



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

COLORACIÓN EN GRAFOS PIGMENTADOS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN
CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

JULIO CRISTOPHER MALDONADO HENRÍQUEZ

PROFESOR GUÍA:
MARTÍN MATAMALA VÁSQUEZ

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
IVAN RAPAPORT
MAYA STEIN

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por CMM Conicyt PIA AFB170001

SANTIAGO DE CHILE
2020

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,
MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS
Y AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: JULIO CRISTOPHER MALDONADO HENRÍQUEZ
FECHA: 20/04/2020
PROF. GUÍA: MARTÍN MATAMALA VÁSQUEZ

COLORACIÓN EN GRAFOS PIGMENTADOS

En este trabajo se estudian problemas de coloración en grafos pigmentados. Un grafo pigmentado es una tupla (G, c) con G un grafo y $c : E(G) \rightarrow \mathbb{N}$ una asignación de pigmentos en las aristas. El primer capítulo se centra en el problema de 1-coloración o bien realizabilidad, donde se busca la existencia de una asignación de pigmentos a los nodos, $f : V \rightarrow c(E)$, tal que $f(v)$ está en los pigmentos del corte (se dice que f es realización) y en cada arista a lo más uno de sus extremos toma su pigmento (f se dice buena). En particular se estudia la complejidad de este problema para grafos con uno a tres pigmentos, y en los casos NP -completo, para G bipartito y para G completo, y se dan algoritmos parametrizados para el caso general. Adicionalmente, se estudian variaciones del problema, como pedir que $f(v)$ tome valores en una lista dada l_v , que en cada arista al menos uno de los extremos tome su pigmento o pedir que f solo sea buena en un subconjunto de las aristas. En el segundo capítulo se estudia la complejidad del problema de k -coloración, que consiste en una generalización de la bien realizabilidad, en el cual se busca la existencia de una partición de los vértices y una realización que es buena en cada parte. Finalmente, el capítulo tres se enfoca en dar una generalización del Teorema de Brooks para grafos pigmentados. En concreto se define $\chi(L)$ el número cromático, como el mínimo k tal que un grafo pigmentado L es k -coloreable. El objetivo es encontrar una cota calculable en tiempo polinomial para $\chi(L)$ y caracterizar aquellos grafos pigmentados que la alcanzan.

COLORING ON PIGMENTED GRAPHS

In this work we study some coloring problems in pigmented graphs. A pigmented graph is a tuple (G, c) with G a graph and $c : E \rightarrow \mathbb{N}$ a mapping from the edges to pigments. In the first chapter we center on the 1-coloring problem or well-realizability problem, in which we ask for the existence of a mapping $f : V \rightarrow c(E)$ such that $f(v)$ is in the pigments of the cut of v (in this case we call f a realization) and for each edge at most one endpoint takes its pigment (we say that f is good). In particular we study the computational complexity of this problem for graph with one to three pigments, and in the case of NP -completeness, for classes of bipartite and complete graphs, and we give parameterized algorithms for the general case. Also we study some variations of the problem, such as asking that $f(v)$ is in a given list l_v , that for each edge at least one endpoint takes its pigment or asking f to be good only in a subset of the edges. In the second chapter we study the computational complexity of the k -coloring problem, which we define as a generalization of the well realizability, where we look for a partition of the vertices and a realization that is good in each part. Finally in the third chapter we focus on giving a generalization of Brooks' Theorem for pigmented graphs. More precisely we define $\chi(L)$ the chromatic number, as the minimum k such that the given pigmented graph L is k -coloreable. The goal is to find a polynomial time computable upper bound for $\chi(L)$ and to characterize graphs which attain this bound.

"There are dozens of us, dozens." (Tobias Fünke)

Agradecimientos

En primer lugar quisiera agradecer a mi familia, no solo por ser un pilar económico, y darme todas las herramientas que requería para desarrollarme en la carrera, de modo que, virtualmente, mi única preocupación en estos últimos seis años (o más bien desde siempre), fuera estudiar, sino también por el apoyo emocional que me dieron, sobretodo en los momentos difíciles.

También agradezco a la universidad, el departamento de matemática, y cada uno de sus integrantes, por generar un ambiente óptimo, para que pudiera conocer y aprender de diversas áreas, y así encontrar mi vocación en las matemáticas discretas. En particular, a los profesores que me han hecho clases, y que además de compartir sus conocimientos, me han transmitido su pasión por los temas en los que trabajan. Dentro de esto, en particular, quiero agradecer a mi profesor guía, quien fue fundamental en este último año, para sacar adelante este trabajo; realmente disfruté mucho, de las tantas reuniones, en las que trabajamos juntos para profundizar el estudio de los grafos pigmentados.

Doy gracias a mis compañeros de generación, y también amigos, con los que pasamos muchas tardes de estudio, resolviendo problemas y aprendiendo juntos. Así mismo, agradezco a mis compañeros del coro de la facultad, y a nuestra directora, con quienes, en estos últimos años, pude desarrollarme un poco más en la música, y así también tener una distracción, que fue fundamental en los momentos de estrés.

Finalmente, y no por ello menos importante, agradezco a Dios, quien me dio aliento en los momentos difíciles, y dispuso todo, para que fuera posible que llegara a este momento. De igual manera, doy gracias a los miembros de mi iglesia y mis pastores, que sé, que siempre me tuvieron en sus oraciones.

Tabla de Contenido

Introducción	1
Preliminares	4
Descomposición arborescente y Treewidth	4
1. 1-Coloración de Grafos Pigmentados	6
1.1. Nociones básicas	6
1.1.1. Definiciones	6
1.1.2. Estabilidad	9
1.2. El caso de dos pigmentos	10
1.2.1. Reducción a 2-SAT	10
1.2.2. Caracterización combinatorial	13
1.3. El caso de tres pigmentos	15
1.3.1. El caso bipartito	17
1.4. Enfoque parametrizado	23
1.5. Problemas adicionales	27
1.5.1. Realización con listas	28
1.5.2. d -Cover	31
1.5.3. Versión de optimización de COL_1	32
1.5.4. Conjunto Objetivo	36
2. k-Coloreabilidad de Grafos Pigmentados	39
2.1. El caso completo con dos pigmentos	41
2.2. Total Factibilidad	44
2.3. 2-Coloreabilidad de Grafos Pigmentados	52
2.4. k -Coloreabilidad para lista-realizaciones	57
3. Resultados tipo Brooks	60
3.1. Caso completo	60
3.2. La coloración greedy y Generalización de Brooks	64
Conclusión	77
Bibliografía	79
Anexo	81

Introducción

Uno de los problema clásicos en grafos es el de k -coloración, donde dado un $k \geq 1$ y un grafo $G = (V, E)$ se quiere determinar si es posible particionar los vértices en k conjuntos $\{V^1, \dots, V^k\}$ independientes¹ en G . De las aplicaciones más conocidas, está el problema de pintar un mapa, en el cual se busca que dos países vecinos tengan colores distintos; en este caso podemos pensar en cada V^i como el conjunto de países que pintaremos con el i -ésimo color. El problema del mapa es de hecho un caso particular del de k -coloración de grafos, en donde nos restringimos al caso en que G es planar. Esta versión se ha estudiado profundamente y se probó que de hecho todos los grafos planares se pueden colorear con cuatro colores.

En esta tesis estudiamos un nuevo problema de k -coloración, que resulta ser un caso más general aplicado a lo que llamamos grafos pigmentados (conocidos en la literatura como grafos arista-coloreados). Un grafo pigmentado es una tupla (G, c) donde G es una grafo y $c : E(G) \rightarrow \mathbb{N}$ es una asignación de etiquetas² (en adelante pigmentos) en las aristas de G . Los grafos pigmentados han sido estudiados las últimas décadas, principalmente en el contexto de teoría extremal y números de Ramsey. No obstante lo anterior, en cuanto a resultados algorítmicos se encuentra muy poca información.

El problema de coloración estudiado en este trabajo es el siguiente. Dado (G, c) grafo pigmentado, y $f : V \rightarrow c(E)$ asignación de pigmentos a los vértices de G , diremos que f es realización si a cada vértice v , asigna una etiqueta presente en el corte de v , es decir, el pigmento de alguna arista incidente. Adicionalmente diremos que f es buena en un subconjunto de los vértices $S \subseteq V$, si para cada arista incluida en S , a lo más uno de sus extremos tiene su pigmento; es decir, es buena cuando no hay aristas uv con $u, v \in S$ tal que $f(u) = f(v) = c(uv)$. El problema de k -coloración consiste en que dado (G, c) se quiere determinar si existe una partición $\{V^1, \dots, V^k\}$ de V y una realización f , tal que f es buena en cada $V^j, j \in \{1, \dots, k\}$. Se puede ver sin mayor dificultad, que este problema coincide con el de grafos usuales, cuando nos restringimos a grafos pigmentados con solo un pigmento.

Uno de los objetivos de este trabajo, es dar una generalización del Teorema de Brooks, para esta noción de k -coloración en grafos pigmentados. Dicho Teorema establece que, pese a que el número cromático de un grafo está acotado por el grado máximo más uno, esta

¹ $S \subseteq V$ se dice independiente si no contiene ningún par de vértices adyacentes

²en ocasiones reemplazamos \mathbb{N} por algún cíclico \mathbb{Z}_d , para simplificar la notación.

cota solo se alcanza si el grafo contiene un clique o ciclo impar, en cuyo caso en cada vértice de esta subestructura se alcanza el grado máximo. El resultado para grafos pigmentados se encuentra al final del capítulo 3.

La tesis se estructurará como sigue. En el primer capítulo estudiamos a fondo el problema de 1-coloración. La primera sección es netamente introductoria. En la segunda analizamos el caso de grafos con dos pigmentos; en particular demostramos que el problema es polinomial, y aun más damos, una caracterización combinatorial de los grafos con dos pigmentos que no son 1-coloreables, para el caso en que en cada vértice inciden aristas con ambos pigmentos. En la tercera sección probamos que 1-coloración para grafos de tres pigmentos es NP -completo, incluso si nos restringimos al caso que G es bipartito planar, bipartito completo o grafo split completo (se sigue que para al menos cuatro pigmentos también es NP -completo). En la sección cuatro, estudiamos la complejidad parametrizada de la 1-coloración. En particular vemos que resulta ser FPT , usando como parámetros el número de pigmentos y el treewidth de G ; adicionalmente probamos que no es FPT usando solo el número de pigmentos, salvo que $P = NP$, ni tampoco usando solo el treewidth, salvo que falle la ETH^3 . Finalmente, en la quinta sección, estudiamos algunas variantes del problema:

- El problema de 1-coloración con lista-realizaciones es análogo, donde el input es un grafo pigmentado y un arreglo de listas $(l_v)_{v \in V}$ indexadas por los vértices de G , y una lista-realización es una asignación de pigmentos $f : V \rightarrow \mathbb{N}$, que a cada vértice v , le asigna un pigmento presente en su respectiva lista l_v . El objetivo es determinar si existe una lista-realización buena en V . Aquí, demostramos que, pese a que evidentemente es una generalización de 1-coloración, en realidad resulta ser equivalente en complejidad.
- En el problema $dCOVER$, dado un grafo pigmentado con $d \geq 2$ pigmentos, se quiere determinar si existe una realización f tal que para cada arista al menos uno de sus extremos toma su pigmento (en contraposición con la definición de ser buena, donde a lo más un extremo lo toma). Aquí probamos que para todo $d \geq 2$ el problema $dCOVER$ restringido a grafos completos es polinomial.
- Dado un grafo pigmentado (G, c) y una asignación de pigmentos $f : V \rightarrow c(E)$ decimos que una arista $uv \in E$ es estable en (G, c, f) si $f(u) = f(v) = c(uv)$. Para esta definición el problema de 1-coloración se traduce en determinar, si el mínimo número de aristas estables de (G, c, f) para f variando en las realizaciones, es cero. En [1] se estudia el problema de maximizar el número (o peso) de las aristas estables, probando en particular, que en el caso de dos pigmentos, el problema es polinomial. En esta subsección demostramos que el problema de minimización de aristas estables para dos pigmentos, es de hecho NP -completo. Además probamos que el problema asociado con pesos (no necesariamente positivos) es FPT , parametrizado en el número de pigmentos y el treewidth de G .
- Finalmente, en la cuarta subsección analizamos varios problemas de la forma: dado (G, c) y $F \subseteq E$ un conjunto de aristas, determinar si existe realización f tal que F cumpla alguna propiedad particular respecto a las aristas estables. En concreto probamos que estos problemas se pueden reducir a 1-coloración con lista-realizaciones,

³La ETH o hipótesis de tiempo exponencial, es una conjetura que afirma que no es posible resolver $3SAT$ en tiempo subexponencial.

escogiendo adecuadamente el parámetro d .

En el segundo capítulo estudiamos la complejidad del problema de k -coloración para $k \geq 2$. En particular, en la primera sección, probamos que para el caso de grafos completos con dos pigmentos, k -coloración es polinomial para $k \leq 2$ y NP -completo para $k \geq 3$. En la sección 2 probamos que para $k, d \geq 1$, k -coloración para grafos con d pigmentos se reduce al caso totalmente factible; esto es, cuando en todo vértice inciden aristas con los d pigmentos. En la sección 3 demostramos que la 2-coloración para grafos con d pigmentos, es NP -completo en el caso general, para todo $d \geq 2$. Finalmente en la cuarta sección vemos que la k -coloración con lista-realizaciones es equivalente a la con realizaciones usuales (generalizando lo probado en la sección 5.1 del capítulo 1).

El capítulo 3 se centra en demostrar una generalización del teorema de Brooks para grafos pigmentados; naturalmente en este contexto $\chi(L)$, el número cromático de un cierto grafo pigmentado $L = (G, c)$, corresponde al mínimo k tal que L es k -coloreable. En la primera sección vemos que en el caso completo de dos pigmentos, $\chi(L)$ es a lo mas un cuarto del número de vértices, salvo un error asociado a los vértices que solo ven un color. Luego introducimos una noción de grado máximo $\Delta_K(L)$ (a priori no calculable en tiempo polinomial), que satisface la clásica cota greedy $\chi(L) \leq \Delta_K(L) + 1$. En la segunda sección rescatamos parámetros de grafos usuales agregando un mín máx, dado que $\chi(L)$ tiene esta forma (lo probamos en el capítulo 2), logrando rescatar varias de las desigualdades clásicas. Finalmente probamos que, para $\beta(L)$ el grado monocromático máximo de L , se cumple que $\chi(L) \leq \beta(L) + 1$, y se alcanza la igualdad ssi toda realización de L tiene un clique monocromático con $\chi(L)$ vértices (este corresponde al Teorema de Brooks).

Preliminares

A lo largo de esta tesis utilizaremos notación clásica de grafos, basándonos en el libro *Graph Theory* de Diestel [12]. Para una descripción más detallada revisar el Anexo. Así también utilizaremos nociones básicas de complejidad, como clases de complejidad y reducciones polinomiales, las cuales se pueden revisar en el libro *Introduction to the Theory of Computation* de Sipser [14]. En particular, $A \leq_p B$ denota que existe una reducción many-one⁴ en tiempo polinomial del lenguaje A al lenguaje B .

Descomposición Arborescente y Treewidth

Algo adicional que utilizaremos, que no es parte de la formación clásica en Matemáticas Discretas, es el uso de descomposiciones arborescentes para diseñar algoritmos parametrizados. Se puede leer una descripción más completa de las definiciones y técnicas del área en el libro *Parameterized Algorithms* de Fomin [10], sin embargo a continuación enunciaremos los resultados que utilizaremos más adelante.

Definición 0.1 *Dado un grafo $G = (V, E)$, un árbol T y una tupla de conjuntos $(X_t)_{t \in T}$ indexada en los vértices de T , con $X_t \subseteq V$, diremos que $(T, (X_t)_{t \in T})$ es una descomposición arborescente de G si se cumple*

1. $V = \bigcup_{t \in T} X_t$
2. $\forall e \in E \quad \exists t \in T \quad e \subseteq X_t$
3. *Dados $t, t', t'' \in T$, si t'' está en el único (t, t') -camino en T , entonces $X_t \cap X_{t'} \subseteq X_{t''}$*

El ancho de $(T, (X_t)_{t \in T})$ es $\max_{t \in T} |X_t| - 1$. El treewidth de G , denotado $tw(G)$, es el mínimo ancho de las descomposiciones arborescentes de G .

Observación 0.2 *Todo grafo tiene una descomposición arborescente trivial, dada por el árbol de un vértice $T = \{t\}$ y el conjunto $X_t = V$. En particular $tw(G) \leq |V| - 1$.*

⁴Para $A, B \subseteq \Sigma^*$ una reducción many-one de A a B es una función computable $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$, tal que $a \in A \iff f(a) \in B$

Observación 0.3 Si denotamos para $v \in V$, T_v el grafo inducido por los vértices $t \in T$ tales que $v \in X_t$, podemos reescribir (3) de la Definición 0.1 como $\forall v \in V$, T_v es conexo.

Proposición 0.4 (Proposition 12.3.6 en [12]) Si $H \leq G$, entonces $tw(H) \leq tw(G)$

Sea $(T, (X_t)_{t \in T})$ una descomposición arborescente de G , $r \in T$ y denotemos $T(r)$ el árbol T con raíz en r . Para $t \in T(r)$ denotemos T_t el árbol inducido por los descendientes de t en $T(r)$. Sean $V_t = \bigcup_{t' \in T_t} X_{t'}$ y $G_t = G[V_t]$.

Proposición 0.5 X_t separa $V_t \setminus X_t$ de $V \setminus V_t$

Teorema 0.6 (Theorem 1 en [4]) Existe un algoritmo que dado G y k , en tiempo $2^{O(k)}n$, o bien afirma que $tw(G) > k$, o bien construye una descomposición arborescente de G con ancho $5k + 4$.

Definición 0.7 Dado $r \in T$, diremos que $(T(r), (X_t)_{t \in T(r)})$ es una descomposición arborescente agradable de G si $(T, (X_t)_{t \in T})$ es una descomposición arborescente de G , y podemos clasificar cada vértice t de T en los siguientes tipos

- **start node:** t es hoja de $T(r)$
- **introduce node:** t tiene un único hijo t' y $X_{t'} \subseteq X_t$ con $|X_t \setminus X_{t'}| = 1$
- **forget node:** t tiene un único hijo t' y $X_t \subseteq X_{t'}$ con $|X_{t'} \setminus X_t| = 1$
- **join node:** t tiene exactamente dos hijos t_1, t_2 y $X_t = X_{t_1} = X_{t_2}$.

Sin mucha dificultad se puede probar el siguiente Lema

Lema 0.8 (Lemma 7.4 en [10]) Si G admite una descomposición arborescente de ancho k , admite una descomposición arborescente agradable de ancho k . Aún más, dada una descomposición arborescente $(T, (X_t)_{t \in T})$ de ancho k se puede encontrar una descomposición arborescente agradable de ancho k en tiempo $O(k^2 \max\{|V(T)|, |V(G)|\})$ con a lo más $O(k|V(G)|)$ vértices.

Capítulo 1

1-Coloración de Grafos Pigmentados

A pigmented graph is a tuple (G, c) with G a graph and $c : E \rightarrow \mathbb{N}$ a mapping from the edges to pigments. In this chapter we center on the 1-coloring problem or well realizability problem, in which we ask for the existence of a mapping $f : V \rightarrow c(E)$ such that $f(v)$ is in the pigments of the cut of v (in this case we call f a realization) and for each edge at most one endpoint takes its pigment (we say that f is good). In the first section we give the definitions and explore the computational complexity of the problem for trees and cycles. Also, we provide a definition of subgraph that preserves the well realizability (we call this property as stability). Then in section two we proved that in the case of pigmented graph L having two pigments the problem is polynomial, and actually we provide a characterization of no-well realizable graphs where each vertex see both pigments. Thereafter, in the third section we see that for L with three pigments the problem is *NP*-complete even for complete bipartite graphs or complete split graphs. The fourth section concerns in giving a *FPT* algorithm for well realizability using the treewidth as parameter. Finally, in fifth section we study some variations of the problem, such as asking that $f(v)$ is in a given list l_v (realization with lists), that for each edge at least one endpoint takes its pigment (d-cover) or asking f to be good only in a subset of the edges.

1.1. Nociones básicas

1.1.1. Definiciones

Definición 1.1 (Grafo pigmentado) *A una tripleta $L = (V, E, c)$ la llamamos grafo pigmentado, si (V, E) es un grafo y $c : E \rightarrow \mathbb{N}$. Adicionalmente, diremos que es de d pigmentos si $|c(E)| = d$.*

Para evitar confusión, cuando se requiera, nos referiremos al conjunto de vértices como $V(L)$, al conjunto de aristas como $E(L)$ y a la función de pigmentos en las aristas como $c(L)$. Usaremos $G(L)$ o simplemente G si no hay confusión, para hacer referencia al grafo subyacente $(V(L), E(L))$. A menos que se diga de otra forma, $n = |V|$, $m = |E|$ y $d = |c(E)|$. Para liberar la notación, para $c : E \rightarrow \mathbb{N}$ y $F \subseteq E$, denotaremos por c a $c|_F$ cuando el contexto lo requiera; en particular escribiremos (V, F, c) para referirnos a $(V, F, c|_F)$.

Definición 1.2 Diremos que L es bipartito (resp. completo) si G lo es¹.

La primera noción natural que se hereda de grafos es la de subgrafo. Intuitivamente la noción es la misma de antes; un subgrafo pigmentado es el resultado de borrar vértices y aristas, naturalmente estas últimas con sus pigmentos respectivos. Análogamente, hablaremos de subgrafo inducido cuando se pueda obtener solo removiendo vértices. Formalmente diremos lo siguiente.

Definición 1.3 M se dirá subgrafo pigmentado de L , en adelante $M \subseteq L$, si $G(M) \subseteq G(L)$ y $c(M) = c(L)|_{E(M)}$. En particular, para $U \subseteq V$, definimos el subgrafo pigmentado inducido por U , denotado por $L[U]$, a la tripleta $(U, E(U), c)$.

Denotaremos $L - u = L[U - v]$ y $L - e = (V, E - e, c)$ para $u \in V$ y $e \in E$.

A continuación definimos una noción de coloración de vértices en grafos pigmentados que llamamos *realización* pues reservamos el nombre de *coloración de vértices de un grafo pigmentado* para una noción que introduciremos más adelante.

Definición 1.4 (Realización) Dado L como antes, $f : V \rightarrow c(E)$ se dice *realización de L* si

$$\forall v \in V, \delta(v) \neq \emptyset \quad f(v) \in c(\delta(v)).$$

En particular, f se dice *buena en $U \subseteq V$* si

$$\forall uv \in E(U) \quad \text{no ocurre } f(v) = f(u) = c(uv) \quad (*)$$

o simplemente se dirá *buena (en L)* si es buena en V . Si L es tal que existe una realización buena, diremos que L es *bien realizable* o *1-coloreable*.

Análogo al caso con c , para $M \subseteq L$ denotaremos simplemente f para referirnos a la función $f|_{V(M)}$. Una realización buena, en comparación a una coloración de vértices propia en un grafo, permite que dos vértices adyacentes tengan el mismo pigmento, a condición que la arista que los conecta tenga un pigmento distinto, pero agrega la restricción adicional de ser realización, es decir, los pigmentos permitidos en cada vértice son los que aparecen en sus aristas incidentes.

Naturalmente, el problema de la 1-coloreabilidad, denotado COL_1 , consiste en que dado un grafo pigmentado L se quiere determinar si L es 1-coloreable. La restricción de COL_1 a grafos con d pigmentos la denotamos $COL_{1,d}$.

Una buena forma de dar intuición al problema es comenzar estudiándolo en estructuras más simples; es este caso veremos como aplica a árboles y ciclos. Notamos que la 1-coloreabilidad de un grafo pigmentado se reduce a la 1-coloreabilidad de los grafos pigmentados inducidos por sus componentes conexas. Por esta razón en lo que sigue nos restringiremos a grafos pigmentados conexos.

¹En general, salvo que se especifique lo contrario, al decir que un grafo pigmentado L posea de una propiedad propia de grafos, no referimos a que $G(L)$ el grafo subyacente tiene la propiedad.

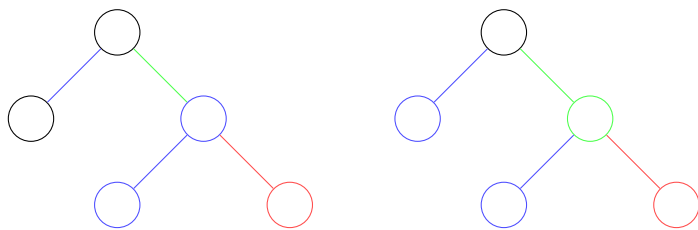


Figura 1.1: Ejemplo de como no es posible encontrar una realización buena para un árbol. A la izquierda las hojas toman el único pigmento disponible; a la derecha se ve como el siguiente vértice toma el pigmento que le queda, no dejando ninguno disponible para la raíz.

Proposición 1.5 Sea $L = (V, E, c)$ como antes. Si G es un árbol con al menos una arista, entonces L no es bien realizable.

Dem: Asumamos que el resultado es falso, y sea L un contraejemplo minimal. Sea f la realización buena. Sea u una hoja de G y v su único vecino. Como f es realización $f(u) = c(uv)$ y por lo tanto $f(v) \neq c(uv)$. En particular, f es realización buena de $L - u$, lo cual contradice que L sea minimal. \square

La idea intuitiva (ver Figura 1.1) es que las hojas solo tienen un pigmento disponible, y al usarlo, dejan a su padre con solo uno disponible; al final la raíz se queda sin opciones.

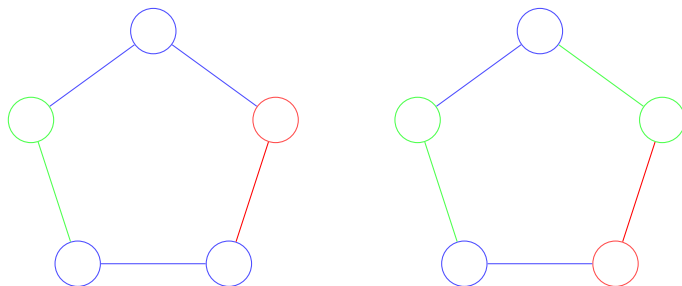


Figura 1.2: A la izquierda un ciclo con c no propio; el vértice de más arriba tiene un único pigmento disponible, y eso va determinando los pigmentos de sus vecinos en ambas direcciones, hasta que aparece un problema. A la derecha un ejemplo con c propio y una realización buena.

Proposición 1.6 Sea $L = (V, E, c)$ como antes, con G un ciclo. Luego, L es bien realizable si y solo si c es un coloreo propio de G .

Dem:

- \implies : Sea f una realización buena de L y supongamos por contradicción que existen vértices $u, v, w \in V$ con $c(uv) = c(vw)$. Como G es 2-regular y f es realización, se sigue que $f(v) = c(vw)$. En particular, si denotamos $G = uvwv_1 \dots v_n$ aplicando este razonamiento se deduce que $f(w) = c(wv_1)$, $f(v_i) = c(v_i v_{i+1})$ para $i \in [n - 1]$ y $f(v_n) = c(v_n u)$, y por lo tanto $f(u) = c(uv) = f(v)$ que es una contradicción.
- \impliedby : Basta generar una realización buena usando una estrategia greedy, notando que en cada paso el vértice por pintar tendrá un pigmento disponible.

\square

1.1.2. Estabilidad

Notemos que la noción de bien realizabilidad no es estable bajo subgrafo, aún cuando este sea subgrafo generador o inducido, y se mantenga la cantidad de pigmentos del grafo.

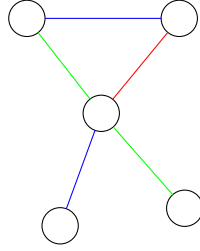


Figura 1.3: El azul corresponde a 1, el rojo a 2 y el verde a 3

Para esto consideremos el grafo pigmentado dado en la Figura 1.3, que se puede ver fácilmente que es bien realizable.

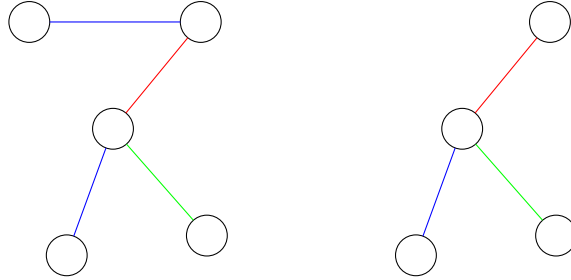


Figura 1.4: A la derecha un subgrafo generador, y a la izquierda uno inducido, ambos árboles, y por lo tanto no bien realizables. Azul corresponde al pigmento 1, rojo al 2 y verde al 3.

Esencialmente, el problema en los ejemplos anteriores es que al remover algunas aristas, cambia el conjunto de pigmentos disponible para un cierto vértice; por ello si f era realización en L , esto no implica que lo sea en un subgrafo $M \subseteq L$. Para tener la estabilidad entonces, es necesario dar una noción de subgrafo que preserve la lista de pigmentos disponibles para cada vértice.

Definición 1.7 $M = (W, F, c')$ un subgrafo pigmentado de L se dirá conservativo, si para todo $w \in W$ $c(\delta_E(w)) = c'(\delta_F(w))$, denotando $M \sqsubseteq L$.

Con esta definición es posible probar el siguiente resultado.

Proposición 1.8 Si L es bien realizable y $M \sqsubseteq L$, entonces M es bien realizable.

Dem: Sea f realización buena de L . Como para todo $v \in M$ $f(v) \in c(\delta_L(v)) = c(\delta_M(v))$, ya que $M \sqsubseteq L$, se sigue que f es realización en M . Como $E(M) \subseteq E(L)$ y tiene los mismos pigmentos, es claro que f es buena en M . \square

1.2. El caso de dos pigmentos

Antes de abordar el problema en un contexto más general, nos centraremos primero en el caso en que solo hay dos pigmentos, es decir $COL_{1,2}$ (así como en la teoría clásica se estudian primero los grafos bipartitos); más adelante veremos que en el caso general COL_1 es NP -completo, y aun más $COL_{1,3}$ lo es. A lo largo de esta sección veremos que esta versión del problema está estrechamente vinculada a $2-SAT$. Esto intuitivamente porque el que una cláusula sea verdadera ocurre cuando al menos uno de los literales es verdadero; en este problema el que una realización f sea buena en una cierta arista e sucede cuando al menos uno de los extremos $u \in e$ cumple que $f(u) \neq c(e)$.

1.2.1. Reducción a 2-SAT

Para poder formalizar este vínculo entre ambos problemas, será necesario primero lidiar con los vértices que sólo tienen un pigmento disponible. En tales vértices sabemos de antemano qué pigmento debe asignar cualquier realización, pero esto impone nuevas restricciones en los vértices adyacentes. Por ello, dando un enfoque algorítmico definimos lo siguiente.

Definición 1.9 *Una realización parcial buena en L es una realización buena g definida sobre un subgrafo pigmentado $(W, F, c) = M \subseteq L$. A la tupla $K = (L, g)$ la llamamos grafo pigmentado parcialmente realizado (en adelante $GPPR$).*

Observación 1.10 *M puede ser el grafo vacío.*

Definición 1.11 *Diremos que K es reducido si para todo $v \in V \setminus W$ se cumple*

1. $|c(\delta(v))| = 2$
2. $\forall w \in W, vw \in E \quad g(w) \neq c(vw)$

Intuitivamente, la definición anterior captura el hecho de que ya no hay más asignaciones forzadas a los vértices de L , y por lo tanto, en la parte que queda por completar, cada vértice tiene disponibles ambos pigmentos. El siguiente lema, simplemente, formaliza lo ya planteado.

Lema 1.12 *Sea K un $GPPR$ como antes. En tiempo polinomial podemos llevar a K a un $GPPR$ reducido o probar que g no se puede extender a una realización buena de L .*

Dem: Supongamos que $K = (L, g)$ no es reducido y que g está definido sobre un W maximal. Supongamos que K no cumple la propiedad 1, es decir, existe un vértice $v \in V \setminus W$ tal que $|c(E(v))| < 2$. Si fuera 0, por vacuidad podríamos extender g a $W+v$ definiendo $g(v) = 0$ (ó 1). Por otro lado, si vale 1, tenemos dos casos: o bien la extensión de g asignando dicho pigmento causa conflicto, en cuyo caso podemos afirmar que g no se puede extender a una realización buena, o bien no causa conflicto, en cuyo caso podemos extender g , lo que contradice la maximalidad de W o el hecho que K no es reducido, dependiendo si se cumple 2.

Luego podemos asumir que g cumple 1, pero no cumple 2, es decir, existe $vw \in E$, con $V \in V \setminus W, w \in W$ tales que $g(w) = c(vw)$, spg $c(vw) = 0$.

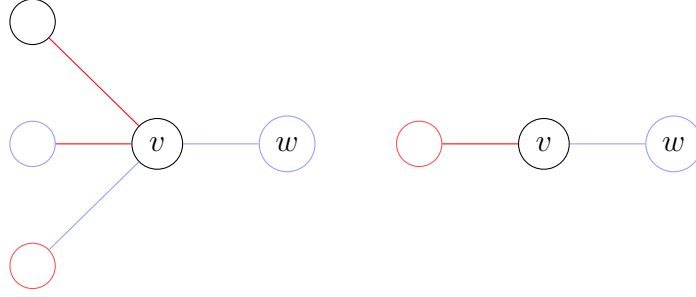


Figura 1.5: A la izquierda el caso que se puede extender g , y a la derecha el que no se puede. El azul equivale al pigmento 0, rojo al 1, y negro a los que no tienen pigmento designado.

Luego, si v tiene algún otro vecino u tal que $c(uv) = g(u) = 1$, podemos afirmar que g no se puede extender a una realización buena de L ; en caso contrario, podemos hacer crecer g asignando $g(v) = 1$, contradiciendo la maximalidad de W . \square

Con el lema anterior podemos, dado L , encontrar en tiempo polinomial un K GPPR reducido asociado, o afirmar que L no es bien realizable; esta extensión es única salvo vértices aislados. Esto motiva:

Definición 1.13 Definimos el lenguaje de los $K = (L, g)$ GPPR reducidos, tales que g se extiende a una realización buena de L

$$GPPR-REA = \{ \langle K \rangle : K = (L, g) \text{ GPPR reducido y } g \text{ se extiende a una realización buena} \}$$

Teorema 1.14 $GPPR-REA$ es equivalente a $2SAT$. En particular es polinomial.

Dem: Veamos que $GPPR-REA \leq_P 2SAT$. Sea $K = (L, g)$ un GPPR reducido, con g definido en $M \subseteq L$ y sea $U = V \setminus W$ para $W = V(M)$. Como K es reducido, cualquier asignación de pigmentos en $G[U]$ no produce inconsistencias con g para las aristas en $E(W, U)$. Todos los vértices en U tienen ambos pigmentos disponibles y nos interesa una asignación de pigmentos que sea buena en $G[U]$. Como es habitual, entenderemos los valores de verdad V y F como los números 1 y 0, respectivamente.

Para $u \in U$ consideramos variables x_u . Construimos una cláusula C_e por arista $e \in E(U)$ como sigue

$$\forall uv \in E(U) \quad C_{uv} = \begin{cases} x_u \vee x_v & \text{si } c(uv) = 0 \\ \bar{x}_u \vee \bar{x}_v & \text{si } c(uv) = 1. \end{cases}$$

Así, definimos $\phi_K = \bigwedge_{e \in E(U)} C_e$. Afirmamos que $K \in GPPR-REA$ ssi $\phi_K \in 2SAT$.

- \implies : Sea f la realización buena en L que extiende a g . En particular, $\forall uv \in E(U)$ no sucede que $f(u) = f(v) = c(uv)$. Consideremos $x_u = f(u)$. Luego, para $uv \in E(U)$, si

$c(uv) = 0$, $\text{spg } x_u = f(u) = 1$. Con esto, C_{uv} es verdadera. Por otro lado, si $c(uv) = 1$, $\text{spg } f(u) = 0$, ie, $\bar{x}_u = 1$, de donde C_{uv} es verdadera.

- \Leftarrow : Sea x la asignación que hace ϕ_K verdadera, y extendemos g asignando $g(u) = x_u$ para $u \in U$. Luego, como K es reducido, por lo antes mencionado, para toda arista e con $e \cap W \neq \emptyset$ g es buena en e . Luego, para $uv \in E(U)$, si $c(uv) = 0$, como $C_{uv} = 1$, $\text{spg } f(u) = x_u = 1$ de donde f es buena en uv . Análogamente, si $c(uv) = 1$, $\text{spg } f(u) = x_u = 0$ y f es buena en uv .

Veamos ahora que $2SAT \leq_P GPPR-REA$. Sea ϕ instancia de $2SAT$ con n variables y m cláusulas. Construimos el siguiente grafo pigmentado L_ϕ . Agregamos un vértice por cada variable x_i y su negación \bar{x}_i , además de dos vértices auxiliares v_i, w_i , y construimos el gadget descrito en la Figura 1.6.

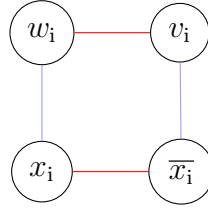


Figura 1.6: Gadget para variables x_i .

Además, para cada cláusula $p \vee q$ agregamos una arista roja entre las negaciones \bar{p} y \bar{q} .

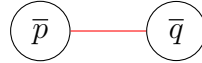


Figura 1.7: Gadget para una cláusula $p \vee q$, bajo la convención de que si $p = \bar{x}_i$, $\bar{p} = x_i$.

Afirmamos que $\phi \in 2SAT$ ssi $(L_\phi, \emptyset) \in GPPR-REA$.

- \implies : Sea x^* la asignación que hace verdadera la fórmula y consideramos

$$\begin{aligned} f(x_i) &= f(v_i) = x_i^* \\ f(\bar{x}_i) &= f(w_i) = 1 - x_i^* \end{aligned}$$

donde 0 es azul y 1 es rojo.

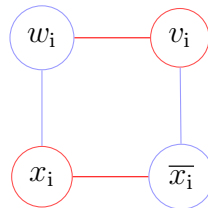


Figura 1.8: Ejemplo de la realización buena para $x_i^* = 1$

Es claro que f es buena en los gadget de las variables (los cuadrados). Por otro lado, para una arista $\bar{p}\bar{q}$ asociada a la cláusula $p \vee q$, como la cláusula es verdadera, $\text{spg } p = 1$, y por lo tanto $f(\bar{p}) = 0$ o sea azul, y luego $f(\bar{p}) \neq c(\bar{p}\bar{q}) = 1$.

- \Leftarrow : Sea f una realización buena de L_ϕ . Es claro que $f(x_i) = 1 - f(\bar{x}_i)$, por construcción. Luego, consideramos la asignación $x_i^* = f(x_i)$. Supongamos que existe una cláusula $p \vee q$ que no se satisface ($p = q = 0$). Luego $f(\bar{p}) = 1 = f(\bar{q})$ pero la arista $\bar{p}\bar{q}$ tiene pigmento 1, lo que contradice que f sea buena.

□

Con el resultado mostrado, y aprovechando el hecho de que podemos llevar en tiempo polinomial un grafo pigmentado con dos pigmentos a un $GPPR$ reducido, finalmente podemos probar que esta versión del problema es polinomial.

Corolario 1.15 $COL_{1,2}$ está en P .

Dem: Dado L de dos pigmentos, consideramos el $GPPR$ dado por $K = (L, \emptyset)$. Por el Lema 1.12 en tiempo polinomial podemos encontrar $W \subseteq V, f : W \rightarrow c(E)$ tal que (L, f) es $GPPR$ reducido y f extiende a \emptyset o afirmar que \emptyset no puede extenderse a una realización buena de L , i.e. que L no es bien realizable. Asumamos que se encuentra f . Notemos que por construcción, en la demostración del Lema 1.12, la asignación de f es segura, i.e. g se extiende a una realización buena de L ssi su extensión lo hace; en nuestro caso esto dice que L es bien realizable ssi $(L, g) \in GPPR\text{-}REA$. Luego, por el Teorema 1.14 podemos responder esto último en tiempo polinomial. □

1.2.2. Caracterización combinatorial

Anteriormente, para obtener una reducción limpia a 2-SAT fue necesario hacer un pre-proceso a la entrada, esencialmente porque habían pigmentos forzados. Por ello en lo que sigue asumiremos que la entrada tiene ambos pigmentos disponibles en cada vértice.

Definición 1.16 Un grafo pigmentado $L = (V, E, c)$ se dice totalmente factible si para todo vértice $v \in V$ $|c(\delta(v))| = |c(E)|$.

En lo que sigue nos interesa estudiar una caracterización combinatorial para los grafos totalmente factibles de 2 pigmentos que no son 1-coloreables. Para esto definiremos una familia especial de grafos pigmentados que cumplen estas propiedades.

Definición 1.17 (Bi-ciclo) Un bi-ciclo es un grafo pigmentado totalmente factible de dos pigmentos, que consta de dos ciclos impares C_1, C_2 (no necesariamente disjuntos) con pigmentos que alternan, salvo en un vértice, tales que los vértices de cada ciclo que tienen dos aristas incidentes del mismo pigmento (i.e. $v_i : |c(\delta_{C_i}(v_i))| = 1$), están conectados por un camino con pigmentos que alternan, que incide en cada uno de estos vértices con el pigmento restante.

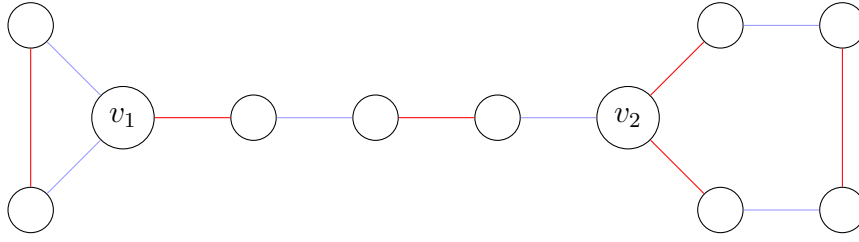


Figura 1.9: Ejemplo de un bi-ciclo

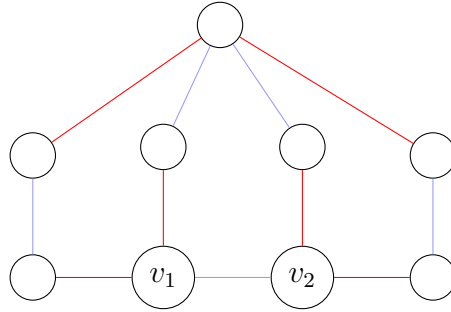


Figura 1.10: Ejemplo de un grafo bi-ciclo

Proposición 1.18 *Si M es bi-ciclo, entonces es totalmente factible y no es 1-coloreable.*

Dem: La primera parte es directa de la definición. Sean u, v los vértices de cada ciclo en que inciden dos aristas del ciclo con el mismo pigmento (puede ser que $u = v$). Notemos que en una realización buena de L de dos pigmentos, si $f(w) = i$, se cumple que para todo x $c(wx) = i \implies f(x) = 1 - i$. En particular, en el bi-ciclo el pigmento de u determina, o bien el pigmento de v , o el pigmento de todo el ciclo asociado a u . Aun más, cuando determina el pigmento de v , también determina el pigmento de todo el ciclo asociado a v . Con esto en mente se sigue que tanto dar pigmento 0 o 1 a u produce contradicciones en L ; para un caso en el ciclo asociado a u y para otro en el ciclo asociado a v . \square

Teorema 1.19 *Sea L totalmente factible y de 2 pigmentos. L es 1-coloreable ssi no existe un bi-ciclo M tal que $M \sqsubseteq L$.*

Dem: (\implies) se sigue de la Proposición 1.18 y el hecho que la bien realizabilidad es estable para \sqsubseteq .

\Leftarrow : Supongamos que L no es 1-coloreable y sea f una realización que tenga una mínima cantidad de conflictos ($f(u) = c(uv) = f(v)$). Por simplicidad supongamos s.p.g. que $c(E) = \{0, 1\}$. Sea $uv \in E$ una arista con conflicto; spg $f(u) = f(v) = c(uv) = 0$ (azul). Sea H_u el subgrafo pigmentado inducido por los vértices w que se conectan con u mediante un camino alternante (en pigmentos) P tal que la arista de P incidente en w tiene el pigmento $f(w)$ y la incidente en u es de pigmento rojo.



Figura 1.11: w es un vértice de H_u

Notamos que si P es el camino alternante recién descrito, todo vértice en P está en H_u . Veamos que H_u contiene dos vértices del mismo pigmento que comparten una arista del otro pigmento. Consideremos f' la realización asociado a invertir todos los pigmentos de H_u . Como esto repara el conflicto en uv , por la minimalidad de f se debe generar un nuevo conflicto, digamos en ww' ; en particular $ww' \in E(H_u) \cup \delta(H_u)$. S.p.g. $w \in H_u$ y supongamos que $w' \notin H_u$. Sea $i = f(w)$. Luego $1 - i = f'(w) = c(ww') = f'(w') = f(w')$. En particular, si P_w es un (w, u) camino alternante asociado a H_u , como $P_w \subseteq H_u \not\ni w'$, $P_w + ww'$ es un camino alternante para w' , lo que no puede ser pues $w' \notin H_u$. Por otro lado, si asumimos que $w' \in H_u$, se sigue $1 - i = f'(w) = c(ww') = f'(w') = 1 - f(w')$ que es lo que queríamos probar.

Sean u_1, u_2 tales vértices y sea u_0 el último vértice de P_{u_1} que está en la intersección de los caminos alternantes P_{u_1}, P_{u_2} asociados a u_1, u_2 en H_u (u_0 podría ser u); así obtenemos un (u, u_0) -camino alternante seguido de un ciclo impar alternante que involucra u_0, u_1, u_2 . Análogamente definimos v_0, v_1, v_2 a los vértices asociados a esta estructura en H_v . Es fácil ver que por la definición de los caminos en H_u , las dos aristas del ciclo incidentes en u_0 son del mismo pigmento, y difieren del pigmento de la arista del camino. Luego denotamos P_u el (u, u_0) camino y P_v el (v, v_0) camino. Si es que $P_u \cap P_v = \emptyset$ ya hemos encontrado el bi-ciclo. En otro caso, sea x el primer vértice de P_v en $P_u \cap P_v$. Así, si C_v es el ciclo asociado a v_0, v_1, v_2 , como x tiene dos aristas incidentes del mismo pigmento provenientes de los caminos alternantes P_u, P_v , se forma el ciclo restante que involucra x, u, v , encontrando el bi-ciclo. \square

1.3. El caso de tres pigmentos

Teorema 1.20 $COL_{1,3}$ es NP-completo. En particular COL_1 lo es.

Dem: Dado ϕ una instancia de $3SAT$ construimos L_ϕ un grafo pigmentado. En primer lugar, al igual que en la demostración del Teorema 1.14, por cada variable agregamos un vértice x_i y un vértice \bar{x}_i asociado a su negación, además de dos vértices auxiliares v_i, w_i , que en conjunto forman un C_4 alternante.

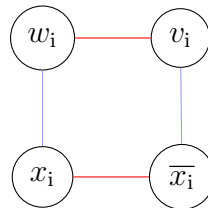


Figura 1.12: Gadget para variables x_i .

Adicionalmente, dada una cláusula $p \vee q \vee r$, añadimos tres vértices auxiliares formando el siguiente gadget.

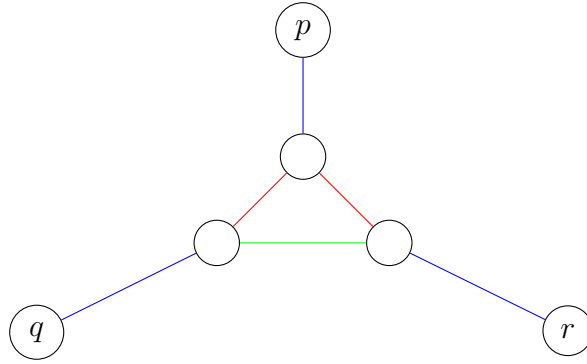


Figura 1.13: Gadget para cláusulas $p \vee q \vee r$.

Ahora basta probar que $\phi \in 3SAT \iff L_\phi \in$ es bien realizable.

- \implies : Dada una asignación x^* a las variables que satisface ϕ , construimos una realización asignando $f(x_i) = x_i^*$, donde el pigmento 0 es azul y el 1 es rojo. Para completar la definición de f en el gadget de variables, simplemente, asignamos $f(v_i) = f(x_i)$, $f(\bar{x}_i) = f(w_i) = 1 - f(x_i)$. Ahora, para completar esta definición en el gadget de las cláusulas, digamos $p \vee q \vee r$, notamos que por definición (al menos) una de ellas debe tener asignado el pigmento rojo, digamos s.p.g. que es p . Luego, independiente los pigmentos de q y r , podemos agregar pigmentos en todo el gadget como en la siguiente figura.

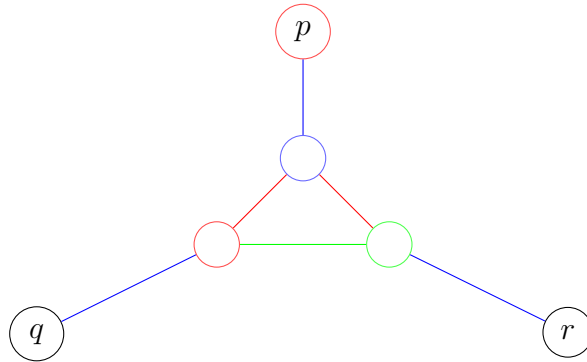


Figura 1.14: realización buena para gadget de cláusula $p \vee q \vee r$, cuando es satisficible.

- \impliedby : Ahora supongamos que L_ϕ es bien realizable y encontremos una asignación que hace ϕ verdadera. Notemos que en los gadgets de una cláusula $p \vee q \vee r$, los vértices asociados a las variables solo pueden tener los pigmentos 0 (azul) o 1 (rojo). Luego, sea x^* la asignación dada por $x_i^* = f(x_i)$, con f una realización buena. Se sigue que x^* hace ϕ verdadera: Supongamos por contradicción que no, y sea una $p \vee q \vee r$ cláusula que no se satisface. Por definición, $f(p) = f(q) = f(r) = 0$. Con esto, los vértices del triángulo interior no pueden ser azules. Es fácil ver que esto implica que no se puede completar la realización en tal triángulo (un argumento sencillo es que un ciclo cuyo arista-coloreo no es un coloreo propio, no es bien realizable).

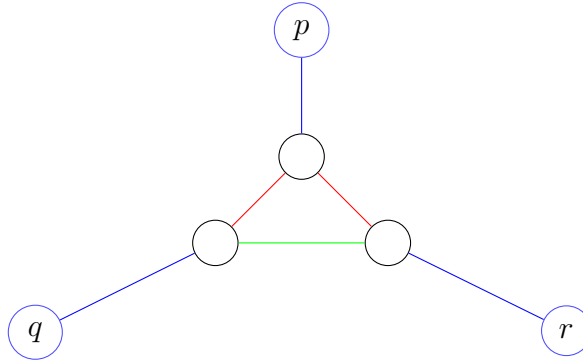


Figura 1.15: Muestra de que el gadget no es bien realizable cuando la cláusula asociada $p \vee q \vee r$ es falsa.

□

1.3.1. El caso bipartito

Previamente probamos que $COL_{1,2}$ es polinomial, mientras que $COL_{1,3}$ es NP-completo. En esta parte nos centraremos en el caso de tres pigmentos para grafos bipartitos, notando que en la demostración del Teorema 1.20 el grafo de la reducción no es bipartito.

Para un grafo bipartito, podemos formular el problema de la bien realizabilidad de manera equivalente utilizando un tablero en el cual interactúan dos sujetos, digamos Alice y Bob. Formalmente, consideramos como entrada una matriz $M \in (\mathbb{N} \cup \{x\})^{n \times m}$ cuya interpretación es que M_{ij} es el pigmento de la arista que comparten el i -ésimo vértice de Alice y el j -ésimo de Bob; x si no comparten arista. Así el objetivo de este juego colaborativo es encontrar un par de tuplas $a \in \mathbb{N}^n, b \in \mathbb{N}^m$ tales que $\forall i \in [n], \forall j \in [m]$

- $a_i \in M_{i\bullet}$
- $b_j \in M_{\bullet j}$
- no ocurre $a_i = M_{ij} = b_j$

donde $M_{i\bullet}$ denota la fila i -ésima y $M_{\bullet j}$ la columna j -ésima, o abusando la notación, el conjunto de entradas de tal fila o columna. Denotamos M_A el conjunto de tuplas factibles para Alice, i.e.

$$M_A = \{a \in \mathbb{N}^n : \forall i \in [n] \quad a_i \in M_{i\bullet}\}$$

y, análogamente, denotamos M_B .

En el siguiente ejemplo veremos un tablero muy simple, para el cual, solo teniendo información de los pigmentos disponibles para cada vértice y los valores de la diagonal, es posible conocer la única realización buena (si existe) y completar el resto del cuadro. Este ejemplo será vital en una demostración posterior, en la Proposición 1.23, para agregar aristas con nuevos pigmentos disponibles para sus extremos y al mismo tiempo prohibir dichos pigmentos, de modo de no cambiar la bien realizabilidad.

Ejemplo 1.21 *Supongamos que en cada vértice, tanto Alice como Bob tienen dos pigmentos disponibles (i.e. $|c(\delta(v))| = 2 \quad \forall v \in V$). Aun más, si llamamos en este caso a un vértice v ser de tipo i si es que $i \notin c(\delta(v))$, supongamos que tanto Alice como Bob tienen exactamente un*

vértice de tipo 0, uno de tipo 1 y uno de tipo 2. Se sigue directamente que si $A = \{x_0, x_1, x_2\}$ y $B = \{y_0, y_1, y_2\}$, con x_i, y_i de tipo i , luego para $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$ se tiene que, si llamamos $M_{ij} := M_{x_i y_j}$, entonces $M_{ij} = k$, ya que $\{k\} = c(\delta(x_i)) \cap c(\delta(y_j))$.

	0	1	2	
0			2	1
1		2		0
2		1	0	

Tabla 1.1: Esta tabla representa la matriz M asociada, donde los vértices están ordenados según el tipo, 0,1 y 2, respectivamente.

Luego si suponemos que existe una solución para el tablero M , entonces para f realización asociada, si $f(y_0) = 1$, como $M_{20} = 1$, se sigue que $f(x_2) = 0$.

	0	1	2	
0		1		
1			2	1
2	0	1	0	

Tabla 1.2: Caso en que $f(y_0) = 1$.

Análogamente, como $M_{21} = 0$, se sigue que $f(y_1) = 2$.

	0	1	2	
0		1	2	
1			2	1
2	0	1	0	

Tabla 1.3: Caso en que $f(y_0) = 1$.

Iterando este razonamiento podemos extender f a todo V .

	0	1	2	
0	1		2	1
1	2	2		0
2	0	1	0	

Tabla 1.4: Caso en que $f(y_0) = 1$.

Una vez establecido que f debe tener esta forma, cuando $f(y_0) = 1$, se sigue que la diagonal de M debe ser $(2, 0, 1)$.

		0	1	2
		1	2	0
0	1	2	2	1
1	2	2	0	0
2	0	1	0	1

Tabla 1.5: Caso en que $f(y_0) = 1$.

Usando el mismo razonamiento, si suponemos que $f(y_0) = 2$, entonces f y M vienen dadas por los valores de la Tabla 1.6.

		0	1	2
		2	0	1
0	2	1	2	1
1	0	2	2	0
2	1	1	0	0

Tabla 1.6: Caso en que $f(y_0) = 2$.

Luego, si Alice y Bob tienen exactamente un vértice de cada tipo, existen exactamente dos tableros o valores posibles de M tales que el L asociado es bien realizable.

Proposición 1.22 *BP-COL_{1,3} es NP-completo².*

Dem: Haremos una reducción desde 3SAT-planar. Dado φ una instancia de 3SAT-planar, construimos L_φ como sigue. Sean X, \mathcal{C} el conjunto de variables y cláusulas de φ respectivamente, y asumamos, s.p.g., que para cada $x \in X$ existen $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$ con $x \in \alpha$ y $\bar{x} \in \beta$; sino todas las cláusulas en las que aparece x (o \bar{x}) se puede satisfacer trivialmente. Además asumamos que cada variable aparece a lo más una vez en cada cláusula. Consideramos un vértice u_x para cada variable, uno u_α para cada cláusula y dado $x \in \alpha$ conectamos los vértices asociados por un camino de largo 3 alternando pigmentos, de manera que cada u_α tenga acceso a los tres pigmentos y la arista que sale de u_x en el camino sea azul (pigmento 0) si $x \in \alpha$ y rojo (pigmento 1) si $\bar{x} \in \alpha$. Formalmente consideramos

$$\begin{aligned}
V_{var} &= \{u_x : x \in X\} & V_{cla} &= \{u_\alpha : \alpha \in \mathcal{C}\} \\
V_{path} &= \bigcup_{x \in X, \alpha \in \mathcal{C}} \{v_x^\alpha, w_x^\alpha\} \\
V &= V_{var} \cup V_{cla} \cup V_{path} \\
E &= \{u_x v_x^\alpha : x \in X, \alpha \in \mathcal{C}_x\} \cup \{v_x^\alpha w_x^\alpha : x \in X, \alpha \in \mathcal{C}_x\} \cup \{w_x^\alpha u_\alpha : x \in X, \alpha \in \mathcal{C}_x\} \\
&\text{donde } \mathcal{C}_x = \{\alpha \in \mathcal{C} : x \in \alpha \vee \bar{x} \in \alpha\}.
\end{aligned}$$

Finalmente, describimos c . Para $\alpha \in \mathcal{C}$, si las variables asociadas a los literales son x, y, z (en algún orden arbitrario) definimos $c(u_\alpha w_x^\alpha) = 0, c(u_\alpha w_y^\alpha) = 1, c(u_\alpha w_z^\alpha) = 2$. Por otro lado,

²BP-COL_{1,3} denota el problema COL_{1,3} restringido a G bipartito planar

dados $x \in X, \alpha \in \mathcal{C}_x$ tomamos

$$c(u_x v_x^\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \alpha \\ 1 & \text{si } \bar{x} \in \alpha. \end{cases}$$

Para terminar, tomamos $c(v_x^\alpha w_x^\alpha)$ cualquiera, de manera que sea distinto a $c(u_x v_x^\alpha)$ y a $c(u_x w_x^\alpha)$ (se puede ya que hay 3 pigmentos). Notemos que por las suposiciones que hicimos sobre φ , cada u_x cumple $c(\delta(u_x)) = \{0, 1\}$. Además, no es difícil convencerse que el grafo asociado a L_φ resulta de reemplazar las aristas de G_φ , el grafo de incidencia de φ , por caminos de largo 3; por ello se sigue que L_φ es planar y bipartito.

Veamos ahora que φ es satisfacible ssi L_φ es bien realizable. Supongamos que φ es satisfacible, y sea ϕ una asignación de verdad que haga verdaderas las cláusulas; para simplificar el lenguaje digamos que una variable x satisface una cláusula α si $\phi(x) = 1$ y $x \in \alpha$ o si $\phi(x) = 0$ y $\bar{x} \in \alpha$. Definamos la siguiente realización.

$$f(u_x) = \phi(x) \quad \text{para } x \in X$$

Dados $x \in X, \alpha \in \mathcal{C}_x$

$$f(v_x^\alpha) = \begin{cases} c(u_x v_x^\alpha) & \text{si } x \text{ satisface } \alpha \\ c(v_x^\alpha w_x^\alpha) & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$f(w_x^\alpha) = \begin{cases} c(v_x^\alpha w_x^\alpha) & \text{si } x \text{ satisface } \alpha \\ c(w_x^\alpha u_\alpha) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por último, para $\alpha \in \mathcal{C}$ elegimos una variable x que satisfaga a α y tomamos

$$f(u_\alpha) = c(w_x^\alpha u_\alpha).$$

Notemos que $f(u_x) = c(u_x v_x^\alpha)$ ssi x no satisface α . Como ϕ satisface todas las cláusulas, f está bien definida. Además, si x no satisface α , como $c(v_x^\alpha w_x^\alpha) \notin \{c(u_x v_x^\alpha), c(w_x^\alpha u_\alpha)\}$ se sigue, de la definición de f , que

$$\begin{aligned} c(u_x v_x^\alpha) &\neq f(v_x^\alpha) \\ c(v_x^\alpha w_x^\alpha) &\neq f(w_x^\alpha) \\ c(w_x^\alpha u_\alpha) &\neq f(u_\alpha), \end{aligned}$$

y si x satisface α

$$\begin{aligned} c(u_x v_x^\alpha) &\neq f(u_x) \\ c(v_x^\alpha w_x^\alpha) &\neq f(v_x^\alpha) \\ c(w_x^\alpha u_\alpha) &\neq f(w_x^\alpha). \end{aligned}$$

Por lo tanto f es realización buena.

Recíprocamente, dado f realización buena de L_φ definamos $\phi(x) = f(u_x)$ para $x \in X$. Resta ver que se satisfacen todas las cláusulas. Sea $\alpha \in \mathcal{C}$ y sea x una variable tal que $f(u_\alpha) = c(w_x^\alpha u_\alpha)$. Como f es buena se sigue que $f(w_x^\alpha) \neq c(w_x^\alpha u_\alpha)$ y por lo tanto $f(w_x^\alpha) = c(v_x^\alpha w_x^\alpha)$. Bajo el mismo argumento $f(v_x^\alpha) = c(u_x v_x^\alpha)$. Así $f(u_x) \neq c(u_x v_x^\alpha)$. Luego, si $c(u_x v_x^\alpha) = 0$ (i.e. $x \in \alpha$) $f(u_x) = 1$ y si $c(u_x v_x^\alpha) = 1$ (i.e. $\bar{x} \in \alpha$) $f(u_x) = 0$. En ambos casos x satisface α . \square

Dado que este problema en el caso bipartito sigue siendo NP -completo, vale la pena analizar el caso bipartito completo. El siguiente resultado permitirá probar que incluso en

ese caso se conserva la NP -completitud. La técnica de agregar grafos adicionales que prohíban el uso de ciertos pigmentos en determinados vértices, introducida en la demostración de la siguiente proposición, es ampliamente usada en la sección de Total Factibilidad del siguiente capítulo.

Proposición 1.23 *Si L bipartito de 3 pigmentos, con partes A, B , es tal que $\forall u \in A$ $|c(\delta(u))| \leq 2$, se puede construir en tiempo polinomial un L' bipartito completo de 3 pigmentos, tal que L es bien realizable ssi L' lo es.*

Dem: Dado L como en la hipótesis, con pigmentos en \mathbb{Z}_3 , añadimos vértices auxiliares $A' = \{u_0, u_1, u_2\}, B' = \{v_0, v_1, v_2\}$, donde las partes del bipartito completo L' serán $A \cup A'$ y $B \cup B'$. Los pigmentos de las aristas entre A' y B' serán, análogo al Ejemplo 1.21, dados por lo descrito en la Tabla 1.7.

	v_2	v_0	v_1
u_2	1	2	1
u_0	2	2	0
u_1	1	0	0

Tabla 1.7: Esta tabla representa la matriz que resume los pigmentos de las aristas entre los conjuntos A' y B' .

Consideremos $A_0, A_1, A_2, A_{01}, A_{02}, A_{12}$ partición de A asociada a $c(\delta(u))$, i.e. $u \in A_0 \iff c(\delta(u)) = \{0\}$, $u \in A_{01} \iff c(\delta(u)) = \{0, 1\}$ y así sucesivamente. Luego, dado $u \in A$ e $i \in \mathbb{Z}_3$ definimos

$$c(uv_i) = \begin{cases} i & \text{si } i \notin c(\delta_L(u)) \\ i - 1 & \text{si } i \in c(\delta_L(u)), \end{cases}$$

y análogamente, para $v \in B, i \in \mathbb{Z}_3$

$$c(u_i v) = \begin{cases} i & \text{si } i \notin c(\delta_L(v)) \\ i - 1 & \text{si } i \in c(\delta_L(v)). \end{cases}$$

Finalmente, para $u \in A, v \in B$ tales que $uv \notin E$ definimos

$$c(uv) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in A_2 \cup A_{12} \\ 1 & \text{si } u \in A_0 \cup A_{02} \\ 2 & \text{si } u \in A_1 \cup A_{01}. \end{cases}$$

Veamos que L es bien realizable ssi L' lo es. Dada f realización buena de L podemos extenderla a L' asignando pigmentos, como en el Ejemplo 1.21, tomando $f(u_i) = f(v_i) = i$ para $i \in \mathbb{Z}_3$. Notemos que f es buena en $A \cup B'$ y en $A' \cup B$, ya que f es realización en L y por lo tanto cumple que $\forall v \in V, f(v) \in c(\delta(v))$; con esto, para $u \in A, v_i \in B'$, si $i \in c(\delta_L(u))$, $f(v_i) = i \neq c(uv_i)$, y si $i \notin c(\delta_L(u))$, $f(u) \neq i = c(uv_i)$; análogo para $A' \cup B$. Por otro lado, para $u \in A, v \in B, uv \notin E$, si $u \in A_2 \cup A_{12}$, como $0 \notin c(\delta_L(u))$, $f(u) \neq 0 = c(uv)$, y análogamente si $u \in A_0 \cup A_{02}$, $f(u) \neq 1 = c(uv)$ y si $u \in A_1 \cup A_{01}$, $f(u) \neq 2 = c(uv)$.

	B_0	B_1	B_2	B_{01}	B_{12}	B_{02}	B_{012}	v_2	v_0	v_1
A_0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1
A_1	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0
A_2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
A_{01}	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0
A_{12}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
A_{02}	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1
u_2	2	2	1	2	1	1	1	1	2	1
u_0	2	0	0	2	0	2	2	2	2	0
u_1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0

Tabla 1.8: Resumen de los pigmentos en las aristas adicionales de L' . Los B_w se definen análogo a los A_w , i.e. w codifica el conjunto de pigmentos disponibles en L para $v \in B_w$.

Recíprocamente, dada f realización buena de L' , veamos que $f|_V$ es realización de L . Notemos que $L'[A' \cup B'] \sqsubseteq L'$. Luego $f|_{A' \cup B'}$ es realización buena, y como por el Ejemplo 1.21 hay una única, $f(v_i) = f(u_i) = i, \forall i \in \mathbb{Z}_3$. Con esto, si suponemos que existe $u \in A$ con $f(u) = i \notin c(\delta_L(u))$, se contradice que $f(v_i) = c(uv_i) = i$, y análogo para $v \in B$. \square

Corolario 1.24 $BC-COL_{1,3}$ es NP -completo³.

Dem: Basta notar que el grafo pigmentado L_φ de la demostración de la Proposición 1.22 cumple la hipótesis de la Proposición 1.23, pues los únicos vértices con los 3 pigmentos en el corte son los u_α asociados a las cláusulas, y todos están en la misma parte de la bipartición. \square

La demostración de la Proposición 1.23 se puede saturar aun más agregando aristas en A' con los pigmentos adecuados.

Proposición 1.25 $SC-COL_{1,3}$ es NP -completo⁴.

Dem: Consideramos el grafo pigmentado L_φ de la demostración de la Proposición 1.22 y L' el resultado de aplicar la Proposición 1.23. Sea L'' el grafo que resulta de agregar todas las aristas de A' en L' con los siguientes pigmentos.

- $c(u_i u_j) = k \in c(\delta_{L'}(u_i)) \cap c(\delta_{L'}(u_j))$, con $i \neq j, i, j \in \mathbb{Z}_3$.
- $c(u_i a) = i - 1$ para $i \in \mathbb{Z}_2, a \in A$.
- $c(aa') = i \notin c(\delta_L(a)) \cap c(\delta_L(a'))$ para $a, a' \in A$.

Veamos que L_φ es bien realizable ssi L'' lo es. Si L_φ es bien realizable, al igual que en la demostración de la Proposición 1.23 se puede chequear fácilmente que la realización buena

³ $BC-COL_{1,3}$ denota el problema $COL_{1,3}$ restringido a G bipartito completo

⁴ $SC-COL_{1,3}$ denota el problema $COL_{1,3}$ restringido a G grafo split completo

se extiende a L'' tomando $f(v_i) = f(u_i) = i$. Para la reversa, notamos que $L' \sqsubseteq L''$. Luego, si L'' es bien realizable, L' lo es, y por ende L_φ también lo es. \square

En la demostración anterior se puede, análogamente, repetir el proceso en casi todo B' , salvo por los vértices de B_{012} , que en L_φ corresponden a los u_α para α cláusula, es decir, se obtiene un grafo split completo cuyo independiente tiene $|\mathcal{C}|$ vértices. En particular, se deduce que el problema es NP-completo para grafos cordados, distance-hereditary y de diámetro dos (superclases de los grafos split).

1.4. Enfoque parametrizado

En el Teorema 1.20 vimos que COL_1 es NP-completo, incluso con solo tres pigmentos; esto en particular nos dice que si solo parametrizamos en el número de pigmentos, no es posible encontrar un algoritmo FPT (a menos que $P = NP$). En lo que sigue veremos que si agregamos el treewidth como parámetro el problema se vuelve FPT.

Proposición 1.26 *Dado $L = (V, E, c)$ y $(T(r), (X_t)_{t \in T(r)})$ una descomposición arborescente agradable de $G = (V, E)$ de ancho k podemos determinar si L es bien realizable en tiempo $d^{O(k)} |V(T)|^{O(1)} n^{O(1)}$*

Dem: Haremos programación dinámica en $T(r)$. Asumamos sin pérdida de generalidad que $c : E \rightarrow [d]$. Dado $t \in T(r)$ y una función $f : X_t \rightarrow [d]$ definiremos la celda $c[t, f]$ por

$$c[t, f] = \llbracket f \text{ se extiende a una realización de } L \text{ que es buena en } V_t \rrbracket$$

Si logramos computar estas celdas, tenemos que L es bien realizable ssi para alguna función se cumple $c[r, f] = 1$. Notemos que por cada t hay a lo más d^{k+1} funciones $f : X_t \rightarrow [d]$. Notemos que si f es tal que $c[t, f] = 1$, en particular $f(v) \in c(\delta(v))$, para todo $v \in X_t$, y cumple es buena en X_t ; a modo de preproceso, podemos inicialmente fijar $c[t, f] = 0$ para las f que no cumplan lo anterior. Si (t, f) lo cumple diremos que es una celda buena. En adelante supongamos que estamos computando una celda buena.

- Para el caso de un **start node** t , es claro que $V_t = X_t$ y por lo tanto $c[t, f] = 1$ ssi (t, f) es buena.
- Si t es un **introduce node**, sea t' el hijo y $v \in X_t \setminus X_{t'}$, i.e. $X_t = X_{t'} + v$. Por la Proposición 0.5 no hay aristas que unan v con $V_{t'} \setminus X_{t'}$, y por lo tanto tampoco con $V_t \setminus X_t$; así $G_t = G_{t'} + v + \{uv \in E : u \in X_{t'}\}$. Con esto, si (t, f) es buena,

$$c[t, f] = c[t', f|_{X_{t'}}].$$

- Cuando t es **forget node**, denotemos t' el hijo de t y v el vértice tal que $X_{t'} = X_t + v$. Es claro que $G_t = G_{t'}$. Para $i \in [d]$ y $f : X_t \rightarrow [d]$ denotemos $f_i : X_{t'} \rightarrow [d]$ la extensión de f tal que $f(v) = i$. Luego $c[t, f] = 1$ ssi existe un $i \in c(\delta(v))$ tal que $c[t', f_i] = 1$, es decir, f es la restricción de un g asociado a una celda verdadera de t' . Con esto

$$c[t, f] = \max_{i \in c(\delta(v))} c[t', f_i].$$

- Finalmente, si t es **join node**, y t_1, t_2 son sus hijos, notemos que, como $X_t = X_{t_1} = X_{t_2}$, por la tercera propiedad de una descomposición arborescente, X_t separa $V_{t_1} \setminus X_t$ de $V_{t_2} \setminus X_t$. Luego las únicas aristas entre G_{t_1} y G_{t_2} en G_t , están contenidas en X_t , y $G_t = G_{t_1} + G_{t_2}$. Con esto $c[t, f] = 1$ ssi $c[t_1, f] = 1$ y $c[t_2, f] = 1$. Así

$$c[t, f] = \min \{c[t_1, f], c[t_2, f]\}.$$

Es claro que las propiedades mencionadas se pueden verificar en tiempo polinomial en el tamaño de la tabla $c[\cdot, \cdot]$ y n . Basta notar que $|c[\cdot, \cdot]| \leq |V(T(r))|d^{k+1}$. \square

Con el resultado anterior y un algoritmo FPT para encontrar una descomposición arborescente de ancho lineal en el treewidth, podemos en tiempo FPT, resolver COL_1 parametrizando en el treewidth y el número de pigmentos.

Teorema 1.27 COL_1 parametrizado en el treewidth k y en d , se puede resolver en tiempo $d^{O(k)}n^{O(1)}$ con $n = |L|$.

Dem: Sea L grafo pigmentado con d pigmentos y $tw(G) = k$. Repitiendo al algoritmo dado por el Teorema 0.6 para $j = 1, \dots, k$ encontramos k y una descomposición arborescente $(T, (X_t)_{t \in T})$ de ancho $5k + 4$ de G en tiempo $2^{O(k)}n$; en particular $|V(T)| \leq 2^{O(k)}n$. Luego, usando la Proposición 0.8 encontramos $(T(r)', (X_t')_{t \in T'})$ una descomposición arborescente agradable de G , con ancho $5k + 4$ en tiempo $(5k + 4)^2 2^{O(k)}n = 2^{O(k)}n$ y tal que $|V(T(r)')| = O(kn)$. Así, usando el algoritmo de la Proposición 1.26, en tiempo $(kn)^{O(1)}d^{O(5k+4)} = d^{O(k)}n^{O(1)}$ podemos determinar si L es bien realizable. El procedimiento descrito toma tiempo $2^{O(k)}n + 2^{O(k)}n + d^{O(k)}n^{O(1)} = d^{O(k)}n^{O(1)}$. \square

Sería interesante saber si solo usando como parámetro el treewidth, es posible encontrar un algoritmo FTP. Lo hecho hasta ahora solo nos da un tiempo $n^{O(k)}$, que no es FTP.

Corolario 1.28 COL_1 parametrizado en el treewidth se puede resolver en tiempo $n^{O(k)}$.

Dem: Basta notar que $d \leq m = O(n^2)$ y aplicar el Teorema 1.27. \square

A continuación veremos que en términos de clases de complejidad, no es posible mejorar el algoritmo anterior parametrizando solo en el treewidth de G , aun para el caso planar bipartito. Para esto introduciremos un problema auxiliar.

Una instancia del problema GRID TILING consiste en un entero k , un entero n y una familia \mathcal{S} de k^2 conjuntos no vacíos $S_{i,j} \subseteq [n] \times [n]$, $1 \leq i, j \leq k$. EL objetivo consiste en encontrar, para cada $1 \leq i, j \leq k$ una tupla $s_{i,j} \in S_{i,j}$ tal que

- Si $s_{i,j} = (a, b)$ y $s_{i+1,j} = (a', b')$ entonces $a = a'$
- Si $s_{i,j} = (a, b)$ y $s_{i,j+1} = (a', b')$ entonces $b = b'$

$S_{1,1}$: (1,1) (3,1) (2,4)	$S_{1,2}$: (5,1) (1,4) (5,3)	$S_{1,3}$: (1,1) (2,4) (3,3)
$S_{2,1}$: (2,2) (1,4)	$S_{2,2}$: (3,1) (1,2)	$S_{2,3}$: (2,2) (2,3)
$S_{3,1}$: (1,3) (2,3) (3,3)	$S_{3,2}$: (1,1) (1,3)	$S_{3,3}$: (2,3) (5,3)

Figura 1.16: Un ejemplo de una instancia de Grid Tiling. En rojo está una solución [10].

En complejidad parametrizada, una herramienta útil para dar cotas inferiores es la hipótesis del tiempo exponencial (ETH): Para $q \geq 3$ sea δ_q el ínfimo sobre las constantes c tales que existe un algoritmo que decide q -SAT en tiempo 2^{cn} . Luego, la conjetura ETH dice que $\delta_3 > 0$. Una consecuencia directa es que, bajo esta hipótesis, no existe un algoritmo que resuelva 3-SAT en tiempo $2^{o(n)}$. Se puede probar el siguiente resultado.

Teorema 1.29 (Teorema 14.28 en [10]) *GRID TILING es $W[1]$ -difícil, y a menos que ETH sea falsa, no existe un algoritmo que lo decida en tiempo $f(k)n^{o(k)}$ para ningún f computable.*

Basados el Teorema 1.29 probaremos el siguiente resultado.

Teorema 1.30 *BP-COL₁ parametrizado con k , el treewidth de $G(L)$, es $W[1]$ -difícil, y a menos que ETH sea falsa, no existe un algoritmo que lo decida en tiempo $g(k)|L|^{o(k)}$ para ningún g computable.*

Dem: Para probar el resultado construiremos una reducción parametrizada de GRID TILING a bien realizabilidad. Sea $(k, n, (S_{i,j}) : i, j \in [k])$ una instancia de GRID TILING. Construiremos una instancia equivalente de nuestro problema. Haremos una identificación entre el conjunto de pigmentos y $A = [n] \times [n]$, $n \geq 2$. Para $i, j \in [k]$ agregamos un vértice v_{ij} y para $c \in S_{i,j}$ consideramos $c' \in A - c$ y conectamos el siguiente gadget

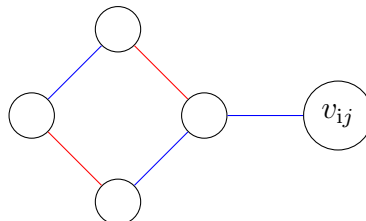


Figura 1.17: Gadget para $c \in S_{i,j}$, $c' \in A - c$; c es azul y c' rojo.

Introduciremos algo de lenguaje para facilitar la descripción de la reducción. Para dos tuplas $(i, j), (i', j') \in [k] \times [k]$ diremos que son vecinos si $|i - i'| + |j - j'| = 1$. Para $(i, j), (i', j')$ vecinos, diremos que $c = (a, b) \in S_{i,j}, c' = (a', b') \in S_{i',j'}$ son compatibles si $a = a'$ cuando $|i - i'| = 1$ y $b = b'$ cuando $|j - j'| = 1$. En nuestro lenguaje, una instancia de GRID TILING es positiva cuando existen $s_{i,j} \in S_{i,j}$ tal que $s_{i,j}, s_{i',j'}$ son compatibles para $(i, j), (i', j')$ vecinos. Luego, para $(i, j), (i', j')$ vecinos y $c \in S_{i,j}, c' \in S_{i',j'}$ no compatibles, agregamos el gadget

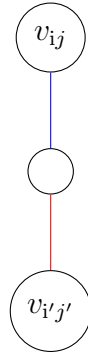


Figura 1.18: Gadget para $c \in S_{i,j}, c' \in S_{i',j'}$ no compatibles; c es azul y c' rojo.

Denotemos $L = (V, E, c)$ el grafo pigmentado recién descrito. Notemos que $G(L)$ se puede obtener a partir de una grilla de $k \times k$ vértices, agregando hojas, aristas paralelas y estiramientos; como $tw(G_k) = k$ para G_k una grilla de $k \times k$ y las operaciones mencionadas no aumentan el treewidth, se sigue que $tw(L) = k$. Además es claro que L se construye en tiempo polinomial en n y es planar; se puede chequear fácilmente que $G(L)$ es bipartito. Veamos que (k, n, \mathcal{S}) es positiva ssi L es bien realizable. Por un lado sean $s_{i,j}$ solución, es decir tal que para índices vecinos son compatibles. Luego para c el pigmento asociado a $s_{i,j}$ pintamos el gadget de la Figura 1.17 como sigue

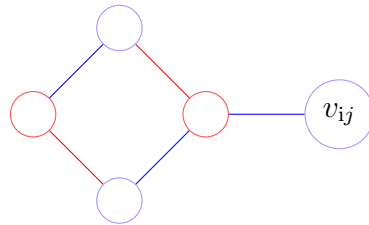


Figura 1.19: Gadget para $c_{ij} \in S_{i,j}, c' \in A - c_{ij}$; c_{ij} es azul y c' rojo, caso cuando c_{ij} está asociado al $s_{i,j}$ de la solución.

Por otro lado para cualquier otro pigmento c el gadget asociado se pinta como en la Figura 1.20.

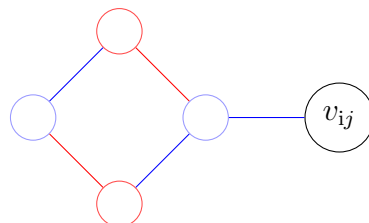


Figura 1.20: Gadget para $c \in S_{i,j}, c' \in A - c$; c es azul y c' rojo, caso cuando c no está asociado al $s_{i,j}$ de la solución.

donde v_{ij} lleva pigmento $c_{ij} \neq c$. Falta pintar el vértice central de cada gadget como en la Figura 1.18. Supongamos que hay uno de esos vértices que no tiene ningún pigmento disponible; eso significa que estamos en la situación

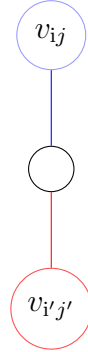


Figura 1.21: Gadget para $c \in S_{i,j}$, $c' \in S_{i',j'}$ no compatibles; c es azul y c' rojo; caso que no hay pigmento para el vértice de al medio.

Luego, por definición del gadget los pigmentos c, c' son incompatibles para índices vecinos, lo que contradice que $s_{i,j}, s_{i',j'}$ fueran parte de la solución (ya que v_{ij} toma el pigmento asociado a $s_{i,j}$).

Recíprocamente, sea f una realización buena. Así, como es realización y para v_{ij} solo hay pigmentos asociados a $S_{i,j}$, tomamos el $s_{i,j}$ asociado a $f(v_{ij})$. Supongamos que existen $(i, j), (i', j')$ vecinos tales que los $s_{i,j}, s_{i',j'}$ no son compatibles. Se sigue que estamos en la situación de la Figura 1.21 e independiente de si el vértice de al medio es rojo o azul, se genera una contradicción con que f sea buena.

Como el parámetro se conserva y L se construye en tiempo polinomial, se sigue del Teorema 1.29 que $BP-COL_1$ es $W[1]$ -difícil. Ahora supongamos que existe un g computable tal que se resuelve $BP-COL_1$ en tiempo $g(t)|L|^{o(t)}$. Entonces, dada una instancia de GRID TILING (k, n, \mathcal{S}) construimos el L equivalente en tiempo polinomial en n , y como $|L| = k^2 + O(k^4) + O(n^2) = O(n^2)$ (vértices de la grilla, de las aristas y de las tuplas de $S_{i,j}$) y $t = k$ se sigue que podemos resolver si L es bien realizable en tiempo $g(k)O(n^2)^{o(k)} = g(k)n^{o(k)}$ y por lo tanto GRID TILING en tiempo $g(k)n^{o(k)}n^{O(1)} = g(k)n^{o(k)}$ lo cual por el Teorema 1.29 implica que la ETH es falsa. \square

1.5. Problemas adicionales

En esta sección estudiamos algunas variaciones del problema que surgen de manera natural. En particular nos interesa ver como estas variantes se relacionan con el problema ya estudiado, o en algunos casos, estudiar directamente la complejidad del problema.

1.5.1. Realización con listas

Una generalización clásica en problemas de coloreo es incluir una versión con listas. En nuestro caso, lo haremos en el contexto de las restricciones respecto a los valores que puede tomar una realización. En concreto, tendremos como entrada un grafo pigmentado y un set de listas indexadas por los vértices, y ya no pediremos que una realización tome valores en los pigmentos incidentes, sino en las listas. Formalmente definimos lo siguiente.

Definición 1.31 (Realización con listas en grafos pigmentados) *Dado $L = (V, E, c)$ y un arreglo de listas $\ell := (l_v)_{v \in V}$ con $l_v \subseteq \mathbb{N}$ diremos que $f : V \rightarrow c(E)$ es una lista-realización de L si cumple que $f(v) \in l_v, \forall v \in V$. Si además es buena en L diremos que es una lista-realización buena de L . Diremos que (L, ℓ) es bien lista-realizable si existe una lista-realización buena.*

Al problema de decisión de determinar si dado (L, ℓ) existe una lista-realización buena, lo denominamos bien lista-realizabilidad y lo denotamos por COL_1^{lista} . Naturalmente para el caso particular de L con d pigmentos denotamos el problema por $COL_{1,d}^{lista}$.

Observación 1.32 *Notamos que no necesariamente, una lista realización, es una realización, ya que puede asignar a $v \in V$ un pigmento que no esté en las aristas incidentes.*

No obstante lo anterior siempre podemos construir, para un (L, ℓ) dado, una instancia (L', ℓ') equivalente en términos de ser bien lista-realizable, tal que las lista-realizaciones son de hecho realizaciones; mas concretamente se cumple que, denotando $L' = (V', E', c')$, para todo $v \in V', l'_v \subseteq c'(\delta(v))$. Esto pues, dado $v \in V$ y $i \in l_v \setminus c(\delta(v))$ es seguro asignar $f(v) = i$ ya que para todo $uv \in E$ $i = f(v) \neq c(uv)$. Con esto (L, ℓ) es bien lista-realizable ssi $(L - v, (l_u)_{u \neq v})$ lo es. Esto da paso a la siguiente observación.

Observación 1.33 *Podemos asumir sin pérdida de generalidad que para todo vértice $v \in V$ se tiene que $l_v \subseteq c(\delta(v))$*

De manera similar al trabajo previo, si limitamos el tamaño de las listas a dos, el problema está fuertemente vinculado a $2SAT$.

Proposición 1.34 COL_1^{lista} es polinomial para el caso de listas de tamaño 2.

Dem: Reduciremos el problema a $2SAT$ de manera similar a la demostración del Teorema 1.14. Dado $w = (L, \ell)$ construimos una fórmula booleana ϕ_w como sigue:

(Var) Por cada $v \in V$ consideramos variables x_v^c para cada $c \in l_v$ (dos variables por vértice). Intuitivamente x_v^c representa el pintar v con el pigmento c .

(Asig) Para cada vértice v , para $l_v = \{i, j\}$ añadimos la cláusula $x_v^i \vee x_v^j$.

(Uni) Para cada vértice v , para $l_v = \{i, j\}$ añadimos la cláusula $\overline{x_v^i} \vee \overline{x_v^j}$.

(Cons) Para cada $uv \in E$ tal que $i := c(uv) \in l_u \cap l_v$ agregamos la cláusula $\overline{x_u^i} \vee \overline{x_v^i}$.

Veamos que w es bien-lista realizable si y solo si ϕ_w es satisfacible.

Por un lado sea f lista-realización buena y definamos $x_v^c = \llbracket f(v) = c \rrbracket$. Luego, como $f(v) \in l_v$ se cumplen las cláusulas de tipo **(Asig)**. Como además $|l_v| = 2$ se sigue que $l_v \setminus \{f(v)\} \neq \emptyset$ y por lo tanto se satisfacen las cláusulas de tipo **(Uni)**. Finalmente como f es buena se satisfacen las cláusulas de tipo **(Cons)**.

Recíprocamente, sea x una asignación que hace ϕ_w verdadera. Entonces para $v \in V$, como se cumplen las cláusulas **(Asig)**, **(Uni)**, existe un único $i_v \in l_v$ tal que $x_v^{i_v} = 1$. Sea entonces $f(v) = i_v$. Así, basta notar que como las cláusulas de tipo **(Cons)** son verdaderas, no puede ocurrir que para $uv \in E, i = c(uv)$ se tenga $x_u^i = x_v^i = 1$. Por lo tanto f es buena. \square

Notemos que la demostración anterior se puede generalizar para el caso con listas de tamaño a lo más 2, en cuyo caso la reducción corresponde a *QUASI-2SAT*. A continuación veremos que aun más, en el contexto de bien lista-realizabilidad, para instancias con cualquier tamaño de listas y cantidad de pigmentos es posible asumir sin pérdida de generalidad que todas las listas tienen tamaño al menos 2.

Proposición 1.35 *Para (L, ℓ) se puede encontrar en tiempo polinomial (L', ℓ') tal que para todo $v \in V(L')$, $|l'_v| \geq 2$, que cumple que (L, ℓ) es bien lista-realizable ssi (L', ℓ') lo es.*

Dem: Notamos primero que si hay listas vacías inmediatamente (L, ℓ) no es bien lista-realizable. En otro caso consideramos la siguiente regla de reducción para eliminar las listas con un pigmento.

LC1: Si hay un $u \in V$ tal que $l_u = \{k\}$, entonces consideramos $L' = L - u$ y para cada $v \in V$ tal que $uv \in E$ y $c(uv) = k$, definir $l'_v = l_v \setminus \{k\}$; $\ell' = (\ell'_v)_{v \in V'}$.

Veamos que esta regla de reducción es segura. Por un lado, si L es bien lista-realizable, tomando f la realización asociada, se cumple en particular que $f(u) = k$. Luego, los vértices v tales que $c(uv) = k$ no pueden tener pigmento k y se sigue que $f|_{V-v}$ es una lista-realización buena de (L', ℓ') . Recíprocamente, si f es una asignación asociada a (L', ℓ') , como para los v tales que $c(uv) = k$, $k \notin l_v$, podemos extender f asignando $f(u) = k$. \square

Corolario 1.36 *COL_1^{lista} con listas de tamaño a lo mas 2 es polinomial.*

Es claro que COL_1^{lista} es una generalización de COL_1 , pues simplemente basta tomar $l_v = c(\delta(v))$. Sorprendentemente, es en realidad un problema equivalente. Para ver esto, primero introduciremos una noción útil de grado, para grafos pigmentados.

Definición 1.37 *Para $v \in L$ e $i \in c(E)$, denotamos el grado de v en L , en el pigmento i , por*

$$d_i^L(v) = |\{e \in E : v \in e, c(e) = i\}|.$$

Si no hay confusión, denotaremos simplemente $d_i(v)$.

Proposición 1.38 $COL_1^{lista} \leq_p COL_1$.

Dem: Dado (L, ℓ) , asumiendo sin pérdida de generalidad, por la Observación 1.33, que $l_v \subseteq c(\delta(v))$, $\forall v \in V$, construiremos una instancia equivalente (L', ℓ') tal que $l'_v = c(\delta(v))$ para todo $v \in V'$, de donde se sigue que (L', ℓ') es bien lista-realizable ssi L' es bien realizable, ya que las lista-realizaciones del primero son las realizaciones del segundo. Para esto, definimos el siguiente potencial.

$$\begin{aligned}\phi_{L,\ell}(v) &= \sum_{i \in c(\delta(v)) \setminus l_v} d_i(v) \\ \varphi_{L,\ell}(v) &= |l_v \setminus c(\delta(v))| \\ \Phi(L, \ell) &= \sum_{v \in V} \phi_{L,\ell}(v) + \varphi_{L,\ell}(v)\end{aligned}$$

Se sigue de la definición de Φ , que (L, ℓ) cumple la propiedad deseada ssi $\Phi(L, \ell) = 0$. Luego, la estrategia será, dado (L, ℓ) encontrar una instancia equivalente en tiempo polinomial que reduzca el potencial Φ .

Por lo ya mencionado, sin pérdida de generalidad $\varphi_{L,\ell}(v) = 0$, para todo $v \in V$. Sea $v \in V$ tal que $\phi_{L,\ell}(v) > 0$ y sean $u \in V, i \in c(\delta(v)) \setminus l_v$ tales que $c(uv) = i$. Supongamos primero que $i \in l_u$ pero no existe $w \in V - v$ tal que $c(uw) = i$. Veamos que (L', ℓ') que resulta de remover u y las aristas incidentes es equivalente. De antemano sabemos que cualquier lista-realización f cumple que $f(v) \neq i$, tanto para L como para L' . Luego, si f es una lista-realización de L' buena, podemos extenderla a L tomando $f(u) = i$. Recíprocamente, es claro que toda lista-realización buena de L , también lo es de L' al restringirse a $V - u$. Basta notar que

$$\Phi(L, \ell) - \Phi(L', \ell') \geq \varphi_{L,\ell}(u) + \phi_{L,\ell}(v) - \phi_{L',\ell'}(v) \geq d_i^L(v) - d_i^{L'}(v) = 1$$

con lo cual se reduce el potencial.

Para el otro caso, llamemos $L' = L - uv$ y notemos que (L', ℓ) es equivalente a (L, ℓ) ; esto pues, como ya mencionamos, de antemano sabemos que para una lista-realización f se cumple $f(v) \neq i$. Con ello, independiente del valor de $f(u)$, siempre f es buena en uv , y podemos retirar uv de manera segura. Para ver que se reduce el potencial, notemos que en este caso, o bien $i \notin l_u$ o existe $w \neq v$ con $c(uw) = i$, i.e. $i \in c(\delta_{L'}(u))$; en ambos casos

$$i \in l_u \setminus c(\delta_L(u)) \iff i \in l_u \setminus c(\delta_{L'}(u))$$

y como solo removimos uv , se sigue que $l_u \setminus c(\delta_L(u)) = l_u \setminus c(\delta_{L'}(u))$. Luego $\varphi_{L,\ell}(u) = \varphi_{L',\ell}(u)$. Como también $i \notin l_v$, $\varphi_{L,\ell}(v) = \varphi_{L',\ell}(v)$. Así

$$\Phi(L, \ell) - \Phi(L', \ell) \geq d_i^L(v) - d_i^{L'}(v) = 1$$

y por lo tanto se reduce el potencial. □

En el siguiente capítulo veremos que la extensión de este problema a k -coloración es también equivalente a su análogo con realizaciones usuales.

1.5.2. d-Cover

A continuación, cambiamos la propiedad de f en las aristas; esta vez, en vez de que al menos uno de los extremos tenga un pigmento distinto al de la arista, pedimos que al menos uno tenga el mismo color. Formalmente, el problema $dCOVER$ consiste en que dado un grafo pigmentado con d pigmentos, queremos determinar si existe una función $f : V \rightarrow c(E)$ tal que para toda arista $e \in E$ exista $u \in e$ con $f(u) = c(e)$. A f cumpliendo tal propiedad la llamamos un d -cover. En particular, en lo que sigue, nos centraremos en el caso que L es completo.

Observación 1.39 *Sin pérdida de generalidad se puede asumir que f es realización; esto pues, para f d -cover, si $f(u) \notin c(\delta(u))$, podemos definir f' igual a f , salvo que asigna $f'(u) = i \in c(\delta(u))$, y se tiene que f' también es d -cover.*

Esencialmente, si un d -cover no es realización en un determinado vértice v , no aporta realmente a cubrir alguna arista incidente en v . Veremos en la siguiente Proposición que esta noción de que f cubre aristas está de hecho bien fundada.

Proposición 1.40 *Sea L con pigmentos en $[d]$ y sea $f : V \rightarrow [d]$. Entonces f es d -cover ssi para todo $i \in [d]$, $f^{-1}(\{i\})$ es un (vertex) cover de $G_i = (V, E_i)$, donde $E_i = c^{-1}(\{i\})$.*

Dem: Denotemos $V_i = f^{-1}(\{i\})$. Basta notar que V_i es cover de G_i ssi para todo $e \in E_i$, existe $u \in V_i \cap e$, i.e. existe $u \in e$ t.q. $f(u) = i = c(e)$. \square

Proposición 1.41 *Si L completo tiene d -cover, entonces para todo $i \in c(E)$, G_i es un grafo split.*

Dem: Probaremos que G_i debe ser $2K_2$ -free y cordado, lo cual es equivalente a que G_i es grafo split. Para lo primero, supongamos que existen $e, e' \in E_i$ disjuntos, y tales que $e \cup e'$ induce un matching en G_i . Luego, si f es d -cover, sean $u \in e, v \in e'$ con $f(u) = f(v) = i$. Así, como L es completo, $uv \in E \setminus E_i$, i.e. $c(uv) \neq i$, pero $f(u), f(v) \neq c(uv)$.

Para lo segundo, sea f d -cover y sea C el ciclo inducido más pequeño en G_i . Supongamos que $|C| \geq 4$ y sean $u, v \in C$ con $c(uv) = j \neq i$. Luego, s.p.g. $f(u) = j$. Entonces, si x, y son los vecinos de u en C , como $c(ux) = c(uy) = i \neq j = f(u)$, se sigue que $f(x) = f(y) = i$; pero $c(xy) \neq i$ lo que contradice que f es d -cover. \square

La Proposición anterior nos permite forzar estructura a la hora de buscar un d -cover. A continuación explotamos esta estructura para terminar resolviendo el problema en tiempo polinomial.

Proposición 1.42 *Dado $d \geq 2$, $dCOVER$ es polinomial para L completo.*

Dem: Asumamos s.p.g. que $c(E) = [d]$. Para $i \in [d]$, por la Proposición 1.41, sean C_i, S_i

la partición de V , t.q. son un clique y un independiente en G_i . Sea f d -cover y denotemos $V_i = f^{-1}(\{i\})$. Como V_i es un cover de G_i , se tiene que $|C_i \setminus V_i| \leq 1$. Por otro lado, como L es completo, se cumple $|S_1 \cap \dots \cap S_d| \leq 1$; esto pues, dados $u, v \in V$, si $i = c(uv)$, entonces $uv \not\subseteq S_i$. En particular, $|C_1 \cup \dots \cup C_d| \geq n - 1$. Luego, para $* \notin V$, basta ciclar sobre las funciones $\phi : [d] \rightarrow V \cup \{*\}$ t.q. $\phi(i) \in C_i$, cuando no vale $*$ (a lo más $(n + 1)^d$ funciones), y chequear si f dada por $f(u) = i$ para $u \in C_i \setminus \{\phi(i)\}$ está bien definida, y se puede extender a los vértices restantes (a lo más $d + 1$) de manera que sea d -cover.

Luego el algoritmo consiste en, chequear si $\forall i G_i$ es grafo split, rechazar si no se cumple. En otro caso, ciclar sobre las ϕ posibles ($O(n^d)$) y chequear si alguno de los f asociados es d -cover ($O(d^d) = O(1)$); si todos fallan rechazar. \square

Dado que en el problema $dCOVER$ la propiedad buscada sigue siendo del tipo: alguno de los extremos de cada arista cumple algo, este está de hecho, naturalmente, relacionado con la bien realizabilidad. Lamentablemente, esta relación solo va en una dirección.

Proposición 1.43 *Sea L t.q. para todo $v \in V$, $|c(\delta(v))| \geq 2$. Luego, si L admite un d -cover para $d = |c(E)|$, entonces es bien realizable.*

Dem: Dado f' un d -cover de L , definamos $f(u) \in c(\delta(u)) \setminus \{f'(u)\}$ (que existe por hipótesis); veamos que f es una realización buena. Basta notar, que para todo $e \in E$, si $c(e) = i$, tomando $u \in e$ t.q. $f'(u) = i$, $f(u) \neq f'(u) = c(e)$. \square

1.5.3. Versión de optimización de COL_1

Una relajación de bien realizabilidad, es buscar una realización que tenga la menor cantidad de conflictos con ser buena. Para vincular la bien-realizabilidad con la literatura introduciremos algo de notación adicional. Dado L y f realización, diremos que $uv \in E$ es estable si $f(u) = f(v) = c(uv)$. En [1] se presentan resultados respecto al problema de encontrar f que maximice el número de aristas estables (o el peso, cuando las aristas tienen asociados pesos positivos). En particular se prueba que el problema con dos pigmentos es polinomial, y con al menos tres es NP -completo. A continuación estudiamos el problema de minimización de estas aristas.

Definición 1.44 *Dado L y f realización, $sEdge(L, f)$ denota el número de aristas estables. Definimos el problema de decisión*

$$MinStab = \{\langle L, k \rangle : \exists f \text{ realización t.q. } sEdge(L, f) \leq k\}$$

Denotaremos $MinStab_d$ para el caso que L tiene d pigmentos.

Observación 1.45 *$MinStab$ contiene como subproblema a COL_1 para el caso en que $k = 0$.*

Sorprendentemente, pese a que en el caso de dos pigmentos la versión de maximización de aristas estables es polinomial, la versión de minimización es NP -completo.

Proposición 1.46 *MinStab₂ es NP-completo.*

Dem: Haremos una reducción desde *Max2SAT*. Dado φ una fórmula en 2CNF con n variables y m cláusulas, consideramos un vértice u_x por cada variable x . Asumiremos s.p.g. que cada variable aparece tanto en positivo como en negativo en alguna cláusula; en otro caso, si x aparece solo en positivo (o solo en negativo), digamos en r cláusulas, basta considerar el problema equivalente que quita esas cláusulas, no considera x y cambia el parámetro k por $k' = k - r$. Para una cláusula C conectamos las variables asociadas x, y como sigue.

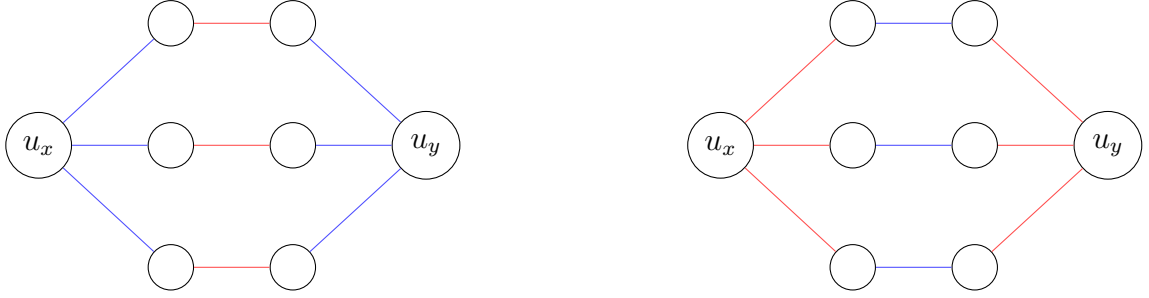


Figura 1.22: Gadget para cláusula C con variables x, y . A la izquierda el caso $C = x \vee y$ y a la derecha el caso $C = \bar{x} \vee \bar{y}$. El pigmento azul representa el valor 0 y el rojo a 1.

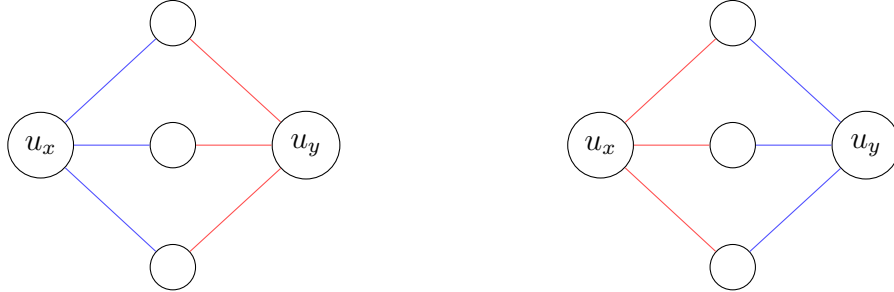


Figura 1.23: Gadget para cláusula C con variables x, y . A la izquierda el caso $C = x \vee \bar{y}$ y a la derecha el caso $C = \bar{x} \vee y$. El pigmento azul representa el valor 0 y el rojo a 1.

Llamamos a este gadget L_C .

Afirmación *Si u_x, u_y toman el pigmento de las aristas incidentes, L_C tiene al menos 3 aristas estables; aun más, se pueden tener exactamente 3. Si al menos uno de los extremos no toma tal color, es posible elegir pigmentos para los vértices internos de manera de no tener aristas estables.*

La demostración de esta afirmación se sigue de un simple análisis de casos. Sea L_φ el grafo pigmentado recién descrito. Veamos que existe ϕ asignación de verdad que satisface al menos k cláusulas de φ ssi existe una realización f de L_φ que tiene a lo más $3(m-k)$ aristas estables. En efecto, para la primera dirección, dado ϕ , tomamos $f(u_x) = \phi(x)$, i.e. 0 si es falsa y 1 si es verdadera. Luego por cada cláusula C que se satisface, por construcción de los gadgets y usando la Afirmación, podemos asignar pigmentos a los vértices internos de manera que L_C

no tenga aristas estables; para C cláusula que no se satisfaga, podemos asignar de manera que solo presenten 3 aristas estables. Así, con esta realización, G_L tiene a lo más $3(m - k)$ aristas estables. Recíprocamente, sea f realización con a lo mas $3(m - k)$ aristas estables, sea $\phi(x) = f(u_x)$ y supongamos que hay $m - k + 1$ cláusulas que no se satisfacen con ϕ . Luego, por la afirmación, cada L_C asociado a una cláusula no satisfecha tiene al menos 3 aristas estables. Así, L_ϕ tiene al menos $3(m - k + 1) > 3(m - k)$ aristas estables, lo cual contradice la hipótesis sobre f . \square

Dado que el problema resulta difícil, incluso en el caso de dos pigmentos, vale la pena dar un enfoque parametrizado. Esta forma de abordar el problema, nos es útil de hecho para una versión más general, con pesos en \mathbb{Z} . En concreto, consideremos la versión de optimización con pesos de $MinStab$ (en adelante $W-minStab$), donde dados un grafo pigmentado L , y $w : E \rightarrow \mathbb{Z}$ una función de pesos, se busca f realización que minimice

$$\sum_{e \in stab(L, f)} w_e$$

Proposición 1.47 *Existe un algoritmo que, dada una descomposición arborescente agradable $(T(r), (X_t)_{t \in T(r)})$ de $G = (V, E)$ con ancho k , y L de d pigmentos, encuentra una solución óptima de $W-minStab$ en tiempo $d^{O(k)} |V(T(r))|^{O(1)}$.*

Dem: Análogo a lo hecho en la demostración de la Proposición 1.26, usaremos programación dinámica. En lo que sigue al denotar f, f', f_1 , etc, nos referiremos a una realización parcial respecto a L . Definimos las celdas

$$c(t, f) = \min_{\substack{f': V_t \rightarrow [d] \\ f'|_{X_t} = f}} \sum_{e \in stab(G_t, f')} w_e$$

donde t es un vértice de $T(r)$ y $f : X_t \rightarrow [d]$. Notemos que, en particular, el óptimo viene dado por

$$\min_{f: X_r \rightarrow [d]} c[r, f]$$

Resta ver como computar $c[\cdot, \cdot]$ usando programación dinámica. Como es usual, computaremos primero las hojas, y luego vértices tales que todos sus hijos ya fueron computados; sea (t, f) una celda, y en caso que f no sea realización parcial, predefinimos $c(t, f) = -\infty$. Si no está predefinida, proseguimos como sigue:

- Para el caso de un **start node** t , es claro que $V_t = X_t$ y por lo tanto

$$c[t, f] = \sum_{e \in stab(G_t, f)} w_e.$$

- Si t es un **introduce node**, sea t' el hijo y $v \in X_t \setminus X_{t'}$, i.e. $X_t = X_{t'} + v$. Por la Proposición 0.5 no hay aristas que unan v con $V_{t'} \setminus X_{t'} = V_t \setminus X_t$; así $G_t = G_{t'} + v + \{uv \in$

$E : u \in X_{t'}\}$. Luego

$$\begin{aligned}
c[t, f] &= \min_{\substack{f': V_t \rightarrow [d] \\ f'|_{X_t} = f}} \left(\sum_{e \in \text{stab}(G_{t'}, f'|_{V_{t'}})} w_e + \sum_{\substack{uv \in e(v, X_{t'}) \\ f'(u) = f'(v) = c(uv)}} w_e \right) \\
&= \min_{\substack{f': V_t \rightarrow [d] \\ f'|_{X_t} = f}} \left(\sum_{e \in \text{stab}(G_{t'}, f'|_{V_{t'}})} w_e + \sum_{\substack{uv \in e(v, X_{t'}) \\ f(u) = f(v) = c(uv)}} w_e \right) \\
&= \min_{f': V_t \setminus X_t \rightarrow [d]} \left(\sum_{e \in \text{stab}(G_{t'}, f' \cup f|_{X_{t'}})} w_e \right) + \sum_{\substack{uv \in e(v, X_{t'}) \\ f(u) = f(v) = c(uv)}} w_e \\
&= \min_{f': V_{t'} \setminus X_{t'} \rightarrow [d]} \left(\sum_{e \in \text{stab}(G_{t'}, f' \cup f|_{X_{t'}})} w_e \right) + \sum_{\substack{uv \in e(v, X_{t'}) \\ f(u) = f(v) = c(uv)}} w_e \\
&= c[t', f|_{x_{t'}}] + \sum_{\substack{uv \in e(v, X_{t'}) \\ f(u) = f(v) = c(uv)}} w_e.
\end{aligned}$$

- Cuando t es **forget node**, denotemos t' el hijo de t y v el v\u00e9rtice tal que $X_{t'} = X_t + v$. Es claro que $G_t = G_{t'}$. Notemos que $V_t \setminus X_t = V_{t'} \setminus X_{t'} + v$. Con esto

$$\begin{aligned}
c[t, f] &= \min_{f': V_t \setminus X_t \rightarrow [d]} \sum_{e \in \text{stab}(G_t, f' \cup f)} w_e \\
&= \min_{i \in c(\delta(v))} \min_{f': V_{t'} \setminus X_{t'} \rightarrow [d]} \sum_{e \in \text{stab}(G_{t'}, f' \cup f \cup \{i\})} w_e \\
&= \min_{i \in c(\delta(v))} c[t', f \cup \{i\}].
\end{aligned}$$

- Finalmente, si t es **join node**, y t_1, t_2 son sus hijos, notemos que, como $X_t = X_{t_1} = X_{t_2}$, por la tercera propiedad de una descomposici\u00f3n arborescente X_t separa $V_{t_1} \setminus X_t$ de $V_{t_2} \setminus X_t$. En particular $E(G_{t_1}) \cap E(G_{t_2}) = E(X_t)$ y $V_t = (V_{t_1} \setminus X_t) \dot{\cup} (V_{t_2} \setminus X_t) \dot{\cup} X_t$. As\u00ed, usando inclusi\u00f3n-exclusi\u00f3n

$$\begin{aligned}
c[t, f] &= \min_{f': V_t \setminus X_t \rightarrow [d]} \left(\sum_{e \in \text{stab}(G_{t_1}, f'|_{V_{t_1} \setminus X_t} \cup f)} w_e + \sum_{e \in \text{stab}(G_{t_2}, f'|_{V_{t_2} \setminus X_t} \cup f)} w_e - \sum_{e \in \text{stab}(G[X_t], f)} w_e \right) \\
&= \min_{\substack{f_1: V_{t_1} \setminus X_t \rightarrow [d] \\ f_2: V_{t_2} \setminus X_t \rightarrow [d]}} \left(\sum_{e \in \text{stab}(G_{t_1}, f_1 \cup f)} w_e + \sum_{e \in \text{stab}(G_{t_2}, f_2 \cup f)} w_e \right) - \sum_{e \in \text{stab}(G[X_t], f)} w_e \\
&= \min_{f_1: V_{t_1} \setminus X_t \rightarrow [d]} \left(\sum_{e \in \text{stab}(G_{t_1}, f_1 \cup f)} w_e \right) + \min_{f_2: V_{t_2} \setminus X_t \rightarrow [d]} \left(\sum_{e \in \text{stab}(G_{t_2}, f_2 \cup f)} w_e \right) - \sum_{e \in \text{stab}(G[X_t], f)} w_e \\
&= c[t_1, f] + c[t_2, f] - \sum_{e \in \text{stab}(G[X_t], f)} w_e.
\end{aligned}$$

Basta notar que las operaciones anteriores se pueden calcular en tiempo polinomial en el tamaño de la tabla. Finalmente podemos recuperar una solución a partir de los datos de la tabla usando técnicas clásicas de programación dinámica, nuevamente en tiempo polinomial en el tamaño de la tabla. Luego, como $|c[\cdot, \cdot]| \leq |V(T(r))|d^{k+1}$, se concluye el resultado. \square

Corolario 1.48 *W -minStab parametrizado en el treewidth de G y el número de pigmentos d se puede resolver en tiempo FPT.*

Dem: Similar a la demostración del Teorema 1.28, basta encontrar una descomposición arborescente agradable de ancho $5k + 4$ y a lo más kn vértices en tiempo FPT, combinando el Teorema 0.6 y el Teorema 0.8. Luego usando el algoritmo de la Proposición 1.47 se obtiene la complejidad deseada. \square

1.5.4. Conjunto Objetivo

Finalmente, ahondaremos un poco más en el buscar realizaciones que sean buenas en una parte de la entrada. En particular nos centraremos en problemas del estilo: dado un grafo pigmentado y un conjunto de aristas, determinar si existe una realización tal que dicho conjunto tenga alguna propiedad relacionada a aristas estables. Para formalizar esta idea, en adelante, dado L y una realización f , denotemos por $stab(L, f)$ por el conjunto de aristas estables, i.e.

$$stab(L, f) = \{uv \in E : f(u) = f(v) = c(uv)\}.$$

Dado L y $F \subseteq E$ consideramos el problema de decidir si existe realización f tal que

(P1) Todo arista de F es estable, i.e. $F \subseteq stab(L, f)$

(P2) Ninguna arista de F es estable, i.e. $F \cap stab(L, f) = \emptyset$

(P3) Las aristas estables son las de F , i.e. $F = stab(L, f)$

(P4) Las aristas no estables son las de F , i.e. $F = E \setminus stab(L, f)$

Para abordar estos 4 problemas, denotaremos $L_F = (V, F, c)$. En el caso del P1 no es difícil ver que existe tal f ssi es posible asignar pigmentos a los vértices de L_F de manera que todas las aristas sean estables; en [1] se prueba que esta condición es equivalente a que todos los vértices ven un solo pigmento en las aristas incidentes, i.e. $|c(\delta_F(v))| = 1 \forall v \in V$. Se sigue que P1 se puede resolver en tiempo polinomial.

Observación 1.49 *P1 es polinomial.*

En el P2 nuevamente no nos interesa saber que ocurre con las aristas de $E \setminus F$, así que el trabajo se reduce simplemente a ver si es que L_F es bien realizable. Hay un pequeño tecnicismo con lo anterior, ya que las aristas que no están en F aportan posibles pigmentos

para los vértices en lo que inciden, así que el problema en realidad hay que abordarlo con listas. Vimos anteriormente que esto no le agrega mayor dificultad. Formalmente tenemos lo siguiente.

Proposición 1.50 $P2_d$ la versión de $P2$ restringida al caso que $|c(F)| = d$, es equivalente a $COL_{1,d}^{lista}$. En particular, es polinomial, si $d \leq 2$, y NP -completo, si $d \geq 3$.

Dem: Nuevamente es fácil ver que existe una realización que no deja ninguna arista de F estable ssi (L_F, ℓ) es bien lista-realizable, para $l_v = c(\delta(v))$; en particular $P2_d$ se reduce en tiempo polinomial a $COL_{1,d}^{lista}$. Para la otra dirección, basta recordar que del Teorema 2.38 $COL_{1,d}^{lista}$ se reduce a $COL_{1,d}$ y notar que este último es un caso particular de $P2_d$ cuando $F = E$. \square

Para el caso del $P3$ se requiere un poco más de trabajo. Como queremos que las aristas de F sean estables, ya estamos determinando cual será el pigmento de sus extremos. Luego habrá que ver si es posible extender esta realización parcial, de manera que ninguna de las aristas de $E \setminus F$ quede estable. A continuación veremos que este subproblema se puede resolver nuevamente usando la bien lista-realizabilidad.

Proposición 1.51 $P3_d$ la versión de $P3$ restringida al caso que $|c(E(V(F)^c))| = d$, es equivalente a $COL_{1,d}^{lista}$. En particular, es polinomial, si $d \leq 2$, y NP -completo, si $d \geq 3$.

Dem: Veamos primero que $P3_d$ se reduce al problema de listas. Dado L, F notemos primero que si existe tal realización f , para $uv \in F$, se cumple $f(u) = c(uv)$, y luego se sigue por [1] que L_F tiene componentes conexas monocromáticas. Aun más, si $uv \in F^c$ para $u, v \in V(F)$, no ocurre $f(u) = f(v) = c(uv)$. Con esto, dada una instancia cualquiera, podemos fácilmente reconocer si L_F tiene componentes conexas monocromáticas, y si es así asignar $f : V(F) \rightarrow c(F)$ de manera obvia y chequear si las aristas en $E(V(F)) \setminus F$ no son estables; si algo de lo anterior falla, podemos retornar una instancia trivial negativa de $COL_{1,d}^{lista}$. Con esto, existe la realización ssi es posible extender f a $V(F)^c$ de manera que se satisfagan las restricciones en el corte de $V(F)$ y en las aristas del complemento $E(V(F)^c)$; i.e. ninguna de estas sea estable. No es difícil convencerse que lo anterior corresponde a una lista coloración en $L' = (V(F)^c, E(V(F)^c), c)$ con listas

$$l_v = c(\{uv \in E : u \in V(F)^c\}) \setminus c(\{uv \in E : u \in V(F), f(u) = c(uv)\})$$

para $v \in V(F)^c$.

Para ver la otra reducción basta notar que $COL_{1,d}$, que por 2.38 es equivalente a $COL_{1,d}^{lista}$, es un caso particular de $P3_d$, cuando $F = \emptyset$. \square

Es claro que $P3$ y $P4$ son equivalentes, considerando $F' = E \setminus F$.

Observación 1.52 $P4_d$ la versión de $P4$ restringida al caso que $d = |c(E(V(F)^c))|$, es

equivalente a $COL_{1,d}^{lista}$. En particular, es polinomial, si $d \leq 2$, y NP-completo, si $d \geq 3$.

Capítulo 2

k-Coloreabilidad de Grafos Pigmentados

In this chapter we study a generalization of the problem of well realizability (we call it k -coloreability), in which we ask for the existence of a partition $\{V^1, \dots, V^k\}$ and a realization f that is good in each $V^j, j \in [k]$. In the first section we focus in the case of complete graphs with two pigments, and prove that is equivalent to a partition of a graph in independent sets and cliques problem [5]; in particular find a polynomial algorithm for $k \leq 2$ and prove that it NP -complete for $k \geq 3$. Then in the second section we prove that is possible to reduce to the totally feasible case; that is when each vertex see every pigment in $c(E)$. In the third section we see that the 2-coloreability problem in graphs with two pigments is NP -complete in general case, and so it is in complete graphs with three pigments. Besides, we define a middle problem between 2-coloreability in pigmented graphs and 2-coloreability in usual graphs, and give a polynomial algorithm to solve it. Finally, in fourth section we generalize the k -coloreability for list realizations and prove that this problem is actually equivalent to the usual k -coloreability in pigmented graphs.

Definición 2.1 (k -coloración) *Dado L como antes y $k \geq 1$, $\{V^1, \dots, V^k\}$ partición de V se dice una k -coloración de L si existe f una realización de L tal que sea buena en cada $V^j, j \in [k]$. Si L tiene una k -coloración diremos que es k -coloreable.*

Dado que no exigimos que los conjuntos V_i sean no vacíos, se deduce naturalmente que si L es k -coloreable, entonces es j -coloreable, para todo $j \geq k$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.2 *El número cromático de un grafo pigmentado L es*

$$\chi(L) = \text{mín}\{k : L \text{ es } k\text{-coloreable}\}$$

Al problema de determinar si un grafo pigmentado es k -coloreable lo llamamos k -coloreabilidad y lo denotamos

$$COL_k = \{\langle L \rangle : L \text{ grafo pigmentado y } \chi(L) \leq k\}.$$

Adicionalmente, para $d \geq 1$ definimos

$$COL_{k,d} = \{\langle L \rangle : L \text{ grafo pigmentado con } d \text{ pigmentos y } \chi(L) \leq k\}.$$

En caso de restringir uno de estos problemas al caso en que $G(L)$ tenga una propiedad particular, como ya lo hemos hecho durante el capítulo 1, usaremos un prefijo para indicarlo (e.g. para $COL_{k,d}$ restringido al caso G completo escribimos $K-COL_{k,d}$).

Se puede ver que la definición de subgrafo conservativo dada en el capítulo anterior también se comporta bien con esta versión del problema.

Proposición 2.3 *Si L es k -coloreable y $M \sqsubseteq L$, entonces M es k -coloreable.*

Dem: Sea $\{V_1, \dots, V_k\}$ k -coloración de L , y f la realización asociada. Sean $W_i = V_i \cap W$ y $g = f|_W$. Notemos que como M es conservativo, se sigue que g es una realización de M . Con esto, como f es buena en cada W_i ya que $W_i \subseteq V_i$, concluimos que $\{W_1, \dots, W_k\}$ es una k -coloración de M . \square

Observación 2.4 *Es claro que la k -coloreabilidad se puede estudiar por componentes conexas, dado que para u, v no adyacentes trivialmente f es buena en $\{u, v\}$. Por ello, en adelante, asumiremos, sin pérdida de generalidad, que (V, E) es conexo.*

El primer resultado intuitivo es que al agregar pigmentos el problema de k -coloreabilidad se vuelve más difícil.

Proposición 2.5 *Para $k, d \geq 1$, $COL_{k,d} \leq_p COL_{k,d+1}$.*

Dem: Dado L de d pigmentos, construimos L' de $d + 1$ pigmentos tal que L es k -coloreable ssi L' lo es. Asumamos, sin pérdida de generalidad, que $c(E) = [d]$. Dado $V' = \{v_1, \dots, v_k\}$, k vértices adicionales y $E' = \{uv : u, v \in V'\} \cup \{uv : u \in V, v \in V'\}$, definimos $c' : E \cup E' \rightarrow [d + 1]$ dada por

$$c'(e) = \begin{cases} c(e) & \text{si } e \in E \\ d + 1 & \text{si } e \in E'. \end{cases}$$

Sea $L' = (V \cup V', E \cup E', c')$. Si L es k -coloreable, sea $\{V^1, \dots, V^k\}$ partición de V y f realización asociada. Consideramos f' la extensión de f que vale $d + 1$ en V' y definimos $V^{j'} = V^j + v_j$, para $i \in [k]$. Notemos que cada $V^{j'}$ tiene a lo más un vértice de pigmento $(d + 1)$. Dados $u, v \in V^{j'}$ con $uv \in E \cup E'$, si $c(uv) = d + 1$, por lo recién mencionado, no ocurre $f(u) = f(v) = d + 1$, pues $u \neq v$. Por otro lado, si $c(uv) = i \in [d]$, se sigue que $uv \in E$ y por lo tanto $u, v \in V^j$, por lo tanto el que f' sea buena en $V^{j'}$ se hereda de f .

Recíprocamente, si L' es k -coloreable, dados $V^{1'}, \dots, V^{k'}$ y f' asociados, tomamos $f = f'|_V$ y $V^j = V^{j'} \cap V$. Notemos que como f' es realización, $f'(V') = \{d + 1\}$. Como para todo $u, v \in V'$, $c'(uv) = d + 1$ se sigue que $|V^{j'} \cap V'| \leq 1$, y por lo tanto $|V^{j'} \cap V'| = 1$. Asumamos spg que $v_j \in V^{j'}$. Luego, dado $u \in V$, $f(u) \neq d + 1$; en otro caso, tomando $j \in [k]$ tal que $u, v_j \in V^{j'}$ se tendría $f(u) = c(uv_j) = f(v_j) = d + 1$. Así, f es realización de L , que además es buena en cada V^1, \dots, V^k (ya que f' lo es). \square

No es difícil notar que este problema es efectivamente una generalización del caso en

grafos usuales. Aun más, el problema clásico corresponde al caso particular de un pigmento. A continuación vemos esto más formalmente.

Proposición 2.6 *Para $k \geq 3, d \geq 1$, $COL_{k,d}$ es NP-completo.*

Dem: Para ver que $COL_{k,d} \in NP$ basta considerar como certificado la k -coloración $\{V_i\}_{i=1}^k$ y la realización f asociada, y chequear que es buena en cada V_i toma tiempo $O(kn^2)$. Por otro lado, para ver la NP-completitud, consideramos $kCOLOR$ el lenguaje de los grafos k -coloreables, que sabemos es NP-completo para $k \geq 3$, y veamos que $kCOLOR \leq_P COL_{k,1}$. En efecto, sea $G = (V, E)$ instancia de $kCOLOR$ y sea $L = (V, E, \mathbb{1})$, donde $\mathbb{1} : E \rightarrow \mathbb{N}$ denota la función tal que para todo $e \in E$ $\mathbb{1}(e) = 1$. Queremos probar que

$$\langle G \rangle \in kCOLOR \iff \langle L \rangle \in COL_k$$

- \implies : Sea g un k -coloreo de G . Basta tomar $f = 1$, $V_i = \{v \in V : g(v) = i\}$ y se sigue que como V_i son independientes, para todo $i \in [n]$, y $u, v \in V_i$, $uv \notin E$ y por lo tanto f es buena en cada V_i .
- \impliedby : Sea $\{V_1, \dots, V_k\}$ k -coloración de L y f realización buena en cada V_i . Como $c(L) \equiv 1$ se sigue que $f \equiv 1$. Luego, consideramos $g(v) = i$ para i tal que $v \in V_i$. Con esto los V_i son independientes, ya que si no, si $uv \in E$ para $u, v \in V_i$, se tiene $f(u) = 1 = f(v) = 1 = c(uv)$, lo cual contradice que f es buena.

Por la transitividad de \leq_p y la Proposición 2.5 se concluye. □

2.1. El caso completo con dos pigmentos

Por simplicidad estudiaremos primero el caso L completo. Aun más, veremos el caso de dos pigmentos. Intuitivamente (como se hace en ocasiones para resultados de tipo Ramsey) para pigmentos $\{0, 1\}$ podemos pensar en las aristas de pigmento 1 como aquellas que están en el grafo y en 0 como las que no están; como L es completo esto basta para tener toda la información de este. Veremos que el problema de k -coloreabilidad está estrechamente relacionado con los grafos split. En lo que sigue, como ya lo hemos hecho, denotamos $E_i = \{e \in E : c(e) = i\}$ para $i \in \{0, 1\}$ y definimos $G_i = (V, E_i)$. Notemos que como L es completo, tanto G_0 como G_1 codifican completamente L por sí solos.

Proposición 2.7 *L es 1-coloreable ssi G_0 y G_1 son grafos split conexos.*

Dem: Notemos que $G_0 = \overline{G_1}$. Luego, G_0 es split ssi G_1 lo es. Por otro lado, para $f : V \rightarrow \{0, 1\}$ una asignación de pigmentos notemos que podemos identificar f con $S \subseteq V$ donde $v \in S \iff f(v) = 1$. Para demostrar la proposición veremos que f es realización buena ssi

- S es un independiente
- $C := V \setminus S$ es un clique
- $\forall v \in S \quad d(v) > 0$

- $\forall v \in C \quad d(v) + 1 < n$

Es claro que la existencia de dicho $S \subseteq V$ que cumpla las propiedades anteriores en G_1 es equivalente a que G_1 es grafo split conexo con complemento conexo.

Lo que nos queda es directo ya que, por un lado, f es realización ssi todo vértice tal que $f(v) = i$ tiene una arista incidente e con $c(e) = i$ (ya que L es completo), es decir, en G_1 si $v \in S$, entonces v no es aislado y si $v \in C$, entonces v no es universal. Por otro lado, el que f sea buena nos dice que, para u, v con $f(u) = f(v) = i$, se cumple $c(uv) \neq i$, es decir, en G si $u, v \in S$, entonces $uv \notin E_1$ y, si $u, v \in C$, entonces $uv \in E_1$, que es precisamente que S es un independiente y C un clique. \square

Denotemos (k, l) la clase de los grafos tales que su conjunto de vértices se puede particionar en $S_1, \dots, S_k, C_1, \dots, C_l$ con S_i independiente y C_i clique, y para un grafo $G \in (k, l)$ sean $S = \bigcup_{i=1}^k S_i$ $C = \bigcup_{i=1}^l C_i$. Veamos que podemos extender el resultado anterior a la k -coloreabilidad. Para esto, denotemos por $[k, l]$ la clase de grafos para los que existe una partición como en (k, l) , pero que además cumple que S no tiene vértices aislados, y que C no tiene vértices universales.

Proposición 2.8 *L completo es k -coloreable ssi $G_1 \in [k, k]$.*

Dem: Al igual que antes identificamos $f : V \rightarrow \{0, 1\}$ con $S \subseteq V$. Por un lado si L es k -coloreable, sea $\{V_1, \dots, V_k\}$ partición de V y definamos $S_i := S \cap V_i, C_i := C \cap V_i$ para $i \in [k]$. Luego, por definición, como f es realización, $\forall v \in S, \quad d(v) > 0$ y $\forall v \in C, \quad d(v) < n - 1$ y como $\{V_1, \dots, V_k\}$ es k -coloración, f es buena en V_i , y por lo tanto S_i es independiente y C_i es clique, para $i \in [k]$. Recíprocamente, si G_1 se particiona en dichos conjuntos, basta tomar $V_i = S_i \cup C_i$ y $f = \mathbb{1}_{\{S\}}$, y por lo antes visto, f es realización en L y es buena en V_i , para $i \in [k]$. \square

En un resultado de [5] se afirma que el problema de determinar la pertenencia a (k, l) es polinomial cuando $k, l \leq 2$. En un paper posterior se menciona que las demostraciones de esto tienen errores y luego en [6] se da un algoritmo correcto para la pertenencia a $(2, 1)$ (y por lo tanto a $(1, 2)$) y se dan ideas para el caso $(2, 2)$. A continuación veremos una demostración con mayor detalle de esto último.

Proposición 2.9 *Existe un algoritmo que decide si un grafo G está en $(2, 2)$ en tiempo $O(n^{12}(n + m))$, y si acepta entrega una partición asociada.*

Dem: Para $G \in (2, 2)$ y C^1, C^2, S^1, S^2 la partición asociada, denotando $S = S^1 \cup S^2, C = C^1 \cup C^2$, se puede ver, fácilmente, que

1. $\forall v \in S, \quad N(v) \in (1, 2)$
2. $\forall v \in C, \quad \overline{N[v]} \in (2, 1)$

y con esto, si algún vértice no cumple alguna de las condiciones anteriores se sigue que

$G \notin (2, 2)$. En otro caso, definimos

$$\begin{aligned} S' &= \{v \in V : N(v) \in (1, 2), \overline{N[v]} \notin (2, 1)\} \\ C' &= \{v \in V : N(v) \notin (1, 2), \overline{N[v]} \in (2, 1)\} \\ R &= \{v \in V : N(v) \in (1, 2), \overline{N[v]} \in (2, 1)\} \end{aligned}$$

que corresponde a una partición de $V(G)$. En el caso que $R = \emptyset$ se sigue que $G \in (2, 2)$ ssi $G[S'], \overline{G}[C']$ son bipartitos. Luego, para el caso que R es no vacío, dado $x \in R$ notemos que en particular $N[x] \in (1, 2)$ (agregando x a alguno de los cliques). Con esto, denotando C_x^1, C_x^2, S_x^1 la $(1, 2)$ partición de $N[x]$ y C_x^3, S_x^2, S_x^3 la $(2, 1)$ partición de $\overline{N[x]}$, en conjunto definen una partición $(3, 3)$ de G . Denotemos $C_x = C_x^1 \cup C_x^2 \cup C_x^3$ y $S_x = S_x^1 \cup S_x^2 \cup S_x^3$. Luego, como C_x^i son cliques y S como antes es bipartito, se sigue que $|C_x^i \cap S| \leq 2$. En particular, $|C_x \cap S| \leq 6$. Bajo un argumento análogo se sigue que $|S_x \cap C| \leq 6$. Notemos que

$$\begin{aligned} S &= S_x \setminus (S_x \cap C) \cup (S \cap C_x) \\ C &= C_x \setminus (C_x \cap S) \cup (C \cap S_x) \end{aligned}$$

Luego, dados C_x, S_x basta ciclar sobre todos los posibles $C_x \cap S$ y $S_x \cap C$ que son $O(n^{12})$ y verificar si $S_x \setminus (S_x \cap C) \cup (S \cap C_x)$ es bipartito en G y $C_x \setminus (C_x \cap S) \cup (C \cap S_x)$ es bipartito en \overline{G} . Esto da paso al siguiente algoritmo.

Algorithm 1 Detección de $(2, 2)$

- 1: Para $v \in V$ determinar si $v \in S'$, $v \in C'$ o $v \in R$; si $S' \cup C' \cup R \neq V$ **rechazar**
 - 2: Si S' no es bipartito en G o C' no es bipartito en \overline{G} **rechazar**
 - 3: Si $R = \emptyset$ **retornar** biparticiones de S' y C' en G y \overline{G} resp.
 - 4: Fijar $x \in R$ y calcular S_x, C_x
 - 5: Para cada $Y \subseteq S_x, Z \subseteq C_x, |Y|, |Z| \leq 6$
 - 6: Si $S_x \setminus Y \cup Z, C_x \setminus Z \cup Y$ son bipartitos en G, \overline{G} resp.
 - 7: **Retornar** biparticiones asociadas
 - 8: Si todos los Y, Z fallan **rechazar**
-

Por los resultados de [6] podemos determinar si v cumple 1 y 2 en tiempo $O(m^2)$. Luego, la línea 1 toma tiempo $O(nm^2) = O(n^5)$. Las líneas 2, 3 y 4 están dominadas claramente. Hay $O(n^{12})$ posibles tuplas (Y, Z) en la línea 5 y ejecutar 6 y 7 toma $O(n + m)$. Se concluye que la complejidad del Algoritmo 1 es $O(n^{12}(n + m))$. \square

Estos resultados nos darán las bases para demostrar que $K\text{-COL}_{2,2}$ es polinomial.

Lema 2.10 *Sea G grafo con $I = I(G)$ el conjunto de vértices aislados en G y $U = U(G)$ el conjunto de vértices universales, con $i = i(G) := |I|, u = u(G) := |U|$. Luego $G \in [k, l] \iff G - U - I \in (k - i, l - i)$.*

Dem: Notemos, solo para fijar ideas, que $\min\{u, i\} = 0$; esto pues si hay un vértice universal no puede haber vértices aislados y viceversa. El resultado es relativamente directo, ya que de

la definición, si $v \in U$ y $G \in [k, l]$, v no puede estar en el C asociado, y por lo tanto $v \in S$. Luego, si $v \in S_{i_v}$, como v es universal, $S_{i_v} = \{v\}$. Así, como $v \in U$ arbitrario, $V(G - U)$ se puede particionar en $\{S_i : i \neq i_v, v \in U\}$ y $\{C_j : j = 1, \dots, l\}$, con S_i independiente y C_j clique. Análogamente, $I \subseteq C$ y para $u \in I$ y j_u tal que $u \in C_{j_u}$, $C_{j_u} = \{u\}$ y por lo tanto $V(G - I)$ se particiona en $\{S_i : i = 1, \dots, k\}$ y $\{C_j : j \neq j_u, u \in I\}$.

La recíproca es trivial, ubicando cada vértice universal en un nuevo independiente o cada aislado en un nuevo clique. \square

Teorema 2.11 $K\text{-COL}_{k,2}$ es polinomial para $k \leq 2$ y NP-completo para $k \geq 3$.

Dem: Para el caso $k \leq 2$, sabemos que L es k -coloreable ssi $G_1 \in [k, k]$ ssi $G_1 - U(G_1) - I(G_1) \in (k - u(G_1), k - i(G_1))$. Si $\min\{k - u(G_1), k - i(G_1)\} < 0$, entonces sabemos que $G_1 \notin [k, k]$; en otro caso, como $\max\{k - u(G_1), k - i(G_1)\} \leq 2$, por [5] podemos decidir si $G_1 - I(G_1) - U(G_1) \in (k - u(G_1), k - i(G_1))$ en tiempo polinomial.

Para el caso $k \geq 3$ haremos una reducción desde 3-coloración en grafos, notando que G_1 determina unívocamente el L asociado. Notemos primero que G es 3-coloreable ssi $G' := G - I(G) + K_3$ es 3-coloreable, ssi $G' \in (3, 0)$ (notemos que G' no tiene vértices aislados ni universales). Un chequeo rápido nos permite ver que $G' \in (3, 0)$ ssi $G' + K_4 \in (3, 1)$ e inductivamente ssi $G' + kK_4 \in (3, k)$. Luego si G'' es el grafo que resulta de agregar $k - 3$ vértices universales a $G' + kK_4$ se sigue del Lema 2.10 que $G' + kK_4 \in (3, k)$ ssi $G'' \in [k, k]$. Luego basta tomar $L_G = (V(G''), \binom{V(G'')}{2}, \mathbb{1}_{\{E(G'')\}})$ y se sigue por la Proposición 2.8 que L_G es k -coloreable ssi G es 3-coloreable. \square

2.2. Total Factibilidad

En esta sección, nos centraremos en el problema de reducir la k -coloreabilidad al caso totalmente factible (en adelante $TF\text{-COL}_k$). Para lograr esto, el proceso se centrará en buscar un grafo pigmentado Q relativamente pequeño, que se pueda agregar a una entrada L , de manera que para cada vértice $v \in L$ y pigmento $i \in c(E)$ que no corresponde al pigmento de ninguna de las aristas incidentes en v , se puede dar acceso a v al pigmento i , y al mismo tiempo prohibirlo, por la estructura de Q y cómo se conecta a v . En concreto, estudiamos primero el caso $k = 1, d = 2$ (Proposición 2.13), ya que, como veremos más adelante, Q en el caso general tiene $d - 1$ pigmentos, y en la sección 1.2.2 pudimos profundizar combinatorialmente en los grafos de dos pigmentos. A continuación, en la Proposición 2.15 generalizamos el resultado a $d \geq 2$. Luego, como paso intermedio para llevarlo a $k \geq 1$, en la Proposición 2.18 estudiamos el caso $d = 2$, que hemos profundizado en la sección anterior. Hecho esto, finalmente probamos el resultado general, con $k, d \geq 1$ en el Teorema 2.23.

En la sección de bien realizabilidad para tres pigmentos (Proposición 1.23), se hizo una reducción de este estilo; allí la propiedad estructural de Q era tener una única realización buena, sin embargo en este caso lo principal será que Q sea totalmente factible y al mismo tiempo no k -coloreable. Para clarificar el resultado general, estudiaremos primero el caso de bien realizabilidad con tres pigmentos ($k = 1, d = 3$). En el capítulo anterior, en el Teorema

1.19 vimos que la pertenencia a $TF-COL_{1,2}$ se caracteriza por la ausencia de un bi-ciclo; esto motiva lo siguiente.

Ejemplo 2.12 Consideremos el grafo pigmentado Q dado en la Figura 2.1.

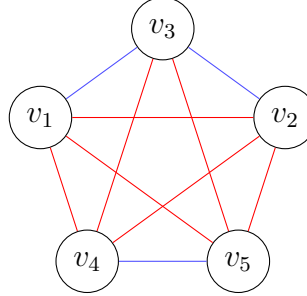


Figura 2.1: Ejemplo de Q completo con dos pigmentos, totalmente factible, que no es bien realizable. Aquí 0 es el pigmento azul y 1 es rojo.

Es claro que Q es completo y totalmente factible. Veremos que Q no es bien realizable. Sea f realización buena y supongamos que $f(v_3) = 0$. Como f es buena, $f(v_1) = f(v_2) = 1$; en otro caso, $f(v_1) = c(v_1v_3) = 0 = f(v_3)$ o $f(v_2) = c(v_2v_3) = 0 = f(v_3)$,

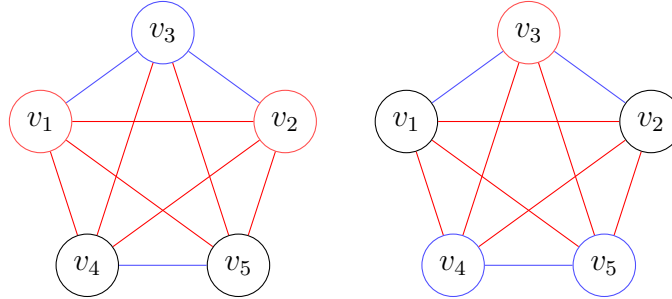


Figura 2.2: A la izquierda el caso $f(v_3) = 0$ y a la derecha el caso $f(v_3) = 1$. Aquí 0 es el pigmento azul y 1 es rojo.

pero luego $f(v_1) = f(v_2) = c(v_1v_2) = 1$. Por otro lado si $f(v_3) = 1$, bajo el mismo argumento $f(v_4) = f(v_5) = 0$ lo que contradice que $c(v_4v_5) = 0$.

Es fácil ver que el grafo anterior contiene como subgrafo pigmentado a un bi-ciclo, quitando las aristas v_1v_4 y v_2v_5 , y por lo tanto no es bien realizable. Sin embargo hicimos un análisis diferente para dar intuición de cómo encontrar este tipo de ejemplos en un contexto más general. Usando este Q podremos asumir la total factibilidad para tres pigmentos, incluso en el caso completo.

Proposición 2.13 $COL_{1,3} \leq_p TF-COL_{1,3}$ y $K-COL_{1,3} \leq_p KTF-COL_{1,3}$.¹

Dem: Dado L de 3 pigmentos (s.p.g. en \mathbb{Z}_3) construiremos un L' tal que L es bien realizable ssi L' lo es; aun más, cuando L sea completo L' también lo será. Sea Q_i como en el Ejemplo 2.12

¹ $KTF-COL_{k,d}$ denota el problema $COL_{k,d}$ restringido a L completo totalmente factible.

con pigmentos $i + 1$ e $i + 2$. La idea es usar los Q_i como herramienta para prohibir pigmentos en L implícitamente; esto pues, en caso que los cinco vértices de un Q_i no se puedan pintar de pigmento i , se sigue que cualquier asignación de pigmentos produce problemas con la bien realizabilidad. Formalmente, consideramos L' el resultado de añadir los Q_i a L cuando existe un vértice $v \in V$ tal que $i \notin c(\delta(v))$, todas las aristas entre los Q_i, Q_j y todas las aristas entre los Q_i y V , y extender c como sigue:

Para $u \in Q_i$ y $v \notin Q_i$,

$$c(uv) = \begin{cases} i & \text{si } v \in V \text{ y } i \notin c(\delta(v)) \\ i + 1 & \text{si } v \in V \text{ y } i \in c(\delta(v)) \\ h & \text{si } v \in Q_j \text{ con } \{h, i, j\} = \mathbb{Z}_3. \end{cases}$$

Notemos que por construcción, todo vértice en V tiene los tres pigmentos disponibles. Además, si Q_i está en L' significa que hay un vértice $v \in V$ sin i disponible en L , y por lo tanto v se conecta con todo Q_i en pigmento i ; en particular los vértices de Q_i tienen disponible el pigmento i . Como por definición los vértices de Q_i ya tienen los otros dos pigmentos, tenemos que L' es totalmente factible. Adicionalmente, si L es completo, se sigue que L' también.

Veamos que L es 1-coloreable ssi L' es 1-coloreable. Sea f una buena realización de L . No es difícil verificar que tomando $f(u) = i$ para $u \in Q_i$, f es buena realización en L' . Recíprocamente, si f es buena realización en L' , tomando $f|_V$, como claramente es buena, basta verificar que es realización de L . Para esto, supongamos por contradicción que no lo es, i.e., sea $v \in V$ tal que $f(v) = i \notin c(\delta_L(v))$. Luego, por la definición de L' , tiene un Q_i y este está conectado con pigmento i a v . En particular, como f es buena, y para $u \in Q_i$ $c(uv) = f(v) = i$, se sigue que, para todo $u \in Q_i$, $f(u) \neq i$. Entonces f es realización en Q_i , y en particular buena, lo cual contradice que Q_i no es 1-coloreable. \square

Aunque no es necesario, para las demostraciones posteriores, resulta un buen ejercicio construir un grafo pigmentado totalmente factible y con única realización buena. Esto permite re-demostrar la Proposición 2.13 usando argumentos similares a los de la demostración de la Proposición 1.23.

Corolario 2.14 *Existe un grafo pigmentado de 3 pigmentos, completo, totalmente factible, que tiene una única realización buena.*

Dem: Usaremos dos copias de cada Q_i como en la demostración de la Proposición 2.13 y por simplicidad lo representamos en la Figura 2.3 con un cuadrado del color asociado al pigmento i . Una arista de color h entre un par de pentágonos Q_i, Q_j representa que hay una arista entre cada par de vértices u, v con $u \in Q_i$ y $v \in Q_j$ de pigmento h . Con todo lo anterior consideramos

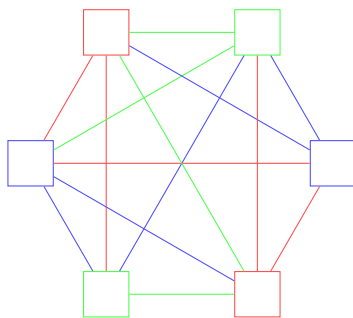


Figura 2.3: Un completo de 3 pigmentos, totalmente factible, que tiene única realización buena

Es claro que es completo y totalmente factible. Además no es difícil notar que pintar cada Q_i de pigmento i (como lo sugiere la Figura 2.3) corresponde a una realización buena. Para ver que es única, asumamos que hay un vértice v en algún Q_i que no es de pigmento i . Por la simetría asumamos spg que $i = 0$ y $f(v) = j \neq i$. Luego, el Q_0 que contiene a v está conectado a un Q_j con una arista de pigmento j , i.e. cada vértice u del Q_j asociado está conectado a v con $c(uv) = j$. Se sigue que ningún u en tal Q_j puede pintarse de pigmento j , por lo tanto f es realización en Q_j , en particular buena, lo que contradice que Q_j no es bien realizable. \square

A continuación daremos una generalización de la Proposición 2.13 para cualquier número de pigmentos d . Para construir el grafo auxiliar Q partiremos con un árbol, que sabemos no es bien realizable, y lo llevaremos al caso totalmente factible usando el Q con un pigmento menos dado por la hipótesis inductiva y argumentos similares a los usados anteriormente.

Proposición 2.15 *Para $d \geq 2$, $COL_{1,d} \leq_p TF-COL_{1,d}$ y $K-COL_{1,d} \leq_p KTF-COL_{1,d}$.*

Dem: Notemos que para generalizar el argumento de la Proposición 2.13 se debe encontrar un análogo al Q del Ejemplo 2.12 con $(d - 1)$ pigmentos. Veamos por inducción que existe.

Afirmación *Para todo $d \geq 1$, existe Q^d un grafo pigmentado completo, de d pigmentos, totalmente factible y que no es bien realizable.*

En el caso base $d = 1$, basta tomar un K_2 con un pigmento en su arista; la única realización posible asigna ese pigmento a ambos vértices, lo que no corresponde a una realización buena.

Para el paso inductivo, sea $d \geq 2$ y consideremos un árbol M con $d+1$ vértices y d pigmentos, digamos en \mathbb{Z}_d . Por cada $i \in \mathbb{Z}_d$ consideramos Q_i^{d-1} el grafo pigmentado dado por la hipótesis inductiva, con pigmentos en $\mathbb{Z}_d \setminus \{i\}$. Para cada vértice v que en M cumpla $i \notin c(\delta(v))$ agregamos una arista entre v y cada vértice u de Q_i^{d-1} con $c(uv) = i$; llamemos N al grafo pigmentado obtenido al terminar este proceso. Notemos que N es totalmente factible; esto pues por construcción para $v \in M$ $c(\delta_N(v)) = \mathbb{Z}_d$ y para $u \in Q_i^{d-1}$, como M tiene una arista de cada pigmento y $d + 1 \geq 3$ vértices, siempre hay un vértice v tal que $i \notin c(\delta(v))$, con lo cual $c(\delta_N(v)) = c(\delta_{Q_i^{d-1}}(u)) \cup \{i\} = \mathbb{Z}_d$. Veamos que además N no es 1-coloreable. En efecto,

supongamos por contradicción que existe f una realización buena. Si f es realización de M , como es buena se contradice que M , que es un árbol, no sea 1-coloreable. Luego, existe $v \in M$ con $f(v) = i \notin c(\delta_M(v))$. Como f es buena se sigue que, para todo $u \in Q_i^{d-1}$, $f(u) \neq i$, y en particular, como los Q_i son totalmente factibles, se sigue que f es realización en Q_i^{d-1} , y por lo tanto buena, lo que contradice que Q_i^{d-1} no es 1-coloreable.

Finalmente, basta notar que como N es totalmente factible, tomando Q^d cualquier extensión a un completo (totalmente factible), se sigue que $N \subseteq Q^d$, y como N no es bien realizable, Q^d tampoco lo es.

Luego, dado L cualquiera de $d \geq 2$ pigmentos, spg en \mathbb{Z}_d , basta tomar L' el resultado de añadir un Q_i^{d-1} por cada pigmento que falte en algún vértice de L , con todas las aristas entre Q_i^{d-1} y L y entre distintos Q_i^{d-1} , y para $u \in Q_i^d$ y $v \notin Q_i^{d-1}$ definir

$$c(uv) = \begin{cases} i & \text{si } v \in L \text{ y } i \notin c(\delta(v)) \\ i + 1 & \text{si } v \in L \text{ y } i \in c(\delta(v)) \\ 0 & \text{si } v \in Q_j^{d-1} \text{ con } j \neq i. \end{cases}$$

Así si L es 1-coloreable, dada f realización buena, podemos extenderla a L' tomando $f(u) = i$, para i , tal que $u \in Q_i^{d-1}$. Recíprocamente, si f es realización buena de L' , si hubiera $v \in L$ con $f(v) = i \notin c(\delta_L(v))$, se tendría que para todo $u \in Q_i^{d-1}$, $f(u) \neq i$, y por lo tanto, f sería realización en Q_i^{d-1} , en particular buena, lo cual contradice que Q_i^{d-1} no sea bien realizable. Así, f es realización en L , y luego buena. Además, es claro, por construcción, que, si L era completo, L' también lo es. \square

El siguiente paso será generalizar en el parámetro k . Para ello, volveremos al caso de dos pigmentos y aprovecharemos la caracterización dada en la sección anterior para el caso completo. Esta nueva forma de construir estos ejemplos permitirá usar menos vértices que en lo hecho anteriormente.

Lema 2.16 *Dados $k, l \geq 1$, si $G = lK_{k+1}$ denota el grafo dado por l copias independientes de K_{k+1} entonces $G \in (k, l) \setminus (k, l - 1)$.*

Dem: Lo probamos por inducción en l . En el caso $l = 1$, $K_{k+1} \in (0, 1) \subseteq (k, 1)$ y no es k -partito, por lo tanto $K_{k+1} \notin (k, 0)$.

Sea ahora $l \geq 2$. Es claro que $G = lK_{k+1} \in (0, l) \subseteq (k, l)$. Supongamos que $G \in (k, l - 1)$ y dada una partición denotemos S la unión de los k independientes y C la unión de los $l - 1$ cliques. Es claro que, para todo $v \in C$, $\overline{N[v]} \in (k, l - 2)$. Además, dado $v \in G$, $\overline{N[v]} = (l - 1)K_{k+1}$; usando la hipótesis inductiva $\overline{N[v]} \notin (k, l - 2)$, por lo tanto $S = V(G)$. Así, en particular $G \in (k, 0)$, lo cual contradice el hecho que K_{k+1} no es k -partito. \square

Recordemos que para L completo, de 2 pigmentos, totalmente factible, una k -coloración se codifica como una partición en a lo más k cliques y k independientes de G_0 o de G_1 , donde un clique en G_0 corresponde a un conjunto de vértices de pigmento 1 que están en el mismo conjunto de la k -coloración. Con esto se tiene lo siguiente.

Observación 2.17 Si Q_i^k es el completo asociado a $G_{i+1} = kK_{k+1}$, para $i \in \mathbb{Z}_2$, Q_i^k es k -coloreable, totalmente factible, no es $(k-1)$ -coloreable, y cualquier k -coloración $\{V^1, \dots, V^k\}$ de Q_i^k es tal que cada V^j contiene un vértice de pigmento i .

Dem: Las primeras dos propiedades se siguen. El que no sea $(k-1)$ -coloreable es porque $(k-1, k-1) \subseteq (k, k-1)$ y del Lema 2.16 $G_{i+1} \notin (k, k-1)$; así como $G_{i+1} \notin [k-1, k-1]$ por la Proposición 2.8 se concluye. Para ver lo último basta notar que dada una partición en cliques e independientes de kK_{k+1} , como $kK_{k+1} \notin (k, k-1)$, deben haber al menos k cliques. \square

La observación anterior es clave para saltar al caso k general, ya que en el caso de bien realizabilidad, es claro que el pigmento de un vértice dado afecta toda su vecindad en ese color, pero para la k -coloreabilidad no pasa necesariamente. Llevando más al límite la estructura de Q es posible asegurar la existencia de un vértice de cierto pigmento en cada conjunto de la partición, lo cual significa que inevitablemente va a afectar la disponibilidad de tal pigmento en el L original.

Proposición 2.18 Para $k \geq 1$ se tiene $COL_{k,2} \leq_p TF-COL_{k,2}$ y $K-COL_{k,2} \leq_p KTF-COL_{k,2}$.

Dem: Sea L de 2 pigmentos, digamos en \mathbb{Z}_2 y sea $k \geq 1$. Para construir L' , agregamos un Q_i^k como en la Observación 2.17 para $i \in \mathbb{Z}_2$ tal que L tiene un vértice v con $i \notin c(\delta(v))$, y todas las aristas entre L y Q_i^k , y entre Q_0^k y Q_1^k si están ambos; estas últimas con pigmento 0. Para $u \in Q_i^k$ y $v \in L$ tomamos

$$c(uv) = \begin{cases} i & \text{si } i \notin c(\delta(v)) \\ i+1 & \text{si } i \in c(\delta(v)). \end{cases}$$

Si L es k -coloreable sean $\{V^1, \dots, V^k\}$ la partición y f la realización asociada. Notemos que Q_i^k se puede k -colorear particionando en los k cliques del G_{i+1} asociado y tomando $f(u) = i$. Como Q_i^k está conectado en pigmento i solo a los vértices con $i \notin c(\delta(v))$, agregando un clique de cada Q_i^k a cada V^j no causa conflictos con el que f sea buena en tal V^j .

Para la recíproca, dada $\{V^1, \dots, V^k\}$ una k -coloración de L' y f la realización asociada, veamos que $V^j \cap V$ y $f|_V$ definen la k -coloración de L . Para esto, notemos que como Q_i^k es totalmente factible, f es realización en Q_i^k ; en particular si denotamos $W_i = V(Q_i^k)$, se sigue que $W_i^j = V^j \cap W_i$ $j \in [k]$ definen una k -coloración de Q_i^k , y por la Observación 2.17 cada W_i^j es no vacío, y aun más contiene un vértice de pigmento i . Luego, supongamos por contradicción que f no es realización en L ; sea $v \in L$ con $f(v) = i \notin c(\delta(v))$. Luego tomando j tal que $v \in V^j$ y $u \in W_i^j \subseteq V^j$ con $f(u) = i$, se sigue que $f(v) = c(uv) = f(u) = i$ con $u, v \in V^j$, que es una contradicción. \square

Con lo hecho hasta el momento, al menos en el caso de dos pigmentos, es posible hacer una reducción que intuitivamente sabíamos que era cierta, que es que a medida que aumentamos el k el problema se vuelve más difícil.

Proposición 2.19 Sea $k \geq 1$. $COL_{k,2} \leq_p COL_{k+1,2}$.

Dem: Sea $L = (V, E, c)$ de 2 pigmentos, digamos en $[2]$, y por la Proposición 2.18 asumamos spg que L es totalmente factible. Consideramos $V' = \{v_1, v_2\}$ y para $i \in [2]$ $E'_i = \{v_i u : u \in V\}$. Sean $E' = \bigcup_{i \in [2]} E'_i$ y $c' : E \cup E' \rightarrow [2]$ dada por, para $u \in L, v \in V \cup V'$

$$c'(uv) = \begin{cases} c(uv) & \text{si } v \in L \\ i & \text{si } v = v_i \in V'. \end{cases}$$

Sea $L' = (V \cup V', E \cup E', c')$. Veamos que L es k -coloreable ssi L' es $(k+1)$ -coloreable. Sea $\{V^1, \dots, V^k\}$ coloración de L y f realización asociada. Basta extender f tomando $f(v_i) = i$ y considerar $\{V^1, \dots, V^k, V'\}$. Como V' es independiente en $G(L')$ se sigue directamente que f es buena en V' .

Para la recíproca, sean $\{V^1, \dots, V^{k+1}\}$ coloración y f realización asociada. Como $c(\delta(v_i)) = \{i\}$ se sigue que $f(v_i) = i$. Denotemos $V_i = f^{-1}(\{i\})$ y para $i \in [2], j \in [k+1], V_i^j = V_i \cap V^j$.

Afirmación Para $i \in [2]$ existe $j(i) \in [k+1]$ tal que $V_i^{j(i)} = \{i\}$

En efecto, dado i , sea $j(i) = j$ tal que $v_i \in V_i^j$ y supongamos que existe $u \in V_i^j$ con $u \neq v_i$. Como $f(u) = i, u \in V$. Luego $c(uv_i) = i = f(u) = f(v_i)$ lo que contradice que $u, v_i \in V_i^j \subseteq V^j$.

Con esto, para $i \in [2]$ y $j \in [k]$ definamos

$$W_i^j = \begin{cases} V_i^j & \text{si } j < j(i) \\ V_i^{j+1} & \text{si } j \geq j(i), \end{cases}$$

y naturalmente definamos $W^j = \bigcup_{i \in [2]} W_i^j$. Veamos que W^1, \dots, W^k definen una coloración de L , asociados a la realización $f|_V$. En efecto, por la afirmación, es claro que W^1, \dots, W^k particionan V . Veamos que f es buena en W^j . Sean $u, v \in W^j$ y supongamos que $uv \in E$ y que $f(u) = f(v) = i$. Luego, por definición $u, v \in W_i^j$. Si $j < j(i)$ tenemos $u, v \in W_i^j = V_i^j \subseteq V^j$; en otro caso $u, v \in W_i^j = V_i^{j+1} \subseteq V^{j+1}$. En ambos casos como $\{V^1, \dots, V^{k+1}\}$ es coloración se concluye que $c(uv) \neq i$. \square

Ahora, para finalmente probar el caso general, con k, d libres, será necesario dar una caracterización más amigable de lo que significa ser k -coloreable.

Proposición 2.20 L es k -coloreable ssi existe una realización f tal que para todo $i \in c(E)$, G_i^f es k -coloreable.

Dem: Para ver que es condición suficiente, sea $\{V^1, \dots, V^k\}$ la partición y sea f la realización asociada, es decir, que para cada $j \in [k]$ f es buena en V^j ; sea $V_i^j = V_i \cap V^j$. Se sigue que V_i^j es un independiente en G_i^f : dados $u, v \in V_i^j \subseteq V_i$, por definición $f(u) = f(v) = i$; luego si $uv \in E_i(V_i^j)$ en particular $c(uv) = i$ y como $u, v \in V^j$ se contradice que f es buena en V^j .

Para ver que es condición necesaria, sea f la realización asociada y para cada V_i sea $\{V_i^1, \dots, V_i^k\}$ la partición en independientes de G_i^f . Luego, veamos que f es buena en $V^j =$

$\bigcup_{i \in c(E)} V_i^j$. Sean $u, v \in V^j$; si $f(u) \neq f(v)$, entonces es directo, así que, asumamos que $f(u) = f(v) = i$; luego $u, v \in V_i^j$ y se sigue que $uv \notin E_i(V_i^j)$, ya que V_i^j era independiente en G_i^f ; en particular si $uv \in E$, se cumple que $c(uv) \neq i$. \square

Lo anterior nos permite expresar $\chi(L)$ en términos del número cromático clásico en grafos.

Corolario 2.21 $\chi(L) = \min_f \max_{i \in c(E)} \chi(G_i^f)$.

Dem: Para todo k , $\min_f \max_{i \in c(E)} \chi(G_i^f) \leq k$ ssi existe f tal que para todo i $\chi(G_i^f) \leq k$ ssi $\chi(L) \leq k$. \square

Lema 2.22 *Dados $k, d \geq 1$, existe $Q^{k,d}$ de d pigmentos, completo, totalmente factible, que no es k -coloreable.*

Dem: Sea $k \geq 1$. Haremos inducción en d . Para el caso base, $d = 1$, basta considerar $Q^{k,1} = K_{k+1}$. Para el paso inductivo, sea $d \geq 2$. Sean L^1, \dots, L^{k+1} $k+1$ copias de $Q^{k,d-1}$ con pigmentos en $[d-1]$. $Q^{k,d}$ consiste en conectar completamente los L^j en pigmento d . Supongamos por contradicción que $Q^{k,d}$ es k -coloreable; sea f la realización con G_i^f k -coloreables. Luego para cada $j \in [k+1]$ existe $u_j \in L^j$ con $f(u_j) = d$; en otro caso, f sería realización en L^j asociada a una k -coloración de L^j , lo cual contradice que $Q^{k,d-1}$ no es k -coloreable. Pero con esto, u_1, \dots, u_{k+1} forman K_{k+1} monocromático de pigmento d , que es una contradicción con que G_d^f sea k -coloreable. \square

Teorema 2.23 *Dados $k, d \geq 1$, $COL_{k,d} \leq_p TF-COL_{k,d}$ y $K-COL_{k,d} \leq_p KTF-COL_{k,d}$.*

Dem: Sea L con d pigmentos, s.p.g. en \mathbb{Z}_d , y $k \geq 1$. Para $i \in \mathbb{Z}_d$ tal que hay un vértice $v \in V$ cumpliendo $i \notin c(\delta_L(v))$, consideramos k copias L_i^1, \dots, L_i^k de $Q^{k,d-1}$ (como en el Lema 2.22) en pigmentos $\mathbb{Z}_d \setminus \{i\}$ y sea L_i el resultado de conectar completamente los L_i^j en pigmento i . Construiremos L' de manera similar a como lo hicimos en la demostración de la Proposición 2.15. Dados L y los L_i descritos, agregamos las aristas de pigmento 1 entre los distintos L_i . Adicionalmente, agregamos aristas entre L_i y L donde para $v \in L$ y $u \in L_i$

$$c(uv) = \begin{cases} i & \text{si } i \notin c(\delta(v)) \\ i+1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Veamos que L es k -coloreable ssi L' lo es. Dada $\{V^1, \dots, V^k\}$ k -coloración de L y f realización asociada, basta extender f pintando cada L_i de pigmento i y añadiendo cada L_i^j a V^j . Como f es realización en L , se sigue que $f(v) \neq i$, para $i \notin c(\delta_L(v))$, con lo cual se verifica, fácilmente, que lo descrito corresponde a una k -coloración de L' .

Recíprocamente, dada f una realización de L' tal que los $G_i'^f$ asociados son k -coloreables, supongamos que existe $v \in L$ con $f(v) = i \notin c(\delta_L(v))$. Como los L_i^j no son k -coloreables,

existen $u_j \in L_i^j$ con $f(u_j) = i$. Pero con esto v, u_1, \dots, u_k forman un K_{k+1} monocromático de pigmento i ; en particular G_i^f tiene un K_{k+1} , que es una contradicción. \square

Las ideas de la demostración anterior son las mismas que en las proposiciones anteriores en esta sección; solo fue necesario agregar una caracterización de ser k -coloreable en términos de las nociones clásicas para limpiar el argumento. Con esto ya probado, podemos extender la reducción de la Proposición 2.19 a d general.

Corolario 2.24 *Sea $k \geq 1$ y $d \geq 1$. $COL_{k,d} \leq_p COL_{k+1,d}$.*

Dem: La demostración es idéntica a la de la Proposición 2.19 usando d vértices auxiliares y asumiendo L s.p.g. totalmente factible por el Teorema 2.23. \square

2.3. 2-Coloreabilidad de Grafos Pigmentados

En teoría clásica de grafos, un grafo es 2-coloreable ssi no tiene ciclos de largo impar. Para obtener una caracterización de este estilo para grafos pigmentados, hace falta incluir una realización. En particular, hablaremos de ciclos monocromáticos de largo impar.

Definición 2.25 *Dado L un grafo pigmentado y f una realización, un ciclo monocromático de (L, f) es un ciclo C en $G(L)$ tal que $c(E(C)) = f(V(C)) = \{i\}$ para algún $i \in c(E)$.*

Con esta definición, se sigue directamente de la Proposición 2.20 que podemos caracterizar la 2-coloreabilidad con la existencia de una realización tal que no tenga ciclos monocromáticos impares.

Observación 2.26 *L es 2-coloreable ssi existe f una realización tal que (L, f) no tiene ciclos monocromáticos de largo impar.*

Denotamos como antes, dada una realización f de L , $V_i = f^{-1}(\{i\})$ y $E_i(S) = E_i \cap E(S)$; en particular, sea $G_i^f = (V_i, E_i(V_i))$. Probaremos que la 2-coloreabilidad es NP -completo incluso para dos pigmentos, explotando el hecho que puedan aparecer ciclos monocromáticos para cualquier realización. Esencialmente la idea será la misma que en la demostración de que 2SAT se reduce a bien realizabilidad con dos pigmentos.

Proposición 2.27 *$COL_{2,2}$ es NP -completo.*

Dem: Sabemos que está en NP . Para ver que es NP -difícil construimos una reducción desde 3-SAT. Primero asumimos s.p.g. que los literales de cada cláusula están asociados a variables distintas; si aparece una cláusula de la forma $x \vee \bar{x} \vee p$ sabemos que se satisface trivialmente. Además asumimos que cada variable aparece en alguna cláusula; de lo contrario no influye en la satisfacibilidad de la fórmula.

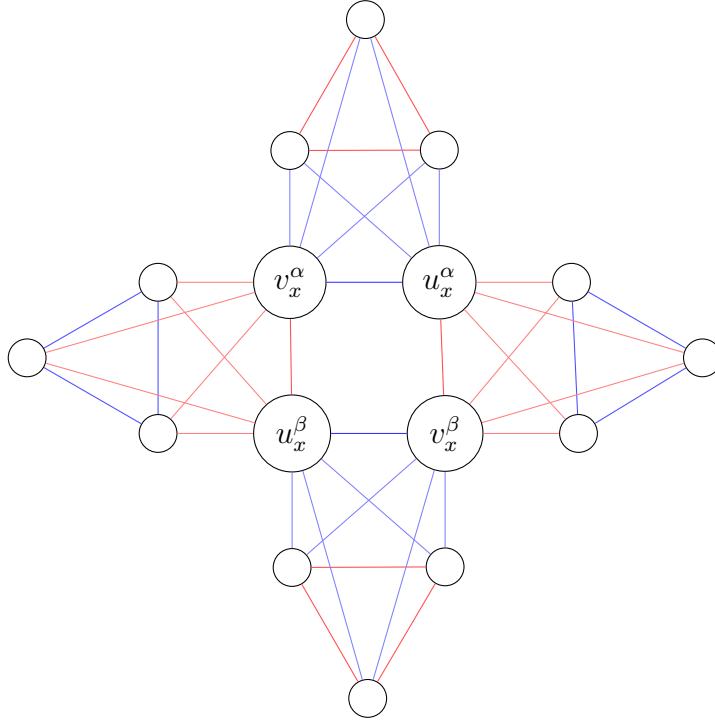


Figura 2.4: Gadget para una variable x que aparece en dos cláusulas, α, β ; el azul representa el pigmento 0 y el rojo el 1.

Para hacer la reducción, dada una fórmula φ y una variable x , si k_x es el número de cláusulas en las que aparece x o \bar{x} , construimos un ciclo C_x con pigmentos alternados de largo $2k_x$, denotando $C_x = \{u_x^c, v_x^c : c \in \mathcal{C}_x\}$, donde \mathcal{C} es el conjunto de cláusulas (con algún orden) y $\mathcal{C}_x = \{c \in \mathcal{C} : x \in c \text{ ó } \bar{x} \in c\}$; además, por cada arista roja e de este ciclo, construimos un triángulo de aristas azules y lo conectamos completamente a cada extremo de e con aristas rojas; análogo para las aristas azules, cambiando roles en los pigmentos. En la Figura 2.4 damos un ejemplo cuando $k_x = 2$, $\mathcal{C}_x = \{\alpha, \beta\}$. Adicionalmente, para una cláusula $\alpha = p \vee q \vee r$, con p, q, r literales y x, y, z las variables asociadas, respectivamente, si denotamos w_x a u_x^α , si $p = x$, o a v_x^α , si $p = \bar{x}$, y análogamente, w_y, w_z , agregamos aristas azules entre los vértices respectivos a cada literal, i.e. $w_x w_y, w_x w_z, w_y w_z$. Denotemos L_φ el grafo pigmentado recién descrito asociado a φ .

Veamos que φ es satisfacible ssi L_φ es 2-coloreable. Dada una asignación de verdad ϕ pintamos cada triángulo asociado a una arista de pigmento i con pigmento i , y pintamos los C_x alternadamente, de manera que $\forall \alpha \in \mathcal{C}_x f(u_x^\alpha) = \phi(x) = 1 - f(v_x^\alpha)$. En la Figura 2.5 damos la realización asociada al ejemplo de la Figura 2.4. Para ver que L_φ es 2-coloreable, por la Proposición 2.26 basta chequear que los G_i^f no tienen ciclos impares (i.e. (L_φ, f) no tiene ciclos impares monocromáticos). Es fácil ver que los vértices de cada triángulo T_e asociado a una arista e de pigmento i de uno de los ciclos C_x , tiene grado 1 en G_i^f . Luego, sin pérdida de generalidad, los podemos ignorar en el análisis (ya que no participan de ningún ciclo monocromático); llamemos L' al resultado. Se sigue que en L' , cada vértice rojo v cumple $d_1^{L'}(v) = 0$, y con esto G_1^{f} es independiente; más aun, cada vértice w de pigmento 0 cumple que $d_0^{L'}(w) \leq 2$, por lo tanto, G_0^{f} es unión disjunta de ciclos y caminos; por ende cada vértice está en a lo más un ciclo. Luego si G_0^f tuviera un ciclo, se sigue que debe ser de la forma $w_x w_y w_z$, asociado a una cierta cláusula $\alpha = p \vee q \vee r$, donde p, q, r están asociados a las variables x, y, z , respectivamente. Por la definición de f se sigue que esto produce una

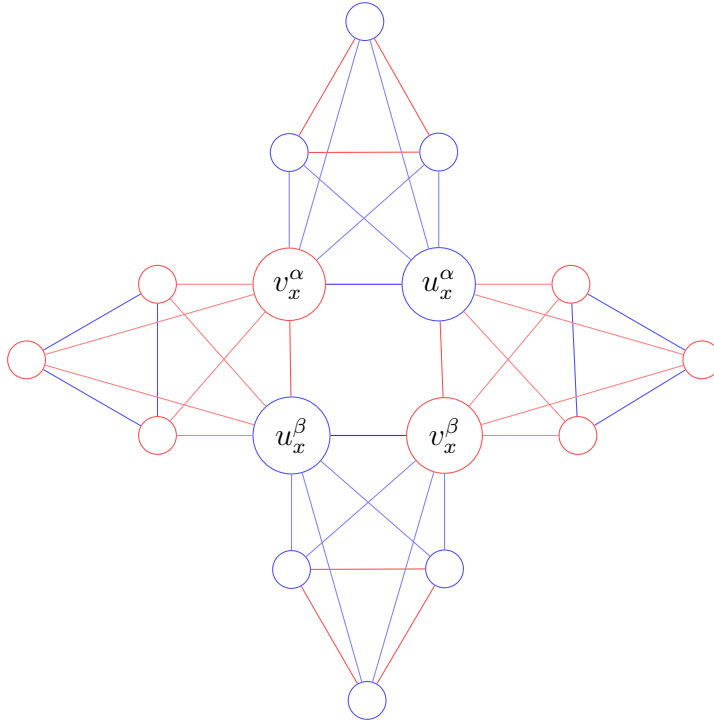


Figura 2.5: Realización de un gadget para una variable x cuando se ha asignado como falsa, i.e. $\phi(x) = 0$; el 0 representa el azul y el 1 el rojo.

contradicción con que ϕ satisfaga la cláusula α .

Para ver la recíproca, sea f una realización de L_φ tal que (L_φ, f) no tiene ciclos impares monocromáticos.

Afirmación *Los vértices de C_x alternan pigmentos.*

Supongamos que no, y sean u, v adyacentes en C_x con $f(u) = f(v)$. Veamos primero que esto implica que existen r, s adyacentes en C_x con $f(r) = f(s) = c(rs) =: i$. En efecto, sea $P = v_1 v_2 \dots v_k$ el camino maximal C_x tal que $f(v_i) = c(v_i v_{i+1}) \neq f(v_{i+1})$. Como $f(u) = f(v)$ y el ciclo alterna, se sigue que P no usa todos los vértices de C_x . Para $s \notin P$ vecino de v_k , como C_x alterna se sigue que $f(v_k) = c(v_k s)$. Como P es maximal, en particular $f(s) = f(v_k) = c(sv_k)$.

Si denotamos T el triángulo asociado a rs , como todas sus aristas son de pigmento $1 - i$, T tiene al menos un vértice w de pigmento i . Pero con esto wrs es un triángulo monocromático de pigmento i , lo cual contradice la hipótesis.

Demostrada la afirmación, definimos $\phi(x) = f(u_x^\alpha)$, para algún $\alpha \in \mathcal{C}_x$; por la afirmación, se sigue que $\forall \alpha \in \mathcal{C}_x, f(u_x^\alpha) = \phi(x) = 1 - f(v_x^\alpha)$. En particular, para cada cláusula $\alpha \in \mathcal{C}$, como el ciclo asociado tiene al menos un vértice w rojo (sino forma un triángulo monocromático azul), la variable asociada a w satisface α . Así ϕ hace a φ verdadera. □

Claramente, lo anterior nos permite extender la NP -completitud en cuanto a la k -coloreabilidad, para $k \geq 2$ libre, en el caso de dos pigmentos.

Corolario 2.28 $TF-COL_{k,2}$ es NP -completo para todo $k \geq 2$.

Dem: Usando inductivamente la Proposición 2.19 podemos probar $COL_{2,2} \leq_p COL_{k,2}$ para $k \geq 2$. Para pasar al caso totalmente factible basta aplicar la reducción de la Proposición 2.18. Así, usando que $COL_{2,2}$ es NP -completo se concluye. \square

En la sección del caso completo con dos pigmentos, vimos que el problema de $K-COL_{2,2}$ es polinomial. Sería interesante que tal complejidad se preservara al caso de tres pigmentos. Sin embargo, no es muy difícil darse cuenta que no sucede de esta manera; es posible reducirse del caso general con dos pigmentos al caso completo con tres pigmentos. Aun más, en lo que sigue veremos una reducción más general al respecto.

Proposición 2.29 Para $k, d \geq 1$ $COL_{k,d} \leq_p K-COL_{k,d+1}$.

Dem: Sea L con d pigmentos, s.p.g. en $\mathbb{Z}_{d+1} \setminus \{d\}$ y $k \geq 1$. Consideramos $L' = Q_d^k$ como en la Observación 2.17, i.e. L' es un completo con pigmentos $\{d, d+1\} \subseteq \mathbb{Z}_{d+1}$ tal que $G_{d+1}(L') := (V(L'), E_{d+1}(L'))$ es un kK_{k+1} . Consideramos L'' como $L + L'$ completando con aristas de pigmento d . Veamos que L es k -coloreable ssi L'' lo es.

Sea $\{V^1, \dots, V^k\}$ una coloración de L asociada a una realización f . Basta agregar un clique de $G_{d+1}(L')$ a cada V^j y extender f tomando $f(u) = d$, para $u \in V'$. Como f es realización en L , se sigue que para $v \in V$, $f(v) \neq d$. Con esto, es fácil chequear que la extensión propuesta corresponde a una k -coloración de L'' .

Recíprocamente, sea $\{V^1, \dots, V^k\}$ una k -coloración de L'' y f la realización asociada. Veamos que $\{V^1 \cap V, \dots, V^k \cap V\}$ y $f|_V$ definen una k -coloración de L . Para esto, basta probar que f es una realización de L . Supongamos que no lo es y sea $v \in V$, con $f(v) \notin c(\delta_L(v))$. Por construcción, $f(v) = d$, pues f es realización de L'' . Sea $j \in [k]$ tal que $v \in V^j$. Por la Observación 2.17, como $\{V^1 \cap V', \dots, V^k \cap V'\}$ es k -coloración de L' asociada a $f|_{V'}$, se sigue que existe $u \in V^j \cap V'$ con $f(u) = d$. Esto contradice que $u, v \in V^j$ y $f(u) = f(v) = c(uv) = d$. \square

Corolario 2.30 Para $k \geq 2, d \geq 3$, $K-COL_{k,d}$ es NP -completo.

Dem: Basta aplicar la reducción de la Proposición 2.29 al Corolario 2.28. \square

A continuación veremos otra noción de ser 2-coloreable, que es un poco más restrictiva, y que intuitivamente esta justo en medio de la definición usual (bipartito) y la noción dada en este contexto. Luego veremos que esta propiedad puede ser verificada en tiempo polinomial.

Definición 2.31 Para L como antes diremos que $S \subseteq V$ es un cover independiente si existe $f : S \rightarrow c(E)$ tal que

- $\forall s \in S \quad f(s) \in c(\delta(s))$ (diremos f es realización parcial).
- $\forall e \in E \quad |\{x \in e : f(x) = c(e)\}| = 1$

Observación 2.32 *Por la segunda propiedad, si S es un cover independiente de L en particular es un vertex cover en (V, E) ; se sigue que $V \setminus S$ es un independiente de (V, E) .*

Observación 2.33 *La realización parcial asociada a un cover independiente S es buena en $L[S]$.*

Intuitivamente, la existencia de un cover independiente es equivalente a que exista una partición en un independiente y un conjunto bien realizable. Bajo este punto de vista, un bipartito es el que se puede particionar en dos independientes y un 2-coloreable el que se particiona en dos conjuntos bien realizables.

Proposición 2.34 *Se puede determinar si un grafo pigmentado L tiene un cover independiente en tiempo polinomial.*

Dem: Construimos una reducción a 2SAT. Por cada arista uv consideramos las variables x_{uv}^u, x_{uv}^v y agregamos las siguientes cláusulas:

- Para cada arista $uv \in E$ consideramos $C_{uv} = (\overline{x_{uv}^u} \vee \overline{x_{uv}^v}) \wedge (x_{uv}^u \vee x_{uv}^v)$.
- Para cada par de aristas e, f con $e \cap f = \{u\}$ agregamos

$$C_{ef} = \begin{cases} (\overline{x_e^u} \vee x_f^u) \wedge (x_e^u \vee \overline{x_f^u}) & \text{si } c(e) = c(f) \\ \overline{x_e^u} \vee \overline{x_f^u} & \text{si } c(e) \neq c(f). \end{cases}$$

Con esto en cuenta consideramos la fórmula booleana

$$\varphi_L = \bigwedge_{e \in E} C_e \wedge \bigwedge_{\substack{\{e, f\} \in \binom{E}{2} \\ e \cap f \neq \emptyset}} C_{ef}.$$

Veamos que L tiene un cover independiente ssi φ_L es satisficible. Por un lado, dado S un cover independiente y f la realización parcial asociada, consideramos $x_{uv}^u = \mathbb{1}_{\{u \in S, f(u) = c(uv)\}}$. Luego para ver que C_{uv} se satisface, notamos que por la segunda propiedad de cover independiente, spg $f(u) = c(uv)$ y o bien $v \notin S$ o $f(v) \neq c(uv)$. En ambos casos $x_{uv}^u = 1$ y $x_{uv}^v = 0$. Por otro lado para ver que C_{ef} se satisface con $e \cap f = \{u\}$, si $u \notin S$ es trivial, y en otro caso si $c(e) = c(f)$ se sigue que $f(u) = c(e) \iff f(u) = c(f)$ que es justamente que se satisface C_{ef} , y si $c(e) \neq c(f)$ no puede pasar que $c(e) = f(u)$ y $c(f) = f(u)$ simultáneamente, que es que se satisface C_{ef} .

Para ver la recíproca, sea x una asignación que hace φ_L verdadera. Consideramos $S = \{u \in V : \exists v \in V \ x_{uv}^u = 1\}$. Como C_{ef} se satisfacen, si e, f inciden en $u \in S$ en el caso que $c(e) \neq c(f)$ entonces no puede pasar que $x_e^u = x_f^u = 1$. Luego para $u \in S$ existe un único pigmento i_u tal que hay una arista $e, c(e) = i_u$ incidente en u . Con esto, podemos definir $f(u) = i_u$; se sigue que f es una realización parcial.

Veamos que f hace que S sea un cover independiente; para esto probaremos que $x_e^u = 1 \iff u \in S, f(u) = c(e)$. Que sea condición suficiente es directo de la definición. Para ver que es necesario, sea e' la arista tal que $c(e') = f(u), x_{e'}^u = 1$. Luego como $c(e) = c(e')$ y $C_{ee'}$ se

satisface, en particular $1 = \overline{x_e^u} \vee x_e^u = 0 \vee x_e^u = x_e^u$.

Finalmente, dado $uv \in E$ supongamos que $|\{x \in uv : f(x) = c(uv)\}| \neq 1$. Si es cero en particular $x_{uv}^u = x_{uv}^v = 0$ y luego $x_{uv}^u \vee x_{uv}^v = 0$ lo cual contradice que $C_{uv} = 1$. Por otro lado si es 2, $x_{uv}^u = x_{uv}^v = 1$ y luego $\overline{x_{uv}^u} \vee \overline{x_{uv}^v} = 0$ que lleva a la misma contradicción. \square

2.4. k-Coloreabilidad para lista-realizaciones

En esta sección nos centraremos en extender los resultados de bien realizabilidad para lista-realizaciones, dados en el capítulo anterior, al contexto de k -coloreabilidad. En primer lugar es necesario dar la definición del problema.

Definición 2.35 Dado $k \geq 1$, L un grafo pigmentado y $\ell = (l_v)_{v \in V}$ un arreglo de listas diremos que (L, ℓ) es k -coloreable, si existe una lista-realización f y una partición $\{V^1, \dots, V^k\}$ de V tales que f es buena en cada V^j , $j \in [k]$. Denotamos $COL_{k,d}^{lista}$ al problema de decisión asociado cuando L tiene d pigmentos.

Lo que naturalmente sigue, es re-demostrar que agregar pigmentos no disponibles para un cierto vértice a su determinada lista, vuelve de hecho el problema más fácil, y por ello podemos asumir que esto no pasa. Esto es una generalización de la Observación 1.33.

Lema 2.36 Dado (L, ℓ) podemos construir en tiempo polinomial un (L', ℓ') tal que $\forall v \in V \quad l'_v \subseteq c(\delta_{L'}(v))$ de manera que para todo $k \geq 1$, (L, ℓ) es k -coloreable ssi (L', ℓ') lo es. Aun más, L' es subgrafo pigmentado inducido de L , i.e. $L' = L[V(L')]$.

Dem: Basta probar que dado $v \in V$ con $i \in l_v \setminus c(\delta(v))$, (L, ℓ) es k -coloreable ssi $(L-v, (l_u)_{u \neq v})$ es k -coloreable. Por un lado, dada $\{V^1, \dots, V^k\}$ una k -coloración de (L, ℓ) y f una lista-realización asociada, es claro que f_{L-v} es lista realización de $(L-v, (l_u)_{u \neq v})$ y es buena en cada $V^{j'} := V^j - v$, de donde $\{V^{1'}, \dots, V^{k'}\}$ es k -coloración. Recíprocamente, si $\{V^1, \dots, V^k\}$ es k -coloración de $(L-v, (l_u)_{u \neq v})$ y f es una lista-realización asociada, tomando $f(v) = i$, $V^{1'} = V^1 + v$ y $V^{j'} = V^j$ para $j > 1$, se sigue que f es lista realización y $f(v) = i \neq c(e) \in c(\delta(v))$ para todo $e \in E$ con $v \in e$, por lo cual esta extensión es buena en cada $V^{j'}$. \square

Para abordar el caso bipartito, será útil tener una estructura con realización buena única, así como lo teníamos para tres pigmentos en el Ejemplo 1.21, pero con d pigmentos.

Lema 2.37 Dado $d \geq 2$ sea B^d el bipartito con partes $A' = \{u_i : i \in \mathbb{Z}_d\}$, $B' = \{v_i : i \in \mathbb{Z}_d\}$, aristas $\{u_i v_{i+1} : i \in \mathbb{Z}_d\} \cup \{v_i u_{i+1} : i \in \mathbb{Z}_d\} \cup \{u_i v_i : i \in \mathbb{Z}_d\}$ y pigmentos $c(u_i v_{i+1}) = c(v_i u_{i+1}) = c(u_i v_i) = i + 1$. Entonces B^d es bien realizable, y tiene como única realización buena la dada por $f(u_i) = f(v_i) = i$.

Dem: Es directo chequear que la realización propuesta es buena. Para ver que es única, notemos primero que para cada $i \in \mathbb{Z}_d$, $c(\delta(v_i)) = c(\delta(u_i)) = \{i, i + 1\}$. Luego, supongamos

que f' es otra realización buena, y asumamos s.p.g. que $f'(u_i) = i + 1$ para algún $i \in \mathbb{Z}_d$. En particular $f'(v_i) = i$, ya que $c(u_i v_i) = i + 1$. Consideremos el camino $u_i v_{i+1} u_{i+2} \dots u_{i-1} v_i =: w_1 \dots w_k$. Notemos que $f'(w_1) = c(w_1 w_2)$ y $c(w_{k-1} w_k) = f(w_k)$. Luego, sea $j \in [k-1]$ el último índice tal que $f'(w_j) = c(w_j w_{j+1})$. Si $j = k-1$ se cumple $f(w_{k-1}) = c(w_{k-1} w_k) = f'(w_k)$. Si no, $f'(w_{j+1}) \neq c(w_{j+1} w_{j+2})$ de donde $f'(w_{j+1}) = c(w_j w_{j+1}) = f'(w_j)$. En ambos casos se contradice que f' es buena. \square

Lo anterior de hecho, resulta ser una generalización del Ejemplo 1.21, i.e. B^3 corresponde al bipartito del capítulo anterior. La siguiente demostración congrega las ideas usadas en la reducción al caso totalmente factible y las de la reducción del caso bipartito al bipartito completo, la primera expuesta a lo largo de toda la sección 2.2 y la segunda en la Proposición 1.23.

Teorema 2.38 *Dados $k \geq 1, d \geq 2$ $COL_{k,d}, B-COL_{k,d}, K-COL_{k,d}$ son equivalentes en complejidad a $COL_{k,d}^{lista}, B-COL_{k,d}^{lista}, K-COL_{k,d}^{lista}$ respectivamente².*

Dem: Notemos que ver que $COL_{k,d} \leq_p COL_{k,d}^{lista}$ es trivial ya que basta tomar las listas $l_v = c(\delta(v))$, y análogo para los casos bipartito y completo. Para la recíproca, lo haremos primero para el caso general y el caso completo. Sea $k \geq 1$ y sea (L, ℓ) con d pigmentos, digamos en \mathbb{Z}_d . Por el Lema 2.36, asumamos s.p.g. que para todo $v \in V$, $l_v \subseteq c(\delta(v))$. Dado $i \in \mathbb{Z}_d$ tomamos L_i^1, \dots, L_i^k k copias de $Q^{k,d-1}$ como en la Proposición 2.22, con pigmentos en $\mathbb{Z}_d \setminus \{i\}$, y L_i el resultado de conectarlos entre ellos en pigmento i ; en particular L_i es completo y totalmente factible. Luego, sea L' el grafo pigmentado que consiste en conectar los L_i entre ellos en pigmento 0 . Finalmente construimos L'' agregando las aristas entre L y L' , donde, para $v \in L, u \in L_i$,

$$c(uv) = \begin{cases} i & \text{si } i \notin l_v \\ i + 1 & \text{si } i \in l_v \end{cases}$$

Notemos en particular que si L era completo, L'' también lo es. Veamos que (L, ℓ) es k -coloreable ssi L'' es k -coloreable.

Sea $\{V^1, \dots, V^k\}$ una k -coloración de (L, ℓ) y sea f una lista-realización asociada. Extendemos f tomando $f(u) = i$ para $u \in L_i$ y tomamos $V^{j'} = V^j \cup \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_d} V(L_i^j)$. Como los L_i son totalmente factibles y se cumple $l_v \subseteq c(\delta_L(v))$, se sigue que esta extensión de f es realización de L'' . Resta ver que es buena en cada $V^{j'}$. Dados $u, v \in V^{j'}$, si $u, v \in L$ es directo; si $v \in L, u \in L'$ tomando i con $u \in L_i$, si $i \in l_v$ $c(uv) \neq i = f(u)$ y si $i \notin l_v$ $f(v) \neq i = c(uv)$; si $u, v \in L'$, digamos $u \in L_i, v \in L_h$, si $i = h$ $f(u) = f(v) = i \neq c(uv)$ y si $i \neq h$ $f(u) = i \neq h = f(v)$.

Recíprocamente, sea $\{V^1, \dots, V^k\}$ una k -coloración de L'' y f realización asociada. Veamos que $f|_V$ es lista-realización de L . Supongamos por contradicción que existe $v \in V$ con $f(v) = i \notin l_v$. Como L_i es totalmente factible, $f|_{L_i}$ es realización de L_i , y por lo tanto para cada $j \in [k]$ existe $u_j \in L_i^j$ con $f(u_j) = i$; en otro caso $f|_{L_i^j}$ sería realización y por lo tanto $V^j \cap V(L_i^j)$ sería una k -coloración de L_i^j , lo cual contradice que $Q^{k,d-1}$ no es k -coloreable. Así, $\{u_1, \dots, u_k, v\}$ forman un K_{k+1} en $G_i^{f'}$, lo cual contradice que f esté asociada a una k -coloración de L'' . Con lo anterior, $\{V^j \cap V : j \in [k]\}$ define una k -coloración de (L, ℓ)

²El prefijo B - refiere al caso que $G(L)$ es bipartito.

asociada a la lista-realización $f|_V$.

Veamos ahora el caso bipartito; nuevamente asumamos s.p.g. que para todo $v \in V$, $l_v \subseteq c(\delta(v))$. Notemos además que en el caso $k \geq 2$ el resultado es trivial dado que tanto $COL_{k,d}$ como $COL_{k,d}^{lista}$ son polinomiales; basta chequear que existe alguna realización, y de ser así, $A, B, \emptyset, \dots, \emptyset$ forman una k -coloración de L (resp. (L, ℓ)) para A, B las partes del bipartito L . Resta ver el caso $k = 1$. Dado (L, ℓ) con $d \geq 2$ pigmentos, consideramos L' el resultado de añadir un B^d como en el Lema 2.37, todas las aristas entre A y B' y entre A' y B , y extender c , tomando para $u \in A, i \in \mathbb{Z}_d$

$$c(uv_i) = \begin{cases} i & \text{si } i \notin l_u \\ i + 1 & \text{si } i \in l_u \end{cases}$$

y análogamente, para $v \in B, i \in \mathbb{Z}_d$

$$c(u_iv) = \begin{cases} i & \text{si } i \notin l_v \\ i + 1 & \text{si } i \in l_v \end{cases}$$

Luego, si (L, ℓ) es 1-coloreable, dada f lista realización buena, como $l_v \subseteq c(\delta(v))$, tomando $f(v_i) = f(u_i) = i$ es realización de L' . Para ver que es buena, basta chequear que es buena en las aristas entre L y la copia de B^d . Se tiene ya que si $u \in A$, dado v_i , si $i \in l_u$ $c(uv_i) \neq i = f(v_i)$ y en otro caso $c(uv_i) = i \notin l_u$ de donde $f(u) \neq i$; análogo para $v \in B$ y $c(u_iv)$.

Recíprocamente, dado f una realización buena de L' , veamos que $f|_V$ es lista-realización de L . Supongamos que existe $u \in A$ con $f(u) = i \notin l_u$. Como B^d es conservativo en L' , se sigue que $f|_{B^d}$ es realización, y por el Lema 2.37 $f(v_i) = i$, pero $f(u) = c(uv_i) = f(v_i) = i$ que es una contradicción. Análogamente, si suponemos que hay un $v \in B$ con $f(v) = i \notin l_v$ se sigue que $f(v) = f(u_i) = c(u_iv) = i$. \square

Capítulo 3

Resultados tipo Brooks

In the last chapter we defined $\chi(L)$ the chromatic number, as the minimum k such that the given pigmented graph L is k -coloreable. The goal of this chapter is to provide a generalization of Brooks' theorem for pigmented graphs. In the first section we give some polynomially computable bounds based on the degree of the graph, for the case of complete graphs with two pigments. Then, in the second section, we generalize this idea and also bring definitions from usual graphs, such as degeneration number, clique number and maximum degree, and relate them to the chromatic number. Finally we prove the Brooks' theorem for those definitions; at fist, in Theorem 3.19, in terms of the realizations, and later, in Theorem 3.28, determining the structure.

Previamente definimos el número cromático de un grafo pigmentado L como el mínimo k tal que L es k -coloreable. De la teoría clásica, sabemos que $\chi(G)$ está acotado por el grado máximo más uno, y que la cota se alcanza ssi el grafo resulta ser completo o un ciclo impar. El objetivo de este capítulo sera obtener un resultado de este estilo para grafos pigmentados.

3.1. Caso completo

En esta sección asumiremos que L es completo (i.e. $E = \binom{V}{2}$). En particular, en lo que sigue nos centramos en el caso que L tiene dos pigmentos usando la notación y los resultados obtenidos en el capítulo anterior para este caso; en particular la caracterización de k -coloreabilidad como una partición en k cliques e independientes en el grafo asociado G_1 . Naturalmente, una forma de acotar fácilmente el número cromático es el número de vértices n . No obstante, podemos hacer algo mejor sin un mayor esfuerzo.

Proposición 3.1 *Para L completo de dos pigmentos*

$$\chi(L) \leq \max \left\{ u(G_1), i(G_1), \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \right\}.$$

Dem: Sea $k = \max \{u(G_1), i(G_1), \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$. Como $k \geq \max \{u(G_1), i(G_1)\}$ se sigue que L es

k -coloreable ssi $G_1 \in [k, k]$ ssi $G_1 - U(G_1) - I(G_1) \in (k - u(G_1), k - i(G_1))$. Pero como $k \geq \frac{n}{2}$,

$$2k - u(G_1) - i(G_1) \geq n - u(G_1) - i(G_1) = |G_1 - U(G_1) - I(G_1)|.$$

Con esto, basta tomar cada vértice que no es aislado ni universal en G_1 como un clique o un independiente según convenga y se sigue que quedan a lo más $2k - u(G_1) - i(G_1)$ componentes S_i, C_j , y por lo tanto L es k -coloreable. Luego $\chi(L) \leq k$. \square

Podemos obtener una mejor cota utilizando argumentos glotones similares al resultado anterior y un poco más de combinatoria.

Lema 3.2 *Dado un grafo G con al menos 5 vértices, si G no es un clique ni un independiente existen $u, v, x, y \in V$ distintos, tales que $uv \in E, xy \notin E$.*

Dem: Como no es independiente, sea $uv \in E$. Luego, si $G' = G - u - v$ no es un clique, tiene un par x, y con $xy \notin E$. Por otro lado, si es un clique, como G no es clique, existe $w \in V(G')$ tal que $spg\ uv \notin E$. Luego como $|G| \geq 5$, $|G - u - v - w| \geq 2$ así que tomando x, y vértices distintos de u, v, w se sigue que u, w, x, y cumplen la propiedad. \square

Proposición 3.3 *Para L completo de 2 pigmentos*

$$\chi(L) \leq \left\lceil \frac{n - \max\{u(G_1), i(G_1)\}}{4} \right\rceil + 1 + \max\{u(G_1), i(G_1)\}.$$

Dem: Veamos primero el caso $u(G_1) = i(G_1) = 0$. Basados en el Lema 3.2 construiremos un algoritmo greedy, que esencialmente usando estos vértices podrá ubicar a un par en un clique y al otro en un independiente; poniendo así a 4 vértices en un mismo $V_i = S_i \cup C_i$. Sea $k = \lceil \frac{n}{4} \rceil + 1$.

Algorithm 2 Algoritmo greedy para particionar $V(G)$ en k cliques y k independientes

- 1: $H_0 \leftarrow G; C_1, \dots, C_k, S_1, \dots, S_k \leftarrow \emptyset$
 - 2: **for** $i = 1, \dots, k$
 - 3: **if** $|H_{i-1}| = 0$ **break**
 - 4: **if** H_{i-1} es un clique: $C_i \leftarrow H_{i-1}$; **break**
 - 5: **if** H_{i-1} es un independiente: $S_i \leftarrow H_{i-1}$; **break**
 - 6: **if** $|H_{i-1}| < 5$
 - 7: Elegir $u, v \in V(H_{i-1})$
 - 8: $C_i \leftarrow \{u\}; S_i \leftarrow \{v\}$
 - 9: $H_i \leftarrow H_{i-1} \setminus \{u, v\}$; **continue**
 - 10: Elegir $u, v, x, y \in V(H_{i-1})$ tales que $uv \in E(H_{i-1}), xy \notin E(H_{i-1})$
 - 11: $C_i \leftarrow \{u, v\}; S_i \leftarrow \{x, y\}$
 - 12: $G_i \leftarrow G_{i-1} \setminus \{u, v, x, y\}$
 - 13: **return** $C_1, \dots, C_k, S_1, \dots, S_k$.
-

Es claro que cada C_i es un clique y cada S_i es un independiente. Para probar la correctitud del algoritmo basta ver que $|H_k| = 0$. Para esto, notemos que para todo $i \in [k]$ se cumple el invariante dado por:

$$V(G) = \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} S_j \cup V(H_{i-1}).$$

En particular, si i es tal que $|H_{i-1}| \geq 5$,

$$n = \sum_{j=1}^{i-1} |C_j| + \sum_{j=1}^{i-1} |S_j| + |H_{i-1}| = 2(i-1) + 2(i-1) + |H_{i-1}| > 4(i-1) + 4 = 4i.$$

En particular para i^* la primera iteración tal que $|H_{i^*}| < 5$, se cumple que

$$i^* - 1 < \frac{n}{4} \implies i^* \leq \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil.$$

Se sigue que $|H_{i^*}| \leq 2$ y $|H_{i^*+1}| = 0$ que tiene sentido dado que $i^* + 1 \leq k$.

Para el caso general, basta colorear $U(G_1) \cup I(G_1)$ usando $\max\{u(G_1), i(G_1)\}$ colores y $L - U(G_1) - I(G_1)$, usando $\left\lceil \frac{n - \max\{u(G_1), i(G_1)\}}{4} \right\rceil + 1$ colores (recordando que $\max\{u(G_1), i(G_1)\} = u(G_1) + i(G_1)$). \square

La siguiente noción de un parámetro que acote el número cromático $\chi(L)$ surge como una extensión natural al caso de grafos, utilizando el grado máximo; en este caso de los dos grafos asociados a L : G_0, G_1 .

Definición 3.4 Para L completo de dos pigmentos, denotamos el parámetro

$$\Delta_K(L) := \min_{S_0 \cup S_1 = V} \max_{i \in \{0,1\}} \Delta(G_i[S_i]) + u(G_i).$$

Intuitivamente en esta definición, al tomar mínimo sobre la partición S_0, S_1 estamos optimizando el parámetro sobre las realizaciones posibles. Sin embargo el error dado porque no todos los vértices tienen acceso a ambos pigmentos (de hecho quienes tienen no tienen ambos pigmentos son precisamente los vértices de $I(G) \cup U(G)$) se traduce en tener que sumar $u(G_i)$. Veamos que a partir de la cota greedy en grafos $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ podemos levantar este resultado a nuestro caso.

Proposición 3.5 $\chi(L) \leq \Delta_K(L) + 1$.

Dem: Sea $k = \Delta_K(L) + 1$ y sean S_0, S_1 que alcanzan el mínimo. En particular, para $i \in \{0, 1\}$,

$$k - u(G_i) \geq \Delta(G_i[S_i]) + 1 \geq \chi(G_i[S_i]),$$

por lo tanto, $G_i[S_i]$ es $(k - u(G_i))$ -coloreable. En particular si $S = S_1$ y $C = S_0$ tenemos que $G_1[S]$ se puede particionar en $k - u(G_1)$ independientes y $G_1[C]$ en $k - u(G_0) = k - i(G_1)$ cliques, es decir $G_1 \in (k - u(G_1), k - i(G_1))$ y en particular $G_1 - U(G_1) - I(G_1) \in (k -$

$u(G_1), k - i(G_1))$ que es precisamente, por el Lema 2.10 que $G_1 \in [k, k]$, es decir, que L es k -coloreable. \square

Es también interesante encontrar cotas inferiores para $\chi(L)$. Para esto lo natural es buscar un L tal que es $(k + 1)$ -coloreable pero no k -coloreable.

Proposición 3.6 *Para $k \geq 1$ si denotamos por L_{k+1} al grafo pigmentado asociado a $G_1 = (k + 1)K_{k+1}$ entonces $\chi(L_{k+1}) = k + 1$.*

Dem: Es más o menos rápido ver que L_{k+1} es $(k + 1)$ -coloreable, ya que G_1 no tiene vértices universales ni aislados, y directamente $G_1 \in (0, k + 1) \subseteq (k + 1, k + 1)$. Para ver que no es k -coloreable asumamos por contradicción que sí lo es. En particular sea S, C partición de G_1 tal que S se particiona en a lo más k independientes y C en a lo más k cliques. En particular, como K_{k+1} no es k -coloreable, $K_{k+1} \not\subseteq G_1[S_1]$, es decir toda copia de K_{k+1} en G_1 interseca no vacío a C ; como son $(k + 1)$ copias independientes, se sigue que en C hay un independiente de tamaño $(k + 1)$, lo cual contradice que se particione en a lo más k cliques. \square

Notemos que todos los vértices de L_{k+1} tienen ambos pigmentos disponibles; en particular si $L_{k+1} \subseteq L$ se sigue que $L_{k+1} \sqsubseteq L$ para L de dos pigmentos. Con esto tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.7 *Si $L_{k+1} \subseteq L$ para L de dos pigmentos, entonces $\chi(L) > k$.*

Esto da una idea de que L_k pueda ser una posible definición de clique, y por ende se pueda decir que el número de clique es el máximo k tal que $L \supseteq L_k$. Otro corolario que se sigue relativamente fácil de lo ya hecho es que L_{k+1} es un ejemplo que la cota en la Proposición 3.5 es ajustada.

Corolario 3.8 $\Delta_K(L_{k+1}) + 1 = \chi(L_{k+1}) = k + 1$.

Dem: De lo ya visto $\Delta_K(L_{k+1}) + 1 \geq \chi(L_{k+1}) = k + 1$. Resta ver que $\Delta_K(L_{k+1}) \leq k$. Para esto, basta tomar la partición $S_1 = V, S_0 = \emptyset$ que cumple que $\Delta(G_1[S_1]) \vee \Delta(G_0[S_0]) = k \vee 0 = k$. Como Δ_K es un mínimo sobre las particiones se concluye. \square

En la siguiente observación veremos que tomar máximo en vez de mínimo en la definición de Δ_K no es mucho mejor que el resultado que obtuvimos de manera greedy en la Proposición 3.1; esto esencialmente porque si un vértice cubre menos de la mitad de V , en el grafo complemento cubre más de la mitad.

Observación 3.9 Para $n \geq 2$, L completo de 2 pigmentos

$$\text{máx} \{ \Delta(G_0) + u(G_0), \Delta(G_1) + u(G_1) \} \geq \frac{n-1}{2}.$$

Dem: Supongamos que $\Delta(G_0) < \frac{n-1}{2}$. Luego para todo $v \in V$, $d_{G_0}(v) < \frac{n-1}{2}$ y como $n \geq 2$, $d_{G_1}(v) = n - 1 - d_{G_0}(v) > \frac{n-1}{2}$, y en particular para el grado máximo de G_1 . \square

3.2. La coloración greedy y Generalización de Brooks

Inicialmente, para trabajar en el contexto general, buscaremos acotar el número cromático usando estrategias glotonas para elegir la partición. Para esto, traeremos las definiciones de k -degenerancia a este contexto.

Notemos que para f una realización cualquiera de L , y d_i^L como en la Definición 1.37, se tiene que

$$d_i^L(v) = d_{G_i}(v) \geq d_{G_i^f}(v),$$

donde, para un grafo H y $v \in H$ vértice, $d_H(v)$ denota el grado de v en tal grafo.

Definición 3.10 Diremos que L es k -degenerado, si para todo $U \subseteq V$, existe un vértice $v \in U$ y un pigmento $i \in c(\delta(v))$ tal que

$$d_i^{L[U]}(v) \leq k.$$

En particular denotamos el número de degenerancia de L , $\text{degen}(L)$, como el mínimo k tal que L es $(k-1)$ -degenerado.

Al igual que en la definición para grafos usuales, podemos caracterizar esto con un buen ordenamiento de V ; para ver esto será útil introducir un poco de notación extra. Dado $U \subseteq V$ nos referiremos a un orden en los vértices de U como una función biyectiva $\sigma : U \rightarrow [|U|]$. En particular, dado $W \subseteq U \subseteq V$ y σ un orden en U denotamos $\sigma|_W$ como el único orden en W que es consistente con σ es decir que cumple $\sigma|_W(u) \leq \sigma|_W(w) \iff \sigma(u) \leq \sigma(w)$ para todo $u, w \in W$.

En el caso de grafos usuales, G se dice k -degenerado si todo subgrafo inducido de G tiene grado mínimo a los más k . Con ello se puede caracterizar la k -degenerancia, con la existencia de un orden v_1, \dots, v_n de los vértices tal que, denotando $G^l = G[v_l, \dots, v_n]$ el grafo inducido por los últimos $n-l+1$ vértices, se cumple que $d_{G^l}(v_l) \leq k$ para todo $l \in [n]$ [13]. Intuitivamente esto está motivado por un algoritmo glotón para encontrar una $(k+1)$ -coloración de un G k -degenerado, ya que simplemente se requiere asignar un pigmento cualquiera disponible a cada vértice en orden v_n, v_{n-1}, \dots, v_1 , lo cual es posible, puesto que al momento de asignar un color a v_l , a lo más hay k vértices entre sus vecinos a los cuales ya se ha asignado un color. Así, se puede generalizar este resultado a grafos pigmentados como se muestra a continuación.

Proposición 3.11 L es k -degenerado ssi existe un orden σ en V tal que para todo $v \in V$ existe un pigmento $i \in c(\delta(v))$ tal que

$$d_i^{L_v}(v) \leq k,$$

donde $L_v = L[\{u \in V : \sigma(u) \geq \sigma(v)\}]$.

Dem: Veamos que es condición suficiente. Definiremos σ de manera inductiva. Fijando $U = V$ sea $v_1 \in V$ el que cumple la propiedad; definimos $\sigma(v_1) = 1$. Inductivamente, dados v_1, \dots, v_l consideramos $U = V \setminus \{v_1, \dots, v_l\}$ y escogemos $v_{l+1} \in U$ que cumpla la propiedad en $L[V \setminus \{v_1, \dots, v_l\}]$; definimos $\sigma(v_{l+1}) = l + 1$. Basta notar que para $l \in [n]$,

$$L_{v_l} = L[\{v_l, v_{l+1}, \dots, v_n\}] = L[V \setminus \{v_1, \dots, v_{l-1}\}].$$

Veamos ahora que es condición necesaria. Sea σ el orden y $U \subseteq V$. Tomando j el mínimo tal que $u_0 = \sigma^{-1}(j) \in U$, se sigue que para todo $u \in U$, $\sigma(u) \geq \sigma(u_0)$ y luego $L[U] \subseteq L_{u_0}$. Así, existe $i \in c(\delta(u_0))$ tal que

$$d_i^{L[U]}(u_0) \leq d_i^{L_{u_0}}(u_0) \leq k.$$

□

Con esta definición podemos dar paso a un algoritmo glotón para calcular $\text{degen}(L)$, al igual que en el caso de grafos usuales, y así obtener una cota que se pueda calcular en tiempo polinomial.

Corolario 3.12 Podemos calcular $\text{degen}(L)$ en tiempo polinomial.

Dem: Consideramos el siguiente algoritmo:

Algorithm 3 Número de Degenerancia

- 1: $R \leftarrow 0, L_0 \leftarrow L$
 - 2: Para $l \in [n]$
 - 3: Elegir $(v_l, i_l) \in \arg \min_{\substack{v \in V(L_{l-1}) \\ i \in c(\delta(v))}} d_i^{L_{l-1}}(v)$
 - 4: $R \leftarrow \max \left\{ R, d_{i_l}^{L_{l-1}}(v_l) \right\}$
 - 5: $\sigma(v_l) \leftarrow l; L_l \leftarrow L_{l-1} - v_l$
 - 6: **Retornar** $R + 1$.
-

Luego, notamos que por la Proposición 3.11 L es R -degenerado, ya que σ es tal orden; en particular $\text{degen}(L) \leq R$. Por otro lado si $k + 1 = \text{degen}(L)$, en particular como $L_{l-1} = L[\{v_l, \dots, v_n\}]$ y L es k -degenerado, para todo $l \in [n]$ hay un vértice $v' \in \{v_l, \dots, v_n\}$ y un pigmento $i' \in c(\delta(v'))$ con la propiedad asociada a L_{l-1} y se sigue que

$$d_{i'}^{L_{l-1}}(v_l) \leq d_{i'}^{L_{l-1}}(v') \leq k \quad \forall l \in [n],$$

ya que (v_l, i_l) minimizan el grado. Tomando máximo en l , se concluye que $R \leq k$. \square

En la Proposición 2.20 caracterizamos la k -coloreabilidad de L en términos de la existencia de una realización que hace k -coloreable a los grafos G_i^f . En esta misma línea vale la pena hacer las siguientes definiciones.

Definición 3.13 Para L un grafo pigmentado cualquiera, denotamos

$$\text{col}(L) := \min_f \max_{i \in c(E)} \text{col}(G_i^f)$$

$$\Delta(L) := \min_f \max_{i \in c(E)} \Delta(G_i^f)$$

$$w(L) := \min_f \max_{i \in c(E)} w(G_i^f)$$

$$\beta(L) := \max_{i \in c(E)} \Delta(G_i)$$

Donde el mínimo en las primeras tres definiciones está tomado sobre las realizaciones de L , y $G_i = (V, E_i)$ con E_i las aristas de pigmento i .

Observación 3.14 Para L completo de dos pigmentos $\Delta_K(L) \leq \Delta(L)$ y la igualdad no se alcanza en general.

Dem: Sea L de dos pigmentos y completo. En el caso que $u(G_0) = u(G_1) = 0$ se sigue directamente, ya que cualquier partición $S_0 \dot{\cup} S_1 = V$ define una realización f (ya que en este caso L es totalmente factible) y se sigue que $G_i[S_i] = G_i^f$ por definición.

Recordemos que siempre se cumple que $\min\{u(G_0), u(G_1)\} = 0$ ya que como $G_0 = \overline{G_1}$ no pueden tener ambos simultáneamente vértices universales. Con ello solo nos falta ver el caso en que exactamente un $G_i, i \in \{0, 1\}$, tiene vértices universales. Asumamos s.p.g. que $u(G_0) > 0$ y por ello $u(G_1) = 0$. Denotemos por $W = U(G_0)$ los vértices universales de G_0 y $V' = V - W$. Sabemos que cualquier realización f de L satisface que $f(W) = \{0\}$, y aun más se encuentran en biyección con las tuplas (V_0, V_1) que particionan V' . Así, podemos escribir que

$$\begin{aligned} \Delta(L) &= \min_{V_0 \dot{\cup} V_1 = V'} \max \{ \Delta(G_0[V_0 \cup W]), \Delta(G_1[V_1]) \} \\ &= \min_{V_0 \dot{\cup} V_1 = V'} \max \{ |V_0 \cup W| - 1, \Delta(G_1[V_1]) \} \\ &= \min_{V_0 \dot{\cup} V_1 = V'} \max \{ |V_0| - 1 + u(G_0), \Delta(G_1[V_1]) \}, \quad (+) \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se cumple dado que $G_0[V_0 \cup W]$ tiene vértices universales.

Notemos que, como por definición, $E_1(W) = \delta_1(W) = \emptyset$ se sigue que $\Delta(G_1[V_1]) = \Delta(G_1[V_1 \cup W])$ para todo $V_1 \subseteq V$. En particular, sean $\{V_0, V_1\}$ partición de V' que alcance

el mínimo en (+) y definamos $S_0 = V_0; S_1 = V_1 \cup W$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \Delta(L) &= \text{máx} \{|V_0| - 1 + u(G_0), \Delta(G_1[V_1])\} \\ &= \text{máx} \{|S_0| - 1 + u(G_0), \Delta(G_1[V_1 \cup W])\} \\ &\geq \text{máx} \{\Delta(G_0[S_0]) + u(G_0), \Delta(G_1[S_1])\} \\ &\geq \Delta_K(L). \end{aligned}$$

Para ver que la igualdad no se alcanza consideremos el grafo pigmentado dado por la Figura 3.1

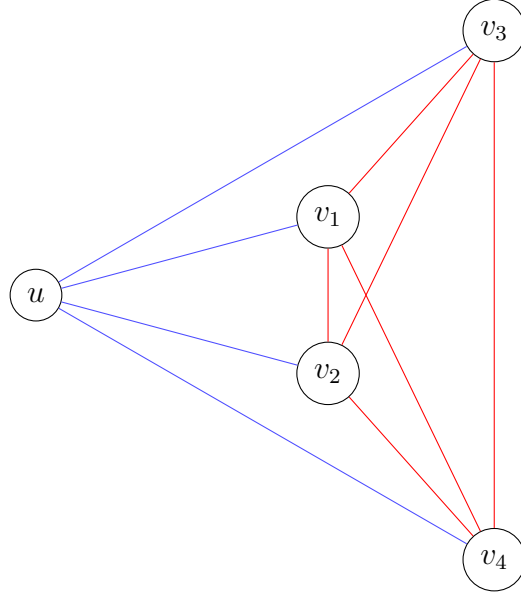


Figura 3.1: Ejemplo de L completo con dos pigmentos que satisface $\Delta_K(L) < \Delta(L)$. Aquí 0 es el pigmento azul y 1 es rojo.

y naturalmente los conjuntos $S_0 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $S_1 = \{u\}$. Notemos que con esta elección se prueba que

$$\Delta_K(L) \leq \text{máx} \{\Delta(G_0[S_0]) + 1, \Delta(G_1[S_1])\} = \text{máx} \{0 + 1, 0\} = 1.$$

Por otro lado, como u es universal en G_0 para toda realización f se cumple $f(u) = 0$, y por la simetría de L , para calcular $\Delta(L)$ basta hacer distinción entre las realizaciones con distinto número de vértices rojos.

$ f^{-1}(\{1\}) $	$\Delta(G_0^f)$	$\Delta(G_1^f)$
0	4	0
1	3	0
2	2	1
3	1	2
4	0	3

Tabla 3.1: Valores de $\Delta(G_1^f)$ para los distintos valores de $|f^{-1}(\{1\})|$

En concreto, no es difícil convencerse de lo expresado en la Tabla 3.1, de lo cual se sigue que $\Delta(L) = \text{mín} \{4, 3, 2, 2, 3\} = 2 > \Delta_K(L)$. \square

Observación 3.15 Para todo L se cumple que $w(L) \leq \chi(L) \leq \text{col}(L) \leq \Delta(L) + 1$.

Dem: La demostración es directa del análogo para grafos y el Corolario 2.21 que permite escribir $\chi(L)$ como un mín máx. \square

Proposición 3.16 Si L es k -degenerado, existe una realización f tal que los G_i^f asociados son k -degenerados. En particular $\chi(L) \leq \text{col}(L) \leq \text{degen}(L)$.

Dem: Supongamos que L es k -degenerado, y usando la Proposición 3.11 sea σ el orden asociado, y para $j \in [n]$, $v_j = \sigma^{-1}(j)$ sea $i_j \in c(\delta(v_j))$ un pigmento que satisface que $d_{i_j}^{L_{v_j}}(v_j) \leq k$. Luego definimos $f(v_j) = i_j$. Ahora, para $i \in c(E)$ consideramos $\sigma_i = \sigma|_{V_i}$. Con esto dado $v \in V_i$ y $V' = \{u \in V_i : \sigma_i(u) \geq \sigma_i(v)\}$ se sigue que $V' \subseteq \{u \in V : \sigma(u) \geq \sigma(v)\}$ con lo cual

$$d_{i}^{G_i^f[V']}(v) \leq d_i^{L_v}(v) \leq k,$$

y por lo tanto concluimos que G_i^f es k -degenerado. \square

La proposición anterior permite conectar la degenerancia con la k -coloración de manera similar a como sucede en el caso de grafos usuales. A continuación veremos que $\beta(L)$ se conecta también con el número cromático, y de hecho veremos más adelante que es el buen parámetro calculable en tiempo polinomial para probar un resultado de tipo Brooks.

Proposición 3.17 $\beta(L) = \max_f \max_{i \in c(E)} \Delta(G_i^f)$. En particular $\chi(L) \leq \Delta(L) + 1 \leq \beta(L) + 1$.

Dem: Para $i \in c(E)$, y f realización cualquiera, por definición $\Delta(G_i^f) \leq \Delta(G_i)$ ya que $E_i(V_i) \subseteq E_i$. Tomando máximo en f y luego en $i \in c(E)$, como podemos intercambiar los máximos al lado derecho, concluimos que se tiene (\geq). Para ver (\leq), basta notar que dado $i \in c(E)$, tomando f una realización que privilegia i , es decir que pinta i a todo vértice en que incide una arista de pigmento i , en particular $G_i = G_i^f + I(G_i)$, donde $I(G_i)$ denota el conjunto de vértices aislados. Con esto,

$$\Delta(G_i) = \Delta(G_i^f) \leq \max_f \Delta(G_i^f).$$

Tomando máximo en $i \in c(E)$ se concluye. \square

Para probar la generalización de Brooks es necesario primero esclarecer qué significará tener un clique grande en un grafo pigmentado; naturalmente se puede ver que se relaciona con que aparezca en los G_i^f .

Definición 3.18 Como una generalización de la Definición 2.25, dado un grafo H diremos que (L, f) , con f una realización de L , tiene un H monocromático, si existe un $i \in c(E)$ tal que $H \subseteq G_i^f$. En particular diremos que tiene un H monocromático destacado, si H es una

componente conexa de G_i^f , es decir, si las aristas que tienen un extremo en la copia de H y que no pertenecen a dicha copia, son de un pigmento distinto a i .

Teorema 3.19 (Brooks, versión relativa a realizaciones) *Sea L un grafo pigmentado con $k := \beta(L) + 1 \geq 3$. Entonces $k = \chi(L)$ ssi para toda realización f , (L, f) tiene un K_k monocromático destacado si $k \geq 4$ o un ciclo impar monocromático destacado si $k = 3$.*

Dem: Como primera observación $\chi(L) \leq k$. Luego $\chi(L) = k$ ssi L no es $(k - 1)$ -coloreable, y por la Proposición 2.20 es equivalente a que para toda realización f existe un pigmento $i \in c(E)$ tal que $\chi(G_i^f) > k - 1$. Por otro lado, por hipótesis $\beta(L) \leq k - 1$. En particular, por la Proposición 3.17, para toda realización y todo $i \in c(E)$ se tiene que $\Delta(G_i^f) \leq k - 1$.

Con lo anterior, si $\chi(L) = k$, dado f realización, sea i tal que $\chi(G_i^f) > k - 1$. Luego

$$k - 1 < \chi(G_i^f) \leq \Delta(G_i^f) + 1 \leq k,$$

con lo cual $\chi(G_i^f) = \Delta(G_i^f) + 1$ y por Brooks una componente conexa de G_i^f es un K_k si $k \geq 4$ o un ciclo impar si $k = 3$, que es justamente lo que queríamos concluir.

Para la reversa, dada una realización f e $i \in c(E)$ tal que G_i^f tiene el grafo H asociado (K_k o ciclo impar según corresponda) como componente conexa, en particular $\chi(G_i^f) \geq \chi(H) = k > k - 1$. Como tomamos f arbitrario, se sigue que $\chi(L) > k - 1$. \square

Corolario 3.20 $\chi(L) \leq \max\{\beta(L), w(L), 3\}$.

Dem: Sea $k = \chi(L)$ y supongamos que $k \geq \beta(L) + 1$ y $k \geq 4$. Luego, por el Teorema 3.19 para toda realización f (L, f) tiene un K_k monocromático, i.e. existe un $i \in c(E)$ tal que $K_k \subseteq G_i^f$; esto es $w(G_i^f) \geq k$. Así para todo f , $\max_{i \in c(E)} w(G_i^f) \geq k$ y por lo tanto $w(L) \geq k$. \square

A continuación, nos centramos en dar una descripción estructural más explícita de los grafos pigmentados que alcanzan la cota $\chi(L) = \beta(L) + 1$, que del Teorema 3.19 sabemos que corresponden a los que cumplen $w(L) = \beta(L) + 1$. Para ello daremos la siguiente definición.

Definición 3.21 *Un grafo pigmentado (conexo) L se dice k -clique, para $k \geq 3$, si para cada $i \in c(E)$, las componentes conexas del grafo G_i corresponden a cliques de tamaño k (ciclos impares cuando $k = 3$) o vértices aislados (Ver ejemplo en la Figura 3.2).*

Se sigue de la definición que, equivalentemente, toda arista de pigmento i , forma parte de un clique de tamaño k en G_i , y todo vértice, en cada G_i , ve a lo más un clique.

Lema 3.22 *Dado L con $\beta(L) \geq 3$, si $w(L) = \beta(L) + 1$, entonces L es un $w(L)$ -clique sin ciclos alternantes.*

Dem: Sea $k = w(L) \geq 4$. Dada f una realización de L denotamos

$$\mathcal{CM}(L, f) = \{S \subseteq V : S \text{ es clique monocromático de tamaño } k \text{ en } (L, f)\}.$$

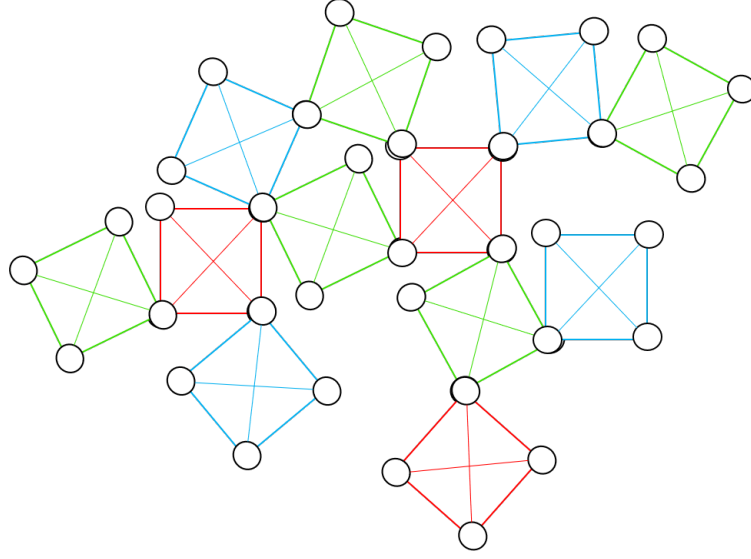


Figura 3.2: Un ejemplo de un 4-clique.

Notemos que como $w(L) = k$, para toda realización f , $|\mathcal{CM}(L, f)| \geq 1$. Sea f que minimice esta cantidad, y sea S un clique monocromático de tamaño k de (L, f) .

Como lo hemos hecho antes, a un (u, v) -camino $P = v_0v_1\dots v_l$, con $v_0 = u, v_l = v$ le diremos (u, v) -camino alternante si para todo $i \in \{1, \dots, l-1\}$, $c(v_{i-1}v_i) \neq c(v_iv_{i+1})$. Con esto, definimos

$$\mathcal{U} = \{v \in V : \exists P \text{ un } (u, v)\text{-camino alternante para } u \in S\},$$

es decir, los vértices alcanzables desde S a través de un camino alternante. En particular definimos $d_S : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{N}$ el largo del camino alternante más corto a S .

Afirmación Para todo par de vértices $v_1, v_2 \in \mathcal{U}$ con $v_1v_2 \in E$ existen S' , con $v_1, v_2 \in S'$, y f' realización, tales que

1. $S' \in \mathcal{CM}(L, f')$.
2. $|\mathcal{CM}(L, f')| = |\mathcal{CM}(L, f)|$.

Para concluir, a partir de la afirmación anterior, que L es un k -clique, observemos primero que, si $v \in S \subseteq V$ y S es un clique de tamaño k en G_i , tenemos que $S \subseteq N_i[v]$, y como

$$d_i(v) \leq \beta(L) = k - 1 = |S - v|,$$

se ve entonces que $N_i[v] = S$, y en particular, v no ve otros cliques en G_i . Con lo anterior, como en \mathcal{U} , toda arista, está en un clique monocromático de tamaño k de su pigmento, resta probar que $\mathcal{U} = V$. En efecto, supongamos que existe $w \in V \setminus \mathcal{U}$. Como L es conexo, s.p.g. existe $v \in \mathcal{U}$ con $vw \in E$. Sea $P = v_0\dots v_l, v_0 = u \in S, v_l = v$ un (u, v) -camino alternante y denotemos $x = v_{l-1}$ (si $v \in S$, tomamos x otro vértice de S). Sean S', f' respectivos a la afirmación para $xv \in E(\mathcal{U})$. Como por lo observado anteriormente, $N_i[v] = S'$, o bien $w \in S'$, en cuyo caso $xw \in E$ y $c(xw) = i$, o bien $w \notin S' = N_i[v]$, y por ello $c(vw) \neq i$. En el primer caso $P' = v_0\dots v_{l-1}w$ sería un (u, w) -camino alternante, y en el segundo caso $P' = P + vw$ lo

sería. En ambos casos se contradice que $w \notin \mathcal{U}$.

Para demostrar la afirmación anterior, procederemos por inducción en $d_S(v_1) + d_S(v_2)$. Notemos que el caso base es directo, cuando $d_S(v_1) + d_S(v_2) = 0$, ya que $v_1, v_2 \in S$ y S, f cumplen 1 y 2.

Luego supongamos que $d_S(v_1) + d_S(v_2) \geq 1$ y asumamos s.p.g. que $d_S(v_1) \leq d_S(v_2)$. En caso que $d_S(v_1) = 0$, se sigue que $d_S(v_2) = 1$, y tomando v_0 un vértice de $S - v_1$ (pues $|S| = k > 2$), podemos aplicar la hipótesis inductiva en v_0, v_1 . Si $d_S(v_1) \geq 1$, por definición existe $u \in S$ y $P = w_0 \dots w_l$ (u, v_1)-camino alternante, y llamamos $v_0 = w_{l-1}$; nótese que $d_S(v_0) < d_S(v_1)$.

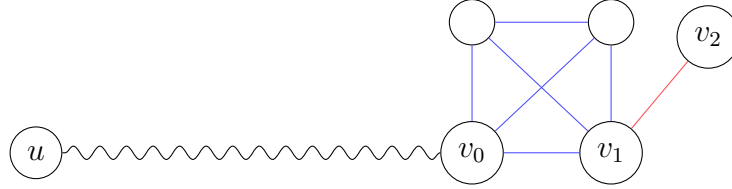


Figura 3.3: Caso en que $v_2 \notin S''$, $k = 4$; aquí i es el pigmento azul y j rojo.

En ambos casos, por hipótesis inductiva, existen S'', f'' con $|\mathcal{CM}(L, f)| = |\mathcal{CM}(L, f'')|$ y $S'' \in \mathcal{CM}(L, f'')$, donde $v_0, v_1 \in S''$. Denotemos $i = c(v_0v_1), j = c(v_1v_2)$; se sigue que las aristas de S'' son de pigmento i . Si $v_2 \in S''$, se concluye directamente. En otro caso, como $S'' = N_i[v_1]$, se tiene que $v_2 \notin N_i[v_1]$, y en particular $i \neq j$. Luego, definimos $f' : V \rightarrow c(E)$

$$f'(v) = \begin{cases} f''(v) & \text{si } v \neq v_1 \\ j & \text{si } v = v_1, \end{cases}$$

que es realización, ya que sólo diferencia de f'' en v_1 , y $c(v_1v_2) = j$. Notemos que como $N_i[v_1] = S''$ y $f''(v_1) = i$, $S'' \notin \mathcal{CM}(L, f')$, ya que $f'(v_1) = j$; aun más, debido a que f' solo difiere de f'' en v_1 , únicamente puede afectar a un clique monocromático de pigmento i , en (L, f'') ; teniendo que $N_i[v_1] = S''$, se concluye que f' solo afecta a S'' , es decir, $\mathcal{CM}(L, f'') \setminus \mathcal{CM}(L, f') = \{S''\}$. Adicionalmente, como $|\mathcal{CM}(L, f)| = |\mathcal{CM}(L, f'')|$, se sigue que f'' también minimiza esta cantidad; así, $|\mathcal{CM}(L, f'')| \leq |\mathcal{CM}(L, f')|$, y por ello, como vimos que $\mathcal{CM}(L, f'') \setminus \mathcal{CM}(L, f') \neq \emptyset$, existe $S' \in \mathcal{CM}(L, f') \setminus \mathcal{CM}(L, f'')$, y nuevamente, ya que f' solo difiere de f'' en v_1 , entonces $v_1 \in S'$; aun más, S' es clique monocromático de pigmento j en (L, f') . Ya que, sabemos que $N_j[v_1] = S'$, razonando como antes, tenemos que $\mathcal{CM}(L, f'') \setminus \mathcal{CM}(L, f') = \{S'\}$ y $v_2 \in S'$. Se sigue que $|\mathcal{CM}(L, f')| = |\mathcal{CM}(L, f'')| = |\mathcal{CM}(L, f)|$.

Finalmente veamos que L no tiene ciclos alternantes. Supongamos por contradicción que $C = v_0 \dots v_l$ es un ciclo alternante en L , con $v_0 = v_l$. Por la afirmación, existen f, S con f realización que minimiza $|\mathcal{CM}(L, \cdot)|$, y $v_0v_1 \subseteq S \in \mathcal{CM}(L, f)$. Consideramos $f' : V \rightarrow c(E)$ la realización dada por

$$f'(v) = \begin{cases} f(v) & \text{si } v \notin C \\ c(v_jv_{j+1}) & \text{si } v = v_j \in C, j < l. \end{cases}$$

En particular, como $f'(v_1) \neq c(v_0v_1)$ y $v_1 \in S$, S no es monocromático en (L, f') , i.e. $S \notin \mathcal{CM}(L, f')$. Por otro lado, si hubiera $S' \in \mathcal{CM}(L, f') \setminus \mathcal{CM}(L, f)$, por la definición de f' , existiría un $j \in \{0, \dots, l-1\}$ con $v_j \in S'$. En particular, si i es el pigmento de S' en (L, f') , $f'(v_j) = i$, pero $f'(v_{j+1}) \neq i$, de donde $v_{j+1} \notin S'$ y

$$N_i[v_j] \supseteq S' + v_{j+1} \implies d_i(v_j) \geq k - 1 + 1 > \beta(L).$$

Con lo anterior, $\mathcal{CM}(L, f') \subsetneq \mathcal{CM}(L, f)$ lo cual contradice la elección de f . \square

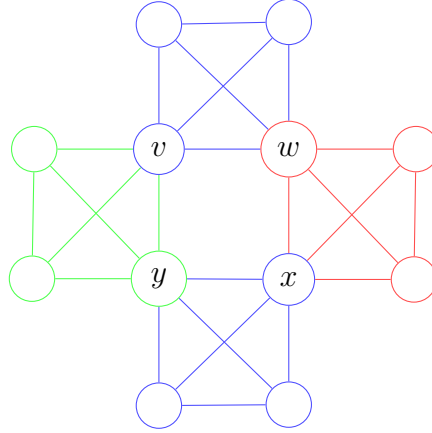


Figura 3.4: Ejemplo de un 4-clique, con un ciclo alternante $C = vwxy$, y una realización sin K_4 monocromáticos; en particular $w(L) \leq 3$.

Con lo demostrado en el Lema 3.22, hemos encontrado una condición necesaria que cumplen los grafos pigmentados que alcanzan la cota en el Teorema 3.19.

Para probar que es condición suficiente, trabajaremos por un momento con hipergrafos. Un hipergrafo, es una tupla $H = (V, E)$, con $E \subseteq 2^V \setminus \{\emptyset\}$. Un r -hipergrafo o hipergrafo r -uniforme, es tal que toda arista $e \in E$ tiene r elementos; en particular, un grafo es un 2-hipergrafo. Se pueden encontrar resultados sobre hipergrafos en [3]. Sin embargo, aquí solo usaremos dos nociones básicas: conexidad y presencia de ciclos.

Definición 3.23 Dado $H = (V, E)$ un hipergrafo y $u, v \in V$, diremos que u, v están conectados si existe una secuencia $v_0e_1v_1\dots e_lv_l$, con $v_0, \dots, v_l \in V$, $e_1, \dots, e_l \in E$, $v_0 = u, v_l = v$ y $v_{i-1}, v_i \in e_i$, para todo $i \in [l]$. Diremos que H es conexo si para todo par $u, v \in V$, u, v están conectados.

Definición 3.24 Un Berge-ciclo en un hipergrafo $H = (V, E)$ es una secuencia $v_0e_1v_1\dots e_lv_l$, con $v_1, \dots, v_l \in V$ distintos, $e_1, \dots, e_l \in E$ distintos, $v_0 = v_l$ y $v_{i-1}, v_i \in e_i$, para todo $i \in [l]$. H se dirá Berge-acíclico, si no tiene Berge-ciclos.

En la sección 2 del capítulo 17 de [3], se prueba la siguiente propiedad.

Proposición 3.25 Dado $H = (V, E)$ hipergrafo conexo, H es Berge-acíclico ssi

$$\sum_{e \in E} (|e| - 1) = |V| - 1.$$

Para conectar estos resultados con nuestro problema, dado L un k -clique, consideraremos, de manera natural, el hipergrafo que resulta de cambiar los cliques maximales de $G(L)$, por (hiper-)aristas.

Definición 3.26 Sea L un k -clique, y sean C_1, \dots, C_l los cliques maximales de $G(L)$ (todos de tamaño k). Se define $H(L)$ el k -hipergrafo (V, E') , con $E' = \{C_1, \dots, C_l\}$.

Es fácil ver que, como L es conexo, $H(L)$ también lo es. Con todas estas definiciones en mente, podemos enunciar la caracterización buscada.

Proposición 3.27 Sea L un k -clique, y C_1, \dots, C_l los cliques maximales de $G(L)$. Los siguientes son equivalentes:

1. L no tiene ciclos alternantes.
2. $H(L)$ es Berge-acíclico.
3. Para toda colección $T_i \subseteq G[C_i], i \in [l]$, de árboles generadores, se tiene que $T = T_1 + \dots + T_l$ es acíclico¹.
4. $w(L) = k$.

Dem:

- (1 \implies 2): Por contrarrecíproca, supongamos que $H(L)$ tiene un Berge-ciclo $v_0 e_1 v_1 \dots e_h v_h$. Notemos que, como $e_i, i \in [h]$, es clique en $G(L)$, $v_{i-1} v_i \in E$. Aun más, como ningún vértice ve dos cliques del mismo color (ya que cada clique es una componente conexa del respectivo G_j), y un Berge-ciclo no repite (hiper-)aristas, $c(v_{i-1} v_i) \neq c(v_i v_{i+1})$, para todo $i \in [h - 1]$. Así, $v_0 v_1 \dots v_h$ es un ciclo alternante de L .
- (2 \implies 3): Sea $T_i \subseteq G[C_i], i \in [l]$, una colección de árboles generadores, y $T = T_1 + \dots + T_l$. En particular, para $i \in [l]$, $|V(T_i)| - 1 = |E(T_i)| = k - 1$. Claramente los T_i son arista-disjuntos de a pares, y por la conexidad de L , T es conexo. Luego, por la Proposición 3.25,

$$|V(T)| - 1 = |V| - 1 = \sum_{i=1}^l (|C_i| - 1) = \sum_{i=1}^l |E(T_i)| = |E(T)|,$$

y por lo tanto T es acíclico.

- (3 \implies 4): Supongamos por contradicción, que existe f realización de L , tal que (L, f) no tiene cliques monocromáticos de tamaño k . En particular, para $i \in [l]$, $C_i \notin$

¹La suma de grafos denota el grafo unión, es decir, $V(G+H) = V(G) \cup V(H)$ y $E(G+H) = E(G) \cup E(H)$.

$\mathcal{CM}(L, f)$. Dado $i \in [l]$, consideramos $v_i \in C_i$ tal que $f(v_i) \notin c(E(C_i))$. Tomamos $T_i \subseteq C_i$ una estrella con centro en v_i . Luego $T = T_1 + \dots + T_l$ es un árbol.

Por otro lado, denotando $M = (V, E(T), c)$, f es realización buena de M . En efecto, dado $v \in V$ y $j \in c(\delta(v))$, tomando $e \in \delta(v)$ tal que $j = c(e)$, se sigue que existe $C_i \in E'$ con $e \subseteq C_i$ (ya que L es k -clique), y como T_i es generador, hay una arista de T_i (de pigmento j) que incide en v ; i.e. $j \in c(\delta_T(v))$ y en particular, f es realización de M . Por otro lado, dado $e \in E(T)$, e $i \in [l]$ con $e \subseteq C_i$, $f(v_i) \neq c(e)$; con esto f es buena.

Pero por la Proposición 1.5 T no puede ser 1-coloreable.

- (4 \implies 1): Probado en el Lema 3.22, notando que $\beta(L) = k - 1$.

□

En [11] se define un análogo a $H(L)$, pero directamente para grafos. En concreto, se denota $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$, la función que a cada grafo, le asigna el hipergrafo de sus cliques maximales. Allí, se prueba que G es un grafo bloque² ssi $f(G)$ es Berge-acíclico. Esto da otra caracterización para los grafos pigmentados que alcanzan la cota de Brooks. Es sorprendente que esta segunda condición (adicional a que L sea un k -clique), pueda ser tanto una propiedad de L como grafo pigmentado (no tener ciclos alternantes), como una propiedad puramente de la estructura del grafo $G(L)$ (como ser bloque, o que $H(L)$ sea acíclico).

Con lo anterior podemos reescribir la generalización de Brooks.

Teorema 3.28 (Brooks, versión estructural) *Sea L grafo pigmentado conexo, con $d \geq 2$ pigmentos, y tal que $k = \beta(L) + 1 \geq 4$. Luego $\chi(L) = k$ ssi L es k -clique sin ciclos alternantes.*

Dem: Si $\chi(L) = k$, por el Teorema 3.19, $w(L) = k = \beta(L) + 1$. Luego, por el Lema 3.22, L es k clique sin ciclos alternantes. Recíprocamente, si L es k -clique sin ciclos alternantes, por la Proposición 3.27, $w(L) = k$. Como $w(L) \leq \chi(L) \leq \beta(L) + 1 = k$ se concluye. □

Es claro que el caso de $\beta(L) = 0$ caracteriza directamente la forma del grafo. Falta ver el caso en que $\beta(L) = 1$ (Notemos que en este caso c es un coloreo propio de E).

Proposición 3.29 *Si $\beta(L) = 1$ podemos determinar en tiempo polinomial si $\chi(L)$ vale 1 o 2.*

Dem: Sin pérdida de generalidad asumimos que $G(L)$ no tiene vértices aislados (ya que pueden llevar cualquier color). Luego, modelaremos la bien realización de L con la factibilidad de un PLM y veremos que en el caso que $\beta(L) = 1$ el polítopo de la relajación es entero; en particular resolviendo el PL de la relajación (con cualquier vector de costos ya que el problema es acotado) nos dará un solución entera (y por lo tanto una realización buena) ssi el problema es factible; esto usando el método de la elipsoide se puede hacer en tiempo polinomial. En efecto, para $u \in V$ e $i \in c(E)$ consideramos variables binarias x_u^i ; la intuición será que

²Un grafo bloque, es tal que sus componentes 2-conexas maximales son cliques.

$x_u^i = 1$ ssi pintamos el vértice u de pigmento i . Agregaremos restricciones para asegurar que la asignación de pigmentos sea una función, sea realización, y sea buena. Formalmente consideramos las siguientes restricciones.

$$\begin{aligned} \sum_{i \in c(E)} x_u^i &= 1 & \forall u \in V \\ x_u^i &\leq \mathbb{1}_{\{i \in c(\delta(u))\}} & \forall u \in V, \forall i \in c(E) \\ x_u^{c(uv)} + x_v^{c(uv)} &\leq 1 & \forall uv \in E \end{aligned}$$

Es claro que la primera restricción se cumple ssi se asigna exactamente un pigmento a cada vértice, la segunda ssi solo se puede tomar un pigmento cuando está en el corte del vértice, y la tercera ssi a lo más un extremo de cada arista toma su color.

Asumamos spg que $V = [n]$, $c(E) = [d]$. Denotamos $x = (x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^d, x_2^1, \dots, x_2^d, \dots, x_n^d)$. Sea A_1 la matriz asociada a la primera restricción, es decir tal que podemos reescribir $A_1 x = 1 \in \mathbb{R}^n$. Análogamente, sea A_2 la matriz asociada a la tercera restricción, es decir tal que escribimos $A_2 x \leq 1 \in \mathbb{R}^m$. Observamos que A_1, A_2 tienen a lo más un 1 en cada columna; para A_1 es directo y para A_2 se cumple ya que $d_i(v) \leq 1$ para todo vértice. Veamos que $A := \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ es Totalmente Unimodular [7]. Para esto usamos la caracterización dada por el Teorema de Ghouila-Houri usando bicolors equitativos; como A es T.U. ssi A^t es T.U. podemos razonar por filas en vez de columnas. Sea J un subconjunto de las filas de A ; tomamos J_+ las filas asociadas a A_1 (i.e. $J_+ = J \cap [n]$) y J_- las asociadas a A_2 ($J_- = J \setminus J_+$). Luego, por la observación anterior

$$\sum_{j \in J_+} A_{j,\bullet}, \sum_{j \in J_-} A_{j,\bullet} \in \{0, 1\}^n$$

En particular

$$\sum_{j \in J_+} A_{j,\bullet} - \sum_{j \in J_-} A_{j,\bullet} \in \{-1, 0, 1\}^n$$

Con esto, por el Teorema de Hoffman-Kruskal (Teo 4.5 en [7]) definiendo el polítopo

$$P = \{x \in \mathbb{R}^{nl} : b^1 \leq Ax \leq b^2, 0 \leq x \leq u\}$$

con $b^1 = (1, 0) \in \mathbb{R}^{n+m}$, $b^2 = 1 \in \mathbb{R}^{n+m}$ y $u_v^i = \mathbb{1}_{\{i \in c(\delta(v))\}}$, se cumple que P es entero, y luego P es no vacío ssi sus vértices son integrales. \square

Una pregunta natural luego de ver que un problema es polinomial es si es posible encontrar una caracterización combinatorial. En este caso tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.30 *Supongamos que $\beta(L) = 1$ para G conexo. Luego $\chi(L) = 2$ ssi G es un árbol.*

Dem: La implicancia reversa es directa de la Proposición 1.5. Para la otra supongamos que G no es árbol, y sea $T = (V, F)$ un árbol generador. Como $F \neq E$ sea $r \in e \in E \setminus F$. Notemos que como $\beta(L) = 1$, basta probar que $T + e$ es bien realizable. Esto pues, dada una realización de $M = (V, F + e, c)$ buena y $uv \in E \setminus (F + e)$, si $i = f(u)$, como f es realización, existe $g \in F + e$ tal que $c(g) = i$ y $u \in g$, y por lo tanto $c(uv) \neq i$ ya que $d_i(u) \leq 1$. Lo

anterior dice que f es buena en L .

Para ver que $T + e$ es bien realizable definimos f como sigue. Fijemos r como la raíz de T . Para $v \neq r$ y u su único padre en (T, r) , fijar $f(v) = c(uv)$. Por otro lado $f(r) = c(e)$. Por construcción f es realización. Supongamos que hay $u, v \in V$ con $uv \in F + e$ y $f(u) = f(v) = c(uv)$. Un caso es que $uv \neq e$ y digamos spg que u es padre de v . Sea w el padre de u si $u \neq r$ o el otro extremo de e si $u = r$. En particular $w \neq v$ y por definición de f , $f(u) = c(uw) =: i$ con lo cual $d_i(u) \geq 2$ que es una contradicción con que $\beta(M) \leq 1$. Por otro lado si $uv = e$, s.p.g. $u \neq r$ y tomando w el padre de u se llega a la misma conclusión ($w \neq v$ porque $e \notin F$). \square

Conclusión

A lo largo de este trabajo, principalmente en los primeros dos capítulos, pudimos estudiar a fondo el problema de k -coloración planteado, al menos desde el punto de vista de la complejidad computacional, de modo que establecimos, para los diferentes posibles valores de d, k , con d el número de pigmentos del grafo, si el problema se podía resolver en tiempo polinomial, o identificar cuando resultaba ser NP -completo (y por ende, muy probablemente imposible de resolver en tiempo polinomial). En particular, como se hace usualmente, en los casos en que el problema era NP -completo, estudiamos algunos casos más restrictivos del problema, al pedir que el grafo subyacente G fuera de alguna clase particular (completo, bipartito, bipartito completo, grafo split, etc), o que la propia asignación de pigmentos $c : E \rightarrow \mathbb{N}$ fuera especial (el caso totalmente factible). Así también, al ver que en la gran mayoría de los casos el problema es NP -completo, encontramos una forma alternativa de abordarlo algorítmicamente, usando las herramientas de la complejidad parametrizada, al menos para el caso de 1-coloración.

Más allá de los resultados particulares, esta Tesis profundiza en un área poco estudiada en cuanto a grafos pigmentados (o arista-coloreados, como se llaman usualmente en la literatura). El principal foco hasta entonces, es de forzar ciertos parámetros del grafo (como el grado mínimo, el número de aristas o el grado colorido $|c(\delta(v))|$) de modo que se pueda encontrar un grafo o estructura particular, como un ciclo hamiltoniano monocromático, o una descomposición en componentes conexas monocromáticas; un enfoque asintótico. En este trabajo se desarrollan principalmente tres focos típicos de la teoría de grafos, aplicados a grafos pigmentados: La elaboración de algoritmos para resolver determinados problemas de decisión, el uso de técnicas propiamente combinatoriales y el diseño de gadgets para dar reducciones entre diferentes problemas.

Como es usual en trabajos de investigación, quedan preguntas abiertas y nuevas posibles rutas de estudio. A continuación apuntamos algunas según aparición.

- En el capítulo 1, sección 3, vimos que $COL_{1,3}$ es NP -completo, incluso para subclases de grafos, como bipartitos planares y grafos split completos. Un caso que quedó abierto fue el de grafos completos. Usando la Proposición 2.29 se sigue que $K-COL_{1,d}$ es NP -completo para $d \geq 4$, pero no sabemos bien qué ocurre en el caso $d = 3$.
- Por su parte, en la sección 5, falta explorar la complejidad del problema $d-COVER$ en el caso general (solo vimos el caso completo). Por otro lado sería interesante ver si

para el problema $W\text{-MinStab}$ es posible encontrar un algoritmo FPT , usando como parámetros el número de pigmentos y algo relacionado a la función de pesos, como el peso máximo o la suma de los módulos de los pesos.

- En el capítulo 2, sección 2, queda abierto el saber se es posible reducirse al caso totalmente factible para otras clases de grafos, como bipartito completo, o grafo split (completo).
- Por otro lado, en el capítulo en general, falta ver si se puede generalizar el algoritmo FPT de COL_1 a COL_k .

Como ya mencionamos, el trabajo anterior también abre una puerta al estudio de problemas combinatoriales clásicos, aplicados a grafos pigmentados, como lo es, identificar el clique de tamaño máximo (una posible noción de clique se describe en la Definición 3.21), encontrar un independiente de peso máximo, estudiar problemas de flujo en grafos pigmentados dirigidos, cortes minimales, k -conectividad, etc. También, naturalmente, queda el ver si resultados como el Brooks para grafos pigmentados (Teorema 3.19), se pueden generalizar a hipergrafos o a multigrafos pigmentados.

Bibliografía

- [1] E. Angel, E. Bampis, A. Kononov, D. Paparas, E. Pountourakis, and V. Zissimopoulos. Clustering on k -edge-colored graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 211:15–22, October 2016.
- [2] Stefan Arnborg, Jens Lagergren, and Detlef Seese. Problems easy for tree-decomposable graphs extended abstract. In *Automata, Languages and Programming*, pages 38–51. Springer Berlin Heidelberg, 1988.
- [3] Claude Berge. Graphs and hypergraphs. 1973, 1973.
- [4] Hans L. Bodlaender, Pål Grønås Drange, Markus S. Dregi, Fedor V. Fomin, Daniel Lokshtanov, and Michał Pilipczuk. A k -5-approximation algorithm for treewidth. *SIAM Journal on Computing*, 45(2):317–378, January 2016.
- [5] Andreas Brandstädt. Partitions of graphs into one or two independent sets and cliques. *Discrete Mathematics*, 152(1):47 – 54, 1996.
- [6] Andreas Brandstädt, Van Bang Le, and Thomas Szymczak. The complexity of some problems related to graph 3-colorability. *Discrete Applied Mathematics*, 89(1):59 – 73, 1998.
- [7] Michele Conforti, Gérard Cornuéjols, and Giacomo Zambelli. *Integer Programming*. Springer International Publishing, 2014.
- [8] B. Courcelle. The monadic second-order logic of graphs iii : tree-decompositions, minors and complexity issues. *RAIRO - Theoretical Informatics and Applications - Informatique Théorique et Applications*, 26(3):257–286, 1992.
- [9] Bruno Courcelle. The monadic second-order logic of graphs. i. recognizable sets of finite graphs. *Information and Computation*, 85(1):12–75, March 1990.
- [10] Marek Cygan, Fedor V. Fomin, Łukasz Kowalik, Daniel Lokshtanov, Dániel Marx, Marcin Pilipczuk, Michał Pilipczuk, and Saket Saurabh. *Parameterized Algorithms*. Springer International Publishing, 2015.
- [11] Alessandro D’atri and Marina Moscarini. On hypergraph acyclicity and graph chordality. *Information Processing Letters*, 29(5):271–274, 1988.

- [12] Reinhard Diestel. *Graph Theory*. Springer Berlin Heidelberg, 2017.
- [13] Don R. Lick and Arthur T. White. k -degenerate graphs. *Canadian Journal of Mathematics*, 22(5):1082–1096, 1970.
- [14] Michael Sipser. *Introduction to the Theory of Computation*. Cengage learning, 2012.

Anexo

Nos referiremos a $G = (V, E)$ como un grafo simple con V el conjunto de nodos (finito) y $E \subseteq \binom{V}{2}$ el conjunto de aristas, donde $\binom{V}{2} = \{e \in 2^V : |e| = 2\}$, y cuando lo requiera nos referiremos a $V(G)$ como el conjunto de nodos de G y $E(G)$ como su conjunto de aristas; como es usual escribiremos $e = uv$ en vez de $e = \{u, v\}$. Cuando no se mencione, e denotará una arista y u, v, w denotarán vértices. Para $U \subseteq V$, las aristas de U son $E(U) = \{e \in E : e \subseteq U\}$, y el grafo inducido por U es $G[U] = (U, E(U))$. Para $U, W \subseteq V$ disjuntos, $E(U, W)$ denota las aristas entre U y W , i.e. el conjunto $\{uv \in E : u \in U \text{ y } v \in W\}$; en particular el corte de U es $\delta(U) = E(U, V \setminus U)$ y en caso que tenga un elemento, digamos $U = \{u\}$, simplemente escribiremos $\delta(u)$ en vez de $\delta(\{u\})$. El grado de v se denota $d(v) = |\delta(v)|$. La vecindad de $U \subseteq V$ es el conjunto de vértices $N(U) = \{v \in V \setminus U : \exists u \in U, uv \in E\}$ y la vecindad cerrada es $N[U] = U \cup N(U)$; análogamente para $U = \{u\}$ escribiremos $N(u), N[u]$ respectivamente. La expresión $H \subseteq G$ denota que H es subgrafo de G ; si además H es inducido escribiremos $H \sqsubseteq G$. Para H un menor de G simplemente denotamos $H \leq G$. Denotaremos $u \in G$ para referirnos a $u \in V(G)$ y también $e \in G$ en referencia a $e \in E(G)$. Un vértice $v \in G$ se dirá aislado si $\delta(v) = \emptyset$ y universal si $N[v] = V$. El grafo complemento de G es $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$. $V + U$ denota la unión $V \cup U$ y $V - U$ la diferencia $V \setminus U$; de igual manera para conjuntos de aristas; en particular si es de un elemento $U = \{u\}$ escribimos $V + u$ o $V - u$ respectivamente. $G + u$ denota el grafo $(V + u, E)$, $G - u = G[V - u]$ y $G \pm e = (V, E \pm e)$; en caso de anotar varias operaciones $(+, -)$ se asume que se realizan de izquierda a derecha, por ejemplo $G - u - e + w$ denota $((G - u) - e) + w$.