



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

POLARIZACIÓN DEL EMPLEO, ELECCIÓN OCUPACIONAL Y CRECIMIENTO

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN ECONOMÍA APLICADA  
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERA CIVIL INDUSTRIAL

VALERIA GRISELDA URIA OLIVARES

PROFESOR GUÍA:  
BENJAMÍN VILLENA ROLDÁN

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
ELTON DUSHA  
ALEJANDRO MICCO

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por Proyecto Anillo SOC 1402

SANTIAGO DE CHILE  
2019

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR  
AL TÍTULO DE MAGÍSTER EN ECONOMÍA APLICADA  
POR: VALERIA GRISELDA URÍA OLIVARES  
FECHA: JULIO 2019  
PROF. GUÍA: BENJAMÍN VILLENA ROLDÁN

POLARIZACIÓN DEL EMPLEO, ELECCIÓN OCUPACIONAL Y CRECIMIENTO

La desigualdad salarial, junto con los avances tecnológicos, han coexistido con un fenómeno llamado polarización del empleo, en el cual existe un crecimiento del empleo en el sector de profesionales con alta habilidad, una disminución de los trabajos de mediana habilidad y un crecimiento en el sector de baja habilidad, enfocado principalmente a la entrega de servicios. Esta polarización se asocia con un aumento en la demanda por profesionales con educación técnica y universitaria, que poseen las habilidades para moverse en un mundo con un alto nivel de computarización y constantes cambios tecnológicos.

En la presente tesis se plantea un modelo económico que, mediante el uso de generaciones traslapadas de cuatro períodos, estudia cómo el cambio tecnológico afecta la composición del empleo mediante las decisiones intertemporales y de elección ocupacional de los agentes. El objetivo central es entender cómo el avance tecnológico afecta la cantidad de capital en la economía, las proporciones de individuos en los sectores de alta y baja productividad, junto a la evolución de los salarios, a partir de simulaciones. Para cumplir este objetivo, se considera que en la economía existe producción de bienes y servicios a partir de trabajo abstracto, trabajo manual y capital físico. Los agentes realizan una elección ocupacional a lo largo de su vida tomando en cuenta el costo de estudiar una carrera abstracta o manual, contingente a su nivel de productividad, para encontrar cantidades de ahorro y horas trabajadas óptimas ofrecidas a las firmas. Éstas, a su vez, viven en un mercado perfectamente competitivo donde maximizan sus utilidades, dados los precios de factores productivos. Estas decisiones, junto a las condiciones de equilibrio del mercado, permiten encontrar cantidades y precios de equilibrio en los mercados laboral, de capital y de producción de bienes y servicios.

El modelo obtenido se calibra para la economía chilena en el periodo comprendido entre 1980 y 2010, utilizando como fuentes de información la Encuesta de ocupación y desocupación de la Universidad de Chile, los datos poblacionales del Instituto Nacional de Estadística y la Penn World Table 9.1 de la Universidad de Groningen que entrega datos sobre stock de capital histórico.

Dentro de los resultados más relevantes, obtenidos bajo el supuesto de conservar el precio relativo entre bienes y servicios constante, se tiene que al aumentar el avance tecnológico, también lo hace el nivel de capital que hay en la economía, que con el consecuente incremento en la producción de bienes, provoca un aumento en la proporción de trabajadores en ocupaciones abstractas. Además, existe un decaimiento en el ratio del salario de ocupación abstracta con respecto a las manual, ocasionado por la alta oferta predicha de trabajadores en ocupación abstracta. Un caso contrafactual estudiado, en el cual se mantienen las proporciones de cada generación constantes en el tiempo, tomando como base el año 1990, muestra una leve alza en la proporción de trabajadores con características abstractas con respecto a la simulación base, lo que podría también influir en la leve alza observada de capital per cápita.



*A mi familia*



# Agradecimientos

A mis padres, María y Víctor, por estar siempre conmigo, por apoyarme en todas mis decisiones y por todo el esfuerzo que han puesto para que yo esté en este punto de mi carrera. Gracias por su amor y ejemplo. Los quiero mucho.

A mi nono, por apoyarme siempre, por la paciencia en los momentos difíciles, gracias a tus consejos en toda esta etapa. A mi tía Julia que a pesar de la distancia, siempre ha estado pendiente y creyó en mí. A Vania, por los buenos momentos que pasamos para salir de la rutina y por tu amistad todos estos años.

Gracias a mi profesor guía, Benjamín Villena por todas las enseñanzas y consejos a lo largo de esta tesis, por creer en mí, definitivamente fue un agrado trabajar con usted.

A mis compañeros de la salita 701, en especial a Tamara, Nicolás y Piero por las buenas conversaciones y por la buena onda siempre.

Un agradecimiento también a Rubén, por la excelente disposición que tuvo para entregarme datos que ayudaron a la calibración de mi modelo.



# Tabla de Contenido

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. El Modelo</b>	<b>5</b>
1.1. Las generaciones traslapadas . . . . .	5
1.2. La fuerza laboral . . . . .	6
1.3. La acumulación de capital humano . . . . .	6
1.4. Las preferencias de los individuos . . . . .	6
1.5. Los sectores productivos . . . . .	7
<b>2. Caracterización del equilibrio competitivo</b>	<b>8</b>
2.1. El problema de la firma . . . . .	8
2.2. La elección ocupacional . . . . .	9
2.3. El equilibrio en el mercado de capitales . . . . .	13
2.4. El equilibrio en el mercado laboral . . . . .	13
2.5. El equilibrio en el mercado bienes y servicios . . . . .	14
<b>3. Calibración del modelo</b>	<b>16</b>
3.1. Redefinición de variables per cápita . . . . .	16
3.2. Redefinición de ecuaciones . . . . .	17
3.2.1. Ecuación de fuerza laboral . . . . .	17
3.2.2. Funciones de duración de estudiar . . . . .	17
3.2.3. Ecuación de precio del capital . . . . .	17
3.2.4. Ecuación de equilibrio en el mercado de capitales . . . . .	17
3.3. Calibración . . . . .	18
3.4. Parámetros a calibrar . . . . .	20
<b>4. Análisis de las simulaciones</b>	<b>22</b>
4.1. Análisis del contrafactual . . . . .	26
<b>Conclusión</b>	<b>27</b>
<b>A. Detalles del modelo</b>	<b>33</b>
A.1. Condiciones de la función de utilidad . . . . .	33
A.2. Cálculo de los factores de descuento . . . . .	34
A.3. Cálculo de la elección ocupacional . . . . .	34
A.4. Tablas de unidades . . . . .	39



<b>B. Escalamiento de variables del modelo</b>	<b>41</b>
<b>C. Detalle de participación de bienes en el consumo</b>	<b>42</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>44</b>

# Índice de Tablas

3.1. Resumen calibración interna . . . . .	18
3.2. Resumen calibración año 1990 . . . . .	21
4.1. Resumen variables exógenas y fuerza de trabajo . . . . .	22
4.2. Resumen variables endógenas . . . . .	22
4.3. Resumen contrafactual var. exógenas y fuerza de trabajo . . . . .	26
4.4. Resumen contrafactual var. endógenas . . . . .	26
A.1. Unidades del mercado laboral . . . . .	39
A.2. Unidades de población . . . . .	39
A.3. Unidades de educación . . . . .	39
A.4. Unidades de preferencias . . . . .	39
A.5. Unidades de óptimos . . . . .	40
A.6. Unidades de producción . . . . .	40
A.7. Unidades de factores de descuento . . . . .	40
C.1. Resumen participación servicios . . . . .	43

# Índice de Ilustraciones

3.1. Evolución de la proporción de trabajadores abstractos. . . . .	19
3.2. Evolución de la proporción de trabajadores manuales. . . . .	19
3.3. Evolución del capital normalizado al consumo del año 1990. . . . .	19
3.4. Evolución del capital per cápita. . . . .	19
3.5. Evolución del salario de abstracto relativo al manual generación 2. . . . .	20
3.6. Evolución del salario de abstracto relativo al manual generación 3. . . . .	20
3.7. Evolución de la cantidad de horas trabajadas en el sector abstracto y manual generación 2 normalizadas a las horas trabajadas en el año 1990 por el grupo abstracto. . . . .	20
3.8. Evolución de la cantidad de horas trabajadas en el sector abstracto y manual generación 3 normalizadas a las horas trabajadas en el año 1990 por el grupo abstracto. . . . .	20
4.1. Comparativo de la proporción de trabajadores abstractos entre datos y predicción. . . . .	23
4.2. Comparativo de la proporción de trabajadores manuales entre datos y predicción. . . . .	23
4.3. Comparativo del salario abstracto entre datos y predicción generación 2 normalizado al salario manual de la generación 2 del año 1990. . . . .	23
4.4. Comparativo del salario abstracto entre datos y predicción generación 3 normalizado al salario manual de la generación 2 del año 1990. . . . .	23
4.5. Comparativo del ratio de salario abstracto con respecto al manual entre datos y predicción generación 2. . . . .	24
4.6. Comparativo del ratio de salario abstracto con respecto al manual entre datos y predicción generación 3. . . . .	24
4.7. Comparativo de las horas trabajadas en abstracto generación 2 normalizadas a las horas trabajadas por el grupo abstracto de la generación 2 el año 1990. . . . .	24
4.8. Comparativo de las horas trabajadas en abstracto generación 3 normalizadas a las horas trabajadas por el grupo abstracto de la generación 2 el año 1990. . . . .	24
4.9. Comparativo de las horas trabajadas en manual generación 2 normalizadas a las horas trabajadas por el grupo abstracto de la generación 2 el año 1990. . . . .	24
4.10. Comparativo de las horas trabajadas en manual generación 3 normalizadas a las horas trabajadas por el grupo abstracto de la generación 2 el año 1990. . . . .	24
4.11. Comparativo del capital per cápita entre datos y predicción normalizado al consumo per cápita del año 1990. . . . .	25
4.12. Evolución de la tasa de descuento predicha. . . . .	25
4.13. Comparativo de la proporción de trabajadores abstractos. . . . .	27

4.14. Comparativo de la proporción de trabajadores manuales. . . . .	27
4.15. Comparativo del salario abstracto generación 2 normalizado al salario manual de la generación 2 del año 1990. . . . .	27
4.16. Comparativo del salario abstracto generación 3 normalizado al salario manual de la generación 2 del año 1990. . . . .	27
4.17. Comparativo del ratio de salario abstracto con respecto al manual generación 2.	28
4.18. Comparativo del ratio de salario abstracto con respecto al manual generación 3.	28
4.19. Comparativo de las horas trabajadas en abstracto generación 2 normalizadas a las horas trabajadas por el grupo abstracto de la generación 2 el año 1990.	28
4.20. Comparativo de las horas trabajadas en abstracto generación 3 normalizadas a las horas trabajadas por el grupo abstracto de la generación 2 el año 1990.	28
4.21. Comparativo de las horas trabajadas en manual generación 2 normalizadas a las horas trabajadas por el grupo abstracto de la generación 2 el año 1990. .	28
4.22. Comparativo de las horas trabajadas en manual generación 3 normalizadas a las horas trabajadas por el grupo abstracto de la generación 2 el año 1990. .	28
4.23. Comparativo del capital per cápita normalizado al capital per cápita del año 1990. . . . .	29
4.24. Evolución de la tasa de descuento contrafactual . . . . .	29
4.25. Comparativo de la población en generación 1 entre datos y contrafactual normalizada a la población de trabajadores del año 1990. . . . .	29
4.26. Comparativo de la población en generación 2 entre datos y contrafactual normalizada a la población de trabajadores del año 1990. . . . .	29
4.27. Comparativo de la población en generación 3 entre datos y contrafactual normalizada a la población de trabajadores del año 1990. . . . .	30
4.28. Comparativo de la población en generación 4 entre datos y contrafactual normalizada a la población de trabajadores del año 1990. . . . .	30
4.29. Comparativo de trabajadores entre escenario base y contrafactual normalizada a la población de trabajadores del año 1990. . . . .	30



# Introducción

La composición del empleo en el mercado laboral ha sido un tema de estudio fundamental en la economía. Particularmente, desde comienzos del siglo XX, los avances tecnológicos han jugado un rol esencial en la composición laboral, ya que han generado cambios en la demanda de trabajadores en todos niveles de habilidad y también han modificado las expectativas de quienes toman decisiones de inversión en capital humano.

Los avances tecnológicos, representados principalmente a través de la computarización, han generado polarización en el mercado laboral, donde por un lado ha crecido la demanda de trabajadores con un alto nivel de educación que realizan principalmente tareas abstractas, la de trabajadores con bajo nivel de educación, quienes se concentran en tareas orientadas a servicios y por otro lado, ha disminuído la demanda de trabajadores dedicados a realizar tareas rutinarias (ver Autor 2010) [3].

En la presente tesis se pretende responder a la pregunta: ¿De qué manera el cambio tecnológico basado en las decisiones intertemporales de los agentes afecta la distribución de empleos? Para intentar responder esta pregunta, en este trabajo se ha decidido analizar un modelo de generaciones traslapadas que permita estudiar como las decisiones de elección ocupacional entre diferentes periodos de vida de un agente afectan la evolución del empleo en cada sector y la desigualdad salarial. En este análisis, se incorporan las decisiones de acumulación de capital en los agentes, como motor para generar capital humano, consumo y producción.

El objetivo del presente trabajo es entender como el avance tecnológico afecta la cantidad de capital en la economía, las proporciones de individuos en los sectores de alta y baja productividad junto a la evolución de los salarios y de horas trabajadas, a partir de simulaciones de escenarios contrafactuales.

Para cumplir los objetivos, se plantea un modelo en una economía con producción de bienes y servicios a partir de trabajo abstracto, manual y capital físico. Los agentes realizan una elección ocupacional a lo largo de su vida, tomando en cuenta el costo de estudiar una carrera abstracta o manual, contingente a su nivel de productividad, para encontrar cantidades de ahorro y horas trabajadas óptimas ofrecidas a las firmas. Éstas, a su vez, viven en un mercado perfectamente competitivo donde maximizan las cantidades y precios de sus factores. Sus decisiones, junto a las condiciones de equilibrio, permiten encontrar las cantidades y precios de equilibrio en los mercados laboral, de capital y de producción de bienes y servicios.

El modelo obtenido se calibra para la economía chilena en el periodo comprendido entre 1980 y 2010, utilizando diferentes fuentes de información, entre las que destacan la Encuesta de ocupación y desocupación de la Universidad de Chile (para la Región Metropolitana); datos poblacionales y de IPC del Instituto Nacional de Estadística. Para los datos sobre stock de capital histórico, se utiliza la Penn World Table 9.1 de la Universidad de Groningen.

La polarización del empleo es un fenómeno que ha sido escasamente estudiado en Chile. Uno de los autores que realiza un análisis empírico sobre el tema es Ananías (2018) [2], quien explica el aumento en la demanda de trabajadores de altas habilidades debido al incremento en la tecnología, especialmente la computación. A pesar de que la oferta de este grupo de profesionales ha aumentado considerablemente desde 1980, enfrenta la barrera de los costos asociados a la educación superior. Además, explica el aumento en la oferta de trabajadores en el área de servicios e interacción humana, debido a que no existen barreras educativas para trabajar en este sector.

En Messina (2016)[11] se realiza un estudio de la polarización del empleo en Latinoamérica, concluyendo que para Chile en el año 2000 existe polarización del empleo dado por un incremento en las cantidades de trabajadores de los sectores abstracto y manual, junto a una disminución de los trabajos intensivos en labores rutinarias. En Chile, esta polarización es mayor a la que existe en México, comportándose como los países desarrollados. Además no encuentran evidencia de polarización salarial ya que existe un crecimiento en el salario de ocupaciones con baja intensidad en trabajo abstracto y alta intensidad en trabajo manual.

Uno de los países que tomó una ambiosa decisión económica fue Estados Unidos a comienzos del siglo XX, ya que al evidenciar el avance tecnológico, decidió entregar educación gratuita a su población desde la primaria y secundaria, a diferencia de países europeos que poseían un sistema orientado hacia la meritocracia, sesgado a garantizar la educación en los estudiantes con padres más educados. Según Goldin y Katz (2008) [8], invertir en educación general es más costoso pero genera una fuerza de trabajo que se adapta fácilmente al cambio tecnológico y que en los niveles más altos, son capaces de desarrollar nueva tecnología.

En el periodo que va desde 1973 hasta 2005, Estados Unidos tuvo un menor crecimiento de la productividad con respecto a años anteriores. Uno de los factores relevantes es que la tasa de demanda por personas con mayores habilidades, motivada por los avances tecnológicos especialmente en computación, como lo sostienen Autor y Katz (1998) [5], superó la tasa de oferta de los mismos debido a cambios demográficos, elecciones de inversión ocupacional y migración. Esto incrementó la brecha salarial entre los distintos grupos educacionales de alta y baja habilidad en un nivel nunca antes visto hasta la fecha, según lo evidencia Goldin y Katz (2008) [8].

El análisis de la polarización del empleo, generado a partir del creciente aumento de la desigualdad de los salarios desde mediados de los 80 en Estados Unidos ha sido estudiado por numerosos autores, entre los cuales destacan Autor y Dorn (2013) [4] quienes encuentran que en Estados Unidos entre los años 1980 y 2005 hubo un aumento de empleos y salarios en ocupaciones de baja habilidad, específicamente en el sector de servicios. De esta manera, los empleados de baja habilidad dejan el sector de producción de bienes para irse a la producción de servicios. Mientras que los trabajadores de altas calificaciones se mantienen en la producción de bienes, generando polarización. Una de las ventajas de este trabajo es que presenta

un modelo realista y sin fricciones, pero que se enfoca en la evolución del ratio de salarios de forma agregada, sin tomar en cuenta las decisiones de los agentes al haber cambios en el nivel de capital disponible en la economía. Kambourov y Manovskii (2009) [10] muestran que la desigualdad salarial está relacionada con la movilidad ocupacional y explican su crecimiento debido al aumento en los shocks a la producción. Si bien estos autores plantean un modelo donde los agentes maximizan su bienestar entre periodos, no estudian el efecto que produce la acumulación de capital en el tiempo, sino que solo a partir de shocks. El trabajo de Galor y Moav (2000) [7] muestra que un crecimiento en la tasa de progreso tecnológico aumenta la desigualdad salarial entre grupos de alta y baja habilidad. Utilizan un modelo con generaciones traslapadas donde en el primer periodo los agentes deciden si educarse o no, junto a su nivel de ahorro y en el segundo periodo solo consumen sus ahorros. Sin embargo la oferta de trabajo no está determinada íntegramente por las decisiones ocupacionales y de ahorro de los agentes. En Restuccia y Vandenbroucke (2013) [12] se plantea un modelo de acumulación de capital humano para estudiar los cambios en los retornos según los años de educación. Encuentran que el cambio tecnológico basado en habilidades explica el incremento en la oferta de agentes con un mayor nivel de educación.

Acemoglu y Restrepo (2017) [1] estudian la hipótesis de que las nuevas tecnologías pueden hacer que el trabajo manual se convierta en prescindible, debido que todas las tareas que realizan podrían ser automatizadas. Encuentran que cuando el capital es fijo y la tecnología es exógena, la automatización reduce el empleo y los salarios. También estudian el caso de capital endógeno, concluyendo que si la tasa de descuento en el largo plazo es suficientemente baja con respecto a los salarios, el equilibrio se da en la automatización de todas las tareas. Además, cuando se tienen habilidades heterogéneas hay un aumento en la desigualdad dada por la rápida automatización y la creación de nuevas tareas.

Algunos puntos que no se han abordado podrían ser de gran relevancia para entender las causas y efectos de la polarización del empleo. Uno de ellos es la incorporación de los costos de educación a la hora de realizar la elección ocupacional, ya que este costo es contingente a la productividad o habilidad innata del individuo, reflejado en los años requeridos para estudiar una carrera. Además, hasta el momento no se observa en la literatura un estudio teórico para entender la relación entre polarización y crecimiento, considerando las decisiones educacionales de los agentes económicos. Otro punto que no ha sido estudiado es el efecto que tiene la acumulación de capital a partir de las decisiones de ahorro de los agentes entre distintos periodos de tiempo, que es un factor más en la producción de bienes y servicios, afectando de esta manera la cantidad de empleos demandados para un cierto nivel de producción. Un trabajo que se acerca a esto es el de Hazan (2009) [9] ya que estudia la relación entre esperanza de vida y acumulación de capital pero no incorpora la producción de bienes de la economía.

La diferencia con modelos planteados en la literatura anterior es que en este trabajo los individuos viven una cantidad finita de periodos, los cuales conforman generaciones que caracterizan las diferentes etapas de su vida. Adicionalmente, se incorporan los costos de educación en la optimización de sus utilidades, lo que marca una diferencia entre los que estudian carreras técnicas o universitarias, como se refleja en la vida real.

Los principales resultados de la simulación del modelo para la economía chilena en los



años estudiados, muestran que al aumentar el avance tecnológico también lo hace el nivel de capital disponible en la economía, junto a la proporción de trabajadores abstractos. Además se observa que desde la década de 1980, existe un crecimiento en los salarios de los grupos manual y abstracto pero la brecha entre ellos ha ido disminuyendo.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en la sección 1 se describen las diferentes componentes del modelo; en la sección 2 se estudia el equilibrio competitivo en los diferentes mercados; en la sección 3 se calibra el modelo para la economía chilena; y en la sección 4 se muestran los resultados de la simulación junto a su análisis correspondiente. Además, en la última sección se muestran las principales conclusiones del trabajo. Por último, se incluye una sección de anexos donde se detallan los aspectos más técnicos del modelo que pueden ser omitidos en una primera lectura.

# Capítulo 1

## El Modelo

Se propone un modelo que permita estudiar la evolución de una economía formada por una población finita, en la cual se observan claramente dos tipos de actividad económica. Para estudiar este tipo de estructura, en Autor y Dorn (2013) [4] se propone un primer modelo, donde la economía se divide en dos sectores ( $j = g, s$ ) que producen bienes ( $j = g$ ) y servicios ( $j = s$ ) para el consumo. Además se introducen tres factores de producción. Dos de ellos son factores de trabajo: abstracto y manual ( $H_a, H_m$ ) medido en horas hombre. Estos factores son ofrecidos por trabajadores de dos niveles productivos ( $i = a, m$ ) que corresponden a trabajadores de alta productividad, llamados abstractos ( $i = a$ ) y de baja productividad, llamados manuales ( $i = m$ ). El tercer factor de producción es el capital ( $k$ ) utilizado en la producción de bienes. En cada sector, existe un continuo de masa uno de firmas productivas.

El tiempo es discreto y finito, donde se utiliza el subíndice  $t$  para identificar el periodo anual.

### 1.1. Las generaciones traslapadas

El modelo está compuesto por cuatro generaciones traslapadas de individuos que viven por un periodo finito de tiempo, como en Restuccia y Vandenbroucke (2013) [12]. Se utiliza el subíndice  $T = \{1, 2, 3, 4\}$  para referirse a la generación.

Cada generación posee una duración de 20 años, con el fin de asegurar que la duración relativa de la adultez sea correcta en relación a la infancia y vejez. En la primera generación, se encuentran los individuos que acumulan capital humano formándose en una carrera abstracta o manual, adquiriendo una deuda para financiarse. Esta generación posee un tamaño  $L_{1t}$  cada año, dada de forma exógena.

En la segunda y tercera generación, se encuentran los individuos que trabajan en alguno de los dos sectores, es decir, todos los integrantes de estas generaciones trabajan; además pagan la deuda adquirida en la primera generación y acumulan activos. Estas generaciones poseen un tamaño  $L_{2t}$  y  $L_{3t}$  cada año, dada de forma exógena.

En la cuarta generación, se encuentran los individuos que están jubilados y que consumen los activos ahorrados en la generación anterior. Esta generación posee un tamaño  $L_{4t}$  cada

año, dada de forma exógena.

Al inicio de cada generación los agentes toman sus decisiones bajo el supuesto de anticipación perfecta, es decir, consideran todos los precios futuros observados al momento de optar por una carrera o tomar decisiones de consumo e inversión.

## 1.2. La fuerza laboral

En este modelo cada individuo se caracteriza por un parámetro  $p$ , el cual mide su nivel de productividad, tanto en el período de acumulación de capital humano, como en el productivo. El nivel  $p$  es una constante durante toda la vida del individuo, la cual se define al momento de nacer, y se modela matemáticamente por una variable aleatoria  $p \in [p_{min}, \infty)$  que distribuye como una función acumulada de Pareto invariante en el tiempo, con parámetro de escala  $p_{min} > 0$  que representa la mínima productividad que puede alcanzar un individuo; y parámetro de forma  $\varphi > 0$ . La función densidad de esta distribución se expresa como:

$$p \sim f(p; p_{min}, \varphi) = \begin{cases} \frac{\varphi p_{min}^\varphi}{p^{\varphi+1}} & \text{si } p \geq p_{min} \\ 0 & \text{si } p < p_{min}. \end{cases}$$

## 1.3. La acumulación de capital humano

Los individuos de la primera generación acumulan capital humano estudiando carreras abstractas o manuales, cuyas duraciones en horas están dadas por las funciones:

$$z_a(p) = n + \frac{\tau_a}{p - p_{min}} \tag{1.1}$$

$$z_m(p) = m + \frac{\tau_m}{p} \tag{1.2}$$

donde  $n$  y  $m$  representan las duraciones formales de las carreras en horas,  $\tau_a$  y  $\tau_m$  representan la sobreduración media para los sectores abstracto y manual respectivamente. El denominador  $p - p_{min}$  en (1.1) impide que los individuos de poca productividad opten por carreras abstractas. En el caso de las carreras manuales, el denominador es  $p$ , ya que incluso los individuos de mínima productividad son capaces de realizar la carrera manual en un tiempo finito. Ambas funciones dependen de la productividad del individuo ya que al tener mayor productividad, la duración de la carrera es menor.

## 1.4. Las preferencias de los individuos

Se considera un agente representativo que vive durante cuatro generaciones, cuyas preferencias por generación están compuestas por una función de utilidad del consumo  $u(c)$  y una

función de utilidad del trabajo  $h(e)$  del modo siguiente:

$$U(c_T, e_T) = u(c_T) - \phi h(e_T), \quad (1.3)$$

donde  $c_T$  y  $e_T$  corresponden a las decisiones de consumo y trabajo en la generación  $T = \{1, 2, 3, 4\}$  respectivamente y  $\phi > 0$  es el peso relativo entre consumo y ocio.

El consumo de la generación es una combinación del consumo de bienes  $c_g > 0$  y del consumo de servicios  $c_s > 0$ , como una función con retornos constantes a escala de la forma:

$$c_T = c_{Tg}^\theta c_{Ts}^{1-\theta},$$

donde  $\theta \in [0, 1]$  es la elasticidad del consumo de bienes.

Ambas funciones de utilidad son del tipo CRRA, es decir, la utilidad del consumo  $u(c)$  está dada por:

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}, \quad (1.4)$$

donde  $\sigma$  es la aversión al riesgo del consumo del agente. La función de utilidad del trabajo  $h(e)$  está dada por:

$$h(e) = \frac{e^{1-\eta}}{1-\eta}, \quad (1.5)$$

donde,  $\eta$  es la elasticidad Frisch de la oferta de trabajo. Ambas funciones admiten argumentos no negativos  $c \geq 0$ ,  $e \geq 0$  que se miden en unidades de consumo y horas trabajadas durante la generación respectivamente. Además las funciones son continuas y dos veces diferenciables, cuyas derivadas cumplen  $u'(c) > 0$ ,  $h'(e) > 0$ ,  $u''(c) < 0$ ,  $h''(e) < 0$  y satisfacen las condiciones de Inada. Esta demostración se puede ver en el Anexo A.1.

## 1.5. Los sectores productivos

En esta economía, se producen bienes y servicios por un continuo de masa uno de firmas competitivas en cada sector, de acuerdo a funciones de producción con retornos constantes a escala dadas por:

$$Y_{gt} = (\gamma_2 H_{2at} + \gamma_3 H_{3at})^{1-\varepsilon} k_t^\varepsilon \quad (1.6)$$

$$Y_{st} = \alpha_t (H_{2mt} + H_{3mt}) \quad (1.7)$$

donde,  $Y_{gt}$  y  $Y_{st}$  son las producciones de bienes y servicios respectivamente,  $\gamma_2$  y  $\gamma_3$  son los factores de escala en el trabajo abstracto para la segunda y tercera generación respectivamente,  $\alpha_t$  es la eficiencia del trabajo abstracto con respecto al manual, que representa el avance tecnológico de la economía y  $\varepsilon$  es la elasticidad del capital. Los factores de trabajo están representados por la cantidad de horas hombre necesarias para la producción.

# Capítulo 2

## Caracterización del equilibrio competitivo

Dado que los mercados de factores son perfectamente competitivos, los precios de los factores de producción están dados por sus productividades marginales, cuyas expresiones se muestran a continuación.

### 2.1. El problema de la firma

El precio del capital en cada año está dado por la productividad marginal del capital en la producción de bienes, mostrado a continuación:

$$\delta + r_t = \frac{\partial Y_{gt}}{\partial k_t},$$

donde el capital posee completa depreciación, por lo que se considera  $\delta = 1$ , ya que la producción se realiza a lo largo de toda la generación. Derivando la ecuación (1.6), se deduce que

$$1 + r_t = \varepsilon \left( \frac{\gamma_2 H_{2at} + \gamma_3 H_{3at}}{k_t} \right)^{1-\varepsilon}. \quad (2.1)$$

Se observa que la producción de bienes tiene rendimientos decrecientes en el capital. Además, la ecuación (2.1) muestra que cuando aumenta el nivel de capital, la tasa de descuento disminuye.

El precio del trabajo abstracto por hora para cada año, está dado por la productividad marginal del trabajo en la producción de bienes

$$\omega_{2at} = \frac{\partial Y_{gt}}{\partial H_{2at}},$$

$$\omega_{3at} = \frac{\partial Y_{gt}}{\partial H_{3at}}$$

por lo tanto, derivando la ecuación (1.6), se deduce que

$$\omega_{2at} = \gamma_2(1 - \varepsilon) \left( \frac{k_t}{\gamma_2 H_{2at} + \gamma_3 H_{3at}} \right)^\varepsilon, \quad (2.2)$$

$$\omega_{3at} = \gamma_3(1 - \varepsilon) \left( \frac{k_t}{\gamma_2 H_{2at} + \gamma_3 H_{3at}} \right)^\varepsilon. \quad (2.3)$$

Se observa que la producción de bienes tiene rendimientos decrecientes en el trabajo. Además, las ecuaciones (2.2) y (2.3) muestran que cuando aumenta la oferta de trabajo abstracto, disminuye su salario y por el contrario, cuando aumenta el nivel de capital, este aumenta. Reemplazando el valor para el capital encontrado en la ecuación (2.1), se obtiene

$$\omega_{2at} = \gamma_2(1 - \varepsilon) \left( \frac{\varepsilon}{1 + r_t} \right)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}, \quad (2.4)$$

$$\omega_{3at} = \gamma_3(1 - \varepsilon) \left( \frac{\varepsilon}{1 + r_t} \right)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}, \quad (2.5)$$

es decir, cuando aumenta la tasa de descuento, disminuye el salario abstracto.

Para el sector manual, el precio del salario por hora es la productividad marginal del trabajo en la producción de servicios:

$$\omega_{2mt} = \frac{\partial Y_{st}}{\partial H_{2mt}} = \alpha_t, \quad (2.6)$$

$$\omega_{3mt} = \frac{\partial Y_{st}}{\partial H_{3mt}} = \alpha_t, \quad (2.7)$$

es decir, la producción de servicios tiene rendimientos constantes en el trabajo manual.

## 2.2. La elección ocupacional

Cada individuo al inicio de su vida realiza una optimización sobre sus niveles de consumo, acumulación de activos y horas a trabajar, dado su nivel de productividad  $p$ , con la finalidad de elegir el sector al cual pertenecerá el resto de su vida. El timing en la vida del individuo es el siguiente:

1. El individuo nace y se realiza su productividad  $p \in [p_{min}, \infty)$
2. Una vez conocido su nivel de productividad  $p$ , elige el sector del cual va a formar parte resolviendo el problema de optimización:

$$\text{máx} \left\{ V_a(p), V_m(p) \right\},$$

donde  $V_a(p)$  y  $V_m(p)$  son las utilidades a lo largo de su vida al elegir el sector abstracto o manual respectivamente, para su productividad  $p$ .

Existe un valor umbral de productividad  $p^*$  que separa a los individuos en dos grupos: aquellos con productividad menor a  $p^*$  optan por el sector manual y su complemento opta por el sector abstracto. Claramente los individuos con productividad igual a  $p^*$  están indiferentes entre elegir el sector abstracto y manual. De este modo, este valor determina exactamente la fracción de trabajadores que posee cada sector. La cantidad de trabajadores por sector en cada año, queda expresado en las siguientes relaciones:

$$L_{2at} = [1 - F(p^*)]L_{2t} = \left[ \frac{p^*}{p_{min}} \right]^{-\varphi} L_{2t}, \quad (2.8)$$

$$L_{3at} = [1 - F(p^*)]L_{3t} = \left[ \frac{p^*}{p_{min}} \right]^{-\varphi} L_{3t}, \quad (2.9)$$

$$L_{2mt} = F(p^*)L_{2t} = \left( 1 - \left[ \frac{p^*}{p_{min}} \right]^{-\varphi} \right) L_{2t}, \quad (2.10)$$

$$L_{3mt} = F(p^*)L_{3t} = \left( 1 - \left[ \frac{p^*}{p_{min}} \right]^{-\varphi} \right) L_{3t}. \quad (2.11)$$

Donde  $t = \{1, 2, \dots, N\}$  es el número de periodos de la economía.

Las utilidades a lo largo de la vida se expresan como:

$$V_i = U(c_{1it}, e_{1it}) + \beta^{20}U(c_{2it}, e_{2it}) + \beta^{40}U(c_{3it}, e_{3it}) + \beta^{60}U(c_{4it}, e_{4it})$$

donde  $i = \{a, m\}$  representa el sector abstracto o manual y  $\beta$  es el factor de descuento anual que se calcula a partir de la tasa de descuento libre de riesgo.

Las funciones  $V_a(p)$  y  $V_m(p)$  se obtienen a través de los siguientes problemas de optimización:

$$V_a(p) = \max \left\{ u(c_{1a}) - \phi h(z_a(p)) + \beta^{20}[u(c_{2a}) - \phi h(e_{2a})] + \beta^{40}[u(c_{3a}) - \phi h(e_{3a})] + \beta^{60}u(c_{4a}) \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{1ag}, c_{1as}, c_{2ag}, c_{2as}, \\ c_{3ag}, c_{3as}, c_{4ag}, c_{4as} \\ a_{1a}, a_{2a}, a_{3a}, e_{2a}, e_{3a} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} s.a : \quad & 0 = sc_{1ag} + c_{1as} + a_{1a} \\ & \omega_{2a}e_{2a} + a_{1a}(1 + r_g) = sc_{2ag} + c_{2as} + a_{2a} \\ & \omega_{3a}e_{3a} + a_{2a}(1 + r_g) = sc_{3ag} + c_{3as} + a_{3a} \\ & a_{3a}(1 + r_g) = sc_{4ag} + c_{4as} \end{aligned}$$

y

$$V_m(p) = \max \left\{ u(c_{1m}) - \phi h(z_m(p)) + \beta^{20}[u(c_{2m}) - \phi h(e_{2m})] + \beta^{40}[u(c_{3m}) - \phi h(e_{3m})] + \beta^{60}u(c_{4m}) \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{1mg}, c_{1ms}, c_{2mg}, c_{2ms}, \\ c_{3mg}, c_{3ms}, c_{4mg}, c_{4ms} \\ a_{1m}, a_{2m}, a_{3m}, e_{2m}, e_{3m} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} s.a : \quad & 0 = sc_{1mg} + c_{1ms} + a_{1m} \\ & \omega_{2m}e_{2m} + a_{1m}(1 + r_g) = sc_{2mg} + c_{2ms} + a_{2m} \\ & \omega_{3m}e_{3m} + a_{2m}(1 + r_g) = sc_{3mg} + c_{3ms} + a_{3m} \\ & a_{3m}(1 + r_g) = sc_{4mg} + c_{4ms} \end{aligned}$$

Donde las variables de decisión corresponden a lo siguiente:

- Consumos: El individuo maximiza sobre el consumo de bienes y servicios de las cuatro generaciones a lo largo de su vida, donde el consumo total durante cada generación se expresa como una función Cobb Douglas con retornos constantes a escala, de la forma

$$c_{1i} = c_{1ig}^{\theta} c_{1is}^{1-\theta}$$

$$c_{2i} = c_{2ig}^{\theta} c_{2is}^{1-\theta}$$

$$c_{3i} = c_{3ig}^{\theta} c_{3is}^{1-\theta}$$

$$c_{4i} = c_{4ig}^{\theta} c_{4is}^{1-\theta}$$

donde  $i = \{a, m\}$  representa el sector al cual pertenece el individuo y  $\theta \in [0, 1]$  es la elasticidad del consumo de bienes.

- Acumulación de activos: el individuo elige activos para maximizar su utilidad, en la primera generación en forma de pasivos y en la segunda y tercera generación, en forma de activos.
- Horas trabajadas: El individuo maximiza sobre las horas trabajadas en cada generación, en la primera, corresponden a horas fijas de acumulación de capital humano mediante el estudio de una carrera y durante la segunda y tercera generación corresponden a las horas trabajadas en un sector productivo. En la cuarta generación, esta variable vale cero debido a que el individuo se encuentra jubilado.

Las restricciones presupuestarias son por generación y poseen las siguientes componentes:

- En la primera generación no hay fuentes, solo existe consumo de bienes, servicios y acumulación de pasivos. Además,  $s$  representa el precio relativo entre bienes y servicios.
- En la segunda y tercera generación se tienen restricciones presupuestarias intertemporales. En el lado izquierdo se encuentran las fuentes, que provienen del trabajo, asumiendo que se trabajan  $\{e_{2i}, e_{3i}\}_{i=\{a,m\}}$  horas a lo largo del periodo y la capitalización de los activos de la generación anterior a una tasa que satisface:

$$1 + r_g = (1 + r_t)^{20}$$

donde el exponente expresa el intervalo de tiempo en años entre las generaciones.

En el lado derecho se encuentran los usos, que corresponden al consumo de bienes y servicios junto a la acumulación de activos.

- En la cuarta generación las fuentes son los activos capitalizados acumulados en la generación anterior. Los usos son solo el consumo de bienes y servicios.

En los problemas de optimización de ambos sectores, los consumos y horas trabajadas no pueden ser negativos debido a las condiciones que satisfacen las preferencias de los individuos, explicadas en el Capítulo (1.4).

La resolución de la optimización se muestra en el Anexo A.3.

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial}{\partial a_{1i}} :$$

$$c_{1i} = [\beta^{20}(1 + r_g)]^{\frac{-1}{\sigma}} c_{2i} \quad (2.12)$$



$$\frac{\partial}{\partial a_{2i}} : \quad c_{2i} = [\beta^{20}(1+r_g)]^{\frac{-1}{\sigma}} c_{3i} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial a_{3i}} : \quad c_{3i} = [\beta^{20}(1+r_g)]^{\frac{-1}{\sigma}} c_{4i} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial e_{2i}} : \quad e_{2i}^* = c_{2i}^{\frac{\sigma}{\eta}} \left[ (1-\theta) s^{-\theta} \left[ \frac{\theta}{1-\theta} \right]^{\theta} \frac{\omega_{2i}}{\phi} \right]^{\frac{-1}{\eta}} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial e_{3i}} : \quad e_{3i}^* = c_{3i}^{\frac{\sigma}{\eta}} \left[ (1-\theta) s^{-\theta} \left[ \frac{\theta}{1-\theta} \right]^{\theta} \frac{\omega_{3i}}{\phi} \right]^{\frac{-1}{\eta}}, \quad (2.16)$$

donde  $i = \{a, m\}$  representa el sector. Notar que las expresiones (2.12), (2.13) y (2.14) son las ecuaciones del Euler del problema, donde se observa que los consumos de las cuatro generaciones son proporcionales entre sí. Además (2.15) y (2.16) representan las ecuaciones del trabajo, donde se muestra que las horas trabajadas dependen del salario y para que el consumo aumente, necesariamente también lo deben hacer las horas trabajadas. Los óptimos son:

$$\begin{aligned} a_{1i}^* &= -A^3(1+r_g)[W_{2i}M_{2i} + W_{3i}M_{3i}]^{\frac{\eta}{\eta-\sigma}}, \\ a_{2i}^* &= \frac{[W_{2i}M_{2i} + W_{3i}M_{3i}]^{\frac{\sigma}{\eta-\sigma}}}{1+r_g} \left\{ W_{2i}M_{2i}[1 + A(1+r_g)] - W_{3i}M_{3i}[A^2(1+r_g)^2 + A^3(1+r_g)^3] \right\}, \\ a_{3i}^* &= [W_{2i}M_{2i} + W_{3i}M_{3i}]^{\frac{\eta}{\eta-\sigma}}, \\ e_{2i}^* &= M_{2i}[W_{2i}M_{2i} + W_{3i}M_{3i}]^{\frac{\sigma}{\eta-\sigma}}, \\ e_{3i}^* &= M_{3i}[W_{2i}M_{2i} + W_{3i}M_{3i}]^{\frac{\sigma}{\eta-\sigma}}. \end{aligned}$$

Donde se utilizaron las siguientes notaciones:

$$\begin{aligned} A &= [\beta^{20}(1+r_g)]^{\frac{-1}{\sigma}}, \\ E &= 1 + A(1+r_g) + A^2(1+r_g)^2 + A^3(1+r_g)^3, \\ W_{2i} &= \frac{\omega_{2i}(1+r_g)}{E}, \\ W_{3i} &= \frac{\omega_{3i}}{E}, \\ M_{2i} &= [A^2(1+r_g)]^{\frac{\sigma}{\eta}} \left( \frac{\omega_{2i}}{\phi} \right)^{\frac{-1}{\eta}} \left[ \left[ \frac{\theta}{1-\theta} \right]^{\theta} s^{-\theta} (1-\theta) \right]^{\frac{\sigma-1}{\eta}}, \\ M_{3i} &= [A(1+r_g)]^{\frac{\sigma}{\eta}} \left( \frac{\omega_{3i}}{\phi} \right)^{\frac{-1}{\eta}} \left[ \left[ \frac{\theta}{1-\theta} \right]^{\theta} s^{-\theta} (1-\theta) \right]^{\frac{\sigma-1}{\eta}}. \end{aligned}$$

Se observa que el pasivo de la primera generación es creciente en el nivel de salario que se recibirá en la segunda generación, bajo los supuestos de que  $\sigma < 1$ ,  $\eta < 1$  y  $\sigma > \eta$  que es razonable, al pensar que se invierte más en estudio para ganar en el futuro un mejor salario.

El activo de la segunda generación depende de los valores relativos de los ingresos esperados entre la segunda y tercera generación. Además el activo de la tercera generación también es creciente en el salario que se recibe. Esto es bastante realista ya que los individuos que poseen mayores salarios tienen una mayor capacidad de ahorro en comparación a los que reciben salarios más bajos. Adicionalmente, las horas trabajadas también son crecientes en el nivel de salario.

Finalmente, la ecuación de elección ocupacional entrega la productividad umbral, donde el individuo está indiferente entre elegir el sector abstracto o manual. Esta ecuación se muestra a continuación:

$$V_a(p^*) = V_m(p^*). \quad (2.17)$$

### 2.3. El equilibrio en el mercado de capitales

Esta ecuación impone que los activos agregados de la primera, segunda y tercera generación deben ser el capital de la economía durante el periodo correspondiente. Notar que la cuarta generación no participa en la acumulación de capital ya que solo consume los activos capitalizados que generó cuando estaba en las generaciones anteriores. Esta relación se expresa como:

$$\begin{aligned} L_{1t} \int_{p_{min}}^{p^*} a_{1mt}^* f(p) dp + L_{1t} \int_{p^*}^{\infty} a_{1at}^* f(p) dp + L_{2t} \int_{p_{min}}^{p^*} a_{2mt}^* f(p) dp \\ + L_{2t} \int_{p^*}^{\infty} a_{2at}^* f(p) dp + L_{3t} \int_{p_{min}}^{p^*} a_{3mt}^* f(p) dp + L_{3t} \int_{p^*}^{\infty} a_{3at}^* f(p) dp = \frac{k_t}{\lambda} \end{aligned}$$

donde  $\lambda > 0$  es una constante de escala. Esta ecuación de equilibrio en el mercado de capitales se expresa de forma extendida como:

$$\begin{aligned} (L_{1t} a_{1mt}^* + L_{2t} a_{2mt}^* + L_{3t} a_{3mt}^*) \left(1 - \left[\frac{p^*}{p_{min}}\right]^{-\varphi}\right) \\ + (L_{1t} a_{1at}^* + L_{2t} a_{2at}^* + L_{3t} a_{3at}^*) \left[\frac{p^*}{p_{min}}\right]^{-\varphi} = \frac{k_t}{\lambda} \quad (2.18) \end{aligned}$$

Se observa que el stock de capital es creciente en los salarios de ambos sectores a través de las variables de ahorro.

### 2.4. El equilibrio en el mercado laboral

Para que exista equilibrio en el mercado laboral se debe cumplir que la oferta de trabajo sea igual a su demanda, en términos de cantidad de trabajo y de horas trabajadas. La oferta de cantidad de trabajo abstracto se expresa como:

$$\begin{aligned} H_{2at} &= e_{2at}^* L_{2at}, \\ H_{3at} &= e_{3at}^* L_{3at}, \end{aligned}$$

donde  $e_{Tat}^*$  son las horas ofrecidas por los agentes dado un salario  $\omega_{Tat}$  y una tasa de descuento  $r_t$  para  $T = \{2, 3\}$ .

La demanda de cantidad de trabajo está dada por la ecuación de precio de trabajo de la firma, (2.4) y (2.5). Igualando la oferta y demanda se tiene la ecuación de equilibrio en el mercado laboral:

$$\gamma_2 e_{2at}^* L_{2at} + \gamma_3 e_{3at}^* L_{3at} = k_t \left( \frac{\gamma_2 (1 - \varepsilon)}{\omega_{2at}} \right)^{1/\varepsilon}, \quad (2.19)$$

$$\gamma_2 e_{2at}^* L_{2at} + \gamma_3 e_{3at}^* L_{3at} = k_t \left( \frac{\gamma_3 (1 - \varepsilon)}{\omega_{3at}} \right)^{1/\varepsilon}. \quad (2.20)$$

Además, debe existir una igualdad en cantidad de horas trabajadas entre la solución del óptimo del agente y los datos:

$$l_{2at} = e_{2at}^*, \quad (2.21)$$

$$l_{3at} = e_{3at}^*, \quad (2.22)$$

$$l_{2mt} = e_{2mt}^*, \quad (2.23)$$

$$l_{3mt} = e_{3mt}^*. \quad (2.24)$$

donde  $l_{2at}$ ,  $l_{3at}$ ,  $l_{2mt}$  y  $l_{3mt}$  son los datos de horas trabajadas en el sector abstracto y manual para el año  $t$  respectivamente.

## 2.5. El equilibrio en el mercado bienes y servicios

Este equilibrio impone una restricción de contabilidad nacional en el mercado de bienes y servicios. La restricción para la cantidad de bienes se expresa a continuación:

$$Y_{gt} = [c_{1agt}[1 - F(p^*)] + c_{1mgt}F(p^*)]L_{1t} + [c_{2agt}[1 - F(p^*)] + c_{2mgt}F(p^*)]L_{2t} \\ + [c_{3agt}[1 - F(p^*)] + c_{3mgt}F(p^*)]L_{3t} + [c_{4agt}[1 - F(p^*)] + c_{4mgt}F(p^*)]L_{4t} + k_t. \quad (2.25)$$

La relación (2.25) muestra que la producción que realiza la segunda y tercera generación debe satisfacer el consumo de toda la población, junto al stock de capital disponible en la economía. La restricción para la cantidad de servicios se expresa a continuación:

$$Y_{st} = [c_{1ast}[1 - F(p^*)] + c_{1mst}F(p^*)]L_{1t} + [c_{2ast}[1 - F(p^*)] + c_{2mst}F(p^*)]L_{2t} \\ + [c_{3ast}[1 - F(p^*)] + c_{3mst}F(p^*)]L_{3t} + [c_{4ast}[1 - F(p^*)] + c_{4mst}F(p^*)]L_{4t}. \quad (2.26)$$

La relación (2.26) muestra que los servicios producidos en la segunda y tercera generación deben ser igual a los consumidos por toda la población. Dado que el consumo de servicios es proporcional al de bienes, a través de la relación (A.6), se obtiene la siguiente ecuación

$$Y_{gt} = Y_{st} \left( \frac{\theta}{1 - \theta} \right) \frac{1}{s} + k_t,$$

de forma extendida se expresa como

$$(\gamma_2 H_{2at} + \gamma_3 H_{3at})^{1-\varepsilon} k_t^\varepsilon = \alpha_t (H_{2mt} + H_{3mt}) \left( \frac{\theta}{1 - \theta} \right) \frac{1}{s} + k_t. \quad (2.27)$$

**Definición 2.1** (ver [12]) (*Equilibrio competitivo*) *El equilibrio competitivo en el mercado laboral está compuesto por secuencias de (i) asignaciones de horas trabajadas por los individuos en las empresas  $\{e_{2at}^*, e_{3at}^*, e_{2mt}^*, e_{3mt}^*\}_{t=1}^N$ , (ii) asignaciones de insumos de trabajo demandado por las firmas  $\{H_{2at}, H_{3at}, H_{2mt}, H_{3mt}\}_{t=1}^N$ ; (iii) salarios de mercado por unidad de trabajo  $\{\omega_{2at}, \omega_{3at}, \omega_{2mt}, \omega_{3mt}\}_{t=1}^N$ , donde  $N$  es el número de periodos de la economía;*

*El equilibrio competitivo en el mercado de capitales está dado por secuencias de (i) asignaciones de activos para los individuos abstractos  $\{a_{1at}^*, a_{2at}^*, a_{3at}^*\}_{t=1}^N$  y manuales  $\{a_{1mt}^*, a_{2mt}^*, a_{3mt}^*\}_{t=1}^N$  (ii) asignación de stock de capital contratado por las firmas  $\{k_t\}_{t=1}^N$  y por (iii) precio de renta del capital neto de depreciación física  $\{r_t\}_{t=1}^N$ ;*

*El equilibrio competitivo en el mercado de bienes y servicios está dado por secuencias de (i) asignaciones de consumo para los individuos abstractos  $\{c_{1agt}, c_{2agt}, c_{3agt}, c_{4agt}, c_{1ast}, c_{2ast}, c_{3ast}, c_{4ast}\}_{t=1}^N$  y manuales  $\{c_{1mgt}, c_{2mgt}, c_{3mgt}, c_{4mgt}, c_{1mst}, c_{2mst}, c_{3mgt}, c_{4mgt}\}_{t=1}^N$ , tales que*

### 1. Optimización

- (a) *Las secuencias  $\{c_{1agt}, c_{2agt}, c_{3agt}, c_{4agt}, c_{1ast}, c_{2ast}, c_{3ast}, c_{4ast}\}_{t=1}^N$ ,  $\{c_{1mgt}, c_{2mgt}, c_{3mgt}, c_{4mgt}, c_{1mst}, c_{2mst}, c_{3mgt}, c_{4mgt}\}_{t=1}^N$ ,  $\{e_{2at}^*, e_{3at}^*, e_{2mt}^*, e_{3mt}^*\}_{t=1}^N$ ,  $\{a_{1at}^*, a_{2at}^*, a_{3at}^*\}_{t=1}^N$  y  $\{a_{1mt}^*, a_{2mt}^*, a_{3mt}^*\}_{t=1}^N$  resuelven el problema de optimización de cada individuo dados los precios de los factores y su restricción presupuestaria intertemporal.*
- (b) *Las secuencias  $\{H_{2at}, H_{3at}, H_{2mt}, H_{3mt}, k_t\}_{t=1}^N$  resuelven el problema de optimización de las firmas dados los precios de los factores y sus restricciones tecnológicas.*

### 2. Limpieza de mercado

- (a) *La cantidad de trabajo demandada por las firmas es la oferta que existe en la economía a precios de mercado según las ecuaciones (2.19) y (2.20).*
- (b) *La cantidad de horas de trabajo demandada por las firmas es la oferta que existe en la economía según las ecuaciones (2.21), (2.22), (2.23) y (2.24).*
- (c) *El capital demandado por las firmas es el ahorro total de los individuos según la ecuación (2.18).*
- (d) *La producción de bienes satisface la demanda de bienes para el consumo y la cantidad de capital en la economía según la ecuación (2.25).*
- (e) *La producción de servicios satisface la demanda de servicios para el consumo según la ecuación (2.26).*

# Capítulo 3

## Calibración del modelo

### 3.1. Redefinición de variables per cápita

La primera etapa de la estrategia para calibrar es definir variables per cápita para reducir la cantidad de parámetros a calibrar.

El capital per cápita se define como el capital de la economía por trabajador laboralmente activo. Esta expresión normalizada se define como:

$$\tilde{k}_t = \frac{k_t}{L_{trab,t}},$$

donde  $L_{trab,t} = L_{2at} + L_{3at} + L_{2mt} + L_{3mt}$  corresponde a la población total de trabajadores para el periodo  $t$ .

Las proporciones de trabajo abstracto y manual en cada generación se definen como la cantidad de trabajadores en cada sector por sobre la cantidad total de trabajadores de la generación. Estas expresiones normalizadas se definen como:

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{2at} &= \frac{L_{2at}}{L_{2t}}, \\ \tilde{L}_{2mt} &= \frac{L_{2mt}}{L_{2t}}, \\ \tilde{L}_{3at} &= \frac{L_{3at}}{L_{3t}}, \\ \tilde{L}_{3mt} &= \frac{L_{3mt}}{L_{3t}}.\end{aligned}$$

La desviación de productividad con respecto a la productividad mínima se define como:

$$\hat{p} = \frac{p}{p_{min}}.$$

## 3.2. Redefinición de ecuaciones

A partir de la redefinición de variables anterior, es posible reescribir las ecuaciones y funciones relevantes en términos de ellas, como se muestra a continuación.

### 3.2.1. Ecuación de fuerza laboral

Solo se considera la fuerza laboral del sector abstracto (2.8) y (2.9), quedando de la siguiente forma, al normalizar por la cantidad de trabajadores en cada generación:

$$\tilde{L}_{2at} = (\hat{p}^*)^{-\varphi}, \quad (3.1)$$

$$\tilde{L}_{3at} = (\hat{p}^*)^{-\varphi}. \quad (3.2)$$

### 3.2.2. Funciones de duración de estudiar

Al normalizar las funciones (1.1) y (1.2) por la desviación de la productividad, quedan de la forma:

$$z_a = n + \frac{\tau_a}{p_{\min} \hat{p}^* - p_{\min}}, \quad (3.3)$$

$$z_m = m + \frac{\tau_m}{p_{\min} \hat{p}^*}. \quad (3.4)$$

### 3.2.3. Ecuación de precio del capital

Al normalizar la ecuación (2.1) por la cantidad total de trabajadores de la economía, queda de la forma:

$$\tilde{k}_t = \frac{\gamma_2 H_{2at} + \gamma_3 H_{3at}}{L_{trab,t}} \left( \frac{\varepsilon}{1 + r_t} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}. \quad (3.5)$$

### 3.2.4. Ecuación de equilibrio en el mercado de capitales

La ecuación (2.18) normalizada a la cantidad total de trabajadores, queda de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{(L_{1t} a_{1mt}^* + L_{2t} a_{2mt}^* + L_{3t} a_{3mt}^*)}{L_{trab,t}} \left( 1 - [\hat{p}^*]^{-\varphi} \right) \\ + \frac{(L_{1t} a_{1at}^* + L_{2t} a_{2at}^* + L_{3t} a_{3at}^*)}{L_{trab,t}} [\hat{p}^*]^{-\varphi} = \frac{\tilde{k}_t}{\lambda}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

### 3.3. Calibración

Los datos invariantes en el tiempo se definen según algunos valores dados en la literatura. Para la tasa libre de riesgo que define los factores de descuento se toma  $r_f = 4\%$  anual, entregando los valores  $\beta^{20} = 0,4564$ ,  $\beta^{40} = 0,2083$  y  $\beta^{60} = 0,00951$ . El parámetro de forma de la distribución de Pareto se fija en  $\varphi = 2$  para que la distribución sea medianamente dispersa en los valores que toma la productividad umbral y el parámetro de escala se toma como  $p_{min} = 1$  a modo de simplificar la normalización.

El resumen de la calibración de datos invariantes en el tiempo se muestra en la Tabla (3.1)

Parámetro	Valor
$r_f$	4%
$\beta^{20}$	0,4564
$\beta^{40}$	0,2083
$\beta^{60}$	0,0951
$\varphi$	2
$p_{min}$	1

Tabla 3.1: Resumen calibración interna

Los datos que varían por periodo, son tomados a partir de la Encuesta de ocupación y desocupación de la Universidad de Chile, que registra datos de la fuerza laboral desde 1957 en adelante. Algunas características de esta fuente es que no ha cambiado su metodología para clasificar a las personas ocupadas, además tiene una cobertura solo para la Región Metropolitana y cuenta con una muestra cercana a 10.000 individuos por trimestre.

La clasificación de ocupaciones se tomó a partir de la realizada por Ananías (2018) [2], que divide a los individuos en cinco grupos ocupacionales: 1. “No participa”, 2. “Rutinario manual”, 3. “Rutinario analítico”, 4. “No rutinario manual” y 5. “No rutinario analítico”. Donde se tomó la siguiente división de sectores:

- Grupo Abstracto=5. “No rutinario analítico”
- Grupo Manual=2. “Rutinario manual”, 3. “Rutinario analítico”, 4. “No rutinario manual”

No se trabajó con el grupo 1. “No participa” ya que este modelo utiliza el supuesto de que toda la población de la segunda y tercera generación pertenece a algún sector laboral.

Esta base entrega datos desde el año 1960 al 2016, de la propoción de trabajadores en ambos sectores ( $\tilde{L}_{2at}, \tilde{L}_{3at}, \tilde{L}_{2mt}, \tilde{L}_{3mt}$ ), de los salarios por hora ( $\omega_{2at}, \omega_{3at}, \omega_{2mt}, \omega_{3mt}$ ), de las horas anuales trabajadas ( $l_{2at}, l_{3at}, l_{2mt}, l_{3mt}$ ) y de las tasas de participación por generación.

Por otro lado, se obtuvieron los datos de stock de capital para Chile ( $k_t$ ) entre los años 1960 y 2014 de la Penn World Table versión 9.1 de la Universidad de Groningen [13].

Los datos para calcular la cantidad de población en cada generación se obtuvieron del

Instituto Nacional de Estadísticas, a partir de tablas ordenadas por rango etario. Se extrapolaron los datos de los años en que no realizó Censo, según la tasa media anual de crecimiento. El tamaño de cada generación, se calculó a partir de la tasa de empleo dada por la encuesta, escaladas a la población del INE.

La duración y sobreduración de carreras se obtuno del Informe de duración real y sobreduración de carreras o programas para graduados del 2012 al 2016, elaborado por el Servicio de información de educación superior del Ministerio de Educación de Chile.

La participación de los bienes en el consumo ( $\theta$ ) se obtuvo a partir del IPC enero 2019 base 2018 dado por el INE, donde se aisló la participación de servicios con baja utilización de capital. El detalle de esta clasificación se muestra en el Anexo (C.1).

En los gráficos siguientes se muestra la información obtenida para el periodo 1980-2014.

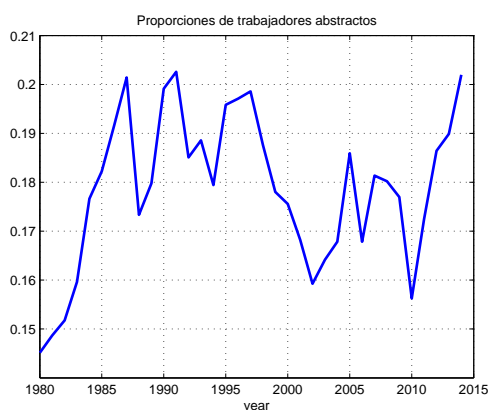


Figura 3.1: Evolución de la proporción de trabajadores abstractos.

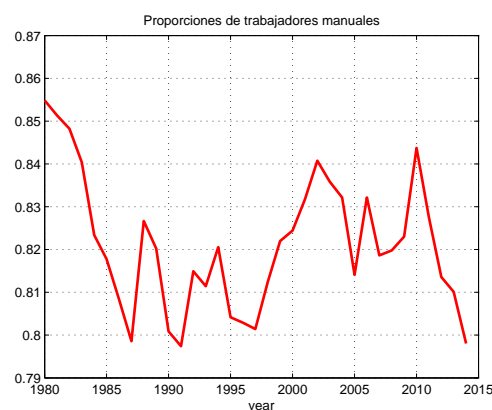


Figura 3.2: Evolución de la proporción de trabajadores manuales.

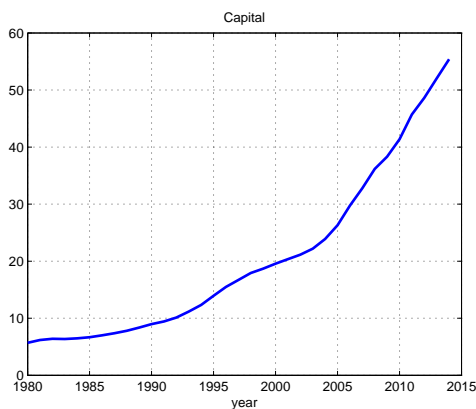


Figura 3.3: Evolución del capital normalizado al consumo del año 1990.

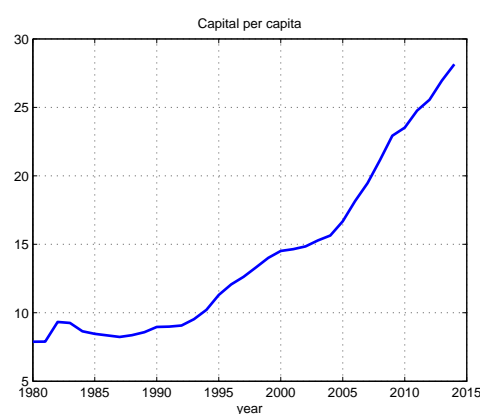


Figura 3.4: Evolución del capital per cápita.



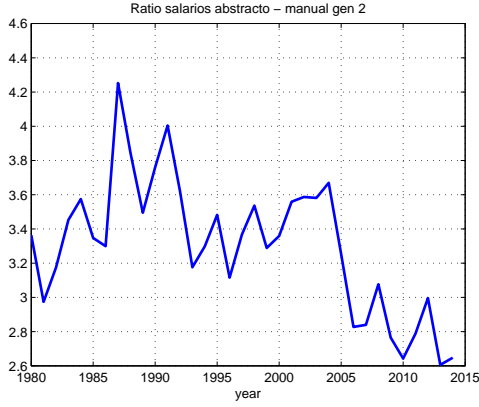


Figura 3.5: Evolución del salario de abstracto relativo al manual generación 2.

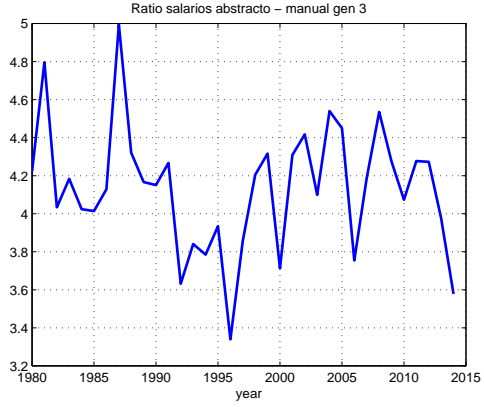


Figura 3.6: Evolución del salario de abstracto relativo al manual generación 3.

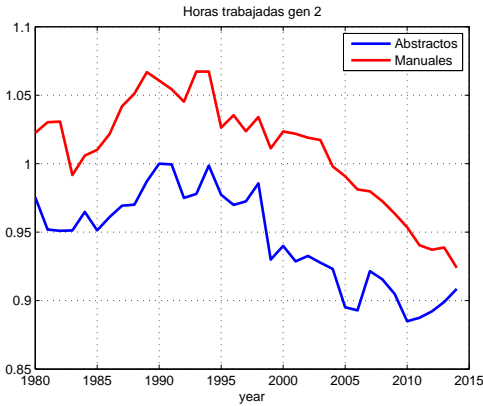


Figura 3.7: Evolución de la cantidad de horas trabajadas en el sector abstracto y manual generación 2 normalizadas a las horas trabajadas en el año 1990 por el grupo abstracto.

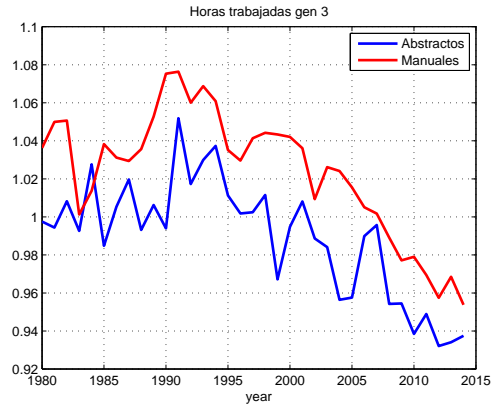


Figura 3.8: Evolución de la cantidad de horas trabajadas en el sector abstracto y manual generación 3 normalizadas a las horas trabajadas en el año 1990 por el grupo abstracto.

### 3.4. Parámetros a calibrar

Los parámetros que se calibran a partir del modelo son  $r$ ,  $\phi$ ,  $\sigma$ ,  $\eta$ ,  $\gamma_2$ ,  $s$  y  $\varepsilon$ , los cuales son solución de las ecuaciones (2.1), (2.17), (3.6), (2.21),(2.22), (2.23), (2.24), (2.26) y (2.27). Para realizar esta calibración interna se utilizan los momentos de los datos.

El parámetro  $\hat{p}^*$  se despeja de la ecuación (3.1):

$$\hat{p}^* = \left( \tilde{L}_{2at} \right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}.$$

El parámetro  $\alpha$  se obtiene igualando:

$$\alpha_t = \omega_{2mt}.$$

El parámetro  $\gamma_3$  se obtiene a partir de  $\gamma_2$  ya que son proporcionales entre sí:

$$\gamma_3 = \gamma_2 \frac{\omega_{3at}}{\omega_{2at}}.$$

Para realizar numéricamente la calibración, es necesario adimensionalizar las ecuaciones. Este procedimiento consiste en definir magnitudes adimensionales para cada variable, usando un factor de escala que tome en cuenta sus dimensiones reales. Los factores de escala se escogen de modo que las magnitudes adimensionales de las diferentes variables del modelo sean comparables entre sí, para evitar las inestabilidades numéricas. El detalle de este procedimiento se muestra en el Anexo B.

Finalmente, los valores de la calibración para el año 1990 se muestran en la Tabla (3.2).

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
$\varepsilon$	0,91	$\theta$	0,87
$\widehat{p}^*$	2,24	Prop. Abstractos	0,2
$\widehat{\alpha}$	1	$\widehat{\phi}$	3,76
$\widehat{\gamma}_2$	195,3	$\widehat{\gamma}_3$	251,4
$\sigma$	0,99	$\eta$	0,26
$r$	0,055	$s$	0,54

Tabla 3.2: Resumen calibración año 1990

# Capítulo 4

## Análisis de las simulaciones

A continuación, en la Tabla (4.1) se muestra la predicción para los valores de la división de personas entre sectores ( $\hat{p}^*$ ), cantidad de trabajadores y proporción de abstractos, tomando la variable exógena  $\hat{\alpha}_t$  como el avance de la tecnología en cada año. En la tabla (4.2) se muestra la predicción para los valores del precio del capital ( $r_t$ ), salarios por hora de abstractos ( $\hat{\omega}_{2at}$ ), ( $\hat{\omega}_{3at}$ ), horas trabajadas y capital per cápita ( $\tilde{k}_t$ ), en horizontes de 5, 10, 15 y 20 años.

Año	Trabajadores	$\hat{p}^*$	Prop. Abs.	$\hat{\alpha}_t$
1980	923.809	2,14	0,22	1,07
1985	1.007.649	2,47	0,16	0,81
<b>1990</b>	<b>1.279.871</b>	<b>2,21</b>	<b>0,21</b>	<b>1,00</b>
1995	1.578.208	1,91	0,27	1,43
2000	1.724.532	1,89	0,28	1,52
2005	2.017.543	1,88	0,28	1,59
2010	2.251.131	1,83	0,30	1,74

Tabla 4.1: Resumen variables exógenas y fuerza de trabajo

Año	$r_t$	$\hat{\omega}_{2at}$	$\hat{\omega}_{3at}$	$\hat{e}_{2at}$	$\hat{e}_{3at}$	$\hat{e}_{2mt}$	$\hat{e}_{3mt}$	$\tilde{k}_t$
1980	0,055	3,78	4,86	0,90	1,03	0,11	0,17	6,90
1985	0,064	3,46	4,46	0,86	1,84	0,08	0,25	6,74
<b>1990</b>	<b>0,057</b>	<b>3,71</b>	<b>4,78</b>	<b>0,89</b>	<b>1,16</b>	<b>0,10</b>	<b>0,19</b>	<b>9,53</b>
1995	0,040	4,40	5,66	0,96	0,37	0,14	0,10	13,34
2000	0,039	4,45	5,73	0,96	0,34	0,16	0,07	14,46
2005	0,036	4,60	5,92	0,97	0,27	0,16	0,07	16,50
2010	0,029	4,89	6,30	0,99	0,18	0,17	0,05	19,02

Tabla 4.2: Resumen variables endógenas

En el resto de la sección se muestran los gráficos comparativos entre los datos y la predicción.

En la Figura (4.1) se observa que el modelo sobreestima la cantidad de trabajadores abstractos desde el año 1995 en adelante, llegando a predecir el doble de trabajadores en el año

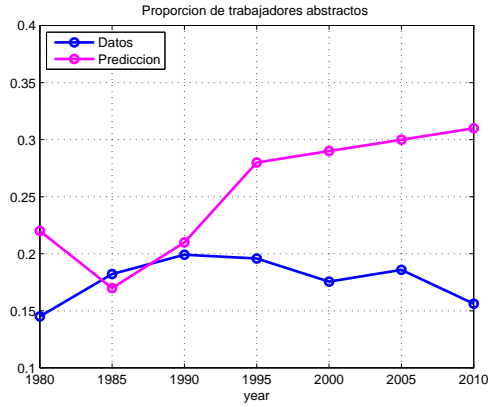


Figura 4.1: Comparativo de la proporci3n de trabajadores abstractos entre datos y predicci3n.

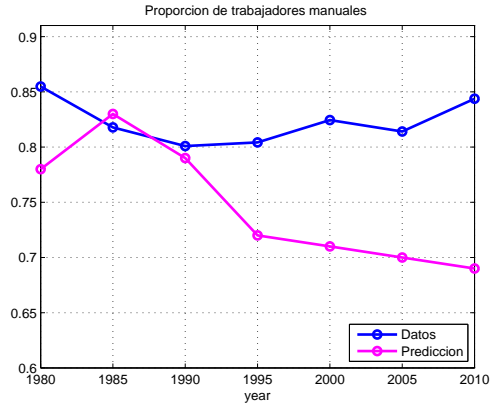


Figura 4.2: Comparativo de la proporci3n de trabajadores manuales entre datos y predicci3n.

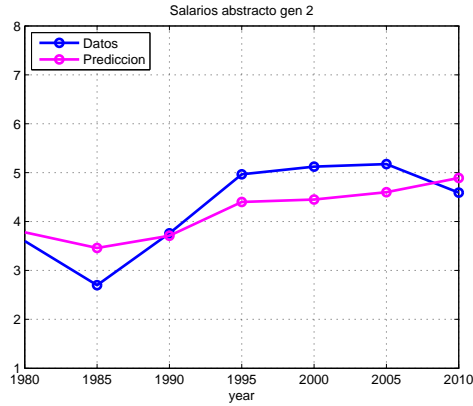


Figura 4.3: Comparativo del salario abstracto entre datos y predicci3n generaci3n 2 normalizado al salario manual de la generaci3n 2 del a3o 1990.

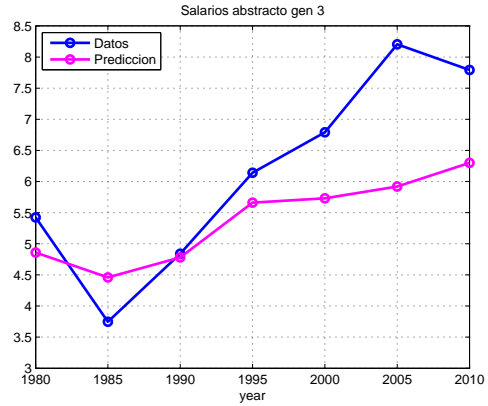


Figura 4.4: Comparativo del salario abstracto entre datos y predicci3n generaci3n 3 normalizado al salario manual de la generaci3n 2 del a3o 1990.

2010 en comparaci3n al dato de ese a3o. Esto se debe a que la ecuaci3n de elecci3n ocupacional (2.17), est3 otorgando valores m3s altos al sector abstracto con respecto al manual, en comparaci3n a los datos.

En la Figura (4.3) se observa que la evoluci3n de la simulaci3n del salario por hora abstracto posee peque3as fluctuaciones, sin embargo los datos muestran que desde el a3o 1990 estos valores crecen, al igual que en los datos. El resultado de esta simulaci3n es debido a que el modelo, al presentar una mayor proporci3n de trabajadores abstractos desde el a3o 1995, da evidencia de una mayor oferta en este sector que en la realidad, provocando un menor incremento en su salario.

Las Figuras (4.5) y (4.6) muestran que el ratio de salario abstracto respecto al manual cae al igual que en los datos desde el a3o 1990, sin embargo la simulaci3n cae en mayor medida debido a que el salario manual aumenta en mayor proporci3n que el abstracto.

En las figuras (4.7) y (4.8) se observa que las horas de trabajo simuladas para el sector

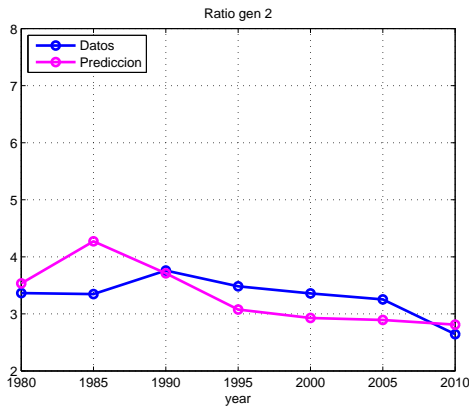


Figura 4.5: Comparativo del ratio de salario abstracto con respecto al manual entre datos y predicción generación 2.

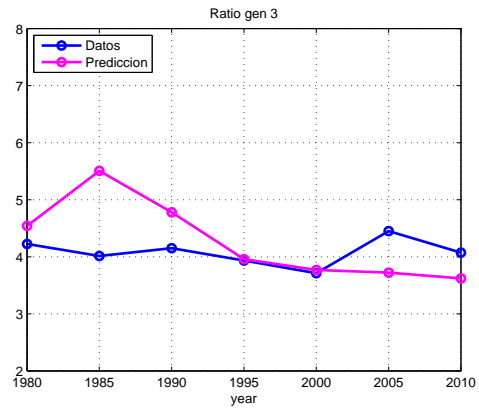


Figura 4.6: Comparativo del ratio de salario abstracto con respecto al manual entre datos y predicción generación 3.

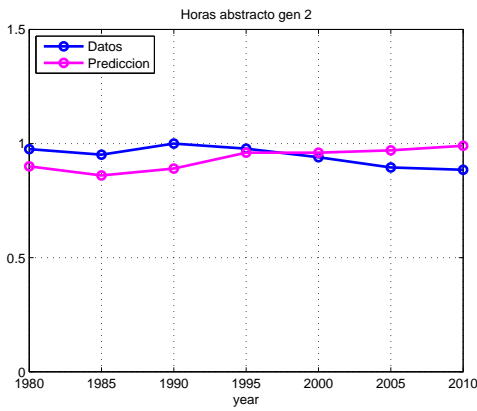


Figura 4.7: Comparativo de las horas trabajadas en abstracto generación 2 normalizadas a las horas trabajadas por el grupo abstracto de la generación 2 el año 1990.

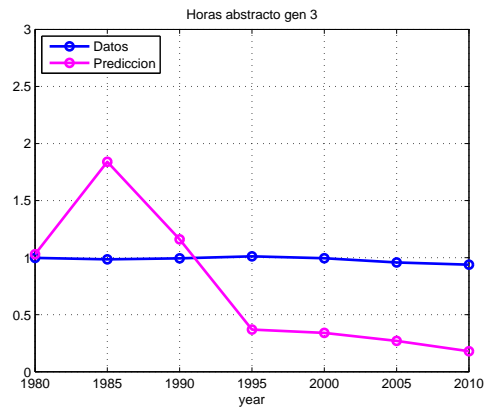


Figura 4.8: Comparativo de las horas trabajadas en abstracto generación 3 normalizadas a las horas trabajadas por el grupo abstracto de la generación 2 el año 1990.

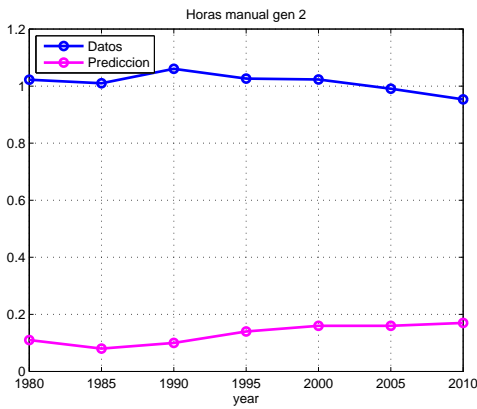


Figura 4.9: Comparativo de las horas trabajadas en manual generación 2 normalizadas a las horas trabajadas por el grupo abstracto de la generación 2 el año 1990.

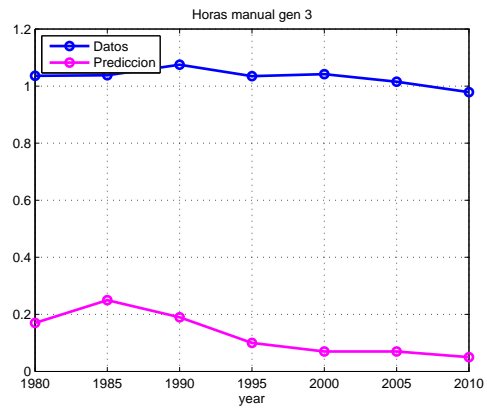


Figura 4.10: Comparativo de las horas trabajadas en manual generación 3 normalizadas a las horas trabajadas por el grupo abstracto de la generación 2 el año 1990.

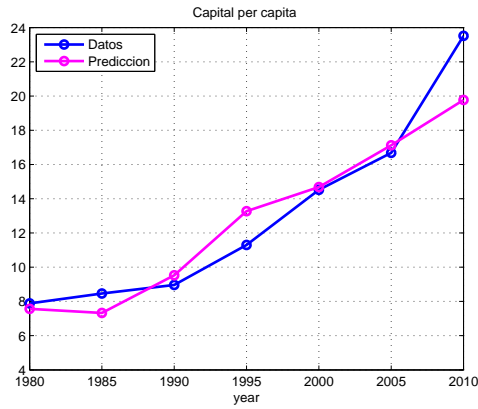


Figura 4.11: Comparativo del capital per cápita entre datos y predicción normalizado al consumo per cápita del año 1990.

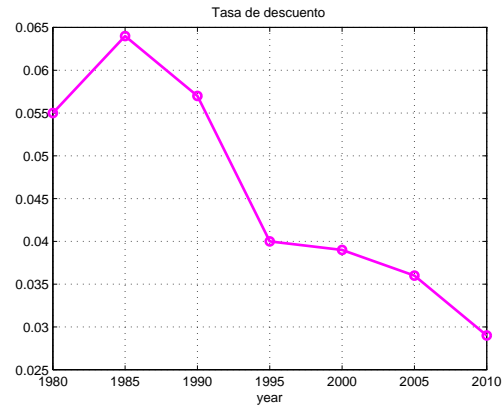


Figura 4.12: Evolución de la tasa de descuento predicha.

abstracto de la segunda generación son ligeramente mayores a las de los datos, a partir del año 1995, a diferencia de la tercera generación, que predice menos horas que los datos. Por lo anterior, se podría inferir que a partir de este año, predomina el efecto riqueza por sobre el de sustitución. La alta variación que existe en las horas trabajadas para los abstractos de la generación 3, puede tener su explicación en que los trabajadores que se encuentran en este grupo poseen una alta variación en sus salarios, que además está potenciada por el bajo valor de la elasticidad Frisch del trabajo ( $\eta = 0,2$ ).

En las figuras (4.9) y (4.10), se observa que de manera cualitativa, el modelo predice en la tendencia pero de manera cuantitativa, el rango de diferencia es mayor debido principalmente al menor nivel de consumo y salario de este sector combinado con la dominancia del efecto riqueza por sobre el de sustitución.

Además, en la Figura (4.11) se observa que el capital per cápita simulado sigue una tendencia muy similar a la de los datos, prediciendo de manera practicamente exacta los valores para los años 2000 y 2005.

La evolución de la tasa de descuento de la Figura (4.12) concuerda con la evolución del capital per cápita ya que al crecer el capital, disminuye su precio.

## 4.1. Análisis del contrafactual

Para estudiar el impacto de los cambios en la composición de la población, se utiliza un contrafactual, donde las proporciones entre generaciones son estables, con el fin de evidenciar el impacto que ha tenido el envejecimiento de la población al compararlo con la simulación presentada anteriormente.

El supuesto de que las proporciones entre generaciones se mantienen constantes, genera las poblaciones en cada grupo, tomando como proporciones base las del año 1990, que es el de calibración utilizado anteriormente. Estas proporciones se calculan como:

$$p_{gen1} = \frac{L_{1,1990}}{L_{total,1990}}, \quad p_{gen2} = \frac{L_{2,1990}}{L_{total,1990}}, \quad p_{gen3} = \frac{L_{3,1990}}{L_{total,1990}}, \quad p_{gen4} = \frac{L_{4,1990}}{L_{total,1990}}$$

luego, las poblaciones por generación de los años siguientes se calculan utilizando estas proporciones de la forma:

$$L_{1t}^{contr} = L_{total,t} p_{gen1}, \quad L_{2t}^{contr} = L_{total,t} p_{gen2}, \quad L_{3t}^{contr} = L_{total,t} p_{gen3}, \quad L_{4t}^{contr} = L_{total,t} p_{gen4}.$$

Los parámetros de calibración son los mismos que en el escenario base ya que no hay cambios en los datos utilizados para calibrar. En las Tablas (4.3) y (4.4) se muestran los valores predichos.

Año	Trabajadores	$\hat{p}^*$	Prop. Abs.	$\hat{\alpha}$
1980	990.268	2,14	0,22	1,07
1985	1.043.133	2,45	0,17	0,81
<b>1990</b>	<b>1.279.871</b>	<b>2,21</b>	<b>0,21</b>	<b>1,00</b>
1995	1.525.072	1,90	0,28	1,43
2000	1.611.144	1,86	0,29	1,52
2005	1.828.181	1,83	0,30	1,59
2010	1.988.229	1,80	0,31	1,74

Tabla 4.3: Resumen contrafactual var. exógenas y fuerza de trabajo

Año	$r$	$\hat{\omega}_{2at}$	$\hat{\omega}_{3at}$	$\hat{e}_{2at}$	$\hat{e}_{3at}$	$\hat{e}_{2mt}$	$\hat{e}_{3mt}$	$\tilde{k}_t$
1980	0,055	3,78	4,86	0,90	1,03	0,11	0,17	7,57
1985	0,064	3,46	4,46	0,86	1,84	0,08	0,25	7,33
<b>1990</b>	<b>0,057</b>	<b>3,71</b>	<b>4,78</b>	<b>0,89</b>	<b>1,16</b>	<b>0,10</b>	<b>0,19</b>	<b>9,53</b>
1995	0,040	4,40	5,66	0,96	0,37	0,14	0,10	13,27
2000	0,039	4,45	5,73	0,96	0,34	0,16	0,07	14,68
2005	0,036	4,60	5,92	0,97	0,27	0,16	0,07	17,12
2010	0,029	4,89	6,30	0,99	0,18	0,17	0,05	19,77

Tabla 4.4: Resumen contrafactual var. endógenas

En el resto de la sección se muestran los gráficos comparativos entre el escenario base analizado en la sección anterior y el contrafactual.

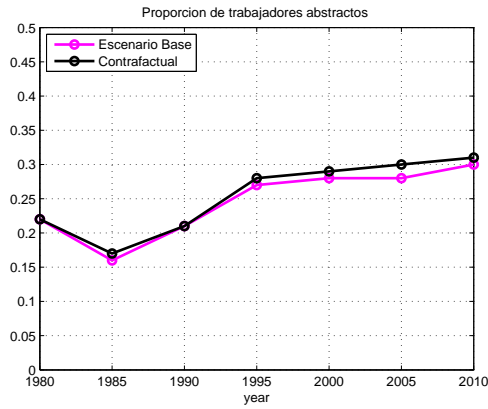


Figura 4.13: Comparativo de la proporción de trabajadores abstractos.

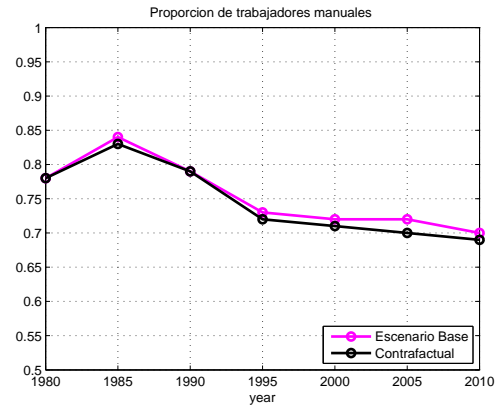


Figura 4.14: Comparativo de la proporción de trabajadores manuales.

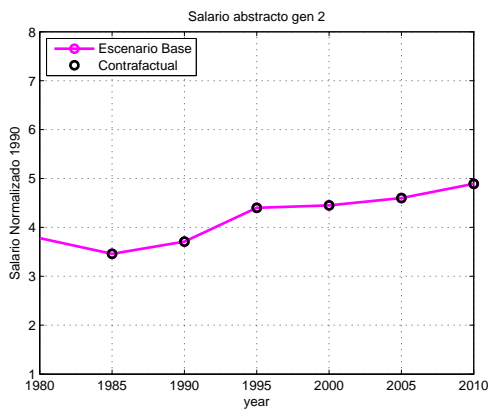


Figura 4.15: Comparativo del salario abstracto generación 2 normalizado al salario manual de la generación 2 del año 1990.

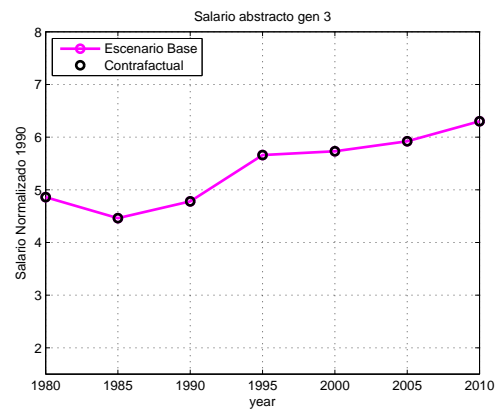


Figura 4.16: Comparativo del salario abstracto generación 3 normalizado al salario manual de la generación 2 del año 1990.

En la Figura (4.13) se observa que el contrafactual entrega prácticamente las mismas proporciones de trabajadores que el escenario base, más en detalle, el contrafactual predice una proporción de abstractos ligeramente mayor. En las Figuras (4.15) y (4.16) se observa que se obtienen los mismos valores que en el escenario base, debido a que los salarios dependen únicamente de parámetros calibrados invariantes en el tiempo y de la tasa de descuento, que como se observa en la Figura (4.24), toma valores prácticamente idénticos a los del escenario base. A consecuencia de tener los mismos salarios, también los ratios de salarios y horas trabajadas siguen el mismo comportamiento que en el escenario base.

De las Figuras de evolución de la población (4.25), (4.26), (4.27) y (4.28) se observa que el contrafactual, a partir del año 1990, genera una mayor cantidad de población en la generación 1. Esta diferencia se hace más notoria aún después del año 2005. Este efecto puede tener una explicación en el envejecimiento de la población ya que además existen mayores cantidades de población en la tercera y cuarta generación en comparación al contrafactual. En resumen, las proporciones de personas en las generaciones 1 y 2 han ido disminuyendo, mientras aumentan en las generaciones 3 y 4, al igual que la cantidad de trabajadores, como se muestra en la Figura (4.29).



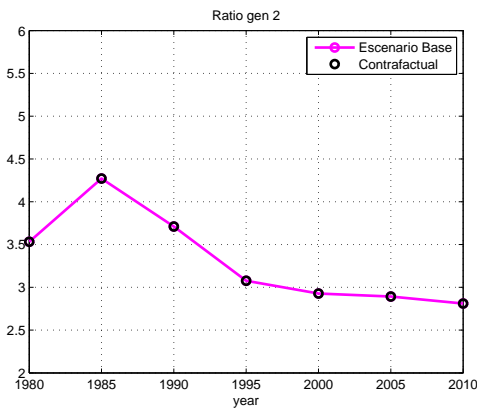


Figura 4.17: Comparativo del ratio de salario abstracto con respecto al manual generación 2.

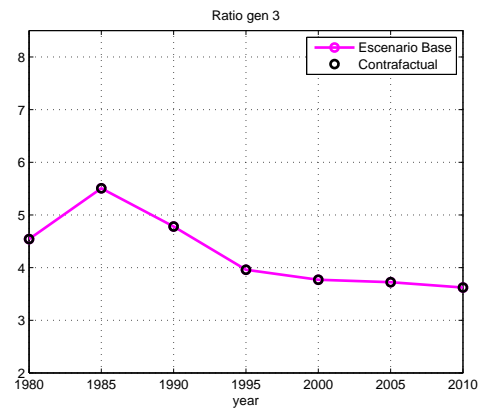


Figura 4.18: Comparativo del ratio de salario abstracto con respecto al manual generación 3.

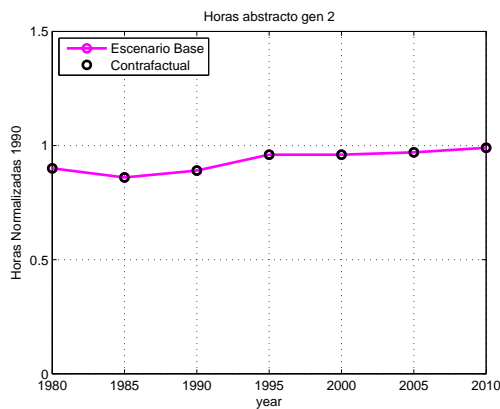


Figura 4.19: Comparativo de las horas trabajadas en abstracto generación 2 normalizadas a las horas trabajadas por el grupo abstracto de la generación 2 el año 1990.

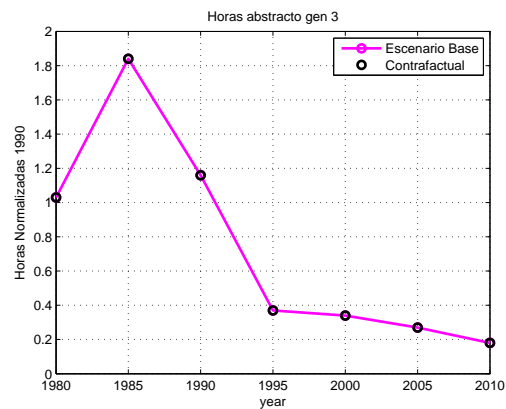


Figura 4.20: Comparativo de las horas trabajadas en abstracto generación 3 normalizadas a las horas trabajadas por el grupo abstracto de la generación 2 el año 1990.

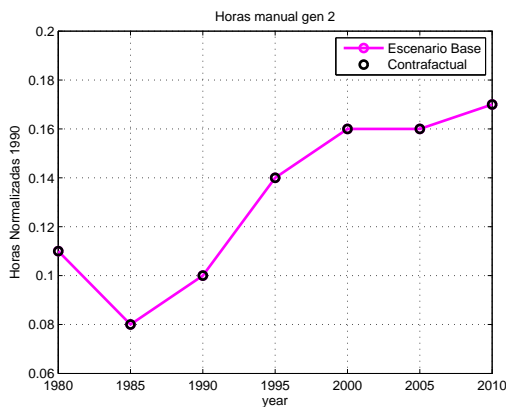


Figura 4.21: Comparativo de las horas trabajadas en manual generación 2 normalizadas a las horas trabajadas por el grupo abstracto de la generación 2 el año 1990.

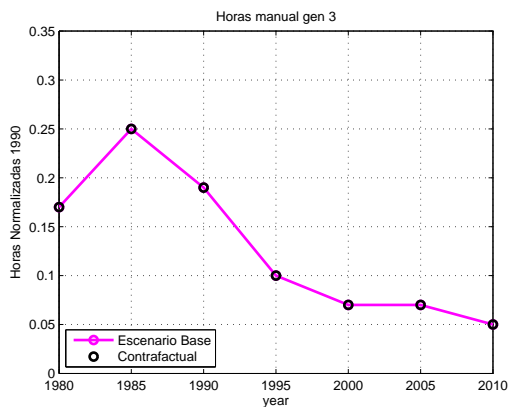


Figura 4.22: Comparativo de las horas trabajadas en manual generación 3 normalizadas a las horas trabajadas por el grupo abstracto de la generación 2 el año 1990.

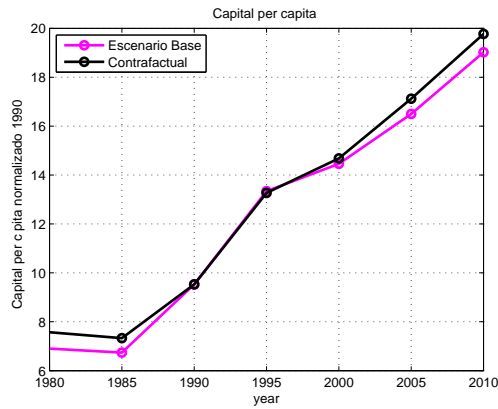


Figura 4.23: Comparativo del capital per cápita normalizado al capital per cápita del año 1990.

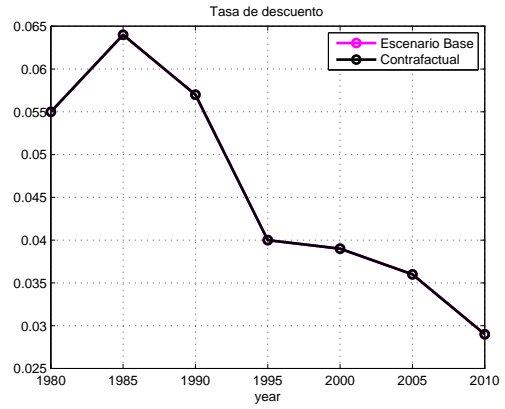


Figura 4.24: Evolución de la tasa de descuento contrafactual

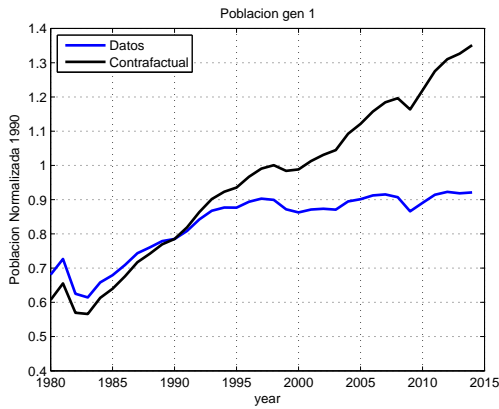


Figura 4.25: Comparativo de la población en generación 1 entre datos y contrafactual normalizada a la población de trabajadores del año 1990.

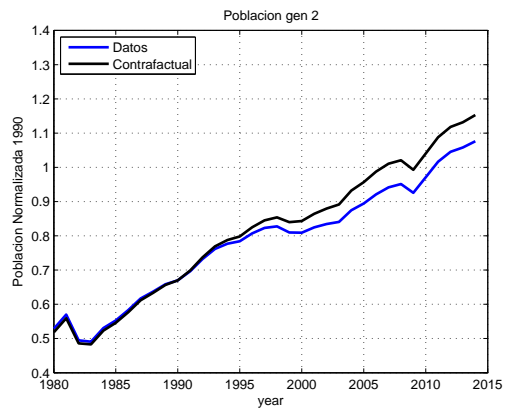


Figura 4.26: Comparativo de la población en generación 2 entre datos y contrafactual normalizada a la población de trabajadores del año 1990.

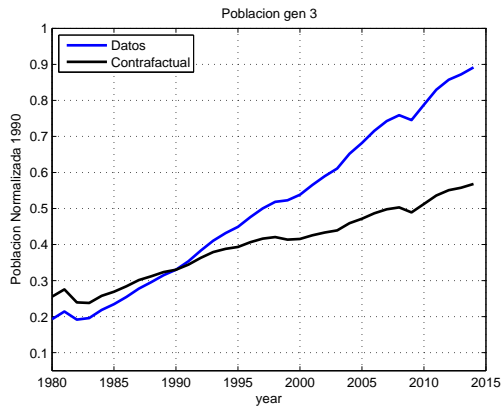


Figura 4.27: Comparativo de la población en generación 3 entre datos y contrafactual normalizada a la población de trabajadores del año 1990.

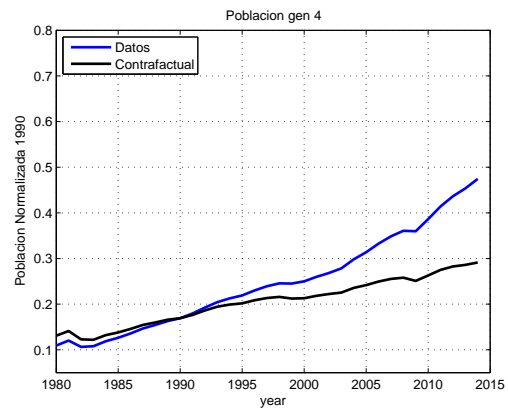


Figura 4.28: Comparativo de la población en generación 4 entre datos y contrafactual normalizada a la población de trabajadores del año 1990.

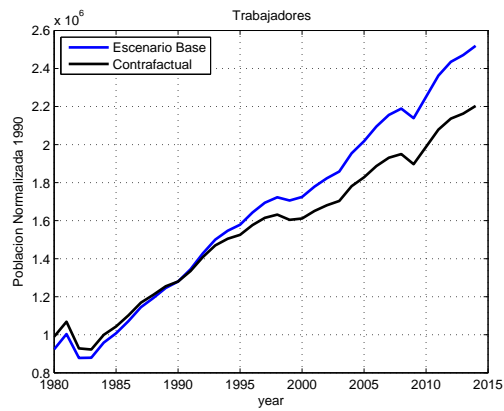


Figura 4.29: Comparativo de trabajadores entre escenario base y contrafactual normalizada a la población de trabajadores del año 1990.

# Conclusión

En este trabajo se ha propuesto un modelo de generaciones traslapadas para estudiar cómo las decisiones de elección ocupacional entre diferentes periodos de vida de un agente afectan la evolución del empleo en cada sector y la desigualdad salarial. El modelo incorpora naturalmente el tema de ahorro/acumulación de capital para explicar esta relación.

Este modelo considera una economía con producción de bienes y servicios a partir de trabajo abstracto, manual y capital físico. Los agentes realizan una elección ocupacional a lo largo de su vida tomando en cuenta el costo de estudiar una carrera abstracta o manual, contingente a su nivel de productividad, para encontrar cantidades de ahorro y horas trabajadas óptimas ofrecidas a las firmas. Estas a su vez viven en un mercado perfectamente competitivo donde maximizan las cantidades y precios de sus factores. Sus decisiones, junto a la limpieza de mercado, conforman el equilibrio general del modelo en el mercado laboral, de capital y de producción de bienes y servicios.

Utilizando diferentes fuentes de información, se ha podido calibrar el modelo para la economía chilena, tomando como año base el 1990. Con el modelo calibrado se han realizado simulaciones para compararlas con los datos del periodo comprendido entre 1980 y 2010 en intervalos de cinco años, a modo de observar la tendencia.

En la sección cuatro se muestra el análisis de los resultados obtenidos, donde se observa que al aumentar el avance tecnológico también lo hace el nivel de capital que hay en la economía, junto a la proporción de trabajadores abstractos, además existe un decaimiento en el ratio del salario abstracto con respecto al manual, ocasionado por la alta oferta predicha de trabajadores abstractos. En el modelo se aprecia que al considerar las variables consumo y horas trabajadas, el efecto riqueza es más importante que el efecto sustitución. Esto queda de manifiesto sobretodo en el sector manual, donde al aumentar el salario, el equilibrio obtenido entrega menores horas de trabajo.

El caso contrafactual, en donde se mantienen las proporciones de cada generación constantes en el tiempo, tomando como base el año 1990, muestra una leve alza en la proporción de trabajadores abstractos con respecto a la simulación base, lo que podría también influir en la leve alza observada de capital per cápita. El resto de las variables endógenas se comportan exactamente igual a las del escenario base ya que todas dependen directamente del salario, que no posee cambios para este caso y de la tasa de descuento, provocando que los ratios de salario y horas trabajadas no tengan variaciones entre escenarios. Los tamaños de población en cada generación, poseen una variación más notoria en comparación a las variables ya mencionadas ya que el contrafactual entrega una mayor población en las generaciones 1 y 2;

y una menor en las generaciones 3 y 4. Esta diferencia, con respecto a las cantidades vistas en los datos, podría tener su explicación en el envejecimiento de la población.

# Anexo A

## Detalles del modelo

### A.1. Condiciones de la función de utilidad

La función de utilidad del consumo satisface las condiciones de Inada:

$$\begin{aligned}\lim_{c \rightarrow 0} u'(c) &= \lim_{c \rightarrow 0} c^{-\sigma} = \infty \\ \lim_{c \rightarrow \infty} u'(c) &= \lim_{c \rightarrow \infty} c^{-\sigma} = 0\end{aligned}$$

Además no incentiva que el consumo sea cercano a cero ya que en este caso la utilidad es cero.

$$\lim_{c \rightarrow 0} u(c) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{1-\sigma} c^{1-\sigma} = 0$$

Por lo tanto, se concluye que necesariamente el soporte de  $u(c)$  y el de  $u'(c)$  debe ser el intervalo  $(0, \infty)$ .

De forma análoga, la función de utilidad del trabajo satisface las condiciones de Inada:

$$\begin{aligned}\lim_{e \rightarrow 0} h'(e) &= \lim_{e \rightarrow 0} e^{-\eta} = \infty \\ \lim_{e \rightarrow \infty} h'(e) &= \lim_{e \rightarrow \infty} e^{-\eta} = 0\end{aligned}$$

Además no incentiva que el trabajo sea cercano a cero ya que en este caso la utilidad es cero.

$$\lim_{e \rightarrow 0} h(e) = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{1}{1-\eta} e^{1-\eta} = 0$$

Por lo tanto, se concluye que necesariamente el soporte de  $h(e)$  y el de  $h'(e)$  debe ser el intervalo  $(0, \infty)$ .

## A.2. Cálculo de los factores de descuento

Las utilidades a lo largo de la vida del individuo se escriben como:

$$V_{it} = \sum_{g=1}^{20} \beta^{g-1} U(c_{1it}, e_{1it}) + \sum_{g=21}^{40} \beta^{g-1} U(c_{2it}, e_{2it}) + \sum_{g=41}^{60} \beta^{g-1} U(c_{3it}, e_{3it}) + \sum_{g=61}^{80} \beta^{g-1} U(c_{4it}, e_{4it}),$$

donde  $i = \{a, m\}$  representa el sector. Dado que las utilidades son constantes dentro de cada periodo de la generación, la expresión anterior se puede escribir como:

$$\begin{aligned} V_{it} &= U(c_{1it}, e_{1it}) \sum_{j=0}^{19} \beta^j + U(c_{2it}, e_{2it}) \sum_{j=20}^{39} \beta^j + U(c_{3it}, e_{3it}) \sum_{j=40}^{59} \beta^j + U(c_{4it}, e_{4it}) \sum_{j=60}^{79} \beta^j \\ &= U(c_{1it}, e_{1it}) \left( \frac{1 - \beta^{20}}{1 - \beta} \right) + U(c_{2it}, e_{2it}) \left( \frac{\beta^{20} - \beta^{40}}{1 - \beta} \right) + \\ &\quad U(c_{3it}, e_{3it}) \left( \frac{\beta^{40} - \beta^{60}}{1 - \beta} \right) + U(c_{4it}, e_{4it}) \left( \frac{\beta^{60} - \beta^{80}}{1 - \beta} \right), \end{aligned}$$

donde  $\beta$  es el factor de descuento anual y se calcula como:

$$\beta = \frac{1}{(1 + r_f)},$$

donde  $r_f$  es la tasa de descuento anual libre de riesgo.

La expresión de  $V_{it}$  se puede reescribir como:

$$V_{it} = \left( \frac{1 - \beta^{20}}{1 - \beta} \right) \left\{ U(c_{1it}, e_{1it}) + \beta^{20} U(c_{2it}, e_{2it}) + \beta^{40} U(c_{3it}, e_{3it}) + \beta^{60} U(c_{4it}, e_{4it}) \right\},$$

donde el factor  $\left( \frac{1 - \beta^{20}}{1 - \beta} \right)$  es irrelevante para la optimización.

## A.3. Cálculo de la elección ocupacional

Despejando los consumos de bienes de las tres generaciones, el problema queda de la forma:

$$\begin{aligned} V_i(p) &= \max_{\left\{ \begin{array}{l} c_{1is}, c_{2is}, \\ c_{3is}, c_{4is}, \\ a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}, e_{2i}, e_{3i} \end{array} \right\}} \left\{ u(c_{1ig}^\theta c_{1is}^{1-\theta}) - \phi h(z_i(p)) + \beta^{20} [u(c_{2ig}^\theta c_{2is}^{1-\theta}) - \phi h(e_{2i})] + \beta^{40} [u(c_{3ig}^\theta c_{3is}^{1-\theta}) - \phi h(e_{3i})] + \beta^{60} u(c_{4ig}^\theta c_{4is}^{1-\theta}) \right\} \\ \text{s.a. :} &\quad sc_{1ig} = -c_{1is} - a_{1i} \\ &\quad sc_{2ig} = \omega_{2i} e_{2i} + a_{1i}(1 + r_g) - c_{2is} - a_{2i} \\ &\quad sc_{3ig} = \omega_{3i} e_{3i} + a_{2i}(1 + r_g) - c_{3is} - a_{3i} \\ &\quad sc_{4ig} = a_{3i}(1 + r_g) - c_{4is}. \end{aligned}$$

Dado que se tienen más variables a optimizar que restricciones presupuestarias, se calculan las condiciones de primer orden solo para los consumos de servicios, con el fin de encontrar una relación con los consumos de bienes y así poder disminuir la cantidad de variables.

$$\frac{\partial}{\partial c_{1is}} : \quad c_{1i}^{-\sigma} \left[ (1 - \theta) \left( \frac{c_{1is}}{c_{1ig}} \right)^{-\theta} - \frac{\theta}{s} \left( \frac{c_{1is}}{c_{1ig}} \right)^{1-\theta} \right] = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial c_{2is}} : \quad \beta^{20} c_{2i}^{-\sigma} \left[ (1 - \theta) \left( \frac{c_{2is}}{c_{2ig}} \right)^{-\theta} - \frac{\theta}{s} \left( \frac{c_{2is}}{c_{2ig}} \right)^{1-\theta} \right] = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial}{\partial c_{3is}} : \quad \beta^{40} c_{3i}^{-\sigma} \left[ (1 - \theta) \left( \frac{c_{3is}}{c_{3ig}} \right)^{-\theta} - \frac{\theta}{s} \left( \frac{c_{3is}}{c_{3ig}} \right)^{1-\theta} \right] = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial}{\partial c_{4is}} : \quad \beta^{60} c_{4i}^{-\sigma} \left[ (1 - \theta) \left( \frac{c_{4is}}{c_{4ig}} \right)^{-\theta} - \frac{\theta}{s} \left( \frac{c_{4is}}{c_{4ig}} \right)^{1-\theta} \right] = 0. \quad (\text{A.4})$$

De las ecuaciones (A.1), (A.2), (A.3) y (A.4) se deduce la siguiente relación para el consumo de bienes y servicios:

$$\frac{\theta}{1 - \theta} = s \frac{c_{1ig}}{c_{1is}} = s \frac{c_{2ig}}{c_{2is}} = s \frac{c_{3ig}}{c_{3is}} = s \frac{c_{4ig}}{c_{4is}}. \quad (\text{A.5})$$

Por lo tanto, el consumo total de la generación se puede expresar solo en función del consumo de servicios:

$$c_{Ti} = \left( \frac{\theta}{1 - \theta} \right)^{\theta} s^{-\theta} c_{Tis}, \quad (\text{A.6})$$

para  $T = \{1, 2, 3, 4\}$ .

Ahora el problema se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} V_i(p) = \text{máx} \{ & u \left( \left[ \frac{\theta}{1 - \theta} \right]^{\theta} s^{-\theta} c_{1is} \right) - \phi h(z_i(p)) + \beta^{20} \left[ u \left( \left[ \frac{\theta}{1 - \theta} \right]^{\theta} s^{-\theta} c_{2is} \right) - \phi h(e_{2i}) \right] \\ & + \beta^{40} \left[ u \left( \left[ \frac{\theta}{1 - \theta} \right]^{\theta} s^{-\theta} c_{3is} \right) - \phi h(e_{3i}) \right] + \beta^{60} u \left( \left[ \frac{\theta}{1 - \theta} \right]^{\theta} s^{-\theta} c_{4is} \right) \} \\ & \left. \begin{array}{l} \{ a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}, \\ e_{2i}, e_{3i} \} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s.a : c_{1is} &= -a_{1i}(1 - \theta) \\ c_{2is} &= [\omega_{2i}e_{2i} + a_{1i}(1 + r_g) - a_{2i}](1 - \theta) \\ c_{3is} &= [\omega_{3i}e_{3i} + a_{2i}(1 + r_g) - a_{3i}](1 - \theta) \\ c_{4is} &= a_{3i}(1 + r_g)(1 - \theta). \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial}{\partial a_{1i}} : \quad -c_{1i}^{-\sigma} (1 - \theta) s^{-\theta} \left[ \frac{\theta}{1 - \theta} \right]^{\theta} + \beta^{20} c_{2i}^{-\sigma} (1 + r_g) (1 - \theta) s^{-\theta} \left[ \frac{\theta}{1 - \theta} \right]^{\theta} = 0,$$



$$\frac{\partial}{\partial a_{2i}} : \quad -\beta^{20} c_{2i}^{-\sigma} s^{-\theta} \left[ \frac{\theta}{1-\theta} \right]^\theta (1-\theta) + \beta^{40} c_{3i}^{-\sigma} (1+r_g)(1-\theta) s^{-\theta} \left[ \frac{\theta}{1-\theta} \right]^\theta = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial a_{3i}} : \quad -\beta^{40} c_{3i}^{-\sigma} s^{-\theta} \left[ \frac{\theta}{1-\theta} \right]^\theta (1-\theta) + \beta^{60} c_{4i}^{-\sigma} (1+r_g)(1-\theta) s^{-\theta} \left[ \frac{\theta}{1-\theta} \right]^\theta = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial e_{2i}} : \quad \beta^{20} \left[ c_{2i}^{-\sigma} \omega_{2i} (1-\theta) s^{-\theta} \left[ \frac{\theta}{1-\theta} \right]^\theta - \phi e_{2i}^{-\eta} \right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial e_{3i}} : \quad \beta^{40} \left[ c_{3i}^{-\sigma} \omega_{3i} (1-\theta) s^{-\theta} \left[ \frac{\theta}{1-\theta} \right]^\theta - \phi e_{3i}^{-\eta} \right] = 0.$$

Reduciendo términos, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_{1i}} : \quad c_{1i} &= [\beta^{20}(1+r_g)]^{\frac{-1}{\sigma}} c_{2i}, \\ c_{1i} &= A c_{2i}. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Donde  $A = [\beta^{20}(1+r_g)]^{\frac{-1}{\sigma}}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_{2i}} : \quad c_{2i} &= \left[ \frac{\beta^{40}}{\beta^{20}} (1+r_g) \right]^{\frac{-1}{\sigma}} c_{3i}, \\ c_{2i} &= A c_{3i}, \end{aligned} \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_{3i}} : \quad c_{3i} &= \left[ \frac{\beta^{60}}{\beta^{40}} (1+r_g) \right]^{\frac{-1}{\sigma}} c_{4i}, \\ c_{3i} &= A c_{4i}, \end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial e_{2i}} : \quad e_{2i} = c_{2i}^{\frac{\sigma}{\eta}} \left[ (1-\theta) s^{-\theta} \left[ \frac{\theta}{1-\theta} \right]^\theta \frac{\omega_{2i}}{\phi} \right]^{\frac{-1}{\eta}}, \tag{A.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial e_{3i}} : \quad e_{3i} = c_{3i}^{\frac{\sigma}{\eta}} \left[ (1-\theta) s^{-\theta} \left[ \frac{\theta}{1-\theta} \right]^\theta \frac{\omega_{3i}}{\phi} \right]^{\frac{-1}{\eta}}. \tag{A.11}$$

Se observa que la expresión  $A$  depende del parámetro endógeno  $r_g$ .

Reemplazando los consumos de servicios en las condiciones encontradas se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial a_{1a}} : \quad -a_{1i}^* = A[\omega_{2i} e_{2i}^* + a_{1i}^*(1+r_g) - a_{2i}^*], \tag{A.12}$$

$\frac{\partial}{\partial a_{2i}}$  :

$$\omega_{2i}e_{2i}^* + a_{1i}^*(1 + r_g) - a_{2i}^* = A[\omega_{3i}e_{3i}^* + a_{2i}^*(1 + r_g) - a_{3i}^*], \quad (\text{A.13})$$

$\frac{\partial}{\partial a_{3i}}$  :

$$\omega_{3i}e_{3i}^* + a_{2i}^*(1 + r_g) - a_{3i}^* = A(1 + r_g)a_{3i}^*, \quad (\text{A.14})$$

$\frac{\partial}{\partial e_{2i}}$  :

$$e_{2i}^* = a_{3i}^{\frac{\sigma}{\eta}} [A^2(1 + r_g)]^{\frac{\sigma}{\eta}} \left(\frac{\omega_{2i}}{\phi}\right)^{\frac{-1}{\eta}} \left[ \left[\frac{\theta}{1 - \theta}\right]^{\theta} s^{-\theta} (1 - \theta) \right]^{\frac{\sigma-1}{\eta}}, \quad (\text{A.15})$$

$\frac{\partial}{\partial e_{3i}}$  :

$$e_{3i}^* = a_{3i}^{\frac{\sigma}{\eta}} [A(1 + r_g)]^{\frac{\sigma}{\eta}} \left(\frac{\omega_{3i}}{\phi}\right)^{\frac{-1}{\eta}} \left[ \left[\frac{\theta}{1 - \theta}\right]^{\theta} s^{-\theta} (1 - \theta) \right]^{\frac{\sigma-1}{\eta}}, \quad (\text{A.16})$$

sumando (A.12) con  $A$  veces (A.13) se tiene la relación:

$$-a_{1i}^* = A^2[\omega_{3i}e_{3i}^* + a_{2i}^*(1 + r_g) - a_{3i}^*]. \quad (\text{A.17})$$

Además sumando (A.17) con  $A^2$  veces (A.14) se tiene la relación:

$$-a_{1i}^* = A^3(1 + r_g)a_{3i}^*, \quad (\text{A.18})$$

reemplazando (A.18) en (A.12) se puede despejar  $a_{2i}^*$  en función de  $a_{3i}^*$ :

$$-a_{2i}^* = a_{3i}^* A^2(1 + r_g)[1 + A(1 + r_g)] - \omega_{2i}e_{2i}^*.$$

Ahora reemplazando los valores de  $a_{1i}^*$  y  $a_{2i}^*$  en función de  $a_{3i}^*$  en (A.17):

$$a_{3i}^* = \frac{\omega_{2i}e_{2i}^*(1 + r_g) + \omega_{3i}e_{3i}^*}{1 + A(1 + r_g) + A^2(1 + r_g)^2 + A^3(1 + r_g)^3}.$$

Para simplificar la expresión se define:

$$E = 1 + A(1 + r_g) + A^2(1 + r_g)^2 + A^3(1 + r_g)^3, \quad (\text{A.19})$$

$$a_{3i}^* = \frac{\omega_{2i}e_{2i}^*(1 + r_g) + \omega_{3i}e_{3i}^*}{E}.$$

Reemplazando este valor en  $a_{2i}^*$  se obtiene:

$$a_{2i}^* = \frac{\omega_{2i}e_{2i}^*[1 + A(1 + r_g)] - \omega_{3i}e_{3i}^*[A^2(1 + r_g) + A^3(1 + r_g)^2]}{E},$$

de la misma forma se obtiene una expresión para  $a_{1i}^*$ :

$$a_{1i}^* = -A^3(1 + r_g) \frac{\omega_{2i}e_{2i}^*(1 + r_g) + \omega_{3i}e_{3i}^*}{E}. \quad (\text{A.20})$$

Para reordenar  $a_{3i}^*$  en función de  $e_{2i}^*$  y  $e_{3i}^*$  se definen:

$$W_{2i} = \frac{\omega_{2i}(1+r_g)}{E},$$

$$W_{3i} = \frac{\omega_{3i}}{E}.$$

De esta manera se obtiene:

$$a_{3i}^* = W_{2i}e_{2i}^* + W_{3i}e_{3i}^*. \quad (\text{A.21})$$

Además se pueden simplificar las expresiones para  $e_{2i}^*$  y  $e_{3i}^*$  definiendo:

$$M_{2i} = [A^2(1+r_g)]^{\frac{\sigma}{\eta}} \left(\frac{\omega_{2i}}{\phi}\right)^{\frac{-1}{\eta}} \left[ \left[\frac{\theta}{1-\theta}\right]^\theta s^{-\theta} (1-\theta) \right]^{\frac{\sigma-1}{\eta}},$$

$$M_{3i} = [A(1+r_g)]^{\frac{\sigma}{\eta}} \left(\frac{\omega_{3i}}{\phi}\right)^{\frac{-1}{\eta}} \left[ \left[\frac{\theta}{1-\theta}\right]^\theta s^{-\theta} (1-\theta) \right]^{\frac{\sigma-1}{\eta}}.$$

Luego:

$$e_{2i}^* = M_{2i}a_{3i}^{\frac{\sigma}{\eta}},$$

$$e_{3i}^* = M_{3i}a_{3i}^{\frac{\sigma}{\eta}}.$$

De esta manera se puede despejar  $a_{3i}^*$  en función de términos conocidos:

$$a_{3i}^* = [W_{2i}M_{2i} + W_{3i}M_{3i}]^{\frac{\eta}{\eta-\sigma}}.$$

Finalmente:

$$e_{2i}^* = M_{2i}[W_{2i}M_{2i} + W_{3i}M_{3i}]^{\frac{\sigma}{\eta-\sigma}},$$

$$e_{3i}^* = M_{3i}[W_{2i}M_{2i} + W_{3i}M_{3i}]^{\frac{\sigma}{\eta-\sigma}},$$

$$a_{1i}^* = -A^3(1+r_g)[W_{2i}M_{2i} + W_{3i}M_{3i}]^{\frac{\eta}{\eta-\sigma}},$$

$$a_{2i}^* = \frac{[W_{2i}M_{2i} + W_{3i}M_{3i}]^{\frac{\sigma}{\eta-\sigma}}}{1+r_g} \left\{ W_{2i}M_{2i}[1 + A(1+r_g)] - W_{3i}M_{3i}[A^2(1+r_g)^2 + A^3(1+r_g)^3] \right\}.$$

Las funciones  $V_a(p)$  y  $V_m(p)$  con los óptimos son:

$$V_a(p) = u\left(-a_{1a}^*(1-\theta)\left[\frac{\theta}{1-\theta}\right]^\theta s^{-\theta}\right) - \phi h\left(z_a(p)\right)$$

$$+ \beta^{20} \left[ u\left([\omega_{2a}e_{2a}^* + a_{1a}^*(1+r_g) - a_{2a}^*](1-\theta)\left[\frac{\theta}{1-\theta}\right]^\theta s^{-\theta}\right) - \phi h\left(e_{2a}^*\right) \right]$$

$$+ \beta^{40} \left[ u\left([\omega_{3a}e_{3a}^* + a_{2a}^*(1+r_g) - a_{3a}^*](1-\theta)\left[\frac{\theta}{1-\theta}\right]^\theta s^{-\theta}\right) - \phi h\left(e_{3a}^*\right) \right]$$

$$+ \beta^{60} u\left(a_{3a}^*(1+r_g)(1-\theta)\left[\frac{\theta}{1-\theta}\right]^\theta s^{-\theta}\right),$$

$$V_m(p) = u\left(-a_{1m}^*(1-\theta)\left[\frac{\theta}{1-\theta}\right]^\theta s^{-\theta}\right) - \phi h\left(z_m(p)\right)$$

$$+ \beta^{20} \left[ u\left([\omega_{2m}e_{2m}^* + a_{1m}^*(1+r_g) - a_{2m}^*](1-\theta)\left[\frac{\theta}{1-\theta}\right]^\theta s^{-\theta}\right) - \phi h\left(e_{2m}^*\right) \right]$$

$$+ \beta^{40} \left[ u\left([\omega_{3m}e_{3m}^* + a_{2m}^*(1+r_g) - a_{3m}^*](1-\theta)\left[\frac{\theta}{1-\theta}\right]^\theta s^{-\theta}\right) - \phi h\left(e_{3m}^*\right) \right]$$

$$+ \beta^{60} u\left(a_{3m}^*(1+r_g)(1-\theta)\left[\frac{\theta}{1-\theta}\right]^\theta s^{-\theta}\right).$$

## A.4. Tablas de unidades

En las tablas siguientes se muestran las dimensiones de las expresiones relevantes del modelo. El subíndice *year* se refiere a que la unidad se mide a lo largo de un año.

Expresión	Definición	Unidad
$p$	Productividad	[adimensional]
$p_{min}$	Productividad mínima	[adimensional]
$\varphi$	Parámetro de forma Pareto	[adimensional]
$L_{2at}$	Trabajadores abstractos gen 2 en año $t$	[personas] <sub>year</sub>
$L_{3at}$	Trabajadores abstractos gen 3 en año $t$	[personas] <sub>year</sub>
$L_{2mt}$	Trabajadores manuales gen 2 en año $t$	[personas] <sub>year</sub>
$L_{3mt}$	Trabajadores manuales gen 3 en año $t$	[personas] <sub>year</sub>

Tabla A.1: Unidades del mercado laboral

Expresión	Definición	Unidad
$L_{1t}$	Individuos generación 1 en año $t$	[personas] <sub>year</sub>
$L_{2t}$	Individuos generación 2 en año $t$	[personas] <sub>year</sub>
$L_{3t}$	Individuos generación 3 en año $t$	[personas] <sub>year</sub>
$L_{4t}$	Individuos generación 4 en año $t$	[personas] <sub>year</sub>

Tabla A.2: Unidades de población

Expresión	Definición	Unidad
$n$	Duración carrera abstracta	[horas]
$m$	Duración carrera manual	[horas]
$\tau_a$	Extensión carrera abstracta	[horas]
$\tau_m$	Extensión carrera manual	[horas]

Tabla A.3: Unidades de educación

Expresión	Definición	Unidad
$U(\cdot, \cdot)$	Preferencia de la generación	[U.de utilidad = $\$^{1-\sigma}$ ]
$\sigma$	Aversión al riesgo del consumo	[adimensional]
$\eta$	Elasticidad Fritsch	[adimensional]
$u(\cdot)$	Preferencia de consumo	$[\$^{1-\sigma}]$
$h(\cdot)$	Preferencia de trabajo	[horas $^{1-\eta}$ ]
$\phi$	Peso relativo	$[\frac{\$^{1-\sigma}}{\text{horas}^{1-\eta}}]$
$V_a(p), V_m(p)$	Utilidades de vida	[U.de utilidad]

Tabla A.4: Unidades de preferencias

Expresión	Definición	Unidad
$c_T$	Consumo de la generación $T$	$[\$]_{\text{year}}$
$e_2$	Horas trabajadas en la segunda generación	$[\text{horas}]_{\text{year}}$
$e_3$	Horas trabajadas en la tercera generación	$[\text{horas}]_{\text{year}}$
$a_1$	Ahorro de la primera generación	$[\text{horas}]_{\text{year}}$
$a_2$	Ahorro de la segunda generación	$[\text{horas}]_{\text{year}}$
$a_3$	Ahorro de la tercera generación	$[\text{horas}]_{\text{year}}$
$c_g$	Consumo de bienes de la generación	$[\$]_{\text{year}}$
$c_s$	Consumo de servicios de la generación	$[\$]_{\text{year}}$
$s$	Precio de bienes relativo al de servicios	[adimensional]
$\theta$	Elasticidad consumo de bienes	[adimensional]

Tabla A.5: Unidades de óptimos

Expresión	Definición	Unidad
$Y_{gt}$	Producción anual de bienes	$[\$]_{\text{year}}$
$Y_{st}$	Producción anual de servicios	$[\$]_{\text{year}}$
$\gamma_2$	Factor de escala	$\left[\frac{\$}{\text{horas}}\right]_{\text{year}}$
$\gamma_3$	Factor de escala	$\left[\frac{\$}{\text{horas}}\right]_{\text{year}}$
$\alpha$	Eficiencia relativa	$\left[\frac{\$}{\text{horas}}\right]_{\text{year}}$
$H_{2at}$	Trabajo abstracto gen 2	$[\text{horas}]_{\text{year}}$
$H_{3at}$	Trabajo abstracto gen 3	$[\text{horas}]_{\text{year}}$
$H_{2mt}$	Trabajo manual gen 2	$[\text{horas}]_{\text{year}}$
$H_{3mt}$	Trabajo manual gen 3	$[\text{horas}]_{\text{year}}$
$l_{2at}$	Horas trabajadas abstracto gen 2	$[\text{horas}]_{\text{year}}$
$l_{3at}$	Horas trabajadas abstracto gen 3	$[\text{horas}]_{\text{year}}$
$l_{2mt}$	Horas trabajadas manual gen 2	$[\text{horas}]_{\text{year}}$
$l_{3mt}$	Horas trabajadas manual gen 3	$[\text{horas}]_{\text{year}}$
$k_t$	Capital anual	$[\$]_{\text{year}}$
$\varepsilon$	Elasticidad capital	[adimensional]

Tabla A.6: Unidades de producción

Expresión	Definición	Unidad
$r_t$	Tasa de descuento anual	[adimensional]
$\beta$	Factor de descuento	[adimensional]
$r_f$	Tasa de descuento libre de riesgo anual	[adimensional]

Tabla A.7: Unidades de factores de descuento

# Anexo B

## Escalamiento de variables del modelo

Para que los cálculos en Matlab tengan un bajo error, se adimensionaliza el modelo con el fin de que todas las variables y parámetros tengan una escala comparable entre sí. Esto se realiza normalizando las variables por una unidad base de horas trabajadas, salario, consumo y población que se definen a continuación:

- Horas base trabajadas en un año por abstractos generación 2 y 3 para año 1990

$$l_0 = 2.240 \left[ \frac{\text{horas}}{\text{year}} \right]$$

- Horas base trabajadas en un periodo (5 años)

$$e_0 = 5 * l_0 = 11.203 [\text{horas}]$$

- Salario por hora base 1990

$$\omega_0 = \omega_{m1990} = 4.349 \left[ \frac{\$}{\text{horas}} \right]$$

- Consumo base en un periodo

$$c_0 = e_0 \omega_0 = 48.730.809 [\$]$$

- Consumo base en un año

$$c_{\text{anual}} = l_0 \omega_0 = 9.746.161 [\$]$$

- Cantidad de trabajadores en 1990

$$L_0 = L_2 + L_3 = 1.443.038 [\text{personas}]$$

# Anexo C

## Detalle de participación de bienes en el consumo

Para encontrar el parámetro de participación de bienes en el consumo ( $\theta$ ) se utilizó el IPC enero 2019 base 2018, obtenido del INE. El archivo clasifica los bienes y servicios en 12 divisiones, de las cuales se extraen aquellos ítems que para esta tesis se clasifican como servicios, caracterizándose por ser ofrecidos por trabajo manual con baja intensidad de capital. A continuación, en la Tabla (C.1) se muestra un detalle de los ítems escogidos como servicios dentro de cada división.

La participación de bienes en el consumo se expresa como:

$$\frac{c_g}{c_g + c_s} = \theta.$$

Los servicios marcados con (\*) están ponderados por 0,3 y los con (\*\*), por 0,5 ya que también utilizan capital.

N	División	%Div.	Servicios	%.Serv.
1	<b>Alimentos y bebidas no alcohólicas</b>	19,3	-	0
2	<b>Bebidas alcohólicas y tabaco</b>	4,7	-	0
3	<b>Vestuario y calzado</b>	3,5	Limpieza y reparación de vestuario	0,06
4	<b>Vivienda y servicios básicos</b>	14,8	Servicios para la conservación y reparación de la vivienda	0,9
4			Servicio de retiro de basura	0,09
4			Servicio de alarma para la vivienda	0,08
5	<b>Equipamiento y mantención del hogar</b>	6,5	Bienes y servicios para la conservación del hogar	3,8
5			Servicio de reparación de muebles	0,02
5			Servicio doméstico	2,64
5			Servicio de reparación de línea blanca y electrodomésticos	0,04
6	<b>Salud</b>	7,7	Servicios paramédicos	0,9
7	<b>Transporte</b>	13,1	Servicio de mantención y reparación del automóvil	0,8*
7			Servicio de transporte multimodal	0,37*
7			Servicio de estacionamiento	0,08*
7			Servicio de transporte en bus interurbano	0,14*
7			Servicio de peaje	0,21*
7			Servicio de transporte en taxi	0,1*
7			Servicio de lavado del automóvil	0,01*
7			Servicio de transporte escolar	0,06*
7			Servicio de transporte en microbus	0,17*
7			Servicio de transfer	0,007*
8	<b>Comunicaciones</b>	5,45	-	0
9	<b>Recreación y cultura</b>	6,6	Servicios prestados por establecimientos culturales	0,24**
9			Servicios prestados por centros recreativos	0,04**
9			Servicio de revelado fotográfico	0,01**
9			Servicios de fiestas de cumpleaños	0,07**
10	<b>Educación</b>	6,7	Servicios de Educación pre - escolar y Enseñanza Básica	0,5
10			Servicio de Educación de Jardín Infantil	0,09*
10			Servicio de Educación 1er ciclo de Enseñanza Básica	0,19*
10			Servicio de Educación 2do ciclo de Enseñanza Básica	0,17*
11	<b>Restaurantes Y Hoteles</b>	6,38	-	0
12	<b>Bienes y servicios diversos</b>	5,15	Salones de peluquería y establecimientos de cuidados personales	0,4**
12			Servicio de fotocopiado	0,02**
12			Servicio notarial	0,009**
12			Servicio funerario	0,15**
12			Servicio de sala cuna	0,03**
-	<b>Total</b>	100	Servicios Manuales	12,56

Tabla C.1: Resumen participación servicios



# Bibliografía

- [1] Daron Acemoglu and Pascual Restrepo. The race between man and machine: Implications of technology for growth, factor shares, and employment. *American Economic Review*, 108(6):1488–1542, June 2018.
- [2] Ruben Ananias. Polarización del empleo y elección ocupacional en Chile. Master’s thesis, Universidad de Chile, 2018.
- [3] David Autor. The polarization of job opportunities in the us labor market: Implications for employment and earnings. *Center for American Progress and The Hamilton Project*, April 2010.
- [4] David H. Autor and David Dorn. The growth of low-skill service jobs and the polarization of the us labor market. *American Economic Review*, 103(5):1553–97, August 2013.
- [5] David H. Autor, Lawrence F. Katz, and Alan B. Krueger. Computing inequality: Have computers changed the labor market? *The Quarterly Journal of Economics*, 113(4):1169–1213, 1998.
- [6] Robert C. Feenstra, Robert Inklaar, and Marcel P. Timmer. The next generation of the penn world table. *American Economic Review*, 105(10):3150–82, October 2015.
- [7] Oded Galor and Omer Moav. Ability-biased technological transition, wage inequality, and economic growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 115(2):469–497, 2000.
- [8] Claudia Goldin and Lawrence Katz. *The Race Between Education and Technology*. Belknap Press for Harvard University Press, 2008.
- [9] Moshe Hazan. Longevity and lifetime labor supply: Evidence and implications. *Econometrica*, 77(6):1829–1863, 2009.
- [10] Gueorgui Kambovov and Iouri Manovskii. Occupational Mobility and Wage Inequality. *The Review of Economic Studies*, 76(2):731–759, April 2009.
- [11] Julian Messina, Ana Maria Oviedo, and Giovanni Pica. Job Polarization in Latin America. *Unpublished, World Bank, Washington, DC*, 2016.
- [12] Diego Restuccia and Guillaume Vandenbroucke. The Evolution of Education; A Macroeconomic Analysis. *International Economic Review*, 54:915–936, 2013.

[13] Achim Zeileis. *pwt9: Penn World Table (Version 9.1)*, 2017. R package version 9.0-0.