

Equivalencia de Acciones de Grupos sobre Superficies de Riemann y Estratificación.

Tesis
Entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magister en Ciencias con mención en Matemáticas

Facultad de Ciencias

Por

Miguel Angel Tello Carrera

Enero, 2019

Directora de Tesis Dra. Anita Rojas

**FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE**

**INFORME DE APROBACIÓN
TESIS DE MAGISTER**

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por el candidato.

Miguel Angel Tello Carrera

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Master en Ciencias con mención en Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día x de Marzo de 2019.

Directora de Tesis:

Dra. Anita Rojas

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Nombre 1

Dr. Nombre 2

Dr. Nombre 3

Dr. Nombre 4

Agradecimientos

Primero que todo quisiera agradecer a mi tutor de tesis Anita M. Rojas R, por acogerme en este camino de la geometría. Fue en el 2014 cuando decidí tomar el curso *Superficies de Riemann y Curvas Algebraicas* que dictó ella durante mi instancia en el pregrado. Me gustó tanto lo que aprendí en el curso, que me interesaba mucho seguir explorando este camino. Al término de aquel curso, hablé con la profesora y le pedí hacer unidades de investigación sobre geometría junto a ella. Siempre muy amable y motivadora, me ofreció seguir estudiando junto a ella y trabajamos el segundo semestre del 2014 en una unidad de investigación llamada *Acciones de Grupos en Superficies de Riemann*. El 2016 elaboré un proyecto de tesis de Magister junto Anita, inicié un extenso trabajo de desarrollo de tesis en los años 2016 y 2018, siempre teníamos el afán de seguir expandiendo el trabajo porque surgían otras buenas ideas, la mayoría las concretamos y pudimos terminar con este gran trabajo, mi tesis titulada: *Equivalencia de Acciones de Grupos sobre Superficies de Riemann y Estratificación*.

A Anita le debo muchísimo, no solo ha sido mi maestra, sino una *mami* que me ha otorgado buenos consejos, orientación, motivación para seguir estudiando y crecer intelectualmente. Me ha recomendado en muchas oportunidades para asistir a congresos y eventos importantes de Matemática en Chile e internacional, en los cuales he resultado becado gracias a su constante apoyo. Nombraré algunos: El 2014 Celebration of the Chilean Complex Geometry Group, a conference to honour our founders: Rubí Rodríguez, Víctor González-Aguilera and Gonzalo Riera, SUMA 2016, JMZS 2016 y 2018, escuela y Workshop Geometría en la Frontera I Y II los años 2016 y 2017, AGRA III en el año 2018, Festival de Matemáticas en Valparaíso el año 2016, Campamento de Matemáticas para alumnas y profesores de Enseñanza Media (MATEA 2017 y 2018), Feria de la ciencia 2018, Asistencia a colegios con el fin de difundir la ciencia. Todas estas experiencias me emocionan bastante recordarlas, sin duda merecen ocupar un espacio en este texto, la gratificación es inmensa cada experiencia significa mucho en mi desarrollo como científico y persona.

Agradezco también a mis grandes amigos que me han apoyado en el transcurso de mis estudios de pregrado y postgrado. Con la *Vale*, el *Lucho* y la *Feña* ingresamos el 2010 a la licenciatura, formamos lazos muy fuertes y me emociona el hecho que aún nos veamos y comuniquemos a pesar que todos tomamos rumbos distintos de la matemática en el postgrado y ya nos veamos todos los días. A pesar de la distancia, agradezco el contacto, los consejos, y sé que estarán conmigo siempre.

En el Magíster conocí a la *Fefi* una gran persona, amiga y compañera en geometría, con ella he compartido experiencias científicas inolvidables, y hoy en día compartimos proyectos de trabajo a futuro, es *bakanosa*, agradezco infinito haberla conocido. Agradezco también a Diana por su incondicional compañía en el estudio, en lo emocional y en el nado, junto con *Fefi* me escucharon y apoyaron bastante en los momentos más difíciles que viví el año 2017, cuando me cuestionaba mi futuro profesional. Hoy en día me siento enriquecido de contar con ustedes.

A Leslie Jimenez (*Les*), hermana mayor mía y de la *Fefi* en el ámbito de la geometría, quiero agradecerle su gran amistad, confianza, solidaridad y compañerismo hacia nosotros este último tiempo. *Les* ha sido un pilar fundamental en nuestro progreso científico, personal y profesional. Hemos formado un gran equipo de proyecto muy afiatado con grandes ideas, nos hemos propuestos metas y sueños juntos y ojalá puedan lograrse.

Agradezco a la familia de Geometría, por el sacrificado trabajo que hacen cada año de organizar congresos, reuniones, con el fin de difundir la ciencia, de conocer trabajos de investigación de nuestros

pares, de la posibilidad de crear contactos de trabajo. Agradezco enormemente el conocimiento que me ha brindado esta comunidad en cada encuentro geométrico, los felicito, hacen un muy buen trabajo.

Quiero terminar de agradecerle a mi familia, mis padres, mis hermanos, mi hijo Toby, tíos y abuelos que me han apoyado, animado y entendido en toda mi trayectoria como estudiante. Ellos son testigos del esfuerzo y dedicación que le entrego al estudio, por lograr los procesos y metas. Me han entendido cuando les he dicho: *no puedo, porque tengo que estudiar, porque tengo prueba*, en fin. Conocen mis sacrificios, las cosas que he tenido que dejar de lado por la mayor exigencia en los estudios. Agradezco infinito su preocupación, la buena vibra, la energía positiva que me brindan siempre, los buenos deseos, los amo a todos. Este trabajo es dedicado a todos ustedes, muchas gracias.

Resumen

El espacio de moduli \mathcal{M}_g es el espacio de clases de equivalencias conformales de superficies de Riemann de un género fijo $g \geq 1$. El espacio \mathcal{M}_g tiene una estratificación equisimétrica en que cada estrato consiste de las superficies de Riemann con un grupo de automorfismos que actúa de una manera topológica determinada. Usando grupos Fuchsianos y un algoritmo programado en SAGE, describiremos la estratificación equisimétrica para el espacio de moduli de superficies de Riemann de género 4, (recuperando así resultados de [3]) y la geometría de los estratos en \mathcal{M}_9 correspondientes a la acción de \mathbb{Z}_8 con signatura $(0; 8, 8, 4, 4, 4)$.

Introducción

El espacio de moduli \mathcal{M}_g de las superficies de Riemann compactas de género g , $g \geq 4$, que es el cociente del espacio Teichmüller por la acción discontinua del *mapping class group*, tiene la estructura de un orbifold complejo, cuyo conjunto de puntos singulares se denomina branch locus \mathcal{B}_g .

Para estudiar las superficies de Riemann, nuestra principal herramienta será la uniformización de estas usando grupos Fuchsianos.

Dada una superficie de Riemann X del género $g > 1$, consideramos el cubrimiento universal $\mathcal{H} \xrightarrow{\pi_1(X)} X$, donde \mathcal{H} es el plano hiperbólico. Luego, existe una representación $r : \pi_1(X) \rightarrow Isom^+(\mathcal{H}) = PSL(2, \mathbb{R})$ tal que $X = \mathcal{H}/r(\pi_1(X))$ y $r(\pi_1(X))$ es un subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$ (es decir, un grupo fuchsiano).

Si existe $\gamma \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que $r_1(\pi_1(X)) = \gamma(r_2(\pi_1(X)))\gamma^{-1}$, los grupos Fuchsianos $r_1(\pi_1(X))$ y $r_2(\pi_1(X))$ uniformizan la misma superficie de Riemann. El espacio

$\{r : \pi_1(X) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R}) : \mathcal{H}/r(\pi_1(X)) \text{ es una superficie de género } g\}$ /conjugación en $PSL(2, \mathbb{R})$

es el espacio Teichmüller T_g . Éste espacio tiene estructura compleja de dimensión $3g - 3$ y es simplemente conexa.

El grupo $Aut^+(\pi_1(X))/Inn(\pi_1(X)) = Mod_g$ es el grupo modular o *mapping class group*, que actúa por composición en T_g . Ahora definimos el espacio de moduli como el cociente $\mathcal{M}_g = T_g/Mod_g$.

La proyección $T_g \rightarrow \mathcal{M}_g = T_g/Mod_g$ es un cubrimiento regular ramificado con branch locus \mathcal{B}_g , en otras palabras, \mathcal{M}_g es un orbifold con lugar singular \mathcal{B}_g (ver [24]). El branch locus \mathcal{B}_g consiste de las superficies de Riemann con simetrías, es decir, aquellas con grupo de automorfismo no trivial (excepto cuando $g = 2$, donde \mathcal{B}_2 consiste de las superficies con automorfismos diferentes de la involución hiperelíptica y la identidad, y el lugar singular consiste sólo de la curva con acción de \mathbb{Z}_5).

Harvey [18] ha aludido a la existencia de la estratificación equisimétrica del espacio de moduli \mathcal{M}_g de superficies de Riemann de género g , cada estrato está formado por los puntos en el espacio de moduli que corresponden a las superficies equisimétricas. Dos superficies de Riemann cerradas X e Y de género g se dicen equisimétricas si sus grupos de automorfismos determinan subgrupos finitos conjugados en el grupo modular de género g , es decir, las acciones de sus grupos de automorfismos son topológicamente equivalentes. El branch locus del espacio de moduli está formado por los estratos correspondientes a las superficies del género $g > 2$ que admiten automorfismos no triviales. Broughton ([9]) mostró que la estratificación equisimétrica es de hecho una estratificación de \mathcal{M}_g por subvariedades algebraicas irreducibles cuyo interior, si éste es no vacío, es una subvariedad algebraica de \mathcal{M}_g suave, conexa, localmente cerrada y densa Zariski en el estrato.

Bartolini, Izquierdo y Costa [3],[2],[11] calcularon la estructura de orbifold de \mathcal{M}_4 y \mathcal{M}_5 . Como la estratificación equisimétrica del branch locus, \mathcal{B}_g y las relaciones entre sus estratos proporcionan la estructura de orbifold del espacio de moduli \mathcal{M}_g , para determinar la estructura de orbifold de \mathcal{M}_4 y \mathcal{M}_5 necesitaron la clasificación topológica de las acciones maximales de los grupos de automorfismos de las superficies de Riemann de géneros 4 y 5. Bogopolski y Kimura encontraron la clasificación topológica de todas las acciones de grupos finitos en superficies de género 4. Costa e Izquierdo [11] encontraron los estratos de \mathcal{M}_4 lo cual les permitió probar que el branch locus de \mathcal{M}_4 es conexo. Kuribayashi y Kimura clasificaron las acciones algebraicas de grupos finitos en superficies del género 5.

En esta tesis mostraremos la estratificación equisimétrica de \mathcal{M}_4 , y parte de la estratificación equisimétrica de \mathcal{M}_9 , motivado por un ejemplo concreto que mostraremos en el capítulo 2, ejemplo 2.6.3.

Ambas estratificaciones se realizaron considerando el género de la superficie cociente igual a 0. Los resultados que mostraremos fueron obtenidos por medio del programa SAGE [29] y la rutina o algoritmos para llegar a los resultados de género 4 y 9 se enseñarán en los capítulo 5 y 6 respectivamente.

Para el caso de \mathcal{M}_4 mostraremos las contenciones e intersecciones entre todos los estratos inducidos por las acciones maximales. Para el caso de \mathcal{M}_9 mostraremos las contenciones e intersecciones de los estratos asociados a las acciones de \mathbb{Z}_8 , con el propósito de seguir estudiando el ejemplo 2.6.3 que se presentará en el capítulo 2.

Los resultados obtenidos para género 4 mediante el programa SAGE recuperan los resultados obtenidos por Bartolini, Izquierdo y Costa en [3] usando GAP.

El algoritmo que se utilizó en la programación en SAGE se basa principalmente en los siguientes pasos:

1. Primero encontramos las posibles signaturas de grupos Fuchsianos que uniformizan X_4/G y X_9/G , donde X_4 y X_9 son superficies de Riemann de género 4, respectivamente 9, y G es el grupo de automorfismos de X_4 , respectivamente X_9 . Usando la lista de Singerman [27] destacamos cuáles signaturas son maximales.
2. Calculamos los epimorfismos $\theta : \Delta \rightarrow G$, donde $\ker(\theta) = \Gamma$ es un grupo Fuchsiano de superficie que uniformiza una superficie de género 4, respectivamente 9. Obtuvimos los epimorfismos y los vectores generadores asociados.
3. Clasificamos las acciones obtenidas anteriormente, módulo equivalencia topológica, encontrando las clases de vectores generadores bajo la acción de $\mathbb{B} \times \text{Aut}(G)$ (ver simbología).
4. Obtuvimos las acciones maximales y los estratos no vacíos asociados.
5. Finalmente calculamos la inclusión e intersección entre los diferentes estratos usando el Teorema 16 que se enunciará en el capítulo 1 .

La tesis se encuentra dividida en 6 capítulos. El primero, llamado Previos, está compuesto de todos los conceptos, definiciones y teoría previa necesaria para entender el trabajo expuesto en esta tesis. En el capítulo 2 se estudian acciones de grupos finitos en superficies de Riemann, equivalencia topológica y conformal, relaciones, etc. En ese capítulo se recogen gran parte de mis primeros estudios y cálculos “a mano” como tesista, donde se desarrolla en detalle y explícitamente ejemplos encontrados en trabajos de investigación recientes como [14], [10] [23] y [8]. El capítulo 3 ya empieza a abarcar el núcleo de esta tesis, la teoría de estratificación equisimétrica del espacio de moduli \mathcal{M}_g de superficies de Riemann de cierto género fijo g . En el capítulo 4, se obtiene la estratificación equisimétrica de \mathcal{M}_4 y \mathcal{M}_9 . Finalmente en los dos últimos capítulos se muestra la rutina SAGE de ambas estratificaciones de manera separada, explicitando los resultados computacionales por medio de imágenes, tabulaciones y diagramas, y mostrando también las contenciones e intersecciones de estratos que es lo que completé y cierra este trabajo.

Índice general

1. Previos	3
1.1. Superficie de Riemann	3
1.1.1. Ejemplos	3
1.1.2. Curvas Algebraicas Planas Afines	6
1.1.3. Singularidades	8
1.1.4. Singularidades monomiales y su resolución	8
1.1.5. Curvas Algebraicas Proyectivas	9
1.2. Automorfismos de Superficie de Riemann	11
1.3. Cubrimientos y Uniformización	12
1.4. Geometría Hiperbólica y Grupos Fuchsianos	13
2. Acción de Grupo en Superficies de Riemann	19
2.1. Acciones en Superficies de Riemann	19
2.2. Vector Generador	20
2.3. Obtención de vectores generadores para cada acción	21
2.4. Equivalencia Topológica y Analítica de Acciones de Grupos sobre Superficies de Riemann	26
2.4.1. Definición de Equivalencia de Acciones	26
2.5. Equivalencia de acciones por medio del álgebra	27
2.6. Ejemplos Concretos	28
2.6.1. \mathbb{Z}_4 actuando en género 3	28
2.6.2. \mathbb{Z}_7 actuando en género 3	30
2.6.3. \mathbb{Z}_8 actuando en género 9	31
2.7. Grupos Fuchsianos Maximales	36
3. Estratificación Equisimétrica	38
3.1. Espacio de Moduli y espacio de Teichmüller	38
3.2. Estratificación Equisimétrica	40
3.3. Contención de estratos	42
4. Estratificación equisimétrica de \mathcal{M}_4 y \mathcal{M}_9	43
4.1. Estratificación equisimétrica de \mathcal{M}_4	44
4.2. Estratificación equisimétrica asociada a la acción de \mathbb{Z}_8 en \mathcal{M}_9	50
5. Rutina SAGE para la Estratificación Equisimétrica de \mathcal{M}_4	54
6. Rutina SAGE para la Estratificación Equisimétrica de \mathbb{Z}_8 en \mathcal{M}_9	77

Símbolo	Significado
$ G $	Orden del grupo G .
$[G : H]$	Índice del subgrupo H in G .
G_p	Subgrupo estabilizador de p .
$\hat{\mathbb{C}}$	La esfera de Riemann, esto es $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
\mathcal{D}	Disco unitario, esto es $\{z \in \mathbb{C} : z < 1\}$.
\mathcal{H}	Semi-plano superior, esto es $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$.
S/G	Espacio cociente dado por la acción de G en S .
S_n	Grupo simétrico de n letras.
A_n	Grupo alternante de n letras.
D_n	Grupo diedral de $2n$ elementos.
Q_8	Grupo cuaternio de orden 8.
\mathcal{B}_g	Branch locus.
$\text{Inn}(G)$	Grupo de automorfismos internos.
\mathbb{B}_r	Grupo de trenzas.
\mathbb{B}	Algún subgrupo del grupo de trenzas.
$PSL(n, \mathbb{F})$	Grupo especial lineal proyectivo.
\mathfrak{g}	Género de la superficie cociente.

Capítulo 1

Previos

1.1. Superficie de Riemann

Una *Superficie de Riemann* es un espacio topológico X Hausdorff conexo que es localmente homeomorfo al plano complejo y que consta de estructura compleja. Que sea localmente homeomorfo a \mathbb{C} significa, que cada punto en X , tiene una vecindad abierta U_i tal que existe un homeomorfismo $\phi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{C}$. El par (U_i, ϕ_i) es llamado *carta* en X . Cuando $p \in U$ es tal que $\phi(p) = 0$ diremos que (U, ϕ) es una *carta centrada en p* . Un *atlas* complejo es un conjunto de cartas A , tal que los abiertos asociados forman un cubrimiento de X , y si (U_i, ϕ_i) y (U_j, ϕ_j) son tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces la función de transición $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$ es una función analítica.

$$\begin{array}{ccc} & U_i \cap U_j & \\ \phi_j \swarrow & & \searrow \phi_i \\ \phi_j(U_i \cap U_j) & \xrightarrow{\phi_i \circ \phi_j^{-1}} & \phi_i(U_i \cap U_j) \end{array}$$

Dos atlas analíticos A y B son compatibles si todas las funciones de transición de las cartas $(U, \phi) \in A$ y $(V, \psi) \in B$ son analíticas. Tales atlas son equivalentes, una clase de atlas se llama una *estructura compleja en X* .

1.1.1. Ejemplos

Ejemplo 1. El plano complejo \mathbb{C} , lo podemos dotar de las siguientes estructuras complejas:

1. (U, ϕ) con $U = \mathbb{C}$ y $\phi(z) = z$.
2. (U, ϕ) con $U = \mathbb{C}$ y $\phi(z) = \bar{z}$.
3. (U, ϕ) con $U = \mathbb{C}$ y $\phi(z) = \frac{z}{1 + |z|}$.

Ejemplo 2. La Recta proyectiva compleja.

Consideremos la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

$$z, w \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}, z \sim w \Leftrightarrow \text{existe } \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ tal que } z = \lambda w$$

Definamos $X = \mathbb{CP}^1 := \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} / \sim$. Notemos que $(z_0, w_0) = \alpha(z_0, w_0) \in \mathbb{CP}^1$ con $\alpha \in \mathbb{C}^*$; es decir, corresponden al mismo punto. Usaremos la notación $(z_0 : w_0)$ para un punto en \mathbb{CP}^1 . Los conjuntos:

$$U_0 = \{(z : w) \in \mathbb{CP}^1 : z \neq 0\} = \mathbb{CP}^1 \setminus \{(0 : 1)\}$$

$$U_1 = \{(z : w) \in \mathbb{CP}^1 : w \neq 0\} = \mathbb{CP}^1 \setminus \{(1 : 0)\}$$

$\{U_0, U_1\}$ forman un cubrimiento de X .

Definimos las siguientes biyecciones:

$$\phi_0 : U_0 \rightarrow V_0 = \mathbb{C}, \quad \phi_0(z : w) = \frac{w}{z}$$

$$\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1 = \mathbb{C}, \quad \phi_1(z : w) = \frac{z}{w}$$

Damos la topología correspondiente a X así entonces tenemos una topología en U_0 y en U_1 , y ambas funciones son homeomorfismos. Claramente $\phi_0(U_0) = \mathbb{C} = \phi_1(U_1)$ es un abierto de \mathbb{C} .

Tenemos las cartas complejas :

$$\{(U_0, \phi_0), (U_1, \phi_1)\}$$

las cuales son compatibles, formando un atlas complejo en \mathbb{CP}^1 que le dan a este espacio la estructura de Superficie de Riemann.

X es conexo, pues U_0 y U_1 son conexos (al ser homeomorfos a \mathbb{C}^*) con intersección no vacía.

X es Hausdorff: Si $p, q \in X$ son puntos en el mismo U_i se separan pues cada U_i es Hausdorff. Consideremos $p \in U_0 \setminus U_1$ y $q \in U_1 \setminus U_0$, entonces $p = [1 : 0]$ y $q = [0 : 1]$. Observemos que $\phi_0(p) = 0 = \phi_1(q)$. Consideremos $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, sean $V_p = \phi_0^{-1}(\mathcal{D})$ y $V_q = \phi_1^{-1}(\mathcal{D})$, ambos son abiertos y su intersección es vacía.

X es compacto: $X = \phi_0^{-1}(\overline{\mathcal{D}}) \cup \phi_1^{-1}(\overline{\mathcal{D}})$ (esta no es una condición necesaria para que X sea superficie de Riemann).

Puede demostrarse que X es homeomorfa a la esfera unitaria y compacta S^2 en \mathbb{R}^3 usando la siguiente función llamada proyección estereográfica:

$$\mathbb{CP}^1 \rightarrow S^2$$

$$(z : w) \mapsto \frac{1}{|z|^2 + |w|^2} (2\Re(w\bar{z}), 2\Im(w\bar{z}), |w|^2 - |z|^2),$$

$$\infty \mapsto (0, 0, 1).$$

La superficie X con esta estructura compleja se llama *recta proyectiva compleja*.

Ejemplo 3. La Esfera de Riemann.

Consideremos a $X = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \widehat{\mathbb{C}}$ es decir la compactificación de \mathbb{C} en un punto, con la topología compacto - abierto. Este espacio es compacto, conexo y Hausdorff.

Si consideramos las cartas complejas :

$$\{(U_0 = \mathbb{C}, \phi_0 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}) ; (U_1 = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, \phi_1 : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C})\}$$

donde $\phi_0(z) = z$ y $\phi_1(z) = \frac{1}{z}$ (definiendo $\phi_1(\infty) = 0$), notamos que éstas forman un atlas complejo que le da a $\widehat{\mathbb{C}}$ una estructura de superficie de Riemann.

Puede demostrarse también que la superficie $\widehat{\mathbb{C}}$ y S^2 son homeomorfas usando la siguiente función:
 $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$

$$\frac{w}{z} \mapsto \frac{1}{|z|^2 + |w|^2} (2\Re(w\bar{z}), 2\Im(w\bar{z}), |w|^2 - |z|^2)$$

Observamos que en $\widehat{\mathbb{C}}$ existen dos topologías : la compacto - abierto τ_1 , y la dada por el cubrimiento del atlas complejo construido anteriormente τ_2 . Ambas son la misma topología.

$\widehat{\mathbb{C}}$ con esta estructura compleja se denomina la *esfera de Riemann*.

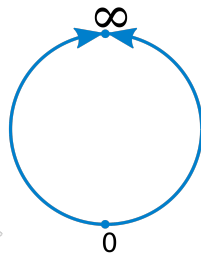


Figura 1.1: Punto del infinito.

Ejemplo 4. Toro Complejo

Sean w_1 y w_2 dos vectores en \mathbb{C} linealmente independientes con respecto a \mathbb{R} . Consideremos el siguiente conjunto L

$$L = \{nw_1 + mw_2 : n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Este conjunto es un reticulado en el plano, es decir un subgrupo discreto de rango 2 en \mathbb{C} , y por lo tanto isomorfo a \mathbb{Z}^2 .

Consideremos en \mathbb{C} la relación de equivalencia $z, w \in \mathbb{C}; z \sim w \Leftrightarrow z - w \in L$, y $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/L = S$ la proyección que le da a S la topología cociente. Así entonces, π es continua y sobreyectiva. Además

es abierta, pues para todo V abierto de \mathbb{C} , su imagen $\pi(V)$ es abierto si y sólo si $\pi^{-1}(\pi(V))$ es abierto de \mathbb{C} . Como

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{w \in L} (V + w)$$

es una unión de trasladados de V , que son todos abiertos, luego es abierto. También S es conexo, y más aún S es compacto pues es la imagen continua de π restringida al conjunto

$$P_z = \{z + aw_1 + bw_2 : a, b \in [0, 1]\}.$$

La construcción de cartas complejas en este espacio se basa en lo siguiente:

Como L es discreto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|w| > 2\varepsilon$ para todo $w \in L \setminus \{0\}$, entonces

$$\forall z_0 \in \mathbb{C} \quad \pi|_{B(z_0, \varepsilon)} : B(z_0, \varepsilon) \rightarrow \pi(B(z_0, \varepsilon))$$

es un homeomorfismo local (con respecto a S).

Consideremos $V_{z_0} = B(z_0, \varepsilon)$, $U_{z_0} = \pi(B(z_0, \varepsilon))$ y $\phi_{z_0} : U_{z_0} \rightarrow V_{z_0}$, es decir la inversa local con respecto a \mathbb{C} de la función π restringida a $B(z_0, \varepsilon)$. Vemos que (U_{z_0}, ϕ_{z_0}) es una carta local en S .

Tomemos ahora (U_{z_1}, ϕ_{z_1}) y (U_{z_2}, ϕ_{z_2}) cartas en S y supongamos que $U_{z_1} \cap U_{z_2} \neq \emptyset$.

Tenemos la siguiente función :

$$f = \phi_{z_2} \circ \phi_{z_1}^{-1} : \phi_{z_1}(U_{z_1} \cap U_{z_2}) \longrightarrow \phi_{z_2}(U_{z_1} \cap U_{z_2})$$

Observamos que $f(z) = \phi_{z_2}(\pi(z))$ entonces $\pi(f(z)) = \pi(z)$, luego $(f(z) - z) \in L$. Sea $f(z) - z = \omega(z)$, donde $\omega(z)$ es una función continua desde $\phi_{z_1}(U_{z_1} \cap U_{z_2}) \rightarrow L$, como L es discreto entonces ω es constante en componentes conexas. Por lo tanto

$$f(z) = z + \bar{\omega}$$

donde $\bar{\omega}$ está fijo en cada componente conexa. Y claramente esta función f es analítica lo que hace que $\{U_{z_i}, \phi_{z_i}\}$ sea un atlas en S .

Tenemos finalmente que $S = \mathbb{C}/L$ es una superficie de Riemann compacta y se llama toro complejo de dimensión 1. Observe que es un espacio topológico orientable y como tal está clasificado por su género, que es 1. Al variar los vectores del reticulado obtenemos espacios topológicos homeomorfos pero superficies de Riemann, como ya veremos, en general distintas.

Ejemplo 5. Curvas Algebraicas Planas Afines y Projectivas.

Forman una gran fuente de nuevas superficies de Riemann, las cuales estudiaremos a continuación.

1.1.2. Curvas Algebraicas Planas Afines

Construiremos superficies de Riemann que sean gráficos de polinomios de dos variables sobre los complejos, para definir cartas usamos el Teorema de la función implícita (T.F.I).

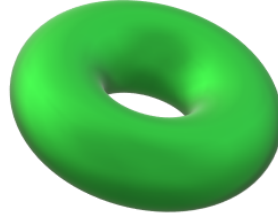


Figura 1.2: Toro, superficie de género 1.

Teorema 1 (T.F.I). [22] Sea $f(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$ y $X_f = f^{-1}(0) = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : f(z, w) = 0\}$. Sea $P = (z_0, w_0) \in X_f$ tal que $\frac{\partial f}{\partial w}(P) \neq 0$. Entonces en una vecindad V_0 de z_0 , existe una función g analítica tal que

1. $g(z_0) = w_0$
2. Para todo $z \in V_0$, $f(z, g(z)) = 0$
3. $g'(z) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial w}}$ para todo $z \in V_0$

Observemos que X_f corresponde al gráfico de g cerca de P ; es decir, $X_f = \{(z, g(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in V_0\}$. Además si es la otra derivada parcial la que no se anula, se tiene un resultado análogo.

Definición 1. Una curva algebraica plana afín (**c.a.p.a**) es el lugar de ceros en \mathbb{C}^2 de un polinomio $f \in \mathbb{C}[z, w]$. Un polinomio f es no singular en un cero P sí y sólo si algunas de sus derivadas parciales NO se anula en P . La c.a.p.a. correspondiente a f se dice

- suave en P si f es no singular en P
- suave cuando lo es en todo punto
- irreducible si f lo es.

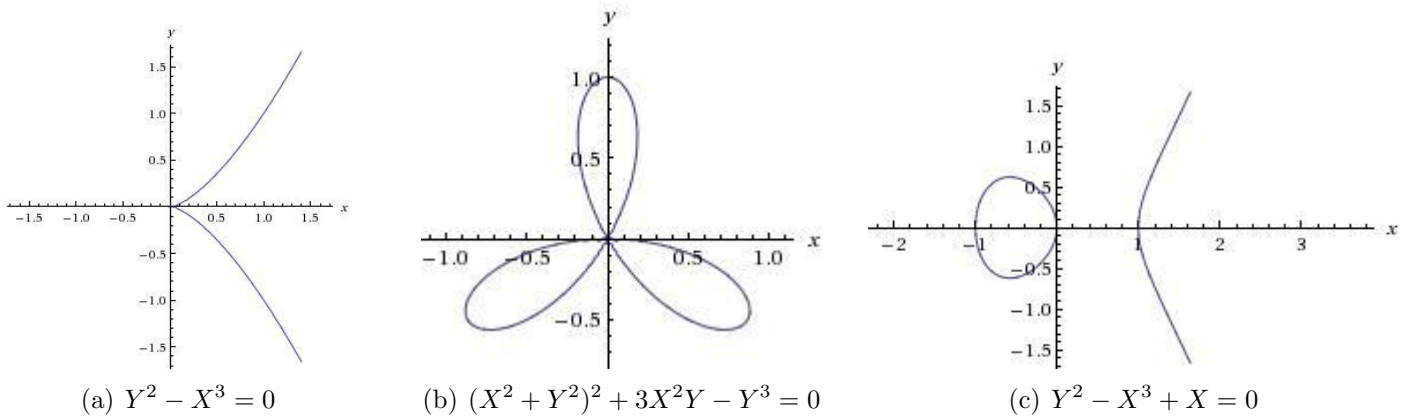


Figura 1.3: Ejemplos de curvas con singularidades.

Observación 1. Si $f \in \mathbb{C}[z, w]$ es irreducible entonces su lugar de ceros es un subconjunto conexo de \mathbb{C}^2 .

Teorema 2. Si $f \in \mathbb{C}[z, w]$ es no singular e irreducible, entonces su lugar de ceros X_f es superficie de Riemann.

Demostración. La topología para X_f será la de subespacio de \mathbb{C}^2 , luego es Hausdorff y conexo. Para dar una estructura compleja en X_f usaremos el Teorema 1. Sea $p = (z_0, w_0) \in X_f$, p es no singular por hipótesis y suponga que $\frac{\partial f}{\partial w}(p) \neq 0$. Por el T.F.I. existe $g_p(z)$ analítica tal que cerca de p , digamos en vecindad U_p , X_f corresponde al gráfico de g_p . Considere la proyección en la primera coordenada $\pi_1 : U_p \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $(z, g_p(z)) \mapsto z$. π_1 es un homeomorfismo sobre su imagen y corresponde a la carta en p . Si es $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$, usamos proyección en la otra coordenada como carta local. Los cambios de coordenadas corresponden a la identidad o a g_p , luego son analíticos. \square

Sea $f \in \mathbb{C}[z, w]$ irreducible y $X_f \subset \mathbb{C}^2$ su lugar de ceros, el grado de X corresponde al grado de f .

1.1.3. Singularidades

Los puntos de la curva en donde ambas derivadas parciales se anulan, se llaman singularidades. Hemos visto que una c.a.p.a. no singular es naturalmente una superficie de Riemann. Sin embargo podemos decir algo de aquellas con singularidades. Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado, denote por f un polinomio irreducible en $k[x, y]$ y X_f su lugar de ceros.

Primero veamos que si $\frac{\partial f}{\partial x}$ se anula, lo hace para un número finito de puntos en X_f o divide a f .

Como su grado es estrictamente menor, tiene que ser idénticamente nula. Lo mismo para $\frac{\partial f}{\partial y}$. En tal caso f sería constante. Por lo tanto una curva irreducible tiene un número finito de singularidades.

La curva $x^3 + y^3 = 1$ es no singular. Las curvas $y^2 = x^2 + x^3$ y $y^2 = x^3$ son singulares en $(0, 0)$, pero las singularidades son diferentes.

Las singularidades se pueden resolver mediante un proceso llamado *normalización*, quedando nuevamente con una superficie de Riemann que coincide con la curva algebraica original en *casi todas partes*, excepto en las singularidades. Básicamente esto consiste en borrar las singularidades, reemplazarlas por tantos puntos como sea necesario y luego pegar discos que darán nuevas cartas.

Consideremos que $P = (0, 0)$ es una singularidad de f , escribamos f como $f = f_m + f_{m+1} + \dots + f_n$ donde cada f_i es una forma en $k[x, y]$ de grado i . Definimos m como la multiplicidad de f en P y la denotaremos por $m_P f$. Ahora si el punto singular es $Q = (a, b) \neq (0, 0)$, consideramos una traslación $T(x, y) = (x + a, y + b)$ y estudiamos la curva $f \circ T$ en $(0, 0)$; es decir, $m_{(a,b)} f := m_{(0,0)} f(x + a, y + b)$. A continuación mostraremos un tipo especial de singularidades y su resolución.

1.1.4. Singularidades monomiales y su resolución

Sea $X_f = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f(x, y) = 0, f \in \mathbb{C}[x, y]\}$. $P = (0, 0)$ es una singularidad monomial de tipo (n, m) si y sólo si, existen series de potencias $g(x, y)$, $h(x, y)$ sin términos constantes y con términos lineales linealmente independientes, tales que

$$f(x, y) = (g(x, y))^n - (h(x, y))^m$$

Observación 2. Si $P = (a, b) \neq (0, 0)$ es singularidad, cambiamos variables (traslación) para que quede en $(0, 0)$.

Una singularidad monomial en que el máximo común divisor entre n y m es 1, $(m, n) = 1$, (por ejemplo la curva: $y^7 = x^2(x + 1)$), se resuelve considerando las funciones (cartas):

$$r(t) = (z, w) = (t^m, t^n)$$

$$s(z, w) = t = z^b w^a,$$

donde $a, b \in \mathbb{Z}$ se escogen de tal forma que $an + bm = 1$. Se puede verificar que las composiciones de estas funciones dan la identidad en los espacios correspondientes, es decir, r y s son inversas una de la otra y se dice que s es una carta perforada en un abierto de $X_f \setminus \{0, 0\}$. Para más detalles, consultar [22].

1.1.5. Curvas Algebraicas Proyectivas

Definición 2. Definimos el espacio proyectivo complejo como \mathbb{CP}^2 , correspondiente al conjunto de subespacios uno dimensionales de \mathbb{C}^3 , análogo a lo realizado en 1.1.1 ejemplo 2. Otras notaciones: $\mathbb{P}_2\mathbb{C}$ o \mathbb{P}_2 .

Los puntos de \mathbb{CP}^2 los denotaremos $[x : y : z]$. $\mathbb{CP}^2 = \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*$.

\mathbb{CP}^2 tiene la topología cociente; U es un abierto en \mathbb{CP}^2 si y solamente si $p^{-1}(U)$ es un abierto en $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$, donde p es la proyección. Con esta topología \mathbb{CP}^2 es Hausdorff y conexo.

En \mathbb{CP}^2 definiremos los siguientes subconjuntos :

$$U_0 = \{ [x : y : z] \in \mathbb{CP}^2 : x \neq 0 \}$$

$$U_1 = \{ [x : y : z] \in \mathbb{CP}^2 : y \neq 0 \}$$

$$U_2 = \{ [x : y : z] \in \mathbb{CP}^2 : z \neq 0 \}.$$

Notamos que $\mathbb{CP}^2 = U_0 \cup U_1 \cup U_2$

Cada uno de ellos es homeomorfo a \mathbb{C}^2 a través de los siguientes homeomorfismos:

$$\begin{aligned} \phi_0 : U_0 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ [x : y : z] &\mapsto \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_1 : U_1 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ [x : y : z] &\mapsto \left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2 : U_2 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ [x : y : z] &\mapsto \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right) \end{aligned}$$

Ahora bien, definimos este espacio y estos subconjuntos pues queremos encontrar superficies de Riemann dentro de \mathbb{CP}^2 . Observemos que $\mathbb{CP}^2 = \bigcup_{i=0}^2 \phi^{-1}(\overline{\mathcal{D}})$, con $\overline{\mathcal{D}} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| \leq 1, |w| \leq 1\}$. Luego es compacto.

Definición 3. Sea F un polinomio homogéneo en $\mathbb{C}[x, y, z]$, es decir, cada monomio tiene el mismo grado. El *grado de F* , $gr(F)$, es el grado de cada monomio. Entonces si $\lambda \in \mathbb{C}$, $F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^{gr(F)} F(x, y, z)$.

Consideremos ahora al conjunto

$$X_F = \{ [x : y : z] \in \mathbb{P}_2\mathbb{C} : F(x, y, z) = 0 \},$$

este conjunto está bien definido, y como $\mathbb{CP}^2 = U_0 \cup U_1 \cup U_2$ llamaremos $\tilde{X}_i = X_F \cap U_i$ y $\phi_i(\tilde{X}_i)$ sería una curva plana. No haremos distinción entre \tilde{X}_i y $\phi_i(\tilde{X}_i)$.

$$\tilde{X}_0 := X_F \cap U_0 = \{ [x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{CP}^2 : F(x_0, x_1, x_2) = 0 \wedge x_0 \neq 0 \} = \{ [1, a, b] \in \mathbb{CP}^2 : F(1, a, b) = 0 \},$$

$$\phi_0(\tilde{X}_0) = \{ (a, b) \in \mathbb{C}^2 : F(1, a, b) = 0 \} \subseteq \mathbb{C}^2,$$

si definimos $f(a, b) = F(1, a, b)$ tenemos que $\phi_0(\tilde{X}_0) = X_f$ es una curva plana afín. Si f es no singular e irreducible, entonces X_f es una superficie de Riemann. Análogamente $\phi_1(\tilde{X}_1)$ y $\phi_2(\tilde{X}_2)$. Este proceso se llama deshomogenización del polinomio F con respecto a la variable x_i . Recíprocamente, dado $f \in \mathbb{C}[x, y]$ construimos $F(x, y, z)$ tal que su deshomogenización con respecto a z sea el polinomio f original.

Ejemplo 6. Consideremos el polinomio $f \in \mathbb{C}[x, y]$ descrito por $f(x, y) = y^2 - x(x+1)(x-1) = y^2 - x^3 + x$, X_f es una superficie de Riemann y la homogeneización de f es $F(x, y, z) = y^2 z - x^3 + xz^2 = y^2 z - x(x+z)(x-z)$.

Definición 4. Sea $F(x, y, z)$ un polinomio homogéneo. F es *no singular* o *liso* si no hay solución distinta de la trivial para este sistema:

$$F = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Proposición 1. Sea F un polinomio homogéneo en $\mathbb{C}[x, y, z]$. Entonces, F es no singular si y solamente si cada $\phi(X_i)$ es una curva plana no singular para $i = 0, 1, 2$.

Teorema 3. Sea F un polinomio homogéneo no singular sobre \mathbb{C} . Entonces F es irreducible.

Corolario 1. Sea $F(x, y, z)$ un polinomio homogéneo no singular en $\mathbb{C}^3[x, y, z]$. Entonces en el contexto anterior \tilde{X}_i , $i = 0, 1, 2$, es una superficie de Riemann.

Además si F es homogéneo irreducible, su deshomogenización f es irreducible.

Teorema 4. Sea F un polinomio en $\mathbb{C}[x, y, z]$ homogéneo y no singular. Entonces $X = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 : F(x, y, z) = 0\}$ es una superficie de Riemann compacta.

Ejemplo 7. Consideremos al siguiente polinomio, $F(x, y, z) = x^m + y^m + z^m$. Este es homogéneo, irreducible y no singular. Entonces $X = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 : F(x, y, z) = 0\} = X_0 \cup \{[0 : y : z] \in \mathbb{P}^2 : y^m = -z^m\}$.

Trabajaremos especialmente con *curvas algebraicas planas afines* y *curvas proyectivas planas*.

1.2. Automorfismos de Superficie de Riemann

Definición 5. [1] Podemos definir funciones holomorfas entre superficies de Riemann. Sean S_1 y S_2 superficies de Riemann con atlas $\{(U_i, \phi_i)\}$ y $\{(V_j, \psi_j)\}$ respectivamente. Una función $f : S_1 \rightarrow S_2$ se dice holomorfa (o meromorfa) si las funciones

$$\psi_j \circ f \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap f^{-1}(V_j)) \rightarrow \mathbb{C}$$

son analíticas, donde f es un homomorfismo de Superficies de Riemann.

$$\begin{array}{ccc} U_i \cap f^{-1}(V_j) \subset S_1 & \xrightarrow{f} & S_2 \supset V_j \cap f(U_i) \\ \phi_i \downarrow & & \downarrow \psi_j \\ \phi_i(U_i \cap f^{-1}(V_j)) & \xrightarrow{\psi_j \circ f \circ \phi_i^{-1}} & \psi_j(V_j \cap f(U_i)) \end{array}$$

Además si f es biyectiva y f^{-1} es también holomorfa, entonces llamamos a f *biholomorfa*. Dos superficies son conformemente equivalentes si existe una función biholomorfa entre ellas.

Para $S_1 = S_2 = X$, y f biholomorfa, f es llamado un *automorfismo* de X . Al conjunto de todos los automorfismos de X lo denotamos $\text{Aut}(X)$, el cual es un grupo bajo la composición de funciones.

Ejemplo 8. Consideremos las superficies: \mathbb{C} , $\widehat{\mathbb{C}}$ y \mathcal{H} .

- i) $\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{az + b / a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$
- ii) $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) = PSL(2, \mathbb{C})$
- iii) $\text{Aut}(\mathcal{H}) = PSL(2, \mathbb{R})$

Existe una cota superior para la cardinalidad del grupo de automorfismos de una superficie compacta de género $g > 1$:

Teorema 5. [19] Sea X una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$, entonces $|\text{Aut}(X)| \leq 84(g-1)$.

Una superficie de Riemann X tal que $|\text{Aut}(X)| = 84(g-1)$, se llama superficie de Hurwitz, y $\text{Aut}(X)$ un grupo de Hurwitz.

Ejemplo 9. La superficie de Hurwitz más conocida es la cuártica de Klein de género 3. Definida como la curva compleja de ecuación

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0.$$

El grupo de automorfismos de la cuártica de Klein es isomorfo a $PSL(2, 7)$ y $|PSL(2, 7)| = 168 = 84(3-1)$.

1.3. Cubrimientos y Uniformización

Ahora consideraremos otro tipo de funciones entre superficies de Riemann, las funciones cubrimientos (o simplemente cubrimientos).

Definición 6. [1] Un cubrimiento es una función continua y sobreyectiva $f : X \rightarrow Y$ tal que para cada punto $y \in Y$, la preimagen de alguna vecindad V de y es una unión disjunta de conjuntos abiertos de X , cada uno homeomorfo a V vía f .

El conjunto de las preimágenes de y , $f^{-1}(y)$, se llama una *fibra* sobre y , cada fibra tiene alguna cardinalidad la cual puede ser finita o infinita.

Una función continua y sobreyectiva $f : X \rightarrow Y$ tal que

$$f : X \setminus f^{-1}(y_1, \dots, y_k) \longrightarrow Y \setminus \{y_1, \dots, y_k\}$$

es un cubrimiento, se llama cubrimiento ramificado, y los puntos y_i se llaman puntos ramas. Dos cubrimientos $f : X \rightarrow Y$ y $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow Y$ se consideran equivalentes si existe un biholomorfismo $g : \tilde{X} \rightarrow X$ tal que $\tilde{f} = f \circ g$.

Ejemplo 10. La función $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ definida por $z \rightarrow z^n$ es un cubrimiento ramificado con fibras de cardinalidad n . Los puntos ramas son ∞ y 0 .

Ejemplo 11. La función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ definida por $z \rightarrow e^z$ es un cubrimiento ramificado con fibras de cardinalidad infinita.

Teorema 6. [21] Sea $f : X \rightarrow Y$ un cubrimiento, donde Y es arcoconexo. Para cada $p \in Y$, el grupo fundamental $\pi_1(Y, p)$ actúa transitivamente por la derecha sobre la fibra $f^{-1}(p)$.

Las permutaciones de una fibra $f^{-1}(p)$ por $g \in \pi_1(Y, p)$ forman un grupo llamado el *grupo de monodromía* de f en p , por lo que se habla del grupo de monodromía de f .

Teorema 7 (Teorema de Uniformización). [20] Cualquier superficie de Riemann simplemente conexa es isomorfa a uno de los siguientes espacios: \mathbb{C} , $\widehat{\mathbb{C}}$ o \mathcal{H} .

Consideremos una superficie de Riemann X , entonces existe una superficie de Riemann simplemente conexa \mathcal{U} tal que se tiene el cubrimiento $p : \mathcal{U} \rightarrow X$. Tal cubrimiento es conocido como un *cubrimiento Universal*.

Teorema 8. Sea $p : \mathcal{U} \rightarrow X$ el cubrimiento universal de una superficie de Riemann X . Entonces \mathcal{U} es uno de los siguientes espacios:

1. El plano complejo \mathbb{C}
2. La esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$
3. El plano Hiperbólico \mathcal{H} .

Una propiedad que distingue a las tres superficies de Riemann simplemente conexas es su curvatura. La esfera tiene una curvatura constante positiva, el plano hiperbólico tiene curvatura constante negativa y el plano Euclideo tiene curvatura nula.

Teorema 9. La única superficie de Riemann que admite un cubrimiento universal dado por $\widehat{\mathbb{C}}$ es la misma $\widehat{\mathbb{C}}$. Las únicas superficies de Riemann que admiten un cubrimiento universal dado por \mathbb{C} son:

1. El plano complejo \mathbb{C}
2. El cilindro
3. El toro.

Cualquier otra superficie de Riemann, tiene al plano hiperbólico \mathcal{H} como cubrimiento universal. En particular, cada superficie de Riemann compacta de género mayor que 1 es uniformizada por \mathcal{H} .

Observe que \mathcal{H} es biholomorfo a $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Profundizaremos esto en la sección que sigue.

1.4. Geometría Hiperbólica y Grupos Fuchsianos

Para trabajar con superficies de Riemann como espacios cocientes, necesitamos el concepto de geometría hiperbólica. Dos modelos comunes del plano hiperbólico son el modelo de Disco de Poincaré y el modelo de semi-plano superior de Poincaré [12].

1. El modelo de Disco de Poincaré está dado por el disco unitario $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ con la métrica $ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}$. Rectas hiperbólicas, o geodésicas, corresponden a rectas y arcos de círculos perpendiculares al círculo unitario.
2. El modelo de semi-plano superior de Poincaré está dado por el semi-plano superior $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ con la métrica $ds = \frac{|dz|}{\text{Im}(z)}$. Rectas hiperbólicas corresponden a rectas y arcos de círculos perpendiculares a la recta real.

Un biholomorfismo entre \mathcal{H} y \mathcal{D} es dado por

$$z \mapsto \frac{z - i}{z + i}.$$

En lo que sigue, denotaremos por \mathcal{H} al plano hiperbólico, independientemente del modelo que usemos.

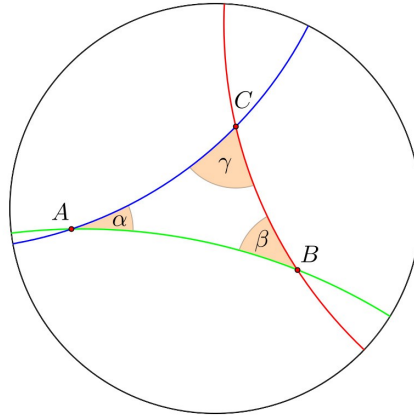


Figura 1.4: Geometría hiperbólica.

Antes de introducir grupos Fuchsianos necesitamos algunas definiciones básicas de acciones en superficies de Riemann. Sea G un grupo de homeomorfismos sobre una superficie topológica X . Entonces diremos que G actúa libremente en X si para cada punto $x \in X$ existe una vecindad V de x tal que $g(V) \cap V = \emptyset$, para cierto $g \in G$. Sin embargo, vamos a considerar grupos con puntos fijos, por lo que necesitamos una condición más débil. Si cada punto $x \in X$ tiene una vecindad V tal que $g(V) \cap V \neq \emptyset$ para un número finito de $g \in G$ diremos que G actúa de forma propiamente discontinua en X . El espacio de las órbitas de los puntos de X bajo la acción G se denota por X/G .

Teorema 10. Sea X un espacio topológico y G un grupo de homeomorfismos que actúa en X . Entonces las siguientes son equivalentes:

- i) La función natural $X \rightarrow X/G$ es un cubrimiento (cubrimiento ramificado).
- ii) G actúa libremente (de forma propiamente discontinua).

Primero varemos acciones de grupo sobre el plano hiperbólico \mathcal{H} por isometrías conformales. Al considerar el modelo de semi-plano de \mathcal{H} , notamos que una isometría llevará círculos en círculos en \mathbb{C} y en particular preserva la recta real. Por lo tanto, podemos identificar las isometrías, o automorfismos de \mathcal{H} , como el conjunto de transformaciones de Möbius del siguiente tipo;

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

y este grupo es isomorfo a $PSL(2, \mathbb{R})$. Los elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$ pueden estar divididos en tres categorías, caracterizadas por sus conjuntos de puntos fijos. Diremos que un elemento $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ es

- i) hiperbólico si tiene un conjunto fijo $\{x, y\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
- ii) elíptico si tiene un punto fijo $z \in \mathcal{H}$.
- iii) parabólico si tiene un punto fijo $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Ejemplo 12. Abarcaremos las tres categorías:

- i) La función $z \mapsto \lambda z$, donde $\lambda \in \mathbb{R}^+$, es hiperbólico con puntos fijos $\{\infty\}$ y 0.
- ii) La función $z \mapsto -\frac{1}{z}$, es un elemento elíptico con punto fijo i .
- iii) La función $z \mapsto z + 1$, es un elemento parabólico con punto fijo ∞ .

Definición 7. [12] Un grupo de transformaciones de Möbius que actúa de manera propiamente discontinua se dice *grupo Fuchsiano* si deja un disco invariante.

Identificando el plano hiperbólico \mathcal{H} con el semi-plano superior y $PSL(2, \mathbb{R})$ como un grupo topológico con la topología dada por la norma matricial, se tiene que todo grupo Fuchsiano es un subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$ [12].

Ejemplo 13. Un grupo Fuchsiano conocido es el grupo modular $PSL(2, \mathbb{R})$, que consiste de las transformaciones de Möbius con coeficientes enteros:

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}.$$

La superficie $\mathcal{H}/PSL(2, \mathbb{R})$ es una esfera con dos singularidades y una pinchadura.

Sólo estaremos interesados en grupos Fuchsianos Γ , tales que el espacio cociente \mathcal{H}/Γ es una superficie de Riemann compacta. Entonces Γ consistirá sólo de elementos hiperbólicos y elípticos, teniendo la siguiente presentación

$$\Gamma = \left\langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g, \gamma_1, \dots, \gamma_r / \gamma_1^{m_1} = \dots = \gamma_r^{m_r} = \prod \gamma_i \prod [\alpha_i, \beta_i] = 1 \right\rangle \quad (1.1)$$

donde γ_i es un elemento elíptico y los elementos α_i y β_i son hiperbólicos.

Este grupo es isomorfo al grupo fundamental de \mathcal{H}/Γ . Si un grupo Γ tiene la presentación (1.1), entonces diremos que Γ tiene *signatura*

$$s(\Gamma) = (\mathbf{g}; m_1, \dots, m_r) \quad (1.2)$$

donde \mathbf{g} es el género de la superficie topológica \mathcal{H}/Γ y $m_i, i = 1, \dots, r$ son los órdenes de los estabilizadores de los puntos singulares de la superficie. La *signatura* nos da la estructura algebraica de Γ y la estructura geométrica de \mathcal{H}/Γ . Podemos asumir que $m_i \geq m_{i+1}$ pues uno puede reemplazar un par de generadores elípticos γ_i y γ_{i+1} con $\gamma'_i = \gamma_i \gamma_{i+1} \gamma_i^{-1}$ y $\gamma'_{i+1} = \gamma_i$. También notemos que para cada elemento elíptico γ de Γ existe un único generador elíptico γ_i tal que γ es conjugado a un único elemento en $\langle \gamma_i \rangle$. [4]

Teorema 11. [20] Si Γ es un grupo Fuchsiano con la signatura anterior, entonces el espacio cociente \mathcal{H}/Γ es una superficie de Riemann.

Como nos interesan superficies de Riemann compactas de género $g \geq 2$, nos gustaría identificarlas con \mathcal{H}/Γ para algún grupo Fuchsiano Γ . Lo cual es posible, podremos observar una superficie Riemann compacta como un espacio cociente:

Teorema 12. [20] Si X es una superficie de Riemann no conformemente equivalente a la esfera $\widehat{\mathbb{C}}$, al plano \mathbb{C} , al plano pinchado $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ o al toro, entonces X es conformemente equivalente a \mathcal{H}/Γ , donde Γ es un grupo Fuchsiano sin elementos elípticos.

Un grupo Fuchsiano sin elementos elípticos, es decir, con signatura $(\mathfrak{g}; -)$, es llamado un *grupo superficie*. Los grupos superficies son importantes por varias razones, una de ellas concierne en la equivalencia conforme:

Teorema 13. [20] Sean Γ_1 y Γ_2 dos grupos Fuchsianos superficies, entonces las superficies de Riemann \mathcal{H}/Γ_1 y \mathcal{H}/Γ_2 son conformemente equivalentes si y sólo si $\Gamma_2 = \tau^{-1}\Gamma_1\tau$ para algún $\tau \in PSL(2, \mathbb{R})$.

Un dominio fundamental F de un grupo Fuchsiano es un subconjunto cerrado de \mathcal{H} tal que

- i) $\mathcal{H} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F)$.
- ii) si $p \in F$ y $\gamma(p) \in F$, donde $\gamma \neq Id$, entonces $p \in \delta F$.
- iii) $\mu(\delta F) = 0$, donde μ es la medida hiperbólica.

Si Γ tiene signatura (1.2), entonces podemos escoger un dominio fundamental F para Γ tal que δF sea un polígono hiperbólico. Supongamos que F es un polígono fundamental para algún grupo Fuchsiano Γ , entonces

- i) dos lados A, A' del polígono son congruentes si existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(A) = A'$. Además $\gamma(F) \cap F = A'$.
- ii) dos vértices v y v' son congruentes si $v' = \gamma(v)$ para algún $\gamma \in \Gamma$.
- iii) Cada elemento elíptico γ_i , es conjugado a un elemento elíptico con un punto fijo v , correspondiente al conjunto de vértices congruentes con una suma de ángulos igual a $2\pi/m_i$.
- iv) F/\sim tiene la misma estructura que \mathcal{H}/Γ , donde \sim corresponde a la identificación de lados anterior.

También podemos ir en el camino opuesto, como se indica en el siguiente teorema:

Teorema 14. [2] Sea F un polígono hiperbólico con la identificación lateral señalada anteriormente y área distinta de cero, entonces existe un grupo Fuchsiano con dominio fundamental F .

Si bien existen diferentes dominios fundamentales para un grupo Fuchsiano, todos ellos tienen la misma área, es decir, si F y F' son dominios fundamentales de Γ , entonces $\mu(F) = \mu(F')$. Por lo tanto, definimos el área hiperbólica de Γ , denotada por $\mu(\Gamma)$, como $\mu(F)$ para algún dominio fundamental F

de Γ . El área, $\mu(F)$, de un polígono fundamental F de un grupo Fuchsiano con signatura (1.2) está dada por la fórmula de Gauss-Bonnet:

$$\mu(F) = 2\pi \left[2\mathfrak{g} - 2 + \sum_i \left(1 - \frac{1}{m_i} \right) \right].$$

Notemos que $\mu(\Gamma) > 0$ para cualquier grupo Fuchsiano. Actualmente, dada una signatura arbitraria, la existencia de un grupo Fuchsiano con esa signatura depende sólo del área inducida de la signatura:

Teorema 15. [20] Si $\mathfrak{g} \geq 0, m_i \geq 2$ son enteros y

$$2\mathfrak{g} - 2 + \sum_i \left(1 - \frac{1}{m_i} \right) > 0$$

entonces existe un grupo Fuchsiano con signatura $(\mathfrak{g}; m_1, \dots, m_r)$.

Ahora, consideremos dos superficies de Riemann \mathcal{H}/Γ y \mathcal{H}/Γ' , donde $s(\Gamma) = (\mathfrak{g}; m_1, \dots, m_r)$. Supongamos $\Gamma' \subset \Gamma$, entonces tenemos un cubrimiento (ramificado)

$$\mathcal{H}/\Gamma' \rightarrow \mathcal{H}/\Gamma.$$

La monodromía del cubrimiento está ligada a la relación entre Γ y Γ' . Las posibles signaturas e índices de subgrupos Fuchsianos se caracterizan por medio del siguiente Teorema:

Teorema 16. [28] Sea Γ un grupo Fuchsiano con signatura (1.2) y presentación canónica (1.1). Entonces Γ contiene un subgrupo Γ' de índice N con signatura

$$s(\Gamma') = (\mathfrak{g}'; m'_{11}, m'_{12}, \dots, m'_{1s_1}, \dots, m'_{r1}, \dots, m'_{rs_r})$$

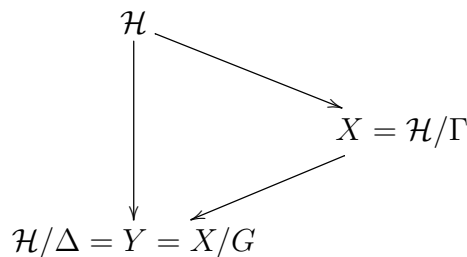
si y sólo si existe una representación permutacional $\theta : \Gamma \rightarrow S_N$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. La permutación $\theta(\gamma_i)$ tiene precisamente s_i ciclos de longitud menor que m_i , los largos de estos ciclos son $m_i/m'_{i1}, \dots, m_i/m'_{is_i}$.
2. La fórmula de Riemann Hurwitz

$$\frac{\mu(\Gamma')}{\mu(\Gamma)} = N = [\Gamma : \Gamma'],$$

donde $\mu(\Gamma)$ y $\mu(\Gamma')$ son las áreas hiperbólicas de las superficies \mathcal{H}/Γ y \mathcal{H}/Γ' .

Los automorfismos de superficies de Riemann de género mayor que 1, están estrechamente relacionados con los grupos Fuchsianos. Consideremos una superficie de Riemann X , uniformizada por un grupo Fuchsiano Γ , y un grupo de automorfismos, G , de X . Entonces G actúa en X y podemos considerar el espacio cociente $Y = X/G$, que es una superficie de Riemann (con puntos marcados).



Como Y es una superficie de Riemann con puntos marcados, existe un grupo Fuchsiano Δ que la uniformiza, siendo Δ el levantamiento de G a \mathcal{H} .

Teorema 17. [20] Si Γ es un grupo Fuchsiano superficie entonces todo grupo de automorfismos de \mathcal{H}/Γ es isomorfo a Δ/Γ donde Δ es un grupo Fuchsiano tal que $\Gamma \trianglelefteq \Delta$.

Luego tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$1 \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{i} \Delta \xrightarrow{\theta} G \longrightarrow 1,$$

donde θ se llama epimorfismo de superficie.

Ahora, debido a que $\Gamma = \ker(\theta)$ es un grupo Fuchsiano de superficie, los epimorfismos θ tienen que preservar los órdenes de los generadores elípticos, γ_i , de Δ . Retomaremos la teoría de grupos Fuchsianos en el siguiente capítulo, cuando definamos vectores generadores y equivalencia de acciones de grupos en superficies de Riemann.

Capítulo 2

Acción de Grupo en Superficies de Riemann

2.1. Acciones en Superficies de Riemann

Definición 8. [10] Decimos que un grupo G actúa en una superficie de Riemann X , si existe un monomorfismo

$$\varepsilon : G \longrightarrow \text{Aut}(X),$$

donde $\text{Aut}(X)$ denota el grupo de automorfismos holomorfos de X . Llamamos al monomorfismo ε una acción de G en X .

Cuando consideramos una superficie de Riemann de género $g \geq 2$, y G un grupo actuando en X entonces necesariamente G es un grupo finito, por el Teorema de Hurwitz.

Consideremos para cada $p \in X$ el subgrupo estabilizador de p , este es

$$G_p = \{D \in G : \varepsilon(D)(p) = p\}.$$

Debido a que $\varepsilon(G_p) \leq \text{Aut}(X)_p$ entonces G_p es un grupo cíclico.

Dada una acción $\varepsilon : G \rightarrow \text{Aut}(X)$ de G en X , tenemos la proyección natural

$$\pi : X \longrightarrow X/\varepsilon(G).$$

Como antes, tenemos que $X/\varepsilon(G)$ es una superficie de Riemann y π es una función holomorfa. Como X es una superficie de Riemann compacta entonces $X/\varepsilon(G)$ es una superficie de Riemann compacta de género \mathfrak{g} .

Tenemos que $p \in X$ es un punto de ramificación de π si y sólo si $G_p \neq \{Id\}$, además la multiplicidad de p es $|G_p|$. Entonces π es un cubrimiento liso (cubrimiento no ramificado) en el complemento de un conjunto finito, el conjunto de puntos de ramificación, esto pues X y $X/\varepsilon(G)$ son compactas.

La imagen por π de un punto de ramificación $p \in X$ se llama punto rama o valor de ramificación. El índice de ramificación en un punto rama $q \in X/\varepsilon(G)$ es la multiplicidad de π en cualquier punto $p \in \pi^{-1}(q)$ de ramificación. Esto está bien definido pues π es cubrimiento de Galois.

Llamamos a π un cubrimiento ramificado, y decimos que π tiene una signatura

$$s = (\mathfrak{g}; m_1, m_2, \dots, m_r),$$

donde m_j son las multiplicidades de los puntos de ramificación, y r es el número de puntos de ramificación de π . A veces diremos también que G actúa en X con signatura $(\mathfrak{g}; m_1, m_2, \dots, m_r)$.

Consideraremos generalmente los números m_j con el siguiente orden

$$m_1 \geq \dots \geq m_r.$$

Recordemos que si $F : X \rightarrow Y$ es una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas X e Y de géneros g_X y g_Y respectivamente. Si ∂F es el grado de F entonces se tiene de la fórmula de Riemann-Hurwitz [22]:

$$g_X = \partial F(g_Y - 1) + 1 + \frac{1}{2} \sum_{p \in X} (\text{mult}_p F - 1).$$

Con la notación anterior, y llamando g al género de X , tenemos una presentación adecuada a este contexto de la fórmula de Riemann-Hurwitz,

$$\frac{2g - 2}{|G|} = (2\mathfrak{g} - 2) + \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j}\right). \quad (2.1)$$

2.2. Vector Generador

Definición 9. [8] Una $(2\mathfrak{g}+r)$ -tupla $(a_1, b_1, \dots, a_{\mathfrak{g}}, b_{\mathfrak{g}}, c_1, \dots, c_r) \in G^{2\mathfrak{g}+r}$ es llamada un $(\mathfrak{g}; m_1, m_2, \dots, m_r)$ -vector si

$$\prod_{i=1}^{\mathfrak{g}} [a_i, b_i] \prod_{j=1}^r c_j = 1$$

y

$$|c_j| = m_j$$

es decir, el orden de c_j es m_j para todo $j \in \{1, \dots, r\}$. Además diremos que es un $(\mathfrak{g}; m_1, m_2, \dots, m_r)$ -vector generador si el conjunto $\{a_i, b_i, c_j\}$ genera G .

En particular, si θ es el epimorfismo enunciado en el teorema 17 tenemos que

$$(\theta(\alpha_1), \theta(\beta_1), \dots, \theta(\alpha_{\mathfrak{g}}), \theta(\beta_{\mathfrak{g}}); \theta(\gamma_1), \dots, \theta(\gamma_r))$$

es un s -vector generador. También notemos que la elección de un vector generador no es única, estos dependen de la elección de los generadores de los grupos. Así, dado un monomorfismo ε , podemos construir un vector generador. Ahora, recordemos que el Teorema 15 dice que, para cualquier signatura dada que induzca un área positiva, existe un grupo Fuchsiano con esa signatura. Luego, si un grupo finito G admite un s -vector generador para una signatura s satisfaciendo la fórmula de Riemann Hurwitz, entonces existe un grupo Fuchsiano Δ admitiendo esta signatura. De esto, podemos construir un epimorfismo de superficie $\theta : \Delta \rightarrow G$, con $s(\ker(\theta)) = (\mathfrak{g}; -)$. Por lo tanto, determinar si un grupo actúa en una superficie de Riemann con signatura s es equivalente a construir s -vectores generadores.

Teorema 18. [10] Sea X una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$ y sea G un grupo finito. Existe una acción ε de G en X con signatura $(\mathfrak{g}; m_1, \dots, m_r)$ si y sólo si, existen un grupo Fuchsiano Δ con signatura $(\mathfrak{g}; m_1, \dots, m_r)$, un epimorfismo $\theta_\varepsilon : \Delta \rightarrow G$ tal que $\Gamma = \ker(\theta_\varepsilon)$ es un grupo Fuchsiano libre de torsión (sin elementos elípticos) y \mathcal{H}/Γ , el espacio cociente inducido por la acción de Γ sobre \mathcal{H} , es una superficie de Riemann biholomorfa a X .

Lo anterior trae como consecuencia el siguiente resultado:

Teorema 19 (Teorema de existencia de Riemann). [8] Sean G un grupo finito de orden n , $g \geq 2$ y $r \geq 0$ un número natural. Entonces existe X superficie de Riemann de género g , donde G actúa en X con firma $s = (\mathfrak{g}; m_1, \dots, m_r)$ si y sólo si la ecuación de Riemann-Hurwitz (2.1) se satisface y G tiene un s -vector generador $(\alpha_1, \dots, \alpha_\gamma, \beta_1, \dots, \beta_\gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_r)$.

Ejemplo 14. [1] Sea G isomorfo al grupo cíclico \mathbb{Z}_6 y consideremos la signatura $s = (0; 6, 6, 3, 2, 2)$. Por el Teorema 19, \mathbb{Z}_6 actúa sobre una superficie de género $g = 5$, debido a que con la fórmula de Riemann Hurwitz se tiene que

$$2g - 2 = 6 \left(-2 + \frac{5}{6} + \frac{5}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 8.$$

Luego existe un grupo Fuchsiano Δ con signatura $s(\Delta) = (0; 6, 6, 3, 2, 2)$ y una presentación

$$\langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5 : \gamma_1^6 = \gamma_2^6 = \gamma_3^3 = \gamma_4^2 = \gamma_5^2 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5 = 1 \rangle$$

tal que existe un epimorfismo $\theta : \Delta \rightarrow \mathbb{Z}_6$ con $\theta(\gamma_1) = a$, $\theta(\gamma_2) = a$, $\theta(\gamma_3) = a^4$, $\theta(\gamma_4) = a^3$ y $\theta(\gamma_5) = a^3$. Notemos que cualquier elemento γ de Δ es conjugado de algún γ_i , así $\theta(\gamma) = \theta(x^{-1}\gamma_i x) = \theta(\gamma_i) \neq 1$. Por lo tanto, $\ker(\theta)$ es un grupo superficie de género g . Además, θ es la monodromía del cubrimiento

$$X = \mathcal{H}/\Gamma \rightarrow \mathcal{H}/\Delta = X/G,$$

y (a, a, a^4, a^3, a^3) es un s -vector generador de $\mathbb{Z}_6 = \langle a \rangle$.

2.3. Obtención de vectores generadores para cada acción

En lo que sigue, estudiaremos acciones de grupo en donde la superficie cociente tiene género $\mathfrak{g} = 0$.

Dada una acción concreta de un grupo G de orden n en una superficie X con signatura $\sigma = (0; m_1, \dots, m_r)$ se puede encontrar un vector generador de la siguiente manera: [23]

- Primero fijamos notación:

$$\zeta_m := e^{2\pi i/m},$$

en particular nos interesan estas raíces primitivas para $m = n$ y $m = m_j = |G_j|$.

- Identificamos los puntos rama $P_1, \dots, P_r \in X/G$ de la aplicación $\pi : X \rightarrow X/G$.
- Escogemos un $p_j \in \pi^{-1}(P_j)$, con $j = 1, \dots, r$ y llamaremos G_j el estabilizador del punto p_j cuyo orden es m_j (especificado en la signatura).
- Construimos la representación $\eta_j : G_j \rightarrow \mathbb{C}^*$ dada por la acción de G en una vecindad de p_j . Esto es, si $g \in G_j$, tenemos que g^{-1} es localmente $z \mapsto \zeta_{m_j}^\ell z$, para algún entero ℓ . Luego existe un $g_j \in G_j$ tal que $\eta_j(g_j) = (\zeta_n)^{n/m_j} = \zeta_{m_j}$.

- Escogemos dicho $g_j \in G_j$; es decir, un elemento de G_j tal que $\eta_j(g_j) = \zeta_{m_j}$.
- Finalmente el vector generador asociado a dicha acción será $(g_1, \dots, g_j, \dots, g_r)$.

Ejemplo 15. Consideremos la curva hiperelíptica

$$X_f = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 / f(x, y) = y^2 - x^5 + 1 = 0\}.$$

X_f es una c.a.p.a suave, cuya compactificación \overline{X}_f es de género $g = 2$. Sean $\zeta_5 = e^{2\pi i/5}$ y $G_c = \langle \phi(x, y) = (\zeta_5 x, -y) \rangle$, donde ϕ es un automorfismo de X_f que se extiende a \overline{X}_f por $\phi([x : y : z]) = [\zeta_5 x : -y : z]$.

Es fácil ver que $G_c \simeq \mathbb{Z}_{10} = G = \langle \zeta : \zeta^{10} = id \rangle$, G_c es subgrupo de los automorfismos de \overline{X}_f , luego $X = \overline{X}_f/G$ es una superficie de Riemann compacta.

Para saber dónde la proyección $\pi : \overline{X}_f \rightarrow \overline{X}_f/G$ ramifica, buscaremos los puntos de estabilizador no trivial, para esto consideraremos que $|G_p| = 2, 5$ o 10 pues el estabilizador de un punto es un subgrupo cíclico de G .

Entonces, primero busquemos $(x_0, y_0) \in \overline{X}_f$ tal que su estabilizador sea un subgrupo de orden 2, generado por $\phi^5(x, y) = (x, -y)$, lo cual implica que $y_0 = -y_0$, es decir $y_0 = 0$, por otra parte, de la definición de la curva es necesario que $x_0^5 = 1$. Por lo tanto, $|G_p| = 2$ para $p_i = (\zeta_5^i, 0)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Para el subgrupo de orden 5 generado por $\phi^2(x, y) = (\zeta_5^2 x, y)$, x_0 satisface

$$x_0 = \zeta_5^2 x_0 = \zeta_5^4 x_0 = \zeta_5^6 x_0 = \zeta_5^8 x_0,$$

de aquí $x_0 = 0$, por lo tanto $y^2 = -1$, obteniendo que $|G_p| = 5$ para $p_6 = (0, i)$, $p_7 = (0, -i)$.

Es claro que $|G_\infty| = 10$. Ahora, en cada caso no existen más puntos de \overline{X}_f de estabilizador no trivial, pues se satisface que

$$|G_p| = \frac{|G|}{n},$$

con n el número de puntos en la fibra de un punto rama.

En el cociente, los puntos p_i con $i = 1, 2, 3, 4, 5$ están en la misma clase, al igual que p_6 con p_7 , entonces por Riemann-Hurwitz concluimos que el género de la superficie cociente es $g = 0$ pues

$$\begin{aligned} 2 &= 10 \left[(2g - 2) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{5}\right) + \left(1 - \frac{1}{10}\right) \right] \\ &= 20g + 2. \end{aligned}$$

Con estos resultados, la signatura de G en \overline{X}_f es $(0; 10, 5, 2)$.

Calcularemos un vector generador asociado a esta acción siguiendo las indicaciones descritas anteriormente, para ello tomamos $P_1 = [1 : 0 : 1]$, $P_2 = [0 : i : 1]$, $P_3 = [0 : 1 : 0]$ puntos rama de la función π tal que cada uno está en una órbita distinta por la acción del grupo. Calcularemos la versión local de la acción en dichos puntos.

Si G_j es el estabilizador de alguna preimagen de P_j , diremos que $m_j = |G_j|$, para $j = 1, 2, 3$. Queremos construir la representación

$$\eta_j : G_j \rightarrow \mathbb{C}^*,$$

dada por la acción de G en una vecindad de la preimagen de P_j para cada j y de cada una de ellas obtener un elemento g_j tal que $\eta_j(g_j) = \zeta_{m_j}$. Recordemos que $\eta_j(g)$ se obtiene de la expresión local de g^{-1} .

Tomemos $p \in \pi^{-1}(P_1)$ y consideramos el abierto $\overline{X}_f \cap \{z \neq 0\}$, donde $\frac{\partial f}{\partial x}(p) \neq 0$. Por el Teorema de la función Implícita podemos escribir $x = h(y)$ localmente, pues π_2 , la proyección en la segunda coordenada, es carta.

Ahora

$$y \xrightarrow{\pi_2^{-1}} (h(y), y) \xrightarrow{\phi^{-5}} (h(y), -y) \xrightarrow{\pi_2} -y,$$

de donde tenemos que $\eta_1(\phi^5) = -1$. Como buscamos $g_1 \in G_1$ tal que $\eta_1(g_1) = \zeta_{10}^5$, que es igual a -1 , entonces $g_1 = \zeta^5$.

Para $p \in \pi^{-1}(P_2)$ la proyección π_1 es carta, localmente tenemos que

$$x \xrightarrow{\pi_1^{-1}} (x, k(x)) \xrightarrow{\phi^{-2}} (\zeta_5^3 x, k(x)) \xrightarrow{\pi_1} \zeta_5^3 x,$$

luego $\eta_2(\phi^2) = \zeta_5^3$, pues $\eta_2(\phi^4) = \zeta_5$. Ahora buscamos $g_2 \in G_2$ tal que $\eta_2(g_2) = \zeta_{10}^2 = \zeta_5$, por lo tanto $g_2 = \zeta^4$.

Para P_3 , que es un punto singular, es necesario normalizar. Para ello ocuparemos el método descrito en la subsección 1.1.4.

Estudiaremos el abierto $X_2 = \overline{X}_f \cap \{y \neq 0\} = \{z^3 - x^5 + z^5 = 0\}$, escribimos $x^5 - z^3(1 + z^2) = 0$ y definimos $w = z\sqrt[3]{1 + z^2}$, de manera que $w^3 = x^5$. Por el algoritmo de la división $1 = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 3$ y ya que 3 y 5 son relativamente primos, definimos la función $t(x, w) = x^{-3}w^2$ que es carta en $(0, 0)$, mientras que $r(s) = (s^3, s^5)$ es su inversa.

Con esto localmente tenemos

$$s \xrightarrow{r} (s^3, s^5) \longrightarrow [s^3 : 1 : s^5] \xrightarrow{\phi^{-1}} [\zeta_5^4 s^3 : -1 : s^5],$$

pero bajando a X_f se sigue que

$$(-\zeta_5^4 s^3, -s^5) \xrightarrow{t} -\zeta_5^{-12} s^{-9} s^{10} = -\zeta_5^3 s.$$

Luego $\eta_3(\phi) = -\zeta_5^3 = \zeta_{10}$. Como buscamos $g_3 \in G_3$ tal que $\eta_3(g_3) = \zeta_{10}$, tenemos que $g_3 = \zeta$.

Para terminar como $G = \langle \zeta : \zeta^{10} = id \rangle$, entonces el orden de ζ^5 es 2, el de ζ^4 es 5, el de ζ es 10, además $\zeta^4 \zeta^5 \zeta = id$, por lo tanto, $(\zeta, \zeta^4, \zeta^5)$ es un vector generador para la signatura $(0; 10, 5, 2)$.

Ejemplo 16. Acción de \mathbb{Z}_7 en $X_f = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f(x, y) = y^7 - x(x - 1) = 0\}$.

Primero se debe construir la clausura proyectiva $\overline{X_f}$ de X_f , la que está definida como los ceros del polinomio homogéneo $F(x, y, z)$ asociado a $f(x, y)$:

$$F(x, y, z) = y^7 - x^2z^5 + xz^6.$$

Para determinar el género de $\overline{X_f}$ estudiaremos con Riemann-Hurwitz la extensión τ_2 a $\overline{X_f}$ y a \mathbb{P}^1 de la función holomorfa $\tau : X_f \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$(x, y) \mapsto x.$$

Para estudiar la singularidad en $p_3 = [1 : 0 : 0] \in \overline{X_f}$, consideramos la intersección de $\overline{X_f}$ con el abierto afín de \mathbb{P}^2 dado por $x = 1$:

$$F_1 := y^7 - z^5 + z^6 = y^7 - z^5(1 - z) = y^7 - (zk(z))^5 = y^7 - w^5,$$

donde la última igualdad corresponde a la raíz quinta de $(1 - z)$, que en una vecindad del punto estudiado no se anula.

Con ello se determina que en p_3 la curva tiene una singularidad monomial de tipo $(7, 5)$.

Aplicando la técnica vista para resolución de singularidades monomiales (ver subsección 1.1.4), y dado que el máximo común divisor de 7 y 5 es 1, se obtiene que se remueve p_3 de $\overline{X_f}$ y se pega una carta con homeomorfismos centrados $t(y, w) = y^3w^{-2}$, con inversa $r(s) = (s^5, s^7)$

Estudiamos ahora $\tau_2 : \overline{X_f} \rightarrow \mathbb{P}^1$ que corresponde a $[x : y : z] \mapsto [x : z]$

1. En la parte afín τ_2 corresponde a τ y ramifica en $x = 0$ y $x = 1$, es decir

$$p_1 = [1 : 0 : 1] \quad \text{y} \quad p_2 = [0 : 0 : 1].$$

En los cuales es localmente 7 a 1. Determinamos de paso que τ es de grado 7.

2. Como vecindad de p_3 , usamos el abierto afín $U_0 = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^1 : x = 1\}$. La imagen en este abierto afín de $\overline{X_f}$ corresponde a X_1 los ceros de $F_1 := y^7 - z^5 + z^6$ y con las cartas anteriores r y t . Usando esas las cartas locales y $\varphi([a : b]) = \frac{b}{a}$ en $[1 : 0] \in \mathbb{P}^1$, se tiene que localmente τ_2 corresponde a:

$$z \in \mathbb{C} \xrightarrow{r} [1 : z^5 : z^7] \xrightarrow{t} [1 : z^7] \xrightarrow{\varphi} z^7.$$

Así τ_2 es holomorfa y ramifica con grado 7 sobre $[1 : 0]$.

Finalmente, usando Riemann-Hurwitz para τ_2 , se tiene que el género de $\overline{X_f}$ es:

$$g_{\overline{X}} = 7(0 - 1) + 1 + \frac{3}{2}(7 - 1) = 3,$$

pues el grado de τ_2 es 7, el género de \mathbb{P}^1 es 0 y sólo ramifica en los tres puntos dados: p_1, p_2 y p_3 .

Pasamos ahora a estudiar la acción de \mathbb{Z}_7 en $\overline{X_f}$.

Considere el subgrupo de automorfismos de X_f definido como $G = \langle \phi(x, y) = (x, \zeta_7 y) \rangle$, donde $\zeta_7 = e^{2\pi i/7}$.

Notemos que ϕ es un automorfismo de X_f que se extiende a la clausura proyectiva \overline{X}_f como $\phi([x : y : z]) = [x : \zeta_7 y : z]$, por lo que $G \simeq \mathbb{Z}_7 = \langle \zeta : \zeta^7 = id \rangle$, es un subgrupo de los automorfismos de \overline{X}_f , tal que $X = \overline{X}_f/G$ es una superficie de Riemann compacta.

Para saber donde la proyección $\pi : \overline{X}_f \rightarrow \overline{X}_f/G$ ramifica, determinaremos los puntos de estabilizador no trivial.

Sabemos que $(x_0, y_0) \in \overline{X}_f$ queda fijo por ϕ , que es un elemento de orden 7, si satisface la ecuación $\phi(x_0, y_0) = (x, \zeta_7 y) = (x_0, y_0)$, lo cual necesariamente ocurre si $y_0 = 0$.

Ahora de la definición de la curva, $y_0 = 0$ implica que $x_0 = 0$ o $x_0 = 1$. Luego los puntos ramas en \overline{X}_f/G son $P_1 = [1 : 0 : 1], P_2 = [0 : 0 : 1]$ y $P_3 = [1 : 0 : 0]$. Escogemos a $p_1 = [1 : 0 : 1], p_2 = [0 : 0 : 1]$ y $p_3 = [1 : 0 : 0]$ como los elementos en la fibra de P_1, P_2 y P_3 respectivamente.

Existen tres puntos de ramificación con orden del estabilizador igual a 7, la proyección $\pi : X_f \rightarrow \mathbb{C}$ ramifica en cada uno de los puntos p_1, p_2 y p_3 vistos en la curva X_f con multiplicidad 7, luego la fórmula de Riemann-Hurwitz nos permite obtener el género de X_f/G :

$$\frac{2 \cdot 3 - 2}{7} = (2g - 2) + 3 \left(1 - \frac{1}{7}\right).$$

De esta ecuación $g = 0$, por lo que la signatura asociada a la acción de G en \overline{X}_f es $(0; 7, 7, 7)$. Note que usamos que el género de \overline{X}_f es 3, lo que fue determinado anteriormente. Más aún, note que el cubrimiento $\tau_2 : \overline{X}_f \rightarrow \mathbb{P}^1$ es equivalente analíticamente a $\pi : \overline{X}_f \rightarrow \overline{X}_f/G$.

Procedemos a calcular un vector generador asociado a la acción. Sea G_j el grupo estabilizador de p_j , observemos que $|G_j| = m_j = 7$ para $j = 1, 2, 3$. Queremos construir la representación

$$\eta_j : G_j \rightarrow \mathbb{C}^*,$$

dada por la acción de G en una vecindad de p_j para cada j y de cada una de ellas obtener un elemento g_j tal que $\eta_j(g_j) = \zeta_7$. Recordemos que $\eta_j(g)$ se obtiene de la expresión local de g^{-1} .

Comencemos con $p_1 \in \pi^{-1}(P_1)$, tomemos el abierto $\overline{X}_f \cap \{z \neq 0\}$, donde $\frac{\partial f}{\partial x}(p_1) \neq 0$. Por el Teorema de la función Implícita podemos escribir $x = h(y)$ localmente, pues π_2 , la proyección en la segunda coordenada, es carta. Luego tenemos la siguiente composición:

$$y \xrightarrow{\pi_2^{-1}} (h(y), y) \xrightarrow{\phi^{-1}} (h(y), \zeta_7^{-1} y) \xrightarrow{\pi_2} \zeta_7^{-1} y,$$

en donde $\eta_1(\phi) = \zeta_7^{-1} = \zeta_7^6$. Buscamos $g_1 \in G_1$ tal que $\eta_1(g_1) = \zeta_7$, el cual es ϕ^6 por lo tanto $g_1 = \zeta_7^6$.

Para el segundo punto $p_2 \in \pi^{-1}(P_2)$, considerando el mismo abierto anterior, tenemos que $\frac{\partial f}{\partial x}(p_2) \neq 0$, entonces podemos escribir x en función de y , digamos $x = k(y)$ localmente. Así:

$$y \xrightarrow{\pi_2^{-1}} (k(y), y) \xrightarrow{\phi^{-1}} (k(y), \zeta_7^{-1} y) \xrightarrow{\pi_1} \zeta_7^{-1} y,$$

luego $\eta_2(\phi) = \zeta_7^{-1}$, por lo tanto $g_2 = \zeta_7^6$.

El punto p_3 es un punto singular, ya sabemos que la curva en una carta de p_3 se puede expresar de la forma $y^7 = w^5$ donde $w = z\sqrt[5]{1-z}$, por lo que la singularidad es $(5,7)$ - monomial. Del algoritmo de

la división, $1 = 3 \cdot 5 + (-2) \cdot 7$ y como 7 y 5 son relativamente primos, la función $t(y, w) = y^3 w^{-2}$ es carta en $(0, 0)$, con inversa $r(s) = (s^5, s^7)$.

Con esto localmente tenemos

$$s \xrightarrow{r} (s^5, s^7) \longrightarrow [1 : s^5 : s^7] \xrightarrow{\phi^{-1}} [1 : \zeta_7^{-1} s^5 : s^7],$$

pero en X_f se sigue que

$$(\zeta_7^{-1} s^5, s^7) \xrightarrow{t} \zeta_7^{-3} s^{15} s^{-14} = \zeta_7^4 s.$$

Luego $\eta_3(\phi) = \zeta_7^4$. Como buscamos $g_3 \in G_3$ tal que $\eta_3(g_3) = \zeta_7$, tenemos que $g_3 = \zeta^2$.

Finalmente, $(\zeta^6, \zeta^6, \zeta^2)$ es un vector generador para esta signatura.

2.4. Equivalencia Topológica y Analítica de Acciones de Grupos sobre Superficies de Riemann

2.4.1. Definición de Equivalencia de Acciones

Diremos que las acciones $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ de G en X son *topológicamente equivalentes* si existe $\Phi \in \text{Aut}(G)$ y h en el grupo de homeomorfismos que preservan orientación $\text{Homeo}^+(X)$ de X , tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varepsilon_1(\Phi(g))} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ X & \xrightarrow{\varepsilon_2(g)} & X \end{array}$$

Es decir, $\varepsilon_2(g) = h \varepsilon_1(\Phi(g)) h^{-1}$.

Si $h \in \text{Aut}(X)$, entonces diremos que $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ son *analíticamente (o conformemente) equivalentes*.

Observación 3. Acciones que son analíticamente equivalentes, lo son topológicamente.

En términos de grupos Fuchsianos, la definición de acciones topológicamente equivalentes es:

Definición 10. [10] Sean ε_1 y ε_2 dos acciones de G en X y sean $\theta_1 : \Delta_1 \rightarrow \varepsilon_1(G)$ y $\theta_2 : \Delta_2 \rightarrow \varepsilon_2(G)$ los epimorfismos asociados a ε_1 y ε_2 dados en el Teorema 17. Entonces ε_1 es topológicamente equivalente a ε_2 si y sólo si existe un isomorfismo de grupos $\chi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ y un isomorfismo de grupos $\varphi : \varepsilon_1(G) \rightarrow \varepsilon_2(G)$, tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1 & \xrightarrow{\theta_1} & \varepsilon_1(G) \\ \chi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \Gamma_2 & \xrightarrow{\theta_2} & \varepsilon_2(G) \end{array}$$

Observación 4. Se puede dar una definición completamente análoga para acciones topológicamente equivalentes considerando acciones de G sobre distintas superficies, pero del mismo género.

Un resultado importante es que existen acciones que son topológicamente equivalentes, pero no conformemente equivalentes. Ejemplos de ello se encuentran en [14] y [10].

2.5. Equivalencia de acciones por medio del álgebra

El Teorema de Existencia de Riemann nos dice que cada acción de un grupo G con cierta signatura fija sobre una superficie de Riemann de cierto género, tiene asociado un vector generador. Estudiar equivalencia de acciones Topológicas por ejemplo, equivale a estudiar si los vectores generadores asociados a cada acción se encuentran en la misma órbita bajo la acción de cierto grupo, que actúa sobre el conjunto de todos los posibles vectores generadores asociados a la signatura en cuestión. Por ello es útil entender acciones de grupos, o más bien clase de equivalencias de acciones, ya sea vía equivalencia topológica u holomorfa, usando herramientas del álgebra. Resultados conocidos en esta dirección son los que siguen:

Proposición 2. *Dos acciones ε_1 y ε_2 en X son conformemente equivalentes si y sólo si $\varepsilon_1(G)$ y $\varepsilon_2(G)$ son conjugados en $\text{Aut}(X)$.*

Proposición 3. *Si el grupo de automorfismos de una superficie X , $\text{Aut}(X)$, contiene dos automorfismos τ_1, τ_2 , ambos de orden p , primo, tal que las superficies cocientes $X/\langle\tau_i\rangle$, $i = 1, 2$, son isomorfas a la esfera de Riemann, entonces $\langle\tau_1\rangle$ y $\langle\tau_2\rangle$ son conjugados en $\text{Aut}(X)$.*

Definición 11. Sea G un grupo finito y $s = (0; m_1, \dots, m_r)$ una signatura. El conjunto de vectores generadores para s lo denotamos por Ω_s el cual es:

$$\Omega_s = \{\nu = (g_1, \dots, g_r) \in G^r : G = \langle g_1, \dots, g_r \rangle, g_1 \cdot \dots \cdot g_r = 1, |g_i| = m_i \forall i\}.$$

El grupo $\text{Aut}(G)$ actúa naturalmente en Ω_s y dos vectores generadores $\nu_1 = (g_1, \dots, g_r)$ y $\nu_2 = (h_1, \dots, h_r)$ están en la misma clase, si existe un elemento $k \in \text{Aut}(G)$ tal que $(g_1, \dots, g_r) = (g_1^k, \dots, g_r^k)$ donde $g_i^k = k^{-1}g_i k$.

Definición 12. Fije un entero $r \geq 3$. Se define el grupo de trenzas \mathbb{B}_r como el grupo generado por los elementos Q_i , $i = 1, \dots, r - 1$ que satisfacen las siguientes relaciones:

1. $Q_i Q_{i+1} Q_i = Q_{i+1} Q_i Q_{i+1}$ si $i = 1, \dots, r - 2$
2. $Q_i Q_j = Q_j Q_i$ para $|i - j| > 1$.

Además, dada una signatura $s = (0; m_1, \dots, m_r)$, sea \mathbb{B} el subgrupo de \mathbb{B}_r generado por los Q_i tales que $m_i = m_{i+1}$.

Este subgrupo también actúa en Ω_s al extender la acción de sus generadores $Q_i \in \mathbb{B}$,

$$Q_i(g_1, \dots, g_r) = (g_1, \dots, g_{i-1}, g_i g_{i+1} g_i^{-1}, g_i, \dots, g_r).$$

Por lo tanto, tenemos la acción del grupo $\Upsilon = \text{Aut}(G) \times \mathbb{B}$ en el conjunto de vectores generadores Ω . Las órbitas bajo Υ corresponden a acciones de G topológicamente no equivalentes.

Proposición 4. [8] *Dos vectores generadores de un grupo finito G para alguna signatura s , definen acciones de G topológicamente equivalentes si y sólo si los vectores generadores están en la misma órbita bajo la acción de $\Upsilon = \text{Aut}(G) \times \mathbb{B}$.*

Ya que la acción de $Q_i \in \mathbb{B}$ es $(g_1, \dots, g_r) \mapsto (g_1, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, g_i, \dots, g_r)$, que es una transposición $(i, i + 1)$ de los índices, en el caso de grupos abelianos, \mathbb{B} actúa en los vectores generadores permutando

los elementos del vector generador que tienen el mismo orden.

La proposición anterior nos entrega otra herramienta para comparar acciones topológicamente equivalentes y analíticamente equivalentes.

Corolario 2. [14] Si el grupo de automorfismos de una superficie X , $\text{Aut}(X)$, contiene dos automorfismos τ_1, τ_2 , ambos de orden p , primo, tal que las superficies cocientes $X/\langle\tau_i\rangle$, $i = 1, 2$, son isomorfas a la esfera de Riemann, entonces $\langle\tau_1\rangle$ y $\langle\tau_2\rangle$ son analíticamente equivalentes si y sólo si son topológicamente equivalentes.

Ejemplo 17. [8] Si \mathbb{Z}_p actúa en una superficie de Riemann X , entonces su signatura debe ser $s = (\mathfrak{g}; p, \dots, p)$ (con r puntos rama), X tiene género

$$g = (\mathfrak{g} - 1)p + \frac{r(p - 1)}{2} + 1.$$

Un caso frecuente es cuando nos encontramos con $r = 3$ y $\mathfrak{g} = 0$, en este caso el conjunto de los $(0; p, p, p)$ -vectores generadores tiene cardinalidad $(p - 1)(p - 2)$.

Observación 5. Se puede considerar la acción en el conjunto de vectores generadores para alguna signatura s , del grupo $\Lambda = \text{Inn}(G) \times \mathbb{B} \leq \Upsilon$, donde $\text{Inn}(G)$ representa el grupo de automorfismos internos de G . Es una idea a investigar a futuro qué tipo de equivalencia en sentido geométrico ésto captura.

2.6. Ejemplos Concretos

En esta sección estudiaremos varios ejemplos, algunos seguidos en la literatura pero aquí los desarrollaremos en detalle y veremos equivalencia topológica y analítica.

2.6.1. \mathbb{Z}_4 actuando en género 3

Tenemos la siguiente familia de curvas de género 3

$$X_\lambda : y^2 = x(x^2 - 1)(x^2 - \lambda^2)(x^2 - \lambda^{-2}),$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda^4 \neq 0, 1$ y $\lambda \neq \pm 1 \pm \sqrt{2}$. La clausura proyectiva de X_λ , es decir,

$$Y^2 Z^5 = X(X^2 - Z^2)(X^2 - \lambda^2 Z^2)(X^2 - \lambda^{-2} Z^2),$$

tiene una singularidad en $P_\infty = [0 : 1 : 0]$. La curva, en una carta de P_∞ , tiene una expresión de la forma $x^7 = z^5$, por lo tanto es una singularidad de tipo $(5, 7)$ monomial. En consecuencia, recordando la subsección 1.1.4 se resuelve agregando un punto P_∞ con carta $(U, \varphi : U \rightarrow V)$, para un abierto U de P_∞ la cual está dada por $\varphi(x, z) = x^3 z^{-2}$, con inversa $\psi(s) = (s^5, s^7)$.

Consideremos dos acciones de $G = \mathbb{Z}_4$ dadas por

$$\begin{aligned} \varepsilon_j : \mathbb{Z}_4 &\rightarrow \text{Aut}(X_\lambda) \\ 1 &\mapsto \tau_j, \end{aligned}$$

para $j \in \{1, 2\}$, donde $\tau_1(x, y) = (-x, iy)$ y $\tau_2(x, y) = (1/x, iy/x^4)$. En P_∞ las funciones τ_1 y τ_2 se extienden de manera que $\tau_1[X : Y : Z] = [-X : iY : Z]$ y $\tau_2[X : Y : Z] = [ZX^3 : iYZ^3 : X^4]$. Obteniendo

$$\begin{aligned}\tau_1(P_\infty) &= P_\infty, \\ \tau_2(0, 0) &= P_\infty, \\ \tau_2(P_\infty) &= (0, 0).\end{aligned}$$

Calcularemos en detalle el segundo caso: $\tau_2[0 : 0 : 1] = [0 : 1 : 0]$.

Como la expresión dada para τ_2 no está bien definida en $[0 : 0 : 1]$ debemos estudiar cómo es la curva cerca de $(0, 0)$ y representar τ_2 en dicha vecindad. Notemos que la derivada parcial de f con respecto a x no se anula, entonces por el T.F.I. tenemos que $x = h(y)$ localmente, donde h es una función analítica que satisface $h(0) = 0$. Además, como consecuencia del mismo Teorema se obtiene que $h'(0) = 0$, luego h tiene orden 2, es decir, $h(y) = y^2k(y)$, con $k(0) \neq 0$. Así, en una vecindad de $[0, 0, 1]$:

$$\tau_2[h(y), y, 1] = [h(y)^3 : iy : h(y)^4] = [h(y)^3/yi : 1 : h(y)^4/yi],$$

por lo tanto, $\tau_2[0 : 0 : 1] = [0 : 1 : 0]$.

Para τ_1 los puntos $p = (0, 0)$ y P_∞ tienen estabilizadores de orden 4. Mientras que $(\pm 1, 0)$, $(\pm \lambda, 0)$, $(\pm 1/\lambda, 0)$ tienen estabilizador de orden 2, pero $(x, 0)$ y $(-x, 0)$ están en la misma $\langle \tau_1 \rangle$ -órbita, por lo tanto $\langle \tau_1 \rangle$ actúa con signatura $(0; 4, 4, 2, 2, 2)$.

Para τ_2 , los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ tienen estabilizador de orden 4 y no están en la misma $\langle \tau_2 \rangle$ -órbita. Así obtenemos hasta ahora, dos puntos rama en $X_\lambda/\langle \tau_2 \rangle$. Diremos que estos puntos son de tipo 4.

Para encontrar los puntos con estabilizador de orden 2, buscamos los (x, y) tales que $\tau_2^2(x, y) = (x, -y) = (x, y)$, luego $y = 0$ y $x = 0, \pm \lambda, \pm \lambda^{-1}$, pero $(\lambda, 0)$ está en la misma $\langle \tau_2 \rangle$ -órbita de $(1/\lambda, 0)$, así mismo $(-\lambda, 0)$ está en la misma órbita de $(-1/\lambda, 0)$. Además es fácil ver que el punto ∞ tiene estabilizador de orden 2, de hecho τ_2^2 es la involución hiperelíptica, y P_∞ está en la órbita de $(0, 0)$ por τ_2 , obteniendo así el último punto rama de tipo 2. Por lo tanto $\langle \tau_2 \rangle$ actúa con signatura $(0; 4, 4, 2, 2, 2)$.

La signatura para ambos es $s = (0 : 4, 4, 2, 2, 2)$ y si denotemos $\mathbb{Z}_4 \cong \langle \sigma : \sigma^4 = 1 \rangle$, los vectores generadores asociados a ε_1 y ε_2 son $(\sigma, \sigma, \sigma^2, \sigma^2, \sigma^2)$ y $(\sigma^3, \sigma^3, \sigma^2, \sigma^2, \sigma^2)$ respectivamente.

Otra manera de calcularlos sólo usando álgebra es la siguiente: Los elementos de orden 4 en G son $\{\sigma, \sigma^3\}$ y el de orden 2 es σ^2 . Buscamos vectores $(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5) \in G^5$ tales que $|g_1| = |g_2| = 4$, $|g_3| = |g_4| = |g_5| = 2$ y que $\prod_{i=1}^5 g_i = 1$. Las combinaciones numéricas posibles son:

$$\begin{aligned}1 + 1 + 2 + 2 + 2 \\ 1 + 3 + 2 + 2 + 2 \\ 3 + 3 + 2 + 2 + 2 \\ 3 + 1 + 2 + 2 + 2\end{aligned}$$

De las cuales la primera y tercera son las que satisfacen las condiciones. Por esa razón $\Omega_s = \{(\sigma, \sigma, \sigma^2, \sigma^2), (\sigma^3, \sigma^3, \sigma^2, \sigma^2)\}$

Estos dos vectores generadores están en la misma órbita bajo la acción de $\Upsilon = \text{Aut}(G) \times \mathbb{B}$, no así, para la acción de $\Lambda = \text{Inn}(G) \times \mathbb{B}$ pues hay dos clases. Que exista sólo una clase de vectores generadores por la acción de Υ implica que sólo hay una clase de acciones topológicas. Se puede verificar en la Tabla 5 en [8] el único vector generador de G con signatura s .

Por otra parte, las acciones ε_1 y ε_2 no son analíticamente equivalentes pues $\langle \tau_1 \rangle$ y $\langle \tau_2 \rangle$ no son conjugados en $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ (un grupo más grande de automorfismos de la misma curva X_λ). Tenemos en resumen:

Tipo de Equivalencia	Cantidad de acciones distintas
Topológicas	1
Analíticas	2
Órbitas por Λ	2

2.6.2. \mathbb{Z}_7 actuando en género 3

Este ejemplo es una especificación a $p = 7$ de la clasificación en [25]. Tomemos $G = \mathbb{Z}_7$ actuando en una superficie X de género 3 con superficie cociente de género 0. La signatura es $s = (0 : 7, 7, 7)$ y el conjunto de vectores generadores Ω está dado por

$$\Omega = \{(c_1, c_2, c_3) \in (\mathbb{Z}_7)^3 : c_1^7 = c_2^7 = c_3^7 = c_1 c_2 c_3 = 1\}.$$

Como \mathbb{Z}_7 es abeliano, tenemos $\text{Inn}(G) = \{id\}$. Además como el género de la superficie cociente es 0, \mathbb{B} actúa como S_3 . Luego de los 30 vectores generadores tenemos 8 clases distintas por la acción de $\text{Inn}(G) \times \mathbb{B} = \{id\} \times S_3$, y por la acción de $\text{Aut}(G) \times \mathbb{B} \cong \mathbb{Z}_7^* \times S_3$ sólo hay 2 órbitas. Por último como $G = \mathbb{Z}_p$ con p primo, la cantidad de acciones topológicas no equivalentes coincide con las analíticas no equivalentes. Luego el conteo queda:

Tipo de Equivalencia	Cantidad de acciones distintas
Topológicas	2
Analíticas	2
Órbitas por Λ	8

2.6.3. \mathbb{Z}_8 actuando en género 9

Esta familia de ejemplos fue propuesta en [10], aquí la estudiaremos en detalle y es el punto de partida para una clasificación mayor que desarrollaremos en esta tesis.

Consideremos la Superficie de Riemann de género 9

$$X_\lambda : y^4 = x(x^2 - 1)(x^2 - \lambda^2)(x^2 - \lambda^{-2}) \quad , \quad \lambda^4 \notin \{0, 1\}$$

y los siguientes automorfismos de S_λ

$$\tau_1(x, y) = (-x, \rho y) \quad \wedge \quad \tau_2(x, y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{\rho y}{x^2} \right) \quad , \quad \rho = e^{\frac{2\pi i}{8}}.$$

La clausura proyectiva de X_λ es

$$\overline{X}_\lambda : y^4 z^3 = x(x^2 - z^2)(x^2 - \lambda^2 z^2)(x^2 - \lambda^{-2} z^2),$$

donde los automorfismos anteriores se proyectan como sigue:

$$\tau_1([x : y : z]) = [-x : \rho y : z] \quad \wedge \quad \tau_2([x : y : z]) = [xz : \rho y z : x^2].$$

\overline{X}_λ tiene a $[0 : 1 : 0]$ como único punto singular, se puede verificar el cálculo en el anexo 1 al término de este ejemplo. Sea $X_1 = \overline{X}_\lambda \cap \{y \neq 0\}$, en este abierto la curva proyectiva se puede representar de la forma $z^3 = (xk(x, z))^7$, de donde se deduce que la singularidad es monomial de tipo (3,7). Por el algoritmo de la división, $1 = 1 \cdot 7 + (-2) \cdot 3$, y ya que 3 y 7 son relativamente primos, la función $s(x, z) = x^{-2}z$ es carta en $(0, 0)$, con inversa $r(t) = (t^3, t^7)$. Luego, la singularidad $[0 : 1 : 0]$ se resuelve con la carta $(U, \varphi : U \mapsto V)$ para un abierto U de $[0 : 1 : 0]$ donde $\varphi = s \circ \phi$ y ϕ es la carta usual del espacio proyectivo al afín.

Para $i \in \{1, 2\}$ consideraremos las acciones

$$\varepsilon_i : \mathbb{Z}_8 \rightarrow \text{Aut}(X_\lambda)$$

$$1 \mapsto \tau_i$$

El grupo abstracto generado por τ_1 es $G \simeq \mathbb{Z}_8 := \langle \sigma : \sigma^8 = 1 \rangle$.

Tomaremos a $\sigma = \tau_1(x, y)$ como generador de este grupo cíclico, o a $\sigma = \tau_1[x : y : z]$ pensando en la clausura. Notamos que $\sigma, \sigma^3, \sigma^5, \sigma^7$ tienen orden 8 y σ^2 con σ^6 tienen orden 4.

El grupo abstracto generado por τ_2 también es $G \simeq \langle \gamma : \gamma^8 = 1 \rangle$.

Tomaremos esta vez a $\gamma = \tau_2(x, y)$ como generador de este grupo cíclico. Aquí $\gamma, \gamma^3, \gamma^5, \gamma^7$ tienen orden 8 y γ^2 con γ^6 tienen orden 4. La siguiente tabla muestra los elementos de los grupos cíclicos generados por τ_1 y τ_2 , sus órdenes y sus representaciones afín y proyectiva.

$\langle \tau_1 \rangle$	afín	orden	Proyectiva	$\langle \tau_2 \rangle$	afín	orden	Proyectiva
σ	$(-x, \rho y)$	8	$[-x : \rho y : z]$	γ	$\left(\frac{1}{x}, \frac{\rho y}{x^2}\right)$	8	$[xz : \rho yz : x^2]$
σ^2	$(x, \rho^2 y)$	4	$[x : \rho^2 y : z]$	γ^2	$(x, \rho^2 y)$	4	$[x : \rho^2 y : z]$
σ^3	$(-x, \rho^3 y)$	8	$[-x : \rho^3 y : z]$	γ^3	$\left(\frac{1}{x}, \frac{\rho^3 y}{x^2}\right)$	8	$[xz : \rho^3 yz : x^2]$
σ^4	$(x, \rho^4 y)$	2	$[x : \rho^4 y : z]$	γ^4	$(x, \rho^4 y)$	2	$[x : \rho^4 y : z]$
σ^5	$(-x, \rho^5 y)$	8	$[-x : \rho^5 y : z]$	γ^5	$\left(\frac{1}{x}, \frac{\rho^5 y}{x^2}\right)$	8	$[xz : \rho^5 yz : x^2]$
σ^6	$(x, \rho^6 y)$	4	$[x : \rho^6 y : z]$	γ^6	$(x, \rho^6 y)$	4	$[x : \rho^6 y : z]$
σ^7	$(-x, \rho^7 y)$	8	$[-x : \rho^7 y : z]$	γ^7	$\left(\frac{1}{x}, \frac{\rho^7 y}{x^2}\right)$	8	$[xz : \rho^7 yz : x^2]$
id	(x, y)	1	$[x : y : z]$	id	(x, y)	1	$[x : y : z]$

 Tabla 1: Descripción de los elementos de $\langle \tau_1 \rangle$ y $\langle \tau_2 \rangle$.

Con esta información, procedemos al cálculo de los vectores generadores asociados a las acciones ε_i sobre X_λ y signatura $(0; 8, 8, 4, 4, 4)$.

i) Primero identificamos los puntos rama:

Para τ_1 los puntos con estabilizador no trivial son: $[0 : 0 : 1]$, $[0 : 1 : 0]$, $[\pm 1 : 0 : 1]$, $[\pm \lambda : 0 : 1]$ y $[\pm \lambda^{-1} : 0 : 1]$. Aquellos que tienen la primera coordenada de igual módulo, se encuentran en la misma τ_1 -órbita. De esta manera tenemos 5 puntos rama en $X_\lambda / \langle \tau_1 \rangle$ que denotaremos: $Q_1 = \overline{[0 : 0 : 1]}$, $Q_2 = \overline{[0 : 1 : 0]}$, $Q_3 = \overline{[1 : 0 : 1]}$, $Q_4 = \overline{[\lambda : 0 : 1]}$ y $Q_5 = \overline{[\lambda^{-1} : 0 : 1]}$.

Para τ_2 los puntos con estabilizador no trivial son: $[0 : 0 : 1]$, $[\pm 1 : 0 : 1]$, $[\pm \lambda : 0 : 1]$, $[\pm \lambda^{-1} : 0 : 1]$ y $[0 : 1 : 0]$. De estos, hay elementos que están en la misma τ_2 -órbita. Por lo que la cantidad se reduce a 5 puntos rama en $X_\lambda / \langle \tau_2 \rangle$, estos son: $\tilde{Q}_1 = \overline{[0 : 0 : 1]}$, $\tilde{Q}_2 = \overline{[1 : 0 : 1]}$, $\tilde{Q}_3 = \overline{[-1 : 0 : 1]}$, $\tilde{Q}_4 = \overline{[\lambda : 0 : 1]}$ y $\tilde{Q}_5 = \overline{[-\lambda : 0 : 1]}$.

Observación 6. $[0 : 1 : 0]$ está en la misma órbita de $[0 : 0 : 1]$ por τ_2 , cuyo resultado se puede verificar en el anexo 2 del final de este ejemplo.

ii) Puntos en la fibra de cada Q_j y \tilde{Q}_j :

$$P_1 = [0 : 0 : 1], P_2 = [0 : 1 : 0], P_3 = [1 : 0 : 1], P_4 = [\lambda : 0 : 1] \text{ y } P_5 = [\lambda^{-1} : 0 : 1].$$

$$\tilde{P}_1 = [0 : 0 : 1], \tilde{P}_2 = [1 : 0 : 1], \tilde{P}_3 = [-1 : 0 : 1], \tilde{P}_4 = [\lambda : 0 : 1] \text{ y } \tilde{P}_5 = [-\lambda : 0 : 1].$$

iii) Sean $G_j^1 = \text{Stab}_{G^1} P_j$ y $G_j^2 = \text{Stab}_{G^2} \tilde{P}_j$, con $j \in \{1, 2, \dots, 5\}$. Debemos construir las funciones $\eta_j^1 : G_j^1 \rightarrow \mathbb{C}^*$ y $\eta_j^2 : G_j^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$ tales que

$$\eta_j^1(g_j) = \rho^{\frac{8}{|G_j^1|}} \quad \wedge \quad \eta_j^2(g_j) = \rho^{\frac{8}{|G_j^2|}}.$$

Los elementos g_j serán las coordenadas de los vectores generadores correspondientes a cada acción.

Entonces, primero formaremos el vector generador dado por la acción de τ_1 . Partimos el análisis con $P_1 = [0 : 0 : 1]$, punto no singular con estabilizador de orden 8. Se tiene que $\frac{\partial F}{\partial x}(P_1) = -1 \neq 0$, (F es el polinomio homogéneo que describe \overline{X}_λ) luego por el T.F.I. podemos escribir $x = h(y)$ localmente, en donde $\pi_2(x, y) = y$ es carta. La versión local de la acción en dicho punto se respresenta en el siguiente diagrama:

$$y \xrightarrow{\pi_2^{-1}} (h(y), y) \xrightarrow{(\phi_1)^{-1}} [h(y) : y : 1] \xrightarrow{(\sigma^3)^{-1}} [-h(y) : \rho^5 y : 1] \xrightarrow{\phi_1} (-h(y), \rho^5 y) \xrightarrow{\pi_2} \rho^5 y,$$

Tenemos así la función $\eta_1^1 : G_1^1 \rightarrow \mathbb{C}^*$, en donde $\eta_1^1(\sigma^3) = \rho^5$. Buscamos $g_1 \in \langle \tau_1 \rangle$ tal que $\eta_1^1(g_1) = \rho^{\frac{8}{|\text{Stab}_{G^1} P_1|}} = \rho$. Como η_1^1 es homomorfismo, tal g_1 es σ^7 , por lo tanto,

$$g_1 = \sigma^7.$$

Ahora tomamos $P_2 = [0 : 1 : 0]$, punto singular con estabilizador de orden 8. Dicha singularidad se resuelve con la carta $(U, \varphi : U \mapsto V)$ dada por $\varphi = s \circ \phi_2$, donde $s(x, z) = x^{-2}z$ es carta en $(0, 0)$, con inversa $r(t) = (t^3, t^7)$. La versión local de la acción en P_2 se respresenta en el siguiente diagrama:

$$t \xrightarrow{r} (t^3, t^7) \xrightarrow{(\phi_2)^{-1}} [t^3 : 1 : t^7] \xrightarrow{(\sigma)^{-1}} [-t^3 : \rho^7 : t^7] \xrightarrow{\phi_2} (-\frac{t^3}{\rho^7}, \frac{t^7}{\rho^7}) \xrightarrow{s} \rho^7 t,$$

Tenemos así la función $\eta_2^1 : G_2^1 \rightarrow \mathbb{C}^*$, en donde $\eta_2^1(\sigma) = \rho^7$. Buscamos $g_2 \in \langle \tau_1 \rangle$ tal que $\eta_2^1(g_2) = \rho$. El cual es,

$$g_2 = \sigma^7.$$

Tomamos el tercer punto, $P_3 = [\lambda : 0 : 1]$. Se trata de un punto no singular con estabilizador de orden 4. Debido a que $\lambda^4 \notin \{0, 1\}$, se tiene que $\frac{\partial F}{\partial x}(P_3) = 2(\lambda^6 - \lambda^4 - \lambda^2 + 1) \neq 0$, así localmente $x = h(y)$ y $\pi_2(x, y) = y$ es carta. La versión local de la acción en P_3 se respresenta en el siguiente diagrama:

$$t \xrightarrow{\pi_2^{-1}} (h(t), t) \xrightarrow{(\phi_3)^{-1}} [h(t) : t : 1] \xrightarrow{(\sigma^2)^{-1}} [h(t) : \rho^6 t : 1] \xrightarrow{\phi_3} (h(t), \rho^6 t) \xrightarrow{\pi_2} \rho^6 t,$$

Tenemos así la función $\eta_3^1 : G_3^1 \rightarrow \mathbb{C}^*$, $\eta_3^1(\sigma^2) = \rho^6$. Buscamos $g_3 \in \langle \tau_1 \rangle$ tal que $\eta_3^1(g_3) = \rho^{\frac{8}{|\text{Stab}_{G^1} P_3|}} = \rho^2$. Luego como η_3^1 es homomorfismo,

$$g_3 = \sigma^6.$$

Tomamos ahora $P_4 = [\lambda^{-1} : 0 : 1]$, punto no singular con estabilizador de orden 4. Debido a que $\lambda^4 \notin \{0, 1\}$, se tiene que $\frac{\partial F}{\partial x}(P_4) = 2(\lambda^{-6} - \lambda^{-4} - \lambda^{-2} + 1) \neq 0$, luego por el T.F.I. escribimos $x = h(y)$ en una vecindad del punto, y tenemos que $\pi_2(x, y) = y$ es carta. La versión local de la acción en aquel punto se respresenta en el siguiente diagrama:

$$y \xrightarrow{\pi_2^{-1}} (h(y), y) \xrightarrow{(\phi_4)^{-1}} [h(y) : y : 1] \xrightarrow{(\sigma^2)^{-1}} [h(y) : \rho^6 y : 1] \xrightarrow{\phi_4} (h(y), \rho^6 y) \xrightarrow{\pi_2} \rho^6 y,$$

La función $\eta_4^1 : G_4^1 \rightarrow \mathbb{C}^*$ cumple $\eta_4^1(\sigma^4) = \rho^6$. Buscamos $g_4 \in \langle \tau_1 \rangle$ tal que $\eta_4^1(g_4) = \rho^2$. Nos sirve

$$g_4 = \sigma^6.$$

Por último, el punto $P_5 = [1 : 0 : 1]$, es un punto no singular con estabilizador de orden 4. Debido a que $\lambda^4 \notin \{0, 1\}$, se tiene que $\frac{\partial F}{\partial x}(P_5) = -\frac{2}{\lambda^2}(\lambda^2 - 1)^2 \neq 0$, luego la versión local de este punto es la misma que en los dos casos anteriores, por ende

$$g_5 = \sigma^6.$$

Por lo tanto, el vector generador asociado a la acción inducida por τ_1 es

$$v_1 = (\sigma^7, \sigma^7, \sigma^6, \sigma^6, \sigma^6).$$

De forma análoga, podemos construir las funciones $\eta_j^2 : G_j^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$ tales que

$$\eta_j^2(g_j) = \rho^{\frac{8}{|\text{Stab}_{G^2} \bar{P}_j|}}$$

para cada $j \in \{1, 2, \dots, 5\}$, y obtener el vector generador v_2 asociado a la acción inducida por τ_2 , el cual coincide con v_1 ,

$$v_2 = (\gamma^7, \gamma^7, \gamma^6, \gamma^6, \gamma^6).$$

Según [10] ambas acciones son topológicamente equivalentes pero no analíticamente equivalentes por un argumento similar al del ejemplo 2.6.1. A nosotros en esta tesis nos interesa entender todas las acciones módulo equivalencia topológica, de \mathbb{Z}_8 en género 9 específicamente con la signatura $(0, 8, 8, 4, 4, 4)$.

Existen 4 vectores generadores, módulo permutaciones y automorfismos de G con la signatura $s = (0; 8, 8, 4, 4, 4)$, estos son: $(\gamma, \gamma, \gamma^6, \gamma^6, \gamma^2)$, $(\gamma, \gamma, \gamma^2, \gamma^2, \gamma^2)$, $(\gamma, \gamma^5, \gamma^6, \gamma^6, \gamma^6)$, $(\gamma, \gamma^5, \gamma^6, \gamma^2, \gamma^2)$. Y si la acción es del grupo $\Lambda = \text{Inn}(G) \times \mathbb{B}$, la cuenta asciende a 12 órbitas de vectores generadores. Las acciones dadas por τ_1 y τ_2 no son analíticamente equivalentes. Luego la cuenta queda:

Tipo de Equivalencia	Cantidad de acciones distintas
Topológicas	4
Analíticas	≥ 5
Órbitas por Λ	12

Anexo 1: $[0 : 1 : 0]$ Único punto singular.

Consideremos el polinomio homogéneo que describe a \bar{X}_λ

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= y^4 z^3 - x(x^2 - z^{-2})(x^2 - \lambda^2 z^2)(x^2 - \lambda^{-2} z^2) \\ &= y^4 z^3 - x^7 + x^5 z^2 c_\lambda - x^3 z^4 c_\lambda + x z^6 \end{aligned}$$

donde $c_\lambda = 1 + \lambda^2 + \lambda^{-2}$.

Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= -7x^6 + 5x^4z^2c_\lambda - 3x^2z^4c_\lambda + z^6 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 4y^3z^3 \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= 3z^2y^4 + 2zx^5c_\lambda - 4z^3x^3c_\lambda + 6z^5x.\end{aligned}$$

Cuando $z = 0$, tenemos como solución el punto $[0 : 1 : 0]$. Si $z \neq 0$, necesariamente $y = 0$, y así tomamos cartas locales $(x, y) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$, luego las ecuaciones quedan:

$$\begin{aligned}ec_1 : -7x^6 + 5x^4c_\lambda - 3x^2c_\lambda + 1 &= 0 \\ ec_2 : 2x^5c_\lambda - 4x^3c_\lambda + 6x &= 0\end{aligned}$$

y como $[x : 0 : 1] \in \overline{X}_\lambda$, equivale a decir $f(x, 0) = 0$ (con f el polinomio que describe a X_λ), luego $x \in \{0, \pm 1, \pm \lambda, \pm \lambda^{-1}\}$.

Es claro que $x = 0$ no es solución; en los otros casos se tiene:

- $x = \pm 1$
 $ec_1 : 2\lambda^{-2}(\lambda^2 - 1)^2 \neq 0$
- $x = \pm \lambda$
 $ec_1 : -2(\lambda^2 - 1)(\lambda^4 - 1) \neq 0$
- $x = \pm \lambda^{-1}$
 $ec_1 : -\frac{2}{\lambda^6}(\lambda^2 - 1)(\lambda^4 - 1) \neq 0.$

De aquí concluimos que el único punto singular es $[0 : 1 : 0]$.

Anexo 2: Definición de τ_2 en $[0 : 0 : 1]$.

Como la expresión dada para τ_2 no está bien definida en $[0 : 0 : 1]$, debemos estudiar cómo es la curva cerca de $(0, 0)$ y representar τ_2 en dicha vecindad. Como la derivada parcial de F con respecto a x no se anula en tal punto, tenemos que $x = h(y)$ localmente, con h función analítica que satisface $h(0) = 0$. Además $h'(0) = 0$, luego h tiene orden 2, es decir, $h(y) = y^2k(y)$, con $k(0) \neq 0$. Así, en una vecindad de $[0 : 0 : 1]$, tenemos:

$$\tau_2([h(y) : y : 1]) = [h(y) : \rho y : h(y)^2] = \left[\frac{h(y)}{\rho y} : 1 : \frac{h(y)^2}{\rho y} \right] = \left[\frac{yk(y)}{\rho} : 1 : \frac{yk(y)^2}{\rho} \right].$$

Por lo tanto, $\tau_2([0 : 0 : 1]) = [0 : 1 : 0]$.

2.7. Grupos Fuchsianos Maximales

Hasta ahora hemos considerado principalmente grupos arbitrarios de automorfismos de superficies de Riemann. Sin embargo, estamos interesados en los grupos completos de automorfismos. Una pregunta natural que surge es la siguiente: ¿Existe un grupo de automorfismos de una superficie de Riemann, dada por un epimorfismo $\theta : \Delta \rightarrow G$, para algún grupo Fuchsiano Δ y un grupo finito G , tal que sea el grupo completo de automorfismos? O formulada en términos de estratos equisimétricos, (que veremos en el siguiente capítulo) ¿cuándo el estrato $\mathcal{M}^{[s,G,\theta]}$ es no vacío? Para responder esto consideraremos acciones maximales y grupos Fuchsianos maximales.

Definición 13. Un grupo Fuchsiano Δ se dice grupo Fuchsiano finito maximal si no existe otro grupo Fuchsiano Δ' conteniendo a Δ con índice finito y que coincidan en dimensión, $d(\Delta) = d(\Delta')$. También, diremos que una signatura es no maximal si es la signatura de algún grupo Fuchsiano no maximal.

La lista completa de pares de signaturas $s(\Delta), s(\Delta')$ no maximales obtenidas por Singerman [27] son:

$s(\Delta)$	$s(\Delta')$	$[\Delta : \Delta']$
$(2; -)$	$(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$	2
$(1; t, t)$	$(0; 2, 2, 2, 2, t)$	2
$(1; t)$	$(0; 2, 2, 2, 2t)$	2
$(0; t, t, t, t)$	$(0; 2, 2, 2, t)$	4
$(0; t, t, u, u)$	$(0; 2, 2, t, u)$	2
$(0; t, t, t)$	$(0; 3, 3, t)$	3
$(0; t, t, t)$	$(0; 2, 3, 2t)$	6
$(0; t, t, u)$	$(0; 2, t, 2u)$	2
$(0; 7, 7, 7)$	$(0; 2, 3, 7)$	24
$(0; 2, 7, 7)$	$(0; 2, 3, 7)$	9
$(0 : 3, 3, 7)$	$(0; 2, 3, 7)$	8
$(0; 4, 8, 8)$	$(0; 2, 3, 8)$	12
$(0; 3, 8, 8)$	$(0; 2, 3, 8)$	10
$(0; 9, 9, 9)$	$(0; 2, 3, 9)$	12
$(0; 4, 4, 5)$	$(0; 2, 4, 5)$	6
$(0; n, 4n, 4n)$	$(0; 2, 3, 4n)$	6
$(0; n, 2n, 2n)$	$(0; 2, 4, 2n)$	4
$(0; 3, n, 3n)$	$(0; 2, 3, 3n)$	4
$(0; 2, n, 2n)$	$(0; 2, 3, 2n)$	3

Tabla 2: Pares de signaturas no maximales.

Un grupo con acción inducida por una signatura maximal, corresponde al grupo completo de automorfismos de alguna superficie de Riemann. Sin embargo, si la signatura no es maximal, tenemos que investigar más para determinar si el grupo corresponde o no al grupo completo de automorfismos. Esto se resume en la siguiente proposición:

Proposición 5. [2] Sea Γ un grupo Fuchsiano de superficie y $X = \mathcal{H}/\Gamma$ una superficie de Riemann. Supongamos que existe un epimorfismo superficie $\theta : \Delta \rightarrow G$ tal que $\ker(\theta) = \Gamma$ donde $s(\Delta)$ no es una signatura maximal. Supongamos además que existe otro epimorfismo superficie $\theta' : \Delta' \rightarrow G'$, tal

que $\ker(\theta') = \Gamma$ donde $\Delta' \geq \Delta$, $G' \geq G$ y $\theta'^{-1}(G) = \Delta$. Entonces $G = \Delta/\Gamma$ es el grupo completo de automorfismos $\text{Aut}(X)$ si y sólo si $\theta'|_{\Delta}$ no es equivalente bajo automorfismos de Δ y G a θ para toda extensión $\theta' : \Delta' \rightarrow G'$.

Otra manera de decirlo, es que una acción $\theta : \Delta \rightarrow G$ no es maximal si y sólo si existe una acción $\theta' : \Delta' \rightarrow G'$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Delta' & \xrightarrow{\theta'} & G' \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Delta & \xrightarrow{\theta} & G \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Gamma & \xrightarrow{\theta, \theta_i} & 1 \end{array}$$

Ejemplo 18. [1] Sea Δ un grupo con signatura $s(\Delta) = (0; 4, 4, 4, 4)$ tal que existe un epimorfismo $\theta : \Delta \rightarrow \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ definido por $\theta(\gamma_1) = a$, $\theta(\gamma_2) = a$, $\theta(\gamma_3) = ab$ y $\theta(\gamma_4) = ab$. Con la fórmula de Riemann-Hurwitz encontramos que θ induce un grupo de automorfismos de una superficie de género 5. Este grupo, de hecho no es el grupo completo de automorfismos. Consideremos un grupo Δ' con signatura $s(\Delta') = (0; 2, 2, 2, 4)$ tal que existe un epimorfismo $\theta' : \Delta' \rightarrow (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$ definido por $\theta'(\gamma'_1) = ba$, $\theta'(\gamma'_2) = b$, $\theta'(\gamma'_3) = c$ y $\theta'(\gamma'_4) = ac$ actuando en una superficie de género 5. Considere el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) & \xrightarrow{\theta} & (a, a, ab, ab) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\gamma'_3 \gamma'_2 \gamma'_4{}^{-1} \gamma'_2 \gamma'_4 \gamma'_2 \gamma'_4 \gamma'_2 \gamma'_3, \gamma'_4, \gamma'_2 \gamma'_4 \gamma'_2, \gamma'_3 \gamma'_2 \gamma'_4 \gamma'_2 \gamma'_3) & \xrightarrow{\theta'} & (ac, ac, (ac)^3 (bc)^2, (ac)^3 (bc)^2) \end{array}$$

donde $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \simeq \langle ac, (ac)^2 (bc)^2 \rangle \subset (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$. Como vemos en el diagrama, la acción θ puede extenderse a θ' .

Capítulo 3

Estratificación Equisimétrica

En la sección 1.2 del capítulo 1 definimos equivalencia conforme entre superficies de Riemann de un género fijo g . El espacio de clases de equivalencia de Superficies de Riemann se conoce como el espacio de moduli \mathcal{M}_g , el cual estamos interesados en estudiar. Como herramienta para estudiar el espacio de moduli consideraremos los espacios de Teichmüller de superficies de Riemann. Restringiremos la equivalencia de superficies de Riemann tal que exista un biholomorfismo entre éstas que sea homotópico a la identidad. Clásicamente el espacio de Teichmüller es construido como un espacio de superficies de Riemann marcado con las conocidas funciones cuasi-conformes. Sin embargo, cuando una superficie de Riemann es uniformizada por un grupo Fuchsiano superficie, podemos construir el espacio de Teichmüller por clases de grupos Fuchsianos superficies. Una ventaja de el segundo enfoque, es que no tenemos que usar explícitamente mapas cuasi-conformes. Para mas detalles sobre mapas cuasi-conformes y teoría de Teichmüller, revisar [24], y para detalles sobre la teoría de estratificación equisimétrica, ver [9] y [18]. Haremos aquí una rápida recolección de resultados al respecto usando el segundo enfoque.

3.1. Espacio de Moduli y espacio de Teichmüller

Ahora, construiremos los espacios de Teichmüller y los espacios de moduli de grupos Fuchsianos. Sea Δ un grupo Fuchsiano abstracto (no necesariamente un grupo superficie), entonces consideremos el conjunto de monomorfismos

$$R(\Delta) = \{r \mid r : \Delta \rightarrow PSL(2, \mathbb{R}), r(\Delta) \text{ es Fuchsiano}\}.$$

Debido a que $PSL(2, \mathbb{R})$ es un grupo topológico, $R(\Delta)$ tiene una topología natural dada por

$$r \mapsto (r(\alpha_1), \dots, r(\alpha_g), r(\beta_1), \dots, r(\beta_g), r(\gamma_1), \dots, r(\gamma_k))$$

donde γ_i es un elemento elíptico y los elementos α_i y β_i son hiperbólicos como antes.

El espacio de Teichmüller de Δ , denotado por $T(\Delta)$, se define como

$$T(\Delta) = R(\Delta) / \sim_c$$

donde \sim_c es equivalencia por conjugación en $PSL(2, \mathbb{R})$. El espacio de Teichmüller $T(\Delta)$ es de hecho una variedad y su dimensión es bien conocida.

Teorema 20. [16] El espacio de Teichmüller $T(\Delta)$ es una variedad analítica compleja de dimensión $3g - 3 + r$, difeomorfo a $\mathbb{R}^{6g-6+2r}$.

Basado en este resultado, definimos la dimensión de un grupo Fuchsiano Δ como,

$$d(\Delta) = d(T(\Delta)) = 3g - 3 + r.$$

Si $\Delta \subset \Delta'$, entonces la inclusión $i : \Delta \rightarrow \Delta'$ induce una función $i^* : T(\Delta) \rightarrow T(\Delta')$, $[r'] \mapsto [r' \circ i]$. Por lo tanto, existe una incrustación natural de un espacio Teichmüller en otro como sigue:

Teorema 21. [16] Sean Δ y Δ' dos grupos Fuchsianos tales que existe un monomorfismo $i : \Delta \rightarrow \Delta'$, entonces la función inducida

$$i^* : T(\Delta) \rightarrow T(\Delta'), [r] \mapsto [r \circ i],$$

es una incrustación isométrica.

El grupo de automorfismos exteriores de Δ actúa en $T(\Delta)$ donde la acción de un automorfismo externo ω en $T(\Delta)$ está dada por $[r] \mapsto [r \circ \omega]$. El grupo de tales acciones, $M(\Delta)$ se conoce como el *Teichmüller modular group* o el *mapping class group*.

El espacio de *moduli* de Δ se define como el espacio cociente

$$\mathcal{M}(\Delta) = T(\Delta)/M(\Delta).$$

Recordemos el Teorema 13 del capítulo 1, que establece que dos grupos superficies Γ y Γ' , con firmas $s(\Gamma) = s(\Gamma') = (g, -)$, corresponden a superficies de Riemann conformemente equivalentes si y sólo si, Γ y Γ' son conjugados en $PSL(2, \mathbb{R})$. Con esto en mente, se define el espacio de Teichmüller $T(\Gamma)$ como $T_g := T(\mathcal{H}/r(\Gamma))$ y el espacio de moduli $\mathcal{M}(\Gamma)$ como $\mathcal{M}_g := \mathcal{M}(\mathcal{H}/r(\Gamma))$. Usualmente denotamos $M(\Gamma)$ por M_g . Volvamos al cubrimiento canónico $T_g \rightarrow \mathcal{M}_g$. Uno podría considerar, excepto si éste es un cubrimiento ramificado, el conjunto de puntos fijos para un subgrupo $G \subset M_g$,

$$T_g^G = \{[r] \in T_g \mid [r] = [r \circ \omega], \omega \in G\}.$$

Del Teorema de Realización de Nielsen [18],[9], tenemos:

Proposición 6. Si $G \subset M_g$ es finito, entonces T_g^G es no vacío.

Sea $G \subset M_g$ un subgrupo finito y $[r] \in T_g^G$, entonces existe un grupo Fuchsiano Δ (recordar el Teorema 17) tal que

$$\Delta/\Gamma \simeq \text{Aut}(\mathcal{H}/r(\Gamma)) \rightarrow M_g,$$

donde la imagen en M_g es conjugada a G . Luego, la imagen en el Teorema 21 puede ser identificada como sigue:

Proposición 7. [16],[18] Sean G y Δ definidos como antes, entonces

$$i^*(\Delta) = T_g^G.$$

Como hemos visto, los espacios de moduli son espacios cocientes de un manifold con acción de grupo propiamente discontinua, o en otras palabras, son buenos orbifolds. Fuera del *branch locus* ellos son bien descritos por los espacios de Teichmüller. Por lo tanto estamos interesados en particular, en el *branch locus* $\mathcal{B}_g \subseteq \mathcal{M}_g$ del cubrimiento $T_g \rightarrow \mathcal{M}_g$. De la discusión anterior, notemos que (ver detalles en [9] y en [18])

$$\mathcal{B}_g = \{X \in \mathcal{M}_g : |\text{Aut}(X)| > 1\}, \quad g \geq 3.$$

3.2. Estratificación Equisimétrica

Hemos visto que el *branch locus* \mathcal{B}_g consiste de superficies de Riemann con automorfismos de grupos no triviales. Recordemos del capítulo 2, que dos acciones θ_1, θ_2 de G en una superficie X , son *topológicamente equivalentes* si existe $\varphi \in \text{Aut}(G)$ y $\chi \in \text{Aut}(\Delta)$, tales que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{\theta_1} & G \\ \chi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \Delta & \xrightarrow{\theta_2} & G \end{array}$$

Denotaremos por \mathbb{B} al subgrupo de $\text{Aut}(\Delta)$ compuesto de tales automorfismos.

Consideremos el grupo de automorfismos $\text{Aut}(X)$ de superficies de Riemann $X = \mathcal{H}/\Gamma$. $G = \text{Aut}(X)$ determina clases de conjugación de subgrupos, \overline{G} , de M_g dada por acciones de G topológicamente equivalentes [9]. Llamemos \overline{G} , o simplemente G , el tipo de simetría de X . Dos superficies son equisimétricas si tienen el mismo tipo de simetría, es decir, sus grupos de automorfismos son conjugados en M_g .

Observación 7. Superficies que son conformemente equivalentes, claramente tienen el mismo tipo de simetría, luego podemos hablar sobre el tipo de simetría de puntos en el espacio de Moduli.

Notemos que cualquier clase de conjugación de subgrupos finitos de M_g corresponde a un grupo de automorfismos de superficies de Riemann. Por otra parte, debido a la cota de Hurwitz [Teorema 5] y el hecho de que existe sólo un número finito de s -vectores generadores de un grupo finito con cierta signatura dada, solo hay un número finito de posibles tipos de simetría de superficies de Riemann, y por lo tanto, un número finito de clases de conjugación de subgrupos finitos de M_g . Con las definiciones anteriores, podemos dividir el *branch locus* \mathcal{B}_g en subconjuntos de clases de superficies de Riemann equisimétricas. Denotemos el conjunto de superficies de Riemann equisimétricas con un tipo de simetría dada, como el conjunto o estrato:

$$\mathcal{M}_g^{[s, \overline{G}, \theta]} = \{X \in \mathcal{B}_g : \text{Aut}(X) \text{ top. equivalente a } G \text{ (dado por } \theta)\},$$

donde s es una signatura y θ es el epimorfismo que describe la acción del grupo G . Si queremos podemos

reemplazar θ por vector generador en la notación si es más cómodo. $\mathcal{M}_g^{[s,G,\theta]}$ es el conjunto de clases de superficies, con grupo completo de automorfismos, induciendo la simetría G .

También definimos $\overline{\mathcal{M}}_g^{[s,G,\theta]}$, como el conjunto de superficies, tales que el grupo de automorfismos contiene un subgrupo en la clase definida por G . Esto es,

$$\overline{\mathcal{M}}_g^{[s,G,\theta]} = \{X \in \mathcal{B}_g : G' \subset \text{Aut}(X), G' \text{ top. equivalente a } G \text{ (dado por } \theta)\}.$$

Notemos que $\overline{\mathcal{M}}_g^{[s,G,\theta]}$ es la imagen de $i^*(\Delta) = T_g^G$ bajo el cubrimiento $T_g \rightarrow \mathcal{M}_g$. Esta descomposición de \mathcal{B}_g es una estratificación como lo muestra Broughton en [9]:

Teorema 22. [9] Sea \mathcal{M}_g el espacio de moduli de superficies de Riemann de género g . G un subgrupo finito del correspondiente grupo modular M_g . Entonces:

1. $\overline{\mathcal{M}}_g^{[s,G,\theta]}$ es una subvariedad algebraica de \mathcal{M}_g cerrada e irreducible.
2. $\mathcal{M}_g^{[s,G,\theta]}$ si este es distinto de vacío, es una subvariedad algebraica de \mathcal{M}_g localmente cerrada, conexa, suave y densa en $\overline{\mathcal{M}}_g^{[s,G,\theta]}$ con la topología de Zariski.

Si bien en la práctica utilizamos las acciones de los automorfismos de Δ para mostrar que dos grupos de automorfismos de superficies de Riemann son topológicamente equivalentes, a menudo podemos distinguir grupos de automorfismos no equivalentes sin calcular explícitamente todas las acciones de \mathcal{B} al considerar las clases de conjugación de los elementos elípticos.

Ejemplo 19. [1] Consideremos el grupo de los cuaternios $Q_8 = \langle i, j | i^2 = j^2 = -1, ij = -ji \rangle$ y la signatura $s = (0; 4, 4, 4, 4)$. Con la fórmula de Riemann-Hurwitz, encontramos que Q_8 puede actuar con la signatura s en sobre superficies de Riemann de género $g = 5$. En efecto,

$$2g - 2 = 8 \left(-2 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \right) \iff 2g - 2 = 8 \iff g = 5$$

Existe un total de 144 acciones de grupos inducidas por Q_8 con signatura s . Sin embargo, la acción de $\text{Aut}(Q_8) \simeq S_4$ sobre el conjunto de vectores generadores nos permite obtener $144/|S_4| = 6$ clases, representadas por los vectores: (i, i, j, j) , $(i, j, -i, j)$, (i, j, j, i) , $(i, j, i, -j)$, $(i, j, -j, -i)$ y $(i, -i, -j, j)$.

Sean B_i los elementos en $\overline{\mathcal{B}}$ definidos por $x_i \mapsto x_{i+1}$, $x_{i+1} \mapsto x_{i+1}^{-1}x_i x_{i+1}$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} B_2(i, i, j, j) &= (i, j, -jij, j) = (i, j, -i, j), \\ B_3(i, j, -i, j) &= (i, j, j, jij) = (i, j, j, i), \\ B_3(i, j, j, i) &= (i, j, i, -iji) = (i, j, i, -j), \\ B_3(i, j, i, -j) &= (i, j, -j, -jij) = (i, j, -j, -i), \\ B_2(i, j, -i, j) &= (i, -i, -iji, j) = (i, -i, -j, j). \end{aligned}$$

Con esto podemos concluir que sólo existe un tipo de simetría de Superficies de Riemann dado por el grupo de los cuaternios Q_8 con signatura $(0; 4, 4, 4, 4)$.

3.3. Contención de estratos

Cuando tenemos acciones maximales de ciertos grupos que actúan en superficies de Riemann de género g . Sabemos que cada acción maximal θ se corresponde con un estrato no vacío $\mathcal{M}_g^{[s,G,\theta]}$ (o $\mathcal{M}_g^{[s,G,v]}$ si se quiere citar el vector generador v asociado a la acción θ). Sean $\theta_1 : \Delta_1 \rightarrow G$ y $\theta_2 : \Delta_2 \rightarrow H$, dos acciones maximales sobre una superficie de Riemann de género g , si $H \leq G$ y el vector generador inducido (asociado a θ_1) es equivalente con el vector generador asociado a θ_2 , entonces $\overline{\mathcal{M}}_g^{[s_1,G,\theta_1]} \subset \overline{\mathcal{M}}_g^{[s_2,H,\theta_2]}$.

Si tenemos las acciones $\theta_i : \Delta_i \rightarrow G_i$ y $\theta : \Delta \rightarrow G$, como en el diagrama, en donde $G_i \leq G$

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{\theta} & G \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Delta_i & \xrightarrow{\theta_i} & G_i \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Gamma & \xrightarrow{\theta, \theta_i} & 1 \end{array}$$

podemos extender éste para encontrar $\overline{\mathcal{M}}_g^{[s(\Delta_1),G_1,\theta_1]} \cap \overline{\mathcal{M}}_g^{[s(\Delta_2),G_2,\theta_2]}$ usando la siguiente torre de cubrimientos:

$$\begin{array}{ccc} & Y = \mathcal{H}/\Gamma_g & \\ f_{\theta_1} \swarrow & & \searrow f_{\theta_2} \\ \mathcal{H}/\Delta_1 & & \mathcal{H}/\Delta_2 \\ & \downarrow f_\theta & \\ & \mathcal{H}/\Delta & \end{array}$$

Tenemos las extensiones Δ de $\Delta_1 = \theta^{-1}(G_1)$ y $\Delta_2 = \theta^{-1}(G_2)$, y G de G_1 y G_2 tales que $\theta|_{\Delta_1} = \theta_1$ y $\theta|_{\Delta_2} = \theta_2$. Ahora, θ_i , $i = 1, 2$ no es una acción maximal si las dimensiones (Teichmüller) de Δ y Δ_i con $i = 1, 2$ son iguales, de otra manera, obtenemos que los estratos inducidos por θ_i contienen los estratos inducidos por θ .

Capítulo 4

Estratificación equisimétrica de \mathcal{M}_4 y \mathcal{M}_9

El branch locus \mathcal{B}_g consiste de las superficies de Riemann con simetrías, es decir, superficies de Riemann con grupo de automorfismo no trivial (excepto cuando $g = 2$, donde \mathcal{B}_2 consiste de superficies con grupo de automorfismo \mathbb{Z}_5). Harvey [18] alude a la existencia de la estratificación equisimétrica del espacio de Moduli \mathcal{M}_g de superficies de Riemann de género g , cada estrato está formado por los puntos del espacio de Moduli correspondientes a superficies equisimétricas. Recordemos que dos superficies de Riemann X e Y de género g son equisimétricas si sus grupos de automorfismos determinan subgrupos finitos conjugados en el grupo modular de género g , es decir, las acciones de sus grupos de automorfismos son topológicamente equivalentes.

Broughton mostró que la estratificación equisimétrica es en efecto, una estratificación de \mathcal{B}_g por subvariedades algebraicas cuyo interior, si es no vacío, es una subvariedad algebraica de \mathcal{M}_g suave, conexa, localmente cerrada y densa en el estrato (con la topología de Zariski).

En este capítulo mostraremos la estratificación equisimétrica del *branch locus* \mathcal{B}_4 de \mathcal{M}_4 y la estratificación equisimétrica del *branch locus* \mathcal{B}_9 de \mathcal{M}_9 motivada por el ejemplo 2.6.3, cuando el género de la superficie cociente es 0. Los resultados que mostraremos fueron obtenidos con la ayuda del programa SAGE [29] y la rutina o algoritmos para llegar a los resultados de género 4 y 9 se enseñarán en los capítulos 5 y 6 respectivamente.

Para el caso de \mathcal{M}_4 mostraremos las contenciones e intersecciones entre todos los estratos inducidos por las acciones maximales recuperando así los resultados de [3] con nuestras técnicas y algoritmos desarrollados para esta tesis. Para el caso de \mathcal{M}_9 mostraremos las contenciones e intersecciones de los estratos asociados a todas las acciones de \mathbb{Z}_8 , la motivación fue continuar el estudio presentado en el ejemplo 2.6.3, capítulo 2.

El algoritmo que utilizamos para obtener las estratificaciones se basa principalmente en los siguientes pasos:

1. Primero encontramos las posibles signaturas de grupos Fuchsianos que uniformizan X_4/G y X_9/G , donde X_4 y X_9 son superficies de Riemann de género 4, respectivamente 9, y G es el grupo de automorfismos de X_4 , respectivamente X_9 . Usando la lista de Singerman [27] destacamos cuáles signaturas son maximales.
2. Calculamos los epimorfismos $\theta : \Delta \rightarrow G$, donde $\ker(\theta) = \Gamma$ es un grupo Fuchsiano de superficie que uniformiza una superficie de género 4, respectivamente 9. Obtuvimos los epimorfismos y los

vectores generadores asociados.

3. Clasificamos las acciones obtenidas anteriormente, módulo equivalencia topológica, encontrando las clases de vectores generadores bajo la acción de $\mathbb{B} \times \text{Aut}(G)$.
4. Obtuvimos las acciones maximales y los estratos no vacíos asociados.
5. Finalmente calculamos la inclusión e intersección entre los diferentes estratos usando el Teorema 16.

Observación 8. Cada punto del algoritmo anterior se programó en SAGE, para más detalles revisar [7].

4.1. Estratificación equisimétrica de \mathcal{M}_4

El objetivo es aplicar nuestras técnicas y algoritmos computacionales (SAGE) para reobtener la estratificación en [3].

Usando la fórmula de Riemann-Hurwitz obtenemos las siguientes posibles firmas para grupos Fuchsianos Δ que uniformizan orbifolds X_4/G , donde X_4 es una superficie de Riemann de género 4 y G es un grupo de automorfismos de X_4 .

Sea Δ un grupo Fuchsiano y G un grupo finito. Si existe un epimorfismo $\theta : \Delta \rightarrow G$ tal que $\ker(\theta)$ es un grupo superficie de género 4. Entonces Δ tiene una de las siguientes firmas.

$ G $	Signatura	$ G $	Signatura	$ G $	Signatura
2	(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)	2	(1; 2, 2, 2, 2, 2, 2)	2	(2; 2, 2)
3	(0; 3, 3, 3, 3, 3, 3)	3	(1; 3, 3, 3)	4	(0; 4, 4, 4, 4, 2)
4	(0; 4, 4, 2, 2, 2, 2)	4	(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)	4	(1; 2, 2, 2)
5	(0; 5, 5, 5, 5)	6	(0; 3, 3, 3, 2, 2)	6	(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)
6	(0; 6, 6, 6, 2)	6	(0; 6, 6, 3, 3)	6	(0; 6, 3, 2, 2, 2)
6	(0; 3, 3, 3, 2, 2)	8	(0; 8, 8, 2, 2)	8	(0; 4, 2, 2, 2, 2)
8	(0; 4, 4, 4, 2)	9	(0; 9, 9, 9)	9	(0; 3, 3, 3, 3)
10	(0; 5, 5, 2, 2)	10	(0; 10, 10, 5)	12	(0; 12, 12, 3)
12	(0; 12, 6, 4)	12	(0; 3, 3, 3, 2)	12	(0; 6, 3, 2, 2)
12	(0; 2, 2, 2, 2, 2)	12	(0; 6, 6, 6)	15	(0; 15, 5, 3)
16	(0; 16, 16, 2)	16	(0; 8, 2, 2, 2)	16	(0; 8, 4, 4)
18	(0; 18, 9, 2)	18	(0; 6, 6, 3)	18	(0; 3, 3, 2, 2)
20	(0; 5, 4, 4)	20	(0; 5, 2, 2, 2)	20	(0; 10, 10, 2)
24	(0; 6, 4, 3)	24	(0; 12, 6, 2)	24	(0; 4, 2, 2, 2)
32	(0; 16, 4, 2)	36	(0; 4, 4, 3)	36	(0; 6, 6, 2)
36	(0; 3, 2, 2, 2)	36	(0; 6, 3, 3)	40	(0; 10, 4, 2)
60	(0; 5, 5, 2)	72	(0; 6, 4, 2)	72	(0; 12, 3, 2)
120	(0; 5, 4, 2)				

Tabla 3: Firmas dadas por la acción de un grupo finito G en X_4 .

Las signaturas ennegrecidas son maximales según Singerman.

Observación 9. En nuestra tabla hay signaturas de género distinto de cero las cuales logramos identificar por medio de acciones inducidas. En el capítulo 5 se mostrará cómo aparecen algunas de ellas utilizando SAGE [29].

Las acciones maximales las resumimos en la siguiente tabla, en la que se muestra además explícitamente el vector generador (representante de clase) asociado:

Grupo	Acción	Vector generador
\mathbb{Z}_2	$\theta : \Delta(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$	$v_1 = (a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}, a^{-1})$
\mathbb{Z}_3	$\theta_1 : \Delta(0; 3, 3, 3, 3, 3, 3) \rightarrow \mathbb{Z}_3$ $\theta_2 : \Delta(0; 3, 3, 3, 3, 3, 3) \rightarrow \mathbb{Z}_3$	$w_1 = (a, a, a, a, a, a)$ $w_2 = (a, a, a, a^{-1}, a^{-1}, a^{-1})$
\mathbb{Z}_4	$\theta_1 : \Delta(0; 4, 4, 4, 4, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_4$ $\theta_2 : \Delta(0; 4, 4, 2, 2, 2, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_4$	$u_1 = (a, a, a, a^{-1}, a^{-2})$ $u_2 = (a, a^{-1}, a^{-2}, a^{-2}, a^{-2}, a^{-2})$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\theta_1 : \Delta(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ $\theta_2 : \Delta(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$t_1 = (a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}, b^{-1}, a^{-1}b^{-1})$ $t_2 = (a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}, b^{-1}, b^{-1}, b^{-1}, a^{-1}b^{-1})$
S_3	$\theta_1 : \Delta(0; 3, 3, 3, 2, 2) \rightarrow S_3$ $\theta_2 : \Delta(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2) \rightarrow S_3$	$\eta_1 = (b, b, b, a^{-1}, a^{-1})$ $\eta_2 = (a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}b^{-1}, a^{-1}b^{-1})$
\mathbb{Z}_6	$\theta_1 : \Delta(0; 6, 6, 6, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_6$ $\theta_2 : \Delta(0; 6, 3, 2, 2, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_6$ $\theta_3 : \Delta(0; 3, 3, 3, 2, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_6$	$\kappa_1 = (ba, ba, ba, b^{-1})$ $\kappa_2 = (ba, a^{-1}, b^{-1}, b^{-1}, b^{-1})$ $\kappa_3 = (a, a, a, b^{-1}, b^{-1})$
D_4	$\theta_1 : \Delta(0; 4, 2, 2, 2, 2) \rightarrow D_4$ $\theta_2 : \Delta(0; 4, 2, 2, 2, 2) \rightarrow D_4$	$\mu_1 = (b^{-1}a^{-1}, b^{-1}, b^{-1}, b^{-1}, a^{-1}c^{-1})$ $\mu_2 = (b^{-1}a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, c^{-1}, a^{-1}c^{-1})$
Q_8	$\theta : \Delta(0; 4, 4, 4, 2) \rightarrow Q_8$	$\nu = (b, a, b^{-1}a^{-1}, c^{-1})$
\mathbb{Z}_{12}	$\theta : \Delta(0; 12, 6, 4) \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$	$\xi = (ba, b^{-1}a^{-2}, a)$
A_4	$\theta : \Delta(0; 3, 3, 3, 2) \rightarrow A_4$	$\varpi = (a, a, ca, b^{-1}c^{-1})$
D_6	$\theta_1 : \Delta(0; 6, 3, 2, 2) \rightarrow D_6$ $\theta_2 : \Delta(0; 2, 2, 2, 2, 2) \rightarrow D_6$	$\rho_1 = (cb, c, a^{-1}, b^{-1}c^{-1}a^{-1})$ $\rho_2 = (b^{-1}, a^{-1}, a^{-1}, c^{-1}a^{-1}, b^{-1}c^{-1}a^{-1})$
$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$	$\theta : \Delta(0; 6, 3, 2, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$	$\varrho = (b^{-1}a, a^{-1}, c^{-1}, c^{-1}b^{-1})$
D_8	$\theta : \Delta(0; 8, 2, 2, 2) \rightarrow D_8$	$\varsigma = (a^{-1}b^{-1}, d^{-1}, b^{-1}, a^{-1}d^{-1})$
D_{10}	$\theta : \Delta(0; 5, 2, 2, 2) \rightarrow D_{10}$	$\omega = (c, b^{-1}, a^{-1}, a^{-1}b^{-1}c^{-1})$
$SL(2, 3)$	$\theta : \Delta(0; 6, 4, 3) \rightarrow SL(2, 3)$	$\ell = (ad^{-1}, c^{-1}b^{-1}, a^{-1}c^{-1})$
S_4	$\theta : \Delta(0; 4, 2, 2, 2) \rightarrow S_4$	$\wp = (a^{-1}c^{-1}, a^{-1}, b^{-1}a^{-1}, b^{-1}a^{-1}d^{-1})$
$QD32$	$\theta : \Delta(0; 16, 4, 2) \rightarrow QD32$	$\vartheta = (ab, a, a^{-1}b^{-1}a^{-1})$
$S_3 \times S_3$	$\theta : \Delta(0; 3, 2, 2, 2) \rightarrow S_3 \times S_3$	$\zeta = (dc, b^{-1}, a^{-1}, a^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1})$
$(\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	$\theta : \Delta(0; 10, 4, 2) \rightarrow (\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	$\delta = (db^{-1}, a^{-1}b^{-1}, a^{-1}c^{-1}d^{-1})$
$(S_3 \times S_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$	$\theta : \Delta(0; 6, 4, 2) \rightarrow (S_3 \times S_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$	$o = (ea, b^{-1}d^{-1}a^{-1}, b^{-1}c^{-1})$
$\mathbb{Z}_3 \times S_4$	$\theta : \Delta(0; 12, 3, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_3 \times S_4$	$\lambda = (dba, b^{-1}c^{-1}, a^{-1}c^{-1}, d^{-1})$
S_5	$\theta : \Delta(0; 5, 4, 2) \rightarrow S_5$	$\tau = (b, b^{-2}ab, b^{-1}a^{-1}b)$

Tabla 4: Acciones de signatura maximal y vectores generadores asociados cuando $\mathfrak{g} = 0$.

Ahora, sabemos que a cada acción maximal θ le corresponde un estrato no vacío $\mathcal{M}_4^{[s, G, v]}$. Luego los estratos equisimétricos del *branch locus* \mathcal{B}_4 son los siguientes.

Estrato	Dimensión	Estrato	Dimensión
$\mathcal{M}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2,2,2,2,2),\mathbb{Z}_2,v_1]}$	7	$\mathcal{M}_4^{[(1;2,2,2,2,2,2),\mathbb{Z}_2,v_2]}$	6
$\mathcal{M}_4^{[(2;2,2),\mathbb{Z}_2,v_3]}$	5	$\mathcal{M}_4^{[(0;3,3,3,3,3,3),\mathbb{Z}_3,w_1]}$	3
$\mathcal{M}_4^{[(0;3,3,3,3,3,3),\mathbb{Z}_3,w_2]}$	3	$\mathcal{M}_4^{[(1;3,3,3),\mathbb{Z}_3,w_3]}$	3
$\mathcal{M}_4^{[(0;4,4,4,4,2),\mathbb{Z}_4,u_1]}$	2	$\mathcal{M}_4^{[(0;4,4,2,2,2,2),\mathbb{Z}_4,u_2]}$	3
$\mathcal{M}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2,2,2),\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,t_1]}$	4	$\mathcal{M}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2,2,2),\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,t_2]}$	4
$\mathcal{M}_4^{[(1;2,2,2),\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,t_3]}$	3	$\mathcal{M}_4^{[(0;3,3,3,2,2),S_3,\eta_1]}$	2
$\mathcal{M}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2),S_3,\eta_2]}$	3	$\mathcal{M}_4^{[(0;6,6,6,2),\mathbb{Z}_6,\kappa_1]}$	1
$\mathcal{M}_4^{[(0;6,3,2,2,2),\mathbb{Z}_6,\kappa_2]}$	2	$\mathcal{M}_4^{[(0;3,3,3,2,2),\mathbb{Z}_6,\kappa_3]}$	2
$\mathcal{M}_4^{[(0;4,2,2,2,2),D_4,\mu_1]}$	2	$\mathcal{M}_4^{[(0;4,2,2,2,2),D_4,\mu_2]}$	2
$\mathcal{M}_4^{[(0;4,4,4,2),Q_8,\nu]}$	1	$\mathcal{M}_4^{[(0;12,6,4),\mathbb{Z}_{12},\xi]}$	0
$\mathcal{M}_4^{[(0;3,3,3,2),A_4,\varpi]}$	1	$\mathcal{M}_4^{[(0;6,3,2),D_6,\rho_1]}$	1
$\mathcal{M}_4^{[(0;2,2,2,2,2),D_6,\rho_2]}$	2	$\mathcal{M}_4^{[(0;6,3,2,2),\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2,\varrho]}$	1
$\mathcal{M}_4^{[(0;8,2,2,2),D_8,\varsigma]}$	1	$\mathcal{M}_4^{[(0;5,2,2,2),D_{10},\omega]}$	1
$\mathcal{M}_4^{[(0;6,4,3),SL(2,3),\ell]}$	0	$\mathcal{M}_4^{[(0;4,2,2,2),S_4,\phi]}$	1
$\mathcal{M}_4^{[(0;16,4,2),QD32,\vartheta]}$	0	$\mathcal{M}_4^{[(0;3,2,2,2),S_3 \times S_3,\zeta]}$	1
$\mathcal{M}_4^{[(0;10,4,2),(\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2,\delta]}$	0	$\mathcal{M}_4^{[(0;6,4,2), (S_3 \times S_3) \rtimes \mathbb{Z}_2,\sigma]}$	0
$\mathcal{M}_4^{[(0;12,3,2),\mathbb{Z}_3 \times S_4,\lambda]}$	0	$\mathcal{M}_4^{[(0;5,4,2),S_5,\tau]}$	0

 Tabla 5: Estratificación equisimétrica de \mathcal{M}_4 obtenida por nuestra rutina en SAGE.

Observación 10. Esta tabla incorpora cuatro estratos correspondientes a acciones maximales de sig-naturas en donde el género de la superficie cociente es distinto de cero, estos están caracterizados por los vectores generadores inducidos que pudimos detectar al aplicar nuestra rutina SAGE para el caso de estratificación equisimétrica de \mathcal{M}_4 . Los vectores generadores que agregamos son $v_2 = (a, a, a, a, a, a)$, $v_3 = (a, a)$, $w_3 = (a^{-1}, a^{-1}, a^{-1})$ y $t_3 = (b^{-1}, a^{-1}, a^{-1}b^{-1})$. Para más detalles, ver el siguiente capítulo.

Cuando consideramos la clausura de cada estrato, pueden existir contenciones e intersecciones entre ellos. A continuación mostramos éstas como resumen de los resultados obtenidos en SAGE. El detalle de la obtención de estos resultados se mostrarán con la rutina expuesta en el capítulo 5.

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}_4^{[(0;4,4,4,4,2),\mathbb{Z}_4,u_1]}} &\subset \overline{\mathcal{M}_4^{[(1;2,2,2,2,2,2),\mathbb{Z}_2,v_2]}} , \\ \overline{\mathcal{M}_4^{[(0;4,4,2,2,2,2),\mathbb{Z}_4,u_2]}} &\subset \overline{\mathcal{M}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2,2,2,2,2),\mathbb{Z}_2,v_1]}} , \\ \overline{\mathcal{M}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2,2,2),\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,t_1]}} &\subset \overline{\mathcal{M}_4^{[(2;2,2),\mathbb{Z}_2,v_3]}} \cap \overline{\mathcal{M}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2,2,2,2,2),\mathbb{Z}_2,v_1]}} , \\ \overline{\mathcal{M}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2,2,2),\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,t_2]}} &\subset \overline{\mathcal{M}_4^{[(1;2,2,2,2,2,2),\mathbb{Z}_2,v_2]}} \cap \overline{\mathcal{M}_4^{[(2;2,2),\mathbb{Z}_2,v_3]}} , \\ \overline{\mathcal{M}_4^{[(0;3,3,3,2,2),S_3,\eta_1]}} &\subset \overline{\mathcal{M}_4^{[(0;3,3,3,3,3,3),\mathbb{Z}_3,w_2]}} \cap \overline{\mathcal{M}_4^{[(2;2,2),\mathbb{Z}_2,v_3]}} , \\ \overline{\mathcal{M}_4^{[(0;3,3,3,2,2),S_3,\eta_2]}} &\subset \overline{\mathcal{M}_4^{[(1;2,2,2,2,2,2),\mathbb{Z}_2,v_2]}} \cap \overline{\mathcal{M}_4^{[(2;2,2),\mathbb{Z}_2,v_3]}} , \end{aligned}$$

$$\overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;6,6,6,2), \mathbb{Z}_6, \kappa_1]} \subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(1;3,3,3), \mathbb{Z}_3, w_3]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(1;2,2,2,2,2,2), \mathbb{Z}_2, v_2]} ,$$

$$\overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;6,3,2,2,2), \mathbb{Z}_6, \kappa_2]} \subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(1;3,3,3), \mathbb{Z}_3, w_3]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2,2,2), \mathbb{Z}_2, v_1]} ,$$

$$\overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;3,3,3,2,2), \mathbb{Z}_6, \kappa_3]} \subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;3,3,3,3,3), \mathbb{Z}_3, w_1]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(1;2,2,2,2,2), \mathbb{Z}_2, v_2]} ,$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;4,2,2,2,2), D_4, \mu_1]} &\subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(1;2,2,2), \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, t_3]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2,2), \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, t_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(2;2,2), \mathbb{Z}_2, v_3]} \\ &\cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(1;2,2,2,2,2), \mathbb{Z}_2, v_2]} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;4,2,2,2,2), D_4, \mu_2]} &\subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2,2), \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, t_1]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;4,4,2,2,2,2), \mathbb{Z}_4, u_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(2;2,2), \mathbb{Z}_2, v_3]} \\ &\cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2,2,2), \mathbb{Z}_2, v_1]} , \end{aligned}$$

$$\overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;4,4,4,2), Q_8, \nu]} \subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;4,4,2,2,2,2), \mathbb{Z}_4, u_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2,2,2), \mathbb{Z}_2, v_1]} ,$$

$$\overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;12,6,4), \mathbb{Z}_{12}, \xi]} \subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;6,6,6,2), \mathbb{Z}_6, \kappa_1]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;4,4,4,4,2), \mathbb{Z}_4, u_1]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(1;3,3,3), \mathbb{Z}_3, w_4=(a,a,a)]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(1;2,2,2,2,2,2), \mathbb{Z}_2, v_3]} ,$$

$$\overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;3,3,3,2), A_4, \varpi]} \subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(1;2,2,2), \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, t_3]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(1;3,3,3), \mathbb{Z}_3, w_4]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(2;2,2), \mathbb{Z}_2, v_3]} ,$$

$$\overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;6,3,2,2), D_6, \rho_1]} \subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;3,3,3,2,2), S_3, \eta_1]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(1;2,2,2), \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, t_3]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;3,3,3,3,3,3), \mathbb{Z}_3, w_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(2;2,2), \mathbb{Z}_2, v_3]} ,$$

$$\overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2), D_6, \rho_2]} \subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2), S_3, \eta_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2,2), \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, t_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(1;2,2,2,2,2,2), \mathbb{Z}_2, v_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(2;2,2), \mathbb{Z}_2, v_3]} ,$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;6,3,2,2), \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2, \varrho]} &\subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;3,3,3,2,2), \mathbb{Z}_6, \kappa_3]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2,2), \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, t_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;3,3,3,3,3,3), \mathbb{Z}_3, w_1]} \\ &\cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(1;2,2,2,2,2,2), \mathbb{Z}_2, v_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(2;2,2), \mathbb{Z}_2, v_3]} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;8,2,2,2), D_8, \varsigma]} &\subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;4,2,2,2,2), D_4, \mu_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2,2), \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, t_1]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;4,4,2,2,2,2), \mathbb{Z}_4, u_2]} \\ &\cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2,2,2), \mathbb{Z}_2, v_1]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(2;2,2), \mathbb{Z}_2, v_3]} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;6,4,3), SL(2,3), \ell]} &\subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;4,4,4,2), Q_8, \nu]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;6,3,2,2,2), \mathbb{Z}_6, \kappa_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;4,4,2,2,2,2), \mathbb{Z}_4, u_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(1;3,3,3), \mathbb{Z}_3, w_3]} \\ &\cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2,2,2), \mathbb{Z}_2, v_1]} , \end{aligned}$$

$$\overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;5,2,2,2),D_{10},\omega]} \subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2,2),\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, t_1]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2,2,2,2),\mathbb{Z}_2, v_1]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(2;2,2),\mathbb{Z}_2, v_3]} ,$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;4,2,2,2),S_4,\varphi]} &\subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;4,2,2,2,2),D_4,\mu_1]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2),S_3,\eta_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(1;2,2,2),\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, t_3]} \\ &\cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2,2),\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, t_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(2;2,2),\mathbb{Z}_2, v_3]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(1;2,2,2,2,2,2),\mathbb{Z}_2, v_2]} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;16,4,2),QD32,\vartheta]} &\subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;8,2,2,2),D_8,\varsigma]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;4,4,4,2),Q_8,\nu]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;4,2,2,2,2),D_4,\mu_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2,2),\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, t_1]} \\ &\cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;4,4,2,2,2,2),\mathbb{Z}_4, u_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2,2,2,2),\mathbb{Z}_2, v_1]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(2;2,2),\mathbb{Z}_2, v_3]} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;3,2,2,2),S_3 \times S_3, \zeta]} &\subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2),D_6,\rho_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2),S_3,\eta_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;3,3,3,2,2),S_3,\eta_1]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2,2),\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, t_2]} \\ &\cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;3,3,3,3,3,3),\mathbb{Z}_3, w_1]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(1;2,2,2,2,2,2),\mathbb{Z}_2, v_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(2;2,2),\mathbb{Z}_2, v_3]} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;10,4,2),(\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2, \delta]} &\subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;5,2,2,2),D_{10},\omega]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;4,2,2,2,2),D_4,\mu_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2,2),\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, t_1]} \\ &\cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;4,4,2,2,2,2),\mathbb{Z}_4, u_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(2;2,2),\mathbb{Z}_2, v_3]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2,2,2,2),\mathbb{Z}_2, v_1]} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;3,2,2,2), (S_3 \times S_3) \times \mathbb{Z}_2, \sigma]} &\subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;3,2,2,2), S_3 \times S_3, \zeta]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2), D_6, \rho_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;6,3,2,2), D_6, \rho_1]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;4,2,2,2,2), D_4]} \\ &\cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2), S_3, \eta_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;3,3,3,2,2), S_3, \eta_1]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2,2), \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, t_2]} \\ &\cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(1;2,2,2), \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, t_3]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;3,3,3,3,3,3), \mathbb{Z}_3, w_1]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(2;2,2), \mathbb{Z}_2, v_3]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(1;2,2,2,2,2,2), \mathbb{Z}_2, v_2]} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;12,3,2), \mathbb{Z}_3 \times S_4, \lambda]} &\subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;4,2,2,2), S_4, \varphi]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;6,3,2,2), \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2, \varrho]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;6,3,2,2), A_4, \varpi]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;4,2,2,2,2), D_4]} \\ &\cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;3,3,3,2,2), \mathbb{Z}_6, \kappa_3]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2), S_3, \eta_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(1;2,2,2), \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, t_3]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2,2), \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, t_2]} \\ &\cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(1;3,3,3), \mathbb{Z}_3, w_3]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;3,3,3,3,3,3), \mathbb{Z}_3, w_1]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(2;2,2), \mathbb{Z}_2, v_3]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(1;2,2,2,2,2,2), \mathbb{Z}_2, v_2]} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;5,4,2), S_5, \tau]} &\subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;4,2,2,2), S_4, \varphi]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2), D_6, \rho_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;4,2,2,2,2), D_4]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2), S_3, \eta_2]} \\ &\cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(1;2,2,2), \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, t_3]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,2,2,2,2,2,2), \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, t_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(1;2,2,2,2,2,2), \mathbb{Z}_2, t_2]} \\ &\cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(2;2,2), \mathbb{Z}_2, v_3]} . \end{aligned}$$

Por medio de SAGE hemos recuperado la información presentada en [3]. Aquel documento muestra la estratificación equisimétrica de \mathcal{M}_4 obtenida por medio de un algoritmo programado en GAP. Hay pequeñas diferencias, por ejemplo con SAGE logramos obtener la contención:

$$\overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;3,3,3,2,2),S_3,\eta_2]} \subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(1;2,2,2,2,2),\mathbb{Z}_2,v_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(2;2,2),\mathbb{Z}_2,v_3]},$$

y en [3] se muestra que:

$$\overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;3,3,3,2,2),S_3,\eta_2]} \subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(1;2,2,2,2,2),\mathbb{Z}_2,v_2]}.$$

La diferencia apunta a la precisión, pero ambos resultados son correctos.

También se puede comparar lo siguiente, una de las contenciones que tenemos es:

$$\overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;6,3,2,2),D_6,\rho_1]} \subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;3,3,3,2,2),S_3,\eta_1]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(1;2,2,2),\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,t_3]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;3,3,3,3,3),\mathbb{Z}_3,w_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(2;2,2),\mathbb{Z}_2,v_3]},$$

pero

$$\overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;3,3,3,2,2),S_3,\eta_1]} \subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;3,3,3,3,3),\mathbb{Z}_3,w_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(2;2,2),\mathbb{Z}_2,v_3]},$$

por lo que podemos afirmar que

$$\overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;6,3,2,2),D_6,\rho_1]} \subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;3,3,3,2,2),S_3,\eta_1]} \cap \overline{\mathcal{M}}_4^{[(1;2,2,2),\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,t_3]}.$$

Este último resultado es más conciso y es el presentado en [3], lo cual es una muestra más de la reobtención de los resultados.

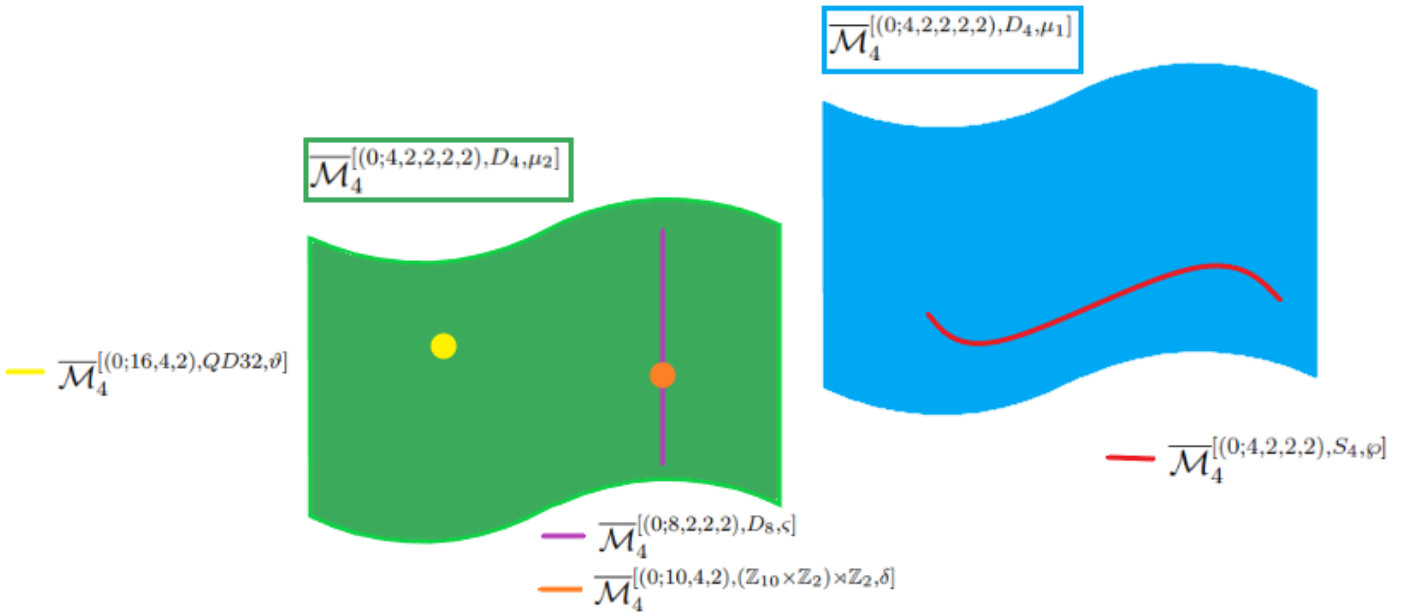


Figura 4.1: Representación de los estratos contenidos en $\overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;4,2,2,2),D_4,\mu_1]}$ y $\overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;4,2,2,2),D_4,\mu_2]}$.

4.2. Estratificación equisimétrica asociada a la acción de \mathbb{Z}_8 en \mathcal{M}_9

Con el fin de completar el estudio de las acciones de \mathbb{Z}_8 en género 9 iniciado en [10] y mostrado en el ejemplo 2.6.3 calcularemos la estratificación equisimétrica correspondiente a la acción de \mathbb{Z}_8 en \mathcal{M}_9 con signatura $(0; 8, 8, 4, 4, 4)$. La información que entregaremos es en base a los cálculos obtenidos en SAGE, que se muestran en detalle en el capítulo 6.

Usando la fórmula de Riemann-Hurwitz se obtendrán las posibles signaturas para grupos Fuchsianos Δ que uniformizan orbifolds X_9/G , donde X_9 es una superficie de Riemann de género 9 y G es un grupo de automorfismos de X_9 .

Sea Δ un grupo Fuchsiano y G un grupo finito. Si existe un epimorfismo $\theta : \Delta \rightarrow G$ tal que $\ker(\theta)$ es un grupo superficie de género 9, y la superficie cociente tiene género 0. Las signaturas y órdenes de G están en la siguiente lista. Más aún esta es la lista completa de grupos finitos actuando en género 9.

$ G $	Signatura	$ G $	Signatura	$ G $	Signatura
2	(0; 2, ²⁰ , 2)	3	(0; 3, ¹¹ , 3)	3	(0; 3, 3, 3, 3, 3, 3)
3	(1; 3, 3, 3)	4	(0; 4, ⁸ , 4)	4	(0; 4, 4, 4, 4, 2)
4	(0; 4, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2)	4	(0; 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 2)	4	(0; 4, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)
4	(0; 2, ¹² , 2)	6	(0; 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2)	6	(0; 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)
6	(0; 6, 6, 6, 6, 6, 2)	6	(0; 6, 6, 6, 6, 3, 3)	6	(0; 6, 6, 6, 3, 2, 2, 2)
6	(0; 6, 6, 3, 3, 3, 2, 2)	6	(0; 6, 3, 3, 3, 3, 3, 2)	6	(0; 6, 6, 2, 2, 2, 2, 2, 2)
6	(0; 6, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2)	6	(0; 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2)	7	(0; 7, 7, 7, 7, 7)
8	(0; 8, 8, 8, 8, 2)	8	(0; 8, 8, 4, 4, 4)	8	(0; 8, 8, 4, 2, 2, 2)
8	(0; 4, 4, 4, 4, 2, 2)	8	(0; 4, 4, 2, 2, 2, 2, 2)	8	(0; 2, ⁸ , 2)
9	(0; 9, 9, 3, 3, 3)	10	(0; 5, 5, 2, 2, 2, 2)	10	(0; 10, 10, 10, 10)
10	(0; 10, 10, 5, 2, 2)	10	(0; 5, 5, 2, 2, 2, 2)	12	(0; 6, 4, 4, 2, 2)
12	(0; 4, 4, 3, 3, 2)	12	(0; 12, 12, 6, 3)	12	(0; 12, 12, 4, 4)
12	(0; 12, 6, 6, 4)	12	(0; 12, 12, 2, 2, 2)	12	(0; 12, 4, 3, 2, 2)
12	(0; 4, 4, 3, 3, 2)	12	(0; 3, 3, 3, 3, 3)	12	(0; 3, 3, 2, 2, 2, 2)
12	(0; 6, 6, 3, 2, 2)	12	(0; 6, 2, 2, 2, 2, 2)	12	(0; 3, 3, 2, 2, 2, 2)
14	(0; 14, 7, 7, 2)	15	(0; 15, 5, 3, 3)	16	(0; 4, 4, 4, 4)
16	(0; 4, 4, 2, 2, 2)	16	(0; 8, 8, 4, 2)	18	(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)
18	(0; 9, 2, 2, 2, 2)	18	(0; 18, 18, 2, 2)	19	(0; 19, 19, 19)
20	(0; 5, 4, 4, 2)	20	(0; 20, 20, 10)	20	(0; 10, 10, 2, 2)
20	(0; 5, 2, 2, 2, 2)	21	(0; 21, 21, 7)	24	(0; 12, 8, 8)
24	(0; 24, 24, 4)	24	(0; 24, 8, 6)	24	(0; 3, 3, 3, 3)
24	(0; 12, 4, 2, 2)	24	(0; 4, 4, 3, 2)	24	(0; 3, 2, 2, 2, 2)
24	(0; 6, 6, 2, 2)	24	(0; 6, 3, 3, 2)	27	(0; 27, 27, 3)
28	(0; 28, 7, 4)	30	(0; 30, 10, 3)	32	(0; 8, 8, 4)
32	(0; 4, 4, 2, 2)	32	(0; 2, 2, 2, 2, 2)	36	(0; 18, 4, 4)
36	(0; 36, 36, 2)	36	(0; 18, 2, 2, 2)	38	(0; 38, 19, 2)
40	(0; 10, 4, 4)	40	(0; 10, 2, 2, 2)	40	(0; 20, 20, 2)
42	(0; 21, 14, 2)	48	(0; 24, 8, 2)	48	(0; 6, 2, 2, 2)
48	(0; 6, 4, 4)	48	(0; 12, 12, 2)	48	(0; 3, 3, 2, 2)
48	(0; 12, 4, 3)	48	(0; 6, 6, 3)	57	(0; 19, 3, 3)
60	(0; 5, 5, 3)	64	(0; 8, 8, 2)	64	(0; 4, 4, 4)
64	(0; 4, 2, 2, 2)	72	(0; 36, 4, 2)	80	(0; 20, 4, 2)
96	(0; 6, 3, 3)	96	(0; 12, 4, 2)	96	(0; 4, 4, 3)
96	(0; 6, 6, 2)	96	(0; 3, 2, 2, 2)	120	(0; 6, 5, 2)
128	(0; 8, 4, 2)	160	(0; 5, 5, 2)	192	(0; 12, 3, 2)
192	(0; 6, 4, 2)	320	(0; 5, 4, 2)		

Tabla 6: Signaturas dadas por la acción de un grupo finito G en X_9 .

Las signaturas ennegrecidas son maximales, aplicando el Teorema de Singerman [27].

Las acciones maximales de \mathbb{Z}_8 las resumimos en la siguiente tabla, en la que se muestra además explícitamente el vector generador (representante de clase) asociado:

Grupo	Acción	Vector generador
\mathbb{Z}_8	$\theta_1 : \Delta(0; 8, 8, 4, 4, 4) \rightarrow \mathbb{Z}_8$	$w_1 = (a, a, a^2, a^2, a^2)$
	$\theta_2 : \Delta(0; 8, 8, 4, 4, 4) \rightarrow \mathbb{Z}_8$	$w_2 = (a, a, a^2, a^{-2}, a^{-2})$
	$\theta_3 : \Delta(0; 8, 8, 4, 4, 4) \rightarrow \mathbb{Z}_8$	$w_3 = (a, a^{-3}, a^2, a^2, a^{-2})$
	$\theta_4 : \Delta(0; 8, 8, 4, 4, 4) \rightarrow \mathbb{Z}_8$	$w_4 = (a, a^{-3}, a^{-2}, a^{-2}, a^{-2})$
	$\theta_5 : \Delta(0; 8, 8, 8, 8, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_8$	$w_5 = (a, a, a, a, a^{-4})$
	$\theta_6 : \Delta(0; 8, 8, 8, 8, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_8$	$w_6 = (a, a, a^3, a^{-1}, a^{-4})$
	$\theta_7 : \Delta(0; 8, 8, 8, 8, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_8$	$w_7 = (a, a, a^{-3}, a^{-3}, a^{-4})$
	$\theta_8 : \Delta(0; 8, 8, 4, 2, 2, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_8$	$w_8 = (a, a, a^2, a^{-4}, a^{-4}, a^{-4})$
	$\theta_9 : \Delta(0; 8, 8, 4, 2, 2, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_8$	$w_9 = (a, a^{-3}, a^{-2}, a^{-4}, a^{-4}, a^{-4})$

 Tabla 7: Acción de \mathbb{Z}_8 en X_9 con signatura maximal.

Ésta información corrobora que existen 4 acciones topológicamente no equivalentes de \mathbb{Z}_8 en una superficie de Riemann de género 9 con signatura $(0; 8, 8, 4, 4, 4)$, resultado que se obtuvo en el ejemplo 2.6.3. Ahora queremos entender cómo están estos estratos en \mathcal{B}_9 , es decir qué estratos los contienen, se intersectan, etc.

Ahora, sabemos que a cada acción maximal θ_i con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ le corresponde un estrato no vacío $\mathcal{M}_9^{[s, \mathbb{Z}_8, w_i]}$ de dimensión 2. Luego las cuatro acciones topológicas no equivalentes $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ y θ_4 , se corresponden respectivamente con los estratos equisimétricos:

$$\mathcal{M}_9^{[(0; 8, 8, 4, 4, 4), \mathbb{Z}_8, w_1]}, \mathcal{M}_9^{[(0; 8, 8, 4, 4, 4), \mathbb{Z}_8, w_2]}, \mathcal{M}_9^{[(0; 8, 8, 4, 4, 4), \mathbb{Z}_8, w_3]} \text{ y } \mathcal{M}_9^{[(0; 8, 8, 4, 4, 4), \mathbb{Z}_8, w_4]}.$$

Considerando la clausura de los cuatro estratos de nuestro interés, sabemos que éstas pueden contener otros estratos, o éstas pueden estar contenidas en la intersección de otros estratos. A continuación mostramos dichas contenciones e intersecciones como resumen de los resultados obtenidos en SAGE con la rutina expuesta en el capítulo 6.

Para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ mostramos los estratos contenidos en $\overline{\mathcal{M}_9^{[(0; 8, 8, 4, 4, 4), \mathbb{Z}_8, w_i]}}$:

$$\overline{\mathcal{M}_9^{[(0; 8, 8, 4, 2), \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2, v_1 = (a, b^{-1}a, a^2, b^{-1}a^{-4})]}} \subset \overline{\mathcal{M}_9^{[(0; 8, 8, 4, 4, 4), \mathbb{Z}_8, w_1]}} ,$$

$$\overline{\mathcal{M}_9^{[(0; 8, 8, 4, 2), \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2, v_2 = (a, b^{-1}a, a^{-2}, b^{-1})]}} \subset \overline{\mathcal{M}_9^{[(0; 8, 8, 4, 4, 4), \mathbb{Z}_8, w_2]}} ,$$

$$\overline{\mathcal{M}_9^{[(0; 8, 8, 4, 2), \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2, v_3 = (a, ba, c, b^{-1})]}} \subset \overline{\mathcal{M}_9^{[(0; 8, 8, 4, 4, 4), \mathbb{Z}_8, w_3]}} ,$$

$$\overline{\mathcal{M}_9^{[(0; 8, 8, 4, 2), \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2, v_3 = (a, ba, c, b^{-1})]}} \subset \overline{\mathcal{M}_9^{[(0; 8, 8, 4, 4, 4), \mathbb{Z}_8, w_4]}} ,$$

$$\overline{\mathcal{M}_9^{[(0; 24, 8, 2), \mathbb{Z}_8 \times S_3, v_4 = (eb, a^{-1}b^{-1}d^{-1}, a^{-1}d^{-1}e^{-1})]}} \subset \overline{\mathcal{M}_9^{[(0; 8, 8, 4, 4, 4), \mathbb{Z}_8, w_1]}} ,$$

$$\overline{\mathcal{M}_9^{[(0; 24, 8, 2), \mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_2, v_5 = (eb, b^{-1}a^{-1}, a^{-1}e^{-1})]}} \subset \overline{\mathcal{M}_9^{[(0; 8, 8, 4, 4, 4), \mathbb{Z}_8, w_3]}} ,$$

$$\overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;24,8,2),\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_2, v_5=(eb, b^{-1}a^{-1}, a^{-1}e^{-1})]} \subset \overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8, w_4]} .$$

Por último, para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ los estratos $\overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8, w_i]}$ están contenidos en:

$$\overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8, w_1]} \subset \overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;4, \cdot, \cdot, 4), \mathbb{Z}_4, (a, \cdot, a)]} \cap \overline{\mathcal{M}}_9^{[(3;2, \cdot, 2), \mathbb{Z}_2, (a, \cdot, a)]} ,$$

$$\overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8, w_2]} \subset \overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;4, \cdot, \cdot, 4), \mathbb{Z}_4, (a, a, a, a, a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}, a^{-1})]} \cap \overline{\mathcal{M}}_9^{[(3;2, \cdot, 2), \mathbb{Z}_2, (a, \cdot, a)]} ,$$

$$\overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8, w_3]} \subset \overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;4, \cdot, \cdot, 4), \mathbb{Z}_4, (a, a, a, a, a, a, a^{-1}, a^{-1})]} \cap \overline{\mathcal{M}}_9^{[(3;2, \cdot, 2), \mathbb{Z}_2, (a, \cdot, a)]} ,$$

$$\overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8, w_4]} \subset \overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;4, \cdot, \cdot, 4), \mathbb{Z}_4, (a, a, a, a, a, a, a^{-1}, a^{-1})]} \cap \overline{\mathcal{M}}_9^{[(3;2, \cdot, 2), \mathbb{Z}_2, (a, \cdot, a)]} .$$

La siguiente figura representa los estratos contenidos en $\overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8, w_i]}$ para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

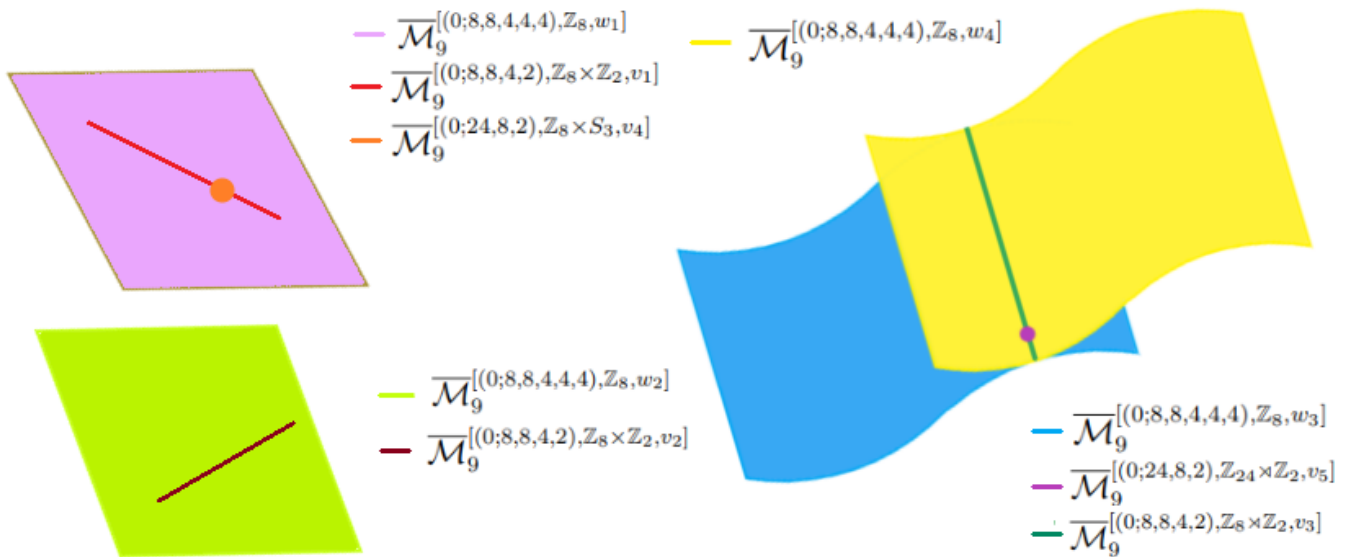


Figura 4.2: Representación de los estratos contenidos en $\overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8, w_i]}$.

Capítulo 5

Rutina SAGE para la Estratificación Equisimétrica de \mathcal{M}_4

Utilizamos la herramienta computacional SAGE para obtener la estratificación equisimétrica de \mathcal{M}_4 . La rutina a seguir para lograr la estratificación, las contenciones e intersecciones entre estratos se especificará en tres ejemplos concretos. Vale señalar que los algoritmos aquí usados consideran que el género de la superficie cociente es cero. Mostraremos todos los resultados obtenidos por el programa o rutina por medio de tabulaciones.

Los algoritmos aquí utilizados fueron programados por el prof. Antonio Behn, con nuestra colaboración en lo que a requerimientos se refiere.

Para comenzar, lo primero que debemos hacer es ingresar al programa The Sage Notebook versión 8.2 con nuestro usuario y contraseña.



Welcome!

Sage is a different approach to mathematics software.

The Sage Notebook

With the Sage Notebook anyone can create, collaborate on, and publish interactive worksheets. In a worksheet, one can write code using Sage, Python, and other software included in Sage.

General and Advanced Pure and Applied Mathematics

Use Sage for studying calculus, elementary to very advanced number theory, cryptography, commutative algebra, group theory, graph theory, numerical and exact linear algebra, and more.

Use an Open Source Alternative

By using Sage you help to support a viable open source alternative to Magma, Maple, Mathematica, and MATLAB. Sage includes many high-quality open source math packages.

Use Most Mathematics Software from Within Sage

Sage makes it easy for you to use most mathematics software together. Sage includes GAP, GP/PARI, Maxima, and Singular, and dozens of other open packages.

Use a Mainstream Programming Language

You work with Sage using the highly regarded scripting language Python. You can write programs that combine serious

Sign into the Sage Notebook v8.2

Username

Password

Sign in

[Sign up for a new Sage Notebook account](#)

[Browse published Sage worksheets
\(no login required\)](#)

[Forgot password](#)

Podemos crear diversos trabajos, los que quedarán guardados en la ventana principal.

[New Worksheet](#) [Upload](#) [Download All Active](#)

Archive Delete Stop Download

Current Folder: [Active](#) [Archived](#) [Trash](#)

<input type="checkbox"/>	Active Worksheets	Owner / Collaborators
<input type="checkbox"/>	$M^{([0;8,8,4,4,4],Z_8,w_4)}$, Genero 9	MiguelTello Share now
<input type="checkbox"/>	$M^{([0;8,8,4,4,4],Z_8,w_3)}$, Genero 9	MiguelTello Share now
<input type="checkbox"/>	$M^{([0;8,8,4,4,4],Z_8,w_2)}$, Genero 9	MiguelTello Share now
<input type="checkbox"/>	$M^{([0;8,8,4,4,4],Z_8,w_1)}$, Genero 9	MiguelTello Share now
<input type="checkbox"/>	Genero_9	MiguelTello Share now
<input type="checkbox"/>	¿contenidos en $M^{([0;8,8,4,4,4],Z_8,w_i)}$, Genero 9 ...	MiguelTello Share now
<input type="checkbox"/>	$M^{(12,4),3=(D_6),3, [6,3,2,2]}$, Genero 4	MiguelTello Share now
<input type="checkbox"/>	$M^{(16,7),1=(D_8),1}$, Genero 4	MiguelTello Share now
<input type="checkbox"/>	$M^{(4,2),3=(Z_2 \times Z_2),3}$, Genero 4	MiguelTello Share now
<input type="checkbox"/>	$M^{(4,1),1=Z_4, [4,4,4,4,2]}$ Genero 4	MiguelTello Share now
<input type="checkbox"/>	Copy of Genero_4	MiguelTello Share now
<input type="checkbox"/>	Miguel_2	admin / MiguelTello, anirojas Share now
<input type="checkbox"/>	Genero_4	MiguelTello Share now

Comenzamos la rutina identificando todos los grupos que actúan en superficies de Riemann de género 4, en el que la superficie cociente es de género $g = 0$. La rutina `grupos_que_actuan(4)`, tiene el listado de grupos actuando en género 4 (de hecho se puede hasta género 10).

Genero_4

last edited Aug 13, 2018, 11:48:11 PM by MiguelTello

File... Action... Data... sage Typeset Load 3-D Live Use java for 3-D

Print Worksheet

```
load("/home/antonio/poly.sage")
load("/home/antonio/poly2.sage")
load("/home/antonio/grupos_que_actuan.sage")
```

evaluate

```
ver 2018.03.16
ver 2018.06.27 (poly2)
```

```
grupos_que_actuan(4)

[[[2, 1], [[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]]],
 [[3, 1], [[3, 3, 3, 3, 3, 3]]],
 [[4, 1], [[4, 4, 4, 4, 2], [4, 4, 2, 2, 2, 2]]],
 [[4, 2], [[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]]],
 [[5, 1], [[5, 5, 5, 5]]],
 [[6, 1], [[3, 3, 3, 2, 2], [2, 2, 2, 2, 2, 2]]],
 [[6, 2], [[6, 6, 6, 2], [6, 6, 3, 3], [6, 3, 2, 2, 2], [3, 3, 3, 2, 2]]],
```

```

[[8, 1], [[8, 8, 2, 2]]],
[[8, 3], [[4, 2, 2, 2, 2]]],
[[8, 4], [[4, 4, 4, 2]]],
[[9, 1], [[9, 9, 9]]],
[[9, 2], [[3, 3, 3, 3]]],
[[10, 1], [[5, 5, 2, 2]]],
[[10, 2], [[10, 10, 5], [5, 5, 2, 2]]],
[[12, 2], [[12, 12, 3], [12, 6, 4]]],
[[12, 3], [[3, 3, 3, 2]]],
[[12, 4], [[6, 3, 2, 2], [2, 2, 2, 2, 2]]],
[[12, 5], [[6, 6, 6], [6, 3, 2, 2]]],
[[15, 1], [[15, 5, 3]]],
[[16, 1], [[16, 16, 2]]],
[[16, 7], [[8, 2, 2, 2]]],
[[16, 9], [[8, 4, 4]]],
[[18, 2], [[18, 9, 2]]],
[[18, 3], [[6, 6, 3], [3, 3, 2, 2]]],
[[18, 4], [[3, 3, 2, 2]]],
[[18, 5], [[6, 6, 3]]],
[[20, 1], [[5, 4, 4]]],
[[20, 3], [[5, 4, 4]]],
[[20, 4], [[5, 2, 2, 2]]],
[[20, 5], [[10, 10, 2]]],
[[24, 3], [[6, 4, 3]]],
[[24, 10], [[12, 6, 2]]],
[[24, 12], [[4, 2, 2, 2]]],
[[32, 19], [[16, 4, 2]]],
[[36, 9], [[4, 4, 3]]],
[[36, 10], [[6, 6, 2], [3, 2, 2, 2]]],
[[36, 11], [[6, 3, 3]]],
[[36, 12], [[6, 6, 2]]],
[[40, 8], [[10, 4, 2]]],
[[60, 5], [[5, 5, 2]]],
[[72, 40], [[6, 4, 2]]],
[[72, 42], [[12, 3, 2]]],
[[120, 34], [[5, 4, 2]]]

```

Cada grupo que actúa puede tener una o más firmas. Por ejemplo el grupo $(6, 1)$ actúa con dos firmas, $(0; 3, 3, 3, 2, 2)$ y $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$. Podemos caracterizar de forma abstracta los grupos $[[G], N^0]$ de la Small Group Data Base (Base de datos de grupos común a SAGE, MAGMA y GAP) por medio del comando: **G.structure_description()**.

```
G_1=SmallGroup(2,1)
G_1.structure_description()
```

```
'C2'
```

```
⊕ ⓘ
```

```
G_2=SmallGroup(3,1)
G_2.structure_description()
```

```
'C3'
```

```
⊕ ⓘ
```

```
G_3=SmallGroup(4,1)
G_3.structure_description()
```

```
'C4'
```

```
⊕ ⓘ
```

```
G_4=SmallGroup(4,2)
G_4.structure_description()
```

```
'C2 x C2'
```

ID	Grupo	Orden
(2, 1)	\mathbb{Z}_2	2
(3, 1)	\mathbb{Z}_3	3
(4, 1)	\mathbb{Z}_4	4
(4, 2)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	4
(5, 1)	\mathbb{Z}_5	5
(6, 1)	S_3	6
(6, 2)	\mathbb{Z}_6	6
(8, 1)	\mathbb{Z}_8	8
(8, 3)	D_4	8
(8, 4)	Q_8	8
(9, 1)	\mathbb{Z}_9	9
(9, 2)	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	9
(10, 1)	D_5	10
(10, 2)	\mathbb{Z}_{10}	10
(12, 2)	\mathbb{Z}_{12}	12
(12, 3)	A_4	12
(12, 4)	D_6	12
(12, 5)	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$	12
(15, 1)	\mathbb{Z}_{15}	15
(16, 1)	\mathbb{Z}_{16}	16
(16, 7)	D_8	16
(16, 9)	Q_{16}	16
(18, 2)	\mathbb{Z}_{18}	18
(18, 3)	$\mathbb{Z}_3 \times S_3$	18
(18, 4)	$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$	18
(18, 5)	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$	18
(20, 1)	$\mathbb{Z}_5 \rtimes \mathbb{Z}_4$	20
(20, 3)	$\mathbb{Z}_5 \rtimes \mathbb{Z}_4$	20
(20, 4)	D_{10}	20
(20, 5)	$\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_2$	20
(24, 3)	$SL(2, 3)$	24
(24, 10)	$\mathbb{Z}_3 \times D_4$	24
(24, 12)	S_4	24
(32, 19)	$QD32$	32
(36, 9)	$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_4$	36
(36, 10)	$S_3 \times S_3$	36
(36, 11)	$\mathbb{Z}_3 \times A_4$	36
(36, 12)	$\mathbb{Z}_6 \times S_3$	36
(40, 8)	$(\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	40
(60, 5)	A_5	60
(72, 40)	$(S_3 \times S_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$	72
(72, 42)	$\mathbb{Z}_3 \times S_4$	72
(120, 34)	S_5	120

Tabla 8: Resumen de la identificación de los grupos que actúan en género 4.

Las firmas de grupos que actúan en superficies de Riemann de género 4 con $g = 0$ son:

$ G $	Signatura	$ G $	Signatura	$ G $	Signatura
2	(0; 2, .10., 2)	3	(0; 3, .6., 3)	4	(0; 4, 4, 4, 4, 2)
4	(0; 4, 4, 2, 2, 2, 2)	4	(0; 2, .7., 2)	5	(0; 5, 5, 5, 5)
6	(0; 3, 3, 3, 2, 2)	6	(0; 2, .6., 2)	6	(0; 6, 6, 6, 2)
6	(0; 6, 6, 3, 3)	6	(0; 6, 3, 2, 2, 2)	6	(0; 3, 3, 3, 2, 2)
8	(0; 8, 8, 2, 2)	8	(0; 4, 2, 2, 2, 2)	8	(0; 4, 4, 4, 2)
9	(0; 9, 9, 9)	9	(0; 3, 3, 3, 3)	10	(0; 5, 5, 2, 2)
10	(0; 10, 10, 5)	12	(0; 12, 12, 3)	12	(0; 12, 6, 4)
12	(0; 3, 3, 3, 2)	12	(0; 6, 3, 2, 2)	12	(0; 2, .5., 2)
12	(0; 6, 6, 6)	15	(0; 15, 5, 3)	16	(0; 16, 16, 2)
16	(0; 8, 2, 2, 2)	16	(0; 8, 4, 4)	18	(0; 18, 9, 2)
18	(0; 6, 6, 3)	18	(0; 3, 3, 2, 2)	20	(0; 5, 4, 4)
20	(0; 5, 2, 2, 2)	20	(0; 10, 10, 2)	24	(0; 6, 4, 3)
24	(0; 12, 6, 2)	24	(0; 4, 2, 2, 2)	32	(0; 16, 4, 2)
36	(0; 4, 4, 3)	36	(0; 6, 6, 2)	36	(0; 3, 2, 2, 2)
36	(0; 6, 3, 3)	40	(0; 10, 4, 2)	60	(0; 5, 5, 2)
72	(0; 6, 4, 2)	72	(0; 12, 3, 2)	120	(0; 5, 4, 2)

Tabla 9: Firmas de los grupos que actúan en X_4 con $g = 0$.

Observación 11. Las firmas ennegrecidas son maximales [27]. Más adelante, cuando calculemos vectores generadores inducidos, aparecerán más firmas maximales asociadas a acciones de grupo sobre superficies de Riemann de género 4, en donde el género de la superficie cociente es distinto de 0. Éstas últimas las incluiremos en nuestros resultados.

Hasta el momento, conocemos los grupos que actúan en género 4 y las firmas asociadas. Ahora, podemos describir los generadores (escritos como permutaciones) de cada grupo y encontrar los vectores generadores (representantes de clases), asociados a clases de equivalencia topológicas de acciones de grupo por automorfismos holomorfos. Para ello, usaremos `print G_1` (o simplemente `G_1`) y `print find_generator_representatives_as_words(G_1,[2,2,2,2,2,2,2,2,2,2])`.

```
G_1=SmallGroup(2,1)
G_1.structure_description()

'C2'

print G_1

Permutation Group with generators [(1,2)]

Sea  $a = a^{-1} = (1, 2)$ .

print find_generator_representatives_as_words(G_1,[2,2,2,2,2,2,2,2,2,2])

[[a^-1, a^-1, a^-1, a^-1, a^-1, a^-1, a^-1, a^-1, a^-1, a^-1]]

Vector generador de  $G_1$  escrito en términos del generador  $a$ .
```

En este ejemplo la acción correspondiente tiene asociado sólo una clase de vectores generadores, representado por (a, \cdot, \cdot, a) .

Sin embargo, hay casos en que puede haber más de una clase de vectores generadores, o equivalentemente, mas acciones topológicas no equivalentes.

```
G_2=SmallGroup(3,1)
G_2.structure_description()

'C3'
+ ⓘ
G_2

Permutation Group with generators [(1,2,3)]
+ ⓘ
print find_generator_representatives_as_words(G_2,[3,3,3,3,3,3])

[[a, a, a, a, a, a], [a, a, a, a^-1, a^-1, a^-1]]
```

Con esta información, obtenemos las acciones maximales, módulo equivalencia topológica:

Grupo	Acción	Vector generador
\mathbb{Z}_2	$\theta : \Delta(0; 2, .^{10}, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$	$v_1 = (a^{-1}, .^{10}, a^{-1}) = (a, .^{10}, a)$
\mathbb{Z}_3	$\theta_1 : \Delta(0; 3, .^6, 3) \rightarrow \mathbb{Z}_3$ $\theta_2 : \Delta(0; 3, .^6, 3) \rightarrow \mathbb{Z}_3$	$w_1 = (a, .^6, a)$ $w_2 = (a, a, a, a^{-1}, a^{-1}, a^{-1})$
\mathbb{Z}_4	$\theta_1 : \Delta(0; 4, 4, 4, 4, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_4$ $\theta_2 : \Delta(0; 4, 4, 2, 2, 2, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_4$	$u_1 = (a, a, a, a^{-1}, a^{-2})$ $u_2 = (a, a^{-1}, a^{-2}, a^{-2}, a^{-2}, a^{-2})$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\theta_1 : \Delta(0; 2, .^7, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ $\theta_2 : \Delta(0; 2, .^7, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$t_1 = (a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}, b^{-1}, a^{-1}b^{-1})$ $t_2 = (a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}, b^{-1}, b^{-1}, b^{-1}, a^{-1}b^{-1})$
S_3	$\theta_1 : \Delta(0; 3, 3, 3, 2, 2) \rightarrow S_3$ $\theta_2 : \Delta(0; 2, .^6, 2) \rightarrow S_3$	$\eta_1 = (b, b, b, a^{-1}, a^{-1})$ $\eta_2 = (a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}b^{-1}, a^{-1}b^{-1})$
\mathbb{Z}_6	$\theta_1 : \Delta(0; 6, 6, 6, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_6$ $\theta_2 : \Delta(0; 6, 3, 2, 2, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_6$ $\theta_3 : \Delta(0; 3, 3, 3, 2, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_6$	$\kappa_1 = (ba, ba, ba, b^{-1})$ $\kappa_2 = (ba, a^{-1}, b^{-1}, b^{-1}, b^{-1})$ $\kappa_3 = (a, a, a, b^{-1}, b^{-1})$
D_4	$\theta_1 : \Delta(0; 4, 2, 2, 2, 2) \rightarrow D_4$ $\theta_2 : \Delta(0; 4, 2, 2, 2, 2) \rightarrow D_4$	$\mu_1 = (b^{-1}a^{-1}, b^{-1}, b^{-1}, b^{-1}, a^{-1}c^{-1})$ $\mu_2 = (b^{-1}a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, c^{-1}, a^{-1}c^{-1})$
Q_8	$\theta : \Delta(0; 4, 4, 4, 2) \rightarrow Q_8$	$\nu = (b, a, b^{-1}a^{-1}, c^{-1})$
\mathbb{Z}_{12}	$\theta : \Delta(0; 12, 6, 4) \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$	$\xi = (ba, b^{-1}a^{-2}, a)$
A_4	$\theta : \Delta(0; 3, 3, 3, 2) \rightarrow A_4$	$\varpi = (a, a, ca, b^{-1}c^{-1})$
D_6	$\theta_1 : \Delta(0; 6, 3, 2, 2) \rightarrow D_6$ $\theta_2 : \Delta(0; 2, 2, 2, 2, 2) \rightarrow D_6$	$\rho_1 = (cb, c, a^{-1}, b^{-1}c^{-1}a^{-1})$ $\rho_2 = (b^{-1}, a^{-1}, a^{-1}, c^{-1}a^{-1}, b^{-1}c^{-1}a^{-1})$
$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$	$\theta : \Delta(0; 6, 3, 2, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$	$\varrho = (b^{-1}a, a^{-1}, c^{-1}, c^{-1}b^{-1})$
D_8	$\theta : \Delta(0; 8, 2, 2, 2) \rightarrow D_8$	$\varsigma = (a^{-1}b^{-1}, d^{-1}, b^{-1}, a^{-1}d^{-1})$
D_{10}	$\theta : \Delta(0; 5, 2, 2, 2) \rightarrow D_{10}$	$\omega = (c, b^{-1}, a^{-1}, a^{-1}b^{-1}c^{-1})$
$SL(2, 3)$	$\theta : \Delta(0; 6, 4, 3) \rightarrow SL(2, 3)$	$\ell = (ad^{-1}, c^{-1}b^{-1}, a^{-1}c^{-1})$
S_4	$\theta : \Delta(0; 4, 2, 2, 2) \rightarrow S_4$	$\wp = (a^{-1}c^{-1}, a^{-1}, b^{-1}a^{-1}, b^{-1}a^{-1}d^{-1})$
$QD32$	$\theta : \Delta(0; 16, 4, 2) \rightarrow QD32$	$\vartheta = (ab, a, a^{-1}b^{-1}a^{-1})$
$S_3 \times S_3$	$\theta : \Delta(0; 3, 2, 2, 2) \rightarrow S_3 \times S_3$	$\zeta = (dc, b^{-1}, a^{-1}, a^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1})$
$(\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	$\theta : \Delta(0; 10, 4, 2) \rightarrow (\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	$\delta = (db^{-1}, a^{-1}b^{-1}, a^{-1}c^{-1}d^{-1})$
$(S_3 \times S_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$	$\theta : \Delta(0; 6, 4, 2) \rightarrow (S_3 \times S_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$	$o = (ea, b^{-1}d^{-1}a^{-1}, b^{-1}c^{-1})$
$\mathbb{Z}_3 \times S_4$	$\theta : \Delta(0; 12, 3, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_3 \times S_4$	$\lambda = (dba, b^{-1}c^{-1}, a^{-1}c^{-1}, d^{-1})$
S_5	$\theta : \Delta(0; 5, 4, 2) \rightarrow S_5$	$\tau = (b, b^{-2}ab, b^{-1}a^{-1}b)$

 Tabla 10: Acciones de signatura maximal y vector generador asociado cuando $\mathfrak{g} = 0$.

Sabemos que cada acción maximal θ se corresponde con un estrato no vacío $\mathcal{M}_4^{[s,G,\theta]}$ (o $\mathcal{M}_4^{[s,G,v]}$ si queremos citar el vector generador v asociado a la acción θ). Luego tenemos la siguiente estratificación del *branch locus* \mathcal{B}_4 :

Estrato	Dimensión	Estrato	Dimensión
$\mathcal{M}_4^{[(0;2,10,2),\mathbb{Z}_2,v_1]}$	7	$\mathcal{M}_4^{[(0;3,6,3),\mathbb{Z}_3,w_1]}$	3
$\mathcal{M}_4^{[(0;3,6,3),\mathbb{Z}_3,w_2]}$	3	$\mathcal{M}_4^{[(0;4,4,4,2),\mathbb{Z}_4,u_1]}$	2
$\mathcal{M}_4^{[(0;4,4,2,2,2),\mathbb{Z}_4,u_2]}$	3	$\mathcal{M}_4^{[(0;2,7,2),\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,t_1]}$	4
$\mathcal{M}_4^{[(0;2,7,2),\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,t_2]}$	4	$\mathcal{M}_4^{[(0;3,3,3,2,2),S_3,\eta_1]}$	2
$\mathcal{M}_4^{[(0;2,6,2),S_3,\eta_2]}$	3	$\mathcal{M}_4^{[(0;6,6,6,2),\mathbb{Z}_6,\kappa_1]}$	1
$\mathcal{M}_4^{[(0;6,3,2,2,2),\mathbb{Z}_6,\kappa_2]}$	2	$\mathcal{M}_4^{[(0;3,3,3,2,2),\mathbb{Z}_6,\kappa_3]}$	2
$\mathcal{M}_4^{[(0;4,2,2,2,2),D_4,\mu_1]}$	2	$\mathcal{M}_4^{[(0;4,2,2,2,2),D_4,\mu_2]}$	2
$\mathcal{M}_4^{[(0;4,4,4,2),Q_8,\nu]}$	1	$\mathcal{M}_4^{[(0;12,6,4),\mathbb{Z}_{12},\xi]}$	0
$\mathcal{M}_4^{[(0;3,3,3,2),A_4,\varpi]}$	1	$\mathcal{M}_4^{[(0;6,3,2),D_6,\rho_1]}$	1
$\mathcal{M}_4^{[(0;2,2,2,2,2),D_6,\rho_2]}$	2	$\mathcal{M}_4^{[(0;6,3,2,2),\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2,\varrho]}$	1
$\mathcal{M}_4^{[(0;8,2,2,2),D_8,\varsigma]}$	1	$\mathcal{M}_4^{[(0;5,2,2,2),D_{10},\omega]}$	1
$\mathcal{M}_4^{[(0;6,4,3),SL(2,3),\ell]}$	0	$\mathcal{M}_4^{[(0;4,2,2,2),S_4,\phi]}$	1
$\mathcal{M}_4^{[(0;16,4,2),QD32,\theta]}$	0	$\mathcal{M}_4^{[(0;3,2,2,2),S_3 \times S_3,\zeta]}$	1
$\mathcal{M}_4^{[(0;10,4,2),(\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2,\delta]}$	0	$\mathcal{M}_4^{[(0;6,4,2), (S_3 \times S_3) \times \mathbb{Z}_2,o]}$	0
$\mathcal{M}_4^{[(0;12,3,2),\mathbb{Z}_3 \times S_4,\lambda]}$	0	$\mathcal{M}_4^{[(0;5,4,2),S_5,\tau]}$	0

 Tabla 11: Estratificación Equisimétrica de \mathcal{M}_4 considerando $\mathfrak{g} = 0$.

Estudiemos contenciones e intersecciones de las clausuras de estos estratos. Enseñaremos la rutina en tres ejemplos concretos. Como los grupos \mathbb{Z}_2 y \mathbb{Z}_3 no tienen subgrupos no triviales, partimos el análisis con la acción de \mathbb{Z}_4 , el cual será nuestro primer ejemplo. \mathbb{Z}_4 corresponde al **SmallGroup(4,1)** el cual definimos en el programa como `G_3`. La acción de \mathbb{Z}_4 con signatura $(0; 4, 4, 4, 4, 2)$ tiene asociado sólo un vector generador, $l[0]=u_1$, el cual podemos visualizar como palabra o por medio de permutaciones, bajo los siguientes comandos:

```
print find_generator_representatives_as_words(G_3,[4,4,4,4,2])
```

```
l=find_generator_representatives(G_3,[4,4,4,4,2])
```

```
l[0]
```

```
G_3=SmallGroup(4,1)
print find_generator_representatives_as_words(G_3,[4,4,4,4,2])
```

```
[[a, a, a, a^-1, a^-2]]
```

```
⊕
```

```
l=find_generator_representatives(G_3,[4,4,4,4,2])
```

```
l[0]
```

```
[(1,2,3,4), (1,2,3,4), (1,2,3,4), (1,4,3,2), (1,3)(2,4)]
```

Estudiaremos subgrupos H de $G_3 = \mathbb{Z}_4$ tales que la acción de G_3 restringida a H sea maximal. En tal caso, diremos que G_3 induce una acción de H maximal. Nos preguntamos ahora, ¿ \mathbb{Z}_4 contiene subgrupos isomorfos a \mathbb{Z}_2 actuando de forma maximal?

Para responder esto, primero contemos cuántos subgrupos isomorfos a \mathbb{Z}_2 hay como clases de conjugación en \mathbb{Z}_4 . La instrucción es la siguiente:

```
L_1=[k for k in G_3.conjugacy_classes_subgroups() if k.id()==[2,1]]
len(L_1)
```

1

luego existe sólo una clase de conjugación, identificada como $L_1[0]$. Con el siguiente comando:

```
intermediate_covers(l[0],G_3,L_1[0],0)
```

obtendremos información detallada de la acción inducida asociada.

```
intermediate_covers(l[0],G_3,L_1[0],0)
```

```
genero de W= 4
La signatura de W/H es:
genero de W/H: 1
[[2, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[0]
[[2, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[1]
[[2, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[2]
[[2, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[3]
[[2, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[4]

Para el cubrimiento W/H-->W/G la estructura de ciclos es:
l[0] --> [2]
l[1] --> [2]
l[2] --> [2]
l[3] --> [2]
l[4] --> [1, 1]
El indice de H en G es: 2
Core(H)= [2, 1]
```

La acción inducida resulta ser $\theta : \Delta(1; 2, \dots, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, la cual es maximal según Singerman [27].

Observación 12. Note que aquí nuestra rutina detecta una acción maximal con cociente total de género 1, dicha acción no está incluida en la tabla 10 de aquellas de género 0 que nos entrega nuestro algoritmo. Con la programación usada en este trabajo no podemos determinar cuántos vectores generadores tiene asociados dicha acción, pero sí podemos describir el vector generador inducido y el estrato correspondiente.

Para conocer cuál es el vector generador inducido (v en nuestra rutina), utilizamos los comandos:

```
v,w,g,s=induced_generating_vector(G_3,l[0],L_1[0])
```

```
v,w,g,s
```

```
v,w,g,s=induced_generating_vector(G_3,1[0],L_1[0])
v,w,g,s
```

```
([(1,3)(2,4), (1,3)(2,4), (1,3)(2,4), (1,3)(2,4), (1,3)(2,4),
(1,3)(2,4)],
[e, a*b^2*a^-1, a*c^2*a^-1, a*d^2*a^-1, a*e*a^-1, a^2],
1,
[2, 2, 2, 2, 2, 2]])
```

el cual nos entrega el vector inducido escrito en forma permutacional y también escrito como palabra, además nos entrega el género g de la superficie cociente y la signatura s .

Podemos describir de mejor manera el vector generador inducido, procediendo de la siguiente manera:

Cada coordenada del vector es un elemento del subgrupo $L_1[0]$, éste se puede describir con el comando $L_1[0]$

```
L_1[0]
Subgroup of (Permutation Group with generators [(1,2,3,4)]) generated by
[(1,3)(2,4)]
```

Podemos ver que $L_1[0]$ es generado por el elemento $(1,3)(2,4) = L_1[0].0$. Entonces si queremos describir el vector generador inducido, sólo en términos de este generador, utilizamos

```
[as_word(k,L_1[0], gens=[L_1[0].0]) for k in v]
```

```
L_1[0]
Subgroup of (Permutation Group with generators [(1,2,3,4)]) generated by
[(1,3)(2,4)]
L_1[0].0
(1,3)(2,4)
v,w,g,s=induced_generating_vector(G_3,1[0],L_1[0])
v,w,g,s
L_1[0]
[as_word(k,L_1[0],gens=[L_1[0].0]) for k in v]
[a^-1, a^-1, a^-1, a^-1, a^-1, a^-1]
```

Luego el vector generador inducido es $v_2 = (a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}) = (a, a, a, a, a, a)$, por lo tanto se obtiene que

$$\overline{\mathcal{M}_4^{[(0;4,4,4,4,2),\mathbb{Z}_4,u_1]}} \subset \overline{\mathcal{M}_4^{[(1;2,\dots,2),\mathbb{Z}_2,v_2]}}$$

Ahora, nuestro segundo ejemplo es estudiar subgrupos de $G_5 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ con acción inducida maximal. Procedemos de manera análoga a la anterior:

```
G_5=SmallGroup(4,2)
print find_generator_representatives_as_words(G_5,[2,2,2,2,2,2,2])

[[a^-1, a^-1, a^-1, a^-1, a^-1, b^-1, a^-1*b^-1], [a^-1, a^-1, a^-1,
b^-1, b^-1, b^-1, a^-1*b^-1]]
```

Sabemos que contamos con dos vectores generadores $l[0]=t_1$ y $l[1]=t_2$. Luego, procedemos a analizar los subgrupos de G_5 con acción inducida maximal.

```
L_1=[k for k in G_5.conjugacy_classes_subgroups() if k.id()==[2,1]]
len(L_1)
```

3

En esta oportunidad, analizaremos el detalle de 6 acciones, tres asociadas a $l[0]$ y tres asociadas a $l[1]$. En efecto,

i) `intermediate_covers(l[0],G_5, L_1[0],0)`

```
intermediate_covers(l[0],G_5,L_1[0],0)

genero de W= 4
La signatura de W/H es:
genero de W/H: 2
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[0]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[1]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[2]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[3]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[4]
[[2, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[5]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[6]

Para el cubrimiento W/H-->W/G la estructura de ciclos es:
l[0] --> [2]
l[1] --> [2]
l[2] --> [2]
l[3] --> [2]
l[4] --> [2]
l[5] --> [1, 1]
l[6] --> [2]
El indice de H en G es: 2
Core(H)= [2, 1]
```

La acción inducida resulta ser $\theta : \Delta(2; 2, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, la cual es maximal según Singerman [27].

Para conocer cuál es el vector generador inducido, procedemos de manera análoga al ejemplo anterior, utilizamos los comandos:

```
v,w,g,s=induced_generating_vector(G_5,l[0],L_1[0])
v,w,g,s
L_1[0]
[as_word(k,L_1[0], gens=[L_1[0].0]) for k in v]
```

```
v,w,g,s=induced_generating_vector(G_5,l[0],L_1[0])
v,w,g,s
L_1[0]
[as_word(k,L_1[0],gens=[L_1[0].0]) for k in v]
[a^-1, a^-1]
```

El vector generador inducido es $v_3 = (a^{-1}, a^{-1}) = (a, a)$, por lo tanto se obtiene que

$$\overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,7,2),\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, t_1]} \subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(2;2,2),\mathbb{Z}_2, v_3]}.$$

ii) `intermediate_covers(l[0],G_5, L_1[1],0)`

```
intermediate_covers(l[0],G_5,L_1[1],0)
```

```
genero de W= 4
La signatura de W/H es:
genero de W/H: 0
[[2, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[0]
[[2, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[1]
[[2, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[2]
[[2, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[3]
[[2, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[4]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[5]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[6]
```

Para el cubrimiento $W/H \rightarrow W/G$ la estructura de ciclos es:

```
l[0] --> [1, 1]
l[1] --> [1, 1]
l[2] --> [1, 1]
l[3] --> [1, 1]
l[4] --> [1, 1]
l[5] --> [2]
l[6] --> [2]
El indice de H en G es: 2
Core(H)= [2, 1]
```


La acción inducida maximal es $\theta : \Delta(0; 2, \cdot^{10}, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ y entonces

$$\overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,\cdot^7,2),\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, t_1]} \subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,\cdot^{10},2),\mathbb{Z}_2, v_1]}.$$

iii) `intermediate_covers(l[0],G_5, L_1[2],0)`

```
intermediate_covers(l[0],G_5,L_1[2],0)
```

```
genero de W= 4
La signatura de W/H es:
genero de W/H: 2
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[0]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[1]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[2]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[3]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[4]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[5]
[[2, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[6]

Para el cubrimiento W/H-->W/G la estructura de ciclos es:
l[0] --> [2]
l[1] --> [2]
l[2] --> [2]
l[3] --> [2]
l[4] --> [2]
l[5] --> [2]
l[6] --> [1, 1]
El indice de H en G es: 2
Core(H)= [2, 1]
```

La acción inducida es $\theta : \Delta(2; 2, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, la cual es maximal. Busquemos el vector generador inducido, como antes:

```
v,w,g,s=induced_generating_vector(G_5,l[0],L_1[2])
v,w,g,s
L_1[2]
[as_word(k,L_1[2],gens=[L_1[2].0]) for k in v]
[a^-1, a^-1]
```

El vector generador inducido es $v_3 = (a, a)$, por lo tanto se repite la información

$$\overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,\cdot^7,2),\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, t_1]} \subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(2;2,2),\mathbb{Z}_2, v_3]}.$$

iv) `intermediate_covers(l[1],G_5, L_1[0],0)`

```
intermediate_covers(l[1],G_5,L_1[0],0)
```

```
genero de W= 4
La signatura de W/H es:
genero de W/H: 1
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[0]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[1]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[2]
[[2, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[3]
[[2, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[4]
[[2, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[5]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[6]

Para el cubrimiento W/H-->W/G la estructura de ciclos es:
l[0] --> [2]
l[1] --> [2]
l[2] --> [2]
l[3] --> [1, 1]
l[4] --> [1, 1]
l[5] --> [1, 1]
l[6] --> [2]
El indice de H en G es: 2
Core(H)= [2, 1]
```

La acción inducida es $\theta : \Delta(1; 2, \dots, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ la cual es maximal. El vector generador inducido se obtiene con la rutina:

```
v,w,g,s=induced_generating_vector(G_5,l[1],L_1[0])
v,w,g,s
L_1[0]
[as_word(k,L_1[0],gens=[L_1[0].0]) for k in v]
[a^-1, a^-1, a^-1, a^-1, a^-1, a^-1]
```

el cual es v_2 , por lo tanto, se obtiene que

$$\overline{\mathcal{M}_4^{[(0;2,7,2),\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,t_2]}} \subset \overline{\mathcal{M}_4^{[(1;2,6,2),\mathbb{Z}_2,v_2]}}.$$

v) `intermediate_covers(l[1],G_5, L_1[1],0)`

```
intermediate_covers(l[1],G_5,L_1[1],0)
```

```
genero de W= 4
La signatura de W/H es:
genero de W/H: 1
[[2, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[0]
[[2, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[1]
[[2, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[2]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[3]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[4]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[5]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[6]

Para el cubrimiento W/H-->W/G la estructura de ciclos es:
l[0] --> [1, 1]
l[1] --> [1, 1]
l[2] --> [1, 1]
l[3] --> [2]
l[4] --> [2]
l[5] --> [2]
l[6] --> [2]
El indice de H en G es: 2
Core(H)= [2, 1]
```

La acción inducida es $\theta : \Delta(1; 2, \dots, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$. El vector generador inducido lo encontramos con:

```
v,w,g,s=induced_generating_vector(G_5,l[1],L_1[1])
v,w,g,s
L_1[1]
[as_word(k,L_1[1],gens=[L_1[1].0]) for k in v]
[a^-1, a^-1, a^-1, a^-1, a^-1, a^-1]
```

el cual es v_2 también, entonces nuevamente se tiene que $\overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;2,\dots,2),\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,t_2]} \subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(1;2,\dots,2),\mathbb{Z}_2,v_2]}$.

vi) `intermediate_covers(l[1],G_5, L_1[2],0)`

```
intermediate_covers(l[1],G_5,L_1[2],0)

genero de W= 4
La signatura de W/H es:
genero de W/H: 2
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[0]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[1]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[2]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[3]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[4]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[5]
[[2, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[6]

Para el cubrimiento W/H-->W/G la estructura de ciclos es:
l[0] --> [2]
l[1] --> [2]
l[2] --> [2]
l[3] --> [2]
l[4] --> [2]
l[5] --> [2]
l[6] --> [1, 1]
El indice de H en G es: 2
Core(H)= [2, 1]
```

La acción inducida es $\theta : \Delta(2; 2, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ y el vector generador inducido es v_3 , como muestra la siguiente rutina:

```
v,w,g,s=induced_generating_vector(G_5,l[1],L_1[2])
v,w,g,s
L_1[2]
[as_word(k,L_1[2],gens=[L_1[2].0]) for k in v]
[a^-1, a^-1]
```

Así

$$\overline{\mathcal{M}_4^{[(0;2,\overline{7},2),\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,t_2]}} \subset \overline{\mathcal{M}_4^{[(2;2,2),\mathbb{Z}_2,v_3]}}.$$

Con toda esta información podemos concluir que

$$\overline{\mathcal{M}_4^{[(0;2,\overline{7},2),\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,t_1]}} \subset \overline{\mathcal{M}_4^{[(2;2,2),\mathbb{Z}_2,v_3]}} \cap \overline{\mathcal{M}_4^{[(0;2,\overline{10},2),\mathbb{Z}_2,v_1]}}$$

y

$$\overline{\mathcal{M}_4^{[(0;2,\overline{7},2),\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,t_2]}} \subset \overline{\mathcal{M}_4^{[(1;2,\overline{6},2),\mathbb{Z}_2,v_2]}} \cap \overline{\mathcal{M}_4^{[(2;2,2),\mathbb{Z}_2,v_3]}}.$$

Nuestro tercer ejemplo, consiste en analizar la acción de D_6 con signatura $(0; 6, 3, 2, 2)$. En nuestro trabajo lo designamos G_{24} y recordemos que se identifica como $(12, 4)$. Éste grupo de automorfismos tiene un orden un poco más grande, por lo que podemos encontrar más subgrupos que en los ejemplos anteriores para estudiar las contenciones y estratos asociados. Entonces, lo primero es verificar la cantidad de vectores generadores asociados a la signatura, esto con

```
l=find_generator_representatives(G_24,[6,3,2,2])
len(l)
```

```
G_24=SmallGroup(12,4)
l=find_generator_representatives(G_24,[6,3,2,2])
len(l)
```

1

Sólo hay un vector generador para la acción de D_6 con signatura $(0; 6, 3, 2, 2)$, que escrito como palabra es

```
print find_generator_representatives_as_words(G_24,[6,3,2,2])
[[c*b, c, a^-1, b^-1*c^-1*a^-1]]
```

Procedemos a estudiar los subgrupos con acción inducida maximal. Primero vemos si existen \mathbb{Z}_6 como clases de conjugación de D_6 .

```
L_1=[k for k in G_24.conjugacy_classes_subgroups() if k.id()==[6,2]]
len(L_1)
```

1

Tenemos sólo una clase, $L_1[0]$, y los cubrimientos intermedios nos originan la siguiente información:

```
intermediate_covers(1[0],G_24,L_1[0],0)
```

```

genero de W= 4
La signatura de W/H es:
genero de W/H: 0
[[6, 2]] que estan sobre el punto marcado por 1[0]
[[3, 2]] que estan sobre el punto marcado por 1[1]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por 1[2]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por 1[3]

Para el cubrimiento W/H-->W/G la estructura de ciclos es:
1[0] --> [1, 1]
1[1] --> [1, 1]
1[2] --> [2]
1[3] --> [2]
El indice de H en G es: 2
Core(H)= [6, 2]

```

Donde la acción inducida tiene signatura $(0; 6, 6, 3, 3)$, la cual es no maximal según la lista de Singerman [27].

Para el subgrupo S_3 :

```
L_2=[k for k in G_24.conjugacy_classes_subgroups() if k.id()==[6,1]]
len(L_2)
```

2

Vemos que existen dos clases de conjugación. La acción asociada a la primera clase $L_2[0]$, se describe en el siguiente cuadro

```
intermediate_covers(1[0],G_24,L_2[0],0)
```

```

genero de W= 4
La signatura de W/H es:
genero de W/H: 0
[[3, 1]] que estan sobre el punto marcado por 1[0]
[[3, 2]] que estan sobre el punto marcado por 1[1]
[[2, 2]] que estan sobre el punto marcado por 1[2]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por 1[3]

Para el cubrimiento W/H-->W/G la estructura de ciclos es:
1[0] --> [2]
1[1] --> [1, 1]
1[2] --> [1, 1]
1[3] --> [2]
El indice de H en G es: 2
Core(H)= [6, 1]

```

La acción inducida es $\theta : \Delta(0; 3, 3, 3, 2, 2) \rightarrow S_3$, la cual es maximal según Singerman [27], y se tiene que

$$\overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;6,3,2,2),D_6,\rho_1]} \subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;3,3,3,2,2),S_3,\eta_1]}.$$

Para la segunda clase de conjugación L_2[1], tenemos

```
intermediate_covers(l[0],G_24,L_2[1],0)
```

```
genero de W= 4
La signatura de W/H es:
genero de W/H: 0
[[3, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[0]
[[3, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[1]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[2]
[[2, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[3]

Para el cubrimiento W/H-->W/G la estructura de ciclos es:
l[0] --> [2]
l[1] --> [1, 1]
l[2] --> [2]
l[3] --> [1, 1]
El indice de H en G es: 2
Core(H)= [6, 1]
```

la misma información anterior, es decir,

$$\overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;6,3,2,2),D_6,\rho_1]} \subset \overline{\mathcal{M}}_4^{[(0;3,3,3,2,2),S_3,\eta_1]}.$$

Veamos ahora si existen $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ como clases de conjugación de D_6 .

```
L_3=[k for k in G_24.conjugacy_classes_subgroups() if k.id()==[4,2]]
len(L_3)
```

1

Tenemos sólo una clase, L_3[0], y los cubrimientos intermedios nos originan la siguiente información:

```

intermediate_covers(l[0],G_24,L_3[0],0)

genero de W= 4
La signatura de W/H es:
genero de W/H: 1
[[2, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[0]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[1]
[[1, 1], [2, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[2]
[[1, 1], [2, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[3]

Para el cubrimiento W/H-->W/G la estructura de ciclos es:
l[0] --> [3]
l[1] --> [3]
l[2] --> [2, 1]
l[3] --> [2, 1]
El indice de H en G es: 3
Core(H)= [2, 1]

```

Donde la acción inducida tiene signatura $(1; 2, 2, 2)$, la cual es maximal según Singerman [27] y tiene género $g = 1$. Calculemos el vector generador inducido con la rutina usada en los ejemplos anteriores:

```

v,w,g,s=induced_generating_vector(G_24,l[0],L_3[0])
v,w,g,s
L_3[0]
[as_word(k,L_3[0],gens=[L_3[0].0,L_3[0].1]) for k in v]
[a^-1*b^-1, b^-1, a^-1]

```

El vector generador inducido es $t_3 = (a^{-1}b^{-1}, b^{-1}, a^{-1})$ y por lo tanto,

$$\overline{\mathcal{M}_4^{[(0;6,3,2,2), D_6, \rho_1]}} \subset \overline{\mathcal{M}_4^{[(1;2,2,2), \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, t_3]}}$$

\mathbb{Z}_4 no es clase de conjugación de D_6 .

```

L_4=[k for k in G_24.conjugacy_classes_subgroups() if k.id()==[4,1]]
len(L_4)

0

```

Veamos cuántos \mathbb{Z}_3 son clases de conjugación en D_6

```

L_5=[k for k in G_24.conjugacy_classes_subgroups() if k.id()==[3,1]]
len(L_5)

1

```


Tenemos sólo una clase, $L_5[0]$. Los cubrimientos intermedios nos entregan la siguiente información:

```

intermediate_covers(l[0],G_24,L_5[0],0)

genero de W= 4
La signatura de W/H es:
genero de W/H: 0
[[3, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[0]
[[3, 4]] que estan sobre el punto marcado por l[1]
[[1, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[2]
[[1, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[3]

Para el cubrimiento W/H-->W/G la estructura de ciclos es:
l[0] --> [2, 2]
l[1] --> [1, 1, 1, 1]
l[2] --> [2, 2]
l[3] --> [2, 2]
El indice de H en G es: 4
Core(H)= [3, 1]

```

Notamos que la acción inducida tiene signatura maximal $(0; 3, .^6., 3)$. Recordemos que hay dos acciones topológicas de \mathbb{Z}_3 en una superficie de género 4 con la signatura $(0; 3, .^6., 3)$, éstas son descritas por los vectores generadores w_1 y w_2 . Para conocer cuál es el vector generador inducido en este caso, utilizamos la rutina:

```

v,w,g,s=induced_generating_vector(G_24,l[0],L_5[0])
v,w,g,s
L_5[0]
[as_word(k,L_5[0],gens=[L_5[0].0)) for k in v]

[a^-1, a, a, a^-1, a, a^-1]

```

Luego el vector generador inducido corresponde a w_2 , por lo tanto se obtiene que

$$\overline{\mathcal{M}_4^{(0;6,3,2,2),D_6,\rho_1}} \subset \overline{\mathcal{M}_4^{(0;3,3,3,3,3),\mathbb{Z}_3,w_2}}.$$

Por último analicemos si existen \mathbb{Z}_2 como clases de conjugación de D_6 .

```

L_6=[k for k in G_24.conjugacy_classes_subgroups() if k.id()==[2,1]]
len(L_6)

```

evaluate

3

Existen 3 clases, $L_6[0]$, $L_6[1]$ y $L_6[2]$, y sus cubrimientos intermedios son:

```
intermediate_covers(l[0],G_24,L_6[0],0)
```

```
genero de W= 4
La signatura de W/H es:
genero de W/H: 2
[[2, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[0]
[[1, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[1]
[[1, 3]] que estan sobre el punto marcado por l[2]
[[1, 3]] que estan sobre el punto marcado por l[3]

Para el cubrimiento W/H-->W/G la estructura de ciclos es:
l[0] --> [3, 3]
l[1] --> [3, 3]
l[2] --> [2, 2, 2]
l[3] --> [2, 2, 2]
El indice de H en G es: 6
Core(H)= [2, 1]
```

```
intermediate_covers(l[0],G_24,L_6[1],0)
```

```
genero de W= 4
La signatura de W/H es:
genero de W/H: 2
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[0]
[[1, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[1]
[[1, 2], [2, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[2]
[[1, 3]] que estan sobre el punto marcado por l[3]

Para el cubrimiento W/H-->W/G la estructura de ciclos es:
l[0] --> [6]
l[1] --> [3, 3]
l[2] --> [2, 2, 1, 1]
l[3] --> [2, 2, 2]
El indice de H en G es: 6
Core(H)= [1, 1]
```

```
intermediate_covers(1[0],G_24,L_6[2],0)
```

```
genero de W= 4
La signatura de W/H es:
genero de W/H: 2
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por 1[0]
[[1, 2]] que estan sobre el punto marcado por 1[1]
[[1, 3]] que estan sobre el punto marcado por 1[2]
[[1, 2], [2, 2]] que estan sobre el punto marcado por 1[3]

Para el cubrimiento W/H-->W/G la estructura de ciclos es:
1[0] --> [6]
1[1] --> [3, 3]
1[2] --> [2, 2, 2]
1[3] --> [2, 2, 1, 1]
El indice de H en G es: 6
Core(H)= [1, 1]
```

En los tres casos la acción inducida tiene signatura maximal $(2; 2, 2)$, y los vectores generadores inducidos en cada caso (siguiendo análogamente la rutina anterior) corresponden a v_3 , por lo tanto

$$\overline{\mathcal{M}_4}^{[(0;6,3,2,2),D_6,\rho_1]} \subset \overline{\mathcal{M}_4}^{[(2;2,2),\mathbb{Z}_2,v_3]}.$$

Finalmente, reuniendo la información obtenida, se concluye que

$$\overline{\mathcal{M}_4}^{[(0;6,3,2,2),D_6,\rho_1]} \subset \overline{\mathcal{M}_4}^{[(0;3,3,3,2,2),S_3,\eta_1]} \cap \overline{\mathcal{M}_4}^{[(1;2,2,2),\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,t_3]} \cap \overline{\mathcal{M}_4}^{[(0;3,\dots,3),\mathbb{Z}_3,w_2]} \cap \overline{\mathcal{M}_4}^{[(2;2,2),\mathbb{Z}_2,v_3]}.$$


```

[[6, 1], [[3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2], [3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]],
[[6, 2],
  [[6, 6, 6, 6, 6, 2],
   [6, 6, 6, 6, 3, 3],
   [6, 6, 6, 3, 2, 2, 2],
   [6, 6, 3, 3, 3, 2, 2],
   [6, 3, 3, 3, 3, 3, 2],
   [6, 6, 2, 2, 2, 2, 2, 2],
   [6, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2],
   [3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2]]],
[[7, 1], [[7, 7, 7, 7, 7]]],
[[8, 1], [[8, 8, 8, 8, 2], [8, 8, 4, 4, 4], [8, 8, 4, 2, 2, 2]]],
[[8, 2], [[4, 4, 4, 4, 2, 2], [4, 4, 2, 2, 2, 2, 2]]],
[[8, 3],
  [[4, 4, 4, 4, 2, 2], [4, 4, 2, 2, 2, 2, 2], [2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]]],
[[8, 4], [[4, 4, 4, 4, 2, 2]]],
[[8, 5], [[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]]],
[[9, 1], [[9, 9, 3, 3, 3]]],
[[10, 1], [[5, 5, 2, 2, 2, 2]]],
[[10, 2], [[10, 10, 10, 10], [10, 10, 5, 2, 2], [5, 5, 2, 2, 2, 2]]],
[[12, 1], [[6, 4, 4, 2, 2], [4, 4, 3, 3, 2]]],
[[12, 2],
  [[12, 12, 6, 3],
   [12, 12, 4, 4],
   [12, 6, 6, 4],
   [12, 12, 2, 2, 2],
   [12, 4, 3, 2, 2],
   [4, 4, 3, 3, 2]]],
[[12, 3], [[3, 3, 3, 3, 3], [3, 3, 2, 2, 2, 2]]],
[[12, 4], [[6, 6, 3, 2, 2], [6, 2, 2, 2, 2, 2], [3, 3, 2, 2, 2, 2]]],
[[12, 5], [[6, 6, 6, 6], [6, 6, 3, 2, 2], [3, 3, 2, 2, 2, 2]]],

  [[14, 2], [[14, 7, 7, 2]]],
  [[15, 1], [[15, 5, 3, 3]]],
  [[16, 2], [[4, 4, 4, 4]]],
  [[16, 3], [[4, 4, 4, 4], [4, 4, 2, 2, 2]]],
  [[16, 4], [[4, 4, 4, 4]]],
  [[16, 5], [[8, 8, 4, 2]]],
  [[16, 6], [[8, 8, 4, 2]]],
  [[16, 7], [[2, 2, 2, 2, 2, 2]]],
  [[16, 8], [[4, 4, 2, 2, 2]]],
  [[16, 9], [[4, 4, 4, 4]]],
  [[16, 10], [[4, 4, 4, 4], [4, 4, 2, 2, 2]]],
  [[16, 11], [[4, 4, 2, 2, 2], [2, 2, 2, 2, 2, 2]]],
  [[16, 12], [[4, 4, 4, 4]]],
  [[16, 13], [[4, 4, 2, 2, 2], [2, 2, 2, 2, 2, 2]]],
  [[16, 14], [[2, 2, 2, 2, 2, 2]]],
  [[18, 1], [[9, 2, 2, 2, 2]]],
  [[18, 2], [[18, 18, 2, 2]]],
  [[19, 1], [[19, 19, 19]]],
  [[20, 1], [[5, 4, 4, 2]]],
  [[20, 2], [[20, 20, 10]]],

  ...

  [[40, 7], [[10, 4, 4]]],
  [[40, 8], [[10, 2, 2, 2]]],
  [[40, 9], [[20, 20, 2]]],
  [[40, 12], [[10, 4, 4]]],
  [[40, 13], [[10, 2, 2, 2]]],
  [[42, 3], [[21, 14, 2]]],
  [[48, 4], [[24, 8, 2]]],
  [[48, 5], [[24, 8, 2]]],
  [[48, 15], [[6, 2, 2, 2]]],

```

```

[[48, 15], [[6, 2, 2, 2]]],
[[48, 19], [[6, 4, 4]]],
[[48, 21], [[12, 12, 2]]],
[[48, 29], [[3, 3, 2, 2]]],
[[48, 30], [[6, 4, 4]]],
[[48, 31], [[12, 12, 2], [12, 4, 3]]],
[[48, 32], [[6, 6, 3]]],
[[48, 33], [[3, 3, 2, 2]]],
[[48, 38], [[6, 2, 2, 2]]],
[[48, 43], [[6, 2, 2, 2]]],
[[48, 48], [[6, 4, 4], [6, 2, 2, 2]]],
[[48, 50], [[3, 3, 2, 2]]],
[[57, 1], [[19, 3, 3]]],
[[60, 5], [[5, 5, 3]]],
[[64, 4], [[8, 8, 2]]],
[[64, 6], [[8, 8, 2]]],
[[64, 10], [[8, 8, 2]]],
[[64, 12], [[8, 8, 2]]],
[[64, 23], [[4, 4, 4]]],
[[64, 34], [[4, 4, 4]]],
[[64, 35], [[4, 4, 4]]],
[[64, 36], [[8, 8, 2]]],
[[64, 73], [[4, 2, 2, 2]]],
[[64, 128], [[4, 2, 2, 2]]],
[[64, 134], [[4, 2, 2, 2]]],
[[64, 135], [[4, 2, 2, 2]]],
[[64, 138], [[4, 2, 2, 2]]],
[[64, 140], [[4, 2, 2, 2]]],
[[64, 177], [[4, 2, 2, 2]]],
[[64, 190], [[4, 2, 2, 2]]],
[[72, 5], [[36, 4, 2]]],
[[80, 14], [[20, 4, 2]]],

[[96, 3], [[6, 3, 3]]],
[[96, 13], [[12, 4, 2]]],
[[96, 67], [[4, 4, 3]]],
[[96, 70], [[6, 6, 2]]],
[[96, 186], [[12, 4, 2]]],
[[96, 187], [[12, 4, 2]]],
[[96, 193], [[3, 2, 2, 2]]],
[[96, 202], [[6, 6, 2]]],
[[96, 227], [[4, 4, 3], [3, 2, 2, 2]]],
[[120, 34], [[6, 5, 2]]],
[[120, 35], [[6, 5, 2]]],

[[128, 75], [[8, 4, 2]]],
[[128, 134], [[8, 4, 2]]],
[[128, 136], [[8, 4, 2]]],
[[128, 138], [[8, 4, 2]]],
[[160, 199], [[5, 5, 2]]],
[[192, 194], [[12, 3, 2]]],
[[192, 955], [[6, 4, 2]]],
[[192, 990], [[6, 4, 2]]],
[[320, 1582], [[5, 4, 2]]]

```

[full_output.txt](#)

En esta lista aparece la identificación del grupo junto con las firmas asociadas a su acción. Por ejemplo, el grupo $(6, 1) = S_3$ (ver tabla 8) actúa con dos firmas en una superficie de Riemann de género 9, las cuales son $(0; 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2)$ y $(0; 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$. Recordemos que podemos identificar la estructura del grupo con `G.structure_description()`, por ejemplo:

```
G_108=SmallGroup(120,35)
G_108.structure_description()
```

```
G_108=SmallGroup(120,35)
G_108.structure_description()

'C2 x A5'
```

Luego $(120, 35) = \mathbb{Z}_2 \times A_5$.

De esta manera, podemos ir reconociendo los grupos que actúan en superficies de Riemann de género 9 que no están en la tabla 8. Ahora, observando la lista inicial de grupos finitos que actúan en superficies de Riemann de género 9 con superficie cociente de género 0, podemos destacar, usando los resultados de [27] las siguientes firmas maximales:

$ G $	Signatura	$ G $	Signatura	$ G $	Signatura
2	$(0; 2, \cdot^{20}, 2)$	3	$(0; 3, \cdot^{11}, 3)$	4	$(0; 4, \cdot^8, 4)$
4	$(0; 4, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2)$	4	$(0; 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$	4	$(0; 4, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
4	$(0; 2, \cdot^{12}, 2)$	6	$(0; 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2)$	6	$(0; 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
6	$(0; 6, 6, 6, 6, 6, 2)$	6	$(0; 6, 6, 6, 6, 3, 3)$	6	$(0; 6, 6, 6, 3, 2, 2, 2)$
6	$(0; 6, 6, 3, 3, 3, 2, 2)$	6	$(0; 6, 3, 3, 3, 3, 3, 2)$	6	$(0; 6, 6, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
6	$(0; 6, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2)$	6	$(0; 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2)$	7	$(0; 7, 7, 7, 7, 7)$
8	$(0; 8, 8, 8, 8, 2)$	8	$(0; 8, 8, 4, 4, 4)$	8	$(0; 8, 8, 4, 2, 2, 2)$
8	$(0; 4, 4, 4, 4, 2, 2)$	8	$(0; 4, 4, 2, 2, 2, 2, 2)$	8	$(0; 2, \cdot^8, 2)$
9	$(0; 9, 9, 3, 3, 3)$	10	$(0; 5, 5, 2, 2, 2, 2)$	10	$(0; 10, 10, 5, 2, 2)$
10	$(0; 5, 5, 2, 2, 2, 2)$	12	$(0; 6, 4, 4, 2, 2)$	12	$(0; 4, 4, 3, 3, 2)$
12	$(0; 12, 12, 6, 3)$	12	$(0; 12, 6, 6, 4)$	12	$(0; 12, 12, 2, 2, 2)$
12	$(0; 12, 4, 3, 2, 2)$	12	$(0; 4, 4, 3, 3, 2)$	12	$(0; 3, 3, 3, 3, 3)$
12	$(0; 3, 3, 2, 2, 2, 2)$	12	$(0; 6, 6, 3, 2, 2)$	12	$(0; 6, 2, 2, 2, 2, 2)$
12	$(0; 3, 3, 2, 2, 2, 2)$	15	$(0; 15, 5, 3, 3)$	16	$(0; 4, 4, 2, 2, 2)$
16	$(0; 8, 8, 4, 2)$	18	$(0; 2, \cdot^6, 2)$	18	$(0; 9, 2, 2, 2, 2)$
20	$(0; 5, 4, 4, 2)$	20	$(0; 5, 2, 2, 2, 2)$	24	$(0; 24, 8, 6)$
24	$(0; 12, 4, 2, 2)$	24	$(0; 4, 4, 3, 2)$	24	$(0; 3, 2, 2, 2, 2)$
24	$(0; 6, 3, 3, 2)$	28	$(0; 28, 7, 4)$	32	$(0; 2, 2, 2, 2, 2)$
36	$(0; 18, 2, 2, 2)$	40	$(0; 10, 2, 2, 2)$	42	$(0; 21, 14, 2)$
48	$(0; 24, 8, 2)$	48	$(0; 6, 2, 2, 2)$	64	$(0; 4, 2, 2, 2)$
72	$(0; 36, 4, 2)$	80	$(0; 20, 4, 2)$	96	$(0; 12, 4, 2)$
96	$(0; 3, 2, 2, 2)$	120	$(0; 6, 5, 2)$	192	$(0; 12, 3, 2)$
192	$(0; 6, 4, 2)$	320	$(0; 5, 4, 2)$		

Tabla 12: Firmas maximales de acciones en género cuando $g = 0$.

Recordemos que fijando una signatura podemos encontrar uno o más vectores generadores. Si consideramos las signaturas maximales de la tabla 12 podríamos tener más de una acción maximal para cierta signatura. Además como cada acción maximal se corresponde con un estrato no vacío, la cantidad de estratos en \mathcal{M}_9 no es menor. Nuestro interés es seguir desarrollando el ejemplo 2.6.3 del capítulo 2 por lo que encontraremos resultados de contenciones e intersecciones que involucran los estratos correspondientes a las acciones no equivalentes topológicamente y maximales de dicho ejemplo. Es decir, las acciones de \mathbb{Z}_8 con signatura $(0; 8, 8, 4, 4, 4)$.

A \mathbb{Z}_8 en nuestra programación, lo definimos como $G=\mathbf{SmallGroup}(8,1)$. Podemos ver en la lista inicial que este grupo de automorfismos actúa de diferentes formas en \mathcal{M}_9 , pues tiene tres signaturas:

$$[0; 8, 8, 8, 8, 2], [0; 8, 8, 4, 4, 4], [0; 8, 8, 4, 2, 2, 2],$$

todas ellas corresponden a signaturas maximales según Singerman [27].

Usando nuestro algoritmo determinaremos que la acción de \mathbb{Z}_8 con signatura $(0; 8, 8, 4, 4, 4)$ tiene asociado 4 vectores generadores (representantes de clases), $l[0]=w_1$, $l[1]=w_2$, $l[2]=w_3$ y $l[3]=w_4$, los cuales podemos visualizar como palabra o por medio de permutaciones, bajo los siguientes comandos:

```
print find_generator_representatives_as_words(G,[8,8,4,4,4])
```

```
l=find_generator_representatives(G,[8,8,4,4,4])
```

```
l
```

```
G=SmallGroup(8,1)
print find_generator_representatives_as_words(G,[8,8,4,4,4])
```

```
[[a, a, a^2, a^2, a^2], [a, a, a^2, a^-2, a^-2], [a, a^-3, a^2, a^2,
a^-2], [a, a^-3, a^-2, a^-2, a^-2]]
```

```
l=find_generator_representatives(G,[8,8,4,4,4])
l
```

```
[[(1,2,3,4,5,6,7,8),
(1,2,3,4,5,6,7,8),
(1,3,5,7)(2,4,6,8),
(1,3,5,7)(2,4,6,8),
(1,3,5,7)(2,4,6,8)],
[(1,2,3,4,5,6,7,8),
(1,2,3,4,5,6,7,8),
(1,3,5,7)(2,4,6,8),
(1,7,5,3)(2,8,6,4),
(1,7,5,3)(2,8,6,4)],
[(1,2,3,4,5,6,7,8),
(1,6,3,8,5,2,7,4),
(1,3,5,7)(2,4,6,8),
(1,3,5,7)(2,4,6,8),
(1,7,5,3)(2,8,6,4)],
[(1,2,3,4,5,6,7,8),
(1,6,3,8,5,2,7,4),
(1,7,5,3)(2,8,6,4),
(1,7,5,3)(2,8,6,4),
(1,7,5,3)(2,8,6,4)]]
```


Sean los vectores generados:

$$w_1 = (a, a, a^2, a^2, a^2), w_2 = (a, a, a^2, a^{-2}, a^{-2}), w_3 = (a, a^{-3}, a^2, a^2, a^{-2}) \text{ y } w_4 = (a, a^{-3}, a^{-2}, a^{-2}, a^{-2}),$$

estos capturan las cuatro acciones diferentes de \mathbb{Z}_8 con signatura $(0; 8, 8, 4, 4, 4)$ no equivalentes topológicamente.

Nuestro objetivo es buscar resultados sobre contenciones e intesecciones que involucren a los estratos:

$$\mathcal{M}_9^{[(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8,w_1]}, \mathcal{M}_9^{[(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8,w_2]}, \mathcal{M}_9^{[(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8,w_3]} \text{ y } \mathcal{M}_9^{[(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8,w_4]}.$$

Primero, estudiaremos los subgrupos de $G = \mathbb{Z}_8$ con acción inducida maximal.

Entonces nos preguntamos: ¿ \mathbb{Z}_8 contiene subgrupos isomorfos a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ actuando de forma maximal? Para responder esto, primero contemos cuántos $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ existen como clases de conjugación en \mathbb{Z}_8 . El comando que emplearemos es

```
L_1=[k for k in G.conjugacy_classes_subgroups() if k.id()==[4,2]]
len(L_1)
```

```
L_1=[k for k in G.conjugacy_classes_subgroups() if k.id()==[4,2]]
len(L_1)
```

0

La respuesta es 0, es decir, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ no es clase de conjugación de subgrupos de \mathbb{Z}_8 .

Continuamos ahora con el otro grupo de orden 4, analizaremos si \mathbb{Z}_4 es clase de conjugación de subgrupos de \mathbb{Z}_8 .

```
L_2=[k for k in G.conjugacy_classes_subgroups() if k.id()==[4,1]]
len(L_2)
```

1

luego existe sólo una clase de conjugación, identificada como $L_2[0]$. Fijando el primer vector generador, $l[0] = w_1$, el siguiente comando:

```
intermediate_covers(l[0],G,L_2[0],0)
```

nos ayuda a obtener información detallada de la acción inducida asociada.

```
intermediate_covers(l[0],G,L_2[0],0)
```

```
genero de W= 9
La signatura de W/H es:
genero de W/H: 0
[[4, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[0]
[[4, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[1]
[[4, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[2]
[[4, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[3]
[[4, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[4]

Para el cubrimiento W/H-->W/G la estructura de ciclos es:
l[0] --> [2]
l[1] --> [2]
l[2] --> [1, 1]
l[3] --> [1, 1]
l[4] --> [1, 1]
El indice de H en G es: 2
Core(H)= [4, 1]
```

La acción inducida está descrita por la signatura maximal $(0; 4, .^8., 4)$. Existen tres acciones topológicas distintas de \mathbb{Z}_4 con esa signatura pues hay tres clases de vectores generadores:

```
G_2=SmallGroup(4,1)
print find_generator_representatives_as_words(G_2,[4,4,4,4,4,4,4,4])

[[a, a, a, a, a, a, a, a], [a, a, a, a, a, a, a^-1, a^-1], [a, a, a, a,
a^-1, a^-1, a^-1, a^-1]]
```

que llamaremos $v_1 = (a, a, a, a, a, a, a, a)$, $v_2 = (a, a, a, a, a, a, a^{-1}, a^{-1})$ y $v_3 = (a, a, a, a, a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}, a^{-1})$. Para conocer cuál es el vector generador inducido entre v_1 , v_2 y v_3 , utilizaremos el siguiente comando:

```
v,w,g,s=induced_generating_vector(G,l[0],L_2[0])
v,w,g,s
```

```
v,w,g,s=induced_generating_vector(G,l[0],L_2[0])
v,w,g,s

([(1,3,5,7)(2,4,6,8),
 (1,3,5,7)(2,4,6,8),
 (1,3,5,7)(2,4,6,8),
 (1,3,5,7)(2,4,6,8),
 (1,3,5,7)(2,4,6,8),
 (1,3,5,7)(2,4,6,8),
 (1,3,5,7)(2,4,6,8),
 (1,3,5,7)(2,4,6,8),
 (1,3,5,7)(2,4,6,8)],
 [e, a*b^2*a^-1, a*c*a^-1, a*d*a^-1, a*e*a^-1, a^2, c, d],
 0,
 [4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4])
```

el cual nos entrega el vector inducido escrito en forma permutacional y también escrito como palabra, además nos entrega el género \mathfrak{g} de la superficie cociente y la signatura s .

De ésta información se desprende que el vector generador inducido corresponde a $(a, \cdot^s, a) = v_1$, pues todas las coordenadas del vector visto en la forma permutacional son iguales. Cuando no sea claro identificarlo se procede de la siguiente forma:

Cada coordenada del vector es un elemento del subgrupo $L_2[0]$, éste se puede describir con el comando **L_2[0]**

```
L_2[0]
```

```
Subgroup of (Permutation Group with generators [(1,2,3,4,5,6,7,8)])
generated by [(1,3,5,7)(2,4,6,8)]
```

Podemos ver que $L_2[0]$ es generado por el elemento $(1, 3, 5, 7)(2, 4, 6, 8) = L_5[0].0$. Entonces si queremos describir el vector generador inducido, sólo en términos de este generador, utilizamos

```
[as_word(k,L_2[0], gens=[L_2[0].0]) for k in v]
```

```
[as_word(k,L_2[0],gens=[L_2[0].0]) for k in v]
```

```
[a, a, a, a, a, a, a, a]
```

Luego el vector generador inducido corresponde a v_1 , por lo tanto se obtiene que

$$\overline{\mathcal{M}_9^{(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8,w_1}} \subset \overline{\mathcal{M}_9^{(0;4,\cdot^s,4),\mathbb{Z}_4,v_1}}.$$

Por último, determinemos subgrupos isomorfos a \mathbb{Z}_2 como clases de conjugación de \mathbb{Z}_8 .

```
L_3=[k for k in G.conjugacy_classes_subgroups() if k.id()==[2,1]]
len(L_3)
```

1

Existe sólo una clase la cual llamamos $L_3[0]$. La información sobre los cubrimientos intermedios se obtiene con el comando: **intermediate_covers(1[0],G,L_3[0],0)**

```
intermediate_covers(l[0],G,L_3[0],0)
```

```
genero de W= 9
La signatura de W/H es:
genero de W/H: 3
[[2, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[0]
[[2, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[1]
[[2, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[2]
[[2, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[3]
[[2, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[4]

Para el cubrimiento W/H-->W/G la estructura de ciclos es:
l[0] --> [4]
l[1] --> [4]
l[2] --> [2, 2]
l[3] --> [2, 2]
l[4] --> [2, 2]
El indice de H en G es: 4
Core(H)= [2, 1]
```

La acción inducida es $\theta : \Delta(3; 2, \dots, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, la cual es maximal, según [27]. Como el género de la superficie cociente en este caso no es 0, con la programación usada en este trabajo no podemos determinar cuántos vectores generadores tiene asociados dicha acción. Sin embargo, encontraremos el vector generador inducido y el estrato correspondiente a la acción maximal.

Para conocer cuál es el vector generador inducido (v en nuestra rutina), utilizamos como antes:

```
v,w,g,s=induced_generating_vector(G,l[0],L_3[0])
v,w,g,s
```

```
v,w,g,s=induced_generating_vector(G,l[0],L_3[0])
v,w,g,s
```

```
([(1,5)(2,6)(3,7)(4,8),
(1,5)(2,6)(3,7)(4,8),
(1,5)(2,6)(3,7)(4,8),
(1,5)(2,6)(3,7)(4,8),
(1,5)(2,6)(3,7)(4,8),
(1,5)(2,6)(3,7)(4,8),
(1,5)(2,6)(3,7)(4,8),
(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)],
[a^2*e^2*a^-2,
a^3*b^4*a^-3,
a^3*c^2*a^-3,
a^3*d^2*a^-3,
a^3*e^2*a^-3,
a^4,
c^2,
d^2],
3,
[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2])
```

Sabemos que cada coordenada del vector es un elemento del subgrupo $L_3[0]$, el cual se describe con el comando $L_3[0]$

```
L_3[0]
```

```
Subgroup of (Permutation Group with generators [(1,2,3,4,5,6,7,8)])
generated by [(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)]
```

Podemos ver que $L_3[0]$ es generado por el elemento $(1, 5)(2, 6)(3, 7)(4, 8) = L_3[0].0$. Luego el vector generador inducido, escrito sólo en términos de este generador, se obtiene con la instrucción:

```
[as_word(k,L_3[0], gens=[L_3[0].0]) for k in v]
```

```
[as_word(k,L_3[0],gens=[L_3[0].0]) for k in v]
```

```
[a^-1, a^-1, a^-1, a^-1, a^-1, a^-1, a^-1, a^-1]
```

el cual corresponde a $z = (a^{-1}, \dots, a^{-1}) = (a, \dots, a)$. Así,

$$\overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8,w_1]} \subset \overline{\mathcal{M}}_9^{[(3;2,\dots,2),\mathbb{Z}_2,z]}.$$

Por lo tanto, cuando fijamos el primer vector generador $l[0]$, concluimos que:

$$\overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8,w_1]} \subset \overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;4,\dots,4),\mathbb{Z}_4,v_1]} \cap \overline{\mathcal{M}}_9^{[(3;2,\dots,2),\mathbb{Z}_2,z]}.$$

Ahora cuando fijamos el segundo vector generador $l[1]=w_2$, procediendo de manera análoga a la anterior, se obtiene que

$$\overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8,w_2]} \subset \overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;4,\dots,4),\mathbb{Z}_4,v_3]} \cap \overline{\mathcal{M}}_9^{[(3;2,\dots,2),\mathbb{Z}_2,z]}.$$

Fijando el tercer vector generador $l[2]=w_3$ se tiene

$$\overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8,w_3]} \subset \overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;4,\dots,4),\mathbb{Z}_4,v_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_9^{[(3;2,\dots,2),\mathbb{Z}_2,z]}$$

Y cuando fijamos el cuarto vector generador, obtenemos que

$$\overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8,w_4]} \subset \overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;4,\dots,4),\mathbb{Z}_4,v_2]} \cap \overline{\mathcal{M}}_9^{[(3;2,\dots,2),\mathbb{Z}_2,z]}.$$

Ahora, de la lista inicial de grupos que actúan en género 9, nos interesa analizar aquellos que contienen a \mathbb{Z}_8 y que induzcan una acción con signatura $(0; 8, 8, 4, 4, 4)$. Es decir, estamos en busca de estratos que puedan estar contenidos en algún $\overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8,w_i]}$ para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

En nuestra lista de grupos, el más cercano que podría tener a \mathbb{Z}_8 como clase de conjugación es $G_1 = (16, 3)$ de orden 16. Para encontrar la respuesta, aplicamos el comando ya conocido:

```
G_1=SmallGroup(16,3)
L_1=[k for k in G_1.conjugacy_classes_subgroups() if k.id()==[8,1]]
len(L_1)
```

```
G_1=SmallGroup(16,3)
L_1=[k for k in G_1.conjugacy_classes_subgroups() if k.id()==[8,1]]
len(L_1)
```

0

Luego el grupo $(16, 3)$ no contiene a \mathbb{Z}_8 como clase de conjugación.

El segundo grupo más próximo en la lista es $G_2 = (16, 5)$, veamos si este contiene a \mathbb{Z}_8 como clase de conjugación.

```
G_2=SmallGroup(16,5)
L_2=[k for k in G_2.conjugacy_classes_subgroups() if k.id()==[8,1]]
len(L_2)
```

2

CAPÍTULO 6. RUTINA SAGE PARA LA ESTRATIFICACIÓN EQUISIMÉTRICA DE \mathbb{Z}_8 EN $\mathcal{M}_{9,88}$

Este grupo tiene dos \mathbb{Z}_8 como clases de conjugación de subgrupos. Recordemos que con el comando `G_2.structure_description()` podemos descubrir que $G_2 = \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$.

Lo siguiente es verificar si las acciones inducidas tienen la signatura buscada $(0; 8, 8, 4, 4, 4)$. Entonces, continuamos la rutina conociendo los vectores generadores asociados a la acción de $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$ con signatura $(0; 8, 8, 4, 2)$ con los comandos:

```
l_2=find_generator_representatives(G_2,[8,8,4,2])
l
print find_generator_representatives_as_words(G_2,[8,8,4,2])
```

```
l_2=find_generator_representatives(G_2,[8,8,4,2])
len(l_2)
```

5

+

```
print find_generator_representatives_as_words(G_2,[8,8,4,2])
```

```
[[a, a, a^2*b, b^-1*a^-4], [a, b^-1*a, a^2, b^-1*a^-4], [a, b^-1*a,
a^2*b, a^-4], [a, b^-1*a, a^-2, b^-1], [a, a^-3, a^2*b, b^-1]]
```

Definimos $u_1 = (a, a, a^2b, b^{-1}a^{-4})$, $u_2 = (a, b^{-1}a, a^2, b^{-1}a^{-4})$, $u_3 = (a, b^{-1}a, a^2b, a^{-4})$, $u_4 = (a, b^{-1}a, a^{-2}, b^{-1})$ y $u_5 = (a, a^{-3}, a^2b, b^{-1})$, con el fin de que más adelante podamos escribir de mejor manera los estratos involucrados.

Contamos con 5 vectores generadores $l_2[0] = u_1$, $l_2[1] = u_2$, $l_2[2] = u_3$, $l_2[3] = u_4$ y $l_2[4] = u_5$, y 2 clases de conjugación de subgrupos $L_2[0]$ y $L_2[1]$. Tenemos entonces 10 combinaciones a analizar. La primera es $l_2[0]$ con $L_2[0]$, la segunda es $l_2[0]$ con $L_2[1]$, la tercera es $l_2[1]$ con $L_2[0]$, y así hasta llegar a la última combinación $l_2[4]$ con $L_2[1]$.

Información de la primera acción inducida, la obtenemos con el comando:

```
intermediate_covers(l_2[0],G_2,L_2[0],0)
```

```
intermediate_covers(l_2[0],G_2,L_2[0],0)
```

genero de W= 9

La signatura de W/H es:

genero de W/H: 0

[[8, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[0]

[[8, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[1]

[[2, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[2]

[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[3]

Para el cubrimiento W/H-->W/G la estructura de ciclos es:

l[0] --> [1, 1]

l[1] --> [1, 1]

l[2] --> [2]

l[3] --> [2]

El indice de H en G es: 2

Core(H)= [8, 1]

La asignatura asociada es $(0; 8, 8, 8, 8, 2)$, la cual no es la buscada.

De las 10 combinaciones, sólo 4 tienen la signatura buscada, éstas son $l_2[1]-L_2[0]$, $l_2[1]-L_2[1]$, $l_2[3]-L_2[0]$ y $l_2[3]-L_2[1]$.

Observación 13. Bajo la acción del grupo $(16, 5)$ con signatura $(0; 8, 8, 4, 2)$ es posible contar 2 acciones topológicas distintas y 2 analíticas distintas.

Continuamos la rutina, para el caso en que una combinación sí nos entregue la signatura $(0; 8, 8, 4, 4, 4)$. Por ejemplo $l_2[1]-L_2[0]$:

```
intermediate_covers(l_2[1],G_2,L_2[0],0)
```

```
genero de W= 9
La signatura de W/H es:
genero de W/H: 0
[[8, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[0]
[[4, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[1]
[[4, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[2]
[[1, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[3]

Para el cubrimiento W/H-->W/G la estructura de ciclos es:
l[0] --> [1, 1]
l[1] --> [2]
l[2] --> [1, 1]
l[3] --> [2]
El indice de H en G es: 2
Core(H)= [8, 1]
```

Vemos entonces que la acción inducida tiene la signatura maximal de nuestro interés, $(0; 8, 8, 4, 4, 4)$. Recordemos que hay 4 acciones topológicas de \mathbb{Z}_8 en una superficie de género 9 con la signatura $(0; 8, 8, 4, 4, 4)$, éstas son descritas por los vectores generadores w_1 y w_2 , w_3 y w_4 . Para conocer cuál es el vector generador inducido en este caso, utilizamos el comando:

```
v_1,w,g,s=induced_generating_vector(G_2,l_2[1],L_2[0])
v_1,w,g,s
```

```
v_1,w,g,s=induced_generating_vector(G_2,l_2[1],L_2[0])
```

```
v_1,w,g,s
```

evaluate

```
([(3,5,7,9)(4,6,8,10),
 (3,4,5,6,7,8,9,10),
 (3,5,7,9)(4,6,8,10),
 (3,5,7,9)(4,6,8,10),
 (3,4,5,6,7,8,9,10)],
 ['bcb^-1', 'bab^-1', 'bb', 'c', 'a'],
 0,
 [4, 8, 4, 4, 8])
```


Cada coordenada del vector v_1 es un elemento del subgrupo $L_2[0]$, el cual se describe como sigue:

```
L_2[0]
```

```
Subgroup of (Permutation Group with generators [(3,4,5,6,7,8,9,10),
(1,2)]) generated by [(3,4,5,6,7,8,9,10), (3,5,7,9)(4,6,8,10),
(3,7)(4,8)(5,9)(6,10)]
```

$L_2[0]$ puede ser generado por uno de los siguientes elementos $(3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10), (3, 5, 7, 9)(4, 6, 8, 10)$, y $(3, 7)(4, 8)(5, 9)(6, 10)$. Tomamos el generador $L_2[0].0 = (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) = a$, entonces si queremos describir el vector generador inducido, sólo en términos de este generador, utilizamos

```
[as_word(k,L_2[0], gens=[L_2[0].0]) for k in v_1]
```

```
[as_word(k,L_2[0],gens=[L_2[0].0]) for k in v_1]
```

```
[a^2, a, a^2, a^2, a]
```

Así el vector generador inducido es equivalente a w_1 , por lo tanto se obtiene que

$$\overline{\mathcal{M}_9^{[(0;8,8,4,2),\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2, u_2]}} \subset \overline{\mathcal{M}_9^{[(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8, w_1]}}.$$

La misma rutina se sigue en las otras tres combinaciones $l_2[1]-L_2[1]$, $l_2[3]-L_2[0]$ y $l_2[3]-L_2[1]$. Producto de los resultados de éstas se concluye además que

$$\overline{\mathcal{M}_9^{[(0;8,8,4,2),\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2, u_4]}} \subset \overline{\mathcal{M}_9^{[(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8, w_2]}}.$$

Otro grupo que contiene a \mathbb{Z}_8 como clases de conjugación de subgrupos es $G_{28} = (48, 4)$. En efecto,

```
G_28=SmallGroup(48,4)
L_28=[k for k in G_28.conjugacy_classes_subgroups() if k.id()==[8,1]]
len(L_28)
```

```
2
```

tiene dos clases de conjugación que llamamos $L_{28}[0]$ y $L_{28}[1]$.

El grupo $(48, 4)$ es un grupo de orden 48 descrito por $\mathbb{Z}_8 \times S_3$.

```
G_28.structure_description()
```

```
'C8 x S3'
```

Existe sólo un vector generador asociado a la acción del grupo $\mathbb{Z}_8 \times S_3$ con signatura $(0; 24, 8, 2)$, este es $L_{28}[0] = \tau = (eb, a^{-1}b^{-1}d^{-1}, a^{-1}d^{-1}e^{-1})$ como se muestra a continuación:

```
L_28=find_generator_representatives(G_28,[24,8,2])
len(L_28)
```

1

+

```
print find_generator_representatives_as_words(G_28,[24,8,2])
[[e*b, a^-1*b^-1*d^-1, a^-1*d^-1*e^-1]]
```

Para la combinación $L_{28}[0]$ - $L_{28}[0]$, la acción inducida tiene la siguiente información:

```
intermediate_covers(L_28[0],G_28,L_28[0],0)
```

```
genero de W= 9
La signatura de W/H es:
genero de W/H: 0
[[4, 1]] que estan sobre el punto marcado por l[0]
[[8, 2], [4, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[1]
[[1, 3]] que estan sobre el punto marcado por l[2]

Para el cubrimiento W/H-->W/G la estructura de ciclos es:
l[0] --> [6]
l[1] --> [1, 1, 2, 2]
l[2] --> [2, 2, 2]
El indice de H en G es: 6
Core(H)= [4, 1]
```

Es una acción maximal con la signatura buscada. El vector generador inducido es $(a^{-2}, a^{-2}, a^3, a^{-2}, a^3)$

```
v_7,w,g,s=induced_generating_vector(G_28,L_28[0],L_28[0])
v_7
```

```
[(1,14,5,4)(2,21,9,8)(3,25,12,11)(6,29,16,15)(7,32,19,18)(10,36,23,22)(1\
3,39,27,26)(17,42,31,30)(20,43,34,33)(24,46,38,37)(28,47,41,40)(35,48,45\
,44),
(1,14,5,4)(2,21,9,8)(3,25,12,11)(6,29,16,15)(7,32,19,18)(10,36,23,22)(1\
3,39,27,26)(17,42,31,30)(20,43,34,33)(24,46,38,37)(28,47,41,40)(35,48,45\
,44),
(1,18,14,7,5,32,4,19)(2,11,21,3,9,25,8,12)(6,44,29,35,16,48,15,45)(10,4\
0,36,28,23,47,22,41)(13,38,39,37,27,24,26,46)(17,33,42,20,31,43,30,34),
(1,14,5,4)(2,21,9,8)(3,25,12,11)(6,29,16,15)(7,32,19,18)(10,36,23,22)(1\
3,39,27,26)(17,42,31,30)(20,43,34,33)(24,46,38,37)(28,47,41,40)(35,48,45\
,44),
(1,18,14,7,5,32,4,19)(2,11,21,3,9,25,8,12)(6,44,29,35,16,48,15,45)(10,4\
0,36,28,23,47,22,41)(13,38,39,37,27,24,26,46)(17,33,42,20,31,43,30,34)]
```

que escrito como palabra y en términos de un generador del grupo $L_{28}[0]$ es

```
[as_word(k,L_28[0],gens=[L_28[0].2]) for k in v_7]
```

```
[a^-2, a^-2, a^3, a^-2, a^3]
```

Notemos que

$$(a^{-2}, a^{-2}, a^3, a^{-2}, a^3) = (a^6, a^6, a^3, a^6, a^3) \sim (a^2, a^2, a, a^2, a) \sim w_1$$

Así,

$$\overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;24,8,2),(48,4),\tau]} \subset \overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8,w_1]}.$$

La combinación l_28[0]-L_28[1], nos entrega la siguiente información:

```
intermediate_covers(l_28[0],G_28,L_28[1],0)
```

```
genero de W= 9
La signatura de W/H es:
genero de W/H: 0
[[8, 2]] que estan sobre el punto marcado por l[0]
[[4, 3]] que estan sobre el punto marcado por l[1]
[[1, 3]] que estan sobre el punto marcado por l[2]

Para el cubrimiento W/H-->W/G la estructura de ciclos es:
l[0] --> [3, 3]
l[1] --> [2, 2, 2]
l[2] --> [2, 2, 2]
El indice de H en G es: 6
Core(H)= [8, 1]
```

La acción inducida tiene la signatura de nuestro interés $(0; 8, 8, 4, 4, 4)$ y el vector generador inducido está dado por los siguientes dos comandos

```
v_8,w,g,s=induced_generating_vector(G_28,l_28[0],L_28[1])
v_8
```

```
[(1,11,14,3,5,25,4,12)(2,18,21,7,9,32,8,19)(6,26,29,13,16,39,15,27)(10,3\
3,36,20,23,43,22,34)(17,40,42,28,31,47,30,41)(24,44,46,35,38,48,37,45),
(1,14,5,4)(2,21,9,8)(3,25,12,11)(6,29,16,15)(7,32,19,18)(10,36,23,22)(1\
3,39,27,26)(17,42,31,30)(20,43,34,33)(24,46,38,37)(28,47,41,40)(35,48,45\
,44),
(1,11,14,3,5,25,4,12)(2,18,21,7,9,32,8,19)(6,26,29,13,16,39,15,27)(10,3\
3,36,20,23,43,22,34)(17,40,42,28,31,47,30,41)(24,44,46,35,38,48,37,45),
(1,14,5,4)(2,21,9,8)(3,25,12,11)(6,29,16,15)(7,32,19,18)(10,36,23,22)(1\
3,39,27,26)(17,42,31,30)(20,43,34,33)(24,46,38,37)(28,47,41,40)(35,48,45\
,44),
(1,14,5,4)(2,21,9,8)(3,25,12,11)(6,29,16,15)(7,32,19,18)(10,36,23,22)(1\
3,39,27,26)(17,42,31,30)(20,43,34,33)(24,46,38,37)(28,47,41,40)(35,48,45\
,44)]
```

⊕

```
[as_word(k,L_28[1],gens=[L_28[1].0]) for k in v_8]
```

```
[a^3, a^-2, a^3, a^-2, a^-2]
```

El vector generador inducido resulta ser

$$(a^3, a^{-2}, a^3, a^{-2}, a^{-2}) \sim w_1$$

Luego tenemos la misma contención de estratos de la primera combinación.

Con esta rutina pudimos obtener como resultado, que dentro de todos los grupos que actúan en una superficie de Riemann de género 9 con género de la superficie cociente 0, los que contienen al $(8, 1)$ como clases de conjugación de subgrupos y además inducen una acción con signatura $(0; 8, 8, 4, 4, 4)$, son: $(16, 5)$, $(16, 6)$, $(48, 4)$ y $(48, 5)$.

Sólo mostramos para enseñar la rutina, los resultados de los grupos $(16, 5) = \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$ y $(48, 4) = \mathbb{Z}_8 \times S_3$. De los otros dos podemos decir que el grupo $(16, 6) = \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$ con signatura $(0; 8, 8, 4, 2)$ tiene tres vectores generadores asociados pero sólo uno, que llamamos $\eta = (a, ba, c, b^{-1})$, nos proporciona acciones inducidas con la signatura buscada. El grupo $(48, 5) = \mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_2$ con signatura $(0; 24, 8, 2)$ tiene sólo un vector generador asociado, $\rho = (eb, b^{-1}a^{-1}, a^{-1}e^{-1})$ el cual proporciona dos acciones inducidas con la signatura buscada. Para concluir, los estratos que están contenidos en algún $\overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8,w_i]}$ para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. son:

$$\overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,2),\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2,u_2]}, \overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,2),\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2,u_4]}, \overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,2),\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2,\eta]}, \overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;24,8,2),\mathbb{Z}_8 \times S_3,\tau]} \quad \text{y} \quad \overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;24,8,2),\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_2,\rho]},$$

los cuales cumplen:

$$\overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,2),\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2,u_2]} \subset \overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8,w_1]},$$

$$\overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,2),\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2,u_4]} \subset \overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8,w_2]},$$

$$\overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,2),\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2,\eta]} \subset \overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8,w_3]},$$

$$\overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,2),\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2,\eta]} \subset \overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8,w_4]},$$

$$\overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;24,8,2),\mathbb{Z}_8 \times S_3,\tau]} \subset \overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8,w_1]},$$

$$\overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;24,8,2),\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_2,\rho]} \subset \overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8,w_3]}$$

y

$$\overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;24,8,2),\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_2,\rho]} \subset \overline{\mathcal{M}}_9^{[(0;8,8,4,4,4),\mathbb{Z}_8,w_4]}.$$

Bibliografía

- [1] G. Bartolini. *On the Branch Loci of Moduli Spaces of Riemann Surfaces*. Linköping Studies in Science and Technology. Dissertations, No. 1440, 2012.
- [2] G. Bartolini. *On the Branch Loci of Moduli Spaces of Riemann Surfaces of Low Genera*. Linköping Studies in Science and Technology. Thesis No. 1413, 2009.
- [3] G. Bartolini, A. F. Costa and M. Izquierdo. *On the Orbifold Structure of the Moduli Space of Riemann Surfaces of Genera Four and Five*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, (108), 2, 769-793, año 2014.
- [4] A. F. Beardon. *The geometry of discrete groups*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 91, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [5] C. Becerra *Superficies de Riemann: Notas del curso dictado por Rubí Rodríguez*. Pontificia Universidad Católica de Chile (2001).
- [6] A. Behn and A. M. Rojas. *A sage package for group actions on Riemann surfaces and applications*.
- [7] A. Behn and A. M. Rojas. Update in www.geometry.uchile.cl. *Algorithms for group actions on Riemann surfaces and abelian varieties*.
- [8] S. A. Broughton. *Classifying Finite Group On Surfaces of Low Genus*. Journal of Pure and Applied Algebra 69 (1990) 233-270.
- [9] S. A. Broughton. *The Equisymmetric Stratificación of The Moduli Space and The Krull Dimension of Mapping Class Groups*, Topology and Applications 37 (1990), 101-113.
- [10] M. Carvacho. *Equivalence of Group Actions on Riemann Surfaces*. Tesis de Doctorado. Universidad de Chile, (2010).
- [11] A. F. Costa and M. Izquierdo. *Equisymmetric strata of the singular locus of the moduli space of Riemann surfaces of genus 4*.
- [12] Farkas, H and Kra, I. *Riemann Surfaces* Graduate Text in Mathematics, v.72, Springer (1996).
- [13] W. Fulton. *Curvas Algebraicas*. Editorial Reverté (1971).
- [14] G.González-Diez and R.Hidalgo. *Conformal versus topological conjugacy of automorphisms on compact Riemann Surfaces*. Bull. London Math. Soc., 29, 1997, 280-284.

- [15] G. González-Diez and W. J. Harvey. *Moduli of Riemann Surfaces with Symmetry*. London Math. Soc. Lect. Note Ser, 1992.
- [16] L. Greenberg. *Maximal groups and signatures*. Ann, of Math, Studies 79 (1974) 207-226.
- [17] P. Griffiths. *Introduction to Algebraic Curves*. Translations of Mathematical Monographs, v.76, AMS (1989).
- [18] W. J. Harvey. *On branch Loci in Teichmüller space*. Transactions of the American Mathematical Society, Volume 153, 1971, 387-399.
- [19] A. Hurwitz. *Über algebraische gebilde mit eindeutigen transformationen in sich*. Math. Ann. 41 (1893), 403-442.
- [20] G. A. Jones and D. Singerman. *Complex functions: An algebraic and geometric viewpoint*. Cambridge University Press, 1987.
- [21] E. L. Lima. *Fundamental groups and covering spaces*. A K Peder, Ltd, 2003.
- [22] R. Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*. American Mathematical Society (1995).
- [23] C. Muñoz. *Clasificación Topológica de Acciones de Grupos sobre Superficies de Riemann. Un método algebraico*. Tesis de Magister. Universidad de Chile, (2014).
- [24] S. Nag. *The complex analytic theory of Teichmüller spaces*. John Wiley Sons, 1988.
- [25] G. Riera, R. Rodríguez. *Riemann surfaces and abelian varieties with an automorphism of prime order*. Duke Math. J.69 (1993), no. 1, 199-217.
- [26] J. Rogan C. y V. Muñoz G. *Apuntes de un curso de programación*. Décima primera edición, revisión 120127-06.
- [27] D. Singerman. *Finitely Maximal Fuchsian Groups*. London Math. Soc. (2), 6, (1972), 29-38.
- [28] D. Singerman. *Subgroups of Fuchsian groups a finite permutation groups*. Bull. London Mathematical Society 2 (1970), 319-323.
- [29] The SAGE Notebook *version 8.2*.
- [30] H. Volklein. *The Image of a Hurwitz Space Under the Moduli Map*. Progress in Galois Theory, pp. 135-150. Dept. of Mathematics, University of Florida, Gainesville, FL 32611.