



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

POTENCIALES NN DE INVERSIÓN A ENERGÍAS SOBRE EL UMBRAL DE
PRODUCCIÓN DE PIONES

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS, MENCIÓN FÍSICA

NELSON ANTONIO ADRIAZOLA JEREZ

PROFESOR GUÍA:
HUGO ARELLANO SEPULVEDA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
FRANCISCO BRIEVA RODRÍGUEZ
MARCELO LOEWE LOBO
ARNAU RIOS HUGUET
JOSÉ BAREA MUÑOZ

SANTIAGO DE CHILE

2019

-

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS, MENCIÓN FÍSICA
POR: NELSON ANTONIO ADRIAZOLA JEREZ
FECHA: 2019
PROF. GUÍA: HUGO ARELLANO SEPULVEDA

POTENCIALES NN DE INVERSIÓN A ENERGÍAS SOBRE EL UMBRAL DE PRODUCCIÓN DE PIONES

La construcción de interacciones nucleón–nucleón (NN) constituye uno de los problemas abiertos y de mayor interés en la física nuclear, siendo fundamental para estudios microscópicos y *ab-initio* de sistemas nucleares de pocos, muchos e infinitos cuerpos. Muchos de estos desarrollos se centran en potenciales realistas, los cuales se basan en teorías de intercambio de mesones, dando cuenta de las amplitudes de scattering a energías de laboratorio de hasta 300 MeV, además de propiedades estáticas del deuterón. En este rango de energías la interacción es hermítica, consistente con el hecho de que las colisiones NN son elásticas. A energías sobre la barrera de producción de piones la interacción es inelástica, abriéndose canales de producción de mesones. Información sobre la apertura de canales inelásticos se puede resumir mediante corrimientos de fase complejos, disponibles en el *Data Analysis Center* del *Institute for Nuclear Studies* de la Universidad George Washington, en EEUU. En este trabajo de tesis se construyen interacciones separables que dan cuenta en forma exacta de la amplitud de scattering hasta energías de laboratorio de 1.6 GeV, incluyendo inelasticidades en los canales acoplados y no acoplados. Luego de una introducción, la segunda parte de este trabajo se focaliza en el estudio de canales no acoplados considerando la superposición de un potencial realista con uno separable. Ello a fin de retener las características de la interacción NN realista a distancias largas y medianas, donde parte importante de la física de intercambio de mesones está bien fundamentada. Los factores de forma calculados permiten una reproducción exacta de los corrimientos de fase, incluyendo inelasticidades. Estos factores de forma se manifiestan principalmente a altos momenta, lo que incide en el comportamiento de la fuerza NN a cortas distancias. En la tercera y cuarta parte de este trabajo se estudian potenciales de inversión estrictamente separables tanto para canales acoplados como no acoplados. En ambos casos se obtienen soluciones que reproducen en forma exacta la amplitud de scattering en todo un rango de energía pre-establecido (1.6 GeV). Si bien el corrimiento de fase en el canal 3S_1 tiende a π cuando la energía tiende a cero, las soluciones de inversión que reproducen el continuo no dan cuenta del estado ligado del deuterón. Sin embargo se ha logrado dar cuenta del deuterón incrementando la interacción separable en un rango, sin alterar la solución en el continuo. Los potenciales NN obtenidos en este trabajo pueden ser aplicados a cálculos microscópicos de potenciales ópticos nucleón–núcleo a energías relativistas, o en aplicaciones de materia nuclear a altas densidades, como es el caso de estrellas de neutrones.

*Dedicado a Profesor Ruben Cortes,
quien vio una oportunidad donde siquiera yo la había visto.*

Agradecimientos

A mi familia, en especial a la mujer que amo y quien me ha apoyado en este como en tantos otros procesos.

A los amigos y colegas, por las conversaciones en donde siempre se pudieron rescatar buenas ideas y en el peor de los casos, olvidarse de las malas.

Al profesor tutor Hugo Arellano, por permitirme trabajar con él, por enseñarme, apoyarme y transmitirme la gran pasión por la investigación de forma rigurosa y elegante.

Al profesor Francisco Brieva por su apoyo crítico y constructivo al momento de presentarle mi trabajo.

Tabla de Contenido

Introducción	1
1. La interacción nucleón-nucleón	3
1.1. Potenciales de inversión	7
1.2. Corrimientos de fase y matriz de scattering	8
1.3. Modelos nucleares vs fenomenología	12
2. El problema de dos potenciales	18
2.1. Marco teórico	18
2.1.1. Resultados	21
2.1.2. Factores de forma en espacio de momentum	25
3. Soluciones separables para canales no acoplados	29
3.1. Marco teórico	29
3.2. Resultados	34
3.2.1. Factores de forma en espacio de momentum	38
3.2.2. Relación de unitariedad de la matriz T	42
3.2.3. Corrimientos de fase	43
3.2.4. Comparación con Kwong y Köhler	43
4. Soluciones separables para canales acoplados	46
4.1. Marco teórico	46
4.2. Resultados	51
4.2.1. El canal 3SD_1	58
4.2.2. Estados ligados	60
Resumen y conclusiones	67
Bibliografía	75
Anexo A	76

Índice de Tablas

1.1. Estados nucleón-nucleón en base S, T y J	11
3.1. <i>Scattering lenght</i> canal 1S_0	36
3.2. <i>Scattering lenght</i> canal 3S_1	36

Índice de Ilustraciones

1.1. Interacción NN local descrita por intercambio de mesones	3
1.2. Corrimientos de fase de potenciales realistas.	4
1.3. Contribuciones <i>chirales</i> hasta cuatro cuerpos.	5
1.4. Apertura de canales en interacción NN	6
1.5. Matriz S y absorción $1-\eta$, para canales no acoplados con momentum angular total $J \leq 2$	10
1.6. Corrimiento de fase, para canales no acoplados $^1S_0, ^1P_1, ^1D_2, ^1F_3, ^3P_1$ y 3P_0	14
1.7. Corrimiento de fase, para canales acoplados 3SD_1 y 3PF_2	15
1.8. Matriz de scattering $t(k, k, \omega = k)$, canales no acoplados $^1S_0, ^1P_1, ^1D_2, ^1F_3, ^3P_1$ y 3P_0	16
1.9. Matriz de scattering $T(k, k, \omega = k)$, para canales acoplados 3SD_1 y 3PF_2	17
2.1. Potencial $V = V_{AV18} + \xi\rangle\langle\xi $, para el canal 1D_2	23
2.2. Matriz de scattering on-shell $\langle k T(\omega = k^2) k\rangle$, para los canales no acoplados 1S_0 y 1D_2	25
2.3. Corrimientos de fase e inelasticidades, obtenidos con $\hat{V} = \hat{v}_{18} + \xi\rangle\langle\xi $, para los canales no acoplados 1S_0 y 1D_2	26
2.4. Componentes reales de factores de forma para canales no acoplados con momentum angular total $J \leq 7$	27
2.5. Componentes imaginarias de factores de forma, para canales no acoplados con momentum angular total $J \leq 7$	28
3.1. Factor de forma al cuadrado y corrimiento de fase, para el canal 1S_0	31
3.2. Esquema de una estructura de baldosas, para solución separable de rango 3.	34
3.3. Efecto de los Reguladores en el factor de forma y corrimiento de fase, para el canal 1S_0	35
3.4. Corrimiento de fase a bajas energías, para canal 1S_0	36
3.5. Componentes reales de factores de forma, para canales con momentum angular total $J \leq 7$	39

3.6. Componentes imaginarias de factores de forma, para canales con momentum angular total $J \leq 7$	40
3.7. Estructura de baldosas para potencial separable en espacio de momentum, para el canal 1D_2	41
3.8. Corrimiento de fase obtenido con Argonne v_{18} y $ \xi\rangle\langle\xi $, para canales no acoplados 1S_0 y 1D_2	43
3.9. Comparación de $f(k)$, con el obtenido por Kwong y Köler	45
4.1. Matriz de scattering on-shell y corrimiento de fase, para canal acoplado 3PF_2	48
4.2. Componente real de los factores de forma f_a y f_b , para los canales acoplados con momentum angular total $J \leq 7$	54
4.3. Componente imaginaria de los factores de forma f_a y f_b , para canales acoplados con momentum angular total $J \leq 7$	55
4.4. Corrimiento de fase, para los canales acoplados 3P_2 3F_2	57
4.5. Esquema de baldosas para el pseudo-potencial $\text{Re} \langle k \tilde{a}\rangle\langle a k\rangle$ en canal 3PF_2	57
4.6. Corrimiento de fase canales, para los canales acoplados 3S_1 y 3D_1	58
4.7. Factor de forma del canal a , en el estado acoplado 3SD_1	60
4.8. Corrimiento de fase e inelasticidad, para los canales acoplados 3S_1 3D_1	61
4.9. Determinante de $(1 - \hat{V}\hat{G}_0(\omega))$ en el plano complejo ω , para el canal 3S_1	62
4.10. Factor de forma $ \eta\rangle$ para el canal a , en el 3S_1	64
4.11. Determinante de $(1 - \hat{V}\hat{G}_0(\omega))$ en el plano complejo ω , para el canal 3SD_1	65
4.12. $1/ \det(1 - \hat{V}\hat{G}(\omega)) $, en el plano complejo ω , para el canal 3SD_1	66

Introducción

Un supuesto básico en física nuclear es que el comportamiento de sistemas de muchos nucleones puede ser descrito a partir de la interacción entre dos nucleones en el vacío. En esta línea, desde un enfoque no relativista, los potenciales realistas constituyen una herramienta muy útil para la descripción microscópica de diversos procesos. Una característica importante de estos potenciales realistas es que ellos dan cuenta de amplitudes de scattering nucleón-nucleón (NN) para haces de nucleones de hasta ≈ 300 MeV, además de propiedades estáticas del deuterón. Más allá de esta energía, estos potenciales dejaron de ser fiables y su uso constituye una extrapolación de calidad difícilmente cuantificable.

En este trabajo se desarrolla la construcción de una interacción NN que permita reproducir, en forma exacta, las amplitudes de scattering NN hasta energías del orden de los GeV. El siguiente enfoque agrega un término separable al potencial realista que da cuenta controladamente de las características de la interacción NN a alcances medianos y largo. Esta es una característica importante que se busca retener en la construcción propuesta.

Actualmente muchos estudios se han focalizado en interacciones realistas del tipo chiral. Estos se basan en teorías de campo efectivas con grados de libertad hadrónicos. También corresponde mencionar modernos potenciales NN derivados de teorías de intercambio de mesones, como lo son el potencial de Paris [51], el potencial de Bonn [53], el potencial de Nijmegen [65], el potencial v_{18} de Argonne (AV18) [72], entre otros. Como ya se mencionó, estos potenciales dejan de ser fiables para energías de laboratorios sobre 300 MeV.

En este trabajo se construirá un potencial separable en presencia de un potencial de referencia, los cuales reproducen en forma exacta la amplitud de scattering sobre la barrera de producción de piones. Lo anterior en el marco de la ecuación de Schrödinger para dos partículas de igual masa [45]. La característica de las soluciones, a diferencia de otros trabajos [66], es que ellas dan cuenta de procesos inelásticos en scattering NN . Además, los factores de forma de las soluciones separables no dependen de la energía. En este sentido, ellas pueden ser usadas en un marco de Brueckner-Hartree-Fock [9] para el estudio de materia nuclear

infinita. Por lo mismo, esta construcción permitiría el estudio de materia nuclear a altas densidades.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera. En el capítulo I se discuten aspectos de potenciales de inversión, la relación de corrimiento de fase con la matriz de scattering y aspectos relevantes de modelos nucleares y fenomenología. En el capítulo II se discute y resuelve un potencial estrictamente separable para canales no acoplados, el cual es agregado a un potencial denominado realista. Por otro lado en el capítulo III se obtiene un potencial separable en canales no acoplados, sin considerar un potencial de referencia, el cual es obtenido mediante inversión. En la misma línea, en el capítulo IV se construye un potencial separable para canales acoplados. En los esquemas mencionados anteriormente, se logra describir la amplitud de scattering y el estado ligado que da cuenta del deuterón.

A lo largo del desarrollo del presente escrito se hace uso de términos ingleses sin escribirlos en itálico, debido a su uso habitual en física nuclear. Tal es el caso del término 'scattering' para referirse a colisiones, o del termino 'on-shell' para referirse a la capa de energía. Cabe señalar además, que a pesar de escribir el trabajo de tesis en español, se utilizan puntos (.) en vez de comas (,) para hacer referencia a números decimales, con el objetivo de evitar confusiones en la lectura del trabajo.

Capítulo 1

La interacción nucleón-nucleón

Tradicionalmente los potenciales teóricos se construyen en el marco de la teoría de campos, inicialmente propuesta por Hideki Yukawa en 1935 [73], lo que tiene por objetivo describir las interacciones nucleares fuertes mediante el intercambio de partículas masivas denominadas mesones. En efecto, la interacción a largo alcance resulta bien descrita por intercambio de piones. La interacción de alcance intermedio, a distancias internucleón entre 1 y 2 fm, se entiende mediante el intercambio de mesones escalares σ y la interacción de corto alcance por el intercambio de mesones pesados (ω , ρ), como ilustramos en la Fig. 1.1.

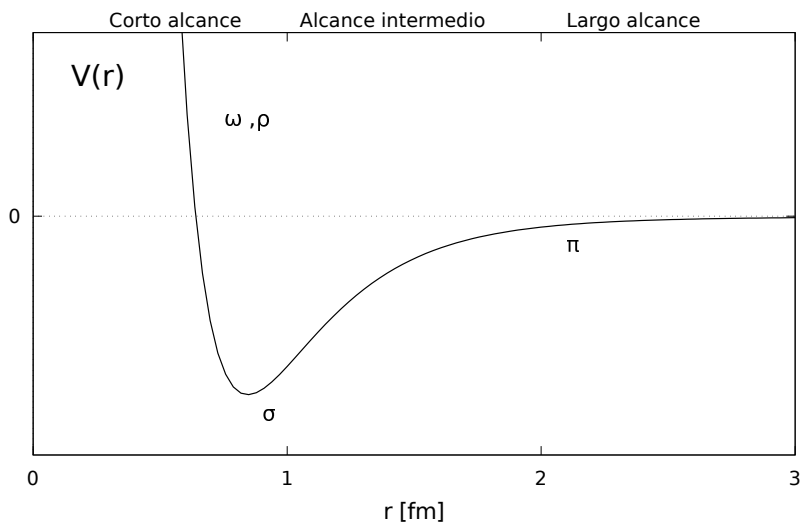


Figura 1.1: Esquema de una interacción NN local descrita por intercambio de mesones.

Los potenciales NN se consideran realistas si pueden dar cuenta de los observables de scattering NN y propiedades del deuterón. Estos son desarrollados hasta energías en el sistema de laboratorio del orden de 300 MeV. Dichos potenciales consisten en modelos no relati-

vistas, aunque pueden contener correcciones relativistas del tipo cinemático. Estos además son hermíticos, dado que bajo 300 MeV la energía disponible en el sistema de centro de momentum se encuentra bajo el umbral de producción mesones livianos (piones). Entre los potenciales modernos se cita el potencial de Paris (1980) [51], el potencial de Bonn(1987) [53], el potencial de Nijmegen(1994)[65], el potencial v_{18} de Argonne (AV18)(1995) [72] entre otros. Todos ellos son ajustados a los datos de scattering NN y propiedades del deuterón, logrando chi-cuadrados (χ^2) óptimos menores a 1.09 Ref. [72] . En la Fig. 1.2 se grafican los corrimientos de fase en función de la energía de laboratorio E, para el estado 1S_0 . En este gráfico se incluyen los potenciales N3LO (línea continua), AV18 (línea segmentada), Paris (línea punteada), Bonn (línea segmentada con punto) y Nijmegen I (línea segmentada con dos puntos).

Observamos que a energías de laboratorio inferiores a 250 MeV, los corrimientos de fase calculados con cada potencial son comparables. Las diferencias con el potencial de Paris se explica por no utilizar la misma base de datos en sus ajustes.

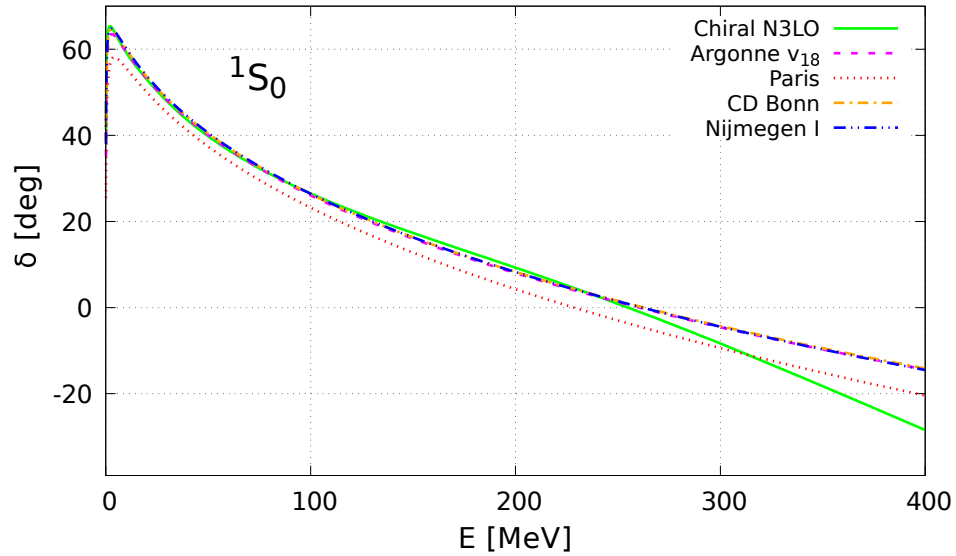


Figura 1.2: Corrimientos de fase calculados utilizando potenciales N3LO, AV18, Paris, CD Boon y Nijmegen I.

Esfuerzos recientes se han centrado en describir las interacciones entre nucleones en el marco de Cromodinámica Cuántica (QCD), conduciendo a lo que actualmente se denomina potenciales *chirales* [57]. Dado que QCD no es perturbativo, se introduce una teoría de campos quiral efectiva *chirales* (χ EFT) [29] con grados de libertad hadrónicos y construido por los rompimientos espontáneos de simetrías *chirales*. En χ EFT se considera la forma más general del lagrangiano efectivo de Goldstone para bosones y nucleones consistentes con las simetrías de QCD. El enfoque de la teoría efectiva de campo organiza las posibles contribuciones al potencial NN de una forma sistemática, obteniendo una jerarquía entre

dichas contribuciones que fueron demostradas por Weinberg [70] y Van Kolck [68]. Dichas contribuciones son del orden $(Q/\Lambda)^\nu$, donde $Q \approx M_\pi$ y $\Lambda \approx 1$ GeV. Aquí la escala del rompimiento de simetría chiral Λ y ν se refiere al orden de la contribución, siendo para la menor contribución $\nu = 0$, denominándose *LO*. Aumentando así el orden de las contribuciones a *NLO* $((Q/\Lambda)^2)$, *N²LO* $((Q/\Lambda)^3)$ [30] y *N³LO* $((Q/\Lambda)^4)$ [27], permitiendo describir interacciones de varios cuerpos como se resume en la Fig. 1.3 y se detalla en [16].

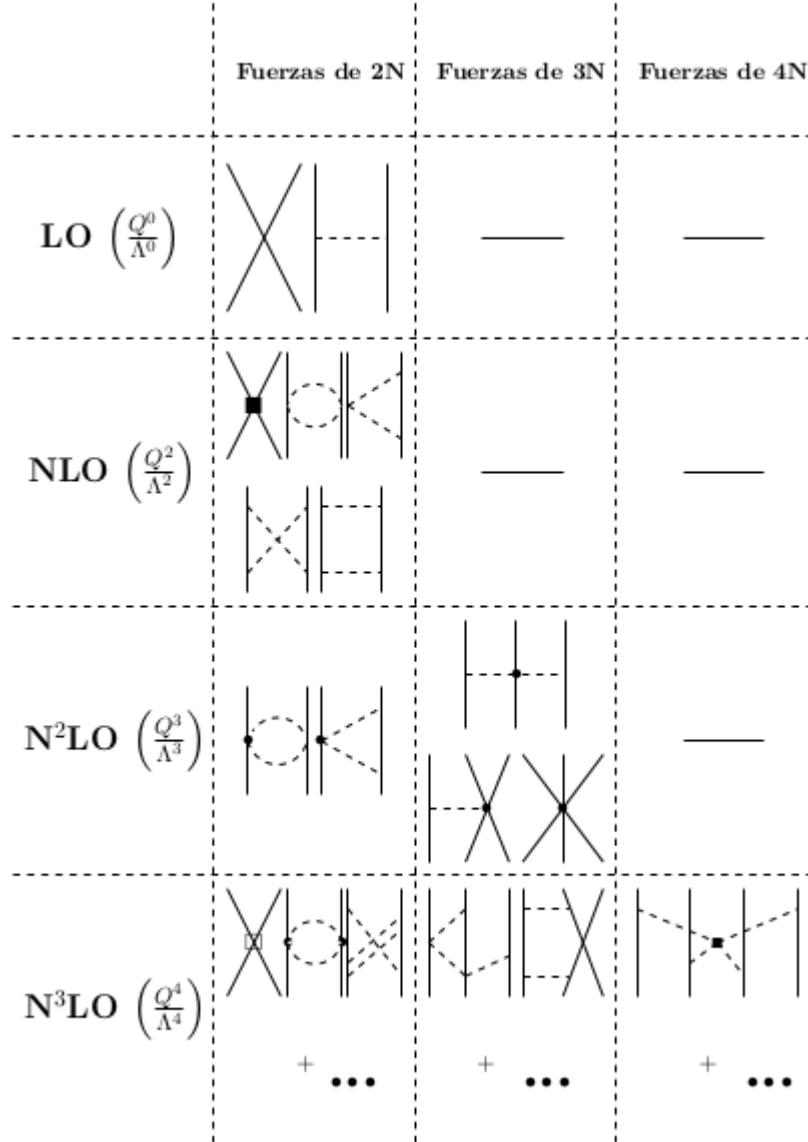


Figura 1.3: Contribuciones *chirales* hasta cuatro cuerpos, Los círculos y cuadrados representan la naturaleza del vértice. Las líneas sólidas representan nucleones y las líneas punteadas el intercambio de piones.

Pese a los grandes avances en la descripción del scattering *NN* a energías de laboratorio inferiores a ~ 300 MeV, no hay modelo capaz de describir la interacción a energías mayores. Una de las características de la colisión entre nucleones a altas energías es la producción de

mesones, los cuales se ilustran en la Fig. 1.4 adaptada del trabajo de Funk, *et al.* [36]. De esta figura se observa que hasta 1.6 GeV se abren a lo menos diez canales, siendo el más bajo $NN\pi^0$ y $NN\pi^\pm$.

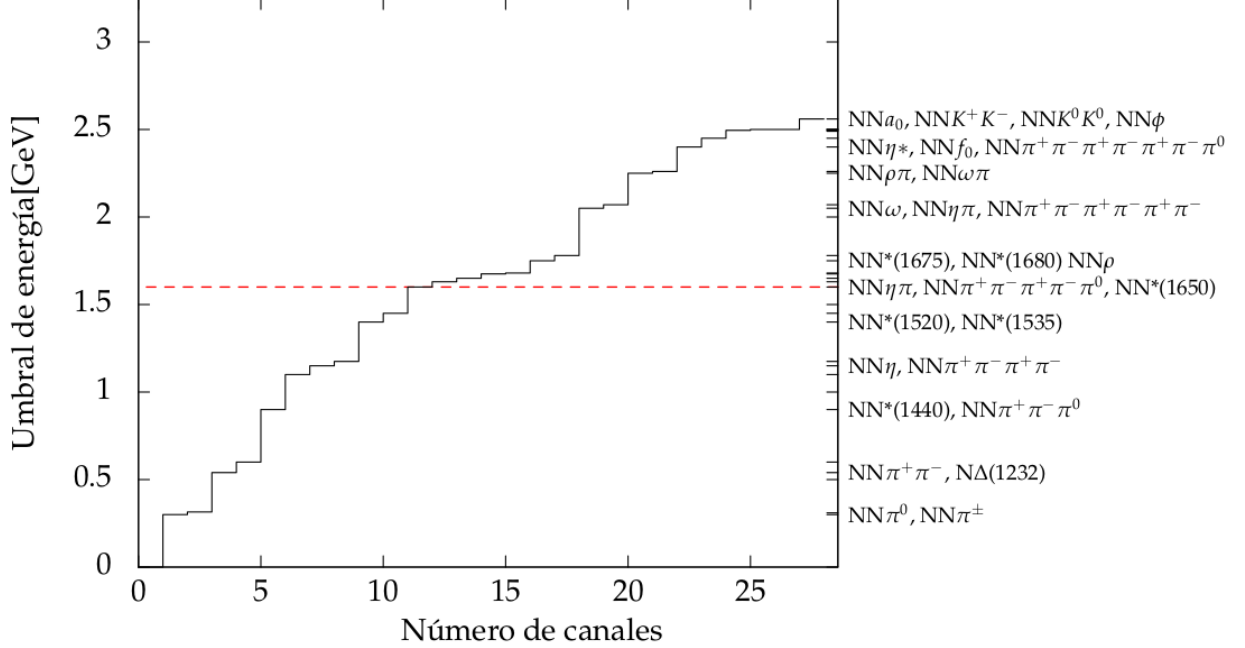


Figura 1.4: Apertura de canales en interacción NN en el umbral de energías hasta 3 GeV en el sistema de laboratorio (eje vertical) en función de los números de canales que se vuelven disponibles (eje horizontal).

Estudios realizados por Kok y Van Haeingen en los años 80 [49] buscaban dar cuenta de las absorciones en la interacción NN , a través de un potencial separable no hermítico y dependiente de la energía. De igual forma, Cassing *et al.* [22] estudió la necesidad de un potencial complejo no local, caracterizado por una interacción coulombiana y una componente imaginaria, para analizar las simetrías de la matriz S . De esto hace referencia la teoría de potenciales ópticos presentada por Feshbach [34] como necesaria para describir las absorciones en las interacciones. Sin embargo, todavía se consideraba su investigación incompleta, ya que un potencial complejo no era adecuado para describir las interacciones entre nucleones debido a que en sus resultados a bajas energías se perdía la unitariedad de la matriz S .

1.1. Potenciales de inversión

Uno de los pioneros en proponer un método de inversión a un problema físico fue Lord Rayleigh [52], en 1877 buscando las distribuciones de densidades en una cuerda a partir de las frecuencias de vibración. En el año 1931 Rydberg construye un potencial a partir de espectros moleculares observados. Motivados por este desarrollo, Miller [58], Buck y Pauli [21], Boyle [19], entre otros, se plantearon la búsqueda de un potencial interpartícula a partir de los datos de scattering.

En el año 1947, Fröberg [35] abre una nueva línea de investigación comenzando de la ecuación radial de Schrödinger para la construcción de un potencial central en base a los datos del corrimiento de fase para un momentum angular dado. Tal potencial fue introducido por Hylleraas [42], y más tarde fue debatido por Bargmann [12]

Jost y Kohn [44] en 1952 y luego Gel'fand y Levitan [38] y en paralelo, Marchenko [54] construyen un potencial con datos de corrimiento de fase y los estados ligados para un momentum angular y energía dada. En 1970 Degasperis [25] generaliza estos métodos a un marco relativista, para ondas S en el marco de la ecuación de Klein-Gordon. El problema de esta ecuación es que surgen densidades de probabilidades negativas.

Con respecto a los potenciales no centrales, se destacan los trabajos realizados por Kay y Moses [46] en una dimensión, Faddeev [33] en dos dimensiones y Faddeev [32] al igual que Newton [60] para tres dimensiones, métodos que fueron dejados de lado, al no saber tratar las singularidades del problema. Así la forma de un potencial no central obtenido por inversión se restringe a aproximaciones, las cuales no reproducen los datos del fenómeno. Así mismo, Gourdin y Martin [55], muestran que la inversión de un potencial se facilita al utilizar un potencial separable para describir la interacción de dos cuerpos, como también el de muchos cuerpos, debido a las simplezas para resolver la ecuación de Schrödinger y de Faddeev, respectivamente.

También entre los diversos trabajos realizados por von Geramb *et al.* [69], se encuentra el de generar un potencial de inversión en espacio de coordenada que da cuenta de las inelasticidades y pérdidas de flujo en el contexto de la ecuación de continuidad. Tales potenciales de inversión dependen de la energía. Además, en trabajos realizados por V. A. Knyrel *et al.* [48] también describen las interacciones NN a través de un potencial complejo hasta energías en el sistema de laboratorio de 3 GeV, logrando reproducciones precisas de observables NN .

Actualmente, han ocurrido desarrollos importantes en el marco de inversión denominado

J-matriz [62, 56], las cuales consisten en representar la interacción separable a través de matrices en bases de osciladores para cada onda parcial. Su uso ha permitido el estudio de núcleos livianos en modelos "no-core shell". También se ha trabajado dicho potencial en su versión no local [56], reproduciendo el punto de saturación de materia nuclear Ref. [63]

1.2. Corrimientos de fase y matriz de scattering

Considerando la colisión entre dos nucleones, la relación entre el corrimiento de fase (δ) y los elementos on-shell de la matriz T en ondas parciales [61] es

$$S_l(k) = e^{2i\delta_l(k)}, \quad (1.1)$$

$$S_l(k) = 1 - 2iT_l(k, k; E_k). \quad (1.2)$$

En colisiones elásticas entre nucleones, el corrimiento de fase δ_l es real, consistente con la unitariedad de la matriz S en un régimen de energías bajo el umbral de producción de piones.

En este trabajo haremos uso de la base de datos disponible en el Centro de Análisis de Datos (DAC) del Instituto de Estudios Nucleares (INS) de la Universidad de George Washington (GWU) en Virginia, EE.UU. [1]. Este es un programa iniciado por Richard Arndt en los años 80, inicialmente identificado como *SAID* (Scattering Analysis Interactive Dial-in). En adelante nos referiremos a esta base de datos como *SAID*. En el sitio web <http://gwdac.phys.gwu.edu>, el grupo de física nuclear mantiene accesible una base de datos para amplitudes de scattering NN en el rango de energías entre 0 y 3 GeV, en el cual también se tiene acceso al análisis de corrimientos de fase para todos los estados NN con momentum angular total J inferiores a 8.

Siguiendo la notación de *SAID*, la matriz S para canales no acoplados esta representada por [37]

$$S_l(k) = \eta_l(k)e^{2i\delta_l(k)}. \quad (1.3)$$

Para procesos elásticos $\eta_l = 1$, mientras que en regímenes inelásticos $\eta_l < 1$.

Siguiendo la convención de Arndt *et al.* [7], la matriz S se puede representar en términos de la matriz K (denotada K_4)

$$S = (1 + iK_4)(1 - iK_4)^{-1}, \quad (1.4)$$

$$K_4(k) = \text{Re}[K_4(k)] + i\text{Im}[K_4(k)]. \quad (1.5)$$

Esta matriz K_4 se parametriza como

$$K_4(k) = \tan \delta(k) + i \tan^2(\rho(k)), \quad (1.6)$$

donde $\delta_l(k)$ es el corrimiento de fase y $\rho_l(k)$ representa la inelasticidad.

En el caso de los estados de espín $S = 1$, nos encontramos con canales que acoplan dos estados de momentum angular orbital, $L_{\pm} = J \pm 1$. Tal es el caso del canal deuterón para el cual su espín total $S = 1$, isospín $T = 0$ y momentum angular total es $J = 1$. Los dos estados de momentum angular orbital son $L_- = 0$ y $L_+ = 2$, correspondientes a sus canales S y D, respectivamente. Siguiendo la Ref. [7] la representación de la matriz K_4 en el caso de los canales acoplado viene dada por

$$Re[K_4(k)] = i[1 - S_6(k)][1 + S_6(k)]^{-1}, \quad (1.7)$$

donde

$$S_6(k) = \begin{pmatrix} \cos 2\varepsilon(k)e^{2i\delta_-(k)} & i \sin 2\varepsilon(k)e^{i\{\delta_-(k)+\delta_+(k)\}} \\ i \sin 2\varepsilon(k)e^{i\{\delta_-(k)+\delta_+(k)\}} & \cos 2\varepsilon(k)e^{2i\delta_+(k)} \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Para la parte imaginaria se define

$$Im[K_4(k)] = \begin{pmatrix} \tan^2 \rho_-(k) & \tan \rho_-(k) \tan \rho_+(k) \cos \mu(k) \\ \tan \rho_-(k) \tan \rho_+(k) \cos \mu(k) & \tan^2 \rho_+(k) \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

En estas ecuaciones, δ_{\pm} representa el corrimiento de fase para el canal $L_{\pm} = J \pm 1$, respectivamente. Al igual que en los canales no acoplados, ρ_{\pm} denota las inelasticidades correspondientes. En este caso se hace uso del parámetro de acoplamiento (*mixing parameter*). Toda esta construcción coincide con la de Blatt y Biedenharn [14] en el límite de $\rho_{\pm} = 0$, existiendo discusiones sobre sus ventajas y desventajas [23]. Estos seis parámetros: $(\delta_{\pm}, \varepsilon)$ y (ρ_{\pm}, μ) son accesibles, desde la base de datos de SAID. La representación de la matriz S en la Ec. (1.4) es consistente con la adoptada por Stapp [39].

En la Fig. 1.5 graficamos la matriz S (lado izquierdo de la figura) en función de la energía en el sistema de laboratorio, para los canales $^1S_0, ^1P_1, ^1D_2, ^3D_2, ^3P_0$ y 3P_1 . La parte real de S se denota con líneas continuas, mientras que la parte imaginaria se representa con líneas segmentadas. Se usa línea gruesa para el caso en que se incluyen inelasticidades. En esta figura se incluyen barras para representar $1 - \eta$ (lado derecho de la figura), correspondientes a la absorción. Notamos que, con la excepción del estado 3D_2 , esta se manifiesta a partir de los 300 MeV. Al comparar las curvas gruesas con las delgadas correspondientes a los casos $\rho \neq 0$ y $\rho = 0$, respectivamente, observamos importantes diferencias en la matriz S para los canales 1P_1 y 1D_2 . Esto nos indica, que para tales canales la inclusión de la inelasticidad es importante. El resto de los canales también exhiben alguna diferencia, pero ella es moderada.

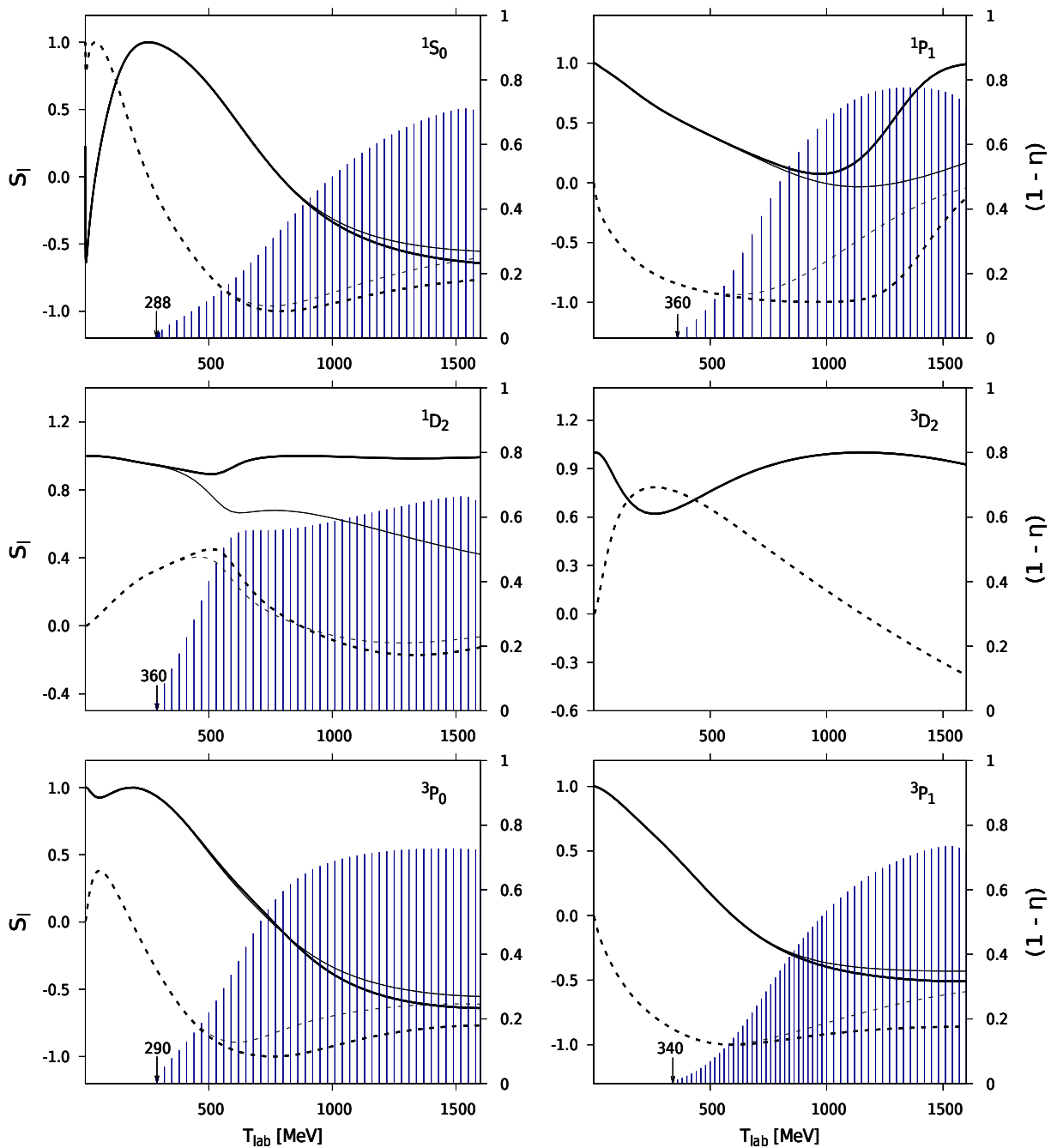


Figura 1.5: Matriz S y absorción $1 - \eta$ para los estados 1S_0 , 1P_1 , 1D_2 , 3D_2 , 3P_0 y 3P_1 .

En un sentido estricto los corrimientos de fase no son observables. Ellos son obtenidos a fin de reproducir en forma óptima la sección eficaz diferencial de scattering ($d\sigma/d\Omega$) experimental. En el caso particular de colisiones entre partículas sin espín la relación entre ($d\sigma/d\Omega$) en el centro de momentum (c.m.), y los corrimientos de fase δ_l está dada por

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{1}{k^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l(k)} \sin \delta_l(k) P_l(\cos \theta) \right|^2, \quad (1.10)$$

donde k representa el momentum relativo en el c.m. y P_l al polinomio de Legendre de orden l . Aquí l representa el momentum angular orbital y θ el ángulo de deflección en el c.m. Para el caso de partículas con espín, esta expresión toma una forma similar pero algo más elaborada.

En la práctica, dada una sección eficaz ($d\sigma/d\Omega$) observada a cierta energía, se busca el conjunto de parámetros δ_l (reales si $E \lesssim 300$ MeV) que reproducen ($d\sigma/d\Omega$) en forma óptima. Este análisis se lleva a cabo a distintas energías para así obtener $\delta_l(E)$. A energías sobre la barrera de producción de mesones, la restricción de que el corrimiento de fase sea real es relajada, permitiendo soluciones complejas. A fin de facilitar la lectura de esta tesis, en la tabla 1.1 listan todos los estado NN con $J \leq 7$. Ellos son 16 canales no acoplados, y 7 canales acoplados.

		$T = 1$		$T = 0$		
S	J	No acoplado	Acoplado	J	No acoplado	Acoplado
0	0	1S_0		1	1P_1	
	2	1D_2		3	1F_3	
	4	1G_4		5	1H_5	
	6	1I_6		7	1J_7	
1	0	3P_0				
	1	3P_1		1		$^3S_1 - ^3D_1$
	2		$^3P_2 - ^3F_2$	2	3D_2	
	3	3F_3		3		$^3D_3 - ^3G_3$
	4		$^3F_4 - ^3H_4$	4	3G_4	
	5	3H_5		5		$^3G_5 - ^3I_5$
	6		$^3H_6 - ^3J_6$	6	3I_6	
7	3J_7		7		$^3I_7 - ^3K_7$	

Tabla 1.1: Estado nucleón-nucleón clasificados en base espín S (primera columna), isospín T (barra vertical superior), momentum angular J (segunda y quinta columna)

1.3. Modelos nucleares vs fenomenología

A continuación se analizan los resultados de los corrimientos de fase obtenidos con potenciales realistas N3LO, AV18 y Paris. Tales resultados son comparados con los disponibles en la base de datos *SAID*. La idea de este análisis tiene dos propósitos. El primero de ellos es ver cuán cercanos a los datos son los resultados obtenidos por estos potenciales realistas a energía en el sistema de laboratorio mayores a 300 MeV. El segundo, es evaluar la importancia de las inelasticidades que ocurren sobre el umbral de producción de piones.

En la Fig. 1.6 se muestra el corrimiento de fase y la absorción como funciones del momentum relativo. En esta figura se incluyen los canales no acoplados 1S_0 , 1P_1 , 1D_2 , 1F_3 , 3P_1 y 3P_0 . Los datos fenomenológicos de *SAID* se denotan con círculos. Los corrimientos de fase calculados para los modelos N3LO, AV18 y de Paris se denotan con línea continuas, línea segmentada y línea segmentada con puntos, respectivamente. La Fig. 1.7 muestra estos mismos resultados, pero para los canales acoplados $^3S_1-^3D_1$ y $^1P_2-^3F_2$.

Es posible observar, que todos los potenciales muestran una concordancia razonable con los datos, y también entre ellos, hasta energías de laboratorio del orden de 300 MeV. Este corresponde al régimen elástico. En los paneles superiores graficamos $1 - \eta$ que representa la absorción, la cual es nula para $E \leq 300$ MeV. Es interesante notar las discrepancias entre los potenciales realistas para energías sobre 300 MeV, régimen en el cual los potenciales mencionados son extrapolados.

Llama la atención el comportamiento exhibido por el potencial chiral N3LO, cuyos corrimientos de fase difieren significativamente con la base de datos y el resto de los potenciales. En particular, los corrimientos de fase se anulan fuertemente sobre los 900 MeV. Esta característica es consistente con el *cutoff* introducido en este modelo, que está a una energía de laboratorio de $\Lambda = 1$ GeV [27]. En el caso de los potenciales AV18 y de Paris, tienen un comportamiento bastante similar entre si, difiriendo notablemente con los resultados de *SAID* en el canal 1P_1 para $k \geq 3$ fm $^{-1}$.

Con estos resultados nos planteamos la posibilidad de agregar una interacción separable a estos potenciales (que denominamos de referencia). La finalidad de este potencial separable es dar cuenta de los corrimientos de fase e inelasticidades a energías en el sistema de laboratorio de hasta 1.6 GeV.

Para una onda parcial dada, la matriz de scattering es una función de tres variables: energía ω , momentum relativo inicial k_1 y momentum relativo final k_2 . Esta se denota $t(k_1, k_2; \omega)$.

En la capa de energía (on-shell), $k_1 = k_2 \equiv k$ y $\omega = k^2$, donde la cantidad k^2 toma el rol de la energía en el c.m. y se denotará E_k . Con esta notación, $E_k = k^2$. En tal caso la matriz de scattering on-shell es $t(k, k; E_k)$ la cual denotaremos simplemente como $t(k)$. En nuestro esquema la ecuación de Schrödinger en el sistema c.m. tiene la forma

$$(\hat{p}^2 + \hat{V})|\psi\rangle = k^2|\psi\rangle, \quad (1.11)$$

donde \hat{p} representan el operador de momentum relativo y k el momentum relativo, donde usamos $\hbar = c = m = 1$.

La matriz de scattering tiene la particularidad de estar estrechamente vinculada con las interacción internuclear entre nucleones. En efecto, la matriz t corresponde a la interacción efectiva en ausencia de efectos de medio nuclear en la teoría de scattering nucleón-nucleón [5, 6]. Por otro lado, la matriz t es el límite a densidad nuclear nula de la matriz g en el formalismo de Bruekner, Bethe y Goldstone, formalismo que permite obtener la ecuación de estado de materia nuclear. Con estas dos líneas de desarrollo en mente, resulta útil examinar el comportamiento de la matriz t (on-shell) a partir de potenciales realistas versus la fenomenología. En la Fig. 1.8 se grafican con línea continua y segmentada la componente real e imaginaria de los elementos on-shell de la matriz t , respectivamente como función del momentum relativo k , para los estados 1S_0 , 1P_1 , 1D_2 , 1F_3 , 3P_1 y 3P_0 . De igual forma se muestra en la Fig. 1.9 los canales acoplados 3SD_1 y 3PF_2 , en donde se vuelve a observar la no concordancia de los valores entregados por *SAID* con los resultados obtenidos por los potenciales realistas.

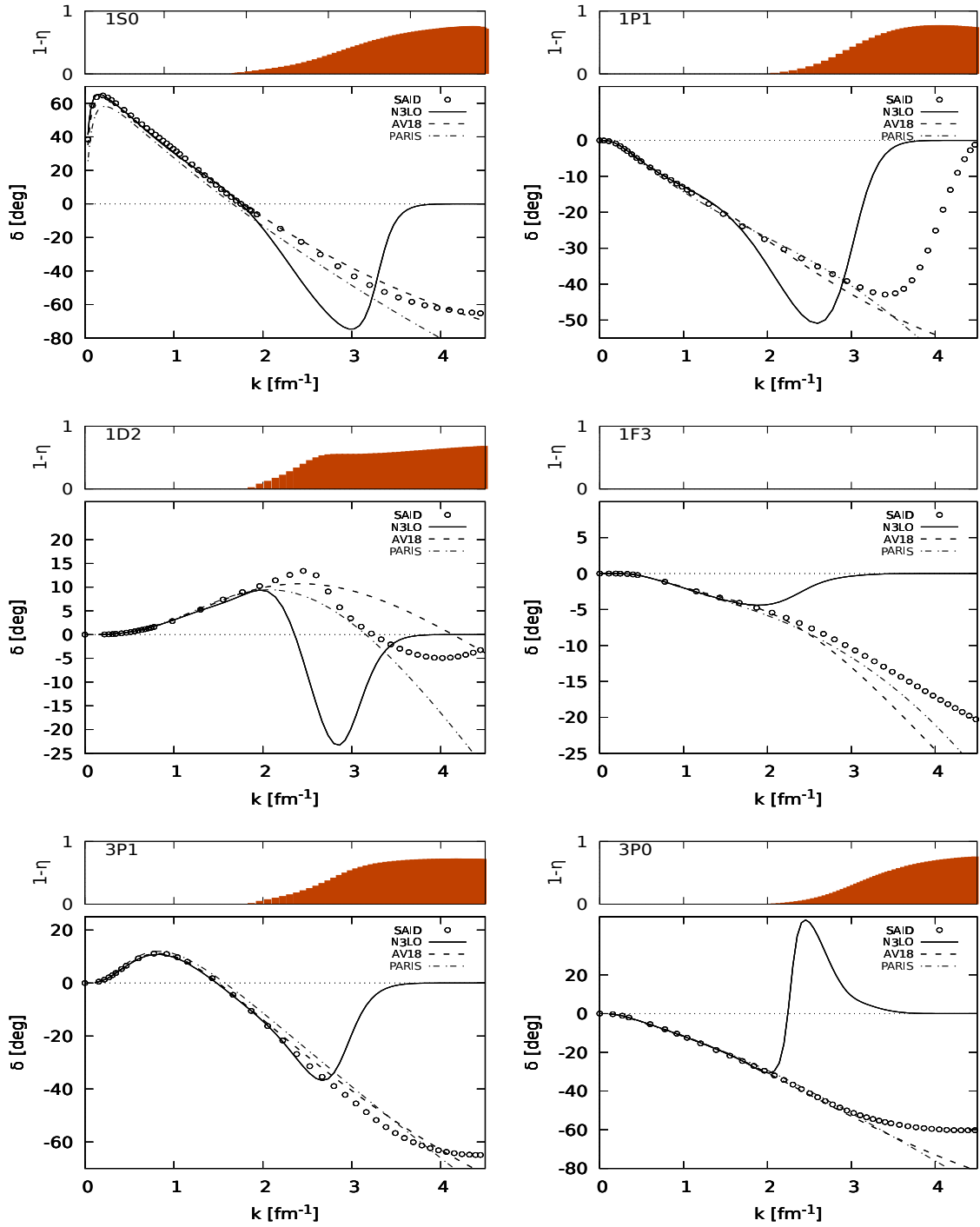


Figura 1.6: Corrimientos de fase en canales no acoplados, calculados con N3LO (línea continua), AV18 (línea segmentada) y Paris (línea segmentada con puntos) comparados con los obtenidos por SAID (círculos).

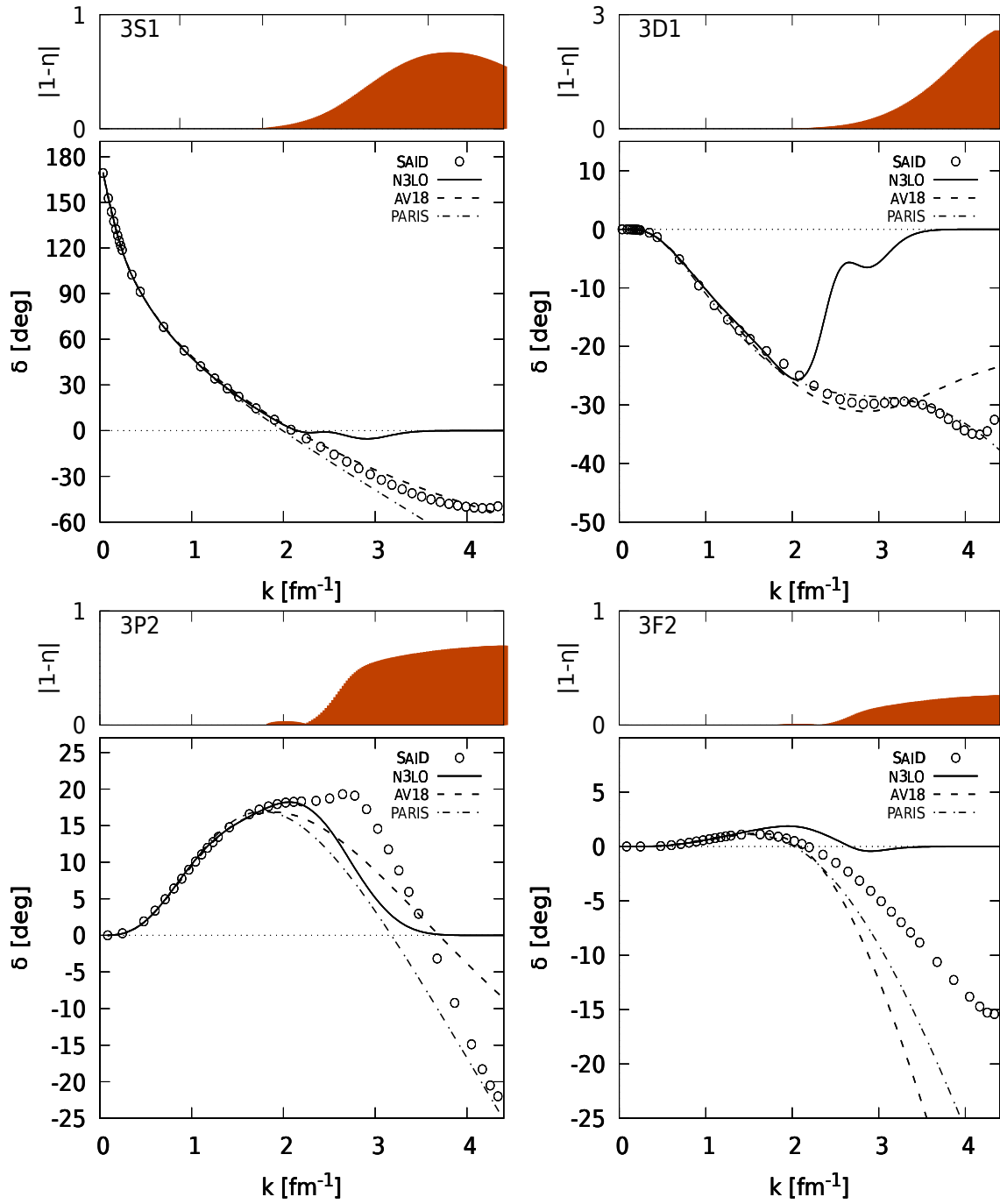


Figura 1.7: Corrimientos de fase en canales acoplados calculados con N3L0 (línea continua), AV18 (línea segmentada) y Paris (línea segmentada con puntos) comparados con los obtenidos por *SAID* (círculos).

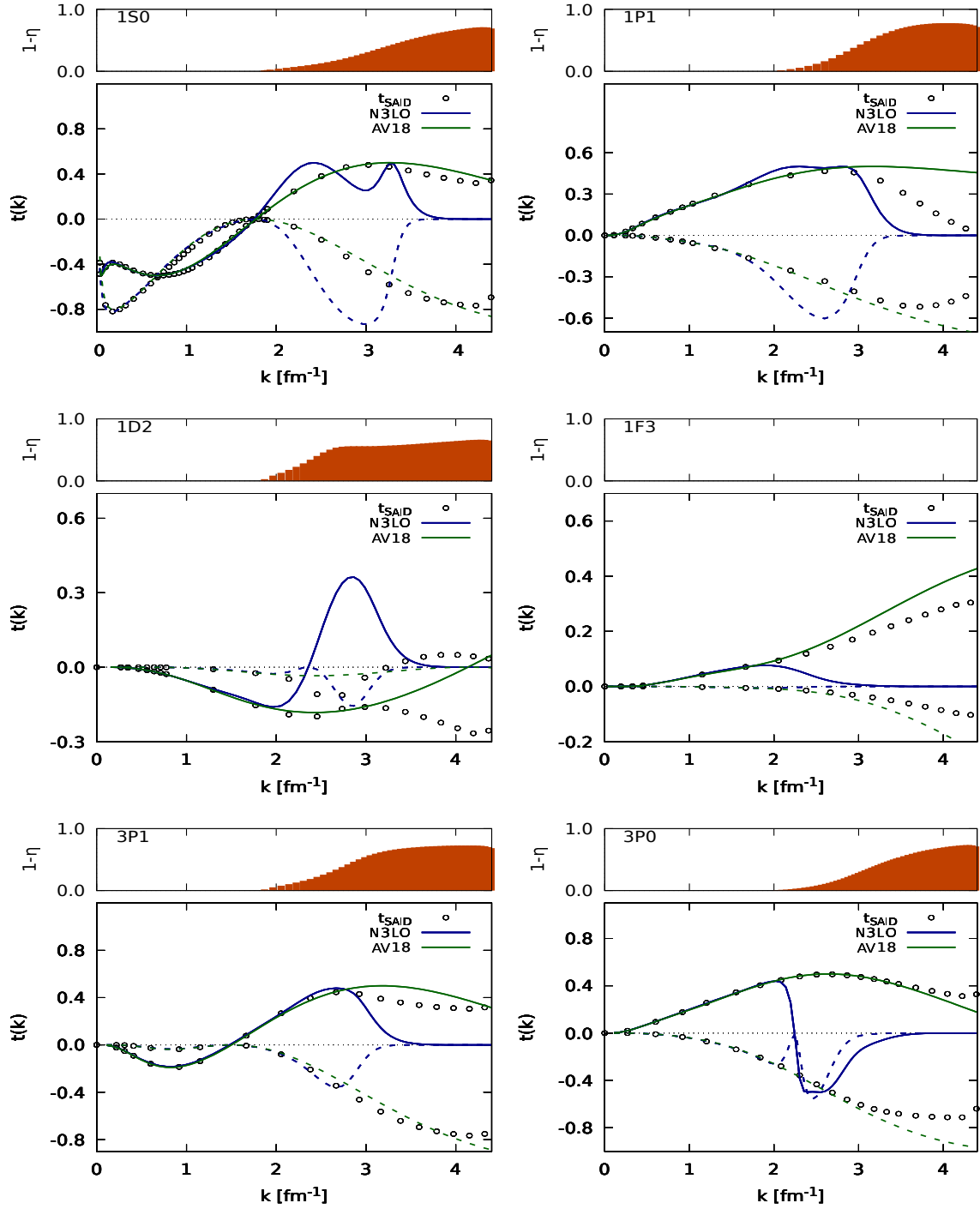


Figura 1.8: Comparación de matriz t on-shell obtenido de la base de *SAID* con los calculados con los potenciales N3LO (líneas azules) y AV18 (líneas verdes) en canales no acoplados.

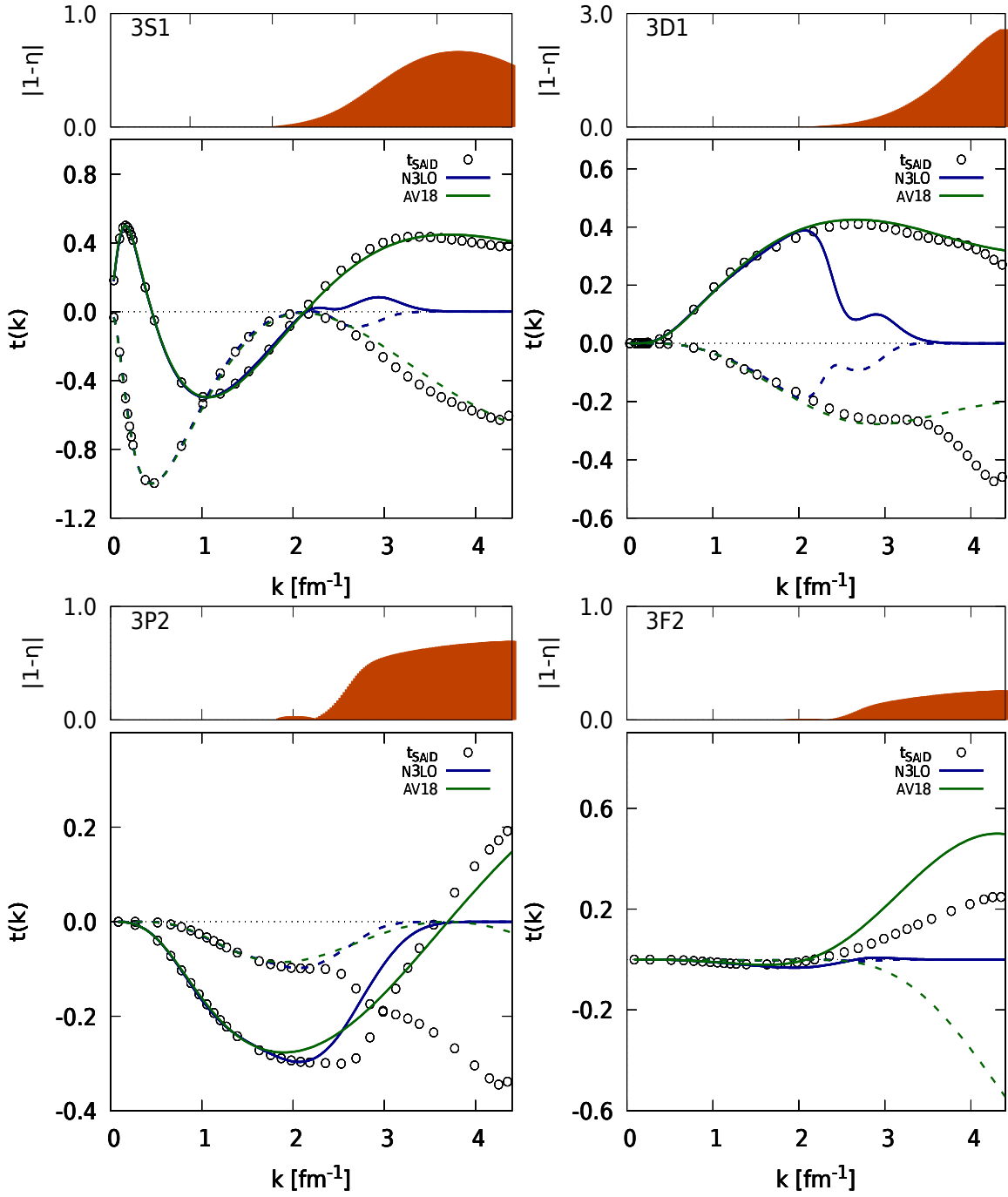


Figura 1.9: Comparación de matriz t on-shell obtenida de la base de *SAID* (círculos) con los calculado con los potenciales N3LO (líneas azules) y AV18 (líneas verdes) en canales acoplados.

Capítulo 2

El problema de dos potenciales

A continuación se presenta la construcción de un potencial compuesto por dos términos, uno de ellos un potencial realista que describe con una precisión razonable los corrimientos de fase experimentales a energías de laboratorio inferiores a 300 MeV. Este potencial es extrapolado más allá del rango de diseño. Para corregir este comportamiento se propone un potencial separable, construido de tal forma que reproduzca, en forma exacta los corrimientos de fase empíricos sobre un dominio de energía definido. El dominio de energía es tal que se extiende sobre el umbral de producción de piones.

2.1. Marco teórico

Se estudia el colisión de dos nucleones en el sistema de referencia de c.m. Sea \hat{v}_r un potencial conocido, denominado en este trabajo potencial de referencia, el cual tiene asociada una matriz de scattering $\hat{t}_r(\omega)$, que satisface

$$\hat{t}_r(\omega) = \hat{v}_r + \hat{v}_r \hat{G}_0(\omega) \hat{t}_r(\omega). \quad (2.1)$$

Esta es la ecuación de Lippmann-Schwinger (LS), donde \hat{G}_0 corresponde al propagador libre

$$\hat{G}_0(\omega) = \frac{1}{\omega - \hat{p}^2}. \quad (2.2)$$

Aquí \hat{p} representa el operador de momentum relativo en c.m. y ω es un parámetro de energía. Para un proceso de scattering donde el momentum relativo es k , su energía asociada es

$\omega = k^2 + i\eta$. Aquí η es un parámetro infinitesimal positivo que garantiza el comportamiento correcto de ondas emergentes de scattering.

Se define el potencial \hat{V} como la superposición de dos términos

$$\hat{V} = \hat{v}_r + |\xi\rangle\langle\tilde{\xi}|. \quad (2.3)$$

Aquí \hat{v}_r denota un potencial de referencia el cual es conocido completamente. El segundo término $|\xi\rangle\langle\tilde{\xi}|$, es un potencial separable desconocido, pero que será construido para dar cuenta de restricciones fenomenológicas. La matriz de scattering \hat{T} asociada a \hat{V} satisface

$$\hat{T}(\omega) = (\hat{v}_r + |\xi\rangle\langle\tilde{\xi}|) + (\hat{v}_r + |\xi\rangle\langle\tilde{\xi}|)\hat{G}_0(\omega)\hat{T}(\omega), \quad (2.4)$$

y de igual forma la ecuación de LS para el potencial de referencia es

$$\hat{t}_r(\omega) = \hat{v}_r + \hat{v}_r\hat{G}_0(\omega)\hat{t}_r(\omega). \quad (2.5)$$

Combinando las Ecs. (2.5) y (2.4), se obtiene la siguiente expresión para la matriz $\hat{T}(\omega)$

$$\hat{T}(\omega) = \hat{t}_r(\omega) + [1 + \hat{t}_r(\omega)\hat{G}_0(\omega)]|\xi\rangle\langle\tilde{\xi}|[1 + \hat{G}_0(\omega)\hat{T}(\omega)]. \quad (2.6)$$

Considerando esta expresión para $\hat{T}(\omega)$, podemos reescribir $\langle\tilde{\xi}|[1 + \hat{G}_0(\omega)\hat{T}(\omega)]$ como

$$\langle\tilde{\xi}|[1 + \hat{G}_0\hat{T}(\omega)] = \langle\tilde{\xi}| \left\{ 1 + \hat{G}_0(\omega) \left(\hat{t}_r(\omega) + [1 + \hat{t}_r(\omega)\hat{G}_0(\omega)]|\xi\rangle\langle\tilde{\xi}|[1 + \hat{G}_0(\omega)\hat{T}(\omega)] \right) \right\}, \quad (2.7)$$

despejando

$$\langle\tilde{\xi}|[1 + \hat{G}_0(\omega)\hat{T}(\omega)] = (1 - \langle\tilde{\xi}|\hat{G}_0(\omega) + \hat{G}_0(\omega)\hat{t}_r(\omega)\hat{G}_0(\omega)|\xi\rangle)^{-1}\langle\tilde{\xi}|[1 + \hat{G}_0(\omega)\hat{t}_r(\omega)]. \quad (2.8)$$

Este resultado es reemplazado en Ec.(2.6), obteniendo

$$\hat{T}(\omega) = \hat{t}_r(\omega) + [1 + \hat{t}_r(\omega)\hat{G}_0(\omega)]|\xi\rangle\Gamma(\omega)\langle\tilde{\xi}|[1 + \hat{G}_0(\omega)\hat{t}_r(\omega)], \quad (2.9)$$

con $\Gamma(\omega)$, dado por

$$\Gamma(\omega) = \frac{1}{1 - \langle\tilde{\xi}|\hat{G}_0(\omega) + \hat{G}_0(\omega)\hat{t}_r(\omega)\hat{G}_0(\omega)|\xi\rangle}. \quad (2.10)$$

La ecuación (2.9) para la matriz \hat{T} cuenta con tres elementos que la caracterizan. Por un parte está la matriz $\hat{t}_r(\omega)$, calculable completamente *off-shell*. Por otro lado están los factores de forma $|\xi\rangle$ y $\langle\tilde{\xi}|$, términos que a priori desconocemos. Por último está $\hat{T}(\omega)$, completamente conocida on-shell en un dominio de energías $[0, \omega_{max}]$. Se plantea la posibilidad de inferir los factores de forma sólo con esta información. Como se verá más adelante, la solución de tal problema es factible.

Al proyectar on-shell la Ec. (2.9) y denotar las matrices $\langle k|\hat{t}_r(\omega = k^2)|k\rangle = t_r(k^2)$ y $\langle k|\hat{T}(\omega = k^2)|k\rangle = T(k^2)$, se tiene

$$T(k^2) - t_r(k^2) = \langle k|[1 + \hat{t}_r(k^2)\hat{G}_0(k^2 + i\eta)]|\xi\rangle\Gamma(k^2)\langle\tilde{\xi}|[1 + \hat{G}_0(k^2 + i\eta)\hat{t}_r(k^2)]|k\rangle. \quad (2.11)$$

Para obtener los factores de forma del término separable se adopta el *ansatz* siguiente,

$$\langle k|\xi\rangle = f(k) \quad ; \quad \langle\tilde{\xi}|k\rangle = f(k), \quad (2.12)$$

con $f(k)$ una función compleja en general. Buscamos ahora una ecuación que permita inferir $f(k)$ a partir de los datos $T(k^2) - t_r(k^2)$.

Considerando las definiciones de $\langle k|\xi\rangle = f(k)$ y $\langle\tilde{\xi}|k\rangle = f(k)$, se evalúan los términos del denominador $\Gamma(k^2)$ en la Ec. (2.11). Primero se observa que

$$\langle\tilde{\xi}|\hat{G}_0(k^2 + i\eta)|\xi\rangle = \left(\frac{2}{\pi}\right) \int_0^\infty p dp \frac{f^2(p)}{k^2 + i\eta - p^2}. \quad (2.13)$$

Además se introduce la siguiente función $\gamma(k)$ asociada al valor principal de $\langle\tilde{\xi}|\hat{G}_0(k^2 + i\eta)|\xi\rangle$, como

$$\gamma(k) \equiv \left(\frac{2}{\pi}\right) \mathcal{P} \int_0^\infty p dp \frac{f^2(p)}{k^2 + i\eta - p^2}. \quad (2.14)$$

También se introduce la función $\alpha(k)$ asociada al valor principal de $\langle\tilde{\xi}|\hat{G}_0\hat{t}_r\hat{G}_0|\xi\rangle$ dada por

$$\alpha(k) \equiv \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \mathcal{P} \int_0^\infty p' dp' \mathcal{P} \int_0^\infty p dp \frac{f(p')t(p', p; k^2)f(p)}{(k^2 - p'^2)(k^2 - p^2)}. \quad (2.15)$$

De igual forma resulta conveniente definir la función que resume la parte principal de $\langle k|\hat{t}_r\hat{G}_0|\xi\rangle$

$$\beta(k) \equiv \left(\frac{2}{\pi}\right) \mathcal{P} \int_0^\infty p dp \frac{t(k, p; k^2)f(p)}{k^2 - p^2}. \quad (2.16)$$

Para simplificar la escritura resulta conveniente definir

$$\theta(k) = 1 - \alpha(k) - \gamma(k). \quad (2.17)$$

Con estas definiciones luego de una manipulación algebraica relativamente directa se obtiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} & \{1 - t_r^2(k^2) - 2it_r(k^2) - t_r(k^2) [T(k^2) - t_r(k^2)]\} f^2(k) + \\ & \{4\beta(k) - 4it_r(k^2) - 4i\beta(k) [T(k^2) - t_r(k^2)]\} f(k) + \\ & \{4\beta^2(k) - [T(k^2) - t_r(k^2)] + 2\gamma(k) [T(k^2) - t_r(k^2)] + 4\theta(k) [T(k^2) - t_r(k^2)]\} = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Es posible observar que

$$f(k) = -\frac{4\beta(k)}{1 - it_r(k^2)} + \sqrt{\frac{T(k^2) - t_r(k^2)}{1 - iT(k^2)} \left\{ \frac{4\theta(k)}{1 - t_r(k^2)} - i \left[\frac{4\beta(k)}{1 - it_r(k^2)} \right]^2 \right\}}. \quad (2.19)$$

Esta es una ecuación no lineal, la cual, de ser resuelta, permite obtener los factores de forma $f(k)$ que dan cuenta de la matriz de scattering on-shell $T(k^2)$. Para lograr esto se procede de forma iterativa, siendo $f_n(k)$ la solución de $f(k)$ en la n -ésima iteración. En este trabajo se ha partido con $f(k) = 0$, para el cual

$$f_1(k) = \sqrt{\frac{4 [T(k^2) - t_r(k^2)]}{[1 - iT(k^2)] [1 - t_r(k^2)]}}. \quad (2.20)$$

Con esta primera solución, se evalúa numéricamente $\beta(k)$ y $\delta(k)$, para lo cual se hace uso de las Ecs. (2.14), (2.15) y (2.16). Todos ellos se reducen al cálculo de valores principales de integrales. En algunos casos, a fin de darle estabilidad a las iteraciones, es necesario usar una combinación de las dos soluciones anteriores, con pesos diferidos

$$f_n(k) = \sigma f_{n-1} + (1 - \sigma) f_{n-2}. \quad (2.21)$$

En general, la solución $f(k)$ es obtenida en a lo más 20 iteraciones.

En la Ec. (2.19) se hace notar que es necesario calcular raíz cuadrada para obtener $f(k)$. Para ello hacemos uso del algoritmo detallado en el Cap. III, que resuelve el problema de discontinuidad en la operación de raíz cuadrada para números complejos, la que es utilizada en FORTRAN.

2.1.1. Resultados

La implementación numérica del algoritmo descrito en la sección anterior conduce a varias consideraciones necesarias para la fiabilidad de las soluciones. Todas las integrales en momentum se realizan con grillas uniformes, haciendo uso de cuadratura trapezoidal, con 50 puntos y $k_{\text{máx}} = 3.5 \text{ fm}^{-1}$. Una distribución uniforme en k permite que, para cada k hayan dos puntos vecinos ubicados simétricamente. Este aspecto es crucial para un buen cálculo de valores principales. Durante el desarrollo de este trabajo también se exploraron otras cuadraturas que resultaron inestables. Con lo anterior, utilizamos una rutina para interpolar los datos obtenidos de la base SAID.

Otra consideración importante, es la construcción de los datos $T(k) - t_r(k)$ en la Ec. (2.18), con el objetivo de no alterar el potencial de referencia a bajos momenta, sino más bien, incluir la información necesaria en un umbral de energía determinado. En este sentido, mediante el uso de una función escalón suave en k_c se permite que se expresen los corrimientos de fase fenomenológicos $\delta_F(k)$ de la base de SAID en un cierto umbral de energía.

$$\delta(k) = \delta_r(k) \Lambda_s(k - k_c) + \delta_F(k) \Lambda_s(k_c - k). \quad (2.22)$$

Esta función escalón suave $\Lambda_s(k)$ cumple la misma función que lo reguladores utilizados en la literatura con el fin de generar un corte en las componentes de momenta altos predefinidos [26, 28, 17]. Durante este trabajo se examinaron reguladores del tipo gaussiano y de Fermi además del regulador hiperbólico utilizado en Ref. [3]. Se constata que todos ellos llevan a resultados comparables. En este trabajo se ha adoptado por el regulador hiperbólico dada su simplicidad numérica. Este regulador esta dado por

$$\Lambda(k)_s = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh \left(\frac{k - k_c}{d} \right) \right], \quad (2.23)$$

con k_c el valor del corte (*cutoff*) en espacio de momentum y d se relaciona con el ancho de atenuación.

Se hace notar que los reguladores son aplicados al corrimiento de fase y no a la matriz t . La razón de esto es que al escalar t por un factor real, el corrimiento de fase resultante es complejo, lo que es inaceptable. En efecto, si el corrimiento de fase $\delta(k)$ es real, la matriz t on-shell asociada esta dada por

$$t(k) = -e^{i\delta(k)} \sin \delta(k). \quad (2.24)$$

Ahora, si escalamos $t(k)$ por un coeficiente λ , entonces se busca el nuevo corrimiento de fase $\delta'(k)$ asociado a la matriz $\lambda t(k)$ que satisface

$$\lambda t(k) = -e^{i\delta'(k)} \sin \delta'(k). \quad (2.25)$$

Es directo constatar que si $\lambda \neq 1$, entonces el nuevo corrimiento de fase $\delta'(k)$ no necesariamente resulta real.

Al resolver de forma iterativa la Ec. (2.19), se requieren diferentes números de iteraciones según el canal en que se trabajó, hasta lograr en éstos convergencia. Se muestra en la imagen superior izquierda de la Fig. 2.1 el factor de forma $f(k)$ para el canal 1D_2 en función del momentum relativo, denotando con línea continua y segmentada, las componentes reales e imaginarias, respectivamente. Se evidencia que el potencial separable es nulo a energías inferiores al umbral de energía en que tiene lugar la generación de piones (alrededor de 2 fm^{-1}). Se hace notar que el factor de forma se hace nulo a momenta superiores a $k = k_c = 4.1 \text{ fm}^{-1}$, en donde se suprimen los corrimientos de fase de la base de *SAID*.

En la imagen (a) de Fig. 2.1 se muestra el potencial AV18 en función del momentum relativo $\hat{v}_{18}(k, k')$, para el canal 1D_2 . Con curvas de superficie se representan los cambios de nivel del potencial, siendo posible notar la suavidad del potencial. En los gráficos (b) y (c) de Fig. 2.1 se muestran las componentes imaginarias y reales respectivamente del potencial compuesto por la suma de un potencial de referencia y el potencial separable obtenido en este trabajo. Ambas imágenes con sus determinadas curvas de nivel en el plano inferior.

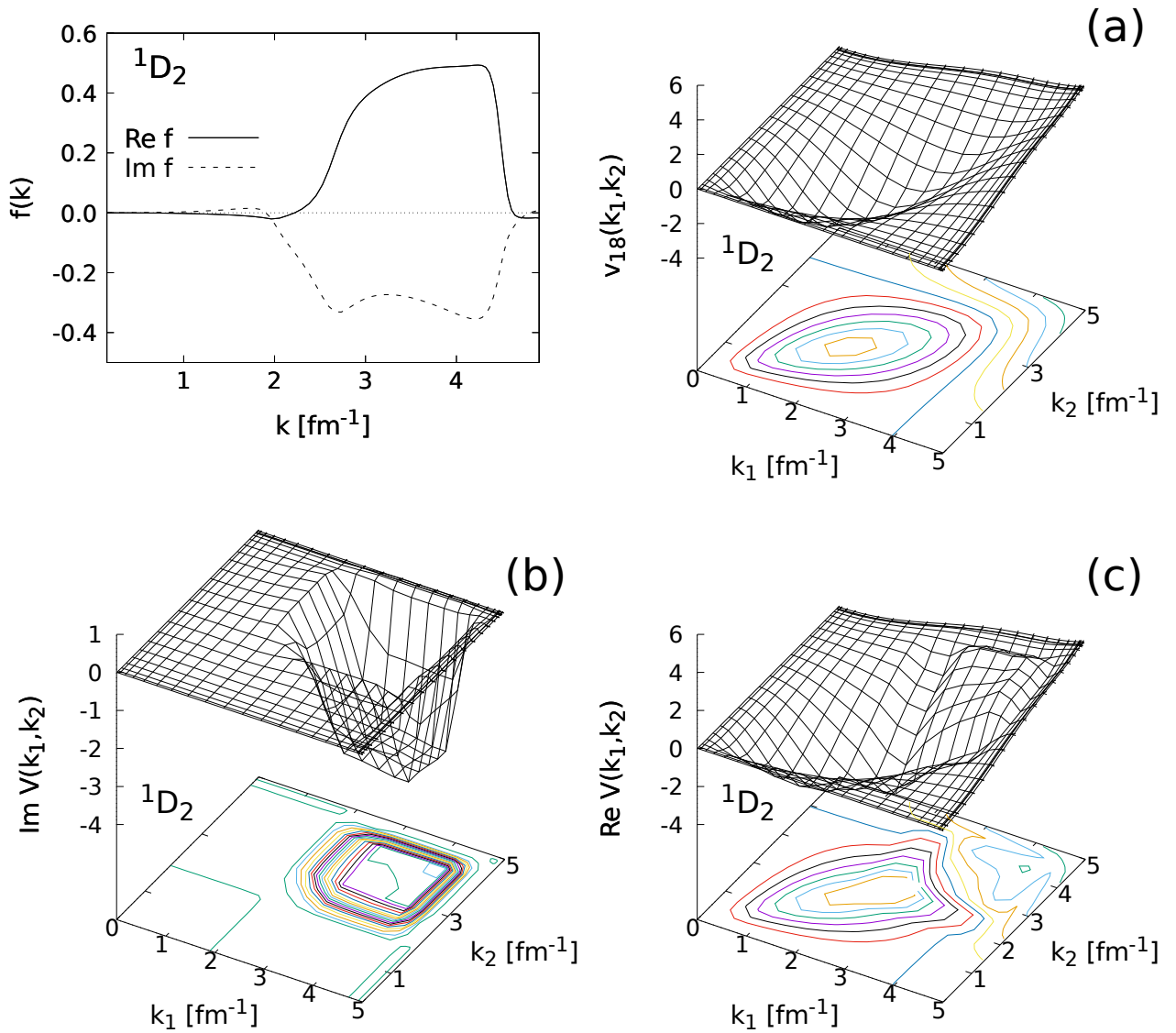


Figura 2.1: Factor de forma $f(k)$ para el canal 1D_2 (figura superior izquierda), líneas continua y segmentada muestran la componente real e imaginaria respectivamente. Graficos (a), (b) y (c) corresponden al potencial AV18, componente imaginaria y real de $V = V_{AV18} + |\xi\rangle\langle\xi|$, en espacio de momento, respectivamente.

Se hace notar en los gráficos (a) y (c) a través de las curvas de nivel, las diferencias entre los potenciales a momenta en el sistema c.m. superiores a $k = 2 \text{ fm}^{-1}$ y a su vez la similitud a momenta inferiores, dando cuenta de que el potencial separable no genera cambios en el potencial de referencia a dichos momenta. Los potenciales de referencias son reales, a diferencia del potencial separable el cual resulta complejo.

Se observa también en la imagen (b) que la componente imaginaria del potencial de referencia es nula a momenta inferiores a $k = 2 \text{ fm}^{-1}$, al igual que la componente imaginaria del potencial separable. Mientras que para momenta mayores, debido al potencial separable, se manifiestan componentes imaginarias que dan cuenta de las inelasticidades en $V(k_1, k_2)$, el cual está dado por

$$V(k, k') = v_{18}(k, k') + f(k)f(k'). \quad (2.26)$$

Para comprobar la validez de la solución, se resuelve la ecuación de Lippmann Schwinger para obtener la matriz \hat{T} y proyectarla on-shell. En la Fig. 2.2 se grafica la matriz T on-shell calculada con el potencial de referencia para los canales 1S_0 y 1D_2 . Las componentes reales e imaginarias se denotan con líneas azules continuas y segmentada, respectivamente. Tales resultados son comparados con los elementos on-shell de la matriz \hat{T} calculados con el potencial \hat{V} , el cual es representado con líneas negras continua (componente real) y segmentada (componente imaginaria). Además en la Fig. 2.2 se presentan con círculos los elementos de la matriz t obtenidos con los datos de la base *SAID*. Se observa la precisión del potencial \hat{V} a energías superiores al umbral de creación del pión, la cual no existe al comparar los datos con los resultados del potencial de referencia.

A fin de ilustrar la consistencia de la solución para el factor de forma $f(k)$, en la Fig. 2.3 se comparan los corrimientos de fase obtenidos con el potencial \hat{V} (líneas negras) con los datos de *SAID* (círculos), en los canales 1S_0 y 1D_2 . También con líneas azules se grafica el corrimiento de fase obtenido solo con el potencial de referencia \hat{v}_{18} . En ambos cuadros se muestran con círculos los corrimientos de fase e inelasticidades entregados por *SAID* hasta un momentum relativo de $k = 4 \text{ fm}^{-1}$. Es notoria la similitud entre los datos y los corrimientos de fase calculados con el potencial \hat{V} y las discrepancias con el potencial realista utilizado (v_{18}) como potencial de referencia. Para momenta relativos mayores a $k = 4 \text{ fm}^{-1}$ el corrimiento de fase calculado con \hat{V} comienza a mostrar discrepancias con respecto a los datos de *SAID*, debido al efecto del corte en los datos. Con respecto a las inelasticidades, se pueden observar con líneas negras las que fueron calculadas con el potencial \hat{V} . Dichos resultados coinciden con los datos de *SAID* en todo el rango de energía trabajado. Por otra parte, los potenciales realistas no dan cuenta de las inelasticidades por construcción.

También se logra observar que al igual que en el cálculo de la matriz \hat{t} on-shell, el corri-

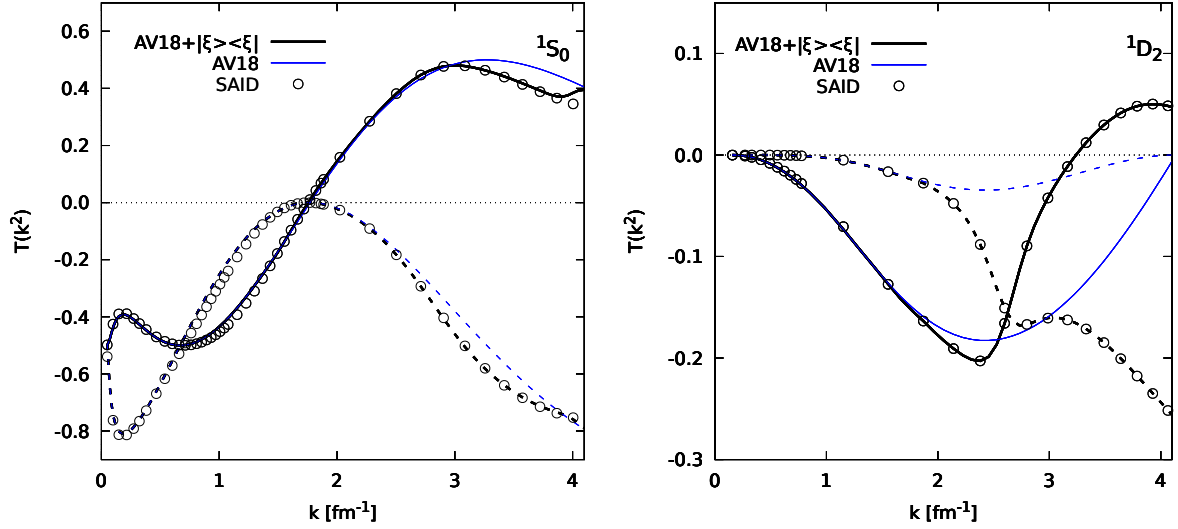


Figura 2.2: Componentes reales e imaginarias del elemento de matriz $T(k, k; \omega = k^2)$, para canales 1S_0 y 1D_2 , en función del momentum relativo, calculados con el potencial AV18 (líneas azules) y el potencial generado en este trabajo \hat{V} (líneas negras). Comparados con los datos obtenidos de *SAID* (círculos).

miento de fase calculado por el potencial de referencia, entrega resultados que concuerdan de forma óptima con los datos hasta momenta de 1.5 fm^{-1} en el sistema c.m., lo que equivale a energías próximas a 350 MeV en el sistema de laboratorio. Para energías superiores al umbral, como ya se ha mencionado, dichos potenciales realistas comienzan a discrepar de los resultados de *SAID*.

2.1.2. Factores de forma en espacio de momentum

Se grafican en Fig. 2.4 la componente real de los factores de forma separados por número de espín (S) e isospín (T). Para $S = 0$, se muestra en el panel (a) los canales isovectoriales ($T = 1$) 1S_0 , 1D_2 , 1G_4 y 1I_6 con línea continua gruesa, continua delgada, segmentada gruesa y segmentada delgada, respectivamente. En el panel (b), etiquetados de igual forma que en panel (a), se muestran los canales isoescalares ($T = 0$) 1P_1 , 1F_3 , 1H_5 y 1J_7 . Se observa que los canales isovectoriales con $S = 0$ la amplitud de los factores de forma decrece a medida que el momento angular de estos aumenta.

En el panel (c) de la Fig. 2.4, se muestran para $S = 1$, los canales isovectoriales 3P_0 , 3P_1 ,

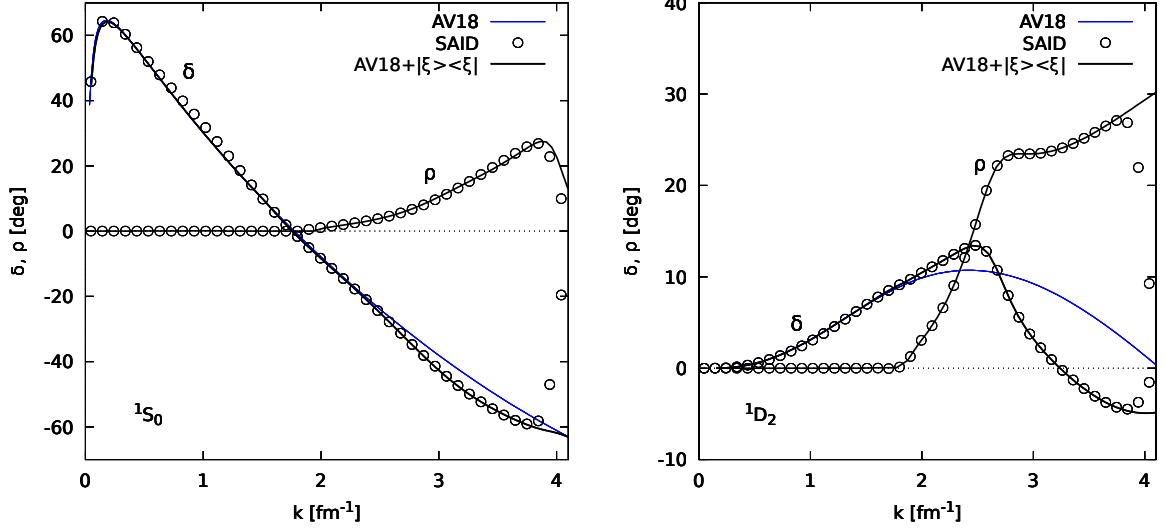


Figura 2.3: Corrimientos de fase e inelasticidades, para canales 1S_0 y 1D_2 , calculados con los potenciales AV18 (líneas delgadas azules) y \hat{V} (líneas gruesas negras). Comparados con los obtenidos de SAID (círculos).

3F_4 , 3H_5 y 3J_7 con línea continua gruesa, continua delgada, segmentada gruesa, segmentada delgada y segmentada corta, respectivamente. También se muestra en el panel (d) los canales isoescalares 3D_2 , 3G_4 , 3I_6 con línea continua gruesa, continua delgada y segmentada, respectivamente.

En la Fig. 2.5 se muestra la componente imaginaria de los factores de forma, adoptando la misma convención de líneas que en Fig. 2.4. En los paneles (a), (b), (c) y (d) es posible notar que las contribuciones imaginarias emergen a energías inferiores al umbral de producción de piones, sin embargo, no alteran el comportamiento de la matriz t on-shell para energías inferiores a tal umbral.

Se observa también, que en la Fig. 2.5, a excepción del canal 1P_1 , los canales isoescalares con espín $S = 0$ y $S = 1$, no cuentan con componentes imaginarias, ya que la base SAID reporta nula sus inelasticidades. A excepción del canal 1S_0 , a los canales que cuentan con componente imaginaria, ésta es comparable con la componente real, dando cuenta de nivel de corrección necesario al potencial de referencia para reproducir los corrimiento de fase e inelasticidades.

En ambos paneles, se identifica el efecto de los reguladores con valor de $k_c = 3.5 \text{ fm}^{-1}$. Se evidencia que en momenta $k \geq k_c$, el factor de forma decae rápidamente, consistente con el

ancho del regulador que en ese caso es $d = 0.2 \text{ fm}^{-1}$. De no considerar las inelasticidades en el cálculo del factor de forma, éste resulta completamente real.

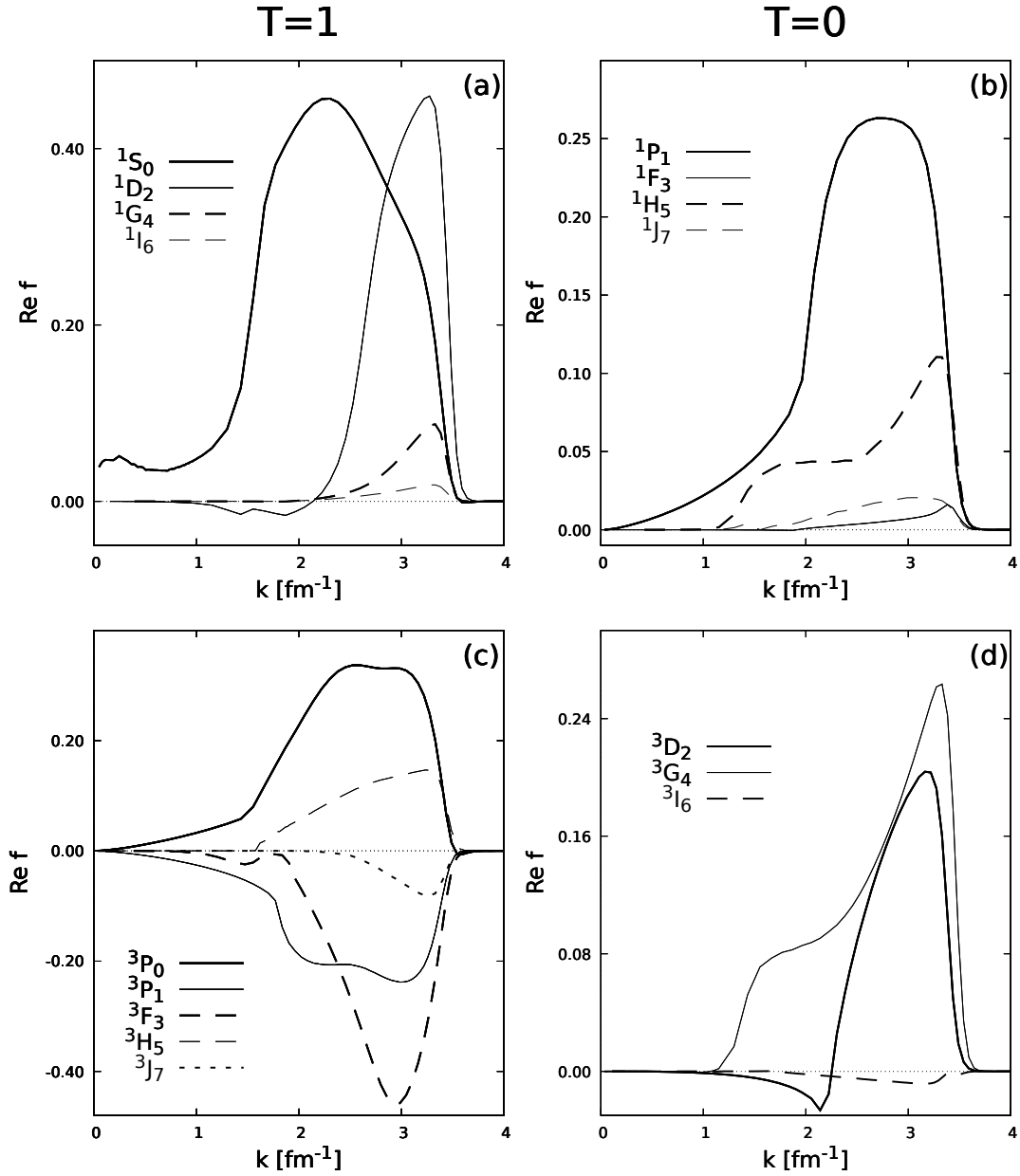


Figura 2.4: Componentes reales de factores de forma para canales no acoplados con momento angular total $J \leq 7$, utilizando AV18 como potencial de referencia.

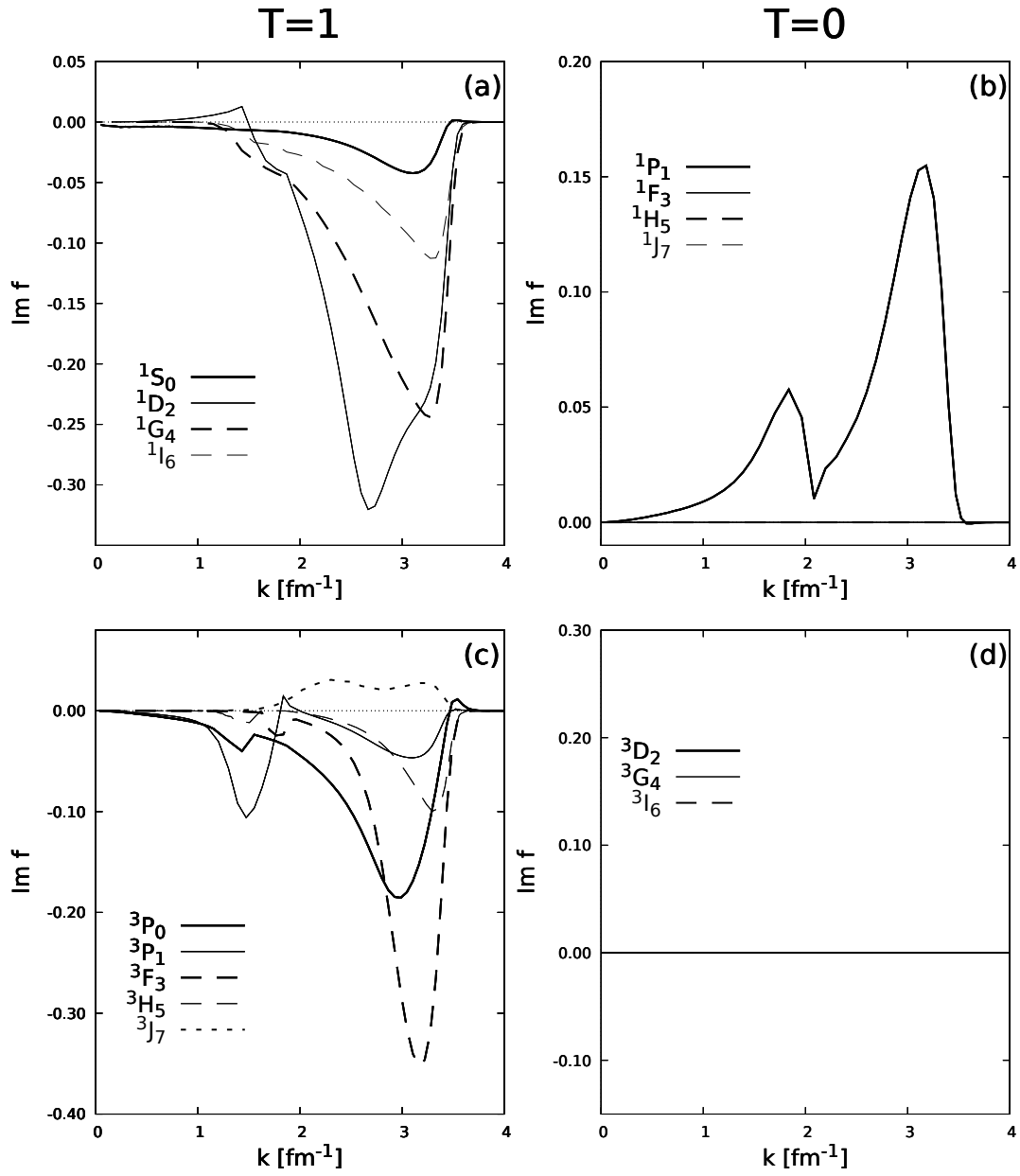


Figura 2.5: Componentes imaginarias de factores de forma para canales no acoplados con momentum angular total $J \leq 7$, utilizando AV18 como potencial de referencia.

Capítulo 3

Soluciones separables para canales no acoplados

En la sección anterior se ha dado cuenta de soluciones separables en presencia de un potencial realista, identificado como potencial de referencia. En esta sección se estudiará el caso de soluciones estrictamente separables. Este problema es de larga data, y en las Ref.[18, 31, 66, 50] se han planteado formas de abordarlo. Sin embargo, a diferencia de tales planteamiento, lo que se propone en este estudio tiene la ventaja de incorporar, en forma natural las inelasticidades existentes en procesos NN a energías sobre el umbral de producción de mesones. Tal potencial no cuenta con parámetros ajustables, requiriendo solo de corrimientos de fase que bien pueden ser complejos.

3.1. Marco teórico

Para fijar ideas consideramos el caso de un potencial separable de rango uno dado por

$$\hat{v} = |a\rangle\langle\tilde{a}|, \quad (3.1)$$

donde $|a\rangle$ y $\langle\tilde{a}|$ son factores de forma a determinar. Estos factores de forma son construidos bajo el siguiente ansatz:

$$\langle k|a\rangle = \langle\tilde{a}|k\rangle = a(k), \quad (3.2)$$

con $a(k)$, en general, complejo. El scattering de dos nucleones conduce a la ecuación de LS para la matriz de scattering \hat{t} , dada por,

$$\hat{t}(\omega) = \hat{v} + \hat{v} \hat{G}_0(\omega) \hat{t}(\omega). \quad (3.3)$$

Donde \hat{G}_0 corresponde al propagador libre

$$\hat{G}_0(\omega) = \frac{m}{\omega - \hat{p}^2}, \quad (3.4)$$

con \hat{p} el operador momentum relativo y m la masa de un nucleón. Además, ω corresponde a un parámetro de energía que en este caso esta dado por $\omega = k^2 + i\eta$. La solución a la Ec. (3.3) es

$$\hat{t}(\omega) = \frac{|a\rangle\langle\tilde{a}|}{1 - \langle\tilde{a}|\hat{G}_0(\omega)|a\rangle}. \quad (3.5)$$

Al proyectar la Ec. (3.5) on-shell para un momentum relativo k arbitrario, se obtiene

$$\tilde{t}(k, k; \omega = k^2 + i\eta) \left[1 - \left(\frac{2}{\pi} \right) \int_0^\infty p^2 dp \frac{m a^2(p)}{k^2 + i\eta - p^2} \right] = a^2(k), \quad (3.6)$$

donde $\langle k|\hat{t}(\omega)|k\rangle = \tilde{t}(k, k; \omega = k^2)$ es el elemento de la matriz de scattering que corresponde a su evaluación en la capa de energía (on-shell). Cabe notar que en este trabajo, la matriz $\tilde{t}(k)$ viene expresada en unidades de MeV fm³. A fin de trabajar con cantidades adimensionales, se define:

$$t(k) = mk\tilde{t}(k, k; \omega = k^2 + i\eta), \quad (3.7)$$

$$f^2(k) = mka^2(k). \quad (3.8)$$

Con lo anterior

$$t(k) \left[1 - \left(\frac{2}{\pi} \right) \int_0^\infty p dp \frac{f^2(p)}{k^2 + i\eta - p^2} \right] = f^2(k). \quad (3.9)$$

Utilizando las Ecs. (1.3),(1.4) y (1.6) presentadas en el capítulo I para $t(k)$, se obtiene,

$$\frac{f^2(k)}{\tan \delta(k) + i \tan^2 \rho(k)} - \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{f^2(p)p dp}{k^2 - p^2} = 1. \quad (3.10)$$

Notar que esta es una ecuación lineal para $f^2(k)$, la cual se reduce a un problema matricial luego de discretizar la integral en p . Bajo este argumento, de existir, la solución para $f^2(k)$, ésta es única. Además se menciona que si no hay inelasticidades ($\rho = 0$), la solución para $f^2(k)$ es real, al igual que los factores de forma encontrados en la literatura [74, 50, 41].

Al considerar el caso del canal 1S_0 , este se caracteriza por tener un cambio de signo en el corrimiento de fase $\delta(E)$ alrededor de 125 MeV en el sistema c.m. Esto equivale a un momentum relativo $k = 1.8 \text{ fm}^{-1}$. La solución de la Ec. (3.10) se lleva a cabo discretizando, considerando una grilla uniforme haciendo uso de cuadratura trapezoidal con 50 puntos en un rango de momentum hasta 3.5 fm^{-1} . Al igual que en Cap. II, se exploraron otras cuadraturas, sin embargo se obtuvieron resultados poco fiables. También se utiliza la rutina para interpolar los datos obtenidos de la base SAID según la densidad de la grilla.

En el panel superior de la Fig. 3.1 se ilustra la solución para $f^2(k)$ consistente con los datos de la base de SAID. En esta aplicación se omite la inelasticidad $\rho(k)$. El corrimiento de fase se extrae luego de calcular la matriz \hat{t} on-shell, utilizando

$$t(k) = \frac{\langle k|f\rangle\langle f|k\rangle}{1 - \langle f|G_0(k + i\eta)|f\rangle}, \quad (3.11)$$

donde

$$\langle f|G_0(k + i\eta)|f\rangle = \left(\frac{2}{\pi}\right) \int_0^\infty p dp \frac{f^2(p)}{k^2 + i\eta - p^2}. \quad (3.12)$$

Se observa en el cuadro inferior de Fig. 3.1 los corrimientos de fase de la base de SAID y los calculados con el potencial separable obtenido en este trabajo. Se observa concordancia entre los corrimientos de fase calculados y los de SAID, siendo las discrepancias menores a 10^{-8} rad.

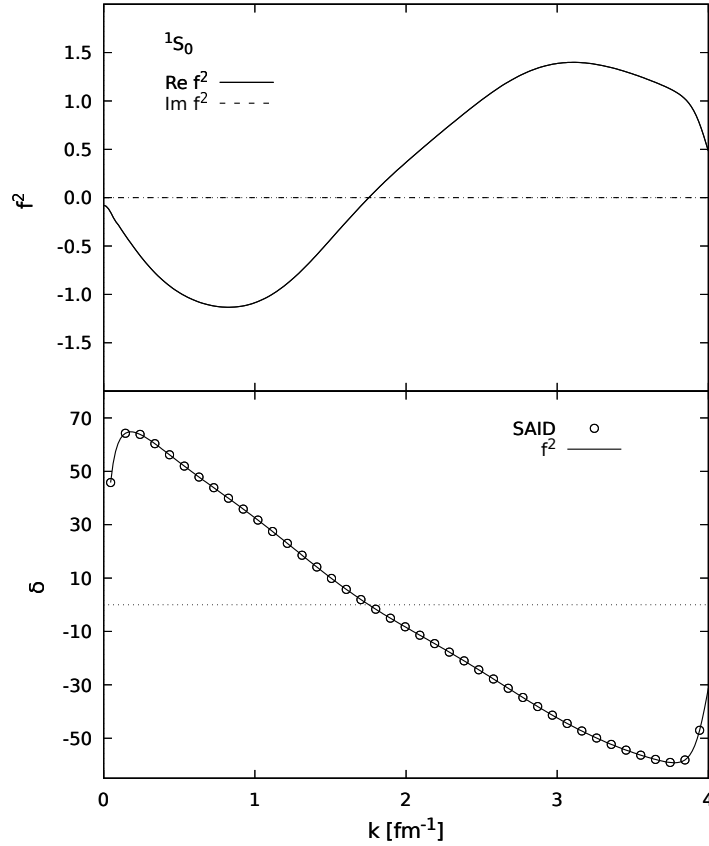


Figura 3.1: Factor de forma al cuadrado y corrimiento de fase, para el canal 1S_0 .

Si bien se ha calculado un $f^2(k)$ que permite reproducir el corrimiento de fase, es posible observar que para valores inferiores a $k = 1.8 \text{ fm}^{-1}$, $f^2(k)$ es negativo. Esta característica

conlleva a factores de forma $f(k)$ complejos (imaginarios), y por lo tanto un potencial no hermitico. En particular este potencial no cumple con invariancia PT . Esto es un inconveniente remediable como se verá a continuación.

Una manera de evitar la no hermiticidad en este caso particular, se ha discurrido a la siguiente construcción de dos potenciales separables

$$\hat{V} = |a_1\rangle\lambda_1\langle\tilde{a}_1| + |a_2\rangle\lambda_2\langle\tilde{a}_2|, \quad (3.13)$$

donde

$$\langle\tilde{a}_1|k\rangle = \langle k|a_1\rangle = \Theta(k - k_c)a_1(k), \quad (3.14)$$

$$\langle\tilde{a}_2|k\rangle = \langle k|a_2\rangle = \Theta(k_c - k)a_2(k), \quad (3.15)$$

con Θ la función escalón de Heavyside. Con lo anterior, claramente

$$\langle k|a_1\rangle\langle a_2|k\rangle = 0, \quad (3.16)$$

permitiéndo desacoplar la matriz t en diferentes rangos de energía como se mostrará a continuación.

Aquí k_c denota el momentum donde el corrimiento de fase se anula. Las constantes λ_1 y λ_2 son de magnitud igual a la unidad, pero de signos opuestos. El signo de λ_1 se escoge de modo tal que la solución $|a_1\rangle\lambda_1\langle\tilde{a}_1|$ sea hermítica.

Para la solución de la matriz t para el potencial $\hat{V} = |a_1\rangle\lambda_1\langle\tilde{a}_1| + |a_2\rangle\lambda_2\langle\tilde{a}_2|$, aplicamos el resultado expresado en la Ec. (2.9) para el caso $\hat{V} = v_r + |\xi\rangle\langle\tilde{\xi}|$. En este caso consideramos $v_r = |a_1\rangle\lambda_1\langle\tilde{a}_1|$, cuya solución

$$\hat{t}_1(\omega) = \frac{|a_1\rangle\lambda_1\langle\tilde{a}_1|}{1 - \lambda_1\langle\tilde{a}_1|\hat{G}_0(\omega)|a_1\rangle}. \quad (3.17)$$

Se obtiene entonces

$$\hat{T}(\omega) = \hat{t}_1(\omega) + \lambda_2[1 + \hat{t}_1(\omega)\hat{G}_0(\omega)]|a_2\rangle\Gamma(\omega)\langle\tilde{a}_2|[1 + \hat{G}_0(\omega)\hat{t}_1(\omega)], \quad (3.18)$$

con $\Gamma(\omega)$

$$\Gamma(\omega) = \frac{1}{1 - \lambda_2\langle\tilde{a}_2|\hat{G}_0(\omega) + \hat{G}_0(\omega)\hat{t}_1(\omega)\hat{G}_0(\omega)|a_2\rangle}. \quad (3.19)$$

Al sustituir \hat{t}_1 en la Ec. (3.18), se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{T}(\omega) = & \frac{|a_1\rangle\lambda_1\langle\tilde{a}_1|}{1 - \lambda_1\langle a_1|\hat{G}_0(\omega)|a_1\rangle} + \lambda_2 \left[1 + \frac{|a_1\rangle\lambda_1\langle\tilde{a}_1|}{1 - \lambda_1\langle\tilde{a}_1|\hat{G}_0(\omega)|a_1\rangle} \hat{G}_0(\omega) \right] \times \\ & |a_2\rangle\Gamma(\omega)\langle\tilde{a}_2| \left[1 + \hat{G}_0(\omega) \frac{|a_1\rangle\lambda_1\langle\tilde{a}_1|}{1 - \lambda_1\langle\tilde{a}_1|\hat{G}_0(\omega)|a_1\rangle} \right], \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde

$$\Gamma(\omega) = \frac{1}{1 - \lambda_2 \langle \tilde{a}_2 | \hat{G}_0(\omega) + \hat{G}_0(\omega) \frac{|a_1 \rangle \lambda_1 \langle \tilde{a}_1 |}{1 - \lambda_1 \langle \tilde{a}_1 | \hat{G}_0(\omega) | a_1 \rangle} \hat{G}_0(\omega) | a_2 \rangle}. \quad (3.21)$$

Al proyectar en espacio de momentum la Ec. (3.20), $\langle k | \hat{T}(\omega) | k \rangle$ contiene los siguientes elementos

$$\lambda_2 \langle k | a_1 \rangle \lambda_1 \langle \tilde{a}_1 | \hat{G}_0(k + i\eta) | a_2 \rangle = \lambda_2 a_1(k) \lambda_1 \left(\frac{2}{\pi} \right) \int_0^\infty p dp \frac{a_1(p) a_2(p)}{k^2 + i\eta - p^2} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 \langle \tilde{a}_2 | \hat{G}_0(k + i\eta) | a_1 \rangle \lambda_1 \langle \tilde{a}_1 | \hat{G}_0(k + i\eta) | a_2 \rangle &= \lambda_2 \left(\frac{2}{\pi} \right) \int_0^\infty p dp \frac{a_1(p') a_2(p')}{k^2 + i\eta - p'^2} \times \\ &\lambda_1 \left(\frac{2}{\pi} \right) \int_0^\infty p dp \frac{a_1(p) a_2(p)}{k^2 + i\eta - p^2}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Considerando las Ecs. (3.14) y (3.15), obtenemos

$$\lambda_2 \langle k | a_1 \rangle \lambda_1 \langle \tilde{a}_1 | \hat{G}_0(k + i\eta) | a_2 \rangle = 0, \quad (3.24)$$

$$\lambda_2 \langle \tilde{a}_2 | \hat{G}_0(k + i\eta) | a_1 \rangle \lambda_1 \langle \tilde{a}_1 | \hat{G}_0(k + i\eta) | a_2 \rangle = 0. \quad (3.25)$$

Así la Ec. (3.20) se reduce a

$$\hat{T}(\omega) = \frac{|a_1 \rangle \lambda_1 \langle \tilde{a}_1 |}{1 - \lambda_1 \langle \tilde{a}_1 | \hat{G}_0(\omega) | a_1 \rangle} + \frac{|a_2 \rangle \lambda_2 \langle \tilde{a}_2 |}{1 - \lambda_2 \langle \tilde{a}_2 | \hat{G}_0(\omega) | a_2 \rangle}, \quad (3.26)$$

donde

$$\hat{t}_1(\omega) = \frac{|a_1 \rangle \lambda_1 \langle \tilde{a}_1 |}{1 - \lambda_1 \langle \tilde{a}_1 | \hat{G}_0(\omega) | a_1 \rangle} \quad \text{dominio } 0 \leq k \leq k_c, \quad (3.27)$$

$$\hat{t}_2(\omega) = \frac{|a_2 \rangle \lambda_2 \langle \tilde{a}_2 |}{1 - \lambda_2 \langle \tilde{a}_2 | \hat{G}_0(\omega) | a_2 \rangle} \quad \text{dominio } k_c \leq k \leq k. \quad (3.28)$$

Por lo tanto el problema se reduce a resolver el scattering inverso sobre rangos en los cuales el corrimiento de fase no cambia de signo. Esta estrategia se extiende de forma natural al caso de N intervalos, donde hay $N - 1$ cambios de signo. Al final el potencial resulta de rango N . Con esto, generamos N ecuaciones integrales

$$\begin{aligned} \frac{a_1^2(k)}{\tan \delta(k) + i \tan^2 \rho(k)} - \left(\frac{2}{\pi} \right) \mathcal{P} \int_0^{k_1} p dp \frac{a_1^2(p)}{k^2 - p^2} &= 1 \quad 0 \leq k \leq k_1, \\ &\dots = \dots, \\ &\dots = \dots, \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\frac{a_N^2(k)}{\tan \delta(k) + i \tan^2 \rho(k)} - \left(\frac{2}{\pi} \right) \mathcal{P} \int_{k_{n-1}}^{k_n} p dp \frac{a_N^2(p)}{k^2 - p^2} = 1 \quad k_{n-1} \leq k \leq k_n. \quad (3.30)$$

Aquí k_1 es el límite superior del primer rango, mientras que k_{n-1} y k_n los momenta inferiores y superiores del n -ésimo intervalo, respectivamente. Al tomar en cuenta la inelasticidad, el criterio es hacer efectiva la segmentación de los intervalos en k solo en aquel dominio donde $\rho(k) = 0$. Conocidos los factores de forma, el potencial $\langle k' | V | k \rangle$ adquiere una estructura de baldosas diagonales en el plano (k, k') , segmentados por dominios a momenta determinados por el cambio de signo del potencial. En Fig. 3.2 se muestra un esquema de estos dominios.

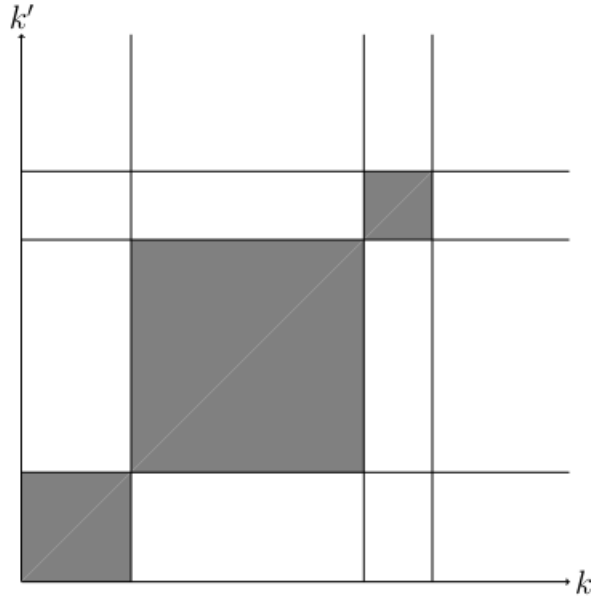


Figura 3.2: Esquema de una estructura de baldosas para una solución separable de rango 3.

3.2. Resultados

Entre las consideraciones importantes en la implementación de scattering inverso, se hacen explícitas las siguientes.

a) *Corte en momentum*

Con el objetivo de mostrar la sensibilidad de los factores de forma $f(k)$ para diferentes cortes, se realizaron cálculos aplicando el regulador hiperbólico de la Ec. (2.23), para diferentes valores de corte definidos por k_c . En el cuadro derecho de la Fig. 3.3 se grafican los factores de forma calculados en el canal 1S_0 con cortes aplicados en los corrimientos de fase a momenta de $k_c = 1.5 \text{ fm}^{-1}$, $k_c = 2.5 \text{ fm}^{-1}$ y $k_c = 3.5 \text{ fm}^{-1}$. Se utilizan líneas continuas rojas, verdes y azules, respectivamente. Las componentes reales e imaginarias se denotan con líneas gruesas y delgadas, respectivamente. En el cuadro derecho se muestra el corrimiento de fase calculado con el factor de forma que se encuentra en el cuadro izquierdo. Se usan las mismas texturas para cada corte. También se hace nota que la ausencia de información en el factor de forma para energías mayores a los *cutoff* aplicados no altera la reproducción de los corrimientos de fase, los cuales son comparados con los datos obtenidos de SAID y que son mostrados con círculos.

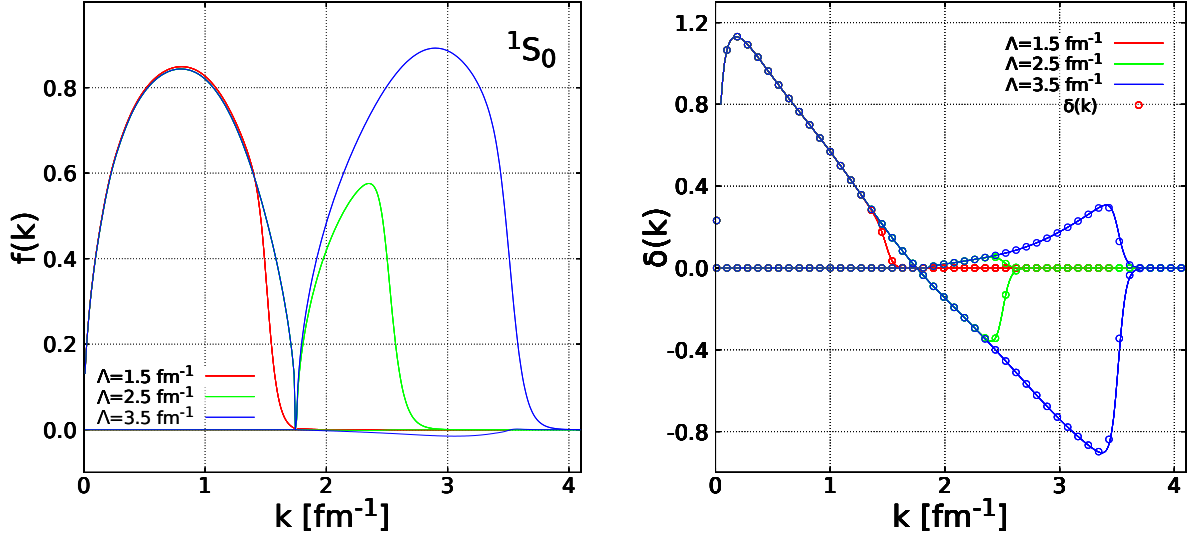


Figura 3.3: Factor de forma f en función del momentum, para el canal 1S_0 , con regulador en los datos de entrada (cuadro izquierdo) y corrimiento de fase calculado con el factor de forma del cuadro izquierdo (cuadro derecho), comparado con los datos de SAID.

b) *Ondas S a bajas energías*

Debido a que los datos entregados por SAID muestran solamente contribuciones hasta energías en el sistema de laboratorio de 0.1 MeV, al realizar cálculos a bajas energías en los canales 1S_0 y 3S_1 se obtienen soluciones ruidosas a bajos momenta. Para tratar estos canales a bajos momenta se hace uso de la expansión del corrimiento de fase $\delta(k)$ en términos de *scattering length* [15, 13, 40], dada por

$$k \cot[\delta(k)] = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2}rk^2, \quad (3.31)$$

donde a y r denotan la longitud de scattering y rango, respectivamente. Esta expansión resulta fiable para energías inferiores a 10 MeV [43].

Haciendo uso de la base de datos de SAID, se busca un ajuste cuadrático del tipo $y = b + cx^2$, donde y representa a $k \cot \delta$. Este ajuste se lleva a cabo en un rango de $0.04 \text{ fm}^{-1} \leq k \leq 0.6 \text{ fm}^{-1}$ que equivale a un rango de energía en el sistema de laboratorio entre 0.2 MeV y 2.6 MeV. En las tablas 3.1 y 3.2 se muestran los resultados para el canal singlete no acoplado 1S_0 y el canal triplete acoplado 3S_1 , respectivamente. También en los cuadros comparamos los resultados con valores de a y r encontrados en la literatura. En la Fig. 3.4 ilustramos con círculos y línea continua el grado de concordancia entre los datos y la expansión de δ en términos del rango efectivo respectivamente.

a (fm)	r (fm)	Referencia
-28.31	2.63	Este trabajo
-16.69(117)	2.83(11)	Babenco <i>et al.</i> [8]
-23.71(1)	2.70(9)	Sitenko [64]
-23.748	2.75	Kharchenko [47]

Tabla 3.1: Valores de longitud de scattering y rango para el canal 1S_0 .

a (fm)	r (fm)	Referencia
5.40	1.75	Este trabajo
5.22 ± 0.13	1.56	Blatt <i>et al.</i> [15]
5.424 ± 0.003	1.760 ± 0.005	Sitenko [64]

Tabla 3.2: Valores de longitud de scattering y rango para el canal 3S_1 .

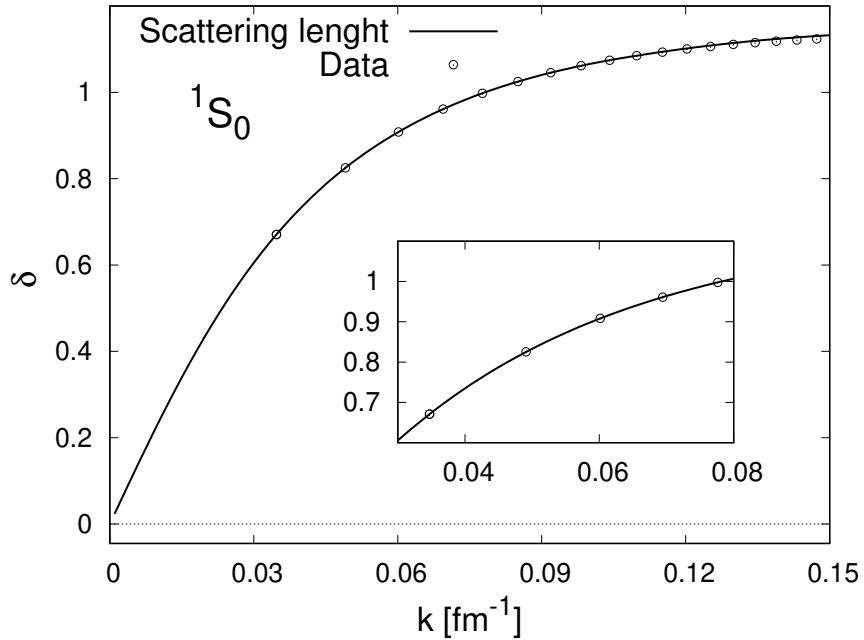


Figura 3.4: Corrimiento de fase en el canal 1S_0 en función del momentum relativo calculado con la expansión en términos de la longitud de scattering (líneas) comparados con los entregados por SAID (círculos).

c) *Raíces cuadradas*

La raíz cuadrada de un número complejo $z^2(t)$, tiene al menos dos soluciones $z(t)$. El uso directo de funciones intrínsecas de FORTRAN para obtener raíces cuadradas conlleva discontinuidades en las soluciones. Para corregir este inconveniente y evitar corregir manualmente los signos de las soluciones [50], se ha discurrido en el siguiente método.

Sea $z(t)$ una función compleja y continua del parámetro t

$$z^2(t) = \rho(t)e^{i\phi(t)}, \quad (3.32)$$

con $\rho(t) = |z^2(t)|$ y $\phi(t)$ la fase polar que depende de t en el rango $[-\pi, \pi]$. Suponiendo $z^2(t)$ sin ceros en el rango $[a, b]$. La raíz cuadrada esta dada por

$$z(t) = \sqrt{\rho(t)}e^{i\phi(t)/2}. \quad (3.33)$$

Se buscan soluciones donde las fases $\phi(t)$ sean continuas. Para esto se considera

$$z(t + \delta t) = \sqrt{\rho(t + \delta t)}e^{i\phi(t + \delta t)/2}, \quad (3.34)$$

con δt un incremento pequeño. Dividiendo la Ec. (3.34) por la Ec. (3.33), obtenemos

$$\phi(t + \delta t) = \phi(t) - i \ln \left[\frac{\rho(t)z^2(t + \delta t)}{\rho(t + \delta t)z^2(t)} \right]. \quad (3.35)$$

Con esta construcción, la raíz cuadrada de z^2 no experimenta cambios bruscos asociados a la dualidad en el signo de la raíz.

3.2.1. Factores de forma en espacio de momentum

En la Fig. 3.5 se grafica la componente real de los factores de forma separados por número de spin (S) e isospín (T). Para $S = 0$, mostramos en el panel (a) los canales isovectoriales ($T = 1$) 1S_0 , 1D_2 , 1G_4 y 1I_6 . Se usan línea continua, segmentada, punteada y segmentada con puntos, respectivamente. En el panel (b) se grafican los canales isoescalares ($T = 0$) 1P_1 , 1F_3 , 1H_5 y 1J_7 . En la misma figura, el panel (c) muestra para $S = 1$, los canales isovectoriales 3P_0 , 3P_1 , 3F_4 , 3H_5 y 3J_7 . Se utiliza línea continua, segmentada, segmentada con un punto, segmentada con dos puntos y continua ancha, respectivamente. También se muestra en el panel (d) los canales isoescalares 3D_2 , 3G_4 , 3I_6 con línea continua, segmentada y punteada, respectivamente. Es posible observar como la amplitud de los factores de forma decrece a medida que el momentum angular de estos aumenta, siendo el canal de mayor contribución el 1S_0 . También se observa que los factores de forma son únicamente positivos en un rango de energía inferior a la cual comienza la producción de mesones.

En la Fig. 3.6 se muestra la componente imaginaria de los factores de forma, las cuales siguen el mismo orden la Fig. 3.5. Notamos que las componentes imaginarias de las soluciones, se hacen presentes a energías sobre el umbral inelástico. A diferencia de las componentes reales de los potenciales, aquí la parte imaginaria no decrece para los canales de momentum angular mayores. También se nota que existen canales en la base de datos de SAID que registran inelasticidades nulas ($\rho(k) = 0$), siendo estos de isospin $T = 0$ y momentum angular $S = 1$.

En la Fig. 3.7 se presenta el potencial $V(k, k')$, para el canal 1D_2 , el cual fue seleccionado por ser de rango 3, mostrando así la estructura de baldosas en espacio de momentum. La componente real de la solución se muestra con líneas continuas, mientras que la componente imaginaria con círculos. Con el objetivo de mostrar la tercera baldosa, el cálculo de la solución se realizó considerando $\rho(k) = 0$. Al agregar inelasticidades, se obtiene un factor de forma de rango 2. Cabe destacar que $V(k, k')$ reproduce cabalmente los corrimientos de fase.

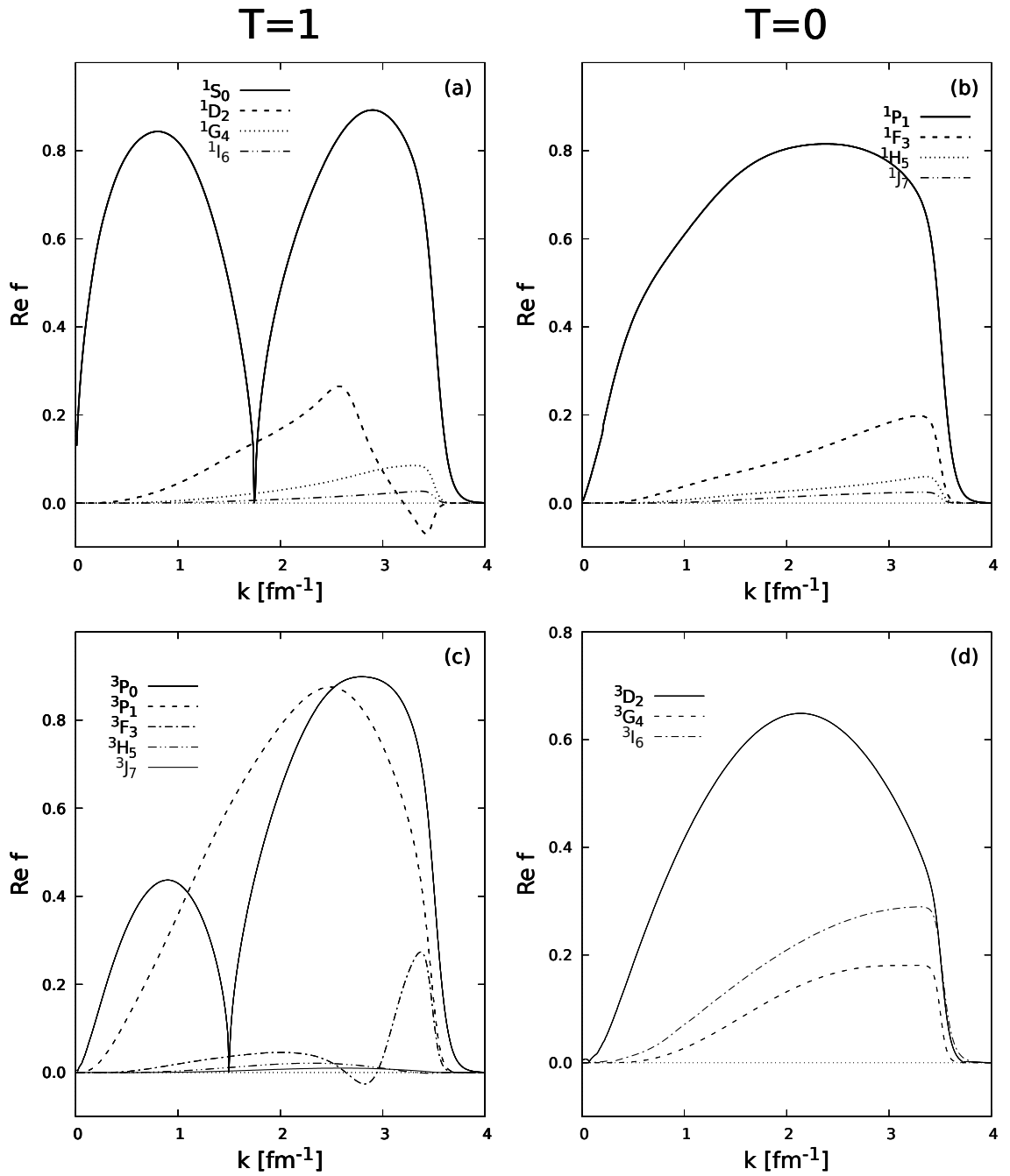


Figura 3.5: Componentes reales de factores de forma para canales isoscalares e isovectoriales con $S=0$ y $S=1$, con $J \leq 7$.

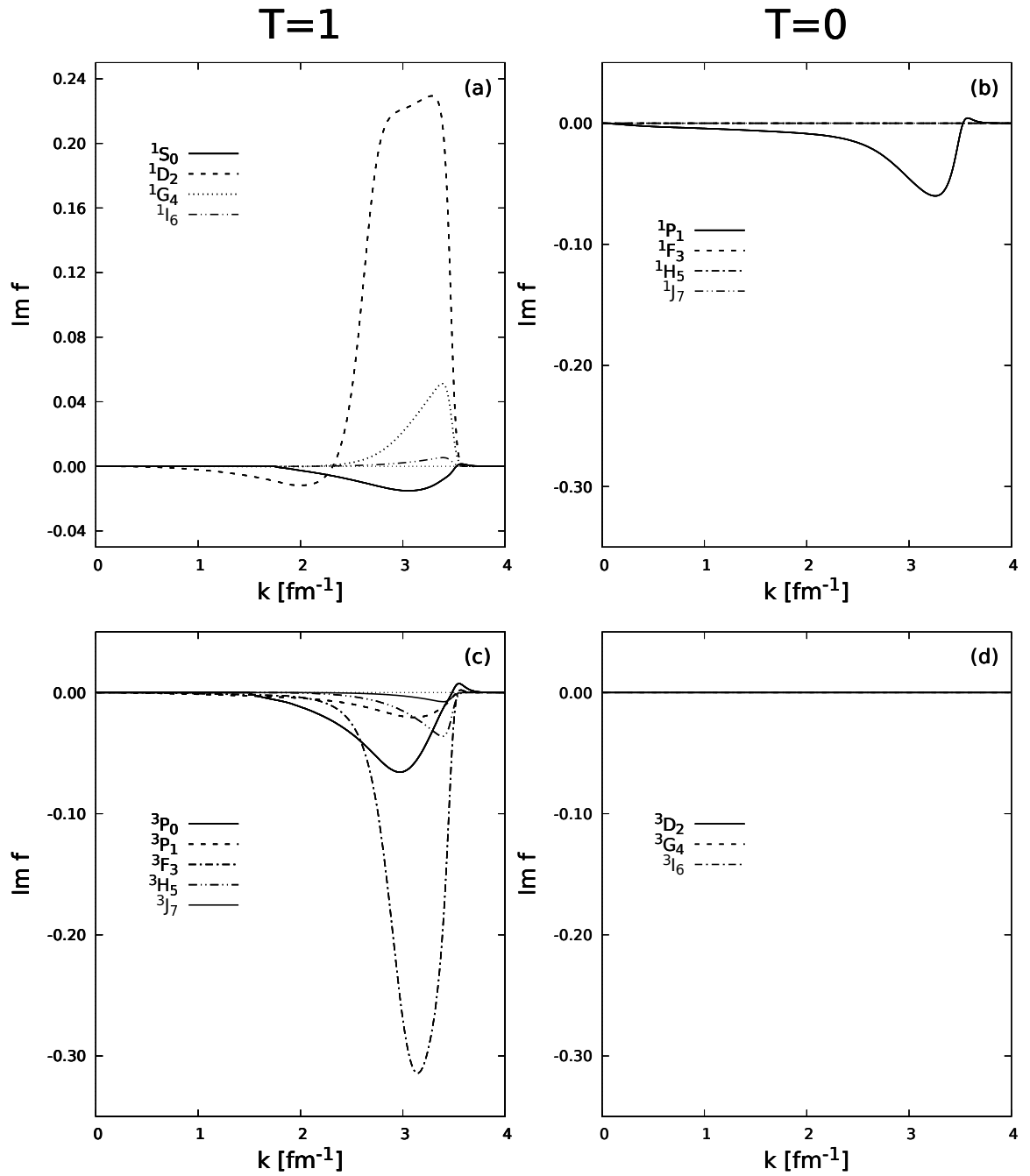


Figura 3.6: Componentes imaginarias de factores de forma para canales isoescales e isovec-toriales con $S=0$ y $S=1$, con $J \leq 7$.

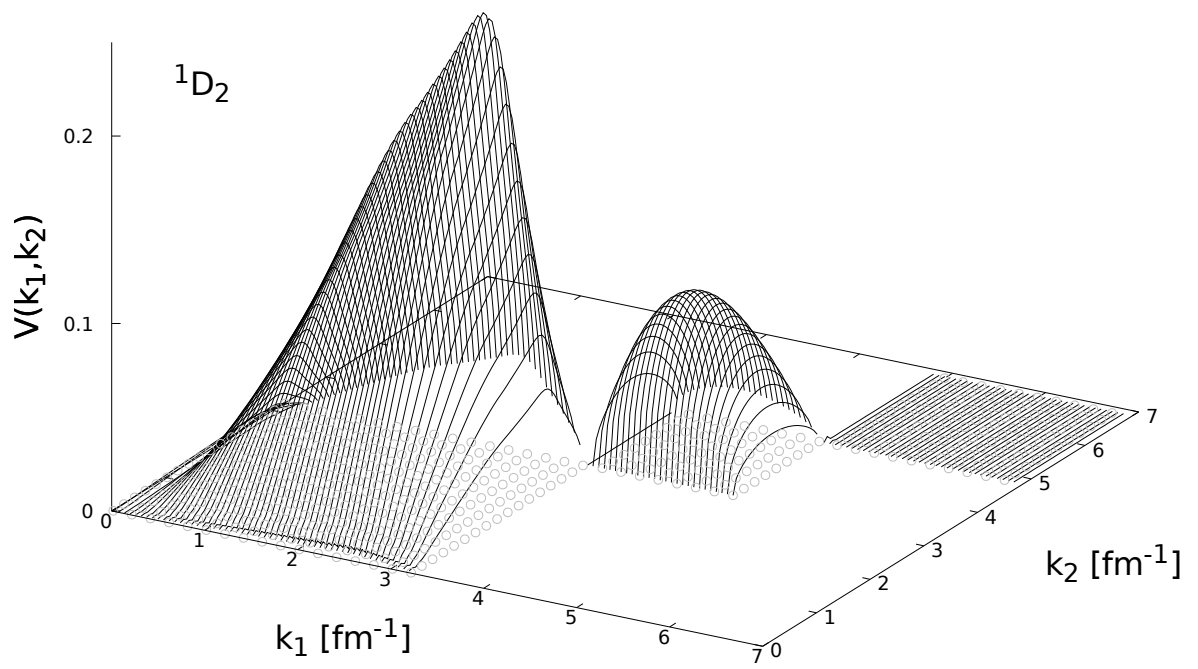


Figura 3.7: Estructura de baldosas para potencial separable en espacio de momentum para el canal 1D_2 .

3.2.2. Relación de unitariedad de la matriz T

Como se ha mostrado, al incluir la absorción en la construcción de un potencial de inversión separable, el potencial es no hermítico. Se busca mostrar la estructura de la relación de unitariedad de la matriz T en el caso general de un potencial no hermítico. Vale decir, $\hat{V}^\dagger \neq \hat{V}$. Sea ω real, con

$$\hat{G}_0(\omega) = \frac{1}{\omega + i\eta - \hat{k}}, \quad (3.36)$$

$$\hat{G}_0^\dagger(\omega) = \frac{1}{\omega - i\eta - \hat{k}}. \quad (3.37)$$

Entonces

$$\hat{T}(\omega) = \hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0(\omega)\hat{T}(\omega), \quad (3.38)$$

$$\hat{T}^\dagger(\omega) = \hat{V}^\dagger + \hat{T}^\dagger(\omega)\hat{G}_0^\dagger(\omega)\hat{V}^\dagger, \quad (3.39)$$

con \hat{G}_0 el propagador libre y \hat{V} un potencial separable no hermítico. Utilizando las Ecs.(3.38) y (3.39), calculamos su diferencia

$$\hat{T}^\dagger(\omega) - \hat{T}(\omega) = \hat{V}^\dagger - \hat{V} + \hat{T}^\dagger(\omega)\hat{G}_0^\dagger(\omega)\hat{V}^\dagger - \hat{V}\hat{G}_0(\omega)\hat{T}(\omega), \quad (3.40)$$

$$\hat{T}^\dagger(\omega) - \hat{T}(\omega) = \hat{\Delta} + \hat{T}^\dagger(\omega)\hat{G}_0^\dagger(\omega)\hat{\Delta} + \hat{T}^\dagger(\omega)\hat{G}_0^\dagger(\omega)\hat{V} - \hat{V}^\dagger\hat{G}_0(\omega)\hat{T}(\omega) + \hat{\Delta}\hat{G}_0(\omega)\hat{T}(\omega). \quad (3.41)$$

Definiendo

$$\hat{\Delta} \equiv \hat{V}^\dagger - \hat{V}, \quad (3.42)$$

se reescriben las Ecs. (3.38) y (3.39) como

$$\hat{V} = [1 - \hat{V}\hat{G}_0(\omega)]\hat{T}(\omega), \quad (3.43)$$

$$\hat{V}^\dagger = \hat{T}^\dagger(\omega)[1 - \hat{G}_0^\dagger(\omega)\hat{V}^\dagger]. \quad (3.44)$$

Reemplazando las Ecs. (3.43) y (3.44) en la Ec. (3.40), se obtiene la expresión general para la relación de unitariedad de la matriz T para un potencial no hermítico

$$\hat{T}^\dagger(\omega) - \hat{T}(\omega) - 2i\pi\hat{T}^\dagger(\omega)\delta(E - \hat{k})\hat{T}(\omega) = \hat{\Delta} + \hat{T}^\dagger(\omega)\hat{G}_0(\omega)\hat{\Delta} + \hat{\Delta}\hat{G}_0(\omega)\hat{T}(\omega) + \hat{T}^\dagger(\omega)\hat{G}_0^\dagger(\omega)\hat{\Delta}\hat{G}_0\hat{T}(\omega). \quad (3.45)$$

Reescribiendo la Ec. (3.45) se obtiene

$$\hat{T}^\dagger(\omega) - \hat{T}(\omega) + 2i\pi\hat{T}^\dagger(\omega)\delta(E - \hat{k})\hat{T}(\omega) = [1 + \hat{T}^\dagger(\omega)\hat{G}_0^\dagger(\omega)](\hat{V}^\dagger - \hat{V})[1 + \hat{G}_0(\omega)\hat{T}(\omega)]. \quad (3.46)$$

Notando que para potenciales reales, $\hat{\Delta} = 0$, se cumple la relación de unitariedad .

3.2.3. Corrimientos de fase

Para comprobar la calidad del potencial de inversión obtenido, en la Fig. 3.8 se muestran los corrimientos de fase basado en el potencial separable (línea continua negra) y AV18 (línea segmentada azul). Con respecto a las inelasticidades $\rho(k)$, se muestra con línea gruesa de color rojo las que fueron calculadas con el potencial separable, mientras que los calculados con el potenciales realistas, son nulos por construcción. Además en ambas figuras se representan con círculos y cuadrados los datos de los corrimientos de fase e inelasticidades de la base SAID, respectivamente. Se observa un concordancia bastante estrecha entre los valores de SAID y el corrimiento de fase e inelasticidades calculado con el potencial separable.

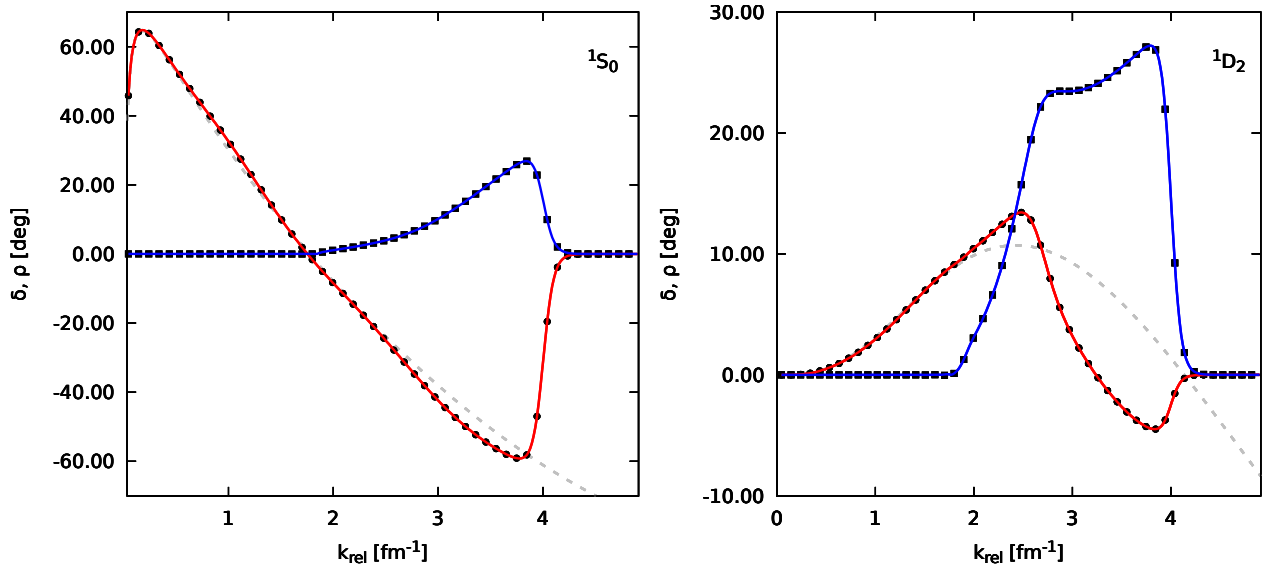


Figura 3.8: Corrimiento de fase calculado con AV18 (líneas segmentadas azules) y el potencial separable (líneas continuas negra y roja), comparados con los datos de SAID (círculos y cuadrados), para los canales 1S_0 (imagen izquierda) y 1D_2 (imagen derecha).

3.2.4. Comparación con Kwong y Köhler

En la literatura se encuentran propuestas de potenciales separables para la interacción NN. Entre estos se mencionan los realizados por Kwong y Köhler[50](KK) y Ernst *et al.* [31]. En esta subsección serán comparados el potencial separable obtenido en este trabajo, con la

solución del trabajo de KK. Esta solución analítica para f^2 está dada por

$$f^2(k) = -\lambda \frac{(4\pi)^2}{k} |D(k^2)| \sin \delta(k). \quad (3.47)$$

Aquí λ es ajustado de tal manera que f^2 sea positivo. La función $D(\omega)$ representa la función de Jost, dada por

$$D(\omega) = \frac{\omega - E_B}{\omega} \exp \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{p \delta(p)}{k + i\eta - p^2} dk \right]. \quad (3.48)$$

En esta representación $\delta(k)$ es el corrimiento de fase, con ω en general complejo. Además E_B es la energía de ligazón de un estado ligado.

Los autores hacen notar que una limitación de la solución es que es válida solo para los canales en que se cumple $\delta(k \rightarrow 0) = 0$. Además $\delta(k)$ no puede cruzar los rangos de $n\pi$, con n un número entero. En el caso en que el corrimiento de fase cambia de signo en $k = k_0$, se recurre a un potencial de rango 2 que de cuenta de las componentes atractivas y repulsivas. En tal caso se introduce una variable auxiliar ξ que satisface

$$e^{2i\xi(k)} = \frac{D(k^2 - i\eta) - \frac{1}{1-\gamma}}{D(k^2 + i\eta) - \frac{1}{1-\gamma}}, \quad (3.49)$$

con γ cualquier número negativo. Los detalles de este esquema se encuentran en Ref. [18]. Con lo anterior

$$f^2(k) = -\frac{(4\pi)^2 \sin(\xi(k))}{k} \begin{cases} \gamma e^{\tilde{\xi}_1(k)}, & \text{si } k < k_0, \\ \gamma e^{\tilde{\xi}_1(k)}, & \text{si } k > k_0. \end{cases} \quad (3.50)$$

En la Fig. 3.9 se grafican los factores de forma y corrimientos de fase en el canal 1D_2 . Líneas y puntos representan $f(k)$ para este trabajo y las de KK, respectivamente. En el panel superior (a), ambas aplicaciones consideran $\rho(k) = 0$ en todo el rango de momenta. Es posible observar una concordancia razonable entre ambos esquemas. Más allá de esta equivalencia, el mérito de la solución que se propone en esta tesis es su capacidad de incluir la inelasticidad, lo que no es posible en la solución de KK, al menos en su versión actual. A fin de ilustrar el rol de la absorción, en el panel (b) de la Fig. 3.9 se grafica la solución $f(k)$ cuando se considera $\rho \neq 0$. Se observa su efecto a partir de $k \geq 1 \text{ fm}^{-1}$.

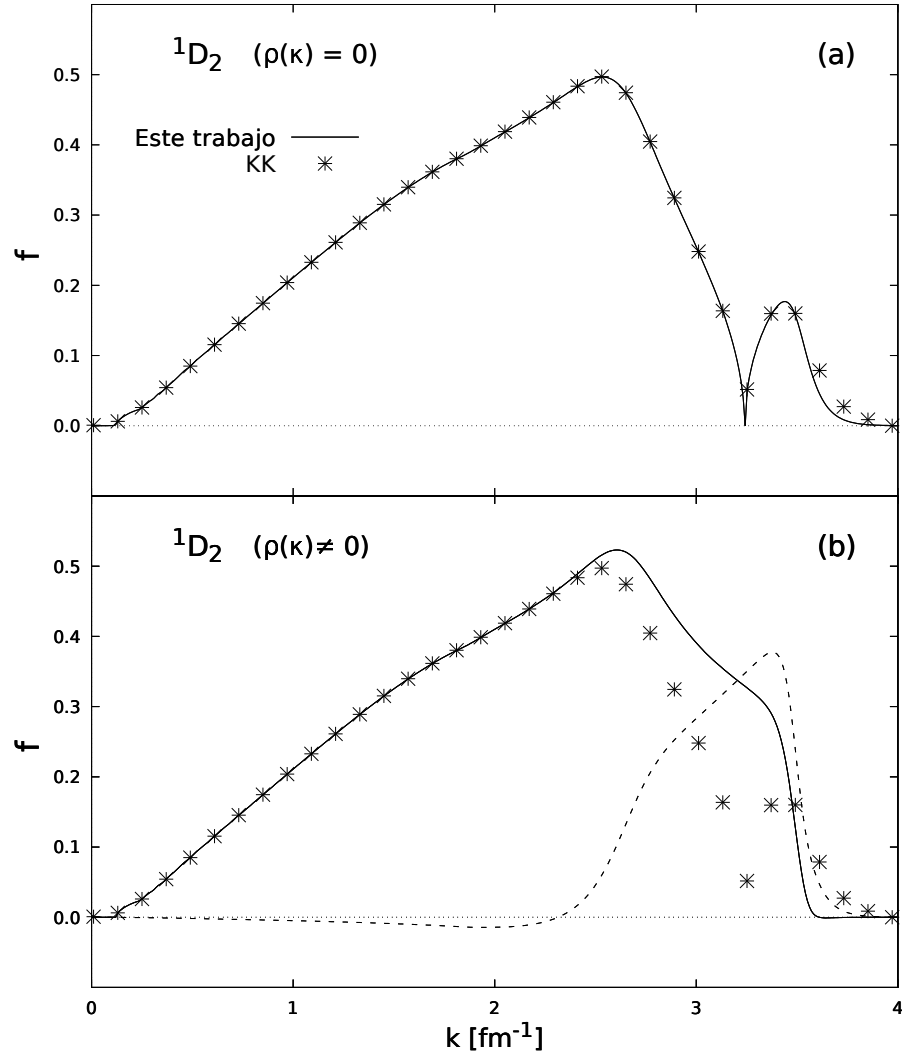


Figura 3.9: Factor de forma obtenido en este trabajo (línea continua) versus el obtenido por Kwong y Köler (puntos). La línea segmentada corresponden a la componente imaginaria del factores de forma obtenido en este trabajo. El cuadro (a) representa resultados sin absorción ($\rho = 0$), mientras el (b) considera $\rho \neq 0$.

Capítulo 4

Soluciones separables para canales acoplados

En la sección anterior encontraremos soluciones separables para estados desacoplados, las cuales incluyen de forma natural las inelasticidades presentes en procesos NN a energías sobre el umbral de producción de mesones. En este capítulo se estudiarán los canales tripletes acoplados, donde se acoplan dos estados de momentum angular orbital, $L = J - 1$ y $L = J + 1$. En este caso particular se trabajó sin potencial de referencia. La inclusión de un potencial de referencia en este caso conlleva ecuaciones de complejidad para el problema de scattering inverso, por ahora, inmanejable.

4.1. Marco teórico

La ecuación de LS para la matriz de scattering ante un potencial \hat{V} está dado por

$$\hat{T}(\omega) = \hat{V} + \hat{V}\hat{G}(\omega)\hat{T}(\omega), \quad (4.1)$$

donde \hat{G}_0 corresponde al propagador libre

$$\hat{G}_0(\omega) = \frac{1}{\omega - \hat{p}^2}. \quad (4.2)$$

Al igual que en capítulos anteriores, en el caso de scattering, $\omega = k^2 + i\eta$, con η un parámetro infinitesimal positivo. Al proyectando en estados de momentum angular total J , espín $S = 1$,

la ecuación anterior tiene la estructura de un sistema de submatrices de 2×2 , la cual se puede resumir como

$$\begin{pmatrix} \hat{T}_{11}(\omega) & \hat{T}_{12}(\omega) \\ \hat{T}_{21}(\omega) & \hat{T}_{22}(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{V}_{11} & \hat{V}_{12} \\ \hat{V}_{21} & \hat{V}_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{V}_{11} & \hat{V}_{12} \\ \hat{V}_{21} & \hat{V}_{22} \end{pmatrix} \hat{G}_0(\omega) \begin{pmatrix} \hat{T}_{11}(\omega) & \hat{T}_{12}(\omega) \\ \hat{T}_{21}(\omega) & \hat{T}_{22}(\omega) \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

En particular, los elementos on-shell de la matriz T están dado por:

$$\begin{bmatrix} \langle k | \hat{T}_{11}(\omega + i\eta) | k \rangle & \langle k | \hat{T}_{12}(\omega + i\eta) | k \rangle \\ \langle k | \hat{T}_{21}(\omega + i\eta) | k \rangle & \langle k | \hat{T}_{22}(\omega + i\eta) | k \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}(k) & t_{12}(k) \\ t_{21}(k) & t_{22}(k) \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Siguiendo la convención de Arndt, los cuatro elementos de matriz t_{ij} quedan completamente determinados por seis coeficientes reales. Estos son los corrimientos de fase δ_{J-1} y δ_{J+1} , el *mixing parameter* ε_J , y las absorciones para cada canal, ρ_{J-1} y ρ_{J+1} . Además un parámetro μ_J , análogo a ε_J , que entremezcla la absorción Ref. [7]. En este trabajo se ha adoptado $\mu_J = 0$ para todos los canales.

En los paneles (a) y (b) de la Fig. 4.1 se muestran los elementos t_{11}, t_{12}, t_{21} y t_{22} como función de momentum k para los canales 3P_2 y 3F_2 , respectivamente. En los cuadros (c) y (d) se grafican los respectivos corrimientos de fase junto con las inelasticidades ρ . Los resultados de la base SAID se denotan con símbolos. Los resultados numéricos para el potencial AV18, en los canales 3P_2 y 3F_2 , se denotan con líneas continuas. En los paneles (a) y (b), los símbolos llenos representan la parte real de la matriz t , mientras que los símbolos vacíos corresponden a la parte imaginaria.

Al observar el recuadro (a) de la Fig. 4.1 es posible notar que hay una buena concordancia entre la matriz de scattering calculada y la de la base de datos SAID hasta un momentum de $k \approx 2 \text{ fm}^{-1}$. Este momentum corresponde a una energía de 340 MeV, consistente en el dominio para el cual el modelo AV18 ha sido desarrollado. A momenta sobre 2 fm^{-1} , esta concordancia se pierde. Un resultado similar se observa en el panel (b), para la matriz t en el estado 3F_2 . Por otro lado, en los paneles (c) y (d) para los corrimientos de fase, la concordancia entre los datos y el modelo AV18 se evidencia para momentum con valores de $k < 2 \text{ fm}^{-1}$. Estos resultados ilustran el grado en que el potencial AV18 discrepa con los datos al ser extrapolado sobre 320 MeV.

En el caso de espín $S = 1$, para canales acoplados, la interacción NN tiene la siguiente forma

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} \hat{V}_{11} & \hat{V}_{12} \\ \hat{V}_{21} & \hat{V}_{22} \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

con \hat{V}_{ij} una interacción independiente de la energía. Una solución formal para la matriz de

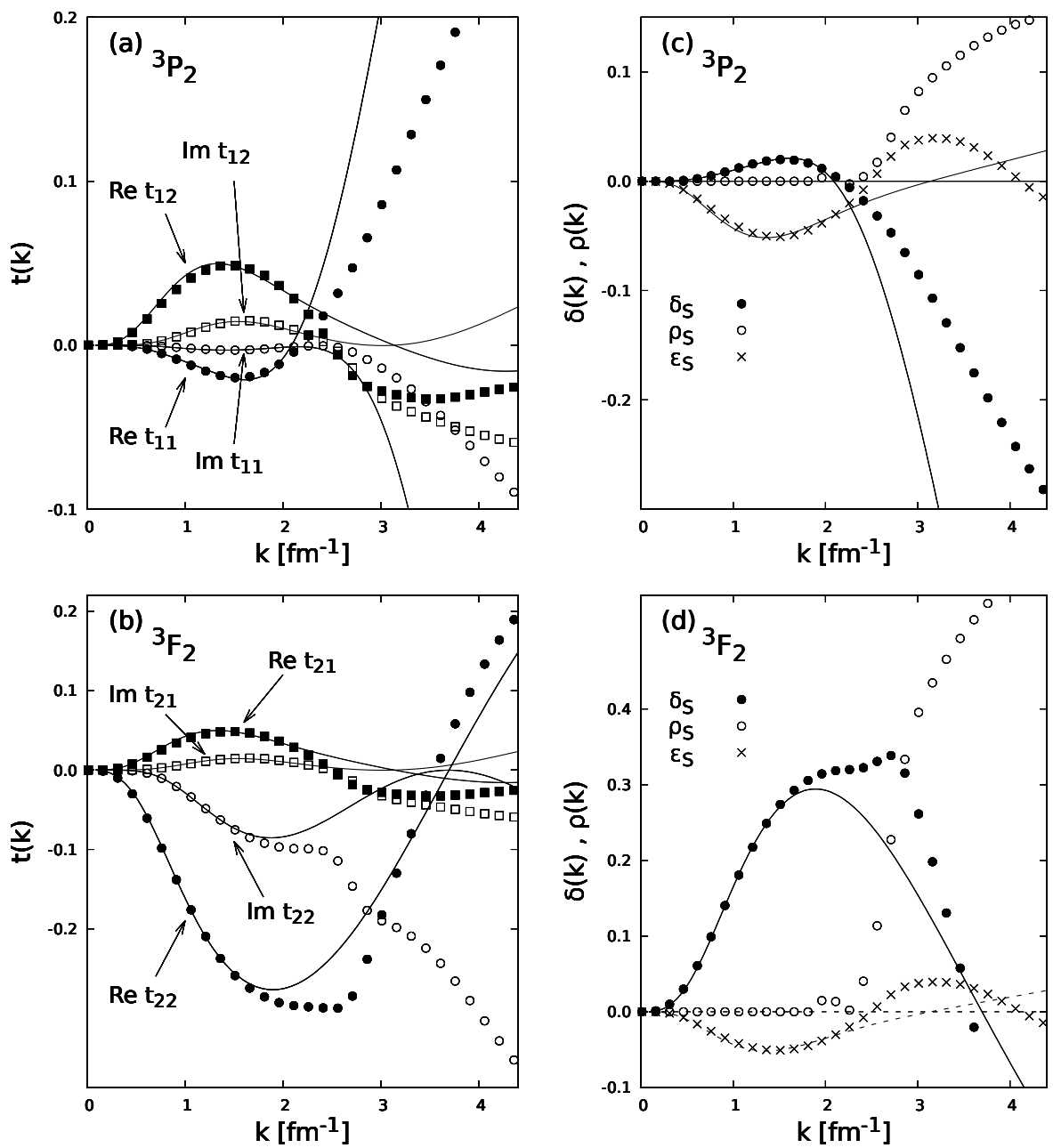


Figura 4.1: Matriz T on-shell (cuadros (a) y (b)), corrimientos de fase y absorción (cuadro (c) y (d)) calculada con AV18 y comparada con SAID para los estados acoplados 3P_2 - 3F_2 . Ver texto para la descripción de los símbolos utilizados.

scattering es

$$\hat{T}(\omega) = \left[1 - \begin{pmatrix} \hat{V}_{11} & \hat{V}_{12} \\ \hat{V}_{21} & \hat{V}_{22} \end{pmatrix} G_0(\omega) \right]^{-1} \begin{pmatrix} \hat{V}_{11} & \hat{V}_{12} \\ \hat{V}_{21} & \hat{V}_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Notamos que si las submatrices no diagonales de \hat{V} son nulas, $\hat{V}_{12} = \hat{V}_{21} = 0$, entonces $\hat{T}(\omega)$ queda formada por dos submatrices diagonales, \hat{T}_{11} y \hat{T}_{22} . En tal caso, si las interacciones son separables, \hat{V}_{11} y \hat{V}_{22} como

$$\hat{V}_{11} = |a\rangle\langle\tilde{a}|, \quad (4.7)$$

$$\hat{V}_{22} = |b\rangle\langle\tilde{b}|, \quad (4.8)$$

entonces \hat{T}_{11} y \hat{T}_{22} se resuelven de forma idéntica al caso no acoplado estudiado en el capítulo anterior.

Sin embargo el caso general presenta términos fuera de la diagonal de \hat{V} , los cuales no permiten una construcción separable \hat{V}_{ij} a todo orden en el diagrama escalera de la Ec. (4.6). Este problema ya ha sido identificado por otros autores [18, 50], quienes han propuesto una interacción separable diagonalizando la matriz S . En este trabajo se propone una estrategia similar, pero diagonalizando la matriz T al lado izquierdo de la Ec. (4.6). Para tal efecto se construirán matrices de paso.

Para un momentum angular total J dado, la proyección de la matriz T en espacio de momentum es

$$\langle k' | \hat{T}(\omega) | k \rangle = \begin{pmatrix} \langle k' | \hat{T}_{11}(\omega) | k \rangle & \langle k' | \hat{T}_{12}(\omega) | k \rangle \\ \langle k' | \hat{T}_{21}(\omega) | k \rangle & \langle k' | \hat{T}_{22}(\omega) | k \rangle \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Se introduce el operador independiente de la energía

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \hat{P}_{11} & \hat{P}_{12} \\ \hat{P}_{21} & \hat{P}_{22} \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

donde su dependencia en J queda implícita. Cada sub-matriz \hat{P}_{ij} tiene la estructura

$$\hat{P}_{ij} = \int |k\rangle R_{ij}(k) dk \langle k|, \quad (4.11)$$

con R_{ij} una función de k . Con esta construcción la inversa de \hat{P} se expresa como

$$\hat{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{12} \\ \hat{Q}_{21} & \hat{Q}_{22} \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

donde se define

$$\hat{Q}_{11} = \int |k\rangle R_{22}(k) dk \langle k|, \quad (4.13)$$

$$-\hat{Q}_{12} = \int |k\rangle R_{12}(k) dk \langle k|, \quad (4.14)$$

$$-\hat{Q}_{21} = \int |k\rangle R_{21}(k) dk \langle k|, \quad (4.15)$$

$$\hat{Q}_{22} = \int |k\rangle R_{11}(k) dk \langle k|. \quad (4.16)$$

Con lo anterior y considerando $\langle k|k'\rangle = \delta(k - k')$, es posible observar que

$$\hat{P}\hat{P}^{-1} = \int |k\rangle [R_{11}(k)R_{22}(k) - R_{12}(k)R_{21}(k)] dk \langle k| \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Con ésto, si los coeficientes $R_{ij}(k)$ son normalizados de forma tal que para todo k se cumpla

$$R_{11}(k)R_{22}(k) - R_{12}(k)R_{21}(k) = 1, \quad (4.18)$$

entonces la condición $\hat{P}\hat{P}^{-1} = \hat{P}^{-1}\hat{P} = 1$ se satisface cabalmente. Lo anterior siempre cuando $R_{11}(k)R_{22}(k) - R_{12}(k)R_{21}(k) \neq 0$.

La construcción de \hat{P} se obtiene de la diagonalización de los elementos on-shell de la matriz T , es decir

$$\langle k|\hat{P}\hat{T}(\omega = k^2 + i\eta)\hat{P}^{-1}|k\rangle = \begin{bmatrix} R_{11}(k) & R_{12}(k) \\ R_{21}(k) & R_{22}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11}(k) & t_{12}(k) \\ t_{21}(k) & t_{22}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11}(k) & R_{12}(k) \\ R_{21}(k) & R_{22}(k) \end{bmatrix}^{-1}, \quad (4.19)$$

donde $t_{ij}(k) = \langle k|\hat{t}_{ij}(k^2 + i\eta)|k\rangle$, denota el elemento on-shell de cada una de las cuatro submatrices. La matriz diagonal de 2×2 resultante se denota como

$$\langle k|\hat{P}\hat{T}(\omega = k^2 + i\eta)\hat{P}^{-1}|k\rangle = \begin{bmatrix} t_a(k) & 0 \\ 0 & t_b(k) \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Entonces, para un conjunto de matrices t on-shell como función del momentum k , se obtiene $t_a(k)$ y $t_b(k)$, con las correspondientes funciones de transformación $R_{ij}(k)$. Con lo anterior la Ec. (4.6) proyectada on-shell y diagonalizada, toma la forma

$$\begin{bmatrix} t_a(k) & 0 \\ 0 & t_b(k) \end{bmatrix} = \langle k|[1 - \hat{P}\hat{V}\hat{P}^{-1}G_0(k^2)]^{-1}\hat{P}\hat{V}\hat{P}^{-1}|k\rangle. \quad (4.21)$$

Notamos que, si la interacción trasformada $\hat{P}\hat{V}\hat{P}^{-1}$ tiene forma de dos submatrices diagonales, entonces el problema de encontrar un potencial de inversión resulta un problema desacoplado. Con esta observación, se propone el siguiente *ansatz* para la interacción trasformada

$$\hat{P}\hat{V}\hat{P}^{-1} = \begin{pmatrix} |a\rangle\langle\tilde{a}| & 0 \\ 0 & |b\rangle\langle\tilde{b}| \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

En tal caso la Ec. (4.21) conduce a las soluciones

$$t_a(k) = \frac{\langle k|a\rangle\langle\tilde{a}|k\rangle}{1 - \langle\tilde{a}|\hat{G}_0(k^2)|a\rangle}, \quad (4.23)$$

$$t_b(k) = \frac{\langle k|b\rangle\langle\tilde{b}|k\rangle}{1 - \langle\tilde{b}|\hat{G}_0(k^2)|b\rangle}. \quad (4.24)$$

De esta manera, el problema de scattering inverso para canales acoplados, se reduce a calcular dos pseudo-potenciales separables, $|a\rangle\langle\tilde{a}|$ y $|b\rangle\langle\tilde{b}|$. El método para obtener estas soluciones ya lo hemos descrito en el capítulo III para canales no acoplados. La interacción \hat{V} puede ser obtenida de la Ec. (4.22), mediante

$$\hat{V} = \hat{P}^{-1} \begin{pmatrix} |a\rangle\langle\tilde{a}| & 0 \\ 0 & |b\rangle\langle\tilde{b}| \end{pmatrix} \hat{P}. \quad (4.25)$$

Como se observa, la interacción también resulta independiente de la energía.

4.2. Resultados

En la construcción del potencial, se diagonaliza la matriz T on-shell, que se describe completamente con los seis elementos reales δ_+ , δ_- , ρ_+ , ρ_- , ε y μ , los que se obtienen como función de la energía de la base SAID. La matriz de scattering, se relaciona con la matriz S , a través de

$$\begin{bmatrix} S_{11}(k) & S_{12}(k) \\ S_{21}(k) & S_{22}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2i \begin{bmatrix} t_{11}(k) & t_{12}(k) \\ t_{21}(k) & t_{22}(k) \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

que en forma abreviada escribimos $S(k) = 1 - 2iT(k)$, con S y T matrices de 2×2 .

Siguiendo la convención de Arndt et al., se representa la matriz S en términos de la matriz K_4

$$S = (1 + iK_4)(1 - iK_4)^{-1}. \quad (4.27)$$

La componente real de K_4 queda definida por los corrimientos de fase y *mixing parameter*, mientras que la componente imaginaria de K_4 por las inelasticidades:

$$\text{Re}[K_4(k)] = i \begin{bmatrix} 1 - \cos 2\varepsilon(k)e^{2i\delta_-(k)} & i \sin 2\varepsilon(k)e^{i\{\delta_-(k)+\delta_+(k)\}} \\ i \sin 2\varepsilon(k)e^{i\{\delta_-(k)+\delta_+(k)\}} & 1 - \cos 2\varepsilon(k)e^{2i\delta_+(k)} \end{bmatrix} \times \quad (4.28)$$

$$\begin{bmatrix} 1 + \cos 2\varepsilon(k)e^{2i\delta_-(k)} & i \sin 2\varepsilon(k)e^{i\{\delta_-(k)+\delta_+(k)\}} \\ i \sin 2\varepsilon(k)e^{i\{\delta_-(k)+\delta_+(k)\}} & 1 + \cos 2\varepsilon(k)e^{2i\delta_+(k)} \end{bmatrix}^{-1},$$

$$\text{Im}[K_4(k)] = \begin{bmatrix} \tan^2 \rho_-(k) & \tan \rho_-(k) \tan \rho_+(k) \\ \tan \rho_-(k) \tan \rho_+(k) & \tan^2 \rho_+(k) \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Una vez construida la matriz S , se buscan las funciones $R_{ij}(k)$ que diagonalizan a T en la Ec. (4.26).

En general la diagonalización de la matriz T no presenta mayor dificultad. Sólo en algunos casos, para ciertos momenta k altos y muy bajos, T_{12} , T_{21} y T_{22} son muy débiles en comparación a T_{11} . Para evitar singularidades en estos casos, en el cálculo de R_{ij} , se impone $R_{11}(k) = R_{22}(k) = 1$, y $R_{12}(k) = R_{21}(k) = 0$. Con lo anterior se obtiene la matriz diagonal como función de k

$$\begin{bmatrix} t_a(k) & 0 \\ 0 & t_b(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11}(k) & R_{12}(k) \\ R_{21}(k) & R_{22}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11}(k) & t_{12}(k) \\ t_{21}(k) & t_{22}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11}(k) & R_{12}(k) \\ R_{21}(k) & R_{22}(k) \end{bmatrix}^{-1}. \quad (4.30)$$

Utilizando el *ansatz* propuesto en la Ec. (4.25), junto con la Ec.(4.23), se tiene

$$t_a(k) \left[1 - \left(\frac{2}{\pi} \right) \int_0^\infty \frac{f_a^2(p)p dp}{k^2 + i\eta - p^2} \right] = f_a^2(k), \quad (4.31)$$

$$t_b(k) \left[1 - \left(\frac{2}{\pi} \right) \int_0^\infty \frac{f_b^2(p)p dp}{k^2 + i\eta - p^2} \right] = f_b^2(k). \quad (4.32)$$

Es posible notar que estas ecuaciones son lineales para $f_a^2(k)$ y $f_b^2(k)$, las que se reducen a problemas matriciales luego de discretizar las integraciones en p . El método para resolverlos es idéntico al utilizado en el caso de canales no acoplados.

En este estudio se consideran los canales isovectoriales ${}^3\text{PF}_2$, ${}^3\text{FH}_4$ y ${}^3\text{HJ}_6$. De igual forma se examinan los canales isoescalares ${}^3\text{DG}_3$, ${}^3\text{GI}_5$ y ${}^3\text{IK}_7$. El canal del deuterón lo dejaré para la subsección siguiente. Puesto que en la construcción de los factores de formas se incluyen las inelasticidades, las soluciones $f_a(k)$ y $f_b(k)$ resultan con componentes imaginarias en ciertos rangos de k . Al igual que en los canales desacoplados, al no agregar las inelasticidades, se obtienen soluciones reales para todo rango de energía.

En el panel (a) de la Fig. 4.2, se grafican las componentes reales de los factores de forma f_a y f_b , para canales isoescalares ${}^3\text{DG}_3$ (línea continua gruesa y delgada, respectivamente), ${}^3\text{GI}_5$ (línea segmentada larga gruesa y delgada, respectivamente) y ${}^3\text{DK}_7$ (línea segmentada corta gruesa y delgada, respectivamente). De igual forma en el panel (b) de la misma figura se muestran las soluciones f_a y f_b , para los canales isovectoriales ${}^3\text{PF}_3$ (línea continua gruesa y delgada, respectivamente), ${}^3\text{FH}_5$ (línea segmentada larga gruesa y delgada, respectivamente) y ${}^3\text{HJ}_7$ (línea corta gruesa y delgada, respectivamente).

Se observa que en los canales con isospín $T = 1$, la amplitud de los factores de forma decrece a medida que el momentum angular aumenta. Ello no sucede en los canales con isospín $T = 0$, mostrados en el panel (b). Por otro lado, es posible notar que para los estados isovectoriales cerca del origen ($k \approx 0$), la pendiente de los factores de forma en los estados

$L = J + 1$ es mayor que la de los estados $L = J - 1$, correspondientes. Esta observación no es tan notoria en el caso de los canales isoescalares.

Por otra parte, en la Fig. 4.3 se muestran las componentes imaginarias de los factores de forma, las cuales siguen la misma convención de líneas que en la Fig. 4.2. En los paneles (a) y (b) se puede notar que la contribución imaginaria en los factores de forma es nula para momenta relativos $k \leq 1.5 \text{ fm}^{-1}$, dando cuenta de un potencial hermítico en ese rango de energías. Al igual que en los resultados del Cap. III, algunos canales no tienen componentes imaginarias, ya que la base de datos SAID reporta absorción nula.

El canal isovector ${}^3\text{PF}_2$ es de particular interés en el estudio de materia neutrónica y sus implicaciones en estrellas de neutrones [24, 20, 11, 10]. Se observa en las Figs. 4.2 y 4.3, que los factores de forma f_a y f_b tienen importantes contribuciones a momenta del orden de $k = 3 \text{ fm}^{-1}$, que corresponden a un dominio de alta densidad en materia nuclear.

En la Fig. 4.2 panel (b), se indican con flechas los nodos en los cuales las soluciones se anulan. Ello ocurre para las soluciones f_b del estado ${}^3\text{PF}_2$ en $k_c = 0.9 \text{ fm}^{-1}$ y $k_c = 2 \text{ fm}^{-1}$, y f_b del estado ${}^3\text{FH}_4$ en $k_c = 2.3 \text{ fm}^{-1}$. En el caso del canal ${}^3\text{FH}_4$, la solución f_b resulta de rango 2 y para el canal ${}^3\text{PF}_2$ de rango 3. En ambos paneles, se identifica el efecto de los reguladores con valor de $k_c = 3.5 \text{ fm}^{-1}$. Se evidencia que en momenta $k \geq 3.5 \text{ fm}^{-1}$, el factor de forma decae rápidamente, consistente con el ancho del regulador que en ese caso es $d = 0.2 \text{ fm}^{-1}$.

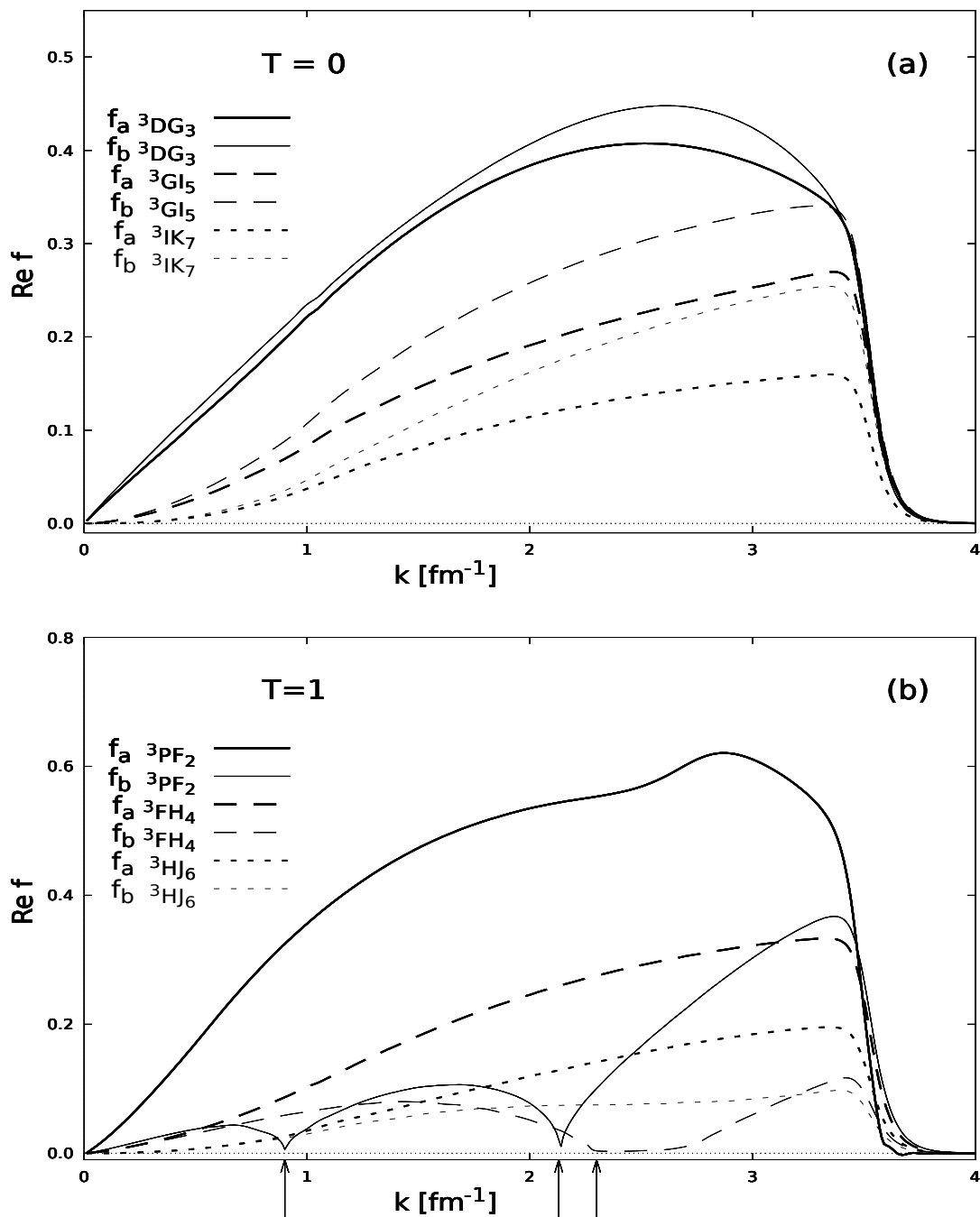


Figura 4.2: Componente real de los factores de forma f_a y f_b , para los canales acoplados con momentum angular total $J \leq 7$.

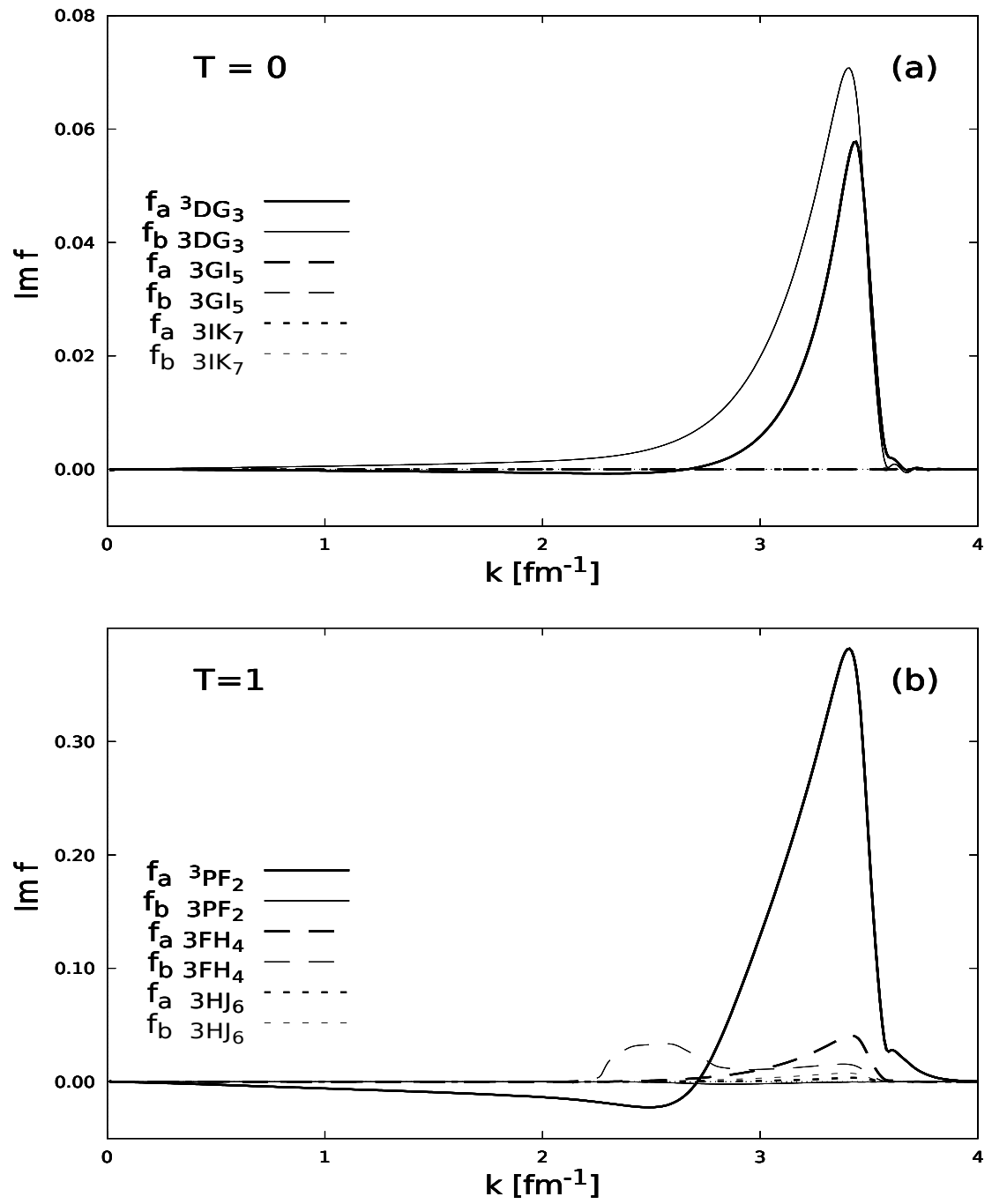


Figura 4.3: Componente imaginaria de los factores de forma f_a y f_b , para los canales acoplados con momentum angular total $J \leq 7$.

Al igual que en capítulos anteriores, se constata la confiabilidad del potencial, calculando la matriz de scattering. Para ello se utiliza la Ec. de LS (4.3), obteniendo los corrimientos de fase con las Ecs. (1.3), (1.4), (1.5), (1.8) y (1.9).

A fin de verificar la fiabilidad de las soluciones, se calculan los corrimientos de fase y absorciones. En relación a lo primero en la Fig. 4.4 se grafican los valores calculados a partir del potencial de inversión generado en este trabajo, para el canal ${}^3\text{PF}_2$. Los corrimientos de fase de la base SAID se muestra con cuadrados y círculos rellenos para los canales $L = J - 1$, y $L = J + 1$, respectivamente. La absorción se etiquetan con cuadrados y círculos vacíos. Los corrimientos de fase e inelasticidades calculados con el potencial de inversión son denotados con líneas continuas y líneas segmentadas, respectivamente. Estos resultados son comparados con los obtenidos a partir del potencial AV18, identificado con línea continua y segmentada delgada. Es posible notar la concordancia entre los valores de SAID y los obtenidos con el potencial de inversión en todo el rango de energía trabajado. Al comparar con AV18, se observa una concordancia razonable con SAID hasta $k \approx 1.6 \text{ fm}^{-1}$. Con este resultado, se concluye que una extrapolación ciega del potencial AV18 a energías sobre $k \approx 2 \text{ fm}^{-1}$, no es fiable.

Recordar que para canales no acoplados, la construcción del potencial de inversión se lleva a cabo en dominios de momenta donde no hay cambio de signo del corrimiento de fase. Para los canales acoplados, en tanto, se procede de forma análoga pero fijando los límites de los intervalos en aquellos donde $t_a(k)$ o $t_b(k)$ se anulan. En la Fig. 4.5 se muestra un gráfico 3D con la componente real de la solución f_a de rango tres en el caso del canal ${}^3\text{PF}_2$, calculado considerando la inelasticidad nula en todo el rango de energía. Por lo anterior, la componente imaginaria del factor de forma es nula. En esta figura se observa nuevamente la estructura de baldosas en espacio de momentum.

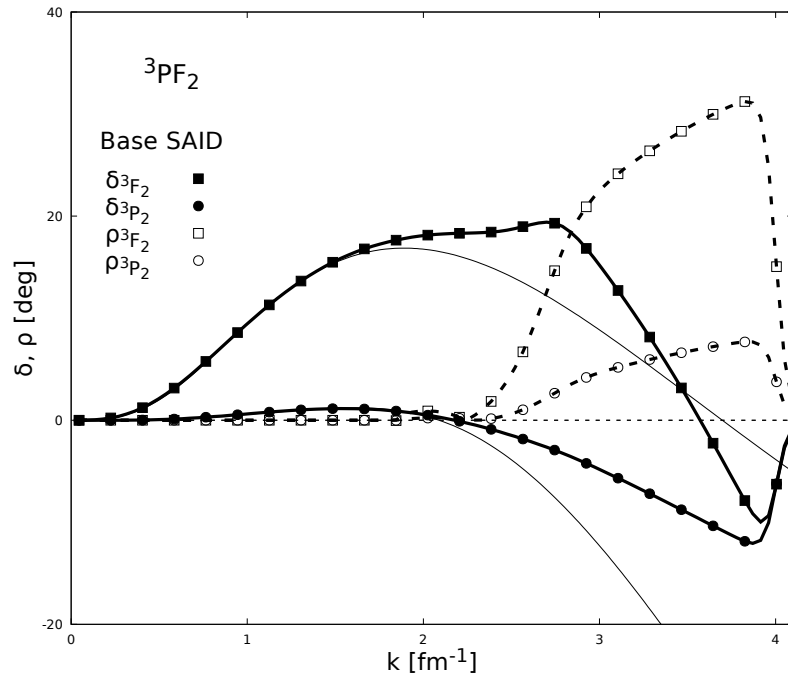


Figura 4.4: Corrimiento de fase en función del momentum relativo en los estados 3P_2 3F_2 .

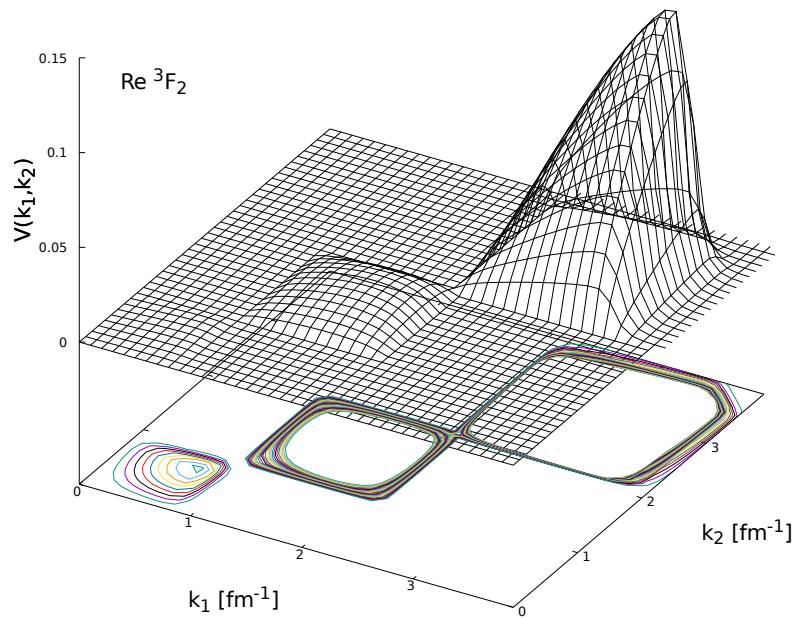


Figura 4.5: Esquema de baldosas para el pseudo-potencial $\text{Re} \langle k|a \rangle \langle \tilde{a}|k \rangle$ en canal 3P_2 .

4.2.1. El canal 3SD_1

El canal 3SD_1 corresponde al canal del deuteron, único estado ligado de dos nucleones en el vacío. Este estado corresponde a un sistema formado por un protón y un neutrón, cuya energía de ligazón es de 2.224 575(9) MeV [67]. Una signatura importante para la existencia de un estado ligado en este canal es el hecho de que el corrimiento de fase a bajas energías en colisión pn tiende a π . En la Fig. 4.6 graficamos los corrimientos fase $\delta(k)$ y absorción $\rho(k)$ como función del momentum relativo. Se incluyen en este gráfico los potenciales realistas AV18, PARIS y N3L0. Al igual que en el resto de los canales, los corrimientos de fase basados en potenciales realistas concuerdan bastante bien entre ellos hasta un momentum relativo del orden de $k = 2 \text{ fm}^{-1}$, correspondiente a una energía de laboratorio de 330 MeV.

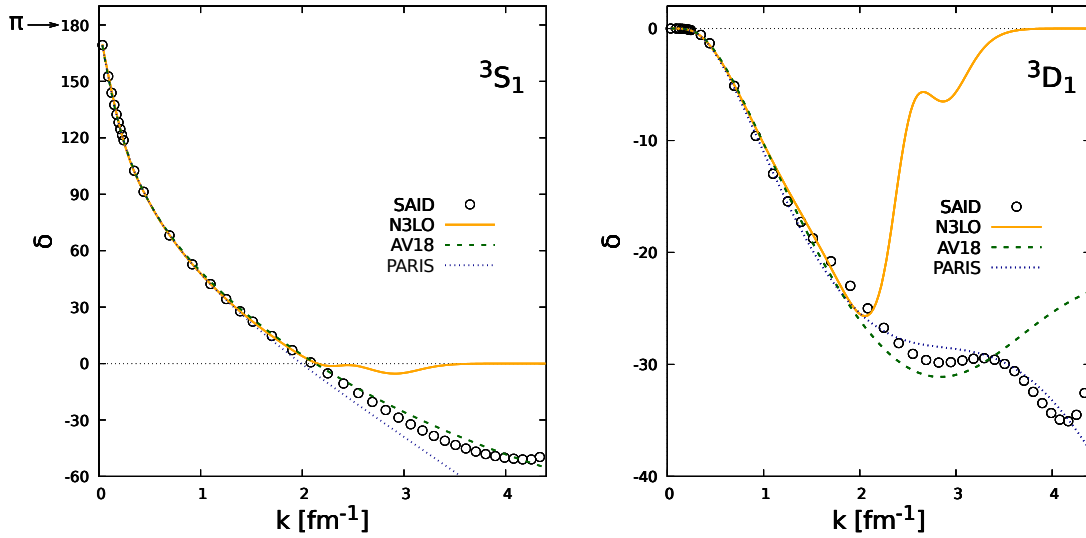


Figura 4.6: Corrimiento de fase en canales 3S_1 y 3D_1 .

Es posible notar efectivamente que el corrimiento de fase del canal 3S_1 tiende a π cuando $k \rightarrow 0$. En particular, se observa que el canal 3S_1 tiene la característica de ser el único con un corrimiento de fase que pasa por $\frac{\pi}{2}$, energía a la cual la matriz t toma el valor $t(k) = -i$. En adelante se denota por k_c al momentum relativo para el cual se cumple $t(k_c) = -i$. Es esta característica la exige un tratamiento más específico para este canal.

Una dificultad inadvertida que se encontró en el canal del deuteron fue la sensibilidad del factor de forma resultante a la grilla utilizada en la inversión. Más aún, al examinar el determinante de la matriz a invertir, como función del bloque cuadrado hasta al momentum k , el determinante decrece abruptamente, en varios ordenes de magnitud, al cruzar k_c . Para

controlar este comportamiento fue necesario estudiar en más detalle la forma que adquiere la Ec. (4.23) cuando $k = k_c$. En particular resulta crucial demostrar que $f^2(k_c) = 0$.

Dado que $t_a(k) = -i$, entonces

$$\lim_{k \rightarrow k_c} \frac{\langle k|a\rangle\langle\tilde{a}|k\rangle}{1 - \langle\tilde{a}|G_0(k^2)|a\rangle} = -i. \quad (4.33)$$

En efecto, consideremos la relación entre la matriz t y el corrimiento de fase

$$t(k) = -e^{i\bar{\delta}(k)} \sin \bar{\delta}(k). \quad (4.34)$$

Haciendo el alcance de que $\bar{\delta}(k)$ es un corrimiento de fase asociado a $t_a(k)$, el cual no necesariamente corresponde al canal 3S_1 .

Al reemplazar en la Ec. (4.23) se obtiene

$$\left(\frac{2}{\pi}\right) \mathcal{P} \int p dp \frac{f_a^2(p)}{k^2 - p^2} - f_a^2(k) \cot \bar{\delta}(k) = 1. \quad (4.35)$$

Evaluando en $k = k_c + \varepsilon$ y $k = k_c - \varepsilon$, luego tomando la diferencia y dividimos por 2ε , con $\varepsilon \rightarrow 0$, resulta

$$\left(\frac{2}{\pi}\right) \mathcal{P} \int p dp \frac{f_a^2(p)}{(k_c^2 - p^2)^2} = \frac{1}{2k_c} \frac{\partial}{\partial k} [f_a(k) \cot \bar{\delta}(k)]_{k_c}. \quad (4.36)$$

Puesto que el lado derecho de la ecuación es finito en k_c , entonces la integral debe ser finita. Dado que el denominador del integrando se anula cuadráticamente en k_c , y sin cambio de signo, necesariamente $f_a(k)$ debe ser nula en k_c . Con esto se demuestra que $f_a(k_c) = 0$, propiedad que Tabakin ¹ lo toma como un supuesto.

Dado que $f_a(k_c) = 0$, ello conlleva a un nuevo nodo en $f_a^2(k)$, lo que en el esquema de este trabajo implica que el rango de la interacción separable aumente en uno. Siendo ahora de rango $N + 1$, con N , el número de veces que la matriz t_a se anula. De esta forma, se procede a calcular los factores de forma aplicando el mismo método que en el caso de los canales no acoplados. En el caso del canal a del estado 3SD_1 , los nodos de la solución ocurren en $k_c = 0.4510 \text{ fm}^{-1}$ y $k = 2.1424 \text{ fm}^{-1}$.

En la Fig. 4.7 se grafican las soluciones obtenidas al considerar $\rho(k) = 0$ y $\rho(k) \neq 0$. Se observa que las componentes reales, están superpuestas en todo rango de energías. las componentes imaginarias, en tanto, coinciden para momenta inferiores a 2.2 fm^{-1} . Se muestra con línea continua en el cuadro inferior de la figura, que para momenta superiores a 2.2 fm^{-1} , la componente imaginaria del factor de forma que considera $\rho \neq 0$, emerge débilmente. Al hacer $\rho = 0$, la componente imaginaria del factor de forma es nula en todo rango de energía.

¹ Ver Ref. [66], Ec.(22)

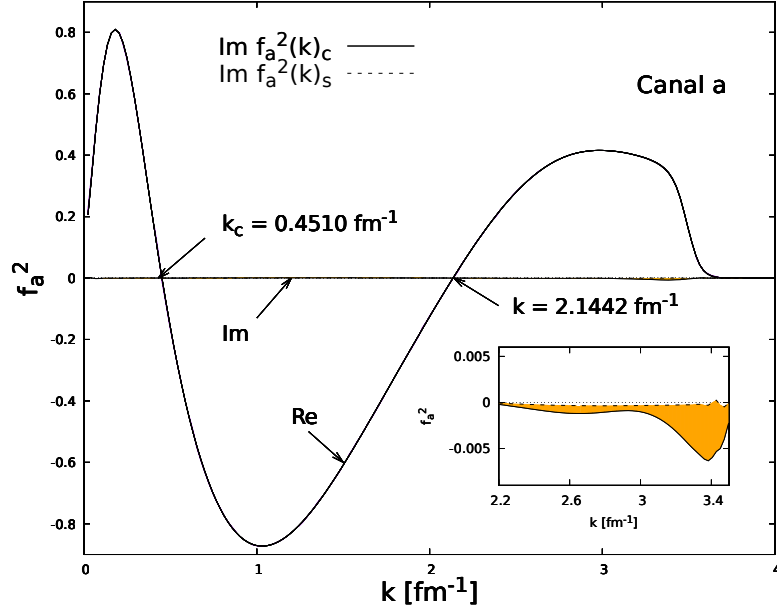


Figura 4.7: Factor de forma del canal a del estado ${}^3\text{SD}_1$. Recuadro muestra la diferencia en $f_a^2(k)$ al incluir $\rho \neq 0$.

En relación a los corrimientos de fase, en la Fig. 4.8 se grafican los valores obtenidos a partir del factor de forma de rango $2 + 1$. Cuadrados y círculos negros denotan los corrimientos de fase de la base SAID para los estados ${}^3\text{S}_1$ y ${}^3\text{D}_1$, respectivamente. En relación con la absorción para los mismos canales, ésta es señalada con cuadrados y círculos vacíos, respectivamente. También se compara la base SAID, con los corrimientos de fase (línea continua) y absorción (línea segmentada) obtenidos con el potencial de inversión. Al igual que en el resto de los canales, se observa buena concordancia entre los datos de SAID y los obtenidos con el potencial de inversión en todo el rango de energía trabajado.

4.2.2. Estados ligados

Se puede demostrar que, una solución formal para la matriz T se puede expresar como

$$\hat{T}(\omega) = \hat{V} + \hat{V}\hat{G}(\omega)\hat{V}, \quad (4.37)$$

con ω un parámetro de energía en el plano complejo, y $G(\omega)$ el propagador

$$\hat{G}(\omega) = \frac{1}{\omega - \hat{H}}. \quad (4.38)$$

En este caso $\hat{H} = \hat{K} + \hat{V}$, correspondiente al hamiltoniano del par interactuante. Esta representación para la matriz \hat{T} permite demostrar que $\hat{T}(\omega)$ es singular cuando ω coincide con

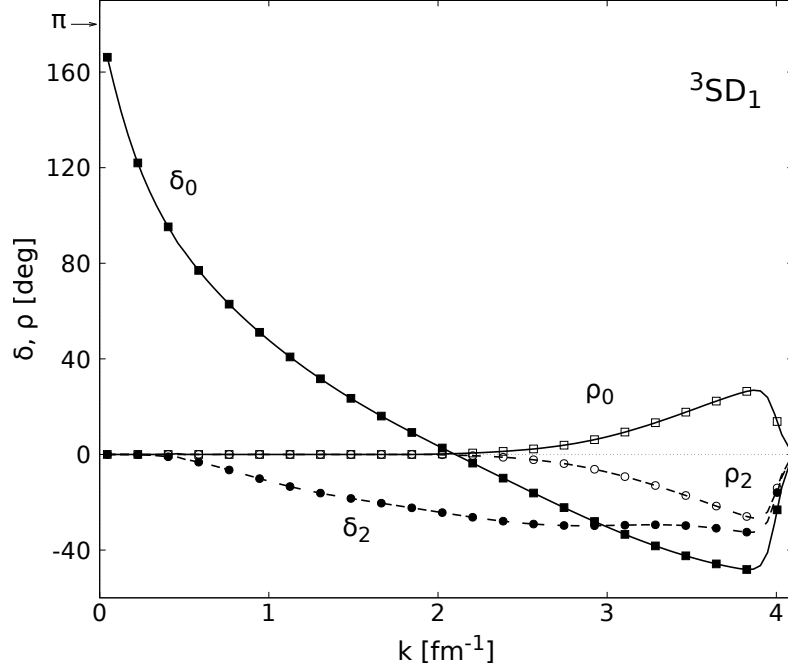


Figura 4.8: Corrimiento de fase δ_L e inelasticidad ρ_L en función del momentum relativo, para ondas S y D del estado 3SD_1 . Las líneas continuas y segmentadas corresponden a la solución de inversión de este trabajo.

un estado ligado de \hat{H} . En efecto, sean $|\psi_\alpha\rangle$ y $|\psi_E\rangle$ autofunciones de \hat{H} , con autoenergías $\varepsilon_\alpha < 0$ y $E > 0$, respectivamente. Entonces

$$\sum_{\alpha} |\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha| + \int dE |\psi_E\rangle\langle\psi_E| = 1. \quad (4.39)$$

Insertando esta relación de completitud entre \hat{V} y \hat{G} en la Ec. (4.37), se obtiene

$$\hat{T}(\omega) = \hat{V} + \sum_{\alpha} \frac{\hat{V}|\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|\hat{V}}{\omega - \varepsilon_\alpha} + \int \frac{\hat{V}|\psi_E\rangle\langle\psi_E|\hat{V}dE}{\omega - \varepsilon_E}, \quad (4.40)$$

reconocida como representación espectral de Lehmann.

Claramente, cuando ω coincide con alguna autoenergía ε_β de \hat{H} , la matriz T diverge. Por lo tanto $\hat{T}(\omega)$ es singular en $\omega = \varepsilon_\beta$. Por otro lado, puesto que

$$[1 - \hat{V}\hat{G}_0(\omega)]\hat{t}(\omega) = \hat{V}, \quad (4.41)$$

la condición de singularidad en $\omega = \varepsilon_\beta$ [61], equivale a imponer que

$$\det[1 - \hat{V}\hat{G}_0(\varepsilon_\beta)] = 0. \quad (4.42)$$

En el caso específico del canal a del estado 3SD_1 , se ha calculado la función

$$D(\omega) = \det[1 - VG_0(\omega)], \quad (4.43)$$

con ω en el plano complejo. En la Fig. 4.9 se muestran mantos de $D(\omega)$ en función de ω en el plano complejo, donde $\text{Re}[D(\omega)] > 0$. Notamos que $\text{Im}[D(\omega)]$ se anula sobre la curva indicada con flechas. En contraste $\text{Re}[D(\omega)]$ nunca se anula. Con este resultado concluimos que la solución f_a no da cuenta de un estado ligado, a pesar de que $\delta_a(k) \rightarrow \pi$, para $k \rightarrow 0$.

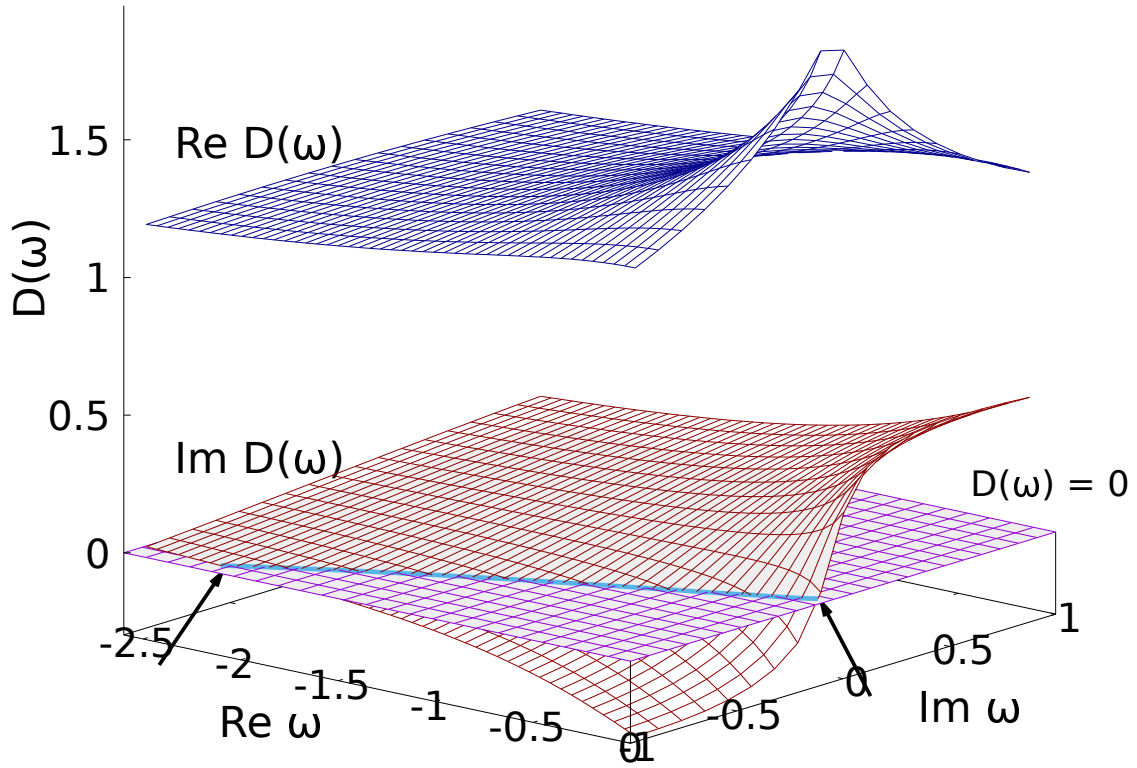


Figura 4.9: Determinante de $D(\omega)$ en el plano complejo ω . La línea gruesa denota la intersección de $\text{Im } D$ en el plano complejo ω .

La existencia de un estado ligado en el canal del deuterón es un hecho físico medible [59, 71]. Este hecho debe expresarse como una singularidad de la matriz T a una energía de -2.22 MeV. Sin embargo, como se ha visto recientemente, f_a no da cuenta de un estado ligado. Ante este escenario se discurre agregar a la interacción ya encontrada, una adicional,

vale decir

$$\hat{V} = \hat{v}_a + |\eta\rangle\langle\tilde{\eta}|. \quad (4.44)$$

Se exige a esta construcción que la solución debido a \hat{v}_a no sea alterada en el continuo, y que el determinante de Fredholm (incluyendo $|\eta\rangle\langle\tilde{\eta}|$) sea nulo para $\omega = E_d = -2.22$ MeV. Con esto, se propone un potencial de rango $3 + 1$.

Utilizando el esquema trabajado en los capítulo II y III, para reescribir la matriz T descrita por un potencial de referencia más un potencial separable, a través de la Ec. (2.9) resulta

$$\hat{T}(\omega) = \hat{t}_a(\omega) + \frac{[1 + \hat{t}_a(\omega)\hat{G}_0(\omega)]|\eta\rangle\langle\tilde{\eta}|[1 + \hat{G}_0(\omega)\hat{t}_a(\omega)]}{1 - \langle\tilde{\eta}|\hat{G}_0(\omega)|\eta\rangle - \langle\tilde{\eta}|\hat{G}_0(\omega)\hat{t}_a(\omega)\hat{G}_0(\omega)|\eta\rangle}. \quad (4.45)$$

Al hacer $\omega = k^2 + i\eta$, y proyectando on-shell, se obtiene

$$T(k^2) = t_a(k^2) + \frac{\langle k|[1 + \hat{t}_a(k^2)\hat{G}_0(k^2 + i\eta)]|\eta\rangle\langle\tilde{\eta}|[1 + \hat{G}_0(k^2 + i\eta)\hat{t}_a(k^2)]|k\rangle}{1 - \langle\tilde{\eta}|\hat{G}_0(k^2 + i\eta)|\eta\rangle - \langle\tilde{\eta}|\hat{G}_0(k^2 + i\eta)\hat{t}_a(k^2)\hat{G}_0(k^2 + i\eta)|\eta\rangle}. \quad (4.46)$$

Puesto que se busca no alterar la solución on-shell, entonces se impone $T(k^2) = t_a(k^2)$. Por lo tanto

$$\langle k|[1 + \hat{t}_a(k^2)\hat{G}_0(k^2 + i\eta)]|\eta\rangle = 0, \quad (4.47)$$

o bien

$$\langle k|\eta\rangle = -\langle k|\hat{t}_a\hat{G}_0(k^2 + i\eta)|\eta\rangle \quad (4.48)$$

Además de lo anterior, se exige que el denominador de la Ec. (4.46) se anule para $\omega = E_d$.

La Ec. (4.48) determina el factor de forma $|\eta\rangle$, función que queda determinada salvo una constante de proporcionalidad. Sea $\zeta(k)$ esta solución encontrada. Entonces es posible escribir

$$\langle k|\eta\rangle = \lambda\langle k|\zeta\rangle, \quad (4.49)$$

o bien

$$\langle\tilde{\eta}|k\rangle = \lambda\langle\tilde{\zeta}|k\rangle. \quad (4.50)$$

Por lo tanto se busca el valor de la constante λ , que al reescalar el factor de forma calculado, se obtenga el estado ligado. Para tal efecto, al evaluar la matriz T en la energía $\omega = E_d$, la Ec. (4.46) debe indefinirse, cumpliendose

$$1 - \langle\tilde{\eta}|\hat{G}_0(E_d)|\eta\rangle + \langle\tilde{\eta}|\hat{G}_0(E_d)\hat{t}_a(E_d)\hat{G}_0(E_d)|\eta\rangle = 0. \quad (4.51)$$

Los detalles para obtener el valor de λ se encuentran en el Anexo A. En la Fig. 4.10, se muestra el factor de forma $\eta(k)$ en función del momentum. Las líneas continuas y segmentadas corresponden a las componentes reales e imaginarias respectivamente.

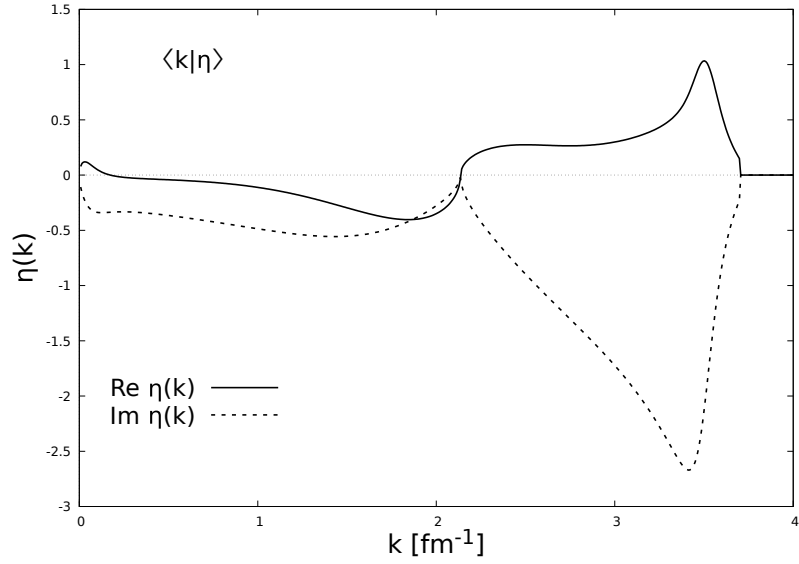


Figura 4.10: Factor de forma $|\eta\rangle$ para el canal a.

La construcción de la Ec. (4.44) para \hat{V} conlleva a un potencial separable de rango cuatro, que reproduce los datos en el continuo y además da cuenta del estado ligado del deuterón. En la Fig. 4.11 se grafica $D(\omega)$ con respecto a la energía ω en el plano complejo. En esta es posible observar el cruce por cero de la componente real e imaginaria del determinante para una energía $\omega = -2.2$ MeV, el cual a su vez es indicado por una flecha. De igual forma en la Fig. 4.12 se grafica el recíproco del valor absoluto del determinante para energías imaginarias desde -1 MeV hasta -1.8 MeV y energías reales desde -2.6 MeV hasta 0 MeV, encontrando una singularidad a energía -2.2 MeV en el eje real y cero en el eje imaginario, dando cuenta de de estado ligado.

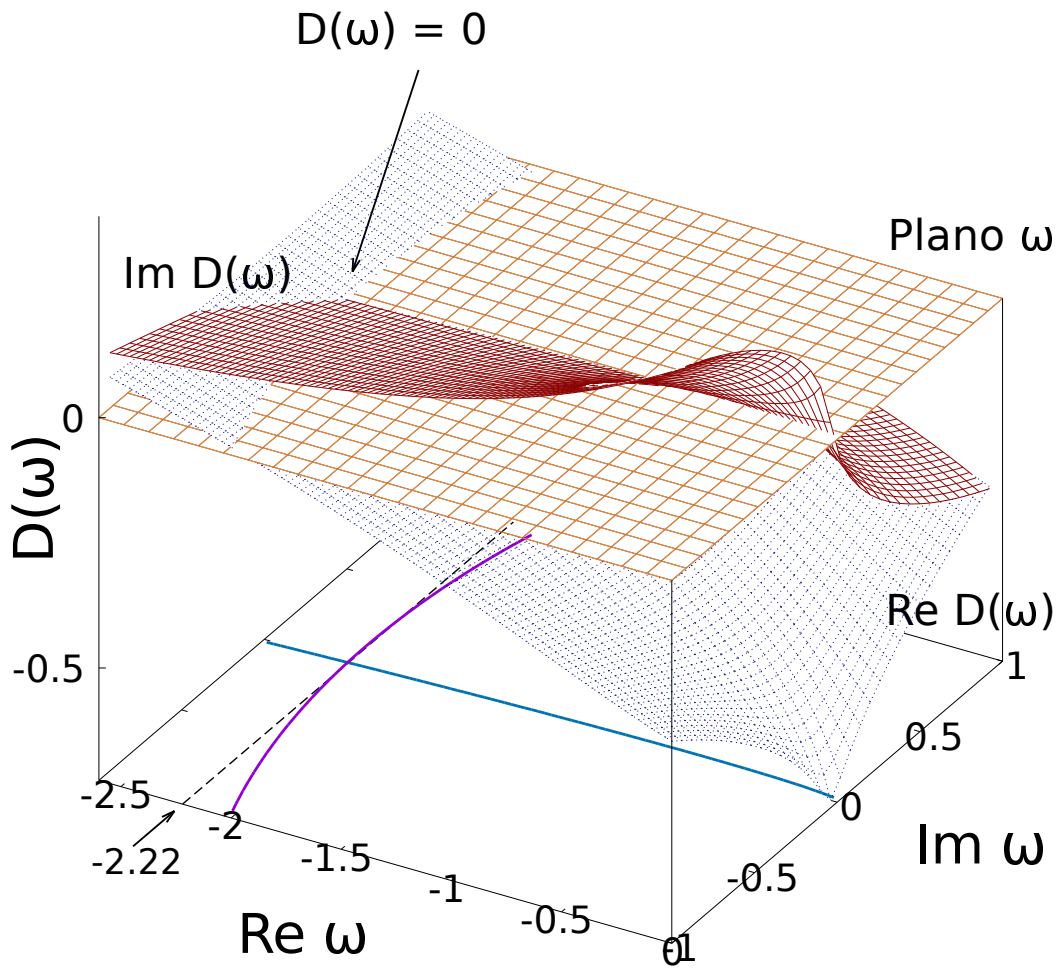


Figura 4.11: Determinante de $D(\omega)$ en el plano complejo ω . Las curvas inferiores, indican la intersección de los planos $\text{Re}[D(\omega)]$ y $\text{Im}[D(\omega)]$, con el plano ω .

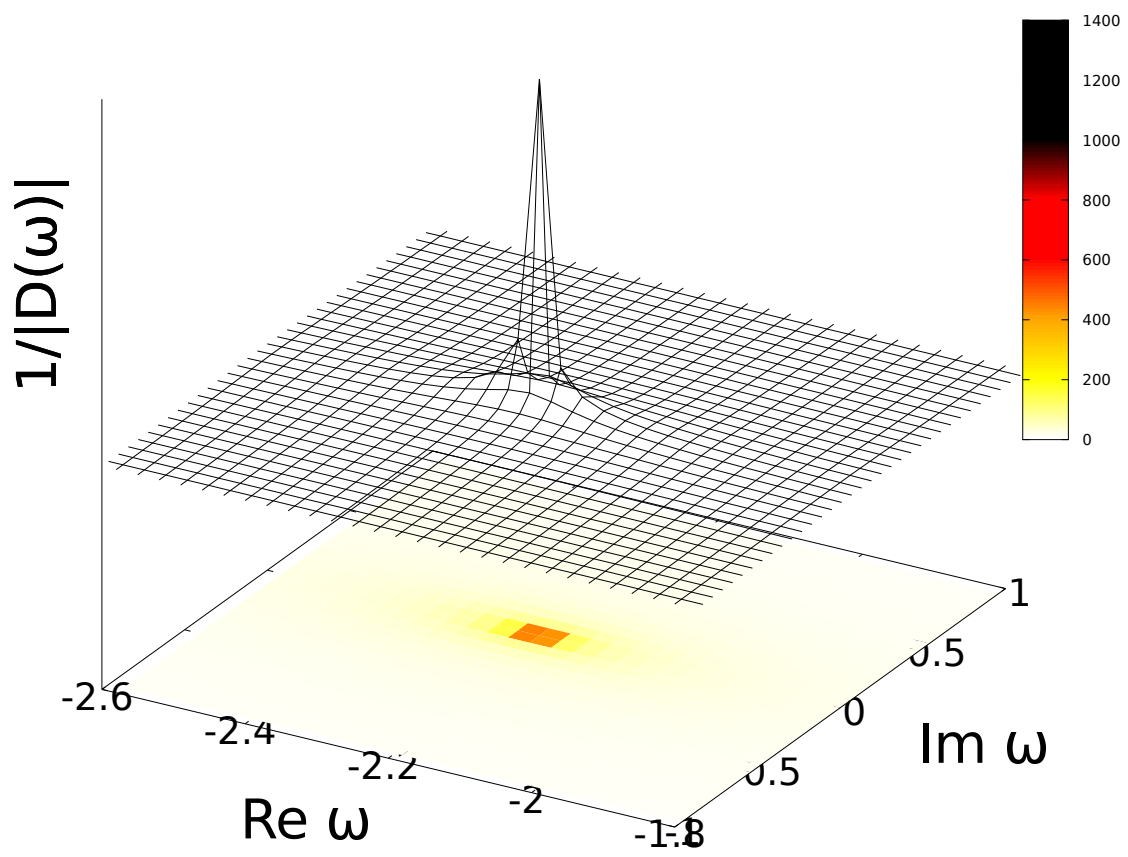


Figura 4.12: Gráfico de $1/|D(\omega)|$, en el plano complejo ω .

Resumen y conclusiones

Se ha presentado un estudio de la interacción entre dos nucleones en el marco de la ecuación de Schrödinger, con énfasis en la construcción de potenciales de inversión que describan de forma fidedigna, las amplitudes de scattering hasta energías de 1.6 GeV. Lo anterior exige dar cuenta de la absorción debido a la producción de mesones en canales inelásticos. Los potenciales construidos son estrictamente separables, o bien la suma de un potencial de referencia con términos separables. En ambos casos se obtienen soluciones que reproducen las amplitudes de scattering disponibles en la base de datos SAID [1]. Como potencial de referencia se ha utilizado el modelo AV18 [72].

En este estudio se han considerado de forma separada los casos de canales no acoplados y acoplados. En ambos casos los factores de forma son independientes de la energía, y la estructura de ellos en espacio de momentum es tal que permite reproducir los datos de entrada. Para el caso de los canales acoplados, se ha introducido operadores de diagonalización de la matriz de scattering, los que han permitido obtener potenciales que son desacoplables.

En el caso de potenciales estrictamente separables para canales no acoplados, se ha encontrado que el rango de las soluciones es igual al valor de los intervalos en los cuales la matriz de scattering no se anula. El esquema propuesto permite incluir de forma natural las inelasticidades en los distintos canales, obteniendo potenciales complejos. Con lo anterior, el potencial se construye hasta energías de 1.6 GeV, describiendo satisfactoriamente los corrimientos de fase e inelasticidades. La inclusión de inelasticidades ρ afecta significativamente al canal 1D_2 , mientras que en el canal 1S_0 no genera grandes cambios.

El canal del deuterón mereció atención focalizada, por las peculiaridades del comportamiento del corrimiento de fase a bajas energías. En particular, las ecuaciones para el factor de forma requieren de un tratamiento especial en $k = k_c$, identificado por otros autores, como un estado ligado en el continuo [66]. Sin embargo esto no es correcto, dado que la matriz t no es singular en este momentum. Lo que si es nulo es el determinante de Fredholm.

También en el caso del canal del deuteron, se encuentra que la solución para los factores de forma que dan cuenta del continuo no dan cuenta de un estado ligado. Ello a pesar de que los factores de forma reproducen $\delta(k)_{3S_1} \rightarrow \pi$ en $k \rightarrow 0$ (teorema de Levinson). Ante este escenario, se ha agregado un término separable adicional que no altere la matriz t en el continuo, pero hace que permite que la matriz t sea singular a $\omega = E_d$. Esta construcción es exacta.

En contraste de los potenciales separables introducidos por Tabakin [66], Bolsterli *et al.* [18] y Ernst *et al.* [31], las construcciones separables que se han presentado en este trabajo tienen incorporado inelasticidades. Así mismo, Kwong y Köhler [50] generan un potencial hasta energías de 1.6 GeV sin la inclusión de ρ , basados en la solución de Tabakin.

La interacción NN desnuda que se ha construido en este trabajo, dando cuenta de la amplitud de scattering hasta energías del orden de los GeV, permite su uso en otros ámbitos tales como el estudio de scattering nucleón-nucleo (NA) a altas energías, o desarrollo de ecuaciones de estado de materia nuclear a altas densidades. Si bien en la Ref. [4] se estudia scattering NA a energías relativistas, los potenciales separables considerados son dependientes de la energía, con factores de forma del tipo gaussiano e hidrogénico. Sería interesante estudiar como difieren tales soluciones con las obtenidas en este trabajo. Por otro lado, la reciente detección de ondas gravitacionales resultantes de la fusión de dos estrellas de neutrones, la GW170817 [2], ha resultado en un renovado interés en el estudio de estrellas de neutrones. Estos sistemas altamente densos tiene como constituyentes neutrones a densidades entre dos y tres veces la densidad de saturación de materia nuclear, $n_0 = 0.17 \text{ fm}^{-3}$. El equilibrio hidroestático de este sistema se estudia en el marco de la ecuación de Tolman–Oppenheimer–Volkoff, la cual requiere de la ecuación de estado de materia nuclear. Esta es una funcional de la energía del sistema en términos de la densidad, temperatura y asimetría nuclear. Esta ecuación se puede obtener microscópicamente en la aproximación de Brueckner-Hartree-Fock, haciendo uso de interacciones realistas. En esta línea, el trabajo presentado, constituye un paso necesario a fin de acotar el comportamiento de la ecuación de estado a altas densidades, o equivalentemente, altas energías.

Bibliografía

- [1] THE SAID. [<http://gwdac.phys.gwu.edu>] website provides access to fits, models, and the associated databases.
- [2] Abbott, B.P. et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration). Gw170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Physical Review Letter*, 119:161101, 2017.
- [3] Arellano, H.F. and Blanchon, G. Irreducible nonlocality of optical model potentials based on realistic NN interactions. *Physical Review C*, 98, 2018.
- [4] Arellano, H.F. and von Geramb, H.V. Extension of the full-folding optical model for nucleon-nucleus scattering with applications up to 1.5 GeV. *Physical Review C*, 66(2), 2002.
- [5] Arellano, H.F., Brieva, F.A. and Love, W.G. Nonrelativistic full-folding model of nucleon elastic scattering at intermediate energies. *Physical Review C*, 41(5), 1990.
- [6] Arellano, H.F., Brieva, F.A. and Love, W.G. In-medium full-folding optical model for nucleon-nucleus elastic scattering. *Physical Review C*, 52(1), 1995.
- [7] Arndt, R.A., Roper, L.D. Parametrizing the nucleon-nucleon scattering matrix above the inelastic threshold. *Physical Review D*, 25:2011–2012, 4 1982.
- [8] Babenko, V.A. and Petrov, N.M. Study of the Low-Energy Characteristics of Neutron-Neutron Scattering in the Effective-Range Approximation. arXiv 1605.04849. 2016.
- [9] Baldo, M. *Nuclear methods and the nuclear equation of state, tomo 8*. 1999.
- [10] Baldo, M., Cugnon, J., Lejeune, A. and Lombardo, U. Proton and neutron superfluidity

in neutron star matter. *Nuclear Physics A*, 536, 1992.

- [11] Baldo, M., Elgarøy, Ø., Engvik, L., Hjorth-Jensen, M. and Schulze, H.J. 3P2-3F2 pairing in neutron matter with modern nucleon-nucleon potentials. *Physical Review C*, 58, 10 1998.
- [12] Bargmann, V. On the connection between phase shifts and scattering potential. *Reviews of Modern Physics*, 21(3):488–493, 1949.
- [13] Bethe, H.A. Theory of the effective range in nuclear scattering. *Physical Review (Series I)*, 76(1):38–50, 1949.
- [14] Blatt, J.M. and Biedenharn, L.C. Neutron-Proton Scattering with Spin-Orbit Coupling. I. General Expressions. *Physical Review (Series I)*, 86, 5 1952.
- [15] Blatt, J.M. and Jackson, J.D. On the interpretation of neutron-proton scattering data by the Schwinger variational method. *Physical Review*, 76(1):18–37, 1949.
- [16] Bogner, S.K., Furnstahl, R.J. and Schwenk, A. From low-momentum interactions to nuclear structure. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 65(1):94–147, 2010.
- [17] Bogner, S.K., Furnstahl, R.J., Ramanan, S. and Schwenk, A. Low-momentum interactions with smooth cutoffs. *Nuclear Physics A*, 784(1-4):79–103, 2007.
- [18] Bolsterli, M. and MacKenzie, J. Determination of separable potential from phase shift. *Physics Physique Fizika*, 2:141–149, Nov 1965.
- [19] Boyle, J.F. Semiclassical inversion of rainbow scattering data. *Molecular Physics*, 22(6):993–1011, 1971.
- [20] Broglia, R.A. and Zelevinsky, V. *Fifty years of nuclear BCS: pairing in finite systems, tomo 1*. World Scientific, 2013.
- [21] Buck, U. and Pauly, H. Determination of Intermolecular Potentials by Inversion of Molecular Beam Scattering Data. *The Journal of Chemical Physics*, 51(4):1662–1664, 1969.
- [22] Cassing, W., Stingl, M. and Weiguny, A. Scattering with absorptive interaction: Energy-dependent potentials. *Physical Review C*, 27(5):1901–1912, 1983.

- [23] de Swart, J.J., Terheggen, C.P.F. and Stoks, V.G.J. The Low-Energy Neutron-Proton Scattering Parameters and the Deuteron. arXiv: nucl-th/9509032. pages 1–10, 1995.
- [24] Dean D.J. and Hjorth-Jensen, M. Pairing in nuclear systems: from neutron stars to finite nuclei. *Reviews of Modern Physics*, 75(2), 2003.
- [25] Degasperis, A. On the Inverse Problem for the Klein Gordon s Wave Equation. *Journal of Mathematical Physics*, 11(2):551–567, 1970.
- [26] Entem, D. R. and Machleidt, R. Accurate charge-dependent nucleon-nucleon potential at fourth order of chiral perturbation theory. *Physical Review C - Nuclear Physics*, 68(4):5, 2003.
- [27] Epelbaum, E. Four-nucleon force using the method of unitary transformation. *European Physical Journal A*, 214:197–214, 2007.
- [28] Epelbaum, E., and Glöckle, W. and Meißner, U. The two-nucleon system at next-to-next-to-next-to-leading order. *Nuclear Physics A*, 747(2-4):362–424, 2005.
- [29] Epelbaum, E., Meißner, Ulf-G. Modern theory of nuclear forces. *Review of Modern Physics*, 81, 2009.
- [30] Epelbaum, E., Nogga, A., Glöckle, W., Kamada, H., Meißner, U. and Witała, H. Three-Nucleon Forces from Chiral Effective Field Theory. *Physical Review C*, 66:1–17, 2002.
- [31] Ernst, D.J., Shakin, C. M. and Thaler, R.M. Separable Representations of Two-Body Interactions. *Physical Review C*, 8, 7 1973.
- [32] Faddeev, L. Three dimensional inverse problem in the quantum theory scattering. (Translated from the Russian by Seckler, B.). *Journal of mathematical physics*, 4(1), 1963.
- [33] Faddeev, L. Factorization of the s-matrix for the multidimensional schrödinger operator. *Soviet Physics Doklady*, 11:209, 08 1966.
- [34] Feshbach, H. Unified theory of nuclear reactions. *Annals of Physics*, 5(4):357–390, 1958.
- [35] Fröberg, C. Calculation of the interaction between two particles from the asymptotic phase. *Physical Review*, 72(6):519–520, 1947.

- [36] Funk, A., von Geramb, H.V. and Amos, K.A. Nucleon-nucleon optical model for energies up to 3 GeV. *Physical Review C*, 64:1–20, 2001.
- [37] Gasiorowicz, S., Gombás, P., Kisdi, D. and Litt, L. Quantum Physics and Wave Mechanics and Its Applications. *Physics Today*, 28(2):55–57, 1975.
- [38] Gel'fand, I.M. and Levitan, B.M. On the determination of a differential equation from its spectral function. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat*, 15(4):309–360, 1951.
- [39] H. P. Stapp, T.J. Ypsilantis, N Metropolis. Phase-Shift Analysis of 310-Mev Proton-Proton Scattering Experiments*. *Physical Review*, 1654(1954):302–310, 1957.
- [40] Hackenburg, R. Neutron-proton effective range parameters and zero-energy shape dependence. *Physical Review C*, 73, 04 2006.
- [41] Haidenbauer, J. and Plessas, W. Separable representation of the Paris nucleon-nucleon potential. *Physical Review C*, 30, 12 1984.
- [42] Hylleraas, E. Calculation of a perturbing central field of force from the elastic scattering phase shift. *Physical Review*, 74(1):48–51, 1948.
- [43] Jackson, J.D, and Blatt, J.M. The interpretation of low energy proton-proton scattering. *Reviews of Modern Physics*, 22(1):77–118, 1950.
- [44] Jost, R. and Kohn, W. Construction of a potential from a phase shift. *Physical Review*, 87(6):977–992, 1952.
- [45] Kamada, H. and Glöckle, W. Realistic two-nucleon potentials for the relativistic two-nucleon Schrödinger equation. *Physics Letters B*, 655:119–125, 2007.
- [46] Kay I. and Moses H.E. The determination of the scattering potential from the spectral measure function. *Il Nuovo Cimento*, III(9), 1956.
- [47] Kharchenko, V.F., Navrotsky, M.A. and Shadchin, S.A. Direct calculation of the proton-deuteron scattering lengths with the explicit removal of the long-range polarization interaction. *Nuclear Physics A*, 512, 1990.
- [48] Knyr, V.A., Neudatchin, V.G. and Khokhlov, N.A. Relativistic optical model on the basis of the Moscow potential and lower phase shifts for nucleon-nucleon scattering at

- laboratory energies of up to 3 GeV. *Physics of Atomic Nuclei*, 69(12):2034–2044, 2006.
- [49] Kok, L.P., van Haeringen H. On the theory of complex potential scattering. *Annals of Physics*, 131:226 – 250, 1981.
- [50] Kwong, N.H. and Khöler.S. Separable NN potentials from inverse scattering for nuclear matter studies. *Physical Review C*, 55(4):1650–1664, 1997.
- [51] Lacombe, M., Loiseau, B., Richard, J.M., Vinh Mau, R., Cote, J., Pires, P. and De Tourreil, R. Parametrization of the Paris N-N potential. *Physical Review C*, 21(3), 1980.
- [52] Lord Rayleigh, J. *The Theory of Sound*, volume 1. Nature, 1st ed., 1 edition, 1877.
- [53] Machleidt, R. High-precision, charge-dependent Bonn nucleon-nucleon potential. *Physical Review C*, 63:1–32, 2001.
- [54] Marchenko V.A. The construction of the potential energy from the phases of the scattered waves. *Soviet Physics Doklady*, 104(1):695–698, 1955.
- [55] Martin, M. and Gourdin, Y.A. Exact Determination of a Phenomenological Separable Interaction. *Cimento, I L Nuovo*, VIII(1), 1958.
- [56] Mazur, A.I., Shirokov, A.M., Vary, J.P., Weber, T.A., Zaitsev, S.A. and Mazur, E.A. Nonlocal Nucleon–Nucleon Interaction JISP. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*, 71(6):781–790, 2007.
- [57] Meissner, U. Modern theory of nuclear forces. *Nuclear Physics A*, 751:149–166, 2005.
- [58] Miller, W.H. Uniform semiclassical approximations for elastic scattering and eigenvalue problems. *The Journal of Chemical Physics*, 48(1):464–467, 1968.
- [59] Mudhole, T.S. and Umakantha, N. Binding energy of the deuteron: A laboratory experiment. *American Journal of Physics*, 43, 1975.
- [60] Roger, G.N. Noncentral potentials: The generalized Levinson theorem and the structure of the spectrum. *Journal of Mathematical Physics*, 18(7):1348–1357, 1977.
- [61] Rubin, H.L. *Quantum mechanics II, A Second Course in Quantum theory*. Wiley, 1996.

- [62] Shirokov, A.M., Mazur, A.I., Zaytsev, S.A., Vary, J.P. and Weber, T.A. Nucleon-nucleon interaction in the J-matrix inverse scattering approach and few-nucleon systems. *Physical Review C*, 70(4):044005, 2004.
- [63] Shirokov, A.M., Negoita, A.G., Vary, J.P., Bogner, S.K., Mazur, A.I., Mazur, E.A. and Gogny, D. Properties of nuclear matter within the JISP16 NN interaction. *Physical Review C*, 90(024324), 2014.
- [64] Sitenko, A. and Tartakovskii, V. *Theory of Nucleus, Nuclear Structure and Nuclear Interaction*. 1997.
- [65] Stoks, V.G.J., Klomp, R.A.M., Terheggen, C P.F. and De Swart, J.J. Construction of high-quality NN potential models. *Physical Review C*, 49(6):2950–2962, 1994.
- [66] Tabakin, F. Inverse Scattering Problem for Separable Potentials. *Physical Review (Series I)*, 177, 1 1969.
- [67] van der Leun C. and Alderliesten C. Investigation of ^{38}Ar Level by $^{37}\text{Cl}+p$ reactions . *Nuclear Physics A*, 220, 1982.
- [68] van Kolck, U. forces from chiral Lagrangians. *Physical Review C*, 49(6), 1994.
- [69] von Geramb, H.V., Funk, A. and Faltenbacher, A. Nucleon-Nucleon Optical Potentials and Fusion of π N, KN, $\pi\pi$ and NN Systems. *Few-Body Systems Suppl.*, pages 274–283, 2002.
- [70] Weingerg. Effective chiral lagrangians for nucleon-pion interactions and nuclear forces. *Nuclear Physics B*, 3, 1991.
- [71] Wiringa, R.B. and Steven C.P. Evolution of Nuclear Spectra with Nuclear Forces. *Physical Review Letter*, 89, 202.
- [72] Wiringa, R.B., Stoks, V.G.J. and Schiavilla, R. Accurate nucleon-nucleon potential with charge-independence breaking. *Physical Review C*, 51(1):38–51, 1995.
- [73] Yukawa, H. On the Interaction of Elementary Particles. I. *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series*, 17, 1935.
- [74] Zankel, H., Plessas, W. and Haidenbauer, J. Sensitivity of N-d polarization observables

on the off-shell behavior of the N-N interaction. *Physical Review C*, 28, 8 1983.

Anexo A

En el capítulo IV, se busca un factor de forma $|\eta\rangle$ que no altere la matriz de scattering en el continuo, siendo necesario que

$$\langle k|\eta\rangle = -\langle k|\hat{t}_a\hat{G}_0(k^2 + i\eta)|\eta\rangle, \quad (4.52)$$

además, se impone que el factor de forma de cuenta de un estado ligado para la energía $\omega = E_d$. Para esto se debe cumplir

$$1 - \langle\tilde{\eta}|\hat{G}_0(E_d)|\eta\rangle + \langle\tilde{\eta}|\hat{G}_0(E_d)\hat{t}_a(E_d)\hat{G}_0(E_d)|\eta\rangle = 0. \quad (4.53)$$

con t_a definido como

$$\hat{t}_a(E_d) = \frac{|\xi\rangle\langle\tilde{\xi}|}{1 - \langle\tilde{\xi}|\hat{G}_0(E_d)|\xi\rangle}, \quad (4.54)$$

donde $|\xi\rangle\langle\tilde{\xi}|$ corresponde a un pseudo-potencial. Resolviendo la Ec. (4.52) mediante inversión matricial, se obtiene un factor de forma $\langle k|\zeta\rangle$. La solución $\eta(k)$ es proporcional a $\zeta(k)$, por lo tanto

$$\langle k|\eta\rangle = \lambda\langle k|\zeta\rangle. \quad (4.55)$$

Para encontrar el valor de la constante λ , se reemplaza la Ec. (4.55) en la Ec. (4.53), obteniendo

$$1 - \lambda^2\langle\tilde{\zeta}|\hat{G}_0(E_d)|\zeta\rangle + \lambda^2\langle\tilde{\zeta}|\hat{G}_0(E_d)\hat{t}_a(E_d)\hat{G}_0(E_d)|\zeta\rangle = 0, \quad (4.56)$$

lo que implica

$$\lambda = \sqrt{\frac{1 - G_{\tilde{\xi}\xi}}{G_{\tilde{\zeta}\zeta} - G_{\tilde{\zeta}\zeta}G_{\xi\xi} - G_{\tilde{\xi}\zeta}^2}}. \quad (4.57)$$

Aquí se han definido

$$G_{\tilde{\zeta}\zeta} = \langle\tilde{\zeta}|\hat{G}_0(E_d)|\zeta\rangle, \quad (4.58)$$

$$G_{\tilde{\xi}\zeta} = \langle\tilde{\xi}|\hat{G}_0(E_d)|\zeta\rangle, \quad (4.59)$$

$$G_{\tilde{\xi}\xi} = \langle\tilde{\xi}|\hat{G}_0(E_d)|\xi\rangle, \quad (4.60)$$

donde

$$\langle \tilde{\zeta} | \hat{G}_0(E_d) | \zeta \rangle = \int_0^\infty k dk \frac{\zeta^2(k)}{E_d - k^2}, \quad (4.61)$$

$$\langle \tilde{\xi} | \hat{G}_0(E_d) | \zeta \rangle = \int_0^\infty k dk \frac{\xi(k)\zeta(k)}{E_d - k^2}, \quad (4.62)$$

$$\langle \tilde{\xi} | \hat{G}_0(E_d) | \xi \rangle = \int_0^\infty k dk \frac{\xi^2(k)}{E_d - k^2}. \quad (4.63)$$

El potencial separable resulta

$$|\eta\rangle\langle\tilde{\eta}| = \lambda^2 |\zeta\rangle\langle\tilde{\zeta}|, \quad (4.64)$$

que cumple con las Ecs. (4.52) y (4.53).