



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

MODELO NUMÉRICO PARA LA ESTIMACIÓN DE VERTIMIENTOS EN COLAPSOS
DE DEPÓSITOS SUPERFICIALES DE RELAVES

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,
MENCIÓN RECURSOS Y MEDIO AMBIENTE HÍDRICO

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

ALDO IGNACIO MUÑOZ SEPÚLVEDA

PROFESOR GUÍA:
ALDO TAMBURRINO TAVANTZIS

PROFESOR CO-GUÍA:
CESAR PASTÉN PUCHI

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
YARKO NIÑO CAMPOS
GINO MONTECINOS GUZMAN

Este trabajo ha sido financiado por la beca de Magíster Nacional
CONICYT-PCHA/MagísterNacional/2016-22161533.

Powered@NLHPC: Esta investigación fue parcialmente apoyada por la infraestructura de supercómputo del
NLHPC (ECM-02).

SANTIAGO DE CHILE
2019

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN
CIENCIAS DE LA INGENIERÍA MENCIÓN RECURSOS Y MEDIO AMBIENTE HÍDRICO
Y TÍTULO DE INGENIERO CIVIL
POR: ALDO IGNACIO MUÑOZ SEPÚLVEDA
FECHA: OCTUBRE 2019
PROF. GUÍA: ALDO TAMBURRINO TAVANTZIS

MODELO NUMÉRICO PARA LA ESTIMACIÓN DE VERTIMIENTOS EN COLAPSOS DE DEPÓSITOS SUPERFICIALES DE RELAVES

Los colapsos en depósitos superficiales de relaves, dada la rotura de su muro de contención, son desastres que causan importantes pérdidas económicas, ambientales y, en algunos casos, de vidas humanas. En Chile, este fenómeno se ha producido principalmente por la acción de sismos, los que producen la licuación del relave contenido y de algunas zonas del prisma resistente, desencadenando inestabilidad de taludes o reboses (*overtopping*).

La investigación desarrollada tuvo como objetivo diseñar e implementar un modelo numérico del que se pueda obtener para el colapso de un depósito superficial, la tasa de vertimiento de relaves y la evolución de la superficie de su muro de contención por efecto del paso del flujo. Los resultados generados buscan ser la información de entrada para la realización del rastreo de la onda de relave que se propaga hacia aguas abajo.

El proceso de rotura del muro, considerando una deformación instantánea de su superficie como condición inicial de falla, fue modelado como un flujo sobre un lecho erosionable. El relave se considera saturado y en estado licuado, siendo modelado como una mezcla no-newtoniana. El muro de contención se supone compuesto de material granular.

Las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento son integradas en vertical imponiendo condiciones de flujo somero. La reología de la mezcla es considerada en los términos friccionales que son calculados en función de las condiciones locales del flujo. La continuidad de sedimento se modela mediante la ecuación de Exner.

El modelo fue implementado utilizando el software OpenFOAM® como entorno de programación. Las ecuaciones de flujo y erosión fueron resueltas de forma débilmente acoplada, utilizando esquemas tipo Godunov. Se realizó la verificación y validación del modelo comparando su desempeño con soluciones analíticas y trabajos anteriores. Adicionalmente, se aplicó esta herramienta en un caso real de falla evaluando su desempeño y ejemplificando su uso.

En general, los resultados obtenidos de la aplicación del modelo indican que los parámetros que dominan el proceso erosivo son la densidad de mezcla y el esfuerzo de fluencia del relave licuado. Se observa que los volúmenes totales vertidos dependerían principalmente de los parámetros resistentes del relave contenido en la cubeta, cuando éste presenta un comportamiento como un suelo. Ahora bien, la distribución de los caudales efluentes estarían modulados por la reología del relave una vez licuado y por la erosión progresiva del muro por efecto del paso del flujo.

*Pero no me queda más memoria
y no hay foto que quiera borrar*

Agradecimientos

A mi madre, por sostenerme en los tiempos de mayor desolación. Gracias por vivir tan intensamente conmigo este proceso.

A mi familia, por su acompañamiento y soporte.

A mis amigos, por su compañía y escucha desinteresada. Gracias Gustavo, Javiera, Cristóbal, José, Luis, Carlos y Natalia por ser compañeros de ruta, ustedes hicieron que esto fuera más llevadero.

A mis profesores, por su consejo y guía. Gracias a mi profesor guía Aldo, por contagiar esa pasión por la enseñanza e investigación. Gracias Aldo y Yarko, los profes, por las oportunidades brindadas, el apoyo y la paciencia. Gracias Cesar, Gino y Javier, por rescatarme en distintas etapas de mi tesis con su consejo y experiencia.

A los funcionarios, por su apoyo diario. Gracias Jaquie por tu preocupación y continuo acompañamiento.

Al lector, gracias por hacer que tenga sentido haber escrito este trabajo.

A CONICYT por la beca CONICYT-PCHA/MagísterNacional/2016-22161533.

A la Universidad de Chile por el apoyo económico brindado mediante el programa *Ayudas para estancias cortas de investigación destinadas a tesistas de doctorado y magíster de la Universidad de Chile. 2016-2017. Departamento de Postgrado y Postítulo.*

Powered@NLHPC: Esta investigación fue parcialmente apoyada por la infraestructura de supercómputo del NLHPC (ECM-02).

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Objetivos	3
1.3. Organización del informe	3
2. Caracterización de los componentes del problema	4
2.1. Relaves	4
2.1.1. Composición y características físicas	4
2.1.2. Reología	5
2.2. Depósitos de relaves	8
2.2.1. Características generales de los depósitos superficiales	8
2.2.2. Tranques de relave	10
2.2.3. Embalses de relave	12
2.3. Colapsos de depósitos de relave	12
2.3.1. Causas principales	13
2.3.2. Nociones sobre licuación en suelos	14
2.3.3. Mecanismo de falla en muros	14
2.3.4. Fases de un colapso	15
3. Modelo conceptual	17
3.1. Supuestos adoptados	17
3.2. Ecuaciones gobernantes	19
3.2.1. Ecuaciones de continuidad de masa y cantidad de movimiento	19
3.2.2. Ecuación de continuidad de sedimento	25
3.3. Adimensionalización de ecuaciones	28
4. Modelo numérico	30
4.1. Estrategia de resolución	30
4.2. Discretización del dominio	31
4.3. Modelo hidrodinámico	32
4.3.1. Forma vectorial y carácter hiperbólico del sistema	32
4.3.2. Discretización de las ecuaciones	34
4.3.3. Extensión del esquema hidrodinámico a segundo orden	40
4.3.4. Tratamiento especial en zonas de interfaz	46
4.4. Modelo morfodinámico	54
4.4.1. Discretización de la ecuación	54

4.4.2. Correcciones para el flujo de sedimento	56
4.5. Criterio de estabilidad y control en alturas de flujo	58
5. Implementación del modelo numérico	60
5.1. Plataforma de trabajo: OpenFOAM®	60
5.1.1. Malla computacional y definición de campo geométrico	60
5.1.2. Cálculo numérico de gradientes	61
5.1.3. Paralelización	63
5.2. Generalidades de la implementación	63
6. Verificación, validación y aplicación	69
6.1. Verificación y validación	69
6.1.1. Verificaciones	70
6.1.2. Validaciones	100
6.1.3. Conclusiones del proceso de verificación y validación	107
6.2. Aplicación a escala real	107
6.2.1. Construcción del modelo numérico	108
6.2.2. Resultados	119
6.2.3. Conclusiones de la aplicación a un caso realista	123
7. Conclusiones	124
Nomenclatura	127
Bibliografía	132
Anexos	140
A. Información tabulada asociada a la caracterización del problema	141
B. Ecuaciones de flujo promediadas en el eje vertical	144
B.1. Análisis de escala	144
B.2. Promedio vertical de ecuaciones de Reynolds	152
C. Instalación y tutorial	156
C.1. Instalación	156
C.2. Tutorial	158
D. Estructura de archivos de damBreachFoam	166
D.1. Estructura del directorio principal	166
D.2. Estructura de librerías	170
E. Figuras: Casos de verificación	178
F. Figuras: Casos de validación	238
G. Figuras: Antecedentes de caso de aplicación	254
H. Figuras: Caso de aplicación	258

Índice de Tablas

2.1.	Características generales de los relaves.	5
2.2.	Clasificación de depósitos de relaves y su presencia en Chile al año 2018.	9
2.3.	Causas en colapsos de relaves a nivel mundial y chileno.	13
3.1.	Escalas del problema.	29
5.1.	Opciones implementadas en el solucionador <code>damBreachFoam</code>	66
5.2.	Opciones implementadas para el cálculo de c_f	67
5.3.	Opciones implementadas para el cálculo de q_s	68
6.1.	Configuraciones básicas para la verificación y validación del modelo.	70
6.2.	Condición inicial de problemas de Riemann homogéneos unidimensionales.	71
6.3.	Condición inicial de problemas de Riemann no homogéneos unidimensionales con factor de fricción constante.	72
6.4.	Condición inicial para pruebas de balance hidrostático.	74
6.5.	Condiciones iniciales para pruebas de conservación de flujos normales.	75
6.6.	Discretización y coeficiente de fricción para pruebas de flujo transitorio con frente seco-mojado.	78
6.7.	Parámetros del fluido para pruebas de verificación de factor de fricción.	81
6.8.	Parámetros de un relave para verificación del modelo para flujo transitorio. Fuente: Urrutia (2016), Anexo I, página 167, id 43.	85
6.9.	Parámetros del modelo para caso de verificación de flujo de fluidos no-newtonianos.	85
6.10.	Condiciones particulares de pruebas de verificación de flujo de fluidos no-newtonianos.	86
6.11.	Configuraciones básicas para la prueba de Fernández-Nieto et al. (2017).	89
6.12.	Configuraciones básicas para la prueba de erosión de presa a escala de laboratorio.	91
6.13.	Componentes de ecuación de gasto sólido de fondo para una condición particular suponiendo $h \sim 0,5$ m y $U \sim c = \sqrt{gh}$	92
6.14.	Elección de parámetros numéricos para validaciones.	100
6.15.	Condiciones experimentales presentados por Ancy et al. (2012).	100
6.16.	Condiciones experimentales presentados por Minussi & Maciel (2012).	105
6.17.	Vértices que limitan el dominio escogido. Coordenadas UTM zona 10N con con Datum WGS 84.	109
6.18.	Parámetros adoptados del muro adoptados para la simulación.	110
6.19.	Cota mínima de la brecha en escenarios de falla inicial considerados.	114
6.20.	Parámetros de relaves adoptados.	116
6.21.	Parámetros numéricos adoptados.	118

6.22. Escenarios de simulación.	118
6.23. Caudales y volúmenes para escenarios simulados de la Tabla 6.22 al cabo de 3 hrs de simulación.	120
A.1. Producción de relaves aproximada generada por la gran minería chilena para el periodo 2015-2016.	141
A.2. Características de algunos muros de depósitos de relaves chilenos construidos luego de 1965.	142
A.3. Propiedades índice y mineralogía de arenas de relaves de cobre provenientes de Chile y Perú.	143
C.1. Palabras clave y valores disponibles para subdiccionarios globalData, fluidProperties y solidProperties.	164
C.2. Palabras clave y valores disponibles para subdiccionarios bedFriction y bedLoad.	165

Índice de Ilustraciones

2.1.	Granulometría esquemática de relaves.	5
2.2.	Diagrama reológico esquemático para distintos fluidos.	6
2.3.	Esfuerzo de fluencia en función de la concentración de sólidos.	7
2.4.	Componentes principales de un depósito superficial de relaves chileno.	10
2.5.	Esquema simplificado de ciclones y granulometría típica obtenida para relave de cobre.	11
2.6.	Principales métodos constructivos para tranques de relaves.	11
2.7.	Sección transversal de embalse de relaves.	12
2.8.	Esquema comparativo entre colapsos de embalses de agua y depósitos de relave.	16
3.1.	Esquema simplificado del proceso de colapso de un depósito de relaves superficial.	18
3.2.	Falla depósito de relaves de Merriespruit.	18
3.3.	Representación esquemática de los componentes de las ecuaciones de aguas someras.	20
4.1.	Esquema de la discretización del dominio considerando rectángulos.	31
4.2.	Vectores r_{p*} y distancias $d_{\perp p*}$	32
4.3.	Esquema del problema de Riemann unidimensional proyectado.	36
4.4.	Estructura de la solución general del problema de Riemann en ecuaciones de aguas someras.	36
4.5.	Reconstrucción de las variables al interior de la celda.	43
4.6.	Reconstrucción de las variables utilizando MUSCL.	44
4.7.	Déficit de parte centrada del término fuente al evaluar en una reconstrucción de segundo orden.	46
4.8.	Esquema simplificado de zonas del flujo con tratamiento especial.	47
4.9.	Estrategias para representar el problema de celda seca-mojada.	47
4.10.	Tipos de celdas consideradas para el tratamiento de la interfaz seco-mojado.	48
4.11.	Tipos de frente seco-mojado.	49
4.12.	Equilibrio de fuerzas sobre una celda detenida.	50
4.13.	Esquema de distribución de velocidades considerada sobre el eje principal para el caso de la detención del flujo.	51
4.14.	Esquema de corrección criterio de detención.	52
4.15.	Vista frontal del colapso del depósito de relave de Mount Polley ocurrido en Agosto de 2014.	53
4.16.	Material en exceso dentro de una celda.	57
4.17.	Cota no erosionable z_{Rock}	57

5.1.	Esquema de malla computacional adecuada para el modelo propuesto.	62
5.2.	Esquema de campos geométricos.	62
5.3.	Diagrama de procesos de damBreachFoam	65
6.1.	Prueba T3 en $t = 4,0$ s de problemas de Riemann unidimensionales homogéneos de la Tabla 6.2.	71
6.2.	Prueba T2 en $t = 4,0$ s de problemas de Riemann unidimensionales no homogéneos de la Tabla 6.3.	72
6.3.	Posición de interfaz seco-mojado y error respecto de la solución aproximada de Chanson (2005).	73
6.4.	Prueba T3 en $t = 3600$ s de pruebas de conservación de balance hidrostático en reposo de la Tabla 6.4.	74
6.5.	Resultados de prueba T1 de la Tabla 6.5.	76
6.6.	Resultados de prueba T4 de la Tabla 6.6.	78
6.7.	Efecto de la discretización adimensional sobre el error de estimación para los casos de la Tabla 6.6.	79
6.8.	Efecto del coeficiente de fricción adimensional sobre el error de estimación para los casos de la Tabla 6.6	80
6.9.	Efecto del coeficiente de fricción y la discretización sobre el error de estimación de la posición del frente seco-mojado para los casos de la Tabla 6.6	80
6.10.	Verificación de factor de fricción para distintos parámetros del fluido.	82
6.11.	Colapso de columna cilíndrica de fluido ideal para eje $x = 19,95$ m.	84
6.12.	Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba bidimensional T4 de la Tabla 6.10 para $y = 0,05$ m.	87
6.13.	Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T3 de la Tabla 6.10.	88
6.14.	Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba bidimensional T7 de la Tabla 6.10 para $t = 0,034$ s e $y = 0,05$ m.	88
6.15.	Comparación de gasto sólido y cota de fondo en pruebas de Tabla 6.11 para configuración vs	90
6.16.	Esquema de condición inicial para verificación de erosión de una presa a escala de laboratorio.	91
6.17.	Efecto de la variación de distintos parámetros en la estimación del gasto sólido para $t = 5$ s para configuración vf . Se presenta en negro como referencia los valores obtenidos para un flujo de agua.	93
6.18.	Efecto de la variación de distintos parámetros en la estimación del gasto sólido para $t = 5$ s para configuración vs . Se presenta en negro como referencia los valores obtenidos para un flujo de agua.	94
6.19.	Efecto de la variación de distintos parámetros en la estimación del volumen de salida del reservorio para configuración vf . Se presenta en azul como referencia los valores obtenidos para un flujo de agua.	97
6.20.	Efecto de la variación de distintos parámetros en la estimación del caudal de salida del reservorio para configuración vf . Se presenta en azul como referencia los valores obtenidos para un flujo de agua.	98
6.21.	Efecto de la variación ρ_m en la estimación del caudal de salida del reservorio para distintas configuraciones. Se presenta en azul como referencia los valores obtenidos para un flujo de agua.	99

6.22.	Configuración experimental de Ancey et al. (2012). Fuente: Modificado de Ancey et al. (2012).	101
6.23.	Posición del frente de onda experimental y simulados para experimentos de Ancey et al. (2012).	102
6.24.	Superficie libre en función del tiempo en torno a la detención del flujo para esquemas de primer orden en prueba con $S = 15^\circ$ de Tabla 6.15.	103
6.25.	Configuración experimental de Minussi & Maciel (2012). Fuente: Modificado de Minussi & Maciel (2012).	104
6.26.	Resultados para prueba T1 de Tabla 6.16 comparados con resultados experimentales y aproximaciones numéricas.	106
6.27.	Imágenes satelitales situaciones del 29 de julio de 2014 y el 5 de agosto de 2014, antes y después del colapso del embalse de relaves respectivamente.	108
6.28.	Curvas de nivel de topografía original en documentos de diseño de los años 1995, 1996 y 2008 y reconstrucción de topografía en zona de interés.	109
6.29.	Sección proyectada en torno a zona de la brecha.	111
6.30.	Granulometría de muro en etapa de expansión.	112
6.31.	Sección en torno a zona de la brecha.	112
6.32.	Topografía de fondo del depósito considerando el muro y curva de embalse.	113
6.33.	Construcción de superficie idealizada de falla.	114
6.34.	Topografía de la brecha para escenarios de falla de la Tabla 6.19.	115
6.35.	Malla numérica adoptada.	116
6.36.	Ejemplo de condición inicial para geometría con brecha de falla max de Tabla 6.19.	117
6.37.	Caudales y volúmenes vertidos para escenarios simulados de la Tabla 6.22.	121
6.38.	Campos en torno a la brecha de falla para prueba 10m de la Tabla 6.22 para distintos tiempos.	122
B.1.	Representación esquemática de los ejes de ecuaciones de aguas someras.	145
B.2.	Modelos de flujo esquemáticos ante el aumento de concentraciones de arcilla suspendida.	149
C.1.	Esquema de condición inicial para tutorial de erosión de una presa a escala de laboratorio.	158
C.2.	Estructura de archivos para casos en ejecución del modelo damBreachFoam .	161
D.1.	Estructura general del solucionador desarrollado.	167
D.2.	Estructura del directorio libraries .	168
D.3.	Estructura del directorio solver .	168
D.4.	Estructura del directorio Make .	169
D.5.	Estructura del directorio subRoutines .	169
D.6.	Contenido de una clase genérica.	170
D.7.	Estructura del directorio tools .	171
D.8.	Estructura del directorio flux .	172
D.9.	Estructura del directorio fluxModels .	172
D.10.	Estructura del directorio bedSlope .	173
D.11.	Estructura del directorio bedSlopeModels .	173
D.12.	Estructura del directorio bedFriction .	174
D.13.	Estructura del directorio bedFrictionModels .	174

D.14.	Estructura del directorio cfModels .	174
D.15.	Estructura del directorio bedLoad .	175
D.16.	Estructura del directorio bedLoadModels .	175
D.17.	Estructura del directorio qsModels .	176
D.18.	Estructura del directorio godunovLoop .	177
E.1.	Problemas de Riemann unidimensionales homogéneos de Tabla 6.2 con fondo mojado durante toda la simulación.	178
E.2.	Problemas de Riemann unidimensionales homogéneos de Tabla 6.2 con frente seco-mojado.	179
E.3.	Resultados de prueba T1 de Tabla 6.2.	180
E.4.	Resultados de prueba T2 de Tabla 6.2.	181
E.5.	Resultados de prueba T3 de Tabla 6.2.	182
E.6.	Resultados de prueba T4 de Tabla 6.2.	183
E.7.	Resultados de prueba T5 de Tabla 6.2.	184
E.8.	Problemas de Riemann unidimensionales no homogéneos de Tabla 6.3 con factor de fricción de Darcy-Weisbach $f = f_0$ constante y frente seco-mojado.	185
E.9.	Resultados de prueba T1 de Tabla 6.3.	186
E.10.	Resultados de prueba T2 de Tabla 6.3.	187
E.11.	Resultados de prueba T3 de Tabla 6.3.	188
E.12.	Resultados de prueba T1 de Tabla 6.4.	189
E.13.	Resultados de prueba T2 de Tabla 6.4.	190
E.14.	Resultados de prueba T3 de Tabla 6.4.	191
E.15.	Resultados de prueba T1 de Tabla 6.5.	192
E.16.	Resultados de prueba T2 de Tabla 6.5.	193
E.17.	Resultados de prueba T3 de Tabla 6.5.	194
E.18.	Resultados de prueba T4 de Tabla 6.5.	195
E.19.	Resultados de prueba T5 de Tabla 6.5.	196
E.20.	Errores adimensionales pruebas T1-T3 de la Tabla 6.6.	197
E.21.	Errores adimensionales pruebas T4-T5 de la Tabla 6.6.	198
E.22.	Errores adimensionales pruebas T6-T7 de la Tabla 6.6.	199
E.23.	Errores adimensionales pruebas T8-T10 de la Tabla 6.6.	200
E.24.	Efecto de la discretización sobre la posición de la interfaz seco-mojado para casos de la Tabla 6.6 para un coeficiente de fricción lineal de $k = 0,001 \text{ s}^{-1}$.	201
E.25.	Efecto de la fricción sobre la posición de la interfaz seco-mojado para casos de la Tabla 6.6 para un tamaño de celda $\chi = 20 \text{ m}$.	202
E.26.	Errores adimensionales pruebas de colapso de columna cilíndrica de fluido ideal.	202
E.27.	Condición inicial de colapso de columna cilíndrica de fluido ideal.	203
E.28.	Condición para $t = 0,4 \text{ s}$ de colapso de columna cilíndrica de fluido ideal.	204
E.29.	Condición para $t = 1,4 \text{ s}$ de colapso de columna cilíndrica de fluido ideal.	205
E.30.	Condición para $t = 3,5 \text{ s}$ de colapso de columna cilíndrica de fluido ideal.	206
E.31.	Condición para $t = 7,0 \text{ s}$ de colapso de columna cilíndrica de fluido ideal.	207
E.32.	Alturas y caudales unitarios para colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T1 de la Tabla 6.10.	208
E.33.	Alturas y caudales unitarios para colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T2 de la Tabla 6.10.	209

E.34. Alturas y caudales unitarios para colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T3 de la Tabla 6.10.	210
E.35. Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T4 de la Tabla 6.10 para $t = 0,0$ s.	211
E.36. Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T4 de la Tabla 6.10 para $t = 1,0$ s.	212
E.37. Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T4 de la Tabla 6.10 para $t = 9,0$ s.	213
E.38. Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T5 de la Tabla 6.10 para $t = 0,0$ s.	214
E.39. Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T5 de la Tabla 6.10 para $t = 1,0$ s.	215
E.40. Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T5 de la Tabla 6.10 para $t = 9,0$ s.	216
E.41. Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T6 de la Tabla 6.10 para $t = 0,0$ s.	217
E.42. Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T6 de la Tabla 6.10 para $t = 1,0$ s.	218
E.43. Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T6 de la Tabla 6.10 para $t = 9,0$ s.	219
E.44. Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T7 de la Tabla 6.10 para $t = 0,0$ s.	220
E.45. Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T7 de la Tabla 6.10 para $t = 1,0$ s.	221
E.46. Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T7 de la Tabla 6.10 para $t = 9,0$ s.	222
E.47. Errores adimensionales pruebas de colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano de pruebas T1-T3 de la Tabla 6.10.	223
E.48. Errores adimensionales pruebas de colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano de pruebas T4-T6 de la Tabla 6.10.	224
E.49. Errores adimensionales pruebas de colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano de prueba T7 de la Tabla 6.10.	225
E.50. Alturas, cota del lecho y caudales unitarios en prueba T1 de la Tabla 6.11.	225
E.51. Alturas, cota del lecho y caudales unitarios en prueba T2 de la Tabla 6.11.	226
E.52. Alturas, cota del lecho y caudales unitarios en prueba T3 de la Tabla 6.11.	226
E.53. Alturas, cota del lecho y caudales unitarios en prueba T4 de la Tabla 6.11.	227
E.54. Alturas, cota del lecho y caudales unitarios en prueba T5 de la Tabla 6.11.	227
E.55. Alturas, cota del lecho, caudales y volúmenes para prueba T1 de la Tabla 6.12. $t^* = t/t_{peak}$ y $Q^* = Q/Q_{t=t_{peak}}$	228
E.56. Alturas, cota del lecho, caudales y volúmenes para prueba T2 de la Tabla 6.12. $t^* = t/t_{peak}$ y $Q^* = Q/Q_{t=t_{peak}}$	229
E.57. Alturas, cota del lecho, caudales y volúmenes para prueba T3 de la Tabla 6.12. $t^* = t/t_{peak}$ y $Q^* = Q/Q_{t=t_{peak}}$	230
E.58. Alturas, cota del lecho, caudales y volúmenes para prueba T4 de la Tabla 6.12. $t^* = t/t_{peak}$ y $Q^* = Q/Q_{t=t_{peak}}$	231
E.59. Alturas, cota del lecho, caudales y volúmenes para prueba T5 de la Tabla 6.12. $t^* = t/t_{peak}$ y $Q^* = Q/Q_{t=t_{peak}}$	232

E.60. Alturas, cota del lecho, caudales y volúmenes para prueba T6 de la Tabla 6.12. $t^* = t/t_{peak}$ y $Q^* = Q/Q_{t=peak}$	233
E.61. Alturas, cota del lecho, caudales y volúmenes para prueba T7 de la Tabla 6.12. $t^* = t/t_{peak}$ y $Q^* = Q/Q_{t=peak}$	234
E.62. Alturas, cota del lecho, caudales y volúmenes para prueba T8 de la Tabla 6.12. $t^* = t/t_{peak}$ y $Q^* = Q/Q_{t=peak}$	235
E.63. Alturas, cota del lecho, caudales y volúmenes para prueba T9 de la Tabla 6.12. $t^* = t/t_{peak}$ y $Q^* = Q/Q_{t=peak}$	236
E.64. Alturas, cota del lecho, caudales y volúmenes para prueba T10 de la Tabla 6.12. $t^* = t/t_{peak}$ y $Q^* = Q/Q_{t=peak}$	237
F.1. Alturas, cota del lecho y caudales unitarios en prueba T1 de la Tabla 6.15.	239
F.2. Alturas, cota del lecho y caudales unitarios en prueba T2 de la Tabla 6.15.	240
F.3. Alturas, cota del lecho, caudales unitarios y posición del frente de onda para prueba T1 de la Tabla 6.16.	241
F.4. Alturas, cota del lecho, caudales unitarios y posición del frente de onda para prueba T2 de la Tabla 6.16.	242
F.5. Alturas, cota del lecho, caudales unitarios y posición del frente de onda para prueba T3 de la Tabla 6.16.	243
F.6. Alturas, cota del lecho, caudales unitarios y posición del frente de onda para prueba T4 de la Tabla 6.16.	244
F.7. Alturas, cota del lecho, caudales unitarios y posición del frente de onda para prueba T5 de la Tabla 6.16.	245
F.8. Alturas, cota del lecho, caudales unitarios y posición del frente de onda para prueba T6 de la Tabla 6.16.	246
F.9. Alturas, cota del lecho, caudales unitarios y posición del frente de onda para prueba T7 de la Tabla 6.16.	247
F.10. Alturas, cota del lecho, caudales unitarios y posición del frente de onda para prueba T8 de la Tabla 6.16.	248
F.11. Alturas, cota del lecho, caudales unitarios y posición del frente de onda para prueba T9 de la Tabla 6.16.	249
F.12. Alturas, cota del lecho, caudales unitarios y posición del frente de onda para prueba T10 de la Tabla 6.16.	250
F.13. Alturas, cota del lecho, caudales unitarios y posición del frente de onda para prueba T11 de la Tabla 6.16.	251
F.14. Alturas, cota del lecho, caudales unitarios y posición del frente de onda para prueba T12 de la Tabla 6.16.	252
F.15. Alturas, cota del lecho, caudales unitarios y posición del frente de onda para prueba T13 de la Tabla 6.16.	253
G.1. Vista en planta de etapa temprana de construcciones del depósito de relaves de la Mina Mount Polley. Fuente: https://www.mountpolleyreviewpanel.ca/ supporting-information/background-information Doc. MP00049.	255
G.2. Vista en planta de diseño de expansión de depósitos de relave de la Mina Mount Polley. Fuente: https://www.mountpolleyreviewpanel.ca/supporting-information/ background-information Doc. AMEC00169.	256

G.3. Granulometrías de muro en plan de expansión de tamaño de muro. Fuente: https://www.mountpolleyreviewpanel.ca/supporting-information/background-information Doc. AMEC00169.	257
H.1. Campos en torno a la brecha de falla para prueba 5mf de la Tabla 6.22 para distintos tiempos.	258
H.2. Campos en torno a la brecha de falla para prueba 5m de la Tabla 6.22 para distintos tiempos.	259
H.3. Campos en torno a la brecha de falla para prueba 10mf de la Tabla 6.22 para distintos tiempos.	260
H.4. Campos en torno a la brecha de falla para prueba 10m de la Tabla 6.22 para distintos tiempos.	261
H.5. Campos en torno a la brecha de falla para prueba 25mf de la Tabla 6.22 para distintos tiempos.	262
H.6. Campos en torno a la brecha de falla para prueba 25m de la Tabla 6.22 para distintos tiempos.	263
H.7. Campos en torno a la brecha de falla para prueba maxf de la Tabla 6.22 para distintos tiempos.	264

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Uno de los residuos de mayor impacto ambiental proveniente de la actividad minera son los relaves. Estos corresponden a una mezcla de roca triturada con fluidos de procesos, generados en la extracción del recurso de interés (Kossoff et al., 2014). La razón de producción de relaves respecto al de concentrado de mineral es muy alta, generalmente en torno a 200:1 (Kossoff et al., 2014; Lottermoser, 2010), por lo que es uno de los desechos más voluminosos de la producción. Dado que existe un aumento de la demanda de minerales y una disminución progresiva de sus leyes, la industria minera ha aumentado la generación de relaves por la necesidad de procesar una mayor cantidad de roca. En el caso de la gran minería chilena, la generación de estos desechos para el periodo 2015-2016 se estima en 1.564.507 t/d¹ (SERNAGEOMIN, 2016) y se proyecta que este valor podría ser duplicado en el periodo comprendido entre los años 2016 y 2035 (Solís et al., 2016).

La solución para el manejo de estos residuos consiste en su acopio en *depósitos de relaves* buscando que el reservorio se mantenga estable química y físicamente (Decreto 248 del Ministerio de Minería, 2007). Chile cuenta con un total de 740 depósitos registrados al año 2018 (SERNAGEOMIN, 2018), predominando el uso de los depósitos superficiales convencionales. Los *tranques de relaves* son los depósitos más abundantes, con un 81,1 % del total, seguido por los *embalses de relaves* con un 15,9 %, siendo un porcentaje menor otras tecnologías como los depósitos de relaves *en pasta, espesados y filtrados*².

Los tranques y embalses de relaves son obras de ingeniería superficiales, en las que se acopia el relave mediante el uso de un muro perimetral construido progresivamente estando en operación. Se diferencian entre sí por los materiales que forman el prisma resistente. En los tranques, el prisma es construido con la fracción gruesa de los sólidos del mismo relave, mientras que en los embalses es construido con material de empréstito y el relave se acopia de forma íntegra (SERNAGEOMIN, 2017; Ramírez, 2007).

¹Detalle en Anexo A, Tabla A.1

²Porcentajes en base a la información presentada por SERNAGEOMIN (2018).

Por otro lado, los depósitos de relaves espesados, filtrados y en pasta corresponden a reservorios en los que previo a la depositación, el relave es sometido a procesos de extracción de un cierto porcentaje de fluidos. Con estos procesos se aumenta su consistencia y resistencia al corte, disminuyendo la necesidad de construir grandes muros para contenerlo (Ramírez, 2007).

Pese a que el diseño de los depósitos es metodológicamente robusto, existen diversos autores que argumentan que estas obras presentan tasas de falla relativamente altas. Davies (2002) estimó que anualmente en el mundo ocurren entre 2 a 5 colapsos de depósitos de relaves. Esta estimación se corrobora al analizar la lista de colapsos presentada por WISE (2018) entre los años 2002 - 2018 observando un promedio de 2 eventos anuales.

Si consideramos ahora sólo los tranques de relaves, Azam & Li (2010) tomando un inventario de 18401 minas, estiman que su tasa de falla en el último centenar de años corresponde a 1,2 %, que excede en dos órdenes de magnitud a los 0,01 % declarado por ICOLD (2001) para presas de agua convencionales. Adicionalmente, Villavicencio et al. (2014) indican que en el periodo comprendido entre los años 1915 - 2010 aproximadamente el 32 % del total de las fallas en presas de arena de relaves a nivel mundial ocurrieron en Chile, reportando 38 casos. Esto ilustra la frecuencia del fenómeno y la necesidad de determinar y describir los flujos una vez que una falla ocurra.

La legislación chilena se hace cargo del riesgo que presenta un colapso en estas estructuras mediante la reglamentación de su diseño, construcción, operación y cierre en el Decreto 248 del Ministerio de Minería (2007). En particular, se solicita al gestor de un proyecto nuevo estimar la distancia peligrosa y la hoya hidrográfica afectada por la trayectoria más probable del relave en caso de colapso. Adicionalmente, el Decreto 50 del Ministerio de Obras Públicas (2015) exige la presentación de un estudio de la rotura de la presa y la propagación de la onda de crecida con tal de identificar zonas de riesgo y los tiempos disponibles para reaccionar ante un eventual colapso, en el contexto del desarrollo de un plan de emergencias. Estos análisis son usuales en diseños de presas de agua donde se utilizan herramientas de la hidráulica fluvial para realizar las estimaciones, existiendo enfoques empíricos, semi-empíricos y con base física para encontrar el volumen vertido (Morris & Hassan, 2002).

Dado que el relave al fluir tiene características reológicas distintas al agua, es necesario considerar un modelo no-newtoniano del fluido para caracterizarlo. Es adecuado entonces utilizar enfoques basados en principios físicos, ya sean modelos físicos y/o modelos numéricos, desestimando enfoques empíricos y semi-empíricos por ser desarrollados, en su mayoría, considerando agua.

Es en este contexto donde la presente investigación se centra, buscando mejorar las estimaciones del vertimiento dado un colapso de un depósito de relaves superficial. En particular, se busca diseñar e implementar una herramienta computacional con la que se resuelva un modelo numérico basado en principios físicos del fenómeno, considerando que el relave presenta resistencia al corte y que el muro es construido con material granular susceptible de ser arrastrado por el paso del flujo.

1.2. Objetivos

El objetivo general de este trabajo corresponde al diseño e implementación de un modelo numérico que resuelva el colapso de un depósito de relaves superficial, describiendo la evolución de la forma de la brecha de falla en su muro de contención y generando un hidrograma de salida de relaves.

A su vez, el estudio contempla los siguientes objetivos específicos:

1. Caracterización de los componentes principales del fenómeno estudiado.
2. Selección del conjunto de ecuaciones que modele el fenómeno.
3. Implementación del modelo en una plataforma de código abierto con tal que sea aplicable a las dimensiones y componentes típicas de un depósito de relaves.
4. Verificación, validación y aplicación del modelo desarrollado.

1.3. Organización del informe

El presente trabajo cuenta con 7 capítulos, además de la respectiva bibliografía y anexos.

En el Capítulo 2 se realiza la caracterización general de los componentes que definen un depósito de relaves y sus colapsos. Se incluye las propiedades de los relaves, las características de los depósitos, una breve descripción de los principales modos de fallas en muros y las fases observadas en los colapsos.

En el Capítulo 3 se presenta el modelo conceptual formulado para estudiar el fenómeno, presentando los supuestos adoptados, las ecuaciones que gobiernan el problema, los números adimensionales involucrados y los fundamentos de las simplificaciones realizadas para su resolución.

En el Capítulo 4 se presenta el modelo numérico que fue implementado para la resolución de las ecuaciones del modelo conceptual. Es en este capítulo donde se abordan sus características particulares y se detallan la metodologías utilizadas que permitieron obtener un modelo funcional, constituyendo el núcleo fundamental del trabajo de tesis.

En el Capítulo 5 se presenta una breve descripción de las características de la implementación realizada y de la plataforma sobre la que fue construida.

En el Capítulo 6 se muestra la verificación y validación del modelo. Adicionalmente, se presentan los resultados obtenidos de su aplicación en un caso real de colapso.

Finalmente, en el Capítulo 7 se presentan la discusión y conclusiones generales de este estudio.

Capítulo 2

Caracterización de los componentes del problema

2.1. Relaves

Un relave corresponde a una mezcla de roca triturada y fluidos de procesos obtenidos en la extracción metales, minerales, combustibles o carbón de una mina (Kossoff et al., 2014). Desde que es generado y mientras es conducido hasta el sitio donde se deposita, es controlada su concentración de sólidos para que presente una consistencia de pulpa favoreciendo su transporte por métodos hidráulicos. Una vez acopiado, sus partículas tienden a sedimentar y a consolidarse por acción de su propio peso, presentando una pobre estabilidad mecánica (Hu et al., 2017).

Dicho material tiene una considerable variabilidad en sus características físicas y químicas debido a lo amplio de su definición. Para caracterizar completamente un relave usualmente es necesario conocer su composición geoquímica y mineralógica, la gravedad específica de sus partículas, permeabilidad, densidad, comportamiento plástico, comportamiento al consolidarse, reología, resistencia, entre otros (Lottermoser, 2010).

2.1.1. Composición y características físicas

Kossoff et al. (2014) y sus referencias indican que la composición de los relaves depende del mineral que se extrae, la naturaleza de los fluidos de procesos utilizados, la eficiencia del proceso de extracción y el grado de meteorización durante el almacenamiento. A menudo se supone que el relave tiene el mismo contenido mineral que el de la roca de origen pero con significativas diferencias en términos de tamaño de grano, mineralogía y química (Lottermoser, 2010). La presencia de Sílice y Fe son universales en todos los relaves, también es usual encontrar de forma abundante Al, Ca, K, Mg, Mn, Na, P, Ti y S (Kossoff et al., 2014).

La generalización de las características físicas de un relave es sumamente compleja debido

a lo variado de los procesos productivos. Kossoff et al. (2014) y Lottermoser (2010) entregan algunos valores de referencia de ciertas propiedades, presentados en la Tabla 2.1. Adicionalmente, se presenta en la Figura 2.1 una representación esquemática la granulometría típica de un relave, de la cual se desprende que es posible encontrar desde limos y arcillas hasta arenas de tamaño mediano en su fracción sólida.

Tabla 2.1: Características generales de los relaves. Fuente: Kossoff et al. (2014) y Lottermoser (2010).

Propiedad	Rango de referencia
Densidad Promedio	1,8 t/m ³ - 1,9 t/m ³
Gravedad específica	2,6 - 2,8
Tamaño promedio de granos	2 μm a 2 mm
Contenido de finos	20 wt % - 30 wt %
Contenido de arenas	70 wt % - 80 wt %

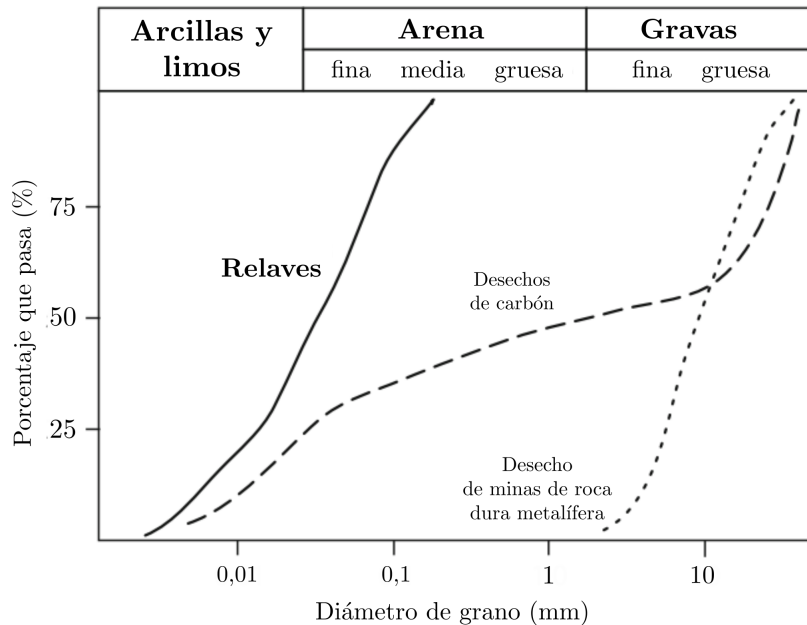


Figura 2.1: Granulometría esquemática de relaves. Adaptada de Lottermoser (2010).

Una vez transportado el relave y depositado en su locación final, éste sufre cambios por efecto de variados procesos químicos, físicos y biológicos. Dentro de estos procesos resalta la consolidación, cementación, recristalización, deshidratación y diagénesis, los que generan variaciones espaciales de sus propiedades. A modo de ejemplo, Kossoff et al. (2014) reporta desde una de sus referencias que en un depósito de relave es posible encontrar un gradiente de densidad de 0,09 t/m³ - 0,17 t/m³ por cada 30 m de profundidad.

2.1.2. Reología

Cuando un relave es espesado por encima de cierta consistencia, exhibirá un comportamiento no-newtoniano (Boger et al., 2006). Esto significa que la relación entre el esfuerzo de corte τ y la tasa de deformación $\dot{\gamma}$ de la mezcla puede ser no lineal y depender, en algunos casos, de la forma y/o del tiempo de aplicación de los esfuerzos.

Usualmente en los modelos de flujos de relave se utiliza un fluido con propiedades reológicas tales que exhibe un comportamiento equivalente al de la suspensión hiperconcentrada. A estos se les denomina *fluido equivalente* y facilitan el uso de expresiones de la mecánica de fluidos. En la Figura 2.2 se presenta esquemáticamente la relación para distintos comportamientos observados en fluidos no-newtonianos y que son susceptibles de ser utilizados para relaves. Estos comportamientos son modelados considerando que la relación $\tau - \dot{\gamma}$ es independiente del tiempo y, en algunos casos, existe un comportamiento elástico si el esfuerzo ejercido sobre el fluido es menor al esfuerzo de fluencia τ_y .

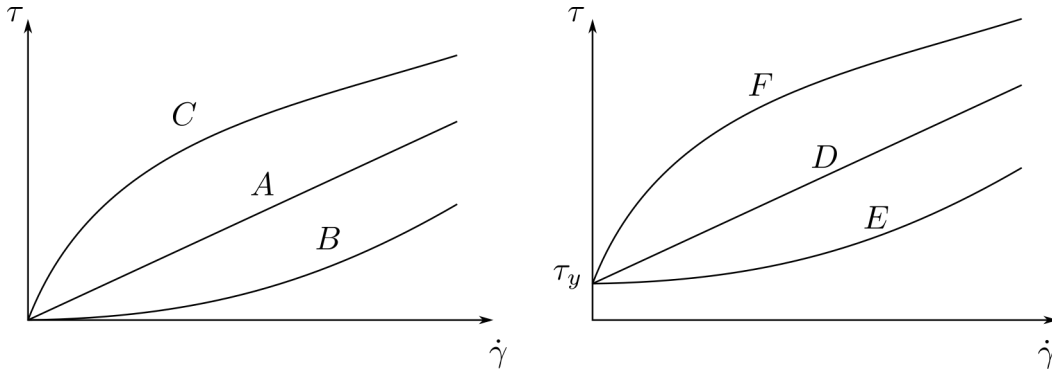


Figura 2.2: Diagrama reológico esquemático para distintos fluidos. A) Newtoniano; B) Dilatante; C) Pseudoplástico; D) Plástico Ideal o de Bingham ; E) y F) Plástico real.

Boger et al. (2006) indica que las ecuaciones mayormente utilizadas para parametrizar la relación $\tau - \dot{\gamma}$ corresponden al modelo de Ostwald-De Waele (o Ley de Potencia), para fluidos pseudo plástico o dilatantes; el modelo de Bingham, para un plástico ideal y el modelo de Herschel Bulkley, para plásticos reales.

Las relaciones de cálculo para cada uno de estos modelos pueden ser obtenidas a partir del modelo de Herschel Bulkley presentado en la ecuación 2.1, donde K corresponde al coeficiente de consistencia, m es el índice de flujo, $\text{II}_{\dot{\gamma}}$ es el segundo invariante del tensor de tasa de deformación, II_{τ} es el segundo invariante del tensor de esfuerzo de corte, $\mu_{ap} = \left(\frac{\tau_y}{\text{II}_{\dot{\gamma}}} + K \text{II}_{\dot{\gamma}}^{m-1} \right)$ es una viscosidad aparente y los sub-índices i, j corresponden a los ejes x, y, z en el sistema cartesiano.

$$\left(\frac{\tau_y}{\text{II}_{\dot{\gamma}}} + K \text{II}_{\dot{\gamma}}^{m-1} \right) \dot{\gamma}_{ij} = \mu_{ap} \dot{\gamma}_{ij} = \begin{cases} \tau_{ij} & , \text{ si } \tau_y < \text{II}_{\tau} \\ 0 & , \text{ si } \tau_y \geq \text{II}_{\tau} \end{cases} \quad (2.1)$$

En el caso particular del modelo de Ostwald-De Waele su formulación se rescata imponiendo $\tau_y = 0$ y en el caso del modelo de Bingham reemplazando $m = 1$. Ahora bien, pese a que la ecuación 2.1 puede ser considerada como una generalización de los modelos mencionados, los parámetros deben ser obtenidos de forma consistente con la expresión elegida. A modo de

ejemplo, si un esfuerzo de fluencia es ajustado para un modelo de Bingham, no necesariamente este valor es equivalente al encontrado para el mismo set de datos ajustado con un modelo de Herschel Bulkley.

Es importante recalcar que los parámetros de los modelos dependen fuertemente del contenido de sólidos y la composición de los mismos. En la Figura 2.3 se presenta la relación entre el esfuerzo de fluencia y su concentración en masa de sólidos para distintos tipos de relaves, ejemplificando la dependencia ya mencionada.

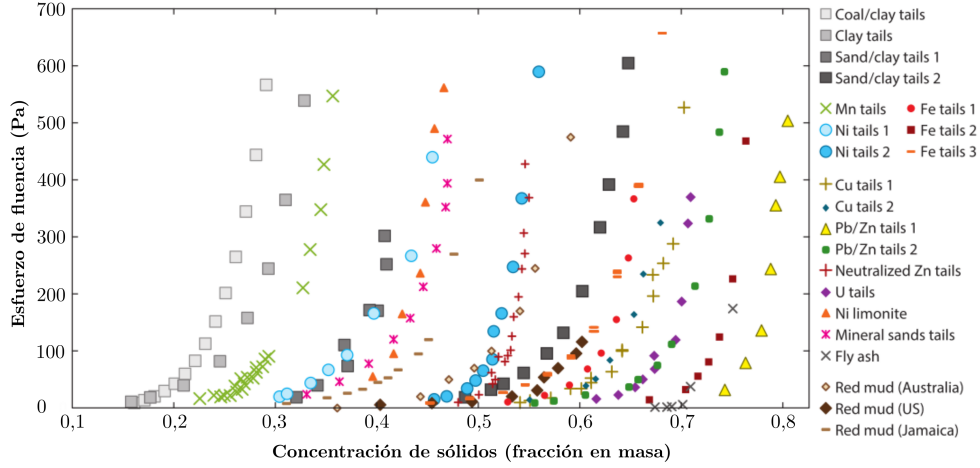


Figura 2.3: Esfuerzo de fluencia en función de la concentración de sólidos para distintos tipos de relaves. Adaptada de Pullum et al. (2018).

Para la determinación de los parámetros reológicos existen diferentes enfoques de acuerdo al nivel de información disponible. El primero corresponde a su determinación mediante ensayos sobre un volumen de fluido con una composición representativa del relave. Esta metodología es la más recomendable para obtener resultados precisos al momento de modelar flujos, pero rara vez se tiene bien caracterizado el relave al momento de realizar diseños o estudios. Usualmente se utilizan relaves de faenas semejantes para realizar estos ensayos.

Una segunda aproximación es utilizar expresiones provenientes de la teoría y experimentación en flujos de suspensiones, ajustando los parámetros de los modelos desarrollados en esos trabajos. Krieger & Dougherty (1959) desarrollaron la ecuación 2.2 para calcular el coeficiente de consistencia K para una suspensión de esferas rígidas en un medio newtoniano. Esta expresión depende de la concentración volumétrica de sólidos ϕ , la concentración volumétrica de empaquetamiento ϕ_m , la viscosidad del medio μ_s y una viscosidad intrínseca $[\mu]$. De forma análoga, Heymann et al. (2002) establece la ecuación 2.3 para el esfuerzo de fluencia en base a ϕ_m y una constante de ajuste $\bar{\tau}$ para una suspensión monodispersa de partículas en un medio newtoniano.

$$\frac{K}{\mu_s} = \left(1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right)^{-\phi_m[\mu]} \quad (2.2)$$

$$\frac{\tau_y}{\bar{\tau}} = \left(1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right)^{-2} - 1 \quad (2.3)$$

La aplicación de estas expresiones a un relave es discutible debido a que en su formulación fueron consideradas suspensiones que no rescatan la complejidad de un relave. Ahora bien, Calle et al. (2011) realizaron un catastro de relaves de faenas mineras chilenas donde corroboraron que al ajustar los parámetros μ_s , $\phi_m[\mu]$, ϕ_m y $\bar{\tau}$ en las ecuaciones 2.2 y 2.3, es posible acotar el rango de valores que son representativos de los parámetros reológicos buscados.

Otro enfoque para obtener los parámetros de los modelos reológicos es realizar un análisis estadístico de muestras de relaves. Esto con el objetivo de encontrar propiedades fácilmente medibles que predigan el valor de los parámetros. Urrutia (2016), bajo este enfoque, realizó un análisis de regresión multivariable sobre 105 muestras de relaves, encontrando como variables explicativas para los parámetros del modelo plástico de Bingham la concentración volumétrica ϕ , el contenido de arcillas $W_{arcilla}$, el tipo de arcillas $T_{arcilla}$ y la granulometría de la muestra, caracterizada por el diámetro d_{80} , formulando las ecuaciones 2.4 y 2.5.

$$\log \tau_y = -2,219 + 10,282\phi - 0,009d_{80} + 2,770W_{arcilla} + 0,085T_{arcilla} \quad (2.4)$$

$$\log K = -3,884 + 7,658\phi - 0,005d_{80} + 1,348W_{arcilla} + 0,042T_{arcilla} \quad (2.5)$$

Las ecuaciones anteriores tienen la desventaja de ser válidas sólo en el rango en que las variables fueron muestreadas para su determinación. En particular, estas ecuaciones fueron obtenidas para ϕ_m entre 20% y 40%, $W_{arcilla}$ entre 0% y 25%, con d_{80} entre 43,79 μm y 86,43 μm y tres condiciones para el tipo de arcilla: sin presencia de arcillas, caolinita y montmorillonita, con valores para $T_{arcilla}$ de 0, 1 y 2 respectivamente.

2.2. Depósitos de relaves

Un depósito de relaves corresponde a toda obra estructurada en forma segura para contener los relaves provenientes de una planta de concentración húmeda de especies de minerales (Decreto 248 del Ministerio de Minería, 2007). Estos depósitos se clasifican según el lugar en que se emplazan, tipo de obra, métodos constructivos y tipo de relave que contienen. Se presenta en la Tabla 2.2 una breve lista de los principales tipos de depósitos, indicando su cantidad y porcentaje en el contexto chileno a marzo de 2018.

2.2.1. Características generales de los depósitos superficiales

Los componentes característicos de cada una de estas obras son bastante específicos de acuerdo al emplazamiento y método constructivo. En el caso de aquellos que son superficiales y requieren obras para la contención del relave, motivo de estudio en esta investigación, es posible nombrar los siguientes componentes típicos (Ramírez, 2007):

- Cubeta: volumen físico en que el relave es acopiado. El relave previo a su depositación puede ser sometido a distintos tipos de tratamientos por lo que los residuos contenidos presentan una gran variabilidad en sus propiedades.

Tabla 2.2: Clasificación de depósitos de relaves y su presencia en Chile al año 2018.

Emplazamiento	Tipo de obra	Cantidad
Superficial (99,9%)	Tranque de relave	600 (81,1%)
	Embalse de relaves	118 (15,9%)
	Depósitos de relaves en Pasta	4 (0,5%)
	Depósitos de relaves en Espesados	7 (0,9%)
	Depósitos de relaves en Filtrados	9 (1,2%)
Subterráneos (0,1%)	Depósitos en minas de explotación	1 (0,1%)
	Depósitos en minas abandonadas	
	Depósitos en excavaciones abiertas	
	Depósitos mixtos	
Marinos o Lacustres (0%)	Costeros	
	Submarinos	
Otros (0%)	Depósitos de relaves radiactivos	
	Depósitos de relaves secos y desmonte	

Nota 1: Clasificación obtenida basándose en los trabajos de Espinace (2015), Palma (2016) y Ramírez (2007).

Nota 2: Porcentajes sobre 740 depósitos registrados en SERNAGEOMIN (2018).

- Muro de contención: muro que contiene el material que es depositado definiendo la cubeta. Se utilizan como sinónimos de esta zona conceptos como muro perimetral o prisma resistente.
- Zona de descarga o zona de playa: sector en que se descarga el material que es acopiado. Es denominada como zona de playa ya que usualmente está seca y se asemeja a una playa de arenas finas. Esta parte del depósito de relaves se sitúa en las cercanías del prisma resistente y se forma por la sedimentación de las partículas más gruesas presentes en el relave mientras éste es depositado.
- Poza de aguas claras o laguna de decantación: corresponde a un sector de la cubeta en que afloran aguas debido a la sedimentación de partículas sólidas y consolidación de las mismas. En esta zona se realiza la recuperación de aguas para la reutilización en el proceso minero. Mantener su ubicación alejada del muro es un aspecto crucial de la operación de los depósitos, con tal de no disminuir la estabilidad física del mismo por efecto en la variación del nivel freático.
- Sistema de descarga y/o clasificación y selección de relaves: sistema que permite la descarga de los residuos en la cubeta. En algunos depósitos, este sistema incluye procedimientos para la extracción de las arenas de relave que son utilizados en la construcción del muro perimetral.
- Sistema de drenaje: sistema de drenes u otras obras que se utilizan para deprimir el nivel freático del muro y aumentar su estabilidad física.
- Sistema de impermeabilización: corresponde a un sistema para evitar que fluidos conte-

nidos en la cubeta infiltran al muro. Usualmente se utilizan estratos de materiales con baja permeabilidad.

- Canales de desvío o de contorno: corresponden a canales construidos en el perímetro del depósito que tienen el objetivo de captar y encauzar la escorrentía superficial proveniente de la cuenca aportante al depósito, impidiendo su ingreso a la cubeta.

En la Figura 2.4 se presenta un esquema simplificado con los componentes ya mencionados.

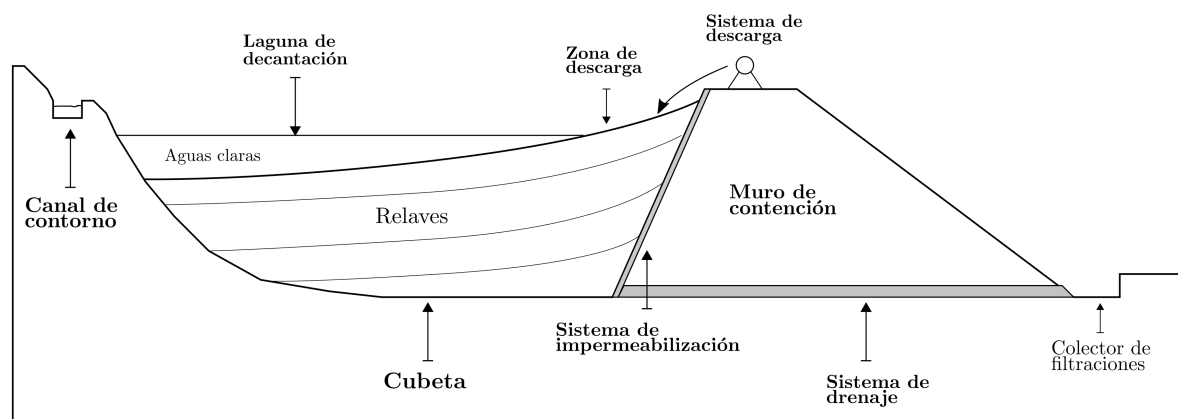


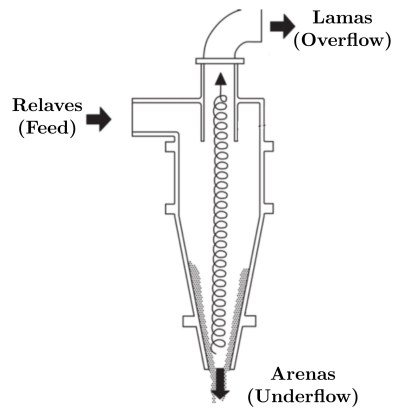
Figura 2.4: Componentes principales de un depósito superficial de relaves chileno. Figura inspirada en Lottermoser (2010).

La geometría de un muro es un aspecto de diseño que depende fuertemente del tipo de depósito y las características de la topografía en que se emplaza. Por lo general sus alturas están entre las decenas hasta los centenares de metros y sus longitudes son del orden de centenares de metros a kilómetros. La pendiente de sus taludes depende del tipo de material utilizado en su construcción, rondando entre 2:1 hasta 4:1 (H:V). En la Tabla A.2 del Anexo A se presentan algunos depósitos construidos en Chile posterior al colapso del tranque El Cobre Nro. 1 el año 1965, momento en el cual se aumentaron las exigencias para la construcción de estas obras (Valenzuela, 2016).

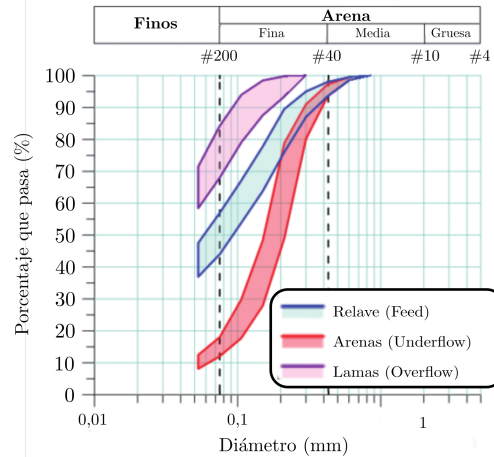
2.2.2. Tranques de relave

Los tranques de relaves son aquellos depósitos superficiales donde el muro de contención es construido con la fracción gruesa del relave (SERNAGEOMIN, 2017). Esta fracción está compuesta principalmente por arenas, las que son separadas del resto del relave, denominado como lama, mediante el uso de ciclones. Un esquema simplificado de los ciclones que realizan esta labor y una granulometría estándar para relaves de cobre se presenta en la Figura 2.5.

La construcción de su muro perimetral se realiza de forma progresiva conforme a la necesidad de acopiar mayor cantidad de residuos. Existen tres métodos constructivos utilizados para la construcción del muro: *Aguas arriba (Upstream)*, *Aguas abajo (Downstream)* y *de Eje central o Mixto (Centerline)* (Kossoff et al., 2014; Lottermoser, 2010; Ramírez, 2007).



(a) Esquema ciclones.



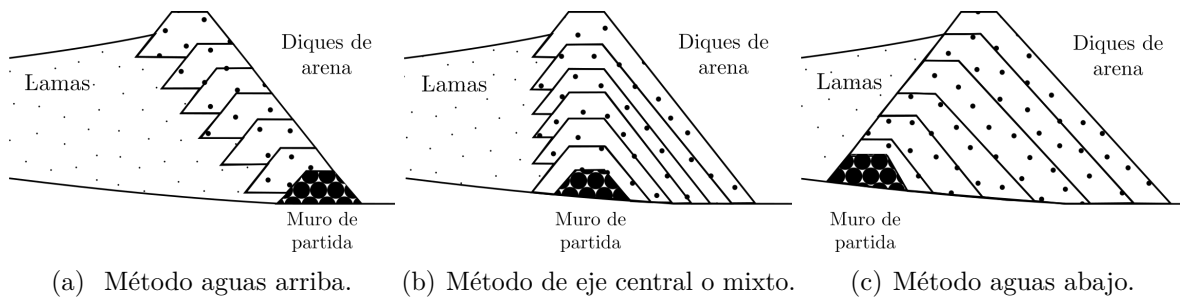
(b) Granulometría.

Figura 2.5: Esquema simplificado de ciclones y granulometría típica obtenida para relave de cobre. Adaptada de Valenzuela (2016).

El método tipo aguas arriba, esquematizado en la Figura 2.6(a), considera la construcción de un muro de partida de empréstito con el que se comienza la depositación de lamas. Una vez que el reservorio requiere un aumento en su capacidad, son construidos progresivamente diques de arena con la fracción gruesa del relave. Estos diques se apoyan principalmente en la zona de playa de la cubeta, por lo que durante las distintas etapas de la construcción la posición relativa del coronamiento de la presa respecto de la posición del muro de partida se desplaza aguas arriba. Cabe mencionar que la legislación chilena actual prohíbe este método para la construcción de tranques (Decreto 248 del Ministerio de Minería, 2007).

En el método tipo de eje central, esquematizado en la Figura 2.6(b), considera también la construcción de un muro de partida de empréstito compactado, pero los sucesivos diques de arena construidos mantienen la posición del coronamiento de la presa. Esto implica que los diques se apoyan principalmente sobre arena compactada.

Por último, en el método tipo aguas abajo, esquematizado en la Figura 2.6(c), la posición relativa del coronamiento de la presa se desplaza aguas abajo respecto de la posición del muro de partida, por lo que los diques de arena se apoyan únicamente sobre arena compactada.



(a) Método aguas arriba. (b) Método de eje central o mixto. (c) Método aguas abajo.

Figura 2.6: Principales métodos constructivos para tranques de relaves.

Un aspecto relevante en el diseño de estos depósitos es la caracterización adecuada de las

arenas que constituyen los diques. En la Tabla A.3 del Anexo A se presentan cinco muestras de arenas de relaves de cobre para distintas faenas de Chile y Perú. Las características mineralógicas presentadas en esa tabla puede ser considerada como representativa de este tipo de arenas (Valenzuela, 2016).

2.2.3. Embalses de relave

Los embalses de relaves son aquellos depósitos superficiales donde el muro de contención es construido con material de empréstimo disponible en las cercanías de la faena o aquellos reservorios situados en una depresión del terreno, por lo que no requiere necesariamente un muro de contención (SERNAGEOMIN, 2017). En aquellos casos en los que se requiere un muro, éste es construido de acuerdo a la necesidad de acopio de relave, peraltando el muro una vez que la cubeta se llena de material.

La construcción de estas obras sólo se diferencia respecto a una presa de tierra destinada a la acumulación de agua en el hecho que su construcción puede ser gradual. En general, se considera en la construcción del prisma resistente a distintos tipo de material, siendo ubicados y compactados por capas con lo que se controlan la infiltraciones en su interior. Cabe mencionar que la construcción gradual del muro logra retrasar las inversiones, mejorando la evaluación económica de los proyectos (Ramírez, 2007).

Estos depósitos deben ser impermeabilizados en su coronamiento y talud interno debido a que la laguna de aguas claras puede estar en contacto con el muro. Este proceso puede estar realizado con un material natural de baja permeabilidad o con una geomembrana (Decreto 248 del Ministerio de Minería, 2007). En la Figura 2.7 se presenta una sección transversal para un embalse de relaves.

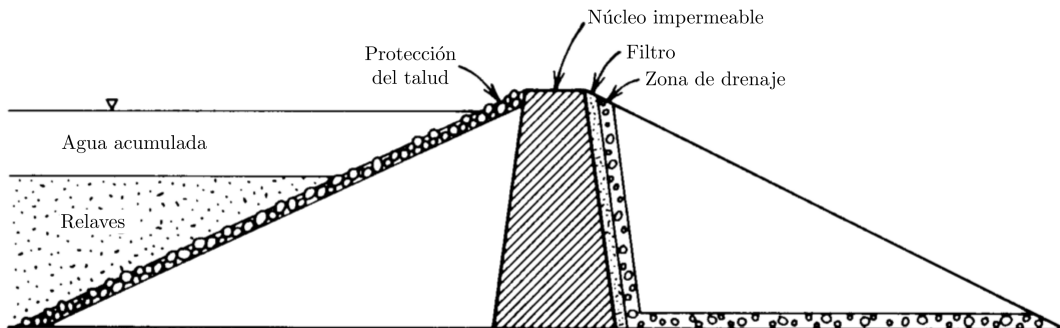


Figura 2.7: Sección transversal de embalse de relaves. Adaptado de US EPA (1994).

2.3. Colapsos de depósitos de relave

Un colapso de un depósito de relaves se define como la falla estructural que involucra la liberación de un volumen importante de masa de relave y que produce un daño ambiental significativo (Decreto 248 del Ministerio de Minería, 2007). Estos eventos pueden tener distintas características conforme a las condiciones del terreno y del material acopiado, siendo los más destructivos aquellos en que el relave pierde resistencia, volviéndose móvil y fluyendo como un fluido viscoso (Blight, 2009).

2.3.1. Causas principales

Según distintos autores, las principales causas de los colapsos en los depósitos de relaves corresponden a los terremotos, el rebose (*overtopping*), la erosión interna (*pipping*), la inestabilidad de taludes y la pérdida de capacidad de soporte en fundaciones (Villavicencio et al., 2014; Azam & Li, 2010; Lottermoser, 2010; Blight, 2009; Rico et al., 2008).

Utilizando la base de datos presentada por Bowker & Chambers (2015), actualizada al 16 de agosto de 2017¹, fue construida la Tabla 2.3 en donde se presenta un resumen de las causas que detonaron las fallas del registro a nivel nacional y mundial.

Es interesante observar que el caso chileno presenta un evidente sesgo a las causas asociadas a los sismos, que es coherente con la realidad nacional. Villavicencio et al. (2014) indican que las fallas en presas de arenas de relave chilenas se han producido mientras estaban operativas y eran construidas con el método aguas arriba. La licuación sísmica con falla de flujo corresponde a la principal causa de los colapsos, seguidos de deformaciones inducidas por terremotos y los reboses.

2.3.2. Nociones sobre licuación en suelos

El término licuación es utilizado para englobar una variedad de fenómenos asociados a la deformación causada por la alteración monotónica, transitoria o repetida del suelo saturado, no cohesivo y bajo condiciones no drenadas. (Kramer, 1996).

El suelo no cohesivo seco bajo el efecto de cargas cíclicas o estáticas tiende a aumentar su densidad (Kramer, 1996). Si esto ocurre en suelos saturados en un tiempo menor al que le toma al agua salir de su matriz sólida, la presión de poros aumenta disminuyendo las tensiones efectivas entre sus granos. La condición anterior se denomina *no drenada* y es la que ocasiona que el suelo pierda su resistencia al corte, generando fallas si las tensiones efectivas son lo suficientemente bajas. La licuación generada por este proceso puede dividirse en dos grupos principales, denominados *Licuación de flujo* y *Movilidad Cíclica* (Kramer, 1996).

Licuación de flujo (*Flow Liquefaction*) es el término utilizado para denominar la condición

¹Disponible en <http://csp2.org>. Base de datos presumiblemente más completa actualmente dada la variedad de sus fuentes

Tabla 2.3: Causas en colapsos de relaves a nivel mundial y chileno. Fuente: Base de datos inicialmente presentada por Bowker & Chambers (2015) y actualizada al 16 de agosto de 2017 disponible en <http://csp2.org>.

Causa	Mundial		Chile	
	Total de eventos	Eventos graves o muy graves	Total de eventos	Eventos graves o muy graves
Falla de talud/Falla estática	47 (15,9 %)	13 (4,4 %)		
Infiltraciones con erosión interna	25 (8,5 %)	6 (2,0 %)		
Falla en fundaciones	23 (7,8 %)	6 (2,0 %)		
Rebose	49 (16,6 %)	11 (3,7 %)	6 (15,4 %)	1 (2,6 %)
Deficiencias estructurales	21 (7,1 %)	11 (3,7 %)		
Terremotos/Falla sísmica	42 (14,2 %)	7 (2,4 %)	32 (82,1 %)	5 (12,8 %)
Subsistencia de mina	1 (0,3 %)	1 (0,3 %)		
Erosión externa	11 (3,7 %)	4 (1,4 %)	1 (2,6 %)	1 (2,6 %)
Desconocida/Sin información	76 (25,8 %)	35 (11,9 %)		
Total	295 (100 %)	94 (31,9 %)	39 (100 %)	7 (17,9 %)

Porcentajes respecto al total de los eventos para cada universo de datos considerados (mundial y chileno).
Evento grave: Falla en el depósito con pérdida de vidas y/o vertimiento de al menos 100.000 m³;
Evento muy grave: Falla en el depósito con múltiples pérdidas de vidas (generalmente sobre 20) y/o distancia recorrida por el relave de al menos 20 km y/o vertimiento de al menos 1.000.000 m³.

en que el esfuerzo de corte requerido para mantener un equilibrio estático de la masa de suelo es de mayor magnitud que el esfuerzo resistente disponible en estado licuado. Este desbalance desencadena grandes deformaciones a lo largo de una superficie, las que son llamadas *Fallas de Flujo* (*Flow Failures*). Su generación es producida por una carga repentina, entendiendo como tal a aquella que induce una condición no drenada. Cabe mencionar que este proceso es controlado por el esfuerzo de corte estático pero pudiendo también producirse por efecto de cargas cíclicas.

Por otro lado, *Movilidad Cíclica* (*Cyclic Mobility*) es el término con que se denomina al fenómeno de pérdida de rigidez que sufre una masa de suelo por la aplicación de cargas cíclicas. De forma contraria a la Falla de Flujo, este fenómeno ocurre cuando la resistencia del estado licuado es mayor a la sollicitación estática pero por efecto de la carga y descarga del suelo éste pierde de forma progresiva su rigidez debido al aumento progresivo de las presiones de poros.

Cabe mencionar que ante un sismo, pueden coexistir ambos fenómenos. Ahora bien, dado que el suelo es forzado por cargas cíclicas, primero debe existir Movilidad Cíclica llegando a una condición tal que se supera el esfuerzo de corte resistente generando la Falla de Flujo, no pudiendo darse en sentido contrario por la naturaleza de los fenómenos.

2.3.3. Mecanismo de falla en muros

Carvajal (2018) indica que es posible clasificar los modos de falla observados en muros de depósitos de relaves en tres grupos: inestabilidad de talud, rebose y la erosión interna.

La inestabilidad de talud corresponde al mecanismo en el que existe deslizamiento de tierra por un desbalance entre los esfuerzos resistentes y los solicitantes de una fracción del muro. Este concepto incluye cualquier fenómeno que genere este desbalance, ya sean causas sísmicas como estáticas.

En presencia de fuerzas sísmicas, la inestabilidad puede ser producida por el aumento en la presión de poros y la disminución de las tensiones efectivas. Esta disminución puede ser de tal magnitud que se genere licuación con falla de flujo. Villavicencio et al. (2014) y sus referencias indican que se han observado fallas de talud de forma semi-circular y planas. Además, indican que cuando el método constructivo de la presa es del tipo aguas arriba o de eje central, usualmente se observan fallas planas.

El rebose es el mecanismo que se define por la existencia de un flujo del contenido acopiado en la cubeta por sobre la cota de coronamiento del muro. En general se desencadena debido a una excesiva cantidad de material contenido en el depósito, a la ocurrencia de un evento meteorológico extremo y/o una mala operación de la laguna de aguas claras. Villavicencio et al. (2014) indican que un rebose también puede ser producido por deformaciones en el muro sísmicamente inducidas, si es que ellas disminuyen significativamente la cota de coronamiento.

La erosión interna es el mecanismo de falla en el que existen infiltraciones excesivas en el muro que arrastran el material fino del mismo. Esto genera la formación de vías preferenciales de flujo las que pueden desencadenar una falla.

Cabe mencionar que en el colapso de un depósito pueden existir distintos mecanismos actuando conjuntamente. Es por ello que en la literatura usualmente los colapsos se clasifican por el evento que lo gatilla. Además, es posible clasificar los mecanismo de falla de acuerdo a la velocidad con la que ocurren. La erosión interna y reboses pueden ser considerados como mecanismos graduales, mientras que la inestabilidad de talud por falla de flujo como una repentina.

2.3.4. Fases de un colapso

Considerando la descripción para distintas fallas realizada por Blight (2009), quien recoge diversos casos reportados en la literatura, en este trabajo se divide conceptualmente el proceso de colapso en tres fases:

1. Falla del muro de contención: periodo en el que actúa el evento gatillante y el muro pierde su capacidad de retener el contenido del depósito.
2. Vertimiento y erosión progresiva del muro: periodo en que existe un flujo apreciable del contenido de la cubeta. El vertimiento se encauza naturalmente por la zona en que el

muro falló, pudiendo erosionar generando una brecha.

3. Detención del flujo y estabilización del relave: periodo en el que el flujo se detiene debido a que la resistencia al corte del relave supera a las fuerzas motrices. Dado esta característica de la mezcla, no necesariamente todo el material contenido en la cubeta es vertido.

Cabe mencionar que estas fases son propuestas con el propósito de desagregar el fenómeno y generar un modelo simplificado para su representación. En la literatura que ha reportado colapsos, es usual que la caracterización del fenómeno se realice en función del evento gatillante o el proceso de falla del muro, lo cual es demasiado específico al momento de construir un modelo general.

Ahora bien, hay que considerar que estas fases no necesariamente están desacopladas entre sí. Un ejemplo evidente corresponde a los mecanismos de falla gradual del muro, donde el vertimiento en sí mismo es lo que genera el colapso, por lo que estas fases sólo pueden ser analizadas de forma independiente en un acercamiento conceptual.

En la Figura 2.8 se muestra un esquema comparativo de un colapso de un depósito de relaves y el de una presa de retención de agua, donde se esquematizan las tres fases ya mencionadas.

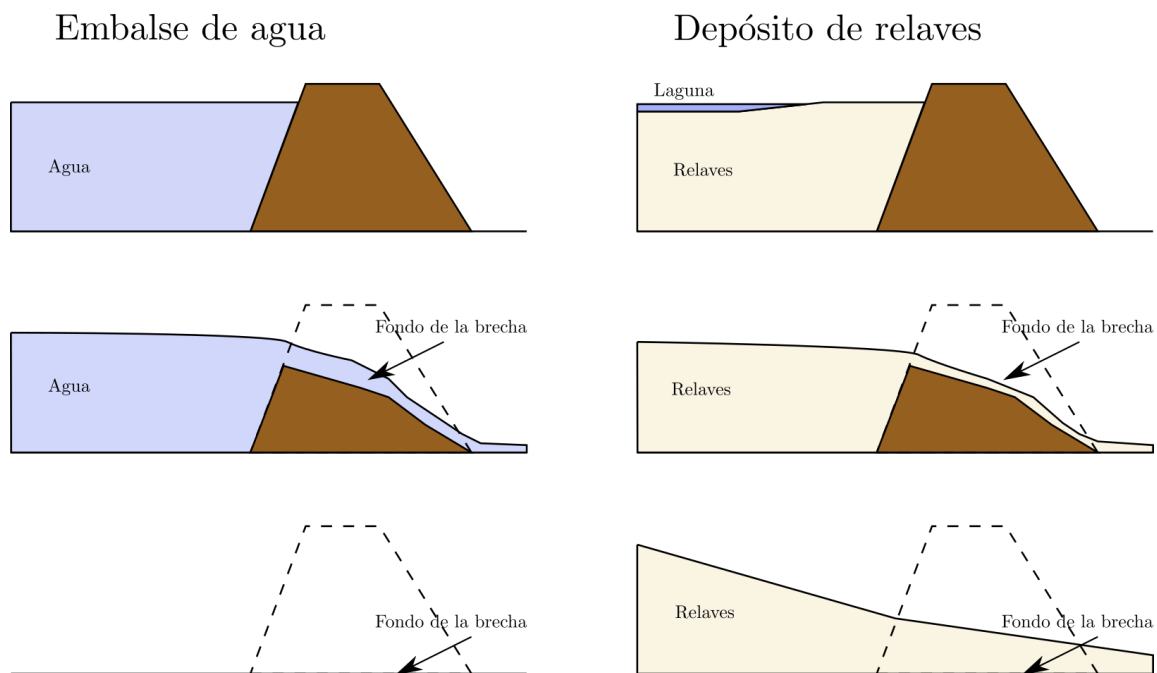


Figura 2.8: Esquema comparativo entre colapsos de embalses de agua y depósitos de relave. En la primera fila se ejemplifica una condición normal de operación, en la segunda el proceso de vertimiento y erosión progresiva, mientras que en la tercera una condición final idealizada del depósito. Cabe mencionar que la condición final en ambos casos no necesariamente genera una erosión completa del muro.

Capítulo 3

Modelo conceptual

3.1. Supuestos adoptados

La conceptualización del modelo considera que su uso será con el objetivo de cuantificar el vertimiento de relaves ante un eventual colapso catastrófico de un depósito superficial chileno. Considerando los antecedentes presentados en el Capítulo 2, han sido adoptados los siguientes supuestos para caracterizar el estado del depósito ante esta situación:

1. El material de la cubeta está totalmente licuado.
2. El muro perimetral es construido con material granular compactado de baja cohesión.
3. Ocurre una falla localizada, repentina y catastrófica en su muro de contención.

Considerar que el relave acumulado se encuentra licuado es un supuesto razonable ante un sismo, que es históricamente el principal evento gatillante de colapsos en Chile. Adicionalmente, permite modelar el relave como un fluido no-newtoniano equivalente, rescatando características como su alta viscosidad, su comportamiento elástico a bajas deformaciones y su resistencia a esfuerzos de corte.

Por otro lado, suponer que el muro perimetral es construido de material granular no cohesivo es representativo del uso de arena cicloneada o material de empréstito, principales materialidades utilizadas en Chile. Además, este supuesto permite utilizar expresiones provenientes de la hidráulica fluvial para caracterizar la eventual erosión progresiva del muro debido al flujo de relaves.

Finalmente, una falla repentina, localizada y catastrófica del muro busca ser consistente con la ocurrencia de grandes deformaciones y fallas de flujo ante un sismo. Tentativamente estos fenómenos pueden dejar un borde libre por el cual los relaves comiencen a fluir. Este supuesto, para efectos de una simulación, permite interpretar la falla del muro como una brecha en el prisma resistente.

En la Figura 3.1 se presenta un esquema del enfoque de modelación adoptado, mientras

que la Figura 3.2 muestra un caso real a modo de comparación.

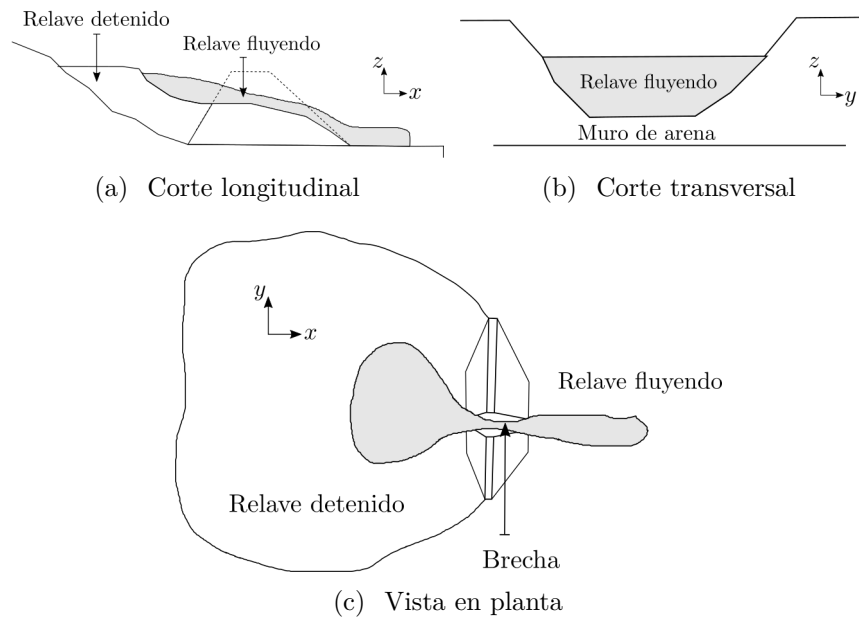


Figura 3.1: Esquema simplificado del proceso de colapso de un depósito de relaves superficial.

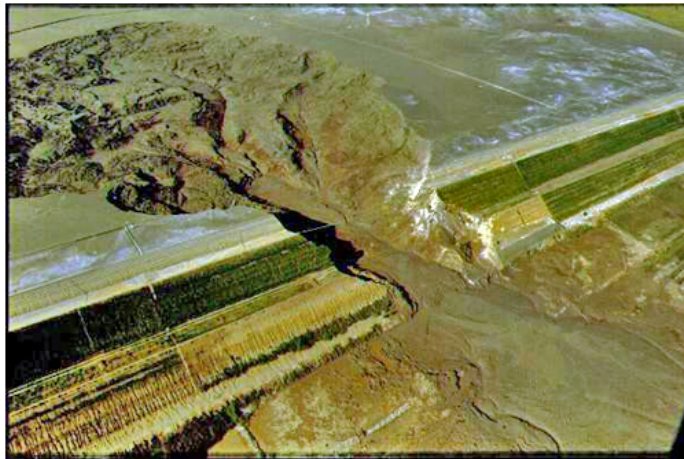


Figura 3.2: Falla depósito de relaves de Merriespruit. Rebose causado por una lluvia que erosionó el pie del talud aguas abajo. La erosión empujó el talud en un rango de 2H:1V, lo que originó licuación estática y un flujo masivo desde la cubeta. Detalles en Davies (2002). Fuente de la fotografía: <http://www.tailings.info/casestudies/merriespruit.htm>.

3.2. Ecuaciones gobernantes

3.2.1. Ecuaciones de continuidad de masa y cantidad de movimiento

Al modelar el relave como un fluido incompresible, isotrópico y homogéneo, es válido aplicar las ecuaciones de continuidad de masa y cantidad de movimiento promediadas sobre la turbulencia. Estas son presentadas en las ecuaciones 3.1 y 3.2 respectivamente, donde ρ_m es la densidad del fluido equivalente, $u = (u, v, w)^T$ es el vector de velocidad, \hat{p} corresponde a la presión motriz y $\tau = \tau_v + \tau_t$ corresponde al tensor de esfuerzos totales.

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.1)$$

$$\rho_m \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho_m \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.2)$$

Resolver estas ecuaciones directamente a la escala de un depósito requiere una alta capacidad de cómputo y el uso de modelos adicionales para el cierre de la turbulencia en fluidos no-newtonianos. Estos modelos usualmente corresponden a una o un conjunto de varias ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, lo que se traduce en aumentar la dimensionalidad del problema y la complejidad al momento de resolver conjuntamente el flujo de relaves y la erosión.

Un enfoque tan detallado no se justifica considerando la alta incertidumbre en los parámetros de entrada, resultando de mayor utilidad poder simular varios escenarios probables. Considerando esto, se evitaron los inconvenientes asociados a un modelo tridimensional promediando las ecuaciones en el eje vertical e imponiendo aproximaciones de onda larga. Este enfoque disminuye la cantidad de ecuaciones diferenciales a resolver, pasando de resolver tres dimensiones espaciales a sólo dos de ellas, a costa de la pérdida de información sobre la estructura vertical del flujo y un aumento en el error intrínseco del modelo en aquellos lugares donde los supuestos adoptados para las aproximaciones no se cumplan a cabalidad.

Las expresiones obtenidas como resultado de realizar esta aproximación son denominadas *Ecuaciones de Aguas Someras (Shallow Water Equations)* y son presentadas en las ecuaciones 3.3 y 3.4. Sus componentes son esquematizados en la Figura 3.3, donde h corresponde a la altura del flujo, $U = (U_x, U_y)^T$ es el vector velocidad promediada en el eje vertical, $hU = (hU_x, hU_y)^T$ es el caudal por unidad de ancho, h_0 representa la cota de la topografía, g es la aceleración de gravedad y $\tau_0 = (\tau_{0x}, \tau_{0y})^T$ es el esfuerzo de corte total en el fondo. El detalle de la deducción de estas ecuaciones considerando un fluido no-newtoniano es presentado en el Anexo B. Cabe mencionar que esta formulación admite lecho móvil, es decir, considera que la forma del lecho pueda variar en el tiempo por efectos erosivos.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h U_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial h U_i}{\partial t} + \frac{\partial h U_i U_j}{\partial x_j} = -gh \frac{\partial (h + h_0)}{\partial x_i} - \frac{\tau_{0i}}{\rho_m} \quad (3.4)$$

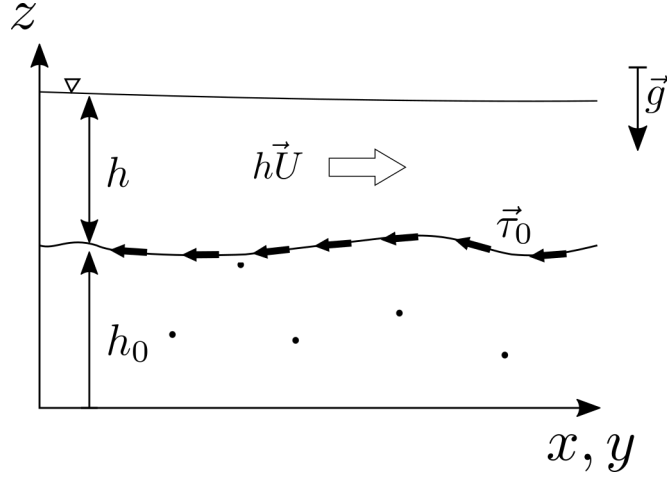


Figura 3.3: Representación esquemática de los componentes de las ecuaciones de aguas someras.

Formulación del esfuerzo de corte total en el fondo τ_0

El esfuerzo de corte total en el fondo puede ser obtenido mediante el uso de leyes de resistencia hidráulicas que consideran la reología del fluido. Estas expresiones relacionan las características medias del flujo con τ_0 como se muestra en la ecuación 3.5, donde c_f corresponde a un coeficiente de fricción.

$$\tau_0 = \rho_m c_f |U| U \quad (3.5)$$

La ecuación 3.5 puede ser reescrita en función de la velocidad friccional $u_* = \sqrt{|\tau_0|/\rho_m}$ con tal de conocer el valor de c_f , obteniendo la ecuación 3.6.

$$c_f = \left(\frac{u_*}{|U|} \right)^2 \quad (3.6)$$

Si consideramos que existe un escurrimiento permanente gradualmente variado, se cumple que $|\tau_0| = \rho_m g R_h J$ donde J es un adimensional que representa la pérdida friccional por unidad de longitud y R_h es el radio hidráulico. Esta formulación permite encontrar una expresión para u_* en función de J , como se presenta en la ecuación 3.7.

$$|\tau_0| = \rho_m g R_h J \Rightarrow u_* = \sqrt{g R_h J} \quad (3.7)$$

Diversos autores han realizado experimentos bajo estas condiciones donde relacionan a J con las variables medias del flujo, la reología y las características de la rugosidad del lecho. Ejemplos clásicos son las ecuaciones de Manning y Darcy-Weisbach. En general, en modelos bidimensionales de aguas someras se acepta el uso de las formulaciones permanentes del esfuerzo de corte para flujos transitorios, pese a que conceptualmente no hayan sido desarrolladas para tales condiciones. Ejemplos de esto pueden ser consultados en los trabajos de Trehwela (2015); Cea (2005); Luo et al. (2017); Hou et al. (2013); Duran (2015), entre muchos otros, con buenos resultados.

En particular, el modelo de flujo de relaves desarrollado utiliza la ecuación de Darcy-Weisbach presentada en la ecuación 3.8, donde f corresponde a un factor de fricción que depende de la reología del fluido y las condiciones locales del flujo.

$$J = \frac{f}{4R_h} \frac{|U|^2}{2g} \quad (3.8)$$

Considerando las ecuaciones 3.6, 3.7 y 3.8 es fácil ver que el factor de fricción c_f sólo dependerá del coeficiente f , obteniendo:

$$c_f = \frac{gR_h J}{|U|^2} = \frac{f}{8} \quad (3.9)$$

Determinación del régimen de escurrimiento

Para determinar el valor del factor de fricción f es necesario conocer el régimen de escurrimiento en el que se encuentra el fluido. Para ello, se utiliza el número de Reynolds empleado por Haldenwang et al. (2002), presentado en la ecuación 3.10, válido para fluidos de Herschel-Bulkley y flujo en canales abiertos. En esta ecuación τ_y corresponde al esfuerzo de fluencia, K corresponde al coeficiente de consistencia y m es el índice de flujo. Si esta formulación es evaluada considerando un flujo de agua, se rescata la forma tradicional del número de Reynolds que utiliza $4R_h$ como longitud característica¹.

$$Re = \frac{8\rho_m|U|^2}{\tau_y + K \left(\frac{2|U|}{R_h}\right)^m} \quad (3.10)$$

Chow (1994) indica que en el caso del flujo de agua en canales abiertos, la transición desde un escurrimiento laminar a uno turbulento puede ocurrir para valores de Re entre 2000 y los 50000, utilizándose en términos prácticos 8000 como límite superior para la transición.² Ahora bien, en distintos trabajos (Hanks, 1967; Hanks & Ricks, 1975; Alderman & Haldenwang, 2007; Haldenwang et al., 2002; Wilson & Thomas, 2006) se puede observar que los valores de

¹ $Re = \rho_m 4R_h U / K$

²El autor original expone que la transición laminar-turbulento para canales abiertos con flujo de agua ocurre para Re entre 500 y 2000, utilizando R_h como escala característica para longitudes. Dado que la ecuación 3.10 utiliza $4R_h$ como escala característica en el caso de agua, los límites se presentan multiplicados por 4 para ser consistentes con la formulación elegida.

Re para que exista esta transición dependen de la reología del fluido, por lo que los límites presentados no son directamente aplicables a fluidos no-newtonianos.

En este trabajo se define un cambio de régimen de escurrimiento a partir de un valor crítico del número de Reynolds Re_c . Para fluidos pseudoplásticos ($\tau_y = 0$), su cálculo se realiza con la formulación de Hanks & Ricks (1975) presentada en la ecuación 3.11, mientras que para fluidos plásticos ($\tau_y > 0$) se utiliza la propuesta por Hanks & Pratt (1967) detallada en la ecuación 3.12. Cabe mencionar que estas expresiones tienen orígenes distintos, por lo que al evaluar la ecuación 3.12 en un fluido pseudoplástico no se rescata la ecuación 3.11.

$$Re_c = 6464 \frac{m}{(1+3m)^2} (m+2)^{\frac{m+2}{m+1}} \quad (3.11)$$

$$Re_c = \frac{He}{8\xi_y} \left(1 - \frac{4}{3}\xi_y + \frac{1}{3}\xi_y^4\right) \text{ con } \frac{He}{16800} = \frac{\xi_y}{(1-\xi_y)^3} \quad (3.12)$$

En la ecuación 3.12 son utilizados dos números adimensionales relevantes en el cálculo de fluidos no-newtonianos: ξ_y corresponde a la razón entre el esfuerzo de fluencia y de fondo (ecuación 3.13) mientras que He corresponde al número de Hedstrom generalizado (ecuación 3.14). Estos adimensionales son una medida del efecto del esfuerzo de fluencia al ser comparado con el del esfuerzo total y la viscosidad, respectivamente.

$$\xi_y = \frac{\tau_y}{\tau_0} \quad (3.13)$$

$$He = \frac{\rho_m (4R_h)^2}{K} \left(\frac{\tau_y}{K}\right)^{\frac{2-m}{m}} \quad (3.14)$$

Cabe precisar que las ecuaciones 3.11 y 3.12 fueron desarrolladas para tuberías, por lo que su uso en flujo con lámina libre es cuestionable. Pese a ello, estimar Re_c con estas expresiones se considera útil en virtud de trabajos anteriores, ya que el enfoque de adaptar este tipo expresiones ha sido utilizado constantemente. Ejemplos de esto pueden encontrarse en los trabajos de Burger et al. (2014) y Alderman & Haldenwang (2007).

Cálculo del factor de fricción f en régimen laminar

El cálculo del factor de fricción en régimen laminar para fluidos no-newtonianos usualmente se realiza utilizando la ecuación 3.15, donde C_s corresponde a una constante que depende de la geometría del lecho, ψ es una función que depende de la reología y Re_m es un número de Reynolds definido para el fluido analizado.

$$f = \frac{C_s}{\psi Re_m} \quad (3.15)$$

El enfoque utilizado en este trabajo utiliza la definición de Burger et al. (2010) para Re_m , que corresponde al ya presentado en la ecuación 3.10. Esta formulación considera de forma implícita que $\psi = 1$ ya que todo el efecto de la reología es considerado en la definición del número de Reynolds.

La determinación de C_s puede ser obtenida de forma analítica (Chow, 1994) o mediante experimentación. Considerando un factor de fricción de Darcy-Weisbach en canales, Burger et al. (2010) indica que C_s toma un valor promedio de 65,6 para canales rectangulares y 70,4 para canales trapeziales con 60° en sus taludes laterales, utilizando soluciones de CMC y suspensiones de bentonita y kaolinita³. Rickenmann (1991) reporta que el uso de $C_s = 96$ se ajusta bien a las mediciones de flujo de suspensiones de arcillas, modeladas como plásticos de Bingham ($m = 1$).

Cálculo del factor de fricción f en régimen turbulento

Considerando los trabajos de Wilson & Thomas (1985), Thomas & Wilson (1987) y Thomas & Wilson (2007), desarrollados para flujos turbulentos de fluidos no-newtonianos en tuberías, es posible escribir la ecuación 3.16. Esta expresión es una versión adaptada de la formulación original para flujos con superficie libre.

$$\frac{|U|}{u_*} = \sqrt{\frac{8}{f}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{\rho_m 4R_h u_*}{\mu_{eq}} \right) + C_1 - \Omega + \Gamma \quad (3.16)$$

En la ecuación anterior, κ es la constante de von Kármán, C_1 es la constante obtenida luego de integrar el perfil logarítmico de velocidades en el eje vertical, μ_{eq} es la viscosidad equivalente para flujos turbulentos, Ω es un término que corrige la velocidad media por el efecto del esfuerzo de fluencia y Γ es un término que corrige la velocidad media por efecto de la rugosidad del lecho.

La determinación de μ_{eq} puede realizarse mediante experimentación o métodos indirectos. Wilson et al. (2006) indican que existe una aproximación ingenieril basada en suponer que el efecto de la viscosidad esta confinado a la sub-capa viscosa, la que sufre un engrosamiento por causa de la reología.

Evaluando la altura de de la sub-capa viscosa en el perfil logarítmico de velocidades, se identifica la ecuación 3.17 para el cálculo de μ_{eq} . En esta ecuación, μ corresponde a una viscosidad de un fluido newtoniano que ejerce el mismo esfuerzo en el lecho que el fluido no-newtoniano analizado y α es un factor de engrosamiento considerado al evaluar la altura de la sub-capa viscosa.

$$\mu_{eq} = \mu \alpha e^{-11,6\kappa(\alpha-1)} \quad (3.17)$$

Con ello, es posible escribir la ecuación 3.16 en función de un número de Reynolds basado en la velocidad friccional $Re_* = \frac{\rho_m 4R_h u_*}{\mu}$, como se muestra en la ecuación 3.18.

$$\frac{|U|}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln Re_* + C_1 - \frac{1}{\kappa} \ln \alpha + 11,6(\alpha - 1) - \Omega + \Gamma \quad (3.18)$$

³ Los valores de C_s fueron obtenidos experimentalmente en el trabajo de Burger et al. (2010) considerado un factor de fricción de Fanning f_F , obteniendo 16,4 para canales rectangulares y 17,6 trapeziales. Dado que el modelo propuesto utiliza un factor de fricción de Darcy-Weisbach, los valores entregados son transformados mediante la conocida relación $f = 4f_F$.

Los dos primeros términos del lado derecho de la ecuación 3.18 usualmente son escritos como se muestra en la ecuación 3.19, interpretando $|U|_{NL}$ como la velocidad media de un flujo de fluido newtoniano equivalente, el cual ejerce el mismo esfuerzo de fondo que el fluido no-newtoniano sobre un lecho hidrodinámicamente liso.

$$\frac{|U|_{NL}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln Re_* + C_1 \quad (3.19)$$

En el caso de los fluidos de Herschel-Bulckley, μ y α se obtienen con el uso de las ecuaciones 3.20 y 3.21. El factor α se calcula como la razón entre el área bajo el reograma de un fluido no-newtoniano y uno newtoniano para un mismo esfuerzo, mientras que μ utilizando $\mu = \tau/\dot{\gamma}$. En ambos casos, las deducciones sólo utilizan los reogramas de los fluidos, suponiendo que $\tau = \tau_0$.

$$\mu = \left(\frac{K}{\tau_0} \frac{\tau_0^m}{(1 - \xi_y)} \right)^{1/m} \quad (3.20)$$

$$\alpha = \frac{2(1 + m\xi_y)}{m + 1} \quad (3.21)$$

Considerando el enfoque de Thomas & Wilson (2007), es posible reescribir la ecuación de Coolebrock-White para un fluido newtoniano en función de u_* obteniendo la ecuación 3.22. En esta expresión $|U|_{NR}$ es la velocidad media de un flujo de fluido newtoniano equivalente sobre un lecho en transición liso-rugoso, $k_r = \frac{k_s}{4R_h}$ es la rugosidad relativa del lecho, $Re_{k*} = k_r Re_*$, $C_2 = \frac{2\sqrt{8}\kappa}{\ln 10}$ y $C_3 = \frac{2,51}{\sqrt{8}}$.

$$\frac{|U|_{NR}}{u_*} = \frac{C_2}{\kappa} \ln Re_* + \frac{C_2}{\kappa} \ln 3,7 - \frac{A}{\kappa} \ln (3,7C_3 + Re_{k*}) \quad (3.22)$$

Notando que $C_2 \approx 1$, podemos identificar que el primer término de 3.22 puede ser reemplazado utilizando la formulación de 3.19, obteniendo la expresión 3.23.

$$\frac{|U|_{NR}}{u_*} = \frac{|U|_{NL}}{u_*} + \frac{C_2}{\kappa} \ln 3,7 - \frac{C_2}{\kappa} \ln (3,7C_3 + Re_{k*}) - C_1 \quad (3.23)$$

Así, necesariamente el efecto de la rugosidad corresponde a los últimos tres términos de la ecuación 3.23 obteniendo una definición para Γ presentada en la ecuación 3.24. Thomas & Wilson (2007) indican que al momento de utilizar esta relación con fluidos no-newtonianos debe ser incorporado el efecto del engrosamiento de la sub-capa viscosa reemplazando $\mu\alpha$ por μ en la definición de Re_{k*} , como se muestra en la ecuación 3.25.

$$\Gamma = \frac{C_2}{\kappa} \ln 3,7 - \frac{C_2}{\kappa} \ln (3,7C_3 + Re_{k*}) - C_1 \quad (3.24)$$

$$Re_{k*} = \frac{k_r}{\alpha} Re_* = \frac{\rho_m k_s u_*}{\alpha \mu} \quad (3.25)$$

En el caso de Ω , su definición debe corregir el exceso de velocidad media calculado al promediar en el eje vertical sin considerar que existen zonas del flujo que no se deforman por

efecto del esfuerzo de fluencia. Matemáticamente, ésta definición corresponde a lo presentado en la ecuación 3.26, donde u es la velocidad en la dirección principal del flujo, u_p es la velocidad de la zona sin deformar y A_p es el área de la zona sin deformar.

$$\Omega = \frac{1}{A_p} \int_{A_p} \frac{u - u_p}{u_*} dA \quad (3.26)$$

Considerando un canal rectangular bidimensional y utilizando la ley logarítmica de velocidades para u , se resuelve la ecuación 3.26 obteniendo:

$$\Omega = -\frac{1}{\kappa} \ln(1 - \xi_y) - \frac{1}{\kappa} \xi_y \quad (3.27)$$

Reemplazando las formulaciones de μ_{eq} , Γ y Ω en la ecuación 3.16, se obtiene la expresión 3.28 que corresponde a la expresión utilizada en el presente trabajo para el cálculo del factor de fricción en régimen turbulento.

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{8}{f}} = & \frac{1}{\kappa} \ln Re_* - \frac{1}{\kappa} \ln \alpha + 11,6(\alpha - 1) \\ & + \frac{1}{\kappa} \ln(1 - \xi_y) + \frac{1}{\kappa} \xi_y + \frac{C_2}{\kappa} \ln 3,7 - \frac{C_2}{\kappa} \ln(3,7C_3 + Re_{k*}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Cabe mencionar que autores que utilizaron previamente enfoque aquí presentado, como Burger et al. (2014) y Trehwela (2015), utilizaron una formulación distinta para Ω . Esta corresponde a $\Omega = -\frac{1}{\kappa} \ln(1 - \xi_y) - \frac{1}{\kappa} \xi(1 + 0,5\xi_y)$ que es la que originalmente es presentada por Wilson & Thomas (1985)⁴ que considera tuberías al momento de calcular la ecuación 3.26. Por ello, la expresión 3.28 no es directamente comparable con la literatura previa.

3.2.2. Ecuación de continuidad de sedimento

Dado que la construcción de los muros de contención se realiza principalmente por material granular de baja cohesión, para el cálculo de la erosión del muro se utiliza la ecuación de Exner. Esta se presenta en la ecuación 3.29, donde p corresponde a la porosidad del lecho y $q_s = (q_{sx}, q_{sy})^T$ es el gasto sólido de fondo por unidad de longitud.

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} + \frac{1}{1 - p} \frac{\partial q_{sj}}{\partial x_j} = 0 \quad (3.29)$$

En hidráulica fluvial, esta formulación usualmente es extendida incorporando términos asociados a los fenómenos de resuspensión de sólidos provenientes del lecho y de depositación de partículas en suspensión. Para el modelo desarrollado, se tomó la decisión de no incorporar estos efectos e imponer que la erosión del muro se debe sólo por efecto del transporte de fondo.

⁴Originalmente el trabajo de Wilson & Thomas (1985) contenía un error de signo en este término, que fue corregido en el trabajo de Thomas & Wilson (1987).

Formulación del gasto sólido de fondo q_s

Existe en la literatura una diversidad de expresiones desarrolladas para q_s que consideran flujos de agua. Una gran cantidad de ellas puede ser escrita de forma adimensional como se muestra en la ecuación 3.30 (Fernández-Nieto et al., 2017), donde Φ es el gasto sólido de fondo adimensional, ρ_s es la densidad de los sedimentos, R es la densidad específica sumergida de los sedimentos, θ es el esfuerzo de corte de fondo adimensional (o esfuerzo de Shields), θ_c es el esfuerzo de corte crítico adimensional que define el umbral desde el cual existe un movimiento de partículas, d_s es un diámetro que caracteriza la granulometría del lecho, $\hat{\tau}_0 = \frac{\tau_0}{|\tau_0|}$ es el vector unitario asociado al esfuerzo de corte de fondo, A_i y B_i son constantes del modelo y $(\cdot)_+$ denota la parte positiva de (\cdot) .

$$\Phi = \frac{q_s}{\sqrt{gRd_s^3}} = A_1\theta^{B_1} (\theta - A_2\theta_c)_+^{B_2} (\theta^{1/2} - A_3\theta_c^{1/2})_+^{B_3} \hat{\tau}_0 \quad (3.30)$$

$$\theta = \frac{|\tau_0|}{\rho_m g R d_s} \quad (3.31)$$

$$R = \frac{\rho_s - \rho_m}{\rho_m} \quad (3.32)$$

Ejemplos típicos y bien validados de esta estructura pueden ser encontrados en los trabajos de Meyer-Peter & Müller (1948), Ashida & Michiue (1972), Engelund & Fredsøe (1976), Fernandez Luque & Van Beek (1974), Smart (1984), Nielsen (1992), entre otras. Dado que este tipo de modelos han sido desarrollados para flujos de agua turbulentos con bajas pendientes, su uso sin correcciones para flujos de una suspensión hiperconcentrada sobre lechos con pendiente pronunciada, como son los taludes de tranques de relaves, debe realizarse con precaución.

Rickenmann (1991) indica que dado un caudal sobre una pendiente pronunciada, el gasto sólido de fondo aumenta considerablemente con la densidad de la suspensión. Por ello, propone una expresión dependiente de forma explícita de la granulometría, la densidad de la mezcla y la pendiente del lecho. Esta corresponde a la ecuación 3.33, donde d_{30} y d_{90} corresponden a los diámetros máximos de las partículas que constituyen el 30 y 90 por ciento más fino de la granulometría del lecho, respectivamente. Por otra parte, $Fr = \frac{V}{\sqrt{gh}}$ corresponde al número de Froude y θ_c^C es el esfuerzo de corte adimensional, corregido por efecto de la pendiente. Cabe mencionar que esta formulación fue obtenida en base a experimentos con pendientes de fondo en su lecho que varían entre 0,1 % - 20 %.

$$\Phi = \frac{3,1}{R^{1/2}} \left(\frac{d_{90}}{d_{30}} \right)^{0,2} Fr^{1,1} \theta^{1/2} (\theta - \theta_c^C) \quad (3.33)$$

Es fácil apreciar que esta formulación mantiene la estructura de la ecuación 3.30, sólo que redefiniendo A_1 como una función dependiente del flujo y no una constante numérica. Además, su autor original indica que el cálculo de θ_c^C se realiza mediante una expresión del tipo de la ecuación 3.34, donde f_c es una función que depende del ángulo de fricción interna del material φ y de la pendiente del lecho S .

$$\theta_c^C = f_c(S, \varphi) \theta_c \quad (3.34)$$

La expresión utilizada en los experimentos que llevaron a la formulación utiliza la forma de f_c propuesta por Stevens et al. (1976), la que para el caso del movimiento incipiente corresponde a $f_c = \cos\beta_S \left(1 - \frac{\tan\beta_S}{\tan\varphi}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+S^2}} \left(1 - \frac{S}{\tan\varphi}\right)$, con β_S el ángulo del lecho con la horizontal (Smart, 1984). Esta ecuación considera que todo el efecto de la pendiente se reduce al modificar el umbral de arrastre.

Dado que el modelo desarrollado es en dos dimensiones, se prefirió corregir por pendiente la ecuación 3.33 siguiendo un enfoque basado en la formulación de Apsley & Stansby (2008). Estos autores concluyen que la forma correcta de corregir por pendiente las ecuaciones del tipo de 3.30 es mediante su evaluación con valores efectivos de θ y θ_c , los que son obtenidos mediante un análisis de fuerzas sobre las partículas del lecho.

Las expresiones de cálculo para los valores efectivos se presentan en las ecuaciones 3.35 y 3.36, donde β_{max} es el ángulo de máxima pendiente en el lecho y \hat{b}_{xy} es el vector que determina esa máxima pendiente. El cálculo de \hat{b}_{xy} se realiza mediante la proyección del vector $\hat{b} = (\hat{e}_z \times \hat{n}) \times \hat{n}$, con \hat{n} el vector normal de la superficie y \hat{e}_z es el vector unitario en la dirección vertical, en el plano horizontal. Con esta formulación, la corrección por pendiente es lo suficientemente general para considerar flujos con direcciones distintas a la de máxima pendiente.

$$\theta_{\text{eff}} = \left| \theta \hat{\tau}_0 + \theta_c \frac{\sin \beta_{\text{máx}}}{\tan \varphi} \hat{b}_{xy} \right| \quad (3.35)$$

$$(\theta_c)_{\text{eff}} = \theta_c \cos \beta_{\text{máx}} \quad (3.36)$$

Considerando todo lo anterior, la formulación utilizada para el cálculo del gasto sólido de fondo corresponde a la presentada en la ecuación 3.37.

$$\Phi = \frac{3,1}{R^{1/2}} \left(\frac{d_{90}}{d_{30}} \right)^{0,2} \text{Fr}^{1,1} \theta_{\text{eff}}^{1/2} (\theta_{\text{eff}} - (\theta_c)_{\text{eff}}) \quad (3.37)$$

Cabe mencionar que la ecuación 3.37 no es simplemente una extensión a dos dimensiones de la ecuación 3.33. Esto debido a que aún cuando $(\theta_{\text{eff}} - (\theta_c)_{\text{eff}})$ se reduce a $(\theta - \theta_c^C)$ si $\hat{\tau}_0$ y \hat{b} son paralelos, sólo en el caso de lecho horizontal se cumple $\theta_{\text{eff}}^{1/2} = \theta^{1/2}$. De esta forma, es de esperar que al utilizar la ecuación 3.37 se obtengan magnitudes de gasto sólido menores a las obtenidas con la ecuación 3.33 si existe una pendiente adversa, y mayores en el caso contrario.

En la formulación de q_s aún es necesario considerar el efecto de la reología. Carrillo (2011) realizó experimentos con fluidos no-newtonianos para determinar el umbral de arrastre de partículas no cohesivas. Una de sus conclusiones indica que para obtener θ_c puede ser utilizada la curva de Shields-Mantz, la que parametriza θ_c en función del número de Reynolds de la partícula Re_{*P} , redefiniendo los adimensionales involucrados. El número de Reynolds de la partícula Re_{*P} se modifica como se muestra en la ecuación 3.38, mientras que θ_c se reemplaza por una versión reducida $\theta_c^R = \theta_c - \theta_y$, donde $\theta_y = \frac{\tau_y}{\rho_m g R d_s}$.

$$Re_{*P} = \frac{\rho_m u_*^2}{\tau_y + K \left(\frac{u_*}{d_s} \right)^n} \quad (3.38)$$

Para obtener de forma simple el valor parametrizado de la curva de Shields-Mantz, se utiliza la ecuación 3.39. Esta fue construida en base a los trabajos de Mantz (1977) y Guo (2002) que parametrizan observaciones de distintos experimentos.

$$\theta_c^R = \theta_c - \theta_y = \begin{cases} 0,1Re_{*P}^{-0,3} & Re_{*P} < 1,332 \\ 0,11Re_{*P}^{-1} + 0,054 \left(1 - \exp\left(-\frac{4}{25}Re_{*P}^{0,52}\right)\right) & Re_{*P} > 1,332 \end{cases} \quad (3.39)$$

Cabe mencionar que no existe un valor recomendado de Re_{*P} para el cual existe un cambio de parametrización y sólo es conocido el rango de validez entregado para la expresión de Mantz (1977), definido entre 0.03 y 1. Se decidió elegir $Re_{*P} = 1,332$ para el cambio de parametrización considerando que en este valor la diferencia entregada para el umbral de arrastre entre ambas parametrizaciones es casi nulo. Esto implica que se utiliza la ecuación formulada por Mantz (1977) en un rango levemente mas amplio del recomendado por su autor original.

Finalmente, se consideró en las ecuaciones el hecho que no puede existir arrastre de fondo sin que el esfuerzo de corte de fondo supere al esfuerzo de fluencia, esto mediante el reemplazo de θ_{eff} por $\theta_{\text{eff}}^R = \theta_{\text{eff}} - \theta_y$, obteniendo:

$$\Phi = \frac{3,1}{R^{1/2}} \left(\frac{d_{90}}{d_{30}}\right)^{0,2} Fr^{1,1} \theta_{\text{eff}}^{R 1/2} \left(\theta_{\text{eff}}^R - (\theta_c^R)_{\text{eff}}\right) \quad (3.40)$$

3.3. Adimensionalización de ecuaciones

El sistema de ecuaciones diferenciales presentado en las ecuaciones 3.3, 3.4 y 3.29 puede ser adimensionalizado para entender el aporte relativo de los fenómenos físicos involucrados mediante el análisis de números adimensionales. Las ecuaciones 3.41-3.43 son el resultado de tal proceso en el que se han utilizando las escalas presentadas en la Tabla 3.1. Dado que el problema de interés es de naturaleza transitoria, se ha considerado que todos los componentes de la ecuación de continuidad son del mismo orden de magnitud, por lo que se cumple $\frac{U_0}{L/T} \sim 1 \Rightarrow T \sim L/U_0 \sim HL/q_0$.

$$\frac{\partial h^*}{\partial t^*} + \frac{\partial h U_j^*}{\partial x_j^*} = 0 \quad (3.41)$$

$$Fr^2 \left(\frac{\partial h U_i^*}{\partial t^*} + \frac{\partial h U_i^* U_j^*}{\partial x_j^*} \right) = -h^* \frac{\partial (h^* + h_0^*)}{\partial x_i^*} - Fr^2 \frac{c_f}{\varepsilon} |U^*| U_i^* \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial h_0^*}{\partial t^*} + \Upsilon \frac{\partial q_{sj}^*}{\partial x_j^*} = 0 \quad (3.43)$$

Las escalas elegidas pueden ser consideradas como los valores de las magnitudes que definen el flujo cuando éste es permanente y uniforme, sobre una condición inicial arbitraria del lecho. Con esto, H se interpreta como una altura normal del flujo, U_0 la velocidad asociada

a la altura normal, Δh_0 es la variación de la cota del lecho y q_{s0} el gasto sólido de fondo transportado por el flujo en tales condiciones.

Existen cuatro adimensionales que juegan un rol relevante en estas expresiones. El primero corresponde al factor de fricción c_f , dentro del cual consideramos la reología del fluido; el segundo es el número de Froude Fr , que relaciona el efecto relativo entre las fuerzas de inercia y las fuerzas de origen gravitatorio; el tercero corresponde a una razón entre escalas verticales respecto a las horizontales ε , bajo la cual podemos identificar si la zona en que se resuelven las ecuaciones cumple con las aproximaciones de onda larga realizadas; y el último es la razón entre las escalas características de los gastos sólidos y líquidos Υ , que entrega información relevante respecto a la escala de tiempo en la que ocurre la erosión respecto al flujo.

La definición de c_f ya fue presentada en la ecuación 3.6, mientras que la definición de los demás adimensionales corresponde a:

$$Fr = \frac{U_0}{\sqrt{gH}}, \varepsilon = \frac{H}{L}, \Upsilon = \frac{q_{s0}}{(1-p)q_0} \quad (3.44)$$

Tabla 3.1: Escalas del problema.

Variable dimensional	Símbolo	Escala	Variable adimensional
Velocidad promedio en el eje vertical	U_j	U_0	$U_j^* = U_j/U_0$
Altura de flujo	h	H	$h^* = h/H$
Caudal por unidad de ancho	hU_j	$q_0 = HU_0$	$hU_j^* = hU_j/q_0$
Variación de la profundidad en el lecho	Δh_0	H	$h_0^* = \Delta h_0/H$
Longitudes horizontales	x_j	L	$x_j^* = x_j/L$
Tiempo	t	T	$t^* = t/T$
Gasto sólido	q_s	q_{s0}	$q_s^* = q_s/q_{s0}$
Esfuerzo de corte de fondo	τ_{0i}	$\rho_m U_0^2$	$\tau_{0i}^* = \tau_{0i}/(\rho_m U_0^2) = c_f U^* U_i^*$

Capítulo 4

Modelo numérico

4.1. Estrategia de resolución

El sistema de ecuaciones con dimensiones definido en el Capítulo 3 es reescrito como se muestra en las ecuaciones 4.1, 4.2 y 4.3. El aporte de momentum asociado a la presión motriz fue dividido en un término dependiente y otro independiente de la topografía. El término independiente es interpretado como un flujo de momentum y es agrupado con los términos advectivos.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h U_j}{\partial x_j} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial h U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(h U_i U_j + \frac{1}{2} \delta_{ij} g h^2 \right) = -g h \frac{\partial h_0}{\partial x_i} - \frac{\tau_{0i}}{\rho_m} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} + \frac{1}{1-p} \frac{\partial q_{sj}}{\partial x_j} = 0 \quad (4.3)$$

Las estrategias para la resolución de este sistema pueden ser clasificadas en sincrónicas y asincrónicas (Juez et al., 2014). La estrategia asincrónica se define como aquella en que las ecuaciones hidrodinámicas (ecuaciones 4.1 y 4.2) se resuelven de forma desacoplada de la evolución morfológica del lecho (ecuación 4.3). En términos del análisis dimensional de la Sección 3.3 es equivalente a imponer $\Upsilon \ll 1$, lo que implica suponer que la escala de tiempo asociada a la evolución morfológica del lecho es mucho mayor que la asociada al flujo. Las estrategias sincrónicas, por su parte, son aquellas en que este supuesto no se realiza y las ecuaciones se resuelven de forma totalmente acoplada.

En el presente trabajo se utiliza una estrategia asincrónica mejorada, propuesta por Juez et al. (2014), en la que se acopla débilmente la ecuación de Exner a la solución del sistema hidrodinámico. Esto se realiza mediante la reformulación del criterio de estabilidad de los esquemas numéricos incorporando una celeridad de onda, formulada de una forma cuasi-hiperbólica, asociada a la ecuación de Exner (Caviedes-Voullième et al., 2017). De esta forma se considera indirectamente en las ecuaciones de flujo el efecto del cambio en el lecho.

Tanto para el modelo hidrodinámico como para el morfodinámico se utilizan esquemas de volúmenes finitos conservativos tipo Godunov, obteniendo los flujos numéricos entre celdas resolviendo problemas de Riemann unidimensionales.

4.2. Discretización del dominio

Para resolver las ecuaciones con esquemas de volúmenes finitos, es necesario teselar el dominio de cálculo en distintos elementos denominados *volúmenes de control*. Estos volúmenes representan la unidad fundamental en donde las ecuaciones son resueltas, considerando que en su interior el valor de las variables del flujo se mantienen constantes durante el paso de tiempo. En el problema analizado, los volúmenes corresponden a polígonos bidimensionales convexos donde el teselado es fijo durante el tiempo de cómputo.

En la Figura 4.1 se presenta un esquema de uno de los posibles volúmenes de control factibles de ser considerados. El dominio de interés se supone bidimensional con área V y frontera ∂V , teselado con polígonos convexos indexados de forma única con una etiqueta N_p . Cada polígono cuenta con un área V_p y un borde ∂V_p , el cual se considera compuesto por distintos segmentos f_{pq} de longitud L_{pq} . Cada segmento se supone como la frontera única entre un volumen N_p y otro contiguo N_q , orientada exteriormente utilizando un vector normal n_{pq} . Este vector normal cumple con $n_{pq} = |n_{pq}| \hat{n}_{pq} = L_{pq} \hat{n}_{pq}$ y se denomina *vector de área*. Cabe mencionar que usualmente son utilizados los conceptos de *celda* como sinónimo de volumen de control y *cara* como sinónimo de uno de los segmentos que forman su frontera.

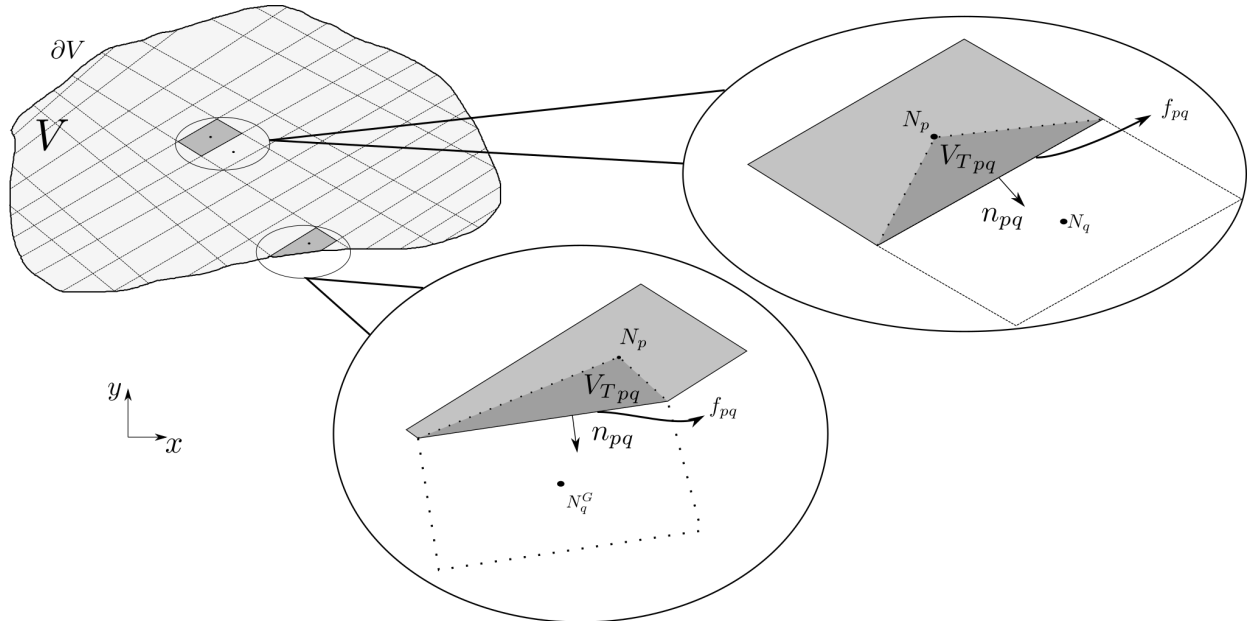


Figura 4.1: Esquema de la discretización del dominio considerando rectángulos.

Para el cálculo de gradientes entre celdas, se define el vector r_{p*} como aquel que une los centroides del volumen N_p y otro elemento geométrico genérico g_* . Particularmente, r_{pq} une las celdas N_p y N_q , mientras que r_{pf} une la celda N_p y la cara f_{pq} . Proyectando r_{p*} en el

vector unitario \hat{n}_{pq} , se obtienen las magnitudes $d_{\perp pq} = |r_{pq} \cdot \hat{n}_{pq}|$ y $d_{\perp pf} = |r_{pf} \cdot \hat{n}_{pq}|$. Con ellas se define $\delta_{\perp pf} = d_{\perp pf}/d_{\perp pq}$, que corresponde a la fracción de la distancia perpendicular $d_{\perp pq}$ asociada al volumen N_p . Estos vectores y distancias se ejemplifican en la Figura 4.2.

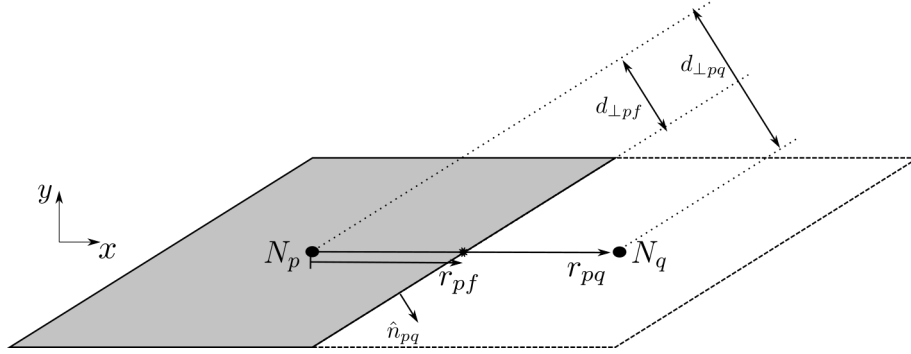


Figura 4.2: Vectores r_{p*} y distancias $d_{\perp p*}$.

En el caso de los volúmenes que limitan con la frontera, se considera la existencia de una celda virtual N_q^G a la que se le asignan todas las propiedades geométricas del volumen N_p con el que limita. Adicionalmente, cada celda es subdividida en triángulos de volumen V_{Tpq} , formados por los vértices que definen a f_{pq} y el centroide de N_p . Estos volúmenes, útiles para el cálculo de los flujos numéricos, se obtienen mediante la ecuación $V_{Tpq} = \frac{1}{2}d_{\perp pf}L_{pq}$.

El modelo formulado considera que el conjunto de las celdas forman una malla computacional no estructurada. Esto significa que los índices asignados a cada volumen no necesariamente presentan una estructura coherente con su posición en el espacio, requiriendo conocer de antemano su conectividad. Se define entonces P_q como el conjunto de los índices a las celdas vecinas de un volumen N_p . Este conjunto permite la construcción de mallas con mayor capacidad de adaptarse a geometrías complejas, ya que proporciona la conectividad entre volúmenes que en principio pueden ser polígonos de diversas formas. Ahora bien, en el presente trabajo sólo son utilizados elementos rectangulares.

La construcción de la malla para un caso particular no será tratada en este trabajo y se considera como una entrada del modelo. Ahora bien, se recomienda que la malla presente volúmenes que cumplan con los estándares para cualquier modelo de dinámica de fluidos computacional. Cea (2005) y Fernández-Nieto (2003) entregan una descripción detallada de la forma en que los volúmenes pueden ser construidos basados en triangulaciones.

4.3. Modelo hidrodinámico

4.3.1. Forma vectorial y carácter hiperbólico del sistema

El sistema de ecuaciones que define el modelo hidrodinámico se escribe de forma vectorial como se presenta en la ecuación 4.4. Cada vector en esta formulación agrupa los términos de las ecuaciones del modelo que cumplen funciones similares, situando en su primer componente los términos de la ecuación de continuidad de volumen, en su segundo componente aquellos

provenientes de la ecuación de momentum según x y en el tercer componente aquellos provenientes de la ecuación de momentum según y . Se define \mathbf{w} como el vector de variables conservativas del sistema, $\mathbf{F}_{x,y}$ como los vectores que representan los flujos, mientras que \mathbf{S} y \mathbf{T} son términos fuentes (Cea, 2005; Fernández-Nieto, 2003).

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} = \mathbf{S} + \mathbf{T} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} h \\ hU_x \\ hU_y \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}_x = \begin{pmatrix} hU_x \\ hU_x U_x + \frac{1}{2}gh^2 \\ hU_x U_y \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}_y = \begin{pmatrix} hU_y \\ hU_y U_x \\ hU_y U_y + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial h_0}{\partial x} \\ -gh \frac{\partial h_0}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\tau_{0x}}{\rho_m} \\ -\frac{\tau_{0y}}{\rho_m} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Toro (2001) indica que un sistema con la forma de la ecuación 4.4 puede ser escrito de forma cuasi-linear utilizando las matrices jacobianas $\partial \mathbf{F}_x / \partial \mathbf{w}$ y $\partial \mathbf{F}_y / \partial \mathbf{w}$, como se muestra en la ecuación 4.7.

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial \mathbf{w}} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial \mathbf{w}} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} = \mathbf{S} + \mathbf{T} \quad (4.7)$$

Una particularidad de este sistema es que cualquier combinación lineal de la forma $\mathbf{A} = a_1 \partial \mathbf{F}_x / \partial \mathbf{w} + a_2 \partial \mathbf{F}_y / \partial \mathbf{w}$, con a_i pertenecientes a un vector no nulo, tiene tres valores propios reales y cuenta con una base formada por sus vectores propios (Toro, 2001). Esta propiedad lo define como un sistema hiperbólico, característica que es intensamente utilizada para su resolución.

En particular, si se eligen los componentes de un vector normal unitario exterior $\hat{n} = (\hat{n}_x \ \hat{n}_y)^T$ para realizar la combinación lineal, \mathbf{A} se escribe como se muestra en la ecuación 4.8, donde $c = \sqrt{gh}$ y $\mathbf{Z} = \mathbf{F}_x \hat{n}_x + \mathbf{F}_y \hat{n}_y$ (Cea, 2005; Fernández-Nieto, 2003).

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{w}} = \hat{n}_x \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial \mathbf{w}} + \hat{n}_y \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial \mathbf{w}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \hat{n}_x & \hat{n}_y \\ (c^2 - U_x^2) \hat{n}_x - U_x U_y \hat{n}_y & 2U_x \hat{n}_x + U_y \hat{n}_y & U_x \hat{n}_y \\ -U_x U_y \hat{n}_x + (c^2 - U_y^2) \hat{n}_y & U_y \hat{n}_x & U_x \hat{n}_x + 2U_y \hat{n}_y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Esta matriz cuenta con tres valores propios reales y tres vectores propios linealmente independientes, presentados en las ecuaciones 4.9 y 4.10.

$$\lambda_1 = U_x \hat{n}_x + U_y \hat{n}_y \quad \lambda_2 = \lambda_1 + c \quad \lambda_3 = \lambda_1 - c \quad (4.9)$$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \hat{n}_y \\ c \hat{n}_x \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ U_x + c \hat{n}_x \\ U_y + c \hat{n}_y \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ U_x - c \hat{n}_x \\ U_y - c \hat{n}_y \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Con esta información, es posible demostrar que la matriz \mathbf{A} es diagonalizable de la forma de la ecuación 4.11, donde con sus valores propios es construida la matriz $\mathbf{D} = \text{diag} \{\lambda_i\}$ y con sus vectores propios se forma la matriz $\mathbf{X} = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3)$.

$$\mathbf{A} = \mathbf{X} \mathbf{D} \mathbf{X}^{-1} \quad (4.11)$$

4.3.2. Discretización de las ecuaciones

Incorporado la notación $\mathbf{\Lambda} = (\mathbf{F}_x \ \mathbf{F}_y)^T$, definiendo \mathbf{w}_p como una aproximación de la integral $1/V_p \int_{V_p} \mathbf{w} dV$ y notando que $\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{Z}$, la ecuación 4.4 puede ser integrada sobre un volumen de control arbitrario y fijo en el tiempo N_p , obteniendo:

$$\begin{aligned} \int_{V_p} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} dV + \int_{V_p} \nabla \cdot \mathbf{\Lambda} dV &= \int_{V_p} \mathbf{S} dV + \int_{V_p} \mathbf{T} dV \\ \Rightarrow V_p \frac{\partial \mathbf{w}_p}{\partial t} + \int_{\partial V_p} \mathbf{Z} dL &= \int_{V_p} \mathbf{S} dV + \int_{V_p} \mathbf{T} dV \end{aligned} \quad (4.12)$$

Como ∂V_p se ha supuesto compuesto por segmentos de longitud L_{pq} , de la ecuación 4.12 se obtiene la ecuación 4.13, donde se ha denotado como $\mathbf{I}_{A,B} = \int_A \mathbf{B} dV$ a la integral del vector \mathbf{B} sobre el elemento geométrico A .

$$\begin{aligned} V_p \frac{\partial \mathbf{w}_p}{\partial t} + \sum_{q \in P_q} \int_{L_{pq}} \mathbf{Z} dL &= \int_{V_p} \mathbf{S} dV + \int_{V_p} \mathbf{T} dV \\ \Leftrightarrow V_p \frac{\partial \mathbf{w}_p}{\partial t} + \sum_{q \in P_q} \mathbf{I}_{L_{pq}, \mathbf{Z}} &= \mathbf{I}_{V_p, \mathbf{S}} + \mathbf{I}_{V_p, \mathbf{T}} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Integrando temporalmente lo anterior en un intervalo $[t^n, t^{n+1} = t^n + \Delta t]$ se obtiene la ecuación 4.14, donde se ha denotado con los superíndices n y $n+1$ a las variables evaluadas en los tiempos t^n y t^{n+1} , respectivamente. Cabe mencionar que para el cálculo de las integrales fue utilizada la regla de cuadratura del rectángulo apoyado en el inicio del intervalo, por lo que $\int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{I}_{A,B} \approx \mathbf{I}_{A,B}^n \Delta t$.

$$\begin{aligned} V_p \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial \mathbf{w}_p}{\partial t} dt + \sum_{q \in P_q} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{I}_{L_{pq}, \mathbf{Z}} dt &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{I}_{V_p, \mathbf{S}} dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{I}_{V_p, \mathbf{T}} dt \\ \Rightarrow V_p \frac{\mathbf{w}_p^{n+1} - \mathbf{w}_p^n}{\Delta t} + \sum_{q \in P_q} \mathbf{I}_{L_{pq}, \mathbf{Z}}^n &= \mathbf{I}_{V_p, \mathbf{S}}^n + \mathbf{I}_{V_p, \mathbf{T}}^n \end{aligned} \quad (4.14)$$

Cea & Vázquez-Cendón (2012) indican que el sistema anterior puede ser discretizado de la forma de la ecuación 4.15. En ella, ϕ_{pq} corresponde al flujo numérico normal a la cara f_{pq} obtenido de resolver el sistema de ecuaciones 4.4 sin términos fuentes (Fernández-Nieto, 2003), mientras que \mathbf{S}_p y \mathbf{T}_p son términos fuentes numéricos asociados a la pendiente y a la fricción, respectivamente.

$$V_p \frac{\mathbf{w}_p^{n+1} - \mathbf{w}_p^n}{\Delta t} + \sum_{q \in P_q} L_{pq} \phi_{pq} = V_p \mathbf{S}_p + V_p \mathbf{T}_p \quad (4.15)$$

Despejando \mathbf{w}_p^{n+1} se obtiene la ecuación 4.16, que corresponde a un esquema de volúmenes finitos tipo Godunov con términos fuentes. Este tipo de esquemas se denomina conservativo ya que asegura el balance de flujos tanto a nivel de celda (local) como a nivel del dominio completo (global).

$$\mathbf{w}_p^{n+1} = \mathbf{w}_p^n - \frac{\Delta t}{V_p} \sum_{q \in P_q} L_{pq} \phi_{pq} + \Delta t (\mathbf{S}_p + \mathbf{T}_p) \quad (4.16)$$

Para obtener ϕ_{pq} basta con resolver un problema de Riemann unidimensional homogéneo proyectado que atraviese f_{pq} (Fernández-Nieto, 2003). Mientras que $\mathbf{S}_p, \mathbf{T}_p$ pueden ser construidos de forma coherente con el uso de ϕ_{pq} , de modo de asegurar que el esquema numérico esté bien balanceado¹.

Problema de Riemann proyectado

El problema de Riemann proyectado que es utilizado para el cálculo de ϕ_{pq} se presenta en la ecuación 4.17 y se ejemplifica esquemáticamente en la Figura 4.3. Con esta formulación se busca conocer la evolución de un sistema con una condición inicial definida por valores constantes, separados abruptamente por una discontinuidad.

$$(IPV) = \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{Z}(\mathbf{w})}{\partial x'} = 0 \\ \mathbf{w}(x', 0) = \begin{cases} \mathbf{w}_p^n & , \text{ si } x' < 0 \\ \mathbf{w}_q^n & , \text{ si } x' > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (4.17)$$

Utilizando regla de la cadena en la ecuación 4.17 se obtiene:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{Z}(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x'} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x'} = 0 \quad (4.18)$$

Toro (2009a) indica que un sistema con las estructura anterior presenta una solución que consiste en $m + 1$ estados constantes separados por m ondas, como se esquematiza en la Figura 4.4. En ella se observa el avance de los frentes de onda asociados a los valores propios de la matriz Jacobiana \mathbf{A} , donde el vinculado a λ_1 corresponde a una onda de corte (*share wave*) mientras que los otros dos frentes pueden corresponder a ondas de choque (*shock waves*) u ondas de rarefacción (*rarefraction waves*), dependiendo de la condición inicial del sistema.

Toro (2009a) muestra que este problema cuenta con una solución exacta. Ahora bien, su obtención requiere métodos iterativos que son computacionalmente demandantes (Cea, 2005), por lo que el uso de métodos aproximados es una opción útil en modelos de gran escala.

¹Para más detalle, referirse al trabajo de Fernández-Nieto (2003) cap. 5.

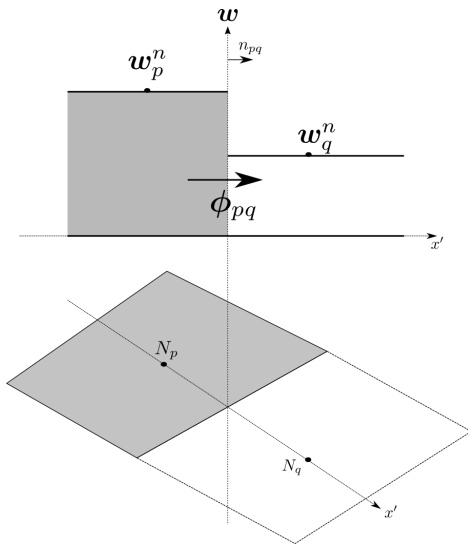


Figura 4.3: Esquema del problema de Riemann unidimensional proyectado.

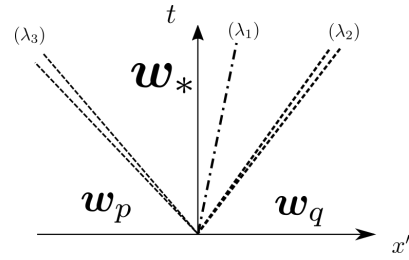


Figura 4.4: Estructura de la solución general del problema de Riemann en ecuaciones de aguas someras.

Bases de la solución aproximada de Roe para el problema de Riemann

Evitando el coste computacional adicional se resuelve el problema presentado en la ecuación 4.17 de forma aproximada, siguiendo la metodología inicialmente presentada por Roe (1981) para las ecuaciones de Euler. Esta metodología ha sido utilizada ampliamente en ecuaciones de aguas someras.

El método de Roe reemplaza la matriz Jacobiana \mathbf{A} por una matriz Jacobiana $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{w}_p^n, \mathbf{w}_q^n)$, dependiente de la condición inicial, transformando el problema 4.18 en uno lineal con coeficientes constantes que es resuelto de forma exacta (Toro, 2009a). La formulación aproximada corresponde a la presentada en la ecuación 4.19.

$$(IPV)_{APROX} = \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x'} = 0 \\ \mathbf{w}(x', 0) = \begin{cases} \mathbf{w}_p^n & , \text{ si } x' < 0 \\ \mathbf{w}_q^n & , \text{ si } x' > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (4.19)$$

La matriz \mathbf{Q} que cumpla con ser solución del sistema 4.19 siendo una buena aproximación de \mathbf{A} debe satisfacer las siguientes propiedades:

- Mantiene el sistema hiperbólico, por lo que deben existir tres vectores propios $\tilde{\lambda}_i = \tilde{\lambda}_i(\mathbf{w}_p, \mathbf{w}_q)$ y tres vectores linealmente independientes $\tilde{\mathbf{e}}_i$.
- Es consistente con la solución exacta, por lo que $\mathbf{Q}(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \mathbf{A}(\mathbf{w})$
- Se conserva en las discontinuidades, cumpliéndose la condición de Rankine-Huniont $\mathbf{Z}(\mathbf{w}_p) - \mathbf{Z}(\mathbf{w}_q) = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{w}_p - \mathbf{w}_q)$

En el caso del esquema aproximado de Roe, la matriz \mathbf{Q} es construida evaluando la matriz Jacobiana original en un estado intermedio $\tilde{\mathbf{w}}_{pq}$ de la forma $\mathbf{Q} = \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{w}}_{pq})$. Este estado

intermedio es definido por las variables presentadas en las ecuaciones 4.20 y 4.21 (Toro, 2001).

$$\tilde{h} = \sqrt{h_p h_q} \qquad \tilde{c} = \sqrt{\frac{1}{2}(c_p^2 + c_q^2)} \qquad (4.20)$$

$$\tilde{U}_x = \frac{\sqrt{h_p} U_{x,p} + \sqrt{h_q} U_{x,q}}{\sqrt{h_p} + \sqrt{h_q}} \qquad \tilde{U}_y = \frac{\sqrt{h_p} U_{y,p} + \sqrt{h_q} U_{y,q}}{\sqrt{h_p} + \sqrt{h_q}} \qquad (4.21)$$

Con esta definición, al evaluar los valores y vectores propios de \mathbf{A} (ecuaciones 4.9 y 4.10) en $\tilde{\mathbf{w}}_{pq}$ se obtiene como resultado los vectores y valores propios de \mathbf{Q} . Además, esta matriz es también diagonalizable como se muestra en las ecuaciones 4.22-4.23.

$$\mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{X}} \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{X}}^{-1} \qquad \tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\tilde{c}\hat{n}_y & \tilde{U}_x + \tilde{c}\hat{n}_x & \tilde{U}_x - \tilde{c}\hat{n}_x \\ \tilde{c}\hat{n}_x & \tilde{U}_y + \tilde{c}\hat{n}_y & \tilde{U}_y - \tilde{c}\hat{n}_y \end{pmatrix} \qquad (4.22)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\lambda}_3 \end{pmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{X}}^{-1} = \frac{1}{2\tilde{c}} \begin{pmatrix} 2(\tilde{U}_x\hat{n}_y - \tilde{U}_y\hat{n}_x) & -2\hat{n}_y & 2\hat{n}_x \\ \tilde{c} - \tilde{U}_x\hat{n}_x - \tilde{U}_y\hat{n}_y & \hat{n}_x & \hat{n}_y \\ \tilde{c} + \tilde{U}_x\hat{n}_x + \tilde{U}_y\hat{n}_y & -\hat{n}_x & -\hat{n}_y \end{pmatrix} \qquad (4.23)$$

Cea (2005) indica que el método de Roe no entrega un correcto flujo numérico entre las celdas cuando los valores propios de la matriz \mathbf{Q} son cercanos a cero. Esto ocurre ya que se intenta representar ondas de rarefacción críticas por un salto discontinuo, siendo que en estos patrones la transición es suave.

Este problema se aborda mediante la regularización de los valores propios $\tilde{\lambda}_{2,3}$ utilizando la ecuación 4.24. Esta expresión es analizada por Pelanti et al. (2001), quienes muestran que se obtiene de incluir un estado intermedio en la onda de rarefacción crítica y asegura que el esquema sea consistente con la condición de entropía (*an entropy fix*). Las celeridades que presenta este patron de onda en sus extremos $\lambda_m^{L,R}$ son obtenidas utilizando la metodología presentada por Toro (2001)².

$$|\tilde{\lambda}_m|_r = \begin{cases} \frac{(\lambda_m^L + \lambda_m^R)\tilde{\lambda}_m - 2\lambda_m^L\lambda_m^R}{\lambda_m^L - \lambda_m^R} & , \text{ si } \lambda_m^L < 0 < \lambda_m^R \\ |\tilde{\lambda}_m| & , \text{ en otro caso} \end{cases} \qquad (4.24)$$

Adicionalmente, para asegurar que el esquema preserve un valor de altura positivo, el proceso de regularización siguió la metodología detallada por Pelanti et al. (2001) aplicada a las ecuaciones de aguas someras. Estos autores proponen verificar el sentido físico de los estados intermedios entregado por el esquema de Roe, reemplazando los valores de $\lambda_m^{L,R}$ por las máximas celeridades de onda dadas las condiciones locales del flujo $\lambda_m^{-,+}$ en caso de que algún estado intermedio presente una altura negativa o fuera del rango plausible para una onda de rarefacción³.

²Para mayor detalle referirse a Toro (2001), página 189.

³Para mayor detalle referirse a Pelanti et al. (2001), página 41.

Discretización de los términos advectivos

De la solución del problema de Riemann unidimensional homogéneo proyectado, definido en la ecuación 4.19, se obtiene el valor del flujo numérico que atraviesa f_{pq} como se muestra en la ecuación 4.25 (Fernández-Nieto, 2003).

$$\phi_{pq}(\mathbf{w}_p, \mathbf{w}_q, \hat{n}_{pq}) = \frac{\mathbf{Z}(\mathbf{w}_p, \hat{n}_{pq}) + \mathbf{Z}(\mathbf{w}_q, \hat{n}_{pq})}{2} - \frac{1}{2}|\mathbf{Q}| \cdot (\mathbf{w}_q - \mathbf{w}_p) \quad (4.25)$$

La estructura de la discretización del flujo puede subdividirse en una parte centrada y otra descentrada (usualmente llamada *upwind*). Esta última da estabilidad al esquema ya que toma en cuenta la dirección en que la información se propaga (Cea, 2005). Considerando esta subdivisión, podemos reescribir ϕ_{pq} obteniendo:

$$\phi_{pq} = \phi_{pq}^C + \phi_{pq}^U \quad (4.26)$$

$$\phi_{pq}^C = \frac{\mathbf{Z}(\mathbf{w}_p, \hat{n}_{pq}) + \mathbf{Z}(\mathbf{w}_q, \hat{n}_{pq})}{2} \quad (4.27)$$

$$\phi_{pq}^U = -\frac{1}{2}|\mathbf{Q}| \cdot (\mathbf{w}_q - \mathbf{w}_p) \quad (4.28)$$

Para mejorar la eficiencia computacional, es posible reescribir ϕ_{pq}^U descomponiéndolo en términos de los vectores propios $\tilde{\mathbf{e}}_m$ de la matriz \mathbf{Q} (Cea & Vázquez-Cendón, 2010). Con ello se obtiene la formulación 4.29, donde los coeficientes $\tilde{\alpha}_m$, que se denominan *wave strengths*, son conocidos (Toro, 2009a; Cea & Vázquez-Cendón, 2010).

$$\phi_{pq}^U = -\frac{1}{2}|\mathbf{Q}| \cdot \Delta\mathbf{w} = -\frac{1}{2} \sum_{m \in \{1,2,3\}} |\tilde{\lambda}_m| \tilde{\alpha}_m \tilde{\mathbf{e}}_m \quad (4.29)$$

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{\tilde{c}} \left[\Delta h U_y \cdot \hat{n}_x - \Delta h U_x \cdot \hat{n}_y - \Delta h \cdot (\tilde{U}_y \hat{n}_x - \tilde{U}_x \hat{n}_y) \right] \quad (4.30)$$

$$\tilde{\alpha}_2 = \frac{\Delta h}{2} + \frac{1}{2\tilde{c}} \left[\Delta h U_x \cdot \hat{n}_x + \Delta h U_y \cdot \hat{n}_y - \Delta h \cdot (\tilde{U}_x \hat{n}_x + \tilde{U}_y \hat{n}_y) \right] \quad (4.31)$$

$$\tilde{\alpha}_3 = \frac{\Delta h}{2} - \frac{1}{2\tilde{c}} \left[\Delta h U_x \cdot \hat{n}_x + \Delta h U_y \cdot \hat{n}_y - \Delta h \cdot (\tilde{U}_x \hat{n}_x + \tilde{U}_y \hat{n}_y) \right] \quad (4.32)$$

Con estas definiciones, la resultante de los flujos a través de las caras de cada volumen de control puede ser reagrupada separando sus aportes centrados de aquellos descentrados. Esto se presenta en la ecuación 4.33, donde se ha definido \mathbf{F}_{np} como la resultante de los flujos numéricos que atraviesan las caras del volumen de control.

$$\mathbf{F}_{np} \equiv \frac{1}{V_p} \sum_{q \in P_q} L_{pq} \phi_{pq} = \frac{1}{V_p} \sum_{q \in P_q} L_{pq} \phi_{pq}^C + \frac{1}{V_p} \sum_{q \in P_q} L_{pq} \phi_{pq}^U = \mathbf{F}_{np}^C + \mathbf{F}_{np}^U \quad (4.33)$$

Discretización del término fuente asociado a la pendiente

Cea (2005) muestra que \mathbf{S}_p puede ser escrita subdividiendo el volumen de control en triángulos interiores asociados a cada cara, como muestra en la ecuación 4.34. En esta

ecuación, ψ es una función que discretiza la pendiente al interior de la celda N_p .

$$\mathbf{S}_p \equiv \frac{1}{V_p} \sum_{q \in P_q} V_{T_{pq}} \psi_{pq}(\mathbf{w}_p, \mathbf{w}_q, \hat{n}_{pq}) \quad (4.34)$$

Utilizando la solución que presenta Fernández-Nieto (2003) para el caso no homogéneo del problema de Riemann unidimensional, la función ψ_{pq} puede ser escrita de la forma 4.35.

$$\psi_{pq} = \psi_{pq}^C + \psi_{pq}^U \quad (4.35)$$

$$\psi_{pq}^C = -\tilde{c}^2 \frac{1}{\delta_{\perp pf}} \frac{\Delta h_0}{d_{\perp pq}} \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{n}_x \\ \hat{n}_y \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

$$\psi_{pq}^U = \tilde{c}^2 \frac{1}{\delta_{\perp pf}} \frac{\Delta h_0}{d_{\perp pq}} |\mathbf{Q}| \mathbf{Q}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{n}_x \\ \hat{n}_y \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

De igual forma como se realizó con los términos advectivos, es posible reescribir los términos asociados a la pendiente en función de los vectores propios $\tilde{\mathbf{e}}_m$ de la matriz \mathbf{Q} , obteniendo:

$$\psi_{pq}^C = \sum_m \tilde{\beta}_m^C \tilde{\mathbf{e}}_m \quad \tilde{\beta}_1^C = 0 \quad \tilde{\beta}_2^C = -\tilde{c} \frac{1}{2\delta_{\perp pf}} \frac{\Delta h_0}{d_{\perp pq}} \quad \tilde{\beta}_3^C = \tilde{c} \frac{1}{2\delta_{\perp pf}} \frac{\Delta h_0}{d_{\perp pq}} \quad (4.38)$$

$$\psi_{pq}^U = \sum_{m=0}^2 \tilde{\beta}_m^U \tilde{\mathbf{e}}_m \quad \tilde{\beta}_1^U = 0 \quad \tilde{\beta}_2^U = \text{sgn}(\tilde{\lambda}_2) \tilde{c} \frac{1}{2\delta_{\perp pf}} \frac{\Delta h_0}{d_{\perp pq}} \quad \tilde{\beta}_3^U = -\text{sgn}(\tilde{\lambda}_3) \tilde{c} \frac{1}{2\delta_{\perp pf}} \frac{\Delta h_0}{d_{\perp pq}} \quad (4.39)$$

Con estas definiciones, el aporte de la pendiente puede subdividirse sumando los términos centrados y descentrados como se muestra en la ecuación 4.40.

$$\mathbf{S}_p = \frac{1}{V_p} \sum_{q \in P_q} V_{T_{pq}} \psi_{pq} = \frac{1}{V_p} \sum_{q \in P_q} V_{T_{pq}} \psi_{pq}^C + \frac{1}{V_p} \sum_{q \in P_q} V_{T_{pq}} \psi_{pq}^U = \mathbf{S}_p^C + \mathbf{S}_p^U \quad (4.40)$$

Cabe recalcar que la forma en que la discretización es construida para resolver la ecuación 4.4 supone utilizar los flujos intercelda del problema homogéneo ϕ_{pq} . Por esta razón es que se explicita constantemente el hecho que \mathbf{S}_p es un término fuente **numérico**, el cual se construye con una aproximación centrada $\mathbf{S}_p^C \approx \int_{V_p} \mathbf{S} dV$ y una corrección \mathbf{S}^U que considera los términos del flujo real no rescatados al calcular ϕ_{pq} sobre un lecho distinto al plano.

Discretización del término fuente asociado a la fricción

En la sección 3.2.1 ya fue analizado que el esfuerzo de corte puede ser escrito en función de J , que representa la pérdida friccional por unidad de longitud. Esta variable depende de la carga total del sistema (o Bernoulli) cumpliéndose lo presentado en la ecuación 4.41 si consideramos que $R_h \approx h$.

$$J = |\nabla B| \Rightarrow \tau_0 = \rho_m g R_h \begin{pmatrix} \frac{\partial B}{\partial x} \\ \frac{\partial B}{\partial y} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\tau_{0x}}{\rho_m} \\ -\frac{\tau_{0y}}{\rho_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial B}{\partial x} \\ -gh \frac{\partial B}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

Cea & Vázquez-Cendón (2012) comparando la estructura de \mathbf{T} (ecuación 4.41) con la estructura de \mathbf{S} (ecuación 4.6) concluyen que el efecto de la fricción debe ser discretizado de la misma forma en que lo fue la pendiente, como se muestra en la ecuación 4.42.

$$\mathbf{T}_p = \mathbf{T}_p^C + \mathbf{T}_p^U \quad (4.42)$$

Para el cálculo de la aproximación centrada \mathbf{T}_p^C , conviene expresar τ_0 en función del coeficiente de arrastre c_f obteniendo:

$$\mathbf{T}_p^C = \frac{1}{V_p} \int_{V_p} \mathbf{T} dV = \frac{1}{V_p} \int_{V_p} -\frac{c_f}{h^2} |hU| \begin{pmatrix} 0 \\ hU_x \\ hU_y \end{pmatrix} dV \approx -\left(\frac{c_f}{h^2} |hU|\right)_p \begin{pmatrix} 0 \\ hU_x \\ hU_y \end{pmatrix}_p \quad (4.43)$$

Para mejorar la estabilidad del modelo, la aproximación centrada puede escribirse de forma semi-implícita sin agregar coste computacional (Cea, 2005), como se muestra en la ecuación 4.44.

$$\mathbf{T}_p^C = -\left(\frac{c_f}{h^2} |hU|\right)_p^n \begin{pmatrix} 0 \\ hU_x \\ hU_y \end{pmatrix}_p^{n+1} \quad (4.44)$$

Por otro lado, el cálculo de \mathbf{T}_p^U se realiza de forma análoga a \mathbf{S}^U obteniendo la ecuación 4.45, donde $\Delta B = B_q - B_p = r_{pq} \cdot \nabla B = r_{pq} \cdot \vec{J}$.

$$\mathbf{T}_p^U = \frac{1}{V_p} \sum_{q \in P_q} V_{T_{pq}} \mathbf{T}_{pq}^U \quad \mathbf{T}_{pq}^U = \tilde{c}^2 \frac{1}{\delta_{\perp pf} d_{\perp pq}} |\mathbf{Q}| \mathbf{Q}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{n}_x \\ \hat{n}_y \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

Finalmente, proyectando \mathbf{T}_p^U en los vectores propios $\tilde{\mathbf{e}}_m$ de la matriz \mathbf{Q} obtenemos las ecuaciones de 4.46, como una alternativa para un cómputo más eficiente.

$$\mathbf{T}_{pq}^U = \sum_m \tilde{\gamma}_m^U \tilde{\mathbf{e}}_m \quad \tilde{\gamma}_1^U = 0 \quad \tilde{\gamma}_2^U = \text{sgn}(\tilde{\lambda}_2) \tilde{c} \frac{1}{2\delta_{\perp pf} d_{\perp pq}} \frac{\Delta B}{d_{\perp pq}} \quad \tilde{\gamma}_3^U = -\text{sgn}(\tilde{\lambda}_3) \tilde{c} \frac{1}{2\delta_{\perp pf} d_{\perp pq}} \frac{\Delta B}{d_{\perp pq}} \quad (4.46)$$

4.3.3. Extensión del esquema hidrodinámico a segundo orden

En la formulación de los esquemas numéricos se ha considerado un valor homogéneo y constante \mathbf{w}_p en cada celda, dicho de otro modo, h , hU y h_0 son aproximados localmente por polinomios de orden cero. Debido a esto, el error en el cálculo de las integrales de las ecuaciones 4.13 y 4.14 decrecen linealmente con el tamaño de la celda. Esta particularidad define al esquema elegido como de primer orden.

Su extensión a segundo orden busca que el error en el cálculo de las integrales ya mencionadas decrezca cuadráticamente con la discretización, aumentando la precisión de los resultados a costa de aumentar la cantidad de operaciones a computar para una misma malla numérica. Dependerá entonces de las particularidades del fenómeno y de los objetivos de la modelación si se justifica este esfuerzo adicional.

Justificación del estudio de esquemas de segundo orden para el caso de simulaciones de colapso de presas

Las discretizaciones espaciales y temporales en un esquema numérico explícito estable están íntimamente relacionadas entre sí por el número de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), adimensional que es una comparación entre las celeridades de onda y la velocidad con que la información se propaga por la malla numérica. Este número adimensional tiene la forma

$$\text{CFL} = \frac{\Delta t \lambda_{max}}{\chi} \quad (4.47)$$

donde λ_{max} es la máxima celeridad de onda, Δt es la discretización temporal y χ es una longitud que caracteriza a la discretización espacial. Para asegurar la estabilidad del esquema, se demuestra que en mallas unidimensionales son necesarios valores $\text{CFL} < 1$ mientras que para mallas no estructuradas bidimensionales se estima que $\text{CFL} < 0,5$ (Toro, 2009a; Juez et al., 2014). Ahora bien, es recomendado que el valor del CFL se mantenga cercano al límite de estabilidad para controlar la difusión numérica.

Si se considera que un colapso de un depósito de relaves tiene una duración del orden de las horas, es natural pensar que el muestreo de resultados de un modelo numérico que lo describa deba ser del orden de los minutos. Esto, a su vez, orienta al modelador a elegir una discretización temporal en torno a los segundos. Bajo esta lógica, y considerando $\lambda_{max} \sim |U| + \sqrt{gh} \sim \sqrt{gh}(1 + \text{Fr})$, podemos estimar el tamaño de la celda adecuada en la zona de la brecha de falla mediante

$$\chi \sim \frac{\Delta t \lambda_{max}}{\text{CFL}} \sim \Delta t (2\lambda_{max}) \sim \Delta t \left(2(1 + \text{Fr})\sqrt{gh} \right), \quad (4.48)$$

obteniendo para un escurrimiento supercrítico con alturas del orden de los metros $2(1 + \text{Fr})\sqrt{gh} \sim 15 \text{ m/s} - 30 \text{ m/s}$ y $\chi \sim 15 \text{ m} - 100 \text{ m}$.

De este análisis se concluye que la magnitud de χ para los objetivos de la simulación deberá ser similar a las dimensiones de un muro perimetral de un depósito de relave promedio (Tabla A.2), surgiendo la duda razonable respecto a si los errores de aproximación espacial pueden ser relevantes al estimar volúmenes vertidos. Particularmente interesante, en un sentido práctico, es comparar este error con el rango de soluciones que se obtiene debido a la incertidumbre de los parámetros de entrada, con tal de evaluar si la mejora de la precisión se compensa con coste computacional adicional.

Para analizar este efecto, es implementado el método de MUSCL-Hancock (MHM por sus siglas en inglés), que corresponde a una extensión de segundo orden del esquema de Godunov (Toro, 2001).

Descripción del método de MUSCL-Hancock

El método de MUSCL-Hancock corresponde a un algoritmo que busca estimar el valor de las variables conservativas \mathbf{w} en los puntos de Gauss de los elementos donde son integrados los flujos y términos fuentes. Con el uso de estas estimaciones en el cálculo numérico de

las integrales espaciales (ecuación 4.13) y temporales (ecuación 4.14) se reduce su error de aproximación, aumentando la precisión del esquema. Particularmente, este método logra una precisión de segundo orden temporal y espacial en regiones suaves mediante tres pasos (Toro, 2001):

1. **Reconstrucción local de \mathbf{w} :** Este proceso consiste en aproximar las variables en las caras mediante un plano, como se esquematiza en la Figura 4.5.

En el centroide de cada volumen se impone el valor de $\mathbf{W}_p = 1/V_p \int_{V_p} \mathbf{W} dV$, con \mathbf{W} un vector de variables adecuadas, y se extrapola su valor en el interior de la celda como se muestra en la ecuación 4.49. En ella $\mathbf{r} = (x, y)^T$ corresponde a un vector de posición con origen en el centroide y $(\nabla \mathbf{W})_p$ es una estimación local del gradiente de cada variable.

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}) = \mathbf{W}_p + \mathbf{r} \cdot (\nabla \mathbf{W})_p \quad (4.49)$$

Evaluando esta ecuación en el centroide de f_{pq} pueden ser obtenidos \mathbf{W}_{Pq} o \mathbf{W}_{pQ} , esquematizados en la Figura 4.6, dependiendo de la celda elegida para realizar la reconstrucción. En función de las variables de la malla numérica, definidas en la sección 4.2, su valor explícito es presentado en la ecuación 4.50, donde $\Delta_{pq} = r_{pq} (\nabla \mathbf{W})_p$ se denomina como la pendiente de la reconstrucción para la celda N_p y $\delta_{\perp pf} = d_{\perp pf}/d_{\perp pq}$.

$$\mathbf{W}_{Pq} = \mathbf{W}_p + \delta_{\perp pf} \Delta_{pq} \quad \mathbf{W}_{pQ} = \mathbf{W}_q + \delta_{\perp qf} \Delta_{qp} \quad (4.50)$$

Al procedimiento anterior se le denomina MUSCL (*Monotone Upstream-centred Scheme for Conservation Laws*) o aproximación por extrapolación de variables (Toro, 2009a). En el presente trabajo, la reconstrucción fue realizada sobre el vector $\mathbf{W} = (h_{Total} = h + h_0, h_0, U_x, U_y)^T$ y las variables conservativas en las caras, \mathbf{w}_{Pq} y \mathbf{w}_{qP} , fueron obtenidas utilizando las ecuaciones 4.51 y 4.52.

$$h_{Pq} = \text{máx} (h_{TotalPq} - h_{0Pq}, 0) \quad h_{pQ} = \text{máx} (h_{TotalpQ} - h_{0pQ}, 0) \quad (4.51)$$

$$hU_{x,yPq} = \begin{cases} h_{Pq}U_{x,yPq} & , \text{ si } h_{Pq} > 0 \\ 0 & , \sim \end{cases} \quad hU_{x,ypQ} = \begin{cases} h_{pQ}U_{x,ypQ} & , \text{ si } h_{pQ} > 0 \\ 0 & , \sim \end{cases} \quad (4.52)$$

2. **Evolución temporal de valores extrapolados:** Una vez obtenido el valor la reconstrucción de \mathbf{w} en alguna posición de la celda N_p en el paso temporal n , ésta es evolucionada localmente utilizando la ecuación 4.14 a un tiempo $t^{n+\frac{1}{2}} = t^n + \frac{1}{2}\Delta t$ obteniendo:

$$\mathbf{w}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{w}^n + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{V_p} \sum_{q \in P_q} \mathbf{I}_{L_{pq}, \mathbf{Z}}^n + \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{I}_{V_p, \mathbf{S}}^n + \mathbf{I}_{V_p, \mathbf{T}}^n) \quad (4.53)$$

Utilizando los valores reconstruidos espacialmente, las integrales $\mathbf{I}_{L_{pq}, \mathbf{Z}}^n$, $\mathbf{I}_{V_p, \mathbf{S}}^n$ y $\mathbf{I}_{V_p, \mathbf{T}}^n$ son evaluadas en el centroide de cada dominio de integración obteniendo la ecuación 4.54.

$$\mathbf{w}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{w}^n + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{V_p} \sum_{q \in P_q} L_{pq} \mathbf{Z}(\mathbf{w}_{Pq}^n) + \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{S}(\mathbf{w}_p^n) + \mathbf{T}(\mathbf{w}_p^n)) \quad (4.54)$$

Particularmente, al evolucionar los valores reconstruidos evaluados en sectores específicos de la celda se obtiene:

- Para las caras de la celda:

$$\mathbf{w}_{P_q}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{w}_{P_q}^n + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{V_p} \sum_{q \in P_q} L_{pq} \mathbf{Z}(\mathbf{w}_{P_q}^n) + \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{S}(\mathbf{w}_p^n) + \mathbf{T}(\mathbf{w}_p^n)) \quad (4.55)$$

- Para el centroide de la celda:

$$\mathbf{w}_p^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{w}_p^n + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{V_p} \sum_{q \in P_q} L_{pq} \mathbf{Z}(\mathbf{w}_{P_q}^n) + \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{S}(\mathbf{w}_p^n) + \mathbf{T}(\mathbf{w}_p^n)) \quad (4.56)$$

3. **Resolución de problemas de Riemann:** Con la ecuación 4.54 es posible estimar el valor de la variable conservativa en el centroide de cada dominio de integración, ya sea temporal o espacial como se muestra en las ecuaciones 4.55 y 4.56, con lo que el error de aproximación de las integrales disminuye. Particularmente, en este último paso se utiliza el mismo esquema de Godunov presentado en la ecuación 4.16 evaluando los flujos y términos fuentes numéricos en las variables reconstruidas, tal como se indica en las ecuaciones 4.57 y 4.58.

$$\mathbf{w}_p^{n+1} = \mathbf{w}_p^n - \frac{\Delta t}{V_p} \sum_{q \in P_q} L_{pq} \bar{\phi}_{pq} + \Delta t (\bar{\mathbf{S}}_p + \bar{\mathbf{T}}_p) \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{pq} &= \phi_{pq} \left(\mathbf{w}_{P_q}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{w}_{pQ}^{n+\frac{1}{2}} \right) & \bar{\psi}_{pq} &= \psi_{pq} \left(\mathbf{w}_{P_q}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{w}_{pQ}^{n+\frac{1}{2}} \right) & \bar{\mathbf{S}}_p &= \mathbf{S}_p \left(\bar{\psi}_{pq} \right) \\ \bar{\mathbf{T}}_p^C &= \mathbf{T}_p^C \left(\mathbf{w}_p^{n+\frac{1}{2}} \right) & \bar{\mathbf{T}}_p^U &= \mathbf{T}_p^U \left(\mathbf{w}_{P_q}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{w}_{pQ}^{n+\frac{1}{2}} \right) & \bar{\mathbf{T}}_p &= \bar{\mathbf{T}}_p^C + \bar{\mathbf{T}}_p^U \end{aligned} \quad (4.58)$$

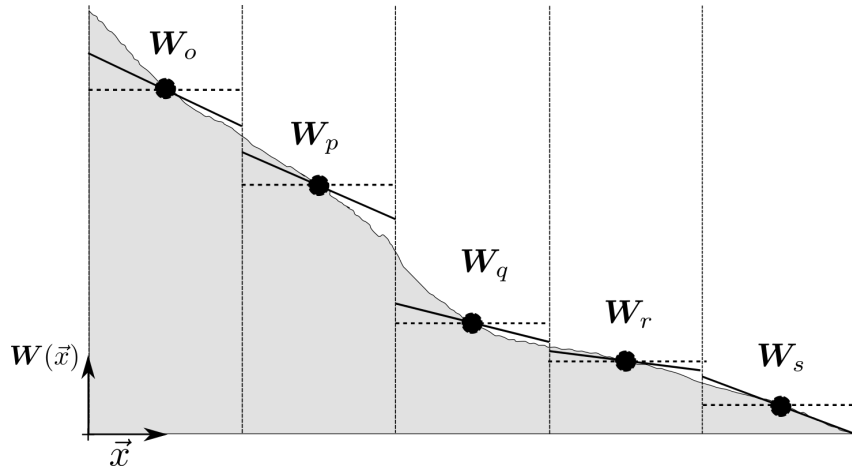


Figura 4.5: Reconstrucción de las variables al interior de la celda. Línea continua: Reconstrucción con polinomio de primer orden o plano; Línea discontinua: Reconstrucción con polinomio de orden cero o valor constante.

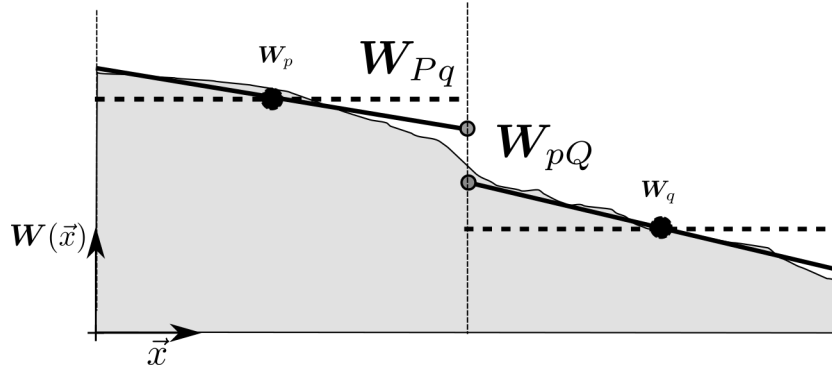


Figura 4.6: Reconstrucción de las variables utilizando MUSCL. Línea continua: Reconstrucción para esquema de segundo orden, Línea discontinua: Reconstrucción para esquema de primer orden.

Versión *Total Variation Diminishing* (TDV) del método MUSCL-Hancock

La metodología presentada hasta el momento, que corresponde a un esquema lineal de segundo orden, presentará oscilaciones espúreas en torno a gradientes pronunciados. Esto debido a las consecuencias del teorema de Godunov, el cual asegura que no existe un esquema lineal y monótono que sea de segundo orden. Esta particularidad puede llevar incluso a que en ciertas circunstancias no se asegure la convergencia del esquema.

Ahora bien, es posible demostrar que si el esquema no incrementa la variación total en el tiempo⁴ se asegura su convergencia y la capacidad de conservar la monotonía (Toro, 2009a). A un subconjunto de este tipo de esquemas en los que se verifica una disminución de la variación total se les denomina *Total Variation Diminishing* (TDV por sus siglas en inglés), y pueden ser construidos si en el algoritmo son incorporados pasos no-lineales, volviendo al esquema no lineal.

En particular, fue utilizado un enfoque que consiste en reemplazar el gradiente $(\nabla \mathbf{W})_p$ por un valor $\xi_p (\nabla \mathbf{W})_p$ con $\xi_p \leq 1$, tal que se asegure que cualquier valor reconstruido no genere un máximo o mínimo local. El parámetro ξ_p se denomina limitador de pendiente (*Slope Limiter*) y se traduce en que las pendientes Δ_{pq} de las reconstrucciones de las caras se calculan como se muestra en la ecuación 4.59.

$$\bar{\Delta}_{pq} = \xi_p \Delta_{pq} \quad (4.59)$$

Existe una amplia variedad de limitadores de pendientes en la literatura, los cuales son construidos con tal de asegurar las condiciones para que el esquema sea TDV. En el presente trabajo fue utilizado un limitador de pendiente tipo ENO (*Essentially Non-Oscillatory*) que es construido utilizando las ecuaciones 4.60 y 4.61.

⁴La variación total, en su versión continua, corresponde a la función $TV(\mathbf{w}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup \frac{1}{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{w}(x + \delta) - \mathbf{w}(x)| dx$ (Toro, 2009a)

$$\xi_p = \min_{q \in P_q} \{\xi_{pq}\} \quad (4.60)$$

$$\xi_{pq} = \begin{cases} \frac{\max_{q \in P_q} \{w_q\} - w_p}{\Delta_{pq}} = \frac{\Delta_{pq}^{\max}}{\Delta_{pq}} & , \text{ si } \Delta_{pq} > \Delta_{pq}^{\max} \\ \frac{\min_{q \in P_q} \{w_q\} - w_p}{\Delta_{pq}} = \frac{\Delta_{pq}^{\min}}{\Delta_{pq}} & , \text{ si } \Delta_{pq} < \Delta_{pq}^{\min} \\ 1 & , \text{ en otro caso} \end{cases} \quad (4.61)$$

Correcciones para asegurar el correcto balance de los componentes del esquema numérico ante la extensión a segundo orden

Un esquema numérico bien balanceado es aquel que es capaz de conservar estados de equilibrio no-triviales presentes en el sistema de ecuaciones original (Noelle et al., 2007). Estos estados de equilibrio se caracterizan por la cancelación de los efectos asociados a los distintos componentes del esquema entre sí. Ejemplos típicos son el equilibrio hidrostático, donde la presión del fluido se compensa con el efecto de la topografía, o el escurrimiento normal, donde el peso del fluido se equilibra con la fricción.

En el caso del esquema presentado, Fernández-Nieto (2003) demuestra que está bien balanceado considerando reconstrucciones de primer orden. Ahora bien, basado en los análisis de autores como Hubbard & Garcia-Navarro (2000) y Cea & Vázquez-Cendón (2012), se concluye la necesidad de corregir el esquema ante una reconstrucción de segundo orden.

Siguiendo el análisis de Hubbard & Garcia-Navarro (2000), es posible demostrar que la parte centrada del término fuente asociado a la pendiente \mathbf{S}_p^C pierde la contribución de la variación lineal de la topografía en el interior de la celda al ser evaluada en las variables reconstruidas. Un esquema simplificado de este efecto para el caso de un estado de equilibrio hidrostático se presenta en la Figura 4.7. Tentativamente este desbalance podría generar oscilaciones espúreas en la superficie libre.

Para corregir este fenómeno se incorpora explícitamente la contribución de la variación lineal de la cota de fondo, tal como se muestra en la ecuación 4.62. Cabe mencionar que en el caso de utilizar el método de MUSCL-Hancock, necesariamente debe haber sido calculado ∇h_0 para realizar la reconstrucción de las variables conservativas, por lo que incorporar esta corrección no aumenta significativamente el coste computacional.

$$\bar{\mathbf{S}}_p = \mathbf{S}_p(\bar{\psi}_{pq}) - gh_p^{n+\frac{1}{2}} \left(0 \quad \frac{\partial h_0}{\partial x} \quad \frac{\partial h_0}{\partial x} \right)^T \quad (4.62)$$

Por otro lado, Cea & Vázquez-Cendón (2012) identifican que en un esquema de segundo orden como el presentado pueden desbalancearse las partes descentradas de los términos fuentes, \mathbf{S}_p^U y \mathbf{T}_p^U , debido a la diferencia entre las metodologías con que son evaluados. Esto podría desencadenar el escurrimiento normal sea mal caracterizado.

En el caso del término \mathbf{S}_p^U (ecuación 4.39) se computa $\Delta h_0 = h_{0Qp} - h_{0Pq}$, utilizando los valores reconstruidos en las caras. Por otro lado, \mathbf{T}_p^U (ecuación 4.46) requiere el cálculo de $\Delta B = B_q - B_p$ que se realiza basado en c_f calculado en los centroides. Esta diferencia puede

llevar a que no exista un balance de estos términos en las caras incluso cuando el balance se verifica entre los centroides, sólo por efecto de la reconstrucción.

Para corregir una posible ocurrencia de este artefacto numérico, fue implementada la misma solución propuesta por Cea & Vázquez-Cendón (2012), quienes modifican ΔB como se muestra en la ecuación 4.63. El parámetro k_{pq} recoge los efectos de la reconstrucción realizada sobre Δh_0 y evaluando ΔB de forma consistente. Esta corrección sólo fue utilizada en los casos en que la reconstrucción en las caras presenta una de las condiciones especiales descritas posteriormente en el apartado 4.3.4.

$$\Delta B_c = k_{pq} \Delta B \qquad k_{pq} = \Delta h_0 / |r_{pq} \nabla h_0| \qquad (4.63)$$

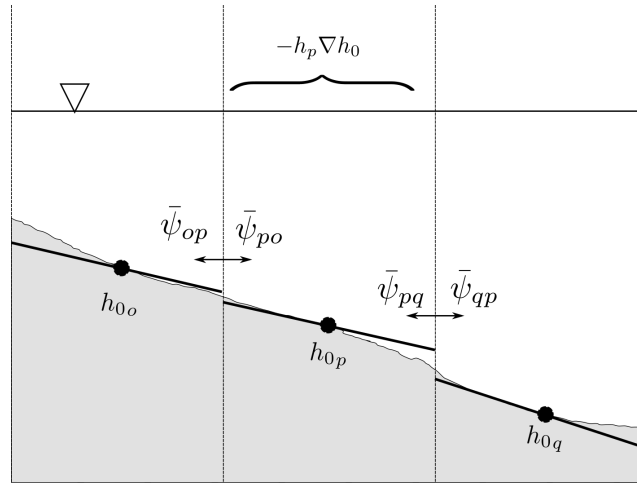


Figura 4.7: Déficit de parte centrada del término fuente al evaluar en una reconstrucción de segundo orden. Cada término ψ_{pq} , con $q \in P_q$ es calculado en función de la diferencia entre los estados del lado derecho e izquierdo, verificándose $h_{0Qp} - h_{0Pq} \neq h_{0p} - h_{0q}$. Esto implica que evaluar el término centrado no se considera el cambio de pendiente al interior de la celda.

4.3.4. Tratamiento especial en zonas de interfaz

Al aplicar las ecuaciones de aguas someras en el colapso de un depósito de relaves, es requerido un tratamiento especial en ciertas zonas donde los supuestos realizados para modelar el flujo son inapropiados. Estas zonas pueden ser aquellas en que el esfuerzo de fluencia tiene un rol activo en el inicio o detención del flujo del material, o aquellas donde existe un frente de avance que extiende el dominio efectivo de cálculo. Ambas situaciones representan condiciones de borde móviles situadas al interior del dominio, por lo que una representación deficiente puede comprometer el resultado global del modelo.

Se han denominado como *zonas de interfaz* a los sectores en los que existe un cambio importante en comportamiento del flujo al atravesarlas, generando que alguno de los supuestos adoptados carezca de validez. Las interfaces que han sido corregidas en el modelo son esquematizadas en la Figura 4.8 y corresponden a:

- Zonas entre celdas con presencia de fluido y las que carecen del mismo, denominada interfaz seco-mojado (Corte C-C en Figura 4.8).

- Zonas entre celdas en movimiento y otras detenidas por efecto del esfuerzo de fluencia, denominado interfaz de flujo en movimiento-detención (Corte B-B en Figura 4.8).
- Zona entre un comportamiento del relave como suelo y el comportamiento de un fluido no-newtoniano, denominada interfaz suelo-fluido (Corte A-A en Figura 4.8).

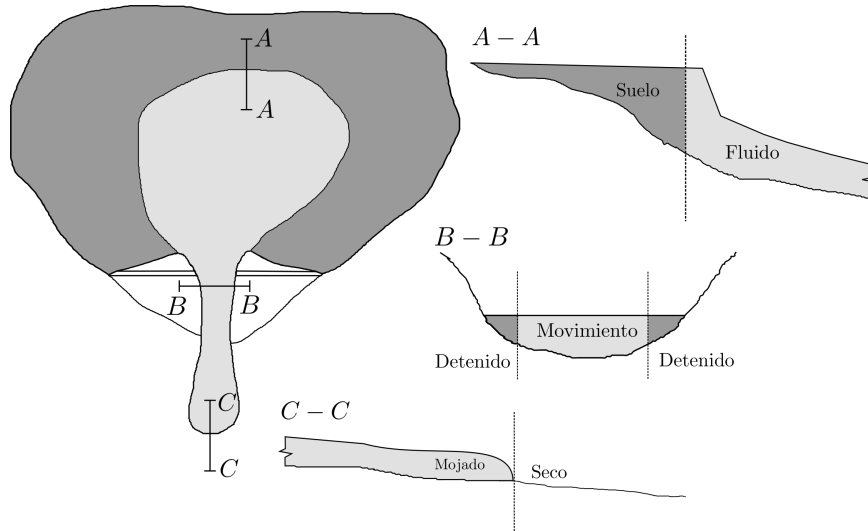


Figura 4.8: Esquema simplificado de zonas del flujo con tratamiento especial.

Tratamiento de la interfaz seco-mojado

La elección de una metodología adecuada mediante la cual se sitúa la posición del frente, con lo que progresivamente se incorporan zonas secas al dominio de cálculo, se denomina como el problema de celda seca-mojada (*wet-dry problem*). Medeiros & Hagen (2013) clasifican en cuatro grupos las diversas estrategias para resolver este problema sobre mallas fijas, presentados en la Figura 4.9.

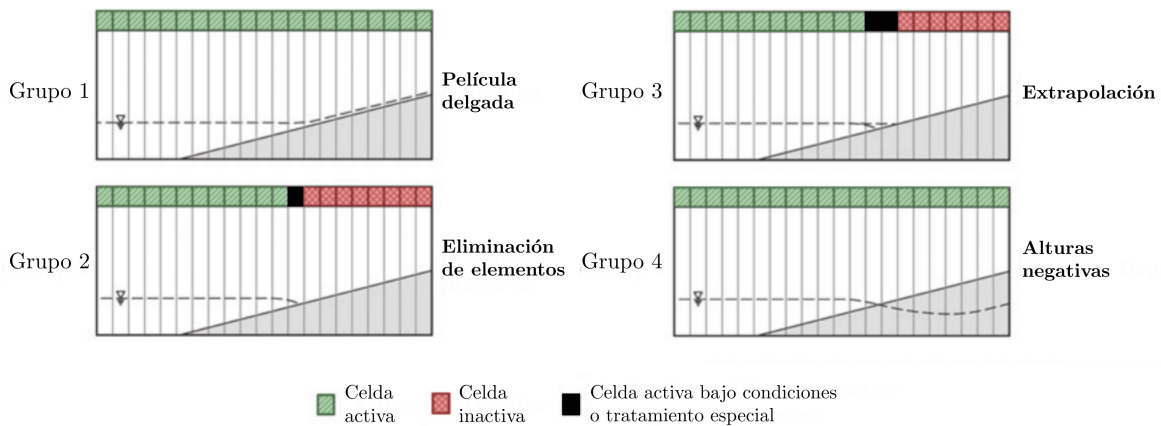


Figura 4.9: Estrategias para representar el problema de celda seca-mojada. Adaptado de Medeiros & Hagen (2013).

Dentro de estas metodologías existen soluciones matemáticas sin interpretación física, como

la de suponer una capa delgada en todo el dominio de cálculo o aceptar alturas negativas de fluido, y otras físicamente razonables, como la de identificar el dominio efectivo de cálculo y resolver de forma separada la interfaz. En el modelo propuesto se utiliza esta última opción.

Para identificar las celdas que pertenecen al dominio efectivo de cálculo, fue definido un umbral de altura ε_{wd} sobre el cual se supone que las celdas están mojadas. Este umbral es adicionalmente útil ya que estabiliza el modelo evitando que T_p crezca indiscriminadamente con la presencia de alturas pequeñas.

La comparación de las alturas con respecto a este umbral junto con el análisis de la resultante de los flujos numéricos, entrega como resultado la siguiente clasificación de las condiciones para las celdas, esquematizadas en la Figura 4.10:

- Celdas secas, que cumplen $h_p^n < \varepsilon_{wd}$
- Celdas secas susceptibles a mojarse, que verifican $F_{np}^n < 0$ y estar mojadas
- Celdas mojadas, donde $h_p^n > \varepsilon_{wd}$
- Celdas mojadas sobre el frente de avance, que verifican $\exists q \in P_q : h_q^n = 0$ y están mojadas
- Celdas mojadas susceptibles a secarse, que cumplen con $F_{np}^n > 0$ y se posicionan sobre el frente

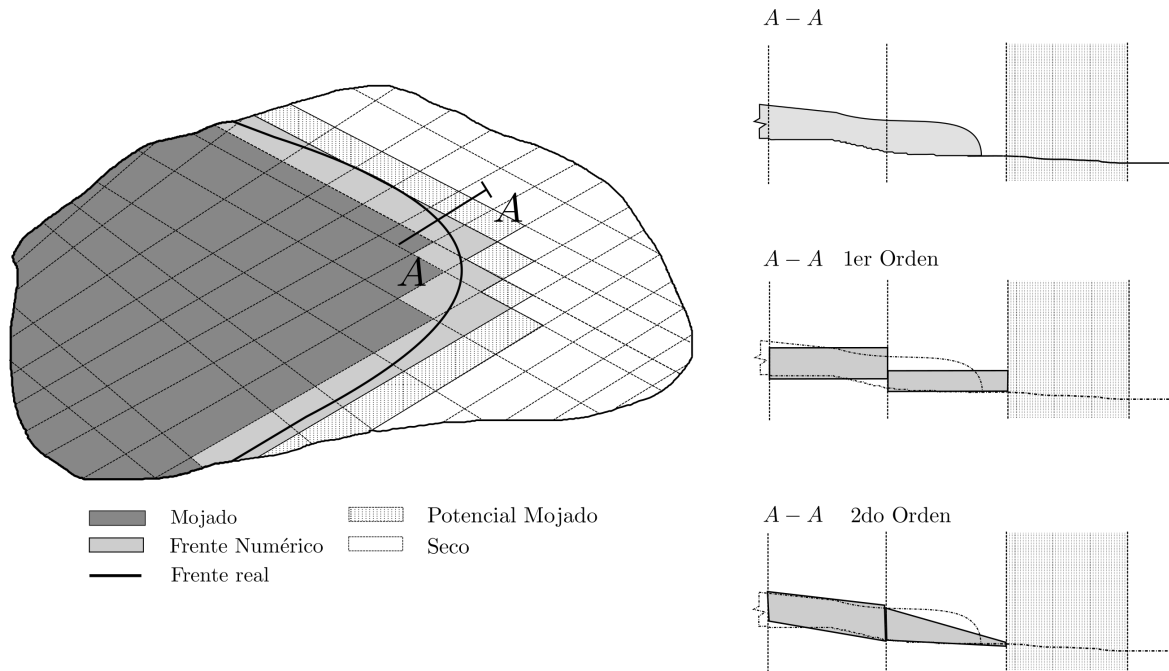


Figura 4.10: Tipos de celdas consideradas para el tratamiento de la interfaz seco-mojado.

Con esta clasificación, se define el dominio efectivo como el conjunto de celdas mojadas y aquellas susceptibles a mojarse. Adicionalmente, se considera que las caras asociadas al frente numérico pueden estar secas por efecto de la reconstrucción. Por esto se consideran en el cálculo sólo las *caras mojadas*, en las que se verifica que el promedio entre las reconstrucciones es mayor que ε_{wd} .

El ingreso de nuevas celdas al dominio efectivo se realiza encontrando el flujo hacia la zona seca adyacente al frente, resolviendo un problema de Riemann en el que una de las condiciones iniciales es nula. Cabe mencionar que al realizar este procedimiento con el método de Roe se puede estar subestimando la velocidad del frente de avance. Toro (2001) indica que este problema se debe a que la estructura de este caso particular sólo se compone por una onda de rarefacción asociada a λ_3 , mientras que la onda de choque asociada a λ_2 está ausente, situación que el método numérico simplemente no considera.

La diferencia entre la velocidad de los frentes puede cuantificarse correctamente en superficies planas sin considerar fricción, no pudiendo evaluarla en problemas más complejos (Toro, 2001). Ahora bien, los modelos que utilizan este esquema usualmente presentan buenos resultados cuando existe fricción, por lo que no se consideró relevante realizar una corrección este efecto.

Por otro lado, Cea (2005), siguiendo las ideas de Brufau et al. (2002), indica que el frente numérico debe ser corregido para representarlo sin demasiada difusión numérica. Se considera entonces que el frente puede presentar las situaciones esquematizadas en la Figura 4.11. Si el método numérico es aplicado en ambas condiciones por igual, no sería posible rescatar condiciones hidrostáticas en el frente cuando $h_{0Pq} + h_{Pq} < h_{0pQ}$ generando oscilaciones espúreas.

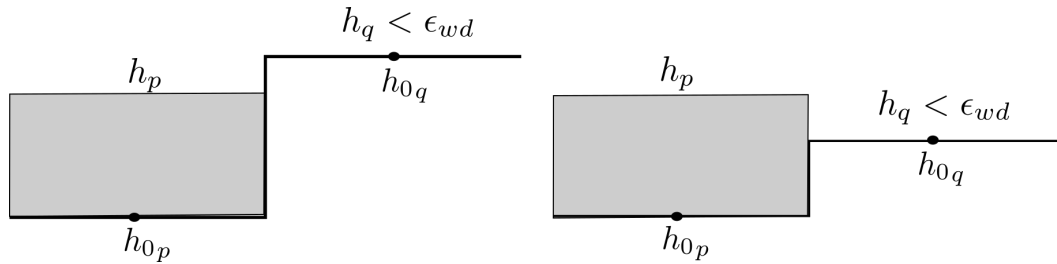


Figura 4.11: Tipos de frente seco-mojado.

Para subsanar esto, es redefinida la diferencia entre las alturas Δh_0 y se impone una condición de reflexión en la cara, como se muestra en las ecuaciones 4.64 y 4.65, respectivamente. Con estas correcciones se obtiene una solución para el frente que rescata de forma exacta la condición hidrostática sin difusión numérica (Cea, 2005).

$$\Delta h_0 = h_{0pQ} - h_{0Pq} = \begin{cases} h_{Pq} - h_{pQ} & , \text{ si } h_{0pQ} \leq \epsilon_{wd} \text{ y } h_{Pq} < h_{0pQ} - h_{0Pq} \\ h_{0pQ} - h_{0Pq} & , \text{ en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (4.64)$$

$$\tilde{U}_x \hat{n}_x + \tilde{U}_y \hat{n}_y = 0 \quad (4.65)$$

Tratamiento de la interfaz de flujo en movimiento-detención

Para delimitar la interfaz movimiento-detención, son reclasificadas las celdas mojadas entre detenidas ($|U|_p^n = 0$) y fluyendo ($|U|_p^n > 0$). Son incluidas en el dominio efectivo todas aquellas en las que puede existir movimiento durante el paso temporal, incluyendo tanto las que ya fluyen como las que se pondrán en movimiento en su transcurso. Las caras que separan las

celdas incorporadas en el dominio efectivo de las celdas excluidas en este proceso definen a la interfaz movimiento-detención.

La condición que se verifica para incluir una celda detenida corresponde a un equilibrio estático de fuerzas en cada subdominio $V_{T_{pq}}$. Para ello es utilizado el volumen de control destacado en la Figura 4.12, definido por el perímetro de $V_{T_{pq}}$ y una profundidad igual al máximo borde libre $h_{L_{pq}} = \min \{h_p, \Delta(h_0 + h), 0\}$ colindante con la cara f_{pq} .

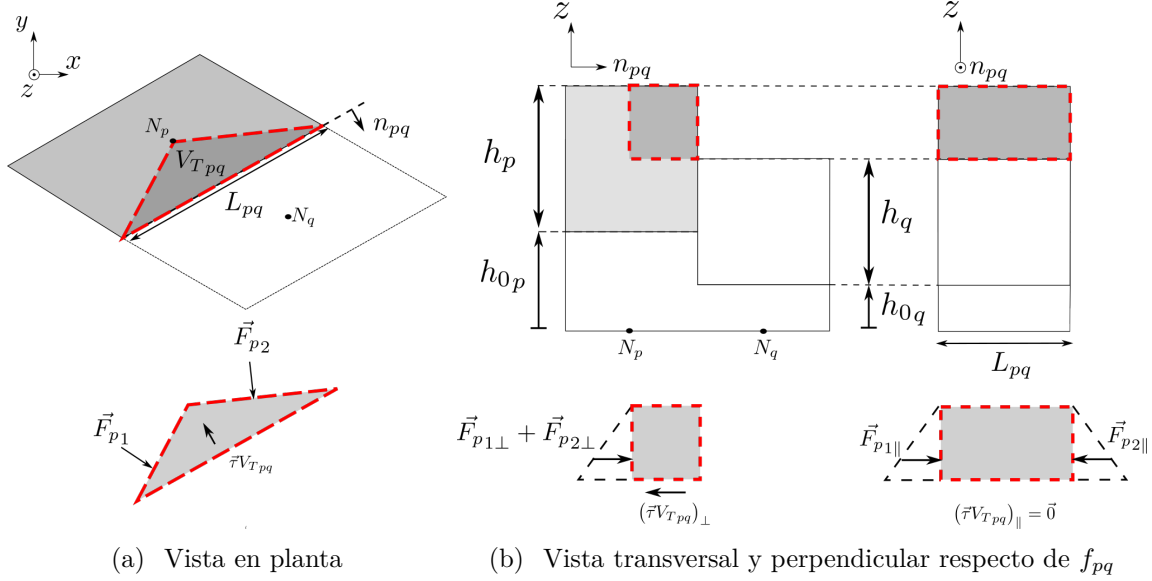


Figura 4.12: Equilibrio de fuerzas sobre una celda detenida. En rojo: volumen de control considerado.

Al inicio de cada paso de temporal, es estimado el esfuerzo de corte $\vec{\tau}$ inducido sobre la masa de fluido a partir del equilibrio estático que se muestra en la ecuación 4.66, donde $\vec{F}_{p1,2}$ corresponden a fuerzas de presión en las caras internas de $V_{T_{pq}}$.

$$\vec{F}_{p1} + \vec{F}_{p2} - \vec{\tau}V_{T_{pq}} = 0 \quad (4.66)$$

La condición de equilibrio se resume en verificar si el borde libre $h_{L_{pq}}$ presente en la cara f_{pq} supera a un borde libre crítico $h_{L_{pq}}^C$ para el que la presión sobre la masa de fluido se equilibra exactamente con el esfuerzo de fluencia, incorporando en ese caso la celda N_p al dominio efectivo. Este valor umbral se obtiene utilizando la ecuación 4.67, donde los operadores $\{\cdot\}_{\parallel}$ y $\{\cdot\}_{\perp}$ denotan la proyección de la fuerza en la dirección paralela y normal a la cara f_{pq} respectivamente. Cabe mencionar que por simplicidad se ha supuesto en este análisis una reconstrucción de primer orden, con lo que por simetría se cumple $\vec{F}_{p1\parallel} + \vec{F}_{p2\parallel} = \vec{0}$.

$$\vec{F}_{p1} + \vec{F}_{p2} = \vec{\tau}V_{T_{pq}} \Rightarrow \frac{\rho_m g h_{L_{pq}}^2 L_{pq}}{2} \hat{n}_{pq} = \vec{\tau}V_{T_{pq}} \Rightarrow h_{L_{pq}}^C = \sqrt{\frac{2\tau_y V_{T_{pq}}}{\rho_m g L_{pq}}} \quad (4.67)$$

En el cómputo de los flujos y términos fuentes, la interfaz movimiento-detención es modelada como una pared vertical redefiniendo las reconstrucciones de las celdas excluidas como $h^{\text{det}} = 0$

y $h_0^{\text{det}} = 10(h_0 + h)$. De esta forma, dado que el esquema numérico es capaz de resolver tal condición, el sistema se mantiene equilibrado.

Por otro lado, el criterio para el que se impone la detención del flujo se desprende de la reología del fluido y de las aproximaciones de onda larga realizadas. Dado que ha sido considerado un escurrimiento delgado, se cumple $\Pi_\tau \approx \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = |\tau_{x'z}|$ ⁵ para un eje x' solidario con la dirección de la velocidad, esquematizado en la Figura 4.13(a). Así, basta que exista una altura $h_{\text{def}} \in [0, h]$ bajo la cual el fluido se deforme, como se ejemplifica en las Figuras 4.13(b) y 4.13(c), para que una celda presente movimiento. Esto se traduce en verificar que exista $z \leq h_{\text{def}}$ tal que:

$$\Pi_\tau(z) \approx |\tau_{x'z}|(z) \geq \tau_y \quad (4.68)$$

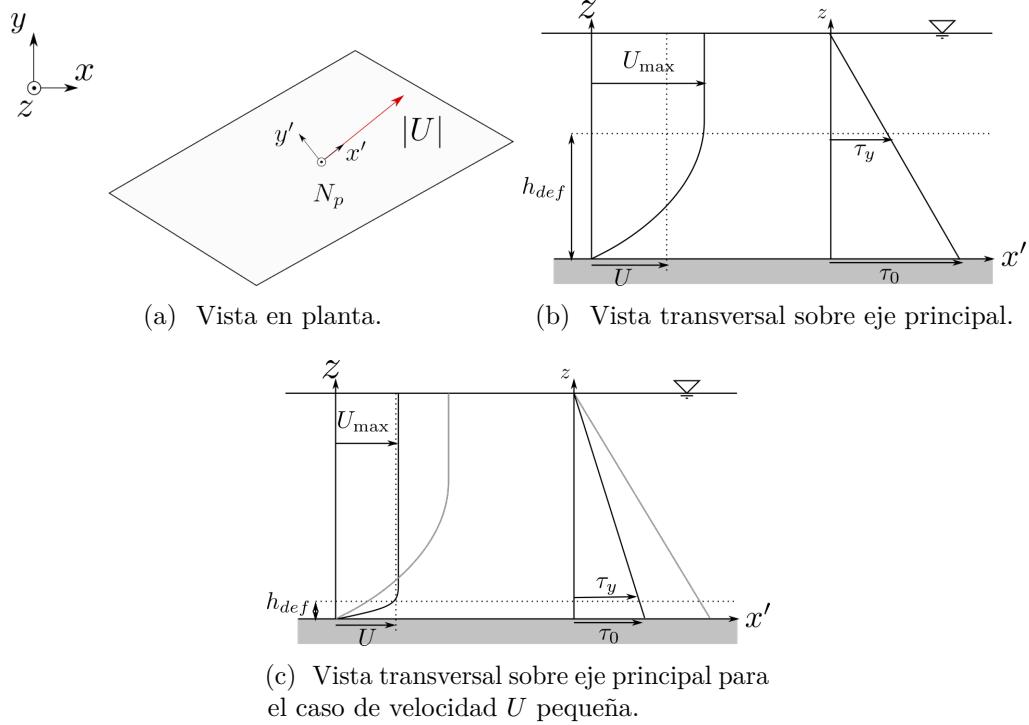


Figura 4.13: Esquema de distribución de velocidades considerada sobre el eje principal para el caso de la detención del flujo.

Dado que el esfuerzo total puede ligarse con el esfuerzo de fondo mediante $|\tau_{x'z}|(z) = |\tau_0|(1 - \frac{z}{h_p})$, la condición límite a partir de la cual se asegura que una celda permanezca en movimiento se obtiene al imponer $h_{\text{def}} = 0$ en la ecuación 4.68 obteniendo:

$$|\tau_0| \geq \tau_y. \quad (4.69)$$

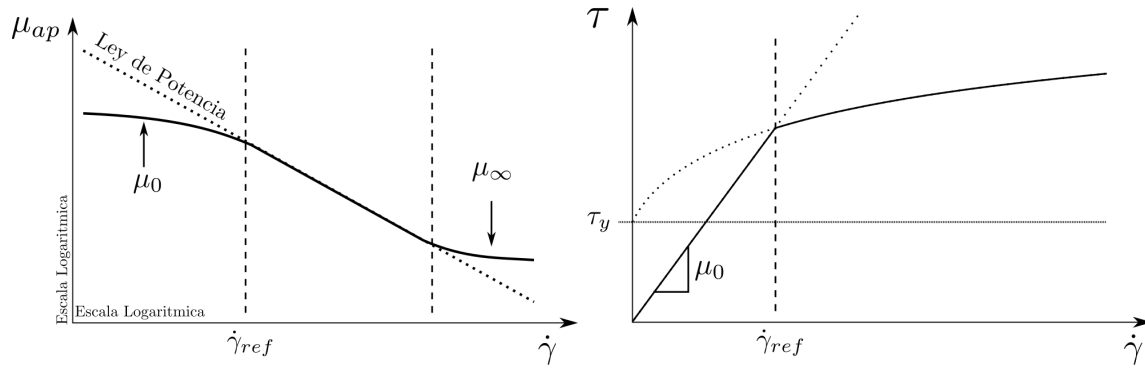
Una condición de detención natural ante este análisis corresponde a $|\tau_0| < \tau_y$, siendo imposible de verificar para la mayoría de los casos prácticos, debido a la forma del factor de fricción en régimen laminar y el número de Reynolds (ecuaciones 3.15 y 3.10 respectivamente).

⁵Para mayor detalles, referirse al análisis de escala del Anexo B.

Esto se evidencia en la ecuación 4.70, donde al calcular el límite de τ_0 cuando $U \rightarrow 0$ se concluye la necesidad de $C_s < 64$ para verificar la detención, situación que experimentalmente no ocurre para fluidos no-newtonianos o mezclas hiperconcentradas como fue discutido en la Sección 3.2.1.⁶

$$\lim_{U \rightarrow 0} |\tau_0| = \lim_{U \rightarrow 0} \rho_m c_f |U|^2 = \lim_{U \rightarrow 0} \frac{C_s}{64} \left(\tau_y + K \left(\frac{2U}{R_h} \right)^m \right) = \frac{C_s}{64} \tau_y \quad (4.70)$$

Como se ha evidenciado que el flujo de relaves se detiene, es necesario incorporar una corrección para rescatar este fenómeno. La metodología utilizada para ello se inspira en la evidencia experimental que indica que los fluidos pseudoplásticos ($m < 1$) presentan una cota superior μ_0 constante para su viscosidad aparente μ_{ap} (Richardson & Chhabra, 2008), como se esquematiza en la Figura 4.14(a). Esto genera que su esfuerzo de corte tenga una estructura newtoniana para tasas de deformación pequeñas.



(a) Viscosidad aparente en fluidos pseudoplásticos. (b) Corrección a la reología para evaluar la condición de la detención.

Figura 4.14: Esquema de corrección criterio de detención.

Se corrige entonces el criterio de detención expresando de una forma newtoniana el esfuerzo de corte de fondo utilizando un valor de μ_0 para valores de velocidad inferiores a un umbral U_{small} , ambos definidos por el usuario. Matemáticamente esto se traduce en verificar la ecuación 4.71, acción esquematizada en la Figura 4.14(b). El valor de μ_0 puede ser obtenido evaluando la viscosidad aparente de la ecuación 2.1 en un valor $\dot{\gamma}_{ref}$ que debe ser obtenido experimentalmente. Por otro lado, $\dot{\gamma}_{x'z}$ es aproximado por $2|U|/R_h$, siendo consistentes con la formulación del factor de fricción.

$$\text{mín} (\mu_0 \dot{\gamma}_{x'z}, \tau_0) \geq \tau_y \quad (4.71)$$

Finalmente, se impone un umbral de altura ε_{τ_y} bajo la cual se fuerza una detención automática. Este criterio se fundamenta en que ante bajas velocidades y alturas de escurrimiento pequeñas en un eje x alineado con la dirección del flujo, la ecuación 4.2 puede aproximarse a

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} g h^2 \right) = \frac{|\tau_0|}{\rho_m} \quad (4.72)$$

⁶El número 64 es una consecuencia asociada a la estructura de las ecuaciones 3.15 y 3.10. Éstas, pese a ser válidas para escurrimiento en canales, han sido construidas con tal de recuperar la expresión del factor de fricción en tuberías en régimen laminar si $\tau_y = 0$, $m = 1$, $K = \mu$ y $D = 4R_h$.

Integrando esta expresión en un volumen de control unidimensional con longitud L_c y suponiendo que $|\tau_0| \sim \tau_y$ constante se obtiene la ecuación 4.73, que presenta una altura mínima sobre la que se asegura algún nivel de deformación del fluido. En consecuencia, para alturas inferiores a este valor, necesariamente el fluido no se deformaría, por lo que debiese estar detenido.

$$h_{\min} = \varepsilon_{\tau_y} = \sqrt{\frac{2\tau_y L_c}{g\rho_m}} \quad (4.73)$$

La condición anterior se propone como una estimación inicial que deberá ser estudiada por el usuario dependiendo del caso particular y considera como una velocidad pequeña al parámetro U_{small} . El parámetro L_c debe elegirse en función de la malla numérica elegida para la simulación.

Tratamiento de la interfaz suelo-fluido

En fallas ocurridas en distintos depósitos se ha observado que existen zonas con una resistencia suficiente para que la columna de relave no colapse durante todo el evento. Un ejemplo de esto puede ser observado en la Figura 4.15, que corresponde a una vista frontal del colapso ocurrido en el depósito de relaves de la mina Mount Polley en Canadá.



Figura 4.15: Vista frontal del colapso del depósito de relave de Mount Polley ocurrido en Agosto de 2014. Fuente: Morgenstern et al. (2015).

Es razonable suponer que en estas zonas la resistencia de la columna es dominada por esfuerzos internos presentes en los suelos que pueden ser de mayor magnitud que los que presentan las mezclas hiperconcentradas. Para considerar este comportamiento, se reemplazó el esfuerzo de fluencia en las celdas detenidas por una función de la forma 4.74, donde \mathcal{S}_u es la resistencia no drenada del suelo y $s(x, y)$ es un número binario, el que toma valor 1 en la zona donde se realiza la corrección.

$$\tau_y^C(x, y) = \begin{cases} \tau_y & , \text{ si } |U| > 0 \\ (1 - s(x, y))\tau_y + s(x, y)\mathcal{S}_u & , \text{ si } |U| \leq 0 \end{cases} \quad (4.74)$$

Con esta formulación, el procedimiento utilizado para lidiar con esta interfaz se reduce al tratamiento dado a la interfaz movimiento-detención cuando comienza el movimiento en una

celda. Una vez que se verifica que existe un borde libre suficiente para que el contenido de la celda pueda fluir, se asume una licuación instantánea de la columna de suelo utilizando las expresiones ya descritas anteriormente para el cálculo del coeficiente de fricción.

Cabe mencionar que la variable binaria s se considera con un valor por defecto igual a cero y para ser utilizada debe ser ingresado en cada volumen de control un valor $\mathcal{S}_u > 0$ para que el modelo realice esta corrección. Una vez que en la celda se verifica movimiento de fluido, el modelo la reemplaza por un cero hasta el final de la simulación.

4.4. Modelo morfodinámico

4.4.1. Discretización de la ecuación

Con tal de simplificar la notación, es definido $\zeta = \frac{1}{1-p}$. Así, la ecuación del modelo morfodinámico se escribe como se muestra en la ecuación 4.75.

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} + \zeta \nabla \cdot q_s = 0 \quad (4.75)$$

De forma análoga a lo realizado con el sistema hidrodinámico, la ecuación 4.75 se integra sobre en un volumen de control arbitrario y fijo en el tiempo obteniendo:

$$V_p \frac{\partial h_{0p}}{\partial t} + \sum_{q \in P_q} \int_{L_{pq}} \zeta q_s \cdot \hat{n} dL = 0 \quad (4.76)$$

Integrando temporalmente lo anterior en un intervalo $[t^n, t^{n+1} = t^n + \Delta t]$ se obtiene la ecuación 4.77, donde se ha denotado como $\mathbf{I}_{L_{pq}, q_s}^n$ a la integral del vector q_s sobre L_{pq} evaluada en t^n .

$$V_p \frac{h_{0p}^{n+1} - h_{0p}^n}{\Delta t} + \sum_{q \in P_q} \zeta \mathbf{I}_{L_{pq}, q_s}^n = 0 \quad (4.77)$$

Definiendo $q_{spq}^* = \mathbf{I}_{L_{pq}, q_s}^n / L_{pq}$ como el flujo de sedimento por unidad de ancho que atraviesa la cara f_{pq} , de la ecuación 4.77 se obtiene el esquema tipo Godunov presentado en la ecuación 4.78 (Juez et al., 2014). Aquí se ha definido F_{q_s} como la resultante de los flujos de gasto sólido en las caras.

$$h_{0p}^{n+1} = h_{0p}^n - \frac{\Delta t}{V_p} \sum_{q \in P_q} L_{pq} \zeta q_{spq}^* = h_{0p}^n - \Delta t F_{q_s} \quad (4.78)$$

Para obtener el valor de q_{spq}^* basta con resolver un problema de Riemann unidimensional en cada cara de la celda. Ahora bien, la estructura de esta ecuación presenta diferencias conceptuales respecto del modelo hidrodinámico, lo cual es discutido en las secciones siguientes.

Problema de Riemann Proyectoado

En el caso de la ecuación de continuidad de sedimento, el problema de Riemann a resolver en las caras corresponde al presentado en la ecuación 4.79 (Juez et al., 2014), donde $q_{sn} = q_s \cdot \hat{n}$.

$$(IPV) = \begin{cases} \frac{\partial h_0}{\partial t} + \frac{\partial \zeta q_{sn}}{\partial x'} = 0 \\ h_0(x', 0) = \begin{cases} h_{0p}^n & , \text{ si } x' < 0 \\ h_{0q}^n & , \text{ si } x' > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (4.79)$$

En el contexto de este trabajo, un procedimiento intuitivo para resolver este problema sería linealizarlo de la forma presentada en la ecuación 4.80, donde se usa que $\lambda_{q_s} = \frac{\partial \zeta q_{sn}}{\partial h_0}$, obteniendo directamente una solución debido a que es una ecuación de advección.

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} + \lambda_{q_s} \frac{\partial h_0}{\partial x'} = 0 \quad (4.80)$$

Ahora bien, para que matemáticamente esto pueda realizarse es necesario asegurar que la solución del problema presentado en la ecuación 4.79 sea de clase C^1 (Obando, 2013), lo que implica que λ_{q_s} sea continua. Esta última propiedad es imposible de asegurar dada la alta no linealidad de las expresiones para el cálculo de q_s .

Juez et al. (2014), basado en el trabajo de Murillo & García-Navarro (2010), propone encontrar la solución débil del problema de Riemann para lidiar con este problema. Esta metodología se traduce en encontrar λ_{q_s} tal que se asegure que la forma integral de la ecuación 4.80 sea consistente con la forma integral de la ecuación 4.79. Una vez definido λ_{q_s} , el valor de q_{sn}^* se obtiene al resolver un problema del tipo de la ecuación 4.80.

Solución débil del problema de Riemann

Considerando un dominio centrado en la cara f_{pq} de la forma $[-\Delta x', \Delta x']$ en un periodo de tiempo $[t, t + \Delta t]$, la forma integral del problema presentado en la ecuación 4.79 se escribe:

$$\int_{-\Delta x'}^{\Delta x'} \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial h_0}{\partial t} + \frac{\partial \zeta q_{sn}}{\partial x'} \right) dt dx' = 0 \quad (4.81)$$

Cabe mencionar que se considera que Δx es lo suficientemente largo para que la onda que se propaga más rápido esté dentro del dominio en el tiempo $t + \Delta t$. Resolviendo y reordenando la ecuación 4.81 obtenemos:

$$\int_{-\Delta x'}^{\Delta x'} h_0(t + \Delta t) dx' = \Delta x' (h_{0p} + h_{0q}) + \Delta t \zeta \Delta q_{sn} \quad (4.82)$$

Considerando ahora una solución h_0^S de una ecuación de la forma 4.80 con una celeridad $\tilde{\lambda}_{q_s}$, su forma integral satisface:

$$\int_{-\Delta x'}^{\Delta x'} h_0^S(t + \Delta t) dx' = \Delta x' (h_{0p}^S + h_{0q}^S) + \Delta t \tilde{\lambda}_{q_s} (h_{0q}^S - h_{0p}^S) \quad (4.83)$$

Imponiendo la condición de consistencia, donde $h_0^S = h_0$ y que 4.82 debe ser igual a 4.83 se obtiene:

$$\tilde{\lambda}_{q_s}(h_{0q} - h_{0p}) = \zeta \Delta q_s \Rightarrow \tilde{\lambda}_{q_s} = \zeta \frac{\Delta q_s}{\Delta h_0} \quad (4.84)$$

Con lo que el problema de Riemann a resolver para conocer q_{sn}^* corresponde a:

$$(IPV) = \begin{cases} \frac{\partial h_0}{\partial t} + \tilde{\lambda}_{q_s}(h_{0p}, h_{0q}) \frac{\partial h_0}{\partial x'} = 0 \\ h_0(x', 0) = \begin{cases} h_{0p}^n & , \text{ si } x' < 0 \\ h_{0q}^n & , \text{ si } x' > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (4.85)$$

Discretización del término advectivo

Aplicando la solución de Murillo & García-Navarro (2010), quienes resolvieron un problema de la forma de la ecuación 4.85 proponiendo una solución basado en dos ondas, se obtiene como resultado la forma funcional del gasto sólido q_{spq}^* , como se presenta en la ecuación 4.86.

$$q_{spq}^* = \frac{1}{2}(q_{sp} \cdot \hat{n}_{pq} + q_{sq} \cdot \hat{n}_{pq}) - \frac{1}{2}|\tilde{\lambda}_{q_s}|(h_{0q} - h_{0p}) = \begin{cases} q_{sp} \cdot \hat{n}_{pq} & , \text{ si } \tilde{\lambda}_{q_s} > 0 \\ q_{sq} \cdot \hat{n}_{pq} & , \text{ si } \tilde{\lambda}_{q_s} < 0 \end{cases} \quad (4.86)$$

El cómputo de la ecuación 4.86 presenta problemas para lechos de baja pendiente. Esto debido a que $\tilde{\lambda}_{q_s}$ en estas circunstancias presenta valores excesivamente grandes, llegando a indefinirse sobre un lecho plano.

Este problema fue resuelto utilizando el enfoque de Juez et al. (2014), quienes definen un umbral bajo el cual se considera que Δh_0 debe ser corregido para computar la celeridad de la onda de forma razonable. La expresión utilizada corresponde a la presentada en la ecuación 4.87, donde se utiliza como umbral el tamaño representativo del grano d_s y se corrige la diferencia de altura utilizando la pendiente del plano de carga entre las celdas contiguas.

$$\Delta h_0 = \begin{cases} \Delta h_0 & , \text{ si } \Delta h_0 > d_s \\ -Jd_{\perp pq} & , \text{ si } \Delta h_0 < d_s \end{cases} \quad (4.87)$$

4.4.2. Correcciones para el flujo de sedimento

Corrección por deslizamiento

Un fenómeno que no ha sido incorporado al modelo son los deslizamientos provocados por pendientes que superan el ángulo de fricción interna φ de un suelo, que tentativamente pueden generarse localmente por efectos de una erosión dispar entre celdas contiguas. Para lidiar con esto, fue utilizado el enfoque propuesto por Apsley & Stansby (2008) que realizan una corrección numérica del gasto sólido.

La idea de la metodología consiste en estimar un gasto sólido adicional que sea capaz de redistribuir el exceso de material en un paso de tiempo Δt . Dado que la corrección incorpora un flujo, el sistema se mantiene conservativo y los esquemas anteriores no se ven modificados. Esta corrección no pretende modelar de forma precisa los deslizamientos, sino más bien es un artificio numérico para evitar que existan pendientes que excedan significativamente el ángulo de fricción interna (Apsley & Stansby, 2008).

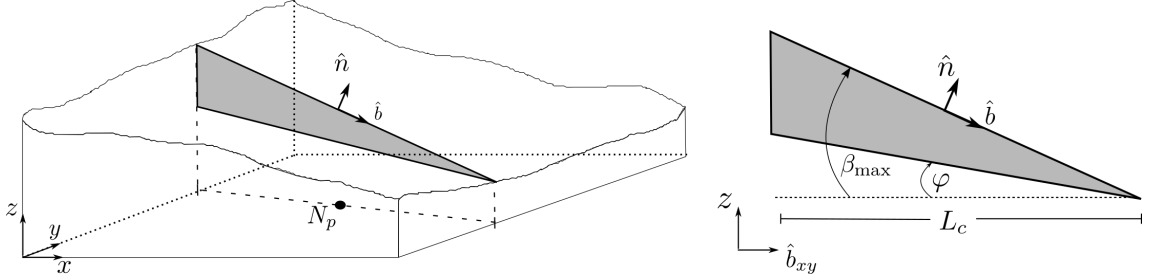


Figura 4.16: Material en exceso dentro de una celda.

La cantidad de material a remover se estima en función de la dirección de máxima pendiente en la celda y simples cálculos geométricos, como se esquematiza en la Figura 4.16. Imponiendo posteriormente que ese exceso debe ser dispersado en un paso temporal, se obtiene $q_{s\,aval}$ que corresponde a un flujo de sedimento por avalancha que se produce cuando $\beta_{\text{máx}} > \varphi$, presentada en la ecuación 4.88.

$$|q_{s\,aval}| = (1 - p) \frac{1}{2} L_c^2 \frac{(\tan \beta_{\text{máx}} - \tan \varphi)_+}{\cos \beta_{\text{máx}} \Delta t} \quad (4.88)$$

Para utilizar esta expresión, es necesario definir una longitud L_c . Los autores originales indican que éste valor debe ser representativo de la celda, pero que no tiene por que ser preciso ya que sólo se busca redistribuir la masa rápidamente. En este trabajo es utilizado $L_c = \chi_p$ definido en la sección 4.5. Adicionalmente, se supone que este flujo ocurre en dirección de máxima pendiente, por lo que el gasto sólido en la celda se calcula como se muestra en la ecuación 4.89.

$$q_s = \Phi \rho_m g R d_s \hat{\tau}_0 + |q_{s\,aval}| \hat{b}_{xy} \quad (4.89)$$

Corrección por superficie no erosionable

Un posible caso que es necesario considerar es la existencia de zonas de la topografía que no esten afectas a la erosión, ya sea por la existencia de roca u obras de hormigón. Para considerar este efecto, es necesario incorporar restricciones a la discretización de la ecuación de Exner. Por ello, fue utilizado el enfoque implementado en el modelo Iber (Bladé et al., 2014) adaptado a la presente formulación, procedimiento que se detalla a continuación.

Considerando una cota conocida no erosionable, como la presentada en la Figura 4.17, se divide el esquema conservativo 4.78 en dos pasos, como se muestra en las ecuaciones 4.90 y 4.91. En ellas, $F_{q_s}^{out}$, $F_{q_s}^{in}$ corresponden al gasto sólido neto de salida y entrada a un volumen

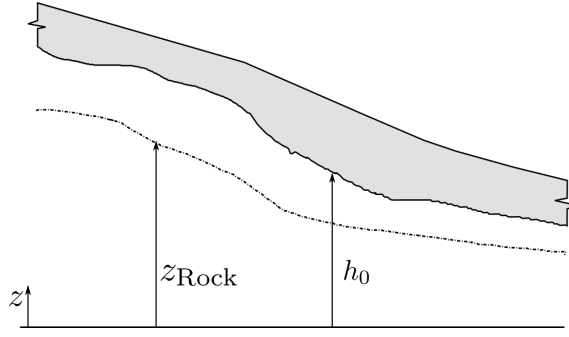


Figura 4.17: Cota no erosionable z_{Rock} .

de control, Ψ es un factor de corrección y h_0^P es la cota de la superficie sin considerar flujos de entrada.

$$h_0^P = h_0^n - \Delta t F_{qs}^{out} \quad (4.90)$$

$$h_0^{n+1} = h_0^n - \Delta t \Psi F_{qs}^{out} - \Delta t F_{qs}^{in} \quad (4.91)$$

El factor de corrección Ψ , se calcula para asegurar que los flujos de salida de cada celda remuevan como máximo el volumen de material disponible en su interior, como se muestra en 4.92. En esta ecuación, z_{Rock} corresponde a la cota de la superficie no erosionable.

$$\Psi = \min \left(\frac{V_{sdisponible}}{V_{sremovido}}, 1 \right) = \min \left(\frac{h_0^n - z_{Rock}}{h_0^n - h_0^P}, 1 \right) \quad (4.92)$$

Esta corrección considera que el material factible de ser transportado desde una celda sólo es aquel presente en su interior en el tiempo t^n . Este supuesto es coherente con una discretización en primer orden y el supuesto de que cada problema de Riemann sólo depende de las condiciones en el entorno de cada celda. Es fácil ver que este esquema es equivalente al que originalmente fue presentado en la ecuación 4.78, ya que puede ser escrito en función de un flujo neto corregido $F_{qs}^C = F_{qs} - (1 - \Psi)F_{qs}^{out}$.

$$h_0^{n+1} = h_0^n - \Delta t F_{qs}^C \quad (4.93)$$

4.5. Criterio de estabilidad y control en alturas de flujo

El criterio de estabilidad del esquema numérico busca cautelar que se cumpla el supuesto asociado a que la solución de los problemas de Riemann sólo dependen de las condiciones inmediatamente contiguas a la cara donde se resuelven. Juez et al. (2014), basado en el trabajo de Murillo & García-Navarro (2010), indica que para que el sistema sea estable y se cumplan los supuestos adoptados debe limitarse el paso temporal en función de las dimensiones de la celda.

El criterio de estabilidad utilizado en este trabajo es presentado en la ecuación 4.94, donde χ_p corresponde a una longitud característica que puede recorrer la información al interior de

cada celda, $|\tilde{\lambda}^{\text{máx}}|_p = \text{máx}_{q \in P_q} (|\tilde{\lambda}^{\text{máx}}|_{pq})$ es la máxima celeridad de onda que atraviesa cada volumen de control y CFL corresponde al número de Courant-Friedrichs-Lewy que asegura la estabilidad.

$$\Delta t \leq \text{mín}_{N_p} \left\{ \text{CFL} \cdot \frac{\chi_p}{|\tilde{\lambda}^{\text{máx}}|_p} \right\} \quad (4.94)$$

El valor de χ_p y $\tilde{\lambda}^{\text{máx}}$ en el modelo son estimados en función de las variables al principio del tiempo t^n , como se presenta en la ecuación 4.95.

$$\chi_p = \frac{V_p}{\sum_{q \in P_q} (L_{pq})} \quad |\tilde{\lambda}^{\text{máx}}|_p = \text{máx}_{q \in P_q} (|\tilde{\lambda}^{\text{máx}}|_{pq}) \approx \left(|U| + \sqrt{gh} \right)_p \quad (4.95)$$

En los casos en que es resuelto el modelo morfodinámico, fue incorporado al criterio de estabilidad el efecto de la celeridad de onda de la ecuación 4.85 calculada en el paso de tiempo anterior, como se muestra en la ecuación 4.96. Esta corrección se inspira en el trabajo de Juez et al. (2014) y es inocua si la variación del lecho es gradual, pero muy restrictiva en caso contrario.

$$\Delta t \leq \text{mín}_{N_p} \left\{ \text{CFL} \cdot \frac{\chi_p}{\sqrt{|\tilde{\lambda}^{\text{máx}}|_p^2 + |\tilde{\lambda}_{q_s}|_p^2}} \right\} \quad (4.96)$$

Por otro lado, es necesario corroborar que las alturas de fluido que participan en el cálculo sean positivas debido a que el criterio de estabilidad por si solo no lo asegura. Realizar esta verificación disminuye la posibilidad de romper el balance de masa por errores en el algoritmo al actualizar las variables.

Al final de cada cada iteración se realiza una revisión de las alturas de flujo. Si una o un grupo de celdas presenta una altura negativa, el modelo calcula el tiempo en que la primera celda se seca Δt^* mediante:

$$\begin{aligned} 0 &= h_p^n - \frac{\Delta t}{V_p} \sum_{q \in P_q} \left(L_{pq} \phi_{pq_{i=1}} - V_{T_{pq}} (\psi_{pq_{i=1}} + \mathbf{T}_{pq_{i=1}}) \right) \\ \Rightarrow \Delta t^* &= \text{mín}_{p \in N_p} \left\{ \frac{h_p^n V_p}{\sum_{q \in P_q} \left(L_{pq} \phi_{pq_{i=1}} - V_{T_{pq}} (\psi_{pq_{i=1}} + \mathbf{T}_{pq_{i=1}}) \right)} \right\} \end{aligned} \quad (4.97)$$

Definido este valor el intervalo temporal es subdividido en dos tramos $\Delta t_1 = \Delta t^*$ y $\Delta t_2 = \Delta t - \Delta t^*$ que son resueltos de forma consecutiva, eliminando del dominio efectivo la celda que se seca luego de Δt^* . Cabe mencionar que este procedimiento se realiza de forma recursiva, por lo que en cada paso temporal son computadas todas las variables del problema.

Capítulo 5

Implementación del modelo numérico

5.1. Plataforma de trabajo: OpenFOAM®

Los algoritmos descritos en el Capítulo 4 fueron implementados utilizando como entorno de programación el software OpenFOAM®, que corresponde a una biblioteca de rutinas desarrolladas en C++ principalmente para la resolución de ecuaciones de fluidodinámica. Este es un software libre y abierto con licencia GPLv3, que tiene resuelto los problemas asociados al manejo de mallas computacionales, el cálculo de variados operadores matemáticos y la paralelización de los procesos.

La plataforma elegida utiliza un paradigma de programación orientada a objetos, facilitando la incorporación de nuevas funcionalidades de forma encapsulada. Cabe mencionar que nativamente OpenFOAM® está desarrollado para la resolución de ecuaciones en tres dimensiones espaciales, pudiendo ser utilizado en mallas bidimensionales al imponer algunas condiciones.

En los apartados posteriores es revisado de forma somera algunos conceptos claves para comprender la implementación realizada en OpenFOAM®. Una descripción detallada de estos conceptos puede ser consultado en la documentación del software presente en <https://www.openfoam.com/documentation/>.

5.1.1. Malla computacional y definición de campo geométrico

OpenFOAM® recibe nativamente sólo mallas tridimensionales, por lo que para utilizar la presente implementación es necesario proveer una discretización que cuente sólo con una celda en el eje vertical, tal como se ejemplifica en la Figura 5.1. En la construcción de esta malla debe tomarse la precaución de asignar una altura constante H_{cell} en todo el dominio, lo que asegura que los métodos de cómputo disponibles en las librerías estándar del software sean aplicables a un modelo bidimensional. La malla debe ser entendida como un objeto computacional que almacena la información geométrica de cada volumen y su conectividad.

OpenFOAM® utiliza la información disponible en la malla para la definición de *campos geométricos* (*geometrics fields*), concepto que hace alusión a los objetos computacionales que almacenan el valor de una variable de flujo ligada a su posición en el dominio. En estos objetos es subdividido el valor de la variable en una zona interior y una zona de borde. La zona interior, denominada como campo interno (*internal field*), almacena la información que se computa en cada paso temporal, mientras que en la zona de borde, denominada como campo de frontera (*boundary field*), son impuestas las condiciones de borde que aplican a la variable almacenada.

La zona de borde se encuentra subdividida en distintos *parches* (*patches*), que corresponden a conjuntos de caras que comparten una condición de borde común. OpenFOAM® proporciona una gran variedad de condiciones de borde que pueden ser consultadas en su documentación. En este trabajo sólo son utilizadas condiciones de tipo Dirichlet o Neumann, pero el modelo puede aceptar cualquier otro disponible en la plataforma que sea aplicable a las ecuaciones.

El campo interior puede albergar distintos tipos de variables, tales como escalares, vectores y tensores, asociados a distintas posiciones de cada volumen de control, como su centroide, caras o vértices. En la Figura 5.2 se esquematizan los distintos tipos de campos geométricos que pueden ser utilizados en la plataforma.

En el caso de los cálculos en dos dimensiones, la plataforma provee un tipo especial de parche denominado *vacío* (*empty*). El uso de este parche le indica al modelo que esa zona debe ser excluida del cálculo. En particular, la malla proporcionada al modelo debe definir como parches vacíos tanto sus caras superiores como las inferiores.

5.1.2. Cálculo numérico de gradientes

En la formulación del método numérico, es considerado como conocido el valor del gradiente de las variables de interés en la celda $(\nabla \mathbf{w})_p$. Esto es debido a que OpenFOAM® provee librerías que calculan este operador utilizando como entrada sólo un campo geométrico, con lo que para efectos de la presente implementación es un problema resuelto. Ahora bien, para interpretar algunos resultados, es necesario conocer la metodología con la que es calculada esta variable.

Si integramos sobre un volumen de control arbitrario el gradiente de una variable σ cualquiera, se obtiene:

$$\int_{H_{cell}V_p} \nabla \sigma = \sum_{q \in P_q} \int_{H_{cell}L_{pq}} \sigma dL = \sum_{q \in P_q} H_{cell}L_{pq}(\sigma)_{pq} \quad (5.1)$$

Considerando que al interior de la celda tanto $\nabla \sigma$ como H_{cell} son constantes, es fácil demostrar que:

$$\int_{H_{cell}V_p} \nabla \sigma \approx (\nabla \sigma)_p H_{cell}V_p \Rightarrow (\nabla \sigma)_p \approx \sum_{q \in P_q} \frac{L_{pq}}{V_p} (\sigma)_{pq} \quad (5.2)$$

La metodología anteriormente presentada es la utilizada en este trabajo, siendo denominada

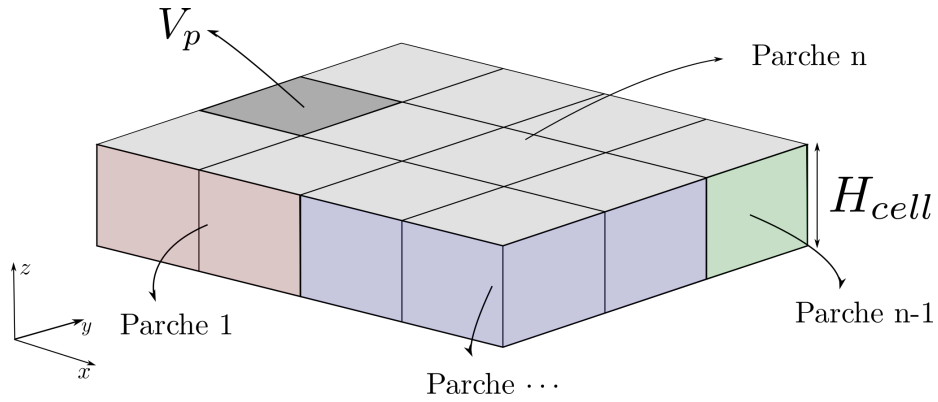


Figura 5.1: Esquema de malla computacional adecuada para el modelo propuesto.

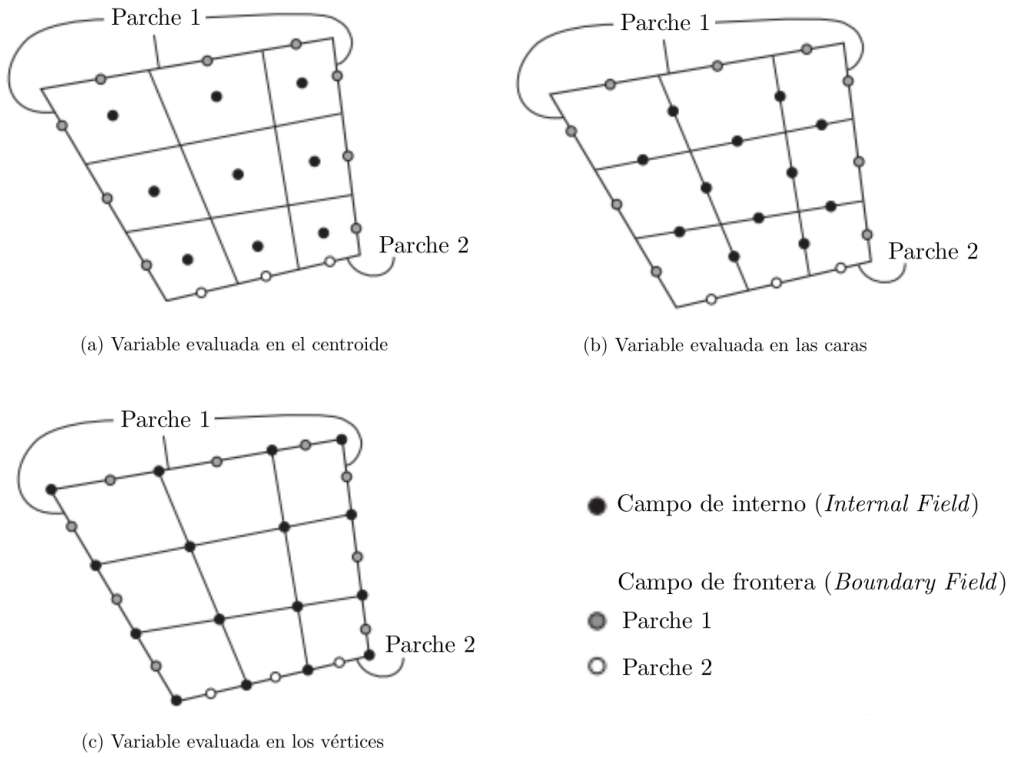


Figura 5.2: Esquema de campos geométricos. Modificado de Greenshields (2015).

en OpenFOAM® como *integración de Gauss* (*Gauss integration*). Cabe mencionar que existen otras maneras para realizar este cálculo disponibles en el software, las que también pueden ser elegidas por el usuario.

En el cálculo anterior se considera conocido el valor de la variable en la cara $(\sigma)_{pq}$. Éste es obtenido interpolando las variables almacenadas en las celdas contiguas utilizando la implementación incorporada en el software. OpenFOAM® permite elegir entre variadas metodologías, siendo utilizado en los ejemplos de este trabajo interpolaciones lineales, a menos que sea indicada explícitamente otra opción.

5.1.3. Paralelización

OpenFOAM® utiliza un método de paralelización para sus cálculos denominado *descomposición de dominio* (*domain decomposition*). En términos prácticos, esta metodología separa la malla y los campos geométricos en distintos subdominios, asignando los cálculos asociados a esa zona a un procesador en específico. Dado que el modelo implementado utiliza campos geométricos nativos de OpenFOAM®, hereda la capacidad de paralelizar cálculos. Para ejecutar simulaciones utilizando esta funcionalidad deben seguirse las metodologías usuales detalladas en la documentación del software.

5.2. Generalidades de la implementación

El modelo formulado en capítulos anteriores fue implementado mediante el desarrollo de un solucionador denominado `damBreachFoam` junto a seis librerías de apoyo. Estas librerías son construidas para el cálculo y asignación a campos geométricos de cada uno de los términos de los esquemas tipo Godunov, siendo presentadas en la ecuación 5.3.

$$\underbrace{\text{godunovLoop} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{w}_p^{n+1} = \mathbf{w}_p^n + \Delta t \left(\underbrace{\mathbf{S}_p}_{\text{bedSlope}} + \underbrace{\mathbf{T}_p}_{\text{bedFriction}} - \underbrace{\mathbf{F}_{np}}_{\text{flux}} \right) \\ h_{0p}^{n+1} = h_{0p}^n - \Delta t \underbrace{F_{qs_p}^C}_{\text{bedLoad}} \end{array} \right.}_{\text{damBreachFoam + tools + others}} \quad (5.3)$$

El programa principal `damBreachFoam` en un paso de tiempo gestiona las diversas librerías (estándares y específicas) para obtener los resultados, mientras que la librería:

- **flux**: computa un campo para el flujo neto \mathbf{F}_{np} del modelo hidrodinámico sobre cada celda.
- **bedSlope**: computa un campo para el efecto neto de la pendiente \mathbf{S}_p en el modelo hidrodinámico.

- **bedFriction**: computa un campo para el efecto neto del término descentrado de la fricción \mathbf{T}_p^U en el modelo hidrodinámico, además del término centrado $\frac{c_f}{h^2}|hU|_p^n$ que se despeja de imponer una discretización semi-implícita.
- **bedLoad**: computa un campo para el flujo neto de gasto sólido (F_{qs}^C o F_{qs}^{out}), en el modelo morfodinámico.
- **godunovLoop**: computa los esquemas tipo Godunov.
- **tools**: es una librería de apoyo que clasifica las celdas, calcula las reconstrucciones y realiza cálculos comunes que utilizan las demás librerías.

El flujo de procesos esquematizado en la Figura 5.3 muestra de forma simplificada la estructura de la aplicación. Tanto el solucionador como las librerías han sido implementadas con tal de entregar al usuario la decisión sobre las formulaciones que son utilizadas para resolver las ecuaciones y cuidando que la estructura del código permita incorporar nuevas funcionalidades.

En la Tabla 5.1 se presentan las funcionalidades específicas disponibles a la fecha de publicación de esta tesis, dentro de las que destacan:

- **Orden de precisión del esquema**: Se deja en manos del usuario la precisión con que el solucionador resuelve el sistema de ecuaciones del modelo hidrodinámico. La opción **firstOrder** indica que el modelo resuelve el esquema de Godunov de primer orden, mientras que **secondOrder** utiliza el esquema de MUSCL-Hancock, descrito en la Sección 4.3.3.
- **Discretización de las ecuaciones**: Se le permite al usuario optar por la forma en que los términos ϕ_{pq} , ψ_{pq} y \mathbf{T}_{pq} son discretizados. La opción **matrixForm** selecciona de forma consistente todas aquellas discretizaciones en que la matrices \mathbf{Q} , \mathbf{Q}^{-1} , \mathbf{X} y \mathbf{X}^{-1} deben ser calculadas de forma explícita. Por otro lado, la opción **vectorForm** elige las expresiones en que los términos han sido expresados en función de los vectores propios $\tilde{\mathbf{e}}$ de \mathbf{Q} . En este último caso, el cómputo suele ser más eficiente computacionalmente ya que reduce el número de operaciones.
- **Incorporación del modelo morfodinámico y método de resolución de la ecuación de Exner**: Al momento de simular un caso particular, se le permite al usuario prescindir de resolver las ecuaciones del modelo morfodinámico con tal de representar flujos delgados en que la erosión es despreciable. En el caso que la opción **yes** sea elegida, la implementación resuelve la ecuación de Exner. Al momento de la publicación de esta tesis sólo existe la opción **weakForm** para resolver esta ecuación, opción que hace referencia a resolver la forma débil de la ecuación de Exner como se detalla en la sección 4.4.1.
- **Expresión para el cálculo de c_f** : En la implementación del modelo se ha optado por incorporar distintas metodologías para el cálculo del coeficiente de fricción c_f , aumentando el rango de aplicación de la implementación. El detalle de las metodologías incorporadas al momento de la publicación de esta tesis es presentado en la Tabla 5.2.

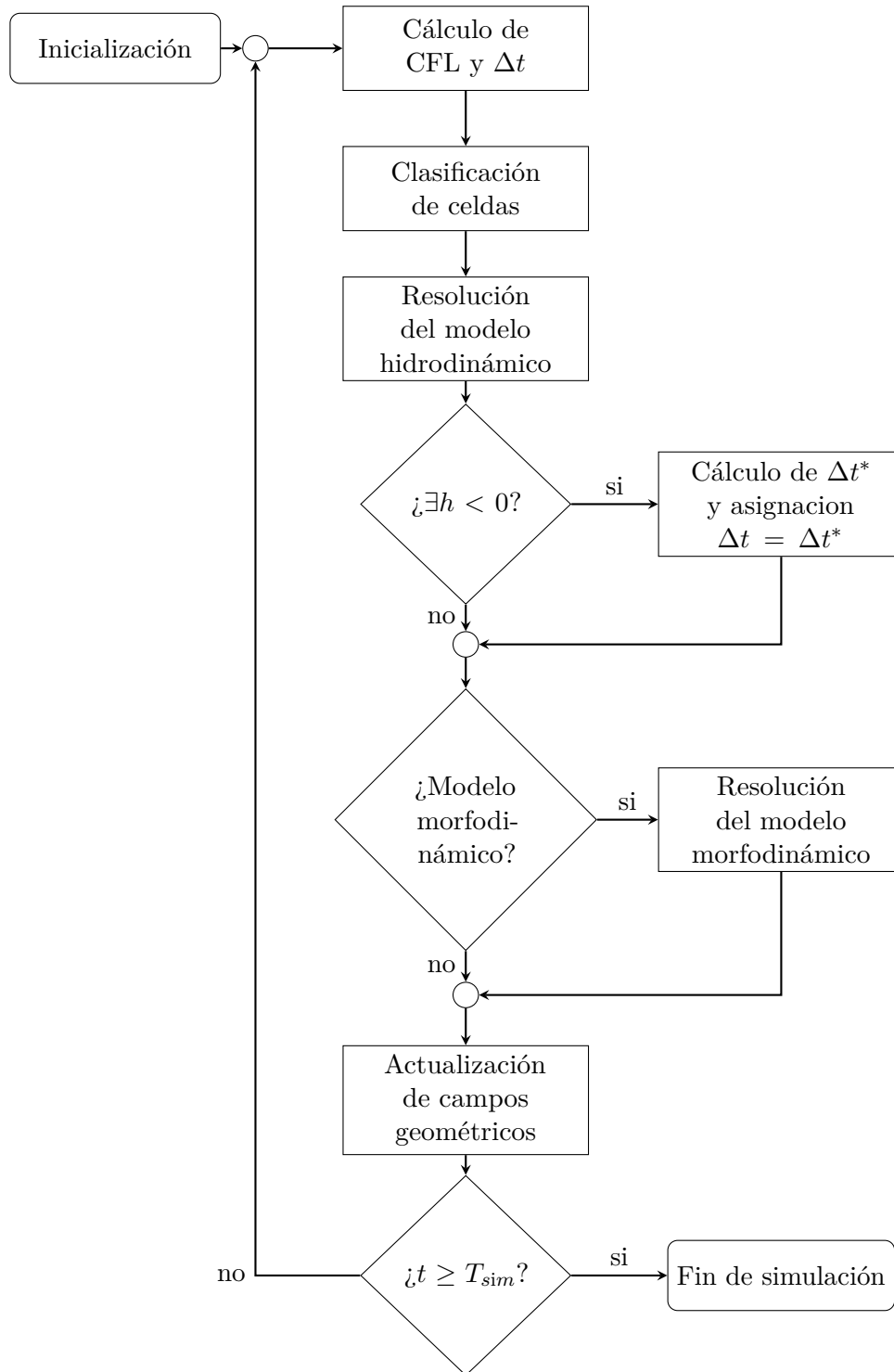


Figura 5.3: Diagrama de procesos de damBreachFoam.

- **Expresión para el cálculo de q_s y sus correcciones:** Dada la alta incertidumbre presente en el modelo morfodinámico, la implementación incorpora distintas metodologías para el cálculo del gasto sólido q_s adicionales a la descrita en la Sección 3.2.2. El detalle de las metodologías incorporadas al momento de la publicación de esta tesis es presentado en la Tabla 5.3.

Tutoriales para la instalación y la ejecución del modelo son presentados en el Anexo C, especificando la forma en que se seleccionan las opciones de la Tabla 5.1. Por otro lado, en el Anexo D se presenta una descripción de la estructura de archivos del modelo para orientar a lectores que deseen verificar el código fuente.

Tabla 5.1: Opciones implementadas en el solucionador `damBreachFoam`.

Decisión del usuario	Código directamente involucrado	Opciones
Orden de precisión del esquema	<code>tools</code>	<code>firstOrder</code> <code>secondOrder</code>
Limitador de pendiente	<code>tools</code>	<code>ENOCellLimiter</code>
Discretización de las ecuaciones (ϕ_{pq} , ψ_{pq} y \mathbf{T}_{pq})	<code>flux</code> <code>bedSlope</code> <code>bedFriction</code>	<code>matrixForm</code> <code>vectorForm</code>
Expresión para el cálculo de c_f	<code>bedFriction</code>	<code>burguer</code> <code>coolebroockWithe</code> <code>darcy</code> <code>linearCf</code> <code>manning</code> <code>munoz (este trabajo)</code>
Incorporación del modelo morfodinámico	<code>godunovLoop</code> <code>damBreachFoam</code>	<code>yes</code> <code>no</code>
Metodología de resolución de la ecuación de Exner	<code>bedLoad</code>	<code>weakForm</code>
Expresión para el cálculo de q_s	<code>bedLoad</code>	<code>ashidaMichiue</code> <code>engelundFredsoe</code> <code>fernandez</code> <code>fernandezLuqueVanBeek</code> <code>grassLaw</code> <code>juez</code> <code>meyerPeterMuller</code> <code>nielsen</code> <code>rickenmann</code> <code>smart</code> <code>smartCFBS</code> <code>wongA</code> <code>wongB</code>
Corrección por pendiente de θ y θ_c	<code>bedLoad</code>	<code>yes</code> <code>no</code>
Cálculo de θ_c con curva de Shields-Mantz	<code>bedLoad</code>	<code>yes</code> <code>no</code>
Cálculo de q_{aval}	<code>bedLoad</code>	<code>yes</code> <code>no</code>

Tabla 5.2: Opciones implementadas para el cálculo de c_f .

Opción	Fluido	Régimen	Forma de c_f	Fuente
burguer	NN	L-T-TA	$c_f = \frac{f_F}{2}$ $f_{FLam} = \frac{C_s}{Re}$ $f_{FTurb} = aRe^b$ $Re = \frac{8\rho_m U ^2}{\tau_y + K\left(\frac{2 U }{h}\right)^m}$ $Re_c = 500$	Burger et al. (2014)
coolebrockWhite	N	L-T-TA	$c_f = \frac{f}{8}$ $f_{Lam} = \frac{64}{Re}$ $\frac{1}{\sqrt{f_{Turb}}} = -2 \log \left(\frac{k_r}{3.7} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f_{Turb}}} \right)$ $Re = \frac{4h U }{K/\rho_m}$ $Re_c = 2100$	Adaptación a canales abiertos de Colebrook & White (1937)
darcy	N	T	$c_f = \frac{f}{8}$ $f = f_0 = \text{constante}$	Cea & Vázquez-Cendón (2012)
linearCf	N	L	$c_f = k \frac{h^2}{ hU }$ $k = \text{constante}$	Sampson et al. (2008)
manning	N	T	$c_f = \frac{gn^2}{h^{1/3}}$ $n = \text{constante}$	Cea & Vázquez-Cendón (2012)
munoz	NN	L-T-TA	$c_f = \frac{f}{8}$ $f \text{ según sección 3.2.1}$	Este trabajo

N: Fluido newtoniano; NN: Fluido no newtoneano; L: Régimen laminar; T: Régimen turbulento; L-T-TA: Régimen laminar y turbulento con transición abrupta. f_F : Factor de fricción de Fanning; f : Factor de fricción de Darcy-Weisbach

Tabla 5.3: Opciones implementadas para el cálculo de q_s .

Opción	Forma de q_s	Correcciones incorporadas	Fuente
ashidaMichiue	$q_s = \sqrt{gRd_s^3\Phi}$ $\Phi = 17(\theta - \theta_c)_+ (\theta^{1/2} - \theta_c^{1/2})_+ \hat{\tau}_0$ $\theta_c = 0,05$	NN-MI-P-AV	Ashida & Michiue (1972)
engelundFredsoe	$q_s = \sqrt{gRd_s^3\Phi}$ $\Phi = 18,74(\theta - \theta_c)_+ (\theta^{1/2} - 0,7\theta_c^{1/2})_+ \hat{\tau}_0$ $\theta_c = 0,05$	NN-MI-P-AV	Engelund & Fredsøe (1976)
fernandez	$q_s = \sqrt{gRd_s^3\Phi}$ $\Phi = A_1\theta^{B_1} (\theta - A_2\theta_c)_+^{B_2} (\theta^{1/2} - A_3\theta_c^{1/2})_+^{B_3} \hat{\tau}_0$ A_1, B_1, θ_c constantes dependientes del modelo (por defecto: meyerPeterMuller)	NN-MI-P-AV	Fernández-Nieto et al. (2017)
fernandezLuqueVanBeek	$q_s = \sqrt{gRd_s^3\Phi}$ $\Phi = 5,7(\theta - \theta_c)_+^{3/2} \hat{\tau}_0$ $\theta_c = 0,037$	NN-MI-P-AV	Fernandez Luque & Van Beek (1974)
grassLaw	$q_s = A_g U ^{m_g}\hat{U}$ A_g, m_g constantes dependientes del modelo (por defecto: $A_g = 0,01, m_g = 3$)		Juez et al. (2013)
juez	$q_s = A_g U ^{m_g}\hat{U}$ $A_g = \frac{A_{g0}}{h^r}$ A_{g0}, m_g, r constantes dependientes del modelo (por defecto: $A_g = 0,01, m_g = 3, r = 0$)		Juez et al. (2013)
meyerPeterMuller	$q_s = \sqrt{gRd_s^3\Phi}$ $\Phi = 8(\theta - \theta_c)_+^{3/2} \hat{\tau}_0$ $\theta_c = 0,047$	NN-MI-P-AV	Meyer-Peter & Müller (1948)
nielsen	$q_s = \sqrt{gRd_s^3\Phi}$ $\Phi = 12\theta^{1/2}(\theta - \theta_c)_+ \hat{\tau}_0$ $\theta_c = 0,047$	NN-MI-P-AV	Nielsen (1992)
rickenmann	$q_s = \sqrt{gRd_s^3\Phi}$ $\Phi = \frac{3,1}{R^{0,5}} \left(\frac{d_{90}}{d_{30}}\right)^{0,2} Fr^{1,1}\theta^{1/2}(\theta - \theta_c)_+ \hat{\tau}_0$ $\theta_c = 0,047$	NN-MI-P-AV	Rickenmann (1991)
smart	$q_s = \sqrt{gRd_s^3\Phi}$ $\Phi = 4\left(\frac{d_{90}}{d_{30}}\right)^{0,2} FrS^{0,6}\theta^{1/2}(\theta - \theta_c)_+ \hat{\tau}_0$ $\theta_c = 0,047$	NN-MI-PSmart-AV	Smart (1984)
smartCFBS	$q_s = \sqrt{gRd_s^3\Phi}$ $\Phi = 4\left(\frac{d_{90}}{d_{30}}\right)^{0,2} FrS_C^{0,6}\theta^{1/2}(\theta - \theta_c)_+ \hat{\tau}_0$ $S_C = \begin{cases} S & , \text{ si } S \cdot \hat{U} > 0 \\ J & , \text{ si no} \end{cases}$ $\theta_c = 0,047$	NN-MI-PSmart-AV	Juez et al. (2013)
wongA	$q_s = \sqrt{gRd_s^3\Phi}$ $\Phi = 4,93(\theta - \theta_c)_+^{1,6} \hat{\tau}_0$ $\theta_c = 0,047$	NN-MI-P-AV	Juez et al. (2013)
wongB	$q_s = \sqrt{gRd_s^3\Phi}$ $\Phi = 3,97(\theta - \theta_c)_+^{3/2} \hat{\tau}_0$ $\theta_c = 0,0495$	NN-MI-P-AV	Juez et al. (2013)

NN: Reducción de esfuerzo adimensional de fondo por efecto de τ_y según Carrillo (2011); MI: Corrección por movimiento incipiente utilizando curva de Shields-Mantz; P: Corrección por pendiente basado en el trabajo de Apsley & Stansby (2008); PSmart: Corrección por pendiente según Smart (1984); AV: Corrección por avalancha (pendiente por sobre ángulo de reposo) según Apsley & Stansby (2008)

Capítulo 6

Verificación, validación y aplicación

6.1. Verificación y validación

La implementación descrita en el Capítulo 5 es verificada analizando su resultado para problemas simples y comparando con algunas soluciones de referencia disponibles en la literatura. Por otro lado, su validación se realiza mediante la comparación con resultados experimentales a escala de laboratorio.

Cuando existieron soluciones de referencia, el desempeño del modelo se evaluó computando su error de estimación en cada celda como se muestra en la ecuación 6.1. Con ellos son calculados indicadores globales de desempeño como su promedio espacial $e_{v\text{avg}}$, error cuadrático medio $e_{v\text{rms}}$ y valor máximo $e_{v\text{máx}}$ a lo largo del tiempo de simulación, como se detalla en la ecuación 6.2. En general, estos indicadores son presentados de forma adimensional en función de un tiempo normalizado como se muestra en la ecuación 6.3, donde E_v representa una escala del problema para una variable v genérica y T es una escala de tiempo particular del problema.

$$e_v = |v_{\text{ref}} - v_{\text{modelo}}| \text{ con } v \in \{h, |hU|, q_s, h_0, x, \dots\} \quad (6.1)$$

$$e_{v\text{avg}}(t) = \frac{1}{V} \sum_p e_{vp} V_p \quad e_{v\text{rms}}(t) = \sqrt{\frac{1}{V} \sum_p e_{vp}^2 V_p} \quad e_{v\text{máx}}(t) = \max_p \{e_{vp}\} \quad (6.2)$$

$$e_{v\text{ind}}^* = e_{v\text{ind}}/E_v \quad t^* = t/T \quad (6.3)$$

El detalle de las soluciones obtenidas en cada simulación se adjuntan en el Anexo E. En el presente capítulo se realiza una breve descripción del caso simulado junto a las principales conclusiones obtenidas de su análisis.

6.1.1. Verificaciones

Cada verificación es computada utilizando un teselado rectangular con un espaciamiento χ constante y pasos temporales adaptativos tal que se verifique un CFL máximo de 0,9 para problemas unidimensionales y 0,45 para aquellos bidimensionales. Para estudiar el efecto de la discretización de las ecuaciones y orden de precisión del esquema, las simulaciones que presentan una solución de referencia fueron ejecutadas utilizando cuatro configuraciones básicas, las que son etiquetadas como se presenta en la Tabla 6.1.

Tabla 6.1: Configuraciones básicas para la verificación y validación del modelo.

Etiqueta	Discretización de las ecuaciones	Orden de precisión del esquema
mf	matrixForm	firstOrder
ms	matrixForm	secondOrder
vf	vectorForm	firstOrder
vs	vectorForm	secondOrder
ref	Solución de referencia según especificación del apartado	

Problemas de Riemann unidimensionales

Para verificar la correcta implementación de los esquemas que resuelven los términos advectivos, fueron ejecutadas las pruebas propuestas por Toro (2001) en donde se fuerza al modelo a resolver problemas de Riemann homogéneos unidimensionales con solución exacta. Cada problema tiene una estructura como la esquematizada en la Figura 4.3, donde la condición inicial corresponde a magnitudes constantes de las variables conservativas separadas por una discontinuidad abrupta en una posición x_0 . Esta condición fuerza al sistema a evolucionar mediante la propagación de ondas de distinta naturaleza.

Los parámetros de las pruebas realizadas se presenta en la Tabla 6.2, donde se detalla la condición inicial, la posición x_0 y el tiempo total de la simulación t_f . Cada zona de la condición inicial y el sentido de propagación de las ondas generadas se identifica por su posición relativa respecto de x_0 , identificando por un sub-índice L (*Left*) a la izquierda mientras que con R (*Right*) a la derecha. En cada prueba se ha utilizado un dominio unidimensional con longitud total de $L = 50$ m, una discretización $\chi = 0,1$ m constante y $\varepsilon_{wd} = \varepsilon_{\tau_y} = 0,001$ m.

Los resultados de la simulación y los errores de cada configuración son presentados en las Figuras E.1 a E.7 del Anexo E. En ellas, se ha tomado como escala para el error a la altura inicial promedio $E_h = \bar{h} = \frac{x_0}{L}h_L + \frac{L-x_0}{L}h_R$ y un caudal dependiente de la máxima celeridad de onda calculada de forma exacta $E_{hU} = \bar{h} \cdot \max_i |\lambda_i|$. La Figura E.1 muestra la solución al final de la simulación de las pruebas T1 y T2, en las que el dominio se mantiene mojado, mientras que en la Figura E.2 se muestran los resultados al final de la simulación para los casos T3, T4 y T5 en los que existe o se genera un frente seco-mojado.

Los errores promedio e_{avg}^* para todos los casos de la Tabla 6.2 rondan en torno a 1×10^{-3} - 1×10^{-2} llegando a valores máximos $e_{máx}^* \sim 1$ en ondas de choque y $e_{máx}^* \sim 0,1$ en ondas de

Tabla 6.2: Condición inicial de problemas de Riemann homogéneos unidimensionales.

Prueba	h_L (m)	hU_L (m ² /s)	h_R (m)	hU_R (m ² /s)	x_0 (m)	t_f (s)	Patrones de onda
T1	1,0	2,5	0,1	0,0	10	7,0	$r_L - s_R$
T2	1,0	-5,0	1,0	5,0	25	2,5	$r_L - r_R$
T3	1,0	0,0	0,0	0,0	20	4,0	r_L
T4	0,0	0,0	1,0	0,0	30	4,0	r_R
T5	0,1	-0,3	0,1	0,3	25	5,0	$r_L - fs - r_R$

r : Onda de rarefacción; s : Onda de choque; sub-índice L : zona o sentido de propagación a la izquierda; sub-índice R : zona o sentido de propagación a la derecha; fs : fondo seco.

rarefacción. Desde una perspectiva global, estos sólo son perceptibles en torno a los frentes de ondas, tal como se ejemplifica en la Figura 6.1. Los errores que son más perceptibles ocurren para pruebas en las que existe un mojado o secado de celdas, donde el esquema numérico tiende a vaciar cada celda de forma más rápida que la solución exacta (Figura E.2(c)) y a mojarlas de forma más lenta (Figura E.2(a)). En general, se observa de forma consistente que los errores promedio son menores en simulaciones que utilizan esquemas de segundo orden, los que disminuyen notablemente la difusión numérica en torno a los frentes de onda. Además, se observa que la elección del modo de discretización de las ecuaciones no afecta al resultado, lo que es consistente con el hecho que solo son formas distintas de escribir las mismas ecuaciones.

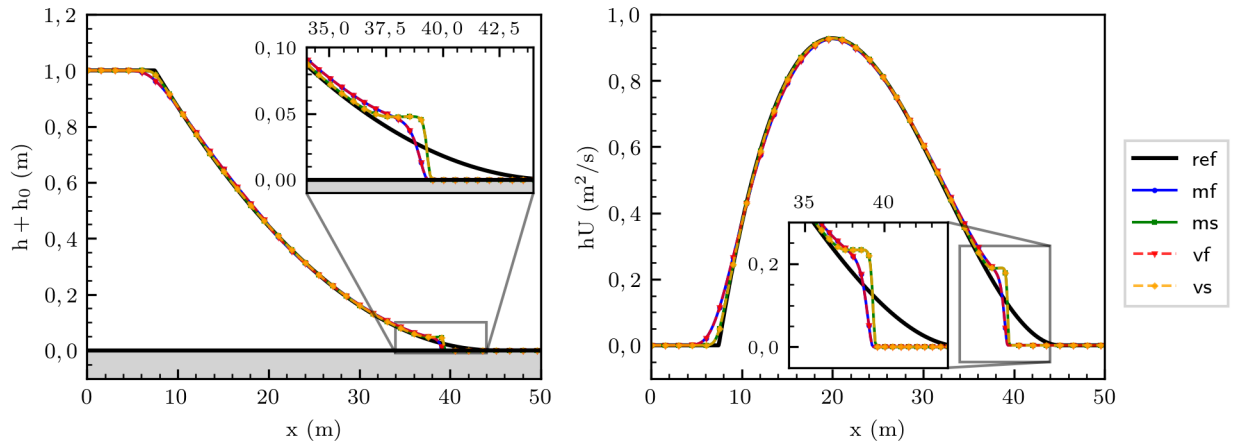


Figura 6.1: Prueba T3 en $t = 4,0$ s de problemas de Riemann unidimensionales homogéneos de la Tabla 6.2. Se observa un ajuste adecuado en todo el dominio, presentándose el mayor error en el frente de mojado, tanto en su posición como estimación de altura y caudal.

Una sobre-estimación del vaciado de celdas no se considera problemático, en el contexto de un modelo de escala y condiciones reales, ya que las celdas afectas a un proceso similar aportan poco en término de caudales y volumen desplazado. Esto se fundamenta por acción de la fricción, la que restringe las velocidades y alturas del fluido provocando que una celda en proceso de vaciado deba presentar bajas velocidades. En cambio, una sub-estimación de la velocidad del frente de mojado de celdas podría llegar a ser problemático, ya que éste corresponde a una condición de borde que domina la dinámica de la descarga. Ahora bien, dado que el fluido en estudio es altamente viscoso, es evidente la necesidad de considerar el

efecto de la fricción en la estimación de su velocidad con tal de determinar si el error numérico es relevante.

Para estudiar tal efecto a nivel conceptual, fue recomputado el caso T3 de la Tabla 6.2 considerando el efecto de la fricción utilizando la ecuación de Darcy-Weisbach para el factor de fricción¹. En estas nuevas verificaciones fue impuesto un factor de fricción f_0 constante, como se detalla en la Tabla 6.3, comparando los resultados del modelo con una solución de referencia aproximada provista por Chanson (2005). Este autor indica que una solución aproximada adecuada se obtiene de suponer que la zona del frente de mojado domina la fricción, pudiendo compatibilizar la solución del problema de Riemann homogéneo con una de las ecuaciones de onda difusiva en torno a esta zona².

El resultado de las pruebas realizadas con un factor de fricción constante se presentan en las Figuras E.8 a E.11 del Anexo E, en donde las escalas para la adimensionalización de los errores son las mismas que las utilizadas en las pruebas de Toro (2001). En la Figura 6.2 se presenta la comparación entre la solución aproximada y las estimaciones numéricas para el fin de la simulación del caso T2 de la Tabla 6.3. Adicionalmente, en la Figura 6.3 se presenta la comparación de las posiciones del frente de mojado obtenidas de la solución del modelo numérico para distintos valores del factor de fricción.

Tabla 6.3: Condición inicial de problemas de Riemann no homogéneos unidimensionales con factor de fricción contante.

Prueba	h_L (m)	hU_L (m ² /s)	h_R (m)	hU_R (m ² /s)	x_0 (m)	t_f (s)	f_0
T1	1,0	0,0	0,0	0,0	20	4,0	0,01
T2	1,0	0,0	0,0	0,0	20	4,0	0,05
T3	1,0	0,0	0,0	0,0	20	4,0	0,10

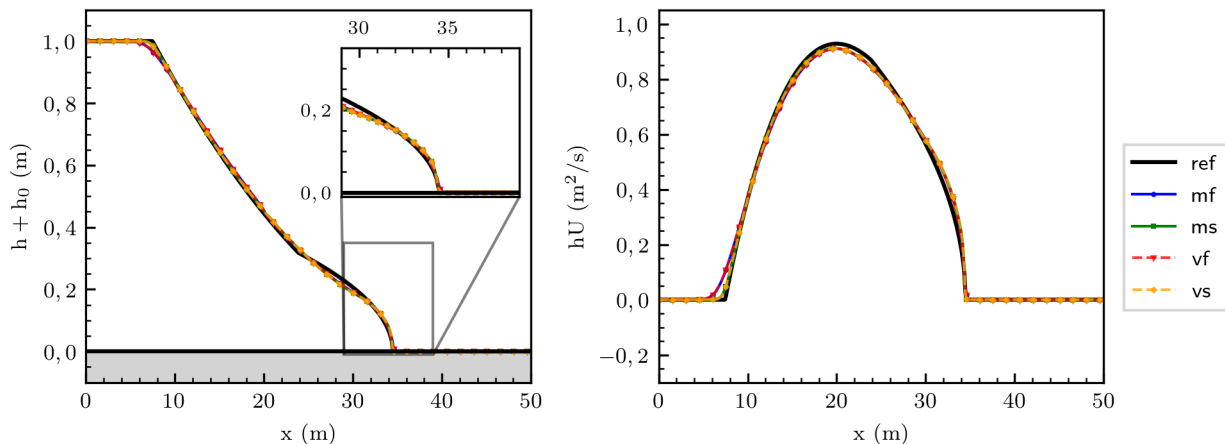


Figura 6.2: Prueba T2 en $t = 4,0$ s de problemas de Riemann unidimensionales no homogéneos de la Tabla 6.3.

¹Opción **darcy** en la Tabla 5.2.

²La aproximación de onda difusiva es una simplificación de las ecuaciones de aguas someras unidimensionales donde se desprecian los términos advectivos e inerciales respecto del efecto de la fricción.

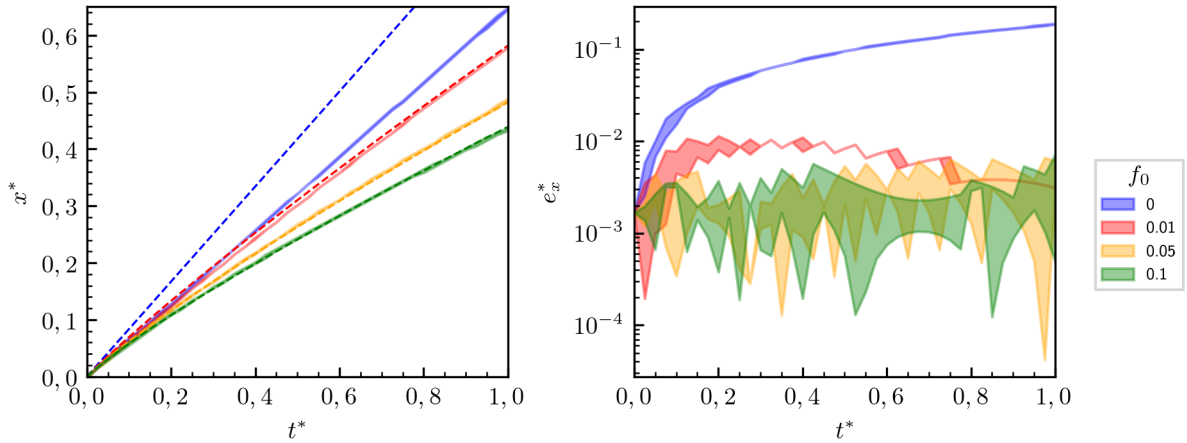


Figura 6.3: Posición de interfaz seco-mojado y error respecto de solución aproximada de Chanson (2005). En el gráfico de la izquierda y en línea discontinua (--) se presenta la posición de la solución aproximada. La solución del modelo se presenta como una zona pintada que corresponde al rango obtenido por las configuraciones de la Tabla 6.1. La posición del frente seco-mojado se presenta de forma adimensional como $x^* = \frac{x_{\text{mod}} - x_0}{L - x_0}$ donde x_{mod} es la estimación del modelo. El tiempo adimensional corresponde a $t^* = \frac{t}{t_f}$ donde t_f corresponde al tiempo de simulación. En el gráfico de la derecha se presenta el rango de errores adimensionales de la posición $e_x^* = e_x / (L - x_0)$.

Los errores globales de estas simulaciones conservan el orden de magnitud obtenidos para la prueba T3 de la Tabla 6.2, pese a que la estimación lejos del frente de mojado empeora. Esta situación se explica debido a que la solución de referencia en tal tramo supone que la solución homogénea de los problemas de Riemann es válida, supuesto que pierde sentido a medida que se aumenta el factor de fricción. Ahora bien, al observar la posición del frente de mojado predicho por Chanson (2005) en las Figuras E.9(b), E.10(b) y E.11(b) con los resultados del modelo, es evidente que el ajuste mejora respecto del obtenido en el caso homogéneo. De hecho, al observar los errores adimensionales de la Figura 6.3 en los casos con fricción, éste se mantiene en el orden de magnitud asociado al tamaño de celda ($\frac{\Delta x}{L - x_0} \sim 10^{-3}$) sin aumentar de forma significativa, a diferencia de lo que sucede en el caso sin fricción que aumenta hasta dos órdenes de magnitud en el tiempo de simulación.

De esta forma, la verificación de los problemas de Riemann unidimensionales indican que los términos asociados a los flujos numéricos están correctamente implementados, entregando errores de magnitud coherente con la escala del problema y la discretización elegida. Adicionalmente, se desprende de este análisis que el efecto de la fricción es mucho más relevante que el error inherente al método numérico en la estimación de la posición del frente.

Conservación de balances hidrostáticos

La verificación de la conservación del balance hidrostático en reposo (denominado en la literatura como *C-property* o *lake in rest*) se evaluó mediante la simulación de tres configuraciones propuestas por Cea (2005). Estas pruebas consisten en simular un fluido en reposo situado sobre una topografía que presenta variaciones en su cota. Se espera que un modelo

bien equilibrado conserve en reposo el fluido, manteniendo una cota constante en su superficie libre por un periodo prolongado de tiempo de simulación.

El detalle de las configuraciones simuladas se presenta en la Tabla 6.4 y las funciones que definen la topografía de cada caso se presentan en las ecuaciones 6.4 y 6.5. En cada prueba se ha utilizado un dominio unidimensional con longitud total de $L = 10$ m, una discretización $\chi = 0,1$ m constante, un factor de fricción nulo y un tiempo total de simulación de $t_f = 3600$ s. Se impuso en los bordes un caudal unitario fijo nulo y una cota constante de la superficie libre del fluido.

Tabla 6.4: Condición inicial para pruebas de balance hidrostático.

Prueba	$h + h_0$ (m)	h_0 (m)	Descripción
T1	2,0	según ecuación 6.4	Fluido en reposo sobre superficie con variación abrupta.
T2	1,0	según ecuación 6.5	Fluido en reposo sobre superficie con variación suave.
T3	0,5	según ecuación 6.4	Fluido en reposo sobre superficie con variación abrupta y frente seco-mojado.

$$h_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 2) \cup [8, 10] \\ -1 & \text{si } x \in [2, 4[\cup [6, 8[\\ 1 & \text{si } x \in [4, 6[\end{cases} \quad (6.4)$$

$$h_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ -\frac{2}{8}(x - 1) & \text{si } x \in [1, 9[\\ -2 & \text{si } x \in [9, 10] \end{cases} \quad (6.5)$$

En las Figuras E.12 a E.14 del Anexo E se presentan los resultados para $t = 1800$ s y $t = 3600$ s, junto a los errores adimensionales obtenidos. En este caso, se ha tomado como escala para el error a la altura inicial promedio $E_h = \bar{h}$ y un caudal por unidad de ancho dada por $E_{hU} = \bar{h}\sqrt{g\bar{h}}$.

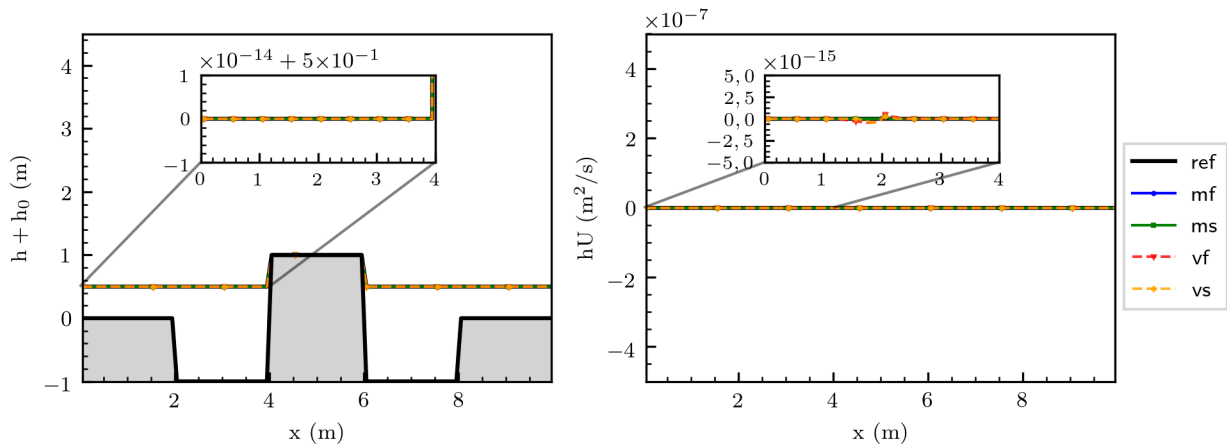


Figura 6.4: Prueba T3 en $t = 3600$ s de pruebas de conservación de balance hidrostático en reposo de la Tabla 6.4.

El análisis de los resultados indica que todas las combinaciones de esquemas numéricos utilizadas son capaces de conservar el balance hidrostático, como se ejemplifica en la Figura

6.4. Los errores promedio obtenidos para la altura de flujo $e_{h_{avg}}^*$ rondan el error asociado a operaciones de punto flotante, mientras que para los caudales estos pueden ser algunos órdenes de magnitud superior, pero siendo totalmente despreciables para una escala de ingeniería $e_{hU_{max}}^* < 10^{-13}$. En general la variaciones mayores en el caso de los caudales ocurren tanto en las simulaciones donde la topografía varía de forma abrupta (ecuación 6.4) como cuando lo hace suavemente (ecuación 6.5). En el caso de las simulaciones con esquemas de segundo orden, se observó que el error en el balance es sensible a la construcción de la malla dado que depende del cálculo de gradientes en cada celda y estos, a su vez, dependen del correcto teselado del dominio.

De esta forma, la verificación de las condiciones de balance hidrostático indican que los términos asociados a los flujos numéricos se equilibran con los asociados a la pendiente, corroborando la correcta implementación.

Conservación de balances en condiciones de flujo normal

Para verificar la capacidad de conservar soluciones estacionarias no triviales del flujo, fueron computadas distintas pruebas propuestas por Chertock et al. (2015). Estas consisten en la simulación de flujos normales asociados a distintos regímenes sobre una superficie con pendiente fija. Se espera que un modelo bien balanceado conserve estas soluciones por un periodo prolongado de tiempo de simulación.

El detalle de las configuraciones simuladas se presenta en la Tabla 6.5. En cada prueba se inicializa el dominio utilizando h_N y hU_N , que corresponden a la altura y caudal unitario para la condición de escurrimiento normal. En cada cálculo se ha utilizado una discretización $\chi = 0,025$ m, un dominio con longitud total de $L = 2,5$ m, una formulación para la fricción según la ecuación de Manning³ y un tiempo total de simulación de $t_f = 600$ s. La topografía se inicializó utilizando una pendiente s_x de la forma $h_0 = s_x(L - x)$. Se impuso como condiciones de borde: $hU(x = 0, t) = hU_N$, $h(x = 0, t) = h_N$ o $h(x = L, t) = h_N$ según si el régimen es supercrítico o subcrítico, respectivamente.

Tabla 6.5: Condiciones iniciales para pruebas de conservación de flujos normales.

Prueba	h_N (m)	hU_N (m ² /s)	n (m ^{-1/3} s)	$ s_x = \partial h_0/\partial x $	Fr
T1	0,577	2,0	0,02	0,01	1,46
T2	0,096	0,1	0,02	0,01	1,08
T3	0,251	0,1	0,1	0,01	0,25
T4	0,024	0,002	0,1	0,01	0,17
T5	0,449	2,0	0,1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2,12

$h_N = \left(\frac{n^2 hU_N^2}{|s_x|}\right)^{3/10}$: Altura normal; hU_N : Caudal unitario; s_x : Pendiente de fondo; n : coeficiente de fricción de Manning; Fr: número de Froude.

Adicionalmente, el autor original propone perturbar la condición inicial como se muestra en la ecuación 6.6, con tal de verificar el flujo evolucione a la condición normal correcta. Este

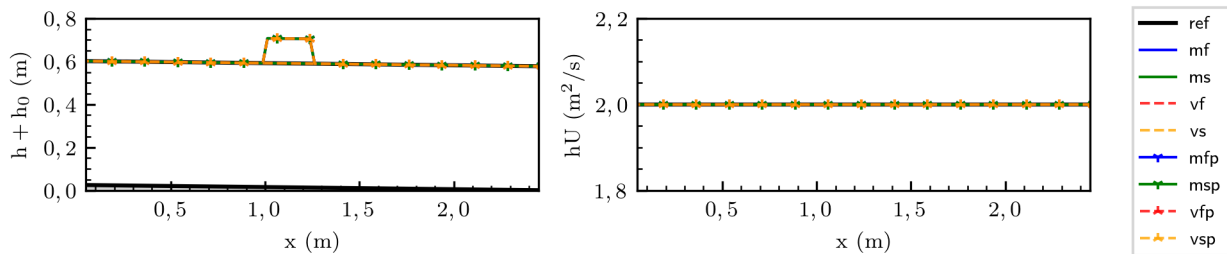
³Opción **manning** en la Tabla 5.2.

ejercicio se realizó en conjunto con las simulaciones básicas de la Tabla 6.1, adicionando a cada etiqueta en los resultados la letra «p» si la condición inicial fue perturbada.

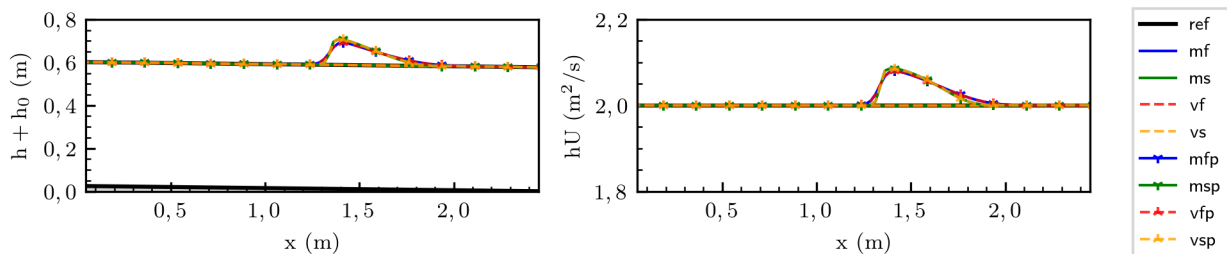
$$h = h_N + \begin{cases} 0,2h_N & \text{si } x \in [1, 1,25] \\ 0 & , \sim \end{cases} ; \quad hU(x, 0) = hU_N \quad (6.6)$$

En las Figuras E.15 a E.19 del Anexo E se presentan los resultados para $t = 0$ s, $t = 0,5$ s y $t = 600$ s, junto a los errores adimensionales obtenidos. En este caso, se ha tomado como escala para la altura $E_h = h_N$ y para el caudal $E_{hU} = hU_N$.

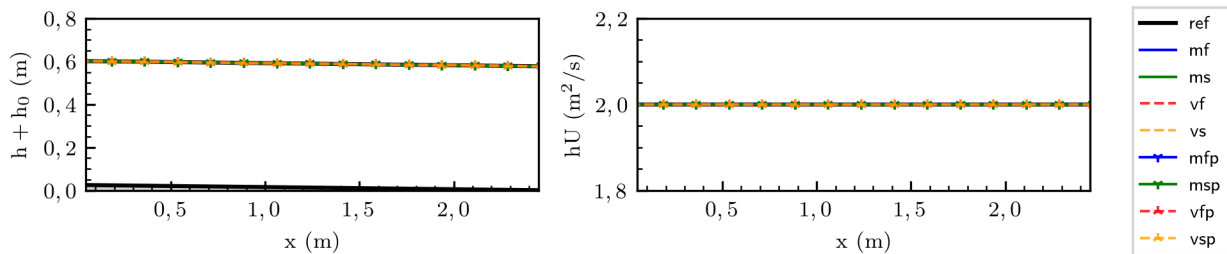
Los resultados indica que todas las combinaciones de esquemas numéricos utilizadas son capaces de conservar el balance, obteniendo errores del orden o levemente superiores a los asociados a la máquina una vez alcanzada la altura normal. Los errores obtenidos en cada caso, para efectos de cualquier simulación a escala de ingeniería, son despreciables. Un ejemplo de la evolución del sistema se presenta en la Figura 6.5.



(a) Altura h y caudal hU en el dominio a los $t = 0$ s.



(b) Altura h y caudal hU en el dominio a los $t = 0,5$ s.



(c) Altura h y caudal hU en el dominio a los $t = 600$ s.

Figura 6.5: Resultados de prueba T1 de la Tabla 6.5.

Cabe mencionar que, dependiendo del régimen de flujo, las simulaciones perturbadas pueden

demorar distinto tiempo en converger a la altura normal. En el caso de un flujo supercrítico, la perturbación rápidamente abandona el dominio y la solución tiende al escurrimiento normal en pocos segundos (Figuras E.15(d) y E.19(d)). En el caso subcrítico o crítico esto no ocurre debido a que la estructura de los vectores propios en los problemas de Riemann transmiten información tanto aguas arriba como aguas abajo, dejando siempre información remanente en el interior del dominio cuando la perturbación llega al borde (Figuras E.16(d), E.17(d) y E.18(d)).

De esta forma, la verificación de las condiciones de balance para soluciones estacionarias no triviales indican que los términos asociados a la pendiente se equilibran con los asociados a la fricción, corroborando la correcta implementación.

Flujo transitorio con frente seco-mojado

El correcto comportamiento del modelo ante un problema transitorio fue evaluado mediante la simulación de un flujo sobre una superficie parabólica, problema que presenta una solución analítica publicada por Sampson et al. (2008). Utilizando una ley lineal para la fricción⁴ y suponiendo una topografía como la presentada en la ecuación 6.7, se obtiene la solución para el flujo presentado en la ecuación 6.8.

$$h_0 = \Delta_0 \left(\frac{x}{a} \right)^2 \quad (6.7)$$

$$hU = h \cdot U(t) = h \cdot U_{\text{máx}} e^{-kt/2} \sin(st) \quad h + h_0 = \text{máx} \{h_0, \Delta_0 + C_1(t) + C_2(t)x\} \quad (6.8)$$

En estas expresiones, Δ_0, a son constantes con dimensiones de longitud, $U_{\text{máx}}$ es una constante con dimensión de velocidad, $s = \sqrt{p^2 - k^2}/2$ y $p = \sqrt{8g\Delta_0/a^2}$ son variables auxiliares con dimensiones de frecuencia, k corresponde al factor de fricción y $C_{1,2}(t)$ son funciones dependientes del tiempo, detalladas en la ecuación 6.9.

$$\begin{aligned} C_1(t) &= -\frac{U_{\text{máx}}^2}{4g} e^{-kt} \left[1 + \cos 2st - \frac{4sk}{p^2} \left(\sin 2st - \frac{k}{2s} \cos 2st \right) \right] \\ C_2(t) &= -\frac{U_{\text{máx}}}{g} s e^{-kt/2} \left[\cos st + \frac{k}{2s} \sin st \right] \end{aligned} \quad (6.9)$$

Cabe mencionar que estas ecuaciones son válidas siempre que se cumpla $k < p$ y generan una superficie libre plana que oscila. Además, de ellas es posible despejar la posición del frente seco-mojado del flujo obteniendo la ecuación 6.10.

$$x_{wd}(t) = \frac{4s}{p^2} U_{\text{máx}} e^{-kt/2} \left[-\cos(st) + \frac{k}{2s} \sin(st) \right] \pm a \quad (6.10)$$

Para evaluar el desempeño del modelo, se simuló un dominio unidimensional con distintos valores para su discretización y coeficientes de fricción, detallados en la Tabla 6.6. En cada

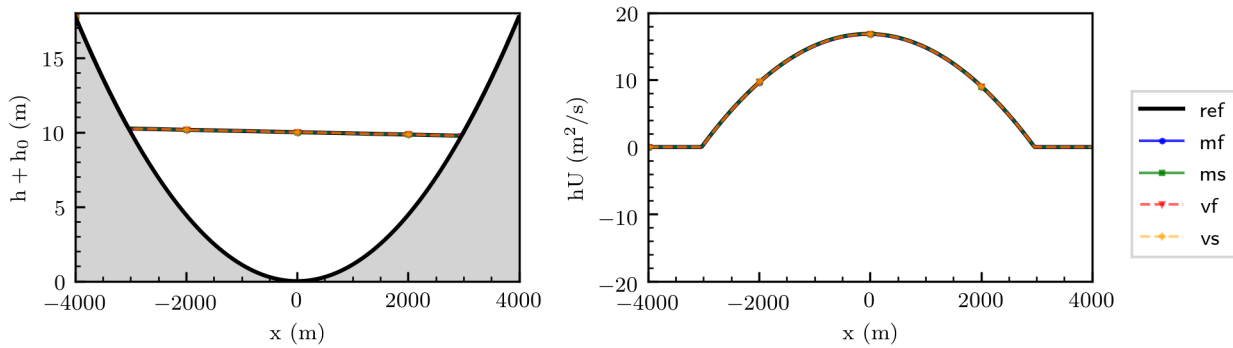
⁴Opción **linearCf** en la Tabla 5.2.

prueba se considera $\Delta_0 = 10$ m, $a = 3000$ m, $U_{\text{máx}} = 2$ m/s, $g = 9,81$ m/s², un dominio de $L = 8000$ m, $\varepsilon_{wd} = \varepsilon_{\tau_y} = 0,005$ m y un tiempo total de simulación de $t_f = 7200$ s, obteniendo un valor de $p = 0,0093$ s⁻¹.

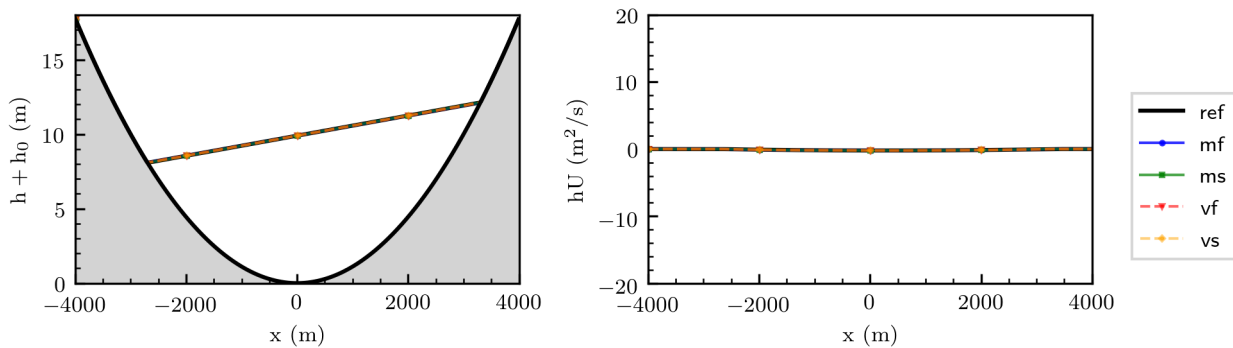
Tabla 6.6: Discretización y coeficiente de fricción para pruebas de flujo transitorio con frente seco-mojado.

Prueba	χ (m)	k (s ⁻¹)	Prueba	χ (m)	k (s ⁻¹)	Prueba	χ (m)	k (s ⁻¹)
T1	160,0	0,001	T5	10,0	0,001	T8	20,0	0,003
T2	80,0	0,001	T6	5,0	0,001	T9	20,0	0,006
T3	40,0	0,001	T7	2,5	0,001	T10	20,0	0,009
T4	20,0	0,001						

El detalle de los resultados se presenta en el Anexo E, mostrando los errores obtenidos para cada configuración en las Figuras E.20 a E.23 y la posición del frente seco-mojado en las Figuras E.24 y E.25. La Figura 6.6 muestra un ejemplo del tipo de soluciones obtenidas y en las Figuras 6.7 y 6.8 se resume el efecto de k y χ sobre los máximos errores. Finalmente, en la Figura 6.9 se muestra el efecto de los mismos parámetros sobre el error promedio temporal de la posición del frente. Para la confección de todas las figuras se han utilizado las escalas $E_h = \Delta_0$, $E_{hU} = \Delta_0 U_{\text{máx}}$, $E_t = 2\pi/(p/2)$, $E_x = U_{\text{máx}}/(p/2)$ y $E_k = p$.



(a) Altura h y caudal hU en el dominio a los $t = 340$ s ($t \sim T/4$).



(b) Altura h y caudal hU en el dominio a los $t = 680$ s ($t \sim T/2$).

Figura 6.6: Resultados de prueba T4 de la Tabla 6.6.

Analizando el error máximo asociado a la altura $\varepsilon_{h_{\max}}^*$, se observa que está acotado inferiormente por el parámetro ε_{wd} (Figuras E.20 a E.23). Esta cota es independiente de la discretización y coeficiente de fricción, afectando a esquemas de primer y segundo orden por igual. En el caso de los errores medios $\varepsilon_{h_{\text{avg}}}^*$, se observa de forma consistente que los esquemas de segundo orden presentan errores menores que los de primer orden para discretizaciones gruesas, tendiendo a equipararse cuando son más finas.

Los valores máximos en función de la discretización para un coeficiente de fricción fijo (Figura 6.7) indican que los esquemas de segundo orden pueden empeorar su desempeño para valores muy pequeños de grilla. Este efecto, para este caso particular, se atribuye al parámetro ε_{wd} que acota la precisión del modelo haciendo que las mejoras que puede entregar el esquema de segundo orden no sean significativas. Por otro lado, se observa que al aumentar la fricción para una discretización fija (Figura 6.8) tiende a favorecer errores de estimación menores en las variables conservativas, siendo más significativo el efecto para esquemas de primer orden.

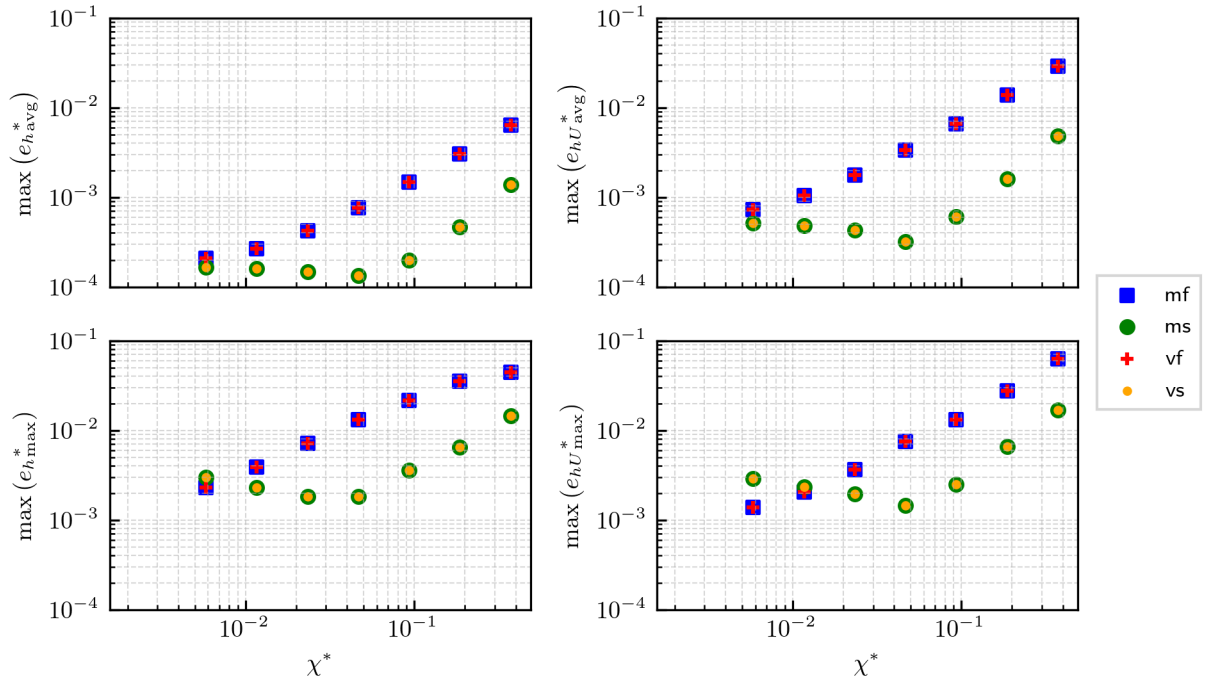


Figura 6.7: Efecto de la discretización adimensional $\chi^* = \chi/E_x$ sobre el error de estimación para los casos de la Tabla 6.6. Se comparan los valores máximo de los errores e_{avg}^* y $e_{\text{máx}}^*$ (primera y segunda fila) para las variables h y hU (primera y segunda columna).

En el caso de la estimación de la posición del frente, el error promedio temporal en una ventana de duración E_t (Figura 6.9) indica que es independiente al coeficiente de fricción, ya que se mantiene constante cuando se varía este parámetro. Por otro lado, se observa que en esquemas de primer orden el error se reduce de forma continua a medida que disminuye el tamaño de grilla, mientras en esquemas de segundo orden éste tiende a estabilizarse en un valor mínimo.

De esta forma, se verifica que los términos asociados a la pendiente, flujo y fricción en conjunto son capaces de reproducir un flujo transitorio correctamente. Además, se evidencia que la elección del parámetro ε_{wd} acota la precisión del esquema, por lo que su elección debe

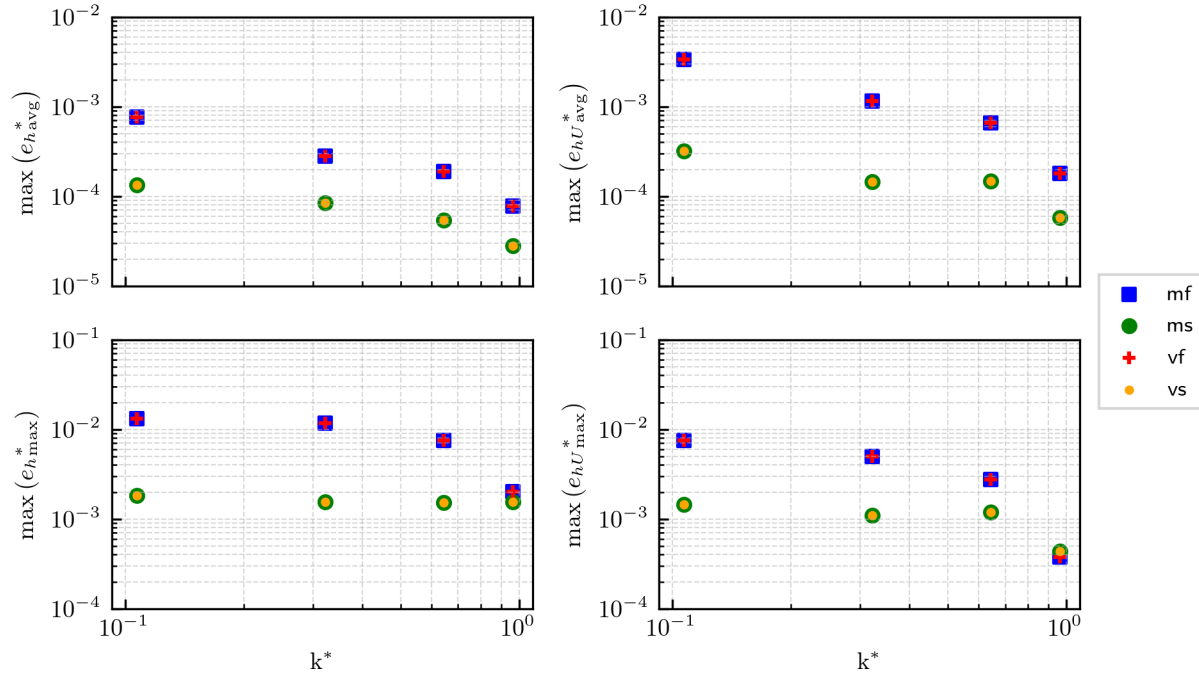


Figura 6.8: Efecto del coeficiente de fricción adimensional $k^* = k/E_k$ sobre el error de estimación para los casos de la Tabla 6.6. Se comparan los valores máximo de los errores e_{avg}^* y $e_{\text{máx}}^*$ (primera y segunda fila) para las variables h y hU (primera y segunda columna).

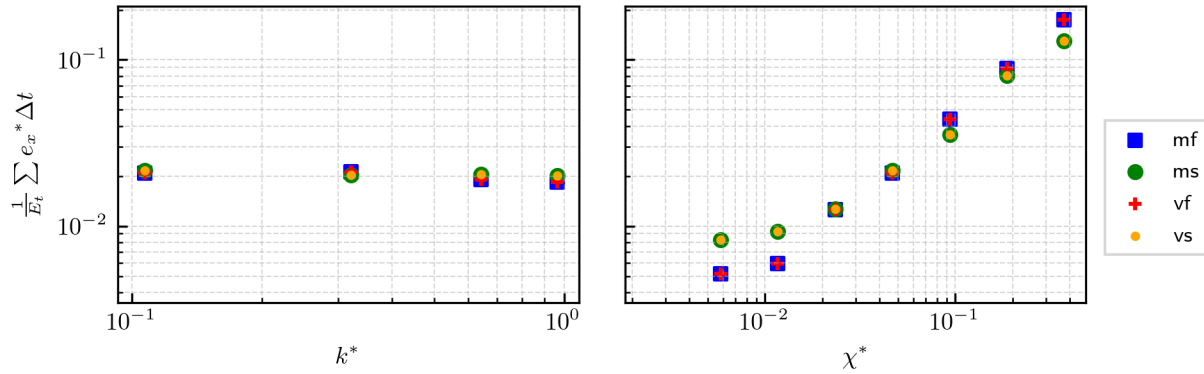


Figura 6.9: Efecto del coeficiente de fricción y la discretización sobre el error de estimación de la posición del frente seco-mojado para los casos de la Tabla 6.6. Se muestra los promedios temporales del error e_x^* en función de $k^* = k/E_k$ y $\chi^* = \chi/E_x$, calculado desde el inicio de la simulación hasta un tiempo $E_t = 2\pi/(p/2)$.

realizase de forma coherente con la escala del problema.

Implementación del factor de fricción para fluidos no-newtonianos

La implementación de la metodología de cálculo del factor de fricción f , descrita en el Capítulo 3⁵, se verificó ejecutando el modelo 24 veces para distintas combinaciones de los parámetros presentados en la Tabla 6.7. En cada una de ellas se ejecutó un dominio con altura constante y caudal unitario variable para un único paso temporal sobre un dominio unidimensional.

La longitud del dominio correspondió a $L = 200$ m, con una discretización $\chi = 1$ m, una altura inicial $h = 1$ m y una distribución espacial inicial del caudal unitario, como se muestra en la ecuación 6.11. En ella, $hU_{\text{mín}} = 10^{-5}$ m²/s y $hU_{\text{máx}} = 10^2$ m²/s son los caudales unitarios mínimo y máximo elegidos como rango para el análisis. Los resultados de estas ejecuciones se presentan en la Figura 6.10, donde se compara el efecto de la variación de cada parámetro.

$$\log(hU) = \log(hU_{\text{mín}}) + \log\left(\frac{hU_{\text{mín}}}{hU_{\text{máx}}}\right) \frac{x}{L} \quad (6.11)$$

Tabla 6.7: Parámetros del fluido para pruebas de verificación de factor de fricción.

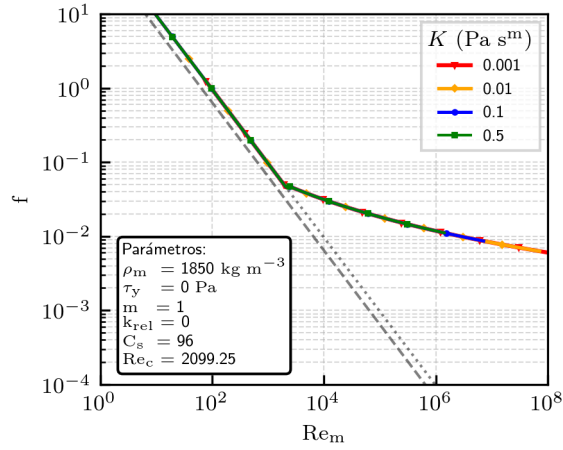
m	K (Pa s ^m)	ρ_m (kg/m ³)	τ_y (Pa)	C_s	k_s (m)
0,5 - 1,2	0,001 - 0,5	1000 - 2000	0 - 200	50 - 100	0 - 0,1

De las figuras obtenidas se desprende que los parámetros K y ρ_m sólo generan variaciones en el valor de Re_m , favoreciendo un flujo laminar con el aumento de K y uno turbulento con el aumento de ρ_m . Este comportamiento es consistente con que sólo intervienen al momento de calcular Re_m para el cálculo del factor de fricción f (ecuación 3.10). En el caso de C_s y k_{srel} , por su parte, generan un aumento de f a medida que aumentan de magnitud, modificando la forma de la curva. Finalmente, m y τ_y generan un efecto combinado ya que intervienen tanto en la definición de Re_m como en el umbral Re_c en el que ocurre el cambio de régimen, con lo que modifican la forma de la curva y favorecen un flujo laminar con aumentos en su magnitud. Los comportamientos observados son consistentes con las definiciones utilizadas por lo que verifica la correcta implementación.

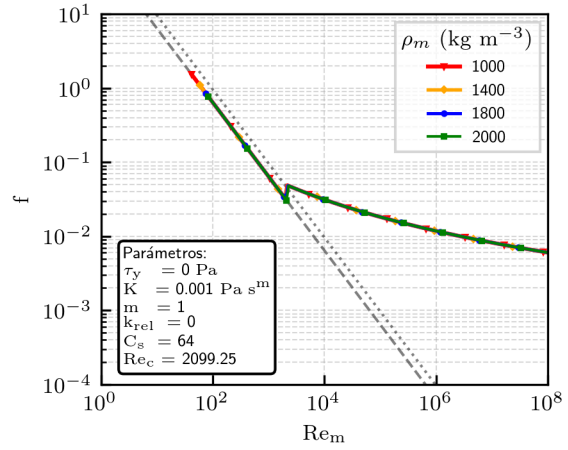
Flujo transitorio bidimensional sin términos fuentes

El comportamiento del flujo en un problema bidimensional es verificado simulando el colapso de una columna cilíndrica de fluido ideal, utilizando como referencia la solución obtenida de la ejecución de la librería `HYPER_WAT` del software `NUMERICA` (Toro, 1999). Este modelo resuelve las ecuaciones de aguas someras con el método de volúmenes finitos WAF

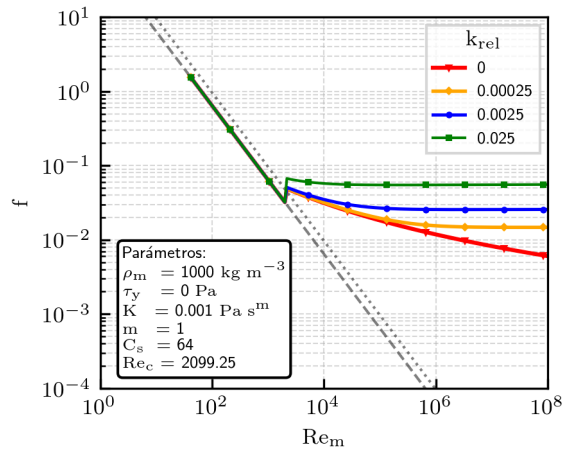
⁵Opción **munoz** en la Tabla 5.2.



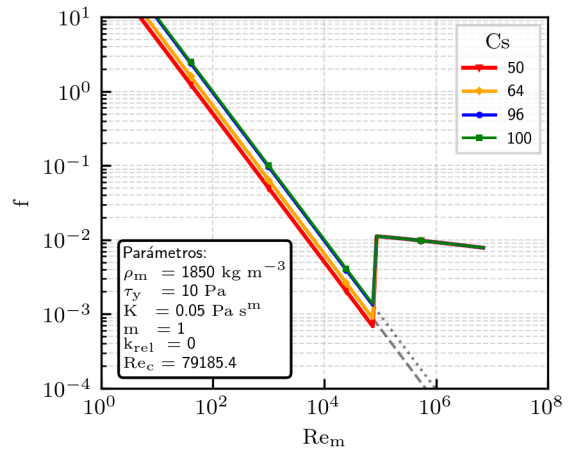
(a) Variación de K .



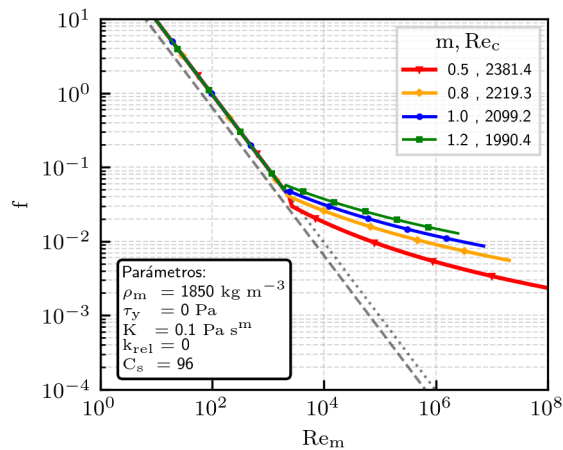
(b) Variación de ρ_m .



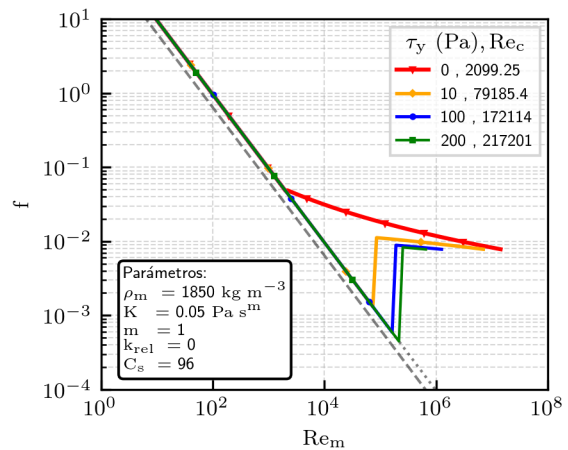
(c) Variación de $k_{srel} = \frac{k_s}{4h}$.



(d) Variación de C_s .



(e) Variación de m .



(f) Variación de τ_y .

Figura 6.10: Verificación de factor de fricción para distintos parámetros del fluido. Se presenta en cada gráfico como referencia el factor de fricción para un flujo laminar. En color gris con línea punteada (.....) se presenta la ecuación $f = 96/Re_m$, mientras que en color gris y una línea discontinua (- -) la ecuación $f = 64/Re_m$.

de Billett & Toro (1997) en conjunto a solucionador aproximado del problema de Riemann HLLC (Toro, 2009b) para un dominio cartesiano.

Las condiciones iniciales del problema analizado corresponden a las presentadas en la ecuación 6.12, donde \vec{x}_p es la posición del centroide de una celda, $R = 2,5$ m es el radio del cilindro, $\vec{x}_c = (20, 20)^T$ m es la posición del eje vertical del cilindro, $h_{in} = 2,5$ m es la altura de fluido en el interior del cilindro y $h_{out} = 0,5$ m en su exterior. El dominio utilizado fue cuadrado de arista $L = 40$ m, utilizando condiciones de borde transmisivas en todos sus límites. Tanto para las soluciones del modelo como la de referencia se utilizó una discretización constante en cada eje $\chi = \chi_x = \chi_y = 0,1$ m, resolviendo en cada caso 160000 celdas por un tiempo $t_f = 7$ s.

$$h(\vec{x}_p) = \begin{cases} h_{in} & \text{si } |\vec{x}_p - \vec{x}_c| \leq R \\ h_{out} & \text{si } |\vec{x}_p - \vec{x}_c| > R \end{cases} ; \quad hU(\vec{x}_p) = 0,0 ; \quad h_0(\vec{x}_p) = 0,0 \quad (6.12)$$

El resultado de las simulaciones para distintos tiempos t se presentan en las Figuras E.27 a E.31 del Anexo E, mostrando vistas en planta y cortes longitudinales. En la Figura E.26 se presentan los errores adimensionales obtenidos de comparar los resultados del modelo con la solución de referencia, en donde se ha utilizado $E_h = h_{in} = 2,5$ m y $E_{hU} = h_{in}\sqrt{gh_{in}} \approx 12,3$ m²/s. En la Figura 6.11 se muestra la progresión del colapso para los primeros segundos.

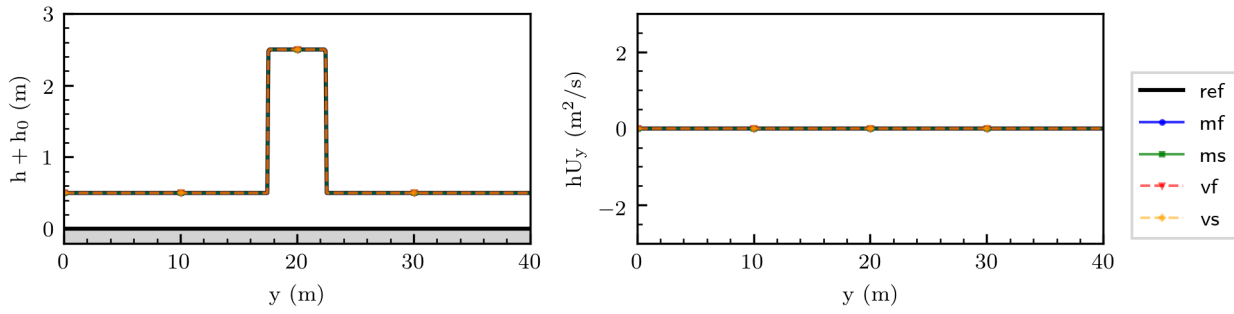
Se observa que todas las metodologías se ajustan correctamente a la solución de referencia, presentando leves diferencias al inicio del colapso. Estas diferencias son máximas al interior del cilindro, donde el esquema sobrestima la velocidad con que la columna colapsa. Esta situación se evidencia a través de las menores alturas predichas por la versión de primer orden del modelo implementado (**mf** y **vf** en la Figura 6.11(b)). Cabe mencionar que la solución de referencia corresponde a un esquema de segundo orden, por lo que es razonable que las soluciones que utilizan el esquema de MUSCL-Hancock presenten mejor desempeño.

Al observar las soluciones en distintos ejes, se verifica que el esquema reproduce correctamente los tipos de onda que el colapso genera y conserva la simetría esperada para la solución. De esta forma, se verifica que la implementación computa correctamente los flujos para problemas bidimensionales.

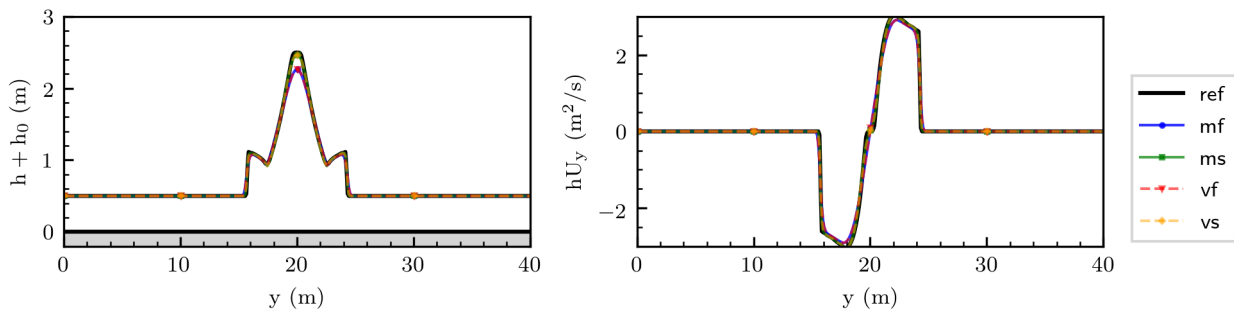
Flujo transitorio unidimensional y bidimensional de fluidos no-newtonianos

Para verificar la implementación considerando un fluido no-newtoniano, fue ejecutado el modelo para el colapso de una columna cilíndrica sobre topografías con pendiente fija. Las simulaciones buscan evidenciar el correcto funcionamiento de las correcciones para flujos donde la resistencia al corte y viscosidad del fluido tienen un rol relevante.

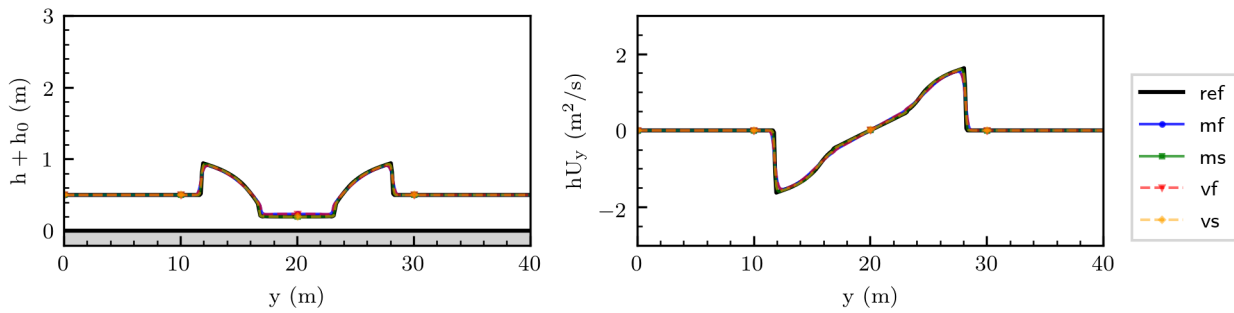
La condición inicial utilizada en estas simulaciones se presenta en la ecuación 6.13, mientras los valores adoptados para los parámetros en estudio son presentados en la Tabla 6.10. En este caso, S corresponde a la pendiente de la topografía, $R = 2,5$ m es el radio del cilindro y $h_{in} = 2,5$ m es la altura al interior del cilindro para el caso en que el lecho tiene pendiente nula. El fluido utilizado para el análisis corresponde a un dato experimental presentado por



(a) $t = 0,0$ s.



(b) $t = 0,4$ s.



(c) $t = 1,4$ s.

Figura 6.11: Colapso de columna cilíndrica de fluido ideal para eje $x = 19,95$ m.

Urrutia (2016) de un relave con una alta concentración volumétrica de sólidos, que presenta las características detalladas en la Tabla 6.8. En función de esta información, los parámetros del modelo utilizados son detallados y justificados en la Tabla 6.9.

$$h(\vec{x}_p) = \begin{cases} h_{in} - S(\vec{x}_p \cdot \hat{i}) & \text{si } |\vec{x}_p| \leq R \\ 0 & \text{si } |\vec{x}_p| > R \end{cases}; \quad hU(\vec{x}_p) = 0,0; \quad h_0(\vec{x}_p) = S(\vec{x}_p \cdot \hat{i}) \quad (6.13)$$

Tabla 6.8: Parámetros de un relave para verificación del modelo para flujo transitorio. Fuente: Urrutia (2016), Anexo I, página 167, id 43.

ϕ	d_{80} (μm)	$W_{arcilla}$ (wt %)	$T_{arcilla}$	$\dot{\gamma}$ (s^{-1})	m	τ_y (Pa)	K (Pa s)
0,4	63,94	25	Montmorillonita	100-280	1	294,05	0,3184

Tabla 6.9: Parámetros del modelo para caso de verificación de flujo de fluidos no-newtonianos.

Parámetro	Unidad	Valor	Justificación
$\rho_{arcilla}$	kg/m^3	2903	Fuente: Urrutia (2016), Capítulo 5, página 89.
ρ_{arena}	kg/m^3	2650	Valor estándar.
ρ_s	kg/m^3	2713	$\rho_s = (1 - W_{arcilla})\rho_{arena} + W_{arcilla}\rho_{arcilla}$.
ρ_w	kg/m^3	1000	Se supone la densidad del agua como representativa la del fluido de proceso.
ρ_m	kg/m^3	1685	$\rho_s = (1 - \phi)\rho_w + \phi\rho_s$.
ε_{wd}	m	0,001	Se considera una altura un orden de magnitud superior a $2d_{80}$.
ε_{τ_y}	m	0,04	Según la ecuación 4.73 con $L_c = 0,05$ m.
C_s		96	Fuente: Rickenmann (1991), página 1423.
k_s	m	0	Se considera pared hidrodinámicamente lisa.
μ_0	Pa s	2941	Según metodología asociada a la ecuación 4.71 con $\dot{\gamma}_{ref} = 0,1 \text{ s}^{-1}$.
U_{small}	m/s	1×10^{-6}	Elección arbitraria para un valor pequeño.

Cada prueba se ejecutó en dominios con longitudes $L_x = 60$ m y $L_y = 30$ m dependiendo del caso, una discretización $\chi = \chi_x = \chi_y = 0,1$ m por un tiempo $t_f = 30$ s, con un muestreo cada un segundo.

Cabe mencionar que en aquellas pruebas donde se corrige el esfuerzo de fluencia considerando la posible resistencia no drenada \mathcal{S}_u del material, se inicializó esta variable como se muestra en la ecuación 6.14. Los valores de \mathcal{S}_u utilizados pueden analogarse a valores reales de lamas en tranques de relaves si se considera $\mathcal{S}_u/\sigma_3 \sim 0,2$ (Conejera (2016), página 58) de donde se desprende un confinamiento efectivo de 50 kPa para la prueba T6 y 250 kPa para la prueba T7. Estos confinamientos corresponderían a materiales de la cubeta ubicados a profundidades en torno a los 3 m y los 15 m respectivamente.

$$\mathcal{S}_u(\vec{x}_p) = \begin{cases} \mathcal{S}_u = \text{constante} & \text{si } |\vec{x}_p| \leq R/2 \\ 0 & \text{si } |\vec{x}_p| > R/2 \end{cases} \quad (6.14)$$

Tabla 6.10: Condiciones particulares de pruebas de verificación de flujo de fluidos no-newtonianos.

Prueba	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
S (m/m)	0,0	-0,1	-1,0	0,0	-0,1	0,0	0,0
\mathcal{S}_u (kPa)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	10,0	50,0
Simulación	1-D	1-D	1-D	2-D	2-D	2-D	2-D

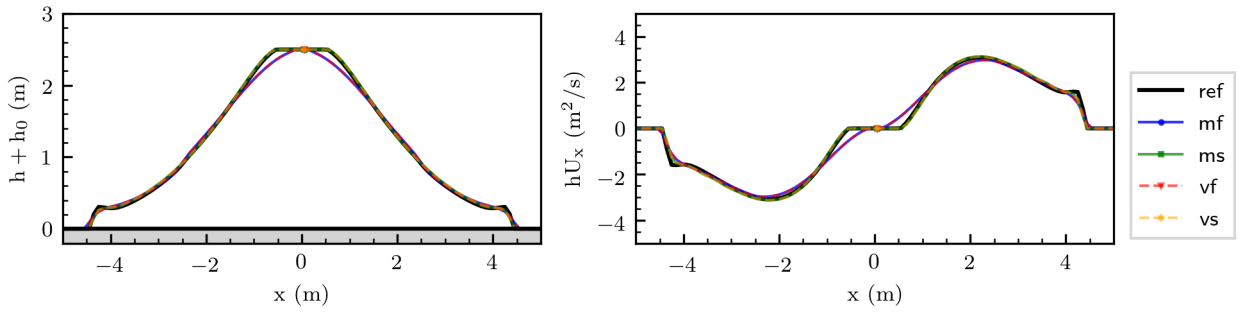
El resultado de las simulaciones para distintos tiempos es presentado en las Figuras E.32 a E.46 del Anexo E, mostrando vistas en planta y cortes longitudinales. En las Figuras E.47 a E.49 se presentan los errores adimensionales obtenidos de comparar los resultados del modelo con la solución de referencia, que en este caso corresponde a la solución entregada por el modelo para la versión de primer orden \mathbf{vf} sobre una malla numérica fina $\chi = \chi_x = \chi_y = 0,025$ m. Las escalas utilizadas en estas últimas figuras corresponden a $E_h = h_{in} = 2,5$ m y $E_{hU} = h_{in} \sqrt{g h_{in}} \approx 12,3$ m²/s.

Se observa que todas las metodologías se ajustan correctamente a la solución de referencia. Los esquemas de segundo orden presentan un mejor desempeño al inicio del movimiento, empeorando la estimación hacia el final de la simulación. Este comportamiento es, presumiblemente, debido a la naturaleza de los esquemas y la metodología mediante la cual se detiene el flujo. El mejor ajuste de los esquemas de segundo orden puede verificarse en torno a los gradientes fuertes de la Figura 6.12(a), mientras su peor desempeño en la Figura 6.12(b) en torno al frente de detención y en el centro del dominio.

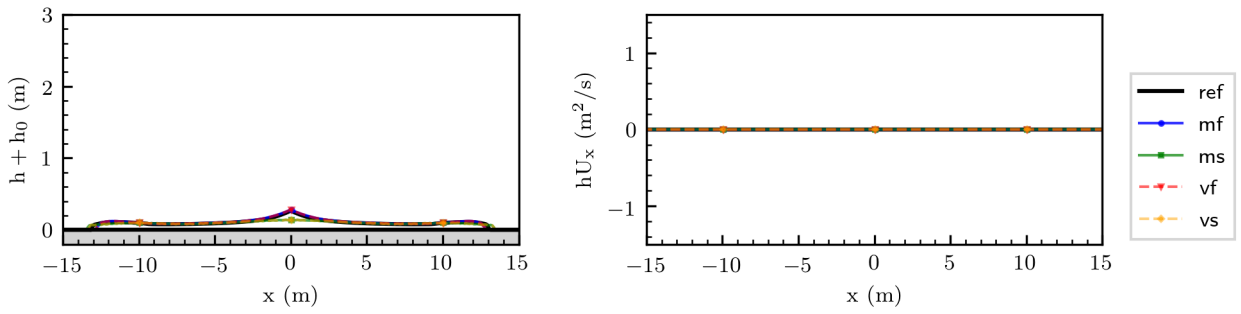
La detención del flujo fue incorporada al modelo como una imposición que se realiza al final de cada paso temporal, por lo que es una condición que se activa de forma abrupta y es evaluada una cantidad fija de veces. Al utilizar un esquema tipo MUSCL-Hancock, tal como fue descrito en la sección 4.3.3, no se considera que puede existir una detención durante el paso temporal y, además, la evolución de las variables conservativas tiende a ser más suave que en su símil de primer orden. De esta manera, los esquemas de segundo orden tienden a detener el flujo de forma más lenta, ya sea porque se subestima el esfuerzo de corte en el entorno temporal de la detención o, simplemente, dado que evalúa la condición de detención una menor cantidad de veces que un esquema de primer orden con igual precisión.

Otro análisis interesante se desprende de observar que la predicción de la posición del frente empeora a medida que aumenta la pendiente. Esto es natural debido a que las ecuaciones de aguas someras consideran que la presión varía hidrostáticamente en el eje vertical, situación que no se verifica en el frente de onda y que sólo puede ser sobrellevado, en cierta medida, con una discretización fina.

Ante una reología como la analizada, que presenta una alta viscosidad y un esfuerzo de fluencia que desplaza el cambio de régimen de flujo a números de Reynolds muy altos, el factor de fricción en la zona del frente de onda puede estar calculándose utilizando una formulación laminar. Por ello, y dado que el frente presenta los mayores valores de Re_m y que $c_f \sim 1/Re_m$,



(a) Prueba T4 para $t = 0,034$ s.



(b) Prueba T4 para $t = 9$ s.

Figura 6.12: Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba bidimensional T4 de la Tabla 6.10 para $y = 0,05$ m.

la fricción en esa zona no es lo suficientemente intensa para desacelerar el frente a la misma tasa que en otras zonas de su entorno espacial. Esto favorece un adelgazamiento del flujo en el entorno espacial del frente causando, tentativamente, el corte del flujo por acción del esfuerzo de fluencia. Este efecto puede observarse en una etapa temprana en la estimación entregada por los esquemas de segundo orden de la Figura 6.13, donde el caudal del frente se sobrestima respecto de la solución de referencia, lo que genera que el flujo se adelgace en $x \in [31, 32]$ m aproximadamente.

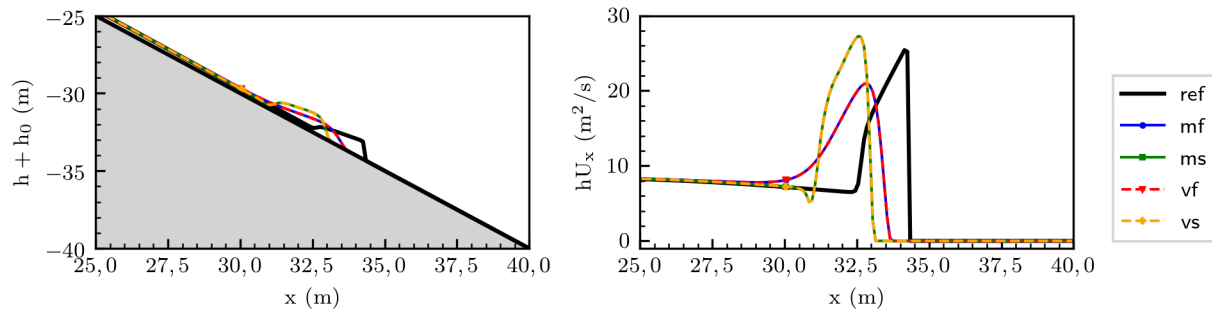


Figura 6.13: Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T3 de la Tabla 6.10.

Por otro lado, el efecto de la corrección debido a la resistencia no drenada \mathcal{S}_u del material se evidencia sólo en los instantes tempranos de la simulación. Este efecto es apreciable al comparar la zona central del flujo para las pruebas T4 y T7, Figuras 6.12(a) y 6.14 respectivamente. La zona central del dominio en la prueba T7 no se ve afectada hasta que el borde libre de la misma supera el umbral impuesto por el parámetro \mathcal{S}_u , que corresponde a una altura de 0,78 m aproximadamente.

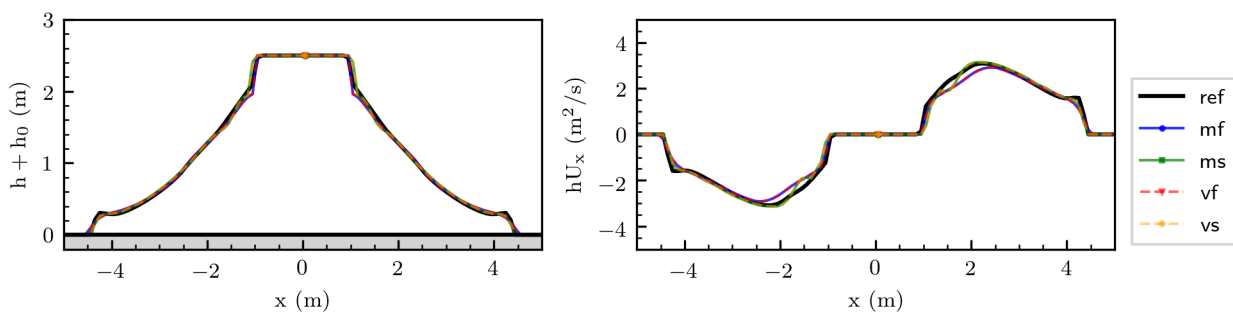


Figura 6.14: Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba bidimensional T7 de la Tabla 6.10 para $t = 0,034$ s e $y = 0,05$ m.

Finalmente, al observar las soluciones en distintos ejes, se verifica que el esquema reproduce correctamente los tipos de onda que el colapso genera. El nivel de precisión en la estimación del modelo disminuye en el entorno del frente de onda, siendo un fenómeno totalmente explicable a partir de los supuestos elegidos para el modelo, siendo errores inherentes al tipo de ecuaciones y la metodología con que se resuelven.

Lecho móvil con correcciones en el gasto sólido

Para verificar la implementación considerando un fluido que escurre sobre un lecho móvil, fue ejecutado el modelo para una prueba propuesta por Fernández-Nieto et al. (2017) en donde se resuelve la erosión unidimensional de un lecho que presenta un escalón.

El detalle de las configuraciones simuladas se presenta en la Tabla 6.11, las que consisten en variar las distintas correcciones del gasto sólido implementadas en el modelo. En cada prueba se inicializa el dominio utilizando la ecuación 6.15, donde se ha utilizado una discretización $\chi = 0,05$ m, un dominio con longitud total de $L = 10$ m, una formulación para la fricción según la ecuación de Manning⁶ con $n = 0,01$ m^{-1/3}s, una formulación para el gasto sólido según Meyer-Peter & Müller (1948)⁷ y un tiempo total de simulación de $t_f = 2000$ s. Las características asociado al suelo en todos los casos consideró $\rho_s = 2650$ kg/m³, $p = 0$, $\tan \phi = 0,58 \Rightarrow \phi \sim 30^\circ$ y $d_s = 0,001$ m. Se impuso como condiciones de borde: $hU(x = 0, t) = 1,5$ m²/s, $\nabla hU(x = L, t) = 0$ m/s, $h(x = 0, t) = h(x = L, t) = 0,8$ m.

$$h_0(x, 0) = \begin{cases} 0,2 & \text{si } x \in [4, 6] \\ 0,1 & \text{si no} \end{cases}; \quad hU(x, 0) = 1,2; \quad h(x, 0) + h_0(x, 0) = 1 \quad (6.15)$$

Tabla 6.11: Configuraciones básicas para la prueba de Fernández-Nieto et al. (2017).

Prueba	T1	T2	T3	T4	T5
Cambio en el umbral de arrastre por curva de Shields-Mantz	no	si	no	no	si
Efecto de la pendiente	no	no	si	no	si
Corrección por deslizamiento	no	no	no	si	si

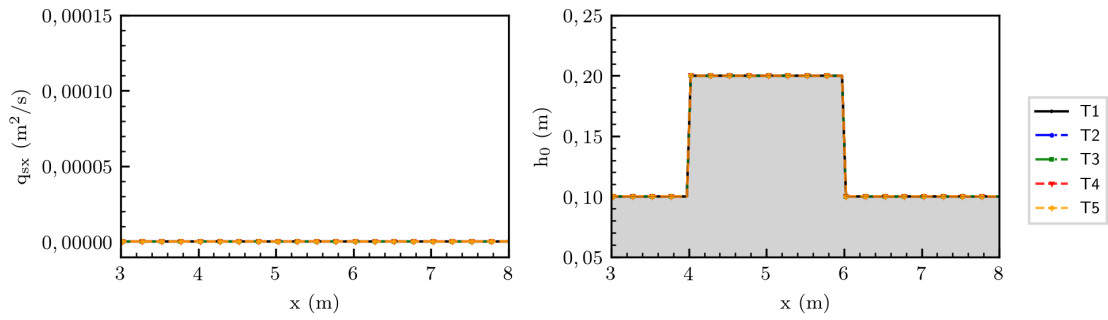
El resultado de las simulaciones para distintos tiempos es presentado en las Figuras E.50 a E.54 del Anexo E, mostrando cortes longitudinales. En la Figura 6.15 se compara el resultado de todas las pruebas ejecutadas para la configuración **vs**.

Se observa en la Figura 6.15(d) que las correcciones asociadas al umbral de arrastre y el deslizamiento son poco relevantes en la forma final de la onda de sedimento, mientras que la corrección asociada al efecto de la pendiente genera cambios apreciables. Este comportamiento se debe, en este caso particular, a que la variación del gasto sólido es uniforme en todo el dominio para las dos primeras correcciones, afectando poco al balance final de sedimento en cada celda. Por otro lado, en el caso de la última corrección, son generados desbalances locales del flujo de sedimento en torno a las mayores pendientes, favoreciendo la homogeneización de la cota de fondo.

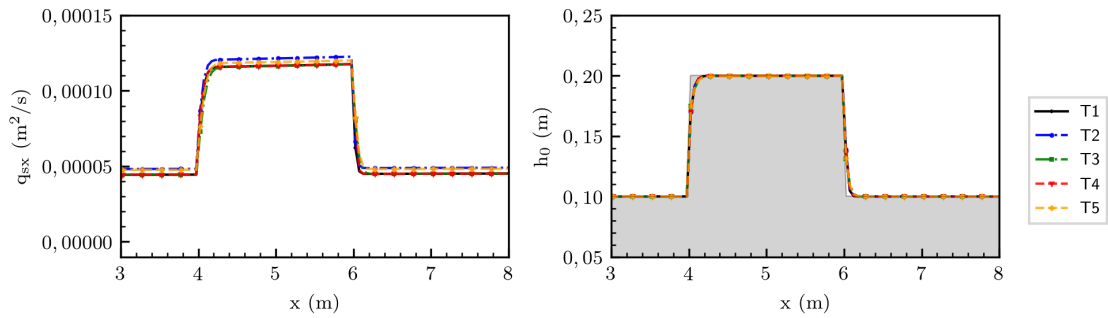
Los comportamientos anteriores son consistentes con la formulación conservativa elegida, verificando el correcto funcionamiento de la implementación al momento de erosionar.

⁶Opción **manning** en la Tabla 5.2.

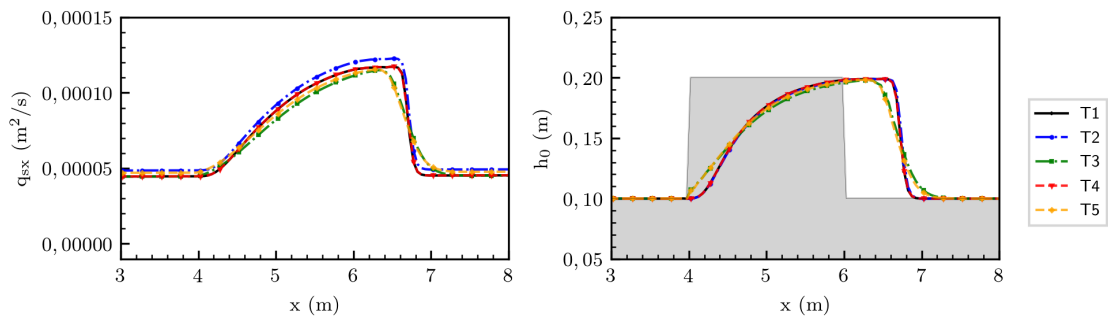
⁷Opción **meyerPeterMuller** en la Tabla 5.3.



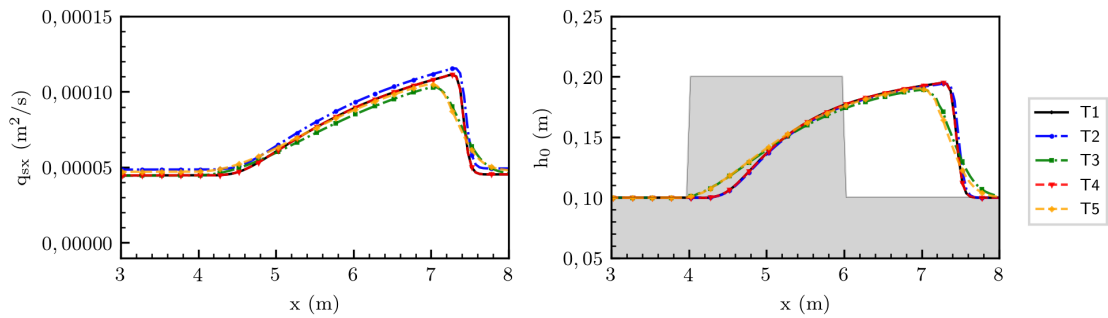
(a) $t = 0$ s.



(b) $t = 30$ s.



(c) $t = 1000$ s.



(d) $t = 2000$ s.

Figura 6.15: Comparación de gasto sólido y cota de fondo en pruebas de Tabla 6.11 para configuración vs.

Erosión de una presa a escala de laboratorio

Tomando como referencia la geometría de los experimentos realizados por Tingsanchali & Chinnarasri (2001), fue diseñado una verificación que busca evaluar el comportamiento del modelo ante una rotura de presa.

El dominio corresponde a una canal rectangular de 35 m de largo, 1 m de ancho y 1 m de alto, en el que se ubica una presa de arena en su zona central. Esta presenta una altura inicial de 0,8 m de alto, con un coronamiento de 0,3 m, un talud aguas arriba 3:1 (H:V) y un talud aguas abajo 5:1 (H:V). Como condición inicial, se considera que el fluido contenido mantiene una cota constante de 1,3 m respecto del pie de presa, con lo que se busca modelar una falla instantánea que genera un desborde de fluido. Un esquema de la condición inicial del caso estudiado se presenta en la Figura 6.16. La reología de las configuraciones simuladas se presentan en la Tabla 6.12.

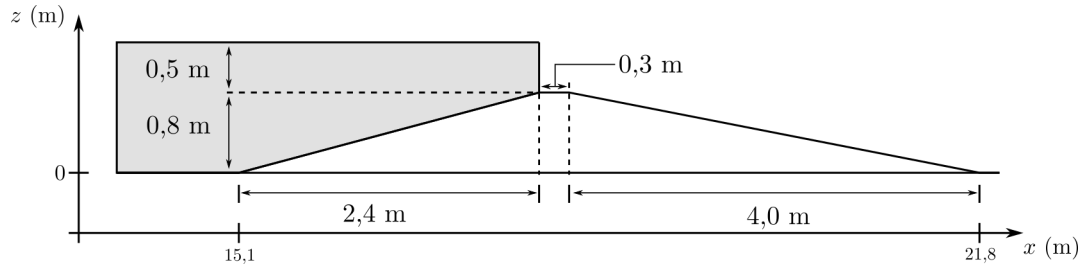


Figura 6.16: Esquema de condición inicial para verificación de erosión de una presa a escala de laboratorio.

Tabla 6.12: Configuraciones básicas para la prueba de erosión de presa a escala de laboratorio.

Prueba	m	K (Pa s ^m)	ρ_m (kg/m ³)	τ_y (Pa)
T1	1	0,001	1000	0
T2	1	0,3184	1685	294,05
T3	1	0,3184	1300	294,05
T4	1	0,3184	1800	294,05
T5	1	0,3184	1685	50
T6	1	0,3184	1685	100
T7	1	0,05	1685	294,05
T8	1	0,15	1685	294,05
T9	0,6	0,3184	1685	294,05
T10	0,9	0,3184	1685	294,05

En cada prueba el dominio se discretiza con $\chi_x = \chi_y = 0,1$ m, ejecutando las simulaciones durante un tiempo $t_f = 120$ s con muestreos cada 0,5 s. Para la fricción, se utiliza la formulación presentada en la sección 3.2.1⁸ con $C_s = 96$ y $k_s = 0,001$ m. Por otra parte, el gasto sólido de fondo es calculado según lo presentado en la sección 3.2.2⁹. Cada caso se ejecutó adoptando las características del suelo B-2 del trabajo de Tingsanchali & Chinnarasri

⁸Opción **munoz** en la Tabla 5.2.

⁹Opción **rickenmann** en la Tabla 5.3.

(2001), con $d_s = d_m = 1,13\text{mm}$, $d_{90} = 3,8\text{mm}$ y $d_{30} = 0,52\text{mm}$, considerando $p = 0,3$, $\tan \phi = 0,58 \Rightarrow \phi \sim 30^\circ$.

En las Figuras E.55 a E.64 del Anexo E, se presenta para cada prueba perfiles longitudinales de la presa en distintos instantes de tiempo, junto a los caudales y volúmenes vertidos. En las Figuras 6.17 y 6.18 se compara, en función de cada parámetro reológico de interés, la cota del coronamiento de la presa y el gasto sólido de fondo en dirección perpendicular a ella una vez pasados 5 s de simulación, para los esquemas **vf** y **vs** respectivamente. En la Figuras 6.19 y 6.20 se muestran el efecto del cambio de los parámetros reológicos sobre los volúmenes vertidos y caudales efluentes. Finalmente, en la Figura 6.21 se presenta un ejemplo del efecto de la configuración numérica sobre los volúmenes vertidos.

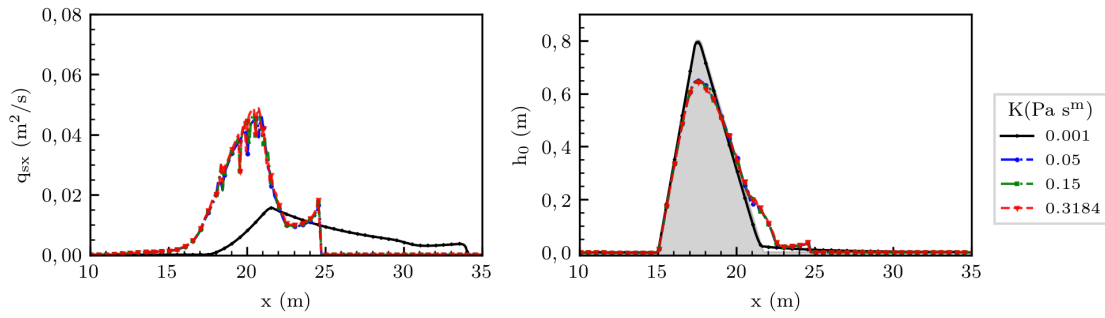
Se observa en las Figuras 6.17 y 6.18 que, para el rango de valores adoptados, el índice de flujo m y del índice de consistencia K no modifican significativamente la erosión de la presa, a diferencia de lo observado ante variaciones de la densidad de la mezcla ρ_m y el esfuerzo de fluencia τ_y . Este efecto se puede explicar observando la influencia de estos parámetros en los números adimensionales involucrados en el cálculo del gasto sólido. Para evidenciar y ejemplificar tales efectos, se presenta en la Tabla 6.13 la evaluación de los números adimensionales para los fluidos no-newtonianos analizados considerando una altura de flujo igual a la del borde libre $h \sim 0,5$ m y una velocidad de flujo máxima, igual a $U \sim c = \sqrt{gh}$.

En todos los casos, el orden de magnitud del número de Reynolds Re_m mantiene al flujo en régimen laminar (ver Figura 6.10) y los valores del número de Reynolds de la partícula Re_{*P} rondan la unidad. Dado que la elección de h y U son valores máximos, es razonable suponer que tanto el régimen de flujo como el umbral de arrastre durante cada simulación estén acotados por estas magnitudes en las pruebas estudiadas.

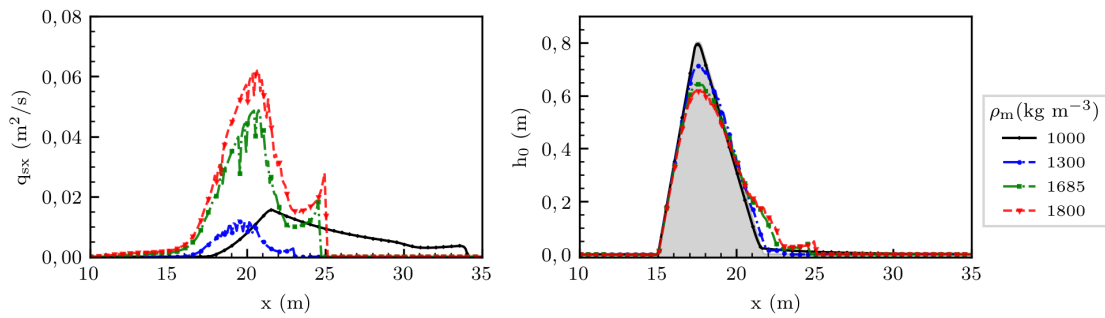
Tabla 6.13: Componentes de ecuación de gasto sólido de fondo para una condición particular suponiendo $h \sim 0,5$ m y $U \sim c = \sqrt{gh}$.

Variable	Prueba	Re_m	c_f	θ	$\theta - \theta_y$	R	Re_{*P}
K	T7	$2,2 \times 10^2$	0,05	41,3	13,8	0,57	1,4
	T8	$2,2 \times 10^2$	0,05	41,4	13,9	0,57	1,2
	T2	$2,2 \times 10^2$	0,05	41,6	14,1	0,57	1,0
ρ_m	T3	$1,7 \times 10^2$	0,07	29,8	10,1	1,04	1,0
	T2	$2,2 \times 10^2$	0,05	41,6	14,1	0,57	1,0
	T4	$2,4 \times 10^2$	0,05	47,3	16,1	0,47	1,0
τ_y	T5	$1,3 \times 10^3$	0,01	7,4	2,7	0,57	0,7
	T6	$6,4 \times 10^2$	0,02	14,4	5,1	0,57	0,8
	T2	$2,2 \times 10^2$	0,05	41,6	14,1	0,57	1,0
m	T9	$2,2 \times 10^2$	0,05	41,4	13,9	0,57	1,4
	T10	$2,2 \times 10^2$	0,05	41,6	14,1	0,57	1,2
	T2	$2,2 \times 10^2$	0,05	41,6	14,1	0,57	1,0

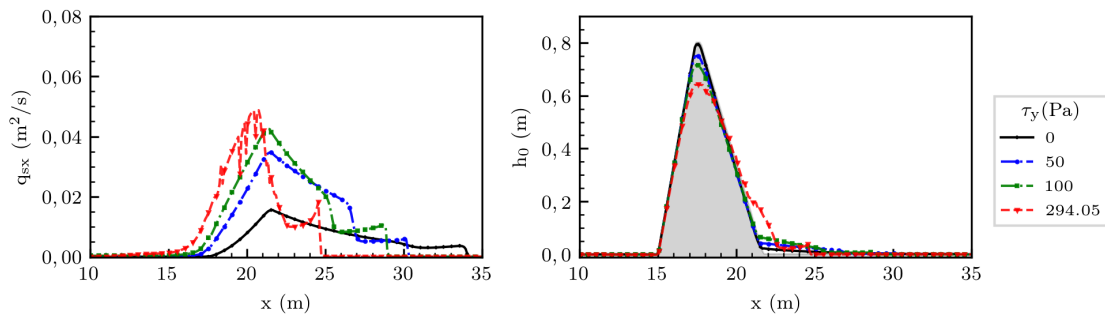
Como m y K no generan cambios relevantes en Re_m , único adimensional en el que intervienen directamente, el cálculo del gasto sólido no se ve sustancialmente afectado por su



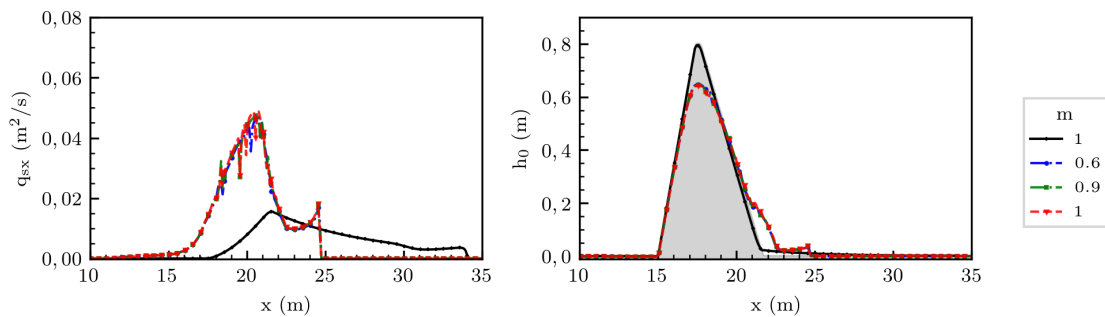
(a) Efecto de la variación de K



(b) Efecto de la variación de ρ_m

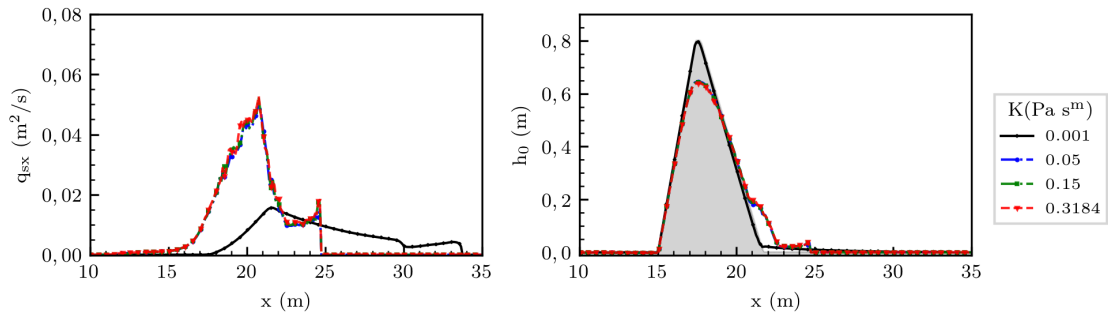


(c) Efecto de la variación de τ_y

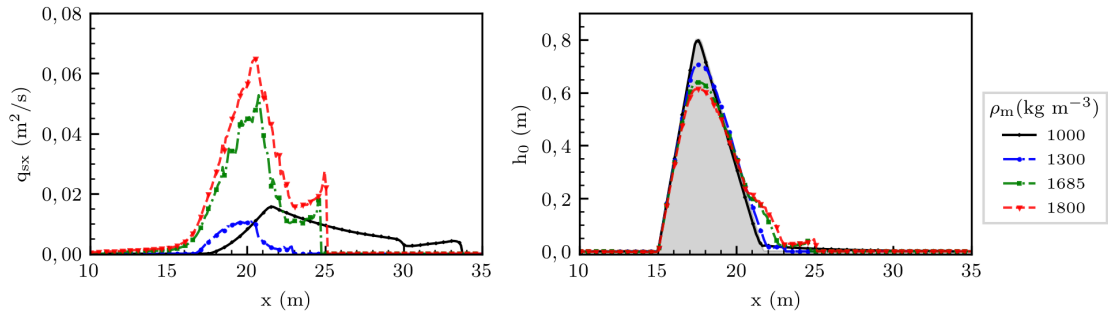


(d) Efecto de la variación de m

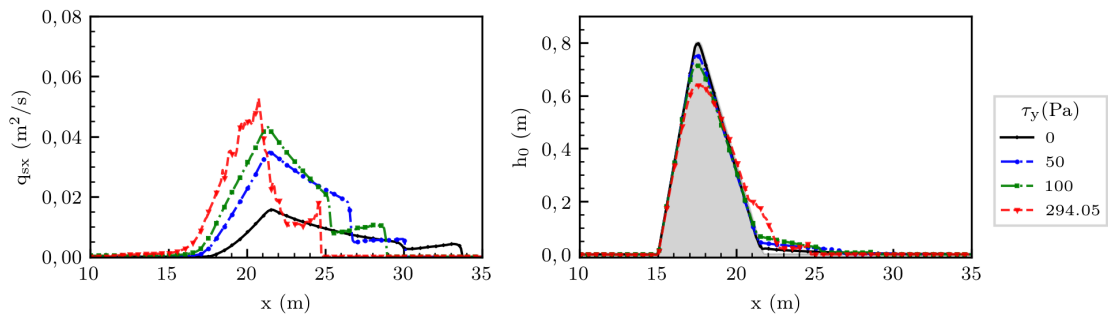
Figura 6.17: Efecto de la variación de distintos parámetros en la estimación del gasto sólido para $t = 5$ s para configuración **vf**. Se presenta en negro como referencia los valores obtenidos para un flujo de agua.



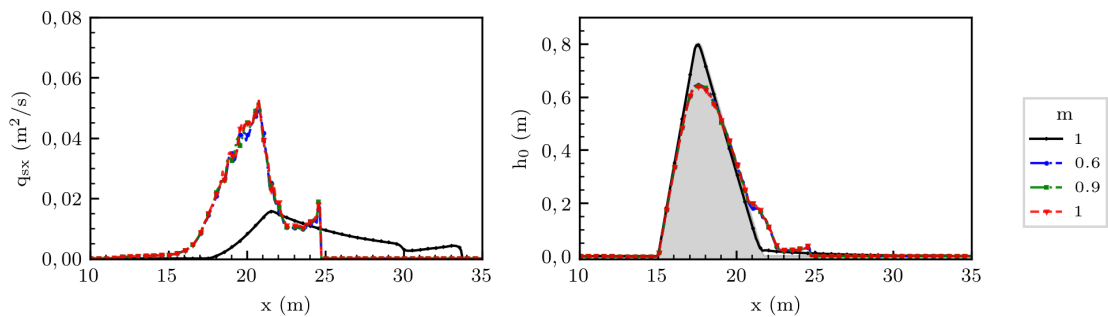
(a) Efecto de la variación de K



(b) Efecto de la variación de ρ_m



(c) Efecto de la variación de τ_y



(d) Efecto de la variación de m

Figura 6.18: Efecto de la variación de distintos parámetros en la estimación del gasto sólido para $t = 5$ s para configuración vs. Se presenta en negro como referencia los valores obtenidos para un flujo de agua.

variación. Esto explica la poca influencia de estos parámetros en los resultados de las Figuras 6.17(a), 6.17(d), 6.18(a) y 6.18(d). En caso contrario, el efecto de la variación de τ_y genera un cambio de hasta un orden de magnitud en Re_m , desencadenando una mayor capacidad erosiva. Esta mayor capacidad se ve ilustrada en el aumento de hasta 5 veces de θ , con lo que se explica las diferencias presentadas en la Figuras 6.17(c) y 6.18(c).

Una explicación levemente diferente se observa ante la variación de ρ_m , que afecta directamente en todos los parámetros involucrados en el cálculo del gasto sólido. Su efecto sobre Re_m genera una capacidad erosiva mayor, ilustrada en los valores de θ , pero que no es suficiente por si sola para explicar la diferencia de cotas erosionadas en cada caso. La influencia más relevante es sobre la densidad específica sumergida de los sedimentos R , que disminuye sustancialmente a medida que aumenta ρ_m . Dado que q_s es proporcional al inverso de R , y este último al aumentar de valor tiende a disminuir bajo la unidad, el valor de el gasto sólido aumenta rápidamente.

Los comportamientos antes mencionados son consistentes con la interpretación física de ρ_m y τ_y , los cuales son indicadores de la cantidad de partículas que presentaría la mezcla. En caso que la concentración de partículas sea mayor, es razonable que su interacción con el lecho sea más intensa y que aumente la capacidad erosiva del flujo.

Otra observación relevante de las Figuras 6.17 y 6.18, corresponde a tendencia dispersiva que presenta el gasto sólido de fondo en varios de los escenarios ejecutados. Al analizar detenidamente las condiciones para los que se presenta dicho comportamiento, se evidencia que ocurre de forma apreciable en la solución entregada por el esquema de primer orden **vf** y sólo en los casos donde el esfuerzo de fluencia τ_y presenta el valor máximo del rango analizado (Pruebas T2 a T4 y T7 a T10), no presentándose para los otros escenarios. Adicionalmente, este efecto se aprecia con menor intensidad en los resultados obtenidos con el esquema de segundo orden **vs**.

Con la información disponible, es posible inferir que esta tendencia dispersiva puede ser un artefacto que viene producido por el cálculo numérico del factor de fricción f . Dadas las escalas presentes en el caso analizado, se cumple en celdas contiguas el factor de fricción f podría presentar diferencias apreciables ante ligeras variaciones de la magnitud de velocidad del flujo $|U|$, para valores altos del esfuerzo de fluencia τ_y . Estas diferencias, al momento de calcular el esfuerzo de corte de fondo $|\tau_0| = \rho_m f / 8 |U|^2$ (operación que en términos computacionales ocurre en un paso posterior) podría generar cambios que escalen con la magnitud del gasto sólido q_s (notar que $q_s = q_s(|\tau_0|)$ en ecuación 3.30).

La explicación anterior es consistente con el hecho que este artefacto se ve disminuido tanto cuando son aplicados esquemas de segundo orden y en las pruebas donde τ_y presenta valores menores. En el primer caso, estos esquemas por construcción suavizan las diferencias entre las velocidades $|U|$, disminuyendo a su vez las diferencias en el cálculo del factor de fricción f . En el segundo caso, al disminuir el esfuerzo de fluencia τ_y , naturalmente el número de Reynolds Re_m tiende a aumentar, disminuyendo el impacto local de la fricción sobre la magnitud de velocidad del flujo $|U|$ que tentativamente podría generar estas variaciones locales. Ahora bien, cabe mencionar que esta es una hipótesis que requiere mayor cantidad de casos de análisis para poder ser probada de forma robusta, por lo que sólo se presenta como una de las explicaciones factibles del fenómeno observado.

Al analizar el efecto de la variación de K y m sobre la distribución de caudales y volúmenes vertidos de fluidos no-newtonianos (Figuras 6.19(a), 6.19(d), 6.20(a) y 6.20(d)), es evidente que el cambio en estos parámetros reológicos no tiene un efecto apreciable. Ahora bien, al ser comparados con un flujo de agua, se observa que los fluidos no-newtonianos presentan un volumen total vertido acotado y caudales máximos menores. Esto es natural debido a que presentan una mayor resistencia al escurrimiento por su mayor viscosidad y la existencia de esfuerzo de fluencia.

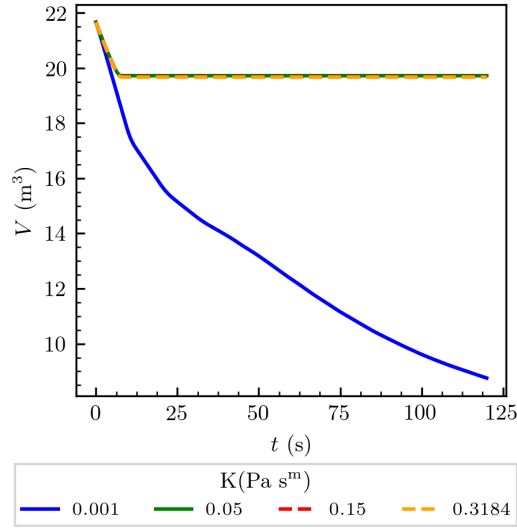
Por su parte, el aumento de ρ_m en los fluidos no-newtonianos genera un aumento progresivo en los caudales máximos (Figura 6.20(b)) y un volumen total vertido mayor (Figura 6.19(b)). Al aumentar la magnitud de este parámetro, existe un aumento en la inercia del fluido por lo que es capaz de vencer la fluencia y la viscosidad más fácilmente. Ahora bien, este efecto no es suficiente para que los caudales puedan ser semejantes a los observados en un flujo de agua.

En el caso de las variaciones de τ_y , los volúmenes totales vertidos son inversamente proporcionales al aumento del parámetro (Figura 6.19(c)). Esto se explica debido a que las condiciones de detención del flujo son más restrictivas y actúan en un dominio más extenso, frenando el flujo. Ahora bien, es interesante notar que los caudales máximos (Figura 6.20(c)) pueden ser semejantes a los observados en agua si se disminuye este parámetro. Esto es debido a que el aumento en el esfuerzo de fluencia τ_y puede ser interpretado, una vez que existe movimiento, como un aumento de la viscosidad. De esta forma, al disminuir su valor, la resistencia a fluir disminuye y, estando en régimen laminar, es posible tener velocidades mayores y equiparables a las que se pueden observar en un flujo de agua en régimen turbulento.

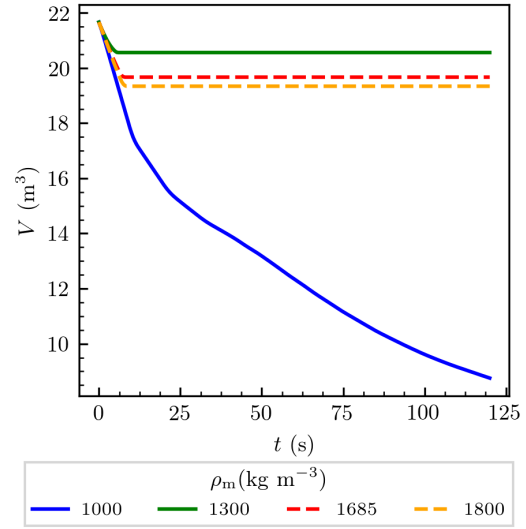
Otro comportamiento interesante ocurre al observar los pulsos de caudales generados en el caso T5, donde $\tau_y = 50$ Pa en la Figura 6.20(c). Estos pulsos se generan por el sucesivo comienzo del movimiento por una variación de altura de fluido, seguido de una detención del flujo en la cubeta al estar limitada la descarga por acción del muro. Este fenómeno ocurre varias veces en la descarga del material, debido a que este pulso genera un aumento local del caudal descargado, aumentando la erosión, repitiendo el ciclo.

Finalmente, el efecto de la elección del esquema numérico es ejemplificado en la Figura 6.21 para los casos en que se varía ρ_m . Se observó que los volúmenes vertidos cuando son utilizados esquemas de segundo orden son mayores. Esto es debido a que las zonas de interfaz de inicio de movimiento, las reconstrucciones generan condiciones locales que permiten el movimiento cuando esquemas de primer orden no lo permitirían. Esto se puede evidenciar en que, la mayoría de las veces, los esquemas de segundo orden tienden a tener 2 pulsos consecutivos con aumento de caudal (ver Figuras E.55 a E.64 letras (d) y (e)).

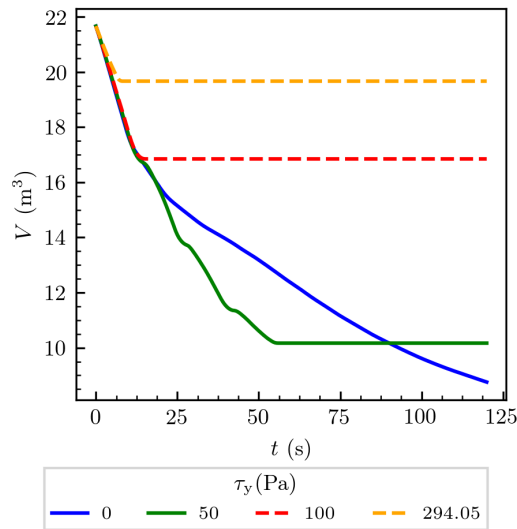
De esta forma, se evidencia que en el caso de una rotura de presa el efecto de los parámetros reológicos es coherente con lo diseñado. Ahora bien, se observa que los esquemas de segundo orden no representarían correctamente el cambio abrupto que la interfaz de inicio de movimiento presenta. Esto, en algunos casos, permitiría el inicio del flujo en condiciones que esquemas de primer orden con igual precisión no lo harían, pudiendo sobrestimar los volúmenes vertidos sólo por una representación deficiente de tal zona.



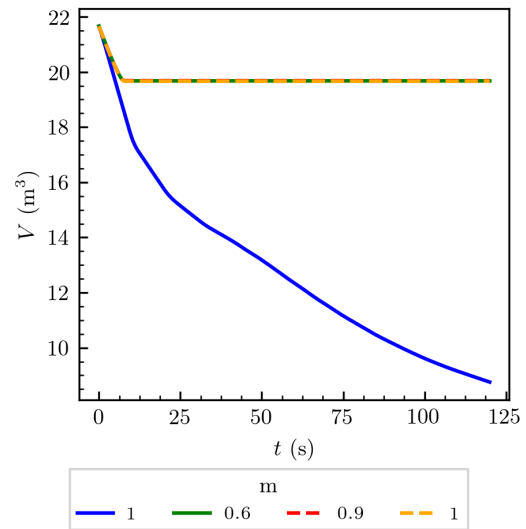
(a) Efecto de la variación de K



(b) Efecto de la variación de ρ_m

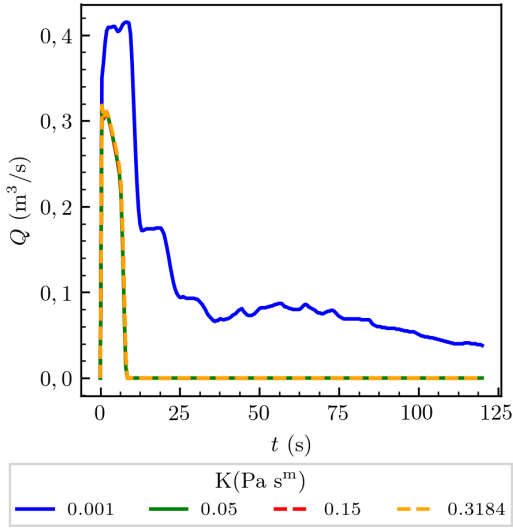


(c) Efecto de la variación de τ_y

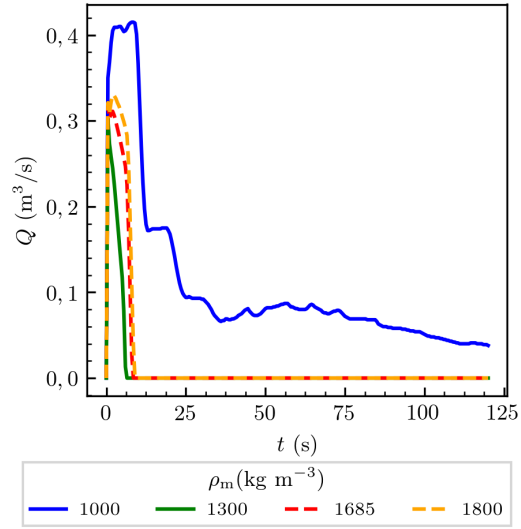


(d) Efecto de la variación de m

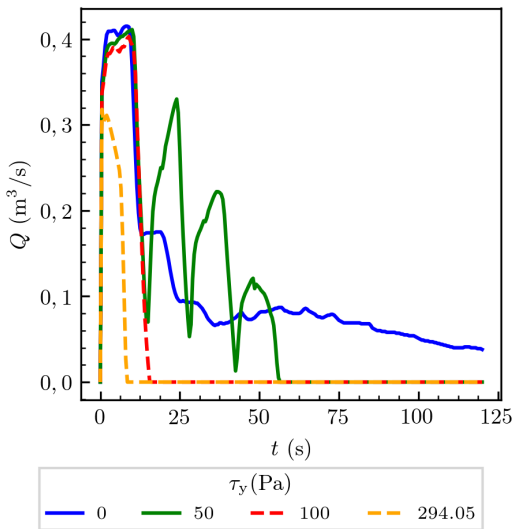
Figura 6.19: Efecto de la variación de distintos parámetros en la estimación del volumen de salida del reservorio para configuración **vf**. Se presenta en azul como referencia los valores obtenidos para un flujo de agua.



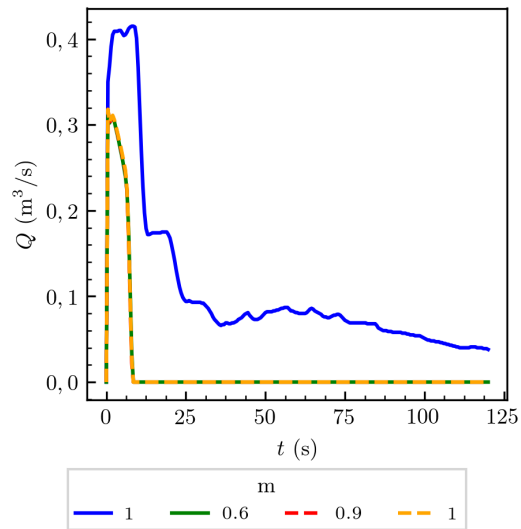
(a) Efecto de la variación de K



(b) Efecto de la variación de ρ_m

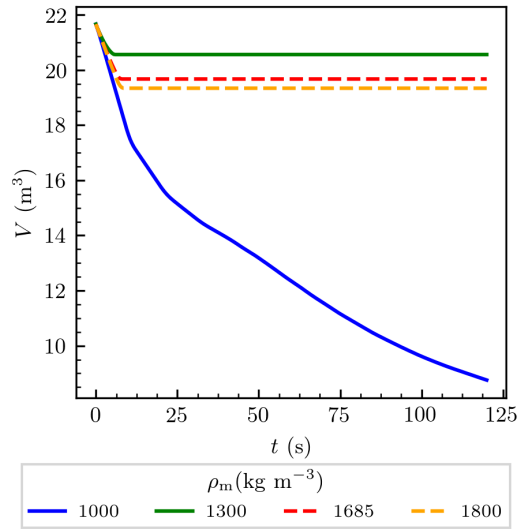


(c) Efecto de la variación de τ_y

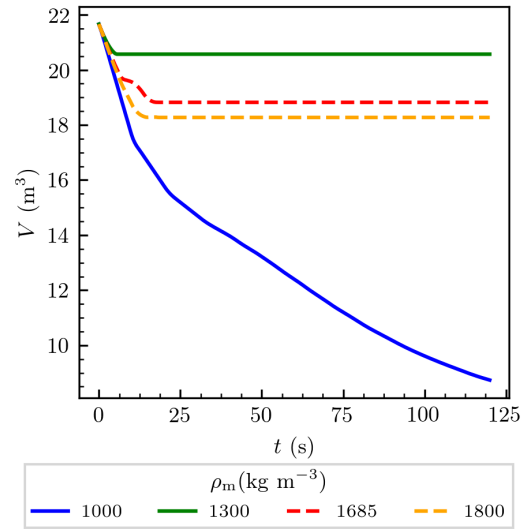


(d) Efecto de la variación de m

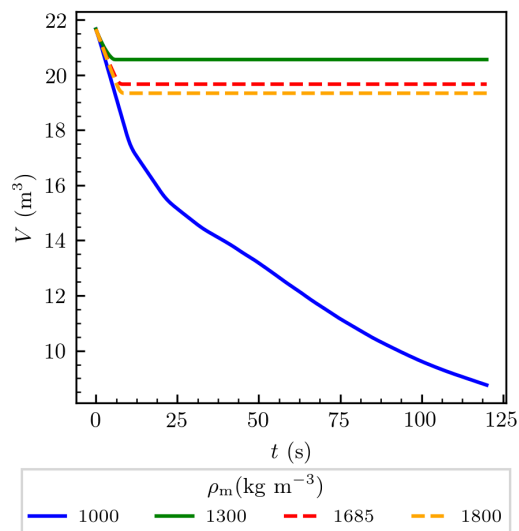
Figura 6.20: Efecto de la variación de distintos parámetros en la estimación del caudal de salida del reservorio para configuración **vf**. Se presenta en azul como referencia los valores obtenidos para un flujo de agua.



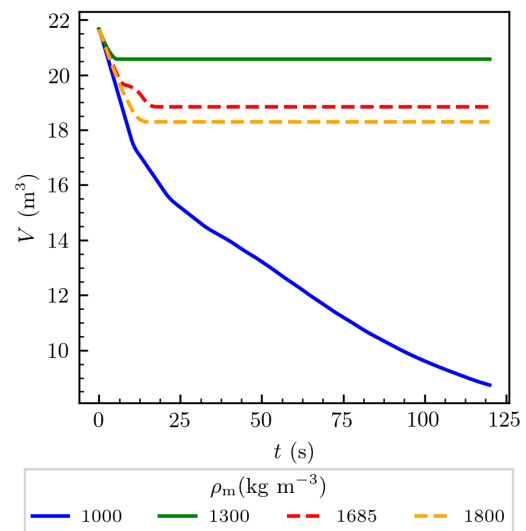
(a) Configuración **mf**



(b) Configuración **ms**



(c) Configuración **vf**



(d) Configuración **vs**

Figura 6.21: Efecto de la variación ρ_m en la estimación del caudal de salida del reservorio para distintas configuraciones. Se presenta en azul como referencia los valores obtenidos para un flujo de agua.

6.1.2. Validaciones

Una vez verificado las distintas funcionalidades del modelo, ha sido validado su comportamiento comparando sus predicciones con resultados experimentales. Los experimentos analizados corresponden a colapsos de columnas de fluidos no-newtonianos sobre un lecho fijo de pendiente constante. Todos los casos han sido modelados sobre un dominio bidimensional, considerando las configuraciones numéricas de la Tabla 6.1 y los parámetros numéricos descritos en la Tabla 6.14.

Tabla 6.14: Elección de parámetros numéricos para validaciones.

Parámetro	Valor
Discretización espacial χ	Malla rectangular con arista de 0,01 m
Discretización temporal Δt	Paso de tiempo adaptativo con $CFL_{m\acute{a}x} = 0,45$
Tiempo de muestreo Δt_{out}	0,05 s
Umbral seco-mojado ε_w	0,001 m
Umbral movimiento-detención ε_{τ_y}	Según ecuación 4.73 con valor mínimo de 0,01 m
Velocidad detención U_{small}	0,001 m/s
Viscosidad umbral μ_0	Según metodología asociada a la ecuación 4.71 con $\dot{\gamma}_{ref} = 2U_{small}/R_h$ con R_h representativo del problema en estudio.
Comportamiento de pared	Pared hidrodinámicamente lisa con $k_s = 0,0$ m
Modelo de fricción	Según sección 3.2.1.
Modelo erosión	no aplica

Experimentos de Ancey et al. (2012)

Los experimentos publicados por Ancey et al. (2012) corresponden al colapso de una columna de 6 litros de un fluido viscoplástico retenido en un estanque por una compuerta, como se esquematiza en la Figura 6.22, que es levantada de forma abrupta. El detalle de la reología y las pendientes evaluadas en este experimento se presentan en la Tabla 6.15.

Tabla 6.15: Condiciones experimentales presentados por Ancey et al. (2012).

ρ_m (kg/m ³)	τ_y (Pa)	K (Pas ⁿ)	m	V (m ³)	S (°)
1000	33	26	0,333	0,006	15
1000	33	26	0,333	0,006	25

En las Figuras F.1 y F.2 del Anexo F se presentan vistas longitudinales de alturas de flujo y caudales unitarios para distintos instantes de la simulación. En la Figura 6.23 se presenta la

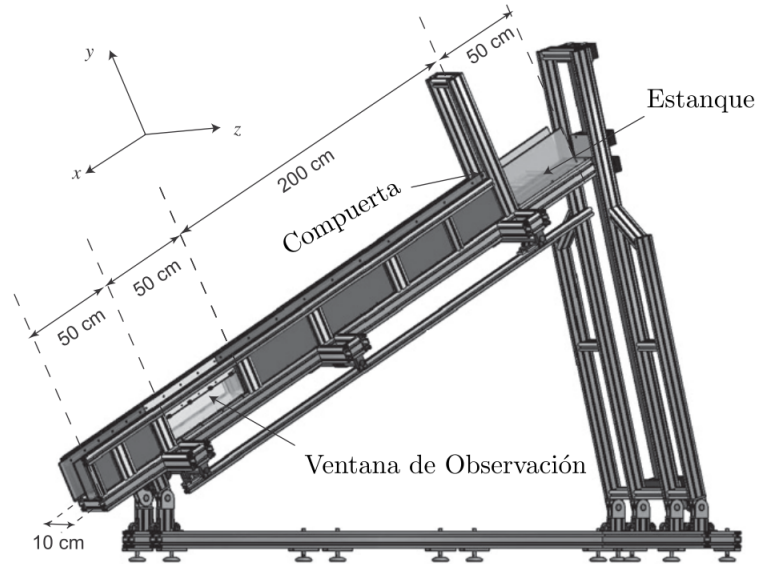


Figura 6.22: Configuración experimental de Ancy et al. (2012). Fuente: Modificado de Ancy et al. (2012).

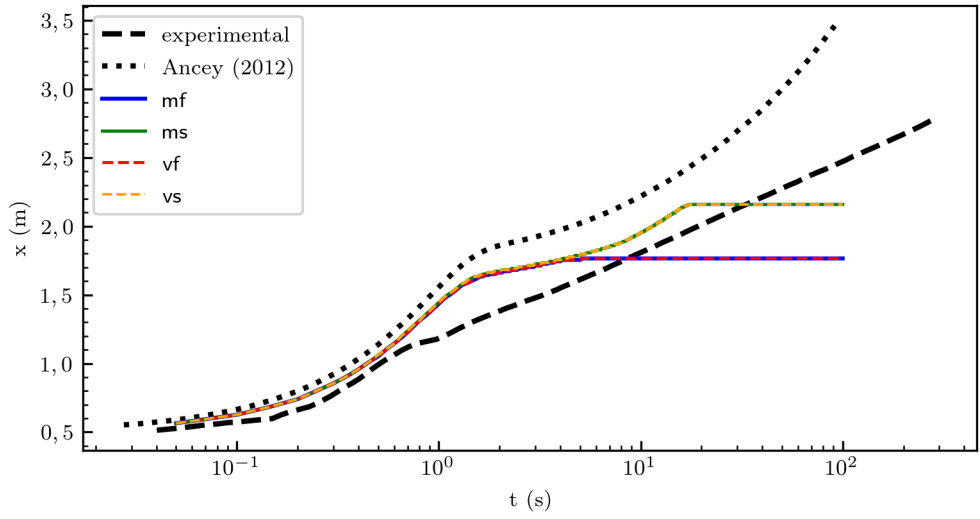
posición del frente de onda para las distintas configuraciones simuladas, comparadas con los resultados experimentales y numéricos de Ancy et al. (2012).

En general, se observa que el modelo tiende a sobreestimar las velocidades de la onda de crecida que genera el colapso de la columna de fluido, mejorando la estimación respecto de lo presentado por Ancy et al. (2012). Esta sobreestimación es natural en modelos de aguas someras en los instantes iniciales de la simulación, debido a que la estructura vertical de velocidades y esfuerzos en la columna de fluido juegan un rol relevante en el flujo, lo que es despreciado por construcción en las ecuaciones escogidas.

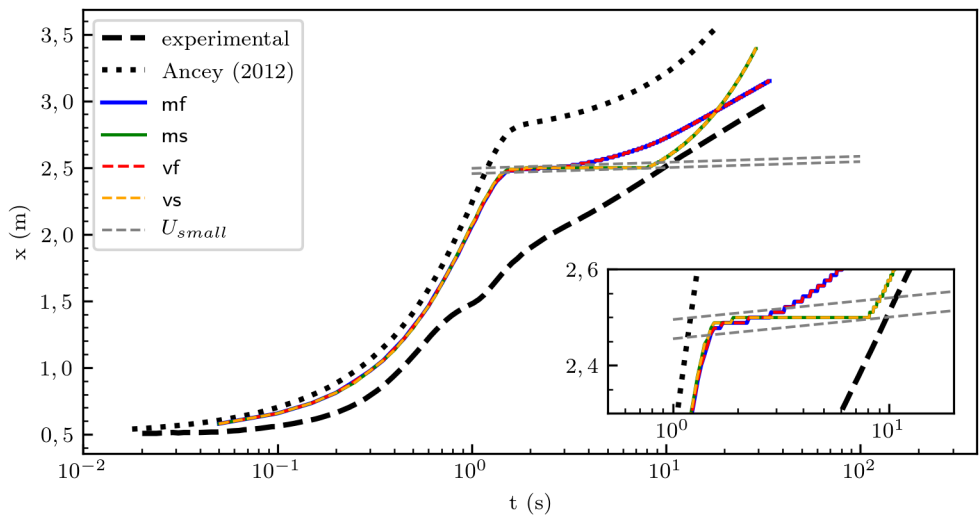
Una vez transcurrido los instantes iniciales, el modelo tiende a acercarse a la solución experimental, limitado por la elección de los parámetros de detención impuestos. En el caso de la prueba asociada a $S = 15^\circ$, el flujo predicho por el modelo detiene parcelas de fluido desde aguas arriba, como se muestra en la sucesión de perfiles presentada en la Figura 6.24. En el caso de los esquemas de segundo orden, la detención es más suave, alcanzando mayores distancias. Mayor análisis respecto a la explicación de estas diferencias por efecto del esquema ya fue presentado en la sección 6.1.1.

En el caso de la prueba con $S = 25^\circ$, las predicciones del modelo varían en función del orden del esquema escogido. Cuando con ambos modelos se llegan a condiciones de velocidades del frente cercano al umbral U_{small} (Figura 6.23(b)), los esquemas de segundo orden tienden a frenar el flujo, por efecto de la reconstrucción de las variables, hasta que desde aguas arriba se traslada la suficiente masa para reanudar el movimiento. En el caso de los esquemas de primer orden, esta situación no ocurre y se mantienen en movimiento tendiendo a lo medido experimentalmente.

Es necesario notar que un comportamiento como el observado en el caso con $S = 25^\circ$ es

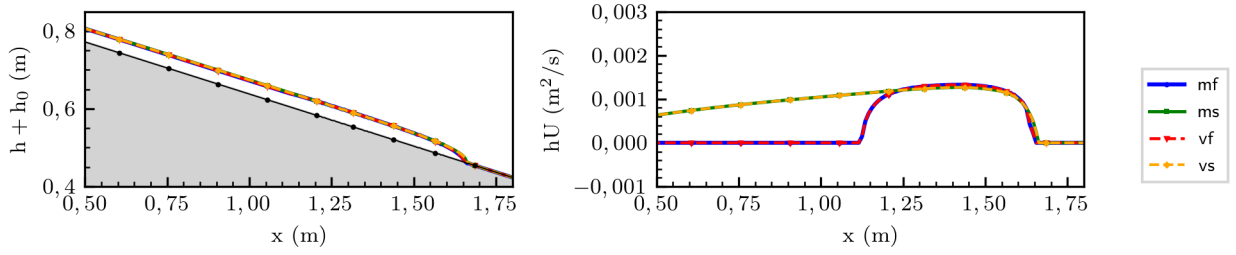


(a) $S = 15^\circ$.

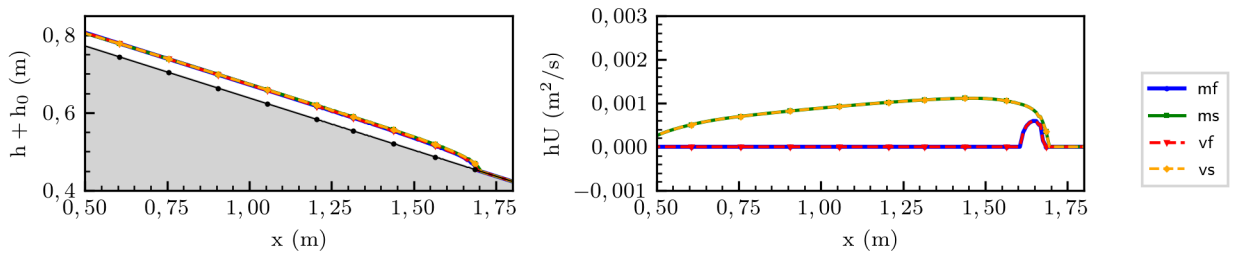


(b) $S = 25^\circ$.

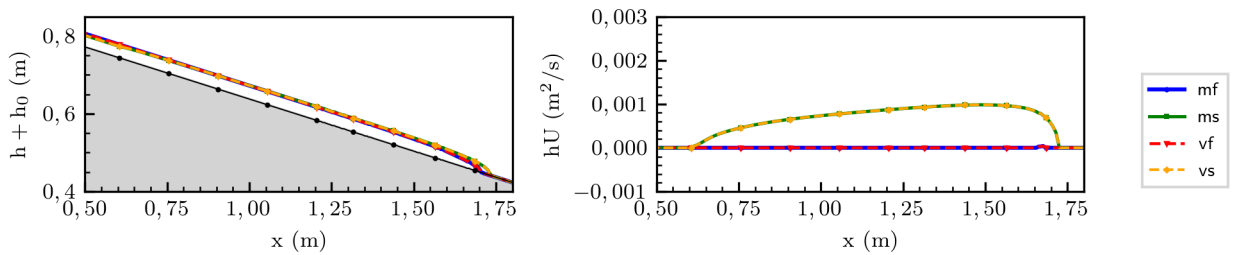
Figura 6.23: Posición del frente de onda experimental y simulados para experimentos de Ancy et al. (2012).



(a) $t = 3,0$ s.



(b) $t = 4,0$ s.



(c) $t = 5,0$ s.

Figura 6.24: Superficie libre en función del tiempo en torno a la detención del flujo para esquemas de primer orden en prueba con $S = 15^\circ$ de Tabla 6.15.

un artificio numérico susceptible de ocurrir ante pendientes altas. Esto debido a que no se está pudiendo representar correctamente la fricción y alturas del frente de onda a la vez, a diferencia de lo que ocurre con los esquemas de primer orden.

De esta manera, se observa que el modelo implementado presenta un ajuste razonable a los valores experimentales, sujeto a las restricciones que impone la elección de las ecuaciones de aguas someras para representar este fenómeno y la elección de los parámetros.

Experimentos de Minussi & Maciel (2012)

Los experimentos publicados por Minussi & Maciel (2012) corresponden a colapsos de columnas de fluidos no-newtonianos que escurren por canal de pendiente nula. Los fluidos son retenido en un sector del canal formando un estanque limitado por una compuerta, la que retira de forma abrupta al inicio del experimento. La configuración experimental se esquematiza en la Figura 6.25. El detalle de las reologías evaluadas se presentan en la Tabla 6.16.

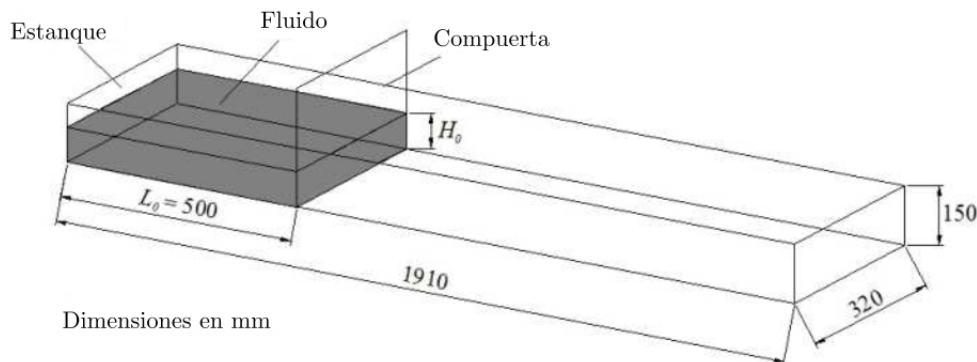


Figura 6.25: Configuración experimental de Minussi & Maciel (2012). Fuente: Modificado de Minussi & Maciel (2012).

En las Figuras F.3 a F.13 y F.15 del Anexo F se presentan vistas longitudinales de alturas de flujo y caudales unitarios para distintos instantes de la simulación, junto a la posición del frente de onda y una estimación de su velocidad. En la Figura 6.26 se presenta a modo de ejemplo los mismos resultados anteriores para la prueba T1, comparados con los resultados experimentales y numéricos de Minussi & Maciel (2012) y resultados numéricos de Debiane (2000) y Yabuchi (2004). Cabe mencionar que velocidad del frente de onda fue estimada derivando numéricamente las curvas de su posición en cada caso.

Se observa un buen ajuste entre las observaciones y las predicciones del modelo implementado, obteniendo soluciones que mejoran las predicciones de otros autores. En general, se observa que el modelo predicho sobrestima las velocidades de onda observadas experimentalmente al inicio del colapso.

Ya se ha indicado anteriormente que la sobreestimación en las velocidades se debe a la naturaleza de la metodología utilizada para resolver las ecuaciones, pero los resultados

Tabla 6.16: Condiciones experimentales presentados por Minussi & Maciel (2012).

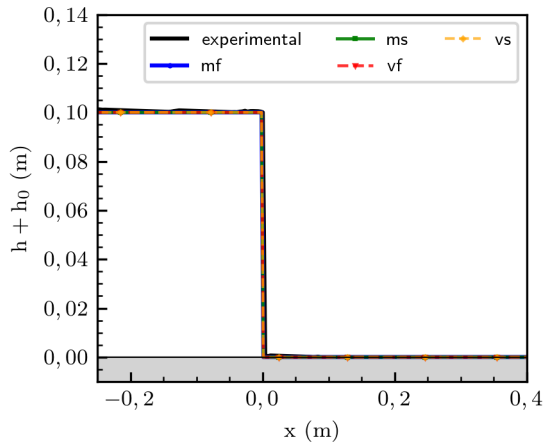
Prueba	H_0 (m)	m	K (Pas ^m)	τ_y (Pa)
T1	0,10	0,479	4,297	30,002
T2	0,13	0,479	4,297	30,002
T3	0,07	0,531	1,904	18,242
T4	0,10	0,531	1,904	18,242
T5	0,13	0,531	1,904	18,242
T6	0,07	0,442	7,837	49,179
T7	0,10	0,442	7,837	49,179
T8	0,13	0,442	7,837	49,179
T9	0,10	0,470	4,550	31,366
T10	0,13	0,470	4,550	31,366
T11	0,07	0,446	7,263	39,170
T12	0,10	0,446	7,263	39,170
T13	0,13	0,446	7,263	39,170

comparados de este experimento permiten evidenciarlo de mejor manera. En la Figura 6.26(b) se observa que la predicción del modelo corresponde a una onda de rarefacción, limitada en su avance por la intensa fricción en el frente. Ahora bien, los resultados experimentales muestran que la forma del frente de onda domina toda la columna de fluido, presentando un perfil que es consistente con la existencia de velocidades verticales con magnitudes semejantes a las horizontales. Esta conclusión puede desprenderse del trabajo de Minussi & Maciel (2012) quienes simularon este proceso considerando velocidades tanto en el eje vertical como el horizontal.

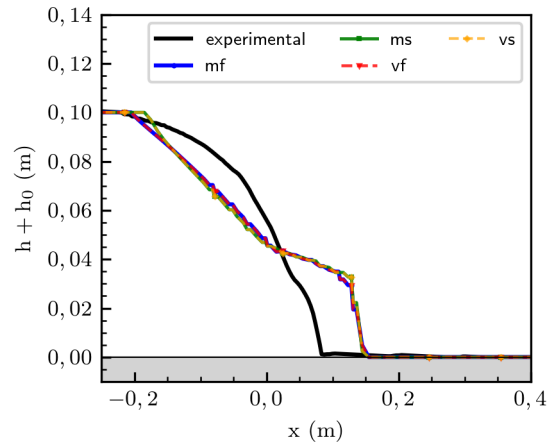
En el desarrollo del flujo, estas velocidades verticales disminuyen ordenando las líneas de corriente llegando a un perfil como el mostrado en la Figura 6.26(d), que presenta una forma semejante a la predicha por el modelo. El comportamiento antes mencionado actúa como un disipador de momentum, haciendo que el inicio del movimiento sea más gradual que el predicho por las ecuaciones de aguas someras, incluso considerando factores de fricción corregidos. Este proceso se puede observar en la forma que tiene la curva de velocidad del frente de onda, que presenta una aceleración gradual al inicio del colapso, seguido de una desaceleración gradual una vez ordenadas las líneas de corriente (Figura 6.26(f)) tanto en el resultado experimental como aquellos valores numéricos que incorporan un efecto de velocidades verticales.

Por otro lado, se observa que, una vez el flujo se desarrolla, el modelo aproxima correctamente la desaceleración del flujo. Esto se puede observar comparando el decrecimiento de las curvas de velocidad del frente para todas las pruebas realizadas, donde la desaceleración tiende a ajustarse a la que se observa en los resultados experimentales. Cabe mencionar que este resultado es independiente del uso de esquemas de primer o segundo orden.

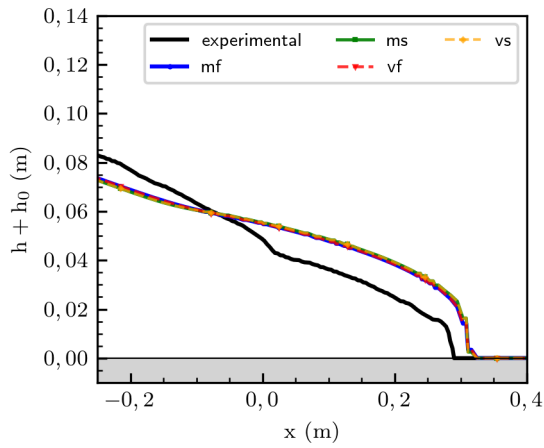
De esta manera, se observa que el modelo implementado presenta un correcto ajuste a los valores experimentales, sujeto a las restricciones que impone la naturaleza de los supuestos utilizados del modelo implementado.



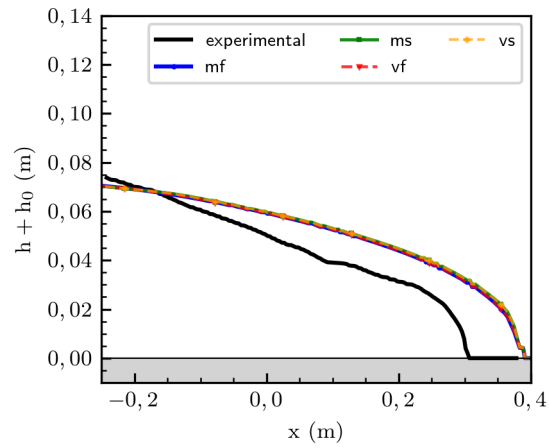
(a) $t = 0,0$ s.



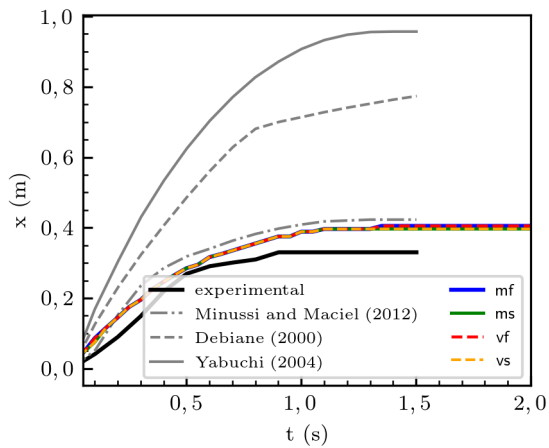
(b) $t = 0,2$ s.



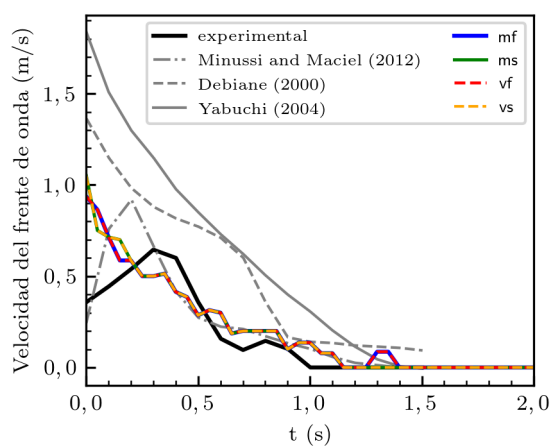
(c) $t = 0,6$ s.



(d) $t = 1,0$ s.



(e) Posición del frente de onda.



(f) Velocidad del frente de onda.

Figura 6.26: Resultados para prueba T1 de Tabla 6.16 comparados con resultados experimentales y aproximaciones numéricas.

6.1.3. Conclusiones del proceso de verificación y validación

De los resultados obtenidos en la verificación y validación se concluye:

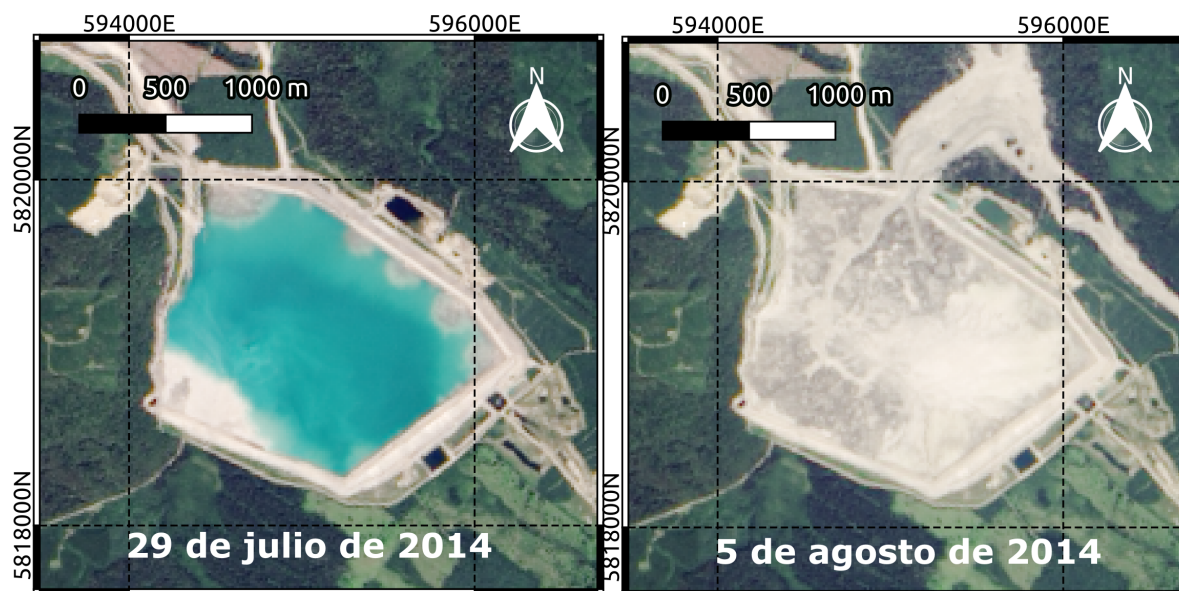
- Los esquemas ocupados han sido correctamente implementados, presentando un comportamiento coherente con el diseño del modelo.
- Los esquemas de segundo orden mejoran las estimaciones del flujo cuando las condiciones de escurrimiento delgado se cumplen en su totalidad. Ahora bien, no se observó una mejora significativa en las estimaciones de las variables de interés en casos más realistas o en aquellos donde los esfuerzos de fluencia τ_y juegan un rol activo.
- El efecto de la fricción es el factor dominante en la estimación de la posición de los frentes de onda y supera a los posibles sesgos de los esquemas numéricos elegidos.
- La erosión estimada para una presa por el modelo numérico es sensible principalmente a la densidad de la mezcla ρ_m y al esfuerzo de fluencia del fluido τ_y , superando en importancia a los otros parámetros.
- Tanto el volumen vertido como el caudal ante la erosión de una presa son principalmente dependientes del esfuerzo de fluencia τ_y .

6.2. Aplicación a escala real

Para ejemplificar la utilización y analizar los caudales y volúmenes vertidos predichos por el modelo a una escala realista, se realizó el ejercicio de simular el colapso real de un depósito de relaves. Para ello, fue utilizada la geometría e información disponible del colapso del depósito de relaves la mina Mount Polley, ocurrido el 4 de Agosto de 2014 en el centro de British Columbia, Canadá. En la Figura 6.27 se presentan imágenes de satélite disponibles para las situaciones previas y posteriores al colapso.

El colapso de este depósito de relaves fue motivo de un exhaustivo análisis por parte de un panel independiente de expertos (Morgenstern et al., 2015). Este panel concluyó que el factor dominante en la rotura del embalse residió en el diseño, que no consideró la complejidad de una capa de suelo bajo la fundación del muro que estaba afecta a fallas no drenadas. Esta situación, sumado a un nivel elevado de la laguna operacional que se ubicó cerca del muro los días previos, generaron una falla de corte en los materiales de la fundación de la presa.

El panel de expertos estimó que la falla en la fundación generó una disminución en la cota de coronamiento del muro de al menos 3,3 m, lo que permitió que el agua acumulada pudiese escurrir por sobre el muro iniciando la formación de una brecha. Se estima que 7,3 Mm³ de relaves, 10,6 Mm³ de agua y 6,5 Mm³ de fluido intersticial fueron vertidos en este accidente (WISE, 2018). Estos volúmenes representarían entre el 30 y 40 % del material contenido en el depósito.



Notas:

- Datum WGS 84, Coordenadas en zona UTM 10 N.

- Fuente de imágenes satelitales: <https://www.mountpolleyreviewpanel.ca/supporting-information/background-information>. Documentos MP00210, MP211.

Figura 6.27: Imágenes satelitales situaciones del 29 de julio de 2014 y el 5 de agosto de 2014, antes y después del colapso del embalse de relaves respectivamente.

6.2.1. Construcción del modelo numérico

Para la construcción del modelo numérico, es requerido contar con la topografía de la zona a analizar, la geometría del muro y su materialidad, el modo de falla a considerar y la geometría inicial de la brecha, además de las características del relave contenido.

Todas la información necesaria fue extraída de los documentos de respaldo utilizados en la construcción del informe publicado por Morgenstern et al. (2015), disponible en <https://www.mountpolleyreviewpanel.ca/supporting-information/background-information>. Para citar las fuentes, será utilizado la nomenclatura definida en tal publicación.

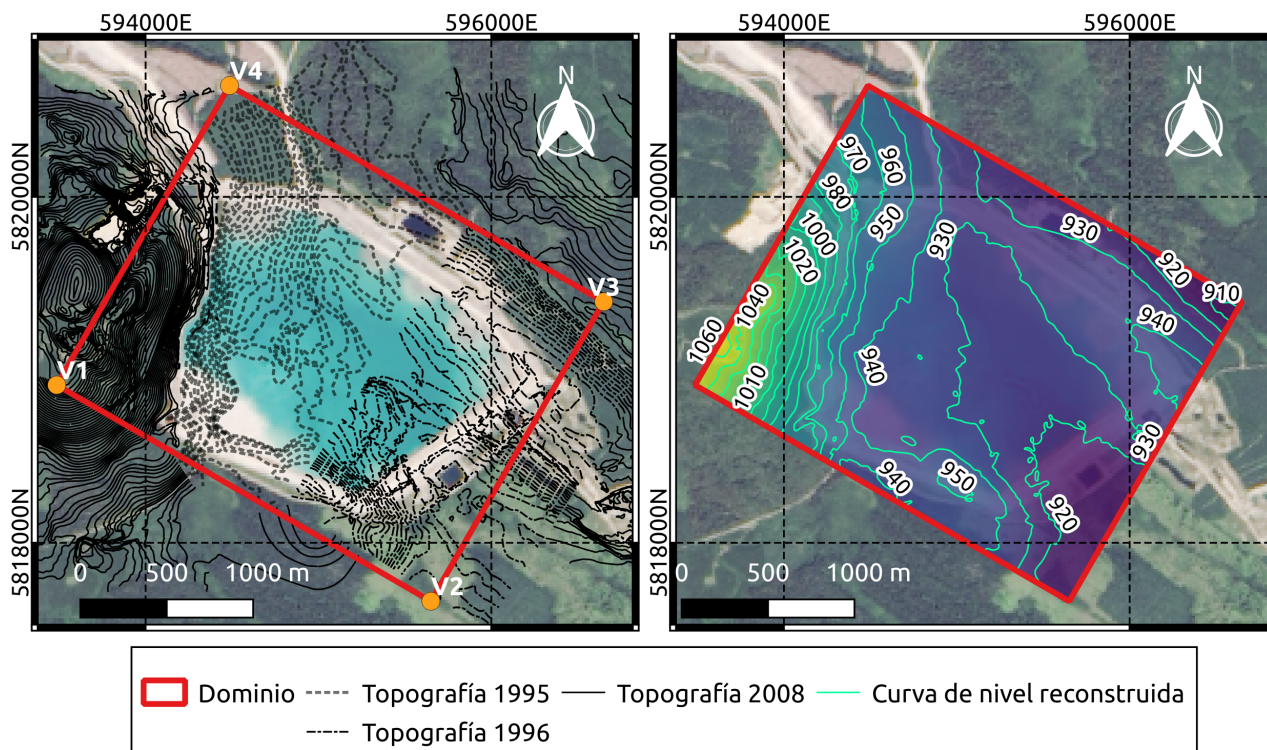
En el Anexo G se presentan algunas figuras de fuentes originales utilizadas para definir el modelo numérico que facilitarán la comprensión de este acápite.

Topografía y dominio en estudio

La obtención de la topografía natural supuso reconstruir las curvas de nivel previo a la construcción de las obras. Para ellos fueron utilizados planos y dibujos CAD disponibles, puestos a disposición por Morgenstern et al. (2015) en los años 1995, 1996 y 2008¹⁰, de donde se pudieron extraer curvas de nivel que representarían las condiciones naturales del terreno. En

¹⁰Disponibles en Documentos: MPMC00113 (modelo CAD), MPMC00117 (modelo CAD) y MPMC00049 (plano impreso presentado en Figura G.1 del Anexo G)

la Figura 6.28 se presenta las curvas de nivel recopiladas y la reconstrucción de la topografía en la zona elegida como dominio de simulación.



Notas:
 - Datum WGS 84, Coordenadas en zona UTM 10 N.
 - Cotas referidas al nivel del mar (m s.m.m.)
 - Fuente de imágenes de curvas de nivel <https://www.mountpolleyreviewpanel.ca/supporting-information/background-information>. Documentos MPMC00113, MPMC00117 y MP00049 (pág 3, Doc. 510-11-01-1625.201 rev 5.)

Figura 6.28: Curvas de nivel de topografía original en documentos de diseño de los años 1995, 1996 y 2008 y reconstrucción de topografía en zona de interés.

La elección de este dominio busca ser coherente con la dirección observada en la falla del depósito, favoreciendo posteriormente la construcción de una malla numérica orientada en el sentido del flujo. El detalle de los vértices de este dominio se presentan en la Tabla 6.17.

Tabla 6.17: Vértices que limitan el dominio escogido. Coordenadas UTM zona 10N con con Datum WGS 84.

Vértice	E (m)	N (m)	Vértice	E (m)	N (m)
V1	593.485,8	5.818.911,8	V3	596.650,9	5.819.393,8
V2	595.650,9	5.817.661,8	V4	594.485,8	5.820.643,8

Geometría y materialidad del muro de contención

El muro de contención de este depósito era de enrocado construido mediante la metodología de eje central. Una sección representativa del muro, en su etapa de diseño, se presenta en la

Figura 6.29. Esta sección se ubicaba en una zona cercana a la en que ocurrió la falla, como puede ser consultado en la Figura G.2 del Anexo G.

El muro de empréstito proyectado consideraba capas de grava y arena en contacto con los relaves acumulados, una zona de transición y enrocados aguas abajo. El enrocado debía tener un diámetro de partícula nominal de 1 m máximo, mientras que las demás zonas presentaban diversas granulometrías, presentadas en la Figura 6.30.

En la fecha de la rotura, el muro presentaba una sección en la que el núcleo se elevaba a una altura de 969,1 m s.n.m. (Morgenstern et al., 2015) con una geometría como la que se presenta en la Figura 6.31.

En la construcción del modelo se consideró una materialidad uniforme del muro igual a la granulometría de mayores dimensiones de la zona de transición. Adicionalmente, y por simplicidad, se adoptó una sección uniforme en todo el perímetro del depósito con un coronamiento coherente con el ancho de la zona del enrocado y los filtros. Por otro lado, dado que el modelo no es capaz de incorporar una pared vertical como parte de la topografía, se consideró taludes aguas abajo y aguas arriba del muro con la misma pendiente. El resumen de los parámetros adoptados se presenta en la Tabla 6.18, mientras que las topografía incorporando el muro adoptado se presenta en la Figura 6.32.

Tabla 6.18: Parámetros adoptados del muro adoptados para la simulación.

Parámetro	Unidad	Valor	Fuente
Cota muro	m s.n.m.	969,1	Morgenstern et al. (2015)
Taludes	H:V	1,3:1	Adoptado
Ancho coronamiento	m	25	Adoptado
Densidad solidos muro	kg/m ³	2200	AMEC00169
Ángulo reposo de los sólidos en el muro	deg	35	AMEC00169
Granulometría	-	Diámetros máximos de zona T (Figura 6.30). $d_s = d_{50} = 4$ cm, $d_{90} = 11$ cm y $d_{30} = 3$ cm	AMEC00169

Geometrías iniciales consideradas para la brecha de falla

La falla ocurrida en el depósito de relaves estudiado se debió a la pérdida de soporte de una capa del suelo de su fundación. Esto generó que el muro redujera su cota de coronamiento de forma repentina, al menos 3,3 m (Morgenstern et al., 2015), produciendo un flujo de agua que inició una brecha.

Para representar esta falla de forma aproximada, se ajustó la topografía de la condición final de rotura observada utilizando una geometría trapecial, como se presenta en la Figura 6.33. En base a esta geometría, se generaron distintos escenarios de fallas instantáneas desplazándola

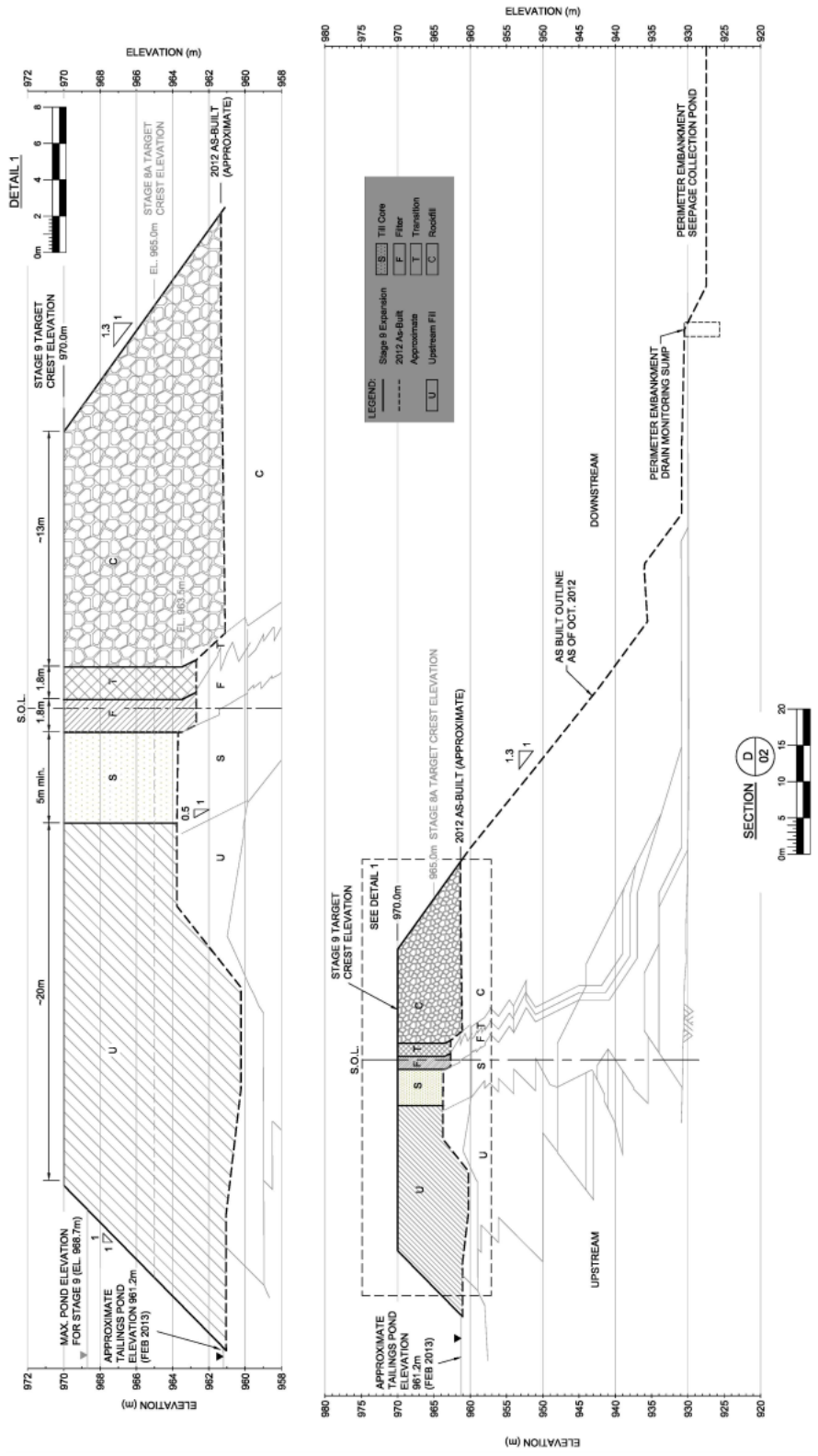


Figura 6.29: Sección proyectada en torno a zona de la brecha. Ubicación de sección D puede ser consultada en la Figura G.2 del Anexo G. Fuente: <https://www.mountpolleyreviewpanel.ca/supporting-information/background-information> Doc. AMEC00169.

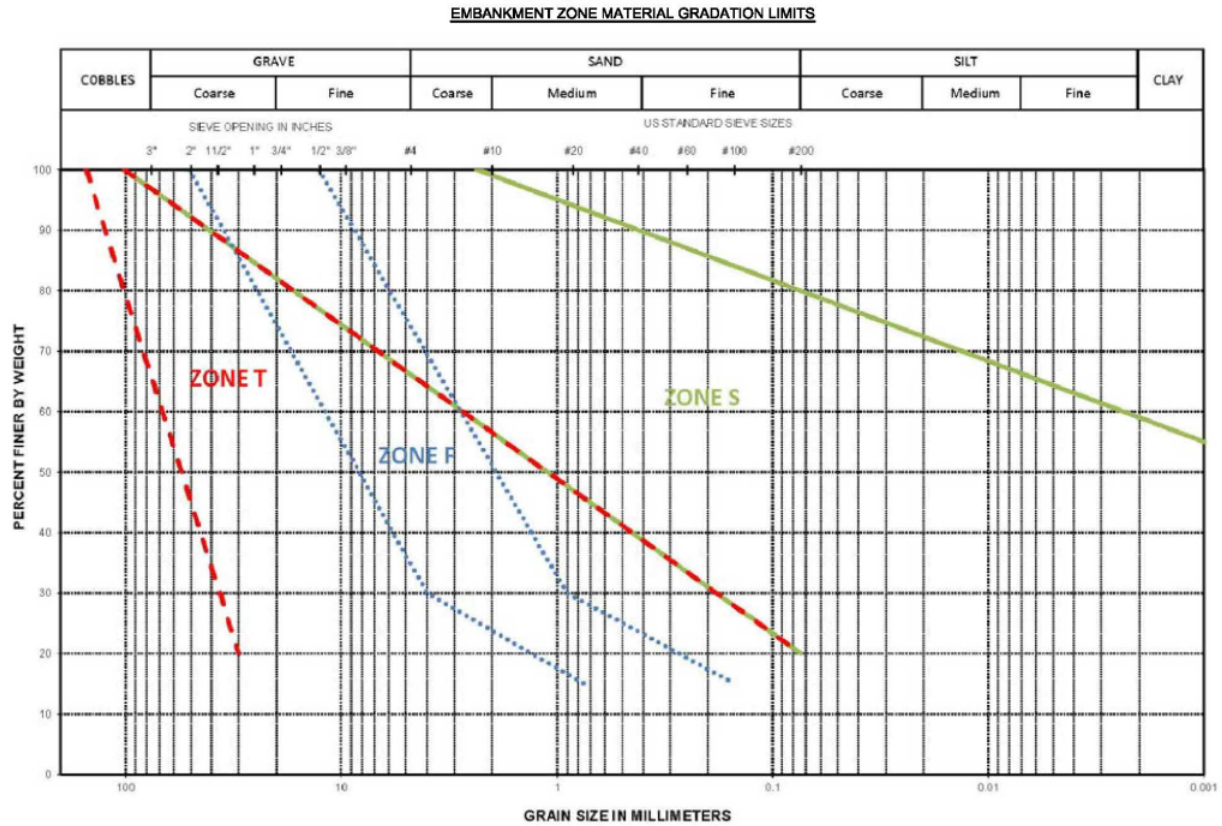


Figura 6.30: Granulometría de muro en etapa de expansión. Las especificaciones de cada capa puede ser consultado en la Figura G.3 del Anexo G. Fuente: <https://www.mountpolleyreviewpanel.ca/supporting-information/background-information> Doc. AMEC00169.

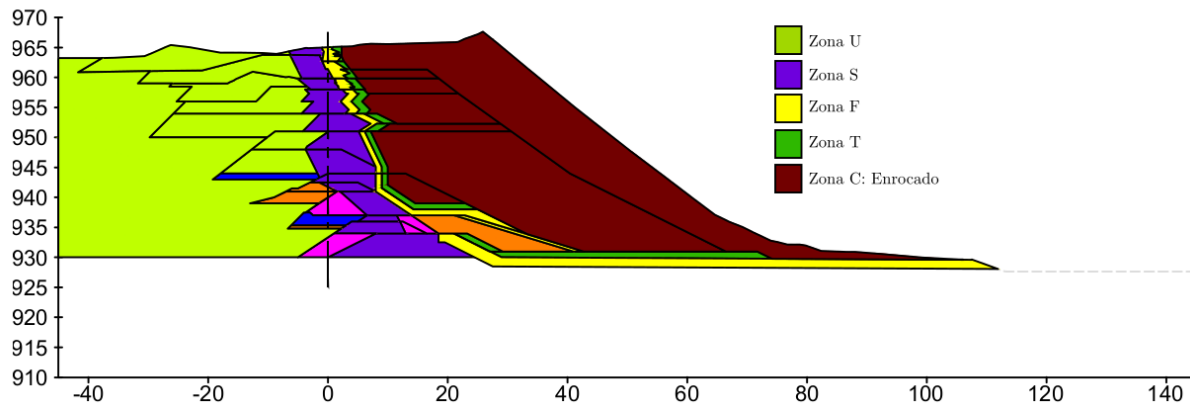
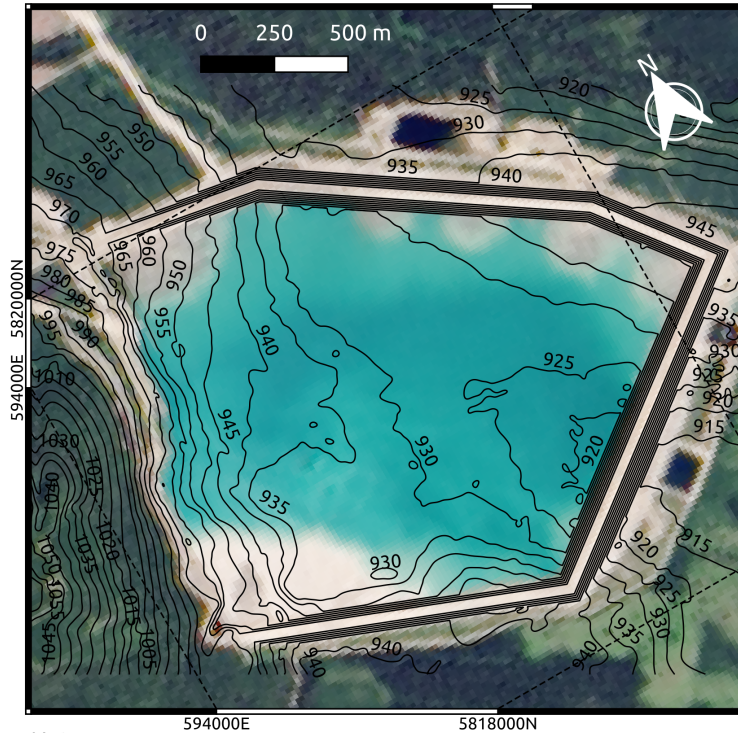


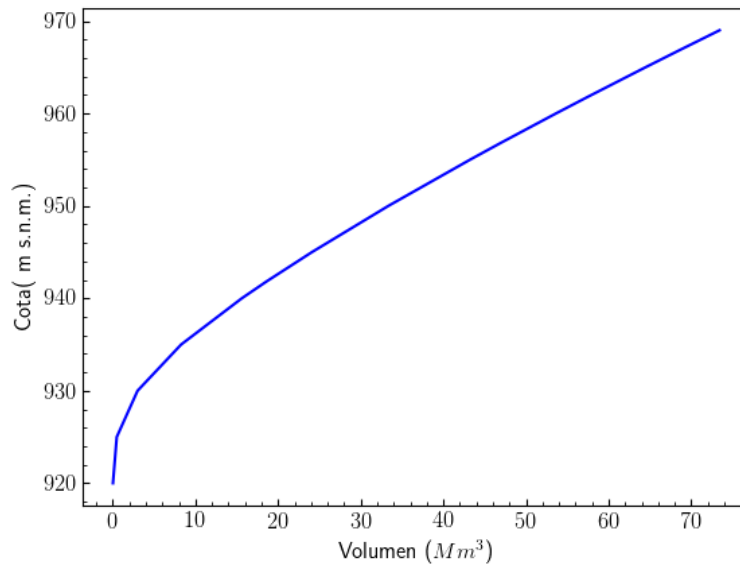
Figura 6.31: Sección cercana a la zona de rotura. Zona U: Relleno aguas arriba; Zonas S: Núcleo impermeable; Zona F y T: Zona de transición. Zona C: Enrocado. Fuente: Modificado de Morgenstern et al. (2015).



Notas:

- Datum WGS 84, Coordenadas en zona UTM 10 N.
- Fuente de imagenes satelitales: <https://www.mountpolleyreviewpanel.ca/supporting-information/background-information>. Documento MP00210.

(a) Topografía considerada

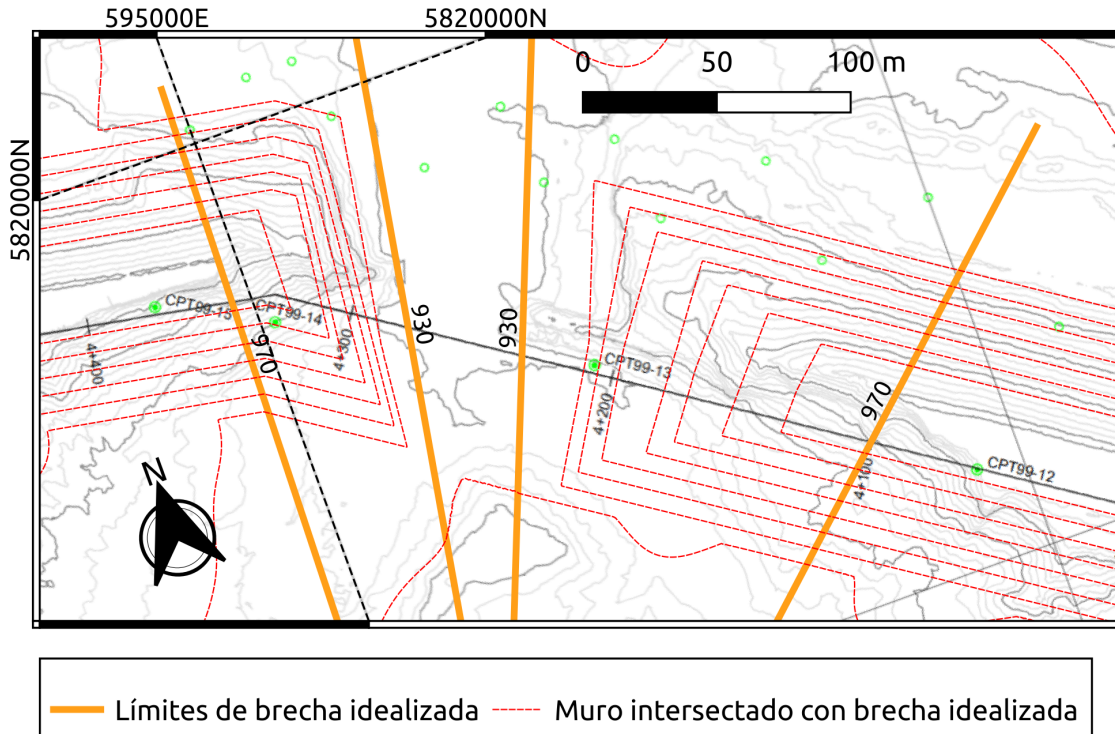


(b) Curva de embalse

Figura 6.32: Topografía de fondo del depósito considerando el muro y curva de embalse.

en el eje vertical e intersectándola con el muro. Las elevaciones de cada una de estas fallas fueron escogidas considerando que la laguna de aguas claras, previo al colapso, presentaba una cota de 966,83 m s.n.m. (Morgenstern et al., 2015), induciendo condiciones con distintos niveles de carga hidráulica inicial.

Las condiciones geométricas de cada escenario se presentan en la Figura 6.34, mientras que la cota mínima de cada geometría y carga hidráulica suponiendo la cota de la laguna operacional se presenta en la Tabla 6.19.



Notas:
 - Datum WGS 84, Coordenadas en zona UTM 10 N.
 - Cotas referidas al nivel del mar en m s.n.m.
 - Fuente de levantamiento topografico post falla: Report on Mount Polley Tailings Storage Facility Breach. AppendixD. PRE-BREACH SUBSURFACE INVESTIGATION IN BREACH AREA.

Figura 6.33: Construcción de superficie idealizada de falla.

Tabla 6.19: Cota mínima de la brecha en escenarios de falla inicial considerados.

Escenario de falla	Cota mínima de brecha (m s.n.m.)	Carga hidráulica máxima (m)
5m	961,83	5,00
10m	956,83	10,00
25m	941,83	25,00
max	930,00	36,83

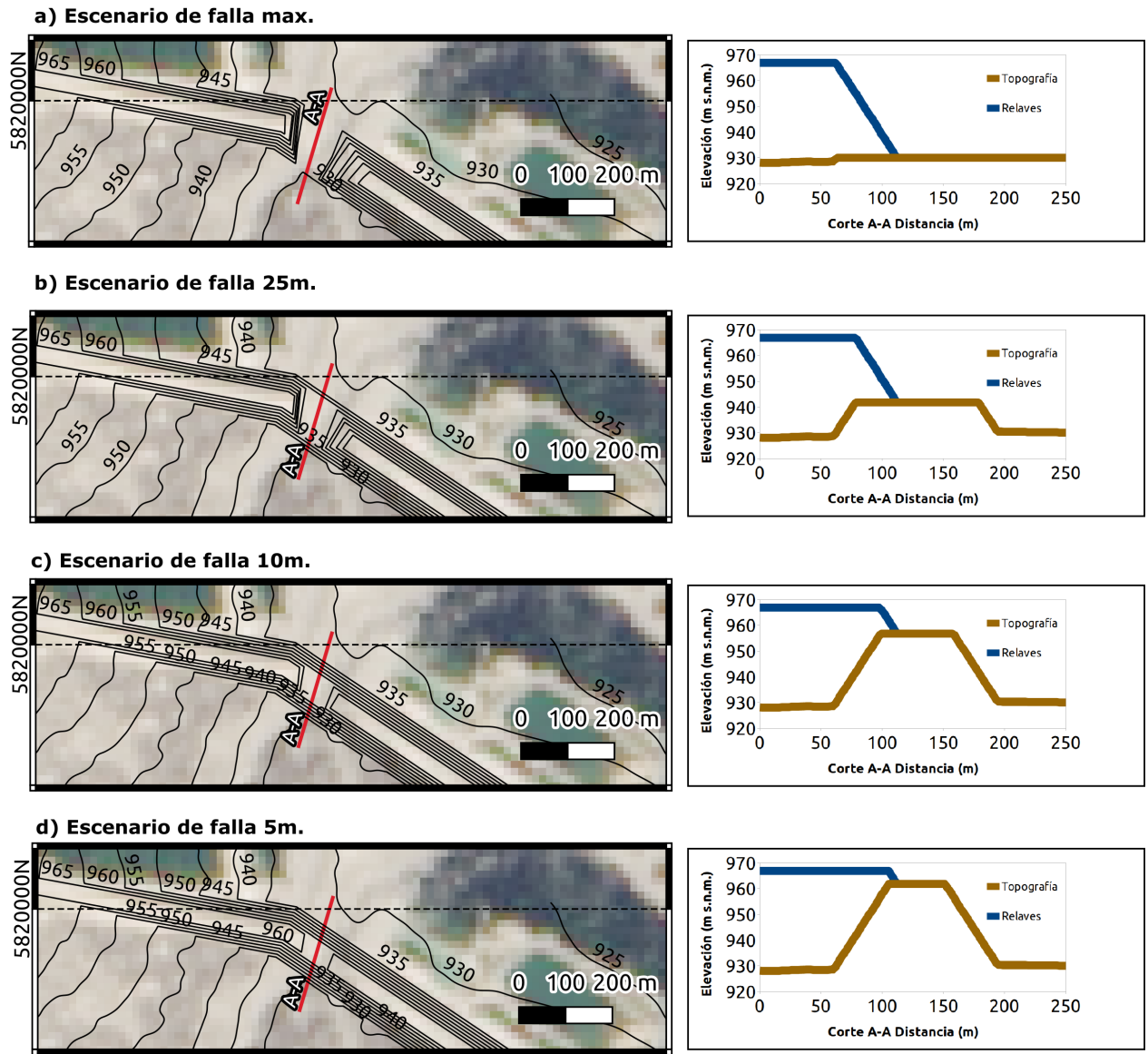


Figura 6.34: Topografía de la brecha para escenarios de falla de la Tabla 6.19.

Parámetros de relave contenido en el depósito

En el proceso de expansión de la altura del depósito, fueron realizados análisis de estabilidad en los que fueron utilizados parámetros de resistencia del relave y su densidad (Doc AMEC00169), los cuales fueron adoptados para este ejercicio. Dado que no fueron encontrados parámetros reológicos, se adoptaron los utilizados previamente en la verificación, provenientes del trabajo de Urrutia (2016). Los parámetros considerados se resumen en la Tabla 6.20.

Tabla 6.20: Parámetros de relaves adoptados.

Parámetro	Unidad	Valor
Densidad relave	kg/m ³	1800
S_u/σ'_v	-	0,1
m	-	1
K	Pas ^m	0,3184
τ_y	Pa	294,05

Malla numérica, condiciones iniciales y condiciones de borde

El dominio de simulación corresponde al sector delimitado en color rojo en la Figura 6.28. En todas estas aristas fueron consideradas condiciones de borde transmisivas.

Para teselar el espacio, se consideraron elementos rectangulares de $\chi = 5$ m orientados según la dirección en que ocurrió la falla real del depósito. Un ejemplo de la discretización en torno a la zona de falla se presenta en la Figura 6.35.

Una vez definida la malla, se inicializaron las variables del problema en todo el dominio según la siguiente metodología:

- La cota de la topografía h_0 fue obtenida como la intersección entre la superficie asociada a la topografía natural (Figura 6.28) y aquella que define al muro con uno de los escenarios de falla de la Tabla 6.19 (Figura 6.34).
- La altura de fluido h fue obtenida como la resta entre la cota de la laguna de aguas claras al interior del depósito registrada previo al colapso y la cota de la superficie de fondo del depósito sin la existencia de una brecha de falla (Figura 6.32).
- El caudal unitario hU y el gasto sólido de fondo q_s fueron definidos como vectores nulos, suponiendo un depósito lleno de fluido en reposo.
- La resistencia no drenada S_u en cada celda fue inicializada con el valor promedio de esta variable en el eje vertical. Para su obtención, se supuso que $\sigma'_v \sim \rho_m g z$, con lo que $\bar{S}_u = \frac{S_u}{\sigma'_v} \frac{\rho_m g h}{2} = 0,1 \frac{\rho_m g h}{2}$ (Tabla 6.20).

En la Figura 6.36 se presenta un ejemplo de condición inicial del problema suponiendo una rotura máxima del muro de forma instantánea.

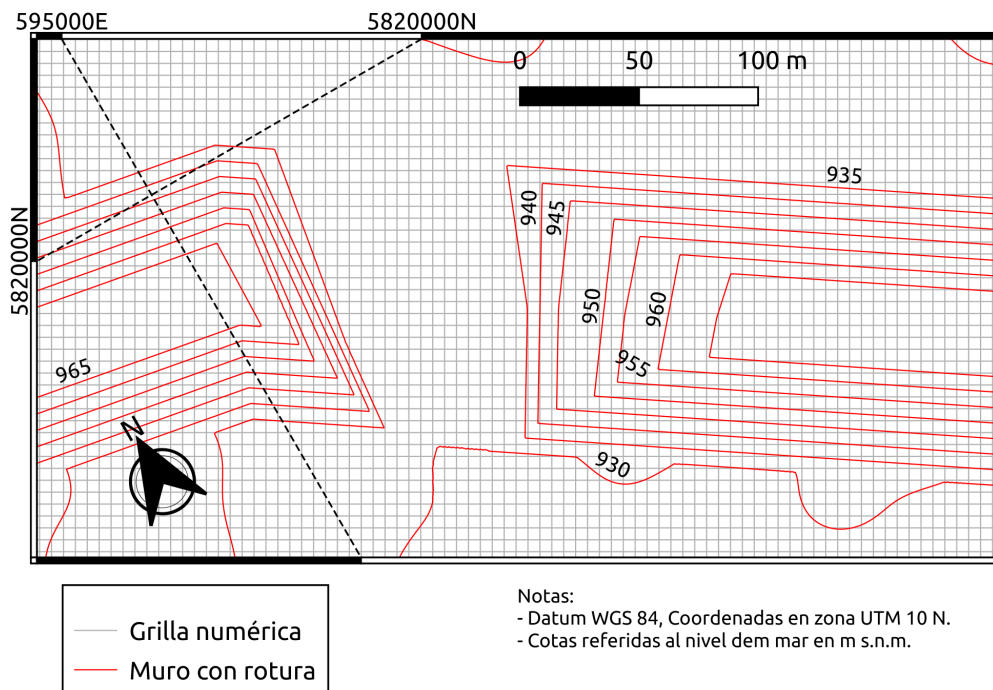


Figura 6.35: Malla numérica adoptada. Los elementos corresponden a cuadrados de 5 m de arista.

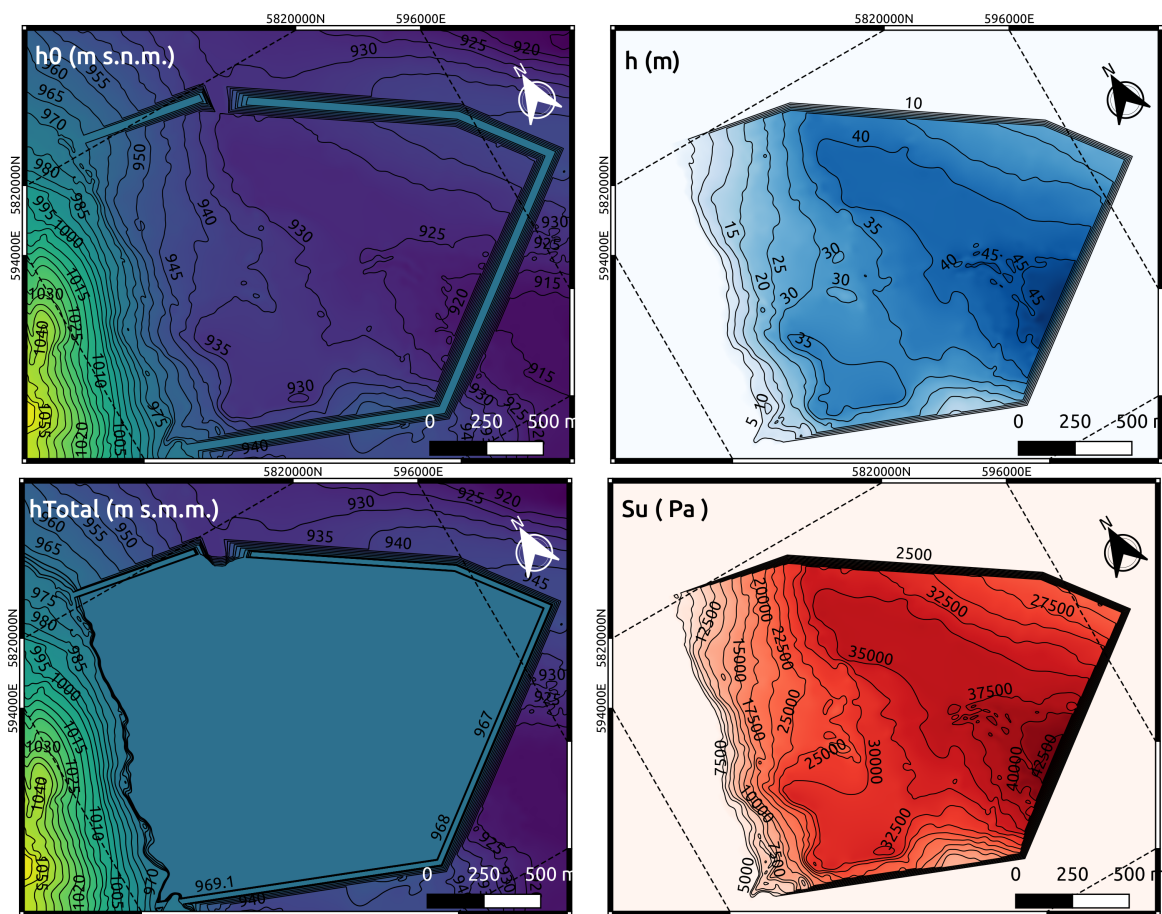


Figura 6.36: Ejemplo de condición inicial para geometría con brecha de falla **max** de Tabla 6.19 .

Parámetros y escenarios de simulación

Finalmente, se adoptaron los parámetros de la Tabla 6.21 para las simulaciones a escala real. Entre ellas destaca la utilización de la metodología **vf** para los esquemas numéricos, que demostró ser la más estable y rápida en la etapa de verificación y validación. Por otra parte, dado que se esperan valores de caudales unitarios y velocidades muy altos, se escogió un paso de tiempo adaptativo imponiendo un CFL máximo de 0,3, y un tiempo de duración de 3 hrs.

Tabla 6.21: Parámetros numéricos adoptados.

Parámetro	Unidad	Valor
Configuración de esquemas	-	vf
$CFL_{m\acute{a}x}$	-	0,3
$k_s = d_{50}$	cm	4
e_w	cm	0,1
e_{τ_y}	cm	1
μ_0	Pa s	2.941
U_{small}	cm/s	1

Los escenarios simulados corresponden a los de la Tabla 6.22. Estos escenarios buscan analizar el efecto que tiene la consideración de un lecho variable y distintas alturas de borde libre inicial para la falla.

Tabla 6.22: Escenarios de simulación.

Etiqueta	Cota mínima de brecha (m s.n.m.)	Carga hidráulica (m)	Lecho
5mf	961,83	5	fijo
10mf	956,83	10	fijo
25mf	941,83	25	fijo
maxf	930	36,83	fijo
5m	961,83	5	variable
10m	956,83	10	variable
25m	941,83	25	variable

Para la ejecución de estos escenarios fue utilizado el supercomputador Leftraru, perteneciente al NLHPC (National Laboratory for High Performance Computing, <http://www.nlhpc.cl>). Cada caso fue ejecutado en paralelo, utilizando 16 procesadores con tiempos de simulación que estuvieron entre las 5 y 24 horas.

6.2.2. Resultados

En la Figura 6.37 se presentan los caudales y volúmenes vertidos para cada escenario. En las Figuras H.1 a H.7 del Anexo H se presentan vistas en planta de las variables h , $h + h_0$, hU y q_s para cada prueba simulada, superpuesto a las curvas de nivel del terreno. En la Figura 6.38 se presenta, a modo de ejemplo, la solución para las variables ya mencionadas en el caso **10m**. Finalmente, en la Tabla 6.23 se presentan los volúmenes vertidos y caudales efluentes al final del tiempo de simulación.

Al comparar los resultados de los casos con lecho fijo entre sí (Figura 6.37(a)), los caudales están dominados por la carga elegida y el tamaño de la brecha, dándose su valor máximo al inicio del proceso de colapso. La distribución de los caudales responde a una rápida aceleración del flujo, seguido de una desaceleración gradual que no se diferencia sustancialmente a la forma de un hidrograma esperado para agua ante una condición inicial similar.

Al observar los volúmenes descargados en estos escenarios, su valor total depende principalmente de la carga hidráulica inicial. Ahora bien, se evidencia al comparar el porcentaje descargado respecto del volumen total disponible sobre la cota mínima de la brecha, presentado en la Tabla 6.23, que considerar una reología no-newtoniana restringe el volumen de vertimiento. Cabe mencionar que mientras mayor sea la carga, mayor es el porcentaje de material que se evacúa del depósito, lo que es un indicio que el efecto del esfuerzo de fluencia τ_y es menos importante a medida que la columna de fluido colapsado es de mayor tamaño.

Por otro lado, al comparar los casos en los que fue resuelto el proceso de erosión del lecho (Figura 6.37(b)), los caudales máximos disminuyen conforme a la disminución de la carga hidráulica inicial, pero los volúmenes totales vertidos tienden a ser similares. En este sentido, el proceso erosivo afecta a la distribución temporal del vertimiento, pero no a su valor total. Además, este proceso puede retardar el momento en que se genera el caudal máximo del hidrograma, dependiendo de la condición inicial que sea considerada para el colapso.

Comparando los porcentajes de vertimiento respecto del total disponible sobre la cota mínima de la brecha, se observa que en los tres casos que consideran erosión este supera el 77%. En aquellos casos en los que el colapso se detuvo durante las 3 horas simuladas, correspondientes a los escenarios **10m** y **25m** evidenciados por un caudal efluente nulo en la Tabla 6.23, se observa que el porcentaje de vertimiento es similar entre sí. Esto es indicio que, dada la reología escogida y los valores de resistencia no drenada utilizados, es posible explicar entre un 12 a un 13,5% de retención de material en la cubeta. Estos valores son muy lejanos a lo observado en el colapso real, reportándose en tal caso una retención del orden de un 60 a 70%.

Profundizando en este último punto, es necesario indicar que probablemente el volumen total vertido no dependa de los parámetros que tenga el relave una vez fluidizado, sino que de los parámetros resistentes cuando tienen un comportamiento como sólido. Este efecto es incorporado en el modelo mediante una estimación simple de la resistencia no drenada del material, la cual podría estar siendo subestimada con los parámetros supuestos en la simulación. Otra explicación factible para explicar tal diferencia es que la metodología con la que se considera el efecto de la resistencia no drenada puede estar siendo una aproximación

muy gruesa del fenómeno.

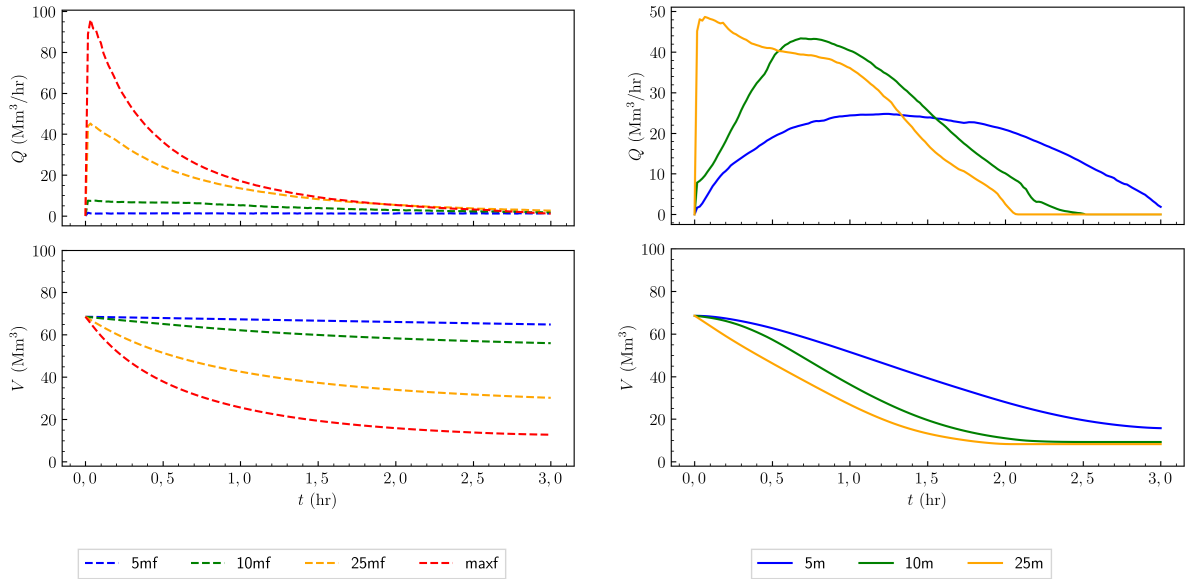
Se observa que considerar una rotura total e instantánea de la presa con escurrimiento de relaves sobre un lecho fijo (escenario **maxf**) tiende a ser una elección conservadora respecto de caudales máximos. Al ser comparado con el caso más realista de rotura, que corresponde a aquel que considera erosión y un borde libre de 5 m (escenario **5m**), los caudales máximos pueden ser sobreestimados alrededor de 5 veces, pese a que los volúmenes vertidos tienden a ser similares. En este sentido, realizar supuestos de rotura total e instantánea correspondería a una condición muy conservadora y, para efectos de diseño de ingeniería o análisis de riesgo, se podría considerar adecuada.

Por otro lado, al comparar entre sí los caudales máximos para escenarios que comparten una misma condición inicial (escenarios **5mf-5m**, **10mf-10m** y **25mf-25m** respectivamente), en algunos casos se observa que el proceso erosivo genera un aumento en el caudal máximo effluente. De esta manera, suponer roturas parciales del muro e instantáneas sobre un lecho fijo es una elección que podría, dependiendo de las condiciones de la rotura instantánea considerada, subestimar el caudal máximo effluente respecto de un escenario con condición inicial equivalente que considere erosión.

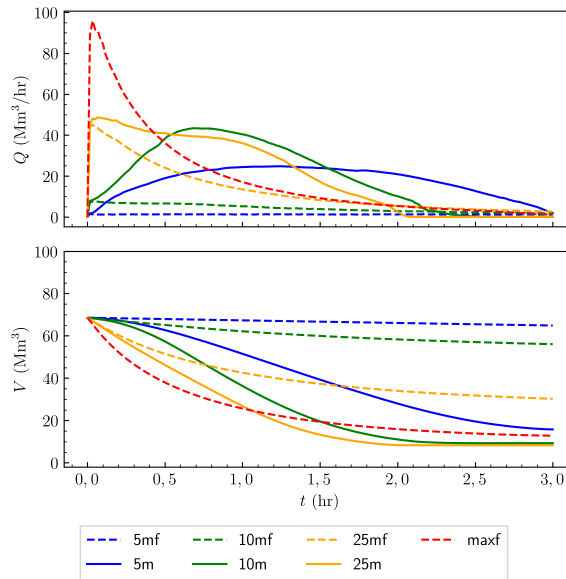
Tabla 6.23: Caudales y volúmenes para escenarios simulados de la Tabla 6.22 al cabo de 3 hrs de simulación.

Prueba	Volumen descarga- do (Mm^3)	Caudal effluente al final de la simula- ción (Mm^3/hr)	Volumen Máximo factible de escurrir (Mm^3)	Porcentaje descar- gado respecto del disponible (%)
5mf	3,7	1,1	11,0	33,5
10mf	12,5	1,8	21,6	58,0
25mf	38,3	2,6	49,9	76,8
maxf	55,8	1,1	65,5	85,1
5m	52,8	1,9	68,5	77,0
10m	59,3	0,0	68,5	86,5
25m	60,3	0,0	68,5	88,0

Analizando ahora el proceso erosivo, se observa en todos los casos evaluados que consideran este fenómeno (escenarios **5m**, **10m** y **25m**) que el muro es erosionado casi por completo en el lapso de una hora, como puede apreciarse en la Figura 6.38. Este resultado es consistente con las escalas de tiempo esperadas para el fenómeno debido a las inmensas velocidades que pueden ocurrir sobre la zona de la brecha, las que rondaron los 20 m/s. Adicionalmente, se observa en esta misma figura que las escalas de caudal unitario $|hU|$ en la zona de la brecha superan al menos en dos ordenes de magnitud a las de $|q_s|$, con lo que el supuesto considerado en el Capítulo 4 de $\Upsilon = \frac{|q_s|}{(1-p)|hU|} \ll 1$ podría validarse en tal zona. Esto reafirma que la elección de representar la erosión del lecho sólo por el arrastre de fondo es una buena aproximación.



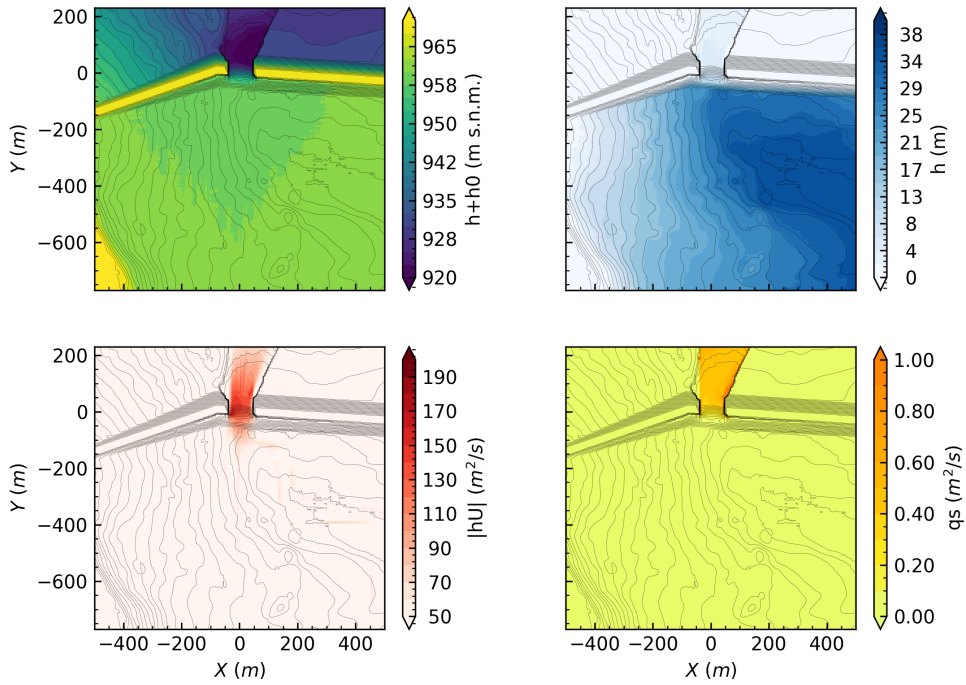
(a) Escenarios con lecho fijo. Simulaciones sin proceso erosivo. (b) Escenarios con lecho variable. Simulaciones con proceso erosivo.



(c) Todos los escenarios.

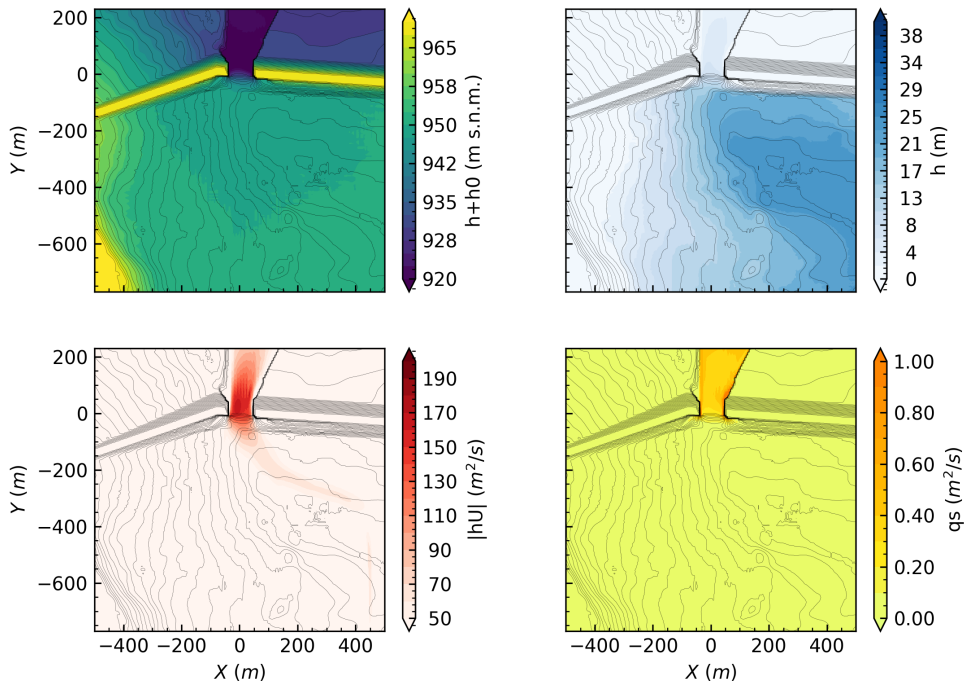
Figura 6.37: Caudales y volúmenes vertidos para escenarios simulados de la Tabla 6.22.

$t = 0.5 \text{ hr}$



(a) $t = 0,5 \text{ hr}$

$t = 1.0 \text{ hr}$



(b) $t = 1 \text{ hr}$

Figura 6.38: Campos en torno a la brecha de falla para prueba **10m** de la Tabla 6.22 para distintos tiempos.

6.2.3. Conclusiones de la aplicación a un caso realista

De los resultados obtenidos en la aplicación realista del modelo se concluye:

- Una aproximación en la que se suponga un lecho fijo y una rotura instantánea del muro puede entregar caudales máximos efluentes mayores respecto de simulaciones que consideren erosión, siempre y cuando se suponga una rotura casi completa del muro. En casos donde se supongan roturas parciales, no es posible saber de antemano con qué supuestos se obtendrán caudales máximos efluentes de mayor magnitud.
- En simulaciones que consideren el proceso de la erosión, suponer distintas condiciones iniciales de rotura instantánea parcial no afecta en mayor medida el volumen total efluente. Esta variación en la condición inicial sólo afecta en la distribución temporal de su vertimiento.
- El efecto del esfuerzo de fluencia disminuye sustancialmente cuando se ejecuta el modelo a una escala real. En este sentido, a esta escala considerar su efecto modula la distribución de caudales, pero no es suficiente para explicar la retención de material en la cubeta.
- Dada las altas velocidades del flujo sobre la brecha, aproximar el flujo de sedimentos considerando sólo arrastre de fondo es suficiente para reproducir escalas de tiempo razonables de erosión del muro.
- Del mismo modo, la aproximación $\Upsilon \ll 1$ se cumple, validando los supuestos empleados en el Capítulo 4.

Capítulo 7

Conclusiones

Como resultado de esta tesis se entrega una herramienta computacional funcional, implementada en una plataforma de libre acceso, con la que es posible modelar numéricamente el fenómeno de un colapso de un depósito superficial de relaves. El programa desarrollado presenta una gran flexibilidad y permite que cualquier usuario interesado pueda incorporar mejoras y aportar en la generación de una herramienta más robusta. Además, fue demostrada su aplicabilidad en problemas a escala real, pudiendo describir la evolución de una brecha de falla entregando un hidrograma de salida de relaves. En base a lo descrito anteriormente, la herramienta desarrollada cumple con el objetivo general propuesto para este trabajo.

El colapso de un depósito de relaves es un problema que, de enfrentarse de forma rigurosa, requiere herramientas de distintas disciplinas para explicar todos los fenómenos involucrados. Una aproximación desde la hidráulica y la mecánica de fluidos, como la desarrollada, es útil para obtener los datos de entrada para estudios de ingeniería mediante los que se puedan estimar riesgos asociados al flujo de relaves, pero no es suficiente para describir el fenómeno en su complejidad.

Para la descripción del fenómeno del colapso de un depósito de relaves, naturalmente son requeridos conceptos asociados a la geotecnia, reología, hidráulica y matemáticas. En el proceso de caracterización del fenómeno, fue usual encontrar conceptos y metodologías pertenecientes a las distintas disciplinas que se orientaban a describir fenómenos de naturaleza similar, sin encontrar análisis rigurosos en los que ellos fuesen compatibilizados. En este sentido, realizar este ejercicio puede ser una oportunidad para mejorar tanto las estimaciones de los vertimientos como la comprensión del fenómeno en sí mismo.

El modelo conceptual desarrollado intenta explicar el fenómeno del colapso con un objetivo claro, que es proveer una herramienta para la estimación de caudales efluentes. Esto en vista que esta información es requerida tanto en las estimaciones de distancias peligrosas como en los análisis de propagación de ondas de crecida, estudios exigidos por la autoridad chilena para la aprobación de la construcción de un depósito superficial. En este sentido, la herramienta proporcionada en este trabajo mejora las estimaciones de tales caudales respecto de los análisis que no consideren el efecto de la reología o la erosión en el colapso.

Se identificó que aproximar el comportamiento del relave fluidizado por el de un fluido no-newtoniano es insuficiente para explicar el hecho que ante un colapso los volúmenes vertidos sean muy inferiores a los volúmenes totales acumulados. Esto refuerza la hipótesis que el volumen de vertimiento ante un colapso del muro de contención está modulado por parámetros resistentes del suelo, como la resistencia no drenada S_u . Esfuerzos futuros deberían estar orientados a la incorporación de este parámetro en los modelos de los procesos de vaciamiento de depósitos.

Por construcción, el modelo desarrollado presenta problemas asociados a los supuestos en las zonas donde el fluido cambia apreciablemente su comportamiento. Estas zonas fueron denominadas como *zonas de interfaz* y correspondieron a los sectores donde el esfuerzo de fluencia tiene un rol activo en el inicio o detención del flujo del material y donde existe un frente de avance que extiende el dominio efectivo de cálculo. La representación de estas zonas fue abordada mediante algoritmos con base física. Por otro lado, dadas las altas velocidades del flujo que se inducen en los colapsos, es requerido necesariamente resolver las ecuaciones gobernantes utilizando una discretización espacial gruesa, lo que conceptualmente impone errores de aproximación que pueden ser relevantes. Se realizó el esfuerzo de estudiar alternativas matemáticas más elaboradas para lidiar con los errores de aproximación que las escalas del problema imponen, concluyendo que carecen de sentido práctico en tanto las zonas de interfaz no sean resueltas de manera más rigurosa. De esta forma, el uso de esquemas de primer orden se considera suficiente para la estimación de hidrogramas bajo este contexto.

Una aproximación rigurosa a las zonas de interfaz incluye diversos problemas, dentro de los que destacan cómo incorporar en esquemas numéricos la reología, problemas de comprensión de los fenómenos físicos y, además, problemas de implementación. En este sentido existe mucho espacio para la mejora en trabajos futuros tanto en la comprensión del fenómeno, como en su modelado.

En el proceso de validación y verificación del modelo se obtuvieron distintas conclusiones aplicables a los escenarios simulados en particular, presentados en la Sección 6.1.3. Como conclusión global extrapolable a otros escenarios, se observa que los principales parámetros que condicionan la forma del hidrograma de salida de relaves ante un colapso corresponde a la densidad de la mezcla ρ_m y el esfuerzo de fluencia τ_y . Este comportamiento es razonable debido a que estos parámetros son indicadores de la cantidad de partículas que presentaría la mezcla. La variación de los demás parámetros de un fluido no-newtoniano, como el índice de flujo m y el índice de consistencia K , no generan variaciones significativas en la forma del hidrograma. Estos parámetros afectan principalmente al régimen del flujo al momento de la descarga, favoreciendo números de Reynolds Re_m bajos y, por tanto, un escurrimiento con un régimen laminar.

En el proceso de aplicación a una escala real del fenómeno, de igual modo, fueron obtenidas conclusiones particulares y aplicables al escenario analizado detalladas en la Sección 6.2.3. Como conclusión general, se identificó que considerar como supuesto una falla parcial del muro de contención sujeto a la erosión del mismo por el paso del flujo de relaves, induciría caudales máximos efluentes menores de aquellos obtenidos de considerar el supuesto usual en ingeniería de rotura completa e instantánea del prisma resistente sobre un lecho fijo. Lo anterior, sin necesariamente alterar los volúmenes totales de vertimiento. Además, se identificó que al

considerar supuestos de roturas instantáneas parciales sobre un lecho fijo pueden ser obtenidos caudales máximos efluentes de menor magnitud que al considerar esta misma condición inicial, pero incorporando el proceso erosivo.

Nomenclatura

Escalares

B	Dos acepciones: - En el cuerpo del documento: Carga total, o Bernoulli, medido en m. - En Anexo B: Constante de ajuste en función de atenuación $\Gamma(y^+)$.
c	Celeridad de onda superficial, medida en m/s.
\tilde{c}	Valor intermedio de Roe en la cara f_{pq} de c , medido en m/s.
d_s	Diámetro representativo de granulometría, medido en m.
d_p	Diámetro máximo de las partículas que constituyen el p% más fino de una granulometría, medido en m.
$d_{\perp pq}$	Distancia perpendicular a la cara f_{pq} desde el centroide de una celda N_p al centroide de una celda N_q , medida en m.
$d_{\perp pf}$	Distancia perpendicular a la cara f_{pq} desde el centroide de una celda N_p al centroide de la cara f_{pq} , medida en m.
F_{qs}	Resultante de los flujos numéricos en modelo morfodinámico sobre un volumen N_p , medido en m/s.
g	Aceleración de gravedad, medido en m/s^2 .
h	Altura vertical de flujo referenciada desde la superficie de terreno, medido en m.
\tilde{h}	Valor intermedio de Roe en la cara f_{pq} de h , medido en m.
h_0	Cota de superficie de terreno, medido en m.
\tilde{h}_0	Valor intermedio de Roe en la cara f_{pq} de h_0 , medido en m.
H	Escala de longitudes verticales, medida en m.
Π_γ	Segundo invariante del tensor de tasa de deformación, medido en s^{-1} .
Π_τ	Segundo invariante del tensor de esfuerzos totales, medido en Pa.
k_s	Rugosidad del lecho, medido en m.
K	Índice de consistencia de un fluido no-newtoniano, medido en $Pa s^m$.
L	Escala de longitudes horizontales, medida en m.
L_{pq}	Longitud de la cara f_{pq} , medida en m.
L_c	Longitud característica de la celda utilizada para corregir gasto sólido por deslizamiento, medida en m.
\hat{p}	Presión motriz, medido en Pa.
\bar{Q}	Caudal normal a una cara extrapolado linealmente, medido en m^3/s .
R_h	Radio hidráulico, medido en m.
t	Tiempo, medido en s.
Δt^*	Tiempo mínimo en que alguna celda del dominio se seca dentro de un paso temporal Δt , medido en s.

T	Escala de tiempo, medida en s.
$T_{arcilla}$	Tipo de arcillas para cálculo de K, τ_u según Urrutia (2016).
u_*	Velocidad friccional, medida en m/s.
U_0	Escala de velocidades, medida en m/s.
V	Área del dominio computacional, medida en m^2 .
V_p	Área de volumen de control, medida en m^2 .
∂V	Frontera del dominio computacional, medida en m.
∂V_p	Frontera del volumen de control, medida en m.
$V_{T_{pq}}$	Área de subsección triangular de V_p con arista en cara f_{pq} , medido en m^2 .
$W_{arcilla}$	Contenido de arcillas para cálculo de K, τ_u según Urrutia (2016).
$\tilde{\lambda}_m$	Valor propio m de la matriz \mathbf{Q} , medido en m/s.
$\tilde{\alpha}_m$	Coefficientes para la discretización del flujo, medido en m.
$\tilde{\beta}_m$	Coefficientes para la discretización de la pendiente, medido en m/s.
β_S	Ángulo de entre la topografía y la horizontal, medido en rad.
$\beta_{m\acute{a}x}$	Ángulo de máxima pendiente entre la topografía y la horizontal, medido en rad.
$\tilde{\gamma}_m$	Coefficientes para la discretización de la pendiente, medido en m/s.
λ_i	Valor propio de matriz \mathbf{A} , medido en m/s.
μ	Viscosidad secante newtoniana, medido en Pa s.
μ_{eq}	Viscosidad equivalente para flujos turbulentos, medido en Pa s.
μ_{ap}	Viscosidad de aparente en fluidos no-newtonianos expresados de una forma newtoniana, medido en Pa s.
ε_{wd}	Tolerancia para condición de celda seca, medido en m.
ε_λ	Tolerancia para regularización de valores propios de \mathbf{Q} , medido en m/s.
ρ	Densidad del agua, medido en kg/m^3 .
ρ_s	Densidad de sedimento, medido en kg/m^3 .
ρ_m	Densidad de la mezcla o fluido equivalente, medido en kg/m^3 .
τ_c	Esfuerzo de corte critico, medido en Pa.
τ_y	Esfuerzo de fluencia, medido en Pa.
φ	Ángulo de fricción interna de un suelo, medido en rad.

Constantes

A_i, B_i	Constantes numéricas adimensionales que definen una expresión particular en la ecuación generalizada para el cálculo de gasto sólido (ecuación 3.30).
C_s	Constante numérica dependiente de la forma del lecho para el cálculo del factor de fricción en régimen laminar (ecuación 3.15).
C_i	Constantes numéricas adimensionales para el cálculo del factor de fricción en régimen turbulento (ecuaciones 3.19 y 3.22).
$C_k, D_{u,v,w}$	Constantes experimentales que ajusta perfiles de u_{rms}/u_* (ecuaciones B.37-B.39).
κ	Constante de von Kármán.
$[\mu]$	Viscosidad intrínseca para cálculo de viscosidad en fluido no-newtoniano según la expresión de Krieger & Dougherty (1959)(ecuación 2.2).
$\bar{\tau}$	Esfuerzo de corte ajustado para cálculo de esfuerzo de fluencia en fluidos no-newtonianos según la expresión de Heymann et al. (2002) (ecuación 2.3), medido en Pa.

Números adimensionales

c_f	Coefficiente de fricción.
f	Factor de fricción.
Fr	Número de Froude.
He	Número de Hedstrom.
J	Pérdida friccional por unidad de longitud.
k_r	Rugosidad relativa.
m	Índice de flujo.
p	Porosidad.
R	Densidad específica sumergida de sedimentos.
R_{ij}	Razón $-\overline{u'_i u'_j} / (u_{irms} u_{j_rms})$.
Re	Número de Reynolds.
Re_c	Número de Reynolds crítico para transición laminar-turbulento.
Re_m	Número de Reynolds plástico genérico.
Re_*	Número de Reynolds basado en en u_* y $4R_h$.
Re_{k*}	Número de Reynolds basado en en u_* y k_s .
S	Pendiente de un lecho.
y^+	Unidad de pared.
α	Factor de engrosamiento de sub-capa viscosa en fluidos no-newtonianos.
β_{ij}	Coefficiente de Boussinesq.
ε	Razón entre escala vertical y horizontal.
ζ	Razón $\zeta = 1/(1 - p)$.
θ	Esfuerzo adimensional de Shields.
θ_c	Esfuerzo crítico adimensional de Shields.
ϕ	Concentración volumétrica de sólidos en una mezcla.
ϕ_m	Concentración volumétrica de empaquetamiento.
Φ	Gasto sólido de fondo adimensional.
Υ	Razón entre gastos sólido y líquido.
ξ_y	Razón entre esfuerzo de fluencia y de fondo.
ψ	Función que considera reología en ecuación 3.15.

Vectores

\hat{b}	Dirección de máxima pendiente en un lecho.
\mathbf{e}	Vector propio de matriz \mathbf{A} .
$\tilde{\mathbf{e}}$	Vector propio de matriz \mathbf{Q} .
$\mathbf{F}_{x,y}$	Flujos en formulación generalizada del sistema de ecuaciones de aguas someras.
\mathbf{F}_{n_p}	Resultante de los flujos numéricos en modelo hidrodinámico sobre un volumen N_p .
hU	Caudal por unidad de ancho, $hU = (hU_x, hU_y)^T$, medido en m^2/s .
$I_{L_{pq}, \mathbf{Z}}$	Integral en el espacio de \mathbf{Z} sobre L_{pq} .
$I_{V_p, \mathbf{S}}$	Integral en el espacio de \mathbf{S} sobre V_p .
$I_{V_p, \mathbf{T}}$	Integral en el espacio de \mathbf{T} sobre V_p .
n_{pq}	Vector de área de la cara f_{pq} , $n_{pq} = L_{pq} \hat{n}_{pq}$, medido en m.

\hat{n}_{pq}	Vector unitario exterior cara f_{pq} , $\hat{n}_{pq} = (\hat{n}_x, \hat{n}_y)^T$.
q_s	Gasto sólido de fondo, $q_s = (q_{sx}, q_{sy})^T$, medido en m^2/s .
r_{pq}	Vector de distancia entre el centroide de una celda N_p al centroide de una celda N_q , medido en m.
r_{pf}	Vector de distancia entre el centroide de una celda N_p a la cara f_{pq} , medido en m.
S	Término fuente asociado a la pendiente en en formulación generalizada del sistema de ecuaciones de aguas someras.
S_p	Término fuente numérico asociado a la pendiente.
T	Término fuente asociado a la fricción en en formulación generalizada del sistema de ecuaciones de aguas someras.
T_p	Término fuente numérico asociado a la fricción.
T_{pq}	Discretización de la fricción en una celda N_p asociada a la cara f_{pq} .
u	Velocidad promediada sobre la turbulencia, $u = (u, v, w)^T$, medido en m/s.
u'	Fluctuaciones turbulentas de velocidad, $u' = (u', v', w')^T$, medido en m/s.
u_{rms}	Raíz cuadrada del producto de las fluctuaciones turbulentas (Root-mean square velocity), $u_{rms} = (u_{rms}, v_{rms}, w_{rms})^T$, medido en medido en m/s.
U	Velocidad promediada en el eje vertical, $U = (U_x, U_y)^T$, medido en m/s.
\bar{U}	Velocidad promediada en el eje vertical en una cara extrapolada linealmente, $\bar{U} = (\bar{U}_x, \bar{U}_y)^T$, medido en m/s.
\tilde{U}	Valor intermedio de Roe en la cara f_{pq} de U , $\tilde{U} = (\tilde{U}_x, \tilde{U}_y)^T$, medido en m/s.
w	Variables conservativas en formulación generalizada del sistema de ecuaciones de aguas someras.
x	Posición en sistema de coordenadas cartesiano, $x = (x, y, z)^T$, medido en m.
Z	Flujo normal a una superficie en formulación generalizada del sistema de ecuaciones de aguas someras.
τ_0	Esfuerzo de corte sobre la superficie de terreno, $\tau_0 = (\tau_{0x}, \tau_{0y})^T$, medido en Pa.
$\hat{\tau}_0$	Esfuerzo de corte normalizado sobre la superficie de terreno.
ϕ_{pq}	Flujo numérico normal a la cara f_{pq} .
ψ_{pq}	Discretización de la pendiente en una celda N_p asociada a la cara f_{pq} .

Matrices y tensores

A	Jacobiano problema de Riemann unidimensional homogéneo en un sistema de ecuaciones de aguas someras.
D	Matriz diagonal construida con los valores propios de A .
\tilde{D}	Matriz diagonal construida con los valores propios de Q .
Q	Jacobiano linealizado mediante el método de Roe para un problema de Riemann unidimensional homogéneo en sistema de ecuaciones de aguas someras.
X	Matriz construida con los vectores propios de A .
\tilde{X}	Matriz construida con los vectores propios de Q .
$\dot{\gamma}$	Tasa de deformación, medido en s^{-1} .
τ	Esfuerzo total, medido en Pa.
τ_v	Esfuerzo viscoso, medido en Pa.
τ_t	Esfuerzo turbulento, medido en Pa.

Índices y etiquetas

Subíndices

i/j	Componente i/j de un vector.
ij	Componente ij de un tensor, donde i corresponde a las filas y j a las columnas.
m	Magnitud asociada al vector propio \mathbf{e}_m de la matriz \mathbf{A}, \mathbf{Q} .
p/q	Magnitud evaluada en el centroide la celda $N_{p,q}$.
pq	Magnitud evaluada en la cara f_{pq} .
Pq	Reconstrucción de una variable extrapolando el valor presente en la celda N_p a la cara f_{pq} .
pQ	Reconstrucción de una variable extrapolando el valor presente en la celda N_q a la cara f_{pq} .

Superíndices

*	Versión adimensional de la variable.
$n/n + 1$	Variable evaluada en un paso de tiempo $n/n + 1$.
S	Variable que es solución de una ecuación diferencial.
U	Parte descentrada de una discretización.
C	Parte centrada de una discretización.

Etiquetas y relacionados

N_p	Etiqueta que identifica un volumen de control.
N_q^G	Etiqueta que identifica un volumen de control virtual en la frontera el dominio.
f_{pq}	Etiqueta que identifica un segmento que separa la celdas $N_p - N_q$.
P_q	Lista de índices de celdas vecinas a N_p .

Funciones o términos en ecuaciones

f_u	Función para corregir esfuerzo crítico adimensional de Shields.
Ω	Término que considera efecto de la tensión de fluencia en perfil logarítmico de velocidades (ecuación 3.16).
Γ	Dos acepciones: <ul style="list-style-type: none">- En el cuerpo del documento: Término que considera efecto de la rugosidad para el cálculo del factor de fricción en régimen turbulento (ecuación 3.16).- En Anexo B: función de atenuación.

Bibliografía

- Alderman, N. & Haldenwang, R. (2007). A review of newtonian and non-newtonian flow in rectangular open channels. *Hydrotransport 17. The 17th International Conference on the Hydraulic Transport of Solids*.
- Ancey, C., Andreini, N., & Epely-Chauvin, G. (2012). Viscoplastic dambreak waves: Review of simple computational approaches and comparison with experiments. *Advances in Water Resources*, 48, 79–91.
- Apsley, D. D. & Stansby, P. K. (2008). Bed-Load Sediment Transport on Large Slopes: Model Formulation and Implementation within a RANS Solver. *Journal of Hydraulic Engineering*, 134(10), 1440–1451.
- Ashida, K. & Michiue, M. (1972). Study on hydraulic resistance and bed-load transport rate in alluvial streams. In *Proceedings of the Japan society of civil engineers*, volume 1972 (pp. 59–69).: Japan Society of Civil Engineers.
- Azam, S. & Li, Q. (2010). Tailings dam failures: A review of the last one hundred years. *Geotechnical News*, 28(4), 50–53.
- Baas, J. H. & Best, J. L. (2002). Turbulence Modulation in Clay-Rich Sediment-Laden Flows and Some Implications for Sediment Deposition. *Journal of Sedimentary Research*, 72(3), 336–340.
- Billett, S. & Toro, E. (1997). Aon waf-type schemes for multidimensional hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 130(1), 1–24.
- Bladé, E., Cea, L., Corestein, G., Escolano, E., Puertas, J., Dolz, J., & Coll, A. (2014). Iber: herramienta de simulación numérica del flujo en ríos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 30(1), 1–10.
- Blight, G. (2009). *Geotechnical Engineering for Mine Waste Storage Facilities*. CRC Press, first edition.
- Boger, D. V., Scales, P. J., & Sofra, F. (2006). Rheological concepts. In *Paste and Thickened Tailings-A Guide* chapter 3, (pp. 25–37). Australian Centre for Geomechanics, second edition.
- Bowker, L. N. & Chambers, D. M. (2015). The risk, public liability, & economics of tailings

- storage facility failures. *Earthwork Act*, (pp. 1–56).
- Brufau, P., Vázquez-Cendon, M. E., & Garca-Navarro, P. (2002). A numerical model for the flooding and drying of irregular domains. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 39(3), 247–275.
- Burger, J., Haldenwang, R., & Alderman, N. (2010). Friction factor-Reynolds number relationship for laminar flow of non-Newtonian fluids in open channels of different cross-sectional shapes. *Chemical Engineering Science*, 65(11), 3549–3556.
- Burger, J., Haldenwang, R., & Alderman, N. (2014). Laminar and turbulent flow of non-newtonian fluids in open channels for different cross-sectional shapes. *Journal of Hydraulic Engineering*, 141(4), 04014084.
- Calle, F., Ramón, F., Andrea, G., & Rayo, J. (2011). Aplicación del espesamiento extremo en proyectos mineros. *Revista minería chilena*, 365, 211–215.
- Carrillo, D. (2011). *Arrastre incipiente de partículas en flujos de fluidos no-newtonianos*. Memoria para optar al título de Ingeniera Civil, Universidad de Chile.
- Carvajal, M. (2018). *Desarrollo de una metodología para análisis de estabilidad física de depósitos de relaves*. Memoria para optar al título de Ingeniera Civil, Universidad de Chile.
- Caviedes-Voullième, D., Morales-Hernández, M., Juez, C., Lacasta, A., & García-Navarro, P. (2017). Two-dimensional numerical simulation of bed-load transport of a finite-depth sediment layer: Applications to channel flushing. *Journal of Hydraulic Engineering*, 143(9).
- Cea, L. (2005). *An unstructured finite volume model for unsteady turbulent shallow water flow with wet-dry fronts: Numerical solver and experimental validation*. Tesis Doctoral en Ingeniería Civil, Universidad de A Coruña.
- Cea, L. & Vázquez-Cendón, M. E. (2010). Unstructured finite volume discretization of two-dimensional depth-averaged shallowwater equations with porosity. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 63, 903–930.
- Cea, L. & Vázquez-Cendón, M. E. (2012). Unstructured finite volume discretisation of bed friction and convective flux in solute transport models linked to the shallow water equations. *Journal of Computational Physics*, 231(8), 3317–3339.
- Chanson, H. (2005). Analytical Solution of Dam Break Wave With Flow Resistance. Application To Tsunami Surges. In *31st IAHR Biennial Congress* (pp. 3341–3353). Seoul: IAHR.
- Chertock, A., Cui, S., Kurganov, A., & Wu, T. (2015). Well-balanced positivity preserving central-upwind scheme for the shallow water system with friction terms. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 78(6), 355–383.
- Chow, V. T. (1994). *Hidraulica de canales abiertos*. Santafé de Bogota: McGraw-Hill Interamericana S.A.

- Colebrook, C. & White, C. (1937). Experiments with fluid friction in roughened pipes. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*, 161(906), 367–381.
- Conejera, C. (2016). *Efecto de fábrica y la estructura en la resistencia no drenada de relave integral*. Memoria para optar al título de Ingeniero Civil, Universidad de Chile.
- Cubillos, A. (2017). *Método simplificado para estimar deformaciones cosísmicas permanentes en muros de tranques de relave chilenos*. Memoria para optar al título de Ingeniero Civil, Universidad de Chile.
- Davies, M. P. (2002). Tailings impoundment failures are geotechnical engineers listening? *Geotechnical News-Vancouver*, 20(3), 31–36.
- Debiane, K. (2000). *Hydraulics of laminar free surface flow in channel for viscous or Viscoplastic models: uniform regime, gradually varied flow, and dam break problem*. Thèse de doctorat en Mécanique des fluides et transferts, University of Joseph Fourier-Grenoble I.
- Decreto 248 del Ministerio de Minería (2007). *Aprueba reglamento para la aprobación de proyectos de Diseño, Construcción, Operación y Cierre de los depósitos de relaves*. Diario Oficial de la República de Chile, Santiago, Chile, 11 de abril de 2007.
- Decreto 50 del Ministerio de Obras Públicas (2015). *Aprueba reglamento a que se refiere el artículo 295 inciso 2do, del código de aguas, estableciendo condiciones técnicas que deberán cumplirse en el proyecto, construcción y operación de las obras hidráulicas identificadas*. Diario Oficial de la República de Chile, Santiago, Chile, 19 de diciembre de 2015.
- Dimitropoulos, C. D., Sureshkumar, R., & Beris, A. N. (1998). Direct numerical simulation of viscoelastic turbulent channel flow exhibiting drag reduction: effect of the variation of rheological parameters. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 79, 433–468.
- Duran, A. (2015). A robust and well-balanced scheme for the 2D Saint-Venant system on unstructured meshes with friction source term. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 78(2), 89–121.
- Engelund, F. & Fredsøe, J. (1976). A Sediment Transport Model for Straight Alluvial Channels. *Nordic Hydrology*, 7(5), 293–306.
- Espinace, R. (2015). Depósitos de relaves: consideraciones en su manejo. In *Seminario: Tranques de relaves, una mirada detallada para el análisis informado en zonas mineras*. Copiapó.
- Fernandez Luque, R. & Van Beek, R. (1974). Erosion and Transport of Bed-Load Sediment. *Journal of Hydraulic Research*, 14(2), 127–144.
- Fernández-Nieto, E. D. (2003). *Aproximación numérica de leyes de conservación hiperbólicas no homogéneas. Aplicación a las ecuaciones de aguas someras*. Tesis Doctoral en Matemáticas, Universidad de Sevilla.
- Fernández-Nieto, E. D., de Luna, T. M., Narbona-Reina, G., & Zabsonré, J. d. D. (2017).

- Formal deduction of the Saint-Venant–Exner model including arbitrarily sloping sediment beds and associated energy. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 51(1), 115–145.
- Greenshields, C. J. (2015). *OpenFOAM programmer’s guide*. Technical Report 3.0.1, OpenFOAM Foundation Ltd.
- Guang, R., Rudman, M., Chryss, A., Slatter, P., & Bhattacharya, S. (2011). A DNS investigation of the effect of yield stress for turbulent non-newtonian suspension flow in open channels. *Particulate Science and Technology*, 29(3), 209–228.
- Guo, J. (2002). Hunter Rouse and Shields Diagram. *Advances in Hydraulics and Water Engineering*, 2, 1096–1098.
- Haldenwang, R., Slatter, P. T., & Chhabra, R. P. (2002). Laminar and transitional flow in open channels for non-Newtonian fluids. In *15th International Conference on Hydrotransport* (pp. 755–768). .
- Hanks, R. W. (1967). A theory of laminar flow stability. *American Institute of Chemical Engineers*, 15(1), 25–28.
- Hanks, R. W. & Pratt, D. R. (1967). On the Flow of Bingham Plastic Slurries in Pipes and Between Parallel Plates. *Society of Petroleum Engineering Journal*, 7(04), 342–346.
- Hanks, R. W. & Ricks, B. L. (1975). Transitional and Turbulent Pipeflow of Pseudoplastic Fluids. *Journal of Hydronautics*, 9(1), 39–44.
- Heymann, L., Peukert, S., & Aksel, N. (2002). On the solid-liquid transition of concentrated suspensions in transient shear flow. *Rheologica Acta*, 41(4), 307–315.
- Hou, J., Liang, Q., Simons, F., & Hinkelmann, R. (2013). A stable 2D unstructured shallow flow model for simulations of wetting and drying over rough terrains. *Computers and Fluids*, 82, 132–147.
- Hu, L., Wu, H., Zhang, L., Zhang, P., & Wen, Q. (2017). Geotechnical Properties of Mine Tailings. *Journal of Materials in Civil Engineering*, 29(2), 04016220.
- Hubbard, M. E. & Garcia-Navarro, P. (2000). Flux Difference Splitting and the Balancing of Source Terms and Flux Gradients. *Journal of Computational Physics*, 165(1), 89–125.
- ICOLD (2001). *Tailings Dams Risk of Dangerous Occurrences. Lessons learnt from practical experiences (Bulletin 121)*. Technical report, Commission Internationale des Grands Barrages, Paris.
- Juez, C., Murillo, J., & García-Navarro, P. (2013). Numerical assesment of bed load discharge formulations for transient flow in 1D and 2D situations. *Journal of Hydroinformatics*, 15(4), 1234–1257.
- Juez, C., Murillo, J., & García-Navarro, P. (2014). A 2D weakly-coupled and efficient numerical

- model for transient shallow flow and movable bed. *Advances in Water Resources*, 71, 93–109.
- Kossoff, D., Dubbin, W. E., Alfredsson, M., Edwards, S. J., Macklin, M. G., & Hudson-Edwards, K. A. (2014). Mine tailings dams: Characteristics, failure, environmental impacts, and remediation. *Applied Geochemistry*, 51, 229–245.
- Kramer, S. L. (1996). *Geotechnical Earthquake Engineering*. New Jersey: Prentice-Hall.
- Krieger, I. M. & Dougherty, T. J. (1959). A Mechanism for Non-Newtonian Flow in Suspensions of Rigid Spheres. *Transactions of the Society of Rheology*, 3(1), 137–152.
- Lottermoser, B. G. (2010). *Mine Wastes*. Springer, third edition.
- Luo, C., Xu, K., & Zhao, Y. (2017). A TVD discretization method for shallow water equations: Numerical simulations of tailing dam break. *International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing*, 08(3), 1850001.
- Mantz, P. A. (1977). Incipient transport of fine grains and flakes by fluids-extended shield diagram. *Journal of the Hydraulics division*, 103(ASCE 12992).
- Medeiros, S. C. & Hagen, S. C. (2013). Review of wetting and drying algorithms for numerical tidal flow models. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 71(4), 473–487.
- Meyer-Peter, E. & Müller, R. (1948). Formulas for Bed-Load Transport. *Proceedings of the 2nd Meeting of the International Association of Hydraulic Research*, (pp. 39–64).
- Minussi, R. B. & Maciel, G. F. (2012). Numerical experimental comparison of dam break flows with non-newtonian fluids. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 34(2), 167–178.
- Morgenstern, N. R., Vick, S. G., & Van Zyl, D. (2015). *Report on Mount Polley Tailings Storage Facility Breach*. Technical report, Independent Expert Engineering Investigation and Review Panel, British Columbia.
- Morris, M. W. & Hassan, M. (2002). Breach Formation through Embankment Dams & Flood Defence Embankments: A State of the Art Review. In *Impact Project Workshop 16/17th May 2002* (pp. 1–21).: HR Wallingford.
- Murillo, J. & García-Navarro, P. (2010). Weak solutions for partial differential equations with source terms: Application to the shallow water equations. *Journal of Computational Physics*, 229(11), 4327–4368.
- Nezu, I. & Nakagawa, H. (1993). *Turbulence in open-channel flows*. IAHR Monograph. CRC Press.
- Nielsen, P. (1992). *Coastal bottom boundary layers and sediment transport*. World Scientific Publishing Co Inc.
- Noelle, S., Xing, Y., & Shu, C.-W. (2007). High-order well-balanced finite volume WENO

- schemes for shallow water equation with moving water. *Journal of Computational Physics*, 226(1), 29–58.
- Obando, B. (2013). *Estudio matemático de ondas de sedimento y modelación matemática de un reómetro de paletas*. Memoria para optar al título de Ingeniero Civil Matemático, Universidad de Chile.
- Ohta, T. & Miyashita, M. (2014). DNS and LES with an extended Smagorinsky model for wall turbulence in non-Newtonian viscous fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 206, 29–39.
- Palma, J. H. (2016). Operación y control de tranques de relave. In *Seminario Minería Chilena y sus Desafíos: Una Visión Integral*.
- Pelanti, M., Quartapelle, L., & Vigevano, L. (2001). A review of entropy fixes as applied to roe's linearization. *Teaching material of the Aerospace and Aeronautics Department of Politecnico di Milano*.
- Pullum, L., Boger, D. V., & Sofra, F. (2018). Hydraulic Mineral Waste Transport and Storage. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 58, 157–185.
- Ramírez, N. (2007). Guía técnica de operación y control de depósitos de relaves. *Servicio Nacional de Geología y Minería, Departamento de Seguridad Minera*, (pp. 1–42).
- Richardson, J. & Chhabra, R. (2008). *Non-Newtonian Flow and Applied Rheology. Engineering Applications*. Elsevier, second edition.
- Rickenmann, D. (1991). Hyperconcentrated flow and sediment transport at steep slopes. *J. Hydr. Eng.*, 117(11), 1419–1439.
- Rico, M., Benito, G., Salgueiro, A. R., Díez-Herrero, A., & Pereira, H. G. (2008). Reported tailings dam failures. A review of the European incidents in the worldwide context. *Journal of Hazardous Materials*, 152(2), 846–852.
- Roe, P. L. (1981). Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 43(2), 357–372.
- Sampson, J. J., Easton, A., & Singh, M. (2008). Moving boundary shallow water flow in a region with quadratic bathymetry. *ANZIAM Journal*, 49, 666–680.
- SERNAGEOMIN (2016). *Resultados Catastro de Depósito de Relaves 2016*. Technical report, Servicio Nacional de Geología y Minería, Gobierno de Chile.
- SERNAGEOMIN (2017). Preguntas frecuentes sobre relaves. <http://www.sernageomin.cl/preguntas-frecuentes-relaves.php>. Accedido el 2017-11-06.
- SERNAGEOMIN (2018). *Análisis del Catastro de Depósitos de Relave de Chile*. Technical report, Servicio Nacional de Geología y Minería, Gobierno de Chile.

- Singh, J., Rudman, M., & Blackburn, H. (2017a). The effect of yield stress on pipe flow turbulence for generalised newtonian fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 249, 53–62.
- Singh, J., Rudman, M., & Blackburn, H. M. (2017b). The influence of shear-dependent rheology on turbulent pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 822, 848–879.
- Smart, G. M. (1984). Sediment Transport Formula for Steep Channels. *Journal of Hydraulic Engineering*, 110(3), 267–276.
- Solís, C. G., Valdebenito, N., Montalva, C., Valenzuela, J. M., & De La Maza, G., Eds. (2016). *Desde el cobre a la innovación. Roadmap Tecnológico 2015-2035*. Santiago de Chile: Programa Nacional de Minería Alta Ley, first edition.
- Stevens, M. A., Simmons, D., & Lewis, G. L. (1976). Safety factors for riprap protection. *Journal of the Hydraulics Division*, 102(ASCE Paper 12115).
- Thomas, A. & Wilson, K. C. (2007). Rough-wall and turbulent transition analyses for Bingham plastics. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, 107(6), 359–364.
- Thomas, A. D. & Wilson, K. C. (1987). New Analysis of Non-Newtonian Turbulent Flow - Yield-Power-Law Fluids. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 65, 335–338.
- Tingsanchali, T. & Chinnarasri, C. (2001). Numerical modelling of dam failure due to flow overtopping. *Hydrological sciences journal*, 46(1), 113–130.
- Toro, E. (1999). NUMERICA, A Library of Source Codes for Teaching, Research and Applications. Numeritek Ltd.
- Toro, E. F. (2001). *Shock-capturing methods for free-surface shallow flows*. John Wiley.
- Toro, E. F. (2009a). *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*. Springer, third edition.
- Toro, E. F. (2009b). The HLL and HLLC Riemann solvers. In *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics* (pp. 315–344). Springer.
- Trehwela, T. A. (2015). *Modelo Numérico Para Flujos Bidimensionales De Fluidos No-Newtonianos Sobre Topografías Complejas*. Tesis de Magister en Ciencias de la Ingeniería, Mención Recursos y Medio Ambiente Hídrico, Universidad de Chile.
- Urrutia, N. (2016). *Estudio reológico de relaves basado en técnicas de caracterización avanzada de minerales*. Tesis de magister en ciencias de la ingeniería, mención metalurgia extractiva, Universidad de Chile.
- US EPA (1994). *Design and Evaluation of Tailings Dams*. Technical report, United States Environmental Protection Agency.

- Valenzuela, L. (2016). Design, construction, operation and the effect of fines content and permeability on the seismic performance of tailings sand dams in Chile. *Obras y Proyectos*, 19, 6–22.
- Villavicencio, G., Espinace, R., Palma, J., Fourie, A., & Valenzuela, P. (2014). Failures of sand tailings dams in a highly seismic country. *Canadian Geotechnical Journal*, 51(4), 449–464.
- Wang, Z. & Plate, E. C. J. (1996). A preliminary study on the turbulence structure of flows of non-newtonian fluid. *Journal of Hydraulic Research*, 34(3), 345–361.
- Wilson, K. & Thomas, A. (2006). Analytic model of laminar-turbulent transition for bingham plastics. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 84(5), 520–526.
- Wilson, K. C., Addie, G. R., Sellgren, A., & Clift, R. (2006). *Slurry transport using centrifugal pumps*. Springer, third edition.
- Wilson, K. C. & Thomas, A. D. (1985). A new analysis of the turbulent flow of non-newtonian fluids. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 63(4), 539–546.
- WISE (2018). Chronology of major tailings dam failures. <http://www.wise-uranium.org/mdaf.html>. Accedido el 2019-8-03.
- Yabuchi, S. T. (2004). *A theoretical-experimental study for the determination the front velocity of mud flowing in channels (In Portuguese)*. Master Dissertation, Department of Civil Engineering, São Paulo State University.

Anexos

Anexo A

Información tabulada asociada a la caracterización del problema

Tabla A.1: Producción de relaves aproximada generada por la gran minería chilena para el periodo 2015-2016. Fuente: SERNAGEOMIN (2016).

Empresa	Depósito de relaves	Región	Producción de relaves (t/d)
Compañía Ines de Collahuasi	Pampa Pabellón	I	136.441
Minera Las Cenizas	Las Luces 2	II	23.751
Minera Escondida	Laguna Seca	II	242.707
Minera Meridian	El Peñón	II	4046
Mantos Cooper	DMBL	II	11.705
CODELCO (Chuquicamata)	Talabre	II	138.064
SCM Sierra Gorda	Sierra Gorda	II	66.243
Minera Centinela	Esperanza	II	88.154
CODELCO (Salvador)	Filtrado Escorias	III	732
CODELCO (Salvador)	Pampa Austral	III	27.108
COEMIN	Tranque III	III	61.515
CCM Candelaria	Candelaria	III	75.345
SCM Atacama Kozan	El Gato	III	3794
SCM PUCOBRE	Las Cruces	III	9846
Lumina Cooper	El Tambo/La Brea	III	62.348
Teck Andacollo	Hipogeno	IV	47.151
Los Pelambre	El Mauro Humo	IV	171.833
Minera San Geronimo	Humo Corral	IV	3797
Anglo American (Los Bronces)	Las Tortolas	RM	97.266
Anglo American (El Soldado)	Torito	V	97.266
CODELCO (Andina)	Ovejería	V	84.284
CODELCO (El Teniente)	Carén	VI	111.111
Total			1.564.507

Tabla A.2: Características de algunos muros de depósitos de relaves chilenos construidos luego de 1965. Información tomada de Valenzuela (2016) y Cubillos (2017).

Depósito	Altura máxima de muro m	Longitud de muro m	Capacidad (+) millones de m ³ operaciones	Inicio/Fin de operaciones	Tipo de depósito	Talud A. Arriba H:V	Talud A. Abajo H:V
El Cobre 4*	68	1140	31	1969/1992	DS		
Pérez C. 2*	115 - 135§	500	84	1978/1992	DS	2,25:1	4:1
El Chinche	100	470	14,5	1992/1999	DS		
Las Tórtolas*	150 - 170	1700(-)	1000	1992/OP	DS	2:1	3:1
Torito*	78	2190	130	1992/OP	DS/CL	2,5:1	4:1
Quillayes	175 - 198	1600(+)	253	1999/2009	DS	2:1	4:1
Ovejería*	130	5000(+)	1380	1999/OP	DS		
El Mauro	237	1450	1088	2009/OP	DS	2:1	3,5:1
Piuquenes*	58	500	20,5	1970/1980	DS		
Talabre	>50	>10.000	>1200	1985/OP	EF/DS	2:1	2,5:1
P. Pabellón	90 §	4500 (+)	2400	1998/OP	RF		
Pampa Austral	29	700	100	1989/OP	EF		
El Indio	79	290	4,2	1987/1999	EF		
Los Leones*	160	500	140	1980/1999	RF		
Colihues A. *	83	1200	160	1981/1986	EF	2:1	2,5:1
Candelaria	163	2400	281	1995/OP	RF		
Carén*	>70	950	300	1986/OP	EF		

Nota: Algunos depósitos han sido expandidos y no todos han sido registrados en esta tabla. Taludes obtenidos de Cubillos (2017) y resto de la información obtenido de Valenzuela (2016).

DS: Tranque de relaves construido mediante el método aguas abajo (Downstream sand dam); CL: Tranque de relaves construido mediante el método de eje central (Centerline sand dam); RF: Embalse de relaves con muro de enrocado (Rock-fill); EF: Embalse de relaves con muro de tierra (Earth-fill)

(-) Sólo el muro principal.

(+) Aproximada

§ Altura final aproximada

* Presas ubicadas en la zona central de Chile

Tabla A.3: Propiedades índice y mineralogía de arenas de relaves de cobre provenientes de Chile y Perú. Adaptada de Valenzuela (2016).

ID	G_s	Clasificación USGS	FC %	e_{max}	e_{min}	C_c	C_u	d_{50} mm	MP			SP	
									MDD kN/m ³	w_{opt} %	MDD kN/m ³	w_{opt} %	MDD kN/m ³
S1 Las Tórtolas		SM	15	1,100	0,460	1,4	3,3	0,167	16,78	14,0	15,89	18,0	
	2,73	SM	18	1,068	0,444	1,5	3,6		16,97	14,0	16,38	16,0	
		SM	21	1,084	0,414	1,0	4,0	0,154	17,36	12,5	16,38	16,0	
Mineralogía: 45 % de cuarzo; 30 % de moscovita-sericita; 15 % de plagioclasa; 5 % minerales opacos; 4 % de biotita; 1 % otro													
S2		SM	15	1,310	0,647	1,2	1,7		16,68	10,0	15,30	14,0	
	2,67 - 2,75 ¹	SM ²	15	1,068	0,517				17,07	12,8			
		SM ²	18	0,992	0,537			0,164	16,88	13,8			
		SM	21	1,331	0,571	1,2	1,8		16,87	11,0	15,99	18,0	
Mineralogía: 45 % de cuarzo; 42 % de sericita; 4 % de óxido de hierro; 3 % feldespatos; 3 % minerales opaco; 3 % biotita													
S3	2,70	SM	12	0,942	0,525	1,2	4,2	0,127	17,46	13,5	16,48	15,5	
		SM	18	0,956	0,484	3,1	1,9	0,120	18,25	11,0	16,77	14,5	
S4	2,69	SM	24	0,915	0,406	2,7	165,0		18,84	8,0	17,36	8,5	
		SM	20	1,280	0,601	1,2	4,2	0,129	16,48	15,0	15,40	18,0	
		SM	30	1,280	0,592	3,1	12,9	0,116	17,85	11,5	16,87	14,0	
Mineralogía: 60 % de cuarzo; 15,5 % de moscovita; 18 % albita; 2 % de caolinita; 4,5 % otros													
S5	2,88	SM	15	0,694	0,532	3,2	1,0		18,30	8,5	17,10	16,0	
		SM	20	1,087	0,500	3,1	0,8		18,90	10,5	17,70	16,0	

FC: partículas con tamaño bajo malla 200, G_s : Gravedad específica, C_u : Coeficiente de uniformidad, C_c : coeficiente de curvatura, MMD: Densidad seca máxima (Maximum Dry Density), MP: Proctor modificado (Modified Proctor Test), SP: Proctor Estándar (Standard Proctor Test), w_{opt} : contenido óptimo de humedad, e_{max} : índice de vacíos máximo, e_{min} : índice de vacíos mínimo, USCS: unified Soil Classif. System.

¹ $G_{s\text{promedio}} = 2,72$

² Testeado a bajas presiones, $\sigma_3' < 0,8\text{MPa}$

Anexo B

Ecuaciones de flujo promediadas en el eje vertical

El modelo de relave utilizado considera aproximar su comportamiento por el de un fluido no-newtoniano incompresible, homogéneo e isótropo. En este contexto, son válidas las ecuaciones de Reynolds presentadas en B.1 y B.2 para describir su flujo. Si ellas son promediadas en el eje vertical imponiendo aproximaciones de onda larga, se obtienen las *Ecuaciones de Aguas Someras (Shallow Water Equations)*. Estas ecuaciones son ampliamente utilizadas en ingeniería para realizar simulaciones de colapsos en presas de retención de agua, ya que disminuyen el coste computacional permitiendo realizar simulaciones a la escala de un tranque en un tiempo razonable y con suficiente precisión.

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\rho_m \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho_m \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{B.2})$$

En el presente anexo se realiza la deducción de las *Ecuaciones de Aguas Someras* considerando que el fluido analizado es no-newtoniano. Particularmente, se explicitan las aproximaciones realizadas discutiendo su validez. Se considera un sistema de coordenadas fijo como se indica en la Figura B.1.

B.1. Análisis de escala

Ecuaciones en versión adimensional y aproximación de onda larga

Tomando L como una escala de longitudes característica horizontal, H como una escala característica de longitudes en vertical, U_0 como una escala característica de las velocidades horizontales y H/U_0 como una escala característica para el tiempo, las ecuaciones B.1 y B.2 fueron adimensionalizadas obteniendo las ecuaciones desde B.3 a B.6, donde para una variable

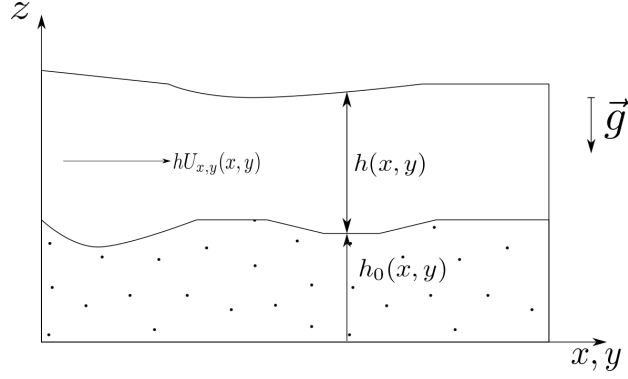


Figura B.1: Representación esquemática de los ejes de ecuaciones de aguas someras.

genérica ζ , su versión adimensional se escribe como ζ^* . Es fácil ver que para \hat{p} y τ_{ij} la escala se formó naturalmente, correspondiendo a $\rho_m U_0^2$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{L}{H} \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^* u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^* v^*}{\partial y^*} + \frac{L}{H} \frac{\partial u^* w^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial \hat{p}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y^*} + \frac{L}{H} \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial z^*} \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{\partial v^* u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^* v^*}{\partial y^*} + \frac{L}{H} \frac{\partial v^* w^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial \hat{p}^*}{\partial y^*} + \frac{\partial \tau_{yx}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau_{yy}^*}{\partial y^*} + \frac{L}{H} \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial z^*} \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \frac{H}{L} \frac{\partial w^* u^*}{\partial x^*} + \frac{H}{L} \frac{\partial w^* v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^* w^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial \hat{p}^*}{\partial z^*} + \frac{H}{L} \frac{\partial \tau_{zx}^*}{\partial x^*} + \frac{H}{L} \frac{\partial \tau_{zy}^*}{\partial y^*} + \frac{\partial \tau_{zz}^*}{\partial z^*} \quad (\text{B.6})$$

Por construcción, se cumple que $u^*, v^*, x_j^*, t^* \sim 1$ y dado que los flujos analizados son debido a la gravedad, se cumple que $\hat{p}^* \sim 1$. Al realizar aproximaciones de onda larga ($H \ll L$) podemos deducir:

- De la ecuación de continuidad (B.3):

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \sim \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \sim \frac{L}{H} \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \sim 1 \Rightarrow w^* \sim \frac{H}{L} \ll 1 \quad (\text{B.7})$$

- De la ecuación de cantidad de movimiento según \hat{x} (B.4) y que $w^* \sim H/L$ (B.7):

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} \sim \frac{\partial u^* u^*}{\partial x^*} \sim \frac{\partial u^* v^*}{\partial y^*} \sim \frac{L}{H} \frac{\partial u^* w^*}{\partial z^*} \sim 1 \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial x^*}, \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y^*} \ll \frac{L}{H} \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial z^*} \quad (\text{B.9})$$

- De la ecuación de cantidad de movimiento según \hat{y} (B.5) y que $w^* \sim H/L$ (B.7):

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} \sim \frac{\partial v^* u^*}{\partial x^*} \sim \frac{\partial v^* v^*}{\partial y^*} \sim \frac{L}{H} \frac{\partial v^* w^*}{\partial z^*} \sim 1 \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}^*}{\partial x^*}, \frac{\partial \tau_{yy}^*}{\partial y^*} \ll \frac{L}{H} \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial z^*} \quad (\text{B.11})$$

- De la ecuación de cantidad de movimiento según \hat{z} (B.6) y que $w^* \sim H/L$ (B.7):

$$\frac{\partial w^*}{\partial t^*} \sim \frac{H}{L} \ll 1 \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{H}{L} \frac{\partial w^* u^*}{\partial x^*} \sim \frac{H}{L} \frac{\partial w^* v^*}{\partial y^*} \sim \frac{\partial w^* w^*}{\partial z^*} \sim \left(\frac{H}{L}\right)^2 \ll 1 \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{\partial \hat{p}^*}{\partial z^*} \sim 1 \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{H}{L} \frac{\partial \tau_{zx}^*}{\partial x^*}, \frac{H}{L} \frac{\partial \tau_{zy}^*}{\partial y^*} \ll \frac{\partial \tau_{zz}^*}{\partial z^*} \quad (\text{B.15})$$

En B.9, B.11 y B.15 se ha considerado que todos los esfuerzos de corte adimensionales son del mismo orden de magnitud. Esto nos lleva a poder aproximar el efecto de los esfuerzos totales despreciando los términos de orden $H/L\tau_{ij}^*$ respecto a los de orden τ_{ij}^* . Por otro lado, considerando B.12, B.13 y B.14 se concluye que todo el lado izquierdo de la ecuación B.6 es despreciable respecto del aporte del término asociado a la presión motriz.

Realizando las aproximaciones antes mencionadas en B.3-B.6 se obtienen las ecuaciones B.16-B.19.

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{L}{H} \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^* u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^* v^*}{\partial y^*} + \frac{L}{H} \frac{\partial u^* w^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial \hat{p}^*}{\partial x^*} + \frac{L}{H} \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial z^*} \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{\partial v^* u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^* v^*}{\partial y^*} + \frac{L}{H} \frac{\partial v^* w^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial \hat{p}^*}{\partial y^*} + \frac{L}{H} \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial z^*} \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{\partial}{\partial z^*} (\hat{p}^* - \tau_{zz}^*) = 0 \quad (\text{B.19})$$

De la ecuación B.19 se desprende que $\hat{p} - \tau_{zz}^* = \text{constante}$ en el eje vertical. Es aceptado en aproximaciones de onda larga la existencia de distribución hidrostática en este eje, lo que significaría suponer que $\tau_{zz}^* \ll \hat{p}$. Como sabemos que τ_{zz}^* corresponde a un esfuerzo total, es necesario observar el aporte relativo de su componente viscosa τ_{vzz}^* y su componente turbulenta τ_{tzz}^* para conocer la validez de esta aproximación y sus posibles consecuencias.

Escala de los esfuerzos viscosos

Considerando que el fluido analizado corresponde a uno del tipo Hershel-Bulkey, cualquier esfuerzo de origen viscoso puede ser escrito de la forma B.20, donde Π_γ es el segundo invariante del tensor de tasa de deformación, Π_τ es el segundo invariante del tensor de esfuerzo de corte y $\mu_{ap} = \left(\frac{\tau_y}{\Pi_\gamma} + K\Pi_\gamma^{m-1}\right)$ es una viscosidad newtoniana aparente. Por ello, para conocer la escala de τ_{vij}^* debemos conocer primero la asociada a Π_γ , Π_τ y a μ_{ap} .

$$\tau_{vij} = \mu_{ap} \hat{\gamma}_{ij} = \left(\frac{\tau_y}{\Pi_\gamma} + K\Pi_\gamma^{m-1}\right) \hat{\gamma}_{ij}, \text{ para } \tau_y < \Pi_\tau \quad (\text{B.20})$$

La definición de $\Pi_{\dot{\gamma}}$ corresponde a lo presentado en la ecuación B.21 y al adimensionalizar cada uno de sus componentes se obtienen las ecuaciones B.22-B.27.

$$\Pi_{\dot{\gamma}} = \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}^{ij}} = \left\{ \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xx}^2 + \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{yy}^2 + \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{zz}^2 + \dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{xz}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 \right\}^{1/2} \quad (\text{B.21})$$

$$\dot{\gamma}_{xx} = 2 \frac{\partial u}{\partial x} = 2 \frac{U_0}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \quad (\text{B.22})$$

$$\dot{\gamma}_{yy} = 2 \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \frac{U_0}{L} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \quad (\text{B.23})$$

$$\dot{\gamma}_{zz} = 2 \frac{\partial w}{\partial z} = 2 \frac{U_0}{H} \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \quad (\text{B.24})$$

$$\dot{\gamma}_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{U_0}{L} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{U_0}{L} \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \quad (\text{B.25})$$

$$\dot{\gamma}_{xz} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{U_0}{H} \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{U_0}{L} \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \quad (\text{B.26})$$

$$\dot{\gamma}_{yz} = \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{U_0}{H} \frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{U_0}{L} \frac{\partial w^*}{\partial y^*} \quad (\text{B.27})$$

Reemplazando y reordenando cada componente adimensionalizado en B.21, se obtiene la ecuación B.28.

$$\begin{aligned} \Pi_{\dot{\gamma}} = \frac{U_0}{L} \left\{ 2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 + 2 \left(\frac{L}{H} \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right)^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{L}{H} \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{L}{H} \frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial y^*} \right)^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Al comparar los ordenes de magnitud de los componentes de B.28 se cumple:

$$2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 \sim 2 \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 \sim 2 \left(\frac{L}{H} \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right)^2 \sim 1 \quad (\text{B.29})$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \sim \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \sim 1 \Rightarrow \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right)^2 \sim 1 \quad (\text{B.30})$$

$$\frac{L}{H} \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \sim \frac{L}{H}, \quad \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \sim \frac{H}{L} \Rightarrow \left(\frac{L}{H} \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right)^2 \approx \left(\frac{L}{H} \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right)^2 \sim \left(\frac{L}{H} \right)^2 \quad (\text{B.31})$$

$$\frac{L}{H} \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \sim \frac{L}{H}, \quad \frac{\partial w^*}{\partial y^*} \sim \frac{H}{L} \Rightarrow \left(\frac{L}{H} \frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial y^*} \right)^2 \approx \left(\frac{L}{H} \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \right)^2 \sim \left(\frac{L}{H} \right)^2 \quad (\text{B.32})$$

Imponiendo condiciones de aguas someras, es posible despreciar los términos de orden 1 respecto a los de orden $(L/H)^2$. El resultado de esta aproximación se presenta en B.33 donde se define $\Pi_{\dot{\gamma}}^* = \left\{ \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial z^*} \right)^2 \right\}^{1/2}$, una versión adimensional aproximada de $\Pi_{\dot{\gamma}}$.

$$\Pi_{\dot{\gamma}} \approx \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\}^{1/2} = \frac{U_0}{H} \left\{ \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial z^*} \right)^2 \right\}^{1/2} = \frac{U_0}{H} \Pi_{\dot{\gamma}}^* \quad (\text{B.33})$$

Ahora, reemplazando cada componente de la definición de Π_{τ} con lo obtenido en B.33 se obtiene lo presentado en B.34.

$$\Pi_{\tau} = \sqrt{\frac{1}{2} \tau_{ij} \tau_{ij}} = \mu_{ap} I_{2,\gamma} \approx \frac{U_0}{H} \mu_{ap} \Pi_{\dot{\gamma}}^* \quad (\text{B.34})$$

Cualquier esfuerzo τ_{vij} se puede escribir adimensionalizado por $\rho_m U_0^2$ como se presenta en B.35.

$$\tau_{vij}^* = \frac{1}{\rho_m U_0^2} \mu_{ap} \dot{\gamma}_{ij}, \text{ si } \frac{\tau_y}{\rho_m U_0^2} < \frac{\Pi_{\tau}}{\rho_m U_0^2} \quad (\text{B.35})$$

Utilizando B.33 y B.34 en B.35, definiendo $\tau_y^* = \frac{\tau_y}{\rho_m U_0^2}$, $Re_m = \frac{U_0^{2-m} H^m}{K/\rho_m}$, se obtiene para $\tau_y^* < \frac{\Pi_{\tau}}{\rho_m U_0^2}$ una versión adimensional de los esfuerzos viscosos, presentado en B.36.

$$\tau_{vij}^* = \left(\frac{\tau_y^*}{\Pi_{\dot{\gamma}}^*} + \frac{1}{Re_m} \Pi_{\dot{\gamma}}^{*m-1} \right) \frac{H}{U_0} \dot{\gamma}_{ij} \sim \left(\tau_y^* + \frac{1}{Re_m} \right) \dot{\gamma}_{ij}^* \quad (\text{B.36})$$

De la ecuación B.36 se desprende que la escala de los esfuerzos viscosos dependen de dos parámetros, τ_y^* y Re_m , y del orden de magnitud de la tasa de deformación adimensional.

Escala de los esfuerzos turbulentos

Con tal de obtener una idea de las escalas de los esfuerzos turbulentos en relaves, es necesario recurrir a la literatura para caracterizar el efecto de la concentración de sedimentos y los parámetros reológicos en la intensidad de turbulencia.

Wang & Plate (1996) presentan un análisis preliminar sobre el efecto de la presencia de arcilla en la estructura del flujo, para un canal con una pared hidrodinámicamente lisa. Su trabajo indica que al aumentar la concentración de sedimento en suspensión, la estructura del flujo pasa a presentar una mayor heterogeneidad en la intensidad de la turbulencia. Para flujos que denominan transicionales, identifican tres zonas con comportamientos distintos: cerca de la pared, donde dominan los esfuerzos viscosos y existe un intenso gradiente de velocidades; lejos de la pared, donde existe baja intensidad de turbulencia con un bajo gradiente de velocidades; y una zona intermedia, donde se observa alternadamente una intensa turbulencia

y periodos de flujo laminar. Este efecto se observa para números de Reynolds en transición, homogeneizándose el perfil al aumentar el valor de este parámetro.

En esta misma línea, Baas & Best (2002) clasifican cualitativamente la estructura de flujo en función de su concentración, como se presentan en la Figura B.2. La construcción de esta clasificación se basa en experimentos en los que miden el flujo de una suspensión de arcillas en agua, con concentraciones volumétricas de hasta el 12 %, números de Froude entre 0,354-0,383 y números de Reynolds que disminuyen consistentemente a medida que se aumenta la concentración de sólidos, situándose entre 361-109211. La intensidad de turbulencia en la dirección del flujo observada en estos experimentos, caracterizado por $u_{rms} = \sqrt{u'^2}$, sufre un aumento de hasta un 70 % en la región turbulenta respecto a los flujos de agua. Este comportamiento se ve atenuado a medida que hay un aumento de la concentración, considerando condiciones hidráulicas semejantes.

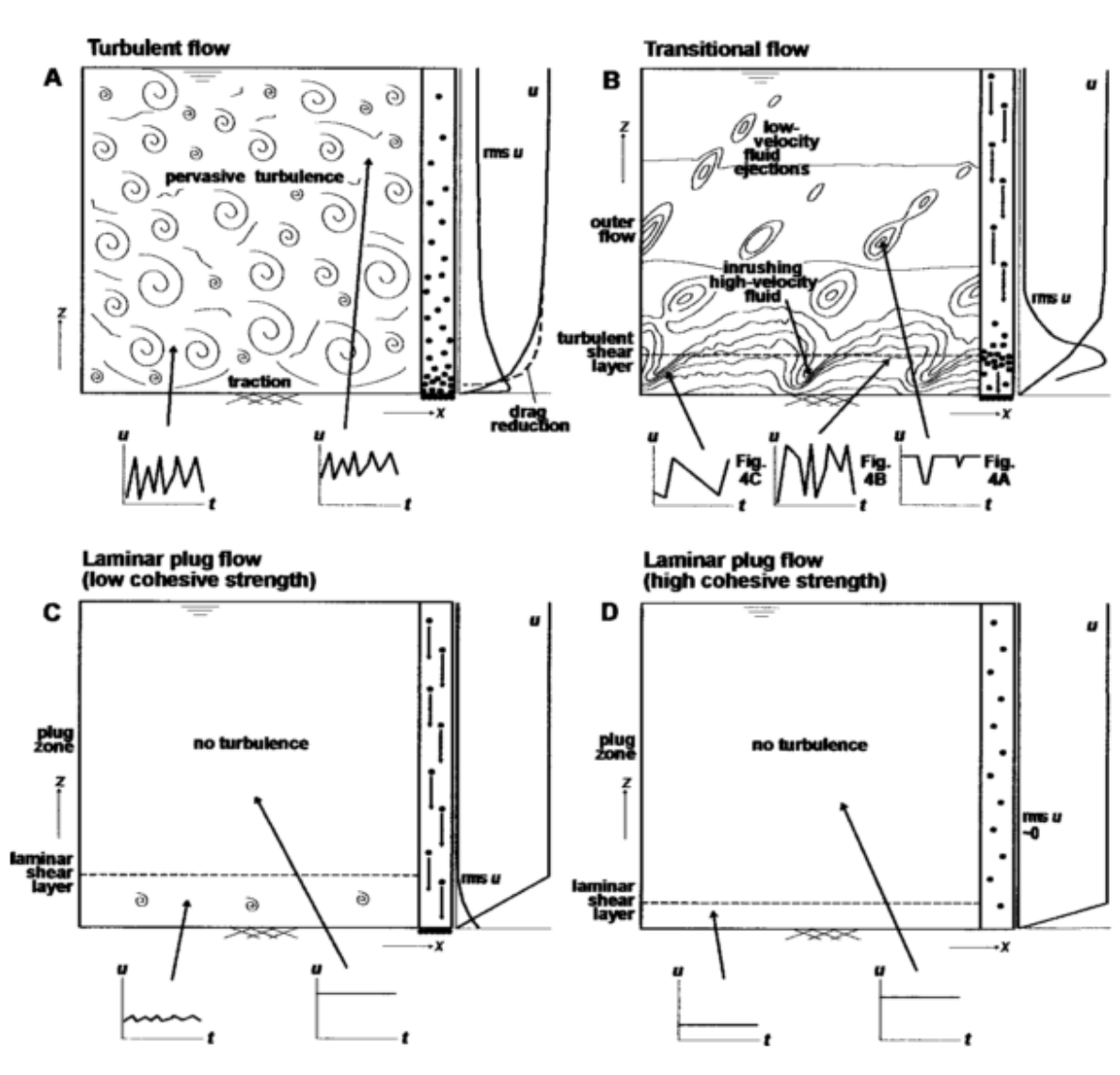


Figura B.2: Modelos de flujo esquemáticos ante el aumento de concentraciones de arcilla suspendida. Fuente: Baas & Best (2002).

Mediante el uso de métodos numéricos tipo DNS¹ en la simulación de flujo en tuberías de fluidos no-newtonianos, Singh et al. (2017a) y Singh et al. (2017b) muestran el efecto sobre la intensidad de turbulencia de τ_y y m . Se observa que estos parámetros alteran el flujo de forma similar a lo reportado en los trabajos de Wang & Plate (1996) y Baas & Best (2002) cuando se aumenta la concentración de arcilla en suspensión. El cambio de estos parámetros puede aumentar o disminuir la anisotropía en la intensidad de la turbulencia cerca de la pared. Si τ_y aumenta o si m disminuye, la intensidad en la dirección principal del flujo aumenta mientras que en las otras direcciones disminuye, al ser comparada con flujos de agua para condiciones hidráulicas semejantes. En el caso de canales, este comportamiento también puede ser observado en los trabajos de Ohta & Miyashita (2014), Guang et al. (2011) y Dimitropoulos et al. (1998).

En la literatura discutida, la escala de velocidad utilizada para adimensionalizar los perfiles de intensidad de la turbulencia en fluidos no-newtonianos corresponde a u_* . Al comparar estos perfiles con los observados en flujos de agua cerca de la pared, se aprecian desviaciones sin cambiar la escala respecto al observado en agua. Esto lleva a conjeturar que en esa zona su estructura no es considerablemente distinta a la de un flujo de agua. Así, el uso de relaciones adimensionales obtenidas para agua en canales abiertos puede ser un buen estimador del orden de magnitud de la intensidad de turbulencia en el caso de relaves en la zona turbulenta cercana a la pared.

Cabe precisar que este enfoque sólo sirve para un análisis de escala y se basa en un número limitado de configuraciones. Ahora bien, dada la tendencia natural del sedimento en suspensión a estabilizar el flujo volviéndolo laminar, es probable que este enfoque acote superiormente el aporte turbulento al esfuerzo de corte total para las configuraciones hidráulicas de interés.

Nezu & Nakagawa (1993) indican que despreciando la difusión viscosa en la ecuación de energía cinética turbulenta y suponiendo un equilibrio entre la generación y disipación de turbulencia; se obtienen las relaciones semi teóricas B.37-B.39 para un canal bidimensional en la región donde la ley logarítmica de velocidades es válida. En ella, $D_u = 2,30$, $D_v = 1,63$, $D_w = 1,27$ y $C_k = 1$ son constantes empíricas.

$$\frac{u_{rms}}{u_*} = \frac{\sqrt{u'u'}}{u_*} = D_u \exp\left(-C_k \frac{z}{h}\right) \quad (\text{B.37})$$

$$\frac{v_{rms}}{u_*} = \frac{\sqrt{v'v'}}{u_*} = D_v \exp\left(-C_k \frac{z}{h}\right) \quad (\text{B.38})$$

$$\frac{w_{rms}}{u_*} = \frac{\sqrt{w'w'}}{u_*} = D_w \exp\left(-C_k \frac{z}{h}\right) \quad (\text{B.39})$$

Cerca de la pared, Nezu & Nakagawa (1993) indican que no existe un equilibrio entre la disipación y generación de turbulencia, por lo que el uso de un modelo empírico es necesario. En la sub-capa viscosa, varios experimentos muestran que $u_{rms}/u_* = Cy^+$, con $C \approx 0,3$ e $y^+ = u_*h/\nu$. Realizando un promedio ponderado entre la ecuación antes mencionada y B.37 se obtiene la expresión B.40 donde $Re_* = u_*h/\nu$ y $\Gamma(y^+) = 1 - \exp(y^+/B)$ es una función de atenuación con $B \approx 10$. Los autores muestran que esta función ajusta bien en la zona cercana a la pared y presenta un máximo para $y^+ = 10 - 20$.

¹*Direct Numerical Simulation*

$$\frac{u_{rms}}{u_*} = \frac{\sqrt{u'u'}}{u_*} = D_u \exp\left(-C_k \frac{y^+}{R_*}\right) \Gamma(y^+) + C y^+(1 - \Gamma(y^+)) \quad (\text{B.40})$$

Por otro lado, es posible calcular $R_{xz} = -\overline{u'w'}/(u_{rms}w_{rms})$ encontrando que su distribución es prácticamente universal, con un valor máximo y constante entre 0,4 y 0,5 en zonas intermedias del flujo (Nezu & Nakagawa, 1993). Al acercarse a la superficie libre o al fondo, esta razón decrece monotónicamente.

En base a la información anterior, se presenta en la expresión B.41 la escala de los esfuerzos turbulentos suponiendo que son válidas las expresiones B.37-B.39. En ella se supone posible conocer todos los valores R_{ij} , que corresponden a un coeficiente de correlación que indica el grado de similitud de la turbulencia entre cada dirección. Evidentemente, los valores para R_{ij} con $i = j$ deben ser 1, mientras que los demás deben ser un valor entre 0 y 1.

$$\frac{|\tau_{tij}|}{\rho_m u_*^2} \sim R_{ij} D_i D_j \quad (\text{B.41})$$

Reemplazando $\rho_m u_*^2 = |\tau_0| = \rho_m c_f |\sqrt{U^2 + V^2}|^2$, reescalando las ecuaciones anteriores utilizando U_0 y notando que si $u^*, v^* \sim 1$ necesariamente $U/U_0, V/U_0 \sim 1$, tenemos:

$$|\tau_{t\ ij}^*| = \frac{|\tau_{tij}|}{\rho_m U_0^2} \sim R_{ij} D_i D_j c_f \quad (\text{B.42})$$

La ecuación anterior indica que la magnitud de los esfuerzos de origen turbulento necesariamente están relacionadas con la fricción, a través de c_f , y la correlación que tiene la turbulencia entre sus direcciones.

Ecuaciones de Reynolds aproximadas

Si consideramos un fluido no-newtoniano, es de esperar tener principalmente una distribución de velocidades como se muestra en la figura B.2 para un flujo transicional o flujos laminares. De esta manera, es evidente que en la zona cercana a la superficie libre, donde no existe una deformación de las parcelas de fluidos, se cumpla $\tau_{zz}^* \ll \hat{p}^*$ y aproximar la distribución de presiones como hidrostática es altamente preciso.

Por otro lado, dado el análisis de escala de los apartados anteriores, necesariamente en la zona turbulenta cercana a la pared se cumple B.43, donde se ha utilizado $\tau_y^* = \frac{\tau_y}{\rho_m U_0} \sim \frac{\tau_y}{\tau_0} c_f$.

$$|\tau_{zz}^*| \leq |\tau_{v\ zz}^*| + |\tau_{t\ zz}^*| \sim \left(\frac{\tau_y}{\tau_0} c_f + \frac{1}{Re_m}\right) \frac{H}{L} + D_w^2 c_f \quad (\text{B.43})$$

Como existe movimiento y consideramos un canal abierto, necesariamente se cumple $\tau_y \leq \Pi_\tau \sim \tau_0$ y $Re_m \gg 1$. Si imponemos una aproximación de onda larga ($H/L \ll 1$) sólo es

necesario conocer los valores de c_f y D_w según el régimen de escurrimiento para comparar la escala de τ_{zz}^* y \hat{p}^* .

Como sabemos que para agua $D_w = 1,27$, consideramos que en relaves $D_w \sim 1$ obteniendo:

- En régimen laminar, donde $|\tau_{t\,zz}^*| \ll |\tau_{v\,zz}^*|$ y $c_f \sim \frac{1}{Re_m}$:

$$|\tau_{v\,zz}^*| + |\tau_{t\,zz}^*| \sim |\tau_{v\,zz}^*| \sim \left(\frac{\tau_y}{\tau_0} + 1\right) \frac{1}{Re_m} \frac{H}{L} \sim \frac{1}{Re_m} \frac{H}{L} \ll 1 \quad (\text{B.44})$$

- En régimen turbulento, donde c_f se hace independiente del número de Reynolds y $|\tau_{v\,zz}^*| \ll |\tau_{t\,zz}^*|$:

$$|\tau_{v\,zz}^*| + |\tau_{t\,zz}^*| \sim |\tau_{t\,zz}^*| \sim c_f \quad (\text{B.45})$$

Trewhela (2015) utilizando un factor de Darcy-Weisbach, registra valores del factor de fricción $f < 0,1$ para régimen turbulento en fluidos no-newtonianos asimilables a relaves, por lo que $c_f < 0,0125 \ll 1$ cumpliéndose:

$$|\tau_{v\,zz}^*| + |\tau_{t\,zz}^*| \ll 1 \quad (\text{B.46})$$

- En régimen de transición Laminar-Turbulento:

$$|\tau_{v\,zz}^*| + |\tau_{t\,zz}^*| \sim \left(\frac{\tau_y}{\tau_0} + 1\right) \frac{1}{Re_m} \frac{H}{L} + c_f \ll 1 \quad (\text{B.47})$$

De esta forma concluimos que $\tau_{zz}^* \ll 1 \Rightarrow \tau_{zz}^* \ll \hat{p}^*$ en toda la columna de fluido y para cualquier régimen de escurrimiento, siempre y cuando existan condiciones de onda larga. Bajo estas aproximaciones las ecuaciones de Reynolds se reducen a:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{B.48})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_m} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \frac{1}{\rho_m} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (\text{B.49})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial vu_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_m} \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} + \frac{1}{\rho_m} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \quad (\text{B.50})$$

$$\hat{p} = p + \rho_m g z = \text{constante en } z \quad (\text{B.51})$$

donde p es la presión termodinámica promediada sobre la turbulencia.

B.2. Promedio vertical de ecuaciones de Reynolds

Para varios pasos de la obtención de las ecuaciones promediadas en la vertical, es necesario utilizar la regla de integración de Leibniz, presentada en B.52 donde $(b-a)\langle f \rangle = \int_a^b f dz$.

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial r} ds = \frac{\partial(b-a)\langle f \rangle}{\partial r} - f(b) \frac{\partial b}{\partial r} + f(a) \frac{\partial a}{\partial r} \quad (\text{B.52})$$

Ecuación de continuidad

Promediando en el eje vertical la ecuación de continuidad (B.48) tenemos:

$$\int_{h_0}^{h_0+h} \left\{ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right\} dz = 0 \Leftrightarrow \int_{h_0}^{h_0+h} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{h_0}^{h_0+h} \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_{h_0}^{h_0+h} \frac{\partial w}{\partial z} dz \quad (\text{B.53})$$

Denominando $\eta = h_0$, $\eta_s = h_0 + h$, $u_j(\eta_s) = u_{j_s}$, $u_j(\eta) = u_{j_b}$, $\langle u_j \rangle = U_j$ y utilizando B.52 en cada término de B.53:

$$\int_{\eta}^{\eta_s} \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial hU}{\partial x} - u_s \frac{\partial \eta_s}{\partial x} + u_b \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{B.54})$$

$$\int_{\eta}^{\eta_s} \frac{\partial v}{\partial y} dz = \frac{\partial hV}{\partial y} - v_s \frac{\partial \eta_s}{\partial y} + v_b \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (\text{B.55})$$

$$\int_{\eta}^{\eta_s} \frac{\partial w}{\partial z} dz = w_s - w_b \quad (\text{B.56})$$

Reemplazando B.54-B.56 en la ecuación B.53 tenemos:

$$\frac{\partial hU}{\partial x} + \frac{\partial hV}{\partial y} + \left(w_s - u_s \frac{\partial \eta_s}{\partial x} - v_s \frac{\partial \eta_s}{\partial y} \right) - \left(w_b - u_b \frac{\partial \eta}{\partial x} - v_b \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{B.57})$$

La condición de borde cinemática en el fondo y superficie indica:

$$\frac{\partial \eta_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial \eta_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial \eta_s}{\partial y} = w_s \quad (\text{B.58})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_b \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_b \frac{\partial \eta}{\partial y} = w_b \quad (\text{B.59})$$

Reemplazando B.58 y B.59 en B.57 se obtiene:

$$\frac{\partial hU}{\partial x} + \frac{\partial hV}{\partial y} + \frac{\partial(\eta_s - \eta)}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.60})$$

Notando que $\eta_s - \eta = h$ se obtiene la ecuación de continuidad promediada en el eje vertical:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hU_j}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{B.61})$$

Ecuación de cantidad de movimiento

Evaluando la ecuación de momentum en el eje \hat{z} (B.51) en la superficie libre $z = h_0 + h$ considerando $p_{atm} = 0$ tenemos:

$$\hat{p} = \rho_m g (h_0 + h) \quad (\text{B.62})$$

Promediando las ecuaciones de momentum en \hat{x} (B.49) e \hat{y} (B.50) tenemos

$$\int_{h_0}^{h_0+h} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\} dz + \int_{h_0}^{h_0+h} \left\{ \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} \right\} dz = -\frac{1}{\rho_m} \int_{h_0}^{h_0+h} \left\{ \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} \right\} dz + \frac{1}{\rho_m} \int_{h_0}^{h_0+h} \left\{ \frac{\partial \tau_{xiz}}{\partial z} \right\} dz \quad (\text{B.63})$$

Denominando $\eta = h_0$, $\eta_s = h_0 + h$, $u_j(\eta_s) = u_{j_s}$, $u_j(\eta) = u_{j_b}$, $\langle u_j \rangle = U_j$, $\beta_{ij} h U_i U_j = \int_{\eta}^{\eta_s} u_i u_j dz$ y utilizando B.52 en cada término de B.63 tenemos:

- Términos inerciales

$$\int_{\eta}^{\eta_s} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\} dz = \frac{\partial h U_i}{\partial t} - u_s \frac{\partial \eta_s}{\partial t} + u_b \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (\text{B.64})$$

- Términos advectivos:

$$\int_{\eta}^{\eta_s} \left\{ \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} \right\} dz = \int_{\eta}^{\eta_s} \left\{ \frac{\partial u_i u}{\partial x} \right\} dz + \int_{\eta}^{\eta_s} \left\{ \frac{\partial u_i v}{\partial y} \right\} dz + \int_{\eta}^{\eta_s} \left\{ \frac{\partial u_i w}{\partial z} \right\} dz \quad (\text{B.65})$$

Integrando por separado:

$$\int_{\eta}^{\eta_s} \frac{\partial u_i u}{\partial x} dz = \frac{\partial(\beta_{ix} h U_i U)}{\partial x} - u_{i_s} u_s \frac{\partial \eta_s}{\partial x} + u_{i_b} u_b \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{B.66})$$

$$\int_{\eta}^{\eta_s} \frac{\partial u_i v}{\partial y} dz = \frac{\partial(\beta_{iy} h U_i V)}{\partial y} - u_{i_s} v_s \frac{\partial \eta_s}{\partial y} + u_{i_b} v_b \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (\text{B.67})$$

$$\int_{\eta}^{\eta_s} \frac{\partial u_i w}{\partial z} dz = u_{i_s} w_s - u_{i_b} w_b \quad (\text{B.68})$$

Al sumarlos se obtiene:

$$\int_{\eta}^{\eta_s} \left\{ \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} \right\} dz = \frac{\partial(\beta_{ix} h U_i U)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta_{iy} h U_i V)}{\partial y} - u_{i_s} \left(u_s \frac{\partial \eta_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial \eta_s}{\partial y} - w_s \right) + u_{i_b} \left(u_b \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_b \frac{\partial \eta}{\partial y} - w_b \right) \quad (\text{B.69})$$

- Términos de presión

$$-\frac{1}{\rho_m} \int_{\eta}^{\eta_s} \left\{ \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} \right\} dz = -\frac{1}{\rho_m} h \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} = -gh \frac{\partial(h_0 + h)}{\partial x_i} \quad (\text{B.70})$$

- Esfuerzo de corte

$$\frac{1}{\rho_m} \int_{\eta}^{\eta_s} \frac{\partial \tau_{xiz}}{\partial z} dz = \frac{1}{\rho_m} (\tau_{xiz}(\eta_s) - \tau_{xiz}(\eta)) \quad (\text{B.71})$$

Si suponemos que no existen esfuerzos debido a viento sobre la superficie libre y denominamos $\tau_{x_i z} = \tau_{0i}$ tenemos

$$\frac{1}{\rho_m} \int_{\eta}^{\eta_s} \frac{\partial \tau_{x_i z}}{\partial z} dz = -\frac{\tau_{0i}}{\rho_m} \quad (\text{B.72})$$

Sumando los términos del lado izquierdo de B.63:

$$\begin{aligned} \int_{h_0}^{h_0+h} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} \right\} dz &= \frac{\partial h U_j}{\partial t} + \frac{\partial(\beta_{ix} h U_i U)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta_{iy} h U_i V)}{\partial y} \\ &- u_{is} \left(\frac{\partial \eta_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial \eta_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial \eta_s}{\partial y} - w_s \right) \\ &+ u_{ib} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_b \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_b \frac{\partial \eta}{\partial y} - w_b \right) \end{aligned} \quad (\text{B.73})$$

Aplicando la condición de borde cinemática en el fondo (B.59) y superficie (B.58), el lado izquierdo se reduce a:

$$\int_{h_0}^{h_0+h} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} \right\} dz = \frac{\partial h U_j}{\partial t} + \frac{\partial(\beta_{ij} h U_i U_j)}{\partial x_j} \quad (\text{B.74})$$

Con lo que al reemplazar todos los términos en B.63, se obtiene:

$$\frac{\partial h U_i}{\partial t} + \frac{\partial h U_i U_j}{\partial x_j} = -gh \frac{\partial(h + h_0)}{\partial x_i} - \frac{\tau_{0i}}{\rho_m} \quad (\text{B.75})$$

Cabe mencionar que en B.75 se consideró que los coeficientes de Bousinesq $\beta_{ij} \approx 1$, con lo que implícitamente suponemos que el perfil de $u_i u_j$ es prácticamente homogéneo en vertical. Esto se fundamenta al esperar que los flujos hiperconcentrados de sedimentos tengan un escurrimiento laminar o con un gran porcentaje de la columna de fluido sin deformar por efecto del esfuerzo de fluencia.

Anexo C

Instalación y tutorial

El presente anexo busca ser una guía de instalación y uso de la aplicación `damBreachFoam` implementada sobre el software `OpenFOAM®`. Se considera que el lector utiliza la distribución Ubuntu del sistema operativo GNU/Linux y que tiene conocimientos básicos del uso de su terminal de comandos.

Cada conjunto de instrucciones será presentado en bloques de código en una caja gris. Un ejemplo de un conjunto de instrucciones que puede ser ingresado a una terminal de comandos se presenta en el Código C.1.

Código C.1: Bloque de instrucciones de ejemplo para Bash.

```
#!/bin/bash
# Ejemplo de instrucciones para Bash
# El simbolo '#' indica una linea con comentarios
# el simbolo '>>>' indica la respuesta de la instruccion de una terminal
$ echo "El caracter '$' indica una linea con instrucciones"
>>> "El caracter '$' indica una linea con instrucciones"

# Cabe mencionar que:
# - el caracter '$' no debe ser incluido al copiar la instruccion
# - no seran utilizados tildes en las palabras
```

C.1. Instalación

Dependencias y softwares adicionales recomendados

Para compilar la aplicación basta con cumplir con las dependencias de `OpenFOAM®` y tenerlo instalado en el equipo. Para la instalación del software base se recomienda seguir las instrucciones presentes en <https://www.openfoam.com/download/install-source.php>.

Es recomendable para la inicialización de campos el uso de las librerías swak4Foam. Las instrucciones detalladas dependiendo de la versión de OpenFOAM® puede ser consultada en <https://openfoamwiki.net/index.php/Contrib/swak4Foam>. Por otro lado, para la construcción de mallas se recomienda el uso del software Gmsh, disponible para su descarga en <http://gmsh.info/>.

Finalmente, para obtener el código fuente de **damBreachFoam** es requerido utilizar programa git. Este puede ser instalado mediante los repositorios de Ubuntu abriendo una terminal de comandos y ejecutando las instrucciones presentadas en el Código C.2.

Código C.2: Instalación de git.

```
#!/bin/bash
$ sudo apt update
$ sudo apt install git
```

Descarga de código fuente

El código fuente se pone a disposición del lector bajo la licencia GPLv3, la que es detallada en <http://www.gnu.org/licenses/quick-guide-gplv3.html>. Para su descarga se debe abrir una terminal de comandos y ejecutar las instrucciones presentadas en el Código C.3.

Código C.3: Descarga de damBreachFoam.

```
#!/bin/bash
# Crear la carpeta de usuario si no existe
$ mkdir -p $HOME/OpenFOAM/$USER-$WM_PROJECT_VERSION

# Dirigirse a la carpeta de usuario
$ cd $HOME/OpenFOAM/$USER-$WM_PROJECT_VERSION

# Clonar repositorio git
$ git clone https://gitlab.com/AldoMunoz/damBreachFoam.git
```

Compilación

Una vez instalado OpenFOAM®, las instrucciones para la compilación de **damBreachFoam** se presentan en el Código C.4.

Código C.4: Compilación de damBreachFoam.

```
#!/bin/bash
# Cargar OpenFoam.
# Se considera que la version 1812 instalada en el home
# Para otras versiones reemplazar "OpenFOAM-v1812" por la correspondiente
$ source $HOME/OpenFOAM/OpenFOAM-v1812/etc/bashrc

# Dirigirse a la carpeta de usuario
$ cd $HOME/OpenFOAM/$USER-$WM_PROJECT_VERSION

# Ingresar a la carpeta con el codigo fuente
$ cd damBreachFoam

# Ejecutar el script Allwmake para compilar el codigo
$ ./Allwmake > log.make 2>&1

# Ejecutar una segunda vez Allwmake para
# obtener un resumen de la instalacion
$ ./Allwmake > log.make 2>&1
```

C.2. Tutorial

Este tutorial muestra como se ejecuta un caso de erosión de un muro a escala de laboratorio sobre un dominio bidimensional. Se considera que el usuario está familiarizado con la ejecución de un caso estándar en el software OpenFOAM®, por lo que sólo se describirá en detalle la elección de los parámetros exclusivos del solucionador `damBreachFoam`.

La estructura de carpetas, construcción de mallas, inicialización de campos y otros temas relevantes para un usuario nuevo puede ser consultado en la documentación del software en <https://www.openfoam.com/documentation/user-guide/index.php>.

El caso utilizado como ejemplo corresponde al estudiado en detalle en la sección 6.1.1, donde se detalla la geometría inicial y las características del experimento numérico. Una vista longitudinal de la geometría para la condición inicial se presenta como referencia en la Figura C.1.

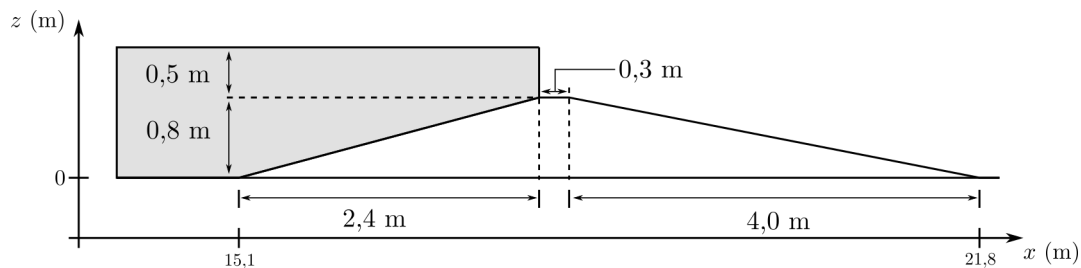


Figura C.1: Esquema de condición inicial para tutorial de erosión de una presa a escala de laboratorio.

Ejecución del caso

El caso analizado se encuentra ubicado en la carpeta **tutorials** dentro del código fuente¹. Para realizar una copia en un entorno de trabajo típico de OpenFOAM® y obtener una configuración básica para la ejecución se deben seguir las instrucciones presentadas en el Código C.5.

La estructura de carpetas obtenida es un ejemplo de la configuración básica para la ejecución de cualquier modelo en OpenFOAM®. Esta configuración debe contener siempre una carpeta **0** (u otro número que corresponde al tiempo en que la simulación comienza), con los campos geométricos para el para la condición inicial, la carpeta **constant**, donde se alberga a la malla y campos que no varían a lo largo de la simulación, y la carpeta **system**, que contiene los parámetros de la simulación. Una estructura de carpeta con todos los campos que pueden ser utilizados para la simulación de un modelo con **damBreachFoam**, a la fecha de publicación de esta tesis, se presenta de forma esquemática en la Figura C.2.

A través de la Figura C.2 se indica que de forma obligatoria debe proporcionarse al modelo los campos geométricos asociado a la altura **h** (campo escalar), la cota del terreno **h0** (campo escalar), el caudal por unidad de ancho **hU** (campo vectorial) y el gasto sólido **qs** (campo vectorial). Por otro lado, es obligatorio también proporcionar al modelo la información de control de ejecución en **controlDict**, los esquemas numéricos a utilizar en **fvSchemes** y todos los parámetros particulares del solucionador en **godunovDict**. Adicionalmente, es requerido que exista el archivo **fvSolution**, pese a que el esquema numérico implementado no utiliza ningún parámetro de este diccionario.

Las decisiones disponibles para el usuario descritos en el cuerpo del documento (Tabla 5.1, Tabla 5.2 y Tabla 5.3) son seleccionados en el diccionario **godunovDict** cuando ellos presentan valores constantes. En caso contrario, aquel parámetro que desee ser seleccionado de forma distribuida debe ser ingresado como un campo escalar, dejando sin uso el valor seleccionado en **godunovDict**.

De esta forma, para ejecutar el caso en un procesador se debe ingresar en la terminal de comandos con el entorno cargado de OpenFOAM® y situado en la carpeta **damBreach** las instrucciones presentadas en el Código C.6.

Estructura de archivo godunovDict

Las decisiones disponibles para el usuario descritos en el cuerpo del documento en la Tabla 5.1, Tabla 5.2 y la Tabla 5.3 son seleccionados en el diccionario **godunovDict**. En el Código C.7² se presenta la estructura de este archivo, que corresponde a la de un diccionario de OpenFOAM® que utiliza las reglas de escritura de un código en C++ . En su interior cuenta con 5 subdiccionarios en los que se ingresan los parámetros de la simulación, donde en:

¹Estructura de carpetas de **damBreachFoam** se encuentra disponible en el Anexo D.

²Un modelo de este archivo se encuentra ubicado en la carpeta **doc** del código fuente. La estructura de carpetas de **damBreachFoam** se encuentra disponible en el Anexo D.

Código C.5: Copia de tutorial damBreach en carpeta run del usuario.

```
#!/bin/bash
# Cargar OpenFoam.
# En este caso se supone que la version 1812 es la instalada en el home
$ source $HOME/OpenFOAM/OpenFOAM-v1812/etc/bashrc

# crea variable con ruta al codigo fuente de damBreachFoam
$ damBreachFoamPath=$HOME/OpenFOAM/$USER-$WM_PROJECT_VERSION/damBreachFoam

# Crear carpeta de trabajo y moverse a ella
$ mkdir -p $FOAM_RUN
$ cd $FOAM_RUN

# Copiar tutorial desde carpeta de codigo fuente a carpeta de trabajo
# se asume que damBreachFoam esta instalada en la carpeta del usuario
$ cp -r $damBreachFoamPath/tutorials/damBreach $FOAM_RUN/.

# Situarse en la ruta del caso
$ cd damBreach

# listar contenido de la carpeta
$ ls
>> 0 system

# Construir malla
$ blockMesh

$ ls
>> 0 constant system
```

Código C.6: Ejecución de caso damBreach.

```
#!/bin/bash
# Ejecutar caso
$ damBreachFoam
...
>> Time = 0.449645
>> deltaT = 0.0010946651249328306649
>> Courant number : 0.45452645348339759668
>> ExecutionTime = 28.300000000000000711 s ClockTime = 28 s
...
```

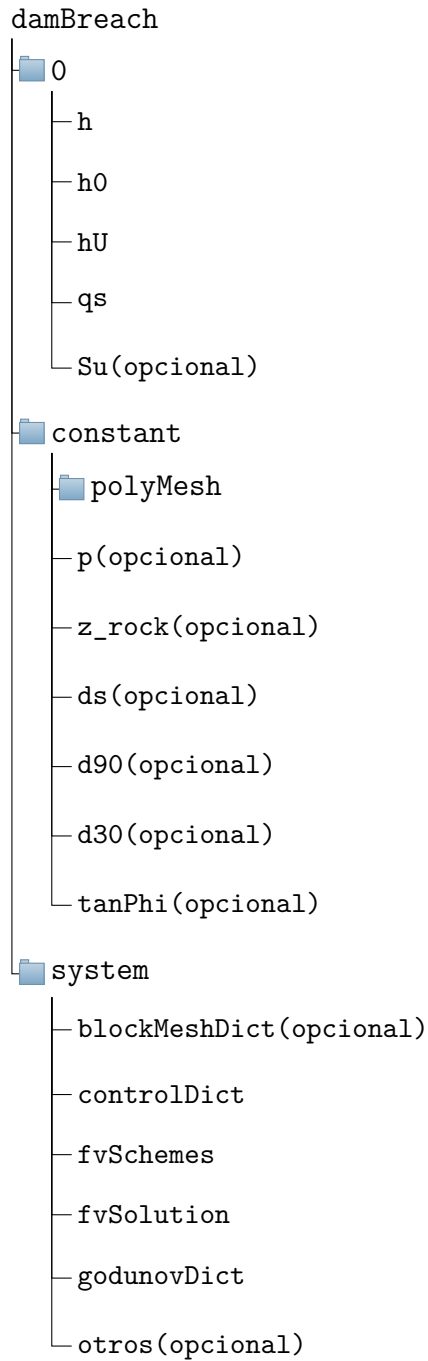


Figura C.2: Estructura de archivos para casos en ejecución del modelo `damBreachFoam`.

- **globalData**: se elige el tipo de discretización, orden del modelo hidrodinámico, consideración o no del modelo morfodinámico y los parámetros globales.
- **fluidProperties**: se eligen los parámetros de la reología del fluido considerado.
- **solidProperties**: se eligen los parámetros del tipo de suelo considerado.
- **bedFriction**: se elige la formulación de c_f y sus parámetros.
- **bedLoad**: se elige la formulación de q_s , sus correcciones y parámetros.

Para ingresar una de las opciones en cada subdiccionario, es necesario ingresarlos como se muestra en el Código C.8, donde **keyword** corresponde a la palabra clave que define el parámetro a ingresar y **value** es el valor elegido por el usuario. El detalle de las palabras claves y valores disponibles se presenta en las Tablas C.1 y C.2. Cabe mencionar que cada línea con un parámetro ingresado **debe** terminar con el caracter ; (punto y coma). Como ya fue mencionado, alguno de los parámetros descritos en estas tablas pueden ser elegidos de forma distribuida, para lo cual deben ser ingresados como campos escalares en la ubicación descrita en la Figura C.2.

Finalmente, para utilizar el limitador de pendiente descrito en el cuerpo del presente documento se debe seguir la metodología usual para tales efectos disponible en OpenFOAM®. Esta consiste en ingresar en el subdiccionario **gradSchemes** del archivo **fvSchemes** el limitador como se muestra en el Código C.9. Una explicación más detallada de la elección de esquemas para el cálculo de gradientes puede ser consultada en <https://www.openfoam.com/documentation/guides/latest/doc/guide-schemes-gradient.html>.

Código C.7: Estructura de diccionario **godunovDict**.

```

/*-----* C++ *-----*/
| ===== |
| \\ / F ield | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox |
| \\ / O peration | Version: v1812 |
| \\ / A nd | Web: www.OpenFOAM.com |
| \\ \\ M anipulation |
/*-----*

FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
    class        dictionary;
    object       godunovDict;
}
// * * * * *

globalData
{
    // Se ingresa:
    // - Discretizacion y ecuaciones a resolver
    // - Parametros globales de la simulacion
}

fluidProperties
{
    // Se ingresa:
    // - Reologia
}

solidProperties
{
    // Se ingresa:
    // - Parametros del suelo
}

bedFriction
{
    // Se ingresa:
    // - Formulacion de cf
    // - Parametros requeridos para el calculo de cf
}

bedLoad
{
    // Se ingresa:
    // - Formulacion de qs
    // - Parametros requeridos para el calculo de qs
}
// * * * * *

```

Código C.8: Ingreso de un parámetro a un subdiccionario.

```
subdic
{
    keyword    value;
}
```

Código C.9: Limitador de pendiente.

```
gradSchemes
{
    default    ENOcellLimited <Gradient scheme> 1;
}
```

Tabla C.1: Palabras clave y valores disponibles para subdiccionarios globalData, fluidProperties y solidProperties.

Subdiccionario	Elección	Palabra clave (keyword)	Tipo	Valor disponible (value)
globalData	Dicretización modelo hidrodinámico	hydrodynamicModel	word	matrixForm vectorForm
	Dicretización modelo morfodinámico	morphodynamicModel	word	weakForm
	Solución modelo morfodinámico	erosion	word	yes no
	Reconstrucción modelo hidrodinámico	spatialReconstruct	word	firstOrder secondOrder
	Magnitud de aceleración de gravedad	g		Definido
	Tolerancia seco mojado	ew	float	por el usuario
	Tolerancia detención de flujo	hb		
	Viscosidad newtoniana equivalente para detención del flujo	mu0		
	Velocidad pequeña para corrección por viscosidad newtoniana	Usmall		
fluidProperties	Índice de consistencia	K		Definido
	Índice de flujo	n	float	por el usuario
	Esfuerzo de fluencia	tauy		
	Densidad de la mezcla	rhom		
solidProperties	Densidad de sólidos	rhos		
	Porosidad	p		
	Elevación de la roca	z_rock		Definido
	Tamaño representativo de granulometría	ds	float	por el usuario
	Tamaño d90 granulometría	d90		
	Tamaño d30 granulometría	d30		
	Tangente de ángulo de reposo	tanPhi		

Tabla C.2: Palabras clave y valores disponibles para subdiccionarios bedFriction y bedLoad.

Subdiccionario	Elección	Palabra clave (keyword)	Tipo	Valor disponible (value)
bedFriction	Formulación cf	cfModel	word	Según Tabla 5.2
	Tolerancia iteraciones	tol		
	Numero máximo de iteraciones	nitermax		
	Parámetro formulación factor de fricción laminar	Cs		
	Parámetro empírico formulación de burger	a b	float	Definido por el usuario
	Tamaño aspereza	ks		
	Factor de fricción para iniciar iteración en formulacion de coolebrookWhite	f0		
	Factor de fricción constante en formulacion de darcy	fcons		
	Coefficiente en formulación linearCf	k		
Coefficiente de manning	n			
bedLoad	Formulacion qs	cfModel	word	Según Tabla 5.3
	Corrección por curva de Shields	incipientMotionCorrection		
	Corrección por pendiente	slopeCorrection	word	yes/no
	Corrección por avalancha	avalancheCorrection		
	Esfuerzo de corte crítico adimensional sin corrección	tauStarC		
	Parámetro para formulación grass-Law y juez	mg		
	Parámetro para formulación grass-Law	Ag	float	Definido por el usuario
	Parámetro para formulación juez	r Ag0 k1 k2 k3		
	Parámetro para formulación fernandez	m1 m2 m3		

Anexo D

Estructura de archivos de damBreachFoam

En el presente anexo se describe brevemente la estructura de archivos de `damBreachFoam` declarando el objetivo de cada uno de sus componentes. Con esto se espera guiar al lector que desee verificar el código fuente. Cabe mencionar que la estructura aquí presentada puede ser modificada en actualizaciones de la aplicación, por lo que este anexo debe ser tomado sólo como un punto de partida.

El código es construido basándose en las librerías estándar para esquemas de volúmenes finitos del software OpenFOAM®. La aplicación utiliza un paradigma de programación orientada a objetos en C++ , siguiendo los lineamientos generales del software base.

Particularmente, la implementación realizada hereda del software base el manejo de mallas, paralelización, cálculo de operadores matemáticos, manejo de matrices y vectores, entre otras. No es abordado en este anexo la ubicación ni implementación de estas características, pero puede ser consultado en la documentación del software.¹

D.1. Estructura del directorio principal

El directorio que contiene la aplicación desarrollada se denomina `damBreachFoam` y presenta la estructura de archivos esquematizada en la Figura D.1. Los componentes de este directorio son:

- **doc**: es el directorio con la documentación del programa.
- **libraries**: es el directorio con las librerías desarrolladas.
- **solver**: es el directorio que contiene el solucionador.

¹<https://www.openfoam.com/documentation/>

- **tutorials**: es el directorio que contiene ejemplos de uso de la aplicación.
- **Allwmake, Allwclean**: son ejecutables para la compilación/eliminación del programa.
- **Readme.md**: corresponde a la descripción general para el repositorio digital.

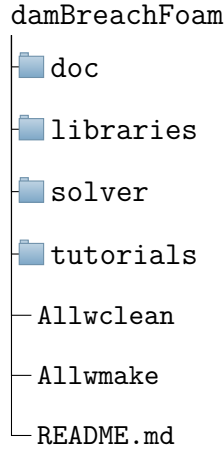


Figura D.1: Estructura general del solucionador desarrollado.

Directorio libraries

El programa desarrollado presenta seis librerías encargadas de computar distintas partes del esquema numérico presentado en el Capítulo 4 (resumido en la ecuación 5.3). El directorio **libraries** almacena cada una de ellas como se muestra en la Figura D.2. Cada directorio es nombrado en función del nombre de la librería que contiene, donde:

- **flux**: calcula el término F_{np} , es decir, el flujo numérico resultante en cada celda en el modelo hidrodinámico.
- **bedSlope**: calcula el término S_p , es decir, la resultante de la discretización de la pendiente en el modelo hidrodinámico.
- **bedFriction**: calcula los términos T_p^U y $\frac{c_f}{h^2}|hU|_p^n$, es decir, la resultante de la discretización descentrada y el coeficiente asociado a la discretización semi-implícita de la fricción en el modelo hidrodinámico.
- **bedLoad**: calcula los términos F_{qs}^C y F_{qs}^{out} , es decir, el flujo neto corregido y el flujo de salida del gasto sólido en cada celda para el modelo morfodinámico.
- **tools**: calcula y almacena información útil para los cálculos de las demás librerías.
- **godunovLoop**: se encarga de la actualización de los valores en cada paso temporal.

Cada una de estas librerías corresponde a una dependencia del código principal por lo que deben ser compiladas antes que el solucionador. La estructura de archivos que presenta cada directorio se trata de forma específica en la Sección D.2.

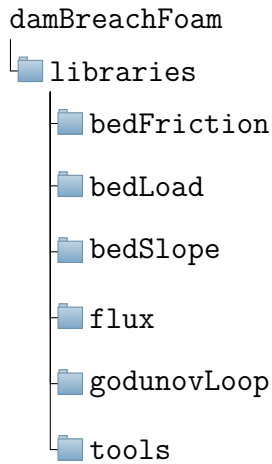


Figura D.2: Estructura del directorio **libraries**.

Directorio solver

El directorio **solver** almacena los archivos que componen la función principal del código, denominado **damBreachFoam**. Su estructura se esquematiza en la Figura D.3, donde:

- **Make**: es el directorio que contiene archivos necesarios para la compilación.
- **subRoutines**: es el directorio que contiene un conjunto de rutinas que son invocadas por la función principal.
- **damBreachFoam.C**: es la función principal.

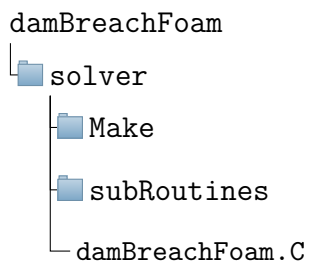


Figura D.3: Estructura del directorio **solver**.

Directorio Make

La herramienta para la compilación del código provisto en OpenFOAM® es denominada **wmake**, y requiere como información de entrada las diversas rutas de las dependencias del código y la ubicación deseada para el ejecutable de salida. Tanto para el solucionador como en cada librería, esta información es almacenada en el directorio denominado **Make** junto al código fuente, como se esquematiza en la Figura D.4. **Make** contiene siempre dos archivos: **files**, que indica el código a compilar y la ubicación para el binario de salida; y **options**, que contiene la ubicación de las librerías con las que se enlazará el programa dinámicamente.

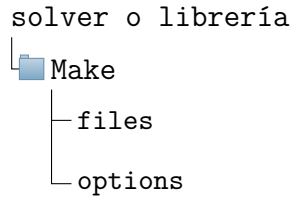


Figura D.4: Estructura del directorio Make.

Directorio subRoutines

El algoritmo desarrollado en `damBreachFoam.C` utiliza clases de diversas librerías (estándares y particulares para el programa) y variadas subrutinas. Las subrutinas son piezas de código de la función principal que son organizadas en distintos archivos (con extensión ".H") y agrupados en el directorio **subRoutines**. Esta división del código mejora el orden de la función principal y permite comprender de mejor manera la implementación. En la Figura D.5 se presenta la estructura de este directorio, donde:

- `CourantNo.H`: calcula el CFL y ajustar el paso temporal.
- `createFields.H`: inicializa los campos h , h_0 , $h_{Total} = h_0 + h$, U y hU .
- `createGodunov.H`: inicializa los objetos de las librerías para el cálculo del esquema.
- `createPhi.H`: inicializa el campo $\phi = h\bar{U} \cdot nH_{cell}$.
- `readGodunovDict.H`: lee los parámetros específicas de la simulación.

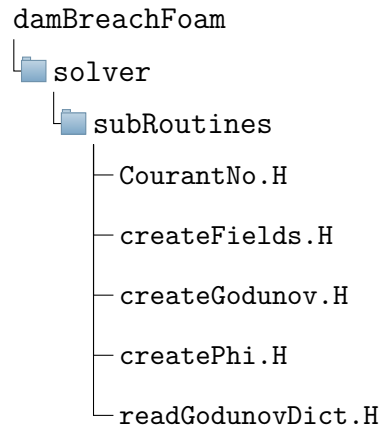


Figura D.5: Estructura del directorio subRoutines.

D.2. Estructura de librerías

Conceptos previos

Mecanismo de selección al tiempo de ejecución

En algunas de estas librerías fue utilizado el mecanismo de selección al tiempo de ejecución (*run time selection mechanism*) provisto por OpenFOAM®. Esto corresponde a una implementación que utiliza distintas macros que permiten compilar el código incluyendo varias metodologías para realizar una cierta tarea (cada una totalmente independiente de la otra) permitiendo que el usuario final decida cual utilizar al momento de realizar una simulación.

El mecanismo permite utilizar una clase base genérica con la que se manipulan diversas clases derivadas. Estas clases derivadas representan las distintas metodologías para realizar una cierta tarea. Cabe mencionar que esta implementación, junto con el uso de enlaces dinámicos, permite incorporar nuevas metodologías sin la necesidad de compilar el código completo nuevamente. De hecho, basta con agregar la nueva funcionalidad como una clase derivada y recompilar la librería en cuestión.²

Estructura de archivos de una clase

En general, cada clase que será discutida en apartados posteriores presenta al menos dos archivos relevantes. El primero corresponde a un archivo de encabezamiento (*Header*), con extensión ".H", en el que se declaran sus componentes y el segundo corresponde al cuerpo de la clase, con extensión ".C", donde está la implementación de las funciones que la componen. Esta estructura se ejemplifica en la Figura D.6.

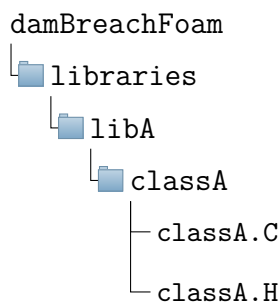


Figura D.6: Contenido de una clase genérica.

Librería tools

La librería **tools** agrupa distintas clases que son utilizadas para obtener información o realizar procedimientos comunes a toda la implementación. En la Figura D.7 se presenta la

²Detalles en http://openfoamwiki.net/index.php/OpenFOAM_guide/runTimeSelection_mechanism

estructura del directorio donde se ubican todas las clases que la componen. Cada directorio contenido es nombrado en función del nombre de la clase que contiene, donde:

- **ENOCellLimitedGrad**: calcula el limitador de pendiente utilizado en la implementación.
- **geometryData2D**: calcula y almacena los valores de las áreas y longitudes relevantes para el cálculo de los esquemas tipo Godunov 2D.
- **Make**: contiene la información para compilar, como fue descrito en la sección D.1.
- **mask**: clasifica las celdas para identificar el dominio efectivo de cálculo.
- **reallocate**: corrige los campos por efectos del esfuerzo de fluencia o errores numéricos pequeños.
- **reconstruct**: realiza la reconstrucción de las variables y las almacena para que las demás librerías puedan utilizarlas.

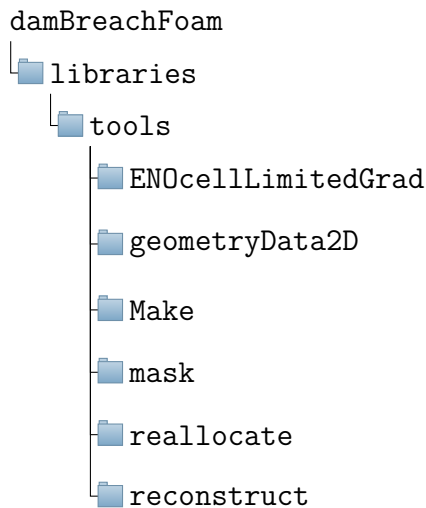


Figura D.7: Estructura del directorio **tools**.

Librería flux

La librería **flux** agrupa distintas clases que se utilizan para obtener el valor neto de los flujos en las caras (F_{np}). En la Figura D.8 se presenta un esquema de la estructura de este directorio, donde:

- **fluxModels**: es el directorio que agrupa la clase base genérica y sus clases derivadas implementadas para el cálculo del flujo neto de cada celda.
- **godunovFlux**: es el directorio que contiene a la clase que gestiona los procedimientos para la actualización de los campos asociados al flujo.

- **Make**: es el directorio que contiene la información para compilar, como fue descrito en la sección D.1.

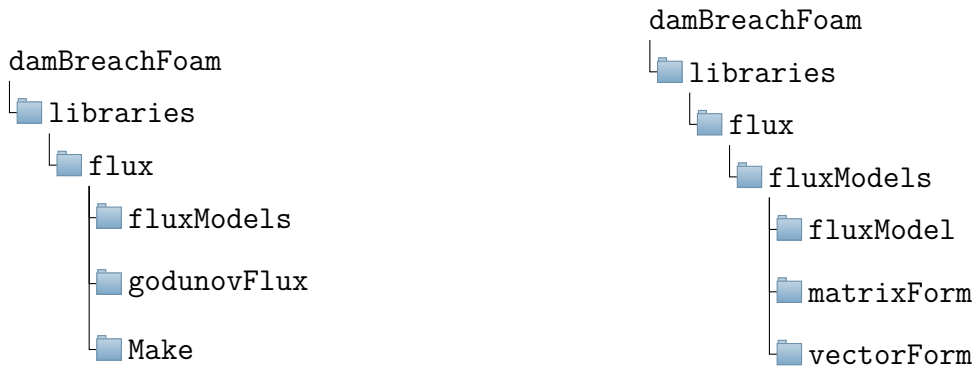


Figura D.8: Estructura del directorio **flux**.

Figura D.9: Estructura del directorio **fluxModels**.

Ya fue discutido que OpenFOAM® permite entregar diversas metodologías para resolver una misma tarea. En particular, fue utilizado el mecanismo de selección al tiempo de ejecución para permitir al usuario elegir la estructura en que la formulación del flujo, presentada en el Capítulo 4, es computada. En la Figura D.9 se presentan las diversas clases implementadas para realizar esta tarea, junto a la clase base para manejarlas.

En esta librería, **fluxModel** es el directorio que contiene la clase base que gestiona la elección del usuario respecto a la forma en que el flujo numérico ϕ_{pq} es calculado. **matrixForm** es la clase que calcula el flujo utilizando las ecuaciones 4.27 y 4.28, mientras que **vectorForm** lo hace utilizando las ecuaciones 4.27 y 4.29. Cabe mencionar que el usuario debe seleccionar una de estas alternativas antes de simular un caso en particular.

Librería **bedSlope**

La librería **bedSlope** agrupa distintas clases que se utilizan para obtener el valor neto del efecto de la pendiente (S_p). En la Figura D.10 se presenta un esquema de la estructura de este directorio, donde:

- **bedSlopeModels**: es el directorio que agrupa la clase base genérica y sus clases derivadas implementadas para el cálculo del término fuente asociado a la pendiente.
- **godunovSourceBedSlope**: es el directorio que contiene a la clase que gestiona los procedimientos para la actualización de los campos asociados al término fuente de pendiente.
- **Make**: es el directorio que contiene la información para compilar, como fue descrito en la sección D.1.

Al igual que la librería **flux**, la librería **bedSlope** fue construida dejando la libertad al usuario para seleccionar la metodología con que es evaluada la discretización del esquema. La

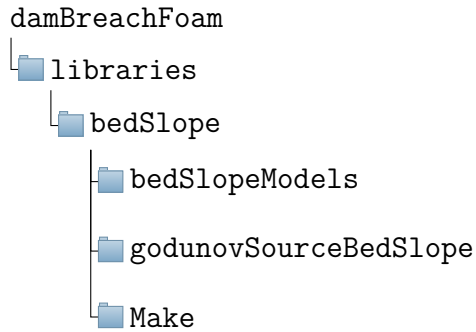


Figura D.10: Estructura del directorio **bedSlope**.

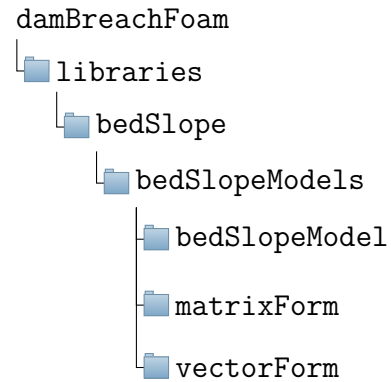


Figura D.11: Estructura del directorio **bedSlopeModels**.

Figura D.11 presenta las diversas clases implementadas para realizar esta tarea, junto a la clase base para manejarlas.

Así, **bedSlopeModel** es el directorio que contiene la clase base que gestiona la elección del usuario respecto a la forma en que T_p es calculado. **matrixForm** es la clase que calcula el flujo utilizando las ecuaciones 4.36 y 4.37, mientras que **vectorForm** lo hace utilizando las ecuaciones 4.38 y 4.39. Cabe mencionar que el usuario debe seleccionar una de estas alternativas antes de simular un caso en particular.

Librería **bedFriction**

La librería **bedFriction** agrupa distintas clases que se utilizan para calcular el efecto de la fricción (T_p). En la Figura D.12 se presenta un esquema de la estructura de este directorio, donde:

- **bedFrictionModels**: es el directorio que agrupa la clase base genérica y sus clases derivadas implementadas para el cálculo del término fuente asociado a la fricción.
- **cfModels**: es el directorio que agrupa la clase base genérica y sus clases derivadas implementadas para el cálculo del coeficiente de fricción.
- **godunovSourceBedFriction**: es el directorio que contiene a la clase que gestiona los procedimientos para la actualización de los campos asociados al término fuente de fricción.
- **Make**: es el directorio que contiene la información para compilar, como fue descrito en la sección D.1.

Al igual que las demás librerías, el término fuente de fricción fue construido dejando la libertad al usuario para seleccionar la metodología con que es evaluada la discretización del esquema. Además, se entrega la posibilidad de seleccionar el tipo de formulación es utilizada para el cálculo del coeficiente de fricción c_f . La Figura D.13 presenta las diversas clases

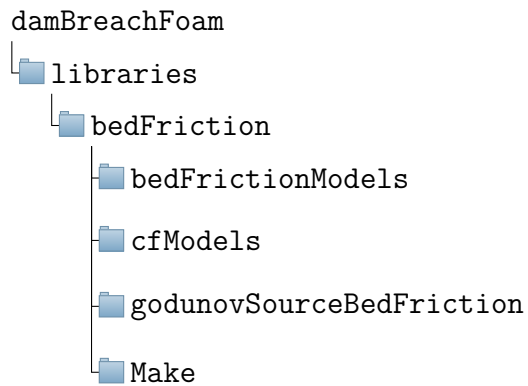


Figura D.12: Estructura del directorio **bedFriction**.

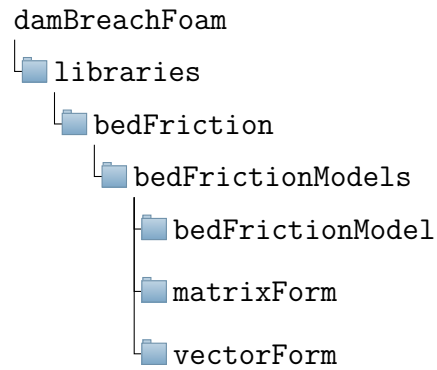


Figura D.13: Estructura del directorio **bedFrictionModels**.

implementadas para la elección de la forma del esquema, mientras que la Figura D.14 presenta aquellas implementadas para la elección de c_f .

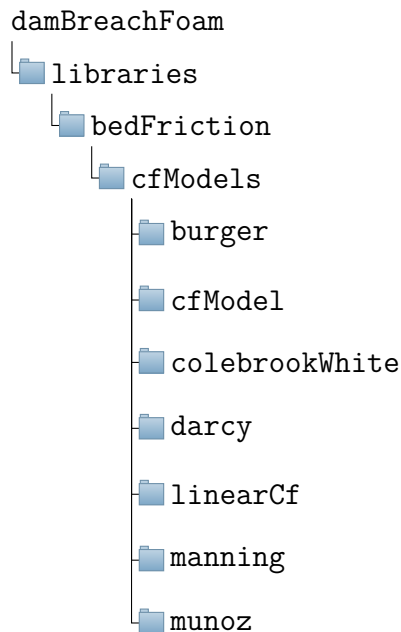


Figura D.14: Estructura del directorio **cfModels**.

En esta librería, tanto **bedFrictionModel** como **cfModel** son directorios que contienen clases base que gestionan la elección del usuario. Respecto a la forma en que T_p es calculado, **matrixForm** es la clase que calcula el flujo utilizando las ecuaciones 4.44 y 4.45, mientras que **vectorForm** lo hace utilizando las ecuaciones 4.44 y 4.46. Respecto a la forma en que c_f es calculado, cada clase implementa las formulaciones descritas en la Tabla 5.2.

Librería bedLoad

La librería **bedLoad** agrupa distintas clases que se utilizan para obtener el valor del flujo neto de gasto sólido de fondo (F_{qsp}). En la Figura D.15 se presenta un esquema de la estructura de este directorio, donde:

- **bedLoadModels**: es el directorio que agrupa la clase base genérica y sus clases derivadas implementadas para el cálculo del flujo neto de gasto sólido en la celda.
- **godunovBedLoad**: es el directorio que contiene a la clase que gestiona los procedimientos para la actualización de los campos asociados al gasto sólido.
- **Make**: es el directorio que contiene la información para compilar, como fue descrito en la sección D.1.
- **qsModels**: es el directorio que agrupa la clase base genérica y sus clases derivadas implementadas para el cálculo de gasto sólido de fondo.

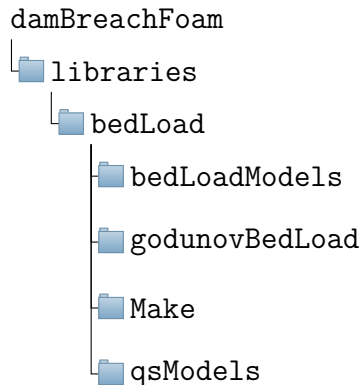


Figura D.15: Estructura del directorio **bedLoad**.

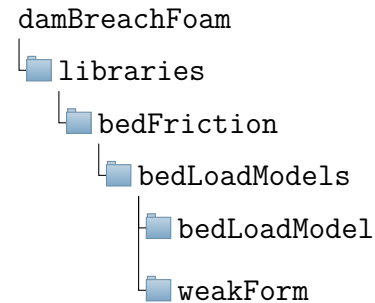


Figura D.16: Estructura del directorio **bedLoadModels**.

bedLoad fue construida manteniendo la estructura presentada previamente para las demás librerías, pese a que sólo existe una formulación en este trabajo para el cálculo de F_{qsp} . Ahora bien, se entrega la posibilidad de seleccionar el tipo de formulación es utilizada para el gasto sólido de fondo q_s . La Figura D.16 presenta las diversas clases implementadas para la elección de la forma del esquema, mientras que la Figura D.17 presenta aquellas implementadas para la elección de q_s .

En esta librería, tanto **bedLoadModel** como **qsModel** son directorios que contienen clases base que gestionan la elección del usuario. Respecto a la forma en que F_{qsp} es calculado, hasta el momento sólo existe la metodología **weakForm** descrita en la Sección 4.4.1. Respecto a la forma en que q_s es calculado, cada clase implementa las formulaciones descritas en la Tabla 5.3.



Figura D.17: Estructura del directorio `qsModels`.

Librería `godunovLoop`

La librería `godunovLoop` corresponde a una clase que coordina las librerías anteriores para computar los esquemas tipo Godunov. En la Figura D.18 se presenta la estructura del directorio que la contiene, donde:

- **Make**: es el directorio que contiene la información para compilar, como fue descrito en la sección D.1.
- `godunovLoop.C`: es el código donde se actualizan los campos utilizando los esquemas tipo Godunov.
- `godunovLoop.H`: es el código donde se declaran las funciones de los esquemas tipo Godunov.

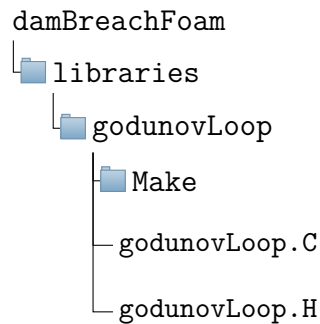
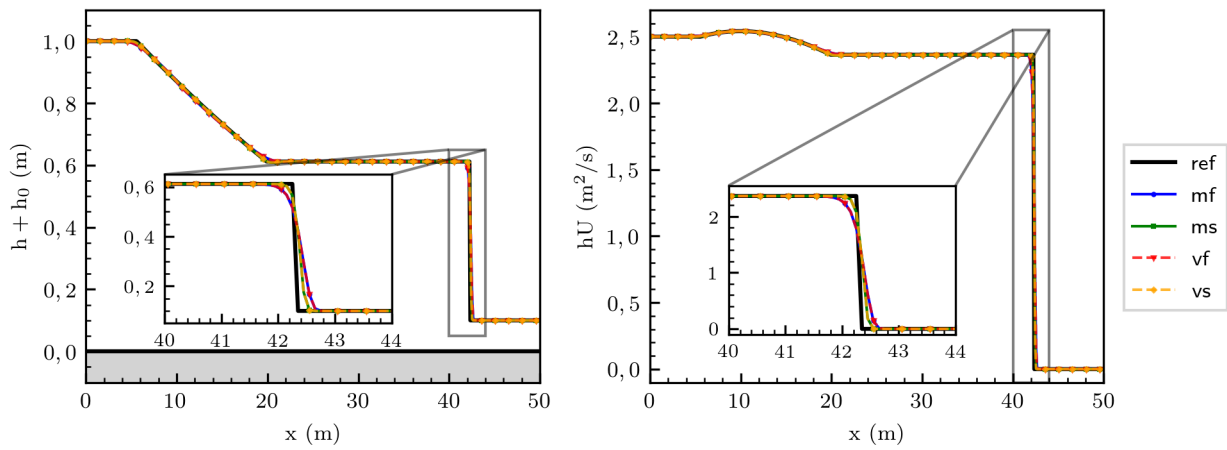


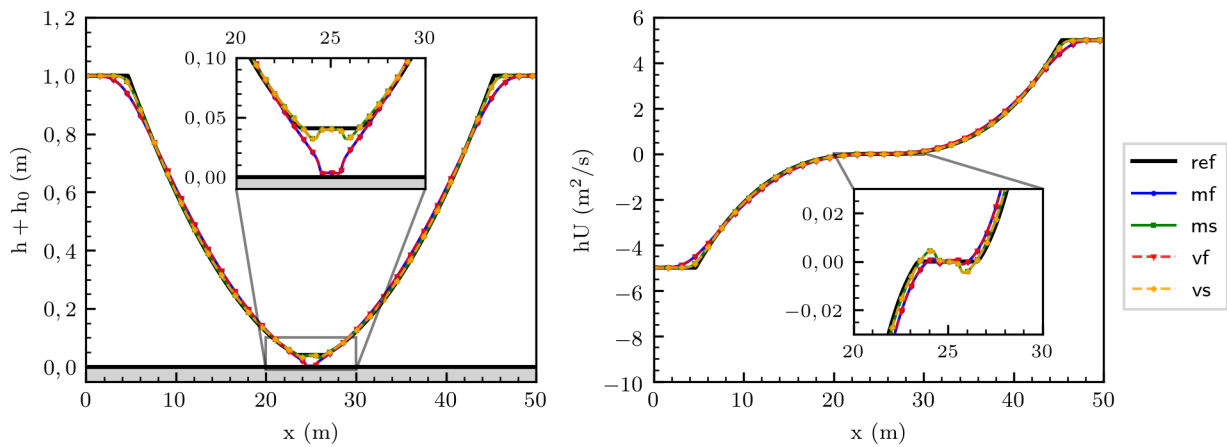
Figura D.18: Estructura del directorio `godunovLoop`.

Anexo E

Figuras: Casos de verificación

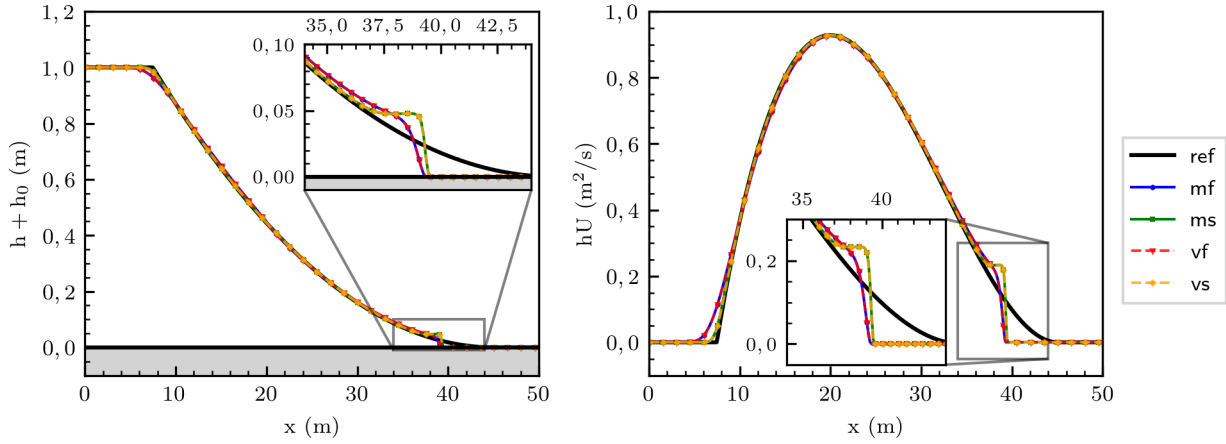


(a) Prueba T1 en $t = 7,0$ s.

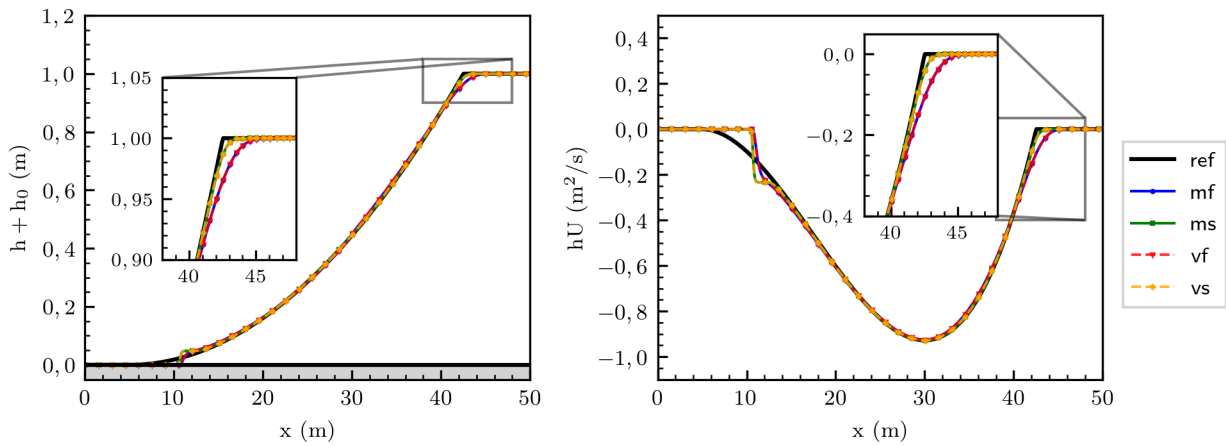


(b) Prueba T2 en $t = 2,5$ s.

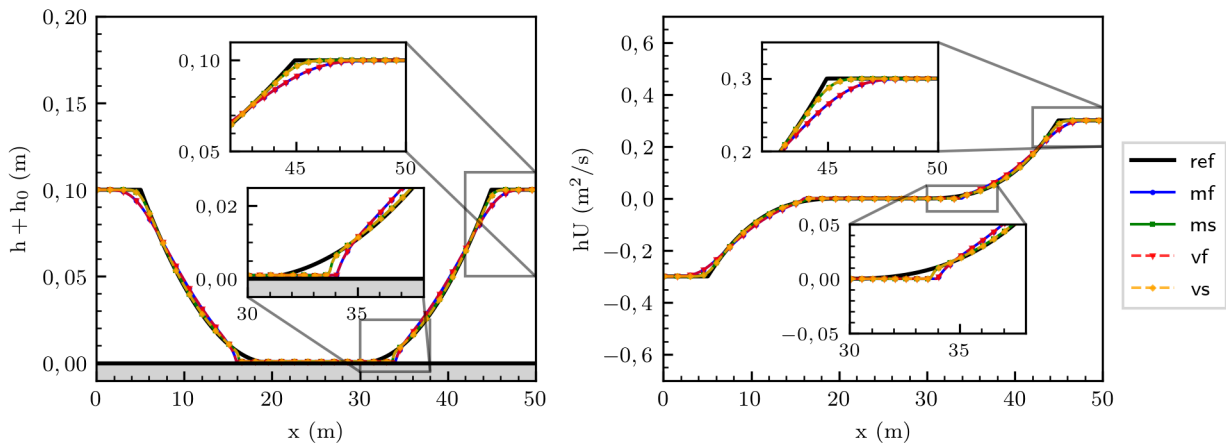
Figura E.1: Problemas de Riemann unidimensionales homogéneos de Tabla 6.2 con fondo mojado durante toda la simulación.



(a) Prueba T3 en $t = 4,0$ s.

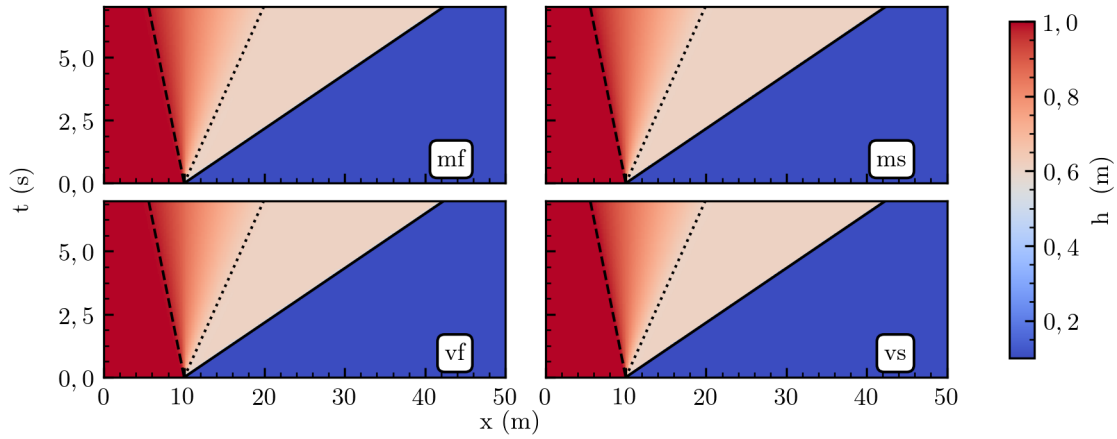


(b) Prueba T4 en $t = 4,0$ s.

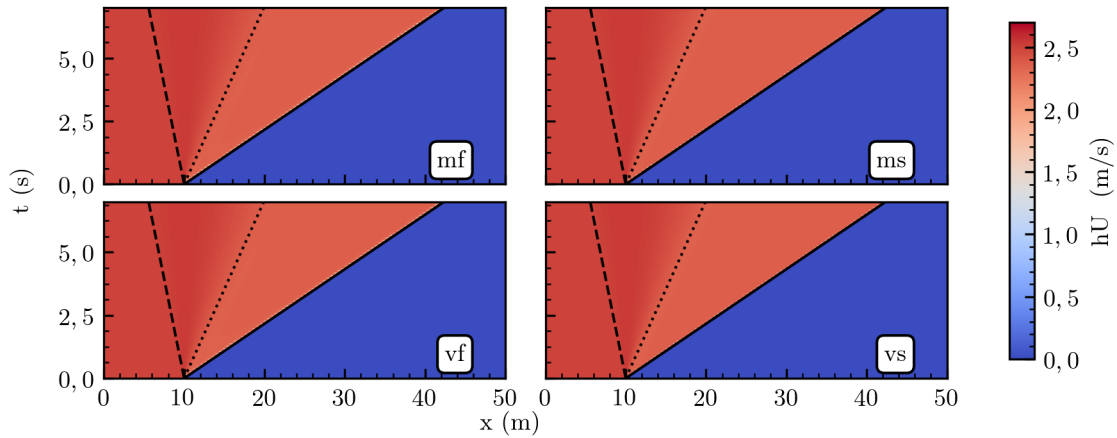


(c) Prueba T5 en $t = 5,0$ s.

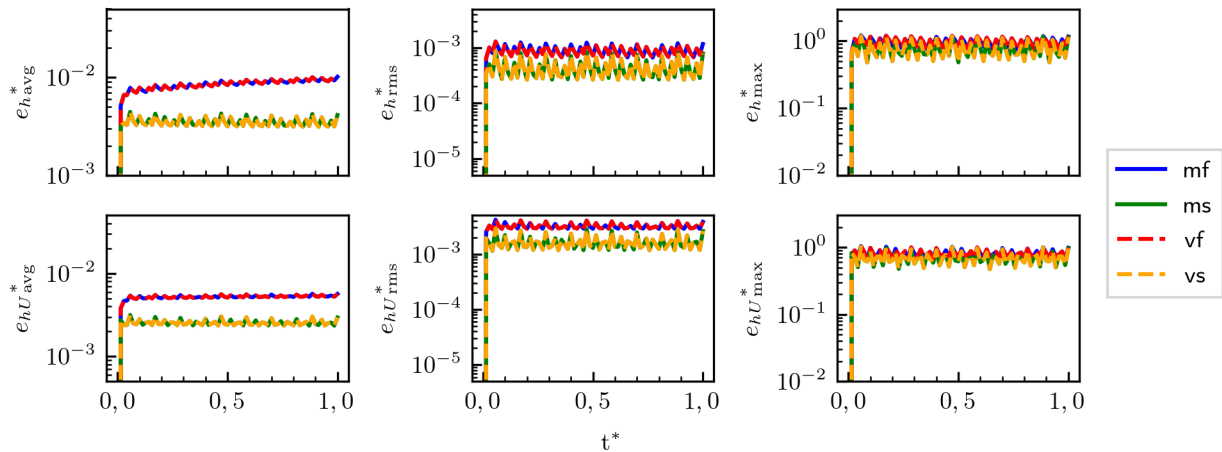
Figura E.2: Problemas de Riemann unidimensionales homogéneos de Tabla 6.2 con frente secojado.



(a) Altura h en el dominio en función del tiempo.

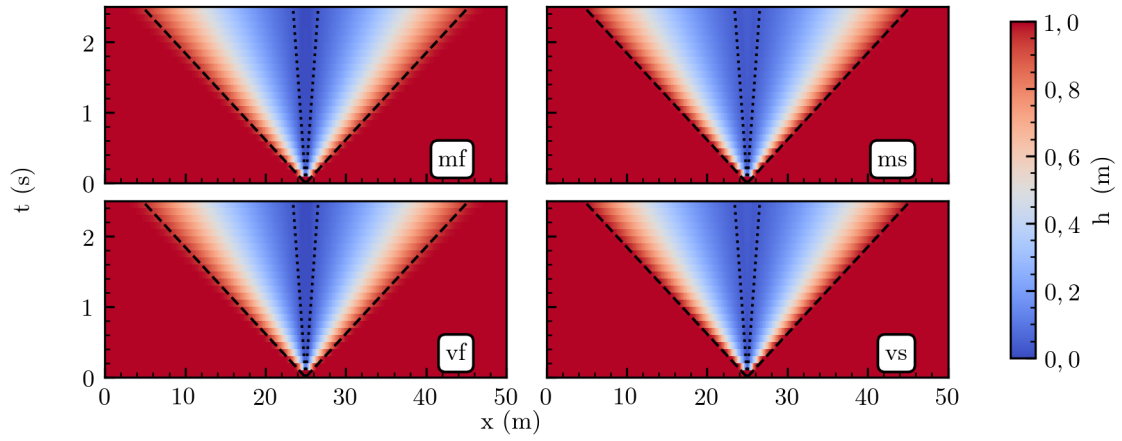


(b) Caudal unitario hU en el dominio en función del tiempo.

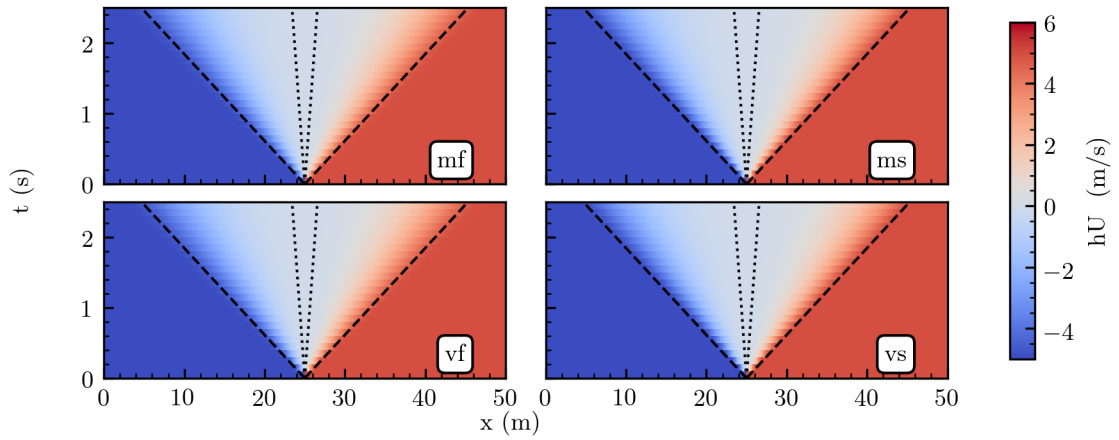


(c) Errores adimensionales en función del tiempo normalizado $t^* = t/t_f$ para h y hU .

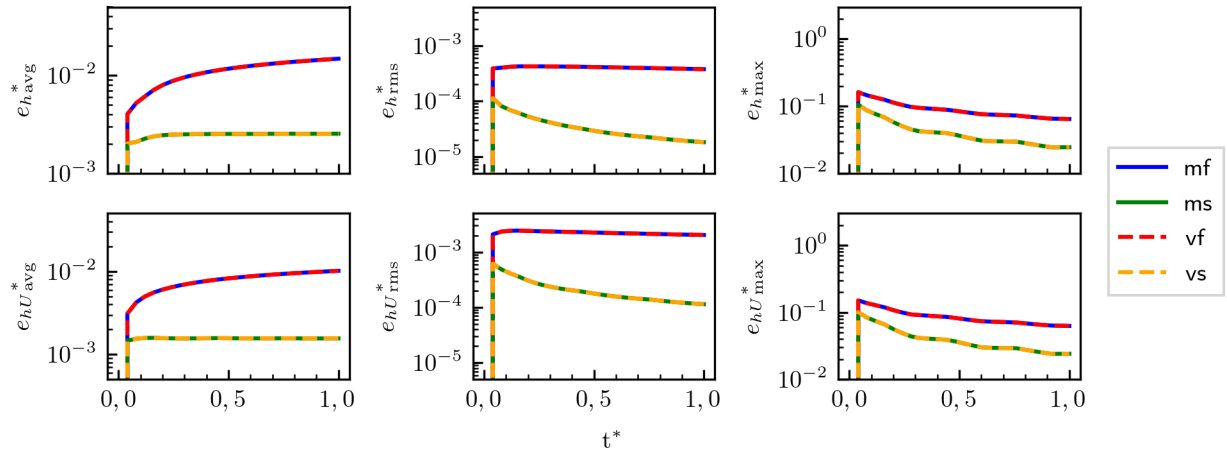
Figura E.3: Resultados de prueba T1 de Tabla 6.2. En E.3(a) y E.3(b) cada línea negra indica la posición asociada a la solución exacta de las ondas que se propagan. Una línea negra continua (—) corresponde a una onda de choque, una línea discontinua (- -) corresponde al frente de una onda de rarefacción y una línea punteada (· · ·) su fin, según su sentido de propagación.



(a) Altura h en el dominio en función del tiempo.

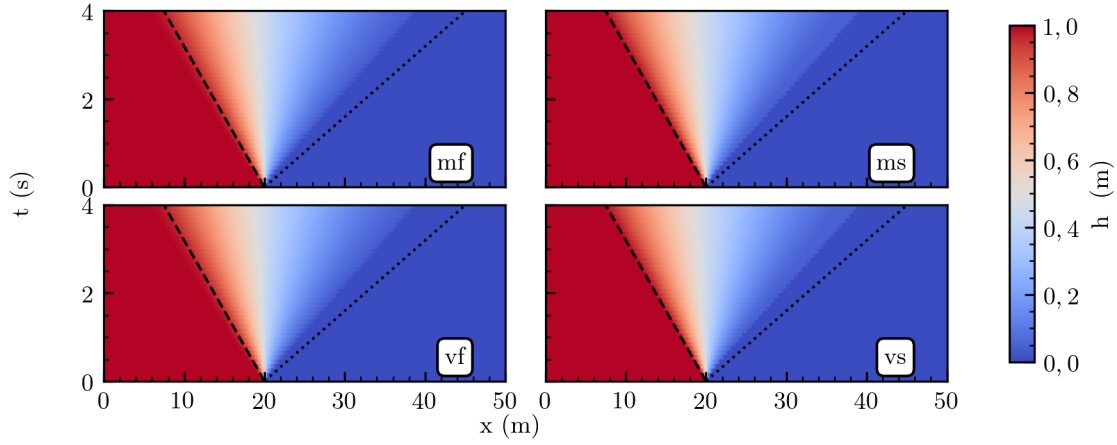


(b) Caudal unitario hU en el dominio en función del tiempo.

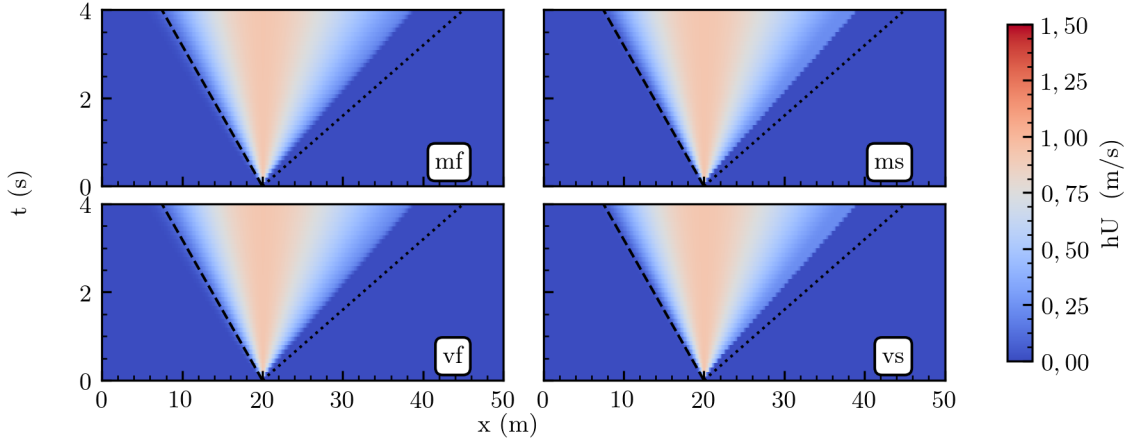


(c) Errores adimensionales en función del tiempo normalizado $t^* = t/t_f$ para h y hU .

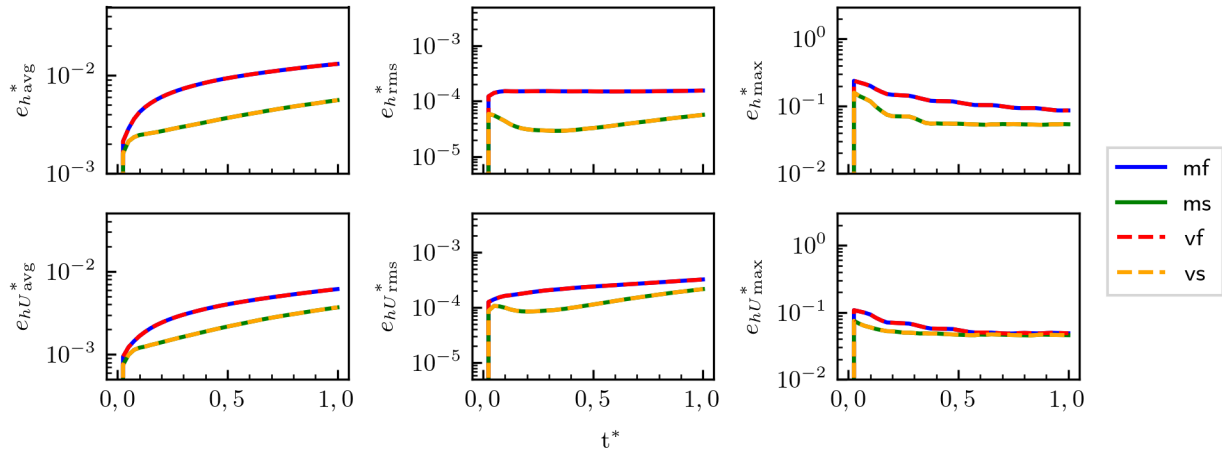
Figura E.4: Resultados de prueba T2 de Tabla 6.2. En E.3(a) y E.3(b) cada línea negra indica la posición asociada a la solución exacta de las ondas que se propagan. Una línea negra continua (—) corresponde a una onda de choque, una línea discontinua (--) corresponde al frente de una onda de rarefacción y una línea punteada (····) su fin, según su sentido de propagación.



(a) Altura h en el dominio en función del tiempo.

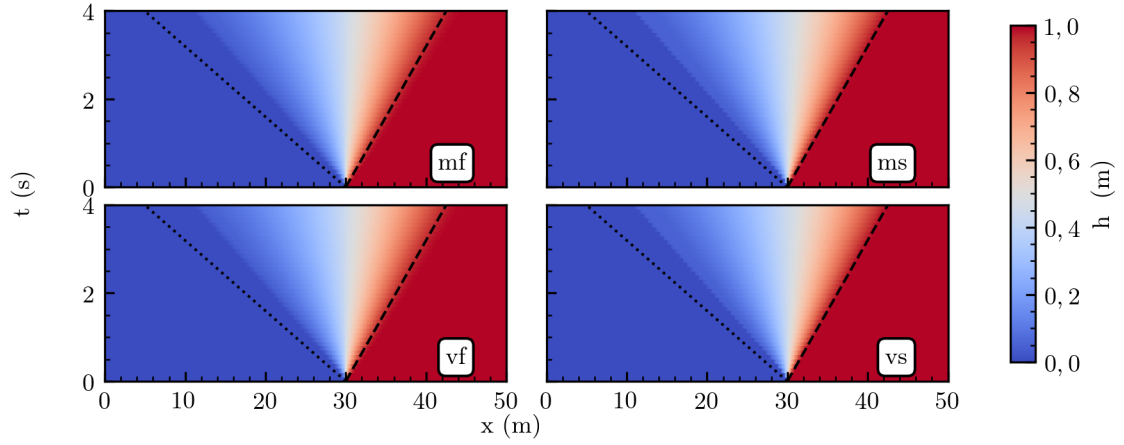


(b) Caudal unitario hU en el dominio en función del tiempo.

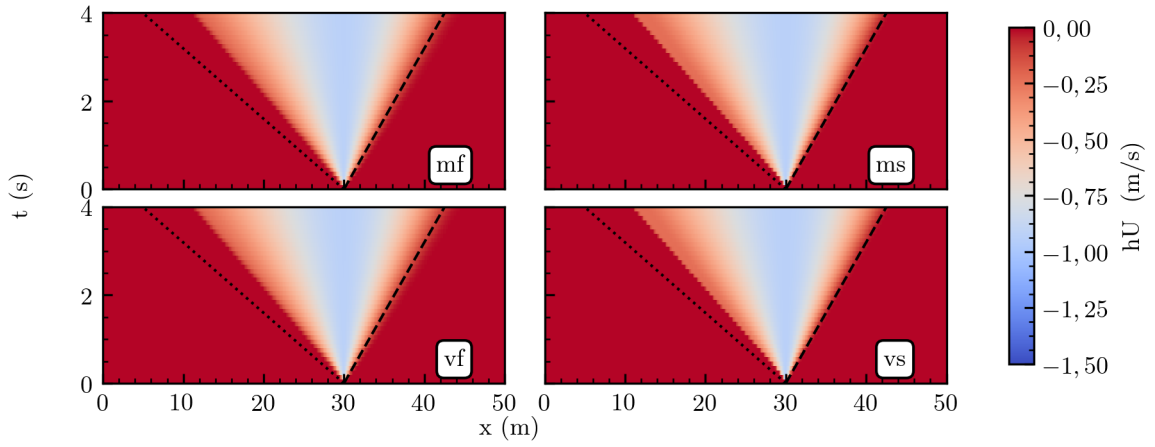


(c) Errores adimensionales en función del tiempo normalizado $t^* = t/t_f$ para h y hU .

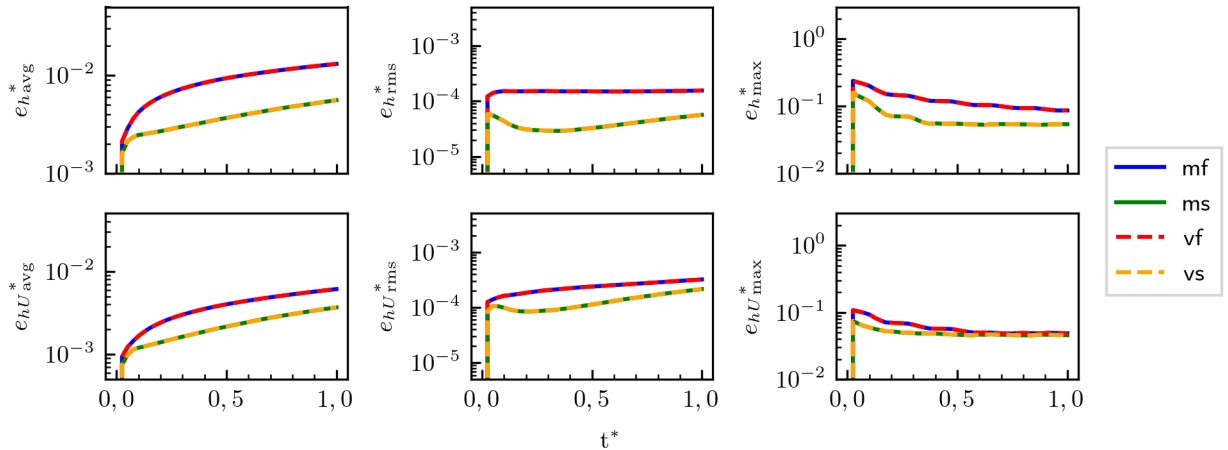
Figura E.5: Resultados de prueba T3 de Tabla 6.2. En E.3(a) y E.3(b) cada línea negra indica la posición asociada a la solución exacta de las ondas que se propagan. Una línea negra continua (—) corresponde a una onda de choque, una línea discontinua (- -) corresponde al frente de una onda de rarefacción y una línea punteada (⋯) su fin, según su sentido de propagación.



(a) Altura h en el dominio en función del tiempo.

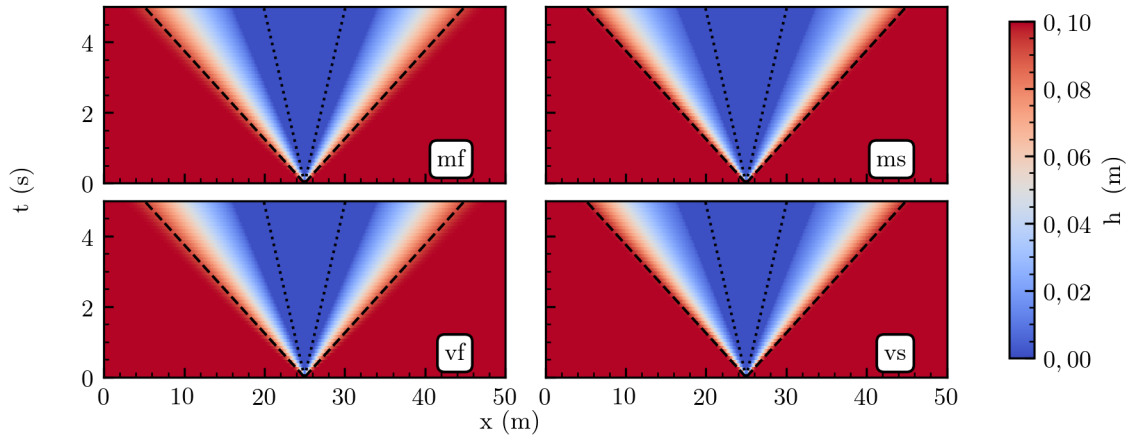


(b) Caudal unitario hU en el dominio en función del tiempo.

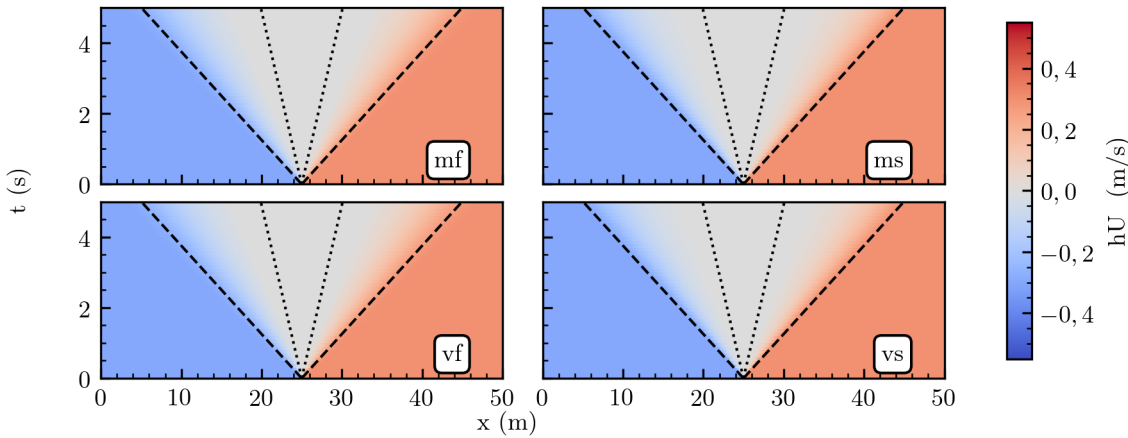


(c) Errores adimensionales en función del tiempo normalizado $t^* = t/t_f$ para h y hU .

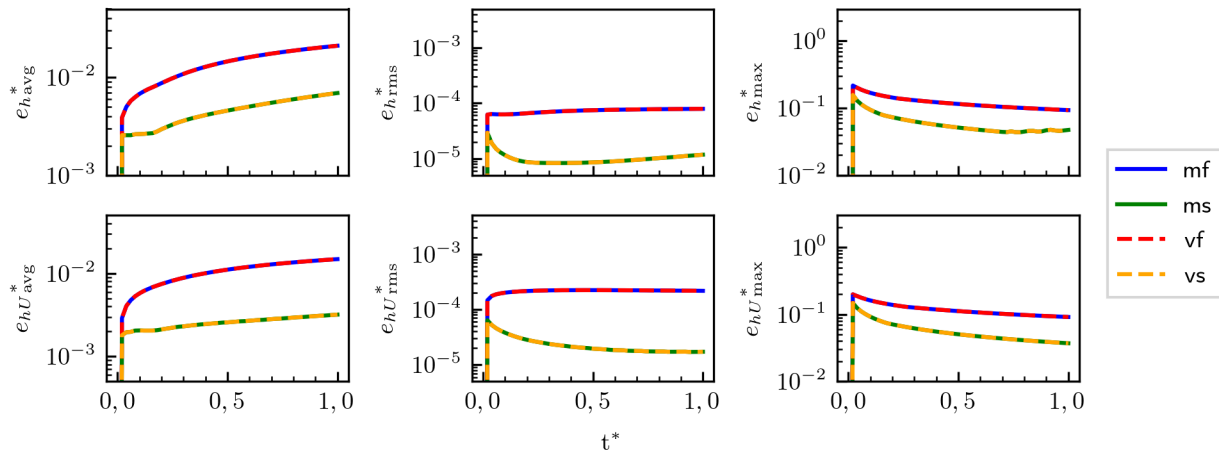
Figura E.6: Resultados de prueba T4 de Tabla 6.2. En E.3(a) y E.3(b) cada línea negra indica la posición asociada a la solución exacta de las ondas que se propagan. Una línea negra continua (—) corresponde a una onda de choque, una línea discontinua (---) corresponde al frente de una onda de rarefacción y una línea punteada (.....) su fin, según su sentido de propagación.



(a) Altura h en el dominio en función del tiempo.

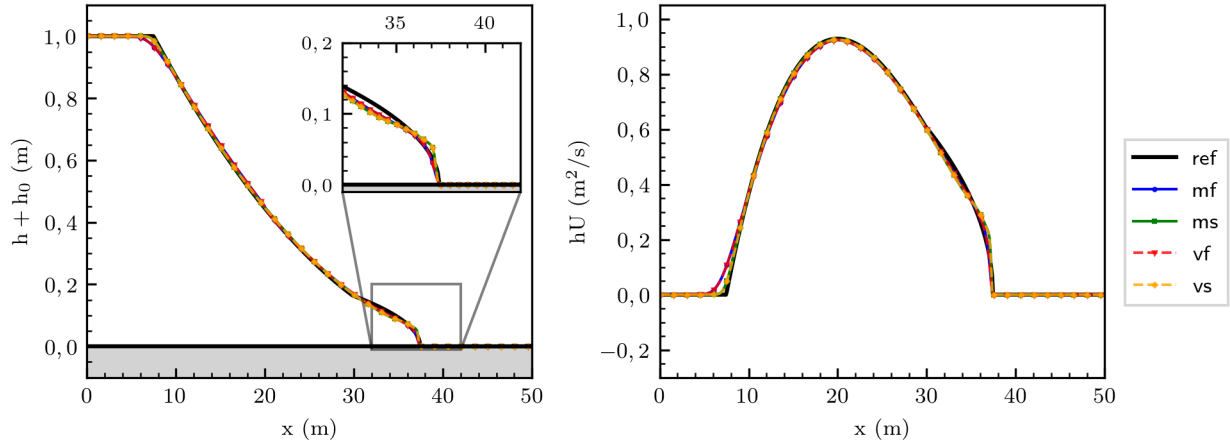


(b) Caudal unitario hU en el dominio en función del tiempo.

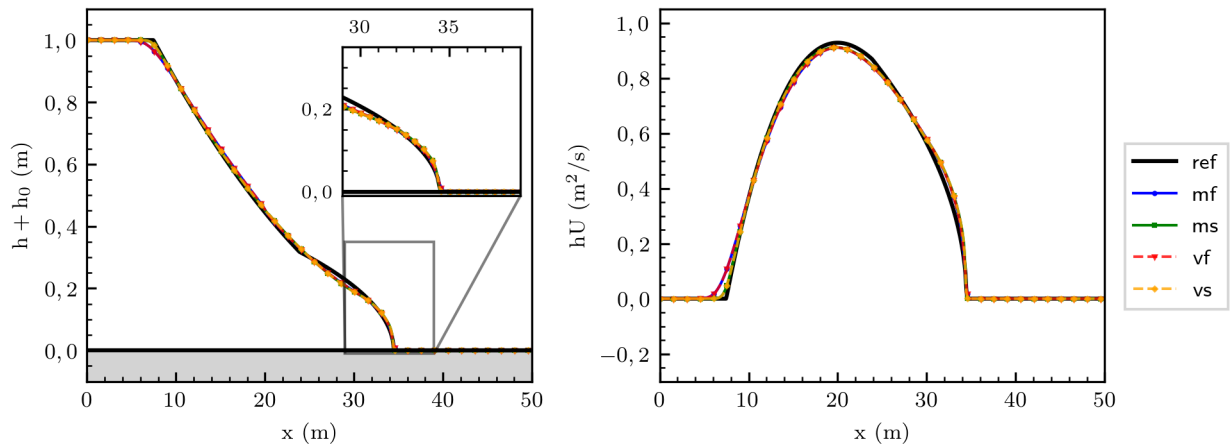


(c) Errores adimensionales en función del tiempo normalizado $t^* = t/t_f$ para h y hU .

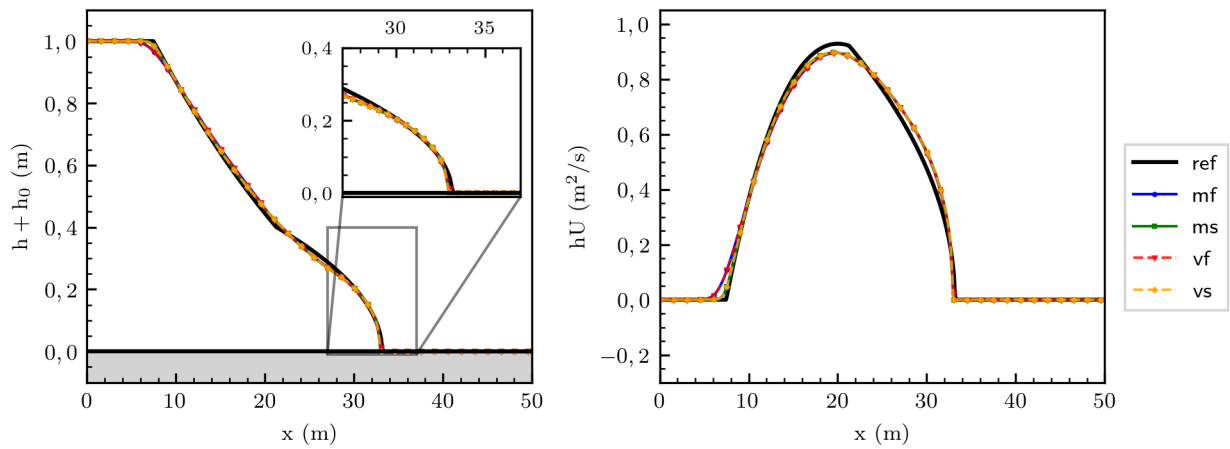
Figura E.7: Resultados de prueba T5 de Tabla 6.2. En E.3(a) y E.3(b) cada línea negra indica la posición asociada a la solución exacta de las ondas que se propagan. Una línea negra continua (—) corresponde a una onda de choque, una línea discontinua (- -) corresponde al frente de una onda de rarefacción y una línea punteada (⋯) su fin, según su sentido de propagación.



(a) Prueba T1 en $t = 4,0$ s.

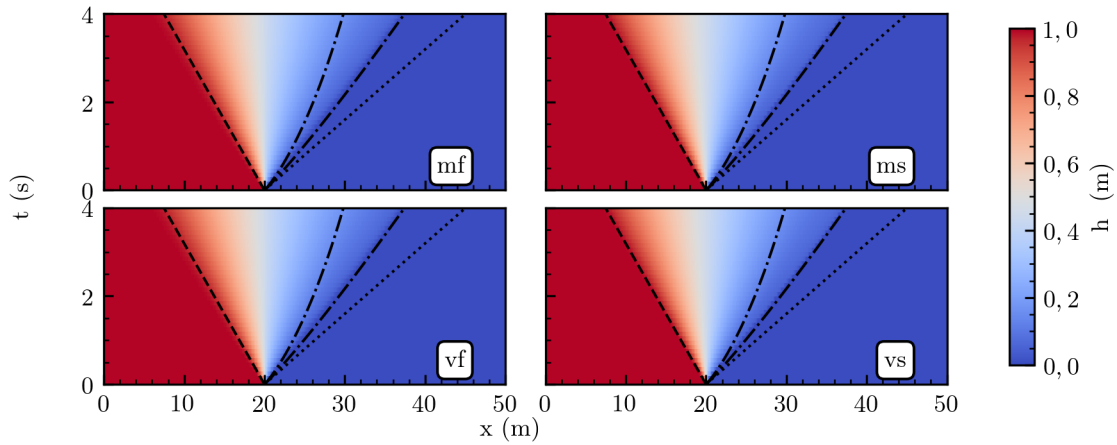


(b) Prueba T2 en $t = 4,0$ s.

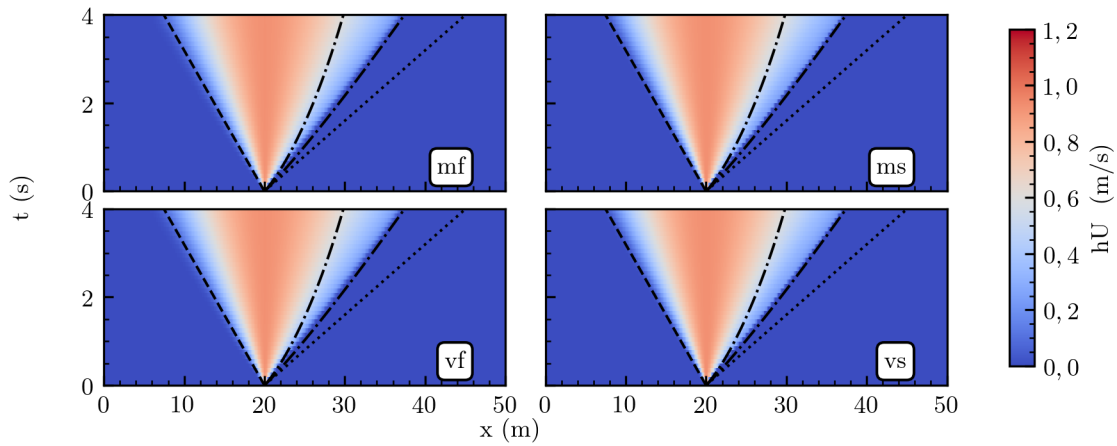


(c) Prueba T3 en $t = 5,0$ s.

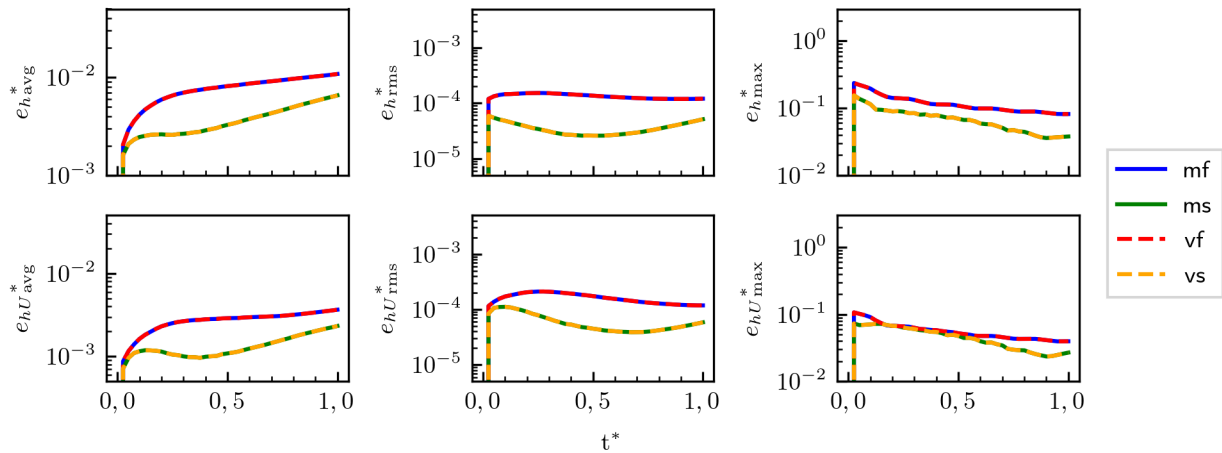
Figura E.8: Problemas de Riemann unidimensionales no homogéneos de Tabla 6.3 con factor de fricción de Darcy-Weisbach $f = f_0$ constante y frente seco-mojado.



(a) Altura h en el dominio en función del tiempo.

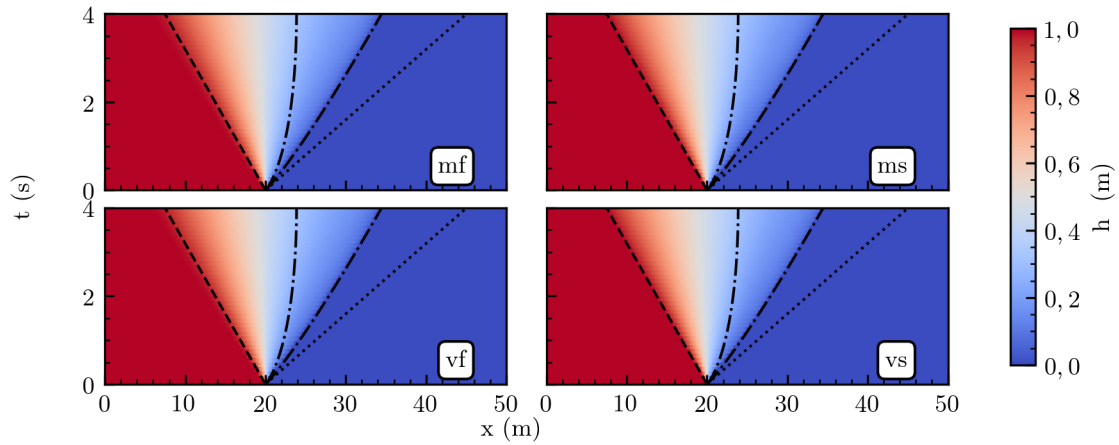


(b) Caudal unitario hU en el dominio en función del tiempo.

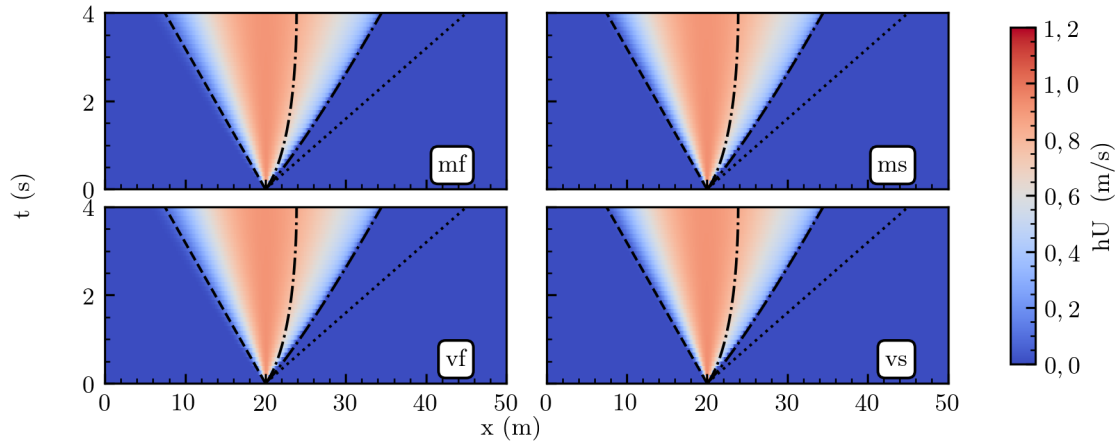


(c) Errores adimensionales en función del tiempo normalizado $t^* = t/t_f$ para h y hU .

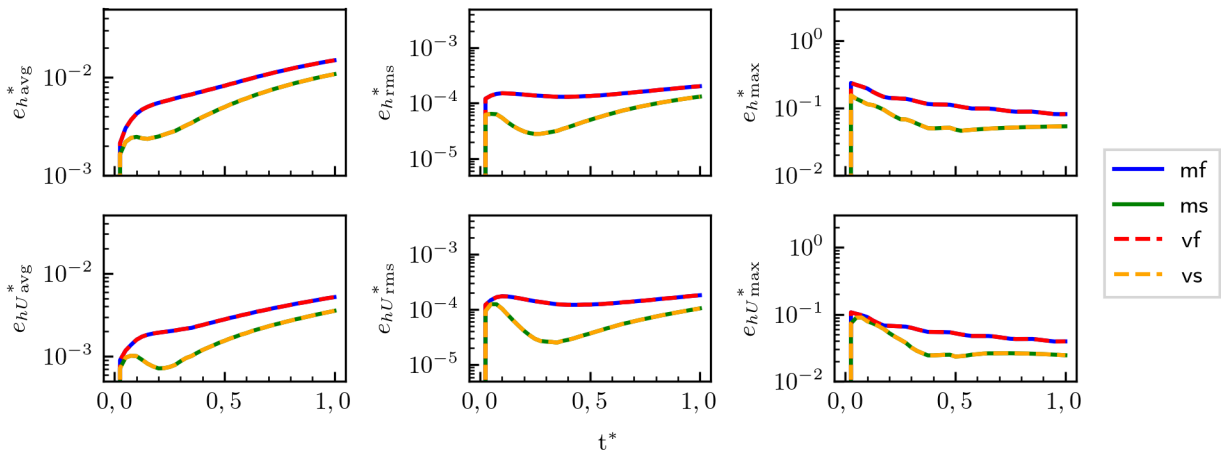
Figura E.9: Resultados de prueba T1 de Tabla 6.3. En E.3(a) y E.3(b) cada línea negra indica la posición asociada a la soluciones de referencia. Una línea discontinua (--) corresponde al frente de una onda de rarefracción de la solución exacta del problema homogéneo y una línea punteada (.....) su fin, según su sentido de propagación. La líneas discontinuas con un patron de rayas y puntos (---) demarcan los limites en que Chanson (2005) indica que la solución de onda difusiva es válida.



(a) Altura h en el dominio en función del tiempo.

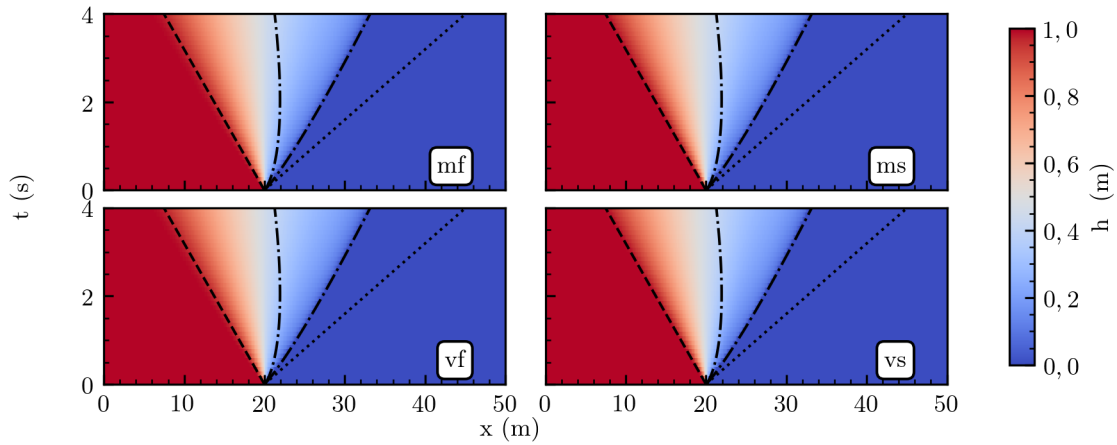


(b) Caudal unitario hU en el dominio en función del tiempo.

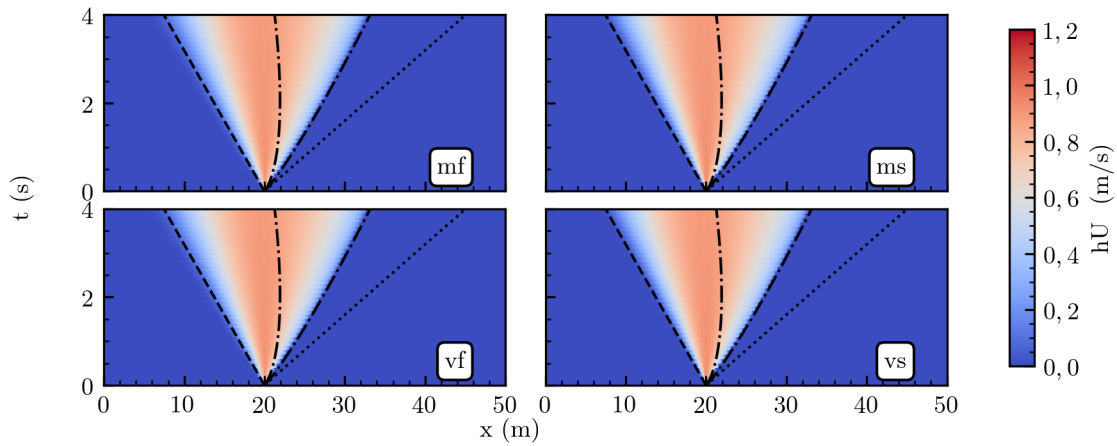


(c) Errores adimensionales en función del tiempo normalizado $t^* = t/t_f$ para h y hU .

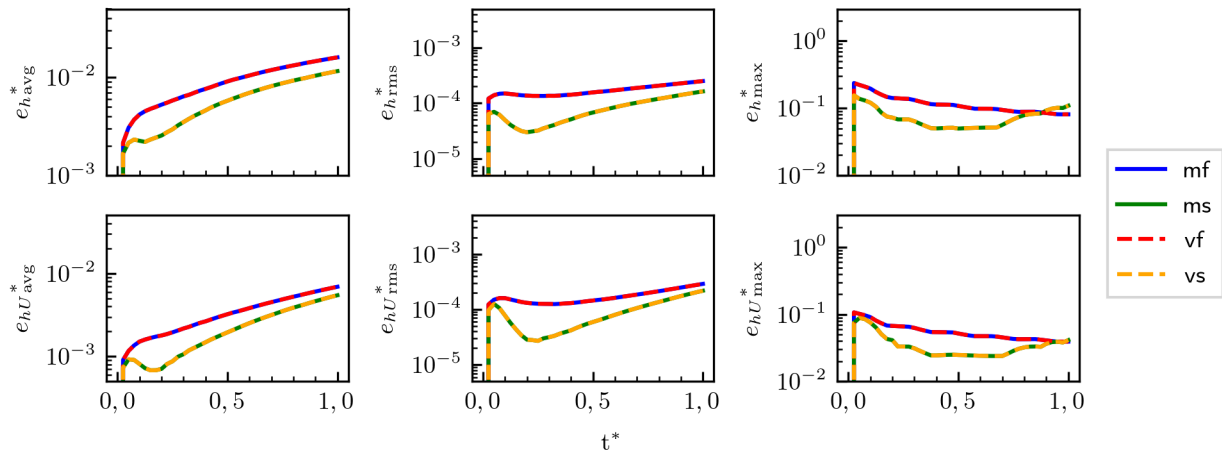
Figura E.10: Resultados de prueba T2 de Tabla 6.3. En E.4(a) y E.4(b) cada línea negra indica la posición asociada a la soluciones de referencia. Una línea discontinua (--) corresponde al frente de una onda de rarefacción de la solución exacta del problema homogéneo y una línea punteada (.....) su fin, según su sentido de propagación. La líneas discontinuas con un patron de rayas y puntos (— · —) demarcan los límites en que Chanson (2005) indica que la solución de onda difusiva es válida.



(a) Altura h en el dominio en función del tiempo.

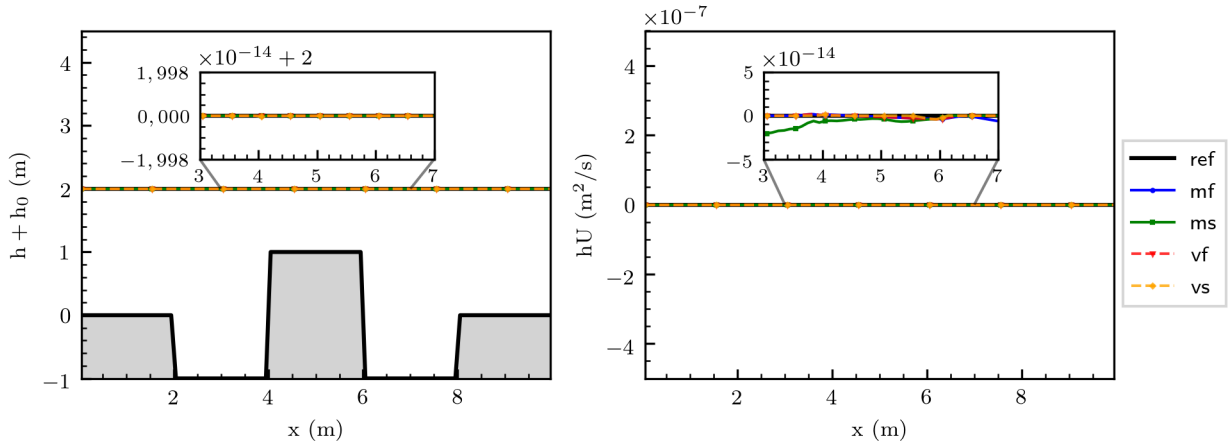


(b) Caudal unitario hU en el dominio en función del tiempo.

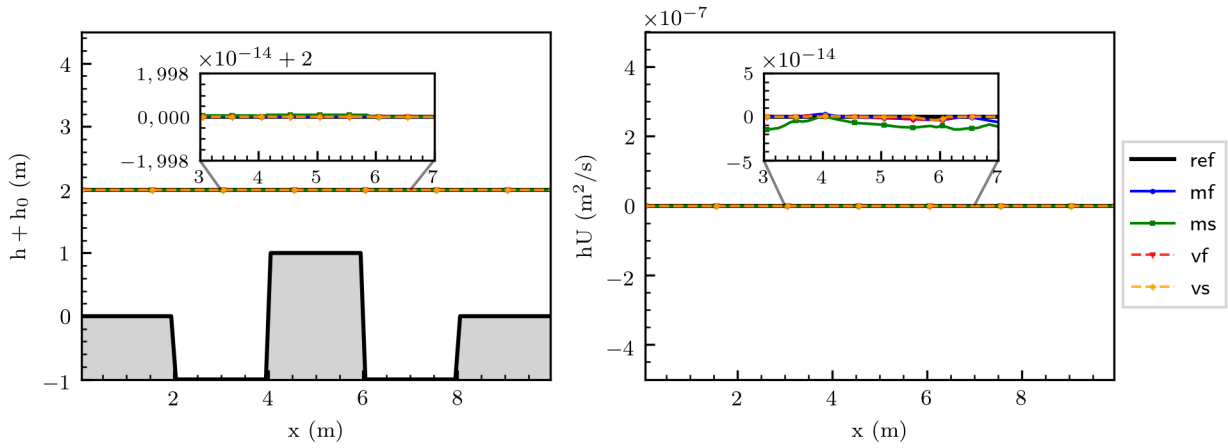


(c) Errores adimensionales en función del tiempo normalizado $t^* = t/t_f$ para h y hU .

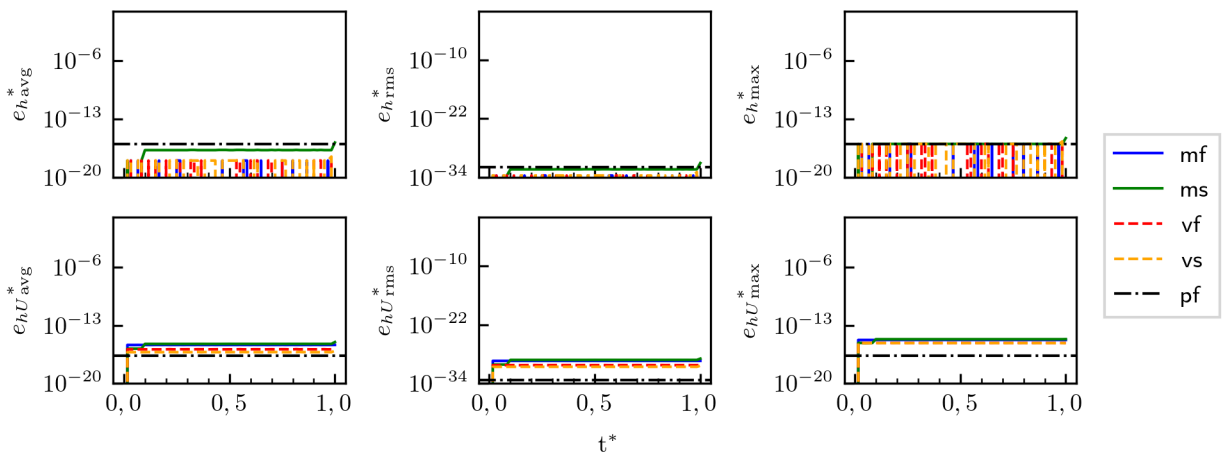
Figura E.11: Resultados de prueba T3 de Tabla 6.3. En E.5(a) y E.5(b) cada línea negra indica la posición asociada a la soluciones de referencia. Una línea discontinua (---) corresponde al frente de una onda de rarefracción de la solución exacta del problema homogéneo y una línea punteada (.....) su fin, según su sentido de propagación. La líneas discontinuas con un patron de rayas y puntos (— · —) demarcan los limites en que Chanson (2005) indica que la solución de onda difusiva es válida.



(a) Altura h y caudal hU en el dominio a los $t = 1800$ s.

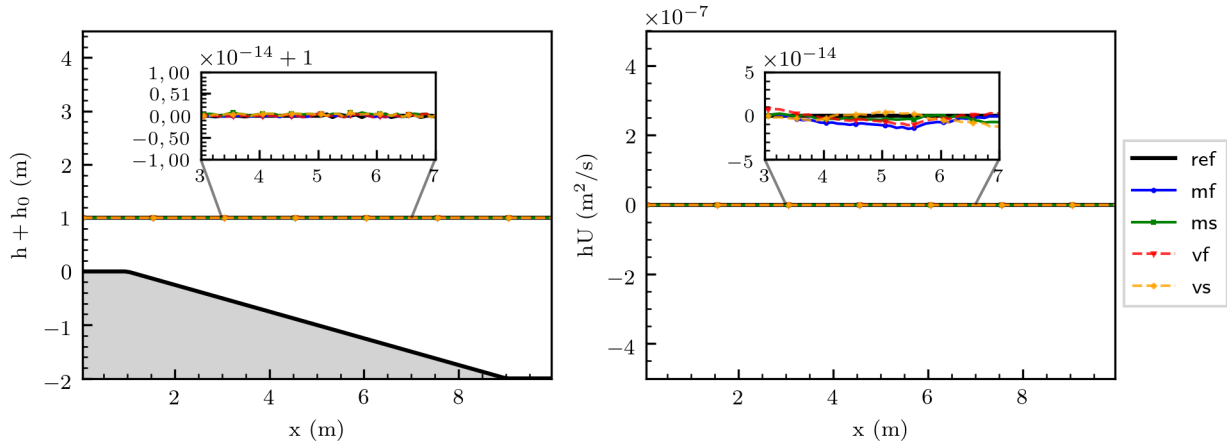


(b) Altura h y caudal hU en el dominio a los $t = 3600$ s.

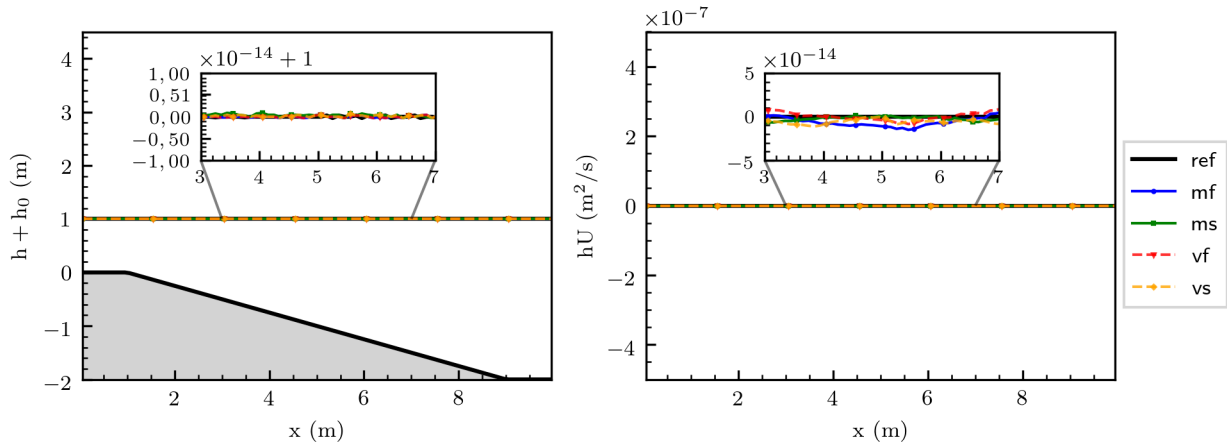


(c) Errores adimensionales en función del tiempo normalizado $t^* = t/t_f$ para h y hU . Se presenta como referencia, con etiqueta pf, el número decimal más pequeño que sumado a 1 la máquina no redondea. Este valor es adimensionalizado de igual forma que la variable con la que se compara, es decir, $\varepsilon^* = \varepsilon/E_v$, donde $\varepsilon \sim 2,22 \cdot 10^{-16}$.

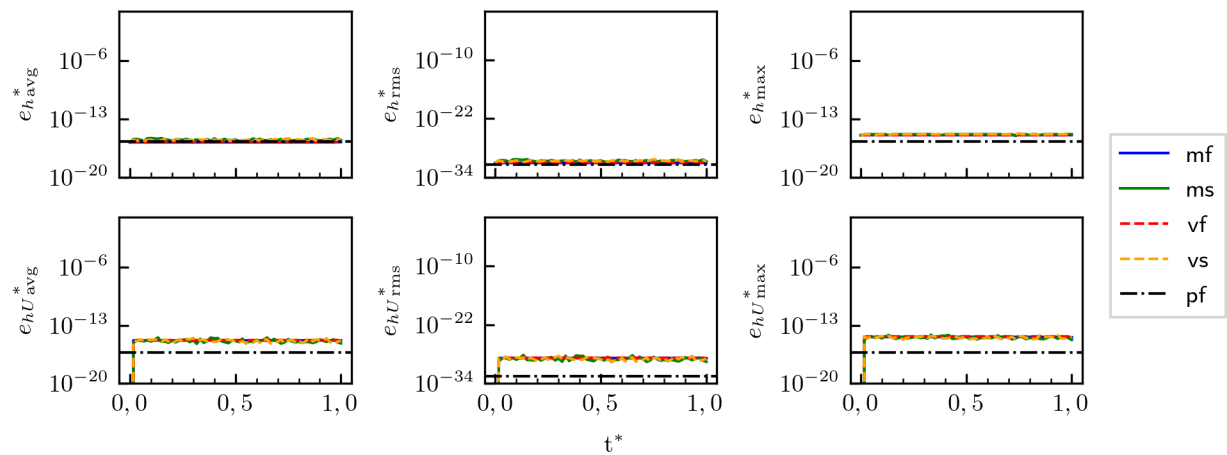
Figura E.12: Resultados de prueba T1 de Tabla 6.4.



(a) Altura h y caudal hU en el dominio a los $t = 1800$ s.

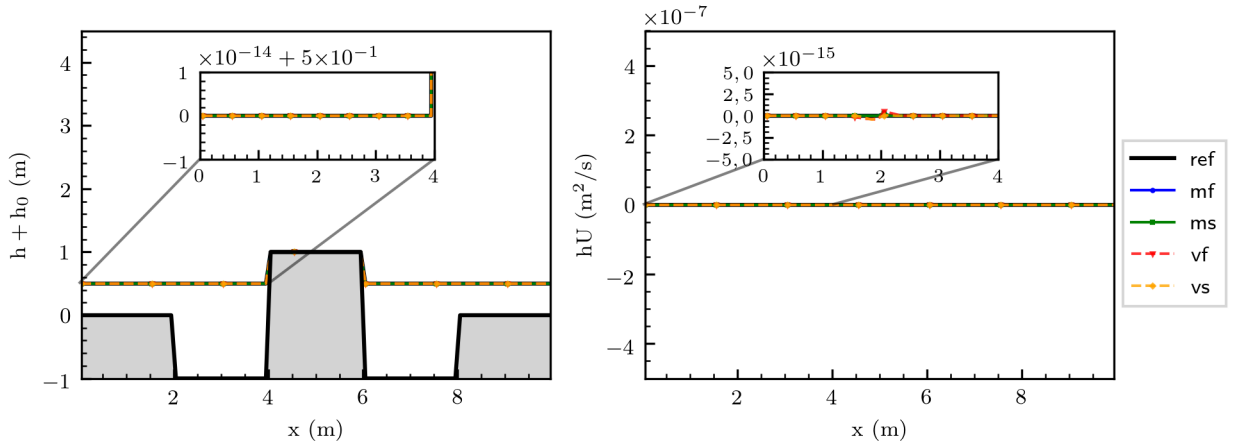


(b) Altura h y caudal hU en el dominio a los $t = 3600$ s.

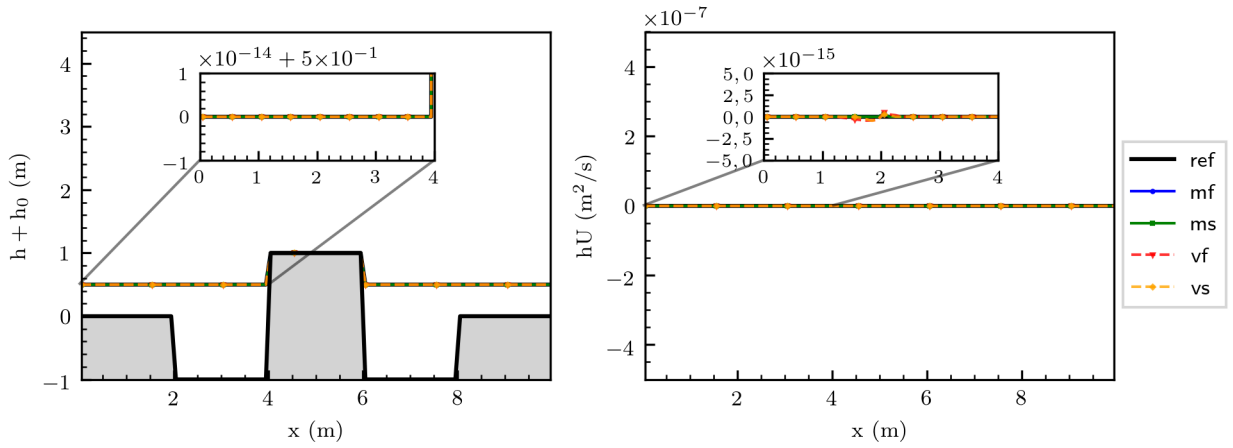


(c) Errores adimensionales en función del tiempo normalizado $t^* = t/t_f$ para h y hU . Se presenta como referencia, con etiqueta pf, el número decimal más pequeño que sumado a 1 la máquina no redondea. Este valor es adimensionalizado de igual forma que la variable con la que se compara, es decir, $\varepsilon^* = \varepsilon/E_v$, donde $\varepsilon \sim 2,22 \cdot 10^{-16}$.

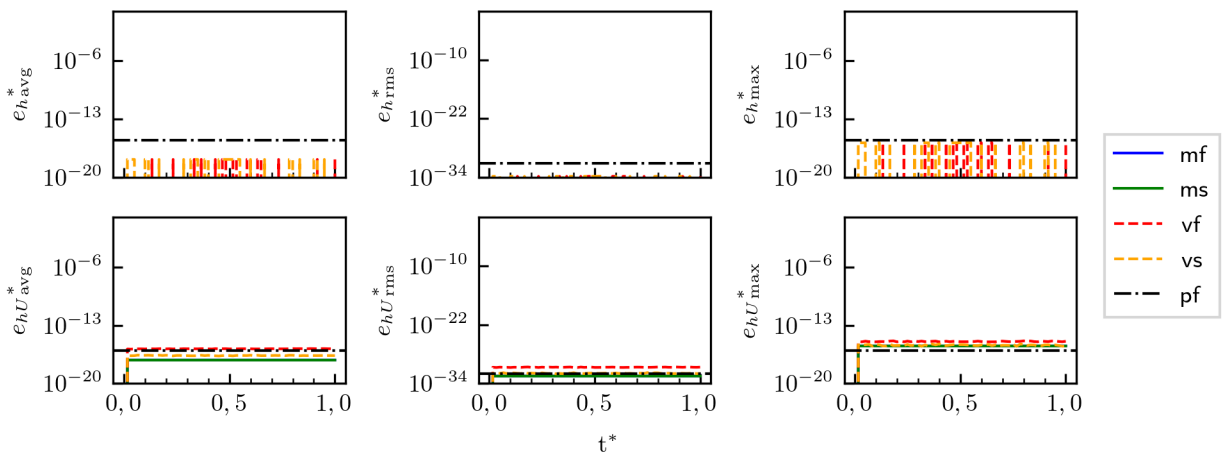
Figura E.13: Resultados de prueba T2 de Tabla 6.4.



(a) Altura h y caudal hU en el dominio a los $t = 1800$ s.

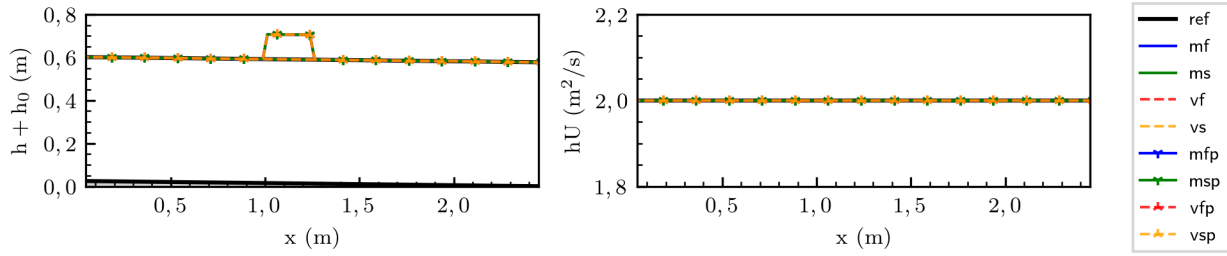


(b) Altura h y caudal hU en el dominio a los $t = 3600$ s.

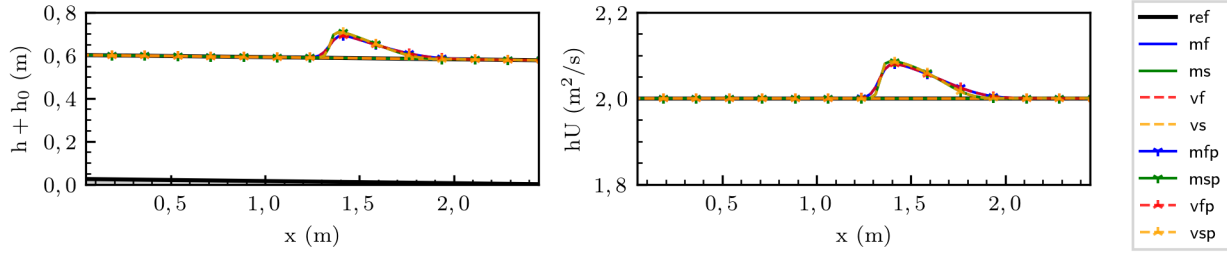


(c) Errores adimensionales en función del tiempo normalizado $t^* = t/t_f$ para h y hU . Se presenta como referencia, con etiqueta pf, el número decimal más pequeño que sumado a 1 la máquina no redondea. Este valor es adimensionalizado de igual forma que la variable con la que se compara, es decir, $\varepsilon^* = \varepsilon/E_v$, donde $\varepsilon \sim 2,22 \cdot 10^{-16}$.

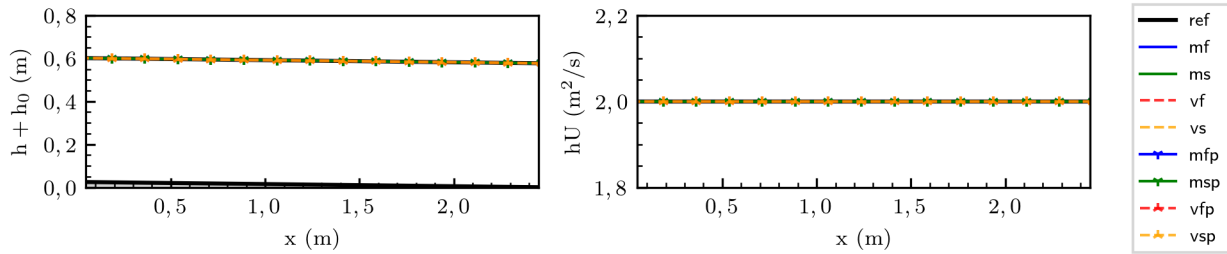
Figura E.14: Resultados de prueba T3 de Tabla 6.4.



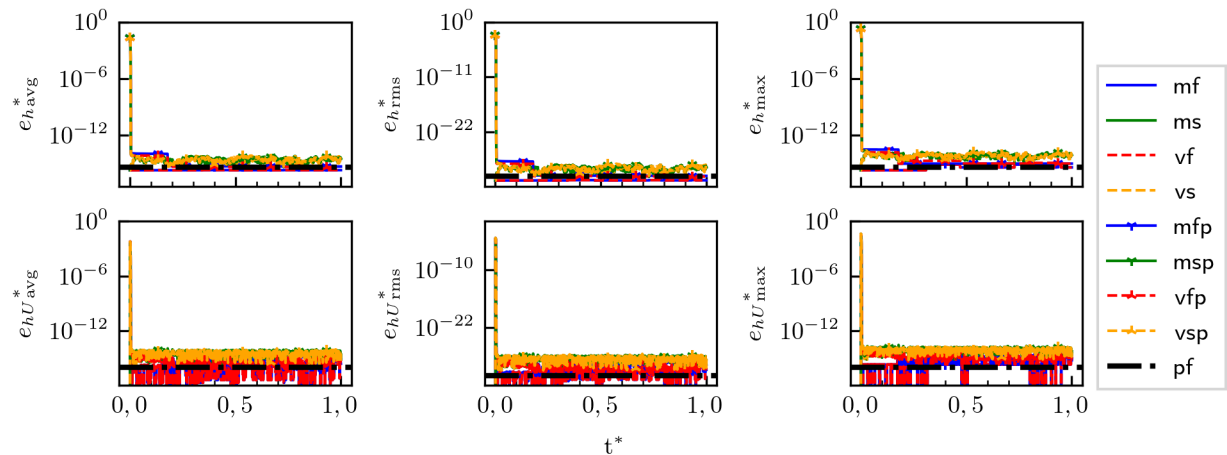
(a) Altura h y caudal hU en el dominio a los $t = 0$ s.



(b) Altura h y caudal hU en el dominio a los $t = 0,5$ s.

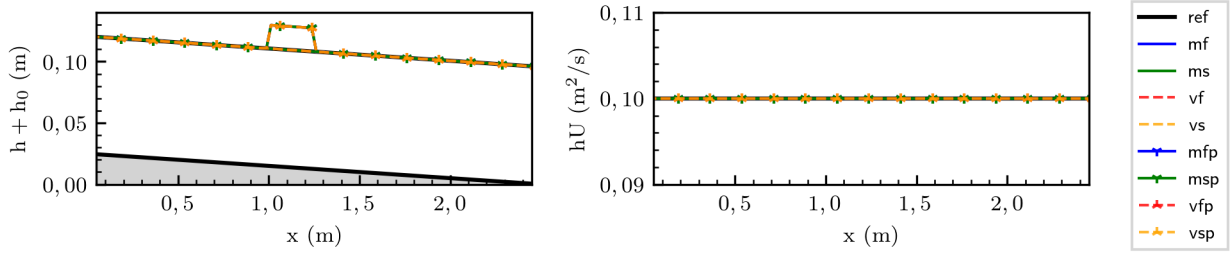


(c) Altura h y caudal hU en el dominio a los $t = 600$ s.

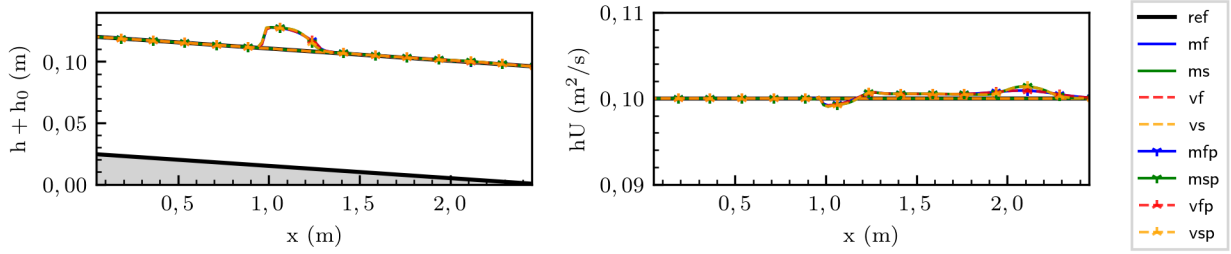


(d) Errores adimensionales en función del tiempo normalizado $t^* = t/t_f$ para h y hU . Se presenta como referencia, con etiqueta pf, el número decimal más pequeño que sumado a 1 la máquina no redondea. Este valor es adimensionalizado de igual forma que la variable con la que se compara, es decir, $\varepsilon^* = \varepsilon/E_v$, donde $\varepsilon \sim 2,22 \cdot 10^{-16}$.

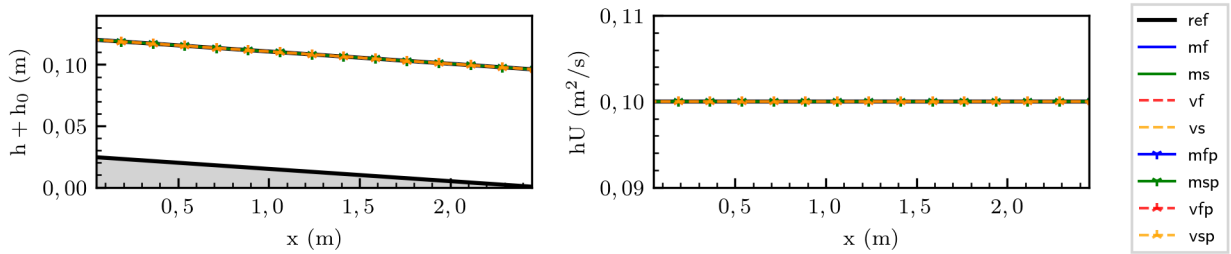
Figura E.15: Resultados de prueba T1 de Tabla 6.5.



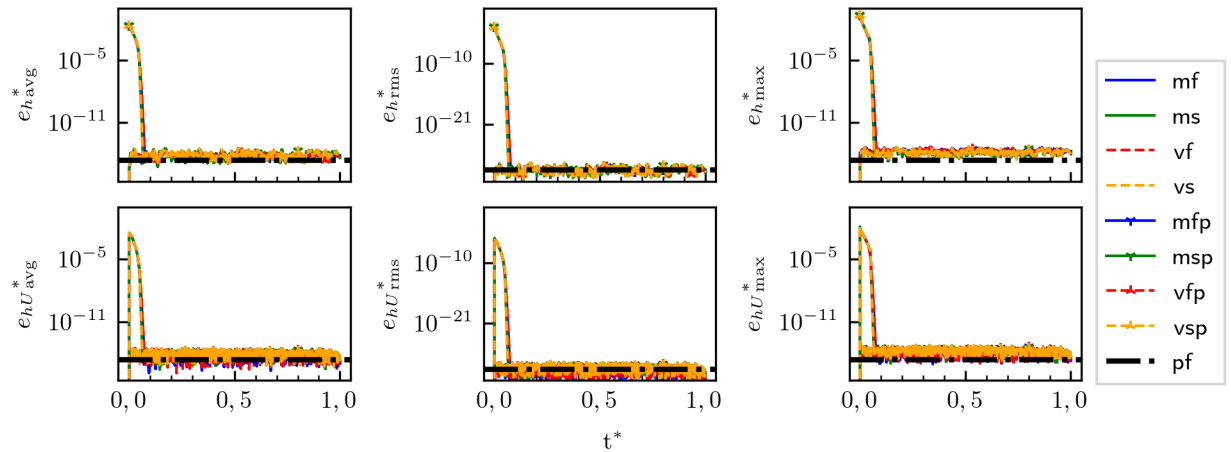
(a) Altura h y caudal hU en el dominio a los $t = 0$ s.



(b) Altura h y caudal hU en el dominio a los $t = 0,5$ s.

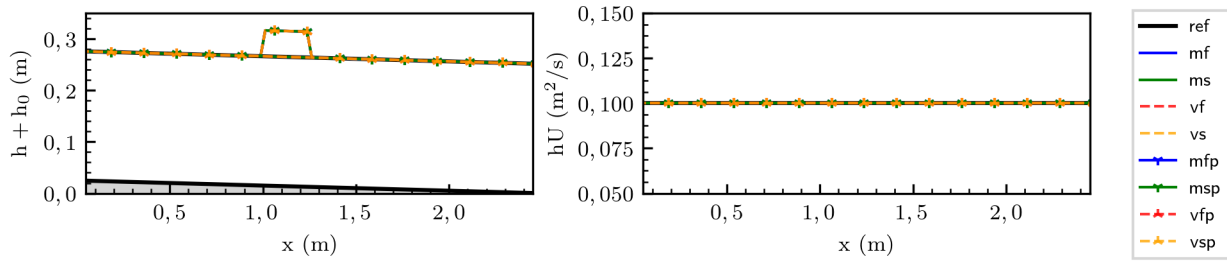


(c) Altura h y caudal hU en el dominio a los $t = 600$ s.

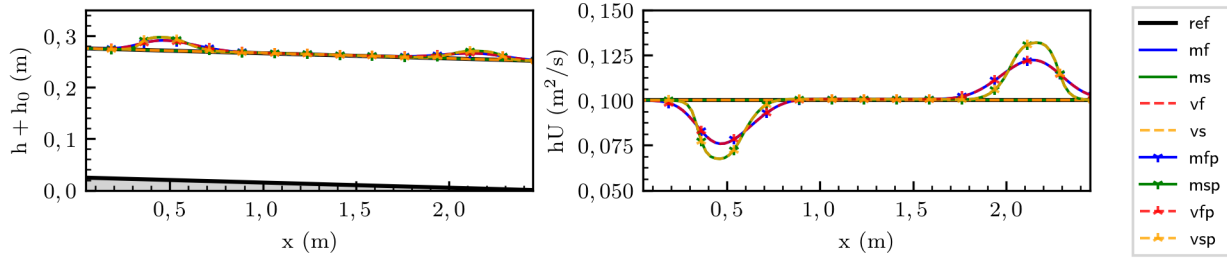


(d) Errores adimensionales en función del tiempo normalizado $t^* = t/t_f$ para h y hU . Se presenta como referencia, con etiqueta pf, el número decimal más pequeño que sumado a 1 la máquina no redondea. Este valor es adimensionalizado de igual forma que la variable con la que se compara, es decir, $\varepsilon^* = \varepsilon/E_v$, donde $\varepsilon \sim 2,22 \cdot 10^{-16}$.

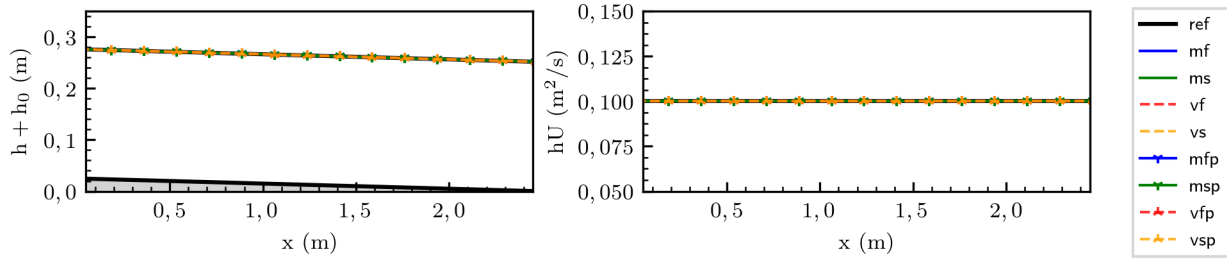
Figura E.16: Resultados de prueba T2 de Tabla 6.5.



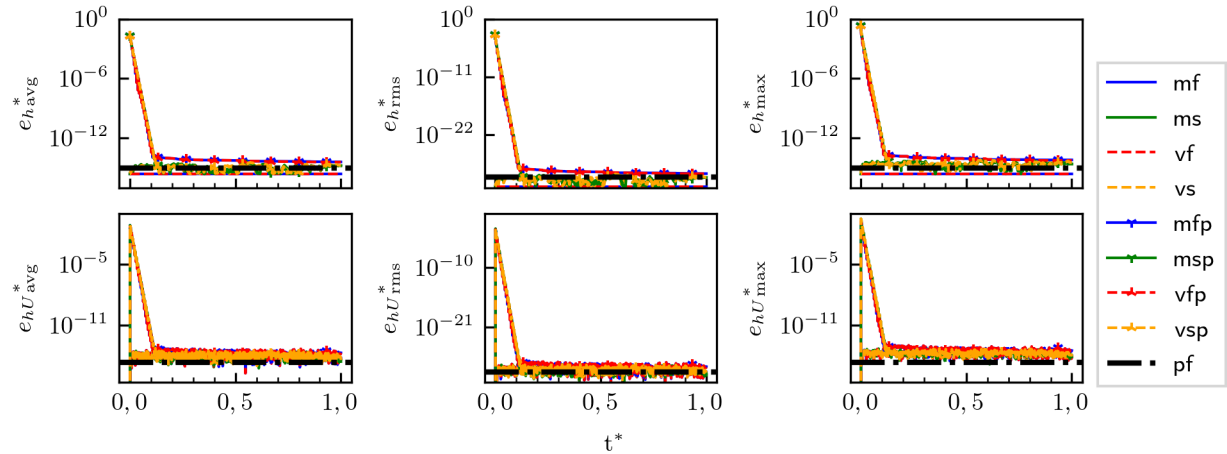
(a) Altura h y caudal hU en el dominio a los $t = 0$ s.



(b) Altura h y caudal hU en el dominio a los $t = 0,5$ s.

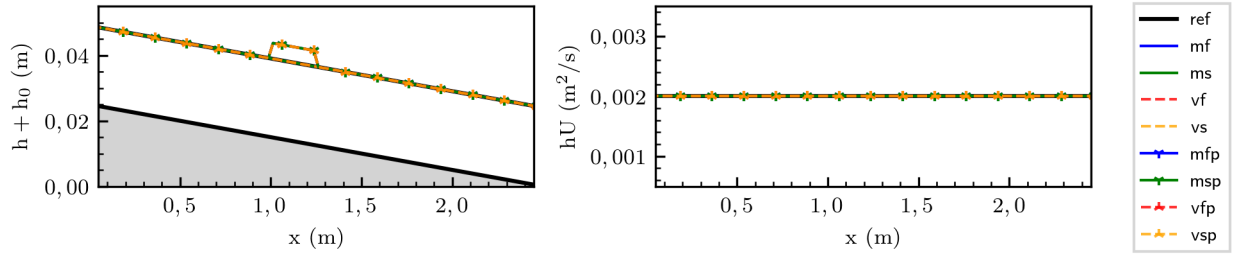


(c) Altura h y caudal hU en el dominio a los $t = 600$ s.

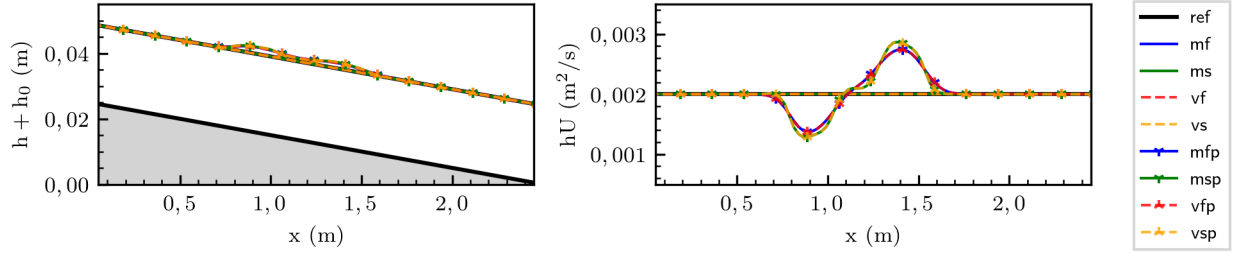


(d) Errores adimensionales en función del tiempo normalizado $t^* = t/t_f$ para h y hU . Se presenta como referencia, con etiqueta pf, el número decimal más pequeño que sumado a 1 la máquina no redondea. Este valor es adimensionalizado de igual forma que la variable con la que se compara, es decir, $\varepsilon^* = \varepsilon/E_v$, donde $\varepsilon \sim 2,22 \cdot 10^{-16}$.

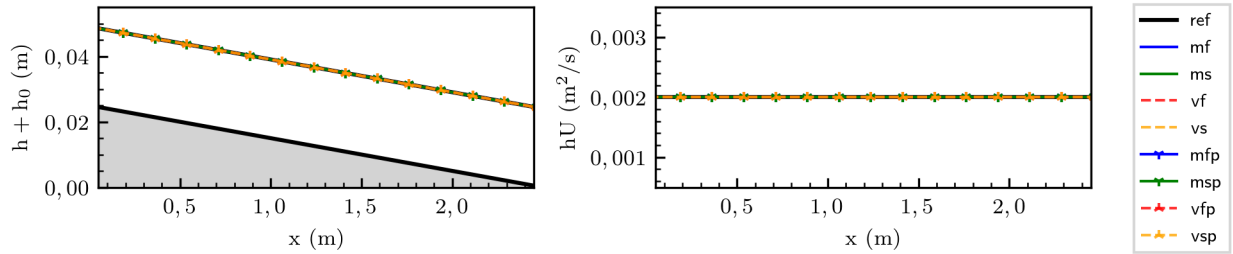
Figura E.17: Resultados de prueba T3 de Tabla 6.5.



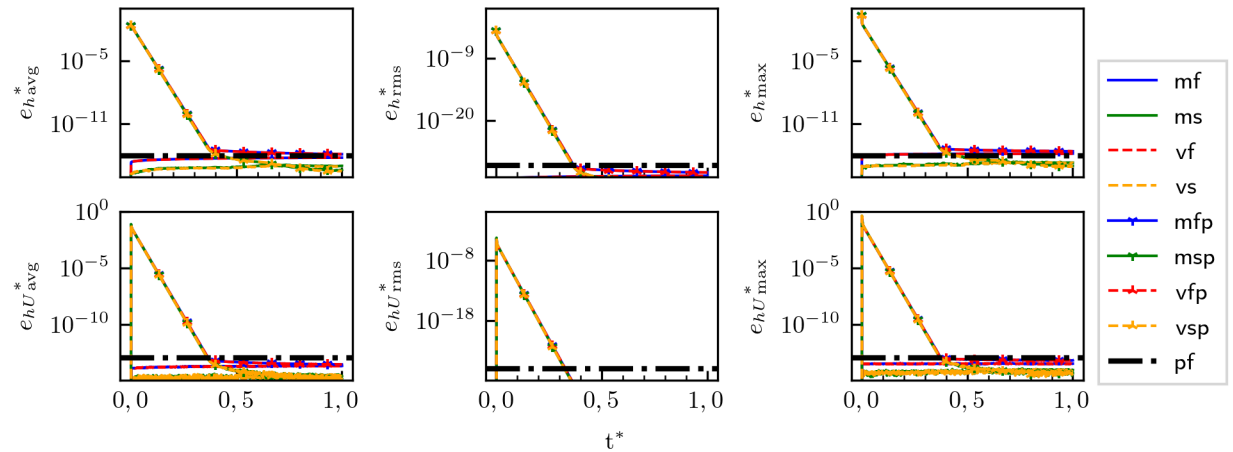
(a) Altura h y caudal hU en el dominio a los $t = 0$ s.



(b) Altura h y caudal hU en el dominio a los $t = 0,5$ s.

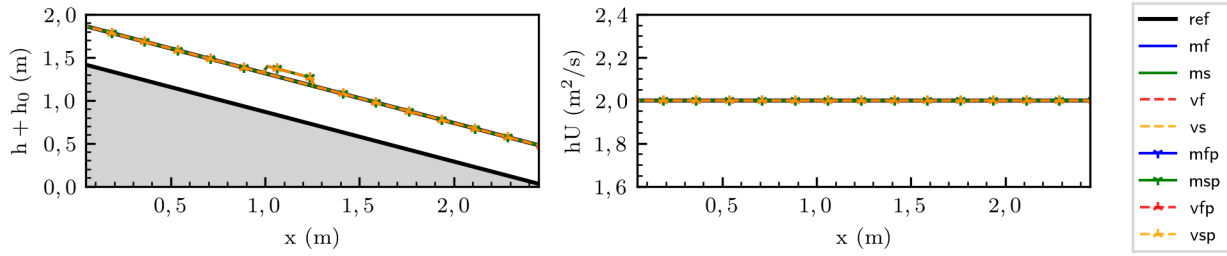


(c) Altura h y caudal hU en el dominio a los $t = 600$ s.

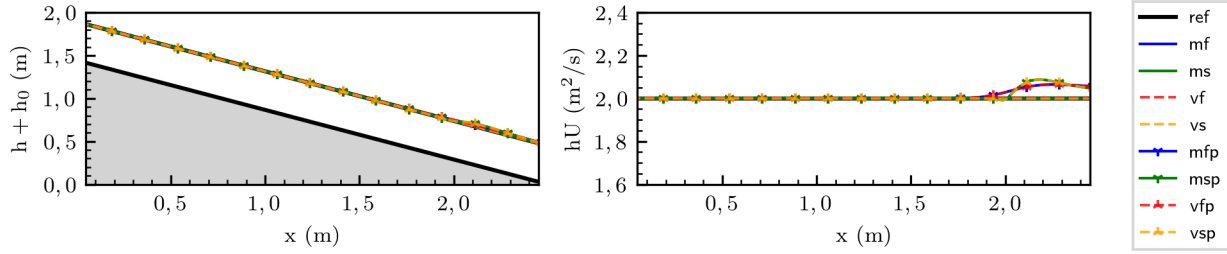


(d) Errores adimensionales en función del tiempo normalizado $t^* = t/t_f$ para h y hU . Se presenta como referencia, con etiqueta pf, el número decimal más pequeño que sumado a 1 la máquina no redondea. Este valor es adimensionalizado de igual forma que la variable con la que se compara, es decir, $\varepsilon^* = \varepsilon/E_v$, donde $\varepsilon \sim 2,22 \cdot 10^{-16}$.

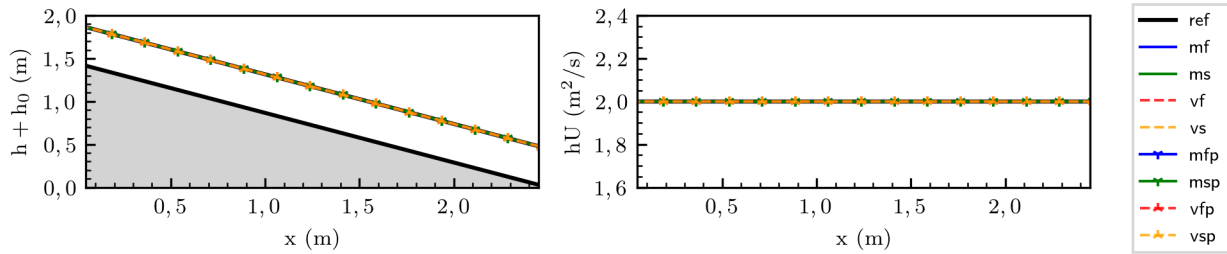
Figura E.18: Resultados de prueba T4 de Tabla 6.5.



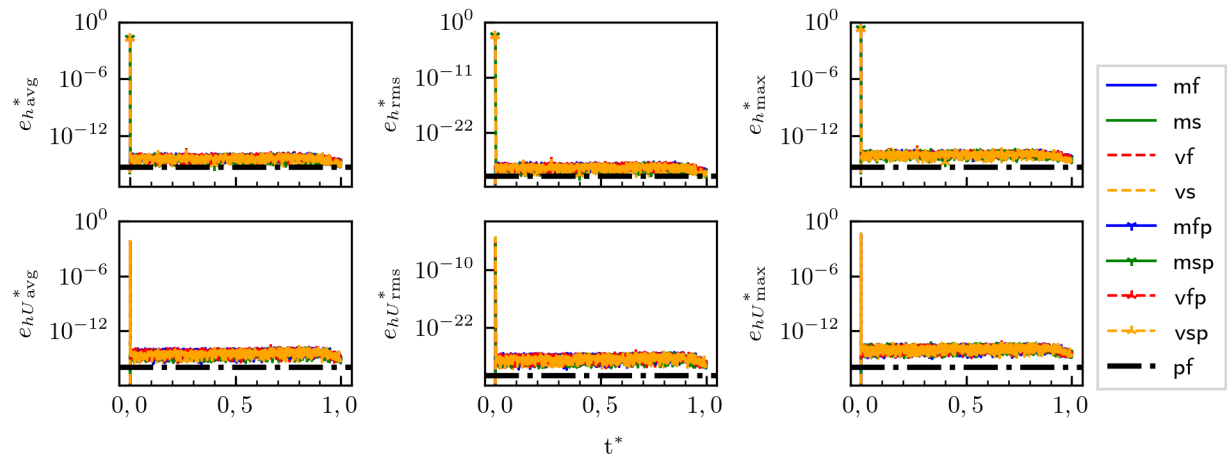
(a) Altura h y caudal hU en el dominio a los $t = 0$ s.



(b) Altura h y caudal hU en el dominio a los $t = 0,5$ s.

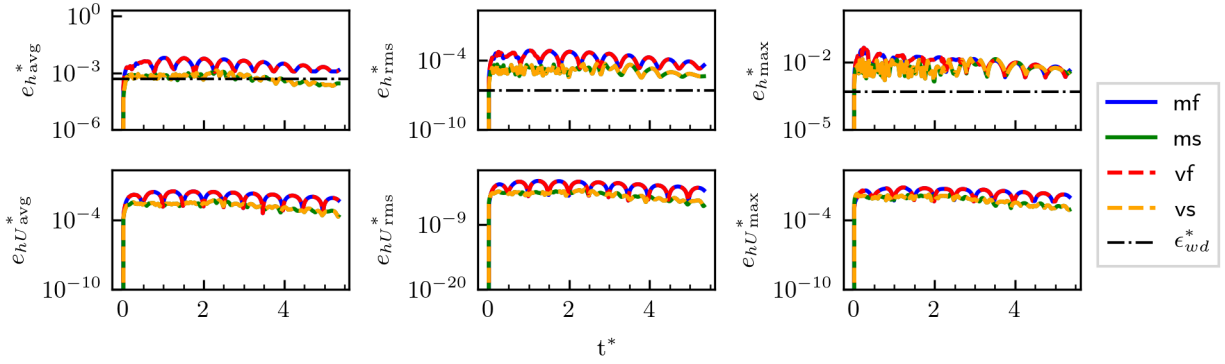


(c) Altura h y caudal hU en el dominio a los $t = 600$ s.

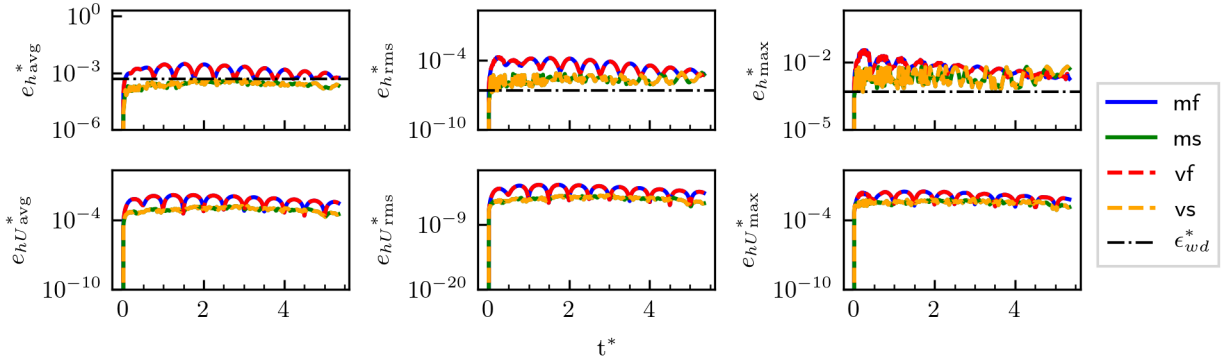


(d) Errores adimensionales en función del tiempo normalizado $t^* = t/t_f$ para h y hU . Se presenta como referencia, con etiqueta pf, el número decimal más pequeño que sumado a 1 la máquina no redondea. Este valor es adimensionalizado de igual forma que la variable con la que se compara, es decir, $\varepsilon^* = \varepsilon/E_v$, donde $\varepsilon \sim 2,22 \cdot 10^{-16}$.

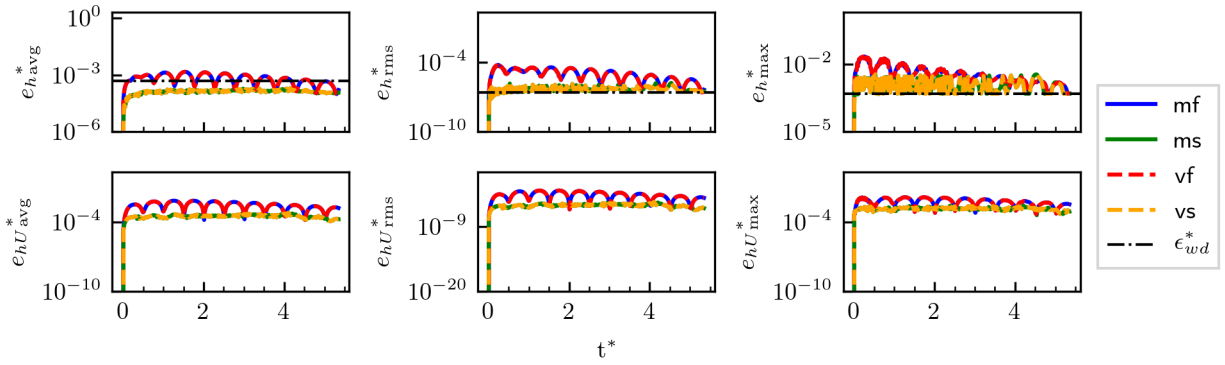
Figura E.19: Resultados de prueba T5 de Tabla 6.5.



(a) Prueba T1.

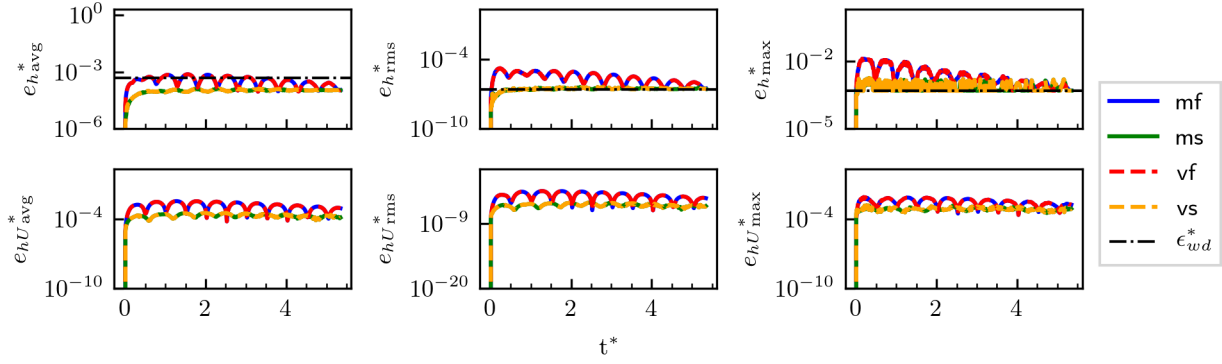


(b) Prueba T2.

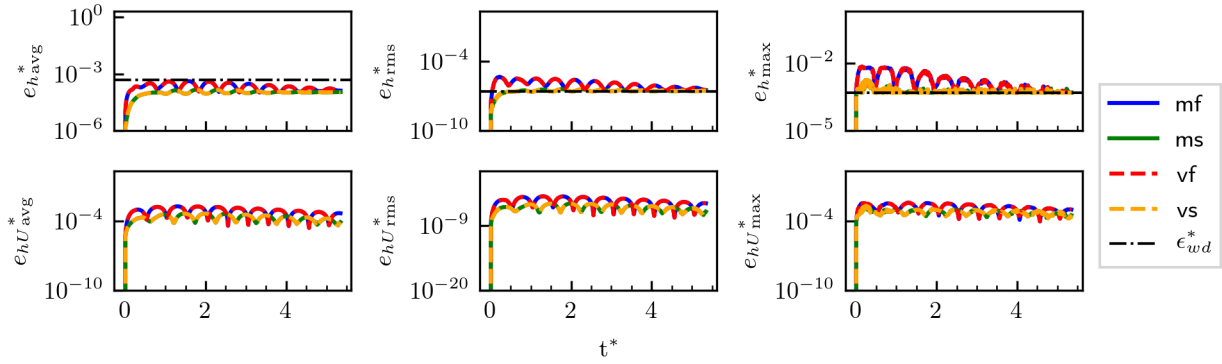


(c) Prueba T3.

Figura E.20: Errores adimensionales en función del tiempo normalizado $t^* = t/T$ para h y hU de la Tabla 6.6. Se presenta como referencia, con etiqueta ϵ_{wd}^* , a la tolerancia para definir una celda como seca de forma adimensional, utilizando $E_h = \Delta_0$ como escala.

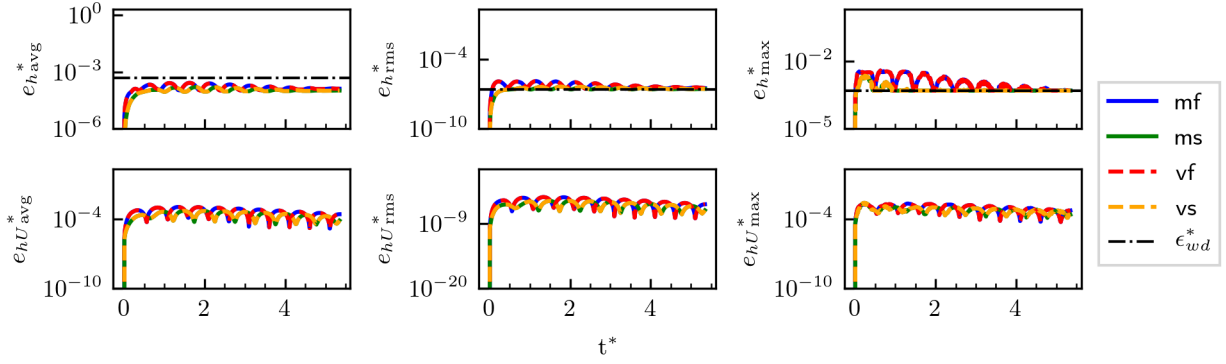


(a) Prueba T4.

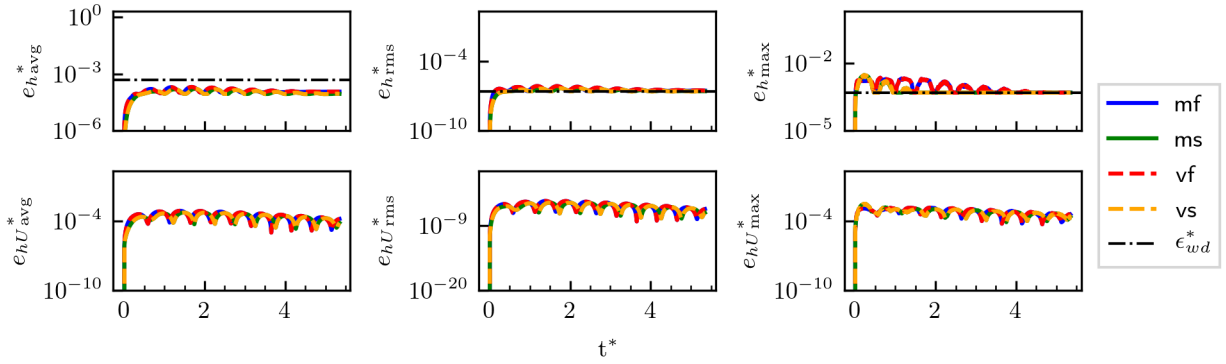


(b) Prueba T5.

Figura E.21: Errores adimensionales en función del tiempo normalizado $t^* = t/T$ para h y hU de la Tabla 6.6. Se presenta como referencia, con etiqueta ϵ_{wd}^* , a la tolerancia para definir una celda como seca de forma adimensional, utilizando $E_h = \Delta_0$ como escala.

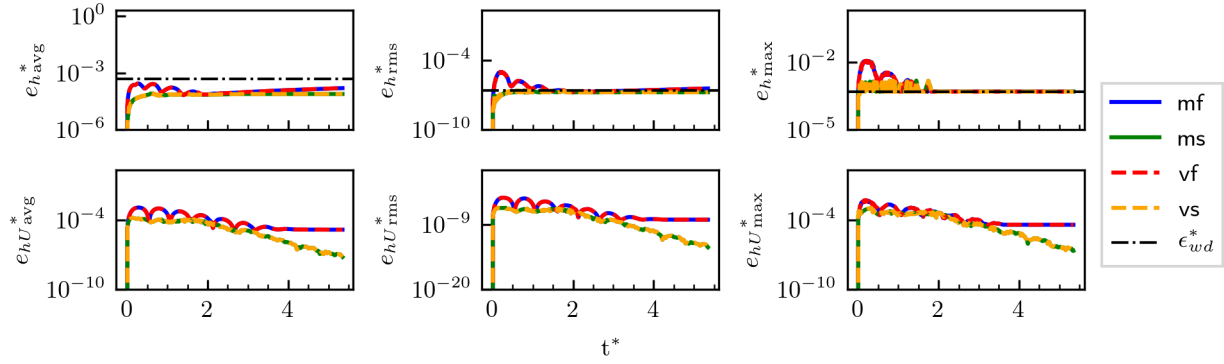


(a) Prueba T6.

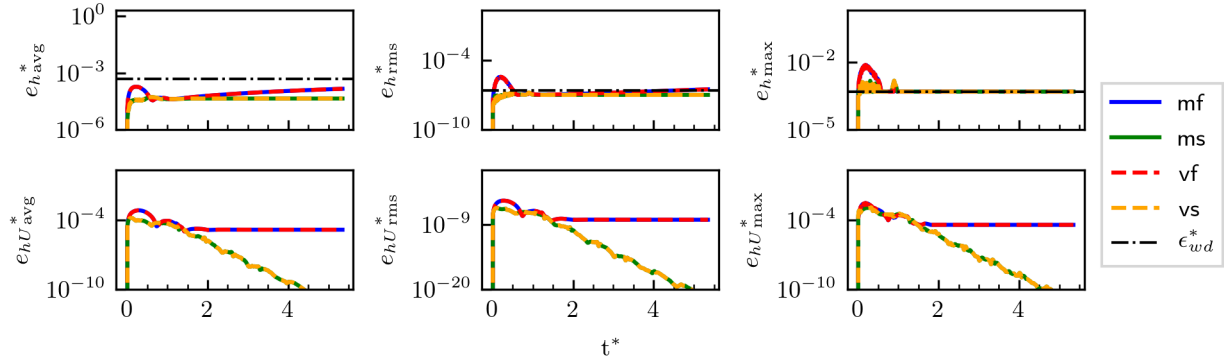


(b) Prueba T7.

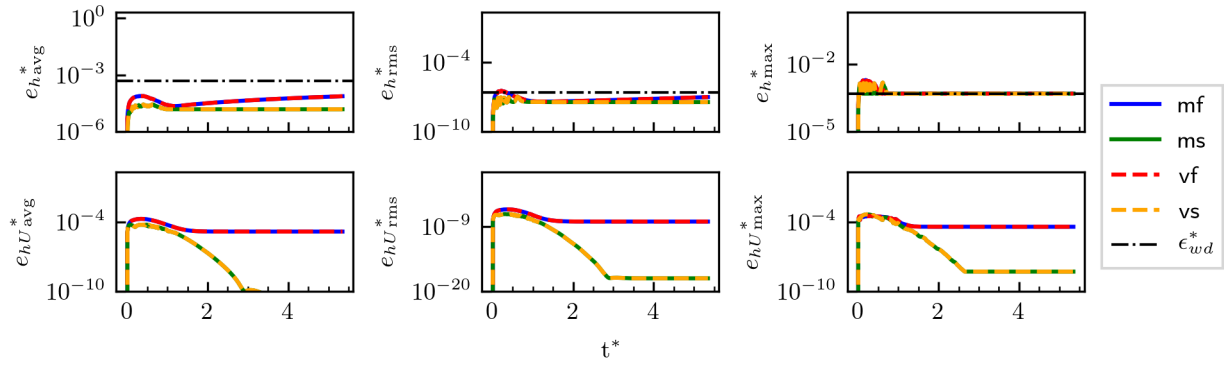
Figura E.22: Errores adimensionales en función del tiempo normalizado $t^* = t/T$ para h y hU de la Tabla 6.6. Se presenta como referencia, con etiqueta ϵ_{wd}^* , a la tolerancia para definir una celda como seca de forma adimensional, utilizando $E_h = \Delta_0$ como escala.



(a) Prueba T8.



(b) Prueba T9.



(c) Prueba T10.

Figura E.23: Errores adimensionales en función del tiempo normalizado $t^* = t/T$ para h y hU de la Tabla 6.6. Se presenta como referencia, con etiqueta ϵ_{wd}^* , a la tolerancia para definir una celda como seca de forma adimensional, utilizando $E_h = \Delta_0$ como escala.

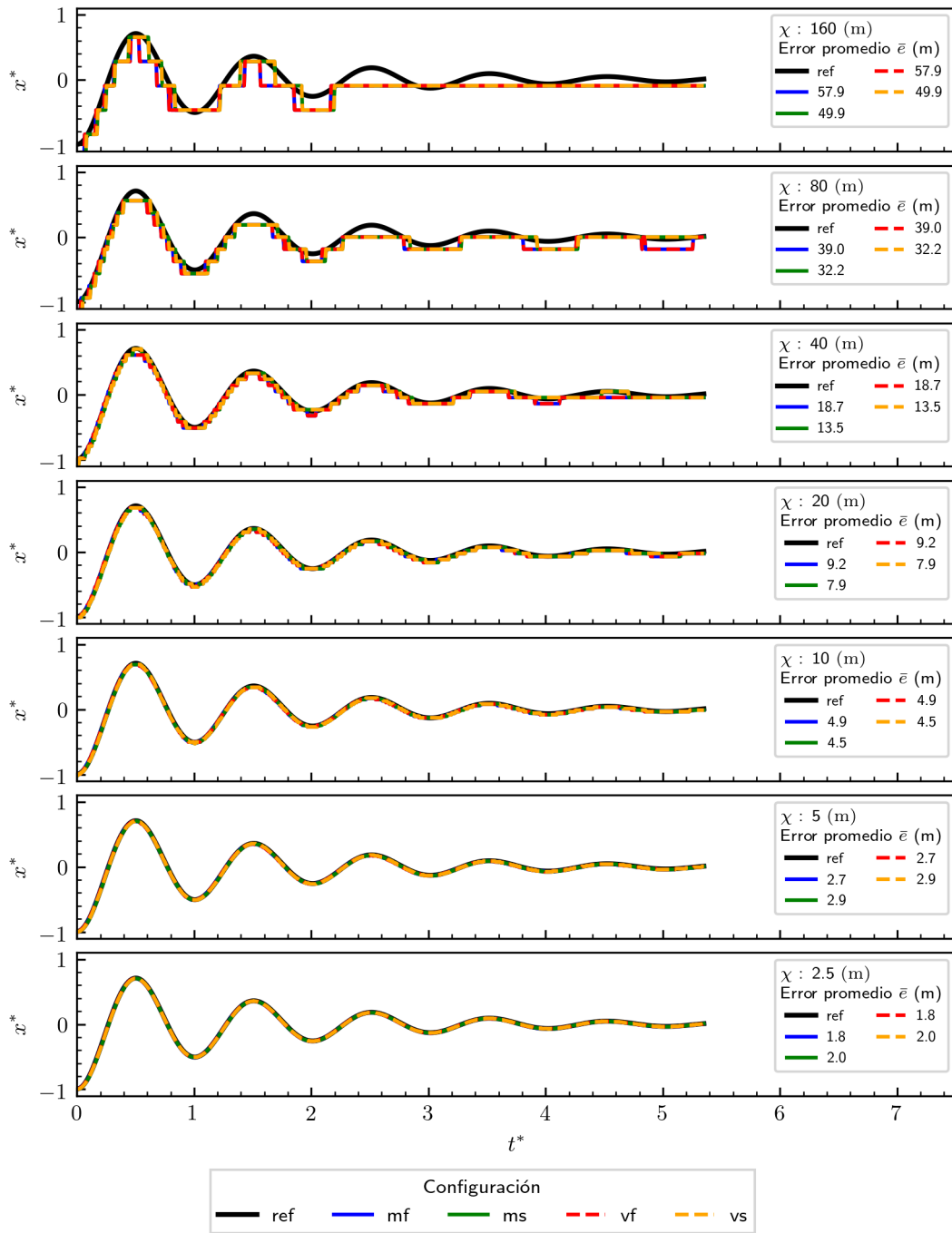


Figura E.24: Efecto de la discretización sobre la posición de la interfaz seco-mojado para casos de la Tabla 6.6 para un coeficiente de fricción lineal de $k = 0,001 \text{ s}^{-1}$.

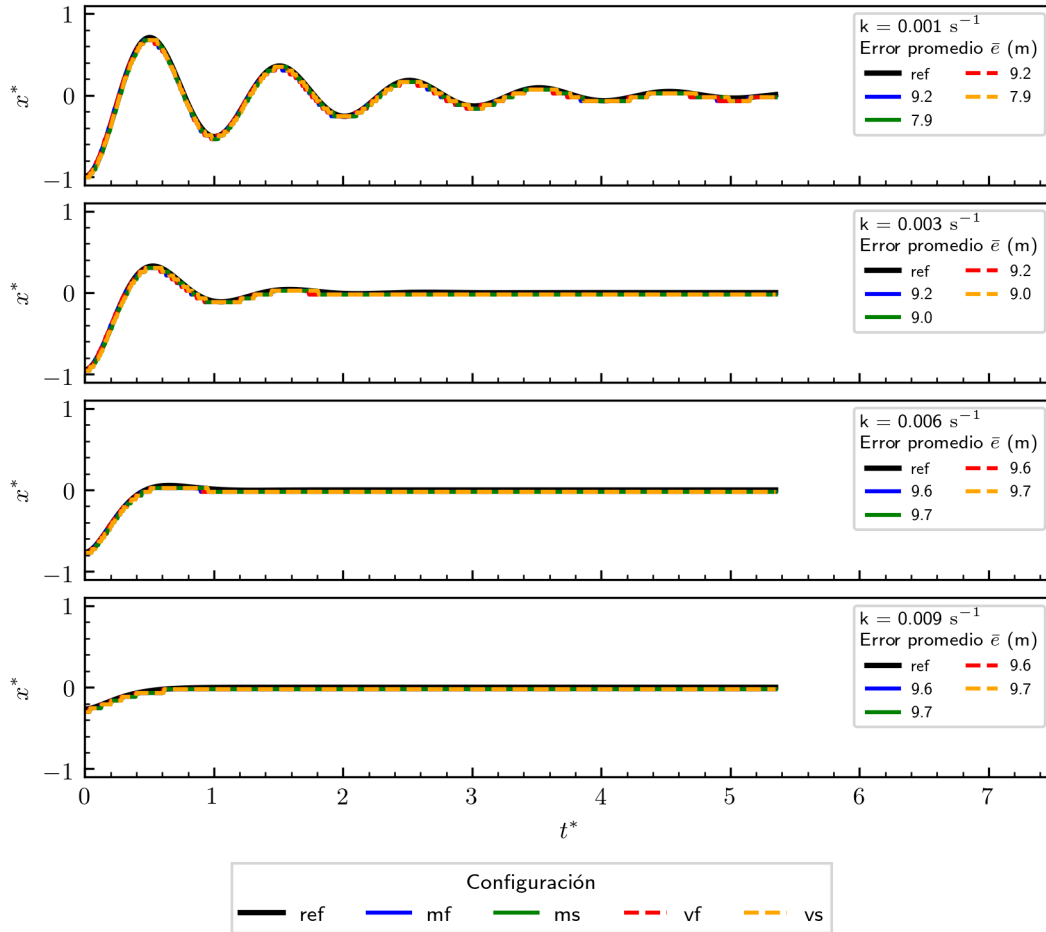


Figura E.25: Efecto de la fricción sobre la posición de la interfaz seco-mojado para casos de la Tabla 6.6 para un tamaño de celda $\chi = 20$ m.

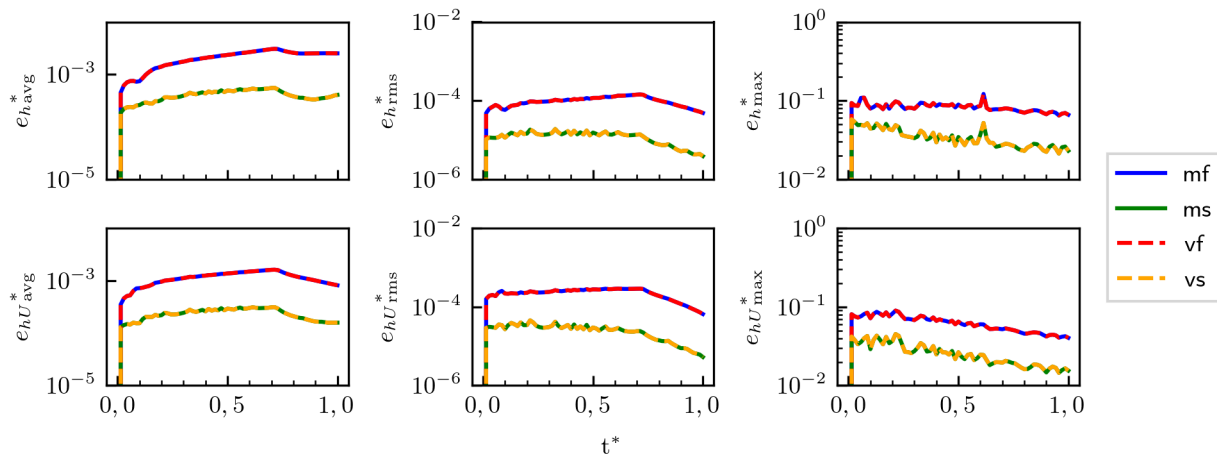
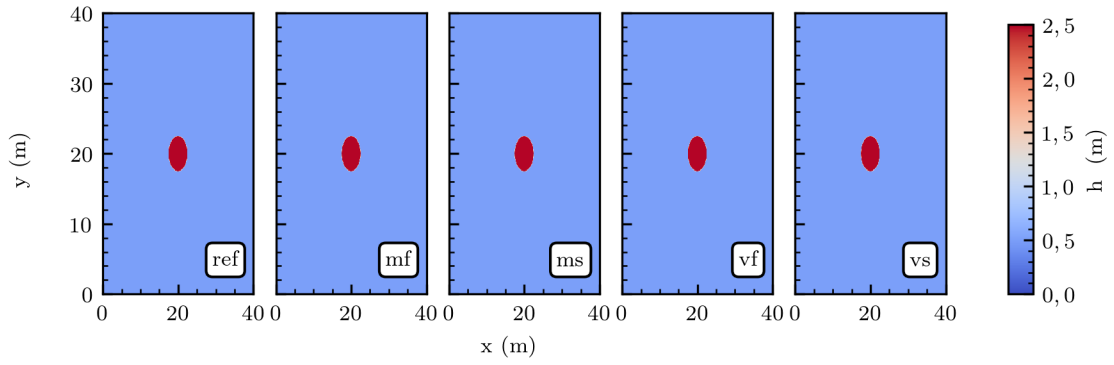
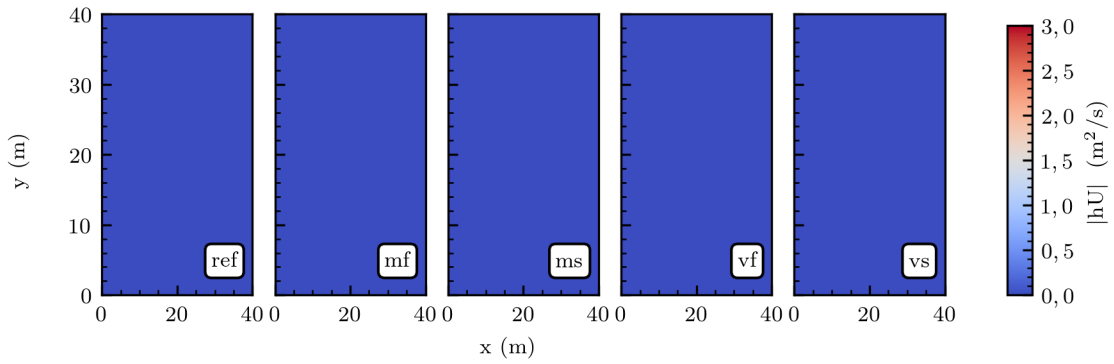


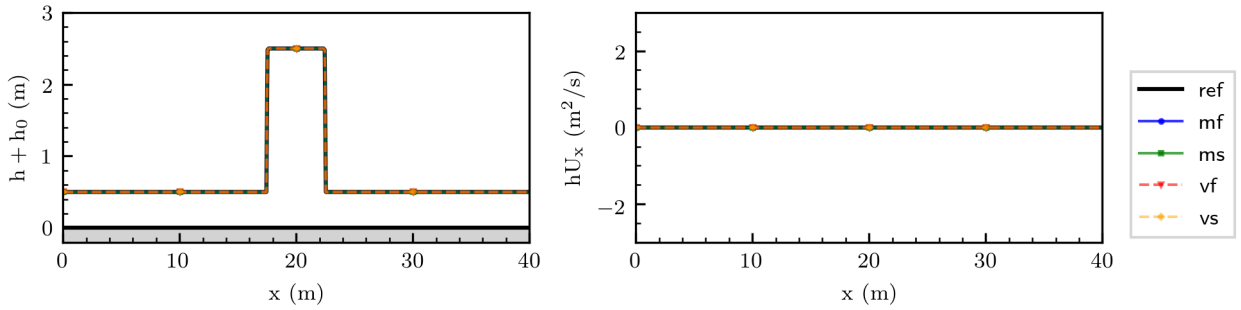
Figura E.26: Errores adimensionales en función del tiempo normalizado $t^* = t/T$ para h y hU de pruebas de colapso de columna de fluido ideal.



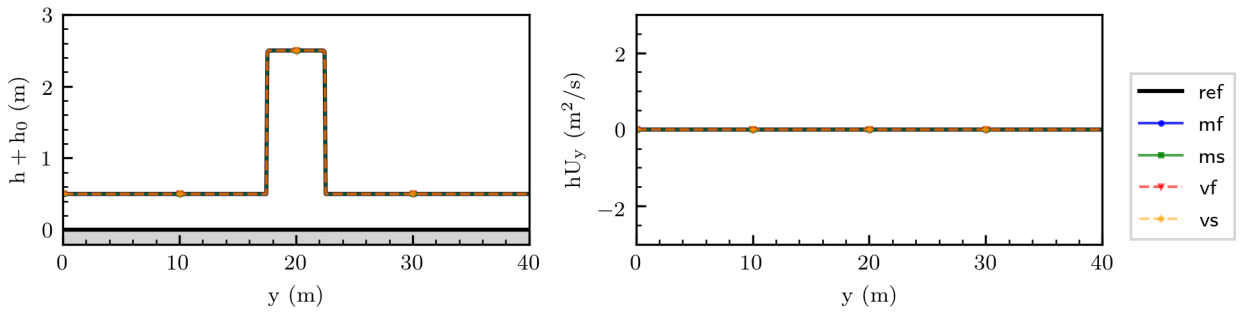
(a) Altura h .



(b) Caudal unitario $|hU|$.

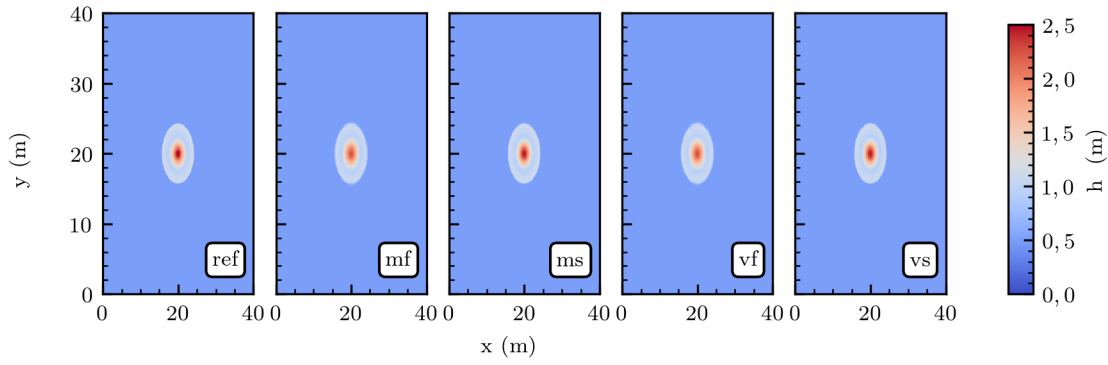


(c) Eje $y = 19,95$ m.

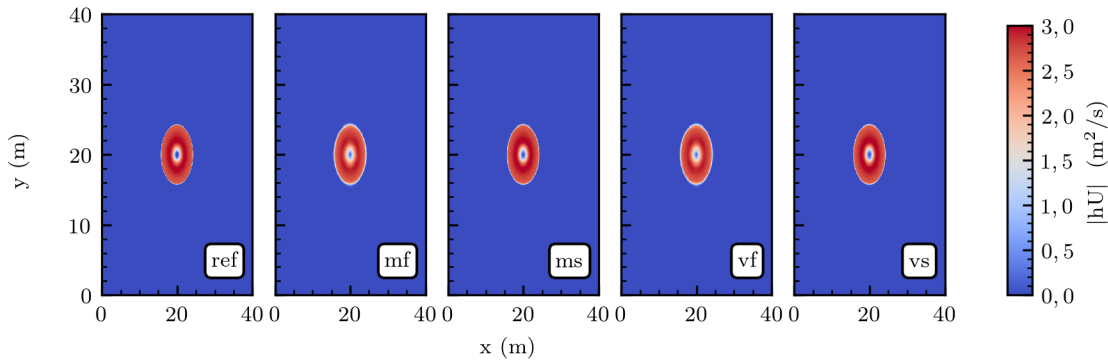


(d) Eje $x = 19,95$ m.

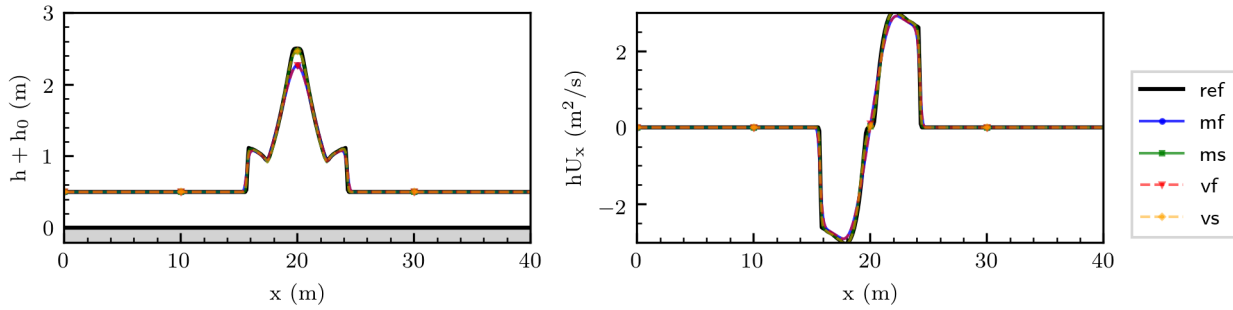
Figura E.27: Condición inicial de colapso de columna cilíndrica de fluido ideal.



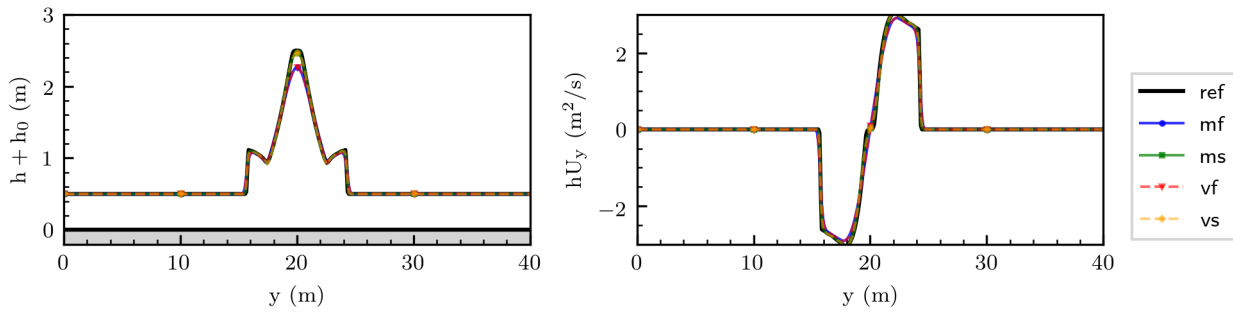
(a) Altura h .



(b) Caudal unitario $|hU|$.

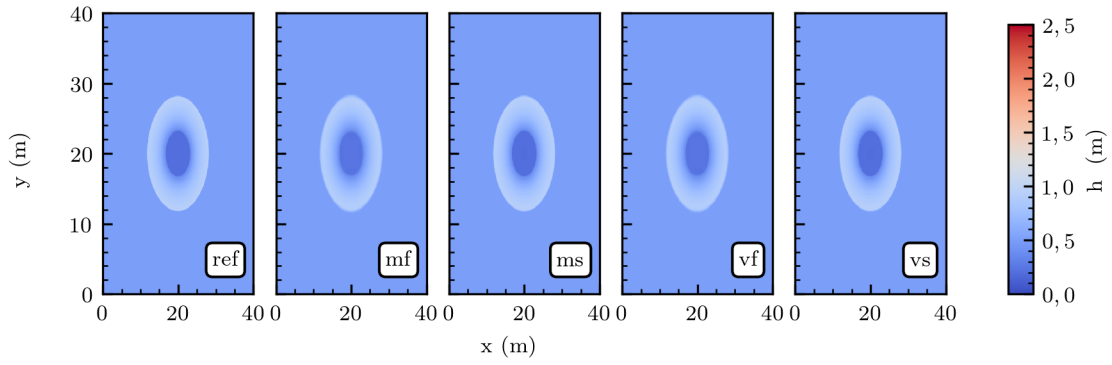


(c) Eje $y = 19,95$ m.

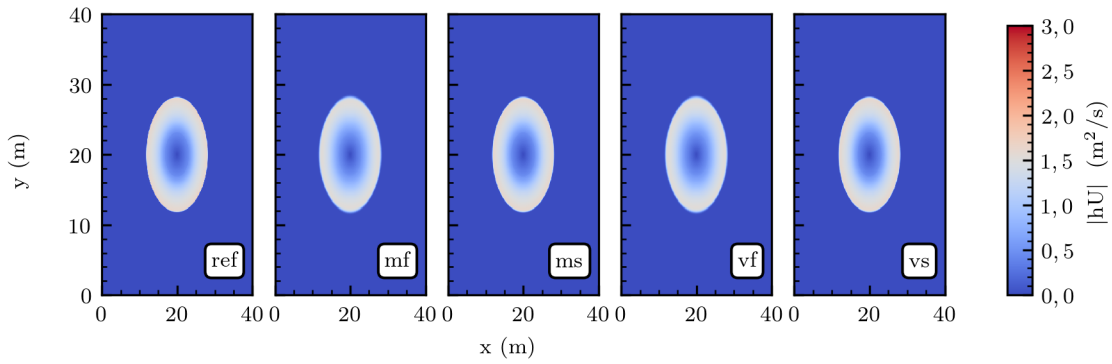


(d) Eje $x = 19,95$ m.

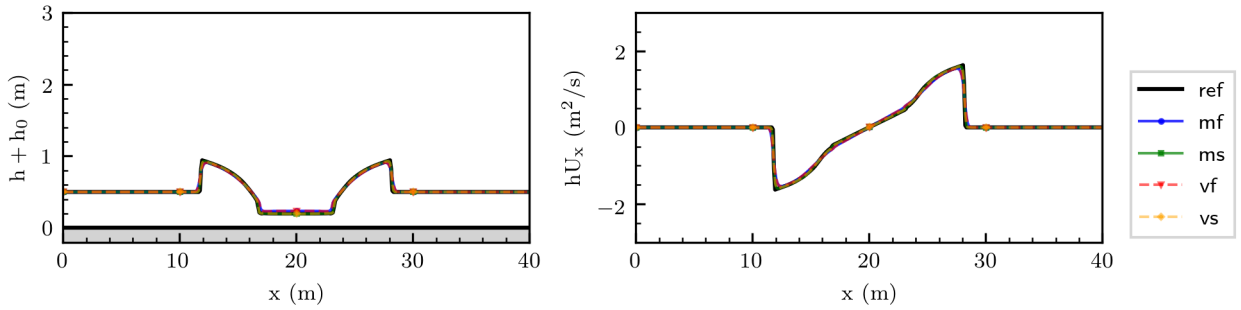
Figura E.28: Condición para $t = 0,4$ s de colapso de columna cilíndrica de fluido ideal.



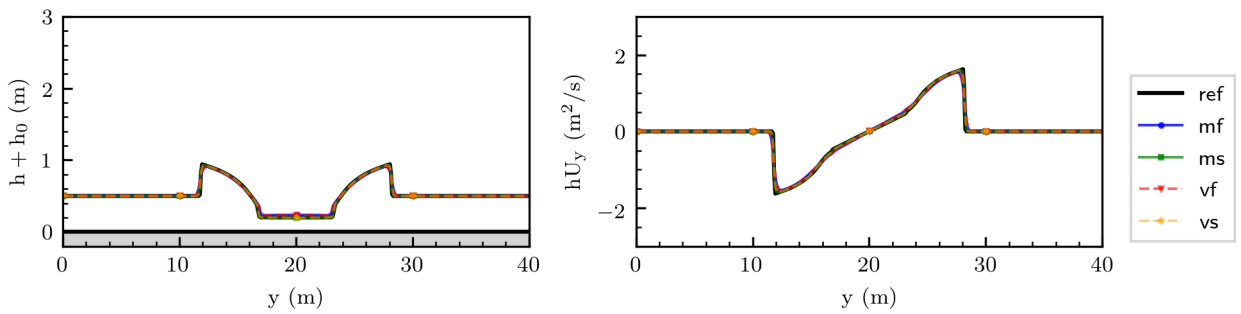
(a) Altura h .



(b) Caudal unitario $|hU|$.

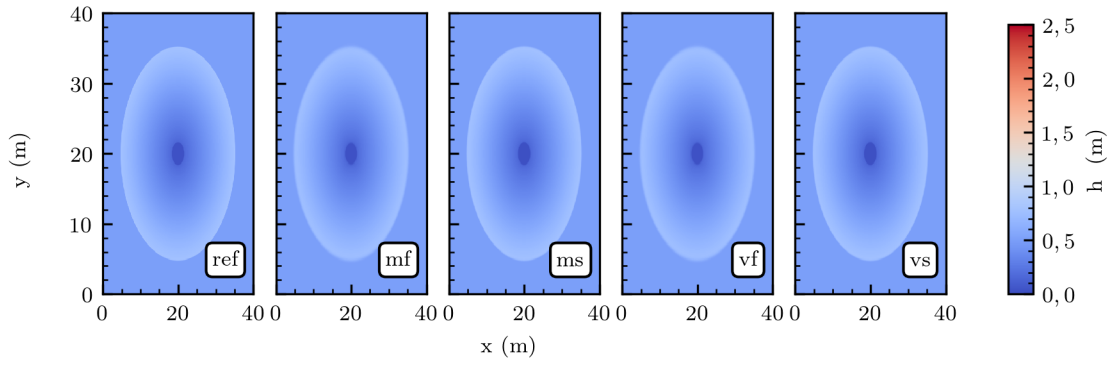


(c) Eje $y = 19,95$ m.

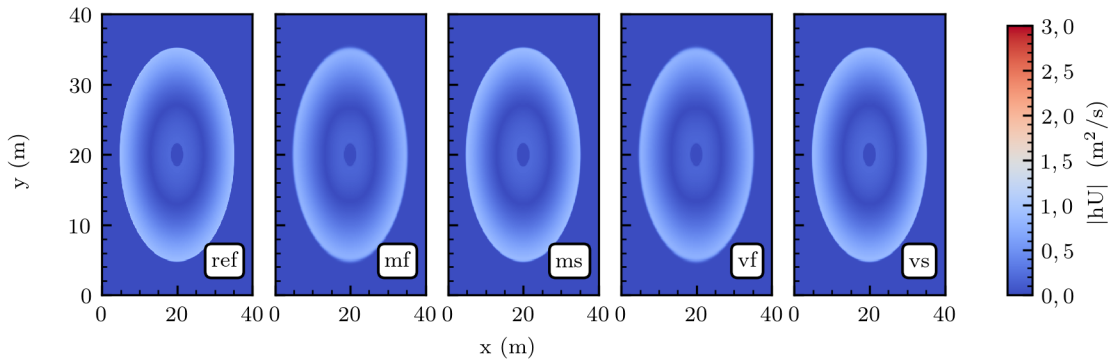


(d) Eje $x = 19,95$ m.

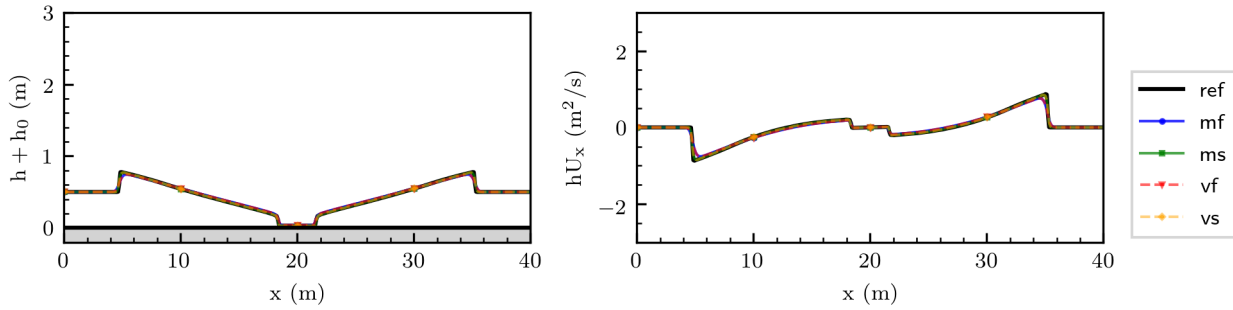
Figura E.29: Condición para $t = 1,4$ s de colapso de columna cilíndrica de fluido ideal.



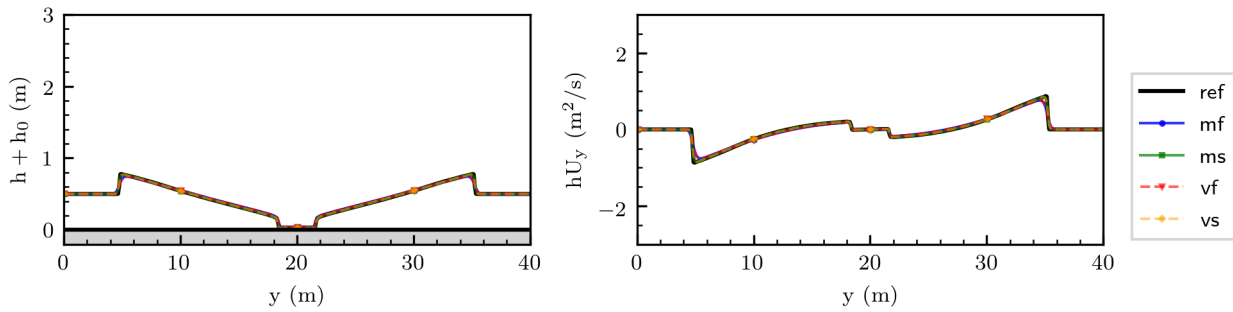
(a) Altura h .



(b) Caudal unitario $|hU|$.

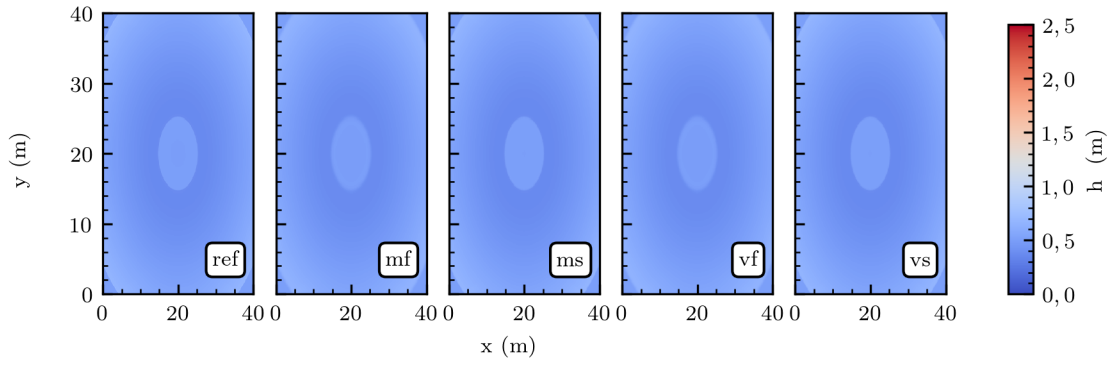


(c) Eje $y = 19,95$ m.

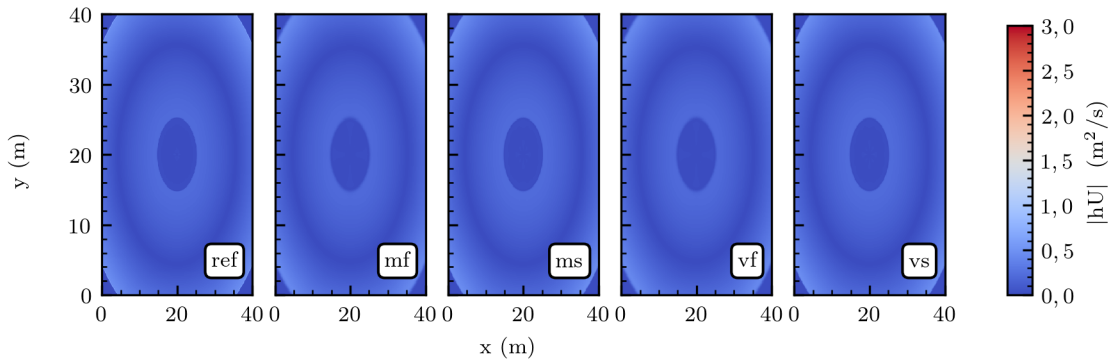


(d) Eje $x = 19,95$ m.

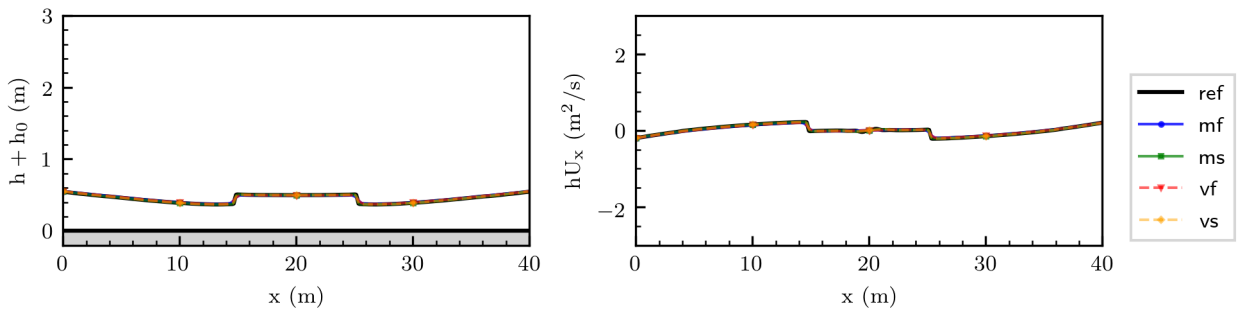
Figura E.30: Condición para $t = 3,5$ s de colapso de columna cilíndrica de fluido ideal.



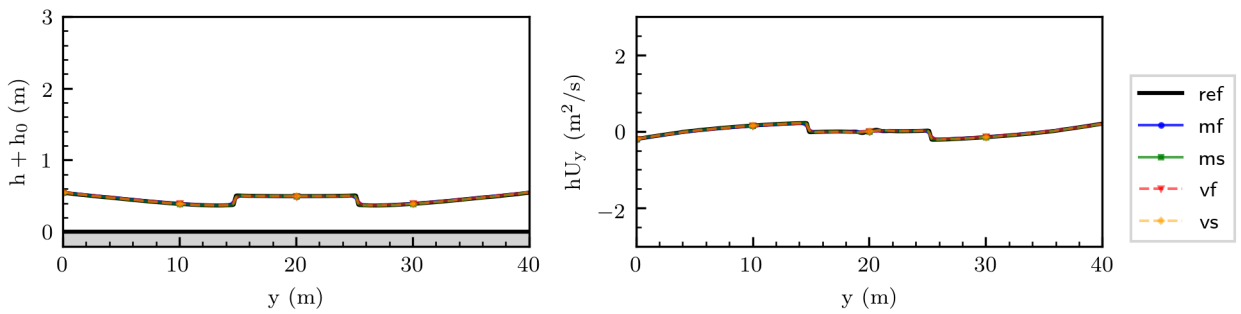
(a) Altura h .



(b) Caudal unitario $|hU|$.

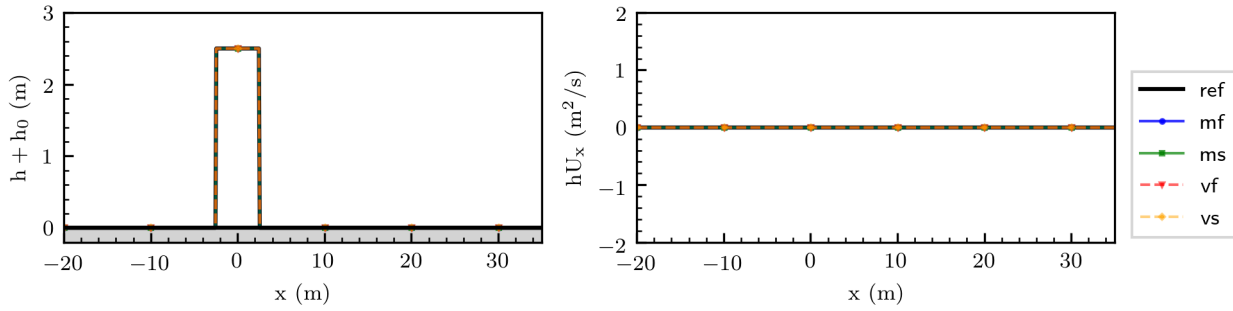


(c) Eje $y = 19,95$ m.

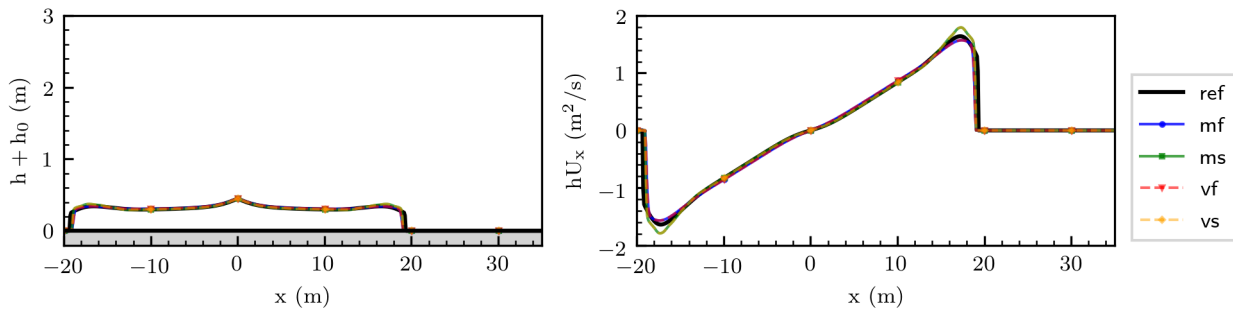


(d) Eje $x = 19,95$ m.

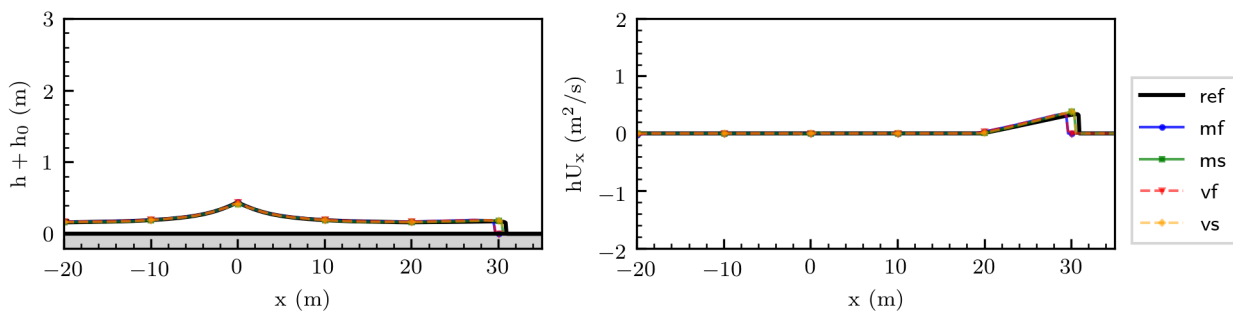
Figura E.31: Condición para $t = 7,0$ s de colapso de columna cilíndrica de fluido ideal.



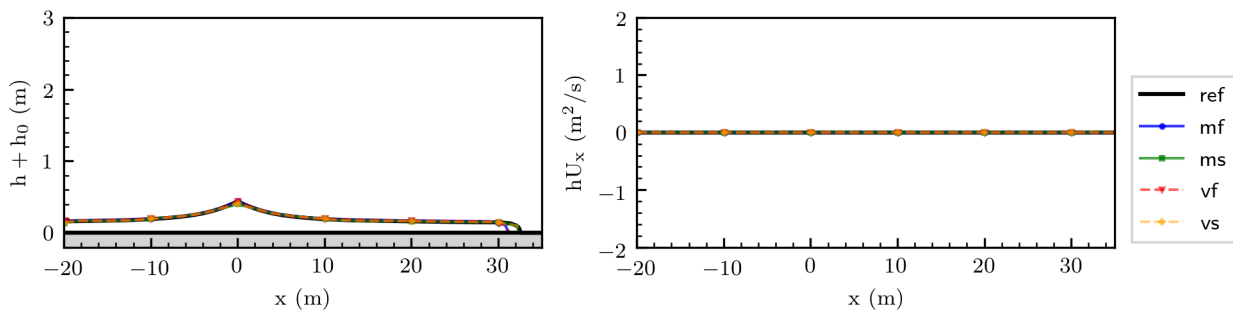
(a) $t = 0,0$ s.



(b) $t = 3,0$ s.

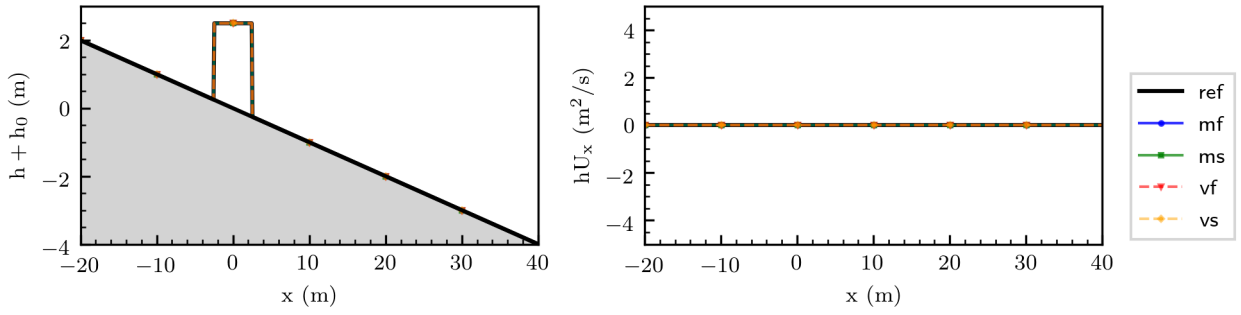


(c) $t = 6,0$ s.

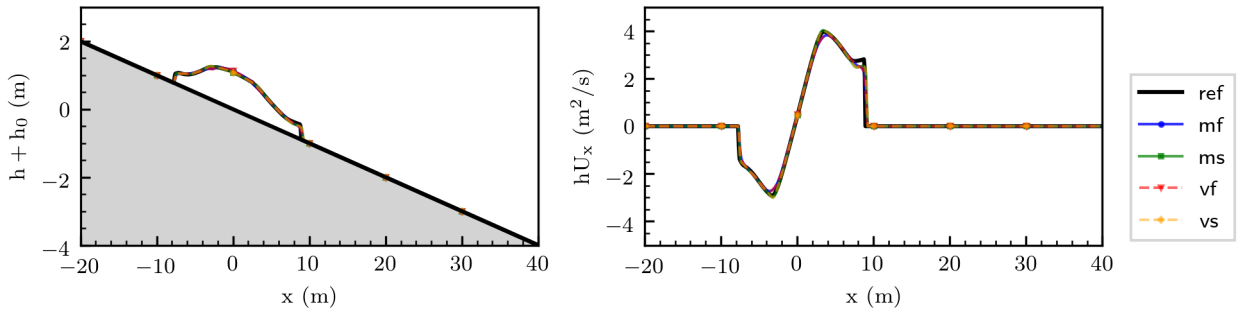


(d) $t = 9,0$ s.

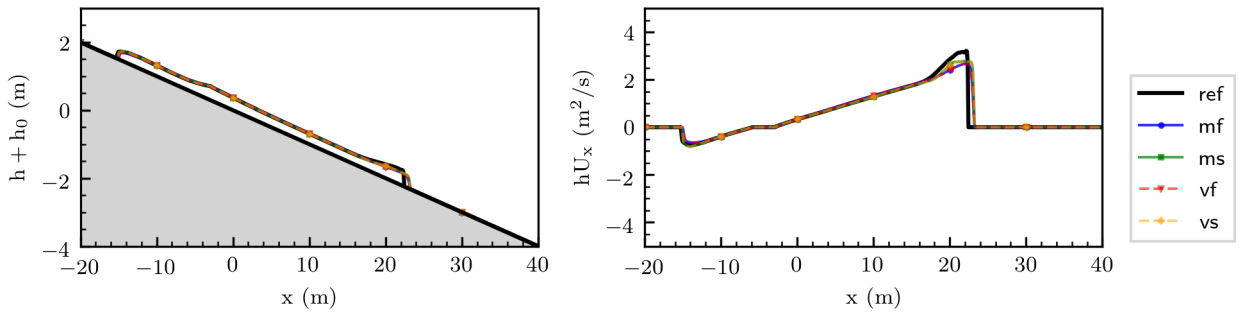
Figura E.32: Alturas y caudales unitarios para colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T1 de la Tabla 6.10.



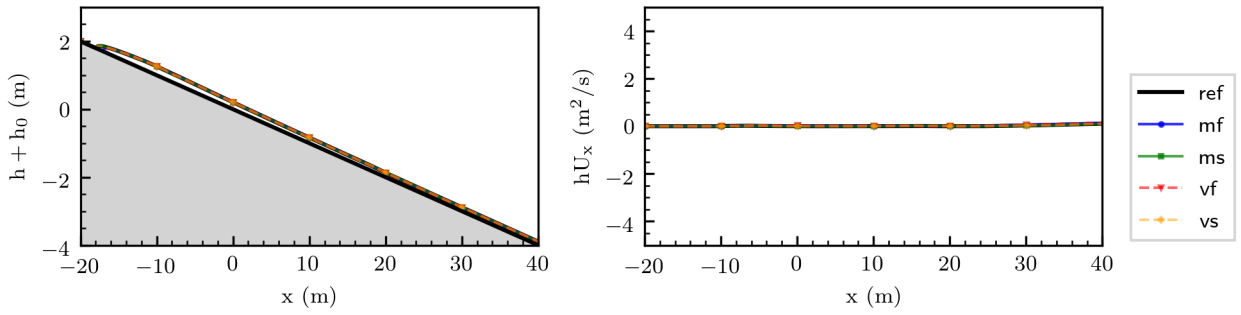
(a) $t = 0,0$ s.



(b) $t = 1,0$ s.

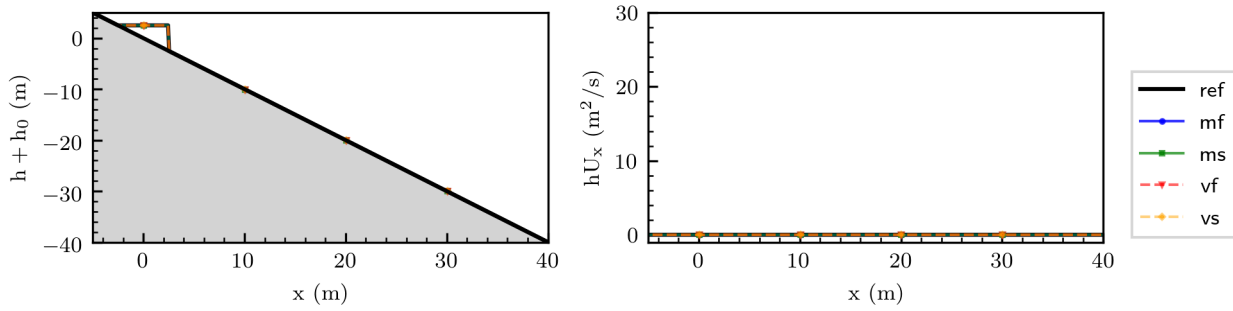


(c) $t = 3,0$ s.

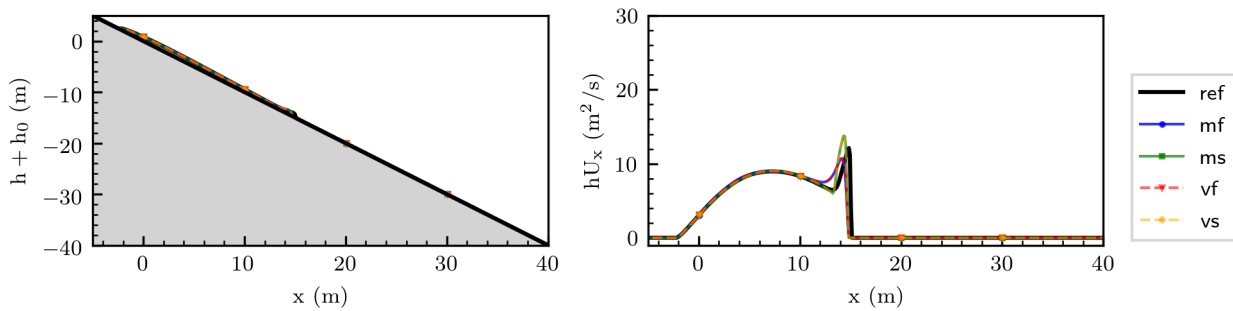


(d) $t = 9,0$ s.

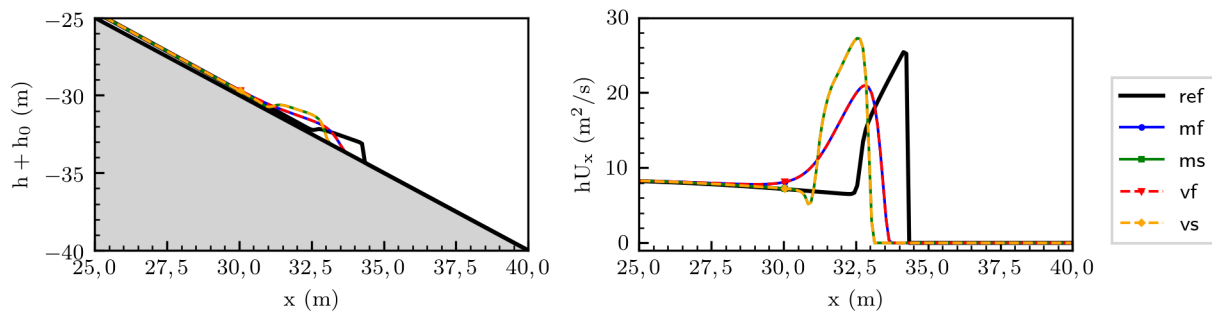
Figura E.33: Alturas y caudales unitarios para colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T2 de la Tabla 6.10.



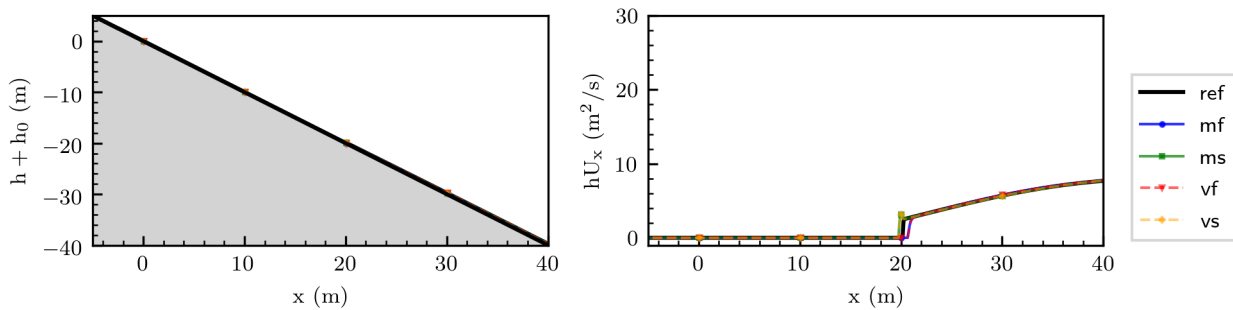
(a) $t = 0,0$ s.



(b) $t = 1,0$ s.

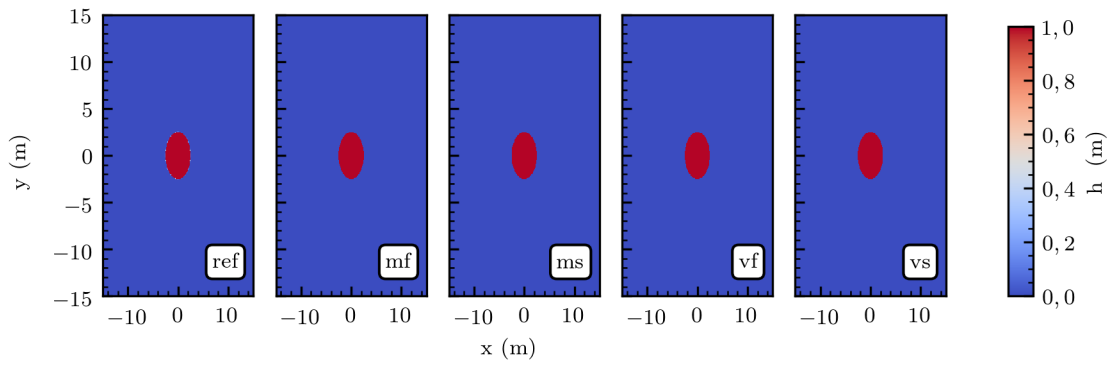


(c) $t = 2,0$ s.

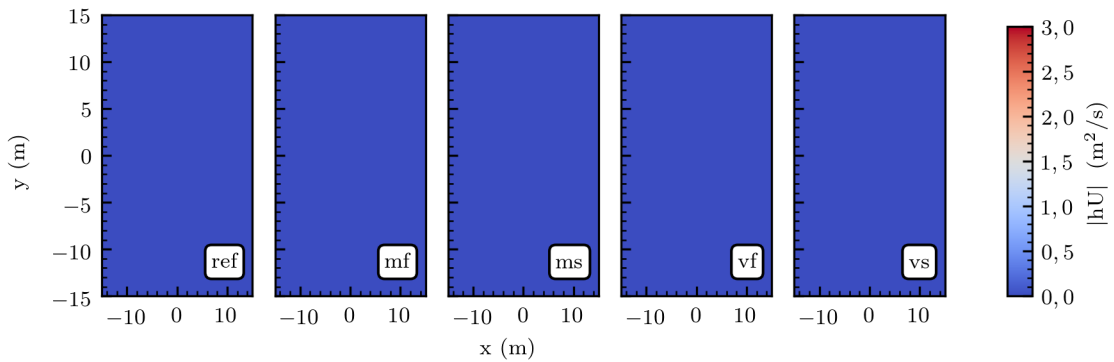


(d) $t = 3,0$ s.

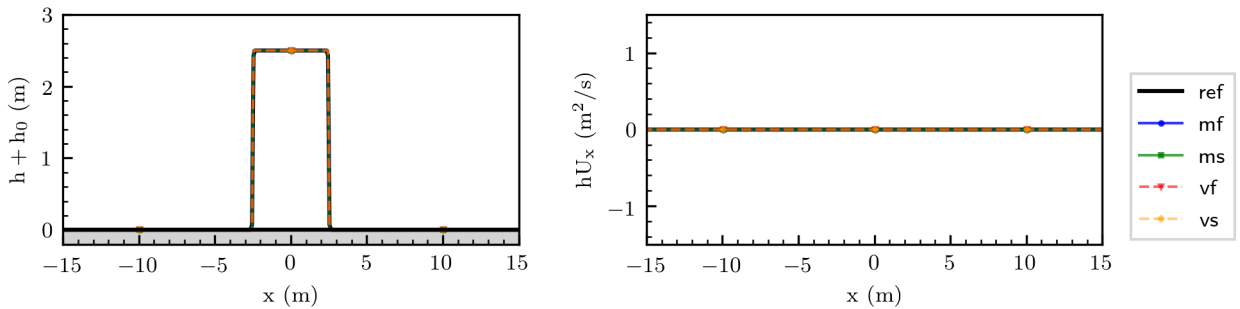
Figura E.34: Alturas y caudales unitarios para colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T3 de la Tabla 6.10.



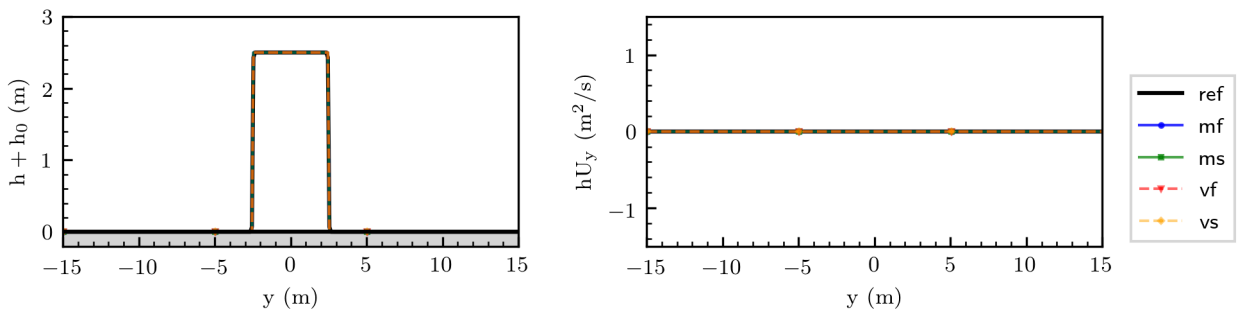
(a) Altura h .



(b) Caudal unitario $|hU|$.

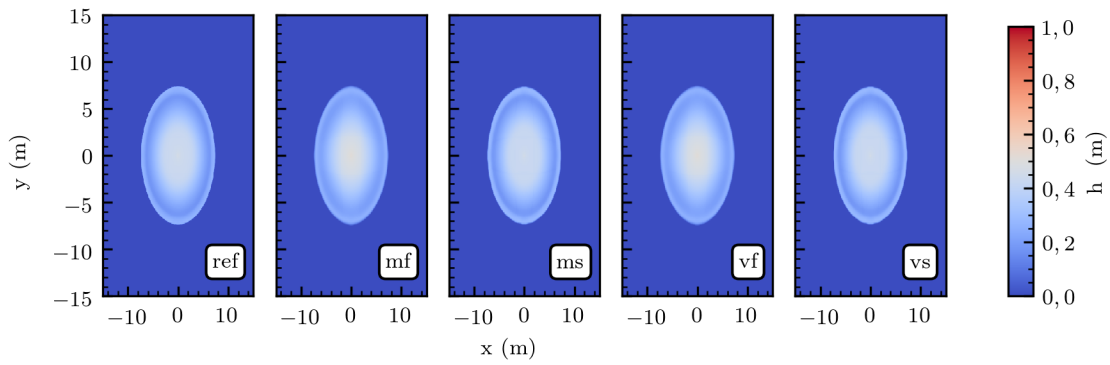


(c) Eje $y = 0,05$ m.

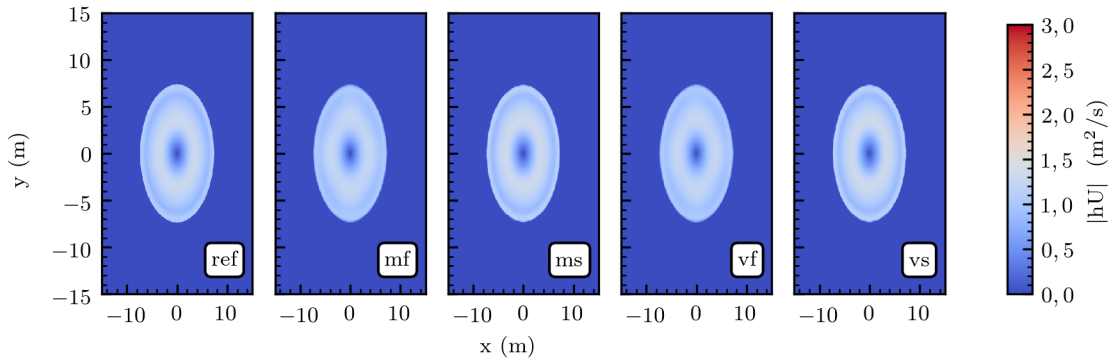


(d) Eje $x = 0,05$ m.

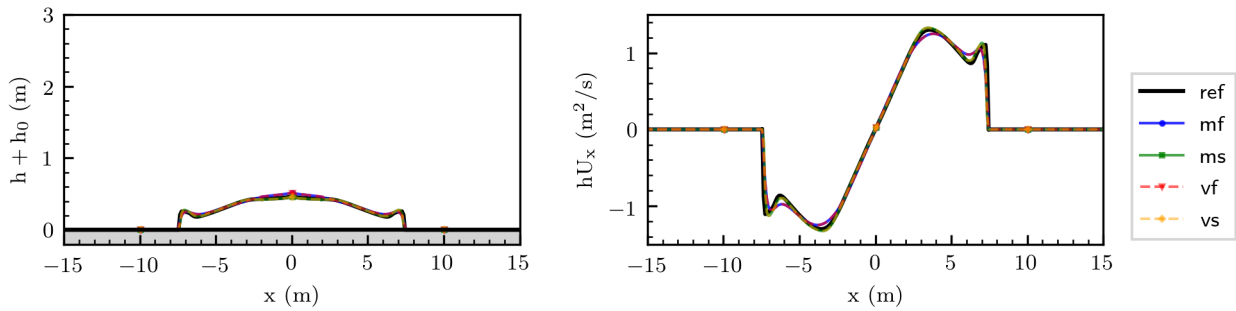
Figura E.35: Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T4 de la Tabla 6.10 para $t = 0,0$ s.



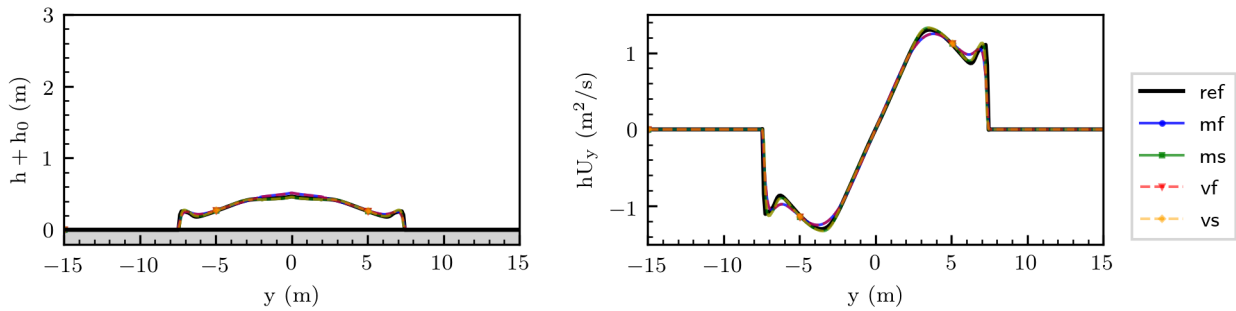
(a) Altura h .



(b) Caudal unitario $|hU|$.

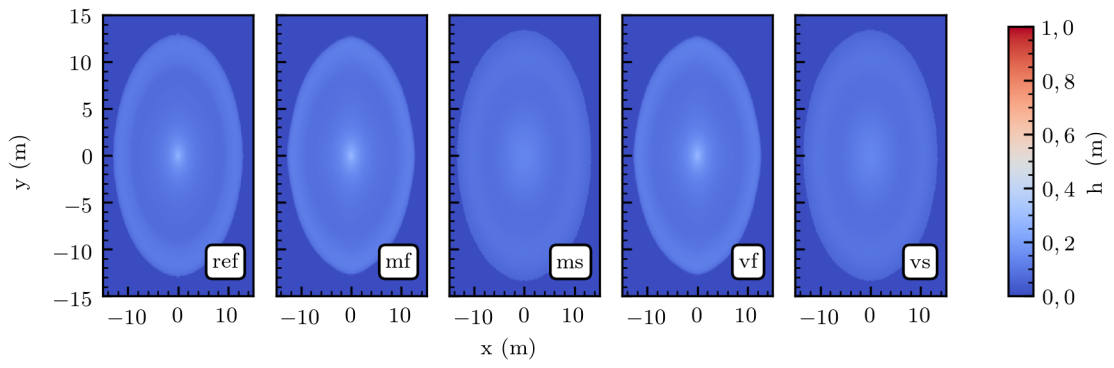


(c) Eje $y = 0,05$ m.

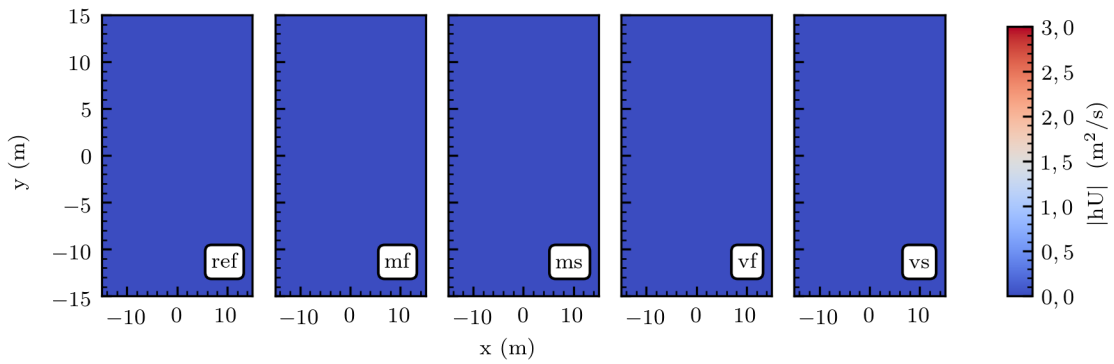


(d) Eje $x = 0,05$ m.

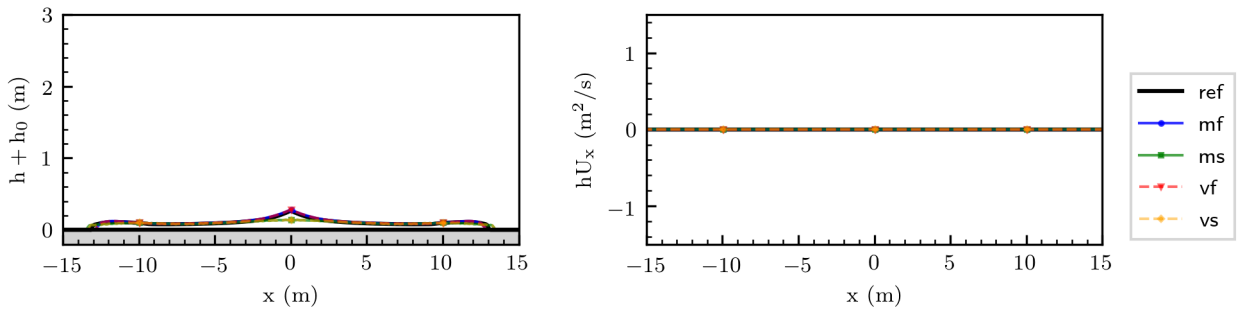
Figura E.36: Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T4 de la Tabla 6.10 para $t = 1,0$ s.



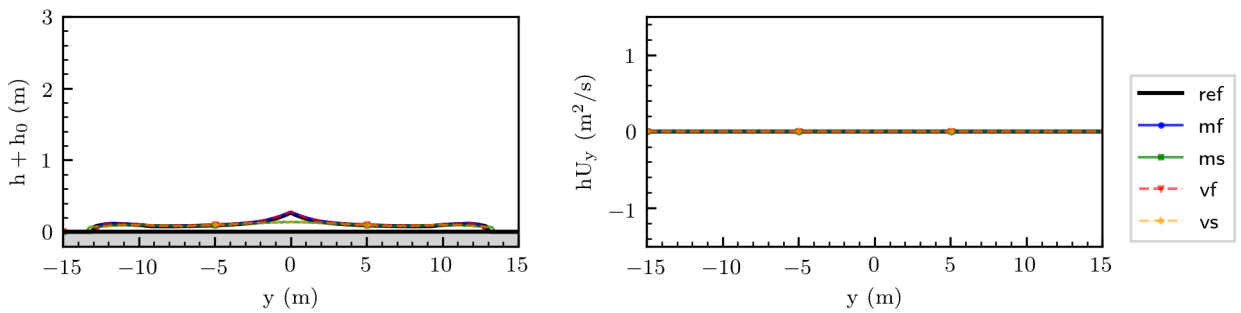
(a) Altura h .



(b) Caudal unitario $|hU|$.

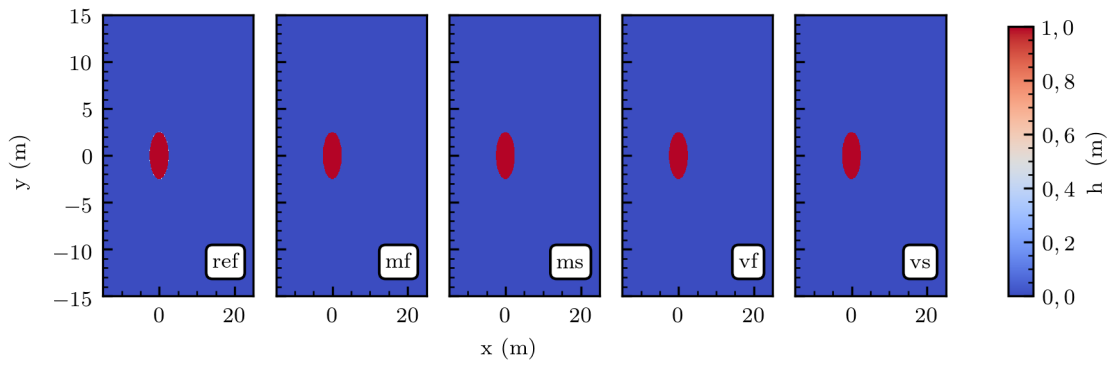


(c) Eje $y = 0,05$ m.

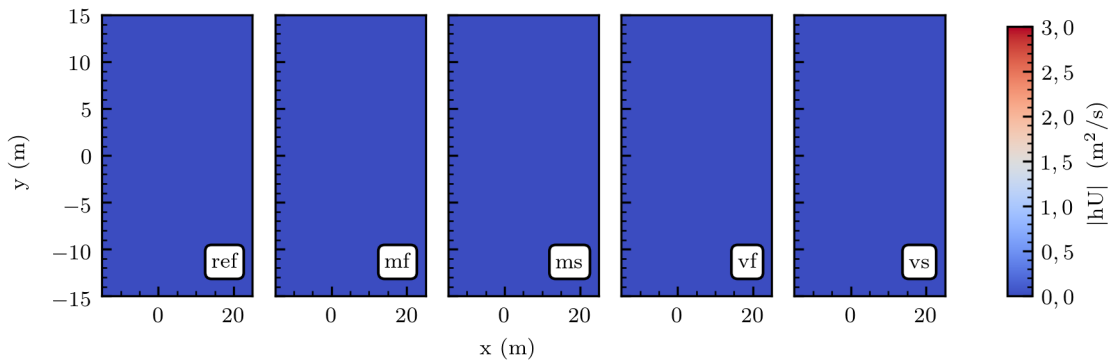


(d) Eje $x = 0,05$ m.

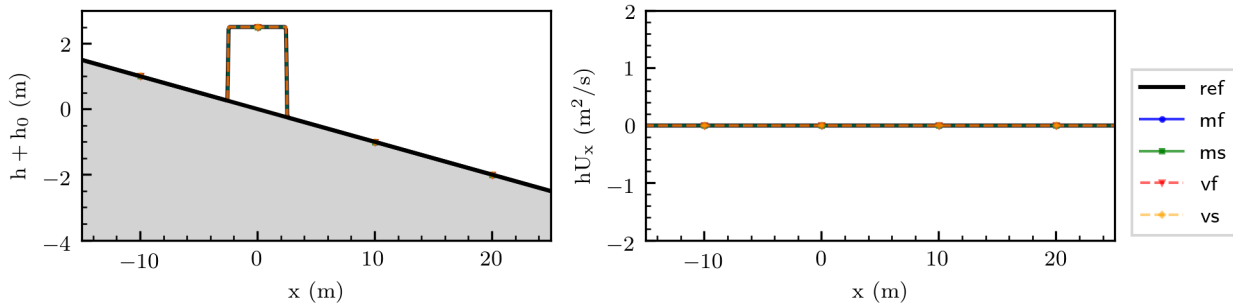
Figura E.37: Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T4 de la Tabla 6.10 para $t = 9,0$ s.



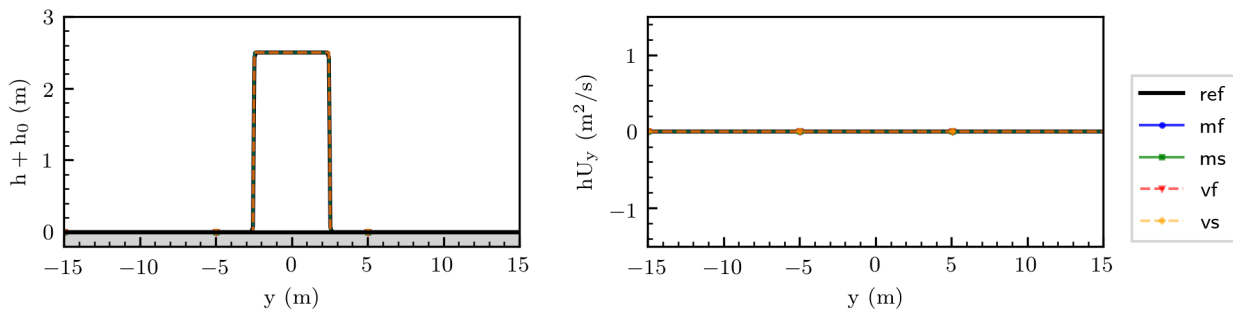
(a) Altura h .



(b) Caudal unitario $|hU|$.

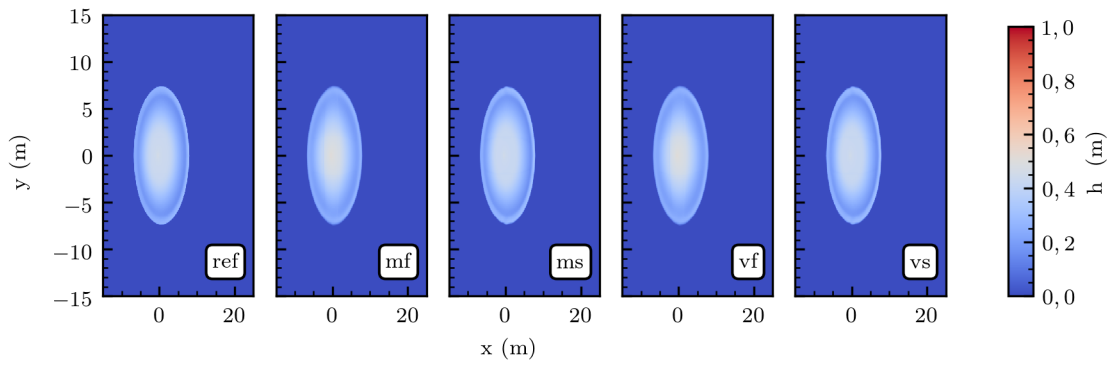


(c) Eje $y = 0,05$ m.

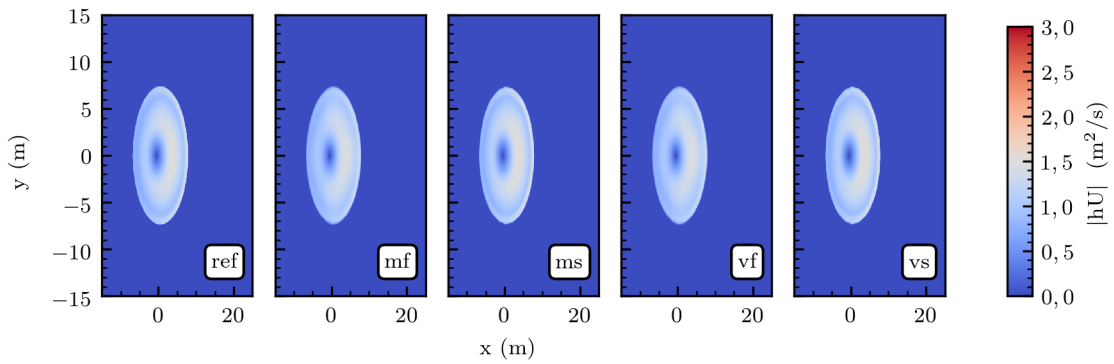


(d) Eje $x = 0,05$ m.

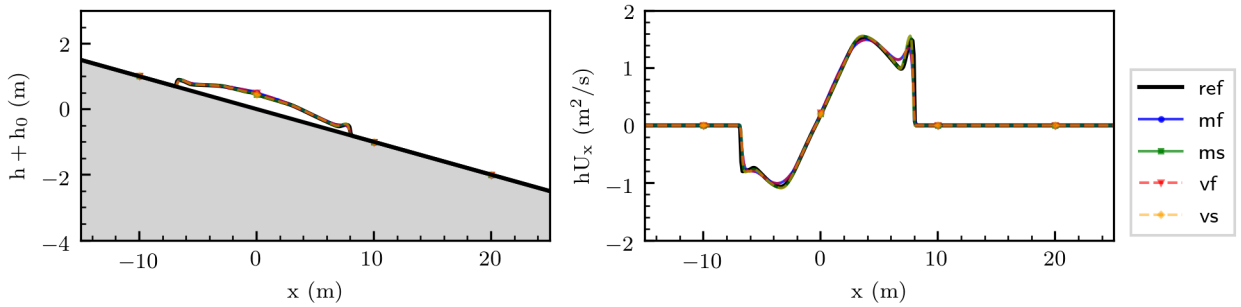
Figura E.38: Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T5 de la Tabla 6.10 para $t = 0,0$ s.



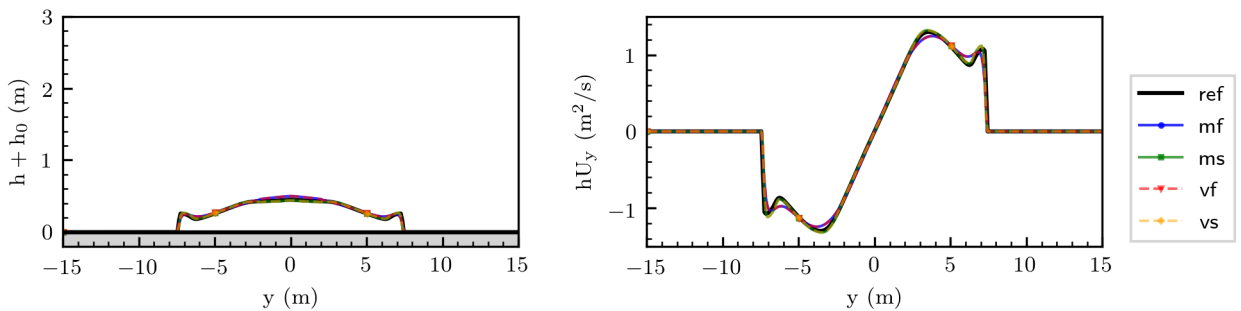
(a) Altura h .



(b) Caudal unitario $|hU|$.

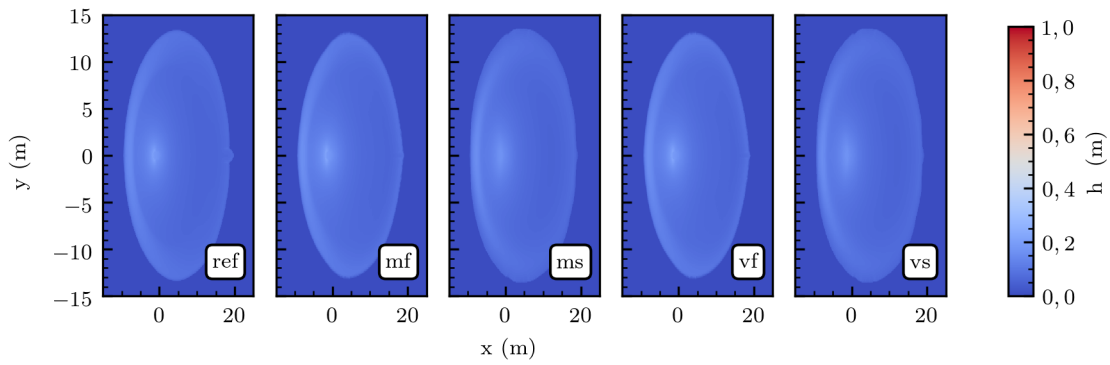


(c) Eje $y = 0,05$ m.

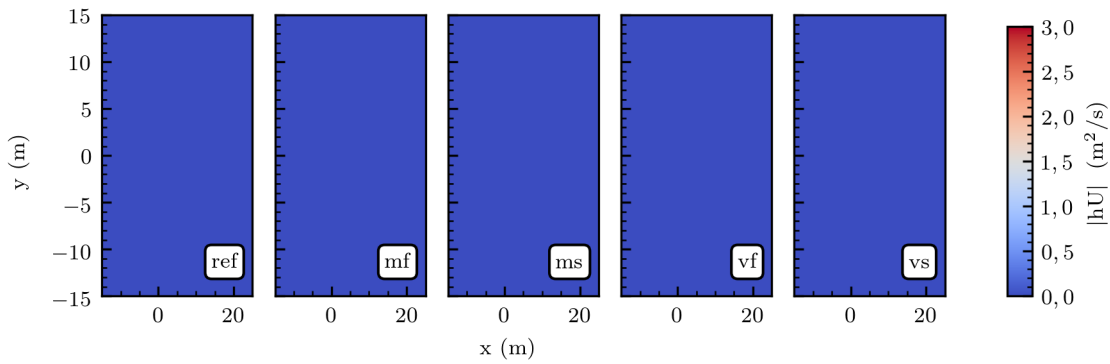


(d) Eje $x = 0,05$ m.

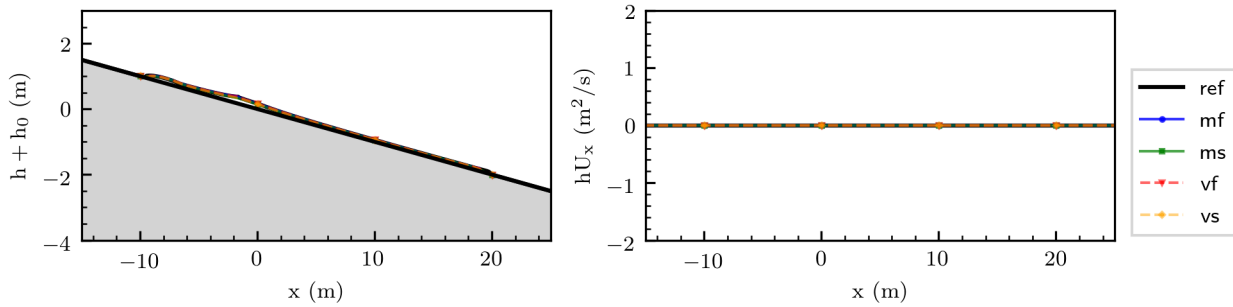
Figura E.39: Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T5 de la Tabla 6.10 para $t = 1,0$ s.



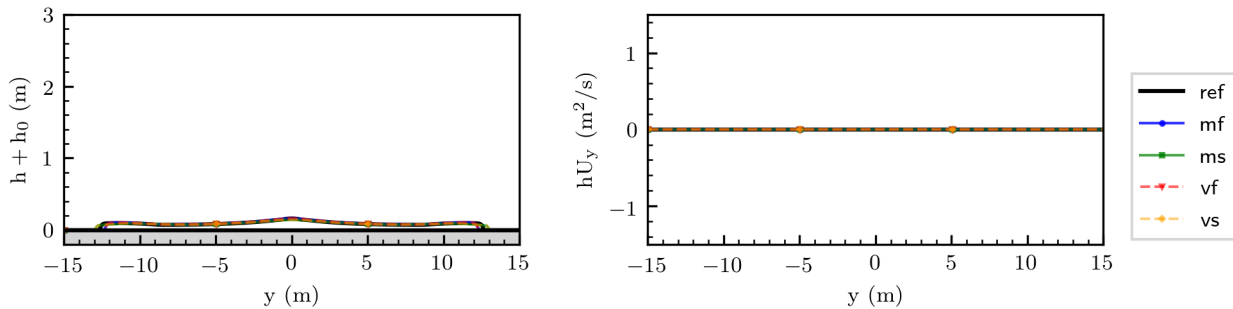
(a) Altura h .



(b) Caudal unitario $|hU|$.

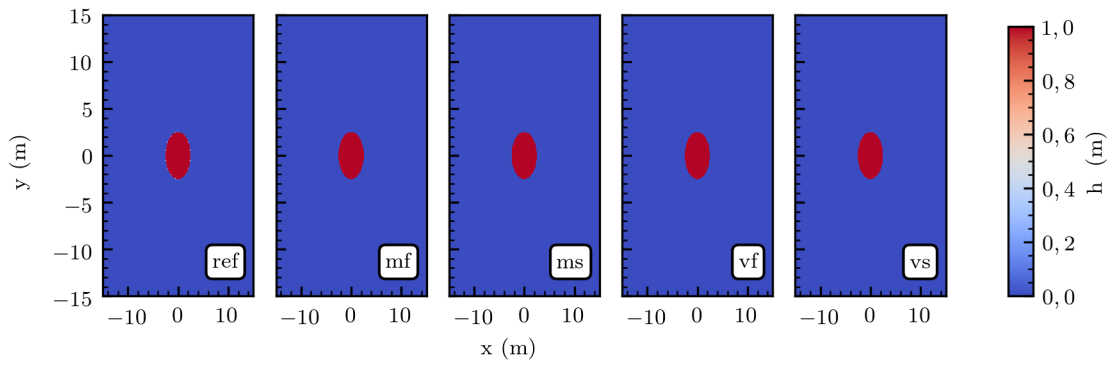


(c) Eje $y = 0,05$ m.

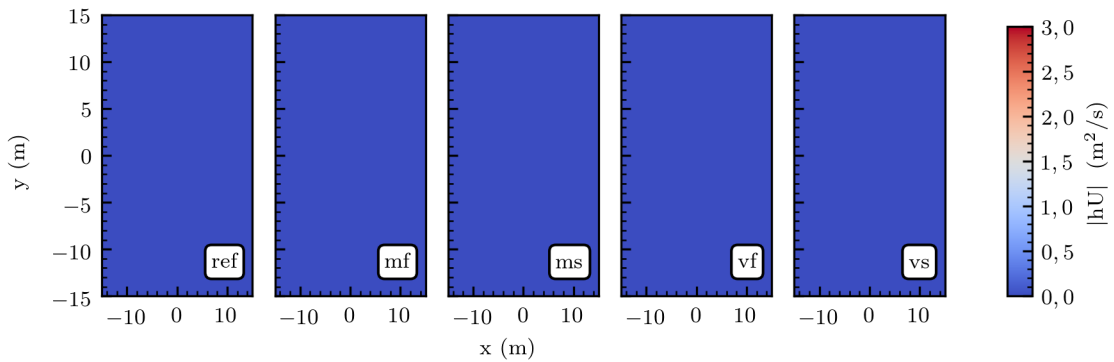


(d) Eje $x = 0,05$ m.

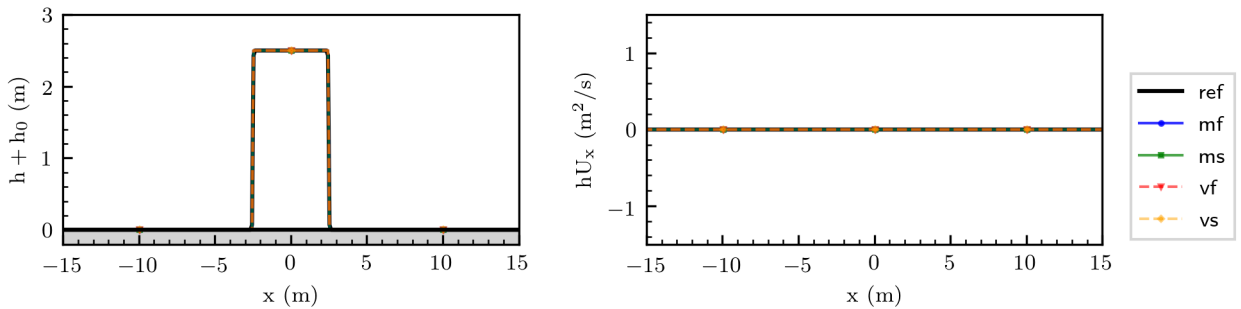
Figura E.40: Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T5 de la Tabla 6.10 para $t = 9,0$ s.



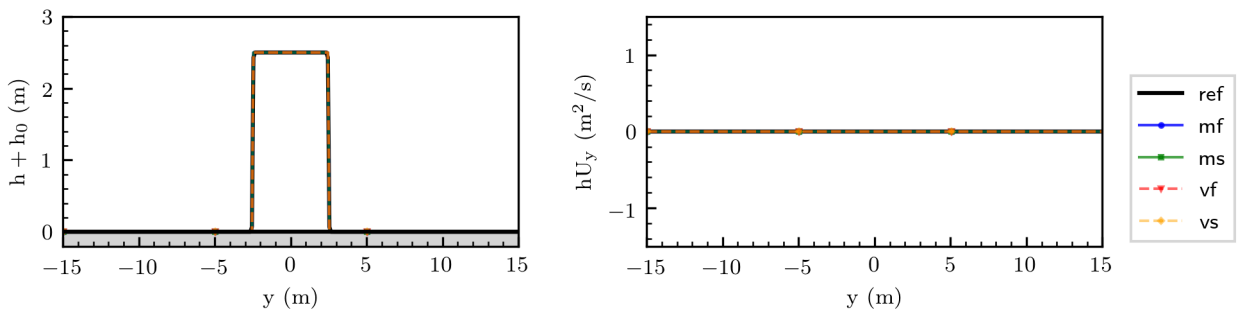
(a) Altura h .



(b) Caudal unitario $|hU|$.

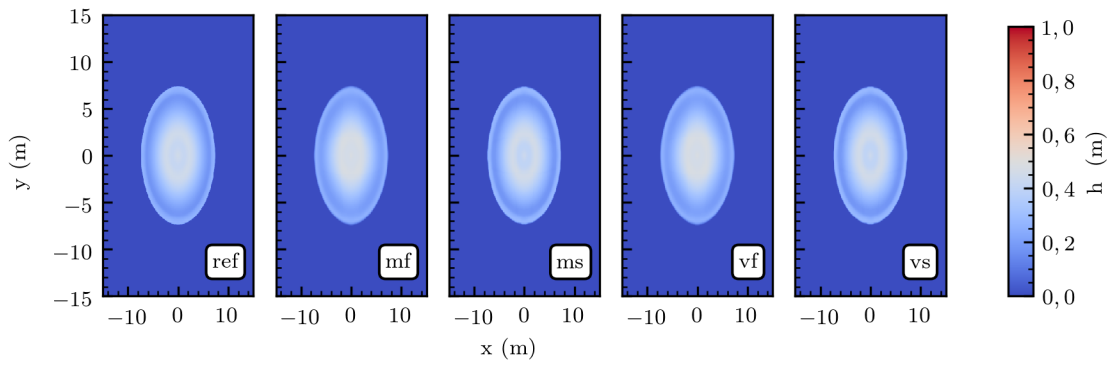


(c) Eje $y = 0,05$ m.

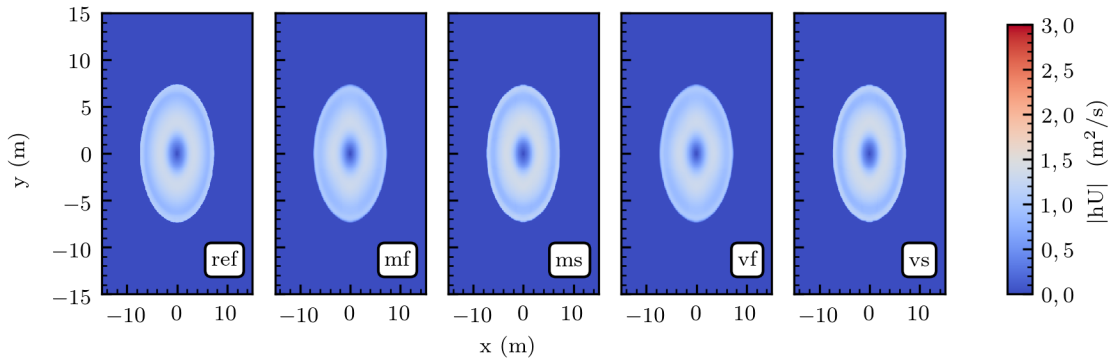


(d) Eje $x = 0,05$ m.

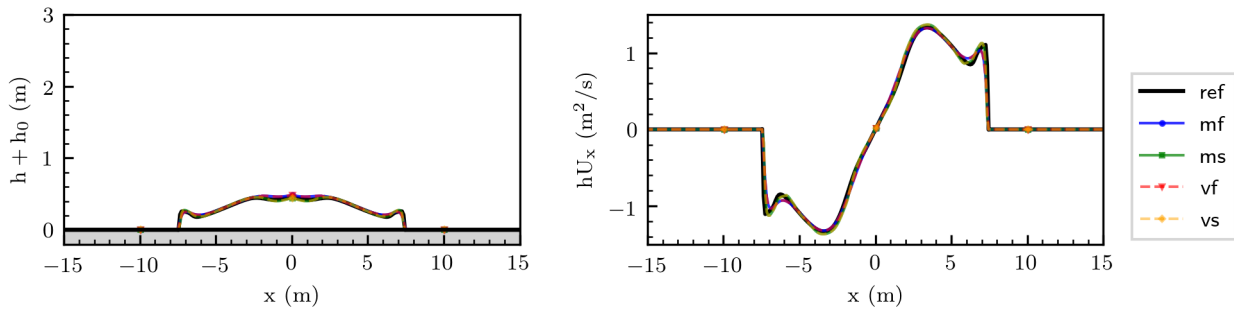
Figura E.41: Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T6 de la Tabla 6.10 para $t = 0,0$ s.



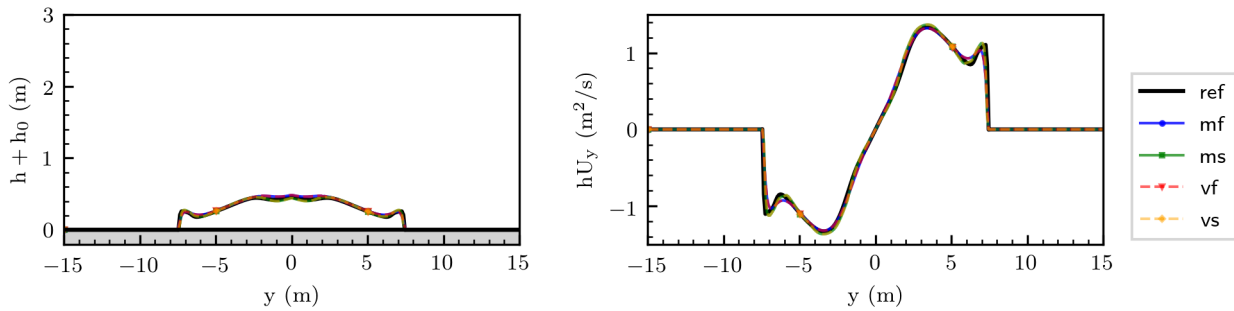
(a) Altura h .



(b) Caudal unitario $|hU|$.

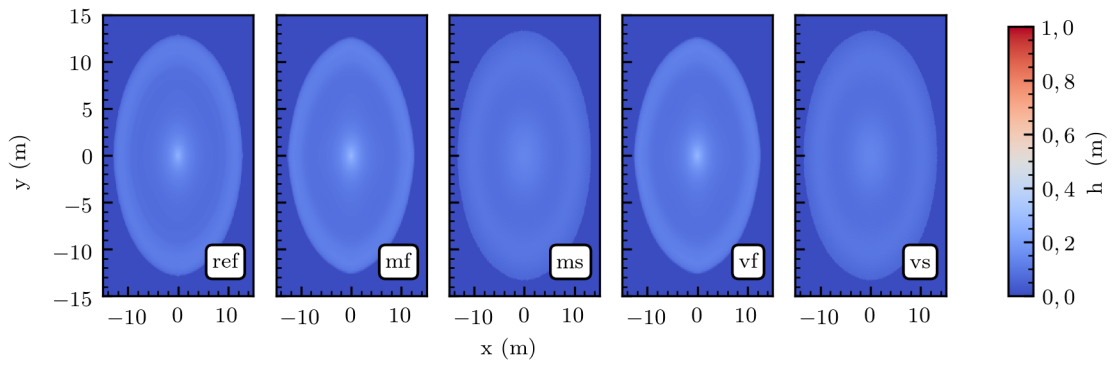


(c) Eje $y = 0,05$ m.

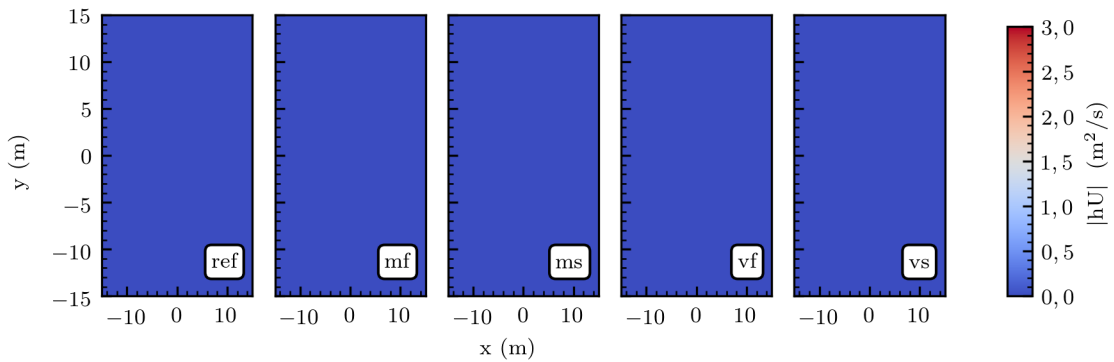


(d) Eje $x = 0,05$ m.

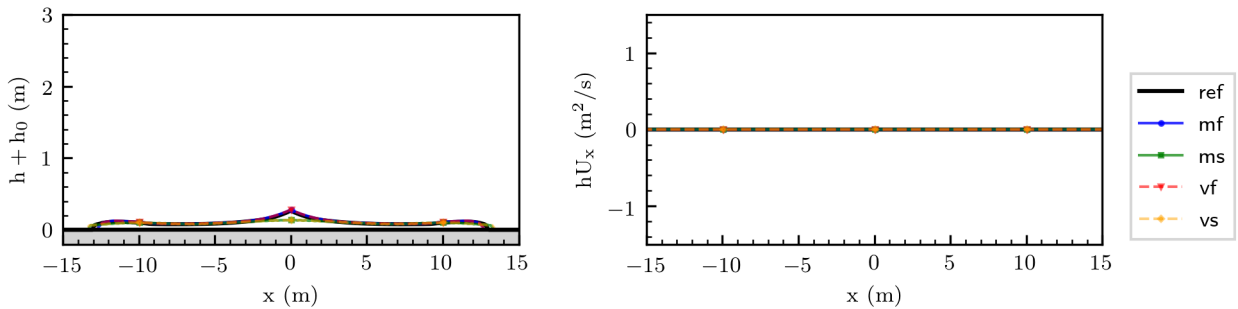
Figura E.42: Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T6 de la Tabla 6.10 para $t = 1,0$ s.



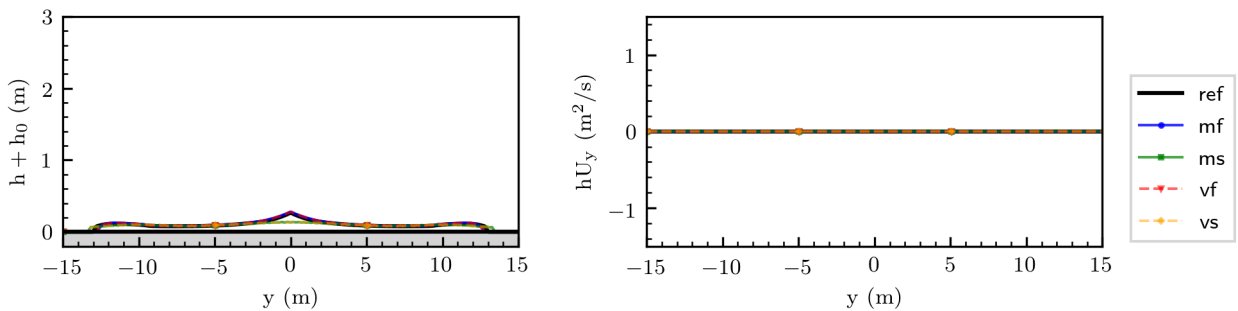
(a) Altura h .



(b) Caudal unitario $|hU|$.

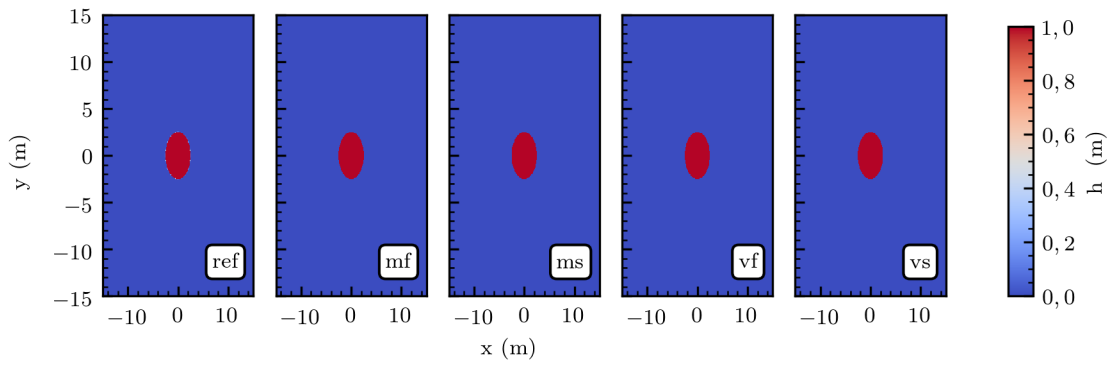


(c) Eje $y = 0,05$ m.

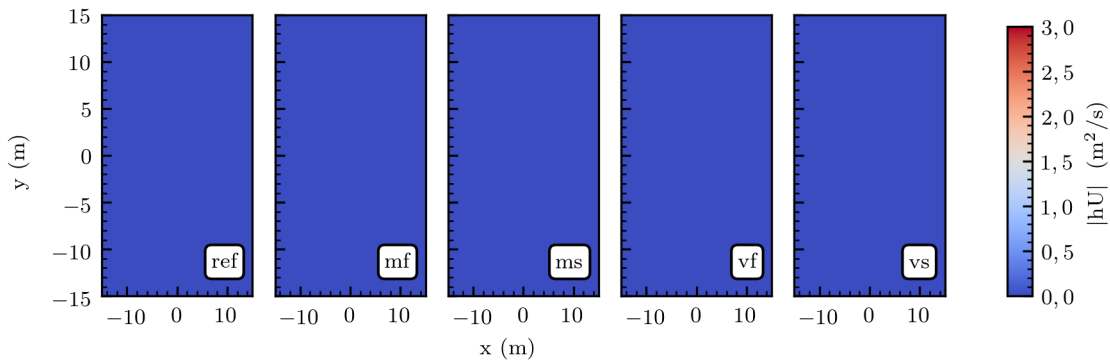


(d) Eje $x = 0,05$ m.

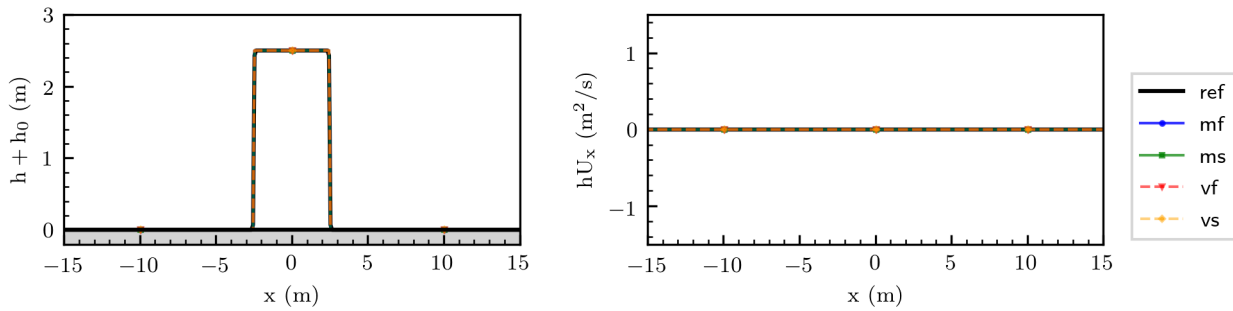
Figura E.43: Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T6 de la Tabla 6.10 para $t = 9,0$ s.



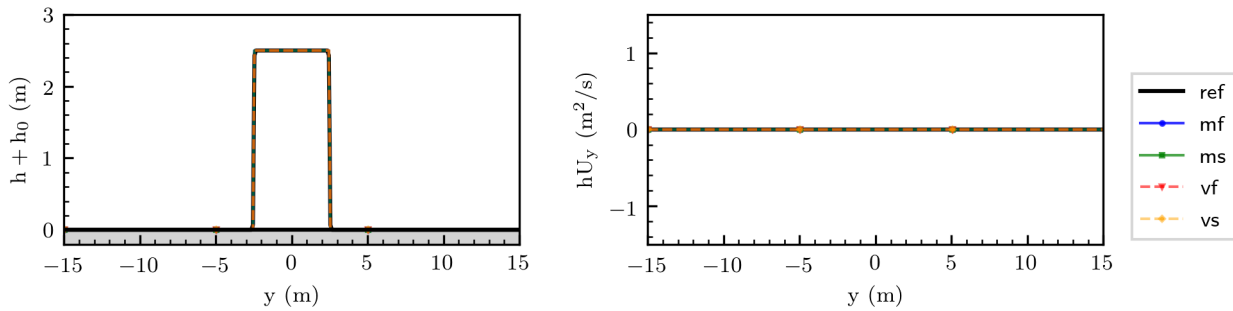
(a) Altura h .



(b) Caudal unitario $|hU|$.

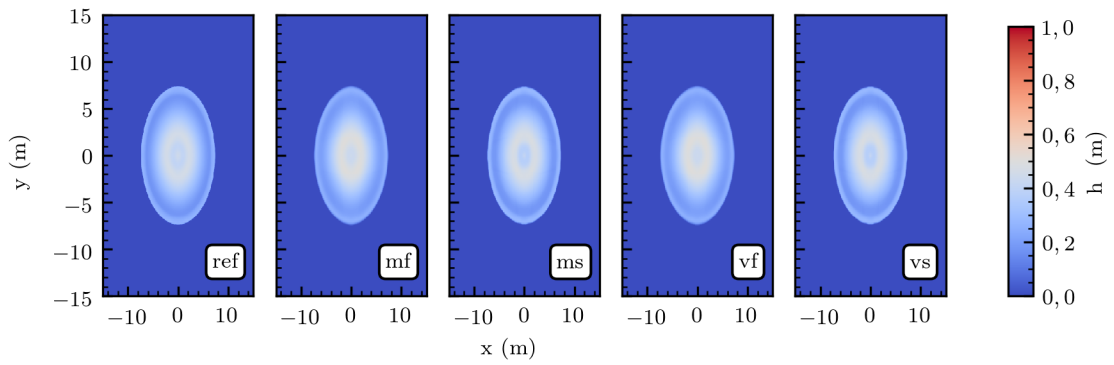


(c) Eje $y = 0,05$ m.

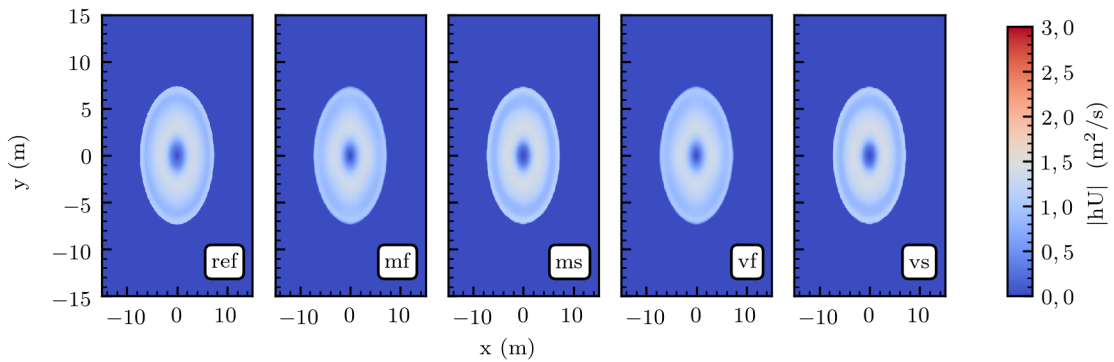


(d) Eje $x = 0,05$ m.

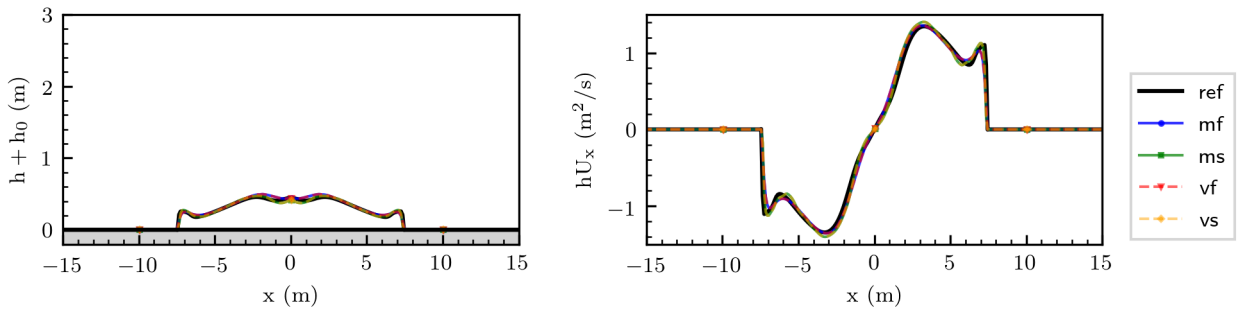
Figura E.44: Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T7 de la Tabla 6.10 para $t = 0,0$ s.



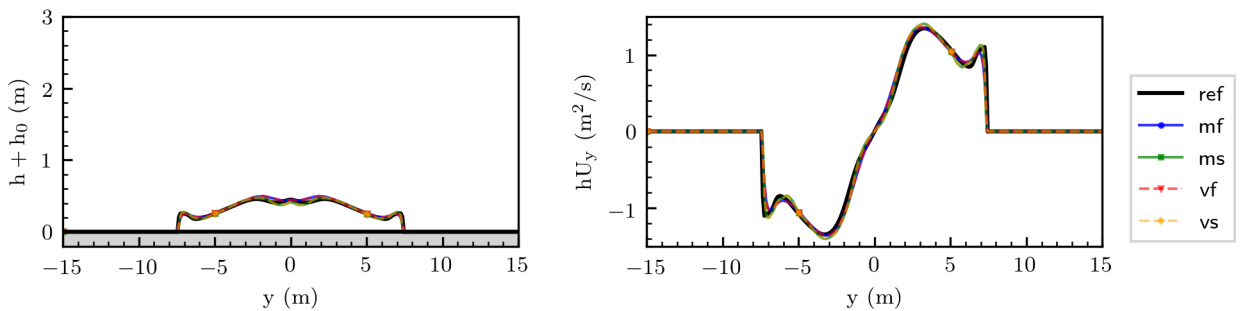
(a) Altura h .



(b) Caudal unitario $|hU|$.

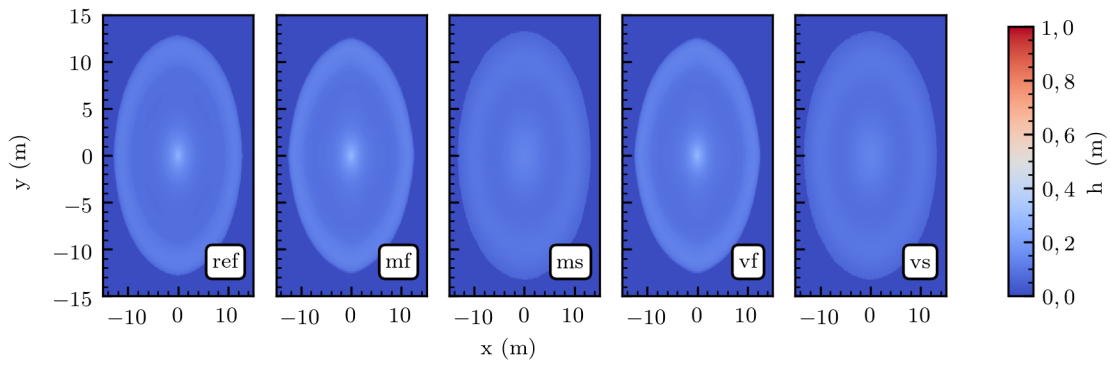


(c) Eje $y = 0,05$ m.

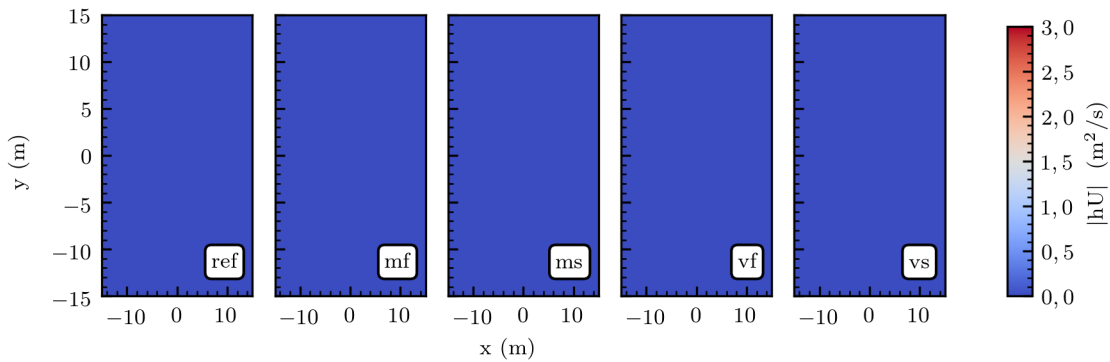


(d) Eje $x = 0,05$ m.

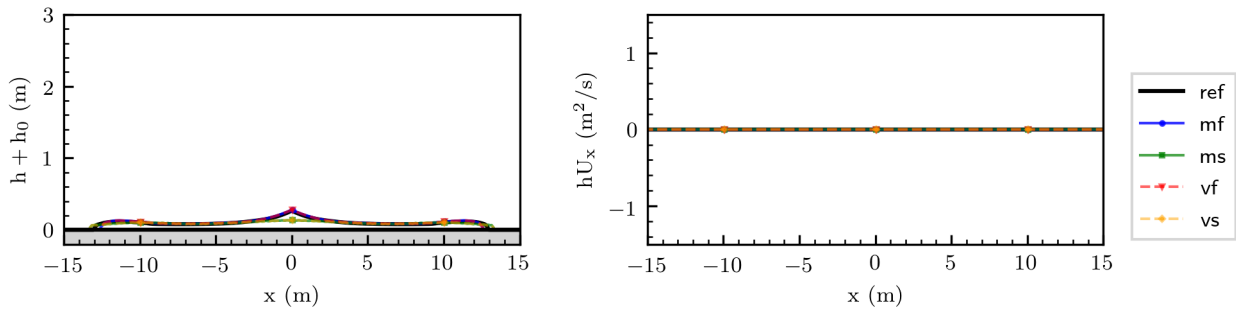
Figura E.45: Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T7 de la Tabla 6.10 para $t = 1,0$ s.



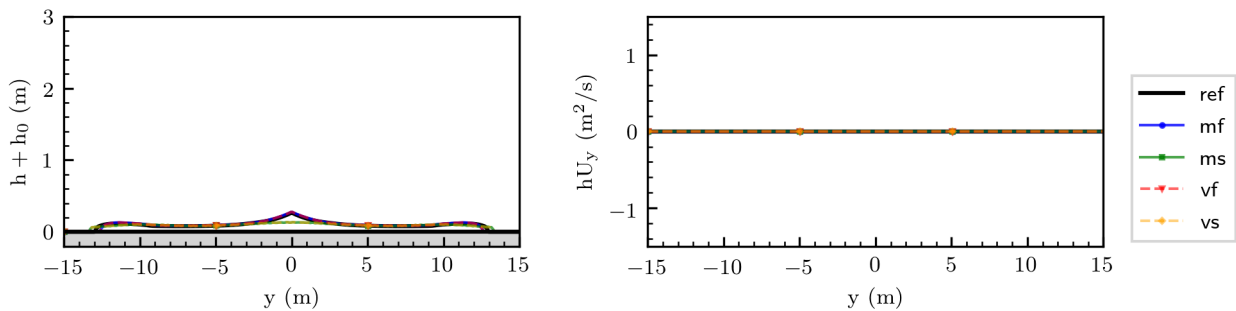
(a) Altura h .



(b) Caudal unitario $|hU|$.

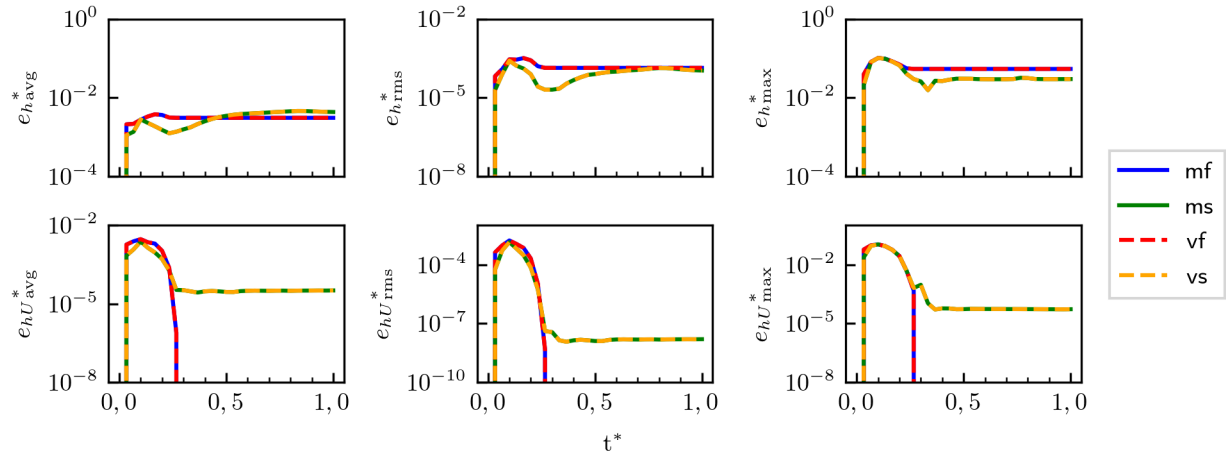


(c) Eje $y = 0,05$ m.

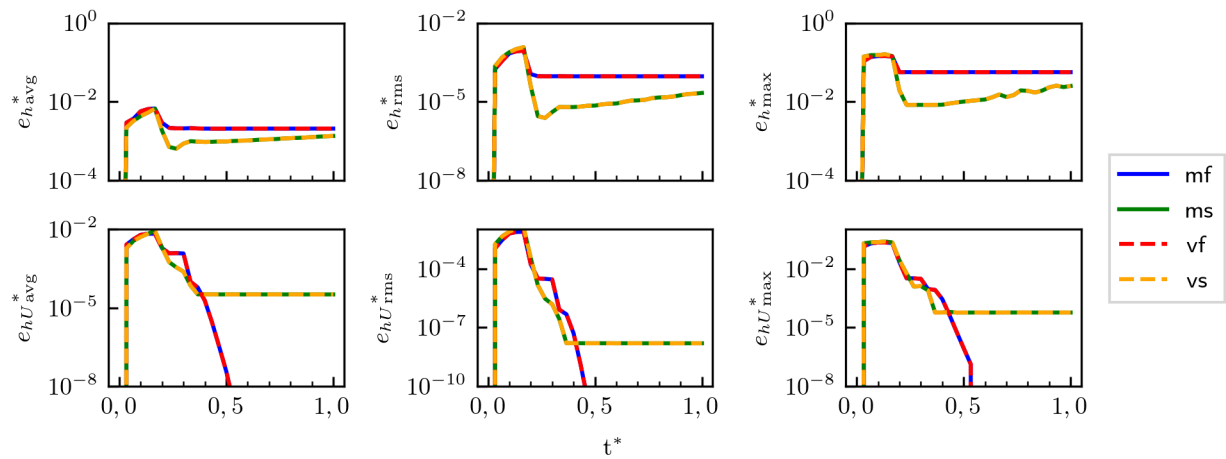


(d) Eje $x = 0,05$ m.

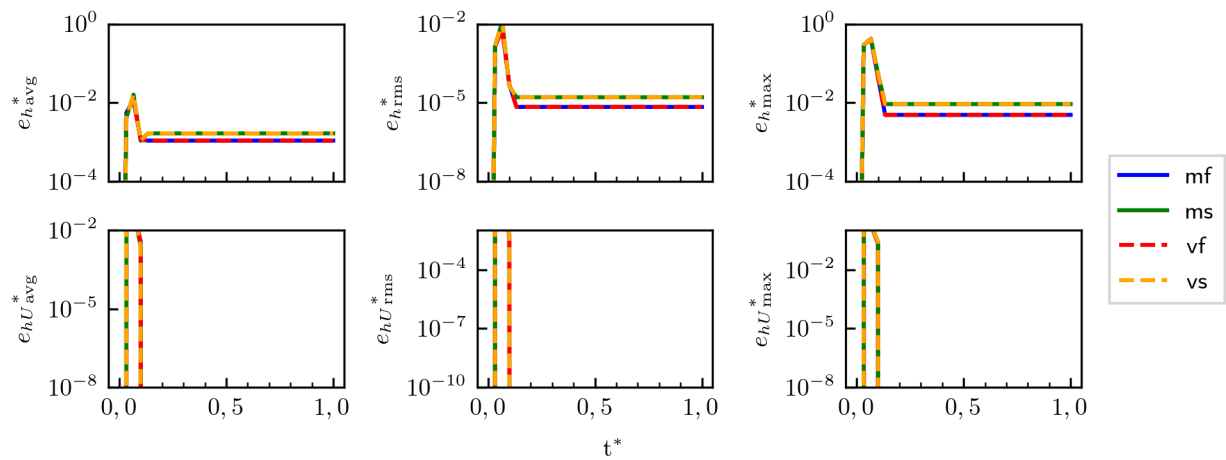
Figura E.46: Colapso de columna cilíndrica de fluido no-newtoniano en prueba T7 de la Tabla 6.10 para $t = 9,0$ s.



(a) Prueba T1.

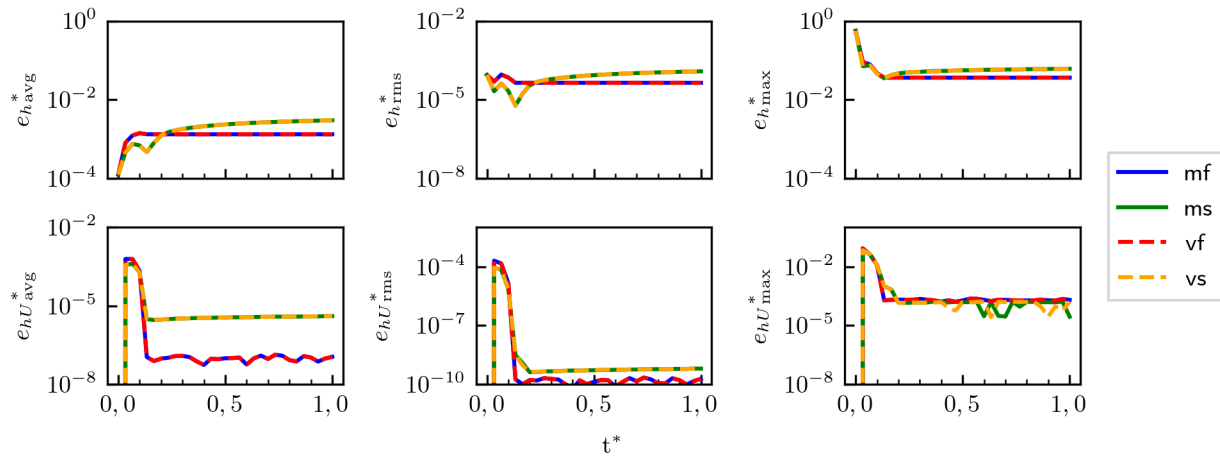


(b) Prueba T2.

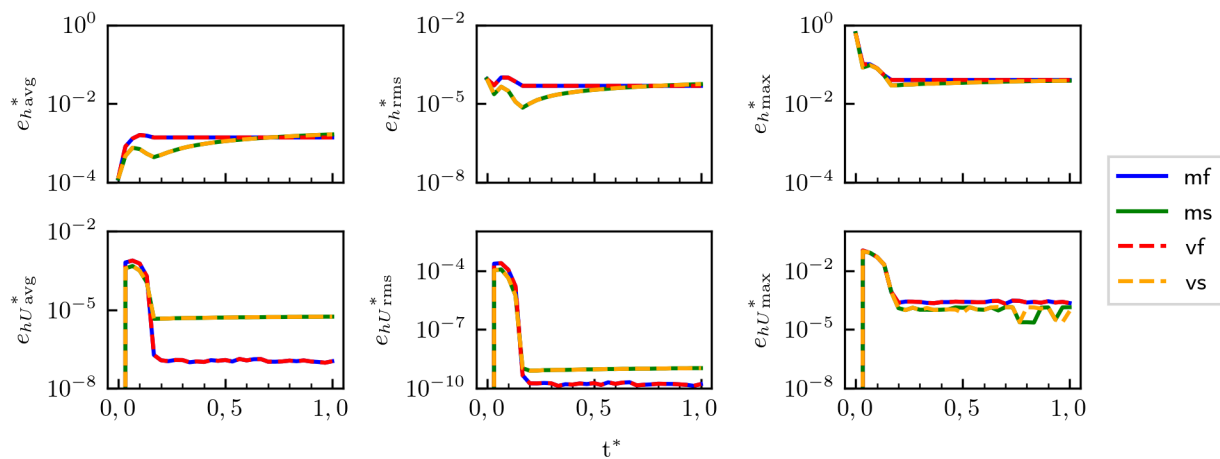


(c) Prueba T3.

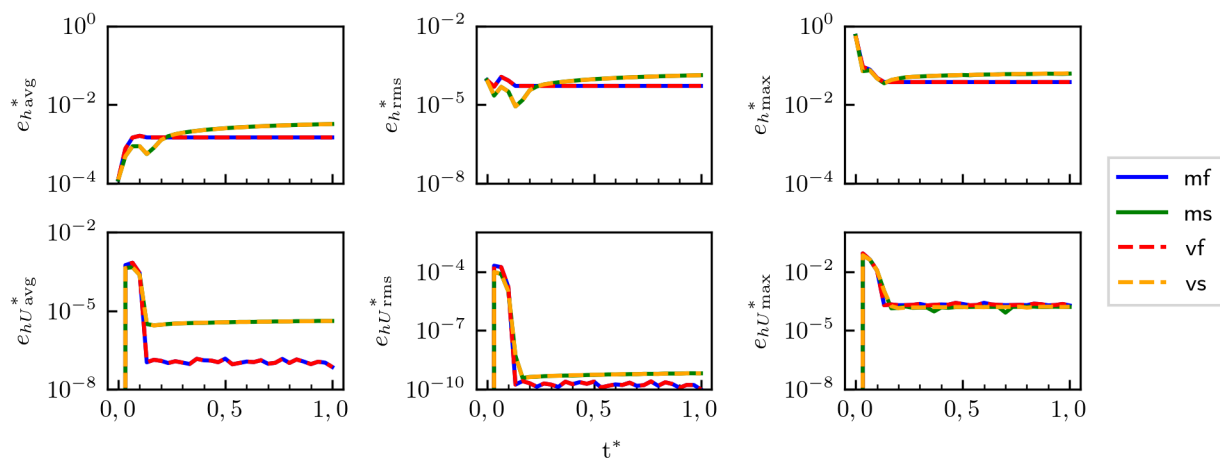
Figura E.47: Errores adimensionales en función del tiempo normalizado $t^* = t/T$ para h y hU de pruebas de colapso de columna de fluido no-newtoniano de pruebas T1-T3 de la Tabla 6.10.



(a) Prueba T4.



(b) Prueba T5.



(c) Prueba T6.

Figura E.48: Errores adimensionales en función del tiempo normalizado $t^* = t/T$ para h y hU de pruebas de colapso de columna de fluido no-newtoniano de pruebas T4-T6 de la Tabla 6.10.

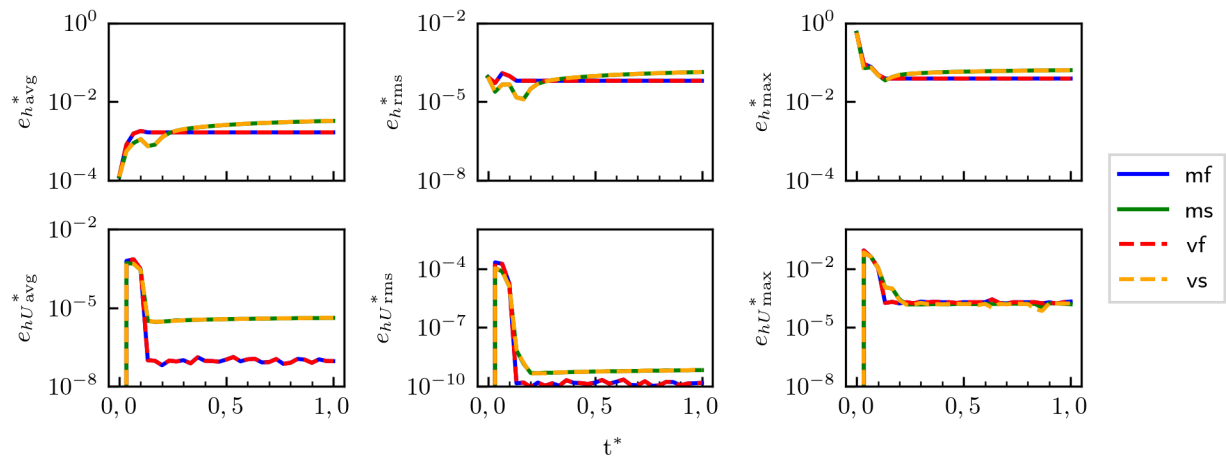


Figura E.49: Errores adimensionales en función del tiempo normalizado $t^* = t/T$ para h y hU de pruebas de colapso de columna de fluido no-newtoniano de prueba T7 de la Tabla 6.10.

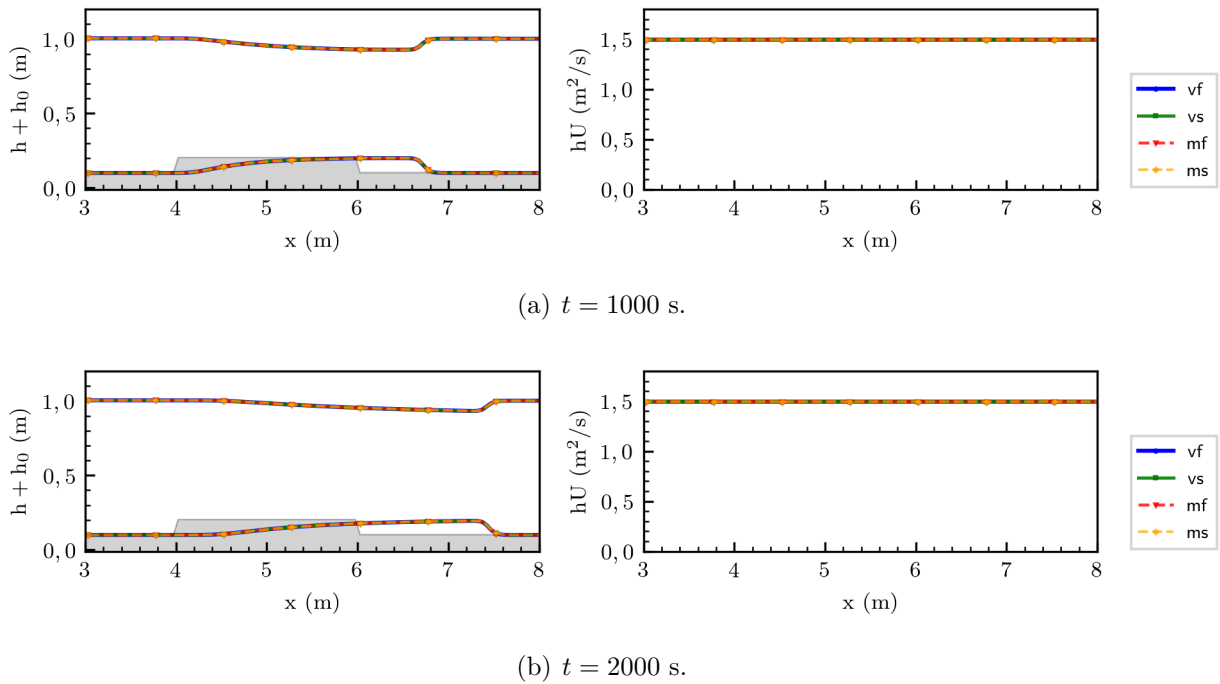
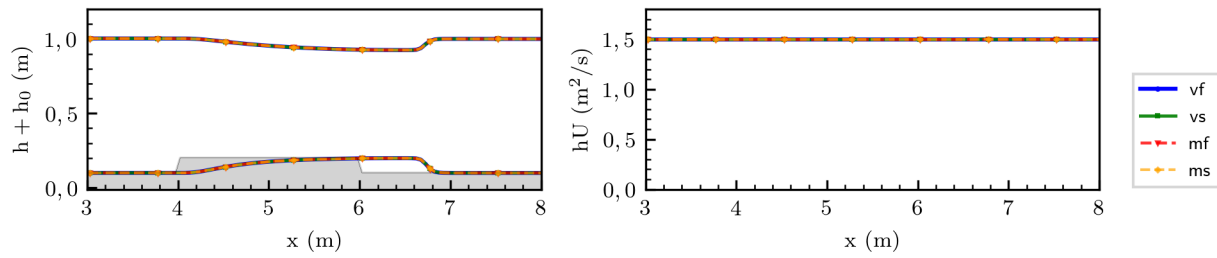
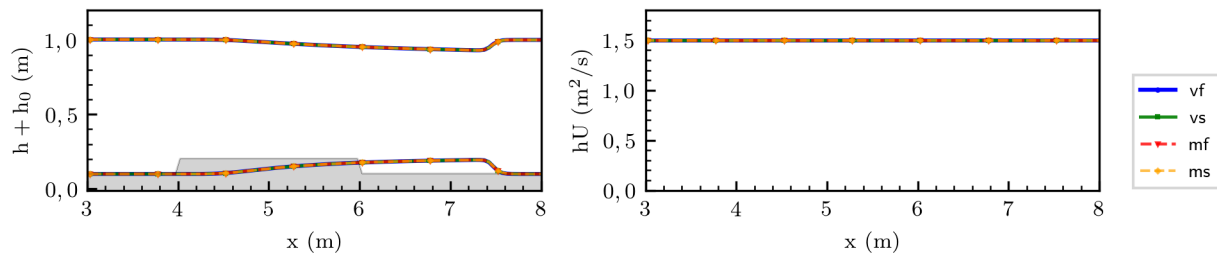


Figura E.50: Alturas, cota del lecho y caudales unitarios en prueba T1 de la Tabla 6.11.

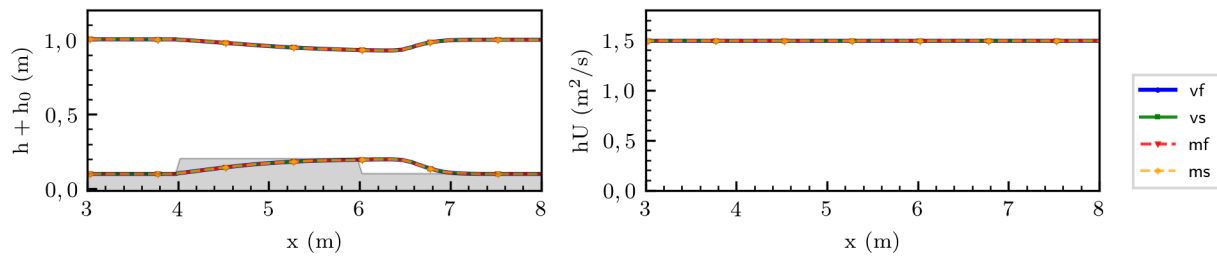


(a) $t = 1000$ s.

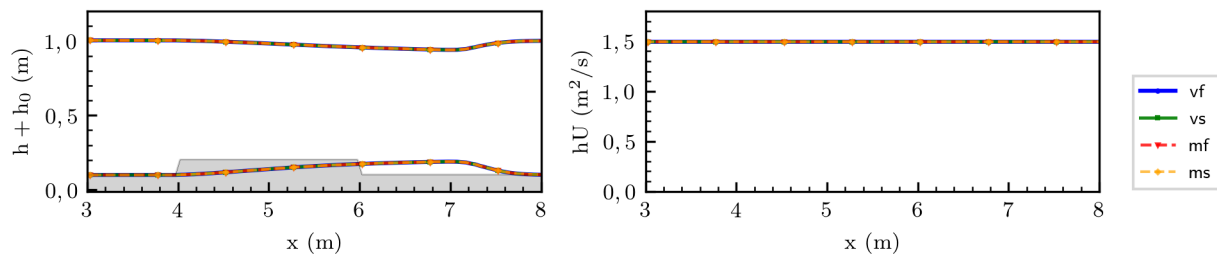


(b) $t = 2000$ s.

Figura E.51: Alturas, cota del lecho y caudales unitarios en prueba T2 de la Tabla 6.11.

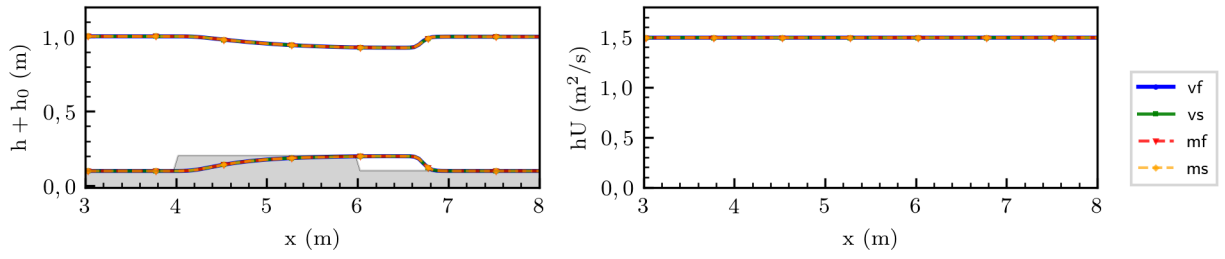


(a) $t = 1000$ s.

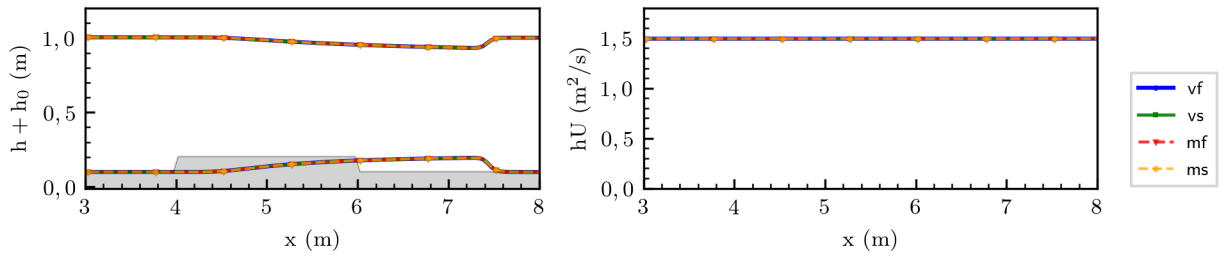


(b) $t = 2000$ s.

Figura E.52: Alturas, cota del lecho y caudales unitarios en prueba T3 de la Tabla 6.11.

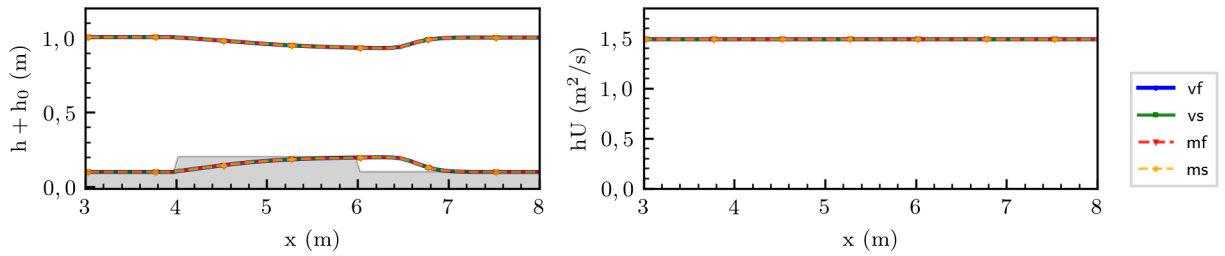


(a) $t = 1000$ s.

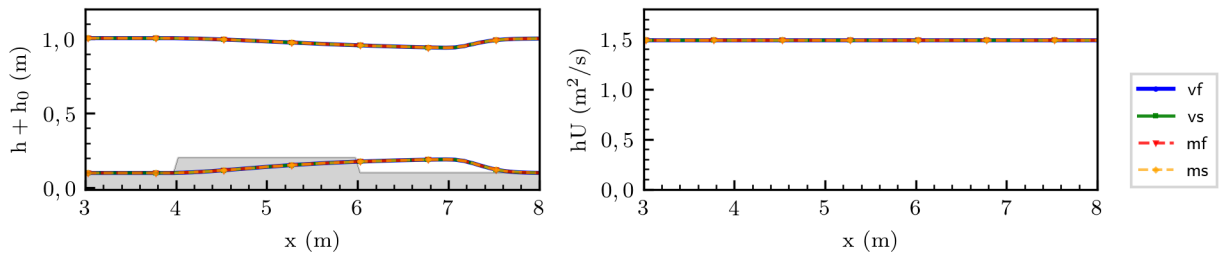


(b) $t = 2000$ s.

Figura E.53: Alturas, cota del lecho y caudales unitarios en prueba T4 de la Tabla 6.11.

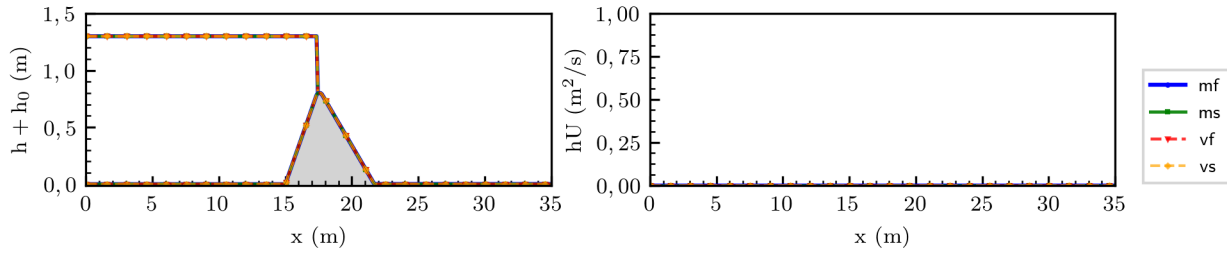


(a) $t = 1000$ s.

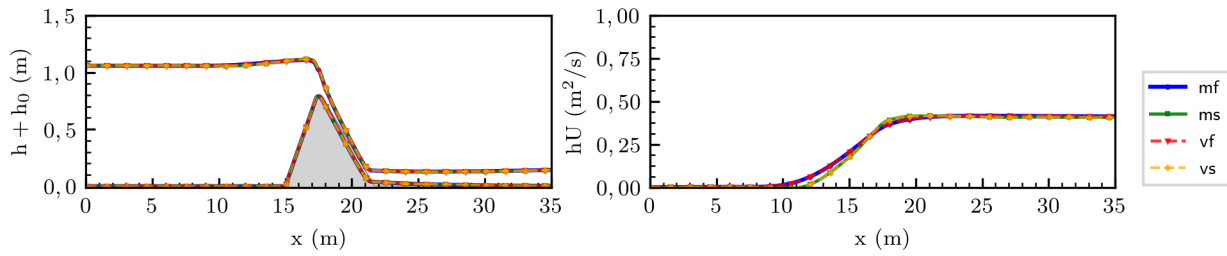


(b) $t = 2000$ s.

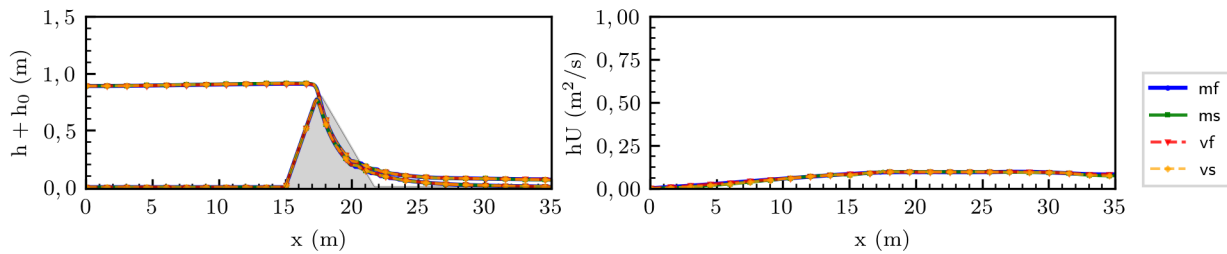
Figura E.54: Alturas, cota del lecho y caudales unitarios en prueba T5 de la Tabla 6.11.



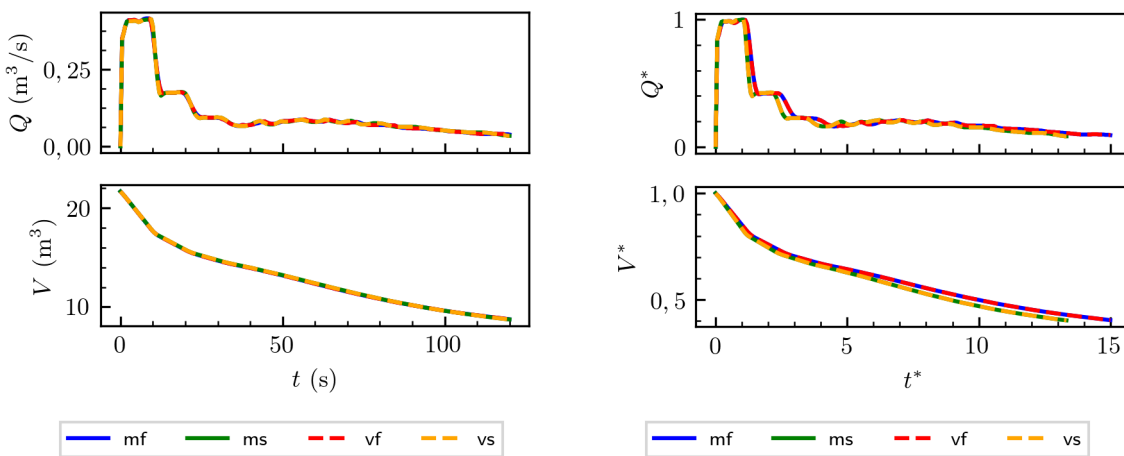
(a) $t = 0$ s.



(b) $t = 10$ s.



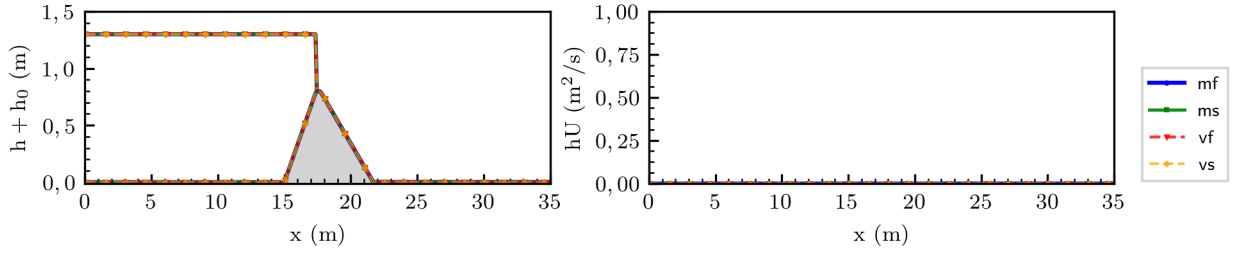
(c) $t = 30$ s.



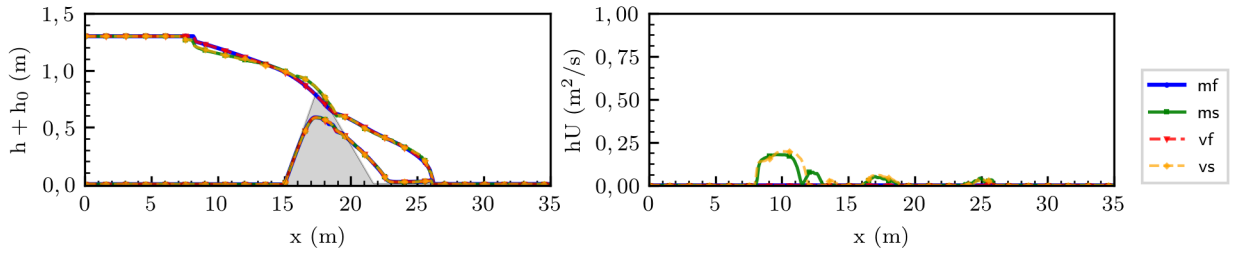
(d) Caudal y Volumen

(e) Caudal y Volumen adimensional

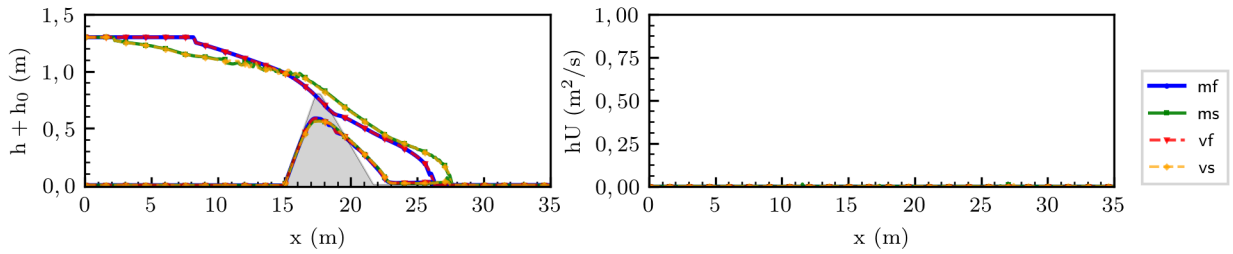
Figura E.55: Alturas, cota del lecho, caudales y volúmenes para prueba T1 de la Tabla 6.12.
 $t^* = t/t_{peak}$ y $Q^* = Q/Q_{t=peak}$



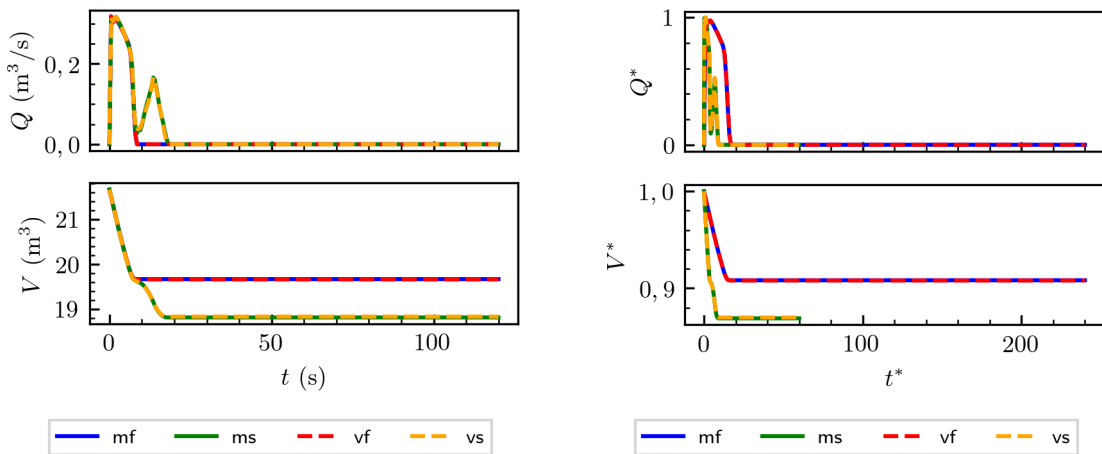
(a) $t = 0$ s.



(b) $t = 10$ s.



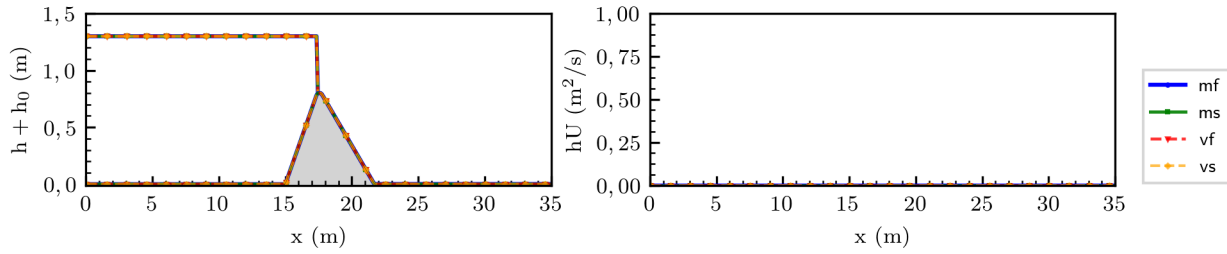
(c) $t = 30$ s.



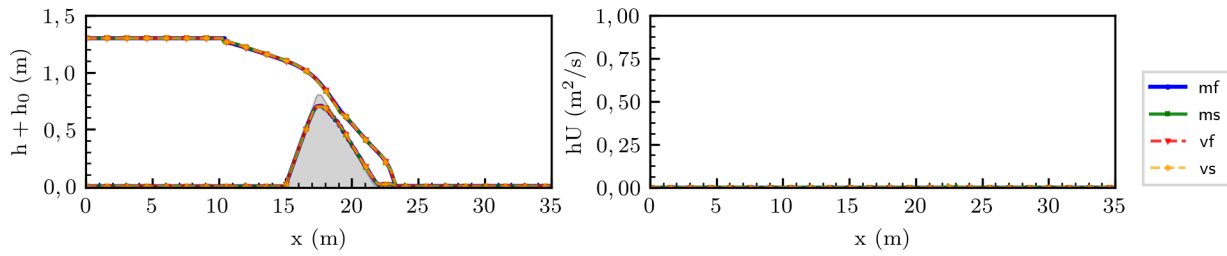
(d) Caudal y Volumen

(e) Caudal y Volumen adimensional

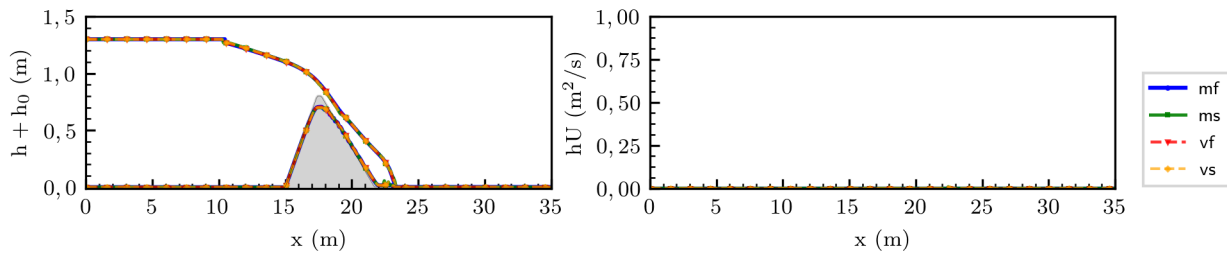
Figura E.56: Alturas, cota del lecho, caudales y volúmenes para prueba T2 de la Tabla 6.12.
 $t^* = t/t_{peak}$ y $Q^* = Q/Q_{t=peak}$



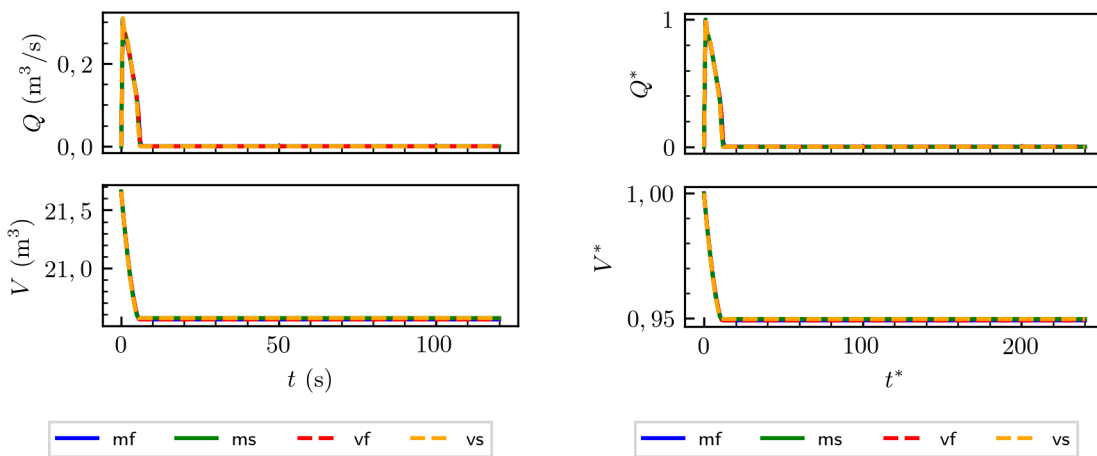
(a) $t = 0$ s.



(b) $t = 10$ s.



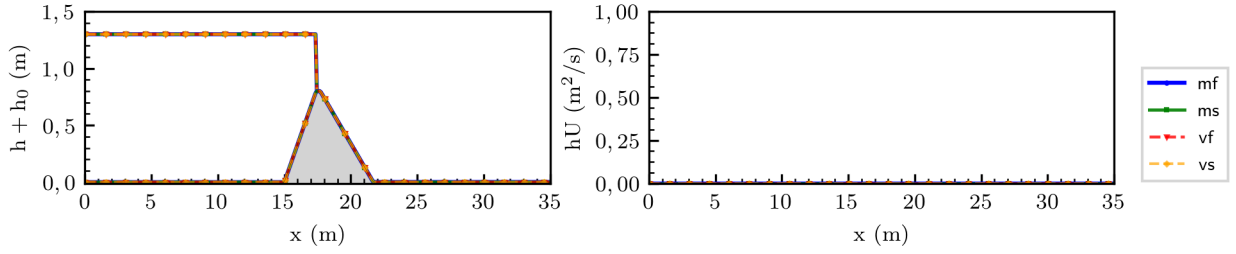
(c) $t = 30$ s.



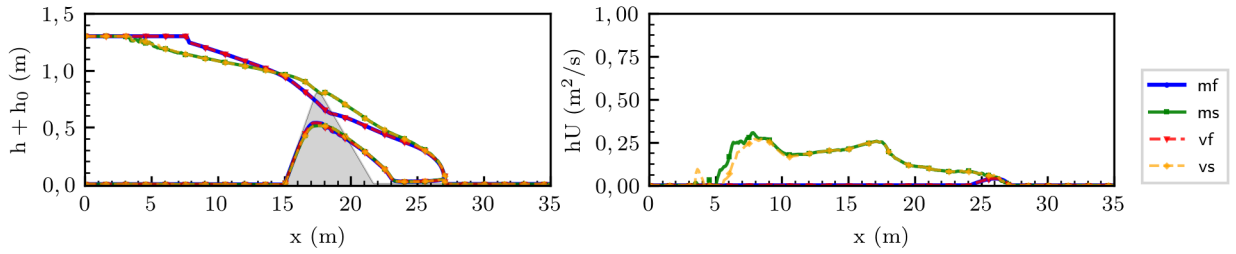
(d) Caudal y Volumen

(e) Caudal y Volumen adimensional

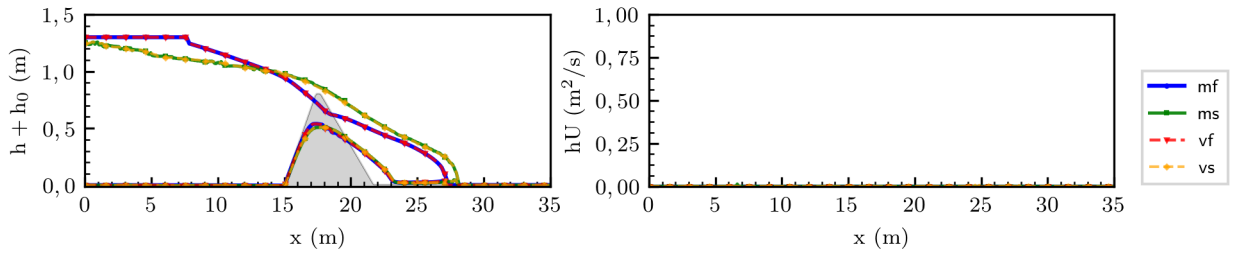
Figura E.57: Alturas, cota del lecho, caudales y volúmenes para prueba T3 de la Tabla 6.12.
 $t^* = t/t_{peak}$ y $Q^* = Q/Q_{t=peak}$



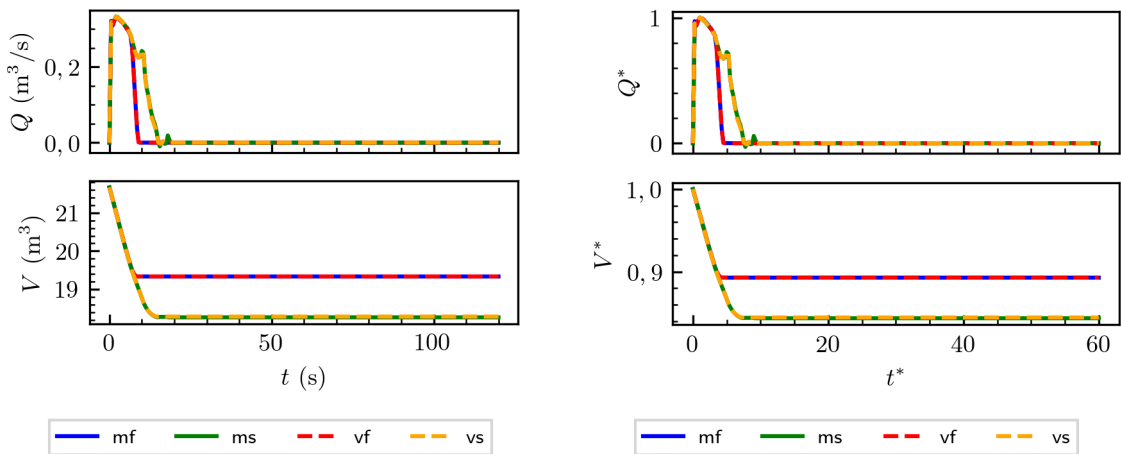
(a) $t = 0$ s.



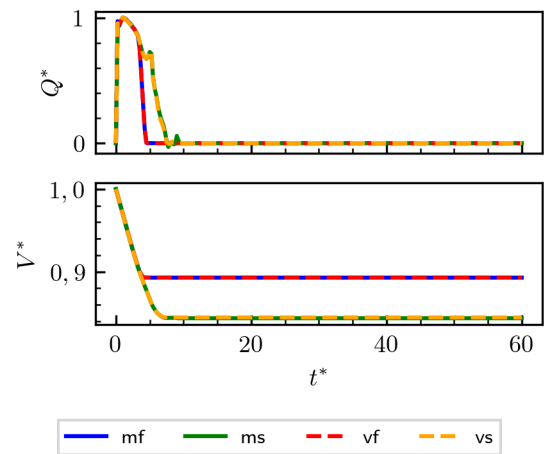
(b) $t = 10$ s.



(c) $t = 30$ s.

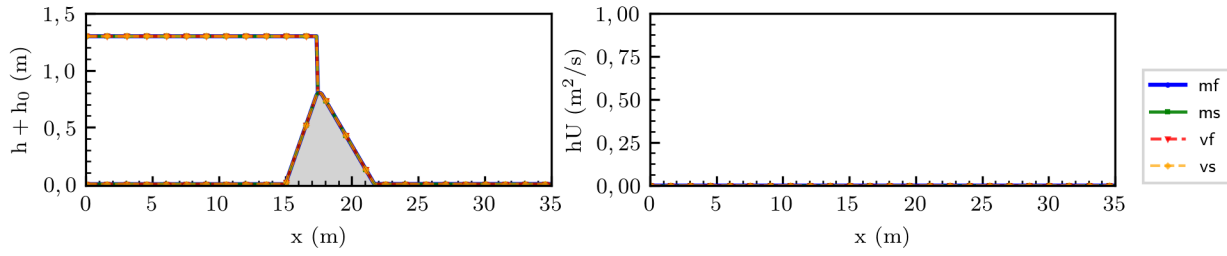


(d) Caudal y Volumen

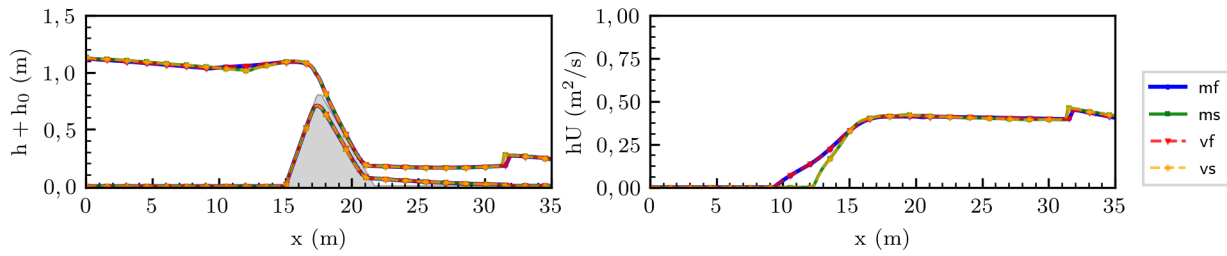


(e) Caudal y Volumen adimensional

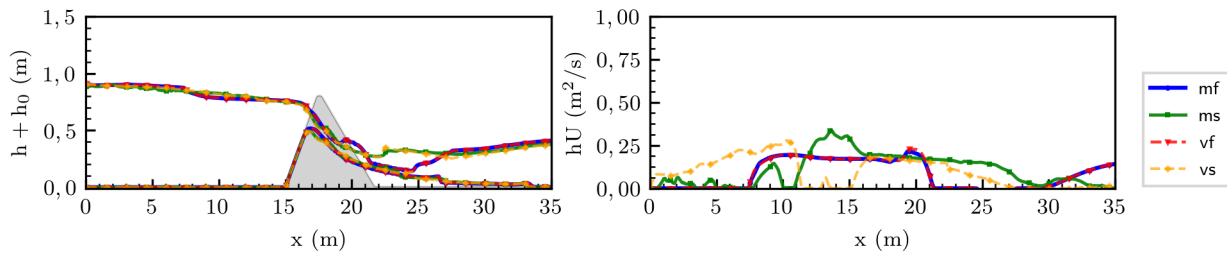
Figura E.58: Alturas, cota del lecho, caudales y volúmenes para prueba T4 de la Tabla 6.12.
 $t^* = t/t_{peak}$ y $Q^* = Q/Q_{t=peak}$



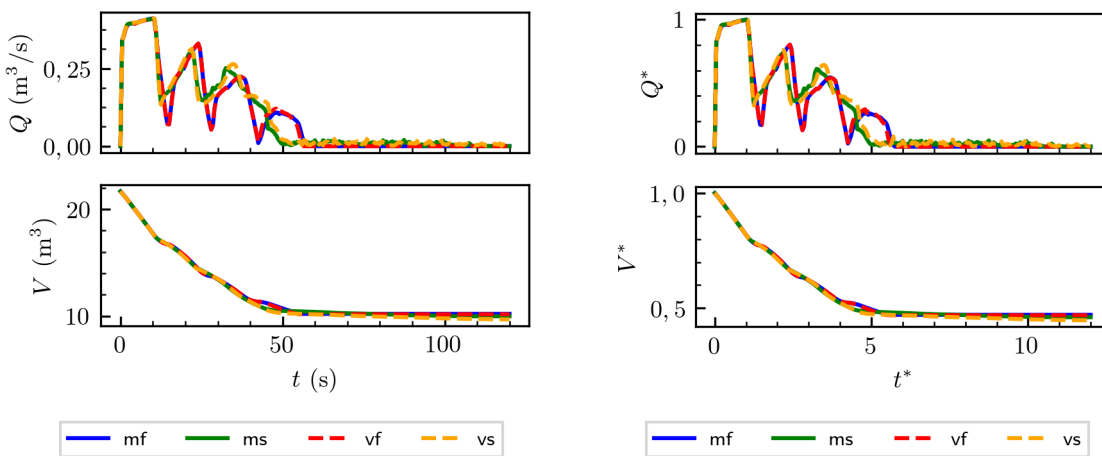
(a) $t = 0$ s.



(b) $t = 10$ s.



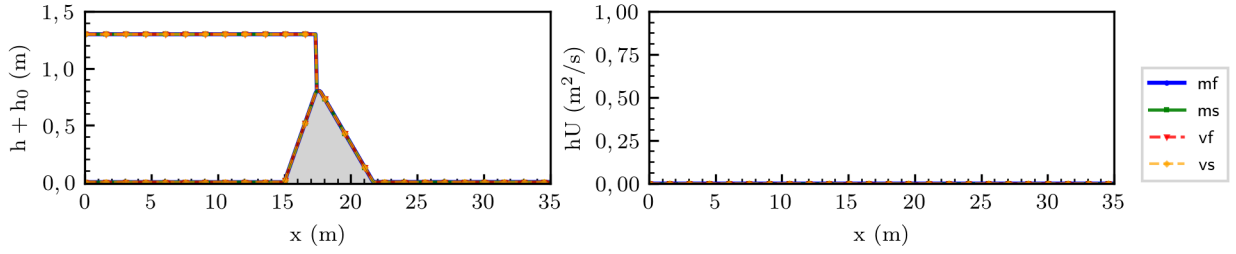
(c) $t = 30$ s.



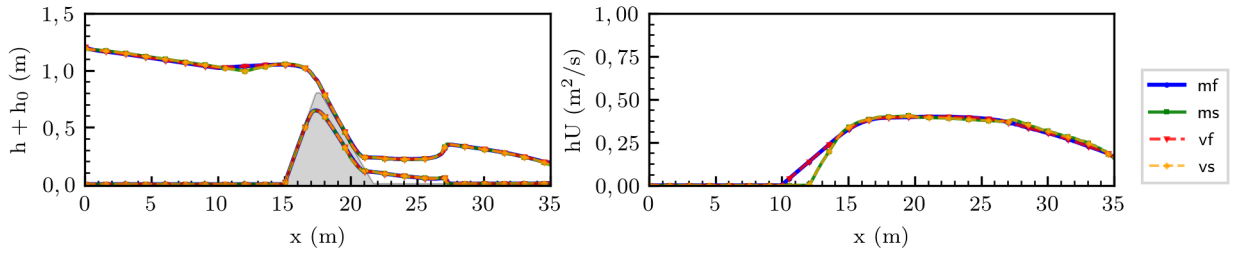
(d) Caudal y Volumen

(e) Caudal y Volumen adimensional

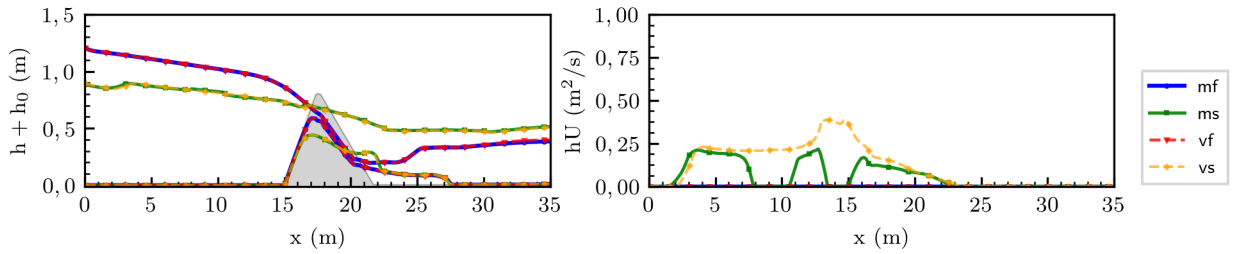
Figura E.59: Alturas, cota del lecho, caudales y volúmenes para prueba T5 de la Tabla 6.12.
 $t^* = t/t_{peak}$ y $Q^* = Q/Q_{t=peak}$



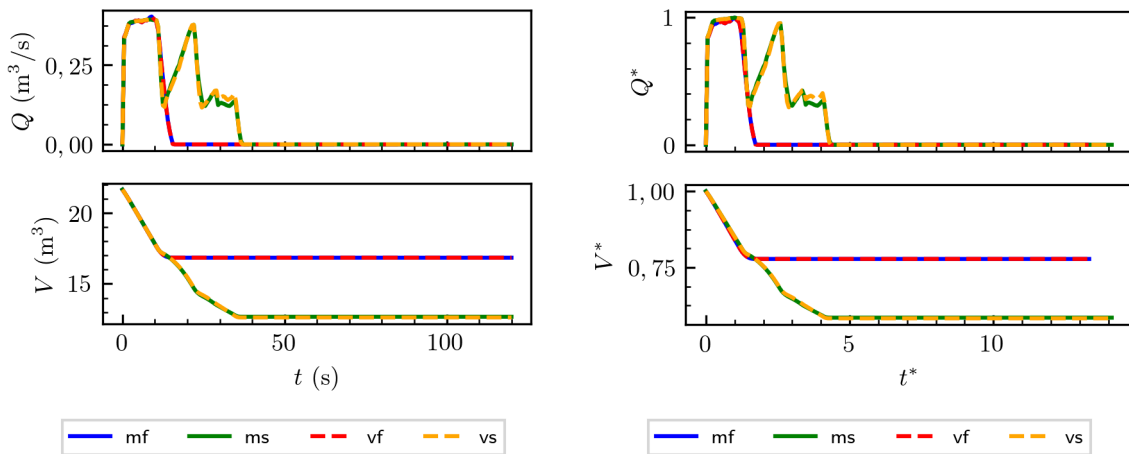
(a) $t = 0$ s.



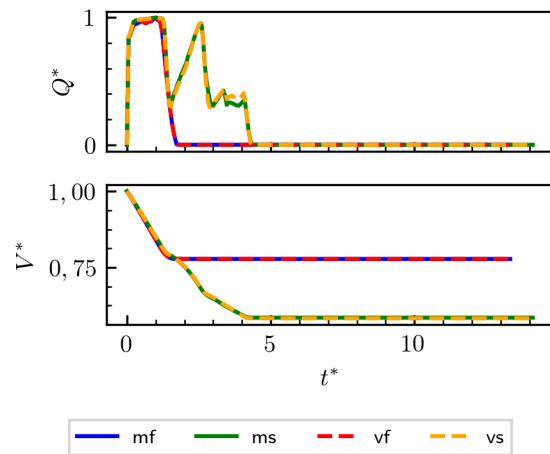
(b) $t = 10$ s.



(c) $t = 30$ s.

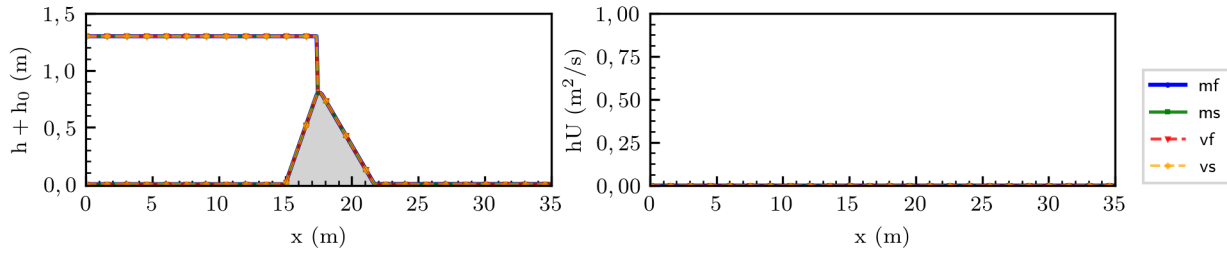


(d) Caudal y Volumen

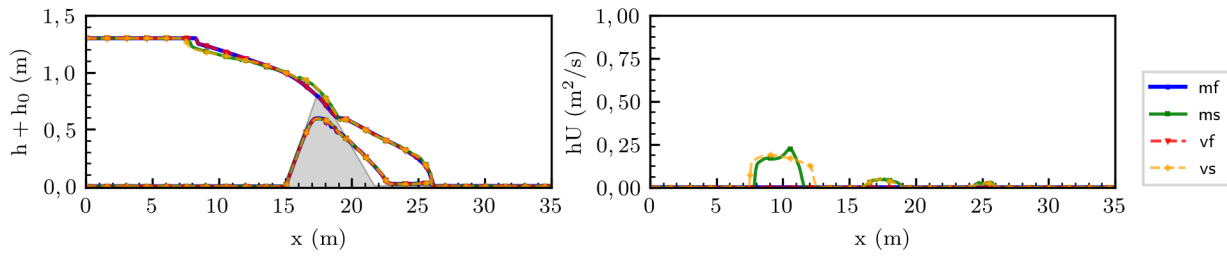


(e) Caudal y Volumen adimensional

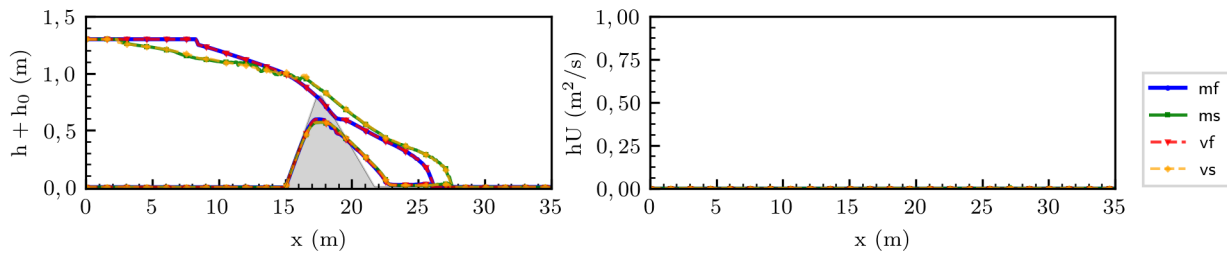
Figura E.60: Alturas, cota del lecho, caudales y volúmenes para prueba T6 de la Tabla 6.12.
 $t^* = t/t_{peak}$ y $Q^* = Q/Q_{t=peak}$



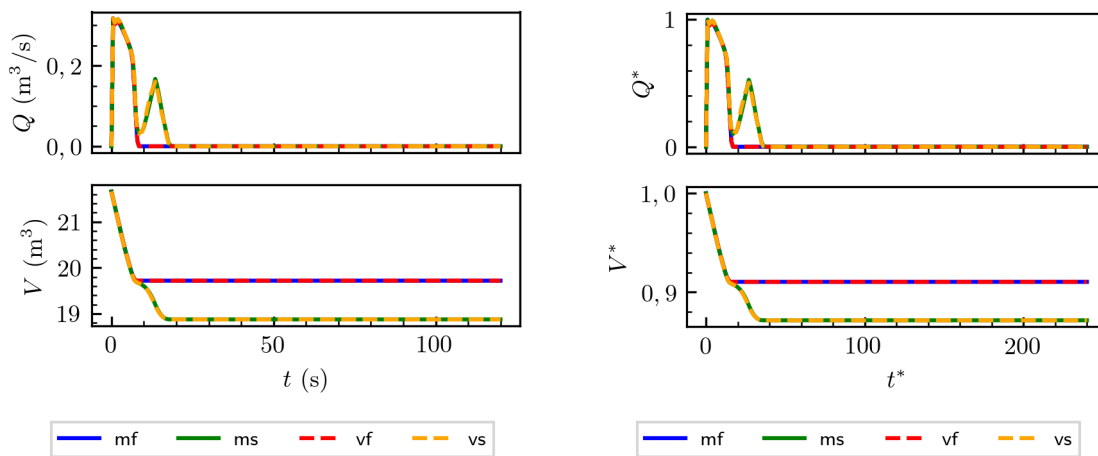
(a) $t = 0$ s.



(b) $t = 10$ s.



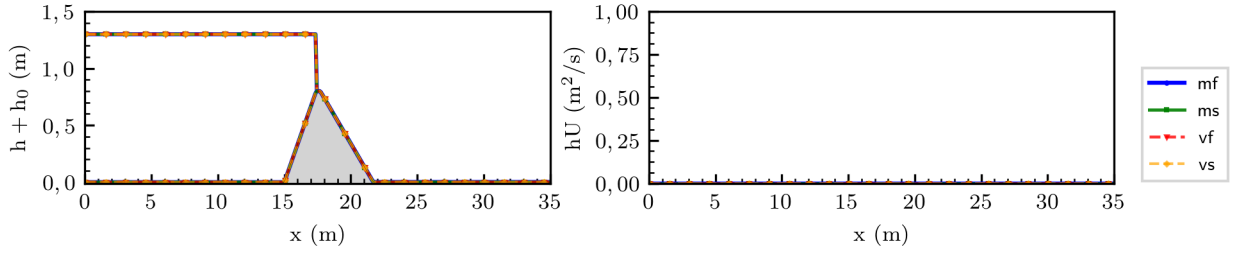
(c) $t = 30$ s.



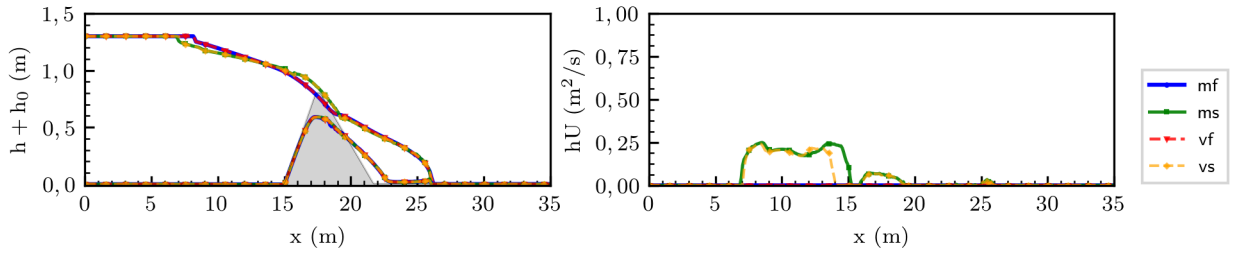
(d) Caudal y Volumen

(e) Caudal y Volumen adimensional

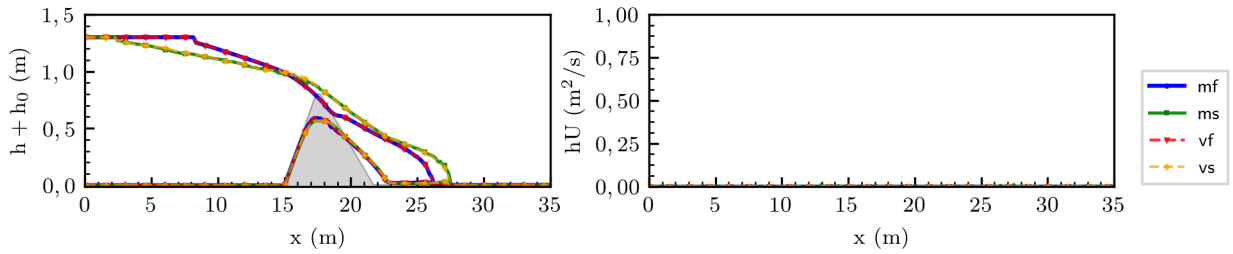
Figura E.61: Alturas, cota del lecho, caudales y volúmenes para prueba T7 de la Tabla 6.12.
 $t^* = t/t_{peak}$ y $Q^* = Q/Q_{t=peak}$



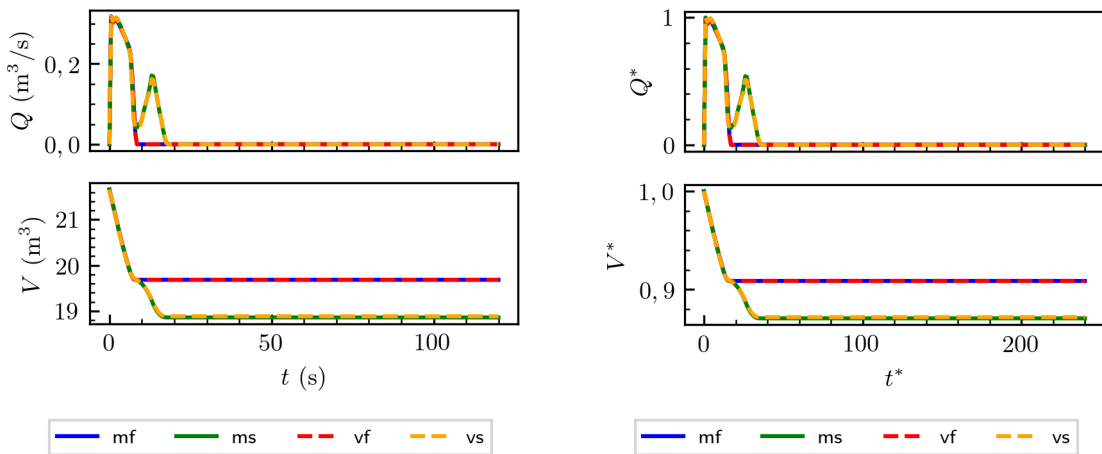
(a) $t = 0$ s.



(b) $t = 10$ s.



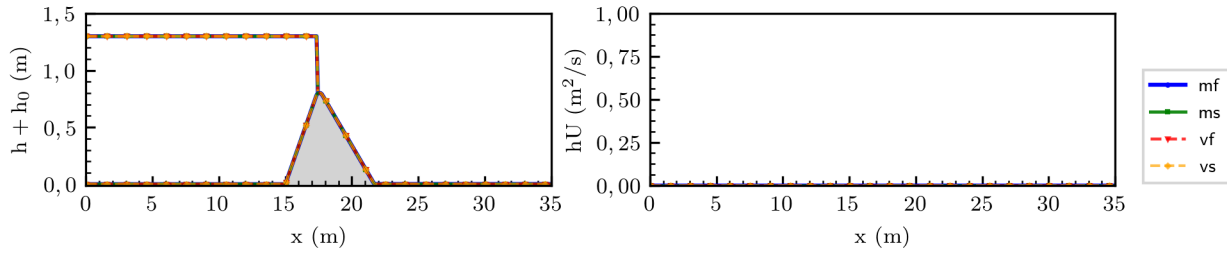
(c) $t = 30$ s.



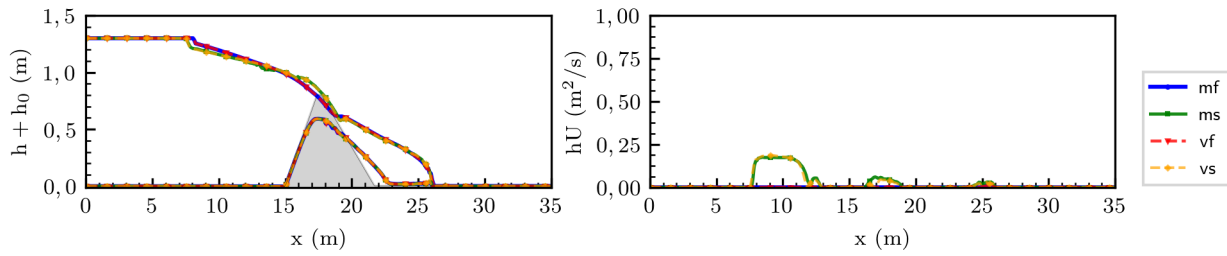
(d) Caudal y Volumen

(e) Caudal y Volumen adimensional

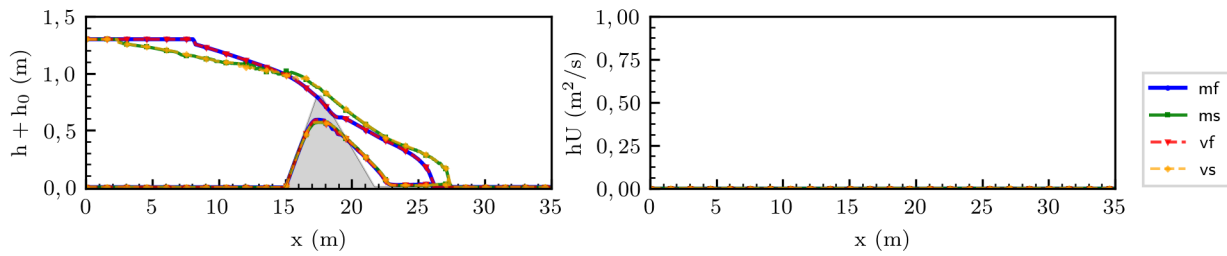
Figura E.62: Alturas, cota del lecho, caudales y volúmenes para prueba T8 de la Tabla 6.12.
 $t^* = t/t_{peak}$ y $Q^* = Q/Q_{t=peak}$



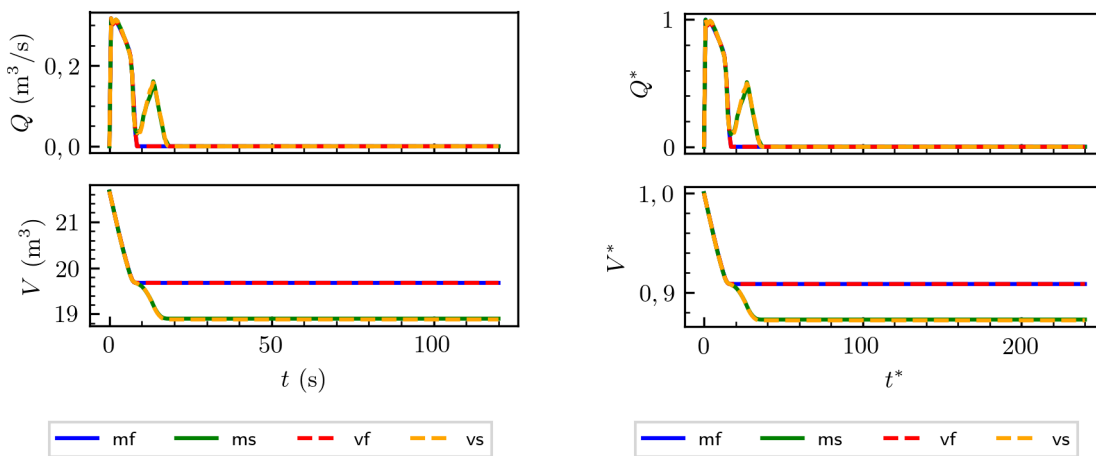
(a) $t = 0$ s.



(b) $t = 10$ s.



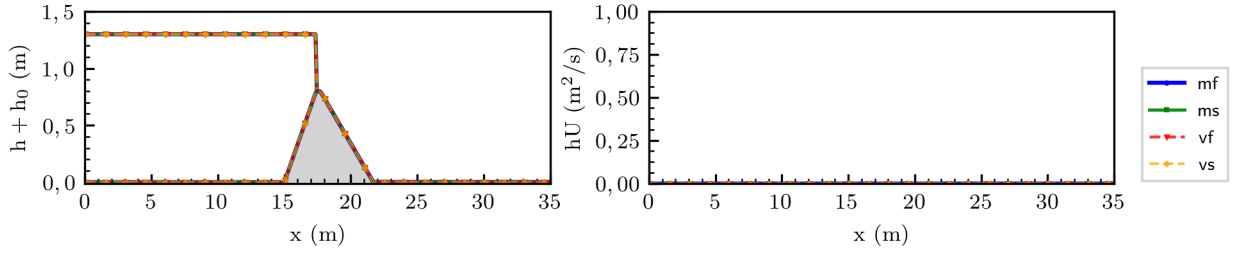
(c) $t = 30$ s.



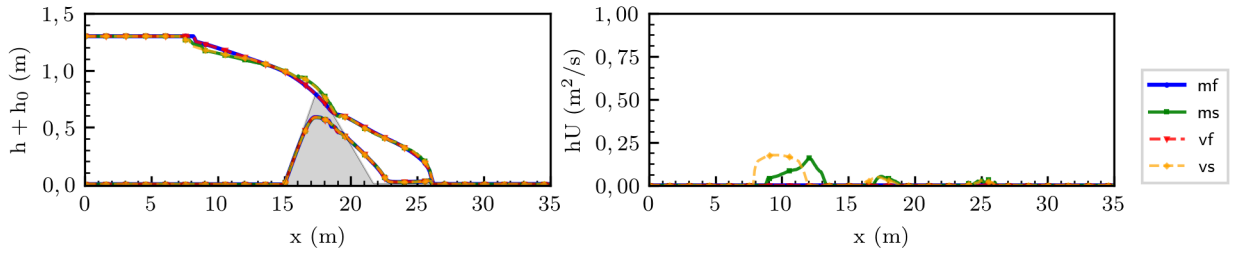
(d) Caudal y Volumen

(e) Caudal y Volumen adimensional

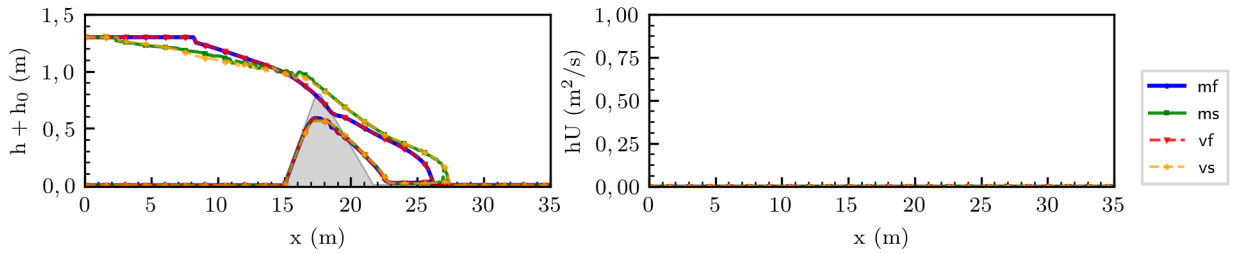
Figura E.63: Alturas, cota del lecho, caudales y volúmenes para prueba T9 de la Tabla 6.12.
 $t^* = t/t_{peak}$ y $Q^* = Q/Q_{t=peak}$



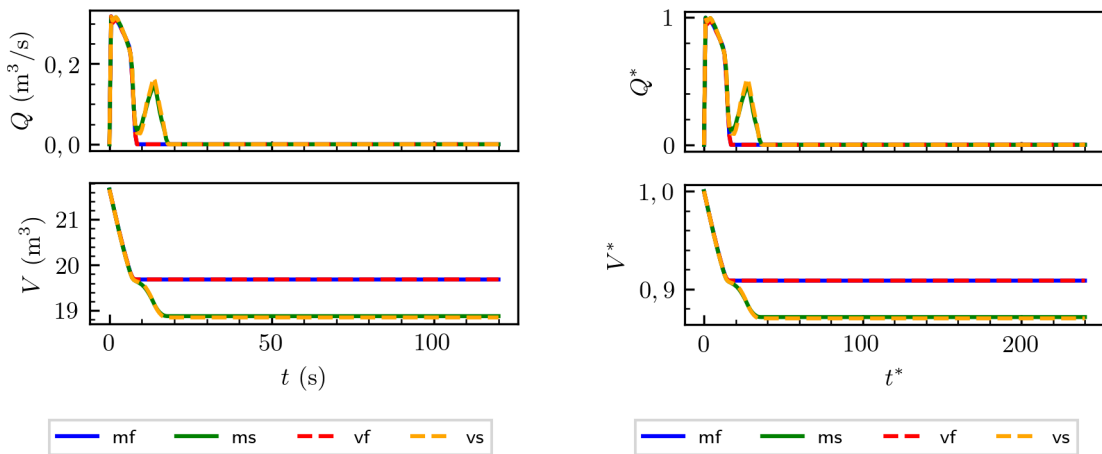
(a) $t = 0$ s.



(b) $t = 10$ s.



(c) $t = 30$ s.



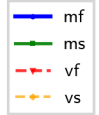
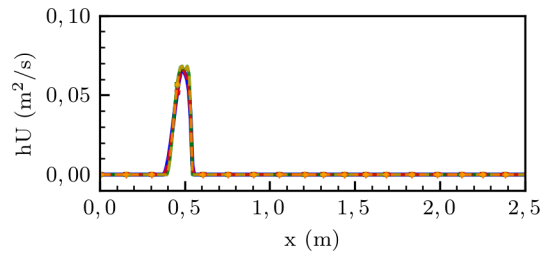
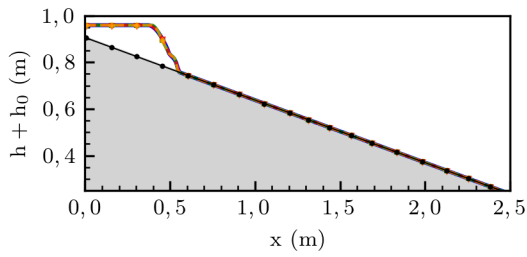
(d) Caudal y Volumen

(e) Caudal y Volumen adimensional

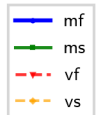
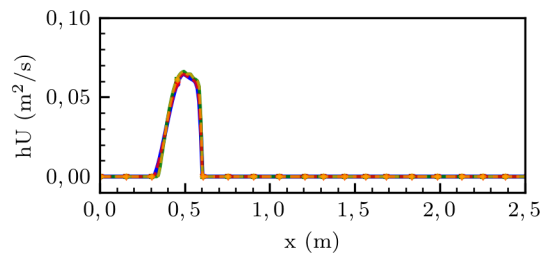
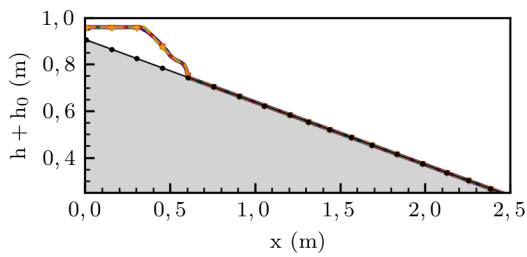
Figura E.64: Alturas, cota del lecho, caudales y volúmenes para prueba T10 de la Tabla 6.12.
 $t^* = t/t_{peak}$ y $Q^* = Q/Q_{t=peak}$

Anexo F

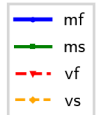
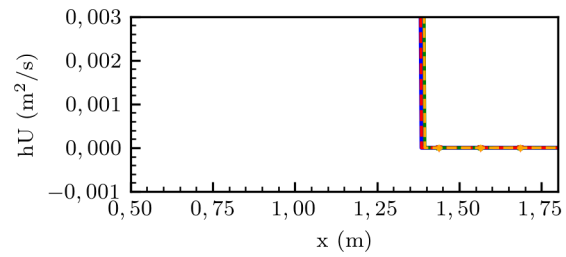
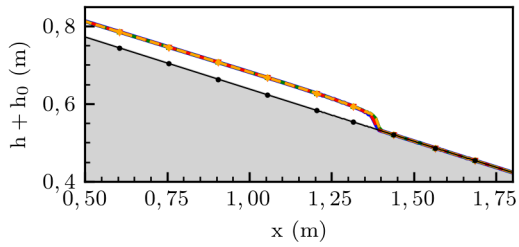
Figuras: Casos de validación



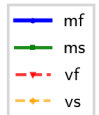
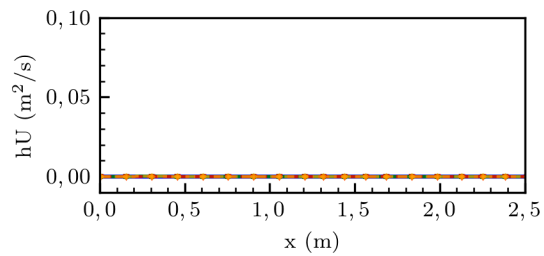
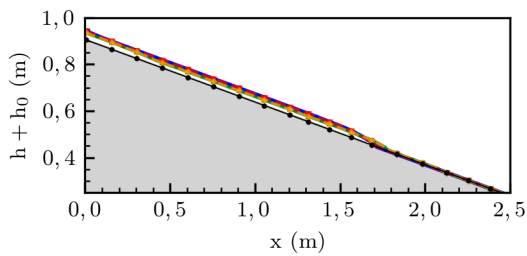
(a) $t = 0,05$ s.



(b) $t = 0,1$ s.

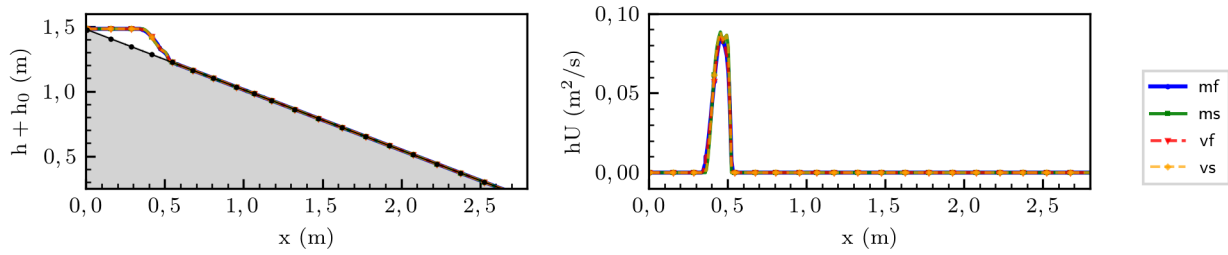


(c) $t = 1$ s.

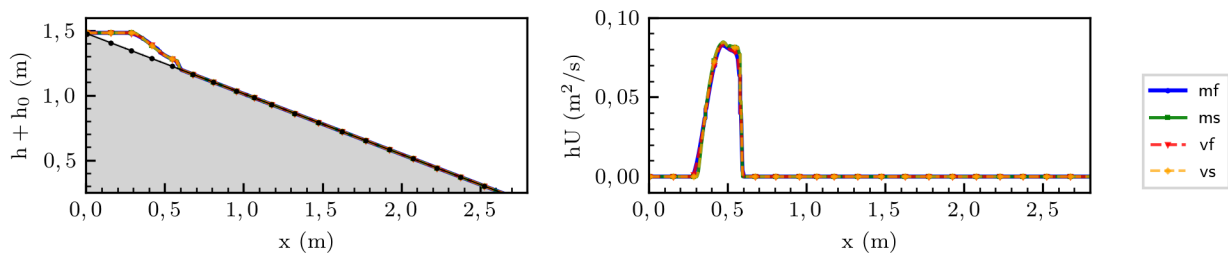


(d) $t = 30$ s.

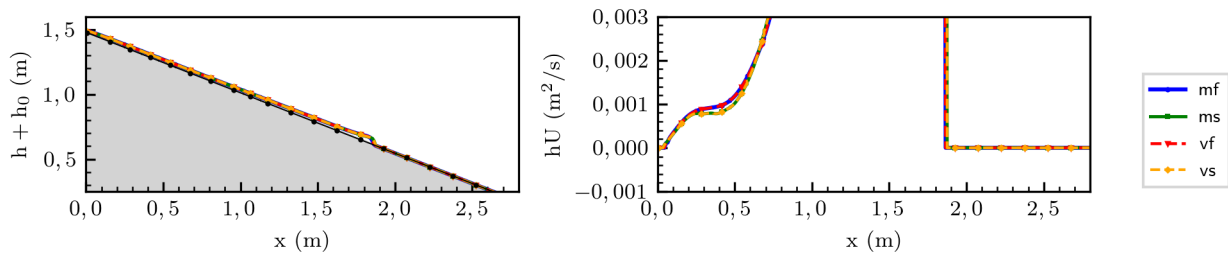
Figura F.1: Alturas, cota del lecho y caudales unitarios en prueba T1 de la Tabla 6.15.



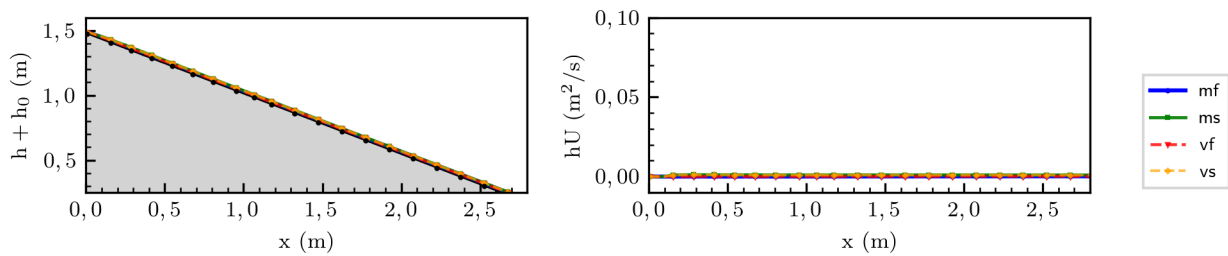
(a) $t = 0,05$ s.



(b) $t = 0,1$ s.

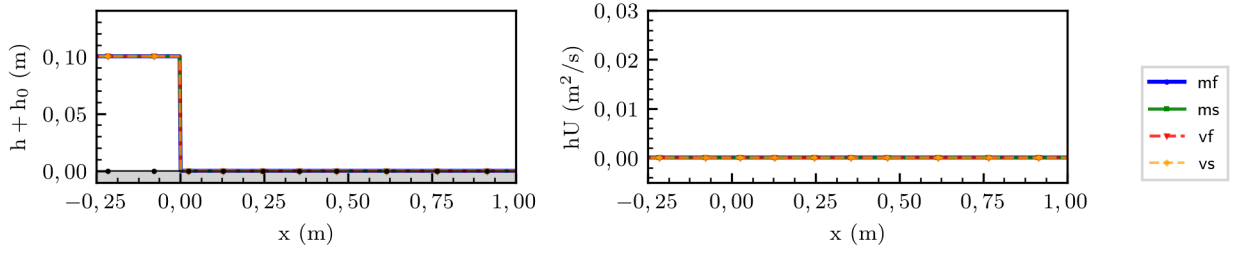


(c) $t = 1$ s.

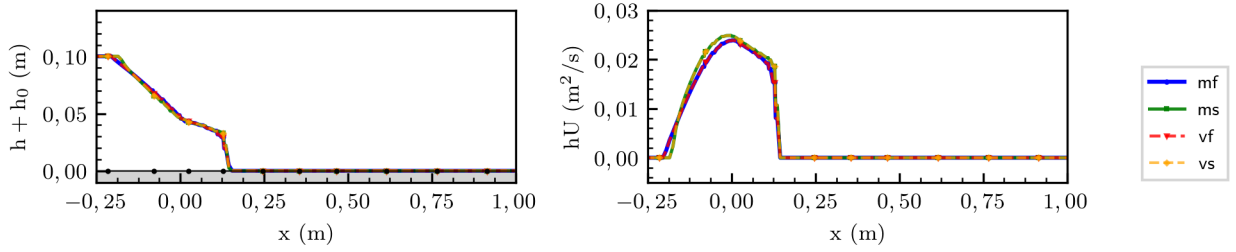


(d) $t = 30$ s.

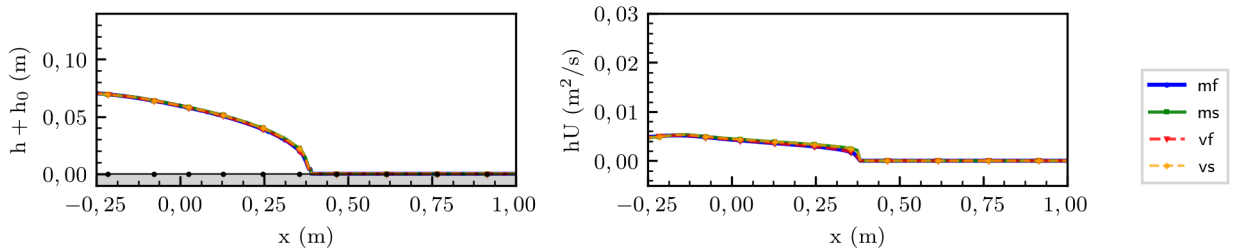
Figura F.2: Alturas, cota del lecho y caudales unitarios en prueba T2 de la Tabla 6.15.



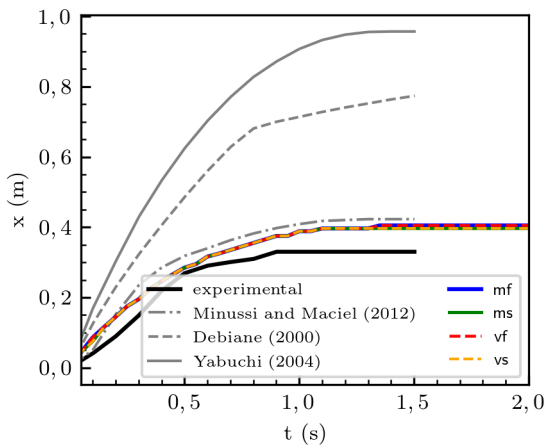
(a) $t = 0,0$ s.



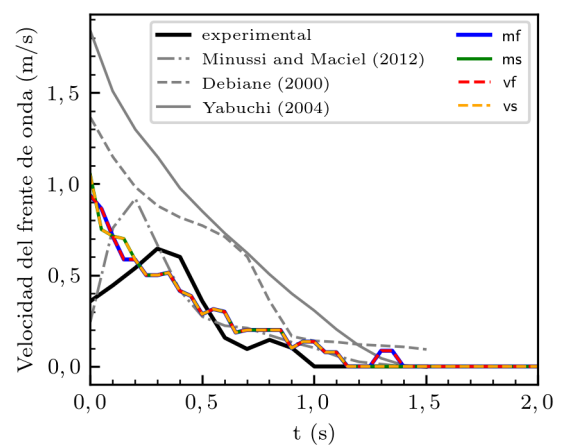
(b) $t = 0,2$ s.



(c) $t = 1,0$ s.

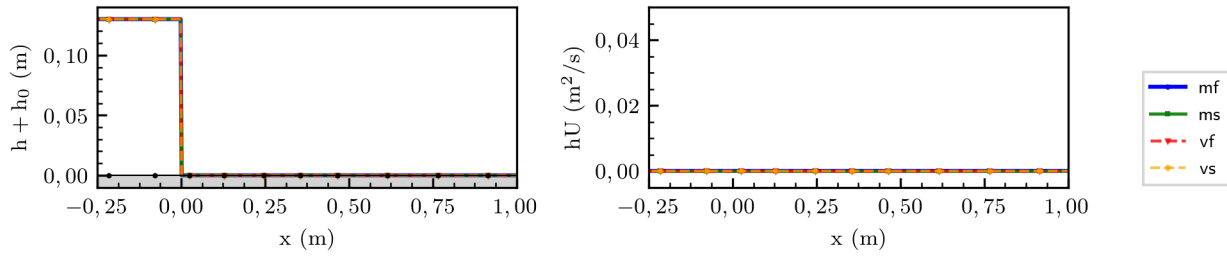


(d) Posición del frente de onda

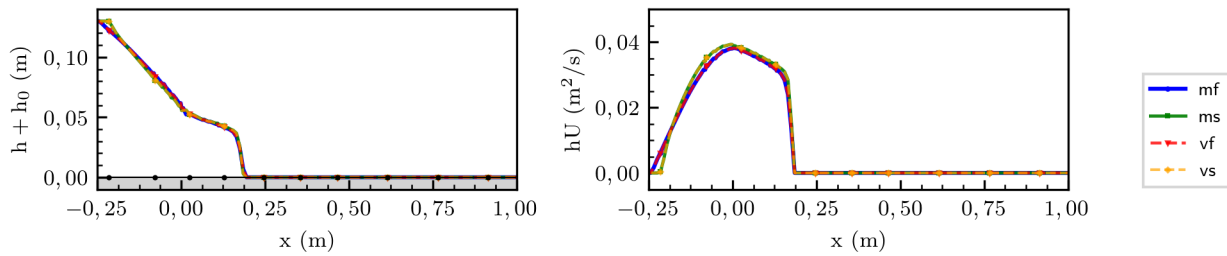


(e) Velocidad del frente de onda

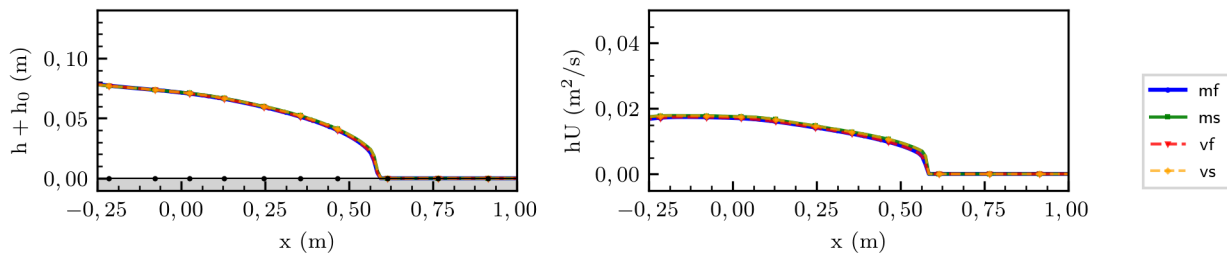
Figura F.3: Alturas, cota del lecho, caudales unitarios y posición del frente de onda para prueba T1 de la Tabla 6.16.



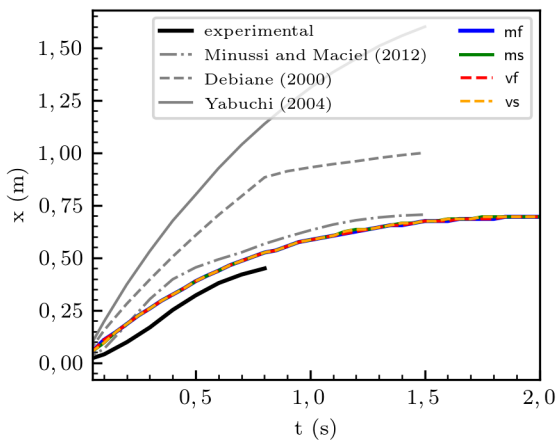
(a) $t = 0,0$ s.



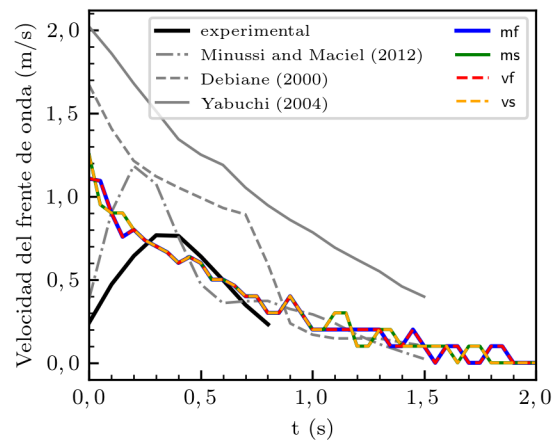
(b) $t = 0,2$ s.



(c) $t = 1,0$ s.

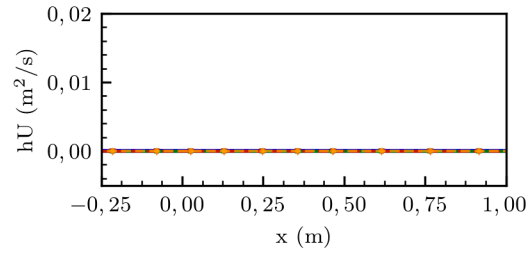
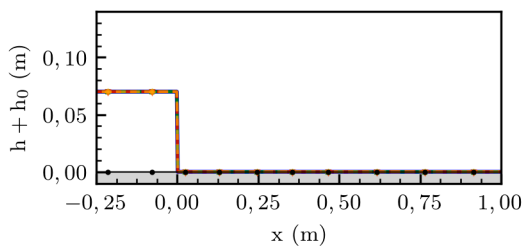


(d) Posición del frente de onda

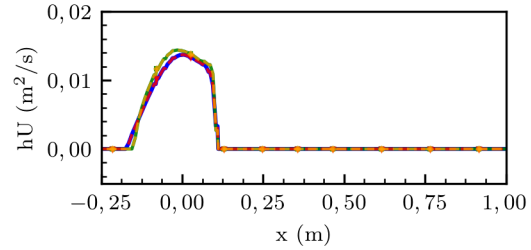
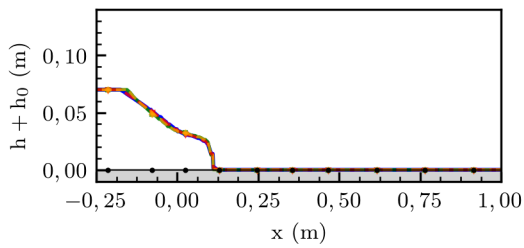


(e) Velocidad del frente de onda

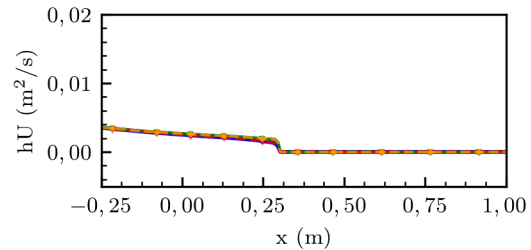
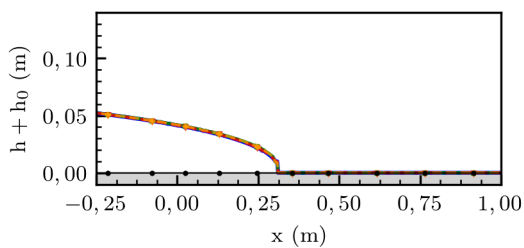
Figura F.4: Alturas, cota del lecho, caudales unitarios y posición del frente de onda para prueba T2 de la Tabla 6.16.



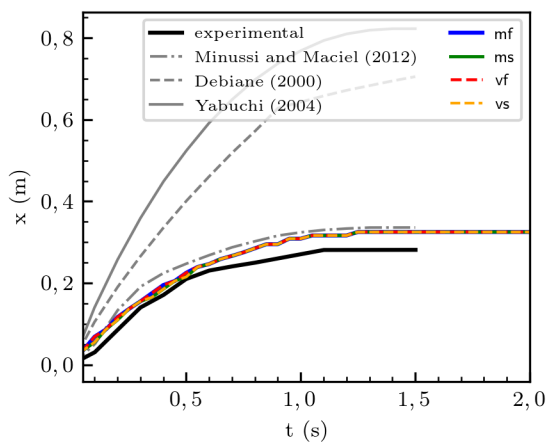
(a) $t = 0,0$ s.



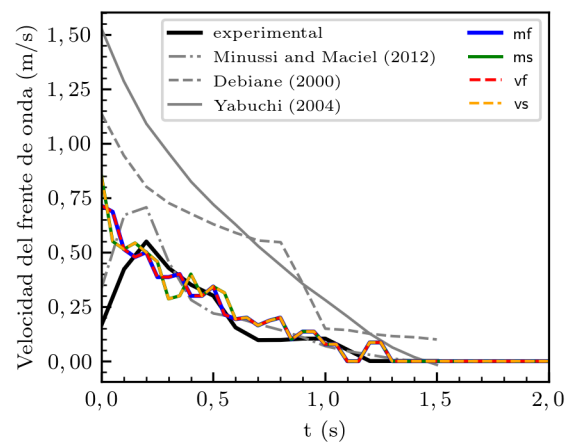
(b) $t = 0,2$ s.



(c) $t = 1,0$ s.

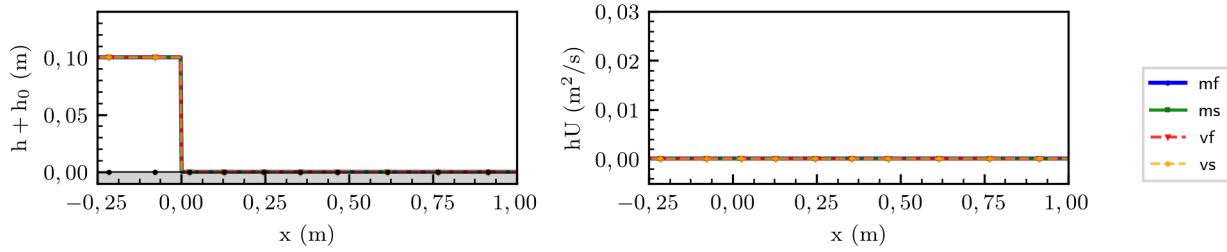


(d) Posición del frente de onda

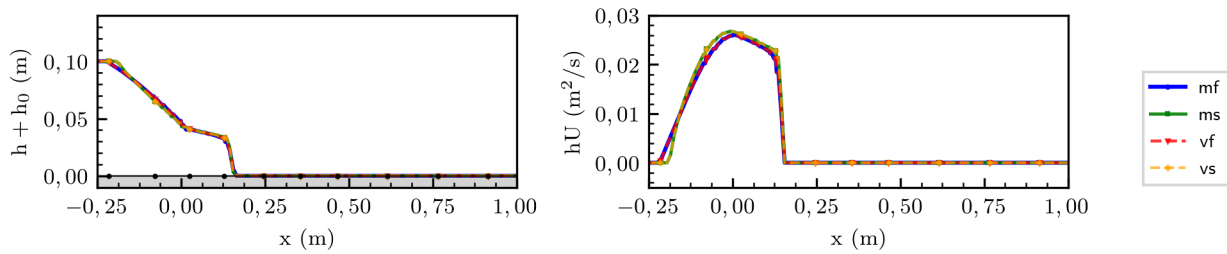


(e) Velocidad del frente de onda

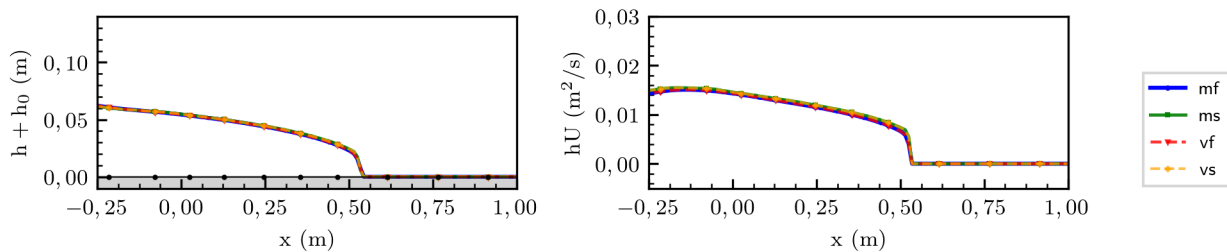
Figura F.5: Alturas, cota del lecho, caudales unitarios y posición del frente de onda para prueba T3 de la Tabla 6.16.



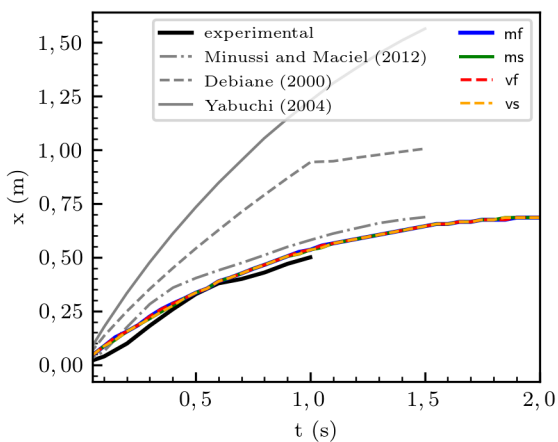
(a) $t = 0,0$ s.



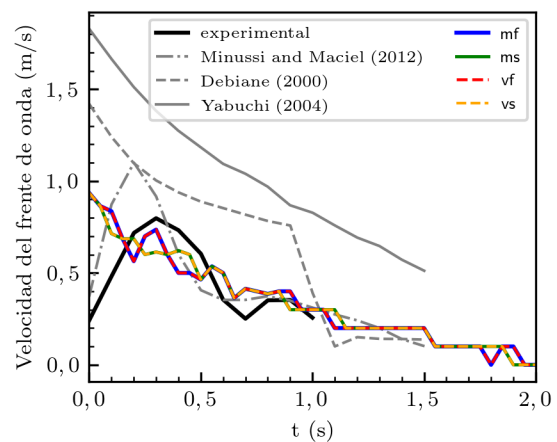
(b) $t = 0,2$ s.



(c) $t = 1,0$ s.

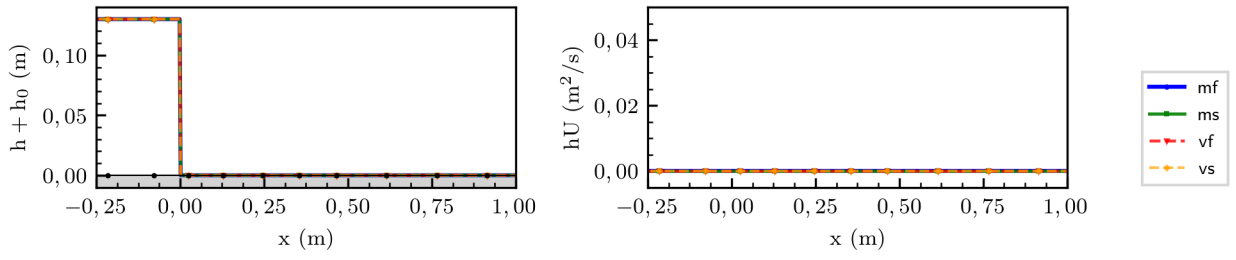


(d) Posición del frente de onda

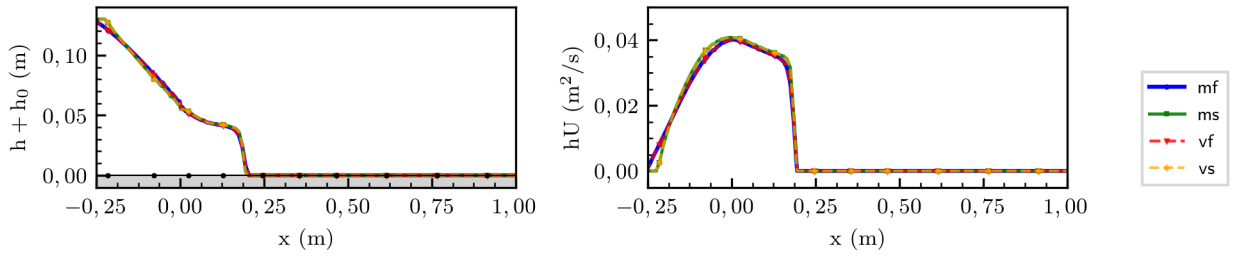


(e) Velocidad del frente de onda

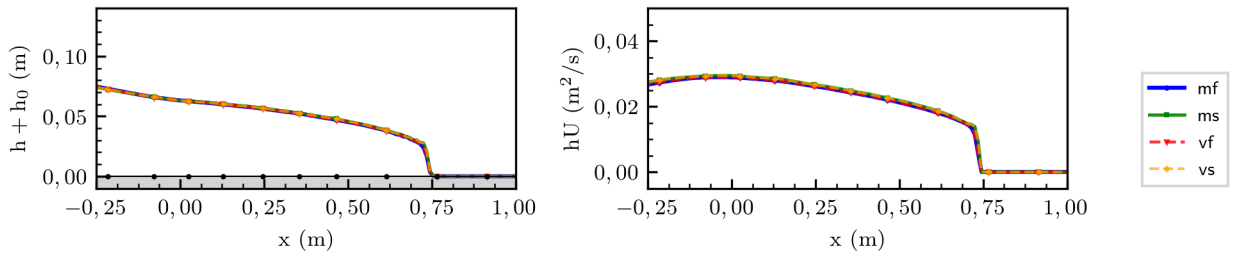
Figura F.6: Alturas, cota del lecho, caudales unitarios y posición del frente de onda para prueba T4 de la Tabla 6.16.



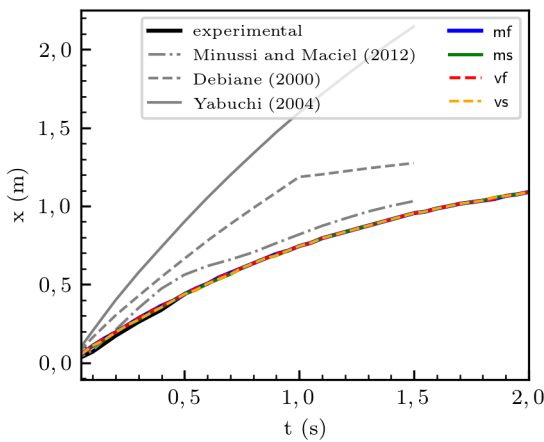
(a) $t = 0,0$ s.



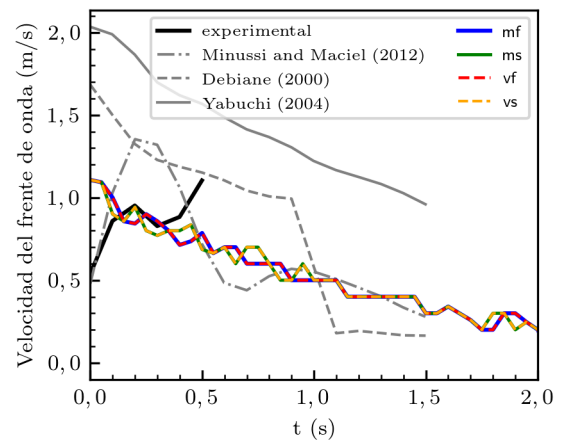
(b) $t = 0,2$ s.



(c) $t = 1,0$ s.

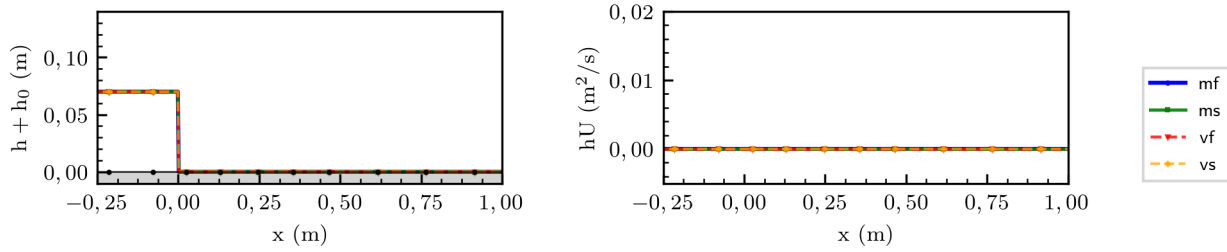


(d) Posición del frente de onda

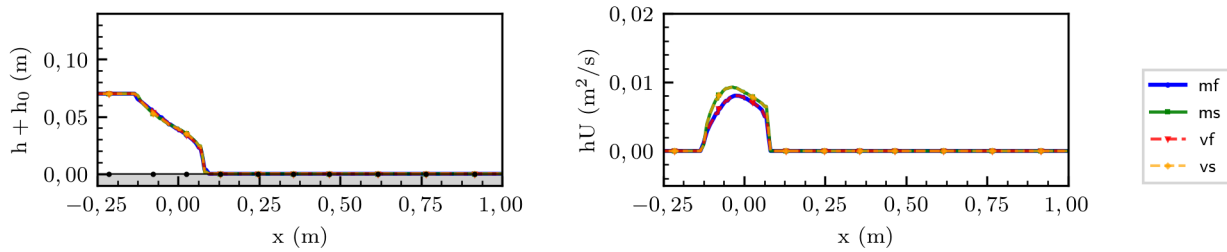


(e) Velocidad del frente de onda

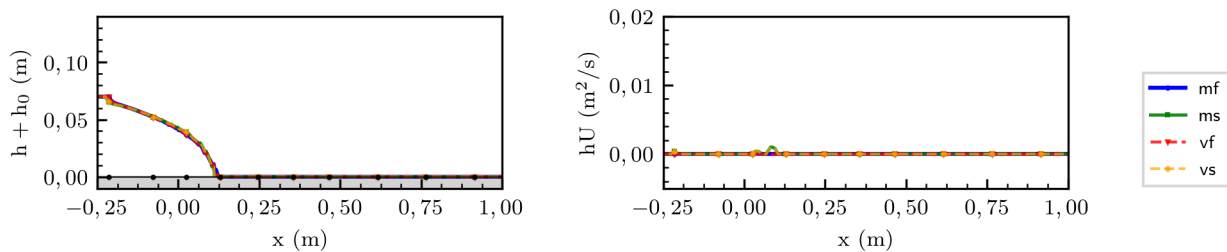
Figura F.7: Alturas, cota del lecho, caudales unitarios y posición del frente de onda para prueba T5 de la Tabla 6.16.



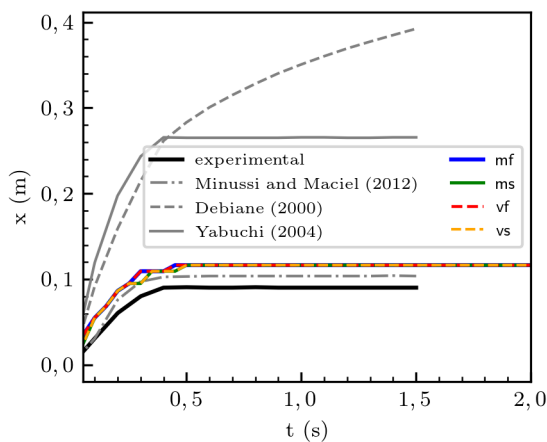
(a) $t = 0,0$ s.



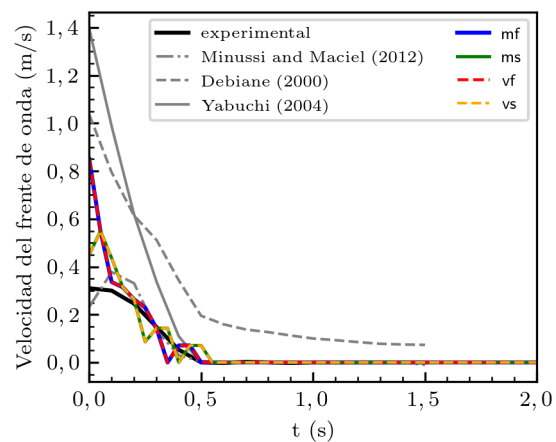
(b) $t = 0,2$ s.



(c) $t = 1,0$ s.

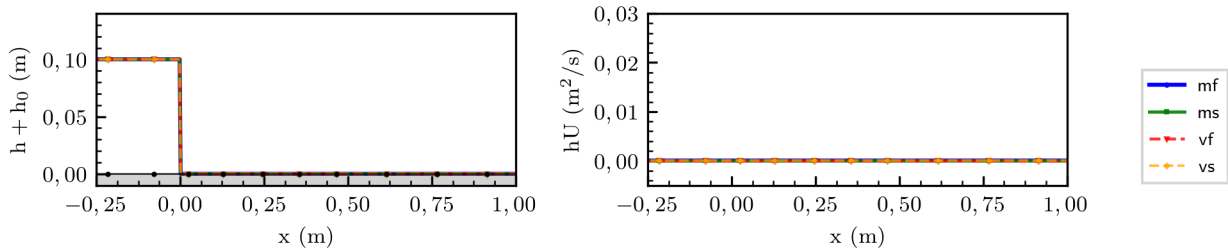


(d) Posición del frente de onda

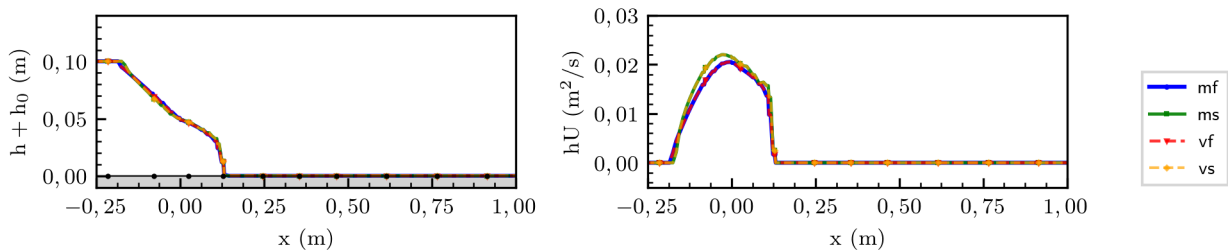


(e) Velocidad del frente de onda

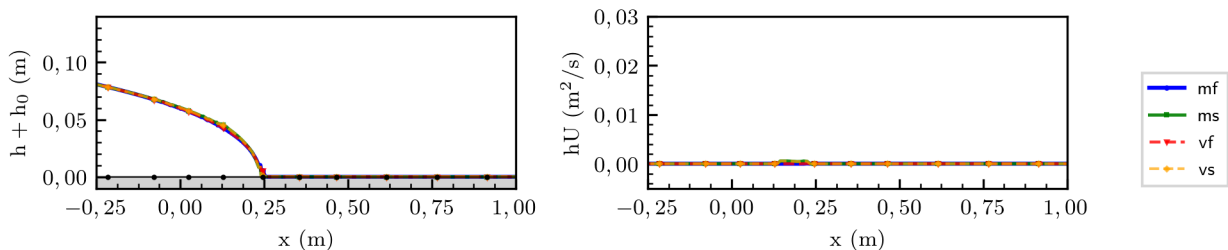
Figura F.8: Alturas, cota del lecho, caudales unitarios y posición del frente de onda para prueba T6 de la Tabla 6.16.



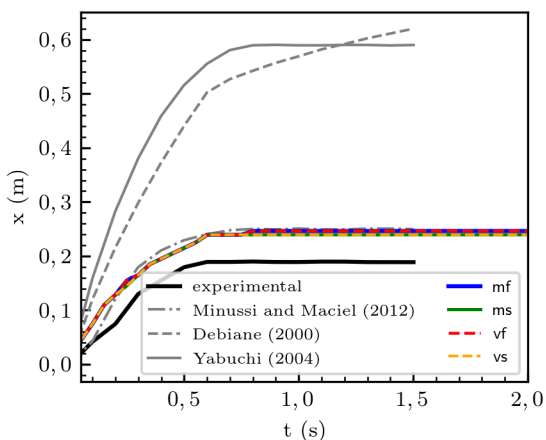
(a) $t = 0,0$ s.



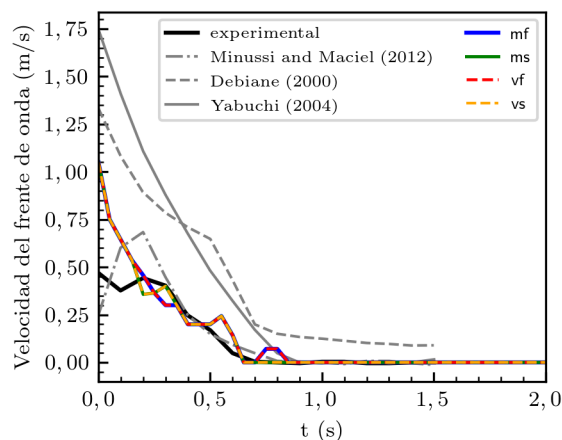
(b) $t = 0,2$ s.



(c) $t = 1,0$ s.

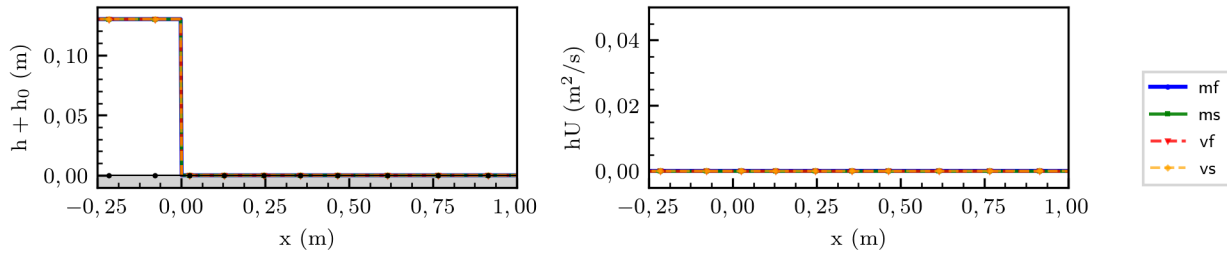


(d) Posición del frente de onda

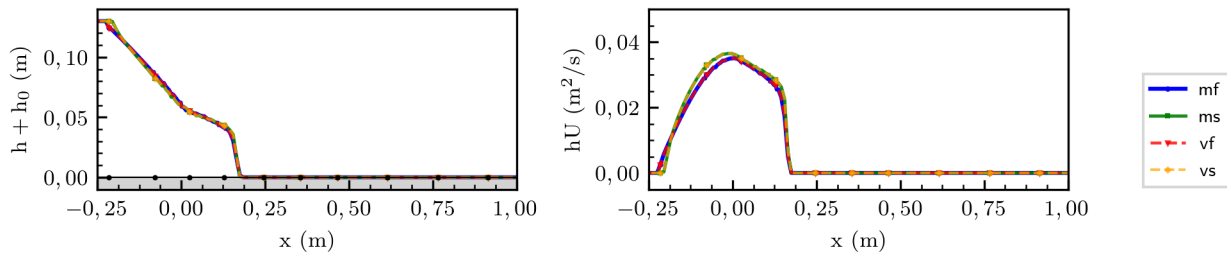


(e) Velocidad del frente de onda

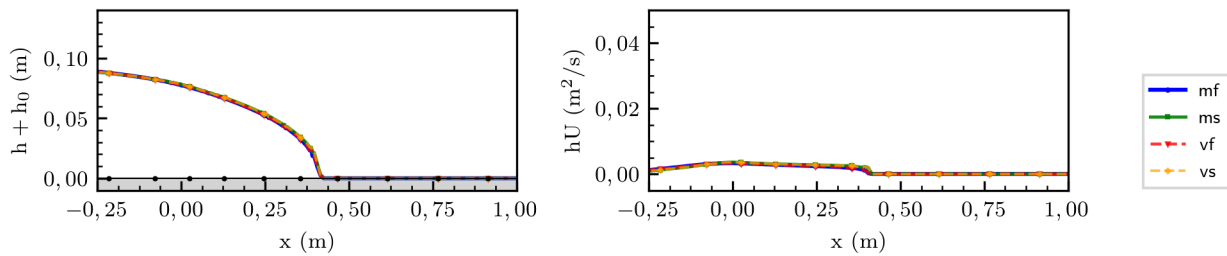
Figura F.9: Alturas, cota del lecho, caudales unitarios y posición del frente de onda para prueba T7 de la Tabla 6.16.



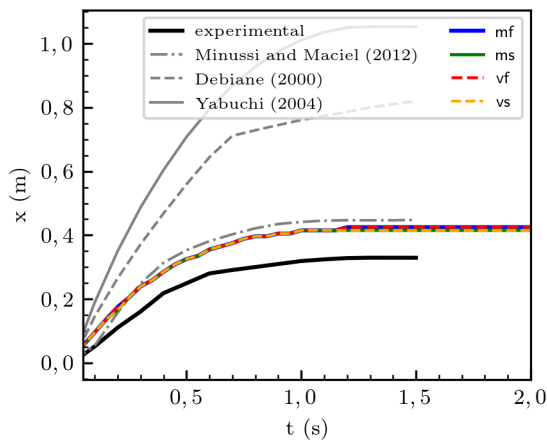
(a) $t = 0,0$ s.



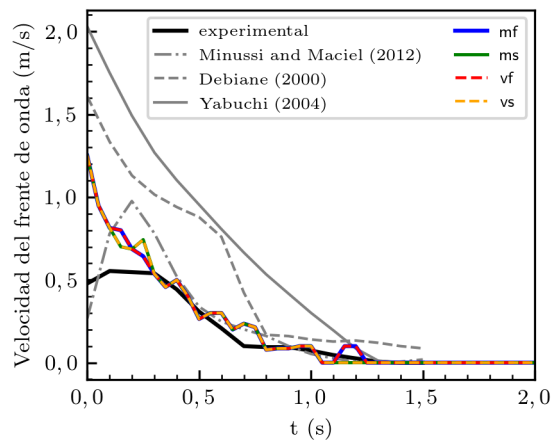
(b) $t = 0,2$ s.



(c) $t = 1,0$ s.

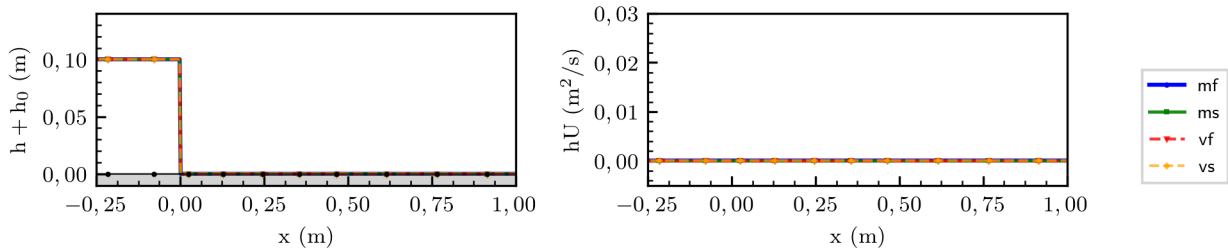


(d) Posición del frente de onda

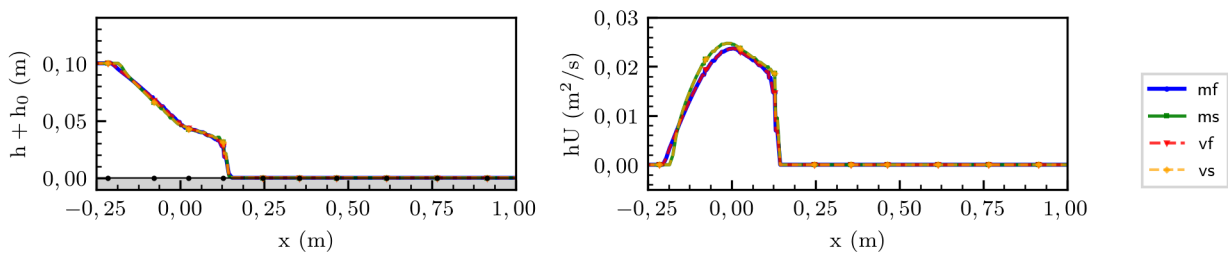


(e) Velocidad del frente de onda

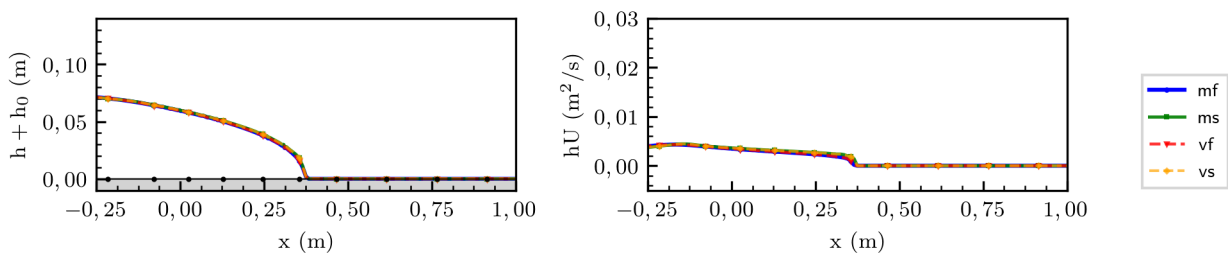
Figura F.10: Alturas, cota del lecho, caudales unitarios y posición del frente de onda para prueba T8 de la Tabla 6.16.



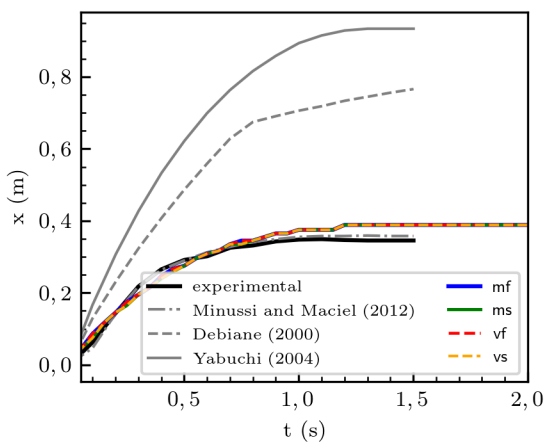
(a) $t = 0,0$ s.



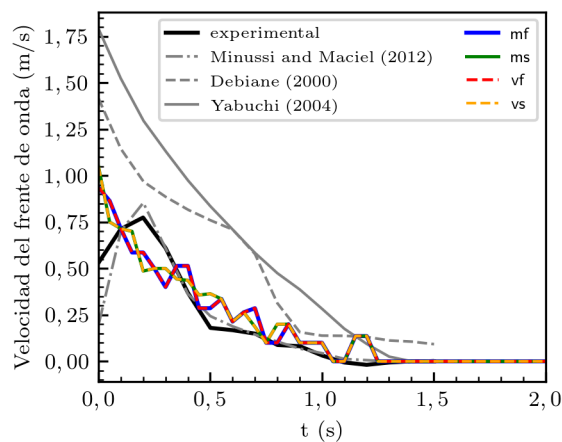
(b) $t = 0,2$ s.



(c) $t = 1,0$ s.

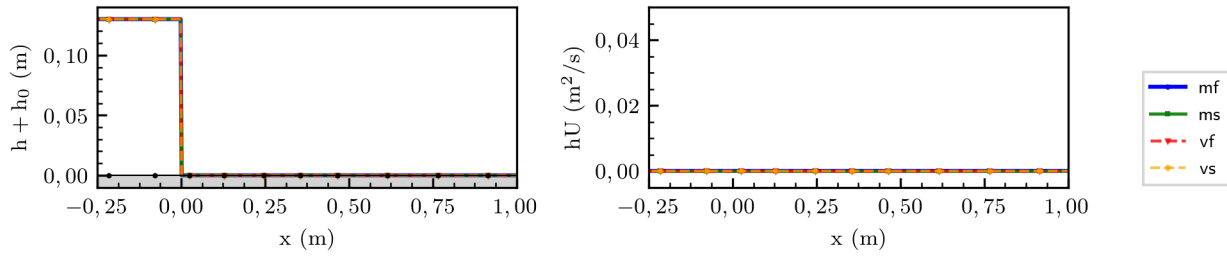


(d) Posición del frente de onda

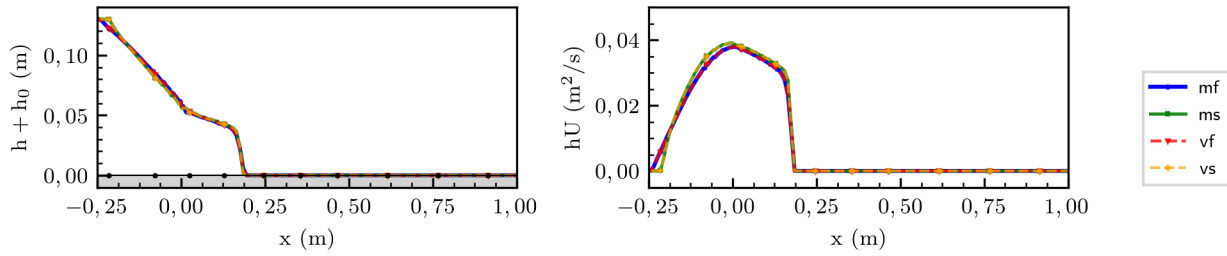


(e) Velocidad del frente de onda

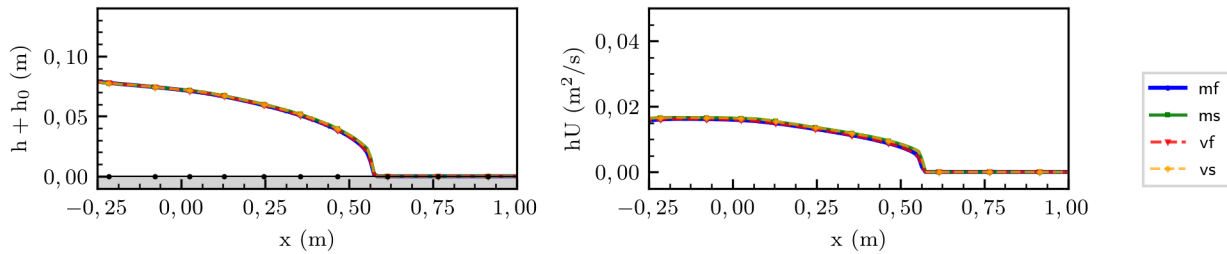
Figura F.11: Alturas, cota del lecho, caudales unitarios y posición del frente de onda para prueba T9 de la Tabla 6.16.



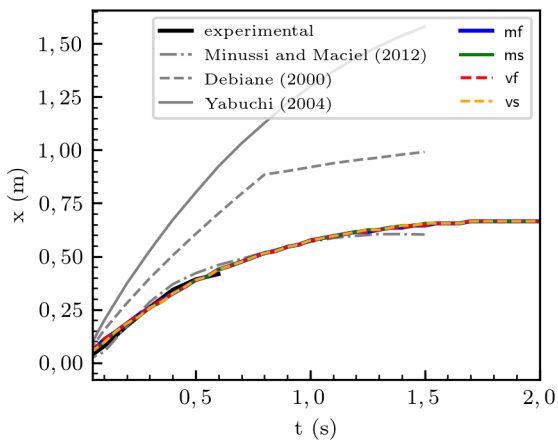
(a) $t = 0,0$ s.



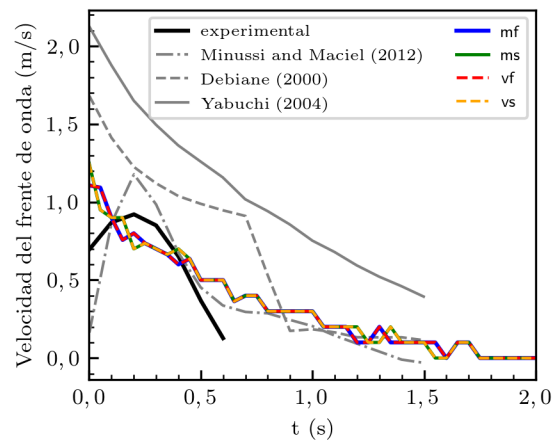
(b) $t = 0,2$ s.



(c) $t = 1,0$ s.

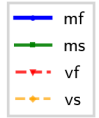
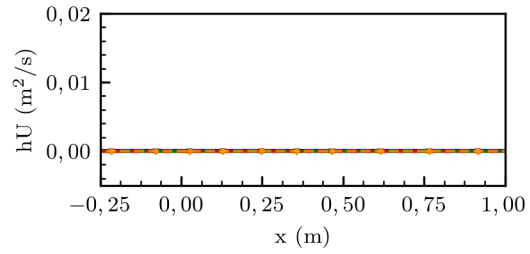
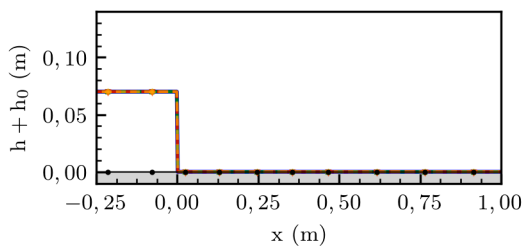


(d) Posición del frente de onda

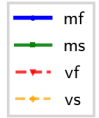
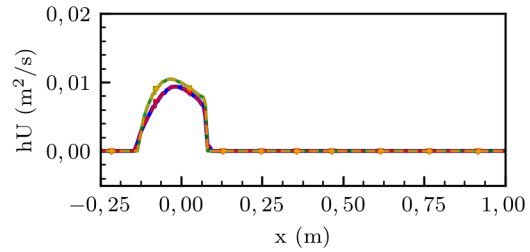
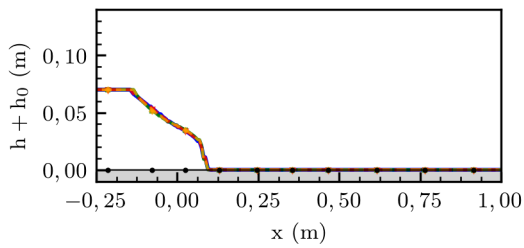


(e) Velocidad del frente de onda

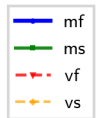
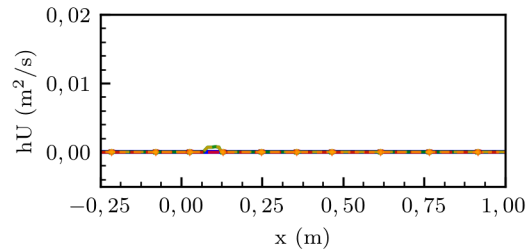
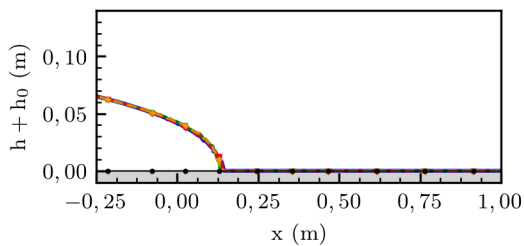
Figura F.12: Alturas, cota del lecho, caudales unitarios y posición del frente de onda para prueba T10 de la Tabla 6.16.



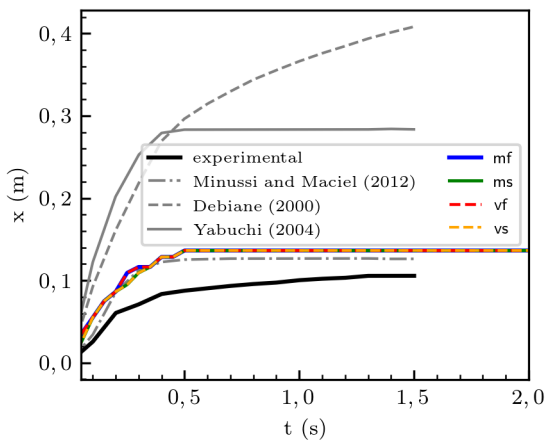
(a) $t = 0,0$ s.



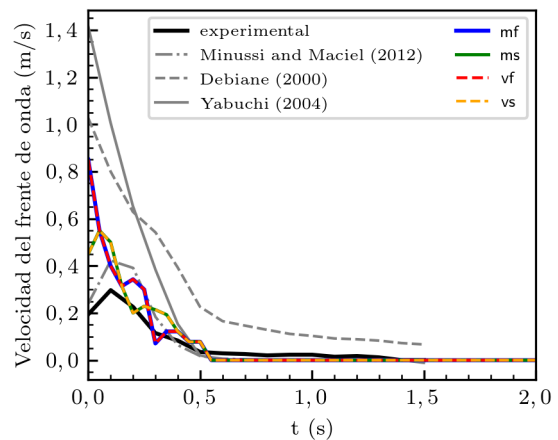
(b) $t = 0,2$ s.



(c) $t = 1,0$ s.

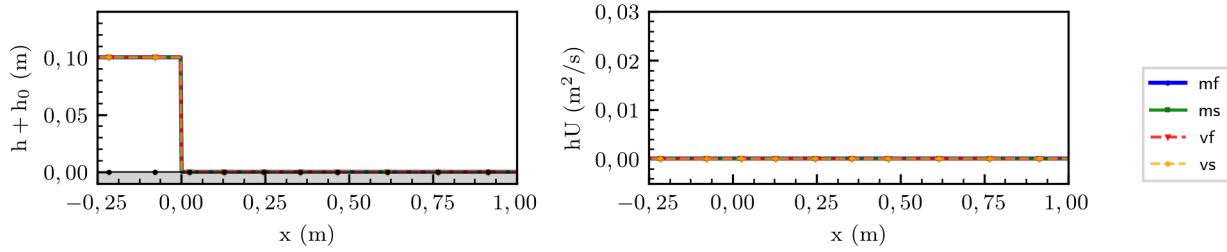


(d) Posición del frente de onda

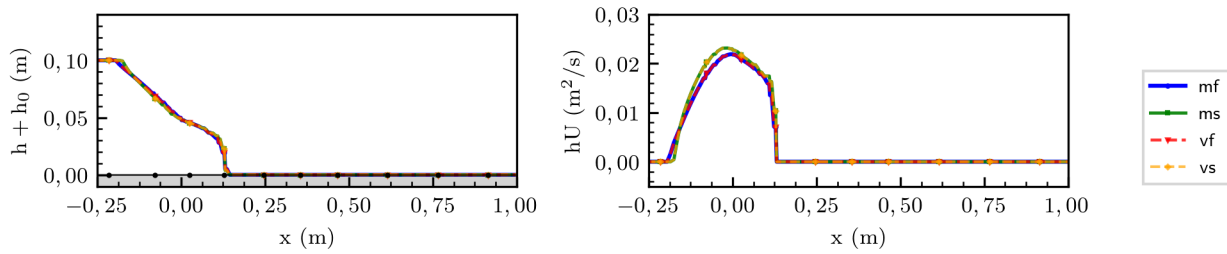


(e) Velocidad del frente de onda

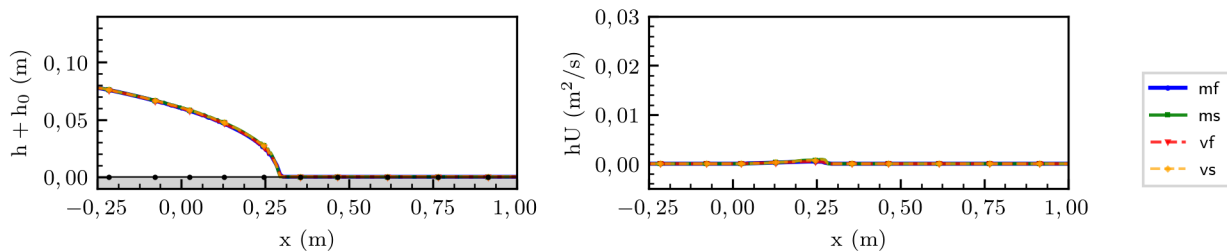
Figura F.13: Alturas, cota del lecho, caudales unitarios y posición del frente de onda para prueba T11 de la Tabla 6.16.



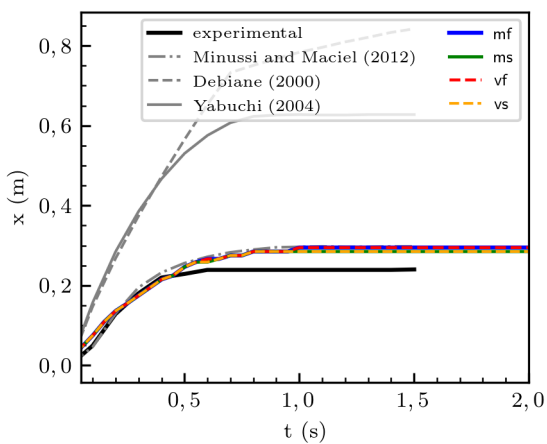
(a) $t = 0,0$ s.



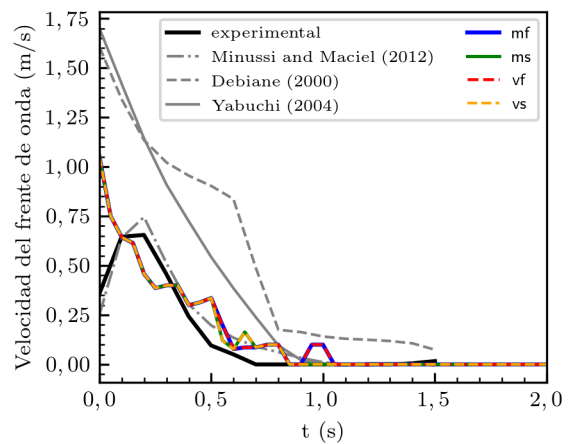
(b) $t = 0,2$ s.



(c) $t = 1,0$ s.

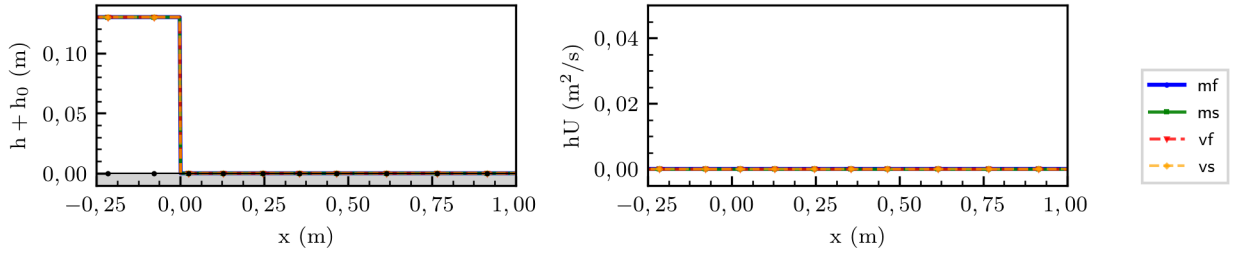


(d) Posición del frente de onda

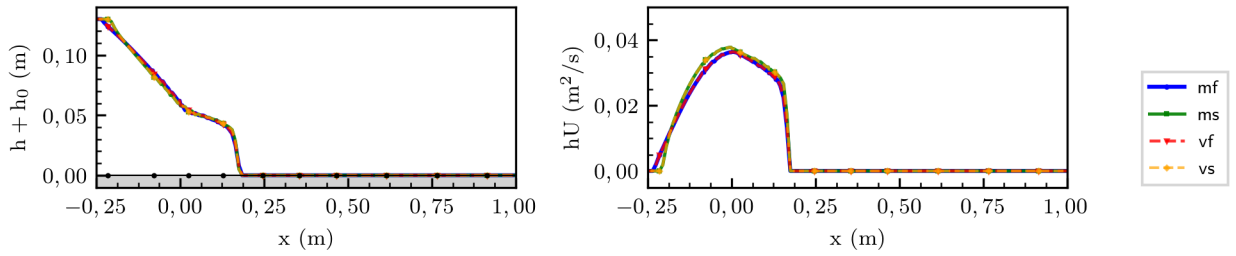


(e) Velocidad del frente de onda

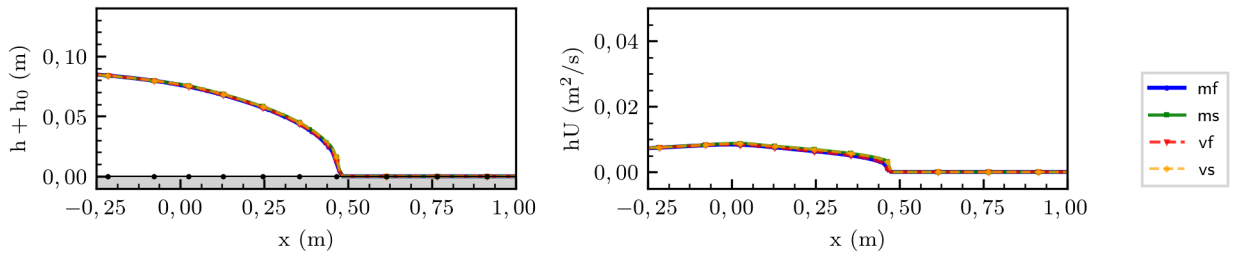
Figura F.14: Alturas, cota del lecho, caudales unitarios y posición del frente de onda para prueba T12 de la Tabla 6.16.



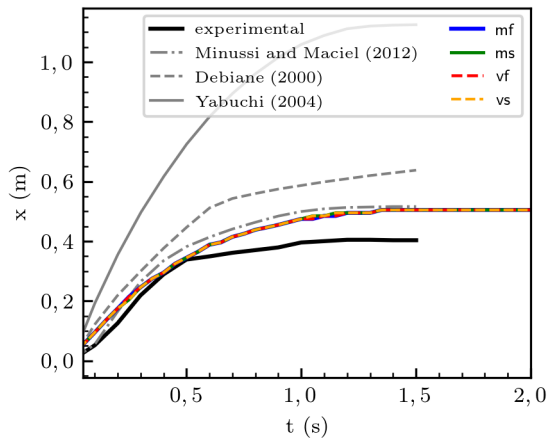
(a) $t = 0,0$ s.



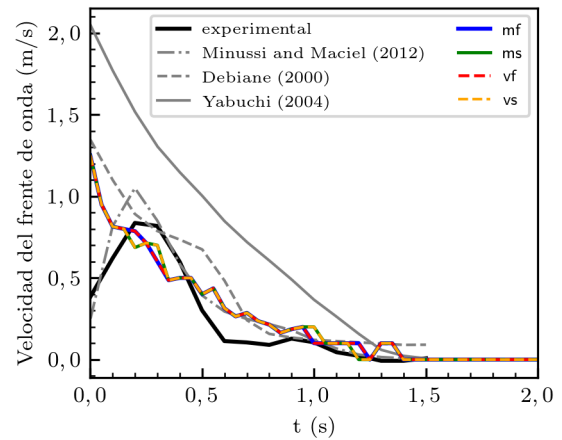
(b) $t = 0,2$ s.



(c) $t = 1,0$ s.



(d) Posición del frente de onda



(e) Velocidad del frente de onda

Figura F.15: Alturas, cota del lecho, caudales unitarios y posición del frente de onda para prueba T13 de la Tabla 6.16.

Anexo G

Figuras: Antecedentes de caso de aplicación

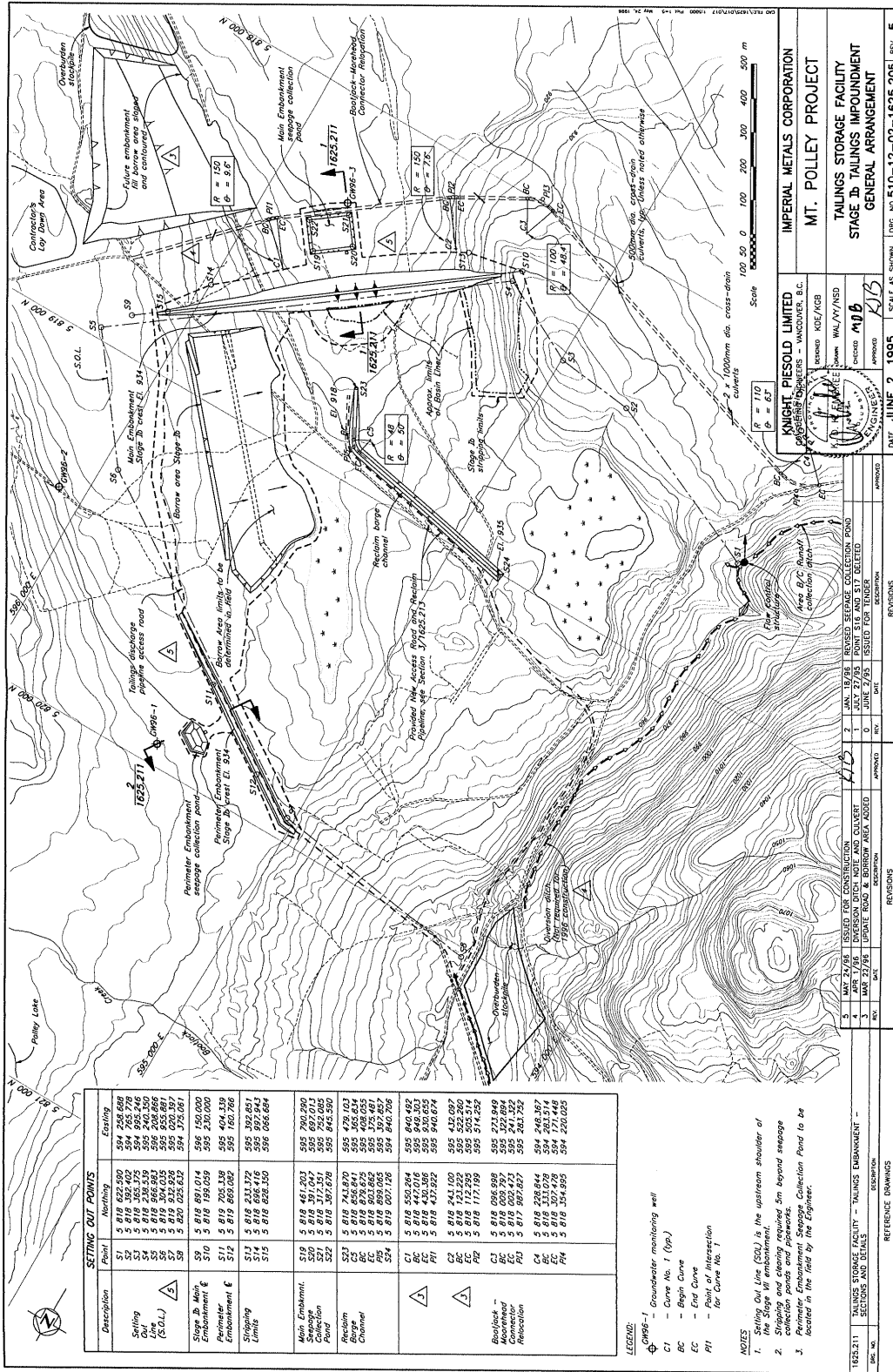
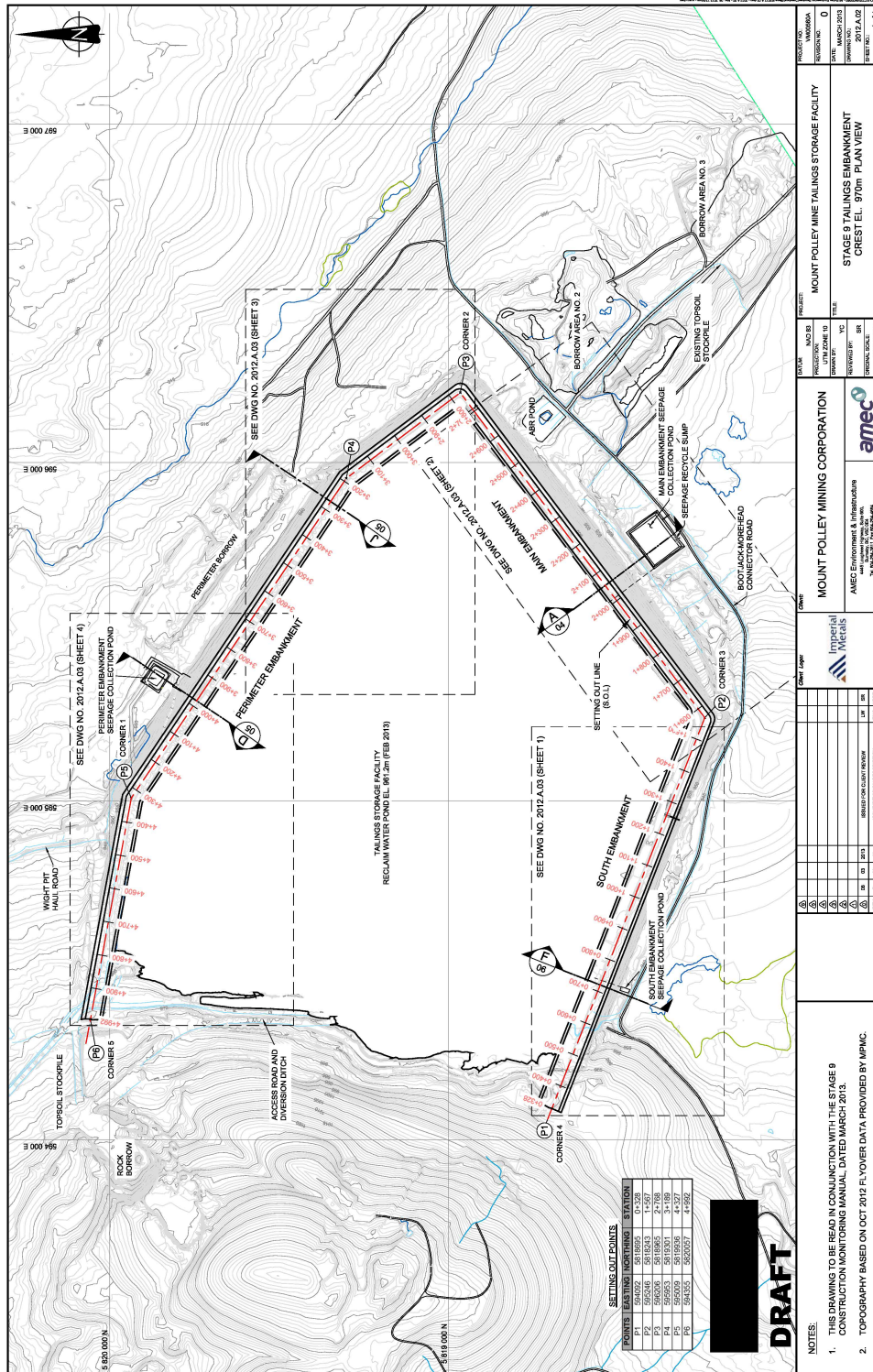


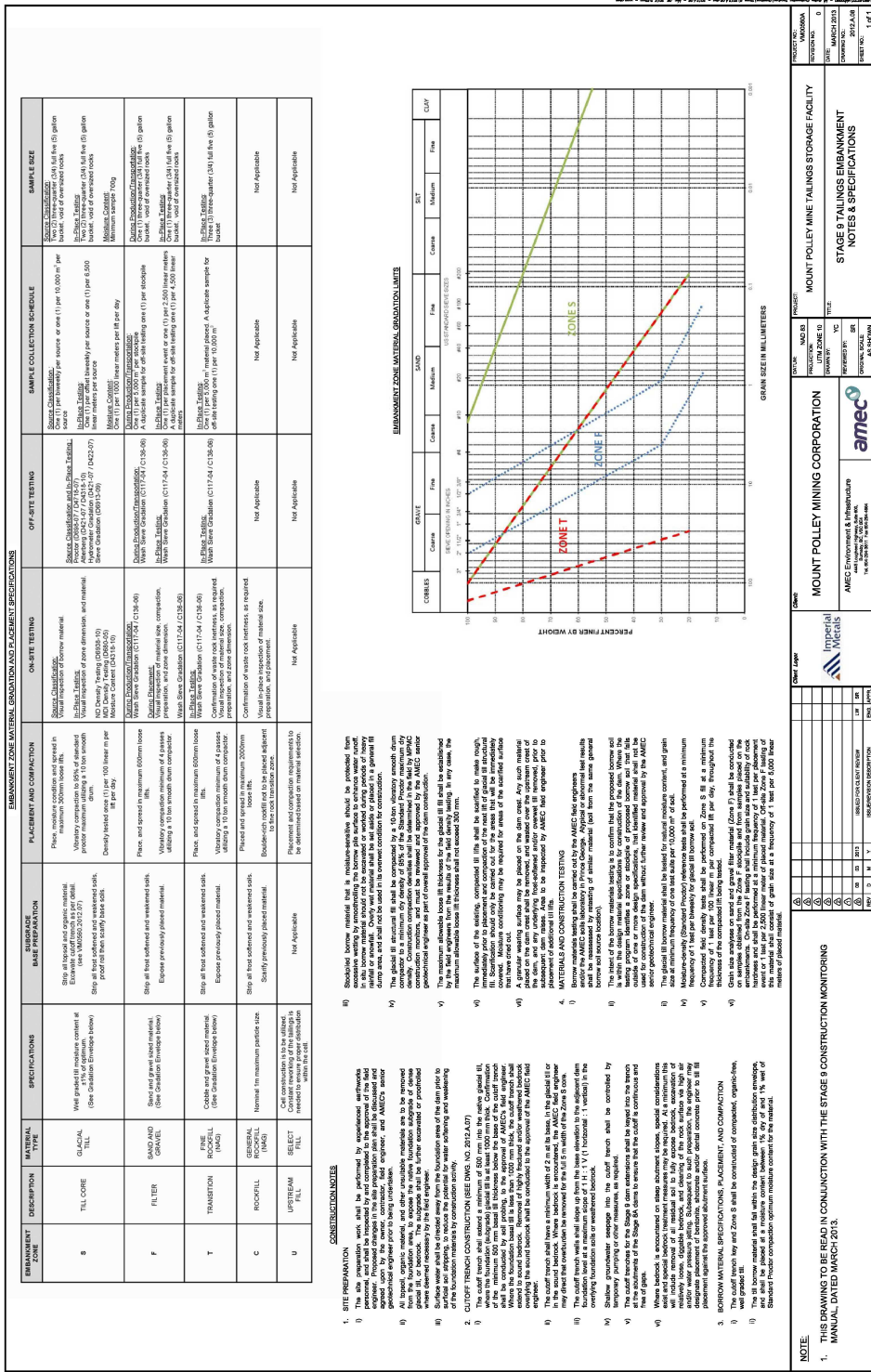
Figura G.1: Vista en planta de etapa temprana de construcciones del depósito de relaves de la Mina Mount Polley. Fuente: [https://www.mountpolleyreviewpanel.ca/supporting-information/background-information/](https://www.mountpolleyreviewpanel.ca/supporting-information/background-information) Doc. MP00049.



AMEC010624_0004

Figura G.2: Vista en planta de diseño de expansión de depósitos de relave de la Mina Mount Polley. Fuente: <https://www.mountpolleyreviewpanel.ca/supporting-information/background-information> Doc. AMEC00169.

Figura G.3: Granulometrias de muro en plan de expansión de tamaño de muro de muro. Fuente: https://www.mountpolleyreviewpanel.ca/supporting-information/background-information Doc. AMEC00169.



Anexo H

Figuras: Caso de aplicación

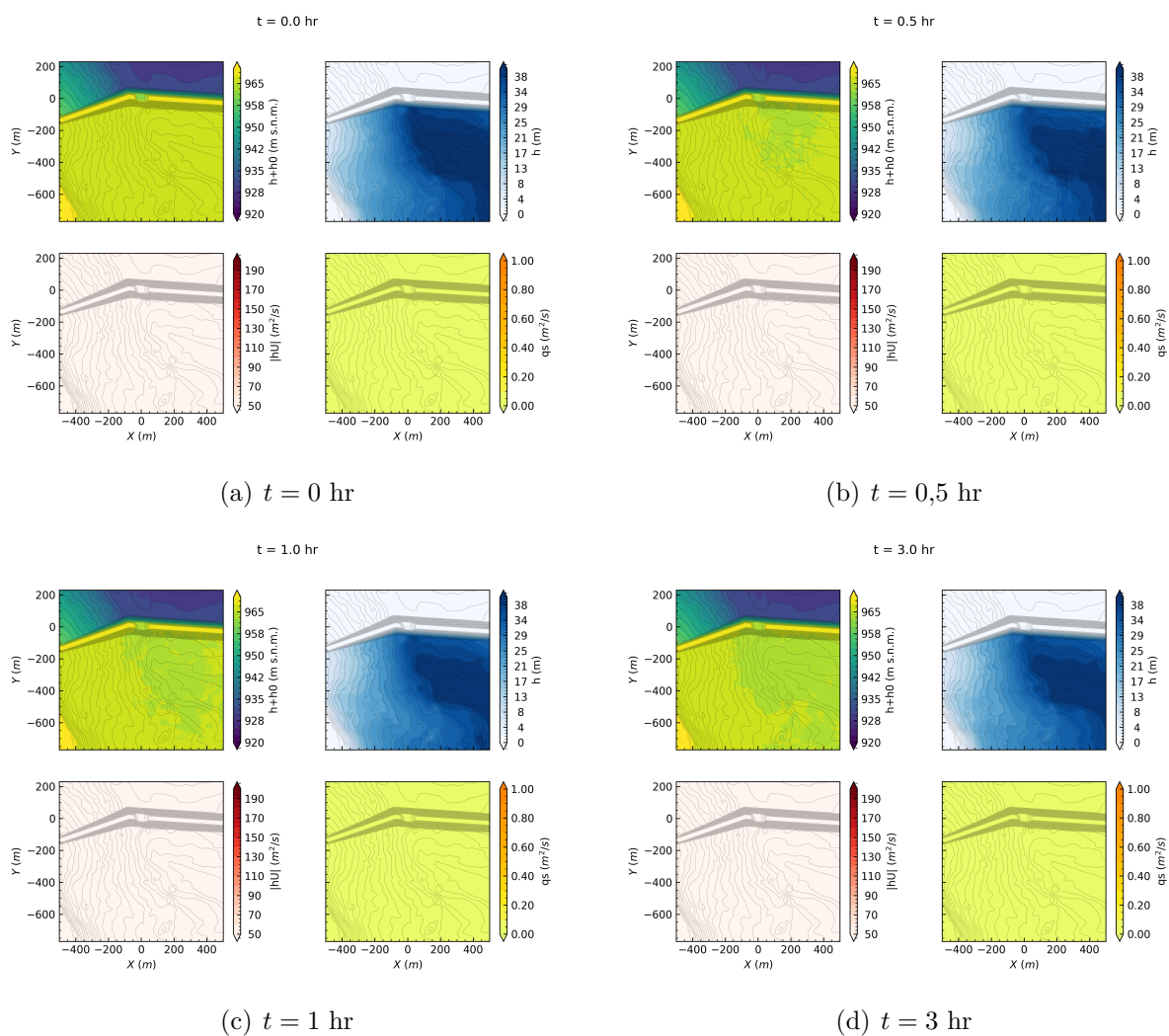


Figura H.1: Campos en torno a la brecha de falla para prueba **5mf** de la Tabla 6.22 para distintos tiempos.

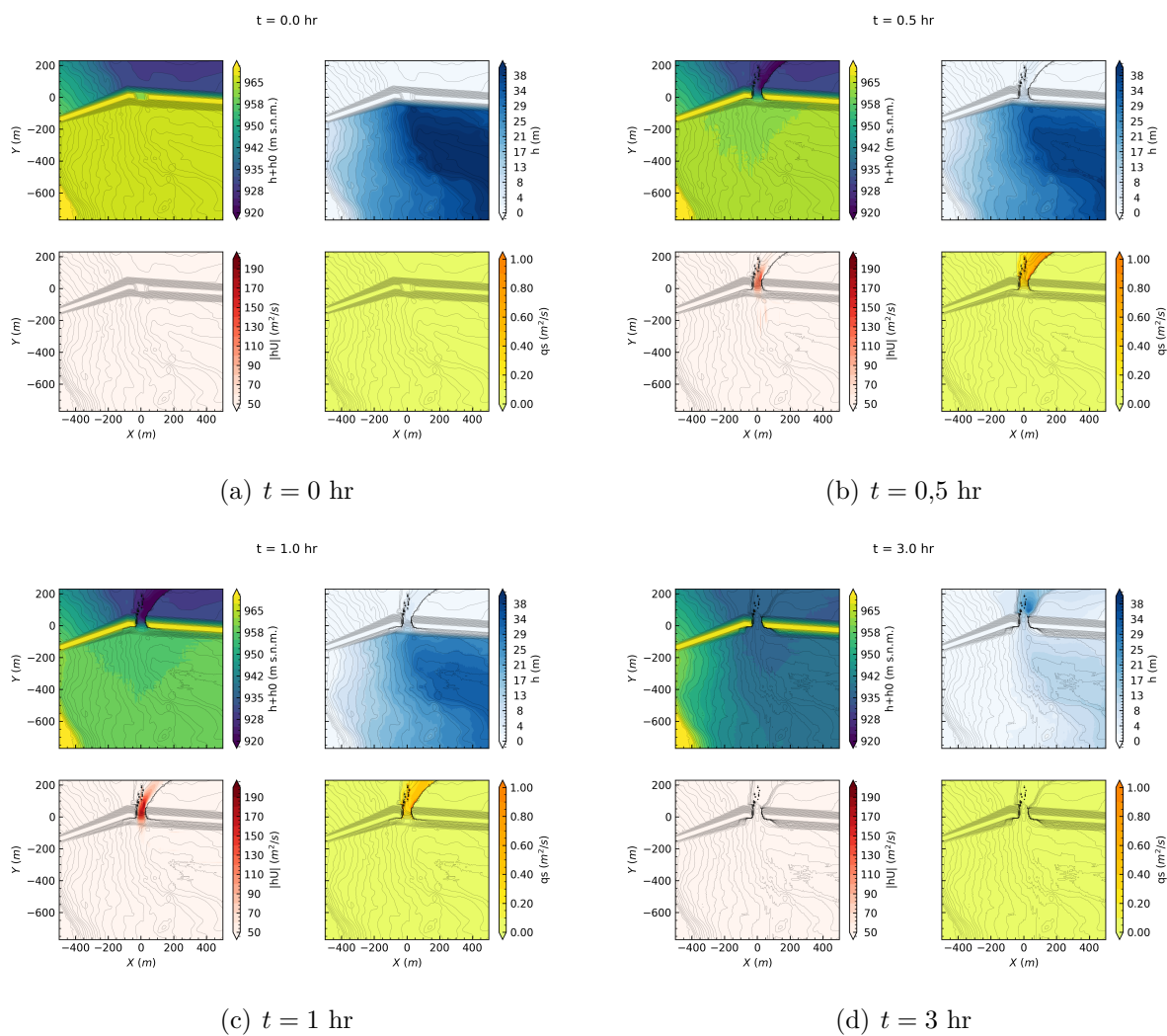


Figura H.2: Campos en torno a la brecha de falla para prueba **5m** de la Tabla 6.22 para distintos tiempos.

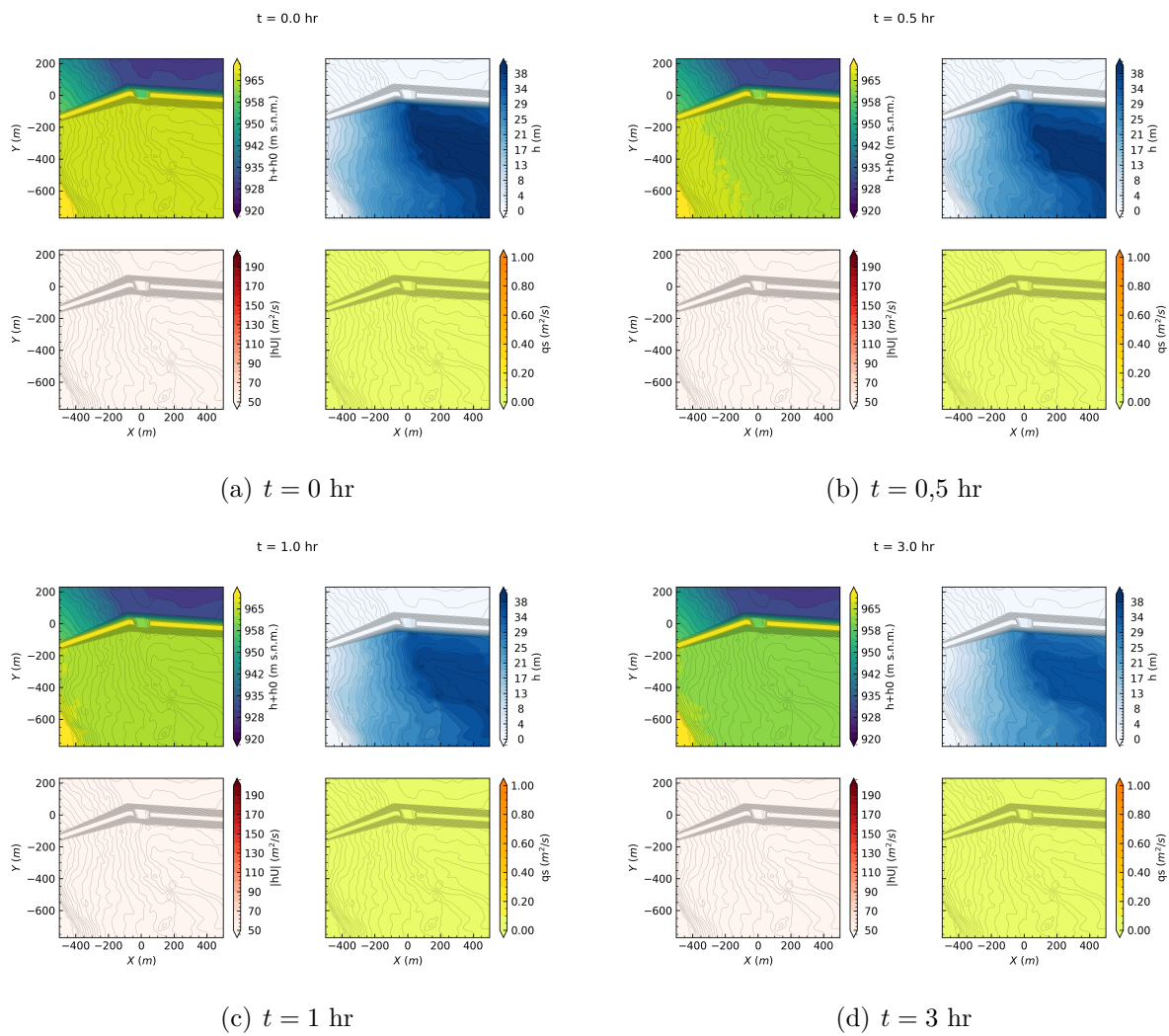


Figura H.3: Campos en torno a la brecha de falla para prueba **10mf** de la Tabla 6.22 para distintos tiempos.

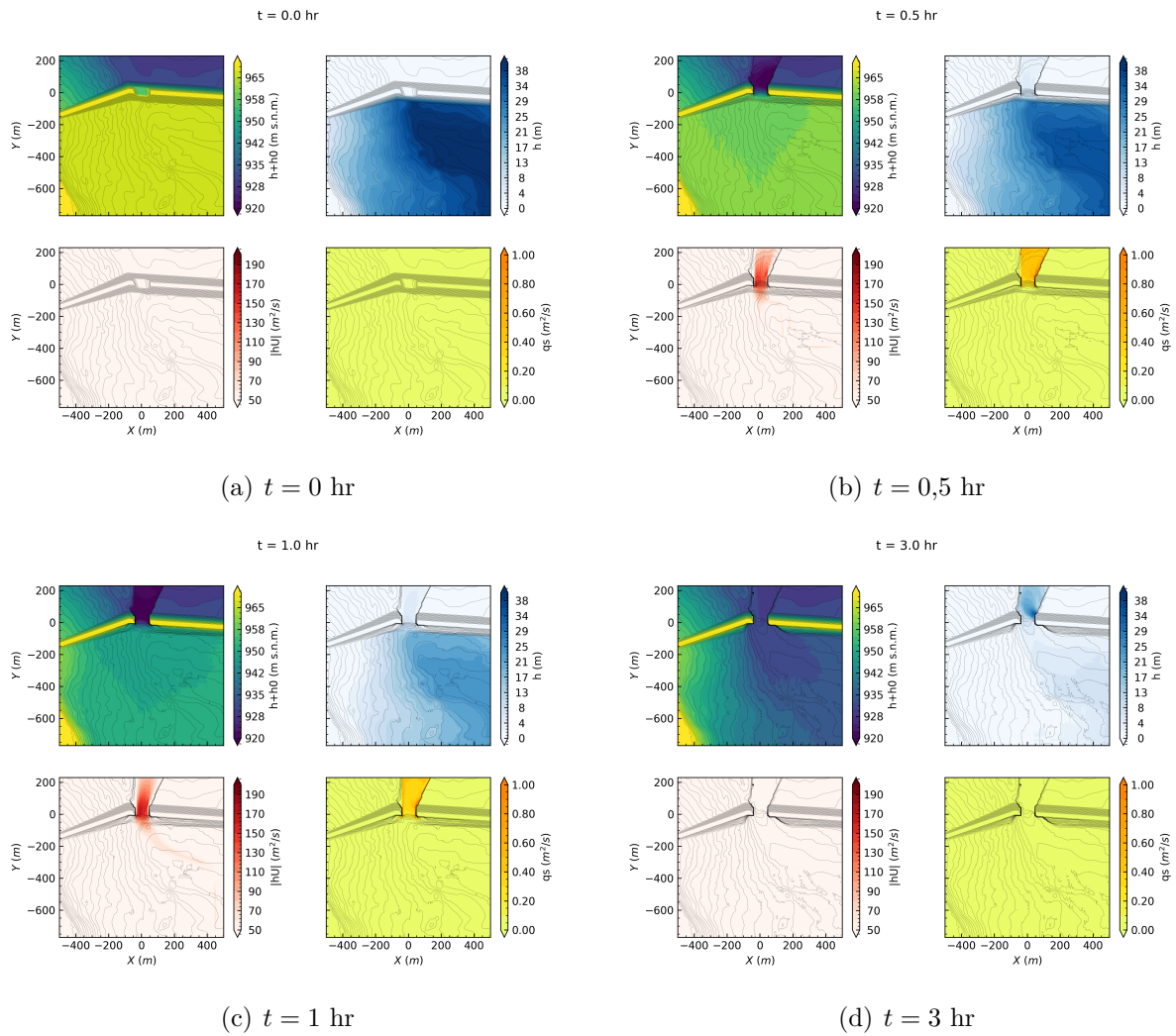


Figura H.4: Campos en torno a la brecha de falla para prueba **10m** de la Tabla 6.22 para distintos tiempos.

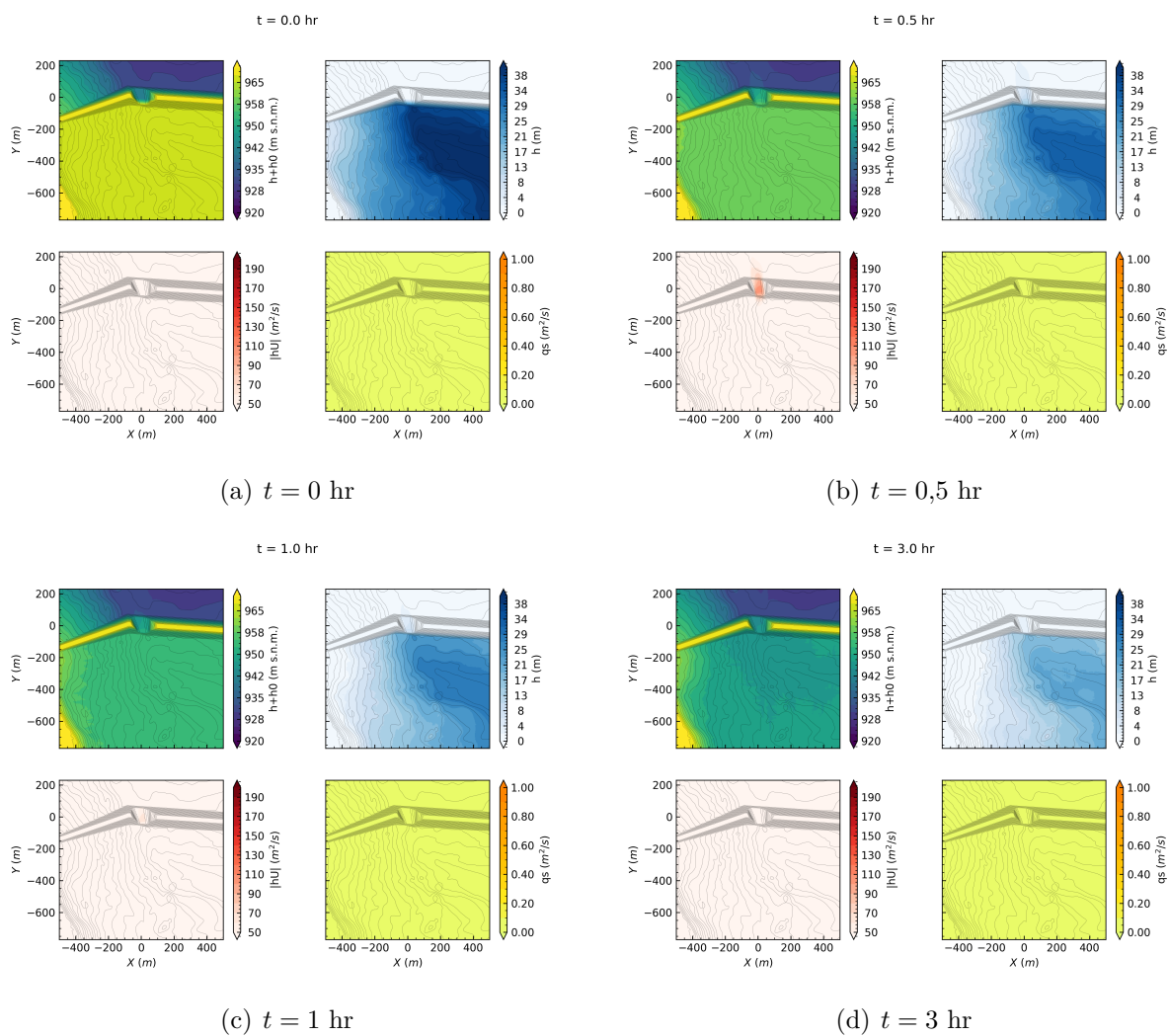


Figura H.5: Campos en torno a la brecha de falla para prueba **25mf** de la Tabla 6.22 para distintos tiempos.

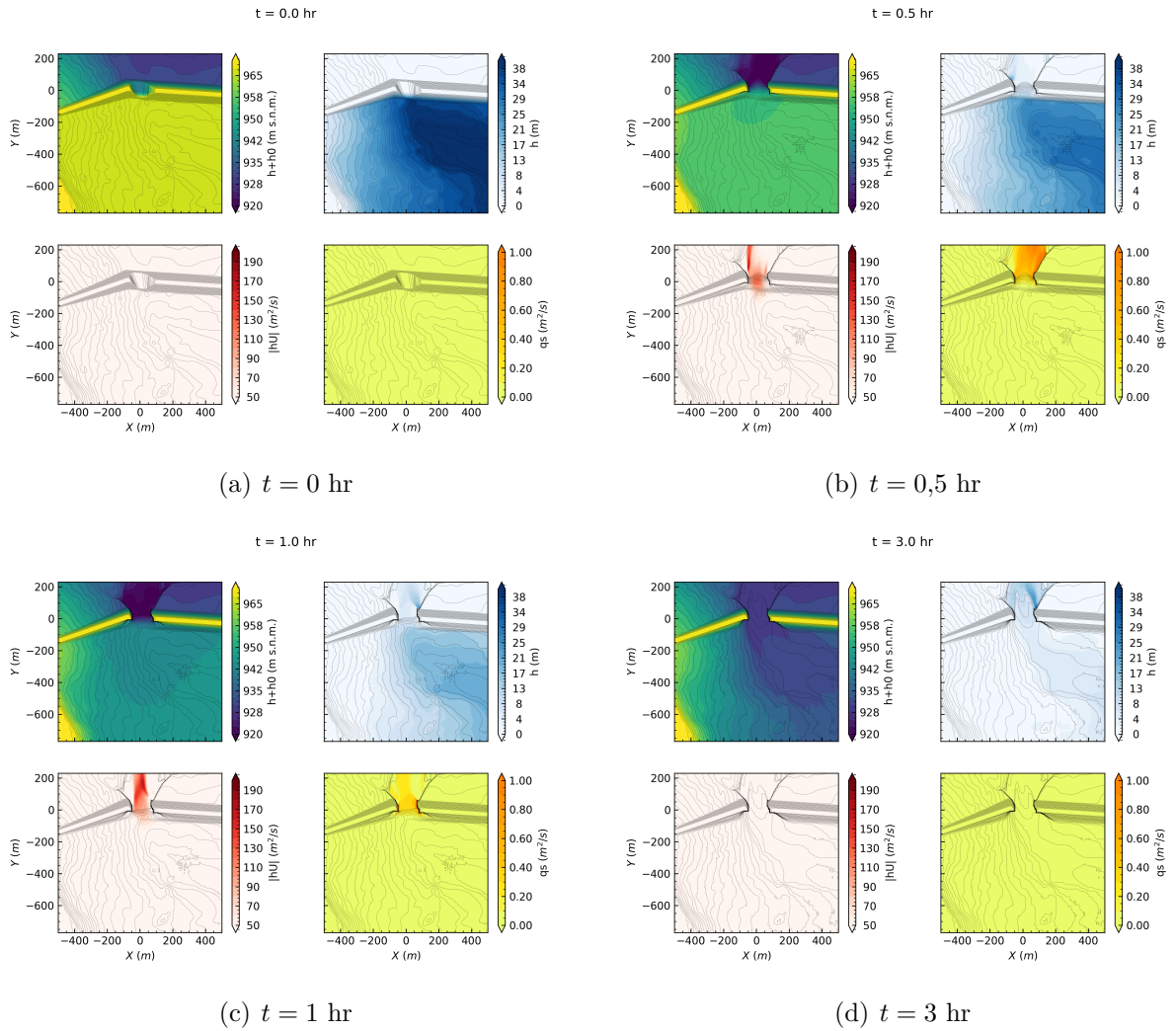


Figura H.6: Campos en torno a la brecha de falla para prueba **25m** de la Tabla 6.22 para distintos tiempos.

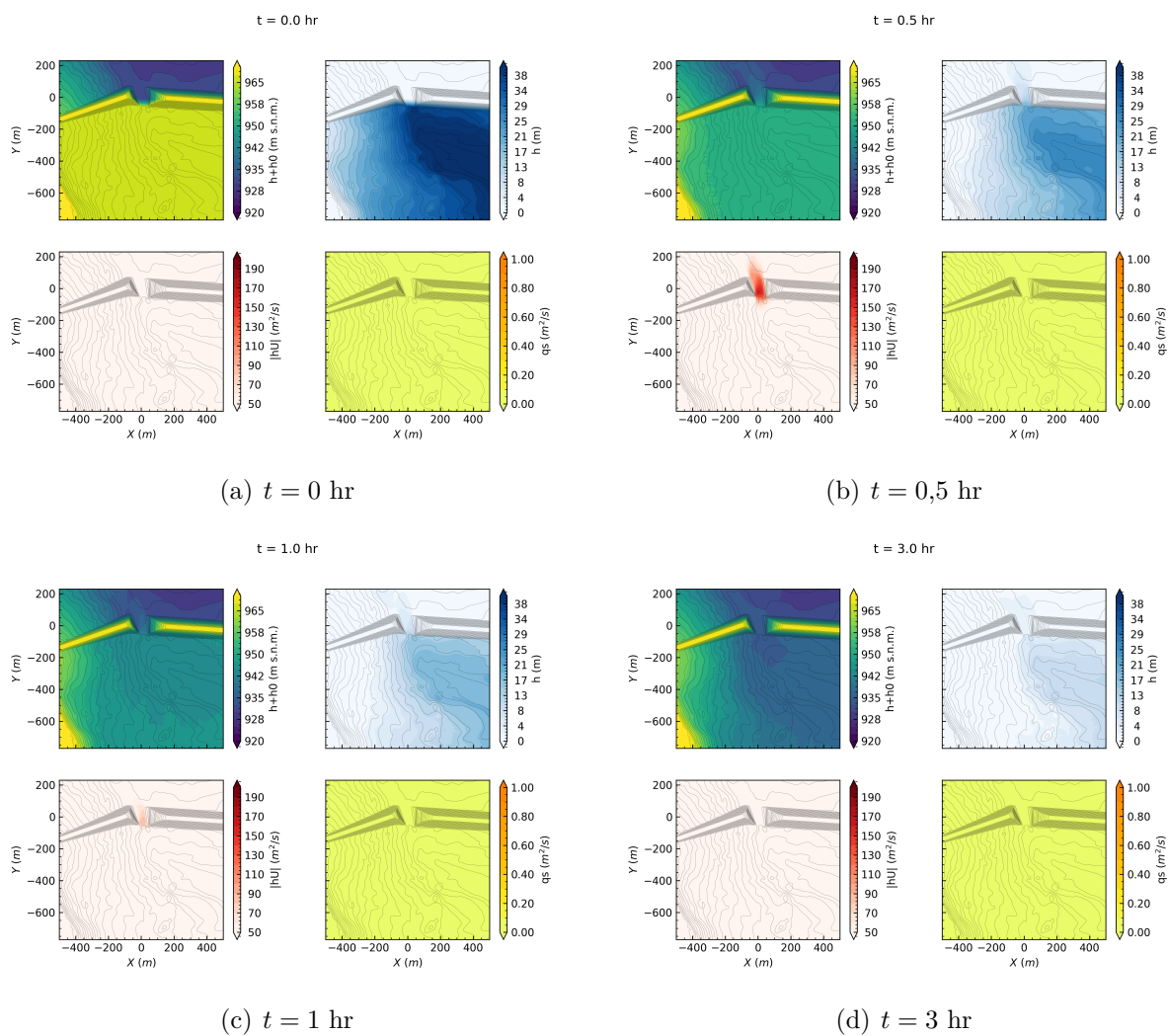


Figura H.7: Campos en torno a la brecha de falla para prueba **maxf** de la Tabla 6.22 para distintos tiempos.