



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

SIMULACIÓN DEL ESCALAMIENTO DE INDICADORES URBANOS CON LA POBLACIÓN

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA, MENCIÓN TRANSPORTE

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

MARCELO JESÚS LEÓN GARAY

PROFESOR GUÍA:
FRANCISCO MARTINEZ CONCHA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
PEDRO DONOSO SIERRA
RICARDO HURTUBIA GONZÁLEZ

SANTIAGO DE CHILE
2019

**RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL
TÍTULO DE:** Ingeniero Civil en Transporte y
grado de Magíster en Transporte
POR: Marcelo León Garay
Fecha: 10 de Septiembre del 2019
PROFESOR GUÍA: Francisco Martínez Concha

SIMULACIÓN DEL ESCALAMIENTO DE INDICADORES URBANOS CON LA POBLACIÓN

El estudio científico de las ciudades en un mundo en rápida urbanización es esencial para planificar sistemas urbanos sustentables. El hecho de que las ciudades exhiben una ley de retornos crecientes a escala es un hallazgo con base empírica, aunque recientemente también se ha justificado teóricamente. Según esta ley, los indicadores asociados a resultados de producción de la ciudad crecen super-linealmente con la población, siguiendo una ley de potencia. Sobre esta ley hay muchas preguntas abiertas y en este trabajo se avanza en los temas que se desprenden de algunas de ellas. Se simula la evolución de sistemas urbanos en un amplio rango de crecimiento de la población, desde 1 a 30 millones de habitantes, donde se aplica la teoría microeconómica urbana para estudiar el equilibrio del mercado y su dinámica en el contexto de una ciudad ficticia que crece. Este estudio permite establecer una relación directa entre los parámetros del modelo de simulación y el grado del escalamiento de los retornos resultantes. Además, se analizan diversos escenarios de parámetros del modelo y su efecto en la magnitud del factor de escalamiento superlineal.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi familia por su apoyo incondicional desde el primer día en que inicie mis estudios en la facultad. Gracias a mis padres por el cariño y comprensión y a mis hermanos por nunca dejar de creer en mí. Esta aventura no habría sido posible sin ustedes. Gracias a mi abuela y a tía Ana, por siempre presentes sin importar las dificultades.

Agradezco con todo mi corazón a Marta, mi compañera de viajes, aventuras y sueños, por el inmenso apoyo que me has dado durante todo este tiempo y nunca dejarme caer ni permitirme dejar de creer en mi, este trabajo esta cariñosamente dedicado a ti. Gracias por las risas, la paciencia, el cariño y la gran cantidad de momentos únicos que hemos compartido, y en especial por toda la ayuda que me has dado en este proyecto, moltes gràcies! Gracias también a tu hermosa familia por acogerme y tratarme como uno más por esos tres increíbles meses.

Gracias a mis amigos de la vida. A Consuelo, Coni, Fache, Tomas, Federico, Kotaro, Vicente, Juan Luis, Pablo, Maxi y Eduardo por todos los momentos que hemos compartido a lo largo de estos años y el apoyo que me han dado cada vez que ha sido necesario. Gracias por su amistad y por seguir siendo parte de mi vida pese a la distancia.

También agradezco a los increíbles amigos que me ha dejado mi paso por la facultad. A Óscar, Camila, Hans, Fernanda, Melissa y Mati, desde que entré a la especialidad han sido un apoyo fundamental y las experiencias que hemos compartido nunca las olvidaré. Gracias a Rodrigo, Cristian, Santiago, Javier, Tamara y Fernando por el apoyo durante esos duros primeros años y largas noches de estudio.

Agradezco a mi profesor guía Francisco Martinez por haberme guiado durante mis últimos años en la facultad, por haberme permitido ser parte de grandes proyectos y por su infinito compromiso. Gracias también al profesor Pedro Donoso por sus aportes y apoyo a este trabajo y al profesor Ricardo Hurtubia por sus comentarios. En particular quiero agradecer a mi profesor del colegio Ricardo Acuña por nunca haber dejado de creer en mi y por sus consejos y apoyo.

Finalmente, quiero agradecer a cada uno de los miembros del departamento de transporte, ha sido realmente una alegría ir a la universidad estos últimos años y compartir con todos. Gracias especiales a Mónica y Raúl por todo el apoyo que brindan, sin ustedes el departamento no sería lo mismo, a Nicolás, Herl y Zuñiga por el apoyo en el final de la carrera, les deseo mucho éxito en sus desafíos futuros. Gracias también para Ariel y André por esa práctica donde desarrollamos el prototipo de lo que sería esta tesis y a Bastián por su valioso aporte como practicante.

Tabla de Contenido

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN	1
1.1 Objetivos.....	3
1.1.1 Objetivo principal.....	3
1.1.2 Objetivos específicos	4
1.2 Metodología.....	4
1.3 Temario.....	5
1.4 Resultados esperados	5
CAPÍTULO 2: REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA	6
2.1 Economía urbana.....	6
2.1.1 Aspectos Generales.....	6
2.1.2 Modelos Clásicos.....	7
2.1.3 Simulación de modelos	12
2.2 Accesibilidad	14
2.2.1 Definición de accesibilidad	14
2.2.2 Accesibilidad según la microeconomía:	15
2.3 Distribución de valor extremo	18
2.4 Leyes de escala	20
2.4.1 Evidencia del escalamiento.....	20
2.4.2 Formulación Fréchet para la obtención del escalamiento de la renta con la población	21
CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA.....	24
3.1 Algoritmo usado	24
3.2 Modelo demográfico y firmográfico	25
3.2.1 Modelo Demográfico	26
3.2.2 Modelo Firmográfico	30
3.2.3 Resultados.....	32
3.3 Límite de la ciudad.....	34
3.4 Medida de accesibilidad.....	35
3.5 Medida de atractividad.....	37
3.6 Cubeland.....	38
3.6.1 Modelo de demanda.....	38
3.6.2 Modelo de oferta	39
3.6.3 Modelo de renta	39
3.6.4 Equilibrio	40
CAPÍTULO 4: DESARROLLO DE SOFTWARE	42
4.1 Cubeland.....	42
4.1.1 Cambios código interno	42
4.1.2 Archivos de entrada	47
4.1.3 Especificación de posturas.....	49
4.1.3.1 Hogares:	49

4.1.3.2	<i>Firmas</i>	50
4.1.4	Calibración de parámetros de la función de postura	50
4.1.5	Calibración de parámetros de la distribución de valor extremo	56
4.2	Código general	59
4.2.1	Modelo de Congestión.....	60
4.2.2	Modelación de subcentros	62
CAPÍTULO 5: RESULTADOS		66
5.1	Definición de escenarios	66
5.2	Resultados y análisis de los escenarios	68
5.2.1	Simulación con población incremental y oferta variable (NSv).....	68
5.2.2	Simulación con población incremental, oferta y grilla variable (NSvG)	71
5.2.3	Simulación con población incremental, oferta y grilla variable, y congestión (NSvGC).....	73
5.2.4	Simulación con población incremental, oferta y grilla variable, congestión y hotspots (NSvGCH) 76	
5.2.5	Comparación de accesibilidad	79
5.2.6	Resumen de Resultados.....	80
5.3	Dinámica del sistema urbano	82
CAPÍTULO 6: DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES		84
6.1	Discusión	84
6.2	Conclusiones	85
6.3	Líneas de investigación futura	86
BIBLIOGRAFÍA		87
ANEXO A		89
	Implementación del modelo computacional	89
	Estructura del programa	89
	general.py	89
	vectores.py.....	90
	demoyfirmo.py.....	90
	Diccionario.txt	90

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1.1: Población urbana y rural mundial, 1950-2050	1
Ilustración 1.2: Producto Interno Bruto (PIB) versus porcentaje de población urbana en 9 países distintos.....	2
Ilustración 2.1: transformaciones monótonas que relacionan las distribuciones Gumbel, Fréchet y Weibull inversa.....	20
Ilustración 2.2: Escalamiento del volumen de infraestructura y de variables socioeconómicas con la población.....	21
Ilustración 3.1: Esquema del algoritmo inicial	24
Ilustración 3.2: Esquema del algoritmo principal	25
Ilustración 3.3: PIB vs población a nivel regional de Chile.....	26
Ilustración 3.4: Resultados modelo demográfico	33
Ilustración 3.5: Resultados modelo firmográfico para industrias.....	33
Ilustración 3.6: Esquema del entorno de la celda j-ésima	36
Ilustración 4.1: Visualización archivo functions.lum con funciones principales para uso Gumbel ...	44
Ilustración 4.2: Visualización archivo functions.lum con ecuaciones principales para funcionamiento Gumbel y Fréchet.....	47
Ilustración 4.3: Sensibilidad del modelo de renta totales con respecto al parámetro αh del ingreso.	51
Ilustración 4.4: Sensibilidad del modelo de rentas totales con respecto al parámetro $\alpha 1$ de accesibilidad.....	52
Ilustración 4.5: Sensibilidad del modelo con respecto al parámetro $\alpha 2$ de la densidad.....	54
Ilustración 4.6: Sensibilidad del modelo con respecto al parámetro $\alpha 3$ del tamaño de terreno de los agentes.....	55
Ilustración 4.7: Efecto de la varianza de la oferta sobre el factor de escala	57
Ilustración 4.8: Efecto de la varianza de la demanda sobre el factor de escala	58
Ilustración 4.9: Velocidad de tránsito promedio para distintas ciudades del mundo.....	61
Ilustración 5.1: Escalamiento de la renta con la población para el escenario NSv	69
Ilustración 5.2: Escalamiento de la densidad con la población para el escenario NSv	70
Ilustración 5.3: Escalamiento de la renta con la población para el escenario NSvG	72
Ilustración 5.4: Escalamiento de la densidad con la población para el escenario NSvG	73
Ilustración 5.5: Escalamiento de la renta con la población para el escenario NSvGC.....	75
Ilustración 5.6: Escalamiento de la densidad con la población para el escenario NSvGC.....	76
Ilustración 5.7: Escalamiento de la renta con la población para el escenario NSvGCH	78
Ilustración 5.8: Escalamiento de la densidad con la población para el escenario NSvGCH	79
Ilustración 5.9: Evolución del sistema urbano y variación del límite urbano	83

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3.1: Ingreso medio por decil.....	27
Tabla 3.2: Parámetros para estimar ingreso medio por decil	28
Tabla 3.3: Parámetros para estimar ingreso promedio por hogar en ciudades quinta región	29
Tabla 3.4: Ingreso promedio ciudades de la quinta región	30
Tabla 3.5: Parámetros para modelos lineales.....	31
Tabla 3.6: Factores de convertibilidad	31
Tabla 3.7: Parámetros utilizados.....	32
Tabla 3.8: Factores de convertibilidad para firmas	32
Tabla 4.1: Escalamiento en función de la variación de α_h	51
Tabla 4.2: Escalamiento en función de la variación de α_1	52
Tabla 4.3: Escalamiento en función de la variación de α_2	54
Tabla 4.4: Escalamiento en función de la variación de α_3	55
Tabla 4.5: Parámetros función de postura	56
Tabla 4.6: Efecto de la varianza de la oferta en el factor de escala	57
Tabla 4.7: Efecto de la varianza de la demanda en el factor de escala	58
Tabla 4.8: Velocidad de tránsito promedio en distintas ciudades del mundo	60
Tabla 4.9: Modelación de subcentros.....	64
Tabla 5.1: Definición de los agentes	67
Tabla 5.2: Definición de los bienes inmuebles.....	67
Tabla 5.3: Definición de escenarios de simulación	67
Tabla 5.4: Renta Agregada para cada nivel poblacional para escenario NSv	68
Tabla 5.5: Densidad promedio escenario NSv	70
Tabla 5.6: Renta agregada para cada nivel poblacional, escenario NSvG	71
Tabla 5.7: Densidad promedio para cada nivel poblacional escenario NSvG.....	72
Tabla 5.8: Renta agregada para cada nivel poblacional, escenario NSvGC	74
Tabla 5.9: Densidad promedio para cada nivel poblacional escenario NSvGC	75
Tabla 5.10: Renta agregada para cada nivel poblacional, escenario NSvGCH	77
Tabla 5.11: Densidad promedio para cada nivel poblacional escenario NSvGCH	78
Tabla 5.12: Accesibilidad promedio para los distintos escenarios	79

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

Actualmente más de la mitad de la población está viviendo en áreas urbanas, lo que se puede apreciar en la Ilustración 1.1 (Naciones Unidas, 2014), por lo que la habilidad de poder modelar y entender el comportamiento y la dinámica de las ciudades es cada vez más valioso (Barthelemy, 2016). Pero a pesar de la importancia de las ciudades en la sociedad, el manejo práctico y científico de las mismas se ha mantenido limitado, donde las dificultades más grandes para cualquier aproximación científica a las ciudades han resultado de las muchas facetas interdependientes, tales como la social, económica, infraestructura y espacial (Bettencourt, 2013).

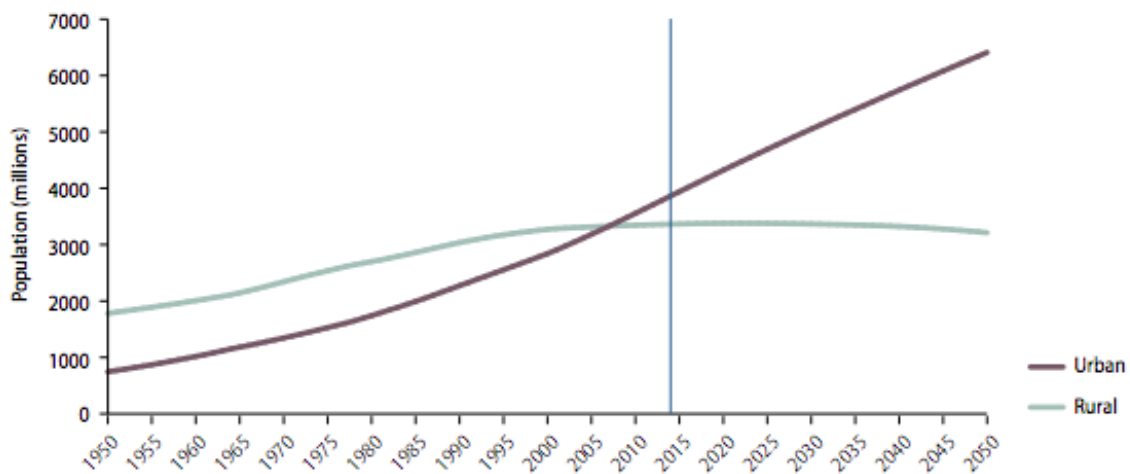
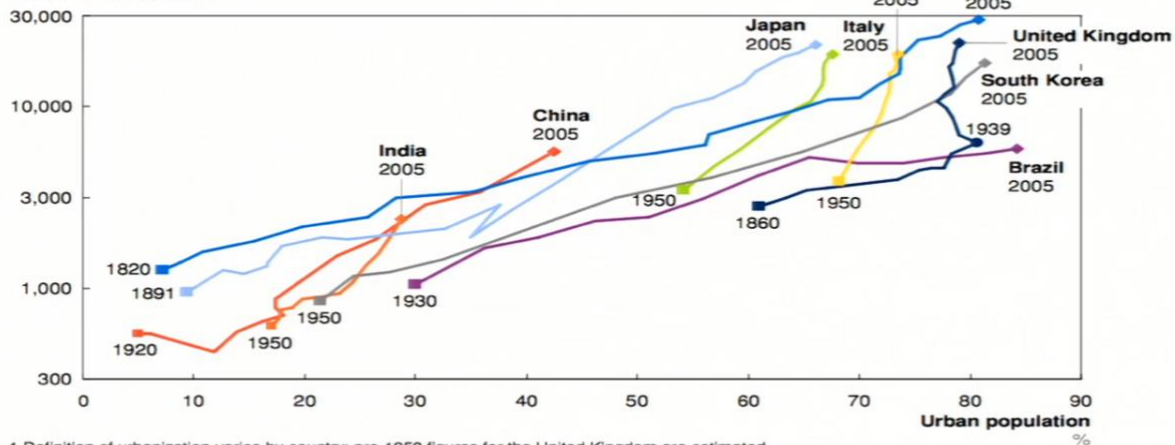


Ilustración 1.1: Población urbana y rural mundial, 1950-2050

El beneficio de vivir en áreas urbanas va más allá de la comodidad de disponer de todos los servicios básicos de manera rápida y, a veces, eficaz. La urbanización va de la mano con mayores oportunidades económicas dentro de la ciudad, como se evidencia en el caso de las ciudades del reino unido, las cuales proveen el 60% de los trabajos, pese a ocupar tan sólo un 9% del territorio (Deborah Talbot, 2014). Al mismo tiempo, genera que el sistema urbano o país vea un aumento en su poderío social y económico como muestra la Ilustración 1.2. Esto se puede apreciar en el exponencial incremento del producto interno bruto (PIB) de India, China, Japón, Alemania o Italia, gracias a que su población se fue urbanizando en la segunda mitad del último siglo. También se puede apreciar cómo Estados Unidos, Corea del Sur y Brasil llegaron a niveles casi de un 80% de urbanización con un PIB siempre ascendente, mientras que, por otro lado, el Reino Unido, una vez llegado a un límite de un 80% se ha mantenido en torno a ese porcentaje, pero aun así aumentando su PIB.

Per capita GDP and urbanization¹

Per capita GDP
1990 PPP \$ (log scale)²



¹ Definition of urbanization varies by country; pre-1950 figures for the United Kingdom are estimated.
² Historical per capita GDP series expressed in 1990 Geary-Khamis dollars, which reflect PPP.

SOURCE: Population Division of the United Nations; Angus Maddison via Timetrics; Global Insight; Census reports of England and Wales; Honda in Steckel & Floud, 1997; Bairoch, 1975

Ilustración 1.2: Producto Interno Bruto (PIB) versus porcentaje de población urbana en 9 países distintos (fuente: Bettencourt, 2013)

La evidencia de diversos estudios empíricos en los últimos 40 años apunta a que no hay un tamaño ideal para las ciudades, lo que se verifica en que la mayoría de las propiedades urbanas Y , varían continuamente con el tamaño de la población N , y quedan, en promedio, bien descritas matemáticamente por las relaciones de escalamiento descritas por la ley de potencia de la forma $Y = y_0 N^\beta$, donde tanto y_0 como β son constantes en N . Una sorpresa respecto de lo que se observa en sistemas orgánicos que muestran leyes similares es que las propiedades urbanas Y de carácter socioeconómico tienden a aumentar per cápita con el tamaño de la ciudad (factor superlineal $\beta > 1$), i.e., hay retornos crecientes, mientras que las relacionadas a infraestructura urbana o volumen usado per cápita, tienden a decrecer (factor sublineal $\beta < 1$), i.e., hay economías de escala. Pero estos resultados empíricos también sugieren que, a pesar de la complejidad de una ciudad, en realidad su comportamiento es bastante simple, sus propiedades globales promedio pueden establecerse en base a unos pocos parámetros claves (Batty 2013, Bettencourt 2007). Esta evidencia, se basa en datos empíricos (big-data), donde la recopilación de datos y su interpretación ha sido el fundamento que sustenta la existencia de esta ley de potencia, conocida como la teoría de escalamiento.

Pero también es posible fundamentar la existencia de la ley de potencia siguiendo un argumento microeconómico como lo hace Martínez (2016). Dichos argumentos están basados sólo en los supuestos de que los humanos son seres racionales, es decir, que maximizan su utilidad, y el sector inmobiliario maximiza sus rentas à la Alonso (Alonso, 1964). Es así como el enfoque con estos principios permite formular una teoría del comportamiento microscópico tanto social como económico de todos los agentes de la ciudad, es decir, se modela a nivel individual. Un supuesto interesante de esta teoría es que el comportamiento es estocástico, el cual se basa en la teoría del valor extremo,

específicamente en la utilización de la distribución de valor extremo tipo II o Fréchet, que permite deducir que las ciudades de mayor tamaño ofrecen mayores relaciones e interacciones entre sus individuos, lo que inducen el incremento del conocimiento y el desarrollo social y económico que se traduce en mayores niveles de renta per cápita. Esto explica la existencia de un factor que relaciona los precios de suelo y bienestar con el tamaño de la población. De esta forma, estas leyes de potencia combinan dos factores; economías de escala en la economía urbana y el efecto de un mayor espectro de oportunidades ofrecidas para la creatividad y la producción de innovaciones debido a mayores y más diversas poblaciones (Martínez, 2016). Específicamente, con este modelo se puede relacionar la renta agregada de la ciudad con la población mediante la ley de potencia $R = a * N^\gamma$, en donde a y $\gamma = \alpha + \delta$ son los factores de escala, que tienen que ser identificados mediante simulaciones para distintos escenarios.

Para simular el modelo microeconómico de Martínez (2016), existe un software llamado Cube Land (Martínez y Donoso, 2010). El cual permite crear modelamientos urbanos de la localización para todos los agentes (hogares y firmas) bajo condiciones de equilibrio de mercado del suelo, que considera reglas de comportamiento de los agentes (utilidades y profit) que siguen una distribución de valor extremo tipo I o Gumbel. Con esa plataforma computacional es posible modelar el crecimiento de distintos sistemas urbanos, en donde además de su uso usual para analizar diversas políticas o restricciones, se puede simular la evolución de una ciudad con diversas poblaciones (N variable) y obtener datos simulados de la renta agregada de la ciudad para cada población, $R(N)$, así como de otros indicadores.

En esta tesis se pretenden reproducir las leyes de escalamiento simulando la teoría microeconómica. Para ello se utiliza el modelo Cube Land como base y se reformula para considerar la distribución Fréchet en el comportamiento de los agentes. Otra intervención del modelo consiste en representar la generación de subcentros en el mercado del uso del suelo. Además, se requiere complementar este modelo para endogenizar el límite urbano.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo principal

El objetivo principal es analizar la teoría de escalamiento basada en la teoría microeconómica estocástica enfocada en bienes discretos, mediante la simulación de la evolución de sistemas urbanos ante cambios en la población. Con el fin de analizar el escalamiento de macro indicadores urbanos como la renta, densidad y accesibilidad. Además, se analiza el efecto de los parámetros microeconómicos utilizados en el modelo.

1.1.2 Objetivos específicos

1. Desarrollar una plataforma prototipo de software general del modelo que permita analizar el escalamiento de los macro indicadores urbanos mencionados. Dotar a esta plataforma de un sistema de grilla endógeno variable que identifique el límite urbano ante cada cambio de población.
2. Desarrollar una versión de Cube Land que permita realizar las simulaciones siguiendo una distribución de valor extremo Gumbel o Fréchet.
3. Comparar diversas formulaciones del modelo modificando parámetros del modelo. Específicamente se considera desarrollar y evaluar los siguientes escenarios:
 - a) Cambio en el modelo de transporte y accesibilidad. Considerar especificaciones de velocidad exógena con modelos que incorporen congestión, diferenciando la velocidad entre zonas respecto de su densidad, es decir que considere ciudades más y menos desarrolladas, y diversas tecnologías de transporte.
 - b) Analizar el impacto de subcentros (hotspots) dentro de la ciudad, reflejado en el escalamiento.

En base a estos objetivos, se busca identificar valores del impacto en escalamiento de los factores microeconómicos, utilizando particularmente tanto la distribución Gumbel como la Fréchet. Con el análisis de los distintos escenarios se pretenden caracterizar diversas características fundamentales de las ciudades, como lo son la congestión y los subcentros. Con este conjunto se podrá caracterizar y entender el fenómeno de escalamiento de una ciudad y de sus macro indicadores urbanos principales.

1.2 Metodología

En primer lugar, es necesario conocer el estado del arte con una revisión bibliográfica sobre los principales temas asociados al proyecto de tesis. En este caso, la revisión se centrará en investigaciones sobre la teoría de la economía urbana y del fenómeno de escalamiento de ciudades, además de revisiones sobre medidas de accesibilidad y la teoría del valor extremo.

Luego, se desarrollará el modelo de simulación del sistema urbano, etapa que tiene varias consideraciones. En primer lugar, es necesario familiarizarse por completo con el software Cube Land para luego proponer complementos del software. Segundo, se desarrollan herramientas que permitan flexibilizar el modelo en cuanto al tamaño de la población y del espacio urbano. Para lograr lo anterior se cuenta con programas computacionales previamente avanzadas por estudiantes del curso CI6311, donde se trataron varias extensiones al software que habrá que adaptarlas al objetivo de este proyecto.

El siguiente paso es introducir la opción de comportamiento según la regla de distribución de valor extremo Fréchet para la modelación de agentes. Por último, se deben desarrollar modelos de accesibilidad y subcentros. Con estos desarrollos es posible considerar diversos escenarios base para analizar la sensibilidad de los parámetros fundamentales del modelo.

Con los escenarios ya definidos y codificados, lo que resta es realizar las simulaciones para distintos niveles de población, comparando los resultados de escalamiento. Los escenarios incluyen las distribuciones Gumbel y Fréchet, los parámetros de los sistemas de transporte y del desarrollo de subcentros. Con los resultados de estas simulaciones se puede analizar y concluir sobre el rango de validez de los parámetros en base a comparar el escalamiento modelado con la evidencia empírica.

1.3 Temario

La estructura de la tesis planteada es la siguiente:

- Capítulo 1: Introducción
- Capítulo 2: Revisión Bibliográfica
- Capítulo 3: Formulación Metodológica
- Capítulo 4: Desarrollo de software
- Capítulo 5: Simulaciones y Resultados
- Capítulo 6: Conclusiones

1.4 Resultados esperados

Se pretende crear un modelo de simulación de la evolución de un sistema urbano basado en la teoría microeconómica del uso del suelo, asumiendo diversos comportamientos estocásticos de los agentes. Utilizando el modelo se espera obtener variables macroeconómicas (renta, densidad, etc.) que reproduzcan una ley de escalamiento. Del análisis de diversos escenarios que definen los parámetros del modelo se espera extraer conclusiones sobre la sensibilidad del modelo de escalamiento a los microprocesos. Finalmente, se espera dejar disponible una herramienta que se adapte a distintos escenarios de modelamiento urbano con cambios de población, permitiendo así evaluar distintas políticas de regulación.

CAPÍTULO 2: REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

En este capítulo se presentan elementos fundamentales para el entendimiento de la literatura relacionada con los temas desarrollados en esta tesis. Se analizan los principales aspectos teóricos necesarios para desarrollar los modelos utilizados, con el fin de entregar una base adecuada para la comprensión del presente trabajo.

En particular se presenta una reseña del estado del arte de la economía urbana, una definición de cómo se abordará la accesibilidad, un análisis de las distribuciones de valor extremo y una revisión de la reciente teoría de escalamiento.

2.1 Economía urbana

2.1.1 Aspectos Generales

La economía urbana se caracteriza por desarrollar modelos económicos sobre el uso del suelo, los cuales se desarrollan incluyendo diversos elementos del comportamiento de los agentes del mercado inmobiliario y de la estructura propia de dicho mercado.

El primer elemento tiene que ver con el comportamiento maximizador de los usuarios, el cual es transversal para cualquier estudio económico, y es que se asume que los usuarios son seres racionales, es decir, que buscan maximizar su bienestar individual. Se suele referir a dicho bienestar individual como utilidad, la cual está compuesta por todos los diversos aspectos que un agente puede valorar de un bien inmueble. Lo importante de este supuesto es que permite poner una cifra al nivel de bienestar a través de una función de utilidad que representa todos los aspectos valorados por el agente a través de variables cuantificables.

De este modo, mientras un consumidor que busca un hogar puede valorar la accesibilidad de dicha ubicación, la orientación con respecto al sol o la antigüedad del inmueble, un desarrollador inmobiliario buscará tener las mayores ganancias posibles. Al existir múltiples agentes con intereses similares, y por lo tanto enfrentados, la resolución de quien se queda con el bien inmueble se resuelve a través de un *remate*. El equilibrio se logra a través de la competencia y la necesidad de localizarse, la cual es resuelta en un *remate*, en donde los participantes ofertan de acuerdo con su disposición a pagar, hasta que todos alcancen la mejor situación posible.

Un elemento distintivo del mercado inmobiliario es que los bienes inmuebles son únicos (y por lo tanto completamente diferenciables) por su ubicación (x,y,z) , la cual no puede reproducirse. Por otro lado, las características físicas del inmueble son en general completamente reproducibles y la industria tiende a estandarizarlos. En otras palabras, cada ubicación tiene atributos que la diferencian de otras dentro de la misma ciudad, por lo que teóricamente son bienes cuasi-únicos. Incluso en el caso extremo de dos apartamentos de un mismo piso de un edificio, existen características, tales como la

orientación, que los vuelve levemente diferentes. Esto último es de suma importancia a la hora de fijar los precios y posturas en el remate, según cómo los atributos distintivos del inmueble sean valorados por los consumidores.

Por último, un elemento crucial del mercado inmobiliario es la presencia de externalidades de localización. En la literatura económica, las externalidades ocurren cuando la decisión de un agente afecta las decisiones de otros agentes en el mercado, en aspectos diferentes al monetario. Cuando un mercado incorpora externalidades, surgen algunos efectos complejos que determinan las fuerzas socioeconómicas de atracción y repulsión entre agentes. En este mercado usualmente se encuentran presentes diversas formas de externalidades de localización dado que la apreciación de un consumidor por una determinada localización está determinada por el entorno construido por las personas, por ejemplo, tiendas comerciales e industrias. Se incluye dentro de dicha apreciación los atributos del vecindario que definen la calidad de la zona, por ejemplo, quien vive cerca y qué actividades se realizan en el entorno. Por lo que la decisión de un agente de localizarse en cierto vecindario inevitablemente contribuye a definir la percepción de la calidad que tiene un vecino sobre dicho entorno.

Las economías de aglomeración son un tipo especial de externalidades, describen las fuerzas de atracción o repulsión de una aglomeración de actividades comerciales en cierta área. Eventualmente pueden producir el surgimiento de subcentros dentro de la ciudad, provocando que la configuración monocéntrica inicial se transforme en un complejo sistema urbano policéntrico.

Los modelos de uso de suelo que cuenten con una buena estructura microeconómica pueden ser diseñados de tal forma que incluyan todos estos fenómenos a través de la modelación del comportamiento de los agentes.

2.1.2 Modelos Clásicos

La economía urbana es un campo muy activo que ha producido varios modelos de ciudades, su formación y evolución. El primero de estos modelos es el desarrollado por Johann Von Thünen el año 1820, en donde se supone que el suelo agrícola es plano y homogéneamente productivo con el fin de aislar efectos externos al estudio. Von Thünen se preguntó por qué los lotes de tierra, con las mismas características, tenían distintos usos. Su conclusión fue que se debía a la distancia al mercado ubicado al centro de la ciudad.

Posteriormente se han desarrollado modelos que siguen dos enfoques aparentemente contrapuestos, el enfoque *bid* de Alonso (1964) que desarrolla el argumento de que el mercado es un remate en donde participan los agentes ofertando por localizaciones disponibles. Y por otro lado está el enfoque *choice* desarrollado por Anas (1982), que aplica el clásico problema del consumidor que decide en qué y cuánto consumir de cada tipo de los bienes disponibles, en donde los precios y el ingreso son definidos exógenamente. En su estructura, se considera a la localización como uno de los bienes a consumir, aunque lo trata

como un bien cuasi-único diferenciado por la ubicación específica. Dado que ambos enfoques se encuentran bajo los mismos principios microeconómicos, Martínez (1962) concluye que ambos son equivalentes en el sentido de que producen la misma distribución de hogares en el espacio.

Por último, vale la pena mencionar el modelo de Fujita y Ogawa (1982), en donde se discute la elección de localización tanto de individuos como de firmas con el propósito de explicar que, en el equilibrio, una organización monocéntrica no siempre es estable. Lo novedoso del modelo es que incluyen las economías de aglomeración generadas por las empresas, que señalan como el principal factor atractor de regiones de gran densidad en la elección de la localización. La limitación de este enfoque es que logran detectar cuando una organización espacial ya no es estable, pero no se puede predecir a qué convergirá ni cómo será la organización.

A continuación, se presenta el desarrollo conceptual y matemático de ambos enfoques para luego mostrar su equivalencia.

2.1.2.1 Enfoque Bid

El enfoque *bid* se basa en que los consumidores del mercado de uso de suelo deben competir en un remate realizando ofertas, en donde quien haga la mayor oferta se queda con la propiedad (Alonso, 1964). Lo relevante de esta situación es que los consumidores al realizar sus ofertas están revelando su disposición a pagar por una localización dada y que al momento de que alguno gane el remate, su disposición a pagar se vuelve el valor de dicha propiedad. Además, para un mercado con diversas localizaciones se debe cumplir una condición, y es que las ofertas por localizaciones alternativas se deben definir de tal manera de que el consumidor se asegure de conseguir la mayor utilidad posible.

Para analizar el proceso, se define cómo los consumidores construyen su disposición a pagar. Primero, los consumidores (denotados por h), deben maximizar su función de utilidad.

$$\max_{x \in X, v \in V, i \in I} u_h(x, z_{vi}) \quad (2.1)$$

En donde $x \in \mathbb{R}^+$ es el vector de consumo de bienes, $z_{vi} \in \mathbb{R}$ es el vector de valores discretos que describen el conjunto de atributos del bien inmueble $v \in V$ en la zona $i \in I$ y u_h es la función de utilidad del consumidor.

Además, el problema de maximización debe estar restringido por el ingreso del consumidor, no puede gastar más de lo que gana, por lo que se define la restricción presupuestaria como:

$$p_x x + (1)p_{vi} \leq y_h \quad (2.2)$$

En donde p_x es el precio del conjunto de bienes consumidos, p_{vi} es el precio de la propiedad v en la localización i , y y_h es el ingreso del consumidor, tanto los precios, el ingreso y el consumo de bienes están en unidades de tiempo (mensual, anual). Cabe destacar que en el enfoque discreto se asume que el consumidor final (residente) “consume” sólo una localización en la cual residir, por lo que el gasto depende sólo del precio y no de la cantidad consumida, en otras palabras, la cantidad consumida es inelástica e igual a uno.

A partir de este planteamiento inicial, se deriva la disposición a pagar del agente h bajo el siguiente procedimiento:

En primer lugar, se asume que los agentes no ahorran dinero. Esto permite resolver la ecuación (2.2) para x , obteniéndose la demanda condicional por bienes $x^* = y_h - p_{vi}$, por simplicidad se asume que $p_x = 1$ es el numerario. Cabe destacar que en los mercados de suelo y de bienes raíces, a p_{vi} se le conoce como *renta*. Reemplazando x^* en la ecuación (2.1) obtenemos la *utilidad indirecta condicional*, $v_h(z_{vi})$:

$$v_h(z_{vi}) = u_h(x^*, z_{vi}) = u_h(y_h - p_{vi}, z_{vi}) \quad (2.3)$$

Siguiendo Solow (1973) y Rosen (1974) se define la disposición a pagar w_{hi} del consumidor h por la opción i del bien discreto, como el valor monetario que el consumidor le asigna a esta opción para elegirla y alcanzar un determinado nivel de utilidad \tilde{u}_h . Siendo, además, la solución del problema anterior, en donde el precio p_{vi} se reemplaza por la disposición a pagar, i.e: $\tilde{u}_h = v_h(y_h - w_{hi}, z_i)$. Si el agente es racional entonces $\tilde{u}_h = u_h$, y si la función de utilidad es invertible, la disposición a pagar del agente h , por la propiedad ubicada en i es:

$$w_{hi}(z; u_h) = y_h - v_h^{-1}(z_{vi}; u_h), \forall i \in VI \quad (2.4)$$

En los modelos de enfoque *bid*, la localización se asigna al mejor postor, es decir, a aquel agente que tenga la mayor disposición a pagar. Sea h_i^* el postor que se adjudica la localización i y B_i el conjunto de postores por la localización i se tiene que:

$$h_i^* = \operatorname{argmax}_{h \in B_i} \{w_{hi}(z_{vi}; u_h)\} \quad (2.5)$$

El remate no sólo define que agente es el ganador, sino que también el precio de la propiedad ofertada, definido como r_i .

$$p_{vi} = r_i = \max_{h \in B_i} \{w_{hi}(z_{vi}; u_h)\} \quad (2.6)$$

El precio de la ecuación anterior representa la *función de precio hedónico* definida por Rosen (1974) y Ellickson (1981), ya que los precios se obtienen de la valoración de atributos z_{vi} por parte del consumidor. Los autores notaron que el precio hedónico de los atributos, dado por $\frac{dp}{dz_k}$, revela el valor hedónico intrínseco de la comodidad, z_k , para la población. Lo que permite estimar valores de variables intangibles como la contaminación del aire, la congestión y la calidad del vecindario.

Por último, cabe destacar que el modelo estocástico del enfoque Bid incorpora un término estocástico ε_{hi} , presentado en la ecuación 2.7. Mientras que el precio de la renta también se ve afectado por la inclusión de un término estocástico. Siguiendo la misma lógica presentada para la obtención de la disposición a pagar se obtiene su versión estocástica, la cual es $w_{hi} = y_h - v_h^{-1}(z_i, \varepsilon_{hi}; u_h)$. En donde la forma funcional dependerá de la especificación de la función de utilidad.

2.1.2.2 Enfoque Choice

El enfoque *choice*, propuesto por McFadden (1978) y Anas (1982), se basa en la maximización de la función de utilidad a través de un modelo de elección discreta con utilidad aleatoria.

La principal diferencia entre ambos enfoques tiene que ver con el precio del bien inmueble, en el enfoque *bid* vimos que el precio se define de manera endógena a partir de las posturas de los consumidores y la posterior condición de que todos deben estar localizados. Por el otro lado, en el enfoque *choice* la elección es realizada por los agentes, que maximizan una función de utilidad que valora el conjunto de alternativas de localización, en donde dichas alternativas tienen un precio definido de antemano por los oferentes. De este modo, los consumidores se adjudican la localización que les entregue mayor utilidad sujeta a su restricción de ingreso, siendo estos tomadores de precios en este enfoque.

Los modelos de elección discreta con utilidad aleatoria se basan en una función de utilidad compuesta por dos partes, una determinística y otra estocástica. La primera parte se encarga de representar las preferencias del consumidor por los distintos atributos de las alternativas, mientras que la segunda es una variable aleatoria, de media nula, que recoge los errores de modelación y aspectos estocásticos propios de las decisiones humanas.

La utilidad de un hogar h que escoge una localización i se representa por una maximización de la forma:

$$\max_i \tilde{V}_{hi} = V(z_i) + \varepsilon_{hi} \quad (2.7)$$

En donde z_i representa los valores de los atributos de la localización, mientras que ε_{hi} representa el error aleatorio asociado a la decisión. La variable aleatoria ε_{hi} puede seguir diversas distribuciones, siendo el caso mas utilizado y estudiado cuando sigue una distribución de tipo I o *Gumbel*. Esto genera uno de los modelos clásicos de elección discreta, el modelo *logit*, el cual se caracteriza por considerar errores independientes, idénticamente distribuidos y que sólo dependen del agente h . Lo que se denota por:

$$\varepsilon_h \sim Gumbel(\mu, 0) \quad (2.8)$$

Según la modelación *logit*, se puede calcular la probabilidad de que, dado un agente h , sea escogida la localización i , a través de la expresión:

$$P_{i|h} = \frac{\exp(\mu V_{hi})}{\sum_j \exp(\mu V_{hj})} \quad (2.9)$$

2.1.2.3 Equivalencia Bid-Choice

Para demostrar que los dos enfoques son equivalentes, Martínez (1992) redefinió el proceso de maximización de la utilidad en un proceso equivalente de maximización del excedente del consumidor. Esto permite comparar ambos enfoques en la misma dimensión monetaria para precios y disposiciones a pagar.

La equivalencia se basa en el supuesto fundamental de que los precios de los terrenos son endógenos en ambos casos, ya que resultan de las apreciaciones de los compradores. La condición anterior corresponde a la cuasi-unicidad de las localizaciones, ya que no existe un mercado específico para el intercambio de dichos bienes, sino que las transacciones de llevan a cabo siguiendo un proceso de remate, momento en el que se fijan los precios.

Para definir el excedente del consumidor en una localización dada, se considera un nivel de utilidad de referencia u_h , por ejemplo, la utilidad alcanzada en la residencia actual antes de ingresar al remate. La utilidad de reserva \bar{u}_h , por el otro lado, es la utilidad que el consumidor espera alcanzar antes de ingresar al remate. Martínez (1992) demuestra que el proceso de maximización de la ecuación 2.7 puede reescribirse según el siguiente proceso de maximización del excedente del consumidor:

$$Max cs_{hi} = w_h(z_i; \bar{u}_h) - p_i \quad (2.10)$$

La ecuación anterior se calcula como la diferencia entre la disposición a pagar del consumidor y el precio realmente pagado. Por lo que será positivo cuando el precio pagado produzca una utilidad mayor a la utilidad de reserva \bar{u}_h .

Por lo tanto, el problema de maximización de la utilidad es equivalente a elegir la localización que produzca el mayor excedente del consumidor para el agente:

$$i_h^* = \operatorname{argmax}_{i \in I} \{cs_{hi} = w_h(z_i; \bar{u}_h) - p_i\} \quad (2.11)$$

Se asume que los precios de localización emergen endógenamente del remate, en donde resultan ser la máxima disposición a pagar, las cuales son definidas a partir de la utilidad de reserva de cada consumidor, por lo tanto:

$$p_i = \max_{h \in B_i \subset C} \{w_h(z_i; \bar{u}_h)\} \quad (2.12)$$

Reemplazando el valor de p_i de la ecuación anterior en la ecuación (2.11) permite combinar ambas expresiones en el siguiente problema de maximización, llamado la *ecuación bid-choice*:

$$i_h^* = \operatorname{argmax}_{i \in I} \left\{ cs_{hi} = w_h(z_i; \bar{u}_h) - \max_{g \in B_i \subset C} \{w_g(z_i; \bar{u}_g)\} \right\}, \forall h \in C \quad (2.13)$$

Esta expresión reúne ambos enfoques a través de un modelo de equilibrio, en donde las rentas se derivan del proceso interno ($\max_{g \in B_i \subset C} \{w_g(z_i; \bar{u}_g)\}$) el cual representa el enfoque *bid*, donde el oferente busca la mayor oferta dentro de las posturas realizadas, lo que a su vez define quien obtiene la localización y el precio pagado. Mientras que el proceso externo representa el enfoque *choice*, donde los agentes buscan su mejor alternativa condicional al precio que emerge del remate, dentro del conjunto de localizaciones disponibles. Por lo que tanto el enfoque *bid* como el *choice* están representados y entregan la misma distribución. Con lo anterior se demuestra la equivalencia de los modelos, la cual se logra bajo el supuesto de que los consumidores siguen el mismo patrón de asignación, sujeto a que existe la misma distribución de posturas y precios emergidas del remate.

2.1.3 Simulación de modelos

Generalmente la modelación de los modelos de localización residencial con dinámica se ha llevado a cabo a través de modelos de microsimulación. La característica principal de los estos modelos es la incorporación de restricciones o supuestos exógenos y la aplicación de funciones de comportamiento simples. A continuación, se detallan algunos de estos modelos.

El modelo DELTA (*Development, Employment status and commuting, Location and property market, Transition and growth, and Area quality*) desarrollado por Simmonds (1999, 2001) es un modelo agregado que simula el crecimiento económico y los cambios en el uso de suelo se pueden aplicar a nivel regional o urbano. Al nivel urbano, DELTA simula desarrolladores, ubicación de hogares, cambios demográficos y localización de empleo. Al

nivel regional el modelo añade módulos de simulación de migración a larga distancia y un modelo económico. Todas las decisiones son basadas en un enfoque de elección discreta que utiliza modelos *logit*.

PECAS (*Production, Exchange and Consumption Allocation System*) desarrollado por Hunt y Abraham (2003) en la universidad de Calgary es un modelo de desarrollo de suelo que simula el comportamiento de los desarrolladores del mercado inmobiliario. Un sistema agregado simula el intercambio de bienes, servicios y trabajo. Los precios se definen siguiendo un proceso de equilibrio y los flujos desde la producción al consumo se asignan siguiendo modelos *nested logit* usando los precios y las desutilidades del transporte como impedancia.

TRANUS (*Transporte y Uso de Suelo*) desarrollado en Venezuela por De La Barra et al. (1989) es un modelo de integración entre el transporte y el uso de suelo. TRANUS simula la localización de las actividades, el sector inmobiliario y el sistema de transporte multimodal. Basado en el modelo de Lowry, TRANUS distingue el empleo básico del no básico, en donde los cambios en el sector básico son asignados primero, mientras que el no básico es tratado como demanda inducida. Para lograr el equilibrio se itera entre los cambios en la demanda y la oferta para luego simular las rentas.

UrbanSim es un modelo microscópico que simula los hogares, empleos, desarrolladores, y precios de los inmuebles, desarrollado por Wadell (2003). Las decisiones de localización son simuladas en base a un modelo *logit multinomial*. Para elegir una localización, se utiliza una distribución uniforme para muestrear aleatoriamente un conjunto de nueve alternativas además del sitio con la mayor utilidad, en donde la localización final es escogida dentro de esas nueve alternativas. Los valores del suelo se actualizan a través de una regresión hedónica, los modelos hedónicos son comunes en el análisis inmobiliario y estiman en cuanto las características individuales de la localización contribuyen a su valor.

Por último, MUSSA (*Modelo de Uso de Suelo de Santiago*) desarrollado por Martínez y Donoso (2007) en la Universidad de Chile contiene un enfoque microscópico para simular la demanda y la oferta inmobiliaria. Desarrollando nuevo espacio de suelo, se alcanza el equilibrio entre la demanda y la oferta, utilizando además un modelo *logit* para simular las posturas de los consumidores, quienes se encuentran restringidos por una restricción presupuestaria. Los desarrolladores agregan bienes raíces según las rentas esperadas y los costos de construcción, mientras que las regulaciones de uso de la tierra se utilizan como una restricción.

En esta tesis se trabajará con Cube Land, el cual es un modelo que integra MUSSA con un software de transporte, desarrollado por Martínez y Donoso en cooperación con Citilabs. Los detalles del funcionamiento del modelo, así como las ecuaciones y sus especificaciones se presentarán más adelante.

2.2 Accesibilidad

2.2.1 Definición de accesibilidad

Accesibilidad es un concepto utilizado en diversos campos de estudio tales como geografía, marketing, planeamiento urbano y transporte, entre otros. A lo largo del tiempo ha tenido diversas definiciones según el área de estudio de su autor, para el geógrafo Torsten Hägerstrand (1970) es “la medida de la facilidad con la que un individuo puede ejercer una actividad de un tipo deseado, en una localización deseada, a través de un modo deseado, y a un tiempo deseado”. Para el instituto de salud pública y del medioambiente holandés (RIVM, 2001) es “la medida en que el sistema de transporte y uso de suelo permite a (grupos de) personas o bienes alcanzar actividades o destinos mediante un (una combinación de) modo(s) de transporte”. Mientras que, desde un punto de vista microeconómico, para Martínez (1995) son los “Beneficios económicos derivados de la interacción (o contacto) entre dos actividades, lo cual es el beneficio neto obtenido al establecer contacto con otras actividades menos el costo de la interacción (transporte)”, destacando que las dos actividades mencionadas son transportarse y la realización de la(s) actividad(es) en el destino.

Se puede desprender de las definiciones anteriores que hay dos elementos que son transversales a las distintas definiciones que puede tener el concepto de accesibilidad. El primero es el costo de la interacción, el cual va relacionado a la distancia entre los involucrados. Mientras que el segundo elemento es la calidad de la interacción, es decir, el beneficio percibido que induce a realizar el viaje.

De lo anterior se puede notar que hay cuatro componentes claves a la hora de definir la accesibilidad:

- a) *Componente de transporte*: refleja la desutilidad que un individuo o un grupo experimenta recorriendo la distancia desde su origen hasta el destino utilizando un modo de transporte específico, expresado en monto monetario, de tiempo y/o de esfuerzo
- b) *Componente de uso de suelo*: refleja la magnitud, calidad y el carácter de las actividades encontradas en el destino (trabajos, hogares, facilidades recreacionales), representada a través de la utilidad generada

Las siguientes componentes si bien son claves para la accesibilidad, se reconoce que son factores condicionantes de las componentes previas.

- c) *Componente temporal*: refleja la disponibilidad de las oportunidades en diferentes tiempos del día, y las horas en las que el individuo participa en ciertas actividades (de trabajo, recreación)
- d) *Componente individual*: refleja las necesidades habilidades y oportunidades de los individuos. Las necesidades y oportunidades de las personas dependen de sus características tales como la edad, ingreso, nivel educacional, etc. Las habilidades

dependen del estado físico del individuo (edad, discapacidad) y de su acceso a modos de transporte (usuarios cautivos del transporte público, individuos con licencia de conducir y automóvil).

2.2.2 Accesibilidad según la microeconomía:

Esta tesis se enfoca en la perspectiva microeconómica de la accesibilidad, la cual se basa en reflejar fundamentalmente los componentes de transporte y de uso de suelo.

Se parte del supuesto clásico de la economía de que los individuos son seres racionales, es decir, que se involucran en interacciones que son beneficiosas para ellos. Consideremos la interacción entre un individuo n localizado originalmente en el punto i , y de otro individuo o actividad localizado en j (suponiendo que i y j pertenecen al mismo sistema zonal I). Supongamos que el individuo n se enfrenta a un costo c_{nij} para visitar la ubicación j y que la visita le genera al individuo un beneficio neto b_{nij} . Por lo que la interacción es racional sólo si el beneficio neto es positivo, es decir, si la siguiente condición se cumple

$$b_{nij} = \max_{j \in I} (b_{nj} - c_{nij}) > 0 \quad (2.14)$$

Lo cual define la regla microeconómica para decisiones elementales. Cabe destacar que la ecuación anterior supone que no existen utilidades por viajar, sino que solo costos.

Desde este punto de vista, accesibilidad se define como el beneficio producido por visitar ciertas actividades, y el beneficio neto b_{nij} como la medida microeconómica de la accesibilidad relativa, es decir, la accesibilidad de una interacción elemental entre dos agentes o entre un agente y una actividad.

Un aspecto relevante de la interacción es que hay al menos dos actores involucrados, ya sean agentes o actividades. Por lo que, además del beneficio de los viajeros, existen también actividades o individuos pasivos que no viajan pero que de igual forma la interacción les produce beneficios positivos o negativos. De esta forma, se define la *atractividad* como el beneficio producido por la interacción con la actividad o individuo visitado. Un ejemplo de la importancia de la atractividad es la ubicación que eligen las tiendas comerciales, las cuales buscan un lugar donde maximicen sus ventas, por lo que se sitúan en lugares altamente atractivos y de fácil acceso donde recibirán mas visitantes.

Por lo tanto, cada interacción produce distintos beneficios para, al menos, las dos actividades o individuos que estén interactuando, el cual llamamos acceso, de forma agregada, y que esta compuesto por la accesibilidad (acc) y la atractividad (att). Así podemos caracterizar cada localización por este par de medidas de acceso, las cuales tienen distintos valores para cada individuo o actividad n , denotado por $(acc_{ni}, att_{ni}) \forall n, i$

Para medir los beneficios del acceso se tiene que observar el comportamiento de las personas interactuando en sus actividades para poder, indirectamente, identificar y medir los beneficios de sus decisiones. Para la microeconomía, una expresión simple para calcular el beneficio de un viaje con origen en i y destino en j se obtiene integrando el Marshalliano de la función de demanda del viaje, $D_{ij} = D(q_j, c_{ij})$. Donde q_j representa la calidad de las actividades en el destino y c_{ij} es el costo generalizado de transporte (incluye el costo monetario del viaje y el tiempo de este). Se debe notar que D_{ij} refleja el viaje específico de un individuo n para realizar una interacción con un propósito específico, así el beneficio del viaje es:

$$b_{npj} = \int_{x^0}^{x^1} D_{npj}(q_j, c_{ij}) dx \quad (2.15)$$

Donde $x^0 = (q_j^0, c_{ij}^0)$ y $x^1 = (q_j^1, c_{ij}^1)$ representan los escenarios antes y después de que cambie el sistema de transporte.

A continuación, se describen los beneficios derivados de los dos modelos de demanda de viajes más aplicados. El modelo de interacción espacial basado en la teoría de la entropía y el modelo logit multinomial basado en la teoría de la elección discreta

2.2.2.1 Modelo de interacción espacial

En este caso, el modelo de demanda por viaje es:

$$D_{npj} = A_{npi} O_{npi} B_{npj} E_{npj} e^{-\beta_{np} c_{pij}} \quad (2.16)$$

En donde A y B son conocidos como los factores de balance, están asociados, respectivamente, con el número de viajes generados en la zona i , denotado por O_{npi} y por el número de viajes con destino en la zona j , denotado por E_{npj} . β_{np} es el parámetro de costo con unidades monetarias inversas. Los factores de balance se pueden calcular según:

$$A_{npi} = \left(\sum_{j \in I} B_{npj} E_{npj} e^{-\beta_{np} c_{pij}} \right)^{-1} \quad (2.17)$$

$$B_{npj} = \left(\sum_{i \in I} A_{npi} O_{npi} e^{-\beta_{np} c_{pij}} \right)^{-1} \quad (2.18)$$

Los factores de balance A_i y B_j han sido interpretados como medidas del potencial de accesibilidad de la zona i y como el factor de atracción de la zona j respectivamente. El concepto de accesibilidad potencial se refiere al hecho de que agrega los beneficios de viajes potenciales en toda la ciudad. Martínez y Araya (2000a, 2000b) obtuvieron las siguientes medidas económicas en unidades monetarias por viaje:

$$acc_{npi} = \frac{-1}{\beta_{np}} \ln (A_{npi}) \quad (2.19)$$

$$att_{npj} = \frac{-1}{\beta_{np}} \ln (B_{npj}) \quad (2.20)$$

Estas unidades, al ser agregadas, entregan el beneficio total para el usuario, tub_{npj} , asociado a un solo viaje:

$$tub_{npj} = \frac{-1}{\beta_{np}} \ln (A_{npi} B_{npj}) \quad (2.21)$$

Por lo tanto, se pueden utilizar los factores de balance del modelo de viaje con interacción espacial para calcular las medias de acceso (acc , att y tub) por viaje en las unidades monetarias por período de tiempo utilizado para los costos de transporte. Notar que la ecuación (2.16) no tiene variaciones si se usa con factor de escala constante que multiplique todos los A_i y que divida todos los B_j , lo que implica que tanto acc como att sean valores relativos, no así tub que es un valor absoluto ya que la constante se cancela.

2.2.2.2 Modelo de elección discreta con utilidad aleatoria

El modelo más conocido de la teoría discreta de utilidad aleatoria es el modelo logit multinomial desarrollado por Domencic y McFadden (1975). El cual calcula la probabilidad $P_{j/npj}$ de que un individuo n en una localización i escoja el destino j para realizar una actividad con propósito p . Este modelo además produce una utilidad máxima esperada derivada del proceso de elección del destino:

$$V_{npi} = \frac{1}{\mu^{np}} \ln(\sum_{j \in I} e^{\mu^{np} V_{npj}}), \forall i \in I \quad (2.22)$$

Donde $V_{npj} = V_{np}(q_j, c_{ij})$ es la utilidad elemental producida por un viaje que combina la calidad de la interacción y el costo generalizado del viaje. μ^{np} representa la varianza del proceso de elección específica para cada propósito de viaje. Ben-Akiva y Lerman (1985) reconocen esta expresión como la función logsuma de utilidades que mide la accesibilidad.

La función logsuma se puede derivar de la ecuación (2.15) definiendo $V_{npi} = \{V_{npij}(q, c), \forall j \in I\}$ y la demanda elemental por destino j dado por $D_{npij} = P_{j/npi}(V_{npi})$ con la probabilidad condicional logit de elección de destino $P_{j/npi} = e^{\mu^{np}(V_{npij}-V_{npi})}$. Notemos que a medida que aumentan las alternativas de destino, V_{npi} también aumenta, por lo que el número de opciones de interacción incrementa la accesibilidad.

La aplicación usual del modelo logit considera la versión agregada en donde n no representa un individuo, sino que representa un conjunto de individuos con comportamiento similar. Se tienen O_{npi} viajes generados en la zona i y E_{npj} viajes que llegan a la zona j . Se asume además que diversas actividades son similares para un propósito de viaje, por lo que no necesariamente representan una interacción unitaria entre dos individuos. De esta forma, el restricción de viajes de origen es $\sum_{j \in I} E_{npj} P_{j/npi} = O_{npi}$ y la probabilidad de viajes es $P_{j/npi} = e^{\mu^{np}(V_{npij}-\bar{V}_{npi})}$, donde \bar{V}_{npi} es la accesibilidad agregada dada por:

$$\bar{V}_{npi} = \frac{1}{\mu^{np}} \ln \left(\frac{1}{O_{npi}} \sum_{j \in I} E_{npj} e^{\mu^{np} V_{npij}} \right), \forall i \in I \quad (2.23)$$

Además, el modelo agregado se puede restringir para que cumpla con un número exógeno de viajes llegando a cada destino, lo que produce el modelo logit doblemente acotado, es decir, $\sum_{i \in I} O_{npi} P_{i/npi} = E_j$, donde $P_{i/npi} = e^{\mu^{np}(V_{npij}-\bar{V}_{npj})}$, para que se cumpla esta condición, se debe definir \bar{V}_{npj} según

$$\bar{V}_{npj} = \frac{1}{\mu^{np}} \ln \left(\frac{1}{E_{npj}} \sum_{i \in I} O_{npi} e^{\mu^{np}(V_{npij}-\bar{V}_{npj})} \right), \forall j \in I \quad (2.24)$$

En donde \bar{V}_{npj} representa la medida de atractividad (*att*).

Por último, cabe destacar la semejanza entre los modelos de utilidad aleatoria y de entropía, Anas (1983) demostró que son idénticos en el sentido de que el modelo logit multinomial puede ser derivado del modelo de máxima utilidad aleatoria con máxima verosimilitud o de los enfoques de máxima entropía. Aunque esta equivalencia se da sólo en el caso de que los parámetros sean lineales en la utilidad.

2.3 Distribución de valor extremo

Como se mostró en la sección 2.1.2.2, los modelos de elección discreta con utilidad aleatoria son frecuentemente utilizados, particularmente en las áreas de estudio de transporte, uso de suelo y economía. En estos modelos las variables aleatorias entran de forma aditiva o multiplicativa para generar una utilidad estocástica, como la expresada en la ecuación (2.7), en donde el término estocástico toma una forma paramétrica particular dependiendo de su función de distribución.

Para justificar la generación de utilidades estocásticas existen dos fuentes principales, la primera es la variabilidad sobre la información de calidad que el agente valore por cierto bien. Mientras que la segunda se basa en los posibles errores de medición en los que puede incurrir el analista a la hora de modelar el comportamiento de los agentes.

Es común suponer que el término estocástico refleja el error de medición del analista mientras que se asume que la utilidad del consumidor que describe el modelador tiene una componente no aleatoria (determinística) y otra estocástica. Sumado a lo anterior, la elección de una distribución Gumbel, expresada en la ecuación (2.8), para la utilidad indirecta se basa en la conveniencia de su modelo probabilístico cerrado y por la semejanza de su campana de distribución con la de la distribución normal, la cual se asume como la función de distribución natural asociada a los errores de medición del analista (Ben-Akiva y Lerman, 1985).

Pese a que el argumento del error de medición funciona para la justificación teórica de la estimación de los modelos de demanda, Martínez (2018) afirma que hay una justificación aún más fundamental al elegir una función de distribución de valor extremo que se basa en lo mencionado por Domencic y McFadden (1975) en cuanto al teorema de valor extremo; “*Las distribuciones de valor extremo son distribuciones asintóticamente cerradas*”. Por lo que, si asumimos que las utilidades directas subyacentes son variables aleatorias con cualquier función de distribución, este teorema establece que la distribución asintótica de las utilidades maximizadas, es decir, las utilidades indirectas condicionales, siguen uno de los tres tipos de distribuciones de valores extremos: tipo I o Gumbel, tipo II o Fréchet, tipo III o Weibull inverso. Para el caso de utilidades, es natural utilizar la distribución Gumbel, ya que no se encuentra restringida, en cambio la distribución Fréchet tiene su dominio restringido por una cota inferior, mientras que la Weibull inversa tiene una cota superior.

Este punto de vista es fundamentalmente diferente al del error de medición ya que es inherente a los consumidores e independiente a las herramientas de medición que haya utilizado el analista. Por lo que se puede concluir que la utilidad del consumidor es aleatoria, debido a que los consumidores definen su información a partir de datos aleatorios de la calidad del bien o también por el desconocimiento de todos los factores que inciden en la utilidad, por parte del modelador.

En este trabajo se utilizan principalmente las distribuciones Gumbel y Fréchet, las cuales producen los modelos *logit* y los *frechit* respectivamente. Cada distribución genera modelos probabilísticos diferentes, pero como muestra Mattsson (2013) de forma clara y simple, las distribuciones están relacionadas por transformaciones monótonas de sus variables aleatorias. Las que se pueden ver en la siguiente figura:

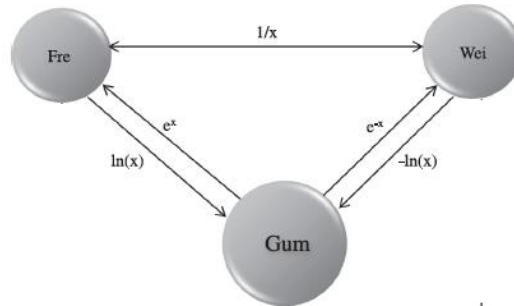


Ilustración 2.1: Transformaciones monótonas que relacionan las distribuciones Gumbel, Fréchet y Weibull inversa.
(fuente: Mattsson, 2013)

De la figura anterior se puede concluir que, si a una variable aleatoria X que distribuye Fréchet se le aplica una transformación tipo logaritmo, entonces $\ln(X)$ distribuye Gumbel.

2.4 Leyes de escala

2.4.1 Evidencia del escalamiento

Como se mencionó en el primer capítulo, la población mundial es hoy en día más urbana que rural, por lo que entender las ciudades y sus procesos internos es de suma importancia. La gran variedad de perspectivas desde las que se puede estudiar una ciudad ha provocado que existan diversas disciplinas que las estudian con distintos propósitos, por ejemplo, un sociólogo se centra en estudiar las interacciones sociales entre los individuos, un economista tratará de visualizar las ventajas de producción y economías de transporte mientras que un planificador urbano se enfocará en diseñar el espacio y la infraestructura de manera eficiente con las personas.

La teoría de escalamiento nace desde la necesidad de tener un enfoque que estudie las ciudades de manera transversal a todas las disciplinas y que pueda explicar lo visto en la figura 1.2. Esto motiva a Bettencourt (2013) a desarrollar un marco teórico que permite predecir las propiedades sociales, espaciales y de infraestructura promedio de las ciudades según un conjunto de relaciones de escalamiento que se aplican a todos los sistemas urbanos. La confirmación de estas predicciones se pudo realizar analizando miles de datos de distintas ciudades del mundo, con distinto nivel de desarrollo. Una conclusión relevante de su estudio es que las medidas de eficiencia urbana, que capturan el equilibrio entre los productos socioeconómicos y los costos de infraestructura, se mostraron independientes del tamaño de la ciudad y podrían ser un medio útil para evaluar las estrategias de planificación urbana.

La siguiente imagen proviene del trabajo de West y Bettencourt (2014):

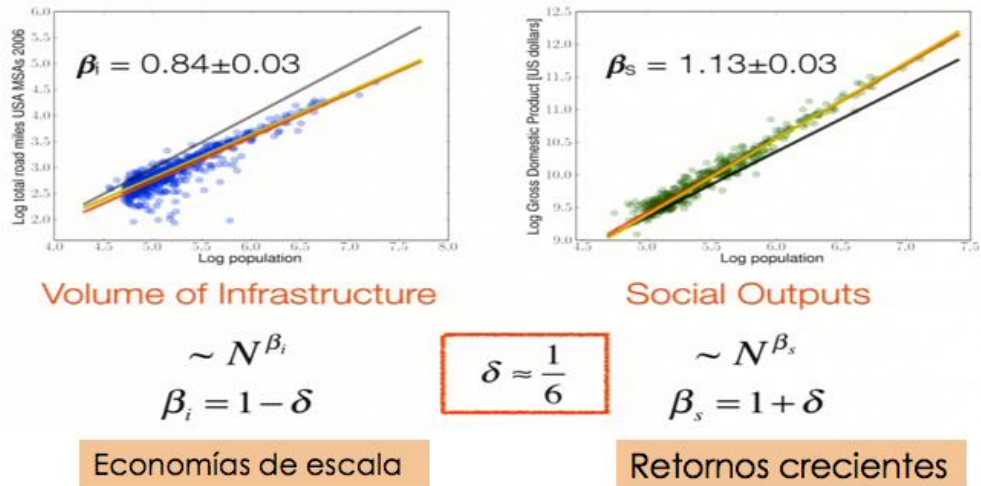


Ilustración 2.2: Escalamiento del volumen de infraestructura y de variables socioeconómicas con la población (fuente: Bettencourt et al, 2007)

Como fue mencionado en el capítulo 1, diversos estudios han llegado a la conclusión de que la ecuación

$$Y = y_0 N^\beta \tag{2.25}$$

Muestra como se relacionan las variables macro de una ciudad Y , con su población N . En donde esta relación será superlineal (retornos crecientes) o sublineal (economías de escala) dependiendo de si β es mayor o menor a uno, respectivamente.

Por otro lado, Martínez (2016) obtiene, a partir de una formulación microeconómica, fundamentos para sustentar la existencia de las leyes de escala, en particular para mostrar el escalamiento entre la renta agregada de una ciudad y su población. Para entender esta formulación hay que notar que Martínez (1992) extiende el modelo de la equivalencia *bid-choice* del punto 1.2.3 a la aplicación de la teoría de utilidad aleatoria, considerando que las funciones de postura de los consumidores tienen asociado un error estocástico independiente e idénticamente distribuido (iid) tipo *Gumbel*. Para luego extender la aplicación en Martínez (2016) para un error iid tipo *Fréchet*.

2.4.2 Formulación Fréchet para la obtención del escalamiento de la renta con la población

Martínez (2018) muestra que es posible demostrar el escalamiento de la renta con la población siguiendo un enfoque microeconómico estocástico utilizando modelos de elección discreta con utilidad aleatoria con una función de distribución tipo II o Fréchet.

Utilizando una utilidad multiplicativa, en particular una que depende del logaritmo del ingreso/precio, de la forma:

$$v_{hi} = \lambda_h \ln \left(\frac{y_h}{p_i} \right) + f_h(z_i) + \varepsilon_{hi} \quad (2.26)$$

En λ_h es la utilidad marginal de ingreso (umi) y ε_{hi} distribuye Gumbel con parámetros $(0, \mu_h)$. Despejando el precio p_i de la ecuación anterior, y llamándole disposición a pagar w_{hi} , se obtiene la disposición a pagar estocástica θ_{hi} dada por:

$$\theta_{hi} = w_{hi} \cdot \xi_{hi} = y_h e^{\lambda_h^{-1}(-u_h + f_h(z_i))} \cdot e^{(\lambda_h^{-1} \varepsilon_{hi})} \quad (2.27)$$

En donde w_{hi} es la disposición a pagar determinística, mientras que ξ_{hi} es el término estocástico que distribuye Fréchet dada las transformaciones monótonas de la Ilustración 2.1. y se define el parámetro de forma como $\beta_h = e^{\lambda_h \mu_h}$

Recordando que las rentas son variables estocásticas definidas como la mayor disposición a pagar del agente por la localización i y asumiendo que $\beta_h = \beta = cte$ es homogéneo para la población, se tiene que el máximo valor esperado de la renta producido por la ley Fréchet es:

$$r_i = K' \left[\sum_{h \in C} H_h w_{hi}^\beta \right]^{\frac{1}{\beta}} \quad (2.28)$$

En donde $K' = \Gamma \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) > 1$ es una constante, H_h es la cantidad de agentes tipo h y C es el conjunto de agentes en toda la ciudad. Martínez define $w_i^\beta = \frac{K'}{H} \sum_{h \in C} H_h w_{hi}^\beta$ como una variable instrumental para representar el promedio de los valores de w_{hi}^β , con esta nueva notación se tiene que ahora el valor de la renta de para la localización i es:

$$r_i = \left(w_i^\beta H \right)^{\frac{1}{\beta}} = w_i H^{\frac{1}{\beta}} \quad (2.29)$$

Donde $H = \sum_{h \in C} H_h = [C]$ es el número total de agentes en la ciudad. La expresión anterior muestra que las rentas escalan con la población a un nivel micro zonal.

El escalamiento de las rentas anterior se puede reflejar a nivel ciudad tomando el valor de las rentas total de la ciudad. Sea a el nivel promedio de personas por hogar en la ciudad, tal que la población total es $N = aH$. Entonces la renta total de la ciudad es:

$$R = (a^{-1}N)^{\frac{1}{\beta}} \sum_{i=1}^{|V_c|} w_i \quad (2.30)$$

Denotando al promedio de las disposiciones a pagar como $w = \frac{1}{|V_{I_c}|} \sum_{i=1}^{|V_{I_c}|} w_i$, y notando que para el equilibrio todos los agentes se encuentran localizados, entonces:

$$R = AwN^\gamma \quad (2.31)$$

Donde $H = a^{-1}N$, $A = a^{-\gamma}$ y $\gamma = 1 + \frac{1}{\beta}$. Como $\beta > 1$ para la distribución Fréchet, se tiene que $\gamma = 1 + \frac{1}{\beta} \in (1,2)$. Por lo que las rentas escalan superlinealmente con la población. Lo que es consistente con los estudios empíricos mostrados por Bettencourt y West (2013, 2014).

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA

Para obtener el escalamiento de ciertos indicadores urbanos con la población, como la renta, es necesario simular el crecimiento de una ciudad en el tiempo, representado por el aumento de su población (N). Para llevar a cabo dichas simulaciones es necesario usar modelos que entreguen la distribución socioeconómica de la población (hogares y firmas) para cada nivel de N . En donde se definen 2 submercados (residencial y no residencial), 5 categorías de hogares y 6 tipos de vivienda (3 para cada submercado), y zonas representadas en una grilla con celdas de 1km x 1km. Además, es necesario definir las funciones de disposición a pagar de los agentes, especificando las variables que deben incluir los factores de atracción de cada localización. En particular se debe incluir variables del entorno, como la densidad de construcción o de actividades comerciales, que permitan considerar las economías de aglomeración y la calidad del barrio; ambas constituyen externalidades de localización debido a que el uso del suelo es endógeno en el modelo. Para simular se utiliza el software Cube Land para cada nivel de población que se le entrega exógenamente. El modelo calcula el equilibrio del sistema entre la oferta inmobiliaria y la demanda. Para simular el proceso dinámico se utilizará un código externo a Cube Land, el cual tiene el propósito de controlar, calcular e implementar todos los modelos incorporados y desarrollados en este trabajo.

3.1 Algoritmo usado

En la Ilustración 3.1 se muestra el esquema del algoritmo inicial de la simulación, en el cual definen las entradas que definen el crecimiento de la ciudad. Para valores exógenos del Producto Interno Bruto (PIB) entrega los distintos niveles de población (N) para una ciudad sintética. Como el modelo Cube Land requiere como input clasificar la población en distintos niveles socioeconómicos, en esta fase se obtiene la cantidad de hogares por nivel de ingreso (alto, medio y bajo) y de firmas por tipo de industria (industrias y comercios) que existen para cada N ; estas cantidades se denotan por el vector $H_h(N)$. Estas entradas se obtienen para poblaciones que aumenta en 2 millones de habitantes, partiendo de 1 millón hasta completar 30 millones.



Ilustración 3.1: Esquema del algoritmo inicial

En el esquema de la Figura 2 se muestra el algoritmo principal que se aplica para cada nivel poblacional. Los datos iniciales del programa son: el vector H_h definido por el algoritmo

inicial; la oferta y localización, así como los índices de accesibilidad se obtienen de la iteración anterior (N-2 millones). Para la primera población (de 1 millón de personas) se supone que la población se encuentra inicialmente distribuida de manera homogénea y las medidas de accesibilidad se obtienen de una zonificación inicial de la ciudad de 4x4 zonas.

Estas entradas alimentan el software Cube Land, que se utiliza para encontrar el equilibrio urbano siguiendo una distribución de valor extremo, para lo cual se puede optar por distribuciones de posturas tipo Fréchet o Gumbel. Los archivos de salida Cube Land contienen todas las variables que resultan de calcular el equilibrio para el nivel de población N: la distribución de la demanda en la ciudad, H_{hvi}^N ; la oferta y la renta por tipo de vivienda v en la zona i, S_{vi}^N y r_{vi}^N , respectivamente.

El algoritmo luego realiza una iteración interna, actualizando las variables endógenas de la simulación y exógenas a Cube Land. En este paso se actualizan las matrices de accesibilidad y atracción (denotadas acc y att respectivamente) y las variables de calidad del entorno de la localización asociadas a la densidad de uso de suelo ($z(N)$), que son input en la siguiente iteración interna corriendo Cube Land. Además, se actualiza el límite urbano, es decir el espacio donde se realiza el equilibrio en uso del suelo, que también es un input de Cube Land. Esta iteración termina cuando los archivos de salida de Cube Land entre dos iteraciones sucesivas cumplen con un criterio de convergencia. En ese caso, se inicia una nueva iteración externa, aumentando la población en 2 millones de habitantes; así sucesivamente hasta lograr simular la población máxima de 30 millones de habitantes.

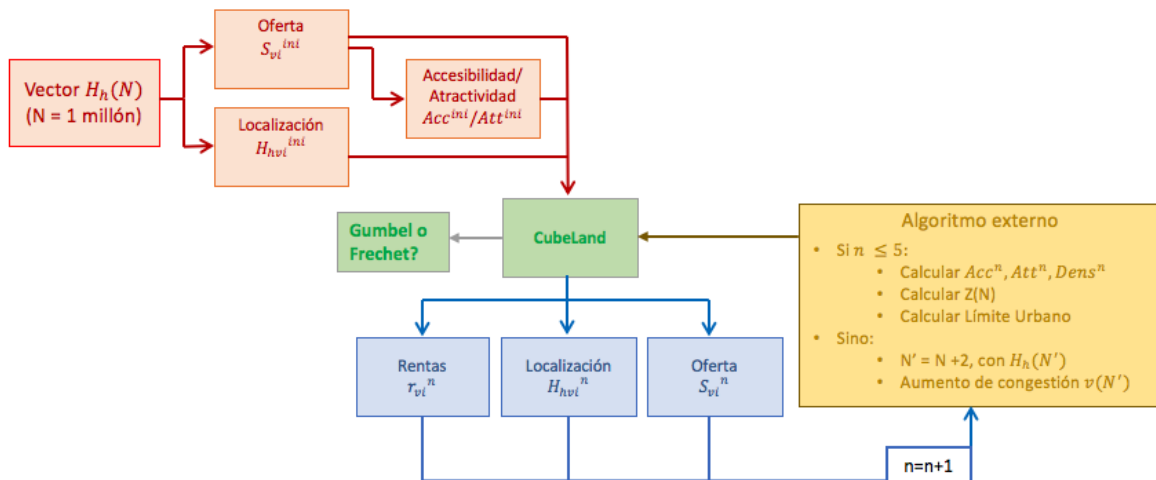


Ilustración 3.2: Esquema del algoritmo principal

3.2 Modelo demográfico y firmográfico

Como se mencionó anteriormente, para cada nivel de población es necesario clasificar socioeconómicamente a los hogares y obtener una distribución de firmas y hogares, lo que

se obtiene con un modelo demográfico y otro firmográfico que entrega una distribución para todos los agentes, cabe destacar que todos los datos utilizados son de carácter urbano.

3.2.1 Modelo Demográfico

El objetivo de esta sección es poder determinar e implementar un modelo para predecir el número de hogares por categoría de ingresos en una ciudad ficticia a partir de la población total (N) y su PIB.

Con el objetivo de determinar la posible existencia de una relación entre el PIB y la población de una ciudad, se grafica el PIB y la población en cada región de Chile para el año 2012, excluyendo de este análisis a la región de Antofagasta por sus particularidades:

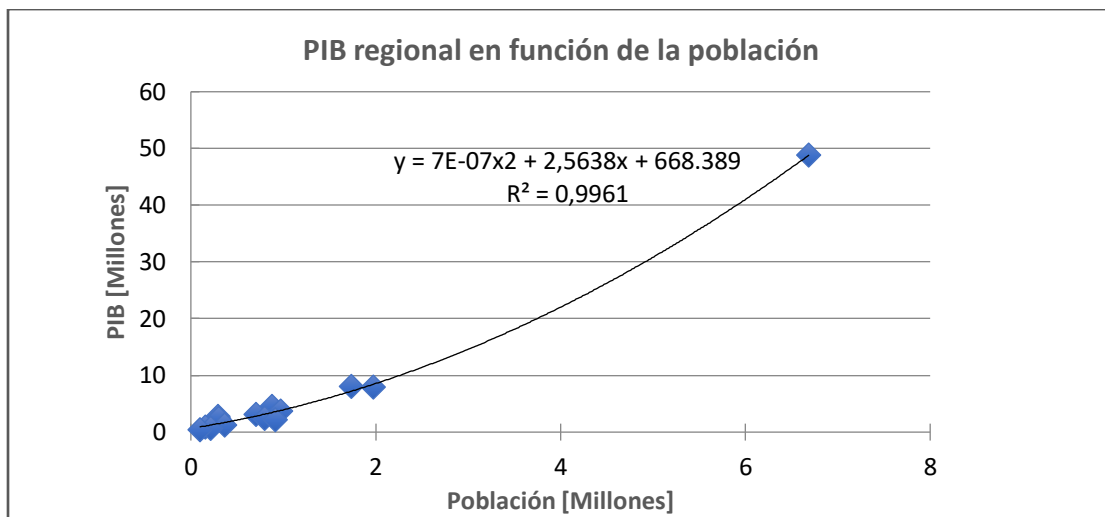


Ilustración 3.3: PIB vs población a nivel regional de Chile

De esta forma, es posible llegar a una expresión para el PIB en millones de pesos en función de la población:

$$PIB = 7 * 10^{-7} * N^2 + 2,5638 * N + 668.389 \quad (3.1)$$

Para poder estimar esta distribución de hogares por categoría de ingreso en base a la población y el PIB, en primer lugar, se debe estimar el tamaño medio de los hogares con el fin de determinar el número de hogares en la ciudad (H), luego se utilizará un modelo de predicción del ingreso medio para cada decil (I_d) el cual tendrá como variables explicativas el PIB per cápita y un ingreso medio inicial para cada decil, finalmente, se establecerá un modelo para predecir el número de hogares para ciertos rangos de ingresos (H_{hr}), el cual se basará en la probabilidad de que el ingreso de un hogar pertenezca al rango r .

Para iniciar la implementación y determinar el número de hogares en la ciudad, se utilizará el tamaño promedio de los hogares en Chile que es de 3,1 [personas/hogar] para el 2017 según el INE, de tal forma que el número de hogares queda como:

$$H = N/3,1 \quad (3.2)$$

3.2.1.1 Ciudad Grande

Para llevar a cabo la clasificación se utiliza la metodología implementada por SECTRA para una ciudad grande, se utilizan los datos de Santiago para calibrar los modelos, cuya población varía entre 4.863.875 y 6.304.893 en la serie de tiempo usada para calibrar.

Con esto, se utiliza el modelo para estimar el ingreso medio por decil (I_d), el cual ha sido desarrollado por la SECTRA:

$$\ln(I_d) = \alpha_d + \beta_d \ln(I_d^0) + \gamma_d \ln(PIB_p) \quad (3.3)$$

Con PIB_p el producto interno bruto per cápita, y I_d^0 el ingreso medio inicial del decil d. Se estima el PIB per cápita a partir del PIB de la ciudad.

$$PIB_p = \frac{PIB}{N} \quad (3.4)$$

Para los valores de I_d^0 se considerará el ingreso medio nacional de los hogares para el año 1993 según decil, datos de la encuesta de empleo (EE) que se presentan a continuación, se usaron estos datos porque fueron los que mejor se comportaron en la predicción del ingreso medio.

Cabe mencionar que el modelo desarrollado por SECTRA es en serie de tiempo, por lo tanto, en el modelo original los valores de I_d^0 son el ingreso medio de cada decil en el periodo anterior, en este caso, es necesario adaptar este modelo y dejar ese valor constante para poder predecir los ingresos medios al aumentar la población, es por esto por lo que se eligen estos valores fijos ya que responden de mejor forma a la predicción.

Tabla 3.1: Ingreso medio por decil

Decil	I_d^0 [\$]
1	31.507
2	57.168
3	77.813
4	102.018
5	128.670
6	162.873

Decil	I_d^0 [\$]
7	203.100
8	272.239
9	401.239
10	885.539

Y los parámetros calibrados por SECTRA para este modelo se presentan en la siguiente tabla

Tabla 3.2: Parámetros para estimar ingreso medio por decil

Decil	α	β	γ
1	-0,617	0,551	0,766
2	-0,318	0,554	0,756
3	-0,269	0,58	0,727
4	-0,291	0,598	0,718
5	-0,206	0,62	0,681
6	-0,106	0,64	0,646
7	-0,047	0,647	0,637
8	0,024	0,691	0,564
9	0,206	0,736	0,471
10	0,496	0,804	0,324

Finalmente, SECTRA desarrolla un modelo para predecir el número de hogares para ciertos rangos de ingresos. Un rango de ingresos r se puede considerar un intervalo de la forma $[a, b]$, en donde el número de hogares pertenecientes al rango $r = [a, b]$ se puede expresar como:

$$H_{hr} = H * P_r \quad (3.5)$$

Donde P_r representa la probabilidad de que el ingreso de un hogar este en el rango r .

Habitualmente, el ingreso de un hogar se asume que es un variable aleatoria con distribución Lognormal, es decir, $\ln(I) \sim N(\mu, \sigma^2)$, donde μ y σ^2 son la media y la varianza de la distribución respectivamente.

Ahora, se calculan las probabilidades de la forma que sigue:

$$\begin{aligned} P_r &= P(a \leq I \leq b) = P(\ln(a) \leq \ln(I) \leq \ln(b)) \\ &= P\left(\frac{\ln(a) - \mu}{\sigma} \leq \frac{\ln(I) - \mu}{\sigma} \leq \frac{\ln(b) - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{\ln(a) - \mu}{\sigma} \leq z \leq \frac{\ln(b) - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

donde z es una variable aleatoria con ley de probabilidad Normal unitaria, es decir, $z \sim N(0,1)$.

La probabilidad anterior se estima usando las estimaciones de máxima verosimilitud de los parámetros μ y σ^2 , con una muestra de 10 observaciones del ingreso de un hogar:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{d=1}^{10} \ln(I_d)}{10} \quad (3.6)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{d=1}^{10} (\ln(I_d) - \hat{\mu})^2}{10} \quad (3.7)$$

Donde I_d es el ingreso medio por hogar para el decil d , estimado con el modelo ya presentado.

3.2.1.2 Ciudad Intermedia

Para ciudades más pequeñas, se utiliza una metodología parecida a la anterior, también implementada por SECTRA, esta vez para calibrar los modelos se utilizan los datos de Valparaíso, cuya población total varía aproximadamente entre 650.000 y 1.000.000 en la serie de tiempo que se analiza. En la metodología implementada por SECTRA se divide Valparaíso en 4 ciudades (Valparaíso, Viña del Mar, Quilpué y Villa Alemana).

Una vez calculado el número total de hogares, se utiliza un modelo para calcular el ingreso promedio de los hogares en cada ciudad antes mencionada, este utiliza como variable explicativa el PIB nacional y el modelo queda:

$$\bar{I} = \alpha * PIB^\beta * \bar{I}_0^\gamma \quad (3.8)$$

Con \bar{I}_0 el ingreso promedio de un periodo anterior.

Los parámetros de este modelo están calibrados para las distintas ciudades de Valparaíso, quedando los siguientes valores:

Tabla 3.3: Parámetros para estimar ingreso promedio por hogar en ciudades quinta región

Parámetro	Valparaíso	Viña del Mar	Quilpué	Villa Alemana
α	1	1,952414	1,603364	1,244308
β	1,188935	1,188935	1,188935	1,188935
γ	-0,456139	-0,456139	-0,456139	-0,456139

Y para el caso del ingreso promedio, se utilizará el promedio de los determinados por la encuesta CASEN para el año 1998 para cada ciudad, este queda:

Tabla 3.4: Ingreso promedio ciudades de la quinta región

	Ingreso medio [\\$]
Valparaíso	365.350
Viña del Mar	678.210
Quilpué	530.971
Villa Alemana	489.408

Se asume, al igual que para ciudades grandes, una distribución Lognormal del ingreso, por lo tanto, análogamente, se definen μ y σ^2 , la media y la varianza de la distribución respectivamente, luego, con el mismo modelo probabilístico, se determina el número de hogares por categoría de ingresos.

3.2.2 Modelo Firmográfico

El objetivo es poder determinar un modelo para predecir el número de firmas en base al PIB de la ciudad, para esto se revisarán los modelos desarrollados por SECTRA. En primer lugar, se revisarán los modelos de ciudad grande para predecir la superficie construida para cada uso de las firmas, estos se dividen en industria, comercio, educación, servicio y otros, estos modelos usan como variable explicativa el PIB y análogamente al modelo para predecir ingresos medios están calibrados con los datos de Santiago, luego, se revisará el modelo que en base a la superficie construida predice la demanda total de las firmas para cada uso. Mismo procedimiento que se ocupará para desarrollar el modelo de predicción para ciudad intermedia.

Para la predicción final, se agruparán los resultados en número de firmas de industria y número de firmas del resto, por lo tanto, se desarrolla cada modelo por separado, pero finalmente se agruparán.

3.2.2.1 Ciudad Grande

Se revisan los modelos recopilados del estudio de SECTRA “Análisis y seguimiento de planes estratégicos para ESTRAUS, Vª etapa” (2005) para la superficie construida de cada uso, en este estudio desarrollan modelos de forma lineal y no lineal de la forma:

$$SC_i = A_0 * (PIB)^\alpha \quad (3.9a)$$

$$SC_i = \beta_0 + \beta(PIB) \quad (3.9b)$$

Para cada caso, la forma lineal resultó ser la que mejor responde a la predicción, por lo tanto, se presentan los parámetros calibrados para los modelos lineales con los datos de Santiago para cada uso.

Tabla 3.5: Parámetros para modelos lineales

	β_0	β
Industria	82528,338	0,269
Comercio	8222980,315	0,068
Servicios	3949997,234	0,2
Educación	3011792,038	0,0179
Otros	2075725,683	0,059

Los modelos presentados anteriormente predicen la superficie construida destinada a cada uso no residencial, posterior a esto, es necesario transformar esa información al número total de firmas para cada uso, para esto se supone que el número de firmas es directamente proporcional a la cantidad de superficie destinada a ellos, se utiliza la siguiente formulación:

$$f_m = \alpha_m * SC_m \quad (3.10)$$

Donde SC_m es la superficie construida para el uso m , f_m es el numero de firmas para el uso m , y α_m un factor de convertibilidad para cada uso, este factor representa la relación entre el número de bienes y superficie construida en base a datos.

Los valores de los factores de convertibilidad para cada uso calculados por SECTRA para el año 2002 es:

Tabla 3.6: Factores de convertibilidad

Uso	α
Comercio	0,00726
Educación	0,00117
Industria	0,0016
Otros	0,00433
Servicios	0,00435

3.2.2.2 Ciudad Intermedia

Para una ciudad intermedia se utilizan los modelos desarrollados por SECTRA cuya calibración se realizó con los datos de la región comprendida por Calera de Tango, Pirque, Colina y Lampa. Estos modelos presentan la misma forma funcional que para el caso de ciudades grandes. Para el caso de industria, servicios y otros, los modelos desarrollados no presentan buenos resultados, por lo tanto, se usarán para la predicción los mismos parámetros calibrados para el modelo de ciudad grande, es decir, solo cambian los parámetros del modelo de predicción de superficie construida para comercio y educación, estos se presentan a continuación:

Tabla 3.7: Parámetros utilizados

	β_0	β
Comercio	9527,688	0,0011
Educación	14162,353	0,0007

Para el modelo de convertibilidad de superficie construida a número de firmas se utiliza la misma forma que para ciudades grandes, en donde solo cambian los factores para cada uso, estos nuevos factores responden de mejor forma a la predicción para ciudades más pequeñas.

Tabla 3.8: Factores de convertibilidad para firmas

Uso	α
Comercio	0,00713
Educación	0,00152
Industria	0,00058
Otros	0,00353
Servicio	0,00190

3.2.3 Resultados

Para implementar los modelos se necesita determinar un rango de tamaño de la población para cada modelo de distribución del ingreso, en este caso, al implementar cada modelo el tamaño límite de la población es de 100.000, por ende, para una población menor a aquella se utiliza el modelo para ciudad intermedia, para una población mayor se utiliza el modelo para ciudad grande.

Es importante mencionar que el modelo para ciudad intermedia fue calibrado con datos de Valparaíso, por lo tanto, debería responder bien en su predicción hasta un tamaño de población aproximado de 1.000.000, pero al implementar el modelo esto no sucede, por lo tanto, para una población menor a 1.000.000 se utilizará el modelo para ciudad intermedia, para población mayor se utilizará el modelo de ciudad grande.

Se presenta a continuación una tabla que resume para distintos tamaños de ciudad, la cantidad de hogares y la distribución de hogares según ingreso. Se consideran los niveles de ingreso tipo bajo (menor a \$350.000), medio (entre \$350.000 y \$1.000.000), y alto (mayor a \$1.000.000).

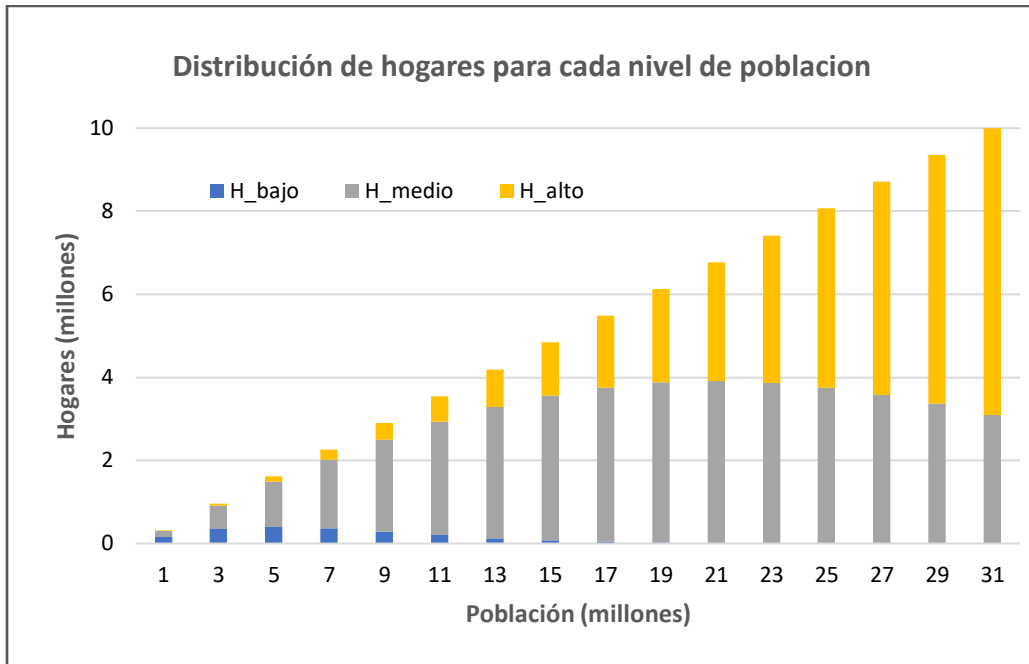


Ilustración 3.4: Resultados modelo demográfico

Análogamente al caso anterior, para las firmas se debe establecer un rango de población para cada modelo. En este caso, el modelo para ciudad intermedia presenta buenas predicciones hasta una población de 1.000.000, por el contrario, el modelo para ciudad grande tiene buenas predicciones desde una población de 1.000.000, por lo tanto, en esos rangos se utiliza cada uno de los modelos. De esta manera los resultados de la estimación del número de firmas se muestran en la ilustración 3.5:

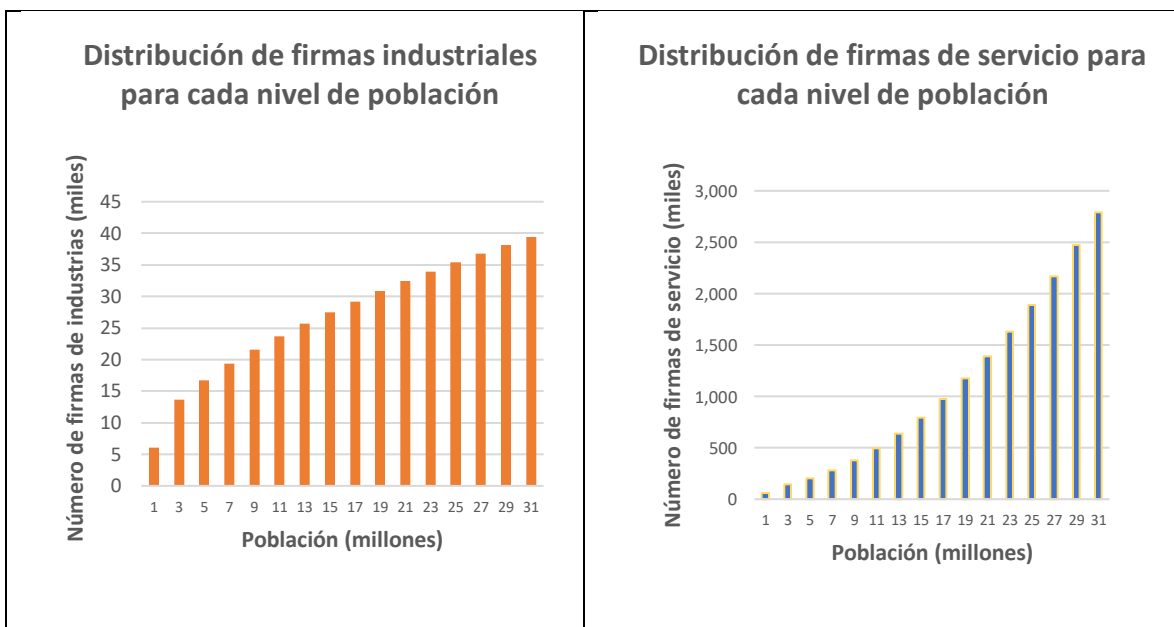


Ilustración 3.5: Resultados modelo firmográfico para industrias

Vale la pena mencionar que para una población muy baja (menor a 100.000), ningún modelo responde bien en sus predicciones, por lo tanto, no se utilizaron dichos niveles de población en la construcción de la tabla anterior estos valores.

Una vez definidos los modelos demo y firmográficos se puede establecer la demanda para los modelos de localización, los cuales se resuelven mediante el software Cube Land, que entrega el equilibrio entre oferta y demanda entre otras cosas. Para enriquecer el modelo y poder obtener resultados para distintos niveles de demanda (población), es necesario que el código externo vaya aumentando el nivel de población de forma exógena a Cube Land y que, a la vez, capture los resultados para cada N. Además, debe calcular distintas variables endógenas no lineales, las cuales no pueden ser calculadas en el software, como lo son la accesibilidad, atractividad y densidad para luego volver a calcular el equilibrio para cada aumento de N.

3.3 Límite de la ciudad

En el algoritmo externo se lleva a cabo el proceso que busca encontrar el límite de la ciudad. Este cálculo es necesario porque el modelo Cube Land tiene como input un reticulado que define el espacio donde se localizan residencias y firmas. Este modelo distribuye la oferta inmobiliaria con modelos probabilísticos (logit o frechit), que generan oferta positiva para todas las alternativas de tipo de vivienda (indexadas por tipo $v \in V$) y localización (indexados por $i \in I$, con I el conjunto de elementos del reticulado espacial), i.e., $S_{vi}(p) > 0, \forall vi \in VI = V \times I$. Con este método de asignación el número de unidades construidas en cada localización depende del tamaño del reticulado (o sea de $|V \times I|$), el que es definido exógenamente por el modelador. Así, el tamaño del reticulado condiciona la oferta inmobiliaria y, por ende, la densidad del uso del suelo. Por esto el modelador esta obligado a definir los bordes de la ciudad para cada tamaño de ciudad N, que denotamos el reticulado $VI(N)$.

Para identificar el borde urbano o reticulado $\{vi \in VI(N)\}$, se define una regla racional para identificar el conjunto optimo $VI^*(N)$ que produce la mayor ganancia para los dueños del suelo. Para ello se define el siguiente algoritmo basado en Martínez (2018):

1. Dado N, iniciar el algoritmo considerando un conjunto VI^j , con $n=0$, arbitrariamente grande y calcular equilibrio con Cube Land.

Para cada iteración j:

2. Usar el output para calcular el profit del suelo como $\pi_{vi}^j = R_{vi}^j - C_{vi}^j, \forall vi \in VI^j$, donde C_{vi}^j es el costo de producción y mantención del bien inmueble vi; en este trabajo este costo se asumió nulo. Luego, reindexar las unidades inmobiliarias en orden decreciente de profit calculado, i.e.,: $\pi_{m=1}^j \geq \pi_{m=2}^j \geq \dots \geq \pi_{m=H}^j \geq \pi_{m=H+1}^j \geq \dots \geq \pi_{m=|VI|}^j$. Este reordenamiento permite identificar los elementos del reticulado con menores profits.

3. Identificar el elemento del reticulado m^* donde el profit del suelo alcanza a superar el profit que ofrece el usos del suelo agrícola (π_A), es decir que se verifica la condición $\pi_{m=m^*}^j \geq \pi_A \geq \pi_{m=m^*+1}^j$, donde π_A es un parámetro exógeno al modelo de simulación.
4. El reticulado solución es $VI^{n^*} = \{m = 1, \dots, m^*\}$, que garantiza que, en esa iteración de equilibrio de Cube Land, el profit del uso de suelo en el sector urbano supera al del uso agrícola, que es la condición clásica en economía urbana desde Alonso (1964). Fin iteración j-ésima.
5. Sin embargo, es necesario iterar entre el cálculo reticulado y el equilibrio Cube Land dado que ambos son dependientes entre sí, hasta que VI^n se estabiliza en la n-ésima iteración de acuerdo con un criterio de convergencia¹

Adicionalmente, dado que en Cube Land los valores de bienes inmuebles r_{vi}^j son relativos, en cada iteración del algoritmo anterior, es necesario normalizar los valores del suelo a valores absolutos R_{vi}^j consistentes con el valor de la renta agrícola (ver procedimiento en Martínez, 2018, pág. 113). Por último, cabe destacar que, según la lógica utilizada, el algoritmo no crea “hoyos” dentro de la ciudad, es decir, zonas excluidas rodeadas de zonas incluidas. Aunque en el caso de querer eliminar una zona o “apagarla”, es posible a través de los archivos de entrada

3.4 Medida de accesibilidad

Lo que se busca aquí es estimar una medida de accesibilidad para cada celda i de la retícula VI . Esta medida busca expresar las oportunidades de interacción (laboral, compras) o las de las firmas (de consumidores), que tienen los hogares que se localizan en i .

La accesibilidad se define como una función que combina dos factores: la existencia de actividades en una celda de la retícula y el costo de transporte para llegar a esa celda de destino (j) desde la localización de origen (i), como se ilustra en la Ilustración 3.7. Para medir las actividades en el destino se suele utilizar la densidad constructiva, la densidad habitacional o una combinación de ambas. En este trabajo se reconoce que el objetivo principal es modelar las economías de aglomeración en las ciudades, por tal razón es que se utiliza la densidad de construcción como factor atractor en el modelo de accesibilidad.

¿Qué fenómeno físico significa incluir la densidad constructiva?

Los agentes al decidir ubicarse en una determinada celda ven con mayor facilidad que tan edificada se encuentra la zona (densidad constructiva) en vez de la cantidad de hogares o firmas en la zona (densidad habitacional). Además, para el cálculo de la accesibilidad residencial no se cuenta con el número de puestos de trabajo que genera cada firma ya que no se posee un modelo productivo, sino que esto es dado de forma exógena. Aunque se

¹ La convergencia se alcanza cuando entre una iteración y otra se eliminan sólo dos zonas o menos, es decir $|VI^{n'}| - |VI^n| \leq 2$

tiene presente que una persona no debería evaluar de la misma manera una firma manufacturera que genera pocos empleos con una de servicios, que genera muchos.

Además de lo dicho anteriormente, se reconoce que el objetivo principal es modelar las economías de aglomeración en las ciudades, por tal razón es que se utiliza la densidad constructiva como atractor en el modelo de accesibilidad.

La densidad constructiva de la celda (ρ_j) se calcula como el número de unidades de oferta de viviendas usando el output de Cube Land y el tamaño de las viviendas construidas como porcentaje del tamaño de la celda ($q_v^{\%}$). Se calcula como:

$$\rho_j = \sum_{v, \text{ tipo}} S_{vj}^{\text{tipo}} \cdot q_v^{\%} = \sum_v S_{vj}^{\text{res}} \cdot q_{v\%}^{\text{res}} + \sum_v S_{vj}^{\text{pro}} \cdot q_{v\%}^{\text{pro}} \quad (3.11)$$

Donde

- $S_{vj}^{\text{res}}, S_{vj}^{\text{pro}}$: Número de unidades de oferta de viviendas residenciales y no residenciales (productivas), respectivamente.
- $q_{v\%}^{\text{res}}, q_{v\%}^{\text{pro}}$: Porcentaje del tamaño de la celda destinado a viviendas residenciales y no residenciales (productivas), respectivamente.

Por otro lado, como se está modelando la atracción de celdas contiguas a un entorno de celdas $E(j)$ que contribuyen a la atracción y aumentan así la accesibilidad, sin aumentar sus costos de viaje (c_{ij}) –ver Ilustración 3.6–, se considera la densidad de uso del suelo de las celdas del entorno, representada por el promedio de las densidades de las celdas que lo componen. Así, la accesibilidad de i (acc_i) se define por la siguiente expresión general:

$$acc_i = \sum_{j \in C} f(g(\rho_j, \rho_j^E), c_{ij}) \quad (3.12)$$

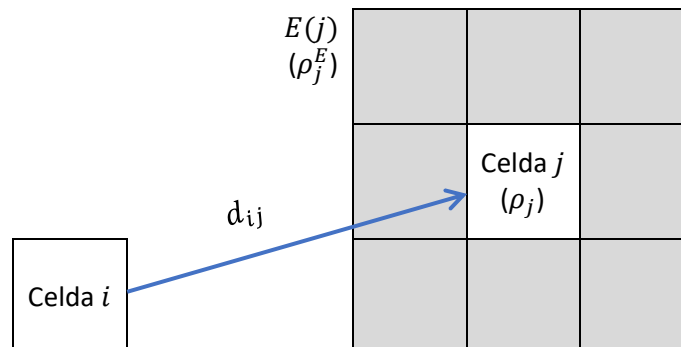


Ilustración 3.6: Esquema del entorno de la celda j-ésima

En este trabajo la función de accesibilidad se especifica mediante un ponderador para cada densidad:

$$acc_i = \ln \left(\sum_{j \in \mathcal{C}} (\alpha \cdot \rho_j + \alpha^E \cdot \rho_j^E) \cdot \exp(-d_{ij}/v) \right) \quad (3.12)$$

Dónde

- d_{ij} : [Dato exógeno] Distancia desde la celda i a la j .
- v : [Parámetro exógeno] Velocidad que se adecua al costo (tiempo) de transporte.
- ρ_j : Densidad constructiva en la zona j .
- ρ_j^E : Densidad constructiva en las zonas del entorno de j .
- α : [Parámetro exógeno] Ponderador de la densidad constructiva para las celdas.
- α^E : [Parámetro exógeno] Ponderador de la densidad constructiva del entorno de las celdas, con $\alpha^E = 1 - \alpha$

3.5 Medida de atractividad

La medida de atractividad busca representar la cantidad de viajes que una determinada zona puede atraer del resto de las otras cuadras. A diferencia de la medida de accesibilidad, a las firmas ubicadas en una determinada zona no les interesa la densidad constructiva del entorno de las zonas del origen de los posibles viajeros. Así, la atractividad viene dada simplemente por:

$$att_i = \ln \left(\sum_{j \in \mathcal{C}} \left(\beta^{res} \cdot \sum_v S_{vj}^{res} \cdot q_{v\%}^{res} + \beta^{pro} \cdot \sum_v S_{vj}^{pro} \cdot q_{v\%}^{pro} \right) \cdot \exp(-d_{ij}/v) \right) \quad (3.13)$$

Dónde

- β^{res} : [Parámetro] Ponderador del número de unidades de ofertas residenciales en la densidad constructiva.
- β^{pro} : [Parámetro] Ponderador del número de unidades de ofertas no residenciales en la densidad constructiva.

Con las definiciones de las variables endógenas del modelo realizadas, se puede comenzar a realizar el algoritmo, el cual, como fue mencionado en la esquematización, utiliza el software Cube Land para encontrar el equilibrio entre oferta y demanda, y así obtener los resultados necesarios para analizar el escalamiento entre la población y los distintos indicadores urbanos. Por lo que es necesario definir los parámetros, funciones y datos de entrada que utiliza el software para poder detallar completamente el algoritmo.

3.6 Cube Land

Como se mencionó en la sección 2.1.3, el software utilizado para encontrar el equilibrio de uso de suelo es Cube Land. La principal característica del programa es que permite predecir el estado futuro del mercado inmobiliario urbano, el uso del suelo, bajo distintos escenarios predefinidos por el modelador. A continuación, se presentan las principales funciones que componen el modelo.

3.6.1 Modelo de demanda

Se ha mencionado anteriormente que los consumidores tienen que participar de un proceso de remate para adquirir el bien inmueble, en donde su postura representa su máxima disposición a pagar, lo que es equivalente a maximizar su utilidad o bienestar.

La función de postura B_{hvi} debe incorporar tanto la valoración de los distintos atributos apreciados por los consumidores como las externalidades de localización. En particular la postura se descompone en los siguientes elementos:

$$B_{hvi} = b_h + b_{hvi} + b \quad (3.14)$$

En donde b_h es denominado como la “postura de referencia”, el cual depende sólo de la categoría h de los consumidores y permite ajustar los niveles de utilidad para alcanzar el equilibrio. b_{hvi} representa la valoración de los atributos zonales y del inmueble. Mientras que b es una constante que permite ajustar las posturas relativas y llevarlas a un nivel absoluto dentro del mercado.

Para calibrar los parámetros de la función de postura se utiliza el enfoque de máxima postura, en donde se asume que el error asociado es independiente e idénticamente distribuido Gumbel con parámetros $(\mu, 0)$. Considerando además la existencia de restricciones a la localización, la expresión para la probabilidad de localización de un hogar h dada una zona i y un bien inmueble v es:

$$P_{h|vi} = \frac{H_h \exp(\mu B_{hvi})}{\sum_g H_g \exp(\mu B_{gvi})} \quad (3.15)$$

En donde H_h es la cantidad de hogares del tipo h , μ es el parámetro de escala asociado a la distribución Gumbel (inversamente proporcional a la varianza de las observaciones). Además, la componente b_{hvi} permite recoger los efectos de las externalidades de localización y las economías de aglomeración, lo que hace explícita su dependencia de la localización y oferta en cada zona, es decir, $b_{hvi} = b_{hvi}(P_{h|vi}, S_{vi})$. Reemplazando esta expresión en la ecuación (3.15) se obtiene la siguiente ecuación de punto fijo:

$$P_{h|vi} = \frac{H_h \exp \mu (b_h + b_{hvi}(P_{h|vi}, S_{vi}))}{\sum_g H_g \exp \mu (b_g + b_{gvi}(P_{g|vi}, S_{vi}))} \quad (3.16)$$

Cabe destacar que el término b se cancela dado que no depende de h .

3.6.2 Modelo de oferta

El modelo de oferta de los bienes inmuebles se desarrolla a través de un modelo de comportamiento de los desarrolladores inmobiliarios, quienes deciden dónde, qué y cuánto construir. El beneficio que percibe el desarrollador por un inmueble v en la zona en i queda definido por la siguiente expresión:

$$\pi_{vi} = r_{vi} - c_{vi} + \varepsilon_{vi} \quad (3.17)$$

En donde $r_{vi} - c_{vi}$ representa los beneficios monetarios conseguidos por el productor y ε_{vi} representa el error estocástico asociado al modelo, el cual es independiente e idénticamente distribuido y de tipo I o Gumbel con parámetros $(0, \lambda)$. Las rentas se obtienen de forma endógena y serán detalladas en el siguiente apartado.

La función de costos depende de parámetros de valoración económica, atributos independientes de la oferta localizada que describen a la oferta inmobiliaria (atributos exógenos) y de atributos que describen en entorno del bien inmueble, los cuales son funciones de la composición y cantidad de ciertos tipos de consumidores y de oferta localizados (atributos endógenos). Por lo tanto, los costos dependen del conjunto de todos los inmuebles del mercado, es decir $c_{vi} = c_{vi}(S_{vi})$. Esto último representa además las economías de escala y de diversidad presentes en el mercado inmobiliario.

De esta forma, siguiendo el modelo logit, se tiene que la oferta S_{vi} del bien inmueble v en la zona i se obtiene de una ecuación de punto fijo, definida por:

$$S_{vi} = S \frac{\exp(\lambda \pi_{vi})}{\sum_{wj} \exp(\lambda \pi_{wj})} = S \frac{\lambda \exp(r_{vi} - c_{vi}(S_{vi}))}{\sum_{wj} \lambda \exp(r_{wj} - c_{wj}(S_{wj}))} \quad (3.18)$$

3.6.3 Modelo de renta

Se ha mencionado anteriormente que las rentas se obtienen de forma endógena al ser el resultado del proceso de remate, en donde adquieren exactamente el valor de la máxima disposición a pagar en dicha localización.

El software utiliza la distribución de valor extremo Gumbel para representar los errores estocásticos, en particular para la función de postura de la ecuación 3.15, teniendo en cuenta las siguientes propiedades de la distribución Gumbel:

- i. La distribución Gumbel es cerrada respecto a la maximización

- ii. El máximo de un conjunto de variables aleatorias que distribuyen iid Gumbel distribuye también Gumbel con parámetros $(\frac{1}{\mu} \ln(\sum_i \exp(\mu \eta_i)), \mu)$
- iii. El valor esperado de una variable X que distribuye Gumbel (η, μ) es $E(X) = \eta + \frac{\gamma}{\mu}$, en donde $\gamma = 0,577$ es la constante de Euler.

Con todo lo anterior, se tiene la expresión que calcula las rentas:

$$r_{vi} = \frac{1}{\mu} \ln \left(\sum_i H_h \exp(\mu B_{hvi}) \right) + \sum_k \alpha^k X_{vi}^k + \frac{\gamma}{\mu} \quad (3.19)$$

En donde H_h representa el total de agentes consumidores por categoría.

3.6.4 Equilibrio

Las predicciones de Cube Land se generan a partir de resolver un problema de punto fijo que resuelve el equilibrio entre la oferta y la demanda en el mercado inmobiliario, donde el equilibrio que se considera es de tipo Walras y se expresa como: "Todos los consumidores están localizados", asumiendo que el estado de equilibrio resultante, aunque no necesariamente es único, representa la componente tendencial del real estado del mercado inmobiliario.

El modelo asume que la modificación de un conjunto de variables en un corte temporal futuro provocará que la oferta y la demanda inmobiliaria se ajusten tratando de alcanzar el mencionado equilibrio, a partir de un estado observado del sistema. En este contexto, el modelo reconoce la existencia de un conjunto de restricciones que actúan sobre las funciones de oferta y demanda inmobiliaria que condicionan, o incluso llegan a impedir, el equilibrio en el mercado inmobiliario. Estas restricciones pueden agruparse en tres grandes grupos:

- *Cotas superiores e inferiores sobre la localización y oferta inmobiliaria*

Cube Land es capaz de incluir, tanto para la localización de agentes como para la oferta inmobiliaria, cotas superiores e inferiores, las que actúan como restricciones al modelamiento de la ciudad. Estas cotas pueden ser obtenidas a partir de regulaciones gubernamentales (por ejemplo, la cantidad máxima de industrias que se pueden ubicar en una determinada zona) o bien de proyectos inmobiliarios conocidos (por ejemplo, una cantidad mínima predefinida de un cierto inmueble).

- *Restricciones sobre combinaciones lineales de la oferta inmobiliaria*

Junto con la condición obvia de no negatividad de la oferta, Cube Land permite la inclusión de restricciones que representan tanto la estructura propia de comportamiento de la oferta inmobiliaria y el conocimiento por parte del modelador de su estado, como también, otras que caracterizan las normativas que restringen su provisión. En particular, este tipo de

restricciones incluye la limitación a la magnitud de suelo utilizable para la localización de actividades.

- *Restricciones sobre combinaciones lineales de la localización de actividades*

Habitualmente, las principales restricciones sobre la localización de actividades provienen de normativas de regulación que restringen o prohíben la localización de determinados consumidores (hogares o tipos de actividades económicas) en ciertos tipos de oferta inmobiliaria de la ciudad. Estos tipos de normativas comúnmente derivan en restricciones que limitan la superficie de terreno disponible para distintos tipos de agentes en cada zona y pueden ser incluidos en la modelación, permitiendo así estudiar el efecto que éstas pueden tener en la localización de hogares y firmas dentro de la ciudad.

El algoritmo de solución que utiliza el programa aprovecha una interesante propiedad del problema. El cual es que siempre es posible encontrar un vector b' que produzca un desequilibrio nulo entre la oferta y la demanda. Dicho b' satisface la siguiente ecuación:

$$\sum_{vi} S_{vi} P_{h|vi} (b', S, P) = H_h \quad (3.20)$$

Despejando la componente b' de la ecuación anterior se obtiene:

$$b' = G(b', S, P) \quad (3.21)$$

Por lo tanto, el vector b' que anula el desequilibrio es un punto fijo de la ecuación (3.20) condicional en S y P.

El algoritmo del problema es iterativo y genera una sucesión de aproximaciones de las variables $b = b_h, S = S_{vi}$ y $P = P_{h|vi}$. Dadas las aproximaciones de estas variables en una iteración n , denotadas por b^n, S^n y P^n , las aproximaciones en la iteración $n + 1$ se calculan de la siguiente forma:

Dado (b^0, P^0, S^0) , calcular (b^*, P^*, S^*) como solución del siguiente problema de punto fijo ampliado:

$$\begin{bmatrix} b \\ P \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(b, S, P) \\ A(b, S, P) \\ D(b, S, P) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Se considera que el algoritmo ha convergido a una solución $(b', S', P') = (b_n, S_n, P_n)$ cuando se cumple que $\|(b_n, S_n, P_n) - (b_{n-1}, S_{n-1}, P_{n-1})\| < \varepsilon$, donde ε es el criterio de convergencia definido por el modelador.

CAPÍTULO 4: DESARROLLO DE SOFTWARE

En este capítulo se detallarán las funciones y herramientas desarrolladas para crear el modelo que funciona en conjunto con Cube Land, además de detallar los cambios hechos al programa para poder evaluar los resultados generados por la distribución Fréchet. Para detallar los cambios y herramientas desarrolladas, es necesario analizar primero los cambios introducidos al código interno de Cube Land, para luego analizar la estructura de los archivos de entrada y las funciones definidas para la búsqueda del equilibrio. Seguido a esto se mostrarán las herramientas, estructuras y funciones utilizadas en el código general, el cual funciona utilizando en segundo plano al software de uso de suelo.

4.1 Cube Land

El programa Cube Land, como fue detallado en el apartado 3.6, utiliza la distribución de valor extremo tipo I o Gumbel para encontrar el equilibrio en el sistema. Como objetivo de esta tesis, además de analizar el escalamiento de distintos indicadores urbanos, se considera la implementación de la distribución de valor extremo tipo II o Fréchet en el programa para así tener resultados con ambas distribuciones y poder compararlos. El principal motivo para incorporar la distribución Fréchet es que dicha distribución incorpora intrínsecamente los supuestos de que tanto la disposición a pagar como las rentas deben ser valores positivos.

Para incorporar la distribución tipo II al programa se tuvo acceso directo al código interno del software, en donde se modificaron las funciones de los modelos de demanda, oferta y renta. Las funciones y cambios incorporados se muestran en el siguiente apartado, para luego detallar el funcionamiento del software según los archivos de entrada necesarios.

Error! Reference source not found.

4.1.1 Cambios código interno

Los cambios en el código interno se realizan modificando el archivo *“land_functions.cpp”* del código central del software, al cual se tuvo acceso de manera confidencial para el desarrollo de este proyecto. En el archivo se detallan las restricciones del problema de punto fijo explicado en el apartado 3.6, dichas restricciones están desarrolladas siguiendo una distribución Gumbel y utilizando la familia de funciones logit. Para poder aplicar los cambios necesarios se deben desarrollar las mismas restricciones, pero para el caso de una distribución Fréchet y utilizando la familia de funciones denominadas como *frechit*. Cabe destacar que para aplicar los cambios se ha utilizado una propiedad de transformación entre las distribuciones Gumbel y Fréchet, descrita por Mattsson (2013) y representada en la Ilustración 2.1. Además, se ha seguido la formulación de Martínez (2018, capítulos 3 y 4) en donde se desarrolla el modelo aplicando una distribución de valor extremo Fréchet.

Situación previa

Habitualmente en Cube Land se utilizan funciones de postura lineales y una distribución de valor extremo Gumbel.

Las funciones de oferta, demanda y renta; variables endógenas y restricciones se detallan en un archivo de entrada denominado “*functions.lum*” y tienen las siguientes formas:

- **Posturas, B3[n]:** Tienen una forma lineal del tipo:

$$B3 = \sum_k \alpha_h^k X_{vi}^{kt \delta_k} \quad (4.1)$$

- **B2[m]:**

$$B2 = \sum_k \alpha_k X_{vi}^k \delta_k \quad (4.2)$$

- **Variable endógena, Z[i]:**

$$f(\text{localización/oferta, variable, } [h, v, i])$$

- **La función de renta quedaría completamente definida por B3[n], B2[m] y la especificación de μ**
- **Parámetro de escala de localización está implícito y se deberá definir en el nuevo modelo:**

$$gumb_par[m] = \mu$$

- **Parámetro de la oferta se define explícitamente:**

$$sup_scale_par[m] = \lambda$$

Por otro lado, las funciones internas de equilibrio tienen la siguiente forma:

- **Probabilidad de localización:**

$$P_{h/vi} = \frac{H_h \exp(\mu B3)}{\sum_g H_g \exp(\mu B3)} \quad (4.3)$$

- **Probabilidad de oferta:**

$$P_{vi} = \frac{\exp(\lambda(R_{vi} - C_{vi}))}{\sum_{wj} \exp(\lambda(R_{wj} - C_{wj}))} \quad (4.4)$$

- **Renta:**

$$R_{vi} = \frac{1}{\mu} \ln \sum_g \exp(\mu B3) + B2 + \frac{\gamma}{\mu} \quad (4.5)$$

Todo lo anterior se puede apreciar en la siguiente ilustración que muestra la visualización del archivo “*functions.lum*” por parte del usuario.

```
# Functional specification of location bid function component B3[n] of each aggregated
#agent type n defined in Agent_var.dbf (file of agent variables)
B3[1] = 0.01317*A[5] + 3.78192*Z[2] + 0.2109464*Z[4] + 0.0967577*Z[5] + 0.0006700*RZ[4]
B3[2] = 0.01976*A[5] + 4.62264*Z[2] + 0.1883871*Z[4] + 0.1121364*Z[5] + 0.0009134*RZ[4]
B3[3] = 0.02634*A[5] + 6.18636*Z[2] + 0.1284903*Z[4] + 0.1275153*Z[5] + 0.0012010*RZ[4]
B3[4] = 0.00000*A[5] + 3.36360*Z[3] + 0.0204903*Z[4] + 0.1275153*Z[5] + 0.0006700*RZ[4]
B3[5] = 0.00000*A[5] + 4.84560*Z[3] + 0.0373572*Z[4] + 0.2505349*Z[5] + 0.0020100*RZ[4]

# Rent value of a specific real estate type and zone
# This value is non-negative
Rent[6][1] = 0

# Functional specification of real estate cost function Cost[m] of each sub-market m
Cost[1] = 0.009*RZ[4]
Cost[2] = 0.009*RZ[4]

# Gumbel scale parameter of the supply probability Logit model of each sub-market
# These parameters are positive
Sup_scale_par[1] = 0.0283
Sup_scale_par[2] = 0.0283

# Definition of endogenous variables
Z[4] = Wsum(Location, RZ[5], [(1,2,3,4,5),(1,2,3,4,5,6),(.)] )

# Then we define cost and rent definitions
B2[1] = 1.667 *lnsum + 0.0*RZ[4]
B2[2] = 1.667 *lnsum + 0.0*RZ[4]
```

Ilustración 4.1: Visualización archivo *functions.lum* con funciones principales para uso Gumbel

Modelo Frechit

La implementación de la distribución Frechet en Cube Land se puede realizar usando mediante de un cambio en la especificación de las funciones de equilibrio y restricciones, lo que trae como consecuencia un cambio en la forma de especificar las funciones tanto en código interno como en el archivo “*functions.lum*”. El cambio más notorio es que ahora las posturas deben ser multiplicativas, lo que produce un cambio en el resto de las funciones que dependen de la disposición a pagar, y que las variables endógenas se deben utilizar aplicando su forma logarítmica para mantener la consistencia con las otras variables. Cabe destacar que si bien las posturas pueden tener expresiones aditivas se opta por usar expresiones multiplicativas para que no sea necesario cambiar el código de Cube Land (basta reemplazar los atributos por los logaritmos de estos).

- **Postura Frechet:** Se denota B_{hvi} , y representa la disposición a pagar del agente de categoría $h \in C$ por el bien inmueble v en la localización i , con $vi \in VI$. Las funciones estructurales del modelo son:
- **Probabilidad de localización:**

$$P_{h/vi} = \frac{H_h(B_{hvi})^\mu}{\sum_{g \in C} H_g(B_{gvi})^\mu} \quad (4.6)$$

- **Probabilidad de oferta:**

$$P_{vi} = \frac{(\ln(R_{vi}) - \ln(C_{vi}))^\lambda}{\sum_{w \in VI} (R_{wj} - C_{wj})^\lambda} \quad (4.7)$$

- **Renta:**

$$R_{vi} = K \left(\sum_{g \in C} H_g(B_{gvi})^\mu \right)^{\frac{1}{\mu}} \quad (4.8)$$

Para el caso de la implementación y especificación en Cube Land se tiene un cambio no menor, que consiste en que la especificación de la varianza de la demanda, μ , en el caso Fréchet ya no se puede realizar de una forma tan directa como lo es en el caso Gumbel, que se definía como parámetro que multiplica la logsuma (Ecuación 4.5). Además, este parámetro por definición del valor esperado de la distribución Fréchet debe ser mayor a uno; i.e: $\mu > 1$, a diferencia del caso Gumbel en donde debe ser mayor a cero, $\mu > 0$. Por otro lado, aparece la constante K (Ecuación 4.8) que también debe ser definida de manera exógena. Por otro lado, la ecuación 4.7 implica que tanto la renta como los costos deben ser valores positivos

Se tienen dos opciones de estructura que dependen de la especificación de la función de postura B_{hvi} :

Caso 1 Lineal: B_{hvi} (B3), B_{vi} (B2) y C_{vi} funciones lineales:

En este caso las funciones de postura y costos no sufren cambios significativos, el único cambio es que, por la naturaleza multiplicativa de la distribución según Martínez (2018) conviene usar la postura del tipo:

- **Posturas:** $B3[n] = \sum_k \alpha_h^k X_{vi}^{kt} \exp(\delta_k)$
 $B2[m] = \sum_k \alpha_h^k X_{vi}^{kt} \exp(\delta_k)$

Vale la pena destacar que, para poder implementar las funciones anteriores en Cube Land, tanto la probabilidad de localización como la función de renta incluyen el término $\ln(B3)$. Lo anterior dado que, por la estructura del código del software, para pasar de la ecuación 4.3 a la 4.6 se debe escribir la probabilidad de localización agregando el logaritmo en lugar de simplificarlo algebraicamente, como se aprecia en la ecuación 4.6. Por lo tanto, se debe

tener en consideración que las posturas ya no pueden tomar valores negativos. i.e $B3 > 0$. En este caso, una postura negativa o no deseada, estaría representada por un valor muy pequeño de $B3$, el cual, al serle aplicado la función logarítmica, evidenciaría apreciaciones negativas de posturas.

Caso 2 Cobb-Douglas: B_{hvi} , B_{vi} y C_{vi} funciones tipo Cobb-Douglas:

En este caso se definen las posturas de una manera distinta a la de Cube Land, pero se tiene el beneficio de que ya no es necesario aplicar logaritmo a la postura. La definición de la función de postura sería:

- **Posturas:**
$$B3[n] = \alpha_h \prod_{k=1}^K x_{ki}^{\beta_{hk}}$$

$$B2[m] = \prod_{k=1}^K x_{ki}^{\beta_{hk}}$$

En este caso la implementación en Cube Land esta marcada por esta forma funcional, la cual trae como consecuencia que, al aplicársele logaritmo a la postura, se tiene como resultado una forma lineal: $\ln(B3) = \beta_h \ln(b_h) + \sum_k \beta_h^k \ln(x_{vi}^k)$. Por lo que, para aplicar este método, sólo se necesita aplicar logaritmo a las variables zonales de la postura, las cuales se encuentran en los archivos de entrada del modelo, específicamente en los archivos *agents*, *real state* y *zones*, los cuales serán detallados más adelante. Además, es necesario definir los parámetros β de forma explícita en *functions.lum*.

En el caso de la renta, ésta se puede escribir de forma logarítmica para calibrar el modelo.

- **Renta:**
$$\ln(R_{vi}) = \frac{1}{\mu} \ln \sum_g H_g \exp(\mu \ln(B_{hvi})) + \ln(K)$$

Para el caso de la probabilidad de oferta, ésta se debe calcular con la renta en su forma multiplicativa.

Los cambios hechos implican claramente un cambio en el código, pero también provocan cambios en la forma del archivo de entrada *functions.lum*, el cual debe recoger las distintas opciones para desarrollar el programa. La visualización del nuevo archivo se puede apreciar en la siguiente ilustración:

```

# Todas las líneas con "" son cambios al archivo anterior
#"" DEFINICIÓN DE DISTRIBUCIÓN""
# Especificación de la distribución Gumbel o Fréchet, 1 se usa, 0 no se usa (no se pueden usar los dos, no se puede no usar ninguno)
Fréchet = 1
Logit = 0

# ESPECIFICACIÓN DE FUNCIONES
# Especificación de la variable Bhvi de la postura, se puede definir de forma aditiva o multiplicativa, pero sólo una, la que no se use debe ir con #
# Functional specification of location bid function component B3[n] of each aggregated #agent
# type n defined in Agent_var.dbf (file of agent variables)

# Especificación aditiva (B3[n] debe ser mayor a cero)
B3[1] = 15.73*RZ[5] + 1.26*Z[8] + 0.0004*Z[7] + -0.005*Z[2] + 0.007*Z[3] + 0.007*Z[4]
B3[2] = 4.65*RZ[5] + 2.07*Z[8] + 0.0020*Z[7] + -0.100*Z[2] + 0.010*Z[3] + 0.010*Z[4]
B3[3] = 1.97*RZ[5] + 1.81*Z[8] + 0.0010*Z[7] + -0.150*Z[2] + 0.005*Z[3] + 0.005*Z[4]

# ""Especificación Multiplicativa (tipo Cobb-Douglas) (RZ[],Z[], A[] deben ser mayores a cero)""
B3[1] = alpha1 * (RZ[5]^beta11) * (Z[8]^beta12) * (Z[7]^beta13) * (Z[2]^beta14)
B3[2] = alpha2 * (RZ[5]^beta21) * (Z[8]^beta22) * (Z[7]^beta23) * (Z[2]^beta24)
B3[3] = alpha3 * (RZ[5]^beta31) * (Z[8]^beta32) * (Z[7]^beta33) * (Z[2]^beta34)

# Especificación de la variable Bvi de la postura, se puede definir de forma aditiva o multiplicativa, pero sólo una, la que no se use debe ir con #
# Functional specification of location bid function component B2[m] of each sub-market m
# Only real estate and zonal attributes are allowed in this component

# Especificación aditiva
#B2[1] = 0.323614*RZ[5] + 0.440000*RZ[6]
#B2[2] = 0.557148*RZ[5] + 0.598962*RZ[7]^1.0

# ""Especificación multiplicativa ""
B2[1] = (RZ[5]^beta1_1) * (RZ[6]^beta1_2)
B2[2] = (RZ[5]^beta2_1) * (RZ[7]^beta2_2)

# Especificación de la función de costo, se puede definir de forma aditiva o multiplicativa, la que no se usa debe ir con #
# Functional specification of real estate cost function Cost[m] of each sub-market m
# Especificación aditiva
#Cost[1] = 0.323614*RZ[5] + 0.240000*RZ[6]^1.0
#Cost[2] = 0.157148*RZ[5] + 0.498962*RZ[7]^1.0

# DEFINICIÓN DE PARAMETROS

# Gumbel scale parameter of the location probability Logit model of each sub-market
# These parameters are positive
Loc_scale_par[1] = 2.5
Loc_scale_par[2] = 1.0

# ""Parámetro K de la función de renta del modelo Fréchet (sólo se usa si se define que se utiliza la distribución Fréchet)""
rent_par[1] = x.x
rent_par[2] = x.x

# Gumbel scale parameter of the supply probability Logit model of each sub-market
# These parameters are positive
Sup_scale_par[1] = 0.06
Sup_scale_par[2] = 0.06

# Rent value of a specific real estate type and zone
# This value is non-negative
Rent[1][10] = 0

# Finally we define endogenous variables
# Zone file column 4 is an endogenous function evaluated as
# ponderated sum of localization by Agent_Zone column 1 over the indexes agents=1,2,3 and realestates=4,5,6
Z[4] = Wsum( RZ[5], [(1,2,3,4,5),(1,2,3,4,5,6),(.)] )

```

Ilustración 4.2: Visualización archivo `functions.lum` con ecuaciones principales para funcionamiento Gumbel y Fréchet

4.1.2 Archivos de entrada

Para que Cube Land se ejecute es necesario introducir los archivos de entrada cada vez que se pasa del algoritmo externo al software, lo que se aprecia en la sección de color café en la Ilustración 3.2. Existen dos tipos de entradas: las que se introducen una única vez, por lo que son constantes a lo largo de la simulación, y los que se deben variar cada vez que se aumenta de población, es decir que cada vez que se aumenta el N deben actualizarse. A continuación, se detallarán ambos tipos de entradas.

Los archivos de entrada que se mantienen constantes se caracterizan en distintos archivos: el archivo ya mencionado `functions.lum` en donde se introducen los parámetros de gusto de los agentes, la varianza tanto de la oferta como de la demanda y la definición de las variables endógenas. Luego se tiene el archivo `simulation.lum`, en el cual se especifican los parámetros de control que caracterizan a la simulación, en particular se detalla si la simulación se ejecuta con oferta fija o variable y las condiciones de salida de los bucles de

simulación globales y anidados, es decir, el número de iteraciones y el criterio de convergencia para cada bucle.

A diferencia de los archivos anteriores, que son de texto, existen algunos archivos de datos que también se mantienen constantes, como el caso del archivo *agents.dbf*, donde se identifican los agentes involucrados con un índice distintivo, además de asignarlos a un mercado (en este caso se asigna 1 para el mercado residencial y 2 para el mercado no residencial). Dentro del mismo también se detalla el ingreso mensual (en U.F.) de cada agente residencial.

Por último, al correr el código general, se ingresa la renta agrícola relacionada a la ciudad creciente y que tendrá efectos en la identificación endógena del límite urbano.

Por otro lado, se tienen los archivos de entrada que varían cada vez que se ejecuta una simulación cambiando la población N . Dada la magnitud de los archivos que se deben ingresar, los cuales incrementan a medida que la ciudad se expande, se ha creado una función generadora de archivos de entrada. Dicha función será detallada mas adelante en conjunto con todas las funciones creadas en el código general. La razón por la que el tamaño de los archivos de entrada aumenta tanto se debe a que cada archivo es de tamaño $C \times H$ ó $C \times H \times V$, en donde C es el total de zonas de la ciudad (o tamaño de la grilla espacial), V es la cantidad de diferentes tipos de vivienda (6 en este caso) y H es la cantidad de distintos agentes (5 en este caso). Se puede apreciar que el tamaño del archivo depende directamente de la cantidad de zonas C que tenga la ciudad que crece con N . Además, es importante recalcar que todos los archivos de entrada, excepto lo mencionados como constantes, deben tener el mismo tamaño.

Dentro de los archivos descritos anteriormente se tienen tres tipos, los archivos que mantienen constante la información pero que se les debe variar el tamaño, los archivos que no se les debe variar el tamaño, pero sí la información y los archivos a los que se les debe variar tanto el tamaño como la información. Los archivos esenciales son estos últimos, pues son las variables endógenas que no se pueden calcular dentro de Cube Land y que, por lo tanto, deben actualizarse en el código externo para luego escribirse en el archivo *zones.dbf*; este archivo se vuelve a escribir siempre que se realiza una nueva simulación, ya sea para aumentar N o para el equilibrio interno.

El archivo al cual se le debe variar la información pero que mantiene su tamaño constante es el archivo *demand.dbf*. Este archivo representa la demanda por categorías socioeconómicas, es decir, la cantidad de hogares de ingreso bajo, medio y alto, además cuántas firmas de comercio y servicio existen para cada N . Por lo tanto, este archivo solo varía cuando se aumenta la población.

Por último, los archivos que se mantiene con información constante entre simulaciones de equilibrio, pero que deben variar su tamaño al incrementar la población de la ciudad son: *access_attraction.dbf*, *bid_adjustment.dbf*, *cost_adjustment.dbf*, *demand_cutoff.dbf*, *demand_exogenous_cutoff.dbf*, *fixed_supply.dbf*, *initial_supply.dbf*, *real_estate.dbf*,

rent_adjustment.dbf, *subsidies.dbf*, *supply_bounds.dbf*, *supply_cutoff.dbf*,
supply_exogenous_cutoff.dbf.

Con estos datos de entrada, más algunas funciones que serán descritas en el apartado del código interno, se tiene toda la información para llevar a cabo una simulación del crecimiento de una ciudad, que en esta tesis se simula el crecimiento desde 1 millón de habitantes hasta 29 millones. En caso de querer probar distintos escenarios como, por ejemplo: eliminar determinadas zonas para representar fenómenos geográficos como montañas o ríos dentro de la ciudad; añadir elementos que diferencien la accesibilidad como autopistas o entregar subsidios a determinados hogares, se debe alterar los archivos de entrada que por el momento aparecen como constantes.

4.1.3 Especificación de posturas

Como se mencionó anteriormente, la formulación de posturas se realiza en el archivo *functions.lum*. Tanto los parámetros de la función como los parámetros de varianza de la oferta y la de la demanda se entregan de forma exógena, por lo que es necesario definir alguna forma de calcularlos o calibrarlos. A continuación, se detalla cómo se han calculado los parámetros de la función de postura.

Según las categorías definidas y la inclusión de externalidades se incluye la densidad media de las zonas del entorno de la zona que se analiza y la densidad de la misma zona, al menos para poder diferenciarlas; en caso de que el parámetro estimado de ambas variables sea idéntico o similar, indica que la densidad se percibe en un ámbito espacial amplio. Se definen entonces las siguientes funciones de postura con variables normalizadas y adaptadas para ser usadas utilizando la distribución de valor extremo Frechét:

4.1.3.1 Hogares:

$$b_{hvi} = \alpha_h * \frac{I_h}{I_{max}} + \alpha_1 * \frac{acc_i}{acc_{max}} + \alpha_{21} * \frac{\rho_i^E}{\rho_{max}^E} + \alpha_{22} * \frac{\rho_i}{\rho_{max}^E} + \alpha_3 * \frac{q_v}{q_{max}} \quad (4.9)$$

Donde:

I_h, I_{max} = Ingreso del clúster de hogar e ingreso máximo de los clústers.

acc_i, acc_{max} = accesibilidad de la zona i y valor máxima de la variable.

q_v, q_{max} = Tamaño de la vivienda v y valor máximo de esa variable.

ρ_i^E, ρ_{max}^E = Densidad del entorno y valor máximo de esa variable.

ρ_i, ρ_{max}^E = Densidad de la zona y valor máximo de esa variable.

Los valores de los parámetros se utilizados en la aplicación de esta tesis son definidos ad-hoc. Los parámetros α_i son definidos siguiendo una condición de que cada uno debe pesar por igual (un tercio) en la magnitud de la postura. Mientras que el parámetro α_h depende del tipo de hogar y se define en base a la proporción de ingreso utilizado, que puede tener

tres valores, $\alpha_h = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1]$, definidos para los niveles de ingreso bajo, medio y alto respectivamente.

4.1.3.2 Firmas

$$b_{hvi} = \alpha'_{1} * \frac{att_i}{att_{max}} + \alpha'_{21} * \frac{\rho_i^E}{\rho_{max}^E} + \alpha'_{22} * \frac{\rho_i}{\rho_{max}^E} + \alpha'_{3} * \frac{q_v}{q_{max}} \quad (4.10)$$

Donde las variables y sus respectivos valores máximos son:

att_i = atractividad de la zona i

q_v = Tamaño de vivienda v

ρ_i^E = Densidad del entorno de la celda i

ρ_i = Densidad dentro de la celda i

Los parámetros α'_i tienen especial importancia ya que deben ser distintos para cada tipo de firma, es decir, en este caso al tener sólo dos tipos de firmas se ha definido que estos parámetros deben dar cuenta del peso de cada atributo, el cual depende del tipo de firma analizada. Para efectos de la simulación, en el caso de industria se utiliza el criterio de que el peso porcentual en la disposición a pagar debe ser, 10% para la densidad, la atractividad un 30% y el tamaño de la vivienda un 60%. Por otro parte, en las firmas tipo comercio/servicio, la densidad representar un 40%, la atractividad un 50% y el tamaño de vivienda un 10%.

4.1.4 Calibración de parámetros de la función de postura

Para analizar la relevancia de los parámetros α'_i , se realiza un análisis de sensibilidad de los parámetros con respecto a la renta de la ciudad y a la vez se analiza el parámetro de escala obtenido para dicha configuración. Para el análisis de estos parámetros, se ha utilizado una ciudad ficticia que varía entre 2 y 12 millones de habitantes con la clasificación de agentes y viviendas definida en el punto 5.1. Además, las simulaciones se han realizado con oferta y grilla variable.

Este análisis pretende establecer que el comportamiento del modelo sea “razonable” y sensible respecto del comportamiento esperado a criterio del modelador y a nivel del escalamiento global de las variables macroscópicas de la ciudad ficticia simulada, sin pretender que represente una calibración en base empírica.

4.1.4.1 Coeficiente de ingreso

En primera instancia se analiza la sensibilidad del modelo con respecto al parámetro de ingreso. Como se puede ver en el punto 4.1.3.1, los valores del ingreso se normalizan por el mayor valor, el cual es el ingreso asignado a los hogares de rango de ingreso alto.

En la Ilustración 4.3 se puede apreciar el efecto de variar el parámetro α_h , mientras que el resto de los parámetros permanece constante. Por otro lado, en la tabla 4.1 se muestran los distintos valores del escalamiento obtenidos para cada variación.

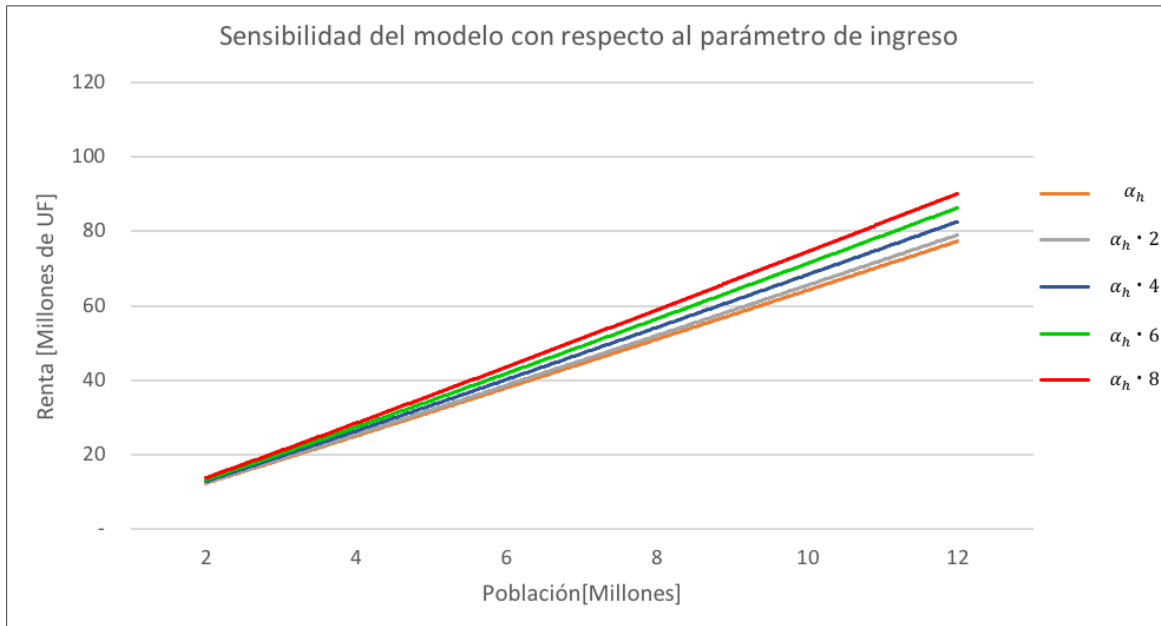


Ilustración 4.3: Sensibilidad del modelo de renta totales con respecto al parámetro α_h del ingreso.

Tabla 4.1: Escalamiento en función de la variación de α_h

Serie	Variación	β	R^2
S1	α_h	1,020	0,9938
S2	$\alpha_h \cdot 2$	1,033	0,9941
S3	$\alpha_h \cdot 4$	1,041	0,9945
S4	$\alpha_h \cdot 6$	1,046	0,995
S5	$\alpha_h \cdot 8$	1,051	0,9955

Con respecto a los valores obtenidos, se puede apreciar que a medida que se aumenta el valor del parámetro α_h , el escalamiento también aumenta. Este efecto tiene consistencia con lo mencionado por Sarkar et al. (2018), en donde se realiza un estudio del escalamiento entre renta y población analizando distintos rangos socioeconómicos en Australia. En dicho estudio se llega a la conclusión que, si bien existe un escalamiento superlineal para rangos de ingresos altos, mientras más bajo es el nivel de ingreso menor es el escalamiento. Incluso se muestra que, para los tres niveles socioeconómicos más bajos analizados, el escalamiento es sublineal. El mismo fenómeno es observado en la ciudad de Santiago, en donde Chardon (2019), muestra la existencia de distintos escalamientos en función de la renta observada de diversos barrios de la ciudad.

4.1.4.2 Coeficiente de accesibilidad

En el caso del parámetro α_1 , el cual da cuenta de la sensibilidad de la accesibilidad para el caso de los hogares, mientras que en el caso de las firmas se relaciona con la atractividad. Como se mencionó anteriormente, para este coeficiente también se normaliza por el mayor valor; para conseguir dicho valor se han realizado diversas simulaciones para encontrar el máximo relativo a cada nivel de población.

En la Ilustración 4.4 se puede apreciar el efecto de variar el parámetro α_1 , mientras que el resto de los parámetros permanece constante. Por otro lado, en la tabla 4.2 se muestran los distintos valores del escalamiento obtenidos para cada variación.

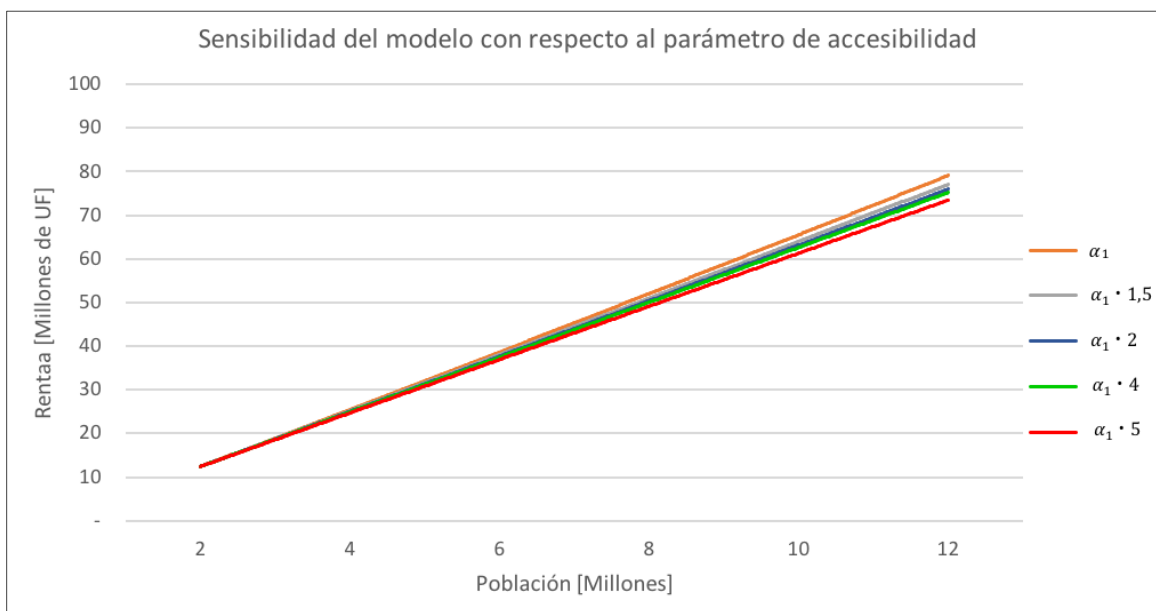


Ilustración 4.4: Sensibilidad del modelo de rentas totales con respecto al parámetro α_1 de accesibilidad.

Tabla 4.2: Escalamiento en función de la variación de α_1

Serie	Variación	β	R^2
S1	α_1	1,033	0,9949
S2	$\alpha_1 \cdot 1,5$	1,019	0,9946
S3	$\alpha_1 \cdot 2$	1,011	0,9945
S4	$\alpha_1 \cdot 4$	1,009	0,9944
S5	$\alpha_1 \cdot 5$	1,005	0,9941

Con respecto a los valores obtenidos, se puede apreciar un comportamiento completamente contrario al del parámetro α_h , y es que a medida que se aumenta el valor del parámetro α_1 , el escalamiento disminuye. A diferencia del caso anterior, se puede apreciar en la Ilustración 4.4 que la variación del escalamiento producida es menor a la del caso anterior. Cabe destacar que en este caso no se pudo analizar variaciones mayores, ya que provocaban una divergencia en el modelo, lo que se explica en el hecho de que, al aumentar la variación del parámetro de accesibilidad, las posturas no tendrían la dispersión

necesaria para que se alcance la solución del problema, tal como fue demostrado por Bravo et al. (2010) y ampliado por Martínez (2018).

El efecto de un escalamiento sub-lineal en función de una mayor apreciación de la accesibilidad tiene consistencia con el análisis de este fenómeno. Esto porque a medida que aumente la población del sistema urbano, los problemas de congestión y las grandes distancias que se deben recorrer provocan una deseconomía que afecta directamente a la accesibilidad, lo que se puede apreciar del punto 2.2. En particular de la ecuación 2.14 se puede desprender que a medida que aumentan los costos para desplazarse dentro del sistema urbano, el beneficio total percibido por los agentes será menor.

Un mayor detalle de este efecto es estudiado en el punto 5.2, en donde se analiza la inclusión de la congestión al modelo.

4.1.4.3 Coeficiente de densidad constructiva

Para el análisis del parámetro de densidad, del cual según se puede apreciar en el punto 4.1.3 se subdivide en dos parámetros, el de densidad zonal y el de densidad del entorno, se ha hecho un análisis conjunto de ambos parámetros. Cada término correspondiente de la función de postura es normalizado según la máxima densidad respectiva, zonal o de entorno; esta normalización se calcula en cada nivel de población. Vale la pena mencionar que, en este caso, se está analizando la densidad constructiva de cada celda, tal como fue descrito en el punto 3.4.

En la Ilustración 4.5 se puede apreciar gráficamente el efecto de variar el parámetro α_2 , mientras que el resto de los parámetros permanece constante. Por otro lado, en la tabla 4.3 se muestran los distintos valores del escalamiento obtenidos para cada variación.

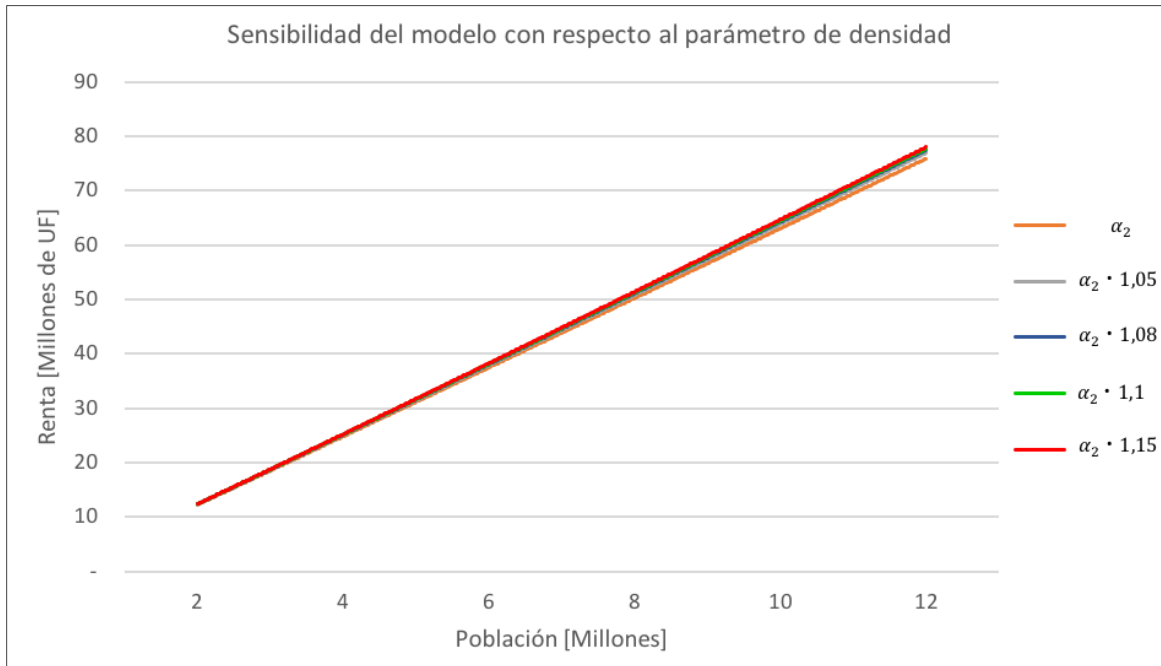


Ilustración 4.5: Sensibilidad del modelo con respecto al parámetro α_2 de la densidad.

Tabla 4.3: Escalamiento en función de la variación de α_2

Serie	Variación	β	R^2
S1	α_2	1,018	0,9941
S2	$\alpha_2 \cdot 1,05$	1,023	0,995
S3	$\alpha_2 \cdot 1,08$	1,024	0,9955
S4	$\alpha_2 \cdot 1,1$	1,027	0,9958
S5	$\alpha_2 \cdot 1,15$	1,030	0,9964

Con respecto a los valores obtenidos, se puede apreciar una tendencia super-lineal, similar al del parámetro α_h , y es que a medida que se aumenta el valor del parámetro α_2 , el escalamiento también aumenta. A diferencia de los casos anteriores, se en la Ilustración 4.5 se observa que la variación del escalamiento producida es menor a la del caso anterior. Cabe destacar que no se pudo analizar variaciones mayores, ya que, como en el caso anterior, provocaban una divergencia en el modelo.

Por otra parte, el hecho de que el escalamiento incremente al aumentar el parámetro de valoración de la densidad constructiva tiene directa relación con la formulación de las economías de aglomeración en este trabajo, en donde una mayor densidad tanto zonal como del entorno es valorada positivamente por los agentes.

Esto último se analiza más en detalle con la aparición de hotspots (subcentros), en donde si bien la accesibilidad también tiene relación, se ha especificado un comportamiento en donde existe un límite en la densidad constructiva a la que los agentes están dispuestos a valorar positivamente, lo que explica la pequeña variación de la Ilustración 4.5. El efecto de

los centros productivos o *hotspots* se analiza con mayor detalle en el punto 5.2, en donde se analiza la incorporación de subcentros en el modelo.

4.1.4.4 Coeficiente de tamaño de terreno

Finalmente se analiza la sensibilidad del modelo con respecto al parámetro de tamaño de terreno. Como se puede ver en el punto 4.1.3.1, los valores del tamaño del terreno se normalizan por el mayor valor, el cual es el tamaño grande asignado al mercado de industrias, lo cual se puede ver en detalle en el punto 5.1 donde se definen los escenarios y su indexación

En la Ilustración 4.6 se puede apreciar gráficamente el efecto de variar el parámetro α_3 , mientras que el resto de los parámetros permanece constante. Por otro lado, en la tabla 4.4 se muestran los distintos valores del escalamiento obtenidos para cada variación.

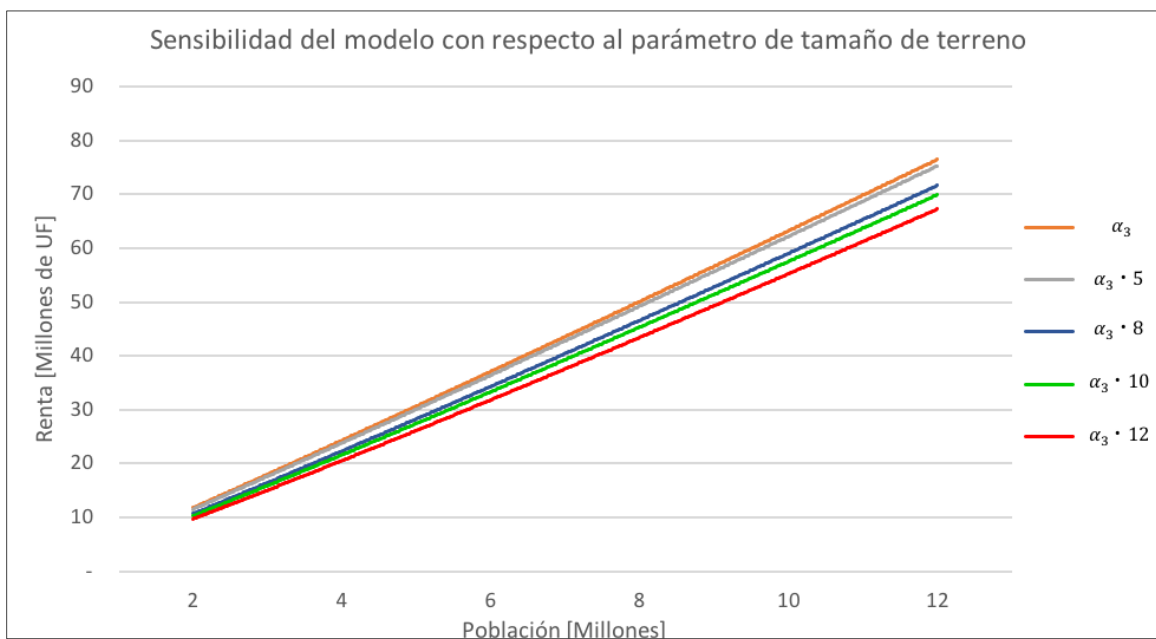


Ilustración 4.6: Sensibilidad del modelo con respecto al parámetro α_3 del tamaño de terreno de los agentes.

Tabla 4.4: Escalamiento en función de la variación de α_3

Serie	Variación	β	R^2
S1	α_3	1,079	0,9933
S2	$\alpha_3 \cdot 5$	1,069	0,9929
S3	$\alpha_3 \cdot 8$	1,062	0,9916
S4	$\alpha_3 \cdot 10$	1,047	0,9909
S5	$\alpha_3 \cdot 12$	1,043	0,9897

Con respecto a los valores obtenidos, se puede apreciar un comportamiento completamente contrario al del parámetro α_h , y es que a medida que se aumenta el valor del parámetro α_3 , el escalamiento disminuye. Por otra parte, se puede apreciar en la Ilustración 4.6 que la variación del escalamiento producida es bastante grande. Pero es necesario agregar que, para obtener resultados significativos, la variación de este parámetro tuvo que ser bastante alta comparada con los parámetros anteriores; aproximadamente 10 veces mayor.

Esto se puede explicar ya que, a medida que se aumenta la población, el valor del suelo es más caro, por lo que es esperable que las viviendas sean más pequeñas para que puedan seguir siendo accesibles económicamente. Por esto, se produce el efecto de que en las zonas periféricas de la ciudad sea más asequible una vivienda de gran tamaño, en donde el valor del suelo será más barato en comparación al centro, es decir, hay una reducción a nivel de renta agregada.

Por lo tanto, al aumentar la apreciación del tamaño de terreno, una vez que se comienza a aumentar la población, es lógico que el escalamiento sea inverso, ya que el tamaño de los terrenos tenderá a ser menor dentro de las zonas más densas poblacionalmente.

4.1.5 Calibración de parámetros de la distribución de valor extremo

Analizados los parámetros de la función de postura, es necesario analizar los parámetros relacionados a la varianza del modelo, los cuales en este trabajo son el parámetro de la varianza de la oferta, λ , y el parámetro de la varianza de la demanda, μ .

Para realizar estas simulaciones, se han utilizado los siguientes valores para los demás parámetros de la función de postura, los cuales han sido escogidos a partir de lo expuesto en el punto 4.1.3:

Tabla 4.5: Parámetros función de postura

Parámetro	Hogares			Firmas	
	Bajo	Medio	Alto	Comercio	Industria
Ingreso	0,01317	0,1976	0,2634	/	/
Accesibilidad / Atractividad	0,31516	0,38522	0,51553	0,2803	0,40380
Densidad Zonal	0,05331	0,05575	0,04831	0,00483	0,01045
Densidad Entorno	0,08796	0,10194	0,11592	0,11592	0,22775
Tamaño de Terreno	0,00067	0,00091	0,00121	0,00067	0,00201

Con estos datos, se procede a realizar un análisis de sensibilidad para la obtención de ambos parámetros de varianza, en donde se ha podido observar a través de diversas simulaciones que tienen un efecto muy importante en la obtención de resultados. Se debe trabajar con un intervalo acotado de estos parámetros para cada simulación, en donde fuera de dicho

intervalo no es posible encontrar un equilibrio, y más aún, se puede observar que el modelo diverge.

4.1.5.1 Efecto de la varianza de la oferta sobre el factor de escala

Se presentan los resultados de realizar un análisis de sensibilidad sobre el parámetro que determina la varianza de la oferta², λ , sobre el factor de escala (Ecuación 4.7). El análisis se ha realizado con un valor constante de la varianza de la demanda, μ , igual a 1, además de los parámetros de la tabla 4.6 para la función de postura.

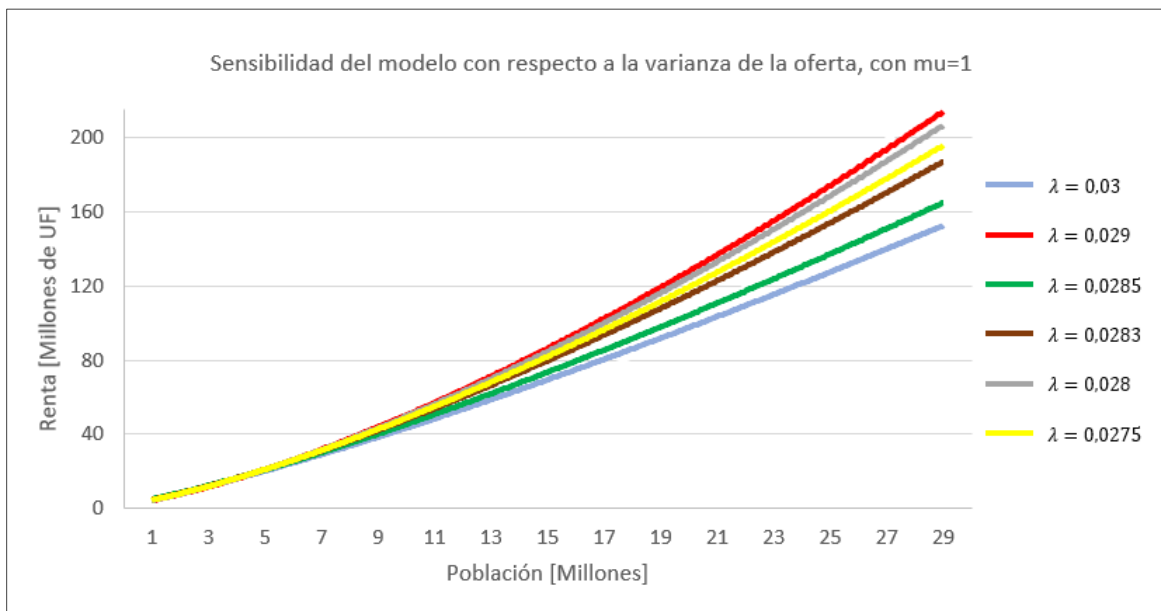


Ilustración 4.7: Efecto de la varianza de la oferta sobre el factor de escala

Tabla 4.6: Efecto de la varianza de la oferta en el factor de escala

Serie	μ	λ	β	R^2
S1	1,0	0,0275	1,1226	0,9978
S2	1,0	0,0280	1,1220	0,9976
S3	1,0	0,0283	1,1217	0,9974
S4	1,0	0,0285	1,1215	0,9970
S5	1,0	0,0290	1,1209	0,9963
S6	1,0	0,0300	1,1197	0,9950

² La varianza de profit de oferta Fréchet (Ecuación 4.7) es inversamente proporcional al parámetro λ : $\sigma = (r - c)^2 \left[\Gamma(1 - 2/\lambda) - \left(\Gamma(1 - 1/\lambda) \right)^2 \right]$; análogamente es el caso de la varianza de la postura (*bids*) (Ecuaciones 4.6 y 4.8) respecto del parámetro μ .

Las simulaciones se realizaron para seis casos con distintos valores de λ , según se describe en la Tabla 4.6, y los resultados de la renta agregada se grafican en la Ilustración 4.7. Se puede observar una relación inversa entre el parámetro λ de la oferta (y directa con la varianza) y el factor de escala β ; lo mismo se puede apreciar en la relación con el coeficiente de determinación, el cual es bastante alto. Lo anterior nos indica que un aumento de la heterogeneidad de la oferta en la ciudad (λ disminuye), implica retornos crecientes cada vez mayores. Otro resultado es que a mayor λ , menor varianza, el ajuste R2 del modelo simulado con la función de escalamiento es menor.

4.1.5.2 Efecto de la varianza de la demanda sobre el factor de escala

En el caso de la varianza de la demanda (inversamente proporcional con parámetro μ), se analizan cinco casos, en donde se ha podido identificar tendencias similares al caso anterior: la relación inversa entre el parámetro μ y el factor de escala. Nuevamente, esto nos indica que un aumento de la heterogeneidad de la oferta en la ciudad (μ disminuye), implica retornos crecientes cada vez mayores.

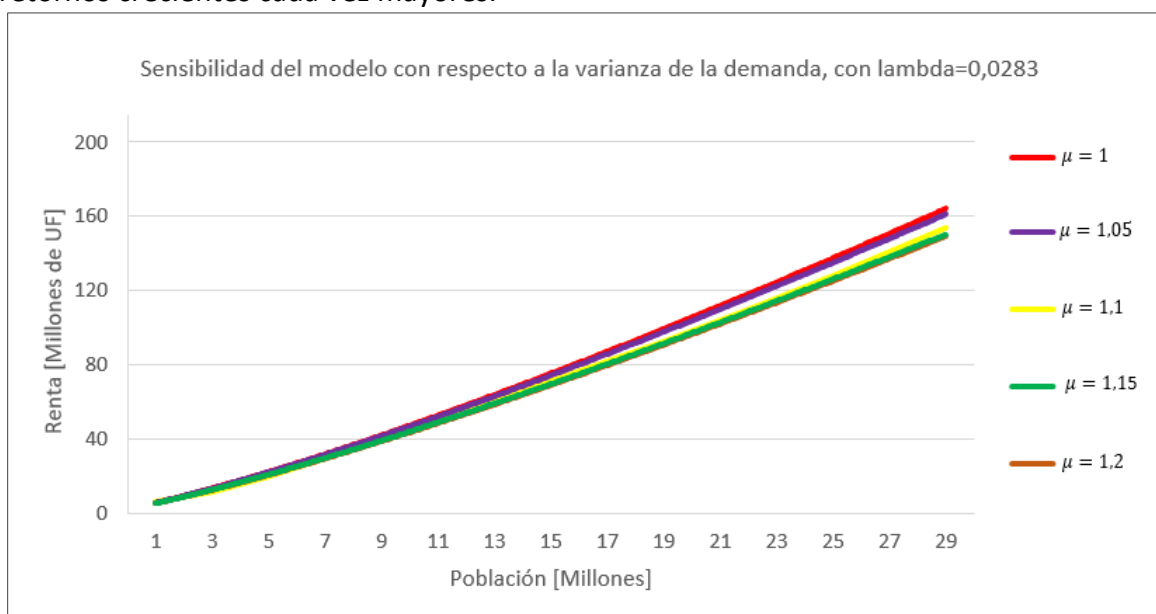


Ilustración 4.8: Efecto de la varianza de la demanda sobre el factor de escala

Tabla 4.7: Efecto de la varianza de la demanda en el factor de escala

Serie	μ	λ	β	R^2
S1	1,00	0,0283	1,122	0,987
S2	1,05	0,0283	1,121	0,978
S3	1,10	0,0283	1,116	0,976
S4	1,15	0,0283	1,109	0,970
S5	1,20	0,0283	1,098	0,961

Dentro de los parámetros más relevantes en cuanto a su impacto en el escalamiento, se tienen los que denotan la varianza de la demanda, μ , y la varianza de la oferta, λ , ya que los valores que tomen estos parámetros determinan la heterogeneidad que tendrán los agentes involucrados en el mercado. Por otro lado, se ha podido apreciar que en ambos casos se tienen resultados consistentes con la teoría microeconómica detallada en el punto 2.4, en donde el parámetro de escalamiento β se relaciona de manera inversa con la varianza de la siguiente forma: $\beta = 1 + \frac{1}{\mu}$

4.2 Código general

En la implementación del modelo se procede a inicializar y definir parámetros de control. Primero, se define exógenamente la población hasta la cual el modelador quiere que llegue la ciudad ficticia, i.e. 30 millones en este trabajo; luego se determina la población de hogares y firmas a usarse en cada nivel poblacional en base al modelo descrito en 3.2.

A continuación, se lleva a cabo el proceso de crear una ciudad inicial que permita inicializar las variables endógenas. En este proceso se utiliza una ciudad de 1 millón de habitantes y un reticulado de 36 celdas, todas con demanda y oferta equi-distribuida. Tras ese proceso es posible calcular los datos de entrada de las variables para dar inicio al proceso completo, el cual comienza con una población de 1 millón de personas a ser distribuidas en una ciudad de 400 celdas.

Para cada nivel de población N , se utiliza el proceso descrito en el punto 3.3 para encontrar el límite de la ciudad, lo que a la vez determina la cantidad de celdas de la ciudad. Una vez logrado la convergencia del proceso de límite urbano, se vuelve a calcular el equilibrio para el mismo nivel de población, pero en esta ocasión se deben calcular las variables endógenas descritas en los puntos 3.4 y 3.5, para luego utilizarlas como datos de entrada en la siguiente iteración. El proceso anterior se lleva a cabo hasta cumplir el criterio de convergencia, que en esta investigación se definió en 5 iteraciones para cada N .

Por último, el modelo da la opción de elegir entre utilizar la distribución de valor extremo Gumbel o Frechet, si correr con oferta inmobiliaria fija representando un equilibrio de corto plazo, o bien variable en caso de representar el largo plazo; se define además si considerar congestión o no y el nivel de renta agrícola RA. Todo lo anterior compone el llamado código principal, el cual entrega diversos resultados sobre los indicadores urbanos; en particular se obtiene la oferta, la demanda, la renta, la densidad y la accesibilidad para cada nivel poblacional.

En el anexo se detallan los principales componentes que se necesitan para ejecutar el llamado código general. En él se detallan distintos archivos tipo Python o de texto que se utilizan en conjunto, dichos archivos estarán disponibles de manera abierta para ser trabajados.

4.2.1 Modelo de Congestión

Desafortunadamente, la aglomeración en las ciudades no solo genera economías. La congestión, por ejemplo, es una importante deseconomía asociada con la concentración de personas en un área determinada. Por lo tanto, añadir esta externalidad es de vital importancia para tener un modelo verosímil.

Al iniciar el proceso de simulación, el modelo permite escoger si se quiere incorporar congestión. En caso de incorporarlo, se añade un modelo simplificado el cual se ha obtenido la velocidad de tránsito promedio de diversas ciudades en el mundo. En el estudio se han analizado más de 20 capitales del mundo, se ha decidido dejar algunas fuera del análisis debido a sus graves problemas locales de congestión como el caso de Lima o dado que las fuentes de información no eran lo suficientemente confiables, como en el caso de Delhi. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 4.8. El modelo obtenido a partir de una regresión permite relacionar la población y la velocidad promedio de tránsito. Por último, se incorpora el modelo de Barthelemy (2016), el cual permite calcular la demora total de una ciudad debido a la congestión.

Tabla 4.8: Velocidad de tránsito promedio en distintas ciudades del mundo (fuente: creación propia)

Ciudad	Velocidad (Km/Hr)	Población (Millones)
Washington D.C	31,1	0,63
Varsovia	26	1,76
Berlín	24,2	3,56
Santiago	23	5,6
Madrid	23,4	6,58
Londres	19,2	8,13
Bangkok	19	8,3
Moscú	18	11,9
Lagos	17,2	13,1
Calcuta	18	14,3
Ciudad de México	13,4	20,8
Beijing	12	21,5
Tokio	15,7	36,86

Los datos anteriores se grafican y se muestran en la ilustración 4.9, en donde se puede apreciar una regresión potencial con un coeficiente de determinación $R^2 = 0,84$.

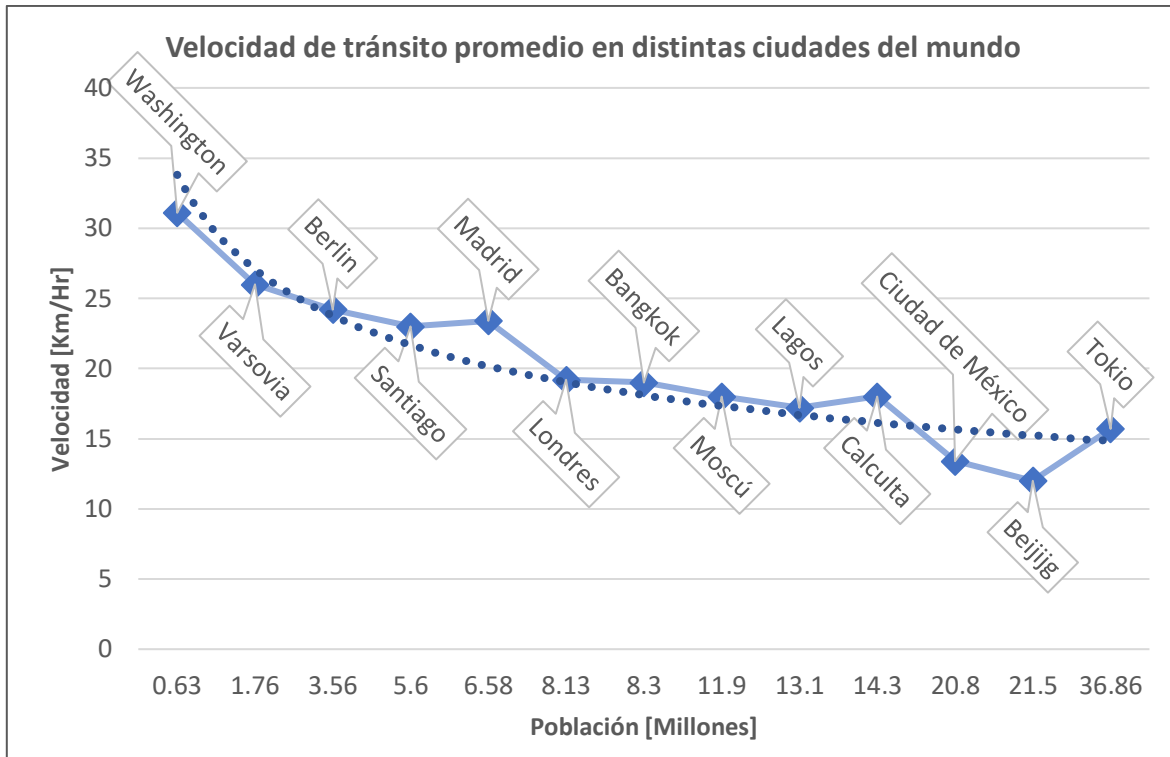


Ilustración 4.9: Velocidad de tránsito promedio para distintas ciudades del mundo

A partir de los datos anteriores, se puede establecer una función que la relaciona la población de una ciudad y su velocidad promedio de tránsito, la cual tiene la siguiente forma: ($R^2 = 0,84$)

$$v = 33,811 * N^{-0,321} \quad (4.11)$$

Una manera simple de cuantificar el deterioro causado por la congestión del tráfico es a través de la demora total que genera. Podemos calcular este retraso en el marco de un modelo simple adaptado de Barthelemy (2016) con el supuesto de que la velocidad promedio de flujo libre v_0 es la misma para todos. La demora total, $\delta\tau$, debida a la congestión viene dado por:

$$\delta\tau = \frac{1}{v_0} \sum_{i,j} d_{ij} \left(\frac{T(j)}{c} \right)^\mu \quad (4.12)$$

En donde d_{ij} es la distancia para ir de i hasta j , v_0 es la velocidad de flujo libre, $T(j)$ es la cantidad de tráfico entrante a la zona j , y c es la capacidad de la red de transporte. Luego de algunas definiciones y desarrollo matemático, Barthelemy propone un modelo de demora total en función de la población, el cual es:

$$\delta\tau \sim \frac{l * N}{v} * \left(\frac{N}{c}\right)^\delta \quad (4.13)$$

donde l es el viaje más largo que un individuo podría realizar dentro de la ciudad y $\delta = 1 + \frac{\theta}{\theta+1} \left(1 - \frac{b}{2}\right)$, donde θ es la sensibilidad del modelo a la congestión y b es un parámetro exógeno calibrado a través de los datos, $b \approx 0,85$ (Barthelemy, 2016).

4.2.2 Modelación de subcentros

Como han señalado los economistas urbanos, en particular Martínez (2018), una característica importante del proceso de ubicación de las empresas es la aparición de "hotspots", que son ubicaciones que emergen como subcentros en los que las empresas se aglomeran. La localización del subcentro emerge y se diferencia de los centros de producción o servicios anteriores, como el centro de la ciudad (CBD), cuando el beneficio en una nueva ubicación, definido a partir los beneficios y costos dados por la accesibilidad y atractividad, es igual al beneficio obtenido en el centro anterior o CBD. Es decir, el nuevo centro produce beneficios gracias a una mejor accesibilidad que compensa la mayor economía de aglomeración en los centros anteriores. Por lo tanto, los "hotspots" son lugares donde la accesibilidad y las externalidades de localización generan ganancias relativamente más altas que en el resto de la ciudad descontando el CBD. Sin embargo, al predecir la aparición de subcentros, es crucial que las funciones de accesibilidad se definan específicamente para la industria de la empresa, de modo que se puedan capturar el potencial de la aparición de subcentros en cada industria.

En relación con el desarrollo de este trabajo, se reconoce una dificultad mayor a la hora de modelar los subcentros, y es que para poder encontrar un punto donde las economías de aglomeración permitan la creación de un hotspot, se necesita un modelo productivo. Lo anterior se debe a que es necesario definir una ganancia por unidad de tiempo a la vez de un perfil salarial para las empresas.

Sin embargo, como el objetivo de este trabajo es estudiar el impacto de los subcentros en el escalamiento y en la forma de la ciudad, y que por otra parte la ciudad simulada es homogénea radialmente, se ha desarrollado un modelo simple que permite definir la generación de hotspots basados únicamente en la distancia al CBD en que se debería producir un subcentro. Con el punto encontrado se puede inducir de manera exógena la aparición de hotspots, a través de los archivos de entrada, tal como se explica a continuación.

Como se mencionó anteriormente, los subcentros aparecen cuando los costos de viajar al centro son similares a los beneficios en ese centro. Esto último lo podemos tratar de forma monetaria con la clásica ecuación de restricción monetaria relacionada a la maximización de las utilidades, la cual es de la forma:

$$Y_h - R_{vi} - CG - X * p(x) \geq 0 \quad (4.14)$$

En donde Y_h es el ingreso del hogar tipo h , R_{vi} es la renta de la vivienda v en la localización i , CG es el costo generalizado de transporte, X es la cantidad de bienes consumidos y $p(x)$ es el precio del bien X .

En este caso, el ingreso de cada categoría de hogar es exógeno y fue escogido en relación con los niveles socioeconómicos de Chile; para más detalle se puede revisar el punto 3.2.3. Por otro lado, la renta de cada vivienda en función de su localización se obtiene de manera iterativa cada vez que se ejecuta el modelo. El costo generalizado de transporte se puede escribir de la siguiente manera, basándose en Barthelemy (2016):

$$T(i, j) = V * \frac{d_{ij}}{v} + c \quad (4.15)$$

donde V es el valor del tiempo, para el caso de Chile es \$1750 (peso/hora/pasajero) según el Ministerio de Desarrollo Social (2018); d_{ij} es la distancia entre el punto i y el punto j ; v es la velocidad de tránsito donde se utiliza la ecuación 4.11; y c es el costo monetario del viaje, \$720 en horario valle para un viaje de máximo dos transbordos (Red, 2019). Por otro lado, si en la ecuación 4.14 suponemos que como mínimo un hogar gasta el 20% de su sueldo en bienes básicos, podemos obtener la distancia d_{ij} en la que se cumple la igualdad para dicha ecuación.

Se debe notar que como v depende de la población, la ubicación de este punto también dependerá del nivel de población, además de que todos los valores se deben usar en la misma medida temporal, en este caso se ha decidido utilizar los valores mensuales, además de que un individuo realiza dos viajes por día, representando la ida y la vuelta.

Con lo anterior, podemos asumir que un subcentro emergerá cuando la ecuación 4.14 sea igual a cero, por lo que reemplazando los datos mencionados anteriormente y asumiendo el peor de los casos, i.e, el nivel de ingreso más bajo y la renta más alta, podemos obtener para cada nivel de población la distancia al CBD en la teóricamente que debería emerger un subcentro. En el caso en que dicha localización sea menor al radio urbano, entonces se procede a inducir la aparición de un subcentro en dicho punto, representado por su celda, a través de un aumento en el número de firmas que se localizan en ese lugar. Este procedimiento de inducir un subcentro es ad-hoc, ya que no se incluye en la simulación un modelo productivo de las firmas que genere perfil salarial y de sueldos de los hogares en forma endógena y que permita que las firmas perciban la oportunidad de concentrarse en subcentros y así captar economías, tanto de transporte como de aglomeración, cuando se cumple la condición de la ecuación 4.14 mencionada. Esto constituye una limitación del modelo que hace que la simulación no pueda encontrar configuraciones policéntricas que representen el efecto no lineal de las economías de aglomeración mediante la aparición de centros de actividades laborales distintos al centro y su consecuente densificación.

Un resumen de lo anterior se presenta en la siguiente tabla, en donde, en base a la velocidad promedio de tránsito para cada nivel poblacional se calcula la distancia desde el CBD a la que debería aparecer un subcentro. Por lo que, teniendo en cuenta el radio urbano de cada configuración, también medido desde el CBD, se indica si el subcentro es admisible espacialmente.

Tabla 4.9: Modelación de subcentros

Población	Velocidad	Distancia Hotspot desde CBD (km)	Radio Urbano (km)	¿Admite Hotspot?
1	33,81	16,23	7	no
3	23,76	11,41	9	no
5	20,17	9,68	10	si
7	18,10	8,69	12	si
9	16,70	8,02	13	si
11	15,66	7,52	14	si
13	14,84	7,12	15	si
15	14,18	6,80	16	si
17	13,62	6,54	17	si
19	13,14	6,31	18	si
21	12,72	6,11	19	si
23	12,36	5,93	20	si
25	12,03	5,78	21	si
27	11,74	5,63	22	si
29	11,47	5,51	23	si

De la tabla 4.9 se puede apreciar que, en la transición del sistema urbano de 3 millones a 5 millones de personas, se genera por primera vez un centro que cumple espacialmente con la condición 4.14; es decir que el subcentro teórico queda dentro del límite urbano. O sea que, desde la configuración urbana de 5 millones, hay puntos dentro de la ciudad en donde los beneficios de acceder a un subcentro exceden a los que otorga acceder al CBD por lo que corresponde la aparición de un subcentro.

Un aspecto interesante de los datos de la tabla es que se puede apreciar que la distancia del subcentro se acerca al CBD a medida que se aumenta la población, lo que es teóricamente esperable al tener en cuenta que el valor del suelo también aumenta y también aumenta la densidad, por lo que la condición 4.14 implica una menor distancia óptima del subcentro.

El resultado anterior es algo inesperado, y es que se debe recalcar que por limitaciones del software no se han podido incluir los costos de demolición ni de reconstrucción de viviendas. Por lo tanto, si bien se reconoce que los costos mencionados anteriormente

tendrían un fuerte efecto, el cual podría incluso provocar que el subcentro se alejara del CBD, para fines analíticos se prosigue con esta modelación.

Cabe destacar que los radios urbanos señalados son los obtenidos a partir de la simulación del modelo con congestión y grilla variable, el cual será detallado en el punto 5.2. Y que sólo se calculó la aparición de un subcentro para cada nivel poblacional.

Con esto se tiene un modelo simplificado que permite identificar a que distancia del centro se genera un subcentro, se debe tener en cuenta que el modelo es basado a la ecuación de restricción de ingreso 4.14 a falta de un modelo productivo que permita identificar los perfiles de sueldo y las economías de aglomeración de las firmas.

CAPÍTULO 5: RESULTADOS

En esta sección se realiza la simulación computacional del modelo descrito en los capítulos 3 y 4, para obtener distintos resultados, en particular de la renta, la densidad, la accesibilidad y el escalamiento en varios escenarios.

Con estos resultados tomados en serie temporal se puede verificar si los resultados reproducen el modelo de escalamiento, estimando una regresión log-log de las variables, e.g. $\ln(R) = \beta \ln(N)$, donde R es la renta agregada en toda la ciudad. Así se estima el factor de escala β que identifica el comportamiento no-lineal del sistema urbano simulado y se puede analizar como varía el factor de escala con los escenarios simulados.

A continuación, se presentan los parámetros que definen los escenarios y los principales resultados obtenidos a partir de las simulaciones. Los resultados presentados están basados en el marco de una ciudad con oferta variable y con cinco iteraciones de convergencia para cada nivel de población, donde se varía la presencia de congestión, la identificación del límite urbano endógeno y la incorporación de subcentros. Dentro de lo más destacable es que se puede apreciar relaciones muy interesantes entre los parámetros del modelo y el factor de escala β , las que tienen consistencia con la teoría y con los estudios empíricos realizados hasta el momento. Se presentan resultados de retornos crecientes para indicadores urbanos socioeconómicos, como la renta agregada de la ciudad; el efecto de los parámetros de postura (*bids*) en la forma que adquiere la ciudad; y el efecto que tienen las varianzas de la oferta y la demanda en la magnitud del factor de escala.

5.1 Definición de escenarios

Como primer paso para presentar los resultados, es necesario definir la cantidad de tipos de agentes, de viviendas y el número de zonas con los que se va a trabajar en cada escenario. En relación con la zonificación del sistema urbano, como se ha mencionado anteriormente, se reconoce que al definir a priori el número de zonas se está definiendo el límite de la ciudad de forma exógena, quedando una grilla constante a lo largo de la modelación. Por lo que se analiza el efecto de agregar el algoritmo de límite urbano en la obtención del escalamiento. Por otro lado, también se incorpora la congestión y los subcentros al análisis de manera gradual, con el fin de tener mayor claridad del efecto provocado al agregar estas funcionalidades al modelo.

En la modelación se consideran tres categorías de hogares: bajo, medio y alto ingreso; y dos categorías de firmas: industria y servicios. Se consideran dos usos de suelo, uno para las viviendas o residencial y otro no residencial, mientras que el rango de tamaños de dicha oferta se define en tres niveles: pequeño, mediano y grande.

Las tablas 5.1 y 5.2 resumen lo mencionado anteriormente y clasifican con un número de identificación cada tipo de unidad.

Tabla 5.1: Definición de los agentes

Conjunto de tipos	Rango de ingreso (UF/Mes)	Nº de identificación del clúster
Hogares: Se localizan sólo en tipos de bienes inmuebles residenciales	bajo (< 13,3)	1
	Medio (13,3- 38]	2
	Alto (> 38)	3
Firmas: Se localizan sólo en tipos de bienes inmuebles residenciales		4
		5

Tabla 5.2: Definición de los bienes inmuebles

Uso	Tamaño	Nº de identificación del tipo
Residencial	Chico	1
	Mediano	2
	Grande	3
No residencial	Chico	4
	Mediano	5
	Grande	6

Como una primera aproximación a la simulación y en orden de generar una metodología sencilla y clara para poder ir identificando errores, se han generado archivos iniciales considerando una grilla de 20x20, obteniendo 400 celdas o zonas, el cual se que se define como el escenario base caracterizado por tener grilla fija. A partir del escenario base se agregan los modelos nuevos desarrollados: en un segundo escenario se añade que la grilla sea variable, para luego incorporar los modelos de congestión y de hotspot (subcentros) en los escenarios 3 y 4 respectivamente. Un resumen de lo anterior se presenta en la tabla 5.3:

Tabla 5.3: Definición de escenarios de simulación

Escenario	Oferta	Grilla	Congestión	Hotspot
1	Variable	Fija	No	No
2	Variable	Variable	No	No
3	Variable	Variable	Si	No
4	Variable	Variable	Si	Si

5.2 Resultados y análisis de los escenarios

Los resultados de los escenarios mencionados anteriormente se presentan de manera gradual, donde se comienza con el escenario base, con población incremental y oferta variable y con la distribución de valor extremo tipo II o Fréchet, para luego ir añadiendo las variables desarrolladas y así poder aislar el efecto de cada una de ellas.

Se muestran los resultados más característicos de cada escenario, su renta total y promedio, la accesibilidad, la densidad promedio y el factor de escala correspondiente para el modelo que relaciona la renta total de la ciudad y su población.

5.2.1 Simulación con población incremental y oferta variable (NSv)

El primer escenario da cuenta de la primera herramienta desarrollada, donde la gran modificación respecto del escenario base es haber incorporado el incremento gradual de la población para representar el crecimiento espacio-temporal de una ciudad.

Como se explica en el punto 4.2, al iniciar el modelo el primer dato que se debe entregar es el nivel poblacional hasta el cual se quiere llegar. Para este trabajo se ha utilizado una población límite de 30 millones. A partir de esto, se lleva a cabo la simulación del crecimiento de un sistema urbano caracterizado, en este escenario, por tener una grilla fija. Este escenario se podría comparar con el caso de Barcelona, donde a raíz de impedimentos geográficos se llegó a un punto en donde la ciudad no puede seguir expandiéndose. Esto último trae como consecuencia la densificación de la mayoría de las zonas, el aumento del valor de la renta y una migración de agentes hacia sectores más lejanos, fenómeno que no se incluye en esta modelación.

Se ha utilizado una grilla fija cuadrada de 20x20, es decir que existen 400 zonas. En la tabla 5.4 se presenta un resumen de la renta agregada para cada nivel poblacional. Mientras que en la ilustración 5.1 se puede ver gráficamente la evolución de la renta con respecto al aumento de la población, donde se obtiene un escalamiento $\beta = 1,2721$ con un ajuste $R^2 = 0,996$.

Tabla 5.4: Renta Agregada para cada nivel poblacional para escenario NSv

Población [Millones]	Renta Agregada [UF]
1	11.585.222
3	22.127.746
5	35.731.872
7	52.461.044
9	71.039.266
11	88.478.803
13	106.743.109

Población [Millones]	Renta Agregada [UF]
15	120.904.850
17	140.060.016
19	160.188.234
21	181.358.190
23	203.740.281
25	239.616.582
27	262.157.753
29	295.623.895

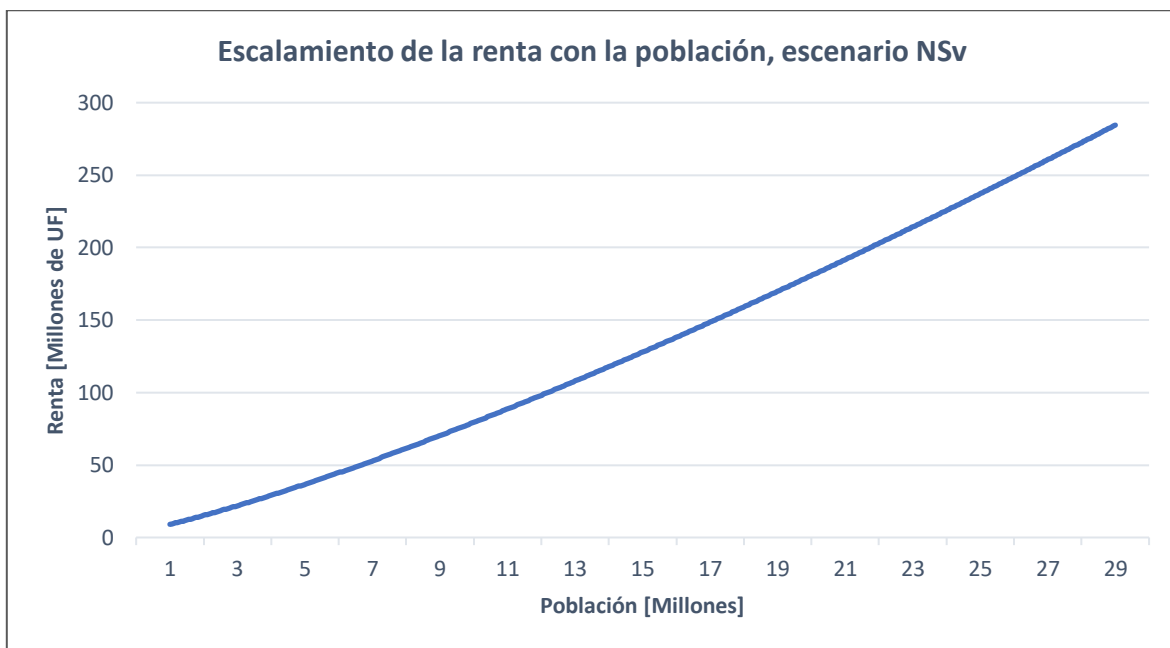


Ilustración 5.1: Escalamiento de la renta con la población para el escenario NSv

Por otro lado, en la tabla 5.5 se muestran los valores de densidad promedio de habitantes por kilómetro cuadrado, para cada nivel poblacional. En relación con los datos mostrados se puede apreciar que la densidad es bastante alta en comparación a otros escenarios, lo cual está lógicamente explicado por el hecho de que no existe una grilla variable que se ajuste a medida que la ciudad incrementa su población, por lo que la concentración de la población se da en las celdas predefinidas

Con relación al escalamiento de la densidad con la población, en la ilustración 5.1 se observa gráficamente la evolución de la densidad promedio con respecto al aumento de la población, en donde, ajustando una ley de potencia, se obtiene un escalamiento $\beta = 1,2534$ con un ajuste $R^2 = 0,997$.

Tabla 5.5: Densidad promedio escenario NSv

Población [Millones]	Densidad Promedio [Hab/km ²]
1	5,09
3	14,59
5	23,72
7	33,30
9	43,33
11	53,80
13	64,72
15	76,08
17	87,89
19	100,14
21	112,82
23	125,95
25	139,52
27	153,53
29	167,97

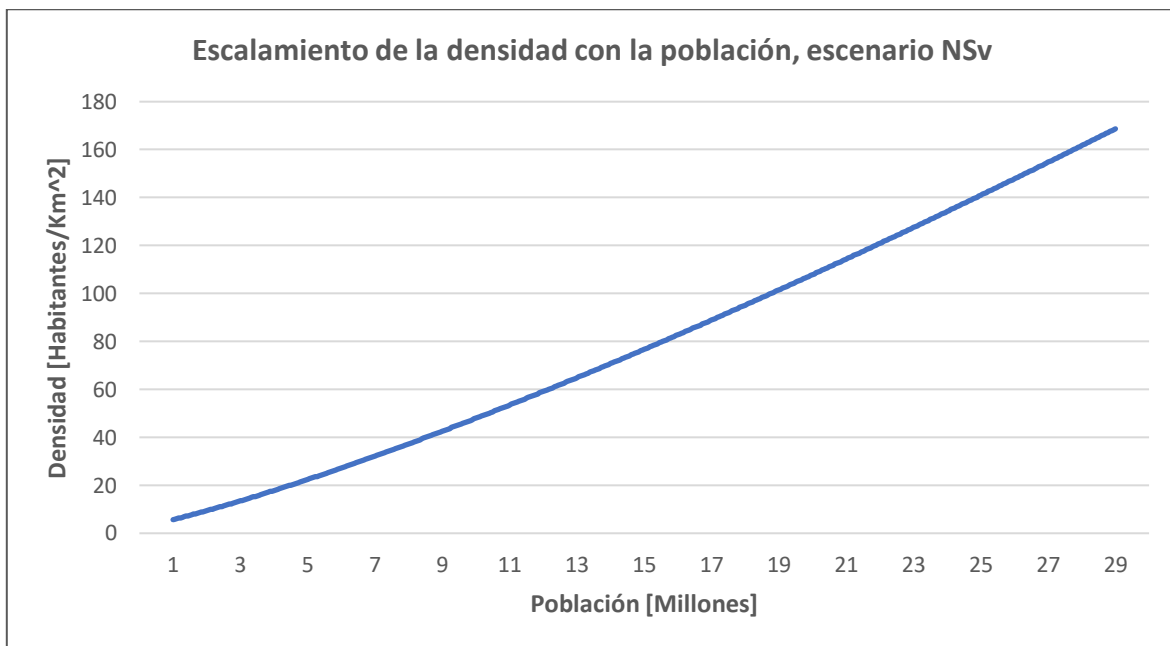


Ilustración 5.2: Escalamiento de la densidad con la población para el escenario NSv

5.2.2 Simulación con población incremental, oferta y grilla variable (NSvG)

La segunda herramienta que se puede añadir al ejecutar el modelo es el mencionado algoritmo de límite urbano, detallado en el punto 3.4, con lo que se logra extender el modelo anterior a uno que además de tener población incremental, es capaz de encontrar el límite de la ciudad de manera endógena ajustado a cada nivel de población.

La principal característica agregada en este escenario es que la grilla utilizada en la modelación de la ciudad deja de ser fija. Con lo anterior se soluciona el problema de que el modelador defina de manera exógena el tamaño de la ciudad, sino que ahora el límite depende de la renta agrícola. Para este trabajo se ha escogido una renta agrícola igual a 10 [UF/Mes], identificada a partir de estudios de la ciudad de Santiago y en consistencia con los parámetros del modelo.

En la tabla 5.6 se presentan los valores de la renta agregada para cada nivel poblacional, en donde se puede apreciar que el nivel de renta agregada en cada nivel poblacional es menor al del caso anterior, lo cual es esperable para una ciudad que ahora se puede expandir espacialmente. Mientras que en la ilustración 5.3 podemos ver la evolución de la renta con respecto al aumento de la población, en donde se obtiene un escalamiento $\beta = 1,121$ con un ajuste $R^2 = 0,997$.

Tabla 5.6: Renta agregada para cada nivel poblacional, escenario NSvG

Población [Millones]	Renta Agregada [UF]
1	11.345.922
3	20.111.805
5	33.188.959
7	46.494.465
9	60.091.855
11	74.026.503
13	88.312.820
15	102.977.580
17	118.001.080
19	133.394.198
21	149.131.850
23	165.213.967
25	181.661.228
27	199.659.634
29	217.561.326

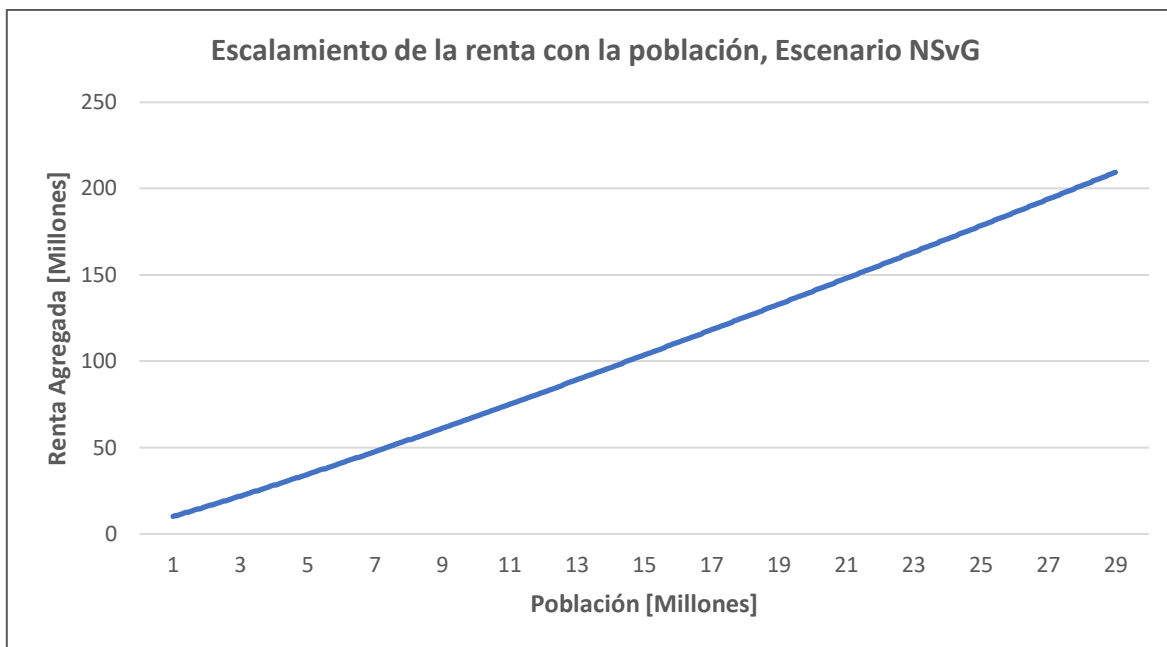


Ilustración 5.3: Escalamiento de la renta con la población para el escenario NSvG

Por otro lado, en la tabla 5.7 se muestran los valores de densidad promedio para cada nivel poblacional. En relación con los datos mostrados se puede apreciar que la densidad promedio es bastante menor que en el caso anterior, lo cual es totalmente concordante con el hecho de tener una grilla variable que se ajusta con la cantidad de habitantes. En este caso se aprecia como una ciudad crece espacialmente al aumentar su población, en donde la densidad en cada nivel poblacional es menos de la mitad del caso anterior. Por otro lado, el límite urbano, que se puede apreciar en la tabla 4.9, es bastante mayor al impuesto en la simulación con grilla fija, lo cual refleja la relevancia de incorporar una grilla variable.

Con relación al escalamiento de la densidad, en la ilustración 5.4 se puede ver gráficamente la evolución de la densidad promedio con respecto al aumento de la población, en donde, a través de una línea de tendencia potencial, se obtiene un escalamiento $\beta = 1,231$ con un ajuste $R^2 = 0,998$.

Tabla 5.7: Densidad promedio para cada nivel poblacional escenario NSvG

Población [Millones]	Densidad Promedio [Hab/km ²]
1	2,18
3	6,10
5	9,81
7	13,69
9	17,69
11	21,98
13	26,29

Población [Millones]	Densidad Promedio [Hab/km ²]
15	30,77
17	35,44
19	40,46
21	45,55
23	50,78
25	55,95
27	61,55
29	67,00

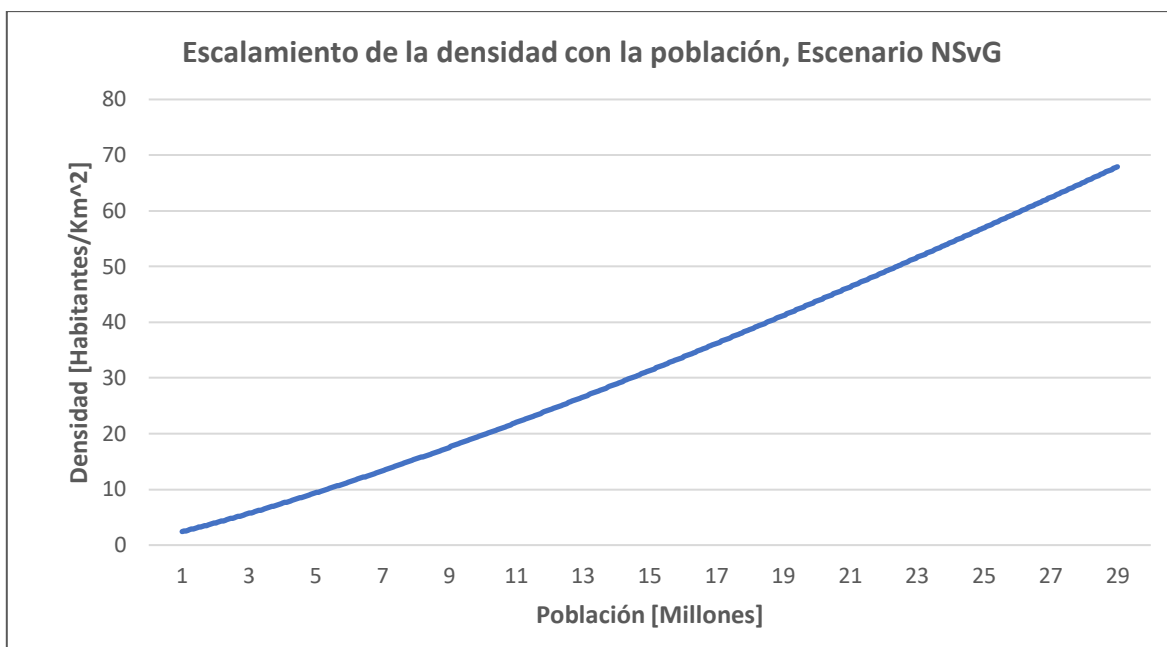


Ilustración 5.4: Escalamiento de la densidad con la población para el escenario NSvG

5.2.3 Simulación con población incremental, oferta y grilla variable, y congestión (NSvGC)

La tercera herramienta incorporada al ejecutar el modelo es la incorporación de congestión, modelo que se explica en detalle en el punto 4.2.1. La incorporación de esta variable sigue la línea de volver lo más realista posible el modelo, añadiendo la deseconomía generada por el aumento de tráfico dentro del sistema urbano.

La principal característica agregada en este escenario es que la velocidad de las ecuaciones 3.13 y 3.14 deja de ser fija, pasando a ser función de la cantidad de habitantes de la ciudad. Con lo anterior se busca solucionar el problema generado al tener una velocidad fija, y es que la deseconomía generada por la congestión debe estar presente, lo que en este caso se realiza afectando los niveles de accesibilidad y de atractividad. Naturalmente, los beneficios de realizar los mismos viajes entre el escenario anterior y el actual serán distintos, ya que

ahora existe un costo mayor asociado al viaje realizado representado por el decaimiento de la accesibilidad.

En la tabla 5.8 se presentan los valores de la renta agregada para cada nivel poblacional, mientras que en la ilustración 5.5 se presenta la evolución de la renta con respecto al aumento de la población, en donde se obtiene un escalamiento $\beta = 1,1184$ con un ajuste $R^2 = 0,997$. Este factor es inferior al caso anterior sin congestión con $\beta = 1,121$, lo que muestra claramente el efecto de deseconomía de escala causado por la congestión.

Tabla 5.8: Renta agregada para cada nivel poblacional, escenario NSvGC

Población [Millones]	Renta Agregada [UF]
1	11.355.922
3	20.118.805
5	33.388.756
7	47.279.593
9	60.651.589
11	74.162.878
13	88.430.843
15	103.100.816
17	117.994.503
19	133.506.455
21	149.193.380
23	165.288.820
25	181.724.270
27	198.722.928
29	216.185.502

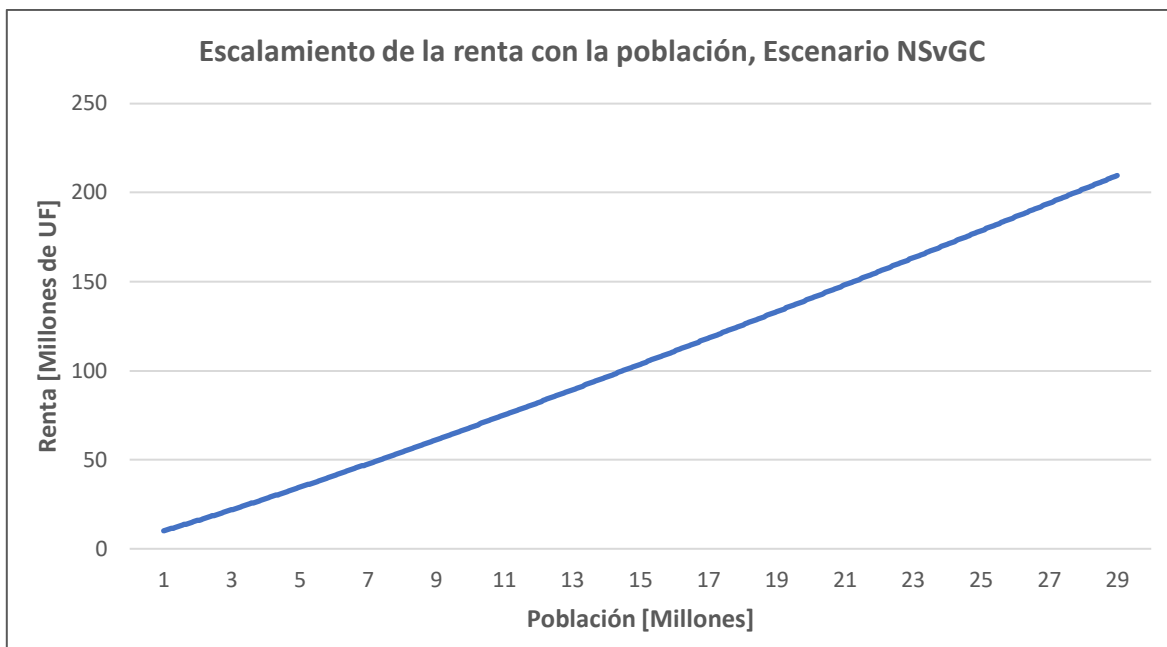


Ilustración 5.5: Escalamiento de la renta con la población para el escenario NSvGC

Por otro lado, en la tabla 5.7 se muestran los valores de densidad promedio para cada nivel poblacional. En relación con los datos mostrados se puede apreciar que la densidad promedio es levemente mayor que en el caso anterior, lo cual se explica con el hecho de que, al haber congestión, el límite urbano disminuye sutilmente.

Con relación al escalamiento de la densidad, en la ilustración 5.6 se muestra gráficamente la evolución de la densidad promedio con respecto al aumento de la población, en donde, ajustando una forma de ley de potencia, se obtiene un escalamiento $\beta = 1,229$ con un ajuste $R^2 = 0,998$.

Tabla 5.9: Densidad promedio para cada nivel poblacional escenario NSvGC

Población [Millones]	Densidad Promedio [Hab/km ²]
1	2,20
3	6,13
5	9,87
7	13,77
9	17,84
11	22,07
13	26,48
15	31,05
17	35,79
19	40,70
21	45,78

Población [Millones]	Densidad Promedio [Hab/km ²]
23	51,03
25	56,45
27	62,04
29	67,80



Ilustración 5.6: Escalamiento de la densidad con la población para el escenario NSvGC

5.2.4 Simulación con población incremental, oferta y grilla variable, congestión y hotspots (NSvGCH)

Por último, se incorpora la herramienta que permite añadir subcentros en la modelación, modelo detallado en el punto 4.2.2, con lo que se logra extender el modelo anterior a uno que incorpora el efecto de la aparición de centros de actividades en los alrededores del centro de la ciudad.

La principal característica agregada en este escenario es que se añade el efecto de la aparición de centros de actividades frecuentado por individuos que se ven afectados de un alto costo de viaje al centro anterior. Se reconoce que lo anterior se debería producir endógenamente en el modelo, pero a falta de un modelo productivo que entregue los perfiles salariales y beneficios de las empresas se ha utilizado la modelación mencionada anteriormente.

Como se puede observar en diversas ciudades del mundo, los subcentros suelen aparecer una vez que la ciudad llega a un nivel poblacional en donde el sistema monocéntrica deja

de ser estable. Diversos estudios han analizado dicha estabilidad, reconociéndose el de Fujita y Ogawa (1982) como uno de los pioneros y más relevantes.

En la ilustración 5.7 se aprecia la evolución de la renta con respecto al aumento de la población, en donde se obtiene un escalamiento $\beta = 1,1197$ con un ajuste $R^2 = 0,997$.

Tabla 5.10: Renta agregada para cada nivel poblacional, escenario NSvGCH

Población [Millones]	Renta Agregada [UF]
1	11.345.074
3	20.106.044
5	33.176.265
7	46.472.918
9	60.059.736
11	73.982.229
13	88.254.860
15	102.904.191
17	117.910.398
19	133.284.170
21	149.000.146
23	165.058.001
25	181.477.884
27	198.617.278
29	216.184.267

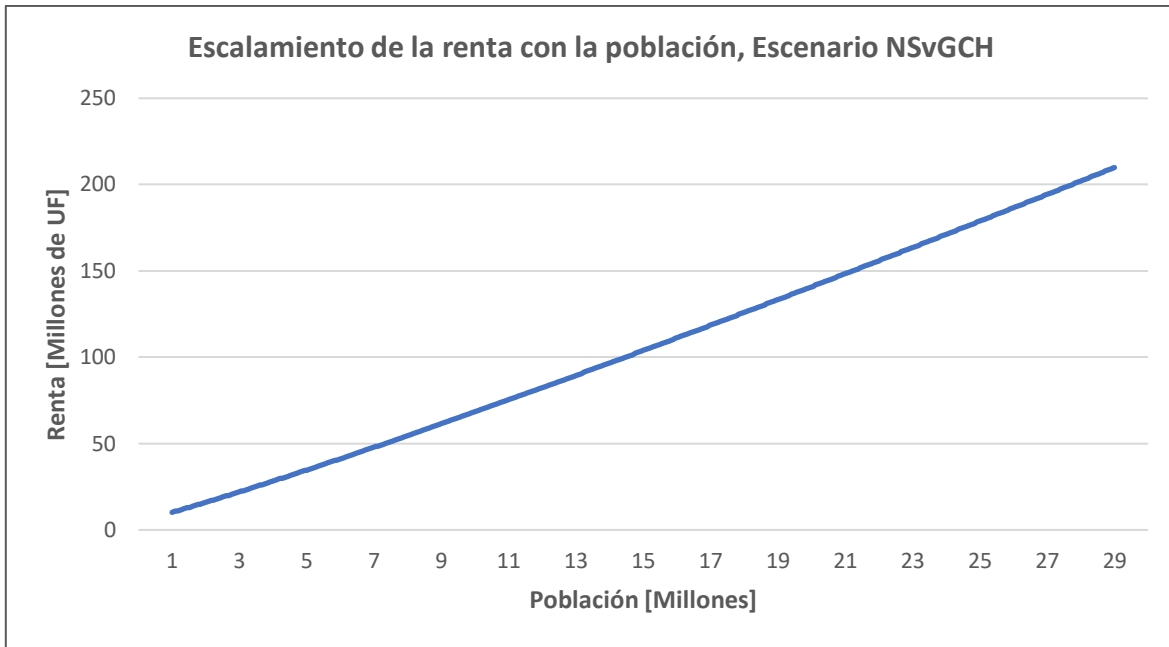


Ilustración 5.7: Escalamiento de la renta con la población para el escenario NSvGCH

Por otro lado, en la tabla 5.11 se muestran los valores de densidad promedio para cada nivel poblacional. En relación con los datos mostrados se puede apreciar que la densidad promedio es levemente mayor que en el caso anterior, pero lo cual sólo sucede en niveles de población altos, para niveles bajos la densidad promedio es prácticamente la misma. Por lo que el efecto de generar beneficios relacionados a nuevos centros de actividades dentro de la ciudad es mas relevante mientras mayor sea el sistema urbano.

Con relación al escalamiento de la densidad, en la ilustración 5.8 se muestra gráficamente la evolución de la densidad promedio con respecto al aumento de la población, en donde, a través de una línea de tendencia potencial, se obtiene un escalamiento $\beta = 1,2327$ con un ajuste $R^2 = 0,998$.

Tabla 5.11: Densidad promedio para cada nivel poblacional escenario NSvGCH

Población [Millones]	Densidad Promedio [Hab/km ²]
1	2,20
3	6,13
5	9,85
7	13,70
9	17,81
11	22,03
13	26,38
15	30,95
17	35,59

Población [Millones]	Densidad Promedio [Hab/km²]
19	40,61
21	45,69
23	50,93
25	56,26
27	61,87
29	67,49



Ilustración 5.8: Escalamiento de la densidad con la población para el escenario NSvGCH

5.2.5 Comparación de accesibilidad

La última variable analizada es la accesibilidad promedio relacionada a los diversos escenarios. En la tabla 5.12 se presenta la accesibilidad promedio de los diversos escenarios para el sistema urbano con una población de 29 millones de personas.

Tabla 5.12: Accesibilidad promedio para los distintos escenarios para N=29 millones

Escenario	Acc Mínima	Acc Máxima	Accesibilidad Promedio
NSv	11,765	11,879	11,812
NSvG	11,746	11,988	11,783
NSvGC	11,509	11,692	11,621
NSvGCH	11,512	11,971	11,672

En relación con los datos mostrados, se puede observar que la accesibilidad para el escenario base (sin ajuste de tamaño de la ciudad, ni congestión, ni subcentros) es superior al resto de los escenarios, lo cual se corresponde con la forma matemática para calcular la variable, en donde las densidades tanto zonales como del entorno son muy relevantes. Mientras que el resto de los escenarios muestra accesibilidades relativamente similares, la mayor de ellas se da para el caso en que se cuenta con grilla variable, pero sin congestión, lo que tiene lógica pensando en la deseconomía generada por dicho fenómeno. Por otro lado, al agregar subcentros la accesibilidad vuelve a aumentar, dado que la aparición de nuevos centros de actividades remedia en cierta medida las externalidades provocadas por la congestión.

5.2.6 Resumen de Resultados

A continuación, se presentan tablas que resumen los datos obtenidos anteriormente, con el fin de poder comparar los datos obtenidos de manera mas directa.

En primer lugar, en la tabla 5.13 se presentan las rentas agregadas para cada nivel poblacional para los distintos escenarios. En ella se puede apreciar claramente que, en el primer escenario, en donde no existe grilla variable, es donde la renta es más alta. Cabe destacar que, a medida que la población aumenta, la diferencia entre el primer escenario y el resto es cada vez mayor.

Tabla 5.13: Comparación de la renta agregada por escenario

Población [Millones]	Renta Agregada [UF]			
	NSv	NSvG	NSvGC	NSvGCH
1	11.585.222	11.345.922	11.355.922	11.345.074
3	22.127.746	20.111.805	20.118.805	20.106.044
5	35.731.872	33.188.959	33.388.756	33.176.265
7	52.461.044	46.494.465	47.279.593	46.472.918
9	71.039.266	60.091.855	60.651.589	60.059.736
11	88.478.803	74.026.503	74.162.878	73.982.229
13	106.743.109	88.312.820	88.430.843	88.254.860
15	120.904.850	102.977.580	103.100.816	102.904.191
17	140.060.016	117.961.080	117.994.503	117.910.398
19	160.188.234	133.394.198	133.506.455	133.284.170
21	181.358.190	149.131.850	149.193.380	149.000.146
23	203.740.281	165.213.967	165.288.820	165.058.001
25	239.616.582	181.661.228	181.724.270	181.477.884
27	262.157.753	199.659.634	198.722.928	198.617.278
29	295.623.895	217.561.326	216.185.502	216.184.267

Por otro lado, se puede apreciar un efecto similar al anterior en la tabla 5.14, en donde se presentan los valores de la densidad promedio para cada nivel poblacional de cada escenario. En la tabla se puede apreciar como en el escenario base, sin grilla variable, las densidades son mucho más altas que las del resto de los escenarios. Como se mencionó anteriormente, lo anterior está ligado directamente al hecho de que la ciudad, al no poder expandirse espacialmente, lo debe hacer verticalmente, efecto correlacionado al aumento del valor del suelo.

Tabla 5.14: Comparación de la densidad promedio por escenario

Población [Millones]	Densidad Promedio [Hab/km ²]			
	NSv	NSvG	NSvGC	NSvGCH
1	5,09	2,18	2,20	2,20
3	14,59	6,10	6,13	6,13
5	23,72	9,81	9,87	9,85
7	33,30	13,69	13,77	13,70
9	43,33	17,69	17,84	17,81
11	53,80	21,98	22,07	22,03
13	64,72	26,29	26,48	26,38
15	76,08	30,77	31,05	30,95
17	87,89	35,44	35,79	35,59
19	100,14	40,46	40,70	40,61
21	112,82	45,55	45,78	45,69
23	125,95	50,78	51,03	50,93
25	139,52	55,95	56,45	56,26
27	153,53	61,55	62,04	61,87
29	167,97	67,00	67,80	67,49

En la tabla 5.15 se presentan los valores de la magnitud del escalamiento para cada escenario, en donde el primer escenario muestra un escalamiento entre renta y población bastante mayor a los demás. Lo que sugiere que a mayor densificación existirán mayores retornos crecientes, dado que las distancias de viaje serán menores con respecto al resto de los escenarios en donde la ciudad si puede expandirse. Por lo tanto, en este escenario hay menores deseconomías asociadas a los desplazamientos y un mayor aprovechamiento de las economías de aglomeración. A la vez, se puede apreciar que el escenario con congestión (pero sin subcentros) es el de menor escalamiento, efecto relacionado a lo mencionado anteriormente, lo que demuestra las externalidades negativas provocadas por dicho fenómeno; estas externalidades negativas se ven reducidas con la aparición de subcentros.

Tabla 5.13: Escalamiento de la renta y de la densidad obtenida para cada escenario

Escenario	Escalamiento Renta	Escalamiento Densidad
NSv	1,2721	1,2534
NSvG	1,1210	1,2310
NSvGC	1,1184	1,2290
NSvGCH	1,1197	1,2327

Finalmente, cabe destacar que los tiempos de simulación son notablemente mayores al agregar la variabilidad de la grilla con el algoritmo de límite urbano. Para el caso base se tiene, en promedio, un tiempo de simulación de 45 minutos, en cambio, para el resto de los escenarios, los tiempos de simulación bordean las 3 horas.

5.3 Dinámica del sistema urbano

A continuación, se presenta un gráfico en 3D que muestra la evolución del sistema urbano para el escenario de simulación con población incremental, con oferta y grilla variables, y considerando congestión. Se muestran particularmente seis poblaciones distintas, donde se puede apreciar el aumento del límite urbano, y la densidad por metro cuadrado para cada nivel poblacional. Cabe observar que la forma de la ciudad es homogénea radialmente debido a que la simulación tiene esa característica asociada a una ciudad ficticia.

Del gráfico se puede evidenciar que, como es de esperar, el límite urbano aumenta con la población, lo cual tiene coherencia con lo predicho teóricamente. En relación con la densidad, se aprecia un aumento notable en todos los niveles de población entre la población de 3 y la de 29 millones, evidenciándose una concentración en el centro y una disminución paulatina hacia los extremos. Por otra parte, no se observa un aumento de gran magnitud, aunque sí sea relevante, de la densidad en el centro al aumentar la población, lo que se explica por las externalidades provocadas por la densidad. En donde, si bien genera externalidades positivas en un principio, se puede llegar a cierto punto en donde el nivel de densificación es tan alto que empieza a generar externalidades negativas, como el aumento desproporcionado del valor del suelo, por ejemplo. De manera que, para los agentes, es atractiva una reducción de accesibilidad (aumentando la distancia de viaje), localizándose entorno a subcentros o en la periferia, a cambio de una reducción de la densidad.

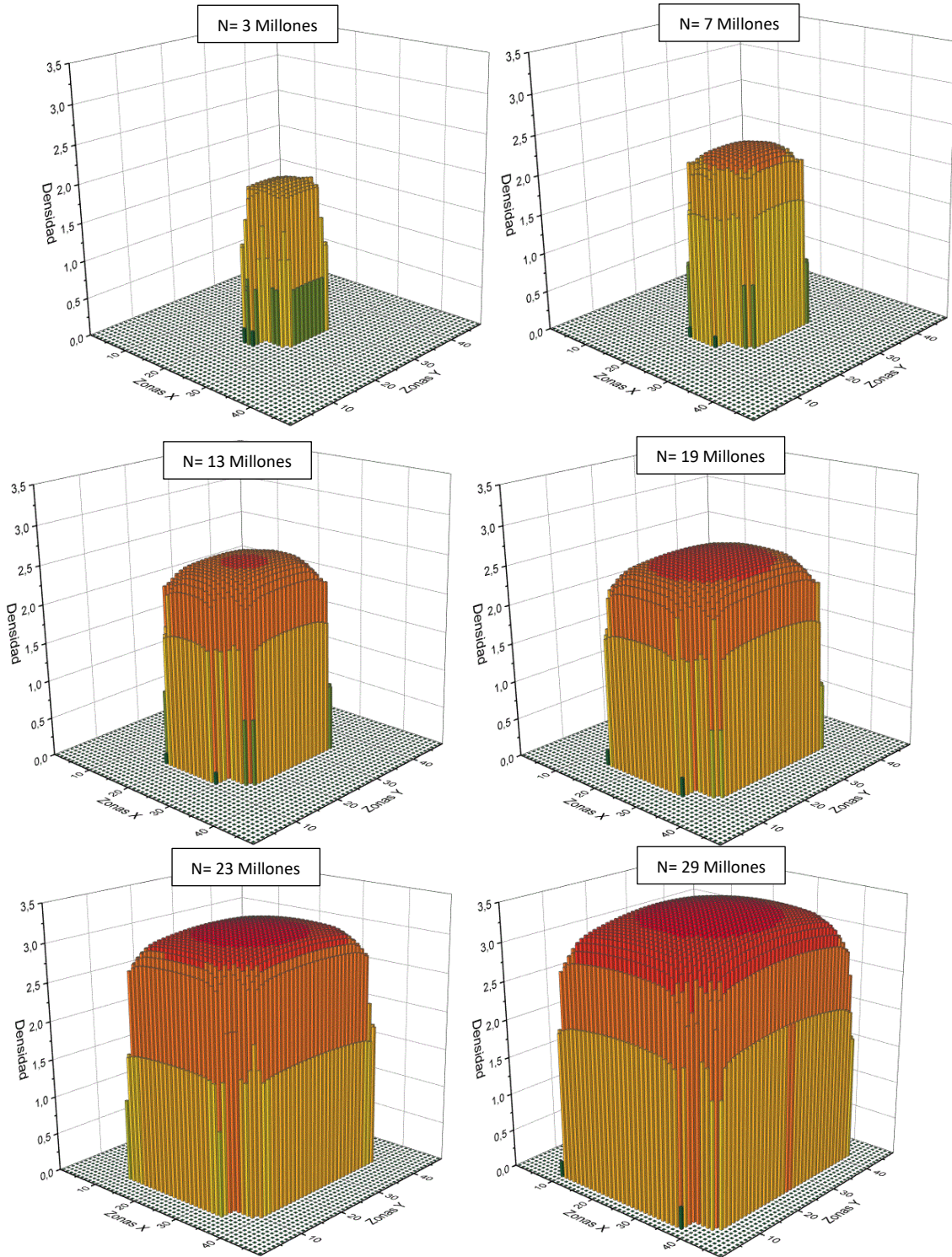


Ilustración 5.9: Evolución del sistema urbano y variación del límite urbano para el escenario NSvGC

CAPÍTULO 6: DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

6.1 Discusión

En este trabajo se ha analizado el efecto de diversos parámetros en el escalamiento de la renta y las densidades con la población. Para ello se ha utilizado una ciudad ficticia que cuenta con algunos supuestos relevantes, como el uso de la renta agrícola como herramienta para el cálculo del límite urbano. El segundo, es el supuesto de un comportamiento estocástico por parte de los agentes, ya que se asume que al momento de tomar las decisiones no cuentan con toda la información. Finalmente, se asume un comportamiento maximizador de los agentes, a la vez que de un comportamiento à la Alonso (1964) en el remate de bienes inmuebles, en donde todos quieren maximizar su bienestar.

Los resultados obtenidos muestran consistencia general con el escalamiento evidenciado en estudios empíricos recientes, a lo que se suma en este trabajo el efecto de las varianzas del comportamiento de los agentes en el escalamiento. Se ha podido observar que, a mayor varianza de la demanda mayor será el escalamiento de la renta con la población, lo mismo sucede con la varianza de la oferta. De esto se puede concluir que mientras más homogénea sea la población, o la oferta (menor varianza), menor el escalamiento esperado. Es decir, **la diversidad tiene un gran impacto no-lineal en las ciudades.**

Por otra parte, se demostró que todas las variables simuladas siguen el comportamiento super-lineal observado por Bettencourt y West (2007) en relación con la magnitud de su escalamiento; esto es, tanto la dinámica de la renta como la densidad se caracterizan por un parámetro beta mayor a la unidad. Con esto se reconoce que **las variables socioeconómicas tienen retornos crecientes con respecto a la población del sistema urbano.**

Con relación al escalamiento obtenido analizando la renta de los distintos escenarios, se observa que para el primer escenario se tiene un escalamiento muy superior al resto, dado que, para un sistema urbano limitado espacialmente, la gran densificación provoca un aumento sustancial del valor del uso del suelo, y, por lo tanto, de las rentas. Para el resto de los escenarios se tiene un escalamiento similar y menor. Se puede destacar que la congestión es el único fenómeno que causa una disminución del escalamiento, lo cual se relaciona directamente con las externalidades que produce este fenómeno, en particular a su efecto negativo en la accesibilidad. Esto evidencia dos conclusiones para la política: **regular el límite urbano tiene gran impacto en las rentas y su escalamiento y, segundo, que la congestión induce diseconomías crecientes a escala.**

Con respecto a la densidad, se ha podido observar que las ciudades que no pueden expandirse espacialmente están obligadas a hacerlo verticalmente y, por consiguiente, aumentar su densidad. Lo cual se evidencia claramente en las diferencias de densidad

promedio entre el primer escenario y el resto de ellos. Para los demás escenarios, se puede observar que, al incorporar una grilla variable, la densidad se vuelve más “normal” o de acuerdo con el equilibrio del mercado. Dicho fenómeno se observa en las ciudades que no tienen impedimentos geográficos para expandirse, en donde los planes reguladores cobran una vital importancia para determinar la densidad máxima que se puede alcanzar en determinadas zonas.

Siguiendo el efecto de las variables anteriores, la accesibilidad se comporta de manera similar, teniendo el mayor de los valores para el escenario base, en donde, al no tener una expansión de la ciudad, las distancias son pequeñas y hay una gran densidad tanto zonal como del entorno, por lo que es de esperar que sea el mayor dada la estructura matemática de la variable. Con respecto al resto de los escenarios, es interesante cómo la congestión tiene un impacto negativo en la accesibilidad, mientras que la variabilidad de la grilla y la aparición de subcentros tienen un impacto positivo. Es decir, se concluye que el crecimiento espacial de la ciudad provoca una disminución de la accesibilidad, mientras que la densificación provoca un aumento.

El análisis de las variables anteriores, permiten concluir que ciudades amplias, con buena estructura policéntrica y menores niveles de congestión, tienden a tener mejores índices de accesibilidad, lo que se puede asociar a mejores índices de calidad de vida. Lo que explica en cierta medida el hecho de que la urbanización sea un fenómeno creciente.

6.2 Conclusiones

El trabajo realizado a lo largo de esta tesis aporta al estado del arte de los modelos estocásticos de uso de suelo a través de la simulación de la teoría microeconómica desarrollada por Martínez (2018). El modelo desarrollado en este trabajo puede servir como base para crear una modelación más compleja del uso del suelo urbano, añadiendo modelos productivos o de transporte, así como mejorando la codificación. Por otra parte, los modelos simplificados de congestión y de subcentros que se han utilizado permiten acercar los escenarios a la realidad, aunque se reconoce que fueron abordados de manera simple.

Las principales contribuciones de este trabajo son el haber generado una plataforma computacional que permite sustentar, a través de datos simulados, la teoría microeconómica de uso de suelo, en particular la de Martínez (2018). Además, se ha obtenido evidencia cuantificable del efecto de fenómenos socioeconómicos presentes en la mayoría, sino en todas, las ciudades del mundo.

Por otro lado, se evidencia una relación con el estudio realizado por Sarkar (2018), donde a mayor nivel de ingreso mayor escalamiento se tiene, aunque la evidencia de un escalamiento sublineal por parte de los rangos socioeconómicos más bajos no se ha podido corroborar. Este efecto tiene vital relevancia con respecto a mejorar los problemas de desigualdad dentro de la sociedad. Particularmente en Chile, según datos del Banco Central,

el quintil más rico de la población concentra el 72% de la riqueza, lo que evidencia que los mayores beneficios del efecto superlineal del escalamiento son aprovechados por una minoría de la población.

Se mostró que a medida que una ciudad incorpora diversos fenómenos como la congestión, aparición de subcentros o expansión espacial, algunas de sus características principales como la renta, densidad y accesibilidad, se ven afectadas en diversas medidas y magnitudes.

Es posible suponer que otros fenómenos sociales asociados al crecimiento de las ciudades también tendrán un comportamiento superlineal, por lo que el entendimiento de como poder abordarlos es crucial a la hora de realizar políticas públicas. En particular, los fenómenos negativos como el crimen, nivel de estrés y contaminación, los cuales escapan al poder de modelación de este trabajo, debiesen ser especialmente analizados.

Los resultados fueron obtenidos con ciudades ficticias, simplificadas y calibradas con datos económicos y sociales de Chile, con el fin de poder representar, en alguna medida, datos reales. No obstante, las propiedades analíticas y empíricas, así como el resto de los parámetros de la plataforma, son escalables a cualquier otra realidad, con la única restricción de disponer de los datos necesarios.

Este trabajo aporta sustento empírico, basado en una teoría contundente, a la afirmación hecha por distintos investigadores de que las variables socioeconómicas tienen un escalamiento superlineal en relación con la cantidad de habitantes de una ciudad.

6.3 Líneas de investigación futura

Para trabajos posteriores sería muy interesante poder añadir un modelo productivo en el sistema urbano, como se propone en Martínez (2018), donde los salarios y la distribución de viajes con motivo trabajo sean obtenidos de forma endógena y se pueda reemplazar el modelo demográfico utilizado en este trabajo.

En cuanto a la modelación del sistema de transporte, al tener un modelo productivo, se podría analizar el efecto de incluir distintos medios y así analizar los distintos efectos de éstos ampliando el modelo de congestión para incorporar transporte público.

Por otro lado, el código quedará abierto para cualquiera que desee verlo o editarlo, pero se debe tener en cuenta que para poder utilizarlo se necesita de una licencia del software Cube Land. Teniendo en cuenta que una mejora de la plataforma computacional sería muy enriquecedora para fines pedagógicos.

BIBLIOGRAFÍA

Alonso, W. (1964) **Location and Land Use. *Toward a General Theory of Land Rent.*** Cambridge: Harvard University Press.

Banco Central (2017) **Distribución de riqueza no previsional de los hogares chilenos.** URL: <https://www.bcentral.cl/-/determinantes-de-la-inflacion-de-servicios-en-chi-2>

Barthelemy, M. (2016) **The structure and dynamics of cities.** 1st Ed. Cambridge.

Batty, M. (2013) A Theory of City Size. **Science**, 340(6139), 1418 LP-1419.

Bettencourt, L. M. A., Lobo, J., Helbing, D., Kühnert, C., & West, G. B. (2007) Growth, innovation, scaling, and the pace of life in cities. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, 104(17), 7301 LP-7306.

Bettencourt, L.M.A. (2013) The origins of Scaling in Cities. **Science** 340: 1438–1441.

Chardon, I. (2019) Predicción de rentas en Santiago de Chile utilizando algoritmos de aprendizaje automático. Memoria de Ingeniería Civil, Universidad de Chile.

Fujita, M. y Ogawa, H. (1982). Multiple equilibria and structural transition of non-monocentric urban configurations. **Regional Science and Urban Economics**, vol. 12(2), pages 161-196, May.

Martínez, F. (2016) Cities' power law: the stochastic scaling factor. **Environment and Planning B: Planning and Design** 43(2), 257-275.

Martínez, F. (2018) **Microeconomic Modeling in Urban Science.** 1st Ed. Academic Press, Santiago.

Martínez, F. y Donoso, P. (2010) The MUSSA II land use auction equilibrium model. In: Pagliara F, Preston J and Simmonds D (eds.) **Residential Location Choice: Models and Applications.** Berlin: Springer, pp. 99–133.

Mattsson, L.G., Weibull, J. y Lindberg, P.O. (2013) Extreme values, invariances and choice probabilities. **Transportation Research Part B** 59: 81–95.

Ministerio de Desarrollo Social. (2018) **Precios Sociales 2018.** Santiago, Chile. URL: <http://sni.ministeriodesarrollosocial.gob.cl/download/precios-sociales-vigentes-2017/?wpdmdl=2392>

Ministerio de Transportes y Telecomunicaciones. (2019) **Precios y Tarifas.** URL: <https://www.red.cl/tarifas-y-pagos/conoce-las-tarifas>

Sarkar, S., Phibbs, P., Simpson, R., y Wasnik, S. (2018) The scaling of income distribution in Australia: Possible relationships between urban allometry, city size, and economic inequality. **Environment and Planning B: Urban Analytics and City Science**, 45(4), 603–622.

SECTRA (2001) **Metodología para análisis de sistemas de transporte en grandes ciudades y ciudades de tamaño medio**. URL: www.sectra.gob.cl/metodologia/estraus.htm

SECTRA (2005) **Análisis y seguimiento de planes estratégicos de ESTRAUS, Vª Etapa**. URL: www.sectra.gob.cl/biblioteca/detalle1b.asp?mfn=1088

Talbot, D. (2018) **How Small Towns Can Harness The Economic Power of Cities**. Url: <https://www.forbes.com/sites/deborahthalbot/2018/10/09/how-small-towns-can-harness-the-economic-power-of-cities/#42db390432c3>

West, G. (2017) **Scale: The Universal Laws of Growth, Innovation, Sustainability, and the Pace of Life in Organisms, Cities, Economies, and Companies**. New York, Penguin Press.

United Nations, Department of Economic and Social Affairs, Population Division (2014) **World Urbanization Prospects: The 2014 Revision, Highlights (ST/ESA/SER.A/352)**.

ANEXO A

Implementación del modelo computacional

Cómo se ha mencionado anteriormente, se ha desarrollado un modelo computacional, capaz de realizar la simulación de un sistema urbano ficticio con población incremental capaz de simular ciudades de hasta 30 millones de habitantes. Datos relativos a las características de la ciudad y los parámetros del modelo se entregan al programa mediante un archivo de texto, en cambio los parámetros de convergencia y relativos a las iteraciones de Cube Land se entregan mediante archivos de extensión *lum* los cuales se pueden editar como cualquier archivo de texto. El desarrollo del modelo se realizó en *python2.7*, mientras que las gráficas 3D se han obtenido utilizando el programa *origin*

Estructura del programa

A continuación, se describe la estructura de la plataforma computacional diseñada. Ésta es de código abierto y se encuentra disponible para descarga en:

[general.py](#)

Es el archivo principal del modelo, recibe como input datos de los otros 3 archivos y genera como output tantas carpetas como iteraciones se realicen para cada nivel de población, por lo que se generan 15xlt carpetas. Para este trabajo se han realizado las simulaciones con 4 iteraciones, por lo que, para cada simulación del modelo, se obtienen 60 carpetas, en donde cada una contiene información del equilibrio del sistema urbano, en particular de la renta, la localización de los agentes, la variable endógena, entre otros.

Como input, el código necesita de 4 datos que el usuario debe proporcionar, estos son el nivel de población hasta el cual se quiere llegar, la renta agrícola del sistema, si se desea simular con grilla variable, si se quiere incorporar congestión y si se deben añadir subcentros. Lo anterior se puede apreciar en la siguiente Ilustración que da cuenta de los datos que el código le pide al usuario.

```
land_user@xmachine ~/Marcelo Leon $ python2.7 general.py
Introduzca valor de ganancia agricola: 10
Hasta que poblacion (Millones) quiere analizar (1 a 29 millones) = 29
Desea correr el modelo con grilla variable? (0 = no, 1 = si) :1
Desea correr el modelo con congestion? (0 = no, 1 = si) :1
Desea agregar hotspots en la modelacion? (0 = no, 1 = si) :█
```

Ilustración A.1: Iniciación del código principal del modelo

Además de los datos mencionados, el código también recibe como input la demanda para cada nivel poblacional, datos obtenidos a partir de ejecutar el algoritmo *demoyfirmo.py* que entrega la cantidad de agentes para cada categoría.

Otros parámetros importantes del modelo están detallados en el archivo de texto Diccionario.txt, archivo que será detallado más adelante. Por último, se necesita del código vectores.py, el cual crea los archivos con el largo necesario en función de la cantidad de zonas obtenidas a partir del algoritmo de límite urbano, para que tengan consistencia entre sí y se puede ejecutar Cube Land.

Se reconoce que el código es extenso y se podría simplificar mediante el uso de clases, pero por simplicidad de codificación y optimización de tiempo de ejecución se ha utilizado un código lo más simple posible.

[vectores.py](#)

Este código recibe de entrada únicamente el número de celdas que tiene el sistema urbano, a partir de este dato es capaz de generar los vectores que serán necesarios para crear los archivos de entrada “.dbf” que son necesarios cada vez que se inicia una nueva simulación.

Sea C el número de zonas del sistema urbano, se reconocen tres tipos de archivos de largos distintos, éstos son los archivos CxV, CxH y CxVxH, en donde V es la cantidad de tipos de vivienda y H la cantidad de agentes. A través de estos datos, el código genera distintos vectores que serán necesarios introducirlos para crear las matrices de los mencionados archivos “.dbf”.

[demoyfirmo.py](#)

Aquí se codifica lo mencionado en el punto 3.2, en donde el único input necesario es detallar el nivel de población para el cual se quiere obtener la cantidad de agentes. Cabe destacar, como se mencionó en el punto 3.2, que se ha utilizado que en promedio cada hogar tiene aproximadamente 3.1 personas, dicho valor puede ser cambiado fácilmente en caso de querer analizar una sociedad distinta a la chilena, al igual que el valor del PIB.

[Diccionario.txt](#)

Por último, en este archivo de texto se detallan distintos parámetros necesarios para la ejecución del modelo, entre ellos se encuentran:

- Tamaño de los distintos tipos de vivienda
- Velocidad, en caso de ejecutar el modelo sin congestión
- Parámetros de ecuaciones 3.13 y 3.14
- Número de celdas, en caso de ejecutar el modelo sin grilla variable
- Tamaño de las celdas
- Iteraciones para cada nivel poblacional
- Criterio de convergencia para algoritmo de límite urbano