\pi_{\text{Tarifa}_L}$  vs  $\pi_{\text{Distancia}_L}$  cuando ocurren cambios no marginales sobre  $\theta_L^{EA}$ . Por tanto, al estudiar aumentos no marginales sobre  $\zeta_H^{EA}$ , la condición gráfica es observable en la Figura 3.4, en donde se requiere  $m_1 \geq m_2$  para tener  $\pi_{\text{Tarifa}_H} \geq \pi_{\text{Distancia}_H}$ , mientras que el comportamiento para reducciones no marginales sobre  $\zeta_H^{EA}$  se presenta en la Figura 3.5, en cuyo caso se requiere  $m_1 \leq m_2$  para tener  $\pi_{\text{Tarifa}_H} \geq \pi_{\text{Distancia}_H}$ .

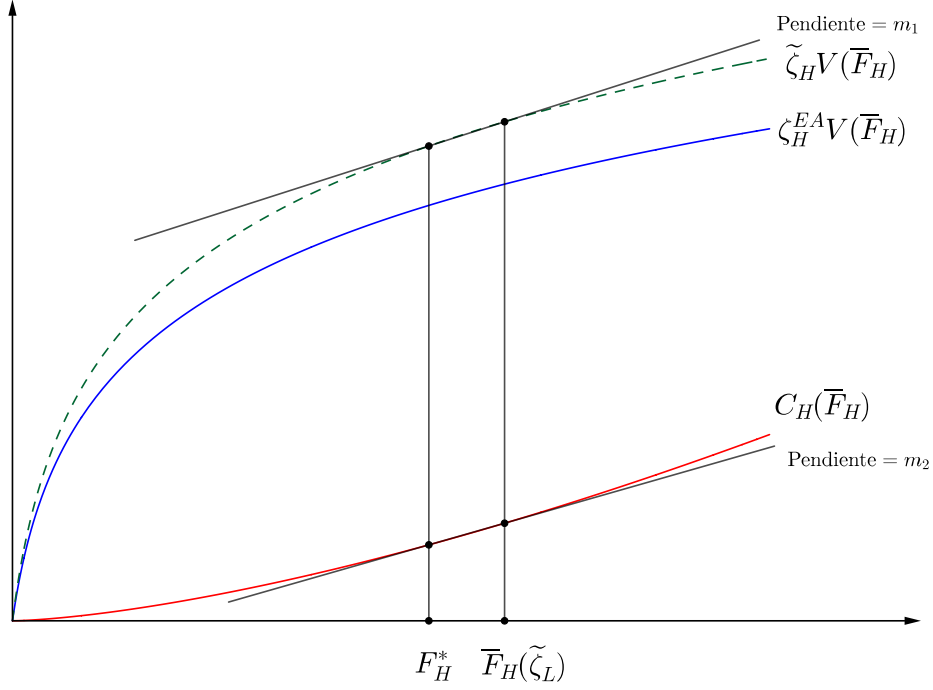


Figura 3.4: Condición Gráfica  $\pi_{\text{Tarifa}_H} \geq \pi_{\text{Distancia}_H}$  al considerar  $\tilde{\zeta}_H > \zeta_H^{EA}$ .

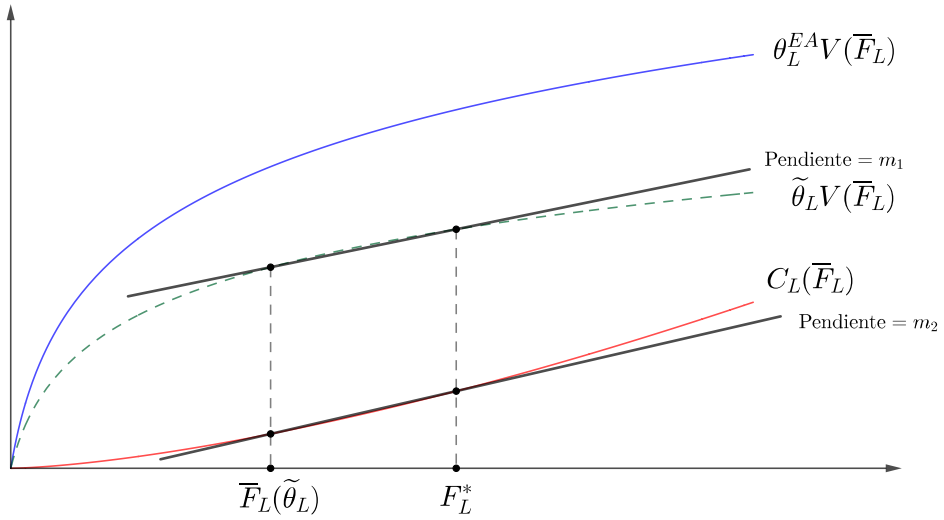


Figura 3.5: Condición Gráfica  $\pi_{\text{Tarifa}_H} \geq \pi_{\text{Distancia}_H}$  al considerar  $\tilde{\zeta}_H < \zeta_H^{EA}$ .

Bajo el mismo argumento, es posible presentar la siguiente proposición sin demostración:

**Proposición 3.9** Para cualquier  $\tilde{\zeta}_H := \frac{\tilde{\theta}_H}{\tilde{\alpha}} \in (0, \infty)$ , una condición necesaria y suficiente para que  $\pi_{\text{Tarifa}_H}(\tilde{\zeta}_H) \geq \pi_{\text{Distancia}_H}(\tilde{\zeta}_H)$  es

$$\tilde{\zeta}_H V'(\bar{F}_H(\tilde{\zeta}_H)) \geq C'_H(\bar{F}_H(\tilde{\zeta}_H))$$

### 3.5.4.3. Síntesis - Profit Total

Con los resultados presentados en las Subsecciones 3.5.4.1 y 3.5.4.2, es posible comentar sobre la relación de orden del profit global bajo cada programa antes cambios *ceteris paribus* en los valores esperados de los parámetros de demanda, a saber:

- Cambios en  $N_H$  o  $N_L$  no cambian la situación ex-ante, esto es

$$\pi_{\text{Distancia}} = \pi_{\text{Tarifa}}$$

en tanto que las soluciones (precios y recompensas) no dependen de estos parámetros para ninguno de los programas.

- Cambios en  $\theta_H$  y/o  $\alpha$  no provocan cambios en el precio y nivel de recompensa asignado a la clase de ocio, por lo que la Proposición 3.9 establece condiciones necesarias y suficientes para tener

$$\pi_{\text{Tarifa}} \geq \pi_{\text{Distancia}}$$

para cualquier valor ex-post de estos parámetros.

- Cambios en  $\theta_L$  provocan cambios en las soluciones de ambas clases, y tenemos conclusiones distintas para cada una de estas:
  - Para la clase de ocio, bajo las condiciones de la Proposición 3.8, se tiene que para cualquier valor de este parámetro

$$\pi_{\text{Tarifa}_L} \geq \pi_{\text{Distancia}_L}$$

- Para la clase de negocio, existe una zona donde  $\pi_{\text{Tarifa}_H} > \pi_{\text{Distancia}_H}$  ( $\theta_L$  lo suficientemente pequeño con respecto al valor ex-ante), y otra donde  $\pi_{\text{Tarifa}_H} < \pi_{\text{Distancia}_H}$  ( $\theta_L$  lo suficientemente grande con respecto al valor ex-ante)

Sin embargo, si  $N_L$  es lo suficientemente grande con respecto a  $N_H$ , el efecto de los usuarios de ocio domina al efecto de los usuarios de negocio, por lo que las condiciones de la Proposición 3.8 son suficientes para asegurar que globalmente

$$\pi_{\text{Tarifa}} \geq \pi_{\text{Distancia}}$$

## 3.6. Simulaciones - Demanda Inelástica

A fin de contrastar numéricamente lo presentado en secciones anteriores, se muestran a continuación los resultados obtenidos al simular el comportamiento óptimo de una aerolínea bajo un programa óptimo, por tarifa pagada y por distancia volada.

Las funciones  $V$  y  $C$  que caracterizan la utilidad de los pasajeros en función de las millas y el costo de las mismas respectivamente fueron escogidas de manera de satisfacer la hipótesis de la Proposición 3.5, además de las hipótesis de la Proposición 3.7 para los parámetros  $\alpha, \theta_L, \theta_H, N_L, N_H$  de la fase de diseño. Estos últimos fueron ajustados de manera de representar de manera aproximada uno de los mercados con mayor demanda dominados por Southwest: San Diego - Oakland<sup>14</sup>, ajustándolos de manera de obtener resultados cercanos a los reales al realizar el diseño de un programa por tarifa pagada como en el caso de dicha aerolínea.

El resumen de las funciones y valores utilizados es presentado en la Tabla 3.4.

Tabla 3.4: Funciones y Parámetros Utilizados en Simulación.

|            |                           |
|------------|---------------------------|
| $V(F)$     | $\log(0.025F)$            |
| $C_H(F_H)$ | $\frac{1}{20}F_H$         |
| $C_L(F_L)$ | $\frac{1}{20}F_L$         |
| $\alpha$   | 0.58                      |
| $\theta_L$ | 43                        |
| $\theta_H$ | 70                        |
| $N_H$      | 1769 <sup>a</sup>         |
| $N_L$      | 7897 <sup>a</sup>         |
| $U_0$      | 35                        |
| Distancia  | 446 Millas                |
| $c_{op}$   | 11.22¢/milla <sup>b</sup> |

<sup>a</sup> Valores dados por encuesta D1B1 2017 Q1.

<sup>b</sup> Southwest Airlines Reports 2017.

La programación y la optimización numérica fueron realizadas utilizando el software AMPL a través del solver MINOS<sup>15</sup>, que como indica su manual (Murtagh y Saunders, 2003), se basa para el caso de un problema con función objetivo no lineal y restricciones no lineales en un algoritmo de *gradiente proyectado* (Robinson, 1972). Notemos que la existencia y unicidad del óptimo global en el caso de los programas durante la etapa de diseño está asegurada de manera trivial, en cuanto durante esta fase los programas reales son equivalentes al programa óptimo, con solución analítica presentada en la Sección 3.2.

Durante la fase ex-post, la solución del programa por distancia volada es única y caracterizada por las restricciones (IC-H) y (PC-H) (Subsección 3.5.1), sin embargo la existencia de una solución para el caso del programa por tarifa ex-post no es fácil de asegurar, ya que bajo condiciones generales no es posible mostrar que el conjunto factible es acotado (y por tanto,

<sup>14</sup> 9682 pax volados según 10% de datos recogidos por encuesta D1B1 2017, con 99.8% de Market Share por parte de Southwest.

<sup>15</sup> Con códigos presentados en el Apéndice F.1

compacto en  $\mathbb{R}^2$ ) o bien que la función objetivo es coerciva<sup>16</sup>. Estos problemas son omitidos durante esta simulación, en tanto que la elección de  $V$  y  $C$  permite tener coercividad de la función objetivo, y por tanto existencia de un máximo global.

### 3.6.1. Resultados

Para replicar el comportamiento de una aerolínea, inicialmente se simuló una fase ex-ante donde la aerolínea diseña su programa (ya sea basado en distancia o tarifa), y posteriormente se enfrenta a una fase ex-post, la cual es simulada variando alguno de los parámetros de demanda o preferencias, manteniendo fijos los multiplicadores de recompensas óptimos para la fase de diseño.

Los resultados de la fase inicial son presentados en la Tabla 3.5 y son interesantes en cuanto entregan multiplicadores con una razón cercana a 2:1 para el caso del programa por tarifa pagada y cercana a 5:1 para el caso del programa por distancia volada, tal como se ve de manera empírica en la industria: e.g. Southwest ofrece 12 puntos por dólar para la tarifa Business Select y 6 puntos por dólar para la tarifa Wanna Get Away, mientras que Air Canada solía ofrecer el 125 % de las millas voladas para la tarifa Premium Economy y el 25 % para la tarifa Tango. Además, la tarifa promedio al considerar los precios calculados resulta \$175, muy cercana a la tarifa media informada para este mercado (SAN-OAK) por la encuesta D1B1 2016, correspondiente a \$171.

Tabla 3.5: Resultados Simulación - Fase de Diseño.

|               |       |
|---------------|-------|
| $F_L$         | 447   |
| $F_H$         | 2374  |
| $P_L$         | \$140 |
| $P_H$         | \$333 |
| $\bar{k}_L^T$ | 3.20  |
| $\bar{k}_H^T$ | 7.13  |
| $\bar{k}_L^D$ | 1.00  |
| $\bar{k}_H^D$ | 5.32  |

Los resultados de la simulación correspondiente a la fase ex-post son mostradas en las Figuras 3.6 a 3.11 para cambios sobre  $\theta_L^{EA}$ : el profit del programa por tarifa pagada resulta en todos los casos mayor al del programa por distancia volada (Figura 3.7) como se esperaba, sin embargo este último es capaz de reducir la brecha para valores de  $\theta_L$  lo suficientemente pequeños, para los cuales cierra la clase baja y sirve solo a la clase alta<sup>17</sup> (triángulos en Figura 3.6), mejorando así la tendencia lineal de reducción que presenta  $\pi_{\text{Distancia}}$  al reducir  $\theta_L$ . Notamos sin embargo que la aerolínea bajo el programa óptimo y el programa por tarifa pagada nunca cierra la clase más baja en estas simulaciones, lo que es consistente con lo comentado en la Subsección 3.5.3.

<sup>16</sup> Cuando escribimos el problema que resuelve la aerolínea como uno de minimización.

<sup>17</sup> Para el problema con cierre de la clase baja se introdujo una restricción de no negatividad sobre  $U_H$ , de manera de evitar tener  $P_H \rightarrow \infty$ .

Los comportamientos de las soluciones (Figuras 3.8 a 3.11) son también completamente esperables: debido a la posibilidad de mover recompensas bajo un programa por tarifa, las tarifas fijadas bajo este resultan mucho más cercanas a las óptimas que bajo un programa por distancia volada, lo que resulta claro al observar la evolución de  $P_H$  (Figura 3.11), en el cual el programa por tarifa es capaz de replicar el comportamiento convexo dado por el programa óptimo (pese a que no logra la misma magnitud de movimientos), a diferencia del programa por distancia volada que es solo capaz de mover linealmente los mismos.

Los resultados de la simulación ex-post frente a cambios en  $\theta_H^{EA}$  son presentados en las Figuras 3.12 a 3.17, con interpretaciones similares a las del caso anterior, con la diferencia de que ahora los programas reales coinciden siempre en  $F_L, P_L$  (y coinciden con los valores ex-ante) debido a que la aerolínea le extrae todo el excedente a los consumidores de ocio durante la fase de diseño, y posteriormente no cambia ninguno de los parámetros que los involucran.

En esta sección se omite la presentación de resultados frente a cambios en  $\alpha^{EA}$ , debido a que estos pueden ser absorbidos como cambios en  $\theta_H^{EA}$ ; o bien cambios en  $N_H^{EA}$  o  $N_L^{EA}$  debido a que, como se comentó, estos parámetros no intervienen en las soluciones ex-post de los programas reales, y por tanto no cambian la situación ex-ante donde los programas son equivalentes entre ellos (aunque si provocan que dejen de ser equivalentes al programa óptimo).

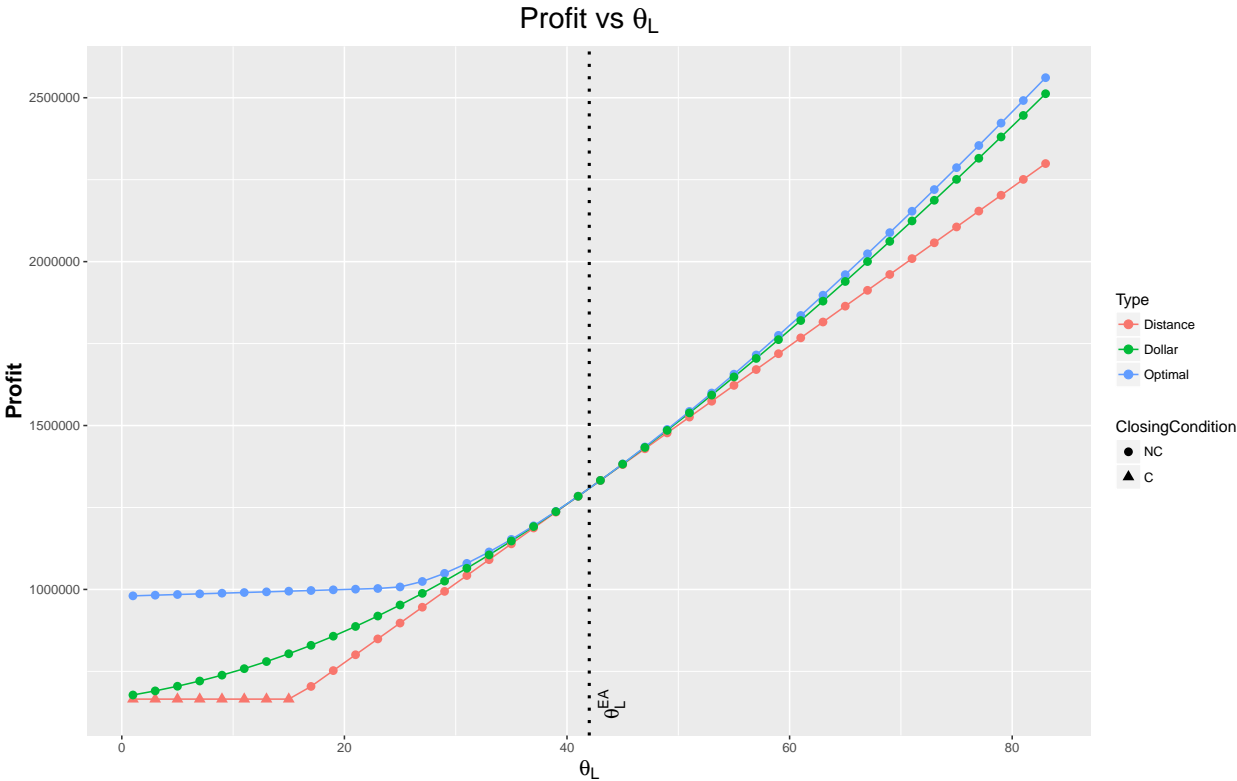


Figura 3.6: Comparación de profits versus cambio en  $\theta_L^{EA}$ .

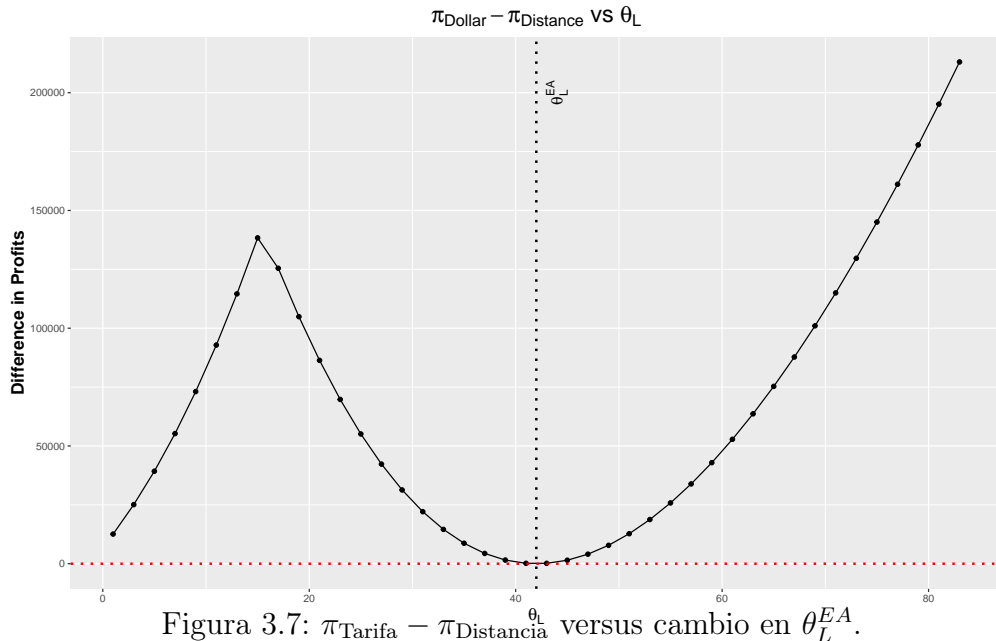


Figura 3.7:  $\pi_{\text{Tarifa}} - \pi_{\text{Distancia}}$  versus cambio en  $\theta_L^{EA}$ .

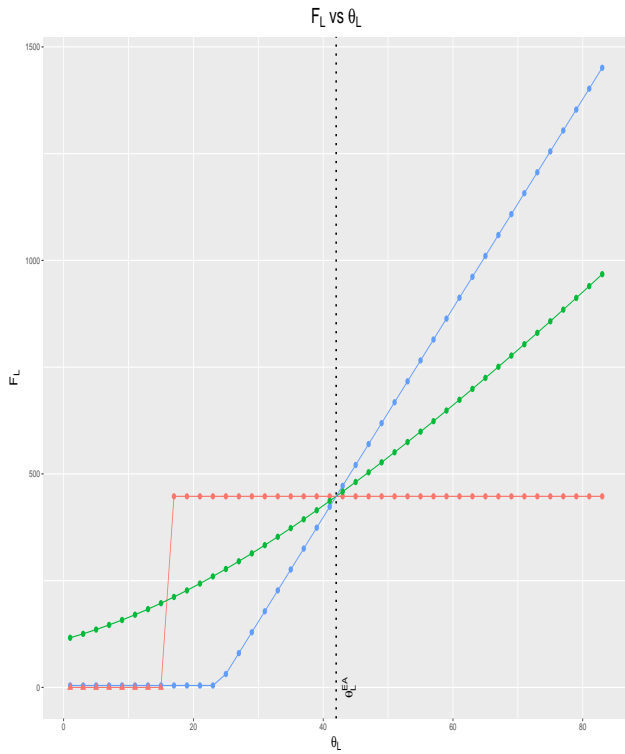


Figura 3.8:  $F_L$  versus cambio en  $\theta_L^{EA}$ .

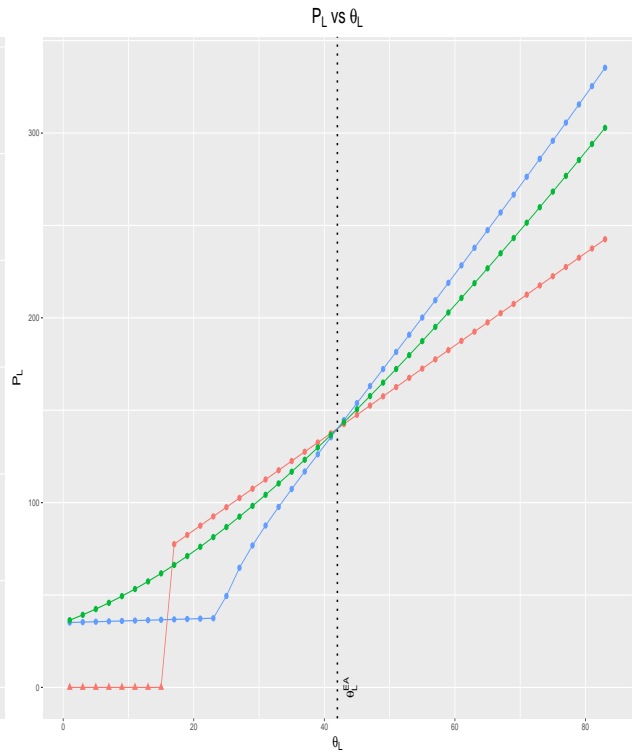


Figura 3.9:  $P_L$  versus cambio en  $\theta_L^{EA}$ .

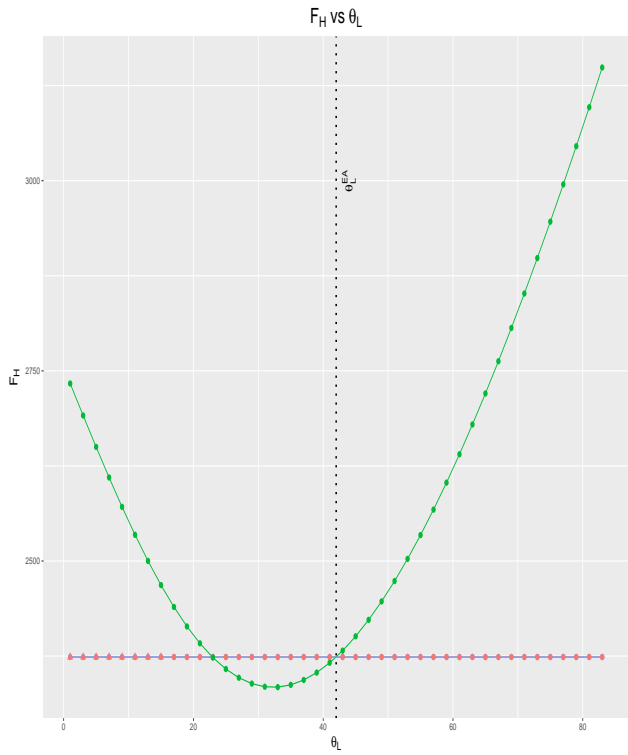


Figura 3.10:  $F_H$  versus cambio en  $\theta_L^{EA}$ .

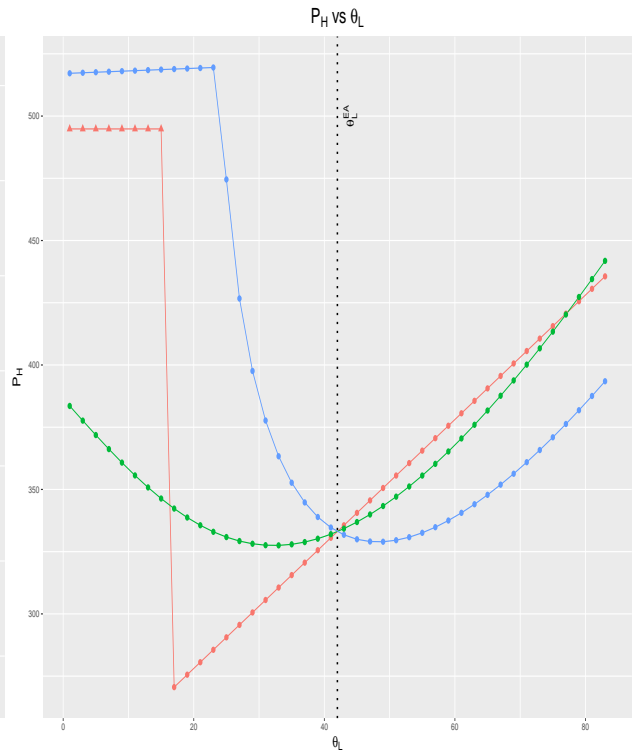


Figura 3.11:  $P_H$  versus cambio en  $\theta_L^{EA}$ .

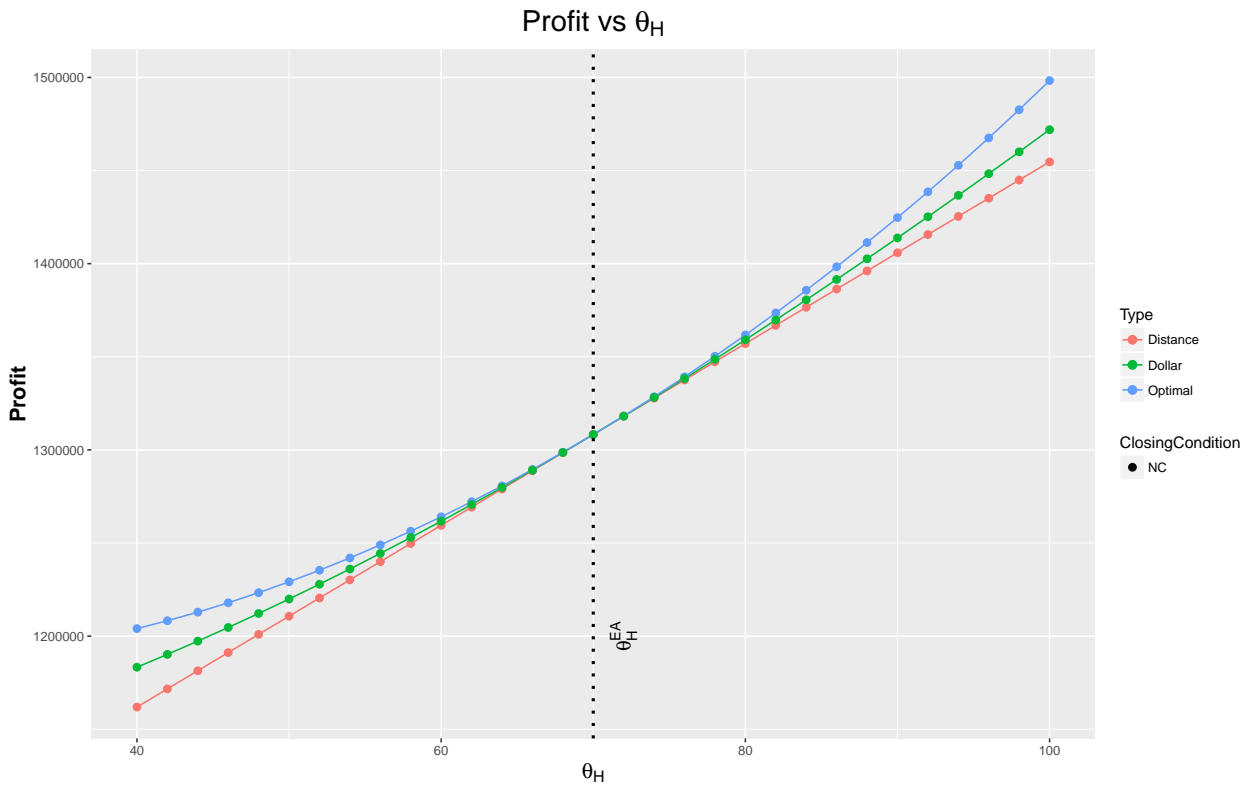


Figura 3.12: Comparación de profits versus cambio en  $\theta_H^{EA}$ .



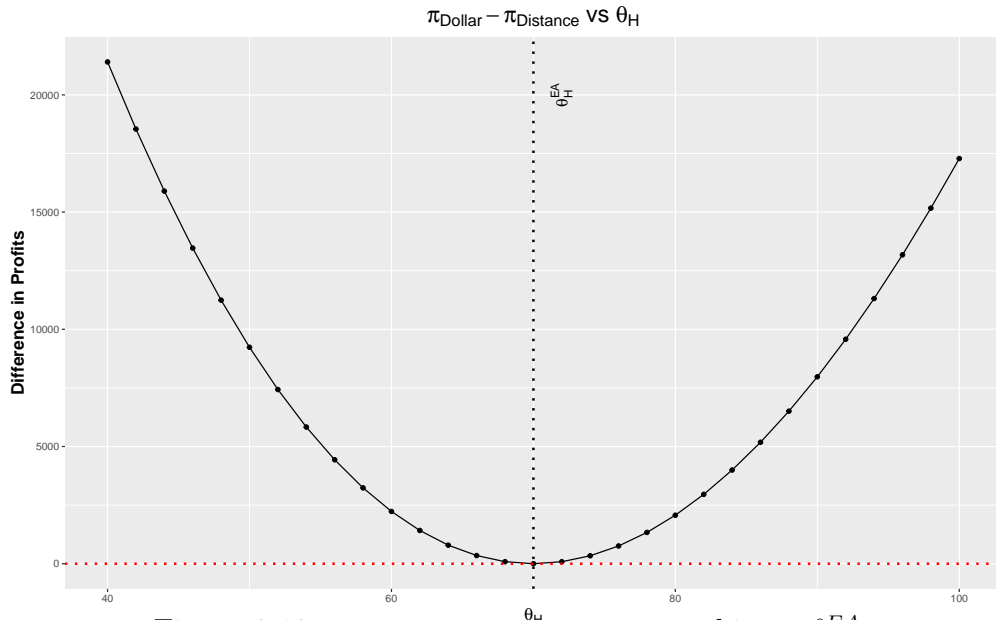


Figura 3.13:  $\pi_{\text{Tarifa}} - \pi_{\text{Distancia}}$  versus cambio en  $\theta_H^{EA}$ .

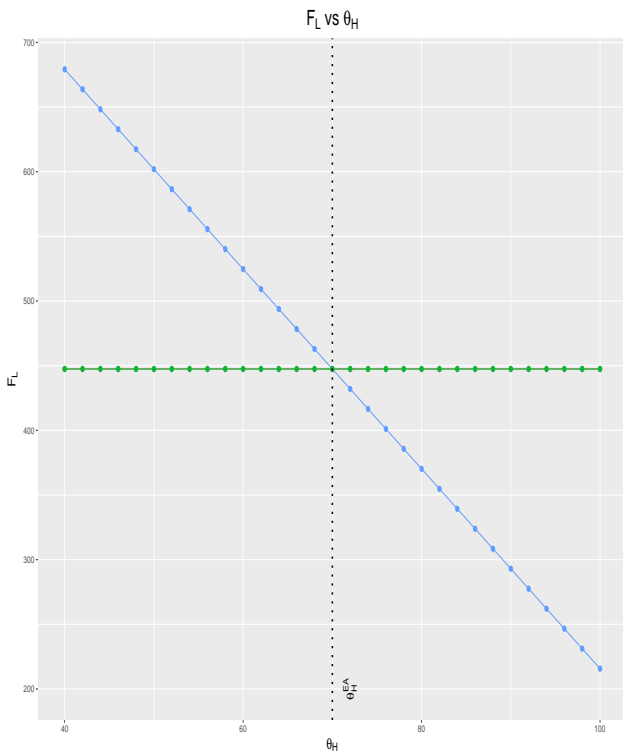


Figura 3.14:  $F_L$  versus cambio en  $\theta_H^{EA}$ .

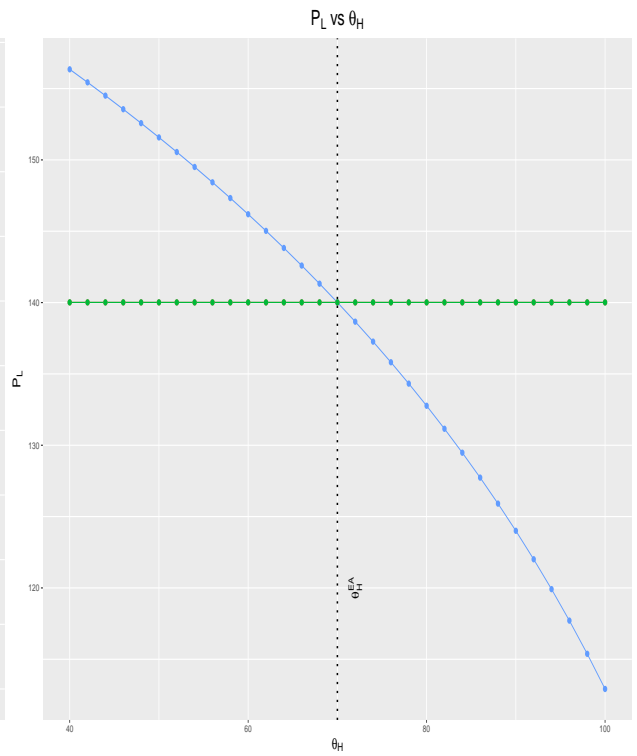


Figura 3.15:  $P_L$  versus cambio en  $\theta_H^{EA}$ .

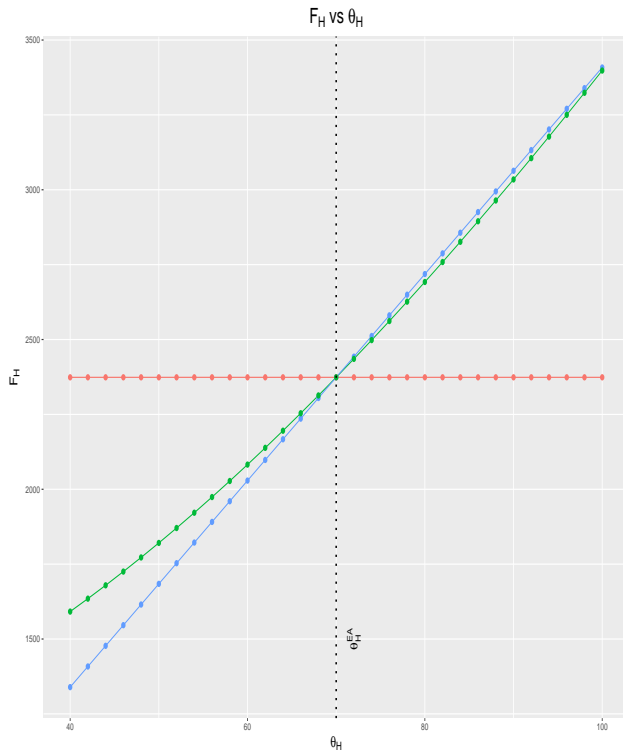


Figura 3.16:  $F_H$  versus cambio en  $\theta_H^{EA}$ .

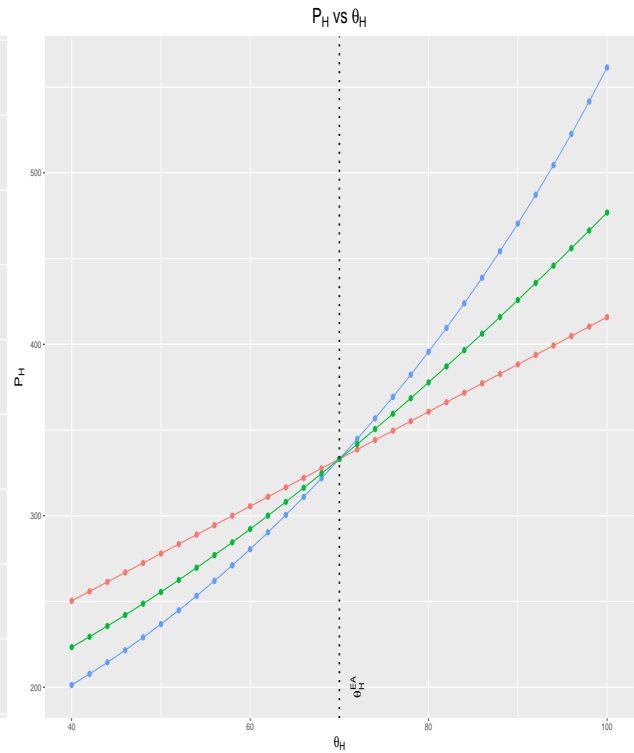


Figura 3.17:  $P_H$  versus cambio en  $\theta_H^{EA}$ .

### 3.7. Evidencia Sugestiva

En esta sección se presenta evidencia dada por datos reales que muestran tendencias similares a las predichas por el modelo, en particular en lo relacionado al cierre de clases comentado en la Subsección 3.5.3 y a lo obtenido en las simulaciones de la Sección 3.6.

Para esto, se recolectó data de tres aerolíneas: LATAM Airlines, Air Canada y Southwest Airlines, desde octubre a noviembre de 2014. Esta información hace referencia a vuelos entre cuatro pares de ciudades en Chile, Canadá y Estados Unidos. Al momento de recolección de los datos, tanto LATAM Airlines como Air Canada ofrecían un programa basado en la distancia volada, mientras que Southwest ofrecía un programa basado en la tarifa pagada.

La información intenta representar dos escenarios: vuelos ida y vuelta entre cada par de ciudades en un día laboral (ida entre 6:00 y 8:00, vuelta entre las 18:00 y 23:00) que presumiblemente atraen a una alta proporción de viajeros de negocio; y vuelos ida y vuelta en un fin de semana (ida viernes entre 17:00 y 20:00, vuelta domingo), en donde ocurre la situación inversa y los viajeros de ocio son los dominantes.

La información es resumida en las Tablas 3.6 a 3.8, que muestra el porcentaje del tiempo dentro de la información recolectada en que cada clase está disponible para la venta. Los resultados muestran que las aerolíneas con un programa por distancia cierran la clase baja de manera mucho más frecuente (68% y 34% del tiempo en promedio respectivamente) que

Southwest con un programa por tarifa pagada, la cual cerró la clase más baja solo una vez (correspondiente a menos del 1% de la información recolectada), comportamiento que es predicho por el modelo. Las tendencias de cierre además son fácilmente interpretables, ya que ocurren con mayor frecuencia en días laborales, donde los pasajeros de ocio son menos atractivos para la aerolínea al compararlos con los usuarios de negocio, y por tanto la ganancia en profit al no separar clases compensa la pérdida de revenue asociado a esta clase, situación similar a lo obtenido en simulaciones para  $\theta_L$  lo suficientemente pequeño (Figura 3.6).

Tabla 3.6: Porcentaje de disponibilidad de clases - LATAM Airlines.

| OD                      | Tipo Día      | Base <sup>a</sup> | Base Plus <sup>b</sup> | Flexible <sup>b</sup> | Full Flexible <sup>c</sup> |
|-------------------------|---------------|-------------------|------------------------|-----------------------|----------------------------|
| Santiago - Antofagasta  | Laboral       | 0 %               | 0 %                    | 0 %                   | 100 %                      |
|                         | Fin de Semana | 100 %             | 100 %                  | 100 %                 | 100 %                      |
| Santiago - Puerto Montt | Laboral       | 0 %               | 0 %                    | 92 %                  | 100 %                      |
|                         | Fin de Semana | 23 %              | 84 %                   | 100 %                 | 100 %                      |
| Promedio                |               | 32 %              | 47 %                   | 74 %                  | 100 %                      |

<sup>a</sup> Acumulación de 25 % de km volados.

<sup>b</sup> Acumulación de 100 % de km volados.

<sup>c</sup> Acumulación de 125 % de km volados.

Tabla 3.7: Porcentaje de disponibilidad de clases - Air Canada.

| OD                  | Tipo Día      | Tango <sup>a</sup> | Flex <sup>b</sup> | Latitude <sup>c</sup> |
|---------------------|---------------|--------------------|-------------------|-----------------------|
| Toronto - Vancouver | Laboral       | 41 %               | 93 %              | 100 %                 |
|                     | Fin de Semana | 93 %               | 100 %             | 100 %                 |
| Promedio            |               | 66 %               | 96 %              | 100 %                 |

<sup>a</sup> Acumulación de 25 % de km volados.

<sup>b</sup> Acumulación de 100 % de km volados.

<sup>c</sup> Acumulación de 125 % de km volados.

Tabla 3.8: Porcentaje de disponibilidad de clases - Southwest Airlines.

| OD               | Tipo Día      | Wanna Get Away <sup>a</sup> | Anytime <sup>b</sup> | Business Select <sup>c</sup> |
|------------------|---------------|-----------------------------|----------------------|------------------------------|
| Boston - Chicago | Laboral       | 100 %                       | 100 %                | 100 %                        |
|                  | Fin de Semana | 99 %                        | 100 %                | 100 %                        |
| Promedio         |               | 99 %                        | 100 %                | 100 %                        |

<sup>a</sup> Acumulación de 6 puntos por dólar gastado.

<sup>b</sup> Acumulación de 10 puntos por dólar gastado.

<sup>c</sup> Acumulación de 12 puntos por dólar gastado.

### 3.8. Monopolio Bajo Programa Óptimo, Demanda Elástica

Como extensión a lo realizado por Feres (2013) y mostrado en la Sección 3.2, se introduce en esta sección una distribución de los viajeros de ambas clases, de manera de que las demandas presenten elasticidad. Para esto, introduciremos diferenciación horizontal en el caso de los viajeros de ocio, distribuyéndolos a lo largo de una línea de Hotelling, donde la firma no conoce la ubicación exacta de cada viajero, sino que solo su distribución. Con esto, la utilidad de estos viajeros resulta

$$U_L(P_L, F_L, z) = U_0 + \theta_L V(F_L) - P_L - tz$$

donde  $t$  corresponde a un costo de transporte y  $z \in [0, 1]$  a la distancia del viajero a la firma. Como es usual, este costo puede representar diferencias en la valoración del producto por parte de los viajeros, o bien literalmente diferencias en el costo a incurrir para acceder al servicio.

Esta clase de diferenciación horizontal en conjunto con discriminación de precios de segundo grado ha sido estudiada por Spulber (1989) y Stole (2007) para el caso con competencia, y por Rochet y Stole (2002) en el caso de un monopolio discriminante, trabajo con análogos a lo presentado a continuación que serán oportunamente comentados. Sin embargo, estos trabajos suponen que esta diferenciación horizontal está presente en todas las clases de usuarios, lo que permite encontrar resultados simétricos para éstas, pero debido a que el modelo aquí propuesto no incluye en general una restricción de no negatividad de la utilidad para el caso de los viajeros de negocio (debido a que el viaje es una condición de su trabajo), la elasticidad para esta clase será introducida a través de una distribución en el precio de reserva, i.e. se supone

$$R \sim X$$

con  $X$  una distribución de probabilidad con soporte compacto  $[\underline{R}, \overline{R}]$ , i.e. si  $P_H \leq \underline{R}$  todos los viajeros de negocio viajan, si  $P_H \geq \overline{R}$  ningún pasajero de negocio viaja, y para valores intermedios viajará una fracción del total que depende de  $X$ .

Con lo anterior, el problema que resuelve la firma es ahora

$$\begin{aligned}
 \text{(Elást. Ópt) máx} \quad & \pi(P_H, P_L, F_H, F_L, z) = N_L(z)(P_L - C_L(F_L)) + N_H(P_H)(P_H - C_H(F_H)) \\
 & \quad \quad \quad - c_{op} \cdot (N_L(z) + N_H(P_H)) \\
 \text{s.a.} \quad & \theta_H V(F_H) - \alpha P_H \geq \theta_H V(F_L) - \alpha P_L & \text{(IC-H)} \\
 & \theta_L V(F_L) - P_L \geq \theta_L V(F_H) - P_H & \text{(IC-L)} \\
 & \overline{R} \geq P_H \\
 & U_0 + \theta_L V(F_L) - P_L - tz \geq 0 & \text{(PC-L)} \\
 & F_H, F_L, P_H, P_L, z \geq 0
 \end{aligned}$$

Notemos que no exigimos  $P_H \geq \underline{R}$ , en tanto que puede ser óptimo fijar un precio más bajo, pero por otro lado, la firma no tiene incentivos para fijar  $P_H > \overline{R}$ , debido a que en ese caso

no viajarán pasajeros de negocio y por tanto no percibirán beneficio asociado a este precio más alto.

En este problema, la firma busca al último pasajero de ocio dispuesto a viajar, es decir, el viajero que cumple

$$U_L(P_L^*, F_L^*, z^*) = 0$$

por tanto

$$z^* = z^*(P_L^*, F_L^*) = \frac{U_0 + \theta_L V(F_L^*) - P_L^*}{t}$$

Así, podemos expresar directamente

$$N_L(z) = N_L z^* = N_L \frac{U_0 + \theta_L V(F_L^*) - P_L^*}{t}$$

Notemos que sabemos a priori que  $z^* \in [0, 1]$ , lo que no está incluido directamente en el modelo, pero que sin embargo es recuperado de manera natural, ya que  $z^* < 0$  implica que ningún pasajero de ocio viaja, eliminando cualquier posible ventaja asociada a aumentar la holgura en precios y recompensas de (PC-L). Por otro lado, la firma no tiene incentivo a fijar  $z^* > 1$ , debido a que una vez que alcanza  $z^* = 1$ , todos los pasajeros viajan, y un aumento en  $z^*$  produce una disminución en el lado izquierdo de (PC-L), disminuyendo el precio máximo posible a fijar a los usuarios de ocio.

Para el caso de los viajeros de negocio, asumimos que

$$R \sim X$$

con  $X$  una distribución de probabilidad con soporte en  $[\underline{R}, \overline{R}]$ . Con esto se tiene

$$N_H(P_H) = N_H(1 - F_X(P_H^*))$$

con  $F_X$  la función de distribución acumulada de  $X$ . Se analizará el caso particular en donde  $R \sim \mathcal{U}(\underline{R}, \overline{R})$ , y por tanto se tiene

$$N_H(P_H) = N_H \cdot \min \left\{ \frac{\overline{R} - P_H}{\overline{R} - \underline{R}}, 1 \right\}$$

Llamando  $t_R = \overline{R} - \underline{R}$ , el profit que maximiza la firma es entonces

$$\pi(P_H, P_L, F_H, F_L) = N_L \frac{U_0 + \theta_L V(F_L) - P_L}{t} (P_L - C_L(F_L) - c_{op}) + N_H \cdot \min \left\{ \frac{\overline{R} - P_H}{t_R}, 1 \right\} (P_H - C_H(F_H) - c_{op})$$

Notemos que si estudiamos el caso en donde el precio fijado por la aerolínea para la clase alta cumple  $P_H^* \leq \underline{R}$ , se tiene que

$$\min \left\{ \frac{\overline{R} - P_H}{t_R}, 1 \right\} = 1$$

por lo que el profit a maximizar por la aerolínea es

$$\pi(P_H, P_L, F_H, F_L) = N_L \frac{U_0 + \theta_L V(F_L) - P_L}{t} (P_L - C_L(F_L) - c_{op}) + N_H (P_H - C_H(F_H) - c_{op})$$

es decir, el mismo profit que en un problema con demanda semielástica, donde solo la clase baja presenta elasticidad (a través de una distribución sobre una línea de Hotelling). Este problema ya fue estudiado en detalle por Feres (2013), por lo que se omite de este análisis.

Por tanto, supongamos cotas para el precio de reserva tales que aseguren una solución interior en  $P_H$  (entendiendo que además el caso donde  $P_H^* = \bar{R}$  no es razonable, debido a que no existe demanda de viajeros de negocio), i.e.

$$\underline{R} < P_H^* < \bar{R}$$

Hagamos el cambio de variables

$$u_L = U_0 + \theta_L V(F_L) - P_L \quad (3.31)$$

$$u_H = \frac{\theta_H}{\alpha} V(F_H) - P_H \quad (3.32)$$

con lo que el profit a maximizar por la firma se transforma en:

$$\begin{aligned} \pi(P_H, P_L, F_H, F_L) &= N_L \frac{u_L}{t} (\theta_L V(F_L) - u_L - C_L(F_L) - c_{op}) \\ &\quad + N_H \frac{\bar{R} - \left( \frac{\theta_H}{\alpha} V(F_H) - u_H \right)}{t_R} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} V(F_H) - u_H - C_H(F_H) - c_{op} \right) \\ &= -\frac{N_L}{t} u_L^2 + \frac{N_L}{t} (\theta_L V(F_L) - C_L(F_L) - c_{op}) u_L \\ &\quad - \frac{N_H}{t_R} u_H^2 + \frac{N_H}{t_R} \left( 2 \frac{\theta_H}{\alpha} V(F_H) - C_H(F_H) - c_{op} - \bar{R} \right) u_H \\ &\quad + \frac{N_H}{t_R} \left( \bar{R} - \frac{\theta_H}{\alpha} V(F_H) \right) \left( \frac{\theta_H}{\alpha} V(F_H) - C_H(F_H) - c_{op} \right) \\ &:= \beta_L u_L^2 + \gamma_L(F_L) u_L + \beta_H u_H^2 + \gamma_H(F_H) u_H + \delta_H(F_H) \end{aligned} \quad (3.33)$$

es decir, el profit de la firma presenta un comportamiento cuadrático en  $u_L$  y  $u_H$ . Notemos que el profit es decreciente con  $u_H$  cuando

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial u_H} &= 2\beta_H u_H + \gamma_H < 0 \\ \Leftrightarrow u_H &> -\frac{\gamma_H}{\beta_H} \end{aligned}$$

donde se usó que  $\beta_H < 0$ . Naturalmente, el profit es creciente con  $u_H$  cuando  $u_H < -\frac{\gamma_H}{\beta_H}$ .

Con esto, el problema que resuelve la firma es, al recordar que consideramos soluciones interiores en  $F_H$ :

$$\begin{aligned} \text{(Elast. Ópt')} \quad \text{máx} \quad & \pi(u_H, u_L, F_H, F_L) = \beta_L u_L^2 + \gamma_L(F_L)u_L + \beta_H u_H^2 + \gamma_H(F_H)u_H + \delta_H(F_H) \\ \text{s.a.} \quad & V(F_H) \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) \geq u_H - u_L + U_0 \end{aligned} \quad (\text{R1})$$

$$u_H - u_L + U_0 \geq V(F_L) \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) \quad (\text{R2})$$

$$F_L, F_H \geq 0 \quad (\text{R3})$$

**Proposición 3.10** Sea  $(u_H^*, u_L^*, F_H^*, F_L^*)$  la asignación óptima de utilidades y recompensas para **(Elást. Ópt')**. A menos que se cumplan simultáneamente las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} u_H^* &= -\frac{\gamma_H}{\beta_H} = 2\frac{\theta_H}{\alpha}V(F_H^*) - C_H(F_H^*) - c_{op} - \bar{R} \\ u_L^* &= -\frac{\gamma_L}{\beta_L} = \theta_L V(F_L^*) - C_L(F_L^*) - c_{op} \end{aligned} \quad (3.34)$$

la solución del problema activa al menos una de las restricciones de compatibilidad de incentivos (R1) ó (R2).

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $(u_H^*, u_L^*, F_H^*, F_L^*)$  corresponde a una solución interior, i.e. (R1) y (R2) son inactivas en estos puntos. Sin embargo, si

$$u_H^* > -\frac{\gamma_H}{\beta_H}$$

entonces el incrementar al menos marginalmente  $u_H^*$  provoca un aumento en el profit según lo comentado anteriormente. En caso contrario, si

$$u_H^* < -\frac{\gamma_H}{\beta_H}$$

disminuir marginalmente  $u_H^*$  incrementará el profit. Luego,  $(u_H^*, u_L^*, F_H^*, F_L^*)$  no puede corresponder al óptimo del problema. Un argumento análogo sobre  $u_L^*$  en caso de que no se tenga  $u_L^* = -\frac{\gamma_L}{\beta_L}$  permite concluir.  $\square$

Notemos que la existencia de una solución interior viene dada entonces por las condiciones presentadas en la proposición anterior, pero dado que en ese caso

$$\begin{aligned} u_H^* - u_L^* + U_0 &= \left( 2\frac{\theta_H}{\alpha}V(F_H^*) - C_H(F_H^*) - c_{op} - \bar{R} \right) - (\theta_L V(F_L^*) - C_L(F_L^*) - c_{op}) + U_0 \\ &= V(F_H^*) \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) + \left( \left( \frac{\theta_H}{\alpha} + \theta_L \right) V(F_H^*) + C_L(F_L^*) + U_0 - \theta_L V(F_L^*) - C_H(F_H^*) - \bar{R} \right) \\ &= V(F_L^*) \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) + \left( 2\frac{\theta_H}{\alpha}V(F_H^*) + C_L(F_L^*) + U_0 - \frac{\theta_H}{\alpha}V(F_L^*) - C_H(F_H^*) - \bar{R} \right) \end{aligned}$$

para cumplir las restricciones de compatibilidad de incentivo es necesario que

$$\begin{aligned} \left( \left( \frac{\theta_H}{\alpha} + \theta_L \right) V(F_H^*) + C_L(F_L^*) + U_0 - \theta_L V(F_L^*) - C_H(F_H^*) - \bar{R} \right) &< 0 \\ \left( 2\frac{\theta_H}{\alpha}V(F_H^*) + C_L(F_L^*) + U_0 - \frac{\theta_H}{\alpha}V(F_L^*) - C_H(F_H^*) - \bar{R} \right) &> 0 \end{aligned}$$

llamando  $-(C_L(F_L^*) + U_0 - C_H(F_H^*) - \bar{R}) = \Gamma$ , lo anterior se reduce entonces a

$$\left(\frac{\theta_H}{\alpha} + \theta_L\right) V(F_H^*) - \theta_L V(F_L^*) < \Gamma \quad (3.35)$$

$$2\frac{\theta_H}{\alpha} V(F_H^*) - \frac{\theta_H}{\alpha} V(F_L^*) > \Gamma \quad (3.36)$$

Suponiendo que se tienen estas condiciones, entonces las asignaciones óptimas de recompensas  $(F_L^*, F_H^*)$  a los viajeros vendrán dadas por las condiciones de primer orden sobre **(Elást. Ópt')** irrestricto, es decir por

$$\begin{aligned} \gamma'_L(F_L)u_L = 0 &\Leftrightarrow \theta_L V'(F_L^*) - C'_L(F_L^*) = 0 \\ \gamma'_H(F_H)u_H + \delta'_H(F_H) &= 0 \Leftrightarrow V'(F_H)u_H^* - C'_H(F_H) \left(u_H^* - \frac{\theta_H}{\alpha} V(F_H^*) + \bar{R}\right) = 0 \end{aligned}$$

lo que implica

$$\theta_L V'(F_L^*) = C'_L(F_L^*) \quad (3.37)$$

$$\frac{\theta_H}{\alpha} V'(F_H) = C'_H(F_H) \frac{u_H^* - \frac{\theta_H}{\alpha} V(F_H^*) + \bar{R}}{u_H^*} \quad (3.38)$$

Analicemos lo anterior en el caso donde no hay riesgo moral en el problema ( $\alpha = 1$ ): si la solución es interior con respecto a las restricciones de compatibilidad de incentivos, las recompensas asignadas a los viajeros de ocio son eficientes socialmente (3.37), lo que es un hecho conocido del trabajo de Rochet y Stole (2002), donde al considerar un costo de oportunidad exterior aleatorio (analogable al costo de transporte utilizado en nuestro modelo para los viajeros de ocio) las ineficiencias son generadas únicamente por restricciones de compatibilidad de incentivos activas. En particular, si la restricción (IC-H) es activa, el número de recompensas asignadas a estos viajeros (ocio) presenta una distorsión a la baja.

Lo interesante sin embargo es que aún cuando no existe riesgo moral, los usuarios de negocio (3.38) siempre presentan una distorsión en el número de recompensas recibidas<sup>18</sup>, la que para  $\bar{R}$  lo suficientemente pequeño, es al alza (*upward distortion*): En efecto, si

$$\bar{R} < \frac{\theta_H}{\alpha} V(F_H^*)$$

es directo que

$$\frac{u_H^* - \frac{\theta_H}{\alpha} V(F_H^*) + \bar{R}}{u_H^*} < 1$$

de donde se sigue que las recompensas asignadas a los usuarios de negocio son más altas que en el caso con información perfecta. Esta diferencia se debe a que la elasticidad introducida en nuestro modelo para los usuarios de negocio, distribuyendo el precio de reserva, no es

<sup>18</sup> Excepto en el caso particular donde  $\frac{\theta_H}{\alpha} = \bar{R}$ .



equivalente a lo propuesto por Rochet y Stole (2002), que realiza una distribución sobre la función de utilidad de los individuos.

Otra conclusión importante es que, aún en este caso interior, la solución (al menos para los usuarios de negocio) depende fuertemente del costo marginal del vuelo  $c_{op}$ , en efecto, de la Ecuación (3.34),

$$\frac{\partial u_H^*}{\partial c_{op}} < 0$$

por lo que, siguiendo las Ecuaciones (3.32) y (3.38),

$$\frac{\partial F_H^*}{\partial c_{op}} > 0, \quad \frac{\partial P_H^*}{\partial c_{op}} > 0$$

es decir, la distorsión en el número de recompensas entregadas a los usuarios de negocio se agudiza, con la aerolínea subiendo la tarifa por dos razones: para interiorizar el mayor costo marginal del vuelo y para cobrar el mayor número de recompensas entregadas.

Ahora, retornando al caso no-interior, es fácil descartar el caso donde ambas restricciones de compatibilidad son activas puesto que esto implica  $F_H^* = F_L^*$ . Además, de manera análoga a lo probado por Rochet y Stole (2002), veamos que bajo condiciones razonables la restricción de compatibilidad de incentivos para la clase baja nunca es activa.

**Proposición 3.11** Si los márgenes monopólicos clásicos son crecientes con la clase del viajero (i.e.  $\pi_H > \pi_L$ ), entonces la restricción de compatibilidad de incentivos para los usuarios de ocio (IC-L) en (**Elást. Ópt**) es siempre inactiva.

DEMOSTRACIÓN. Al realizar el cambio de variables

$$\begin{aligned} u_L &= U_0 + \theta_L V(F_L) - P_L \\ u_H &= \frac{\theta_H}{\alpha} V(F_H) - P_H \end{aligned}$$

las restricciones de compatibilidad se escriben

$$V(F_H) \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) \geq u_H - u_L + U_0 \geq V(F_L) \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) \quad (3.39)$$

donde la primera desigualdad corresponde a la transformación de (IC-L). Definiendo

$$\begin{aligned} \pi_L &= P_L - C_L(F_L) - c_{op} \\ \pi_H &= P_H - C_H(F_H) - c_{op} \\ S_L &= \pi_L + u_L \\ S_H &= \pi_H + u_H \end{aligned}$$

podemos reescribir (3.39) como

$$(S_H - S_L - U_0) - V(F_H) \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) \leq \pi_H - \pi_L \leq (S_H - S_L - U_0) - V(F_L) \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right)$$

Supongamos que (IC-L) es activa, i.e.

$$(S_H - S_L - U_0) - V(F_H) \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) = \pi_H - \pi_L \quad (3.40)$$

Notemos que el hecho de que (IC-L) sea activa y (IC-H) inactiva provoca que el número de recompensas asignado a los usuarios de ocio sea el eficiente, i.e.

$$\theta_L V(F_L^*) = C'_L(F_L^*)$$

ya que como se comentó en el caso de una solución interior, dado el tipo de elasticidad utilizada, los usuarios de ocio mantienen las propiedades encontradas por Rochet y Stole (2002), en particular su asignación es ineficiente (*downward distortion*) solo si (IC-H) es activa. Por otro lado, los usuarios de negocio presentan una distorsión al alza<sup>19</sup>, dada por el tipo de elasticidad introducida y por el hecho de que (IC-L) es activa, luego  $F_H^* \geq F_H^{fb}$ , donde

$$\frac{\theta_H}{\alpha} V(F_H^{fb}) = C'_H(F_H^{fb})$$

Notemos sin embargo que

$$\begin{aligned} (S_H - S_L - U_0) - V(F_H) \left( \frac{\theta_H^*}{\alpha} - \theta_L \right) &= \left( \frac{\theta_H}{\alpha} V(F_H^*) - C_H(F_H^*) - c_{op} \right) \\ &\quad - (\theta_L V(F_L^*) - C_L(F_L^*) - c_{op}) - V(F_H) \left( \frac{\theta_H^*}{\alpha} - \theta_L \right) \\ &= \underbrace{\theta_L (V(F_H^*) - V(F_L^*)) - (C_H(F_H^*) - C_L(F_L^*))}_A \end{aligned}$$

Veamos que  $A < 0$ . En efecto, definiendo

$$\begin{aligned} G(x) &:= \frac{\theta_L (V(x) - V(F_L^*))}{x - F_L^*} \\ H(x) &:= \frac{C_L(x) - C_L(F_L^*)}{x - F_L^*} \\ I(x) &:= \frac{C_H(x) - C_L(x)}{x - F_L^*} \end{aligned}$$

se tiene que

$$A = (F_H^* - F_L^*)(G(F_H^*) - H(F_H^*) - I(F_H^*))$$

Pero dado que

$$\lim_{x \rightarrow F_L^*+} G(x) = \lim_{x \rightarrow F_L^*+} H(x)$$

debido a que  $F_L^*$  corresponde a la asignación eficiente; utilizando que  $G(x)$  es una función decreciente ( $V$  cóncava) y  $H(x)$  es creciente ( $C$  convexa), se sigue que

$$G(F_H^*) < H(F_H^*)$$

<sup>19</sup> Adicional a la dada por el problema de riesgo moral.

Finalmente, como claramente  $I(F_H^*) > 0$ , se concluye que  $A < 0$  como queríamos. Usando esto en la condición (3.40) encontramos que

$$\pi_H - \pi_L = A < 0$$

lo que contradice el supuesto que los márgenes son crecientes con la clase. Por tanto, (IC-L) no puede ser activa en el óptimo.  $\square$

Gracias a la proposición anterior, a menos que se tengan las desigualdades (3.35) y (3.36) (en cuyo caso existe una solución interior sobre las restricciones de compatibilidad de incentivos), en el óptimo únicamente la restricción (IC-H) asociada a los usuarios de negocio es activa, al igual que en el problema clásico estudiado por Mussa y Rosen (1978), con solución dada por la siguiente proposición:

**Proposición 3.12** Al considerar una solución interior en  $P_H$  ( $\underline{R} < P_H^* < \bar{R}$ ), a menos que se cumplan las desigualdades (3.35) y (3.36), el problema (**Elást. Ópt**) alcanza su óptimo activando solo la restricción (IC-H) y con solución dada por

$$\begin{aligned} \frac{\theta_H}{\alpha} V'(F_H^*) &= \frac{C'_H(F_H^*)}{\Theta(P_H^*, F_H^*, c_{op})} \\ \theta_L V'(F_L^*) &= \frac{C'_L(F_L^*)}{1 - \frac{N_H(P_H^*)}{N_L(z^*)} \left( \frac{\theta_H - \theta_L}{\theta_L} \right) \Theta(P_H^*, F_H^*, c_{op})} \\ P_L^* &= \theta_L V(F_L^*) + U_0 + \frac{t}{t_R} \frac{N_H}{N_L} (\bar{R} - P_H^*) \Theta(P_H^*, F_H^*, c_{op}) - \pi_L(P_L^*, F_L^*, c_{op}) \\ P_H^* &= \frac{\theta_H}{\alpha} (V(F_H^*) - V(F_L^*)) + P_L^* \end{aligned}$$

donde

$$\Theta(P_H^*, F_H^*, c_{op}) = 1 - \frac{\pi_H(P_H^*, F_H^*, c_{op})}{\bar{R} - P_H^*}$$

lo que implica que precios y recompensas varían con  $c_{op}$ .

DEMOSTRACIÓN. Apéndice D.  $\square$

Analizando estos resultados, vemos que la activación de la restricción de compatibilidad de incentivos para la clase de ocio genera una distorsión a la baja en la cantidad de recompensas entregadas a esta clase, aunque de manera menos agresiva que la encontrada para el caso con demanda todo o nada, lo que está relacionado a que en este caso la aerolínea se enfrenta a una pérdida de demanda al disminuir recompensas. Sin embargo, a diferencia del caso con demanda inelástica, el número de recompensas entregadas a la clase de negocio se encuentra distorsionada a la baja (con respecto al caso con información perfecta), lo que es fácilmente interpretable: como la aerolínea pierde demanda al incrementar el precio a esta clase, lo que no puede ser controlado por el número de recompensas entregadas debido al tipo de elasticidad introducida (a diferencia de la clase de ocio, cuya demanda depende de la utilidad, no solo

del precio), termina fijando un precio  $P_H$  más bajo que en el caso con demanda todo o nada, por lo que naturalmente fija posteriormente un nivel de recompensas menor.

Por otro lado, es remarcable el hecho de las soluciones en este caso dependen del costo marginal del vuelo (costo de operación, donde es esperable encontrar precios crecientes con dicho costo), lo que se diferencia de resultados clásicos como los obtenidos por Mussa y Rosen (1978), en donde es posible fijar este costo a cero sin pérdida de generalidad al no incluirse una distribución sobre la demanda. Este hecho además liga a la solución en el caso elástico con características del mercado a servir, ya que en el caso con demanda inelástica nuestros resultados muestran soluciones dependientes solo de la demanda y preferencias de los usuarios, en donde la aerolínea fija precios y recompensas basándose únicamente en los problemas de selección adversa y de riesgo moral. Sin embargo, en el caso elástico pasa a ser relevante en particular la distancia del par OD a servir por la aerolínea: ciudades más distanciadas son más caras de operar, y por tanto los precios resultarán en general mayores que los de un mercado con distancia pequeña.

### 3.9. Simulaciones - Demanda Elástica

De manera análoga a lo presentado en la Sección 3.6, se muestran a continuación los resultados obtenidos al simular el comportamiento óptimo de una aerolínea bajo un programa óptimo, por tarifa pagada y por distancia volada, pero esta vez suponiendo demandas elásticas según lo comentado en la Sección 3.8. Las funciones, parámetros y consideraciones son las mismas presentadas en la Sección 3.6, y se utilizó además  $t = 100$ ,  $\underline{R} = 150$ ,  $\bar{R} = 400$ , valores que están en torno al precio fijado por la aerolínea para la clase de negocio en la fase ex-ante bajo el modelo inelástico (Tabla 3.5).

#### 3.9.1. Resultados

Al igual que en el caso inelástico, se replicó el comportamiento de una aerolínea simulando una fase ex-ante donde la aerolínea diseña su programa, y posteriormente se enfrenta a una fase ex-post, la cual es simulada variando alguno de los parámetros de demanda o preferencias, manteniendo fijos los multiplicadores de recompensas óptimos para la fase de diseño.

Los resultados de la fase inicial (donde naturalmente los tres programas siguen siendo equivalentes) son presentados en la Tabla 3.9 y muestran comportamientos como los comentados en la sección anterior: al compararlos con los valores encontrados en el caso inelástico (Tabla 3.5) vemos que los precios de ambas clases bajan, lo que tiene que ver con el hecho de que la aerolínea enfrenta una pérdida de demanda al aumentar tarifas. En el caso de la clase de ocio esta baja no es tan pronunciada en tanto que la utilidad de estos viajeros es compensada a través de un aumento en el nivel de recompensas  $F_L$  en comparación al caso inelástico. Por el contrario, en el caso de los viajeros de negocio la tarifa se reduce en más de un 40 % versus lo encontrado en la Sección 3.6, lo que como se comentó, está justificado por el hecho de que la aerolínea no puede compensar la pérdida de demanda al subir el precio

$P_H$  con una subida en las recompensas  $F_H$  como si es posible para los viajeros de ocio (pues para los viajeros de negocio la demanda depende únicamente del precio, no de la utilidad). Posteriormente, la única respuesta posible de la aerolínea es asociar a este precio más bajo  $P_H$  una cantidad reducida de recompensas  $F_H$  (un 44.6% de las recompensas entregadas con demanda inelástica). La evolución de las distintas variables al variar el costo de operación  $c_{op}$

Tabla 3.9: Resultados Simulación - Fase de Diseño.

|               |       |
|---------------|-------|
| $F_L$         | 470   |
| $F_H$         | 1060  |
| $P_L$         | \$102 |
| $P_H$         | \$195 |
| $\bar{k}_L^T$ | 4.61  |
| $\bar{k}_H^T$ | 5.45  |
| $\bar{k}_L^D$ | 1.05  |
| $\bar{k}_H^D$ | 2.38  |
| $z$           | 0.40  |

en la fase ex-ante es presentada en las Figuras 3.18 a 3.20 donde nuevamente los resultados resultan intuitivos: el profit y el número de viajeros de ocio servidos disminuye con el costo de operar (Figura 3.18), esto último en directa relación con el hecho de que la aerolínea para enfrentar este mayor costo se ve obligada a reducir el número de recompensas entregadas a ambas clases (Figura 3.19) y aumentar precios (Figura 3.20). Esto provoca el efecto ya comentado: mercados con distancias más largas y por tanto más caros de operar terminarán con tarifas mayores fijadas por la aerolínea.

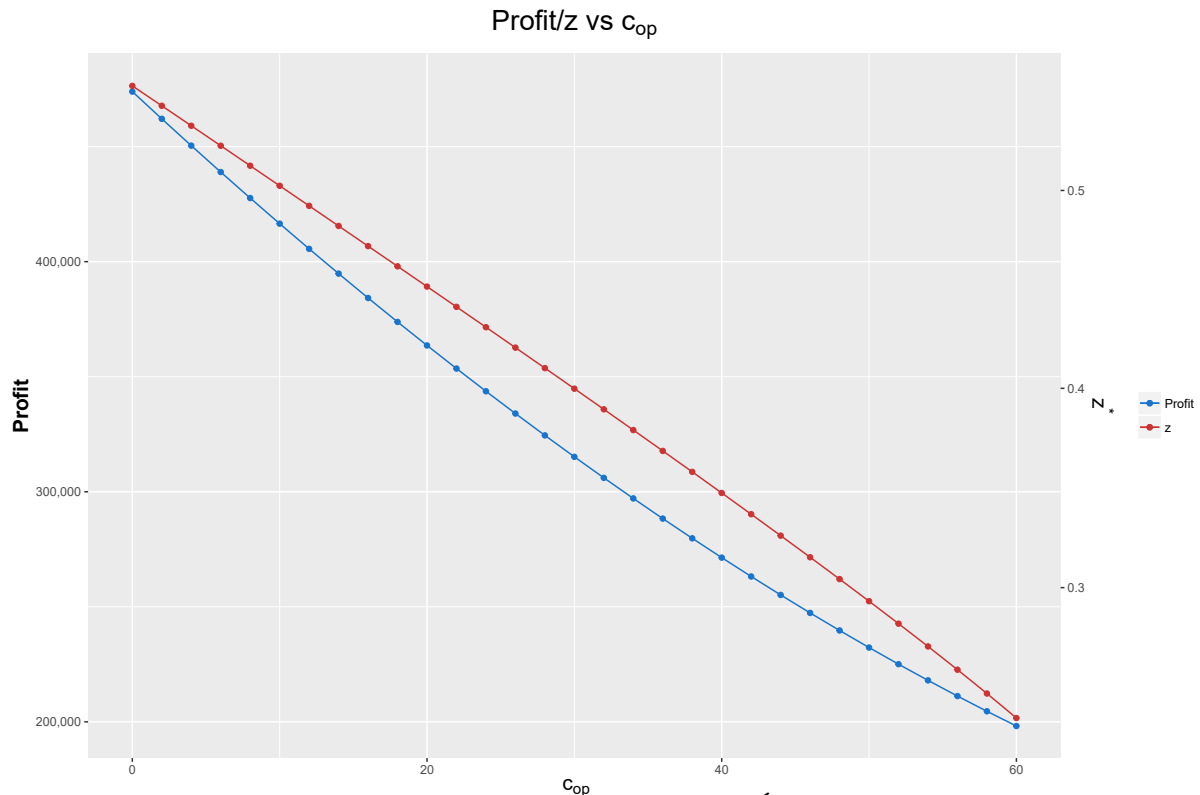


Figura 3.18: Evolución Profit y  $z$  Programa Óptimo Ex-Ante vs  $c_{op}$ .

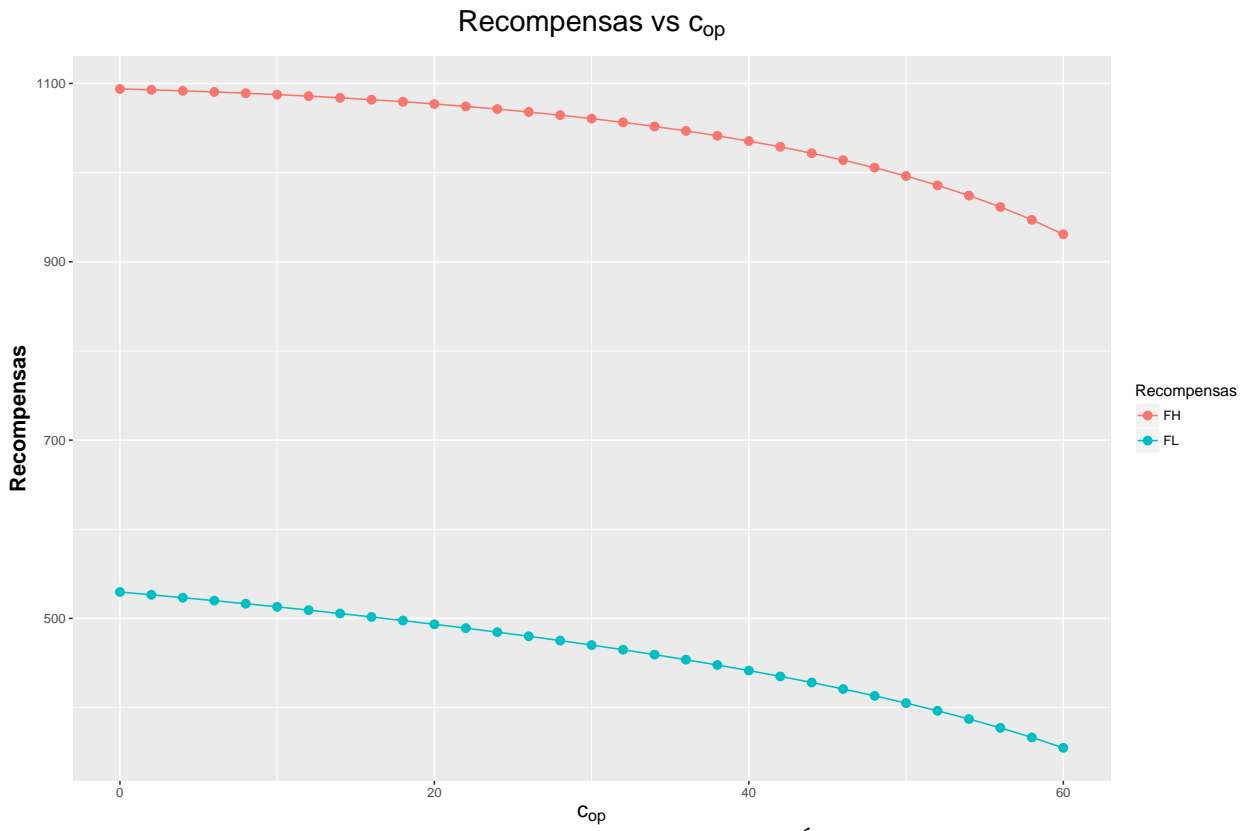


Figura 3.19: Evolución Recompensas Programa Óptimo Ex-Ante vs  $c_{op}$ .

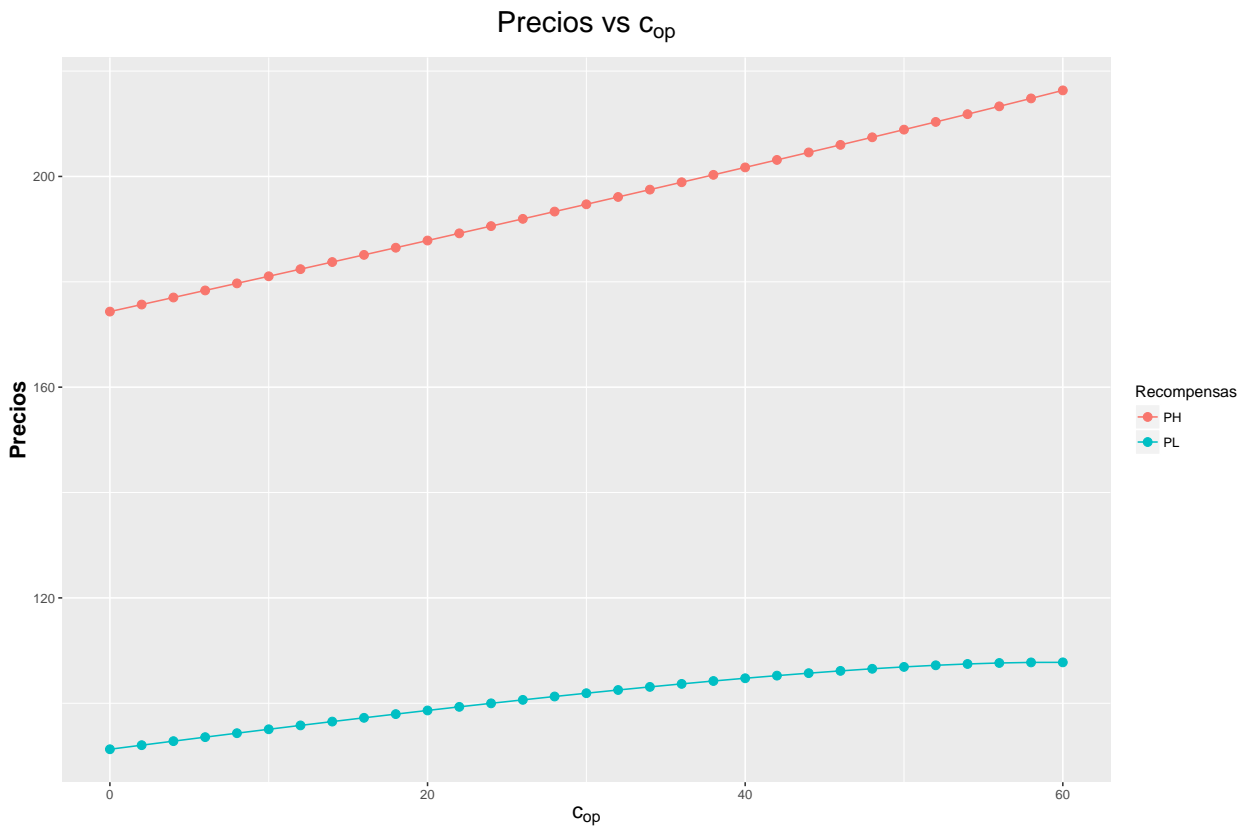


Figura 3.20: Evolución Precios Programa Óptimo Ex-Ante vs  $c_{op}$ .

Los resultados de la simulación correspondiente a la fase ex-post son mostradas en las Figuras 3.21 a 3.25 para cambios sobre  $\theta_L^{EA}$  con resultados similares a los del modelo inelástico (Sección 3.6): el profit del programa por tarifa pagada resulta en la mayoría de los casos mayor al del programa por distancia volada, a excepción de los casos con  $\theta_L$  lo suficientemente pequeños, para los cuales el programa basado en distancia cierra la clase baja y logra un profit mayor al del programa basado en revenue (Figura 3.21). Además, nuevamente vemos que la aerolínea bajo el programa óptimo y el programa por tarifa pagada nunca deja de servir a la clase de ocio.

Los comportamientos de las soluciones (Figuras 3.22 a 3.25) son también muy similares a los del caso inelástico: debido a la posibilidad de mover recompensas bajo un programa por tarifa, las tarifas fijadas bajo este resultan mucho más cercanas a las óptimas que bajo un programa por distancia volada, donde nuevamente resulta claro al observar la evolución de  $P_H$  (Figura 3.25), en el cual el programa por tarifa es capaz de replicar el comportamiento convexo dado por el programa óptimo (pese a que no logra la misma magnitud de movimientos), a diferencia del programa por distancia volada que es solo capaz de mover linealmente los mismos.

Los resultados de la simulación ex-post frente a cambios en  $\theta_H^{EA}$  son presentados en las Figuras 3.26 a 3.30, los que en este caso son particularmente distintos a los del caso inelástico, ya que el programa por distancia domina siempre en profit al programa por tarifa pagada (Figura 3.26), siendo muy cercano al programa óptimo. El mal rendimiento del programa basado en revenue es fácil de interpretar en este caso: al variar  $\theta_H^{EA}$  *ceteris paribus*, los principales afectados son los viajeros de negocio (pese a que en este caso, la tarifa y recompensas asignadas a la clase baja dependen de este parámetro). En el caso inelástico el programa por tarifa pagada es capaz de aprovecharse de este hecho moviendo agresivamente la tarifa  $P_H$  en respuesta (Figura 3.17), y cambiando la asignación de recompensas  $F_H$  correspondientemente, lo que en ese caso resulta conveniente en tanto que la aerolínea se encuentra en una zona en donde el costo de estas millas es menor al precio extra cargado. En el caso elástico, sin embargo, la aerolínea intenta realizar una estrategia agresiva similar en  $P_H$  (Figura 3.30), pero se encuentra con un *downside* inmediato, pérdida de demanda. Es por esto que la estrategia más pasiva que realiza la aerolínea bajo un programa por distancia volada (forzada debido a la infactibilidad de cambiar asignación de recompensas) resulta mucho más cercana a la del programa óptimo, bajo el cual la aerolínea mueve precios y recompensas en un rango acotado intentando maximizar la demanda.

Los resultados anteriores cambian si introducimos un supuesto adicional: a medida que se producen cambios sobre  $\theta_H^{EA}$ , también cambian las cotas  $\underline{R}, \bar{R}$ , i.e. para valores  $\theta_H^{EP} > \theta_H^{EA}$  se tiene también  $\underline{R}^{EP} > \underline{R}^{EA}$  y  $\bar{R}^{EP} > \bar{R}^{EA}$ , o dicho en palabras, un aumento de la valoración de las millas por parte de los viajeros de negocio produce un desplazamiento hacia la derecha (aumento) del rango de valores en donde se mueven los precios de reserva. Bajo este supuesto se obtienen los resultados de la Figura 3.31, donde se simuló bajo un cambio proporcional en  $\theta_H^{EA}$ ,  $\underline{R}$  y  $\bar{R}$ . En esta figura es posible ver que el programa por tarifa pagada domina en profit al programa por distancia volada, lo que está fundamentado por el hecho de que al aumentar la valoración de los viajeros de negocio por las millas, como se comentó, la firma bajo un programa basado en revenue aumentará agresivamente las tarifas (compensando con millas), pero gracias a nuestro supuesto, esto es factible de realizar en este caso sin una pérdida

importante de demanda, ya que las disposiciones máximas a pagar aumentan.

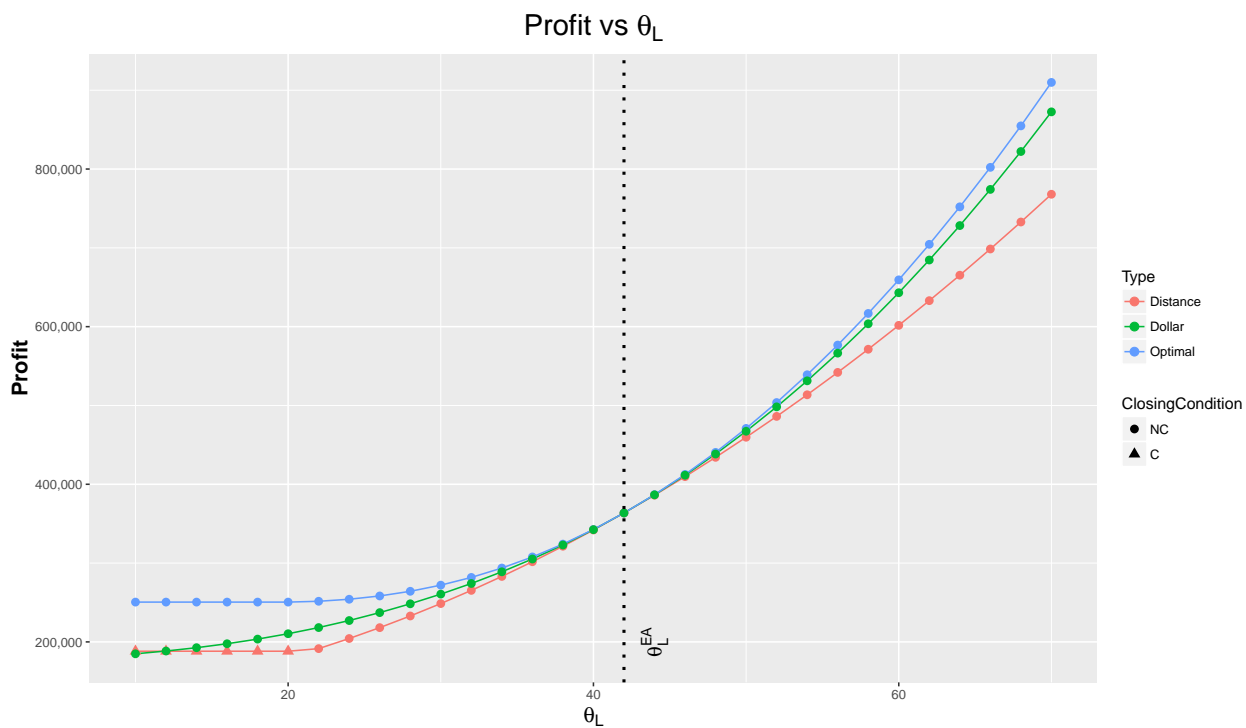


Figura 3.21: Comparación de profits versus cambio en  $\theta_L^{EA}$ , Demandas Elásticas.

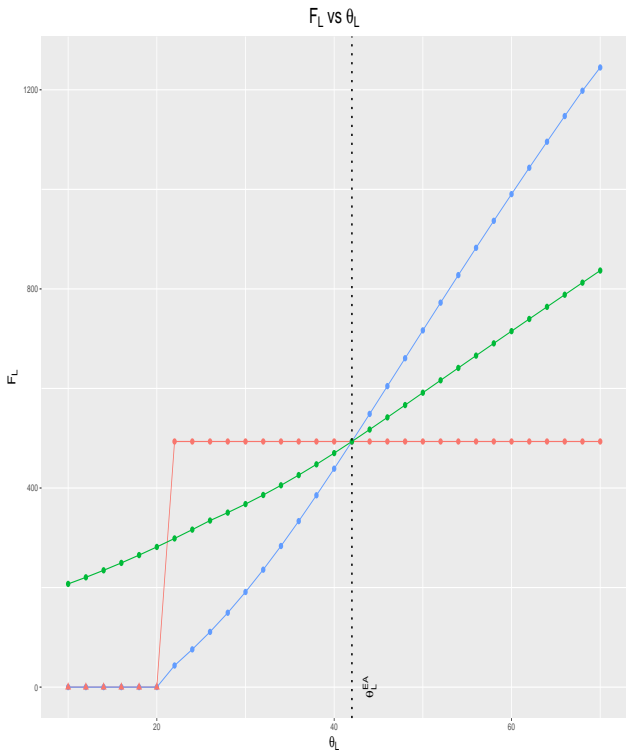


Figura 3.22:  $F_L$  versus cambio en  $\theta_L^{EA}$ .

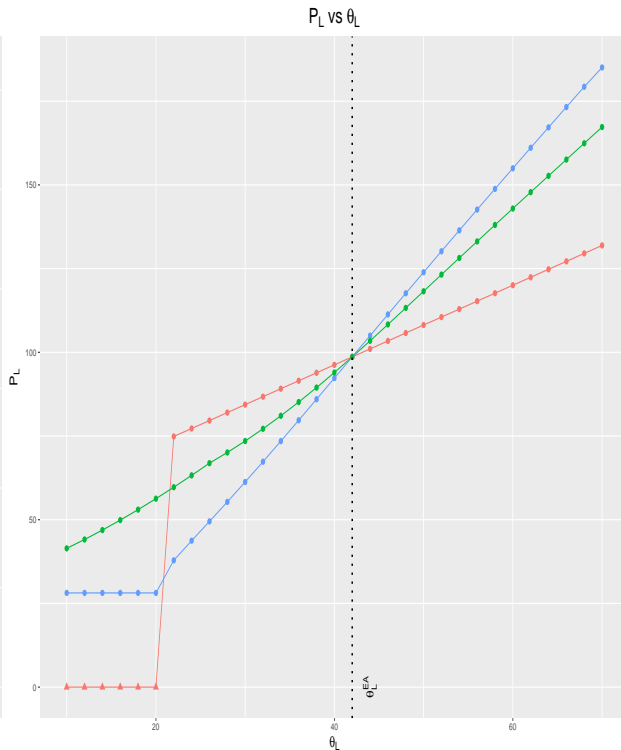


Figura 3.23:  $P_L$  versus cambio en  $\theta_L^{EA}$ .



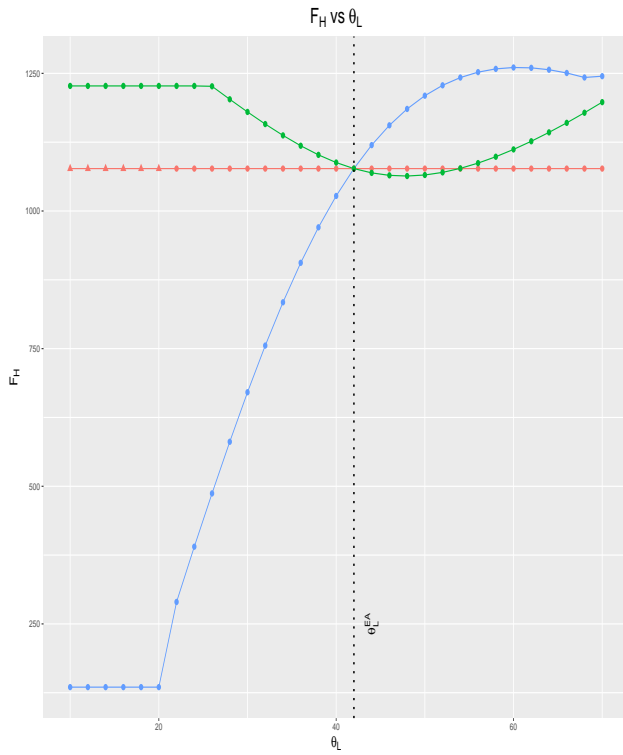


Figura 3.24:  $F_H$  versus cambio en  $\theta_L^{EA}$ .

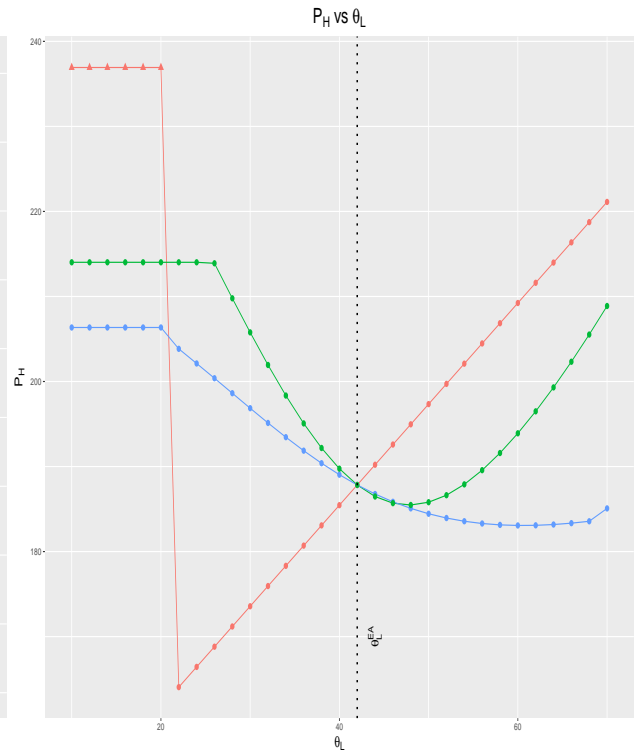


Figura 3.25:  $P_H$  versus cambio en  $\theta_L^{EA}$ .

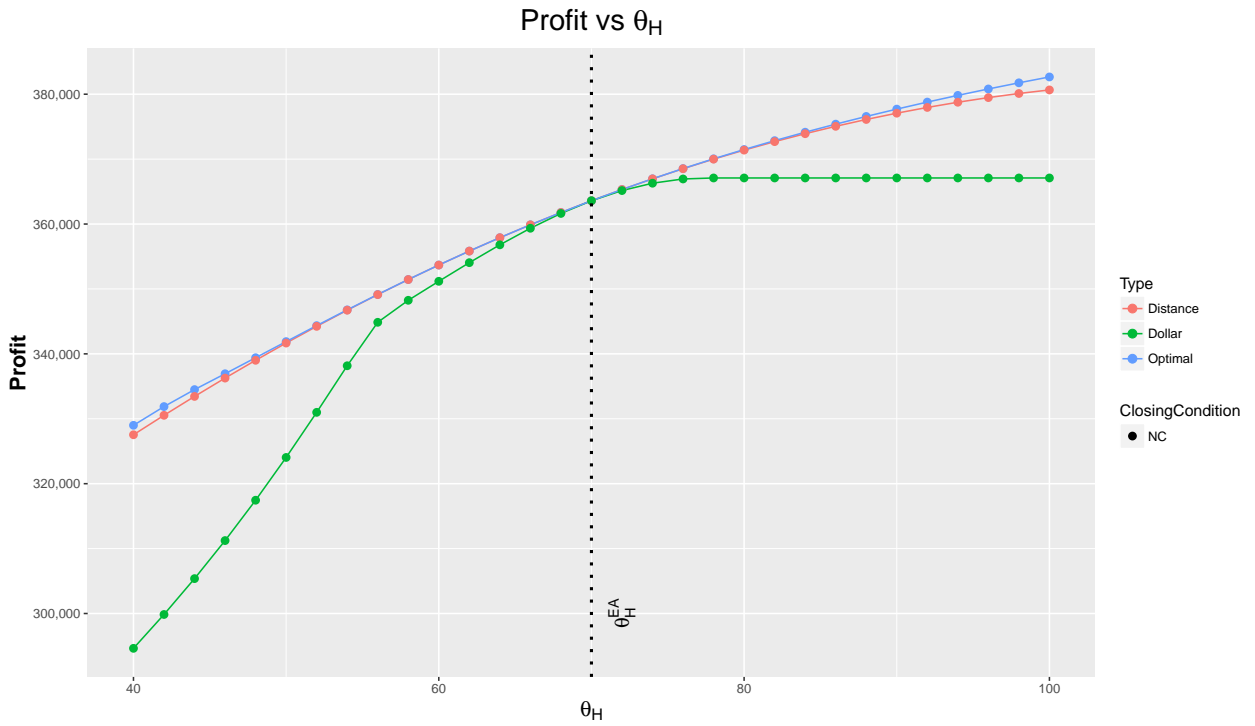


Figura 3.26: Comparación de profits versus cambio en  $\theta_H^{EA}$ , Demandas Elásticas.

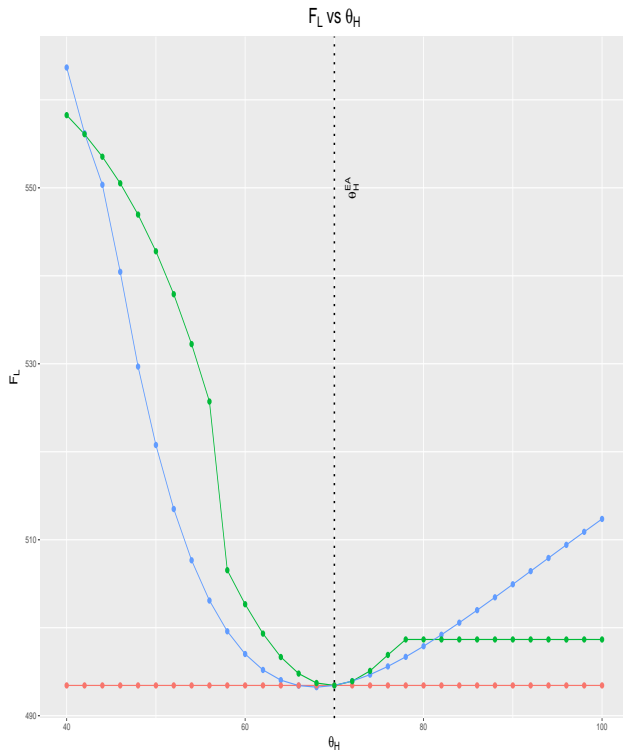


Figura 3.27:  $F_L$  versus cambio en  $\theta_H^{EA}$ .

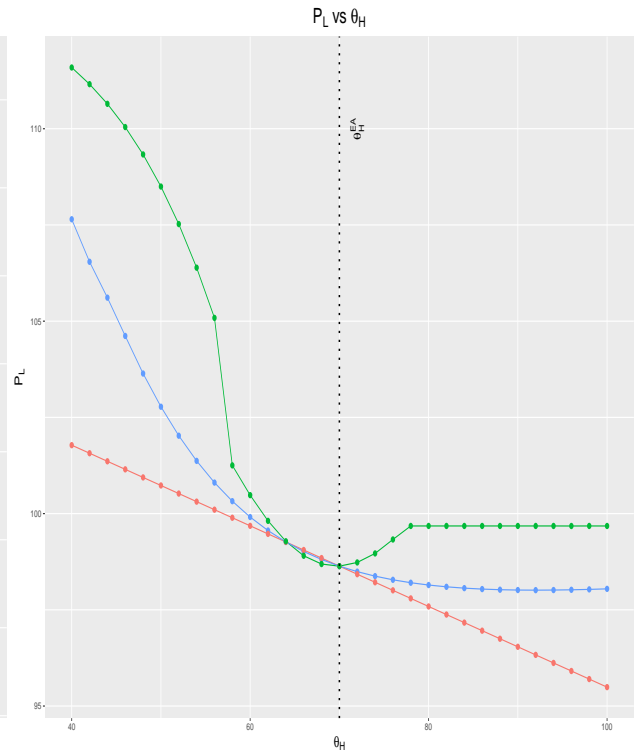


Figura 3.28:  $P_L$  versus cambio en  $\theta_H^{EA}$ .

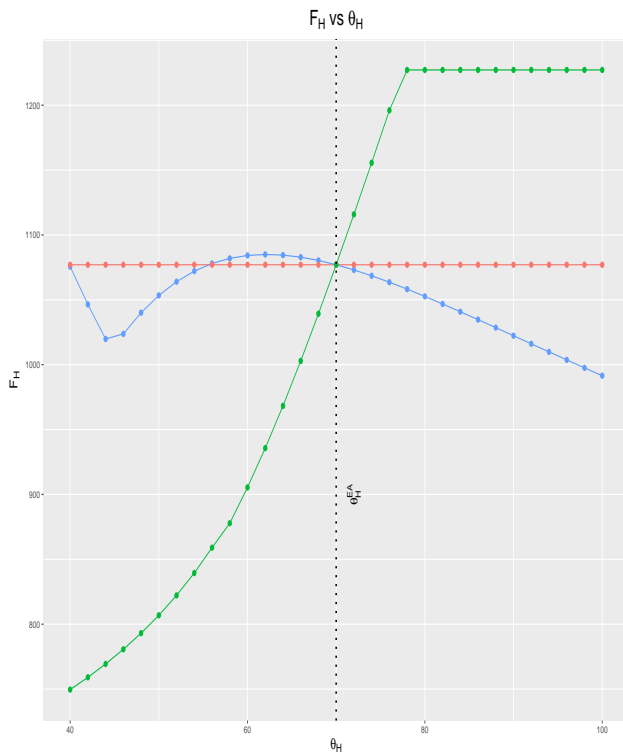


Figura 3.29:  $F_H$  versus cambio en  $\theta_H^{EA}$ .

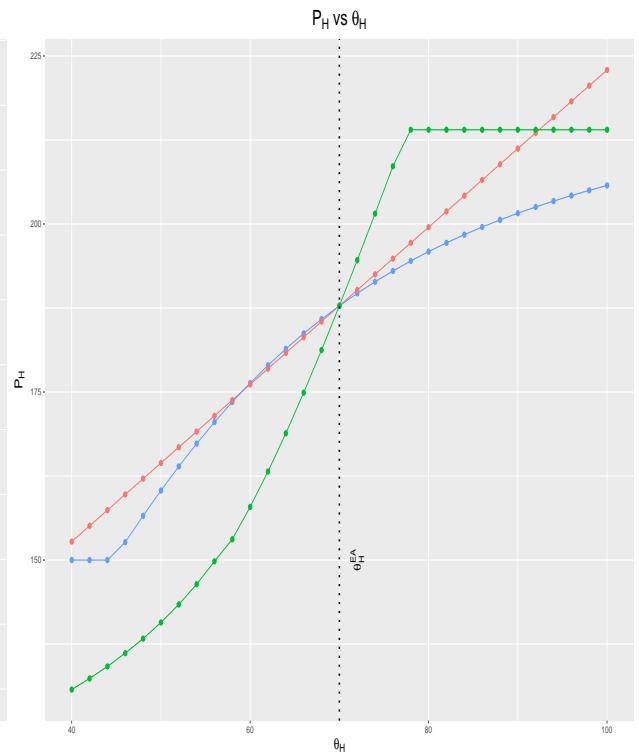


Figura 3.30:  $P_H$  versus cambio en  $\theta_H^{EA}$ .

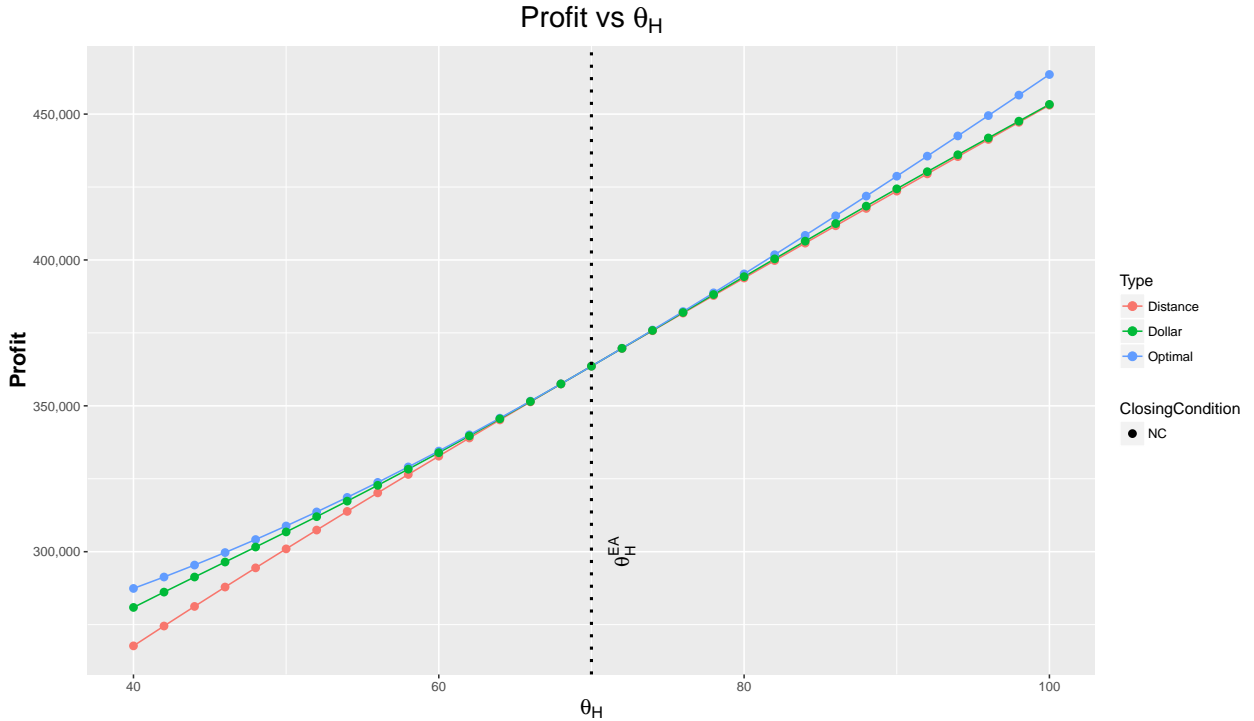


Figura 3.31: Profits versus cambio en  $\theta_H^{EA}$  variando  $\underline{R}, \bar{R}$ , Demandas Elásticas.

### 3.10. Síntesis

En este capítulo se extendió el análisis realizado por Feres (2013), estudiando el comportamiento de un monopolio discriminante que enfrenta la demanda de dos clases de viajeros: de ocio y de negocio, donde para los últimos existe además un pagador externo quien se hace cargo de una fracción del ticket. El análisis aquí presentado hizo énfasis en la comparación del comportamiento de una aerolínea cuando opera bajo un programa de recompensas basado en la distancia volada versus cuando opera bajo un programa basado en la tarifa pagada por el ticket, encontrando que en la fase de diseño, cuando los parámetros de demanda son considerados como sus valores esperados (el escenario ex-ante) estos dos programas son equivalentes entre ellos, y equivalentes además a un programa “óptimo” bajo el cual la aerolínea ofrece recompensas a un nivel arbitrario (no ligado a otras variables). Con esto, los resultados de esta fase de diseño son como los encontrados por Feres (2013), mostrados en la Tabla 3.10, en donde como es usual, el problema de selección adversa induce una distorsión a la baja en la cantidad de recompensas recibidas por la clase de ocio, manteniendo las recompensas a la clase de negocio (*no distortion at the top*). Al incluir el problema de riesgo moral, bajo el cual los viajeros de negocio perciben solo una fracción de su tarifa, se agudiza la distorsión de la clase baja, a la vez que se produce una distorsión al alza en las recompensas recibidas por la clase alta, con una interpretación análoga a la de Basso et al. (2009): las recompensas pueden ser vistas en el caso de los viajeros de negocio como una especie de soborno para atraerlos hacia tarifas más caras.

Sin embargo, se mostró que ex-post, una vez que los programas fueron diseñados y no pueden

Tabla 3.10: Caracterización de Soluciones, Fase de Diseño.

|         |   |
|---------|---|
| $F_L^*$ | $\theta_L V'(F_L^*) = \frac{C'_L(F_L^*)}{1 - \frac{N_H}{N_L} \frac{\theta_H - \theta_L}{\theta_L}}$ |
| $F_H^*$ | $\frac{\theta_H}{\alpha} V'(F_H^*) = C'_H(F_H)$   |
| $P_L^*$ | $U_0 + \theta_L V(F_L^*)$   |
| $P_H^*$ | $\frac{\theta_H}{\alpha} (V(F_H^*) - V(F_L^*)) + P_L^*$   |
| $k_L^D$ | $\frac{F_L^*}{D}$   |
| $k_H^D$ | $\frac{F_H^*}{D}$   |
| $k_L^T$ | $\frac{F_L^*}{P_L^*}$   |
| $k_H^T$ | $\frac{F_H^*}{P_H^*}$   |

ser modificados, si los valores de los parámetros de demanda son distintos a sus valores esperados, ninguno de los dos programas reales (por distancia y por tarifa) pueden replicar el comportamiento del programa óptimo, y sus soluciones vienen dadas (bajo ciertas condiciones para el programa por tarifa) por la Tabla 3.11. Mostramos, pese a esto, que el programa basado en tarifa pagada le permite a la aerolínea monopólica responder a estos cambios de manera más cercana a lo que puede hacerlo el programa por distancia volada, y más aún, bajo ciertas condiciones analíticas, el programa por tarifa pagada alcanza un profit estrictamente mayor, lo que es consistente con el movimiento reciente en la industria hacia estos tipos de programa.

Tabla 3.11: Caracterización de Soluciones, Fase Ex-Post.

|             | Programa por Distancia  | Programa por Tarifa   |
|-------------|---|---|
| $\bar{F}_L$ | $F_L^*$   | $U_0 + \tilde{\theta}_L V(\bar{F}_L) - \frac{\bar{F}_L}{k_L^T} = 0$   |
| $\bar{F}_H$ | $F_H^*$   | $\tilde{\theta}_H V(\bar{F}_H) - \tilde{\alpha} \frac{\bar{F}_H}{k_H^T} = \tilde{\theta}_H V(\bar{F}_L) - \tilde{\alpha} \frac{\bar{F}_L}{k_L^T}$ |
| $\bar{P}_L$ | $U_0 + \tilde{\theta}_L V(F_L^*)$   | $U_0 + \tilde{\theta}_L V(\bar{F}_L)$   |
| $\bar{P}_H$ | $\frac{\tilde{\theta}_H}{\tilde{\alpha}} (V(F_H^*) - V(F_L^*)) + \tilde{\theta}_L V(F_L^*) + U_0$ | $\frac{\tilde{\theta}_H}{\tilde{\alpha}} (V(\bar{F}_H) - V(\bar{F}_L)) + \tilde{\theta}_L V(\bar{F}_L) + U_0$                                     |

Se mostró además que, ex-post, es más probable que la clase baja deje de ser servida bajo un programa por distancia volada que bajo un programa por tarifa pagada, lo que es consistente

con información recolectada durante 2014 para LATAM Airlines, Air Canada (recompensas por distancia) y Southwest (recompensas por tarifa).

Finalmente, se estudió el comportamiento de la aerolínea monopólica una vez que se introduce elasticidad en las demandas, encontrando que, aún en el caso de una solución interior en donde no se activa ninguna de las restricciones de compatibilidad de incentivos, los viajeros de negocio reciben una cantidad distorsionada de recompensas (versus el caso con discriminación perfecta), lo que se diferencia de trabajos como el de Mussa y Rosen (1978) en donde la clase más alta es la única que recibe una cantidad<sup>20</sup> no distorsionada; o más adecuadamente del trabajo de Rochet y Stole (2002), que incluye un término de participación aleatoria análoga a una distribución sobre una línea de Hotelling, y que muestra que solo la activación de restricciones de compatibilidad de incentivos produce ineficiencias, o dicho de otra forma, una solución interior en su caso no muestra distorsiones. Esta diferencia viene dada por la elasticidad introducida en nuestro caso sobre los viajeros de negocio, a través de una distribución sobre el precio de reserva, que no es equivalente a lo propuesto por Rochet y Stole (2002). Sin embargo, se mostró que al igual que en dicho trabajo, si se suponen márgenes monopólicos crecientes con la clase, entonces la restricción de compatibilidad de incentivos de la clase baja nunca es activa, y la solución usualmente viene dada por lo mostrado en la Tabla 3.12, de donde se tiene que las soluciones dependen del costo de operar el vuelo, a diferencia del caso inelástico, introduciendo de esta forma costos relacionados a la distancia: vuelos con distancia mayores son más caros de operar y por tanto resultarán en tarifas más caras fijadas por la aerolínea.

Tabla 3.12: Caracterización de Soluciones, Fase de Diseño, Demandas Elásticas.

|                                |   |
|--------------------------------|---|
| $F_L^*$                        | $\theta_L V'(F_L^*) = \frac{C'_L(F_L^*)}{1 - \frac{N_H(P_H^*)}{N_L(z^*)} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) \Theta(P_H^*, F_H^*, c_{op})}$ |
| $F_H^*$                        | $\frac{\theta_H}{\alpha} V'(F_H^*) = \frac{C'_H(F_H^*)}{\Theta(P_H^*, F_H^*, c_{op})}$  |
| $P_L^*$                        | $\theta_L V(F_L^*) + U_0 + \frac{t}{t_R} \frac{N_H}{N_L} (\bar{R} - P_H^*) \Theta(P_H^*, F_H^*, c_{op}) - \pi_L(P_L^*, F_L^*, c_{op})$                    |
| $P_H^*$                        | $\frac{\theta_H}{\alpha} (V(F_H^*) - V(F_L^*)) + P_L^*$   |
| $\Theta(P_H^*, F_H^*, c_{op})$ | $1 - \frac{\pi_H(P_H^*, F_H^*, c_{op})}{\bar{R} - P_H^*}$   |

El resto de resultados cualitativos no cambian demasiado en relación al caso inelástico, viendo por ejemplo una distorsión muy similar en ambas clases producida por el problema de riesgo moral, la que se suma a la distorsión clásica en la clase baja dada por el problema de selección adversa y la dada en la clase alta por el tipo de elasticidad incluida, como se comentó. Finalmente, se simuló una fase ex-post para el caso elástico, mostrando que los resultados mostrados analíticamente para el caso inelástico se siguen manteniendo si se agregan ciertos supuestos, bajo los cuales el profit del programa por tarifa pagado domina al profit del programa por distancia volada.

<sup>20</sup> En su trabajo la variable de decisión es calidad, no cantidad, pero es completamente análogo.

## Capítulo 4

# Programas Reales y Monopolio Sirviendo a Dos Mercados

Como extensión a lo desarrollado en el Capítulo 3 se introduce en este capítulo un segundo mercado a servir por la aerolínea, con demandas y distancias distintas a las del mercado original. De esta forma, en este capítulo se estudiarán las implicancias de este hecho sobre el comportamiento de un monopolio discriminante, el cual, replicando el comportamiento visto en la realidad, debe ajustar un único programa para toda su red.

Es importante recordar una de las conclusiones principales del Capítulo 3: cuando la aerolínea sirve un mercado, los programas reales (basado en distancia y basado en tarifa) son equivalentes al programa óptimo en la fase de diseño, por lo que fue necesario introducir una fricción en la forma de una fase ex-post para encontrar diferencias y comportamientos subóptimos de estos programas. Sin embargo la introducción de un segundo mercado con características distintas y el ajuste de un único programa hacen prever resultados radicalmente distintos, debido a que la aerolínea óptimamente querría ajustar programas (multiplicadores de recompensas) distintos para cada mercado, por lo que estos programas aún en la fase de diseño resultarán subóptimos.

Es por esto que en este capítulo solo se estudiará la fase de diseño del problema planteado en tanto que propone un problema más similar en espíritu a la fase ex-post del Capítulo 3 que a la fase de diseño, al intentar ajustar un único programa a dos escenarios distintos: fase ex-ante y ex-post en el caso de lo analizado Capítulo 3; dos mercados según lo estudiado en este capítulo.

Finalmente, los supuestos utilizados en la modelación son idénticos a los del Capítulo 3: la firma a estudiar es un monopolio que conoce el número de viajeros de las dos clases existentes y sus parámetros de demanda. Además, la aerolínea tiene la capacidad de generar dos menús de precios y recompensas en cada mercado, a fin de inducir autoselección bajo un esquema clásico de discriminación de precios de segundo grado. Asumimos por último viajeros con las mismas características que en el Capítulo 3, con demanda inicialmente del tipo todo o nada.

## 4.1. Elementos Básicos

Los supuestos utilizados durante el Capítulo 3 son extendidos de manera de incluir un segundo mercado a servir.

### 4.1.1. Composición de los Mercados

La firma sirve dos mercados:  $M_1$  y  $M_2$ . Cada mercado  $M_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , está compuesto por  $N_{H_i}$  pasajeros con objetivo de negocio y  $N_{L_i}$  con objetivo, cuyos valores esperados son conocidos por la firma. Suponemos inicialmente que las demandas de ambos grupos en ambos mercados son inelásticas. Además, los mercados presentan distancias de vuelos distintas  $D_1$  y  $D_2$ .

### 4.1.2. Función de Utilidad

Inicialmente se suponen demandas del tipo todo o nada y utilidades iguales entre mercados como las presentadas en el Capítulo 3. Con esto, la utilidad de los viajeros de ocio viene dada por

$$U_L(P_L, F_L) = U_0 + \theta_L V(F_L) - P_L$$

mientras que la de los viajeros de negocio es

$$U_H(P_H, F_H) = \theta_H V(F_H) - \alpha P_H$$

donde  $P_k$  corresponde a la tarifa pagada y  $F_k$  al nivel de recompensas recibido,  $k \in \{L, H\}$ , y los parámetros  $U_0, \theta_L, \theta_H, \alpha$  son iguales para ambos mercados. Asumimos además que

$$\begin{aligned}\theta_L &\leq \theta_H \\ 0 &\leq \alpha \leq 1 \\ U_0 &> 0\end{aligned}$$

### 4.1.3. Función de Costos de la Firma y Utilidad de Recompensas

Se suponen costos de ofrecer millas  $C_H(F_H)$  y  $C_L(F_L)$  y utilidad  $V(F)$  de las mismas con los mismos supuestos mostrados en el Capítulo 3 e iguales entre mercados. Sin embargo, el costo de proveer y operar el vuelo se supone diferente para cada mercado, con la condición

$$\frac{\partial c_{op}}{\partial D} > 0$$

es decir, el vuelo  $i$  con la distancia más larga presenta el costo de operación  $c_{op_i}$  más alto.

#### 4.1.4. Restricciones

Nuevamente, la firma reconoce la existencia de dos clases de pasajeros en cada mercado, pero no es capaz de diferenciarlos, por lo que bajo un enfoque clásico de selección adversa, ofrece menús de precios y recompensas que induzcan autoselección en cada mercado, i.e. debe satisfacer:

$$\begin{aligned} U_L(P_{L1}, F_{L1}) &\geq U_L(P_{H1}, F_{H1}) \\ U_H(P_{H1}, F_{H1}) &\geq U_H(P_{L1}, F_{L1}) \\ U_L(P_{L2}, F_{L2}) &\geq U_L(P_{H2}, F_{H2}) \\ U_H(P_{H2}, F_{H2}) &\geq U_H(P_{L2}, F_{L2}) \end{aligned}$$

donde el segundo subíndice identifica al mercado. Además, la firma monopólica debe asegurar la participación de los viajeros de ocio en cada mercado, por lo que debe cumplir:

$$\begin{aligned} U_L(P_{L1}, F_{L1}) &\geq 0 \\ U_L(P_{L2}, F_{L2}) &\geq 0 \end{aligned}$$

Por último, cuando se indique explícitamente, consideraremos un precio de reserva  $R_i$  en la tarifa de los pasajeros de negocio de cada mercado:

$$\begin{aligned} P_{H1} &\leq R_1 \\ P_{H2} &\leq R_2 \end{aligned}$$

## 4.2. Monopolio Bajo Programa Óptimo

Inicialmente, a fin de tener un *benchmark* para el resto de esta sección, se caracterizará el comportamiento óptimo de la aerolínea al enfrentarse a dos mercados. Para esto, se supone un comportamiento como el del programa óptimo del Capítulo 3, y como el estudiado por Feres (2013), en donde las recompensas son una variable de decisión más. Con esto, el problema que resuelve la firma es:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \pi(P_{H1}, P_{H2}, P_{L1}, P_{L2}, F_{H1}, F_{H2}, F_{L1}, F_{L2}) && \text{(Óptimo 2M)} \\ & = \sum_{i=1}^2 \{N_{Li}(P_{Li} - C_L(F_{Li}) - c_{opi}) + N_{Hi}(P_{Hi} - C_H(F_{Hi}) - c_{opi})\} \\ \text{s.a.} \quad & \theta_H V(F_{Hi}) - \alpha P_{Hi} &\geq \theta_H V(F_{Li}) - \alpha P_{Li} & \forall i \in \{1, 2\} & \text{(IC-H)} \\ & \theta_L V(F_{Li}) - P_{Li} &\geq \theta_L V(F_{Hi}) - P_{Hi} & \forall i \in \{1, 2\} & \text{(IC-L)} \\ & U_0 + \theta_L V(F_{Li}) - P_{Li} &\geq 0 & \forall i \in \{1, 2\} & \text{(PC-L)} \\ & F_{Li}, P_{Li}, F_{Hi}, P_{Hi} &\geq 0 & \forall i \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

Notemos que no se introducen interacciones entre mercados, ya que suponemos que la decisión de compra del viajero del mercado  $i$  no está influenciada por los menús ofrecidos a los viajeros



del mercado  $j \neq i$ . Con esto, es fácil notar que es posible separar el problema que resuelve la aerolínea en dos subproblemas, uno para cada mercado. En otras palabras, la aerolínea recupera las soluciones encontradas en el Capítulo 3:

$$\frac{\theta_H}{\alpha} V'(F_{Hi}^*) = C'_H(F_{Hi}^*) \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad (4.1)$$

$$\theta_L V'(F_{Li}^*) = \frac{C'_L(F_{Li}^*)}{1 - \frac{N_{Hi}}{N_{Li}} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha}} \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad (4.2)$$

$$P_{Li}^* = U_0 + \theta_L V(F_{Li}^*) \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad (4.3)$$

$$P_{Hi}^* = \frac{\theta_H}{\alpha} (V(F_{Hi}^*) - V(F_{Li}^*)) + \theta_L V(F_{Li}^*) + U_0 \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad (4.4)$$

Este resultado es esperable: como en este caso la aerolínea tiene la libertad de mover las recompensas y precios de manera arbitraria en cada mercado, termina “diseñando” programas distintos para cada uno, y por tanto vuelve al escenario del Capítulo 3 donde sirve a un solo mercado.

Por lo anterior, el análisis de precios y recompensas dentro de cada mercado se remite a lo comentado en el capítulo anterior, pero lo interesante en este caso es comparar asignaciones entre mercados: las recompensas asignadas a los pasajeros de negocio de ambos mercados son las mismas (4.1), donde nuevamente se presentan distorsionadas al alza debido a la existencia de un pagador externo ( $\alpha < 1$ ). Sin embargo, algo distinto ocurre en el caso de los viajeros de ocio (4.2), ya que debido que en general las proporciones de viajeros de negocio versus viajeros de ocio  $\frac{N_{H1}}{N_{L1}}$  y  $\frac{N_{H2}}{N_{L2}}$  no son iguales, las recompensas entregadas a esta clase son distintas entre mercados, recibiendo más recompensas los viajeros de ocio en el mercado con mayor proporción de éstos. En efecto, si  $\frac{N_{Hi}}{N_{Li}} < \frac{N_{Hj}}{N_{Lj}}$  se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{N_{Hi}}{N_{Li}} \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L &< \frac{N_{Hj}}{N_{Lj}} \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \\ \Rightarrow \frac{1}{\theta_L \left( 1 - \frac{N_{Hi}}{N_{Li}} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha} \right)} &< \frac{1}{\theta_L \left( 1 - \frac{N_{Hj}}{N_{Lj}} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha} \right)} \\ &\Rightarrow \frac{V'(F_{Li})}{C'_L(F_{Li})} < \frac{V'(F_{Lj})}{C'_L(F_{Lj})} \\ &\Rightarrow F_{Li} > F_{Lj} \end{aligned}$$

donde para la penúltima implicancia se ocupó la caracterización (4.2) de las recompensas a los usuarios de ocio, y en la última implicancia se usó la concavidad de  $V$  y convexidad de  $C_L$ , de manera que la función  $\frac{V'(x)}{C'_L(x)}$  es decreciente.

Este hecho nos permite comentar sobre los precios fijados: de la caracterización (4.3) es directo que los precios a los viajeros de ocio son distintos entre mercados, y más aún, que el precio más alto resulta en el mercado con la proporción más alta de esta clase de usuarios.

Para el caso de los viajeros de negocio, siguiendo (4.4) es útil escribir el precio como

$$P_{Hi}^* = \underbrace{\frac{\theta_H}{\alpha} V(F_{Hi}^*) + U_0}_A + \underbrace{\left( \theta_L - \frac{\theta_H}{\alpha} \right) V(F_{Li}^*)}_{B < 0}$$

donde el término  $A$  es constante entre mercados, y el término  $B$  es negativo y creciente en módulo con  $F_{Li}^*$ , de donde se sigue que el mercado con la mayor proporción de usuarios de negocio (y por tanto, la menor asignación de recompensas  $F_{Li}^*$  para los usuarios de ocio) resulta con el precio más alto a los viajeros de esta clase.

En resumen, si  $\frac{N_{Hi}}{N_{Li}} < \frac{N_{Hj}}{N_{Lj}}$  se obtiene

$$\begin{aligned} F_{Hi}^* &= F_{Hj}^* \\ F_{Li}^* &> F_{Lj}^* \\ P_{Li}^* &> P_{Lj}^* \\ P_{Hi}^* &< P_{Hj}^* \end{aligned}$$

con una interpretación clara: en el mercado con mayor proporción de viajeros de ocio, la aerolínea ve más atractiva su explotación, por lo que termina asignándoles un menú con menor distorsión de recompensas (i.e. con una cantidad mayor más cercana a la eficiente), cobrándoselas a través de un precio mayor. Además, al hacer esto la aerolínea tiene menor libertad para aumentar el precio a la clase de negocio, en tanto que el menú dirigido a la clase de ocio les resulta atractivo al presentar más recompensas.

Finalmente, es importante notar que esta dispersión de precios entre mercados presente en el comportamiento óptimo de la aerolínea está justificado únicamente por el problema de selección adversa como se acaba de comentar, y no tiene relación con diferencias en el costo de operar entre ambos mercados. Más aún, si se tiene que  $\frac{N_{Hi}}{N_{Li}} < \frac{N_{Hj}}{N_{Lj}}$  y  $c_{op1} < c_{op2}$ , i.e. existe mayor proporción de viajeros de ocio en el mercado más barato de operar, la aerolínea bajo nuestro modelo terminará fijando precios más caros a la clase de ocio en el mercado  $i$ , el más barato de operar (e.g. el vuelo con distancia más corta), lo que no resulta intuitivo. Este hecho sin embargo está justificado por la ausencia de elasticidad en las demandas: cuando la aerolínea se enfrenta a demandas del tipo todo o nada, el costo de operar resulta un costo hundido y lo mejor que puede hacer es fijar precios y recompensas explotando el problema de riesgo moral y de selección adversa. Por otro lado, cuando se enfrenta a demandas elásticas el costo de operar resulta relevante en la decisión del último pasajero a servir para evitar pérdidas, como se estudió en la Sección 3.8, por lo que es esperable que las soluciones sean fuertemente dependientes de este costo de operación, cambiando las conclusiones sobre dispersión de precios.

## 4.3. Programas Reales

### 4.3.1. Recompensas Por Distancia

Ahora nos centramos en el análisis de programas reales, estudiando la fase de diseño de manera análoga a lo desarrollado en el Capítulo 3, pero con una diferencia clave ya que la aerolínea debe ajustar un único programa para los dos mercados. En primer lugar se estudia el programa por distancia, en donde las recompensas están ligadas de manera directa a la distancia volada por el pasajero. De manera más precisa, en este programa se tienen la relaciones:

$$\begin{aligned} F_{Li} &= k_L^D \cdot D_i \\ F_{Hi} &= k_H^D \cdot D_i \end{aligned}$$

donde  $D_i$  es la distancia volada en el mercado  $i$  y  $k_L^D, k_H^D$  los multiplicadores asociados a cada clase.

Notemos que la exigencia de ajustar un único programa (i.e. un único set de parámetros  $k_L^D, k_H^D$ ) impide que este programa real sea equivalente, aún durante la fase de diseño, al programa óptimo analizado en la Sección 4.2. En efecto, según lo mostrado en (4.1) las recompensas asignadas a los viajeros de negocio son iguales entre mercados bajo el comportamiento óptimo de la aerolínea, pero en el caso de un único programa por distancia los pasajeros de negocio reciben recompensas  $k_H^D \cdot D_1$  y  $k_H^D \cdot D_2$  en el mercado 1 y 2 respectivamente, es decir asignaciones distintas a excepción del caso particular donde  $D_1 = D_2$ .

Con las consideraciones anteriores, el problema en la fase de diseño, donde la aerolínea decide precios en ambos mercados y multiplicadores de recompensas se escribe como:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \pi(P_{H1}, P_{H2}, P_{L1}, P_{L2}, k_L^D, k_H^D) && \text{(Distancia 2M)} \\ & = \sum_{i=1}^2 \{N_{Li}(P_{Li} - C_L(k_L^D \cdot D_i) - c_{opi}) + N_{Hi}(P_{Hi} - C_H(k_H^D \cdot D_i) - c_{opi})\} \\ \text{s.a.} \quad & \theta_H V(k_H^D \cdot D_i) - \alpha P_{Hi} \geq \theta_H V(k_L^D \cdot D_i) - \alpha P_{Li} && \forall i \in \{1, 2\} \quad \text{(IC-H)} \\ & \theta_L V(k_L^D \cdot D_i) - P_{Li} \geq \theta_L V(k_H^D \cdot D_i) - P_{Hi} && \forall i \in \{1, 2\} \quad \text{(IC-L)} \\ & U_0 + \theta_L V(k_L^D \cdot D_i) - P_{Li} \geq 0 && \forall i \in \{1, 2\} \quad \text{(PC-L)} \\ & P_{Li}, P_{Hi}, k_L^D, k_H^D \geq 0 && \forall i \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

De manera análoga a lo realizado anteriormente en el Capítulo 3, definiendo

$$\begin{aligned} u_{Li} &= U_0 + \theta_L V(k_L^D \cdot D_i) - P_{Li} && \forall i \in \{1, 2\} \\ u_{Hi} &= \frac{\theta_H}{\alpha} V(k_H^D \cdot D_i) - P_{Hi} && \forall i \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

el problema **(Distancia 2M)** se escribe como

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \pi(u_{H1}, u_{H2}, u_{L1}, u_{L2}, k_L^D, k_H^D) && \text{(Distancia 2M')} \\
& = \sum_{i=1}^2 \left\{ N_{Li}(U_0 + \theta_L V(k_L^D \cdot D_i) - u_{Li} - C_L(k_L^D \cdot D_i) - c_{opi}) \right. \\
& \quad \left. N_{Hi} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} V(k_H^D \cdot D_i) - u_{Hi} - C_H(k_H^D \cdot D_i) - c_{opi} \right) \right\} \\
\text{s.a.} \quad & u_{Hi} - u_{Li} + U_0 &\geq V(k_L \cdot D_i) \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) &\forall i \in \{1, 2\} \quad \text{(IC-H)} \\
& V(k_H \cdot D_i) \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) &\geq u_{Hi} - u_{Li} + U_0 &\forall i \in \{1, 2\} \quad \text{(IC-L)} \\
& u_{Li}, k_L^D, k_H^D &\geq 0 &\forall i \in \{1, 2\}
\end{aligned}$$

Similarmente a lo realizado por Feres (2013), es fácil mostrar que las restricciones de compatibilidad de incentivos para la clase alta (IC-H) deben ser activas en el óptimo. En efecto, supongamos que en el óptimo  $(u_{H1}^*, u_{H2}^*, u_{L1}^*, u_{L2}^*, k_L^{D*}, k_H^{D*})$  la restricción (IC-H1)<sup>1</sup> es inactiva, i.e. se cumple con desigualdad estricta. Consideremos ahora

$$\bar{u}_{H1} = u_{H1}^* - \varepsilon$$

Es claro que para  $\varepsilon$  lo suficientemente pequeño, esta variación sigue siendo factible en el problema **(Distancia 2M')**, y alcanza un mayor valor de la función objetivo. Luego, (IC-H1) debe ser activa en el óptimo. Para (IC-H2) es análogo.

Luego, tenemos que  $u_{Hi}$ ,  $i = 1, 2$  deja de ser variable de decisión y puede ser escrito en función de  $k_L^D, u_{Li}$ :

$$u_{Hi} = V(k_L^D \cdot D_i) \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) + u_{Li} - U_0 \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad (4.5)$$

Luego, las restricciones de compatibilidad de incentivos para la clase baja se pueden reescribir como

$$V(k_H^D \cdot D_i) \geq V(k_L^D \cdot D_i) \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad \text{(IC-L)}$$

que no dependen de  $u_{L1}, u_{L2}$ , y como el profit en **(Distancia 2M')** es decreciente en estas variables, en el óptimo se tiene que

$$u_{Li} = 0 \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad (4.6)$$

y por tanto, ocupando las caracterizaciones (4.5) y (4.6) el problema original queda simplificado a

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \pi(k_L^D, k_H^D) && \text{(Distancia 2M'')} \\
& = \sum_{i=1}^2 \left\{ N_{Li} (U_0 + \theta_L V(k_L^D \cdot D_i) - C_L(k_L^D \cdot D_i) - c_{opi}) \right. \\
& \quad \left. N_{Hi} \left( U_0 + \frac{\theta_H}{\alpha} V(k_H^D \cdot D_i) - V(k_L^D \cdot D_i) \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) - C_H(k_H^D \cdot D_i) - c_{opi} \right) \right\} \\
\text{s.a.} \quad & k_L^D, k_H^D \geq 0
\end{aligned}$$

<sup>1</sup> La restricción de compatibilidad de incentivos para la clase alta en el mercado 1.

El lagrangeano de este problema reducido resulta

$$\mathcal{L}(k_L^D, k_H^D, \lambda_L, \lambda_H) = \pi(k_L^D, k_H^D) + \lambda_L k_L^D + \lambda_H k_H^D$$

y por tanto las condiciones de primer orden resultan

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_L^D} = \sum_{i=1}^2 N_{Li} D_i (\theta_L V'(k_L^D \cdot D_i) - C'_L(k_L^D \cdot D_i)) \\ \quad - N_{Hi} D_i V'(k_L^D \cdot D_i) \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) + \lambda_L = 0 \end{array} \right. \quad (4.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_H^D} = \sum_{i=1}^2 N_{Hi} D_i \left( \frac{\theta_H}{\alpha} V'(k_H^D \cdot D_i) - C'_H(k_H^D \cdot D_i) \right) + \lambda_H = 0 \end{array} \right. \quad (4.8)$$

$$\lambda_L k_L^D = 0 \quad (4.9)$$

$$\lambda_H k_H^D = 0 \quad (4.10)$$

Si consideramos la solución con  $k_L^{D*}, k_H^{D*} > 0$  (i.e.  $\lambda_L^* = \lambda_H^* = 0$  en 4.9 y 4.10), encontramos a partir de la Ecuación (4.7) que  $k_L^{D*}$  óptimo está caracterizado por

$$\sum_{i=1}^2 N_{Li} D_i \theta_L V'(k_L^{D*} D_i) \left( 1 - \frac{N_{Hi} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right)}{N_{Li} \theta_L} \right) = \sum_{i=1}^2 N_{Li} D_i C'_L(k_L^{D*} D_i) \quad (4.11)$$

mientras que a partir de la Ecuación (4.8) se encuentra que  $k_H^{D*}$  está caracterizado por

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\theta_H}{\alpha} N_{Hi} D_i V'(k_H^{D*} D_i) = \sum_{i=1}^2 N_{Hi} D_i C'_H(k_H^{D*} D_i) \quad (4.12)$$

Al respecto de estos valores es posible probar lo siguiente:

**Proposición 4.1** Supongamos que la firma tuviese la libertad de fijar programas (multiplicadores) distintos para cada mercado, digamos  $\{k_{Li}^{D*}, k_{Hi}^{D*}\}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . Entonces, se tiene que los multiplicadores al utilizar un solo programa dados por las Ecuaciones (4.11) y (4.12) caen dentro del rango dado por los multiplicadores al usar múltiples programas, es decir

$$\begin{aligned} \min_i \{k_{Li}^{D*}\} &\leq k_L^{D*} \leq \max_i \{k_{Li}^{D*}\} \\ \min_i \{k_{Hi}^{D*}\} &\leq k_H^{D*} \leq \max_i \{k_{Hi}^{D*}\} \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Es claro que si la firma pudiese diseñar programas distintos en cada mercado replicaría lo estudiado en el Capítulo 3, i.e. fijaría

$$k_{Li}^{D*} = \frac{F_{Li}^*}{D_i} \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad (4.13)$$

$$k_{Hi}^{D*} = \frac{F_{Hi}^*}{D_i} \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad (4.14)$$

con  $F_{Li}^*, F_{Hi}^*$  dados por las Ecuaciones (4.1) y (4.2), logrando de esta manera un comportamiento equivalente el óptimo.

Supongamos ahora, para fijar ideas, que

$$j = \underset{i}{\operatorname{argmín}} \{k_{Li}^{D*}\}$$

$$k = \underset{i}{\operatorname{argmáx}} \{k_{Li}^{D*}\}$$

Debido a que  $k_{Lj}^{D*} \cdot D_j = F_{Lj}^*$  y  $k_{Lk}^{D*} \cdot D_k = F_{Lk}^*$ , estos valores están caracterizados por

$$\theta_L V'(k_{Lj}^{D*} \cdot D_j) = \frac{C'_L(k_{Lj}^{D*} \cdot D_j)}{1 - \frac{N_{Hj}}{N_{Lj}} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha}} \quad (4.15)$$

$$\theta_L V'(k_{Lk}^{D*} \cdot D_k) = \frac{C'_L(k_{Lk}^{D*} \cdot D_k)}{1 - \frac{N_{Hk}}{N_{Lk}} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha}} \quad (4.16)$$

por lo que, usando que  $k_{Lj}^{D*} \leq k_{Lk}^{D*}$  y la concavidad de  $V$  y convexidad de  $C_L$  es fácil notar que

$$\theta_L V'(k_{Lk}^{D*} \cdot D_j) \leq \frac{C'_L(k_{Lk}^{D*} \cdot D_j)}{1 - \frac{N_{Hj}}{N_{Lj}} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha}} \quad (4.17)$$

$$\theta_L V'(k_{Lj}^{D*} \cdot D_k) \geq \frac{C'_L(k_{Lj}^{D*} \cdot D_k)}{1 - \frac{N_{Hk}}{N_{Lk}} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha}} \quad (4.18)$$

Por lo que, definiendo la función

$$G(x) := \sum_{i=1}^2 N_{Li} D_i \theta_L V'(x \cdot D_i) \left( 1 - \frac{N_{Hi}}{N_{Li}} \frac{(\theta_H - \theta_L)}{\alpha} \right) - \sum_{i=1}^2 N_{Li} D_i C'_L(x \cdot D_i)$$

tenemos que  $G(k_{Lj}^{D*}) \geq 0$  gracias a las Ecuaciones (4.15) y (4.18); y que  $G(k_{Lk}^{D*}) \leq 0$  gracias a las Ecuaciones (4.16) y (4.17). Como  $k_L^{D*}$  está caracterizado por  $G(k_L^{D*}) = 0$ , se concluye por el teorema del valor intermedio que

$$k_L^{D*} \in [k_{Lj}^{D*}, k_{Lk}^{D*}] = \left[ \underset{i}{\operatorname{mín}} \{k_{Li}^{D*}\}, \underset{i}{\operatorname{máx}} \{k_{Li}^{D*}\} \right]$$

como queríamos. Notemos además que este  $k_L^{D*}$  la única raíz de  $G$ , puesto que es esta función es estrictamente decreciente dada la concavidad de  $V$  y convexidad de  $C_L$ .

Un argumento completamente análogo sobre  $k_H^{D*}$  usando (4.12) nos permite concluir que

$$k_H^{D*} \in \left[ \underset{i}{\operatorname{mín}} \{k_{Hi}^{D*}\}, \underset{i}{\operatorname{máx}} \{k_{Hi}^{D*}\} \right]$$

como queríamos. □

Notemos que la proposición recién probada nos dice que cuando la aerolínea puede ajustar un único programa a toda su red, dado que ajusta multiplicadores “intermedios”, termina ofreciendo recompensas más altas que lo óptimo al mercado que resultaría con el multiplicador más pequeño de recompensas si pudiera fijar múltiples programas; y recompensas más bajas

que lo óptimo al mercado que resultaría con el multiplicador más grande de recompensas si pudiera fijar múltiples programas.

En el caso de los viajeros de ocio, no es claro en cuál de los mercados resultaría el multiplicador más bajo de recompensas si la aerolínea tuviese dicha libertad, ya que siguiendo la Ecuación (4.13), un menor multiplicador se puede deber a dos razones no necesariamente ligadas: una mayor distancia de vuelo en el mercado o bien una menor asignación de recompensas óptimas  $F_{Li}^*$ , lo que como se comentó en la Sección 4.2 está relacionado a una menor proporción de viajeros de ocio. Sin embargo, en el caso de los viajeros de negocio la conclusión es clara: debido a que el comportamiento óptimo de la aerolínea mostrado en la Sección 4.2 implica asignar iguales recompensas a esta clase en todos los mercados, siguiendo la Ecuación (4.14) el mercado con el menor multiplicador de recompensas sería aquel con la distancia más larga. Así, es posible replantear la afirmación anterior: en el caso de los viajeros de negocio, cuando la aerolínea está forzada a ajustar un único programa a toda su red, termina ofreciendo recompensas más altas que lo óptimo (en el sentido de lo analizado en la Sección 4.2) a los viajeros del mercado con la distancia más larga, y menos que lo óptimo a los viajeros del mercado con distancia más corta.

Además, la Proposición 4.1 nos permite encontrar directamente condiciones bajo las cuales este programa por distancia resulta equivalente al programa óptimo de la Sección 4.2: cuando la aerolínea, si tuviese la libertad de fijar programas distintos en cada mercado, fijara un único multiplicador por clase. En el caso de los viajeros de negocio, gracias a la Ecuación (4.14), esto se traduce a distancias iguales en los mercados (debido a que las recompensas son iguales). Sin embargo, en el caso de los viajeros de ocio (Ecuación (4.13)) esto no basta, en tanto que las recompensas en general son también distintas, por lo que requerimos adicionalmente proporciones iguales  $\left\{ \frac{N_{Hi}}{N_{Li}} \right\}_i$  entre mercados.

Ahora, centrándonos en el análisis de precios y utilidades, según lo encontrado en (4.6), los usuarios de ocio son dejados con utilidad nula, por lo que el precio a dicha clase es tal que extrae todo su excedente, i.e.

$$P_{Li} = U_0 + \theta_L V(k_L^{D*} \cdot D_i) \quad \forall i \in \{1, 2\}$$

De esto es claro que los precios son distintos entre mercados, con una interpretación clara: los viajeros de ocio del mercado con la distancia más larga terminan recibiendo un mayor número de recompensas bajo este tipo de programa (y posiblemente, un número mayor que al que a la aerolínea le gustaría entregar si pudiera fijar programas distintos entre mercados), lo que tiene como consecuencia inmediata un precio mayor, la aerolínea cobra estas recompensas adicionales. Notemos sin embargo que esto no es necesariamente conveniente, ya que si bien la aerolínea entrega recompensas y precios distintos a los viajeros de ocio de los distintos mercados bajo su comportamiento óptimo (Sección 4.2), no necesariamente ofrece precios y recompensas mayores a los usuarios del mercado con la distancia más larga, sino que lo hace a los usuarios del mercado con mayor proporción de viajeros de esta clase.

En el caso de los viajeros de negocio, siguiendo la Ecuación (4.5), se tiene que en general son dejados con utilidad estrictamente positiva (para  $U_0$  lo suficientemente pequeño), con un comportamiento con respecto a  $\alpha$  similar al del caso con un solo mercado, analizado por

Feres (2013):

$$\frac{\partial u_{Hi}}{\partial \alpha} = D_i \frac{\partial k_L^{D*}}{\partial \alpha} V'(k_L^{D*} \cdot D_i) \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) - V(k_L^{D*} \cdot D_i) \frac{\theta_H}{\alpha^2} \quad \forall i \in \{1, 2\}$$

donde, dado que es fácil notar que  $\frac{\partial k_L^{D*}}{\partial \alpha} > 0^2$ , se tiene que el signo de la derivada de  $u_{Hi}$  con respecto a  $\alpha$  depende de dichas magnitudes. Es por esto que, bajo algunas circunstancias, los pasajeros de negocio pueden estar en peores condiciones (en términos de utilidad) al percibir una menor fracción del precio de su ticket, debido a que esto induce un precio mayor a fijar por parte de la aerolínea, compensado con recompensas que hacen crecer su utilidad pero solo a tasas decrecientes.

Al volver a la Ecuación (4.5), es claro que los viajeros de negocio del mercado con la distancia más larga terminan con la mayor utilidad, lo que está asociado con la mayor asignación de recompensas. Al analizar precios sin embargo, pese a que es directo que en general resultan distintos entre mercados, ya que se escriben como

$$P_{Hi} = \frac{\theta_H}{\alpha} V(k_H^{D*} \cdot D_i) - \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) V(k_L^{D*} \cdot D_i) + U_0 \quad \forall i \in \{1, 2\}$$

la relación de orden no es directa, ya que el primer término es mayor para el mercado con la distancia más larga (la aerolínea entrega más recompensas a los viajeros de negocio en ese par OD, y por tanto las cobra); pero el segundo también lo es en módulo (la aerolínea también hace más atractivo el menú dirigido a los viajeros de ocio en dicho mercado al entregarles más recompensas, y por tanto no puede subir demasiado el precio a la clase alta para seguir induciendo autoselección).

Una condición suficiente (pero claramente no necesaria) que asegura que el precio más alto a la clase de negocio se dará en el mercado con la distancia más larga es (Proposición E.1, Apéndice E)

$$\frac{V'(k_H^{D*} \cdot d)}{V'(k_L^{D*} \cdot d)} > \frac{k_L^{D*}}{k_H^{D*}} \left( 1 - \alpha \frac{\theta_L}{\theta_H} \right) \quad \forall d \in [\min_i \{D_i\}, \max_i \{D_i\}]$$

es decir que la derivada de  $V$  evaluada en las recompensas de la clase alta nunca sea demasiado pequeña en comparación a la misma derivada evaluada en las recompensas de la clase baja.

Finalmente, es interesante notar que todo lo realizado en este capítulo se extiende de manera inmediata al caso de  $N > 2$  mercados, en tanto que los resultados y demostraciones son generales. Así, por ejemplo, con  $N > 2$  mercados, el rango definido en la Proposición 4.1 estará dada solo por el mínimo y máximo de los  $\{k_{Li}^{D*}, k_{Hi}^{D*}\}$ , es decir no involucrará a todos los mercados, sino que solo a dos (el mercado con mayor y menor distancia, respectivamente, en el caso de los viajeros de negocio). De la misma forma, se seguirán teniendo las mismas dispersiones de recompensas y precios entre mercados comentadas en el caso de dos mercados, pero con una relación de orden que en general sigue la misma relación de orden de las

<sup>2</sup> Es decir, entre menos atractivo es para la aerolínea explotar el problema de riesgo moral existente en la clase alta, más recompensas se asignan a la clase baja, de manera que este valor está menos distorsionado a la baja.



distancias (i.e. mayor distancia implica mayores recompensas y mayores tarifas, en general). Además, es importante recalcar que esta dispersión (tanto en el caso de 2 mercados como en el caso con  $N > 2$  mercados) viene dada por una característica intrínseca de este programa: mayores distancias obligan a la aerolínea a entregar mayores recompensas, pese a que no es necesariamente óptimo como se comentó en la Sección 4.2, obligando a la aerolínea a cobrar tarifas mayores en dichos mercados. Este comportamiento no tiene relación por tanto a la diferencia en el costo de operar los mercados (que haría razonable fijar tarifas mayores en mercados con mayor distancia), lo que es esperable en tanto que este costo no es relevante cuando consideramos demandas inelásticas, en donde los precios y recompensas están determinados solo por el problema de riesgo moral y selección adversa.

### 4.3.2. Recompensas Por Tarifa

Ahora nos centramos en el análisis del programa por tarifa pagada, en donde las recompensas están ligadas de manera directa al precio pagado por el pasajero. De manera más precisa, en este programa se tienen la relaciones:

$$\begin{aligned} F_{Li} &= k_L^T \cdot P_{Li} \\ F_{Hi} &= k_H^T \cdot P_{Hi} \end{aligned}$$

donde  $k_L^T, k_H^T$  son los multiplicadores asociados a cada clase, de manera que nuevamente restringimos al diseño de un único programa para toda la red.

Notemos, antes de resolver, que la exigencia de ajustar un único programa (i.e. un único set de parámetros  $k_L^T, k_H^T$ ) impide que este programa sea equivalente, aún durante la fase de diseño, al programa óptimo analizado en la Sección 4.2 al igual que en caso del programa por distancia. Esto es fácil de ver si notamos que en lo estudiado en la Sección 4.2 la aerolínea fija recompensas iguales a la clase de negocio en ambos mercados, pero tarifas distintas en general, lo que es imposible bajo un programa por tarifa pagada, en donde fijar recompensas iguales implica precios iguales.

El problema en la fase de diseño, donde la aerolínea decide precios en ambos mercados y multiplicadores de recompensas se escribe como:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \pi(P_{H1}, P_{H2}, P_{L1}, P_{L2}, k_L^T, k_H^T) && \text{(Tarifa 2M)} \\ & = \sum_{i=1}^2 \{N_{Li}(P_{Li} - C_L(k_L^T \cdot P_{Li}) - c_{op_i}) + N_{Hi}(P_{Hi} - C_H(k_H^T \cdot P_{Hi}) - c_{op_i})\} \\ \text{s.a.} \quad & \theta_H V(k_H^T \cdot P_{Hi}) - \alpha P_{Hi} \geq \theta_H V(k_L^T \cdot P_{Li}) - \alpha P_{Li} && \forall i \in \{1, 2\} \quad \text{(IC-H)} \\ & \theta_L V(k_L^T \cdot P_{Li}) - P_{Li} \geq \theta_L V(k_H^T \cdot P_{Hi}) - P_{Hi} && \forall i \in \{1, 2\} \quad \text{(IC-L)} \\ & U_0 + \theta_L V(k_L^T \cdot P_{Li}) - P_{Li} \geq 0 && \forall i \in \{1, 2\} \quad \text{(PC-L)} \\ & P_{Li}, P_{Hi}, k_L^T, k_H^T \geq 0 && \forall i \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

Al igual que en lo analizado en el Capítulo 3 para el escenario ex-post, saber cuáles restricciones son activas para una aerolínea bajo un programa por tarifa pagada dista de ser trivial,

y requiere más trabajo y condiciones que en el caso por distancia, en tanto que aumentar precios no siempre es óptimo debido a que esto implica aumentar recompensas, y por tanto costo. Pese a esto, es posible probar la siguiente proposición:

**Proposición 4.2** Para el problema (**Tarifa 2M**), en el óptimo las restricciones de compatibilidad de incentivos para la clase baja (IC-L) son inactivas en todos los mercados. Además, la restricción de compatibilidad de incentivos (IC-H) para la clase alta es activa en al menos un mercado. Lo mismo ocurre con la restricción de participación de los usuarios de ocio (PC-L): es activa en al menos un mercado.

DEMOSTRACIÓN. Proposiciones E.2 a E.5, Apéndice E. □

Para establecer si el resto de restricciones son activas o inactivas requerimos condiciones adicionales muy similares a las usadas para resolver el problema del programa bajo tarifa pagada en un mercado (Proposición 3.7):

**Proposición 4.3** Para el problema (**Tarifa 2M**), si los multiplicadores óptimos de recompensas  $k_H^{T*}, k_L^{T*}$  son tales que

$$\frac{1}{k_H^{T*}} \geq C'_H(k_H^{T*} \bar{P}) \quad (4.19)$$

$$\frac{1}{k_L^{T*}} \geq C'_L(k_L^{T*} \underline{P}) \quad (4.20)$$

donde  $\underline{P}$  es el precio que resuelve

$$U_0 + \theta_L V(k_L^{T*} \underline{P}) - \underline{P} = 0 \quad (4.21)$$

y  $\bar{P}$  es el precio más alto que resuelve

$$\frac{\theta_H}{\alpha} V(k_H^{T*} \bar{P}) - \bar{P} = \frac{\theta_H}{\alpha} V(k_L^{T*} \underline{P}) - \underline{P} \quad (4.22)$$

entonces las restricciones de participación para la clase baja y de compatibilidad de incentivos para la clase alta son activas en ambos mercados, y más aún

$$\begin{aligned} P_{H1}^* &= P_{H2}^* = \bar{P} \\ P_{L1}^* &= P_{L2}^* = \underline{P} \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Proposiciones E.6 y E.7, Apéndice E. □

Pese a que los detalles son dejados en el Apéndice, es fácil ver por qué bajo las conclusiones de la Proposición 4.3 los precios de ambos mercados son iguales: si las restricciones de participación de la clase baja son activas en ambas clases, entonces los precios a este tipo de viajero quedan totalmente identificados por esta igualdad (4.21) que depende de  $k_L^{T*}, U_0$  y  $\theta_L$ , parámetros que son idénticos entre mercados bajo nuestra modelación, por lo que resulta natural  $P_{L1}^* = P_{L2}^*$ . El mismo comentario puede ser hecho para la clase alta: una vez que las restricciones de compatibilidad para estos viajeros son activas en ambos mercados,

los precios fijados quedan totalmente determinados por esta igualdad (4.22) que depende de  $k_L^{T*}, k_H^{T*}, \theta_H, \alpha$  y  $P_{Li}^*$ , valores que nuevamente resultan idénticos entre mercados.

Además, notemos que las condiciones (4.19) y (4.20) no son muy restrictivas en tanto que aseguran que la firma realiza una asignación “razonable” de recompensas a ambas clases. En efecto, si no se tuviera alguna de estas condiciones, i.e.

$$\frac{1}{k_s^{T*}} < C'_s(k_s^{T*} P_s^*)$$

para algún  $s \in \{L, H\}$ ,  $P_s^* \in \{\underline{P}, \overline{P}\}$  respectivamente, al considerar que el profit adicional que percibe la firma al entregar una milla (recompensa) adicional a los viajeros de la clase  $s$  bajo este programa es

$$\left( \frac{\partial P_{si}}{\partial F_{si}} - \frac{\partial C_H(F_{si})}{\partial F_{si}} \right) \Big|_{P_{si}=P_s^*, F_{si}=k_s^{T*} P_s^*} = \frac{1}{k_s^{T*}} - C'_s(k_s^{T*} P_s^*) < 0$$

es decir, la aerolínea se encontraría en un punto en donde el costo de las recompensas es mayor que el posible precio adicional a cobrar gracias a éstas, por lo que, debido a la convexidad de  $C_L, C_H$ , sería conveniente reducir las recompensas a esta clase (reduciendo el multiplicador  $k_s^{T*}$ ).

Más aún, si consideramos costos lineales, las condiciones (4.19) y (4.20) nos aseguran que la firma ofrece efectivamente un programa de viajeros frecuentes a ambas clases, ya que bajo dichas formas funcionales el profit marginal asociado a entregar recompensas es constante e igual  $\frac{1}{k_s^{T*}} - C'_s$ . De no tener dichas desigualdades en el caso de costos lineales, cualquier nivel de recompensas distintas de cero para alguna de las clases provoca pérdidas, y la aerolínea por tanto actúa como si no ofreciera un programa de lealtad.

Suponiendo entonces estas condiciones, es fácil encontrar explícitamente la solución al problema de dos mercados bajo un programa por tarifa pagada:

**Proposición 4.4** Para el problema (**Tarifa 2M**), si los multiplicadores óptimos de recompensas  $k_H^{T*}, k_L^{T*}$  son tales que

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_H^{T*}} &\geq C'_H(k_H^{T*} \overline{P}) \\ \frac{1}{k_L^{T*}} &\geq C'_L(k_L^{T*} \underline{P}) \end{aligned}$$

con  $\underline{P}, \overline{P}$  como en la Proposición 4.3, entonces las asignaciones de precios y recompensas (y

por tanto, los multiplicadores) en el óptimo están caracterizadas por:

$$\begin{aligned} F_{H1}^* &= F_{H2}^* = k_H^{T*} \bar{P} \\ F_{L1}^* &= F_{L2}^* = k_L^{T*} \underline{P} \end{aligned}$$

$$\frac{\theta_H}{\alpha} V'(F_{H1}^*) = C'_H(F_{H1}^*) \quad (4.23)$$

$$\theta_L V'(F_{L1}^*) = \frac{C'_L(F_{L1}^*)}{1 - \frac{N_{H1} + N_{H2}}{N_{L1} + N_{L2}} \frac{\theta_H - \theta_L}{\theta_L}} \quad (4.24)$$

$$P_{L1}^* = P_{L2}^* = U_0 + \theta_L V(F_{L1}^*) = \underline{P}$$

$$P_{H1}^* = P_{H2}^* = \frac{\theta_H}{\alpha} (V(F_{H1}^*) - V(F_{L1}^*)) + \theta_L V(F_{L1}^*) + U_0 = \bar{P}$$

DEMOSTRACIÓN. Si se cumplen las desigualdades propuestas, según la Proposición 4.3 en el óptimo  $P_{L1}^* = P_{L2}^*$  y  $P_{H1}^* = P_{H2}^*$  (i.e. un solo set de precios), con lo que el problema (**Tarifa 2M**) se reduce a

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \pi(P_H, P_L, k_H, k_L) = (N_{L1} + N_{L2}) (P_L - C_L(k_L \cdot P_L) - c_{op}) \\ & + (N_{H1} + N_{H2}) (P_H - C_H(k_H \cdot P_H) - c_{op}) \\ \text{s.a.} \quad & \theta_H V(k_H^T \cdot P_H) - \alpha P_H \geq \theta_H V(k_L^T \cdot P_L) - \alpha P_L \quad (\text{IC-H}) \\ & \theta_L V(k_L^T \cdot P_L) - P_L \geq \theta_L V(k_H^T \cdot P_H) - P_H \quad (\text{IC-L}) \\ & U_0 + \theta_L V(k_L^T \cdot P_L) - P_L \geq 0 \quad (\text{PC-L}) \end{aligned}$$

que es equivalente al problema (ex-ante) que resuelve una aerolínea enfrentada a un solo mercado con  $N_{H1} + N_{H2}$  viajeros de negocio y  $N_{L1} + N_{L2}$  viajeros de ocio. De aquí, según lo estudiado en el Capítulo 3 es directo que las asignaciones óptimas cumplen lo descrito.  $\square$

A continuación se proponen algunas condiciones suficientes (pero no necesarias) que aseguran el cumplimiento de las condiciones (4.19) y (4.20), y por tanto de la validez de las soluciones mostradas en la Proposición 4.4:

**Proposición 4.5** Sean

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{(k_H^{T*} \bar{P})^2} \frac{\alpha}{\theta_H} \left( V(k_L^{T*} \underline{P}) \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) - U_0 \right) > 0 \\ m_2 &= \frac{1}{(k_H^{T*} \bar{P} - k_L^{T*} \underline{P})^2} \frac{\alpha}{\theta_H} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} V'(k_H^{T*} \bar{P}) \cdot k_L^{T*} \underline{P} - \theta_L V(k_L^{T*} \underline{P}) - U_0 \right) \end{aligned}$$

con  $\underline{P}, \bar{P}, k_H^{T*}, k_L^{T*}$  definidos en las Proposiciones 4.3 y 4.4. Si  $C'_L(k_L^{T*} \underline{P}) \leq C'_H(k_H^{T*} \bar{P})$ , una condición suficiente para que asegurar el cumplimiento de las condiciones (4.19) y (4.20) es que  $m_2 \leq 0$ . Si  $m_2 > 0$ , definiendo  $m = \min\{m_1, m_2\}$ , una condición suficiente es que  $\tilde{V} := V|_{[0, k_H^{T*} \bar{P}]}$  sea fuertemente cóncava de parámetro  $m$ . Además, una caracterización equivalente es que

$$|V''(x)| \geq 2m \quad \forall x, y \in [0, k_H^{T*} \bar{P}]$$

DEMOSTRACIÓN. Proposición E.8, Apéndice E.  $\square$

Notemos que la Proposición 4.4 nos dice que, bajo condiciones naturales, cuando la aerolínea decide operar con un programa por tarifa pagada y ajusta un solo programa a su red, termina ofreciendo recompensas y precios iguales entre mercados, i.e. termina considerando los mercados de manera conjunta como un único gran mercado, y por tanto no hay dispersión de precios ni de recompensas entre mercados.

Lo anterior logra replicar de manera perfecta la asignación de recompensas a la clase alta dada por el programa óptimo (Sección 4.2), en donde efectivamente la aerolínea asigna igual nivel en ambos mercados, y donde no se producen distorsiones debido a las asimetrías de información existente en el mercado (4.23), sino que únicamente debido al problema de riesgo moral (donde  $\alpha < 1$  y por tanto existe una distorsión al alza).

Situación distinta se produce en el resto de variables, en donde bajo el programa óptimo existen diferencias basadas principalmente en las distintas asignaciones de recompensas a la clase baja. Recordemos que bajo ese programa (óptimo) ambas clases bajas reciben una cantidad distorsionada a la baja de recompensas, sin embargo en el mercado con mayor proporción de viajeros de esta clase se asigna un número mayor. Al estudiar los resultados del programa por tarifa, notamos que (4.24) dado que <sup>3</sup>

$$\min_i \left\{ \frac{N_{Hi}}{N_{Li}} \right\} \leq \frac{\sum_i N_{Hi}}{\sum_i N_{Li}} \leq \max_i \left\{ \frac{N_{Hi}}{N_{Li}} \right\} \quad (4.25)$$

bajo que este esquema se entrega una cantidad intermedia de recompensas en comparación a lo dado por el programa óptimo. Esto implica que el mercado con mayor proporción de viajeros de ocio recibe una cantidad menor que la óptima, mientras que el otro mercado recibe una cantidad mayor que la óptima, aunque nuevamente ambas están distorsionadas a la baja respecto al caso con información perfecta. Esta misma tendencia se repite en el caso del precio a ambas clases, en tanto que dependen directamente de estas recompensas en el caso del programa óptimo.

Nuevamente podemos encontrar condiciones bajo las cuales el programa por distancia realiza asignaciones equivalentes a las de programa óptimo: cuando se alcanza la igualdad en las desigualdades de (4.25), i.e cuando las proporciones  $\frac{N_{Hi}}{N_{Li}}$  son iguales en todos los mercados (y por tanto es óptimo realizar igual asignación de recompensas a las clases bajas de distintos mercados). Esto nos da una indicación de que es posible que el programa por tarifa pagada se encuentre más cerca del programa óptimo que el programa por distancia, en tanto que este último requiere adicionalmente distancias iguales en todos los mercados para replicar el programa óptimo, es decir agrega un nuevo factor de suboptimalidad.

Finalmente notemos que el análisis de precios y recompensas versus, por ejemplo,  $\alpha$  (para analizar el efecto de la introducción del problema de riesgo moral) es idéntico al realizado en el Capítulo 3 para el caso del programa óptimo ex-ante, o al realizado por Feres (2013),

---

<sup>3</sup> Es fácil ver que  $x_i, y_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  se tiene la desigualdad  $\min_i \left\{ \frac{x_i}{y_i} \right\} \leq \frac{\sum_i x_i}{\sum_i y_i} \leq \max_i \left\{ \frac{x_i}{y_i} \right\}$ . En efecto, podemos suponer s.p.g  $y_i = 1 \forall i$  (escalando los  $x_i$  de ser necesario), con lo que se transforma en la desigualdad trivial  $\min_i x_i \leq \frac{\sum_i x_i}{n} \leq \max_i x_i$ .

en tanto que, como se comentó, la aerolínea termina tratando a los dos mercados como uno solo.

### 4.3.3. Comparación de Profits

En la Subsección 4.3.2 se comentó sobre la intuición de que el programa por tarifa pagada sea más cercano al programa óptimo debido a que el programa por distancia volada introduce un nuevo factor de suboptimalidad en general, distancias voladas distintas entre mercados. Lo anterior no nos da ninguna idea sobre la relación de orden de los profits alcanzados por uno y otro programa sin embargo, pero es un buen punto de comienzo en un análisis que se diferencia del realizado en el Capítulo 3, Subsección 3.5.4 en tanto que en este caso, al estar estudiando la fase de diseño, el programa por distancia volada puede modificar las recompensas, lo que resultaba una de las principales desventajas de este esquema en la fase ex-post del capítulo anterior.

En esta subsección por tanto se aborda dicho problema, comparar los profits alcanzados por cada programa, basados en las soluciones analíticas exactas encontradas en las Subsecciones 4.3.1 y 4.3.2. Es importante notar que la solución analítica encontrada para el programa por tarifa pagada involucra algunas condiciones, es decir, el óptimo puede ser distinto si algunas de dichas condiciones no se cumplen. Sin embargo, el punto encontrado es indudablemente factible, por lo que el valor óptimo del programa por tarifa está acotado interiormente por el valor en dicho punto, y por tanto los casos en los que este programa domine al programa por distancia en este análisis se seguirán teniendo aún cuando el óptimo sea distinto.

Para comenzar, es fácil ver que cuando  $D_1 = D_2$  los programas son equivalentes, ya que fijan mismos niveles de recompensas entre mercados y se activan las mismas restricciones. En efecto, al analizar el multiplicador óptimo para recompensas de la clase baja en el programa por distancia (4.11) en el caso  $D_1 = D_2 = D$ , encontramos que está caracterizado por

$$\begin{aligned}
D \sum_{i=1}^2 N_{Li} \theta_L V'(k_L^{D*} D) \left( 1 - \frac{N_{Hi}}{N_{Li}} \frac{(\frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L)}{\theta_L} \right) &= D \sum_{i=1}^2 N_{Li} C'_L(k_L^{D*} D) \\
\Rightarrow \theta_L V'(k_L^{D*} D) &= C'_L(k_L^{D*} D) \frac{\sum_{i=1}^2 N_{Li}}{\sum_{i=1}^2 N_{Li} - N_{Hi} \frac{(\frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L)}{\theta_L}} \\
&= C'_L(k_L^{D*} D) \frac{1}{1 - \frac{\sum_{i=1}^2 N_{Hi} (\frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L)}{\sum_{i=1}^2 N_{Li} \theta_L}}
\end{aligned}$$

es decir, la misma caracterización para las millas entregadas óptimamente a la clase baja que la del programa por tarifa pagada (4.24). De manera similar, en este caso el multiplicador óptimo para recompensas de la clase alta en el programa por distancia (4.12) está caracterizado por

$$\begin{aligned}
D \sum_{i=1}^2 \frac{\theta_H}{\alpha} N_{Hi} V'(k_H^{D*} D) &= D \sum_{i=1}^2 N_{Hi} C'_H(k_H^{D*} D) \\
\Rightarrow \frac{\theta_H}{\alpha} V'(k_H^{D*} D) &= C'_H(k_H^{D*} D)
\end{aligned}$$

es decir, la misma caracterización para las millas entregadas óptimamente a la clase alta que la del programa por tarifa pagada (4.23). Los precios resultan naturalmente los mismos entre programas en tanto que están definidos por estos niveles de recompensas al estar activas las restricciones de participación de la clase baja y de compatibilidad de incentivos de la clase alta.

Por tanto, escribiendo los profits de ambos programas como función de la distancia de los mercados (omitiendo el resto de variables), encontramos que

$$\pi_{\text{Tarifa}}(D_1, D_2)|_{D_1=D_2} = \pi_{\text{Distancia}}(D_1, D_2)|_{D_1=D_2}$$

Además, es claro que

$$\frac{\partial \pi_{\text{Tarifa}}}{\partial D_1} = 0$$

en tanto que el programa por tarifa pagada no incluye la distancia de vuelo en el problema de optimización. Calculemos  $\left. \frac{\partial \pi_{\text{Distancia}}}{\partial D_1} \right|_{D_1=D_2}$ : Sabemos que, dados los precios óptimos encontrados en la Subsección 4.3.1

$$\begin{aligned}
\pi_{\text{Distancia}} &= N_{L1}(U_0 + \theta_L V(k_L^{D*} D_1) - C_L(k_L^{D*} D_1)) \\
&\quad + N_{H1} \left( U_0 + \theta_L V(k_L^{D*} D_1) + \frac{\theta_H}{\alpha} (V(k_H^{D*} D_1) - V(k_L^{D*} D_1)) - C_H(k_H^{D*} D_1) \right) \\
&\quad + N_{L2}(U_0 + \theta_L V(k_L^{D*} D_2) - C_L(k_L^{D*} D_2)) \\
&\quad + N_{H2} \left( U_0 + \theta_L V(k_L^{D*} D_2) + \frac{\theta_H}{\alpha} (V(k_H^{D*} D_2) - V(k_L^{D*} D_2)) - C_H(k_H^{D*} D_2) \right)
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \pi_{\text{Distancia}}}{\partial D_1} \right|_{D_1=D_2} &= N_{L1} (\theta_L V'(k_L^{D*} D_1) - C'_L(k_L^{D*} D_1)) \left( k_L^{D*} + \frac{\partial k_L^{D*}}{\partial D_1} D_1 \right) \\
&\quad - N_{H1} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) V'(k_L^{D*} D_1) \left( k_L^{D*} + \frac{\partial k_L^{D*}}{\partial D_1} D_1 \right) \\
&\quad + N_{H1} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} V'(k_H^{D*} D_1) - C'_H(k_H^{D*} D_1) \right) \left( k_H^{D*} + \frac{\partial k_H^{D*}}{\partial D_1} D_1 \right) \\
&\quad + N_{L2} (\theta_L V'(k_L^{D*} D_2) - C'_L(k_L^{D*} D_2)) \frac{\partial k_L^{D*}}{\partial D_1} D_2 \\
&\quad - N_{H2} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) V'(k_L^{D*} D_2) \frac{\partial k_L^{D*}}{\partial D_1} D_2 + N_{H2} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} V'(k_H^{D*} D_2) - C'_H(k_H^{D*} D_2) \right) \frac{\partial k_H^{D*}}{\partial D_1} D_2
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Reordenando lo anterior, y usando el hecho de que evaluamos en  $D_1 = D_2$ , podemos reescribir

$$\left. \frac{\partial \pi_{\text{Distancia}}}{\partial D_1} \right|_{D_1=D_2} = A + B + C + D$$

con

$$\begin{aligned}
A &= N_{H1} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} V'(k_H^{D*} D_1) - C'_H(k_H^{D*} D_1) \right) k_H^{D*} \\
B &= (N_{H1} + N_{H2}) \left( \frac{\theta_H}{\alpha} V'(k_H^{D*} D_1) - C'_H(k_H^{D*} D_1) \right) \frac{\partial k_H^{D*}}{\partial D_1} D_1 \\
C &= \left\{ V'(k_L^{D*} D_1) \left( N_{L1} \theta_L - N_{H1} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) + N_{L2} \theta_L - N_{H2} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - (C'_L(k_L^{D*} D_1) (N_{L1} + N_{L2})) \right\} \frac{\partial k_L^{D*}}{\partial D_1} D_1 \\
D &= \{ V'(k_L^{D*} D_1) (N_{L1} \theta_L - N_{H1} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right)) - N_{L1} C'_L(k_L^{D*} D_1) \} k_L^{D*}
\end{aligned}$$

Posteriormente, usando que  $k_H^{D*}$  está caracterizado por

$$\frac{\theta_H}{\alpha} (N_{H1} D_1 V'(k_H^{D*} D_1) + N_{H2} D_2 V'(k_H^{D*} D_2)) = N_{H1} D_1 C'(k_H^{D*} D_1) + N_{H2} D_2 C'(k_H^{D*} D_2)$$

y utilizando el hecho de que evaluamos en  $D_1 = D_2$  obtenemos

$$\begin{aligned}
N_{H1} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} V'(k_H^{D*} D_1) - C'_H(k_H^{D*} D_1) \right) &= -N_{H2} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} V'(k_H^{D*} D_1) - C'_H(k_H^{D*} D_1) \right) \\
\Rightarrow \frac{\theta_H}{\alpha} V'(k_H^{D*} D_1) &= C'_H(k_H^{D*} D_1)
\end{aligned}$$

con lo que  $A = B = 0$ . Luego, usando que  $k_L^{D*}$  está caracterizado por:

$$\begin{aligned}
V'(k_L^{D*} D_1) D_1 (N_{L1} \theta_L - N_{H1} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right)) + V'(k_L^{D*} D_2) D_2 (N_{L2} \theta_L - N_{H2} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right)) \\
= N_{L1} D_1 C'(k_L^{D*} D_1) + N_{L2} D_2 C'(k_L^{D*} D_2)
\end{aligned}$$

y evaluando en  $D_1 = D_2$ , obtenemos fácilmente  $C = 0$ . Por tanto

$$\begin{aligned}
\text{sgn} \left( \frac{\partial \pi_{\text{Distancia}}}{\partial D_1} \right) &= \text{sgn}(D) = \text{sgn} \left( V'(k_L^{D*} D_1) \left( N_{L1} \theta_L - N_{H1} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) \right) - N_{L1} C'_L(k_L^{D*} D_1) \right) \\
&= \text{sgn} \left( V'(k_L^{D*} D_1) \left( N_{L1} \theta_L - N_{H1} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) \right) - \frac{N_{L1}}{N_{L1} + N_{L2}} (N_{L1} + N_{L2}) C'_L(k_L^{D*} D_1) \right) \\
&= \text{sgn} \left( V'(k_L^{D*} D_1) \left( N_{L1} \theta_L - N_{H1} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{N_{L1}}{N_{L1} + N_{L2}} V'(k_L^{D*} D_1) \left( N_{L1} \theta_L - N_{H1} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) + N_{L2} \theta_L - N_{H2} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) \right) \right) \\
&= \text{sgn} \left( V'(k_L^{D*} D_1) \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) (N_{H2} N_{L1} - N_{H1} N_{L2}) \right) \\
&= \text{sgn}(N_{H2} N_{L1} - N_{H1} N_{L2})
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\frac{\partial \pi_{\text{Distancia}}}{\partial D_1} \Big|_{D_1=D_2} \begin{cases} \geq 0 & \text{si } \frac{N_{L1}}{N_{H1}} \geq \frac{N_{L2}}{N_{H2}} \\ < 0 & \text{si } \frac{N_{L1}}{N_{H1}} < \frac{N_{L2}}{N_{H2}} \end{cases}$$

Notemos que estos resultados, ilustrados en las Figuras 4.1a y 4.1b resultan intuitivos: cuando las distancias de ambos mercados son iguales, los dos programas reales son equivalentes, y entregan los mismos precios y recompensas entre mercados. Esto en general no es lo deseable para la clase baja, en tanto que el programa óptimo (Sección 4.2) asigna mayores recompensas a los viajeros de ocio del mercado con mayor proporción de éstos. Entonces, cuando la distancia  $D_1$  aumenta y resulta mayor a la distancia  $D_2$ , el programa por distancia asigna



más recompensas a los viajeros de este primer mercado, lo que replica de manera aproximada lo que realiza el programa óptimo (para esta clase) en caso de que  $\frac{N_{L1}}{N_{H1}} > \frac{N_{L2}}{N_{H2}}$ , que es el caso mostrado en la Figura 4.1a, en donde el programa por distancia logra un profit mayor al de programa por tarifa pagada al considerar  $D_1 > D_2$  (al menos marginalmente), debido a que el primero puede aprovecharse de la posibilidad de asignar precios y recompensas distintas en el óptimo, a diferencia de este último.

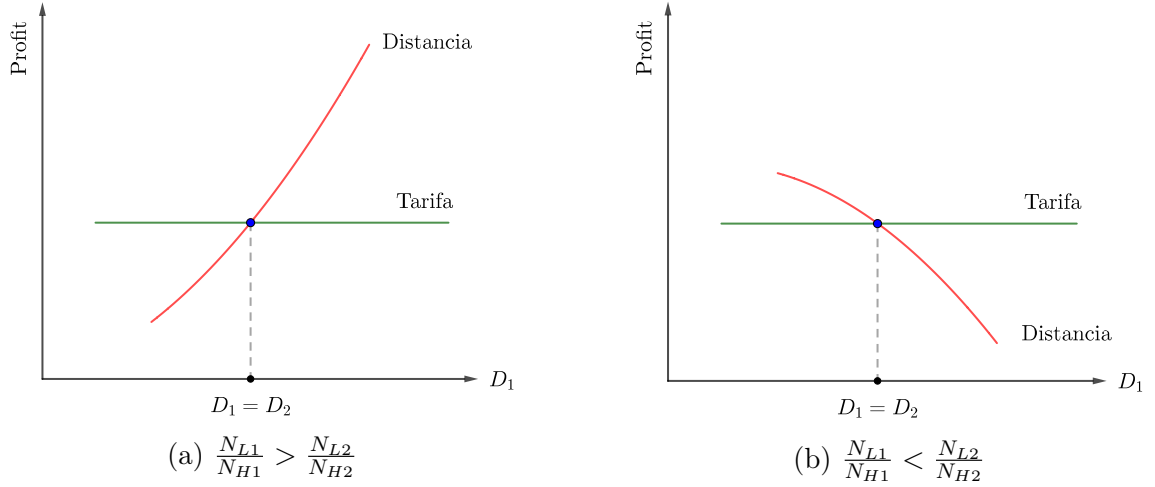


Figura 4.1: Posibles comportamientos de  $\pi_{\text{Distancia}}$  versus  $\pi_{\text{Tarifa}}$  en torno a  $D_1 = D_2$ .

La situación contraria ocurre en la Figura 4.1b, en donde debido a que  $\frac{N_{L1}}{N_{H1}} < \frac{N_{L2}}{N_{H2}}$ , el comportamiento óptimo involucra asignar menos recompensas (y precio) a los viajeros de ocio del mercado 1, lo que es replicable por el programa por distancia si se tiene  $D_1 < D_2$ , en cuyo caso alcanza un profit mayor que el del programa por tarifa pagada.

Lo anterior sin embargo se tiene, según lo probado, para diferencias marginales entre  $D_1$  y  $D_2$ , por lo que es natural preguntarse sobre el comportamiento ante diferencias mayores. Esto es claro al notar que el programa por distancia volada, pese a replicar de manera similar las asignaciones de precios y recompensas del programa óptimo en el caso de que coincidan las relaciones de orden de  $D_i$  y  $\frac{N_{L_i}}{N_{H_i}}$ , comienza a la vez a realizar asignaciones distintas de recompensas a los viajeros de negocio, lo que no es óptimo y por tanto hace intuir que las situaciones mostradas en las Figuras 4.1a y 4.1b no se extienden indefinidamente de la misma forma.

Para considerar esto, evaluemos  $\left. \frac{\partial \pi_{\text{Distancia}}}{\partial D_1} \right|_{D_1=D_2+\gamma}$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Utilizando lo obtenido en la Ecuación (4.26), se sigue que

$$\left. \frac{\partial \pi_{\text{Distancia}}}{\partial D_1} \right|_{D_1=D_2+\gamma} = A + B_2 + C_2 + D$$

con

$$A = N_{H1} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} V'(k_H^{D*} D_1) - C'_H(k_H^{D*} D_1) \right) k_H^{D*}$$

$$B_2 = \left( \frac{\theta_H}{\alpha} \left( \sum_{i=1}^2 N_{Hi} D_i V'(k_H^{D*} D_i) - \sum_{i=1}^2 N_{Hi} D_i C'_H(k_H^{D*} D_i) \right) \right) \frac{\partial k_L^{D*}}{\partial D_1}$$

$$C_2 = \left( \sum_{i=1}^2 N_{Li} D_i \theta_L V'(k_L^{D*} D_i) \left( 1 - \frac{N_{Hi} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right)}{N_{Li} \theta_L} \right) - \sum_{i=1}^2 N_{Li} D_i C'_L(k_L^{D*} D_i) \right) \frac{\partial k_L^{D*}}{\partial D_1}$$

$$D = \left( V'(k_L^{D*} D_1) N_{L1} \theta_L \left( 1 - \frac{N_{H1} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right)}{N_{L1} \theta_L} \right) - N_{L1} C'_L(k_L^{D*} D_1) \right) k_L^{D*}$$

i.e.  $A$ ,  $D$  como antes, y  $B_2 = C_2 = 0$  directamente de la caracterización de  $k_L^{D*}$ ,  $k_H^{D*}$  (4.11,4.12). Notemos que además

$$\frac{\partial A}{\partial D_1} < 0, \quad \frac{\partial D}{\partial D_1} < 0,$$

lo que se sigue hecho de que  $V$  es cóncava y  $C_L$  y  $C_H$  son convexas. Por tanto,  $\frac{\partial^2 \pi_{\text{Distancia}}}{\partial D_1^2} < 0$ , i.e. el profit del programa por distancia es estrictamente cóncavo como función de  $D_1$ . Por tanto,  $\pi_{\text{Distancia}}$  alcanza un máximo global sobre cualquier compacto  $S \subset \mathbb{R}$ . En el contexto del problema, basta tomar  $\bar{D}$  lo suficientemente grande (ya que las distancias entre mercados están naturalmente acotadas), de tal manera que las distancias siempre vivan en  $S = [0, \bar{D}]$ , y de esta forma  $\pi_{\text{Distancia}}$  alcanzará siempre un máximo global.

En términos gráficos, esta propiedad nos permite directamente “completar” los gráficos presentados en las Figuras 4.1a y 4.1b, ya que en el primero,  $\pi_{\text{Distancia}}$  no puede seguir creciendo indefinidamente pues eventualmente su pendiente se volverá negativa; mientras que en el segundo pasa lo contrario: al movernos hacia la izquierda disminuyendo  $D_1$  la pendiente de  $\pi_{\text{Distancia}}$  empieza a aumentar, hasta que eventualmente resulta positiva y el profit empieza a disminuir (al disminuir  $D_1$ ). Dichos comportamientos se muestran en las Figuras 4.2a y 4.2b, donde se observa que siempre existe un intervalo en torno a  $D_1 = D_2$  para el cual  $\pi_{\text{Distancia}} > \pi_{\text{Tarifa}}$ . La extensión de este intervalo decrece entre “más cóncava” es  $V$  y “más convexa” son  $C_L, C_H$ , entendiendo esto como mayores magnitudes de  $|V''|, |C'_L|$  y  $|C'_H|$ .

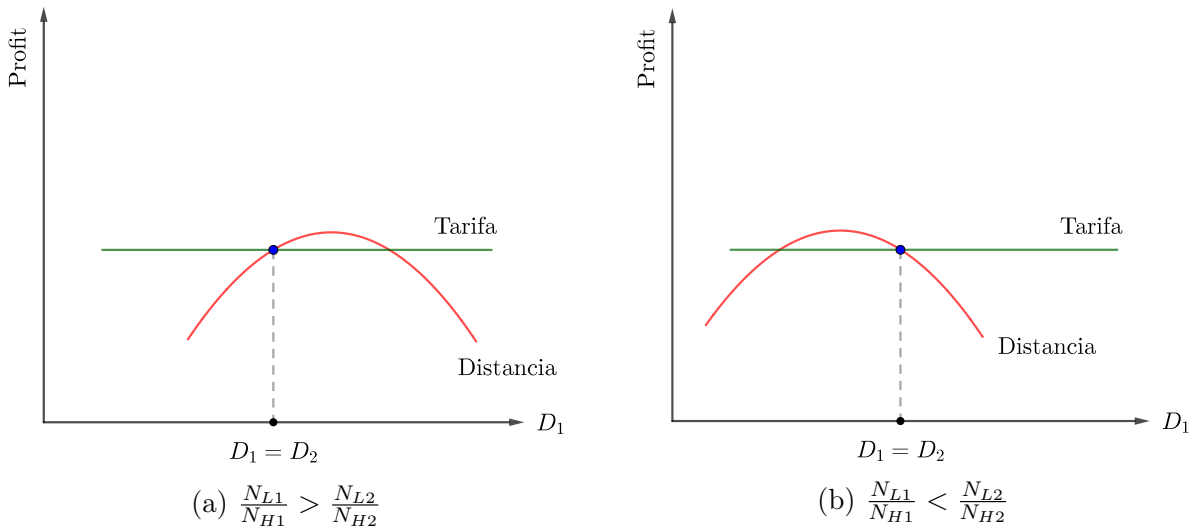


Figura 4.2: Comportamiento cóncavo de  $\pi_{\text{Distancia}}$  versus  $\pi_{\text{Tarifa}}$  en torno a  $D_1 = D_2$ .

## 4.4. Simulaciones

### 4.4.1. Demanda Inelástica

De manera análoga a lo presentado en el Capítulo 3, Secciones 3.6 y 3.9, se muestran a continuación los resultados obtenidos al simular el comportamiento óptimo de una aerolínea bajo un programa óptimo, por tarifa pagada y por distancia volada al servir a dos mercados, enfocándonos en este caso solo en la fase de diseño, en tanto que fue la estudiada analíticamente en las secciones anteriores. Se propone en primer lugar el análisis del caso con demandas del tipo todo o nada, de manera de reforzar los resultados presentados previamente, para posteriormente realizar el análisis de simulaciones con demanda elásticas como en la Sección 3.9, de manera de extrapolar conclusiones.

Las funciones, parámetros y consideraciones son las mismas utilizadas en la Sección 3.6, donde se consideró además un segundo mercado  $M_2$  que replica las características del mercado Austin - Dallas, con Market Share del 99.6 % por parte de Southwest, según la encuesta D1B1 2017 Q1.

Tabla 4.1: Funciones y Parámetros Utilizados en Simulación.

|                      |                           |
|----------------------|---------------------------|
| $V(F)$               | $\log(0.025F)$            |
| $C_H(F_H)$           | $\frac{1}{20}F_H$         |
| $C_L(F_L)$           | $\frac{1}{20}F_L$         |
| $\alpha$             | 0.58                      |
| $\theta_L$           | 43                        |
| $\theta_H$           | 70                        |
| $\{N_{H1}, N_{H2}\}$ | $\{1769, 2309\}^a$        |
| $\{N_{L1}, N_{L2}\}$ | $\{7897, 6476\}^a$        |
| $U_0$                | 35                        |
| $\{D_1, D_2\}$       | $\{446, 189\}$ Millas     |
| $c_{op}$             | 11.22¢/milla <sup>b</sup> |

<sup>a</sup> Valores dados por encuesta D1B1 2017 Q1.

<sup>b</sup> Southwest Airlines Reports 2017.

Notemos que en este caso la mayor proporción de viajeros de ocio se da en el mercado con la distancia más larga, lo que favorece el comportamiento del programa por distancia volada (ya que logra entregar más recompensas a los usuarios de ocio del mercado con la mayor proporción de estos, al igual que el programa óptimo). Este resultado se da en general según los datos registrados en la encuesta D1B1 2017 Q1, como se muestra en la Figura 4.3: los viajes de negocio son en general vuelos de distancias cortas, en donde estos viajeros representan una gran proporción, mientras que distancias largas son en general viajes con destino de ocio.

La simulación se realizó como sigue: dejando fija la distancia del mercado 1 ( $D_1 = 446$  millas),

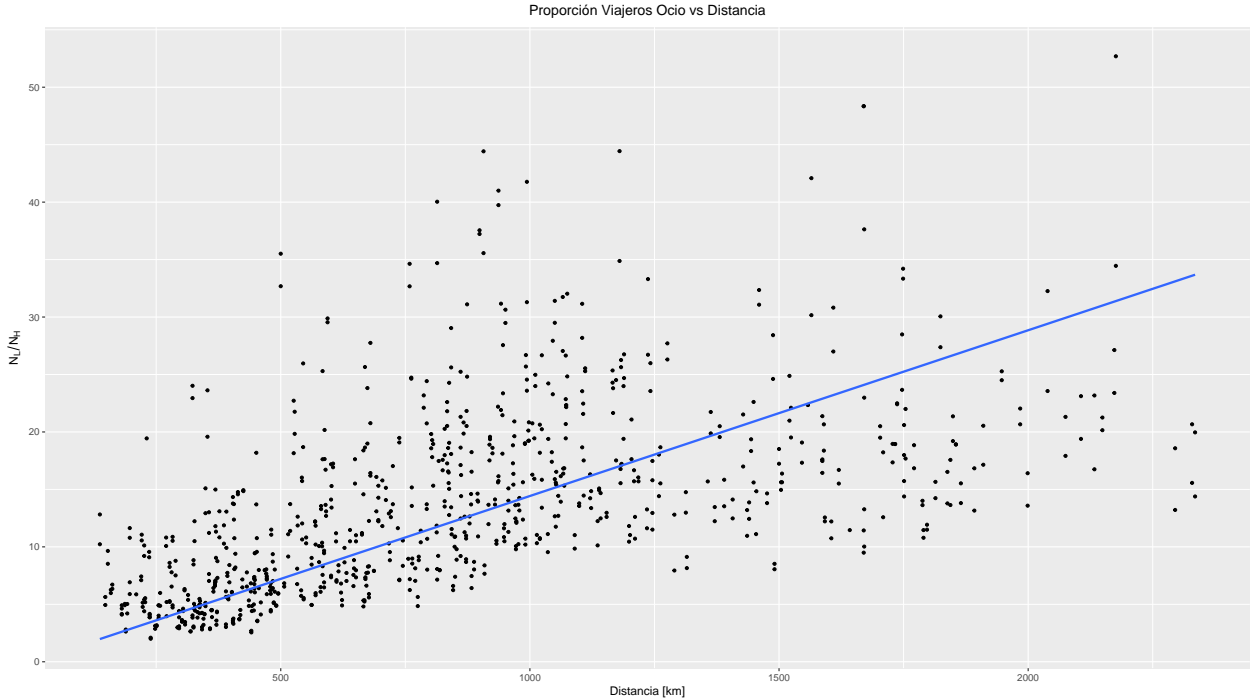


Figura 4.3:  $\frac{N_L}{N_H}$  versus distancia del vuelo, Southwest, encuesta D1B1 2017 Q1.

se movió la distancia del mercado 2 en un rango de valores en torno a  $D_1$  (y que incluye el valor  $D_2 = 189$  millas presentado en la Tabla 4.1). Esto fue hecho de esta manera debido a que, como se comentó en la Subsección 4.3.3, el único factor que hace que el programa por tarifa y por distancia volada sean distintos en la fase de diseño son las diferencias entre  $D_1$  y  $D_2$ , por lo que no en este caso no hay necesidad de variar los valores de los parámetros de demanda (como en el caso de un mercado ex-post).

La comparación de profits de la simulación, mostrados en la Figura 4.4, entregan los resultados esperables: los profits del programa óptimo y del programa por tarifa pagada no varían con  $D_2$ , debido a que las distancias voladas no forman parte de su formulación. Además, como las proporciones  $\frac{N_L}{N_H}$  no son iguales entre mercados, ninguno de los programas reales es equivalente al programa óptimo, y entregan profits estrictamente menores en todos los casos.

También se observa que cuando  $D_1 = D_2$ , los programas reales alcanzan el mismo profit como se esperaba, y debido a que

$$\frac{N_{L1}}{N_{H1}} > \frac{N_{L2}}{N_{H2}}$$

resulta óptimo asignar más recompensas a los viajeros de ocio del mercado 1, por lo que existe un  $\underline{D} < D_1$  tal que si  $D_2 \in (\underline{D}, D_1)$  entonces  $\pi_{\text{Distancia}} > \pi_{\text{Tarifa}}$ , al lograr replicar de manera aproximada este hecho bajo un programa por distancia (Figura 4.4). Sin embargo, esta zona es acotada como se comentó, y de hecho el valor real de  $D_2$  queda fuera de ella, en un punto en donde el programa por distancia volada termina entregando muchas más recompensas que lo óptimo a los viajeros de ambas clases del mercado con la distancia más larga,  $M_1$  (Figuras 4.5 y 4.7), recompensas que no les entregan mucha utilidad y por tanto no pueden ser cobradas provechosamente. A la vez, en estos puntos entrega menos recompensas

que lo óptimo (y por tanto no utiliza en su totalidad las recompensas como medio de cobrar tarifas más caras) a los viajeros del mercado con la distancia más corta,  $M_2$  (Figuras 4.6 y 4.8). Por contraparte, el programa por tarifa pagada siempre entrega la cantidad óptima de recompensas a la clase alta (Figuras 4.6 y 4.8), y un valor intermedio a los entregados por el programa óptimo en el caso de los viajeros de ocio, tal como se preveía.

Finalmente, la Figura 4.9 hace explícito un hecho ya comentado: el programa por distancia volada muestra dispersión de precios entre los mercados al variar las distancias de éstos, a diferencia del programa por tarifa pagada. Para ser más claros, definiendo la tarifa promedio en el mercado  $i$  como

$$\bar{T}_i := \frac{\bar{N}_L P_{Li}^* + \bar{N}_H P_{Hi}^*}{\bar{N}_L + \bar{N}_H}$$

con

$$\bar{N}_k = \frac{N_{k1} + N_{k2}}{2} \quad k = L, H$$

dicho gráfico muestra los valores de  $\bar{T}_2 - \bar{T}_1$  versus los valores de  $D_2 - D_1$ , de donde se tiene que el programa por tarifa pagada mantiene siempre, para ambas clases, los mismos precios entre mercados, independiente de la diferencia entre distancias de los mercados. Situación distinta ocurre en el caso del programa por distancia volada, en donde las diferencias de las tarifas entre mercados son crecientes con las diferencias de distancias: entre más grande es la distancia del mercado  $D_2$  (con  $D_1 = 446$  constante), más recompensas se les entregan a los viajeros de este mercado, y por tanto tarifas más caras les son cargadas para hacerse cargo del costo de estas recompensas. Hay que recordar que este precio mayor en el mercado con distancia más larga en el caso del programa por distancia volada tiene relación solo con la naturaleza de este, no con el mayor costo de operar dicho vuelo, en tanto que ese factor no es relevante en el caso de demandas del tipo todo o nada.

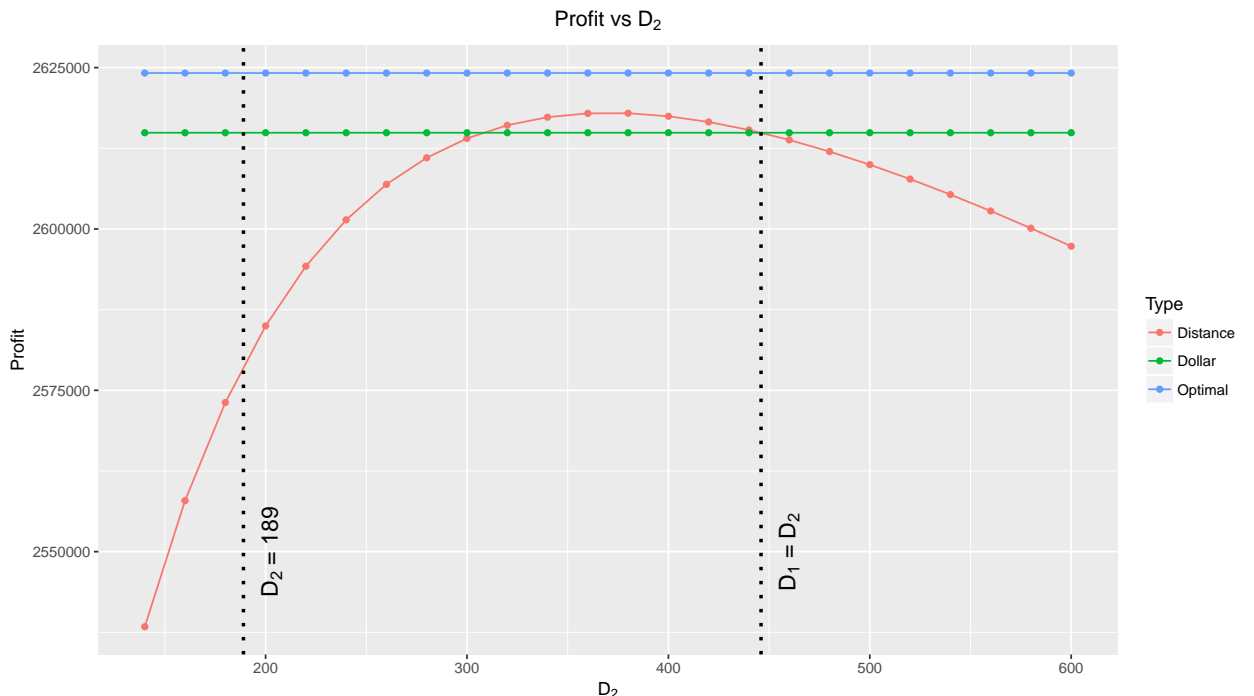


Figura 4.4: Comparación profits versus  $D_2$ .

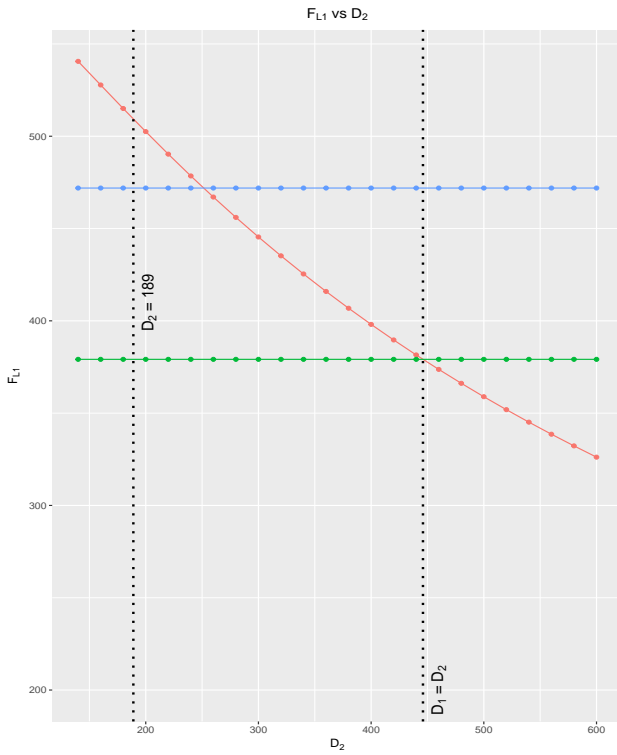


Figura 4.5:  $F_{L1}$  versus cambio en  $D_2$ .

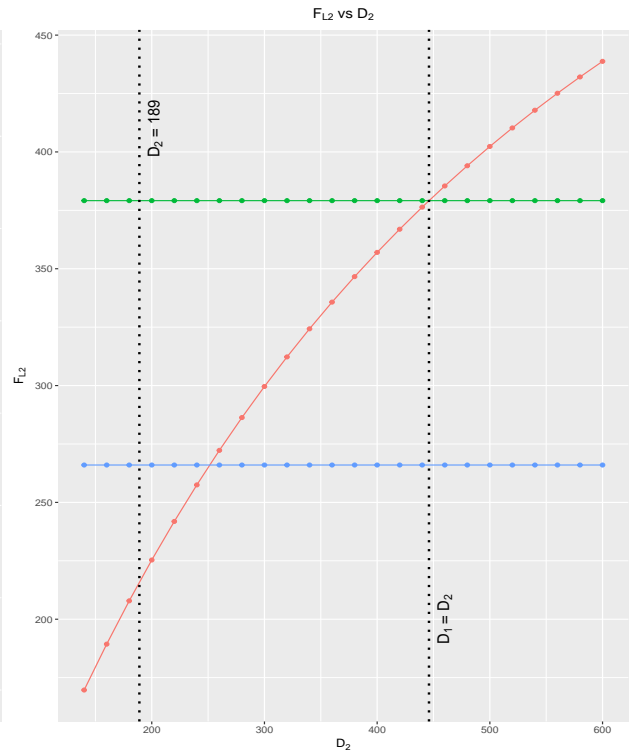


Figura 4.6:  $F_{L2}$  versus cambio en  $D_2$ .

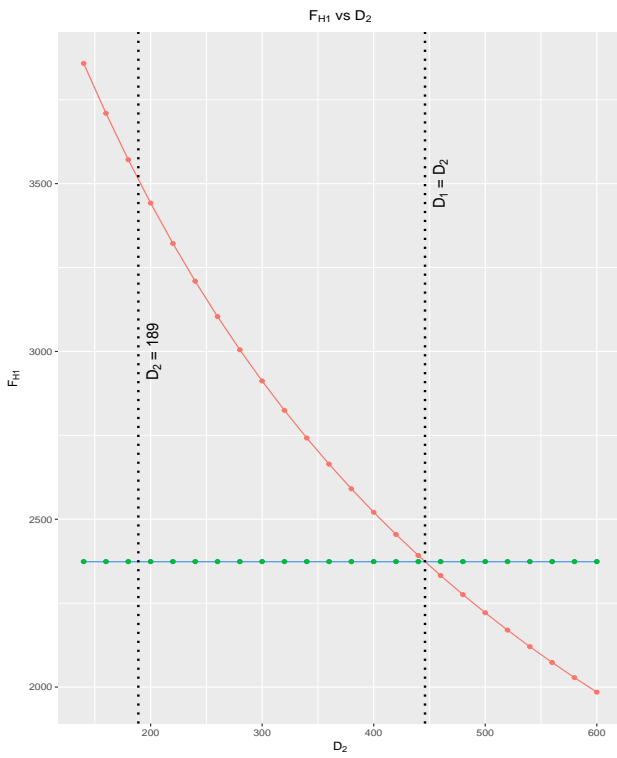


Figura 4.7:  $F_{H1}$  versus cambio en  $D_2$ .

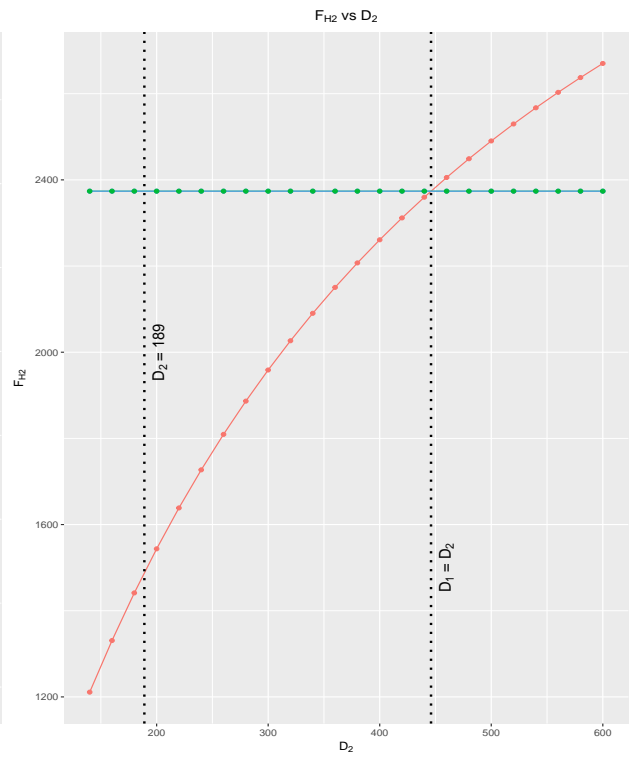


Figura 4.8:  $F_{H2}$  versus cambio en  $D_2$ .

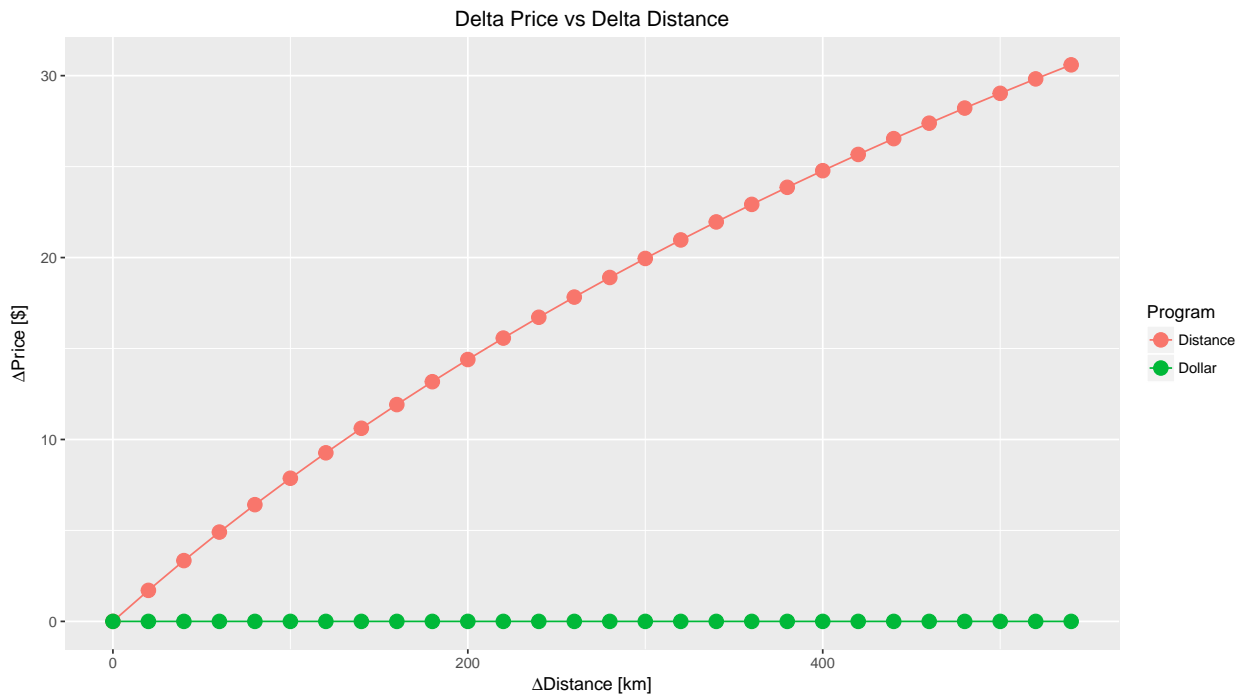


Figura 4.9: Diferencias en tarifa promedio entre mercados versus diferencias entre  $D_1$  y  $D_2$ .

#### 4.4.2. Demanda Elástica

El caso de una aerolínea sirviendo dos mercados con demandas elásticas (a través de una distribución de los viajeros de ocio sobre una línea de Hotelling y distribuyendo el precio de reserva de los viajeros de negocio) no será estudiado en forma analítica, en tanto que el caso del programa óptimo se sigue de manera trivial: la aerolínea en este caso simplemente repite lo estudiado en la Sección 3.8, al no existir nada que ligue a los mercados, i.e. considera cada mercado de manera independiente y resuelve tal como en el caso de un mercado. Por otro lado, los programas reales bajo este contexto resultan poco interesantes, en tanto que la determinación de cuáles restricciones son activas requieren múltiples condiciones difíciles de interpretar.

Por lo anterior, se presentan resultados de simulaciones en el caso con demanda inelástica, que tienen como objetivo brindar intuición sobre las diferencias con respecto al caso inelástico, y al caso con demanda elástica sobre un mercado. Las simulaciones utilizan los mismos parámetros mostrados en la sección anterior, además de distintos intervalos para los precios de reserva de la clase alta y distintos costos de transporte para los viajeros de ocio como se muestra en Tabla 4.2. Finalmente se utilizaron dos supuestos razonables: el costo de operar  $c_{op}$  y los precios de reserva para la clase alta crecen (linealmente) con la distancia del vuelo.

Tabla 4.2: Funciones y Parámetros Utilizados en Simulación.

|  |                           |
|--|---------------------------|
| $V(F)$                                 | $\log(0.025F)$            |
| $C_H(F_H)$                             | $\frac{1}{20}F_H$         |
| $C_L(F_L)$                             | $\frac{1}{20}F_L$         |
| $\alpha$                               | 0.58                      |
| $\theta_L$                             | 43                        |
| $\theta_H$                             | 70                        |
| $\{N_{H1}, N_{H2}\}$                   | $\{1769, 2309\}^a$        |
| $\{N_{L1}, N_{L2}\}$                   | $\{7897, 6476\}^a$        |
| $U_0$                                  | 35                        |
| $\{D_1, D_2\}$                         | $\{446, 189\}$ Millas     |
| $c_{op}$                               | 11.22¢/milla <sup>b</sup> |
| $\{\underline{R}_1, \underline{R}_2\}$ | $\{150, 40\}$             |
| $\{\overline{R}_1, \overline{R}_2\}$   | $\{400, 350\}$            |
| $\{t_1, t_2\}$                         | $\{100, 80\}$             |

<sup>a</sup> Valores dados por encuesta D1B1 2017 Q1.

<sup>b</sup> Southwest Airlines Reports 2017.

La simulación se realizó de igual manera que en el caso inelástico: dejando fija la distancia del mercado 1 ( $D_1 = 446$  millas), se movió la distancia del mercado 2 en un rango de valores en torno a  $D_1$  (y que incluye el valor  $D_2 = 189$  millas presentado en la Tabla 4.2). La gran diferencia en este caso proviene del hecho de que tanto soluciones como el profit alcanzado por la firma varían bajo el programa óptimo y el programa por tarifa al cambiar la distancia del segundo mercado, en tanto que suponemos que esto implica un cambio en el costo de operar, lo que es relevante en el caso con demanda elástica (como se estudió para un mercado en la Sección 3.8).

En primer lugar, es posible apreciar al comparar los profits alcanzados por los distintos programas (Figuras 4.10 y 4.11), que al menos en esta simulación sigue existiendo una pequeña zona cóncava en torno a  $D_1 = D_2$  en la cual el programa por distancia volada domina al programa por tarifa pagada (apreciable en la Figura 4.11, que es simplemente una versión con dominio más acotado de la Figura 4.10). Sin embargo, aún cuando  $D_1 = D_2$ , los programas reales no resultan equivalentes entre si a diferencia del caso inelástico (en tanto que los profits alcanzados en ese punto son distintos), lo que es esperable dado que al considerar mercados con costos de transporte y precios de reservas distintos, ya no se tienen las propiedades que permitían tener esta igualdad en el caso con demanda todo o nada (en donde los programas reales eran equivalentes dado que terminaban considerando los dos mercados como un único, fijando precios y recompensas iguales).

En términos de las soluciones, solo se presentan los gráficos de las recompensas asignadas, en tanto que los precios siguen tendencias similares a éstas. De estos gráficos (Figuras 4.12



a 4.15) se observa que debido a la naturaleza del programa por distancia volada, de manera muy similar a lo analizado para el caso inelástico, para distancias de mercados muy distintas, termina asignando recompensas mucho menores que las óptimas para el mercado con la distancia más corta (no aprovechándose de su potencial utilidad como medio de cobrar tarifas mayores), y mucho mayores que la óptima para el mercado con la distancia más larga (recompensas que entregan poca utilidad y por tanto no implican una gran diferencia de tarifa a cobrar). Este hecho entrega inmediatamente la razón de la dominancia del programa por tarifa pagada en el gráfico de comparación de profits (Figura 4.10) cuando las distancias de los mercados son muy distintas. Es interesante notar además que la zona en torno a  $D_1 = D_2$  en la cual el programa por distancia domina al programa por tarifa se da cuando  $D_1 > D_2$ , al igual que en el caso inelástico (Figura 4.4), por lo que es posible intuir que las mismas condiciones se tienen: como

$$\frac{N_{L1}}{N_{H1}} > \frac{N_{L2}}{N_{H2}}$$

resulta óptimo asignar más recompensas a los viajeros de ocio del mercado <sup>4</sup>, por lo que el programa por distancia lo hace mejor al lograr replicar de manera aproximada este hecho.

Finalmente, la Figura 4.16 muestra nuevamente la diferencia entre las tarifas promedios cargadas entre los mercados en los programas reales a medida que uno de ellos ( $M_2$ ) va aumentando su distancia de vuelo. Comparemos esto con la misma figura en el caso inelástico (Figura 4.9): en este caso la tarifa promedio del programa por dólar es creciente con la distancia, a diferencia del caso con demanda todo o nada, lo que viene explicado por el hecho de que asumimos costos de operación crecientes con la distancia, lo que de manera análoga a lo estudiado caso elástico de un mercado (Sección 3.8) provoca precios mayores en distancias mayores, algo que no ocurre con demandas inelásticas. En el caso del programa por distancia se sigue teniendo el efecto dado por el programa, el cual al estar basado en la distancia volada asigna recompensas y precios muy altos al mercado con la distancia más larga, provocando dispersión de precios aún bajo demandas todo o nada, pero en este caso se suma el mismo efecto que genera pendiente no nula en el gráfico en el caso del programa por tarifa pagada: mayores distancias implican mayores costos de operación y por tanto un extra en la tarifa <sup>5</sup>.

Esta última observación constituye por tanto un importante hallazgo: debido a que el programa por distancia presenta dos efectos que provocan diferencia de precios entre mercados (entendido como mayor precio en el mercado con mayor distancia), efecto costo de operación y efecto del propio programa, a diferencia del programa por tarifa pagada que muestra solo el efecto asociado al costo de operación, nuestro modelo predice en general mayor dispersión de precios contra distancias bajo un programa por distancia volada.

---

<sup>4</sup> En este caso, una diferencia adicional a la causada por los distintos costos de transporte y precios de reserva de los mercados.

<sup>5</sup> La existencia de este efecto se puede apreciar al observar la mayor pendiente de la curva del programa por distancia en el caso de la Figura 4.16 versus la Figura 4.9, o de otra forma, los mayores aumentos de precios provocados por la misma diferencia en la distancia.

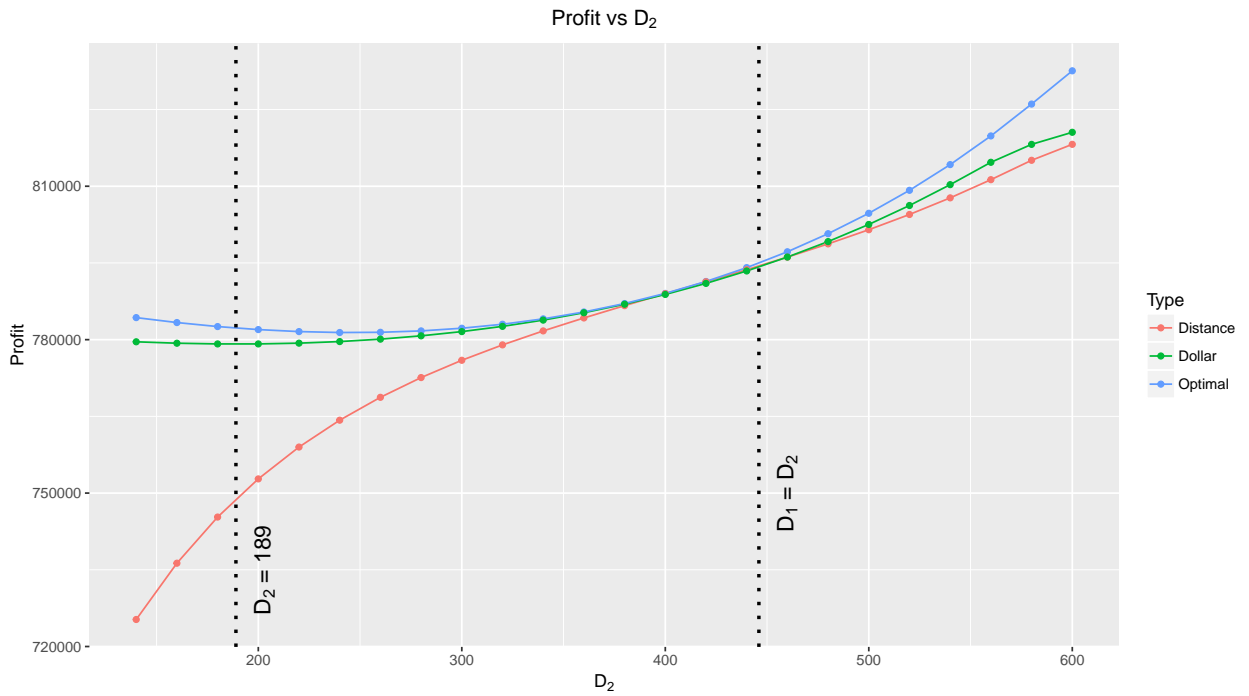


Figura 4.10: Comparación profits versus  $D_2$  ( $140 \leq D_2 \leq 600$ ).

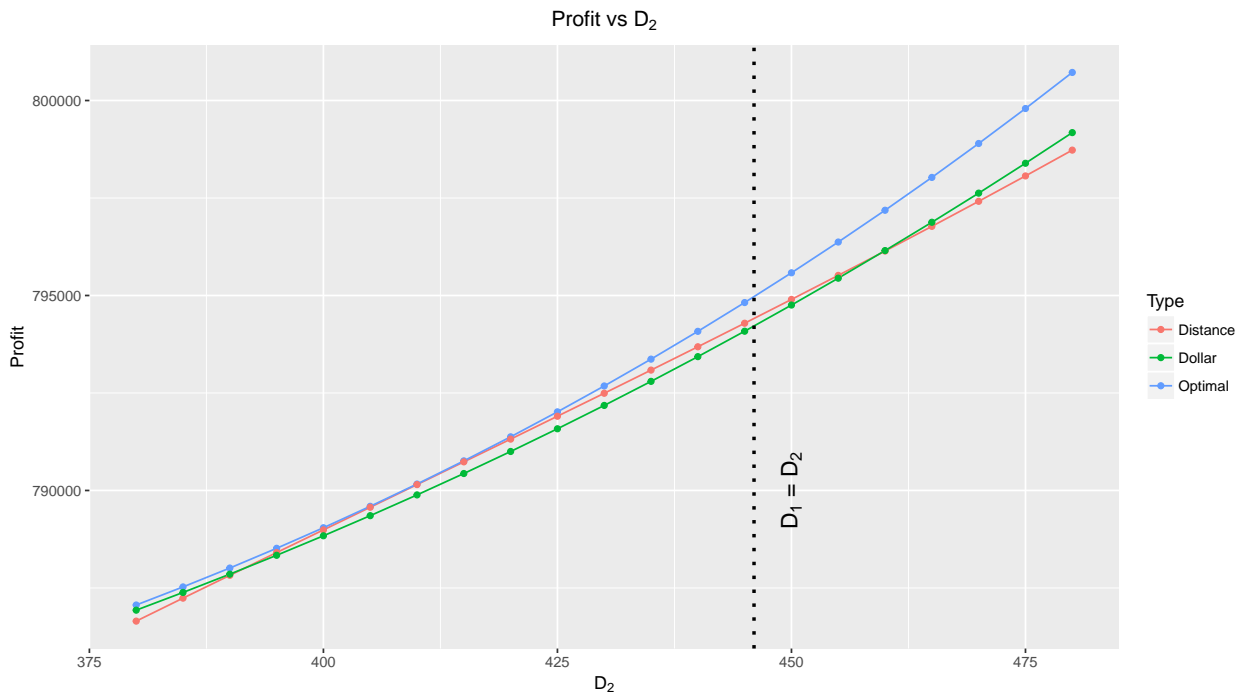


Figura 4.11: Comparación profits versus  $D_2$  ( $380 \leq D_2 \leq 480$ ).

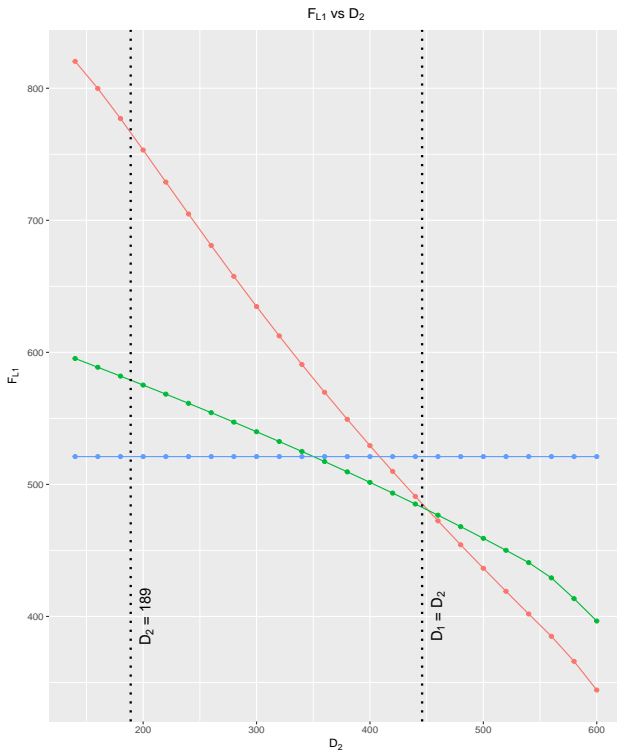


Figura 4.12:  $F_{L1}$  versus cambio en  $D_2$ .

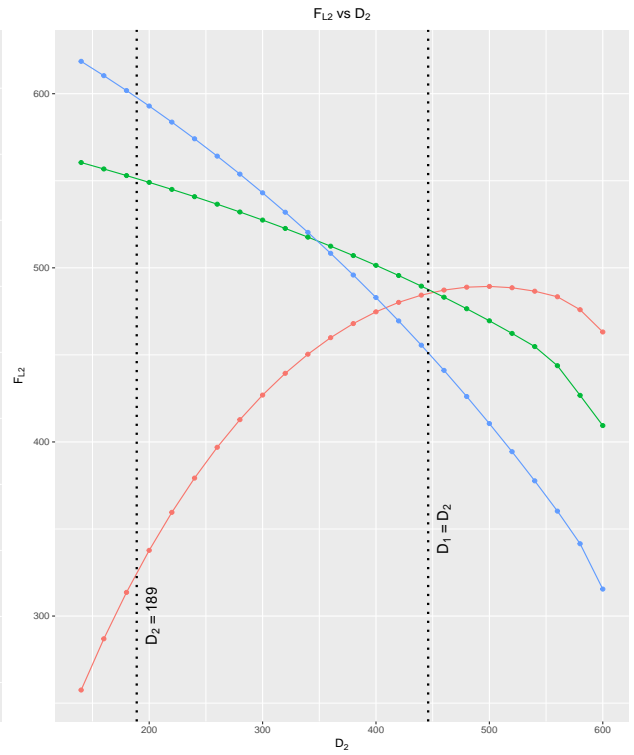


Figura 4.13:  $F_{L2}$  versus cambio en  $D_2$ .

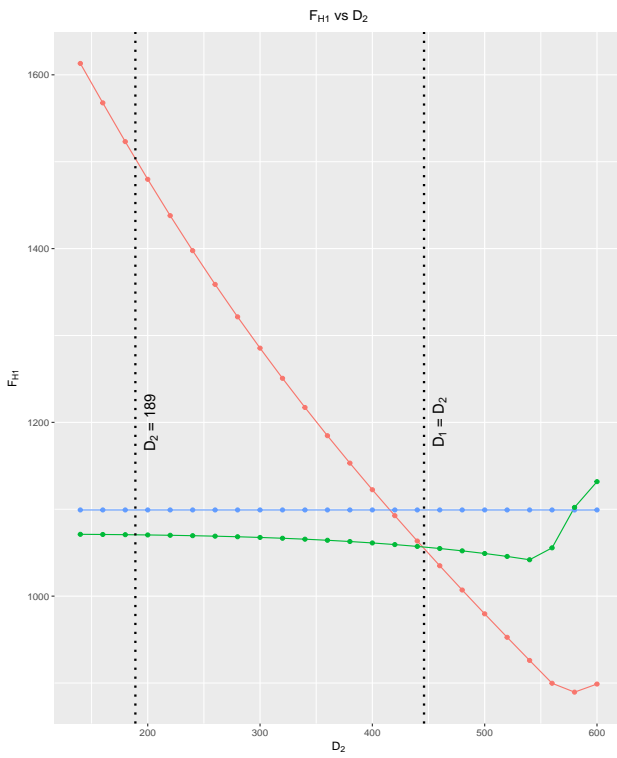


Figura 4.14:  $F_{H1}$  versus cambio en  $D_2$ .

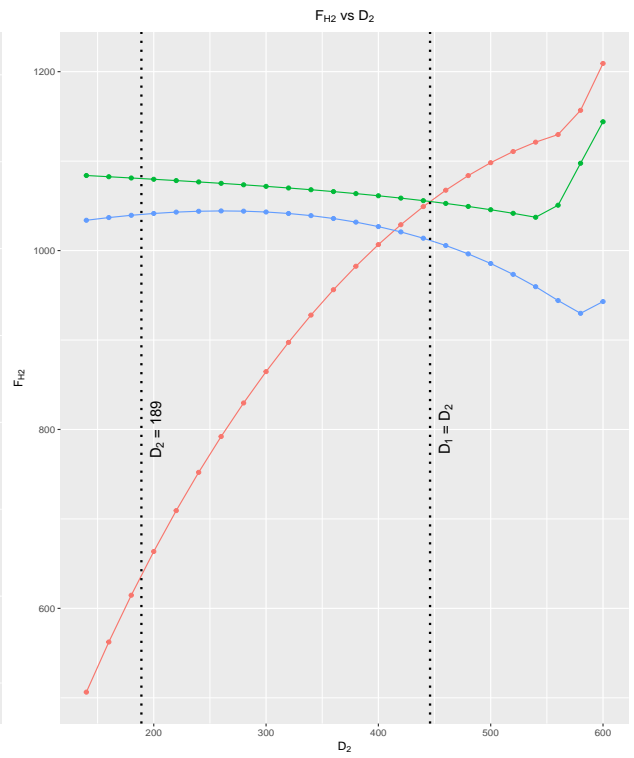


Figura 4.15:  $F_{H2}$  versus cambio en  $D_2$ .

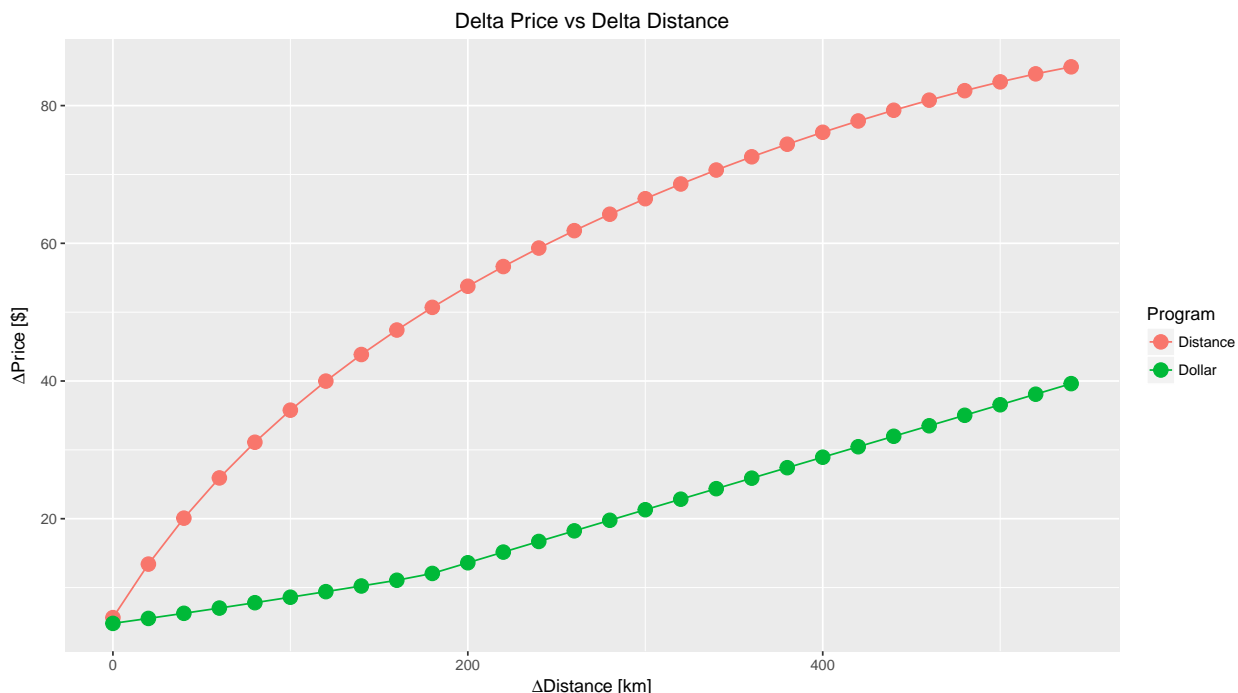


Figura 4.16: Diferencias en tarifa promedio entre mercados versus diferencias entre  $D_1$  y  $D_2$ .

## 4.5. Evidencia Sugestiva

En esta sección se presenta evidencia dada por datos reales que muestran tendencias similares a las predichas por el modelo, en particular en lo relacionado a la mayor dispersión de precios versus distancia cuando la aerolínea opera con un programa por distancia volada, comentado en la Subsección 4.4.2.

Para esto, se recolectó data de la encuesta DB1B<sup>6</sup> entre 2008 y 2016, la cual entrega información del 10% de tickets vendidos en el mercado aéreo doméstico de Estados Unidos. Según la propia definición del BTS, esta base de datos incluye origen, destino y otros detalles del itinerario de los pasajeros transportados, y es utilizada para determinar patrones de tráfico aéreo, market shares de los operadores y flujos de pasajeros.

En particular se utilizó la base DB1BTicket, que posee información de los tickets vendidos con su respectiva tarifa, poniendo especial énfasis en los datos reportados por Southwest Airlines, la cual permite tener un interesante caso de estudio, ya que corresponde a una aerolínea con un alto market share en el mercado doméstico de Estados Unidos, como se evidencia en la Figura 4.17, y la cual además operó hasta el año 2010 con un programa de lealtad basado en distancia volada, y desde el año 2011 con un programa basado en la tarifa pagada<sup>7</sup>, por lo que es posible comparar las dispersiones de precios versus distancias bajo los dos enfoques.

<sup>6</sup> Airline Origin and Destination Survey, ofrecida de manera libre en el sitio web del Bureau of Transportation Statistics, <https://www.bts.gov/>

<sup>7</sup> <http://cnm.com/2011/TRAVEL/01/06/southwest.unveils.new.rewards.system/index.html>

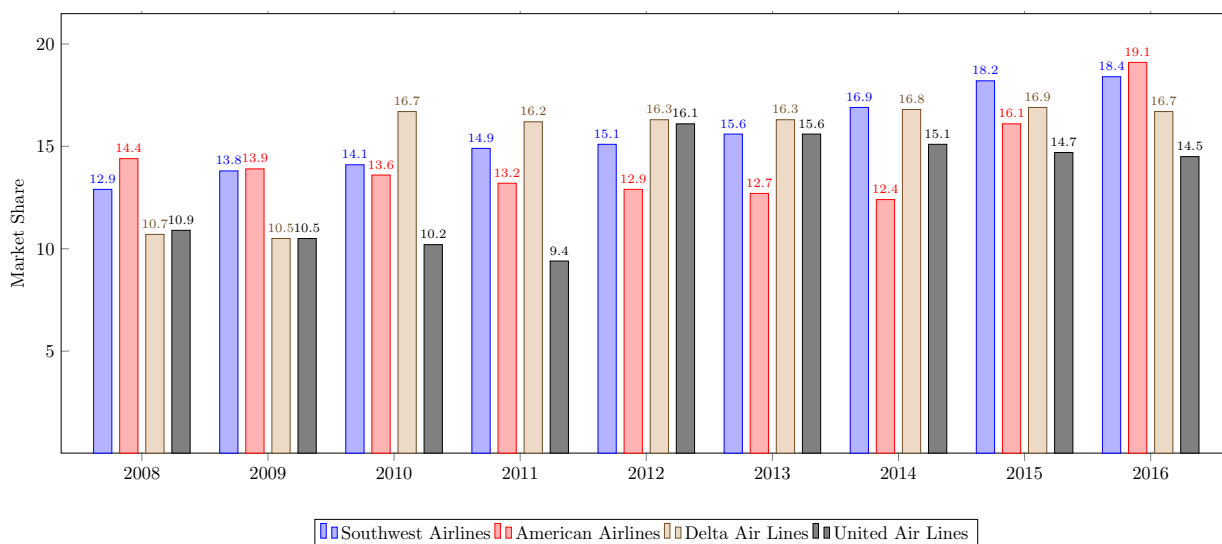


Figura 4.17: Market Share doméstico USA, Top 4 aerolíneas, basado en Revenue Passenger Miles. Fuente: Bureau of Transportation Statistics.

En análisis consistió en identificar mercados con alto market share para Southwest ( $>85\%$ ) a lo largo de todos los años de información considerados (2008-2016), para así aproximar el escenario monopolístico estudiado por el modelo. Posteriormente, para estos mercados se calculó la tarifa media anual según la encuesta DB1B. Posteriormente, de manera anual, se consideraron pares de estos mercados de manera de obtener la diferencia en distancia y en tarifa promedio correspondiente.

Como ejemplo, en la Tabla 4.3 se muestra la metodología al considerar dos mercados particulares con alto market share por parte de Southwest entre 2008 y 2016: Sacramento - San Diego (SMF - SAN) y Kansas City - St. Louis (MCI - STL), de donde es posible observar que se generan 9 puntos con igual cambio en distancia  $\Delta D$ , pero distinto cambio en precio  $\Delta P$ , uno por año de datos.

Tabla 4.3: Ejemplo Metodología Evidencia Sugestiva,  $M_1$ : SMF-SAN,  $M_2$ : MCI - STL.

| Año  | $D_1$ [millas] | Tarifa Media $M_1$ [\$] | $D_2$ [millas] | Tarifa Media $M_2$ [\$] | $(\Delta D, \Delta P)$ |
|------|----------------|-------------------------|----------------|-------------------------|------------------------|
| 2008 | 480            | 110.63                  | 237            | 98.05                   | (243,12.58)            |
| 2009 | 480            | 108.23                  | 237            | 98.13                   | (243,10.10)            |
| 2010 | 480            | 118.37                  | 237            | 109.38                  | (243,8.99)             |
| 2011 | 480            | 145.62                  | 237            | 131.75                  | (243,13.87)            |
| 2012 | 480            | 142.90                  | 237            | 136.06                  | (243,6.85)             |
| 2013 | 480            | 151.14                  | 237            | 141.78                  | (243,9.37)             |
| 2014 | 480            | 156.02                  | 237            | 155.48                  | (243,0.54)             |
| 2015 | 480            | 167.67                  | 237            | 163.47                  | (243,4.2)              |
| 2016 | 480            | 163.79                  | 237            | 157.94                  | (243,5.85)             |

Esto fue repetido para las distintas combinaciones de mercados identificados como aproximadamente monopolísticas por parte de Southwest (market share  $>85\%$ ), generando numerosos

puntos  $(\Delta D, \Delta P)$ . Luego, identificando a los puntos correspondientes a los años 2008 a 2010 con el programa por distancia volada, y a los correspondientes a los 2011 a 2016 con el programa por tarifa pagada, se obtiene el gráfico presentado en la Figura 4.18, donde las líneas de regresiones muestran las mismas tendencias presentadas en el modelo (Figuras 4.9 y 4.16): para la misma diferencia de distancia entre dos mercados, la diferencia en precio cargado por la aerolínea tiende a ser más alto cuando ésta ofrece un programa por distancia volada.

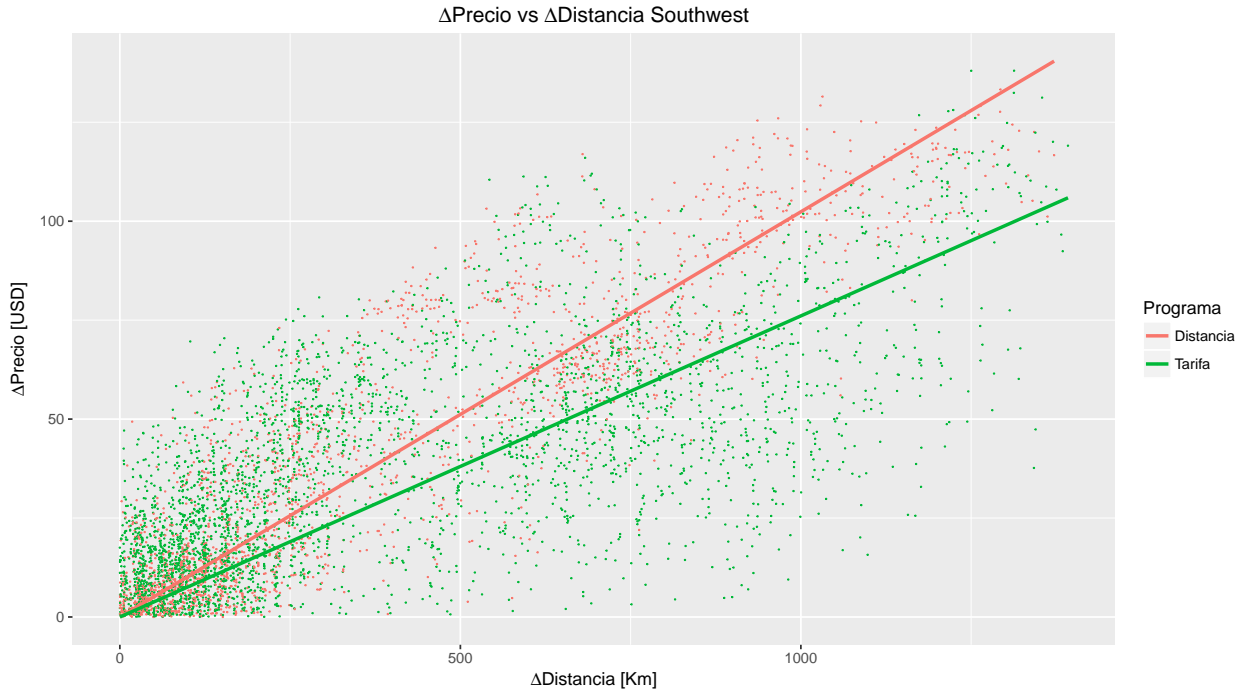


Figura 4.18:  $\Delta$  Precio versus  $\Delta$  Distancia, 2008-2016 Southwest, con líneas de regresión.

Sin embargo, la Figura 4.18 esconde varios efectos debido a que las diferencias de precio entre mercados en la realidad no vienen dadas únicamente por la diferencia en el costo de operación de éstos y tipo de programa, pueden por ejemplo existir diferencias en el *markup*, o también, debido a que se están agrupando distintos años, pueden haber existido cambios en la magnitud y estructura de costos de la aerolínea. Por tanto, como un primer acercamiento para intentar verificar la existencia del efecto del programa por distancia volada en la dispersión de precios entre mercados, se realizó una regresión lineal controlando por otros factores, lo que intentan dar cuenta de efectos como los comentados. Los resultados se muestran en la Tabla 4.4, de donde se desprende que existe un efecto general (bajo ambos programas) de dispersión de precios al aumentar la diferencia en distancia de los mercados, que corresponde a alrededor de 5.4¢ por milla de diferencia en distancias; pero a su vez, existe un efecto particular existente en el programa bajo distancia volada, que adiciona 3.8¢ de a la diferencia de precios entre mercados por cada milla de diferencia.

Además, el resto de variables de control introducidas entregan resultados razonables: entre mayor es el market share de la firma en el mercado con mayor distancia, mayor poder de mercado puede ejercer, cobrando por tanto tarifas mayores e incrementando la diferencia en precio. Por otro lado, entre más grande es el mercado con la mayor distancia, menor control

puede ejercer y por tanto termina ofreciendo tarifas menores, disminuyendo  $\Delta P$ .

Tabla 4.4: Resultados Regresión

|  | <i>Dependent Variable:</i>  |
|--|-----------------------------|
|  | $\Delta P$                  |
| $\Delta D$                             | 0.054***                    |
| $\Delta D \cdot \text{Distance Based}$ | 0.038***                    |
| $\Delta \% \text{ Market Size}$        | -1.839***                   |
| $\Delta \% \text{ Airports Size}$      | -1.223***                   |
| Market Share $M_1$                     | 47.775**                    |
| Year 2009                              | -2.514***                   |
| Year 2010                              | 1.766*                      |
| Year 2011                              | 14.413***                   |
| Year 2012                              | 15.334***                   |
| Year 2013                              | 10.877***                   |
| Year 2014                              | 7.045***                    |
| Year 2015                              | 2.975***                    |
| Year 2016                              | 3.813***                    |
| Observations                           | 5,507                       |
| R <sup>2</sup>                         | 0.698                       |
| Adjusted R <sup>2</sup>                | 0.697                       |
| Residual Std. Error                    | 16.693 (df = 5493)          |
| F Statistic                            | 974.792*** (df = 13; 5493)  |
| <i>Note:</i>                           | *p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01 |

## 4.6. Síntesis

En este capítulo se extendió el análisis realizado en el Capítulo 3, estudiando el comportamiento de una aerolínea que sirve a dos mercados, con demandas y distancias de vuelo distintas. La aerolínea, que actúa como un monopolio discriminante, se enfrenta en cada mercado a una masa de viajeros de negocio, quienes pagan solo una fracción de su ticket, debido a la existencia de un pagador externo; y a una masa de viajeros de ocio que pagan la totalidad de su ticket. Inicialmente, se estudió el caso en donde la aerolínea puede ajustar un programa de lealtad distinto en cada mercado (programa óptimo), probando que en este caso, se recuperan las soluciones encontradas en el Capítulo 3, es decir, las mostradas en la Tabla 4.5. De estos resultados se desprende que el comportamiento óptimo de la aerolínea implica asignar igual nivel de recompensas entre mercados a la clase alta, pero mayor nivel de recompensas a la clase baja del mercado con la proporción más grande de este tipo de viajeros, lo que se repite al estudiar los precios.

Es importante notar que estas diferencias de precios entre mercados para el programa óptimo están justificadas por el problema de selección adversa: en el mercado con más viajeros de ocio esta clase resulta más atractiva para la firma, que termina ofreciéndoles un menú con mayores precios y recompensas. De esta forma, estas diferencias no tienen relación con los distintos costos de operación de los mercados, los cuales ni siquiera aparecen al resolver el problema con demanda todo o nada.

Tabla 4.5: Caracterización de Soluciones, Programa Óptimo.

|            |   |
|------------|---|
| $F_{Li}^*$ | $\theta_L V'(F_{Li}^*) = \frac{C'_L(F_{Li}^*)}{1 - \frac{N_{Hi}}{N_{Li}} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha}}$ |
| $F_{Hi}^*$ | $\frac{\theta_H}{\alpha} V'(F_{Hi}^*) = C'_H(F_{Hi}^*)$   |
| $P_{Li}^*$ | $U_0 + \theta_L V(F_{Li}^*)$  |
| $P_{Hi}^*$ | $\frac{\theta_H}{\alpha} (V(F_{Hi}^*) - V(F_{Li}^*)) + P_{Li}^*$  |

Posteriormente, al estudiar problemas reales, en donde se hace el supuesto de que la firma ajusta un único programa para ambos mercados, se obtienen resultados radicalmente distintos: una aerolínea bajo un programa por distancia asigna en general precios y recompensas muy altos a los viajeros del mercados con la distancia más larga, y muy bajos para los viajeros del mercado con la distancia más corta. Por otro lado, la aerolínea bajo un programa por distancia termina considerando ambos mercados como uno, asignando precios y niveles de recompensas intermedios con respecto al comportamiento óptimo. Estos resultados se resumen en las Tablas 4.6 y 4.7.

La comparación de profits permite concluir que existe una zona en donde las distancias de los mercados son lo suficientemente cercanos, pero no iguales, en la cual el programa por distancia es capaz de aprovecharse del hecho de que asigna mayores precios y recompensas en uno de los mercados, replicando de manera aproximada el comportamiento óptimo y logrando un profit mayor que el del programa por tarifa pagada. Esta zona es sin embargo muy acotada,



y por tanto ante una heterogeneidad en las distancias de los mercados lo suficientemente grande, el programa por tarifa pagada logra un profit mayor.

Tabla 4.6: Caracterización de Soluciones, Programa por Distancia.

|            | Programa por Distancia   |
|------------|--|
| $F_{Li}^*$ | $k_L^{D*} \cdot D_i$   |
| $F_{Hi}^*$ | $k_H^{D*} \cdot D_i$   |
| $P_{Li}^*$ | $U_0 + \theta_L V(F_{Li}^*)$   |
| $P_{Hi}^*$ | $\frac{\theta_H}{\alpha} (V(F_{Hi}^*) - V(F_{Li}^*)) + \theta_L V(F_{Li}^*) + U_0$   |
| $k_L^{D*}$ | $\sum_{i=1}^2 N_{Li} D_i \theta_L V'(k_L^{D*} D_i) \left( 1 - \frac{N_{Hi} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right)}{N_{Li} \theta_L} \right) = \sum_{i=1}^2 N_{Li} D_i C'_L(k_L^{D*} D_i)$ |
| $k_H^{D*}$ | $\sum_{i=1}^2 \frac{\theta_H}{\alpha} N_{Hi} D_i V'(k_H^{D*} D_i) = \sum_{i=1}^2 N_{Hi} D_i C'_H(k_H^{D*} D_i)$  |

Tabla 4.7: Caracterización de Soluciones, Programa por Tarifa.

|            | Programa por Tarifa   |
|------------|---|
| $F_{Li}^*$ | $\theta_L V'(F_{Li}^*) = \frac{C'_L(F_{Li}^*)}{1 - \frac{N_{H1} + N_{H2}}{N_{L1} + N_{L2}} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha}}$ |
| $F_{Hi}^*$ | $\frac{\theta_H}{\alpha} V'(F_{Hi}^*) = C'_H(F_{Hi}^*)$   |
| $P_{Li}^*$ | $U_0 + \theta_L V(F_{Li}^*)$  |
| $P_{Hi}^*$ | $\frac{\theta_H}{\alpha} (V(F_{Hi}^*) - V(F_{Li}^*)) + \theta_L V(F_{Li}^*) + U_0$  |
| $k_L^{T*}$ | $\frac{F_{Li}^*}{P_{Li}^*}$   |
| $k_H^{T*}$ | $\frac{F_{Hi}^*}{P_{Hi}^*}$   |

Finalmente, las simulaciones para el caso elástico sugieren que las intuiciones del caso inelástico se mantienen, donde además la dispersión de precios versus diferencia en distancia entre los mercados sigue siendo mayor para el programa por distancia volada, aunque en este caso el programa por tarifa si muestra dispersión no nula de precios, a diferencia del caso inelástico. Esto se debe a que al introducir elasticidad sobre las demandas, el costo de operación (el cual asumimos creciente con la distancia de vuelo) es relevante en las soluciones de ambos programas, y los precios resultan por tanto crecientes con la distancia de vuelo. Estos resultados son consistentes con la data recolectada para Southwest entre 2008 y 2016 (basada en la encuesta DB1B), la cual muestra efectivamente mayores dispersiones de precios versus distancias en los años de operación bajo un programa por distancia volada (2008-2010 en nuestros datos).

# Capítulo 5

## Conclusiones y Líneas Futuras de Investigación

En el presente trabajo se propone una extensión a lo realizado por Feres (2013), modelando el comportamiento de una aerolínea que ofrece un programa de lealtad y que actúa como un monopolio discriminante que se enfrenta a la existencia de dos tipos de viajeros: de negocio, quienes son parcialmente financiados por un pagador externo; y de ocio, quienes pagan la totalidad de su ticket. La firma, al no ser capaz de distinguir a los pasajeros, se enfrenta a un problema de selección adversa, en donde intentará ofrecer menús con distintos precios y niveles de recompensas para inducir autoselección por parte de los viajeros. Además, el hecho de que los viajeros de negocio no paguen la totalidad de su ticket genera un problema de riesgo moral entre ellos y los pagadores externos (usualmente, sus empleadores) como el estudiado por (Basso et al., 2009), en donde este último no es capaz de monitorear todas las posibles opciones a las que se enfrenta el viajero, ya que usualmente realizarlo es muy costoso o directamente imposible al depender de restricciones o preferencias particulares del viajero. Por tanto, el empleador solo ve la decisión que realiza el empleado, con la opción de aceptarla o rechazarla.

Esta tesis se enfoca en el impacto que produce sobre el comportamiento de la firma el ligar el número de recompensas entregadas con alguna variable del problema, a saber, distancia volada o precio pagado, teniendo como motivación el enfoque utilizado en la realidad por aerolíneas, donde desde los años 80 las recompensas han estado ligado a la distancia volada, pero en los últimos 10 años han habido movimientos hacia recompensas ligadas a tarifa pagada, de manera de asociarlas de alguna forma al revenue.

Es por tanto que esta tesis propone un modelo teórico que aborda la problemática anterior, comenzando por el caso de un mercado a servir y demandas del tipo todo o nada, caso que permite extraer conclusiones que explican en parte el cambio visto en la industria, y que además genera intuiciones sobre las diferencias en precios y recompensas que implica el uso de uno u otro programa. Posteriormente, este enfoque es extendido al caso con demandas elásticas y luego a dos mercados a servir, lo que permite acercarse a la realidad y bajo lo cual se realizan conclusiones que coinciden con conceptos intuitivos y que además son consistentes con lo observado en datos recolectados de la industria.

A continuación se presenta una síntesis en mayor detalle de cada una de las secciones desarrolladas.

## 5.1. Modelo de un mercado con demanda inelástica

Al analizar el problema de un mercado con demanda inelástica, partimos desde el *benchmark* realizado por Feres (2013), con un programa que llamamos *óptimo*, bajo el cual las recompensas son movidas sin estar ligadas a ninguna variable, y en donde se concluye que el problema de selección adversa no induce distorsión en la cantidad de recompensas asignadas a la clase alta, pero sí produce una distorsión a la baja en las recompensas recibidas por la clase de ocio, resultado clásico en este tipo de problemas, descrito por Mussa y Rosen (1978). Sin embargo, al introducir el problema de riesgo moral se produce una distorsión al alza en la clase de negocio, donde la aerolínea termina *sobornando* a estos viajeros a través de recompensas para que escojan un ticket con precio más alto, muy en la dirección de lo realizado por Basso et al. (2009), aunque en este caso además provoca una disminución en las recompensas asignadas a la clase baja, que es aún menos atractiva para la firma.

Al estudiar los programas reales, i.e. con recompensas ligadas a distancia y a la tarifa pagada, encontramos que en la fase diseño, cuando los parámetros de demanda son tomados como sus valores esperados (el escenario ex-ante), estos son equivalentes al programa óptimo, lo que tiene una intuición clara: la aerolínea escoge multiplicadores de recompensas que implican la misma asignación que bajo el programa óptimo. Por tanto, las mismas ineficiencias y distorsiones comentadas anteriormente siguen estando presente, y de exactamente la misma manera.

Sin embargo, ex-post, cuando los programas de lealtad ya fueron diseñados y no pueden ser modificados, debido a que la aerolínea anunció sus multiplicadores de recompensas que no pueden cambiarse en el corto plazo, encontramos que si alguno de los valores reales de los parámetros de demanda difiere de su valor esperado, ni el programa por distancia ni el programa por tarifa pagada pueden replicar el comportamiento del programa óptimo. Mostramos sin embargo que el programa por tarifa pagada le permite a la aerolínea responder ante cambios de una manera más cercana a la del programa óptimo que el programa por distancia volada, lo que implica que, bajo ciertas condiciones, este último es dominado en profit por el programa basado en revenue.

Además, se muestra que, ex-post, es más probable que la clase baja sea cerrada (es decir, que la firma decida servir solo a la clase alta) bajo un programa por distancia que bajo un programa por tarifa pagada, debido a que bajo es último el servir solo a la clase alta, cobrando por tanto tarifas mayores, tiene un *downside*: entregar mayores recompensas, las cuales tienen un costo para la aerolínea, mientras que bajo un programa por distancia la aerolínea es capaz de subir el precio cobrado manteniendo el nivel de recompensas. Este hecho es consistente con la data de cierre de clases recolectada durante octubre y noviembre de 2014 para LATAM Airlines (programa por distancia), Air Canada (programa por distancia) y Southwest Airlines (programa por tarifa).

## 5.2. Modelo de un mercado con demanda elástica

Al estudiar el programa óptimo enfrentado a demanda elástica, se encuentra que de manera similar a lo realizado por Rochet y Stole (2002), la restricción de compatibilidad de incentivos para la clase baja nunca es activa bajo condiciones razonables, lo que en dicho trabajo implica directamente una asignación eficiente a la clase alta, tal como en Mussa y Rosen (1978). Sin embargo, en nuestro modelo, al ignorar momentáneamente el problema de riesgo moral, dicha clase siempre recibe una cantidad ineficientemente baja de recompensas, lo que tiene relación con un supuesto utilizado que hace relación a una característica particular de la industria estudiada: la elasticidad a la clase alta se introdujo distribuyendo el precio de reserva de los empleadores, es decir el nivel de demanda viene dado únicamente por el precio cobrado, no por las recompensas, las cuales no modifican la utilidad del principal (empleador). Por tanto, la aerolínea termina ofreciendo precios y recompensas más bajas a fin de conservar demanda.

En el caso de los viajeros de ocio, el problema de selección adversa nuevamente les implica una asignación menor a la eficiente de recompensas, debido a que la aerolínea privilegia a la clase alta, aunque en este caso es menos aguda que en el caso inelástico: la aerolínea asigna un menú con menos precios y recompensas a la clase alta, y debido a que la valoración por recompensas de la clase baja es menor, este paquete les podría resultar más atractivo que el diseñado para ellos. Por tanto, la aerolínea se ve obligada a mejorar el menú apuntado a la clase de ocio para seguir teniendo autoselección.

Al introducir el problema de riesgo moral se encuentra que nuevamente induce una distorsión al alza en la clase alta, lo que en este caso viene a compensar la ineficiencia anterior, pese a que simulaciones muestran que el efecto de distorsión a la baja debido a la distribución del precio de reserva termina predominando. En el caso de los viajeros de ocio, el problema de riesgo moral agudiza la distorsión a la baja en su asignación de recompensas, incrementando las ineficiencias, tal como en el caso inelástico.

Además, en el caso con demanda elástica el costo de operación del vuelo es determinante, en tanto que los precios ofrecidos a ambas clases son crecientes con él, a diferencia del caso con demanda inelástica en donde las asignaciones de precios y recompensas dependen únicamente del costo de estas últimas y del problema de selección adversa y riesgo moral. Por tanto, al introducir distribuciones sobre la demanda las soluciones dependen indirectamente de la distancia de vuelo, ya que es esperable que el costo de operación sea creciente en ella.

Finalmente, las simulaciones numéricas muestran que las intuiciones del caso inelástico ex-post se mantienen en general, tanto en relación de orden de profits entre los programas reales, como en la frecuencia de cierre de clases, aunque evidenciando que en algunos casos el programa por distancia se puede beneficiar de su comportamiento más pasivo, asociado a la no posibilidad de modificar recompensas ex-post, a diferencia del programa por tarifa pagada que termina realizando cambios más agresivos de precios y recompensas, enfrentando potenciales pérdidas de demanda.

### 5.3. Modelo de dos mercados

Como siguiente extensión se estudió el comportamiento de una aerolínea enfrentada a dos mercados con demandas y distancias heterogéneas. Se comprobó que el comportamiento óptimo de la aerolínea implica fijar programas distintos entre mercados, recuperando por tanto las soluciones e intuiciones del caso con un mercado, donde por tanto existen las mismas ineficiencias generadas por los problemas de selección adversa y riesgo moral. Además, bajo los supuestos utilizados, el comportamiento óptimo implica iguales asignaciones de recompensas a las clases altas de ambos mercados, y una mayor asignación a la clase baja del mercado con la proporción más alta de este tipo de viajeros, lo que tiene relación con el hecho de que en dicho mercado los viajeros de ocio son más atractivos para la firma, que ofrecerá por tanto un menú con un mayor precio y recompensas.

Al estudiar los programas reales, imponiendo la restricción de que la firma ajusta un único programa para ambos mercados, se obtienen resultados disímiles: por un lado, el programa por distancia volada termina basando toda su estrategia en esta variable, asignando recompensas más altas que lo óptimo para ambas clases del mercado con la distancia más larga, y menores que lo óptimo para el mercado con la distancia más corta. Este hecho provoca que los precios sigan la misma tendencia, siendo subóptimamente altos en el mercado con la mayor distancia, existiendo por tanto dispersión de precios versus distancias para ambas clases. Este efecto además no está asociado al hecho de que el mercado más largo es más caro de operar, ya que este costo no es relevante cuando se estudia demanda inelástica, y más aún, el comportamiento óptimo podría implicar fijar las tarifas más bajas en este mercado, dependiendo de la proporción de viajeros de ocio.

Por otro lado, el programa por tarifa pagada termina considerando ambos mercados como uno único, realizando asignaciones intermedias de precios y recompensas para ambas clases respecto al comportamiento óptimo, no existiendo por tanto dispersión de precios versus distancias de los mercados.

Al introducir demandas elásticas, las simulaciones muestran que nuevamente el costo de operar es relevante, haciendo aumentar los precios cobrados. Por tanto, en este caso el programa por tarifa pagada muestra dispersión de precios versus distancias, donde los precios más altos se fijan en el mercado con la distancia más larga, debido al efecto del costo de operar. Sin embargo, el mismo efecto se aprecia en el programa por distancia, donde además vuelve a existir dispersión asociada al programa: debido a que toda la estrategia se basa en esta variable, se carga un precio muy alto en el mercado más largo, asociado a que se entregan muchas recompensas. Estos dos efectos en general dominan al único efecto presente para el programa por tarifa, por lo que nuestras simulaciones muestran que ante la misma diferencia en distancia entre los dos mercados, la diferencia entre los precios de los mercados es mayor bajo un programa por distancia volada. Estos resultados son consistentes con los datos de tarifas medias recolectados para Southwest entre 2008 y 2016, período en el que usó los dos tipos de programa (por distancia hasta 2010, y por tarifa desde entonces).

Finalmente, la comparación de profits muestra que existe una zona donde las distancias de los mercados son lo suficientemente cercanas, pero no iguales, en la cual el programa por distancia es capaz de aprovecharse del hecho de que asigna mayores precios y recompensas en uno de

los mercados, replicando de manera aproximada el comportamiento óptimo y logrando un profit mayor que el del programa por tarifa pagada. Esta zona es sin embargo muy acotada, y por tanto ante una heterogeneidad en las distancias de los mercados lo suficientemente grande, el programa por tarifa pagada logra un profit mayor.

En síntesis, el modelo aquí propuesto y estudiado, basado en formulaciones clásicas, permite analizar el comportamiento de una aerolínea que ofrece distintos tipos de programas de viajeros frecuentes. El trabajo presentado muestra que el modelo replica de manera adecuada hechos estilizados observados en la realidad, y además proporciona condiciones bajo las cuales el programa por tarifa pagada es mejor desde el punto de vista de la aerolínea monopólica, encontrando que esto es casi siempre el caso, lo que explica en parte el movimiento actual de la industria hacia programas basados en revenue, sobre el enfoque tradicional de distancia. Además, esta tesis muestra que, a grandes rasgos, las distorsiones e ineficiencias causadas por los problemas de selección adversa y riesgo moral, estudiadas por Feres (2013) siguen estando presente en los dos programas.

## 5.4. Líneas futuras de investigación

El modelo aquí estudiado puede ser fácilmente usado para investigación futura. En este trabajo nos enfocamos en una aerolínea monopólica sirviendo la demanda, por lo que un paso natural sería incluir competencia: Basso et al. (2009) muestran que, en el caso donde solo existen viajeros de negocio, una única aerolínea ofreciendo un programa de lealtad puede aprovecharse del problema de riesgo moral, incrementando precios hasta el precio de reserva del empleador, venciendo a la competencia. Sin embargo, si todas las aerolíneas usan programas de viajeros frecuentes, las recompensas se convierten simplemente en un nuevo instrumento de competencia, endureciéndola: las aerolíneas disiparán los profits a través de la entrega de recompensas en un típico problema de Dilema del Prisionero. Los precios se mantienen altos sin embargo, mostrando que todos los beneficios se mueven desde los empleadores y aerolíneas hacia los empleados. Estas conclusiones podrían trasladarse al caso con dos clases, generando distintas condiciones bajo las cuales una aerolínea podría encontrar conveniente ofrecer uno u otro tipo de esquemas de recompensas.

Otra extensión natural es el estudio del caso con una aerolínea monopólica sirviendo  $N > 2$  mercados, lo que para el programa por distancia se extiende de manera trivial, como fue comentado en la sección correspondiente, pero para el programa por tarifa genera distintos problemas que dificultan la identificación de las restricciones activas en el óptimo, y por tanto, de la solución. En este caso además es esperable que las  $N$  distancias de los mercados sean distintas, lo que, siguiendo algunas simulaciones exploratorias, sugiere que la zona bajo la cual el programa por distancia volada domina en profit al programa por tarifa pagada está cada vez más restringida, o bien es inexistente, lo que vendría a justificar aún más el movimiento de la industria. Además, es posible complejizar este problema, introduciendo por ejemplo heterogeneidad en los parámetros de demanda, lo que posiblemente cambie algunas de las conclusiones o condiciones establecidas.

Finalmente, resulta necesario un estudio formal del bienestar social dentro del contexto de

este trabajo, ya que si bien existen claras ineficiencias debido a los problemas de riesgo moral y selección adversa, y además en los análisis de utilidades y profits está considerado parte de esto, no resulta claro cuál de los programas logra un mayor bienestar social, o bien cómo cambia este al modificar alguno de los parámetros del problema.

# Bibliografía

- Agostini, C. A., D. Inostroza y M. Willington (2015). Price effects of airlines frequent flyer programs: The case of the dominant firm in Chile. *Transportation Research Part A: Policy and Practice* 78, 283–297.
- Arnesen, D. W., C. P. Fleenor y R. S. Toh (1997). The ethical dimensions of airline frequent flier programs. *Business Horizons* 40 (1), 47–56.
- Banerjee, A. V. y L. H. Summers (1987). On frequent flyer programs and other loyalty-inducing economic arrangements. Harvard Institute of Economic Research.
- Basso, L. J., M. T. Clements y T. W. Ross (2009). Moral hazard and customer loyalty programs. *American Economic Journal: Microeconomics* 1 (1), 101–123.
- Berman, B. (2006). Developing an effective customer loyalty program. *California management review* 49 (1), 123–148.
- Borenstein, S. (1989). Hubs and high fares: dominance and market power in the US airline industry. *The RAND Journal of Economics*, 344–365.
- Borenstein, S. (1996). Repeat buyer programs in network industries. *Networks, Infrastructure, and the New Task for Regulation*.
- Boyd, S. y L. Vandenberghe (2004). *Convex optimization*. Cambridge university press.
- Cairns, R. D. y J. W. Galbraith (1990). Artificial compatibility, barriers to entry, and frequent-flyer programs. *Canadian Journal of Economics*, 807–816.
- Caminal, R. y A. Clatici (2007). Are loyalty-rewarding pricing schemes anti-competitive? *International Journal of Industrial Organization* 25 (4), 657–674.
- Chun, S. Y. y A. Ovchinnikov (2015). Strategic consumers, revenue management, and the design of loyalty programs.
- de Boer, E. R. (2017). *Strategy in Airline Loyalty: Frequent Flyer Programs*. Springer.
- De Boer, E. R. y S. V. Gudmundsson (2012). 30 years of frequent flyer programs. *Journal of Air Transport Management* 24, 18–24.
- Deane, R. H. (1988). Ethical considerations in frequent flier programs. *Journal of Business*



- Ethics 7 (10), 755–762.
- Dowling, G. R. y M. Uncles (1997). Do customer loyalty programs really work? *Sloan Management Review* 38 (4), 71.
- Drèze, X. y J. C. Nunes (2008). Feeling superior: The impact of loyalty program structure on consumers' perceptions of status. *Journal of Consumer Research* 35 (6), 890–905.
- East, R., A. Hogg y W. Lomax (1998). The future of retail loyalty schemes. *Journal of Targeting Measurement and Analysis for Marketing* 7, 11–21.
- Feres, F. (2013). Programa de viajero frecuente bajo selección adversa y riesgo moral. Tesis de Magíster, Universidad de Chile - Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
- Hartmann, W. R. y V. B. Viard (2008). Do frequency reward programs create switching costs? a dynamic structural analysis of demand in a reward program. *Quantitative Marketing and Economics* 6 (2), 109–137.
- Henderson, C. M., J. T. Beck y R. W. Palmatier (2011). Review of the theoretical underpinnings of loyalty programs. *Journal of Consumer Psychology* 21 (3), 256–276.
- Kim, B.-D., M. Shi y K. Srinivasan (2001). Reward programs and tacit collusion. *Marketing Science* 20 (2), 99–120.
- Kopalle, P. K., Y. Sun, S. A. Neslin, B. Sun y V. Swaminathan (2012). The joint sales impact of frequency reward and customer tier components of loyalty programs. *Marketing Science* 31 (2), 216–235.
- Krantz, S. G. y H. R. Parks (2012). *The implicit function theorem: history, theory, and applications*. Springer Science & Business Media.
- Kumar, V. (2010). *Customer relationship management*. Wiley Online Library.
- Kumar, V. y D. Shah (2004). Building and sustaining profitable customer loyalty for the 21st century. *Journal of Retailing* 80 (4), 317–329.
- Lederman, M. (2007). Do enhancements to loyalty programs affect demand? the impact of international frequent flyer partnerships on domestic airline demand. *The RAND Journal of Economics* 38 (4), 1134–1158.
- Levine, M. E. (1986). Airline competition in deregulated markets: theory, firm strategy, and public policy. *Yale J. on Reg.* 4, 393.
- MileCards.Com (2014). 2014 mile satisfaction survey. <http://milecards.com/2014-mile-satisfaction-survey-results/>, accedido en agosto de 2017.
- MileCards.Com (2016). 2016 mile satisfaction survey. <http://milecards.com/2016-mile-satisfaction-survey/>, accedido en agosto de 2017.
- Mokhtarian, P. L. y I. Salomon (2001). How derived is the demand for travel? some concep-

- tual and measurement considerations. *Transportation research part A: Policy and practice* 35 (8), 695–719.
- Murtagh, B. A. y M. A. Saunders (2003). *MINOS 5.51 User's Guide*. Stanford University.
- Mussa, M. y S. Rosen (1978). Monopoly and product quality. *Journal of Economic theory* 18 (2), 301–317.
- O'Connor, W. E. (2001). *An introduction to airline economics*. Greenwood Publishing Group.
- Roberts, A. W. y D. E. Varberg (1974). *Convex functions*. Vol. 57. Academic Press.
- Robinson, S. M. (1972). A quadratically-convergent algorithm for general nonlinear programming problems. *Mathematical programming* 3 (1), 145–156.
- Rochet, J.-C. y L. Stole (1997). Competitive nonlinear pricing.
- Rochet, J.-C. y L. Stole (2002). Nonlinear pricing with random participation. *The Review of Economic Studies* 69 (1), 277–311.
- Sharp, B. y A. Sharp (1997). Loyalty programs and their impact on repeat-purchase loyalty patterns. *International Journal of Research in Marketing* 14 (5), 473–486.
- Spulber, D. F. (1989). Product variety and competitive discounts. *Journal of Economic Theory* 48 (2), 510–525.
- Stole, L. A. (2007). Price discrimination and competition. *Handbook of industrial organization* 3, 2221–2299.
- Tirole, J. (1988). *The theory of industrial organization*. MIT press.
- Veeraraghavan, R., R. Kashyap, A. Chopde y S. Bhattacharya (2014). A dynamic approach to frequent flyer program. En: *TAMC*. pp. 271–279.

# Apéndices

# Apéndice A

## Estática Comparativa Capítulo 3

### A.1. Programa Óptimo Subsección 3.2.1

$\frac{\partial F_H^*}{\partial \alpha}$  Según la Ecuación (3.1), se sigue que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} V'(F_H^*) \right) &= \frac{\partial C'_H(F_H^*)}{\partial \alpha} \\
 \Rightarrow -\frac{\theta_H}{\alpha^2} V'(F_H^*) + \frac{\theta_H}{\alpha} V''(F_H^*) \frac{\partial F_H^*}{\partial \alpha} &= C''_H(F_H^*) \frac{\partial F_H^*}{\partial \alpha} \\
 \Rightarrow \frac{\partial F_H^*}{\partial \alpha} &= \frac{\frac{\theta_H}{\alpha^2} V'(F_H^*)}{\frac{\theta_H}{\alpha} V''(F_H^*) - C''_H(F_H^*)} \\
 &= \frac{\frac{\theta_H}{\alpha^2} V'(F_H^*)}{\frac{\partial}{\partial F_H} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} V'(F_H) - C'_H(F_H) \right) \Big|_{F_H=F_H^*}} \\
 &\leq 0
 \end{aligned}$$

lo que proviene del hecho de que  $V$  es cóncava y  $C_H$  es convexa, por lo que, dado que  $F_H^*$  está caracterizado por

$$\frac{\theta_H}{\alpha} V'(F_H^*) = C'_H(F_H^*)$$

un aumento en  $F_H^* \rightarrow F_H^* + \varepsilon$  provocará que

$$\frac{\theta_H}{\alpha} V'(F_H^* + \varepsilon) \leq C'_H(F_H^* + \varepsilon)$$

de donde es directo por tanto que

$$\frac{\partial}{\partial F_H} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} V'(F_H) - C'_H(F_H) \right) \Big|_{F_H=F_H^*} \leq 0$$

$\frac{\partial F_L^*}{\partial \alpha}$  Según la Ecuación (3.2), se sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha} (\theta_L V'(F_L^*)) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{C'_L(F_L^*) - B}{1 - \frac{N_H}{N_L} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha}} \right) \\
\Rightarrow \theta_L V''(F_L^*) \frac{\partial F_L^*}{\partial \alpha} &= \frac{\left( C''_L(F_L^*) \frac{\partial F_L^*}{\partial \alpha} \right) \left( 1 - \frac{N_H}{N_L} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha} \right) - (C'_L(F_L^*) - B) \left( \frac{N_H}{N_L} \frac{\theta_H}{\theta_L} \frac{1}{\alpha^2} \right)}{\left( 1 - \frac{N_H}{N_L} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha} \right)^2} \\
\Rightarrow \frac{\partial F_L^*}{\partial \alpha} &= \frac{-(C'_L(F_L^*) - B) \left( \frac{N_H}{N_L} \frac{\theta_H}{\theta_L} \frac{1}{\alpha^2} \right)}{\left( 1 - \frac{N_H}{N_L} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha} \right)^2 \left( \theta_L V''(F_L^*) - \frac{C''_L(F_L^*)}{1 - \frac{N_H}{N_L} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha}} \right)} \\
&= \frac{-(C'_L(F_L^*) - B) \left( \frac{N_H}{N_L} \frac{\theta_H}{\theta_L} \frac{1}{\alpha^2} \right)}{\left( 1 - \frac{N_H}{N_L} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha} \right)^2 \left( \frac{\partial}{\partial F_L} \left( \theta_L V'(F_L) - \frac{C'_L(F_L) - B}{1 - \frac{N_H}{N_L} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha}} \right) \Big|_{F_L=F_L^*} \right)} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad proviene de un argumento análogo al del caso anterior.

$\frac{\partial P_L^*}{\partial \alpha}$  Según la Ecuación (3.3), se sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_L^*}{\partial \alpha} &= \theta_L \frac{\partial V'(F_L^*)}{\partial \alpha} \\
&= \theta_L V''(F_L^*) \frac{\partial F_L^*}{\partial \alpha} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

$\frac{\partial P_H^*}{\partial \alpha}$  Según la Ecuación (3.4), se sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_H^*}{\partial \alpha} &= -\frac{\theta_H}{\alpha^2} (V(F_H^*) - V(F_L^*)) + \frac{\theta_H}{\alpha} V''(F_H^*) \frac{\partial F_H^*}{\partial \alpha} - \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) V''(F_L^*) \frac{\partial F_L^*}{\partial \alpha} \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Los signos de  $\frac{\partial F_H^*}{\partial \theta_H}$ ,  $\frac{\partial F_L^*}{\partial \theta_H}$ ,  $\frac{\partial P_L^*}{\partial \theta_H}$  y  $\frac{\partial P_H^*}{\partial \theta_H}$  son directos al notar que en las soluciones solo interviene el cociente  $\frac{\theta_H}{\alpha}$ , no los valores absolutos, por lo que un aumento en  $\theta_H$  puede ser visto como una disminución en  $\alpha$ .

$\frac{\partial F_H^*}{\partial \theta_L}$  Según la Ecuación (3.1), es directo que  $\frac{\partial F_H^*}{\partial \theta_L} = 0$ .

$\frac{\partial F_L^*}{\partial \theta_L}$  Según la Ecuación (3.2), se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_L} (\theta_L V'(F_L^*)) &= \frac{\partial}{\partial \theta_L} \left( \frac{C'_L(F_L^*) - B}{1 - \frac{N_H}{N_L} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha}} \right) \\ V'(F_L^*) + \theta_L V''(F_L^*) \frac{\partial F_L^*}{\partial \theta_L} &= \frac{\left( C''_L(F_L^*) \frac{\partial F_L^*}{\partial \theta_L} \right) \left( 1 - \frac{N_H}{N_L} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha} \right) - (C'_L(F_L^*) - B) \left( \frac{N_H}{N_L} \frac{\theta_H}{\alpha} \frac{1}{\theta^2} \right)}{\left( 1 - \frac{N_H}{N_L} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha} \right)^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial F_L^*}{\partial \theta_L} &= \frac{- (C'_L(F_L^*) - B) \left( \frac{N_H}{N_L} \frac{\theta_H}{\alpha} \frac{1}{\theta^2} \right) - V'(F_L^*) \left( 1 - \frac{N_H}{N_L} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha} \right)^2}{\left( 1 - \frac{N_H}{N_L} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha} \right)^2 \left( \theta_L V''(F_L^*) - \frac{C''_L(F_L^*)}{1 - \frac{N_H}{N_L} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha}} \right)} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$\frac{\partial P_L^*}{\partial \theta_L}$  Según la Ecuación (3.3), se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_L^*}{\partial \theta_L} &= V'(F_L^*) + \theta_L \frac{\partial V'(F_L^*)}{\partial \theta_L} \\ &= V'(F_L^*) + \theta_L V''(F_L^*) \frac{\partial F_L^*}{\partial \theta_L} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$\frac{\partial P_H^*}{\partial \theta_L}$  Según la Ecuación (3.4), se sigue que

$$\frac{\partial P_H^*}{\partial \theta_L} = \frac{\theta_H}{\alpha} V''(F_H^*) \frac{\partial F_H^*}{\partial \theta_L} - \underbrace{\left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) V''(F_L^*) \frac{\partial F_L^*}{\partial \theta_L}}_{\geq 0} + \underbrace{V'(F_L^*)}_{\geq 0}$$

por lo que el signo depende de la magnitud de  $V'(F_L^*)$ .

$\frac{\partial F_H^*}{\partial N_H}$  Según la Ecuación (3.1), es directo que  $\frac{\partial F_H^*}{\partial N_H} = 0$ .

$\frac{\partial F_L^*}{\partial N_H}$  Según la Ecuación (3.2), se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial N_H} (\theta_L V'(F_L^*)) &= \frac{\partial}{\partial N_H} \left( \frac{C'_L(F_L^*) - B}{1 - \frac{N_H}{N_L} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha}} \right) \\ \theta_L V''(F_L^*) \frac{\partial F_L^*}{\partial N_H} &= \frac{\left( C''_L(F_L^*) \frac{\partial F_L^*}{\partial N_H} \right) \left( 1 - \frac{N_H}{N_L} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha} \right) - (C'_L(F_L^*) - B) \left( -\frac{1}{N_L} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha} \right)}{\left( 1 - \frac{N_H}{N_L} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha} \right)^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial F_L^*}{\partial N_H} &= \frac{(C'_L(F_L^*) - B) \left( \frac{1}{N_L} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha} \right)}{\left( 1 - \frac{N_H}{N_L} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha} \right)^2 \left( \theta_L V''(F_L^*) - \frac{C''_L(F_L^*)}{1 - \frac{N_H}{N_L} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha}} \right)} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

$\frac{\partial P_L^*}{\partial N_H}$  Según la Ecuación (3.3), se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_L^*}{\partial N_H} &= \theta_L \frac{\partial V'(F_L^*)}{\partial N_H} \\ &= \theta_L V''(F_L^*) \frac{\partial F_L^*}{\partial N_H} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

$\frac{\partial P_H^*}{\partial N_H}$  Según la Ecuación (3.4), se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_H^*}{\partial N_H} &= \frac{\theta_H}{\alpha} V''(F_H^*) \frac{\partial F_H^*}{\partial N_H} - \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) V''(F_L^*) \frac{\partial F_L^*}{\partial N_H} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Los signos de  $\frac{\partial F_H^*}{\partial N_L}$ ,  $\frac{\partial F_L^*}{\partial N_L}$ ,  $\frac{\partial P_L^*}{\partial N_L}$  y  $\frac{\partial P_H^*}{\partial N_L}$  son directos al notar que en las soluciones solo interviene el cociente  $\frac{N_H}{N_L}$ , no los valores absolutos, por lo que un aumento en  $N_L$  puede ser visto como una disminución en  $N_H$ .

## A.2. Programa por Distancia Sección 3.4.1

La firma resuelve:

$$\begin{aligned}
 \text{(Dist EP)} \quad \text{máx} \quad & \pi(P_H, P_L) = N_L(P_L - C_L(\bar{k}_L^D \cdot D)) + N_H(P_H - C_H(\bar{k}_H^D \cdot D)) \\
 \text{s.a.} \quad & \theta_H V(\bar{k}_H^D \cdot D) - \alpha P_H \geq \theta_H V(\bar{k}_L^D \cdot D) - \alpha P_L & \text{(IC-H)} \\
 & \theta_L V(\bar{k}_L^D \cdot D) - P_L \geq \theta_L V(\bar{k}_H^D \cdot D) - P_H & \text{(IC-L)} \\
 & U_0 + \theta_L V(\bar{k}_L^D \cdot D) - P_L \geq 0 & \text{(PC-L)}
 \end{aligned}$$

Sabemos que en la solución ex-ante, (IC-H) y (PC-L) están activas, mientras que (IC-L) presenta holgura. Con esto, solo las dos restricciones activas mencionadas participan en el análisis de factibilidad, ya que cambios marginales en las variables siguen manteniendo (IC-L) inactiva. Partiendo de esta solución, se analizarán dichas restricciones ante cambios marginales en cada uno de los parámetros del problema, notando que en este programa, ex-post, la aerolínea puede mover solo precios, con recompensas fijas.

**Aumento marginal en  $\alpha$**  En el programa óptimo la respuesta es un aumento en  $P_L$  y una disminución en  $P_H$ . Notemos que dada la restricción (PC-L) activa en  $P_L^*$ , no es posible aumentar este valor, solo es posible disminuirlo o mantenerlo. También notemos que dado el aumento en  $\alpha \rightarrow \alpha + \varepsilon$ , (IC-H) pasa a ser violada: para recuperar factibilidad es necesario disminuir  $P_H$ , lo que es consistente con el programa óptimo.

**Aumento marginal en  $\theta_H$**  Por el mismo argumento anterior, solo es posible disminuir  $P_L$  ante este cambio, lo que en este caso corresponde al movimiento correcto. Además, ante un aumento de  $\theta_H$  y una disminución o mantención en  $P_L$ , (IC-H) pasa a estar inactiva, por lo que es posible replicar, al menos marginalmente, el aumento en  $P_H$  del programa óptimo.

**Aumento marginal en  $\theta_L$**  Ante este aumento, (PC-L) pasa a estar inactiva, por lo que es factible replicar el aumento en  $P_L$  del programa óptimo. Con este aumento en  $P_L$ , (IC-H) pasa a estar también inactiva, por lo que es posible mover, al menos marginalmente,  $P_H$  en cualquier dirección.

**Disminución marginal en  $\theta_L$**  Ante esta disminución, (PC-L) pasa a estar violada. Para recuperar factibilidad solo es posible disminuir  $P_L$ , lo que provoca a su vez que (IC-H) pase a estar violada, por lo que es necesario disminuir  $P_H$  también.

**Disminución marginal en  $N_H$  ó  $N_L$**  Estos parámetros no influyen en las restricciones, por lo que dado que (PC-L) es activa en la solución ex-ante, solo es posible mantener o disminuir  $P_L$  para mantener factibilidad. Ante esto, (IC-H) se mantiene activa o pasa a estar violada, por lo que las únicas respuestas posibles sobre  $P_H$  son una disminución o mantener el valor.



### A.3. Programa por Tarifa Sección 3.4.2

La firma resuelve:

$$\begin{aligned}
 (\text{Tar EP}) \quad \text{máx} \quad & \pi(P_H, P_L) = N_L(P_L - C_L(\bar{k}_L^T \cdot P_L)) + N_H(P_H - C_H(\bar{k}_H^T \cdot P_H)) \\
 \text{s.a.} \quad & \theta_H V(\bar{k}_H^T \cdot P_H) - \alpha P_H \geq \theta_H V(\bar{k}_L^T \cdot P_L) - \alpha P_L & (\text{IC-H}) \\
 & \theta_L V(\bar{k}_L^T \cdot P_L) - P_L \geq \theta_L V(\bar{k}_H^T \cdot P_H) - P_H & (\text{IC-L}) \\
 & U_0 + \theta_L V(\bar{k}_L^T \cdot P_L) - P_L \geq 0 & (\text{PC-L})
 \end{aligned}$$

Sabemos que en la solución ex-ante, (IC-H) y (PC-L) están activas, mientras que (IC-L) presenta holgura. Con esto, solo las dos restricciones activas mencionadas participan en el análisis de factibilidad, ya que cambios marginales en las variables siguen manteniendo (IC-L) inactiva. Partiendo de esta solución, se analizarán dichas restricciones ante cambios marginales en cada uno de los parámetros del problema, notando que en este programa, ex-post, la aerolínea puede mover precios y recompensas, aunque estas últimas con una dirección dada por la de los precios.

Aumento marginal en  $\alpha$  Con este cambio (IC-H) pasa a ser violada, mientras que (PC-L) sigue siendo activa. Para recuperar factibilidad, nos gustaría aumentar,  $F_L, P_L$  y disminuir  $F_H, P_H$ . Para realizar lo primero y mantener factibilidad en (PC-L), necesitamos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial P_L} \left( U_0 + \theta_L V(\bar{k}_L^T \cdot P_L) - P_L \right) \Big|_{P_L=P_L^*} &= \theta_L V'(\bar{k}_L^T \cdot P_L^*) \bar{k}_L^T - 1 > 0 \\
 \Leftrightarrow V'(F_L^*) &> \frac{1}{\theta_L \bar{k}_L^T} & (\text{A.1})
 \end{aligned}$$

Para recuperar factibilidad en (IC-H), es necesario al menos incrementar el lado izquierdo cuando disminuimos  $P_H$ , i.e. se requiere

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial P_H} \left( \theta_H V(\bar{k}_H^T \cdot P_H) - \alpha P_H \right) \Big|_{P_H=P_H^*} &= \theta_H V'(\bar{k}_H^T \cdot P_H^*) \bar{k}_H^T - \alpha < 0 \\
 \Leftrightarrow V'(F_H^*) &< \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_H^T} & (\text{A.2})
 \end{aligned}$$

Ahora, dada la condición (A.1), el lado derecho de (IC-H) aumenta cuando la aerolínea aumenta  $P_L$  (equivalentemente,  $F_L$ ), por lo que es necesario exigir una condición más fuerte si la aerolínea mueve tanto  $P_H$  como  $P_L$  (equivalentemente,  $F_H$  y  $F_L$ ). Supongamos que la firma mueve  $F_H$  en una magnitud  $\varepsilon > 0$ , mientras que mueve  $F_L$  en una magnitud  $\delta\varepsilon$ , con

$\delta \in (0, \infty)$ , una condición necesaria y suficiente a satisfacer es entonces:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\varepsilon \left| \frac{\partial}{\partial F_H} \left( \theta_H V(F_H) - \alpha \frac{F_H}{\bar{k}_H^T} \right) \right|_{F_H=F_H^*-x} dx > \int_0^{\delta\varepsilon} \left| \frac{\partial}{\partial F_L} \left( \theta_H V(F_L) - \alpha \frac{F_L}{\bar{k}_L^T} \right) \right|_{F_L=F_L^*+x} dx \\
& \Leftrightarrow \int_0^\varepsilon \left( \frac{\alpha}{\bar{k}_H^T} - \theta_H V'(F_H^* - x) \right) dx > \int_0^{\delta\varepsilon} \left( \theta_H V'(F_L^* + x) - \frac{\alpha}{\bar{k}_L^T} \right) dx \\
& \Leftrightarrow \frac{\alpha\varepsilon}{\bar{k}_H^T} + \theta_H (V(F_H^* - \varepsilon) - V(F_H^*)) > \theta_H (V(F_L^* + \delta\varepsilon) - V(F_L^*)) - \frac{\alpha\delta\varepsilon}{\bar{k}_L^T} \\
& \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\bar{k}_H^T} + \theta_H \left( \frac{V(F_H^* - \varepsilon) - V(F_H^*)}{\varepsilon} \right) > \delta\theta_H \left( \frac{V(F_L^* + \delta\varepsilon) - V(F_L^*)}{\delta\varepsilon} \right) - \frac{\alpha\delta}{\bar{k}_L^T}
\end{aligned}$$

cuando el movimiento sobre  $F_H$  es marginal, i.e.  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la condición anterior se traduce en

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{\bar{k}_H^T} - \theta_H V'(F_H^*) > \delta \left( \theta_H V'(F_L^*) - \frac{\alpha}{\bar{k}_L^T} \right) \\
& \Leftrightarrow V'(F_L^*) < \underbrace{\frac{1}{\delta} \left( \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_H^T} - V'(F_H^*) \right)}_{>0} + \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_L^T}
\end{aligned}$$

Y para mantener la compatibilidad con la condición A.1 es necesario exigir:

$$V'(F_H^*) < \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_H^T} - \delta \left( \frac{1}{\theta_L \bar{k}_L^T} - \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_L^T} \right)$$

En resumen, las condiciones son:

$$\begin{aligned}
V'(F_H^*) &< \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_H^T} - \delta \left( \frac{1}{\theta_L \bar{k}_L^T} - \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_L^T} \right) \\
V'(F_L^*) &\in \left( \frac{1}{\theta_L \bar{k}_L^T}, \frac{1}{\delta} \left[ \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_H^T} - V'(F_H^*) \right] + \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_L^T} \right)
\end{aligned}$$

Aumento marginal en  $\theta_H$  Con este cambio (PC-L) sigue siendo activa mientras que (IC-H) pasa a estar inactiva en la solución del problema ex-ante. La respuesta del programa óptimo ante este cambio es disminuir  $P_L, F_L$  y aumentar  $P_H, F_H$ . Lo primero es posible de realizar manteniendo la factibilidad en (PC-L) si se tiene:

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial}{\partial P_L} \left( U_0 + \theta_L V(\bar{k}_L^T \cdot P_L) - P_L \right) \right|_{P_L=P_L^*} = \theta_L V'(\bar{k}_L^T \cdot P_L^*) \bar{k}_L^T - 1 < 0 \\
& \Leftrightarrow V'(F_L^*) < \frac{1}{\theta_L \bar{k}_L^T}
\end{aligned}$$

Además, como (IC-H) es inactiva bajo este cambio, es posible aumentar, al menos marginalmente,  $P_H$  manteniendo factibilidad en esta restricción, sin condiciones.

**Aumento marginal en  $\theta_L$**  Con este cambio (IC-H) sigue siendo activa mientras que (PC-L) pasa a estar inactiva en la solución ex-ante. La respuesta del programa óptimo ante este cambio es aumentar  $P_L, F_L$ , mantener  $F_H$  y realizar un cambio sobre  $P_H$  que depende de la magnitud de  $V'(F_L^*)$ . Lo primero es claramente posible de realizar manteniendo la factibilidad en (PC-L) sin condiciones debido a la holgura existente, pero cuando realizamos esto, el lado derecho de (IC-H) aumenta, saliendo de la zona factible, si

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial P_L} \left( \theta_H V(\bar{k}_L^T \cdot P_L) - \alpha P_L \right) \right|_{P_L=P_L^*} &= \theta_H V'(\bar{k}_L^T \cdot P_L^*) \bar{k}_L^T - \alpha > 0 \\ &\Leftrightarrow V'(F_L^*) > \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_L^T} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

en cuyo caso existe una sola respuesta posible en  $F_H, P_H$ . En efecto, si

$$V'(F_H^*) < \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_H^T}$$

como en la condición (A.2), el lado izquierdo de (IC-H) aumenta al disminuir  $P_H$ , y por tanto la firma deberá disminuir  $P_H, F_H$  para recuperar factibilidad.

Si por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial P_L} \left( \theta_H V(\bar{k}_L^T \cdot P_L) - \alpha P_L \right) \right|_{P_L=P_L^*} &= \theta_H V'(\bar{k}_L^T \cdot P_L^*) \bar{k}_L^T - \alpha < 0 \\ &\Leftrightarrow V'(F_L^*) < \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_L^T} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

el lado derecho de (IC-H) disminuye al aumentar  $F_L, P_L$ , con lo que esta restricción se vuelve inactiva y la firma puede mover  $F_H, P_H$  en cualquier dirección sin condiciones.

**Disminución marginal en  $\theta_L$**  Con este cambio (IC-H) sigue siendo activa mientras que (PC-L) pasa a ser violada en la solución ex-ante. La respuesta del programa óptimo ante este cambio es disminuir,  $P_L, F_L$ , mantener  $F_H$  y realizar un cambio sobre  $P_H$  que depende de la magnitud de  $V'(F_L^*)$ . Para devolver la factibilidad en (PC-L) disminuyendo  $P_L, F_L$  es necesario exigir

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial P_L} \left( U_0 + \theta_L V(\bar{k}_L^T \cdot P_L) - P_L \right) \right|_{P_L=P_L^*} &= \theta_L V'(\bar{k}_L^T \cdot P_L^*) \bar{k}_L^T - 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow V'(F_L^*) < \frac{1}{\theta_L \bar{k}_L^T} \end{aligned}$$

Si además se tiene la condición (A.4)

$$V'(F_L^*) < \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_L^T}$$

el lado derecho de (IC-H) aumenta al disminuir  $F_H, P_H$ , por lo que esta restricción pasa a estar violada. Con esto, será necesario realizar un movimiento sobre  $F_H, P_H$  para recuperar

la factibilidad: si  $V'(F_H^*) < \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_H^T}$ , la firma disminuirá  $F_H, P_H$ ; si  $V'(F_H^*) > \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_H^T}$  la firma aumentará  $F_H, P_H$ .

Si se tiene la condición (A.3)

$$V'(F_L^*) > \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_L^T}$$

el lado derecho de (IC-H) disminuye al disminuir  $F_L, P_L$ , por lo que esta restricción se vuelve inactiva y la firma puede mover  $F_H, P_H$  en cualquier sentido debido a la existencia de holgura.

Aumento marginal en  $N_H$  Este parámetro no influye en las restricciones, y en el programa óptimo la respuesta es disminuir  $F_L, P_L$ , aumentar  $P_H$  y mantener  $F_H$ . Notemos que la aerolínea puede disminuir  $F_L, P_L$  manteniendo la factibilidad en (PC-L) si

$$V'(F_L^*) < \frac{1}{\theta_L \bar{k}_L^T}$$

Siguiendo lo realizado en los cambios anteriores, si

$$V'(F_L^*) > \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_L^T}$$

o bien

$$V'(F_L^*) < \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_L^T} \wedge V'(F_H^*) > \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_H^T}$$

la firma aumentará  $F_H, P_H$  para devolver factibilidad.

Aumento marginal en  $N_L$  Este parámetro no influye en las restricciones, y en el programa óptimo la respuesta es aumentar  $F_L, P_L$ , disminuir  $P_H$  y mantener  $F_H$ . Notemos que la aerolínea puede aumentar  $F_L, P_L$  manteniendo la factibilidad en (PC-L) si

$$V'(F_L^*) > \frac{1}{\theta_L \bar{k}_L^T}$$

Sin embargo, como se comentó en la Subsección 3.4.2, esto es imposible de cumplir dada la concavidad de  $V$ . Luego, la firma mantendrá o disminuirá  $F_L, P_L$ . Con esto, también puede mantener  $F_H, P_H$ , o bien puede disminuirlos si

$$V'(F_L^*) > \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_L^T}$$

o bien

$$V'(F_L^*) < \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_L^T} \wedge V'(F_H^*) < \frac{\alpha}{\theta_H \bar{k}_H^T}$$

## Apéndice B

### Resolución Programa por Tarifa Ex - Post Subsección 3.5.2

La firma resuelve:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{Tar EP}) \quad \text{máx} \quad & \pi(P_H, P_L) = \tilde{N}_L(P_L - C_L(\bar{k}_L^T \cdot P_L)) + \tilde{N}_H(P_H - C_H(\bar{k}_H^T \cdot P_H)) \\
 \text{s.a.} \quad & \tilde{\theta}_H V(\bar{k}_H^T \cdot P_H) - \tilde{\alpha} P_H \geq \tilde{\theta}_H V(\bar{k}_L^T \cdot P_L) - \tilde{\alpha} P_L & (\text{IC-H}) \\
 & \tilde{\theta}_L V(\bar{k}_L^T \cdot P_L) - P_L \geq \tilde{\theta}_L V(\bar{k}_H^T \cdot P_H) - P_H & (\text{IC-L}) \\
 & U_0 + \tilde{\theta}_L V(\bar{k}_L^T \cdot P_L) - P_L \geq 0 & (\text{PC-L})
 \end{aligned}$$

Este problema es claramente equivalente, realizando los cambios de variables  $F_i = \bar{k}_i^T \cdot P_i$ , al problema

$$\begin{aligned}
 (\widetilde{\mathbf{Tar EP}}) \quad \text{máx} \quad & \pi(F_H, F_L) = \tilde{N}_L \left( \frac{F_L}{\bar{k}_L^T} - C_L(F_L) \right) + \tilde{N}_H \left( \frac{F_H}{\bar{k}_H^T} - C_H(F_H) \right) \\
 \text{s.a.} \quad & \tilde{\theta}_H V(F_H) - \tilde{\alpha} \frac{F_H}{\bar{k}_H^T} \geq \tilde{\theta}_H V(F_L) - \tilde{\alpha} \frac{F_L}{\bar{k}_L^T} & (\text{IC-H}) \\
 & \tilde{\theta}_L V(F_L) - \frac{F_L}{\bar{k}_L^T} \geq \tilde{\theta}_L V(F_H) - \frac{F_H}{\bar{k}_H^T} & (\text{IC-L}) \\
 & U_0 + \tilde{\theta}_L V(F_L) - \frac{F_L}{\bar{k}_L^T} \geq 0 & (\text{PC-L})
 \end{aligned}$$

**Proposición B.1** Al considerar la relajación del problema que incluye solo (PC-L), con  $F_H$  fijo

$$\begin{aligned}
 \text{máx} \quad & \pi(F_L) = \tilde{N}_L \left( \frac{F_L}{\bar{k}_L^T} - C_L(F_L) \right) + \tilde{N}_H \left( \frac{F_H}{\bar{k}_H^T} - C_H(F_H) \right) \\
 \text{s.a.} \quad & U_0 + \tilde{\theta}_L V(F_L) - \frac{F_L}{\bar{k}_L^T} \geq 0 & (\text{PC-L})
 \end{aligned}$$

si tenemos la condición

$$C'_L(\bar{F}_L) \leq \frac{1}{\bar{k}_L^T} \quad (\text{B.1})$$

con  $\bar{F}_L$  el nivel de recompensas que activa (PC-L), entonces esta restricción de participación es activa en el óptimo del problema relajado.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el óptimo de este problema se alcanza en, digamos  $F_L^0$ . Sea  $\bar{F}_L$  la asignación de recompensas tal que la restricción (PC-L) es activa, es directo que

$$V'(\bar{F}_L) < \frac{1}{\tilde{\theta}_L \bar{k}_L^T} \quad (\text{B.2})$$

ya que  $\bar{F}_L$  está caracterizado por

$$\begin{aligned} \frac{\bar{F}_L}{\bar{k}_L^T} &= U_0 + \tilde{\theta}_L V(\bar{F}_L) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\tilde{\theta}_L \bar{k}_L^T} &= \frac{U_0}{\tilde{\theta}_L \bar{F}_L} + \frac{V(\bar{F}_L)}{\bar{F}_L} \\ \Rightarrow \frac{1}{\tilde{\theta}_L \bar{k}_L^T} &\geq \frac{U_0}{\tilde{\theta}_L \bar{F}_L} + V'(\bar{F}_L) \end{aligned}$$

donde la desigualdad proviene del hecho de que  $V$  es cóncava y por tanto (Boyd y Vandenberghe, 2004):

$$V'(x) \leq \frac{V(x)}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

Luego,  $F_L^0 \leq \bar{F}_L$ , ya que para valores mayores a  $\bar{F}_L$ , la restricción es violada. En efecto, sea  $F_L > \bar{F}_L$ :

$$\begin{aligned} U_0 + \tilde{\theta}_L V(F_L) - \frac{F_L}{\bar{k}_L^T} &= \underbrace{\left( U_0 + \tilde{\theta}_L V(\bar{F}_L) - \frac{\bar{F}_L}{\bar{k}_L^T} \right)}_{=0} + \left( \tilde{\theta}_L \int_{\bar{F}_L}^{F_L} V'(x) dx \right) - \left( \frac{F_L - \bar{F}_L}{\bar{k}_L^T} \right) \\ &< \left( \tilde{\theta}_L \int_{\bar{F}_L}^{F_L} \frac{1}{\tilde{\theta}_L \bar{k}_L^T} dx \right) - \left( \frac{F_L - \bar{F}_L}{\bar{k}_L^T} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde se uso que, gracias a la concavidad de  $V$  y a (B.2),  $V'(F_L) < \frac{1}{\tilde{\theta}_L \bar{k}_L^T} \quad \forall F_L \geq \bar{F}_L$

Sin embargo, no podemos tener  $F_L^0 < \bar{F}_L$ , pues en ese caso  $\bar{F}_L$  sería un punto factible que alcanza un mayor profit. En efecto:

$$\begin{aligned}
\pi(\bar{F}_L) &= \tilde{N}_L \left( \frac{\bar{F}_L}{\bar{k}_L} - C_L(\bar{F}_L) \right) + \tilde{N}_H \left( \frac{F_H}{\bar{k}_H} - C_H(F_H) \right) \\
&= \tilde{N}_L \left( \frac{F_L^0}{\bar{k}_L} - C_L(F_L^0) \right) + \tilde{N}_H \left( \frac{F_H}{\bar{k}_H} - C_H(F_H) \right) + \tilde{N}_L \left( \frac{\bar{F}_L - F_L^0}{\bar{k}_L} - (C_L(\bar{F}_L) - C_L(F_L^0)) \right) \\
&= \pi(F_L^0) + \tilde{N}_L \left( \int_{F_L^0}^{\bar{F}_L} \frac{1}{\bar{k}_L} - C'_L(x) dx \right) \\
&> \pi(F_L^0)
\end{aligned}$$

Donde ocupamos la condición (B.1) más la convexidad de  $C$  para concluir que la integral escrita es mayor a cero.

Así,  $F_L^0 = \bar{F}_L$  y la restricción es activa en el óptimo.  $\square$

**Proposición B.2** Sea  $\bar{F}_L$  el nivel de recompensas caracterizado por

$$U_0 + \tilde{\theta}_L V(\bar{F}_L) - \frac{\bar{F}_L}{\bar{k}_L} = 0$$

y  $\bar{F}_H$  caracterizado por

$$\tilde{\theta}_H V(\bar{F}_H) - \tilde{\alpha} \frac{\bar{F}_H}{\bar{k}_H} = \tilde{\theta}_H V(\bar{F}_L) - \tilde{\alpha} \frac{\bar{F}_L}{\bar{k}_L}$$

es decir las recompensas que activan (PC-L) y (IC-H) en el programa por distancia ex-post. Si se cumplen las condiciones

$$V'(\bar{F}_H) < \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\theta}_H \bar{k}_H} \quad (\text{B.3})$$

$$C'_L(\bar{F}_L) \leq \frac{1}{\bar{k}_L} \quad (\text{B.4})$$

$$C'_H(\bar{F}_H) \leq \frac{1}{\bar{k}_H} \quad (\text{B.5})$$

entonces en el óptimo del problema por tarifa ex-post (PC-L) y (IC-H) son activas, y por tanto los precios y recompensas fijadas son precisamente  $\bar{P}_H = \frac{\bar{F}_H}{\bar{k}_H}$  y  $\bar{P}_L = \frac{\bar{F}_L}{\bar{k}_L}, \bar{F}_H, \bar{F}_L$ .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el óptimo se da en alguna combinación de recompensas  $(F_H^1, F_L^1) \neq (\bar{F}_H, \bar{F}_L)$ . De manera idéntica a lo mostrado en la Proposición B.1, si (PC-L) no es activa para  $(F_H^1, F_L^1)$ , entonces  $F_L^1 < \bar{F}_L$ . Sin embargo, dado que exigimos nuevamente la condición (B.1) (a través de B.4), podemos aumentar  $F_L^1$  hasta  $\bar{F}_L$  aumentando el profit (nuevamente idéntico a lo mostrado en la Proposición B.1), aunque en el problema con todas las restricciones presentes realizar esto nos puede implicar infactibilidad sobre (IC-H) y/o (IC-L). Ignorando momentáneamente la posible infactibilidad, es claro entonces que si  $F_L^1 \neq \bar{F}_L$

$$\pi(F_H^1, \bar{F}_L) > \pi(F_H^1, F_L^1) \quad (\text{B.6})$$

Veamos ahora que si  $F_H^1 < \bar{F}_H$ , entonces  $\pi(\bar{F}_H, \bar{F}_L) > \pi(F_H^1, \bar{F}_L)$ . En efecto

$$\begin{aligned}
\pi(\bar{F}_H, \bar{F}_L) &= \tilde{N}_L \left( \frac{\bar{F}_L}{\bar{k}_L} - C_L(\bar{F}_L) \right) + \tilde{N}_H \left( \frac{\bar{F}_H}{\bar{k}_H} - C_H(\bar{F}_H) \right) \\
&= \tilde{N}_L \left( \frac{\bar{F}_L}{\bar{k}_L} - C_L(\bar{F}_L) \right) + \tilde{N}_H \left( \frac{F_H^1}{\bar{k}_H} - C_H(F_H^1) \right) + \tilde{N}_H \left( \frac{\bar{F}_H - F_H^1}{\bar{k}_H} - (C_H(\bar{F}_H) - C_H(F_H^1)) \right) \\
&= \pi(F_H^1, \bar{F}_L) + \tilde{N}_H \left( \int_{F_H^1}^{\bar{F}_H} \frac{1}{\bar{k}_H} - C'_H(x) dx \right) \\
&> \pi(F_H^1, \bar{F}_L)
\end{aligned}$$

donde para la última desigualdad ocupamos la condición (B.5)

Utilizando esto junto a la Ecuación (B.6) concluimos que  $\pi(\bar{F}_H, \bar{F}_L) > \pi(F_H^1, F_L^1)$ . Como  $(\bar{F}_H, \bar{F}_L)$  es claramente factible y alcanza un profit mayor, cualquier  $(F_H^1, F_L^1) \neq (\bar{F}_H, \bar{F}_L)$  con  $F_H^1 < \bar{F}_H$  no puede ser el óptimo del problema.

Analicemos ahora el caso  $F_H^1 > \bar{F}_H$ , debido a la condición (B.3) y la concavidad de  $V$ , es fácil mostrar que

$$\tilde{\theta}_H V(\bar{F}_H) - \tilde{\alpha} \frac{\bar{F}_H}{\bar{k}_H} > \tilde{\theta}_H V(F_H^1) - \tilde{\alpha} \frac{F_H^1}{k_H}$$

por lo que  $(\bar{F}_H, F_L^1)$  es factible para el problema, pese a que por el mismo argumento del caso anterior es posible mostrar que  $\pi(\bar{F}_H, F_L^1) < \pi(F_H^1, F_L^1)$ , es decir pasar de  $F_H^1 \rightarrow \bar{F}_H$  no es conveniente por si solo, pues se reducen recompensas y precios, lo que se traduce en menores profits. Veamos sin embargo que en este caso  $\square$

$$\begin{aligned}
\pi(\bar{F}_H, \bar{F}_L) &= \tilde{N}_L \left( \frac{\bar{F}_L}{\bar{k}_L} - C_L(\bar{F}_L) \right) + \tilde{N}_H \left( \frac{\bar{F}_H}{\bar{k}_H} - C_H(\bar{F}_H) \right) \\
&= \tilde{N}_L \left( \frac{F_L^1}{\bar{k}_L} - C_L(F_L^1) \right) + \tilde{N}_L \left( \frac{\bar{F}_L - F_L^1}{\bar{k}_L} - (C_L(\bar{F}_L) - C_L(F_L^1)) \right) \\
&\quad + \tilde{N}_H \left( \frac{F_H^1}{\bar{k}_H} - C_H(F_H^1) \right) - \tilde{N}_H \left( \frac{F_H^1 - \bar{F}_H}{\bar{k}_H} - (C_H(F_H^1) - C_H(\bar{F}_H)) \right) \\
&= \pi(F_H^1, F_L^1) + \tilde{N}_L \left( \int_{F_L^1}^{\bar{F}_L} \frac{1}{\bar{k}_L} - C'_L(x) dx \right) - \tilde{N}_H \left( \int_{\bar{F}_H}^{F_H^1} \frac{1}{\bar{k}_H} - C'_H(x) dx \right) \\
&> \pi(F_H^1, \bar{F}_L)
\end{aligned}$$

por tanto es necesario comparar las magnitudes de  $A(F_L^1) := \tilde{N}_L \left( \int_{F_L^1}^{\bar{F}_L} \frac{1}{\bar{k}_L} - C'_L(x) dx \right)$  y

$$B(F_H^1) := \tilde{N}_H \left( \int_{\bar{F}_H}^{F_H^1} \frac{1}{\bar{k}_H} - C'_H(x) dx \right).$$



Notemos primero que debido a la condición (B.3),  $F_H^1$  y  $F_L^1$  están “ligados” y no es factible fijar, por ejemplo,  $F_L^1 = \bar{F}_L$  y  $F_H^1 > \bar{F}_H$ , en cuyo caso se tendría  $A(F_L^1) = 0$ ,  $B(F_H^1) > 0 \Rightarrow \pi(\bar{F}_H, \bar{F}_L) < \pi(F_H^1, F_L^1)$ . En efecto, dada la condición (B.3) y la concavidad de  $V$  el lado izquierdo de (IC-H) en **(Tar EP)** es decreciente (a tasas crecientes) con  $F_H^1$ . Luego, si se tuviera

$$V'(\bar{F}_L) < \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\theta}_H \bar{k}_L^T}$$

recordando que  $F_L^1 \in [0, \bar{F}_L]$ , cualquier  $F_L^1$  cumpliría

$$\tilde{\theta}_H V(F_L^1) - \tilde{\alpha} \frac{F_L^1}{\bar{k}_L^T} \geq \tilde{\theta}_H V(\bar{F}_L) - \tilde{\alpha} \frac{\bar{F}_L}{\bar{k}_L^T}$$

y por tanto cualquier  $F_H^1 > \bar{F}_H$  cumpliría

$$\tilde{\theta}_H V(F_H^1) - \tilde{\alpha} \frac{F_H^1}{\bar{k}_H^T} < \tilde{\theta}_H V(F_L^1) - \tilde{\alpha} \frac{F_L^1}{\bar{k}_L^T}$$

y el punto  $(F_H^1, F_L^1)$  no sería factible. Luego, necesariamente debemos tener

$$V'(\bar{F}_L) > \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\theta}_H \bar{k}_L^T}$$

para ser capaces de considerar  $F_H^1 > \bar{F}_H$ . En este caso, el lado derecho decrece a medida que  $F_L^1$  se acerca a 0, por lo que podríamos recuperar factibilidad. Es decir, es necesario aumentar  $F_H^1$  y disminuir  $F_L^1$  de manera conjunta para seguir en el conjunto factible, a tasas similares. Con esto, es fácil notar que bajo condiciones naturales del problema  $A(F_L^1) > B(F_H^1)$ , debido a múltiples razones, a saber:

- $\tilde{N}_L > \tilde{N}_H$
- $\frac{1}{\bar{k}_L^T} > \frac{1}{\bar{k}_H^T}$
- Dado que  $C_L, C_H$  son convexas y  $F_H^1 \gg F_L^1 \Rightarrow C'_H(F_H^1) \gg C'_L(F_L^1)$

Por tanto, pese a que pasar por si solo de  $F_H^1 \rightarrow \bar{F}_H$  no es conveniente en términos de profit, si lo es al considerar el paso de  $(F_H^1, F_L^1) \rightarrow (\bar{F}_H, \bar{F}_L)$ , luego  $(F_H^1, F_L^1)$  no puede ser el óptimo del problema.

# Apéndice C

## Condiciones para $\pi_{\text{Tarifa}} \geq \pi_{\text{Distancia}}$ , Subsección 3.5.4

**Proposición C.1** Para cualquier  $\tilde{\theta}_L \in (0, \infty)$ , una condición necesaria y suficiente para que  $\pi_{\text{Tarifa}_L}(\tilde{\theta}_L) \geq \pi_{\text{Distancia}_L}(\tilde{\theta}_L)$  es

$$\tilde{\theta}_L V'(\bar{F}_L(\tilde{\theta}_L)) > C'_L(\bar{F}_L(\tilde{\theta}_L))$$

DEMOSTRACIÓN. Una condición necesaria y suficiente para lo anterior es

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}_L} \left( \tilde{\theta}_L (V(\bar{F}_L) - V(F_L^*)) - (C_L(\bar{F}_L) - C_L(F_L^*)) \right) > 0 \\ \Leftrightarrow & \underbrace{[V(\bar{F}_L) - V(F_L^*)]}_A + \underbrace{\tilde{\theta}_L V'(\bar{F}_L) \frac{\partial \bar{F}_L}{\partial \tilde{\theta}_L} - C'_L(\bar{F}_L) \frac{\partial \bar{F}_L}{\partial \tilde{\theta}_L}}_B > 0 \end{aligned}$$

con  $\tilde{\theta}_L > \theta_L^{EA}$  (el otro caso se tiene por continuidad), por lo que  $A > 0$ . Si se tiene la condición de la proposición,  $B > 0$  (ya que  $\frac{\partial \bar{F}_L}{\partial \tilde{\theta}_L} > 0$ ) y concluimos. Supongamos  $B < 0$ , con lo que se necesita

$$\begin{aligned} [V(\bar{F}_L) - V(F_L^*)] & > \left( C'_L(\bar{F}_L) - \tilde{\theta}_L V'(\bar{F}_L) \right) \frac{\partial \bar{F}_L}{\partial \tilde{\theta}_L} \\ & \stackrel{(3.22)}{=} \underbrace{\left( C'_L(\bar{F}_L) - \tilde{\theta}_L V'(\bar{F}_L) \right)}_{\frac{1}{\bar{k}_L} - \tilde{\theta}_L V'(\bar{F}_L)} \frac{V(\bar{F}_L)}{\frac{1}{\bar{k}_L} - \tilde{\theta}_L V'(\bar{F}_L)} \\ & = \left( C'_L(\bar{F}_L) - \frac{1}{\bar{k}_L} \right) \frac{V(\bar{F}_L)}{\frac{1}{\bar{k}_L} - \tilde{\theta}_L V'(\bar{F}_L)} + \left( \frac{1}{\bar{k}_L} - \tilde{\theta}_L V'(\bar{F}_L) \right) \frac{V(\bar{F}_L)}{\frac{1}{\bar{k}_L} - \tilde{\theta}_L V'(\bar{F}_L)} \\ \Leftrightarrow & V(F_L^*) \left( -\frac{1}{\bar{k}_L} + \tilde{\theta}_L V'(\bar{F}_L) \right) > V(\bar{F}_L) \left( -\frac{1}{\bar{k}_L} + C'_L(\bar{F}_L) \right) \\ \Rightarrow & \tilde{\theta}_L V(\bar{F}_L(\tilde{\theta}_L)) > C'_L(\bar{F}_L(\tilde{\theta}_L)) \end{aligned}$$

Luego, es también condición necesaria. □

## Apéndice D

# Monopolio Bajo Programa Óptimo, Demanda Elástica Sección 3.8

**Proposición D.1** Al considerar una solución interior en  $P_H$  ( $\underline{R} < P_H^* < \bar{R}$ ), a menos que se cumplan las desigualdades (3.35) y (3.36), el problema (**Elást. Ópt**) alcanza su óptimo activando solo la restricción (IC-H) y con solución dada por

$$\begin{aligned}\frac{\theta_H}{\alpha} V'(F_H^*) &= \frac{C'_H(F_H^*)}{\Theta(P_H^*, F_H^*, c_{op})} \\ \theta_L V'(F_L^*) &= \frac{C'_L(F_L^*)}{1 - \frac{N_H(P_H^*)}{N_L(z^*)} \left( \frac{\theta_H - \theta_L}{\theta_L} \right) \Theta(P_H^*, F_H^*, c_{op})} \\ P_L^* &= \theta_L V(F_L^*) + U_0 + \frac{t}{t_R} \frac{N_H}{N_L} (\bar{R} - P_H^*) \Theta(P_H^*, F_H^*, c_{op}) - \pi_L(P_L^*, F_L^*, c_{op}) \\ P_H^* &= \frac{\theta_H}{\alpha} (V(F_H^*) - V(F_L^*)) + P_L^*\end{aligned}$$

donde

$$\Theta(P_H^*, F_H^*, c_{op}) = 1 - \frac{\pi_H(P_H^*, F_H^*, c_{op})}{\bar{R} - P_H^*}$$

lo que implica que precios y recompensas varían con  $c_{op}$ .

DEMOSTRACIÓN. La afirmación sobre la activación de únicamente la restricción (IC-H) fue probada (Sección 3.8). Una vez establecido esto, se tiene que

$$u_H = u_L + V(F_L) \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) - U_0$$

y por tanto el problema escrito como función de  $u_L, F_H, F_L$  es (utilizando la notación de la Sección 3.8):

$$\begin{aligned}(\text{Elast. Ópt''}) \text{ máx } \pi(u_L, F_H, F_L) &= \beta_L u_L^2 + \gamma_L(F_L) u_L \\ &\quad + \beta_H u_H(u_L, F_L)^2 + \gamma_H(F_H) u_H(u_L, F_L) + \delta_H(F_H) \\ F_L, F_H &\geq 0\end{aligned}$$

Notando entonces que

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_H}{\partial u_L} &= 1 \\ \frac{\partial u_H}{\partial F_L} &= V'(F_L) \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right)\end{aligned}$$

escribamos las condiciones de primer orden, ignorando las restricciones de positividad de  $F_L, F_H$  para verificarlas a posteriori:

$$\frac{\partial \pi(u_L^*, F_H^*, F_L^*)}{\partial u_L^*} = 2\beta_L u_L^* + \gamma_L(F_L^*) + 2\beta_H u_H(u_L^*, F_L^*) + \gamma_H(F_H^*) = 0 \quad (\text{D.1})$$

$$\frac{\partial \pi(u_L^*, F_H^*, F_L^*)}{\partial F_L^*} = \gamma'_L(F_L^*) u_L^* + (2\beta_H u_H(u_L^*, F_L^*) + \gamma_H(F_H^*)) V'(F_L^*) \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) = 0 \quad (\text{D.2})$$

$$\frac{\partial \pi(u_L^*, F_H^*, F_L^*)}{\partial F_H^*} = \gamma'_H(F_H^*) u_H(u_L^*, F_L^*) + \delta'_H(F_H^*) = 0 \quad (\text{D.3})$$

Posteriormente, recordando la definición de  $\beta_L, \gamma_L, \beta_H, \gamma_H, \delta_H$  (3.33) y de  $u_L, u_H$  (3.31,3.32), notemos que

$$\begin{aligned}2\beta_H u_H(u_L, F_L) + \gamma_H(F_H) &= -\frac{N_H}{t_R} (\bar{R} - 2P_H + C(F_H) + c_{op}) \\ &= -\frac{N_H}{t_R} ((\bar{R} - P_H) - (P_H - C(F_H) - c_{op})) \\ &= -\frac{N_H}{t_R} (\bar{R} - P_H) \left( 1 - \frac{\pi_H}{\bar{R} - P_H} \right) \\ &= -\frac{N_H}{t_R} (\bar{R} - P_H) \Theta(P_H, F_H, c_{op})\end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned}2\beta_L u_L + \gamma_L &= -\frac{N_L}{t} (2U_0 + 2\theta_L V(F_L) - 2P_L - U_0 - \theta_L V(F_L) + C_L(F_L) + c_{op}) \\ &= -\frac{N_L}{t} ((U_0 + \theta_L V(F_L) - P_L) - (P_L - C_L(F_L) - c_{op})) \\ &= -\frac{N_L}{t} (u_L - \pi_L)\end{aligned}$$

Luego, gracias a la CPO (D.1),  $u_L^*$  está caracterizado por

$$\begin{aligned}u_L^* &= \pi_L(P_L^*, F_L^*, c_{op}) - \frac{t}{t_R} \frac{N_H}{N_L} (\bar{R} - P_H^*) \Theta(P_H^*, F_H^*, c_{op}) \\ \Rightarrow P_L^* &= \theta_L V(F_L^*) + U_0 + \frac{t}{t_R} \frac{N_H}{N_L} (\bar{R} - P_H^*) \Theta(P_H^*, F_H^*, c_{op}) - \pi_L(P_L^*, F_L^*, c_{op})\end{aligned}$$

Ahora, centrándonos en la CPO (D.2), vemos que esta es equivalente a

$$\frac{N_L}{t}(\theta_L V'(F_L^*) - C'_L(F_L^*))u_L + \left(-2\frac{N_H}{t_R}u_H + \frac{N_H}{t_R}\frac{t_R}{N_H}\gamma_H\right)V'(F_L^*)\left(\frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L\right) = 0$$

de donde se sigue que  $F_L^*$  está caracterizado por

$$\theta_L V'(F_L^*) = \frac{C'_L(F_L^*)}{1 - \frac{N_H}{N_L}\left(\frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L\right)\frac{t}{t_R}\left(\frac{2u_H - \frac{t_R}{N_H}\gamma_H}{u_L}\right)} \quad (\text{D.4})$$

Además se tiene que

$$\begin{aligned} 2u_H - \frac{t_R}{N_H}\gamma_H &= \bar{R} - 2P_H + C(F_H) + c_{op} \\ &= (\bar{R} - P_H) - (P_H - C(F_H) - c_{op}) \\ &= (\bar{R} - P_H)\left(1 - \frac{\pi_H}{\bar{R} - P_H}\right) \\ &= (\bar{R} - P_H)\Theta(P_H, F_H, c_{op}) \end{aligned}$$

por lo que usando

$$u_L = t\frac{N_L(z)}{N_L}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{2u_H - \frac{t_R}{N_H}\gamma_H}{u_L} &= \frac{(\bar{R} - P_H)\Theta(P_H, F_H, c_{op})}{t\frac{N_L(z)}{N_L}} \\ &= \frac{\frac{t_R}{N_H}N_H\frac{\bar{R} - P_H}{t_R}\Theta(P_H, F_H, c_{op})}{t\frac{N_L(z)}{N_L}} \\ &= \frac{t_R}{t}\frac{N_L}{N_L(z)}\frac{N_H(P_H)}{N_H}\Theta(P_H, F_H, c_{op}) \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Usando (D.5) en (D.4) obtenemos que  $F_L^*$  está caracterizado por

$$\theta_L V'(F_L^*) = \frac{C'_L(F_L^*)}{1 - \frac{N_H(P_H^*)}{N_L(z^*)}\left(\frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L\right)\Theta(P_H^*, F_H^*, c_{op})}$$

Finalmente, estudiando la CPO (D.3), vemos que es equivalente a

$$\begin{aligned} \left(2\frac{\theta_H}{\alpha}V'(F_H^*) - C'_H(F_H^*)\right)u_H - \frac{\theta_H}{\alpha}V'(F_H^*)\left(\frac{\theta_H}{\alpha}V(F_H^*) - C_H(F_H^*) - c_{op}\right) \\ + \left(\bar{R} - \frac{\theta_H}{\alpha}V(F_H^*)\right)\left(\frac{\theta_H}{\alpha}V'(F_H^*) - C'_H(F_H^*)\right) = 0 \end{aligned}$$

de donde se obtiene que  $F_H^*$  está caracterizado por

$$\begin{aligned}
\frac{\theta_H}{\alpha} V'(F_H^*) &= C'_H(F_H^*) \frac{u_H + \bar{R} - \frac{\theta_H}{\alpha} V(F_H^*)}{2u_H + \bar{R} - 2\frac{\theta_H}{\alpha} V(F_H^*) + C(F_H^*) + c_{op}} \\
&= C'_H(F_H^*) \frac{\bar{R} - P_H}{\bar{R} - 2P_H + C_H(F_H^*) + c_{op}} \\
&= \frac{C'_H(F_H^*)}{1 - \frac{P_H - C_H(F_H^*) - c_{op}}{\bar{R} - P_H^*}} \\
&= \frac{C'_H(F_H^*)}{\Theta(P_H^*, F_H^*, c_{op})}
\end{aligned}$$

Lo que concluye la caracterización de la solución.

□

# Apéndice E

## Programas Reales y Monopolio Sirviendo a Dos Mercados

**Proposición E.1** Bajo los resultados mostrados en la Subsección 4.3.1, una condición suficiente que asegura que el precio más alto a la clase de negocio se dará en el mercado con la distancia más larga es

$$\frac{V'(k_H^{D^*} \cdot d)}{V'(k_L^{D^*} \cdot d)} > \frac{k_L^{D^*}}{k_H^{D^*}} \left(1 - \alpha \frac{\theta_L}{\theta_H}\right) \quad \forall d \in [\min_i \{D_i\}, \max_i \{D_i\}] \quad (\text{E.1})$$

DEMOSTRACIÓN. Según lo encontrado en la Subsección 4.3.1, los precios fijados a la clase alta en cada mercado resultan

$$P_{Hi} = \frac{\theta_H}{\alpha} V(k_H^{D^*} \cdot D_i) - \left(\frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L\right) V(k_L^{D^*} \cdot D_i) + U_0 \quad \forall i \in \{1, 2\}$$

Llamando

$$j = \underset{i}{\operatorname{argmín}} \{D_i\}$$

$$k = \underset{i}{\operatorname{argmáx}} \{D_i\}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} P_{Hk} - P_{Hj} &= \frac{\theta_H}{\alpha} (V(k_H^{D^*} \cdot D_k) - V(k_H^{D^*} \cdot D_j)) - \left(\frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L\right) (V(k_L^{D^*} \cdot D_k) - V(k_L^{D^*} \cdot D_j)) \\ &= \frac{\theta_H}{\alpha} \left( (V(k_H^{D^*} \cdot D_k) - V(k_H^{D^*} \cdot D_j)) - \left(1 - \alpha \frac{\theta_L}{\theta_H}\right) (V(k_L^{D^*} \cdot D_k) - V(k_L^{D^*} \cdot D_j)) \right) \\ &= \frac{\theta_H}{\alpha} \left( \int_{D_j}^{D_k} k_H^{D^*} V'(k_H^{D^*} \cdot x) - \left(1 - \alpha \frac{\theta_L}{\theta_H}\right) k_L^{D^*} V'(k_L^{D^*} \cdot x) dx \right) \end{aligned}$$

de donde es claro que (E.1) es una condición suficiente para tener  $P_{Hk} - P_{Hj} > 0$ , como queríamos.  $\square$

**Proposición E.2** Al considerar el problema que enfrenta una aerolínea bajo un programa por tarifa pagada en la fase de diseño

$$\begin{aligned}
& \text{máx} \quad \pi(P_{H1}, P_{H2}, P_{L1}, P_{L2}, k_L^T, k_H^T) && \text{(Tarifa 2M)} \\
& = \sum_{i=1}^2 \{N_{Li}(P_{Li} - C_L(k_L^T \cdot P_{Li}) - c_{opi}) + N_{Hi}(P_{Hi} - C_H(k_H^T \cdot P_{Hi}) - c_{opi})\} \\
& \text{s.a.} \quad \theta_H V(k_H^T \cdot P_{Hi}) - \alpha P_{Hi} \geq \theta_H V(k_L^T \cdot P_{Li}) - \alpha P_{Li} \quad \forall i \in \{1, 2\} && \text{(IC-H)} \\
& \quad \theta_L V(k_L^T \cdot P_{Li}) - P_{Li} \geq \theta_L V(k_H^T \cdot P_{Hi}) - P_{Hi} \quad \forall i \in \{1, 2\} && \text{(IC-L)} \\
& \quad U_0 + \theta_L V(k_L^T \cdot P_{Li}) - P_{Li} \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2\} && \text{(PC-L)} \\
& \quad P_{Li}, P_{Hi}, k_L^T, k_H^T \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2\}
\end{aligned}$$

se tiene que en el óptimo, la restricción de compatibilidad de incentivos para la clase alta (IC-H) es activa en al menos uno de los mercados.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, supongamos que (IC-H) no es activa en ningún mercado, es decir en el óptimo  $(P_{H1}^*, P_{H2}^*, P_{L1}^*, P_{L2}^*, k_L^{T*}, k_H^{T*})$  se tiene

$$\begin{aligned}
& \theta_H V(k_H^{T*} \cdot P_{Hi}^*) - \alpha P_{Hi}^* > \theta_H V(k_L^{T*} \cdot P_{Li}^*) - \alpha P_{Li}^* \quad \forall i \in \{1, 2\} && \text{(IC-H)} \\
& \theta_L V(k_L^{T*} \cdot P_{Li}^*) - P_{Li}^* \geq \theta_L V(k_H^{T*} \cdot P_{Hi}^*) - P_{Hi}^* \quad \forall i \in \{1, 2\} && \text{(IC-L)} \\
& U_0 + \theta_L V(k_L^{T*} \cdot P_{Li}^*) - P_{Li}^* \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2\} && \text{(PC-L)}
\end{aligned}$$

Hagamos el cambio de variables

$$F_{H2} = k_H^T P_{H2} \quad (\text{E.2})$$

$$F_{L2} = k_L^T P_{L2} \quad (\text{E.3})$$

con lo que el problema es sobre  $(P_{H1}, P_{H2}, P_{L1}, P_{L2}, F_{H2}, F_{L2})$  y en el óptimo se tiene

$$\begin{aligned}
& \theta_H V\left(F_{H2}^* \frac{P_{Hi}^*}{P_{H2}^*}\right) - \alpha P_{Hi}^* > \theta_H V\left(F_{L2}^* \frac{P_{Li}^*}{P_{L2}^*}\right) - \alpha P_{Li}^* \quad \forall i \in \{1, 2\} && \text{(IC-H)} \\
& \theta_L V\left(F_{L2}^* \frac{P_{Li}^*}{P_{L2}^*}\right) - P_{Li}^* \geq \theta_L V\left(F_{H2}^* \frac{P_{Hi}^*}{P_{H2}^*}\right) - P_{Hi}^* \quad \forall i \in \{1, 2\} && \text{(IC-L)} \\
& U_0 + \theta_L V\left(F_{L2}^* \frac{P_{Li}^*}{P_{L2}^*}\right) - P_{Li}^* \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2\} && \text{(PC-L)}
\end{aligned}$$

Consideremos luego los precios

$$\bar{P}_{Hi} = (1 + \varepsilon)P_{Hi}^* \quad \forall i \in \{1, 2\}$$

Es claro que para  $\varepsilon > 0$  lo suficientemente pequeño, esta asignación sigue siendo factible si el resto de variables están fijas, debido a que la única restricción que involucra estos precios es (IC-H), inactiva en todos los mercados por hipótesis. Además, como la función objetivo con el cambio de variables queda



$$\pi = \sum_{i=1}^2 N_{Li} \left( P_{Li} - C_L \left( F_{L2} \frac{P_{Li}}{P_{L2}} \right) \right) + N_{Hi} \left( P_{Hi} - C_H \left( F_{H2} \frac{P_{Hi}}{P_{H2}} \right) \right)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \pi(\{\bar{P}_{Hi}\}_i) &= \sum_{i=1}^2 N_{Li} \left( P_{Li}^* - C_L \left( F_{L2}^* \frac{P_{Li}^*}{P_{L2}^*} \right) \right) + N_{Hi} \left( (1 + \varepsilon) P_{Hi}^* - C_H \left( F_{H2}^* \frac{(1 + \varepsilon) P_{Hi}^*}{(1 + \varepsilon) P_{H2}^*} \right) \right) \\ &= \pi(\{P_{Hi}^*\}_i) + \sum_{i=1}^2 \varepsilon N_{Hi} P_{Hi}^* \\ &> \pi(\{P_{Hi}^*\}_i) \end{aligned}$$

es decir, esta asignación alcanza un profit estrictamente mayor que el óptimo. Luego, al menos una de las restricciones de compatibilidad de incentivos para la clase alta (IC-H) es activa en el óptimo.  $\square$

**Proposición E.3** En el contexto del problema (**Tarifa 2M**), sea  $M_k$  el mercado en el cual la restricción de compatibilidad de incentivos para la clase alta (IC-H) es activa en el óptimo, según lo dado por la Proposición E.2. En dicho mercado, la restricción de compatibilidad de incentivos para la clase baja (IC-L) es inactiva en el óptimo.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos s.p.g que el mercado  $k$  es el mercado 1. Al estar activa la restricción (IC-H) se tiene que  $P_{H1}^*$  está caracterizado por

$$P_{H1}^* = \frac{\theta_H}{\alpha} \left( V \left( F_{H2} \frac{P_{H1}^*}{P_{H2}^*} \right) - V \left( F_{L2}^* \frac{P_{L1}^*}{P_{L2}^*} \right) \right) + P_{L1}^* \quad (\text{E.4})$$

por lo que la restricción (IC-L) en este mercado se reduce a

$$V \left( \underbrace{F_{H2} \frac{P_{H1}}{P_{H2}}}_{F_{H1}} \right) \geq V \left( \underbrace{F_{L2} \frac{P_{L1}}{P_{L2}}}_{F_{L1}} \right) \quad (\text{IC-L})$$

Supongamos por contradicción que esta restricción es activa en el óptimo, i.e. se da con igualdad, por lo que  $F_{H1} = F_{L1}$ . Usando esto en (E.4) es claro que implica  $P_{H1} = P_{L1}$ , es decir, la firma asigna precios y recompensas iguales a las dos clases en el mercado 1, a los que llamaremos simplemente  $P_1$  y  $F_1$  respectivamente. Sin embargo, si

$$\frac{\theta_H}{\alpha} V'(F_1) > C'_H(F_1) \quad (\text{E.5})$$

entonces es conveniente para la firma aumentar el precio a los pasajeros de negocio en el mercado 1 al menos marginalmente. En efecto: esto lo puede hacer aumentando las recompensas a este tipo de viajeros (aumentar las recompensas es equivalente a aumentar el precio en este programa) manteniendo (IC-H) activa y el resto constante. Con esto, el beneficio adicional unitario percibido será

$$\left. \frac{\partial P_{H1}}{\partial F_{H1}} \right|_{F_{H1}=F_1} = \frac{\theta_H}{\alpha} V'(F_1)$$

donde ocupamos nuevamente que al estar activa (IC-H), entonces  $P_{H1}$  está caracterizado por

$$P_{H1} = \frac{\theta_H}{\alpha}(V(F_{H1}) - V(F_{L1})) + P_{L1}$$

y el nivel de recompensas original es  $F_{H1} = F_1^1$ . Por otro lado, el costo adicional asociado a aumentar marginalmente estas recompensas es claramente  $C'_H(F_1)$ . Luego, por la suposición (E.5) el beneficio es estrictamente mayor al costo, por lo que la firma aumentará marginalmente el precio y recompensas asignadas a los viajeros de negocio. Además, un aumento marginal en  $F_{H1}$  sigue dejando a la aerolínea en un punto factible, pues por construcción se mantiene (IC-H) activa, mientras que al volver a escribir (IC-L) como

$$\theta_L V(F_{L1}(P_{L1}, P_{L2}, F_{L2})) - P_{L1} \geq \theta_L V(F_{H1}(P_{H1}, P_{H2}, F_{H2})) - P_{H1}$$

el lado izquierdo no cambia, y el lado derecho disminuye pues

$$\frac{\partial}{\partial F_{H1}} (\theta_L V(F_{H1}) - P_{H1}) = \theta_L V'(F_{H1}) - \frac{\theta_H}{\alpha} V'(F_{H1}) < 0$$

Si por otro lado

$$\begin{aligned} \frac{\theta_H}{\alpha} V'(F_1) &\leq C'_H(F_1) \\ \Rightarrow \theta_L V'(F_1) &< \frac{C'_L(F_1)}{1 - \frac{N_{H1}}{N_{L1}} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha}} \end{aligned}$$

usando un razonamiento totalmente análogo concluiremos que es conveniente disminuir precios y recompensas a los usuarios de ocio del mercado 1 manteniendo activa (IC-H) e inactivando (IC-L).

En cualquier caso se observa que el punto en donde (IC-L) es activa en el mercado 1 no es un óptimo, pues existen asignaciones factibles con esta restricción inactiva que alcanzan mayor profit.

□

**Proposición E.4** En el contexto del problema (**Tarifa 2M**), sea  $M_j$  el mercado **no** estudiado en la Proposición E.3. La restricción de compatibilidad de incentivos para la clase baja (IC-L) de este mercado es inactiva en el óptimo.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos s.p.g. que el mercado  $j$  es el mercado 2, para ser consistentes con la Proposición E.3. Supongamos por contradicción que (IC-L) es activa en el óptimo para este mercado. Para efectos de la demostración, invirtamos el cambio de variable realizado en la Proposición E.2 (E.2 y E.3), es decir hagamos

$$\begin{aligned} F_{H1} &= k_H^T P_{H1} \\ F_{L1} &= k_L^T P_{L1} \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Usamos la notación  $F_{H1}$  para las recompensas de los usuarios de negocio en el mercado 1, pero es importante notar que no es una variable de decisión independiente, pues  $F_{H1} = F_{H1}(P_{H1}, P_{H2}, F_{H2})$ . Más aún, esto es evidente en cuanto  $\frac{\partial P_{H1}}{\partial F_{H1}}$  es no nula.

con lo que el problema es sobre  $(P_{H1}, P_{H2}, P_{L1}, P_{L2}, F_{H1}, F_{L1})$  y por lo probado en las Proposiciones E.2 y E.3, las restricciones del problema se escriben como:

$$P_{H1} = \frac{\theta_H}{\alpha} (V(F_{H1}) - V(F_{L1})) + P_{L1} \quad (\text{IC-H1})$$

$$V(F_{H1}) > V(F_{L1}) \quad (\text{IC-L1})$$

$$U_0 + \theta_L V(F_{L1}) - P_{L1} \geq 0 \quad (\text{PC-L1})$$

$$\theta_H V\left(F_{H1} \frac{P_{H2}}{P_{H1}}\right) - \alpha P_{H2} \geq \theta_H V\left(F_{L1} \frac{P_{L2}}{P_{L1}}\right) - \alpha P_{L2} \quad (\text{IC-H2})$$

$$\theta_L V\left(F_{L1} \frac{P_{L2}}{P_{L1}}\right) - P_{L2} \geq \theta_L V\left(F_{H1} \frac{P_{H2}}{P_{H1}}\right) - P_{H2} \quad (\text{IC-L2})$$

$$U_0 + \theta_L V\left(F_{L2} \frac{P_{L2}}{P_{L1}}\right) - P_{L2} \geq 0 \quad (\text{PC-L2})$$

Analizaremos dos casos:

**Caso A:** La restricción de compatibilidad de incentivos para la clase baja para este mercado (IC-H2) es activa en el óptimo. Luego, precios y recompensas quedan caracterizados por:

$$P_{H2}^* = \frac{\theta_H}{\alpha} \left( V\left(F_{H1}^* \frac{P_{H2}^*}{P_{H1}^*}\right) - V\left(F_{L1}^* \frac{P_{L2}^*}{P_{L1}^*}\right) \right) + P_{L2}^* \quad (\text{E.6})$$

$$\underbrace{V\left(F_{H1}^* \frac{P_{H2}^*}{P_{H1}^*}\right)}_{F_{H2}} = \underbrace{V\left(F_{L1}^* \frac{P_{L2}^*}{P_{L1}^*}\right)}_{F_{L2}} \quad (\text{E.7})$$

Usando E.7 en E.6 es directo que  $P_{H2}^* = P_{L2}^*$ , por lo que la aerolínea fija precios y recompensas iguales a las dos clases en el mercado 2, a los que llamaremos simplemente  $P_2$  y  $F_2$  respectivamente. Sin embargo, si

$$\frac{\theta_H}{\alpha} V'(F_2) > C'(F_2) \quad (\text{E.8})$$

entonces es conveniente aumentar el precio a los pasajeros de negocio en el mercado 2 al menos marginalmente. Esto se puede hacer aumentando las recompensas a este tipo de viajeros (aumentar las recompensas es equivalente a aumentar el precio en este programa) manteniendo (IC-H2) activa. Con esto, el beneficio adicional percibido será

$$\left. \frac{\partial P_{H2}}{\partial F_{H2}} \right|_{F_{H2}=F_2} = \frac{\theta_H}{\alpha} V'(F_2)$$

donde ocupamos que al estar activa (IC-H2), entonces  $P_{H2}$  está caracterizado por

$$P_{H2} = \frac{\theta_H}{\alpha} (V(F_{H2}) - V(F_{L2})) + P_{L2}$$

y el nivel de recompensas original es  $F_{H2} = F_2$ . Por otro lado, el costo adicional asociado a aumentar marginalmente estas recompensas es claramente  $C'_H(F_2)$ . Luego, por la suposición (E.8) el beneficio es estrictamente mayor al costo, por lo que la aerolínea moverá marginalmente el precio y recompensas asignadas a los viajeros de negocio. Además, un aumento

marginal en  $F_{H2}$  sigue dejando a la firma en un punto factible, pues por construcción mantiene (IC-H2) activa, mientras que al volver a escribir (IC-L2) como

$$\theta_L V(F_{L2}(P_{L1}, P_{L2}, F_{L1})) - P_{L2} \geq \theta_L V(F_{H2}(P_{H1}, P_{H2}, F_{H1})) - P_{H2}$$

el lado izquierdo no cambia, y el lado derecho disminuye pues

$$\frac{\partial}{\partial F_{H2}} (\theta_L V(F_{H2}) - P_{H2}) = \theta_L V'(F_{H2}) - \frac{\theta_H}{\alpha} V'(F_{H2}) < 0$$

Si por otro lado

$$\begin{aligned} \frac{\theta_H}{\alpha} V'(F_2) &\leq C'_H(F_2) \\ \Rightarrow \theta_L V'(F_2) &< \frac{C'_L(F_2)}{1 - \frac{N_{H2}}{N_{L2}} \frac{\theta_H - \theta_L}{\alpha}} \end{aligned}$$

usando un razonamiento totalmente análogo concluiremos que es conveniente disminuir precios y recompensas a los usuarios de ocio de este mercado manteniendo activa (IC-H2) e inactivando (IC-L2).

En cualquier caso se observa que el punto en donde (IC-L2) es activa no es un óptimo, pues existen asignaciones factibles con esta restricción inactiva que alcanzan mayor profit.

**Caso B:** (IC-H2) es inactiva en el óptimo. Consideremos la asignación

$$\begin{aligned} \bar{F}_{H1} &= \frac{F_{H1}^*}{1 + \varepsilon} \\ \bar{P}_{H2} &= (1 + \varepsilon) P_{H2}^* \end{aligned}$$

Gracias a la Proposición E.3 y a que (IC-H2) es inactiva, esta asignación es factible para  $\varepsilon$  lo suficientemente pequeño, con (IC-L2) inactiva y es claro que alcanza un profit mayor. Luego, (IC-L2) no puede estar activa en el óptimo.  $\square$

**Proposición E.5** En el contexto del problema (**Tarifa 2M**), en el óptimo del problema la restricción de participación de los usuarios de ocio (PC-L) es activa en al menos un mercado.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que ninguna es activa y consideremos nuevamente el cambio de variables

$$\begin{aligned} F_{H1} &= k_H^T P_{H1} \\ F_{L1} &= k_L^T P_{L1} \end{aligned}$$

con lo que el problema es sobre  $(P_{H1}, P_{H2}, P_{L1}, P_{L2}, F_{H1}, F_{L1})$  y en el óptimo se tiene, según

lo probado en las Proposiciones E.2 a E.4:

$$\theta_H V(F_{H1}) - \alpha P_{H1} = \theta_H V(F_{L1}) - \alpha P_{L1} \quad (\text{IC-H1})$$

$$\theta_L V(F_{L1}) - P_{L1} > \theta_L V(F_{H1}) - P_{H1} \quad (\text{IC-L1})$$

$$U_0 + \theta_L V(F_{L1}) - P_{L1} > 0 \quad (\text{PC-L1})$$

$$\theta_H V\left(F_{H1} \frac{P_{H2}}{P_{H1}}\right) - \alpha P_{H2} \geq \theta_H V\left(F_{L1} \frac{P_{L2}}{P_{L1}}\right) - \alpha P_{L2} \quad (\text{IC-H2})$$

$$\theta_L V\left(F_{L1} \frac{P_{L2}}{P_{L1}}\right) - P_{L2} > \theta_L V\left(F_{H1} \frac{P_{H2}}{P_{H1}}\right) - P_{H2} \quad (\text{IC-L2})$$

$$U_0 + \theta_L V\left(F_{L1} \frac{P_{L2}}{P_{L1}}\right) - P_{L2} > 0 \quad (\text{PC-L2})$$

Consideremos luego los precios

$$\bar{P}_{L1} = (1 + \varepsilon)P_{L1}^*$$

$$\bar{P}_{L2} = (1 + \varepsilon)P_{L2}^*$$

Es claro que para  $\varepsilon > 0$  lo suficientemente pequeño, esta asignación sigue siendo factible si el resto de variables están fijas, ya que (IC-L1) y (IC-L2) son inactivas. Además, como la función objetivo con el cambio de variables queda

$$\pi = \sum_{i=1}^2 N_{Li} \left( P_{Li} - C_L \left( F_{L1} \frac{P_{Li}}{P_{L1}} \right) \right) + N_{Hi} \left( P_{Hi} - C_H \left( F_{H1} \frac{P_{Hi}}{P_{H1}} \right) \right)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \pi(\{\bar{P}_{Li}\}_i) &= \sum_{i=1}^2 N_{Li} \left( (1 + \varepsilon)P_{Li}^* - C_L \left( F_{L1}^* \frac{(1 + \varepsilon)P_{Li}^*}{(1 + \varepsilon)P_{L1}^*} \right) \right) + N_{Hi} \left( P_{Hi}^* - C_H \left( F_{H1}^* \frac{P_{Hi}^*}{P_{H1}^*} \right) \right) \\ &= \pi(\{P_{Li}^*\}_i) + \sum_{i=1}^2 \varepsilon N_{Li} P_{Li}^* \\ &> \pi(\{P_{Li}^*\}_i) \end{aligned}$$

es decir, esta asignación alcanza un profit estrictamente mayor que el óptimo. Luego, al menos una de las restricciones de participación de los usuarios de ocio (PC-L) es activa.  $\square$

**Proposición E.6** Para el problema (**Tarifa 2M**), si el multiplicador óptimo para la clase baja  $k_L^{T*}$  es tal que

$$\frac{1}{k_L^{T*}} \geq C'_L(k_L^{T*} \underline{P})$$

donde  $\underline{P}$  es el precio que resuelve

$$U_0 + \theta_L V(k_L^{T*} \underline{P}) - \underline{P} = 0 \quad (\text{E.9})$$

entonces la restricción de participación para la clase baja es activa en el óptimo en ambos mercados, y más aún, los precios óptimos para estos viajeros cumplen  $P_{L1}^* = P_{L2}^* = \underline{P}$ .

DEMOSTRACIÓN. Según lo probado en las Proposiciones E.2 a E.5, escribiendo el problema sobre  $(P_{H1}, P_{H2}, P_{L1}, P_{L2}, k_H^T, k_L^T)$ , las restricciones se ven como

$$P_{H1} = \frac{\theta_H}{\alpha} (V(k_H^T P_{H1}) - V(k_L^T P_{L1})) + P_{L1} \quad (\text{IC-H1})$$

$$V(k_H^T P_{H1}) > V(k_L^T P_{L1}) \quad (\text{IC-L1})$$

$$U_0 + \theta_L V(k_L^T P_{L1}) - P_{L1} \geq 0 \quad (\text{PC-L1})$$

$$\theta_H V(k_H^T P_{H2}) - \alpha P_{H2} \geq \theta_H V(k_L^T P_{L2}) - \alpha P_{L2} \quad (\text{IC-H2})$$

$$\theta_L V(k_L^T P_{L2}) - P_{L2} > \theta_L V(k_H^T P_{H2}) - P_{H2} \quad (\text{IC-L2})$$

$$U_0 + \theta_L V(k_L^T P_{L2}) - P_{L2} \geq 0 \quad (\text{PC-L2})$$

Analicemos primero el caso donde (PC-L1) es inactiva en el óptimo (y (PC-L2) es activa según la Proposición E.5), con solución digamos  $(\bar{P}_{H1}, \bar{P}_{H2}, \bar{P}_{L1}, \bar{P}_{L2}, k_H^{T*}, k_L^{T*})$ . Como asumimos  $V$  estrictamente cóncava, es claro que existe un único precio que resuelve (E.9), y que cualquier precio  $P_{L1}$  que cumple la restricción (PC-L1) de manera estricta cumple  $P_{L1} \in [0, \bar{P}]$ , como se observa en la Figura E.1.

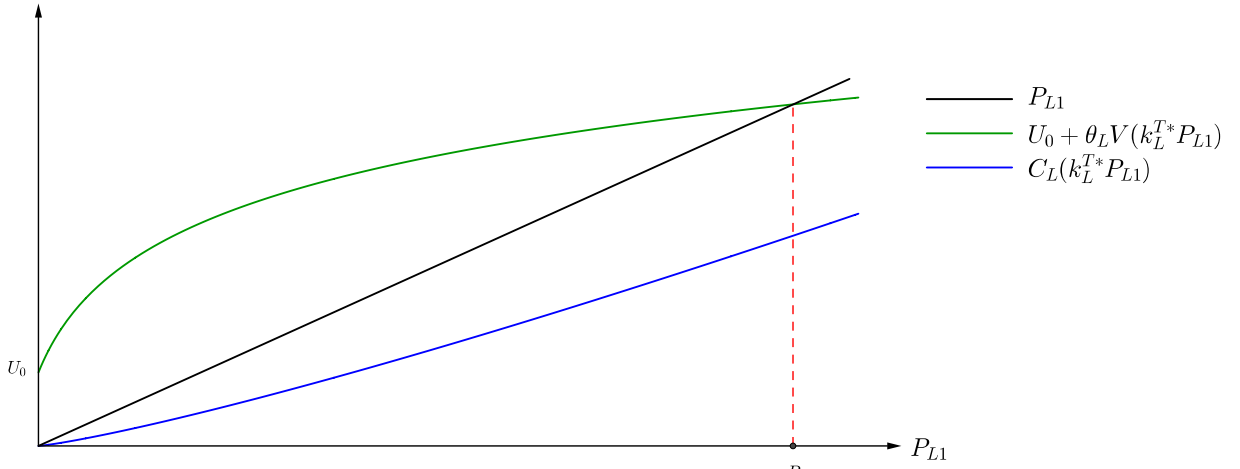


Figura E.1: Comportamiento (PC-L1).

Es claro que dado que (IC-L1) es inactiva en el óptimo, podemos aumentar  $\bar{P}_{L1}$  al menos marginalmente manteniendo la factibilidad de la solución. Analicemos si esto es conveniente o no en términos de profit: al aumentar marginalmente el precio  $\bar{P}_{L1}$ , el beneficio adicional unitario percibido es

$$\left. \frac{\partial P_{L1}}{\partial P_{L1}} \right|_{P_{L1}=\bar{P}_{L1}} = 1$$

mientras que el costo adicional es

$$\left. \frac{\partial C_L(k_L^{T*} P_{L1})}{\partial P_{L1}} \right|_{P_{L1}=\bar{P}_{L1}} = k_L^{T*} C'_L(k_L^{T*} \bar{P}_{L1})$$

Por tanto, una condición necesaria para que la firma realice este aumento marginal en el precio a los viajeros de ocio en el mercado 1 es

$$\frac{1}{k_L^{T*}} \geq C'_L(k_L^{T*} \bar{P}_{L1})$$

Como  $\bar{P}_{L1} \in [0, \underline{P}]$  y  $C_L$  es convexa, una condición suficiente para asegurar lo anterior es

$$\frac{1}{k_L^{T*}} \geq C'_L(k_L^{T*} \underline{P})$$

Luego, bajo esta condición la firma aumentará  $\bar{P}_{L1}$ , por lo que  $(\bar{P}_{H1}, \bar{P}_{H2}, \bar{P}_{L1}, \bar{P}_{L2}, k_H^{T*}, k_L^{T*})$  no alcanza el óptimo y por tanto (IC-L1) es activa en el óptimo.

La demostración en el caso de que asumamos que (PC-L2) es inactiva en el óptimo es idéntica, ya que se probó que (PC-L2) es inactiva en el óptimo y por tanto el precio a los viajeros de ocio en el mercado 2 puede ser aumentado marginalmente manteniendo la factibilidad.

Finalmente, notemos que al estar (PC-L1) y (PC-L2) activas en el óptimo, los precios óptimos  $P_{L1}^*$  y  $P_{L2}^*$  resuelven

$$\begin{aligned} U_0 + \theta_L V(k_L^{T*} P_{L1}^*) - P_{L1}^* &= 0 \\ U_0 + \theta_L V(k_L^{T*} P_{L2}^*) - P_{L2}^* &= 0 \end{aligned}$$

pero sabemos que el único precio que resuelve esta ecuación es  $\underline{P}$ . Luego,  $P_{L1}^* = P_{L2}^* = \underline{P}$ .  $\square$

**Proposición E.7** Para el problema (**Tarifa 2M**), si los multiplicadores óptimos de recompensas  $k_H^{T*}, k_L^{T*}$  son tales que

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_H^{T*}} &\geq C'_H(k_H^{T*} \bar{P}) \\ \frac{1}{k_L^{T*}} &\geq C'_L(k_L^{T*} \underline{P}) \end{aligned} \tag{E.10}$$

donde  $\underline{P}$  es el precio que resuelve

$$U_0 + \theta_L V(k_L^{T*} \underline{P}) - \underline{P} = 0$$

y  $\bar{P}$  es el precio más alto que resuelve

$$\frac{\theta_H}{\alpha} V(k_H^{T*} \bar{P}) - \bar{P} = \frac{\theta_H}{\alpha} V(k_L^{T*} \underline{P}) - \underline{P}$$

entonces las restricciones de participación para la clase baja y de compatibilidad de incentivos para la clase alta son activas en ambos mercados, y más aún

$$\begin{aligned} P_{H1}^* &= P_{H2}^* = \bar{P} \\ P_{L1}^* &= P_{L2}^* = \underline{P} \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Si se cumple la condición (E.10), por lo probado en la Proposición E.6 se tiene que la restricción de participación de la clase baja es activa en ambos mercados en el óptimo y  $P_{L1}^* = P_{L2}^* = \underline{P}$ . Por lo probado en la Proposición E.2 la restricción de compatibilidad de incentivos de la clase alta (IC-H) es inactiva en a lo más un mercado. Supongamos s.p.g que es inactiva en el mercado  $M_2$ . Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\theta_H}{\alpha} V(k_L^{T*} P_{L2}) - P_{L2} &= \frac{\theta_H}{\alpha} V(k_L^{T*} \underline{P}) - \underline{P} \\ &= V(k_L^{T*} \underline{P}) \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) - U_0 \end{aligned}$$

que es en general mayor que cero para  $U_0$  lo suficientemente pequeño. Luego, la restricción (IC-H) en  $M_2$  se escribe

$$\frac{\theta_H}{\alpha} V(k_H^{T*} P_{H2}) - P_{H2} \geq \frac{\theta_H}{\alpha} V(k_L^{T*} \underline{P}) - \underline{P} \quad (\text{IC-H2})$$

Notemos que dicha restricción con igualdad (activa) tiene dos soluciones, como se observa en la Figura E.2. Llamemos  $\bar{P}$  a la mayor de estas soluciones y  $P_0$  a la menor. Supongamos que en el óptimo, con solución  $(\bar{P}_{H1}, \bar{P}_{H2}, \underline{P}, \underline{P}, k_H^{T*}, k_L^{T*})$ , (IC-H2) es inactiva.

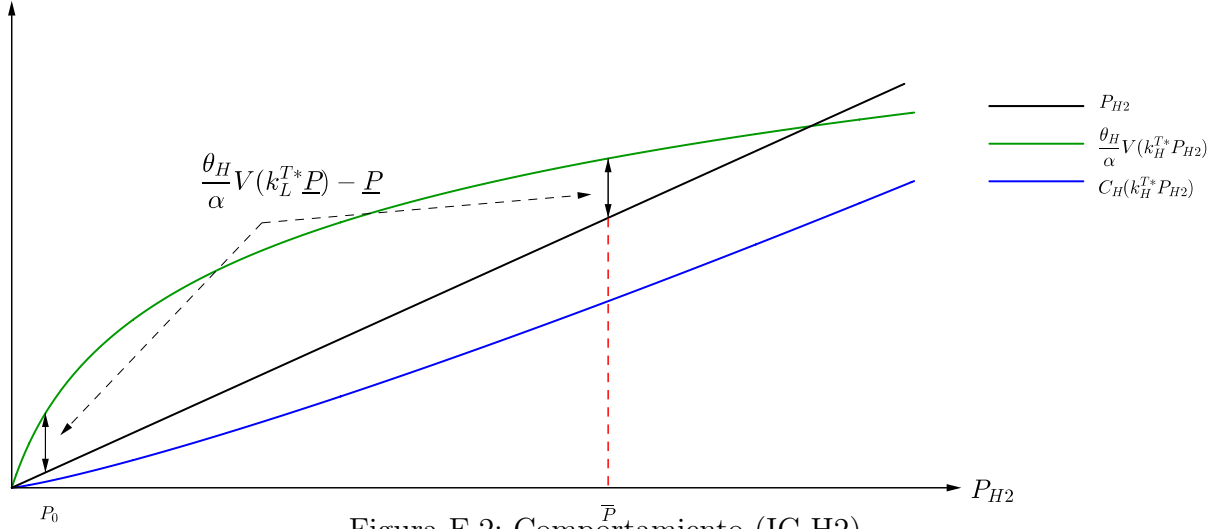


Figura E.2: Comportamiento (IC-H2).

Como (IC-H2) es inactiva,  $\bar{P}_{H2} \in (P_0, \bar{P})$ . Es claro que podemos aumentar al menos marginalmente  $\bar{P}_{H2}$  manteniendo la factibilidad, con beneficio marginal

$$\left. \frac{\partial P_{H2}}{\partial P_{H2}} \right|_{P_{H2}=\bar{P}_{H2}} = 1$$

mientras que el costo adicional es

$$\left. \frac{\partial C_H(k_H^{T*} P_{H2})}{\partial P_{H2}} \right|_{P_{H2}=\bar{P}_{H2}} = k_H^{T*} C'_H(k_H^{T*} \bar{P}_{H2})$$

Por tanto, una condición necesaria para que la firma realice este aumento marginal en el precio a los viajeros de negocio en el mercado 2 es

$$\frac{1}{k_H^{T*}} \geq C'_H(k_H^{T*} \bar{P}_{H2})$$

Como  $\bar{P}_{H2} \in (P_0, \bar{P})$  y  $C_H$  es convexa, una condición suficiente para asegurar lo anterior es

$$\frac{1}{k_H^{T*}} \geq C'_H(k_H^{T*} \bar{P})$$

Luego, bajo esta condición la firma aumentará  $\bar{P}_{H2}$ , por lo que  $(\bar{P}_{H1}, \bar{P}_{H2}, \underline{P}, \underline{P}, k_H^{T*}, k_L^{T*})$  no alcanza el óptimo y por tanto (IC-H2) es activa en el óptimo.



Finalmente, notemos que al estar (IC-H1) y (IC-H2) activas en el óptimo, los precios óptimos  $P_{H1}^*$  y  $P_{H2}^*$  resuelven

$$\begin{aligned} P_{H1}^* &= \frac{\theta_H}{\alpha} (V(k_H^{T*} P_{H1}^*) - V(k_L^{T*} P_{L1}^*)) + P_{L1}^* \\ P_{H2}^* &= \frac{\theta_H}{\alpha} (V(k_H^{T*} P_{H2}^*) - V(k_L^{T*} P_{L2}^*)) + P_{L2}^* \end{aligned}$$

dado que  $P_{L1}^* = P_{L2}^* = \underline{P}$ , existen dos soluciones a esta ecuación:  $P_0$  y  $\bar{P}$ , pero dada la condición anterior es claro que  $P_{H1}^* = P_0$  o  $P_{H2}^* = P_0$  no es óptimo, pues podemos mover dichos precios hasta  $\bar{P}$  manteniendo factibilidad y aumentando el profit. Por tanto,  $P_{H1}^* = P_{H2}^* = \bar{P}$ .  $\square$

**Proposición E.8** Sean

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{(k_H^{T*} \bar{P})^2} \frac{\alpha}{\theta_H} \left( V(k_L^{T*} \underline{P}) \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) - U_0 \right) > 0 \\ m_2 &= \frac{1}{(k_H^{T*} \bar{P} - k_L^{T*} \underline{P})^2} \frac{\alpha}{\theta_H} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} V'(k_H^{T*} \bar{P}) \cdot k_L^{T*} \underline{P} - \theta_L V(k_L^{T*} \underline{P}) - U_0 \right) \end{aligned}$$

con  $\underline{P}, \bar{P}, k_H^{T*}, k_L^{T*}$  definidos en las Proposiciones 4.3 y 4.4. Si  $C'_L(k_L^{T*} \underline{P}) \leq C'_H(k_H^{T*} \bar{P})$ , una condición suficiente para que asegurar el cumplimiento de las condiciones (4.19) y (4.20) es que  $m_2 \leq 0$ . Si  $m_2 > 0$ , definiendo  $m = \min\{m_1, m_2\}$ , una condición suficiente es que  $\tilde{V} := V|_{[0, k_H^{T*} \bar{P}]}$  sea fuertemente cóncava de parámetro  $m$ . Además, una caracterización equivalente es que

$$|V''(x)| \geq 2m \quad \forall x, y \in [0, k_H^{T*} \bar{P}] \quad (\text{E.11})$$

DEMOSTRACIÓN. Caso  $m_2 \leq 0$ : Dado que  $V$  es cóncava, se cumple que

$$V(x) \leq V(y) + V'(y)(x - y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+$$

En lo anterior, considerando  $x = k_L^{T*} \underline{P}$ ,  $y = k_H^{T*} \bar{P}$  se obtiene tras reordenar

$$\begin{aligned} V'(k_H^{T*} \bar{P}) \cdot k_H^{T*} \bar{P} &\leq V(k_H^{T*} \bar{P}) - V(k_L^{T*} \underline{P}) + V'(k_H^{T*} \bar{P}) \cdot k_L^{T*} \underline{P} \\ &= V(k_H^{T*} \bar{P}) - \left( 1 - \alpha \frac{\theta_L}{\theta_H} \right) V(k_L^{T*} \underline{P}) + U_0 \frac{\alpha}{\theta_H} \\ &\quad + \underbrace{\frac{\alpha}{\theta_H} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} V'(k_H^{T*} \bar{P}) \cdot k_L^{T*} \underline{P} - \theta_L V(k_L^{T*} \underline{P}) - U_0 \right)}_{=(k_H^{T*} \bar{P} - k_L^{T*} \underline{P})^2 \cdot m_2 \leq 0} \\ &\leq V(k_H^{T*} \bar{P}) - \left( 1 - \alpha \frac{\theta_L}{\theta_H} \right) V(k_L^{T*} \underline{P}) + U_0 \frac{\alpha}{\theta_H} \end{aligned}$$

Luego, se tiene que

$$C'_H(k_H^{T*} \bar{P}) = \frac{\theta_H}{\alpha} V'(k_H^{T*} \bar{P}) \leq \frac{\theta_H (V(k_H^{T*} \bar{P}) - V(k_L^{T*} \underline{P})) + \theta_L V(k_L^{T*} \underline{P}) + U_0}{k_H^{T*} \bar{P}} = \frac{1}{k_H^{T*}}$$

que es la condición (4.19). Si además suponemos  $C'_L(k_L^{T*} \underline{P}) \leq C'_H(k_H^{T*} \overline{P})$ , dado que

$$\frac{1}{k_H^{T*}} \leq \frac{1}{k_L^{T*}}$$

es directo que se tiene la condición (4.20).

Caso  $m_2 > 0$ :  $\tilde{V} := V|_{[0, k_H^{T*} \overline{P}]}$  es fuertemente cóncava de parámetro  $m$  si

$$V(x) \leq V(y) + V'(y)(x - y) - m||x - y||^2 \quad \forall x, y \in [0, k_H^{T*} \overline{P}]$$

donde la norma usada en  $\mathbb{R}$  corresponde al valor absoluto. Si  $m = m_1$ , tomando  $x = 0$ ,  $y = k_H^{T*} \overline{P}$  se obtiene reordenando que

$$\begin{aligned} V'(k_H^{T*} \overline{P}) \cdot k_H^{T*} \overline{P} &\leq V(k_H^{T*} \overline{P}) - \frac{1}{(k_H^{T*} \overline{P})^2} \frac{\alpha}{\theta_H} \left( V(k_L^{T*} \underline{P}) \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) - U_0 \right) (k_H^{T*} \overline{P})^2 \\ &= V(k_H^{T*} \overline{P}) - \left( 1 - \alpha \frac{\theta_L}{\theta_H} \right) V(k_L^{T*} \underline{P}) + U_0 \frac{\alpha}{\theta_H} \end{aligned}$$

De aquí, la conclusión es idéntica al caso donde  $m_2 \leq 0$ .

Por otro lado, si  $m = m_2$ , tomando  $x = k_L^{T*} \underline{P}$ ,  $y = k_H^{T*} \overline{P}$  se obtiene reordenando que

$$\begin{aligned} V'(k_H^{T*} \overline{P}) \cdot k_H^{T*} \overline{P} &\leq V(k_H^{T*} \overline{P}) - V(k_L^{T*} \underline{P}) + V'(k_H^{T*} \overline{P}) \cdot k_L^{T*} \underline{P} \\ &\quad - \frac{1}{(k_H^{T*} \overline{P} - k_L^{T*} \underline{P})^2} \frac{\alpha}{\theta_H} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} V'(k_H^{T*} \overline{P}) \cdot k_L^{T*} \underline{P} - \theta_L V(k_L^{T*} \underline{P}) - U_0 \right) (k_H^{T*} \overline{P} - k_L^{T*} \underline{P})^2 \\ &= V(k_H^{T*} \overline{P}) - \left( 1 - \alpha \frac{\theta_L}{\theta_H} \right) V(k_L^{T*} \underline{P}) + U_0 \frac{\alpha}{\theta_H} \end{aligned}$$

y nuevamente la conclusión es idéntica al caso donde  $m_2 \leq 0$ .

La equivalencia de  $V$  fuertemente cóncava de parámetro  $m$  con la condición (E.11) es un hecho conocido, descrito por ejemplo por Roberts y Varberg (1974).  $\square$

**Proposición E.9** Para el caso con  $N$  mercados, si la solución del programa por tarifa activa todas las restricciones (IC-H) y (PC-H), la condición bajo la cual  $\left. \frac{\partial \pi_{\text{Distancia}}}{\partial D_1} \right|_{D_i=D_j \ \forall i \neq j} \geq 0$  (análogo a lo mostrado en la Subsección 4.3.3) es

$$\frac{N_{L1}}{N_{H1}} \geq \frac{\sum_{i \neq 1} N_{Li}}{\sum_{i \neq 1} N_{Hi}}$$

DEMOSTRACIÓN. En la Subsección 4.3.3 se mostró que, para dos mercados, escribiendo los profits de ambos programas como función de la distancia de los mercados (omitiendo el resto de variables) encontramos que

$$\pi_{\text{Tarifa}}(D_1, D_2)|_{D_1=D_2} = \pi_{\text{Distancia}}(D_1, D_2)|_{D_1=D_2}$$

Lo recién mostrado es también cierto para el caso de  $N > 2$  mercados si es que la solución del problema por dólar es generalizable en este caso (i.e. todas las restricciones de compatibilidad de incentivos para la clase alta y de participación para la clase baja son activas), en tanto que la solución del programa por distancia cumple las mismas propiedades, según se comentó en la Subsección 4.3.1. Luego, supondremos que

$$\pi_{\text{Tarifa}}(\{D_i\}_{i=1}^N) \Big|_{D_i=D_j \ \forall i \neq j} = \pi_{\text{Distancia}}(\{D_i\}_{i=1}^N) \Big|_{D_i=D_j \ \forall i \neq j}$$

Luego, notemos que es claro que

$$\frac{\partial \pi_{\text{Tarifa}}}{\partial D_1} = 0$$

en tanto que el programa por tarifa pagada no incluye la distancia de vuelo en el problema de optimización. Calculemos  $\frac{\partial \pi_{\text{Distancia}}}{\partial D_1} \Big|_{D_i=D_j \ \forall i \neq j}$ : Sabemos que, dados los precios óptimos encontrados en la Subsección 4.3.1

$$\begin{aligned} \pi_{\text{Distancia}} &= \sum_{i=1}^N N_{Li} (U_0 + \theta_L V(k_L^{D^*} D_i) - C_L(k_L^{D^*} D_i) - c_{op}) \\ &\quad + N_{Hi} \left( U_0 + \theta_L V(k_L^{D^*} D_i) + \frac{\theta_H}{\alpha} (V(k_H^{D^*} D_i) - V(k_L^{D^*} D_i)) - C_H(k_H^{D^*} D_i) \right) \end{aligned}$$

Por lo que<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_{\text{Distancia}}}{\partial D_1} &= N_{L1} (\theta_L V'(k_L^{D^*} D_1) - C'_L(k_L^{D^*} D_1)) \left( k_L^{D^*} + \frac{\partial k_L^{D^*}}{\partial D_1} D_1 \right) \\ &\quad - N_{H1} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) V'(k_L^{D^*} D_1) \left( k_L^{D^*} + \frac{\partial k_L^{D^*}}{\partial D_1} D_1 \right) \\ &\quad + N_{H1} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} V'(k_H^{D^*} D_1) - C'_H(k_H^{D^*} D_1) \right) \left( k_H^{D^*} + \frac{\partial k_H^{D^*}}{\partial D_1} D_1 \right) \\ &\quad + \sum_{i=2}^N \left\{ N_{Li} (\theta_L V'(k_L^{D^*} D_i) - C'_L(k_L^{D^*} D_i)) \frac{\partial k_L^{D^*}}{\partial D_1} D_i \right. \\ &\quad \left. - N_{Hi} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) V'(k_L^{D^*} D_i) \frac{\partial k_L^{D^*}}{\partial D_1} D_i + N_{Hi} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} V'(k_H^{D^*} D_i) - C'_H(k_H^{D^*} D_i) \right) \frac{\partial k_H^{D^*}}{\partial D_1} D_i \right\} \end{aligned}$$

Reordenando lo anterior, y usando el hecho de que evaluamos en  $D_i = D_j = D_1 \ \forall i \neq j$ , podemos reescribir

$$\frac{\partial \pi_{\text{Distancia}}}{\partial D_1} \Big|_{D_i=D_j \ \forall i \neq j} = A + B + C + D$$

con

$$\begin{aligned} A &= N_{H1} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} V'(k_H^{D^*} D_1) - C'_H(k_H^{D^*} D_1) \right) k_H^{D^*} \\ B &= \left( \sum_{i=1}^N N_{Hi} \right) \left( \frac{\theta_H}{\alpha} V'(k_H^{D^*} D_1) - C'_H(k_H^{D^*} D_1) \right) \frac{\partial k_H^{D^*}}{\partial D_1} D_1 \\ C &= \left\{ V'(k_L^{D^*} D_1) \left( \sum_{i=1}^N N_{Li} \theta_L - N_{Hi} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) \right) - C'_L(k_L^{D^*} D_1) \left( \sum_{i=1}^N N_{Li} \right) \right\} \frac{\partial k_L^{D^*}}{\partial D_1} D_1 \\ D &= \left\{ V'(k_L^{D^*} D_1) (N_{L1} \theta_L - N_{H1} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right)) - N_{L1} C'_L(k_L^{D^*} D_1) \right\} k_L^{D^*} \end{aligned}$$

<sup>2</sup> Asumimos  $c_{op}$  constante, en tanto que no es relevante en las soluciones para el caso con demanda inelástica.

Posteriormente, usando que  $k_H^{D^*}$  está caracterizado por

$$\sum_{i=1}^N \frac{\theta_H}{\alpha} N_{Hi} D_i V'(k_H^{D^*} D_i) = \sum_{i=1}^N N_{Hi} D_i C'_H(k_H^{D^*} D_i)$$

y utilizando el hecho de que evaluamos en  $D_i = D_j = D_1 \forall i \neq j$  obtenemos

$$\frac{\theta_H}{\alpha} V'(k_H^{D^*} D_1) = C'_H(k_H^{D^*} D_1)$$

con lo que  $A = B = 0$ . Luego, usando que  $k_L^{D^*}$  está caracterizado por:

$$\sum_{i=1}^N N_{Li} D_i \theta_L V'(k_L^{D^*} D_i) \left( 1 - \frac{N_{Hi}}{N_{Li}} \frac{(\frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L)}{\theta_L} \right) = \sum_{i=1}^N N_{Li} D_i C'_L(k_L^{D^*} D_i)$$

y evaluando en  $D_i = D_j = D_1 \forall i \neq j$ , obtenemos que

$$V'(k_L^{D^*} D_1) \left( \sum_{i=1}^N N_{Li} \theta_L - N_{H1} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) \right) = C'_L(k_L^{D^*} D_1) \left( \sum_{i=1}^N N_{Li} \right)$$

de donde  $C = 0$ . Por tanto

$$\begin{aligned} & \text{sgn} \left( \frac{\partial \pi_{\text{Distancia}}}{\partial D_1} \Big|_{D_i=D_j \forall i \neq j} \right) = \text{sgn}(D) \\ & = \text{sgn} \left( V'(k_L^{D^*} D_1) (N_{L1} \theta_L - N_{H1} (\frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L)) - N_{L1} C'_L(k_L^{D^*} D_1) \right) \\ & = \text{sgn} \left( V'(k_L^{D^*} D_1) (N_{L1} \theta_L - N_{H1} (\frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L)) - \frac{N_{L1}}{\sum_{i=1}^N N_{Li}} \left( \sum_{i=1}^N N_{Li} \right) C'_L(k_L^{D^*} D_1) \right) \\ & = \text{sgn} \left( V'(k_L^{D^*} D_1) (N_{L1} \theta_L - N_{H1} (\frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L)) \right. \\ & \quad \left. - \frac{N_{L1}}{\sum_{i=1}^N N_{Li}} V'(k_L^{D^*} D_1) \left( \sum_{i=1}^N N_{Li} \theta_L - N_{H1} \left( \frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L \right) \right) \right) \\ & = \text{sgn} \left( V'(k_L^{D^*} D_1) (\frac{\theta_H}{\alpha} - \theta_L) \left( \sum_{i \neq 1} N_{Hi} N_{L1} - N_{Li} N_{H1} \right) \right) \\ & = \text{sgn} \left( \sum_{i \neq 1} N_{Hi} N_{L1} - N_{Li} N_{H1} \right) \end{aligned}$$

Por lo que

$$\frac{\partial \pi_{\text{Distancia}}}{\partial D_1} \Big|_{D_i=D_j \forall i \neq j} \begin{cases} \geq 0 & \text{si } \frac{N_{L1}}{N_{H1}} \geq \frac{\sum_{i \neq 1} N_{Li}}{\sum_{i \neq 1} N_{Hi}} \\ < 0 & \text{si } \frac{N_{L1}}{N_{H1}} < \frac{\sum_{i \neq 1} N_{Li}}{\sum_{i \neq 1} N_{Hi}} \end{cases}$$

□

# Apéndice F

## Códigos Simulación

### F.1. Un Mercado Inelástico

#### F.1.1. Programa Óptimo

---

```
#Declarar Parametros
param NH;
param NL;
param alpha;
param thetaH;
param thetaL;
param U0;
param D;

#Declarar Variables
var FL>=0;
var FH>=0;
var PL>=0;
var PH>=0;

#Problema
maximize Total_Profit: (NL* (PL-FL/20) + NH * (PH-FH/20));
subject to ICH: thetaH * log (0.025 * FH + 1) - alpha * PH >= thetaH *
    log (0.025 * FL + 1) - alpha * PL;
subject to ICL: thetaL * log (0.025 * FL + 1) - PL >= thetaL * log
    (0.025 * FH + 1) - PH;
subject to PCL: thetaL * log (0.025 * FL + 1) - PL + U0 >= 0;
```

---

#### F.1.2. Programa Por Tarifa

---

```
#Declarar Parametros
```

```

param NH;
param NL;
param alpha;
param thetaH;
param thetaL;
param U0;
param D;
param kH;
param kL;

#Declarar Variables
var PL>=0;
var PH>=0;

#Problema
maximize Total_Profit: (NL* (PL-(PL*kL)/20) + NH * (PH-(PH*kH)/20));
subject to ICH: thetaH * log (0.025 * (PH*kH) + 1) - alpha * PH >=
    thetaH * log (0.025 * (PL*kL) + 1) - alpha * PL;
subject to ICL: thetaL * log (0.025 * (PL*kL) + 1) - PL >= thetaL *
    log (0.025 * (PH*kH) + 1) - PH;
subject to PCL: thetaL * log (0.025 * (PL*kL) + 1) - PL + U0 >= 0;

```

---

### F.1.3. Programa Por Distancia

```

#Declarar Parametros
param NH;
param NL;
param alpha;
param thetaH;
param thetaL;
param U0;
param D;
param kH;
param kL;

#Declarar Variables
var PL>=0;
var PH>=0;

#Problema
maximize Total_Profit: (NL* (PL-(D*kL)/20) + NH * (PH-(D*kH)/20));
subject to ICH: thetaH * log (0.025 * (D*kH) + 1) - alpha * PH >=
    thetaH * log (0.025 * (D*kL) + 1) - alpha * PL;
subject to ICL: thetaL * log (0.025 * (D*kL) + 1) - PL >= thetaL * log
    (0.025 * (D*kH) + 1) - PH;
subject to PCL: thetaL * log (0.025 * (D*kL) + 1) - PL + U0 >= 0;

```

---

## F.2. Dos Mercados - Programa Óptimo

---

```
#Declarar Conjuntos
set Mercados;

#Declarar Parametros

param NH {Mercados};
param NL {Mercados};
param alpha;
param thetaH;
param thetaL;
param U0;
param D {Mercados};

#Declarar Variables

var FL {Mercados}>=0;
var FH {Mercados}>=0;
var PL {Mercados}>=0;
var PH {Mercados}>=0;

#Problema

maximize Total_Profit: sum {j in Mercados} (NL[j] * (PL[j]-FL[j]/20) +
    NH[j] * (PH[j]-FH[j]/20));
subject to ICH {a in Mercados}: thetaH * log (0.03 * FH[a] + 1) -
    alpha * PH[a] >= thetaH * log (0.03 * FL[a] + 1) - alpha * PL[a];
subject to ICL {b in Mercados}: thetaL * log (0.03 * FL[b] + 1) -
    PL[b] >= thetaL * log (0.03 * FH[b] + 1) - PH[b];
subject to PCL {c in Mercados}: thetaL * log (0.03 * FL[c] + 1) -
    PL[c] + U0 >= 0;
```

---

## F.3. Dos Mercados - Programa por Distancia

---

```
#Declarar Conjuntos
set Mercados;

#Declarar Parametros

param NH {Mercados};
param NL {Mercados};
param alpha;
param thetaH;
param thetaL;
param U0;
```

```

param D {Mercados};

#Declarar Variables

var kL >=0 ;
var kH >=0;
var PL {Mercados} >=0;
var PH {Mercados} >=0;

#Problema

maximize Total_Profit: sum {j in Mercados} (NL[j] * (PL[j]-kL*D[j]/20)
+ NH[j] * (PH[j]-kH*D[j]/20));
subject to ICH {a in Mercados}: thetaH * log (0.03 * kH*D[a] + 1) -
alpha * PH[a] >= thetaH * log (0.03 * kL*D[a] + 1) - alpha * PL[a];
subject to ICL {b in Mercados}: thetaL * log (0.03 * kL*D[b] + 1) -
PL[b] >= thetaL * log (0.03 * kH*D[b] + 1) - PH[b];
subject to PCL {c in Mercados}: thetaL * log (0.03 * kL*D[c] + 1) -
PL[c] + U0 >= 0;

```

---

## F.4. Dos Mercados - Programa por Dólar

---

```

#Declarar Conjuntos
set Mercados;

#Declarar Parametros

param NH {Mercados};
param NL {Mercados};
param alpha;
param thetaH;
param thetaL;
param U0;
param D {Mercados};

#Declarar Variables

var kL >=0 ;
var kH >=0;
var PL {Mercados} >=0;
var PH {Mercados} >=0;

#Problema

maximize Total_Profit: sum {j in Mercados} (NL[j] *
(PL[j]-(kL*PL[j])/20) + NH[j] * (PH[j]-(kH*PH[j])/20));

```



**subject to** ICH {a **in** Mercados}:  $\theta_H * \log(0.03 * k_H * PH[a] + 1) - \alpha * PH[a] \geq \theta_H * \log(0.03 * k_L * PL[a] + 1) - \alpha * PL[a];$   
**subject to** ICL {b **in** Mercados}:  $\theta_L * \log(0.03 * k_L * PL[b] + 1) - PL[b] \geq \theta_L * \log(0.03 * k_H * PH[b] + 1) - PH[b];$   
**subject to** PCL {c **in** Mercados}:  $\theta_L * \log(0.03 * k_L * PL[c] + 1) - PL[c] + U_0 \geq 0;$

---