



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE VALORES PROPIOS Y MEZCLA DÉBIL EN
TRANSFORMACIONES DE INTERCAMBIOS DE INTERVALOS Y SISTEMAS
GEOMÉTRICOS AFINES

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

FELIPE IGNACIO ARBULÚ LÓPEZ

PROFESOR GUÍA:
ALEJANDRO MAASS SEPÚLVEDA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
ARNALDO DOS REIS NOGUEIRA
JAIME SAN MARTÍN ARISTEGUI
MICHAEL HEINRICH SCHRAUDNER

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por CMM-Conicyt PIA AFB170001

SANTIAGO DE CHILE
2018

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
Y AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICA-
DAS.

POR: FELIPE IGNACIO ARBULÚ LÓPEZ

FECHA: 2018

PROF. GUÍA: SR. ALEJANDRO MAASS SEPÚLVEDA

CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE VALORES PROPIOS Y MEZCLA DÉBIL EN
TRANSFORMACIONES DE INTERCAMBIOS DE INTERVALOS Y SISTEMAS
GEOMÉTRICOS AFINES

Las transformaciones de intercambios de intervalos aparecen como aplicaciones de primer retorno de flujos lineales en superficies de traslación con cierto género $g \geq 1$, generalizando las rotaciones en el círculo. El estudio de las propiedades ergódicas de intercambios de intervalos y de ciertas dinámicas de suspensión correspondientes a flujos lineales en superficies de traslación y flujos en billares poligonales ha sido extenso en las últimas décadas. De particular interés ha sido el estudio de valores propios de estos sistemas, ya sean vistos desde una perspectiva medible o topológica [NR97], [AF07], [FZ11], [AD16]. Desde el punto de vista de dinámica simbólica, estos sistemas poseen representaciones como sistemas minimales de Cantor de rango topológico finito, *i.e.*, existe una extensión simbólica que puede representarse como un sistema de Bratteli-Vershik con un número de torres de Kakutani-Rohlin por nivel globalmente acotado. Con esta motivación, condiciones necesarias y suficientes para que un número complejo sea valor propio, ya sea medible o topológico, han sido propuestas desde el trabajo pionero de B. Host [Hos86], en donde se prueba que todo valor propio medible asociado a un sistema dinámico proveniente de una sustitución primitiva está siempre asociado a una función propia continua. Luego, condiciones necesarias y suficientes que caracterizan a los valores propios continuos y medibles en sistemas minimales de Cantor linealmente recurrentes fueron explicitadas en [CDHM03] y en [BDM05], posteriormente extendidas en [BDM10] y [DFM15] al contexto de sistemas minimales de Cantor de rango finito. Es en esta última clase de sistemas en donde se centra el estudio de esta tesis.

En la primera parte de este trabajo, proponemos una representación de Bratteli-Vershik para transformaciones de intercambios de intervalos construida a partir del algoritmo de Rauzy-Veech sobre la transformación original. Más generalmente, se propone una representación de Bratteli-Vershik de rango finito de shifts S -ádicos minimales. Estas representaciones son particularmente útiles para el estudio de valores propios de estos sistemas. Luego, exploramos como esta representación permite recuperar propiedades de mezcla débil en el caso de intercambios de tres intervalos. En un contexto más general, se propone parametrizar sistemas de Bratteli-Vershik por caminos infinitos dirigidos en un grafo dirigido finito, que llamaremos grafo de renormalización. Con suficientes parámetros, las propiedades de mezcla sobre el shift actuando en el espacio de caminos dirigidos infinitos en este grafo permiten abstraer un resultado de mezcla débil topológica, inspirados en el trabajo de A. Nogueira y D. Rudolph [NR97]. Extendemos dicho resultado a la mezcla débil de estos sistemas, siguiendo las ideas de A. Avila y G. Forni [AF07]. Finalmente, ilustramos como estos resultados son suficientes para asegurar la mezcla débil en generalizaciones de sistemas de intercambios de intervalos, más concretamente, en ciertas involuciones lineales [DN90] con una combinatoria específica.

Agradecimientos

Agradezco primeramente a mis padres José y Jovy por su apoyo incondicional en toda mi vida y ayudar enormemente a cumplir mis metas.

A las personas que hicieron de esta etapa mucho más grata y tuve la fortuna de conocer, agradezco especialmente a Enzo Aljovin, Matías Alvarado, Christopher Cabezas, Felipe Campos, Cristian González, David Hasson, Hernán Iriarte, José Palacios, Martín Ríos, Cristóbal Valenzuela y Francisco Venegas.

Doy también las gracias a las funcionarias y funcionarios del DIM, por su excelente voluntad y disposición en todo momento.

Es un agrado saber que en Chile hay una búsqueda creciente por hacer investigación matemática. Agradezco a los matemáticos y futuros matemáticos e ingenieros que tuve la oportunidad de conocer. A mi profesor guía Alejandro Maass, por su introducción en la investigación y en los temas desarrollados en esta memoria, a Daniel Coronel y Alexander Frank, a Rafael Larbarca por el apoyo brindado, a Rodolfo Gutiérrez-Romo y Ángel Pardo por los útiles consejos y discusiones.

Finalmente, agradezco al Centro de Modelamiento Matemático que a través de CMM-Conicyt PIA AFB170001 financiaron este trabajo.

Tabla de Contenido

Introducción	1
1. Preliminares	3
1.1. Definiciones básicas y resultados	4
1.2. Sistemas de Bratteli-Vershik	11
1.2.1. Diagramas de Bratteli	11
1.2.2. Diagramas de Bratteli ordenados y representaciones de Bratteli-Vershik	12
1.2.3. Particiones de Kakutani-Rokhlin para un sistema de Bratteli-Vershik	16
1.2.4. Medidas invariantes	17
1.3. Valores propios continuos de sistemas minimales de Cantor	17
1.3.1. La condición necesaria y suficiente	18
1.4. Valores propios medibles de sistemas minimales de Cantor	19
1.4.1. La condición necesaria	19
1.5. Ejemplos	21
1.5.1. Substituciones y shifts substitutivos de tipo Pisot	21
1.5.2. Mapeo cúbico de Arnoux-Yoccoz	23
1.6. Transformaciones de intercambio de intervalos	24
1.6.1. Algoritmo de inducción de Rauzy-Veech	26
1.6.2. La clase hiperelíptica	30
1.7. Superficies de traslación	31
1.7.1. Datos de suspensión sobre transformaciones de intercambio de intervalos	32
2. Representaciones de Bratteli-Vershik de t.i.i. y shifts S-ádicos minimales	34
2.1. Representación de Bratteli-Vershik de una t.i.i.	34
2.2. Mezcla débil en intercambios de tres intervalos	41
2.3. Representación de Bratteli-Vershik de shifts S -ádicos minimales	44
3. Renormalización y mezcla débil topológica	47
3.1. El grafo de renormalización	47
3.2. Mezcla débil topológica	51
3.3. Restricciones para la mezcla débil topológica	60
4. Exponentes de Lyapunov, propiedad de Pisot y mezcla débil	64
4.1. Exponentes de Lyapunov	64
4.2. La propiedad de Pisot	66
4.3. Mezcla débil	71

5. Mezcla débil en involuciones lineales	75
5.1. Involuciones lineales, flujos de semi-traslación y clases de Rauzy	75
5.1.1. Permutaciones generalizadas	75
5.1.2. Involuciones lineales	77
5.1.3. Algoritmo de inducción de Rauzy-Veech	78
5.2. Mezcla débil de involuciones lineales y flujos direccionales en ciertas permutaciones generalizadas	83
 Perspectivas	 92
 Bibliografía	 94

Introducción

En 1985 A. Vershik [Ver82] introdujo una dinámica en el espacio de caminos infinitos en un diagrama de Bratteli, la llamada transformación de Vershik, definida mediante la introducción de un orden lexicográfico en el conjunto de caminos infinitos del diagrama. Esta clase de sistemas es ahora conocida como sistemas de Bratteli-Vershik. En 1992 Herman, Putnam y Skau [HPS92], extendiendo el trabajo de A. Vershik, mostraron que todo sistema minimal de Cantor es topológicamente conjugado a un sistema de Bratteli-Vershik. Desde entonces, la teoría de los sistemas minimales de Cantor ha sido ampliamente estudiada a través de sus correspondientes representaciones de Bratteli-Vershik.

Por otra parte, la teoría espectral de sistemas dinámicos, en particular el estudio de valores propios de sistemas dinámicos topológicos, ya sean vistos desde una perspectiva medible o topológica, es un tópico fundamental en teoría ergódica. Este estudio permite entender las propiedades de mezcla y las caracterizaciones del factor de Kronecker y el factor equicontinuo maximal. De particular interés ha sido el estudio de valores propios y mezcla débil en sistemas de intercambio de intervalos, superficies de traslación y flujos en billares poligonales [NR97], [AF07], [FZ11], [AD16]. Desde el punto de vista de dinámica simbólica, muchos de estos sistemas poseen representaciones como sistemas minimales de Cantor de rango topológico finito, *i.e.*, existe una extensión simbólica que puede representarse como un sistema de Bratteli-Vershik con un número de torres de Kakutani-Rohlin por nivel globalmente acotado. Es entonces de particular interés encontrar y estudiar dichas representaciones.

Con esta motivación, condiciones necesarias y suficientes para que un número complejo sea valor propio de un sistema minimal de Cantor, ya sea medible o topológico han sido propuestas desde el trabajo pionero de B. Host [Hos86], en donde se prueba que todo valor propio medible asociado a un sistema dinámico proveniente de una substitución primitiva está siempre asociado a una función propia continua. Luego, condiciones necesarias y suficientes que caracterizan a los valores propios continuos y medibles en sistemas minimales de Cantor linealmente recurrentes fueron explicitadas en [CDHM03] y en [BDM05]. Estos resultados fueron posteriormente extendidos en [BDM10] y [DFM15] al contexto de sistemas minimales de Cantor de rango finito. Es en esta última clase de sistemas en donde se centra el estudio de esta tesis.

Esta tesis está organizada de la siguiente forma. En el Capítulo 1 se introducen primeramente los objetos y resultados básicos en Teoría Ergódica. Luego se introducen los sistemas de Bratteli-Vershik, enfatizando en el hecho que todo sistema minimal de Cantor es topológicamente conjugado a un sistema de Bratteli-Vershik. Dicha conjugación es dada explícitamente

mediante sucesiones de particiones en torres de Kakutani-Rohlin del sistema original. Luego exhibimos los principales resultados sobre la teoría espectral de sistemas de Bratteli-Vershik propuestos en [BDM10] y [DFM15], esto es, las condiciones necesarias y/o suficientes para que un número complejo sea valor propio medible o continuo de estos sistemas. Se incluye también una condición necesaria para que un número complejo sea valor propio medible en sistemas de Bratteli-Vershik de rango finito en donde las medidas de torres son globalmente proporcionales. Finalmente, introducimos los sistemas de intercambio de intervalos y flujos en superficies de traslación, mencionando sus principales propiedades ergódicas que motivan el estudio de las propiedades de mezcla en esta tesis. En el Capítulo 2 construimos explícitamente una representación de Bratteli-Vershik de la extensión simbólica de una transformación de intercambio de intervalos y más generalmente, de shifts S -ádicos minimales. Incluimos aplicaciones de esta construcción, dando una demostración del hecho que casi todo intercambio de tres intervalos es débilmente mezclador. En el Capítulo 3 introducimos un grafo dirigido finito, que llamamos grafo de renormalización, donde un camino infinito genérico en este grafo permite definir un sistema de Bratteli-Vershik a través de una asignación de sustituciones en cada arista dirigida. Introduciendo una medida de probabilidad de Markov en el espacio de caminos infinitos en este grafo y suficientes parámetros adicionales a las sustituciones, abstraemos un resultado de mezcla débil topológica para la mayoría de los sistemas parametrizados de esta forma. En el Capítulo 4 estudiamos las propiedades asintóticas del cociclo natural que se define en el espacio de caminos infinitos en un grafo de renormalización a través de los exponentes de Lyapunov. Añadiendo la hipótesis de positividad del segundo exponente, mejoramos la conclusión obtenida en el resultado principal del capítulo previo, probando mezcla débil para la mayoría de estos sistemas. Mostramos que esta hipótesis no es restrictiva comparándola con la propiedad de Pisot, esto es, pedir que el segundo exponente sea negativo. En este caso se muestra que los candidatos a valores propios continuos para la mayoría de estos sistemas son exactamente el grupo aditivo de valores propios continuos, identificando el factor equicontinuo maximal bajo esta hipótesis. Finalmente exhibimos en el Capítulo 5 el hecho que los resultados obtenidos en los capítulos anteriores permiten probar mezcla débil en ciertas representaciones de sistemas correspondientes a generalizaciones de intercambios de intervalos, las llamadas involuciones lineales (y su correspondiente versión geométrica, los llamados flujos de semi-traslación). Mostramos ejemplos concretos de combinatorias de involuciones lineales donde es posible abstraer dicho resultado.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentaremos los conceptos básicos de la Teoría Ergódica y, en particular, enfocamos nuestro estudio a la clase de la dinámica de un homeomorfismo minimal en un espacio de Cantor. Comenzamos dando algunas definiciones y resultados generales básicos de la teoría de sistemas dinámicos, con la intención de introducir el vocabulario y la notación que se utilizarán. Se enfatizará en la dinámica en espacios de shift, los cuales históricamente han sido de vital importancia para entender la dinámica a través de codificaciones y constituyen un objeto central en dinámica simbólica [LM95]. Luego, presentamos los diagramas de Bratteli ordenados y la dinámica de la aplicación de Vershik asociada a dichos diagramas, actuando en el espacio de caminos infinitos del diagrama. Esto proporciona sistemas dinámicos explícitos, los llamados sistemas de Bratteli-Vershik. Estos sistemas son de importancia en el estudio de la dinámica en espacios de Cantor, ya que cada sistema minimal de Cantor es conjugado topológicamente a cierto sistema de Bratteli-Vershik. Proporcionamos una demostración, enfatizando el hecho de que la conjugación topológica puede construirse explícitamente dada una descomposición particular de torres de Kakutani-Rokhlin del sistema original. Luego fortalecemos este resultado al mostrar que cualquier sistema minimal de Cantor puede ser representado por un sistema de Bratteli-Vershik con ciertas propiedades adicionales. Estas propiedades son relevantes en la formulación de una condición necesaria y suficiente de un número complejo para ser un valor propio (ya sea topológico o medible) de una amplia clase de sistemas de Bratteli-Vershik, llamada de rango finito, siendo el estudio de valores propios en esta clase el tema central de esta tesis. Terminamos este capítulo mencionando las condiciones necesarias y suficientes para que un valor $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$ sea un valor propio continuo de un sistema minimal de Cantor dependiendo de su representación de Bratteli-Vershik.

Nos referimos a [Wal82] para exhibir los resultados de la teoría ergódica y [HPS92] y [Dur10] para los resultados en la teoría de los sistemas minimales de Cantor y las representaciones de Bratteli-Vershik de tales sistemas.

1.1. Definiciones básicas y resultados

En lo que sigue denotaremos por $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ al conjunto de los enteros positivos, por $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ al conjunto de los enteros no negativos y por \mathbb{Z} al conjunto de enteros. Para $n, m \geq 1$ diremos que una matriz $M \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ es positiva si todos sus coeficientes son estrictamente positivos, y denotaremos esto por $M > 0$. Similarmente, diremos que una matriz $M \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ es no negativa si todos sus coeficientes son no negativos, y denotaremos esto por $M \geq 0$. En particular, se considera el caso de vectores positivos y de vectores no negativos. Denotamos por $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x > 0\}$ al cono de vectores positivos y por $\mathbb{R}_{\geq 0}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$ al cono de vectores no negativos. Para una matriz M a coeficientes reales, denotaremos por $r(M)$ a su rango.

Empezamos introduciendo la noción de un sistema dinámico topológico:

Definición 1.1 *Un sistema dinámico topológico es un par (X, T) , donde X es un espacio métrico compacto no vacío y $T : X \rightarrow X$ es una función continua. Nos referiremos al conjunto X como espacio de fase del sistema y a T como la dinámica del sistema.*

En general, consideraremos sistemas dinámicos con propiedades adicionales. Concentraremos nuestra atención a sistemas en donde $T : X \rightarrow X$ es un homeomorfismo y nos referiremos a tales sistemas como sistemas dinámicos invertibles. En este contexto introduciremos las siguientes definiciones acerca de órbitas y de órbitas positivas de puntos:

Definición 1.2 *Sea (X, T) un sistema dinámico invertible y sea $x \in X$. La órbita de x mediante T es definida como el conjunto:*

$$\mathcal{O}_T(x) = \{T^m x : m \in \mathbb{Z}\}.$$

Similarmente, la órbita positiva de x mediante T es definida como el conjunto:

$$\mathcal{O}_T^+(x) = \{T^m x : m \in \mathbb{N}_0\}$$

En esta tesis se trabajará casi exclusivamente con sistemas dinámicos invertibles que satisfacen la hipótesis de minimalidad:

Definición 1.3 *Sea (X, T) un sistema dinámico invertible. Decimos que el sistema (o que el homeomorfismo T si el contexto es claro) es minimal si la órbita de cualquier punto es densa en X , i.e.,*

$$\forall x \in X : \overline{\mathcal{O}_T(x)} = X.$$

Decimos que el sistema (o que el homeomorfismo T si el contexto es claro) es positivamente minimal si la órbita positiva de cualquier punto es densa en X , i.e.,

$$\forall x \in X : \overline{\mathcal{O}_T^+(x)} = X.$$

La compacidad del espacio X nos da una equivalencia entre las propiedades de minimalidad previas:

Proposición 1.4 *Sea (X, T) un sistema dinámico invertible (siendo X compacto). Entonces (X, T) es minimal si y solo si es positivamente minimal.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que si el sistema es positivamente minimal entonces es minimal. Si ahora el sistema es minimal, sea U un abierto no vacío arbitrario en X . Probaremos que la órbita positiva de cualquier punto intersecta a U , esto equivale a $X = \bigcup_{m \in \mathbb{N}_0} T^{-m}(U)$. Como el sistema es minimal, tenemos $X = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} T^{-m}(U)$ y por compacidad, existe $m_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $X = \bigcup_{m=-m_0}^{m_0} T^{-m}(U)$. Entonces $X = T^{-m_0}(X) = \bigcup_{m=0}^{2m_0} T^{-m}(U)$, como se quería demostrar. \square

Trabajaremos específicamente con sistemas en donde el espacio de fase es un espacio topológico de Cantor:

Definición 1.5 *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un espacio de Cantor si es no vacío, compacto, Hausdorff, perfecto (i.e., no posee puntos aislados) y que es 0-dimensional (i.e., tiene una base numerable de conjuntos clopens, que son a la vez abiertos y cerrados de su topología).*

Ahora describimos la clase principal de sistemas dinámicos que se encuentran en esta tesis:

Definición 1.6 *Sea (X, T) un sistema dinámico tal que X es un espacio de Cantor y T es un homeomorfismo minimal. Entonces (X, T) se dice un sistema minimal de Cantor.*

Dos ejemplos de espacios de Cantor son el conjunto de Cantor clásico en la recta real y el producto infinito numerable del espacio discreto de dos puntos, $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Pondremos atención a una modificación de este último ejemplo e introduciremos dinámica en estos espacios:

Definición 1.7 *Se considera \mathcal{A} un conjunto finito, al cual llamaremos alfabeto. Se toma el espacio topológico $X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, en donde dotamos a \mathcal{A} de la topología discreta. Por el teorema de Tychonoff, X es un espacio topológico compacto. Se define el shift por la izquierda a la aplicación $\sigma : X \rightarrow X$ que envía $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X$ a $\sigma(x) = (x_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$, en donde denotamos $x_n = x(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Es sencillo ver que el mapeo $\sigma : X \rightarrow X$ es un homeomorfismo, y que el par (X, σ) es un sistema dinámico, al cual nos referiremos como el espacio de fullshift sobre el alfabeto \mathcal{A} . Si $Y \subseteq X$ es un conjunto cerrado que es shift-invariante, esto es $\sigma(Y) \subseteq Y$, entonces $(Y, \sigma|_Y)$ es un sistema dinámico. Se denotará usualmente σ en lugar de $\sigma|_Y$ si el contexto es claro. Tales sistemas dinámicos se dirán subshifts o espacios de shift sobre el alfabeto \mathcal{A} .*

Es directo ver que el espacio de fase del sistema (X, σ) es compacto, Hausdorff y 0-dimensional. Más aún, no es difícil chequear que si (X, σ) es minimal y tal que $|X| = +\infty$, entonces X es también un espacio perfecto. Se sigue que todo subshift minimal (X, σ) con $|X| = +\infty$ es un sistema minimal de Cantor. En lo que sigue profundizaremos el estudio de los espacios de shift. Nos referimos a [LM95] para más resultados y teoría elemental en dinámica simbólica.

Sea \mathcal{A} un alfabeto finito. Para $n \in \mathbb{N}_0$, denotamos por \mathcal{A}^n al conjunto de palabras de largo n , siendo ε la palabra vacía. También escribiremos $\mathcal{A}^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{A}^n$ para el conjunto de palabras

finitas sobre \mathcal{A} y $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}^* \setminus \{\varepsilon\}$ para el conjunto de palabras no vacías sobre \mathcal{A} . Para una palabra arbitraria $\omega = \omega_0\omega_1 \dots \omega_{n-1}$, en donde $\omega_i \in \mathcal{A}$, $\forall 0 \leq i \leq n-1$, denotamos por $|\omega|$ al largo de la palabra. Si $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y $i, j \in \mathbb{Z}$ con $i < j$, denotaremos $x_{[i,j]} = x_i x_{i+1} \dots x_{j-1}$. El cilindro asociado con una palabra $\omega \in \mathcal{A}^n$ y $k \in \mathbb{Z}$ está dado por:

$${}_k[\omega] = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : x_{k+i} = \omega_i, \forall 0 \leq i \leq n-1\}.$$

La familia de los cilindros es una base para la topología de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, y de hecho es un π -sistema generador para la σ -álgebra Boreliana de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. El mismo resultado es cierto para espacios de shift arbitrarios considerando la restricción de los cilindros a dichos espacios. Si $\omega, \omega' \in \mathcal{A}^+$ y $\omega' = p\omega s$ para ciertos $p, s \in \mathcal{A}^*$, decimos que ω es un *factor* de ω' .

Ahora introduciremos las nociones de conjugación topológica y de factor topológico entre sistemas dinámicos:

Definición 1.8 Sean (X, T) e (Y, S) dos sistemas dinámicos. Suponga que exista una función continua y sobreyectiva $\pi : X \rightarrow Y$ que conmuta con la dinámica de los sistemas, i.e., $S \circ \pi = \pi \circ T$. En este caso decimos que π es un factor entre los sistemas (X, T) e (Y, S) , que (Y, S) es un factor topológico de (X, T) mediante π y que (X, T) es una extensión topológica de (Y, S) a través de π . Anotamos $\pi : (X, T) \rightarrow (Y, S)$ para enfatizar el hecho que π es un factor entre los sistemas (X, T) e (Y, S) . Si π es un homeomorfismo, decimos que π es una conjugación, y que (X, T) e (Y, S) son sistemas topológicamente conjugados.

Se dice que una propiedad de los sistemas dinámicos es una invariante de conjugación topológica si cada vez que un sistema dinámico dado tiene esta propiedad, entonces cada sistema dinámico topológicamente conjugado debe tener también dicha propiedad. Es sencillo comprobar que la propiedad de ser un sistema minimal de Cantor es una invariante de conjugación topológica. Otro ejemplo de un invariante de conjugación topológica es la propiedad de ser únicamente ergódico, propiedad que se tratará detalladamente más adelante.

Introduciremos ahora las nociones de medidas invariantes y de medidas ergódicas de sistemas dinámicos. Siempre nos referiremos a medidas borelianas cuando hablamos de medidas de estos sistemas. Comenzamos dando la definición de medidas invariantes y de medidas ergódicas:

Definición 1.9 Sea (X, T) un sistema dinámico y considere $\mathcal{B}(X)$ la σ -álgebra de Borel de X . Sea μ una medida boreliana definida en X . Decimos que μ es una medida invariante de (X, T) , o que μ es T -invariante si:

$$\mu(A) = \mu(T^{-1}A), \forall A \in \mathcal{B}(X).$$

Si T es invertible, esto equivale a:

$$\mu(A) = \mu(TA), \forall A \in \mathcal{B}(X).$$

Decimos que la medida μ es ergódica si es T -invariante y

$$\mu(A \Delta T^{-1}A) = 0 \text{ para } A \in \mathcal{B}(X), \text{ entonces } \mu(A) \in \{0, 1\}.$$

Denotamos $\mathcal{M}(X, T)$ al conjunto de las medidas de probabilidad invariantes de (X, T) , mientras que el conjunto de todas las medidas de probabilidad ergódicas de (X, T) es denotado por $\mathcal{E}(X, T)$.

El siguiente resultado clásico se debe a N. Kryloff y N. Bogoliouboff:

Teorema 1.10 *Sea (X, T) un sistema dinámico (en donde el espacio de fase X es compacto). Entonces $\mathcal{M}(X, T) \neq \emptyset$.*

También recordamos los resultados básicos sobre los conjuntos $\mathcal{M}(X, T)$ y $\mathcal{E}(X, T)$:

Teorema 1.11 *Sea (X, T) un sistema dinámico. Entonces $\mathcal{M}(X, T)$ es un convexo que es un conjunto débil-* compacto de $\mathcal{C}(X)^*$, el espacio dual topológico del conjunto de funciones continuas a valores complejos definidas sobre X . Más aún, el conjunto $\mathcal{E}(X, T)$ corresponde al conjunto de puntos extremos de $\mathcal{M}(X, T)$. Por el teorema de Krein-Milman, esto implica que $\mathcal{M}(X, T)$ es la envoltura convexa cerrada débil-* de $\mathcal{E}(X, T)$.*

Introduzcamos dos nuevas definiciones relacionadas con el cardinal del conjunto $\mathcal{E}(X, T)$:

Definición 1.12 *Sea (X, T) un sistema dinámico. Decimos que (X, T) es finitamente ergódico si $\mathcal{E}(X, T)$ es un conjunto finito. Decimos que (X, T) es únicamente ergódico si $|\mathcal{E}(X, T)| = 1$. Por el Teorema 1.10, esta última propiedad equivale a $|\mathcal{M}(X, T)| = 1$.*

Ahora introducimos el concepto de pushforward de una medida y de sistemas dinámicos medibles, junto con las propiedades de mezcla y mezcla débil:

Definición 1.13 *Sean (X, \mathcal{B}_X) e (Y, \mathcal{B}_Y) dos espacios medibles y sea μ una medida definida en (X, \mathcal{B}_X) . Considere una función medible $\pi : X \rightarrow Y$. Definimos el pushforward de la medida μ mediante π como la medida $\pi_*\mu$ definida por $\pi_*\mu(B) = \mu(\pi^{-1}(B))$, $\forall B \in \mathcal{B}_Y$.*

Notar que el pushforward de una medida de probabilidad invariante mediante un factor de sistemas dinámicos es también una medida de probabilidad invariante en el espacio correspondiente:

Proposición 1.14 *Sean (X, T) e (Y, S) sistemas dinámicos y sea $\pi : (X, T) \rightarrow (Y, S)$ un factor entre los sistemas. Considere $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$, entonces $\pi_*\mu \in \mathcal{M}(Y, S)$.*

Definición 1.15 *Un sistema dinámico medible es una tupla $(X, \mathcal{B}_X, \mu, T)$, en donde (X, \mathcal{B}_X, μ) es un espacio de medida y $T : X \rightarrow X$ es una función medible que es μ -invariante.*

Similar a las definiciones previas sobre sistemas dinámicos topológicos, introducimos las nociones de factor y de conjugación entre sistemas dinámicos medibles:

Definición 1.16 *Sean $(X, \mathcal{B}_X, \mu, T)$ e $(Y, \mathcal{B}_Y, \nu, S)$ dos sistemas dinámicos medibles. Suponga que exista una función medible y sobreyectiva $\pi : X \rightarrow Y$ que conmuta con la dinámica de los sistemas, i.e., $S \circ \pi = \pi \circ T$ y es tal que $\pi_*\mu = \nu$. En este caso decimos que π es un factor entre los sistemas dinámicos medibles $(X, \mathcal{B}_X, \mu, T)$ e $(Y, \mathcal{B}_Y, \nu, S)$, que $(Y, \mathcal{B}_Y, \nu, S)$ es*

un factor de $(X, \mathcal{B}_X, \mu, T)$ mediante π y que $(X, \mathcal{B}_X, \mu, T)$ es una extensión de $(Y, \mathcal{B}_Y, \nu, S)$ mediante π . Si π es invertible con inversa medible, decimos que π es una conjugación, y que $(X, \mathcal{B}_X, \mu, T)$ e $(Y, \mathcal{B}_Y, \nu, S)$ son sistemas dinámicos medibles conjugados.

Las siguientes propiedades ergódicas definen nuevas nociones de “mezcla” sobre un sistema dinámico medible, más fuertes que la ergodicidad. Su formulación es de interés central en esta tesis, así como su caracterización espectral que será formulada más adelante.

Definición 1.17 Sea $(X, \mathcal{B}_X, \mu, T)$ un sistema dinámico medible.

1. El sistema se dice débilmente mezclador si para cada par de conjuntos medibles $A, B \in \mathcal{B}_X$ tenemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\mu(T^{-n}A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0.$$

2. El sistema se dice mezclador (o fuertemente mezclador) si para cada par de conjuntos medibles $A, B \in \mathcal{B}_X$ tenemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Notar que en particular un sistema mezclador es débilmente mezclador, y todo sistema débilmente mezclador es necesariamente ergódico (para una misma medida invariante).

Para la ergodicidad y única ergodicidad de un sistema, usualmente es conveniente utilizar caracterizaciones equivalentes de tales propiedades. Estas serán dadas a continuación:

Teorema 1.18 Sea $(X, \mathcal{B}_X, \mu, T)$ un sistema dinámico medible. Las siguientes propiedades son equivalentes:

1. El sistema $(X, \mathcal{B}_X, \mu, T)$ es ergódico.
2. Para cada función medible $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f = f \circ T$ (i.e., f es T -invariante) es constante, μ -c.t.p.
3. Para cada función $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ en $L^2(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ tenemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n = \int f d\mu,$$

en donde la convergencia es en $L^2(X, \mathcal{B}_X, \mu)$.

4. Para cada par de conjuntos medibles $A, B \in \mathcal{B}_X$ tenemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Teorema 1.19 Sea (X, T) un sistema dinámico topológico (en donde el espacio de fase X es compacto). Las siguientes propiedades son equivalentes:

1. El sistema (X, T) es únicamente ergódico.

2. Para cada función continua $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ el promedio

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n$$

converge uniformemente a una constante si $N \rightarrow \infty$.

3. Existe una medida T -invariante μ tal que para cualquier función continua $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ y cada $x \in X$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n(x) = \int f d\mu.$$

Definición 1.20 Dado un sistema dinámico medible $(X, \mathcal{B}_X, \mu, T)$, definimos el operador de Koopman mediante

$$\begin{aligned} U_T : L^2(X, \mathcal{B}_X, \mu) &\rightarrow L^2(X, \mathcal{B}_X, \mu) \\ f &\mapsto f \circ T. \end{aligned}$$

Este operador resulta ser un operador unitario en el espacio de Hilbert $L^2(X, \mathcal{B}_X, \mu, T)$. Diremos que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio del sistema dinámico medible $(X, \mathcal{B}_X, \mu, T)$ (o que λ es un valor propio del sistema (X, T) con respecto a μ) si existe $f \in L^2(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ tal que $f \circ T = \lambda f$, μ -c.t.p, *i.e.* si λ es un valor propio del operador de Koopman, siendo f una función propia medible asociada a λ . De igual manera, decimos que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio continuo del sistema (X, T) si existe una función $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ continua que satisface $f \circ T = \lambda f$. Decimos que el sistema dinámico topológico (X, T) es topológicamente débilmente mezclador si no posee funciones propias continuas no constantes. Si el sistema (X, T, μ) (respectivamente (X, T)) es ergódico (respectivamente minimal), entonces todo valor propio tiene valor absoluto 1 y toda función propia medible (respectivamente continua) tiene valor absoluto constante μ -c.t.p. Es claro que todo valor propio continuo es también valor propio medible. Por lo anterior, cuando el sistema $(X, \mathcal{B}_X, \mu, T)$ es ergódico o cuando (X, T) es minimal, escribiremos $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$ con $\alpha \in [0, 1)$ para denotar a los valores propios. Si $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$ es un valor propio medible o continuo del sistema con α irracional (respectivamente racional), diremos que α es un valor propio irracional (respectivamente racional).

Definición 1.21 Decimos que un sistema dinámico medible $(X, \mathcal{B}_X, \mu, T)$ tiene espectro continuo si $\lambda = 1$ es el único valor propio medible con respecto a μ y las únicas funciones propias medibles son las constantes, equivalentemente, si $\lambda = 1$ es el único valor propio medible y el sistema es ergódico.

Una caracterización importante de la mezcla débil de un sistema medible invertible $(X, \mathcal{B}_X, \mu, T)$ es la siguiente:

Proposición 1.22 Sea $(X, \mathcal{B}_X, \mu, T)$ un sistema dinámico medible e invertible. Entonces el sistema es débilmente mezclador si y solamente si tiene espectro continuo.

Para finalizar esta sección, definiremos ciertos espacios de shift, llamados shifts de aristas, en donde podemos asociar medidas invariantes para el shift por la izquierda actuando en

tales espacios que serán de especial interés en el Capítulo 3. Tales medidas corresponden a las medidas de probabilidad de Markov. Recordaremos previamente el teorema de Perron-Frobenius que es útil para definir dichos objetos:

Teorema 1.23 (Perron-Frobenius, [Sen06]) *Considere $d \geq 2$ y sea A una matriz real de $d \times d$ con coeficientes no negativos que es primitiva, es decir, existe $n \geq 1$ tal que $A^n > 0$. Entonces:*

1. *Existe un valor propio λ que es real y positivo y tal que si $\lambda' \in \mathbb{C}$ es un valor propio de A distinto a λ , entonces $|\lambda'| < \lambda$.*
2. *Existen únicos vectores propios positivos por la derecha y por la izquierda asociados a λ , salvo multiplicación por constantes. Esto es, existe un vector columna $v = (v_1, \dots, v_d)^\top$ y un vector fila $u = (u_1, \dots, u_d)$ con $u_i, v_i > 0$, $\forall 1 \leq i \leq d$, y tales que $Av = \lambda v$, $uA = \lambda u$.*
3. *λ es de multiplicidad algebraica y geométrica 1*

Al valor λ lo llamamos valor propio de Perron-Frobenius de A .

Una matriz P de $d \times d$ se dice *estocástica* si es no negativa y satisface $\sum_{j=1}^d P_{i,j} = 1$, para cada $1 \leq i \leq d$. Si P es primitiva, su valor propio de Perron-Frobenius es $\lambda = 1$ y su vector propio por la derecha asociado es $(1, 1, \dots, 1)^\top$, como puede verse directamente de la definición.

El teorema de Perron-Frobenius permite construir medidas de probabilidad invariantes para el shift de aristas de un grafo, que corresponden a las medidas de probabilidad de Markov:

Teorema 1.24 *Considere $G = (V, E)$ un grafo dirigido que es fuertemente conexo con d vértices, y sean $s, r : E \rightarrow V$ los mapeos de source y range. Sea A_G la matriz de incidencia de G , i.e., $(A_G)_{i,j} = \#\{e \in E : s(e) = i, r(e) = j\}$ para cada $i, j \in V$ y sea*

$$E_G = \{(\gamma_n)_{n \geq 0} \in E^{\mathbb{N}_0} : r(\gamma_n) = s(\gamma_{n+1}), \forall n \geq 0\}.$$

Si σ denota al shift por la izquierda en $E^{\mathbb{N}_0}$, el espacio E_G es σ -invariante y diremos que (E_G, σ) es el shift de aristas dado por G . Suponga que una matriz estocástica P y la matriz de incidencia A_G de G son compatibles: $P_{i,j} > 0$ si $(A_G)_{i,j} > 0$. Si $p = (p_1, \dots, p_d)$ es el vector propio de Perron-Frobenius por la izquierda de P con $\sum_{i=1}^d p_i = 1$, se define una medida de probabilidad μ_P en los cilindros de $(E_G, \mathcal{B}(E_G))$ mediante

$$\mu_P([{}_0\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_l]) = p_{s(\gamma_0)} P_{\gamma_0} \cdot P_{\gamma_1} \dots \cdot P_{\gamma_l},$$

para cualquier camino finito dirigido $\gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_l$ en G , con $P_e = P_{s(e), r(e)}$, $\forall e \in E$.

Esta medida de probabilidad, llamada medida de Markov de (E_G, σ) con matriz P es σ -invariante y además μ_P es ergódica para (E_G, σ) si y solamente si la matriz P es irreducible, esto es, si para cada $1 \leq i, j \leq d$ existe $n \geq 1$ con $P_{i,j}^n > 0$.

Un ejemplo importante de una medida de probabilidad de Markov es la medida de Parry:

Definición 1.25 *Considere $G = (V, E)$ un grafo dirigido que es fuertemente conexo con d vértices, siendo A_G su matriz de incidencia. Considere λ el valor propio de Perron-Frobenius*

de A_G y sean u, v los vectores propios de Perron-Frobenius positivos por la izquierda y por la derecha asociados a λ , normalizados de forma que $\sum_{1 \leq i \leq d} u_i \cdot v_i = 1$. Defina la matriz estocástica P de $d \times d$ mediante:

$$P_{i,j} = \frac{(A_G)_{i,j} v_j}{\lambda v_i}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq d.$$

El vector propio de Perron-Frobenius por la izquierda normalizado de P es

$$p_i = u_i v_i, \quad \forall 1 \leq i \leq d.$$

A la medida de probabilidad de Markov de (E_G, σ) con matriz P la llamaremos medida de Parry.

Proposición 1.26 ([Wal82]) *La medida de Parry es la medida de probabilidad de máxima entropía para el sistema (E_G, σ) : Si λ es el valor propio de Perron de A_G , μ_P la medida de Parry y μ es una medida de probabilidad invariante de (E_G, σ) , entonces*

$$\begin{aligned} h_\mu(E_G, \sigma) &\leq \log(\lambda), \\ h_{\mu_P}(E_G, \sigma) &= \log(\lambda). \end{aligned}$$

1.2. Sistemas de Bratteli-Vershik

Introduciremos una clase especial de grafos dirigidos llamados diagramas de Bratteli, que serán el objeto principal de estudio en la dinámica de los sistemas minimales de Cantor y en particular en la caracterización de valores propios (ya sea continuos o medibles) en tales sistemas.

1.2.1. Diagramas de Bratteli

Definición 1.27 *Un diagrama de Bratteli es un grafo dirigido infinito $B = (V, E)$, en donde V es el conjunto de vértices y E es el conjunto de aristas. Estos conjuntos están particionados en subconjuntos finitos y no vacíos de la forma $V = V_0 \cup V_1 \cup \dots$, $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots$, siendo $V_0 = \{v_0\}$ un vértice distinguido. Las direcciones de las aristas están dadas por los mapeos de source y range $s, r : E \rightarrow V$, i.e., si $e \in E$ conecta los vértices $u \in V_{n-1}$ y $v \in V_n$ escribimos $s(e) = u$, $r(e) = v$. Estos mapeos son tales que $r(E_n) \subseteq V_n$, $s(E_n) \subseteq V_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $s^{-1}(\{v\}) \neq \emptyset$, $r^{-1}(\{v'\}) \neq \emptyset$, $\forall v \in V, v' \in V \setminus V_0$. Para cada $n \geq 1$ denotamos $\#V_n = d_n$ y para simplificar escribimos $V_n = \{1, 2, \dots, d_n\}$.*

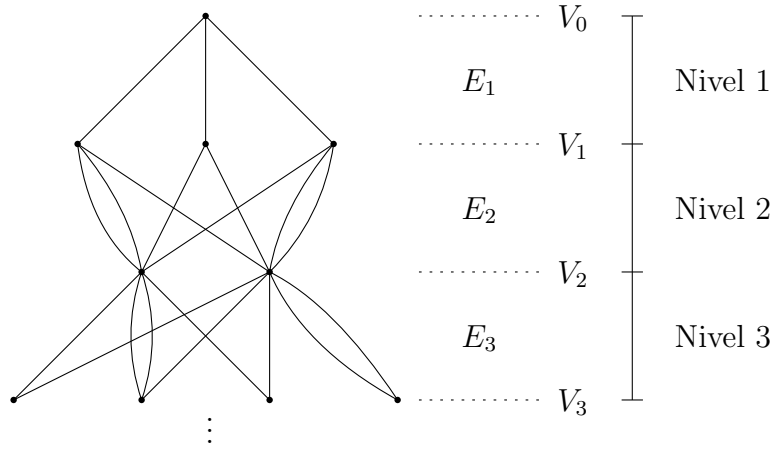


Figura 1.1: Primeros tres niveles de un diagrama de Bratteli.

Si $n \geq 1$ es fijo, llamamos nivel n del diagrama al subgrafo que consiste de los vértices $V_{n-1} \cup V_n$ y las aristas de E_n entre esos vértices. Al nivel 1 lo llamaremos *hat* del diagrama de Bratteli. Notar que un nivel n queda determinado por las aristas de E_n que unen vértices entre V_{n-1} y V_n , describimos estas aristas usando una matriz de incidencia M_n de $|V_{n-1}| \times |V_n|$, siendo su coeficiente (u, v) la cantidad de aristas entre $u \in V_{n-1}$ y $v \in V_n$. Denotamos también $P_n = M_2 \dots M_n$, con la convención que $P_1 = \text{Id}$, la matriz identidad de dimensión $|V_1|$. El número de caminos dirigidos que unen $v_0 \in V_0$ con un vértice $v \in V_n$ está dada por la coordenada v del vector fila de alturas $h_n = (h_n(u) : u \in V_n) \in \mathbb{N}^{V_n}$, luego $h_1 = M_1$ y $h_n = h_1 P_n$. Consideramos también varios niveles al mismo tiempo: para enteros $0 \leq m < n$ denotamos por $E_{m,n}$ al conjunto de todos los caminos dirigidos en el diagrama que unen vértices de V_m con vértices de V_n . Definimos las matrices $P_{m,n} = M_{m+1} \dots M_n$, con la convención que $P_{n,n} = \text{Id}$, la matriz identidad de dimensión $|V_n|$. Claramente, el coeficiente $P_{m,n}(u, v)$ de $P_{m,n}$ es el número de caminos de $E_{m,n}$ que unen el vértice $u \in V_m$ con el vértice $v \in V_n$, y se verifica que $h_n = h_m P_{m,n}$. Un diagrama de Bratteli $B = (V, E)$ se dice *simple* si para cada $m \geq 1$ existe $n > m$ tal que cada par de vértices $u \in V_m, v \in V_n$ esté conectado por un camino dirigido del diagrama, *i.e.*, $P_{m,n} > 0$.

1.2.2. Diagramas de Bratteli ordenados y representaciones de Bratteli-Vershik

Definición 1.28 *Un diagrama de Bratteli ordenado es una tripleta $B = (V, E, \preceq)$ en donde (V, E) es un diagrama de Bratteli y en donde \preceq es un orden parcial en E tales que dos aristas $e, e' \in E$ son comparables si y solamente si $r(e) = r(e')$. Este orden parcial define naturalmente aristas minimales y maximales y adicionalmente induce un orden parcial en el conjunto de caminos $E_{m,n}$ para $0 \leq m < n$: $(e_{m+1}, \dots, e_n) \preceq (f_{m+1}, \dots, f_n)$ si y solamente si existe $m + 1 \leq i \leq n$ tal que $e_i \preceq f_i$ y $e_j = f_j$, $\forall i < j \leq n$.*

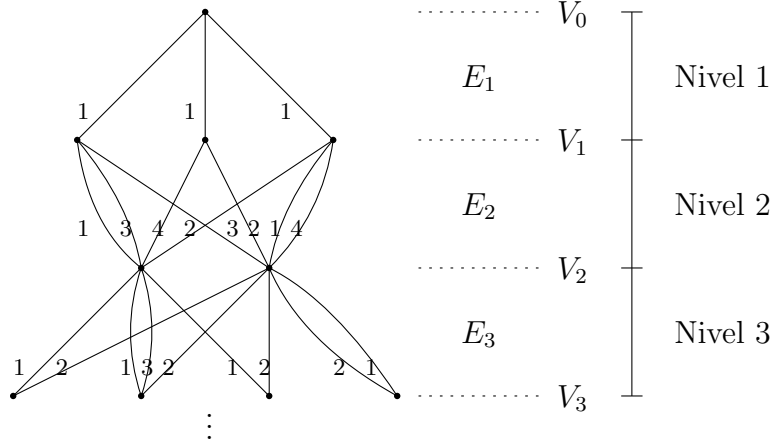


Figura 1.2: Primeros tres niveles de un diagrama de Bratteli ordenado con sus respectivos ordenes locales.

Dada una sucesión estrictamente creciente de enteros $(n_k)_{k \geq 0}$ con $n_0 = 0$, uno define la *contracción* o *telescoping* del diagrama ordenado $B = (V, E, \preceq)$ con respecto a $(n_k)_{k \geq 0}$ por

$$((V_{n_k})_{k \geq 0}, (E_{n_k, n_{k+1}})_{k \geq 0}, \preceq),$$

siendo \preceq el orden inducido en cada conjunto $E_{n_k, n_{k+1}}$.

Dado un diagrama de Bratteli ordenado $B = (V, E, \preceq)$ se define X_B como el conjunto de todos los caminos dirigidos infinitos (x_1, x_2, \dots) que comienzan en v_0 tales que $r(x_n) = s(x_{n+1})$ para cada $n \geq 1$. Introducimos una topología en X_B diciendo que una base de conjuntos abiertos está dada por la familia de cilindros

$$[e_1, e_2, \dots, e_n] = \{(x_1, x_2, \dots) \in X_B : x_i = e_i, \forall 1 \leq i \leq n\}.$$

Cada cilindro $[e_1, e_2, \dots, e_n]$ es también cerrado en esta topología, y como la familia de cilindros es numerable, X_B resulta ser 0-dimensional. Además, es claro que X_B es compacto y Hausdorff. La única condición que hace falta para que X_B sea un espacio de Cantor con esta topología es que no existan puntos aislados. Sin embargo, es sencillo ver que X_B es metrizable con la métrica $d : X_B \times X_B \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida para cada $x, y \in X_B$ mediante

$$d(x, y) = 2^{-\Delta(x, y)}, \tag{1.1}$$

en donde $\Delta : X_B \times X_B \rightarrow \mathbb{N}$ está definida para cada $x, y \in X_B$ mediante

$$\Delta(x, y) = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\}.$$

Cuando existe un único punto $(x_1, x_2, \dots) \in X_B$ tal que x_n es (localmente) maximal para cada $n \geq 1$ y un único punto $(y_1, y_2, \dots) \in X_B$ tal que y_n es (localmente) minimal para cada $n \geq 1$, decimos que $B = (V, E, \preceq)$ es un diagrama de Bratteli *propriadamente ordenado*. A los puntos anteriores los denotamos $x_{\text{máx}}$ y $x_{\text{mín}}$, respectivamente. En este caso, definimos el mapeo de Vershik $V_B : X_B \rightarrow X_B$ como sigue: para cada $x = (x_1, x_2, \dots) \in X_B \setminus \{x_{\text{máx}}\}$, sea $n \geq 1$ el menor entero tal que x_n no es una arista maximal. Sea y_n el sucesor de x_n en el orden

local del nivel correspondiente y sea (y_1, \dots, y_{n-1}) el único camino minimal en $E_{0,n-1}$ que conecta v_0 con $s(y_n)$. Luego definimos $V_B(x) = (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n, x_{n+1}, \dots)$ y $V_B(x_{\text{máx}}) = x_{\text{mín}}$. Es posible probar que V_B define un homeomorfismo en X_B y por lo tanto (X_B, V_B) es un sistema dinámico topológico invertible, al cual llamaremos sistema de Bratteli-Vershik dado por el diagrama ordenado $B = (V, E, \preceq)$. Si B' es un telescoping de B , entonces $X_{B'}$ está bien definido y los sistemas (X_B, V_B) y $(X_{B'}, V_{B'})$ son topológicamente conjugados.

No es difícil ver que si $B = (V, E)$ es simple, entonces X_B no posee puntos aislados y por lo tanto X_B es un espacio de Cantor. Más aún, si \preceq es un orden parcial tal que $B = (V, E, \preceq)$ es propiamente ordenado, entonces (X_B, V_B) es un sistema minimal, luego es un sistema minimal de Cantor. Ambos hechos son comprobables de la definición del mapeo de Vershik y de la simplicidad del diagrama.

Proposición 1.29 *Sea $B = (V, E)$ un diagrama de Bratteli simple. Entonces X_B es un espacio de Cantor. Si $B = (V, E, \preceq)$ es un diagrama de Bratteli propiamente ordenado con (V, E) simple, entonces X_B es un espacio de Cantor y $V_B : X_B \rightarrow X_B$ es un homeomorfismo minimal. Luego (X_B, V_B) es un sistema minimal de Cantor.*

Es posible probar que si un diagrama de Bratteli propiamente ordenado $B = (V, E, \preceq)$ es tal que el sistema de Bratteli-Vershik (X_B, V_B) es un sistema minimal de Cantor, entonces B debe ser simple. Luego trabajar con diagramas de Bratteli propiamente ordenados y simples no es una restricción para estudiar la clase de sistemas minimales de Cantor.

En [HPS92] se prueba que dado un sistema minimal de Cantor (X, T) , es posible construir un diagrama de Bratteli $B = (V, E, \preceq)$ propiamente ordenado con (V, E) simple tal que (X, T) y (X_B, V_B) son topológicamente conjugados. En este caso, decimos que B es una representación de Bratteli-Vershik de (X, T) . Tal construcción puede describirse mediante una sucesión de particiones en torres de Kakutani-Rokhlin del sistema (X, T) , las cuales no siempre son sencillas de explicitar en ejemplos concretos.

Definición 1.30 *Sea (X, T) un sistema minimal de Cantor. Una partición en torres de Kakutani-Rokhlin (KR) de (X, T) es una partición de X de la forma*

$$\mathcal{P} = \{T^k B_i : 1 \leq i \leq d, 0 \leq k < h_i\},$$

con $d \in \mathbb{N}$ y donde los conjuntos B_i para $1 \leq i \leq d$ son clopen. Para cada $1 \leq i \leq d$ el subconjunto $\bigcup_{k=0}^{h_i-1} T^k B_i$ es llamada la i -ésima torre de la partición \mathcal{P} , h_i es llamada la i -ésima altura de la i -ésima torre de \mathcal{P} , B_i es llamada la base de la i -ésima torre de \mathcal{P} y el conjunto $T^k B_i$ con $0 \leq k < h_i$ es llamado el k -ésimo piso de la i -ésima torre de \mathcal{P} . Por último, el conjunto $B = \bigcup_{i=1}^d B_i$ es llamado base de \mathcal{P} .

Definición 1.31 *Sea (X, T) un sistema minimal de Cantor. Una sucesión de particiones de Kakutani-Rokhlin de (X, T) que generan la topología es una sucesión de particiones de KR $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 0}$ de (X, T) con bases $\{B_n\}_{n \geq 0}$ para las cuales se cumplen las siguientes condiciones:*

1. $\mathcal{P}_0 = \{X\}$.
2. Los átomos de $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{P}_n$ generan la topología de X .
3. Las particiones se refinan, i.e., $\mathcal{P}_n \preceq \mathcal{P}_{n+1}$ para cada $n \geq 0$.

4. Las bases convergen a un punto, i.e., $\bigcap_{n \geq 0} B_n = \{x\}$ para algún $x \in X$.

Ahora explicitaremos la construcción mencionada. Antes de comenzar daremos un lema preparativo, cuya demostración se basa en las propiedades topológicas de sistemas minimales de Cantor y un argumento inductivo:

Lema 1.32 *Sea (X, T) un sistema minimal de Cantor y sea $x_0 \in X$ un punto arbitrario. Entonces existe una sucesión de particiones de Kakutani-Rokhlin que generan la topología $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 0}$ de (X, T) con bases $\{B_n\}_{n \geq 0}$ tales que $\bigcap_{n \geq 0} B_n = \{x_0\}$.*

Teorema 1.33 ([HPS92], [Dur10]) *Sea (X, T) un sistema minimal de Cantor. Entonces existe un diagrama de Bratteli propiamente ordenado $B = (V, E, \preceq)$ tal que el sistema de Bratteli-Vershik (X_B, V_B) es topológicamente conjugado a (X, T) .*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x_0 \in X$, del Lema 1.32 podemos encontrar una sucesión de particiones de Kakutani-Rokhlin que generan la topología $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 0}$ de (X, T) con bases $\{B_n\}_{n \geq 0}$ tales que $\bigcap_{n \geq 0} B_n = \{x_0\}$. Denotaremos $\mathcal{P}_n = \{T^k B_n(i) : 1 \leq i \leq d_n, 0 \leq k < h_n(i)\}$ para cada $n \geq 0$. Defina $V_n = \{1, 2, \dots, d_n\}$ y las aristas de E_n entre V_{n-1} y V_n quedan definidas de la siguiente forma:

- Para cada $i_n \in V_n$, defina $\{l_1 < l_2 < \dots < l_k\} = \{0 \leq k < h_n(i_n) : T^k B_n(i_n) \subseteq B_{n-1}\}$ y suponga que de hecho $T^{l_j} B_n(i_n) \subseteq B_{n-1}(i_{n-1}(j))$, para cierto $1 \leq i_{n-1}(j) \leq d_{n-1}$, para cada $1 \leq j \leq k$. Notar que l_1, l_2, \dots, l_k están bien definidos pues $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 0}$ son una sucesión de particiones de KR que generan la topología de (X, T) . Decimos que la tupla $(i_{n-1}(1), i_{n-1}(2), \dots, i_{n-1}(k))$ es la \mathcal{P}_{n-1} -transversal de la i_n -ésima torre de \mathcal{P}_n .
- Las aristas de $r(i_n)$ corresponden exactamente a las aristas entre cada $i_{n-1}(j)$ e i_n para $0 \leq j \leq k$, ordenadas de la forma $i_{n-1}(1)i_n \preceq i_{n-1}(2)i_n \preceq \dots \preceq i_{n-1}(k)i_n$.

Esto permite construir un diagrama de Bratteli ordenado $B = (V, E, \preceq)$. Ahora construiremos un homeomorfismo $\varphi : X \rightarrow X_B$ que para cada $n \geq 0$ envía torres, pisos y bases de \mathcal{P}_n a torres, pisos y bases del nivel n de X_B , i.e.,

$$\forall n \geq 0, \forall 1 \leq j \leq d_n, \forall 1 \leq i < h_n(j) : \varphi(T^i B_n(j)) = V_B^i \overline{B}_n(j).$$

Dado $x \in X$, defina $\varphi(x) = (x_1, x_2, \dots) \in X_B$ de la siguiente manera: para cada $n \geq 1$ sea $j \in V_n$ la torre de la partición \mathcal{P}_n a la cual x pertenece, y sea $(i_{n-1}(1), i_{n-1}(2), \dots, i_{n-1}(k))$ la \mathcal{P}_{n-1} -transversal de la j -ésima torre de \mathcal{P}_n , con $T^{l_s} B_n(j) \subseteq B_{n-1}(i_{n-1}(s))$, $\forall 1 \leq s \leq k, 0 \leq l_s < h_n(j)$. Entonces existe un único $1 \leq s \leq k$ tal que $x \in T^{l_s} B_n(j)$ con $l_s \leq l_{s+1}$ (siendo $s = k$ si $s + 1$ no está definido). Sea x_n la s -ésima arista respecto al orden local de $r^{-1}(j)$. Esto termina de definir φ . De la definición es sencillo ver que $\varphi(X) \subseteq X_B$ y que φ envía torres, pisos y bases de \mathcal{P}_n en torres, pisos y bases del nivel n de X_B , para cada $n \geq 0$. Un argumento simple del teorema de intersección de Cantor muestra que φ es sobreyectiva y usando el hecho que la sucesión de particiones de $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 0}$ generan la topología de (X, T) se muestra que φ es inyectiva. Finalmente la continuidad de φ y φ^{-1} se sigue del hecho que los pisos de las torres de todos los niveles generan las topologías respectivas de X y de X_B . Ahora verificamos que B es propiamente ordenado. En efecto, un camino infinito $x \in X_B$ es (localmente) minimal si y solamente si $\varphi^{-1}(x) \in B_n$, para cada $n \geq 0$, luego debe ser

$\varphi^{-1}(x) = x_0$ y se sigue la unicidad de un único camino infinito (localmente) minimal. De igual manera, un camino $x \in X_B$ es (localmente) maximal si y solamente si $\varphi^{-1}(x)$ pertenece al último piso de alguna torre de \mathcal{P}_n , para cada $n \geq 0$, i.e., si $T(\varphi^{-1}(x)) \in B_n$, para cada $n \geq 0$, luego debe ser $T(\varphi^{-1}(x)) = x_0$ y se sigue la unicidad de un único camino infinito (localmente) maximal. Finalmente $\varphi : (X, T) \rightarrow (X_B, V_B)$ es una conjugación topológica. En efecto, si $x \neq T^{-1}(x_0)$ la igualdad $\varphi \circ T(x) = V_B \circ \varphi(x)$ se verifica por la definición de φ y V_B . El caso $x = T^{-1}(x_0)$ se sigue directamente del hecho que $x_{\text{máx}} = \varphi(T^{-1}(x_0))$, $x_{\text{mín}} = \varphi(x_0)$ y $V_B(x_{\text{máx}}) = x_{\text{mín}}$. \square

Para finalizar esta sección, proporcionaremos un resultado que permite asumir ciertas características en los niveles de las representaciones de Bratteli-Vershik asociadas a sistemas minimales de Cantor:

Proposición 1.34 *Sea (X, T) un sistema minimal de Cantor. Entonces (X, T) puede ser representado por un diagrama de Bratteli propiamente ordenado $B = (V, E, \preceq)$ con las siguientes propiedades:*

- (H1) *Los coeficientes del vector fila h_1 son todos iguales a 1.*
- (H2) *Para cada $n \geq 2$, $M_n > 0$.*
- (H3) *Para cada $n \geq 2$, todas las aristas maximales de E_n comienzan en un mismo vértice de V_{n-1} . Asumimos que este vértice es d_{n-1} si $V_n = \{1, 2, \dots, d_n\}$ para cada $n \geq 1$.*

Argumentos clásicos muestran que la reducción dada por la proposición anterior es posible, en particular (H2) se sigue de la simplicidad de la representación de Bratteli-Vershik de (X, T) y (H3) puede deducirse de la Proposición 2.8 en [HPS92]. Una representación de Bratteli-Vershik de un sistema minimal de Cantor (X, T) que satisface las propiedades (H1), (H2) y (H3) de la Proposición 1.34 será llamada representación *propia*.

Un sistema minimal de Cantor es de rango (topológico) finito $d \geq 1$ si admite una representación como sistema de Bratteli-Vershik con diagrama propio tal que el número de vértices por nivel satisface $d_k \leq d$ para todo $k \geq 1$. Haciendo contracciones, podemos asumir de ahora en adelante que $d_k = d$, para cada $k \geq 2$. Un sistema minimal de Cantor es linealmente recurrente si admite una representación de Bratteli-Vershik propia tal que el conjunto $\{M_n : n \geq 2\}$ es finito. Claramente, sistemas minimales de Cantor que son linealmente recurrentes son también de rango finito.

1.2.3. Particiones de Kakutani-Rokhlin para un sistema de Bratteli-Vershik

Sea $B = (V, E, \preceq)$ una representación de Bratteli-Vershik de un sistema minimal de Cantor (X, T) . Este diagrama define naturalmente para cada $n \geq 0$ una partición clopen de KR de (X_B, V_B) : si $n = 0$ definimos $\mathcal{P}_0 = \{B_0(v_0)\}$, con $B_0(v_0) = X_B$, y para $n \geq 1$

$$\mathcal{P}_n = \{V_B^k B_n(v) : v \in V_n, 0 \leq k < h_n(v)\},$$

en donde $B_n(v) = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ siendo (x_1, x_2, \dots, x_n) el único camino minimal que une v_0 a $v \in V_n$ (hay exactamente $h_n(v)$ caminos que unen v_0 con v). Defina $\tau_n : X_B \rightarrow V_n$ dado por $\tau_n(x) = v$ si x pertenece a la torre v de \mathcal{P}_n . El tiempo de entrada de x a $B_n(\tau_n(x))$ está dado por $r_n(x) = \min\{j \geq 0 : V_B^j(x) \in B_n(\tau_n(x))\}$. Para cada $x = (x_1, x_2, \dots) \in X_B$ y $0 \leq m < n$ definimos el vector fila $s_{m,n}(x) \in \mathbb{N}^{V_m}$, llamado *vector de sufijo de x entre los niveles m y n* mediante

$$s_{m,n}(x, u) = \#\{e \in E_{m,n} : (x_{m+1}, \dots, x_n) \prec e, \mathbf{s}(e) = u\}$$

en cada coeficiente $u \in V_m$, donde \prec es \leq y \neq simultáneamente, y donde $s_{m,n}(x, u)$ es el u -ésimo coeficiente del vector fila $s_{m,n}(x)$. Un cálculo clásico permite obtener que para cada $n \geq 1$ (ver por ejemplo [BDM05]):

$$r_n(x) = s_0(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \langle s_i(x), h_1 P_i \rangle = s_0(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \langle s_i(x), h_i \rangle, \quad (1.2)$$

en donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno euclideo. Notar que con la hipótesis (H1), tenemos $s_0(x) = 0$. Similarmente se puede obtener la siguiente relación más general entre tiempos de entrada y vectores de sufijos de $x \in X_B$:

$$r_n(x) = r_m(x) + \langle s_{m,n}(x), h_m \rangle, \quad (1.3)$$

para $1 \leq m < n$. De esta igualdad se sigue que para $0 \leq l < m < n$:

$$\langle s_{l,n}(x), h_l \rangle = \langle s_{l,m}(x), h_l \rangle + \langle s_{m,n}(x), h_m \rangle, \quad (1.4)$$

y en particular

$$\langle s_{m,n}(x), h_m \rangle = \sum_{i=m}^{n-1} \langle s_i(x), h_i \rangle. \quad (1.5)$$

1.2.4. Medidas invariantes

Sea $B = (V, E, \preceq)$ una representación de Bratteli-Vershik de un sistema minimal de Cantor (X, T) . Sea μ una medida de probabilidad invariante para este sistema. La medida μ está determinada por los valores que asigna a $B_n(v)$ para cada $n \geq 0$ y $v \in V_n$. Defina el vector columna $\mu_n = (\mu_n(v) : v \in V_n)$ con $\mu_n(v) = \mu(B_n(v))$. Un cálculo simple entrega la relación

$$\mu_m = P_{m,n} \mu_n, \quad \forall 0 \leq m < n. \quad (1.6)$$

Adicionalmente, por probabilidades totales tenemos

$$h_n \cdot \mu_n = 1, \quad \forall n \geq 1. \quad (1.7)$$

1.3. Valores propios continuos de sistemas minimales de Cantor

En esta sección mostramos una condición necesaria y suficiente para que $\lambda = \exp(2\pi i \alpha)$ sea un valor propio continuo de un sistema minimal de Cantor. La condición está dada en términos

de vectores de altura y de vectores de sufijo de una representación de Bratteli-Vershik propia del sistema.

1.3.1. La condición necesaria y suficiente

Sea (X, T) un sistema minimal de Cantor dado por una representación de Bratteli-Vershik propia $B = (V, E, \preceq)$. La condición necesaria y suficiente más general para que $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$ sea un valor propio continuo de (X, T) es que el mapeo $\lambda^{r_n(x)}$ converja uniformemente (ver la Proposición 12 en [BDM05]). Para obtener dicha convergencia uniforme, otras condiciones necesarias obtenidas a partir de la combinatoria del diagrama de Bratteli B han sido propuestas. A continuación daremos la condición necesaria mostrada en [BDM10] que sirve como motivación para una condición necesaria y suficiente. Denotamos $\|\cdot\|$ a la distancia al vector entero más cercano.

Teorema 1.35 *Sea (X, T) un sistema minimal de Cantor dado por una representación de Bratteli-Vershik propia $B = (V, E, \preceq)$. Si $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$ es un valor propio continuo de (X, T) , entonces:*

1.
$$\sum_{n \geq 1} \|\alpha h_1 P_n\| = \sum_{n \geq 1} \|\alpha h_n\| < +\infty.$$

2. Para cada $n \geq 1$ existe un vector fila real η_n y un vector fila entero ν_n tal que

$$\alpha h_1 P_n = \alpha h_n = \eta_n + \nu_n \quad \text{y} \quad \eta_n \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.8)$$

Tal descomposición es tal que para cada n suficientemente grande

$$\eta_{n+1} = \eta_n M_{n+1} \quad \text{y} \quad \nu_{n+1} = \nu_n M_{n+1}. \quad (1.9)$$

Un cálculo clásico permite deducir todos los posibles valores de α a partir de (1.8) y (1.9): para enteros $1 \leq m < n$ suficientemente grandes tales que se cumpla (1.9), multiplicamos la igualdad (1.9) por μ_m , en donde μ es cualquier medida de probabilidad invariante. De (1.6), (1.7), (1.8) y (1.9) obtenemos

$$\alpha = \alpha h_m \cdot \mu_m = \eta_m \cdot \mu_m + \nu_m \cdot \mu_m = \eta_m \cdot P_{m,n} \cdot \mu_n + \nu_m \cdot \mu_m = \eta_m \cdot \mu_n + \nu_m \cdot \mu_m, \quad (1.10)$$

y tomando $n \rightarrow \infty$, obtenemos

$$\alpha = \nu_m \cdot \mu_m \quad \text{y} \quad \eta_m \cdot \mu_m = 0 \quad \text{para todo } m \text{ suficientemente grande.} \quad (1.11)$$

La condición necesaria y suficiente general que presentaremos a continuación es más fina que la condición necesaria del Teorema 1.35, incorporando los ordenes locales de la representación de Bratteli-Vershik del sistema. Esto se logra considerando los vectores de sufijos en cada nivel del sistema.

Teorema 1.36 *Sea (X, T) un sistema minimal de Cantor dado por una representación de Bratteli-Vershik propia $B = (V, E, \preceq)$. Entonces $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$ es un valor propio continuo de (X, T) si y solamente si*

$$\sum_{n \geq 1} \max_{x \in X_B} \|\alpha \langle s_n(x), h_n \rangle\| < +\infty. \quad (1.12)$$

Es importante mencionar que la condición suficiente del Teorema 1.36 no requiere que la representación de Bratteli-Vershik sea propia:

Corolario 1.37 *Sea (X, T) un sistema minimal de Cantor y sea $B = (V, E, \preceq)$ una representación de Bratteli-Vershik de (X, T) que no es necesariamente propia. Si el número real α satisface la condición (1.12) del Teorema 1.36, entonces $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$ es un valor propio continuo del sistema.*

Para terminar esta sección, caracterizaremos los valores propios racionales de un sistema minimal de Cantor a través del siguiente corolario, que es una consecuencia de los Teoremas 1.35 y 1.36:

Corolario 1.38 *Sea (X, T) un sistema minimal de Cantor dado por una representación de Bratteli-Vershik propia $B = (V, E, \preceq)$ y sean p, q enteros, $q \neq 0$. Entonces $\lambda = \exp(2\pi ip/q)$ es un valor propio continuo de (X, T) si y solamente si q es un divisor de los coeficientes de h_n para algún $n \geq 2$ (equivalentemente, para todo n suficientemente grande).*

1.4. Valores propios medibles de sistemas minimales de Cantor

En esta sección mostramos una condición necesaria para que $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$ sea un valor propio medible de un sistema minimal de Cantor (X, T, μ) que admite una representación particular de sistema de Bratteli-Vershik de rango finito. La condición está dada en términos de vectores de altura de una representación de Bratteli-Vershik de rango finito del sistema, con la hipótesis adicional que para esta representación las medidas de las bases sean proporcionales en cada nivel. Esta condición necesaria ha sido utilizada en ([Vee84], Sección 7.), ([AF07], Sección 6.) y en [AD16] para descartar valores propios medibles en sistemas de intercambio de intervalos y flujos de traslación que no son de tipo rotación, siendo comúnmente llamada “Criterio de Veech”. En un contexto general, esta condición es más débil que la condición necesaria en el caso continuo.

1.4.1. La condición necesaria

Sea $B = (V, E, \preceq)$ una representación de Bratteli-Vershik de un sistema minimal de Cantor (X, T) con matrices de incidencia $(M_n)_{n \geq 2}$. Denotamos al *espacio estable* por $E^s(X_B) = \{v \in \mathbb{R}^{d_1} : \|vP_n\| \rightarrow 0\}$, al *espacio estable débil* por $W^s(X_B) = \{v \in \mathbb{R}^{d_1} : \| \|vP_n\| \| \rightarrow 0\}$ y al *espacio estable fuerte* por $\bigcup_{z \in \mathbb{Z}^{d_1}} E^s(X_B) + z$. Es claro que $W^s(X_B)$ contiene al espacio estable fuerte, pero en general no hay igualdad. Si el diagrama es linealmente recurrente (existen finitas matrices $(M_n)_{n \geq 2}$) tenemos la igualdad entre espacio estable fuerte y débil (ver [CDHM03], Lema 12.). En esta sección mostramos una condición necesaria para ciertos sistemas de Bratteli-Vershik de rango finito. Antes de enunciar dicha condición, mencionamos una generalización del Teorema de Diferenciación de Lebesgue que aplica al caso de un espacio

ultramétrico localmente compacto, en particular a espacios de Bratteli-Vershik, como puede verse fácilmente a partir de la definición de la métrica (1.1).

Lema 1.39 ([HP12], Parte I, Capítulo II, Sección 2.) *Sea (X, d) un espacio ultramétrico localmente compacto y sea μ una medida de probabilidad definida sobre la σ -álgebra Boreliana \mathcal{B}_X de X . Si $f \in L^1(X, \mathcal{B}_X, \mu)$, entonces para μ -casi todo $x \in X$ tenemos*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f(s) d\mu(s) = f(x), \quad (1.13)$$

en donde $B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ para cada $r > 0$. Si $x \in X$ satisface (1.13), decimos que x es un punto de densidad para f .

Teorema 1.40 *Sea (X, T) un sistema minimal de Cantor de rango finito d dado por una representación de Bratteli-Vershik (no necesariamente propia) $B = (V, E, \preceq)$ y sea μ una medida de probabilidad ergódica que satisface $\mu_n(i)/\mu_n(j) \leq C$, $\forall 1 \leq i, j \leq d$, $\forall n \geq 1$ para cierta constante $C > 1$. Si $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$ es un valor propio medible de (X, T) con respecto a μ , entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha h_n\| = 0. \quad (1.14)$$

DEMOSTRACIÓN. Denotemos B_n a la n -ésima base de la partición en torres de Kakutani-Rokhlin de X . Sea $x_{\min} \in X$ con $\{x_{\min}\} = \bigcap_{n \geq 0} B_n$, y sea $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función propia medible de (X, T) asociada al valor propio λ , en donde podemos asumir que $|f| = 1$ μ -c.t.p. por ergodicidad. Adicionalmente podemos asumir que x_{\min} es un punto de densidad para f (si no, tomamos $x_0 \in X$ un punto de densidad de f y obtenemos el resultado para una representación en donde las bases $(B'_n)_{n \geq 0}$ satisfacen $\{x_0\} = \bigcap_{n \geq 0} B'_n$, luego obtenemos el resultado para la representación original). Sea $\varepsilon > 0$, por el Lema 1.39 para n suficientemente grande tenemos que

$$\int_{B_n} |f(x) - f(x_{\min})| d\mu(x) \leq \mu(B_n) \varepsilon^2. \quad (1.15)$$

Por la desigualdad de Markov tenemos adicionalmente que

$$\mu(\{x \in B_n : |f(x) - f(x_{\min})| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{B_n} |f(x) - f(x_{\min})| d\mu(x), \quad (1.16)$$

así que de (1.15) y (1.16) para n suficientemente grande tenemos

$$\mu(\{x \in B_n : |f(x) - f(x_{\min})| \geq \varepsilon\}) \leq \varepsilon \mu(B_n).$$

Por otro lado, afirmamos que existe $x \in B_n(j)$ tal que $|f(x) - f(x_{\min})| < \varepsilon$ y $|f(T^{h_n(j)}x) - f(x_{\min})| < \varepsilon$ para cualquier $1 \leq j \leq d$. Si no, excepto en un conjunto de medida nula, tenemos $B_n(j) \subseteq \{x \in B_n : |f(x) - f(x_{\min})| \geq \varepsilon\} \cup T^{-h_n(j)}\{x \in B_n : |f(x) - f(x_{\min})| \geq \varepsilon\}$ y entonces $\mu(B_n(j)) \leq 2\mu(\{x \in B_n : |f(x) - f(x_{\min})| \geq \varepsilon\}) < 2\varepsilon\mu(B_n)$, pero $\frac{\mu(B_n)}{Cd} \leq \mu(B_n(j))$, un absurdo si ε es suficientemente pequeño. Finalmente $|f(T^{h_n(j)}x) - f(x)| = |\lambda^{h_n(j)} - 1| < 2\varepsilon$ para cada $1 \leq j \leq d$, concluyendo. \square

Observación. 1 La hipótesis y conclusión del Teorema 1.40 se satisfacen en ciertas representaciones de sistemas linealmente recurrentes [CDHM03] con valores propios medibles (ver la Proposición 3.7 por un análisis sobre la hipótesis del Teorema 1.40).

1.5. Ejemplos

En esta sección ilustramos cómo las condiciones anteriores permiten obtener explícitamente valores propios continuos de ciertos sistemas substitutivos. El caso substitutivo ha sido considerado en [Hos86], en donde se muestra que los valores propios medibles para una substitución primitiva siempre están asociados a funciones propias continuas, luego el factor de Kronecker y el factor equicontinuo maximal de estos sistemas coincide. La caracterización completa de los valores propios en sistemas substitutivos está dada en [FMN96]. Para una referencia general sobre substituciones, ver [Fog02].

Los ejemplos de esta sección incluyen substituciones primitivas de tipo Pisot y el sistema substitutivo asociado al mapeo cúbico de Arnoux-Yoccoz. En el caso substitutivo de Pisot, encontraremos explícitamente el grupo aditivo de valores propios y el factor de Kronecker del sistema. En el segundo ejemplo, de carácter geométrico, encontraremos ciertos valores propios asociados al sistema.

1.5.1. Substituciones y shifts substitutivos de tipo Pisot

Definición 1.41 *Considere \mathcal{A} un alfabeto finito y no vacío. Una substitución sobre \mathcal{A} es una función $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^+$. Esta función se extiende naturalmente por concatenación a \mathcal{A}^+ , $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ y $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Para $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ la extensión está dada por*

$$\rho(\omega) = \dots \rho(\omega_{-2})\rho(\omega_{-1}).\rho(\omega_0)\rho(\omega_1) \dots,$$

en donde el punto central separa las coordenadas negativas y no negativas de $\rho(\omega)$.

La matriz de incidencia de una substitución ρ es la matriz $M_\rho = (|\rho(b)|_a)_{a,b}$, en donde $|\omega|_a$ es la cantidad de apariciones de un símbolo $a \in \mathcal{A}$ en una palabra ω . Denotaremos por χ_ρ al polinomio característico de M_ρ y lo llamaremos polinomio característico de ρ . Una substitución ρ se dice *primitiva* si existe $n \geq 1$ tal que $\rho^n(a)$ contiene todos los símbolos de \mathcal{A} , para cada $a \in \mathcal{A}$. Equivalentemente, ρ es primitiva si M_ρ es una matriz primitiva. Una substitución ρ se dice *unimodular* si $\det(M_\rho) = \pm 1$.

Sea $\Omega_\rho \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ el subshift inducido por ρ , i.e., $\omega \in \Omega_\rho$ si y sólo si todo factor de ω es un factor de $\rho^n(a)$ para ciertos $n \geq 0$ y $a \in \mathcal{A}$. Si $\sigma : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ denota el shift por la izquierda en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, llamamos (Ω_ρ, σ) el subshift substitutivo asociado a ρ . Este subshift es minimal si ρ es primitiva, además es ρ -invariante: $\rho(\Omega_\rho) \subseteq \Omega_\rho$.

La siguiente proposición será extendida en generalidad al caso de un shift S -ádico en el Capítulo 3, por lo que dejaremos una demostración en dicho capítulo:

Proposición 1.42 *Considere una substitución primitiva ρ sobre un alfabeto de d símbolos. Entonces el sistema minimal de Cantor (Ω_ρ, σ) tiene una representación de Bratteli-Vershik con diagrama $B = (V, E, \preceq)$, en donde $V_0 = \{v_0\}$ es un vértice distinguido, $h_1 = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d$, $V_n = \{1, 2, \dots, d\}$, $\forall n \geq 1$, las matrices de incidencia $(M_n)_{n \geq 2}$ satisfacen $M_n = M_\rho$, $\forall n \geq 2$ y el orden en cada nivel n es el dado por la substitución, i.e., para cada*

$n \geq 2$, si $a_n \in V_n$, $\rho(a_n) = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_k$ con $\omega_i \in V_{n-1}$, $\forall 1 \leq i \leq k$ y si e_i la arista que une ω_i con a_n para cada $1 \leq i \leq k$, entonces $e_1 \preceq e_2 \preceq \dots \preceq e_k$.

Nos referiremos a este diagrama como el diagrama natural de la substitución ρ .

Desde ahora consideramos una clase particular de shifts substitutivos, llamados de tipo Pisot:

Definición 1.43 Un número de Pisot es un entero algebraico $\alpha > 1$ tal que todos sus conjugados de Galois λ satisfacen $|\lambda| < 1$. Una substitución se dirá Pisot si los valores propios de M_ρ satisfacen lo siguiente: existe un valor propio $\alpha > 1$ y $|\lambda| < 1$ para los otros valores propios.

Observación. 2 Si ρ es de tipo Pisot, entonces su polinomio característico χ_ρ es irreducible sobre \mathbb{Q} . Además si ρ es de tipo Pisot, entonces es una substitución primitiva. Luego, el vector propio de Perron-Frobenius normalizado por la derecha tiene todos sus coeficientes racionalmente independientes. Para más detalles, ver [Fog02].

Proposición 1.44 Sea ρ una substitución unimodular en d símbolos de tipo Pisot y sean λ, p el valor propio de Perron-Frobenius y el vector propio de Perron-Frobenius normalizado por la derecha de M_ρ . Entonces el grupo aditivo de valores propios continuos (equivalentemente, medibles) de (Ω_ρ, σ) es

$$E_\rho = \mathbb{Z}[p_1, p_2, \dots, p_d].$$

DEMOSTRACIÓN. Considere el diagrama natural $B = (V, E, \preceq)$ asociado a (Ω_ρ, σ) , sea (X_B, V_B) su sistema de Bratteli-Vershik y sea μ_1 el único vector de probabilidad que define una medida invariante para (X_B, V_B) . Entonces $\mu_1 = p$, pues $p \in \bigcap_{n \geq 1} M_\rho^n(\mathbb{R}_+^d)$. De (1.11) tenemos $\alpha = \nu_m \cdot \mu_m$, para ciertos $m \geq 1, \nu_m \in \mathbb{Z}^d$. De la unimodularidad de ρ se deduce que $\alpha = z \cdot \mu_1 = z \cdot p$, para cierto $z \in \mathbb{Z}^d$. Probaremos que p_i es un valor propio continuo, para cada $1 \leq i \leq d$. En efecto, si e_1, e_2, \dots, e_d la base canónica de vectores fila en \mathbb{R}^d , entonces el vector $\bar{p} = p_i h_1 - e_i$ es tal que $\bar{p} \in p^\top$. La condición necesaria y suficiente (1.12) se escribe

$$\sum_{n \geq 1} \|\| p_i h_1 M_\rho^n \|\| = \sum_{n \geq 1} \|\| \bar{p} M_\rho^n \|\| < +\infty. \quad (1.17)$$

Ahora bien, como M_ρ es de Pisot entonces $\|\| M_\rho^n \|\|_p = \sup_{z \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, z \cdot p = 0} \frac{\|\| z M_\rho^n \|\|}{\|\| z \|\|} \leq r^n$ para cierto $r < 1$, de lo que se sigue directamente la convergencia de (1.17). \square

Como p_1, p_2, \dots, p_d son racionalmente independientes, se obtiene directamente el siguiente corolario:

Corolario 1.45 Sea ρ una substitución unimodular en d símbolos de tipo Pisot y sea p el vector propio de Perron-Frobenius normalizado por la derecha de M_ρ . Entonces el factor de Kronecker y el factor equicontinuo maximal de (Ω_ρ, σ) corresponden a una rotación con ángulo (p_1, p_2, \dots, p_d) en \mathbb{T}^d .

1.5.2. Mapeo cúbico de Arnoux-Yoccoz

Sea α la única raíz real del polinomio $t^3 + t^2 + t - 1$ y sea G_{t_0, t_1} el mapeo que intercambia las mitades del intervalo $[t_0, t_1]$ por traslación y fija el complemento, *i.e.*,

$$G_{t_0, t_1}(t) = \begin{cases} t + (t_0 + t_1)/2 & \text{si } t \in [t_0, (t_0 + t_1)/2), \\ t - (t_0 + t_1)/2 & \text{si } t \in [(t_0 + t_1)/2, t_1), \\ t & \text{si } t \notin [t_0, t_1). \end{cases}$$

Definición 1.46 *La transformación de intercambio de intervalos (ver Sección 1.6) de Arnoux-Yoccoz (en adelante t.i.i. de A-Y) está definida por*

$$T = G_{0,1} \circ G_{0,\alpha} \circ G_{\alpha,\alpha+\alpha^2} \circ G_{\alpha+\alpha^2,1}.$$

Las propiedades de T son discutidas extensamente en [ABB11]. En particular, se demuestra que este mapeo es una t.i.i. en siete intervalos y que T es conjugado a su sistema inducido en $[0, \alpha)$. Más aún, las órbitas de puntos del sistema inducido se pueden codificar para una partición de nueve intervalos en $[0, 1)$. La codificación resultante corresponde a un sistema substitutivo con substitución ρ en el alfabeto $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, 9\}$ dada por:

$$\begin{array}{lll} \rho(1) = 35 & \rho(4) = 17 & \rho(7) = 29 \\ \rho(2) = 45 & \rho(5) = 18 & \rho(8) = 2 \\ \rho(3) = 46 & \rho(6) = 19 & \rho(9) = 3. \end{array}$$

La matriz de substitución correspondiente es

$$M_\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo polinomio característico es $(t-1)(t^2+t+1)(t^3-t^2-t-1)(t^3+t^2+t-1)$, siendo los dos últimos factores irreducibles sobre \mathbb{Q} . Las raíces de t^3+t^2+t-1 son $\alpha, \beta^{-1}, \bar{\beta}^{-1}$, mientras que las raíces de t^3-t^2-t-1 son $\alpha^{-1}, \beta, \bar{\beta}$, siendo α^{-1} el valor propio de Perron-Frobenius de M_ρ . En [ABB11] se muestra que el sistema substitutivo dada por la substitución de Tribonacci $\check{\rho}$ en el alfabeto $\{1, 2, 3\}$ dada por:

$$\begin{array}{l} \check{\rho}(1) = 12 \\ \check{\rho}(2) = 13 \\ \check{\rho}(3) = 1 \end{array}$$

es un factor topológico del sistema substitutivo dado por A-Y. La matriz de substitución de Tribonacci es

$$M_{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico es $t^3 - t^2 - t - 1$. Numéricamente tenemos $\beta \approx -0,7718445 + 1,1151425i$ de donde $|\beta| = |\bar{\beta}| < 1$ y por lo tanto la substitución de Tribonacci es de tipo Pisot. El vector propio de Perron-Frobenius por la derecha normalizado asociado a la substitución de Tribonacci es

$$\frac{1}{\alpha^2 + 2\alpha + 2} \begin{pmatrix} \alpha^{-1} \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix},$$

luego obtenemos valores propios continuos para la t.i.i. de A-Y.

Observación. 3 El hecho que los valores propios de M_{ρ} estén dados por pares de la forma $\lambda, 1/\lambda$ no es una coincidencia. El hecho que ρ corresponda a una substitución que proviene de la codificación de una t.i.i. implica que alguna potencia de M_{ρ} debe preservar la matriz Ω asociada a la t.i.i., y en consecuencia su espectro relativo al espacio que genera Ω debe ser simétrico. Usaremos fuertemente esta propiedad en los resultados dados en el Capítulo 3.

1.6. Transformaciones de intercambio de intervalos

Las transformaciones de intercambio de intervalos (t.i.i.) son un objeto clásico en dinámica que ha recibido bastante atención en las últimas décadas. Estas transformaciones son sencillas de definir, pero ofrecen propiedades dinámicas ricas y aún no son totalmente comprendidas. Uno de los primeros pasos para entender las propiedades ergódicas de las transformaciones de intercambios de intervalos se debe a M. Keane [Kea75], en donde se demuestra que para casi todos los parámetros que definen una t.i.i. la transformación obtenida es minimal. Luego G. Rauzy [Rau79] y W. Veech [Vee82] definieron una operación de inducción sobre t.i.i., la llamada inducción de Rauzy-Veech. Esta herramienta de renormalización propuesta es de particular utilidad para entender la única ergodicidad de estos sistemas [Ker85]. Desde el punto de vista de la teoría espectral de sistemas dinámicos, el uso de la inducción de Rauzy-Veech es también crucial en la demostración de la mezcla débil topológica de casi todas las t.i.i. que no son del tipo rotación, resultado debido a A. Nogueira y D. Rudolph [NR97]. Este último resultado sobre la teoría genérica de t.i.i. es profundizado por I. Lucien [Luc98] al caso del flujo en suspensiones de t.i.i. y generalizado al caso medible por A. Avila y G. Forni [AF07], en donde también se prueba la mezcla débil para casi todos los flujos de traslación en superficies de traslación en género superior a uno.

Por otra parte, si bien los resultados anteriores son sobre t.i.i. típicas, no es claro cómo dar familias de ejemplos de t.i.i. que satisfacen propiedades específicas sobre valores propios, por ejemplo, establecer cuándo $\lambda = \exp(2\pi i\alpha) \in \mathbb{C}$ con $\alpha \in [0, 1)$ corresponde al valor propio (topológico o medible) de alguna t.i.i., o bien dar condiciones que permitan determinar mezcla débil. En estas direcciones, se han obtenidos resultados en [FHZ04], [FZ11], así como en el caso particular (pero en gran generalidad) en sistemas simbólicos substitutivos [FMN96].

En esta sección introduciremos los objetos ya mencionados y se recopilarán los resultados elementales y específicos sobre transformaciones de intercambio de intervalos de [Via06], cambiando levemente la notación.

Definición 1.47 Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo cerrado por la izquierda y abierto por la derecha y sea $\{I_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una partición de I en intervalos cerrados a la izquierda y abiertos por la derecha, indexada por un alfabeto \mathcal{A} de $d \geq 2$ símbolos. Una transformación de intercambio de intervalos (t.i.i.) es una función biyectiva $T : I \rightarrow I$ que es una traslación en cada subintervalo $I_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}$.

En general, se considerará $I = [0, 1)$ y $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, d\}$. Una t.i.i. $T : I \rightarrow I$ está definida por dos objetos:

1. La combinatoria de un par de biyecciones que describen el orden en que se mapean los intervalos de la partición, $\pi = (\pi_t, \pi_b)$ con $\pi_\varepsilon : \mathcal{A} \rightarrow \{1, \dots, d\}$:

$$\pi = \begin{pmatrix} \alpha_1^t & \alpha_2^t & \dots & \alpha_d^t \\ \alpha_1^b & \alpha_2^b & \dots & \alpha_d^b \end{pmatrix},$$

en donde $\alpha_j^\varepsilon = \pi_\varepsilon^{-1}(j)$, para $\varepsilon \in \{t, b\}$.

2. Un vector columna positivo $\lambda = (\lambda_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$, llamado vector de largos, que describen los largos de los subintervalos de la partición.

En lo que sigue, diremos que T está definida por el par (π, λ) .

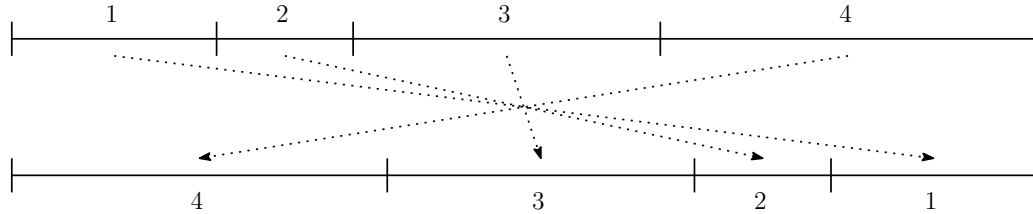


Figura 1.3

Ejemplo. 1 En la Figura 1.3, la permutación que define la transformación de intercambio de intervalos es $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejemplo. 2 Si $d = 2$ hay exactamente una permutación que permite definir t.i.i. distintas a la identidad, dadas por la permutación $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. En este caso, la t.i.i. $T : I \rightarrow I$ está dada por:

$$T(x) = \begin{cases} x + \lambda_2 & \text{si } x \in I_1, \\ x - \lambda_1 & \text{si } x \in I_2. \end{cases}$$

Identificando I con $\mathbb{R}/(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbb{Z}$, obtenemos que $T(x) = x + \lambda_2 \pmod{(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbb{Z}}$, luego la t.i.i. es una rotación de ángulo $\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

Será conveniente definir la llamada *matriz de intersección*, que codifica el orden en que se intercambian los intervalos:

Definición 1.48 Dada $\pi = (\pi_t, \pi_b)$ definimos la matriz de intersección $\Omega(\pi)$ de $|\mathcal{A}| \times |\mathcal{A}|$ dada por:

$$\Omega(\pi)_{i,j} = \begin{cases} +1 & \text{si } \pi_b(i) > \pi_b(j) \text{ y } \pi_t(i) < \pi_t(j), \\ -1 & \text{si } \pi_b(i) < \pi_b(j) \text{ y } \pi_t(i) > \pi_t(j), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Con esto, se define el vector de traslación δ dado por $\delta = \Omega(\pi)\lambda$, siendo λ el vector de largos asociado a la t.i.i. Luego la t.i.i. T definida por (π, λ) satisface:

$$T(x) = x + \delta_i, \text{ si } x \in I_i.$$

Definición 1.49 Una permutación $\pi = (\pi_t, \pi_b)$ se dice irreducible si

$$\pi_b^{-1}(\{1, \dots, j\}) \neq \pi_t^{-1}(\{1, \dots, j\}), \forall 1 \leq j < d.$$

Si una t.i.i. T está definida por una permutación π que no es irreducible, entonces T se descompone en dos t.i.i. y por lo tanto T no es una dinámica minimal en el intervalo. Por otro lado, si T está definida por una permutación irreducible, entonces T puede poseer puntos periódicos, como lo es el caso de un intercambio de dos intervalos con un ángulo racional. En [Kea75], M. Keane da una condición precisa para que una t.i.i. sea minimal:

Proposición 1.50 ([Kea75]) Suponga que una t.i.i. T definida por (π, λ) satisface:

$$T^m(\partial I_i) \neq \partial I_j, \forall m \geq 1, i, j \text{ con } \pi_t(j) \neq 1, \quad (1.18)$$

en donde ∂I denota el extremo izquierdo de un intervalo I . Entonces T es minimal.

A la condición (1.18) la llamaremos *condición de Keane*. Esta condición es genérica en el sentido siguiente:

Proposición 1.51 Suponga que π es una permutación irreducible y que el vector de largos λ tiene coeficientes racionalmente independientes. Entonces la t.i.i. definida por (π, λ) satisface la condición de Keane, y luego es minimal.

Luego, dada una permutación irreducible fija π , el conjunto de vectores de largos λ que definen una t.i.i. de par (π, λ) minimal es de medida de Lebesgue total en el cono \mathbb{R}_+^d .

Definición 1.52 Una permutación $\pi = (\pi_t, \pi_b)$ es de tipo rotación si

$$\pi_b \circ \pi_t^{-1}(i+1) = \pi_b \circ \pi_t^{-1}(i) + 1, \forall 1 \leq i \leq d.$$

Si π es de tipo rotación, entonces una t.i.i. definida por (π, λ) es conjugada a una rotación en el círculo, y luego no es débilmente mezcladora.

1.6.1. Algoritmo de inducción de Rauzy-Veech

Describiremos ahora un algoritmo de inducción sobre t.i.i, la llamada inducción de Rauzy-Veech. Por su interpretación dinámica, este algoritmo es particularmente útil para describir

particiones en torres de Kakutani-Rokhlin sobre t.i.i. Inicialmente se definirá la inducción como un algoritmo sobre permutaciones irreducibles, y luego se dará una interpretación dinámica de dicho algoritmo.

Definición 1.53 *El algoritmo de inducción de Rauzy-Veech consiste de dos operaciones sobre una permutación irreducible π , que llamaremos operaciones top y bottom. La operación top se define como:*

$$R_t(\pi) = \begin{pmatrix} \alpha_1^t & \cdots & \alpha_{k-1}^t & \alpha_k^t & \alpha_{k+1}^t & \alpha_{k+2}^t & \cdots & \alpha_d^t \\ \alpha_1^b & \cdots & \alpha_{k-1}^b & \alpha_d^t & \alpha_d^b & \alpha_{k+1}^b & \cdots & \alpha_{d-1}^b \end{pmatrix},$$

en donde k satisface $\alpha_k^b = \alpha_d^t$. En este caso, llamamos al símbolo α_d^t como winner y al símbolo α_d^b como loser del algoritmo. La operación bottom se define como:

$$R_b(\pi) = \begin{pmatrix} \alpha_1^t & \cdots & \alpha_{k-1}^t & \alpha_d^b & \alpha_d^t & \alpha_{k+1}^t & \cdots & \alpha_{d-1}^t \\ \alpha_1^b & \cdots & \alpha_{k-1}^b & \alpha_k^b & \alpha_{k+1}^b & \alpha_{k+2}^b & \cdots & \alpha_d^b \end{pmatrix},$$

en donde k satisface $\alpha_k^t = \alpha_d^b$. En este caso, llamamos al símbolo α_d^b como winner y al símbolo α_d^t como loser del algoritmo.

Observación. 4 Notar que $R_t(\pi), R_b(\pi)$ son permutaciones irreducibles si π es irreducible.

Considere el grafo dirigido cuyos vértices son las permutaciones irreducibles tales que $\pi \rightarrow \pi'$ es una arista dirigida si $R_t(\pi) = \pi'$ o bien $R_b(\pi) = \pi'$. Las componentes conexas (equivalentemente, fuertemente conexas) de este grafo son llamadas clases de Rauzy. A la clase de Rauzy que contiene a una permutación irreducible π la denotaremos $\mathcal{R}(\pi)$. Etiquetamos una arista $\pi \rightarrow \pi'$ con una tupla (ε, w, l) en donde $\varepsilon \in \{t, b\}$ es el tipo de la inducción y $w, l \in \mathcal{A}$ son los símbolos *winner* y *loser* de la inducción, respectivamente. Nos referiremos a esta asignación de etiquetas en las aristas como etiquetas de tipos, *winner*s y *loser*s, respectivamente. Diremos que un camino dirigido finito $\gamma = \pi_0 \rightarrow \pi_1 \rightarrow \dots \rightarrow \pi_k$ es un *loop* si empieza y termina con una misma permutación. Diremos que un loop es *elemental* si todas sus aristas tienen el mismo tipo.

Observación. 5

- Para un vértice π en una clase de Rauzy, hay exactamente dos vértices distintos π' tales que existe una arista $\pi \rightarrow \pi'$: estos son $\pi' = R_t(\pi)$ y $\pi' = R_b(\pi)$. Similarmente, hay exactamente dos vértices distintos π' tales que existe una arista $\pi' \rightarrow \pi$.
- Sea π un vértice en una clase de Rauzy y sean α_1^t, α_1^b los símbolos que aparecen al comienzo de cada permutación de π . Entonces todo otro vértice π' en esta clase de Rauzy posee los mismos símbolos al comienzo de cada permutación de π' .
- Sea $\pi_0 \rightarrow \pi_1 \rightarrow \dots \rightarrow \pi_k$ un camino dirigido finito en una clase de Rauzy, en donde toda arista dirigida de este camino está etiquetada con un mismo tipo $\varepsilon \in \{t, b\}$. Entonces todas las aristas dirigidas de este camino están etiquetadas con un mismo *winner* w . Si ahora tenemos una arista dirigida $\pi_k \rightarrow \pi'$ etiquetada con el tipo complementario $\bar{\varepsilon} \in \{t, b\} \setminus \{\varepsilon\}$, entonces la etiqueta *loser* de esta arista corresponde al símbolo w .

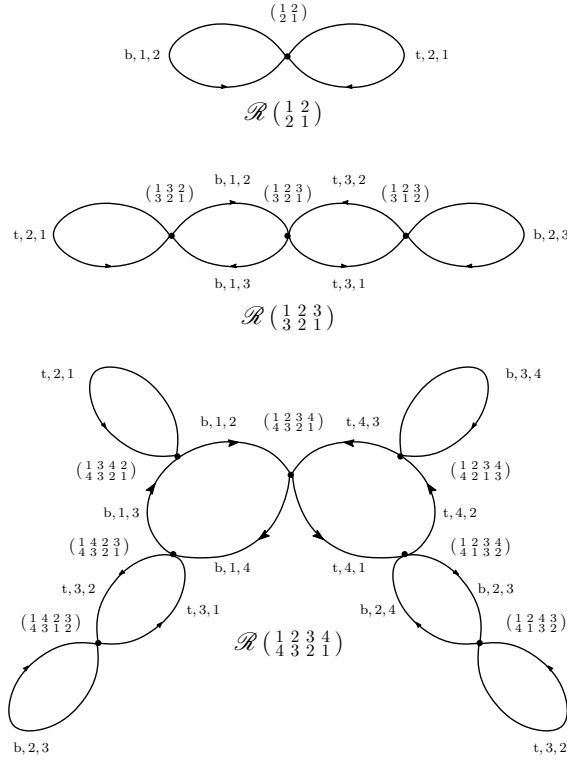


Figura 1.4: Algunas clases de Rauzy con sus etiquetas.

La interpretación dinámica del algoritmo de inducción de Rauzy-Veech viene dada por la siguiente proposición:

Proposición 1.54 *Suponga que una t.i.i. T definida por un par (π, λ) con π irreducible es tal que los subintervalos $I_{\alpha_d^t}$ e $I_{\alpha_d^b}$ tienen distinto largo.*

1. *Suponga que $\lambda_{\alpha_d^t} > \lambda_{\alpha_d^b}$ y sea $I' = I \setminus T(I_{\alpha_d^b})$. Entonces la aplicación de primer retorno $T' : I' \rightarrow I'$ de T a I' es una t.i.i. definida con permutación $R_t(\pi)$ y de vector de largos λ' con $\lambda'_i = \lambda_i$ si $i \neq \alpha_d^t$ y $\lambda'_{\alpha_d^t} = \lambda_{\alpha_d^t} - \lambda_{\alpha_d^b}$.*
2. *Suponga que $\lambda_{\alpha_d^t} < \lambda_{\alpha_d^b}$ y sea $I' = I \setminus I_{\alpha_d^t}$. Entonces la aplicación de primer retorno $T' : I' \rightarrow I'$ de T a I' es una t.i.i. definida con permutación $R_b(\pi)$ y de vector de largos λ' con $\lambda'_i = \lambda_i$ si $i \neq \alpha_d^b$ y $\lambda'_{\alpha_d^b} = \lambda_{\alpha_d^b} - \lambda_{\alpha_d^t}$.*

De la proposición anterior se deduce que dada una t.i.i. T con $\lambda_{\alpha_d^t} \neq \lambda_{\alpha_d^b}$ es posible definir una nueva t.i.i. T' , a la cual llamaremos primera iteración de Rauzy de T , que actúa entonces en el espacio de las t.i.i. La siguiente proposición nos dice que la condición de Keane precisamente caracteriza a las t.i.i. que pueden iterarse indefinidamente mediante la inducción de Rauzy:

Proposición 1.55 *Suponga que la t.i.i. T definida por (π, λ) satisface la condición de Keane (1.18). Entonces es posible definir $T^{(n)} : I^{(n)} \rightarrow I^{(n)}$, la n -ésima iteración de Rauzy de T para cada $n \geq 0$, siendo $T^{(0)} = T$. Recíprocamente, si $T^{(n)}$ está definida para cada $n \geq 0$, entonces T satisface la condición de Keane.*

Una condición necesaria y suficiente para que un paseo infinito $\gamma = (\gamma_n)_{n \geq 0}$ en una clase de Rauzy corresponda al paseo infinito de alguna t.i.i. que satisfice la condición de Keane es que cada símbolo $\alpha \in \mathcal{A}$ sea el *winner* de infinitas aristas de γ (equivalentemente, que sea el *loser* de infinitas aristas de γ):

Proposición 1.56 *Sea \mathcal{R} una clase de Rauzy y sea $\gamma = (\gamma_n)_{n \geq 0}$ un paseo infinito en \mathcal{R} , en donde $\gamma_n = (\varepsilon^{(n)}, w^{(n)}, l^{(n)})$, $\forall n \geq 0$. Entonces γ es el paseo infinito dado por el algoritmo de inducción de Rauzy de alguna t.i.i. que satisfice la condición de Keane si y solamente si para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ existen infinitos índices $n \geq 0$ con $w^{(n)} = \alpha$ (equivalentemente, si existen infinitos índices $m \geq 0$ con $l^{(m)} = \alpha$).*

Definición 1.57 *Una permutación $\pi = (\pi_t, \pi_b)$ se dice estándar si el último símbolo en cada fila dada por las permutaciones coincide con el primer símbolo de la otra fila, i.e.,*

$$\alpha_d^t = \alpha_1^b, \quad \alpha_d^b = \alpha_1^t.$$

Ejemplo. 3 Las permutaciones irreducibles $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ son las únicas permutaciones estándar en una misma clase de Rauzy.

La siguiente propiedad nos dice que permutaciones de este tipo aparecen en todas las clases de Rauzy. Esta permutación puede ser única en su clase de Rauzy, como lo es en el caso de las clases hiperelípticas que se definen más adelante.

Proposición 1.58 *Toda clase de Rauzy contiene alguna permutación estándar.*

Para finalizar esta sección, notemos que si una t.i.i. T definida por (π, λ) y si T' es la inducción de Rauzy de T definida por (π', λ') , entonces:

$$\lambda = (\text{Id} + E_{\alpha_w, \alpha_l})\lambda',$$

siendo α_w, α_l los símbolos *winner* y *loser*, respectivamente de la inducción que envía π a π' , Id es la matriz identidad de $d \times d$ y E_{α_w, α_l} es una matriz que posee un único coeficiente distinto de 0, igual a 1 en la posición α_w, α_l .

Así, si T es una t.i.i. para la cual es posible definir $T^{(n)}$, $\forall n \geq 0$, denotaremos por $(\pi^{(n)}, \lambda^{(n)})$ a la permutación y vector de largos, respectivamente, que definen $T^{(n)} : I^{(n)} \rightarrow I^{(n)}$, por $\delta^{(n)}$ a su vector de traslación y por $\Omega(\pi^{(n)})$ a su matriz de intersección. Para una arista $\gamma = \pi \rightarrow \pi'$ que una permutaciones irreducibles π, π' en una clase de Rauzy \mathcal{R} , escribimos $B_\gamma = \text{Id} + E_{\alpha_w, \alpha_l} \in \text{SL}(\mathbb{Z}^d)$, siendo α_w, α_l los respectivos *winner* y *loser* de la inducción. Para un paseo $\gamma = \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{n-1}$ en \mathcal{R} que una π con $\pi^{(n)}$, escribimos $B_\gamma = B_{\gamma_0} B_{\gamma_1} \dots B_{\gamma_{n-1}}$ para la n -ésima matriz de inducción. Así, las relaciones anteriores se escriben

$$\lambda = B_\gamma \lambda^{(n)}, \tag{1.19}$$

$$\delta^{(n)} = \Omega(\pi^{(n)}) \lambda^{(n)}, \tag{1.20}$$

para cada $n \geq 0$. Adicionalmente, si γ es un camino dirigido que una las permutaciones π y π' , tenemos la relación

$$B_\gamma^\top \Omega(\pi) B_\gamma = \Omega(\pi'). \tag{1.21}$$

En particular, si γ es un loop en π , entonces

$$B_\gamma^\top \Omega(\pi) B_\gamma = \Omega(\pi). \quad (1.22)$$

Si $n \geq 1$, de la minimalidad de T , debe existir $l \geq n$ tal que $B_{\gamma_{[n,l]}} = B_{\gamma_n} \cdot \dots \cdot B_{\gamma_{l-1}} > 0$. La siguiente proposición (Sección 1.2 de [MMY05]) nos da una descripción de como puede tomarse el valor de l anterior en función de los *winners* y *losers* que aparecen en γ :

Proposición 1.59 ([MMY05]) *Un camino finito γ en una clase de Rauzy con alfabeto \mathcal{A} se dice completo si cada símbolo del alfabeto \mathcal{A} es el winner de al menos una arista de γ . Un camino finito se dice k -completo si es la concatenación de k caminos completos. Suponga que $|\mathcal{A}| = d$, luego:*

1. Si γ es un camino k -completo con $k \geq 2d - 3$, entonces $B_\gamma > 0$ si $d \geq 3$.
2. Si γ es un camino k -completo con $k \geq 2$, entonces $B_\gamma > 0$ si $d = 2$.

1.6.2. La clase hiperelíptica

Una clase de Rauzy particular es la llamada *clase hiperelíptica* $\mathcal{R}(\pi)$ en donde $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & d-1 & d \\ d & d-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Por comodidad denotaremos $\pi^*(d)$ a la permutación anterior, *i.e.*, en donde $\pi_t = \text{Id}$, $\pi_b(j) = d + 1 - j$, $\forall 1 \leq j \leq d$ y por \mathcal{R}_d a $\mathcal{R}(\pi^*(d))$. A $\pi^*(d)$ la llamaremos permutación central de \mathcal{R}_d . A continuación se ilustran algunas de estas clases hiperelípticas:

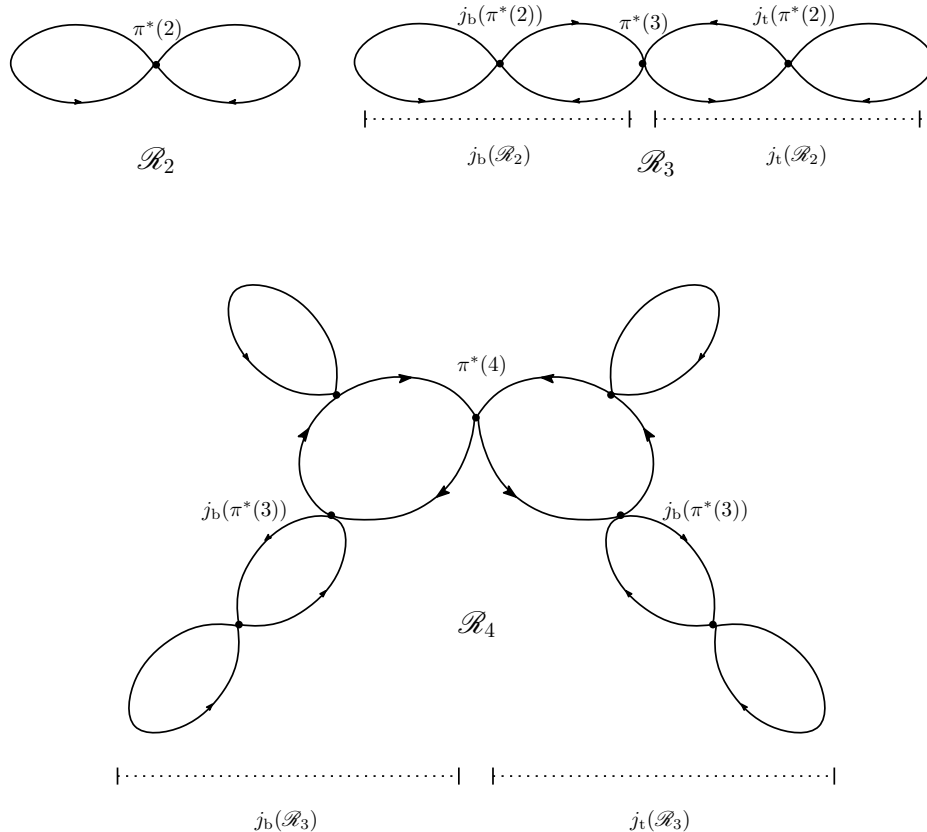


Figura 1.5: Diagramas de las clases de Rauzy \mathcal{R}_2 , \mathcal{R}_3 y \mathcal{R}_4 .

Estas clases han sido estudiadas en gran generalidad ([Rau79], [AMY18], y [FHZ04], [FZ11] en el contexto de valores propios de t.i.i. con esta combinatoria). En particular hay una descripción completa de \mathcal{R}_{d+1} en función de \mathcal{R}_d :

Proposición 1.60 ([Rau79], [AMY18]) *Si $d \geq 2$, la clase \mathcal{R}_{d+1} consiste de la unión disjunta entre $\pi^*(d+1)$, $j_t(\mathcal{R}_d)$ y $j_b(\mathcal{R}_d)$, en donde los mapeos inyectivos sobre permutaciones j_t y j_b están definidos como sigue:*

- $j_t(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & \pi_t^{-1}(1) + 1 & \dots & \pi_t^{-1}(k-1) + 1 & \pi_t^{-1}(k) + 1 & \dots & \pi_t^{-1}(d) + 1 \\ \pi_b^{-1}(1) + 1 & \pi_b^{-1}(2) + 1 & \dots & 1 & \pi_b^{-1}(k) + 1 & \dots & \pi_b^{-1}(d) + 1 \end{pmatrix}$,
en donde $\pi_b^{-1}(d-1) = k$;
- $j_b(\pi) = \begin{pmatrix} \pi_t^{-1}(1) & \pi_t^{-1}(2) & \dots & \pi_t^{-1}(k-1) & d+1 & \pi_t^{-1}(k) & \dots & \pi_t^{-1}(d) \\ d+1 & \pi_b^{-1}(1) & \dots & \pi_b^{-1}(k-2) & \pi_b^{-1}(k-1) & \pi_b^{-1}(k) & \dots & \pi_b^{-1}(d) \end{pmatrix}$,
en donde $\pi_t^{-1}(2) = k$.

Además, la involución I_d en \mathcal{R}_d definida por $I_d(\pi) = (\pi_b \circ \iota, \pi_t \circ \iota)$ con $\iota : \{1, 2, \dots, d\} \rightarrow \{1, 2, \dots, d\}$, $\iota(j) = d+1-j$, satisface:

$$I_d(\pi^*(d)) = \pi^*(d), \quad I_{d+1} \circ j_b \circ I_d = j_t, \quad I_d \circ R_b \circ I_d = R_t.$$

Por otro lado, esta clase tiene la propiedad siguiente: dada $\pi \in \mathcal{R}_d$, existe un único camino dirigido simple (*i.e.*, que no pasa más de una vez por un mismo vértice) entre $\pi^*(d)$ y π .

1.7. Superficies de traslación

Sea M una *superficie de traslación* compacta y orientable de género $g \geq 1$, *i.e.*, una superficie con un conjunto finito o vacío Σ de singularidades cónicas dotado de un atlas tal que los cambios de coordenadas en cartas locales están dados por traslaciones en \mathbb{R}^2 . En el caso de una superficie plana en general, los ángulos en las singularidades cónicas son $2\pi\kappa_1 \leq 2\pi\kappa_2 \leq \dots \leq 2\pi\kappa_r$, en donde $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_r > -1$ son números reales que satisfacen $\sum \kappa_i = 2g - 2$. Si la superficie tiene holonomía trivial, entonces necesariamente $\kappa_i \in \mathbb{Z}_+$, para cada $1 \leq i \leq r$, y existe una sección paralela del fibrado tangente unitario T_1M , esto es, un campo vectorial paralelo y unitario, bien definido en $M \setminus \Sigma$. La especificación de los parámetros $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_r) \in \mathbb{Z}_+^r$ con $\sum \kappa_i = 2g - 2$ determina un *estrato* finito dimensional $\mathcal{H}(\kappa)$ en el espacio de módulos de superficies de traslación que está dotado con una estructura compleja natural y una medida de tipo Lebesgue [Vee82]. Un *flujo de traslación* F en una superficie de traslación M es el flujo generado por un campo vectorial paralelo unitario en $M \setminus \Sigma$. El espacio de todos los flujos de traslación en una superficie de traslación dada se identifica naturalmente con el espacio tangente unitario en cualquier punto que no está en Σ , luego está parametrizado por el círculo \mathbb{S}^1 . Denotamos por F_θ al flujo de traslación generado por el campo vectorial que forma un ángulo θ con respecto a la dirección canónica *norte* definida sobre M .

Nos referimos a [Zor06] para una descripción más completa sobre la geometría y dinámica de superficies planas.

1.7.1. Datos de suspensión sobre transformaciones de intercambio de intervalos

Ahora describiremos la construcción de una suspensión sobre una t.i.i. T que puede identificarse con una superficie de traslación y donde T corresponde a la transformación de primer retorno del flujo vertical en un segmento bien escogido. Sea T una t.i.i. definida por (π, λ) con π una permutación irreducible sobre el alfabeto \mathcal{A} en $d \geq 2$ símbolos. Un *dato de suspensión* para T es una colección de vectores $(\zeta_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ tales que:

- Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, $\text{Re}(\zeta_\alpha) = \lambda_\alpha$,
- Para cada $1 \leq k \leq d$, $\text{Im}\left(\sum_{\pi_t(\alpha) \leq k} \zeta_\alpha\right) > 0$,
- Para cada $1 \leq k \leq d$, $\text{Im}\left(\sum_{\pi_b(\alpha) \leq k} \zeta_\alpha\right) < 0$.

Dado un dato de suspensión ζ , consideramos el polígono obtenido por la concatenación de los vectores $\zeta_{\pi_t^{-1}(j)}$ para $1 \leq j \leq d$ comenzando en el origen, formando una línea quebrada L_0 en \mathbb{C} , y continuando con la concatenación de los vectores $\zeta_{\pi_b^{-1}(j)}$ para $1 \leq j \leq d$ comenzando en el origen, formando una línea quebrada L_1 en \mathbb{C} . Si este polígono no posee auto-intersecciones adicionales a las de sus extremos, podemos definir una superficie de traslación M identificando cada lado ζ_α de L_0 con el lado ζ_α por traslación. Sea el intervalo horizontal $I = [0, \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha)$ en M . Entonces T es precisamente la transformación de primer retorno del flujo vertical a I en M . Si π es irreducible, entonces $\zeta_\alpha = \lambda_\alpha + i(\pi_b(\alpha) - \pi_t(\alpha))$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}$, es un dato de suspensión sobre T , así que siempre es posible asociar un dato de suspensión para permutaciones irreducibles.

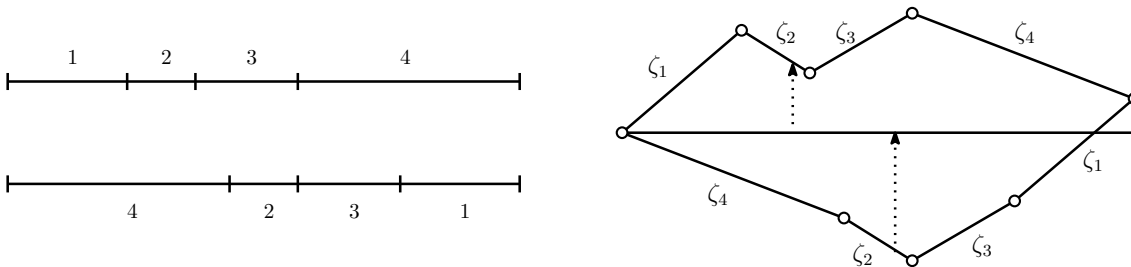


Figura 1.6

Ejemplo. 4 En la Figura 1.6 se muestra una suspensión de una t.i.i. con permutación irreducible $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

De manera alternativa, podemos construir una suspensión sobre un intercambio de intervalos que funciona para cualquier dato de suspensión, la llamada construcción de *zippered rectangles* de Veech [Vee82]. Sea T una t.i.i. definida por (π, λ) con π irreducible y sea ζ un dato de suspensión sobre T . Definamos $h = (h_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ por

$$h_\alpha = \sum_{\pi_t(\beta) < \pi_t(\alpha)} \text{Im}(\zeta_\beta) - \sum_{\pi_b(\beta) < \pi_b(\alpha)} \text{Im}(\zeta_\beta) > 0.$$

Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ consideremos el rectángulo R_α de ancho $\text{Re}(\zeta_\alpha)$ y altura h_α con base en $I_{\pi_t(\alpha)}$. La construcción de *zippered rectangles* es la superficie de traslación $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} R_\alpha / \sim$, siendo \sim la relación de equivalencia que identifica el techo y base de cada rectángulo por $(x, h_\alpha) \sim (T(x), 0)$ para $x \in I_{\pi_t(\alpha)}$. Luego identificamos los bordes verticales de estos rectángulos que son adyacentes hasta la singularidad. Para una descripción más precisa, ver [Vee82].

Las transformaciones de intercambios de intervalos se han estudiado a lo largo del tiempo por sus diversas propiedades ergódicas. A. Katok probó que las t.i.i. y los flujos de suspensión sobre t.i.i. con función techo de variación acotada nunca son fuertemente mezcladoras [Kat80]. Luego, el trabajo de H. Masur y W. Veech estableció que para cada permutación irreducible π y para Lebesgue-casi todo $\lambda \in \mathbb{R}_+^d$ la t.i.i. dada por el par (π, λ) es únicamente ergódica. La pregunta sobre si t.i.i. típicas son débilmente mezcladoras es mucho más delicada, salvo en el caso en que π es de tipo rotación. La mezcla débil topológica para casi toda t.i.i. que no es de tipo rotación fue probada en [NR97]. Los problemas de mezcla débil (medible o topológica) de t.i.i. y de flujos de traslación son independientes unos de otros, pues estas propiedades no son invariantes bajo cambios temporales ni suspensiones. En esta dirección, I. Lucien probó mezcla débil topológica para flujos de traslación típicos [Luc98]. Finalmente, la mezcla débil topológica para t.i.i. y flujos de traslación típicos que no son de tipos de rotación fue demostrado por A. Avila y G. Forni en [AF07]. A continuación enunciaremos dichos resultados, que en parte inspiran los resultados de esta memoria. Ver también [AD16] para resultados sobre valores propios y mezcla débil en el contexto de flujos direccionales en billares poligonales regulares (o más generalmente, superficies de Veech no aritméticas).

Teorema 1.61 (Teorema A, [AF07]) *Sea π una permutación sobre $\{1, 2, \dots, d\}$ que no es de tipo rotación. Entonces para Lebesgue-casi todo $\lambda \in \mathbb{R}_+^d$, la t.i.i. T definida por (π, λ) es débilmente mezcladora.*

Teorema 1.62 (Teorema B, [AF07]) *Sea $\mathcal{H}(\kappa)$ un estrato del espacio de módulos de superficies de traslación de género $g \geq 2$. Para casi todas las superficies de traslación $M \in \mathcal{H}(\kappa)$, el flujo de traslación F_θ en M es débilmente mezclador, para casi todo $\theta \in \mathbb{S}^1$.*

Capítulo 2

Representaciones de Bratteli-Vershik de t.i.i. y shifts S -ádicos minimales

En este capítulo veremos como los resultados en la teoría general de valores propios de sistemas minimales de Cantor presentados en el Capítulo 1 pueden utilizarse para el estudio de t.i.i. que satisfacen la condición de Keane. Ilustraremos esto construyendo explícitamente una representación de sistema de Bratteli-Vershik de rango finito de la extensión simbólica de tales t.i.i., enfatizando en el hecho que dicha construcción proviene de explicitar torres de Kakutani-Rokhlin dadas por el algoritmo clásico de inducción de Rauzy-Veech. Para caracterizar los valores propios de los sistemas originales basta con caracterizarlos para sus extensiones simbólicas. Por ejemplo, la mezcla débil (ya sea topológica o medible) de la extensión simbólica implica la mezcla débil en el sistema original. Luego extenderemos este resultado a la construcción de representaciones de Bratteli-Vershik de shifts S -ádicos minimales, los cuales incluyen intercambios de intervalos, palabras Sturmianas y palabras de Arnoux-Rauzy. En el contexto de sistemas de intercambios de intervalos, otras inducciones y representaciones han sido propuestas ([FHZ04], [FZ11], [GJ02]), sin embargo el algoritmo de Rauzy-Veech y sus matrices asociadas han sido mayormente estudiadas por sus diversas aplicaciones a la teoría moderna de transformaciones de intercambios de intervalos [AMY18]. Ejemplificaremos algunas aplicaciones de obtener esta representación obteniendo una nueva demostración del hecho que toda t.i.i. en tres intervalos que satisface la condición de Keane es topológicamente débilmente mezcladora y que casi toda t.i.i. en el mismo contexto es débilmente mezcladora.

2.1. Representación de Bratteli-Vershik de una t.i.i.

Ahora se construirá una representación de Bratteli-Vershik de rango finito que se obtiene a partir de una extensión simbólica de una t.i.i. que satisface la condición de Keane. La construcción tiene el objetivo de estudiar los valores propios, ya sean topológicos o medibles de las t.i.i y de sistemas geométricos afines. Con este objetivo en mente, se necesita obtener una representación con una combinatoria suficientemente buena para poder aplicar los resultados

mencionados en el Capítulo 1. El algoritmo de inducción de Rauzy-Veech será suficiente para estos propósitos. En [GJ02] los autores proponen un diagrama de Bratteli para el estudio de t.i.i. Este diagrama proviene de inducir el sistema original en un subintervalo que contiene al origen distinto al subintervalo del algoritmo clásico, que no necesariamente provee la misma cantidad de vértices por nivel (reflejando el hecho que la transformación inducida de una t.i.i. a un subintervalo es otra t.i.i. posiblemente en una mayor cantidad de intervalos [Via06]). Como el algoritmo clásico provee una descripción combinatorial de las matrices de inducción a través de un objeto clásico como es el grafo de Rauzy, optaremos por construir explícitamente las torres de Kakutani-Rokhlin con esta inducción. Tal parametrización a través del grafo también es importante en la formulación de mezcla débil en ciertos shifts S -ádicos dados en los Capítulos 3 y 4.

Definición 2.1 *Considere una t.i.i. $T : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ en $d \geq 2$ intervalos I_1, I_2, \dots, I_d . Dado $x \in [0, 1)$ se construye una sucesión simbólica $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ siendo $x_n = \alpha$ si y sólo si $T^n(x) \in I_\alpha$. Defina Ψ al mapeo que envía $x \in [0, 1)$ a su sucesión simbólica y sea*

$$\Omega_T = \overline{\{\Psi(x) : x \in [0, 1)\}} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}.$$

Es claro que si $\sigma : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ denota al shift por la izquierda, entonces $\sigma(\Psi(x)) = \Psi(T(x))$, $\forall x \in [0, 1)$. Luego Ω_T es σ -invariante y (Ω_T, σ) es un subshift. Un resultado clásico asegura la existencia de $\pi : \Omega_T \rightarrow [0, 1)$ continua y sobreyectiva tal que $T \circ \pi = \pi \circ \sigma$ y que es invertible salvo en las órbitas de las discontinuidades que define T . El sistema (Ω_T, σ) es minimal si T satisface la condición de Keane. Llamaremos al sistema (Ω_T, σ) extensión simbólica de la t.i.i. T .

Una representación de Bratteli-Vershik de (Ω_T, σ) basada en la inducción de Rauzy-Veech es dada a continuación:

Proposición 2.2 *Sea T una t.i.i. definida por (π, λ) que satisface la condición de Keane y sea $\gamma = (\gamma_n)_{n \geq 0}$ su paseo infinito en $\mathcal{R}(\pi)$. Sean $\gamma_n = (\varepsilon^{(n)}, w^{(n)}, l^{(n)})$, $\forall n \geq 0$, las etiquetas de tipo, winners y losers correspondientes. Se define el diagrama de Bratteli $B = (V, E, \preceq)$ en donde:*

1. $V_0 = \{v_0\}$ es un vértice inicial distinguido.
2. $V_n = \{1, 2, \dots, d\}$, $\forall n \geq 1$.
3. $h_1 = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d$ y para $n \geq 2$ la matriz de incidencia M_n de $d \times d$ es $B_{\gamma_{n-2}}$, en donde $B_{\gamma_{n-2}} = Id + E_{w^{(n-2)}, l^{(n-2)}}$.
4. Para cada $n \geq 1$, si $\varepsilon^{(n-1)} = t$, entonces para $i = w^{(n-1)} \in V_n, j = l^{(n-1)} \in V_{n+1}$, tenemos $e \preceq e'$, siendo las aristas $e = jj, e' = ij$.
5. Para cada $n \geq 1$, si $\varepsilon^{(n-1)} = b$, entonces para $i = w^{(n-1)} \in V_n, j = l^{(n-1)} \in V_{n+1}$, tenemos $e \preceq e'$, siendo las aristas $e = ij, e' = jj$.

Entonces B es propiamente ordenado, simple y si (X_B, V_B) denota al sistema de Bratteli-Vershik dado por B , entonces (Ω_T, σ) y (X_B, V_B) son topológicamente conjugados.

DEMOSTRACIÓN. El sistema (Ω_T, σ) es un sistema minimal de Cantor. De la construcción explícita en el Teorema 1.33, definiremos particiones en torres de Kakutani-Rokhlin de (Ω_T, σ) .

Es natural primero definir particiones en torres de Kakutani-Rokhlin sobre la t.i.i. T . Defina para cada $n \geq 0, 1 \leq i \leq d$ la i -ésima torre $\{T^k B_n(i) : 0 \leq k < h_n(i)\}$, en donde $B_n(i) = I_i^{(n)}$, el i -ésimo subintervalo del dominio $I^{(n)}$ de la t.i.i. $T^{(n)}$ es su base, siendo $h_n = (1, 1, \dots, 1)B_{\gamma_0}B_{\gamma_1} \dots B_{\gamma_{n-1}}$. Afirmamos que $\mathcal{P}_n = \{T^k B_n(i) : 1 \leq i \leq d, 0 \leq k < h_n(i)\}$ es una partición de I . En efecto, es sencillo probar por inducción en n que para cada $x \in I_j^{(n)}$ tenemos

$$h_n(j) = \min\{i \geq 1 : T^i(x) \in I_i^{(n)}, T^l(x) \notin I_j^{(n)}, \forall 1 \leq l < i\}, \quad (2.1)$$

$$B_{\gamma_0}B_{\gamma_1} \dots B_{\gamma_{n-1}}(i, j) = \#\{0 \leq k < h_n(j) : T^k(x) \in I_i\}, \forall 1 \leq i, j \leq d, x \in I_j^{(n)}. \quad (2.2)$$

Ambas igualdades permiten mostrar lo afirmado. En la Figura 2.1 se muestra un ejemplo de cómo la inducción de Rauzy-Veech permite ir construyendo particiones en torres de una t.i.i. Ahora definimos para cada $n \geq 0, 1 \leq i \leq d$ la i -ésima torre $\{\sigma^k B'_n(i) : 0 \leq k < h_n(i)\}$, en donde $B'_n(i) = \Psi(I_i^{(n)})$ es la i -ésima base. Afirmamos que $\mathcal{P}'_n = \{\sigma^k B'_n(i) : 1 \leq i \leq d, 0 \leq k < h_n(i)\}$ es una partición de clopens de Ω_T . En efecto, sea $\omega = \omega_0\omega_1 \dots \omega_{h-1}$ la palabra $\Psi(x)_{[0, h)}$ para cualquier $x \in I_i^{(n)}$, siendo $h = h_n(i)$. Por la afirmación anterior, esto está bien definido y es claro que $B'_n(i) \subseteq_0 [\omega]$ en Ω_T . Sea $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in_0 [\omega]$ y $\Psi(y_n) \rightarrow x$ si $n \rightarrow \infty$ para cierta $(y_n)_n$ en I . Por la minimalidad de T podemos asumir sin perder generalidad que $y_n \in I_i^{(n)}$ y por lo tanto $x \in \overline{\Psi(I_i^{(n)})}$, así que $B'_n(i) =_0 [\omega]$, un clopen. Si ω, ω' son las palabras definidas como antes correspondientes a las bases $I_i^{(n)}, I_j^{(n)}$ para $i \neq j$ y tenemos $\omega = \omega'$, entonces la matriz $B_{\gamma_0}B_{\gamma_1} \dots B_{\gamma_{n-1}}$ posee dos columnas iguales por 2.2, contradiciendo el hecho que esta matriz es invertible, luego las bases $B'_n(i)$ y $B'_n(j)$ son disjuntas. La relación $\Psi \circ T^k = \sigma^k \circ \Psi$ implica que $\sigma^k B'_n(i) = \overline{\Psi(T^k B_n(i))}$ y por lo tanto \mathcal{P}'_n particiona Ω_T .

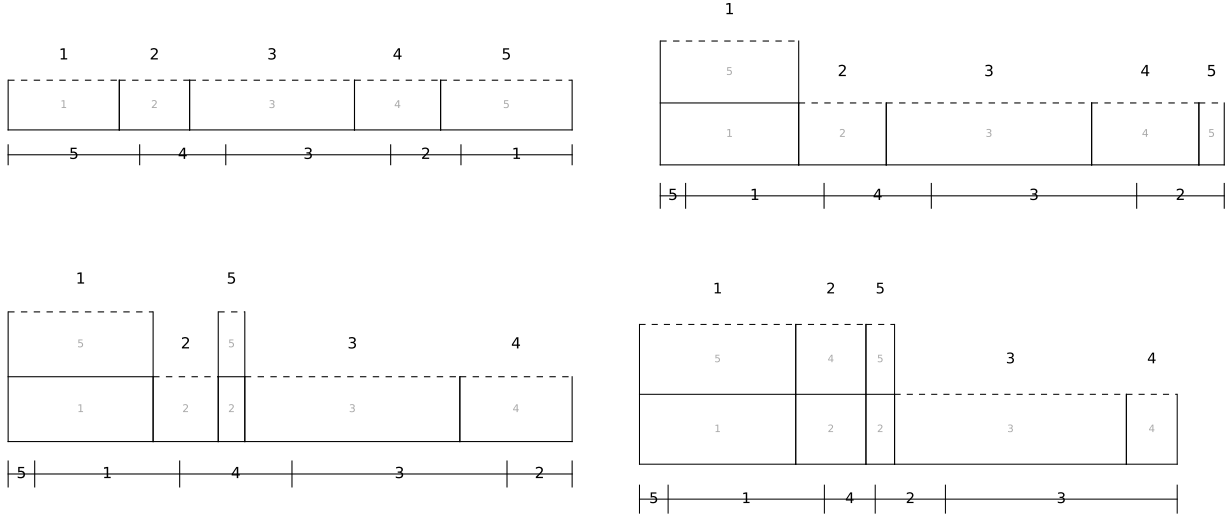


Figura 2.1: Primeras tres iteraciones del algoritmo de Rauzy-Veech en una t.i.i. de 5 intervalos.

Finalmente reconocemos como son las \mathcal{P}'_{n-1} -transversales de las i -ésima torre de \mathcal{P}'_n , para cada $n \geq 1$ y cada $1 \leq i \leq d$. Si $n = 1$, es claro que la \mathcal{P}'_0 -transversal de cada torre de \mathcal{P}'_1 es (1). Sea ahora $n \geq 2$.

- Si γ_{n-2} es de tipo *top*, la \mathcal{P}'_{n-1} -transversal de la $l^{(n-2)}$ -ésima torre de \mathcal{P}'_n es $(l^{(n-2)}, w^{(n-2)})$,

la \mathcal{P}'_{n-1} -transversal de la $w^{(n-2)}$ -ésima torre de \mathcal{P}'_n es $(w^{(n-2)})$ y la \mathcal{P}'_{n-1} -transversal de la j -ésima torre de \mathcal{P}'_n es (j) , para cada $j \in \mathcal{A} \setminus \{w, 1\}$.

- Si γ_{n-2} es de tipo *bottom*, la \mathcal{P}'_{n-1} -transversal de la $1^{(n-2)}$ -ésima torre de \mathcal{P}'_n es $(w^{(n-2)}, 1^{(n-2)})$, la \mathcal{P}'_{n-1} -transversal de la $w^{(n-2)}$ -ésima torre de \mathcal{P}'_n es $(w^{(n-2)})$ y la \mathcal{P}'_{n-1} -transversal de la j -ésima torre de \mathcal{P}'_n es (j) , para cada $j \in \mathcal{A} \setminus \{w, 1\}$.

Es sencillo notar entonces que el diagrama de Bratteli que se construye a partir de Ω_T satisface las condiciones de la proposición. □

En la clase hiperelíptica, la simetría adicional que entrega la involución I_d , permite deducir el siguiente resultado combinatorial:

Proposición 2.3 *Sea T una t.i.i. definida por una combinatoria $\pi \in \mathcal{R}_d$ y que satisface la condición de Keane, y sea γ el camino dirigido infinito que define T en la clase \mathcal{R}_d . Sea γ_t el loop simple que contiene a $\pi^*(d)$ en \mathcal{R}_d que tiene todas sus aristas de tipo top y γ_b el loop simple que contiene a $\pi^*(d)$ en \mathcal{R}_d que tiene todas sus aristas de tipo bottom. Entonces:*

1. *Las únicas aristas de \mathcal{R}_d en donde el winner es el símbolo d son las de γ_t , y las únicas aristas de \mathcal{R}_d en donde el winner es el símbolo 1 son las de γ_b . Además, las etiquetas de los aristas de γ_t son, en el orden en que se recorren, los símbolos $1, 2, \dots, d-1$ y las etiquetas de los aristas de γ_b son, en el orden en que se recorren, los símbolos $d, d-1, \dots, 2$.*
2. *Del ítem anterior podemos definir sucesiones $(n_k)_{k \geq 0}$ y $(m_k)_{k \geq 0}$ como sigue: $n_0 = 0, n_1 = 1$ y $n_k = s_{k-2} + 1$, en donde γ_{m_0} es la primera arista con tipo top de γ que sale de $\pi^*(d)$, γ_{s_0} es la primera arista con tipo bottom de γ con $s_0 > m_0$ que sale de $\pi^*(d)$, y para cada $k \geq 0$, $\gamma_{m_{k+1}}$ es la primera arista con tipo top de γ con $m_{k+1} > s_k$ que sale de $\pi^*(d)$ y $\gamma_{s_{k+1}}$ es la primera arista con tipo bottom de γ con $s_{k+1} > m_k$ que sale de $\pi^*(d)$. Si ahora $B = (V, E, \preceq)$ es el diagrama de Bratteli-Vershik asociado a T , definido en la Proposición 2.2, entonces un telescoping en los niveles $(n_k)_{k \geq 0}$ de B satisface las hipótesis (H1) y (H3) de la Proposición 1.34. Más aún, si un telescoping de B dada por una sucesión $(\bar{n}_k)_{k \geq 0}$ con $\bar{n}_0 = 0, \bar{n}_1 = 1$ satisface la hipótesis (H3), entonces todas las matrices de incidencia M_γ con γ una arista del loop γ_t deben aparecer, en el orden en que recorren γ_t , entre los niveles \bar{n}_k y \bar{n}_{k+1} , para cada $k \geq 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada $d \geq 2$ denotemos por $\gamma_t(d), \gamma_b(d)$ a los loops simples en \mathcal{R}_d de tipos *top* y *bottom*, respectivamente.

1. Primero notemos que a la sucesión de inducciones de Rauzy de tipo *top* a partir de $\pi^*(d)$ son

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & d-1 & d \\ d & d-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{t} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & d-1 & d \\ d & 1 & d-1 & \dots & 2 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{t} \dots \xrightarrow{t} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & d-1 & d \\ d & d-2 & \dots & 1 & d-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{t} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & d-1 & d \\ d & d-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

lo que muestra que en $\gamma_t(d)$ el *winner* es d con respectivos *losers* $1, 2, \dots, d-1$. Análogamente en $\gamma_b(d)$ el *winner* es 1 con respectivos *losers* $d, d-1, \dots, 2$. Por inducción, es claro que en \mathcal{R}_2 el símbolo 2 sólo es *winner* en las aristas de $\gamma_t(2)$ y el símbolo 1 es *winner* sólo en las aristas de $\gamma_b(2)$. Si esto es cierto en \mathcal{R}_d y por la construcción de \mathcal{R}_{d+1} a partir de \mathcal{R}_d usando j_t y j_b tenemos que el símbolo $d+1$ aparece al final de la fila *top* de una permutación $\pi \in \mathcal{R}_{d+1}$ si y solamente si $\pi \in j_t(\gamma_t(d))$ y análogamente el símbolo 1 aparece al final de la fila *bottom* de una permutación $\pi \in \mathcal{R}_{d+1}$ si y solamente si $\pi \in j_b(\gamma_b(d))$.

2. La sucesión $(n_k)_{k \geq 0}$ está bien definida por el ítem anterior y del hecho que cada símbolo debe ser el *winner* de infinitas aristas de γ . Sea $B = (V, E, \preceq)$ el diagrama de Bratteli-Vershik correspondiente a T y sean $1 \leq m < n, \alpha \in \mathcal{A}$. De la Proposición 2.2, tenemos que el camino finito $(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)$ entre los niveles m y n de B que termina en $\alpha \in V_n$ y que es maximal en el orden inducido en $E_{m,n}$ está definido mediante:

$$x_n = \begin{cases} w^{(n)}l^{(n)} & \text{si } \varepsilon^{(n)} = t \text{ y } \alpha = l^{(n)}, \\ \alpha\alpha & \text{si } \varepsilon^{(n)} = t \text{ y } \alpha \neq l^{(n)} \text{ o si } \varepsilon^{(n)} = b, \end{cases}$$

y una vez definidos $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$ sea $\beta = r(x_{n-k})$ y defina $x_{n-(k+1)}$ mediante

$$x_{n-(k+1)} = \begin{cases} w^{(n-(k+1))}l^{(n-(k+1))} & \text{si } \varepsilon^{(n-(k+1))} = t \text{ y } \beta = l^{(n-(k+1))}, \\ \beta\beta & \text{si } \varepsilon^{(n-(k+1))} = t \text{ y } \beta \neq l^{(n-(k+1))} \text{ o si } \varepsilon^{(n-(k+1))} = b. \end{cases}$$

De lo anterior y del segundo ítem de la Observación 5 se deduce que si un camino finito

$$(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) \in E_{m,n}, 1 \leq m < n$$

que es maximal en $E_{m,n}$ y es tal que $r(x_i) = d$ para cierto $m+1 \leq i \leq n$, entonces $r(x_k) = d$ para cada $m+1 \leq k \leq i$. Como en $\gamma_t(d)$ aparecen todos los símbolos $1, 2, \dots, d-1$ como *losers*, se deduce que al recorrer este loop simple entre un par de niveles $1 \leq m < n$ el camino maximal de $E_{m,n}$ que termina en cada $\alpha \in V_n$ es tal que parte en $d \in V_m$. Esto muestra la primera parte de la afirmación. Para la segunda parte ocuparemos dos lemas:

Lema 2.4 *Sea $d \geq 2$ y $\pi \in \mathcal{R}_d$. Entonces $\pi_t^{-1}(d) > \pi_b^{-1}(d)$.*

DEMOSTRACIÓN. Por inducción, la desigualdad es clara si $d = 2$. Asuma que la propiedad es cierta en la clase \mathcal{R}_d . Sea $\pi \in \mathcal{R}_{d+1}$. Si $\pi = \pi^*(d+1)$, la desigualdad es clara. Si $\pi = j_t(\pi')$ con $\pi' \in \mathcal{R}_d, \pi' \neq \pi^*(d)$, entonces $\pi_t^{-1}(d+1) = \pi_t'^{-1}(d) + 1$ mientras que $\pi_b^{-1}(d+1) = \pi_b'^{-1}(d) + 1$ y la desigualdad $\pi_t^{-1}(d+1) > \pi_b^{-1}(d+1)$ es clara. Similarmente, si $\pi = j_b(\pi')$ con $\pi' \in \mathcal{R}_d, \pi' \neq \pi^*(d)$, entonces $\pi_t^{-1}(d+1) = \pi_t'^{-1}(d)$ mientras que $\pi_b^{-1}(d+1) = \pi_b'^{-1}(d)$ y la desigualdad $\pi_t^{-1}(d+1) > \pi_b^{-1}(d+1)$ es clara. Esto termina de probar el lema. \square

Observación. 6 Evidencia computacional sugiere que la propiedad dada en el lema anterior caracteriza a la clase de Rauzy hiperelíptica.

Lema 2.5 *Sea $d \geq 3$ y para cada $1 \leq i \leq d-2$ sea $C_i^b(d)$ el loop elemental de tipo bottom que contiene a la permutación $R_i^i(\pi^*(d))$ y sea $D_i^b(d)$ el subgrafo fuertemente conexo,*

maximal de \mathcal{R}_d que contiene a $C_i^b(d)$ y no contiene a otro vértice de $\gamma_t(d)$ distinto de $R_i^i(\pi^*(d))$. De igual forma, sea $C_i^t(d)$ el loop elemental de tipo bottom que contiene a la permutación $R_i^i(\pi^*(d))$ y sea $D_i^t(d)$ el subgrafo fuertemente conexo, maximal de \mathcal{R}_d que contiene a $C_i^t(d)$ y no contiene a otro vértice de $\gamma_t(d)$ distinto de $R_i^i(\pi^*(d))$. Entonces i no aparece como loser de una arista de tipo top en $D_i^b(d) \cup \dots \cup D_{d-2}^b(d)$ ni aparece como loser de una arista tipo bottom en $D_i^t(d) \cup \dots \cup D_{d-2}^t(d)$.

DEMOSTRACIÓN. Por inducción en d , la afirmación es clara si $d = 2$. Asuma que la afirmación es cierta para d y que existe $1 \leq i \leq d$ tal que i aparece como loser de una arista tipo top en $D_{i+1}^b(d+1) \cup \dots \cup D_d^b(d+1)$. Por la construcción de \mathcal{R}_{d+1} a partir de \mathcal{R}_d y un argumento inductivo tenemos que (ver Figura 2.2)

$$D_1^b(d+1) = j_t(\gamma_t(d)) \cup \bigcup_{j=1}^{d-1} j_t(D_j^b(d)),$$

$$D_i^b(d+1) = j_t(I_d(D_{i-1}^t(d))), \quad \forall 2 \leq i \leq d,$$

$$D_1^t(d+1) = j_b(\gamma_b(d)) \cup \bigcup_{j=1}^{d-1} j_b(D_j^t(d)),$$

$$D_i^t(d+1) = j_b(I_d(D_{i-1}^b(d))), \quad \forall 2 \leq i \leq d.$$

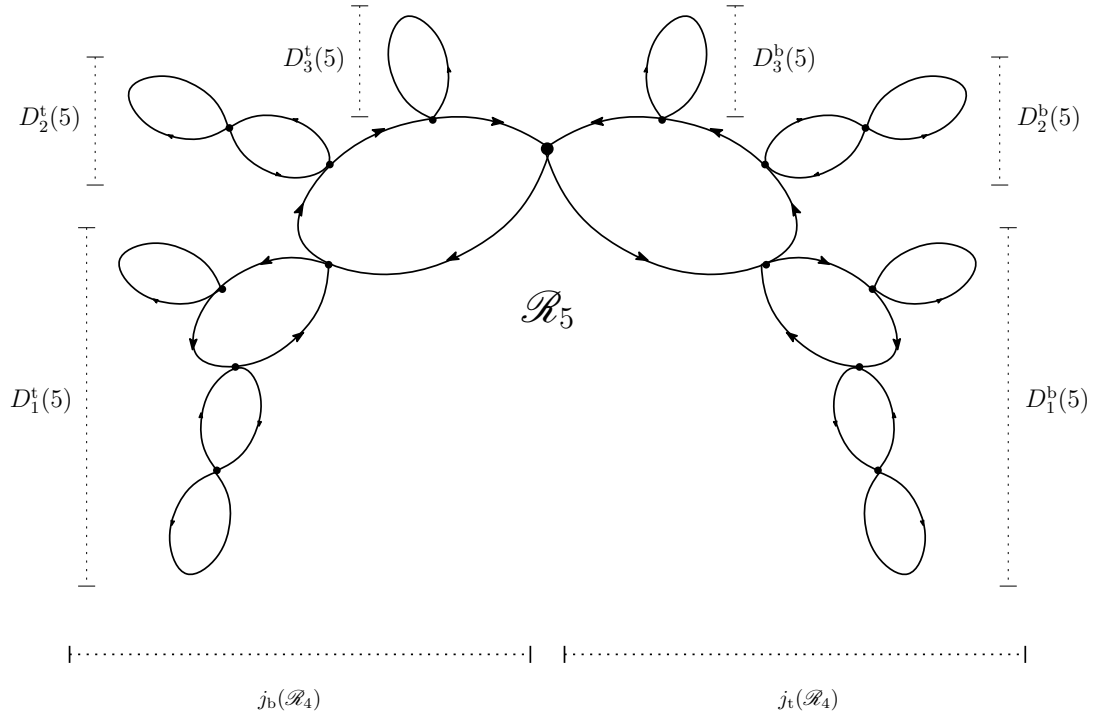


Figura 2.2

Supongamos que 1 aparece como loser de una arista de tipo top en $D_1^b(d+1) \cup \dots \cup D_{d-1}^b(d+1)$, entonces debe aparecer como loser de una arista top en alguna permutación de $\bigcup_{l=1}^{d-2} D_l^b(d)$, pues por definición de j_t no puede aparecer al final de una fila bottom de una permutación de la forma $j_t(\pi)$, pero esto es una contradicción al paso inductivo.

Si $2 \leq i \leq d$ es tal que i aparece como *loser* de una arista tipo *top* en $D_i^b(d+1) \cup \dots \cup D_{d-1}^b(d+1)$. Luego i aparece como *loser* de una arista tipo *top* en una permutación $j_t(\pi')$ con $\pi' \in D_l^t(d)$ para cierto $i-1 \leq l \leq d-2$, así que $i-1$ aparece como *loser* de una arista de tipo *bottom* de $D_{i-1}^t(d)$, lo cual es una contradicción al paso inductivo. De manera análoga se muestra que i no aparece como *loser* de una arista de tipo *bottom* en $D_i^t(d+1) \cup \dots \cup D_{d-1}^t(d+1)$. \square

La segunda parte de la afirmación se deduce de la primera parte junto a una aplicación directa de estos lemas. \square

Como consecuencia directa de la Proposición 2.3 obtenemos:

Corolario 2.6 *Sea T una t.i.i. definida por una combinatoria $\pi \in \mathcal{R}_d$ y que satisface la condición de Keane, sea γ el camino dirigido infinito que define T en la clase \mathcal{R}_d y sea $B = (V, E, \preceq)$ el diagrama de Bratteli-Vershik que define T construido en la Proposición 2.2. Sea $n_{d-1}(k)_{k \geq 0}$ la respectiva contracción de Marmi-Moussa-Yoccoz (ver [MMY05], Sección 1.2.4.). Defina $n_0 = 0, n_1 = 1$ y $n_k = n_{d-1}(k-1)$ para $k \geq 2$. Entonces el diagrama B contraído con respecto a $(n_k)_{k \geq 0}$ es propio.*

En el caso general de una t.i.i. T de una permutación irreducible π que no está necesariamente en una clase hiperelíptica, es posible deducir una condición suficiente sobre un telescoping del diagrama de Bratteli-Vershik asociado a T construido en la Proposición 2.2 a modo de satisfacer la hipótesis (H3):

Proposición 2.7 *Sea T una t.i.i. con permutación irreducible π , sea π^* una permutación estándar en $\mathcal{R}(\pi)$. Sin perder generalidad, el alfabeto sobre las permutaciones de $\mathcal{R}(\pi)$ es $\{1, 2, \dots, d\}$, en donde*

$$(\pi_t^*)^{-1}(1) = 1, (\pi_t^*)^{-1}(d) = d, (\pi_b^*)^{-1}(1) = d, (\pi_b^*)^{-1}(d) = 1.$$

Sea γ_t el loop simple que contiene a π^ en \mathcal{R}_d que tiene todas sus aristas de tipo top y definamos las sucesiones $(n_k)_{k \geq 0}$ y $(m_k)_{k \geq 0}$ como sigue: $n_0 = 0, n_1 = 1$ y $n_k = s_{k-2} + 1$, en donde γ_{m_0} es la primera arista con tipo top de γ que sale de π^* , γ_{s_0} es la primera arista con tipo bottom de γ con $s_0 > m_0$ que sale de π^* , y para cada $k \geq 0$, $\gamma_{m_{k+1}}$ es la primera arista con tipo top de γ con $m_{k+1} > s_k$ que sale de π^* y $\gamma_{s_{k+1}}$ es la primera arista con tipo bottom de γ con $s_{k+1} > m_k$ que sale de π^* . Si $B = (V, E, \preceq)$ es el diagrama de Bratteli-Vershik asociado a T , definido en la Proposición 2.2, entonces un telescoping en los niveles $(n_k)_{k \geq 0}$ de B satisface las hipótesis (H1) y (H3) de la Proposición 1.34.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\gamma_t(\pi)$ es el loop elemental de tipo *top* que contiene a π , un argumento análogo a la demostración del primer ítem de la proposición anterior muestra que todos los símbolos en $\mathcal{A} \setminus \{d\}$ aparecen como *losers* de aristas de γ_t . Esto y del hecho que los símbolos 1 y d aparecen al principio de cada fila *top* y *bottom*, respectivamente, en cada permutación de $\mathcal{R}(\pi)$ demuestran la proposición. \square

2.2. Mezcla débil en intercambios de tres intervalos

Para t.i.i. de tres intervalos, tenemos tres permutaciones irreducibles posibles:

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right).$$

Las dos primeras permutaciones son de clase rotación y la última pertenece a la clase de Rauzy hiperelíptica \mathcal{R}_3 presentada en la Figura 1.5.

Estudiaremos el caso en que T sea una t.i.i. de tres intervalos con permutación $\pi^*(3) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. La condición necesaria y suficiente para ser un valor propio topológico de un sistema de Bratteli-Vershik permiten probar el siguiente resultado:

Lema 2.8 *Suponga que (X, T) es un sistema minimal de Cantor de rango finito d y sean $(h_n)_{n \geq 1}$ los vectores de altura de alguna representación propia de (X, T) . Si existen $1 \leq i < j \leq d$ con $|h_n(i) - h_n(j)| = 1$ para infinitos $n \geq 2$, entonces el sistema (X, T) es topológicamente débilmente mezclador.*

DEMOSTRACIÓN. Trabajamos con una representación propia de (X, T) . Si $\alpha \in [0, 1)$ es un valor propio continuo del sistema de Bratteli-Vershik asociado, entonces existen sucesiones $(\eta_n)_{n \geq 1}, (\nu_n)_{n \geq 1}$, en donde $\eta_n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$ y $\nu_n \in \mathbb{Z}^d$, $\forall n \geq 1$ que satisfacen:

$$\alpha h_n = \eta_n + \nu_n, \quad \forall n \geq 1.$$

Sea $\mathcal{N} = \{n \geq 2 : |h_n(i) - h_n(j)| = 1\}$. Si $n \in \mathcal{N}$:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha |h_n(i) - h_n(j)| \\ &= |(\eta_n(i) - \eta_n(j)) + (\nu_n(i) - \nu_n(j))|, \end{aligned}$$

siendo $\nu_n(i) - \nu_n(j) \in \mathbb{Z}^d$ y $\eta_n(i) - \eta_n(j) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$, debemos tener $\nu_n(i) = \nu_n(j)$ y por lo tanto $\alpha = |\eta_n(i) - \eta_n(j)| \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$ con $n \in \mathcal{N}$, concluyendo que $\alpha = 0$. \square

Proposición 2.9 *Suponga que la t.i.i. T de tres intervalos con permutación $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ satisface la condición de Keane. Entonces el sistema de Bratteli-Vershik asociado a T no posee valores propios continuos no triviales.*

DEMOSTRACIÓN. Considere los siguientes loops en $\pi^*(3)$:

- El loop $R(n)$, en donde los nombres de las aristas sucesivas que se recorren son $32^n 3$, para $n \geq 0$,
- El loop $L(n)$, en donde los nombres de las aristas sucesivas que se recorren son $12^n 1$, para $n \geq 0$.

La matriz correspondiente a $R(n)$ es

$$\begin{aligned} M_{R(n)} &= (\text{Id} + E_{31})(\text{Id} + E_{23})^n(\text{Id} + E_{32}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n+1 & n \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

mientras que la matriz correspondiente a $L(n)$ es

$$\begin{aligned} M_{L(n)} &= (\text{Id} + E_{13})(\text{Id} + E_{21})^n(\text{Id} + E_{12}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ n & n+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como T satisface la condición de Keane, tiene asociado un paseo infinito de inducciones γ en \mathcal{R}_3 que es de la forma

$$\gamma = R(n_1)R(n_2) \dots R(n_{r_1})L(m_1)L(m_2) \dots L(m_{l_1}) \dots$$

(o bien su análogo cambiando R por L), en donde las sucesiones $(p_k)_{k \geq 1}, (m_k)_{k \geq 1}$ son de enteros no negativos y las sucesiones $(r_k)_{k \geq 1}, (l_k)_{k \geq 1}$ indican cuando cambiamos de un loop del tipo R a uno del tipo L . Como los símbolos “1, 2, 3” debe ganar infinitas veces para la inducción de Rauzy-Veech, las sucesiones $(r_k)_{k \geq 1}, (l_k)_{k \geq 1}$ quedan bien definidas.

Consideramos el caso en que γ sea de la forma dada en (2.2), el otro caso es análogo.

Sea $B = (V, E, \preceq)$ el diagrama de Bratteli-Vershik asociado a T , en donde las matrices de incidencia vienen dadas por γ . Se considera una contracción del diagrama dada por una sucesión $(n_k)_{k \geq 0}$ con $n_0 = 1$ y en donde $P_{n_k, n_{k+1}}$ es la matriz asociada al camino

$$\gamma_k = R(n_1) \dots R(n_{r_1})L(m_1) \dots L(m_{l_1}) \dots R(n_{r_k+1}) \dots R(n_{r_k+r_{k+1}})L(m_{l_{k+1}})(\text{Id} + E_{12})^{-1},$$

que une los vértices $\pi^*(3)$ y $(\frac{1}{3} \frac{3}{2} \frac{2}{1})$. Esta contracción resulta ser propia si k es suficientemente grande, pues hacemos al menos un loop R y las matrices de incidencia las podemos suponer positivas. Considere $\bar{B} = (\bar{V}, \bar{E}, \bar{\preceq})$ el diagrama contraído, sean $(\bar{M}_n)_{n \geq 2}$ las matrices de incidencia y $(\bar{h}_n)_{n \geq 1}$ los vectores de alturas.

Mostraremos que $|\bar{h}_n(3) - \bar{h}_n(2)| = 1, \forall n \geq 2$. Por inducción, si $n = 2$, tenemos

$$\begin{aligned} \bar{M}_2 &= R(n_1)R(n_2) \dots R(n_{r_1})L(m_1)(\text{Id} - E_{12}) \\ &= R(n_1)R(n_2) \dots R(n_{r_1}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si $r_1 = 1$ entonces para cierto $l \geq 0$:

$$\bar{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & l+1 & l \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m_1(l+1) & l+1 & l \\ m_1+1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

y luego $\bar{h}_2(3) - \bar{h}_2(2) = 1$. Si asumimos que $R(n_1) \dots R(n_t)L(m_1)(\text{Id} - E_{12})$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 1 \\ * & x_t & y_t \\ * & z_t & w_t \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

en donde x_t, y_t, z_t, w_t cumplen $x_t - y_t = w_t - z_t = 1$ entonces para $l \geq 0$:

$$\begin{aligned} R(l)R(n_1) \dots R(n_t)L(m_1)(\text{Id} - E_{12}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & l+1 & l \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 0 & 1 \\ * & x_t & y_t \\ * & z_t & w_t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & 0 & 1 \\ * & (l+1)x_t + lz_t & (l+1)y_t + lw_t \\ * & x_t + z_t & y_t + w_t + 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y luego también es de la forma (2.3), por lo tanto siempre tenemos $\bar{h}_2(3) - \bar{h}_2(2) = 1$. Asumamos que $\bar{h}_n(3) - \bar{h}_n(2) = 1$, entonces $\overline{P_{n+1}} = \overline{P_n}(\text{Id} + E_{12})L(k_1) \dots L(k_s)M$, en donde las matrices $\overline{P_n}$ y M son de la forma (2.3). Escriba

$$M = \begin{pmatrix} * & 0 & 1 \\ * & x & y \\ * & z & w \end{pmatrix}$$

con $x - y = w - z = 1$. Afirmamos que para $s \geq 1$, el producto $L(k_1) \dots L(k_s)M$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} * & x_1 & x_2 \\ * & x_3 & x_4 \\ * & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

en donde $x_2 - x_1 = x_3 - x_4 = x_6 - x_5 = 1$. En efecto, si $k \geq 0$ entonces

$$\begin{aligned} L(k) \begin{pmatrix} * & x_1 & x_2 \\ * & x_3 & x_4 \\ * & x_5 & x_6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & x_1 & x_2 \\ * & x_3 & x_4 \\ * & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & x_1 + x_2 + x_3 & x_2 + x_4 + x_6 \\ * & kx_1 + (k+1)x_3 & kx_2 + (k+1)x_4 \\ * & x_5 & x_6 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y se verifica fácilmente que es de la forma (2.4). Finalmente, considere

$$\overline{P_n} = \begin{pmatrix} u & 0 & 1 \\ v & x_1 & y_1 \\ w & z_1 & w_1 \end{pmatrix}$$

con $x_1 - y_1 = w_1 - z_1 = 1$ y

$$L(k_1) \dots L(k_s)M = \begin{pmatrix} * & z_1 & z_2 \\ * & z_3 & z_4 \\ * & z_5 & z_6 \end{pmatrix}$$

con $z_2 - z_1 = z_3 - z_4 = z_6 - z_5 = 1$. Se verifica que

$$\begin{aligned} \bar{h}_{n+1}(3) - \bar{h}_{n+1}(2) &= u(z_2 + z_4 - (z_1 + z_3)) + (z_6 - z_5) + v(z_2 - z_1) + (v + x_1)(z_4 - z_3) + \\ &\quad y_1(z_6 - z_5) + w(z_2 - z_1) + (w + z_1)(z_4 - z_3) \\ &= 1 + v - (v + x_1) + y_1 + w - (w + z_1) + w_1 \\ &= 1 + (y_1 - x_1) + (w_1 - z_1) \\ &= 1, \end{aligned}$$

lo que termina de probar la proposición por inducción. \square

Combinando la demostración del Lema 2.8, los cálculos dados en la demostración de la Proposición 2.9 y la condición necesaria obtenida en el Teorema 1.40, deducimos el siguiente resultado:

Proposición 2.10 *Suponga que la t.i.i. T de tres intervalos con permutación $(\frac{1}{3} \frac{2}{2} \frac{3}{1})$ satisface la condición de Keane. Asuma que el diagrama de Bratteli asociado a T repite una matriz positiva infinitas veces (lo cual se obtiene para casi todo parámetro λ). Entonces el sistema de Bratteli-Vershik asociado a T es débilmente mezclador.*

2.3. Representación de Bratteli-Vershik de shifts \mathcal{S} -ádicos minimales

Considere una sucesión de sustituciones $\boldsymbol{\rho} = (\rho_n)_{n \geq 0}$ sobre el alfabeto $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, d\}$. Denotamos $M_n = M_{\rho_n}$ para $n \geq 0$ y si $0 \leq k \leq l$ abreviamos la composición de sustituciones y el producto de matrices por $\rho_{[k,l]} = \rho_k \rho_{k+1} \dots \rho_{l-1}$ y $M_{[k,l]} = M_k M_{k+1} \dots M_{l-1}$, respectivamente. Para $n \geq 0$ se define el lenguaje

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{\rho}}^{(n)} = \{w \in \mathcal{A}^+ : w \text{ es factor de } \rho_{[n,N]}(a) \text{ para algunos } a \in \mathcal{A}, N > n\}$$

y el espacio

$$X_{\boldsymbol{\rho}}^{(n)} = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : \text{todo factor de } x \text{ está en } \mathcal{L}_{\boldsymbol{\rho}}^{(n)}\}.$$

Denotamos $X_{\boldsymbol{\rho}} = X_{\boldsymbol{\rho}}^{(0)}$, $\mathcal{L}_{\boldsymbol{\rho}} = \mathcal{L}_{\boldsymbol{\rho}}^{(0)}$ y consideramos σ el shift por la izquierda en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.

Definición 2.11 *La sucesión $\boldsymbol{\rho}$ se dirá débilmente primitiva si para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $l > k$ tal que la matriz $M_{[k,l]} > 0$ (i.e., todos los coeficientes de esta matriz son positivos).*

Proposición 2.12 *Suponga que $\boldsymbol{\rho}$ es una sucesión de sustituciones sobre \mathcal{A} que es débilmente primitiva. Entonces $(X_{\boldsymbol{\rho}}, \sigma)$ es un subshift minimal. Luego si $|X_{\boldsymbol{\rho}}| = \infty$ el sistema $(X_{\boldsymbol{\rho}}, \sigma)$ es un sistema minimal de Cantor. A $\boldsymbol{\rho}$ la llamaremos sucesión directiva de sustituciones del sistema $(X_{\boldsymbol{\rho}}, \sigma)$.*

DEMOSTRACIÓN. Primero veamos que $(X_{\boldsymbol{\rho}}, \sigma)$ es un subshift de $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$. Sea $(x_n)_n$ una sucesión en $X_{\boldsymbol{\rho}}$ con $x_n \rightarrow x$ si $n \rightarrow \infty$, siendo $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Considere un factor arbitrario $x_{[k,l]}$ de x . Luego para M suficientemente grande tenemos que el factor $x_{[k,l]}$ aparece en el factor $x_{[-M,M]}$ y adicionalmente existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se tiene $x_{n[-M,M]} = x_{[-M,M]}$. En particular el factor $x_{[k,l]}$ es también un factor de x_N . Luego $x_{[k,l]}$ está en $\mathcal{L}_{\boldsymbol{\rho}}^{(0)}$, probando que $X_{\boldsymbol{\rho}}$ es un cerrado en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Como los factores de $x \in X_{\boldsymbol{\rho}}$ son los mismos factores que los de $\sigma(x)$, se concluye que $\sigma(X_{\boldsymbol{\rho}}) \subseteq X_{\boldsymbol{\rho}}$. Por otro lado, como $\boldsymbol{\rho}$ es débilmente primitiva, tenemos en particular que $|\rho_{[0,n]}(a)| \rightarrow \infty$ si $n \rightarrow \infty$ para cualquier $a \in \mathcal{A}$. Considere $x \in X_{\boldsymbol{\rho}}$ y w un factor de $\rho_{[0,N]}(a)$ para algún $a \in \mathcal{A}$ y $N > 0$. Veremos que w es un factor de x , esto probará la minimalidad de $(X_{\boldsymbol{\rho}}, \sigma)$ de la arbitrariedad de w y de x . Sabemos que existe $L > 0$ tal que $M_{[N,N+L]} > 0$. Escriba $\rho_{[0,N]}(a) = pws$ para ciertos $p, s \in \mathcal{A}^*$. Luego para cada $i \in \mathcal{A}$ tenemos $\rho_{[0,N+L]}(i) = \rho_{[0,N]} \rho_{[N,N+L]}(i) = \rho_{[0,N]}(\bar{p}a\bar{s}) = \rho_{[0,N]}(\bar{p})pws\rho_{[0,N]}(\bar{s})$, en donde $\bar{p}, \bar{s} \in \mathcal{A}^*$ existen pues el símbolo a aparece en $\rho_{[N,N+L]}(i)$. Luego tomando cualquier factor suficientemente grande de x vemos que aparece w en ese factor, concluyendo. \square

Ahora daremos una representación de Bratteli-Vershik de $(X_{\boldsymbol{\rho}}, \sigma)$. Para ello se explicitarán las sucesiones de particiones de Kakutani-Rokhlin que generan la topología del sistema. Antes de esto, es necesario dar ciertas hipótesis adicionales sobre $\boldsymbol{\rho}$ para asegurar la conjugación topológica entre el shift \mathcal{S} -ádico original y su versión correspondiente de Bratteli-Vershik.

Definición 2.13 *Una sustitución $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^+$ se dirá propia si existen símbolos $p, s \in \mathcal{A}$ tales que $\rho(a)$ empieza con p y termina con s para cualquier $a \in \mathcal{A}$ y si M_{ρ} no posee una columna nula: $\sum_{b \in \mathcal{A}} M_{\rho}(b, a) > 0, \forall a \in \mathcal{A}$. Una sucesión $\boldsymbol{\rho} = (\rho_n)_{n \geq 0}$ de sustituciones es propia si para cada $n \geq 0$ la sustitución ρ_n es propia.*

Para $n \geq 0$ y $a \in \mathcal{A}$, sea $\rho_n : X_{\rho}^{(n+1)} \rightarrow \rho_n(X_{\rho}^{(n+1)}) \subseteq X_{\rho}^{(n)}$ la extensión natural de la substitución ρ_n . Se definen $\mathcal{P}_n = \{\sigma^k \rho_{[0,n]}([a]) : a \in \mathcal{A}, 0 \leq k < |\rho_{[0,n]}(a)|\}$, $B_n(a) = \rho_{[0,n]}([a])$ y $B_n = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} B_n(a)$, siendo $[a] = \{x \in X_{\rho} : x_0 = a\}$ y $\mathcal{P}_0 = \{X_{\rho}\}$.

Lema 2.14 *Sea $n \geq 0$. Para cada elemento y de X_{ρ} , existe $x \in X_{\rho}^{(n)}$ y $0 \leq k < |\rho_{[0,n]}(x_0)|$ con $y = \sigma^k \rho_{[0,n]}(x_0)$. En particular para cada $n \geq 0$, \mathcal{P}_n es un cubrimiento de X_{ρ} .*

DEMOSTRACIÓN. Por definición, para cada $l \geq 0$ el factor $y_{[-l,l]}$ de y es un factor también de $\rho_{[0,N]}(a)$, para algunos $a \in \mathcal{A}, N > 0$. Podemos considerar $N > n$ si l es suficientemente grande, luego $\rho_{[0,N]}(a) = \rho_{[0,n]} \rho_{[n,N]}(a)$ y si escribimos $\rho_{[n,N]}(a) = w_1 w_2 \dots w_s$ con $w_j \in \mathcal{A}, \forall 1 \leq j \leq s$, entonces existen $1 \leq i \leq j \leq s$ en donde $\rho_{[0,n]}(w_i) \rho_{[0,n]}(w_{i+1}) \dots \rho_{[0,n]}(w_j)$ es un factor de $y_{[-l,l]}$. Tomando i, j mínimos y máximos con esta propiedad se obtienen $0 \leq m, M \leq \max_{a \in \mathcal{A}} |\rho_{[0,n]}(a)|$ con $y_{[-l+m, l-M]} = \rho_{[0,n]}(w)$ con $w \in \mathcal{L}_{\rho}^{(n)}$. Como $|w| \rightarrow \infty$ si $l \rightarrow \infty$, existe una sucesión $(l_k)_k \nearrow \infty$, una sucesión $(n_k)_k$ en $\{0, 1, \dots, \max_{a \in \mathcal{A}} |\rho_{[0,n]}(a)|\}$ y $(w_k)_k$ sucesión en $\mathcal{L}_{\rho}^{(n)}$ con $y_{[-l_k, l_k]} = \sigma^{n_k} \rho_{[0,n]}(w_k), \forall k \geq 0$. Un argumento diagonal de Cantor implica la existencia de un par (k, x) que satisface lo requerido. \square

Definición 2.15 ([DM08]) *Para $n \geq 0$, diremos que ρ_n es reconocible en el nivel n si para cada $y \in X_{\rho}^{(n)}$ existe a lo más un par (k, x) con $x \in X_{\rho}^{(n+1)}$ y $0 \leq k < |\rho_n(x_0)|$ tal que $y = \sigma^k \rho_n(x)$. Diremos que ρ_n es reconocible para puntos aperiódicos en el nivel n si para cada $y \in X_{\rho}^{(n)}$ no periódico para σ existe a lo más un par (k, x) con $x \in X_{\rho}^{(n+1)}$ y $0 \leq k < |\rho_n(x_0)|$ tal que $y = \sigma^k \rho_n(x)$. En cualquier caso, diremos que (k, x) es una ρ_n -representación de y . La sucesión $\boldsymbol{\rho} = (\rho_n)_{n \geq 0}$ es reconocible si cada ρ_n es reconocible.*

Del Lema 2.14, tenemos que $\boldsymbol{\rho}$ es reconocible si para cada $n \geq 0$ y cada $y \in X_{\rho}^{(n)}$ existe una única ρ_n -representación de y . En [DM08] los autores demuestran que un sistema de Bratteli-Vershik de rango finito o bien posee rango uno y es topológicamente conjugado a un odómetro (en particular, es equicontinuo) o bien posee rango mayor a uno y es expansivo, más precisamente, es topológicamente conjugado a uno de sus factores simbólicos. La proposición que sigue funciona igualmente en ciertos casos donde los morfismos $\rho_n : \mathcal{A}_{n+1} \rightarrow \mathcal{A}_n^+$ definidos en alfabetos $(\mathcal{A}_n)_{n \geq 0}$ (Teorema 4.6., [BSTY18]). Sin embargo estamos interesados en el caso $\boldsymbol{\rho}$ unimodular, por lo que consideraremos siempre un único alfabeto \mathcal{A} . En particular, la sucesión directiva $\boldsymbol{\rho}$ será reconocible si $\boldsymbol{\rho}$ es unimodular.

Proposición 2.16 *Suponga que la sucesión directiva $\boldsymbol{\rho}$ es débilmente primitiva, reconocible y propia. Entonces:*

1. \mathcal{P}_n es una partición de clopens de X_{ρ} , para cada $n \geq 0$.
2. \mathcal{P}_{n+1} es una partición más fina que \mathcal{P}_n , para cada $n \geq 0$.
3. $|\bigcap_{n \geq 0} B_n| = 1$.
4. $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{P}_n$ genera la topología de X_{ρ} .

DEMOSTRACIÓN.

1. Veamos que \mathcal{P}_n particiona X_{ρ} si $n \geq 0$. Esto es claro si $n = 0$. Como $\boldsymbol{\rho}$ es reconocible,

se obtiene directamente de la compacidad de $X_\rho^{(n)}$ que $\rho_{[0,n]} : X_\rho^{(n)} \rightarrow \rho_{[0,n]}(X_\rho) \subseteq X_\rho$ es un homeomorfismo y que \mathcal{P}_n es una partición de clopens de X_ρ .

2. Considere $A = \sigma^k \rho_{[0,n+1]}([a])$ un átomo de la partición \mathcal{P}_{n+1} . Escribiendo $\rho_n(a) = w_1 w_2 \dots w_s$ con $w_j \in \mathcal{A}$, $\forall 1 \leq j \leq s$. Escoja $i \in \{1, \dots, s\}$ con $|\rho_{[0,n]}(w_1 \dots w_i)| \leq k < |\rho_{[0,n]}(w_1 \dots w_{i+1})|$, así que $A \subseteq \sigma^{k-l} \rho_{[0,n]}([w_{i+1}])$ con $l = |\rho_{[0,n]}(w_1 \dots w_i)|$. Luego A está contenido en un átomo de la partición \mathcal{P}_n y se concluye que $\mathcal{P}_n \preceq \mathcal{P}_{n+1}$.
3. Es claro que $B_{n+1} \subseteq B_n$, $\forall n \geq 0$ y que B_n es un clopen de X_ρ , para cada $n \geq 0$. Por el teorema de intersección de Cantor, basta probar que $\lim_n \text{diam } B_n = 0$. Sean $x = \rho_{[0,n]}(x')$, $y = \rho_{[0,n]}(y')$ puntos arbitrarios de B_n . Como ρ es propia, existen palabras p_n, q_n que sólo dependen de n que cumplen $x = p(x)p_n \cdot s_n s(x)$, $y = p(y)p_n \cdot s_n s(y)$, con $|p_n|, |q_n| \rightarrow \infty$ si $n \rightarrow \infty$, para ciertos $p(x), p(y), s(x), s(y)$. Luego $x_{[-l_n, l_n]} = y_{[-l_n, l_n]}$, en donde $l_n = \min\{|p_n|, |q_n|\} \rightarrow \infty$ si $n \rightarrow \infty$, así que $\lim_n \text{diam } B_n = 0$.
4. Sea $a \in \mathcal{A}$. Mostraremos que si $k \geq 0$ entonces $\lim_n \text{diam } \sigma^k \rho_{[0,n]}([a]) = 0$, lo que prueba que $(\mathcal{P}_n)_n$ genera la topología de X_ρ . En efecto, sea $l \geq 0$ un entero arbitrario y $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $x'_{[-(l+k), l+k]} = y'_{[-(l+k), l+k]}$ para $x', y' \in \rho_{[0,n]}([a])$. Sean $x, y \in \sigma^k \rho_{[0,n]}([a])$, luego $x' = \sigma^{-k}(x)$, $y' = \sigma^{-k}(y) \in \rho_{[0,n]}([a])$, así que si $n \geq N$ tenemos $x'_{[-(l+k), l+k]} = y'_{[-(l+k), l+k]}$, o bien $x_{[-l-2k, l]} = y_{[-l-2k, l]}$ y así $x_{[-l, l]} = y_{[-l, l]}$, terminando la demostración. □

Consideramos ρ débilmente primitiva, unimodular (luego reconocible para puntos aperiódicos) y propia. Siguiendo la construcción dada en el Capítulo 1, construimos un diagrama de Bratteli $B = (V, E, \preceq)$ en donde $V_0 = \{v_0\}$ y $V_n = \{1, \dots, d\}$ si $n \geq 1$, siendo $|\mathcal{A}| = d$. Las incidencias del vértice v_0 están dadas por el vector *hat* $h_1 = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d$ y si $n \geq 1$ la matriz de incidencia M_n está dada por $M_{\rho_{n-2}}$ para cada $n \geq 2$. Si $n \geq 2$ y dado $v_n \in V_n$, el orden de $r^{-1}(v_n)$ viene dado por la lectura del morfismo ρ_{n-2} , *i.e.*, si $\rho_{n-2}(v_n) = w_1 w_2 \dots w_s$, en donde w_1, \dots, w_s son símbolos de \mathcal{A} (con posibles repeticiones) y si $e_i = w_i v_n$ para $1 \leq i \leq s$, entonces el orden de \preceq inducido en $r^{-1}(v_n)$ es $e_1 \preceq e_2 \preceq \dots \preceq e_s$. Es conveniente etiquetar las aristas del siguiente modo: si $n \geq 2$ y $v_n \in V_n$ con $\rho_{n-2}(v_n) = p_{n-2} v_{n-1} s_{n-2}$ en donde $p_{n-2}, s_{n-2} \in \mathcal{A}^*$, entonces unimos v_{n-1} y v_n con una arista de etiqueta (p_{n-2}, s_{n-2}) . De esto, si $e = (p_{n-2}, s_{n-2})$, $\bar{e} = (\bar{p}_{n-2}, \bar{s}_{n-2})$ son dos aristas con $r(e) = r(\bar{e})$, entonces $e \preceq \bar{e} \iff |p_{n-2}| \leq |\bar{p}_{n-2}|$. Dado un camino infinito $x = (x_1, x_2, \dots) \in X_B$ en el diagrama B , si denotamos $v_n = r(x_n)$ para $n \geq 1$ con $s(x_1) = v_0$ y si x_n está etiquetada mediante $x_n = (p_{n-2}, s_{n-2})$, entonces definimos un mapeo $\varphi : X_B \rightarrow X_\rho$ dado por:

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{[0,n-1]}(p_{n-1}) \dots \rho_{[0,1]}(p_1) p_0 v_1 s_0 \rho_{[0,1]}(s_1) \dots \rho_{[0,n-1]}(s_{n-1}).$$

Por inducción y de la definición de $(p_n, s_n)_{n \geq 0}$ tenemos que

$$\rho_{[0,n]}(v_{n+1}) = \rho_{[0,n-1]}(p_{n-1}) \dots \rho_{[0,1]}(p_1) p_0 v_1 s_0 \rho_{[0,1]}(s_1) \dots \rho_{[0,n-1]}(s_{n-1}),$$

así que φ queda bien definida. Más aún, el mapeo φ es de hecho una conjugación topológica entre el sistema de Bratteli-Vershik (X_B, V_B) y (X_ρ, σ) . Este mapeo es comúnmente llamado *descomposición prefijo-sufijo* de un punto $x = (x_1, x_2, \dots)$, pues puede recuperarse fácilmente un punto de X_ρ a partir de un camino infinito de X_B .

Capítulo 3

Renormalización y mezcla débil topológica

En este capítulo definiremos un objeto combinatorial que permite parametrizar sistemas de Bratteli-Vershik minimales de rango finito a través de sucesiones infinitas de sustituciones sobre un mismo alfabeto. Dicha sucesión infinita de sustituciones está dada por un camino infinito en un grafo dirigido que parte en un vértice específico, similar al caso del grafo de Rauzy en el contexto de t.i.i. Llamaremos “grafo de renormalización” a dicho grafo, en donde tenemos un espacio de fase natural correspondiente a un shift de aristas y donde el shift por la izquierda actúa como una transformación de “renormalización” sobre sistemas de Bratteli-Vershik. Dotando al shift de aristas de una medida de probabilidad de Markov, podemos medir el espacio de sistemas Bratteli-Vershik parametrizados a través de caminos infinitos en el grafo de renormalización. Añadiendo aún más parámetros sobre el grafo, podemos abstraer un resultado sobre mezcla débil topológica para casi todos los sistemas, con respecto a la medida de Markov, inspirado en los resultados de [NR97]. Al final de este capítulo, discutimos sobre las restricciones de las hipótesis que son necesarias para obtener mezcla débil topológica.

3.1. El grafo de renormalización

Ahora definiremos un objeto combinatorial, un grafo de renormalización (también llamado grafo S -ádico en [BST14]) que parametriza las sucesiones directivas ρ .

Definición 3.1 ([BST14]) *Dado un conjunto (finito o infinito) \mathcal{S} de sustituciones sobre el alfabeto \mathcal{A} , se considera un grafo dirigido $G = (V, E)$ que es fuertemente conexo, con posibles aristas múltiples, pudiendo tener G finitos o infinitos vértices y/o aristas. En este grafo denotamos por $s, r : E \rightarrow V$ a los mapeos de source y range de aristas, i.e., si γ es una arista dirigida entre $u, v \in V$ entonces $s(\gamma) = u$ y $r(\gamma) = v$. Adicionalmente consideramos un mapeo $\tau : E \rightarrow \mathcal{S}$ que asocia a una arista γ una sustitución $\tau(\gamma) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^+$. Al par (G, τ) lo llamaremos grafo de renormalización.*

Junto con un grafo de renormalización (G, τ) podemos considerar un shift de aristas (E_G, σ) en donde σ es el shift por la izquierda en $E^{\mathbb{N}_0}$ y

$$E_G = \{(\gamma_n)_{n \geq 0} \in E^{\mathbb{N}_0} : r(\gamma_n) = s(\gamma_{n+1}), \forall n \geq 0\}.$$

En (E_G, σ) , para una sucesión finita $\bar{\gamma} = (\bar{\gamma}_0, \dots, \bar{\gamma}_{l-1}) \in E^l$ con $l \geq 1$, denotamos al cilindro de esta sucesión por

$${}_0[\bar{\gamma}] = {}_0[\bar{\gamma}_0, \dots, \bar{\gamma}_{l-1}] = \{\gamma = (\gamma_n)_{n \geq 0} \in E_G : (\gamma_0, \dots, \gamma_{l-1}) = (\bar{\gamma}_0, \dots, \bar{\gamma}_{l-1})\}.$$

Para un paseo infinito $\gamma = (\gamma_n)_{n \geq 0} \in E_G$, denotamos por $\rho(\gamma) = (\tau(\gamma_n))_{n \geq 0}$ a la sucesión directiva de sustituciones que produce dicho paseo.

Definición 3.2 Sea (G, τ) un grafo de renormalización con $|V(G)|, |E(G)| < +\infty$, en donde $\tau(\gamma)$ es una sustitución sobre un alfabeto \mathcal{A} con $|\mathcal{A}| = d$, para cada $\gamma \in E$. Diremos que (G, τ) es un grafo de renormalización parametrizador si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. La sustitución $\tau(\gamma)$ es unimodular para cada $\gamma \in E$, i.e. $\det(M_{\tau(\gamma)}) = \pm 1$.
2. Para toda arista $\gamma \in E$ tenemos que $\sum_{a \in \mathcal{A}} M_{\tau(\gamma)}(i, a) > 0$, $\forall i \in \mathcal{A}$.
3. Existe un paseo finito $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_l)$ en E_G tal que $\tau(\gamma_0) \dots \tau(\gamma_l)$ es propia.
4. Existe un paseo finito $\bar{\gamma} = (\bar{\gamma}_0, \dots, \bar{\gamma}_k)$ en E_G tal que si $\rho = \tau(\bar{\gamma}_0) \dots \tau(\bar{\gamma}_k)$ entonces $M_\rho > 0$.

En adelante siempre supondremos que (G, τ) es parametrizador, con sustituciones $\tau(\gamma)$ definidas en un mismo alfabeto \mathcal{A} con $d \geq 2$ símbolos, para cada $\gamma \in E$. Si (G, τ) es un grafo de renormalización que satisface el cuarto ítem de la Definición 3.2, diremos que (G, τ) es *recurrente*. La idea es pensar que cada paseo infinito γ en E_G parametriza un sistema de Bratteli-Vershik X_γ asociado a γ si $\rho(\gamma)$ si γ satisface ciertas propiedades. Dicho sistema se obtiene mediante la construcción del sistema de Bratteli-Vershik de la sucesión directiva de sustituciones $\rho(\gamma)$ que explicitamos anteriormente:

Definición 3.3 Sea $\gamma = (\gamma_n)_{n \geq 0} \in E_G$ tal que existen infinitos $n \geq 0$ con $\gamma_n \gamma_{n+1} \dots \gamma_{n+|l_1|-1} = \gamma_1$ y existen infinitos $n \geq 0$ con $\gamma_n \gamma_{n+1} \dots \gamma_{n+|l_2|-1} = \gamma_2$, en donde γ_1, γ_2 son paseos finitos como en el tercer y cuarto ítem de la Definición 3.2 de largos respectivos l_1, l_2 . Entonces γ define un sistema de Bratteli-Vershik X_γ , como se describe en la Proposición 2.16. En efecto, el tercer ítem nos dice que, salvo telescoping, la sucesión directiva de sustituciones $\rho(\gamma)$ es propia, y el cuarto ítem nos dice que $\rho(\gamma)$ es débilmente primitiva.

Adicionalmente, consideraremos una medida de probabilidad ergódica ν_G del sistema (E_G, σ) . El objetivo será probar resultados de los sistemas X_γ para γ genéricos con la medida de probabilidad ν_G . Ejemplos de medidas de probabilidad ergódicas ν_G incluyen las medidas de probabilidad de Markov (ver el Capítulo 1).

Sea (G, τ) un grafo de renormalización parametrizador. Dada una arista $\gamma \in E$, escribimos $M_\gamma = M_{\tau(\gamma)}$. Dado un paseo finito $\bar{\gamma} = (\bar{\gamma}_0, \dots, \bar{\gamma}_{l-1})$ en E_G con $l \geq 1$, denotamos $M_{\bar{\gamma}} = M_{\bar{\gamma}_0} \dots M_{\bar{\gamma}_{l-1}}$. Dado un paseo infinito $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots) \in E_G$ que satisface las hipótesis de la Definición 3.2, las matrices de incidencias $(M_n)_{n \geq 2}$ del sistema de Bratteli-Vershik asociado

a X_γ son $(M_{\gamma_n})_{n \geq 0}$, con $M_1 = h_1 = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d$, siendo $|\mathcal{A}| = d$. A modo de obtener la única ergodicidad de un sistema genérico X_γ dado por $\gamma \in E_G$, basta con que (G, τ) sea recurrente:

Lema 3.4 *Sea (G, τ) un grafo de renormalización parametrizador (en particular, recurrente). Entonces para ν_G -casi todo $\gamma \in E_G$, el sistema X_γ es únicamente ergódico.*

DEMOSTRACIÓN. Del Capítulo 1 tenemos que las medidas de probabilidad de un sistema de Bratteli-Vershik (X_B, V_B) dada por matrices de incidencia unimodulares $(M_n)_{n \geq 2}$ está definido únicamente por un vector columna de probabilidad μ_1 que está en

$$\bigcap_{n \geq 1} P_n(\mathbb{R}_+^d), \quad (3.1)$$

en donde $P_n = M_2 \cdot \dots \cdot M_n$, con P_1 la matriz identidad. Considere un paseo finito $\bar{\gamma} = (\bar{\gamma}_0, \dots, \bar{\gamma}_{l-1})$ tal que $M_{\bar{\gamma}} > 0$ y $\nu_G(o[\bar{\gamma}_0, \dots, \bar{\gamma}_{l-1}]) > 0$. Por el teorema ergódico de Birkhoff, tenemos que para ν_G -casi todo γ satisface:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{1}_{o[\bar{\gamma}_0, \dots, \bar{\gamma}_{l-1}]}(\sigma^n(\gamma)) = \nu_G(o[\bar{\gamma}_0, \dots, \bar{\gamma}_{l-1}]) > 0.$$

En particular, si γ cumple lo anterior deben existir índices $k_1 < l_1 \leq k_2 < l_2 \leq \dots$ con

$$M_{\gamma_{[k_n, l_n]}} = M_{\bar{\gamma}}, \quad \forall n \geq 1.$$

Luego, por el criterio de Furstenberg ([Fur60], Sección 15.2.), tenemos que el cono positivo de (3.1) es unidimensional, y se sigue la ergodicidad única del sistema X_γ . \square

En el final de esta sección será útil recordar los principales resultados sobre la métrica de Hilbert. Para mayor bibliografía sobre esta métrica, nos referimos a [Fur60], [Sen06], [Fis09], [BKMS13].

Definición 3.5 *En el cono positivo \mathbb{R}_+^d se define la pseudométrica*

$$D(x, y) = \log \max_{i,j} \frac{x_i y_j}{y_i x_j},$$

donde $x, y \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$ y $0/0 = 1$.

Esta pseudométrica resulta ser una métrica completa cuando se considera en \mathbb{P}_+^{d-1} , que llamaremos métrica de Hilbert. De [Fis09], [Sen06] tenemos los siguientes resultados:

Proposición 3.6

1. *Para una matriz $M > 0$ tenemos*

$$\Theta(M) = \text{diam}_D(M\mathbb{P}_+^{d-1}) = \max_{i,j,k,l} \log \frac{M_{i,j} M_{l,k}}{M_{i,k} M_{l,j}}.$$

2. Sea $(M_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de matrices positivas y denote $P_n = M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_n$. Si $\text{diam}_D(P_n) \rightarrow 0$ con $n \rightarrow \infty$, entonces para cada $1 \leq i, j, k \leq d$ existe $a(j, k) > 0$ que no depende de i con

$$\frac{P_n(i, j)}{P_n(i, k)} \rightarrow a(j, k) \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

En particular, para un sistema de Bratteli-Vershik (X, T) con matrices de incidencia positivas $(M_n)_{n \geq 2}$, la única ergodicidad del sistema implica que $\text{diam}_D(P_n) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$. En este caso, de la Proposición 3.6 tendremos que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\sup_{1 \leq i, j, k \leq d} \frac{P_n(i, j)}{P_n(i, k)} \leq C, \quad \forall n \geq 1,$$

y en particular

$$\sup_{1 \leq i, j \leq d} \frac{h_n(i)}{h_n(j)} \leq C, \quad \forall n \geq 1.$$

Bajo una hipótesis adicional más fuerte que la única ergodicidad del sistema, tendremos medidas de bases proporcionales en (X, T) :

Proposición 3.7 *Sea (X, T) un sistema de Bratteli-Vershik de rango finito d con matrices de incidencia $(M_n)_{n \geq 2}$. Asuma que exista una matriz $\overline{M} > 0$ tales que existen infinitos índices $k_1 < l_1 \leq k_2 < l_2 \leq \dots$ con*

$$P_{k_n, l_n} = \overline{M}, \quad \forall n \geq 1.$$

Entonces existe un telescoping de (X, T) con vectores de medidas $(\mu_n)_{n \geq 1}$ y una constante $C > 0$ tales que

$$\sup_{1 \leq i, j \leq d} \frac{\mu_n(i)}{\mu_n(j)} \leq C, \quad \forall n \geq 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el criterio de Furstenberg el sistema (X, T) es únicamente ergódico. Sea $(n_k)_{k \geq 0}$ un telescoping de (X, T) tal que $P_{n_k, n_{k+1}} = \overline{M} A_k$ para cierta matriz a coeficientes enteros y no negativa A_k , $\forall k \geq 1$. Luego tenemos que (ver [BKMS13], Proposición 5.1.)

$$\mu_{n_k}(i) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{P_{n_k, f(k, l)}(i, j)}{h_{f(k, l)}(j)}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq d,$$

siendo $f(k, l) = \sum_{i=0}^{l-1} n_{k+i}$. Como $P_{n_k, f(k, l)}(i, j) > 0$ para cada $k \geq 1, 1 \leq i, j \leq d$ si $l \geq 2$ se tiene

$$\frac{\mu_{n_k}(i)}{\mu_{n_k}(j)} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{P_{n_k, f(k, l)}(i, s)}{P_{n_k, f(k, l)}(j, s)}, \quad \forall 1 \leq i, j, s \leq d.$$

Si $\nu(\overline{M}) = \sup_{1 \leq i, j, k \leq d} \frac{\overline{M}_{i, j}}{\overline{M}_{k, j}}$ y $P_{n_k, f(k, l)} = \overline{M} A_{k, l}$ para cierta matriz a coeficientes enteros y no negativa $A_{k, l}$, tenemos para cada $l \geq 2$ que

$$\begin{aligned} \frac{P_{n_k, f(k, l)}(i, s)}{P_{n_k, f(k, l)}(j, s)} &= \frac{\sum_{r=1}^d \overline{M}_{i, r} A_{k, l}(r, s)}{\sum_{r=1}^d \overline{M}_{j, r} A_{k, l}(r, s)} \\ &\leq \nu(\overline{M}), \end{aligned}$$

luego

$$\sup_{1 \leq i, j \leq d} \frac{\mu_{n_k}(i)}{\mu_{n_k}(j)} \leq \nu(\overline{M}), \quad \forall k \geq 1,$$

terminando la demostración. \square

Como aplicación directa de las proposiciones anteriores obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.8 *Sea $\gamma = (\gamma_n)_{n \geq 0} \in E_G$ tal que existen infinitos $n \geq 0$ con $\gamma_n \gamma_{n+1} \dots \gamma_{n+|l|-1} = \overline{\gamma}$, en donde $\tau(\gamma_n) \tau(\gamma_{n+1}) \dots \tau(\gamma_{n+|l|-1})$ es una substitución propia y positiva, entonces γ define un sistema de Bratteli-Vershik X_γ que es propio, únicamente ergódico y existe $C = C(\gamma) > 0$ tal que los vectores de alturas y de medidas del sistema satisfacen*

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leq i, j \leq d} \frac{h_n(i)}{h_n(j)} &\leq C, \\ \sup_{1 \leq i, j \leq d} \frac{\mu_n(i)}{\mu_n(j)} &\leq C, \end{aligned}$$

para cada $n \geq 1$.

3.2. Mezcla débil topológica

Sea (G, τ) un grafo de renormalización parametrizador. Para un vértice fijo $v \in V$ denotamos por

$$E_G(v) = \{(\gamma_n)_{n \geq 0} \in E_G : s(\gamma_0) = v\}$$

al conjunto de los paseos infinitos en E_G que parten del vértice v . Sea ν_G una medida de probabilidad de Markov en (E_G, σ) y denote $\nu_{G,v}$ a la medida de probabilidad inducida por ν_G en $E_G(v)$. Para ν_G -casi todo $\gamma \in E_G$ podemos definir un sistema únicamente ergódico y propio de Bratteli-Vershik X_γ como en la sección previa. Consideraremos adicionalmente una *suspensión* de estos sistemas de Bratteli-Vershik modificando el vector $h_1 = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d$ por un vector $H \in \mathbb{N}^d$ arbitrario:

Definición 3.9 *Considere $H \in \mathbb{N}^d$ y X_γ un sistema de Bratteli-Vershik propio obtenido a partir de un paseo infinito $\gamma \in E_G$. El sistema $X_{\gamma,H}$ es el sistema de Bratteli-Vershik obtenido modificando el vector h_1 del sistema anterior por el vector H .*

Es claro que el sistema $X_{\gamma,H}$ es únicamente ergódico si existe un factor $\overline{\gamma}$ de γ con $M_{\overline{\gamma}} > 0$ e índices $k_1 < l_1 \leq k_2 < l_2 \leq \dots$ con $M_{\gamma_{(k_n, l_n)}} = M_{\overline{\gamma}}, \forall n \geq 0$. Más aún, un telescoping de $X_{\gamma,H}$ resulta ser una representación de Bratteli-Vershik propia del sistema. Se trabajará con esta representación propia y la seguiremos llamando $X_{\gamma,H}$.

El objetivo de esta sección es dar una condición genérica sobre γ que asegure la mezcla débil topológica del sistema X_γ . Para ello precisamos de dos parámetros: un vértice $v \in V$ y un paseo infinito $\gamma \in E_G(v)$. De lo anterior, para $\nu_{G,v}$ -casi todo paseo $\gamma \in E_G(v)$ los sistemas propios X_γ y $X_{\gamma,H}$ son únicamente ergódicos. Suponga que $X_{\gamma,H}$ posee matrices de incidencia

$(M_n)_{n \geq 2}$ y escriba $P_n = M_2 \cdot \dots \cdot M_n$, siendo P_1 la matriz identidad. El espacio estable del diagrama que define $X_{\gamma, H}$ es

$$E^s(X_{\gamma, H}) = \{v \in \mathbb{R}^d : vP_n \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty\}.$$

El siguiente lema nos da información sobre los candidatos a valores propios continuos de un sistema formado por matrices unimodulares:

Lema 3.10 *Suponga que (X_B, V_B) es un sistema de Bratteli-Vershik con representación propia en donde las matrices de incidencia $(M_n)_{n \geq 2}$ son unimodulares. Denotaremos por $E^s(X_B)$ al espacio estable asociado y sea $e = h_1 = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d$. Entonces:*

1. *El sistema no posee valores propios continuos racionales no nulos.*
2. *Si $\alpha \in [0, 1)$ es un valor propio continuo del sistema, existe $P \in \mathbb{Z}^d$ tal que $\alpha e + P \in E^s(X_B)$ y $(\alpha e + P) \cdot \mu_1 = 0$ para cualquier medida de probabilidad $\mu = (\mu_n)_{n \geq 1}$ invariante para (X_B, V_B) .*
3. *Si $\mu = (\mu_n)_{n \geq 1}$ es una medida de probabilidad invariante para (X_B, V_B) , entonces $\alpha = z \cdot \mu_1$, para algún vector fila $z \in \mathbb{Z}^d$.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Del Corolario 1.38 tenemos que si $\alpha = p/q$ es un valor propio racional de (X_B, V_B) entonces debe existir $m \geq 1$ tal que q divide a todos los coeficientes de h_n para $n \geq m$. Sea $A = (A_{i,j})_{1 \leq i, j \leq d}$ la matriz cuadrada en donde $A_{i,j} = 1, \forall 1 \leq i, j \leq d$. Suponga que $n \geq m$. Como $h_n = eP_n$, tenemos que todos los coeficientes de la matriz AP_n son divisibles por q . Siendo $\det(P_n) = \pm 1$, la matriz P_n^{-1} tiene coeficientes enteros, así que la matriz $A = AP_n P_n^{-1}$ tiene todos sus coeficientes divisibles por q . Luego debe ser $q = 1$.
2. Del Teorema 1.35, si α es un valor propio continuo del sistema, existen sucesiones $(\eta_n)_{n \geq 1}, (\nu_n)_{n \geq 1}$, en donde $\eta_n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$ y $\nu_n \in \mathbb{Z}^d, \forall n \geq 1$ que satisfacen

$$\alpha h_n = \eta_n + \nu_n, \quad \forall n \geq 1. \quad (3.2)$$

Adicionalmente existe $m \geq 1$ tal que $\eta_{n+1} = \eta_n M_{n+1}$ y $\nu_{n+1} = \nu_n M_{n+1}$ para $n \geq m$, en particular $\nu_n = \nu_m \cdot P_{m,n}$. Desarrollando (3.2) y dado que las matrices de incidencia son invertibles tenemos

$$\alpha e - \nu_m \cdot P_m^{-1} = \eta_m \cdot P_m^{-1}.$$

Escriba $P = -\nu_m \cdot P_m^{-1}$, que es un vector fila entero por unimodularidad. Finalmente tenemos

$$\begin{aligned} (\alpha e + P) \cdot P_n &= \eta_n + \nu_n - \nu_m \cdot P_m^{-1} \cdot P_n \\ &= \eta_n + \nu_n - \nu_m \cdot P_m^{-1} \cdot P_m \cdot P_{m,n} \\ &= \eta_n + \nu_n - \nu_m \cdot P_{m,n} \\ &= \eta_n \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
(\alpha e + P) \cdot \mu_1 &= \alpha e \cdot \mu_1 + P \cdot \mu_1 \\
&= \alpha e \cdot \mu_1 - \nu_m \cdot P_m^{-1} \cdot \mu_1 \\
&= \alpha - \nu_m \cdot \mu_m \\
&= 0,
\end{aligned}$$

en donde ocupamos que $\mu_m = P_{m,n}\mu_n$ si $1 \leq m \leq n$ y $\alpha = \nu_m \cdot \mu_m$.

3. Como $\alpha = \nu_m \cdot \mu_m$ y $\mu_m = P_m^{-1} \cdot \mu_1$ se deduce que $\alpha = z \cdot \mu_1$ con $z = \nu_m \cdot P_m^{-1} \in \mathbb{Z}^d$.

□

Observación. 7

1. Notar que si (X_B, V_B) es como en el lema previo y $v \in E^s(X_B)$, entonces $v \cdot \mu_1 = 0$ para cualquier medida de probabilidad $\mu = (\mu_n)_{n \geq 1}$ invariante para (X_B, V_B) . En efecto, $v \cdot \mu_1 = (v \cdot P_n) \cdot \mu_n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$.
2. Una versión más general del primer ítem del Lema 3.10 se obtiene al considerar un vector *hat* arbitrario en nuestros sistemas. Más precisamente, suponga que (X_B, V_B) es un sistema de Bratteli-Vershik con matrices de incidencias $(M_n)_{n \geq 2}$ de dimensiones $d \times d$ unimodulares y $h_1 = H \in \mathbb{N}^d$ es un vector *hat* arbitrario de (X_B, V_B) , entonces los valores propios continuos racionales p/q del sistema (X_B, V_B) son exactamente aquellos en donde q divide a $\text{MCD}(H(1), H(2), \dots, H(d))$, siendo $\text{MCD}(\cdot)$ el máximo común divisor de los enteros $H(i)$, $1 \leq i \leq d$. En efecto, si $P_{1,n} = M_2 M_3 \dots M_n$ y si q divide a $\text{MCD}(H(1), H(2), \dots, H(d))$, entonces $h_n = h_1 P_{1,n}$ tiene todos sus coeficientes divisibles por $\text{MCD}(H(1), H(2), \dots, H(d))$, y por lo tanto q divide a todos los coeficientes de h_n , para cada $n \geq 1$. Si ahora q divide a los coeficientes de h_n para algún $n \geq 1$, sea A la matriz de $d \times d$ que tiene al vector h_1 en cada una de sus filas. Entonces $AP_{1,n}$ tiene todos sus coeficientes divisibles por q , luego q también divide a todos los coeficientes de $A = AP_{1,n}P_{1,n}^{-1}$ ($P_{1,n}^{-1}$ tiene coeficientes enteros por unimodularidad). En consecuencia, q divide a $H(i)$, $1 \leq i \leq d$ y finalmente q divide a $\text{MCD}(H(1), H(2), \dots, H(d))$.

Definición 3.11 Decimos que un vector $H \in \mathbb{N}^d$ es primitivo si

$$\text{MCD}(H(1), H(2), \dots, H(d)) = 1.$$

Desde ahora, consideraremos un vector H primitivo y buscaremos probar un resultado de mezcla débil topológica de los sistemas $X_{\gamma, H}$ para casi todos los paseos infinitos $\gamma \in E_G$.

Los resultados anteriores permiten asegurar que si $\alpha \in [0, 1)$ es un valor propio continuo de un sistema $X_{\gamma, H}$ de matrices de incidencia unimodulares, entonces el vector αH está en el espacio estable fuerte $\bigcup_{z \in \mathbb{Z}^d} E^s(X_\gamma) + z$. Para obtener un resultado de mezcla débil topológica, basta con probar que casi seguramente esta condición no se satisface. Con este propósito, mostraremos primeramente un argumento de puntos de densidad para asegurar que si existe un conjunto de medida positiva en donde la condición previa se cumple, entonces podemos suponer que dicho conjunto es de medida arbitrariamente grande. Luego introduciremos cierta estructura sobre el grafo de renormalización que junto con el argumento de puntos de densidad permiten asegurar el resultado principal de esta sección.

Definición 3.12 Si $\bar{\gamma}$ es un paseo dirigido que une los vértices v y v' , defina la aplicación

$$\begin{aligned} f_{\bar{\gamma}} : E_G(v') &\rightarrow E_G(v) \\ \gamma &\mapsto \bar{\gamma}\gamma \end{aligned}$$

que concatena $\bar{\gamma}$ al inicio de paseos infinitos que empiezan en el vértice v' .

Las principales propiedades sobre $f_{\bar{\gamma}}$ vienen dadas por la siguiente proposición:

Proposición 3.13 Considere $\bar{\gamma}$ es un paseo dirigido que une los vértices v y v' . Entonces:

1. El mapeo $f_{\bar{\gamma}}$ es medible e inyectivo.
2. $\nu_{G,v}(f_{\bar{\gamma}}(\Gamma)) = \nu_{G,v}(0[\bar{\gamma}]) \cdot \nu_{G,v'}(\Gamma)$ para cada Γ en la σ -álgebra de Borel de $E_G(v')$.

DEMOSTRACIÓN.

1. La inyectividad es directa de la definición. Para verificar que $f_{\bar{\gamma}}$ es medible basta verificar que si $\bar{\gamma}'$ es un paseo finito que parte en v' entonces $f_{\bar{\gamma}}^{-1}(0[\bar{\gamma}'])$ es medible. Si $\bar{\gamma}' = \bar{\gamma}\bar{\gamma}''$ para cierto paseo finito $\bar{\gamma}''$ que parte en v' , entonces $f_{\bar{\gamma}}^{-1}(0[\bar{\gamma}']) = 0[\bar{\gamma}'']$, que es medible. De lo contrario $f_{\bar{\gamma}}^{-1}(0[\bar{\gamma}']) = \emptyset$.
2. Considere $\mathcal{B}(E_G(v'))$ la σ -álgebra inducida sobre $E_G(v')$ y sea

$$\mathcal{P} = \{\Gamma \in \mathcal{B}(E_G(v')) : \nu_{G,v}(f_{\bar{\gamma}}(\Gamma)) = \nu_{G,v}(0[\bar{\gamma}]) \cdot \nu_{G,v'}(\Gamma)\}.$$

Es directo verificar que si \mathcal{C} es la colección de cilindros de $E_G(v')$ entonces $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$. De la inyectividad de $f_{\bar{\gamma}}$ y la σ -aditividad de $\nu_{G,v}$ se sigue que \mathcal{P} es cerrado bajo unión numerable disjunta y bajo complementos. Como la colección de cilindros finitos es numerable y crece a $E_G(v')$, tenemos que $E_G(v') \in \mathcal{C}$. Luego \mathcal{P} es un λ -sistema y del π - λ teorema se concluye que $\mathcal{P} = \mathcal{B}(E_G(v'))$.

□

Ahora trabajaremos exclusivamente con sistemas X_γ y $X_{\gamma,H}$ únicamente ergódicos. Por el Lema 3.4 esto no es un impedimento si (G, τ) es recurrente.

Definición 3.14 Se define $U_H(v) = \{\gamma \in E_G(v) : \text{el sistema } X_{\gamma,H} \text{ es únicamente ergódico}\}$ y para $P \in \mathbb{Z}^d$, se define $L_{H,P}(v) = \{\gamma \in U_H(v) : \alpha(\gamma)H + P \in E^s(X_\gamma)\}$, en donde $\alpha(\gamma) = -P \cdot \mu_1 / H \cdot \mu_1$ para la única medida de probabilidad invariante $\mu = (\mu_n)_{n \geq 1}$ del sistema X_γ .

Lema 3.15 $L_{H,P}(v)$ es medible para $\nu_{G,v}$.

DEMOSTRACIÓN. La aplicación que a $\gamma \in E_G(v)$ asocia $M_{\gamma_{[0,m]}}$ para un m fijo es continua, luego para cada m la aplicación $\gamma \mapsto \text{diam}_D M_{\gamma_{[0,m]}}(\mathbb{P}_+^{d-1})$ es medible, así que $U_{H,P}(v)$ es $\nu_{G,v}$ medible. Un argumento similar muestra que la aplicación $\gamma \mapsto \alpha(\gamma)H + P$ es $\nu_{G,v}$ medible. Combinando estas observaciones se deduce el lema. □

Lema 3.16 *Sea $\bar{\gamma}$ es un paseo dirigido que une los vértices v y v' . Entonces*

$$f_{\bar{\gamma}}^{-1}(L_{H,P}(v)) \subseteq L_{H \cdot M_{\bar{\gamma}}, P \cdot M_{\bar{\gamma}}}(v').$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\gamma \in E_G(v')$ tal que $f_{\bar{\gamma}}(\gamma) = \bar{\gamma} \in L_{H,P}(v)$. Luego $\alpha(\bar{\gamma}\gamma)H + P \in E^s(X_{\bar{\gamma}\gamma})$. Como $E^s(X_{\bar{\gamma}\gamma}) = E^s(X_\gamma) \cdot M_{\bar{\gamma}}^{-1}$, deducimos que $\alpha(\bar{\gamma}\gamma)H \cdot M_{\bar{\gamma}} + P \cdot M_{\bar{\gamma}} \in E^s(X_\gamma)$, con $\alpha(\bar{\gamma}\gamma) = -P \cdot M_{\bar{\gamma}} \cdot \mu_1(\gamma) / H \cdot M_{\bar{\gamma}} \cdot \mu_1(\gamma)$, siendo $\mu_1(\gamma)$ el único vector de probabilidad que define la única medida de probabilidad invariante de X_γ . Luego $\gamma \in L_{H \cdot M_{\bar{\gamma}}, P \cdot M_{\bar{\gamma}}}(v')$. \square

Proposición 3.17 *Sea v un vértice en G . Suponga que $H \in \mathbb{N}^d, P \in \mathbb{Z}^d$ son tales que $\nu_{G,v}(L_{H,P}(v)) > 0$, y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe un loop $\bar{\gamma}$ en v tal que $\nu_{G,v}(L_{H \cdot M_{\bar{\gamma}}, P \cdot M_{\bar{\gamma}}}(v)) > 1 - \varepsilon$.*

DEMOSTRACIÓN. El espacio $E_G(v)$ es un espacio ultramétrico localmente compacto al igual que cualquier subespacio cerrado en $E_G(v)$, por lo que aplica el Lema 1.39. Si $\bar{\gamma}$ es un paseo finito que parte en v , es claro que $\nu_{G,v}(0[\bar{\gamma}]) > 0$. Tomaremos el caso particular de $\bar{\gamma}$ un loop en v . Sea

$$A(\bar{\gamma}) = \{\gamma \in E_G(v) : \gamma \text{ pasa infinitas veces por } \bar{\gamma}\}.$$

Luego $A(\bar{\gamma})$ tiene $\nu_{G,v}$ -medida total. Si $\gamma \in A(\bar{\gamma})$, sea $(k_n)_{n \geq 1} = (k_n(\bar{\gamma}))_{n \geq 1}$ la sucesión estrictamente creciente tal que $\gamma_{[k_n, k_{n+1}]} = \bar{\gamma}$, $\forall n \geq 1$. A la sucesión $(k_n)_{n \geq 1}$ la llamaremos *tiempos de retorno de γ dado por $\bar{\gamma}$* . Sea $\bar{\gamma}$ un loop en v y sea $\gamma \in A(\bar{\gamma}) \cap L_{H,P}(v)$ que adicionalmente es un punto de densidad de $L_{H,P}(v)$ con respecto a $\nu_{G,v}$. Considere $(k_n)_{n \geq 1}$ la sucesión de tiempos de retorno de γ dado por $\bar{\gamma}$. Por definición los conjuntos $0[\gamma_{[0, k_n]}]$ son clopens encajonados con $\gamma \in \bigcap_{n \geq 1} 0[\gamma_{[0, k_n]}]$.

Además por (1.13) tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_{G,v}(L_{H,P}(v) \cap 0[\gamma_{[0, k_n]}])}{\nu_{G,v}(0[\gamma_{[0, k_n]}])} = 1.$$

Para $\varepsilon > 0$, considere γ y $n \geq 1$ tales que $\frac{\nu_{G,v}(L_{H,P}(v) \cap 0[\gamma_{[0, k_n]}])}{\nu_{G,v}(0[\gamma_{[0, k_n]}])} > 1 - \varepsilon$. Luego del Lema 3.16 tenemos

$$\nu_{G,v}(E_G(v) \setminus L_{H \cdot M_{\gamma_{[0, k_n]}}, P \cdot M_{\gamma_{[0, k_n]}}}(v)) \leq \nu_{G,v}(f_{\gamma_{[0, k_n]}}^{-1}(R)),$$

con $R = 0[\gamma_{[0, k_n]}] \setminus L_{H,P}(v)$. De la Proposición 3.13 se obtiene que

$$\begin{aligned} \nu_{G,v}(E_G(v) \setminus L_{H \cdot M_{\gamma_{[0, k_n]}}, P \cdot M_{\gamma_{[0, k_n]}}}(v)) &\leq \frac{\nu_{G,v}(R)}{\nu_{G,v}(0[\gamma_{[0, k_n]}])} \\ &= 1 - \frac{\nu_{G,v}(L_{H,P}(v) \cap 0[\gamma_{[0, k_n]}])}{\nu_{G,v}(0[\gamma_{[0, k_n]}])} \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

lo que prueba lo pedido con $\bar{\gamma} = \gamma_{[0, k_n]}$. \square

Corolario 3.18 *Sea v un vértice en G . Suponga que $H \in \mathbb{N}^d, P \in \mathbb{Z}^d$ son tales que $\nu_{G,v}(L_{H,P}(v)) > 0$. Sean $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_l$ un conjunto de l loops en el vértice v . Entonces existen $\bar{H} \in \mathbb{N}^d, \bar{P} \in \mathbb{Z}^d$ tales que*

$$\nu_{G,v} \left(L_{\bar{H},\bar{P}}(v) \cap \bigcap_{k=1}^l L_{\bar{H} \cdot M_{\bar{\gamma}_k}, \bar{P} \cdot M_{\bar{\gamma}_k}}(v) \right) \geq \frac{1}{2}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 3.17 podemos tomar \bar{H}, \bar{P} tales que $\nu_{G,v}(L_{\bar{H},\bar{P}}(v)) \geq \max\{1/2, 1 - \frac{1}{2Ml}\}$, con $M = \max_{1 \leq k \leq l} \{\nu_{G,v}(o[\bar{\gamma}_k])^{-1}\}$. Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned} \nu_{G,v} \left(\bigcup_{k=1}^l E_G(v) \setminus L_{\bar{H} \cdot M_{\bar{\gamma}_k}, \bar{P} \cdot M_{\bar{\gamma}_k}}(v) \right) &\leq \sum_{k=1}^l \nu_{G,v}(E_G(v) \setminus L_{\bar{H} \cdot M_{\bar{\gamma}_k}, \bar{P} \cdot M_{\bar{\gamma}_k}}(v)) \\ &\leq \sum_{k=1}^l \frac{\nu_{G,v}(f_{\bar{\gamma}_k}(E_G(v)) \setminus L_{\bar{H},\bar{P}}(v))}{\nu_{G,v}(o[\bar{\gamma}_k])} \\ &\leq M \sum_{k=1}^l \nu_{G,v}(E_G(v) \setminus L_{\bar{H},\bar{P}}(v)) \\ &\leq Ml(1 - \nu_{G,v}(L_{\bar{H},\bar{P}}(v))) \\ &\leq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

de donde $\mu_{G,v}(L_{\bar{H},\bar{P}}(v)) \geq 1/2$ y $\mu_{G,v}(\bigcap_{k=1}^l L_{\bar{H} \cdot M_{\bar{\gamma}_k}, \bar{P} \cdot M_{\bar{\gamma}_k}}(v)) \geq 1/2$. \square

Introduciremos aún más estructura sobre (G, τ) a manera de obtener una condición de mezcla débil topológica. La motivación de incluir estas hipótesis vienen del resultado de Nogueira y Rudolph [NR97], donde los autores demuestran la mezcla débil topológica de casi todas las t.i.i. que no son de tipo rotación. Para tal resultado basta con hacer una eliminación del espacio estable del cociclo de Rauzy-Veech.

Definición 3.19 *Para cada $v \in G$, asociamos una matriz antisimétrica no nula $\Omega(v)$ de $d \times d$, con $r(\Omega(v)) = 2g(v)$ para cierto $g(v) \geq 1$. Supondremos adicionalmente que si $\gamma \in E$ es tal que $s(\gamma) = v, r(\gamma) = v'$ entonces*

$$M_\gamma^\top \Omega(v) M_\gamma = \Omega(v'). \quad (3.3)$$

La ecuación (3.3) nos dice que $g(v) = g(v')$ si v y v' están conectados por una arista dirigida pues M_γ es invertible, luego $g(v) = g(G)$, $\forall v \in V$, pues G es fuertemente conexo. Llamaremos *género de G* a la cantidad $g(G)$.

Observación. 8 Notar que si $\bar{\gamma}$ es un paseo dirigido que une v con v' entonces de (3.3) se obtiene

$$M_{\bar{\gamma}}^\top \Omega(v) M_{\bar{\gamma}} = \Omega(v').$$

En particular para un loop $\bar{\gamma}$ en v se obtiene

$$M_{\bar{\gamma}}^\top \Omega(v) M_{\bar{\gamma}} = \Omega(v).$$

Definición 3.20 *Defina $H(v) = \text{Im}(\Omega(v))$. De la antisimetría de $\Omega(v)$ tenemos que $\text{Ker } \Omega(v) \oplus \text{Im } \Omega(v) = \mathbb{R}^d$, con $\dim H(v) = 2g(G)$.*

Definición 3.21 *Para $H \in \mathbb{N}^d$ y $P \in \mathbb{Z}^d$, decimos que el par (H, P) es trivial si existe $r \in \mathbb{Q}$ con $P = rH$.*

Notar que si el par (H, P) es trivial, entonces la condición $\alpha(\gamma)H + P \in E^s(X_\gamma)$ se satisface trivialmente pues en este caso $\alpha(\gamma) = -r$.

Proposición 3.22 *Sea (G, τ) un grafo de renormalización, $H \in \mathbb{N}^d$ primitivo y sea v un vértice de G y v_1, v_2, \dots, v_l vectores fila en \mathbb{Z}^d tales que*

$$H(v) = \langle v_1, v_2, \dots, v_l \rangle.$$

Suponga que existen loops $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_l$ en v tales que las matrices $M_{\bar{\gamma}_k}$, $1 \leq k \leq l$, actúan en vectores fila de la forma

$$zM_{\bar{\gamma}_k} = z + \beta_k \cdot z^\top v_k, \quad \forall z \in \mathbb{R}^d, \quad 1 \leq k \leq l,$$

con $\beta_k \in \mathbb{Q}^d, \beta_k \cdot H^\top \neq 0, \forall 1 \leq k \leq l$. Sea $P \in \mathbb{Z}^d$ tal que el par (H, P) es no trivial y defina

$$L = L_{H,P}(v) \cap \bigcap_{k=1}^l L_{H \cdot M_{\bar{\gamma}_k}, P \cdot M_{\bar{\gamma}_k}}(v).$$

Entonces para $\nu_{G,v}$ -casi todo $\gamma \in L$ tenemos que

$$H(v) \cap \mu_1(\gamma)^\perp \subseteq E^s(X_\gamma),$$

siendo $\mu_1(\gamma)$ el único vector de probabilidad que define la única medida invariante de X_γ .

DEMOSTRACIÓN. Tenemos $\alpha(\gamma)H + P \in E^s(X_\gamma)$ y para cada $1 \leq k \leq l$:

$$\begin{aligned} \alpha_k(\gamma)H \cdot M_{\bar{\gamma}_k} + P \cdot M_{\bar{\gamma}_k} &= (\alpha_k(\gamma)H + P) \cdot M_{\bar{\gamma}_k} \\ &= \alpha_k(\gamma)H + P + \beta_k \cdot (\alpha_k(\gamma)H + P)^\top v_k \in E^s(X_\gamma), \end{aligned}$$

siendo $\alpha_k(\gamma) = -PM_{\bar{\gamma}_k} \cdot \mu_1(\gamma) / HM_{\bar{\gamma}_k} \cdot \mu_1(\gamma)$. Si fuese $\beta_k \cdot (\alpha_k(\gamma)H + P)^\top = 0$, entonces como $\beta_k \cdot H^\top \neq 0$ tenemos $\alpha_k(\gamma) = -\beta_k \cdot P^\top / \beta_k \cdot H^\top \in \mathbb{Q}$ y del hecho que $\alpha_k(\gamma)H + P \in E^s(X_\gamma)$ se deduce que $P = -\alpha_k(\gamma)H$, contradiciendo la no trivialidad del par (H, P) .

Por lo tanto tenemos $v_k \in \langle H, \alpha_k(\gamma)H + P, \alpha_k(\gamma)HM_{\bar{\gamma}_k} + PM_{\bar{\gamma}_k} \rangle, \forall 1 \leq k \leq l$ y como H no está en $\mu_1(\gamma)^\perp$ tenemos $H(v) \cap \mu_1(\gamma)^\perp \subseteq E^s(X_\gamma)$ para $\nu_{G,v}$ -casi todo $\gamma \in L$. \square

Ahora enunciamos el resultado principal para mezcla débil topológica. Este resultado se verifica para grafos de renormalización que provienen de dinámicas de t.i.i. y de ciertas involuciones lineales (ver el Capítulo 5). En la última sección de este capítulo discutiremos sobre las restricciones que impone este resultado, exhibiendo ejemplos concretos distintos a los ya mencionados y analizando un grafo de renormalización particular que satisface todas excepto una hipótesis, dejando abierta la pregunta sobre mezcla débil (topológica o medible) para sistemas parametrizados en tal grafo.

Teorema 3.23 Sea (G, τ) un grafo de renormalización parametrizador que satisface (3.3) con $g(G) > 1$, $H \in \mathbb{N}^d$ primitivo y sea $v^* \in V$ y v_1, v_2, \dots, v_l vectores fila en \mathbb{Z}^d tales que

$$H(v^*) = \langle v_1, v_2, \dots, v_l \rangle.$$

Suponga que $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_l$ son loops en v^* tales que las matrices $M_{\bar{\gamma}_k}$, $1 \leq k \leq l$, actúan en vectores fila de la forma

$$zM_{\bar{\gamma}_k} = z + \beta_k \cdot z^\top v_k, \quad \forall z \in \mathbb{R}^d, \quad 1 \leq k \leq l, \quad (3.4)$$

con $\beta_k \in \mathbb{Q}^d$, $\beta_k \cdot H^\top \neq 0$, $\forall 1 \leq k \leq l$. Entonces para cada $v \in V$ y $\nu_{G,v}$ -casi todo $\gamma \in E_G(v)$ el sistema $X_{\gamma,H}$ es topológicamente débilmente mezclador.

DEMOSTRACIÓN. Basta probar que $\nu_{G,v}(L_{H,P}(v)) = 0$ para cualquier $v \in V$ y cualquier par no trivial (H, P) . Por contradicción, asuma que $g(G) > 1$ y $\nu_{G,v}(L_{H,P}(v)) > 0$. Podemos asumir que $v = v^*$ ya que si $\nu_{G,v}(L_{H,P}(v)) > 0$ entonces $\nu_{G,v^*}(L_{H',P'}(v^*)) > 0$ para ciertos $H' \in \mathbb{N}^d, P' \in \mathbb{Z}^d$. En efecto, de la Proposición 3.13 tenemos $\nu_{G,v^*}(L_{H \cdot M_{\bar{\gamma}}, P \cdot M_{\bar{\gamma}}}(v^*)) > 0$ siendo $\bar{\gamma}$ un paseo dirigido que une v y v^* . Asumamos de ahora en adelante que $v = v^*$. De la Proposición 3.22 tenemos que para un conjunto L con $\nu_{G,v}(L) \geq 1/2$, si $\gamma \in L$ entonces $H(v) \cap \mu_1(\gamma)^\perp \subseteq E^s(X_\gamma)$. Considere $\delta = \Omega(v)\mu_1(\gamma) \in H(v)$ vector columna, con $\delta \neq 0$ pues de lo contrario $\mu_1(\gamma) = 0$ debido a la antisimetría de $\Omega(v)$. Sea $\beta \in H(v)$ un vector columna tal que β y δ sean linealmente independientes, que existe pues de lo contrario $\dim H(v) = 1$. Tome $\delta, v'_1, \dots, v'_{2g(G)-2}$ un conjunto de vectores columna linealmente independiente de $H(v) \cap \mu_1(\gamma)^\perp$, esto es posible pues $\dim(H(v) \cap \mu_1(\gamma)^\perp) \geq 2g(G) - 1$. Luego $\mathcal{B} = \{\delta, \beta, v'_1, \dots, v'_{2g(G)-2}\}$ es una base de $H(v)$. Considere $(k_n)_{n \geq 1} = (k_n(\gamma))_{n \geq 1}$ una sucesión de tiempos de retorno a v asociados a γ . Como las matrices $M_{\gamma_{[0, k_n]}}^\top$ preservan $H(v)$ por (3.3) y son invertibles, el paralelepípedo formado por \mathcal{B} es tal que $0 < \text{Vol}(\mathcal{B}) = \text{Vol}(M_{\gamma_{[0, k_n]}}^\top \mathcal{B})$ para cada $n \geq 1$. En particular

$$0 < \text{Vol}(M_{\gamma_{[0, k_n]}}^\top \mathcal{B}) \leq \left\| M_{\gamma_{[0, k_n]}}^\top \delta \right\|_2 \left\| M_{\gamma_{[0, k_n]}}^\top \beta \right\|_2 \prod_{k=1}^{2g(G)-2} \left\| M_{\gamma_{[0, k_n]}}^\top v'_k \right\|_2. \quad (3.5)$$

Por el Corolario 3.8 podemos asumir que $(k_n)_{n \geq 1}$ son tales que

$$\sup_{1 \leq i \leq j \leq d} \frac{h_{k_n}(i)}{h_{k_n}(j)} \leq C \quad (3.6)$$

$$\sup_{1 \leq i \leq j \leq d} \frac{\mu_{k_n}(i)}{\mu_{k_n}(j)} \leq C, \quad (3.7)$$

para cierto $C > 0$ que depende sólo de G , siendo $(h_n)_{n \geq 1}, (\mu_n)_{n \geq 1}$ los vectores de alturas y de medidas del sistema X_γ , respectivamente. Tenemos $\Omega(v)\mu_{k_n} = M_{\gamma_{[0, k_n]}}^\top \Omega(v)M_{\gamma_{[0, k_n]}} \mu_{k_n} = M_{\gamma_{[0, k_n]}}^\top \delta$, en particular $\left\| M_{\gamma_{[0, k_n]}}^\top \delta \right\|_2 \leq \|\Omega(v)\|_2 \|\mu_{k_n}\|_2$.

Del mismo modo $\left\| M_{\gamma_{[0, k_n]}}^\top \beta \right\|_2 \leq |\max_{1 \leq l \leq d} \beta(l)| \|\mu_{k_n}\|_2$, por lo que de (3.6) y (3.7) se sigue que

$$\left\| M_{\gamma_{[0, k_n]}}^\top \delta \right\|_2 \left\| M_{\gamma_{[0, k_n]}}^\top \beta \right\|_2 \leq \|\Omega(v)\|_2 \max_{1 \leq l \leq d} \beta(l) \|\mu_{k_n}\|_2 \|\mu_{k_n}\|_2. \quad (3.8)$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\|\mu_{k_n}\|_2^2 \|h_{k_n}\|_2^2 &\leq C^4 d^2 (\max_{1 \leq l \leq d} \mu_{k_n}(l) \max_{1 \leq l \leq d} h_{k_n}(l))^2 \\
&\leq C^4 d^2 \left(\frac{C^2 h_{k_n} \cdot \mu_{k_n}}{d} \right)^2 \\
&\leq C^8,
\end{aligned}$$

y así $\|\mu_{k_n}\|_2 \|h_{k_n}\|_2 \leq C^4$. Reemplazando en (3.8) y luego en (3.5) se obtiene

$$0 < \text{Vol}(M_{\gamma_{[0, k_n]}}^\top \mathcal{B}) \leq C^4 \|\Omega(v)\|_2 \max_{1 \leq l \leq d} \beta(l) \prod_{k=1}^{2g(G)-2} \|M_{\gamma_{[0, k_n]}}^\top v'_k\|_2. \quad (3.9)$$

Como $g(G) > 1$ tenemos algún $v'_k \in H(v) \cap \mu_1(\gamma)^\perp$ con $1 \leq k \leq 2g(G) - 2$ tal que $M_{\gamma_{[0, k_n]}}^\top v'_k \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$, lo que contradice (3.9). Esta contradicción termina la demostración. \square

El siguiente corolario se obtiene directamente de la demostración del teorema anterior, pues ocupamos la condición necesaria dada por el Teorema 1.35, que no depende de los ordenes locales de los diagramas:

Corolario 3.24 *Suponga que (G, τ) es un grafo de renormalización parametrizador que satisface las hipótesis del Teorema 3.23 y sean $v \in V$ y $H \in \mathbb{N}^d$ un vector primitivo. Sea \mathcal{C} el conjunto de medida total de $\gamma \in E_G(v)$ que definen un sistema de Bratteli-Vershik $X_{\gamma, H}$ que es topológicamente débilmente mezclador. Entonces cualquier sistema de Bratteli-Vershik $X'_{\gamma, H}$ obtenido por una modificación propia de los ordenes locales de $X_{\gamma, H}$ es también topológicamente débilmente mezclador.*

Observación. 9 Dos sistemas dinámicos topológicos (X, T) y (X', T') son *orbitalmente equivalentes* si existe un homeomorfismo $\phi : X \rightarrow X'$ que envía órbitas en órbitas, *i.e.*, para cada $x \in X$ tenemos $\phi(\{T^n x : n \in \mathbb{Z}\}) = \{T'^n \phi(x) : n \in \mathbb{Z}\}$. Esto induce mapeos $\vartheta : X \rightarrow \mathbb{Z}$ y $\kappa : X \rightarrow \mathbb{Z}$ tales que $\phi \circ T(x) = T'^{\vartheta(x)} \circ \phi(x)$ y $\phi \circ T^{\kappa(x)}(x) = T' \circ \phi(x)$. Si los mapeos ϑ, κ como antes pueden tomarse de forma que posean a lo más un punto de discontinuidad, decimos que (X, T) y (X', T') son *fuertemente orbitalmente equivalentes*. Dos sistemas minimales de Cantor (X, T) y (X', T') son fuertemente orbitalmente equivalentes si y solo si poseen representaciones de Bratteli-Vershik $B = (V, E, \preceq), B' = (V', E', \preceq')$, donde cada representación difiere únicamente por una modificación de los ordenes locales (posiblemente diferente en cada caso) de una contracción sobre una tercera representación de Bratteli-Vershik $\hat{B} = (\hat{V}, \hat{E}, \hat{\preceq})$. En particular, dos representaciones de Bratteli-Vershik propias que difieren únicamente en sus ordenes locales son fuertemente orbitalmente equivalentes. Nos referimos a la Sección 5.2. de [DFM15] para una discusión más extensa sobre equivalencia orbital fuerte. El Corolario 3.24 nos dice que la propiedad de mezcla débil topológica prevalece para varios sistemas en la clase de equivalencia orbital fuerte de $X_{\gamma, H}$.

3.3. Restricciones para la mezcla débil topológica

Una restricción para obtener mezcla débil topológica es obtener igualdades de la forma (3.4), manteniendo la igualdad (3.3). En esta sección expondremos un resultado abstracto que satisface esta restricción y un ejemplo en donde es imposible obtener igualdades de la forma (3.4), pero manteniendo la igualdad (3.3).

Diremos que una matriz es *elemental* si es de la forma $\text{Id} + E_{w,1}$ para ciertos $1 \leq w, l \leq d$ con $w \neq l$. Notar que cada matriz elemental es unimodular. Sea Ω una matriz de $d \times d$, antisimétrica y no nula a coeficientes enteros y sean v_1, v_2, \dots, v_d las filas de Ω . Para $1 \leq j \leq d$, considere A_j la matriz de $d \times d$ que posee una única fila no nula, siendo esta la j -ésima fila igual a v_j y sea $M_j = \text{Id} - A_j$. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, d\} \setminus \{j\}$ sea $M_i = \text{Id} - A_j + A_i$, donde A_i es una matriz de $d \times d$ que posee una única fila no nula, siendo esta la i -ésima fila igual a $v_i - v_j$.

Es sencillo ver que si $z \in \mathbb{R}^d$ es un vector fila las acciones de las matrices M_i están dadas por

$$zM_j = z - z_j v_j, \quad (3.10)$$

$$zM_i = z - z_j v_j + z_i(v_i - v_j), \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, d\} \setminus \{j\}, \quad (3.11)$$

y tenemos $M_i^\top \Omega M_i = \Omega$, $\forall 1 \leq i \leq d$ si $v_j = (-1, \dots, -1, 0, -1, \dots, -1)$, donde el j -ésimo coeficiente es nulo. La siguiente proposición muestra exactamente cuáles son las restricciones sobre matrices de sustitución M_1, M_2, \dots, M_d que cumplen (3.10) y (3.11) a modo de satisfacer la igualdad (3.3). Más aún, bajo cierta condición sobre Ω podemos construir matrices de sustitución como producto de matrices *elementales*, que cumplen todas las restricciones.

Proposición 3.25 *Suponga que $M_i, 1 \leq i \leq d$ son matrices a coeficientes enteros y no negativas que satisfacen (3.10) y (3.11) y que adicionalmente cumplen $M_i^\top \Omega M_i = \Omega$, $\forall 1 \leq i \leq d$. Entonces debemos tener $v_j \leq 0$, $v_i - v_j \geq 0$ para cada $1 \leq i \leq d$ y*

$$v_i(m)v_j(l)(v_j(i) + 1) = v_i(l)v_j(m)(v_j(i) + 1), \quad \forall 1 \leq l, m \leq d. \quad (3.12)$$

En particular, si Ω es a coeficientes en $\{-1, 0, 1\}$, $j = d$ y $v_d = (-1, \dots, -1, 0)$, entonces $M_i \geq 0$, $\forall 1 \leq i \leq d$ y $M_i^\top \Omega M_i = \Omega$, $\forall 1 \leq i \leq d$. Adicionalmente cada matriz M_i es realizable como el producto de matrices elementales.

DEMOSTRACIÓN. La igualdad $M_j^\top \Omega M_j = \Omega$ equivale a $(\Omega A_j)^\top - (\Omega A_j) - A_j^\top \Omega A_j = 0$. Es sencillo ver que $A_j^\top \Omega A_j = 0$ y que $(\Omega A_j)_{l,m} = -v_j(l)v_j(m)$, luego $(\Omega A_j)^\top - (\Omega A_j) = 0$. La igualdad $M_i^\top \Omega M_i = \Omega$ con $i \neq j$ equivale a $M^\top \Omega A_i - (M^\top \Omega A_i)^\top + A_i^\top \Omega A_i = 0$. Es sencillo ver que $A_i^\top \Omega A_i = 0$, por lo tanto la igualdad equivale a la simetría de $M^\top \Omega A_i$. Como $(M^\top \Omega A_i)_{l,m} = (v_l(i) - v_j(l)v_j(i))(v_i(m) - v_j(m))$, esto último equivale a (3.12). Si ahora Ω es a coeficientes en $\{-1, 0, 1\}$, $j = d$ y $v_d = (-1, \dots, -1, 0)$, entonces $v_d(i) = -1$ para $i \neq d$ y se sigue la igualdad $M_i^\top \Omega M_i = \Omega$ para $1 \leq i \leq d$ por lo anterior y (3.12). Además $v_d \leq 0$ y $v_i - v_d \geq 0$. Para $1 \leq i < d$, defina $N^{(i)}(k) = (v_i - v_d)(k) \geq 0$, $\forall 1 \leq k \leq d$ y sean k_1, \dots, k_m índices distintos de manera que $\{i, k_1, \dots, k_m\} = \{l : 1 \leq l < d, N^{(i)}(l) > 0\}$ y sean i_1, \dots, i_n índices de manera que $\{i_1, \dots, i_n\} = \{l : 1 \leq l < d\} \setminus \{i, k_1, \dots, k_m\}$.

Como $(v_i - v_d)(d) = (v_i - v_d)(i) = 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
& (\text{Id} + E_{d,i_1}) \dots (\text{Id} + E_{d,i_n}) \prod_{1 \leq l \leq d: l \notin \{i, k_1, \dots, k_m\}} (\text{Id} + E_{i,l})^{N^{(i)}(l)} \prod_{l \in \{i, k_1, \dots, k_m\}} (\text{Id} + E_{i,l})^{N^{(i)}(l)-1} \\
& (\text{Id} + E_{d,k_1}) \dots (\text{Id} + E_{d,k_m})(\text{Id} + E_{d,i}) \\
& = \text{Id} + E_{d,k_1} + \dots + E_{d,k_m} + E_{d,i_1} + \dots + E_{d,i_n} + E_{d,i} + \sum_{1 \leq l \leq d} N^{(i)}(l) E_{i,l} \\
& = \text{Id} - A_d + A_i,
\end{aligned}$$

probando que cada matriz unimodular M_i para $1 \leq i \leq d$ es realizable como producto de matrices elementales. \square

Ejemplo. 5 Sea Ω una matriz de $d \times d$, antisimétrica, no nula y sean v_1, v_2, \dots, v_d las filas de Ω . Asuma que Ω es a coeficientes en $\{-1, 0, 1\}$ y que $v_d = (-1, -1, \dots, -1, 0)$. Considere el grafo $G = (V, E)$ con $V = \{v^*\}$ y E consistente de d loops $(\gamma_i)_{i=1}^d$ en v^* (luego (E_G, σ) es el fullshift en d símbolos). Asigne $\Omega(v^*) = \Omega$ y para $1 \leq i \leq d$ asocie a cada γ_i una substitución $\tau(\gamma_i)$ sobre el alfabeto $\{1, 2, \dots, d\}$ con $M_{\tau(\gamma_i)} = \text{Id} - A_d + A_i$ si $i < d$ y $M_{\tau(\gamma_d)} = \text{Id} - A_d$. Esta asignación es posible debido a la Proposición 3.25 (en particular, $\tau(\gamma_i)$ es unimodular para cada $1 \leq i \leq d$). Si $1 \leq i < d$ tenemos $N^{(i)}(d) = 1$ y por lo tanto la matriz $\text{Id} + E_{i,d}$ aparece como factor en M_{ρ_i} , luego por la Proposición 1.59 el grafo G admite un paseo que satisface la hipótesis del cuarto ítem de la Definición 3.2. Por todo lo anterior, el sistema (G, τ) es un grafo de renormalización parametrizador (con la posible excepción de satisfacer la hipótesis del tercer ítem de la Definición 3.2) que satisface las condiciones del Teorema 3.23.

A modo de ilustrar este ejemplo, considere el grafo $G = (V, E)$ dirigido de la Figura 3.1, con $V = \{v^*\}$.

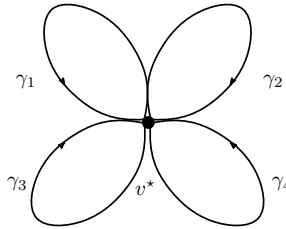


Figura 3.1

Sea

$$\Omega(v^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La asignación de sustituciones sobre $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4\}$ en las aristas dirigidas de G es:

$$\begin{array}{cccc}
\tau(\gamma_1)(1) = 114 & \tau(\gamma_2)(1) = 124 & \tau(\gamma_3)(1) = 134 & \tau(\gamma_4)(1) = 14 \\
\tau(\gamma_1)(2) = 124 & \tau(\gamma_2)(2) = 224 & \tau(\gamma_3)(2) = 2334 & \tau(\gamma_4)(2) = 24 \\
\tau(\gamma_1)(3) = 134 & \tau(\gamma_2)(3) = 34 & \tau(\gamma_3)(3) = 334 & \tau(\gamma_4)(3) = 34 \\
\tau(\gamma_1)(4) = 14 & \tau(\gamma_2)(4) = 24 & \tau(\gamma_3)(4) = 34 & \tau(\gamma_4)(4) = 4.
\end{array}$$

Notar que $g(G) = 2$, que $H(v^*) = \mathbb{R}^4$, que $\tau(\gamma_1)$ es una sustitución propia y que si $\rho = \tau(\gamma_2) \circ \tau(\gamma_3)$ entonces $M_\rho > 0$. Además estas matrices de sustitución son exactamente las que resultan de la construcción dada en la Proposición 3.25, en particular, resultan ser unimodulares. Por todo lo anterior el sistema (G, τ) es un grafo de renormalización parametrizador que satisface las condiciones del Teorema 3.23.

Observación. 10 La matriz $\Omega(v^*)$ no es la matriz de intersección de ningún intercambio de intervalos ni de ninguna involución lineal (ver Capítulo 5).

Por otra parte el siguiente ejemplo muestra la imposibilidad de obtener igualdades de la forma (3.4), aún manteniendo la igualdad (3.3).

Proposición 3.26 (Apéndice A, [AMY18]) *Para cada $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ defina*

$$M \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 \\ 3a^2c & a^2d + 2abc & b^2c + 2abd & 3b^2d \\ 3a^2c & bc^2 + 2acd & ad^2 + 2bcd & 3bd^2 \\ c^3 & c^2d & cd^2 & d^3 \end{pmatrix}.$$

Cada matriz $M(g)$ es tal que $M(g)^\top JM(g) = J$, siendo

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para cada $t, n \in \mathbb{Z}$ denote

$$\begin{aligned}
M_{t,n} &= M \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \\
&= Id + \begin{pmatrix} 3tn + 3t^2n^2 + t^3n^3 & t + 2t^2n + t^3n^2 & t^2 + t^3n & t^3 \\ 3n + 6tn^2 + 3t^2n^3 & 4tn + 3t^2n^2 & 2t + 3t^2n & 3t^2 \\ 3tn^3 + 3n^2 & 3tn^2 + 2n & 3tn & 3t \\ n^3 & n^2 & n & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Entonces para cada $t, n \in \mathbb{Z}$ con $(t, n) \neq (0, 0)$ tenemos $r(M_{t,n} - Id) > 1$ y luego no es posible tener la igualdad $zM_{t,n} = z + \beta \cdot z^\top v$, para cada vector fila $z \in \mathbb{R}^4$ y ciertos vectores fila $v \in \mathbb{R}^4, \beta \in \mathbb{Q}^4 \setminus \{0\}$.

DEMOSTRACIÓN. Si fuese $zM_{t,n} = z + \beta \cdot z^\top v$, para cada vector fila $z \in \mathbb{R}^4$ y ciertos vectores fila $v \in \mathbb{R}^4, \beta \in \mathbb{Q}^4$, entonces $r(M_{t,n} - \text{Id}) = 1$. Así que $(t^2 + t^3n, 2t + 3t^2n, 3tn, n) = \lambda(t^3, 3t^2, 3t, 0)$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$, luego $n = 0$. Como $t \neq 0$ y $\lambda t^3 = t^2$ tenemos $\lambda = 1/t$ que contradice $3\lambda t = 0$. \square

Considere el grafo $G = (V, E)$ con $V = \{v^*\}$ y donde $E = \{A, B\}$ consiste de dos loops en el vértice v^* (ver Figura 3.2).

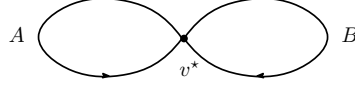


Figura 3.2

Se considera el alfabeto $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4\}$ y las sustituciones $\tau(A), \tau(B)$ sobre \mathcal{A} asociadas a las aristas están dadas por

$$\begin{array}{ll} \tau(A)(1) = 1 & \tau(B)(1) = 12223334 \\ \tau(A)(2) = 12 & \tau(B)(2) = 2334 \\ \tau(A)(3) = 1223 & \tau(B)(3) = 34 \\ \tau(A)(4) = 12223334 & \tau(B)(4) = 4. \end{array}$$

Las matrices asociadas a $\tau(A), \tau(B)$ son

$$M_{\tau(A)} = M \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{\tau(B)} = M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es sencillo comprobar que la sustitución $\tau = \tau(B) \circ \tau(A)$ es propia y que $M_\tau > 0$. Luego G define un grafo de renormalización parametrizador, que satisface la relación (3.3), pero por la Proposición 3.26 ningún loop en v^* puede satisfacer una relación de la forma (3.4).

Capítulo 4

Exponentes de Lyapunov, propiedad de Pisot y mezcla débil

En este capítulo veremos como el comportamiento asintótico del cociclo lineal que define el shift de aristas en un grafo de renormalización parametrizador, en particular las propiedades sobre valores propios y mezcla débil pueden controlarse a través de los exponentes de Lyapunov. Mostraremos que bajo la propiedad de Pisot el grupo aditivo de valores propios continuos de un sistema de Bratteli-Vershik genérico es exactamente el grupo generado por los candidatos a valores propios. Esto permite identificar el factor equicontinuo maximal en el contexto general así como el factor de Kronecker en el contexto de sistemas de Bratteli-Vershik que son linealmente recurrentes. Por otra parte, para las hipótesis dadas en el Teorema 3.23 mostraremos que el espectro de Lyapunov para la fibra natural del cociclo es simétrico y en particular la propiedad de Pisot no se cumple. Más aún, extenderemos la conclusión del Teorema 3.23 a mezcla débil topológica añadiendo la condición adicional de positividad del segundo exponente de Lyapunov.

4.1. Exponentes de Lyapunov

Sea (X, \mathcal{B}_X, μ) un espacio de probabilidad y $T : X \rightarrow X$ una función medible que preserva μ . Un *cociclo lineal* es un par (T, A) , en donde $A : X \rightarrow \text{GL}(d, \mathbb{Z})$ es medible. El par es visto como un skew-product $(x, v) \mapsto (T(x), v \cdot A(x))$ en $X \times \mathbb{R}^d$, siendo v un vector fila. Para $n \geq 0$ se define $(T, A)^n = (T^n, A_n)$, en donde

$$A_n(x) = A(x)A(T(x)) \dots A(T^{n-1}(x)), \quad (4.1)$$

que satisfacen:

$$A_{m+n}(x) = A_m(x)A_n(T^m(x)).$$

El comportamiento asintótico del cociclo (o del cociclo transpuesto) es estudiado a través de los exponentes de Lyapunov.

Teorema 4.1 (Oseledets, [Wal82]) *Sea $T : X \rightarrow X$ una transformación medible y ergódica (no necesariamente invertible) de un espacio de probabilidad (X, \mathcal{B}_X, μ) . Sea $A : X \rightarrow GL(d, \mathbb{R})$ un mapeo medible tal que $\log^+ \|A\|$ es integrable con respecto a μ . Para $n \geq 1$ defina $A_n(x) = A(x)A(Tx) \dots A(T^{n-1}x)$. Entonces existen números reales*

$$\theta_1^\mu > \theta_2^\mu > \dots > \theta_k^\mu \quad (4.2)$$

y para μ -casi todo $x \in X$ existe una filtración

$$\mathbb{R}^d = E_x^1 \supseteq E_x^2 \supseteq \dots \supseteq E_x^k \supseteq E_x^{k+1} = \{0\} \quad (4.3)$$

tales que si $1 \leq i \leq k$ tenemos $E_x^i \cdot A(x) = E_{T(x)}^i$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \|v_i A_n(x)\|}{n} = \theta_i^\mu \quad \text{para todo } v_i \in E_x^i \setminus E_x^{i+1}. \quad (4.4)$$

Los subespacios E_x^i son únicos μ -casi en todas partes y dependen de forma medible de $x \in X$. Adicionalmente en un conjunto de μ -medida total el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n(x)A_n(x)^\top)^{1/n} = A_\infty(x) \quad (4.5)$$

existe y $A_\infty(x)$ tiene valores propios $\exp(\theta_i^\mu)$ contados con multiplicidad $\dim E_x^i$ y espacio propio E_x^i . Diremos que $\theta_1^\mu, \theta_2^\mu, \dots, \theta_k^\mu$ son los exponentes de Lyapunov asociados al cociclo A con respecto a μ , los cuales están contados con multiplicidades, siendo $\dim E_x^i - \dim E_x^{i+1}$ la multiplicidad de θ_i^μ para cada $1 \leq i \leq k$.

En general, consideraremos los exponentes de Lyapunov sin multiplicidades, i.e., escribiremos $\theta_1^\mu \geq \theta_2^\mu \geq \dots \geq \theta_d^\mu$ para el espectro de Lyapunov del sistema.

Si la aplicación $T : X \rightarrow X$ es invertible, se obtiene una conclusión más fuerte del teorema de Oseledets:

Teorema 4.2 (Oseledets caso invertible, [Wal82]) *Sea $T : X \rightarrow X$ una transformación invertible, bi-medible y ergódica de un espacio de probabilidad (X, \mathcal{B}_X, μ) . Sea $A : X \rightarrow GL(d, \mathbb{R})$ un mapeo medible tales que $\log^+ \|A\|$ y $\log^+ \|A^{-1}\|$ son integrables con respecto a μ . Para $n \geq 1$ defina $A_n(x) = A(x)A(Tx) \dots A(T^{n-1}x)$. Entonces existen números reales*

$$\theta_1^\mu > \theta_2^\mu > \dots > \theta_k^\mu \quad (4.6)$$

y para μ -casi todo $x \in X$ existe una descomposición

$$\mathbb{R}^d = E_x^1 \oplus \dots \oplus E_x^k \quad (4.7)$$

tales que si $1 \leq i \leq k$ tenemos $E_x^i \cdot A(x) = E_{T(x)}^i$ y

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{\log \|v_i A_n(x)\|}{n} = \theta_i^\mu \quad \text{para todo } v_i \in E_x^i \setminus \{0\}. \quad (4.8)$$

Los subespacios E_x^i son únicos μ -casi en todas partes y dependen de forma medible de $x \in X$. Diremos que $\theta_1^\mu, \theta_2^\mu, \dots, \theta_k^\mu$ son los exponentes de Lyapunov asociados al cociclo A con respecto a μ , los cuales están contados con multiplicidades, siendo $\dim E_x^i$ la multiplicidad de θ_i^μ para cada $1 \leq i \leq k$.

Observación. 11

- Si x es un punto periódico para T con $T^n(x) = x$ y $\mu = (\delta_x + \delta_{Tx} + \dots + \delta_{T^{n-1}x})/n$ es la suma de masas de Dirac distribuidas en esta órbita, entonces los exponentes de Lyapunov asociados a μ corresponden a los logaritmos de los valores absolutos de los valores propios de la matriz $A_n(x)$. En este sentido los exponentes de Lyapunov generalizan a los valores propios.
- Si la llegada del mapeo A es el conjunto de matrices con determinante ± 1 , entonces por (4.5)

$$\theta_1^\mu + \theta_2^\mu + \dots + \theta_d^\mu = 0.$$

- El primer exponente de Lyapunov puede caracterizarse mediante el límite obtenido para μ -casi todo $x \in X$:

$$\theta_1^\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \|A_n(x)\|}{n}.$$

- Si para μ -casi todo $x \in X$ el cono $\bigcap_{n \geq 1} A_n(x)(\mathbb{R}_+^d)$ se reduce a una recta $\mathbb{R}_+ v(x)$ con $v(x)$ un vector de probabilidad, la siguiente fórmula se satisface para μ -casi todo $x \in X$ ([AD15]):

$$\theta_2^\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \|A_n(x)\|_{v(x)}}{n}, \text{ siendo } \|A_n(x)\|_{v(x)} = \sup_{z \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, z \cdot v(x) = 0} \frac{\|z A_n(x)\|}{\|z\|}. \quad (4.9)$$

- Sea $X' \subseteq X$ un conjunto con $\mu(X') > 0$ y sea $\rho_{X'} : X' \rightarrow \mathbb{N}$ la aplicación de tiempo de primer retorno de $T : X \rightarrow X$ (no necesariamente invertible) a X' , definida para μ -casi todo punto de X' . Dado un cociclo $A : X \rightarrow \text{GL}(d, \mathbb{R})$, se define un cociclo correspondiente $A' : X' \rightarrow \text{GL}(d, \mathbb{R})$ sobre la aplicación de primer retorno $x \in X' \mapsto T^{\rho_{X'}(x)}(x)$ dado por $A'(x) = A_{\rho_{X'}(x)}(x)$. Entonces:

1. La medida de probabilidad $\mu_{X'}$ dada por la restricción normalizada de μ en X' es invariante bajo la aplicación de primer retorno $x \mapsto T^{\rho_{X'}(x)}(x)$.
2. $\log^+ \|A'^{\pm 1}\|$ es integrable para $\mu_{X'}$ si $\log^+ \|A^{\pm 1}\|$ es integrable para μ .
3. Para μ -casi todo $x \in X'$, los exponentes de Lyapunov del cociclo A' en x son obtenidos multiplicando los exponentes de Lyapunov del cociclo A en x por alguna constante $c(x) \geq 1$.

4.2. La propiedad de Pisot

Para el sistema (E_G, σ, ν_G) podemos considerar el cociclo medible $A(\gamma) = M_{\gamma_0}$ si $\gamma = (\gamma_n)_{n \geq 0}$. Este cociclo es tal que $\log^+ \|A\|$ y $\log^+ \|A^{-1}\|$ son integrables debido la finitud del grafo. Denotaremos por $\theta_1^\nu, \theta_2^\nu, \dots, \theta_d^\nu$ a los exponentes de Lyapunov de este cociclo con respecto a la medida ν .

Definición 4.3 ([BST14]) *Decimos que el sistema (E_G, σ) satisface la propiedad de Pisot para una medida de probabilidad ergódica ν de (E_G, σ) si $\theta_1^\nu > 0 > \theta_2^\nu$.*

Proposición 4.4 *Suponga que ν es una medida de probabilidad ergódica para (E_G, σ) y tal que existe $\bar{\gamma}$ un paseo finito en E_G con $\nu({}_0[\bar{\gamma}]) > 0$ y $M_{\bar{\gamma}} > 0$. Entonces:*

1. *El primer exponente satisface $\theta_1^\nu > 0$.*
2. *Si (E_G, σ) satisface la propiedad de Pisot para ν , entonces para un conjunto \mathcal{C} de ν -medida total de E_G tenemos que los valores propios del sistema de Bratteli-Vershik X_γ son*

$$\mu_1(\gamma)(1), \mu_1(\gamma)(2), \dots, \mu_1(\gamma)(d),$$

siendo $\mu_1(\gamma)$ el único vector de probabilidad invariante definido para X_γ .

DEMOSTRACIÓN.

1. Del Lema 3.4 se obtiene que para un conjunto $\mathcal{C}_1 \subseteq E_G$ de medida total, cada $\gamma \in \mathcal{C}_1$ es tal que $\bar{\gamma}$ aparece infinitas veces como factor de γ y por lo tanto X_γ es únicamente ergódico. Tenemos que para un conjunto $\mathcal{C}_2 \subseteq E_G$ de medida total, si $\gamma \in \mathcal{C}_2$:

$$\theta_1^\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \|A_n(\gamma)\|}{n},$$

luego para γ en $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ de medida total tenemos que el factor $\bar{\gamma}$ aparece en promedio $\nu({}_0[\bar{\gamma}])$ en γ y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \theta_1^\nu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \|A_n(\gamma)\|}{n} \\ &\geq \nu({}_0[\bar{\gamma}]) \log(\|M_{\bar{\gamma}}\|) \\ &> 0. \end{aligned}$$

2. Suponga que $\theta_1^\nu > 0 > \theta_2^\nu$. Sea $\mu_1(\gamma)$ el único vector de probabilidad que define una medida invariante para el sistema X_γ . En un conjunto de medida total \mathcal{C} el segundo exponente de Lyapunov satisface

$$\theta_2^\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \|A_n(\gamma)\|_{\mu_1(\gamma)}}{n}.$$

Sea $\gamma \in \mathcal{C}$ y $\varepsilon > 0$ tal que $\theta_2^\nu + \varepsilon < 0$. Para $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tenemos que si $n \geq N$:

$$\exp(n(\theta_2^\nu - \varepsilon)) \leq \|A_n(\gamma)\|_{\mu_1(\gamma)} \leq \exp(n(\theta_2^\nu + \varepsilon)),$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \|A_n(\gamma)\|_{\mu_1(\gamma)} &\leq \sum_{n=1}^{N-1} \|A_n(\gamma)\|_{\mu_1(\gamma)} + \sum_{n \geq N} \exp(n(\theta_2^\nu + \varepsilon)) \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

pues $|\exp(\theta_2^\nu + \varepsilon)| < 1$. Se deduce que para un conjunto \mathcal{C} de medida total en E_G se tiene

$$\sum_{n \geq 1} \|A_n(\gamma)\|_{\mu_1(\gamma)} < +\infty. \quad (4.10)$$

Sea ahora $B = (V, E, \preceq)$ un diagrama de Bratteli-Vershik asociado al sistema minimal de Cantor X_γ que se obtiene para $\gamma \in \mathcal{C}$, no necesariamente propio, con matrices de incidencia no negativas $(M_n)_{n \geq 2}$. Denotemos a e_l al l -ésimo vector fila canónico para $1 \leq l \leq d$, $e = e_1 + e_2 + \dots + e_d$ y sea $\alpha = \mu_1(\gamma)(l)$ con $l \in \{1, 2, \dots, d\}$, luego $(ae - e_l) \cdot \mu_1 = 0$. Si $A \lesssim B$ denota $A \leq C \cdot B$ para alguna constante $C > 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 1} \max_{x \in X_\gamma} \|\alpha \langle s_n(x), h_n \rangle\| &= \sum_{n \geq 1} \max_{x \in X_\gamma} \|\langle s_n(x), (\alpha e - e_l + e_l) P_n \rangle\| \\
&= \sum_{n \geq 1} \max_{x \in X_\gamma} \|\langle s_n(x), (\alpha e - e_l) P_n \rangle\| \\
&\leq \sum_{n \geq 1} \max_{x \in X_\gamma} |\langle s_n(x), (\alpha e - e_l) P_n \rangle| \\
&\lesssim \sum_{n \geq 1} \|M_{n+1}\| \|(\alpha e - e_l) P_n\| \\
&\lesssim \sum_{n \geq 1} \|A_n(\gamma)\|_{\mu_1(\gamma)} \\
&< +\infty,
\end{aligned}$$

Del Lema 3.10 deducimos que los valores propios continuos de X_γ son exactamente $\mu_1(\gamma)(1), \mu_1(\gamma)(2), \dots, \mu_1(\gamma)(d)$, para ν -casi todo $\gamma \in E$. □

Corolario 4.5

1. Suponga la hipótesis de la Proposición 4.4 y que (E_G, σ) satisface la propiedad de Pisot para ν . Para ν -casi todo $\gamma \in E_G$, el sistema X_γ es únicamente ergódico y el factor equicontinuo maximal del sistema de Bratteli-Vershik dado por X_γ corresponde a una rotación minimal en \mathbb{T}^d con ángulo $\mu_1(1), \mu_1(2), \dots, \mu_1(d)$, siendo μ_1 el único vector de probabilidad que define una única medida invariante de X_γ . Más aún, toda modificación propia de X_γ posee el mismo factor equicontinuo maximal de X_γ .
2. Suponga la hipótesis de la Proposición 4.4 sobre un grafo de renormalización (G, τ) en donde $\tau(\gamma)$ es una substitución unimodular, positiva y propia para cada $\gamma \in E(G)$ y que (E_G, σ) satisface la propiedad de Pisot para ν . Para ν -casi todo $\gamma \in E_G$, el sistema X_γ es únicamente ergódico y el factor equicontinuo maximal y el factor de Kronecker del sistema de Bratteli-Vershik dado por X_γ corresponden a una rotación minimal en \mathbb{T}^d con ángulo $\mu_1(1), \mu_1(2), \dots, \mu_1(d)$, siendo μ_1 el único vector de probabilidad que define una única medida invariante de X_γ . Más aún, toda modificación propia de X_γ posee el mismo factor equicontinuo maximal de X_γ .
3. Si $d = 2$ y existe $\bar{\gamma}$ un paseo finito en E_G con $\nu(\mathcal{O}[\bar{\gamma}]) > 0$ y $M_{\bar{\gamma}} > 0$, entonces (E_G, σ) satisface la propiedad de Pisot para ν y en consecuencia tenemos la conclusión del primer ítem.

DEMOSTRACIÓN.

1. De la Proposición 4.4, basta ver que si γ está en el conjunto de medida total sobre el

cual X_γ es únicamente ergódico y además se satisface

$$\theta_2^\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \|A_n(\gamma)\|_{\mu_1(\gamma)}}{n},$$

entonces $\mu_1(1), \mu_1(2), \dots, \mu_1(d)$ son racionalmente independientes. En efecto, asuma que existe $z \in \mathbb{Z}^d$ con $z \cdot \mu_1 = 0$, y sea $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño de forma que $\theta_2^\nu + \varepsilon < 0$, luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$ se satisface

$$\|A_n(\gamma)\|_{\mu_1(\gamma)} \leq \exp(n(\theta_2^\nu + \varepsilon)).$$

Por lo tanto $0 < \frac{1}{\|z\|} \leq \left\| \frac{z}{\|z\|} A_n(\gamma) \right\| \leq \exp(n(\theta_2^\nu + \varepsilon))$. Haciendo $n \rightarrow \infty$ se obtiene la contradicción buscada. Para finalizar, la hipótesis $\theta_1^\nu > 0 > \theta_2^\nu$ no depende de los ordenes sobre los sistemas, así que lo último es inmediato.

2. Bajo la hipótesis de unimodularidad los posibles valores propios continuos y medibles son de la forma $\alpha = z \cdot \mu_1$ para cierto $z \in \mathbb{Z}^d$ (ver el Lema 12 en [CDHM03]). Para concluir basta ver que para cada $\mu_1(i)$ es un valor propio continuo y medible, para cada $1 \leq i \leq d$ y casi todo $\gamma \in E_G$. Similar a la demostración de la Proposición 4.4, para un conjunto \mathcal{C} de medida total en E_G se tiene

$$\sum_{n \geq 1} \|A_n(\gamma)\|_{\mu_1(\gamma)} < +\infty, \quad \sum_{n \geq 1} \|A_n(\gamma)\|_{\mu_1(\gamma)}^2 < +\infty,$$

y por lo tanto $\alpha = \mu_1(i)$ es un valor propio medible y continuo de X_γ por las condiciones necesarias y suficientes dadas en [BDM05].

3. Del primer ítem de la Proposición 4.4 se tiene $\theta_1^\nu > 0$ y como $\theta_1^\nu + \theta_2^\nu = 0$ entonces $\theta_2^\nu < 0$.

□

Ahora mostramos que los resultados dados por el Teorema 3.23 y la Proposición 4.4 son consistentes. La siguiente proposición, conocida en la literatura, muestra la simetría del espectro de Lyapunov para cociclos lineales que preservan una 2-forma alternada, no degenerada en cada fibra. Luego, si $g = g(G) > 1$ en un grafo de renormalización (G, τ) que satisface las hipótesis del Teorema 3.23, no es posible tener simultáneamente la propiedad de Pisot:

Proposición 4.6 *Suponga que un grafo de renormalización (G, τ) satisface las condiciones de la Definición 3.19 y sea g su género. Podemos considerar la restricción del cociclo $A(\gamma)|_{H(s(\gamma_0))}$, con fibra $2g$ -dimensional $H(s(\gamma_0))$ en cada $\gamma \in E_G$. Notar que $A(\gamma)$ es un isomorfismo entre las fibras de γ y de $\sigma(\gamma)$. Denotaremos por $\theta^\nu(H)_1, \theta^\nu(H)_2, \dots, \theta^\nu(H)_{2g}$ a los exponentes de Lyapunov de este cociclo. Entonces*

$$\theta_i^\nu(H) = -\theta_{2g+1-i}^\nu(H), \quad \forall 1 \leq i \leq 2g.$$

En particular, si $g > 1$ entonces no es posible tener $\theta_1^\nu > 0 > \theta_2^\nu$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración es una aplicación del siguiente lema general sobre exponentes de Lyapunov que preservan una 2-forma alternada y no degenerada en cada fibra:

Lema 4.7 Sea $T : X \rightarrow X$ una transformación, no necesariamente invertible y sea μ una medida de probabilidad T -invariante. Suponga que existe una forma bilineal antisimétrica y no degenerada ω_x en cada $x \in X$ que es preservada por el cociclo lineal $A : X \rightarrow GL(d, \mathbb{R})$:

$$\omega_{Tx}(u \cdot A(x), v \cdot A(x)) = \omega_x(u, v), \quad \forall x \in X, u, v \in \mathbb{R}^d \text{ (o en la fibra de } x).$$

Asuma adicionalmente que la forma anterior es integrable, en el sentido que existe una función $x \mapsto c(x)$ que es μ -integrable y tal que

$$|\omega_x(u, v)| \leq \exp(c(x)) \|u\| \|v\|, \quad \forall x \in X, u, v \in \mathbb{R}^d \text{ (o en la fibra de } x).$$

Entonces el espectro de Lyapunov es simétrico: si θ es un exponente de Lyapunov en algún $x \in X$, entonces también lo es $-\theta$, con la misma multiplicidad.

Sea ahora (G, τ) un grafo de renormalización que satisface las condiciones de la Definición 3.19. Defina para cada $\gamma \in E_G$ y cada $\Omega(v)x, \Omega(v)y \in H(s(\gamma_0))$:

$$\omega_\gamma(x \cdot \Omega(s(\gamma_0)), y \cdot \Omega(s(\gamma_0))) = -\langle x, y \cdot \Omega(s(\gamma_0)) \rangle,$$

siendo $\langle \cdot \rangle$ el producto Euclideo en \mathbb{R}^d . Es sencillo ver que $\omega_\gamma : H(s(\gamma_0)) \times H(s(\gamma_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal, alternada y bien definida. En efecto, si $x \cdot \Omega(s(\gamma_0)) = x' \cdot \Omega(s(\gamma_0))$ para ciertos $x, x' \in \mathbb{R}^d$, entonces $x - x' \in \text{Ker } \Omega(s(\gamma_0)) = H(s(\gamma_0))^\perp$ y por lo tanto $\langle x, y \cdot \Omega(s(\gamma_0)) \rangle = \langle x', y \cdot \Omega(s(\gamma_0)) \rangle$ y ω_γ queda bien definida. La bilinealidad es clara y el hecho que es alternada es directo de la antisimetría de $\Omega(s(\gamma_0))$. Adicionalmente ω_γ es no degenerada: suponga que $\omega_\gamma(x \cdot \Omega(s(\gamma_0)), y \cdot \Omega(s(\gamma_0))) = 0$ para cada $y \in \mathbb{R}^d$, luego $x \cdot \Omega(s(\gamma_0)) = 0$. Por último, ω_γ es integrable y preserva el cociclo A : $|\omega_\gamma(x \cdot \Omega(s(\gamma_0)), y \cdot \Omega(s(\gamma_0)))| \leq \|x\| \|y \cdot \Omega(s(\gamma_0))\| \leq \exp(c) \|x \cdot \Omega(s(\gamma_0))\| \|y\|$ para cierto $c \in \mathbb{R}$. Si $M = A(\gamma)$, tenemos $M^\top \Omega(s(\gamma_0)) M = \Omega(s(\gamma_1))$ por (3.3). Luego

$$\begin{aligned} \omega_{\sigma(\gamma)}(x \cdot \Omega(s(\gamma_0))A(\gamma), y \cdot \Omega(s(\gamma_0))A(\gamma)) &= \omega_{\sigma(\gamma)}(x \cdot \Omega(s(\gamma_0))M, y \cdot \Omega(s(\gamma_0))M) \\ &= \omega_{\sigma(\gamma)}(x \cdot (M^\top)^{-1} \Omega(s(\gamma_1)), y \cdot (M^\top)^{-1} \Omega(s(\gamma_1))) \\ &= -\langle x \cdot (M^\top)^{-1}, y \cdot (M^\top)^{-1} \Omega(s(\gamma_1)) \rangle \\ &= -\langle x, y \cdot (M^\top)^{-1} \Omega(s(\gamma_1)) M^{-1} \rangle \\ &= -\langle x, y \cdot \Omega(s(\gamma_0)) \rangle \\ &= \omega_\gamma(x \cdot \Omega(s(\gamma_0)), y \cdot \Omega(s(\gamma_0))), \end{aligned}$$

así que por el Lema 4.7 tenemos que el espectro de Lyapunov tiene la forma

$$\theta_1^\nu(H) \geq \theta_2^\nu(H) \geq \dots \geq \theta_g^\nu(H) \geq 0 \geq -\theta_g^\nu(H) \geq \dots \geq -\theta_2^\nu(H) \geq -\theta_1^\nu(H),$$

concluyendo. □

4.3. Mezcla débil

En esta sección mejoramos el resultado obtenido del Teorema 3.23 para la mezcla débil, *i.e.*, la ausencia de valores propios medibles no nulos para ν_G -casi todo sistema X_γ . La única condición adicional es pedir que el segundo exponente de Lyapunov del cociclo (σ, A) en el grafo de renormalización parametrizador restringido a las fibras $\gamma \mapsto H(s(\gamma_0))$ sea positivo: $\theta_2^\nu(H) > 0$. Una herramienta clave para establecer este resultado es el Teorema 3.1. en [AF07]. Primero se darán las definiciones y resultados previos y luego se dará la demostración del teorema principal de esta sección.

Definición 4.8 *Sea (X, \mathcal{B}_X, μ) un espacio de probabilidad. Decimos que una transformación medible $T : X \rightarrow X$ que preserva μ es débilmente expansiva si existe una partición numerable de conjuntos medibles (modulo 0) $\{X^{(l)}, l \in \mathbb{Z}\}$ de X tales que para cada $l \in \mathbb{Z}$, $\mu(X^{(l)}) > 0$, T envía $X^{(l)}$ de manera sobreyectiva a X , $T^{(l)} = T|_{X^{(l)}}$ es invertible y la medida pushforward $T_*^{(l)}\mu$ es equivalente a μ . Sea Λ el conjunto de palabras finitas y no vacías sobre el alfabeto \mathbb{Z} . Si $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n) \in \Lambda$, escribimos $X^{\mathbf{l}} = X^{(l_1)} \cap T^{-1}(X^{(l_2)}) \cap \dots \cap T^{-(n-1)}X^{(l_n)}$ y $T^{\mathbf{l}} = T^n|_{X^{\mathbf{l}}}$, luego $\mu(X^{\mathbf{l}}) > 0$. Sea $\mathcal{M} = \{\mu^{\mathbf{l}}, \mathbf{l} \in \Lambda\}$, con*

$$\mu^{\mathbf{l}} = \frac{1}{\mu(X^{\mathbf{l}})} T_*^{\mathbf{l}}\mu.$$

Decimos que T es fuertemente expansiva si existe una constante $K > 0$ tal que

$$K^{-1} \leq \frac{d\nu}{d\mu} \leq K, \nu \in \mathcal{M}.$$

Sea (T, A) un cociclo (ver la Sección 4.1). Definimos para $x \in X$ los respectivos espacios estable y estable central, definidos respectivamente por

$$E^s(x) = \{v \in \mathbb{R}^d : \lim \|vA_n(x)\| = 0\}, \quad (4.11)$$

$$E^{cs}(x) = \{v \in \mathbb{R}^d : \limsup \|vA_n(x)\|^{1/n} \leq 1\}. \quad (4.12)$$

Tenemos que $E^s(x) \subseteq E^{cs}(x)$, $E^s(x) \cdot A(x) = E^s(T(x))$, $E^{cs}(x) \cdot A(x) = E^{cs}(T(x))$. Si $\log^+ \|A\|$ es integrable con respecto a μ , $\dim E^s(x)$ y $\dim E^{cs}(x)$ son constantes para μ -casi todo $x \in X$. Además $\dim E^{cs}(x) = \#\{1 \leq i \leq d : \theta_i^\mu \leq 0\}$, siendo $\theta_1^\mu, \theta_2^\mu, \dots, \theta_d^\mu$ los exponentes de Lyapunov del cociclo (T, A) . Si el cociclo (T, A) satisface

$$\int_X \log \|A(x)\|_0 d\mu(x) < +\infty,$$

con $\|B\|_0 = \max\{\|B\|, \|B^{-1}\|\}$ para $B \in \text{GL}(d, \mathbb{R})$, decimos que (T, A) es un *cociclo uniforme*. Decimos que un cociclo (T, A) es *localmente constante* si $T : X \rightarrow X$ es fuertemente expansiva con respecto a la partición (modulo 0) $\{X^{(l)}, l \in \mathbb{Z}\}$ y $A|_{X^{(l)}}$ es una constante $A^{(l)}$ para cada $l \in \mathbb{Z}$. Finalmente, decimos que un cociclo (T, A) es *entero* si $A(x) \in \text{GL}(d, \mathbb{Z})$, para μ -casi todo $x \in X$.

Definición 4.9 *Sea (T, A) un cociclo. Se define el espacio estable débil en $x \in X$ por*

$$W^s(x) = \{v \in \mathbb{R}^d : \lim \|v \cdot A_n(x)\| = 0\},$$

siendo $\|\cdot\|$ la distancia al vector entero más cercano en \mathbb{R}^d .

Sea $\Theta \subseteq \mathbb{P}^{d-1}$ un conjunto compacto. Decimos que Θ es *adaptado* al cociclo localmente constante (T, A) si $\Theta \cdot A^{(l)} \subseteq \Theta$ para cada $l \in \mathbb{Z}$ y para μ -casi todo $x \in X$ tenemos

$$\|v \cdot A(x)\| \geq \|v\|, \quad \|v \cdot A_n(x)\| \rightarrow \infty \text{ si } n \rightarrow \infty,$$

siempre que $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ se proyecta en \mathbb{P}^{d-1} a algún elemento de Θ . Defina $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\Theta)$ el conjunto de rectas en \mathbb{R}^d que son paralelas a algún elemento de Θ y que no pasan por el origen.

Teorema 4.10 (Teorema 3.1., [AF07]) *Sea (T, A) un cociclo entero, localmente constante y uniforme y sea Θ adaptado a (T, A) . Asuma que para toda recta $J \in \mathcal{J} = \mathcal{J}(\Theta)$ tenemos $J \cap E^{cs}(x) = \emptyset$, para μ -casi todo $x \in X$. Entonces tenemos que para cada recta L contenida en \mathbb{R}^d y paralela a algún elemento de Θ , $L \cap W^s(x) \subseteq \mathbb{Z}^d$, para μ -casi todo $x \in X$.*

Ahora enunciamos el resultado principal de esta sección:

Teorema 4.11 *Suponga que (G, τ) es un grafo de renormalización parametrizador que satisface (3.3) con $g(G) > 1$. Sean $\theta_1^\nu(H), \theta_2^\nu(H), \dots, \theta_{2g}^\nu(H)$ los $2g$ exponentes de Lyapunov del cociclo lineal medible $A : E_G \rightarrow GL(d, \mathbb{Z})$ dado por $\gamma \mapsto M_{\gamma_0}$ restringido a las fibras $\gamma \mapsto H(s(\gamma_0))$. Sea $v^* \in V$ y v_1, v_2, \dots, v_l vectores fila en \mathbb{Z}^d tales que*

$$H(v^*) = \langle v_1, v_2, \dots, v_l \rangle.$$

Suponga que $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_l$ son loops en v^ tales que las matrices $M_{\bar{\gamma}_k}$, $1 \leq k \leq l$, actúan en vectores fila de la forma*

$$zM_{\bar{\gamma}_k} = z + \beta_k \cdot z^\top v_k, \quad \forall z \in \mathbb{R}^d, \quad 1 \leq k \leq l, \quad (4.13)$$

con $\beta_k \in \mathbb{Q}^d$, $\sum_{i=1}^d \beta_k(i) \neq 0$, $\forall 1 \leq k \leq l$. Suponga que $\theta^\nu(H)_2 > 0$ y sea $v \in V$. Asuma que $(1, \dots, 1) \in H(v)$. Entonces $\nu_{G,v}$ -casi todo $\gamma \in E_G(v)$ el sistema X_γ es débilmente mezclador, para la única medida invariante definida por el vector de probabilidad $\mu_1(\gamma)$.

Antes de demostrar el Teorema 4.11, necesitamos unos resultados previos. Sea $A|_H$ el cociclo medible que envía $\gamma \in E_G$ en M_{γ_0} , con fibras $\gamma \mapsto H(s(\gamma_0))$. Luego $A|_H$ es un cociclo entero, uniforme y posee $2g$ exponentes de Lyapunov $\theta_i^\nu(H)$, $1 \leq i \leq 2g$. Es sencillo ver que $\theta_1^\nu(H) > 0$, como en la Proposición 4.4. Asumiendo $\theta_2^\nu(H) > 0$, tenemos $\dim E^{cs} = \#\{1 \leq i \leq 2g : \theta_i^\nu(H) \leq 0\} < 2g - 1$, siendo E^{cs} el espacio estable central del cociclo $(\sigma, A|_H)$. En adelante, seguiremos denotando por A al cociclo $A|_H$.

Lema 4.12 *Suponga que (G, τ) es un grafo de renormalización parametrizador que satisface (3.3) con $g(G) > 1$. Sea $v^* \in V$ y v_1, v_2, \dots, v_l vectores fila en \mathbb{Z}^d tales que*

$$H(v^*) = \langle v_1, v_2, \dots, v_l \rangle.$$

Suponga que $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_l$ son loops en v^ tales que las matrices $M_{\bar{\gamma}_k}$, $1 \leq k \leq l$, actúan en vectores fila de la forma*

$$zM_{\bar{\gamma}_k} = z + \beta_k \cdot z^\top v_k, \quad \forall z \in \mathbb{R}^d, \quad 1 \leq k \leq l, \quad (4.14)$$

con $\beta_k \in \mathbb{Q}^d$, $\sum_{i=1}^d \beta_k(i) \neq 0$, $\forall 1 \leq k \leq l$. Sea $v \in V$ cualquiera y sea $L \subseteq H(v)$ una recta que no pasa por el origen. Sea E^{cs} el espacio central estable del cociclo $(\sigma, A|_H)$. Si $\dim E^{cs} < 2g - 1$, entonces para $\nu_{G,v}$ -casi todo $\gamma \in E_G(v)$, $L \cap E^{cs}(\gamma) = \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN. Podemos asumir que $v = v^*$. Tenemos que $E^{cs}(\gamma) \subseteq \mu_1(\gamma)^\perp$ para ν -casi todo $\gamma \in E_G$. En efecto, para ν_G -casi todo $\gamma \in E_G$, sea $v \in E^{cs}(\gamma)$ y $\varepsilon > 0$. Existe una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k \geq 1}$ con $n_k \rightarrow \infty$ si $k \rightarrow \infty$ tal que $|\|vA_{n_k}(\gamma)\| - \exp(\ln n_k)| \rightarrow 0$ si $k \rightarrow \infty$, con $l \leq 0$. Tenemos $\mu_{n_k} \rightarrow 0$ si $k \rightarrow \infty$, y por lo tanto para k suficientemente grande

$$\begin{aligned} |v \cdot \mu_1(\gamma)| &= |v \cdot A_{n_k}(\gamma) \cdot \mu_{n_k}| \\ &\leq \|vA_{n_k}(\gamma)\| \cdot \|\mu_{n_k}\| \\ &\leq (|\|vA_{n_k}(\gamma)\| - \exp(\ln n_k)| + \exp(\ln n_k)) \cdot \|\mu_{n_k}\| \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

probando lo afirmado considerando ε arbitrariamente pequeño. Ahora, si la conclusión del lema no se satisface, un argumento sencillo de puntos de densidad para la medida $\nu_{G,v}$ nos dice que debe existir un conjunto de medida positiva de $\gamma \in E_G(v)$ y una recta $L \subseteq H(v)$ con dirección en \mathbb{R}_+^d tal que

$$L \cap E^{cs}(\gamma) \neq \emptyset, \quad (4.15)$$

$$(L \cdot M_{\bar{\gamma}_k}) \cap E^{cs}(\gamma) \neq \emptyset, \quad \forall 1 \leq k \leq l. \quad (4.16)$$

Escribamos $L = \{h_1 + th_2, t \in \mathbb{R}\}$ con h_1, h_2 vectores filas en $H(v)$, linealmente independientes. De (4.15) y como $E^{cs}(\gamma)$ es ortogonal a $\mu_1(\gamma)$ obtenemos

$$h_1 - \frac{h_1 \cdot \mu_1(\gamma)}{h_2 \cdot \mu_1(\gamma)} h_2 \in E^{cs}(\gamma), \quad (4.17)$$

y de manera similar por (4.16) tenemos

$$(h_1 + \beta_k \cdot h_1^\top v_k) - \frac{(h_1 + \beta_k h_1^\top v_k) \cdot \mu_1(\gamma)}{(h_2 + \beta_k h_2^\top v_k) \cdot \mu_1(\gamma)} (h_2 + \beta_k h_2^\top v_k) \in E^{cs}(\gamma), \quad \forall 1 \leq k \leq l. \quad (4.18)$$

De (4.17) obtenemos $h_1 = p + th_2$ para algún $p \in E^{cs}(\gamma)$ y $t \in \mathbb{R}$. Reemplazando esto último y usando (4.18) para cada $1 \leq k \leq l$ y el hecho que $\beta_k \in \mathbb{Q}^d$, $\sum_{i=1}^d \beta_k(i) \neq 0$, $\forall 1 \leq k \leq l$ obtenemos $v_k \in E^{cs}(\gamma) + \{th_2, t \in \mathbb{R}\}$ para cada $1 \leq k \leq l$. Luego $E^{cs}(\gamma)$ tiene codimensión a lo más 1 en $H(v)$, lo que contradice $\dim E^{cs} < 2g - 1 = \dim H(v) - 1$. \square

Combinando la Proposición 3.7 con el Teorema 1.40, obtenemos:

Teorema 4.13 *Sea (G, τ) es un grafo de renormalización parametrizador. Sea γ_+ un paseo finito en G tal que $M_{\gamma_+} > 0$. Asuma que la órbita de $\gamma \in E_G$ bajo σ visita infinitas veces el cilindro ${}_0[\gamma_+]$ y sea X_γ el sistema de Bratteli-Vershik asociado a γ . Si $\alpha \in [0, 1)$ es un valor propio medible de X_γ , entonces*

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \sigma^n(\gamma) \in {}_0[\gamma_+]}} \|\alpha e A_n(\gamma)\| = 0, \quad (4.19)$$

con $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d$.

El Teorema 4.11 es una consecuencia del siguiente teorema:

Teorema 4.14 *Suponga que (G, τ) es un grafo de renormalización parametrizador que satisface (3.3) con $g(G) > 1$. Sean $\theta_1^\nu(H), \theta_2^\nu(H), \dots, \theta_{2g}^\nu(H)$ los $2g$ exponentes de Lyapunov del cociclo lineal medible $A : E_G \rightarrow GL(d, \mathbb{Z})$ dado por $\gamma \mapsto M_{\gamma_0}$ restringido a las fibras $\gamma \mapsto H(s(\gamma_0))$. Sea $v^* \in V$ y v_1, v_2, \dots, v_l vectores fila en \mathbb{Z}^d tales que*

$$H(v^*) = \langle v_1, v_2, \dots, v_l \rangle.$$

Suponga que $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_l$ son loops en v^ tales que las matrices $M_{\bar{\gamma}_k}$, $1 \leq k \leq l$, actúan en vectores fila de la forma*

$$zM_{\bar{\gamma}_k} = z + \beta_k \cdot z^\top v_k, \quad \forall z \in \mathbb{R}^d, \quad 1 \leq k \leq l, \quad (4.20)$$

con $\beta_k \in \mathbb{Q}^d$, $\sum_{i=1}^d \beta_k(i) \neq 0$, $\forall 1 \leq k \leq l$. Suponga que $\theta^\nu(H)_2 > 0$, $v \in V$, $h \in H(v) \setminus \{0\}$ y sea γ_+ un paseo finito en E_G cualquiera. Para $\nu_{G,v}$ -casi todo $\gamma \in E_G(v)$ se tiene: o bien $\alpha h \in \mathbb{Z}^d$ o bien

$$\limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \sigma^n(\gamma) \in \gamma_+}} \|\alpha h A_n(\gamma)\| > 0. \quad (4.21)$$

DEMOSTRACIÓN. Podemos asumir que γ_+ parte en v . Sea Γ_+ un loop en v que parte con γ_+ . Si el resultado no se satisface, un argumento de puntos de densidad nos dice que debe existir $h \in H(v) \setminus \{0\}$ y un conjunto de medida positiva para $\nu_{G,v}$ de $\gamma \in \gamma_+$ tales que

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \sigma^n(\gamma) \in \gamma_+}} \|\alpha h A_n(\gamma)\| = 0, \quad (4.22)$$

para algún $\alpha \in [0, 1)$ tal que $\alpha h \notin \mathbb{Z}$. Sea $X = \gamma_+ \subseteq E_G$ y $\nu(\cdot) = \nu_G(\cdot|X)$ la medida de probabilidad ν_G inducida en X . Sea $T : X \rightarrow X$ el mapeo inducido de σ en X , definido en un conjunto de ν -medida total en X y ergódico para ν . Para casi todo $\gamma \in X$ sea $B(\gamma) = A(\gamma) \cdot \dots \cdot A(\sigma^{\rho_X(\gamma)-1}(\gamma))$, donde $\rho_X(\gamma)$ es el tiempo de primer retorno a X . Entonces el cociclo (T, B) es entero, uniforme (ver el último ítem de la Observación 11) y localmente constante. En efecto, sea L_v el conjunto numerable de loops en el vértice v . Sea $X^{(l)} = X \cap_0 [\Gamma_+ l \Gamma_+]$ para cada $l \in L_v$. Es claro que $T|_{X^{(l)}} : X^{(l)} \rightarrow X$ es invertible y ν es equivalente a $T_*^{(l)} \nu$. Sea $\mathbf{l} = l_1 l_2 \dots l_k$ para $l_i \in L_v$, $1 \leq i \leq k$. Entonces $\nu(X^{\mathbf{l}}) = \nu_G(\gamma_+ l_1 \Gamma_+ l_2 \dots \Gamma_+ l_k \Gamma_+)$ y si $A \subseteq X^{\mathbf{l}}$ entonces $T_*^{\mathbf{l}} \nu(A) = \nu_G(\gamma_+ l_1 \Gamma_+ l_2 \dots \Gamma_+ l_k \Gamma_+) \nu(A)$, de donde T es fuertemente expansiva y (T, B) es localmente constante, siendo B constante igual a $M_{\Gamma_+} M_l$ en cada $X^{(l)}$. Además, $\Theta = \overline{\mathbb{P}_+^{d-1}}$ es adaptado a (T, B) , pues los coeficientes de $A_n(\gamma)$ tienden a ∞ si $n \rightarrow \infty$, para ν_G -casi todo γ . El espacio estable central de (T, B) coincide en casi todo punto con el espacio estable central de (σ, A) con restricción de fibras $\gamma \mapsto H(s(\gamma_0))$. Usando el Lema 4.12, tenemos que todas las hipótesis del Teorema 4.10 se satisfacen. Luego, para ν -casi todo $\gamma \in \gamma_+$ la recta $L = \{th, t \in \mathbb{R}\}$ interseca al espacio estable débil del cociclo (T, B) en un subconjunto de $H(v) \cap \mathbb{Z}^d$. Esto implica directamente que (4.22) falla para $\nu_{G,v}$ -casi todo γ , concluyendo. \square

Capítulo 5

Mezcla débil en involuciones lineales

En este capítulo presentamos ejemplos donde se satisfacen las hipótesis de los Teoremas 3.23 y 4.11. Estos sistemas provienen de codificaciones de trayectorias de involuciones lineales, las cuales constituyen, junto a sus suspensiones geométricas, a generalizaciones de transformaciones de intercambios de intervalos y flujos de traslación.

5.1. Involuciones lineales, flujos de semi-traslación y clases de Rauzy

En esta sección se estudiarán ciertas dinámicas que generalizan las transformaciones de intercambios de intervalos introducidas originalmente por C. Danthony y A. Nogueira [DN88], [DN90], llamadas involuciones lineales. Estas transformaciones están relacionadas en general a flujos en superficies de semi-traslación, generalizando los flujos en superficies de traslación. A través de permutaciones generalizadas, podemos extender el algoritmo de inducción de Rauzy-Veech como herramienta de renormalización y así estudiar la dinámica y geometría de estos sistemas. Para más referencias, ver [DN88] y [DN90].

5.1.1. Permutaciones generalizadas

En esta sección definiremos el algoritmo de inducción de Rauzy-Veech en permutaciones generalizadas. Nos referimos a [DN90] y a [AR12] para más detalles del algoritmo. Sea \mathcal{A} un alfabeto finito con $d \geq 2$ símbolos y sean l, m enteros positivos que satisfacen $l + m = 2d$. Una *permutación generalizada* de tipo (l, m) es un mapeo dos a uno $\pi : \{1, 2, \dots, 2d\} \rightarrow \mathcal{A}$. Usualmente escribimos este mapeo mediante una tabla con dos filas

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(l) \\ \pi(l+1) & \pi(l+2) & \dots & \pi(l+m) \end{pmatrix}.$$

Nos referiremos a la fila que contiene $(\pi(1) \ \pi(2) \ \dots \ \pi(l))$ como fila *top* y la fila que contiene $(\pi(l+1) \ \pi(l+2) \ \dots \ \pi(l+m))$ como fila *bottom*. Por simplicidad, supondremos

de ahora en adelante que $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, d\}$. Una involución $\iota : \{1, 2, \dots, 2d\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 2d\}$ se define naturalmente mediante $\iota(i) \neq i$ y $\pi(\iota(i)) = \pi(i)$, para cada $1 \leq i \leq 2d$, *i.e.*, $\{i, \iota(i)\}$ son las posiciones del símbolo $\pi(i) = \pi(\iota(i))$. Decimos que un símbolo es *duplicado* si aparece dos veces en una misma fila. Notar que el caso de *verdaderas* permutaciones que surgen combinatorialmente a partir de una t.i.i. corresponden a un caso particular de permutaciones generalizadas tales que $l = m$ y $\iota(i) > l$ para cada $1 \leq i \leq l$, *i.e.*, donde no hay símbolos duplicados. Decimos que una permutación generalizada es una permutación generalizada estricta si no es una verdadera permutación. Además, asumiremos que toda permutación generalizada estricta contiene símbolos duplicados en cada fila. La importancia de esta convención radica en que es necesaria para la existencia de una suspensión de una permutación generalizada estricta.

Una *descomposición* de una permutación generalizada π es una forma de escribirla como

$$\pi = \left(\begin{array}{c|c|c} F_{tl} & *** & F_{tr} \\ \hline F_{bl} & *** & F_{br} \end{array} \right)$$

en donde $F_{tl}, F_{tr}, F_{bl}, F_{br}$ son subconjuntos, posiblemente vacíos de \mathcal{A} . Esta notación significa que existen $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq l < i_3 \leq i_4 \leq l + m$ tales que

- $F_{tl} = \{\pi(1), \dots, \pi(i_1)\}$ y $F_{tr} = \{\pi(i_2), \dots, \pi(l)\}$;
- $F_{bl} = \{\pi(l+1), \dots, \pi(i_3)\}$ y $F_{br} = \{\pi(i_4), \dots, \pi(l+m)\}$.

Una vez que una descomposición es clara del contexto, nos referiremos a $F_{tl}, F_{tr}, F_{bl}, F_{br}$ como las esquinas *top-left*, *top-right*, *bottom-left* y *bottom-right* de π . Sea π una permutación generalizada estricta. Decimos que π es *reducible* si existe una descomposición

$$\pi = \left(\begin{array}{c|c|c} A \cup B & *** & D \cup B \\ \hline A \cup C & *** & D \cup C \end{array} \right)$$

en donde A, B, C, D son subconjuntos disjuntos, posiblemente vacíos de \mathcal{A} , satisfaciendo una de las condiciones siguientes:

- no hay una esquina vacía;
- hay exactamente una esquina vacía y está a la izquierda;
- existen exactamente dos esquinas no vacías y están a un mismo lado.

De lo contrario, diremos que π es *irreducible*. Se tiene que las permutaciones generalizadas aparecen del flujo direccional de un diferencial cuadrático en una superficie de Riemann, o equivalentemente, admite un dato de suspensión si y sólo si es irreducible y satisface la convención mencionada previamente. A partir de ahora, asumiremos que una permutación generalizada satisface esas propiedades.

Usaremos también libremente la notación y resultados de Avila y Resende [AR12], que usa un formalismo distinto para describir permutaciones generalizadas. De hecho, sea \mathcal{A} un alfabeto con $2d$ símbolos y sea $\bar{\iota} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ una involución sin puntos fijos. Sea $*$ un símbolo que no aparece en \mathcal{A} . Decimos entonces que una biyección $\tau : \mathcal{A} \cup \{*\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 2d+1\}$ es una *permutación con involución* si $\bar{\iota}(\mathcal{A}_l) \not\subseteq \mathcal{A}_r$ y $\bar{\iota}(\mathcal{A}_r) \not\subseteq \mathcal{A}_l$, en donde $\mathcal{A}_l = \{\alpha \in \mathcal{A} : \tau(\alpha) < \tau(*)\}$ y $\mathcal{A}_r = \{\alpha \in \mathcal{A} : \tau(\alpha) > \tau(*)\}$. Escribimos esta biyección en una fila

$$\tau = (\tau^{-1}(1) \ \tau^{-1}(2) \ \dots \ \tau^{-1}(*) \ \dots \ \tau^{-1}(2d+1)).$$

Dada una permutación generalizada π en un alfabeto \mathcal{A} , podemos definir una permutación con involución τ en el alfabeto $\mathcal{A} \times \{0, 1\}$ de la siguiente manera: considere la involución $\bar{\tau} : \mathcal{A} \times \{0, 1\} \rightarrow \mathcal{A} \times \{0, 1\}$ definida como $\bar{\tau}(\alpha, \varepsilon) = (\alpha, 1 - \varepsilon)$ para cada $\alpha \in \mathcal{A}, \varepsilon \in \{0, 1\}$ y sea

$$\tau = ((\pi(l+m), \varepsilon_{l+m}) \dots (\pi(l+1), \varepsilon_{l+1}) * (\pi(1), \varepsilon_1) \dots (\pi(l), \varepsilon_l)),$$

en donde $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$ es elegido de forma que $\varepsilon_j + \varepsilon_{\iota(j)} = 1$ para cada $1 \leq j \leq 2d$. Luego la convención previa sobre permutaciones generalizadas es equivalente a $\bar{\tau}(\mathcal{A}_l) \not\subseteq \mathcal{A}_r$ y $\bar{\tau}(\mathcal{A}_r) \not\subseteq \mathcal{A}_l$, así que obtenemos una biyección entre permutaciones generalizadas que satisfacen la convención y permutaciones con involución.

5.1.2. Involuciones lineales

Sea $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, d\}$ el alfabeto en $d \geq 2$ símbolos. Considere dos copias $I \times \{0\}$ y $I \times \{1\}$ del intervalo $I = [0, 1)$ y defina $\hat{I} = I \times \{0, 1\}$. Sea π una permutación generalizada irreducible de tipo (l, m) con $l + m = 2d$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}_+^d$ un vector positivo de largos que satisface

$$\lambda_{\pi(1)} + \dots + \lambda_{\pi(l)} = \lambda_{\pi(l+1)} + \dots + \lambda_{\pi(l+m)}.$$

Consideramos una partición de $I \times \{0\}$ en l intervalos cerrados por la izquierda y abiertos por la derecha $I_{\pi(1)}^{\varepsilon_1}, I_{\pi(2)}^{\varepsilon_2}, \dots, I_{\pi(l)}^{\varepsilon_l}$ de largos respectivos $\lambda_{\pi(1)}, \dots, \lambda_{\pi(l)}$ y una partición de $I \times \{1\}$ en m intervalos cerrados por la izquierda y abiertos por la derecha $I_{\pi(l+1)}^{\varepsilon_{l+1}}, I_{\pi(l+2)}^{\varepsilon_{l+2}}, \dots, I_{\pi(l+m)}^{\varepsilon_{l+m}}$ de largos respectivos $\lambda_{\pi(l+1)}, \dots, \lambda_{\pi(l+m)}$, en donde $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, $\varepsilon_i + \varepsilon_{\iota(i)} = 1, \forall 1 \leq i \leq 2d$.

Definición 5.1 Una involución lineal en I relativa al par (π, λ) es una transformación $T : \hat{I} \rightarrow \hat{I}$ dada por $T = \sigma_2 \circ \sigma_1$, siendo σ_1, σ_2 involuciones en \hat{I} definidas como sigue:

1. La involución σ_1 en \hat{I} es tal que si $1 \leq i \leq 2d$, la restricción de σ_1 a $I_{\pi(i)}^{\varepsilon_i}$ es o bien una traslación y/o una simetría de $I_{\pi(i)}^{\varepsilon_i}$ en $I_{\pi(\iota(i))}^{\varepsilon_{\iota(i)}}$ si $\pi(i)$ es un símbolo duplicado, o bien una traslación entre $I_{\pi(i)}^{\varepsilon_i}$ y $I_{\pi(\iota(i))}^{\varepsilon_{\iota(i)}}$ si $\pi(i)$ no es un símbolo duplicado.
2. La involución σ_2 en \hat{I} intercambia las componentes de \hat{I} , i.e., envía $(x, \varepsilon) \in \hat{I}$ en $(x, 1 - \varepsilon)$, para cada $x \in I, \varepsilon \in \{0, 1\}$.

Decimos que T es una involución lineal en I relativa al alfabeto A , o que es involución lineal en d símbolos.

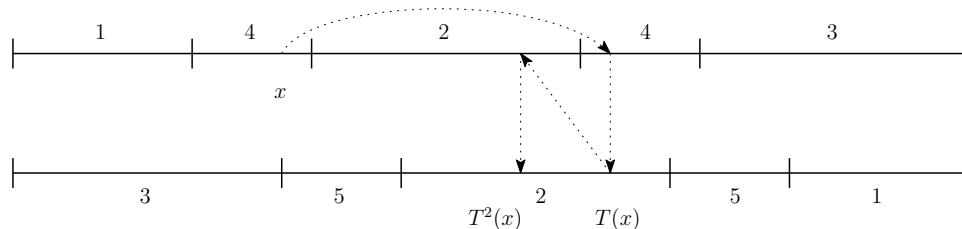


Figura 5.1

Ejemplo. 6 En la Figura 5.1, la permutación que define la involución lineal es $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

De manera análoga a la construcción de una suspensión sobre una t.i.i., podemos construir una suspensión sobre una involución lineal T que puede identificarse con una superficie de semi-traslación y donde T corresponde a la transformación de primer retorno del flujo vertical en un segmento bien escogido. De esta manera, las permutaciones generalizadas irreducibles surgen naturalmente del flujo vertical en superficies de semi-traslación (o diferencial cuadrático en una superficie de Riemann).

Similar al estudio sobre mezcla débil en superficies de translación en la Sección 7. de [AF07], es posible obtener condiciones necesarias para que exista un valor propio medible asociado a la dinámica del flujo vertical en una superficie de semi-traslación, descomponiendo la superficie vista como *zippered rectangles* mediante el algoritmo de Rauzy-Veech para permutaciones generalizadas.

5.1.3. Algoritmo de inducción de Rauzy-Veech

Similar al caso de t.i.i. discutido en el Capítulo 1, el algoritmo de inducción de Rauzy-Veech para permutaciones generalizadas, definido por C. Danthony y A. Nogueira ([DN90], Sección 1.2), consiste en a lo más dos operaciones R_t y R_b en π , que llamaremos operaciones *top* y *bottom*, definidas a continuación.

Definición 5.2 Si $\iota(l) > l$, entonces R_t es la permutación generalizada de tipo (l, m) definida como:

$$R_t(\pi)(i) = \begin{cases} \pi(i) & \text{si } i \leq \iota(l), \\ \pi(l+m) & \text{si } i = \iota(l) + 1, \\ \pi(i-1) & \text{en otro caso;} \end{cases}$$

si $\iota(l) < l$ y existe un símbolo duplicado en la fila *bottom* de π que no es el último símbolo, entonces R_t es la permutación generalizada de tipo $(l+1, m-1)$ definida como:

$$R_t(\pi)(i) = \begin{cases} \pi(i) & \text{si } i < \iota(l), \\ \pi(l+m) & \text{si } i = \iota(l), \\ \pi(i-1) & \text{en otro caso;} \end{cases}$$

y en cualquier otro caso, R_t no está definida. Cuando una operación *top* está bien definida, decimos que $\pi(l)$ es *winner* y que $\pi(l+m)$ es *loser* de la operación.

Similarmente, si $\iota(l+m) < l$, entonces R_b es la permutación generalizada de tipo (l, m) definida como:

$$R_b(\pi)(i) = \begin{cases} \pi(l) & \text{si } i \leq \iota(l+m) + 1, \\ \pi(i-1) & \text{si } \iota(l+m) + 1 < i \leq l, \\ \pi(i) & \text{en otro caso;} \end{cases}$$

si $\iota(l+m) > l$ y existe un símbolo duplicado en la fila *top* de π que no es el último símbolo,

entonces R_b es la permutación generalizada de tipo $(l-1, m+1)$ definida como:

$$R_b(\pi)(i) = \begin{cases} \pi(i+1) & \text{si } l \leq i < \iota(l+m) + 1, \\ \pi(l) & \text{si } i = \iota(l+m) - 1, \\ \pi(i) & \text{en otro caso;} \end{cases}$$

y en cualquier otro caso, R_b no está definida. Cuando una operación bottom está bien definida, decimos que $\pi(l+m)$ es winner y que $\pi(l)$ es loser de la operación.

Considere el grafo dirigido cuyos vértices son las permutaciones generalizadas irreducibles tales que $\pi \rightarrow \pi'$ es una arista dirigida si $R_t(\pi) = \pi'$ o bien $R_b(\pi) = \pi'$. Las componentes conexas (equivalentemente, fuertemente conexas) de este grafo son llamadas clases de Rauzy. A la clase de Rauzy que contiene a una permutación generalizada irreducible π la denotaremos $\mathcal{R}(\pi)$. Etiquetamos una arista $\pi \rightarrow \pi'$ con una tupla (ε, w, l) en donde $\varepsilon \in \{t, b\}$ es el tipo de la inducción y $w, l \in \mathcal{A}$ son los símbolos *winner* y *loser* de la inducción, respectivamente. Nos referiremos a esta asignación de etiquetas en las aristas como etiquetas de tipos, *winners* y *losers*, respectivamente. Diremos que un paseo dirigido finito $\gamma = \pi_0 \rightarrow \pi_1 \rightarrow \dots \rightarrow \pi_k$ es un *loop* si empieza y termina con una misma permutación. Diremos que un loop es *elemental* si todas sus aristas tienen el mismo tipo.

La interpretación dinámica del algoritmo de inducción de Rauzy-Veech sobre permutaciones generalizadas viene dada por la siguiente proposición:

Proposición 5.3 *Suponga que una involución lineal $T : \hat{I} \rightarrow \hat{I}$ en $\hat{I} = [0, 1) \times \{0, 1\}$ está definida por una par (π, λ) con π irreducible de tipo (l, m) y es tal que $\lambda_{\pi(l)} \neq \lambda_{\pi(l+m)}$.*

1. *Suponga que $\lambda_{\pi(l)} > \lambda_{\pi(l+m)}$ y sea $\hat{I}' = [0, 1 - \lambda_{\pi(l+m)}) \times \{0, 1\}$. Entonces la aplicación de primer retorno $T' : \hat{I}' \rightarrow \hat{I}'$ de T a \hat{I}' es una involución lineal definida con permutación $R_t(\pi)$ y de vector de largos λ' con $\lambda'_i = \lambda_i$ si $i \neq \pi(l)$ y $\lambda'_{\pi(l)} = \lambda_{\pi(l)} - \lambda_{\pi(l+m)}$.*
2. *Suponga que $\lambda_{\pi(l)} < \lambda_{\pi(l+m)}$ y sea $\hat{I}' = [0, 1 - \lambda_{\pi(l)}) \times \{0, 1\}$. Entonces la aplicación de primer retorno $T' : \hat{I}' \rightarrow \hat{I}'$ de T a \hat{I}' es una involución lineal definida con permutación $R_b(\pi)$ y de vector de largos λ' con $\lambda'_i = \lambda_i$ si $i \neq \pi(l+m)$ y $\lambda'_{\pi(l+m)} = \lambda_{\pi(l+m)} - \lambda_{\pi(l)}$.*

Al igual que en el caso de permutaciones, para una arista $\gamma = \pi \rightarrow \pi'$ que une permutaciones generalizadas irreducibles π, π' en una clase de Rauzy \mathcal{R} con alfabeto \mathcal{A} , con $|\mathcal{A}| = d$, escribimos $B_\gamma = \text{Id} + E_{\alpha_w, \alpha_l} \in \text{SL}(\mathbb{Z}^d)$, siendo α_w, α_l los respectivos *winner* y *loser* de la inducción. Para un paseo $\gamma = \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{n-1}$ en \mathcal{R} que une π con $\pi^{(n)}$, escribimos $B_\gamma = B_{\gamma_0} B_{\gamma_1} \dots B_{\gamma_{n-1}}$ para la n -ésima matriz de inducción. Un paseo finito γ en \mathcal{R} se dice completo si cada símbolo del alfabeto \mathcal{A} es el *winner* de al menos una arista de γ . Un paseo finito se dice k -completo si es la concatenación de k paseos completos.

Lema 5.4 ([AR12], Lema 3.4.) *Si γ es k -completo con $k \geq 2d - 3$, entonces $B_\gamma > 0$.*

Definición 5.5 *Dada una permutación π irreducible, sea τ su versión escrita como permutación con involución. Para un símbolo $i \in \mathcal{A}$ y $\varepsilon \in \{0, 1\}$, definimos $M_\tau(i) = \max\{\tau(i, \varepsilon), \tau(\iota(i, \varepsilon))\}$ y $m_\tau(i) = \min\{\tau(i, \varepsilon), \tau(\iota(i, \varepsilon))\}$ (ambas cantidades no dependen de la elección de ε). Defina*

la matriz entera antisimétrica $\Omega(\pi)$ de $|A| \times |\mathcal{A}|$ mediante:

$$\Omega(\pi)_{i,j} = \begin{cases} +2 & \text{si } M_\tau(i) < m_\tau(j), \\ -2 & \text{si } M_\tau(j) < m_\tau(i), \\ +1 & \text{si } m_\tau(i) < m_\tau(j) < M_\tau(i) < M_\tau(j), \\ -1 & \text{si } m_\tau(j) < m_\tau(i) < M_\tau(j) < M_\tau(i), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La existencia de esta matriz permite obtener relaciones análogas a (1.21) y (1.22) en el contexto de t.i.i.

Lema 5.6 *Sea $\gamma = \pi \rightarrow \pi'$ una arista en una clase de Rauzy con permutaciones irreducibles generalizadas \mathcal{R} . Entonces*

$$B_\gamma^\top \Omega(\pi) B_\gamma = \Omega(\pi'). \quad (5.1)$$

En particular, si γ es un loop en una permutación π entonces

$$B_\gamma^\top \Omega(\pi) B_\gamma = \Omega(\pi). \quad (5.2)$$

DEMOSTRACIÓN. Haremos el caso en que γ es una arista de tipo *top*, el caso en que sea de tipo *bottom* es completamente análogo. Sean $\Omega = \Omega(\pi), \Omega' = \Omega(\pi')$ y $w, l \in \mathcal{A}$ con $B_\gamma = \text{Id} + E_{w,1}$. De la antisimetría de Ω , la relación (5.1) equivale a

$$\Omega_{i,j} + M_{i,j} - M_{j,i} = \Omega'_{i,j}, \quad \forall i, j \in \mathcal{A}, \quad (5.3)$$

en donde M es una matriz que en la fila l contiene la fila w de Ω . Notar que, de la antisimetría de Ω, Ω' , la relación previa es invariante bajo $(i, j) \mapsto (j, i)$. Sean $i, j \in \mathcal{A}$ arbitrarios. Si $i = j$ la relación (5.3) se satisface automáticamente. Supongamos que w no es un símbolo doble en la fila *top* de π , entonces la operación *top* corresponde a

$$\pi = \begin{pmatrix} A & & w \\ B & w & C & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{t} \begin{pmatrix} A & & w \\ B & w & 1 & C \end{pmatrix} = \pi',$$

para ciertas palabras A, B, C . Las permutaciones con involución correspondientes son, olvidando los identificadores ε :

$$\tau = (1 \ C \ w \ B \ A \ w), \quad \tau' = (C \ 1 \ w \ B \ A \ w).$$

- Si $\{i, j\} \cap \{w, l\} = \emptyset$, la relación (5.3) se satisface automáticamente, pues $\Omega_{i,j} = \Omega'_{i,j}$ e i, j son distintos a l .
- Si $(i, j) = (w, l)$, entonces independiente si l aparece en A, B o C tenemos $\Omega_{i,j} = \Omega'_{i,j} \in \{-2, -1\}$ y $M_{w,1} = M_{1,w} = 0$, luego la relación (5.3) se satisface.
- Si $(i, j) = (w, *)$ con $* \in \mathcal{A} \setminus \{w, l\}$, entonces $M_{i,j} = M_{j,i} = 0$ pues i, j son distintos a l y es claro que $\Omega_{i,j} = \Omega'_{i,j}$, luego la relación (5.3) se satisface.
- Si $(i, j) = (l, *)$ con $* \in \mathcal{A} \setminus \{w, l\}$, entonces $M_{i,j} = \Omega_{w,*}$ y $M_{j,i} = 0$.

- Si l aparece en C y $*$ en BA , entonces dependiendo de la posición del símbolo duplicado de $*$ tenemos tres posibilidades:

$$\begin{aligned}(\Omega_{l,*}, \Omega_{w,*}, \Omega'_{l,*}) &= (1, -1, 0), \\(\Omega_{l,*}, \Omega_{w,*}, \Omega'_{l,*}) &= (2, -1, 1), \\(\Omega_{l,*}, \Omega_{w,*}, \Omega'_{l,*}) &= (2, 0, 2).\end{aligned}$$

En cualquier caso la relación (5.3) se satisface.

- Si l aparece en BA y $*$ en C , entonces dependiendo de la posición del símbolo duplicado de $*$ tenemos tres posibilidades:

$$\begin{aligned}(\Omega_{l,*}, \Omega_{w,*}, \Omega'_{l,*}) &= (0, -1, -1), \\(\Omega_{l,*}, \Omega_{w,*}, \Omega'_{l,*}) &= (1, -1, 0), \\(\Omega_{l,*}, \Omega_{w,*}, \Omega'_{l,*}) &= (0, -2, -2).\end{aligned}$$

En cualquier caso la relación (5.3) se satisface.

- Si l y $*$ aparecen en BA , entonces dependiendo de la posición del símbolo duplicado de $*$ tenemos cinco posibilidades:

$$\begin{aligned}(\Omega_{l,*}, \Omega_{w,*}, \Omega'_{l,*}) &= (1, -1, 0), \\(\Omega_{l,*}, \Omega_{w,*}, \Omega'_{l,*}) &= (1, 0, 1), \\(\Omega_{l,*}, \Omega_{w,*}, \Omega'_{l,*}) &= (0, -1, -1), \\(\Omega_{l,*}, \Omega_{w,*}, \Omega'_{l,*}) &= (0, 0, 0), \\(\Omega_{l,*}, \Omega_{w,*}, \Omega'_{l,*}) &= (2, 0, 2).\end{aligned}$$

En cualquier caso la relación (5.3) se satisface.

- Si l y $*$ aparecen en C , entonces dependiendo de la posición del símbolo duplicado de $*$ tenemos cinco posibilidades:

$$\begin{aligned}(\Omega_{l,*}, \Omega_{w,*}, \Omega'_{l,*}) &= (1, -2, -1), \\(\Omega_{l,*}, \Omega_{w,*}, \Omega'_{l,*}) &= (2, -2, 0), \\(\Omega_{l,*}, \Omega_{w,*}, \Omega'_{l,*}) &= (2, -1, 1), \\(\Omega_{l,*}, \Omega_{w,*}, \Omega'_{l,*}) &= (0, -2, -2), \\(\Omega_{l,*}, \Omega_{w,*}, \Omega'_{l,*}) &= (1, -1, 0).\end{aligned}$$

En cualquier caso la relación (5.3) se satisface.

En el caso en que w sea un símbolo duplicado de la fila *top*, los cálculos son completamente análogos. □

Análogo al caso de transformaciones de intercambio de intervalos podemos construir el diagrama de Bratteli-Vershik que es topológicamente conjugada a la extensión simbólica de una involución lineal que satisface una condición de Keane. Sea $T : \hat{I} \rightarrow \hat{I}$ una involución lineal definida por (π, λ) que satisface la condición de Keane (ver Sección 4 de [BL09]), de manera que siempre podemos iterar el algoritmo de inducción de Rauzy-Veech. Sea

$\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, d\}$ y considere el alfabeto $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^-$, con $\mathcal{A}^- = \{1^-, 2^-, \dots, d^-\}$. Se define la involución $\iota' : \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^- \rightarrow \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^-$ dada por $\iota'(\alpha) = \alpha^-$ y $\iota'(\alpha^-) = \alpha$ para cada $\alpha \in \mathcal{A}$.

Dado $x \in \hat{I}$ se construye una sucesión simbólica $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^-)^{\mathbb{Z}}$ siendo $x_n = \ell(\alpha)$ si y sólo si $T^n(x) \in I_\alpha^\varepsilon$, con $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Defina Ψ al mapeo que envía $x \in \hat{I}$ a su sucesión simbólica y sea

$$\Omega_T = \overline{\{\Psi(x) : x \in \hat{I}\}} \subseteq (\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^-)^{\mathbb{Z}}.$$

Llamaremos al sistema (Ω_T, σ) extensión simbólica de la involución lineal T .

De ahora en adelante identificamos $\mathbb{R}^{\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^-}$ con \mathbb{R}^{2d} mediante el isomorfismo que envía las coordenadas $1, 2, \dots, d, 1^-, 2^-, \dots, d^-$ en $1, 2, \dots, d, d+1, \dots, 2d$. Notar que el subespacio $\{z \in \mathbb{R}^{\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^-} : z_\alpha = z_{\alpha^-}, \forall \alpha \in \mathcal{A}\}$ es isomorfo a \mathbb{R}^d .

Proposición 5.7 *Sea T una involución lineal definida por (π, λ) que satisface la condición de Keane y sea $\gamma = (\gamma_n)_{n \geq 0}$ su paseo infinito en su clase de Rauzy $\mathcal{R}(\pi)$. Sean $\gamma_n = (\varepsilon^{(n)}, w^{(n)}, \iota^{(n)})$, $\forall n \geq 0$, las etiquetas de tipo, winners y losers correspondientes. Se define el diagrama de Bratteli $B = (V, E, \preceq)$ en donde:*

1. $V_0 = \{v_0\}$ es un vértice inicial distinguido.
2. $V_n = \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^-$, $\forall n \geq 1$.
3. $h_1 = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^{2d}$ y para $n \geq 2$ la matriz de incidencia M_n de $2d \times 2d$ es $\text{Id} + E_{\alpha, \beta} + E_{\iota'(\alpha), \iota'(\beta)}$, en donde $\alpha = w^{(n-2)}$, $\beta = \iota^{(n-2)}$.
4. Para cada $n \geq 1$, si $\varepsilon^{(n-1)} = t$, $\alpha = w^{(n-2)}$, $\beta = \iota^{(n-2)}$, entonces tenemos $e_1 \preceq e_2$ y $e_3 \preceq e_4$, siendo las aristas $e_1 = \beta\beta$, $e_2 = \alpha\beta$, $e_3 = \iota'(\alpha)\iota'(\beta)$, $e_4 = \iota'(\beta)\iota'(\beta)$.
5. Para cada $n \geq 1$, si $\varepsilon^{(n-1)} = b$, $\alpha = w^{(n-2)}$, $\beta = \iota^{(n-2)}$, entonces tenemos $e_1 \preceq e_2$ y $e_3 \preceq e_4$, siendo las aristas $e_1 = \alpha\beta$, $e_2 = \beta\beta$, $e_3 = \iota'(\beta)\iota'(\beta)$, $e_4 = \iota'(\alpha)\iota'(\beta)$.

Entonces B es propiamente ordenado, simple y si (X_B, V_B) denota al sistema de Bratteli-Vershik dado por B , entonces (Ω_T, σ) y (X_B, V_B) son topológicamente conjugados.

Observación. 12 Notar que la acción de las matrices de la forma $\text{Id} + E_{\alpha, \beta} + E_{\iota'(\alpha), \iota'(\beta)}$ preserva el subespacio $\{z \in \mathbb{R}^{\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^-} : z_\alpha = z_{\alpha^-}, \forall \alpha \in \mathcal{A}\}$. De hecho la acción es la dada por levantar la acción de las matrices de la forma $\text{Id} + E_{\alpha, \beta}$ sobre \mathbb{R}^d mediante el isomorfismo entre $\{z \in \mathbb{R}^{\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^-} : z_\alpha = z_{\alpha^-}, \forall \alpha \in \mathcal{A}\}$ y \mathbb{R}^d . Para una matriz M de $d \times d$ definimos

$$\mathcal{I}(M) = \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & M \end{array} \right).$$

Es sencillo ver que \mathcal{I} es un morfismo entre las matrices de $d \times d$ y las matrices de $2d \times 2d$ tal que $\mathcal{I}(A^\top) = \mathcal{I}(A)^\top$. Luego \mathcal{I} envía matrices antisimétricas en matrices antisimétricas y mantiene igualdades de la forma (3.3). Además si $v \in \mathbb{R}^d$, entonces $vP_n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$ (resp. $\|vP_n\| \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$) si y solamente si $(v, v)\mathcal{I}(P_n) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$ (resp. $\|(v, v)\mathcal{I}(P_n)\| \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$), para ciertas matrices P_n de $d \times d$ y en donde $(v, v) = (v(1), \dots, v(d), v(1), \dots, v(d))$. Con esto, podemos trabajar con las matrices de la forma $\text{Id} + E_{\alpha, \beta}$ en lugar de las matrices de la forma $\text{Id} + E_{\alpha, \beta} + E_{\iota'(\alpha), \iota'(\alpha)}$ en lo que sigue.

5.2. Mezcla débil de involuciones lineales y flujos direccionales en ciertas permutaciones generalizadas

Para un par de enteros $s, r \geq 0$, sea

$$\sigma_{s,r} = \begin{pmatrix} 1 & A & 2 & \dots & s+1 & A & s+2 & \dots & s+r+1 \\ s+r+1 & \dots & s+2 & B & s+1 & \dots & 2 & B & 1 \end{pmatrix},$$

en donde A, B son símbolos distintos. Por comodidad, tomaremos $A = s+r+2, B = s+r+3$ y el alfabeto sobre estas permutaciones generalizadas será $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, s+r+3\}$. Cuando $s = 0$ (respectivamente $r = 0$) la sucesión $2, \dots, s+1$ (respectivamente $s+2, \dots, s+r+1$) es vacía. Estas permutaciones representan ciertas componentes conexas de ciertos estratos de diferenciales cuadráticos [Zor08]. Por ejemplo, si $s = 2k, r = 2j+1$, $\sigma_{s,r}$ representa la componente conexas $\mathcal{Q}(4j+2, 2k-1, 2k-1)^{\text{hyp}}$ y si $s = 2k, r = 2j$, representa $\mathcal{Q}(2j-1, 2j-1, 2k-1, 2k-1)^{\text{hyp}}$. Para $m \geq 0$, denotamos por t^m (respectivamente b^m) la concatenación de m inducciones de tipo *top* (respectivamente *bottom*).

Proposición 5.8 Sean $s, r \geq 0$ y para $k \in \{1, 2, \dots, s+r+1\} \setminus \{1, s+2\}$ sea γ_k el paseo dirigido que empieza en $\sigma_{s,r}$ y cuya sucesión de inducciones *top* y *bottom* es

$$t^k b^{s+r+2-k} t^{s+r+2-k}.$$

Sean γ_t, γ_b los loops que empiezan en $\sigma_{s,r}$ que corresponden a hacer $s+r+2$ operaciones *top* y $s+r+2$ operaciones *bottom*, respectivamente. Entonces:

1. γ_t, γ_b y γ_k son loops en $\sigma_{s,r}$, para cada $k \in \{1, 2, \dots, s+r+1\} \setminus \{1, s+2\}$.
2. Si $z \in \mathbb{R}^d$ es un vector fila, las acciones de las matrices B_γ para $\gamma \in \{\gamma_t, \gamma_b, \gamma_k\}$ vienen dadas por

$$zB_{\gamma_t} = z - z_{s+r+1}v_{s+r+1}, \quad (5.4)$$

$$zB_{\gamma_b} = z + z_1v_1, \quad (5.5)$$

$$zB_{\gamma_k} = z - z_{s+r+1}v_{s+r+1} + z_k(v_k - v_{s+r+1}), \quad \text{si } 1 < k \leq s+1, \quad (5.6)$$

$$zB_{\gamma_k} = z - z_{s+r+1}v_{s+r+1} + z_{k-1}(v_{k-1} - v_{s+r+1}), \quad \text{si } s+2 < k \leq s+r+1, \quad (5.7)$$

en donde $v_1, v_2, \dots, v_{s+r+3}$ son las filas de $\Omega(\sigma_{s,r})$.

DEMOSTRACIÓN.

1. Sea $k \in \{2, \dots, s+1\}$. Como los únicos símbolos dobles de $\sigma_{s,r}$ son $s+r+2$ y $s+r+3$, la elección de k asegura que al realizar k operaciones de tipo *top* no aparece un símbolo doble como *winner*, luego la fila *top* es invariante por estas operaciones. Sea π_k la permutación obtenida. Las operaciones están descritas por

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * \\ * & \cdot & B & \cdot & k & \cdot & B & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{t \text{ } k\text{-veces}} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * \\ * & \cdot & B & 1 & \cdot & B & \cdot & k \end{pmatrix} = \pi_k.$$

Al hacer $s+r+2-k$ operaciones de tipo *bottom* a partir de π_k , el símbolo *winner* es k y no aparece un símbolo doble como *winner*. Los símbolos *losers* son exactamente

aquellos que están a la derecha de k en la fila *top* de π_k y son exactamente $s+r+2-k$, por lo tanto al hacer $s+r+2-k$ operaciones de tipo *bottom* volvemos a π_k . Las $s+r+2-k$ operaciones de tipo *top* a partir de π_k están descritas por

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * \\ * & \cdot & B & 1 & \cdot & B & \cdot & k \end{pmatrix} \xrightarrow{t \text{ (} s+r+2-k \text{)-veces}} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * \\ * & \cdot & B & \cdot & k & \cdot & B & 1 \end{pmatrix} = \sigma_{s,r}.$$

Por lo tanto γ_k es un loop en $\sigma_{s,r}$. El caso $k \in \{s+3, \dots, s+r+1\}$ es análogo, al igual que la afirmación sobre γ_t, γ_b .

2. Notar que la permutación con involución $\tau_{s,r}$ que define $\sigma_{s,r}$ es

$$\tau_{s,r} = ((1,0) (B,0) (2,0) \dots (s+1,0) (B,0) (s+2,0) \dots (s+r+1,0) * \\ (1,1) (A,1) (2,1) \dots (s+1,1) (A,1) (s+2,1) \dots (s+r+1,1)).$$

De lo anterior se obtiene

$$v_1(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1, i = s+r+3, \\ 1 & \text{si } 2 \leq i \leq s+r+1, \\ 2 & \text{si } i = s+r+2, \end{cases}$$

$$\forall 2 \leq k \leq s+1, \quad v_k(i) = \begin{cases} -1 & \text{si } 1 \leq i \leq k-1, i = s+r+3, \\ 0 & \text{si } i = k, \\ 1 & \text{si } k+1 \leq i \leq s+r+2, \end{cases}$$

$$\forall s+2 \leq k \leq s+r+1, \quad v_k(i) = \begin{cases} -2 & \text{si } i = s+r+3, \\ -1 & \text{si } 1 \leq i \leq k-1, \\ 0 & \text{si } i = k, i = s+r+2, \\ 1 & \text{si } k+1 \leq i \leq s+r+1, \end{cases}$$

$$v_{s+r+2}(i) = \begin{cases} -2 & \text{si } i = 1, \\ -1 & \text{si } 2 \leq i \leq s+1, \\ 0 & \text{si } s+2 \leq i \leq s+r+2, \\ -2 & \text{si } i = s+r+3, \end{cases}$$

$$v_{s+r+3}(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1, i = s+r+3, \\ 1 & \text{si } 2 \leq i \leq s+1, \\ 2 & \text{si } s+2 \leq i \leq s+r+2. \end{cases}$$

Notar que $E_{\alpha_1, \beta_1} E_{\alpha_2, \beta_2} = \mathbf{1}_{\{\beta_1 = \alpha_2\}} E_{\alpha_1, \beta_2}$, luego si $\alpha \notin \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k\}$, tenemos

$$(\text{Id} + E_{\alpha, \beta_1})(\text{Id} + E_{\alpha, \beta_2}) \dots (\text{Id} + E_{\alpha, \beta_k}) = \text{Id} + E_{\alpha, \beta_1} + E_{\alpha, \beta_2} + \dots + E_{\alpha, \beta_k}.$$

- En γ_t el *winner* es $s+r+1$ con respectivos *losers* $1, s+r+3, 2, \dots, s+1, s+r+3, s+2, \dots, s+r+1$. Luego

$$B_{\gamma_t} = \text{Id} + E_{s+r+1,1} + \dots + E_{s+r+1,s+r} + 2E_{s+r+1,s+r+3},$$

y en consecuencia tenemos (5.4).

- En γ_b el *winner* es 1 con respectivos *losers* $s + r + 1, \dots, s + 2, s + r + 2, s + 1, \dots, 2, s + r + 2$. Luego

$$B_{\gamma_b} = \text{Id} + E_{1, s+r+1} + \dots + E_{1, s+r+1} + 2E_{1, s+r+2},$$

y en consecuencia tenemos (5.5).

- En γ_k con $2 \leq k \leq s + 1$, inicialmente el *winner* es $s + r + 1$ con respectivos *losers* $1, s + r + 3, 2, 3, \dots, k - 1$, luego el *winner* es k con respectivos *losers* $s + r + 1, \dots, s + 2, s + r + 2, s + 1, \dots, k + 1$ y finalmente el *winner* es $s + r + 1$ con respectivos *losers* $k, \dots, s + 1, s + r + 3, s + 2, \dots, s + r$. Luego

$$\begin{aligned} B_{\gamma_k} &= (\text{Id} + E_{s+r+1,1})(\text{Id} + E_{s+r+1, s+r+3})(\text{Id} + E_{s+r+1,2}) \dots (\text{Id} + E_{s+r+1, k-1}) \\ &\quad (\text{Id} + E_{k, s+r+1}) \dots (\text{Id} + E_{k, s+2})(\text{Id} + E_{k, s+r+2}) \\ &\quad (\text{Id} + E_{k, s+1}) \dots (\text{Id} + E_{k, k+1}) \\ &\quad (\text{Id} + E_{s+r+1, k}) \dots (\text{Id} + E_{s+r+1, s+1})(\text{Id} + E_{s+r+1, s+r+3}) \\ &\quad (\text{Id} + E_{s+r+1, s+2}) \dots (\text{Id} + E_{s+r+1, s+r}) \\ &= \text{Id} + E_{s+r+1,1} + \dots + E_{s+r+1, s+r} + 2E_{s+r+1, s+r+3} + \\ &\quad E_{k, k} + 2(E_{k, k+1} + \dots + E_{k, s+r}) + E_{k, s+r+1} + E_{k, s+r+2} + E_{k, s+r+3}, \end{aligned}$$

y en consecuencia tenemos (5.6).

- En γ_k con $s + 2 \leq k \leq s + r + 1$, inicialmente el *winner* es $s + r + 1$ con respectivos *losers* $1, s + r + 3, 2, 3, \dots, s + 1, s + r + 3, s + 2, \dots, k - 2$, luego el *winner* es $k - 1$ con respectivos *losers* $s + r + 1, \dots, k$ y finalmente el *winner* es $s + r + 1$ con respectivos *losers* $k - 1, \dots, s + r$. Luego

$$\begin{aligned} B_{\gamma_k} &= (\text{Id} + E_{s+r+1,1})(\text{Id} + E_{s+r+1, s+r+3})(\text{Id} + E_{s+r+1,2}) \dots (\text{Id} + E_{s+r+1, s+1}) \\ &\quad (\text{Id} + E_{s+r+1, s+r+3})(\text{Id} + E_{s+r+1, s+2}) \dots (\text{Id} + E_{s+r+1, k-2}) \\ &\quad (\text{Id} + E_{k-1, s+r+1}) \dots (\text{Id} + E_{k-1, k}) \\ &\quad (\text{Id} + E_{s+r+1, k-1}) \dots (\text{Id} + E_{s+r+1, s+r}) \\ &= \text{Id} + 2E_{s+r+1, s+r+3} + E_{s+r+1,1} + \dots + E_{s+r+1, s+r} + \\ &\quad E_{k-1, k} + \dots + E_{k-1, s+r+1}, \end{aligned}$$

y en consecuencia tenemos (5.7).

□

Proposición 5.9 Sean $s, r \geq 0$ y considere la permutación generalizada $\sigma_{s,r}$.

1. Si $s \neq 0$ y se considera el paseo $\gamma_{s,r}$ que empieza en $\sigma_{s,r}$ y cuya sucesión de inducciones top y bottom es

$$b^{s+r} t b t b^{r+2} t b^s t^s b.$$

Entonces $\gamma_{s,r}$ es un loop en $\sigma_{s,r}$ y si $z \in \mathbb{R}^d$ es un vector fila, las acciones de las matrices $B_{\gamma_{s,r}}$ vienen dadas por

$$\begin{aligned} zB_{\gamma_{s,r}} &= z + (3z_1 + 2z_2 + z_{s+r+2} + z_{s+r+3})v_1 + (z_1 + z_2)v_2 \\ &\quad - \left(z_1 + z_2 + \frac{z_{s+r+2} + z_{s+r+3}}{2} \right) (v_{s+r+2} + v_{s+r+3}), \end{aligned} \tag{5.8}$$

en donde $v_1, v_2, \dots, v_{s+r+3}$ son las filas de $\Omega(\sigma_{s,r})$.

Esto muestra que $\gamma_{s,r}$ es un loop en $\sigma_{s,r}$ si $s \neq 0$. En $\gamma_{s,r}$ al hacer $s+r$ operaciones *bottom* el *winner* es 1 con respectivos *losers* $s+r+1, \dots, s+2, A, s+1, \dots, 3$. Al hacer las operaciones *top*, *bottom* y *top* los *winners* son 2, B, A con respectivos *losers* 1, 2, B . Al hacer $r+2$ operaciones *top* el *winner* es 1 con respectivos *losers* $A, s+r+1, \dots, s+2, A$. Al hacer una operación *top* el *winner* es B con *loser* 1. Al hacer s operación *bottom* el *winner* es 2 con respectivos *losers* $B, s+1, \dots, 3$. Al hacer s operaciones *top* el *winner* es A con respectivos *losers* $2, \dots, s+1$. Finalmente al hacer una operación *bottom* el *winner* es 1 con *loser* A . Luego

$$\begin{aligned}
B_{\gamma_{s,r}} &= (\text{Id} + E_{1,s+r+1}) \dots (\text{Id} + E_{1,s+2})(\text{Id} + E_{1,s+r+2}) \\
&\quad (\text{Id} + E_{1,s+1}) \dots (\text{Id} + E_{1,3})(\text{Id} + E_{2,1})(\text{Id} + E_{s+r+3,2})(\text{Id} + E_{s+r+2,s+r+3}) \\
&\quad (\text{Id} + E_{1,s+r+2})(\text{Id} + E_{1,s+r+1}) \dots (\text{Id} + E_{1,s+2})(\text{Id} + E_{1,s+r+2}) \\
&\quad (\text{Id} + E_{s+r+3,1})(\text{Id} + E_{2,s+r+3})(\text{Id} + E_{2,s+1}) \dots (\text{Id} + E_{2,3}) \\
&\quad (\text{Id} + E_{s+r+2,2}) \dots (\text{Id} + E_{s+r+2,s+1})(\text{Id} + E_{1,s+r+2}) \\
&= \text{Id} + E_{1,1} + 3E_{1,2} + 4(E_{1,3} + \dots + E_{1,s+1}) + 2(E_{1,s+2} + \dots + E_{1,s+r+1}) \\
&\quad + 5E_{1,s+r+2} + E_{1,s+r+3} + E_{2,1} + 2E_{2,2} + 3(E_{2,3} + \dots + E_{2,s+1}) \\
&\quad + E_{2,s+2} + \dots + E_{2,s+r+1} + 3E_{2,s+r+2} + E_{2,s+r+3} \\
&\quad + E_{s+r+2,1} + \dots + E_{s+r+2,s+1} + E_{s+r+2,s+r+2} + E_{s+r+2,s+r+3} \\
&\quad + E_{s+r+3,1} + \dots + E_{s+r+3,s+1} + E_{s+r+3,s+r+2} + E_{s+r+3,s+r+3},
\end{aligned}$$

y en consecuencia tenemos (5.8).

2. Si $s = 0$ y $r \neq 0$, sean $(A, B) = (r+2, r+3)$. Las operaciones de Rauzy partir de $\sigma_{0,r}$ están descritas por

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & A & A & 2 & \dots & r+1 \\ r+1 & \dots & 2 & B & B & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{matrix} \xrightarrow{t} \\ \xrightarrow{\text{b } r\text{-veces}} \\ \xrightarrow{t \text{ 2-veces}} \\ \xrightarrow{\text{b } 2\text{-veces}} \\ \xrightarrow{t (r+1)\text{-veces}} \\ \xrightarrow{\text{b } 2\text{-veces}} \\ \xrightarrow{t \text{ 2-veces}} \\ \xrightarrow{\text{b}} \\ \xrightarrow{t (s+r+1)\text{-veces}} \end{matrix} &\begin{pmatrix} 1 & A & A & 2 & \dots & r+1 & \\ r+1 & 1 & r & \dots & 2 & B & B \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} 1 & A & A & & & & \\ r+1 & 1 & r & \dots & 2 & r+1 & \dots & 2 & B & B \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} 1 & B & B & A & A & & & & & \\ r+1 & 1 & r & \dots & 2 & r+1 & \dots & 2 & & \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} 1 & B & B & & & & & & & \\ r+1 & 1 & r & \dots & 3 & A & A & 2 & r+1 & \dots & 2 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r+1 & 2 & B & B \\ r+1 & 1 & r & \dots & 3 & A & A \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r+1 & 2 & & & & & & \\ r+1 & 1 & r & \dots & 3 & B & B & A & A & & \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} 1 & A & A & 2 & \dots & r+1 & 2 \\ r+1 & 1 & r & \dots & 3 & B & B \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} 1 & A & A & 2 & \dots & r+1 & & & & & \\ r+1 & 1 & r & \dots & 3 & 2 & B & B & & & \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} 1 & A & A & 2 & \dots & r+1 \\ r+1 & \dots & 2 & B & B & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Esto muestra que $\gamma_{0,r}$ es un loop en $\sigma_{0,r}$ si $s = 0$. En $\gamma_{0,r}$ al hacer 1 operación *top* el *winner* es $r+1$ con *loser* 1. Al hacer r operaciones *bottom* el *winner* es B con respectivos *losers* $r+1, \dots, 2$. Al hacer 2 operaciones *top* y 2 operaciones *bottom* los *winner*s son A y 2 con respectivos *losers* B, A . Al hacer $r+1$ operaciones *top* el *winner* es B con respectivos *losers* $2, \dots, r+1, 2$. Al hacer 2 operaciones *bottom*, 2 operaciones *top* y una operación *bottom* los *winner*s son $A, 2, B$ con respectivos *losers* $B, A, 2$. Finalmente, al hacer $r+1$ operaciones *top* el *winner* es $r+1$ con respectivos *losers* $B, 2, \dots, r$. Luego

$$\begin{aligned}
B_{\gamma_{0,r}} &= (\text{Id} + E_{r+1,1})(\text{Id} + E_{r+3,r+1}) \dots (\text{Id} + E_{r+3,2})(\text{Id} + E_{r+2,r+3})^2(\text{Id} + E_{2,r+2})^2 \\
&\quad (\text{Id} + E_{r+2,2}) \dots (\text{Id} + E_{r+2,r+1})(\text{Id} + E_{r+2,2}) \\
&\quad (\text{Id} + E_{r+2,r+3})^2(\text{Id} + E_{2,r+2})^2(\text{Id} + E_{r+3,2})(\text{Id} + E_{r+1,r+2})^2 \\
&\quad (\text{Id} + E_{r+1,2}) \dots (\text{Id} + E_{r+1,r}) \\
&\quad (\text{Id} + E_{2,1})(\text{Id} + E_{s+r+3,2})(\text{Id} + E_{s+r+2,s+r+3}) \\
&= \text{Id} + 4E_{2,2} + 4E_{2,r+2} + 4E_{2,r+3} \\
&\quad + 2E_{r+1,r+2} + E_{r+1,2} + \dots + E_{r+1,r} + E_{r+1,r} \\
&\quad + 8E_{r+2,r+2} + 8E_{r+2,r+3} + 10E_{r+2,2} + 4(E_{r+2,3} + \dots + E_{r+2,r}) + 2E_{r+2,r+1} \\
&\quad + 8E_{r+3,r+3} + 8E_{r+3,r+2} + 10E_{r+3,2} + 4(E_{r+3,3} + \dots + E_{r+3,r}) + 2E_{r+3,r+1},
\end{aligned}$$

y en consecuencia tenemos (5.9).

3. Se verifica directamente lo afirmado. □

Lema 5.10 *Asuma que $s, r \geq 0$. Entonces los vectores fila $v_1, v_2, \dots, v_{s+r+1}$, que corresponden a las primeras $s+r+1$ filas de $\Omega(\sigma_{s,r})$ son linealmente independientes.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s+r+1} \in \mathbb{R}$ con $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{s+r+1} v_{s+r+1} = 0$. De los cálculos explícitos para $v_1, v_2, \dots, v_{s+r+1}$ en la demostración de la Proposición 5.8, lo anterior implica que

$$\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{s+r+1} = 0 \quad (5.11)$$

$$2\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{s+1} = 0 \quad (5.12)$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{s+1} = 2(\alpha_{s+2} + \dots + \alpha_{s+r+1}) \quad (5.13)$$

$$\forall 2 \leq k \leq s+r+1: \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1} = \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{s+r+1}, \quad (5.14)$$

en donde el lado derecho de 5.14 es 0 si $k = s+r+1$. De 5.14 es sencillo ver que $\alpha_k = -\alpha_{k+1}$, $\forall 1 \leq k \leq s+r$. De 5.11, 5.12 y 5.13 tenemos $\alpha_1 = 2(\alpha_{s+2} + \dots + \alpha_{s+r+1})$ y $2\alpha_1 = -2(\alpha_{s+2} + \dots + \alpha_{s+r+1})$ y luego $\alpha_1 = 0$. De 5.14 con $k = s+r+1$ tenemos $\alpha_1 = \alpha_{s+r+1} = 0$, así que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{s+r+1} = 0$, probando la independencia lineal de $v_1, v_2, \dots, v_{s+r+1}$. □

Lema 5.11 *Sean $s, r \geq 0$ y sean $v_1, v_2, \dots, v_{s+r+3}$ las filas de la matriz $\Omega(\sigma_{s,r})$.*

1. *Suponga que $s = 2k, r = 2j$ con $k, j \geq 0$. Entonces $v_1, v_2, \dots, v_{s+r+2}$ son linealmente independientes y*

$$v_{s+r+3} = v_1 - \sum_{i=1}^r (-1)^i v_{s+1+i}. \quad (5.15)$$

En particular $r(\Omega(\sigma_{s,r})) = s + r + 2$.

2. Suponga que $s = 2k, r = 2j + 1$ con $k, j \geq 0$. Entonces $v_1, v_2, \dots, v_{s+r+3}$ son linealmente independientes. En particular $r(\Omega(\sigma_{s,r})) = s + r + 3$.
3. Suponga que $s = 2k + 1, r = 2j$ con $k, j \geq 0$. Entonces $v_1, v_2, \dots, v_{s+r+1}$ son linealmente independientes y

$$v_{s+r+2} = -v_1 + 2v_2 - 2 \sum_{i=1}^{s-1} (-1)^i v_{i+2} + \sum_{i=1}^r (-1)^i v_{s+i+1} \quad (5.16)$$

$$v_{s+r+3} = v_1 - \sum_{i=1}^r (-1)^i v_{s+1+i}. \quad (5.17)$$

En particular $r(\Omega(\sigma_{s,r})) = s + r + 1$.

4. Suponga que $s = 2k + 1, r = 2j + 1$ con $k, j \geq 0$. Entonces $v_1, v_2, \dots, v_{s+r+2}$ son linealmente independientes y

$$v_{s+r+3} = -v_{s+r+2} - 2 \sum_{i=1}^{s-1} (-1)^i v_{i+1} + 2v_{s+1}. \quad (5.18)$$

En particular $r(\Omega(\sigma_{s,r})) = s + r + 2$.

5. Si definimos $\tilde{g}_{s,r}$ mediante $2\tilde{g}_{s,r} = r(\Omega(\sigma_{s,r}))$ y si $g_{s,r}$ es el género del espacio de módulos asociado a $\sigma_{s,r}$, entonces $\tilde{g}_{s,r} = g_{s,r}$ si s, r son de la forma $(s, r) = (2k + 1, 2j)$ o bien $(s, r) = (2k + 1, 2j + 1)$ para ciertos $k, j \geq 0$ y $\tilde{g}_{s,r} = g_{s,r} + 1$ si s, r son de la forma $(s, r) = (2k, 2j)$ o bien $(s, r) = (2k, 2j + 1)$ para ciertos $k, j \geq 0$.

DEMOSTRACIÓN.

1. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s+r+2} \in \mathbb{R}$ con $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{s+r+2} v_{s+r+2} = 0$. De los cálculos explícitos para $v_1, v_2, \dots, v_{s+r+1}$ en la demostración de la Proposición 5.8, lo anterior implica que

$$\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{s+r+1} + 2\alpha_{s+r+2} = 0 \quad (5.19)$$

$$2\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{s+1} = 0 \quad (5.20)$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{s+1} - 2(\alpha_{s+2} + \dots + \alpha_{s+r+2}) = 0 \quad (5.21)$$

$$\forall 2 \leq k \leq s + 1 : \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1} = \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{s+r+1} + \alpha_{s+r+2} \quad (5.22)$$

$$\forall s + 2 \leq k \leq s + r + 1 : \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1} = \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{s+r+1}, \quad (5.23)$$

en donde el lado derecho de 5.23 es 0 si $k = s + r + 1$. De 5.22 y 5.23 es sencillo ver que $\alpha_k = -\alpha_{k+1}$, $\forall k \in \{2, \dots, s + r\} \setminus \{s + 1\}$ y que $\alpha_{s+1} = -\alpha_{s+2} - \alpha_{s+r+2}$. De 5.20 y 5.21 tenemos $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{s+1} = \alpha_{s+2} + \alpha_{s+3} + \dots + \alpha_{s+r+2}$ y de las paridades de s, r tenemos entonces que $\alpha_{s+1} = \alpha_{s+r+2}$. De 5.19, 5.20 y 5.21 se obtienen $\alpha_{s+r+1} + 2\alpha_{s+r+2} = 0$, $2\alpha_1 + \alpha_{s+1} = 0$ y $\alpha_{s+1} = 2\alpha_{s+r+2}$. De esto que $\alpha_{s+1} = \alpha_{s+r+2} = 0$ y en consecuencia $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{s+r+2} = 0$, probando la independencia lineal de $v_1, v_2, \dots, v_{s+r+2}$. Mostremos ahora la igualdad 5.15. Sea $1 \leq k \leq s + r + 3$.

- Si $k \in \{1, s + r + 2, s + r + 3\}$ o si $2 \leq k \leq s + 1$ la igualdad se verifica directamente por la paridad de r .

- Si $s + 2 \leq k \leq s + r + 1$, el lado izquierdo es 2 mientras que el lado derecho es

$$1 - \sum_{k-s \leq i \leq r} (-1)^{i+1} - \sum_{1 \leq i \leq k-s-2} (-1)^i = 1 - \sum_{i=1}^r (-1)^i - (-1)^{k-s-1} - (-1)^{k-s} = 1.$$

- Sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s+r+3} \in \mathbb{R}$ con $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{s+r+3} v_{s+r+3} = 0$. De los cálculos explícitos para $v_1, v_2, \dots, v_{s+r+3}$ en la demostración de la Proposición 5.8, lo anterior implica que

$$\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{s+r+1} + 2\alpha_{s+r+2} = 0 \quad (5.24)$$

$$2\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{s+1} + 2\alpha_{s+r+3} = 0 \quad (5.25)$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{s+1} = 2(\alpha_{s+2} + \dots + \alpha_{s+r+2}) \quad (5.26)$$

$$\forall 2 \leq k \leq s+1 : \alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1} = (\alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{s+r+1}) - \alpha_{s+r+2} + \alpha_{s+r+3} \quad (5.27)$$

$$\forall s+2 \leq k \leq s+r+1 : \alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1} = (\alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{s+r+1}) + 2\alpha_{s+r+3}, \quad (5.28)$$

en donde el lado derecho de 5.28 es $2\alpha_{s+r+3}$ si $k = s+r+1$. De 5.27 y 5.28 es sencillo ver que $\alpha_k = -\alpha_{k+1}$, $\forall k \in \{2, \dots, s+r\} \setminus \{s+1\}$ y que $\alpha_{s+1} = -\alpha_{s+2} + \alpha_{s+r+2} + \alpha_{s+r+3}$. De las paridades de s y r y de 5.24, 5.26 se obtienen respectivamente $\alpha_{s+r+1} + 2\alpha_{s+r+3} = 0$ y $\alpha_{s+r+1} + \alpha_{s+r+2} = 0$, luego $\alpha_{s+r+1} = \alpha_{s+r+2} = 0$. De 5.25 y de 5.28 con $k = s+r+1$ se obtienen respectivamente $\alpha_1 + \alpha_{s+r+3} = 0$ y $\alpha_1 = 2\alpha_{s+r+3}$, luego $\alpha_1 = \alpha_{s+r+3} = 0$ y en consecuencia $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{s+r+3} = 0$, probando la independencia lineal de $v_1, v_2, \dots, v_{s+r+3}$.

- Del Lema 5.10 tenemos la independencia lineal de $v_1, v_2, \dots, v_{s+r+1}$ y del primer ítem se obtiene 5.17 (solamente es necesario que r sea par). Mostremos ahora la igualdad 5.16. Sea $1 \leq k \leq s+r+3$.

- Si $k \in \{1, s+r+2, s+r+3\}$ o si $2 \leq k \leq s+1$ la igualdad se verifica directamente por la paridad de s .
- Si $s+2 \leq k \leq s+r+1$, el lado izquierdo es 0 mientras que el lado derecho es

$$-1 + 2 + 2 \sum_{1 \leq i \leq k-s-2} (-1)^i + (-1)^{k-2-1} = -1 + 2 - 1 = 0.$$

- Sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s+r+2} \in \mathbb{R}$ con $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{s+r+2} v_{s+r+2} = 0$. De los cálculos explícitos para $v_1, v_2, \dots, v_{s+r+2}$ en la demostración de la Proposición 5.8, lo anterior implica que

$$\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{s+r+1} + 2\alpha_{s+r+2} = 0 \quad (5.29)$$

$$2\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{s+1} = 0 \quad (5.30)$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{s+1} = 2(\alpha_{s+2} + \dots + \alpha_{s+r+2}) \quad (5.31)$$

$$\forall 2 \leq k \leq s+1 : \alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1} = \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{s+r+1} - \alpha_{s+r+2} \quad (5.32)$$

$$\forall s+2 \leq k \leq s+r+1 : \alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1} = \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{s+r+1}, \quad (5.33)$$

en donde el lado derecho de 5.33 es 0 si $k = s+r+1$. De 5.32 y 5.33 es sencillo ver que $\alpha_k = -\alpha_{k+1}$, $\forall k \in \{2, \dots, s+r\} \setminus \{s+1\}$ y que $\alpha_{s+1} = -\alpha_{s+2} + \alpha_{s+r+2}$. De las paridades de s y r y de 5.29 se obtiene $\alpha_{s+r+2} = 0$ y la demostración se sigue del hecho que $v_1, v_2, \dots, v_{s+r+1}$ son linealmente independientes. Mostremos ahora la igualdad 5.18. Sea $1 \leq k \leq s+r+3$.

- Si $k \in \{1, s+r+3\}$ o si $2 \leq k \leq s+1$ la igualdad se verifica directamente por la paridad de s .
 - Si $s+2 \leq k \leq s+r+2$, el lado izquierdo es 2 mientras que el lado derecho es $2v_{s+1}(k) = 2$.
5. Las expresiones para $\tilde{g}_{s,r}$ son directas de los ítemes anteriores mientras que las expresiones para $g_{s,r}$ vienen dadas en la Sección 3.6 de [Zor08].

□

Finalmente podemos deducir el siguiente resultado:

Teorema 5.12 *Sea $\mathcal{R}_{s,r}$ el grafo dirigido correspondiente a la clase de Rauzy de $\sigma_{s,r}$ con $s, r \geq 0$. Sea $\nu_{\mathcal{R}_{s,r}}$ una medida de probabilidad de Markov asociada a $\mathcal{R}_{s,r}$ y sea $\nu_{\mathcal{R}_{s,r},\pi}$ la restricción de $\nu_{\mathcal{R}_{s,r}}$ a $E_{\mathcal{R}_{s,r}}(\pi)$, para cada $\pi \in \mathcal{R}_{s,r}$. Suponga que s, r no son de la forma $s = 2k, r = 2j + 1$ con $k, j \geq 0$ y que $(s, r) \neq (0, 0), (s, r) \neq (1, 0)$. Entonces $\nu_{\mathcal{R}_{s,r},\pi}$ -casi todo paseo infinito $\gamma \in E_{\mathcal{R}_{s,r}}(\pi)$ define un sistema de Bratteli-Vershik X_γ que es topológicamente débilmente mezclador.*

DEMOSTRACIÓN. A cada arista $\gamma = (\varepsilon, w, l)$ de $\mathcal{R}_{s,r}$ de tipo *top* asociamos la substitución unimodular $\tau(\gamma)(i) = i$ si $i \in \mathcal{A} \setminus \{1\}$ y $\tau(\gamma)(1) = lw$ y a cada arista $\gamma = (\varepsilon, w, l)$ de $\mathcal{R}_{s,r}$ de tipo *bottom* asociamos la substitución unimodular $\tau(\gamma)(i) = i$ si $i \in \mathcal{A} \setminus \{1\}$ y $\tau(\gamma)(1) = wl$. Si γ_t el loop en $\sigma_{s,r}$ de tipo *top*, entonces $\gamma = \gamma_t$ satisface el tercer ítem de la Definición 3.2. Por el Lema 5.4 tenemos el cuarto ítem de la Definición 3.2, así que $(\mathcal{R}_{s,r}, \tau)$ es un grafo de renormalización parametrizador. Por las Proposiciones 5.8, 5.11 y 5.9 se cumplen las hipótesis del Teorema 3.23 y se sigue el la conclusión del Teorema. □

Usando el Teorema 4.11, podemos mejorar la conclusión del resultado previo a la siguiente versión:

Teorema 5.13 *Sea $\mathcal{R}_{s,r}$ el grafo dirigido correspondiente a la clase de Rauzy de $\sigma_{s,r}$ con $s, r \geq 0$. Sea $\nu_{\mathcal{R}_{s,r}}$ una medida de probabilidad de Markov asociada a $\mathcal{R}_{s,r}$, $\nu_{\mathcal{R}_{s,r},\sigma_{s,r}}$ la restricción de $\nu_{\mathcal{R}_{s,r}}$ a $E_{\mathcal{R}_{s,r}}(\sigma_{s,r})$ y $\theta_1^{\nu_{\mathcal{R}_{s,r}}}(H), \theta_2^{\nu_{\mathcal{R}_{s,r}}}(H), \dots, \theta_{2g}^{\nu_{\mathcal{R}_{s,r}}}(H)$ los $2g$ exponentes de Lyapunov del cociclo lineal medible dado por $\gamma \mapsto M_{\gamma_0}$ restringido a las fibras $\gamma \mapsto H(s(\gamma_0))$, en donde $g = \tilde{g}_{s,r}$ está definido mediante $\dim H(\sigma_{s,r}) = 2g$. Suponga que $(s, r) \neq (0, 0), (1, 0), (0, 1)$, que $\theta_2^{\nu_{\mathcal{R}_{s,r}}}(H) > 0$ y que $\theta_3^{\nu_{\mathcal{R}_{s,r}}}(H) > 0$ si $(s, r) = (2k, 2j + 1)$ con $(k, j) \neq (0, 0)$. Entonces $\nu_{\mathcal{R}_{s,r},\sigma_{s,r}}$ -casi todo paseo infinito $\gamma \in E_{\mathcal{R}_{s,r}}(\sigma_{s,r})$ define un sistema de Bratteli-Vershik X_γ que es débilmente mezclador.*

DEMOSTRACIÓN. Un cálculo directo muestra que $(1, 1, \dots, 1) \in H(\sigma_{s,r})$ para $s, r \geq 0$. Por el Teorema 4.11, vemos que todas las hipótesis se satisfacen si (s, r) no es de la forma $(2k, 2j + 1)$ con $k, j \geq 0$. En este último caso, si $(s, r) \neq (0, 1)$, la hipótesis $\theta_3^{\nu_{\mathcal{R}_{s,r}}}(H) > 0$ implica que $\dim E^{cs} < 2g - 2$, siendo E^{cs} el espacio central estable del cociclo lineal medible dado por $\gamma \mapsto M_{\gamma_0}$ restringido a las fibras $\gamma \mapsto H(s(\gamma_0))$. Los cálculos obtenidos en la Proposición 5.9 permiten deducir el resultado obtenido en el Lema 4.12, y en consecuencia la conclusión del Teorema 4.11 en este caso, completando la demostración. □

Observación. 13 En [Tre13] se prueba que para el cociclo lineal medible de los resultados anteriores con respecto a una *medida de Masur-Veech* (absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue) posee primeros g exponentes de Lyapunov positivos. Este resultado, junto con los teoremas anteriores permiten probar mezcla débil en el espacio de involuciones lineales para las permutaciones generalizadas de la forma $\sigma_{s,r}$, a excepción de los casos $(s, r) = (0, 0), (1, 0), (0, 1)$.

Perspectivas

El resultado principal de esta tesis es mostrar como el análisis de valores propios y mezcla débil en [NR97] y [AF07] son generalizados al contexto más general de sistemas de Bratteli-Vershik de rango finito, mostrando que la mayoría de las extensiones simbólicas de sistemas geométricos ya mencionados admiten una representación de este tipo y llevando las técnicas de exclusión de parámetros de trabajos previos a este contexto. Construimos estas representaciones añadiendo en cada nivel del diagrama una matriz de sustitución, no necesariamente primitiva. Luego introducimos una forma de parametrizar la mayoría de los sistemas a través de caminos infinitos en cierto grafo dirigido, considerando la sucesión directiva de sustituciones de cada camino infinito. Añadiendo una medida de Markov en este espacio y con suficientes parámetros sobre el grafo, mostramos un resultado abstracto de mezcla débil, generalizando el resultado de [AF07] y dando ejemplos concretos en ciertas involuciones lineales. Observamos que el signo del segundo exponente de Lyapunov parece ser relevante, produciendo una especie de “dicotomía”: si este exponente es negativo podemos identificar el factor equicontinuo maximal, mientras que si es positivo en ciertos casos podemos obtener mezcla débil para la mayoría de estos sistemas.

La principal restricción para obtener un resultado de mezcla débil es pedir que las matrices de sustituciones en cada arista preserven las matrices antisimétricas definidas los extremos. Otra restricción relevante es obtener igualdades matriciales que permitan excluir parámetros, más concretamente, encontrar loops en un vértice en donde la acción de la matriz de sustitución del loop permitan extraer la información dada por la “fibra natural” definida en el vértice. Esto es crucial en [NR97] y [AF07]. No solo se espera llevar a cabo una completa “exclusión de parámetros” en el contexto de involuciones lineales, si no también prescindir de algunas de las restricciones mencionadas. En esta dirección, se espera que los resultados en [AR12] y [Tre13] sean de utilidad para completar la exclusión y poder deducir mezcla débil para casi todo vector de largos de una involución lineal en “género” superior a uno.

Otra problema a considerar en el futuro es el análisis de valores propios en billares racionales específicos. En este caso, el flujo de billar puede modelarse como el flujo lineal en una superficie de traslación fija dada por el billar. Se espera poder utilizar técnicas de renormalización en este caso, haciendo una descomposición precisa del sistema en torres y dando condiciones necesarias para que un número complejo sea valor propio a modo de hacer una exclusión de parámetros que permita probar mezcla débil para la mayoría de las direcciones del flujo, que no es evidente. En esta dirección, A. Avila y V. Delecroix han propuesto resultados en billares poligonales regulares que no teselan el plano [AD16].

Bibliografía

- [ABB11] Pierre Arnoux, Julien Bernat, and Xavier Bressaud. Geometrical models for substitutions. *Exp. Math.*, 20(1):97–127, 2011.
- [AD15] Artur Avila and Vincent Delecroix. Some monoids of pisot matrices. *arXiv preprint arXiv:1506.03692*, 2015.
- [AD16] Artur Avila and Vincent Delecroix. Weak mixing directions in non-arithmetic Veech surfaces. *J. Amer. Math. Soc.*, 29(4):1167–1208, 2016.
- [AF07] Artur Avila and Giovanni Forni. Weak mixing for interval exchange transformations and translation flows. *Ann. of Math. (2)*, 165(2):637–664, 2007.
- [AMY18] Artur Avila, Carlos Matheus, and Jean-Christophe Yoccoz. Zorich conjecture for hyperelliptic Rauzy-Veech groups. *Math. Ann.*, 370(1-2):785–809, 2018.
- [AR12] Artur Avila and Maria João Resende. Exponential mixing for the Teichmüller flow in the space of quadratic differentials. *Comment. Math. Helv.*, 87(3):589–638, 2012.
- [BDM05] Xavier Bressaud, Fabien Durand, and Alejandro Maass. Necessary and sufficient conditions to be an eigenvalue for linearly recurrent dynamical Cantor systems. *J. London Math. Soc. (2)*, 72(3):799–816, 2005.
- [BDM10] Xavier Bressaud, Fabien Durand, and Alejandro Maass. On the eigenvalues of finite rank Bratteli-Vershik dynamical systems. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 30(3):639–664, 2010.
- [BKMS13] S. Bezuglyi, J. Kwiatkowski, K. Medynets, and B. Solomyak. Finite rank Bratteli diagrams: structure of invariant measures. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 365(5):2637–2679, 2013.
- [BL09] Corentin Boissy and Erwan Lanneau. Dynamics and geometry of the Rauzy-Veech induction for quadratic differentials. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 29(3):767–816, 2009.
- [BST14] Valérie Berthé, Wolfgang Steiner, and Jörg Thuswaldner. Geometry, dynamics, and arithmetic of S -adic shifts. *arXiv preprint arXiv:1410.0331*, 2014.

- [BSTY18] Valérie Berthé, Wolfgang Steiner, Jörg M. Thuswaldner, and Reem Yassawi. Recognizability for sequences of morphisms. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, pages 1–36, 2018.
- [CDHM03] Maria Isabel Cortez, Fabien Durand, Bernard Host, and Alejandro Maass. Continuous and measurable eigenfunctions of linearly recurrent dynamical Cantor systems. *J. London Math. Soc. (2)*, 67(3):790–804, 2003.
- [DFM15] Fabien Durand, Alexander Frank, and Alejandro Maass. Eigenvalues of minimal cantor systems. *arXiv preprint arXiv:1504.00067*, 2015.
- [DM08] Tomasz Downarowicz and Alejandro Maass. Finite-rank Bratteli-Vershik diagrams are expansive. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 28(3):739–747, 2008.
- [DN88] Claude Danthony and Arnaldo Nogueira. Involutions linéaires et feuilletages mesurés. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 307(8):409–412, 1988.
- [DN90] Claude Danthony and Arnaldo Nogueira. Measured foliations on nonorientable surfaces. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 23(3):469–494, 1990.
- [Dur10] Fabien Durand. Combinatorics on Bratteli diagrams and dynamical systems. In *Combinatorics, automata and number theory*, volume 135 of *Encyclopedia Math. Appl.*, pages 324–372. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.
- [FHZ04] Sébastien Ferenczi, Charles Holton, and Luca Q. Zamboni. Structure of three-interval exchange transformations III: ergodic and spectral properties. *J. Anal. Math.*, 93:103–138, 2004.
- [Fis09] Albert M. Fisher. Nonstationary mixing and the unique ergodicity of adic transformations. *Stoch. Dyn.*, 9(3):335–391, 2009.
- [FMN96] Sébastien Ferenczi, Christian Mauduit, and Arnaldo Nogueira. Substitution dynamical systems: algebraic characterization of eigenvalues. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 29(4):519–533, 1996.
- [Fog02] N. Pytheas Fogg. *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, volume 1794 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002. Edited by V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit and A. Siegel.
- [Fur60] Harry Furstenberg. *Stationary processes and prediction theory*. Annals of Mathematics Studies, No. 44. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1960.
- [FZ11] Sébastien Ferenczi and Luca Q. Zamboni. Eigenvalues and simplicity of interval exchange transformations. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 44(3):361–392, 2011.
- [GJ02] Richard Gjerde and Ø rjan Johansen. Bratteli-Vershik models for Cantor minimal systems associated to interval exchange transformations. *Math. Scand.*, 90(1):87–100, 2002.

- [Hos86] B. Host. Valeurs propres des systèmes dynamiques définis par des substitutions de longueur variable. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 6(4):529–540, 1986.
- [HP12] Charles A Hayes and Christian Y Pauc. *Derivation and martingales*, volume 49. Springer Science & Business Media, 2012.
- [HPS92] Richard H. Herman, Ian F. Putnam, and Christian F. Skau. Ordered Bratteli diagrams, dimension groups and topological dynamics. *Internat. J. Math.*, 3(6):827–864, 1992.
- [Kat80] Anatole Katok. Interval exchange transformations and some special flows are not mixing. *Israel J. Math.*, 35(4):301–310, 1980.
- [Kea75] Michael Keane. Interval exchange transformations. *Math. Z.*, 141:25–31, 1975.
- [Ker85] S. P. Kerckhoff. Simplicial systems for interval exchange maps and measured foliations. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 5(2):257–271, 1985.
- [LM95] Douglas Lind and Brian Marcus. *An introduction to symbolic dynamics and coding*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [Luc98] Isabelle Lucien. Mélange faible topologique des flots sur les surfaces. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 18(4):963–984, 1998.
- [MMY05] S. Marmi, P. Moussa, and J.-C. Yoccoz. The cohomological equation for Roth-type interval exchange maps. *J. Amer. Math. Soc.*, 18(4):823–872, 2005.
- [NR97] A. Nogueira and D. Rudolph. Topological weak-mixing of interval exchange maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 17(5):1183–1209, 1997.
- [Rau79] Gérard Rauzy. échanges d’intervalles et transformations induites. *Acta Arith.*, 34(4):315–328, 1979.
- [Sen06] E. Seneta. *Non-negative matrices and Markov chains*. Springer Series in Statistics. Springer, New York, 2006. Revised reprint of the second (1981) edition [Springer-Verlag, New York; MR0719544].
- [Tre13] Rodrigo Treviño. On the non-uniform hyperbolicity of the kontsevich–zorich cocycle for quadratic differentials. *Geometriae Dedicata*, 163(1):311–338, Apr 2013.
- [Vee82] William A. Veech. Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps. *Ann. of Math. (2)*, 115(1):201–242, 1982.
- [Vee84] William A. Veech. The metric theory of interval exchange transformations. I. Generic spectral properties. *Amer. J. Math.*, 106(6):1331–1359, 1984.
- [Ver82] Anatolii Moiseevich Vershik. A theorem on the markov periodic approximation in ergodic theory. *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*, 115:72–82, 1982.

- [Via06] Marcelo Viana. Ergodic theory of interval exchange maps. *Rev. Mat. Complut.*, 19(1):7–100, 2006.
- [Wal82] Peter Walters. *An introduction to ergodic theory*, volume 79 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [Zor96] Anton Zorich. Finite Gauss measure on the space of interval exchange transformations. Lyapunov exponents. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 46(2):325–370, 1996.
- [Zor06] Anton Zorich. Flat surfaces. In *Frontiers in number theory, physics, and geometry. I*, pages 437–583. Springer, Berlin, 2006.
- [Zor08] Anton Zorich. Explicit Jenkins-Strebel representatives of all strata of abelian and quadratic differentials. *J. Mod. Dyn.*, 2(1):139–185, 2008.