



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

RADIACIÓN DE HAWKING EN UN FLUIDO TRANSÓNICO: MEDICIÓN DE
PROPIEDADES TERMODINÁMICAS DE UN SISTEMA ANÁLOGO

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN CIENCIAS MENCIÓN FÍSICA

FABIÁN ESTEBAN SEPÚLVEDA SOTO

PROFESOR GUÍA:
CLAUDIO FALCÓN BEAS

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
GONZALO PALMA QUILODRÁN
ÁLVARO NUÑEZ VASQUEZ
GERMÁN VARAS SIRIANY

SANTIAGO DE CHILE
2019

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS FÍSICAS
POR: FABIÁN ESTEBAN SEPÚLVEDA SOTO
FECHA: 2019
PROF. GUÍA: CLAUDIO FALCÓN BEAS

RADIACIÓN DE HAWKING EN UN FLUIDO TRANSÓNICO: MEDICIÓN DE PROPIEDADES TERMODINÁMICAS DE UN SISTEMA ANÁLOGO

En este trabajo, utilizando técnicas de fluidodinámica, son medidas las amplitudes de ondas de longitud corta en un canal con flujo constante y obstáculos, para así obtener las propiedades de un agujero blanco análogo hidrodinámico, las cuales son fundamentadas mediante cálculos teóricos con base en la relatividad general aplicados al sistema fluidodinámico. Son medidas las amplitudes de ondas de longitud corta para 2 configuraciones de ubicación de obstáculos (lateralmente y en el fondo) en un canal recto de fondo plano, con 1 y 2 bombas de agua de similares características (2 caudales distintos) y profundidades distintas del fluido. Se relacionan las amplitudes de las ondas según lo estipulado por Hawking al demostrar matemáticamente la posibilidad de que agujeros negros puedan radiar de forma térmica, confirmando que el fenómeno es apreciable en este sistema, obteniéndose a su vez temperaturas análogas distintas en cada uno de los casos. Se comprueba experimentalmente el comportamiento teórico calculado que debía tener la temperatura análoga para las 2 configuraciones en función de los parámetros de cada realización. Las predicciones teóricas para cada configuración de obstáculos son corroboradas al generalizar las variables para cada experimento, encontrándose que es posible predecir la temperatura análoga para cada uno de los experimentos.

Este trabajo es dedicado a mis padres Fernando Sepúlveda y Lucía Soto, quienes me han apoyado incansablemente en toda mi vida y mis amigos que me han acompañado durante todo el proceso.

Agradecimientos

Agradezco el apoyo y la paciencia de todos y cada uno de los profesores que aportaron en mi formación tanto profesional como humana, a mi profesor guía Claudio Falcón Beas por su apoyo brindado durante el transcurso de mi investigación, a mis padres, mis amigos y mis mascotas por haber estado siempre ahí.

Tabla de Contenido

Introducción	1
1. Marco Teórico	8
2. Marco Experimental	19
3. Predicciones teóricas	24
4. Montaje Experimental	30
5. Analisis de datos	39
6. Resultados	43
7. Conclusiones	51
8. Bibliografía	53

Introducción

Los agujeros negros son objetos astronómicos (regiones en el espacio, ya que no son propiamente tales objetos como podría pensarse de un planeta o una estrella) que no son visibles mediante métodos ópticos directos, por tanto su forma de estudio ha sido en su mayoría teórica hasta fines del siglo XX. Sus características varían según su masa, carga eléctrica y momento angular, propiedades que son estudiadas teóricamente durante el mismo período, obteniéndose los primeros resultados experimentales con el telescopio LIGO a inicios del siglo XXI [1]. Se cuentan dentro de los objetos de mayor masa dentro de las galaxias, y se ubican principalmente en los centros de galaxias espirales [2], por lo que su detección es principalmente por observaciones astronómicas. Incluso, sus características tan inusuales han hecho pensar que no deberían existir, ya que estas son capaces de generar paradojas sin solución hasta ahora [2]. Es por tanto que su estudio se ha vuelto interesante tanto como su detección, para así dar respuesta al origen de su concepción en el siglo XVIII.



Figura 1: Imagen de un agujero negro utilizada en la película "Interestelar" de Christopher Nolan (2014). Es recreada en base a simulaciones de las ecuaciones que dominan estos objetos.

Fue en 1783 que John Michell [2], conociendo los conceptos de gravitación de Newton y velocidad de escape (la velocidad a la cual un cuerpo puede escapar del campo gravitacional de un objeto con masa), ideó en un objeto tan masivo (en comparación con el sol), que ni la luz que pudiese emitir fuese capaz de escapar de su campo gravitatorio. En el siglo XX, Einstein planteó que la velocidad de la luz debe ser constante en cualquier sistema no acelerado [2], lo que resultó en que los conceptos de tiempo y distancia (referidos a comparaciones con la velocidad de la luz) tengan validez en cada sistema inercial (cualquier sistema que cumpla con las 3 leyes de movimiento de Newton), generando los conceptos de tiempo propio

y distancia propia (tiempo y distancia medidos respecto a un observador que se encuentra inmerso en un sistema inercial). Lo anterior implica que cualquier acción poseerá una reacción no instantánea (ya que hasta ese entonces, se pensaba que las fuerzas a distancia actuaban de forma inmediata), y por tanto la gravitación tampoco queda fuera de esta implicancia. Finalmente esta unión de los conceptos de tiempo propio y distancia propia de la teoría de la relatividad especial, con la gravitación y las implicancias mencionadas anteriormente, pudo construir la teoría de la relatividad general.

Con la teoría de la relatividad general de Einstein, es entonces posible entender que la gravedad percibida es sólo el resultado de la deformación del espacio-tiempo gracias a la existencia de masa-energía (conceptos que ya no están separados). Esto queda descrito por su ecuación de campo, la cual relaciona estos conceptos, información almacenada en el tensor métrico. Como resultado colateral de la formalización creada por Einstein, aparecen soluciones a problemas que no podían ser explicados por la teoría de Newton clásica, tales como la precesión de Mercurio [3], la cual no poseía explicación salvo corrigiendo el potencial gravitatorio clásico (donde la energía potencial gravitacional disminuía linealmente con la distancia), corrección que emerge de forma natural en relatividad general, o las órbitas de las estrellas en los centros de masa de las galaxias [2], y predicciones hasta hace poco corroboradas como las ondas gravitacionales [1].

La comprobación de los efectos predichos por la teoría de relatividad general fue establecida por el astrónomo Arthur Eddington a inicios del siglo XX. La observación que podía tanto refutar como corroborar los planteamientos de Einstein, consistía en conocer la posición de las estrellas que pudiesen ser visibles durante un eclipse solar, por tanto conociendo la fecha y hora de dicho eclipse, saber las posiciones relativas de cada estrella al rededor del eclipse observado. Finalmente el experimento daría luces sobre el hecho si una masa comparable con el sol (mucho mayor a cualquiera utilizada en experimentos de laboratorios hasta ese entonces) era capaz de modificar la posición relativa de dichas estrellas, comprobaría que la masa es capaz de curvar efectivamente el espacio-tiempo. Con estas observaciones, Eddington dio la primera evidencia experimental de la teoría de la relatividad.

Utilizando las ecuaciones de campo de Einstein con la idea de Michell, de suponer un objeto tan inmensamente masivo que la velocidad de escape de este en su superficie fuese igual a la velocidad de la luz, Schwarzschild plantea en 1916 una solución para ambos aspectos [2], la cual modelaba un cuerpo masivo del cual la luz no era capaz de escapar (la velocidad de escape del cuerpo es igual a la velocidad de la luz), y por tanto haciendolo indetectable ópticamente. Esta solución representa un cuerpo esféricamente simétrico, con toda su masa concentrada en el centro. Esto da como resultado que todo elemento que se encuentre dentro del objeto (a un radio menor que el Radio de Schwarzschild, el cual definimos como $R_S = \frac{2GM}{c^2}$ con M la masa del cuerpo, G la constante de gravitación universal y c la velocidad de la luz), no podrá salir de éste, ya que la velocidad de escape sería mayor que la de la luz, lo cual si ocurriese generaría una contradicción con el postulado de Einstein (el cual asume que nada puede moverse más rápido que la luz). La superficie generada por la coordenada radial $r = R_S$ en la cual la velocidad de escape es igual con la velocidad de la luz se le denomina

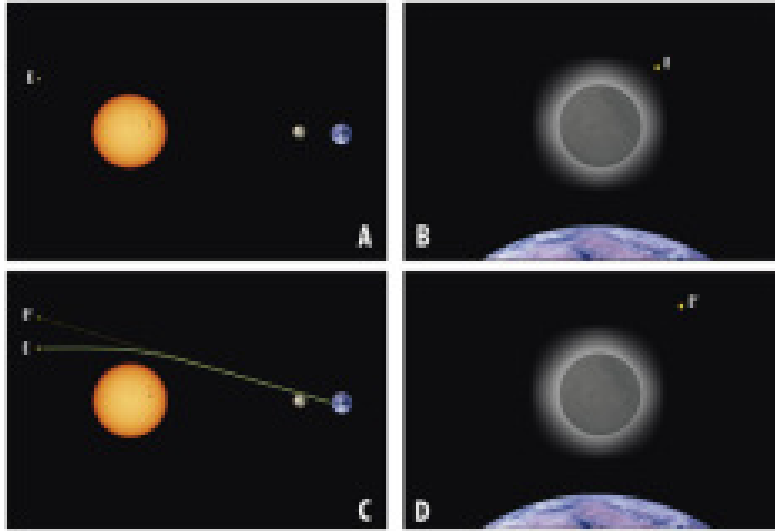


Figura 2: Representación gráfica de como la masa del sol es capaz de alterar la posición relativa observada de algunas estrellas. Este fue el caso que pudo observar Eddington al corroborar que la teoría de la relatividad general de Einstein era cierta. Fuente: [22]

horizonte de eventos.

Hasta ahora, se desconocía si este tipo de objetos astrofísicos eran realmente posibles de concebir en la realidad, sólo se tenía una idea de como deberían comportarse al modificar el espacio-tiempo. Fue en 1931 que Subrahmanyan Chandrasekhar, demostró que existe una relación entre la masa de una estrella y su potencial para formar agujeros negros. Todas las estrellas producen energía por medio de fusionar átomos ligeros generando como resultado átomos más pesados y liberando energía. La fusión de átomos surge de la alta presión y temperatura que se encuentra en el núcleo de las estrellas, de forma tal que la fuerza repulsiva Coulombiana que pueda existir entre los núcleos de los átomos no sea relevante. La fusión nuclear no continúa indefinidamente, ya que lo que propicia que 2 átomos se fusionan depende de si es energéticamente favorable (si la energía de ligazón por cada partícula en el núcleo que se formará por la fisión aumenta), por lo cual ésta posee un límite: Si la estrella llega a producir Hierro, esto marca la muerte de la estrella, ya que la estrella no podrá ya autosustentarse por su fusión nuclear, ya que todas las estrellas poseen un equilibrio entre la presión de electrones que genera la fusión y su propio colapso gravitacional. En el año antes mencionado, Chandrasekhar demostró que una estrella con una masa inferior a 1.24 masas solares, la presión ejercida por los electrones en la explosión frenará el colapso gravitatorio, y se convertirá en una enana blanca blanca luego de explotar. A este límite se le conoce como límite de Chandrasekhar. Ahora, si la masa de la estrella es mayor al límite de Chandrasekhar, la estrella (y menor a 5 masas solares) comenzará su proceso de contracción el colapso gravitatorio que no puede ser soportado por la presión de electrones. Si la contracción es muy rápida, esta se calienta abruptamente, explotando en una supernova, y si esta arroja gran parte de su masa hacia el espacio, el remanente serán una estrella de neutrones. Si la masa de la estrella es mayor a 5 masas solares, es posible que el colapso gravitatorio no pueda ser detenido, formando así un agujero negro.

En 1939, Robert Oppenheimer, usando las ecuaciones de relatividad general de Einstein, calcularon cual sería el futuro de una estrella esféricamente simétrica, de densidad homogénea y de una masa mayor al límite impuesto por Chandrasekhar. El resultado de su investigación es que esta estrella, luego de haber ya cumplido su vida de fusión nuclear, supondrá que el colapso gravitatorio se apoderará de la masa de ésta, y comenzará a contraer toda su masa remanente hasta que la superficie de ésta alcance el radio de Schwarzschild correspondiente, provocando que la masa de la estrella se comprima tanto que la gravedad en la superficie de ésta sea tal que ni la luz sea capaz de escapar de ella (la idea inicial que había planteado Michell). Es por tanto que a esta superficie esférica delimitada por el radio de Schwarzschild se le denomina horizonte de eventos.

En 1970, Jacob Bekenstein estudió las propiedades termodinámicas de los agujeros negros formados a partir del colapso gravitacional de estrellas masivas, y determinó que sólo hay 3 características que le dan su carácter a sus propiedades termodinámicas: la masa, el momento angular y la carga. Con esto, junto con Stephen Hawking subsecuentemente pudieron encontrar como la entropía de este objeto, dada por el material acregado hacia este mismo, dependía del área del área del horizonte de eventos que éste poseía (fórmula de Bekenstein-Hawking). Bekenstein dio una interpretación a este razonamiento a cerca de la entropía como una medida de la información perdida irremediamente durante el colapso gravitacional a través del horizonte de eventos al momento de surgir un agujero negro (interpretación aún vigente para los estudiosos de teorías de cuerdas). En 1971, Hawking pensó en aplicar elementos de mecánica cuántica y termodinámica sobre estos cuerpos para entender como estos conceptos interactúan y se relacionan con objetos inmensamente masivos. En el vacío a una escala de dimensión pequeña (escala cuántica), es posible crear un par partícula y antipartícula (ya que existe la posibilidad no nula de que esto ocurra) [4, 5], las cuales luego de un período pequeño de tiempo deberán destruirse entre sí (ya que esta creación es sólo válida por un período corto de tiempo, ya que está limitada por el principio de incertidumbre de Heisenberg). Sabiendo que este proceso estaba bien justificado, decidió realizar este mismo en las cercanías del horizonte de eventos de un agujero negro (donde la distancia al centro es igual al radio de Schwarzschild). Si el proceso ocurre de modo que una de las partículas quede dentro del horizonte y su contraparte queda en el exterior, ésta saldría emitida al infinito ya que debe existir conservación de energía-momentum. Esta conservación de momentum es posible gracias a que la amplitud de probabilidad total debe conservarse. Estas partículas emitidas son entonces la radiación de Hawking, y por tanto el medio por el cual los agujeros negros podrían perder su masa [4, 5]. En el límite termodinámico, es posible relacionar la amplitud de probabilidad de las partículas en este proceso, como radiación de cuerpo negro, esto a ya que para este proceso se supone que los pares creados son bosones (si fuesen fermiones, sus amplitudes de probabilidad quedarían reducidas a 0), y por tanto las partículas salientes con su estadística correspondiente [15]. Esto genera para el agujero negro que la interacción de los pares con el espacio curvado por la masa, posea una temperatura definida.

En 1981, William Unruh desarrolló lo que podría ser el análogo más simple desde el punto de vista experimental [6]. Tomando las ecuaciones de fluidodinámica que dominan las ondas de presión en un fluido incompresible sometido a flujo constante, encontró que la ecuación para las perturbaciones en la superficie de éste es equivalente a una ecuación de

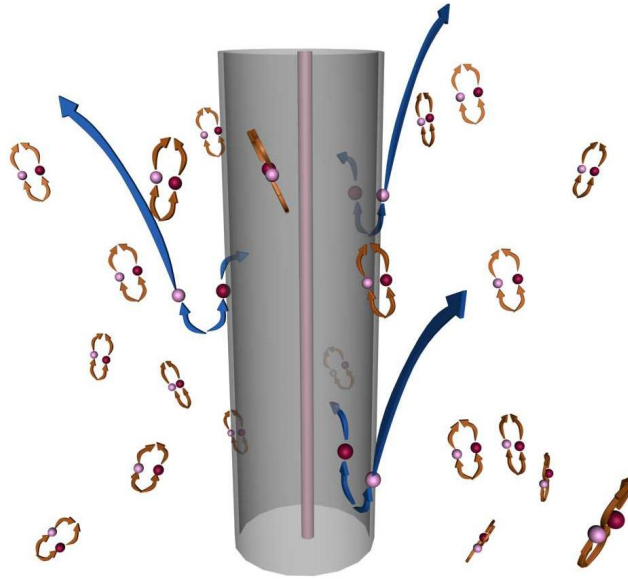


Figura 3: Al crearse un par de partículas, estas se aniquilarán al poco tiempo. En las cercanías de un horizonte de eventos (representado por el cilindro), una de las partículas sería absorbida, cayendo hacia el interior del agujero negro por la curvatura del espacio-tiempo, y su contraparte expulsada alejándose del objeto, perdiendo éste masa. Referencia: [23]

ondas en un sistema curvo. Para dicho sistema, si la velocidad del flujo es mucho mayor que la velocidad de propagación de ondas de superficie, la perturbación podría no propagarse o ser incluso arrastrada por el flujo, efecto parecido al que se puede apreciar cuando un fotón se acerca al horizonte de eventos de un agujero negro. Hawking, introduciendo conceptos de termodinámica demostró que los agujeros negros a su vez también poseían temperatura, por lo cual Unruh se planteó lo siguiente ¿Es posible que este análogo sea tal que pueda serle asociado alguna temperatura?[14]. De forma independiente, demostró que un observador que acelera, es capaz de percibir una radiación térmica del entorno sin necesidad de que el entorno efectivamente radie térmicamente. Esta idea fue acuñada inicialmente por Hawking al proponer el mecanismo de radiación de Hawking por el cual los agujeros negros podían perder masa al emitir radiación de forma térmica, donde la temperatura es proporcional a como acelera un observador en caída libre hacia el agujero negro en el horizonte de eventos. Esta forma generalizada de temperatura siendo proporcional a la aceleración mencionada, se le denomina Temperatura de Hawking-Unruh.

Conociendo que la analogía iniciaba con las perturbaciones de la superficie del fluido con las características anteriormente mencionadas, llegó a lo siguiente: tomar medidas a las amplitudes de ondas que puedan ser generadas en el análogo y poder relacionarlas de forma equivalente como si estas fueran amplitudes de probabilidad en el caso de agujeros negros, obteniendo una temperatura análoga que es medible de forma indirecta en laboratorio, y validando el experimento. Al ser posible calcular teóricamente la temperatura del agujero negro, Unruh utilizó las mismas herramientas termodinámicas para encontrar la temperatura análoga, ahora en función de los parámetros del experimento, y así comparar a posteriori el comportamiento de ésta.



Figura 4: El salto hidrodinámico puede generar un horizonte para las ondas superficiales de agua. Al interior del salto hidráulico la velocidad del fluido es mayor que la velocidad de las ondas sin el flujo en contra. Si se envían ondas desde el exterior del salto hidráulico (para provocar una emisión estimulada), se apreciaría que una onda penetraría levemente al interior del anillo del salto hidráulico y otra saldría desde el salto alejándose de este, provocando el efecto descrito en la Figura 3. Referencia: [24]

En 2011 Unruh comprobó experimentalmente que los efectos en el experimento llevado a cabo se corresponden al efecto descrito por Hawking [7], dándole validez al análogo hidrodinámico. La forma en que éste ejecutó el experimento fue enviando ondas superficiales de agua a contraflujo, las cuales interactúan con un obstáculo ubicado en el fondo, modificando localmente el campo de velocidades del fluido y de la onda, a modo de excitar ondas con longitud más pequeña y que serían arrastradas por el flujo, las cuales pueden o no existir dependiendo de los parámetros del montaje. La onda incidente al encontrarse con el obstáculo se transformará en una onda transmitida que sigue viajando a contraflujo y otra reflejada que viaja con el flujo. La onda reflejada es una superposición de 2 ondas de longitud corta y amplitud más pequeña que la incidente. Este fenómeno es equivalente a estimular un agujero blanco, el inverso temporal de un agujero negro, que emite un par de partículas según el mecanismo planteado por Hawking.

Conociendo el mecanismo de acción por el cual se genera la radiación de Hawking, se trata de encontrar sistemas de laboratorio, que es posible denominar como análogos, de forma que se parezcan al descrito anteriormente (un sistema que posea ecuaciones similares con comportamientos equivalentes a las encontradas en un agujero negro), de forma que el efecto análogo pueda ser medido en laboratorio. Se han encontrado variedades de sistemas análogos al anterior descrito, tales como guías de ondas [6, 8, 9], ondas de sonido, lasers en fibras ópticas con cambios de medios [10] y condensados de Bose-Einstein [11, 12], los cuales poseen características difíciles de controlar para la analogía deseada, y altamente sensibles a

los cambios de parámetros.

El objetivo principal de esta Tesis es verificar si el efecto puede ser obtenido utilizando una disposición distinta del obstáculo, ubicándolo lateralmente, de forma de sólo modificar la velocidad del agua y no la de la onda, ya que Unruh en [7] corroboró experimentalmente este análogo utilizando obstáculos dispuestos en el fondo del canal (disposición que se analizará en el capítulo de Montaje Experimental). Posteriormente, si esta verificación afirmativa, es decir, que la disposición lateral de los obstáculos genere efectivamente un análogo hidrodinámico de un agujero negro, se validará experimentalmente como la disposición del obstáculo afecta al análogo, para lo cual se obtendrán las temperatura análogas para montajes con obstáculos en el fondo, para así comparar cualitativa y cuantitativamente ambas disposiciones. También se desea emplear distintos obstáculos de forma trapezoidal, con pendientes iguales, pero de diversa altura, de forma de entender el comportamiento de la temperatura análoga como función de los parámetros en cada realización. Complementariamente, al poseer todos los datos, se estudiará como se relaciona la predicción teórica de las temperaturas análogas en cada tipo de montaje. Finalmente, sabiendo que un agujero negro al ser un objeto termodinámico, que posee entropía, presión y calor específico, se desea ampliar el entendimiento de este análogo desde el punto de vista de sus otras variables y entender su comportamiento en función de los parámetros experimentales.

Capítulo 1

Marco Teórico

En este capítulo se detallan los fundamentos teóricos que llevaron a Unruh a proponer un análogo hidrodinámico de un agujero negro [14], que parámetros, tanto en el análogo como en el sistema de relatividad general se consideran, y los fundamentos para identificarlo como un sistema análogo propiamente tal. Se explican a su vez que cantidades se relacionan entre ambos modelos a estudiar y como se relacionan. Se explicará cómo se obtiene la temperatura de Hawking para un agujero negro y su paralela temperatura análoga de Hawking, y como estas pueden ser obtenidas en función de sus parámetros. Se obtienen también las relaciones con otras variables termodinámicas como entropía, calor específico y presión, que no han sido estudiadas desde el punto de vista del análogo.

William Unruh en 1981 [14] pensó en un sistema que pueda poseer propiedades similares a las de un agujero negro, que pueda ser analizado en laboratorio. Inició estudiando las ondas de sonido de modo perturbativo para un fluido cualquiera. Al encontrar soluciones independientes del tiempo, y luego perturbarlas, logra finalmente una ecuación de ondas que las caracterice. En 2002 [15] utilizando un procedimiento equivalente al realizado en [14], al considerar las ecuaciones que caracterizan un canal con fluido incompresible, en donde \vec{v} es el campo de velocidades del fluido, P la presión dentro de este, g la aceleración de gravedad, z la altura respecto al fondo, que en el caso de un canal con fondo plano, coincide en dirección con la aceleración de gravedad, ρ su densidad y h_B la profundidad del fluido, llegó a su vez a una ecuación de ondas que equivalente a la anteriormente encontrada.

Dado que se utiliza un canal recto con agua, en donde supondremos que la viscosidad es despreciable ya que buscamos que el número de Reynolds (explicado más adelante en el Capítulo 4) sea pequeño. Se utilizó agua como fluido en este caso, ya que se buscan condiciones de velocidad del fluido donde esto suceda; y por tanto con la ecuación de Euler es posible explicar el movimiento del fluido gracias a las fuerzas que actúan sobre él

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla(gz) \quad (1.1)$$

Ya que el fluido a ocupar es agua, y los movimientos que en este se registrarán son de

caracter adiabático, es también importante el uso de la ecuación de continuidad para poder caracterizar el medio, en donde se tiene que la densidad es constante en todo el fluido

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.2)$$

Sabiendo que es necesario comprender como se comporta la presión interna del fluido, se plantea la ecuación de estado que relaciona estas las variables

$$P = P(\rho, z) = \rho g z \quad (1.3)$$

donde z es la altura de fluido sobre el punto en donde se mide la presión. Hay que destacar que esta presión es la que existe al interior sólo por el fluido, pero que no se ha considerado la presión atmosférica externa al fluido P_0 referencial que se fijará para efectos prácticos como $P_0 = 0$, por tanto para esta derivación nos referimos a la presión relativa.

Con las 3 ecuaciones antes mencionadas, es posible caracterizar el fluido, sin embargo, tratándose de un canal abierto con fluido incompresible, es necesario imponer las siguientes condiciones de borde. En lo que sigue, la profundidad será caracterizada por la variable z , en donde $z = 0$ corresponde al fondo del canal y $z = h_B$ la altura de agua sin perturbar.

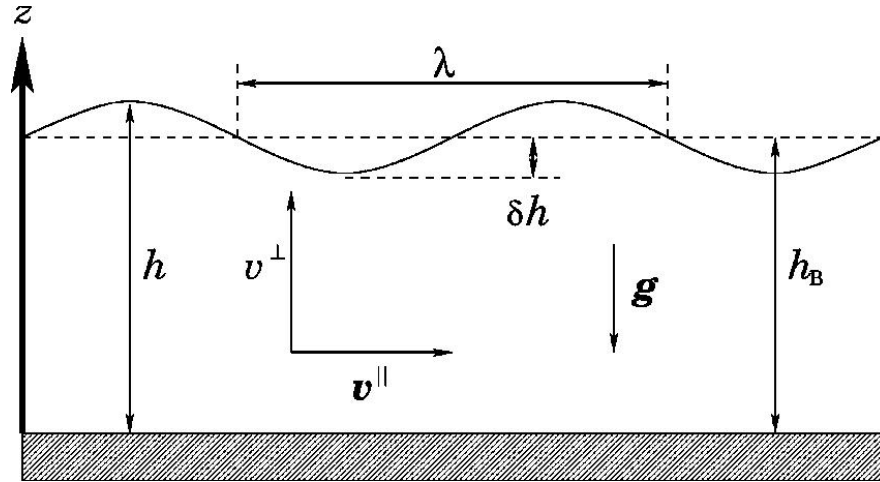


Figura 1.1: Imagen referencial de la generación de ondas en un canal recto con profundidad de agua h_B en donde se generan ondas con longitud λ . La notación δh denota la amplitud de las ondas generadas, v^\parallel es la componente del campo de velocidades paralela al fondo y v^\perp es su componente normal. esta imagen proviene de [15].

En lo que sigue, se utilizará la notación usada en la Figura 1.1 como referencia. Como en la superficie debe haber un equilibrio hidrostático entre en agua y el aire, imponemos que a la altura de la superficie sin perturbar se tenga (esto ya que la superficie del agua debe ser plana, referido esto a la condición dinámica del de la superficie sin considerar la tensión superficial para un fluido invíscido)

$$P(z = h_B) = 0 \quad (1.4)$$

esto ya que debe haber un equilibrio hidrostático entre los fluidos, pero como anteriormente se consideró por simplicidad imponer $P_0 = 0$, de forma general se obtiene que $P(z = h_B) = P_0$.

Dado que el fondo del canal es sólido, el agua no puede penetrarlo, por tanto imponemos que la componente perpendicular al fondo del canal del campo de velocidades debe ser nula (condición de no penetración)

$$v^\perp(z = 0) = 0 \quad (1.5)$$

donde v^\perp indica la componente perpendicular al fondo del canal de la velocidad, por tanto es la componente z del campo de velocidades según la Figura 1.1.

Finalmente en cualquier parte de la superficie del canal, ésta debe quedar libre, por lo que los movimientos verticales quedan dominados por la variación temporal de ésta y por la influencia que el flujo pueda tener sobre ella, por lo cual si designamos a η como una perturbación en la altura del fluido, se ve que las perturbaciones quedan dominadas por:

$$v_z(z = h_B) = v^\perp(\eta = h_B) = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (v^\perp \cdot \nabla)\eta \quad (1.6)$$

Dado que inicialmente se tiene un canal con flujo constante y sin perturbar, las soluciones sobre este es que cada una de las variables que lo definen (P, \vec{v}, ρ) son constantes. Para la velocidad, suponemos que la vorticidad en la superficie es despreciable ya que se utilizará un arreglo bidimensional para eliminar cualquier vorticidad generada por la entrada de fluido, por tanto para este caso es lógico suponer un flujo potencial, teniéndose que $\vec{v} = \nabla \phi$, siendo ϕ el potencial de velocidades que se perturbará para generar la ecuación de ondas.

Es posible descomponer la perturbación $\delta \phi$, en una serie de potencias con respecto a la profundidad (hacer una expansión de Taylor)

$$\delta \phi(x, y, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n}{n!} \delta \phi_{(n)}(x, y) \quad (1.7)$$

Reemplazando el potencial de velocidad en las ecuaciones de momentum y la condición cinemática de superficie, y luego derivando la condición cinemática de superficie perturbada, es posible encontrar una ecuación de derivadas parciales a segundo orden para la perturbación de más bajo orden $\delta \phi_{(0)}$. Adicionalmente, se supone que la longitud de onda λ de la perturbación es mucho más grande que la profundidad del canal ($\frac{h_B}{\lambda} \ll 1$), por lo que como

$\nabla^2 = O(\frac{1}{\lambda^2})$, conservamos los términos hasta máximo ese orden de derivación.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}_B \cdot \nabla)\right)^2 \delta\phi_{(0)} - gh_B \nabla^2 \delta\phi_{(0)} = 0 \quad (1.8)$$

Como se utiliza un método de perturbativo lineal, sólo se considera la perturbación de orden más baja. Esta es sólo una manera de llegar a la ecuación de onda vista anteriormente, ya que es posible llegar a la misma ecuación realizando perturbaciones lineales en el estado de equilibrio descrito (profundidad constante, flujo constante) [11, 14, 15].

Es posible reconocer que esta ecuación puede ser descrita como una ecuación de onda lineal dispersiva utilizando operadores diferenciales de tiempo y espacio [2, 11, 14, 15, 16]. De forma equivalente a la ecuación de ondas lineal para una cuerda ideal unidimensional, donde la velocidad de propagación de las ondas es constante c

$$\frac{\partial^2 f}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad (1.9)$$

la cual puede escribirse como

$$\square f = 0 \quad (1.10)$$

donde en este caso el operador de Laplace-Bertrami describe un espacio plano usando un tensor métrico adecuado

$$\square = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (1.11)$$

El tensor métrico es típicamente una matriz cuadrada que indica cómo se relacionan entre sí las variaciones de las coordenadas que describen un sistema. De éste depende como es posible medir distancias, ya que distintas geometrías (métricas) darán como resultado distintas formas de medirlas. Cuando es considerada la coordenada temporal, es posible medir ahora intervalos espacio-temporales. De acuerdo con la Relatividad General, la presencia de masa y/o energía altera la geometría del espacio. Este tensor brinda las características al operador de Laplace-Bertrami, que es un operador diferencial que considera las variaciones en la geometría del espacio.

Este operador posee información de la curvatura del espacio-tiempo, y por tanto de como es afectada la noción de distancia y de derivadas en el sentido geométrico. Integrando el aspecto geométrico que aporta el tensor métrico, resulta el operador de D'alambert escrito de forma genérica como

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) \quad (1.12)$$

donde $g^{\mu\nu}$ es el tensor métrico escrito de manera covariante (descrito con sus índices superiores) que relaciona las transformaciones de coordenadas entre distintos sistemas de referencia, y que posee coordenadas tanto de distancia como temporales, y $\sqrt{-g}$ es el determinante de dicho tensor [16, 17].

Realizando un procedimiento equivalente para la ecuación anteriormente encontrada, es posible, gracias a que las características del canal son constantes, encontrar una métrica asociada para poder describir la ecuación de onda (1.8) con el operador de Laplace-Beltrami de una forma más comprimida

$$\square \delta\phi_{(0)} = 0 \quad (1.13)$$

que es la misma ecuación (1.8) utilizando el operador \square anteriormente descrito.

Se encuentra, comparando la ecuación de D'Alembert con la ecuación de ondas (1.8) encontrada, sabiendo que los parámetros del experimento son constantes, finalmente un tensor métrico que posee la siguiente forma

$$g^{\mu\nu} = \rho_0 \begin{pmatrix} 1 & v_B \\ v_B & v_B^2 - gh_B \delta^{\mu\nu} \end{pmatrix}$$

donde por simplicidad se ha escrito el tensor métrico en 1+1 dimensiones. Este tensor será el tensor métrico base con el cual se fundamenta la analogía. Esta métrica aparece al intentar buscar una matriz $g^{\mu\nu}$ que pueda reproducir la ecuación encontrada (1.8) a partir de la ecuación (1.13) como se mencionó anteriormente.

Invirtiendo este tensor [15] (ya que es necesario para poder justificar matemáticamente la analogía), se encuentra que el tensor métrico finalmente puede ser escrito de la forma

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \frac{\rho_0}{c^2} \begin{pmatrix} -(c^2 - v_B^2) & -v_B \\ -v_B & 1 \end{pmatrix}$$

en donde $c^2 = gh_B$. Por tanto, si el sistema es tal que se cumple la condición que $c^2 - v_B^2 = 0$, el tensor poseerá una columna que su parte temporal se anulará, que genera que la noción de distancia no pueda ser bien descrita [2, 11], siendo la zona donde ocurre este

mismo efecto para una métrica de agujero negro llamada ergoesfera, la cual sucede a su vez con las métricas como por ejemplo de Schwarzschild o Kerr[6, 8, 9, 14, 15].

Ya que la condición de que la parte temporal de una métrica se anule, ocurre típicamente en agujeros negros, es posible comparar lo que ocurre con sus tensores métricos. Analizando el ejemplo más básico de un agujero negro sin carga eléctrica ni momento angular (tensor métrico de Schwarzschild) descrito en coordenadas esféricas por su simetría radial, la cual fue una de las primeras soluciones a las ecuaciones de Einstein para la estrella masiva planteada por Mitchell, un agujero negro

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (1 - \frac{R_S}{r})c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1 - \frac{R_S}{r})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin(\theta)^2 \end{pmatrix}$$

que también genera una condición de ergoesfera para cierta distancia al origen conocida como radio de Schwarzschild R_S , en este caso generando un horizonte de eventos que separa los fenómenos sublumínicos (al exterior del radio de Schwarzschild) de los superlumínicos (interior del agujero negro). Vale destacar que para esta solución, desde el horizonte hacia dentro del agujero negro, la velocidad de escape es mayor a la de la luz.

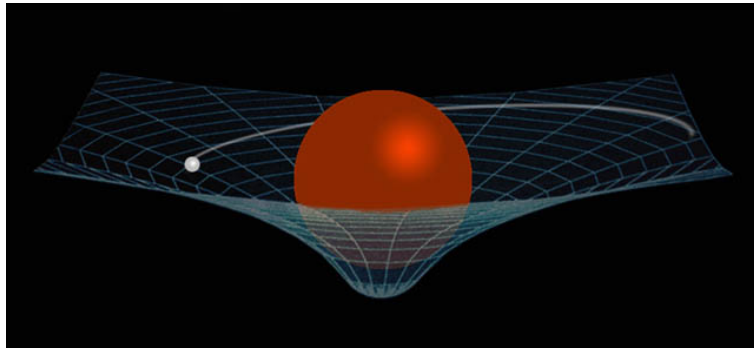


Figura 1.2: Representación gráfica de como la gravedad es capaz de deformar el espacio tiempo volviendolo curvo.

Luego, el sistema hidrodinámico planteado es un buen candidato a análogo de agujero negro, dado que ambos tensores son similares, y por tanto sus ecuaciones de onda. Dado que la cantidad $c^2 - v^2$ puede ser modificada en el canal ubicando obstáculos a lo largo de éste, de forma que $c = c(h)$ y $v = v(h)$, en donde $h = h(r)$, designando r como la distancia recorrida a lo largo del canal. Al ubicar obstáculos en el canal de fondo plano, es posible moldear a gusto como generar el horizonte como el de la métrica. Más adelante se relajará la hipótesis de que los obstáculos utilizados se ubiquen en el fondo, ya que sólo se necesita que la cantidad $c^2 - v^2$ sea modificada en la zona de los obstáculos. Luego, si los obstáculos son capaces de modificar de forma lenta esta cantidad para que el proceso sea lo más adiabático posible (sino

no se estarían respetando los supuestos del modelo), se puede obtener un horizonte similar al de un agujero negro.

En la Figura 3 de la Introducción se ejemplifica como sucede el efecto de radiación de Hawking. En el vacío a escala cuántica podemos generar teóricamente, gracias al principio de incertidumbre de Heisenberg, un proceso que consiste en que un par de partículas se cree y que al cabo de un período de tiempo pequeño estas se aniquilen. Esto es posible con la utilización de los operadores de creación y destrucción, de forma que estos al actuar sobre el vacío modifican el estado de éste (existe la posibilidad no nula que el vacío deje de estarlo), permitiendo que aparezcan campos que inicialmente no existían. Este proceso es llamado de creación-destrucción.

Analizando inicialmente el horizonte de eventos de un agujero negro, es posible generar este proceso de creación-destrucción en las cercanías de éste, esto ya que la única modificación respecto al vacío inicial usado para justificar el proceso, es que este espacio está dominado por una métrica. Es posible que una de las partículas sea generada al interior del horizonte de eventos y otra fuera. La que fue generada hacia el interior del agujero negro será atrapada por la curvatura del espacio-tiempo provocada por la inmensa masa de éste, mientras que la que quede en el exterior deberá ser emitida, dado que debe existir conservación de energía-momentum en el vacío cuántico. Las partículas y antipartícula creada [14, 18], poseen sus propias amplitudes de probabilidad $|\alpha|^2$ y $|\beta|^2$ (coeficientes de Bogoliubov) [18], las cuales serán las que se relacionan con la temperatura.

El proceso anterior se ilustra de la siguiente manera: ϕ^+ corresponderá, de acuerdo a los cálculos mostrados por Unruh en 6, y repetidos durante esta Tesis, a la función de onda de la partícula que se genera dentro del horizonte de eventos, mientras que ϕ^- corresponderá a la función de onda de la partícula que se crea fuera del horizonte de eventos, y que se aleja de éste. ϕ denota la función de onda de este proceso de creación y destrucción, la cual se asume normalizada, ya que para Hamiltonianos no dependientes del tiempo, ésta es posible normalizarla (esto también ocurre con las ondas de agua en el canal vistas anteriormente, al utilizar el método perturbativo).

$$\phi = \alpha\phi^+ + \beta\phi^- \tag{1.17}$$

La radiación emitida por este proceso (para las partículas salientes del agujero negro) es equivalente a la de un cuerpo negro, ya que, suponiendo que esta creación-destrucción sea generada por bosones [7, 15], ya que si fuesen fermiones el proceso no sería posible ya que sus amplitudes de probabilidad serían nulas, y por tanto la estadística de como son generadas queda dominada por una función de Bose-Einstein [19]. Por tanto la amplitud de probabilidad de las partículas emitidas queda dominada por

$$|\beta|^2 = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \quad (1.18)$$

A su vez, debe existir conservación de amplitud de probabilidad [18]

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \quad (1.19)$$

esto ya que $\langle \phi^+, \phi^+ \rangle = 1$, $\langle \phi^+, \phi^- \rangle = 0$ y $\langle \phi^-, \phi^- \rangle = -1$ [7]. Al usar las 2 ecuaciones anteriores, es posible llegar a una relación entre las amplitudes de Bogoliubov y la temperatura del medio en que estas partículas son creadas.

$$\frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} = e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \quad (1.20)$$

donde ω es la frecuencia angular de la radiación saliente del horizonte, \hbar la constante de Plank normalizada, k_B la constante de Boltzman y T la temperatura asociada [4, 5, 14, 15].

De acuerdo a lo anterior, es posible inferir que los agujeros negros son objetos astronómicos con una temperatura T definida por el proceso de interacción descrito, y que la radiación emitida por éste acarrea energía fuera de éste de forma termal. Para el caso de un agujero negro sin carga ni momento angular (agujero de Schwartzchild), ésta acarrea información de su masa, cantidad relacionada a su temperatura.

Utilizando la métrica de Schwarzschild y las herramientas termodinámicas señaladas, es posible encontrar cual es la temperatura de Hawking para un agujero negro de Schwarzschild de masa M mediante la utilización de los vectores de Killing para calcular la aceleración que percibe un observador al acercarse a la superficie de un agujero negro, donde Hawking en [4] encontró que la temperatura del agujero negro poseía la forma de

$$T = \frac{\hbar}{2\pi c k_B} \kappa \quad (1.21)$$

donde κ es la gravedad en el horizonte de eventos percibida gracias a la curvatura del espacio-tiempo. Luego, Hawking justificó dichos calculos en [5, 14] obteniendose finalmente su temperatura de Hawking de la forma

$$T = \frac{\hbar c^3}{G k_B} \frac{1}{8\pi M} \quad (1.22)$$

calculo que fue nuevamente obtenido por Unruh en [9].

Ahora, para poder relacionarlo con el candidato a análogo hidrodinámico, teniendo en cuenta la analogía existente entre el agujero y las ondas en un canal con flujo, se hace necesario tratar de replicar el efecto de radiación de Hawking en éste y crear un horizonte utilizando obstáculos como se había planteado anteriormente.

Para el sistema planteado [17], tomando la ecuación de ondas encontrada y aplicando las condiciones de borde a las que está sujeto el canal, es posible suponer soluciones de ondas planas en la superficie, llegando a la relación de dispersión de ondas de un canal recto sometido a flujo constante con profundidad constante h , en donde k es el vector de onda que se propaga en la dirección del flujo y ω la frecuencia angular de la onda plana

$$(\omega + vk)^2 = gk \tanh(hk) \quad (1.23)$$

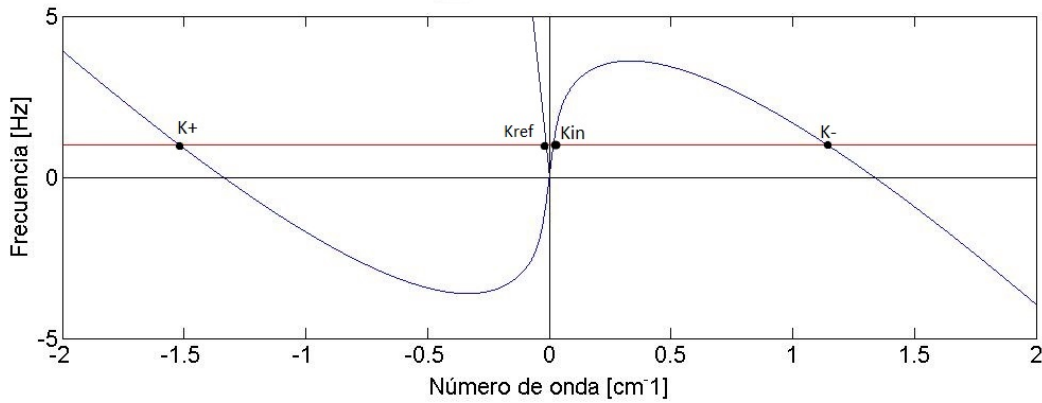


Figura 1.3: Relación de dispersión del canal con flujo constante.

donde el sistema de referencia es tal que el flujo avanza en dirección negativa. Esta forma de describir el sistema es utilizada genericamente por Unruh, y a su vez durante todo el trabajo realizado. Este exhibe para una frecuencia baja (menor a 5 Hz, que es aproximadamente la frecuencia de corte del sistema) 4 resonancias, y por tanto 4 ondas que poseen la frecuencia dada (en la figura se aprecian 2 con número de onda negativo y 2 con número de onda positiva). La resonancia denotada por K_{in} , es la onda incidente, de longitud de onda larga, que se desplaza a contraflujo y es generada por el vibrador electromecánico. Las ondas K_+ y K_- poseen números de onda positivo y negativo respectivamente, se desplazan en la dirección del flujo. Finalmente K_{ref} es una onda de longitud larga que se propaga en la dirección del flujo que es emitida desde el generador de ondas hacia la salida del canal. Finalmente, son sólo de interés para el experimento K_+ y K_- , las cuales serán medidas en el laboratorio.

La onda incidente que viaja a contraflujo es la que genera las otras 2 resonancias K_+ y K_- mostradas en la Figura 2.1 al interactuar con el obstáculo. Esta posee longitud larga comparativamente con las otras resonancias. La interacción de la onda incidente con el obstáculo

es lo que genera las otras 2 resonancias de longitud corta que se aprecian en la figura. Dada la dirección de las velocidades de propagación, el horizonte sónico creado por los obstáculos es el simil de un agujero blanco, la inversión temporal de un agujero negro, donde todos los calculos anteriores son equivalentes, y por tanto sigue siendo éste un correcto análogo del sistema.

Las ondas de longitud corta anteriormente mencionada, al tener velocidades de fase opuestas, son las ondas generadas en el horizonte de eventos que fueron descritas anteriormente, donde sus amplitudes serán la analogía de las amplitudes de probabilidad α y β anteriormente señaladas, siendo estas las que serán medidas durante la realización del experimento.

Finalmente las amplitudes de las ondas anteriormente mencionadas, corresponderán según lo que dicta la analogía a las amplitudes de probabilidad de los pares creados, y por tanto podrán ser relacionados como los coeficientes de Bogoliubov [5,16] anteriormente calculados. Según los datos que sean obtenidos, al ser posible encontrar una dependencia exponencial de la razón entre las amplitudes y la frecuencia de excitación, es de interés finalmente el coeficiente que acompaña a la frecuencia en la exponencial, ya que posee información del obstáculo que origina el efecto, dado que es la misma temperatura análoga.

La temperatura que es capaz de medir un observador no inercial, puede ser calculada utilizando el principio de equivalencia, como si éste percibiera radiación de cuerpo negro con temperatura

$$T = \frac{\hbar a}{2\pi c k_B} \quad (1.24)$$

donde a es la aceleración percibida por el observador en el sistema no inercial. Esto descrito por Unruh en [6, 15], para un observador cualquiera que acelera en un sistema no inercial, tomando como base los calculos realizados por Hawking, llamandose esta temperatura de Hawking-Unruh.

Para un agujero negro con radio de Schwarzschild R_S , se utiliza la métrica que describe la curvatura del espacio-tiempo para poder calcular la aceleración que percibe un observador cayendo en él. Se obtiene finalmente que la aceleración tiene la forma de

$$a = \kappa = \frac{c^2}{2R_S} \quad (1.25)$$

donde κ es la aceleración de gravedad percibida por un observador en el horizonte de eventos descrita anteriormente.

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \quad (1.26)$$

donde c es la velocidad de la luz, G la constante gravitación universal y M la masa del agujero negro. Para la masa del sol, siendo de aproximadamente $1.99 \cdot 10^{30}$ kg, el radio de Schwarzschild correspondiente sería de 3.16 km, y la aceleración dada la curvatura que generaría si fuese un agujero negro es de $1.33 \cdot 10^{13} \frac{m}{s^2}$.

Usando las mismas herramientas termodinámicas utilizadas anteriormente, ya que ambos sistemas son análogos, es posible llegar a que la aceleración que percibe la onda incidente al interactuar con la zona del obstáculo es de la forma

$$a = \frac{\partial}{\partial r}(c^2 - v^2) \quad (1.27)$$

por lo cual es posible predecir la forma que adquirirán las temperaturas análogas dependiendo del obstáculo que se utilice en la medición.

Adicionalmente, es posible también entender este análogo desde el punto de vista de otras cantidades termodinámicas, como la entropía, presión y calor específico, dado el carácter termodinámico, añadiendo validez al análogo.

Capítulo 2

Marco Experimental

En este capítulo se explican los parámetros experimentales usados, que condiciones fueron necesarias evaluar la realización del montaje y se describe el montaje utilizado de forma genérica. Adicionalmente son usadas las ecuaciones de fluidodinámica para calcular cotas para discernir que dimensiones físicas serán utilizadas en el montaje.

Es necesario encontrar parámetros del experimento para que el efecto de radiación de Hawking análogo sea apreciable en las mediciones de laboratorio. Es por tanto que las longitudes de onda y las amplitudes a analizar sean detectables por los equipos, así como que las dimensiones del experimento sean viables para su ejecución en laboratorio. Adicionalmente, es necesario que todas las ondas medidas sean distinguibles. Se deben cumplir ciertas condiciones para que las ecuaciones que gobiernan el sistema análogo, expuestas por el marco teórico planteado en el Capítulo 1 sea consistente con la realización del experimento. En lo siguiente, las variables mostradas en este capítulo corresponderán a:

- a.- K número de onda incidente, correspondiente al $\frac{2\pi}{\lambda}$, con λ la longitud de onda.
- b.- A amplitud de la onda incidente.
- c.- h_B profundidad de agua en el canal fuera de la zona del obstáculo.

Para esto imponemos 3 condiciones básicas [13]:

- 1) El regimen sea lineal para la onda incidente: $KA < 1$.
- 2) El sistema se encuentre en el régimen no dispersivo para la misma onda incidente: $Kh_B < 1$.
- 3) En el sistema predomine la generación de ondas de número de onda pequeños por parte del vibrador electromecánico (número de Ursel, comparando las 2 cantidades anteriormente mencionadas): $\frac{A}{h_B^3 K^2} < 1$.

Conociendo que el equipamiento es tal que la amplitud que puede alcanzar el generador de ondas electromecánico es $A \in [1,00 - 2,50]$ cm, ya que se utilizará un vibrador electrome-

cánico que de una amplitud mayor a la señalada, se obtienen los siguientes parámetros sobre el experimento:

1) $K \in [0,10 - 1,00] \text{ 1/cm}$

2) $h_B \in [1,50 - 1,00 \times 10] \text{ cm}$

Usando las cotas anteriores en la relación de dispersión, es posible encontrar cotas para la velocidad que percibe la onda incidente (la velocidad usada en la relación de dispersión como resultado del efecto Doppler), y por tanto un rango de caudal necesario que puedan generar las bombas de agua, con el fin de que el obstáculo pueda excitar las 2 ondas de longitud corta. Se desea que éstas sean distinguibles entre ellas como ya se había mencionado, por lo tanto se establece que el rango de medición sea entre frecuencias de $0,50 \text{ Hz} < f < 1,00 \text{ Hz}$, generando un rango de velocidades de

3) $v \in [6,50 - 1,56 \times 10^2] \text{ cm/s}$

El rango de frecuencias a utilizar (entre 0.50 y 1.00 Hz), indica que las longitudes de onda (de las ondas secundarias) a medir variarían entre 0.45 y 1.55 cm, las cuales son distinguibles por la cámara durante la medición durante el tratamiento de los datos. Teniendo en cuenta que se desean utilizar 2 posiciones distintas en los obstáculos para la generación del efecto (de fondo y laterales), se relacionan los parámetros en la zona del obstáculo y fuera de éste, para así encontrar que parámetros son efectivos respecto a generar el efecto análogo, para así poder construir a posteriori los obstáculos, por lo que utilizamos variables con subíndice 0 fuera del obstáculo (después del obstáculo, en la zona que se pretende medir) y 1 en la zona del obstáculo, relacionándolas con las siguientes ecuaciones.

Para lo que sigue, este esquema en la Figura 2.1, ejemplificará la utilización de las variables después del obstáculo y sobre el obstáculo. Como el canal es cerrado y sin fugas, es correcto suponer que el volumen de agua por unidad de tiempo que pasa por la zona del obstáculo es el mismo que pasa por la zona final del obstáculo, por lo tanto, siguiendo con la notación descrita anteriormente

$$h_0 w_0 v_0 = h_1 w_1 v_1 \tag{2.1}$$

donde se han igualado el caudal medido desde fuera del obstáculo $Q_0 = h_0 w_0 v_0$ y sobre (o entre medio) del obstáculo $Q_1 = h_1 w_1 v_1$.

Además, dado que la viscosidad del agua en este caso es despreciable (ya que se utilizará

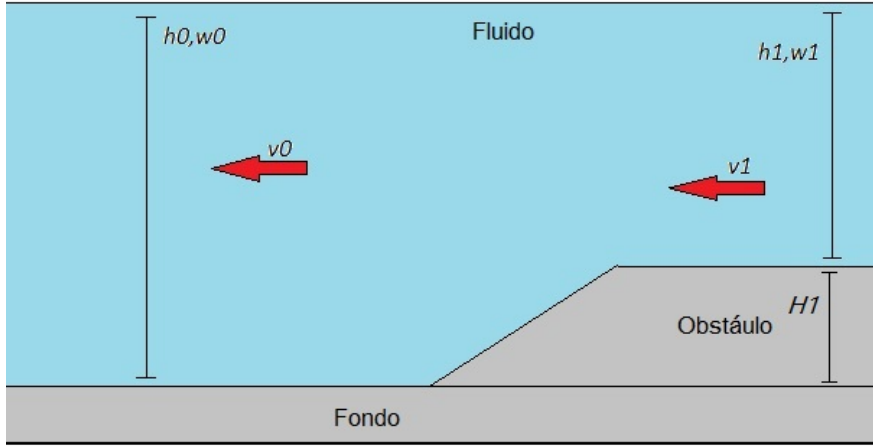


Figura 2.1: Esquema que ejemplifica las variables a tratar en el marco experimental, comparando las variables con y sin obstáculo denotando con subíndices 0 como la zona fuera del obstáculo y subíndices 1 en la zona del obstáculo, para poder obtener el rango de parámetros a utilizar en el experimento.

agua como fluido y el número de Reynolds es parecido al de Unruh en su experimento, el cual detallaremos más adelante), la energía es conservada, y por tanto relacionamos la energía por unidad de volumen en la zona del obstáculo y después de este

$$\frac{1}{2}v_0^2 + gh_0 = \frac{1}{2}v_1^2 + gh_1 \quad (2.2)$$

las cuales son necesarias para poder relacionar como afecta la presencia del obstáculo a la generación del efecto análogo, y por tanto conocer si es posible generar ambas ondas de longitud pequeña al posicionarlo.

Reemplazando la primera ecuación en la segunda, se llega a la siguiente ecuación adimensional con parámetros δ , τ y z

$$(\delta + 1)z^2 - z^3 = \delta\tau^2 \quad (2.3)$$

donde las cantidades actuales pueden relacionarse con las anteriores del canal de la siguiente forma

$$z = \frac{h_0}{h_1} \quad (2.4)$$

$$\delta = \frac{v_1^2}{2gh_1} \quad (2.5)$$

$$\tau = \frac{w_1}{w_0} \quad (2.6)$$

La ecuación adimensionalizada tiene solución si para la función

$$f(z) = (\delta + 1)z^2 - z^3 \quad (2.7)$$

se cumple la siguiente condición

$$f_{MAX} \geq \delta\tau^2 \quad (2.8)$$

Maximizando la función, se obtiene que

$$f_{MAX} = \frac{4(\delta + 1)^3}{27} \quad (2.9)$$

Es por tanto que se decide la construcción de un canal translucido para poder observar las ondas que se propagan a contraflujo hacia el obstáculo lateralmente. Como se desea que $\delta \leq \frac{1}{2}$, ya que es la condición para que la onda incidente no se propague a lo largo del obstáculo y puedan ser generadas las resonancias que serán medidas para la obtención de la temperatura (obteniendo el efecto de radiación de Hawking análogo), mismo tipo de condición que se puede apreciar en el experimento de Unruh en [7]. Imponemos una condición para el cambio de ancho del canal a utilizar de $\tau \geq \frac{1}{4}$, de forma tal que si esto no es posible, no se apreciarían las ondas de longitud corta que se desean medir, corroborado experimentalmente.

El largo del canal se establece de forma que la entrada del flujo no afecte la zona de medición, dejando al menos 1.00 m de separación entre la entrada del agua y la zona de medición, de modo que la entrada del agua no genere ondas que afecten las mediciones, además de tener la distancia suficiente entre el generador de ondas y el obstáculo para que la onda incidente sea lo más plana posible. Adicionalmente, entre el obstáculo y la entrada de agua se pondrá un arreglo bidimensional de cilindros que propicien que el flujo que interactúa inicialmente con el obstáculo sea laminar. El alto y el ancho se elige de forma que puedan ser probadas distintas profundidades de agua en la zona del obstáculo, principalmente para obstáculos ubicados en el fondo, y de poder utilizar variedad de altura y anchos en los obstáculos, para así poder estudiar como el efecto análogo es afectado por diversos parámetros. Se construye finalmente un canal de 8 cm de ancho, 10 cm de alto y 160 cm de largo al cual se le ubicarán a obstáculos de fondo y laterales. Se usarán distintas alturas del flujo dependiendo si es posible observar el efecto, por lo que se usan los siguientes parámetros.

Alturas de los trapecoides: cm	1.20	1.50	1.70	2.00	2.20	2.50	2.70
Profundidad: 3.50 cm	2.30	2.60	2.80	3.10	3.30	3.60	3.80
Profundidad: 4.00 cm	2.80	3.10	3.30	3.60	3.80	4.10	4.30

Tabla 2.1: Profundidades utilizadas para obstáculos de fondo, utilizando 2 bombas de agua.

Finalmente, con este grupo de parámetros se obtendrán los resultados acerca de la teoría de agujeros análogos que se pretende estudiar.

Alturas de los trapezoides: cm	1.20	1.50	1.70	2.00	2.20	2.50	2.70
Profundidad: 3.00 cm	5.60	5.00	4.60	4.00	3.60	3.00	2.60
Profundidad: 3.20 cm	5.60	5.00	4.60	4.00	3.60	3.00	2.60
Profundidad: 3.50 cm	5.60	5.00	4.60	4.00	3.60	3.00	2.60

Tabla 2.2: Ancho entre los obstáculos utilizados para obstáculos laterales, utilizando 1 bomba de agua.

Alturas de los trapezoides: cm	1.20	1.50	1.70	2.00	2.20	2.50	2.70
Profundidad: 3.50 cm	5.60	5.00	4.60	4.00	3.60	3.00	2.60
Profundidad: 4.00 cm	5.60	5.00	4.60	4.00	3.60	3.00	2.60
Profundidad: 4.30 cm	5.60	5.00	4.60	4.00	3.60	3.00	2.60

Tabla 2.3: Ancho entre los obstáculos utilizados para obstáculos laterales, utilizando 2 bombas de agua.

Capítulo 3

Predicciones teóricas

En este capítulo se presentan los resultados de los cálculos teóricos referente a como la pendiente que se obtiene de graficar el logaritmo natural de la razón entre las amplitudes de las ondas de longitud corta en función de la frecuencia (expuesto en Capítulo 1) puede quedar en función de los parámetros de cada experimento. Adicionalmente se expone como se obtienen las variables termodinámicas de entropía, presión y calor específico, y como estas se relacionan con la variable central que es la temperatura análoga medida.

Designaremos de ahora en adelante la variable a como la aceleración que sufre un campo escalar que interactúa con un tensor métrico. Por tanto utilizando lo encontrado en el Capítulo 1, es sabido que la aceleración que sufren las ondas del canal propuesto al interactuar con el obstáculo, puede ser escrito de forma genérica como

$$a = \frac{\partial}{\partial r}(c^2 - v^2) \quad (3.1)$$

donde v es la velocidad del flujo y c es la velocidad de la onda si no hubiese flujo. Esta expresión debe ser evaluada con los parámetros de profundidad (h), ancho (w) y caudal (Q) en la cima de los obstáculos, donde la onda finalmente interactúa con el cambio de medio.

Conociendo ya la ecuación (1.18), la cual relaciona las amplitudes de las ondas medidas con la frecuencia de excitación, se tiene que es posible relacionar la pendiente de ajuste con la temperatura análoga como

$$\text{Log}_e\left(\frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2}\right) = -\frac{\hbar\omega}{k_B T} = -\frac{\hbar f}{2\pi k_B T} = -mf \quad (3.2)$$

además de comprender el resultado del efecto Unruh de como un observador acelerado es capaz de percibir una radiación de cuerpo negro de la siguiente forma:

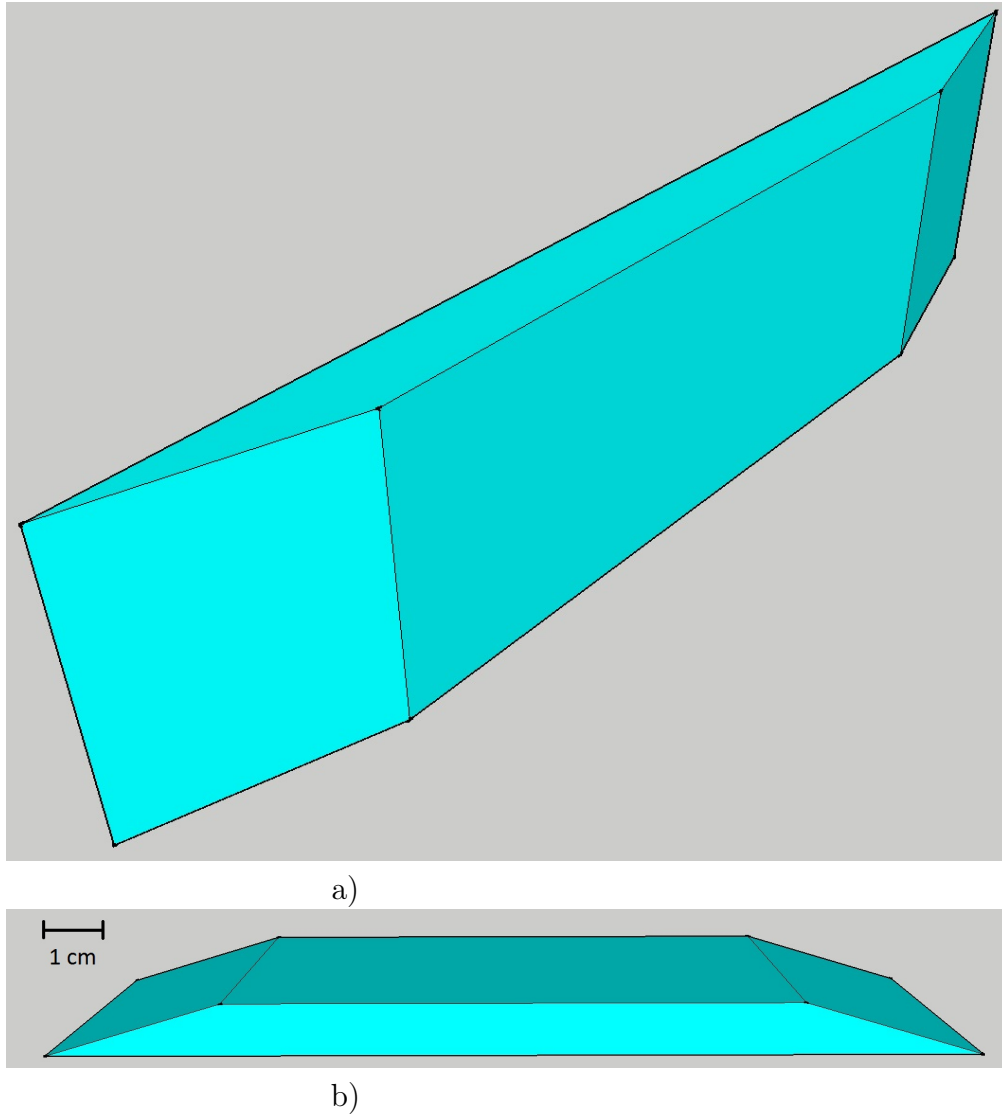


Figura 3.1: Modelos de los obstáculos utilizados en el canal para generar el efecto de radiación de Hawking análogo en donde en la figura a) corresponde a un obstáculo trapezoidal de 1.5 cm de altura, 20 cm de largo y un ángulo de 16 grados ubicado verticalmente. La figura b) corresponde al mismo obstáculo posicionado horizontalmente.

$$T = \frac{\hbar a}{2\pi c k_B} \quad (3.3)$$

Luego es posible uniendo las ecuaciones (3.2) y (3.3), que la pendiente de ajuste puede ser predicha como

$$m = \frac{c}{a} \quad (3.4)$$

Para poder estudiar dicha predicción desde el punto de vista de los parámetros utilizados en el experimento, se desarrolla algebraicamente la ecuación (3.1) para poder predecir el comportamiento de las pendientes. Estos parámetros son evaluado finalmente en la cima de los obstáculos, zona en la cual al interactuar con la onda incidente causa la emisión de ondas de longitud corta que se desean medir [7, 21].

Para obstáculos de fondo y laterales los valores de las aceleraciones tienen distintas expresiones, ya que en el primer caso c y v varían a lo largo del canal, mientras que en el segundo sólo v varía a lo largo de este, y por tanto los comportamientos de las pendientes en cada caso son distintos.

En lo que sigue, denotaremos las variables h' y w' como sus variaciones respecto a lo largo del canal, o sea $h' = \frac{\partial h}{\partial r}$ y $w' = \frac{\partial w}{\partial r}$.

Ahora es posible finalmente usar las relaciones descritas en las ecuaciones 2.18, 2.22, y 4.1 para así poder obtener el valor teórico de las pendientes en función de los parámetros utilizados en los experimentos. De forma general, es posible escribirlas como:

$$m_{general}^{-1} = h' \left(\frac{gwh}{Q} + \frac{2Q}{wh^2} \right) + w' \left(\frac{2Q}{hw^2} \right) \quad (3.5)$$

en donde podemos distinguir las pendientes para los obstáculos laterales como

$$m_L^{-1} = -2w' \frac{Q}{hw^2} \quad (3.6)$$

y de los obstáculos de fondo como

$$m_F^{-1} = -h' \left(\frac{gw}{Q} h + 2 \frac{Q}{wh^2} \right) \quad (3.7)$$

Finalmente, a posteriori es posible utilizar estas expresiones para entender las otras variables termodinámicas como función de los parámetros de cada experimento.

Para entender el comportamiento de la entropía análoga, primero es necesario entender la de un agujero negro, para posteriormente puedan ser relacionados a través de la cantidad a . Según la formula Bekenstein-Hawking [2], se tiene que ésta depende del área del agujero negro como

$$S = k_B \frac{A}{4l_P^2} \quad (3.8)$$

donde se denota A por el área del agujero negro y l_P el largo de Planck que puede ser descrito como

$$l_P^2 = \frac{\hbar G}{c^3} \quad (3.9)$$

Ahora, para un agujero negro $a = \frac{c^2}{2R_S}$, por lo que la entropía puede ser descrita finalmente en función de la temperatura. Por lo anterior, es posible relacionar la entropía análoga con la temperatura análoga de la misma forma en que para un agujero negro puede ser descrita por su propia temperatura. Finalmente la entropía puede ser descrita en función de la temperatura T como

$$S = \frac{\hbar c^5}{16\pi G k_B} \frac{1}{T^2} \quad (3.10)$$

Es posible por tanto describir este objeto termodinámico extendiendo la forma de sus otras variables, particularmente del calor específico y la presión. Conociendo que el calor específico puede ser descrito desde el punto de vista de la termodinámica como [19]

$$c_p = -T \frac{\partial S}{\partial T} \quad (3.11)$$

y la presión, sabiendo que puede ser descrita como [19]

$$P = T \frac{\partial S}{\partial V} \quad (3.12)$$

en donde es posible relacionar el calor específico con la temperatura como

$$c_p = \frac{\hbar c^5}{8\pi G k_B} \frac{1}{T^2} \quad (3.13)$$

y adicionalmente es posible utilizar las cantidades anteriormente calculadas para entender como se comporta la presión en función de la temperatura análoga obtenida

$$P = \frac{2\pi k_B^2 c^3}{G \hbar^2} T^2 \quad (3.14)$$

obteniéndose finalmente como la temperatura análoga puede ser relacionadas con las cantidades termodinámicas, por tanto con estas se generarán los ajustes necesarios para cada resultado obtenido, en conclusión que

$$S \propto T^{-2}, P \propto T^2, c_p \propto T^{-2} \quad (3.15)$$

Adicionalmente, la ecuación (1.8)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}_B \cdot \nabla)\right)^2 \delta\phi_{(0)} - gh_B \nabla^2 \delta\phi_{(0)} = 0 \quad (3.16)$$

es equivalente en el contexto de la teoría cuántica de campos, al efecto que sufre una partícula libre sin masa en la métrica mencionada en el Capítulo 1 (en el análogo, simulando un agujero negro), donde para el análogo hidrodinámico es solo una ecuación de ondas superficiales.

Posteriormente, si se deseara incluir la tensión superficial (donde podría ser de interés a posteriori la conversión de ondas de longitud larga a ondas capilares) para el estudio de este análogo, no sólo desde el punto de vista de las variables termodinámicas ya mencionadas, sino de cómo esta nueva variable puede influir en el modelo original de agujeros negros, es de interés al menos desde el punto de vista matemático lo que podría aportar este nuevo concepto.

Al considerar la tensión superficial, se obtiene una condición para la presión en la superficie del fluido

$$p(z = h) = -\gamma \nabla^2 h \quad (3.17)$$

utilizando la notación de la Figura 1.1, donde en este caso ω es el coeficiente de tensión superficial del fluido.

Luego, es posible encontrar la siguiente ecuación diferencial, parecida a (1.8).

$$\frac{\gamma h_B}{\rho} \nabla^4 \delta\phi_{(0)} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}_B \cdot \nabla)\right)^2 \delta\phi_{(0)} - gh_B \nabla^2 \delta\phi_{(0)} = 0 \quad (3.18)$$

en donde esta modificación es sólo válida cuando se consideran las interacciones a escala capilar, las cuales podrían ser objeto de estudio para algún otro tipo de análogo o un tipo de interacción distinta para el caso del agujero negro análogo estudiado durante esta tesis.

Este por tanto posee una densidad lagrangiana de la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} ((\partial_t \delta\phi_{(0)})^2 + 2(v_B \cdot \nabla \delta\phi_{(0)}) \partial_t \delta\phi_{(0)} + (v_B^2 - gh_B) (\nabla \delta\phi_{(0)})^2) - \frac{\gamma h_B}{2\rho} (\nabla^2 \delta\phi_{(0)})^2 \quad (3.19)$$

donde la primera parte corresponde al Lagrangiano del sistema sin considerar la capilaridad, la cual coincide con en forma con la energía de un campo sin masa en un espacio con

la métrica descrita por Unruh al analizarlo desde el punto de vista de cuántica de campos [18], que al utilizar la forma generalizada de las ecuaciones de Euler-Lagrange para órdenes mayores, es capaz de obtenerse la ecuación (3.18). Esta puede ser de interés al analizarla desde el punto de vista de teoría de campos como ya se mencionó.

Capítulo 4

Montaje Experimental

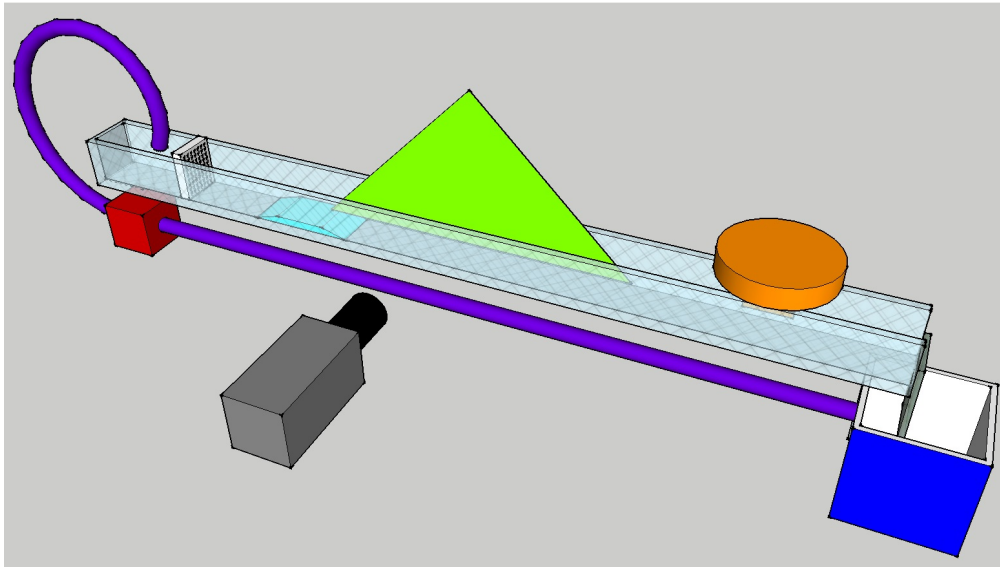
En este capítulo se explica los componentes del montaje, los materiales utilizados y los parámetros dimensionales que se utilizan. Se explica la forma de obtención de datos y tratamiento de imágenes para la detección de la interfaz.

En el experimento es medida la amplitud de las ondas de longitud corta (longitud menor a $1/5$ de la onda incidente, aproximadamente entre 0.70 y 2.50 cm) de forma tal que puedan ser diferenciadas cada una separadamente, por tanto se mide en un rango en que frecuencias bajas (menor a la frecuencia de corte en la que la longitud de onda de la onda incidente es comparable con una de las que se propagan a contraflujo).

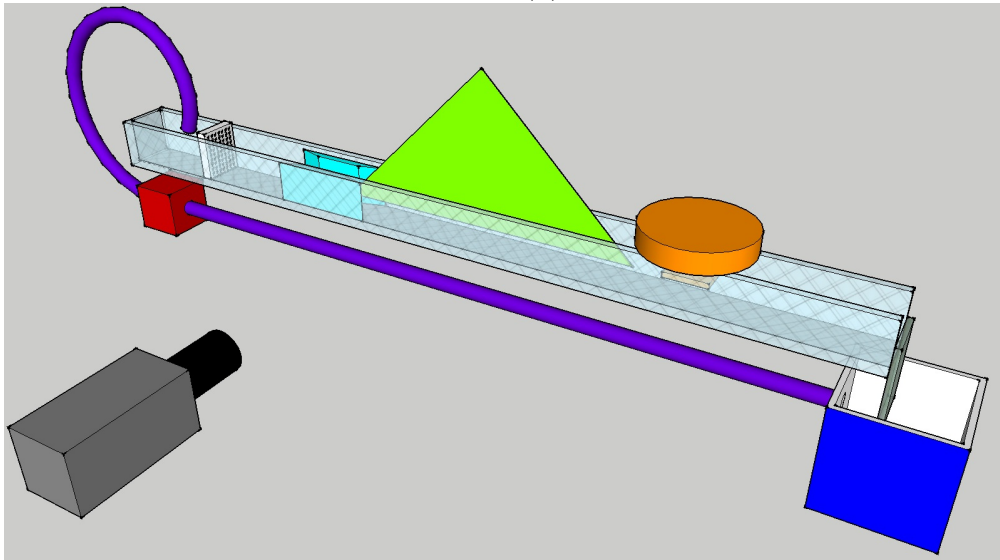
El canal se construyó de acrílico transparente de 0.10 cm de espesor, con uno de sus extremos abierto, de forma tal que éste desague de forma natural en un receptáculo en el cual se recolecta el fluido, retornándolo con bombas de agua de vuelta al inicio de este. Esto crea un sistema cerrado con flujo constante. En él se ubican obstáculos con el fin de excitar ondas de longitud corta, las cuales serán las medidas, como se explicó en los Capítulos 2 y 3. Este sistema es ubicado en el Laboratorio de Materia Fuera del Equilibrio (LMFE) del Departamento de Física (DFI), en la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile.

Como se muestra en las Figuras 4.1 a y b, la hoja laser es desplegada entre los obstáculos y el vibrador electromecánico, convirtiendo ésta en la zona de medición y por tanto de interés para el experimento, basando este tipo de medición en [21], donde Rousseaux explica la forma de medición de Unruh para detectar las ondas de longitud corta que son emitidas por el efecto de radiación de Hawking. Las ondas producidas sobre la zona del obstáculo o después de este, no son de interés al menos para lo que respecta a este experimento.

El flujo es generado por bombas de agua sumergibles SICCE modelo IDRA. De esta forma es posible controlar el flujo utilizando a voluntad 1 o 2 bombas, las cuales se encuentran en un receptáculo en el extremo terminal del canal (como se había mencionado) que recoge el agua, para así redirigirlo al inicio del canal, generando el flujo constante, para así poder



(a)



(b)

Figura 4.1: Esquemas de las diferentes disposiciones de obstáculos en el canal. (a) Esquema para obstáculo ubicado en el fondo del canal. (b) Esquema para obstáculos ubicados lateralmente.

estudiar el comportamiento en sistemas de distintos caudales.

Para la iluminación del espacio de medida se utilizó un laser de perfil gaussiano de longitud de onda de 501-561 nm y potencia máxima de 500 mW, marca CNI modelo MGL532, el cual se hace pasar por una lente cilíndrica de 2 mm de diámetro, generándose un plano (hoja laser) que ilumine en la dirección que nos parezca conveniente, por tanto un plano perpendicular a la superficie que se necesita excitar.

El fluido es entintado con Tetrabromo-(5)-fluoresceina con una concentración de 5 mg por

litro, de forma tal que reaccione con un laser de longitud de onda de 506-561 nm, fluorescente ante dicha longitud de onda, que por tanto reaccionará con la hojala laser dispuesta.

Para la excitación de las ondas de superficie, se utilizó un generador electromecánico PASCO modelo SF-9324, conectado con un generador de funciones Rigol DG1022 y un amplificador de potencia MAX 710X, generando ondas de amplitud inicial de 2 cm. Se generaron muestras de frecuencia entre 0.50 y 1.00 Hz, dado que se necesitan medir las amplitudes de las ondas que se propagan en la dirección del flujo que poseen una longitud de onda corta comparativamente con la onda incidente.

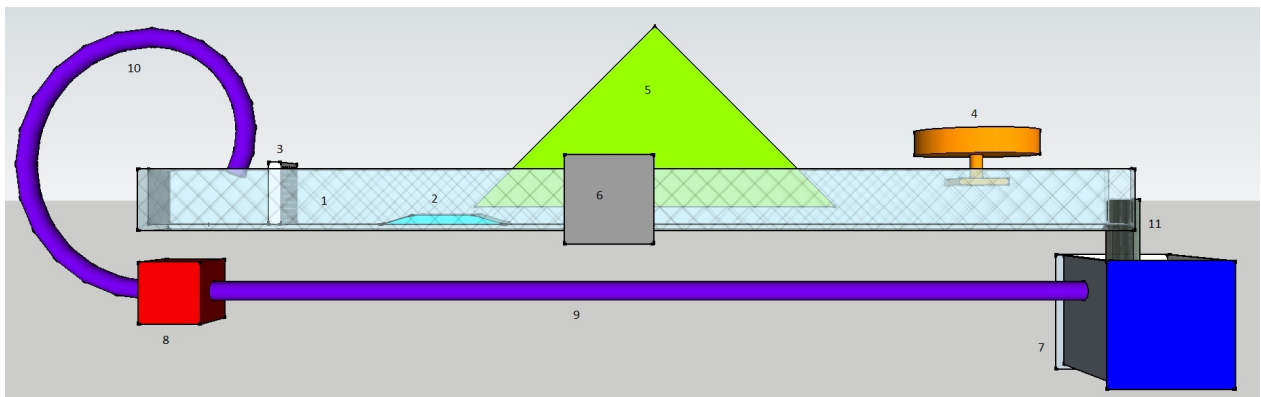
Para laminarizar el flujo se interpone un arreglo bidimensional de bombillas de 2 mm de diámetro y 5 cm de largo entre la entrada de agua y la zona del obstáculo, de modo que cualquier perturbación entrante generada por la reinsertión de agua sea atenuada.

Para la toma de datos, se graba lateralmente la superficie del agua una cámara PIXELINK PL-B741U. El lente posee una distancia focal de 28.0 cm, muestreando un área de $8 \times 13 \text{ cm}^2$ en 780×1280 pixeles, y una frecuencia de adquisición de 50 cuadros por segundo, obteniéndose en cada realización 3000 imágenes. Inicialmente es grabada una distancia de 15.0 cm de largo aproximadamente, la cual es reducida dependiendo de la cantidad de luminosidad que exista en el área de medición ya que el laser utilizado es gaussiano.

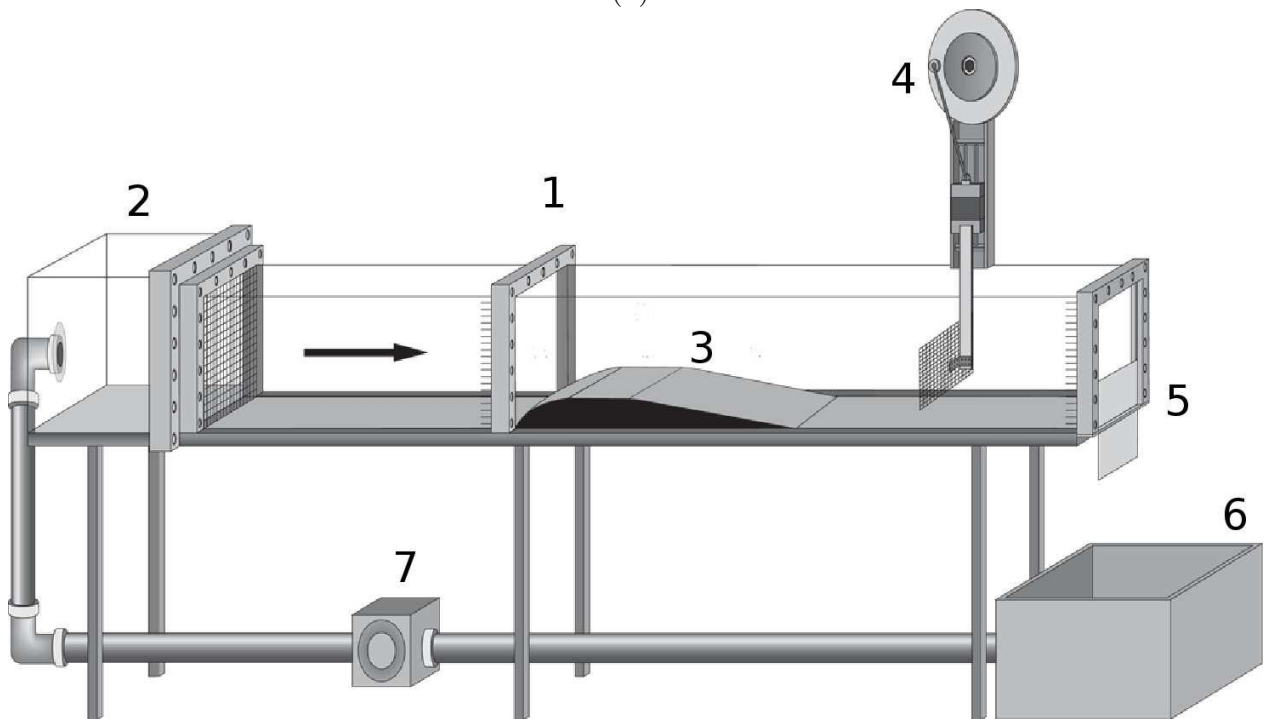
Es posible comparar este montaje experimental con el de Unruh, el cual es explicado en [7], y apreciar que son equivalentes, salvo las dimensiones utilizadas, ya que Unruh utiliza longitudes de onda incidente del orden de 1 m, mientras que en el montaje usado para esta tesis se usaron longitudes de onda de entre 5.00 cm y 12.0 cm.

Para obtener un flujo laminar, se inserta un arreglo rectangular de cilindros de 2.00 cm de ancho, cada uno de 5 mm de diámetro, para eliminar cualquier efecto que se produzca por la reentrada de agua en el canal. Este se ubica entre la conexión de las bombas con el canal y el obstáculo, validando así las hipótesis usadas para el análogo.

El agua a utilizarse como fluido es mezclada con Tetrabromo-(5)-Fluoreceína a una concentración de 5.00 miligramos por litro, de forma que este fluoreszca al ser iluminado por luz a una longitud de onda específica. El plano laser es generado por un laser de perfil Gaussiano de longitud de onda 501-561 nm y potencia máxima de 500 mW, CNI modelo MGL532, el cual se hace pasar a través de una lente cilíndrica de 0.20 cm de diámetro iluminando desde la parte superior abierta del canal para evitar los defectos del fondo. Se le construyó una estructura móvil adosada al laser con tal de que éste pudiese posicionarse en cualquier lugar sobre el canal. Para la generación de ondas, es utilizado un vibrador electromecánico PASCO modelo SF-9324, conectado a un generador de funciones Rigol DG1022 y un amplificador de potencia MAX 710X, obteniéndose amplitudes de 2.00 cm, con frecuencias en un rango entre 0.50 Hz y 1.00 Hz.



(a)



(b)

Figura 4.2: (a) Esquema general de la disposición del experimento: (1) Canal, (2) obstáculo lateral, (3) difusor, (4) vibrador electromecánico, (5) hoja laser, (6) cámara, (7) receptáculo de agua, (8) bomba de agua, (9) y (10) mangueras conectoras, y (11) regulador de profundidad. (b) Esquema del montaje experimental de Unruh utilizado en [9]: (1) Canal, (2) almacenamiento de entrada de agua, (3) obstáculo, (4) generador de ondas, (5) compuerta de ajuste de altura, (6) receptáculo de salida y (7) bomba de agua y mangueras.

Inicialmente el canal es ubicado en posición horizontal y nivelado conforme a un nivel de burbuja. Durante el montaje, la cámara es nivelada de la misma forma con el canal, de forma que los extremos del canal en la imagen no posean mayor diferencia que 0.1 cm en la ventana de medición. Para aumentar el contraste entre el agua y el aire, se ajusta tanto manual como digitalmente la cámara de forma que la iluminación de la superficie del agua genere contraste con el aire. Cada video es grabado en formato AVI y por medio del uso de Matlab, cada imagen que lo compone es guardada en un archivo JPG en la misma carpeta del video. Cada imagen es analizada, de la siguiente manera:

1.- Cada video se separa en imágenes individuales. Cada imagen de dimensiones $I \times J$ pixeles se transforma en una matriz de las mismas dimensiones en donde cada elemento posee la luminosidad del pixel correspondiente.

2.- Se guarda en un vector el numero del pixel en el cual se ubicó la interfaz entre agua y aire, se considera este como el pixel que posee un 70 % de la luminosidad máxima para cada columna (i,J), para cada i en el ancho de la matriz.

3.- A una matriz de dimensiones (largo de la imagen en pixeles) \times (numero de imagenes) se le asigna el pixel identificado, de forma que cada columna contiene los pixeles designados como interfaz.

4.- La matriz generada es finalmente un diagrama espacio-temporal de la superficie del fluido, el cual se le asignan dimensiones fisicas conociendo las frecuencias de muestreo.

Para medir las amplitudes, el diagrama es sometido a una transformada de Fourier tanto en el espacio como en el tiempo, de forma independiente, por tanto, la transformada de Fourier en el tiempo entrega la frecuencia de excitación, y para la transformada en el espacio entrega los numeros de onda predominantes en el la superficie de agua.

Para poder determinar la velocidad del flujo podrían haberse utilizado partículas isodensas mezcladas con el fluido para poder medir el campo de velocidades. Como es de interés la velocidad del flujo en la superficie, no se aplicará esta técnica dado que no es el objetivo central de esta tesis. Es posible estimar inicialmente la velocidad que tendrá el flujo midiendo directamente el ritmo de llenado utilizando 1 y 2 bombas (se mide directamente cual es el flujo entregado), para comparar posteriormente si el desde el caudal puede ser obtenida la velocidad del flujo que percibe la onda en el canal, de forma de poder relacionar caudal (Q), velocidad (v) y área transversal (hw)

$$v = \frac{Q}{hw} \quad (4.1)$$

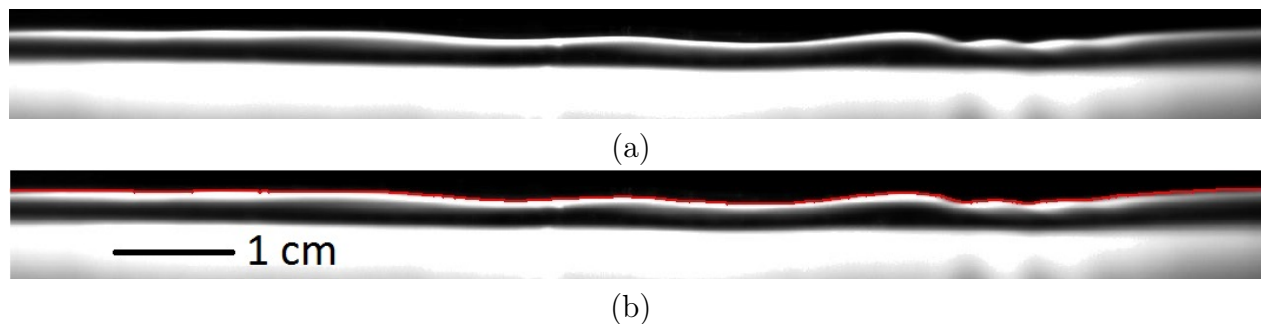
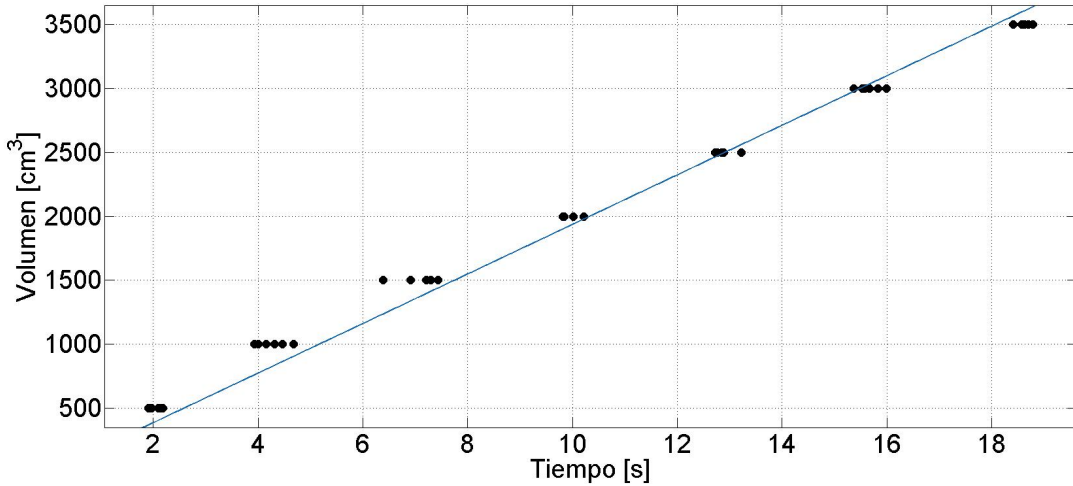
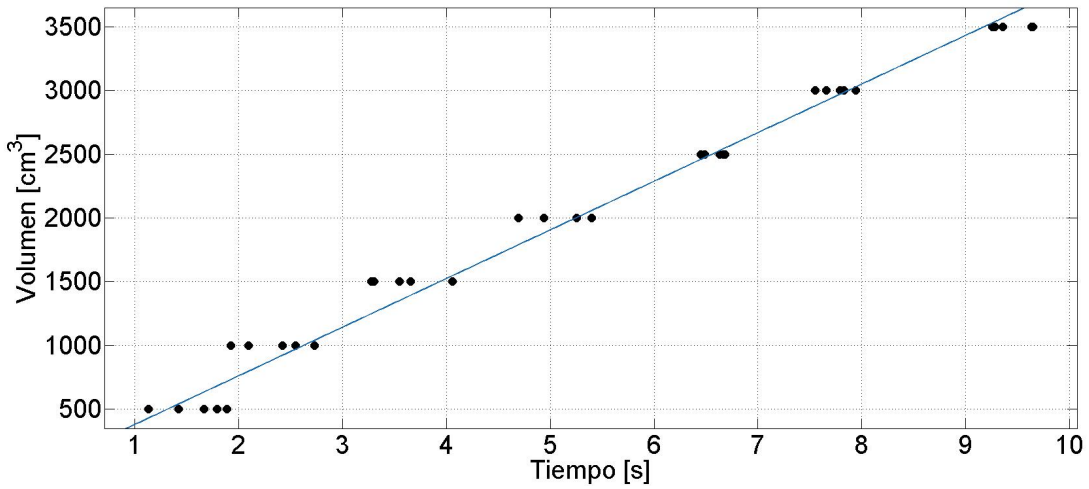


Figura 4.3: Identificación de la superficie del agua utilizando el algoritmo descrito anteriormente, comparando entre una superficie identificada (b) con una sin identificar (a).



(a)

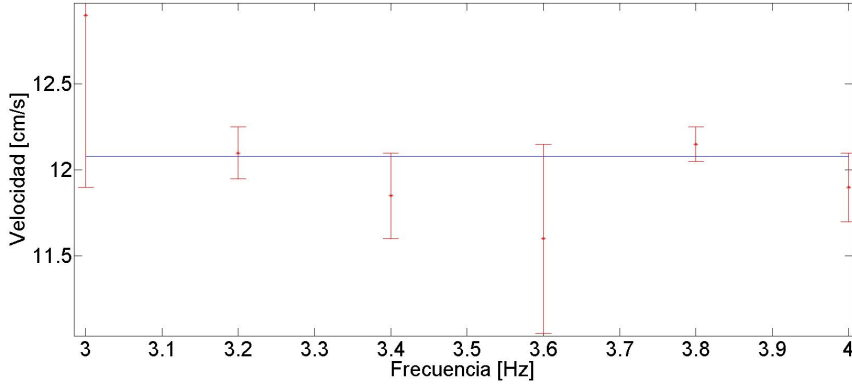


(b)

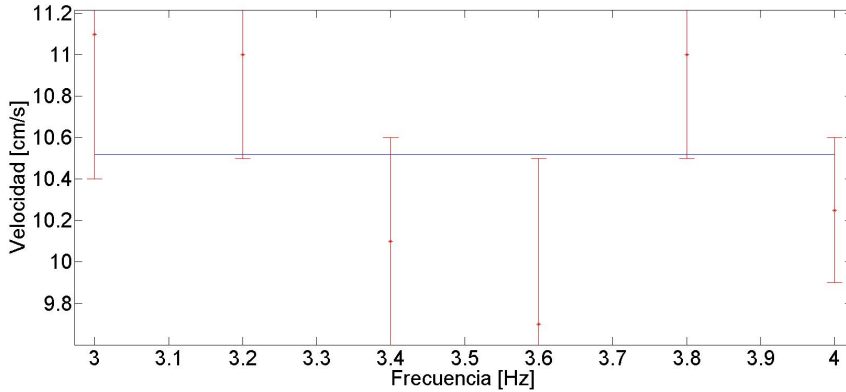
Figura 4.4: Gráficos del volumen de llenado en función del tiempo. a) Utilizando 1 bomba de agua, dando un caudal $Q = 1,90 \times 10^2 \frac{cm^3}{s}$. b) Utilizando 2 bomba de agua, dando un caudal $Q = 3,80 \times 10^2 \frac{cm^3}{s}$, siendo ésta el doble que la anterior (aproximadamente) dado que se utilizaron 2 bombas de agua.

Para medir la velocidad que enfrenta la onda incidente, se toman datos de la onda viajera sin obstáculos para alturas distintas utilizando 2 de agua, para observar si el rango de velocidades a utilizar es suficiente para obtener el efecto, según se estudió en el Marco Experimental. El procedimiento anteriormente descrito da el inverso de la longitud de onda ($k = \frac{1}{\lambda}$), y por tanto conociendo la relación de dispersión que domina al canal proveniente de la ecuación (1.21)

$$f = \sqrt{\frac{gk}{2\pi} \tanh(2\pi kh)} - vk \quad (4.2)$$



(a)



(b)

Figura 4.5: (a) Gráfico de la velocidad del flujo percibido para 2 bombas de agua y 3.5 cm de profundidad. (b) Gráfico de la velocidad del flujo percibido para 2 bombas de agua y 4.0 cm de profundidad. En cada uno de los gráficos, la recta azul corresponde al promedio de las velocidades medidas tomando las transformadas de fourier sin obstáculos. Estas velocidades poseen un error de 0.32 y 0.48 $\frac{cm}{s}$, siendo que al medir el caudal de la forma anterior se obtienen velocidades de 11.90 y 13.60 $\frac{cm}{s}$. Estas son cercanas a las obtenidas por el método descrito, pero levemente mayores a causa de la diferencia de altura entre la superficie del receptáculo de agua y la boca de entrada de las mangueras.

donde se ha tomado la raíz positiva dado que se considera la onda que se propaga a contraflujo, donde la frecuencia f es medida en Hz, g se mide en $\frac{cm}{s^2}$, h en cm y $k = \frac{1}{\lambda}$ en cm^{-1} . por lo cual es posible despejar v en función de los demás parámetros, y por tanto saber que velocidad percibe la onda en el canal para cada configuración.

$$v = \frac{1}{k(f)} \left(\sqrt{\frac{gk(f)}{2\pi} \tanh(2\pi k(f)h)} - f \right) \quad (4.3)$$

Finalmente, promediando las velocidades obtenidas para cada caso, dan como resultado la velocidad en la superficie del agua para cada configuración, obteniéndose todos los parámetros del experimento.

Al comparar ambas mediciones independientes, es posible observar que para el ancho del canal y la profundidad de agua utilizadas en el experimento de medición de caudal, se puede notar que éste es levemente menor, de unos $40 \frac{cm^3}{s}$ menos que al medir sólo el caudal. Esto se explica a la diferencia de altura entre la superficie de agua del canal y la que esta posee en el receptáculo, provocando un mayor trabajo de las bombas de agua al momento de generar el flujo cerrado en el canal.

Para generar la conversión de ondas largas a cortas, se proponen 2 disposiciones de obstáculos que interactuarán con la onda incidente: obstáculos de fondo y obstáculos laterales (Figura 5.1). Se construyen pares de obstáculos trapezoidales simétricos (Figura 4.1) del ancho del canal, todos con un ángulo de elevación de $16,70^\circ$, de alturas 1.2, 1.5, 1.7, 2.0, 2.2, 2.5, 2.7 cm. Las diferentes alturas posibilitan estudiar distintos comportamientos que sufre la onda incidente que se ven reflejados en la temperatura análoga para cada uno de los obstáculos.

Los obstáculos son construidos de a pares para mantener la simetría del canal al ubicarlos lateralmente, ya que en la derivación de las ecuaciones se asume que el canal es simétrico. Adicionalmente, como los videos se tomarán desde el costado del canal, se desea que los efectos que puedan ser apreciados no dependan de la ubicación del obstáculo a uno u otro costado del canal. Para cada obstáculo trapezoidal se realiza un muestreo, para profundidades y flujos específicos, de forma de tener un amplio espacio de parámetros para comparar cualitativamente y cuantitativamente en cada medición.

Para poder comparar cualitativa y cuantitativamente entre el montaje planteado y el utilizado por Unruh, se comparan los números de Reynolds y Froude entre ambos montajes.

El número de Reynolds es una cantidad adimensional capaz de comparar los esfuerzos viscosos y los inerciales dentro de un flujo.

$$Re = \frac{vD}{\nu} \quad (4.4)$$

donde v es la velocidad típica del fluido, D es el diámetro hidráulico por donde pasa el fluido (típicamente calculado como una distancia característica del sistema) y ν es la viscosidad cinemática del fluido.

Si el número es pequeño (<2000), el flujo se considera típicamente laminar, y si este es muy grande (>4000) se considera turbulento. Si el número de Reynolds es muy pequeño, puede que disipe muy rápidamente energía y por tanto las ondas que puedan generarse quedarán atenuadas por la viscosidad del fluido. Por el contrario si fuese demasiado alto, cualquier alteración que se genere (no solamente ondas controladas por el vibrador electromecánico) se propagarán rápidamente y sus efectos crecerán sin casi verse afectados por la viscosidad.

El número de Froude es otra cantidad adimensional que compara en los canales abiertos los efectos gravitatorios de las ondas con su velocidad típica

$$Fr^2 = \frac{v^2}{gl} \quad (4.5)$$

donde nuevamente v es la velocidad típica del fluido, g es la aceleración de gravedad y l una longitud característica en el canal.

Si el número de Froude es grande (>1) entonces es dominado por la velocidad del fluido, y los efectos gravitatorios no son importantes. Si es pequeño (<1) entonces las ondas de gravedad dominan frente a la velocidad típica del flujo.

Preliminarmente, se observó que cuando se utilizaban obstáculos de fondo y laterales muy altos (≥ 3 cm), que provocaban que el número de Froude fuese 1, éste generaba ondas sin siquiera estar presente el generador de ondas, provocando que no pudiesen ser medidas las amplitudes de las ondas que se deseaban para este experimento, luego fue posible obtener las siguientes tablas de comparación entre los números (los máximos valores obtenidos para los experimentos realizados en esta tesis) de Reynolds y Froude entre los montajes de Unruh y los aquí presentados.

Números de Reynolds	Fuera del obstáculo	Sobre el obstáculo
Montaje de Unruh	44695.10	44568.01
Montaje tesis (Fondo)	1102.30	1803.40
Montaje tesis (Lateral)	1365.20	3692.31

Tabla 4.1: Comparación de números de Reynolds entre los montajes propuestos y el utilizado por Unruh.

Números de Froude	Fuera del obstáculo	Sobre el obstáculo
Montaje de Unruh	0.17	0.55
Montaje tesis (Fondo)	0.04	0.07
Montaje tesis (Lateral)	0.04	0.06

Tabla 4.2: Comparación de números de Froude entre los montajes propuestos y el utilizado por Unruh.

Se encuentra que para cada montaje propuesto los rangos de ambos números se mantienen en los mismos que los de Unruh, y por tanto validando que es posible reproducido el efecto de Radiación de Hawking en el montaje propuesto, y que puedan ser comparados cuantitativamente, siendo incluso los números de los montajes propuestos menores a los del montaje utilizado por Unruh en cada uno de los casos.

Capítulo 5

Analisis de datos

En este capítulo se detallará como fueron procesados los datos para obtener los resultados, que herramientas numéricas fueron utilizadas durante su procesamiento. También se explica el procedimiento para cuantificar el error experimental que genera la medición. Se comparan a su vez calitativa y cuantitativamente los resultados obtenidos con los de Unruh en [7].

Al obtener los diagramas espacio-temporales y su transformada de Fourier en ambas direcciones, se obtiene por consiguiente que para la transformada en el espacio aparecen tres peaks diferenciables, de los cuales el de menor número de onda corresponde a la onda incidente en el obstáculo (el cual en la mayoría de los casos se confunde con la componente continua, pero no es de interés para la medición del efecto de Radiación de Hawking). Los dos peaks observados para números de onda mayor son de interés para el análogo.

Dado que los peaks referentes a longitudes de onda cortas son más anchos en relación al incidente, esto trae consigo errores en la medición de las amplitudes. Para obtener la amplitud precisa pese a lo ancho del peak, se ajustan funciones gaussianas para obtener el ancho característico. Se compara el área bajo la curva entre los anchos característicos entregados por el ajuste Gaussiano con un peak ideal de delta de Dirac (proceso que no necesitó Unruh en [7]). La diferencia entre la amplitud entregada por el tratamiento de datos y la calculada idealmente como delta es el error experimental de cada muestra.

Cada medición es tratada por separado, sean obstáculos de fondo o laterales. Se identifica cada uno de los parámetros usados en cada realización, junto con el error experimental asociado a cada par de longitudes de onda, de forma de obtener cada uno de los resultados y comparar a posteriori. Además se desea observar las diferencias que presentan cada montaje y la dependencia de los parámetros en cada uno, y ver si se corresponde con las predicciones teóricas hechas en el Capítulo 4.

Luego de obtener la amplitud real de cada una de las ondas para cada realización, lo cual corresponde a la obtención de datos en un barrido de frecuencias entre 0.50 y 1.00 Hz con un espaciado de 0.05 Hz, para un obstáculo determinado, con un caudal y profundidad fija. A

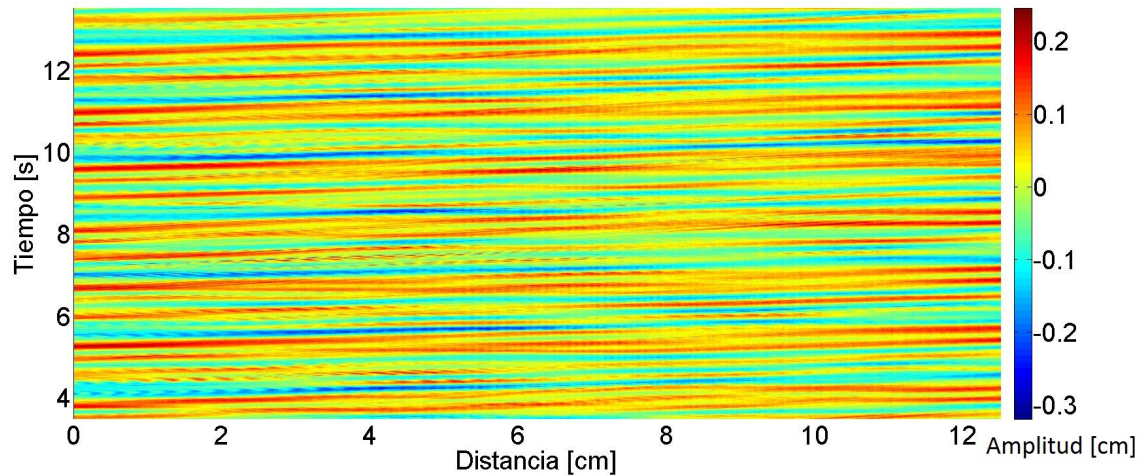


Figura 5.1: Diagrama espacio-temporal de la superficie del canal. La onda incidente viaja hacia el lado derecho (en contra del flujo), mientras que las ondas de longitud corta pueden apreciarse que se desplazan hacia el lado izquierdo (con el flujo). Este diagrama corresponde a la utilización de un obstáculo de fondo de 1.70 cm de altura, con 3.50 cm de profundidad utilizando 2 bombas de agua con una frecuencia de excitación de 0.70 Hz. El obstáculo está posicionado en 12.00 cm, dejando su cima no visible para el experimento dado que no tiene relevancia para la medición que se desea. Adicionalmente, la onda incidente de longitud larga viaja en sentido positivo (de izquierda a derecha) y se aprecia la generación de ondas de longitud corta que interfieren con la onda incidente.

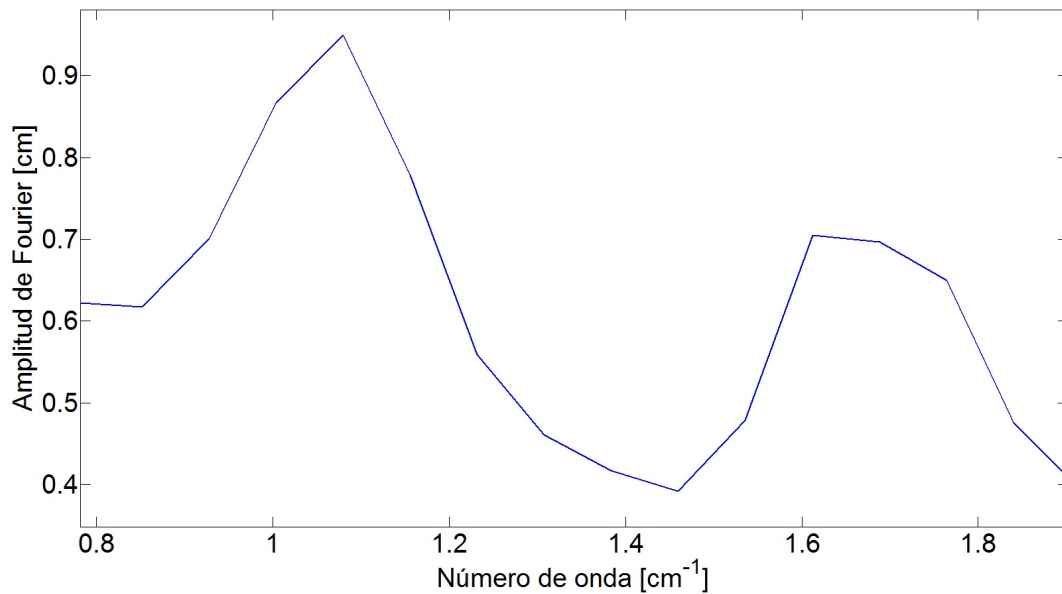


Figura 5.2: Resultado de tomar la transformada de Fourier en el espacio a uno de los diagramas espacio-temporales, obteniéndose los 2 peaks Gaussianos de la ondas de longitud pequeña. Esta transformada de Fourier corresponde a obstáculos de fondo de 1.70 cm de altura, utilizando 2 bombas de agua con 4.00 cm de profundidad con una frecuencia de excitación de 0.70 Hz.

la razón entre las amplitudes en cada realización, se les aplica logaritmo natural, para finalmente graficarlos en función de la frecuencia con la que se generaron las ondas, esto dado a los mismos cálculos realizados en el Capítulo 4. Adicionalmente, el analizar la transformada de Fourier en el tiempo, se observa que los peacks de frecuencias mayores a la de excitación poseen una amplitud aproximadamente 10 veces menor que el de la frecuencia de excitación correspondiente a cada realización.

Según el calculo teórico, el gráfico generado debería dar una recta decreciente, por lo cual es ajustada una función del tipo $g(f) = m.f + n$, donde f es la frecuencia medida en Hz, de forma de encontrar la pendiente m , la cual posee información de la temperatura análoga del sistema, descrita en el marco teórico (Capítulo 2).

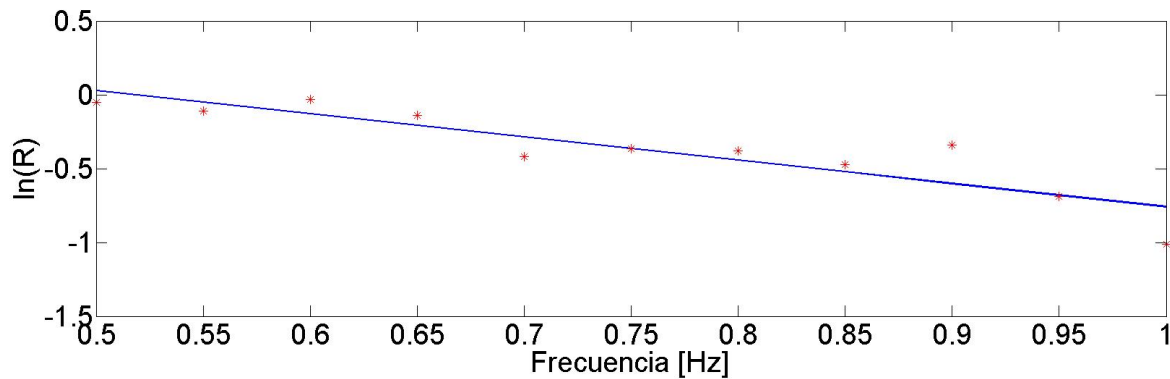


Figura 5.3: Ajuste lineal al logaritmo natural de la razón entre las amplitudes medidas. Montaje con obstáculos laterales de 1.50 cm de alto, usando 2 bombas de agua y 3.50 cm de profundidad. La función de ajuste corresponde a la recta $g(f) = -5.78 f + 0.72$

Luego, es posible comparar estos resultados preliminares con los obtenidos por William Unruh [7]. Las pendientes encontradas experimentalmente poseen el mismo orden de magnitud que la encontrada por Unruh y el comportamiento encontrado en función de la frecuencia para cada realización es el mismo observado (para ambas disposiciones de obstáculos).

Este procedimiento es realizado para cada uno de los obstáculos, para cada montaje en particular (uicados en el fondo o lateralmente), y para cada flujo y profundidad dadas, por lo cual se obtiene experimentalmente como varía la pendiente del ajuste dependiendo de la disposición del obstáculo en función de los parámetros de cada montaje. Cada posición de los obstáculos predice teóricamente el comportamiento de las pendientes, por lo que a cada resultado se le ajusta una función de acuerdo al parámetro que se varía (profundidad para obstáculos de fondo y ancho para obstáculos laterales).

Para obstáculos de fondo, se predice que para profundidades grandes (comparativamente con la amplitud de la onda incidente), la pendiente se comporta linealmente creciente con la profundidad, y cuando la profundidad decrece, posee un comportamiento decreciente hiperbólico decreciente. En cambio para obstáculos laterales, el comportamiento predicho es decreciente hiperbólico independiente del rango en el ancho entre los obstáculos.

A continuación se presentan los rangos de parámetros que se utilizaron en cada posicionamiento de obstáculos, variando para los obstáculos de fondo en profundidad sobre el obstáculo y para los obstáculos laterales en profundidad, ancho y flujo en la zona de los obstáculos.

Alturas de los trapecoides: cm	1.20	1.50	1.70	2.00	2.20	2.50	2.70
Profundidad: 3.50 cm	2.30	2.60	2.80	3.10	3.30	3.60	3.80
Profundidad: 4.00 cm	2.80	3.10	3.30	3.60	3.80	4.10	4.30

Tabla 5.1: Profundidades utilizadas para obstáculos de fondo, utilizando 2 bombas de agua.

Alturas de los trapecoides: cm	1.20	1.50	1.70	2.00	2.20	2.50	2.70
Profundidad: 3.00 cm	5.60	5.00	4.60	4.00	3.60	3.00	2.60
Profundidad: 3.20 cm	5.60	5.00	4.60	4.00	3.60	3.00	2.60
Profundidad: 3.50 cm	5.60	5.00	4.60	4.00	3.60	3.00	2.60

Tabla 5.2: Ancho entre los obstáculos utilizados para obstáculos laterales, utilizando 1 bomba de agua.

Alturas de los trapecoides: cm	1.20	1.50	1.70	2.00	2.20	2.50	2.70
Profundidad: 3.50 cm	5.60	5.00	4.60	4.00	3.60	3.00	2.60
Profundidad: 4.00 cm	5.60	5.00	4.60	4.00	3.60	3.00	2.60
Profundidad: 4.30 cm	5.60	5.00	4.60	4.00	3.60	3.00	2.60

Tabla 5.3: Ancho entre los obstáculos utilizados para obstáculos laterales, utilizando 2 bombas de agua.

El rango de parámetros para obstáculos de fondo no considera cambios de flujo ya que experimentalmente no se podía obtener la generación de ondas de longitud corta al disminuir el flujo (dado que sólo era posible utilizar 2 bombas). Esto ocurre dado que para obtener el efecto que se pretende medir, la cantidad ($c - v$) debe ser negativa, lo cual no ocurre al quitar una de las bombas de agua.

La utilización de obstáculo de fondo corrobora el experimento y los resultados de Unruh. Adicionalmente, es posible predecir como la altura del obstáculo afecta la pendiente, la cual se condice con el calculo teórico, validando las herramientas utilizadas para poder concebir el análogo. Con la utilización de obstáculos laterales, se demuestra que es posible estudiar de forma nueva el análogo hidrodinámico, teniendo éste un mayor número de parámetros a utilizar gracias a que éstos poseen mayor independencia que en el caso de obstáculos de fondo, dado a que ahora ancho, profundidad y caudal pueden ser controlados por separado. Finalmente se obtienen las temperaturas análogas para cada realización.

Para cada realización se busca el mejor ajuste de datos (se ajusta una recta al graficar los datos obtenidos del logaritmo natural de la razón entre las amplitudes medidas, en función de la frecuencia de excitación), de forma que solamente podemos obtener la pendiente en función de cada parámetro utilizado en el experimento.

Capítulo 6

Resultados

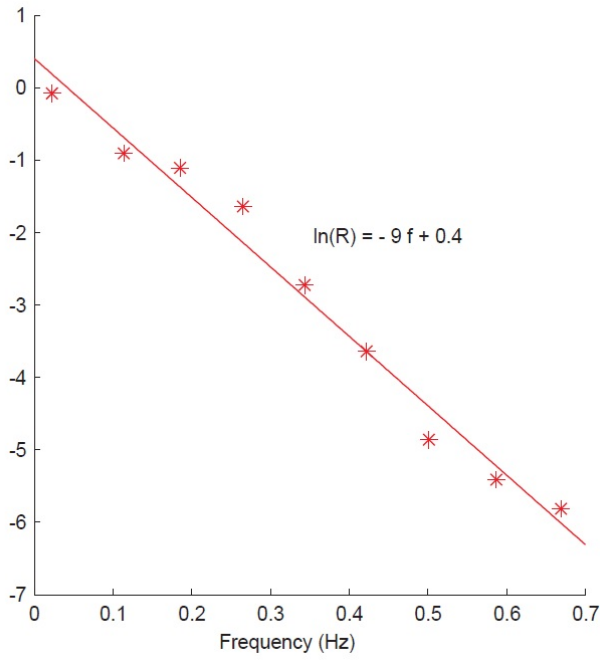
En este capítulo se muestran los resultados obtenidos luego de analizar los ajustes lineales de cada realización. Se comparan los resultados obtenidos con los presentados por Unruh en 2011 [7] para comprender las mejoras realizadas en los montajes actualmente utilizados y sus semejanzas. Se muestra como varían la presión, capacidad calórica y entropía como función de la temperatura análoga obtenida. Utilizamos como referencia los cálculos y predicciones presentadas en el Capítulo 4.

Dado que para todas y cada una de las realizaciones se obtiene una respuesta lineal de los datos luego de tratarlos, esto valida el montaje descrito como un análogo hidrodinámico. Es posible comparar los resultados de Unruh con los obtenidos y ver que ambos son equivalentes. A pesar de ser montajes de dimensiones distintas, el ajuste no dista del obtenido por Unruh. Más aún, las pendientes encontradas poseen el mismo orden de magnitud que el referencial de Unruh.

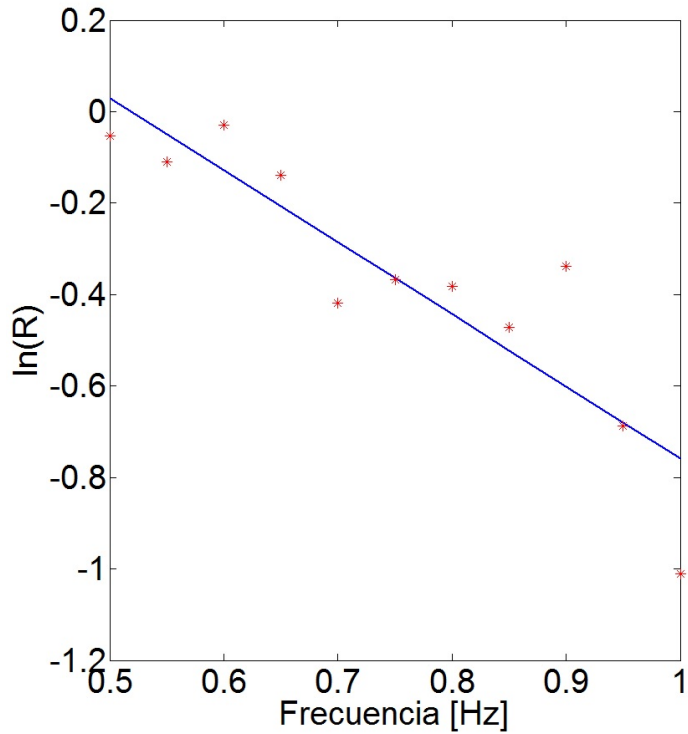
Al compararlos, se aprecia que ambos poseen el mismo comportamiento (ya que ambos son análogos hidrodinámicos), que las pendientes son equivalentes y por tanto las temperaturas análogas también poseen a su vez las mismas magnitudes. Adicionalmente, en las realizaciones, se ha aumentado la densidad de puntos tomada comparativamente a la de Unruh, por tanto mejorando la calidad del estudio del efecto.

También es posible comparar los diagrama espacio-temporales de ambos montajes, para poder validar el experimento realizado, y posteriormente validar las hipótesis y resultados del nuevo tipo de montaje.

Para completar la analogía, y por tanto comparar ambos diagrama espacio-temporales, introducimos una nueva variable auxiliar



a)



b)

Figura 6.1: Gráficos de los resultados obtenidos al estudiar el análogo hidrodinámico: a) Datos obtenido por Unruh utilizando obstáculo de fondo [7]. b) Datos obtenidos utilizando obstáculo de fondo de 1.20 cm de alto, con 2 bombas de agua y 3.50 cm de profundidad para el montaje planteado en el Capítulo 2.

$$d\xi = \frac{dx}{v(x)} \quad (6.1)$$

donde $v(x)$ corresponde a la velocidad del flujo [7], por tanto ubicamos un sistema co-movil con el flujo. Con esta nueva variable, el operador diferencial de convección utilizado para obtener la ecuación de onda (1.8), para el caso cuasiunidimensional del canal usado, es de la forma

$$\partial_t + v_B \partial_x \quad (6.2)$$

se convierte en

$$\partial_t + \partial_\xi \quad (6.3)$$

por tanto, la velocidad de cada una de las ondas afecta la conservación de la amplitud de las ondas. Ahora, es en el nuevo sistema de referencia co-movil que la amplitud se conservará, no en el anterior, para mantener la calidad de análogo dada la ecuación de conservación de amplitud de probabilidad (1.17). Por tanto, utilizando ahora esta nueva amplitud de Fourier debe ser conservada

$$A(\tilde{f}) = \int \frac{|A(f, \kappa)|^2 d\kappa}{f + \kappa} \quad (6.4)$$

donde κ es la transformada de Fourier de ξ . Esto provoca que una onda se desplace (en este sistema de referencia) hacia el obstáculo, y la otra se aleje del obstáculo en la dirección del flujo. Al graficar las amplitudes en el sistema (ξ, t) , la velocidad del flujo apunta hacia ξ positivo. Se elige el sistema a su vez, de modo que $\xi = 0$ esté donde empieza la cima del obstáculo. Este sistema es por tanto donde se conservaría la amplitud de probabilidad utilizada en la ecuación (1.17), y por tanto donde álogo posee asidero, y por tanto donde es posible comparar los diagrama espacio-temporales de Unruh y los trabajados acá.

El primer diagrama, se presentan los datos de Unruh, el cual presenta las ondas de longitud corta que son emitidas (reflejadas) por la interacción del obstáculo con la onda incidente. En el diagrama subsiguiente, se muestran tanto las ondas reflejadas como la incidente en el experimento llevado a cabo para este tesis. Es posible filtrar en torno a cada una de las longitudes de onda deseadas, así como lo hace Unruh, para poder comparar con la base de la analogía, para así obtener ondas que se propagan hacia el obstáculo (en dirección $\xi < 0$) y que se alejan del obstáculo (en dirección $\xi > 0$).

Con esto, es posible concluir que el efecto medido en esta tesis es equivalente al de Unruh en [7], y por tanto los efectos medidos en ambos sistemas (obstáculos laterales y de fondo),

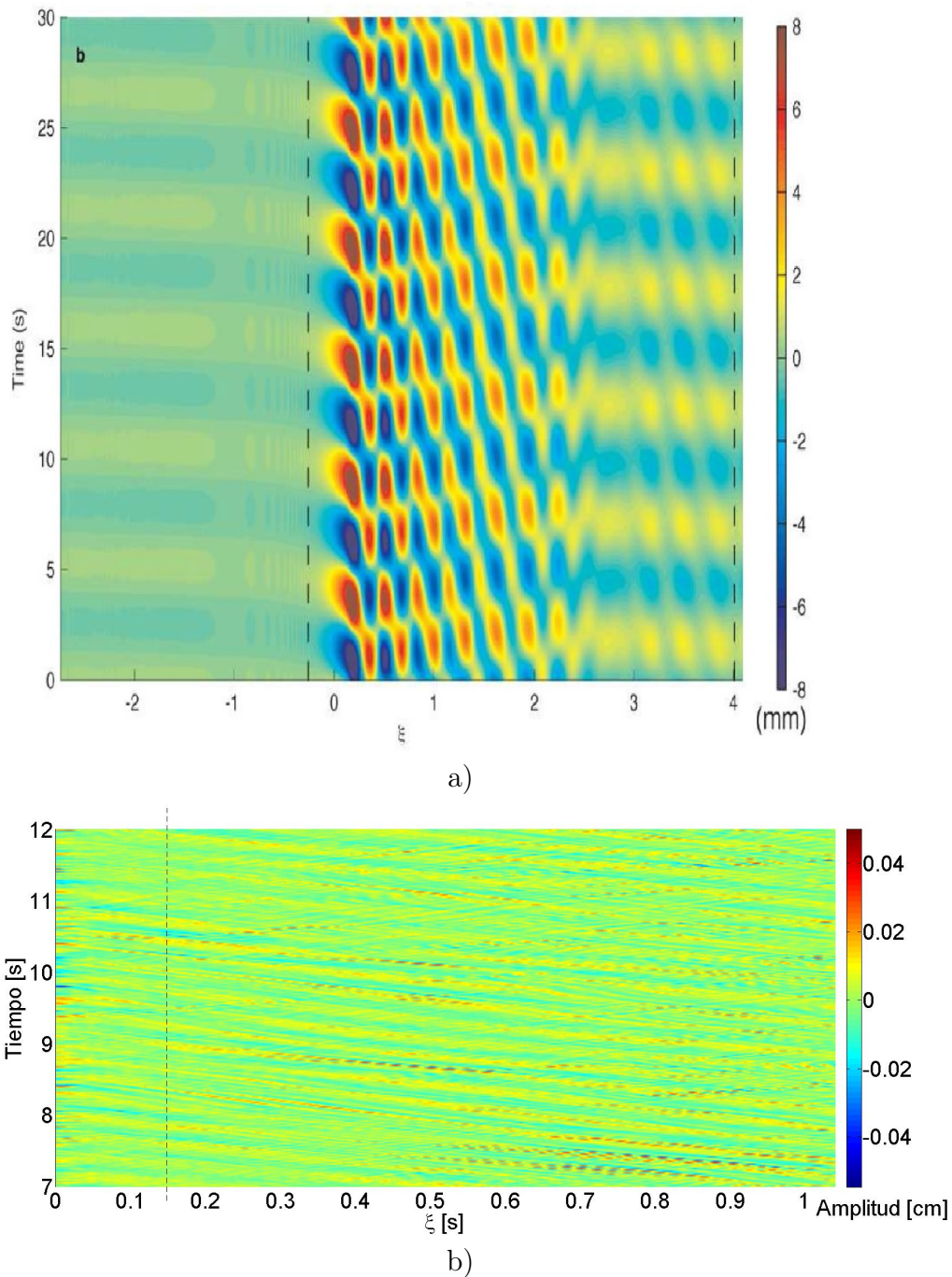


Figura 6.2: Gráficos de los diagramas espacio-temporales obtenidos al estudiar el análogo hidrodinámico: a) Diagrama de Unruh filtrado para frecuencias de interés eliminando ruido de la señal utilizando obstáculo de fondo [7]. b) Diagrama espacio-temporal para obstáculo de fondo de 1.70 cm de alto, a una profundidad de 4.00 cm, con una frecuencia de excitación de 0.70 Hz utilizando 2 bombas de agua. Para este diagrama, se han filtrado previamente sólo las longitudes de onda corta de interés, excluyendo la longitud de onda incidente y reflejada (longitud de onda larga comparable con la incidente). La línea punteada demarca el comienzo del obstáculo.

son igual de válidos. Ahora, antes de ver como se comportan las pendientes encontradas en

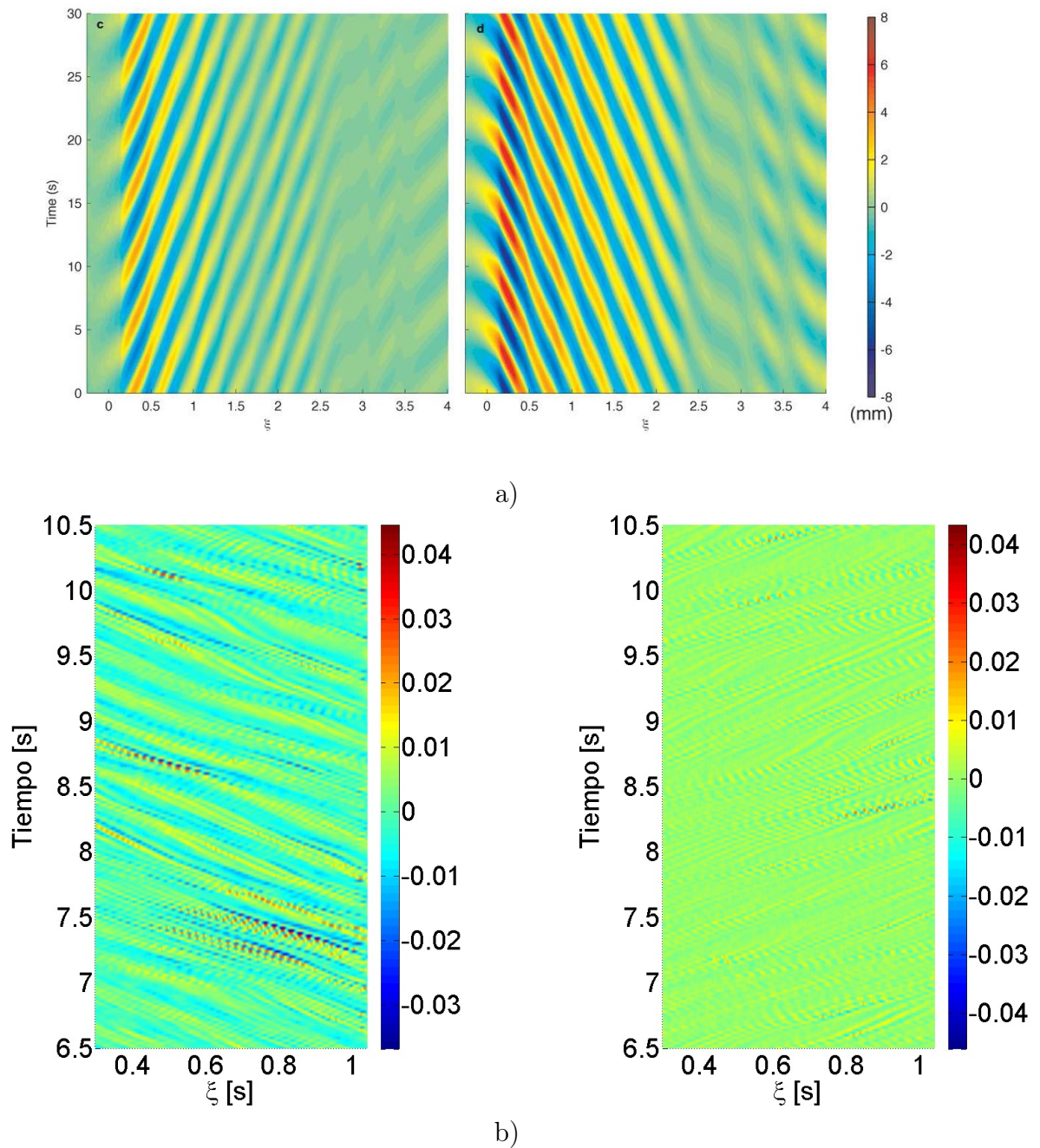


Figura 6.3: Gráficos de los diagramas espacio-temporales filtrados en torno a las ondas de longitud corta K_+ y K_- de la Figura 1.3. En este se muestra como las ondas de longitud corta K_+ se desplazan en este sistema de referencia alejándose del obstáculo (figura de la izquierda) mientras que las ondas K_- se acercan hacia el obstáculo (figura de la derecha), esto para las figuras a y b. La Figura a) corresponde al experimento de Unruh [7], mientras que la Figura b) corresponde al resultado del experimento utilizando obstáculos de fondo de 1.70 cm de alto, 2 bombas de agua y 3.50 cm de profundidad de fluido. En las figuras no se aprecian el inicio del obstáculo ya que para el análogo es de interés la zona comprendida entre éste y el generador de ondas, por lo que en la imagen sólo se ve esa zona.

cada experimento, es válido mencionar que es posible estudiar el análogo desde el punto de vista de otras variables termodinámicas (ya mencionadas en el Capítulo 3), y ver si poseen consistencia con los trabajos de relatividad general.

Para la entropía, se encontró que esta debe relacionarse con la temperatura de la siguiente manera

$$S = \frac{\hbar c^5}{16\pi G k_B} \frac{1}{T^2} \quad (6.5)$$

Así mismo, podemos generar los resultados para la capacidad calórica, la cual posee una forma del tipo

$$c_p = \frac{\hbar c^5}{8\pi G k_B} \frac{1}{T^2} \quad (6.6)$$

Y también para la presión, así teniendo otra forma de entender la analogía.

$$P = \frac{2\pi k_B^2 c^3}{G \hbar^2} T^2 \quad (6.7)$$

Luego, estas 3 variables termodinámicas son consecuentes con el trabajo de Dolan en [20], donde de forma genérica es capaz de unir las propiedades de un agujero negro cualquiera (masa, carga y momento angular) con las variables termodinámicas mostradas (capacidad calórica, entropía y presión).

Para poder relacionar de mejor forma los resultados entre ambos montajes y distintos flujos, deseamos adimensionalizar estos mediante la ecuación que relaciona la pendiente obtenida con los parámetros del experimento obtenidos en el Capítulo 4

$$m_{general}^{-1} = h' \left(\frac{gwh}{Q} + \frac{2Q}{wh^2} \right) + w' \left(\frac{2Q}{hw^2} \right) \quad (6.8)$$

en donde por lo que resta llamaremos $p = h'$ y $q = w'$.

Utilizando las siguientes variables auxiliares

$$\chi = \frac{2Q}{wh^2} \quad (6.9)$$

$$\Psi = \chi^2 \quad (6.10)$$

$$M = m\chi \quad (6.11)$$

$$\Phi_1 = p + q\frac{h}{w} \quad (6.12)$$

$$\Phi_2 = p\frac{2g}{h} \quad (6.13)$$

es posible reescribir la ecuación original de la siguiente manera

$$M = \frac{\Psi}{\Phi_1\Psi + \Phi_2} \quad (6.14)$$

Teniendo esto en cuenta, es posible reunir los resultados en un solo gráfico para entender el comportamiento de las pendientes.

Para la obtención de las barras de error, utilizamos que la obtención de la pendiente para cada realización posee un conjunto de errores asociados a cada frecuencia $\varepsilon^{Q,w,h,p,q}(f)$. Luego el error asociado con esa pendiente será el promedio de ese error para cada uno de los experimentos (sacamos el promedio de los errores en todo el intervalo medido entre 0.50 y 1.00 Hz)

$$\varepsilon^{Q,w,h,p,q} = \frac{1}{\Delta f} \sum_{i=1}^n \varepsilon^{Q,w,h,p,q}(f_i) \quad (6.15)$$

Luego cada barra de error queda determinada por

$$\sigma^{Q,w,h,p,q} = \chi\varepsilon^{Q,w,h,p,q} \quad (6.16)$$

A su vez, es posible ser más ambicioso y renormalizar las variables M y Ψ de la siguiente manera, mostrando que todas las realizaciones del análogo hidrodinámico utilizado pueden ser descritos de la siguiente manera

$$\widetilde{M} = M\Phi_1 \quad (6.17)$$

$$\widetilde{\Psi} = \Psi\Phi_1 \quad (6.18)$$

obteniéndose la nueva ecuación normalizada

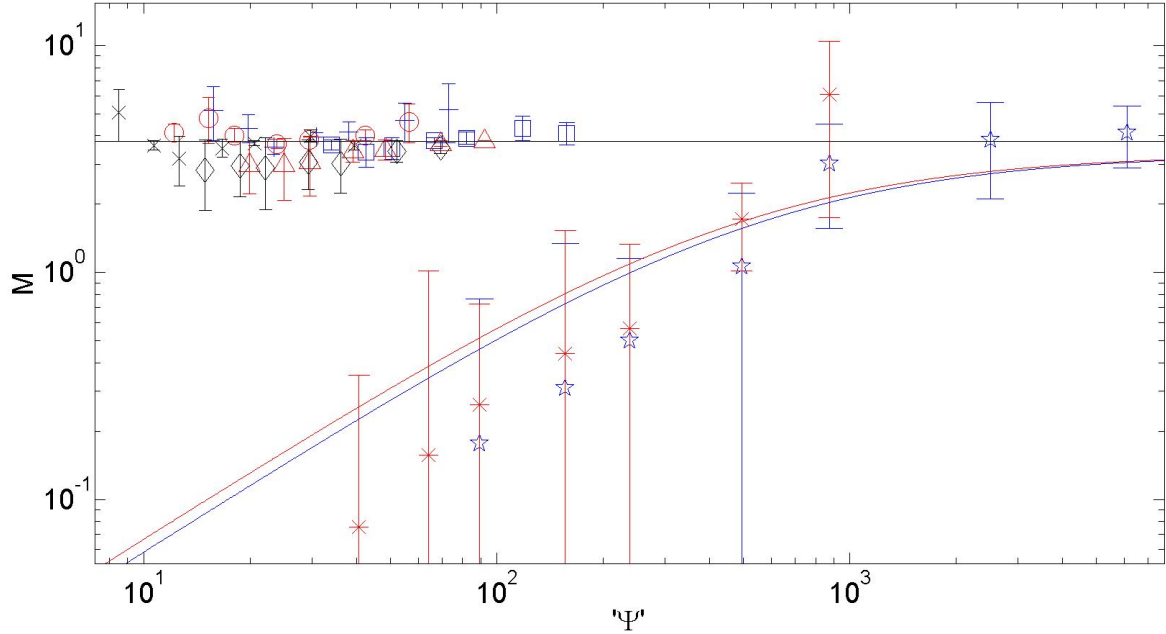


Figura 6.4: Gráfico en doble escala logarítmica de M vs Ψ para diferentes profundidades, anchos y caudales. Para los obstáculos de fondo se utilizó un caudal generado con 2 bombas de agua $Q = 3,80 \times 10^2 \frac{cm^3}{s}$. Para este caudal, se utilizó una profundidad $h_B = 3,50$ cm (\star) y $h_B = 4,00$ cm ($*$). Para obstáculos laterales, se utilizaron 2 caudales distintos, generados con 1 y 2 bombas de agua. Para el caudal generado con 1 bomba de agua $Q = 1,90 \times 10^2 \frac{cm^3}{s}$, se utilizaron profundidades de $h_B = 3,00$ (+), $h_B = 3,20$ (o) y $h_B = 3,50$ (\times). Para el caudal generado con 2 bombas de agua $Q = 3,80 \times 10^2 \frac{cm^3}{s}$, se utilizaron profundidades de $h_B = 3,50$ (\square), $h_B = 4,00$ (\triangle) y $h_B = 4,30$ (\diamond). Las líneas azul (obstáculo de fondo, 3.50 cm de profundidad), roja (obstáculo de fondo, 4.00 cm de profundidad) y negra (obstáculos laterales), corresponden a las funciones $M(\Psi)$ de acuerdo a los parámetros de cada experimento. Para la línea de obstáculos laterales, se utilizó una sola función siendo el promedio de las 6 configuraciones para obstáculos laterales.

$$\widetilde{M} = \frac{\widetilde{\Psi}}{\widetilde{\Psi} + \Phi_2} \quad (6.19)$$

lo cual indica que todo experimento realizado con este tipo de análogo hidrodinámico es adimensionalizable a alguno de los tipos de curvas presentados en la Figura 6.4 (dependiendo del posicionamiento del obstáculo), y posteriormente normalizable conociendo de antemano los parámetros del experimento que lo describen.

Capítulo 7

Conclusiones

En esta Tesis analizamos y exponemos las repercusiones de los resultados obtenidos experimentalmente de las pendientes ajustadas para cada una de las realizaciones, y posterior ajuste las variables de cada realización.

El nuevo montaje planteado es un nuevo enfoque de análogo hidrodinámico que expande las posibilidades del estudio de estos. Se obtuvieron pendientes equivalentes a las obtenidas por Unruh en [7] para ambos posicionamientos de obstáculos, y por tanto las temperaturas análogas (nanokelvin). Se aumentó la densidad de puntos en cada realización en ambos posicionamientos de obstáculos (lateral y de fondo). Se probandó la robustez del fenómeno para distintos obstáculos, posiciones de obstáculos, caudales y profundidades. Las temperaturas predichas con los cálculos teóricos se condicen con los resultados experimentales encontrados, validando las herramientas teóricas utilizadas en Capítulo 2. Adicionalmente, al explorar los parámetros de profundidad, flujo y ancho en la zona de los obstáculos fue posible encontrar experimental y teóricamente como éstos afectaban a las pendientes para cada realización.

Para los obstáculos ubicados en el fondo, se obtienen los resultados crecientes que se aprecian en la Figura 6.4. La acción de la gravedad en la onda incidente y la pendiente del obstáculo de fondo cobra importancia desde el punto de vista del inverso de la temperatura ($m \propto T^{-1}$). Para los obstáculos laterales se evidencia el comportamiento constante de la variable M , comportamiento esperado teóricamente. Salvo errores experimentales, los comportamientos son predichos por la teoría, validando las derivaciones teóricas del Capítulo 3.

Podemos concluir que cada análogo hidrodinámico ocupado durante el desarrollo de esta tesis es válido para el estudio de las propiedades análogas de los agujeros negros. Son a su vez predecibles algunos de los resultados que puedan ser obtenidos, conociendo con antelación los parámetros hidrodinámicos del experimento. Es posible predecir la mecánica ondulatoria que se obtendrn las ondas de longitud corta para cada montaje descrito con presencia de los obstáculos. Estos resultados fundamentan la termodinámica del análogo, y por tanto la termodinámica completa que se espera (Capítulo 3). Lo anterior puede ligarse directamente

con la termodinámica de un agujero negro en relatividad general [20]. Finalmente, dados los resultados presentados, es posible concluir que para el montaje planteado, ambas disposiciones de obstáculos generan un análogo hidrodinámico de agujero negro. Es posible a su vez elegir qué parámetros pueden ser modificados para estudiar características específicas del análogo deseado.

Finalmente, dadas las ecuaciones encontradas, y la evidencia de los resultados de esta Tesis, es posible concluir que todo experimento realizado con este análogo hidrodinámico es adimensionalizable. Se encontró que con los parámetros de cada experimento era posible predecir tanto los parámetros termodinámicos de un agujero análogo, como el comportamiento de estos al variar los parámetros de cada experimento.

Es posible a futuro proyectar el estudio de este análogo corroborando la validez de como la variación conjunta de la profundidad y el ancho. Remitiendonos al final del Capítulo 3, es de interés también entender si es posible encontrar algún tipo de comportamiento para la generación de ondas capilares por parte de la interacción entre la onda incidente y los obstáculos del medio, comparándolo con otros modelos que presenten ecuaciones parecidas.

Bibliografía

- [1] Scientific, L. I. G. O., Collaborations, V., Abbott, B. P., Abbott, R., Abbott, T. D., Abernathy, M. R., ... Addesso, P. (2016). *Tests of general relativity with GW150914*. Physical Review Letters, 116(22), 221101.
- [2] Wald, R. M. (2010). *General relativity* University of Chicago press.
- [3] Friedman, Y., Steiner, J. M. (2016). *Predicting Mercury's precession using simple relativistic Newtonian dynamics*. EPL (Europhysics Letters), **113(3)**, 39001.
- [4] S. W. Hawking, Nature (London) **248**, 30 (1974).
- [5] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys., **43**, 199-220 (1975).
- [6] W. Unruh, Phys. Rev. D, Vol. **51**, N. 6 (1995).
- [7] W. Unruh et al, Phys. Rev. Let., **106**, 021302 (2011).
- [8] Schützhold, R., Unruh, W. G. (2005). *Hawking radiation in an electromagnetic waveguide?* Physical review letters, **95(3)**, 031301.
- [9] W. Unruh, R. Schützhold, Phys. Rev. D, **71**, 024028 (2005).
- [10] Belgiorno, F., Cacciatori, S. L., Clerici, M., Gorini, V., Ortenzi, G., Rizzi, L., ... Faccio, D. (2010). *Hawking radiation from ultrashort laser pulse filaments* Physical review letters, **105(20)**, 203901.
- [11] Novello, M., Visser, M., Volovik, G. *Artificial black holes*, 2002.
- [12] L. Garay, Phys. Rev. A, *63(2)*, 023611, (2001).
- [13] Faber, T. E. (1995). *Fluid dynamics for physicists*, Cambridge University Press.
- [14] W. Unruh, Phys. Rev. Let., Vol. **46**, N. 21 (1981).
- [15] W. Unruh, R. Schützhold, Phys. Rev. D, **66**, 044019 (2002).
- [16] Lee, J. M., Chow, B., Chu, S. C., Glickenstein, D., Guenther, C., Isenberg, J., ... Ni, L. (2009). *Manifolds and differential geometry. Topology*, 643, 658.

- [17] Elmore, W. C., Elmore, W. C., Heald, M. A. (1969). *Physics of waves*, Courier Corporation.
- [18] Weinberg, S. (1995). *The quantum theory of fields (Vol. 2)*, Cambridge university press.
- [19] Greiner, W., Neise, L., Stöcker, H. (2012). *Thermodynamics and statistical mechanics*, Springer Science Business Media.
- [20] Dolan, B. P. (2011). *Pressure and volume in the first law of black hole thermodynamics*, Classical and Quantum Gravity, **28(23)**, 235017.
- [21] Euvé, L. P., Michel, F., Parentani, R., Philbin, T. G., Rousseaux, G. (2016). *Observation of noise correlated by the Hawking effect in a water tank*. Physical review letters, **117(12)**, 121301.
- [22] <https://www.quora.com/Can-anyone-explain-the-concept-of-or-what-is-meant-by-Gravitational-Lensing>
- [23] <https://www.physicsoftheuniverse.com/topics-blackholes-theory.html>
- [24] <https://www.fysik.dtu.dk/english/research/fluids/research-groups/complex-motion-in-fluids/researchnew/instabilities>