



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

CAMPAÑAS ELECTORALES BAJO LOS OJOS DE LA TEORÍA DE JUEGOS: MODELOS DE COMPORTAMIENTO Y EQUILIBRIOS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN GESTIÓN DE OPERACIONES
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

SEBASTIÁN IGAL MORALES ARUESTE

PROFESOR GUÍA:
CHARLES THRAVES CORTÉS-MONROY

PROFESOR CO-GUÍA:
JOSÉ RAFAEL CORREA HAEUSSLER

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
FERNANDO ORDÓÑEZ PIZARRO
RAFAEL EPSTEIN NUMHAUSER

SANTIAGO, CHILE
2019

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL
RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR
AL GRADO DE MAGÍSTER EN GESTIÓN DE OPERACIONES
POR: SEBASTIÁN IGAL MORALES ARUESTE
FECHA: 2019
PROF. GUÍA: CHARLES THRIVES CORTÉS-MONROY

CAMPAÑAS ELECTORALES BAJO LOS OJOS DE LA TEORÍA DE JUEGOS: MODELOS DE COMPORTAMIENTO Y EQUILIBRIOS

Existen casi 100 países en el mundo con sistemas catalogados como democráticos, en los cuales se celebran periódicamente elecciones populares para elegir a sus líderes políticos. Una parte importante de las elecciones son las campañas previas, donde los candidatos se dan a conocer al país, haciendo propaganda electoral y asistiendo a diferentes eventos. En este trabajo se estudia un modelo de optimización de campañas políticas para elecciones entre dos candidatos dentro de un país subdividido en regiones. De cara a esta elección, cada candidato debe decidir cuánto tiempo de campaña invertir en las diferentes regiones, con el objetivo de obtener el mejor resultado posible en la elección a nivel país.

De esta forma, se consideraron dos tipos de elecciones: sistema mayoritario, donde el candidato con mayor número de votos a nivel país es elegido, y sistema bajo colegio electoral, donde el ganador dentro de cada región del país gana un cierto número de votos electorales, los que en definitiva definirán al ganador. El primer sistema emula a sistemas como el presidencial chileno. El segundo en cambio corresponde al sistema utilizado en los Estados Unidos. Para el sistema mayoritario se estudiaron modelos tanto determinista como estocásticos.

Para el caso determinista del sistema mayoritario se demostró la existencia y unicidad del Equilibrio de Nash en estrategias puras. Es más, suprimiendo ciertas restricciones, tal equilibrio es computable a fórmula cerrada, y su resultado no varía en absoluto al introducir la opción de la abstención a los votantes. Para el caso estocástico del sistema mayoritario, en cambio, no se tiene certeza de la existencia ni unicidad del equilibrio, pero la evidencia empírica apunta a favor de ambas conclusiones.

Para el caso del sistema bajo colegio electoral, la evidencia empírica demuestra que es posible encontrar instancias donde no existe un equilibrio de Nash en estrategias puras. Con el fin de encontrar un equilibrio en estrategias mixtas, se presenta un algoritmo que discretiza las estrategias para facilitar el cálculo, reduciendo así la complejidad del problema a una escala más abordable.

Los resultados muestran que mientras en una elección bajo sistema mayoritario los votantes deberían mostrar una tendencia a concentrarse con gran énfasis en regiones del país con alta representación demográfica, para el sistema bajo colegio electoral el criterio demográfico es relevante, pero sólo cuando se habla de un *swing state*, un estado del país donde el candidato ganador *a priori* no es tan predecible.

A hombros de gigantes.

Agradecimientos

Agradecer, en primer lugar, a mi familia, mis papás Evelyn e Ignacio, y mis hermanos Alejandra y Vicente. Son quienes siempre están, estuvieron y estarán, y quienes me acompañan y apoyan siempre que los necesito, y a quienes debo gran parte de lo que soy. A mis abuelos, primos y tíos también.

A mis amigos también, algunos que me acompañan desde la infancia, y otros que han ido llegando con los años. Los que se conocen mis mañas y las bancan, y los que no las bancan pero me quieren igual. Siempre me sentí acompañado gracias a ustedes.

Y por último, agradecer también a mis profesores en la facultad, así como en el colegio. Su trabajo es lo que nos permite a todos crecer. Y particularmente al profesor Charles Thraves, por su paciencia pero también exigencia, es quien hizo posible este trabajo.

Tabla de Contenido

Resumen	II
Agradecimientos	VI
1. Introducción	1
1.1. La Democracia como Sistema Político Imperante	1
1.2. La Importancia de las Elecciones Populares	2
1.3. Las Campañas Electorales y su Impacto	2
1.4. Estudios Previos	3
1.4.1. Estudios Relacionados	3
1.5. Contribuciones Realizadas	4
2. Modelos	6
2.1. El Problema y Notación	6
2.2. Sistema Mayoritario, Juego Determinista	7
2.2.1. Incorporando la Abstención	10
2.2.2. Métodos Numéricos para Computar el Equilibrio	12
2.3. Sistema Mayoritario, Juego Estocástico	13
2.3.1. ¿Qué Optimizan los Candidatos en el Modelo Estocástico?	14
2.3.2. Métodos Numéricos para Computar el Equilibrio	16
2.3.3. Acelerando el Cómputo	19
2.4. Colegio Electoral	19
2.4.1. El (No) Rol de la Abstención	21
2.4.2. De los Estados al Resultado País	22
2.4.3. Condiciones de Optimalidad y Derivadas de la Función Objetivo	23
2.4.4. Métodos Numéricos y Existencia del Equilibrio	24
2.4.5. Resolución en Estrategias Mixtas y Problemas	25
2.4.6. Métodos Numéricos para Computar el Equilibrio	27
3. Resultados	33
3.1. Sistema Mayoritario, Juego Determinista	33
3.1.1. Sin Abstención	34

3.1.2. Con Abstención	38
3.2. Sistema Mayoritario, Juego Estocástico	41
3.3. Colegio Electoral	45
3.3.1. Intentando Resolver el Equilibrio.	46
3.3.2. Equilibrio en Estrategias Mixtas	50
3.4. Comparación de Modelos	53
4. Conclusiones y Nuevas Interrogantes	56
4.1. Equilibrios Encontrados	56
4.1.1. ¿Son estos Equilibrios un Buen Paralelo con la Realidad Observada?	57
4.2. Resolución y Rendimientos	57
4.2.1. Exactitud de los Algoritmos	58
4.2.2. Escalabilidad de los Algoritmos	58
4.3. Interpretaciones Políticas y Estudios Sistémicos	58
4.3.1. ¿Cuál es la Real Diferencia entre el Sistema Mayoritario y el Sistema de Colegio Electoral?	59
4.4. Limitantes y Futuras Líneas de Investigación	59
4.4.1. ¿Es Posible Medir los Vectores α, β, γ ?	59
4.4.2. ¿Cuál es el Verdadero Rol de la Abstención?	60
4.4.3. ¿Por qué es Mejor Atacar al Rival que Fortalecer la Campaña Propia?	60
4.4.4. El Tiempo y otros Parámetros No Incluidos.	61
4.5. Mismos Modelos, Otras Aplicaciones	61
Apéndice	63
A . Demostraciones	63
A .1. Demostración Teorema 1	63
A .2. Demostración Proposición 1	64
A .3. Demostración Teorema 2	64
A .4. Demostración Proposición 2	66
A .5. Demostración Teorema 3	66
A .6. Demostración Lema 1	67
A .7. Demostración Proposición 3	68
A .8. Demostración Lema 2	69
Bibliografía	72

Índice de Tablas

2.1. Discretización del simplex de tres dimensiones para $q = 3$	25
2.2. Discretización del simplex de tres dimensiones para $q = 4$	26
3.1. Instancia de ejemplo para un país con $n = 10$ regiones bajo SM	33
3.2. Equilibrio bajo SM , con Juego Determinista, con $\alpha, \beta, \gamma = 0$	34
3.3. Equilibrio bajo SM , con Juego Irrestricto Determinista con $\gamma = 0$	36
3.4. Equilibrio bajo SM , con Juego Determinista con $\gamma = 0$	37
3.5. Equilibrio bajo SM , con Juego Irrestricto Determinista.	39
3.6. Equilibrio bajo SM , con Juego Determinista.	41
3.7. Equilibrio bajo SM , con Juego Estocástico, usando Método del Gradiente.	42
3.8. Equilibrio bajo SM , con Juego Estocástico, usando Método del Vecino.	44
3.9. Instancia de ejemplo para un país con $n = 10$ estados bajo CE	46
3.10. Equilibrio bajo CE , con $k = 3$	46
3.11. Equilibrio bajo CE , con $k = 15$	49
3.12. Equilibrio bajo CE , con $k = 3$	51
3.13. Perfiles con Peso Positivo para Equilibrio bajo CE , con $k = 15$	52
3.14. Perfiles con Peso Positivo para Equilibrio bajo CE , con $k = 15$	53
3.15. Instancia para Comparación de Sistemas SM y CE	54
3.16. Instancia para Comparación de Sistemas SM y CE	54

Índice de Figuras

1.1. Sistemas Políticos por País, 2017.	1
2.1. Distribución de Dirichlet con Diferentes Valores de k	14
2.2. Evolución de la Probabilidad de Ganar según el Esfuerzo Invertido.	21
2.3. Árboles de ejemplo para un país.	23
2.4. Discretizaciones de Δ_3 para diferentes valores de q	26
2.5. Algoritmo para Discretización de Vector en Δ_n sobre <i>Simplex Lattice</i>	31
3.1. Equilibrio bajo SM , con Juego Irrestricto Determinista con $\alpha, \beta, \gamma = 0$	35
3.2. Equilibrio bajo SM , con Juego Irrestricto Determinista con $\gamma = 0$	36
3.3. Equilibrio bajo SM , con Juego Determinista con $\gamma = 0$	38
3.4. Equilibrio bajo SM , con Juego Irrestricto Determinista.	40
3.5. Equilibrio bajo SM , con Juego Determinista.	41
3.6. Equilibrio bajo SM , con Juego Estocástico, usando Método del Gradiente.	42
3.7. Corroboración Equilibrio bajo SM con Juego Estocástico, usando Método del Gradiente.	43
3.8. Equilibrio bajo SM , con Juego Estocástico, usando Método del Vecino.	44
3.9. Corroboración Equilibrio bajo SM con Juego Estocástico, usando Método del Vecino.	45
3.10. Equilibrio encontrado para $k = 3$	47
3.11. Corroboración Equilibrio bajo CE con $k = 3$	48
3.12. Equilibrio encontrado para $k = 15$	49
3.13. Corroboración Equilibrio bajo CE con $k = 15$	50
3.14. Equilibrio encontrado para $k = 3$ para Estrategias Mixtas.	51

Capítulo 1

Introducción

I lost my election because of my campaign, not because of what anyone else did.

Perdí mi elección por mi campaña, no por lo que nadie más hizo.

Mitt Romney, 2013

1.1. La Democracia como Sistema Político Imperante

Existen en el mundo actual 195 países según los registros de las Naciones Unidas (*UN Member States*). De ellos, 167 presentan poblaciones que exceden las 500.000 personas (a finales de 2017), entre los cuales 96 tienen un sistema político catalogable como democrático (*Pew Research on Democracy*), equivalentes al 57% del total, además de otros 46 (28%) que presentan sistemas mixtos entre democracia y autoritarismo. Es decir, existen actualmente en el mundo 142 estados con al menos medio millón de ciudadanos expuesto a algún grado de democracia en lo correspondiente a la configuración del estado del que forman parte.

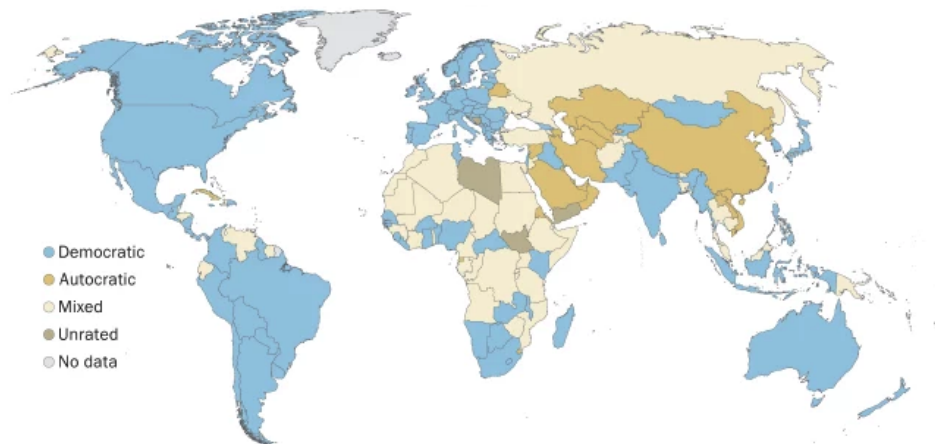


Figura 1.1: Sistemas Políticos por País, 2017.

Mapa categorizando países según el sistema político registrado en 2017. Azul representa sistemas democráticos, café representa sistemas autocráticos, blanco es para sistemas mixtos. Fuente: Pew Research (*Pew Research on Democracy*).

Las democracias se han vuelto el sistema político al que más personas están expuestas desde hace cerca de 25 años (*Our World in Data, Democracy*), abarcando hoy al 55% de la población mundial. Y este auge de los sistemas democráticos ha generado una ola de desarrollo sin parangón en la historia de la humanidad, con grandes avances en términos económicos, de salud pública, niveles de educación y derechos humanos, entre otros criterios (*Our World in Data, Democracy*).

1.2. La Importancia de las Elecciones Populares

La máxima característica que identifica una democracia por sobre cualquier otro sistema político es la libertad de los ciudadanos de cambiar de líder cuando éste no se alinea con sus intereses, lo que se expresa universalmente en las elecciones. Las elecciones son la principal bandera mediante el cual la democracia queda de manifiesto.

Es por esto que tanto las elecciones mismas como todo lo que se genera en torno a ellas han sido por décadas el foco de diversos estudios que buscan de una forma u otra evaluar sus resultados. Desde el diseño de encuestas y estadísticas hasta métodos de *machine learning* para el diseño óptimo de políticas públicas o discursos en eventos según la popularidad que generarían. Y una parte que cada vez gana más atención es todo el proceso previo a la elección, la denominada campaña electoral.

1.3. Las Campañas Electorales y su Impacto

Las campañas electorales son el período anterior a las elecciones donde los candidatos que participarán de éstas pueden darse a conocer al público, mostrar sus ideas y visiones, debatir con sus rivales y, a fin de cuentas, guiar al electorado hacia quien sea su mejor opción para votar. Se cuentan en las campañas principalmente los eventos y discursos públicos, levantamiento de fondos, apariciones en medios masivos de comunicación, propaganda física y digital, entre otros.

Las campañas electorales generan grandes niveles de gastos para las postulaciones de los candidatos. A modo de ejemplo, la elección presidencial de Estados Unidos de 2016 generó gastos por casi 2 mil millones de dólares entre las postulaciones de Hillary Clinton y Donald Trump (*Tracking the 2016 Presidential Money Race*). Ésto ha elevado el interés por el financiamiento público de la política, observándose países como Reino Unido, Holanda o Suecia, de fuerte tradición democrática, avanzando hacia sistemas de financiamiento público para campañas (*What is the Basis of Public Funding?*) evitando así conflictos de intereses e influencias indebidas desde el mundo privado hacia el liderazgo político basado en la capacidad económica.

Sumado a lo anterior, el problema de asignación de recursos de una campaña electoral está lejos de ser uno trivial; el dónde es mejor invertir estos recursos (sea tiempo de eventos, recursos económicos, etc) no es una pregunta de respuesta directa, pues es necesario considerar factores como la cantidad de votantes, la competitividad en cada zona, o incluso yendo aun más lejos, intentar anticipar la estrategia del rival es también un foco de análisis profundo a la hora de diseñar estrategias que puedan lidiar con tales complicaciones.

Todo lo anterior motiva este trabajo, con el objetivo de entender las campañas electorales como *juegos* (en el sentido económico de la palabra) que enfrentan a los candidatos, donde ambos son tomadores de decisiones racionales que buscan optimizar su desempeño, de forma de tener las mejores opciones de verse como ganadores de las elecciones. Entender el funcionamiento de este enfrentamiento, así como las diferencias que emergen de los principales modelos de elecciones democráticas en el mundo actualmente permite no sólo ser capaz de entender las motivaciones de los políticos envueltos, si no que, a fin de cuentas, poder aportar al diseño de modelos electorales que apunten hacia el fortalecimiento de la democracia en su ítem más identitario: las elecciones populares.

1.4. Estudios Previos

Diversos estudios han intentado explicar los efectos de las campañas electorales en los resultados de la política. Anthony Downs expuso en 1958 el primer gran resultado en términos de estrategia electoral, al formular el conocido teorema del votante mediano (Downs, 1958), explicando la convergencia ideológica de los candidatos en sistemas electorales mayoritarios. Éste resultado ha sido puesto a prueba desde diferentes puntos de vista a lo largo de los años (Congleton, 2004; Hinich, 1976; Milanković, 2000; Romer y Rosenthal, 1979). Hinich et al. estudiaron en 1971 las motivaciones de los votantes desde la perspectiva de la racionalidad económica (Hinich y col., 1971), mientras que Gary Jacobson en 1978 logró probar los fuertes efectos del gasto en campañas electorales para elecciones legislativas en Estados Unidos (Jacobson, 1978). Bouton en 2006 publicó estudios respecto a las estrategias de votantes en sistemas con elecciones de balotaje (Bouton, 2006).

Gran parte de estos estudios hacen amplio uso de las denominadas Leyes de Duverger (nombradas en honor a Maurice Duverger, quien primero las publicó en una serie de trabajos en los años cincuenta y sesenta), que establecen que un sistema mayoritario de elecciones conduce inevitablemente al bipartidismo.

También destacan trabajos que abordan la situación desde otra perspectiva, como el de Feddersen y Pesendorfer de 1999 respecto al rol de la información en las elecciones (Feddersen y Pesendorfer, 1999), o el trabajo de Michael Mandler de 2005 analizando el rol de la abstención en sistemas mayoritarios de elección (Mandler, 2005). El impacto de los sesgos ideológicos ha sido también estudiado a través del trabajo de Krishna y Morgan en 2010, mostrando el efecto de la información incompleta y sus consecuencias en la participación electoral e ineficiencias sociales (Krishan y Morgan, 2010). James Snyder en 1989 trabajó un problema relacionado al presentado aquí, abordando el equilibrio en la asignación de recursos de las campañas según la estrategia que cada contendor enfrenta (Snyder, 1989).

1.4.1. Estudios Relacionados

Ciertos problemas con un importante nivel de similitudes al aquí abordado tienen un amplio historial de estudios previos, principalmente asociados al mundo del Revenue Management y la asignación de recursos en términos de Marketing y valores de marca, en lugar de propaganda política y elecciones electorales.

En esa línea, destacan (entre muchos otros) estudios como el de Lawrence Friedman de 1958, quien utilizando modelos de propios de la teoría de juegos, intentó encontrar asignaciones óptimas a los gastos de marketing (Friedman, 1958). Múltiples otros estudios siguieron la línea de lo desarrollado por Friedman (Eliashberg y Chatterjee, 1985; Karnani,

1984; Little, 1979). George Monahan en 1987 publicó un estudio que, ampliando lo descrito por Friedman, modelaba las estrategias de firmas que se enfrentan en diferentes mercados físicos para optimizar su desempeño dentro de la competencia del mercado global, incorporando así variables de asignación geográficas (Monahan, 1987).

En los últimos años, otros autores han incorporando a sus análisis las opciones que nacen a partir del mundial digital actual y la renovada cara que esto ha traído al mundo del marketing (Alon y col., 2012; Masucci y Silva, 2014; Yang y col., 2012).

1.5. Contribuciones Realizadas

Los modelos propuestos en este trabajo permiten llegar a las siguientes grandes conclusiones:

- Demostración de la existencia y unicidad de un Equilibrio de Nash en Estrategias Puras para una elección bajo sistema mayoritario, suponiendo resultado determinista.
- Equivalencia de Resultados para una elección bajo sistema mayoritario con o sin abstención, al permitir a los candidatos tomar posiciones cortas en zonas de bajo interés.
- Demostración de la existencia de un Equilibrio de Nash en Estrategias Mixtas para una elección bajo sistema mediante colegio electoral.
- Algoritmos que permiten calcular los Equilibrios de Nash para una elección bajo sistemas tanto mayoritarios (determinista y estocástico) como con colegio electoral.

Capítulo 2

Modelos

All models are wrong, but some are useful.

Todos los modelos están equivocados, pero algunos son útiles.

George Edward Pelham Box, 1978.

2.1. El Problema y Notación

Dos candidatos, A y B (o *el primer* y *el segundo* candidato, respectivamente), compiten en una elección presidencial¹ de un cierto país. Dicho país presenta una subdivisión interna en regiones². Denominaremos al conjunto de regiones como $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$. Cada región $i \in \mathcal{I}$ tendrá v_i votantes asociados. Ambos candidatos poseen K unidades temporales disponibles en las que pueden realizar eventos de campaña a lo largo del país. Los candidatos, por lo tanto, deben decidir cuánto esfuerzo realizarán en cada una de las regiones (cantidad de tiempo que le designarán). Se llamará x_i e y_i a la cantidad de tiempo que cada uno de los candidatos A y B (respectivamente) asigna al estado i . Sin pérdida de generalidad, se fijará $K = 1$, normalizando los valores de manera acorde. En tal escenario, con $x, y \geq 0$, los conjuntos de estrategias disponibles para ambos jugadores corresponden a los vectores x, y pertenecientes al simplex de n dimensiones, $x, y \in \Delta_n = \{w \in \mathbb{R}^n | w \geq 0 \wedge \sum_j w_j = 1\}$, donde n corresponde al número de regiones del país en cuestión, $n = |\mathcal{I}|$.

A priori, se esperaría que mientras más un candidato invierta en cierta región, mejor será su rendimiento. El mismo argumento, sin embargo, podría utilizarse para estudiar el rendimiento de su rival, eclipsando de cierta forma lo invertido. Por ende, se modelará el resultado de la elección, dentro de cada región, como una función que recogerá, al menos, el esfuerzo de ambos candidatos. Otra información que se intentará absorber dice relación con la preferencia previa de cierto público para con sectores políticos con los que tengan más afinidad, de forma que bajo igualdad de esfuerzos, habrán regiones que aún así tendrán una marcada tendencia a favorecer a un candidato por sobre otro. Asumiendo que las estrategias se revelan por completo en forma simultánea, sin opción de alterarlas luego de ello, se define $S_i^A : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ como la función que indica la fracción de votos de la región i que obtiene el candidato

¹Se asumirá que es una elección presidencial, pero el modelo no se ve alterado en caso que la elección sea con otros fines.

²A lo largo de este trabajo también se hablará de estados en lugar de regiones de forma indistinta. Cualquier otra denominación administrativa podría ser también válida.

A (ídem para S_i^B), mientras que $R_i^A : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ es la función que indica el número de votos que va para el candidato A desde la región i (ídem para R_i^B). Por definición, se tiene que $S_i^A = \frac{R_i^A}{v_i}$, la proporción de votos que un candidato obtiene en una región es el número de votos que obtuvo, R_i^A , respecto al número total posible, v_i . Las funciones S_i^A, S_i^B toman entonces como argumentos los esfuerzos que cada candidato asignó la región i -ésima e indica el resultado porcentual de la elección en tal región. El modelo que se construirá es tal que el resultado de cada región dependerá entonces solo de lo ocurrido dicha región, y no se verá afectado por los esfuerzos que cada candidato decida para el resto del país.

Se analizarán dos tipos de sistemas electorales:

- **SM** (*Sistema Mayoritario*): El candidato que logre más votos en todo el país resulta electo.
- **CE** (*Colegio Electoral*): Cada región $i \in \mathcal{I}$ tiene w_i votos electorales (dato diferente al número de votantes, v_i). En cada región, el candidato con la mayoría de votos se quedará con la totalidad de los votos electorales de tal región. Resultará electo el candidato que logre la mayoría de votos electorales en todo el país.

Es relevante notar que el primero de estos sistemas, **SM**, representa una gran parte de las elecciones democráticas en la actualidad, entre ellas el sistema presidencial chileno, así como un importante número de países latinoamericanos y europeos, entre otros. El segundo sistema, **CE**, se basa en el sistema de elección presidencial estadounidense. Existen otros tipo de sistemas electorales que no fueron aquí considerados.

Para efectos de este análisis, se considerarán modelos tanto para casos deterministas (dado x_i e y_i , el resultado es calculado con total exactitud en cada estado) como estocásticos (dado x_i e y_i , se conoce la distribución de probabilidades del resultado en cada estado). En todos los modelos se considerará información completa y de común conocimiento.

2.2. Sistema Mayoritario, Juego Determinista

Intentando absorber la información con la que cada votante cuenta previo a la elección como una especie de sesgo político, se definen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^n$ como los *vectores de sesgo* a favor del candidato A y B , respectivamente. Dichos vectores serán tales que sus componentes medirán la popularidad del candidato referido en las mismas unidades que los esfuerzos realizados, de forma que x, y, α, β están todos en las mismas unidades y pueden por lo tanto ser sumados y comparados.

En este caso, se modelará la fracción de votos que el candidato A obtiene como la magnitud relativa de las popularidades (ya sea previo a la elección, o la popularidad ganada mediante campañas), por lo que se definirá S_i^A de la siguiente forma:

$$S_i^A = \frac{(x_i + \alpha_i)}{(x_i + \alpha_i) + (y_i + \beta_i)} \quad (2.1)$$

Donde $(x_i + \alpha_i)$ mide la popularidad del primer candidato en la región i , análogo para $(y_i + \beta_i)$ con el segundo. Bajo este modelo, $\alpha_i > \beta_i$ hará que en igualdad de esfuerzos ($x_i = y_i$) el resultado sea $S_i^A > 50\%$, y viceversa.

Además, es importante notar que altos valores en los vectores de sesgo, $\alpha_i, \beta_i \gg 0$, más allá de cómo se comparan entre sí, genera una elección menos perceptible a los efectos de x_i, y_i , lo que conducirá a un escenario más polarizado, con pocos votantes dispuestos a cambiar su posición por efecto de la campaña. La contrarrecíproca también es cierta, bajos valores en los vectores de sesgo representan un escenario donde los votantes están muy poco decididos, en cuyo caso, la campaña resultará de alta influencia para hacerlos inclinarse por uno u otro lado.

Considerando que cada región contiene v_i votos, y que dentro de cada estado, la variable S_i^A indicará la fracción de votos que el candidato A obtendrá, entonces, a nivel país, el candidato A obtendrá la suma de las votaciones parciales de cada estado. Es decir, definiendo por R^A el número de votos que el candidato A obtiene en todo el país (ídem para R^B), se tiene entonces que $R^A = \sum_{j \in \mathcal{I}} R_j^A = \sum_{j \in \mathcal{I}} v_j S_j^A$. Por cómo se definió la variable S_i^A en la Expresión 2.1, la fracción de votos que el candidato B obtiene es $S_i^B = 1 - S_i^A$, de modo que a nivel país, el candidato B obtendrá una cantidad de votos equivalentes a $R^B = \sum_{i \in \mathcal{I}} R_i^B = \sum_{i \in \mathcal{I}} v_i S_i^B = \sum_j v_j - R^A$. Éste es entonces un escenario donde los votos de ambos candidatos son tales que $R^A + R^B = \sum_{i \in \mathcal{I}} v_i$, es decir, cada voto del país en cuestión va para uno u otro candidato, lo que se traduce en un juego de suma cero, donde independiente de lo que juegue cada candidato, la suma de los resultados es un mismo valor.

Bajo este escenario, se define un equilibrio para el juego.

Definición 1. *Un equilibrio es un par de vectores, $(x^*, y^*) \in (\Delta_n)^2$, tal que $x^* \in \operatorname{argmax}_{x \in \Delta_n} R^A$ y, simultáneamente, $y^* \in \operatorname{argmax}_{y \in \Delta_n} R^B$.*

Es decir, los vectores del equilibrio son tal que cada uno es la solución al problema de maximizar el número de votos que obtiene, de forma simultánea. El siguiente teorema asegurará la existencia y unicidad de un equilibrio para este juego, bajo sistema mayoritario y resultado determinista.

Teorema 1. *El juego para la elección bajo **SM** y resultado determinista, sin abstención, tiene un único equilibrio.*

Demostracion 1. *Ver Apéndice A .1.*

Ahora bien, es importante notar que en este juego se está exigiendo que las estrategias sean no negativas, $x, y \geq 0$. Sin embargo, eliminando tal restricción, se puede calcular un equilibrio a fórmula cerrada, que será nombrada como la solución irrestricta (o *unbounded*) al problema. Naturalmente, este equilibrio puede llegar a presentar componentes negativas en alguno de los estados, lo que lo haría imposible de presenciar en la realidad. Si al chequear dicha solución, ésta resulta ser no negativa, entonces tal combinación debe ser no sólo el equilibrio al juego irrestricto, si no también la solución al problema restringido (por ser un subconjunto de la región factible del problema irrestricto). La siguiente proposición entrega la expresión explícita para computar el equilibrio al problema irrestricto.

Proposición 1. *El juego para la elección bajo sistema mayoritario y resultado determinista, sin abstención, tiene como equilibrio irrestricto a los vectores $x_i^{UB} = \frac{v_i}{\sum_j v_j} \left(1 + \sum_j \alpha_j\right) - \alpha_i$ para el primer candidato, mientras que para el segundo candidato es $y_i^{UB} = \frac{v_i}{\sum_j v_j} \left(1 + \sum_j \beta_j\right) - \beta_i$, para todo $i \in \mathcal{I}$.*

Demostracion 2. *Ver Apéndice A .2.*

De la Proposición 1 queda en evidencia la relevancia del tamaño de los estados en la inversión que cada candidato realiza en ellos. En particular, se observa que el nivel de popularidad que cada candidato decide tener en todos

los estados, $(x_i^{UB} + \alpha_i)$, es proporcional al peso relativo del estado sobre el número total de votos, $\frac{v_i}{\sum_j v_j}$. De esta forma, se puede analizar el resultado que queda en cada estado directamente al aplicar la fórmula de la solución irrestricta. En el estado i -ésimo, se tiene que la fracción de votos que obtiene el candidato A en el equilibrio irrestricto resulta ser $S_i^A = \frac{(x_i^{UB} + \alpha_i)}{(x_i^{UB} + \alpha_i) + (y_i^{UB} + \beta_i)} = \frac{1 + \sum_j \alpha_j}{2 + \sum_j (\alpha_j + \beta_j)}$, que no depende, de hecho, del índice i del estado y es, por lo tanto, un resultado que se sostiene sobre todos los estados y por ende es el resultado de la elección global. Así, si $\sum_j \alpha_j > \sum_j \beta_j$, la elección quedará en manos del candidato A , independiente de como esté repartida dicha popularidad a lo largo de los estados. Ésto se debe a que, al permitir que componentes de su esfuerzo sean negativas, cada candidato adquiere la capacidad de traspasar popularidad desde un estado hacia otro en donde éste sea más rentable en términos de votación, encontrando la asignación óptima en el vector entregado. Ésto puede entenderse como tomar una *posición corta* en un estado para poder tener más fuerza que invertir en otra. De hecho, es posible estudiar la situación en la que un estado adquiere un peso negativo en la solución irrestricta, pues el caso en que x_i^{UB} es negativo estricto es equivalente a plantear que $\frac{v_i}{\sum_j v_j} < \frac{\alpha_i}{1 + \sum_j \alpha_j}$, que plantea un escenario donde el peso en votos de un estado no justifica el nivel de popularidad que *a priori* tiene dicho estado, lo que lleva a tal candidato a reasignar esos recursos hasta balancear la situación.

Es interesante también notar que el resultado es un punto en el que ambas estrategias quedan completamente identificadas únicamente por la popularidad del candidato, y no la del rival. En términos matemáticos, $\frac{\partial}{\partial \beta_i} x_i^{UB} = 0$. Ello tiene sentido cuando se considera no sólo que los candidatos en este escenario pueden reasignar popularidad, si no que existe transparencia de información respecto a la popularidad que tienen *a priori* ambos candidatos y pueden, por lo tanto, prever que su rival también reasignará sus propias popularidades.

Como se mencionó anteriormente, esta fórmula resuelve el problema sin la restricción de no negatividad. Es posible que este equilibrio resulte ser no negativo, en cuyo caso sería solución también al problema original, por ser éste un subproblema del caso irrestricto.

Para el problema original entonces, el juego que enfrentará a ambos candidatos queda descrito para el candidato A , mediante el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned}
\max_x \quad & R^A = \sum_j v_j \times \frac{x_j + \alpha_j}{x_j + \alpha_j + y_j + \beta_j} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_j x_j = 1 \\
& \mathbf{x} \geq 0
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Mientras que para el candidato B , el problema se describe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\max_y \quad & R^B = \sum_j v_j \times \frac{y_j + \beta_j}{x_j + \alpha_j + y_j + \beta_j} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_j y_j = 1 \\
& \mathbf{y} \geq 0
\end{aligned} \tag{2.3}$$

2.2.1. Incorporando la Abstención

Hasta aquí se ha supuesto que cada vez que un candidato gana un voto, lo hace a expensas de su rival, puesto que el nivel de participación a nivel país es total; cada persona que puede votar, lo hace. Ésto resulta ser un supuesto bastante fuerte, pues hoy en día una gran parte de los sistemas de elección mayoritaria permiten a los votantes simplemente no presentarse a votar, o bien, no votar por ninguno de los candidatos, entregando un voto nulo o blanco. Para incorporar este elemento al modelo, se redefinirán las funciones S_i^A y S_i^B de la siguiente forma:

$$S_i^A = \frac{(x_i + \alpha_i)}{(x_i + \alpha_i) + (y_i + \beta_i) + (\gamma_i)} \quad S_i^B = \frac{(y_i + \beta_i)}{(x_i + \alpha_i) + (y_i + \beta_i) + (\gamma_i)} \quad (2.4)$$

Aquí, el parámetro $\gamma_i \geq 0$ será nombrado el parámetro de abstención de la región i . Siguiendo la línea del modelo anterior, el parámetro de abstención mide el nivel de popularidad que tendría el no votar, si ésto se entendiera como un tercer candidato dentro de la elección. Lógicamente, la abstención no es un candidato en realidad, puesto que por muy popular que sea esta opción, siempre el ganador saldrá de entre A y B . Sin embargo, la fuerza que arrastra a los votantes a abstenerse será modelada como si fuera, en efecto, un tercer candidato.

Ambas estrategias seguirán siendo vectores pertenecientes al simplex n -dimensional, sin embargo, las funciones de utilidad que ambos candidatos persiguen ya no será en realidad el número de votos que obtengan, si no la proporción de votos a favor respecto a los realmente emitidos. Será éste criterio el que defina al ganador de la elección, por lo que debe ser también el criterio que los candidatos utilicen para discernir entre mejores y peores estrategias de campaña. Aquí, lo que los candidatos quieren es ser electos, para lo cual requieren maximizar el número de votos, pero dentro del universo de votos válidamente emitidos. De esta forma, se medirá el desempeño de cada candidato mediante la fracción de votos válidamente emitidos a su favor a lo largo de todo el país (se nombrarán S^A y S^B para los candidatos A y B , respectivamente), definidas de la siguiente forma:

$$S^A = \frac{\sum_j R_j^A}{\sum_j (R_j^A + R_j^B)} = \frac{\sum_j v_j S_j^A}{\sum_j v_j (S_j^A + S_j^B)} \quad S^B = \frac{\sum_j R_j^B}{\sum_j (R_j^A + R_j^B)} = \frac{\sum_j v_j S_j^B}{\sum_j v_j (S_j^A + S_j^B)} \quad (2.5)$$

El cambio respecto al caso anterior se observa en el denominador de las funciones de las Expresiones 2.5, donde cada desempeño es comparado con el número real de votos válidamente emitido. En el modelo sin abstención no había necesidad de incluir este factor, pues dicha suma era una constante (el número total de votantes de país). Este término no sólo representa de forma más certera las verdaderas intenciones de los candidatos en una elección, si no que además asegura que las funciones objetivos mantengan una estructura del tipo suma cero. En efecto, las definiciones de S^A y S^B descritan en las Expresiones 2.5 son tales que $S^A + S^B = 1$, sin importar las decisiones de los candidatos.

El candidato A entonces enfrenta el siguiente problema de maximización:

$$\begin{aligned}
\mathbf{max}_x \quad & S^A = \frac{\sum_j v_j S_j^A}{\sum_j v_j (S_j^A + S_j^B)} \\
\mathbf{s.t.} \quad & S_i^A = \frac{x_i + \alpha_i}{x_i + \alpha_i + y_i + \beta_i + \gamma_i}, \forall i \in \mathcal{I} \\
& S_i^B = \frac{y_i + \beta_i}{x_i + \alpha_i + y_i + \beta_i + \gamma_i}, \forall i \in \mathcal{I} \\
& \sum_j x_j = 1 \\
& \mathbf{x} \geq 0
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Mientras que para el candidato B , el problema se describe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{max}_y \quad & S^B = \frac{\sum_j v_j S_j^B}{\sum_j v_j (S_j^A + S_j^B)} \\
\mathbf{s.t.} \quad & S_i^A = \frac{x_i + \alpha_i}{x_i + \alpha_i + y_i + \beta_i + \gamma_i}, \forall i \in \mathcal{I} \\
& S_i^B = \frac{y_i + \beta_i}{x_i + \alpha_i + y_i + \beta_i + \gamma_i}, \forall i \in \mathcal{I} \\
& \sum_j y_j = 1 \\
& \mathbf{y} \geq 0
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Uno podría aquí argumentar que los candidatos en realidad buscan ganar la elección, sin importar el margen que se obtenga, pesando entonces con igual relevancia un escenario con 51% o uno con 99% de los votos a favor. Ésto es plausible y modelable a través de una función indicatriz para el candidato A que exiga que la función S^A esté arriba de 50% (ídem para el segundo candidato). El modelo aquí presentado, sin embargo, resulta mas completo, puesto que cualquier equilibrio para los Modelos 2.6 y 2.7 será también un equilibrio para el juego con función objetivo $\mathbb{1}_{(S^A > 50\%)}$.

Es importante notar que los Modelos 2.6 y 2.7 son en realidad una generalización de los Modelos 2.2 y 2.3, de modo tal que si se impone $\gamma = 0 \in \mathbb{R}^n$ genera el submodelo del caso anterior. Al igual que en el modelo sin abstención, se puede definir un equilibrio para éste nuevo modelo.

Definición 2. *Un equilibrio es un par de vectores, $(x^*, y^*) \in (\Delta_n)^2$, tal que $x^* \in \operatorname{argmax}_{x \in \Delta_n} S^A$ y, simultáneamente, $y^* \in \operatorname{argmax}_{y \in \Delta_n} S^B$.*

El siguiente teorema asegura la existencia y unicidad del equilibrio para este modelo.

Teorema 2. *El juego para la elección bajo **SM** y resultado determinista, con abstención, tiene un único equilibrio.*

Demostracion 3. *Ver Apéndice A .3.*

Al igual que en el modelo anterior, relajando la restricción de no negatividad de las estrategias, es posible encontrar un equilibrio con fórmula cerrada, aun incorporando el parámetro de abstención.

Proposición 2. *El juego para la elección bajo sistema mayoritario y resultado determinista, con abstención, tiene como solución irrestricta los vectores $x_i^{UB} = \frac{1 + \sum_j \alpha_j}{2 + \sum_j (\alpha_j + \beta_j)} \left[\frac{v_i}{\sum_j v_j} \left(2 + \sum_j (\alpha_j + \beta_j + \gamma_j) \right) - \gamma_i \right] - \alpha_i$, y análogamente para el segundo jugador, $y_i^{UB} = \frac{1 + \sum_j \beta_j}{2 + \sum_j (\alpha_j + \beta_j)} \left[\frac{v_i}{\sum_j v_j} \left(2 + \sum_j (\alpha_j + \beta_j + \gamma_j) \right) - \gamma_i \right] - \beta_i$, para todo $i \in \mathcal{I}$*

Demostracion 4. Ver Apéndice A .4

El siguiente teorema establece que los modelos con o sin abstención aquí presentados presentan exactamente el mismo resultado para sus versiones irrestrictas.

Teorema 3. *El juego irrestricto para la elección bajo sistema mayoritario y resultado determinista encuentra como equilibrio el mismo resultado, sin importar la abstención.*

Demostracion 5. Ver Apéndice A .5

2.2.2. Métodos Numéricos para Computar el Equilibrio

Una vez demostrado que existe un único equilibrio aun en el modelo con abstención, sólo queda encontrar un algoritmo que sea capaz de encontrarlo. Dado que los Modelos 2.2 y 2.3 son en realidad submodelos de 2.6 y 2.7, el algoritmo aquí presentado se hará cargo sólo de estos últimos, asumiendo que al introducir una instancia donde $\gamma = 0$ se puede reproducir un contexto de elección sin abstención alguna.

En este algoritmo se hará uso de la condición de juego suma cero, cuya estructura de pagos utiliza funciones cóncavo-convexas (ver prueba del Teorema 2), por lo que se implementará el método de Newton con barrera logarítmica para la restricción de no negatividad (Ghosh y Boyd, 2003). Para ello, dado $t > 0$ fijo, se definirá la función de utilidad del candidato A parametrizada en t como $S_t^A = -\left(t \times S^A + \sum_j \ln(x_j) - \sum_j \ln(y_j)\right)$. P_t será el juego con funciones de pago $(S_t^A, 1 - S_t^A)$ para el candidato A y B , respectivamente (P_t será entonces también de suma cero). Dicho juego presenta una única solución (utilizando los mismos argumentos que los expuestos en la demostración del Teorema 2), la que será nombrada $(\mathbf{x}_t^*, \mathbf{y}_t^*)$. Si $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente y no acotada de valores de t , con $t_0 > 0$, entonces la sucesión de equilibrios $(\mathbf{x}_{t_k}^*, \mathbf{y}_{t_k}^*)$ son tales que el equilibrio a los Modelos 2.6 y 2.7 corresponden en realidad a $\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_{t_k}^*, \mathbf{y}_{t_k}^*) = (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$. El algoritmo utilizado entonces, es el siguiente:

Algoritmo 1 Equilibrio bajo SM para Modelo Determinista con Método de Newton

- 1: **Input** $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^n, v \in \Delta_n$
 - 2: **Set** $(x, y) = (x_0, y_0) \in \Delta_n \times \Delta_n, k = 0, \{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \epsilon_{\text{Tot}}$,
 - 3: **While** $n/t_k > \epsilon_{\text{Tot}}$ **do**
 - 4: $(x, y) = (x_{t_k}^*, y_{t_k}^*)$
 - 5: $k = k + 1$
 - 6: **End While**
 - 7: **Return** (x, y)
-

Donde la cota utilizada en el loop del algoritmo es la mostrada por Ghosh y Boyd al demostrar la utilidad del método (Ghosh y Boyd, 2003).

Para encontrar la solución de cada juego P_t , dado un punto inicial (x_0, y_0) , se utilizará la recurrencia $x = x + \Delta x$ (análogo para y), donde Δx se computa mediante el siguiente cálculo:

$$\begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 S_t^A & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \nabla_{yy}^2 S_t^A & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T & 0 & 0 \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{1}^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta \lambda \\ \Delta \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla_x S_t^A - \lambda \\ -\nabla_y S_t^A - \eta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo que se obtiene aproximando las funciones con sus polinomios de Taylor de segundo grado, donde $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ son vectores columnas de dimensión n . La matriz de la izquierda, tiene entonces dimensiones $(2n + 2) \times (2n + 2)$. Los valores λ y η corresponden a los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones $\sum_j x_j = 1$ y $\sum_j y_j = 1$. Notar que no hay multiplicador para la restricción de no negatividad porque están absorbidas en la definición de S_t^A, S_t^B , al entrar como barreras logarítmicas.

Aquí, $\nabla_{xx}^2 S_t^A$ representa la matriz hessiana de la función de pago del candidato A sobre los valores del vector x (análogo para $\nabla_{yy}^2 S_t^A$). $\nabla_x S_t^A$ en tanto es el gradiente de la misma función sobre los valores de x (análogo para $\nabla_y S_t^A$). Para cada P_t , se define como punto inicial el equilibrio de la iteración inmediatamente anterior. En el caso $t = t_0$, se utilizó como punto de inicio la parte no negativa de la solución irrestricta vista en la Proposición 2, escalada para que sumen uno, es decir, $(x_0, y_0) = (x_+^{UB} K_x, y_+^{UB} K_y)$, donde $K_x = \left(\sum_{(j: x_j^{UB} \geq 0)} x_j^{UB} \right)^{-1}$, análogo con K_y . Se iterará en este proceso mientras los pasos $\Delta x, \Delta y$ sean suficientemente grandes. Como las funciones de pago son cóncavo-convexas, el equilibrio encontrará un punto plano, de modo que el criterio de iteración que se utilizará será $\epsilon = \max(|\Delta x, \Delta y|) \geq \epsilon_{\text{tol}}$, donde ϵ_{tol} corresponde al error tolerado.

2.3. Sistema Mayoritario, Juego Estocástico

Hasta ahora, se ha asumido que dados: (i) vectores de esfuerzo, (x, y) , (ii) vectores de sesgo (α, β) y (iii) parámetros de abstención γ , el resultado de la elección es perfectamente predecible y puede ser calculado en cada estado, y por lo tanto, en todo el país. Esto es, en realidad, un supuesto bastante fuerte. Por mucha información que se recopile a través de estos parámetros, el modelo jamás será capaz de predecir una elección con un 100% de precisión. Para este modelo, se relajará el supuesto del resultado determinista, introduciendo en su lugar un modelo estocástico que obedece a una distribución de probabilidades, en lugar de un resultado a ciencia cierta.

Para ésto, S_i^A (la fracción de votos a favor del candidato A en el estado i) será ahora una variable aleatoria (ídem para S_i^B), mientras que se definirá por S_i^C la variable aleatoria que mida la fracción de votos del estado i -ésimo que ninguno logro obtener (fracción que se abstuvo de votar). Naturalmente, estas tres variables aleatorias presentan fuertes correlaciones en su comportamiento, dado que, cualquiera que sea el escenario que se verifique, éste debe respetar que estos tres valores sean no negativos y sumados deben dar 1 (todos los votos son para A , para B , o para ninguno, sin excepción).

Intentando conservar cierta estructura del modelo determinista, se modelará la aleatoriedad de tales variables como se muestra a continuación:

$$\mathbf{S}_i \sim \mathbf{Dir}_3(k(x_i + \alpha_i), k(y_i + \beta_i), k\gamma_i)$$

Donde $\mathbf{S}_i = (S_i^A, S_i^B, S_i^C)$ describe el resultado de la elección en el estado i -ésimo y \mathbf{Dir}_n representa una distribución de Dirichlet n -dimensional (en este caso, dado que cada voto tiene sólo tres opciones, se considera la distribución tridimensional). De esta forma, la distribución de probabilidades de cada combinación queda identificada mediante la siguiente función de densidad:

$$f_{S_i}(\mathbf{s}_i) = \frac{(s_i^A)^{k(x_i + \alpha_i) - 1} (s_i^B)^{k(y_i + \beta_i) - 1} (s_i^C)^{k\gamma_i - 1}}{\mathbf{B}(k(x_i + \alpha_i), k(y_i + \beta_i), k\gamma_i)} \quad (2.8)$$

En donde $B(a, b, c)$ es la función Beta tridimensional, $B(a, b, c) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)}$.

Para esta distribución de probabilidades se introdujo un nuevo parámetro al problema, k , que regula la dispersión de los posibles resultados (podría entenderse como cuán difícil será predecir los resultados). De hecho, estudiando la varianza de la distribución de Dirichlet, en este caso tendríamos que $\text{Var}(S_i^A) = \frac{(x_i + \alpha_i)(y_i + \beta_i + \gamma_i)}{(x_i + \alpha_i + y_i + \beta_i + \gamma_i)^2(1 + k(x_i + \alpha_i))}$, donde queda en evidencia que $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{Var}(S_i^A) = 0$, de modo que mientras más alto sea k , más fácil será predecir el resultado de la elección (dicho de otra forma, la elección tendrá un comportamiento más determinista conforme crezca k). Es más, dado que la media de los resultados ($\mathbb{E}(S_i^A) = \frac{x_i + \alpha_i}{x_i + \alpha_i + y_i + \beta_i + \gamma_i}$, ídem para S_i^B, S_i^C) no depende en absoluto de k , un alto valor de tal parámetro hará muy difícil que los resultados estén alejados de sus valores esperados, los que calzan con el modelo determinista.

La Figura 2.3 muestra cómo el parámetro k regula la concentración de la distribución de probabilidades de S_i .

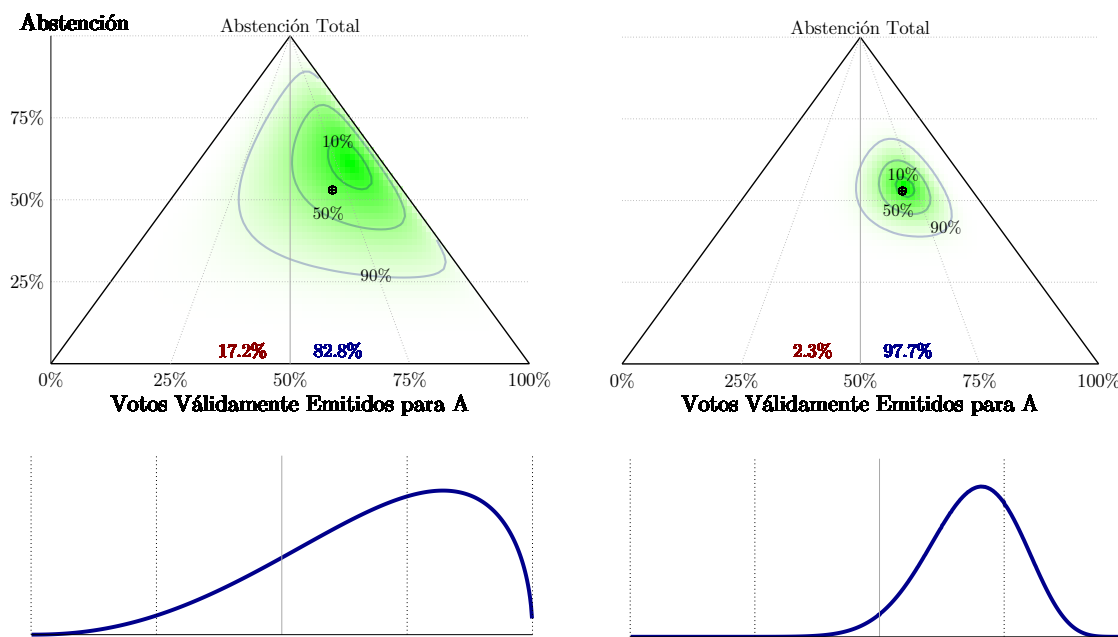


Figura 2.1: Distribución de Dirichlet con Diferentes Valores de k .

Gráfico que muestra la distribución de probabilidades de los resultados para diferentes valores de k . En ambos casos se tiene $(x_i + \alpha_i) = 1.1$, $(y_i + \beta_i) = 0.5$, $\gamma_i = 1.8$. **Izquierda:** $k = 3$. **Derecha:** $k = 15$. En cada gráfico se marcan las curvas de nivel que encierran un 10 %, 50 % y 90 % de probabilidad en cada caso. El punto indicado corresponde a la media teórica. Los valores en azul y rojo corresponden a la probabilidad que tiene cada candidato de superar la barrera del 50 % dentro de los votos emitidos. En los gráficos de abajo se ve la distribución de probabilidades en ambos escenarios considerando sólo los votos válidamente emitidos. Fuente: Elaboración Propia.

2.3.1. ¿Qué Optimizan los Candidatos en el Modelo Estocástico?

En el modelo estocástico, ya no es posible definir para los jugadores como función objetivo el número de votos exacto que obtendrán, puesto que tal número es en realidad una variable aleatoria cuyo valor no se conoce ex-ante. Las campañas de los candidatos A y B no afectan directamente el resultado de cada estado; en realidad, éstas redibujan

la distribución de probabilidades del resultado que se observará en cada región. ¿Cuál debería ser entonces el criterio que utilicen los candidatos para decidir por una u otra estrategia? O, matemáticamente hablando, ¿cuál es la función objetivo de los problemas de optimización que cada jugador enfrenta?.

Una opción es intentar maximizar el número esperado de votos a recibir, $\mathbb{E}(R^A) = \sum_j v_j \mathbb{E}(S_j^A)$. La distribución de Dirichlet permite encontrar fácilmente la media teórica de cada componente en función de sus parámetros, $\mathbb{E}(S_i^A) = \frac{x_i + \alpha_i}{x_i + \alpha_i + y_i + \beta_i + \gamma_i}$, $\mathbb{E}(S_i^B) = \frac{y_i + \beta_i}{x_i + \alpha_i + y_i + \beta_i + \gamma_i}$, $\mathbb{E}(S_i^C) = \frac{\gamma_i}{x_i + \alpha_i + y_i + \beta_i + \gamma_i}$. En tal caso, si $\gamma = 0$, se recuperan los problemas definidos en los Problemas 2.2 y 2.3. Por otro lado, si el problema presenta algún grado de abstención en cualquiera de sus estados (ie., $\exists i \in \mathcal{I}$ tal que $\gamma_i > 0$), entonces casi seguramente se observará algún nivel de abstención ($\mathbb{P}(R_i^A + R_i^B < 1) = 1$). Maximizar el número esperado de votos entonces deja de ser un juego de suma cero, puesto que un voto perdido puede no ser necesariamente un voto ganado por el rival, si no más bien un elector absteniéndose de votar.

Utilizar el número esperado de votos como función objetivo ignora el hecho que los candidatos en realidad buscan directamente ganar la elección, para lo cual sólo requieren tener más votos que el rival, sin importar si esa diferencia es abismal o tan sólo un voto. La verdadera función que los candidatos buscan optimizar entonces son sus probabilidades de ganar. Si el vector $\mathbf{S}_i = (S_i^A, S_i^B, S_i^C)$ reúne a las variables aleatorias que identifican el porcentaje de votos que hubo para el candidato A , B y la abstención, se define $R^A = \sum_j R_j^A = \sum_j v_j S_j^A$ (ídem con R^B para el segundo candidato) como la variable aleatoria que mide el número de votos (a nivel país) que obtuvo el candidato A , quien entonces buscará maximizar su probabilidad de ganar, definida como $\mathbb{P}(\text{Gana } A) = \mathbb{P}(R^A > R^B)$ (análogo para candidato B). Considerando que, por la naturaleza de la distribución utilizada, $\mathbb{P}(R_i^A = R_i^B) = 0$, entonces que gane A o B son eventos complementarios (y evidentemente excluyentes), por lo que sus probabilidades sumarán 1. Esto garantiza que el juego será, nuevamente, del tipo suma cero.

Dicho esto, el modelo que se propondrá queda descrito por los siguientes problemas de optimización.

Para el candidato A :

$$\begin{aligned} \max_x \quad & \mathbb{P}(R^A > R^B) = \int \cdots \int_{(\Delta_3)^n} \mathbb{1}_{(\sum_j v_j S_j^A > \sum_j v_j S_j^B)} \times \prod_j f_j(\mathbf{S}_j) d\mathbf{S}_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_j x_j = 1 \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Y análogo para el candidato B :

$$\begin{aligned} \max_y \quad & \mathbb{P}(R^B > R^A) = \int \cdots \int_{(\Delta_3)^n} \mathbb{1}_{(\sum_j v_j S_j^B > \sum_j v_j S_j^A)} \times \prod_j f_j(\mathbf{S}_j) d\mathbf{S}_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_j y_j = 1 \\ & \mathbf{y} \geq 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Las integrales, en cada caso, corren para cada $i \in \mathcal{I}$, sobre todo el área de posibles resultados, Δ_3 , de modo que el área real de integración es $(\Delta_3)^n$. La función $f_j(\mathbf{S}_j)$ corresponde a la densidad de probabilidad asignada al resultado \mathbf{S}_j , la que queda descrita en la Expresión 2.8.

Al igual que en el modelo determinista, se define el equilibrio.

Definición 3. Un equilibrio es un par de vectores, $(x^*, y^*) \in (\Delta_n)^2$, tal que $x^* \in \operatorname{argmax}_{x \in \Delta_n} \mathbb{P}(R^A > R^B)$ y, simultáneamente, $y^* \in \operatorname{argmax}_{y \in \Delta_n} \mathbb{P}(R^B > R^A)$.

A diferencia del caso determinista, en este modelo no se tiene certeza si acaso las funciones objetivo elegidas son o no cóncavo-convexas, lo que se traduce en un problema para su resolución: no existe ninguna garantía de que haya un equilibrio único. Es más, no existe ninguna garantía de que haya equilibrio alguno. La evidencia empírica, sin embargo, sugiere que dicho equilibrio existe y es único (aunque cabe recalcar que ello no representa en ningún caso una prueba respecto a la existencia, ni mucho menos la unicidad, de un posible equilibrio en términos genéricos).

2.3.2. Métodos Numéricos para Computar el Equilibrio

Para la resolución de este modelo, se procederá con un algoritmo de iteración de *best responses* hasta alcanzar un punto estacionario. Para ésto, se utilizarán los sistemas de ecuaciones de Karush-Kuhn-Tucker que emergen de los Problemas 2.9 y 2.10. Asignando multiplicadores λ a la restricción $\sum_j x_j = 1$, y μ_i a las restricciones de no negatividad $x_i \geq 0$, se llega al sistema de ecuaciones para el candidato A :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbb{P}(R^A > R^B) + \mu_i &= \lambda \quad \forall i \in \mathcal{I} \\ x_i \mu_i &= 0 \quad \forall i \in \mathcal{I} \\ x_i, \mu_i &\geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I} \\ \sum_j x_j &= 1 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Donde la primera ecuación corresponde a la condición de primer orden, la segunda es holgura complementaria, y las siguientes corresponden a las condiciones de factibilidad. Un sistema análogo se obtiene de realizar el mismo procedimiento para el candidato B . Tomando todas las ecuaciones correspondientes a las condiciones de primer orden, multiplicando cada una por su x asociado y sumando sobre todos los índices se obtiene $\lambda = \sum_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbb{P}(R^A > R^B)$. Utilizando este valor de λ para despejar en cada caso los valores de μ_j , e insertando tales valores en las ecuaciones de holgura complementario se obtiene la relación $x_i \times \left(\sum_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbb{P}(R^A > R^B) - \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbb{P}(R^A > R^B) \right) = 0$, la que debe cumplirse $\forall i \in \mathcal{I}$. Se definirá como $\xi_i^A = x_i \times \left(\sum_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbb{P}(R^A > R^B) - \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbb{P}(R^A > R^B) \right)$ para mantener control sobre la estabilidad del equilibrio encontrado (análogo para ξ_i^B), utilizando como criterio de punto estacionario aquel donde $\xi^A, \xi^B = 0$, puesto que en tal combinación se satisfacen los sistemas de ecuaciones de Karush-Kuhn-Tucker. Para efectos de los algoritmos, se buscará el punto donde tales valores sean lo suficientemente pequeños; definiendo $\xi = (\xi^A, \xi^B)$, se busca el punto donde $\|\xi\| < \xi_{Tol}$, donde $\|x\|$ será la norma infinito ($\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$), y ξ_{Tol} será un valor considerado suficientemente pequeño, según cuan exigente se quiera ser para con el margen de error (típicamente se tomarán valores del orden de 10^{-4}).

La secuencia utilizada para el cálculo se hará mediante dos algoritmos principales (la falta de garantías respecto a la unicidad del equilibrio obliga a evaluar opciones para ver posibles alteraciones en la combinación encontrada en cada caso).

Método del Gradiente

Partiendo de un punto inicial dado (x_0, y_0) , cada candidato encuentra la dirección de máximo crecimiento de su probabilidad de ganar (restringida a mantener la estrategia dentro del simplex), las que se denominarán por d^A y d^B para los candidatos A y B , respectivamente. Dada las direcciones, se encontrará la magnitud óptima del paso a realizar en dichas direcciones, en términos de la probabilidad de ganar. A tales magnitudes se les denominará t_A y t_B para los candidatos A y B , respectivamente. Computadas las direcciones y magnitudes de ambos candidatos, se define el nuevo par de estrategias como $(x, y) \leftarrow (x + \rho t_A d^A, y + \rho t_B d^B)$, donde el parámetro $\rho \in (0, 1]$, regula cuán rápidos serán los movimientos del algoritmo. Un valor ρ cercano a 0 generará un algoritmo lento pero estable en sus movimientos, mientras que ρ más cercano a 1 creará movimientos más rápidos, posiblemente acelerando el algoritmo, pero de comportamiento potencialmente más errático.

Para encontrar la dirección de máximo crecimiento de la probabilidad de ganar dentro de Δ_n , se utilizará el siguiente lema:

Lema 1. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y diferenciable, y x un punto al interior de Δ_n . Se define el vector τ^W mediante la expresión $\tau_i^W = x_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x - \sum_j x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_x \right)$. Entonces, la dirección de máximo crecimiento de la función f en x , dentro del interior de Δ_n , queda descrito por:

$$\tau_i^x = x_i \left(\tau_i^W - \sum_j x_j \tau_j^W \right)$$

Donde $\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_j x_j = 1, x \geq 0\}$ es el simplex n -dimensional.

Demostracion 6. Ver Apéndice A .6

Para encontrar las direcciones de máximo crecimiento de cada candidato, utilizando el Lema 1, y observando que en este caso particular, $\tau^W = \xi^A$, se obtiene que la dirección de máximo crecimiento de la probabilidad de ganar para el candidato A dentro de Δ_n es $d_i^A = x_i (\xi_i^A - \sum_j x_j \xi_j^A)$, ídem para el candidato B , con $d_i^B = y_i (\xi_i^B - \sum_j y_j \xi_j^B)$. Por otro lado, t_A se definió como la magnitud que maximiza la probabilidad de ganar sobre la dirección d^A , es decir, $t_A = \operatorname{argmax}_{t \in \mathbb{R}_+, (x+td^A) \in \Delta_n} \mathbb{P}(R^A > R^B \mid x + td^A)$. Para esto, se utilizó un algoritmo de búsqueda binaria, con extremos $t_{LB} = 0$ y $t_{UB} = \max\{t : x + td^A \in \Delta_n\} = - \max_{j: d_j^A < 0} (x_j/d_j^A)$, respectivamente. Mediante el mismo procedimiento se computa t_B .

El algoritmo, en términos generales, queda entonces descrito según el pseudo código descrito a continuación:

Algoritmo 2 Equilibrio SM para Modelo Estocástico con Método del Gradiente

- 1: **Input** $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^n, v \in \Delta^n, k \in \mathbb{R}_+$
 - 2: **Set** $(x, y) = (x^0, y^0) \in \Delta^n, \rho \in (0, 1], \xi_{\text{Tot}} \in \mathbb{R}_+$
 - 3: **While** $\|\xi\| \geq \xi_{\text{Tot}}$ **do**
 - 4: **Compute** (d^A, d^B)
 - 5: **Compute** (t_A, t_B)
 - 6: $x = x + \rho d^A t_A$
 - 7: $y = y + \rho d^B t_B$
 - 8: **End While**
 - 9: **Return** (x, y)
-

Método del Vecino

En este caso, se parte de un punto inicial dado (x_0, y_0) y en cada iteración se calcula la *best response* de cada jugador para la estrategia de su rival. Se denominó $BR_A(y)$ a la función que encuentra la *best response* del primer candidato a la estrategia y del segundo candidato, ídem para $BR_B(x)$.

Una vez computadas ambas *best responses*, las estrategias se actualizan a una combinación entre tales respuestas y las estrategias que se tenían previamente, ponderadas según un parámetro $\rho \in (0, 1]$.

Algoritmo 3 Equilibrio SM para Modelo Estocástico con Método del Vecino

```

1: Input  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^n, v \in \Delta^n, k \in \mathbb{R}_+$ 
2: Set  $x, y = x^0, y^0 \in \Delta^n, \rho \in (0, 1]$ 
3: While  $\|\xi\| \geq \xi_{\text{Tol}}$  do
4:    $B_A = BR_A(y)$ 
5:    $B_B = BR_B(x)$ 
6:    $x = (1 - \rho)x + \rho B_A$ 
7:    $y = (1 - \rho)y + \rho B_B$ 
8: End While
9: Return  $(x, y)$ 

```

Para calcular $BR_A(y)$ se utilizó un procedimiento de comparación y actualización que se denominará Método del Vecino. Este algoritmo trabaja comparando el punto seleccionado con todos los vecinos que se encuentran a distancia δ del punto en cuestión. Cuando el mejor de ellos (en términos de cierta función f , en este caso, la probabilidad de ganar la elección) resulta mejor que el punto seleccionado, se cambia tal punto por el vecino encontrado. Si no hay vecino mejor, se reduce el radio de búsqueda en un 50%. Las iteraciones se mantendrán hasta que el radio de búsqueda δ sea suficientemente pequeño.

El conjunto de desplazamientos a vecinos son los vectores que generan cambios de δ entre dos ejes, partiendo en x , es decir, $\Phi(x, \delta) = \{\phi^{i,j} \in \mathbb{R}^n \mid (i, j) \in \mathcal{I}^2, i \neq j, (\phi^{i,j})_k = \delta \times (\mathbb{1}_{(i=k)} - \mathbb{1}_{(j=k)}), (x + \phi^{i,j}) \in \text{Dom}(f)\}$.

Algoritmo 4 Método del Vecino

```

1: Input  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 
2: Set  $x = x^0 \in \text{Dom}(f), \delta = \delta_0 \in \mathbb{R}_+, \delta_{\text{Tol}} \in \mathbb{R}_+$ 
3: While  $\delta > \delta_{\text{Tol}}$  do
4:    $\phi = \underset{\phi \in \Phi(x, \delta)}{\text{argmax}} f(x + \phi)$ 
5:   If  $f(x + \phi) > f(x)$  then
6:      $x = x + \phi$ 
7:   Else
8:      $\delta = 1/2 \times \delta$ 
9:   End If
10: End While
11: Return  $(x)$ 

```

Para efectos del algoritmo, se tomará x_0 como el vector de coordenadas idénticas, $(x_0)_i = 1/n$, δ_0 será la mitad de tal cantidad, $\delta_0 = 1/(2n)$, y δ_{Tol} será del orden de 10^{-5} .

2.3.3. Acelerando el Cómputo

Tanto el algoritmo con Método del Gradiente, como el con Método del Vecino, requieren evaluar múltiples veces la probabilidad de ganar en diferentes combinaciones de estrategias utilizando las funciones objetivos expuestas en los Problemas 2.9 y 2.10. No existe, sin embargo, una fórmula cerrada que permita evaluar tales funciones, de modo que se utilizaron simulaciones de Montecarlo para encontrar el valor cada vez que se requirió, estimando la probabilidad con el promedio de veces que se observa que cada candidato gana luego de un cierto número de simulaciones. Este proceso resulta computacionalmente muy demandante, principalmente debido al tiempo que consume simular cada escenario, considerando que para obtener la simulación de un escenario y su ganador, es necesario haber simulado todos los estados del país. Es justamente este paso el que puede ser ahorrado y utilizado solo cuando se le necesita.

Proposición 3. *Sea el vector $\mathbf{S}_j = (S_j^A, S_j^B, S_j^C)$ una variable aleatoria que sigue la distribución mostrada en la Expresión 2.8, y S la matriz que reúne todos los vectores \mathbf{S}_j , para todo índice j . Sea $g(S)$ una función de tales variables que no utiliza de parámetros al par (x, y) que definen las distribuciones de S_j . Se define la esperanza del resultado de tal función, dadas las distribuciones asociadas al par de estrategias (x, y) , mediante la expresión $\mathbb{E}(g(S)|x, y) = \int \cdots \int_{(\Delta_3)^N} g(S) \times \prod_j f_j(\mathbf{S}_j|x, y) d\mathbf{S}_j$. Entonces al trasladar las estrategias al punto $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, la nueva esperanza puede reducirse a:*

$$\mathbb{E}(g(S)|x + \Delta x, y + \Delta y) = K \times \mathbb{E}(g(S) \times \prod_j (s_j^A)^{k\Delta x_j} (s_j^B)^{k\Delta y_j} |x, y)$$

Donde K se calcula como $\prod_j \frac{B(k(x_j + \alpha_j), k(y_j + \beta_j), k\gamma_j)}{B(k(x_j + \Delta x_j + \alpha_j), k(y_j + \Delta y_j + \beta_j), k\gamma_j)}$

Demostración 7. Ver Apéndice A .7

La Proposición 3 permite reutilizar las simulaciones utilizando las distribuciones que nacen de las estrategias x, y para calcular la esperanza en un punto diferente. En particular, tomando $g(S) = \mathbb{1}_{(\sum_j v_j S_j^A > \sum_j v_j S_j^B)}$, se puede utilizar para calcular la probabilidad de ganar usando simulaciones de Montecarlo, sin necesidad de simular cada vez que cambie el par de estrategias.

2.4. Colegio Electoral

Para el sistema basado en un colegio electoral con representantes de cada estado del país, el resultado de la elección es ahora una variable binaria, o gana el candidato A , o el candidato B , y quien lo haga se adueñará de la totalidad de los votos que tal estado tiene³. Ahora bien, el hecho que el output de la elección sea binario en cada estado no quiere decir que el resultado de la elección sea binario; el resultado puede ser 60% a favor del candidato A , pero el output dará un 100% de los votos electorales a A de todas formas. Lo que se busca es un modelo que sea capaz de reconocer que la elección ahora se resuelve estado a estado, y el resultado global nace de combinar la suma de cada estado en su forma binaria.

Por ello, manteniendo la notación introducida en la Sección 2.3, donde R_i^A refleja el número de votos que el candidato A obtuvo en el estado i -ésimo, y S_i^A como la proporción del número total de votos del estado en cuestión (ídem para R_i^B y S_i^B para el segundo candidato, así como R_i^C y S_i^C para la abstención), definiendo por G^A al evento en que

³Por completitud, es necesario estipular que en caso de un empate, el ganador se definirá mediante un sorteo equiprobable.

el candidato A resulta ganador la elección a nivel país, es decir, $G^A \iff \sum_j w_j \mathbb{1}_{(R_j^A > R_j^B)} > \sum_j w_j \mathbb{1}_{(R_j^B > R_j^A)}$, el problema que enfrenta el candidato A quedará descrito de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \mathbf{max}_x \quad \mathbb{P}(G^A) \\ & \mathbf{s.t.} \quad \sum_j x_j = 1 \\ & \quad \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Análogo para el candiato B :

$$\begin{aligned} & \mathbf{max}_y \quad \mathbb{P}(G^B) \\ & \mathbf{s.t.} \quad \sum_j y_j = 1 \\ & \quad \mathbf{y} \geq 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Donde se observa que, por la distribución de probabilidades definida en la Expresión 2, la probabilidad de presenciar un empate es $\mathbb{P}(R_i^A = R_i^B) = 0$, $\forall i \in \mathcal{I}$ (es decir, casi seguramente no habrá un empate en ninguno de los estados del país). En caso que la suma de los votos w_i en los índices i donde se impuso el candidato A sean iguales a aquellos donde se impuso el candidato B , se definirá un desempate mediante un sistema de sorteo sin distinción, de forma que G^A y G^B (el evento en que el candidato B resulta ganador de la elección) son mutuamente excluyentes y complementarios. Así, las dos funciones objetivo son en realidad probabilidades complementarias entre sí, lo que transforma la juego, al igual como en el caso anterior, a uno de suma cero.

Al igual que en los modelos anteriores, se puede definir un par de estrategias como equilibrios del juego.

Definición 4. *Un equilibrio es un par de vectores, $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in (\Delta^n)^2$, tal que $\mathbf{x}^* \in \arg \max_{\mathbf{x} \in \Delta^n} \mathbb{P}(G^A | \mathbf{x}, \mathbf{y}^*)$ y, simultáneamente, $\mathbf{y}^* \in \arg \max_{\mathbf{y} \in \Delta^n} \mathbb{P}(G^B | \mathbf{x}^*, \mathbf{y})$.*

Ahora bien, hace falta una expresión para calcular $\mathbb{P}(S_i^A > S_i^B)$. Para modelar esta situación, se mantendrá la distribución introducida en la Expresión 2.8 para estudiar los posibles valores que tomará la proporción de votos que cada candidato ganará (o los votos que se abstengan de elegir). Se define como la probabilidad de que el candidato A gane el estado i -ésimo entonces, a través de la siguiente expresión:

$$p_i = \mathbb{P}(S_i^A > S_i^B) = \int_{\Delta_3} \mathbb{1}_{(S_i^A > S_i^B)} f_i(\mathbf{S}_i) d\mathbf{S}_i \tag{2.14}$$

Donde $\mathbf{S}_j = (S_j^A, S_j^B, S_j^C)$ es el vector con las variables aleatorias que indican la fracción de votos que fue para el candidato A , B y que se abstuvieron de votar, respectivamente.

Este modelo generará un comportamiento mucho más extremos entre los candidatos, los que buscarán influir en los estados más indecisos en su resultado, puesto que aquellos esfuerzos que no logren impactar significativamente en el valor de p_i simplemente no serán estrategias óptimas a considerar por uno u otro candidato, lo que se acentuará aún más conforme más concentradas sean las distribuciones utilizadas (lo que regula el parámetro k definido en la Sección 2.3).

Es importante notar que para la definición de p_i entregada, el modelo es indiferente de lo que ocurra en cualquier otro estado a la hora de encontrar tales probabilidades. Dicho de otra forma, los votantes modelados no ponen atención a lo que ocurra en otras partes del país para decidir por quién votar.

Prob. de Ganar

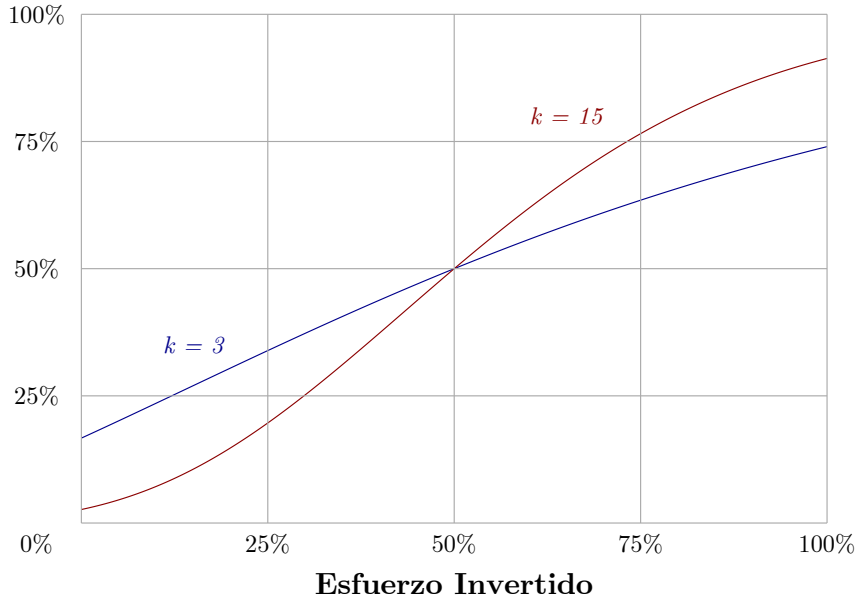


Figura 2.2: Evolución de la Probabilidad de Ganar según el Esfuerzo Invertido.

Evolución de la probabilidad de ganar un estado siguiendo la Expresión 2.14. Parametrización: $(y_i + \beta_i) = 0.8$, $\alpha_i = 0.3$, $\gamma_i = 0$. Eje absciso muestra el rango de posibles valores para x_i , eje ordenado, su impacto en la probabilidad resultante. En azul la curva con $k = 3$. En rojo, $k = 15$. Fuente: Elaboración Propia.

2.4.1. El (No) Rol de la Abstención

Una particularidad de utilizar la distribución de Dirichlet en este sistema nace a partir del rol que juega el valor S_i^C (fracción de votos que se abstienen de votar). Para determinar el ganador, S_i^C no influye realmente en el resultado, puesto que para decidir al candidato ganador de cada estado sólo hace falta ver cuál obtuvo más votos. Se podría pensar que el papel que juega la abstención sería sólo el de restar votos a uno u otro lado, favoreciendo indirectamente a algún candidato. El Lema 2 a continuación, demuestra que al utilizar la distribución de Dirichlet, la abstención, de hecho, no juega papel alguno en el resultado.

Lema 2. Si $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \sim \text{Dir}_3(x, y, z)$, entonces el peso relativo de \mathcal{X} respecto a \mathcal{Y} no depende del valor de \mathcal{Z} , vale decir, $\text{Cov}(\mathcal{Z}, \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{X}+\mathcal{Y}}) = 0$. Además, $\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{X}+\mathcal{Y}} \sim \text{Beta}(x, y)$.

Demostración 8. Ver Apéndice A .8.

Para el modelo, la definición de ganador requiere sólo estudiar el valor de $\frac{S_i^A}{(S_i^A + S_i^B)}$ para ver dónde se ubica respecto al umbral del 50%. La abstención entonces no juega papel alguno, de modo que se trabajará sólo con S_i^A y S_i^B , y el peso relativo de uno respecto del otro. El mismo lema nos permite afirmar que la proporción entre ambos queda identificada por una distribución Beta de parámetros $k(x_i + \alpha_i)$ y $k(y_i + \beta_i)$.

2.4.2. De los Estados al Resultado País

Una gran fuente de complejidad que surge del modelo de elecciones bajo **CE** dice relación con la naturaleza del cálculo de resultados a nivel país a partir de las probabilidades de los resultados de cada estado. En un país con n estados, las posibles combinaciones de resultados son 2^n , la mitad de las cuales da por ganador al candidato A y la otra mitad a B . Sin embargo, a la hora de calcular el peso en probabilidades de cada escenario, éste no se reparte en partes iguales, si no que sigue una distribución que dependerá de p_i (la probabilidad que tiene el candidato A de ganar en el estado i) y w_i (número de votos en el colegio electoral que representan al estado i), con $i \in \mathcal{I}$. Se tiene entonces una situación con un número exponencial de posibles casos que se requieren considerar para calcular cómo diferentes valores del vector p_i se traducen en cambios en las probabilidades de ganar la elección global. Puede incluso darse un escenario donde un aumento de probabilidad de ganar un estado no impacte de forma alguna el resultado de la elección del país (a modo de ejemplo, en un país con dos estados con $w_1 = 2, w_2 = 1$ votos electorales no hay incentivo alguno a hacer campaña en el segundo estado, ya que toda la elección se define con los votos w_1). Para lidiar con este problema de una forma computacionalmente simple, se modeló un árbol de nodos⁴. El nodo $N_{k,s}$ representará la probabilidad de tener k votos electorales a favor, luego de definido el estado s . Ésto podría ser también entendido como una cadena de Markov alterada (no todos los nodos tienen transiciones, pero se puede completar para que así sea sin problemas). Para ello, los nodos se encuentran ordenados de forma matricial; las filas se asignarán al número k de votos acumulados, mientras las columnas se asignarán al último estado que haya ya sido considerado. Se agrega una columna artificial $s = 0$ cuyo único nodo de relevancia es aquel sin votos ($k = 0$), lo que representa el punto de inicio de toda elección. Para las probabilidades de transición, hay que notar que luego de cada estado s , hay solo dos posibles resultados: o el número de votos a favor aumentará en w_s con probabilidad p_s , o se quedará en el mismo nivel con probabilidad $(1 - p_s)$. La siguiente expresión resume la forma recursiva en la que cada nodo hereda probabilidades de los nodos anteriores según el resultado que se revela en cada estado.

$$\mathbb{P}(N_{k+w_s,s}) = (1 - p_s) \times \mathbb{P}(N_{k+w_s,s-1}) + p_s \times \mathbb{P}(N_{k,s-1}) \quad (2.15)$$

Ahora bien, una forma de simplificar la red es evitar nodos que se sabe que no tienen probabilidad alguna de aparecer bajo ninguna combinación de resultados. Por ejemplo, si el primer estado tiene $w_1 = 3$ votos electorales, no existe opción que en la primera columna se necesite un nodo diferente a aquel donde $k = 0$ o $k = 3$. Ésto permite reducir drásticamente el número de nodos que se requiere para describir el comportamiento de todo este proceso, aplicando la misma lógica en cada columna de la matriz de nodos.

Una forma de simplificar aún más la red es calcular la mínima cantidad de votos que transforma a un candidato en ganador, $C = 1 + \lfloor \frac{\sum w}{2} \rfloor$. Para que un candidato salga electo, debe cruzar ese umbral de votos electorales, sin importar cuántos votos arriba de dicha cantidad obtuvo finalmente. Por eso, todas las filas que superen la barrera de los $k = C$ votos electorales pueden ser, de hecho, agrupadas en una sola (la fila que acumula la probabilidad de ganar, sin importar la distribución de votos dentro del espectro ganador), y las transiciones que resultan en cualquier nodo que formase parte de esta fila agrupada será redirigida simplemente a esta nueva fila. Esta fila presenta un comportamiento completamente absorbente; cualquier probabilidad que llegue a tal instancia se mantendrá ahí aun

⁴Idea basada en el trabajo de Rigdon et al. 2009, (Rigdon E. y col., 2009)

si quedan estados por derimir, puesto que incluso en el peor caso posible (perder todos los estados que quedan), dicho candidato ya es matemáticamente el ganador de la elección.

La Figura 2.3 representa a continuación como quedaría el árbol para un país con 3 estados, donde los votos electorales son $w_1 = 3, w_2 = 2, w_3 = 1$.

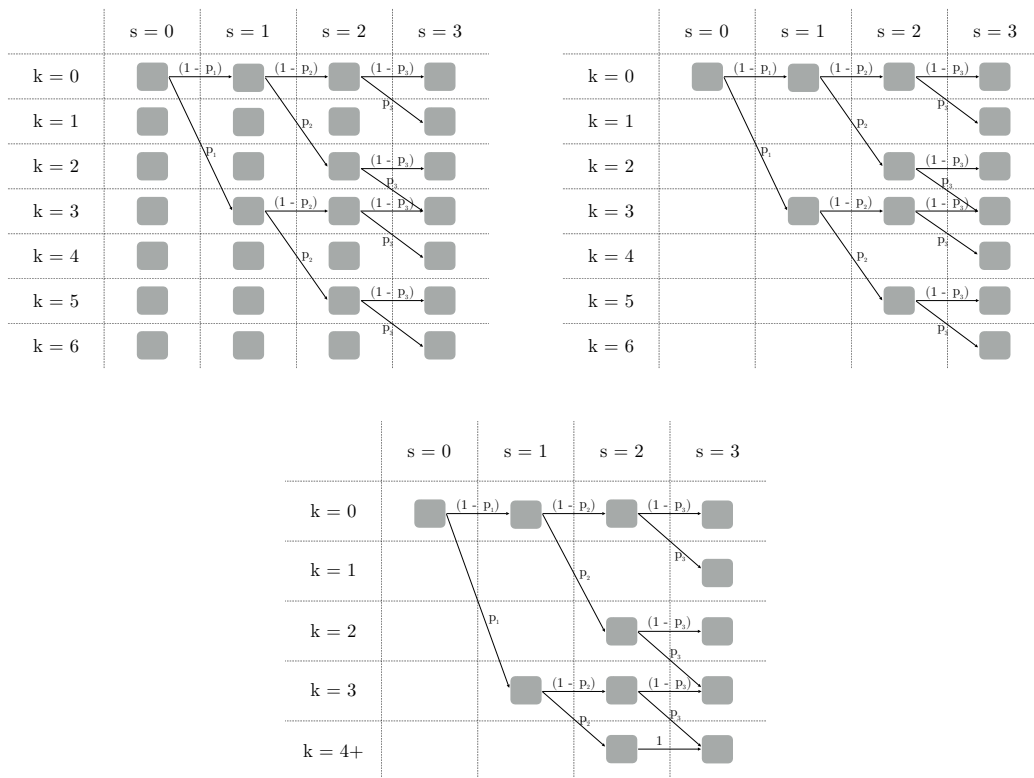


Figura 2.3: Árboles de ejemplo para un país.

Árboles para instancia de ejemplo, basado en un país con votos electorales dados por $w_1 = 3, w_2 = 2, w_3 = 3$. **Arriba a la Izquierda:** Cadena completa, con todos los nodos, incluso aquellos imposibles de tocar. **Arriba a la Derecha:** Cadena resumida, sin generar nodos que en la práctica nunca serán de utilidad para el modelo. **Abajo:** Cadena cortada, limitando k para que sólo tome hasta el valor que transforma a un candidato en ganador. Fuente: Elaboración Propia.

Con esta metodología, entonces, dado un vector de probabilidades \mathbf{p} (y los votos electorales de cada estado, w_i), se puede encontrar la probabilidad de ganar la elección global tan sólo verificando la probabilidad acumulada en el nodo de la última fila, última columna (para la red más simplificada).

2.4.3. Condiciones de Optimalidad y Derivadas de la Función Objetivo

Mediante los mecanismos explicados para computar las probabilidades p_i de ganar en cada estado a partir de las estrategias x, y , y la probabilidad de ganar la elección a partir de tales probabilidades utilizando el árbol de nodos expresado anteriormente, surge ahora la interrogante respecto a como medir la optimalidad de un posible equilibrio de estrategias.

En el modelo anterior, se mostró que aún sin pruebas concretas respecto a la existencia ni unicidad de tal equilibrio, existe al menos evidencia empírica que sugiere ambas. En el caso del sistema electoral mediante colegio electoral, se intentará replicar tal procedimiento.

Para ello, lo primero es estudiar las ecuaciones de Karush-Kuhn-Tucker que emergen de las definiciones entregadas. Definiendo los mismos multiplicadores de Lagrange que los introducidos en las Ecuaciones 2.11, en este caso el primer candidato enfrenta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j} \mathbb{P}(G^A) + \mu_j &= \lambda \quad \forall j \in \mathcal{I} \\
x_j \mu_j &= 0 \quad \forall j \in \mathcal{I} \\
x_j &\geq 0 \quad \forall j \in \mathcal{I} \\
\sum_j x_j &= 1
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Donde el principal problema emerge de calcular las derivadas necesarias para las condiciones de primer orden. Utilizando la regla de la cadena a través de los valores p_i para calcular tal derivada, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathbb{P}(G^A) = \sum_j \frac{\partial p_j}{\partial x_i} \times \frac{\partial}{\partial p_j} \mathbb{P}(G^A) = \frac{\partial p_i}{\partial x_i} \times \frac{\partial}{\partial p_i} \mathbb{P}(G^A)$$

Donde se aprovechó el hecho que $\frac{\partial p_j}{\partial x_i} = 0$ siempre que $i \neq j$. Es importante notar que $\frac{\partial}{\partial p_i} \mathbb{P}(G^A)$ puede expresarse como $\frac{\partial}{\partial p_i} \mathbb{P}(G^A) = \mathbb{P}(G^A|G_i^A) - \mathbb{P}(G^A|G_i^B)$, donde se definió G_i^A como el evento correspondiente al candidato A resultando ganador en el estado i , vale decir, $G_i^A \iff S_i^A > S_i^B$ (análogo para G_i^B). Para corroborar esto, basta ver que $\mathbb{P}(G^A) = \mathbb{P}(G^A|G_i^A)p_i + \mathbb{P}(G^A|G_i^B)(1 - p_i)$, debido al teorema de probabilidades totales. Las cantidades $\mathbb{P}(G^A|G_i^A)$ y $\mathbb{P}(G^A|G_i^B)$ pueden calcularse utilizando los mismo árboles expuestos en la Figura 2.3, modificando el valor de p_i a 1 o 0 según se quiera condicionar a un resultado ganador o perdedor.

Resuelto el problema de computar las derivadas necesarias para las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker, la misma lógica vista en el capítulo anterior sugiere utilizar como criterio de iteración los valores del vector de control $\xi_i^A = x_i \times \left(\sum_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbb{P}(G^A) - \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbb{P}(G^B) \right)$, análogo para ξ^B . Ello permitirá encontrar un cruce de estrategias que, por lo menos, satisfaga el sistema de Ecuaciones 2.16.

2.4.4. Métodos Numéricos y Existencia del Equilibrio

Utilizando estas expresiones se pueden reutilizar los dos algoritmos vistos para el **SM** versión estocástica (con Método del Gradiente y Método del Vecino). Existe, sin embargo, una diferencia crucial a la hora de abordar este problema en comparación con lo presenciado en el caso anterior; si bien en ninguno se tiene certeza respecto a la existencia ni unicidad de un posible equilibrio, bajo este sistema la evidencia empírica muestra que es posible que no exista un real equilibrio que cumpla con lo expuesto en la Definición 4 al variar el parámetro k . Cuando k toma valores elevados, lo mejor a lo que se puede optar es a encontrar un equilibrio local (algo que la evidencia empírica sí respalda), que se define según la siguiente sentencia:

Definición 5. Sea G un juego entre N participantes cuyas funciones de pago quedan definidas por u_i , y espacios de estrategias S_i . Se denomina al cruce de estrategias $\{s_i\}_{i \in 1 \dots N}$ como un equilibrio local, si es que existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall \hat{s}_i \in B(s_i, \epsilon) \cap S_i$ se tiene que $u_i(\hat{s}_i, s_{-i}) \leq u_i(s_i, s_{-i})$, para todo jugador i .

2.4.5. Resolución en Estrategias Mixtas y Problemas

El hecho de no poder dar con un punto que cumpla con las condiciones de equilibrio expuesto en la Definición 4 obliga entonces a buscar un equilibrio bajo estrategias mixtas. Para ello se define a continuación tal equilibrio:

Definición 6. Sea G un juego entre dos participantes cuyos espacios de estrategias posibles son S_1 y S_2 , y las funciones de utilidad de los jugadores son u_1 y u_2 , respectivamente. Si Q_1 y Q_2 son los conjuntos de todas las posibles distribuciones de probabilidad sobre S_1 y S_2 , entonces los vectores $\sigma_1^* \in Q_1$ y $\sigma_2^* \in Q_2$ serán considerados un equilibrio en estrategias mixtas para G si ambos cumplen simultáneamente que $\sigma_1^* \in \operatorname{argmax}_{\sigma \in Q_1} \mathbb{E}(u_1 | \sigma, \sigma_2^*)$ y análogo para el segundo jugador, $\sigma_2^* \in \operatorname{argmax}_{\sigma \in Q_2} \mathbb{E}(u_2 | \sigma, \sigma_1^*)$.

Por lo que ahora las variables a considerar en el problema no son directamente la distribución de esfuerzos a lo largo del país para la elección, si no más bien las probabilidades a asignar a cada uno de los posibles perfiles de esfuerzos factibles de considerar.

Se ha visto que el espacio de estrategias que ambos candidatos tienen a su disposición es el simplex n -dimensional, $\Delta_n = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_j w_j = 1, \mathbf{w} \geq 0\}$, de modo que para computar un equilibrio en estrategias mixtas, es necesario dar con una pareja de distribuciones de probabilidades sobre tal conjunto que cumplan con lo requerido en la Definición 6 sobre equilibrios en estrategias mixtas. Ésto, sin embargo, se traducirá en un proceso de alta complejidad, a un nivel posiblemente ni siquiera presente en lo observado en la vida real. Trabajar directamente sobre el simplex equivale a darle a cada posible estrategia un peso específico, aun si la diferencia entre dos de ellas es infinitesimalmente pequeña. En la realidad, los eventos nunca son de escalas tan atómicas respecto al total de eventos realizados. A modo de comparación, en la elección presidencial de Estados Unidos realizada en 2016, la campaña de Hillary Clinton por el Partido Demócrata realizó un total de 151 eventos oficiales, mientras que la de Donald Trump por el Partido Republicano realizó 248 (*Two Thirds of the Presidential Campaign Is In Just 6 States*). Siguiendo la misma lógica, hace sentido pensar que la más grande diferencia que una estrategia debe tener respecto a otra será del orden de $1/250$. Por este motivo, el conjunto de estrategias con el que cada uno contará será en realidad $D^q(\Delta_n)$, donde se define $D^q(\Delta_n)$ como el enrejado del simplex (*simplex lattice*) de grado q . A modo de ejemplo, para un país con $n = 3$ estados, el conjunto de estrategias original viene dado por Δ_3 , el simplex de tres dimensiones. Sin embargo, para efectos de la resolución de este problema, estableciendo $q = 3$, los verdaderos perfiles de estrategias disponibles serán los siguientes:

Tabla 2.1 Discretización del simplex de tres dimensiones para $q = 3$.

Estado	Perfil 1	Perfil 2	Perfil 3	Perfil 4	Perfil 5	Perfil 6
1	100 %	0 %	0 %	50 %	50 %	0 %
2	0 %	100 %	0 %	50 %	0 %	50 %
3	0 %	0 %	100 %	0 %	50 %	50 %

Donde se observa que para cada estado, la diferencia entre un perfil y otro es a lo más $1/(q-1) = 50\%$. Aumentando

el parámetro de discretización a $q = 4$ se obtiene:

Tabla 2.2 Discretización del simplex de tres dimensiones para $q = 4$.

Estado	Perfil 1	Perfil 2	Perfil 3	Perfil 4	Perfil 5	Perfil 6	Perfil 7	Perfil 8	Perfil 9	Perfil 10
1	100 %	0 %	0 %	66.7 %	66.7 %	33.3 %	33.3 %	33.3 %	0 %	0
2	0 %	100 %	0 %	33.3 %	0 %	66.7 %	33.3 %	0 %	66.7 %	33.3
3	0 %	0 %	100 %	0 %	33.3 %	0 %	33.3 %	66.7 %	33.3 %	66.7 %

Aumentando el valor del parámetro q , la diferencia entre perfiles (para cada estado) disminuirá, llegando asintóticamente (cuando $q \rightarrow \infty$) a una distancia entre los perfiles de 0, cuando la atomización se vuelve tan fina que se recupera el caso continuo.

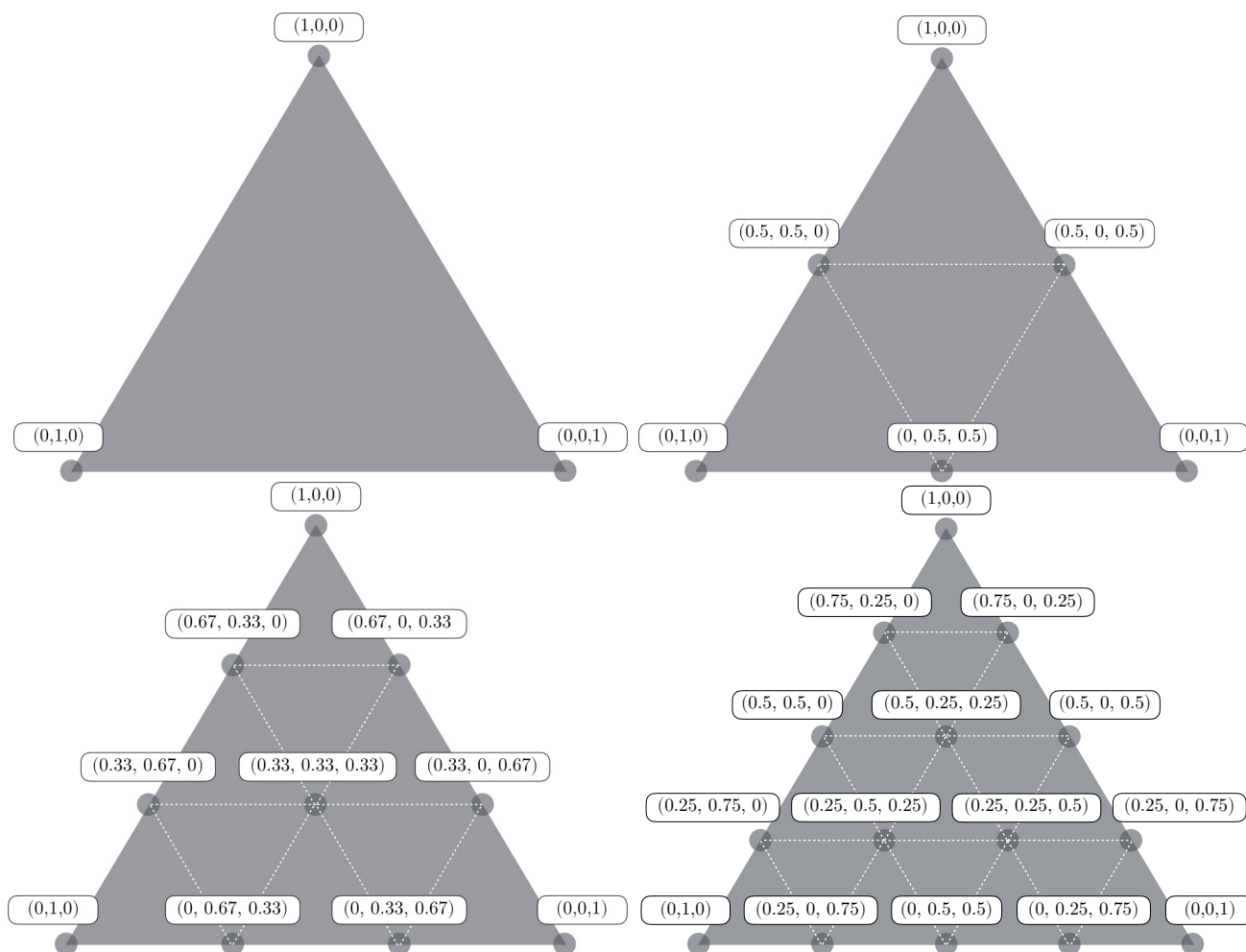


Figura 2.4: Discretizaciones de Δ_3 para diferentes valores de q .

Arriba a la Izquierda: $q = 3$, **Arriba a la Derecha:** $q = 4$, **Abajo a la Izquierda:** $q = 5$, **Abajo a la Derecha:** $q = 6$. Fuente: Elaboración Propia.

Al discretizar el espacio de estrategias, el cálculo del valor esperado descrito en la Definición 6 para ambos jugadores

se puede expresar como $\mathbb{E}(u_1|\sigma^A, \sigma^B) = \sum_{s_x \in D^q(\Delta_n)} \sum_{s_y \in D^q(\Delta_n)} u_1(s_x, s_y) \sigma^A(s_x) \sigma^B(s_y)$, que corresponde al cálculo del valor esperado cuando las variables aleatorias en cuestión se mueven dentro de un soporte finito. De esta forma, el problema que enfrenta el candidato A es el de resolver:

$$\begin{aligned} & \mathbf{max}_{\sigma \in \Delta_{|D^q(\Delta_n)|}} \mathbb{E}(\mathbb{P}(G^A)|\sigma, \sigma^B) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{s \in D^q(\Delta_n)} \sigma_s = 1 \\ & \sigma \geq 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Mientras que el candidato B busca resolver:

$$\begin{aligned} & \mathbf{max}_{\sigma \in \Delta_{|D^q(\Delta_n)|}} \mathbb{E}(\mathbb{P}(G^B)|\sigma, \sigma^A) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{s \in D^q(\Delta_n)} \sigma_s = 1 \\ & \sigma \geq 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

El problema de un escenario así emerge del número de diferentes perfiles que se obtienen a medida que aumenta el parámetro q . De hecho, el número de perfiles que nace de una discretización de parámetro q para un simplex de dimensión n es $|D^q(\Delta_n)| = \binom{n+q-2}{n-1}$.

Considerando que para resolver el problema de encontrar una pareja de vectores (q_1, q_2) que resuelvan el equilibrio en estrategias mixtas se requiere el valor de la función objetivo (en este caso, la probabilidad de ganar) para todas las combinaciones posibles de estrategias para decidir cuál es meritoria de tener una real probabilidad de ser elegida, la cantidad de perfiles que nacen de $D^q(\Delta_n)$ obliga a computar un total de $|D^q(\Delta_n)|^2 = \binom{n+q-2}{n-1}^2$ valores de la función objetivo, algo computacionalmente demasiado grande para ser resuelto mediante métodos tradicionales. En lugar de ello, se ideará una heurística que simplifique la búsqueda.

2.4.6. Métodos Numéricos para Computar el Equilibrio

Para lidiar con el problema expuesto, en primer lugar hay que notar que aun trabajando sobre el conjunto de estrategias discretizado $D^q(\Delta_n)$, habrá una gran cantidad de estrategias con nulas opciones de ser elegida. El hecho que exista un número finito de estrategias disponibles (al discretizar), y que inclusive dentro de los existentes haya un número relevante de estrategias que en realidad podrían ser omitidas para describir la distribución de probabilidades de la estrategia mixta óptima, da espacio a pensar que se pueden ahorrar muchos cruces de estrategias si una de ellas no tendrá en realidad probabilidades de ser elegido, lo que generará un gran ahorro en términos computacionales y, por lo tanto, optimizará el rendimiento del algoritmo.

Para sacar provecho de esto, se usará el algoritmo descrito a continuación: cada candidato tendrá un set de estrategias disponible, S_A y S_B para los candidatos A y B , respectivamente, los cuáles serán un subconjunto de $D^q(\Delta_n)$. En un inicio, los dos conjuntos contendrán sólo las estrategias extremas, $S_A = S_B = \{e_i \in \mathbb{R}^n \mid i \in \mathcal{I}\}$, donde e_i es el i -ésimo vector canónico, de modo que inicialmente los jugadores tendrán como únicas opciones hacer campaña en un sólo estado. Además, se definirá la matriz P como aquella cuyas coordenadas indican la probabilidad de que el candidato A resulte ganador para un cruce específico de estrategias, $P_{i,j} = \mathbb{P}(G^A | A \text{ juega } s_i, B \text{ juega } s_j)$. No se

computa la matriz con las probabilidades de que gane el candidato B porque se sabe que éstas son complementarias a las computadas en P , es decir, $\mathbb{P}(G^B|A \text{ juega } s_i, B \text{ juega } s_j) = 1 - \mathbb{P}(G^A|A \text{ juega } s_i, B \text{ juega } s_j)$

El algoritmo iterará según el siguiente ciclo: dados los conjuntos de estrategias disponibles S_A, S_B para los candidatos A y B , respectivamente, se computará el equilibrio en estrategias mixtas para la matriz P , utilizando el algoritmo de Lemke-Howson⁵, donde se obtendrán los perfiles de estrategias mixtas σ^A y σ^B sobre S_A y S_B , respectivamente. Una vez encontrados tales perfiles, el candidato A resolverá el problema de diseñar el perfil que mejor responde (por sí solo) a la estrategia mixta computada por el candidato B , siendo ésta ahora una constante. Es decir, buscará $s_x \in \operatorname{argmax}_{s_x \in \Delta_n} \mathbb{E}_{s_y}(\mathbb{P}(G^A|s_x, s_y)) = \sum_{s_y \in S_B} \sigma^B(s_y) \times \mathbb{P}(G^A|s_x, s_y)$. Tal perfil contiene lo mejor que el candidato A puede hacer en ese momento, por lo que tiene buenas opciones para ser una estrategia a la cual sí se le pondría peso en el equilibrio a encontrar. De todas formas, con altas probabilidades el perfil encontrado no estará en $D^q(\Delta_n)$. Para asegurar que el algoritmo eventualmente termine, no se aceptarán perfiles no discretizados. En caso que la *best response* que encuentre el candidato A resulte no ser un vector en forma discretizada, se procederá a encontrar un mínimo conjunto de vectores discretizados tal que s_x (la *best response* calculada) se encuentre en el interior de su envolvente convexa (ver detalles que caracterizan tal conjunto de vectores en Capítulo 2.4.6). Este conjunto contendrá, a lo más, n vectores. El conjunto se agrega entonces a los perfiles de estrategias disponibles para el candidato A . El mismo procedimiento se efectúa para el candidato B . Si luego de esto, ambos candidatos dieron con un conjunto de perfiles todos los cuales estaban ya disponibles, el algoritmo se da por terminado, puesto que todas las *best responses* ya tienen representación en el conjunto disponible de estrategias (ya sea directamente, o a través de sus discretizaciones). En caso que al menos un candidato haya encontrado al menos una estrategia que no formaba parte de su conjunto de perfiles disponibles, lo agregará al set de posibles perfiles a optar, se agrega a la matriz P todos los nuevos cruces de estrategias que resulten de agregar tales perfiles, se vuelve a computar el equilibrio en estrategias mixtas mediante el algoritmo de Lemke-Howson y el proceso se repite otra vez.

El algoritmo en términos generales usará entonces el siguiente procedimiento:

Algoritmo 5 Equilibrio CE

- 1: **Input** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^n, k \in \mathbb{R}_+, w \in \mathbb{N}_+^n$
 - 2: **Set** $q \in \mathbb{N}_+, S_A, S_B = \{e_i \in \mathbb{R}^n, i \in \mathcal{I}\}, P_{ij} = \mathbb{P}(G^A|s_i \in S_A, s_j \in S_B) \forall (s_i, s_j) \in S_A \times S_B$
 - 3: **Repeat**
 - 4: $(\sigma^A, \sigma^B) = \text{LH}(P)$
 - 5: $B_A = \text{BR}_A(S_B, \sigma^B)$
 - 6: $B_B = \text{BR}_B(S_A, \sigma^A)$
 - 7: **If** $D(B_A) \subseteq S_A$ **and** $D(B_B) \subseteq S_B$
 - 8: **Break**
 - 9: **End If**
 - 10: $S_A = S_A \cup D(B_A)$
 - 11: $S_B = S_B \cup D(B_B)$
 - 12: **Fill** P
 - 13: **End Repeat**
 - 14: **Return** $(S_A, \sigma^A, S_B, \sigma^B, P)$
-

Donde no se toma en cuenta los parámetros γ porque, como se argumentó en Lema 2, la distribución Dirichlet

⁵La estructura de suma cero del juego permite de hecho resolver el problema mediante Programación Lineal. Aquí no se implementó tal solución simplemente porque la complejidad no lo justificaba.

entrega resultados que son independientes del nivel de abstención que se registre en cada estado, de modo que no genera cambio alguno el considerarlos o no. La función $D(x)$ será aquella que, dado un vector (en éste caso, la *best response* de un candidato a una estrategia mixta del rival), se entrega el conjunto de vectores discretizados que lo representarán (ver Capítulo 2.4.6).

Dado que al fijar el valor q que indica la atomización de la discretización de los perfiles existe un número finito de posibles estrategias que los candidatos pueden agregar, y en cada iteración al menos uno de los candidatos agrega al menos una estrategia, el algoritmo tiene asegurado finalizar en algún tiempo finito. Las estrategias mixtas que haya encontrado constituyen al menos un equilibrio para los perfiles disponibles, pero dado que al término del algoritmo ninguno de los candidatos tiene como *best response* un perfil sin representación en el conjunto de perfiles disponibles, el algoritmo tiene un sentido global para el problema original.

Aquí, $LH(P)$ corresponde a una función que, usando el algoritmo de Lemke-Howson, entrega los perfiles de algún equilibrio en estrategias mixtas, dada la matriz de pago P . $BR_A(S_B, q_B)$ es la función que, dados los conjuntos de estrategias disponibles para el candidato B , y la distribución de pesos asignadas a cada una de dichas estrategias, encuentra la *best response* del candidato A , dentro de todo el simplex (es decir, la *best response* en estrategia pura). Para este algoritmo se utilizó tanto el método del gradiente como el del vecino en la búsqueda de la mejor respuesta, análogo para $BR_B(S_A, q_A)$. $D(x)$ es la función que, dado un vector $x \in \Delta_n$, encuentra el conjunto mínimo de vectores tal que x se encuentra dentro de su envolvente convexa, donde tales vectores deben pertenecer a la discretización de nivel q de Δ_n . A continuación se detalla el algoritmo para encontrar el conjunto $D(x)$.

Discretizando un Vector de Δ_n

Llamando $\mathcal{Z} = \{z^k\}_{k=1 \dots |\mathcal{Z}|}$ al conjunto de vectores que nacen de $D(x)$, lo que se busca es que ellos cumplan las siguientes características:

- Todos los vectores de \mathcal{Z} están en la discretización de Δ_n de nivel q , es decir $\mathcal{Z} \subseteq D^q(\Delta_n)$
- x es una combinación convexa de los vectores de \mathcal{Z} , o sea, $\exists \lambda \in \Delta_{|\mathcal{Z}|}$ tal que $\sum_k \lambda_k z^k = x$
- Todos los vectores de \mathcal{Z} están a lo más a una distancia de $\frac{1}{(q-1)}$ de cualquier otro vector de \mathcal{Z} , en cada una de sus coordenada, es decir, $|z_i^{k_1} - z_i^{k_2}| \in \{0, \frac{1}{(q-1)}\}$, $\forall (z^{k_1}, z^{k_2}) \in \mathcal{Z}^2$, $\forall i \in \mathcal{I}$.
- En la reconstrucción de x no sobra ningún vector de \mathcal{Z} . Si $\mathcal{Z}_{-k} = \mathcal{Z}/\{z^k\}$, entonces $\forall z^{\hat{k}} \in \mathcal{Z}$, $\nexists \lambda \in \Delta_{|\mathcal{Z}_{-k}|}$ tal que $\sum_{k \in \mathcal{Z}_{-k}} \lambda_k z^k = x$.

Para encontrar tal conjunto de vectores, es importante notar, en primer lugar, que todas sus coordenadas serán una cantidad entera de veces el valor $(q-1)^{-1}$ (el *átomo* de la discretización utilizada). De esta forma, $z_i^k \times (q-1) \in \mathbb{N}$ para cualquier $z^k \in \mathcal{Z}$ y cualquier $i \in \mathcal{I}$. Sea $x^b = \frac{\lfloor (q-1)x \rfloor}{(q-1)}$ y $x^r = x - x^b$ (a x^b se le llamará vector base de x , mientras que x^r será el vector remanente), entonces $z_i^k - x_i^b \in \{0, (q-1)^{-1}\}$ para cualquier $z^k \in \mathcal{Z}$, en cualquier índice $i \in \mathcal{I}$. Así, definiendo $\tilde{z}^k = (z^k - x^b) \times (q-1)$, se puede concluir que \tilde{z}^k es un vector binario, $\tilde{z}_i^k \in \{0, 1\}$, $\forall i \in \mathcal{I}$. Además, todos los vectores \tilde{z}^k son tales que $\sum_i \tilde{z}_i^k = (q-1) \sum_i x_i^r$. Llamando m a tal cantidad (es decir,

$m = (q - 1) \times \sum_i \tilde{z}_i^k$, el problema de discretizar x se reduce a encontrar vectores binarios, con exactamente m componentes igual a 1 y que sean tales que el vector $(q - 1)x^r$ sea una combinación convexa de ellos. De hecho, si $\lambda \in \Delta_{|\mathcal{Z}|}$ es tal que $\sum_k \lambda_k \tilde{z}^k = (q - 1)x^r$, entonces el mismo vector λ es aquel que permite regenerar x , $\sum_k \lambda_k z^k = x$, donde se reconstruyó z^k mediante la definición de \tilde{z}^k .

Ahora bien, existen $\binom{n}{m}$ vectores binarios con exactamente m componentes igual a 1, lo que genera un problema de alta complejidad el elegir sólo a mínima cantidad que permita regenerar a x^r . Para ello se utilizará el siguiente algoritmo:

Algoritmo 6 Discretización hacia Vectores Binarios

```

1: Input  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $x_i \in [0, 1)$  para todo  $i$  y con  $\sum_i x_i = m \in \mathbb{N}$ 
2: Set  $\mathcal{Z} = \emptyset$ ,  $w = x$ 
3: Repeat
4:   If  $w \in \{0, 1\}^n$  do
5:      $\mathcal{Z} = \mathcal{Z} \cup \{w\}$ 
6:   Break
7:   End If
8:    $z = h(w, m)$ 
9:    $\mathcal{Z} = \mathcal{Z} \cup \{z\}$ 
10:   $t = \min \left( \left( \frac{-w_i}{w_i - z_i} \right)_{\{i:w_i < z_i\}}, \left( \frac{1-w_i}{w_i - z_i} \right)_{\{i:w_i > z_i\}} \right)$ 
11:   $w = w + t \times (w - z)$ 
12: End Repeat
13: Return  $\mathcal{Z}$ 

```

Donde la función $h(w, m)$ genera un vector binario de la misma dimensión que w cuyos m índices que tengan las coordenadas más grandes en w tendrán valor 1, el resto tendrá valor 0.

El algoritmo itera de la siguiente forma: En primer lugar, el vector $z = h(w, m)$ se escoge por ser aquel vector binario que está más cerca de w y es tal que $\sum_j z_j = m$ ⁶. Para poder regenerar el vector x , sin embargo, hace falta más que $z = h(w, m)$. Por ello, se computa el vector colineal a los vectores w y z , que resulta ser $w + t \times (w - z)$, donde t es el máximo valor que permite el movimiento antes que una componente del vector resultante sea 0 o 1. El algoritmo entonces se enfoca en reconstruir dicho vector, $w + t \times (w - z)$, utilizando la misma rutina anterior, lo que genera la recurrencia. Como en cada iteración al menos una componente será fijada en 1 o 0, el algoritmo utilizará a lo más n iteraciones, en cada una encontrando un vector z diferente.

⁶Para probar esto, basta ver que $h(w, m)$ minimiza la distancia a w . Trabajando con el cuadrado de la distancia se tiene $\|w - z\|_2^2 = \sum_j w_j^2 + \sum_j z_j^2 - 2 \sum_j z_j w_j = \|w\|_2^2 + m - 2 \sum_{j:z_j=1} w_j$, que evidentemente se minimiza fijando $z_i = 1$ en las m componentes más altas w .

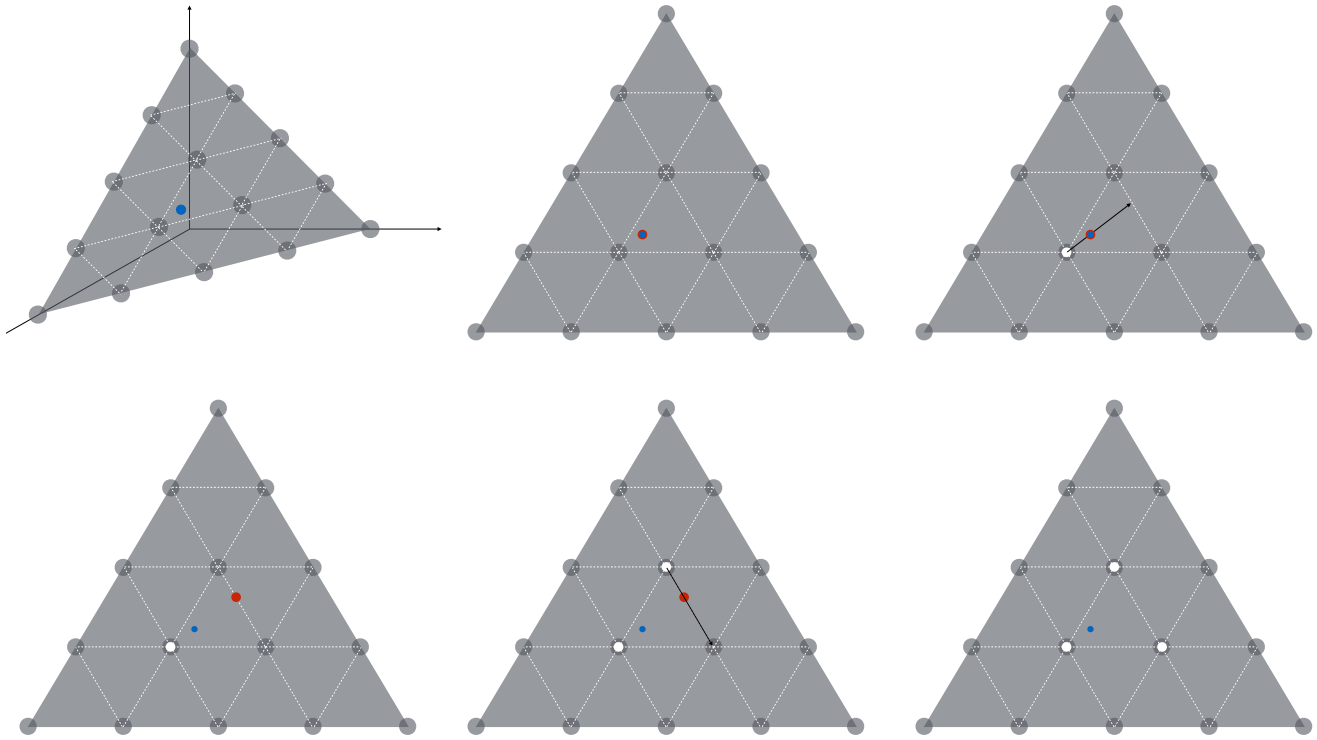


Figura 2.5: Algoritmo para Discretización de Vector en Δ_n sobre *Símplex Lattice*.

Secuencia del algoritmo para $n = 3$, $q = 5$. Punto azul es el vector input x . Punto rojo simboliza el vector w dentro del algoritmo. Puntos en blanco indican conjunto de vectores \mathcal{Z} , que aparecen según función $h(w, m)$. Flechas negras indican el movimiento según lo estipulado por el escalar t , en dirección . Fuente: Elaboración Propia.

El output del algoritmo presentado será el conjunto \mathcal{Z} , cuyos elementos son los vectores \tilde{z}^k definidos anteriormente. Recuperando entonces los vectores buscados, $z^k = x^b + (q - 1)^{-1} \tilde{z}^k$, se encuentra así el conjunto mínimo de vectores que discretizan al vector x , y con ello, las estrategias que se agregarán a los conjuntos de perfiles disponibles en el algoritmo para el equilibrio en estrategias mixtas del sistema **CE**.

Capítulo 3

Resultados

The Universe is under no obligation to make sense to any of us.
El Universo no tiene la obligación de hacerle sentido a ninguno de nosotros.

Neil DeGrasse Tyson, 2016

3.1. Sistema Mayoritario, Juego Determinista

Para los ejemplos numéricos que se mostrarán a continuación, los parámetros a utilizar, salvo que se diga lo contrario, serán los siguientes:

Tabla 3.1 Instancia de ejemplo para un país con $n = 10$ regiones bajo SM.

Región	V [MM]	v [%]	α [%]	β [%]	γ [%]
1	3.4	23.2	45	71	94
2	2.7	18.5	68	37	67
3	2.1	14.4	32	24	121
4	1.3	8.9	43	39	89
5	1.2	8.2	76	65	92
6	1.2	8.2	36	61	143
7	1.0	6.8	51	54	45
8	0.9	6.2	42	41	79
9	0.5	3.4	85	31	102
10	0.3	2.1	37	69	68

Columna V indica número de votos que existen disponibles en tal estado. v es un reflejo de la misma cantidad, representada como porcentaje del país. α, β, γ indican los sesgos políticos hacia el candidato A , B y la abstención, respectivamente. Fuente: Elaboración Propia.

3.1.1. Sin Abstención

Sin Sesgos Políticos

Para esta instancia se analizará el caso en que $\alpha = \beta = \gamma = 0 \in \mathbb{R}^n$. Es decir, todos los electores votan, pero nadie conoce a los candidatos a priori, ni tiene ninguna clase de preferencias sobre ellos. Las votaciones se dan con resultados simplemente proporcional a cuántas veces un candidato visitó un estado relativo a su competencia. En éste caso, utilizando la fórmula de la solución irrestricta encontrada en la Proposición 1 y reemplazando $\alpha = \beta = 0 \in \mathbb{R}^n$, se tienen los siguientes equilibrios:

$$x_i^{UB} = \frac{v_i}{\sum_j v_j} (1 + \sum_j \alpha_j) - \alpha_i = \frac{v_i}{\sum_j v_j}, \forall i \in \mathcal{I} \quad (3.1)$$

$$y_i^{UB} = \frac{v_i}{\sum_j v_j} (1 + \sum_j \beta_j) - \beta_i = \frac{v_i}{\sum_j v_j}, \forall i \in \mathcal{I} \quad (3.2)$$

En primer lugar, hay que notar que $x^{UB}, y^{UB} \geq 0$ de modo que corresponden, efectivamente, al equilibrio del juego global. El hecho que el perfil de estrategias utilizado por ambos jugadores sea el mismo permite concluir que $S_i^A = \frac{x_i}{x_i + y_i} = 50\%$ para todo $i \in \mathcal{I}$, de modo que el resultado en cada región del país será de 50% para cada candidato, siendo, por lo tanto, también el resultado a nivel país.

Tabla 3.2 Equilibrio bajo SM, con Juego Determinista, con $\alpha, \beta, \gamma = 0$.

Región	Perfil x [%]	Perfil y [%]	Votos Cand. A [%]
1	23.2	23.2	50
2	18.5	18.5	50
3	14.4	14.4	50
4	8.9	8.9	50
5	8.2	8.2	50
6	8.2	8.2	50
7	6.8	6.8	50
8	6.2	6.2	50
9	3.4	3.4	50
10	2.1	2.1	50

Resultados para parámetros de v indicados en la Tabla 3.1. Fuente: Elaboración Propia.

Equilibrio para Juego sin Sesgos ni Abstención

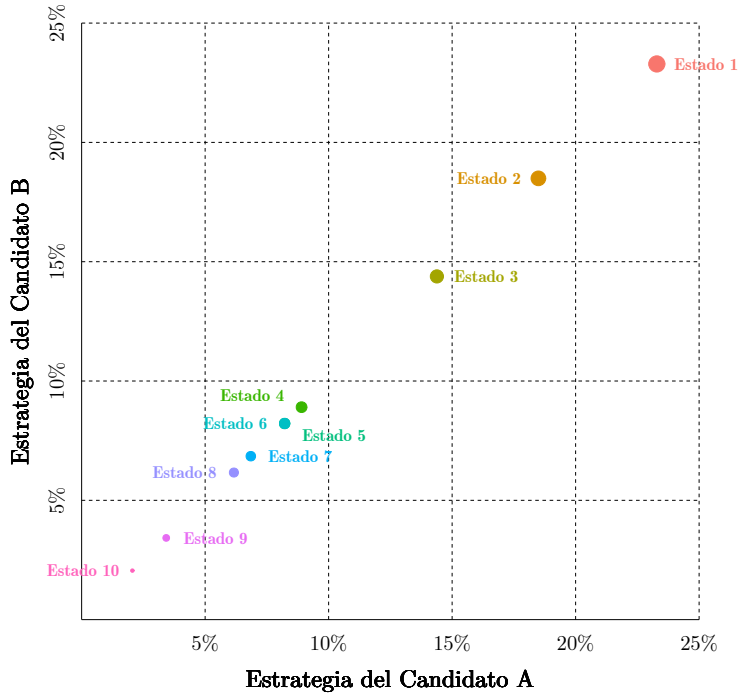


Figura 3.1: Equilibrio bajo **SM**, con Juego Irrestricto Determinista con $\alpha, \beta, \gamma = 0$. Resultados para parámetros de v indicados en la Tabla 3.1. Colores diferencian estados. Fuente: Elaboración Propia.

Se observa que las estrategias se alinean en la recta $y = x$ pues la simetría del problema (en ausencia de vectores de sesgo) genera un equilibrio donde ambos candidatos optan por los mismos perfiles. Además, lo hacen de forma completamente proporcional a la población de cada estado, por lo que se ubican en los puntos $(x_i, y_i) = (\frac{v_i}{\sum_j v_j}, \frac{v_i}{\sum_j v_j})$.

Introduciendo α y β para el Juego Irrestricto

Introduciendo sesgos de ambos candidatos acorde a los valores expuestos en la Tabla 3.1, se estudia entonces el equilibrio que resulta al eliminar la restricción de no negatividad, $x, y \geq 0$.

Acorde a lo encontrado en la Proposición 1, la solución irrestricta del modelo se expresa de la siguiente forma:

$$x_i^{UB} = \frac{v_i}{\sum_i v_i} \left(1 + \sum_j \alpha_j \right) - \alpha_i \quad (3.3)$$

$$y_i^{UB} = \frac{v_i}{\sum_i v_i} \left(1 + \sum_j \beta_j \right) - \beta_i \quad (3.4)$$

A diferencia del modelo sin vectores de sesgo, en este caso cada instancia puede generar o no un equilibrio que respete la restricción de no negatividad. Para la instancia presentada en la Tabla 3.1, de hecho, ambos candidatos optan por estrategias con al menos una componente negativa, lo que indica que para resolver el problema restringido

bajo tales datos, se requiere utilizar el Algoritmo 2.2.2. Los perfiles de equilibrio, además, abandonarán la simetría que presentaban en el caso anterior.

Tabla 3.3 Equilibrio bajo SM, con Juego Irrestricto Determinista con $\gamma = 0$.

Región	Perfil x [%]	Perfil y [%]	$x + \alpha$ [%]	$y + \beta$ [%]	Votos Cand. A [%]
1	98.2	66.8	143.2	137.8	50.9
2	45.7	72.4	113.7	109.4	50.9
3	56.4	61.1	88.4	85.1	50.9
4	11.7	13.7	54.7	52.7	50.9
5	-25.4	-16.3	50.5	48.6	50.9
6	14.5	-12.3	50.5	48.6	50.9
7	-8.8	-13.4	42.1	40.5	50.9
8	-4.1	-4.5	37.9	36.4	50.9
9	-63.9	-10.7	21.1	20.3	50.9
10	-24.3	56.8	12.6	12.1	50.9

Resultados para parámetros indicados en la Tabla 3.1. Fuente: Elaboración Propia.

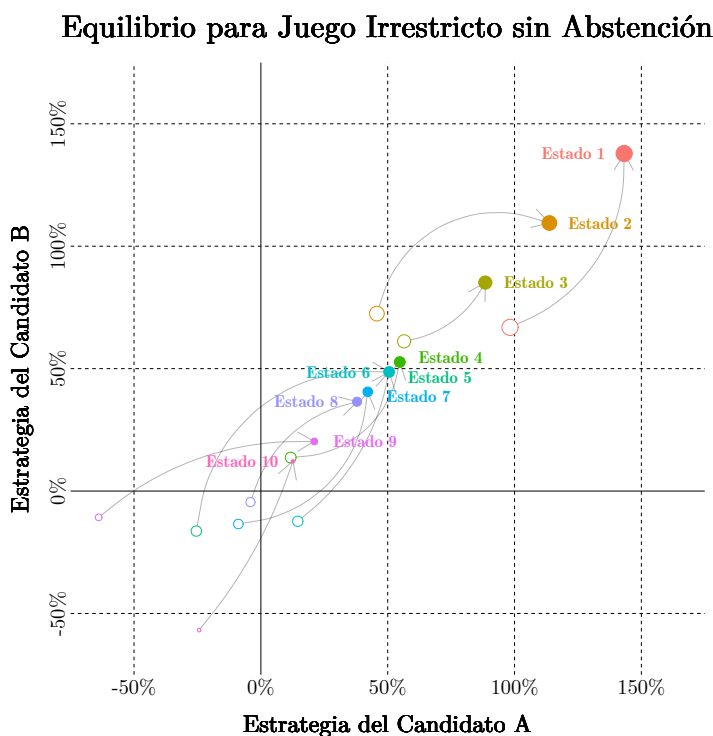


Figura 3.2: Equilibrio bajo SM, con Juego Irrestricto Determinista con $\gamma = 0$.

Resultados para parámetros de la Tabla 3.1. Colores diferencian estados. Puntos en blanco indican combinación (x, y) , mientras que puntos de colores indican valores de combinación $(x + \alpha, y + \beta)$. Fuente: Elaboración Propia.

De la Figura 3.2, se pueden notar los siguientes dos comportamientos: por un lado, los candidatos utilizan estrategias de peso negativo para un gran número de estados, de hecho, 5 de los 10 estados tienen peso negativo para el candidato A y el candidato B. Ésto contrasta con lo que se observa en los 3 estados más grandes, que pueden aprovechar los recursos liberados por los estados más pequeños y concentrar así grandes cantidades de esfuerzo; el candidato

A incluso llega al punto de asignar un 100% al estado más grande. Concentrar los esfuerzos en los tres estados más grandes es una estrategia sensata al considerar que entre los tres agrupan al 56.1% de los votantes del país en cuestión. Otro comportamiento curioso resulta al evaluar lo que ocurre con las estrategias combinadas con los sesgos. Todos los estados se alinean en la recta $(y + \beta) = (x + \alpha) \times \left(\frac{1 + \sum_j \beta_j}{1 + \sum_j \alpha_j}\right)$ de forma perfecta (ver puntos de colores). En este caso particular, $\frac{1 + \sum_j \beta_j}{1 + \sum_j \alpha_j} = 0.962$, de forma que $S_i^A = \frac{x_i + \alpha_i}{x_i + \alpha_i + y_i + \beta_i} = \frac{1 + \sum_j \alpha_j}{2 + \sum_j (\alpha_j + \beta_j)} = \frac{1}{1 + 0.962} \approx 50.9\%$ será el resultado en cada estado y, por lo tanto, en el país para el candidato A . No sólo eso, la ubicación de cada estado sigue el mismo patrón que lo observado en la instancia sin sesgos; el valor de $(x + \alpha)$ de cada estado es proporcional al peso de ese estado en términos de votos, es decir, $(x + \alpha) \propto v$. Esto se debe a que $x_i = \frac{v_i}{\sum_j v_j} (1 + \sum_j \alpha_j) - \alpha_i$ implica $\frac{x_i + \alpha_i}{x_j + \alpha_j} = \frac{v_i}{v_j}$. El mismo comportamiento se observa para el candidato B .

En definitiva, al incluir los sesgos α y β sin restringir el comportamiento de las estrategias (x, y) , el problema es equivalente a aumentar el presupuesto temporal en $\sum_j \alpha_j$ y $\sum_j \beta_j$ para el modelo sin sesgos, puesto que los candidatos son libres de reasignar sus popularidades ex-ante a gusto, imponiendo estrategias negativas en donde la población no justifique tales niveles.

Imponiendo la Restricción de No Negatividad

Para este caso, se resolverá el problema expuesto acorde a los Modelos 2.2 y 2.3 utilizando el Algoritmo 2.2.2 para los parámetros expuestos en la Tabla 3.1. Para la ejecución del algoritmo, se utilizó en esta ocasión como parámetros $\epsilon_{\text{Tol}} = 10^{-8}$ y $t_k = t_0 \mu^k$, con $t_0 = 1$ y $\mu = 1.5$.

Tabla 3.4 Equilibrio bajo SM, con Juego Determinista con $\gamma = 0$.

Región	Perfil x [%]	Perfil y [%]	$x + \alpha$ [%]	$y + \beta$ [%]	Votos Cand. A [%]
1	56.5	25.2	101.6	96.2	51.4
2	12.7	39.3	80.7	76.3	51.4
3	30.7	35.4	62.7	59.4	51.4
4	≤ 0.1	≤ 0.1	43.0	39.0	52.4
5	≤ 0.1	≤ 0.1	76.0	65.0	53.9
6	≤ 0.1	≤ 0.1	36.0	61.0	37.1
7	≤ 0.1	≤ 0.1	51.0	54.0	48.5
8	≤ 0.1	≤ 0.1	42.0	41.0	50.6
9	≤ 0.1	≤ 0.1	85.0	31.0	73.2
10	≤ 0.1	≤ 0.1	37.0	69.0	34.9

Resultados para parámetros indicados en la Tabla 3.1. Fuente: Elaboración Propia.

Equilibrio para Juego sin Abstención

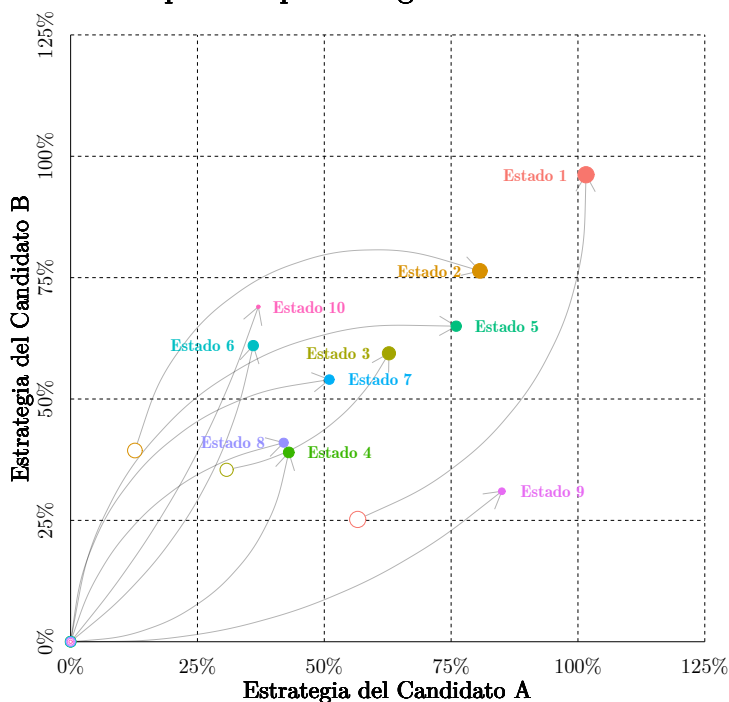


Figura 3.3: Equilibrio bajo SM, con Juego Determinista con $\gamma = 0$.

Resultados para parámetros de la Tabla 3.1. Color diferencia diferentes estados. Puntos en blanco indican combinación (x, y) , mientras que puntos de colores indican valores de combinación $(x + \alpha, y + \beta)$. Fuente: Elaboración Propia.

A diferencia del caso anterior, en este modelo si un estado presenta altos niveles de popularidad ex-ante, superando incluso lo necesario para un estado de tal tamaño, su estrategia será, en el caso más extremo, cero.

Así como en el caso anterior se observaba como los tres estados más grandes agrupaban casi la totalidad de los esfuerzos positivos, aquí los resultados siguen la misma idea: solo los tres estados más grandes reciben algún nivel de esfuerzo de parte de ambos candidatos, todo el resto de estados es dejado completamente a la suerte de los sesgos previos. Inclusive, evaluando los resultados dentro de esos tres estados, se observa que el resultado resulta ser el mismo (51.36 % favorable al candidato A), mientras que en estados más chicos, el resultado oscila entre 34.9 % y 73.2 % (desde la perspectiva del candidato A).

Bajo estos parámetros, el equilibrio entrega como ganador al candidato A, quien obtiene 50.6 % de los votos.

3.1.2. Con Abstención

En adelante se utilizará la abreviación VVE, haciendo referencia Votos Válidamente Emitidos, es decir, el porcentaje de votos correspondientes dejando de lado los votos de la abstención

Juego Irrestricto

Al incluir la abstención, surge la necesidad de evaluar ahora no sólo el resultado de la elección, si no también los niveles de participación en cada estado y la forma en que éstos influirán en el resultado.

Para el modelo irrestricto, la Proposición 2 establece el siguiente equilibrio:

$$x_i^{UB} = \left(\frac{1 + \sum_j \alpha_j}{2 + \sum_j (\alpha_j + \beta_j)} \right) \times \left[\left(\frac{v_i}{\sum_j v_j} \right) \left(2 + \sum_j (\alpha_j + \beta_j + \gamma_j) \right) - \gamma_i \right] - \alpha_i \quad (3.5)$$

$$y_i^{UB} = \left(\frac{1 + \sum_j \beta_j}{2 + \sum_j (\alpha_j + \beta_j)} \right) \times \left[\left(\frac{v_i}{\sum_j v_j} \right) \left(2 + \sum_j (\alpha_j + \beta_j + \gamma_j) \right) - \gamma_i \right] - \beta_i \quad (3.6)$$

Al igual que para el modelo sin abstención, este equilibrio puede tener componentes negativas, en cuyo caso no será el equilibrio del problema real. Es más, puede darse el caso que alguna componente de $(x + \alpha)$ sea negativa, donde la abstención y nivel de población es tal que el candidato prefiera perder votos efectivos con tal de aumentar su presupuesto utilizable en otro estado.

Tabla 3.5 Equilibrio bajo SM, con Juego Irrestricto Determinista.

Región	Perfil x [%]	Perfil y [%]	Participación [%]	VVE Cand. A [%]
1	157.1	123.6	80.8	50.9
2	96.3	121.2	82.8	50.9
3	60.7	65.3	60.1	50.9
4	7.2	9.4	52.6	50.9
5	-34.6	-25.2	46.9	50.9
6	-20.6	-46.2	17.4	50.9
7	-0.4	-5.3	68.8	50.9
8	-16.1	-16.0	39.2	50.9
9	-100.2	-45.6	-41.4	50.9
10	-49.6	-81.1	-57.1	50.9

Resultados para parámetros indicados en la Tabla 3.1. Fuente: Elaboración Propia.

Equilibrio para Juego Irrestringido con Abstención

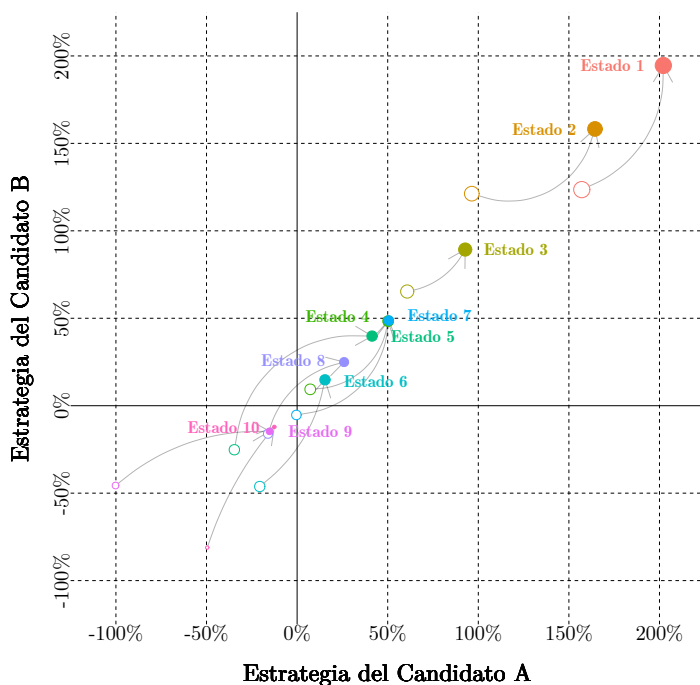


Figura 3.4: Equilibrio bajo SM, con Juego Irrestringido Determinista.

Resultados para parámetros de la Tabla 3.1. Color diferencia diferentes estados. Puntos en blanco indican combinación (x, y) , mientras que puntos de colores indican valores de combinación $(x + \alpha, y + \beta)$. Fuente: Elaboración Propia.

En este caso, el modelo asigna a ciertos estados pesos tan negativos, que el candidato llega a un punto de perder votos. Esta situación tiene sentido cuando se considera que tales estados no sólo son de bajas poblaciones (y por ende, el número de votos que se pierde es pequeño), si no que además la abstención frena en cierta forma la fuga de votos. Al hacer ésto, se liberan tantos recursos de campaña, que estados más grandes llegan a tener más de un 100% de recursos disponibles asignados.

Además, aparece un fenómeno parecido al caso sin abstención: Las estrategias y sesgos son tales que se alinean en la recta $(y + \beta) = (x + \alpha) \times \left(\frac{1 + \sum_j \beta_j}{1 + \sum_j \alpha_j} \right)$, que resulta ser la misma de en la que se ubicaban para el problema sin abstención. De ésta forma, el porcentaje de votos válidamente emitidos para el candidato A serán los mismos en todos los estados, $S_i^A = \frac{x_i + \alpha_i}{x_i + \alpha_i + y_i + \beta_i} = \frac{1}{1 + 0.962} \approx 50.9\%$, por lo que éste será el resultado de la elección a nivel país, imitando así al modelo sin abstención, tal como se predijo en el Teorema 3.

Imponiendo la Restricción de No Negatividad

Al igual que el caso sin abstención, aquí se resolverá el problema expuesto acorde a los Modelos 2.6 y 2.7 utilizando el Algoritmo 2.2.2 para los parámetros expuestos en la Tabla 3.1. Para la ejecución del algoritmo, se utilizó en esta ocasión como parámetros $\epsilon_{\text{Tol}} = 10^{-7}$ y $t_k = t_0 \mu^k$, con $t_0 = 1$ y $\mu = 2$.

Tabla 3.6 Equilibrio bajo SM, con Juego Determinista.

Región	Perfil x [%]	Perfil y [%]	Participación [%]	VVE Cand. A [%]
1	68.2	36.4	70.1	51.3
2	25.8	52.1	73.2	51.3
3	5.9	11.5	37.8	51.6
4	≤ 0.1	≤ 0.1	47.9	52.4
5	≤ 0.1	≤ 0.1	60.5	53.9
6	≤ 0.1	≤ 0.1	40.4	37.1
7	≤ 0.1	≤ 0.1	70.0	48.5
8	≤ 0.1	≤ 0.1	51.2	50.6
9	≤ 0.1	≤ 0.1	53.2	73.2
10	≤ 0.1	≤ 0.1	60.9	34.9

Resultados para parámetros indicados en la Tabla 3.1. Fuente: Elaboración Propia.

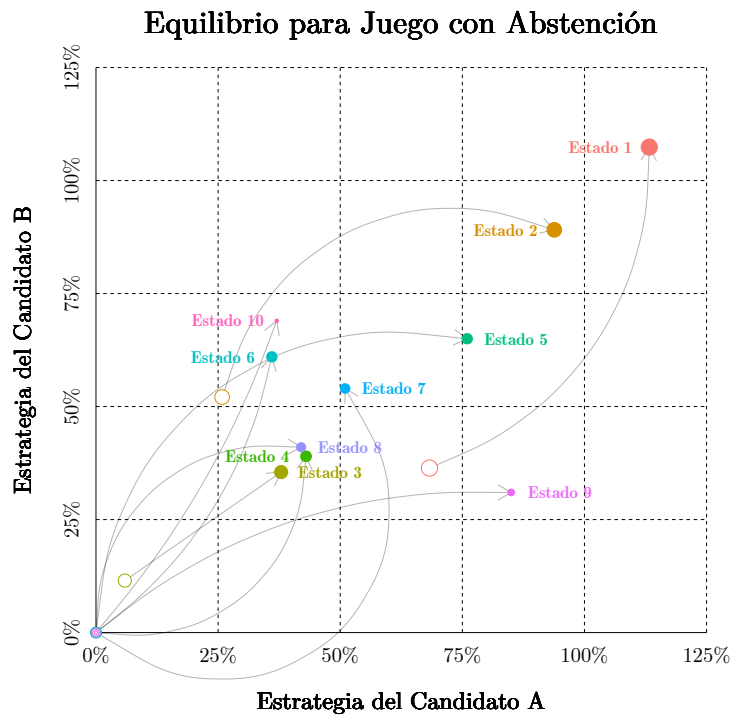


Figura 3.5: Equilibrio bajo SM, con Juego Determinista.

Resultados para parámetros de la Tabla 3.1. Color diferencia diferentes estados. Puntos en blanco indican combinación (x, y) , mientras que puntos de colores indican valores de combinación $(x + \alpha, y + \beta)$. Fuente: Elaboración Propia.

3.2. Sistema Mayoritario, Juego Estocástico

En éste caso, los candidatos intentan maximizar su probabilidad de ganar, siguiendo los problemas expuestos en los Modelos 2.9 y 2.10, con los parámetros expuestos en la Tabla 3.1. Como se mostró en el capítulo anterior, en éste problema no existe certeza respecto a la existencia ni unicidad de un equilibrio, de modo que el problema se resolverá mediante los algoritmos expuestos en el Capítulo 2.3.2 para evaluar sus diferencias y posible convergencia.

Además, se corroborará si lo encontrado es o no realmente un equilibrio, según se estableció en la Definición 3.

Usando Método del Gradiente

Para este algoritmo, se utilizaron los parámetros $\xi_{\text{Tot}} = 10^{-3}$, $\rho = 0.6$.

Tabla 3.7 Equilibrio bajo SM, con Juego Estocástico, usando Método del Gradiente.

Región	Perfil x [%]	Perfil y [%]	Part. Esperada [%]	VVE Esperados A [%]
1	63.5	33.9	69.4	50.8
2	22.7	48.4	72.4	51.5
3	13.8	17.6	41.9	52.4
4	≤ 0.1	≤ 0.1	47.9	52.4
5	≤ 0.1	≤ 0.1	60.5	53.9
6	≤ 0.1	≤ 0.1	40.4	37.1
7	≤ 0.1	≤ 0.1	70.0	48.5
8	≤ 0.1	≤ 0.1	51.2	50.6
9	≤ 0.1	≤ 0.1	53.2	73.2
10	≤ 0.1	≤ 0.1	60.9	34.9

Resultados para parámetros indicados en la Tabla 3.1, $k = 3$. Fuente: Elaboración Propia.

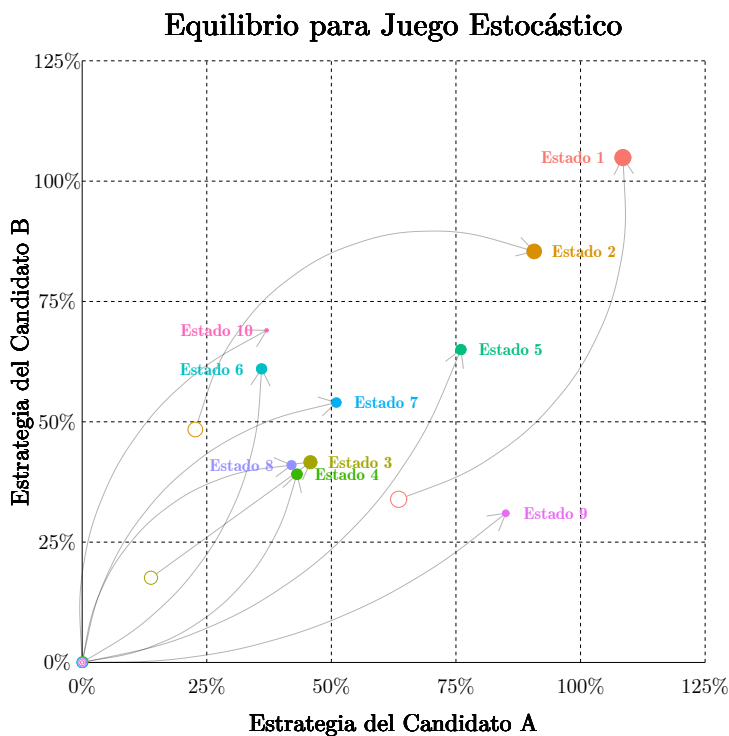


Figura 3.6: Equilibrio bajo SM, con Juego Estocástico, usando Método del Gradiente.

Resultados para parámetros de la Tabla 3.1, $k = 3$. Colores diferencian estados. Puntos en blanco indican combinación (x, y) , mientras que puntos de colores indican valores de combinación $(x + \alpha, y + \beta)$. Fuente: Elaboración Propia.

Donde la participación esperada se calculó como $\mathbb{E}(R_j^A + R_j^B) = v_j \mathbb{E}(S_j^A + S_j^B) = v_j \times \frac{x_j + \alpha_j + y_j + \beta_j}{x_j + \alpha_j + y_j + \beta_j + \gamma_j}$, y los votos

válidamente emitidos para el candidato A como $\mathbb{E}\left(\frac{S_j^A}{S_j^A+S_j^B}\right) = \frac{x_j+\alpha_j}{x_j+\alpha_j+y_j+\beta_j}$. Los perfiles encontrados le otorgan 51.2% de probabilidades al candidato A de ganar la elección.

La forma de comprobar si el resultado para éste caso particular es un equilibrio según lo exigido en la Definición 3 será intentando ver si existe alguna estrategia $\hat{s}_A \in \Delta_n$ tal que sea mejor respuesta que lo visto por el algoritmo, fijando la respuesta del rival, es decir, $\mathbb{P}(R^A > R^B | \hat{s}_A) > \mathbb{P}(R^A > R^B | s_A^*)$, donde s_A^* es la estrategia encontrada por el algoritmo para el candidato A (ídem para el candidato B).

A éste se le denominará Gráfico de Corroboración.

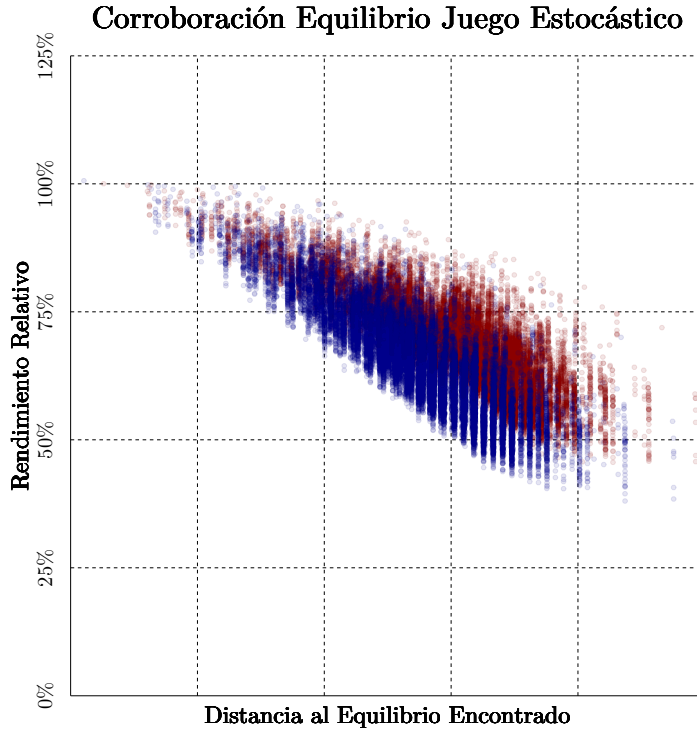


Figura 3.7: Corroboración Equilibrio bajo SM con Juego Estocástico, usando Método del Gradiente. Nube Roja para corroboración del Candidato A . Nube Azul para corroboración del Candiato B . Fuente: Elaboración Propia.

Aquí, cada punto de la nube roja representa un resultado para el candidato A en caso de moverse a cierto punto de Δ_n . Tal punto queda descrito, en el eje absciso por su distancia euclideana a la estrategia s_A^* encontrada por el algoritmo, y en el eje de las ordenadas por el ratio $\frac{\mathbb{P}(R^A > R^B | \hat{s}_A)}{\mathbb{P}(R^A > R^B | s_A^*)}$ (análogo con la nube azul para el candidato B). En cada nube se representan todos los puntos correspondientes al conjunto *Simplex Lattice* de parámetro de discretización $q = n$.

Dado que no se observan zonas de la nube que escapen al umbral del 100% en el eje vertical (en cuyo caso se tendrían estrategias con mejor rendimiento en términos de la probabilidad de ganar la elección), se deduce que, al menos en esta instancia, lo encontrado parece corresponder a un verdadero equilibrio (como no esta abarcado todo Δ_n , no se tiene real certeza de esto). No se encontraron instancias donde lo anterior no se cumpla.

Usando Método del Vecino

Para este algoritmo, se utilizaron los parámetros $\rho = 0.6$ y $\delta_0 = \frac{1}{2n} = 0.05$ para el el Método del Vecino.

Tabla 3.8 Equilibrio bajo SM, con Juego Estocástico, usando Método del Vecino.

Región	Perfil x [%]	Perfil y [%]	Part. Esperada [%]	VVE Esperados A [%]
1	67.8	36.5	70.1	51.2
2	26.2	52.1	73.2	51.4
3	4.8	10.3	37.0	51.8
4	0.2	0.2	48.1	52.4
5	0.2	0.2	60.5	53.9
6	0.2	0.2	40.5	37.2
7	0.2	0.2	70.0	48.6
8	0.2	0.2	51.2	50.6
9	≤ 0.1	≤ 0.1	53.2	73.2
10	≤ 0.1	≤ 0.1	60.9	34.9

Resultados para parámetros indicados en la Tabla 3.1. Fuente: Elaboración Propia.

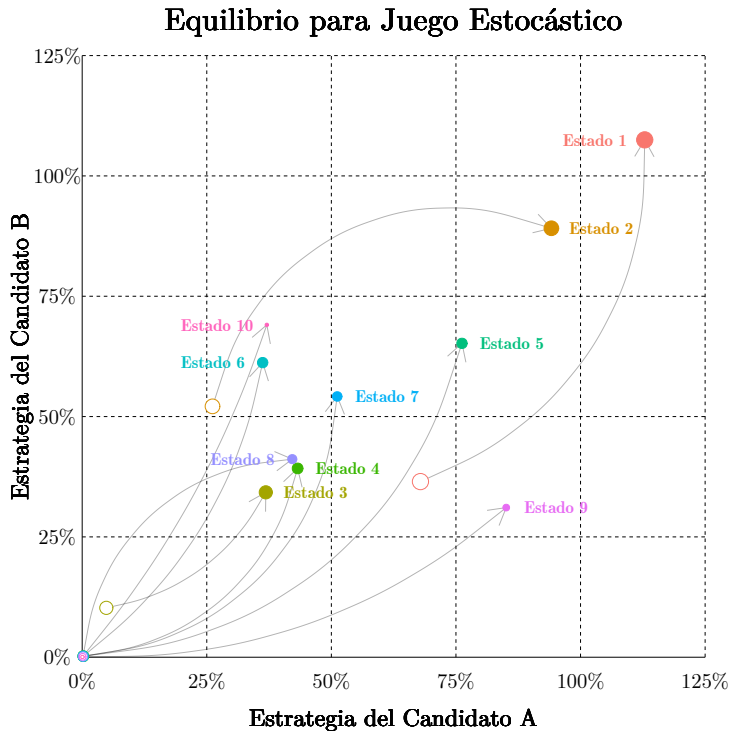


Figura 3.8: Equilibrio bajo SM, con Juego Estocástico, usando Método del Vecino.

Resultados para parámetros de la Tabla 3.1. Colores diferencian estados. Puntos en blanco indican combinación (x, y) , mientras que puntos de colores indican valores de combinación $(x + \alpha, y + \beta)$, donde las flechas muestran como los vectores de sesgo acomodan las estrategias.

Se observa que la combinación de estrategias encontrada es cercanas al equilibrio que se encontró con el Método del Gradiente, pero no exactamente igual, con una diferencia de aproximadamente 4 puntos porcentuales en el estado más grande para cada jugador. En este caso, el equilibrio le entrega un 54.2% de probabilidades de ganar al

candidato A

Por lo mismo, su Gráfico de Corroboración es también similar.

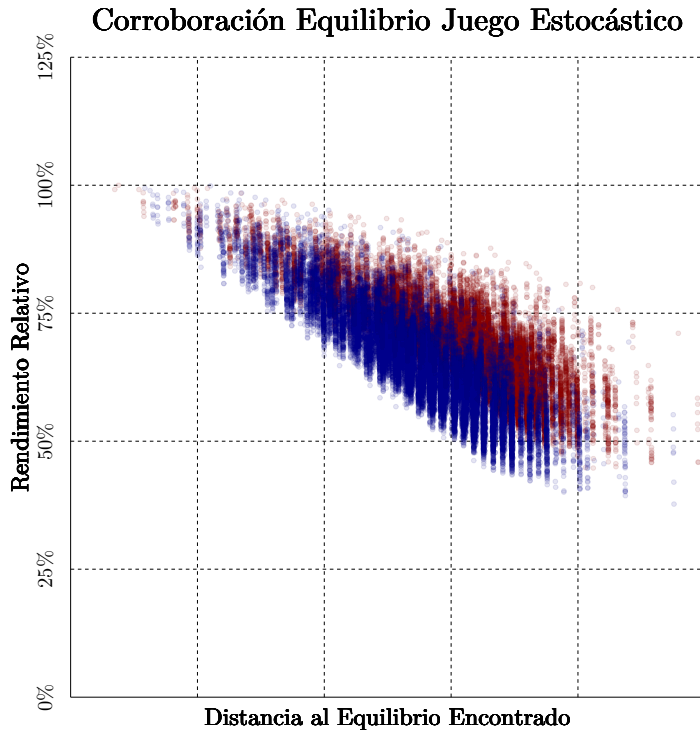


Figura 3.9: Corroboración Equilibrio bajo **SM** con Juego Estocástico, usando Método del Vecino. Nube Roja para corroboración del Candidato A . Nube Azul para corroboración del Candiato B . Fuente: Elaboración Propia.

Ambos algoritmos, tanto el Método del Gradiente como el Método del Vecino entregan soluciones que parecen ser efectivamente equilibrios según lo observado en los Gráficos de Corroboración. Su cercanía induce a pensar que éstos podrían ser en realidad el mismo punto bajo cierto nivel de error tolerado (asociado a los valores de ξ_{Tol} entregados a los algoritmos). No se cuenta con evidencia suficiente para cerrar tal afirmación. Es más, los dos equilibrios aquí encontrados son también muy similares al encontrado en el modelo determinista del juego restringido con abstención, por lo que es posible que éstos sean, en realidad, iguales.

3.3. Colegio Electoral

Para este sistema, se utilizará la instancia de datos presentada en la siguiente tabla.

Tabla 3.9 Instancia de ejemplo para un país con $n = 10$ estados bajo CE.

Estado	Votos Electorales	α [%]	β [%]
Estado 1	15	110	60
Estado 2	13	50	90
Estado 3	10	30	35
Estado 4	10	80	70
Estado 5	9	70	60
Estado 6	9	30	80
Estado 7	8	40	60
Estado 8	8	90	40
Estado 9	5	60	45
Estado 10	3	50	70

Fuente: Elaboración Propia

Para cada caso se resolverá la instancia en dos ocasiones, utilizando $k = 3$ y $k = 15$ como parámetros de dispersión (ver Figura 2.3).

3.3.1. Intentando Resolver el Equilibrio.

Para la resolución de esta instancia, se utilizará el Método del Gradiente (ver Algoritmo 2.3.2), adaptado según las derivadas que emergen de los sistemas de Karush-Kuhn-Tucker del Sistema 2.16 y su equivalente al candidato B . Es relevante tener en cuenta que a medida que k sea más grande, la estocasticidad del problema se reducirá, siendo los resultados de cada estado cada vez más difíciles de desviar de su valor promedio. En contraparte, mientras más pequeño sea k , el resultado será más aleatorio, disolviendo el efecto de las estrategias.

Instancia para $k = 3$.

Al resolver esta instancia utilizando como parámetros los valores $\xi_{\text{Tol}} = 10^{-3}$ y $\rho = 0.7$ se obtienen los siguientes resultados:

Tabla 3.10 Equilibrio bajo CE, con $k = 3$.

Estado	Perfil x [%]	Perfil y [%]	Prob. Ganar Cand. A [%]
Estado 1	21,7	62,7	54,1
Estado 2	32,3	6,9	41,9
Estado 3	30,2	22,6	51,9
Estado 4	4,5	4,3	56,1
Estado 5	1,9	1,6	56,8
Estado 6	4,0	0,2	19,4
Estado 7	4,5	0,8	37,7
Estado 8	0,3	0,5	80,3
Estado 9	0,4	0,4	61,4
Estado 10	$\leq 0,1$	0,7	36,1

Fuente: Elaboración Propia

Equilibrio Colegio Electoral

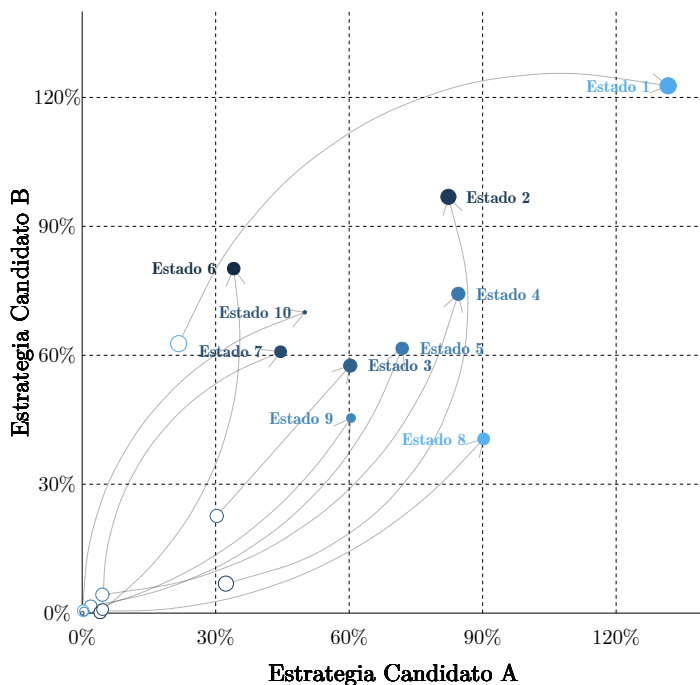


Figura 3.10: Equilibrio encontrado para $k = 3$.

Resultados para parámetros de la Tabla 3.3. Puntos en blanco indican combinación (x, y) , mientras que puntos en colores indican valores de combinación $(x + \alpha, y + \beta)$. Colores indican $\mathbb{P}(A \text{ gana } i | x_i = y_i = 0)$, tonos claros indican una probabilidad más favorable al candidato A. Fuente: Elaboración Propia.

Ahora bien, el punto que encuentra este algoritmo podría no ser un real equilibrio según la Definición 4, dado que no se tiene conocimiento respecto al comportamiento de las funciones objetivos de cada candidato en este modelo. Para encarar esto, se utilizará el Gráfico de Corroboración introducido en la sección anterior, chequeando si existe algún perfil de estrategia que permitiría un incremento unilateral de parte de algún candidato.

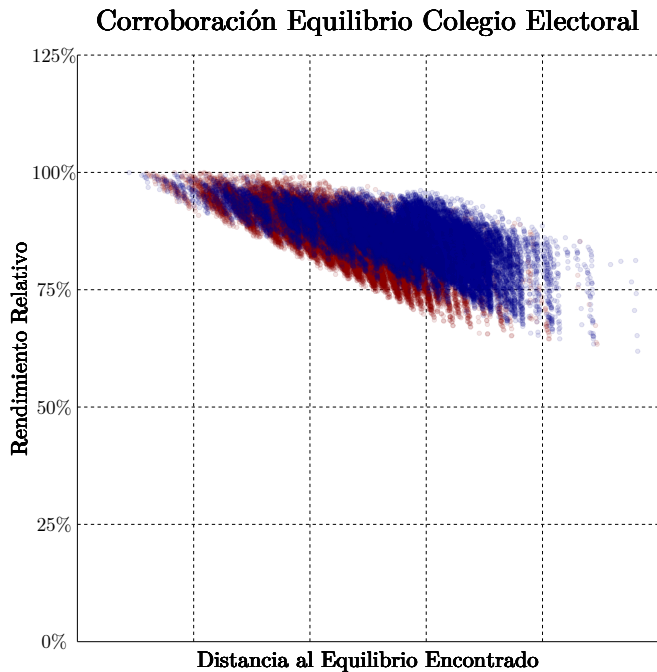


Figura 3.11: Corroboración Equilibrio bajo **CE** con $k = 3$.

Nube Roja para corroboración del Candidato *A*. Nube Azul para corroboración del Candidato *B*. Fuente: Elaboración Propia.

El Gráfico de Corroboración sugiere que la combinación de perfiles encontrada corresponde efectivamente a un equilibrio que respeta la Definición 4, puesto que no se observan saltos sobre la barrera $y = 100\%$, que correspondería a un punto donde uno de los candidatos obtendría beneficios por realizar un cambio unilateral de estrategias.

Es relevante notar que ésto no permite concluir de forma definitiva que lo mostrado sea en realidad un equilibrio, pues para ello habría que realizar el mismo ejercicio sobre todos y cada uno de los (infinitos) perfiles contenidos en Δ_n . El Grafico de Corroboración aquí presentado realiza la comparación sobre un subconjunto de perfiles correspondientes a un *simplex lattice*, con aproximadamente 23 mil perfiles.

El equilibrio encontrado entrega un 48.1% de probabilidades a favor del candidato *A*.

Instancia para $k = 15$

Resolviendo esta instancia utilizando los mismos valores $\xi_{\text{Tot}} = 10^{-3}$ y $\rho = 0.7$, se obtienen los siguientes valores:

Tabla 3.11 Equilibrio bajo CE, con $k = 15$.

Estado	Perfil x [%]	Perfil y [%]	Prob. Ganar Cand. A [%]
Estado 1	61.6	82.4	74.0
Estado 2	3.3	0.6	10.9
Estado 3	34.6	16.1	69.0
Estado 4	0.4	≤ 0.1	62.5
Estado 5	≤ 0.1	0.8	63.5
Estado 6	≤ 0.1	0.1	2.7
Estado 7	≤ 0.1	≤ 0.1	21.2
Estado 8	≤ 0.1	≤ 0.1	96.1
Estado 9	≤ 0.1	≤ 0.1	72.0
Estado 10	≤ 0.1	≤ 0.1	23.4

Fuente: Elaboración Propia

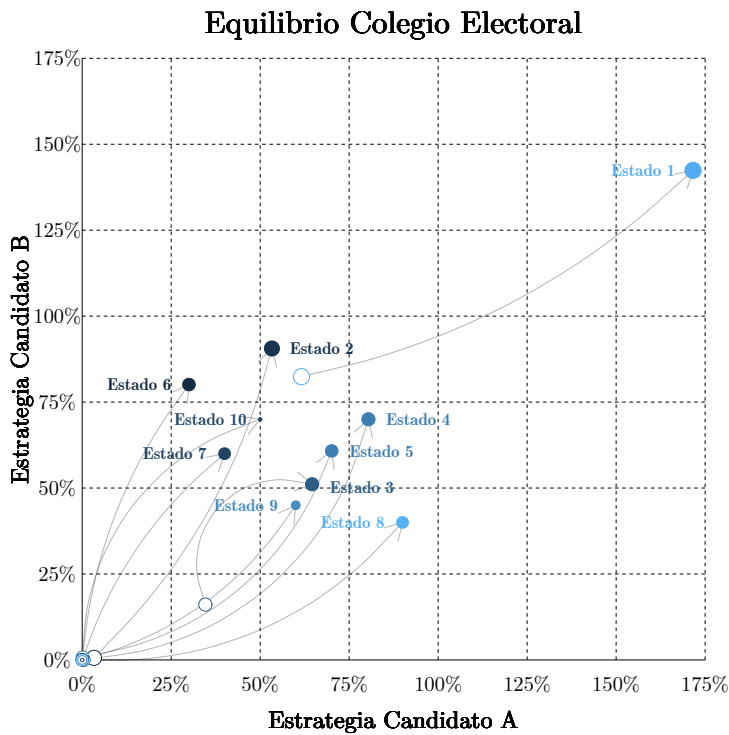


Figura 3.12: Equilibrio encontrado para $k = 15$.

Resultados para parámetros de la Tabla 3.3. Puntos en blanco indican combinación (x, y) , mientras que puntos en colores indican valores de combinación $(x + \alpha, y + \beta)$. Colores indican $\mathbb{P}(A \text{ gana } i | x_i = y_i = 0)$, tonos claros indican una probabilidad más favorable al candidato A. Fuente: Elaboración Propia.

Aquí, el resultado sería una probabilidad de 53.0% favorable al candidato A. Al igual que en el caso anterior, la falta de certezas respecto a la fiabilidad del equilibrio encontrado obliga a evaluarlo mediante el Gráfico de Corroboración, el que se efectuará mediante el mismo conjunto *símpelx lattice*.

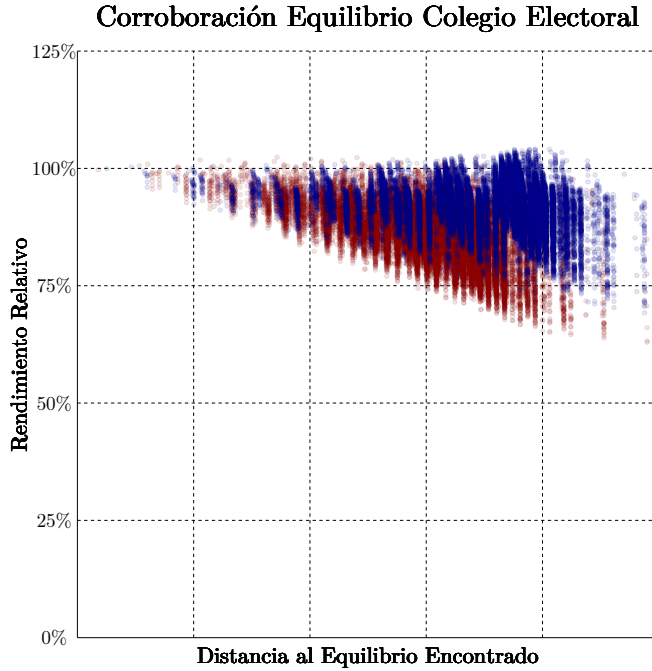


Figura 3.13: Corroboración Equilibrio bajo **CE** con $k = 15$.

Nube Roja para corroboración del Candidato A . Nube Azul para corroboración del Candidato B . Fuente: Elaboración Propia.

En este caso, se observa como la nube color azul (comparación hecha cambiando la estrategia del candidato B) se inclina claramente por sobre el umbral del 100% en el eje ordenado, lo que indica que existen estrategias para dicho candidato que, paralizando la decisión del rival, le permitirían mejorar su situación, lo que contradice la Definición 4 para el juego bajo **CE**. De hecho, la existencia de puntos cercanos al equilibrio encontrado que parecieran de igual forma ubicarse por sobre el 100% no permite ni siquiera concluir en este caso si el punto corresponde a un equilibrio local según la Definición 5 o, en caso de serlo, sería para una vecindad relativamente pequeña.

No es sorprendente el resultado considerando que al aumentar el parámetro k la distribución pierde variabilidad y los resultados se van tornando más predecibles, de forma que la función se va inclinando a su paralelo determinista. En éste caso, de hecho, el equivalente determinista sería una función suma de indicatrices, por lo que no generaría ni siquiera condiciones de continuidad, mucho menos de convexidad (lo requerido para asegurar existencia y unicidad de equilibrio).

Para resolver este juego, entonces, será necesario modelarlo para estrategias mixtas mediante el Algoritmo 2.4.6, resolviendo entonces el Problema 2.13 (y su equivalente para el candidato B).

3.3.2. Equilibrio en Estrategias Mixtas

En este caso, para utilizar el Algoritmo 2.4.6, se fijará $q = 101$, de forma que el átomo de la discretización será un punto porcentual, es decir, $(q - 1)^{-1} = \frac{1}{100} = 1\%$.

Instancia para $k = 3$

Se vió en los algoritmos anteriores que al utilizar el valor $k = 3$ se logra encontrar un candidato a equilibrio que el Gráfico de Corroboración no pone en duda. Al utilizar el Algoritmo 2.4.6, por su parte, éste también sugiere un equilibrio único (que respeta la Definición 4), que viene descrito por los siguientes perfiles:

Tabla 3.12 Equilibrio bajo CE, con $k = 3$.

Estado	Perfil x [%]	Perfil y [%]	Prob. Ganar Cand. A [%]
Estado 1	31	78	51.3
Estado 2	42	0	50.5
Estado 3	28	22	50.7
Estado 4	0	0	56.1
Estado 5	0	0	56.7
Estado 6	0	0	16.7
Estado 7	0	0	34.4
Estado 8	0	0	80.6
Estado 9	0	0	61.4
Estado 10	0	0	36.1

Fuente: Elaboración Propia

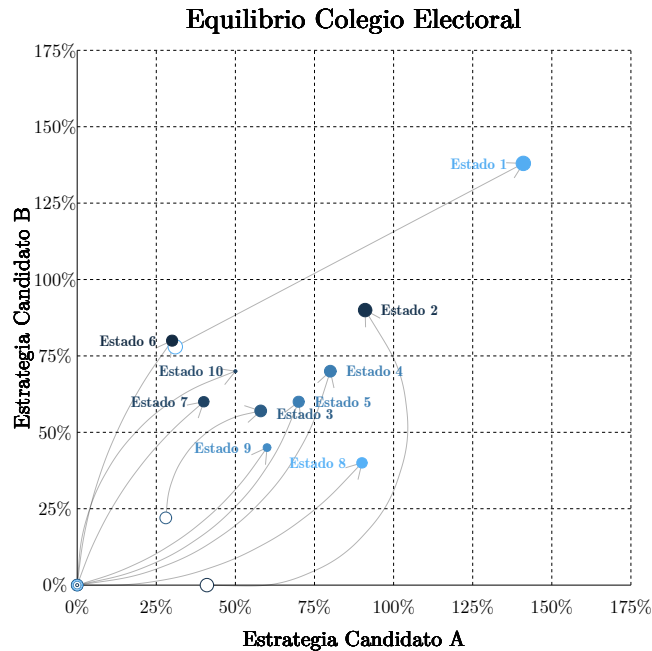


Figura 3.14: Equilibrio encontrado para $k = 3$ para Estrategias Mixtas.

Resultados para parámetros de la Tabla 3.3. Puntos en blanco indican combinación (x, y) , mientras que puntos en colores indican valores de combinación $(x + \alpha, y + \beta)$. Colores indican $\mathbb{P}(A \text{ gana} \mid x_i = y_i = 0)$, tonos claros indican una probabilidad más favorable al candidato A. Fuente: Elaboración Propia.

En este caso, el equilibrio encontrado cumple con las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker con un error de $\xi_{\text{Tol}} = 10^{-4}$. Esta combinación difiere de la encontrada por el Método del Gradiente cuando se intentó forzar al algoritmo a

solucionar el problema del equilibrio para la Definición 4, lo que puede ser evidencia de la existencia de múltiples equilibrios.

Instancia para $k = 15$

Esta instancia no logró ser resuelta mediante el Método del Gradiente, pues como quedó en evidencia en el Gráfico de Corroboración de la Imagen 3.3.1, la combianción de estrategias encontrada no satisfizo lo requerido por la Definición 4 de equilibrio bajo CE.

Al resolver el juego para Estrategias Mixtas utilizando el algoritmo presentado en la Sección 2.4.6 (con parámetro de atomización $q = 101$, de forma que el átomo es $(q - 1)^{-1} = \frac{1}{100} = 1\%$), se obtuvieron 27 perfiles de estrategias para el candidato A y 29 para el candidato B . De ellos, solo dos perfiles de cada candidato recibieron reales chances de ser elegido como la estrategia a utilizar, las que se presentan a continuación.

Tabla 3.13 Perfiles con Peso Positivo para Equilibrio bajo CE, con $k = 15$.

Estado	Perfil x_{12} [%]	Perfil x_{25} [%]	Perfil y_1 [%]	Perfil y_{23} [%]
Estado 1	0	0	100	0
Estado 2	65	0	0	32
Estado 3	26	46	0	38
Estado 4	9	21	0	30
Estado 5	0	2	0	0
Estado 6	0	0	0	0
Estado 7	0	31	0	0
Estado 8	0	0	0	0
Estado 9	0	0	0	0
Estado 10	0	0	0	0

Se utilizó como parámetro de discretización $q = 101$, lo que da un átomo de $(q - 1)^{-1} = \frac{1}{100} = 1\%$. Fuente: Elaboración Propia

Donde x_{12} tiene 93.7% de probabilidades de ser elegido por el candidato A (x_{25} por lo tanto tiene 6.3%), mientras que y_1 tiene 41.2% de probabilidades de ser elegido por el candidato B (y_{23} por lo tanto tiene 58.8%).

Para estas combinaciones se tienen diferentes posibles combinaciones, cada una de las cuales entrega resultados variados. A continuación se resumen todas las combinaciones posibles.

Tabla 3.14 Perfiles con Peso Positivo para Equilibrio bajo **CE**, con $k = 15$.

	$x_{12} - y_1$	$x_{12} - y_{23}$	$x_{25} - y_1$	$x_{25} - y_{23}$
Prob. de Ocurrencia [%]	38.6	55.1	2.6	3.7
$\mathbb{P}(G^A)$ [%]	53.5	51.9	38.6	62.4
$\mathbb{P}(G_1^A)$ [%]	11.6	93.6	11.6	93.6
$\mathbb{P}(G_2^A)$ [%]	76.2	43.9	8.9	1.4
$\mathbb{P}(G_3^A)$ [%]	80.1	26.4	94.1	53.9
$\mathbb{P}(G_4^A)$ [%]	72.4	37.6	82.5	51.1
$\mathbb{P}(G_5^A)$ [%]	63.6	63.6	66.0	66.0
$\mathbb{P}(G_6^A)$ [%]	2.7	2.7	2.7	2.7
$\mathbb{P}(G_7^A)$ [%]	21.1	21.1	64.8	64.8
$\mathbb{P}(G_8^A)$ [%]	96.1	96.1	96.1	96.1
$\mathbb{P}(G_9^A)$ [%]	72.0	72.0	72.0	72.0
$\mathbb{P}(G_{10}^A)$ [%]	23.4	23.4	23.4	23.4

Se utilizó como parámetro de discretización $q = 101$, lo que da un átomo de $(q - 1)^{-1} = \frac{1}{100} = 1\%$. Columna $\mathbb{P}(G^A)$ entrega la probabilidad de ganar la elección para el candidato A . Columnas $\mathbb{P}(G_i^A)$, la probabilidad de ganar el estado i -ésimo para el candidato A . Fuente: Elaboración Propia

El equilibrio encontrado otorga, en promedio, un 52.5% de probabilidades de ganar al candidato A , quien en 3 de los 4 posibles cruces de estrategias tiene más de un 50% de probabilidades de ganar. En el único cruce de estrategias que favorece al candidato B ($x_{25} - y_1$), se observa un 38.6% de probabilidades a favor el candidato A , aunque tal escenario se verificará solamente con un 2.6% de probabilidades.

En este juego, las distribuciones de los vectores de sesgo α y β obligan a los jugadores a tomar estrategias un tanto diferente. La diferencia favorable para el candidato A en el estado 1 (es decir, $\alpha_1 > \beta_1$) hace que el candidato A le dé gran prioridad a repuntar en el estado 2, donde se ve en desventaja. El candidato B en tanto, se vuelve mucho mas impredecible, con dos estrategias que tienen casi igual probabilidad de ser el perfil a utilizar, pero cuya idea subyacente es completamente diferente; por un lado, la estrategia y_1 es una estrategia extrema que tiene como objetivo invertir el resultado del estado más grande, donde *a priori* el candidato A es absoluto favorito. La estrategia y_{23} en cambio obedece mas a una lógica de diversificar esfuerzos y asegurar buenos rendimientos en los estados 2, 3 y 4.

3.4. Comparación de Modelos

A continuación, se estudiará el caso en que una misma instancia se somete a ambos sistemas, **SM** y **CE**, utilizando los mismos parámetros α y β , así como vectores proporcionales para el número de votantes v y el número de representantes en el colegio electorla w . A modo de simplificar la instancia, se trabajará sin abstención en este caso. Para la siguiente sección se hará uso de la siguiente instancia de prueba:

Tabla 3.15 Instancia para Comparación de Sistemas **SM** y **CE**.

Región	v [%]	w [Votos CE]	α [%]	β [%]
1	35	35	95	55
2	20	20	70	60
3	15	15	75	80
4	10	10	45	65
5	8	8	60	70
6	7	7	35	50
7	3	3	50	45
8	2	2	60	65

Fuente: Elaboración Propia

Donde es relevante tomar en cuenta que los vectores α y β son tales que $\sum_j \alpha_j = \sum_j \beta_j$, lo único que cambia en ellos es la distribución a lo largo de los estados del país. Las soluciones vienen dadas por:

Tabla 3.16 Instancia para Comparación de Sistemas **SM** y **CE**.

Región	x^{SM} [%]	y^{SM} [%]	x_1^{CE} [%]	x_2^{CE} [%]	x_3^{CE} [%]	y_1^{CE} [%]	y_2^{CE} [%]	y_3^{CE} [%]
1	72.3	81.8	58	66	65	100	0	0
2	25.6	18.2	0	34	35	0	61	62
3	≤ 0.1	≤ 0.1	42	0	0	0	39	38
4	2.0	≤ 0.1	0	0	0	0	0	0
5	≤ 0.1	≤ 0.1	0	0	0	0	0	0
6	≤ 0.1	≤ 0.1	0	0	0	0	0	0
7	≤ 0.1	≤ 0.1	0	0	0	0	0	0
8	≤ 0.1	≤ 0.1	0	0	0	0	0	0
Prob. [%]	100.0*	100.0*	45.3	15.7	39.0	53.1	8.3	38.6

x^{SM} y y^{SM} representan los perfiles de equilibrio para el sistema bajo **SM**. Las columnas x_k^{CE} y y_k^{CE} representan los k -ésimos perfiles de los candidatos A y B (respectivamente) con probabilidad positiva en el Equilibrio Mixto. Última fila indica la probabilidad de cada estrategia de ser la elegida por su candidato; estrategias bajo **SM** son para equilibrio en estrategias puras, por lo que tienen 100% de probabilidades. Fuente: Elaboración Propia

Donde el equilibrio bajo **SM** se encontró utilizando el modelo determinista, mientras que bajo **CE** se utilizó $k = 15$ como parámetro de concentración, y $q = 101$ para la discretización.

En esta instancia, el modelo bajo **SM** le otorga al candidato A un 50.8% de probabilidades de ganar, mientras que bajo **CE** éste alcanza un 52.81% de probabilidades.

Capítulo 4

Conclusiones y Nuevas Interrogantes

The first person you should be careful not to fool is yourself.

La primera persona que deberías tener cuidado de no engañar es a tí mismo.

Richard Feynman, 1987

Los modelos estudiados y resueltos dejan detrás una gran cantidad de conclusiones posibles, en prácticamente todas las áreas utilizadas, desde razonamiento político, teorías propias de la microeconomía o las técnicas de modelamiento y optimización matemática utilizadas, así como también las posibles ampliaciones y críticas tanto teóricas y prácticas a los mecanismos propuestos.

A continuación se intentará hacer conclusiones a modo general de todo el modelamiento presentado, haciendo solo diferencias entre los diferentes modelos cuando la situación lo amerite).

A continuación, se referirá como subdivisión política (o simplemente subdivisión) tanto a regiones como estados de un país de manera indiferente.

4.1. Equilibrios Encontrados

Si bien la definición de equilibrio utilizada ha tenido que ser adaptada entre los diferentes modelos, partiendo de lo expresado en las Definiciones 1, 2, 3 y 4, correspondientes a la clásica definición de Equilibrio de Nash bajo Estrategias Puras, pasando por pseudo equilibrios expuestos en la Definición 5 correspondientes únicamente a Equilibrios Locales de Nash en Estrategias Puras, hasta lo requerido en la Definición 6, correspondiente a un Equilibrio de Nash en Estrategias Mixtas.

Es importante notar que la mayoría de estos modelos demostraron estar habilitados para encontrar equilibrios en Estrategias Puras, es decir, uno debería poder prever con un grado relevante de certeza cuánto nivel de esfuerzo pondrá cada candidato en la elección en cada uno de las subdivisiones políticas del país. El único modelo donde ello no fue posible fue para el caso bajo **CE** en situaciones de baja incertidumbre. Es decir, bajo **CE**, el modelo sugiere que los candidatos debiesen preferir optar por estrategias altamente impredecibles, especialmente cuando uno de los candidatos se encuentra en una posición de desventaja por las popularidades que cada uno presenta previo a la

elección.

Por último, es relevante recalcar que al menos en los modelos deterministas bajo **SM**, eliminada la restricción de no negatividad, es posible dar con una fórmula cerrada para las expresiones que describen perfectamente (al menos desde el modelo) el comportamiento de ambos candidatos. En estos escenarios, los esfuerzos siguen una tendencia a distribuir esfuerzos de forma tal que se repartan las popularidades proporcional al peso de cada subdivisión, lo que es una gran conclusión para tener en cuenta a la hora de evaluar al Sistema Mayoritario: Los candidatos intentarán realizar esfuerzos en cada subdivisión de forma proporcional al número de votos que puedan obtener de cada uno. Lógicamente la solución real resulta no ser exactamente en esta línea, pero el argumento principal se sostiene.

4.1.1. ¿Son estos Equilibrios un Buen Paralelo con la Realidad Observada?

En cuanto al parecido que cada equilibrio presenta sobre las campañas electorales presenciadas realmente, existen conclusiones ambiguas.

Evidentemente los modelos irrestrictos no dan una buena imagen respecto a la realidad pues la forma en la que se construye el modelo no busca representar la realidad, si no simplemente facilitar la resolución matemática, para así facilitar la interpretación del rol que cada parámetro juega. Los modelos restringidos, en cambio, parecen dar con respuestas que se parecen bastante a la realidad; candidatos que priorizan entre subdivisiones, intentando asignar sus esfuerzos únicamente según la recompensa en términos de votos que esto trae, lo que se traduce en estrategias que buscan fortalecer la imagen de los candidatos donde haya mas cantidad de personas que convencer.

Los modelos bajo **CE** parecen ser los que mejor representan la realidad. Con elecciones de elevada aleatoriedad, los modelos identifican de gran manera los denominados *swing states* (estados péndulo). Aquellos estados donde a priori no hay un ganador evidente y que, por lo tanto, atraen a gran parte de los esfuerzos de ambos candidatos, muy por sobre lo que sus capacidades en votos sugerirían. Aun en casos con baja aleatoriedad, donde los candidatos prefieren no revelar sus estrategias a jugar (especialmente en casos de mucha asimetría de popularidades previas), el modelo reconoce de buena forma aquellas estrategias de mayor o meno interés para cada uno de los candidatos.

4.2. Resolución y Rendimientos

Para evaluar el desempeño de los métodos y algoritmos utilizados, es importante considerar que en todos los caso se utilizó las siguientes herramientas computacionales:

- Notebook MacBook Pro, Mid-2012. Procesador Intel Core i5, 2.5 GHz. Memoria 16GB.
- Implementación a través de lenguaje de programación R. Uso del editor RStudio v.1.1.453.

4.2.1. Exactitud de los Algoritmos

Diferenciando entre los modelos, en primer lugar, es claro que los modelos irrestrictos, para los cuales se encontró fórmula cerrada que diera con la solución (en el contexto del Sistema Mayoritario) dieron con una solución cuyo margen de error es nulo. Inclusive, son fórmulas tan sencillas que la complejidad de cálculo es mínima, permitiendo utilizar éste método en prácticamente cualquier instancia.

Para los modelos restringidos deterministas bajo **SM**, la resolución también resulta ser relativamente sencilla, principalmente debido a que al tener certeza de la existencia de un único equilibrio, así como la corroboración teórica detrás del algoritmo utilizado, la convergencia es rápida, demorando segundos en obtener soluciones con errores menores a una parte por millón, incluso al realizarlo con instancias de hasta 30 subdivisiones, por lo que el algoritmo resulta ser altamente confiable.

Los modelos estocástico son esencialmente diferentes. Dado que no existen garantías respecto a la existencia de un equilibrio, toda instancia parte con una cuota de dudas respecto a la convergencia que el algoritmo vaya a tener. Aun así, se logró dar con soluciones cuyo error ronda en las milésimas, aunque con tiempos de cómputo del orden de minutos, inclusive horas dependiendo del número de subdivisiones políticas del país.

Para **CE** no solo no se tienen garantías de la existencia del equilibrio, si no que se demostró de forma empírica la existencia de combinaciones de estrategias que logran engañar a los algoritmos para hacerlos parecer equilibrios cuando en realidad no lo son según la Definición 4. Los algoritmos mas completos que hacen uso de la Definición 6 de equilibrio logran encontrar combinaciones con errores del orden de las diezmilésimas, aunque el tiempo de resolución es de los más extensos, siendo del orden de horas para las instancias de hasta 30 subdivisiones.

4.2.2. Escalabilidad de los Algoritmos

En general, los algoritmos utilizados se probaron con hasta 30 subdivisiones por país, aunque algunos de ellos presentan la capacidad de ser utilizados para instancias con 50 o más sin presentar problemas. En particular, los modelos deterministas bajo **SM** no parecen tener trabas de seguir escalando, debido a lo estable de su comportamiento y antecedentes teóricos. Los modelos estocásticos bajo **SM** resultan ser más complejos y, por lo tanto, no se tiene certeza de su comportamiento para instancias un orden de magnitud superior.

Para la resolución de modelos bajo **CE**, la rutina presentada en la Sección 2.4.6 resulta ser altamente estable, pero no tan eficiente en su escalabilidad, por lo que no resulta computacionalmente recomendable escalar los órdenes de magnitud de las instancias utilizadas. Se reconoce, eso sí, espacio para un rediseño que si lo permita (por ejemplo, explotando el hecho que una fracción relevante de subdivisiones no recibe nunca atención de parte de los candidatos).

4.3. Interpretaciones Políticas y Estudios Sistémicos

Una de las aplicaciones que se puede dar a estos modelos, partiendo de la base que sus resultados no difieren tanto de lo que uno esperaría encontrar en una situación real, es la de establecer las consecuencias políticas de uno u otro sistema y las implicancias que ello puede tener para el desarrollo del país en cuestión.

4.3.1. ¿Cuál es la Real Diferencia entre el Sistema Mayoritario y el Sistema de Colegio Electoral?

Es posible ver que en un país bajo **SM**, son mucho más considerados los votantes de subdivisiones de alta población, lo que genera que los candidatos (según el modelo) debiesen tender a favorecer en sus campañas a los sectores que componen tales subdivisiones, incluso cuando los sesgos previos son altamente favorables a uno de los candidatos. El modelo muestra que resulta difícil que un candidato le otorgue demasiada atención a una minoría, debido a que la baja población se traducirá en un pequeño incremento en el número real de votos a favor.

Países bajo **CE** en cambio, observan campañas donde los sectores poblacionales con mayor influencia resultan ser aquellos ubicados en los denominados *swing states* (en Estados Unidos, se le denomina *swing state*, o estado péndulo, a aquellos estados donde los sesgos previos no entregan un claro favorito a priori), en particular aquellos con alta representatividad en términos de votos electorales. Inclusive si a nivel nacional, la población que define a tal subdivisión no es una fracción relevante, la elección puede verse definida por las demandas de dicho grupo, pues lograr revertir el voto de un número menor de votantes de una subdivisión puede traducirse en la definición de todo el estado a favor de un ou otro candidato (a diferencia de **SM**, donde el cambio es paulatino). Por otra parte, el hecho que bajo **CE** se pueda sobrerrepresentar a los votantes de lugares de baja población (el ratio entre votantes y votos en el colegio electoral suele favorecer bajas poblaciones) en cierta forma previene el efecto observado bajo **SM** de estimular la concentración de votantes, desviando a los candidatos a comportamientos más abiertos a absorber las necesidades de todo el país, y no sólo de aquellos núcleos demográficos con mayoría de votantes.

4.4. Limitantes y Futuras Líneas de Investigación

Además de las conclusiones aquí expuestas, también se requiere plantear ciertas dudas que el modelo genera, tanto respecto a su real aplicabilidad, como sobre los patrones que emergen de aceptar el modelo de comportamiento como real en lo observado.

4.4.1. ¿Es Posible Medir los Vectores α, β, γ ?

Los modelos aquí presentados hacen referencia a una serie de valores que se dice conocer previo a la elección y que guardan información respecto a diversos aspectos que describen la realidad del país. El vector v , por ejemplo, indica la cantidad de votantes que cada subdivisión del país tiene, algo que parece relativamente simple de obtener en cada país. En Chile, por ejemplo, viven algo más de 7 millones de personas en la Región Metropolitana, lo que comparado con los 18 millones de habitantes del país, indica que v_{RM} sería cercano al 40% del total.

Otros parámetros, en cambio, resultan simples de comprender, pero altamente difícil de estimar. Los vectores de sesgo α y β son pensados para aportar la información referente a cuán populares son los candidatos en cada subdivisión del país, de forma directamente comparable a los niveles de esfuerzos realizados. En otras palabras, si un candidato tiene un nivel de sesgo en una subdivisión de $\alpha_i = 55\%$, esto es equivalente a decir que en caso de poner como candidato a una persona que nadie en toda la subdivisión i conoce (para bien o para mal), tal persona tendría que estar una

cantidad de tiempo igual al 55 % de una campaña realizando eventos en i para llegar a un nivel de popularidad igual al de aquel candidato con $\alpha_i = 55\%$. Pero medir esto puede incluso no ser del todo posible (lógicamente será imposible si el modelo no hace sentido con el comportamiento real, pues en tal caso se estará midiendo un dato que no existe realmente). Una opción de como medir este valor es evaluar, durante una campaña como se va ajustando el resultado predicho de la elección conforme las campañas se van desarrollando, asumiendo que los valores de los sesgos no cambian y son sólo los eventos de campaña los que van alterando las prediciendo los resultados de las encuestas. Si en las mismas encuestas se midiera el nivel estimado de abstención en la elección, el mismo procedimiento se puede realizar para estimar el parámetro de abstención. Por supuesto, no existen garantías que tal procedimiento vaya a dar sentido, puesto que existen más componentes que alteran el resultado predicho por una encuesta que no forman parte del modelo (polémicas que afecten a un candidato, ruido en la encuesta, efectos cruzados entre subdivisiones del país, etc), de modo que la forma de encontrar tal dato sigue siendo una interrogante abierta para efectos de este trabajo.

4.4.2. ¿Cuál es el Verdadero Rol de la Abstención?

Bajo **CE**, se vió en el Lema 2 que la abstención no tiene finalmente ningún papel en el resultado de las elecciones, puesto que por muy alta que esta sea, alguno de los candidatos se terminará proclamando vencedor en cada una de las subdivisiones del país y, por lo tanto, dado que el modelo utiliza una distribución que no correlaciona el resultado de los votos válidamente emitidos con el nivel de abstención, esta última variable no es de ninguna importancia para la resolución del modelo.

Esto es, sin embargo, algo que puede alejarse bastante de la realidad en tales sistemas. El hecho que la abstención no correlacione con las preferencias es al menos dudoso, pues de verificarse tal situación, se tendría un resulta diferente, donde el nivel de abstención variaría a lo largo de las preferencias, favoreciendo efectivamente a uno u otro candidato. Ésto puede también afectar elecciones bajo **SM**. Si los votantes que se abstienen de votar están mas inclinados a hacerlo hacia uno u otro lado, entonces uno de los candidatos tendrá más facilidad en captar tales votos que su rival, desbalanceando el cómo se encaran las fuerzas de cada uno.

Éste problema es posiblemente una evidencia de que la distribución utilizada no resulta ser tan realista para efectos del problema. Es más bien sólo una buena aproximación al fenómeno en cuestión, que facilita los cálculos.

4.4.3. ¿Por qué es Mejor Atacar al Rival que Fortalecer la Campaña Propia?

Un tema que suele captar la atención del público durante los períodos de campañas electorales dice relación con la elevada agresividad que tiñen las discusiones y formas de referirse al rival. En cierto punto, pareciera que los candidatos invierten más esfuerzo en debilitar al rival que en fortalecer la propia popularidad.

Desde un punto de vista del modelo, en primer lugar, hay que destacar que normalmente se espera observar que los sesgos previos resultan ser de más alta relevancia que el impacto que tenga la campaña. Dado ésto, invertir en debilitar al rival vendría siendo algo así como acotar el nivel de popularidad base (vectors de sesgo) que el modelo le otorga al candidato rival. Debido a que este valor se espera que sea altamente más relevante que el efecto de la

estrategia utilizada, para un candidato resulta, de hecho, ser más beneficioso debilitar al rival que fortalecerse a sí mismo. En esa línea, al menos, aparentemente los modelos sugieren que hace sentido que los candidatos sean tan decididamente agresivos para con sus rivales. Todo esto, sin embargo, no pasa de ser una conjetura que puede quedar abierta para futuras investigaciones.

4.4.4. El Tiempo y otros Parámetros No Incluidos.

Una de las grandes debilidades de los modelos presentados es la no inclusión de ciertos parámetros que de una u otra manera son verdaderamente relevantes para el desempeño de una campaña electoral en la realidad. Entre estos, destacan:

- **Tiempo:** En los modelos trabajados, se trató a las campañas electorales como si fueran un sólo momento; se revelan las estrategias de ambos candidatos y con ello, queda decidido el resultado de la elección. En la realidad esto es un proceso en el que las decisiones de los candidatos se van revelando al público conforme se van ejecutando, de forma que cada uno puede ir adaptando su comportamiento a lo que el rival va jugando en cada instante.
- **Efectos cruzados:** Se tomó aquí como supuesto que el resultado de la elección se vería solo afectado por la campaña realizada por los candidatos en ese lugar, sin importar lo que pase en otra parte del país. Esto no refleja la realidad del todo bien; un evento en una zona puede tener fuertes impactos en otras, especialmente con el gran nivel de exposición mediática a la que se someten las campañas electorales a través de la prensa enriquecida y medios masivos de comunicación modernos.
- **Polémicas y Nueva Información:** Es muy común durante las campañas ver antecedentes de candidatos que no eran conocidos por el público, lo que se puede traducir en un rechazo de cierta parte de la ciudadanía. En el modelo propuesto esto se podría entender como una baja en los niveles de sesgo de un candidato, pero como la elección se realiza en un instante fijo, no hay espacio para que esto ocurra durante la campaña. Aquí haría falta estudiar la inclusión de un nivel de sesgo que varíe en el tiempo según se desarrollen estos eventos.

4.5. Mismos Modelos, Otras Aplicaciones

Los modelos aquí presentados se desarrollaron con el fin de estudiar el comportamiento de las campañas electorales. Es posible, sin embargo, hacer un paralelo entre el contexto electoral y una serie de otras aplicaciones que siguen, *a grosso modo*, la misma estructura. Un caso, por ejemplo, es la asignación de recursos en el presupuesto de marketing de una compañía, intentando aumentar su valor de marca en comparación con su competencia. Aquí, en lugar de candidatos se tienen compañías, y en vez de votantes, se observan consumidores, por los que cada compañía invierte en aumentar su *market share* en lugar de su porcentaje de votación, dividiendo el mercado en diferentes segmentos geográficos, de la misma forma que una elección se analiza para cada subdivisión del país.

Apéndice

A . Demostraciones

A .1. Demostración Teorema 1

Para mostrar la existencia de un equilibrio, basta con notar que: (i) los espacios de estrategias de ambos jugadores son acotados, cerrados y convexos y (ii) las funciones de pago de los jugadores son funciones cóncavas.

La demostración de (i) es directa, notando que los espacios de estrategias para ambos candidatos es Δ_n .

Para ver (ii), teniendo en cuenta que la función de pago para el candidato A queda descrita por la función $R^A = \sum_j v_j \frac{x_j + \alpha_j}{x_j + \alpha_j + y_j \beta_j}$. De ésta forma, $\frac{\partial^2 R^A}{\partial^2 x_j} = -2v_j \frac{y_j + \beta_j}{(x_j + \alpha_j + y_j \beta_j)^2} < 0$, para todo $j \in \mathcal{I}$, mientras que $\frac{\partial^2 R^A}{\partial x_j \partial x_i} = 0$ siempre que $i \neq j$. De ésta forma, la matriz hessiana de la función R^A tiene una estructura diagonal, con todos los elementos en su diagonal principal estrictamente negativos, lo que permite concluir que la función es cóncava.

Dados (i) y (ii), está asegurada la existencia de un equilibrio. Para la unicidad del equilibrio, se define:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{bmatrix} \nabla_{xx} R^A & \nabla_{yx} R^A \\ \nabla_{xy} R^B & \nabla_{yy} R^B \end{bmatrix}$$

Rosen mostró en 1965 (Rosen, 1965) la unicidad del equilibrio en caso que la matriz $G + G^T$ sea definida negativa.

Ahora bien, $\nabla_{xy} R^A$ y $\nabla_{xy} R^B$ son tambien matrices diagonales, pero además, se tiene que:

$$\begin{aligned} (\nabla_{xy} R^B)^T &= \left(\nabla_{xy} \left(\sum_{j \in \mathcal{I}} v_j - R^A \right) \right)^T \\ &= -(\nabla_{xy} R^A)^T \\ &= -\nabla_{xy} R^A \\ &= -\nabla_{yx} R^A \end{aligned}$$

Donde la tercera igualdad se debe a la estructura diagonal de $\nabla_{xy} R^A$, mientras que la cuarta igualdad hace uso del teorema de Clairaut. Se tiene entonces que $G + G^T$ resulta ser:

$$G + G^T = 2 \times \begin{bmatrix} \nabla_{xx} R^A & \mathbf{0}_{\mathbf{n} \times \mathbf{n}} \\ \mathbf{0}_{\mathbf{n} \times \mathbf{n}} & \nabla_{yy} R^B \end{bmatrix}$$

Por último, notando que tanto $\nabla_{xx} R^A$ como $\nabla_{yy} R^B$ son matrices diagonales definidas negativas, se concluye que

$G + G^T$ también es una matriz diagonal, cuyos elementos en la diagonal principal son valores negativos, de modo que $G + G^T$ ha de ser definida negativa, lo que concluye la demostración.

A .2. Demostración Proposición 1

Se busca demostrar que las estrategias $x_i^{UB} = \frac{v_i}{\sum_j v_j}(1 + \sum_j \alpha_j) - \alpha_i$, $y_i^{UB} = \frac{v_i}{\sum_j v_j}(1 + \sum_j \beta_j) - \beta_i$ son, simultáneamente, factibles y óptimas para el problema de optimización que cada candidato enfrenta. Para ello, observando su desempeño en sus respectivos sistemas de ecuaciones de Karush-Kuhn-Tucker, primero es fácil ver que ambas soluciones son factibles, pues $\sum_j x_j^{UB} = \frac{\sum_j v_j}{\sum_j v_j}(1 + \sum_j \alpha_j) - \sum_j \alpha_j = 1$. Ahora bien, la condición de primer orden del candidato A plantea la expresión $v_i \frac{y_i + \beta_i}{(x_i + \alpha_i + y_i + \beta_i)^2} = \lambda$, para todo $i \in \mathcal{I}$. Evaluando en $x = x^{UB}$, $y = y^{UB}$ se obtiene la expresión $\frac{(\sum_j v_j)(1 + \sum_j \beta_j)}{(2 + \sum_j (\alpha_j + \beta_j))^2} = \lambda$, que no depende del índice i en el que se evalúe. Definiendo por λ (el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción $\sum_j x_j = 1$) ese valor, se concluye la demostración (análoga para el candidato B).

A .3. Demostración Teorema 2

Similar al Teorema 1, para demostrar la existencia de un equilibrio, basta con ver que (i) los espacios de estrategias de ambos jugadores son espacios acotados, cerrados y convexos, y (ii) las funciones de pago de ambos jugadores son cóncavas.

La demostración de (i) es nuevamente directa, puesto que los espacios de estrategias siguen siendo Δ_n .

Para demostrar (ii), en primer lugar, se cambiará levemente las expresiones de los Problemas 2.6 y 2.7, evitando las definiciones de S_i^A y S_i^B y reescribiendo las funciones objetivo de la siguiente forma:

$$S^A = \frac{\left(\sum_j v_j \frac{x_j + \alpha_j}{x_j + \alpha_j + y_j + \beta_j + \gamma_j}\right)}{\left(\sum_j v_j \frac{x_j + \alpha_j + y_j + \beta_j}{x_j + \alpha_j + y_j + \beta_j + \gamma_j}\right)}$$

$$S^B = \frac{\left(\sum_j v_j \frac{y_j + \beta_j}{x_j + \alpha_j + y_j + \beta_j + \gamma_j}\right)}{\left(\sum_j v_j \frac{x_j + \alpha_j + y_j + \beta_j}{x_j + \alpha_j + y_j + \beta_j + \gamma_j}\right)}$$

Donde es importante notar que el problema de optimización de ambos jugadores es completamente equivalente, de modo que su solución se dará en el mismo punto, con los mismos pagos.

Se calcula el gradiente de S^A sobre x entonces como: $\frac{\partial}{\partial x_i} S^A = \frac{v_i / (x_i + \alpha_i + y_i + \beta_i + \gamma_i)^2}{\left(\sum_j v_j \frac{x_j + \alpha_j + y_j + \beta_j}{x_j + \alpha_j + y_j + \beta_j + \gamma_j}\right)} (y_i + \beta_i + S^B \gamma_i)$. Definiendo

$\sigma_i = (x_i + \alpha_i + y_i + \beta_i + \gamma_i)$, $P = \sum_j v_j \frac{x_j + \alpha_j + y_j + \beta_j}{\sigma_j}$ y $m_i = (y_i + \beta_i + S^B \gamma_i)$, la expresión anterior queda

reducida a $\frac{\partial}{\partial x_i} S^A = \frac{v_i m_i}{\sigma_i^2 P}$. Luego, la matriz hessiana quedará definida por los términos de las segundas derivadas,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} S^A = - \left(\frac{v_i v_j}{P^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2} (m_i \gamma_j + m_j \gamma_i) + \mathbb{1}_{\{i=j\}} \times \frac{2v_i m_i}{P \sigma_i^3} \right).$$

Ahora bien, para probar que la función S^A es cóncava, se probará que para cualquier vector $z \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $z^T (\nabla_{xx} S^A) z \leq 0$. Pero tal expresión se puede ampliar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} z^T (\nabla_{xx} S^A) z &= - \sum_i \sum_j \left(z_i z_j \frac{v_i v_j}{P^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2} (\gamma_i m_j + \gamma_j m_i) + \mathbb{1}_{\{i=j\}} 2z_i^2 \frac{v_i m_i}{P \sigma_i^3} \right) \\ &= - \sum_i \sum_j \left(\frac{1}{2} w_i w_j P \left(\frac{\gamma_i m_j}{\sigma_i \sigma_j} + \frac{\gamma_j m_i}{\sigma_j \sigma_i} \right) + \mathbb{1}_{\{i=j\}} \frac{P^2 w_i^2 m_i}{v_i \sigma_i} \right) \end{aligned}$$

Donde se definió $w_i = \frac{\sqrt{2}z_i v_i}{P^{\frac{3}{2}} \sigma_i}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
z^T (\nabla_{xx} S^A) z &= - \sum_i \sum_j \left(P w_i w_j \frac{\gamma_i m_j}{\sigma_i \sigma_j} + \mathbb{1}_{\{i=j\}} \frac{P^2 w_i^2 m_i}{v_i \sigma_i} \right) \\
&= - \sum_i \sum_j \left(P w_i w_j \frac{\gamma_i}{\sigma_i} \left(\frac{y_j + \beta_j}{\sigma_j} + S^B \frac{\gamma_j}{\sigma_j} \right) + \mathbb{1}_{(i=j)} \frac{w_i^2 P^2}{v_i} \left(\frac{y_i + \beta_i}{\sigma_i} + S^B \frac{\gamma_i}{\sigma_i} \right) \right) \\
&\leq - \sum_i \sum_j \left(P w_i w_j \frac{\gamma_i}{\sigma_i} \left(\frac{y_j + \beta_j}{\sigma_j} + S^B \frac{\gamma_j}{\sigma_j} \right) + \mathbb{1}_{(i=j)} \frac{w_i^2 P^2 (y_i + \beta_i)}{4 v_i \sigma_i} \right) \\
&= - \left(\sum_i w_i \frac{\gamma_i}{\sigma_i} \right) \left(\sum_i w_i \frac{y_i + \beta_i}{\sigma_i} \right) P - \left(\sum_i w_i \frac{\gamma_i}{\sigma_i} \right)^2 \left(\sum_i v_i \frac{y_i + \beta_i}{\sigma_i} \right) - \sum_i \frac{w_i^2 (y_i + \beta_i)}{4 v_i \sigma_i} P^2 \\
&\leq - \left(\sum_i w_i \frac{\gamma_i}{\sigma_i} \right)^2 \left(\sum_i v_i \frac{y_i + \beta_i}{\sigma_i} \right) + \frac{\left(\sum_i w_i \frac{\gamma_i}{\sigma_i} \right)^2 \left(\sum_i w_i \frac{y_i + \beta_i}{\sigma_i} \right)^2}{\sum_i \frac{w_i^2 (y_i + \beta_i)}{v_i \sigma_i}} \\
&= - \frac{\left(\sum_i w_i \frac{\gamma_i}{\sigma_i} \right)^2}{\sum_i \frac{w_i^2 (y_i + \beta_i)}{v_i \sigma_i}} \left(\left(\sum_i v_i \frac{y_i + \beta_i}{\sigma_i} \right) \left(\sum_i \frac{w_i^2 (y_i + \beta_i)}{v_i \sigma_i} \right) - \left(\sum_i w_i \frac{y_i + \beta_i}{\sigma_i} \right)^2 \right) \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Donde la primera igualdad nace de la simetría de las sumatorias, para la segunda se reemplaza la definición de m_i , en la tercera línea, la desigualdad se debe a que $\gamma_i, S^B \geq 0$. La cuarta línea se deriva de reordenar la suma en la primera sumatoria para separar por índices, y de efectuar la segunda sumatoria tomando en cuenta la función indicatriz. La segunda desigualdad (quinta línea) nace de maximizar el polinomio de segundo grado que se obtiene sobre P (notando que el término asociado a P^2 es negativo, y por lo tanto la función tiene un máximo). La sexta línea resulta de factorizar sumatorias semejantes, mientras que la última línea es una consecuencia del Lema 3, reemplazando w por a , $\frac{y+\beta}{\sigma_i}$ por b , y la matriz diagonal de elementos $\frac{y_i+\beta_i}{v_i \sigma_i}$ en su diagonal principal por D .

Lema 3. Para cualquier $a, b \in \mathbb{R}^n$, y matriz diagonal positiva $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se tiene la siguiente desigualdad $(a^T b)^2 \leq a^T D b a^T D^{-1} b$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
(a^T b)^2 &= \|a^T b\|_2^2 \\
&= \|a^T D^{1/2} D^{-1/2} b\|_2^2 \\
&\leq \|a^T D^{1/2}\|_2^2 \|D^{-1/2} b\|_2^2 \\
&= a^T D b a^T D^{-1} b,
\end{aligned}$$

En donde la desigualdad de la línea 3 es una consecuencia directa de la desigualdad de Cauchy-Schwartz. \square

Para la unicidad del equilibrio, se sigue el mismo procedimiento utilizado en el Teorema A.1. Definiendo

$$G(x, y) = \begin{bmatrix} \nabla_{xx} S^A & \nabla_{yx} S^A \\ \nabla_{xy} S^B & \nabla_{yy} S^A \end{bmatrix}.$$

Nuevamente, utilizando el trabajo de Rosen (Rosen, 1965), se requiere demostrar que la matriz $G + G^T$ es definida

negativa. Ahora bien, notando que:

$$\begin{aligned}
(\nabla_{xy} S^A)^T &= (\nabla_{xy} (1 - S^B))^T \\
&= -(\nabla_{xy} S^B)^T \\
&= -\nabla_{xy} S^B \\
&= -\nabla_{yx} S^B
\end{aligned}$$

Se tiene entonces que

$$G(x, y) + G^T(x, y) = 2 \times \begin{bmatrix} \nabla_{xx} S^A & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & \nabla_{yy} S^B \end{bmatrix}$$

Dado que $\nabla_{xx} S^A$ y $\nabla_{yy} S^B$ son ambas matrices definidas negativas, se tiene entonces que $G + G^T$ también lo es, lo que concluye la demostración.

A .4. Demostración Proposición 2

Al igual que lo realizado en la Demostración A .2 para el equilibrio irrestricto sin abstención, aquí se buscan dos perfiles de estrategias que satisfagan simultáneamente el problema de optimización que cada candidato enfrenta. Siguiendo con las ecuaciones de Karush-Kuhn-Tucker, para la factibilidad se tiene:

$$\begin{aligned}
\sum_j x_j^{UB} &= \frac{1 + \sum_j \alpha_j}{2 + \sum_j \alpha_j + \beta_j} \left[\left(\frac{\sum_j v_j}{\sum_j v_j} \right) \left(2 + \sum_j \alpha_j + \beta_j + \gamma_j \right) - \sum_j \gamma_j \right] - \sum_j \alpha_j \\
&= \frac{1 + \sum_j \alpha_j}{2 + \sum_j \alpha_j + \beta_j} \left[\left(2 + \sum_j \alpha_j + \beta_j + \gamma_j \right) - \sum_i \gamma_i \right] - \sum_j \alpha_j \\
&= \frac{1 + \sum_j \alpha_j}{2 + \sum_j \alpha_j + \beta_j} \left[2 + \sum_j \alpha_j + \beta_j \right] - \sum_j \alpha_j \\
&= \left(1 + \sum_j \alpha_j \right) - \sum_j \alpha_j = 1.
\end{aligned}$$

En segundo lugar, hay que probar que la condición de optimalidad también se sostiene para ambos sistemas de ecuaciones. Como se vió en la Demostración A .3, reescribiendo las funciones de utilidad de los Problemas 2.6 y 2.7 exitando las definiciones de S_i^A y S_i^B , se tiene que $\frac{\partial}{\partial x_i} S^A = \frac{v_i/\sigma_i^2}{P} (y_i + \beta_i + S^B \gamma_i)$. Evaluando en $x = x^{UB}$, $y = y^{UB}$ se obtiene $\frac{\partial}{\partial x_i} S^A|_{(x,y)=(x^{UB}, y^{UB})} = \frac{1 + \sum_j \beta_j}{(2 + \sum_j (\alpha_j + \beta_j))^2} = \lambda$. Dado que el resultado obtenido no depende del índice i utilizado, la expresión $\frac{1 + \sum_j \beta_j}{(2 + \sum_j (\alpha_j + \beta_j))^2}$ es, de hecho, el valor de λ . Un procedimiento análogo permite concluir que $\eta = \frac{1 + \sum_j \alpha_j}{(2 + \sum_j (\alpha_j + \beta_j))^2}$, que constituyen los valores de las variables que resuelven los sistemas de ecuaciones de Karush-Kuhn-Tucker, lo que concluye la demostración.

A .5. Demostración Teorema 3

Dado el equilibrio encontrado para el juego irrestricto sin abstención indicado en la Proposición 1, el resultado de tal equilibrio entrega como resultado, en cada región, una fracción de votos para el candidato A dada por la expresión

$\frac{x_i + \alpha_i}{x_i + \alpha_i + y_i + \beta_i} = \frac{1 + \sum_j \alpha_j}{2 + \sum_j (\alpha_j + \beta_j)}$. Como tal expresión no depende del índice de la región, será también el resultado a nivel país.

En el juego irrestricto con abstención el equilibrio es el expresado en la Proposición 2, donde el resultado, en cada región, entre como fracción de votos favorables al candidato A (entre los votos válidamente emitidos), viene dada por $\left(\frac{x_i + \alpha_i}{x_i + \alpha_i + y_i + \beta_i + \gamma_i}\right) / \left(\frac{x_i + \alpha_i + y_i + \beta_i}{x_i + \alpha_i + y_i + \beta_i + \gamma_i}\right) = \frac{x_i + \alpha_i}{x_i + \alpha_i + y_i + \beta_i} = \frac{1 + \sum_j \alpha_j}{2 + \sum_j (\alpha_j + \beta_j)}$, que no depende del índice de la región y, por lo tanto, es el resultado a nivel global de la elección.

Dado que en ambos casos el resultado de la elección entrega una fracción $\frac{1 + \sum_j \alpha_j}{2 + \sum_j (\alpha_j + \beta_j)}$ favorable al candidato A , el resultado de ambos modelos será exactamente el mismo.

A .6. Demostración Lema 1

Para demostrar esto, en primer lugar, se definirá el crecimiento de la función f en x sobre la dirección d como $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+td) - f(x)}{t}$. Para que tal dirección sea sobre el interior de Δ_n , debe existir un $\epsilon > 0$ tal que $\forall t \leq \epsilon$, se tenga que $(x + td) \in \text{int}(\Delta_n)$.

Ahora bien, al estar trabajando en el interior de Δ_n , entonces cualquier punto x cumplirá no solo con la restricción del hiperplano de Δ_n , es decir, $\sum_j x_j = 1$, si no que además $x > 0$. Pero entonces, para cada x de dicho espacio, existen vectores $w \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_i = \frac{\exp(w_i)}{\sum_j \exp(w_j)}$. En efecto, se definirá la función $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{int}(\Delta_n)$ como aquella que recoge un vector w y entrega el vector x asociado, por lo que $h(w)_i = \frac{\exp(w_i)}{\sum_j \exp(w_j)}$. Claramente h es una función epiyectiva, puesto que para cualquier $x \in \text{int}(\Delta_n)$ se tiene que el vector w con la forma $w_i = \ln(x_i/x_1) + w_1$ es tal que $h(w) = x$. En efecto, $h(w)_i = \frac{\exp(w_i)}{\sum_j \exp(w_j)} = \frac{\exp(\ln(x_i/x_1) + w_1)}{\sum_j \exp(\ln(x_j/x_1) + w_1)} = \frac{(x_i/x_1) \exp(w_1)}{\sum_j (x_j/x_1) \exp(w_1)} = x_i$. Dado que el valor de w_1 fue elegido de forma arbitraria, existen infinitos posibles vectores w tales que $h(w) = x$ para todo $x \in \text{int}(\Delta_n)$, lo que demuestra la epiyectividad de h .

Dado lo anterior, la función h conecta al interior de Δ_n con todo el espacio \mathbb{R}^n , por lo que un movimiento δ^w en el espacio de los vectores w se puede traducir en su movimiento equivalente δ^x en el espacio de los vectores x mediante la expresión $\delta^x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(w + t\delta^w) - h(w)}{t}$. Desarrollando esta expresión para la componente i -ésima de δ^x se obtiene:

$$\begin{aligned}
\delta_i^x &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(w + t\delta^w)_i - h(w)_i}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\exp(w_i + t\delta_i^w)}{\sum_j \exp(w_j + t\delta_j^w)} - \frac{\exp(w_i)}{\sum_j \exp(w_j)}}{t} \\
&= \exp(w_i) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\exp(t\delta_i^w)}{\sum_j \exp(w_j + t\delta_j^w)} - \frac{1}{\sum_j \exp(w_j)}}{t} \\
&\stackrel{\text{L'H}}{=} \exp(w_i) \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\delta_i^w \exp(t\delta_i^w) \left(\sum_j \exp(w_j + t\delta_j^w)\right) - \exp(t\delta_i^w) \left(\sum_j \delta_j^w \exp(w_j + t\delta_j^w)\right)}{\left(\sum_j \exp(w_j + t\delta_j^w)\right)^2} \\
&= \exp(w_i) \frac{\delta_i^w \left(\sum_j \exp(w_j)\right) - \left(\sum_j \delta_j^w \exp(w_j)\right)}{\left(\sum_j \exp(w_j)\right)^2} \\
&= h(w)_i \left(\delta_i^w - \sum_j \delta_j^w h(w)_j \right)
\end{aligned}$$

Donde en la cuarta línea se utilizó el Teorema de L'Hopital.

Ahora bien, la dirección de máximo crecimiento de $f(h(w))$ en w es el gradiente $\nabla_w f(h(w))$, por lo que éste induce la dirección de máximo crecimiento sobre x también. Pero por regla de la cadena se tiene que $\frac{\partial}{\partial w_i} f(h(w)) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} f(x)|_{x=h(w)} \times \frac{\partial}{\partial w_i} h(w)_j$. Pero desarrollando las derivadas que componen dicho gradiente, se tiene que $\frac{\partial}{\partial w_i} h(w)_j = \frac{\mathbb{1}_{(i=j)} \exp(w_i) (\sum_j \exp(w_j)) - \exp(w_i) \exp(w_j)}{(\sum_j e^{w_j})^2} = \mathbb{1}_{(i=j)} h(w)_i - h(w)_i h(w)_j$, de modo que $\frac{\partial}{\partial w_i} f(h(w)) = h(w)_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)|_{x=h(w)} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)|_{x=h(w)} h(w)_j \right)$. Entonces, definiendo $\tau^W = \nabla_w f(h(w))$, el vector τ^W es la dirección de máximo crecimiento de $f(h(w))$ en w , pero esa dirección induce una dirección en x que equivale a $\tau_i^X = x_i \left(\tau_i^W - \sum_j \tau_j^W x_j \right)$, la que será entonces la dirección de máximo crecimiento de $f(x)$ en el interior de Δ_n , como se quería demostrar.

A .7. Demostración Proposición 3

Dado que $\mathbf{S}_j = (S_j^A, S_j^B, S_j^C)$ sigue la distribución descrita en la Expresión 2.8, la esperanza $\mathbb{E}(g(S)|x, y)$ se puede escribir utilizando las densidades f_j explícitamente, de forma que la esperanza toma la forma:

$$\mathbb{E}(g(S)|x, y) = \int \cdots \int_{(\Delta_3)^n} g(S) \times \prod_j \frac{(S_j^A)^{k(x_j + \alpha_j) - 1} (S_j^B)^{k(y_j + \beta_j) - 1} (S_j^C)^{k\gamma_j - 1}}{\mathbb{B}(k(x_j + \alpha_j), k(y_j + \beta_j), k\gamma_j)} d\mathbf{S}_j$$

Entonces, aplicando la misma expresión a la esperanza cuando la distribución utiliza la combinación $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, se obtiene:

$$\mathbb{E}(g(S)|x + \Delta x, y + \Delta y) = \int \cdots \int_{(\Delta_3)^n} g(S) \times \prod_j \frac{(S_j^A)^{k(x_j + \Delta x_j + \alpha_j) - 1} (S_j^B)^{k(y_j + \Delta y_j + \beta_j) - 1} (S_j^C)^{k\gamma_j - 1}}{\mathbb{B}(k(x_j + \Delta x_j + \alpha_j), k(y_j + \Delta y_j + \beta_j), k\gamma_j)} d\mathbf{S}_j$$

Donde se reemplazó $f_j(\mathbf{S}_j|x, y)$ por $f_j(\mathbf{S}_j|x + \Delta x, y + \Delta y)$. Pero este término puede, a su vez expresarse como factor de $f_j(\mathbf{S}_j|x, y)$, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f_j(\mathbf{S}_j|x + \Delta x, y + \Delta y) &= \frac{(S_j^A)^{k(x_j + \Delta x_j + \alpha_j) - 1} (S_j^B)^{k(y_j + \Delta y_j + \beta_j) - 1} (S_j^C)^{k\gamma_j - 1}}{\mathbb{B}(k(x_j + \Delta x_j + \alpha_j), k(y_j + \Delta y_j + \beta_j), k\gamma_j)} \\ &= (S_j^A)^{k\Delta x_j} (S_j^B)^{k\Delta y_j} \frac{(S_j^A)^{k(x_j + \alpha_j) - 1} (S_j^B)^{k(y_j + \beta_j) - 1} (S_j^C)^{k\gamma_j - 1}}{\mathbb{B}(k(x_j + \Delta x_j + \alpha_j), k(y_j + \Delta y_j + \beta_j), k\gamma_j)} \\ &= (S_j^A)^{k\Delta x_j} (S_j^B)^{k\Delta y_j} \frac{\mathbb{B}(k(x_j + \alpha_j), k(y_j + \beta_j), k\gamma_j)}{\mathbb{B}(k(x_j + \Delta x_j + \alpha_j), k(y_j + \Delta y_j + \beta_j), k\gamma_j)} f_j(\mathbf{S}_j|x, y) \\ &= (S_j^A)^{k\Delta x_j} (S_j^B)^{k\Delta y_j} \times K \times f_j(\mathbf{S}_j|x, y) \end{aligned}$$

Donde para la última línea se definió $K = \frac{\mathbb{B}(k(x_j + \alpha_j), k(y_j + \beta_j), k\gamma_j)}{\mathbb{B}(k(x_j + \Delta x_j + \alpha_j), k(y_j + \Delta y_j + \beta_j), k\gamma_j)}$. Reemplazando esta expresión en la definición de $\mathbb{E}(g(S)|x + \Delta x, y + \Delta y)$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(S)|x + \Delta x, y + \Delta y) &= \int \cdots \int_{(\Delta_3)^n} g(S) \times \prod_j f_j(\mathbf{S}_j|x + \Delta x, y + \Delta y) d\mathbf{S}_j \\
&= \int \cdots \int_{(\Delta_3)^n} g(S) \times \prod_j (S_j^A)^{k\Delta x_j} (S_j^B)^{k\Delta y_j} \times K \times f_j(\mathbf{S}_j|x, y) d\mathbf{S}_j \\
&= K \times \int \cdots \int_{(\Delta_3)^n} g(S) \times \prod_j (S_j^A)^{k\Delta x_j} (S_j^B)^{k\Delta y_j} \times \prod_j f_j(\mathbf{S}_j|x, y) d\mathbf{S}_j \\
&= K \times \mathbb{E}(g(S) \times \prod_j (S_j^A)^{k\Delta x_j} (S_j^B)^{k\Delta y_j} |x, y)
\end{aligned}$$

Como se quería demostrar.

A .8. Demostración Lema 2

En primer lugar, dado que el vector (X, Y, Z) sigue una distribución de Dirichlet, se tiene que $Z = 1 - (X + Y)$. Dado eso, se puede escribir la covarianza entre $\frac{X}{X+Y}$ y Z en términos sólo de X e Y , mediante la siguiente expresión $\text{Cov}(Z, \frac{X}{X+Y}) = -\text{Cov}(X + Y, \frac{X}{X+Y}) = -\left[\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X + Y) \times \mathbb{E}(\frac{X}{X+Y})\right]$. Se sabe que $\mathbb{E}(X) = \frac{x}{x+y+z}$ y que $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \frac{x+y}{x+y+z}$.

Ahora bien, $\mathbb{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right)$ se puede calcular directamente:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{X}{1-Z}\right) = \int_0^1 \int_0^{1-Z} \left(\frac{X}{1-Z}\right) f(X, 1-X-Z, Z) dX dZ \\
&= \frac{1}{B(x, y, z)} \int_0^1 \int_0^{1-Z} \left(\frac{X}{1-Z}\right) X^{(x-1)} (1-X-Z)^{(y-1)} Z^{(z-1)} dX dZ \\
&= \frac{1}{B(x, y, z)} \int_0^1 (1-Z)^{-1} Z^{(z-1)} \int_0^{1-Z} X^x (1-X-Z)^{(y-1)} dX dZ \\
&= \frac{1}{B(x, y, z)} \int_0^1 (1-Z)^{x+y-1} Z^{z-1} \int_0^1 \hat{X}^x (1-\hat{X})^{(y-1)} d\hat{X} dZ \tag{4.1} \\
&= \frac{1}{B(x, y, z)} \times B(x+y, z) \times \frac{x \times B(x, y)}{(x+y)} \tag{4.2} \\
&= \frac{x}{x+y}
\end{aligned}$$

Donde se utilizó, en primer lugar, que $X+Y = 1-Z$, pues (X, Y, Z) distribuye Dirichlet. La densidad de probabilidad se reemplazó por lo expuesto en la Expresión 2.8, con parámetros (x, y, z) , según lo enunciado en el lema. $B(x, y, z)$ corresponde a la función Beta multivariada, $B(x, y, z) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)\Gamma(z)}{\Gamma(x+y+z)}$, donde $\Gamma(x)$ es la función Gama estándar.

La Expresión 4.1 nace del cambio de variables $\hat{X} = \frac{X}{1-Z}$, lo que permite separar el término en dos integrales independientes entre sí, mientras que la Expresión 4.2 resulta de resolver cada integral, reconociendo a ambas como una distribución Beta con sus parámetros correspondientes.

Para la última línea, se utilizó $B(x, y, z) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)\Gamma(z)}{\Gamma(x+y+z)} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \frac{\Gamma(x+y)\Gamma(z)}{\Gamma(x+y+z)} = B(x, y)B(x+y, z)$.

Utilizando este resultado en la expresión de la covarianza de $\frac{X}{X+Y}$ con Z se obtiene el resultado:

$$\text{Cov}(Z, \frac{X}{X+Y}) = -\left[\frac{x}{x+y+z} - \frac{x+y}{x+y+z} \times \mathbb{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right)\right] = -\left[\frac{x}{x+y+z} - \frac{x+y}{x+y+z} \times \frac{x}{x+y}\right] = 0$$

Para mostrar que $\frac{X}{X+Y} \sim \mathbf{Beta}(x, y)$, se calcula la densidad de probabilidad del evento $\frac{X}{X+Y} = \omega$, donde ω puede tomar cualquier valor en $[0, 1]$. Cuando ello sucede, se tendrá que el trío (X, Y, Z) quedará completamente definido por el valor de Z , según la estructura $(X, Y, Z) = (\omega(1 - Z), (1 - \omega)(1 - Z), Z)$. Utilizando ésto en la densidad de Dirichlet que caracteriza a (X, Y, Z) se obtiene que la densidad del evento $\frac{X}{X+Y} = \omega$ viene definida por:

$$g(\omega) = \int_0^1 f(\omega(1 - Z), (1 - \omega)(1 - Z), Z) dZ = \omega^{(x-1)}(1 - \omega)^{(y-1)} \times \left(\frac{1}{B(x, y, z)} \times \int_0^1 (1 - Z)^{(x+y-2)} Z^{(z-1)} dZ \right)$$

Que equivale a decir que ω es una variable aleatoria cuya densidad viene dada por una distribución Beta de parámetros (x, y) . Como ω se definió como el ratio $\frac{X}{X+Y}$, se concluye que dicha cantidad sigue una distribución Beta de parámetros (x, y) , como se quería demostrar.

Bibliografía

- [1] Noga Alon y col. «Optimizing budget allocation among channels and influencers». En: (2012).
- [2] Nathaniel Beck. «A Note on the Probability of a Tied Election». En: (1975).
- [3] Laurent Bouton. «A Theory of Strategic Voting in Runoff Elections». En: (2006).
- [4] Laurent Bouton y Micael Castanheira. «One Person, Many Votes: Divided Majority and Information Aggregation». En: (2011).
- [5] Roger D. Congleton. «The Encyclopedia of Public Choice». En: 2004. Cap. The Median Voter Model.
- [6] Anthony Downs. «An Economic Theory of Political Action in Democracy». En: (1958).
- [7] Joheshua Eliashberg y Rabikar Chatterjee. «Analytical Models of Competition with Implications for Marketing: Issues, Findings, and Outlook». En: (1985).
- [8] Timothy Feddersen y Wolfgang Pesendorfer. «Elections, information aggregation, and strategic voting». En: (1999).
- [9] Lawrence Friedman. «Game Theory Models in the Allocation of Advertising Expenditures». En: (1958).
- [10] Arpita Ghosh y Stephen Boyd. «Minimax and Convex-Concave Games». En: (2003).
- [11] Melvin J. Hinich. «Equilibrium in Spatial Voting: The Median Voter Result is an Artifact». En: (1976).
- [12] Melvin J. Hinich y col. «Nonvoting and the Existence of the Equilibrium under Majority Rule». En: (1971).
- [13] Gary C. Jacobson. «The Effect of Campaigning in Congressional Elections». En: (1978).
- [14] Aneel Karnani. «Generic Competitive Strategies-an Analytical Approaches». En: (1984).
- [15] Vijay Krishan y John Morgan. «Overcoming Ideological Bias in Elections». En: (2010).
- [16] John D. C. Little. «Aggregate Advertising Models: The State of the Art». En: (1979).
- [17] Michael Mandler. «How to win a large election». En: (2005).
- [18] Howard Margolis. «Probability of a Tie Election». En: (1977).
- [19] Antonia Maria Masucci y Alonso Silva. «Strategic resource allocation for competitive influence in social networks». En: (2014).
- [20] Branko Milanković. «The Median Voter Hypothesis, Income Inequality and Income Redistribution: An Empirical Test with the Required Data». En: (2000).
- [21] George E. Monahan. «The Structure of Equilibria in Market Share Attraction Models». En: (1987).
- [22] Roger Myerson. «Population Uncertainty and Poisson Games». En: (1994).
- [23] *Our World in Data, Democracy*. <https://ourworldindata.org/democracy>. (Junio, 2019).
- [24] *Pew Research on Democracy*. <https://www.pewresearch.org/fact-tank/2019/05/14/more-than-half-of-countries-are-democratic/>. (Junio, 2019).
- [25] Steven Rigdon E. y col. «A Bayesian Prediction Model for the U.S. Presidential Election». En: (2009).
- [26] Thomas Romer y Howard Rosenthal. «The Elusive Median Voter». En: (1979).
- [27] J.B. Rosen. «Existence and Uniqueness of Equilibrium Points for Concave N-Person Games». En: (1965).
- [28] Norman Schofield. «Existence of General Political Equilibrium: The Mean Voter Theorem is an Artifact*». En: (2002).

- [29] James M. Snyder. «Election Goals and the Allocation of Campaign Resources». En: (1989).
- [30] *Tracking the 2016 Presidential Money Race*. <https://www.bloomberg.com/politics/graphics/2016-presidential-campaign-fundraising/>. (Junio, 2019).
- [31] *Two Thirds of the Presidential Campaign Is In Just 6 States*. <https://www.nationalpopularvote.com/campaign-events-2016>. (Junio, 2019).
- [32] *UN Member States*. <https://www.un.org/en/member-states/>. (Junio, 2019).
- [33] *What is the Basis of Public Funding?* <http://aceproject.org/epic-en/CDMap?question=PC12>. (Junio, 2019).
- [34] Yanwu Yang y col. «A Budget Optimization Framework for Search Advertisements Across Markets». En: (2012).