



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

OPTIMIZACIÓN DE FORMA BAJO INCERTIDUMBRE

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

JUAN JOSÉ GRANIER TORRES

PROFESOR GUÍA:  
JAIME ORTEGA PALMA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
RODRIGO LECAROS LIRA  
JORGE AMAYA ARRIAGADA

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por PIA/Concurso de Apoyo a Centros Científicos y Tecnológicos de Excelencia con Financiamiento Basal AFB170001 CMM UMI 2807 CNRS y Fondecyt 1171854

SANTIAGO DE CHILE  
2019

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR  
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO  
POR: JUAN JOSÉ GRANIER TORRES  
FECHA: 09/07/2019  
PROF. GUÍA: JAIME ORTEGA PALMA

## OPTIMIZACIÓN DE FORMA BAJO INCERTIDUMBRE

El objetivo principal de este trabajo es estudiar un problema inverso geométrico con ruido estocástico, que consiste en una EDP lineal asociada a un funcional no lineal de mínimos cuadrados. Posteriormente se quiere realizar un proceso de reconstrucción numérica con el objetivo de comparar la solución obtenida de forma determinista con la solución obtenida con ruido estocástico. Para la primera parte de este trabajo nos basamos en el estudio de Allaire y Dapogny [21]. Para la otra parte nos basamos en el método **level set** introducido por Osher y Sethian [18]. Dentro del enfoque estándar de resolución de problemas inversos geométricos está el parametrizar la forma geométrica y aplicar métodos de regularización a la parametrización. Este enfoque sufre de la limitación que para obtener aproximaciones convergentes se tiene que tener un conocimiento a priori de la estructura y topología de la forma geométrica buscada. Por la no linealidad del funcional, las derivadas de forma de segundo orden son complicadas de trabajar en su forma explícita, motivo por el cual es complicado aplicar un método de level set desde el punto de vista clásico, nos basaremos en la idea de level set para aplicar un método que solo use las derivadas de forma de primer orden.



*A mi familia y amigos*



# Agradecimientos

Agradezco a mi familia que siempre me ha apoyado y ha estado conmigo en todo este proceso, sobre todo a mis papás, muchas gracias por todo.

Agradezco a mis profesores que dieron mi formación académica y me mostraron este amplio abanico de posibilidades, en especial agradezco a Jaime Ortega y Rodrigo Lecaros, su humanidad y enseñanzas permitieron que este trabajo tomara forma. Mención especial para Cristián Reyes, sin él jamás me habría interesado en este mundo.

Agradezco a los chicos de la oficina 436, siempre entregando nuevas energías y risas.

Agradezco al Hugo, al Javier, al Roberto y a todos los chicos de postgrado, sin ustedes no sería lo mismo.

Agradezco al estimadísimo, Raid, Kevin, Zelada, Hasson y otros tantos por sus buenos ratos de ocio y buenas conversaciones.

Agradezco al Edu, la Cami, el Waldo, la Javi y un montón más que me han marcado para bien en este departamento.

Agradezco a la Silvia, la Kuky, la Karen, Eterin, don Oscar y todos los funcionarios que con su hospitalidad y disposición nunca me han dejado indiferente.

Agradezco a mis amigos, los que siempre están presentes como el Crew y aquellos que incluso desde la distancia dan su apoyo y nunca dejan de sorprenderte, en las buenas y en las malas.

Agradezco a aquellas personas que alguna vez estuvieron presentes en mi vida, en buenos y malos términos.

Por último agradezco a aquellas personas que con o sin intención han hecho más difícil todo este proceso, mi vida. Sin estas personas no me habría vuelto más fuerte y no sería la persona que soy hoy. No hay que agradecer solo lo bueno.

Por tema de espacio omito un montón de gente, pero estoy seguro que muchos ya saben tienen mi agradecimiento.



# Tabla de Contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Problemas Inversos</b>	<b>4</b>
<b>3. Estudios de EDP's usando el método de los elementos finitos</b>	<b>6</b>
3.1. El método de los elementos finitos . . . . .	6
3.2. Elementos finitos en el caso unidimensional . . . . .	7
3.3. Elementos finitos en el caso multidimensional . . . . .	9
<b>4. Optimización de forma</b>	<b>12</b>
4.1. Ideas previas . . . . .	12
4.2. Definiciones básicas . . . . .	14
4.3. Diferenciación del problema de contorno asociado . . . . .	16
4.4. Diferenciación del operador integral asociado . . . . .	17
<b>5. El método Level Set y aplicaciones</b>	<b>21</b>
5.1. Funciones implícitas y funciones de distancia signada . . . . .	21
5.2. Un primer ejemplo . . . . .	22
5.3. Uso de la diferenciación Upwind . . . . .	22
5.4. Movimiento por curvatura media . . . . .	23
5.5. Movimiento en la dirección normal . . . . .	24
5.6. Resolución de ecuaciones tipo Hamilton-Jacobi . . . . .	25
5.7. Extensión del campo de velocidades . . . . .	26
5.8. El método level set para interfaces en evolución . . . . .	27
5.9. Level set en cálculo sobre formas . . . . .	28
5.10. Optimización de forma basada en level set . . . . .	29
<b>6. Desarrollo y resultados obtenidos</b>	<b>31</b>
6.1. Idea de solución . . . . .	31
6.2. Desarrollo analítico . . . . .	32
6.3. Desarrollo numérico y resultados . . . . .	39
6.3.1. Caso no perturbado . . . . .	40
6.3.2. Caso perturbado . . . . .	50
<b>Discusión</b>	<b>64</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>65</b>





# Índice de Tablas

6.1. Mediciones error estimado . . . . .	63
--	----

# Índice de Figuras

6.1. Primer intento problema no perturbado . . . . .	42
6.2. Corrección problema no perturbado con $\varepsilon_2 = 0,03$ . . . . .	45
6.3. Corrección problema no perturbado con $\varepsilon_2 = 0,0042$ . . . . .	48
6.4. Primer intento problema perturbado . . . . .	52
6.5. Problema perturbado ponderación adjunto $\varepsilon_a = 0,0001$ . . . . .	55
6.6. Problema perturbado ponderación funcional $\varepsilon_f = 0,0001$ . . . . .	58
6.7. Problema perturbado $\varepsilon_2 = 0,0075$ . . . . .	61
6.8. Error estimado . . . . .	63

# Capítulo 1

## Introducción

Un área de estudio a nivel aplicado en Ecuaciones Diferenciales Parciales corresponde a los Problemas Inversos.

Uno de los primeros resultados históricamente relevantes empieza con el trabajo de Calderon [1], donde estudia el problema inverso con aplicaciones en la determinación de la conductividad eléctrica de un medio mediante la medición de voltaje y corrientes en su frontera. Dicho trabajo es continuado por Kohn y Vogelius [2], obteniendo como respuesta la unicidad de la conductividad eléctrica y todas sus derivadas a partir de las mediciones de voltaje y corrientes en su frontera, esto suponiendo suficiente suavidad cerca de la frontera. Siguiendo la misma línea de trabajo, Sylvester y Uhlmann [3] concluyen la identificabilidad para una conductividad regular que sea  $C^2(\overline{\Omega})$ , para  $n \geq 3$ , posteriormente Alessandrini [4] prueba la estabilidad logarítmica para  $\gamma \in H^s(\Omega)$ , con  $s > \frac{n}{2} + 2$ . Otros trabajos como los de Kenig y Astala [5, 6] trabajan sobre el mismo problema pero en contextos más generales y refinados.

Uno de los grandes problemas en Ecuaciones Diferenciales Parciales corresponde a las ecuaciones de Navier Stokes, de la cual aún hasta el día de hoy no hay solución analítica global. Algunos trabajos previos como Friz y Álvarez [8, 9] se enfocan en la identificabilidad bajo condiciones de continuidad y en la reconstrucción numérica, mientras que otros trabajos posteriores como Godoy [10] introducen conceptos de la Optimización de Forma y la Sensibilidad Topológica para resolver este problema.

A veces también queremos datos geométricos de los problemas, por ejemplo la estimación de tamaño de un objeto inmerso en una región. En este aspecto aparecen los Problemas Inversos Geométricos, que en términos simplificados estudian la detección de geometrías en el espacio donde se define el problema. Los primeros trabajos de Alessandrini y Nguyen [14, 15] corresponden a resultados previos que en Zamorano [26] usan para trabajar sobre la estimación de tamaño de un obstáculo en un fluido de Stokes en estado estacionario.

Ultimamente se ha introducido el concepto de estocaticidad, que en algunos casos podemos suponer corresponden a perturbaciones pequeñas sobre el dominio.

Un primer enfoque es más bien continuo, correspondiendo al uso de Ecuaciones Diferencia-

les Estocásticas en su enfoque clásico. Una de las principales motivaciones de la introducción de EDE's es el análisis de ecuaciones de evolución estocásticas, en particular ecuaciones parabólicas bajo perturbaciones pequeñas o locales. Uno de los primeros trabajos en introducir el uso tanto de Optimización de Forma como de Problemas Inversos Estocásticos corresponde a estimaciones de Carleman para problemas inversos parabólicos y ecuaciones diferenciales parabólicas de Qi Lu [16]. Otros trabajos como el de Nguyen [17] trabajan con problemas parabólicos cuasi-lineales.

Un segundo enfoque más bien discreto corresponde a la discretización de ecuaciones diferenciales estocásticas para la posterior construcción de algoritmos de optimización en los problemas inversos asociados. Dentro de los métodos más usados está el método de curvas de nivel, Osher y Sethian [18] son los primeros en presentar el método basándose en ecuaciones de Hamilton-Jacobi, Dentro de los trabajos más recientes que tratan el caso estocástico y generalizan los problemas al caso no convexo está el trabajo de Lester [19], donde implementan un método estocástico de curva de nivel para Optimización de Forma.

En Allaire y Dapogny [21] estudian una aproximación determinista usando el método de curvas de nivel para un problema de elasticidad lineal. Para la aproximación determinista, usan la esperanza y varianza aproximada mediante linealización, usando aproximaciones de primer y segundo orden de la derivada de forma sobre perturbaciones del tipo implícitas. Toda la teoría e implementación se basa en este tipo de perturbaciones.

En este trabajo queremos ver el análisis y la resolución de problemas no lineales con perturbaciones estocásticas mediante linealización y aproximación determinista. Inicialmente queremos ver qué sucede con perturbaciones explícitas tanto en el funcional como en el dominio. A diferencia de otros trabajos, trataremos la estocaticidad para un problema no lineal, así usando Problemas Inversos y Optimización de Forma en conjunto, haremos un modelo analítico y para lo restante implementaremos un algoritmo de resolución. En este último aspecto trataremos de abordar el problema desde otro enfoque, pues no se puede obtener una linealización de segundo orden, por lo cual el método de curvas de nivel no se puede aplicar a priori.

Para todo esto, empezaremos con un problema escalar con restricciones asociadas a un funcional de mínimos cuadrados, una vez estudiado el problema escalar queremos estudiar un problema vectorial como el problema de Stokes, el caso de 2 dimensiones determinista lo pueden ver en Dapogny [22]

Dicho lo anterior, consideramos el siguiente problema escalar con condiciones tipo Dirichlet

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0, \Omega \setminus \bar{D} \\ u &= f, \partial\Omega \\ u &= 0, \partial D\end{aligned}$$

y su funcional de mínimos cuadrados asociado

$$J(D) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right|^2$$

Primero veremos una modificación en el argumento del funcional, posteriormente veremos una modificación en el dominio. Considerando resultados obtenidos en J.H. Ortega [8] y que este problema es una versión escalar y simplificada de un problema tipo Stokes, no es difícil ver que el problema inverso asociado satisface identificabilidad y una estabilidad, si bien débil, lo suficiente para que la solución del problema de optimización sin perturbación asociado al problema sea  $J(D) = 0$ . Queremos ver cómo cambia el óptimo al introducir las perturbaciones, pero antes necesitamos algunos conceptos analíticos y de análisis numérico.

# Capítulo 2

## Problemas Inversos

La idea de un problema inverso es que uno quiere encontrar ciertos parámetros o ciertos coeficientes de un modelo y el acceso a estos es restringido, por lo que debe tomar mediciones indirectas de las cuales se pueden recuperar ciertos parámetros o coeficientes. Los problemas inversos tienen aplicaciones en diversas disciplinas como por ejemplo: inspección geológica, sensores remotos, imágenes médicas, prospección acústica y electromagnética, tomografía acústica oceánica, diseño aeroespacial, entre otras. Ahora, un problema inverso se dice geométrico si lo que se quiere recuperar es una forma geométrica, es decir la posición y la forma de un cierto cuerpo geométrico que es innaccesible y que se encuentra inmerso dentro de un dominio más grande, sobre cuya frontera se pueden realizar mediciones. A continuación presentamos algunas definiciones previas para entender un problema inverso

Diremos que una aplicación  $\Lambda$  es un **problema directo** o un **operador de mediciones** si a cada valor  $x \in X$  del parámetro le asocia las observaciones del modelo  $y \in Y$ , con  $X, Y$  espacios de Banach o Hilbert, es decir

$$y = \Lambda(x), x \in X, y \in Y$$

Luego, se define el **problema inverso** como aquél que busca determinar  $x$  a partir de las mediciones  $y$  tal que se tenga lo anterior.

Para entender la teoría de los problemas inversos se estudia a modo de ejemplo uno de los problemas inversos más famosos que existen, que corresponde al problema inverso de conductividad eléctrica, también conocido como el problema de Calderón.

Algunos supuestos supuestos previos son

1.  $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 2$  es un dominio acotado con frontera suave que representa un cuerpo conductor eléctrico.
2. La conductividad del cuerpo se representa por una matriz simétrica y definida positiva  $\gamma = (\gamma_{ij})$  en  $\Omega$
3. Suponiendo que no existen sumideros o fuentes de corriente, por la ley de Ohm la ecuación para el potencial  $u$  en  $\Omega$  está dada por

$$\sum_{i,j}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \gamma_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0, \text{ en } \Omega$$

4. Conociendo el potencial  $f$  en  $\partial\Omega$ , el potencial inducido  $u$  en  $\Omega$  satisface el problema de Dirichlet

$$\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \gamma_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0, \text{ en } \Omega$$

$$u = f \text{ sobre } \Omega$$

Definimos la **aplicación voltaje a corriente o Dirichlet a Neumann**  $\Lambda_\gamma$  como

$$\Lambda_\gamma(f) = \sum_{i,j=1}^N \gamma_{ij} \nu_i \frac{\partial u}{\partial x_j} \Big|_{\partial\Omega}$$

que corresponde a la medición del flujo de corriente generado en la frontera por el potencial aplicado sobre la misma. Acá  $u$  es la solución del problema anterior y  $\nu_i$  es la componente  $i$ -ésima del vector unitario normal exterior a  $\partial\Omega$ . Luego, el problema inverso de conductividad eléctrica corresponde a la determinación de  $\gamma$  a partir del conocimiento de  $\Lambda_\gamma$ .

El primero en plantear este problema fue Calderón, consideró este problema para conductividades isotrópicas, es decir, que no dependen de la dirección. Suponiendo que  $\gamma(x)$  es una función real y positiva y considerando la matriz real  $\gamma(x)I$ , la ley de Ohm para el potencial  $u$  en  $\Omega$  y la aplicación Dirichlet a Neumann se reducen a

$$\mathbf{div}(\gamma \nabla u) = 0 \text{ en } \Omega$$

y

$$\Lambda_\gamma(f) = \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}$$

respectivamente. Calderón demostró que la derivada Fréchet en conductividades constantes de la aplicación  $\gamma \rightarrow Q_\gamma$ , con  $Q_\gamma$  la forma cuadrática asociada a  $\Lambda_\gamma$ , es inyectiva.

Este problema de carácter teórico tiene aplicaciones prácticas, por ejemplo en tomografía por impedancia eléctrica.

Por lo general, abordar un problema inverso es un proceso en el cual surgen varias preguntas que pueden ilustrarse en el problema de Calderón [1]. En este problema los problemas que aparecen son

1. Inyectividad de  $\Lambda$  (Identificabilidad)
2. Continuidad de  $\Lambda$  y  $\Lambda^{-1}$ , si existe (Estabilidad)
3. Encontrar el rango de  $\Lambda$  (Caracterización)
4. Fórmula para recuperar  $\gamma$  a partir de  $\Lambda_\gamma$  (Reconstrucción)
5. Obtener un algoritmo para encontrar una aproximación de  $\gamma$  (Reconstrucción numérica)



# Capítulo 3

## Estudios de EDP's usando el método de los elementos finitos

### 3.1. El método de los elementos finitos

El método de los elementos finitos es un método numérico usado en la aproximación de soluciones de ecuaciones en derivadas parciales para el modelamiento de diversos problemas de ingeniería y física. Este método está basado en la formulación variacional del problema.

La idea base de este método es dado un espacio de Hilbert  $V$  y dada la formulación variacional del problema, reemplazarlo por un subespacio  $V_h$  de dimensión finita y luego el problema así aproximado se transforma en un sistema lineal cuya matriz se denomina matriz de rigidez. La ventaja de este método es que podemos elegir la construcción de  $V_h$  de forma tal que este subespacio sea una buena aproximación de  $V$  y que la solución  $u_h \in V_h$  de la formulación variacional esté cerca de la solución exacta  $u \in V$

Para aplicar este método necesitamos un espacio de Hilbert  $V$ , una forma bilineal continua y coerciva  $a(u, v)$ , y una forma lineal  $L(v)$ . Consideramos la formulación variacional siguiente

$$\text{Encontrar } u \in V \text{ tal que } a(u, v) = L(v), \forall v \in V$$

el cual sabemos por el teorema de Lax-Milgram tiene una única solución. Luego lo que queremos hacer es resolver el problema

$$\text{Encontrar } u_h \in V_h \text{ tal que } a(u_h, v_h) = L(v_h), \forall v_h \in V_h$$

La solución de esta aproximación interior es simple como se muestra en el siguiente lema

**Lema 3.1** *Sea  $V$  un espacio de Hilbert real y  $V_h$  un subespacio de dimensión finita. Sea  $a(u, v)$  una forma bilineal continua y coerciva sobre  $V$ , y sea  $L(v)$  una forma lineal continua sobre  $V$ . Entonces, la aproximación interior tiene una única solución. Además, esta solución puede ser obtenida resolviendo un sistema lineal con una matriz definida positiva, y simétrica en el caso de  $a(u, v)$  simétrica*

## 3.2. Elementos finitos en el caso unidimensional

Empecemos presentando el método de los elementos finitos en dimensión  $N = 1$ . Sin pérdida de generalidad se escoge el dominio  $\Omega = ]0, 1[$ . En dimensión 1 una malla es simplemente una colección de puntos  $\{x_j\}_{0 \leq j \leq n+1}$  tal que

$$x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1$$

Por simplicidad consideramos para empezar el siguiente problema modelo

$$\begin{aligned} -u'' &= f, \text{ en } ]0, 1[ \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

el cual se sabe tiene una única solución en  $H_0^1(\Omega)$  si  $f \in L^2(\Omega)$ . En lo que sigue se denota por  $\mathbb{P}_k$  el conjunto de polinomios con coeficientes reales de una variable real y con grado  $\leq k$ .

En el presente ejemplo, usamos el método de los elementos finitos  $\mathbb{P}_1$ , donde usamos el espacio discreto de funciones globalmente continuas que son lineales afin sobre cada elemento, es decir

$$V_h = \{v \in \mathcal{C}[0, 1] \text{ tal que } v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1, \forall 0 \leq j \leq n\}$$

y sobre su subespacio

$$V_{0h} = \{v \in V_h \text{ tal que } v(0) = v(1) = 0\}$$

Luego, el método de los elementos finitos  $\mathbb{P}_1$  es simplemente el método de aproximación variacional interior aplicado a los espacios  $V_h$  y  $V_{0h}$  dados anteriormente. Las funciones de  $V_h$  y  $V_{0h}$  son lineales afines por trozos y se pueden representar con ayuda de funciones base. En efecto, se introduce la función  $\phi$  definida por

$$\phi = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

Si la malla es uniforme, para  $0 \leq j \leq n + 1$  se definen las funciones base

$$\phi_j(x) = \phi\left(\frac{x - x_j}{h}\right)$$

Se tiene el siguiente resultado

**Lema 3.2** *El espacio  $V_h$  definido anteriormente es un subespacio de  $H^1(0, 1)$  de dimensión  $n + 2$  y todo  $v_h \in V_h$  está definido únicamente por sus valores en los vértices  $(x_j)_{0 \leq j \leq n+1}$*

$$v_h(x) = \sum_{j=0}^{n+1} v_h(x_j) \phi_j(x), \forall x \in ]0, 1[$$

La base  $\phi_j$  definida anteriormente permite caracterizar las funciones de  $V_h$  por sus valores en los nodos de la malla. En este caso se habla de elementos finitos de Lagrange.

Ahora se muestra la solución práctica del problema anterior usando el método de elementos finitos  $\mathbb{P}_1$ . En efecto, tenemos que la formulación variacional de la aproximación interna es encontrar  $u_h \in V_{0h}$  tal que

$$\int_0^1 u'_h(x)v'_h(x)dx = - \int_0^1 f(x)v_h(x)dx, \forall v_h \in V_{0h}$$

Si descomponemos  $v_h$  en la base  $(\phi_j)_{1 \leq j \leq n}$  y tomamos  $v_h = \phi_i$  se llega a

$$\sum_{j=1}^n u_h(x_j) \int_0^1 \phi'_j(x)\phi'_i(x)dx = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx$$

Denotando por  $U_h = (u_h(x_j))_{1 \leq j \leq n}$   $b_h = \left( \int_0^1 f(x)\phi_i(x) \right)_{1 \leq i \leq n}$  e introduciendo la matriz de rigidez

$$\mathcal{K}_h = \left( \int_0^1 \phi'_j(x)\phi'_i(x)dx \right)_{1 \leq j \leq n}$$

la formulación variacional en  $V_{0h}$  se reduce a resolver en  $\mathbb{R}^N$  el sistema lineal

$$\mathcal{K}_h U_h = b_h$$

Probemos la convergencia del método de los elementos  $\mathbb{P}_1$  en una dimensión, lo primero que haremos es definir un operador de interpolación  $\tau_h$

**Definición 3.3** *El operador de interpolación  $\mathbb{P}_1$  es el operador lineal  $\tau_h$  de  $H^1(0,1)$  en  $V_h$  definido por*

$$(\tau_h v)(x) = \sum_{j=0}^{n+1} v_{x_j} \phi_j(x), \forall v \in H^1(0,1)$$

La convergencia de los elementos finitos  $\mathbb{P}_1$  se basa en el siguiente lema.

**Lema 3.4** (Interpolación) *Sea  $\tau_h$  el operador de interpolación  $\mathbb{P}_1$ . Para todo  $v \in H^1(0,1)$  se tiene*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - \tau_h v\|_{H^1(0,1)} = 0$$

Ahora, si además  $v \in H^2(0,1)$ , entonces existe una constante  $C$  independiente de  $h$  tal que

$$\|v - \tau_h v\|_{H^1(0,1)} \leq C \|v''\|_{L^2(0,1)}$$

**Teorema 3.5** *Sean  $u \in H^1_0(0,1)$  y  $u_h \in V_{0h}$  las soluciones del problema de Dirichlet y de su aproximación mediante formulación variacional, respectivamente. Entonces, el método de los elementos finitos  $\mathbb{P}_1$  converge, i.e*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(0,1)} = 0$$

Además, si  $u \in H^2(0,1)$ , entonces existe una constante  $C$  independiente de  $h$  tal que

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq Ch \|u''\|_{L^2(0,1)} = Ch \|f\|_{L^2(0,1)}$$

Ahora consideremos el método de los elementos finitos  $\mathbb{P}_2$  para el caso unidimensional, usaremos el espacio discreto

$$V_h = \{v \in \mathcal{C}[0,1] \text{ tal que } v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_2, \forall 0 \leq j \leq n\}$$

y su subespacio

$$V_{0h} = \{v \in V_h \text{ tal que } v(0) = v(1) = 0\}$$

Luego, el método de los elementos finitos  $\mathbb{P}_2$  corresponde a la aproximación variacional interior de estos espacios. Estos están compuestos de funciones continuas, cuadráticas por trozos que pueden ser representadas con la ayuda de funciones base muy simples

Se introducen los puntos medios de los intervalos  $[x_j, x_{j+1}]$  definidos por  $x_{\frac{j+1}{2}} = x_j + \frac{h}{2}$  para  $0 \leq j \leq n$ . Se definen las funciones de referencia

$$\phi(x) = \begin{cases} (1+x)(1+2x), & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ (1-x)(1-2x), & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

y

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 - 4x^2, & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{si } |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

En el caso de la malla uniforme se definen las funciones base  $\psi_j(x) = \phi\left(\frac{x-x_j}{h}\right)$ ,  $0 \leq j \leq n+1$  y  $\psi_{\frac{j+1}{2}} = \psi\left(\frac{x-x_{\frac{j+1}{2}}}{h}\right)$ ,  $0 \leq j \leq n$

### 3.3. Elementos finitos en el caso multidimensional

Ahora estudiemos brevemente el caso de dimensión  $N \geq 2$ . Por simplicidad mostraremos los resultados para  $N = 2$ , si bien se pueden extender para  $N \geq 3$

Consideremos el siguiente problema

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \text{ en } \Omega \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{aligned}$$

el cual se sabe que tiene una única solución en  $H_0^1(\Omega)$ , si  $f \in L^2(\Omega)$ .

En lo que sigue supondremos que el dominio  $\Omega$  es un poliedro, i.e  $\bar{\Omega}$  es una unión finita de poliedros de  $\mathbb{R}^N$

Acá veremos la definición de una malla del dominio  $\Omega$  formada por triángulos en el caso  $N = 2$  dimensiones y por tetraedros en el caso de  $N = 3$  dimensiones. Los triángulos y

tetraedros están dentro de la familia más general de  $N$ -simplices. Se dice que  $K$  es un  $N$ -simplex de  $\mathbb{R}^N$  si es la envoltura convexa de  $N + 1$  puntos  $(a_j)_{1 \leq j \leq N+1}$  de  $\mathbb{R}^N$ , llamados los vértices de  $K$ .

**Definición 3.6** Sea  $\Omega$  un poliedro abierto conexo de  $\mathbb{R}^N$ . Una **mallla triangular** o una **triangulación** de  $\overline{\Omega}$  es un conjunto  $\mathcal{T}_h$  de  $N$ -simplices  $(K_i)_{1 \leq i \leq n}$  que satisface

1.  $K_i \subset \overline{\Omega}$  y  $\overline{\Omega} = \cup_{i=1}^n K_i$
2. La intersección  $K_i \cap K_j$  de dos  $N$ -simplices distintos es un  $m$ -simplex, con  $0 \leq m \leq N - 1$ , cuyos vértices son también vértices de  $K_i$  y  $K_j$

**Observación** Por convención, el parámetro  $h$  denota el máximo diámetro de los  $N$ -simplices  $K_i$

A continuación estudiamos la convergencia del métodos de los elementos finitos  $\mathbb{P}_k$  para el problema de Dirichlet  $N$ -dimensional, con  $N \geq 2$  definido anteriormente. Para esto se necesitan algunas hipótesis geométricas sobre la calidad de la malla. Para cada  $N$ -simplex  $K$  se introducen dos parámetros geométricos.

El primero de estos parámetros corresponde al diámetro  $\text{diam}(K)$  que se define

$$\text{diam}(K) = \max_{x,y \in K} \|x - y\|$$

mientras que el segundo corresponde al diámetro de la bola más grande contenida en  $K$ , que denotaremos por  $\rho(K)$ , es decir

$$\rho(K) = \max_{B_r \subset K} \text{diam}(B_r)$$

**Definición 3.7** Sea  $(\mathcal{T}_h)$  una colección de mallas de  $\Omega$ . Se dice que esta es una **ucesión de malas regulares** si

1. La sucesión  $h = \max_{K_i \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K_i)$  tiende a 0
2. Existe una constante  $C$  tal que  $\forall h > 0$  y  $\forall K \in \mathcal{T}_h$

$$\frac{\text{diam}(K)}{\rho(K)} \leq C$$

El siguiente teorema establece la convergencia del método de los elementos finitos  $\mathbb{P}_k$  y da una estimación de la tasa de convergencia si la solución es regular.

**Teorema 3.8** Sea  $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$  una sucesión de mallas regulares de  $\Omega$ . Sea  $u \in H_0^1(\Omega)$  la solución del problema modelo y  $u_h \in V_{0h}$  su aproximación interior por elementos finitos  $\mathbb{P}_k$ . Entonces el método de elementos finitos  $\mathbb{P}_k$  converge, i.e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = 0$$

Además, si  $u \in H^{k+1}(\Omega)$  y  $k+1 > \frac{N}{2}$ , entonces se tiene la estimación del error siguiente

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^k \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}$$

donde  $C$  es una constante independiente de  $h$  y de  $u$

# Capítulo 4

## Optimización de forma

Se sabe que el problema inverso de detección de obstáculos dentro de un fluido puede ser formulado como un problema de optimización de forma.

En el contexto de este trabajo nos enfocaremos en un tipo de problemas de optimización de forma, que corresponde al tipo **geométrico**. En este tipo de problema la topología está fija y lo que varía es  $\partial\Omega$ .

Considerando lo anterior, presentaremos el método de diferenciación con respecto al dominio, también conocido como **shape differentiation**, el cual resulta de utilidad en la teoría de optimización de formas.

### 4.1. Ideas previas

Primero hay que entender qué es un problema de optimización de forma.

**Definición 4.1** (Problema de optimización de forma) *Dada un costo o función objetivo  $J$  sobre un dominio  $\Omega$ , se define un **problema de optimización de forma** como el problema de minimizar el costo sujeto a restricciones que llamaremos  $\Omega_{ad}$ . Es decir, el problema*

$$\min_{\Omega \in \Omega_{ad}} J(\Omega)$$

**Observación** En muchos problemas aplicados, la función objetivo  $J(\Omega)$  depende de  $\Omega$  mediante un estado  $z\Omega$  que corresponde a la solución a una EDP definida sobre  $\Omega$

El problema de diferenciación con respecto al dominio que se estudia a continuación tiene su origen en los problemas de diseño óptimo.

Dado un abierto acotado  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$ , con  $N = 2$  o  $3$ , se considera el estado del sistema  $z(\Omega)$

que es la solución de un problema de contorno en  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} Az(\Omega) &= 0, \text{ en } \Omega \\ Bz(\Omega) &= 0, \text{ sobre } \partial\Omega \end{aligned}$$

y se define un costo real por alguna de las funciones

$$J_1(\Omega) = \int_{\Omega} T_1(z(\Omega)) \, dx$$

o

$$J_2(\Omega) = \int_D T_2(z(\Omega)) \, dx$$

o

$$J_3(\Omega) = \int_{\partial\Omega} T_3(z(\Omega))$$

donde  $A, B, T_1, T_2$  y  $T_3$  son operadores en derivadas parciales definidos en todo  $\mathbb{R}^N$  y  $D$  es un abierto fijo en  $\mathbb{R}^N$  tal que  $\overline{D} \subset \Omega$ . Suponiendo ciertas condiciones de regularidad sobre  $\Omega$ , el problema de contorno anterior tiene solución única y lo suficientemente regular para que tengan sentido las funciones de costo anteriores. Luego, el problema de diseño óptimo consiste en resolver un problema de optimización de forma como en, es decir encontrar un  $\Omega^*$  en una familia  $\Omega_{\text{ad}}$  de abiertos admisibles tal que

$$J(\Omega^*) \leq J(\Omega), \forall \Omega \in \Omega_{\text{ad}}$$

donde  $J$  es una de las funciones de costo anteriores. Al ser un problema de optimización, se presentan los 3 problemas siguientes

1. Existencia de un dominio óptimo.
2. Caracterización del o de los dominios óptimos.
3. Construcción de un algoritmo que calcule uno de los dominios óptimos.

Resulta que los problemas (2) y (3) están íntimamente ligados al conocimiento de una derivada de la aplicación

$$\Omega \in \Omega_{\text{ad}} \rightarrow J(\Omega) \in \mathbb{R}$$

A continuación presentamos la definición y el estudio de una derivada de la aplicación anterior. Como  $\Omega_{\text{ad}}$  carece de estructura vectorial, se transforma el problema inicial de la siguiente forma:

Partiendo de un dominio inicial  $\Omega \in \Omega_{\text{ad}}$ , se consideran funciones  $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  suficientemente regulares, se definen nuevos dominios de la forma

$$\Omega + u = \{x + u(x) : x \in \Omega\} = (I + u)(\Omega)$$

A continuación se considera un espacio vectorial normado  $V$  de funciones  $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  tal que para cada  $u \in V, \Omega + u \in \Omega_{\text{ad}}$ . Entonces, para cada  $u \in V$  se define el problema de contorno

$$Az(u) = 0, \text{ en } \Omega + u \quad Bz(u) = 0, \text{ sobre } \partial\Omega + u$$



y se definen los costos reales por

$$\begin{aligned} J_1(u) &= \int_{\Omega+u} T_1(u, z(u)) \, dx \\ J_2(u) &= \int_D T_2(u, z(u)) \, dx \\ J_3(u) &= \int_{\partial\Omega+u} T_3(u, z(u)) \, dx \end{aligned}$$

Con esto se tiene una aplicación

$$u \in V \rightarrow J(u) \in \mathbb{R}$$

El concepto de derivada que se utilizará será el de Fréchet de la aplicación ya definida.

## 4.2. Definiciones básicas

Teniendo la idea del contexto en el cual queremos trabajar, primero debemos definir algunos espacios de funciones.

Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^N$ .

**Definición 4.2** Sea  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Se dice que  $f$  pertenece a  $(Lip(\Omega))^p$  si  $f$  es acotada y globalmente Lipschitziana, es decir

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq C, \forall x \in \Omega \\ &\parallel \\ |f(x) - f(y)| &\leq D |x - y|, \forall x, y \in \Omega \end{aligned}$$

El siguiente lema nos dice que  $Lip(\Omega)$  y el espacio de Sobolev  $W^{1,\infty}(\Omega)$  coinciden.

Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible. Se dice que  $f \in Lip(\Omega)$  si y solo si  $\mathbf{grad} f \in L^\infty(\Omega)^N$ .

**Observación** Acá  $\mathbf{grad} f$  se entiende como el gradiente de  $f$  en el sentido de las distribuciones sobre  $\Omega$

Otro espacio de nuestro interés es el siguiente

**Definición 4.3** Sea  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Se dice que  $f$  pertenece al espacio  $(C_{ab}^k(\Omega))^p$ , con  $k \geq 0$  entero, si  $\forall 0 \leq |\alpha| \leq k$ , existe un representante de la clase  $D^\alpha(\Omega)$  para  $f$  que es una función uniformemente continua y acotada en todo  $\Omega$

Considerando lo anterior, veamos condiciones para que dado un dominio inicial  $\Omega$  de clase  $Lip^k$ ,  $\Omega + u$  siga siendo de clase  $Lip^k$ , con  $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  suficientemente regular.

En primer lugar, notemos que

1. Si  $k \geq 2$  y  $u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ , entonces  $\Omega + u \in \text{Lip}^k$
2. Si  $\Omega$  es de clase  $\text{Lip}^1$  y  $u \in \mathcal{C}_{\text{ab}}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ , entonces  $\Omega + u \in \text{Lip}^1$

Ahora nos interesa ver bajo qué condiciones  $I + u$  es un difeomorfismo. En efecto, tenemos el siguiente resultado

**Lema 4.4** *Sea  $u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  tal que  $\|u\|_k \leq \beta$ , con  $\beta < 1$ . Entonces  $I + u$  es invertible y además  $(I + u)^{-1} = I + v$ , con  $v \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  y  $\|v\|_k \leq C_k \|u\|_k$ , donde  $C_k$  es una constante independiente de  $u$*

Por otra parte, el siguiente lema nos dice que la aplicación  $u \rightarrow \text{Jac}(I + u) = |\det[\partial_j(I + u)_i]|$  es derivable en 0

**Lema 4.5** *Sea  $k \geq 1$ , la aplicación*

$$u \rightarrow \text{Jac}(I + u) = |\det[\partial_j(I + u)_i]|$$

*definida de*

$$\begin{cases} \text{Lip}^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) & \text{en } \text{Lip}^{k-1}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N), & \text{si } k \geq 1 \\ \text{Lip}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) & \text{en } \text{Lip}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N), & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

*es derivable en 0 y su derivada en la dirección  $u$  es  $\text{div}u$*

Ahora queremos estudiar la diferenciabilidad en el origen de la aplicación  $u \rightarrow z(u)$ , con  $z(u)$  definida en el abierto  $\Omega + u$ . con  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  abierto y  $u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ , con  $k \geq 1$ . Como el dominio de esta función varía con  $u$ , no puede ser derivada respecto de  $u$  de la forma usual. Por este motivo se estudiará la diferenciabilidad de sus restricciones a determinados abiertos  $\omega$  en lo que  $z(u)$  está definida para todo  $u$  de norma  $\|u\|_k$  suficientemente pequeña, y así podemos definir a partir de estas restricciones la derivada local en el origen, en todo  $\Omega$

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un abierto. Tenemos que para todo  $u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ , con  $k \geq 1$ , de norma suficientemente pequeña,  $\Omega + u$  es un abierto de  $\mathbb{R}^N$ . Sea  $u \rightarrow z(u)$  tal que para cada  $u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  con  $\|u\|_k$  suficientemente pequeña,  $z(u) \in W^{m,r}(\Omega + u)$ , con  $k \geq m \geq 1$  y  $1 \leq r \leq \infty$ .

Dado  $\omega \subset\subset \Omega$  se toma  $u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  de norma suficientemente pequeña para que  $\omega \subset\subset \Omega + u$ . De esta forma  $z(u)$  estará definida en  $\omega$  y entonces tendrá sentido hablar de la diferenciabilidad en el origen de la función  $u \rightarrow z(u)|_\omega$

**Definición 4.6** *Se dice que la aplicación  $u \rightarrow z(u)$  tiene una derivada local en el origen si para todo abierto  $\omega \subset\subset \Omega$  la aplicación  $u \rightarrow z_\omega(u) \equiv z(u)|_\omega$ , definida en un entorno de 0 en  $\text{Lip}^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  y con valores en  $W^{m,r}(\omega)$ , es Fréchet diferenciable en el origen. En este caso la derivada local en 0 en la dirección  $u$  que será denotada por  $z'(u)$  está definida en todo el dominio  $\Omega$  para cualquier  $u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  por*

$$z'(u) = Dz_\omega(0) = \frac{d}{dt} z_\omega(tu)|_{t=0} \text{ en } \omega, \forall \omega \subset\subset \Omega$$

con  $Dz_\omega(0)$  la derivada Fréchet en el origen de  $u \rightarrow z_\omega(u)$

Supongamos que  $u \rightarrow z(u)$  verifica la condición anterior, se tiene el siguiente resultado

**Teorema 4.7** *Supongamos que la aplicación anterior verifica que  $u \rightarrow z(u) \circ (I + u)$  definida en un entorno de 0 en  $Lip^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  en  $W^{m,r}(\Omega)$  es derivable en 0, con derivada en la dirección  $u$  denotada  $\dot{z}(u)$ . Entonces para cada  $\omega \subset\subset \Omega$  la aplicación  $u \rightarrow z(u)|_\omega$ , considerada como aplicación definida de un entorno de 0 en  $Lip^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  en  $W^{m-1,r}(\omega)$  es derivable en 0. Su derivada en la dirección  $u$  está dada por*

$$z'(u) = \dot{z}(u) - u \cdot \text{grad}z(0)$$

### 4.3. Diferenciación del problema de contorno asociado

Sabemos que habitualmente  $z(u)$  es la solución de un problema de contorno definido en  $\Omega + u$ . Considerando este hecho y la existencia de una derivada local en el origen, se deduce el problema de contorno del cual es solución  $z'(u)$  para cada  $u$ .

**Teorema 4.8** *Supongamos que se cumplen las condiciones del teorema anterior. Sean  $f \in D'(\mathbb{R}^N)$  y  $A$  un operador que aplica de forma lineal y continua  $W^{m-1,r}(\omega)$  en  $D'(\omega)$  para cada abierto  $\omega \subset \mathbb{R}^N$  y verifica que  $\forall u \in Lip^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  tal que  $\|u\|_k$  es suficientemente pequeño se tiene que*

$$Az(u) = f, \text{ en } \Omega + u$$

*Entonces la derivada local en el origen de  $u \rightarrow z(u)$  en la dirección  $u$ , denotada por  $z'(u)$ , verifica*

$$Az'(u) = 0, \text{ en } \Omega$$

Supondremos ahora que se cumplen las hipótesis del teorema y que  $m = r = 1$ .

**Teorema 4.9** *Sea  $\Omega$  un dominio de clase  $Lip^1$ . Supongamos que se cumplen las hipótesis con  $m = r = 1$  y que además*

$$z(0) \in W^{2,1}(\Omega), \forall u \in Lip^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$$

*tal que  $\|u\|_k$  es suficientemente pequeña y  $z(u) = 0$  sobre  $\partial\Omega + u$  Entonces para cada  $\omega \subset\subset \Omega$  la aplicación  $u \rightarrow z_\omega(u) = z(u)|_\omega$ , definida de un entorno de 0 en  $Lip^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  en  $L^1(\omega)$  es derivable en 0*

Como consecuencia de este resultado, se tiene que  $u \rightarrow z(u)$  es localmente derivable en 0 y su derivada local en la dirección  $u$ , denotada por  $z'(u)$ , verifica

$$z'(u) \in W^{1,1}(\Omega)$$

$$z'(u) = -u_n \frac{\partial z(0)}{\partial n} \text{ sobre } \partial\Omega \text{ ( en } L^1(\partial\Omega) \text{ )}$$

## 4.4. Diferenciación del operador integral asociado

Ahora pasamos a otro enfoque el cual será parte del problema en cuestión. En efecto, aplicaremos la teoría de control geométrico que consiste en la determinación de un dominio  $\Omega + u$  para el cual una función

$$u \rightarrow J(u, z(u))$$

definida en una parte de  $\text{Lip}^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ ,  $k \geq 1$  y con valores reales, alcanza un mínimo. Entonces, resulta útil hallar la derivada respecto a  $u$  de la función definida anteriormente para resolver el problema de control geométrico asociado, suponiendo que esta existe. Tenemos 2 casos de diferenciabilidad en el origen de la función antes mencionada. Estos son

$$J(u, z(u)) = \int_{\Omega+u} C(u, z(u)) dx$$

o

$$J(u, z(u)) = \int_{\partial\Omega+u} G(u, z(u)) dS$$

con  $C$  y  $G$  operadores en derivadas parciales definidos en todo  $\mathbb{R}^N$ . Tenemos un primer resultado de la derivabilidad en 0 de  $u \rightarrow \int_{\Omega+u} z(u) dx$

**Teorema 4.10** *Sea  $\Omega$  un dominio de clase  $\text{Lip}^1$ . Supongamos que la aplicación  $u \rightarrow z(u)$  está definida sobre un entorno de 0 en  $\text{Lip}^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  en  $L^1(\Omega + u)$ , con  $k \geq 1$ . Supongamos además que la aplicación  $u \rightarrow z(u) \circ (I + u)$  definida de un entorno de 0 en  $\text{Lip}^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  en  $L^1(\Omega)$  es derivable en 0, con derivada en la dirección  $u$  denotada  $\dot{z}(u)$  y*

$$z(0) \in W^{1,1}(\Omega)$$

Entonces, para todo  $k' \geq \max\{2, k\}$  y para cada abierto  $\omega \subset\subset \Omega$  se tiene que la aplicación  $u \rightarrow z(u)|_{\omega}$  definida en un entorno de 0 en  $\text{Lip}^{k'}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  en  $(C^1(\bar{\omega}))'$  es derivable en 0, luego es localmente derivable en 0. La correspondiente derivada local en 0 en la dirección  $u$  está dada por

$$z'(u) = \dot{z}(u) - u \cdot \text{grad}z(0)$$

Además,  $z'(u) \in L^1(\Omega)$ ,  $\forall u \in \text{Lip}^{k'}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  y la función

$$u \rightarrow \int_{\Omega+u} z(u) dx$$

definida de un entorno de 0 en  $\text{Lip}^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  en  $\mathbb{R}$  es derivable en 0. Su derivada en la dirección  $u$  es

$$\int_{\Omega} z'(u) dx + \int_{\partial\Omega} u_n z(0) dS$$

Se enuncian algunos resultados que permitirán derivar respecto de  $u$  funciones de la forma

$$u \rightarrow \int_{\partial\Omega+u} z(u) dS$$

**Definición 4.11** (Jacobiano tangencial) Sea  $\Omega$  un dominio acotado de clase  $Lip^1$ , sea  $u$  con  $\|u\|_1$  suficientemente pequeña tal que  $\Omega + u$  es un nuevo abierto de clase  $Lip^1$ , se define el **jacobiano tangencial** de  $I + u$  a la función  $Jac_{\partial\Omega}(I + u)$  definida por

$$Jac_{\partial\Omega}(I + u) = |{}^t[\partial_j(I + u)_i]^{-1} \cdot n| Jac(I + u) \text{ sobre } \partial\Omega$$

**Observación** Se tiene que  $Jac_{\partial\Omega}(I + u) \in L^\infty(\partial\Omega)$

A continuación se presenta un lema de cambio de variables que permite pasar de una integral definida en  $\partial\Omega + u$  a una integral definida en  $\partial\Omega$

**Lema 4.12** (Cambio de variables de una integral de superficie) Sea  $\Omega$  un abierto de clase  $Lip^1$  y acotado, sean  $u \in \mathcal{C}_{ub}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  y  $f \in L^1(\partial\Omega + u)$ . Entonces,

$$f \circ (I + u) \in L^1(\partial\Omega)$$

y además

$$\int_{\partial\Omega+u} f dS = \int_{\partial\Omega} f \circ (I + u) Jac_{\partial\Omega}(I + u) dS$$

**Definición 4.13** (Divergencia tangencial) Sea  $\Omega$  un abierto acotado de clase  $Lip^1$  y sea  $v \in (W^{1,\infty}(\partial\Omega))^N$ . Sea  $\bar{v} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)^N$  una extensión de  $v$  a todo  $\mathbb{R}^N$ . Se define la **divergencia tangencial** de  $v$  a la función  $div_{\partial\Omega}v$ , dada por

$$div_{\partial\Omega}v = div \bar{v} - ({}^t[\partial_j \bar{v}_i] \cdot \bar{n}) \cdot \bar{n} \text{ sobre } \partial\Omega$$

**Observación**  $div_{\partial\Omega}v$  no depende de la extensión  $\bar{v}$  elegida, y

$$div_{\partial\Omega}v \in L^\infty(\partial\Omega)$$

**Lema 4.14** (Diferenciación del jacobiano tangencial) Sea  $\Omega$  un abierto acotado de clase  $Lip^k$ , con  $k \geq 1$ . La aplicación  $u \rightarrow Jac_{\partial\Omega}(I + u)$  está definida de un entorno de 0 en  $\mathcal{C}_{ub}^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  en  $W^{k-1,\infty}(\partial\Omega)$ , si  $k > 1$ , o  $L^\infty(\partial\Omega)$  si  $k = 1$ . Además, es derivable en 0 y su derivada en la dirección  $u$  es  $div_{\partial\Omega}u$

Ahora se tiene el siguiente resultado útil.

**Teorema 4.15** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un abierto acotado de clase  $Lip^2$ , sean  $f \in W^{2,1}(\Omega)$  y  $u \in \mathcal{C}_{ub}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ . Se tiene

$$\int_{\partial\Omega} (u \cdot grad f + f div_{\partial\Omega}u) dS = \int_{\partial\Omega} u_n \left( \frac{\partial f}{\partial n} + Hf \right) dS$$

con  $H$  la curvatura media de  $\partial\Omega$

Este último resultado trata sobre la derivabilidad en 0 de  $u \rightarrow \int_{\partial\Omega+u} z(u)dS$ , es bastante útil al momento de obtener la expansión de primer orden del funcional de costo asociado al problema inverso en estudio.

**Teorema 4.16** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un abierto acotado de clase  $Lip^1$  tal que

1. La aplicación  $u \rightarrow z(u)$  está definida para  $u \in \mathcal{C}_{ub}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  con  $\|u\|_1$  suficientemente pequeño y toma valores en  $W^{1,1}(\Omega + u)$
2. La aplicación  $u \rightarrow z(u) \circ (I + u)$  está definida de un entorno de 0 en  $\mathcal{C}_{ub}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  en  $W^{1,1}(\Omega)$  y es derivable en 0 con derivada en la dirección  $u$  denotada  $\dot{z}(u)$
3.  $z(0) \in W^{2,1}(\Omega)$

Entonces, para todo abierto  $\omega \subset \subset \Omega$  se tiene que la aplicación  $u \rightarrow z_\omega(u) = z(u)|_\omega$  definida de un entorno de 0 en  $\mathcal{C}_{ub}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  en  $L^1(\omega)$  es derivable en 0.

Luego,  $u \rightarrow z(u)$  es localmente derivable en 0. Para cada  $u \in \mathcal{C}_{ub}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ , la derivada local  $z'(u)$  en la dirección  $u$  verifica

$$z'(u) = \dot{z}(u) - u \cdot \text{grad}z(0)$$

y  $z'(u) \in L^1(\partial\Omega)$ . Además, la aplicación

$$u \rightarrow \int_{\partial\Omega+u} z(u)dS$$

definida de un entorno de 0 en  $\mathcal{C}_{ub}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  en  $\mathbb{R}$  es derivable en 0 y su derivada en la dirección  $u$  está dada por

$$\int_{\partial\Omega} z'(u)dS + \int_{\partial\Omega} (u \cdot \text{grad}z(0) + z(0)\text{div}_{\partial\Omega}u) dS$$

Considerando lo anterior, para la variación de la frontera de un dominio Lipschitz de referencia  $\Omega$ , distinguiremos 2 clases de derivadas especiales.

**Definición 4.17** (Derivadas Lagrangiana y Euleriana) 1. Diremos que la función  $z : \Omega \rightarrow z_\Omega$  admite una **derivada material o Lagrangiana**  $\dot{z}(\Omega)$  en un dominio  $\Omega$  dado si la **función transportada**  $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \ni \Theta \rightarrow \bar{z}(\Theta) = z(\Omega_\Theta) \circ (I + \Theta)$  que está definida en una vecindad del  $0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  es diferenciable en  $\Theta = 0$

2. Diremos que la función  $z : \Omega \rightarrow z_\Omega$  admite una **derivada Euleriana**  $z'(\Omega)(\Theta)$  en un dominio  $\Omega$  dado y en la dirección  $\Theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  si admite una derivada material  $\dot{z}(\Omega)(\Theta)$  en  $\Omega$  y existe  $\nabla z \cdot \Theta$ . Uno define entonces

$$z'(\Omega)(\Theta) = \dot{z}(\Omega)(\Theta) - \nabla z(\Omega) \cdot \Theta$$

Otro método para calcular derivadas de forma corresponde al **método de Cea** en el cual básicamente se asume que ya sabemos la función  $\Omega \rightarrow z_\Omega$  es diferenciable y se ocupa un funcional de Lagrangeano donde se buscan los puntos sillars del funcional objetivo. Para más información revisar Allaire [24, 25].

# Capítulo 5

## El método Level Set y aplicaciones

### 5.1. Funciones implícitas y funciones de distancia signada

Cuando se quiere hacer una representación explícita de una interface se escriben explícitamente los puntos que pertenecen a la interface, a modo de ejemplo consideremos  $\partial\Omega = \{-1, 1\}$  dado que  $\Omega = [-1, 1]$ . Ahora, en el caso de la representación implícita consideramos el isocontorno de alguna función, la cual conocemos como función implícita. Continuando con el ejemplo, el isocontorno cero de la función  $\varphi(x) = x^2 - 1$  es el conjunto de todos los puntos tales que  $\varphi(x) = 0$ , lo cual da exactamente  $\partial\Omega = \{-1, 1\}$ . Por otra parte, las funciones implícitas permiten distinguir el interior del exterior del conjunto que representan mediante el signo, tomando valores negativos en el interior y positivos en el exterior. Las funciones implícitas incluyen algunas herramientas geométricas muy poderosas. En efecto, puede pasar que con una interface explícita sea difícil saber si un punto está dentro o fuera de la interface, mientras que con una función implícita basta con ver su signo.

Diremos que una función  $\varphi$  es de **distancia asignada** si  $|\varphi(x)| = d(x), \forall x$ , con  $d$  una distancia que indica la distancia a la que se encuentra un punto del borde de un conjunto dado. Entonces,

1.  $\varphi(x) = d(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega$
2.  $\varphi(x) = -d(x), \forall x \in \Omega^-$
3.  $\varphi = d(x), \forall x \in \Omega^+$

es decir, además nos permite ver si dicho punto está o no en el conjunto, pues toma valores negativos para puntos que están en el conjunto y valores positivos para puntos que están fuera del conjunto.

Las funciones de distancia asignada comparten las propiedades de las funciones implícitas que se acaban de explicar. Además, hay propiedades que solo las funciones de distancia asignada poseen. A modo de ejemplo, si  $\varphi$  es una función de distancia asignada, entonces  $|\nabla\varphi| = 1$ , lo cual permite simplificar varios cálculos donde aparece  $|\nabla\varphi|$



Con el objetivo de aclarar ideas presentamos un ejemplo. Si se tiene que  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ , con  $N \geq 1$  y

$$\partial\Omega = \{x \in \Omega; \|x\| = 1\}$$

Entonces, una función de distancia asignada es  $\varphi(x) = \|x\| - 1$ , con  $\|\cdot\|$  la distancia euclidiana en  $\mathbb{R}^N$ .

## 5.2. Un primer ejemplo

Supongamos que queremos resolver la EDO

$$\frac{dx}{dt} = V(x)$$

sujeta a la restricción  $\varphi(x) = 0$ . En la literatura esto se conoce como una **formulación Lagrangeana** de la ecuación de evolución de la interface.

Para definir la evolución de la función implícita  $\varphi$  se usa la ecuación de convección

$$\varphi_t + V \cdot \nabla\varphi = 0$$

Esta EDP define el movimiento de la interface, sujeta a la restricción  $\varphi(x) = 0$ . Esto corresponde a lo que se conoce como una **formulación Euleriana** de la evolución de la interfase. La EDP se conoce como la **ecuación de level set**, que fue introducida para la evolución numérica de interfaces por Osher y Sethian. Se observa lo complicado que puede ser resolver la última ecuación sobre una malla si el campo de velocidades solo está definido sobre la interfase, por lo que usualmente se asume que  $V$  está definido en toda la malla.

## 5.3. Uso de la diferenciación Upwind

Una vez definidas  $\varphi$  y  $V$  en toda la malla, se pueden aplicar métodos numéricos para evolucionar  $\varphi$  en el tiempo moviendo la interface sobre la malla.

Un método de primer orden bastante simple para la discretización en tiempo e la ecuación de convección es el **método forward Euler** dado por

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} + V^n \cdot \nabla\varphi^n = 0$$

donde  $V^n$  es el campo de velocidades externo al tiempo  $t^n$  y  $\nabla\varphi^n$  evalúa el gradiente usando los valores de  $\varphi$  al tiempo  $t^n$ . Primero se escribe la ecuación anterior en forma expandida como

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} + u^n\varphi_x^n + v^n\varphi_y^n + w^n\varphi_z^n = 0$$

con  $V^n = (u^n, v^n, w^n)$

Por simplicidad, basta trabajar la versión unidimensional, es decir

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} + u^n \varphi_x^n = 0$$

donde el signo de  $u^n$  indica si los valores de  $\varphi$  se están moviendo a la derecha o a la izquierda. Si  $u^i > 0$ , los valores de  $\varphi$  se están moviendo de izquierda a derecha, y el método de las características dice que hay que mirar a la izquierda de  $x^i$  para determinar el valor de  $\varphi$  que habrá en el punto  $x^i$  al final de la iteración, en el caso de que  $u^i < 0$  resulta ser todo lo contrario. Entonces, la discretización upwind se resume como sigue:

1. En cada punto  $x^i$  se define  $\varphi_x^-$  como  $D^- \varphi$  y  $\varphi_x^+$  como  $D^+ \varphi$
2. Si  $u^i > 0$  se aproxima  $\varphi_x$  con  $\varphi_x^-$  y si  $u^i < 0$  se aproxima  $\varphi_x$  con  $\varphi_x^+$
3. Cuando  $u^i = 0$ , el término  $u^i (\varphi_x)_t$  se anula y  $\varphi_x$  no necesita ser aproximado

Resulta que la combinación de la discretización en tiempo **forward Euler** con el esquema de diferenciación **upwind** es una aproximación de diferencias finitas consistente para la ecuación de convección, pues el error de aproximación converge a 0 cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  y  $\Delta x \rightarrow 0$ . De acuerdo con el teorema de equivalencia de Lax-Richtmyer una aproximación de diferencias finitas a una EDP lineal es convergente, i.e converge a la solución corecta cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  y  $\Delta x \rightarrow 0$ , si y solo si esta es estable y consistente. La estabilidad garantiza que pequeños errores en la aproximación no sean amplificados al hacer evolucionar en el tiempo. Puede ser forzada usando la condición CFL, que afirma que las ondas numéricas deberían propagarse al menos tan rápido como las ondas físicas. Esto significa que la velocidad de la onda numérica  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  debe ser al menos tan grande como la velocidad de la onda física  $|u|$ , i.e  $\frac{\Delta x}{\Delta t} > |u|$ . Con esto se llega a la restricción de paso de tiempo CFL de

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{\mathbf{max}\{|u|\}}$$

donde  $\mathbf{max}\{|u|\}$  es escogido como el valor más grande de  $|u|$  sobre la malla. La ecuación de restricción CFL es usualmente forzada escogiendo un número CFL  $\alpha$  con

$$\Delta t (\mathbf{máx}\{|u|\} \Delta x) = \alpha$$

y  $0 < \alpha < 1$

## 5.4. Movimiento por curvatura media

Ahora se discute el movimiento de interfaces para un campo de velocidades auto-generado  $V$  que depende directamente de la función de level set  $\varphi$ . En particular, se considera el movimiento por curvatura media donde la interface se mueve en la dirección normal con una velocidad proporcional a su curvatura, i.e  $V = -b\kappa N$ , donde  $b$  es una constante y  $\kappa$  es la curvatura. Cuando  $b > 0$ , la interface se mueve en la dirección de concavidad y cuando  $b < 0$  en la dirección de convexidad. El campo de velocidades para el movimiento por curvatura media contiene solo una componente en la dirección normal, i.e la componente tangencial es nula. Como  $N$  y  $\nabla\varphi$  apuntan en la misma dirección,  $T \cdot \nabla\varphi = 0$  para cualquier vector tangente

$T$ , por lo cual los componentes de la velocidad tangenciales se anulan al introducirlos en la ecuación de level set. A modo de ejemplo, en el caso bidimensional tenemos  $V = V_n N + V_t T$ , luego la ecuación de level set

$$\varphi_t + (V_n N + V_t T) \cdot \nabla \varphi = 0$$

es equivalente a

$$\varphi_t + V_n N \cdot \nabla \varphi = 0$$

pues  $T \cdot \nabla \varphi = 0$ . Además, como

$$N \cdot \nabla \varphi = \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \cdot \nabla \varphi = \frac{|\nabla \varphi|^2}{|\nabla \varphi|} = |\nabla \varphi|$$

se puede reescribir la ecuación anterior como

$$\varphi_t + V_n |\nabla \varphi| = 0$$

donde  $V_n$  es la componente de la velocidad en la dirección normal.

Tomando  $V_n = -b\kappa$  en la ecuación de level set se obtiene

$$\varphi_t = b\kappa |\nabla \varphi|$$

Luego, tenemos que  $b\kappa |\nabla \varphi|$  es un término parabólico que no puede ser discretizado con un enfoque upwind. Cuando  $\varphi$  es una función de distancia asignada la última ecuación se convierte en la ecuación del calor

$$\varphi_t = b\Delta \varphi$$

donde  $\varphi$  es la temperatura y  $b$  es la conductividad térmica.

Por otra parte, también están las ecuaciones de convección-difusión, que son de la forma

$$\varphi_t + V \cdot \nabla \varphi = b\Delta \varphi$$

y que incluyen tanto los efectos de un campo de velocidades externo como un término de difusión. Si la escribimos como una ecuación de level set queda

$$\varphi_t + V \cdot \nabla \varphi = b\Delta \varphi$$

y las dos pueden ser usadas como una misma ecuación si se mantiene una aproximación de distancias asignada para  $\varphi$  fuera de la interface. Estas ecuaciones pueden ser resueltas usando los métodos upwind sobre el término  $V \cdot \nabla \varphi$  y diferenciación central sobre el término parabólico  $b\Delta \varphi$  o  $b\kappa |\nabla \varphi|$

## 5.5. Movimiento en la dirección normal

Ahora estudiaremos el movimiento de una interface bajo un campo de velocidades generado internamente para un movimiento constante en la dirección normal. Este campo de

velocidades se define como  $V = aN$  o  $V_n = a$ , con  $a$  una constante. La correspondiente ecuación de level set es

$$\varphi_t + a |\nabla\varphi| = 0$$

donde  $a$  puede ser positivo o negativo. Cuando  $a > 0$  la interface se mueve en la dirección normal, mientras que en el caso  $a < 0$  la interface se mueve en la dirección contraria. Cuando  $\varphi$  es una función de distancia asignada, la última ecuación se reduce a  $\varphi_t = -a$  y los valores de  $\varphi$  crecen o decrecen, dependiendo del signo de  $a$ . La discretización en tiempo **Forward Euler** de esta ecuación es  $\varphi^{n+1} = \varphi^n - a\Delta t$ . Cuando  $a > 0$ , el isocontorno  $\varphi = 0$  se convierte en el isocontorno  $\varphi = -a\Delta t$  después de realizar un paso en tiempo. Análogamente, el isocontorno  $\varphi = -a\Delta t$  se convierte en el isocontorno  $\varphi = 0$ . Es decir, la interface se está moviendo en la dirección normal con velocidad  $a$ .

Cuando  $\varphi_0$  es una función de distancia asignada, la solución exacta de la última ecuación está dada por  $\varphi(t) = \varphi_0 - at$ . En cambio, cuando  $\varphi_0$  no es una función de distancia asignada, se debe resolver numéricamente tratándola como una ecuación de tipo Hamilton-Jacobi.

Si queremos realizar la discretización numérica, tomamos  $V = aN$  en la ecuación de convección y usamos un enfoque de diferenciación upwind, i.e se discretiza

$$\varphi_t + \left( \frac{a\varphi_x}{|\nabla\varphi|}, \frac{a\varphi_y}{|\nabla\varphi|}, \frac{a\varphi_z}{|\nabla\varphi|} \right) \cdot \nabla\varphi = 0$$

con diferenciación upwind. Se considera el primer término espacial  $a\varphi_x |\nabla\varphi|^{-1} \varphi_x$ , donde  $a\varphi_x |\nabla\varphi|^{-1}$  es la velocidad en la dirección  $x$ . Como la diferenciación upwind está basada solo en el signo de la velocidad, se puede ignorar el denominador positivo  $|\nabla\varphi|$ , asumiendo que este no es nulo. Luego, el signo de  $a\varphi_x$  puede ser usado para decidir si  $\varphi_x^-$  o  $\varphi_x^+$  debería ser usado para aproximar  $\varphi_x$ . En efecto, cuando  $\varphi_-$  y  $\varphi_+$  tienen el mismo signo, no importa cuál de estos es reemplazado en  $a\varphi_x$ , pues solo el signo de este último determina si se usa  $\varphi_x^-$  o  $\varphi_x^+$ . Este enfoque upwind funciona bien cuando  $\varphi_x^-$  y  $\varphi_x^+$  tienen el mismo signo, pero no ocurre lo mismo cuando estos son de distinto signo. Por ejemplo, si  $\varphi_x^- < 0$  y  $\varphi_x^+ > 0$ ,  $a\varphi_x^- < 0$ , indicando que se debería usar  $\varphi_x^+$ , mientras que  $a\varphi_x^+ > 0$ , indicando que se debería usar  $\varphi_x^-$ . Esta situación corresponde a una situación con forma de "V" donde cada lado de ésta debería moverse hacia afuera. La dificultad en aproximar  $\varphi_x$  surge debido a que uno está en la vecindad de un punto tal que  $\varphi_x = 0$ . Luego, en ese caso el método upwind deja de funcionar, pero se puede usar otro método conocido como el método **Roe-Fix**, el cual se puede consultar en la mayoría de los libros de EDP numérico.

## 5.6. Resolución de ecuaciones tipo Hamilton-Jacobi

A continuación se estudian métodos numéricos para la resolución de ecuaciones tipo Hamilton-Jacobi de la forma

$$\varphi_t + H(\nabla\varphi) = 0$$

donde  $H$  puede depender del espacio y del tiempo. En el caso tridimensional se puede escribir

$$\varphi_t + H(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z) = 0$$

La ecuación de convección en un campo de velocidades generados externamente es una ecuación tipo Hamilton-Jacobi con  $H(\nabla\varphi) = V \cdot \nabla\varphi$ . Si consideramos la condición de Hamilton-Jacobi unidimensional

$$\varphi_t + H(\varphi_x) = 0$$

después de aplicar una derivada espacial en la ecuación se obtiene

$$(\varphi_x)_t + H(\varphi_x)_x = 0$$

Tomando  $u = \varphi_x$  se llega a

$$u_t + H(u)_x = 0$$

que corresponde a una ley de conservación escalar. Luego, en el caso unidimensional hay una correspondencia entre las ecuaciones de Hamilton-Jacobi y las leyes de conservación. La solución  $u$  de una ley de conservación es la derivada de una solución  $\varphi$  de una ecuación de Hamilton-Jacobi. Inversamente, la solución  $\varphi$  de una ecuación de Hamilton-Jacobi es la integral de una solución  $u$  de una ley de conservación.

Una discretización en tiempo **forward Euler** de una ecuación tipo Hamilton-Jacobi se puede escribir como

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} + H^n(\varphi_x^-, \varphi_x^+, \varphi_y^-, \varphi_y^+, \varphi_z^-, \varphi_z^+) = 0$$

donde  $H(\varphi_x^-, \varphi_x^+, \varphi_y^-, \varphi_y^+, \varphi_z^-, \varphi_z^+)$  es una aproximación numérica de  $H(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$ . La condición CFL para la última ecuación es

$$\Delta t \max \left\{ \frac{|H_1|}{\Delta x} + \frac{|H_2|}{\Delta y} + \frac{|H_3|}{\Delta z} \right\} < 1$$

donde  $H_1, H_2$  y  $H_3$  son las derivadas parciales de  $H$  con respecto a  $\varphi_x, \varphi_y$  y  $\varphi_z$ , respectivamente. Una conocida aproximación numérica del hamiltoniano  $H$  en el esquema de Lax-Friedrichs ( $LF$ ) dado por

$$\widehat{H} \left( \frac{\varphi_x^+ + \varphi_x^-}{2}, \frac{\varphi_y^+ + \varphi_y^-}{2} \right) - \alpha^x \left( \frac{\varphi_x^+ - \varphi_x^-}{2} \right) - \alpha^y \left( \frac{\varphi_y^+ - \varphi_y^-}{2} \right)$$

donde  $\alpha^x$  y  $\alpha^y$  son los coeficientes de disipación que controlan la cantidad de viscosidad numérica y están dados por

$$\alpha^x = \max |H_1(\varphi_x, \varphi_y)|, \alpha^y = \max |H_2(\varphi_x, \varphi_y)|$$

## 5.7. Extensión del campo de velocidades

En todo el análisis hecho hasta ahora, se ha asumido que el campo de velocidades  $V$  está definido no solo en la interface, sino que en todo el dominio de trabajo, pero muchas veces no es así. Luego es necesaria una extensión de la velocidad la cual partiendo con una velocidad dada en la interface, construya una extensión de esta a todo el dominio de trabajo. En el

método level set, se considera que una interface propagándose con velocidad  $V$  está inyectada como el nivel cero de una función de dimensión superior  $\varphi$ , obteniendo

$$\varphi_t + V |\nabla\varphi| = 0$$

Aquí se encuentra escondido el hecho que se asume que  $V$  está definido en todos los conjuntos de nivel y no solo en el nivel cero donde está definida la interface. Luego, no está solo la interface inyectada en una función de dimensión superior, sino que también la velocidad  $V$  de la interface está inyectada en una función de dimensión superior. Luego, se debería escribir

$$\varphi_t + V_{\text{ext}} |\nabla\varphi| = 0$$

donde  $V_{\text{ext}}$  es un campo de velocidades tal que en la interface coincide con la velocidad  $V$  dada. Además, se pide que

$$\lim_{x \rightarrow a} V_{\text{ext}}(x) = V(a)$$

donde  $a$  es un punto de la interface.

Cabe preguntarse cuáles son las propiedades deseables de una extensión de velocidad.

Primero, esta debería coincidir con la velocidad dada en la interface. Segundo, es deseable que dicha velocidad mueva los conjuntos de nivel vecinos de forma tal que la función de distancia signada sea preservada. Se considera una función de distancia signada inicial  $\varphi(x, 0)$ , y se construye una extensión de velocidad que satisface

$$\nabla V_{\text{ext}} \cdot \nabla\varphi = 0$$

Si se supone que inicialmente  $|\nabla\varphi(x, 0)| = 1$ , y el movimiento se realiza bajo la ecuación de level set  $\varphi_t + V_{\text{ext}} |\nabla\varphi| = 0$ , entonces se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d|\nabla\varphi|^2}{dt} &= \frac{d}{dt} (\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi) = 2\nabla\varphi \cdot \frac{d}{dt} \nabla\varphi \\ &= -2\nabla\varphi \cdot \nabla V_{\text{ext}} |\nabla\varphi| - 2\nabla\varphi \cdot \nabla |\nabla\varphi| V_{\text{ext}} \end{aligned}$$

## 5.8. El método level set para interfaces en evolución

A continuación se estudia el método level set para movimientos geométricos. En primer lugar un conjunto  $\Omega(t)$  no cambia de forma en la dirección tangencial, luego solo basta analizar la dinámica según la velocidad normal  $V_n$ . Entonces, si un conjunto  $\Omega(t)$  se está moviendo con velocidad normal  $V_n$  en su frontera, entonces se tiene por un resultado estandar para la derivada de integrales dependientes de parámetros

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} w dx = \int_{\partial\Omega(t)} w V_n d\mathcal{H}^{n-1}$$

para toda función suave  $w$  con soporte compacto. Ahora se asume que se tiene dada una velocidad  $V_n$  sobre  $\mathbb{R}^N$  tal que cada conjunto de nivel de la función continua  $\varphi$  se está moviendo con velocidad normal  $V_n$ , es decir, la anterior igualdad se tiene con  $\Omega(t) = \{\varphi(\cdot, t) < \eta\}, \forall \eta \in$

$\mathbb{R}$ . Luego, se puede tomar el valor medio sobre todos los  $\eta$  y obtener a partir de las fórmulas de área y co-área

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \varphi}{\partial t} w dx &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi w dx = -\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \int_{\varphi(\cdot, t) < \eta} w dx d\eta \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \int_{\partial \Omega(t)} w V_n d\mathcal{H}^{n-1} d\eta = -\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi| V_n w dx \end{aligned}$$

Como la función test es arbitraria, esto implica que  $\varphi$  tiene que satisfacer la ecuación de level set

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V_n |\nabla \varphi| = 0, \text{ en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$$

En aplicaciones típicas de movimientos geométricos, la velocidad normal  $V_n$  se obtiene a partir de principios físicos, y puede depender de campos y de cantidades geométricas tales como la normal  $n$  o la curvatura  $\kappa$ . Estas cantidades se expresan en términos de  $\varphi$  como

$$n = \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|}, \kappa = \operatorname{div} n = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \right)$$

En general, la última ecuación no tiene solución clásica, sino que solo una solución viscosa, la cual existe bajo condiciones de regularidad apropiadas en la velocidad. Al calcular soluciones viscosas para las ecuaciones de level set, se obtienen cambios topológicos tales como división y unión de componentes conexas de forma automática, pues estos cambios no son reconocidos ni siquiera por la ecuación de level set. Incluso si no se espera un cambio topológico, uno se beneficia al usar el método level set en lugar de métodos basados en parametrizaciones, pues la discretización de la parametrización no permite controlar la precisión en la resolución de una curva o superficie.

## 5.9. Level set en cálculo sobre formas

El análisis de sensibilidad de formas es un tema clásico en optimización de forma y define un cálculo natural sobre formas. Para formas suficientemente regulares, i.e con frontera de clase  $\mathcal{C}^1$ , hay dos formas equivalentes de introducir sensibilidades de forma, que son el método de deformación y el método de velocidad. Este último método está íntimamente relacionado con el método level set por lo que a continuación se estudia su aplicación al cálculo de formas.

Dado un conjunto  $\Omega$  se puede definir una evolución en tiempo de conjunto  $\Omega(t)$  en un campo de velocidades  $V$  con

$$\Omega(t) = \left\{ y(t) : y(0) \in \Omega, \frac{dy}{dt}(\tau) = V(y(\tau)) \text{ en } (0, t) \right\}$$

La sensibilidad de forma de un funcional  $J$  en dirección de una perturbación  $V \in \mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R}^N)$  está dada por

$$dJ(\Omega; V) = \frac{d}{dt} J(\Omega(t)) |_{t=0}$$

Si la derivada del lado derecho existe,  $dJ(\Omega, \cdot)$  es llamada la **diferencial de forma**

## 5.10. Optimización de forma basada en level set

En esta sección se muestra el uso del método level set en la construcción de métodos eficientes para la optimización de formas. La idea de representar la forma a ser optimizada como el nivel cero de una función continua  $\varphi$  y elegir una velocidad  $V_n$  que haga a esta forma evolucionar hacia la forma óptima. La elección de la velocidad juega el mismo rol que la elección de la dirección de búsqueda en los problemas de optimización, en el caso de espacios vectoriales. Se analizan métodos tipo gradiente y métodos tipo Newton.

Los algoritmos tipo gradiente fueron los primeros en aparecer en la optimización basada en level set y siguen siendo los más usados. La idea en líneas generales es elegir la actualización como un múltiplo del gradiente negativo del funcional a minimizar y elegir un paso de tiempo suficientemente pequeño que garantice una disminución del funcional objetivo. La dificultad en los métodos de optimización basados en level set es la relación entre la actualización (la velocidad) y el gradiente (la sensibilidad de forma), pues no hay estructura de espacio vectorial inherente. Un enfoque clásico en este método es trabajar con problemas donde la sensibilidad de formas está dada por

$$J'(\Omega)V_n = \int_{\partial\Omega} V_n \rho_\Omega d\mathcal{H}^{n-1}$$

con  $\rho_\Omega$  una función de densidad que depende de  $\Omega$ . En este caso se puede interpretar  $\rho_\Omega$  como el gradiente de forma y la velocidad normal puede ser escogida como una extensión de

$$V_n(\cdot, t) = -\rho_\Omega(t), \text{ sobre } \partial\Omega$$

De esta forma se obtiene

$$\frac{d}{dt} J(\Omega(t)) = J'(\Omega(t)) V_n(\cdot, t) = - \int_{\partial\Omega} |\rho_\Omega(t)|^2 d\mathcal{H}^{n-1},$$

y luego la evolución en el tiempo disminuye el funcional objetivo y se detiene solo si el gradiente de forma se anula.

Es importante mencionar que una prueba de convergencia general de métodos tipo gradiente basada en level set es aún un problema abierto, pero se puede mostrar al menos que el funcional objetivo está disminuyendo durante las iteraciones y que el método para solo en un punto estacionario, i.e cuando  $J'(\Omega) = 0$ .

Otro asunto importante que siempre surge en los métodos de optimización es el de escoger el tamaño del paso, ya que si bien la evolución dada por el método del gradiente en tiempo continuo conduce un descenso del funcional objetivo, en la práctica no se puede desarrollar una evolución continua sino más bien una evolución con pequeños pasos de tiempo. Para determinar el paso de tiempo tal que el funcional objetivo disminuya se pueden usar los métodos clásicos como las reglas de Armijo-Goldstein o de Wolfe. Sin embargo, algunos resultados numéricos indican que en algunos casos podría ser conveniente violar estas reglas para escoger el paso e incluso permitir que el funcional objetivo crezca, pues esto generalmente es seguido de una disminución del funcional más pronunciada en las siguientes iteraciones.



Se puede intentar usar un método de Newton basado en level set cuando el funcional de forma admite sensibilidades de forma de segundo orden. De forma análoga al método de Newton estandar en espacios métricos, se puede definir un **paso de Newton** como la minimización de una aproximación cuadrática, en el sentido del cálculo de formas, con respecto a la actualización (la velocidad), es decir

$$\min_{V_n \in \nu(\Omega)} \frac{1}{2} J''(\Omega)(V_n, V_n) + J'(\Omega) V_n + J(\Omega)$$

A partir de este problema variacional cuadrático se obtiene la ecuación de Newton

$$J''(\Omega)(V_n, W_n) = -J'(\Omega) W_n, \forall W_n \in \nu(\Omega)$$

para la velocidad  $V_n$  que minimiza la aproximación cuadrática. Como en el caso del método de Newton clásico, este entrega una dirección de descenso si la forma bilineal  $J''$  es definida positiva, pues en este caso

$$\frac{d}{dt} J(\Omega(t)) = J'(\Omega(t)) V_n = -J''(V_n, V_n) \leq \beta \|V_n\|^2$$

con  $\beta < 0$

# Capítulo 6

## Desarrollo y resultados obtenidos

### 6.1. Idea de solución

A continuación se presenta el problema escalar perturbado de forma explícita en el funcional asociado y un resumen de lo que se hará para resolverlo

Consideremos el siguiente problema con condiciones tipo Dirichlet.

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0, \Omega \setminus \bar{D} \\ u &= f, \partial\Omega \\ u &= 0, D\end{aligned}\tag{6.1}$$

y el funcional de mínimos cuadrados asociado a  $D$

$$J(D) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right|^2\tag{6.2}$$

Este problema ya ha sido estudiado previamente en Simon [23], donde podemos obtener soluciones analíticas explícitas para la primera derivada de forma. Sin embargo, en el caso de la derivada de forma de segundo orden, existe un componente no lineal implícito. Luego, una aproximación como la presentada en Allaire, Dapogny [21] sobre el problema de elasticidad solo requiere a priori una derivada de primer orden, que es más sencilla de explicitar en el caso escalar.

De momento podemos suponer suficiente regularidad, la cual se establecerá a posteriori para los avances correspondientes.

Consideremos una perturbación sobre el argumento del funcional de mínimos cuadrados. En efecto, consideremos una variable aleatoria  $h$  y la perturbación

$$P_h(D) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \pm h \right|^2\tag{6.3}$$

Queremos resolver el problema mín  $F_h(D) = \mathbb{E}(P_h(D)) + \alpha \mathbb{V}(P_h(D))$  el cual está sujeto al problema de Dirichlet asociado al funcional, con  $\alpha$  un parámetro de normalización.

Lo primero que se hace es a nivel teórico obtener las derivadas de forma de primer orden y los problemas adjuntos. Para esto se hará una expansión de Taylor de primer orden sobre el funcional perturbado bajo una variable aleatoria, razón por la cual tiene sentido resolver el problema determinista obtenido al obtener la esperanza y varianza del problema perturbado.

Posterior a la resolución teórica, bajo ciertos supuestos que se presentarán en la próxima sección, usando lo obtenido en la teoría se resuelve el problema numérico. Para esto, una idea de algoritmo a gran nivel es la siguiente que se repite en cada paso, indexado por  $k$  y que consta de 3 niveles.

1. Resolver el problema de Laplace sobre un dominio  $\Omega$  que tiene como obstáculo  $D^k$ , llamamos  $u^k$  a dicha solución. Obtener  $\partial_n u^k|_\Gamma$
2. Resolver el problema de Laplace para  $v^k$ , la variable dual obtenida en el problema adjunto asociado a la derivada de forma. Obtener  $\partial_n v^k$  y así calcular la derivada de forma asociada. Notemos que este segundo paso debe hacerse sobre cada problema dual asociado.
3. En cada paso  $k$ -ésimo encontrar el mejor centro de referencia sobre el cual operar el funcional asociado.
4. Encontrar la mejor dirección de descenso.
5. Optimizar sobre la deformación.
6. Repetir hasta llegar al mínimo

El problema numérico se trabajará usando el software Freefem++.

## 6.2. Desarrollo analítico

La idea es linealizar el problema mediante Taylor, usando la primera derivada de forma sobre la esperanza y varianza. En efecto, tenemos que  $J$  perturbado es de la forma

$$P_h(D) = \frac{1}{2} \int_\Gamma \left| \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \pm h \right|^2 \quad (6.4)$$

Expandiendo  $P_h(D)$ , obtenemos

$$P_h(D) = J(D) \pm \int_\Gamma h \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) + \frac{1}{2} \int_\Gamma h^2 \quad (6.5)$$

Calculemos  $P_h(D)^2$ , tenemos

$$\begin{aligned} P_h(D)^2 &= J(D)^2 + \left( \int_\Gamma h \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \int_\Gamma h^2 \right)^2 \\ &\pm 2 \int_\Gamma h \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \left( J(D) + \frac{1}{2} \int_\Gamma h^2 \right) + J(D) \int_\Gamma h^2 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Calculamos primero la esperanza de  $P_h(D)$ . Usando que  $h$  es variable aleatoria obtenemos mediante Fubini que.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(P_h(D)) &= J(D) \pm \mathbb{E} \left( \int_{\Gamma} h \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \right) + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left( \int_{\Gamma} h^2 \right) \\
&= J(D) \pm \int_{\Gamma} \mathbb{E}(h) \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbb{E}(h^2) \\
&= J(D) \pm \int_{\Gamma} \mathbb{E}(h) \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbb{V}(h)
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Para calcular la varianza de  $P_h(D)$  nos falta calcular la esperanza de  $P_h(D)^2$ . En efecto, reordenando los límites de integración como en el caso anterior, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(P_h(D)^2) &= J(D)^2 + \mathbb{E} \left( \left( \int_{\Gamma} h \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \right)^2 \right) + \frac{1}{4} \mathbb{E} \left( \left( \int_{\Gamma} h^2 \right)^2 \right) \\
&\quad \pm \mathbb{E} \left( \int_{\Gamma} h \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \int_{\Gamma} h^2 \right) + J(D) \int_{\Gamma} \mathbb{V}(h) \\
&\quad \pm 2J(D) \int_{\Gamma} \mathbb{E}(h) \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right)
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Ahora podemos notar que

$$\begin{aligned}
\mathbb{V} \left( \int_{\Gamma} h^2 \right) &= \mathbb{E} \left( \left( \int_{\Gamma} h^2 \right)^2 \right) - \mathbb{E} \left( \int_{\Gamma} h^2 \right)^2 \\
\mathbb{V} \left( \int_{\Gamma} h \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \right) &= \mathbb{E} \left( \left( \int_{\Gamma} h \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \right)^2 \right) - \mathbb{E} \left( \int_{\Gamma} h \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \right)^2
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Entonces, la igualdad anterior nos queda

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(P_h(D)^2) &= J(D)^2 + \mathbb{V} \left( \int_{\Gamma} h \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \right) + \left( \int_{\Gamma} \mathbb{E} \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \right)^2 + \frac{1}{4} \mathbb{V} \left( \int_{\Gamma} h^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{4} \left( \int_{\Gamma} \mathbb{V}(h) \right)^2 \\
&\quad \pm \mathbb{E} \left( \int_{\Gamma} h \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \int_{\Gamma} h^2 \right) + J(D) \int_{\Gamma} \mathbb{V}(h)
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Es directo obtener  $\mathbb{E}(P_h(D))^2$ , en efecto obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(P_h(D))^2 &= J(D)^2 + \left( \int_{\Gamma} \mathbb{E}(h) \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \int_{\Gamma} \mathbb{V}(h) \right)^2 \\
&\quad \pm 2J(D) \int_{\Gamma} \mathbb{E}(h) \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \pm \int_{\Gamma} \mathbb{E}(h) \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \int_{\Gamma} \mathbb{V}(h) + J(D) \int_{\Gamma} \mathbb{V}(h)
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Entonces, podemos obtener una expresión para  $\mathbb{V}(P_h(D))$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(P_h(D)) &= \mathbb{E}(P_h(D)^2) - \mathbb{E}(P_h(D))^2 \\ &= \mathbb{V}\left(\int_{\Gamma} h \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\mathbf{obs}}\right)\right) + \frac{1}{4}\mathbb{V}\left(\int_{\Gamma} h^2\right) \\ &\pm \mathbb{E}\left(\int_{\Gamma} h \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\mathbf{obs}}\right) \int_{\Gamma} h^2\right) - \int_{\Gamma} \mathbb{E}(h) \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\mathbf{obs}}\right) \int_{\Gamma} \mathbb{V}(h) \end{aligned} \quad (6.12)$$

Al igual que en Allaire, Dapogny [21], supondremos que  $h$  se puede escribir como una combinación finita de funciones bases que solo dependen del espacio ponderadas por variables aleatorias. Además, supondremos un punto de partida  $h_0$ . Con esto se tiene que  $h = h_0 + \widehat{h}$ , con  $\widehat{h}(x, \omega) = \sum_{i=1}^n h_i(x)\zeta_i(\omega)$

En primer lugar, notemos que dejando de lado por el momento el orden del resto y su posterior análisis, podemos aproximar por Taylor.

En efecto, tenemos que  $\int_{\Gamma} h \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\mathbf{obs}}\right)$  es aproximadamente

$$\int_{\Gamma} \widehat{h} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\mathbf{obs}}\right) + h_0 \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\mathbf{obs}}\right) \quad (6.13)$$

Ahora para  $\int_{\Gamma} h^2$  tenemos que es aproximadamente

$$\int_{\Gamma} \widehat{h}^2 + 2h_0 \int_{\Gamma} \widehat{h} \quad (6.14)$$

Para  $\int_{\Gamma} h \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\mathbf{obs}}\right) \int_{\Gamma} h^2$  tenemos que es aproximadamente

$$\int_{\Gamma} \widehat{h} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\mathbf{obs}}\right) \int_{\Gamma} \widehat{h}^2 + h_0 \left(\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\mathbf{obs}}\right) \int_{\Gamma} \widehat{h}^2 + 2 \int_{\Gamma} \widehat{h} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\mathbf{obs}}\right) \int_{\Gamma} \widehat{h}\right) \quad (6.15)$$

Luego, aplicando la multilinealidad de la matriz de covarianza obtenemos que para el primer término la varianza es

$$\begin{aligned} &\mathbb{V}\left(\int_{\Gamma} \widehat{h} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\mathbf{obs}}\right) + h_0 \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\mathbf{obs}}\right)\right) \\ &= \mathbb{V}\left(\int_{\Gamma} \widehat{h} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\mathbf{obs}}\right)\right) + h_0^2 \mathbb{V}\left(\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\mathbf{obs}}\right)\right) \\ &\quad + 2\mathbf{Cov}\left(\int_{\Gamma} \widehat{h} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\mathbf{obs}}\right), h_0 \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\mathbf{obs}}\right)\right) \end{aligned} \quad (6.16)$$

Notemos que el término con covarianza es 0, pues para  $X = \int_{\Gamma} \widehat{h} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\mathbf{obs}}\right)$ ,  $Y = h_0 \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\mathbf{obs}}\right)$ , y usando que  $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$  tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= \mathbb{E}\left(\int_{\Gamma} \widehat{h} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\mathbf{obs}}\right)\right) h_0 \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\mathbf{obs}}\right) \\ \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}\left(\int_{\Gamma} \widehat{h} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\mathbf{obs}}\right)\right) h_0 \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\mathbf{obs}}\right) \end{aligned} \quad (6.17)$$

por lo que es 0. Ahora, para concluir esta expresión usamos la expansión de  $\widehat{h}$  en términos de  $h_i$  y  $\zeta_i$ , con esto y la multilinealidad de la varianza en términos de covarianza obtenemos que el primer término es igual a

$$\sum_{i,j} C_i \mathbf{Cov}(\zeta_i, \zeta_j) C_j \quad (6.18)$$

con  $C_i = \int_{\Gamma} h_i \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right)$ .

Para el segundo término obtenemos

$$\begin{aligned} & \mathbb{V} \left( \int_{\Gamma} \widehat{h}^2 + 2h_0 \int_{\Gamma} \widehat{h} \right) \\ &= \mathbb{V} \left( \int_{\Gamma} \widehat{h}^2 \right) + 4h_0^2 \mathbb{V} \left( \int_{\Gamma} \widehat{h} \right) + 2\mathbf{Cov} \left( \int_{\Gamma} \widehat{h}^2, 2h_0 \int_{\Gamma} \widehat{h} \right) \end{aligned} \quad (6.19)$$

Usando nuevamente la expresión para  $\widehat{h}$ , obtenemos para el primer término de la igualdad

$$\begin{aligned} \mathbb{V} \left( \int_{\Gamma} \widehat{h}^2 \right) &= \mathbb{V} \left( \int_{\Gamma} \sum_{i,j} h_i h_j \zeta_i \zeta_j \right) \\ &= \mathbb{V} \left( \sum_{i,j} \zeta_i \zeta_j \int_{\Gamma} h_i h_j \right) \\ &= \sum_{i,j,k,l} A_{ij} \mathbf{Cov}(\zeta_i \zeta_j, \zeta_k \zeta_l) A_{kl} \end{aligned} \quad (6.20)$$

con  $A_{ij} = \int_{\Gamma} h_i h_j$

De forma análoga, obtenemos para el segundo término de la igualdad

$$\begin{aligned} 4h_0^2 \mathbb{V} \left( \int_{\Gamma} \widehat{h} \right) &= 4h_0^2 \mathbb{V} \left( \int_{\Gamma} \sum_i h_i \zeta_i \right) \\ &= 4h_0^2 \mathbb{V} \left( \sum_i \zeta_i \int_{\Gamma} h_i \right) \\ &= 4h_0^2 \sum_{i,j} B_i \mathbf{Cov}(\zeta_i, \zeta_j) B_j \end{aligned} \quad (6.21)$$

con  $B_i = \int_{\Gamma} h_i$

Para el tercer término de la igualdad usamos la expresión de la matriz de covarianza, con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} & 2\mathbf{Cov} \left( \int_{\Gamma} \widehat{h}^2, 2h_0 \int_{\Gamma} \widehat{h} \right) \\ &= 4h_0 \mathbb{E} \left( \int_{\Gamma} \widehat{h}^2, \int_{\Gamma} \widehat{h} \right) - 4h_0 \mathbb{E} \left( \int_{\Gamma} \widehat{h}^2 \right) \mathbb{E} \left( \int_{\Gamma} \widehat{h} \right) \\ &= 4h_0 \sum_{i,j,k} \mathbb{E}(\zeta_i \zeta_j \zeta_k) \int_{\Gamma} h_i h_j \int_{\Gamma} h_k - 4h_0 \sum_{i,j,k} \mathbb{E}(\zeta_i \zeta_j) \mathbb{E}(\zeta_k) \int_{\Gamma} h_i h_j \int_{\Gamma} h_k \end{aligned} \quad (6.22)$$

Para la tercera igualdad, de forma análoga obtenemos que para el primer término

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left( \int_{\Gamma} \widehat{h} \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \int_{\Gamma} \widehat{h}^2 \right) &= \mathbb{E} \left( \sum_{i,j,k} \zeta_i \zeta_j \zeta_k \int_{\Gamma} h_i \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \int_{\Gamma} h_j h_k \right) \\ &= \sum_{i,j,k} \int_{\Gamma} h_i \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \int_{\Gamma} h_j h_k \mathbb{E} (\zeta_i \zeta_j \zeta_k)\end{aligned}\tag{6.23}$$

mientras que para el segundo término

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left( 2h_0 \int_{\Gamma} \widehat{h} \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \int_{\Gamma} \widehat{h} \right) \\ = 2h_0 \sum_{i,j} \mathbb{E} (\zeta_i \zeta_j) \int_{\Gamma} h_i \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \int_{\Gamma} h_j\end{aligned}\tag{6.24}$$

y finalmente para el tercer término obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left( h_0 \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \int_{\Gamma} \widehat{h}^2 \right) \\ = h_0 \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \sum_{i,j} \int_{\Gamma} h_i h_j \mathbb{E} (\zeta_i \zeta_j)\end{aligned}\tag{6.25}$$

Por último, para  $\int_{\Gamma} \mathbb{E}(h) \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \int_{\Gamma} \mathbb{V}(h)$  tenemos que es

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \mathbb{E}(h) \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \int_{\Gamma} \mathbb{V}(h) \\ = \int_{\Gamma} \mathbb{E} \left( h_0 + \sum_j h_j \zeta_j \right) \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \int_{\Gamma} \mathbb{V}(h) \\ = \sum_j \mathbb{E} (\zeta_j) \int_{\Gamma} h_j \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \int_{\Gamma} \mathbb{V}(h) \\ + h_0 \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \int_{\Gamma} \mathbb{V}(h)\end{aligned}\tag{6.26}$$

con  $\mathbb{V}(h)$  igual a

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \mathbb{V} \left( h_0 + \sum_j h_j \zeta_j \right) \\ = \int_{\Gamma} \mathbb{V} \left( \sum_j h_j \zeta_j \right) \\ = \int_{\Gamma} \sum_{i,j} h_i \text{Cov} (\zeta_i, \zeta_j) h_j \\ = \sum_{i,j} \text{Cov} (\zeta_i, \zeta_j) \int_{\Gamma} h_i h_j\end{aligned}\tag{6.27}$$

Para  $\mathbb{E}(P_h(D))$  tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(P_h(D)) &= J(D) \pm \int_{\Gamma} \mathbb{E}(h) \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbb{V}(h) \\ &= J(D) \pm h_0 \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \pm \sum_j \mathbb{E}(\zeta_j) \int_{\Gamma} h_j \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \text{Cov}(\zeta_i, \zeta_j) \int_{\Gamma} h_i h_j\end{aligned}$$

Con esto se obtienen todos los términos de la expresión para la varianza y esperanza de  $P_h(D)$ . Notemos que ahora es fácil calcular las derivadas de forma, pues tenemos aplicaciones escalares lineales. En efecto, tenemos que debemos derivar aquellos términos que son de la forma

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \\ &\int_{\Gamma} h_i \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \\ &\int_{\Gamma} h_i \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \int_{\Gamma} h_j \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right)\end{aligned}\tag{6.28}$$

Sin pérdida de generalidad la expansión de Taylor se hace en torno a  $h_0 = 0$ , pues los términos con  $h_0$  no complican el problema. Luego, queremos minimizar

$$\begin{aligned}J(D) \pm \sum_i \mathbb{E}(\zeta_i) \int_{\Gamma} h_i \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \text{Cov}(\zeta_i, \zeta_j) \int_{\Gamma} h_i h_j + \alpha \sqrt{T}\end{aligned}$$

donde

$$T = \sum_{i,j} C_i \text{Cov}(\zeta_i, \zeta_j) C_j$$

$$\begin{aligned}&+ \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l} A_{ij} \text{Cov}(\zeta_i \zeta_j, \zeta_k \zeta_l) A_{kl} \pm \sum_{i,j,k} \mathbb{E}(\zeta_i \zeta_j \zeta_k) \int_{\Gamma} h_i \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \int_{\Gamma} h_j h_k \\ &- \sum_i \mathbb{E}(\zeta_i) \int_{\Gamma} h_i \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \sum_{i,j} \text{Cov}(\zeta_i, \zeta_j) \int_{\Gamma} h_i h_j\end{aligned}$$

Con  $C_i$  y  $A_{ij}$  definidos como antes. Para los 2 primeros casos, sean

$$\begin{aligned}C &= \sum_{i,j,k} \mathbb{E}(\zeta_i \zeta_j \zeta_k) h_i \int_{\Gamma} h_j h_k \\ D &= \sum_i \mathbb{E}(\zeta_i) h_i \sum_{i,j} \text{Cov}(\zeta_i, \zeta_j) \int_{\Gamma} h_i h_j \\ A &= \sum_i \mathbb{E}(\zeta_i) h_i \\ B &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right)\end{aligned}\tag{6.29}$$



Para el funcional  $F_h(D)$  consideremos los términos de interés para  $\mathbb{E}(P_h(D))$ , el otro caso es análogo. Resulta ser de la forma

$$\int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) (\pm A + B) \quad (6.30)$$

Notar que todos los funcionales no dependen explícitamente de  $\partial D$ , primero se definen las derivadas de forma sin explicitar aún los estados adjuntos.

Definiendo

$$J_1(D) = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \left( \pm A + \frac{1}{2}B \right) \quad (6.31)$$

se tiene

$$J'_1(D, \Theta) = \int_{\Gamma} \frac{\partial u'}{\partial n} (\pm A + B) \quad (6.32)$$

Como no depende explícitamente de  $D$ , la EDP asociada a  $u'$  satisface

$$\begin{aligned} \Delta u' &= 0, \Omega \setminus \bar{D} \\ u' &= 0, \partial\Omega \\ u' &= -(\Theta \cdot n) \frac{\partial u}{\partial n}, \partial D \end{aligned} \quad (6.33)$$

donde la última condición viene de la relación entre la derivada Lagrangeana y la derivada Euleriana de  $u$  y que la derivada tangencial es nula por las condiciones del problema original aplicadas al problema de  $u'$ .

Entonces, integrando por partes con una función test adecuada, una función  $\varphi$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega \setminus \bar{D}} \Delta u' \varphi \\ &= - \int_{\Omega \setminus \bar{D}} \nabla u' \nabla \varphi + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u'}{\partial n} \varphi + \int_{\partial D} \frac{\partial u'}{\partial n} \varphi \\ &= \int_{\Omega \setminus \bar{D}} u' \Delta \varphi + \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u'}{\partial n} \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial n} u' \right) + \int_{\partial D} \left( \frac{\partial u'}{\partial n} \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial n} u' \right) \end{aligned} \quad (6.34)$$

Luego, usando las condiciones del problema sobre  $u'$  y si

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= 0, \Omega \setminus \bar{D} \\ \varphi &= 0, \partial D \end{aligned} \quad (6.35)$$

se tiene

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u'}{\partial n} = \int_{\partial D} \left( -(\theta \cdot n) \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \quad (6.36)$$

Entonces, si

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= 0, \Omega \setminus \bar{D} \\ \varphi &= 0, \partial D \\ \varphi &= (\pm A + B) \chi_{\Gamma}, \partial\Omega \end{aligned} \quad (6.37)$$

se tiene

$$J'_1(D, \Theta) = - \int_{\partial D} (\Theta \cdot n) \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad (6.38)$$

Para el caso de los términos cruzados, haciendo el mismo análisis se obtiene para

$$J_3^{i,j}(D) = \int_{\Gamma} h_i \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \int_{\Gamma} h_j \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \quad (6.39)$$

la siguiente expresión

$$J_3^{i,j}(D, \Theta) = \int_{\Gamma} h_i \frac{\partial u'}{\partial n} \int_{\Gamma} h_j \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) + \int_{\Gamma} h_i \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \int_{\Gamma} h_j \frac{\partial u'}{\partial n} \quad (6.40)$$

Entonces, de forma análoga a los casos anteriores para  $\phi_l$  que cumpla

$$\begin{aligned} \Delta(h_l \phi_l) &= 0, \Omega \setminus \bar{D} \\ \phi_l &= 0, \partial D \\ \phi_l &= \chi_{\Gamma}, \partial \Omega \end{aligned} \quad (6.41)$$

se obtiene

$$J_3^{i,j}(D, \Theta) = - \int_{\Gamma} h_i (\Theta \cdot n) \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \int_{\Gamma} h_j \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) - \int_{\Gamma} h_i \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_{\text{obs}} \right) \int_{\Gamma} h_j (\Theta \cdot n) \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \quad (6.42)$$

Para simplificar el problema numérico, se harán los siguientes supuestos.

1. Las variables aleatorias  $\zeta_i$  son independientes.
2. Las variables  $\zeta_i^2$  son independientes.
3. Para  $i \neq j$ ,  $\zeta_i^3$  es independiente de  $\zeta_j$
4. Para  $i \neq j$ ,  $\zeta_i^2$  es independiente de  $\zeta_j$

Los últimos 2 supuestos sirven para simplificar los términos de orden cúbicos y cuartos. Con esto se trabajará a continuación sobre el problema numérico.

### 6.3. Desarrollo numérico y resultados

Numéricamente se quiere resolver

$$\text{mín } F_h(D) = \mathbb{E}(P_h(D)) + \alpha \sqrt{\mathbb{V}(P_h(D))} \quad (6.43)$$

Veremos el caso  $\alpha = 0$ , con lo cual solo se verá la diferencia entre el valor sin perturbar y el valor esperado dada la perturbación  $h$ .

Una forma de graficar el error es usar el error estimado que es

$$SE = \frac{\|u_h - u_e\|}{\|u_e\|} \quad (6.44)$$

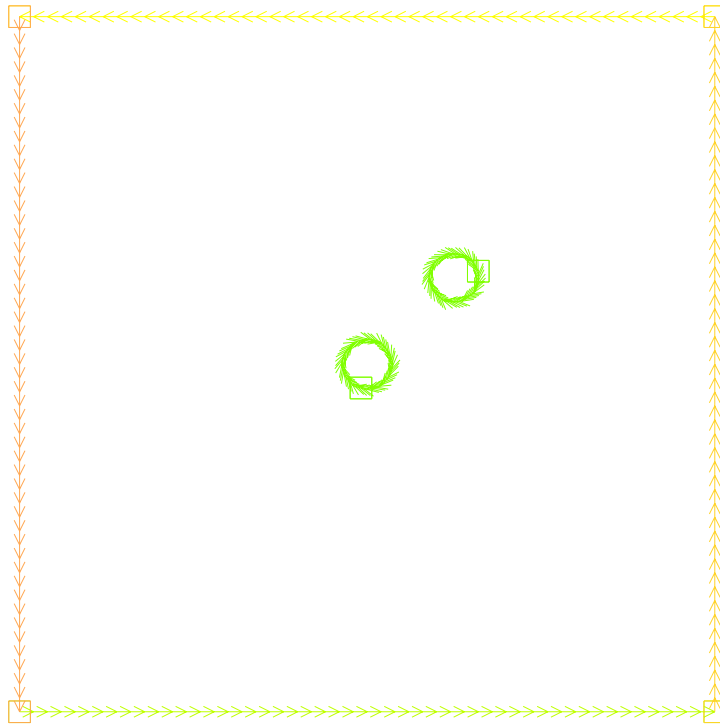
donde  $u_h$  y  $u_e$  son las soluciones del problema perturbado y del problema sin perturbar, respectivamente. La norma  $\|\cdot\|$  es una norma ponderada definida apropiadamente. Para efectos de este trabajo se comparan las soluciones de los problemas adjuntos respectivos.

Para efectos de programación se usó Freefem++ versión 3,46.

### 6.3.1. Caso no perturbado

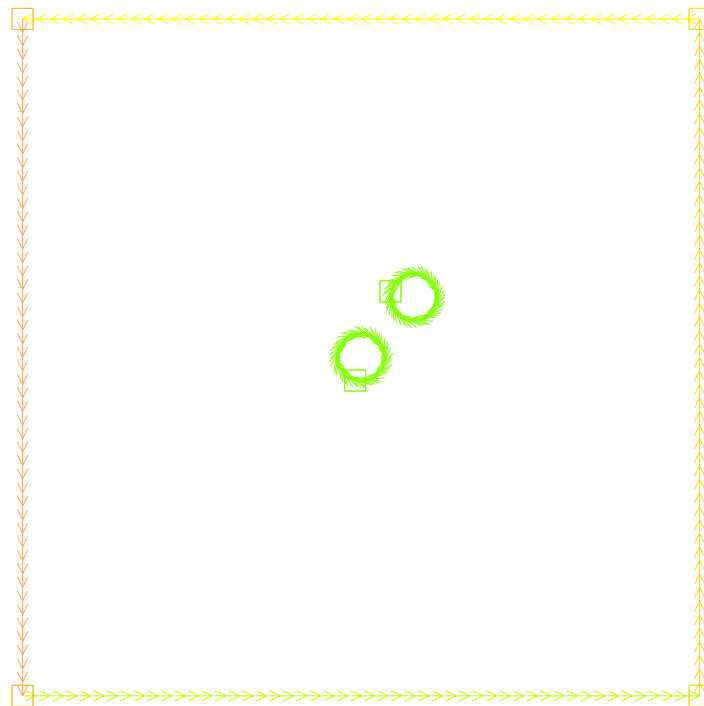
Un primer test del programa da como resultado que después de la iteración 27 la curva deja de seguir tendiendo a la curva test del problema. En efecto esto se puede apreciar en las siguientes imágenes.

iter=1



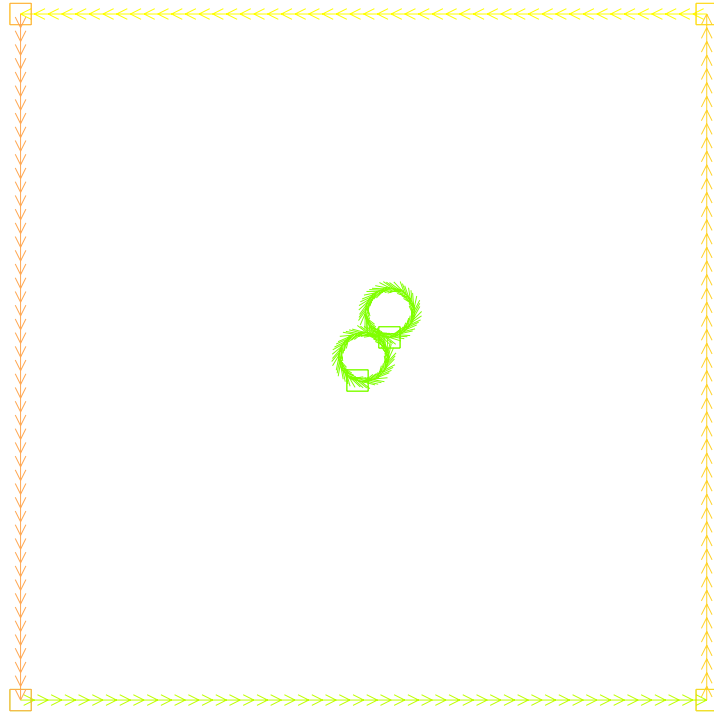
Iter 1

iter=8



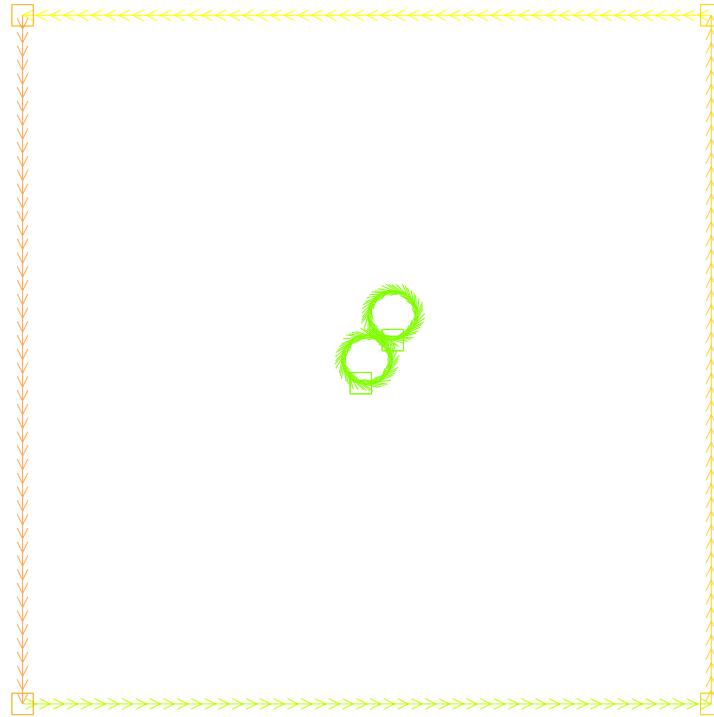
Iter 8

iter=27



Iter 27

iter=100



Iter 100

Figura 6.1: Primer intento problema no perturbado

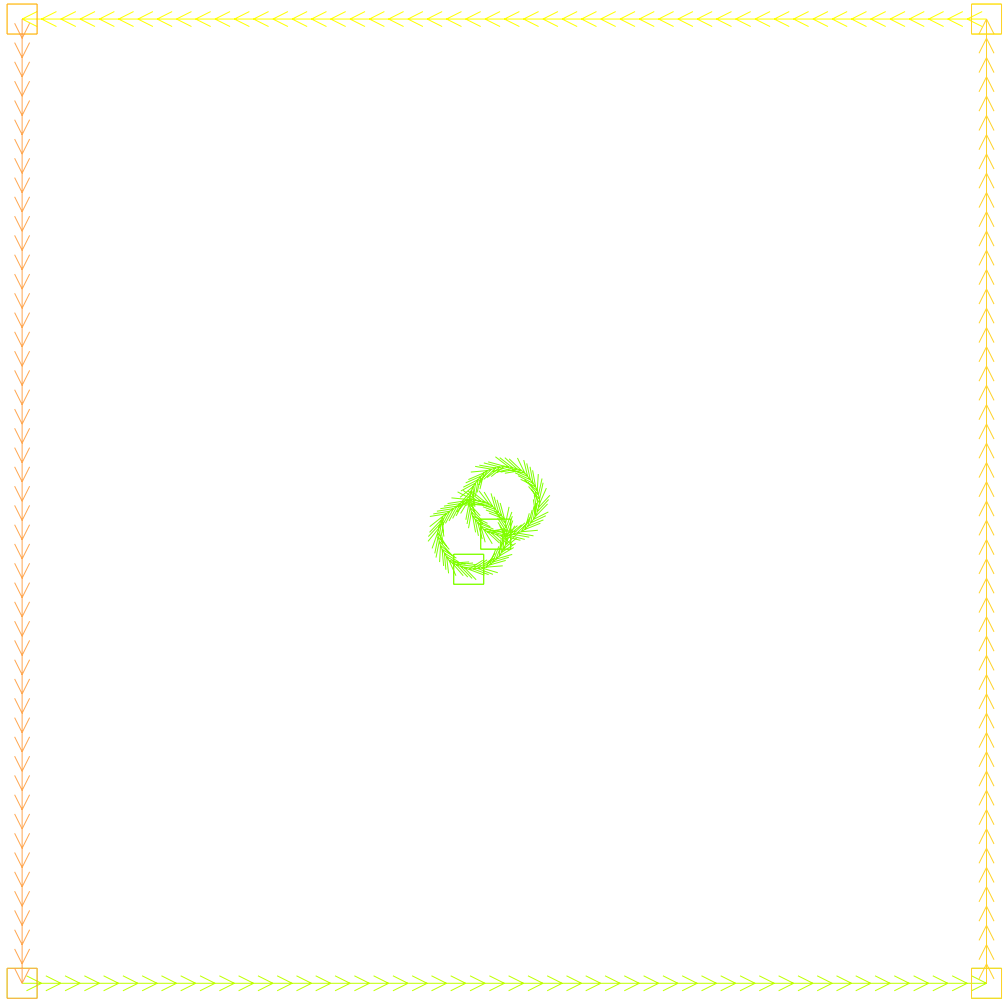
Notamos que al variar los parámetros el problema no perturbado tiende a la misma solución, el problema son las direcciones en que se mueve la curva solución. Se trata de resolver este problema agregando una condición estocástica calculada a partir de la iteración donde tiende la solución a quedar. En efecto, se agregan las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned}dX &= dX + \varepsilon_2 r_1 \\dY &= dY + \varepsilon_2 r_2\end{aligned}\tag{6.45}$$

donde  $dX, dY$  son las direcciones en que nuestra curva solución se mueve,  $\varepsilon_2 \in (0, 1)$  es un parámetro que pondera el salto y  $r_1, r_2$  son las variables estocásticas a valores en  $(0, 1)$  que perturban el movimiento.

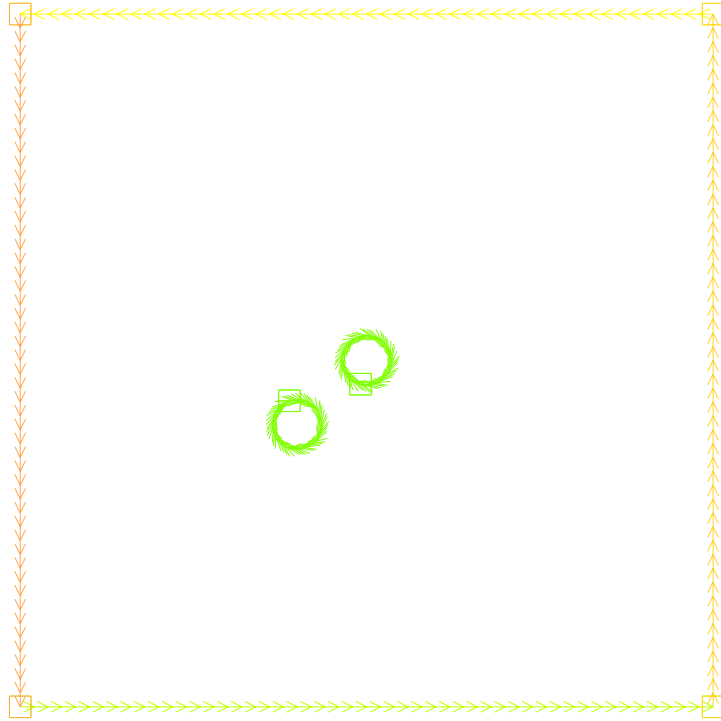
Una primera prueba con esta nueva condición da como resultado

iter=32



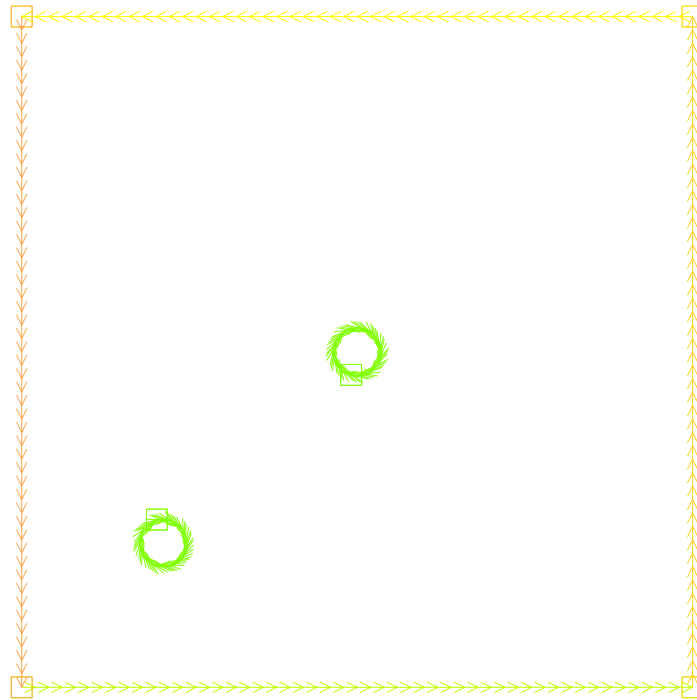
Iter 32

iter=48



Iter 48

iter=100



Iter 100

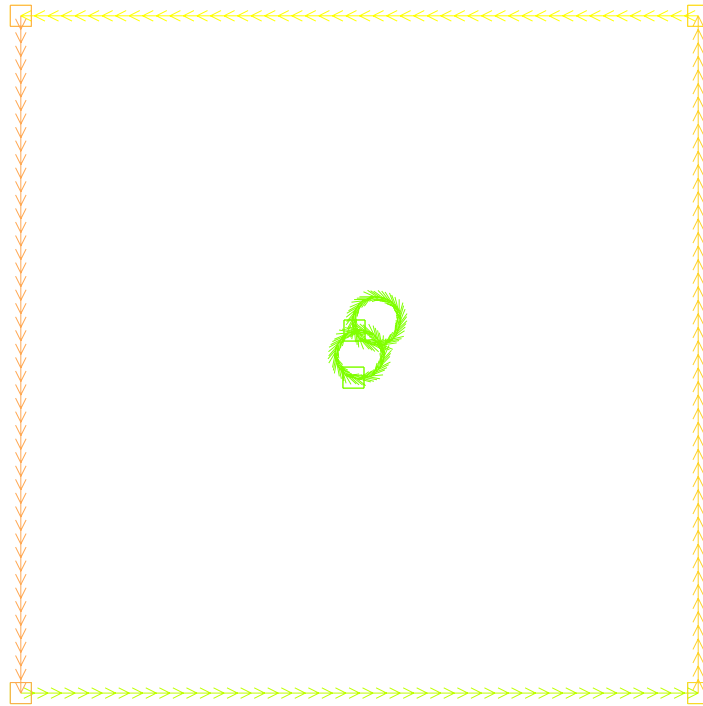
Figura 6.2: Corrección problema no perturbado con  $\varepsilon_2 = 0,03$



Como se puede apreciar, la solución final está alejada de la curva test. Sin embargo, existe un movimiento desde la iteración 28 que antes no existía. Esto da como idea el jugar con esta condición adicional o agregar condiciones según la iteración. Para efectos de este trabajo bastará con considerar solo una condición estocástica.

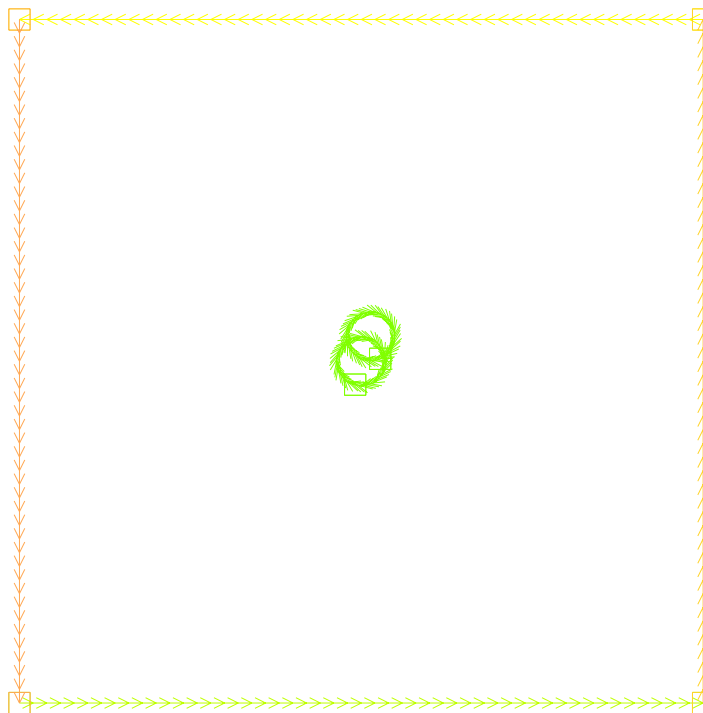
A continuación, notamos que al reducir  $\varepsilon_2$  queda una solución final más cercana a la curva original.

iter=35



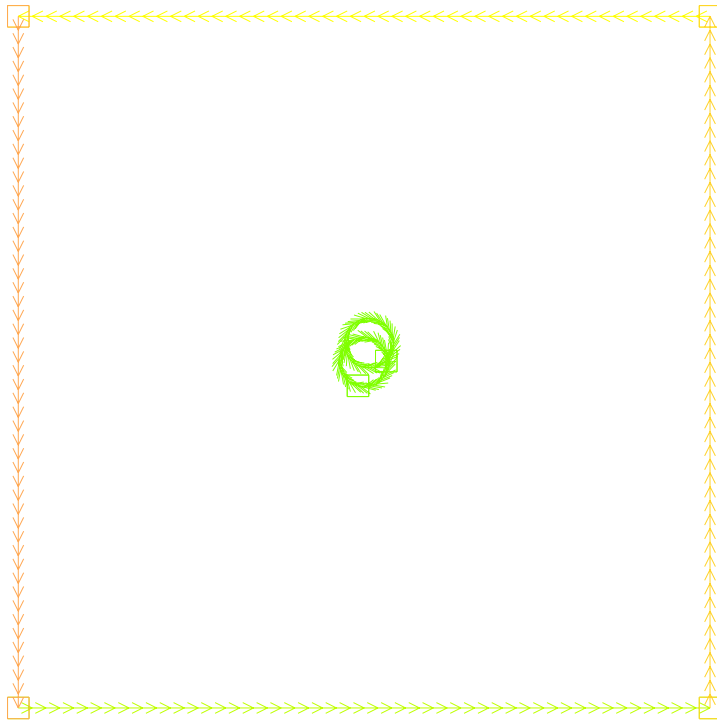
Iter 35

iter=57



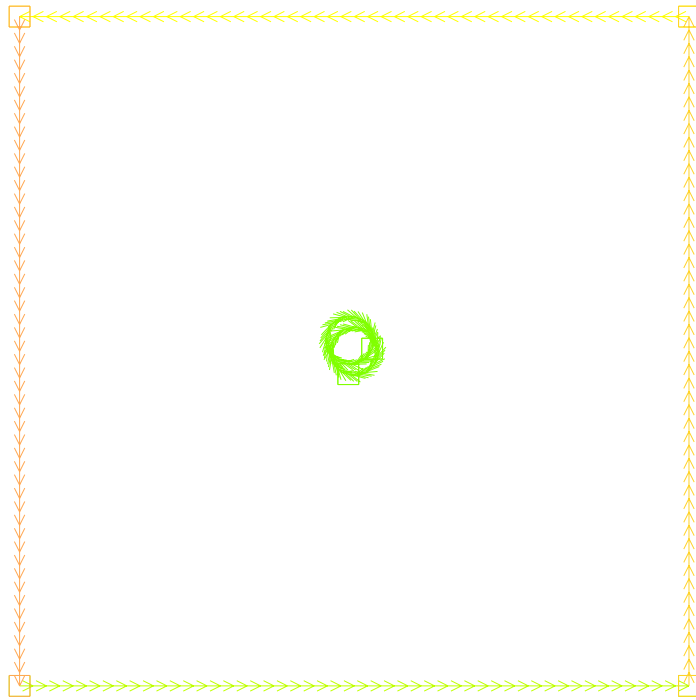
Iter 57

iter=74



Iter 74

iter=98



Iter 98

Figura 6.3: Corrección problema no perturbado con  $\varepsilon_2 = 0,0042$

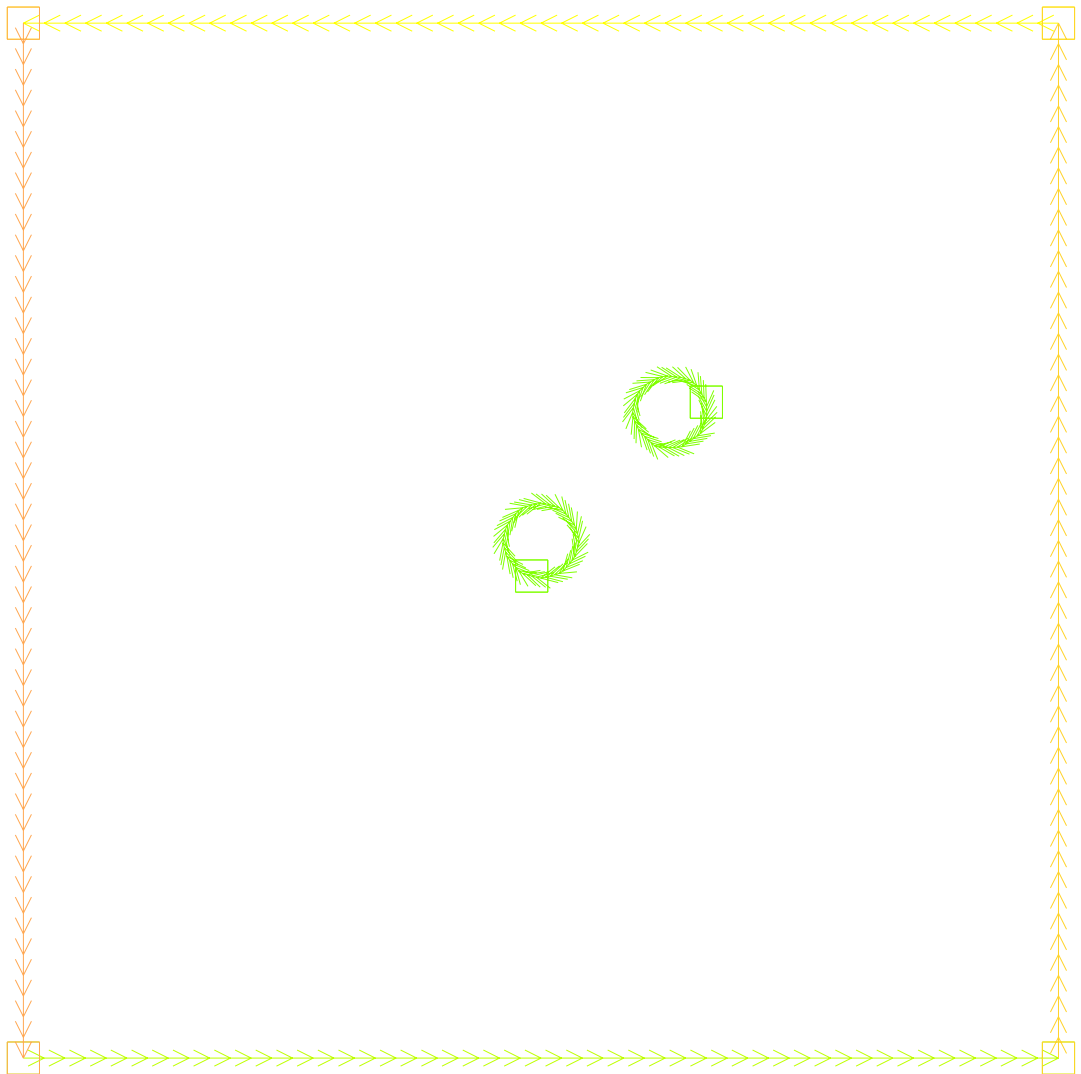
También se observa que existe un punto a partir del cual si se reduce más  $\varepsilon_2$  la curva final no logra parecerse a la curva de referencia, pues la velocidad del movimiento es muy lenta en cuanto al número de iteraciones.

### 6.3.2. Caso perturbado

Consideramos el caso en que no hay varianza, es decir  $\alpha = 0$ .

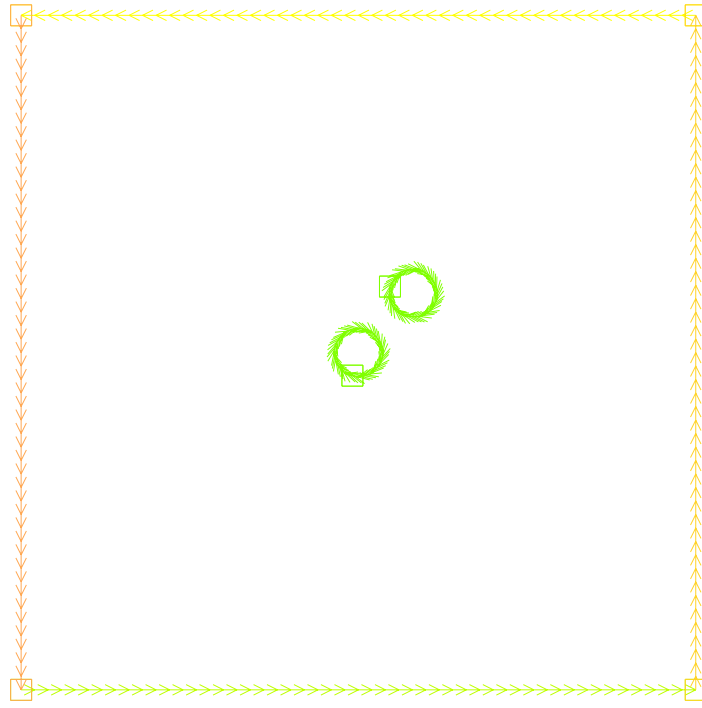
Un primer intento es hacer el mismo algoritmo que en el caso no perturbado, notando que solo hay que modificar el problema adjunto y el funcional objetivo. Luego, se tiene que la curva no presenta más avances hacia la curva objetivo desde la iteración 11.

iter=1



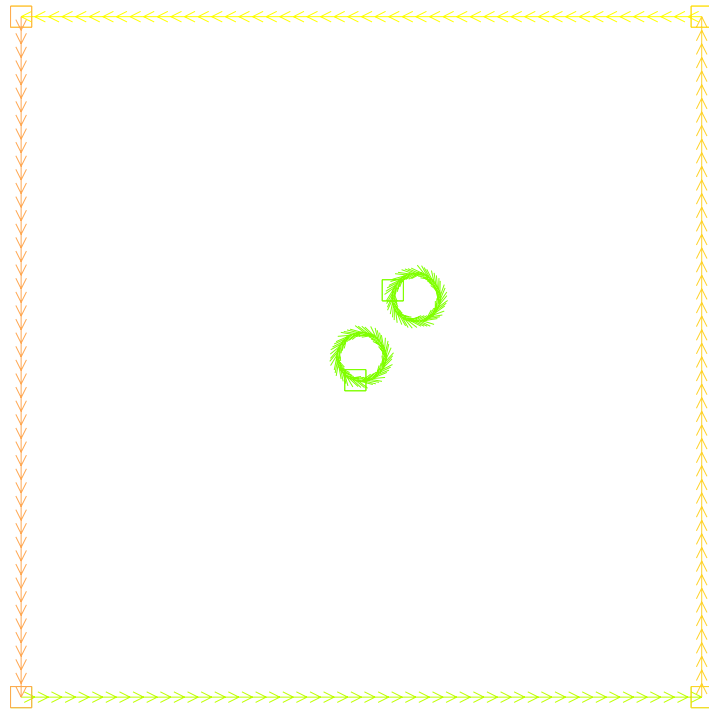
Iter 1

iter=11



Iter 11

iter=100



Iter 100

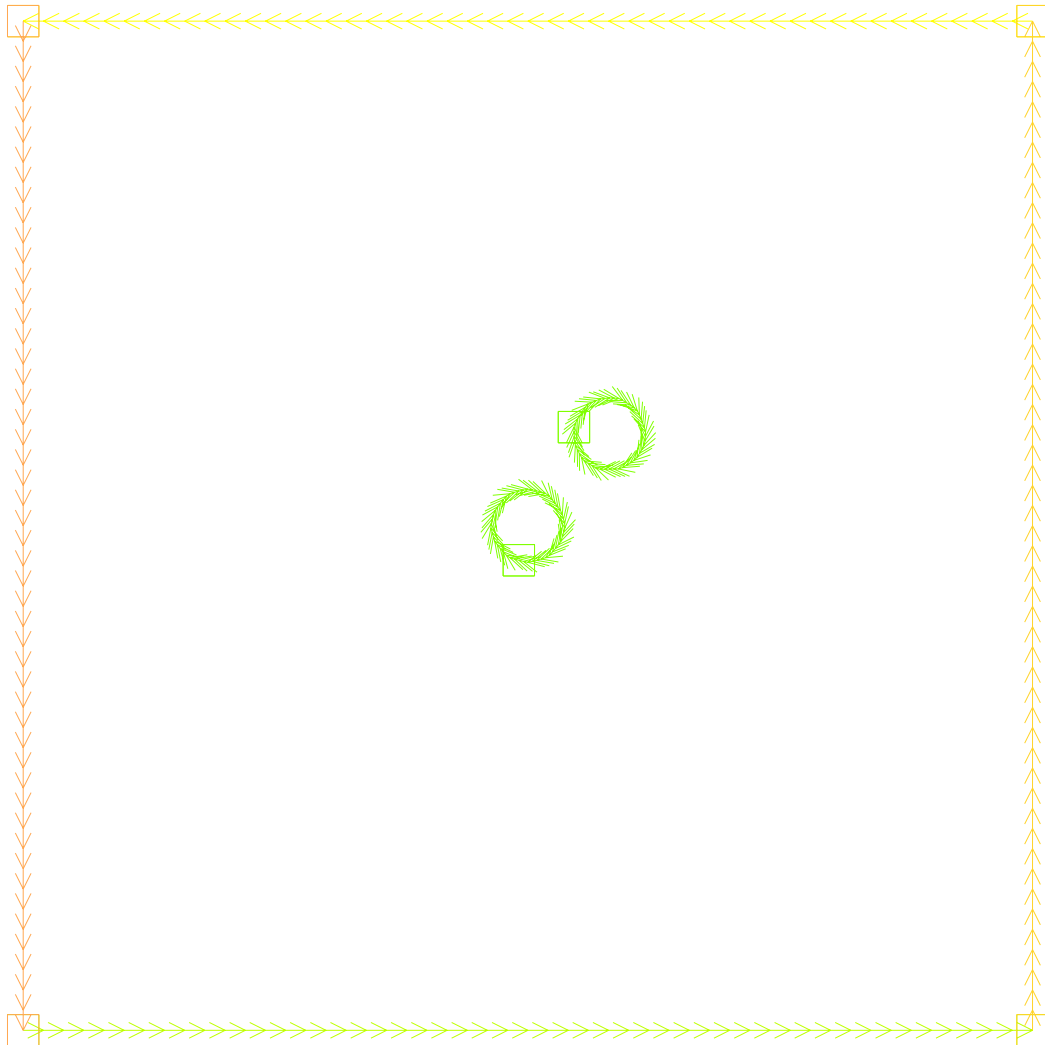
Figura 6.4: Primer intento problema perturbado

Por continuidad, debería esperarse que al reducir los factores extras que aparecen en el problema adjunto o en el funcional, el algoritmo se comporte similar al del caso no perturbado. Para ver si esto sucede, se pueden ponderar los factores extras por  $\varepsilon_a \in (0, 1)$  y  $\varepsilon_f \in (0, 1)$ , donde  $\varepsilon_a$  y  $\varepsilon_f$  están asociados al problema adjunto y al funcional, respectivamente.

En el caso de ponderar solo el problema adjunto, se observa que el avance del algoritmo se detiene posterior a la iteración 11, pero antes de la iteración 21.

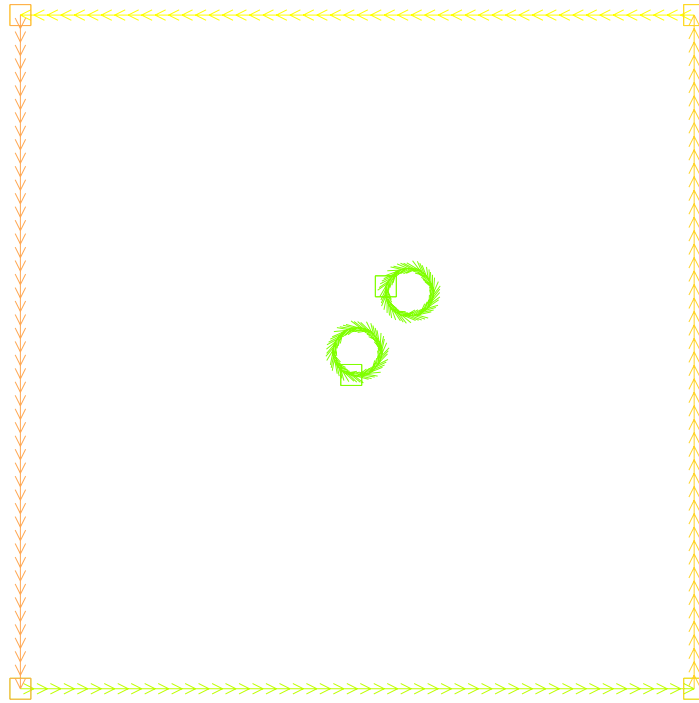


iter=11



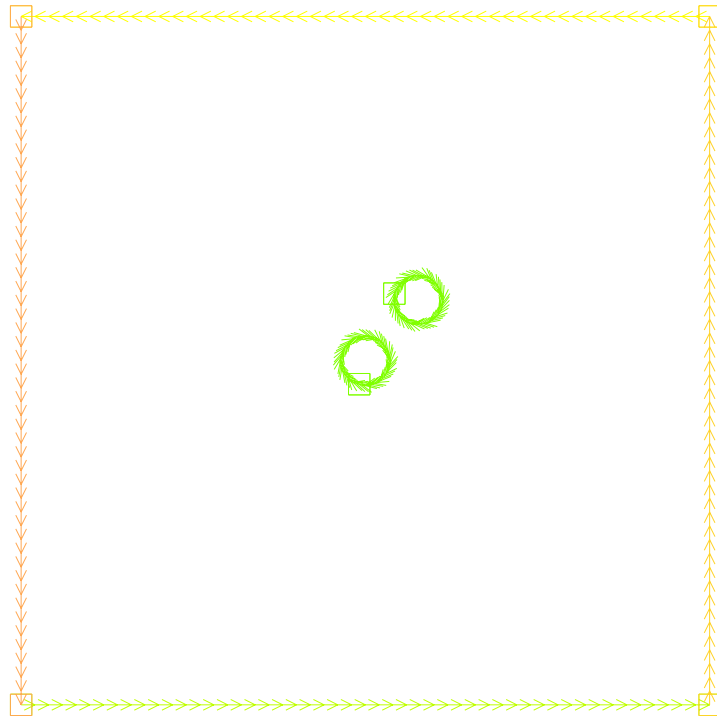
Iter 11

iter=21



Iter 21

iter=100

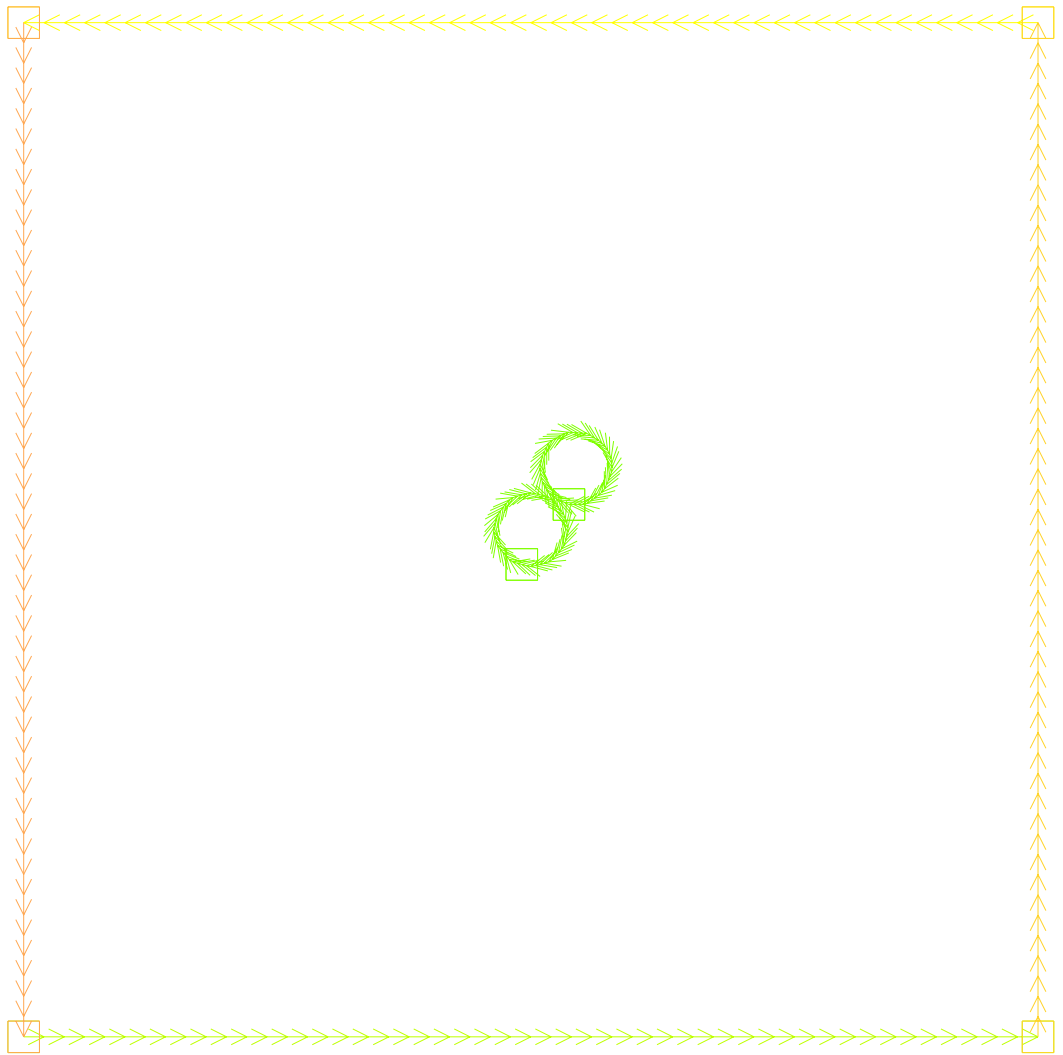


Iter 100

Figura 6.5: Problema perturbado ponderación adjunto  $\varepsilon_a = 0,0001$

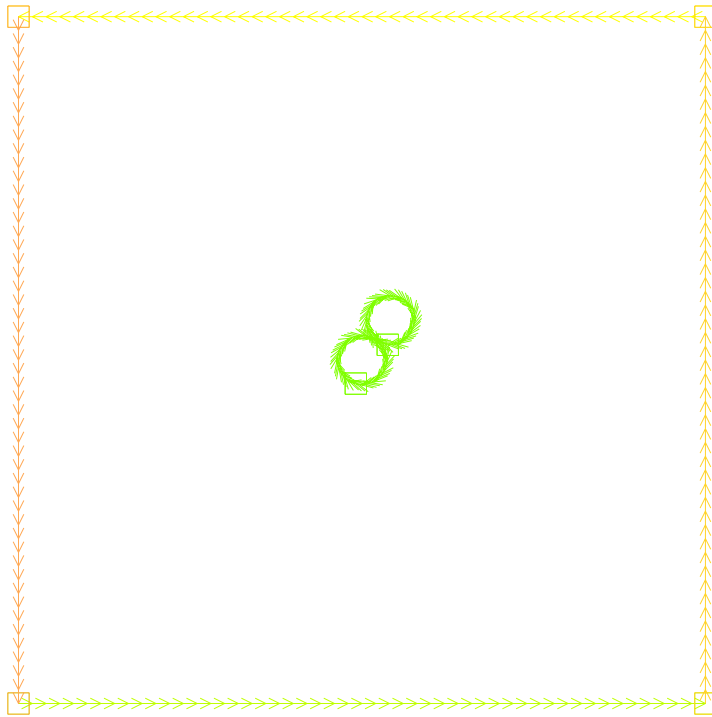
En el caso de ponderar solo el funcional, se observa que el avance del algoritmo tiende a ser el mismo que en el caso no perturbado. En efecto, se detiene en la iteración 27.

iter=20



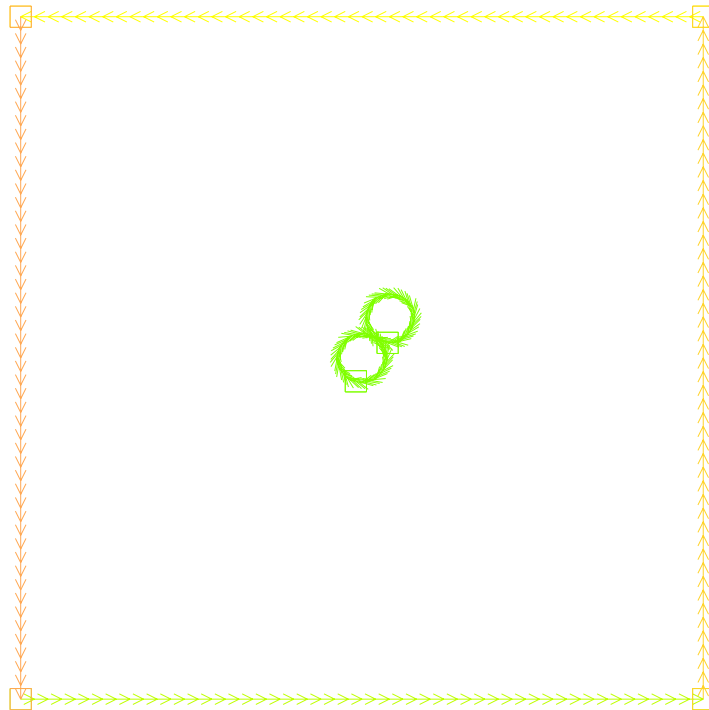
Iter 20

iter=27



Iter 21

iter=100

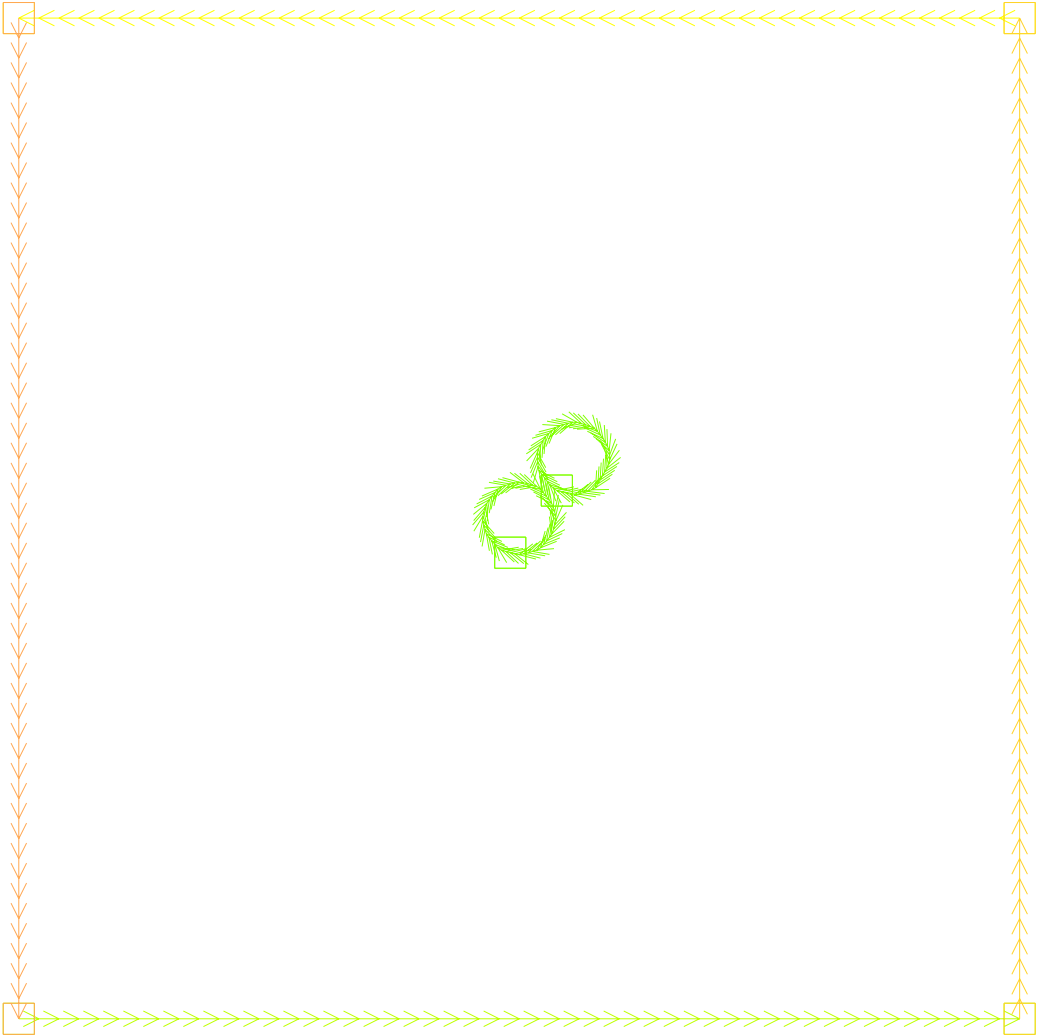


Iter 100

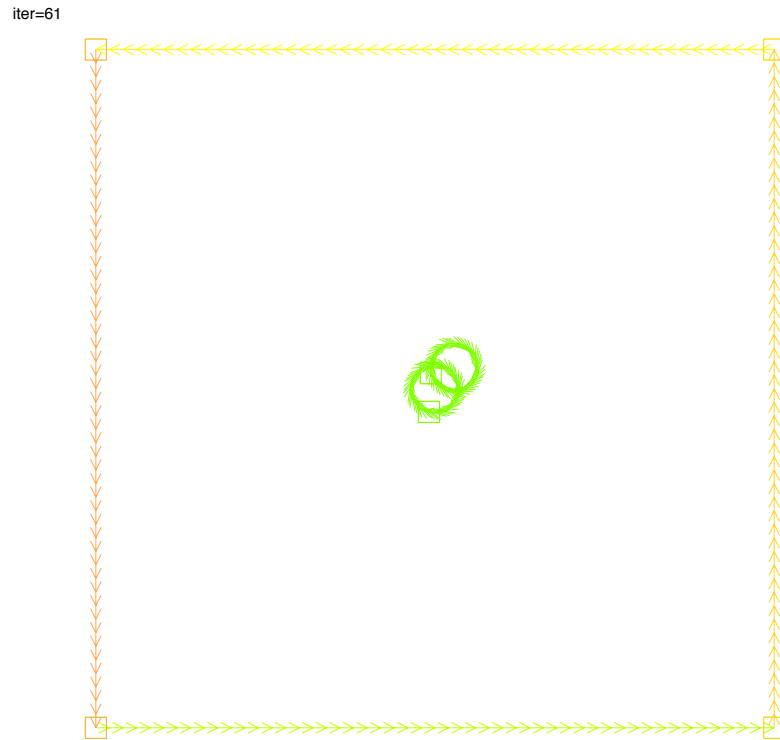
Figura 6.6: Problema perturbado ponderación funcional  $\varepsilon_f = 0,0001$

Ahora se observa que solo agregando una condición estocástica análoga al problema no perturbado, el avance del algoritmo sigue más allá de la iteración 27 y la curva test logra parecerse a la curva de referencia.

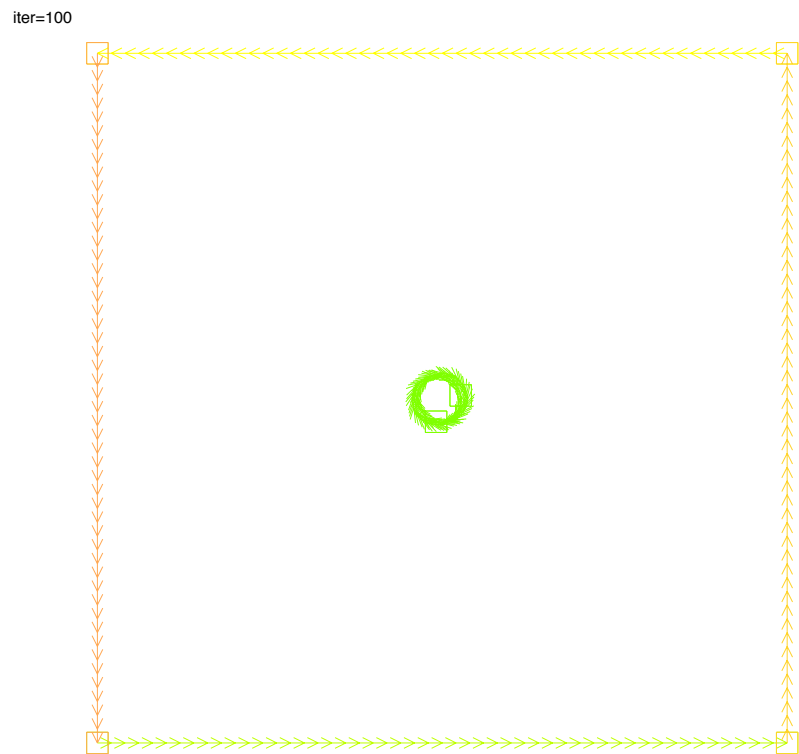
iter=33



Iter 33



Iter 61



Iter 100

Figura 6.7: Problema perturbado  $\varepsilon_2 = 0,0075$



Para obtener el  $SE$  se usa la norma  $H^1$ , por otra parte se obtienen medidas del error mínimo y del error máximo correspondientes a las medidas obtenidas en las iteraciones. Para efectos de normalizar las medidas, se usa el mismo  $\varepsilon_2$  en el criterio estocástico de ambos problemas, se pondera el problema adjunto del problema perturbado por  $\varepsilon_a = 0,0001$  y se considera el error máximo de todas las iteraciones.

En la muestra se consideran valores de  $\varepsilon_2 \in [0,001, 0,01]$  con saltos de 0,0005 por punto.

A continuación, pueden observar en la tabla siguiente los datos obtenidos y en el gráfico siguiente se puede observar el comportamiento del error máximo según valores de  $\varepsilon_2$ . Se puede observar que el error máximo oscila en el orden de porcentajes entre 37 y 42, al aumentar los valores  $\varepsilon_2$  se puede apreciar el mismo patrón, análogo el reducir aún más los valores de  $\varepsilon_2$ .

$\varepsilon_2$	Error máximo
0.0010	0.405083
0.0015	0.383119
0.0020	0.413571
0.0025	0.412375
0.0030	0.409743
0.0035	0.390513
0.0040	0.419536
0.0045	0.409402
0.0050	0.401859
0.0055	0.405048
0.0060	0.402313
0.0065	0.398549
0.0070	0.420866
0.0075	0.380947
0.0080	0.395410
0.0085	0.424436
0.0090	0.409059
0.0095	0.376765
0.01	0.403752

Tabla 6.1: Mediciones error estimado

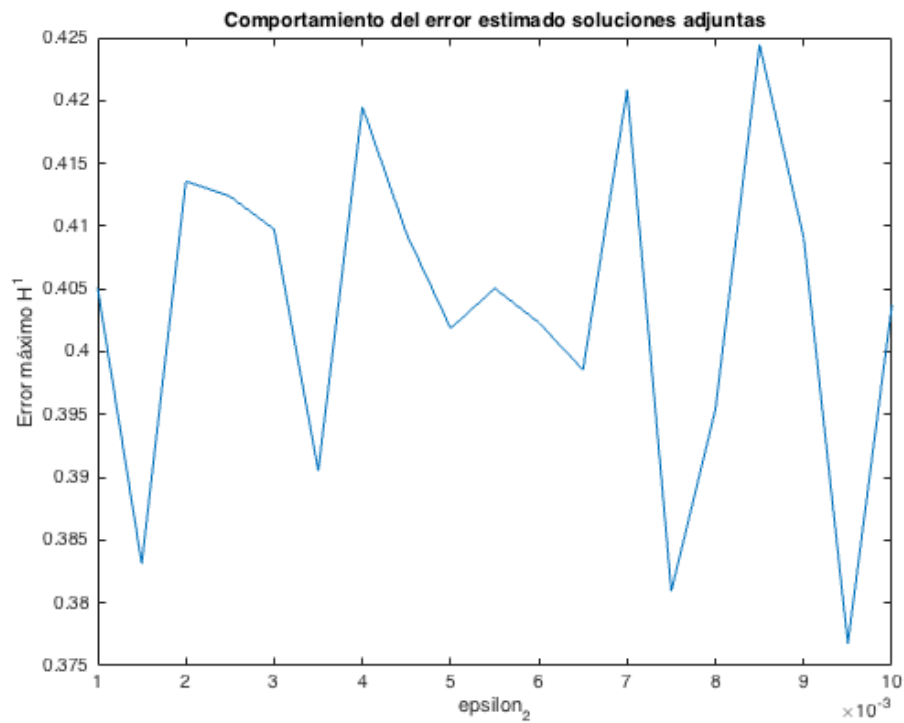


Figura 6.8: Error estimado

# Discusión

El problema de estudio fue del tipo Dirichlet-Neumann, es decir el problema tiene condiciones tipo Dirichlet y la medición es tipo Neumann. En un futuro trabajo sería interesante ver qué sucede si el problema es del tipo Neumann-Dirichlet y variar las condiciones del problema, así como las mediciones.

Solo se hizo una perturbación explícita al nivel del funcional objetivo. A futuro se podría trabajar con perturbaciones explícitas e implícitas a nivel de las condiciones del problema o del dominio, tales como se hacen en Allaire, Dapogny [21].

El caso a analizar corresponde a un problema escalar. Si bien las propiedades esenciales se mantienen, sería interesante comparar con el caso vectorial, pues aparecen factores cuyo análisis marca diferencias por la aparición de tensores, entre otros.

Las condiciones estocásticas usadas en el presente trabajo son rudimentarias, en un futuro trabajo podría analizarse la correctitud y convergencia del algoritmo, y de la misma se podría implementar una mejora en dichas condiciones.

El orden del funcional objetivo fue cuadrático, por lo que la expansión de Taylor correspondiente basta para linealizar el problema. Sería interesante por ejemplo ver cómo linealizar y trabajar el problema en el caso de un funcional asociado con un comportamiento no lineal y análogo a una  $p$ -norma, donde  $0 \leq p < +\infty$ .

Debido a la complejidad del algoritmo a la hora de trabajar en Freefem++ se trabajó con pocas funciones base y solo el caso de la esperanza. Como propuesta para un futuro trabajo se debería trabajar el caso que incluye la varianza y además empezar a trabajar en Fenics, pues usando la notación de Einstein es capaz de trabajar mejor con problemas que crecen mucho en complejidad según índices y notación. Por otra parte, una aproximación de los  $\zeta_i^2$ ,  $\zeta_i^3$  y  $\zeta_i^4$  en los términos de esperanza y varianza correspondientes requieren un mejor análisis y un mejor recocinado a la hora de aproximarlos, no necesariamente basta con randomizar.

# Conclusiones

Por la dificultad de trabajar con las derivadas de segundo orden en este problema no lineal, un algoritmo del tipo Level Set directamente es muy difícil de implementar. De ahí nace la opción de usar algoritmos más rudimentarios que solo dependan de las derivadas de primer orden. La linealización del problema resulta satisfactoria para estos objetivos, pues obtenemos las primeras derivadas de forma, que bastan para hacer un algoritmo de búsqueda de centro, inspirándonos en Level Set.

El análisis de error muestra que incluso reduciendo el error propio de los factores estocásticos, existe un gran factor de error entre las soluciones adjuntas. Esto puede deberse a que las curvas generadas dependen de funcionales distintos, en un caso perturbado estocásticamente.

Al agregar condiciones estocásticas al algoritmo, las curvas tienden a la curva objetivo. El análisis de continuidad muestra que el problema perturbado tiende al problema original al ponderar hacia abajo los factores estocásticos, principalmente en el caso del funcional, pues el algoritmo de optimización de forma se enfoca principalmente en este último.

# Bibliografía

- [1] Alberto P. Calderón *On an inverse boundary value problem* ATAS of SBM, pp. 65-73, 1980
- [2] Robert Kohn, Michael Vogelius *Determining Conductivity by Boundary Measurements* Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XXXVII, pp. 289-298, 1984
- [3] John Sylvester, Gunther Uhlmann *A global uniqueness theorem for an inverse boundary problem* Annals of Mathematics, Vol. 125, pp. 153-169, 1987
- [4] G.Alessandrini *Stable determination of conductivity by boundary measurements* Applicable Analysis, Vol. 27, pp. 153-172, 1988
- [5] Carlos E. Kenig, Johannes Sjöstrand, Gunther Uhlmann *The Calderón problem with partial data* Annals of Mathematics, Vol. 165, pp. 567-591, 2007
- [6] Kari Astala, Lassi P<sup>á</sup>av<sup>á</sup>arinta *Calderon's inverse conductivity problem in the plane* Annals of Mathematics, Vol. 163, pp. 265-299, 2006
- [7] Kari Astala, Jennifer L. Mueller, Lassi P. , Samuli Siltanen *Numerical computation of complex geometrical optics solutions to the conductivity equation* Applied and Computational Harmonic Analysis, Vol. 29, pp. 2-17, 2010
- [8] C. Alvarez, C. Conca, L. Friz, O. Kavian, J. O. *Identification of immersed obstacles via boundary measurements* IOPscience, Vol. 21, pp. 1531-1552, 2005
- [9] C. Álvarez, C. Conca, R. Lecaros, J. O. *On the identification of a rigid body immersed in a fluid: A numerical approach* Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 32, pp. 919-925, 2008
- [10] F.Caubet, C.Conca, M.Godoy *On the detection of several obstacles in 2D Stokes flow: Topological sensitivity and combination with shape derivatives* AIMS Inverse Problems Imaging, Vol. 10, pp. 327-367, 2016
- [11] Alessandrini, Rosset, Seo *Optimal size estimates for the inverse conductivity problem with one measurement* Proceedings of the American Mathematical Society, Vol.128, pp. 53-64, 1999
- [12] Alessandrini, Morassi, Rosset *Detecting cavities by electrostatic boundary measurements*

- IOPscience, Vol. 18, pp. 1333-1353, 2002
- [13] Alessandrini, Morassi, Rosset *Detecting an inclusion in an elastic body by boundary measurements* SIAM Review, Vol. 46, pp. 477-498, 2004
- [14] Alessandrini, Bilotta, Formica, Morassi, Rosset, Turco *Numerical size estimates of inclusions in elastic bodies* IOPscience, Vol. 21, pp 133-151, 2005
- [15] Nguyen, Wang *Estimate of an inclusion in a body with discontinuous conductivity* Bulletin Inst. Math. Academia Sinica, New Series, 2014
- [16] Qi Lu *Carleman Estimate for Stochastic Parabolic Equations and Inverse Stochastic Parabolic Problems* IOPscience, Vol. 28, pp. 18 pages, 2012
- [17] Nguyen, Khoa, Au *Analysis of a quasi-reversibility method for a terminal value quasi-linear parabolic problem with measurements* SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol. 51, pp. 60-85, 2019
- [18] Osher, Sethian *Fronts Propagating with Curvature Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations* Journal of Computational Physics, Vol. 79, pp. 12-49, 1988
- [19] Lester O. Hedges, H. Alicia Kim, Robert L. Jack *Stochastic level-set method for shape optimization* Journal of Computational Physics, Vol. 348, pp. 82-107, 2017
- [20] G. Allaire, C. Dapogny *A linearized approach to worst-case design in parametric and geometric shape optimization* Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. 24, pp. 2199-2257, 2014
- [21] G. Allaire, C. Dapogny *A deterministic approximation method in shape optimization under random uncertainties* SMAI Journal of Computational Mathematics, 2015, 1, pp.83-143
- [22] Charles Dapogny, Pascal Frey, Florian Omnes, Yannick Privat, Florian Omnes *Geometrical shape optimization in fluid mechanics using Freefem++* Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 58, pp. 2761-2788, 2018
- [23] J.Simon *Diferenciación de problemas de contorno respecto al dominio* Lectures in the University of Sevilla, 1989
- [24] G.Allaire *Numerical Analysis and Optimization* Oxford University Press, 1st ed, 2007
- [25] G.Allaire *Conception optimale de structures* Springer, 1st ed, 2007
- [26] E. Beretta, C. Cavaterra, S. Zamorano, J.H. Ortega *Size estimates of an obstacle in a stationary Stokes fluid* IOPScience, Inverse Problems, Vol. 33, 2, 29 pp. , 2017