UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

SOBRE LA GEOMETRÍA DE LOS CONJUNTOS COMPACTOS CONVEXOS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

GUILLAUME GUY MARCEL GRELIER

PROFESOR GUÍA:
ARIS DANIILIDIS

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
ABDERRAHIM HANTOUTE
DANIEL REMENIK ZISIS
JAIME SAN MARTÍN ARISTEGUI

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el CMM,
Center for Mathematical Modeling, (Fondos BASAL AFB170001), por el proyecto
FONDECYT Regular 1171854 y por CMM- Conicyt PIA AFB170001

SANTIAGO DE CHILE
2018

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,
MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: GUILLAUME GUY MARCEL GRELIER
FECHA: 2018
PROF. GUÍA: ARIS DANIILIDIS

SOBRE LA GEOMETRÍA DE LOS CONJUNTOS COMPACTOS CONVEXOS

El objetivo principal de este trabajo de tesis es el estudio de las propiedades de los espacios vectoriales topológicos localmente convexos Hausdorff a partir de la estructura extremal de sus conjuntos compactos convexos. Se estudian los puntos afínmente expuestos, noción introducida por Bachir en su tesis de *Habilitation a Diriger des Recherches* (defendida en la Universidad Paris 1 en 2017, ver [3]), y los espacios que tienen la propiedad de los puntos afinmente expuestos (PAE). Se muestra que un espacio de Banach E es un espacio de Gâteaux-diferenciabilidad (GDS) si y solo si su dual topológico E^* considerado con la topología w^* tiene la PAE. En particular, si cada subconjunto w^*-compacto convexo de E^* es la envoltura convexa de sus puntos afínmente expuestos, entonces también es la envoltura convexa de sus puntos w^*-expuestos.

Por otro lado, algunos resultados que provienen de la teoría de Choquet y un estudio aprofundizado de $\mathcal{A}(K)$ (conjunto de las funciones afines continuas en un conjunto compacto convexo K) nos permiten caracterizar las funcionales de $\mathcal{C}(K)$ por sus valores en un subconjunto estricto de las funciones continuas afines por partes.

A mi madre.

Agradecimientos

Quisiera agradecer a mis profesores de matemáticas, que durante toda mi formación me enseñaron y mostraron lo interesante que es esta disciplina. A todos ellos mi reconocimiento. En particular, a mis profesores de clase preparatoria H.Astier y E.Agnès a quienes debo el rigor de pensamiento y de la redacción matemática.

Sr A.Mouze, gracias a quien pude seguir estudiando las matemáticas durante mis años en la escuela Centrale de Lille y gracias a quien pude obtener mi licencia de matemáticas en la Universidad de Lille. Aprovecho para dar las gracias al excelente profesor de dicha universidad D.Laurent por su maravilloso curso de algebra.

Sr D. Najjar por haberme apoyado durante todo mi programa de doble titulación en Chile.

Sr A. Daniilidis por haber sido mi profesor guía, por haberme dado la oportunidad de participar en diversos seminarios y gracias a quien nació este deseo de estudiar análisis funcional.

Sin olvidar a los profesores J. San Martín (Teoría de la medida), D. Remenik (Variable compleja), A. Hantoute (Análisis Convexo y Dualidad) por sus excelentes clases y por formar parte de mi comisión.

Mi gran amigo Pierre, por su apoyo en cualquier circunstancia y su disposición a siempre echarme una mano.

Guillaume y Jordan, por su apoyo en las situaciones más difíciles a pesar de la distancia.

Terminaré agradeciendo a las personas mas importantes, gracias a quienes pude llegar hasta aquí: mis padres. Gracias por su apoyo incondicional, por haberme permitido elegir mi camino y por habernos dado la posibilidad tanto a mi hermano como a mí de poder estudiar en las mejores condiciones.

Un agradecimiento especial a Tamara.

A todos y cada uno de ustedes gracias.

Tabla de Contenido

Introducción

En análisis funcional, el estudio de los conjuntos compactos convexos es fundamental. En efecto, los diferentes tipos de puntos extremos de tales conjuntos y sus propiedades están vinculados con propiedades importantes de los espacios vectoriales topológicos localmente convexos considerados. En el primer capítulo se introducen las nociones utilizadas a lo largo de esta memoria y se hace énfasis en las propiedades obtenidas a partir de los puntos extremos.

La gran diversidad de caracterizaciones y de aplicaciones de los espacios que tienen la propiedad de Radon-Nikodym (RNP) y su estrecho vínculo con los espacios teniendo la propiedad de Krein-Milman, justifican el papel central que tienen dichos espacios en análisis funcional y la atención que les fue prestada a principios del siglo veinte. Sin embargo, hubo que esperar hasta el año 1967 para que Rieffel estableciera una relación entre propiedades geométricas del espacio y la propiedad de Radón-Nikodým (RNP) en términos de dentabilidad. Una de las consecuencias de este progreso, es una caracterización de la RNP mediante los puntos fuertemente expuestos, subconjunto de los puntos extremos. En particular, la estructura extremal de los conjuntos compactos convexos permite obtener numerosas aplicaciones, principalmente en teoría de la medida (representaciones de medidas vectoriales, convergencia de martingales, véase [5]).

Los espacios de Asplund y de Gâteaux-diferenciabilidad (GDS), abundantemente estudiados por Phelps y Larman en los años 70 y 80, muestran la importancia de los puntos expuestos para obtener propiedades de diferenciabilidad. Más precisamente, mostraron que el conjunto de puntos de diferenciabilidad (Gâteaux o Fréchet) de una función convexa continua definida en un conjunto abierto convexo D de un espacio de Banach es denso en D si los conjuntos compactos convexos del espacio dual son la envoltura convexa cerrada de un subconjunto de sus puntos extremos (puntos débil-estrella expuestos o puntos débil-estrella fuertemente expuestos).

En el segundo capítulo, se presentan resultados de la teoría de Choquet, los cuales permitirán introducir propiedades importantes de $\mathcal{A}(K)$ (conjunto de las funciones afines continuas definidas en un conjunto K compacto convexo). También se presenta una demostración elegante del teorema de Krein-Smulian. Se concluye este capítulo mostrando que las funcionales de $\mathcal{C}([0,1])$ (conjunto de las funciones continuas definidas en $[0,1]$) están caracterizadas por un subconjunto estricto de las funciones continuas afines por partes.

En su tesis de habilitación en 2017 ([3]), Mohammed Bachir introduce una clase de puntos extremos que es más amplia que los puntos expuestos. En efecto, en lugar de considerar puntos expuestos por aplicaciones lineales continuas, Bachir consideró los puntos extremos de un conjunto compacto convexo que están expuestos por una aplicación afín continua, dichos puntos se llamaron puntos afínmente expuestos. En el último capítulo, se estudiarán los espacios vectoriales topológicos localmente convexos que poseen la propiedad de los puntos afínmente expuestos (PAE), es decir en los que cada conjunto compacto convexo es la envoltura compacta convexa de sus puntos afínmente expuestos. Se establecen algunos criterios de PAE y se obtiene una nueva caracterización de los espacios GDS en términos de PAE.

Notaciones preliminarias

En todo este documento, X corresponde a un espacio vectorial topológico localmente convexo (evtlc) Hausdorff y X^* denota a su espacio dual topológico. Si X es un espacio de Banach, lo denotamos por E y notamos como B_E a su bola unitaria. Un subconjunto K de X designa un conjunto compacto. Para tal conjunto K, definimos $\mathcal{A}(K)$ el conjunto de las funciones afines (es decir las funciones que son simultáneamente convexas y concavas) continuas definidas en K a valores reales. El espacio $\mathcal{A}(K)$ está dotado de la topología inducida por $\mathcal{C}(K)$, el conjunto de las funciones continuas definidas en K a valores reales.

Para un evtlc X, notaremos w a la topología débil inducida por X^*. La topología débil-estrella en X^* está denotada por w^*.

Si $A \subset X$, denotamos por $\mathcal{M}(A)$ al conjunto de las medidas de Radon con signo definidas en A y por $\mathcal{M}_1(A)$ al subconjunto de $\mathcal{M}(A)$ formado por las medidas de probabilidad. Si $x \in A$, δ_x denota la medida de Dirac en x.

Para un conjunto A, $\operatorname{int}(A)$ denota su interior, $\overline{A}$ su cerradura y $\operatorname{co}(A)$ su envoltura convexa.

Capítulo 1

Conjuntos compactos convexos y puntos extremos

Este primer capitulo introduce las nociones que serán utilizadas a lo largo de este documento. En esta sección, se omite la mayor parte de las demostraciones. Para más información, el lector puede referirse a los libros clásicos [17] y [5].

1.1. Puntos extremos y teorema de Krein-Milman

Definición 1.1 *Sea X un evtlc y sea $A \subset X$ un conjunto convexo. Un punto $x_0 \in A$ se dice extremo si para todo $x, y \in A$ y para todo $t \in (0,1)$ tal que $x_0 = tx + (1-t)y$ se tiene que $x_0 = x = y$. Denotaremos por* $\mathrm{Ext}(A)$ *al conjunto de los puntos extremos de A.*

El teorema de Krein-Milman es un resultado de gran importancia en el estudio de los puntos extremos. En particular afirma que $\mathrm{Ext}(K)$ no es vacío cuando K es un conjunto compacto convexo no vacío en un evtlc.

Teorema 1.2 (Krein-Milman) *Sea X un evtlc y sea $K \subset X$ un conjunto compacto convexo no vacío. Entonces K es la envoltura convexa cerrada de sus puntos extremos.*

Este teorema tiene una reciproca parcial debida a Milman:

Teorema 1.3 (Milman) *Sea X un evtlc y sea $K \subset X$ un conjunto compacto convexo no vacío. Sea $Z \subset X$ tal que $K = \overline{\mathrm{co}}(Z)$. Entonces* $\mathrm{Ext}(K) \subset \overline{Z}$.

Definición 1.4 *Un espacio de Banach tiene la propiedad de Krein-Milman (KMP) si cada conjunto convexo cerrado acotado es la envoltura convexa cerrada de sus puntos extremos.*

1.2. La propiedad de Radon-Nikodym (RNP)

En esta sección se introduce una subclase importante de los puntos extremos que está relacionada con la representación de medidas.

Definición 1.5 *Un espacio de Banach E tiene la propiedad de Radon-Nikodym (RNP) si para todo espacio de medida finita (Ω, Σ, μ) y para toda medida μ-continua $\nu : \Sigma \to E$ de variación acotada, existe $f : \Omega \to E$ Bochner-integrable tal que para todo $A \in \Sigma$ se tiene que $\nu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu$.*

Un estudio profundizado de los espacios de Banach teniendo la RNP permite caracterizarlos mediante la siguiente noción (ver [5]):

Definición 1.6 (i) *Sea X un evtlc y sea $A \subset X$ un conjunto convexo. Un punto $x_0 \in A$ se dice expuesto si existe $x^* \in X^*$ tal que $x^*(x_0) > x^*(y)$ para todo $y \in A \setminus \{x_0\}$. Decimos que x^* expone a x_0 en A y escribimos que $x_0 \in \operatorname{Exp}(A)$. Es fácil ver que todo punto expuesto es extremo.*

(ii) *Sea E un espacio de Banach y sea $A \subset E$ un conjunto convexo. Un punto $x_0 \in A$ se dice fuertemente expuesto si existe $x^* \in X^*$ que lo expone en A y si para toda sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $x^*(y_n) \to x^*(x_0)$ se tiene que $y_n \to x_0$.*

Teorema 1.7 *Un espacio de Banach E tiene la RNP si y solo si cada conjunto cerrado convexo acotado es la envoltura convexa cerrada de sus puntos fuertemente expuestos.*

Obviamente la RNP implica la KMP. La reciproca sigue siendo un problema abierto aunque se ha obtenido la equivalencia en algunos casos particulares (por ejemplo en el caso de un espacio dual).

1.3. Puntos expuestos y diferenciabilidad

En esta sección se muestra la importancia de los puntos extremos, más precisamente de los puntos expuestos, para establecer propiedades de diferenciabilidad.

1.3.1. Los espacios de Gâteaux diferenciabilidad (GDS)

Definición 1.8 *Un espacio de Banach E se dice de Gâteaux diferenciabilidad (GDS) si cada función convexa continua definida en un conjunto abierto convexo $D \subset E$ es Gâteaux-diferenciable en un subconjunto denso de D.*

Definición 1.9 *Sea X un evtlc y sea $A \subset X^*$ un conjunto convexo. Un punto $x_0^* \in A$ se dice w^*-expuesto si existe $x \in X$ tal que $x_0^*(x) > x^*(x)$ para todo $x^* \in A \setminus \{x_0^*\}$, es decir si*

x_0^* está expuesto por un elemento del predual. En este caso, decimos que x expone a x_0^* en A y lo denotamos por $x_0 \in w^*\text{−Exp}(A)$. Es fácil ver que todo punto w^*-expuesto es extremo.

Definición 1.10 *Sea E un espacio de Banach. Llamamos funcional de Minkovski a toda funcional $p : E \to \mathbb{R}$ sublineal continua y positiva. En este caso, asociamos a p el conjunto w^*-compacto convexo*

$$C(p) = \{x^* \in E^* \mid \langle x^*, x\rangle \leqslant p(x)\ \forall x \in E\}.$$

Definición 1.11 *Sea E un espacio de Banach y sea $C \subset E$ un conjunto convexo. Sea $x_0 \in C$. Definimos el subdiferencial de una función convexa f en x_0 por*

$$\partial f(x_0) = \{x^* \in E^* \mid \forall y \in C\ x^*(y - x_0) \leqslant f(y) - f(x_0)\}.$$

Notar que $\partial f(x_0)$ es un conjunto convexo w^*-cerrado y que f es Gâteaux-diferenciable en x_0 si y solo si $\partial f(x_0)$ es un singleton. Usando el teorema clásico de Hahn-Banach se puede mostrar que si f es continua en x_0 entonces $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.

Definición 1.12 *Sea E un espacio de Banach. Sean $A \subset E$ y $B \subset E^*$ dos conjuntos acotados. Sean $\alpha > 0$, $x_0 \in A$, $x_0^* \in B$.*

(i) *Una slice de A se define por $S(x_0^*, A, \alpha) = \{x \in A \mid x^*(x) > \sigma_A(x_0^*) - \alpha\}$ donde $\sigma_A(x^*) = \sup\limits_{x\in A} x^*(x)$ para $x^* \in X^*$.*

(ii) *Una w^*-slice de B se define por $S(x_0, B, \alpha) = \{x^* \in B \mid x^*(x) > \sigma_B(x_0) - \alpha\}$ donde $\sigma_B(x) = \sup\limits_{x^*\in B} x^*(x)$ para $x \in X$.*

Lema 1.13 *Sea E un espacio de Banach y sea p una funcional de Minkovski definida en E. Sea $x \in E$ y sea $x^* \in E^*$. Entonces $x^* \in \partial p(x)$ si y solo si $x^* \in C(p)$ y $x^*(x) = p(x)$. Además, se tiene que $p = \sigma_{C(p)}$.*

Demostración. Sea $x^* \in \partial p(x)$, entonces $\forall y \in E\ x^*(y - x) \leqslant p(y) - p(x)$. Luego para todo $t > 0$, se tiene que $x^*(y - \frac{1}{t}x) \leqslant p(y) - \frac{1}{t}p(x)$. Haciendo tender t al infinito, obtenemos que $x^* \in C(p)$. Además, tomando $y = 0$, se tiene que $x^*(x) \geqslant p(x)$ de donde se deduce la igualdad. La reciproca es obvia. Veamos que $p = \sigma_{C(p)}$. En efecto, dado que p es convexa y continua, existe $x^* \in \partial p(x)$. Entonces $x^* \in C(p)$ y $x^*(x) = p(x) \leqslant \sigma_{C(p)}(x)$. La otra desigualdad es obvia. □

Proposición 1.14 *Sea E un espacio de Banach y sea p una funcional de Minkovski definida en E. Entonces $x^* \in C(p)$ es w^*-expuesto por $x \in E$ si y solo si p es Gâteaux-diferenciable en x y $\mathrm{d}p(x) = x^*$.*

Demostración. Sea $x^* \in C(p)$ es w^*-expuesto por $x \in E$. Sea $y^* \in \partial p(x)$. Entonces, por el lema anterior, $y^*(x) = p(x) = \sup\limits_{z^*\in C(p)} z^*(x)$ y entonces $y^* = x^*$. Luego $\partial p(x) = x^*$, entonces p es Gâteaux-diferenciable en x y $\mathrm{d}p(x) = x^*$. Ahora, supongamos que p es Gâteaux-diferenciable en x y $\mathrm{d}p(x) = x^*$. Dado que $x^* \in \partial p(x)$, se tiene por el lema anterior que

$x^* \in C(p)$ y x alcanza su minimo en $C(p)$ en x^*. Sea $y^* \in C(p)$ tal que $\sigma_{C(p)}(x) = y^*(x)$. De nuevo por el lema anterior, $y^* \in \partial p(x)$ y entonces $y^* = x^*$. Por lo tanto x^* es w^*-expuesto por $x \in E$. $\square$

Definición 1.15 *Un espacio de Banach E se dice MDS si cada funcional de Minkovski es Gâteaux-diferenciable en un conjunto denso.*

Proposición 1.16 *Sea E un espacio de Banach. Si E es un GDS entonces $E \times \mathbb{R}$ también lo es.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [17, Prop. 6.5]. $\square$

Teorema 1.17 *Sea E un espacio de Banach. Entonces E es un GDS si y solo si E es un MDS.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [17, Prop. 6.6]. $\square$

Antes de llegar a la caracterización dual de los espacios GDS necesitamos el siguiente resultado preliminar:

Lema 1.18 *Sea E un espacio de Banach. Sean $x, y \in E$ tal que $||x|| = ||y|| = 1$ y sea $\varepsilon > 0$. Supongamos que para todo $x^* \in E^*$ tal que $x^*(x) = 0$ y $||x^*|| \leqslant \frac{2}{\varepsilon}$ se tiene que $|x^*(y)| \leqslant 1$. Entonces $||x - y|| \leqslant \varepsilon$ o $||x + y|| \leqslant \varepsilon$.*

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis, $y|_{\mathrm{Ker}(x)}$ tiene norma (bidual) inferior o igual a $\frac{\varepsilon}{2}$. Por el teorema de Hahn-Banach y dado que $\begin{cases} E^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x^* \longmapsto |x^*(y)| \end{cases}$ define una seminorma, la extensión $z^{**} \in E^{**}$ de $y|_{\mathrm{Ker}(x)}$ a E^* verifica que $||z^{**}|| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ y para todo $x^* \in E^*$ se tiene que $|z^{**}(x^*)| \leqslant |x^*(y)|$. Por lo tanto z^{**} es w^*-continua y entonces existe $z \in E$ tal que $z^{**} = z$ (pues $(E^*, w^*)^* = E$). En $\mathrm{Ker}(x)$ se tiene que $y - z = 0$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $y - z = \alpha x$. Notemos que

$$|1 - |\alpha|| = |||y|| - ||y - z||| \leqslant ||z|| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $\alpha \geqslant 0$, se tiene que

$$||x - y|| = ||(1 - \alpha)x - z|| \leqslant |1 - \alpha| + ||z|| \leqslant \varepsilon.$$

Por otro lado, si $\alpha < 0$, se tiene que

$$||x + y|| = ||(1 + \alpha)x - z|| \leqslant |1 + \alpha| + ||z|| \leqslant \varepsilon.$$

$\square$

Los espacios GDS se caracterizan a partir de los puntos w^*-expuestos. Se presenta la demostración de Phelps ([17, Cap. 6]) pues será útil en el capitulo 3.

Teorema 1.19 *Sea E un espacio de Banach. LSSE:*

(i) *E es GDS*

(ii) *Para todo $K \subset E^*$ w^*-compacto convexo $K = \overline{\mathrm{co}}(w^*{-}\mathrm{Exp}(K))$*

Demostración. Veamos que (i) implica (ii). Supongamos que E es un GDS. Sea K un conjunto w^*-compacto convexo no vacío de E^*. Sea $p = \sigma_K$. Es fácil ver que $K = C(p)$. En efecto, $K \subset C(p)$ se tiene por definición. Sea ahora $z^* \in C(p) \setminus K$. Por el teorema de Hahn-Banach, existe $x \in (E^*, w^*)^* = E$ y $a > 0$ tal que $\sup\limits_{x^* \in K} x^*(x) < a < z^*(x)$ y entonces $p(x) < z^*(x)$, lo que contradice que $z^* \in C(p)$. Notemos D a la envoltura convexa w^*-cerrada de los puntos w^*-expuestos de K. Obviamente, $D \subset K$. Supongamos que existe $y^* \in K \setminus D$. Por el teorema de Hahn-Banach, existe $x_0 \in E$ tal que $\sigma_D(x_0) < \sigma_K(x_0)$. Como K es acotado, σ_K y σ_D son continuas. Luego $\Theta = \{x \in E \mid \sigma_D(x) < \sigma_K(x)\}$ es un conjunto abierto no vacío. E es un GDS entonces existe un punto de Gâteaux-diferenciabilidad $x_1 \in \Theta$ de la funcional de Minkovski p. Por la proposición 1.14, x_1 w^*-expone a $x^* = \mathrm{d}p(x_1) \in C(p) = K$ y $x^*(x_1) = p(x_1) = \sigma_K(x_1)$. Además, $x^* \in D$ (pues x^* es un punto w^*-expuesto de K) entonces $x^*(x_1) \leqslant \sigma_D(x_1) < \sigma_K(x_1)$, lo cual es una contradicción.

Demostremos que (ii) implica (i). Por el teorema 1.17, será suficiente establecer que E es un MDS. Sea p una funcional de Minkovski. Por el lema 1.13, se tiene que $p = \sigma_{C(p)}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que para todo $x \in E$ se tiene que $\sigma_{C(p)}(x) \leqslant ||x||$. Claramente $\sigma_{C(p)}$ es Gâteaux-diferenciable en los puntos del interior del conjunto convexo cerrado donde $\sigma_{C(p)}$ se anula. Así que consideremos x_0 tal que $\sigma_{C(p)}(x_0) > 0$ y sea $x_0^* \in C(p)$ tal que $x_0^*(x_0) > 0$. Como $\sigma_{C(p)}$ es positivamente homogénea, podemos suponer que $\sigma_{C(p)}(x_0) = 1$. Sea $0 < \varepsilon < 1$ y busquemos $y \in E$ tal que $||x_0 - y|| < \varepsilon$ y tal que $\sigma_{C(p)}$ es Gâteaux-diferenciable en y, lo cual equivale a y expone a $C(p)$ por la proposición 1.14. Sea $C = \mathrm{co}(C(p) \cup N)$ donde $N = \left\{x^* \in E^* \mid x^*(x_0) = 0,\ ||x^*|| < \frac{2}{\varepsilon}\right\}$.

Por hipótesis, C es la envoltura convexa cerrada de sus puntos w^*-expuestos. Luego cada w^*-slice de C contiene un punto w^*-expuesto. Entonces, sea y^* un punto w^*-expuesto de C en $S(x_0, C, \alpha)$ con $\alpha = \sigma_{C(p)}(x_0) - \varepsilon$. Sea $y \in E$ de norma 1 que expone a y^* en C. Veamos que y expone a y^* en $C(p)$. Como la envoltura convexa no puede crear nuevos puntos extremos, se tiene que $y^* \in C(p)$ o $y^* \in N$. Supongamos que $y^* \in N$. Por definición de N, se tiene que $\sigma_C(x_0) = \sigma_{C(p)}(x_0)$ y, por definición de la slice, se tiene que

$$0 = y^*(x_0) > \sigma_C(x_0) - \alpha = \varepsilon.$$

Lo cual constituye una contradicción. Entonces y expone a y^* en $C(p)$. Además, como $0 \in\ C(p)$, se tiene que $y^*(y) > 0$.

Para todo $z \in E$ se tiene que $y^*(z) \leqslant \sigma_{C(p)}(z) \leqslant ||z||$, entonces $||y^*|| \leqslant 1$ y luego $y^*(y) \leqslant 1$. Entonces, para todo $x^* \in N$, se tiene que $x^*(y) \leqslant \sigma_C(y) = y^*(y) \leqslant 1$. Luego, por simetría de N se deduce que para todo $x^* \in N$ se tiene que $|x^*(y)| \leqslant 1$. Aplicando el lema 1.18, obtenemos que $||x_0 - y|| \leqslant \varepsilon$ o $||x_0 + y|| \leqslant \varepsilon$. Lo último es imposible pues $||y^*|| \leqslant 1$ y entonces $||x_0 + y|| \geqslant y^*(x_0 + y) > y^*(x_0) > \varepsilon$ dado que $y^*(y) > 0$. $\square$

1.3.2. Los espacios Asplund débiles

Definición 1.20 *Un espacio de Banach E se dice Asplund débil si cada función convexa continua definida en un conjunto abierto convexo $D \subset E$ es Gâteaux-diferenciable en un subconjunto G_δ denso de D.*

Definición 1.21 *Sea E un espacio de Banach.*

(i) *$G \subset E \times E^*$ se dice monótono si para todo $(x, x^*), (y, y^*) \in G$ se tiene que :*

$$(x^* - y^*)(x - y) \geqslant 0.$$

(ii) *Un operador $T : E \to 2^{E^*}$ se dice monótono si su grafo $G(T) = \{(x, x^*) \mid x^* \in T(x)\}$ es monótono.*

(iii) *Un conjunto monótono $G \subset E \times E^*$ se dice maximal si es un elemento maximal en la familia de los conjuntos monótonos de $E \times E^*$ ordenados por la inclusión.*

(iv) *Un operador monótono es maximal si su grafo es es un conjunto maximal monótono.*

Lema 1.22 *Sea f una función convexa continua en un espacio de Banach E. Entonces ∂f es un operador maximal monótono.*

Demostración. Ver [17, Cap. 2]. □

Definición 1.23 *Sea E un espacio de Banach. Para un operador $T : E \to 2^{E^*}$, notaremos $D(T) = \{x \in E \mid T(x) \neq \emptyset\}$.*

Lema 1.24 *Sea E un espacio de Banach. Supongamos que E admite una norma equivalente tal que su dual es estrictamente convexo. Sea $T : E \to 2^{E^*}$ un operador maximal monótono tal que $\operatorname{int}(D(T))$ no es vacío. Entonces existe un subconjunto G_δ denso G de $\operatorname{int}(D(T))$ tal que para todo $x \in G$ se tiene que $T(x)$ es un singleton.*

Demostración. Ver [17, Teo. 2.38]. □

Lema 1.25 *Sea D un conjunto abierto convexo no vacío de un espacio de Banach E y sea $x_0 \in D$. Sea $f : D \to E$ una función continua convexa. Entonces existen una vecindad abierta U de x_0 en D y una función $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}$ Lipschitz convexa tal que $\tilde{f}$ coincide con f en U.*

Demostración. Ver [17, Lema 2.31]. □

Teorema 1.26 *Sea E un espacio de Banach. Si E admite una norma equivalente tal que su dual es estrictamente convexo, entonces E es Asplund débil.*

Demostración. Sea $D \subset E$ un conjunto abierto convexo no vacío. Sea f una función convexa continua en D. Veamos que f es Gâteaux-diferenciable en un G_δ denso en D. Sea $x_0 \in D$ y sea U una vecindad abierta de x_0 suficientemente pequeña tal que existe $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}$ Lipschitz convexa que coincide con f en U. El operador $\partial\tilde{f}$ es maximal monótono y entonces existe un G_δ denso G de $\text{int}D(\partial\tilde{f}) = E$ (pues $\tilde{f}$ es convexa continua) donde $\partial\tilde{f}$ es *single-valued*. Luego $\tilde{f}$ es Gâteaux-diferenciable en G. Entonces existe algún punto de Gâteaux-diferenciabilidad de $\tilde{f}$ en U, y entonces de f. Luego f es Gâteaux-diferenciable en un conjunto denso A en D. Falta ver que A contiene un G_δ denso. Para todo $x \in D$, notemos U_x una vecindad de x tal que existe $\tilde{f}_x : E \to \mathbb{R}$ Lipschitz convexa que coincide con f en U_x. La función $\tilde{f}_x$ es Gâteaux-diferenciable en un G_δ denso $G_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_{x,n}$ en E. Para todo $n > 0$, definimos los conjuntos abiertos

$$H_n = \bigcup_{x \in D} G_{x,n} \cap U_x$$

y el conjunto G_δ $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$. Tenemos que

$$H = \bigcup_{x \in D} (\bigcap_{n=1}^{\infty} G_{x,n}) \cap U_x = \bigcup_{x \in D} G_x \cap U_x$$

y entonces H es un conjunto G_δ denso incluido en A. □

1.3.3. Los espacios Asplund

Definición 1.27 *Un espacio de Banach E se dice Asplund si cada función convexa continua definida en un conjunto abierto convexo $D \subset E$ es Fréchet-diferenciable en un subconjunto G_δ-denso de D.*

Los espacios de Asplund se caracterizan a partir de los puntos w^*-fuertemente expuestos:

Definición 1.28 *Sea E un espacio de Banach y sea $A \subset E^*$ un conjunto convexo. Un punto $x_0^* \in A$ se dice w^*-fuertemente expuesto si existe $x \in E$ que lo expone en A y si para toda sucesión $(y_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $y_n^*(x) \to x_0^*(x)$ se tiene que $y_n^* \to x_0^*$.*

Teorema 1.29 *Sea E un espacio de Banach. LSSE:*

(i) *E es Asplund*

(ii) *todo subconjunto acotado de E^* admite slices de diámetro arbitrariamente pequeño*

(iii) *cada conjunto w^*-compacto convexo de E^* es la envoltura convexa w^*-cerrada de sus puntos w^*-fuertemente expuestos.*

Demostración. Ver [17, Lema 2.32, Teo. 5.12]. □

Capítulo 2

La teoría de Choquet

La teoría de Choquet trata de estudiar las medidas definidas en un conjunto compacto convexo K cuyo soporte está incluido en un los puntos extremos de K. El resultado principal de esta teoría se puede ver como una generalización del teorema de Minkowki en donde se postula que en un espacio euclidiano cada conjunto convexo cerrado y acotado es la envoltura convexa cerrada de sus puntos extremos. Para llegar a este resultado, Choquet introdujo la noción de baricentro, la cual involucra las funciones afines continuas. Consecuentemente, se estudian primero las propiedades del conjunto $\mathcal{A}(K)$. A continuación, se presentarán algunos resultados clásicos de la teoría de Choquet, los cuales permitirán dar una demostración alternativa del teorema de Krein-Smulian y, en un segundo lugar, ayudar a caracterizar las funcionales de $\mathcal{C}([0,1])$.

Para un estudio más profundo de la teoría de Choquet es recomendable consultar [18].

2.1. El conjunto $\mathcal{A}(K)$

En esta sección, se demuestran propiedades importantes del conjunto $\mathcal{A}(K)$ que serán de gran utilidad en el estudio de los puntos afínmente expuestos y de los espacios que tienen la PAE.

2.1.1. Propriedades topológicas

Definición 2.1 *Sea X un evtlc y sea $K \subset X$ un conjunto convexo. Una función $f : K \to \mathbb{R}$ se dice afín si es convexa y concava. Denotaremos por $\mathcal{A}(K)$ al conjunto de funciones afines continuas definidas en K.*

En $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, consideremos el conjunto compacto convexo $K = [0,1]^{\mathbb{N}}$ y definimos:

$$f\colon \begin{cases} K \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} x_n \end{cases}.$$

Claramente f es una función afín (se comprueba fácilmente que es a la vez convexa y concava) pero no corresponde a la restricción de un elemento del dual de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ pues f no está definida en todo $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (ni se puede extender continuamente y afínmente a $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$). Por lo tanto, en el caso general, $\mathcal{A}(K)$ no coincide con $(X^*{+}\mathbb{R})_{|K}$ (conjunto de las restricciones del dual transladadas). Sin embargo, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.2 *Sea X un evtlc y sea $K \subset X$ un conjunto compacto convexo. Entonces $(X^* + \mathbb{R})_{|K}$ es denso en $\mathcal{A}(K)$.*

Demostración. Sea $h \in \mathcal{A}(K)$ y sea $\varepsilon > 0$. Definimos $J_0 = \{(x,t) \in K \times \mathbb{R} \mid t = h(x)\}$ y $J_\varepsilon = \{(x,t) \in K \times \mathbb{R} \mid t = h(x) + \varepsilon\}$. Estos dos conjuntos son compactos convexos disjuntos. Por el teorema de Hahn-Banach, existen $F \in (X \times \mathbb{R})^*$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\sup\limits_{J_0} F < \lambda < \inf\limits_{J_\varepsilon} F$. Además, F se escribe de la forma $F(x,r) = \phi(x) + br$ con $\phi \in X^*$ y $b \in \mathbb{R}$ para todo $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}$. Es fácil ver que $b \neq 0$. Definimos

$$\psi\colon \begin{cases} X \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{b}(\lambda - \phi(x)) \end{cases}.$$

Como para todo $x \in X$ se tiene que $\phi(x) + bh(x) < \lambda < \phi(x) + bh(x) + b\varepsilon$, deducimos que $||h - \psi|| < \varepsilon$. □

Además, en algunos casos particulares, se tiene que $\mathcal{A}(K)$ coincide con $(X^* + \mathbb{R})_{|K}$:

Proposición 2.3 *Sea E un espacio de Banach y $K \subset E$ un conjunto compacto de interior no vacío. Entonces $(E^* + \mathbb{R})_{|K} = \mathcal{A}(K)$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $0 \in \operatorname{int}(K)$. Sea $\delta > 0$ tal que $B(0,\delta) \subset K$. Sea $f \in \mathcal{A}(K)$. Por la propiedad anterior, existen $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \in (X^*)^{\mathbb{N}}$ y $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que $x_n^* + \lambda_n \to f$ uniformemente en K. Como $\lambda_n \to f(0)$, se deduce que $x_n^* \to f - f(0)$ uniformemente en K. Veamos que $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en E^*. Se tiene que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > n_0$ y para todo $x \in B_E$, se tiene que

$$|x_n^*(\delta x) - x_m^*(\delta x)| \leqslant |x_n^*(\delta x) - (f(\delta x) - f(0))| + |x_m^*(\delta x) - (f(\delta x) - f(0))| < \varepsilon$$

pues $\delta x \in B(0,\delta) \subset K$. Se deduce que para todo $n, m > n_0$ se tiene que $||x_n^* - x_m^*|| < \frac{\varepsilon}{\delta}$. Luego $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en E^* y converge a un $x^* \in E^*$. Se concluye que $f = x^* + f(0)$. □

Proposición 2.4 *Sea K un conjunto compacto convexo de un evtlc X. Entonces $\mathcal{A}(K)$ es separable si y solo si K es metrizable.*

Demostración. Si K es metrizable entonces $\mathcal{C}(K)$ es separable (ver [7, Lemma 3.102]) y luego $\mathcal{A}(K)$ también. Supongamos ahora que $\mathcal{A}(K)$ es separable. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto denso numerable de $B_{\mathcal{A}(K)}$. Sea

$$\Phi\colon \begin{cases} K \longrightarrow l^1(\mathbb{N}) \\ x \longmapsto (\frac{1}{2^n} f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$$

La función Φ es continua e inyectiva y entonces es un homeomorfismo de K sobre su imagen (pues K es compacto). Luego K es metrizable. □

Proposición 2.5 *Sea K un conjunto compacto convexo en X evtlc. El retículo generado por $\mathcal{A}(K)$ es denso en $\mathcal{C}(K)$.*

Demostración. Por el teorema de Stone-Weierstrass, basta mostrar que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y para todo $x, y \in K$, $x \neq y$, existe una función afín continua g tal que $g(x) = a$ y $g(y) = b$. Por el teorema de Hahn-Banach, existe $f^* \in X^*$ tal que $f^*(x) \neq f^*(y)$. Basta tomar $g = (cf^* + \mathrm{d})_{|K}$ donde c y d son soluciones del sistema : $\begin{cases} cf^*(x) + \mathrm{d} = a \\ cf^*(y) + \mathrm{d} = b \end{cases}$. □

2.1.2. Extensión de funciones afines

Consideremos dos conjuntos compactos convexos no vacíos K y L tal que $K \subset L$ y sea $f \in \mathcal{A}(K)$. En [25], Taylor muestra que no necesariamente existe $\tilde{f} \in \mathcal{A}(L)$ tal que $\tilde{f}_{|K} = f$. Además caracteriza los conjuntos compactos convexos L tal que cada función de $\mathcal{A}(K)$ admite una extensión afín continua a L. Este problema de extensión de funciones afines continuas complica mucho el estudio de los evtlc que tienen la PAE.

A continuación, se muestra que una función afín definida en un conjunto convexo A se puede extender afínmente al espacio afín generado por A.

Definición 2.6 *Sea A un subconjunto de un evtlc X. Definimos el espacio afín generado por A como*

$$\mathrm{Aff}(A) = \{ax - by \mid a, b \geqslant 0,\ a - b = 1,\ x, y \in A\}.$$

Proposición 2.7 *Sea K subconjunto convexo de un evtlc X y sea $f : K \to \mathbb{R}$ una función afín. Entonces existe una única extensión afín de f a $\mathrm{Aff}(K)$.*

Demostración. Basta definir $f(z) = af(x) - bf(y)$ con $z = ax - by$. Hay que comprobar que esta extensión no depende de la representación de z y que es afín. La unicidad es obvia porque cualquier otra extensión afín g debe comprobar $g(z) = ag(x) - bg(y)$ si $z = ax - by$. □

La extensión puede ser no continua incluso si f lo es. En efecto, supongamos que la extensión $\tilde{f}$ siempre es continua. Entonces $\tilde{f}$ es afín continua en un subespacio afín y por lo tanto es la suma de una funcional x^* y de una constante. Por el teorema de Hahn-Banach, x^* y entonces f se extienden a todo X. No obstante, en todo espacio de Banach de dimensión infinita, existe un conjunto compacto convexo K tal que $\mathcal{A}(K) \neq (X^* + \mathbb{R})_{|K}$ (ver [14, p.44]), lo cual contradice la hipótesis.

2.2. Baricentro de medidas y primeras propiedades

Definición 2.8 *Sea X un evtlc y sea $A \subset X$. Sea μ una medida definida en A. Decimos que x_0 es un baricentro de μ si para todo $f \in X^*$ se tiene que $f(x_0) = \int_A f \mathrm{d}\mu$. Cabe notar que si una medida tiene baricentro entonces este baricentro es único y lo notaremos $r(\mu)$.*

Proposición 2.9 *Sea X un evtlc y sea $K \subset X$ un conjunto compacto convexo no vacío. Sea μ una medida definida en K. Entonces*

$$x = r(\mu) \iff \forall f \in \mathcal{A}(K)\ f(x) = \int_A f \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Es directo del hecho que $(X^* + \mathbb{R})_{|K}$ es denso en $\mathcal{A}(K)$ y del teorema de convergencia dominada. □

Definición 2.10 *Una medida se dice molecular si es una combinación convexa de medidas de Dirac.*

Si $\mu = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \delta_{x_j}$ es una medida molecular, es fácil ver que el elemento $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_j$ es baricentro de μ.

Proposición 2.11 *Sea K un conjunto compacto de un evtlc X. Entonces las medidas moleculares son densas en $\mathcal{M}_1(K)$.*

Demostración. Veamos que $\mathcal{M}_1(K)$ es un conjunto compacto convexo. La convexidad es obvia. Recordamos que el conjunto $\mathcal{M}(K)$ se identifica con $(\mathcal{C}(K))^*$ y entonces lo podemos dotar de la topología w^*. La bola unitaria de $\mathcal{M}(K)$ es w^*-compacta y entonces, por ser subconjunto w^*-cerrado de la bola, se deduce que $\mathcal{M}_1(K)$ es w^*-compacto. Ahora mostremos que los puntos extremos de $\mathcal{M}_1(K)$ son las medidas de Dirac y se concluirá por el teorema de Krein-Milman. Sea $x \in K$ y veamos que δ_x es un punto extremo de $\mathcal{M}_1(K)$. Supongamos que existen $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(K)$ y $t \in (0,1)$ tal que $\delta_x = t\mu + (1-t)\nu$. Se tiene que

$$1 = t\mu(\{x\}) + (1-t)\nu(\{x\})$$

y entonces $\mu(\{x\}) = \nu(\{x\}) = 1$, lo cual implica que $\mu = \nu = \delta_x$. Ahora, supongamos que $\lambda \in \mathcal{M}_1(K)$ no es una medida de Dirac. Entonces existe un conjunto compacto $F \subset K$ tal que las medidas $\mu := \lambda_{|F}$ y $\nu := \lambda_{|K \setminus F}$ son no triviales y distintas de λ. Se tiene que

$$\lambda = \mu(F)\frac{\mu}{\mu(F)} + \nu(K \setminus F)\frac{\nu}{\nu(K \setminus F)}$$

y por lo tanto λ no es un punto extremo de $\mathcal{M}_1(K)$. □

Proposición 2.12 *Sea X un evtlc. Sea $K \subset X$ un conjunto compacto. Entonces*
$$\overline{\text{co}}(K) = \{r(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}_1(K),\ \mu \textit{ tiene baricentro}\}.$$

Demostración. Sea $\mu \in \mathcal{M}_1(K)$ tal que μ tiene baricentro $r(\mu)$. Supongamos que $r(\mu) \notin \overline{\text{co}}(K)$. Por el teorema de Hahn-Banach, existe $f \in X^*$ tal que $f(r(\mu)) < \inf\limits_{\overline{\text{co}}(K)} f \leqslant \inf\limits_K f$. Se deduce que
$$f(r(\mu)) = \int_K f \mathrm{d}\mu < \inf_K f \leqslant \int_K f \mathrm{d}\mu,$$
lo cual es una contradicción.

Ahora sea $x \in \overline{\text{co}}(K)$, entonces existe una red $(x_\lambda)_\lambda$ de $\text{co}(K)$ que converge a x. Cada x_λ se puede escribir de la forma $x_\lambda = \sum\limits_{j=1}^{n_\lambda} \alpha_j^\lambda x_j^\lambda$. Definimos entonces la medida $\mu_\lambda = \sum\limits_{j=1}^{n_\lambda} \alpha_j^\lambda \delta_{x_j^\lambda}$ con baricentro x_λ. Como $\mathcal{M}_1(K)$ es compacto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mu_\lambda \to \mu \in \mathcal{M}_1(K)$. Es fácil ver que x es baricentro de μ. □

Proposición 2.13 *Sea X un evtlc y sea $K \subset X$ un conjunto compacto convexo. Entonces toda medida de $\mathcal{M}_1(K)$ tiene un único baricentro en K.*

Demostración. Sea $\mu \in \mathcal{M}_1(K)$. Si μ es molecular entonces tiene un baricentro en $\overline{\text{co}}(K) = K$. Ahora supongamos que μ es una medida cualquiera de $\mathcal{M}_1(K)$. Las medidas moleculares son densas en $\mathcal{M}_1(K)$ entonces existe una red $(\mu_\lambda)_\lambda$ de medidas moleculares que converge a μ. Como K es compacto, la sucesión de los baricentros $(r(\mu_\lambda))_\lambda$ tiene una subred convergente a un elemento $x \in X$. Es fácil ver que x es baricentro de μ. □

Lema 2.14 *Sea X un evtlc y sea $K \subset X$ un conjunto compacto convexo. Entonces la aplicación $r : \mathcal{M}_1(K) \to X$ (que a una medida asocia su baricentro) es $w^* - w$ continua (donde w es la topología débil generada por la topología de X).*

Demostración. Es directo de la definición del baricentro. □

Teorema 2.15 *Sea X un evtlc y sea $K \subset X$ un conjunto compacto. Entonces $\overline{\text{co}}(K)$ es compacto si y solo si toda medida de $\mathcal{M}_1(K)$ tiene un baricentro en X.*

Demostración. La primera parte de la demostración es similar a la demostracion de la proposición 2.13.

Ahora, supongamos que toda medida de probabilidad de Radon en K tiene un baricentro en X. La aplicación $r : \mathcal{M}_1(K) \to X$ (que a una medida asocia su baricentro) es $w^* - w$ continua. Luego, $r(\mathcal{M}_1(K))$ es w-compacto y entonces por la propiedad 2.12 el conjunto $\overline{\text{co}}(K)$ es w-compacto. Sea $(y_\alpha)_\alpha$ una red de $\overline{\text{co}}(K)$. Existe una subred $(y_\beta)_\beta$ que converge débilmente a un $y \in \overline{\text{co}}(K)$. Además, K es compacto entonces $\overline{\text{co}}(K)$ es totalmente acotado. Luego, existe una subred $(y_\gamma)_\gamma$ de $(y_\beta)_\beta$ que es Cauchy. Como la topología de X tiene una base de 0 formada por conjuntos débil-cerrados (por ser T3 y localmente convexo, existe una base de 0 formada por conjuntos convexos cerrados y estos conjuntos son débil-cerrados por el teorema de Mazur), deducimos que y es límite de $(y_\gamma)_\gamma$, lo que concluye la demostración. □

2.3. El teorema de Krein-Smulian

Acá presentamos una demostración alternativa del teorema de Krein-Smulian. Una demostración clásica de este teorema se puede encontrar en [7].

Empezamos con un teorema de existencia de baricentro:

Teorema 2.16 *Sea E un espacio de Banach y sea $A \subset E$ un conjunto acotado no vacío. Sea $\mu \in \mathcal{M}_1(A)$. Entonces μ tiene un baricentro $r(\mu)$ en E.*

Demostración. Para todo $n \in \mathbb{N}^*$ definimos:

$$G_n = \left\{ y \in E \ : \ \left| f(y) - \int_A f \mathrm{d}\mu \right| \leqslant 2 \sup_{x \in B\left(0, \frac{1}{n}\right)} f(x) \ \forall f \in X^* \right\}.$$

Veamos que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ G_n es no vacío. Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $A \subset B\left(0, \frac{m}{n}\right)$. Además, μ es una medida de Radon entonces existe un conjunto compacto $K \subset A$ tal que $\mu(A \setminus K) \leqslant \frac{1}{m}$. Como K es compacto, existen $x_0, ..., x_p \in A$ tal que $K \subset \bigcup_{\mathrm{i}=0}^{p} B\left(x_{\mathrm{i}}, \frac{1}{n}\right)$. Luego, se tiene que

$$\mu\left(A \setminus \bigcup_{\mathrm{i}=0}^{p} B\left(x_{\mathrm{i}}, \frac{1}{n}\right)\right) \leqslant \mu(A \setminus K) + \mu\left(K \setminus \bigcup_{\mathrm{i}=0}^{p} B\left(x_{\mathrm{i}}, \frac{1}{n}\right)\right) \leqslant \frac{1}{m}.$$

Para todo $0 \leqslant \mathrm{i} \leqslant p$, definimos los conjuntos $F_{\mathrm{i}} = A \cap B\left(x_{\mathrm{i}}, \frac{1}{n}\right) \setminus \bigcup_{j=0}^{\mathrm{i}-1} B\left(x_j, \frac{1}{n}\right)$. También definimos $F = A \setminus \bigcup_{\mathrm{i}=0}^{p} B\left(x_{\mathrm{i}}, \frac{1}{n}\right)$ e $y = \sum_{\mathrm{i}=0}^{p} \mu(F_{\mathrm{i}}) x_{\mathrm{i}}$. Entonces para todo $f \in X^*$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left| f(y) - \int_A f \mathrm{d}\mu \right| &\leqslant \sum_{\mathrm{i}=0}^{p} \left| \mu(F_{\mathrm{i}}) f(x_{\mathrm{i}}) - \int_{F_{\mathrm{i}}} f \mathrm{d}\mu \right| + \int_F |f| \mathrm{d}\mu \\
&\leqslant \sum_{\mathrm{i}=0}^{p} \int_{F_{\mathrm{i}}} |f(x) - f(x_{\mathrm{i}})| \mathrm{d}\mu + m \sup_{x \in B\left(0, \frac{1}{n}\right)} f(x) \mu(F) \quad \text{pues } F \subset B\left(0, \frac{m}{n}\right) \\
&\leqslant \sum_{\mathrm{i}=0}^{p} \sup_{x \in B\left(0, \frac{1}{n}\right)} f(x) \mu(F_{\mathrm{i}}) + m \sup_{x \in B\left(0, \frac{1}{n}\right)} f(x) \mu(F) \quad \text{pues } F_{\mathrm{i}} \subset B\left(x_{\mathrm{i}}, \frac{1}{n}\right) \\
&\leqslant 2 \sup_{x \in B\left(0, \frac{1}{n}\right)} f(x) \quad \text{pues } \mu(F) \leqslant \frac{1}{m}.
\end{aligned}$$

Así, G_n no es vacío.

Para todo $n \in \mathbb{N}^*$ sea $y_n \in G_n$ y veamos que la sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ es Cauchy. Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Sean $p > q > 4n$. Entonces $y_p, y_q \in G_{4n}$. Veamos que $y_p - y_q \in \overline{B}\left(0, \frac{1}{n}\right)$. Si $y_p - y_q \notin \overline{B}\left(0, \frac{1}{n}\right)$

entonces, por el teorema de Hahn-Banach, existe $f_0 \in X^*$ tal que $f_0(y_p - y_q) > \sup_{x \in \overline{B}\left(0, \frac{1}{n_0}\right)} f_0(x)$.

Luego, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\sup_{x \in B\left(0, \frac{1}{4n}\right)} f_0(x) &= \frac{1}{4} \sup_{x \in \overline{B}\left(0, \frac{1}{n}\right)} f_0(x) \\
&= \frac{1}{4} |f_0(y_p) - f(y_q)| \\
&< \frac{1}{4} \left| f_0(y_p) - \int_A f_0 \mathrm{d}\mu \right| + \frac{1}{4} \left| f_0(y_q) - \int_A f_0 \mathrm{d}\mu \right| \\
&\leqslant \frac{1}{4} \left(2 \sup_{x \in \overline{B}\left(0, \frac{1}{4n}\right)} f_0(x) + 2 \sup_{x \in \overline{B}\left(0, \frac{1}{4n}\right)} f_0(x) \right) = \sup_{x \in B\left(0, \frac{1}{4n}\right)} f_0(x),
\end{aligned}
$$

lo cual es una contradicción. Se deduce que la sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ es de Cauchy.

Luego $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge a un $x_\mu \in E$. Queda por ver que x_μ es el baricentro de μ. Sea $f \in E^*$. Para todo $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $(y_n)_{n \geqslant n_0}$ es una sucesión del conjunto cerrado G_{n_0} y entonces $x_\mu \in G_{n_0}$. Se deduce que:

$$
\left| f(x_\mu) - \int_A f \mathrm{d}\mu \right| \leqslant 2 \sup_{y \in B\left(0, \frac{1}{n_0}\right)} f(y) \xrightarrow[n_0 \to +\infty]{} 0.
$$

Por lo tanto $f(x_\mu) = \int_A f \mathrm{d}\mu$, lo que concluye la demostración. □

Teorema 2.17 (Krein-Smulian) *Sea E espacio de Banach. Sea $K \subset E$ un conjunto w-compacto. Entonces $\overline{\text{co}}(K)$ es w-compacto.*

Demostración. Sea $(x_\lambda)_\lambda$ una red de $\overline{\text{co}}(K)$. Por la propiedad 2.12, existe $\mu_\lambda \in \mathcal{M}_1(K)$ tal que $x_\lambda = r(\mu_\lambda)$. Además, $\mathcal{M}_1(K)$ es compacto entonces existe $(\mu_{\lambda_\alpha})_\alpha$ subred de $(\mu_\lambda)_\lambda$ que converge a $\mu \in \mathcal{M}_1(K)$. El conjunto K es w-acotado y entonces es acotado en norma. Por el teorema anterior, μ tiene un baricentro $r(\mu)$ y por la propiedad 2.12 se tiene que $r(\mu) \in \overline{\text{co}}(K)$. Tenemos que para todo $f \in \mathcal{C}(K)$, $\mu_{\lambda_\alpha}(f) \to \mu(f)$. En particular, para todo $f \in X^*$:

$$
f(x_{\lambda_\alpha}) = \int_K f \mathrm{d}\mu_{\lambda_\alpha} \to \int_K f \mathrm{d}\mu = f(r(\mu)).
$$

Entonces $x_{\lambda_\alpha} \to r(\mu)$ débilmente y se concluye. □

Cabe notar que el teorema de Krein-Smulian también se puede demostrar combinando los teoremas 2.15 y 2.16.

2.4. Funcionales de $\mathcal{C}(K)$

En esta sección, se muestra que la restricción de una funcional de $\mathcal{C}(K)$ al dual es una evaluación. Utilizando este resultado, se caracteriza a las funcionales de $\mathcal{C}([0,1])$ por un subconjunto de las funciones afines por partes.

2.4.1. Caso general

Teorema 2.18 *Sea X un evtlc. Sea $K \subset X$ un conjunto compacto tal que $\overline{\mathrm{co}}(K)$ es compacto. Sea $L : \mathcal{C}(K) \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal continua. Entonces $L_{|X^*_{|K}}$ es una evaluación, i.e existe $x_L \in X$ tal que para todo $f \in X^*$, $L(f_{|K}) = f(x_L)$.*

Demostración. Por el teorema de Riesz, existen μ_1, μ_2 medidas de Radon finitas en K tal que para todo $f \in \mathcal{C}(K)$ se tiene que $L(f) = \int_K f \mathrm{d}\mu_1 - \int_K f \mathrm{d}\mu_2$. Por el teorema 2.15, existen $r(\mu_1)$ y $r(\mu_2)$ tal que para todo $f \in X^*$ se tiene que

$$f(r(\mu_1)) = \frac{1}{\mu_1(K)} \int_K f \mathrm{d}\mu_1 \quad \text{y} \quad f(r(\mu_2)) = \frac{1}{\mu_2(K)} \int_K f \mathrm{d}\mu_2$$

(suponiendo que μ_1 y μ_2 son no nulas). Luego, para todo $f \in X^*$, se concluye que

$$L(f_{|K}) = f(\mu_1(K)r(\mu_1) - \mu_2(K)r(\mu_2)).$$

□

Corolario 2.19 *Sea E un espacio de Banach y sea $K \subset E$ un conjunto compacto. Sea $L : \mathcal{C}(K) \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal continua. Entonces $L_{|E^*_{|K}}$ es una evaluación.*

Demostración. En un espacio de Banach, si K es compacto entonces $\overline{\mathrm{co}}(K)$ también lo es. □

2.4.2. Caso $K = [0,1]$

Lema 2.20 *Sean $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $a < b$ y $[0,1] \subset (a,b)$ y sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces existe una función convexa $\widetilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ que extiende a f y tal que $\widetilde{f}|_{[a,0]}$ y $\widetilde{f}|_{[1,b]}$ son afines. Además, se puede elegir $\widetilde{f}$ de tal forma que $(\widetilde{f})'_r(a) = f'_r(0)$ y $(\widetilde{f})'_l(b) = f'_l(1)$ donde f'_l y f'_r son respectivamente las derivadas por la derecha y por la izquierda.*

Demostración. Basta definir $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f'_{\mathrm{d}}(0)x + f(0), & \text{si } x \in [a,0) \\ f(x), & \text{si } x \in [0,1] \\ f'_g(1)x + f(1) - f'_g(1), & \text{si } x \in (1,b] \end{cases}$. □

Definición 2.21 *Sea K un conjunto compacto convexo en X evtlc. Denotaremos C_K al conjunto de las funciones convexas continuas en K.*

Proposición 2.22 *Sea K un conjunto compacto convexo en X evtlc. Entonces $C_K - C_K$ es denso en $\mathcal{C}(K)$.*

Demostración. Es directo del teorema de Stone-Weierstrass pues $C_K - C_K$ es un retículo que contiene $\mathcal{A}(K)$ (notar que para todo $f_1, g_1, f_2, g_2 \in C_K$ se tiene que $\max\{f_1 - g_1, f_2 - g_2\} = \max\{f_1 + g_2, f_2 + g_1\} - (g_1 + g_2)$). $\square$

Teorema 2.23 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$ y $[0,1] \subset (a,b)$ y sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces existen $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ y $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ continua por la derecha, positiva y creciente tal que para todo $x \in (a,b)$ se tiene $\widetilde{f}(x) = \displaystyle\int_a^b (x-u)_+ \,\mathrm{d}g + \gamma_1 x + \gamma_2$ donde $h_+ = \max\{h, 0\}$ designa la parte positiva de una función h.*

Demostración. Ver [21]. $\square$

Teorema 2.24 *Sea $L : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal continua. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$ y $[0,1] \subset (a,b)$. Entonces L está totalmente determinada por x_L (definido en 2.18), $L(1)$ y por sus valores sobre el conjunto:*

$$\left\{ f\colon \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^b (x-u)_+ \,\mathrm{d}g = g(x) - g(a) - \int_a^x u \,\mathrm{d}g \end{cases} \quad \middle| \quad \begin{array}{l} g : (a,b) \to \mathbb{R} \textit{ continua por la} \\ \textit{derecha, positiva y creciente} \end{array} \right\}.$$

Demostración. Sea $f \in C_{[0,1]} - C_{[0,1]}$. Entonces existen $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ y $g, h : (a,b) \to \mathbb{R}$ positivas crecientes y continuas por la derecha tal que para todo $x \in [0,1]$ se tiene que

$$f(x) = \int_a^b (x-u)_+ \,\mathrm{d}g - \int_a^b (x-u)_+ \,\mathrm{d}h + \gamma_1 x + \gamma_2.$$

Luego $L(f) = L(\int_a^b (x-u)_+ \,\mathrm{d}g) - L(\int_a^b (x-u)_+ \,\mathrm{d}h) + \gamma_1 x_L + \beta\gamma_2$. Como $C_{[0,1]} - C_{[0,1]}$ es denso en $\mathcal{C}[0,1]$ se concluye. $\square$

Admitiremos el resultado siguiente que se puede obtener a partir de la ley de los grandes números (ver [19, Teo. III.2]):

Proposición 2.25 *Sea K un conjunto compacto métrico en X evtlc. Sea μ una medida de probabilidad en K. Entonces existe $(x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ tal que $\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{x_j} \to \mu$, en el siguiente sentido: para todo $f \in \mathcal{C}(K)$ se tiene que $\mu_n(f) \to \mu(f)$.*

Corolario 2.26 *Sea $L : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal continua. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$ y $[0,1] \subset (a,b)$. Entonces L está totalmente determinada por x_L, $L(1)$ y por sus valores sobre el conjunto:*

$$\left\{ f\colon \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x - \widetilde{x}) \mathbb{1}_{[\widetilde{x},1]} \end{cases} \quad \middle| \ \widetilde{x} \in [a,1) \right\}.$$

Demostración. Sea $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función positiva creciente y continua por la derecha y sea μ la medida asociada. Sin pérdida de generalidad, supongamos que μ es una medida de probabilidad. Sea $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en la propiedad anterior tal que $\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{xj}\to\mu$. Para todo $n\in\mathbb{N}$ sea

$$f_n\colon\begin{cases}[0,1]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\int_a^x(x-u)\,\mathrm{d}\mu_n\end{cases}.$$

Entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende puntualmente a

$$f\colon\begin{cases}[0,1]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\int_a^x(x-u)\,\mathrm{d}\mu\end{cases}.$$

Para todo $n\in\mathbb{N}$ y para todo $x\in[0,1]$ se tiene que

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{\substack{j=0\\ x_j\in[a,x]}}^{n-1}(x-x_j).$$

Por lo tanto, para todo $n\in\mathbb{N}$ la función f_n es creciente y entonces, por el teorema de Dini, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende uniformemente a f. Entonces, para determinar a L, basta conocer a $L\left(x\mapsto\frac{1}{n}\sum_{\substack{j=0\\ x_j\in[a,x]}}^{n-1}(x-x_j)\right)$ y entonces basta conocer a $L(x\mapsto(x-\widetilde{x})\mathbb{1}_{[\widetilde{x},1]})$ para $\widetilde{x}\in[a,1)$.

□

Corolario 2.27 *Sea $L:\mathcal{C}([0,1])\to\mathbb{R}$ una aplicación lineal continua. Entonces L está totalmente determinada por $L(1)$ y por sus valores sobre el conjunto:*

$$\left\{f\colon\begin{cases}[0,1]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto(x-\widetilde{x})\mathbb{1}_{[\widetilde{x},1]}\end{cases}\mid\widetilde{x}\in[0,1)\right\}\tag{2.1}$$

Demostración. Sean $a,b\in\mathbb{R}$ tal que $a<b$ y $[0,1]\subset(a,b)$. Basta notar que si $\widetilde{x}\in[a,0)$, la función $f\colon\begin{cases}[0,1]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto(x-\widetilde{x})\mathbb{1}_{[\widetilde{x},1]}\end{cases}$ es afín en $[0,1]$ y por lo tanto $L(f)$ se deduce de los valores $L(1)$ y $L(x)$.

□

Recordemos que existen dos versiones del teorema de Stone-Weierstrass para que un retículo L sea denso en $\mathcal{C}(K)$:

(1) para todo $a,b\in\mathbb{R}$ y para todo $x,y\in K$ tal que $x\neq y$, existe $f\in L$ tal que $f(x)=a$ y $f(x)=b$

(2) L contiene las funciones constantes y separa los puntos de K.

Notar que P definido por (2.1) es un retículo que separa los puntos pero que no verifica ni (1) ni (2). La idea sería añadir las funciones constantes a P pero en este caso P ya no sería un retículo. Entonces este resultado no se puede deducir del teorema de Stone-Weierstrass y en este sentido, obtendríamos una mejora del resultado que dice que una aplicación lineal continua está totalmente determinada por su valores en las funciones afines continuas por partes.

Corolario 2.28 *Sea $L : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal continua. Entonces L está totalmente determinada por $L(1)$ y por sus valores sobre el conjunto:*

$$\left\{ f\colon \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x-\widetilde{x})\mathbb{1}_{[\widetilde{x},1]} \end{cases} \mid \widetilde{x} \in [0,1) \cap \mathbb{Q} \right\}.$$

Demostración. Sea $\widetilde{x} \in (0,1)$. Existe una sucesión creciente de racionales $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $\widetilde{x}$. La sucesión de las funciones $f_n\colon \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x-q_n)\mathbb{1}_{[q_n,1]} \end{cases}$ converge puntualmente a $f\colon \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x-\widetilde{x})\mathbb{1}_{[\widetilde{x},1]} \end{cases}$. La sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y entonces, por el teorema de Dini, la convergencia es uniforme y se concluye. $\square$

Capítulo 3

La propiedad de los puntos afínmente expuestos (PAE)

Esta sección está basada en el trabajo de tesis de habilitación de Mohammed Bachir (ver [3]). Se introduce la noción de punto afínmente expuesto y se estudian los evtlc que tienen la propiedad de los puntos afínmente expuestos.

3.1. Definiciones y primeras propiedades

Definición 3.1 *Sea K un conjunto compacto convexo en un evtlc X. Un punto $x_0 \in K$ se dice afínmente expuesto si existe $\phi \in \mathcal{A}(K)$ tal que para todo $x \in K \setminus \{x_0\}$ se tiene que $\phi(x_0) > \phi(x)$. Escribiremos que $x_0 \in \mathrm{AExp}(K)$.*

Definición 3.2 *Un evtlc X tiene la propiedad de los puntos afínmente expuestos (PAE) si cada conjunto compacto convexo es la envoltura convexa cerrada de sus puntos afínmente expuestos.*

Proposición 3.3 *Sea X un evtlc con la PAE. Sea Y un subespacio vectorial de X. Entonces Y tiene la PAE.*

Demostración. Sea $K \subset Y$ un conjunto compacto convexo. Entonces K también es compacto convexo en X y por lo tanto $K = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{AExp}(K))$. □

Lema 3.4 *Sean X e Y dos evtlc. Sea $K \subset X$ un conjunto compacto convexo y sea $T : K \to Y$ un homeomorfismo afín sobre su imagen. Entonces $T(\mathrm{AExp}(K)) = \mathrm{AExp}(T(K))$.*

Demostración. Supongamos que $\mathrm{AExp}(K) \neq \emptyset$ y sea d $\in T(\mathrm{AExp}(K))$. Sea $c \in \mathrm{AExp}(K)$ tal que d $= T(c)$. Existe $\phi \in \mathcal{A}(K)$ que expone afínmente a c. Es fácil ver que $\phi \circ T^{-1}$ expone afínmente a d. La otra inclusión es similar. Si $\mathrm{AExp}(K) = \emptyset$, el mismo argumento muestra que $\mathrm{AExp}(T(K)) = \emptyset$. □

Lema 3.5 *Sean X e Y dos evtlc tal que existe $T : X \to Y$ un homeomorfismo. Sea $A \subset X$. Entonces $\overline{T(\mathrm{co}(A))} = T(\overline{\mathrm{co}}(A))$.*

Demostración. Sea $y \in \overline{T(\mathrm{co}(A))}$. Entonces existe una red $(y_\lambda)_\lambda$ de elementos de $T(\mathrm{co}(A))$ que converge a y. Cada elemento y_λ se puede escribir $y_\lambda = T\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{n_\lambda} \mu_\lambda^{\mathrm{i}} x_\lambda^{\mathrm{i}}\right)$ con $\mu_\lambda^{\mathrm{i}} \geqslant 0$, $\sum_{\mathrm{i}=1}^{n_\lambda} \mu_\lambda^{\mathrm{i}} = 1$ y $x_\lambda^{\mathrm{i}} \in A$. Tomando límite, obtenemos que la red $\left(T\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{n_\lambda} \mu_\lambda^{\mathrm{i}} x_\lambda^{\mathrm{i}}\right)\right)_\lambda$ converge a y. Luego $\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{n_\lambda} \mu_\lambda^{\mathrm{i}} x_\lambda^{\mathrm{i}}\right)_\lambda$ converge a $T^{-1}(y)$ y entonces $T^{-1}(y) \in \overline{\mathrm{co}(A)}$. Así $y \in T(\overline{\mathrm{co}}(A))$. Ahora, sea $y \in T(\overline{\mathrm{co}}(A))$. Existe $x \in \overline{\mathrm{co}}(A)$ tal que $y = T(x)$. También existe una red $(x_\lambda)_\lambda$ de elementos de $\mathrm{co}(A)$ que tiende a x. Luego $(T(x_\lambda))_\lambda$ es una red de elementos de $T(\mathrm{co}(A))$ que converge a $T(x) = y$ y entonces $y \in \overline{T(\mathrm{co}(A))}$. □

Lema 3.6 *Sean X e Y dos evtlc tal que existe $T : X \to Y$ un homeomorfismo lineal. Sea $A \subset X$. Entonces $T(\overline{\mathrm{co}}(A)) = \overline{\mathrm{co}}(T(A))$.*

Demostración. Sea $y \in T(\overline{\mathrm{co}}(A))$. Existe $x \in \overline{\mathrm{co}}(A)$ tal que $y = T(x)$. También existe una red $(x_\lambda)_\lambda$ de elementos de $\mathrm{co}(A)$ que tiende a x y podemos escribir $x_\lambda = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n_\lambda} \mu_\lambda^{\mathrm{i}} x_\lambda^{\mathrm{i}}$. Luego $T(x_\lambda) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n_\lambda} \mu_\lambda^{\mathrm{i}} T(x_\lambda^{\mathrm{i}}) \in \mathrm{co}(T(A))$ y tomando límite obtenemos que $y \in \overline{\mathrm{co}}(T(A))$. Ahora, sea $y \in \overline{\mathrm{co}}(T(A))$. Existe una red $(y_\lambda)_\lambda$ de elementos de $\mathrm{co}(T(A))$ que converge a y. Podemos escribir cada y_λ de la forma $y_\lambda = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n_\lambda} \mu_\lambda^{\mathrm{i}} T(x_\lambda^{\mathrm{i}}) = T(\sum_{\mathrm{i}=1}^{n_\lambda} \mu_\lambda^{\mathrm{i}} x_\lambda^{\mathrm{i}})$ con $x_\lambda^{\mathrm{i}} \in A$. Tomando límite, obtenemos que $y \in \overline{T(\mathrm{co}(A))} = T\left(\overline{\mathrm{co}}(A)\right)$ por el lema anterior. □

La primera propiedad importante de la PAE es su estabilidad por homeomorfismo:

Proposición 3.7 *Sean X e Y dos evtlc y sea $K \subset X$ un conjunto compacto convexo tal que $K = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{AExp}(K))$. Sea $T : K \to Y$ un homeomorfismo afín sobre su imagen. Entonces $T(K) = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{AExp}(T(K)))$. En particular, si X e Y son linealmente homeomorfos entonces X tiene la PAE si y solo si Y la tiene.*

Demostración. Se tiene que $K = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{AExp}(K))$. Luego, combinando los lemas anteriores, se tiene que $T(K) = T(\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{AExp}(K)) = \overline{\mathrm{co}}(T(\mathrm{AExp}(K))) = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{AExp}(T(K)))$. □

Lema 3.8 *Sea $(X_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in I}$ una familia cualquiera de evtlc. Sea $\mathrm{i}_0 \in I$, sea K un conjunto compacto convexo de X_{i_0} y para todo $\mathrm{i} \in I$, sea $y_{\mathrm{i}} \in X_{\mathrm{i}}$. Entonces se tiene que*

$$\mathrm{AExp}\left(K \times \prod_{\mathrm{i}\neq \mathrm{i}_0} \{y_{\mathrm{i}}\}\right) = \mathrm{AExp}(K) \times \prod_{\mathrm{i}\neq \mathrm{i}_0} \{y_{\mathrm{i}}\}.$$

Demostración. Para simplificar las notaciones consideramos solo dos evtlc X y Y y supondremos que K es un conjunto compacto convexo de X. Sea $y_1 \in Y$. Veamos que

$$\mathrm{AExp}(K \times \{y_1\}) = \mathrm{AExp}(K) \times \{y_1\}.$$

Primero, sea $(x_0, y_1) \in \mathrm{AExp}(K \times \{y_1\})$. Existe $\phi \in \mathcal{A}(K \times \{y_1\})$ tal que para todo $x \in K$ $\phi(x_0, y_1) > \phi(x, y_1)$. Es fácil ver que Φ definida en K por $\Phi(x) = \phi(x, y_1)$ expone afínmente a x_0 y entonces $(x_0, y_1) \in \mathrm{AExp}(K) \times \{y_1\}$. Ahora, sea $(x_0, y_1) \in \mathrm{AExp}(K) \times \{y_1\}$. Existe $\phi \in \mathcal{A}(K)$ tal que para todo $x \in K$ $\phi(x_0) > \phi(x)$. Es fácil ver que Φ definida en $K \times \{y_1\}$ por $\Phi(x, y_1) = \phi(x)$ expone afínmente a (x_0, y_1) y entonces $(x_0, y_1) \in \mathrm{AExp}(K \times \{y_1\})$. $\square$

Proposición 3.9 *Sea $(X_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in I}$ una familia cualquiera de evtlc tal que $\prod_{\mathrm{i}\in I} X_\mathrm{i}$ tiene la PAE. Entonces, para todo $\mathrm{i} \in I$, X_i tiene la PAE.*

Demostración. Para simplificar las notaciones lo haremos con dos evtlc X y Y, supondremos que K es un conjunto compacto convexo de X y sea $y_1 \in Y$. El conjunto $K \times \{y_1\}$ es compacto en $X \times Y$ y entonces

$$K_1 \times \{y_1\} = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{AExp}(K_1 \times \{y_1\})) = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{AExp}(K_1) \times \{y_1\}) = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{AExp}(K_1)) \times \{y_1\}$$

donde la segunda desigualdad proviene del lema anterior. Deducimos que $K_1 = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{AExp}(K_1))$ y se concluye. $\square$

Proposición 3.10 *Sea $(X_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de evtlc. Para todo $\mathrm{i} \in \mathbb{N}$, sea K_i un conjunto compacto convexo de X_i y sea $x_\mathrm{i} \in K_\mathrm{i}$. Entonces*

$$\forall \mathrm{i} \in \mathbb{N}\ x_\mathrm{i} \in \mathrm{AExp}(K_\mathrm{i}) \implies (x_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathbb{N}} \in \mathrm{AExp}\left(\prod_{\mathrm{i}\in\mathbb{N}} K_\mathrm{i}\right).$$

Demostración. Supongamos que para todo $\mathrm{i} \in \mathbb{N}$ $x_\mathrm{i} \in \mathrm{AExp}(K_\mathrm{i})$. Para todo $\mathrm{i} \in \mathbb{N}$, existe $\phi_\mathrm{i} \in \mathcal{A}(K_\mathrm{i})$ que expone afínmente a x_i. Sea $m_\mathrm{i} = \frac{1}{2^\mathrm{i} \sup_{K_\mathrm{i}} |\phi_\mathrm{i}|}$. Entonces $\sum_{\mathrm{i}\in\mathbb{N}} m_\mathrm{i}\phi_\mathrm{i}$ es afín y continua (por convergencia uniforme) en $\prod_{\mathrm{i}\in\mathbb{N}} K_\mathrm{i}$ y expone afínmente a $(x_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathbb{N}}$. $\square$

Proposición 3.11 *Sea $(X_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in I}$ una familia cualquiera de evtlc. Para todo $\mathrm{i} \in I$ sea K_i un conjunto compacto convexo de X_i y sea $x_\mathrm{i} \in K_\mathrm{i}$. Entonces*

$$(x_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in I} \in \mathrm{AExp}\left(\prod_{\mathrm{i}\in I} K_\mathrm{i}\right) \implies \forall \mathrm{i} \in I\ x_\mathrm{i} \in \mathrm{AExp}(K_\mathrm{i}).$$

Demostración. Supongamos que ϕ expone afínmente a $(x_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in I}$. Entonces $x \mapsto \phi(\tilde{x})$ expone a x_1 donde $\tilde{x}$ es el vector $(x_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in I}$ en el que cambiamos la primera coordenada por x. $\square$

Cabe mencionar que si K es un conjunto compacto convexo de $\prod_{j\in I} X_j$ y $(x_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in I}$ es un punto afínmente expuesto de K entonces no es cierto que para todo $\mathrm{i} \in I$ $x_\mathrm{i} \in \mathrm{AExp}(\Pi_\mathrm{i}(K))$ donde $\Pi_\mathrm{i} : \prod_{j\in I} X_j \to X_\mathrm{i}$ es la proyección canónica.

Proposición 3.12 *Sea X un evtlc. Sea $K \subset X$ un conjunto compacto convexo tal que $K = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{AExp}(K))$. Entonces $\mathrm{Ext}(K) \subset \overline{\mathrm{AExp}(K)}$.*

Demostración. Directo del teorema de Milman (1.3). □

3.2. Un criterio de PAE

En esta sección se muestra que todo evtlc cuyos conjuntos compactos convexos son metrisables tiene la PAE.

Proposición 3.13 *Todo espacio de Banach reflexivo tiene la RNP y por lo tanto la PAE.*

Demostración. Ver [5]. □

Definición 3.14 *Definimos la clase Ξ_1 por*

$$\Xi_1 = \{X \text{ evtlc} \mid \text{todo conjunto compacto convexo de } X \text{ es metrizable}\}.$$

Proposición 3.15 *Todo conjunto compacto convexo metrizable es afínmente homeomorfo a un conjunto compacto convexo de $l^2(\mathbb{N})$.*

Demostración. Sea K un compacto convexo metrizable. Entonces $\mathcal{A}(K)$ es separable. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto denso numerable de la bola unitaria de $\mathcal{A}(K)$. Consideramos la función siguiente:

$$\Phi\colon \begin{cases} K \longrightarrow l^2(\mathbb{N}) \\ x \longmapsto \left(\frac{1}{n} f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}} \end{cases} .$$

Entonces es fácil comprobar que Φ es un homeomorfismo afín. □

Proposición 3.16 *Todo evtlc de Ξ_1 tiene la PAE.*

Demostración. El resultado sigue directamente del hecho que $l^2(\mathbb{N})$ tiene la PAE (por 3.13) y del lema 3.7. □

Cabe notar que, a pesar de que todo conjunto compacto convexo de $l^2(\mathbb{N})$ es la envoltura convexa cerrada de sus puntos expuestos, no es posible concluir lo mismo para un conjunto compacto convexo metrizable de un evtlc $X \in \Xi_1$. En efecto, si x^* expone un punto z de un conjunto compacto convexo de $l^2(\mathbb{N})$ entonces $x^* \circ \Phi$ expone a $c = \Phi^{-1}(z)$ y c es a priori solamente afínmente expuesto.

Corolario 3.17 *La RNP implica la PAE pero la reciproca es falsa.*

Demostración. Por la propiedad anterior, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tiene la PAE pero no tiene la RNP pues el conjunto compacto convexo $[-1,1]^{\mathbb{N}}$ no tiene puntos expuestos. □

Corolario 3.18 *Sea E un espacio de Banach separable. Entonces (E^*, w^*) tiene la PAE.*

Demostración. E es separable entonces la topología w^* es metrizable en los conjuntos acotados y entonces $(E^*, w^*) \in \Xi_1$. $\square$

Corolario 3.19 *Sea K un conjunto compacto metrizable. Entonces $(\mathcal{C}(K)^*, w^*)$ tiene la PAE.*

Demostración. Es consecuencia directa del corolario anterior y del hecho que $\mathcal{C}(K)$ es un espacio de Banach separable. $\square$

3.3. Una nueva caracterización de los espacios GDS

Utilizando la caracterización de Phelps de los espacios GDS (1.19), se presenta en esta sección una caracterización de dichos espacios en función de los puntos afínmente expuestos.

Lema 3.20 *Sea E un espacio de Banach. Sea H un hiperplano afín cerrado de E y sea $x_0 \notin H$. Sean $x_1 \in E$ y $\alpha > 0$ tal que $B(x_1, \alpha) \cap H$ es no vacío. Entonces el conjunto $\mathrm{co}((H \cap B(x_1, \alpha)) \cup \{x_0\})$ es de interior no vacío.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que H es un hiperplano lineal y que $x_1 = 0$. Como H y $\mathbb{R}x_0$ son cerrados, la proyección p sobre H y $q = \mathrm{id} - p$ (donde $\mathrm{id} : E \to E$ es el operador identidad) sobre $\mathbb{R}x_0$ son continuas. Luego existe $C > 0$ tal que para todo $x \in E$ se tiene que $||p(x)|| \leqslant C||x||$ y $||q(x)|| \leqslant C||x||$. Sea $M > 0$ por determinar. Sea $v \in B(0, 1)$ no nulo y sea $0 < r < M$. Tenemos que

$$\frac{x_0}{2} + rv = \frac{x_0}{2} + r\lambda_v x_0 + rq(v) = \left(\frac{1}{2} + r\lambda_v\right) x_0 + \frac{2Cr}{\alpha}\left(\frac{\alpha q(v)}{2C}\right)$$

donde para todo $x \in E$ definimos λ_x tal que $p(x) = \lambda_x x_0$. Se tiene que $||\lambda_v x_0|| \leqslant C||v|| \leqslant C$ y entonces $|\lambda_v| \leqslant \frac{C}{||x_0||}$. Además, $||q(v)|| \leqslant C||v|| \leqslant C$ y entonces $||\frac{\alpha q(v)}{2C}|| < \alpha$. Definimos

$$\mu = \frac{1}{2} + r\lambda_v + \frac{2Cr}{\alpha}.$$

Se tiene que

$$\mu \leqslant \frac{1}{2} + M\left(\frac{C}{||x_0||} + \frac{2C}{\alpha}\right) \text{ y } \mu \geqslant \frac{1}{2} - M\frac{C}{||x_0||}.$$

Luego, tomando M tal que

$$0 < M < \min\left(\frac{1}{2}\left(\frac{C}{||x_0||} + \frac{2C}{\alpha}\right)^{-1}, \frac{||x_0||}{2C}\right)$$

se tiene que $\mu \in (0, 1)$. Así,

$$\frac{x_0}{2} + rv = \left(\frac{1}{2} + r\lambda_v\right) x_0 + \frac{2Cr}{\alpha}\left(\frac{\alpha q(v)}{2C}\right) + (1 - \mu)0$$

con $0, \frac{\alpha q(v)}{2C} \in H \cap B(0,\alpha)$. Entonces $\frac{x_0}{2} + rv \in \text{co}((H \cap B(0,\alpha)) \cup \{x_0\})$ y se concluye que

$$B\left(\frac{x_0}{2}, \alpha\right) \subset \text{co}((H \cap B(0,\alpha)) \cup \{x_0\}).$$

$\square$

Proposición 3.21 *Sea E un espacio de Banach. Sea $K \subset E^*$ un conjunto w^*-compacto convexo de interior no vacío para la norma. Entonces $(E+\mathbb{R})_{|K} = \mathcal{A}(K)$ y $\text{Exp}(K) = \text{AExp}(K)$ (para la topología w^*).*

Demostración. Veamos que el resultado se tiene para B_{X^*}. Sea $f \in \mathcal{A}(B_{X^*})$. Por densidad (ver proposición 2.2), existe $(x_n, \lambda_n) \in E \times \mathbb{R}$ tal que $x_n + \lambda_n \to f$ uniformemente en B_{X^*}. Se tiene que $\lambda_n \to f(0)$. Luego, $x_n \to f - f(0)$ uniformemente. Se deduce fácilmente que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, k > n_0$ se tiene que $|x_n(\phi) - x_k(\phi)| < \varepsilon$ para todo $\phi \in B_{X^*}$ y entonces $||x_n - x_k|| < \varepsilon$ (por el teorema de Hahn-Banach). Luego $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en un espacio de Banach así que converge a un $x \in E$. Se deduce entonces que $f = x + f(0)$ en B_{X^*}.

Ahora sea $K \subset E^*$ un conjunto w^*-compacto convexo cualquiera de interior no vacío para la norma y supongamos sin pérdida de generalidad que $0 \in \text{int}(K)$. Sea $f \in \mathcal{A}(K)$. Existe $\delta > 0$ tal que $B(0,\delta) \subset K$. Por la parte anterior, se deduce fácilmente que existe $x \in E$ tal que $f = x + f(0)$ en $B(0,\delta)$. Como K es de interior no vacío, se tiene que $\text{Aff}(K) = E^*$ y entonces f admite una única extensión afín a E^* (por la proposición 2.7). Luego $f = x + f(0)$ en E^* y entonces en K. $\square$

Corolario 3.22 *Sea E un espacio de Banach que admite una norma equivalente que no es Gâteaux-diferenciable en ningún punto. Entonces (E^*, w^*) no tiene la PAE.*

Demostración. Aplicamos la proposición 1.14 a una norma equivalente que no es Gâteaux-diferenciable en ningún punto. Esto implica que B_{E^*} no tiene ningún punto w^*-expuesto. Como B_{E^*} tiene interior no vacío para la norma, los puntos w^*-expuesto coinciden con los puntos afínmente expuestos y por lo tanto se deduce que (E^*, w^*) no tiene la PAE. $\square$

El corolario anterior permite dar un ejemplo de un evtlc que no tiene la PAE.

Corolario 3.23 *Sea Γ un conjunto no numerable. Entonces $(l_1(\Gamma)^*, w^*)$ no tiene la PAE.*

Demostración. Veamos que la norma de $l_1(\Gamma)$ no es Gâteaux-diferenciable en ningún punto. Sea $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in l_1(\Gamma)$. Sea $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que $x_{\gamma_0} = 0$ (se sabe que $x_\gamma = 0$ excepto en un subconjunto a lo más numerable de Γ). Consideramos $(\delta_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in l_1(\Gamma)$ tal que $\delta_\gamma = 0$ si $\gamma \neq \gamma_0$ y $\delta_{\gamma_0} = 1$. Se tiene que $||x + t\delta|| - ||x|| = |t|$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Diviendo por $t \neq 0$, se deduce que la norma de $l_1(\Gamma)$ no es Gâteaux-diferenciable en $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$. $\square$

Se presenta a continuación una nueva caracterización de los espacios GDS mediante la PAE:

Teorema 3.24 *Sea E un espacio de Banach. LSSE:*

(i) *E es GDS*

(ii) *Para todo $K \subset E^*$ w^*-compacto convexo de norma interior no vacío,* $K = \overline{\text{co}}(w^*-\text{Exp}(K))$

(iii) *(E^*, w^*) tiene la PAE*

(iv) *$(E^* \times \mathbb{R}, w^*)$ tiene la PAE*

(v) *$E \times \mathbb{R}$ es GDS.*

Demostración. Por el teorema 1.19, la implicación (i) $\Longrightarrow$ (ii) es trivial. Para ver que (ii) implica (i), basta ver que el conjunto $\text{co}(\{x_0^*\} \cup N)$, definido en 1.19, es de interior no vacío por el lema 3.20 y por lo tanto C también. Notando eso, la demostración es similar a la del teorema 1.19.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) pues los puntos w^*-expuestos son afínmente expuestos.

Por la propiedad 3.21, se tiene que (iii) implica (ii).

Por el resultado 1.16, si E es GDS entonces también $E \times \mathbb{R}$. Luego $((E \times \mathbb{R})^*, w^*)$ tiene la PAE y por lo tanto, por homeomorfismo, $(E^* \times \mathbb{R}, w^*)$ también. Ahora si $(E^* \times \mathbb{R}, w^*)$ tiene la PAE. Luego, por ser subespacio, $(E^* \times \{0\}, w^*)$ tiene la PAE y, por homeomorfismo, (E^*, w^*) también. Así que las cuatro primeras proposiciones son equivalentes.

Para terminar, si $E \times \mathbb{R}$ es GDS entonces $(E^* \times \mathbb{R}, w^*)$ tiene la PAE y (E^*, w^*) también, lo cual concluye la demostración. $\square$

Notar que se muestra fácilmente por inducción que (5) es equivalente a decir que $E \times F$ es GDS para algún espacio de Banach F de dimensión finita.

Teorema 3.25 *Sea E un espacio de Banach. Entonces E es GDS si y solo si todo conjunto w^*-compacto convexo tiene un punto w^*-expuesto.*

Demostración. Ver [12, Thm. 4]. $\square$

Lema 3.26 *Sea E un espacio de Banach y sea $K \subset E$ un conjunto w-compacto convexo. Entonces K es la envoltura convexa cerrada de sus puntos fuertemente expuestos.*

Demostración. Ver [4, Thm. 2 p.171]. $\square$

Corolario 3.27 *Sea E un espacio de Banach. Entonces (E, w) tiene la PAE.*

Demostración. Sea K un conjunto w-compacto convexo. Por el lema 3.26 y por el teorema de Mazur, K es la envoltura convexa w-cerrada de sus puntos expuestos (para la norma).

Pero sabemos que $x^* \in X^*$ es norma-continua si y solo si es débil-continua, entonces K es la envoltura convexa w-cerrada de sus puntos w-expuestos. $\square$

Corolario 3.28 *Si E es un espacio de Banach reflexivo entonces E es un GDS y (E^*, w^*) tiene la PAE.*

Demostración. Si E es reflexivo entonces w y w^* coinciden en E^*. Sea $K \subset E^*$ un conjunto w-compacto convexo. Veamos que K es la envoltura convexa w-cerrada (o norma cerrada por Mazur) de sus puntos w^*-expuestos. Pero eso es directo del lema 3.26 pues los puntos fuertemente expuestos de K son también puntos w^*-expuestos ya que E es reflexivo. $\square$

Teorema 3.29 *Sea E un espacio de Banach y F un espacio de Banach separable. Si E es GDS entonces $E \times F$ también.*

Demostración. Ver [23]. $\square$

Corolario 3.30 *Sea E un espacio de Banach y F un espacio de Banach separable. Entonces (E^*, w^*) tiene la PAE si y solo si $(E^* \times F^*, w^*)$ tiene la PAE.*

Demostración. Una implicación es trivial. Ahora, si (E^*, w^*) tiene la PAE entonces E es GDS y, por el teorema anterior, $E \times F$ también. Luego, $(E^* \times F^*, w^*)$ tiene la PAE. $\square$

3.4. Ejemplos de espacios que tienen la PAE

En esta sección se muestra que los evtlc cuyos conjuntos compactos convexos admiten una función semicontinua inferiormente y estrictamente convexa tienen la PAE. Generaliza el resultado 3.16 porque un conjunto compacto es metrizable si y solo si admite una función continua y estrictamente convexa (3.36).

3.4.1. La clase SC

Definición 3.31 *Sea K un conjunto compacto convexo de un evtlc X y sea $f : K \to \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos la envoltura superior de f por*

$$\overline{f}\colon \begin{cases} K \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \text{ínf}\{h(x) \mid h \in \mathcal{A}(K),\ h \geqslant f\} \end{cases}.$$

Definición 3.32 *Para un conjunto compacto convexo K de un evtlc X, definimos el cono mín-estable más pequeño que contiene $\mathcal{A}(K)$ por:*

$$\mathcal{K}_{\mathcal{A}(K)} = \{\text{mín}\{f_1, ..., f_n\} \mid n \in \mathbb{N},\ \forall \mathrm{i} \in \{1, ...n\}\ f_{\mathrm{i}} \in \mathcal{A}(K)\}.$$

Notar que se tiene que $\overline{f}(x) = \text{ínf}\{h(x) \mid h \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}(K)},\ h \geqslant f\}$.

Proposición 3.33 *Sea K un conjunto compacto convexo de un evtlc X y sea $f : K \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces:*

(i) *$\overline{f}$ es concava, acotada y semicontinua superiormente.*

(ii) *Si f es concava semicontinua superiormente entonces $f = \overline{f}$.*

Demostración. (i) Es inmediato ver que $\overline{f}$ es semicontinua superiormente y concava pues es ínfimo de funciones semicontinuas superiormente y concavas. La función $\overline{f}$ es acotada pues $\mathcal{A}(K)$ contiene las funciones constantes.

(ii) Supongamos que f es concava y semicontinua superiormente. Ya tenemos que $f \leqslant \overline{f}$. Veamos la otra desigualdad. Tenemos que $C = \{(x, r) \mid f(x) \geqslant r\}$ es convexo cerrado en $X \times \mathbb{R}$. Supongamos que existe $x_1 \in K$ tal que $f(x_1) < \overline{f}(x_1)$. Por el teorema de Hahn-Banach, existe $L : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineal continua y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\sup_C L < \lambda < L(x_1, \overline{f}(x_1))$. Como $L(x_1, f(x_1)) < L(x_1, \overline{f}(x_1))$, se deduce que $L(0, 1) > 0$. Luego, podemos definir

$$h\colon \begin{cases} K \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto r \text{ si } L(x, r) = \lambda \end{cases}.$$

Es fácil ver que $h \in \mathcal{A}(K)$. Veamos que $f < h$. Sea $x \in K$. Se tiene que $L(x, f(x)) < \lambda$ pues $(x, f(x)) \in C$ y entonces $f(x) < h(x)$. Además, como $\lambda < L(x_1, \overline{f}(x_1))$, se tiene que $h(x_1) < \overline{f}(x_1)$ lo cual es una contradicción. □

Proposición 3.34 *Sea K un conjunto compacto convexo de un evtlc X y sea $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua concava. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ y $f_1, f_2, ..., f_n \in \mathcal{A}(K)$ tal que $f \leqslant \text{mín}\{f_1, f_2, ..., f_n\} \leqslant f + \varepsilon$.*

Demostración. Se tiene que $f(x) = \text{ínf}\{h(x) \mid h \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}(K)},\ h \geqslant f\}$ y que el cono $\mathcal{K}_{\mathcal{A}(K)}$ es mín-estable. Luego, f es continua entonces podemos aplicar el teorema de Dini para obtener la desigualdad deseada. □

Proposición 3.35 *Sea K un conjunto compacto convexo de un evtlc X y sea $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua convexa. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ y $f_1, f_2, ..., f_n \in \mathcal{A}(K)$ tal que $\text{máx}\{f_1, f_2, ..., f_n\} \leqslant f \leqslant \text{máx}\{f_1, f_2, ..., f_n\} + \varepsilon$.*

Demostración. Basta notar que para todo $x \in K$ se tiene que

$$f(x) = \sup\{h(x) \mid h = \text{máx}\{f_1, ..., f_n\},\ n \in \mathbb{N},\ \forall \mathrm{i} \in \{1, ...n\}\ f_{\mathrm{i}} \in \mathcal{A}(K)\}$$

e imitar la demostración anterior. □

Teorema 3.36 *Un conjunto compacto convexo K de un evtlc X es metrizable si y solo si existe $f : K \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente convexa.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que K es metrizable. Luego $\mathcal{A}(K)$ es separable. Sea $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión densa en $\{h \in \mathcal{A}(K) \mid 0 \leqslant h \leqslant 1\}$. Definimos

$$h\colon \begin{cases} K \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} h_n^2(x) \end{cases} .$$

La convergencia uniforme de la serie garantiza que h es continua. Además, para todo $t \in (0,1)$ y para todo $x, y \in K$ con $x \neq y$ se tiene que:

$$f(tx + (1-t)y) = t^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} h_n^2(x) + (1-t)^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} h_n^2(y) + 2t(1-t) \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} h_n(x) h_n(y)$$

y por lo tanto se deduce que $f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$. En efecto, basta notar que si esta desigualdad no se tiene entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $h_n(x) = h_n(y)$, lo que contradice el hecho que $\mathcal{A}(K)$ separa los puntos.

Supongamos ahora que existe $f : K \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente convexa y veamos que existe una familia numerable de $\mathcal{C}(K)$ que separa los puntos (lo cual implicará por el teorema de Stone-Weierstrass que $\mathcal{C}(K)$ es separable y que entonces K es metrizable). Por la propiedad anterior, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, existe $k_n \in \mathbb{N}$ y $f_1^n, f_2^n, ..., f_{k_n}^n \in \mathcal{A}(K)$ tal que

$$\max\{f_1^n, f_2^n, ..., f_{k_n}^n\} < f < \max\{f_1^n, f_2^n, ..., f_{k_n}^n\} + \frac{1}{n}.$$

Veamos que la familia $\mathcal{C} = \{f_{\mathrm{i}}^n \mid n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{i} = 1, ..., k_n\}$ separa los puntos. Supongamos que existen $x, y \in K$ con $x \neq y$ tal que para todo $g \in \mathcal{C}$ se tiene que $g(x) = g(y)$. Sea $z = \frac{1}{2}(x+y)$. Para todo $g \in \mathcal{C}$ se tiene que $g(x) = g(y) = g(z)$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\max\{f_1^n, f_2^n, ..., f_{k_n}^n\} < f < \max\{f_1^n, f_2^n, ..., f_{k_n}^n\} + \frac{1}{n}$. Evaluado en x y en y, obtenemos que $f_1^n(x) < f(x) < f_1^n(x) + \frac{1}{n}$ y $f_1^n(y) < f(y) < f_1^n(y) + \frac{1}{n}$. Luego,

$$\begin{aligned} f(z) < \frac{1}{2}(f(x) + f(y)) &< \frac{1}{2}(f_1^n(x) + f_1^n(y)) + \frac{1}{n} \\ &= f_1^n(z) + \frac{1}{n} \\ &= \max\{f_1^n(z), f_2^n(z), ..., f_{k_n}^n(z)\} + \frac{1}{n} \\ &< f(z) + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Entonces $f(z) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$, lo cual contradice la convexidad estricta de f.

□

Definición 3.37 *Para un evtlc X, definimos la familia $SC(X)$ de conjuntos compactos convexos $K \subset X$ tal que existe una función $f : K \to \mathbb{R}$ estrictamente convexa y semicontinua inferiormente. Notamos por SC la unión de todos los $SC(X)$ para cada evtlc X.*

Proposición 3.38 *Todo conjunto compacto convexo metrizable está en SC.*

Demostración. Directo de 3.36. $\square$

Definición 3.39 *Notaremos $\Xi_2 = \{X \text{ evtlc} \mid \text{todo compacto convexo de } X \text{ está en } SC(X)\}$.*

Por la definición 3.14 y por la proposición anterior se tiene que $\Xi_1 \subset \Xi_2$.

3.4.2. Otro criterio de PAE

Proposición 3.40 *Todo espacio de Banach dual E^* estrictamente convexo verifica que cada conjunto w^*-compacto convexo $C \subset E^*$ es la envoltura convexa w^*-cerrada de sus puntos w^*-expuestos.*

Demostración. Todo espacio de Banach dual estrictamente convexo tiene un predual Asplund débil (teorema 1.26) y por lo tanto GDS. El resultado sigue del teorema 1.19. $\square$

Teorema 3.41 *Sea X un evtlc y sea $K \subset X$ un conjunto compacto convexo. Entonces $K \in SC(X)$ si y solo si K se inyecta afínmente en un espacio de Banach dual estrictamente convexo dotado de la topologia w^*.*

Demostración. Ver [20, Thm. 1.1]. $\square$

Cabe mencionar que existen conjuntos compactos convexos que admiten una función semicontinua inferiormente estrictamente convexa pero que no admiten una función continua estrictamente convexa. En efecto, consideremos el espacio $X = (l^2(\Gamma), w^*)$ con Γ no numerable y sea $K = (B_{l^2(\Gamma)}, w^*)$. El conjunto K es w^*-compacto convexo y como $l^2(\Gamma)$ es un espacio de Hilbert no separable, K no es metrizable y por lo tanto no admite una función continua estrictamente convexa (3.36). Obviamente K se inyecta en $(l^2(\Gamma), w^*)$ mediante la identidad. Además, la norma de $l^2(\Gamma)$ es estrictamente convexa pues es una norma Hilbertiana. Por el resultado anterior, se deduce que K admite una función semicontinua inferiormente estrictamente convexa. De lo anterior, se concluye que $(l^2(\Gamma), w^*) \notin \Xi_1$ pero un argumento similar muestra que $(l^2(\Gamma), w^*) \in \Xi_2$.

Corolario 3.42 *La inclusión $\Xi_1 \subset \Xi_2$ es estricta.*

Corolario 3.43 *Sea $K \in SC$. Entonces K es la envoltura convexa cerrada de sus puntos afínmente expuestos.*

Demostración. Sea $T : K \to (X^*, w^*)$ un homeomorfismo afín con X^* espacio de Banach dual estrictamente convexo. El conjunto $T(K)$ es la envoltura convexa de sus puntos w^*-expuestos (por la proposición 3.40) y entonces de sus puntos expuestos. Luego K es la envoltura convexa cerrada de sus puntos afínmente expuestos (si x^* expone a un punto expuesto x de $T(K)$, entonces $x^* \circ T$ expone afínmente a $T^{-1}(x)$ en K). $\square$

Corolario 3.44 *Todo evtlc de Ξ_2 tiene la PAE.*

Si X es un Banach tal que X^* es estrictamente convexo entonces (X^*, w^*) tiene la PAE.

Si el predual X de un espacio de Banach dual X^* estrictamente convexo es no separable entonces la bola dual no es metrizable. En este caso, X^* tiene la PAE pero $X^* \notin \Xi_1$.

Existen espacios que no están en Ξ_2 pero que tienen la PAE. Talagrand mostró que $X = (\mathcal{C}([0, \omega_1])^*, w^*)$ tiene la propiedad de Radon-Nikodym y a fortiori la PAE pero su bola no está en $SC(X)$.

3.4.3. Estabilidad de la clase Ξ_2 por producto

Proposición 3.45 *La clase Ξ_2 es estable por producto finito.*

Demostración. Es suficiente mostrar el resultado con dos evtlc $X_1, X_2 \in \Xi_2$. Sea K un conjunto compacto convexo no vacío de $X_1 \times X_2$. Consideremos las proyecciones canónicas Π_1 y Π_2. El conjunto $\Pi_1(K) \times \Pi_2(K)$ es compacto convexo no vacío en $X_1 \times X_2$. Luego, para $\mathrm{i} \in \{1, 2\}$, existe una función $f_{\mathrm{i}} : \Pi_{\mathrm{i}}(K) \to \mathbb{R}$ semicontinua inferiormente estrictamente convexa. Es fácil ver que $f_1 \circ \Pi_1 + f_2 \circ \Pi_2$ define une función semicontinua inferiormente estrictamente convexa en $\Pi_1(K) \times \Pi_2(K)$. Como $K \subset \Pi_1(K) \times \Pi_2(K)$, f restringida a K es una función semicontinua inferiormente estrictamente convexa, lo que concluye la demostración. $\square$

Corolario 3.46 *Sean $(X_1, ...X_n) \in \Xi_2^n$ para $n \in \mathbb{N}$. Entonces $X_1 \times ... \times X_n$ tiene la PAE. En particular, si $X \in \Xi_2$, $X \times \mathbb{R}$ tiene la PAE.*

3.5. $\mathcal{A}(K)$ y la PAE

Definición 3.47 *Sea K un conjunto compacto convexo no vacío. Sea F un subconjunto de $\mathcal{C}(K)$ y sea $T : F \to \mathbb{R}$. El operador T se dice positivo si $\forall f \in F \; f \geqslant 0 \implies T(f) \geqslant 0$. Eso equivale a decir que T es creciente. Lo notaremos $T \geqslant 0$.*

Proposición 3.48 *Sea K un conjunto compacto convexo no vacío. Sea $T : \mathcal{A}(K) \to \mathbb{R}$ un operador lineal positivo. Entonces T se extiende a un operador lineal positivo de $\mathcal{C}(K)$.*

Demostración. Por el lema de Zorn, existe un espacio vectorial maximal H y una extensión lineal positiva de T a H que seguiremos notando T. Veamos que $H = \mathcal{C}(K)$. Supongamos que existe $g \in \mathcal{C}(K) \setminus H$. Definamos los reales p y r de la siguiente forma:

$$p = \sup \left\{ \frac{T(h)}{t} \mid h \in H, \; t \in \mathbb{R}^{+^*}, \; h \leqslant tg \right\}$$

$$r = \inf \left\{ \frac{T(h)}{t} \mid h \in H, \; t \in \mathbb{R}^{+^*}, \; tg \leqslant h \right\}.$$

Es fácil ver que p y r son finitos y $p \leqslant r$. Sea $q \in [p,r]$. Definamos

$$\tilde{T}\colon \begin{cases} H \oplus \mathbb{R}g \longrightarrow \mathbb{R} \\ h + \lambda g \longmapsto T(h) + \lambda q \end{cases}.$$

El operador $\tilde{T}$ es una extensión lineal de T. Veamos que es positivo. Sean $h \in H$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $h + \lambda g \geqslant 0$. Debemos ver que $\tilde{T}(h + \lambda g) \geqslant 0$. Si $\lambda = 0$, se tiene que $T(h) \geqslant 0$ pues T es positivo. Supongamos ahora que $\lambda > 0$. Como $-h \leqslant \lambda g$, tenemos por definición de p que $\frac{T(-h)}{\lambda} \leqslant p \leqslant q$ y entonces $\tilde{T}(h + \lambda g) \geqslant 0$. Ahora si $\lambda < 0$, entonces $-\lambda g \leqslant h$ y, por definición de r, se tiene que $q \leqslant r \leqslant \frac{T(h)}{-\lambda}$ y así $\tilde{T}(h + \lambda g) \geqslant 0$. Luego $\tilde{T}$ es una extension lineal positiva de T, lo cual contradice la maximalidad de T. Entonces $H = \mathcal{C}(K)$. □

Definición 3.49 *Sea K un conjunto compacto convexo no vacío. Definimos:*

$$S_{\mathcal{A}(K)} = \{T : \mathcal{A}(K) \to \mathbb{R} \mid T \text{ lineal},\ T \geqslant 0,\ T(1) = 1\}$$
$$S_{\mathcal{C}(K)} = \{T : \mathcal{C}(K) \to \mathbb{R} \mid T \text{ lineal},\ T \geqslant 0,\ T(1) = 1\}.$$

Proposición 3.50 *Sea K un conjunto compacto convexo no vacío. Entonces $S_{\mathcal{C}(K)} \subset \mathcal{C}(K)^*$ y $S_{\mathcal{C}(K)}$ es w^*-compacto convexo.*

Demostración. Sea $T \in S_{\mathcal{C}(K)}$. Veamos que T es continuo. Sea g en la bola unitaria de $\mathcal{C}(K)$. Se tiene que $-1 \leqslant g \leqslant 1$ y entonces, por positividad, $|T(g)| \leqslant 1$. Así T es acotado y entonces es continuo. La convexidad de $S_{\mathcal{C}(K)}$ es obvia. Veamos que es w^*-compacto. Lo anterior muestra que si $T \in S_{\mathcal{C}(K)}$ entonces $||T|| \leqslant 1$ y por consiguiente, $S_{\mathcal{C}(K)} \subset B_{\mathcal{C}(K)^*}$ es acotado. Además, $S_{\mathcal{C}(K)}$ es claramente w^*-cerrado. Por el teorema de Alaoglu, $B_{\mathcal{C}(K)^*}$ es w^*-compacto y entonces $S_{\mathcal{C}(K)}$ también. □

Por el teorema de Riesz, se tiene que $S_{\mathcal{C}(K)} = \mathcal{M}_1(K)$.

Proposición 3.51 *Sea K un conjunto compacto convexo no vacío. Entonces $S_{\mathcal{A}(K)} \subset \mathcal{A}(K)^*$ y $S_{\mathcal{A}(K)}$ es w^*-compacto convexo.*

Demostración. La demostración sigue las mismas lineas que la demostración anterior y se omitirá. □

Teorema 3.52 *Sea K un conjunto compacto convexo no vacío de un evtlc X. Entonces la evaluación*

$$\mathrm{e}\colon \begin{cases} K \longrightarrow (S_{\mathcal{A}(K)}, w^*) \\ x \longmapsto \hat{x} \end{cases}$$

es un homeomorfismo afín.

Demostración. La aplicación e es claramente afín continua e inyectiva. Veamos que es sobreyectiva y por lo tanto será homemorfismo pues K es compacto. Definamos:

$$\rho\colon \begin{cases} S_{\mathcal{C}(K)} = \mathcal{M}_1(K) \longrightarrow (S_{\mathcal{A}(K)}, w^*) \\ T \longmapsto T_{|A(K)} \end{cases}.$$

Dado que cada operador lineal positivo de $\mathcal{A}(K)$ se extiende a un operador positivo de $\mathcal{C}(K)$, ρ es sobreyectiva. Sea $s \in \mathrm{Ext}(S_{\mathcal{A}(K)})$. El conjunto $\rho^{-1}(s)$ es extremo y cerrado (pues ρ es continua) de $\mathcal{M}_1(K)$ y entonces

$$\rho^{-1}(s) = \overline{\mathrm{co}}(\rho^{-1}(s) \cap \mathrm{Ext}(\mathcal{M}_1(K)))$$

(pues $\mathrm{Ext}(\rho^{-1}(s)) = \rho^{-1}(s) \cap \mathrm{Ext}(\mathcal{M}_1(K))$). Luego, existe $\lambda \in \rho^{-1}(s) \cap \mathrm{Ext}(\mathcal{M}_1(K))$. Sabemos que los puntos extremos de $\mathcal{M}_1(K)$ son las medidas de Dirac entonces existe $x \in K$ tal que $\lambda = \delta_x$. Así, para todo $f \in \mathcal{A}(K)$, se tiene que

$$s(f) = \delta_x(f) = f(x) = \mathrm{e}(x)(f)$$

y entonces $s = \mathrm{e}(x)$. Por lo tanto $\mathrm{Ext}(S_{\mathcal{A}(K)}) \subset \mathrm{e}(K)$. Además, $\mathrm{Ext}(S_{\mathcal{A}(K)}) \subset \mathrm{e}(K) \subset S_{\mathcal{A}(K)}$. De donde se concluye, tomando envoltura convexa cerrada, que $\mathrm{e}(K) = S_{\mathcal{A}(K)}$, i.e. e es sobreyectiva. $\square$

Se tiene que $\mathrm{Ext}(S_{\mathcal{A}(K)}) = \{\hat{x}\}_{x \in \mathrm{Ext}(K)}$ y $\mathrm{AExt}(S_{\mathcal{A}(K)}) = \{\hat{x}\}_{x \in \mathrm{AExt}(K)}$.

Corolario 3.53 *Sea X un evtlc. Entonces X tiene la PAE si y solo si para todo $K \subset X$ compacto convexo no vacío, $S_{\mathcal{A}(K)}$ es la envoltura convexa cerrada de sus puntos afínmente expuestos (con la topología w^*).*

Corolario 3.54 *Sea X un evtlc. Si para todo $K \subset X$ conjunto compacto convexo no vacío, $(\mathcal{A}(K)^*, w^*)$ tiene la PAE entonces X tiene la PAE.*

Demostración. Es directo del corolario anterior. $\square$

Conclusión

Esta tesis de magíster se inscribe en el área de la geometría de los espacios vectoriales topológicos localmente convexos. Su objetivo principal fue el estudio de los espacios con la propiedad de los puntos afínmente expuestos. Se establecieron propiedades de los espacios que tienen la PAE y se dieron varios criterios.

Se mostró también que un espacio de Banach E es un GDS si y solo si (E^*, w^*) tiene la PAE. La idea para llegar a este resultado fue mostrar que los puntos w^*-expuestos y afinmente expuestos coinciden en el caso de los conjuntos compactos convexos de norma-interior no vacío y concluir utilizando el teorema 1.19.

Luego de esta tesis, varios nuevos desafíos aparecen. En efecto, la estabilidad de la PAE bajo producto finito solo se pudo obtener en algunos casos particulares. Además, sería interesante saber si la PAE es equivalente al hecho de que cada compacto convexo no vacío tiene un punto afínmente expuesto (la imposiblidad de extender una función afín continua en ciertos casos es el nucleo de este problema). Queda también por determinar la clase de los evtlc que tienen la PAE. Dicho desafío se justifica por la existencia de ciertos evtlc que no están en Ξ_2 y que tienen esta propiedad. Si eso no se consigue, sería utíl ver cuando $(\mathcal{A}(K), w^*)$ tiene la PAE para poder aplicar el corolario 3.54.

Desde un punto de vista personal, esta tesis de magister me ha permitido adquirir conocimientos fundamentales en análisis funcional. Además, he podido tener una mejor visión de en qué consiste el trabajo de un investigador: el estudio de una nueva noción es algo realmente interesante ya que todo está por hacer pero, por otro lado, la falta de literatura complica mucho el trabajo dado que no hay metodología establecida para atacar los desafíos presentados.

Bibliografía

[1] L. Asimow. Extensions of continous affine functions. *Pacific Journal of Mathematics*, 35(1), 1970.

[2] M. Bachir. On the Krein-Milman-Ky Fan theorem for convex compact metrizable sets. *J. Math.*, 62(1-4):1–24, 2018.

[3] M. Bachir. Contributions à la géométrie des espaces de Banach et à l'optimisation. *Habilitation à diriger des recherches (Université Paris 1)*, décembre 2017.

[4] J. Diestel. *Geometry of Banach Spaces*, volume 485 Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[5] J. Diestel and J. J. Uhl. *Vector Measures.* Mathematical Surveys, USA, 1977.

[6] M Fabian. *Gâteaux Differentiability of Convex Functions and Topology: Weak Asplund Spaces.* Wiley-Interscience, 1997.

[7] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, and V. Zizler. *Banach space theory.* Springer, 2011.

[8] M. Fabian, V. Montesinos, and V. Zizler. Gul'ko, descriptive, and gruenhage compact spaces. *Real Academia de ciencias exactas, fisicas y naturales*, 104:201–220, 2010.

[9] K. R. Goodearl. *Partially Ordered Abelian Groups with Interpolation.* American Mathematical Society, USA, 1986.

[10] M. Hervé. Sur les représentations intégrales à l'aide des points extrémaux dans un ensemble compact convexe métrisable. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.*

[11] R. E. Jamison, R. C. O'Brien, and P. D. Taylor. On embedding a convex set into a locally convex topological vector space. *Pacific journal of mathematics*, 64(1), 1976.

[12] D. G. Larman and Phelps R. R. Gâteaux differentiability of convex functions on Banach spaces. *London Mathematical Society*, 20(1):115–127, 1979.

[13] I. E. Leonard and K. F. Taylor. Supremum norm differentiability. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 6(4):705–713, 1983.

[14] J. Lukes, J. Maly, I. Netuka, and J. Spurni. *Integral representation theory - Applications to convexity, Banach spaces and potential theory*, volume 35 Studies in Mathematics. de Gruyter, 2010.

[15] W. B. Moors and E. A. Reznichenko. Separable subspaces of affine function spaces on convex compact sets. *Topology and its applications*, 155:1306–1322, 2008.

[16] J. Orihuela, R. J. Smith, and S. Troyanski. Strictly convex norms and topology. *London Mathematical Society*, 104:197–222, 2012.

[17] R. Phelps. *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability.* Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition, 1989.

[18] R. Phelps. *Lectures on Choquet's Theorem.* Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition, 2001.

[19] H. Queffélec and C. Zuily. *Analyse pour l'agrégation.* Dunod, 2013.

[20] M. Raja, L. Garcia-Lirola, and J. Orihuela. Convex compact sets that admit a lower semicontinuous strictly convex function. *Journal of Convex Analysis*, (24):987–998, 2017.

[21] T. Rajba. New integral representations of nth order convex functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 379:736–747, 2011.

[22] W. Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill International Editions, 1967.

[23] X. Shen and L. Cheng. On the product of gâteaux differentiability locally convex spaces. *Acta Mathematica Scientia*, 25:395–400, 2005.

[24] R. J. Smith. Gruenhage compacta and strictly convex dual norms. *Mathematical Analysis and Applications*, 350:745–757, 2009.

[25] P. D. Taylor. The extension property for compact convex sets. *Israel Journal of Mathematics.*, 11:159–163, 1972.