



**UNIVERSIDAD DE CHILE**  
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS**  
**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL**

# **DAÑO SUPERFICIAL ASIMÉTRICO EN CABLES: APLICACIÓN MÉTODO DE PERTURBACIONES**

**MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL**

**MATÍAS ENRIQUE HOFER JARAMILLO**

**PROFESOR GUÍA**

**JUAN FELIPE BELTRÁN MORALES**

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN**

**RICARDO ANTONIO HERRERA MARDONES**

**RAFAEL OMAR RUIZ GARCÍA**

**SANTIAGO DE CHILE**

**2020**

# **RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL**

**Por: Matías Hofer J**

**Prof. Guía: Sr. Juan Felipe Beltrán Morales**

**Fecha: 03/07/2020**

## **DAÑO SUPERFICIAL ASIMÉTRICO EN CABLES: APLICACIÓN MÉTODO DE PERTURBACIONES**

El presente trabajo de título consiste en estudiar cómo el corte de hebras exteriores de un cable afecta en su respuesta, es decir, la capacidad de carga y campos de tensiones y deformaciones a lo largo de la totalidad del cable. Se analizan diferentes daños en un cable de poliéster según disposiciones asimétricas de cortes de hebras en su sección transversal, que transfieren concentraciones de deformaciones y tensiones normales oscilantes a lo largo del modelo por la disposición helicoidal de las fibras dañadas. El objetivo principal es estudiar el comportamiento especialmente cercano a las condiciones de apoyo, que difieren del comportamiento en medio del cable por un efecto de Capa Límite, CL, en sus extremos. Se comienza demostrando la existencia de dicho efecto mediante un estudio diferencial de un modelo de cable rígido, doblemente empotrado y estirado, sometido a tracción y flexión biaxial, de donde es posible determinar la respuesta para todo rango en su recorrido. Su desplazamiento transversal se obtiene por el acoplamiento de desplazamientos transversales dentro y fuera de las CL, que se acoplan en una única respuesta, mediante la teoría del Método de las Perturbaciones. Se valida el uso de esta solución propuesta comparándola con modelos exactos y caracterizando paramétricamente las zonas críticas bajo el efecto de CL. Finalmente se comparan los resultados con modelos de elementos finitos previamente realizados, notando el porcentaje de incidencia al incorporar efecto.

Se concluye que el desarrollo de la CL depende de la rigidez transversal de la sección transversal del cable, largo inicial y carga axial aplicada; siendo este último el factor preponderante que determina extensiones del efecto de entre 2 y 14 % sobre el recorrido del modelo. Mientras que el Modelo Propuesto entrega respuestas de capacidad que varían entre 9 y 21 % a las estimaciones por elementos finitos, dependiente del daño estudiado.

*A mis Padres, Hermanas y Abuelos.*

# TABLA DE CONTENIDO

<b>Capítulo 1 Introducción</b> .....	<b>1</b>
1.1. Motivación .....	1
1.2. Objetivos .....	2
1.2.1. Objetivos Principales.....	2
1.2.2. Objetivos Específicos.....	2
1.3. Metodología .....	3
1.4. Marco teórico .....	4
1.4.1. Contexto .....	4
1.4.2. Discusión .....	5
1.4.3. Método de las Perturbaciones .....	10
1.4.4. Datos de entrada e implicancias.....	12
1.4.5. Hipótesis de trabajo .....	13
1.5. Alcances de capítulos.....	14
<b>Capítulo 2 Demostración de existencia de Capas Límites</b> .....	<b>15</b>
2.1. Ecuación diferencial modelada .....	15
2.2. Plano XY .....	17
2.2.1. Ecuación perturbada .....	17
2.2.2. Ecuación no perturbada .....	18
2.3. Plano XZ .....	20
2.3.1. Ecuación perturbada .....	20
2.3.2. Ecuación no perturbada .....	21
2.4. Análisis y conclusión .....	23
<b>Capítulo 3 Soluciones del Modelo Propuesto</b> .....	<b>24</b>
3.1. Consideraciones iniciales .....	24
3.2. Plano XY .....	25
3.2.1. Fuera de las Capas Límites .....	25
3.2.2. Dentro de las Capas Límites .....	27
3.2.3. Acoplamiento de soluciones .....	49
3.3. Plano XZ .....	50
3.3.1. Fuera de las Capas Límites .....	50
3.3.2. Dentro de las Capas Límites .....	50

3.3.3. Acoplamiento de soluciones .....	54
3.4. Soluciones compuestas .....	55
<b>Capítulo 4 Validación y estudio de solución por Método de las Perturbaciones .....</b>	<b>56</b>
4.1. Variación en la cantidad de términos de expansión propuesta .....	56
4.1.1. Resumen de resultados .....	57
4.1.2. Análisis y conclusión .....	58
4.2. Impacto de la variación paramétrica en las respuestas .....	59
4.2.1. Largo fijo y carga variable .....	60
4.2.2. Carga fija y largo variable .....	66
4.2.3. Análisis y conclusión .....	71
<b>Capítulo 5 Aplicación y comparación de modelos .....</b>	<b>72</b>
5.1. Algoritmo propuesto .....	72
5.2. Análisis de comportamiento dentro de las Capas Límites .....	74
5.3. Implementación de algoritmo y comparación con modelos anteriores .....	76
5.3.1. Distribución de deformaciones por componentes .....	77
5.3.2. Distribución de tensiones por componentes .....	88
5.3.3. Curvas de capacidad .....	99
5.3.4. Desplazamientos transversales .....	104
<b>Capítulo 6 Análisis de resultados y conclusiones .....</b>	<b>107</b>
6.1. Análisis de resultados .....	107
6.2. Conclusiones y discusión .....	110
6.3. Recomendación para futuras investigaciones .....	112
<b>Bibliografía .....</b>	<b>113</b>
<b>Anexos .....</b>	<b>115</b>
Anexo A Método de las perturbaciones en plano XZ .....	115
A.1. Fuera de las Capas Límites .....	115
A.2. Dentro de las Capas Límites .....	116
Anexo B Comparación soluciones EDO según cantidad de términos en expansión .....	133
Anexo C Variación paramétrica en respuestas EDO .....	135
C.1. Largo fijo y carga variable .....	135
C.2. Carga fija y largo variable .....	153
Anexo D Distribución longitudinal de curvaturas .....	167

Anexo E Desplazamientos transversales .....	169
E.1. Desplazamientos por plano.....	169
E.2. Desplazamientos 3D .....	172
Anexo F Datos FEM .....	175
F.1. Deformación por componentes .....	175
F.2. Tensión por componentes .....	177
F.3. Curvas de capacidad .....	180

# ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Fig. 1.1 Modelo estructural, De Vico (2013).....	5
Fig. 1.2 Sección Wedging con numeración de elementos.....	5
Fig. 1.3 Tipos y nomenclatura de daños asimétricos.....	6
Fig. 1.4 Solicitaciones externas al modelo, De Vico (2013).....	6
Fig. 1.5 Análisis de esfuerzos internos infinitesimales del modelo, De Vico (2013).....	7
Fig. 1.6 Ejemplo de falla de cable en extremos, D. Siegert y P. Brevet (2005).....	8
Fig. 2.1 Parámetros geométricos de cable Wedging, Vargas (2010).....	16
Fig. 2.2 Ejemplo equilibrio radial en sección transversal, De Vico (2013).....	16
Fig. 4.1 Comparación cantidad de términos en expansión, W12.....	57
Fig. 4.2 Deformada transversal XZ, L=0.65m y H=15%, W12.....	60
Fig. 4.3 Deformada transversal XZ, L=0.65m y H=30%, W12.....	61
Fig. 4.4 Deformada transversal XZ, L=0.65m y H=60%, W12.....	62
Fig. 4.5 Deformada transversal XZ, L=0.65m y H=100%, W12.....	63
Fig. 4.6 Longitud Capa Límite para diferentes H, L=0.65m, W12.....	64
Fig. 4.7 Razón de Capa Límite sobre largo final según deformación axial.....	65
Fig. 4.8 Deformada transversal XZ, H=30% y L=1.3m, W12.....	66
Fig. 4.9 Deformada transversal XZ, H=30% y L=1.95m, W12.....	67
Fig. 4.10 Deformada transversal XZ, H=30% y L=3.9m, W12.....	68
Fig. 4.11 Longitud Capa Límite para diferentes L, H=30%, W12.....	69
Fig. 4.12 Razón de Capa Límite sobre largo final según largo inicial.....	70
Fig. 4.13 Razón de Capa Límite sobre largo final según factor perturbador XZ.....	71
Fig. 5.1 Curvatura por plano, e=0.031, W12.....	74
Fig. 5.2 Distribución de deformaciones máximas dentro y fuera de CL, mm/mm.....	77
Fig. 5.3 Distribución de deformación por componente, W136.....	79
Fig. 5.4 Distribución de deformación por componente, W1.....	80
Fig. 5.5 Distribución de deformación por componente, W12.....	81
Fig. 5.6 Distribución de deformación por componente, W123.....	82
Fig. 5.7 Distribución de deformación por componente, W1234.....	83
Fig. 5.8 Distribución de tensiones máximas dentro y fuera de CL, MPa.....	88
Fig. 5.9 Distribución de tensión por componente, W136.....	90
Fig. 5.10 Distribución de tensión por componente, W1.....	91
Fig. 5.11 Distribución de tensión por componente, W12.....	92
Fig. 5.12 Distribución de tensión por componente, W123.....	93
Fig. 5.13 Distribución de tensión por componente, W1234.....	94
Fig. 5.14 Curvas de capacidad, W136.....	99
Fig. 5.15 Curvas de capacidad, W1.....	100
Fig. 5.16 Curvas de capacidad, W12.....	100
Fig. 5.17 Curvas de capacidad, W123.....	101
Fig. 5.18 Curvas de capacidad, W1234.....	101
Fig. 5.19 Comparación capacidades finales propuestas con respecto a FEM, según IA.....	103

<b>Fig. 5.20</b> Desplazamiento transversal por plano, $e=0.031$ , W136. ....	104
<b>Fig. 5.21</b> Desplazamiento transversal por plano, $e=0.031$ , W1. ....	105
<b>Fig. 5.22</b> Desplazamiento transversal por plano, $e=0.031$ , W12. ....	105
<b>Fig. 5.23</b> Desplazamiento transversal por plano, $e=0.031$ , W123. ....	106
<b>Fig. 5.24</b> Desplazamiento transversal por plano, $e=0.031$ , W1234. ....	106
<b>Fig. 6.1</b> Comparación cantidad de términos en expansión, W136. ....	133
<b>Fig. 6.2</b> Comparación cantidad de términos en expansión, W1. ....	133
<b>Fig. 6.3</b> Comparación cantidad de términos en expansión, W123. ....	134
<b>Fig. 6.4</b> Comparación cantidad de términos en expansión, W1234. ....	134
<b>Fig. 6.5</b> Deformada transversal XZ, $L=0.65m$ y $H=15\%$ , W136. ....	135
<b>Fig. 6.6</b> Deformada transversal XZ, $L=0.65m$ y $H=30\%$ , W136. ....	136
<b>Fig. 6.7</b> Deformada transversal XZ, $L=0.65m$ y $H=60\%$ , W136. ....	137
<b>Fig. 6.8</b> Deformada transversal XZ, $L=0.65m$ y $H=100\%$ , W136. ....	138
<b>Fig. 6.9</b> Deformada transversal XZ, $L=0.65m$ y $H=15\%$ , W1. ....	139
<b>Fig. 6.10</b> Deformada transversal XZ, $L=0.65m$ y $H=30\%$ , W1. ....	140
<b>Fig. 6.11</b> Deformada transversal XZ, $L=0.65m$ y $H=60\%$ , W1. ....	141
<b>Fig. 6.12</b> Deformada transversal XZ, $L=0.65m$ y $H=100\%$ , W1. ....	142
<b>Fig. 6.13</b> Deformada transversal XZ, $L=0.65m$ y $H=15\%$ , W123. ....	143
<b>Fig. 6.14</b> Deformada transversal XZ, $L=0.65m$ y $H=30\%$ , W123. ....	144
<b>Fig. 6.15</b> Deformada transversal XZ, $L=0.65m$ y $H=60\%$ , W123. ....	145
<b>Fig. 6.16</b> Deformada transversal XZ, $L=0.65m$ y $H=100\%$ , W123. ....	146
<b>Fig. 6.17</b> Deformada transversal XZ, $L=0.65m$ y $H=15\%$ , W1234. ....	147
<b>Fig. 6.18</b> Deformada transversal XZ, $L=0.65m$ y $H=30\%$ , W1234. ....	148
<b>Fig. 6.19</b> Deformada transversal XZ, $L=0.65m$ y $H=60\%$ , W1234. ....	149
<b>Fig. 6.20</b> Deformada transversal XZ, $L=0.65m$ y $H=100\%$ , W1234. ....	150
<b>Fig. 6.21</b> Longitud Capa Límite para diferentes H, $L=0.65m$ , W136. ....	151
<b>Fig. 6.22</b> Longitud Capa Límite para diferentes H, $L=0.65m$ , W1. ....	151
<b>Fig. 6.23</b> Longitud Capa Límite para diferentes H, $L=0.65m$ , W123. ....	152
<b>Fig. 6.24</b> Longitud Capa Límite para diferentes H, $L=0.65m$ , W1234. ....	152
<b>Fig. 6.25</b> Deformada transversal XZ, $H=30\%$ y $L=1.3m$ , W136. ....	153
<b>Fig. 6.26</b> Deformada transversal XZ, $H=30\%$ y $L=1.95m$ , W136. ....	154
<b>Fig. 6.27</b> Deformada transversal XZ, $H=30\%$ y $L=3.9m$ , W136. ....	155
<b>Fig. 6.28</b> Deformada transversal XZ, $H=30\%$ y $L=1.3m$ , W1. ....	156
<b>Fig. 6.29</b> Deformada transversal XZ, $H=30\%$ y $L=1.95m$ , W1. ....	157
<b>Fig. 6.30</b> Deformada transversal XZ, $H=30\%$ y $L=3.9m$ , W1. ....	158
<b>Fig. 6.31</b> Deformada transversal XZ, $H=30\%$ y $L=1.3m$ , W123. ....	159
<b>Fig. 6.32</b> Deformada transversal XZ, $H=30\%$ y $L=1.95m$ , W123. ....	160
<b>Fig. 6.33</b> Deformada transversal XZ, $H=30\%$ y $L=3.9m$ , W123. ....	161
<b>Fig. 6.34</b> Deformada transversal XZ, $H=30\%$ y $L=1.3m$ , W1234. ....	162
<b>Fig. 6.35</b> Deformada transversal XZ, $H=30\%$ y $L=1.95m$ , W1234. ....	163
<b>Fig. 6.36</b> Deformada transversal XZ, $H=30\%$ y $L=3.9m$ , W1234. ....	164

<b>Fig. 6.37</b> Longitud Capa Límite para diferentes L, H=30%, W136.....	165
<b>Fig. 6.38</b> Longitud Capa Límite para diferentes L, H=30%, W1.....	165
<b>Fig. 6.39</b> Longitud Capa Límite para diferentes L, H=30%, W123.....	166
<b>Fig. 6.40</b> Longitud Capa Límite para diferentes L, H=30%, W1234.....	166
<b>Fig. 6.41</b> Curvatura por plano, e=0.031, 136.....	167
<b>Fig. 6.42</b> Curvatura por plano, e=0.031, W1.....	167
<b>Fig. 6.43</b> Curvatura por plano, e=0.031, W123.....	168
<b>Fig. 6.44</b> Curvatura por plano, e=0.031, W1234.....	168
<b>Fig. 6.45</b> Desplazamiento transversal por plano, e=0.074, W136.....	169
<b>Fig. 6.46</b> Desplazamiento transversal por plano, e=0.074, W1.....	169
<b>Fig. 6.47</b> Desplazamiento transversal por plano, e=0.074, W12.....	170
<b>Fig. 6.48</b> Desplazamiento transversal por plano, e=0.074, W123.....	170
<b>Fig. 6.49</b> Desplazamiento transversal por plano, e=0.074, W1234.....	171
<b>Fig. 6.50</b> Desplazamiento transversal 3D, W136.....	172
<b>Fig. 6.51</b> Desplazamiento transversal 3D, W1.....	172
<b>Fig. 6.52</b> Desplazamiento transversal 3D, W12.....	173
<b>Fig. 6.53</b> Desplazamiento transversal 3D, W123.....	173
<b>Fig. 6.54</b> Desplazamiento transversal 3D, W1234.....	174

# ÍNDICE DE TABLAS

<b>Tabla 1.1</b> Parámetros de entrada, Wedging. ....	12
<b>Tabla 1.2</b> Índices de Asimetría por configuración. ....	12
<b>Tabla 3.1</b> Referencias de soluciones compuestas. ....	55
<b>Tabla 4.1</b> Diferencia porcentual MP/Exacta según expansión. ....	57
<b>Tabla 4.2</b> Factor perturbador y longitudes de Capa Límite variando H. ....	64
<b>Tabla 4.3</b> Factor perturbador y longitudes de Capa Límite variando L. ....	69
<b>Tabla 5.1</b> Aumento porcentual de curvatura en XZ dentro de CL. ....	75
<b>Tabla 5.2</b> Estudio gradiente de deformación por sección transversal. ....	78
<b>Tabla 5.3</b> Análisis deformación por componente, W136. ....	84
<b>Tabla 5.4</b> Análisis deformación por componente, W1. ....	85
<b>Tabla 5.5</b> Análisis deformación por componente, W12. ....	86
<b>Tabla 5.6</b> Análisis deformación por componente, W123. ....	87
<b>Tabla 5.7</b> Análisis deformación por componente, W1234. ....	87
<b>Tabla 5.8</b> Estudio gradiente de tensión por sección transversal. ....	89
<b>Tabla 5.9</b> Análisis tensión por componente, W136. ....	95
<b>Tabla 5.10</b> Análisis tensión por componente, W1. ....	96
<b>Tabla 5.11</b> Análisis tensión por componente, W12. ....	97
<b>Tabla 5.12</b> Análisis tensión por componente, W123. ....	98
<b>Tabla 5.13</b> Análisis tensión por componente, W1234. ....	98
<b>Tabla 5.14</b> Análisis de curvas de capacidad. ....	102
<b>Tabla 5.15</b> Solicitaciones y desplazamientos máximos del modelo. ....	104
<b>Tabla 6.1</b> Hebras críticas a la falla del MP, para cada daño. ....	107
<b>Tabla 6.2</b> Datos deformación por componente FEM, W136. ....	175
<b>Tabla 6.3</b> Datos deformación por componente FEM, W1. ....	175
<b>Tabla 6.4</b> Datos deformación por componente FEM, W12. ....	176
<b>Tabla 6.5</b> Datos deformación por componente FEM, W123. ....	176
<b>Tabla 6.6</b> Datos deformación por componente FEM, W1234. ....	177
<b>Tabla 6.7</b> Datos tensión por componente FEM, W136. ....	177
<b>Tabla 6.8</b> Datos tensión por componente FEM, W1. ....	178
<b>Tabla 6.9</b> Datos tensión por componente FEM, W12. ....	178
<b>Tabla 6.10</b> Datos tensión por componente FEM, W123. ....	179
<b>Tabla 6.11</b> Datos tensión por componente FEM, W1234. ....	179
<b>Tabla 6.12</b> Datos curvas de capacidad FEM. ....	180

# Capítulo 1 Introducción

## 1.1. Motivación

Los cables conforman una estructura fundamental en incontables sistemas estructurales; puentes colgantes, torres de alta tensión, grúas de sistemas portuarios, teleféricos y ascensores son sólo algunos ejemplos de la versatilidad de este material. Entregan una solución factible en problemas modelados principalmente a tracción; pero de igual manera a corte, flexión y torsión, especialmente cuando la disposición de la estructura es de difícil alcance constructivo en terreno. La seguridad de estos elementos posee crucial importancia, tanto para la estructura como para sus alrededores, razón por la que se debe estudiar a fondo cómo distintos tipos de daños afectan su comportamiento en elongación y deformación transversal.

Se plantea estudiar cómo el corte de hebras externas de un cable trenzado de poliéster, perturban los campos de tensiones y deformaciones de un sistema sometido a cargas estáticas en ambos planos. Este análisis ya se ha estudiado con anterioridad, De Vico (2013); pero obviando la existencia de sectores tipo Capa Límite en los bordes del modelo. El escaso análisis de dicho fenómeno da pie a querer estudiar qué sucede dentro y fuera de dichas Capas Límites, determinando las longitudes efectivas de estas zonas, y logrando un acoplamiento de comportamientos en las zonas de transición a través del análisis diferencial del Método de las Perturbaciones. Caracterizando de esta manera la totalidad del modelo.

A modo de bibliografía inicial, se utiliza como base el trabajo de Memoria “*Efecto de la distribución asimétrica de daño en la sección transversal de un cable: Modelación Numérica*” de Enzo De Vico (2013); los libros “*Introduction to Perturbation Techniques*” de Ali H. Nayfeh (1993) y “*Applied Mathematics Second Edition*” de J. David Logan (1996); la aplicación del Método de las Perturbaciones por Alfossail et Al. (2016): “*An analytic solution of the static problem of inclined risers conveying fluid*”; y literatura de análisis estructural “*Nonlinear Structural Mechanics*” de Walter Lacarbonara (2013).

## 1.2. Objetivos

### 1.2.1. Objetivos Principales

Estudiar la deformación y respuesta tensional de cables con distintos daños superficiales asimétricos, resolviendo su modelación diferencial de viga no lineal mediante el Método de las Perturbaciones.

### 1.2.2. Objetivos Específicos

- [1] Demostrar la existencia del efecto de Capas Límites en el modelo estudiado.
- [2] Proponer una nueva solución de desplazamiento transversal de cable dañado según el Método de las Perturbaciones.
- [3] Validar el uso de una solución aproximada ante un problema con solución exacta.
- [4] Determinar los parámetros influyentes en el desarrollo de las Capas Límites.
- [5] Cuantificar el incremento de sollicitación tensional en la cercanía de los apoyos con respecto al medio del cable.
- [6] Comparar la validez de modelar cables tipo fibra, *String Theory*, en relación a un modelo cable-viga perturbado.

### 1.3. Metodología

- **Estudio bibliográfico de trabajos asociados al tema.**

Lectura de bibliografía que estudie los efectos de la distribución de daños en la sección transversal de un cable y teoría de las perturbaciones. Documentos que se complementan entre ellos, sirviendo de base teórica de la presente memoria.

- **Demostración de existencia de Capas Límites en comportamiento de cables.**

Resolución analítica de ecuación diferencial de modelo no lineal de cable solicitado por carga axial y flexión biaxial estática. Encontrar incongruencias en su respuesta ante el mismo problema no perturbado, bajo las mismas condiciones de borde, que conlleven a la existencia de zonas críticas cercanas a los apoyos.

- **Calcular solución de la ecuación diferencial del cable tipo viga mediante el Método de las Perturbaciones.**

- Soluciones dentro de las Capas Límites, mediante expansión en serie por planos.
- Solución fuera de las Capas Límites, mediante expansión en serie por planos.
- Acoplamiento de soluciones para obtener respuesta única por plano.

- **Evaluar uso del modelo propuesto ante un modelo exacto.**

Comparar solución diferencial exacta con la aproximada propuesta para distintos alcances de expansiones consideradas.

- **Caracterizar el desarrollo de Capas Límites en la longitud del cable.**

Reconocer factores que determinen la longitud de las zonas bajo el efecto de Capa Límite, estudiando la manera en que inciden según sus valores de entrada.

- **Determinar deformadas y solicitaciones del modelo.**

Incorporar la solución de la ecuación diferencial en un algoritmo numérico que permita determinar el estado de deformaciones y tensiones dentro y fuera de las Capas Límites. Algoritmo en Matlab que incorpora la no linealidad geométrica del cable y su forma helicoidal de hebras. Comparar resultados con modelos anteriores.

## **1.4. Marco teórico**

### **1.4.1. Contexto**

Las aplicaciones de cables en soluciones ingenieriles son únicas para resolver cada problema estructural que lo requiera. Son implementados en sistemas de anclajes, puentes, elementos hormigonados, elevadores, entre otros. Las configuraciones requeridas para cada sistema varían desde las características propias del material utilizado, hasta las disposiciones físicas de cantidad de componentes y geometría de las hebras helicoidales que conforman el elemento.

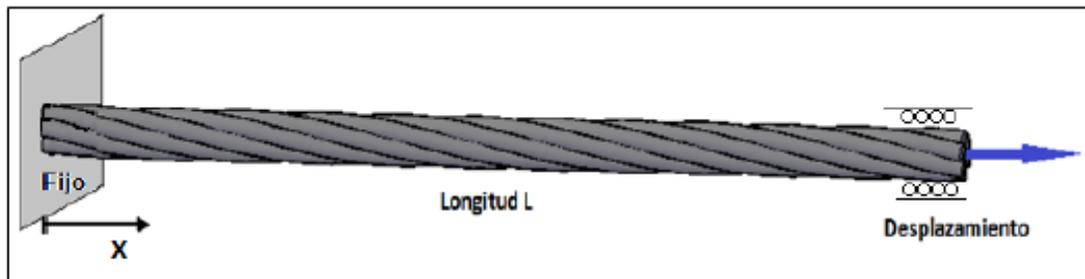
La preocupación por la seguridad en los sistemas de cableados ha sido tema de estudio desde los comienzos de sus implementaciones. Existen varios trabajos que estudian como la rigidez de ellos, que suele ser obviada en cálculos preliminares, afecta el comportamiento de un cable solicitado a esfuerzos traccionales, corte, flexión y torsión. No obstante, dichos trabajos suelen simplificar hipótesis de estudio para sus conclusiones.

Debido a la amplia biblioteca que cubre temas relacionados a los alcances de la presente tesis, es de gran utilidad comenzar discutiendo sus conclusiones y cómo estos pueden aportar al desarrollo de la presente memoria. En las siguientes secciones se detallan los documentos bases a considerar, para posteriormente plantear una conclusión que dé pie a las hipótesis del presente trabajo.

## 1.4.2. Discusión

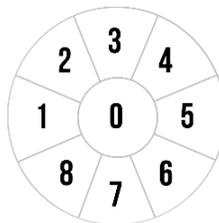
La presente memoria se considera una continuación del trabajo para optar al título de Ingeniero Civil de **Enzo De Vico (2013)**: “*Efectos de la distribución asimétrica de daño en la sección transversal de un cable: Modelación numérica*”, bajo la supervisión del profesor Juan Felipe Beltrán de la Universidad de Chile. Dicho trabajo modela numéricamente el comportamiento de cables con daño asimétrico; no obstante, como se sugiere en la sección anterior, su solución no considera detalles que pueden definir de mejor manera el comportamiento en los extremos del cable estudiado.

De Vico presenta un modelo mecánico no lineal para estimar las deformaciones transversales de cables dañados en el perímetro de su sección transversal. Lo asimétrico del daño se entiende como hebras externas cortadas que afectan en todo el recorrido de cable, es decir, el daño no se distribuye de manera homogénea por el perímetro de la sección. Este modelo se representa como un cable/viga rígida, empotrada en ambos extremos; pero con posibilidad de desplazarse axialmente por un extremo, *Fig. 1.1*.



*Fig. 1.1 Modelo estructural, De Vico (2013).*

El cable se plantea internamente mediante una única sección transversal fija tipo “*Wedging*”. Esta consta de una hebra núcleo en contacto circunferencial con los elementos trapecoidales de capa externa, *Fig. 1.2*, presentando los daños a estudiar en la *Fig. 1.3*. Destacando que **Li et Al (2002)** aporta con datos experimentales de curvas de capacidad para cables de iguales características.



*Fig. 1.2 Sección Wedging con numeración de elementos.*

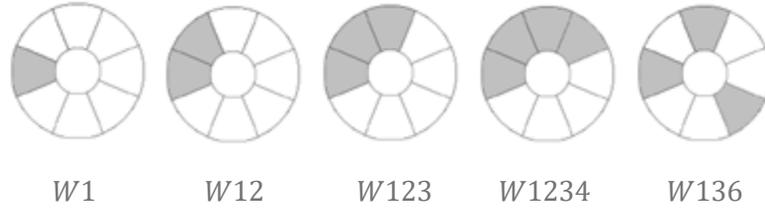


Fig. 1.3 Tipos y nomenclatura de daños asimétricos.

La estructura se estira mediante una carga axial constante, denominada  $H$ . Esta acción implica que sus componentes exteriores ejercen reacciones en dirección al núcleo de la sección. Dado que las hebras faltantes derechamente se desprecian en todo el recorrido del cable, se producen fuerzas radiales desbalanceadas por sus pares al otro extremo del perímetro de la sección. Esto se traduce al modelo como un par de fuerzas distribuidas sinusoidales en ambos planos, denominadas  $q_y$  y  $q_z$ . Las solicitaciones externas se esquematizan en la Fig. 1.4.

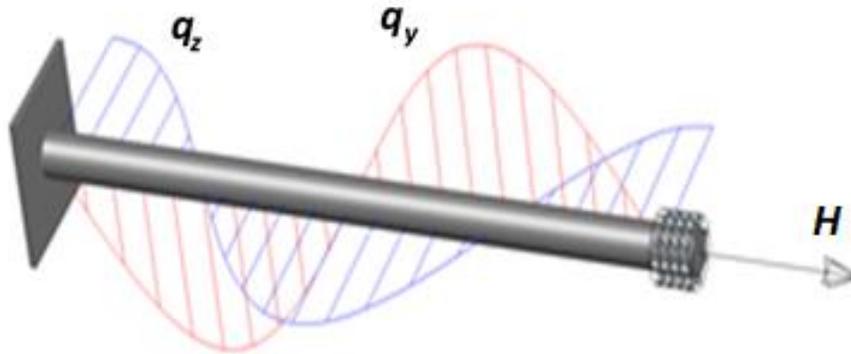


Fig. 1.4 Solicitaciones externas al modelo, De Vico (2013).

El estudio infinitesimal de los esfuerzos internos del sistema se sustenta la teoría de equilibrio estático sobre una viga Bernoulli, es decir, el modelo deformado mantiene su sección transversal plana y perpendicular al eje de referencia. Las ecuaciones diferenciales que determinan las deformaciones transversales del problema, según análisis de la Fig. 1.5, se observan en las *Ec. 1.1* y *Ec. 1.2* para los planos XY y XZ, respectivamente.

$$(EI_{zz})_{sec} \frac{d^4 v(x)}{dx^4} - q_y(x) \left( 1 + \frac{du(x)}{dx} \right) - H(x) \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = 0 \quad \text{Ec. 1.1}$$

$$(EI_{yy})_{sec} \frac{d^4 w(x)}{dx^4} - q_z(x) \left( 1 + \frac{du(x)}{dx} \right) - H(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = 0 \quad \text{Ec. 1.2}$$

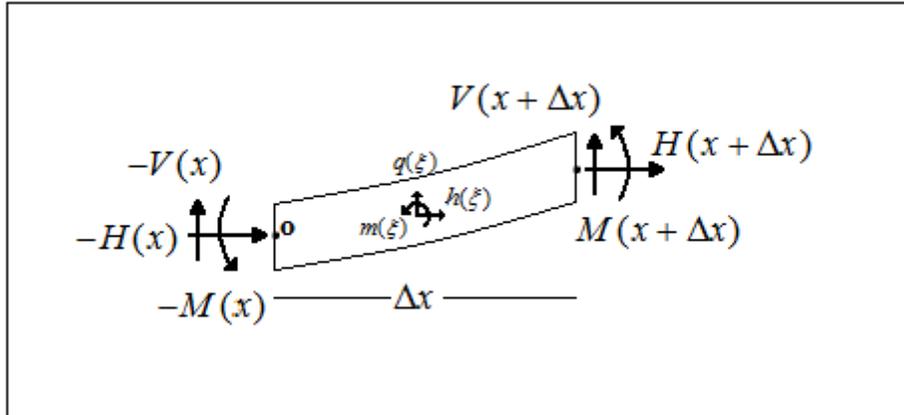


Fig. 1.5 Análisis de esfuerzos internos infinitesimales del modelo, De Vico (2013).

Donde  $H(x)$ ,  $V(x)$  y  $M(x)$  corresponden a esfuerzos axiales, de corte y momento;  $h(\xi)$ ,  $q(\xi)$  y  $m(\xi)$  sus incrementos distribuidos a lo largo del componente;  $u(x)$ ,  $v(x)$ ,  $w(x)$  las deformaciones en los planos  $x$ ,  $y$  y  $z$ ; y  $(EI)_{sec}$  la rigidez transversal de la sección para cada plano.

En este punto, De Vico resuelve de manera exacta las *Ec. 1.1* y *Ec. 1.2* para obtener  $v(x)$  y  $w(x)$ , notando las condiciones de borde del modelo de la *Ec. 1.3* a *Ec. 1.6*. Se concluye que sus resultados teóricos son aproximaciones aceptables del problema al compararlos con modelaciones en elementos finitos y datos experimentales extraídos del trabajo de título “Análisis de cables de sección transversal sin daño y con daño simétrico y asimétrico sujetos a cargas axisimétricas utilizando modelos tridimensionales de elementos finitos” de **Vargas (2010)**. No obstante, se plantea que estas soluciones pueden ser más precisas.

De este trabajo se puede desprender que, a pesar de estudiar cables, la resistencia a flexión aumenta considerablemente en torno a sus apoyos. Aquí surge la necesidad de encontrar una mejor respuesta teórica ante daños, considerando comportamientos diferenciados por tramos.

$$v(x = 0) = v(x = L) = 0 \quad \text{Ec. 1.3}$$

$$w(x = 0) = w(x = L) = 0 \quad \text{Ec. 1.4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x = 0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x = L) = 0 \quad \text{Ec. 1.5}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x = 0) = \frac{\partial w}{\partial x}(x = L) = 0 \quad \text{Ec. 1.6}$$

Paralelamente, existen estudios concluyentes que los cables suelen fallar por fatiga en sus extremos con mayor frecuencia que en los tramos medios. Un ejemplo es lo realizado por **D. Siegert y P. Brevet (2005)** en “*Fatigue of stay cables inside end fittings high frequencies of wind induced vibrations*”. En donde, tras 20 años de uso, desmantelan un cable de puente colgante que presentaba daños superficiales con fallas presentes únicamente en torno a su anclaje inferior. Situación representada en la *Fig. 1.6*.



*Fig. 1.6 Ejemplo de falla de cable en extremos, D. Siegert y P. Brevet (2005).*

El artículo “*Numerical framework for stress cycle assessment of cables under vortex shedding excitations*” de **Ruiz et Al. (2019)** detalla el cálculo de rigidez transversal seccional de cables de hebras helicoidales, *Ec. 1.7* y *Ec. 1.8*, metodología no implementada en la memoria de De Vico.

$$(EI_{zz})_{sec} = \sum_{i=1}^M ES_i \bar{y}_i^2 \cos^3 \theta_i + \sum_{i=1}^M EI_i \cos \theta_i \quad \text{Ec. 1.7}$$

$$(EI_{yy})_{sec} = \sum_{i=1}^M ES_i \bar{z}_i^2 \cos^3 \theta_i + \sum_{i=1}^M EI_i \cos \theta_i \quad \text{Ec. 1.8}$$

Donde los subíndices *zz* y *yy* referencian al plano estudiado; *M*, *S*, *I* y  $\theta$  a la cantidad total, área individual, inercia local e inclinación axial de hebras; los términos  $\bar{z}_i$  y  $\bar{y}_i$  son la distancia del eje neutro de la sección a los centroides de hebras en cada dirección; y *E* el módulo de elasticidad de la configuración del cable. Notar que, debido a las inclinaciones de fibras, este último no es propio del material utilizado; por lo que se debe estimar experimentalmente.

**Konstantine O. Papailiou (1997)** en su trabajo "*On the Bending Stiffness of transmission Line Conductors*" deduce el cálculo de curvaturas críticas de cables. Límite útil para determinar si la sección transversal del modelo se comporta como cuerpo rígido en todo el recorrido, o si las capas externas deslizan con respecto al núcleo interior.

**Walter Lacarbonara (2013)** en su libro "*Nonlinear structural mechanics. Theory, Dynamical Phenomena and Modeling*" presenta un tratamiento unificado de elementos fundamentales de la mecánica y dinámica de estructuras no lineales; modelamiento moderno computacionales; y fenómenos estructurales en base a experimentos y cálculos computacionales. Este documento sirve de sustento teórico para modelos a desarrollar en esta memoria en softwares matemáticos. Además de abordar la teoría de cables convencional que no considera resistencia a flexión, esto es, *String Theory*.

**Ángelo Luongo y Daniele Zulli (2018)** publican en "*Static Perturbation Analysis of Inclined Shallow: Elastic Cables under general 3D-loads*" sistemas estructurales de cables sometidos a cargas distribuidas estáticamente y plantean las bases del método de perturbaciones como herramienta para acoplar respuestas sobre distintos dominios, en este caso centro y "*Capas Límites*", entendiendo este último concepto como una respuesta violenta en un rango acotado del modelo. Sus conclusiones sirven para proyectar resultados sobre secciones transversales dañadas.

### 1.4.3. Método de las Perturbaciones

**J. David Logan (1996)** detalla en su libro *“Applied Mathematics Second Edition”* que los modelos matemáticos de problemas físicos son a menudo representados por ecuaciones que no pueden ser resueltas de manera exacta por técnicas analíticas. El Método de las Perturbaciones permite obtener soluciones aproximadas a ecuaciones diferenciales adimensionales que contemplen un término pequeño, “perturbación”, en comparación a los demás.

**Ali Hasan Nayfeh (1993)** publica en su libro *“Introduction to Perturbation Techniques”* distintas maneras de abordar modelos matemáticos con términos perturbadores. El Capítulo 12 aborda problemas con efectos de “Capas Límites”, CL, siendo esta la base teórica utilizada por **Alfosail et Al (2016)** en su paper *“An analytic solution of the static problems of inclined risers conveying fluid”* de un modelo con dos Capas Límites, similar al problema propuesto en esta tesis.

Considerando la variable  $\epsilon$  representativa del factor perturbador del problema diferencial adimensional a resolver, la metodología propone una solución en expansión del tipo *Ec. 1.9*. La cantidad de términos a usar queda a criterio de autor, truncando la expresión donde cuya potencia de  $\epsilon$  deje de corregir de manera considerable la expansión.

$$\hat{f}(\hat{x}, \epsilon) = \hat{f}_0(\hat{x}) + \epsilon \hat{f}_1(\hat{x}) + \epsilon^2 \hat{f}_2(\hat{x}) + \epsilon^3 \hat{f}_3(\hat{x}) + \dots \quad \text{Ec. 1.9}$$

Esta solución es derivada y evaluada directamente en el modelo para representar el comportamiento fuera de las Capas Límites, en donde no es válido aplicar las condiciones de borde. Se realiza un pareo de términos diferenciales según potencias de  $\epsilon$ , cuyas soluciones entregan un sistema de ecuaciones con constantes de integración desconocidas por el momento.

Para estudiar los casos extremos, se debe realizar un ajuste de escala de la variable  $\hat{x}$  dependiente de  $\epsilon$  dentro de cada CL. Este cambio de variable se denota como variable interna, y se impone de manera que las condiciones de borde, CB, iniciales sigan siendo válidas tras el ajuste, y estas conlleven CB para cada subfunción en la expansión. Se reemplaza la nueva solución propuesta en el modelo y se parean términos diferenciales según potencias de  $\epsilon$ , cuyas soluciones entregan un sistema de ecuaciones con constantes de integración desconocidas por el momento. En estos casos sí es válido utilizar las CB para simplificar constantes; no obstante, no todas son conocidas tras aplicar dichas condiciones.

Las constantes desconocidas de los casos anteriores son determinadas igualando términos asociadas a cada subfunción propuesta. Se reescribe la solución externa en función de la variable interna, y las soluciones internas en función de la variable externa. Físicamente esto representa el expandir levemente las respuestas fuera de sus rangos aplicables. Dado que el comportamiento del modelo debe ser único en las zonas de interfaz, se igualan términos que acompañan potencias de  $\epsilon$  para despejar los valores de constantes desconocidas.

Por último, la solución final del modelo queda unificada y validada dentro del intervalo  $\hat{x} \in [0,1]$  como la suma de respuestas externas e internas, menos las correcciones correspondientes a evaluar las soluciones internas en los rangos externos a la CL.

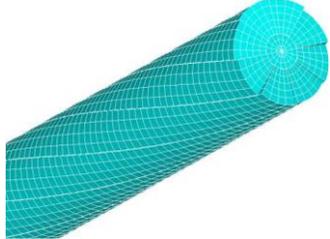
Si bien existen trabajos que abordan otras metodologías de resolución de problemas físicos similares, por ejemplo **Gerstmayr y Shabana (2006)** en *“Analysis of Thin Beams and Cables Using the Absolute Nodal Co-ordinate Formulation”*; **Denoël y Detornay (2010)** en *“Multiple Scales Solution for a Beam with a Small Bending Stiffness”*; y **Canor y Denoël (2013)** en *“Vibrations of cables with bending stiffness by an asymptotic approach”*, se opta por el Método de las Perturbaciones ya que la modelación se condice de mejor manera con sus hipótesis de trabajo.

### 1.4.4. Datos de entrada e implicancias

Dado que se recrean las modelaciones de De Vico, la *Tabla 1.1* resume las características físicas y de materiales de las configuraciones usadas. Estos son valores elegidos con tal que recreen los experimentos de Li et Al.

Consecuentemente, la *Tabla 1.2* presenta Índices de Asimetría inherentes a cada daño estudiado; valores que expresan qué tan poco simétrica es la sección transversal estudiada. Notando que el daño *W136* es el más simétrico, para luego aumentar la asimetría hasta el *W1234*.

*Tabla 1.1 Parámetros de entrada, Wedging.*

<b>Parámetro de entrada</b>	<b>Valor</b>	<b>Modelo FEM</b>
Material	<i>Poliéster</i>	 <p>Vargas (2010)</p>
Módulo de Elasticidad de la configuración $E$	6.493 MPa	
Deformación de falla $e_b$	0,124 mm/mm	
Tensión de falla $\sigma_b$	897 MPa	
Paso de la hélice $p$	81,28 mm	
Ángulo de la hélice $\theta$	9,47°	
Ángulo de elemento helicoidal $\theta$	45°	
Área del núcleo $S_c$	3,24 mm <sup>2</sup>	
Área del elemento helicoidal $S_e$	3,24 mm <sup>2</sup>	

*Tabla 1.2 Índices de Asimetría por configuración.*

<b>Configuración</b>	<b>IA</b>
<i>W136</i>	0,093
<i>W1</i>	0,162
<i>W12</i>	0,313
<i>W123</i>	0,441
<i>W1234</i>	0,538

### 1.4.5. Hipótesis de trabajo

Dado que casi la totalidad de fallas en cables de la vida real ocurren en los extremos, y que el trabajo de De Vico (2013) no detalla lo que ocurre en dichas zonas; se propone complementar dicho estudio con el comportamiento dentro de estas “*Capas Límites*”. Se espera de esta manera concluir una única respuesta, deformación y distribución de tensiones, para todos los dominios del cable; y que capture un incremento de tensiones normales cercanas a los apoyos, mediante el Método de Perturbaciones.

Se sigue el modelo estructural, *Fig. 1.1*, de sección transversal tipo Wedging con configuraciones de daño según la *Fig. 1.3*; aplicando las rigideces transversales propuestas por Ruiz et Al. (2019), *Ec. 1.7* y *Ec. 1.8*. Destacando los siguientes supuestos de desarrollo:

- Modelo de viga no lineal.
- La relación de deformación y desplazamiento considerada cumple con la Hipótesis de Bernoulli.
- Se aplican leyes constitutivas propias del material que conforma los cables. No lineal para el poliéster.
- El módulo de elasticidad  $E$  corresponde al propio del cable sin daño, es decir, se ve afectado por la orientación de sus fibras y no es directamente el del material. Este se deduce del promedio de curvas de capacidad por modelos de área neta, al llegar a la falla, presentados por De Vico.
- Se implementa también la rigidez transversal propuesta por Ruiz et Al sobre el trabajo de De Vico para obtener la solución exacta teórica. Siendo estos valores por planos fijos para todo el recorrido; pero dependientes de la deformación total del modelo.
- Inercias locales de hebras externas se calculan como circunferencia de área equivalente.
- Se desprecia posibles efectos de torsión debido a fuerzas radiales desbalanceadas, ya que los desplazamientos de ejes principales de inercia en la sección transversal son ínfimos.
- Los valores de deformación y tensión asociadas a cada hebra del cable se calculan como valores únicos y representativos de la totalidad de cada elemento. Solicitaciones ubicadas en sus propios centros de gravedad.

## **1.5. Alcances de capítulos**

### **Capítulo 2 Demostración de existencia de Capas Límites**

Se define el modelo y se expone la incongruencia en la relación de la respuesta de la EDO del problema de cuarto y segundo orden. Centrándose en que las condiciones de borde de giro explican dichas diferencias y su efecto sobre los extremos del cable, es decir, las Capas Límites.

### **Capítulo 3 Soluciones del Modelo Propuesto**

Presenta el análisis matemático detallado de la aplicación del Método de las Perturbaciones para las ecuaciones diferenciales que gobiernan el modelo. Se concluyen las respuestas exactas de deformaciones transversales  $\hat{v}(\hat{x})$  y  $\hat{w}(\hat{x})$ .

### **Capítulo 4 Validación y estudio de solución por Método de las Perturbaciones**

Se estudia la similitud de la respuesta aproximada con respecto a la exacta, notando la diferencia conforme a la cantidad de términos en expansión se considere. Además, se analiza la influencia paramétrica del factor perturbador en la longitud de la Capa Límite.

### **Capítulo 5 Aplicación y comparación de modelos**

Explica el algoritmo computacional implementado y el comportamiento estimado de cables con daño asimétrico por el Modelo Propuesto, comparándolo con modelos exactos, datos experimentales y de elementos finitos. Presenta estudio de resultados dentro y fuera de las Capas Límites, distribución de deformaciones y tensiones en las secciones del cable, curvas de capacidad, y deformadas transversales.

### **Capítulo 6 Análisis de resultados y conclusiones**

Se resumen los resultados más importantes del análisis numérico del Capítulo 5 y las conclusiones generales por capítulos, dejando constancia de recomendaciones a futuras investigaciones.

# Capítulo 2 Demostración de existencia de Capas Límites

## 2.1. Ecuación diferencial modelada

Con el fin de implementar la Metodología de Perturbaciones sobre el trabajo de De Vico, a partir de las *Ec. 1.1* y *Ec. 1.2*, se desprenden las ecuaciones adimensionales equivalentes que gobiernan un cable sometido a cargas axiales y corte distribuido, *Ec. 2.1* y *Ec. 2.2*, para los planos XY y XZ respectivamente.

$$\epsilon_{xy} \frac{d^4 \hat{v}(\hat{x})}{d\hat{x}^4} - \frac{d^2 \hat{v}(\hat{x})}{d\hat{x}^2} = A \cos(\delta \hat{x}) \quad \text{Ec. 2.1}$$

$$\epsilon_{xz} \frac{d^4 \hat{w}(\hat{x})}{d\hat{x}^4} - \frac{d^2 \hat{w}(\hat{x})}{d\hat{x}^2} = A \sin(\delta \hat{x}) \quad \text{Ec. 2.2}$$

Donde:

$$\hat{x} = \frac{x}{L} \quad \text{Ec. 2.3}$$

$$\hat{v}(\hat{x}) = \frac{v(\hat{x})}{L} \quad \text{Ec. 2.4}$$

$$\hat{w}(\hat{x}) = \frac{w(\hat{x})}{L} \quad \text{Ec. 2.5}$$

$$A = \frac{C}{H/L} \quad \text{Ec. 2.6}$$

$$C = -F_{des} \quad \text{Ec. 2.7}$$

$$F_{des} = T_{ed} \frac{k}{\cos \theta} \quad \text{Ec. 2.8}$$

$$T_{ed} = (\sigma S)^* \quad \text{Ec. 2.9}$$

$$k = \frac{\sin^2 \theta}{r} \quad \text{Ec. 2.10}$$

$$\delta = \frac{2\pi L}{p} \quad \text{Ec. 2.11}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{(EI_{zz})_{sec}}{HL^2} \quad \text{Ec. 2.12}$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{(EI_{yy})_{sec}}{HL^2} \quad \text{Ec. 2.13}$$

Siendo  $\hat{x}$  el recorrido axial adimensional sobre el cable;  $L$  y  $p$  longitud total y de paso del giro de hebras;  $S$  y  $r$  el área y distancia entre centroides de hebras; y  $\hat{v}(\hat{x})$ ,  $\hat{w}(\hat{x})$  desplazamientos transversales normalizados en planos XY y XZ, respectivamente. Dimensiones apreciables en las Fig. 1.1 y Fig. 2.1.

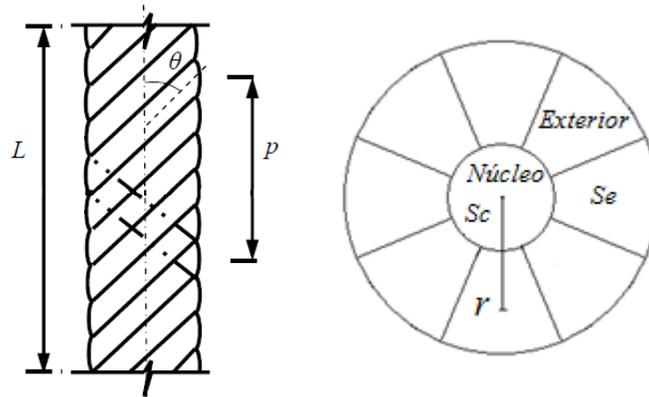


Fig. 2.1 Parámetros geométricos de cable Wedging, Vargas (2010).

Parte de las nuevas notaciones adimensionales corresponden a:  $A$  razón entre carga distribuida por hebra dañada y sollicitación axial adimensional;  $\delta$  ponderador de radianes a lo largo del modelo;  $\epsilon_{xy}$  y  $\epsilon_{xz}$  los factores perturbadores del problema. El valor  $k$  representa la curvatura de las hebras exteriores con respecto al eje axial del modelo y  $T_{ed}$  a la fuerza axial de la hebra opuesta a la faltante (superíndice \*), donde  $\sigma$  y  $S$  son la tensión normal y área de dicha hebra.

El término  $C$  corresponde al cambio de sentido de  $F_{des}$ , siendo este último la fuerza radial desbalanceada que provoca la hebra opuesta a la dañada, que debe ser proyectada en sus ejes principales. La Fig. 2.2 expone un ejemplo de equilibrio radial y ejes principales ante falta de hebras.

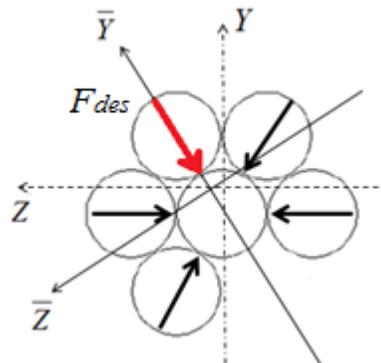


Fig. 2.2 Ejemplo equilibrio radial en sección transversal, De Vico (2013).

## 2.2. Plano XY

Se procede a resolver la ecuación diferencial, *Ec. 2.1*, que describe el comportamiento del modelo en el plano XY. Se estudia el comportamiento por separado, es decir, lo que ocurre en los extremos (perturbado) y en el centro del modelo (no perturbado).

### 2.2.1. Ecuación perturbada

El problema perturbado representa el comportamiento válido dentro de las Capas Límites, al considerar todos los términos de la *Ec. 2.1*. Se aplica el principio de superposición de soluciones, obteniéndose las soluciones homogéneas y particulares, *Ec. 2.14* y *Ec. 2.15*.

$$\hat{v}_{p,h}(\hat{x}) = C_1 + C_2\hat{x} + C_3e^{\frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}}} + C_4e^{-\frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}}} \quad \text{Ec. 2.14}$$

$$\hat{v}_{p,p}(\hat{x}) = a \cos(\delta\hat{x}) + b \sin(\delta\hat{x}) \quad \text{Ec. 2.15}$$

Derivando y evaluando la solución propuesta *Ec. 2.15* en la *Ec. 2.1*, e igualando términos que acompañan funciones trigonométricas; se tienen los valores de constantes, *Ec. 2.16* y *Ec. 2.17*.

$$a = \frac{A}{\delta^2(\epsilon_{xy} \cdot \delta^2 + 1)} \quad \text{Ec. 2.16}$$

$$b = 0 \quad \text{Ec. 2.17}$$

Por superposición, la respuesta perturbada del modelo queda definida en *Ec. 2.18* como la suma de la *Ec. 2.14* y *Ec. 2.15*.

$$\hat{v}_{per}(\hat{x}) = C_1 + C_2\hat{x} + C_3e^{\frac{\hat{x}}{\epsilon_{xy}}} + C_4e^{-\frac{\hat{x}}{\epsilon_{xy}}} + \frac{A}{\delta^2(\epsilon_{xy}\delta^2 + 1)} \cos(\delta\hat{x}) \quad \text{Ec. 2.18}$$

Las condiciones de borde de giros y deflexiones nulas, *Ec. 1.3* y *Ec. 1.5*, son directamente adaptadas al modelo adimensional en las *Ec. 2.19* y *Ec. 2.20*.

$$\hat{v}(\hat{x} = 0) = \hat{v}(\hat{x} = 1) = 0 \quad \text{Ec. 2.19}$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}}(\hat{x} = 0) = \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}}(\hat{x} = 1) = 0 \quad \text{Ec. 2.20}$$

De estas condiciones, se plantea el sistema de ecuaciones para determinar valores de constantes  $C_i$ , de la *Ec. 2.21* a la *Ec. 2.24*.

$$C_1 + C_3 + C_4 + \frac{A}{\delta^2(\epsilon_{xy}\delta^2 + 1)} = 0 \quad \text{Ec. 2.21}$$

$$C_2 + \frac{C_3}{\sqrt{\epsilon_{xy}}} - \frac{C_4}{\sqrt{\epsilon_{xy}}} = 0 \quad \text{Ec. 2.22}$$

$$C_1 + C_2 + C_3 e^{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_{xy}}}} + C_4 e^{-\frac{1}{\sqrt{\epsilon_{xy}}}} + \frac{A}{\delta^2(\epsilon_{xy}\delta^2 + 1)} \cos(\delta) = 0 \quad \text{Ec. 2.23}$$

$$C_2 + \frac{C_3}{\sqrt{\epsilon_{xy}}} e^{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_{xy}}}} - \frac{C_4}{\sqrt{\epsilon_{xy}}} e^{-\frac{1}{\sqrt{\epsilon_{xy}}}} - \frac{A}{\delta(\epsilon_{xy}\delta^2 + 1)} \sin(\delta) = 0 \quad \text{Ec. 2.24}$$

Basándose en el trabajo de Beltrán y De Vico (2013), el despeje de constantes del sistema se detalla en las *Ec. 2.25*, *Ec. 2.26* y *Ec. 2.27*. Concluyendo la solución perturbada en la *Ec. 2.28*.

$$C_1 = -\frac{A}{\delta^2(\epsilon_{xy}\delta^2 + 1)} \quad \text{Ec. 2.25}$$

$$C_2 = \frac{A}{\delta^2(\epsilon_{xy}\delta^2 + 1)} [1 - \cos(\delta)] \quad \text{Ec. 2.26}$$

$$C_3 = C_4 = 0 \quad \text{Ec. 2.27}$$

$$\hat{v}_{per}(\hat{x}) = \frac{A}{\delta^2(\epsilon_{xy}\delta^2 + 1)} [-1 + \hat{x}(1 - \cos(\delta)) + \cos(\delta\hat{x})] \quad \text{Ec. 2.28}$$

## 2.2.2. Ecuación no perturbada

El problema no perturbado representa el comportamiento válido en el centro del modelo, al despreciar el valor de  $\epsilon_{xy}$  en la *Ec. 2.1*, reduciéndose a la *Ec. 2.29*. Se aplica el principio de superposición de soluciones; obteniéndose las respuestas homogéneas y particulares, *Ec. 2.30* y *Ec. 2.31*.

$$-\frac{d^2 \hat{v}(\hat{x})}{d\hat{x}^2} = A \cos(\delta\hat{x}) \quad \text{Ec. 2.29}$$

$$\hat{v}_{np,h}(\hat{x}) = C_5 + C_6 \hat{x} \quad \text{Ec. 2.30}$$

$$\hat{v}_{np,p}(\hat{x}) = c \cos(\delta\hat{x}) + d \sin(\delta\hat{x}) \quad \text{Ec. 2.31}$$

Derivando y evaluando la solución propuesta *Ec. 2.31* en la *Ec. 2.29*, e igualando términos que acompañan funciones trigonométricas; se tienen los valores de constantes, *Ec. 2.32* y *Ec. 2.33*.

$$c = -\frac{A}{\delta^2} \quad \text{Ec. 2.32}$$

$$d = 0 \quad \text{Ec. 2.33}$$

Por superposición, la respuesta perturbada del modelo queda definida en *Ec. 2.34* como la suma de la *Ec. 2.30* y *Ec. 2.31*.

$$\hat{v}_{np}(\hat{x}) = C_5 + C_6\hat{x} + \frac{A}{\delta^2}\cos(\delta\hat{x}) \quad \text{Ec. 2.34}$$

El problema se encuentra sobre definido al poseer cuatro condiciones de borde y ser una EDO de segundo orden. Las constantes de integración  $C_5$  y  $C_6$  deben ser tales que esta respuesta se acople con su versión perturbada, *Ec. 2.28*, cuando el factor perturbador tienda a cero, *Ec. 2.35*.

$$\lim_{\epsilon_{xy} \rightarrow 0} \hat{v}_{per} = \frac{A}{\delta^2}[-1 + \hat{x}(1 - \cos(\delta)) + \cos(\delta\hat{x})] \quad \text{Ec. 2.35}$$

El único par de condiciones de borde que cumplen con el acople necesario son las de desplazamiento nulos, *Ec. 2.19*. Con lo que se tiene los valores de las constantes faltantes en la *Ec. 2.36* y *Ec. 2.37*; concluyendo la respuesta no perturbada en *Ec. 2.38*.

$$C_5 = -\frac{A}{\delta^2} \quad \text{Ec. 2.36}$$

$$C_6 = \frac{A}{\delta^2}[1 - \cos(\delta)] \quad \text{Ec. 2.37}$$

$$\hat{v}_{np}(\hat{x}) = \frac{A}{\delta^2}[-1 + \hat{x}(1 - \cos(\delta)) + \cos(\delta\hat{x})] \quad \text{Ec. 2.38}$$

## 2.3. Plano XZ

Se procede a resolver la ecuación diferencial, *Ec. 2.2*, que describe el comportamiento del modelo en el plano XZ. Se estudia el comportamiento por separado, es decir, lo que ocurre en los extremos (perturbado) y en el centro del modelo (no perturbado).

### 2.3.1. Ecuación perturbada

El problema perturbado representa el comportamiento válido dentro de las Capas Límites, al considerar todos los términos de la *Ec. 2.2*. Se aplica el principio de superposición de soluciones; obteniéndose las soluciones homogéneas y particulares, *Ec. 2.39* y *Ec. 2.40*.

$$\hat{w}_{p,h}(\hat{x}) = C_1 + C_2\hat{x} + C_3e^{\frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}}} + C_4e^{-\frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}}} \quad \text{Ec. 2.39}$$

$$\hat{w}_{p,p}(\hat{x}) = a \cos(\delta\hat{x}) + b \sin(\delta\hat{x}) \quad \text{Ec. 2.40}$$

Derivando y evaluando la solución propuesta *Ec. 2.15* en la *Ec. 2.2*, e igualando términos que acompañan funciones trigonométricas; se tienen los valores de constantes, *Ec. 2.41* y *Ec. 2.42*.

$$a = 0 \quad \text{Ec. 2.41}$$

$$b = \frac{A}{\delta^2(\epsilon_{xz}\delta^2 + 1)} \quad \text{Ec. 2.42}$$

Por superposición de soluciones, la respuesta perturbada del modelo queda definida en *Ec. 2.43* como la suma de la *Ec. 2.39* y *Ec. 2.40*.

$$\hat{w}_{per}(\hat{x}) = C_1 + C_2\hat{x} + C_3e^{\frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}}} + C_4e^{-\frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}}} + \frac{A}{\delta^2(\epsilon_{xz}\delta^2 + 1)} \sin(\delta\hat{x}) \quad \text{Ec. 2.43}$$

Las condiciones de borde de giros y deflexiones nulas, *Ec. 1.4* y *Ec. 1.6*, son directamente adaptadas al modelo adimensional en las *Ec. 2.44* y *Ec. 2.45*.

$$\hat{w}(\hat{x} = 0) = \hat{w}(\hat{x} = 1) = 0 \quad \text{Ec. 2.44}$$

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}}(\hat{x} = 0) = \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}}(\hat{x} = 1) = 0 \quad \text{Ec. 2.45}$$

De estas condiciones, se plantea el sistema de ecuaciones para determinar valores de constantes  $C_i$ , de la *Ec. 2.46* a la *Ec. 2.49*.

$$C_1 + C_3 + C_4 = 0 \quad \text{Ec. 2.46}$$

$$C_2 + \frac{C_3}{\sqrt{\epsilon_{xz}}} - \frac{C_4}{\sqrt{\epsilon_{xz}}} + \frac{A}{\delta(\epsilon_{xz}\delta^2 + 1)} = 0 \quad \text{Ec. 2.47}$$

$$C_1 + C_2 + C_3 e^{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_{xz}}}} + C_4 e^{-\frac{1}{\sqrt{\epsilon_{xz}}}} + \frac{A}{\delta^2(\epsilon_{xz}\delta^2 + 1)} \sin(\delta) = 0 \quad \text{Ec. 2.48}$$

$$C_2 + \frac{C_3}{\sqrt{\epsilon_{xz}}} e^{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_{xz}}}} - \frac{C_4}{\sqrt{\epsilon_{xz}}} e^{-\frac{1}{\sqrt{\epsilon_{xz}}}} + \frac{A}{\delta(\epsilon_{xz}\delta^2 + 1)} \cos(\delta) = 0 \quad \text{Ec. 2.49}$$

Basándose en el trabajo de Beltrán y De Vico (2013), el despeje de constantes del sistema se detalla en las *Ec. 2.50* y *Ec. 2.51*. Concluyendo la solución perturbada en la *Ec. 2.52*.

$$C_1 = C_3 = C_4 = 0 \quad \text{Ec. 2.50}$$

$$C_2 = -\frac{A}{\delta^2(\epsilon_{xz}\delta^2 + 1)} \sin(\delta) \quad \text{Ec. 2.51}$$

$$\hat{w}_{per}(\hat{x}) = \frac{A}{\delta^2(\epsilon_{xz}\delta^2 + 1)} [\sin(\delta\hat{x}) - \hat{x} \sin(\delta)] \quad \text{Ec. 2.52}$$

### 2.3.2. Ecuación no perturbada

El problema no perturbado representa el comportamiento válido en el centro del modelo, al despreciar el valor de  $\epsilon_{xz}$  en la *Ec. 2.2*, reduciéndose a la *Ec. 2.53*. Se aplica el principio de superposición de soluciones; obteniéndose las respuestas homogéneas y particulares, *Ec. 2.54* y *Ec. 2.55*.

$$-\frac{d^2 \hat{w}(\hat{x})}{d\hat{x}^2} = A \sin(\delta\hat{x}) \quad \text{Ec. 2.53}$$

$$\hat{w}_{np,h}(\hat{x}) = C_5 + C_6 \hat{x} \quad \text{Ec. 2.54}$$

$$\hat{w}_{np,p}(\hat{x}) = c \cos(\delta\hat{x}) + d \sin(\delta\hat{x}) \quad \text{Ec. 2.55}$$

Derivando y evaluando la solución propuesta *Ec. 2.55* en la *Ec. 2.53*, e igualando términos que acompañan funciones trigonométricas; se tienen los valores de constantes, *Ec. 2.56* y *Ec. 2.57*.

$$c = 0 \quad \text{Ec. 2.56}$$

$$d = \frac{A}{\delta^2} \quad \text{Ec. 2.57}$$

Por superposición, la respuesta perturbada del modelo queda definida en *Ec. 2.58* como la suma de la *Ec. 2.54* y *Ec. 2.55*.

$$\hat{w}_{np}(\hat{x}) = C_5 + C_6 \hat{x} + \frac{A}{\delta^2} \sin(\delta \hat{x}) \quad \text{Ec. 2.58}$$

El problema se encuentra sobre definido al poseer cuatro condiciones de borde y ser una EDO de segundo orden. Las constantes de integración  $C_5$  y  $C_6$  deben ser tales que esta respuesta se acople con su versión perturbada, *Ec. 2.52*, cuando el factor perturbador tienda a cero, *Ec. 2.59*.

$$\lim_{\epsilon_{xz} \rightarrow 0} \hat{w}_{per} = \frac{A}{\delta^2} [\sin(\delta \hat{x}) - \hat{x} \sin(\delta)] \quad \text{Ec. 2.59}$$

El único par de condiciones de borde que cumplen con el acople necesario son las de desplazamiento nulos, *Ec. 2.44*. Teniendo los valores de las constantes faltantes en las *Ec. 2.60* y *Ec. 2.61*; concluyendo la respuesta no perturbada en *Ec. 2.62*.

$$C_5 = 0 \quad \text{Ec. 2.60}$$

$$C_6 = -\frac{A}{\delta^2} \sin(\delta) \quad \text{Ec. 2.61}$$

$$\hat{w}_{np}(\hat{x}) = \frac{A}{\delta^2} [\sin(\delta \hat{x}) - \hat{x} \sin(\delta)] \quad \text{Ec. 2.62}$$

## 2.4. Análisis y conclusión

Los términos de derivadas a la cuarta en las *Ec. 2.1* y *Ec. 2.2* son los que definen el efecto de Capa Límite entre las soluciones exactas (modelo cable-viga) y no perturbadas (modelo tipo fibra). Ambas respuestas deben ser iguales al tender los  $\epsilon$  a cero, cuyo acople se produce únicamente considerando las condiciones de desplazamiento nulos en los extremos, *Ec. 2.19* y *Ec. 2.44*; despreciando los requisitos de giro nulos en los mismos puntos por resultados incongruentes para el objetivo, *Ec. 2.20* y *Ec. 2.45*.

Dichas incongruencias permiten concluir que las condiciones de giro en los extremos conllevan diferentes comportamientos entre los casos del medio y extremos del cable; en otras palabras, conllevan el desarrollo del efecto de Capa Límite en torno a  $\hat{x} = 0$  y  $\hat{x} = 1$ . **Dando por concluido el primer objetivo específico planteado.**

# Capítulo 3 Soluciones del Modelo Propuesto

## 3.1. Consideraciones iniciales

Con el fin de encontrar una única respuesta que considere la totalidad de su recorrido para las *Ec. 2.1* y *Ec. 2.2*, el Método de las Perturbaciones propone una solución en forma de expansión de potencias del término perturbador  $\epsilon$ .

En primera instancia, es lógico proponer una solución en serie de potencias enteras, como la detallada en *Ec. 1.9*. No obstante, debido a la existencia de la variable  $\hat{x}$  dentro de funciones trigonométricas que deben ser expandidas en series polinómicas, ciertos términos no se simplifican por cambios de variables como exige la metodología; volviendo las soluciones internas y externas no acoplables.

Para evitar dicha incongruencia metodológica, las soluciones del Modelo Propuesto a determinar se consideran expansiones en potencias con saltos de 1/2, detalladas en las *Ec. 3.1* y *Ec. 3.2*. Bastando con truncar tras los primeros cuatro componentes, para así no resolver únicamente ecuaciones homogéneas en pasos intermedios.

$$\hat{v}(\hat{x}, \epsilon_{xy}) = \hat{v}_0(\hat{x}) + \sqrt{\epsilon_{xy}} \hat{v}_1(\hat{x}) + \epsilon_{xy} \hat{v}_2(\hat{x}) + \epsilon_{xy}^{3/2} \hat{v}_3(\hat{x}) + \dots \quad \text{Ec. 3.1}$$

$$\hat{w}(\hat{x}, \epsilon_{xz}) = \hat{w}_0(\hat{x}) + \sqrt{\epsilon_{xz}} \hat{w}_1(\hat{x}) + \epsilon_{xz} \hat{w}_2(\hat{x}) + \epsilon_{xz}^{3/2} \hat{w}_3(\hat{x}) + \dots \quad \text{Ec. 3.2}$$

## 3.2. Plano XY

### 3.2.1. Fuera de las Capas Límites

Considerando la notación del superíndice “o” por *outer*, la propuesta de solución externa al efecto de la Capa Límite en expansión queda definida como:

$$\hat{v}^o(\hat{x}, \epsilon_{xy}) = \hat{v}_0^o(\hat{x}) + \sqrt{\epsilon_{xy}} \hat{v}_1^o(\hat{x}) + \epsilon_{xy} \hat{v}_2^o(\hat{x}) + \epsilon_{xy}^{3/2} \hat{v}_3^o(\hat{x}) + \dots \quad \text{Ec. 3.3}$$

Se reemplaza la respuesta *Ec. 3.3* en *Ec. 2.1*, obteniéndose:

$$\epsilon_{xy} \left[ \frac{\partial^4 \hat{v}_0^o}{\partial \hat{x}^4} + \sqrt{\epsilon_{xy}} \frac{\partial^4 \hat{v}_1^o}{\partial \hat{x}^4} + \dots \right] - \left[ \frac{\partial^2 \hat{v}_0^o}{\partial \hat{x}^2} + \sqrt{\epsilon_{xy}} \frac{\partial^2 \hat{v}_1^o}{\partial \hat{x}^2} + \epsilon_{xy} \frac{\partial^2 \hat{v}_2^o}{\partial \hat{x}^2} + \epsilon_{xy}^{3/2} \frac{\partial^2 \hat{v}_3^o}{\partial \hat{x}^2} \dots \right] = A \cos(\delta \hat{x})$$

Igualando los primeros cuatro términos según potencias de  $\epsilon_{xy}$ , se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\epsilon_{xy}^0 \rightarrow -\frac{\partial^2 \hat{v}_0^o}{\partial \hat{x}^2} = A \cos(\delta \hat{x}) \quad \text{Ec. 3.4}$$

$$\sqrt{\epsilon_{xy}} \rightarrow -\frac{\partial^2 \hat{v}_1^o}{\partial \hat{x}^2} = 0 \quad \text{Ec. 3.5}$$

$$\epsilon_{xy} \rightarrow \frac{\partial^4 \hat{v}_0^o}{\partial \hat{x}^4} - \frac{\partial^2 \hat{v}_2^o}{\partial \hat{x}^2} = 0 \quad \text{Ec. 3.6}$$

$$\epsilon_{xy}^{3/2} \rightarrow \frac{\partial^4 \hat{v}_1^o}{\partial \hat{x}^4} - \frac{\partial^2 \hat{v}_3^o}{\partial \hat{x}^2} = 0 \quad \text{Ec. 3.7}$$

Donde las funciones  $\hat{v}_0^o$ ,  $\hat{v}_1^o$ ,  $\hat{v}_2^o$  y  $\hat{v}_3^o$  se despejan como:

$$\hat{v}_0^o(\hat{x}) = \frac{A \cos(\delta \hat{x})}{d^2} + a_2 \hat{x} + a_1 \quad \text{Ec. 3.8}$$

$$\hat{v}_1^o(\hat{x}) = a_3 \hat{x} + a_4 \quad \text{Ec. 3.9}$$

$$\hat{v}_2^o(\hat{x}) = -A \cos(\delta \hat{x}) + a_5 \hat{x} + a_6 \quad \text{Ec. 3.10}$$

$$\hat{v}_3^o(\hat{x}) = a_7 \hat{x} + a_8 \quad \text{Ec. 3.11}$$

Por lo tanto, la solución fuera de la Capa Límite queda definida como:

$$\hat{v}^o(\hat{x}, \epsilon_{xy}) = \frac{A \cos(\delta \hat{x})}{d^2} + a_2 \hat{x} + a_1 + \sqrt{\epsilon_{xy}} [a_3 \hat{x} + a_4] + \epsilon_{xy} [-A \cos(\delta \hat{x}) + a_5 \hat{x} + a_6] + \epsilon_{xy}^{3/2} [a_7 \hat{x} + a_8] \quad \text{Ec. 3.12}$$

Dado que esta expansión no es válida para los extremos del cable, esta solución no satisface ninguna condición de borde. Las constantes de integración  $a_i$ , con  $i = 1, \dots, 8$ ; se deben determinar igualando expansiones dentro y fuera de la Capa Límite según potencias de  $\epsilon_{xy}$ .

## 3.2.2. Dentro de las Capas Límites

### 3.2.2.1. Rango cercano a $\hat{x} = 0$

En búsqueda de un cambio de escala adecuado para estudiar el comportamiento del cable en los alrededores de  $\hat{x} = 0$ , se aplica el siguiente cambio de variable adimensional que define la variable interna  $\tau$ .

$$\tau = \frac{\hat{x}}{\epsilon_{xy}^\alpha} \leftrightarrow \hat{x} = \tau \epsilon_{xy}^\alpha \quad \text{Ec. 3.13}$$

Reemplazando el cambio de variable en la ecuación a resolver, *Ec. 2.1*; se trabaja algebraicamente, derivando por ley de la cadena, obteniéndose la siguiente expresión.

$$\epsilon_{xy}^{1-4\alpha} \frac{d^4 \hat{v}(\tau)}{d\tau^4} - \epsilon_{xy}^{-2\alpha} \frac{d^2 \hat{v}(\tau)}{d\tau^2} = A \cos(\delta \tau \epsilon_{xy}^\alpha) \quad \text{Ec. 3.14}$$

Con el fin de obtener una EDO con la participación de  $\epsilon_{xy}$  en sólo uno de sus términos; se impone el valor  $\alpha = 1/2$  y se trabaja algebraicamente la *Ec. 3.14* llegando a la siguiente ecuación que modela el rango estudiado.

$$\frac{d^4 \hat{v}(\tau)}{d\tau^4} - \frac{d^2 \hat{v}(\tau)}{d\tau^2} = \epsilon_{xy} A \cos(\delta \tau \sqrt{\epsilon_{xy}}) \quad \text{Ec. 3.15}$$

Por último, se reemplaza la expansión de Taylor en torno a cero, *Ec. 3.16*, en *Ec. 3.15* para obtener una EDO conformada únicamente por polinomios, *Ec. 3.17*.

$$\cos(ax) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(ax)^{2n}}{(2n)!} \quad \text{Ec. 3.16}$$

$$\frac{d^4 \hat{v}(\tau)}{d\tau^4} - \frac{d^2 \hat{v}(\tau)}{d\tau^2} = A \left[ \epsilon_{xy} - \frac{\delta^2 \tau^2}{2!} \epsilon_{xy}^2 + \frac{\delta^4 \tau^4}{4!} \epsilon_{xy}^3 + \dots \right] \quad \text{Ec. 3.17}$$

Debido a que el evaluar  $\hat{x} = 0$  implica un valor de  $\tau = 0$  por el cambio de escala, las condiciones de borde de desplazamiento transversal y giro nulos en los apoyos son reescritas en función de  $\tau$  en las condiciones *Ec. 3.18* y *Ec. 3.19*.

$$\hat{v}(\hat{x} = 0) = 0 \rightarrow \hat{v}(\tau = 0) = 0 \quad \text{Ec. 3.18}$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}}(\hat{x} = 0) = 0 \rightarrow \frac{\partial \hat{v}}{\partial \tau}(\tau = 0) = 0 \quad \text{Ec. 3.19}$$

A continuación, la solución en expansión propuesta en el rango interno a la Capa Límite en  $\hat{x} = 0$  queda denominada por el superíndice “i” por *inner*.

$$\hat{v}^i(\tau, \epsilon_{xy}) = \hat{v}_0^i(\tau) + \sqrt{\epsilon_{xy}} \hat{v}_1^i(\tau) + \epsilon_{xy} \hat{v}_2^i(\tau) + \epsilon_{xy}^{3/2} \hat{v}_3^i(\tau) + \dots \quad \text{Ec. 3.20}$$

Evaluando la solución propuesta en  $\tau = 0$ , imponiendo las condiciones de borde *Ec. 3.18* y *Ec. 3.19*; e igualando componentes hasta el cuarto término de  $\epsilon_{xy}$  de la expansión, se obtienen las siguientes seis condiciones de borde asociadas a las subfunciones de *Ec. 3.20*.

$$\hat{v}_0^i(\tau = 0) = \hat{v}_1^i(\tau = 0) = \hat{v}_2^i(\tau = 0) = \hat{v}_3^i(\tau = 0) = 0 \quad \text{Ec. 3.21}$$

$$\frac{\partial \hat{v}_0^i}{\partial \tau}(\tau = 0) = \frac{\partial \hat{v}_1^i}{\partial \tau}(\tau = 0) = \frac{\partial \hat{v}_2^i}{\partial \tau}(\tau = 0) = \frac{\partial \hat{v}_3^i}{\partial \tau}(\tau = 0) = 0 \quad \text{Ec. 3.22}$$

Reemplazando la *Ec. 3.20* en *Ec. 3.17* e igualando componentes hasta el cuarto término de  $\epsilon_{xy}$  de la expansión, se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\epsilon_{xy}^0 \rightarrow \frac{\partial^4 \hat{v}_0^i}{\partial \tau^4} - \frac{\partial^2 \hat{v}_0^i}{\partial \tau^2} = 0 \quad \text{Ec. 3.23}$$

$$\sqrt{\epsilon_{xy}} \rightarrow \frac{\partial^4 \hat{v}_1^i}{\partial \tau^4} - \frac{\partial^2 \hat{v}_1^i}{\partial \tau^2} = 0 \quad \text{Ec. 3.24}$$

$$\epsilon_{xy} \rightarrow \frac{\partial^4 \hat{v}_2^i}{\partial \tau^4} - \frac{\partial^2 \hat{v}_2^i}{\partial \tau^2} = A \quad \text{Ec. 3.25}$$

$$\epsilon_{xy}^{3/2} \rightarrow \frac{\partial^4 \hat{v}_3^i}{\partial \tau^4} - \frac{\partial^2 \hat{v}_3^i}{\partial \tau^2} = 0 \quad \text{Ec. 3.26}$$

Cuyas soluciones para las funciones  $\hat{v}_0^i$ ,  $\hat{v}_1^i$ ,  $\hat{v}_2^i$  y  $\hat{v}_3^i$  se presentan a continuación.

$$\hat{v}_0^i(\tau) = b_1 e^\tau + b_2 e^{-\tau} + b_3 \tau + b_4 \quad \text{Ec. 3.27}$$

$$\hat{v}_1^i(\tau) = b_5 e^\tau + b_6 e^{-\tau} + b_7 \tau + b_8 \quad \text{Ec. 3.28}$$

$$\hat{v}_2^i(\tau) = -\frac{A}{2} \tau^2 + b_9 e^\tau + b_{10} e^{-\tau} + b_{11} \tau + b_{12} \quad \text{Ec. 3.29}$$

$$\hat{v}_3^i(\tau) = b_{13} e^\tau + b_{14} e^{-\tau} + b_{15} \tau + b_{16} \quad \text{Ec. 3.30}$$

Las constantes de integración  $b_1$ ,  $b_5$ ,  $b_9$  y  $b_{13}$  son inmediatamente consideradas nulas. En caso contrario las *Ec. 3.27*, *Ec. 3.28*, *Ec. 3.29* y *Ec. 3.30* crecerían exponencialmente con respecto a  $\tau$ , lo que sería imposible de acoplar con las soluciones externas.

$$b_1 = b_5 = b_9 = b_{13} = 0 \quad \text{Ec. 3.31}$$

Posteriormente, el resto de las constantes son simplificables mediante el uso de las condiciones de borde *Ec. 3.21* y *Ec. 3.22*. Obteniéndose las siguientes funciones.

$$\hat{v}_0^i(\tau) = b_2(e^{-\tau} + \tau - 1) \quad \text{Ec. 3.32}$$

$$\hat{v}_1^i(\tau) = b_6(e^{-\tau} + \tau - 1) \quad \text{Ec. 3.33}$$

$$\hat{v}_2^i(\tau) = -\frac{A}{2}\tau^2 + b_{10}(e^{-\tau} + \tau - 1) \quad \text{Ec. 3.34}$$

$$\hat{v}_3^i(\tau) = b_{14}(e^{-\tau} + \tau - 1) \quad \text{Ec. 3.35}$$

A continuación, se procede los pasos requeridos en la Metodología de las Perturbaciones para cada término  $\hat{v}_0$ ,  $\hat{v}_1$ ,  $\hat{v}_2$  y  $\hat{v}_3$ .

## Metodología para $\hat{v}_0$

Primer término externo a las Capas Límites de la expansión  $\hat{v}^0$  en *Ec. 3.36*.

$$\frac{A \cos(\delta \hat{x})}{\delta^2} + a_2 \hat{x} + a_1 \quad \text{Ec. 3.36}$$

Se reescribe en término de la variable interna  $\tau$ , *Ec. 3.13*, y se aplica la expansión de Taylor *Ec. 3.16*.

$$\frac{A}{\delta^2} \left[ 1 - \frac{\delta^2 \tau^2}{2!} \epsilon_{xy} + \dots \right] + a_2 \sqrt{\epsilon_{xy}} \tau + a_1$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xy}$ .

$$\left( \frac{A}{\delta^2} + a_1 \right) \epsilon_{xy}^0 + a_2 \tau \sqrt{\epsilon_{xy}} - \frac{A \tau^2}{2!} \epsilon_{xy} + \dots$$

Se concluye el primer término de expansión interna a partir de la solución externa dado las constantes que acompañan el término  $\epsilon_{xy}^0$ .

$$\frac{A}{\delta^2} + a_1 \quad \text{Ec. 3.37}$$

Por otro lado, se tiene el primer término interno a la Capa Límite de la expansión de  $\hat{v}^i$  en la *Ec. 3.38*.

$$b_2 (e^{-\tau} + \tau - 1) \quad \text{Ec. 3.38}$$

Se reescribe en término de la variable externa  $\hat{x}$  de la *Ec. 3.13*.

$$b_2 \left( e^{-\frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}}} + \frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}} - 1 \right)$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xy}$ , donde *EST* denota los pequeños términos exponenciales que no son necesarios en la metodología.

$$-b_2 \epsilon_{xy}^0 + b_2 \frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}} + EST$$

Se concluye el primer término de expansión externa a partir de la solución interna depende del valor de  $b_2$  como sigue.

$$\begin{cases} -b_2 & \text{si } b_2 = 0 \\ \frac{b_2 \hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}} & \text{si } b_2 \neq 0 \end{cases} \quad \text{Ec. 3.39}$$

Finalmente, igualando componentes según potencias de  $\epsilon_{xy}$  de las *Ec. 3.37* y *Ec. 3.39*, se concluye el valor de las siguientes constantes.

$$\epsilon_{xy}^{-1/2}: b_2 = 0 \quad \text{Ec. 3.40}$$

$$\epsilon_{xy}^0: \frac{A}{\delta^2} + a_1 = 0 \quad \text{Ec. 3.41}$$

## Metodología para $\hat{v}_1$

Primeros dos términos externos a las Capas Límites de la expansión  $\hat{v}^0$  en *Ec. 3.42*.

$$\frac{A \cos(\delta \hat{x})}{\delta^2} + a_2 \hat{x} + a_1 + \sqrt{\epsilon_{xy}}(a_3 \hat{x} + a_4) \quad \text{Ec. 3.42}$$

Se reescribe en término de la variable interna  $\tau$ , *Ec. 3.13*, y se aplica la expansión de Taylor *Ec. 3.16*.

$$\frac{A}{\delta^2} \left[ 1 - \frac{\delta^2 \tau^2}{2!} \epsilon_{xy} + \dots \right] + a_2 \sqrt{\epsilon_{xy}} \tau + a_1 + \sqrt{\epsilon_{xy}}(a_3 \sqrt{\epsilon_{xy}} \tau + a_4)$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xy}$ .

$$\left( \frac{A}{\delta^2} + a_1 \right) \epsilon_{xy}^0 + (a_2 \tau + a_4) \sqrt{\epsilon_{xy}} + \left( -\frac{\epsilon_{xy} \tau^2}{2} + a_3 \tau \right) \epsilon_{xy} + \dots$$

Se concluye los primeros dos términos de la expansión interna a partir de la solución externa según los que interactúan con  $\epsilon_{xy}^0$  y  $\sqrt{\epsilon_{xy}}$ .

$$\frac{A}{\delta^2} + a_1 + (a_2 \tau + a_4) \sqrt{\epsilon_{xy}} \quad \text{Ec. 3.43}$$

Por otro lado, se tienen los primeros dos términos internos a la Capa Límite de la expansión de  $\hat{v}^i$  en la *Ec. 3.44*.

$$b_2(e^{-\tau} + \tau - 1) + \sqrt{\epsilon_{xy}} b_6(e^{-\tau} + \tau - 1) \quad \text{Ec. 3.44}$$

Se reescriben en términos de la variable externa  $\hat{x}$  de la *Ec. 3.13*, retomando el valor de  $b_2$  calculado en la *Ec. 3.40*.

$$\sqrt{\epsilon_{xy}} b_6 \left( e^{-\frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}}} + \frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}} - 1 \right)$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xy}$ , donde *EST* denota los pequeños términos exponenciales que no son necesarios en la metodología.

$$b_6 \hat{x} \epsilon_{xy}^0 - b_6 \sqrt{\epsilon_{xy}} + EST$$

Se concluye los primeros dos términos de la expansión externa a partir de la solución interna según términos que interactúan con  $\epsilon_{xy}^0$  y  $\sqrt{\epsilon_{xy}}$ .

$$b_6 \hat{x} \epsilon_{xy}^0 - b_6 \sqrt{\epsilon_{xy}} \quad \text{Ec. 3.45}$$

Finalmente, expresando la *Ec. 3.43* en términos de  $\hat{x}$  e igualando sus componentes según potencias de  $\epsilon_{xy}$  con la *Ec. 3.45*, se concluye las siguientes relaciones entre constantes.

$$\epsilon_{xy}^0: b_6 = a_2 \quad \text{Ec. 3.46}$$

$$\sqrt{\epsilon_{xy}}: -b_6 = a_4 \quad \text{Ec. 3.47}$$

## Metodología para $\hat{v}_2$

Primeros tres términos externos a las Capas Límites de la expansión  $\hat{v}^0$  en *Ec. 3.48*.

$$\frac{A \cos(\delta \hat{x})}{\delta^2} + a_2 \hat{x} + a_1 + \sqrt{\epsilon_{xy}}(a_3 \hat{x} + a_4) + \epsilon_{xy}(-A \cos(\delta \hat{x}) + a_5 \hat{x} + a_6) \quad \text{Ec. 3.48}$$

Se reescribe en término de la variable interna  $\tau$ , *Ec. 3.13*, y se aplica la expansión de Taylor *Ec. 3.16*.

$$\begin{aligned} & \frac{A}{\delta^2} \left[ 1 - \frac{\delta^2 \tau^2}{2!} \epsilon_{xy} + \dots \right] + a_2 \sqrt{\epsilon_{xy}} \tau + a_1 + \sqrt{\epsilon_{xy}}(a_3 \sqrt{\epsilon_{xy}} \tau + a_4) \\ & + \epsilon_{xy} \left( -A \left[ 1 - \frac{\delta^2 \tau^2}{2!} \epsilon_{xy} + \dots \right] + a_5 \sqrt{\epsilon_{xy}} \tau + a_6 \right) \end{aligned}$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xy}$ .

$$\left( \frac{A}{\delta^2} + a_1 \right) \epsilon_{xy}^0 + (a_2 \tau + a_4) \sqrt{\epsilon_{xy}} + \left( -\frac{A \tau^2}{2} + a_3 \tau - A + a_6 \right) \epsilon_{xy} + \dots$$

Se concluye los primeros tres términos de la expansión interna a partir de la solución externa según los que interactúan con  $\epsilon_{xy}^0$ ,  $\sqrt{\epsilon_{xy}}$  y  $\epsilon_{xy}$ .

$$\left( \frac{A}{\delta^2} + a_1 \right) \epsilon_{xy}^0 + (a_2 \tau + a_4) \sqrt{\epsilon_{xy}} + \left( -\frac{A \tau^2}{2} + a_3 \tau - A + a_6 \right) \epsilon_{xy} \quad \text{Ec. 3.49}$$

Por otro lado, se tienen los primeros tres términos internos a la Capa Límite de la expansión de  $\hat{v}^i$  en la *Ec. 3.50*.

$$b_2(e^{-\tau} + \tau - 1) + \sqrt{\epsilon_{xy}} b_6(e^{-\tau} + \tau - 1) + \epsilon_{xy} \left( -\frac{A}{2} \tau^2 + b_{10}(e^{-\tau} + \tau - 1) \right) \quad \text{Ec. 3.50}$$

Se reescribe en término de la variable externa  $\hat{x}$  de la *Ec. 3.13*, retomando el valor de  $b_2$  calculado en la *Ec. 3.40*.

$$\sqrt{\epsilon_{xy}} b_6 \left( e^{-\frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}}} + \frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}} - 1 \right) + \epsilon_{xy} \left( -\frac{A}{2} \frac{\hat{x}^2}{\epsilon_{xy}} + b_{10} \left( e^{-\frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}}} + \frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}} - 1 \right) \right)$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xy}$ , donde *EST* denota los pequeños términos exponenciales que no son necesarios en la metodología.

$$\left( b_6 \hat{x} - \frac{A \hat{x}^2}{2} \right) \epsilon_{xy}^0 + (-b_6 + b_{10} \hat{x}) \sqrt{\epsilon_{xy}} - b_{10} \epsilon_{xy} + EST$$

Se concluye los primeros tres términos de la expansión externa a partir de la solución interna según términos que interactúan con  $\epsilon_{xy}^0$ ,  $\sqrt{\epsilon_{xy}}$  y  $\epsilon_{xy}$ .

$$\left(b_6\hat{x} - \frac{A\hat{x}^2}{2}\right)\epsilon_{xy}^0 + (-b_6 + b_{10}\hat{x})\sqrt{\epsilon_{xy}} + (-b_{10})\epsilon_{xy} \quad \text{Ec. 3.51}$$

Finalmente, expresando la *Ec. 3.49* en términos de  $\hat{x}$  e igualando sus componentes según potencias de  $\epsilon_{xy}$  con la *Ec. 3.51*, se concluye las siguientes nuevas relaciones entre constantes.

$$\sqrt{\epsilon_{xy}}: b_{10} = a_3 \quad \text{Ec. 3.52}$$

$$\epsilon_{xy}: -b_{10} = -A + a_6 \quad \text{Ec. 3.53}$$

### Metodología para $\hat{v}_3$

Primeros cuatro términos externos a las Capas Límites de  $\hat{v}^o$  en *Ec. 3.54*.

$$\begin{aligned} & \frac{A \cos(\delta \hat{x})}{\delta^2} + a_2 \hat{x} + a_1 + \sqrt{\epsilon_{xy}}(a_3 \hat{x} + a_4) \\ & + \epsilon_{xy}(-A \cos(\delta \hat{x}) + a_5 \hat{x} + a_6) + \epsilon_{xy}^{3/2}(a_7 \hat{x} + a_8) \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.54}$$

Se reescribe en término de la variable interna  $\tau$ , *Ec. 3.13*, y se aplica la expansión de Taylor *Ec. 3.16*.

$$\begin{aligned} & \frac{A}{\delta^2} \left[ 1 - \frac{\delta^2 \tau^2}{2!} \epsilon_{xy} + \dots \right] + a_2 \sqrt{\epsilon_{xy}} \tau + a_1 + \sqrt{\epsilon_{xy}}(a_3 \sqrt{\epsilon_{xy}} \tau + a_4) \\ & + \epsilon_{xy} \left( -A \left[ 1 - \frac{\delta^2 \tau^2}{2!} \epsilon_{xy} + \dots \right] + a_5 \sqrt{\epsilon_{xy}} \tau + a_6 \right) + \epsilon_{xy}^{3/2}(a_7 \sqrt{\epsilon_{xy}} \tau + a_8) \end{aligned}$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xy}$ .

$$\left( \frac{A}{\delta^2} + a_1 \right) \epsilon_{xy}^0 + (a_2 \tau + a_4) \sqrt{\epsilon_{xy}} + \left( -\frac{A \tau^2}{2} + a_3 \tau - A + a_6 \right) \epsilon_{xy} + (a_5 \tau + a_8) \epsilon_{xy}^{3/2} + \dots$$

Se concluye los primeros cuatro términos de la expansión interna a partir de la solución externa según los que interactúan con  $\epsilon_{xy}^0$ ,  $\sqrt{\epsilon_{xy}}$ ,  $\epsilon_{xy}$  y  $\epsilon_{xy}^{3/2}$ .

$$\left( \frac{A}{\delta^2} + a_1 \right) \epsilon_{xy}^0 + (a_2 \tau + a_4) \sqrt{\epsilon_{xy}} + \left( -\frac{A \tau^2}{2} + a_3 \tau - A + a_6 \right) \epsilon_{xy} + (a_5 \tau + a_8) \epsilon_{xy}^{3/2} \quad \text{Ec. 3.55}$$

Por otro lado, se tienen los primeros cuatro términos internos a la Capa Límite de la expansión de  $\hat{v}^i$  en la *Ec. 3.56*.

$$\begin{aligned} & b_2(e^{-\tau} + \tau - 1) + \sqrt{\epsilon_{xy}} b_6(e^{-\tau} + \tau - 1) + \epsilon_{xy} \left( -\frac{A}{2} \tau^2 + b_{10}(e^{-\tau} + \tau - 1) \right) \\ & + \epsilon_{xy}^{3/2} b_{14}(e^{-\tau} + \tau - 1) \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.56}$$

Se reescribe en término de la variable externa  $\hat{x}$  de la *Ec. 3.13*, retomando el valor de  $b_2$  calculado en la *Ec. 3.40*.

$$\begin{aligned} & \sqrt{\epsilon_{xy}} b_6 \left( e^{-\frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}}} + \frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}} - 1 \right) + \epsilon_{xy} \left( -\frac{A}{2} \frac{\hat{x}^2}{\epsilon_{xy}} + b_{10} \left( e^{-\frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}}} + \frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}} - 1 \right) \right) \\ & + \epsilon_{xy}^{3/2} b_{14} \left( e^{-\frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}}} + \frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xy}$ , donde  $EST$  denota los pequeños términos exponenciales que no son necesarios en la metodología.

$$\left(b_6\hat{x} - \frac{A\hat{x}^2}{2}\right)\epsilon_{xy}^0 + (-b_6 + b_{10}\hat{x})\sqrt{\epsilon_{xy}} + (-b_{10} + b_{14}\hat{x})\epsilon_{xy} - b_{14}\epsilon_{xy}^{3/2} + EST$$

Se concluye los primeros tres términos de la expansión externa a partir de la solución interna según términos que interactúan con  $\epsilon_{xy}^0$ ,  $\sqrt{\epsilon_{xy}}$ ,  $\epsilon_{xy}$  y  $\epsilon_{xy}^{3/2}$ .

$$\left(b_6\hat{x} - \frac{A\hat{x}^2}{2}\right)\epsilon_{xy}^0 + (-b_6 + b_{10}\hat{x})\sqrt{\epsilon_{xy}} + (-b_{10} + b_{14}\hat{x})\epsilon_{xy} - b_{14}\epsilon_{xy}^{3/2} \quad \text{Ec. 3.57}$$

Finalmente, expresando la *Ec. 3.55* en términos de  $\hat{x}$  e igualando sus componentes según potencias de  $\epsilon_{xy}$  con la *Ec. 3.57*, se concluye las siguientes nuevas relaciones entre constantes.

$$\epsilon_{xy}: \quad b_{14} = a_5 \quad \text{Ec. 3.58}$$

$$\epsilon_{xy}^{3/2}: \quad -b_{10} = a_8 \quad \text{Ec. 3.59}$$

### 3.3.2.2. Rango cercano a $\hat{x} = 1$

En búsqueda de un cambio de escala adecuado para estudiar el comportamiento del cable en los alrededores de  $\hat{x} = 1$ , se aplica el siguiente cambio de variable adimensional que define la variable interna  $\psi$ .

$$\psi = \frac{1 - \hat{x}}{\epsilon_{xy}^\beta} \leftrightarrow \hat{x} = 1 - \psi \epsilon_{xy}^\beta \quad \text{Ec. 3.60}$$

Reemplazando el cambio de variable en la ecuación a resolver, *Ec. 2.1*; se trabaja algebraicamente, derivando por ley de la cadena, obteniéndose la siguiente expresión.

$$\epsilon_{xy}^{1-4\beta} \frac{d^4 \hat{v}(\psi)}{d\psi^4} - \epsilon_{xy}^{-2\beta} \frac{d^2 \hat{v}(\psi)}{d\psi^2} = A \cos(\delta(1 - \psi \epsilon_{xy}^\beta)) \quad \text{Ec. 3.61}$$

Con el fin de obtener una EDO con la participación de  $\epsilon_{xy}$  en sólo uno de sus términos; se impone el valor  $\beta = 1/2$  y se trabaja algebraicamente la *Ec. 3.61* para obtener la siguiente ecuación que modela el rango estudiado.

$$\frac{d^4 \hat{v}(\psi)}{d\psi^4} - \frac{d^2 \hat{v}(\psi)}{d\psi^2} = \epsilon_{xy} A \cos(\delta(1 - \psi \sqrt{\epsilon_{xy}})) \quad \text{Ec. 3.62}$$

Por último, se reemplaza la expansión de Taylor en torno a cero, *Ec. 3.63*, en *Ec. 3.62* para obtener una EDO conformada únicamente por polinomios, *Ec. 3.64*.

$$\cos(a(1 - bx)) = \cos(a) + \frac{ab \sin(a)}{1!} x - \frac{a^2 b^2 \cos(a)}{2!} x^2 - \frac{a^3 b^3 \sin(a)}{3!} x^3 + \dots \quad \text{Ec. 3.63}$$

$$\frac{d^4 \hat{v}(\psi)}{d\psi^4} - \frac{d^2 \hat{v}(\psi)}{d\psi^2} = A \left[ \cos(\delta) \epsilon_{xy} + \frac{\delta \sin(\delta) \psi}{1!} \epsilon_{xy}^{3/2} - \frac{\delta^2 \cos(\delta) \psi^2}{2!} \epsilon_{xy}^{5/2} + \dots \right] \quad \text{Ec. 3.64}$$

Debido a que el evaluar  $\hat{x} = 1$  implica un valor de  $\psi = 0$  por el cambio de escala, las condiciones de borde de desplazamiento transversal y giro nulos en los apoyos son reescritas en función de  $\psi$  en las *Ec. 3.65* y *Ec. 3.66*, derivando por regla de la cadena la condición de giro.

$$\hat{v}(\hat{x} = 1) = 0 \rightarrow \hat{v}(\psi = 0) = 0 \quad \text{Ec. 3.65}$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}}(\hat{x} = 1) = 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{xy}}} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \psi}(\psi = 0) = 0 \rightarrow \frac{\partial \hat{v}}{\partial \psi}(\psi = 0) = 0 \quad \text{Ec. 3.66}$$

A continuación, la solución en expansión propuesta en el rango interno a la Capa Límite en  $\hat{x} = 1$  queda denominada por el superíndice "I" por *Inner*.

$$\hat{v}^l(\psi, \epsilon_{xy}) = \hat{v}_0^l(\psi) + \sqrt{\epsilon_{xy}} \hat{v}_1^l(\psi) + \epsilon_{xy} \hat{v}_2^l(\psi) + \epsilon_{xy}^{3/2} \hat{v}_3^l(\psi) + \dots \quad \text{Ec. 3.67}$$

Evaluando la solución propuesta en  $\psi = 0$ , imponiendo las condiciones de borde *Ec. 3.65* y *Ec. 3.66*; e igualando componentes hasta el cuarto término de  $\epsilon_{xy}$  de la expansión, se obtienen las siguientes seis condiciones de borde asociadas a las subfunciones de *Ec. 3.67*.

$$\hat{v}_0^l(\psi = 0) = \hat{v}_1^l(\psi = 0) = \hat{v}_2^l(\psi = 0) = \hat{v}_3^l(\psi = 0) = 0 \quad \text{Ec. 3.68}$$

$$\frac{\partial \hat{v}_0^l}{\partial \psi}(\psi = 0) = \frac{\partial \hat{v}_1^l}{\partial \psi}(\psi = 0) = \frac{\partial \hat{v}_2^l}{\partial \psi}(\psi = 0) = \frac{\partial \hat{v}_3^l}{\partial \psi}(\psi = 0) = 0 \quad \text{Ec. 3.69}$$

Reemplazando la *Ec. 3.67* en *Ec. 3.64* e igualando componentes hasta el cuarto término de  $\epsilon_{xy}$  de la expansión, se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\epsilon_{xy}^0 \rightarrow \frac{\partial^4 \hat{v}_0^l}{\partial \psi^4} - \frac{\partial^2 \hat{v}_0^l}{\partial \psi^2} = 0 \quad \text{Ec. 3.70}$$

$$\sqrt{\epsilon_{xy}} \rightarrow \frac{\partial^4 \hat{v}_1^l}{\partial \psi^4} - \frac{\partial^2 \hat{v}_1^l}{\partial \psi^2} = 0 \quad \text{Ec. 3.71}$$

$$\epsilon_{xy} \rightarrow \frac{\partial^4 \hat{v}_2^l}{\partial \psi^4} - \frac{\partial^2 \hat{v}_2^l}{\partial \psi^2} = A \cos(\delta) \quad \text{Ec. 3.72}$$

$$\epsilon_{xy}^{3/2} \rightarrow \frac{\partial^4 \hat{v}_3^l}{\partial \psi^4} - \frac{\partial^2 \hat{v}_3^l}{\partial \psi^2} = A \delta \sin(\delta) \psi \quad \text{Ec. 3.73}$$

Cuyas soluciones para las funciones  $\hat{v}_0^l$ ,  $\hat{v}_1^l$ ,  $\hat{v}_2^l$  y  $\hat{v}_3^l$  se presentan a continuación.

$$\hat{v}_0^l(\psi) = c_1 e^\psi + c_2 e^{-\psi} + c_3 \psi + c_4 \quad \text{Ec. 3.74}$$

$$\hat{v}_1^l(\psi) = c_5 e^\psi + c_6 e^{-\psi} + c_7 \psi + c_8 \quad \text{Ec. 3.75}$$

$$\hat{v}_2^l(\psi) = -\frac{A \cos(\delta)}{2} \psi^2 + c_9 e^\psi + c_{10} e^{-\psi} + c_{11} \psi + c_{12} \quad \text{Ec. 3.76}$$

$$\hat{v}_3^l(\psi) = -\frac{A \delta \sin(\delta)}{2} \psi^3 + c_{13} e^\psi + c_{14} e^{-\psi} + c_{15} \psi + c_{16} \quad \text{Ec. 3.77}$$

Las constantes de integración  $c_1$ ,  $c_5$ ,  $c_9$  y  $c_{13}$  son inmediatamente consideradas nulas. En caso contrario las *Ec. 3.74*, *Ec. 3.75*, *Ec. 3.76* y *Ec. 3.77* crecerían exponencialmente con respecto a  $\psi$ , lo que sería imposible de acoplar con las soluciones externas.

$$c_1 = c_5 = c_9 = c_{13} = 0 \quad \text{Ec. 3.78}$$

Posteriormente, el resto de las constantes son simplificables mediante el uso de las condiciones de borde *Ec. 3.68* y *Ec. 3.69*. Obteniéndose las siguientes funciones.

$$\hat{v}_0^I(\psi) = c_2(e^{-\psi} + \psi - 1) \quad \text{Ec. 3.79}$$

$$\hat{v}_1^I(\psi) = c_6(e^{-\psi} + \psi - 1) \quad \text{Ec. 3.80}$$

$$\hat{v}_2^I(\psi) = -\frac{A \cos(\delta)}{2} \psi^2 + c_{10}(e^{-\psi} + \psi - 1) \quad \text{Ec. 3.81}$$

$$\hat{v}_3^I(\psi) = -\frac{A \delta \sin(\delta)}{2} \psi^3 + c_{14}(e^{-\psi} + \psi - 1) \quad \text{Ec. 3.82}$$

A continuación, se procede los pasos requeridos en la metodología de las perturbaciones para cada término  $\hat{v}_0$ ,  $\hat{v}_1$ ,  $\hat{v}_2$  y  $\hat{v}_3$ .

## Metodología para $\hat{v}_0$

Primer término externo a las Capas Límites de la expansión  $\hat{v}^o$  en *Ec. 3.83*.

$$\frac{A \cos(\delta \hat{x})}{\delta^2} + a_2 \hat{x} + a_1 \quad \text{Ec. 3.83}$$

Se reescribe en término de la variable interna  $\psi$ , *Ec. 3.60*, y se aplica la expansión de Taylor *Ec. 3.63*.

$$\frac{A}{\delta^2} [\cos(\delta) + \delta \sqrt{\epsilon_{xy}} \sin(\delta) \psi + \dots] + a_2 (1 - \sqrt{\epsilon_{xy}} \psi) + a_1$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xy}$ .

$$\left( \frac{A \cos(\delta)}{\delta^2} + a_2 + a_1 \right) \epsilon_{xy}^0 + \left( \frac{A \sin(\delta)}{\delta} - a_2 \right) \psi \sqrt{\epsilon_{xy}} + \left( -\frac{A \cos(\delta)}{2!} \psi^2 \right) \epsilon_{xy} + \dots$$

Se concluye el primer término de expansión interna a partir de la solución externa dado las constantes que acompañan el término  $\epsilon_{xy}^0$ .

$$\frac{A \cos(\delta)}{\delta^2} + a_2 + a_1 \quad \text{Ec. 3.84}$$

Por otro lado, se tiene el primer término interno a la Capa Límite de la expansión de  $\hat{v}^I$  en la *Ec. 3.85*.

$$c_2 (e^{-\psi} + \psi - 1) \quad \text{Ec. 3.85}$$

Se reescribe en término de la variable externa  $\hat{x}$  de la *Ec. 3.63*.

$$c_2 \left( e^{-\frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}}} + \frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}} - 1 \right)$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xy}$ , donde *EST* denota los pequeños términos exponenciales que no son necesarios en la metodología.

$$-c_2 \epsilon_{xy}^0 + c_2 \frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}} + EST$$

Se concluye el primer término de expansión externa a partir de la solución interna depende del valor de  $c_2$  como sigue.

$$\begin{cases} -c_2 & \text{si } c_2 = 0 \\ \frac{c_2(1-\hat{x})}{\sqrt{\epsilon_{xy}}} & \text{si } c_2 \neq 0 \end{cases} \quad \text{Ec. 3.86}$$

Finalmente, igualando componentes según potencias de  $\epsilon_{xy}$  de las *Ec. 3.84* y *Ec. 3.85*, se concluye el valor de las siguientes constantes.

$$\epsilon_{xy}^{-1/2}: c_2 = 0 \quad \text{Ec. 3.87}$$

$$\epsilon_{xy}^0: \frac{A \cos(\delta)}{\delta^2} + a_2 + a_1 = 0 \quad \text{Ec. 3.88}$$

## Metodología para $\hat{v}_1$

Primeros dos términos externos a las Capas Límites de la expansión  $\hat{v}^o$  en *Ec. 3.89*.

$$\frac{A \cos(\delta \hat{x})}{\delta^2} + a_2 \hat{x} + a_1 + \sqrt{\epsilon_{xy}}(a_3 \hat{x} + a_4) \quad \text{Ec. 3.89}$$

Se reescribe en término de la variable interna  $\psi$ , *Ec. 3.60*, y se aplica la expansión de Taylor *Ec. 3.63*.

$$\frac{A}{\delta^2} [\cos(\delta) + \delta \sqrt{\epsilon_{xy}} \sin(\delta) \psi + \dots] + a_2(1 - \sqrt{\epsilon_{xy}} \psi) + a_1 + \sqrt{\epsilon_{xy}}(a_3(1 - \sqrt{\epsilon_{xy}} \psi) + a_4)$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xy}$ .

$$\left( \frac{A \cos(\delta)}{\delta^2} + a_2 + a_1 \right) \epsilon_{xy}^0 + \left( \frac{A \sin(\delta)}{\delta} \psi - a_2 \psi + a_3 + a_4 \right) \sqrt{\epsilon_{xy}} + \left( -\frac{A \cos(\delta)}{2} \psi^2 + a_3 \psi \right) \epsilon_{xy} + \dots$$

Se concluye los primeros dos términos de la expansión interna a partir de la solución externa según los que interactúan con  $\epsilon_{xy}^0$  y  $\sqrt{\epsilon_{xy}}$ .

$$\frac{A \cos(\delta)}{\delta^2} + a_2 + a_1 + \left( \frac{A \sin(\delta)}{\delta} \psi - a_2 \psi + a_3 + a_4 \right) \sqrt{\epsilon_{xy}} \quad \text{Ec. 3.90}$$

Por otro lado, se tienen los primeros dos términos internos a la Capa Límite de la expansión de  $\hat{v}^l$  en la *Ec. 3.91*.

$$c_2(e^{-\psi} + \psi - 1) + \sqrt{\epsilon_{xy}} c_6(e^{-\psi} + \psi - 1) \quad \text{Ec. 3.91}$$

Se reescribe en término de la variable externa  $\hat{x}$  de la *Ec. 3.60*, retomando el valor de  $c_2$  calculado en la *Ec. 3.87*.

$$\sqrt{\epsilon_{xy}} c_6 \left( e^{-\frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}}} + \frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}} - 1 \right)$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xy}$ , donde *EST* denota los pequeños términos exponenciales que no son necesarios en la metodología.

$$c_6(1 - \hat{x}) \epsilon_{xy}^0 - c_6 \sqrt{\epsilon_{xy}} + EST$$

Se concluye los primeros dos términos de la expansión externa a partir de la solución interna según términos que interactúan con  $\epsilon_{xy}^0$  y  $\sqrt{\epsilon_{xy}}$ .

$$c_6(1 - \hat{x})\epsilon_{xy}^0 - c_6\sqrt{\epsilon_{xy}} \quad \text{Ec. 3.92}$$

Finalmente, expresando la *Ec. 3.90* en términos de  $\hat{x}$  e igualando sus componentes según potencias de  $\epsilon_{xz}$  con la *Ec. 3.92*, se concluye las siguientes relaciones entre constantes.

$$\epsilon_{xy}^0: c_6 = \frac{A \sin(\delta)}{\delta} - a_2 \quad \text{Ec. 3.93}$$

$$\sqrt{\epsilon_{xy}}: -c_6 = a_3 + a_4 \quad \text{Ec. 3.94}$$

## Metodología para $\hat{v}_2$

Primeros tres términos externos a las Capas Límites de la expansión  $\hat{v}^o$  en *Ec. 3.95*.

$$\frac{A \cos(\delta \hat{x})}{\delta^2} + a_2 \hat{x} + a_1 + \sqrt{\epsilon_{xy}}(a_3 \hat{x} + a_4) + \epsilon_{xy}(-A \cos(\delta \hat{x}) + a_5 \hat{x} + a_6) \quad \text{Ec. 3.95}$$

Se reescribe en término de la variable interna  $\psi$ , *Ec. 3.60*, y se aplica la expansión de Taylor *Ec. 3.63*.

$$\begin{aligned} \frac{A}{\delta^2} \left[ \cos(\delta) + \delta \sqrt{\epsilon_{xy}} \sin(\delta) \psi - \frac{\delta^2 \cos(\delta) \psi^2}{2!} \epsilon_{xy} + \dots \right] + a_2(1 - \sqrt{\epsilon_{xy}} \psi) + a_1 \\ + \sqrt{\epsilon_{xy}}(a_3(1 - \sqrt{\epsilon_{xy}} \psi) + a_4) + \epsilon_{xy}(-A[\cos(\delta) + \dots] + a_5(1 - \sqrt{\epsilon_{xy}} \psi) + a_6) \end{aligned}$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xy}$ .

$$\begin{aligned} \left( \frac{A \cos(\delta)}{\delta^2} + a_2 + a_1 \right) \epsilon_{xy}^0 + \left( \frac{A \sin(\delta)}{\delta} \psi - a_2 \psi + a_3 + a_4 \right) \sqrt{\epsilon_{xy}} \\ + \left( -\frac{A \cos(\delta)}{2} \psi^2 + a_3 \psi - A \cos(\delta) + a_5 + a_6 \right) \epsilon_{xy} + \dots \end{aligned}$$

Se concluye los primeros tres términos de la expansión interna a partir de la solución externa según los que interactúan con  $\epsilon_{xy}^0$ ,  $\sqrt{\epsilon_{xy}}$  y  $\epsilon_{xy}$ .

$$\begin{aligned} \left( \frac{A \cos(\delta)}{\delta^2} + a_2 + a_1 \right) \epsilon_{xy}^0 + \left( \frac{A \sin(\delta)}{\delta} \psi - a_2 \psi + a_3 + a_4 \right) \sqrt{\epsilon_{xy}} \\ + \left( -\frac{A \cos(\delta)}{2} \psi^2 + a_3 \psi - A \cos(\delta) + a_5 + a_6 \right) \epsilon_{xy} \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.96}$$

Por otro lado, se tienen los primeros tres términos internos a la Capa Límite de la expansión de  $\hat{v}^l$  en la *Ec. 3.97*.

$$\begin{aligned} c_2(e^{-\psi} + \psi - 1) + \sqrt{\epsilon_{xy}} c_6(e^{-\psi} + \psi - 1) \\ + \epsilon_{xy} \left( -\frac{A \cos(\delta)}{2} \psi^2 + c_{10}(e^{-\psi} + \psi - 1) \right) \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.97}$$

Se reescribe en término de la variable externa  $\hat{x}$  de la *Ec. 3.60*, retomando el valor de  $c_2$  calculado en la *Ec. 3.87*.

$$\sqrt{\epsilon_{xy}} c_6 \left( e^{-\frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}}} + \frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}} - 1 \right) + \epsilon_{xy} \left( -\frac{A \cos(\delta) (1-\hat{x})^2}{2 \epsilon_{xy}} + c_{10} \left( e^{-\frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}}} + \frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}} - 1 \right) \right)$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xy}$ , donde *EST* denota los pequeños términos exponenciales que no son necesarios en la metodología.

$$\left( c_6(1 - \hat{x}) - \frac{A \cos(\delta)}{2} (1 - \hat{x})^2 \right) \epsilon_{xy}^0 + (-c_6 + c_{10}(1 - \hat{x})) \sqrt{\epsilon_{xy}} + (-c_{10}) \epsilon_{xy} + EST$$

Se concluye los primeros tres términos de la expansión externa a partir de la solución interna según términos que interactúan con  $\epsilon_{xy}^0$ ,  $\sqrt{\epsilon_{xy}}$  y  $\epsilon_{xy}$ .

$$\left( c_6(1 - \hat{x}) - \frac{A \cos(\delta)}{2} (1 - \hat{x})^2 \right) \epsilon_{xy}^0 + (-c_6 + c_{10}(1 - \hat{x})) \sqrt{\epsilon_{xy}} + (-c_{10}) \epsilon_{xy} \quad \mathbf{Ec. 3.98}$$

Finalmente, expresando la *Ec. 3.96* en términos de  $\hat{x}$  e igualando sus componentes según potencias de  $\epsilon_{xy}$  con la *Ec. 3.98*, se concluye las siguientes nuevas relaciones entre constantes.

$$\sqrt{\epsilon_{xy}}: c_{10} = -a_3 \quad \mathbf{Ec. 3.99}$$

$$\epsilon_{xy}: -c_{10} = -A \cos(\delta) + a_5 + a_6 \quad \mathbf{Ec. 3.100}$$

### Metodología para $\hat{v}_3$

Primeros cuatro términos externos a las Capas Límites de  $\hat{v}^0$  en *Ec. 3.101*.

$$\begin{aligned} & \frac{A \cos(\delta \hat{x})}{\delta^2} + a_2 \hat{x} + a_1 + \sqrt{\epsilon_{xy}}(a_3 \hat{x} + a_4) \\ & + \epsilon_{xy}(-A \cos(\delta \hat{x}) + a_5 \hat{x} + a_6) + \epsilon_{xy}^{3/2}(a_7 \hat{x} + a_8) \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.101}$$

Se reescribe en término de la variable interna  $\psi$ , *Ec. 3.60*, y se aplica la expansión de Taylor *Ec. 3.63*.

$$\begin{aligned} & \frac{A}{\delta^2} \left[ \cos(\delta) + \delta \sin(\delta) \sqrt{\epsilon_{xy}} \psi - \frac{\delta^2 \cos(\delta) \psi^2}{2!} \epsilon_{xy} - \frac{\delta^3 \sin(\delta) \psi^3}{3!} \epsilon_{xy}^{3/2} + \dots \right] + a_2(1 - \sqrt{\epsilon_{xy}} \psi) \\ & + a_1 + \sqrt{\epsilon_{xy}}(a_3(1 - \sqrt{\epsilon_{xy}} \psi) + a_4) \\ & + \epsilon_{xy}(-A[\cos(\delta) + \delta \sin(\delta) \sqrt{\epsilon_{xy}} \psi + \dots] + a_5(1 - \sqrt{\epsilon_{xy}} \psi) + a_6) \\ & + \epsilon_{xy}^{3/2}(a_7(1 - \sqrt{\epsilon_{xy}} \psi) + a_8) \end{aligned}$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xy}$ .

$$\begin{aligned} & \left( \frac{A \cos(\delta)}{\delta^2} + a_2 + a_1 \right) \epsilon_{xy}^0 + \left( \frac{A \sin(\delta)}{\delta} \psi - a_2 \psi + a_3 + a_4 \right) \sqrt{\epsilon_{xy}} \\ & + \left( -\frac{A \cos(\delta)}{2} \psi^2 + a_3 \psi - A \cos(\delta) + a_5 + a_6 \right) \epsilon_{xy} \\ & + \left( -\frac{A \delta \sin(\delta)}{6} \psi^3 + A \delta \sin(\delta) \psi - a_5 \psi + a_7 + a_8 \right) \epsilon_{xy}^{3/2} + \dots \end{aligned}$$

Se concluye los primeros cuatro términos de la expansión interna a partir de la solución externa según los que interactúan con  $\epsilon_{xy}^0$ ,  $\sqrt{\epsilon_{xy}}$  y  $\epsilon_{xy}$ .

$$\begin{aligned} & \left( \frac{A \cos(\delta)}{\delta^2} + a_2 + a_1 \right) \epsilon_{xy}^0 + \left( \frac{A \sin(\delta)}{\delta} \psi - a_2 \psi + a_3 + a_4 \right) \sqrt{\epsilon_{xy}} \\ & + \left( -\frac{A \cos(\delta)}{2} \psi^2 + a_3 \psi - A \cos(\delta) + a_5 + a_6 \right) \epsilon_{xy} \quad \text{Ec. 3.102} \\ & + \left( -\frac{A \delta \sin(\delta)}{6} \psi^3 + A \delta \sin(\delta) \psi - a_5 \psi + a_7 + a_8 \right) \epsilon_{xy}^{3/2} \end{aligned}$$

Por otro lado, se tienen los primeros cuatro términos internos a la Capa Límite de la expansión de  $\hat{v}^I$  en la *Ec. 3.103*.

$$\begin{aligned}
& c_2(e^{-\psi} + \psi - 1) + \sqrt{\epsilon_{xy}}c_6(e^{-\psi} + \psi - 1) \\
& + \epsilon_{xy} \left( -\frac{A \cos(\delta)}{2} \psi^2 + c_{10}(e^{-\psi} + \psi - 1) \right) \\
& + \epsilon_{xy}^{3/2} \left( -\frac{A\delta \sin(\delta)}{6} \psi^3 + c_{14}(e^{-\psi} + \psi - 1) \right)
\end{aligned} \tag{Ec. 3.103}$$

Se reescribe en término de la variable externa  $\hat{x}$  de la *Ec. 3.60*, retomando el valor de  $c_2$  calculado en la *Ec. 3.87*.

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\epsilon_{xy}}c_6 \left( e^{\frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}}} + \frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}} - 1 \right) + \epsilon_{xy} \left( -\frac{A \cos(\delta)}{2} \frac{(1-\hat{x})^2}{\epsilon_{xy}} + c_{10} \left( e^{\frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}}} + \frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}} - 1 \right) \right) \\
& + \epsilon_{xy}^{3/2} \left( -\frac{A\delta \sin(\delta)}{6} \frac{(1-\hat{x})^3}{\epsilon_{xy}^{3/2}} + c_{14} \left( e^{\frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}}} + \frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xy}}} - 1 \right) \right)
\end{aligned}$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xy}$ , donde *EST* denota los pequeños términos exponenciales que no son necesarios en la metodología.

$$\begin{aligned}
& \left( c_6(1-\hat{x}) - \frac{A \cos(\delta)}{2} (1-\hat{x})^2 - \frac{A\delta \sin(\delta)}{6} (1-\hat{x})^3 \right) \epsilon_{xy}^0 + (-c_6 + c_{10}(1-\hat{x})) \sqrt{\epsilon_{xy}} \\
& + (-c_{10} + c_{14}(1-\hat{x})) \epsilon_{xy} - c_{14} \epsilon_{xy}^{3/2} + EST
\end{aligned}$$

Se concluye los primeros cuatro términos de la expansión externa a partir de la solución interna según términos que interactúan con  $\epsilon_{xy}^0$ ,  $\sqrt{\epsilon_{xy}}$ ,  $\epsilon_{xy}$  y  $\epsilon_{xy}^{3/2}$ .

$$\begin{aligned}
& \left( c_6(1-\hat{x}) - \frac{A \cos(\delta)}{2} (1-\hat{x})^2 - \frac{A\delta \sin(\delta)}{6} (1-\hat{x})^3 \right) \epsilon_{xy}^0 \\
& + (-c_6 + c_{10}(1-\hat{x})) \sqrt{\epsilon_{xy}} + (-c_{10} + c_{14}(1-\hat{x})) \epsilon_{xy} \\
& + (-c_{14}) \epsilon_{xy}^{3/2}
\end{aligned} \tag{Ec. 3.104}$$

Finalmente, expresando la *Ec. 3.102* en términos de  $\hat{x}$  e igualando sus componentes según potencias de  $\epsilon_{xy}$  con la *Ec. 3.104*, se concluye las siguientes nuevas relaciones entre constantes.

$$\epsilon_{xy}: \quad c_{14} = A\delta \sin(\delta) - a_5 \tag{Ec. 3.105}$$

$$\epsilon_{xy}^{3/2}: \quad -c_{14} = a_7 + a_8 \tag{Ec. 3.106}$$

### 3.2.3. Acoplamiento de soluciones

Se resuelve el sistema de ecuaciones planteado por las ecuaciones *Ec. 3.40*, *Ec. 3.41*, *Ec. 3.46*, *Ec. 3.47*, *Ec. 3.52*, *Ec. 3.53*, *Ec. 3.58*, *Ec. 3.59*, *Ec. 3.87*, *Ec. 3.88*, *Ec. 3.93*, *Ec. 3.94*, *Ec. 3.99*, *Ec. 3.100*, *Ec. 3.105* y *Ec. 3.106*; obteniéndose los siguientes valores de constantes de integración.

$$a_1 = -\frac{A}{\delta^2} \quad \text{Ec. 3.107}$$

$$a_3 = \frac{A}{\delta^2} (1 - \cos(\delta)) \quad \text{Ec. 3.108}$$

$$a_3 = -\frac{A}{\delta^2} (2(\cos(\delta) - 1) + \delta \sin(\delta)) \quad \text{Ec. 3.109}$$

$$a_4 = -\frac{A}{\delta^2} (1 - \cos(\delta)) \quad \text{Ec. 3.110}$$

$$a_5 = \frac{A}{\delta^2} ((\delta^2 - 4)(\cos(\delta) - 1) - 2\delta \sin(\delta)) \quad \text{Ec. 3.111}$$

$$a_6 = \frac{A}{\delta^2} (2(\cos(\delta) - 1) + \delta^2 + \delta \sin(\delta)) \quad \text{Ec. 3.112}$$

$$a_7 = \frac{A}{\delta^2} (2(\delta^2 - 4)(\cos(\delta) - 1) - \delta(\delta^2 + 4) \sin(\delta)) \quad \text{Ec. 3.113}$$

$$a_8 = -\frac{A}{\delta^2} ((\delta^2 - 4)(\cos(\delta) - 1) - 2\delta \sin(\delta)) \quad \text{Ec. 3.114}$$

$$b_2 = 0 \quad \text{Ec. 3.115}$$

$$b_6 = \frac{A}{\delta^2} (1 - \cos(\delta)) \quad \text{Ec. 3.116}$$

$$b_{10} = -\frac{A}{\delta^2} (2(\cos(\delta) - 1) + \delta \sin(\delta)) \quad \text{Ec. 3.117}$$

$$b_{14} = \frac{A}{\delta^2} ((\delta^2 - 4)(\cos(\delta) - 1) - 2\delta \sin(\delta)) \quad \text{Ec. 3.118}$$

$$c_2 = 0 \quad \text{Ec. 3.119}$$

$$c_6 = \frac{A}{\delta^2} (\cos(\delta) + \delta \sin(\delta) - 1) \quad \text{Ec. 3.120}$$

$$c_{10} = \frac{A}{\delta^2} (2(\cos(\delta) - 1) + \delta \sin(\delta)) \quad \text{Ec. 3.121}$$

$$c_{14} = -\frac{A}{\delta^2} ((\delta^2 - 4)(\cos(\delta) - 1) - \delta(\delta^2 + 2) \sin(\delta)) \quad \text{Ec. 3.122}$$

### 3.3. Plano XZ

Debido a la similitud de aplicar la Metodología de las Perturbaciones en este nuevo plano, y a lo extenso de su implementación; se expone a continuación únicamente resultados finales y consideraciones que difieran a lo utilizado en el plano XY. El desarrollo detallado se presenta en el *Anexo A*.

#### 3.3.1. Fuera de las Capas Límites

La solución externa en el plano XZ que resuelve la *Ec. 2.2*, queda definida por la *Ec. 3.123*.

$$w^o(\hat{x}, \epsilon_{xz}) = \hat{w}_0^o(\hat{x}) + \sqrt{\epsilon_{xz}} \hat{w}_1^o(\hat{x}) + \epsilon_{xz} \hat{w}_2^o(\hat{x}) + \epsilon_{xz}^{3/2} \hat{w}_3^o(\hat{x}) + \dots \quad \text{Ec. 3.123}$$

Donde las subfunciones requeridas se expresan a continuación.

$$\hat{w}_0^o(\hat{x}) = \frac{A \sin(\delta \hat{x})}{d^2} + a_2 \hat{x} + a_1 \quad \text{Ec. 3.124}$$

$$\hat{w}_1^o(\hat{x}) = a_3 \hat{x} + a_4 \quad \text{Ec. 3.125}$$

$$\hat{w}_2^o(\hat{x}) = -A \sin(\delta \hat{x}) + a_5 \hat{x} + a_6 \quad \text{Ec. 3.126}$$

$$\hat{w}_3^o(\hat{x}) = a_7 \hat{x} + a_8 \quad \text{Ec. 3.127}$$

#### 3.3.2. Dentro de las Capas Límites

##### 3.3.2.1. Rango cercano a $\hat{x} = 0$

Se utiliza el mismo cambio de variable de la *Ec. 3.13*, y la nueva expansión de Taylor, *Ec. 3.128*, para determinar la ecuación que gobierna el comportamiento interno a la Capa Límite en este rango, *Ec. 3.129*; cuya solución se detalla en la *Ec. 3.130*.

$$\sin(ax) = ax \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(ax)^{2n}}{(1+2n)!} \quad \text{Ec. 3.128}$$

$$\frac{d^4 \hat{w}^i(\tau)}{d\tau^4} - \frac{d^2 \hat{w}^i(\tau)}{d\tau^2} = A \left[ \delta \tau \epsilon_{xz}^{3/2} - \frac{\delta^3 \tau^3}{3!} \epsilon_{xz}^{5/2} + \frac{\delta^5 \tau^5}{5!} \epsilon_{xz}^{7/2} + \dots \right] \quad \text{Ec. 3.129}$$

$$\hat{w}^i(\tau, \epsilon_{xz}) = \hat{w}_0^i(\tau) + \sqrt{\epsilon_{xz}} \hat{w}_1^i(\tau) + \epsilon_{xz} \hat{w}_2^i(\tau) + \epsilon_{xz}^{3/2} \hat{w}_3^i(\tau) + \dots \quad \text{Ec. 3.130}$$

El cambio de variable conlleva las siguientes condiciones de borde de desplazamiento y giro.

$$\widehat{w}_0^i(\tau = 0) = \widehat{w}_1^i(\tau = 0) = \widehat{w}_2^i(\tau = 0) = \widehat{w}_3^i(\tau = 0) = 0 \quad \text{Ec. 3.131}$$

$$\frac{\partial \widehat{w}_0^i}{\partial \tau}(\tau = 0) = \frac{\partial \widehat{w}_1^i}{\partial \tau}(\tau = 0) = \frac{\partial \widehat{w}_2^i}{\partial \tau}(\tau = 0) = \frac{\partial \widehat{w}_3^i}{\partial \tau}(\tau = 0) = 0 \quad \text{Ec. 3.132}$$

Por lo tanto, las soluciones de las subfunciones de la *Ec. 3.130*, se expresan a continuación.

$$\widehat{w}_0^i(\tau) = b_2(e^{-\tau} + \tau - 1) \quad \text{Ec. 3.133}$$

$$\widehat{w}_1^i(\tau) = b_6(e^{-\tau} + \tau - 1) \quad \text{Ec. 3.134}$$

$$\widehat{w}_2^i(\tau) = b_{10}(e^{-\tau} + \tau - 1) \quad \text{Ec. 3.135}$$

$$\widehat{w}_3^i(\tau) = -\frac{A\delta}{6}\tau^3 + b_{14}(e^{-\tau} + \tau - 1) \quad \text{Ec. 3.136}$$

Por último, el estudio de las perturbaciones por tramos implican las siguientes ecuaciones de constantes de integración a despejar.

#### Metodología para $\widehat{w}_0$

$$\epsilon_{xz}^{-1/2}: b_2 = 0 \quad \text{Ec. 3.137}$$

$$\epsilon_{xz}^0: a_1 = -b_2 \quad \text{Ec. 3.138}$$

#### Metodología para $\widehat{w}_1$

$$\epsilon_{xz}^0: \frac{A}{\delta} + a_2 = b_6 \quad \text{Ec. 3.139}$$

$$\sqrt{\epsilon_{xz}}: a_4 = -b_6 \quad \text{Ec. 3.140}$$

#### Metodología para $\widehat{w}_2$

$$\sqrt{\epsilon_{xz}}: a_3 = b_{10} \quad \text{Ec. 3.141}$$

$$\epsilon_{xz}: a_6 = -b_{10} \quad \text{Ec. 3.142}$$

### Metodología para $\hat{w}_3$

$$\epsilon_{xz}: a_8 = -b_{14} \quad \text{Ec. 3.143}$$

$$\epsilon_{xz}^{3/2}: a_5 - A\delta = b_{14} \quad \text{Ec. 3.144}$$

#### 3.3.2.2. Rango cercano a $\hat{x} = 1$

Se utiliza el mismo cambio de variable de la *Ec. 3.60*, y la nueva expansión de Taylor, *Ec. 3.145*, para determinar la ecuación que gobierna el comportamiento interno a la Capa Límite en este rango, *Ec. 3.146*; cuya solución se detalla en la *Ec. 3.147*.

$$\cos(a(1 - bx)) = \sin(a) - ab \cos(a)x - \frac{a^2 b^2 \sin(a)}{2!} x^2 + \dots \quad \text{Ec. 3.145}$$

$$\frac{d^4 \hat{w}^I(\psi)}{d\psi^4} - \frac{d^2 \hat{w}^I(\psi)}{d\psi^2} = A \left[ \sin(\delta) \epsilon_{xz} - \delta \cos(\delta) \psi \epsilon_{xz}^{3/2} + \dots \right] \quad \text{Ec. 3.146}$$

$$\hat{w}^I(\psi, \epsilon_{xz}) = \hat{w}_0^I(\psi) + \sqrt{\epsilon_{xz}} \hat{w}_1^I(\psi) + \epsilon_{xz} \hat{w}_2^I(\psi) + \epsilon_{xz}^{3/2} \hat{w}_3^I(\psi) + \dots \quad \text{Ec. 3.147}$$

El cambio de variable conlleva las siguientes condiciones de borde de desplazamiento y giro.

$$\hat{w}_0^I(\psi = 0) = \hat{w}_1^I(\psi = 0) = \hat{w}_2^I(\psi = 0) = \hat{w}_3^I(\psi = 0) = 0 \quad \text{Ec. 3.148}$$

$$\frac{\partial \hat{w}_0^I}{\partial \psi}(\psi = 0) = \frac{\partial \hat{w}_1^I}{\partial \psi}(\psi = 0) = \frac{\partial \hat{w}_2^I}{\partial \psi}(\psi = 0) = \frac{\partial \hat{w}_3^I}{\partial \psi}(\psi = 0) = 0 \quad \text{Ec. 3.149}$$

Por lo tanto, las soluciones de las subfunciones de la *Ec. 3.147*, se expresan a continuación.

$$\hat{w}_0^I(\psi) = c_2(e^{-\psi} + \psi - 1) \quad \text{Ec. 3.150}$$

$$\hat{w}_1^I(\psi) = c_6(e^{-\psi} + \psi - 1) \quad \text{Ec. 3.151}$$

$$\hat{w}_2^I(\psi) = -\frac{A \sin(\delta)}{2} \psi^2 + c_{10}(e^{-\psi} + \psi - 1) \quad \text{Ec. 3.152}$$

$$\hat{w}_3^I(\psi) = \frac{A\delta \cos(\delta)}{6} \psi^3 + c_{14}(e^{-\tau} + \tau - 1) \quad \text{Ec. 3.153}$$

Por último, el estudio de las perturbaciones por tramos implican las siguientes ecuaciones de constantes de integración a despejar.

**Metodología para  $\hat{w}_0$**

$$\epsilon_{xz}^{-1/2}: c_2 = 0 \quad \text{Ec. 3.154}$$

$$\epsilon_{xz}^0: \frac{A}{\delta^2} \sin(\delta) + a_2 + a_1 = 0 \quad \text{Ec. 3.155}$$

**Metodología para  $\hat{w}_1$**

$$\epsilon_{xz}^0: -\frac{A}{\delta} \cos(\delta) - a_2 = c_6 \quad \text{Ec. 3.156}$$

$$\sqrt{\epsilon_{xz}}: a_3 + a_4 = -c_6 \quad \text{Ec. 3.157}$$

**Metodología para  $\hat{w}_2$**

$$\sqrt{\epsilon_{xz}}: -a_3 = c_{10} \quad \text{Ec. 3.158}$$

$$\epsilon_{xz}: -A \sin(\delta) + a_5 + a_6 = -c_{10} \quad \text{Ec. 3.159}$$

**Metodología para  $\hat{w}_3$**

$$\epsilon_{xz}: A\delta \cos(\delta) - a_5 = c_{14} \quad \text{Ec. 3.160}$$

$$\epsilon_{xz}^{3/2}: a_7 + a_8 = -c_{14} \quad \text{Ec. 3.161}$$

### 3.3.3. Acoplamiento de soluciones

Se resuelve el sistema de ecuaciones planteado por las ecuaciones *Ec. 3.137, Ec. 3.138, Ec. 3.139, Ec. 3.140, Ec. 3.141, Ec. 3.142, Ec. 3.143, Ec. 3.144, Ec. 3.154, Ec. 3.155, Ec. 3.156, Ec. 3.157, Ec. 3.158, Ec. 3.159, Ec. 3.160 y Ec. 3.161*; obteniéndose los siguientes valores de constantes de integración.

$$a_1 = 0 \quad \text{Ec. 3.162}$$

$$a_3 = -\frac{A}{\delta^2} \sin(\delta) \quad \text{Ec. 3.163}$$

$$a_3 = -\frac{A}{\delta^2} (\delta(\cos(\delta) + 1) - 2 \sin(\delta)) \quad \text{Ec. 3.164}$$

$$a_4 = \frac{A}{\delta^2} (\sin(\delta) - \delta) \quad \text{Ec. 3.165}$$

$$a_5 = \frac{A}{\delta^2} (2\delta(\cos(\delta) + 1) + (\delta^2 - 4) \sin(\delta)) \quad \text{Ec. 3.166}$$

$$a_6 = -\frac{A}{\delta^2} (\delta(\cos(\delta) + 1) - 2 \sin(\delta)) \quad \text{Ec. 3.167}$$

$$a_7 = \frac{A}{\delta^2} (\delta^2 - 4)(\delta(\cos(\delta) + 1) - 2 \sin(\delta)) \quad \text{Ec. 3.168}$$

$$a_8 = -\frac{A}{\delta^2} (\delta(2(\cos(\delta) + 1) - \delta^2) + (\delta^2 - 4) \sin(\delta)) \quad \text{Ec. 3.169}$$

$$b_2 = 0 \quad \text{Ec. 3.170}$$

$$b_6 = -\frac{A}{\delta^2} (\sin(\delta) - \delta) \quad \text{Ec. 3.171}$$

$$b_{10} = \frac{A}{\delta^2} (\delta(\cos(\delta) + 1) - 2 \sin(\delta)) \quad \text{Ec. 3.172}$$

$$b_{14} = \frac{A}{\delta^2} (\delta(2(\cos(\delta) + 1) - \delta^2) + (\delta^2 - 4) \sin(\delta)) \quad \text{Ec. 3.173}$$

$$c_2 = 0 \quad \text{Ec. 3.174}$$

$$c_6 = -\frac{A}{\delta^2} (\delta \cos(\delta) - \sin(\delta)) \quad \text{Ec. 3.175}$$

$$c_{10} = -\frac{A}{\delta^2} (\delta(\cos(\delta) + 1) - 2 \sin(\delta)) \quad \text{Ec. 3.176}$$

$$c_{14} = \frac{A}{\delta^2} (\delta((\delta^2 + 2) \cos(\delta) - 2) - (\delta^2 - 4) \sin(\delta)) \quad \text{Ec. 3.177}$$

### 3.4. Soluciones compuestas

Finalmente, las soluciones generales de las deformadas transversales del modelo quedan definidas por las *Ec. 3.178* y *Ec. 3.179* para los planos XY y XZ, respectivamente.

$$\hat{v} = \hat{v}^o + \hat{v}^i + \hat{v}^l - (\hat{v}^i)^o - (\hat{v}^l)^o \quad \text{Ec. 3.178}$$

$$\hat{w} = \hat{w}^o + \hat{w}^i + \hat{w}^l - (\hat{w}^i)^o - (\hat{w}^l)^o \quad \text{Ec. 3.179}$$

Donde la definición de sus componentes se resume en la *Tabla 3.1* a continuación.

*Tabla 3.1 Referencias de soluciones compuestas.*

<b>Componente</b>	<b>Referencia</b>
$\hat{v}^o$	<b>Ec. 3.12</b>
$\hat{v}^i$	<b>Ec. 3.20</b>
$\hat{v}^l$	<b>Ec. 3.67</b>
$(\hat{v}^i)^o$	<b>Ec. 3.57</b>
$(\hat{v}^l)^o$	<b>Ec. 3.104</b>
$\hat{w}^o$	<b>Ec. 3.123</b>
$\hat{w}^i$	<b>Ec. 3.130</b>
$\hat{w}^l$	<b>Ec. 3.147</b>
$(\hat{w}^i)^o$	<b>Ec. 6.55</b>
$(\hat{w}^l)^o$	<b>Ec. 6.102</b>

Recordando que sus constantes necesarias se encuentran resumidas en las secciones 3.2.3 y 3.3.3. **Dando por concluido el segundo objetivo específico planteado.**

# Capítulo 4 Validación y estudio de solución por Método de las Perturbaciones

## 4.1. Variación en la cantidad de términos de expansión propuesta

Las soluciones propuestas por el Método de las Perturbaciones, *Ec. 3.178* y *Ec. 3.179*, son respuestas aproximadas al contener expansiones infinitas truncadas. Es necesario comparar sus comportamientos con las soluciones exactas para verificar la validez de su uso.

Se procede a graficar las curvas de deformada transversal por resolución exacta, junto a las soluciones propuestas truncada en los cuatro diferentes términos asociados a las potencias de  $\epsilon$ , observables en las *Ec. 3.1* y *Ec. 3.2*. Se utiliza como parámetros de entrada cables de longitud inicial ocho veces el paso de hélices, solicitados axialmente al 30 % de la carga de falla.

Debido al comportamiento cíclico de las funciones, se combina las deformadas en ambos planos y se estudian los puntos de desplazamiento máximo en tres dimensiones según la *Ec. 4.1*.

$$\Delta_{m\acute{a}x} = \sqrt{v^2 + w^2} \Big|_{m\acute{a}x} \quad \text{Ec. 4.1}$$

La *Tabla 4.1* resume las diferencias porcentuales promedio entre cada truncamiento, con respecto a los desplazamientos máximos calculados por la solución exacta, para cada configuración de daño. Se exponen los resultados asociados únicamente a la configuración *W12*, *Fig. 4.1*. El estudio de los daños restantes se adjunta en el *Anexo B*.

### 4.1.1. Resumen de resultados

Tabla 4.1 Diferencia porcentual MP/Exacta según expansión.

Cantidad de términos	W136	W1	W12	W123	W1234
1	30,5 %	34,8 %	34,3 %	26,5 %	17,3 %
2	34,3 %	38,8 %	37,9 %	29,6 %	19,9 %
3	2,0 %	1,0 %	0,9 %	3,3 %	5,5 %
4	0,7 %	1,4 %	1,0 %	2,4 %	4,7 %

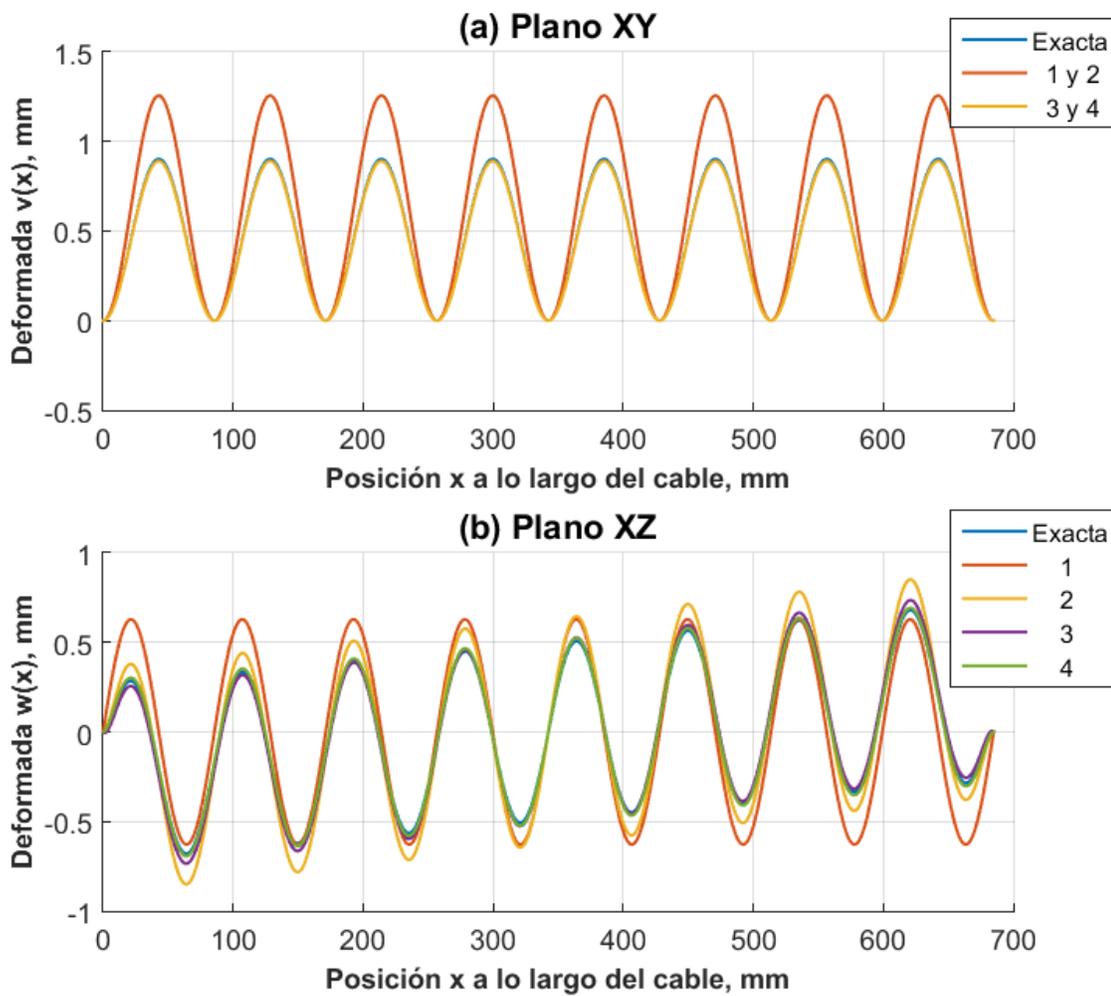


Fig. 4.1 Comparación cantidad de términos en expansión, W12.

### 4.1.2. Análisis y conclusión

De la *Tabla 4.1*, se entiende que mientras más términos en expansiones de  $\epsilon$  se consideren, las soluciones por el Método de las Perturbaciones se asemejan más a las exactas. Entendiendo que las respuestas se superponen de a pares en el plano XY, y que el incremento del error entre usar uno y dos términos se debe a que la primera no captura la inclinación inherente al plano XZ, lo que se compensa al calcular las diferencias en ambos extremos y promediar sus resultados.

El decaimiento del error porcentual es principalmente proporcional a los términos de  $\epsilon$  considerados. Esto concuerda con que el uso de infinitos de ellos regresaría la solución exacta. Dado que la diferencia conceptual al usar cuatro términos es menor al 5 %, se concluye que las soluciones propuestas son válidas para futuros cálculos. **Lo que da por concluido el tercer objetivo específico planteado.**

## 4.2. Impacto de la variación paramétrica en las respuestas

Retomando definiciones de los términos perturbadores  $\epsilon$ , *Ec. 2.12* y *Ec. 2.13*, los factores modificables según la configuración estructural y sollicitación externa son el largo  $L$  y carga axial  $H$ ; mientras que la rigidez transversal de la sección  $(EI)_{sec}$  es inherente al tipo de cable y daño modelado.

Con el objetivo de caracterizar el alcance del efecto de las Capas Límites, CL, se procede a estudiar las respuestas propuestas; variando por turnos ambos factores influyentes para cada configuración de daño.

Debido a que el efecto se aprecia de mejor manera en el plano XZ, y para no saturar de gráficos las siguientes secciones, se procede a comparar la solución exacta en este plano con la entregada por el Modelo Propuesto, MP, y el desglose de esta última en sus secciones externas,  $w^o$ , e internas en ambos extremos,  $w^i$  y  $w^l$ , bajo el daño representativo  $W12$ . El estudio de configuraciones restantes se adjunta en el *Anexo C*.

Como apronte de análisis posteriores, de igual manera se expone la solución No Perturbada, NP, correspondiente a la respuesta de la *Ec. 2.2* despreciando el término  $\epsilon$ . Esto se entiende como la respuesta bajo un modelo de cable tipo fibra, sin restricciones de giro: *String Theory*.

### 4.2.1. Largo fijo y carga variable

Sobre cada disposición de daño, se impone un largo inicial de ocho veces el paso de hélices y se determina la respuesta propuesta para cuatro solicitaciones de carga: 15, 30, 60 y 100 % de la carga de falla. Gráficos observables de la Fig. 4.2 a la Fig. 4.5.

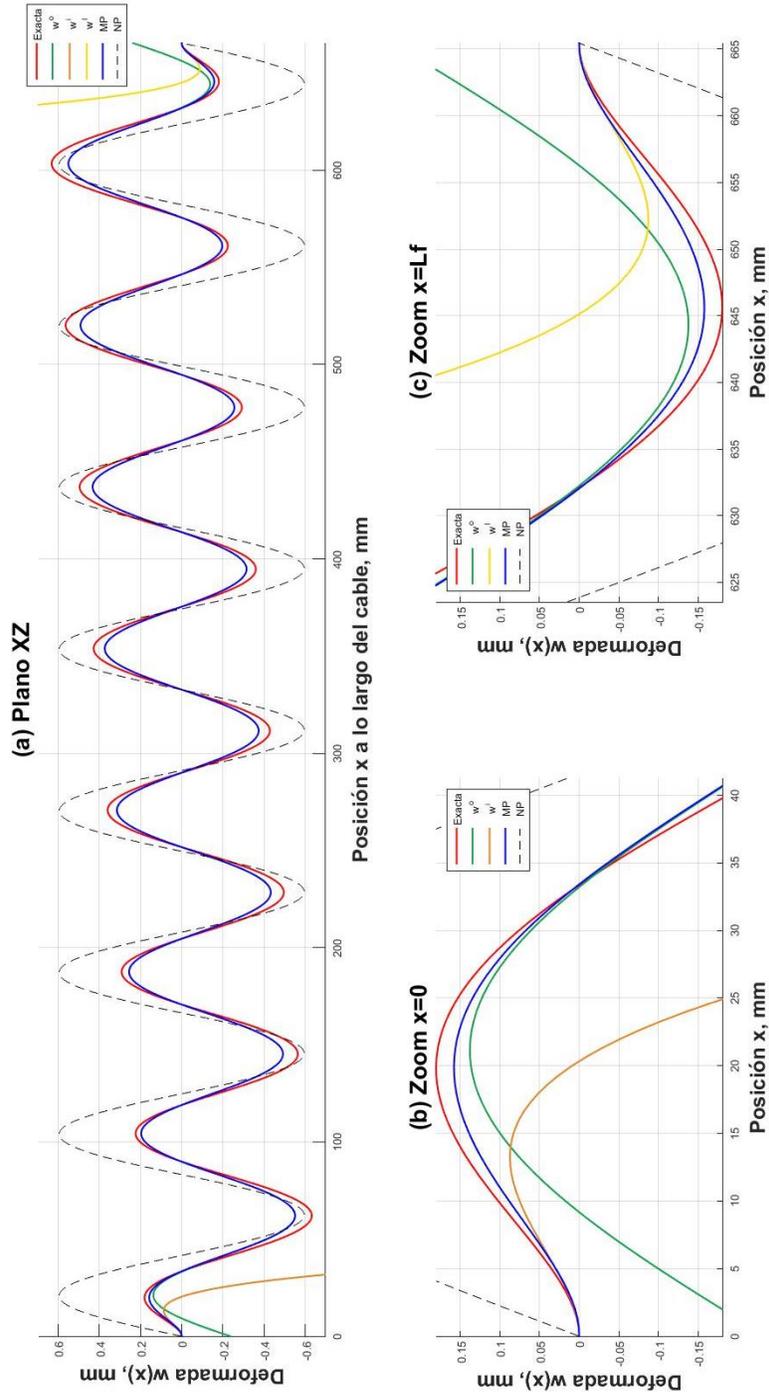


Fig. 4.2 Deformada transversal XZ,  $L=0.65\text{m}$  y  $H=15\%$ , W12.

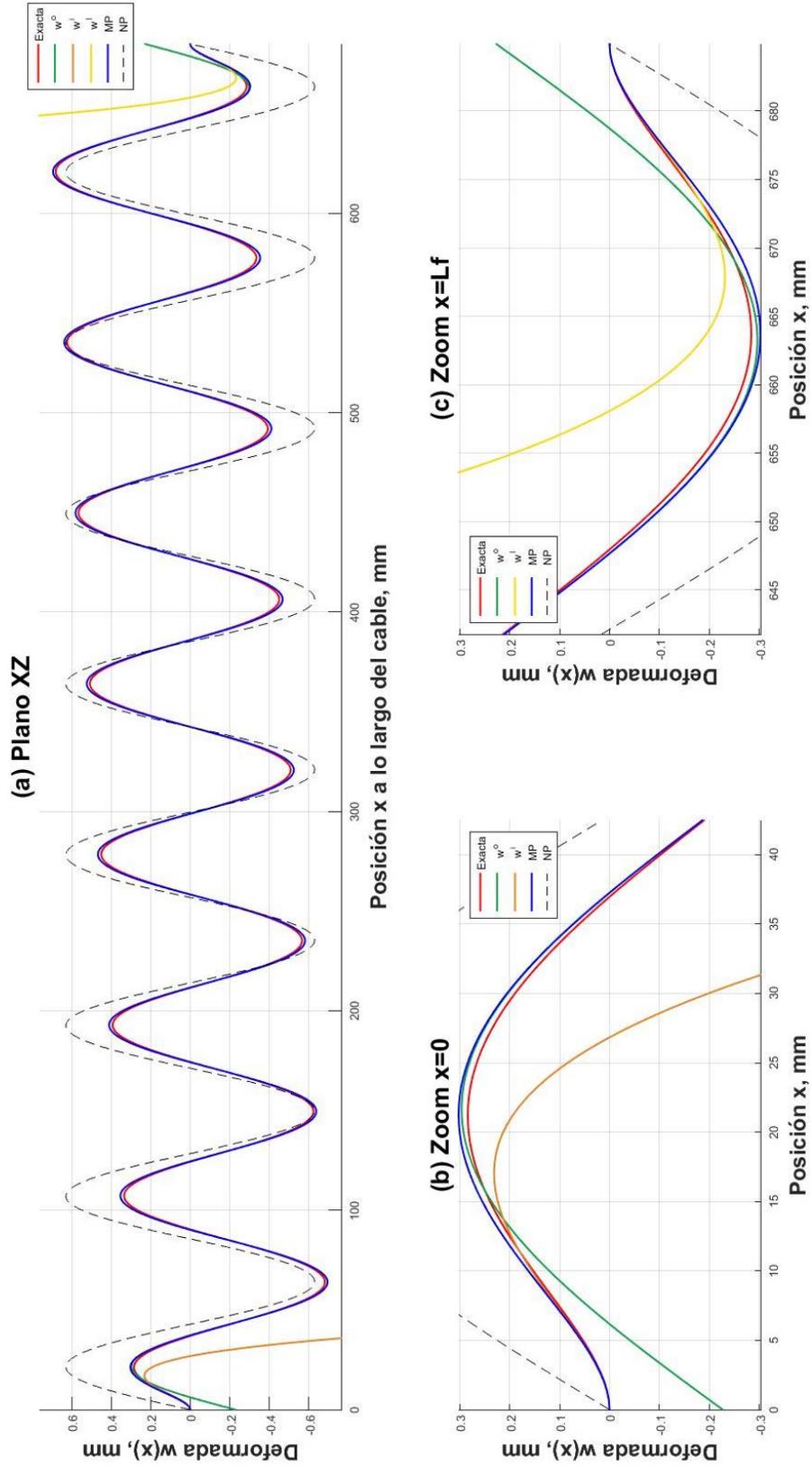


Fig. 4.3 Deformada transversal XZ,  $L=0.65\text{m}$  y  $H=30\%$ , W12.

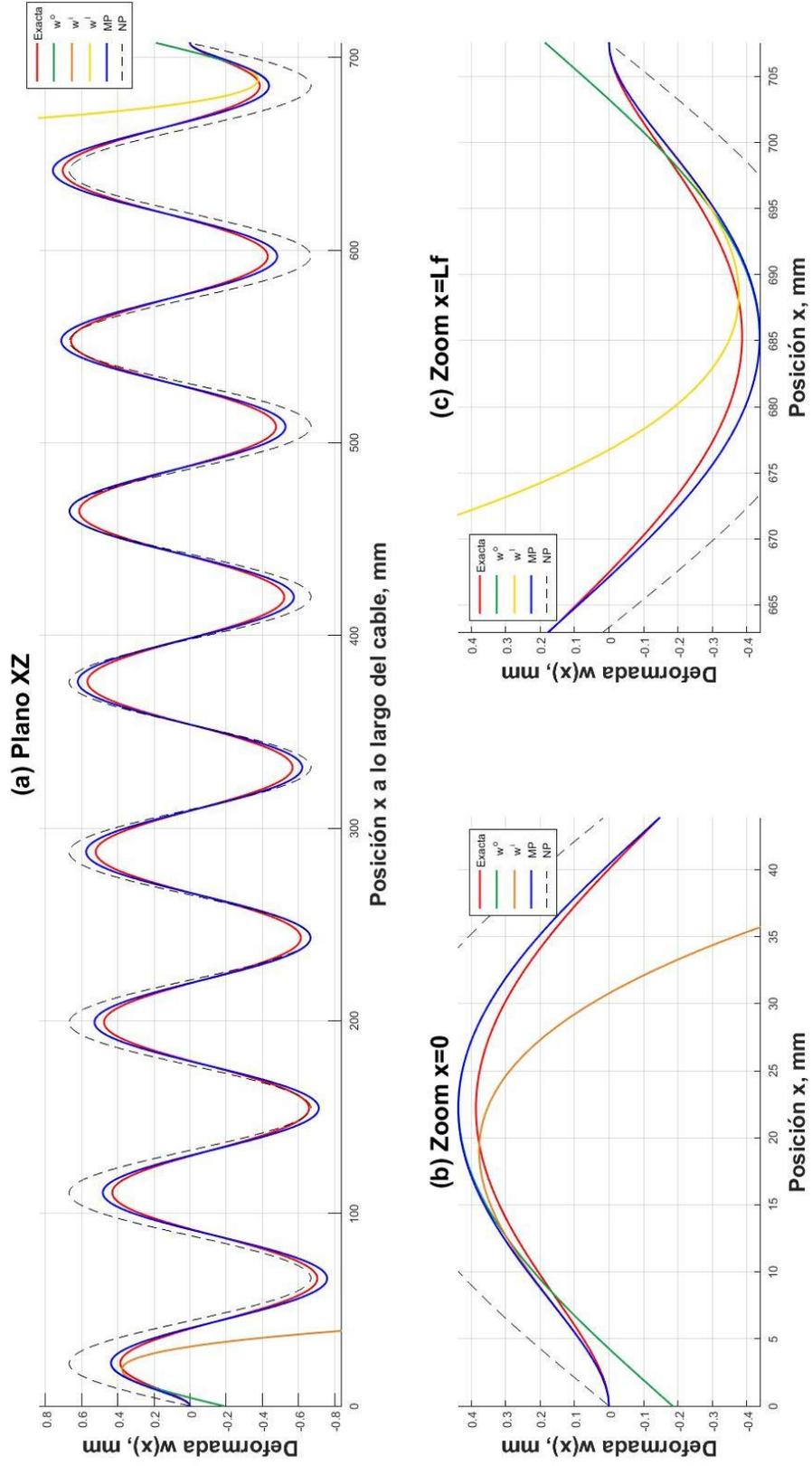


Fig. 4.4 Deformada transversal XZ,  $L=0.65\text{m}$  y  $H=60\%$ , W12.

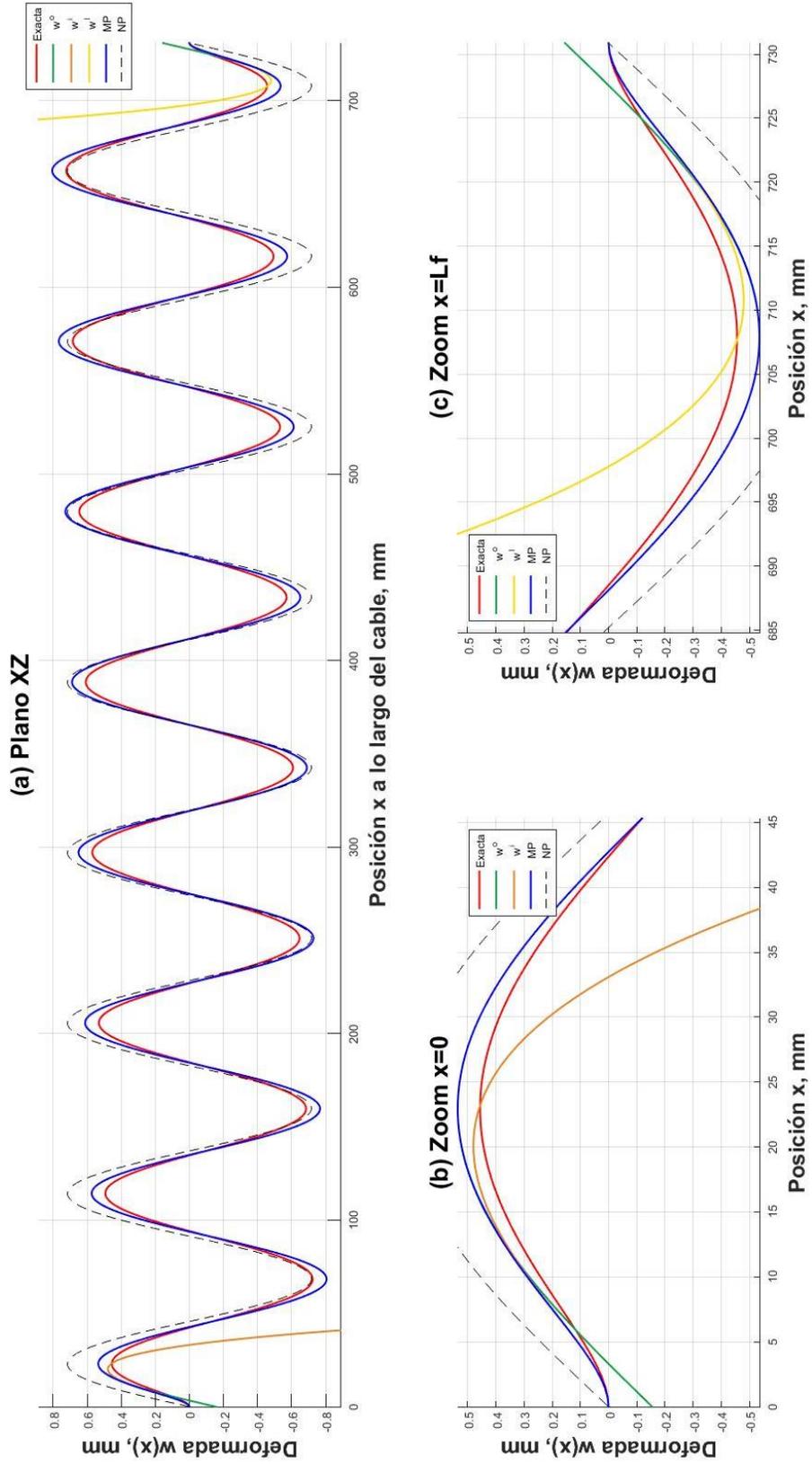
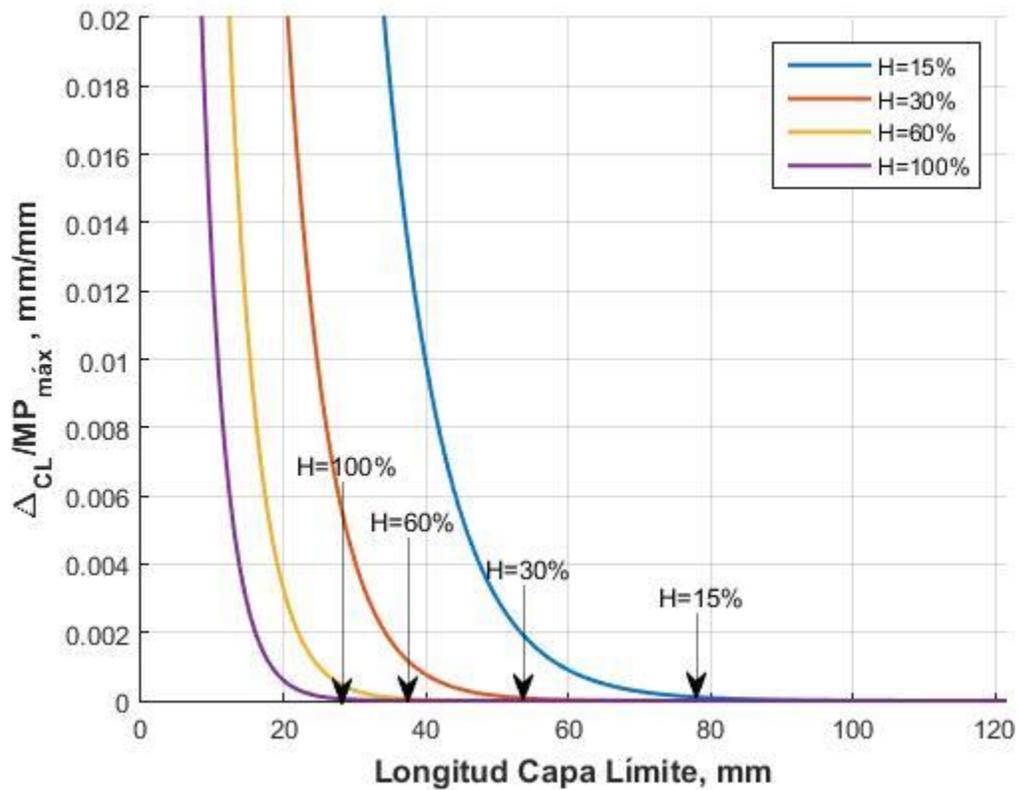


Fig. 4.5 Deformada transversal XZ,  $L=0.65\text{m}$  y  $H=100\%$ , W12.

La longitud de CL se determina a la distancia en que la solución externa se acopla con la solución propuesta por el Método de las Perturbaciones. En la *Fig. 4.6* se aprecia la disminución de diferencia entre ellas, normalizadas por el primer valor máximo de desplazamiento del Modelo Propuesto de daño W12. Basta con presentar el desarrollo en torno a  $x = 0$  por la simetría que presenta con el otro extremo. Resumiendo las longitudes por casos en la *Tabla 4.2*.



*Fig. 4.6 Longitud Capa Límite para diferentes H, L=0.65m, W12.*

*Tabla 4.2 Factor perturbador y longitudes de Capa Límite variando H.*

H %	W136		W1		W12		W123		W1234	
	$\epsilon_{xz}$	L <sub>CL</sub> mm								
15	2,07E-04	91	1,84E-04	84	1,57E-04	76	1,74E-04	80	1,84E-04	85
30	9,93E-05	60	8,80E-05	56	7,52E-05	53	8,31E-05	54	8,79E-05	56
60	4,65E-05	41	4,13E-05	38	3,52E-05	37	3,89E-05	39	4,12E-05	39
100	2,65E-05	32	2,35E-05	29	2,01E-05	28	2,22E-05	30	2,35E-05	29

Las longitudes de CL permiten representar sus valores porcentuales sobre largos finales del cable, según las deformaciones que conllevan las sollicitudes axiales planteadas. La Fig. 4.7 expone la relación para las configuraciones de daño, recordando que el efecto se desarrolla en igual proporción en ambos extremos del modelo.

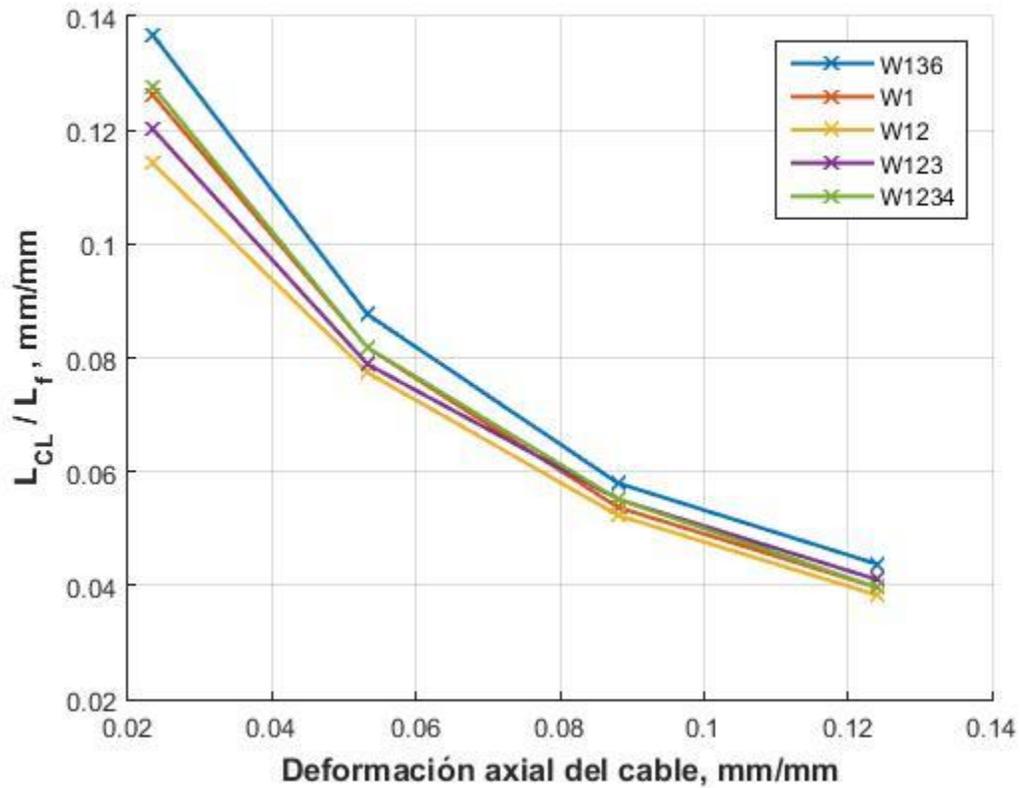


Fig. 4.7 Razón de Capa Límite sobre largo final según deformación axial.

## 4.2.2. Carga fija y largo variable

Sobre cada disposición de daño, se impone una sollicitación axial de diseño del 30 % de la carga de falla y se determina la respuesta propuesta sobre tres nuevos largos diferentes: 16, 24 y 48 veces las longitudes de pasos de hélices. Gráficos observables de la Fig. 4.8 a la Fig. 4.10 y se reutiliza los datos de la Fig. 4.3.

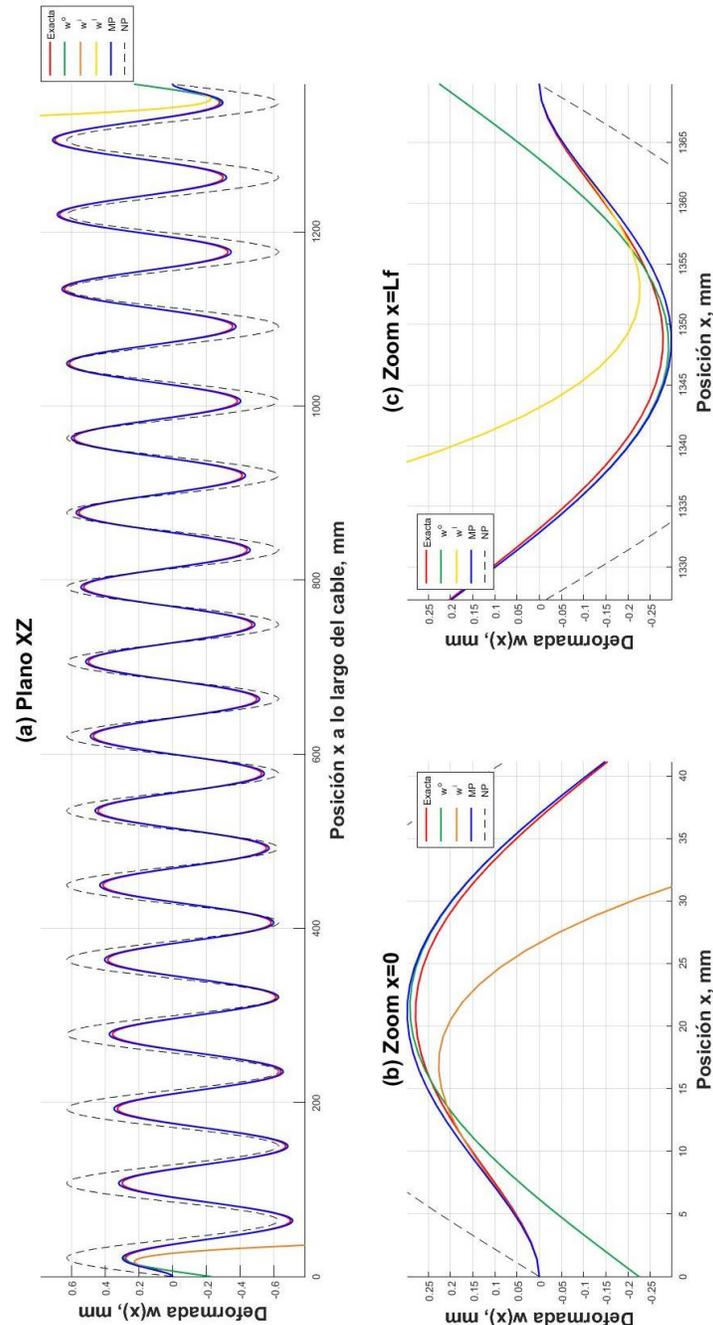


Fig. 4.8 Deformada transversal XZ,  $H=30\%$  y  $L=1.3m$ , W12.

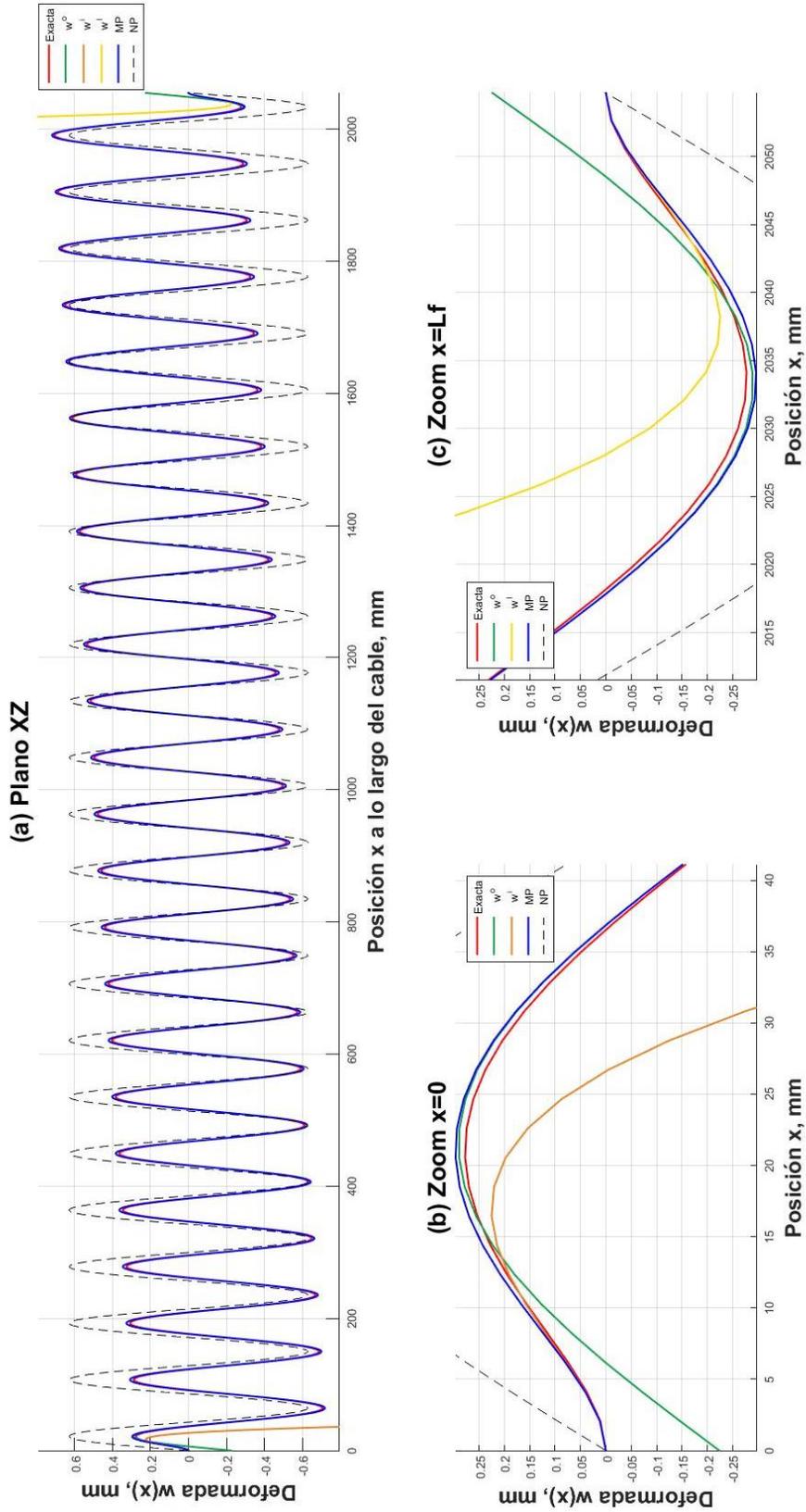


Fig. 4.9 Deformada transversal XZ,  $H=30\%$  y  $L=1.95m$ , W12.

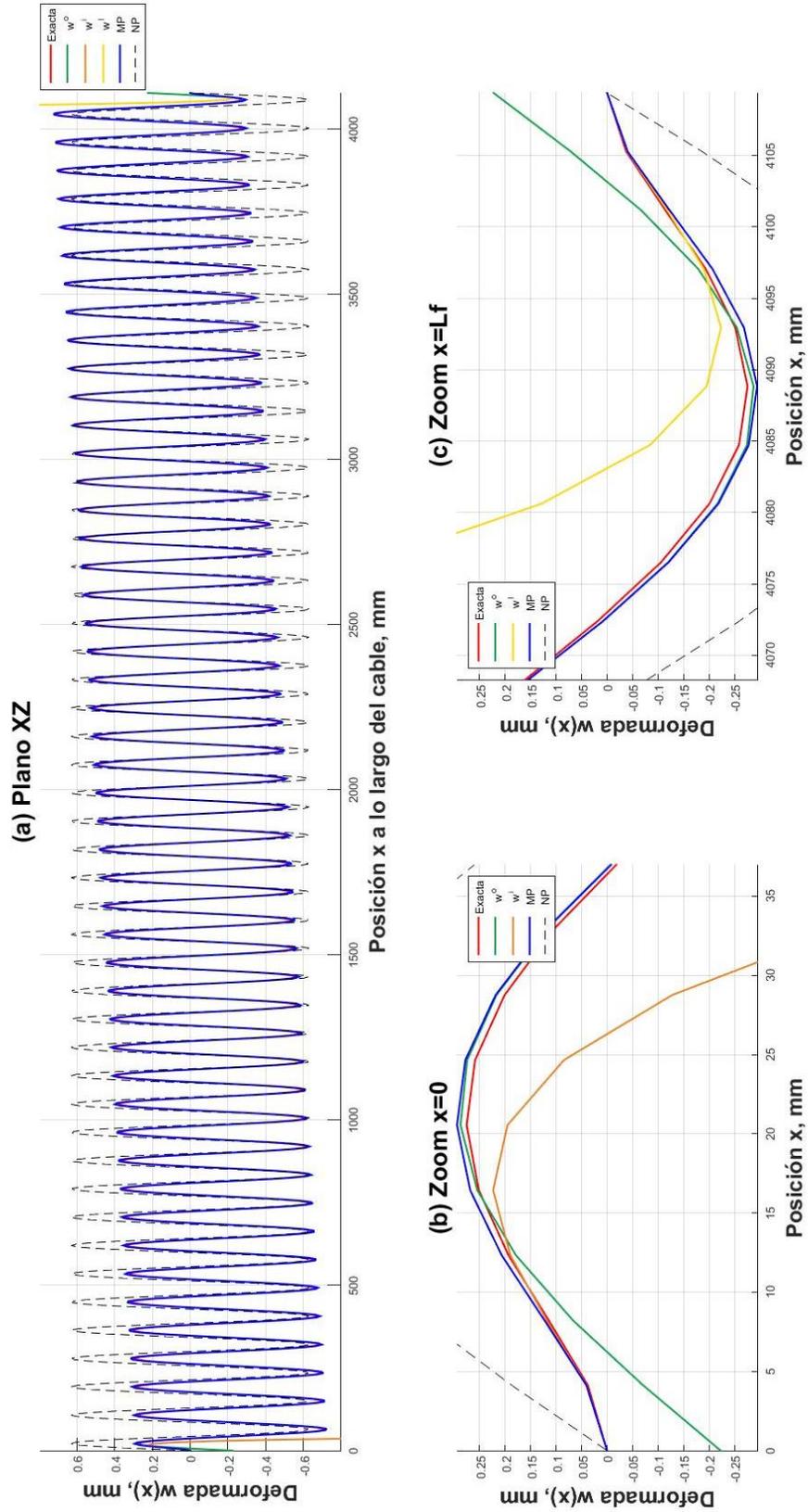


Fig. 4.10 Deformada transversal XZ,  $H=30\%$  y  $L=3.9m$ , W12.

Se determina la longitud de CL de igual manera que en la sección 4.2.1. La Fig. 4.11 expone la convergencia de resultados para cada largo inicial diferente de daño W12; presentando únicamente el desarrollo en torno a  $x = 0$  por la simetría que presenta con el otro extremo. Resumiendo las longitudes por casos en la Tabla 4.3.

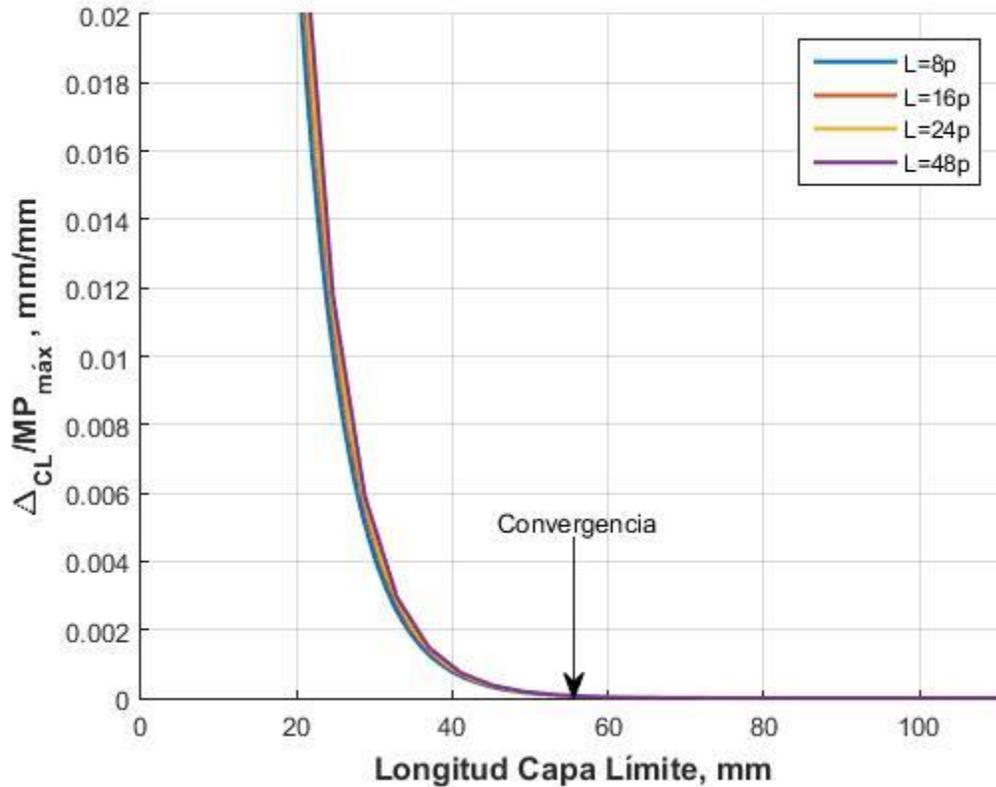


Fig. 4.11 Longitud Capa Límite para diferentes L, H=30%, W12.

Tabla 4.3 Factor perturbador y longitudes de Capa Límite variando L.

$L$ [m]	$\epsilon_{xz}$				
	W136	W1	W12	W123	W1234
0,65	9,93E-05	8,80E-05	7,52E-05	8,31E-05	8,80E-05
1,3	2,48E-05	2,20E-05	1,88E-05	2,08E-05	2,20E-05
1,95	1,10E-05	9,78E-06	8,36E-06	9,23E-06	9,77E-06
3,9	2,76E-06	2,45E-06	2,09E-06	2,31E-06	2,44E-06
$L_{CL}$ [mm]	63	60	55	58	60

Las longitudes de CL permiten representar sus valores porcentuales sobre largos finales del cable, según cada largo inicial planteado. La Fig. 4.12 expone la relación para las configuraciones de daño, recordando que el efecto se desarrolla en igual proporción en ambos extremos del modelo.

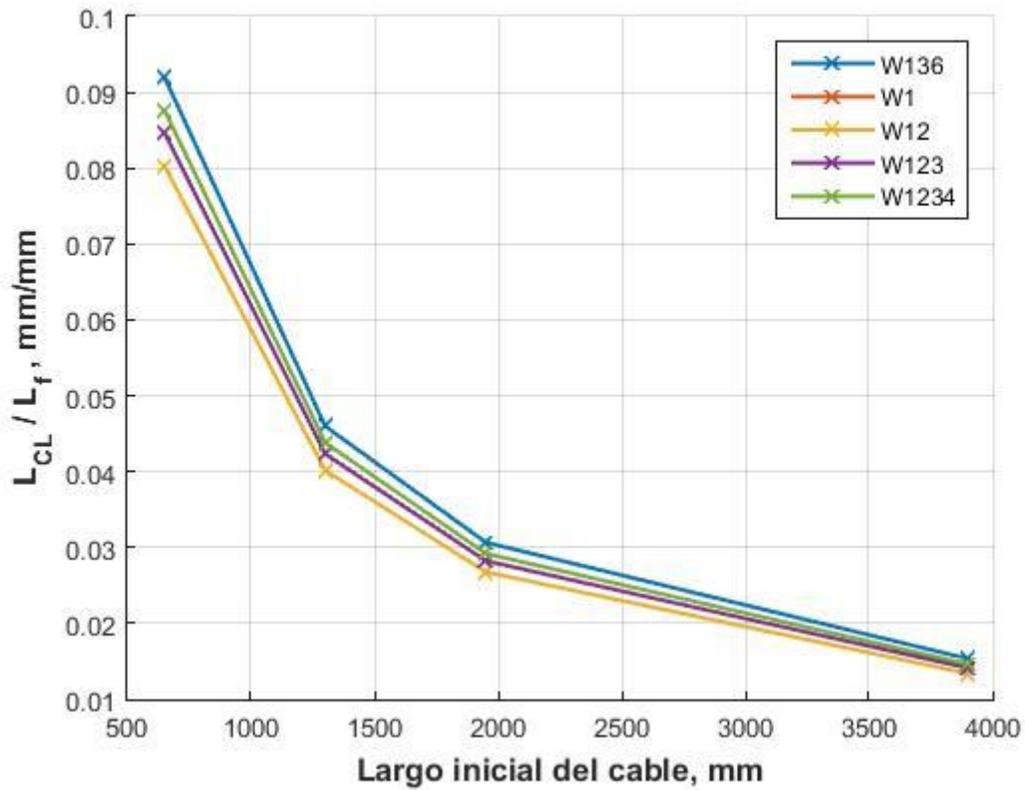


Fig. 4.12 Razón de Capa Límite sobre largo final según largo inicial.

### 4.2.3. Análisis y conclusión

Como se aprecia en las Fig. 4.6 y Fig. 4.7, para cada configuración de daño, los rangos bajo el efecto de las Capas Límites decaen logarítmicamente al aumentar la sollicitud axial del cable. No obstante, el mismo decaimiento logarítmico es independiente a la configuración de daño al variar el largo inicial del cable estudiado, Fig. 4.11 y Fig. 4.12.

Es por dichos resultados que, a pesar de que  $L$  y  $(EI)_{sec}$  son variables que también definen el término perturbador  $\epsilon$ , es la sollicitación  $H$  el factor externo a las propiedades del cable más importante para determinar la influencia del efecto de las Capas Límites en el cable.

Finalmente, los pares de longitudes de CL y factores perturbadores de la Tabla 4.2 y Tabla 4.3 permiten representar la influencia tipo media parábola horizontal del efecto según la magnitud de perturbación; notando que esta es independiente del tipo daño. **Dando por concluido el cuarto objetivo específico planteado.**

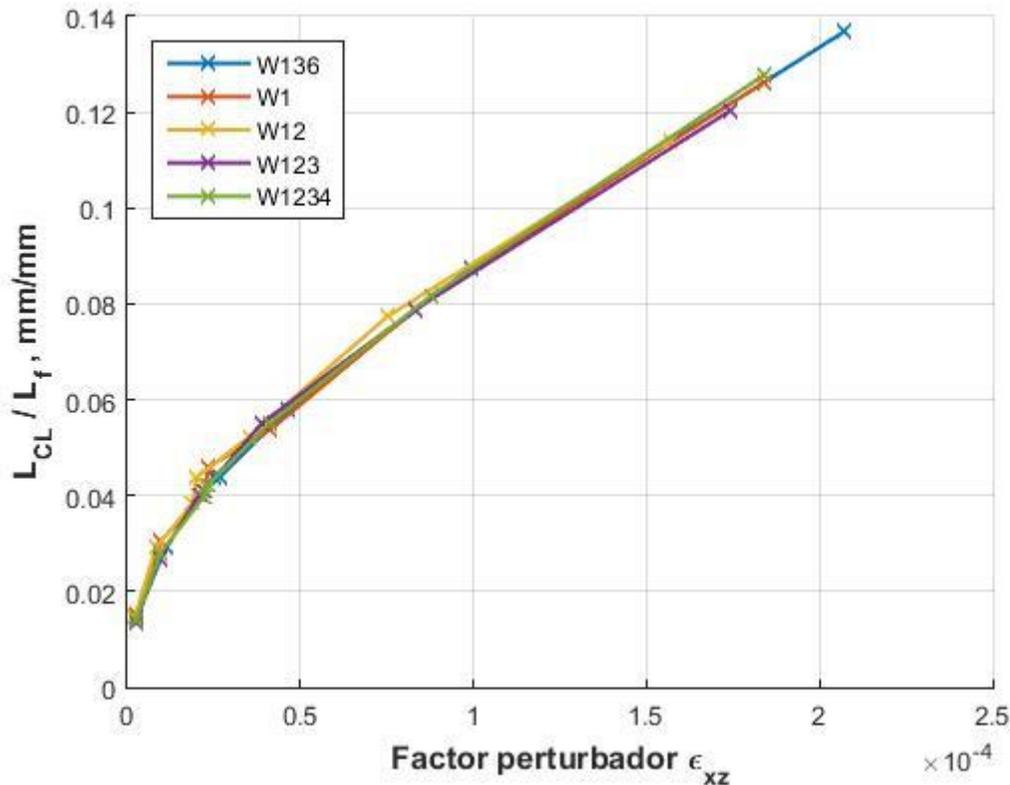


Fig. 4.13 Razón de Capa Límite sobre largo final según factor perturbador XZ.

# Capítulo 5 Aplicación y comparación de modelos

## 5.1. Algoritmo propuesto

Se recurre al trabajo de Enzo De Vico (2013) para implementar una rutina iterativa de metodología secante que caracterice el comportamiento del cable dañado. De este análisis se obtienen gráficos relacionadas a: curva de capacidad y deformada transversal del cable dañado; y distribución de tensión y deformación por elementos de la sección transversal.

A continuación, se detallan los cálculos del algoritmo referenciando al  $n$ -ésimo paso incremental. Metodología adaptada para trabajar en función del nuevo Modelo Propuesto.

- **Paso 1:** Dado un incremento en desplazamiento axial  $\Delta u_n$ , fracción del estiramiento final deseado, se estima un valor inicial de respuesta axial inicial del cable,  $H_n^i$ , dada la *Ec. 5.1*.

$$H_n^i = S_c \sigma_c + \sum S_e \sigma_e \cos \theta_{ne} \quad \text{Ec. 5.1}$$

$$e = \frac{\Delta u_n}{L_i} \cos^2 \theta_{c/e} \quad \text{Ec. 5.2}$$

$$\sigma = \sigma_b \left[ 1.11 \left( \frac{e}{e_b} \right) - 2.05 \left( \frac{e}{e_b} \right)^2 + 2.4 \left( \frac{e}{e_b} \right)^3 + 1.19 \left( \frac{e}{e_b} \right)^4 - 1.65 \left( \frac{e}{e_b} \right)^5 \right] \quad \text{Ec. 5.3}$$

Donde los subíndices  $c$  y  $e$  se refieren a la hebra núcleo “core” y exteriores de la sección transversal. Los términos  $S$ ,  $\sigma$ ,  $\theta$  y  $e$  corresponden al área, tensión, inclinación y deformación axial de cada componente (proyectada de ser necesaria), respectivamente; y  $L_i$  largo inicial del cable.

La *Ec. 5.3* es un polinomio representativo de la ley constitutiva no lineal del poliéster usado en el cable estudiado. Siendo  $e_b$  y  $\sigma_b$  valores de deformación y tensión de falla del material.

- **Paso 2:** Calcular  $A_n$ , *Ec. 5.4*, con sus consecuentes deformaciones transversales,  $\hat{v}(\hat{x})_n$  y  $\hat{w}(\hat{x})_n$ , dadas por las ecuaciones *Ec. 3.178* y *Ec. 3.179*. Notando que todas las constantes de integración necesarias son afectadas por los  $n$ -ésimos estiramientos incrementales.

$$A_n = \frac{C_n}{H_n^i / L_n} \quad \text{Ec. 5.4}$$

- **Paso 3:** Obtener la deformación axial en cada elemento del cable, *Ec. 5.5*, proyectando  $u_n$  de las hebras exteriores; evaluando las coordenadas de elementos  $y$  y  $z$  en sus correspondientes planos principales fijos, según la *Fig. 2.2*, a lo largo del cable. Siendo  $v(x)$  y  $w(x)$  la desnormalización de las deformadas  $\hat{v}(x)$  y  $\hat{w}(x)$ .

$$\varepsilon_{xn} = \frac{u_n}{L_i} - yv''(x)_n + zw''(x)_n \quad \text{Ec. 5.5}$$

- **Paso 4:** A partir del gradiente de deformación axial entregado por la *Ec. 5.5*, se calcula su gradiente de tensiones asociado,  $\sigma_{xn}$ , según la ley constitutiva *Ec. 5.3*. A partir de la distribución anterior, se obtiene una nueva carga axial final del cable, mediante la *Ec. 5.6*.

$$H_n^f = S_c \sigma_{xn}^c + \sum S_e \sigma_{xn}^e \cos \theta_{ne} \quad \text{Ec. 5.6}$$

- **Paso 5:** Calcular el error, *Ec. 5.7*. Si la diferencia es menor a un 2 %, criterio adoptado, la fuerza axial para el  $n$ -ésimo incremento de desplazamiento queda determinado por  $H_n^f$  y se prosigue con el análisis para el incremento  $n + 1$ . De no cumplirse la condición, se debe retroalimentar el modelo a partir de  $H_n^i = H_n^f$  (Paso 1) para obtener  $H_n^{f+1}$  y seguir con el mismo procedimiento.

$$err_n = \frac{|H_n^f - H_n^i|}{H_n^i} \quad \text{Ec. 5.7}$$

## 5.2. Análisis de comportamiento dentro de las Capas Límites

Un detalle nunca planteado en modelos anteriores es la influencia de la curvatura,  $v''$  y  $w''$ , en los gradientes de tensiones y deformaciones. La Fig. 5.1 presenta la variación de curvatura en el recorrido según el Modelo Propuesto, para el caso W12, deformación global  $e = 0,031$  y largo inicial ocho veces el paso de hélices. Los gráficos asociados al resto de daños se adjuntan en el Anexo D.

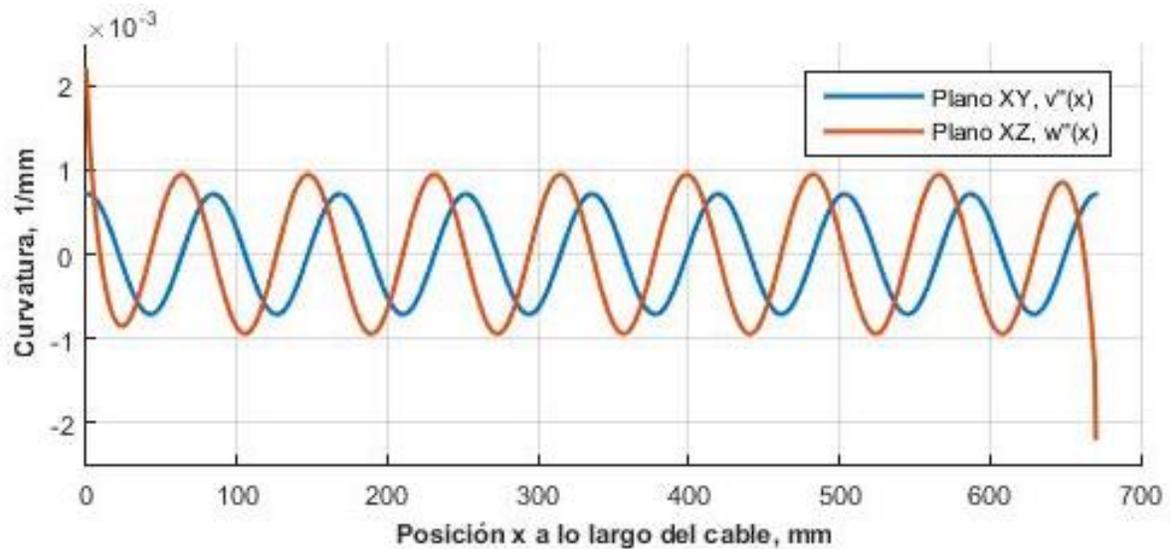


Fig. 5.1 Curvatura por plano,  $e=0.031$ , W12.

Las máximas curvaturas superan los valores críticos planteados por Papailiou (1997), que para los daños estudiados son del orden de  $10^{-3} \frac{1}{mm}$  con coeficiente de fricción  $\mu = 0,1$  entre hebras. No obstante, al desarrollarse en rangos tan acotados dentro de las Capas Límites, que de por sí ya son acotadas, se desprecia el posible efecto del deslizamiento entre núcleo y hebras externas en el cálculo de rigidez transversal.

Si bien los planos XY presentan oscilaciones constantes de curvatura; sus pares XZ plantean notorios incrementos en las cercanías de los apoyos en comparación a los valores máximos en el medio, *Tabla 5.1*. Por consecuencia, este efecto maximiza las solicitaciones axiales en los bordes, *Ec. 5.5*, lo que se condice con evidencia experimental de fallas en los extremos y confirma dichas zonas como críticas en el modelo.

Tabla 5.1 Aumento porcentual de curvatura en XZ dentro de CL.

<b><i>Daño</i></b>	<b><i>Aumento de curvatura</i></b>
W136	185,9 %
W1	206,2 %
W12	230,8 %
W123	220,3 %
W1234	213,1 %

### 5.3. Implementación de algoritmo y comparación con modelos anteriores

La presente sección tiene el carácter comparativo del Modelo Propuesto, rotulado “MP”, y la solución de Enzo De Vico, rotulada “Exacta”; considerando datos FEM como los datos a recrear. Modelos de largo inicial ocho veces el paso de hélices, 650 mm, son estirados gradualmente, en cada iteración del algoritmo, hasta llegar a la deformación global de falla.

Con el objetivo de estudiar la sección transversal más crítica en el recorrido de los cables, de la sección 5.2 se entiende la necesidad de caracterizar gradientes de sollicitaciones dentro y fuera de la Capa Límite. Dicho esto, los puntos 5.3.1 y 5.3.2 exponen estudios en las secciones de ambos extremos:  $x = 0$  y  $x = L_f$ ; mientras que la zona intermedia de los cables se evalúa en uno de los puntos cíclicos en que el daño helicoidal del cable calza con la configuración inicial del daño, *Fig. 1.3*.

### 5.3.1. Distribución de deformaciones por componentes

La Fig. 5.2 resume la distribución de deformaciones por hebras, dentro y fuera de las CL, a la máxima deformación global del cable. Para cada daño, la *Tabla 5.2* resume las variaciones porcentuales de comparar las deformaciones de cada hebra externa con respecto al núcleo de su propia sección transversal; y al comparar cada hebra dentro de las CL con sus pares fuera.

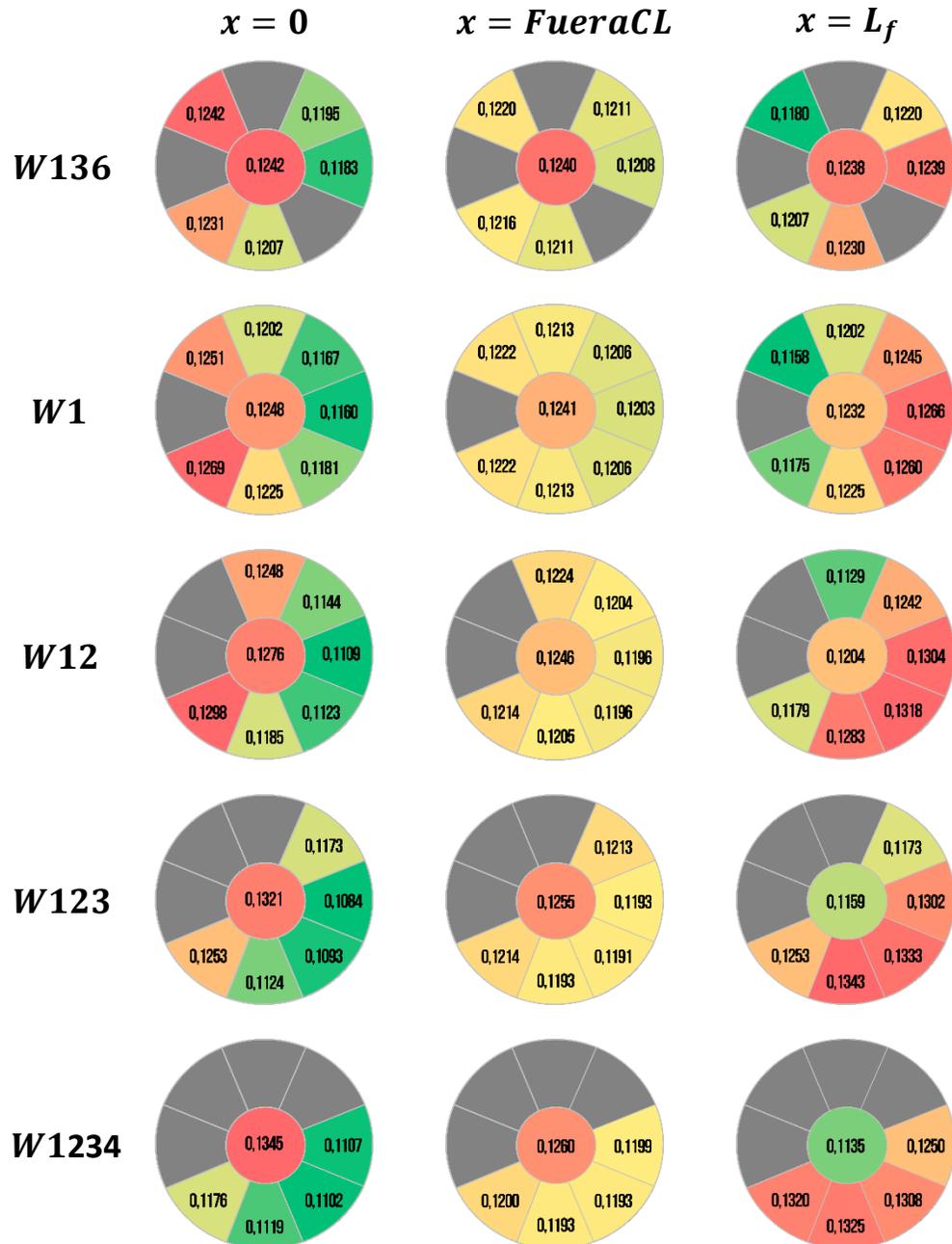


Fig. 5.2 Distribución de deformaciones máximas dentro y fuera de CL, mm/mm.

Tabla 5.2 Estudio gradiente de deformación por sección transversal.

Daño	Elemento	C/r a sus propios núcleos			C/r a $x = FueraCL$	
		$x = 0$	$x = FueraCL$	$x = L_f$	$x = FueraCL$	$x = L_f$
W136	0	-	-	-	0,14 %	-0,21 %
	2	-0,03 %	-1,69 %	-4,70 %	1,83 %	-3,27 %
	4	-3,77 %	-2,39 %	-1,48 %	-1,27 %	0,72 %
	5	-4,74 %	-2,64 %	0,07 %	-2,02 %	2,57 %
	7	-2,80 %	-2,37 %	-0,61 %	-0,30 %	1,59 %
	8	-0,88 %	-1,99 %	-2,49 %	1,27 %	-0,72 %
W1	0	-	-	-	0,49 %	-0,73 %
	2	0,31 %	-1,56 %	-6,06 %	2,40 %	-5,26 %
	3	-3,66 %	-2,28 %	-2,48 %	-0,93 %	-0,93 %
	4	-6,48 %	-2,88 %	1,04 %	-3,24 %	3,28 %
	5	-7,00 %	-3,08 %	2,75 %	-3,57 %	5,25 %
	6	-5,31 %	-2,86 %	2,23 %	-2,04 %	4,47 %
	7	-1,84 %	-2,26 %	-0,63 %	0,93 %	0,93 %
	8	1,70 %	-1,54 %	-4,64 %	3,81 %	-3,85 %
W12	0	-	-	-	2,40 %	-3,44 %
	3	-2,23 %	-1,84 %	-6,21 %	2,00 %	-7,74 %
	4	-10,41 %	-3,39 %	3,19 %	-5,04 %	3,13 %
	5	-13,12 %	-4,06 %	8,31 %	-7,26 %	9,01 %
	6	-12,02 %	-4,04 %	9,47 %	-6,11 %	10,16 %
	7	-7,19 %	-3,34 %	6,61 %	-1,67 %	6,50 %
	8	1,67 %	-1,79 %	-2,07 %	6,01 %	-3,73 %
W123	0	-	-	-	5,23 %	-7,62 %
	4	-11,17 %	-3,36 %	1,19 %	-3,27 %	-3,27 %
	5	-17,93 %	-4,96 %	12,32 %	-9,13 %	9,17 %
	6	-17,20 %	-5,09 %	14,99 %	-8,19 %	11,93 %
	7	-14,86 %	-4,92 %	15,82 %	-5,77 %	12,52 %
	8	-5,09 %	-3,28 %	8,12 %	3,26 %	3,26 %
W1234	0	-	-	-	6,70 %	-9,95 %
	5	-17,72 %	-4,89 %	10,15 %	-7,69 %	4,29 %
	6	-18,07 %	-5,34 %	15,20 %	-7,65 %	9,60 %
	7	-16,80 %	-5,33 %	16,71 %	-6,23 %	11,01 %
	8	-12,54 %	-4,82 %	16,29 %	-1,95 %	10,02 %

De la Fig. 5.3 a la Fig. 5.7 se presentan las deformaciones axiales por hebra, según deformación global del cable, en base a la solución del MP y Exacta en las secciones con hebras más solicitadas de la Fig. 5.2, que siempre están dentro de una de las Capas Límites para todo nivel de deformación del cable. Se agregan también valores máximos y mínimos de modelos FEM, destacando que estos corresponden a secciones al medio del cable, razón por la que sus hebras se modelan de a pares según el tipo de daño.

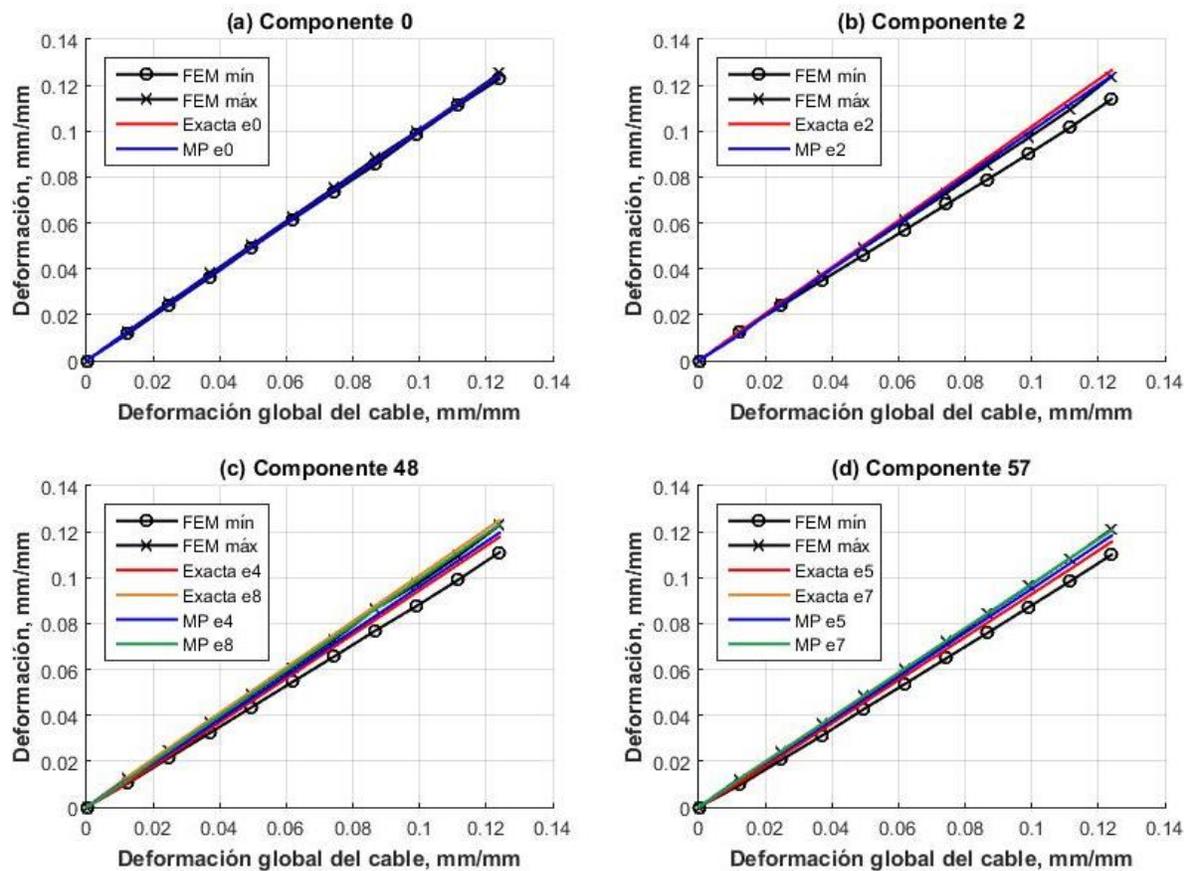


Fig. 5.3 Distribución de deformación por componente, W136.

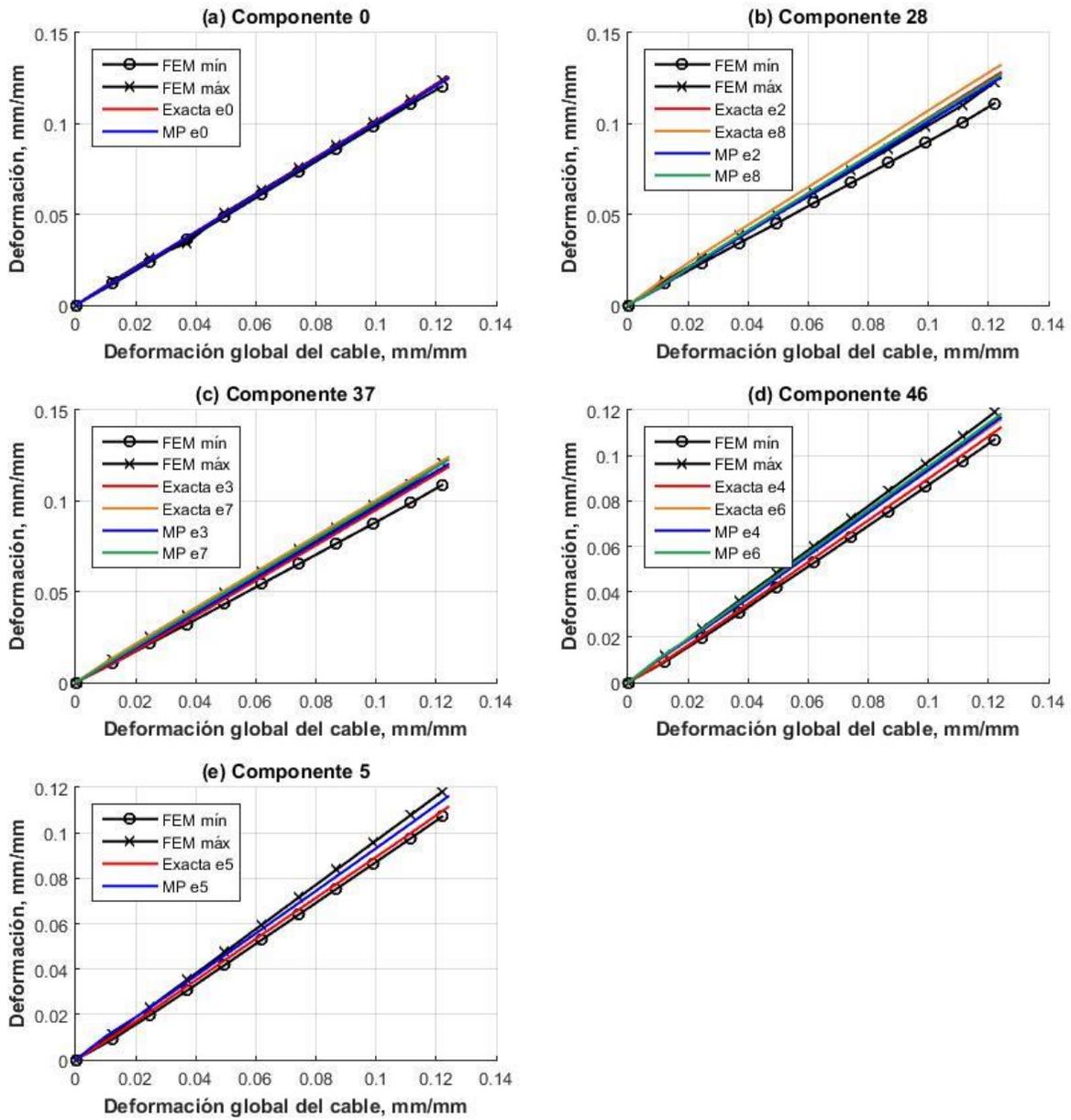


Fig. 5.4 Distribución de deformación por componente, W1.

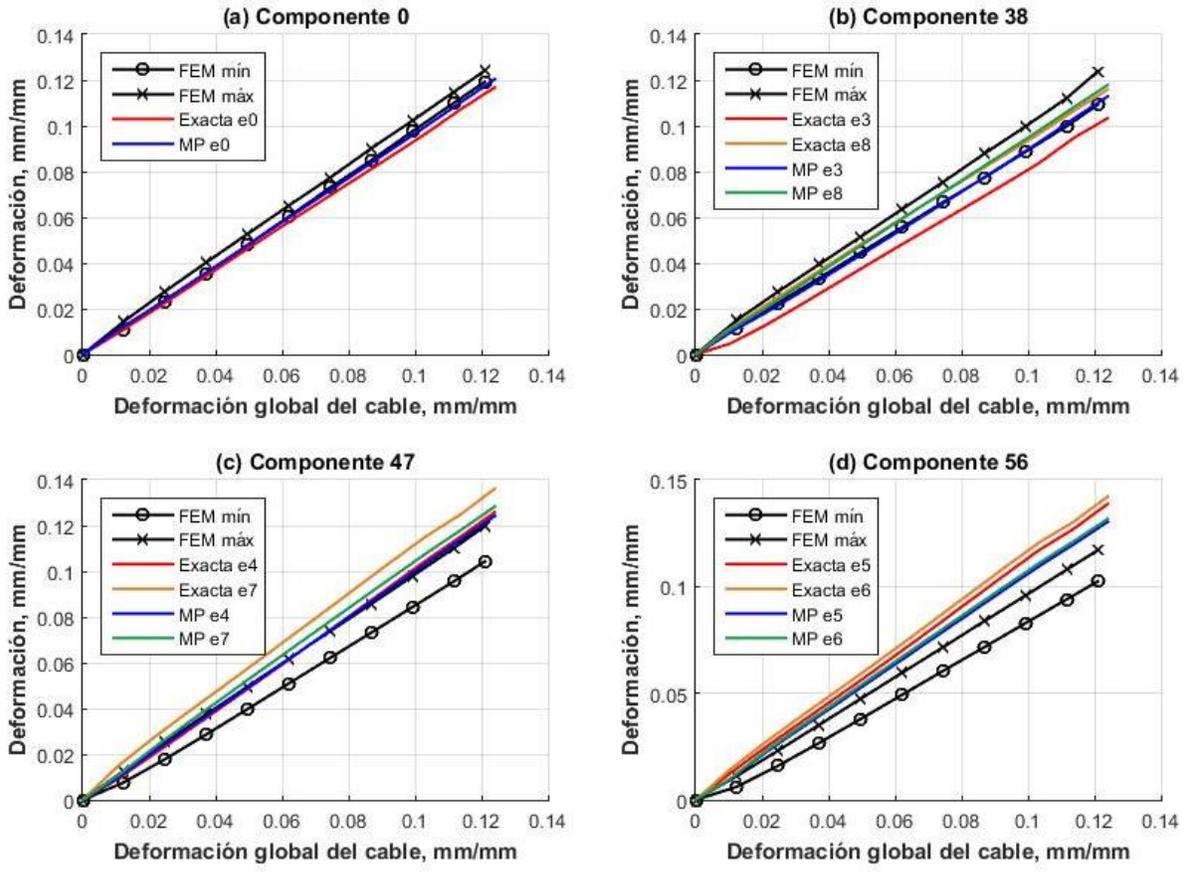


Fig. 5.5 Distribución de deformación por componente, W12.

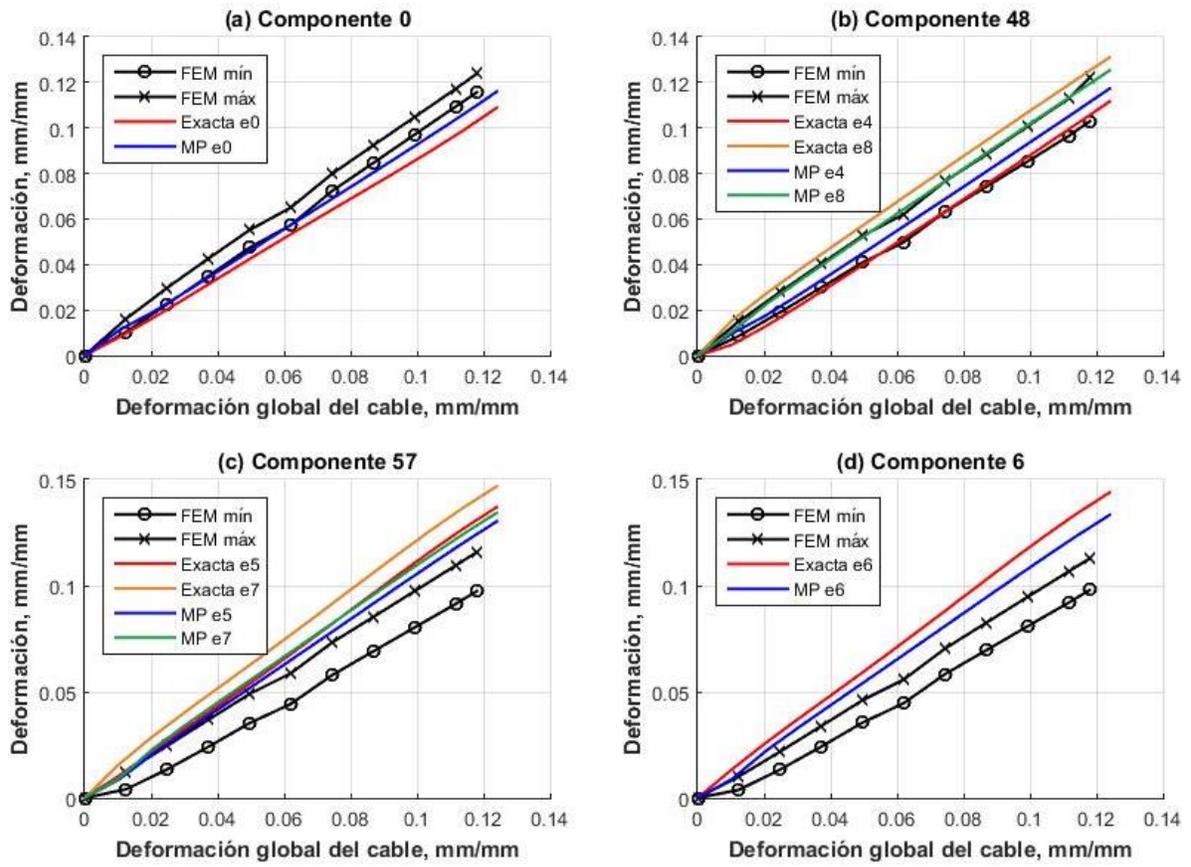


Fig. 5.6 Distribución de deformación por componente, W123.

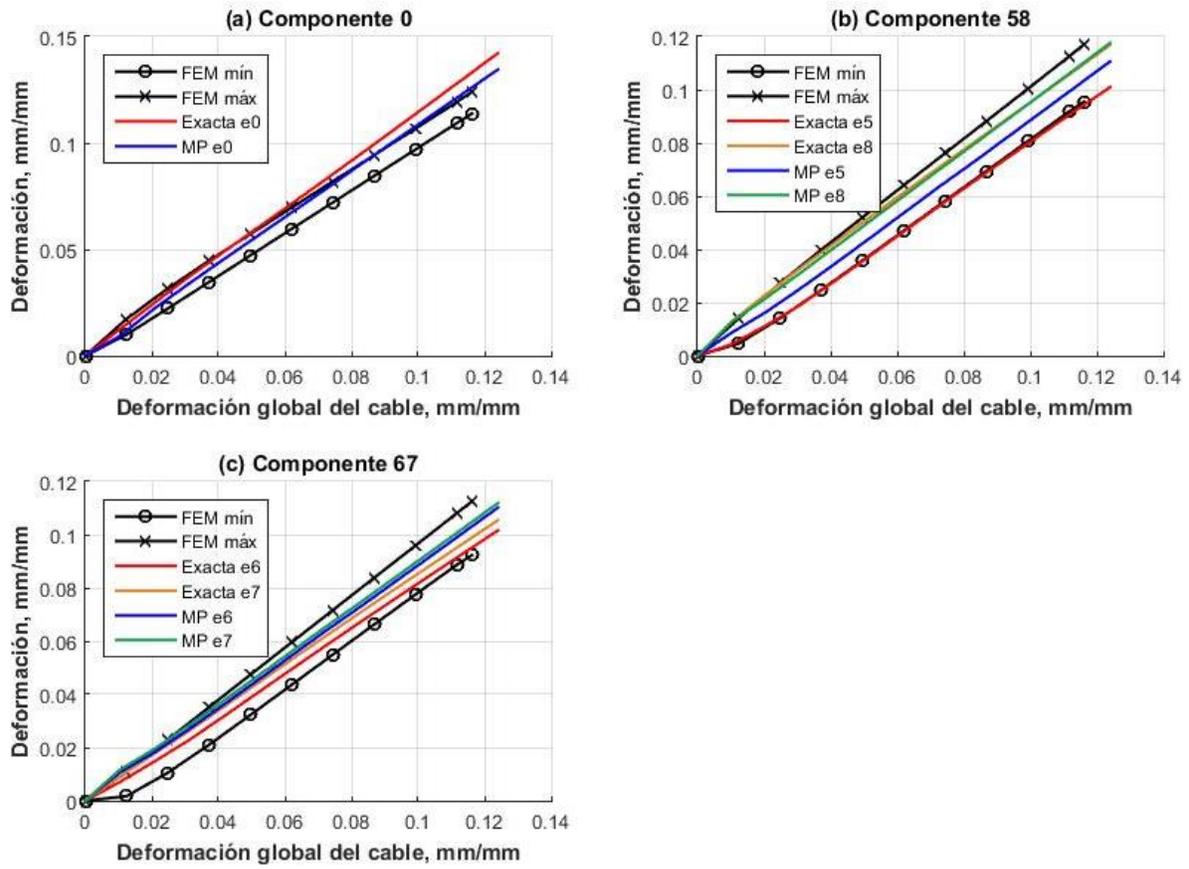


Fig. 5.7 Distribución de deformación por componente, W1234.

De la *Tabla 5.3* a la *Tabla 5.7* se resumen las deformaciones máximas por hebras, al llegar a la deformación global de falla, de los modelos presentados en los gráficos anteriores; comparando sus diferencias porcentuales con respecto al promedio de los datos FEM.

*Tabla 5.3 Análisis deformación por componente, W136.*

<b>Componente</b>	<b>Modelo</b>	<b>Def. máx, mm/mm</b>	<b>Dif. % Def.</b>
0	FEM prom.	0,1240	-
	Exacta	0,1244	0,29 %
	MP	0,1242	0,14 %
2	FEM prom.	0,1189	-
	Exacta	0,1265	6,40 %
	MP	0,1242	4,45 %
4	FEM prom.	0,1169	-
	Exacta	0,1177	0,67 %
	MP	0,1195	2,24 %
5	FEM prom.	0,1156	-
	Exacta	0,1156	0,03 %
	MP	0,1183	2,36 %
7	FEM prom.	0,1156	-
	Exacta	0,1205	4,25 %
	MP	0,1207	4,44 %
8	FEM prom.	0,1169	-
	Exacta	0,1250	6,88 %
	MP	0,1231	5,31 %

Tabla 5.4 Análisis deformación por componente, W1.

<b>Componente</b>	<b>Modelo</b>	<b>Def. máx, mm/mm</b>	<b>Dif. % Def.</b>
0	FEM prom.	0,1222	-
	Exacta	0,1254	2,61 %
	MP	0,1248	2,07 %
2	FEM prom.	0,1170	-
	Exacta	0,1280	9,45 %
	MP	0,1251	6,99 %
3	FEM prom.	0,1148	-
	Exacta	0,1186	3,36 %
	MP	0,1202	4,73 %
4	FEM prom.	0,1130	-
	Exacta	0,1122	-0,70 %
	MP	0,1167	3,22 %
5	FEM prom.	0,1126	-
	Exacta	0,1114	-1,09 %
	MP	0,1160	3,02 %
6	FEM prom.	0,1130	-
	Exacta	0,1157	2,38 %
	MP	0,1181	4,51 %
7	FEM prom.	0,1148	-
	Exacta	0,1240	8,08 %
	MP	0,1225	6,71 %
8	FEM prom.	0,1170	-
	Exacta	0,1322	13,00 %
	MP	0,1269	8,48 %

Tabla 5.5 Análisis de deformación por componente, W12.

<b>Componente</b>	<b>Modelo</b>	<b>Def. máx, mm/mm</b>	<b>Dif. % Def.</b>
0	FEM prom.	0,1217	-
	Exacta	0,1308	7,49 %
	MP	0,1276	4,91 %
3	FEM prom.	0,1165	-
	Exacta	0,1265	8,58 %
	MP	0,1248	7,10 %
4	FEM prom.	0,1120	-
	Exacta	0,1073	-4,20 %
	MP	0,1144	2,10 %
5	FEM prom.	0,1097	-
	Exacta	0,1016	-7,43 %
	MP	0,1109	1,07 %
6	FEM prom.	0,1097	-
	Exacta	0,1049	-4,42 %
	MP	0,1123	2,35 %
7	FEM prom.	0,1120	-
	Exacta	0,1170	4,49 %
	MP	0,1185	5,77 %
8	FEM prom.	0,1165	-
	Exacta	0,1383	18,69 %
	MP	0,1298	11,37 %

Tabla 5.6 Análisis deformación por componente, W123.

<b>Componente</b>	<b>Modelo</b>	<b>Def. máx, mm/mm</b>	<b>Dif. % Def.</b>
0	FEM prom.	0,1198	-
	Exacta	0,1388	15,88 %
	MP	0,1321	10,28 %
4	FEM prom.	0,1125	-
	Exacta	0,1119	-0,59 %
	MP	0,1173	4,24 %
5	FEM prom.	0,1066	-
	Exacta	0,0966	-9,39 %
	MP	0,1084	1,70 %
6	FEM prom.	0,1053	-
	Exacta	0,0994	-5,65 %
	MP	0,1093	3,80 %
7	FEM prom.	0,1066	-
	Exacta	0,1061	-0,43 %
	MP	0,1124	5,50 %
8	FEM prom.	0,1125	-
	Exacta	0,1308	16,20 %
	MP	0,1253	11,37 %

Tabla 5.7 Análisis deformación por componente, W1234.

<b>Componente</b>	<b>Modelo</b>	<b>Def. máx, mm/mm</b>	<b>Dif. % Def.</b>
0	FEM prom.	0,1189	-
	Exacta	0,1447	21,68 %
	MP	0,1372	15,38 %
5	FEM prom.	0,1063	-
	Exacta	0,0985	-7,34 %
	MP	0,1080	1,59 %
6	FEM prom.	0,1024	-
	Exacta	0,0989	-3,40 %
	MP	0,1073	4,81 %
7	FEM prom.	0,1024	-
	Exacta	0,1032	0,75 %
	MP	0,1094	6,87 %
8	FEM prom.	0,1063	-
	Exacta	0,1158	8,93 %
	MP	0,1166	9,63 %

### 5.3.2. Distribución de tensiones por componentes

La Fig. 5.8 resume la distribución de tensiones por hebras, dentro y fuera de las CL, a la máxima deformación global del cable. Para cada daño, la Tabla 5.8 resume las variaciones porcentuales de comparar las tensiones de cada hebra externa con respecto al núcleo de su propia sección transversal; y al comparar cada hebra dentro de las CL con sus pares fuera.

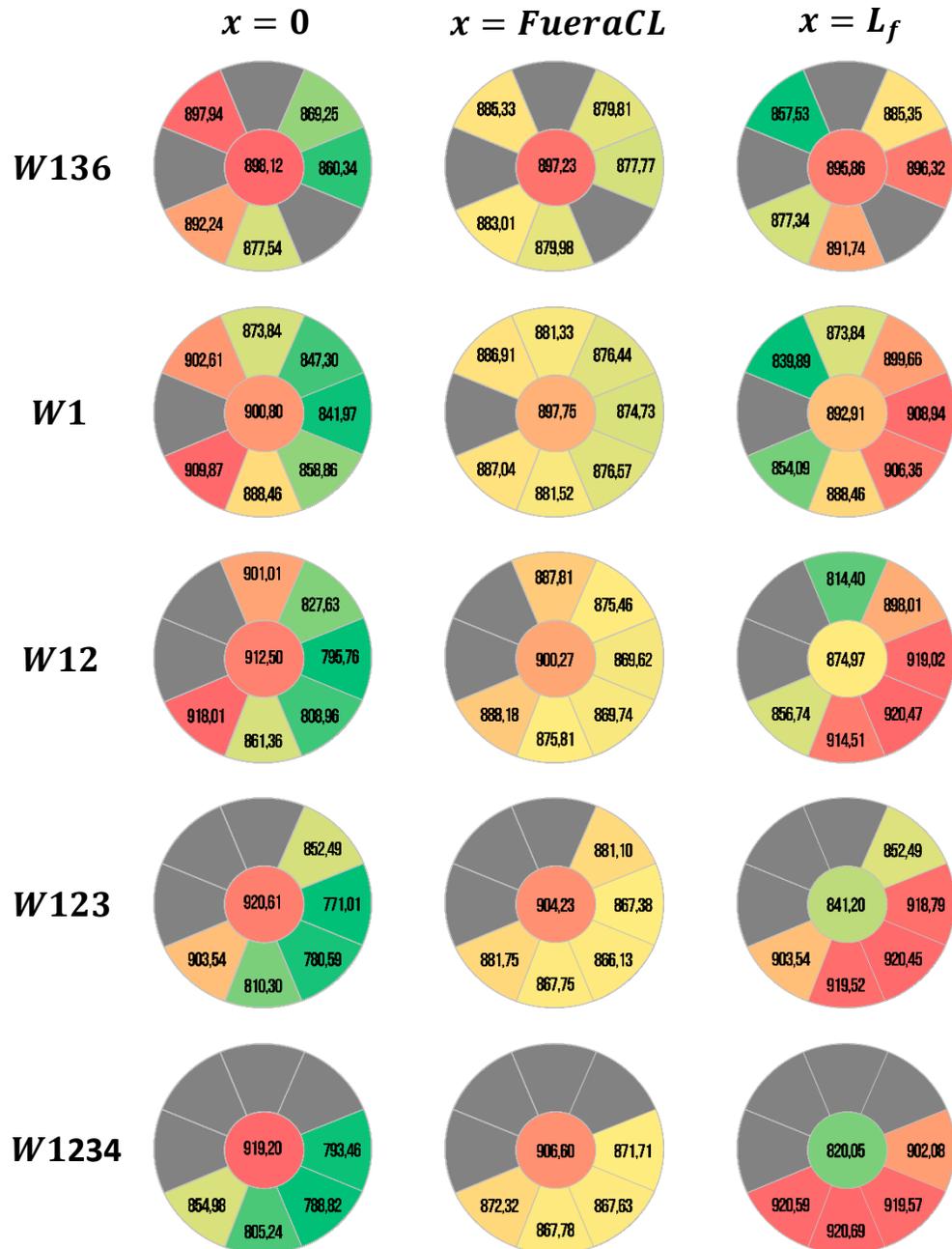


Fig. 5.8 Distribución de tensiones máximas dentro y fuera de CL, MPa.

Tabla 5.8 Estudio gradiente de tensión por sección transversal.

Daño	Elemento	C/r a sus propios núcleos			C/r a $x = FueraCL$	
		$x = 0$	$x = FueraCL$	$x = L_f$	$x = 0$	$x = L_f$
W136	0	-	-	-	0,10 %	-0,15 %
	2	-0,02 %	-1,33 %	-4,28 %	1,42 %	-3,14 %
	4	-3,22 %	-1,94 %	-1,17 %	-1,20 %	0,63 %
	5	-4,21 %	-2,17 %	0,05 %	-1,99 %	2,11 %
	7	-2,29 %	-1,92 %	-0,46 %	-0,28 %	1,34 %
	8	-0,65 %	-1,58 %	-2,07 %	1,05 %	-0,64 %
W1	0	-	-	-	0,34 %	-0,54 %
	2	0,20 %	-1,21 %	-5,94 %	1,77 %	-5,30 %
	3	-2,99 %	-1,83 %	-2,14 %	-0,85 %	-0,85 %
	4	-5,94 %	-2,37 %	0,76 %	-3,33 %	2,65 %
	5	-6,53 %	-2,56 %	1,79 %	-3,74 %	3,91 %
	6	-4,66 %	-2,36 %	1,50 %	-2,02 %	3,40 %
	7	-1,37 %	-1,81 %	-0,50 %	0,79 %	0,79 %
	8	1,01 %	-1,19 %	-4,35 %	2,57 %	-3,71 %
W12	0	-	-	-	1,36 %	-2,81 %
	3	-1,26 %	-1,38 %	-6,92 %	1,49 %	-8,27 %
	4	-9,30 %	-2,76 %	2,63 %	-5,46 %	2,58 %
	5	-12,79 %	-3,41 %	5,03 %	-8,49 %	5,68 %
	6	-11,35 %	-3,39 %	5,20 %	-6,99 %	5,83 %
	7	-5,60 %	-2,72 %	4,52 %	-1,65 %	4,42 %
	8	0,60 %	-1,34 %	-2,08 %	3,36 %	-3,54 %
W123	0	-	-	-	1,81 %	-6,97 %
	4	-7,40 %	-2,56 %	1,34 %	-3,25 %	-3,25 %
	5	-16,25 %	-4,08 %	9,22 %	-11,11 %	5,93 %
	6	-15,21 %	-4,21 %	9,42 %	-9,88 %	6,27 %
	7	-11,98 %	-4,03 %	9,31 %	-6,62 %	5,97 %
	8	-1,85 %	-2,49 %	7,41 %	2,47 %	2,47 %
W1234	0	-	-	-	1,39 %	-9,55 %
	5	-13,68 %	-3,85 %	10,00 %	-8,98 %	3,48 %
	6	-14,18 %	-4,30 %	12,14 %	-9,08 %	5,99 %
	7	-12,40 %	-4,28 %	12,27 %	-7,21 %	6,10 %
	8	-6,99 %	-3,78 %	12,26 %	-1,99 %	5,53 %

De la Fig. 5.9 a la Fig. 5.13 se presentan las tensiones normales por hebra, según deformación global del cable, en base a la solución del MP y Exacta en las secciones con hebras más solicitadas de la Fig. 5.8, que siempre están dentro de una de las Capas Límites para todo nivel de deformación del cable. Se agregan también valores máximos y mínimos de modelos FEM, destacando que estos corresponden a secciones al medio del cable, razón por la que sus hebras se modelan de a pares según el tipo de daño.

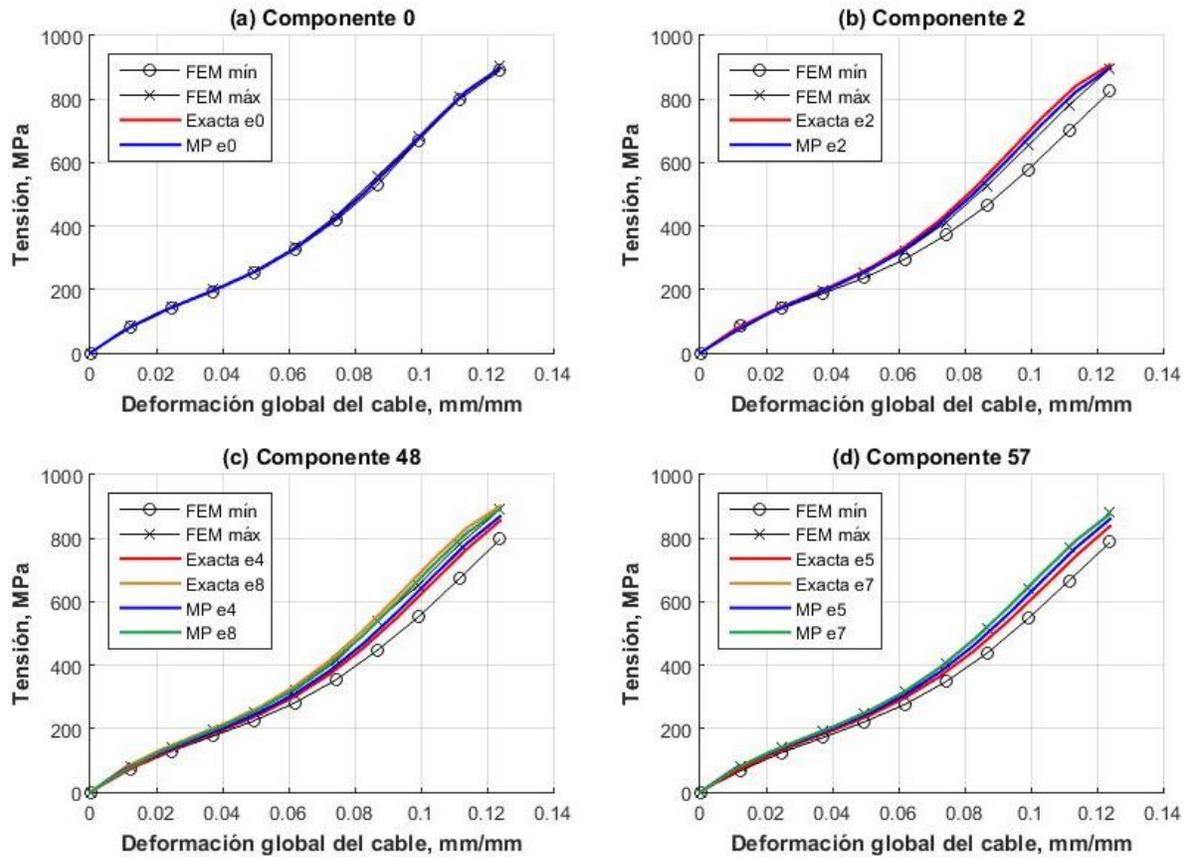


Fig. 5.9 Distribución de tensión por componente, W136.

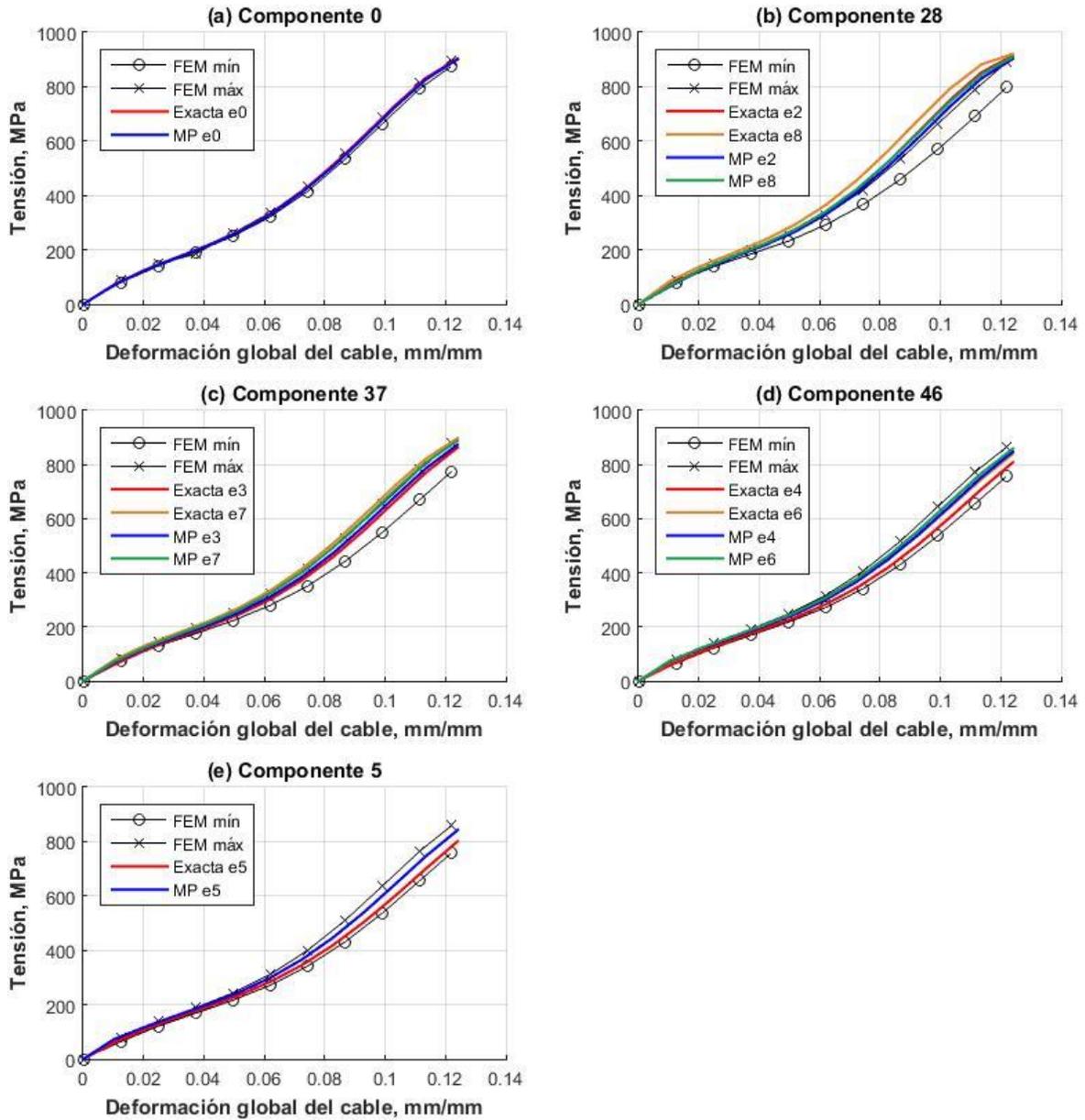


Fig. 5.10 Distribución de tensión por componente, W1.

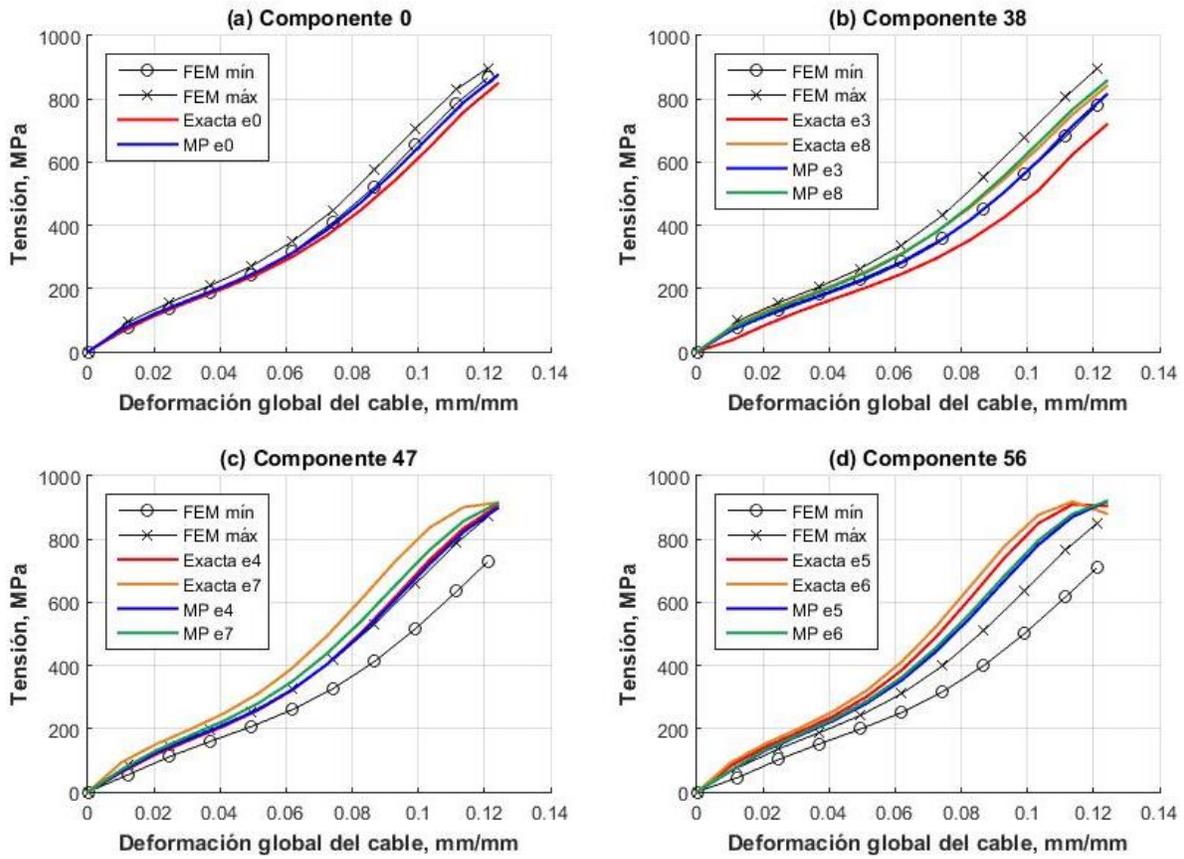


Fig. 5.11 Distribución de tensión por componente, W12.

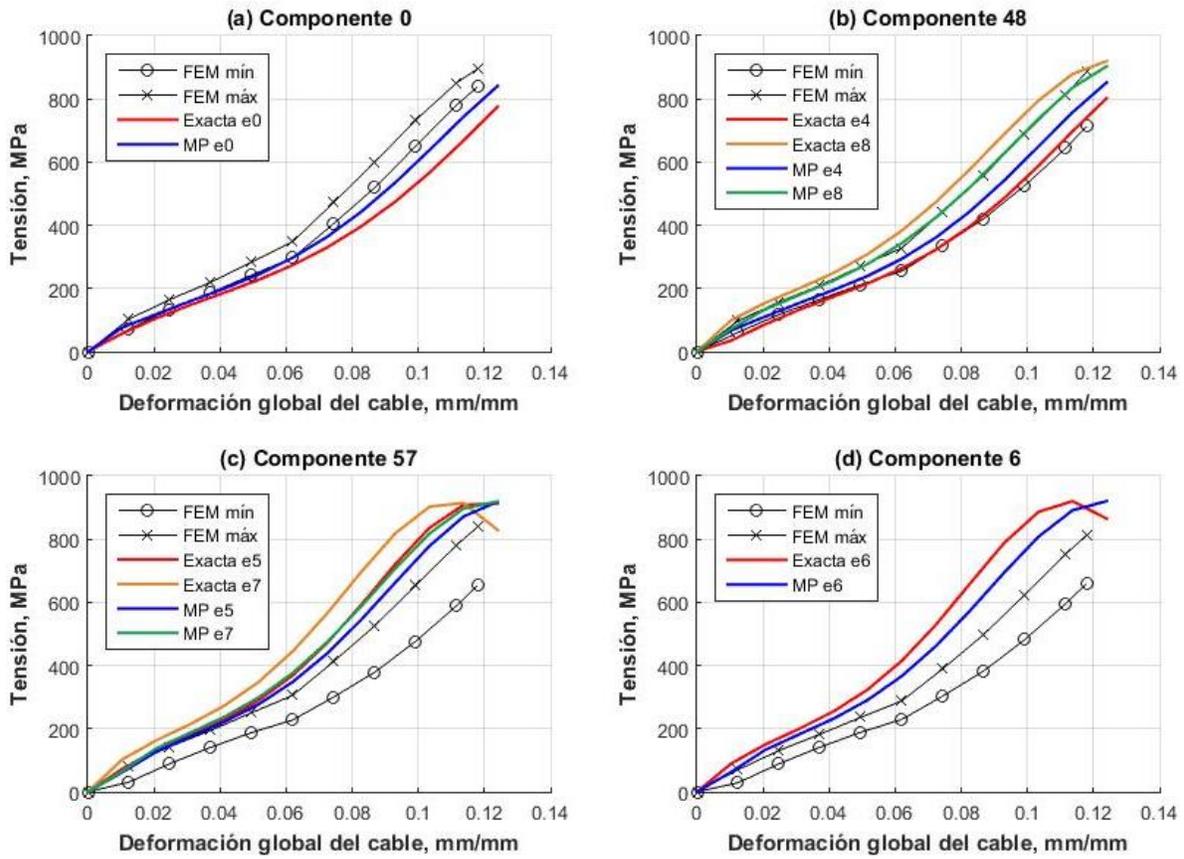


Fig. 5.12 Distribución de tensión por componente, W123.

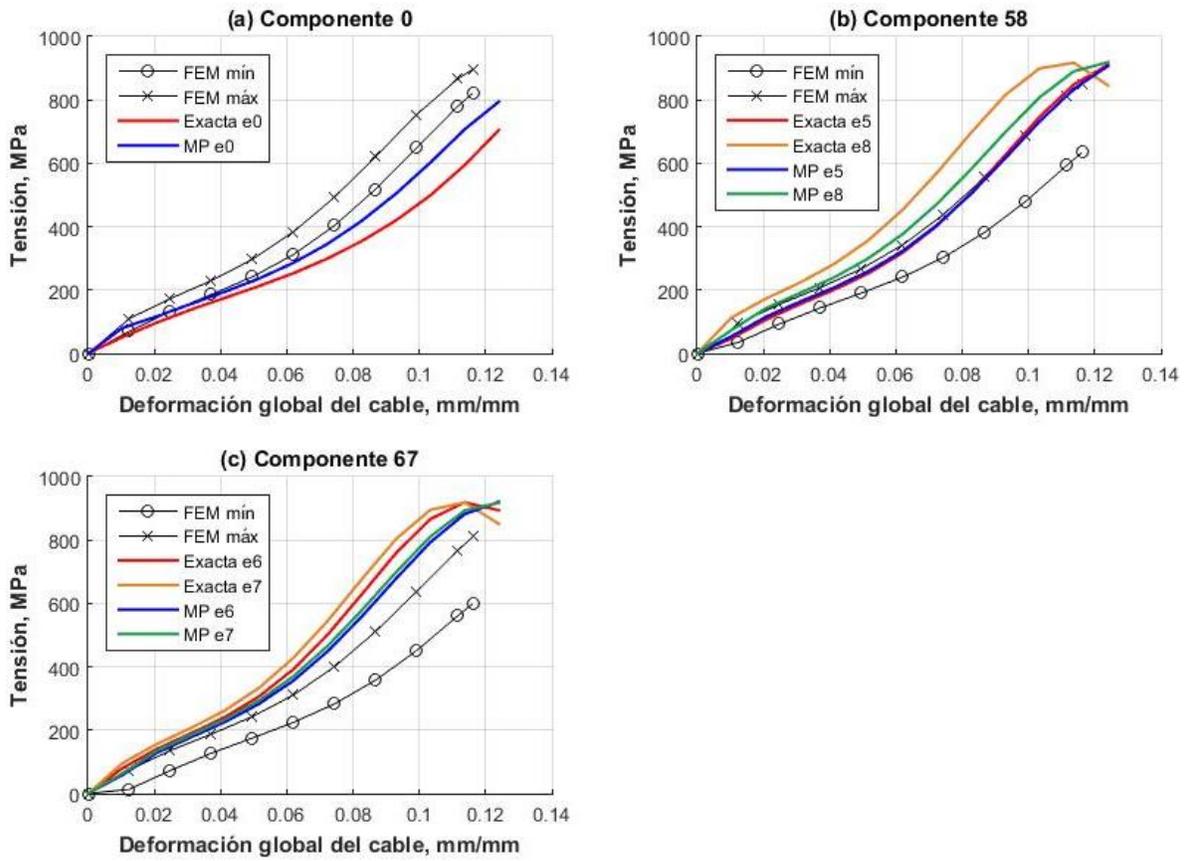


Fig. 5.13 Distribución de tensión por componente, W1234.

De la *Tabla 5.9* a la *Tabla 5.13* se resumen las tensiones máximas por hebras, al llegar a la deformación global de falla, de los modelos presentados en los gráficos anteriores; comparando sus diferencias porcentuales con respecto al promedio de los datos FEM.

*Tabla 5.9 Análisis tensión por componente, W136.*

<b>Componente</b>	<b>Modelo</b>	<b>Tensión máx, MPa</b>	<b>Dif. % Ten.</b>
0	FEM prom.	896,83	-
	Exacta	899,07	0,25 %
	MP	898,12	0,14 %
2	FEM prom.	860,11	-
	Exacta	908,42	5,62 %
	MP	897,94	4,40 %
4	FEM prom.	843,71	-
	Exacta	855,45	1,39 %
	MP	869,25	3,03 %
5	FEM prom.	833,85	-
	Exacta	838,64	0,57 %
	MP	860,34	3,18 %
7	FEM prom.	833,85	-
	Exacta	876,05	5,06 %
	MP	877,54	5,24 %
8	FEM prom.	843,71	-
	Exacta	901,80	6,88 %
	MP	892,24	5,75 %

Tabla 5.10 Análisis tensión por componente, W1.

<b>Componente</b>	<b>Modelo</b>	<b>Tensión máx, MPa</b>	<b>Dif. % Ten.</b>
0	FEM prom.	886,34	-
	Exacta	903,88	1,98 %
	MP	900,80	1,63 %
2	FEM prom.	844,30	-
	Exacta	913,68	8,22 %
	MP	902,61	6,91 %
3	FEM prom.	826,23	-
	Exacta	862,54	4,39 %
	MP	873,84	5,76 %
4	FEM prom.	811,45	-
	Exacta	808,40	-0,38 %
	MP	847,30	4,42 %
5	FEM prom.	808,53	-
	Exacta	800,48	-1,00 %
	MP	841,97	4,14 %
6	FEM prom.	811,45	-
	Exacta	839,40	3,44 %
	MP	858,86	5,84 %
7	FEM prom.	826,23	-
	Exacta	897,20	8,59 %
	MP	888,46	7,53 %
8	FEM prom.	844,30	-
	Exacta	920,64	9,04 %
	MP	909,87	7,77 %

Tabla 5.11 Análisis tensión por componente, W12.

<b>Componente</b>	<b>Modelo</b>	<b>Tensión máx, MPa</b>	<b>Dif. % Ten.</b>
0	FEM prom.	882,27	-
	Exacta	919,60	4,23 %
	MP	912,50	3,43 %
3	FEM prom.	837,74	-
	Exacta	908,53	8,45 %
	MP	901,01	7,55 %
4	FEM prom.	799,58	-
	Exacta	760,00	-4,95 %
	MP	827,63	3,51 %
5	FEM prom.	779,50	-
	Exacta	699,67	-10,24 %
	MP	795,76	2,09 %
6	FEM prom.	779,50	-
	Exacta	734,78	-5,74 %
	MP	808,96	3,78 %
7	FEM prom.	799,58	-
	Exacta	850,24	6,34 %
	MP	861,36	7,73 %
8	FEM prom.	837,74	-
	Exacta	907,20	8,29 %
	MP	918,01	9,58 %

Tabla 5.12 Análisis tensión por componente, W123.

<b>Componente</b>	<b>Modelo</b>	<b>Tensión máx, MPa</b>	<b>Dif. % Ten.</b>
0	FEM prom.	867,60	-
	Exacta	904,88	4,30 %
	MP	920,61	6,11 %
4	FEM prom.	800,46	-
	Exacta	805,04	0,57 %
	MP	852,49	6,50 %
5	FEM prom.	747,15	-
	Exacta	645,66	-13,58 %
	MP	771,01	3,19 %
6	FEM prom.	736,85	-
	Exacta	676,23	-8,23 %
	MP	780,59	5,94 %
7	FEM prom.	747,15	-
	Exacta	747,82	0,09 %
	MP	810,30	8,45 %
8	FEM prom.	800,46	-
	Exacta	919,60	14,88 %
	MP	903,54	12,88 %

Tabla 5.13 Análisis tensión por componente, W1234.

<b>Componente</b>	<b>Modelo</b>	<b>Tensión máx, MPa</b>	<b>Dif. % Ten.</b>
0	FEM prom.	859,93	-
	Exacta	705,27	-17,98 %
	MP	794,59	-7,60 %
5	FEM prom.	742,65	-
	Exacta	910,74	22,63 %
	MP	906,82	22,11 %
6	FEM prom.	705,18	-
	Exacta	893,96	26,77 %
	MP	906,82	30,53 %
7	FEM prom.	705,18	-
	Exacta	851,15	20,70 %
	MP	917,63	30,13 %
8	FEM prom.	742,65	-
	Exacta	845,60	13,86 %
	MP	918,96	23,74 %

### 5.3.3. Curvas de capacidad

De la Fig. 5.14 a la Fig. 5.18 se presentan las curvas de capacidad de cada cable dañado; sobre el Modelo Propuestos, modelo de solución exacta y FEM. Se agregan resultados experimentales de LI et Al. (2002), según como estos se asemejen a las curvas FEM.

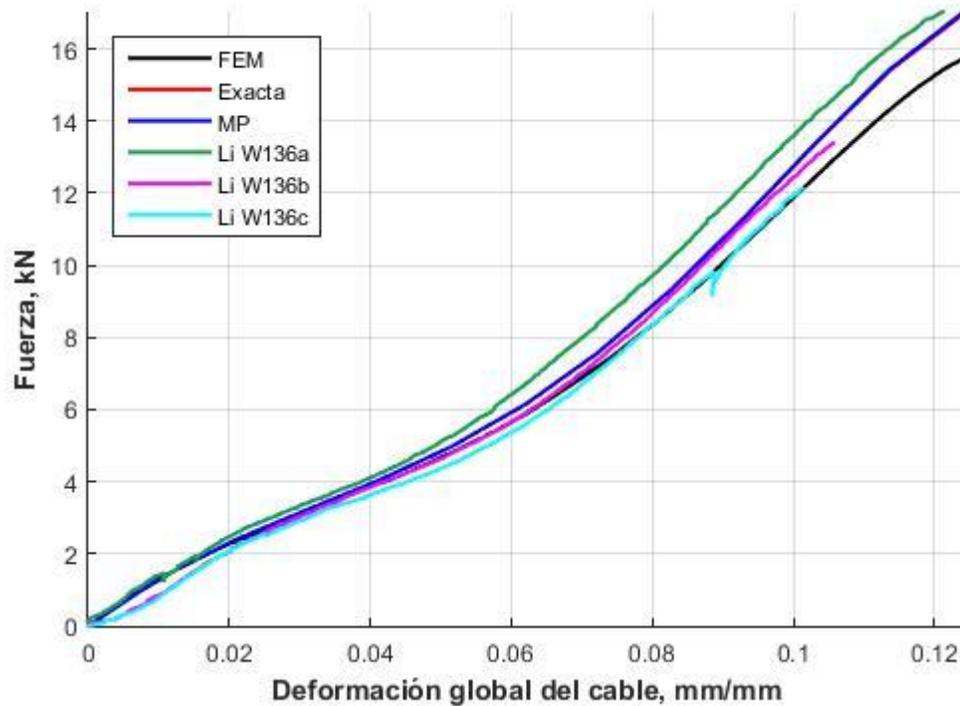


Fig. 5.14 Curvas de capacidad, W136.

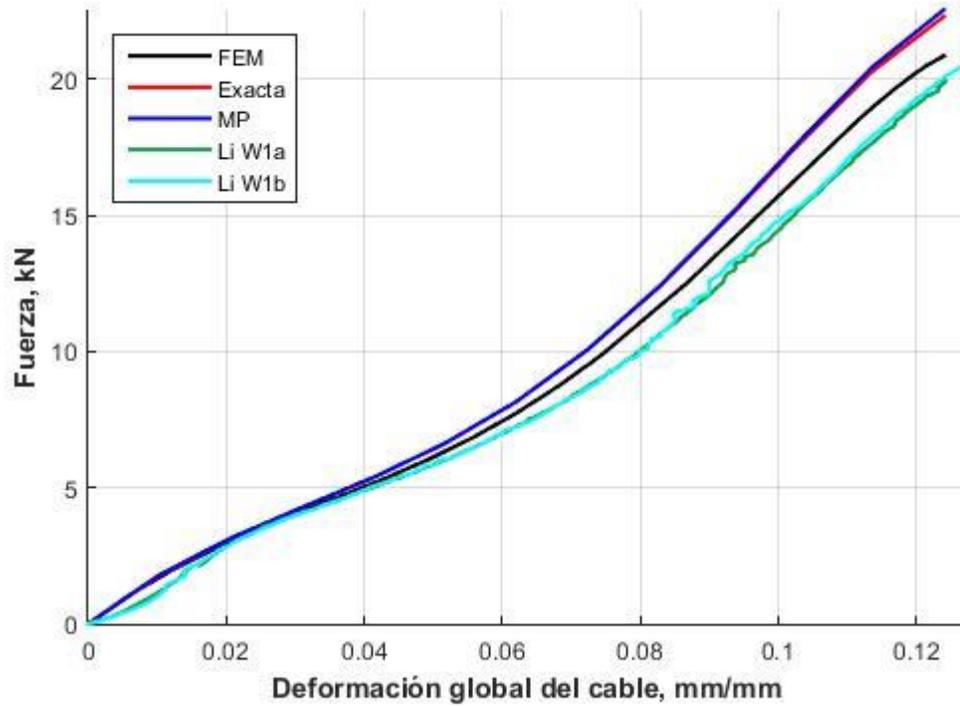


Fig. 5.15 Curvas de capacidad, W1.

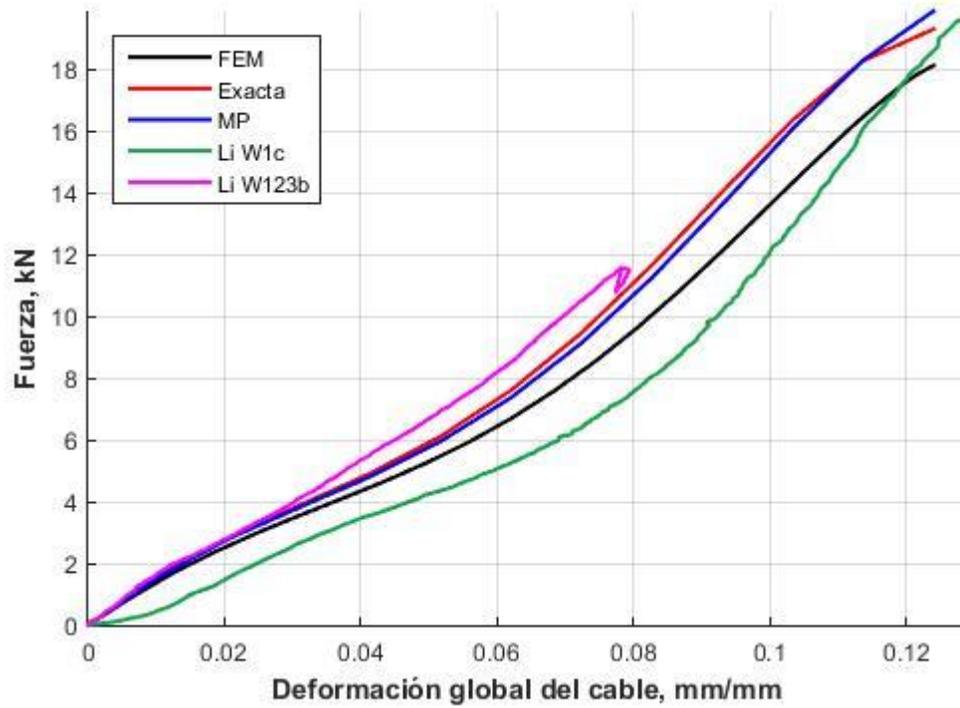


Fig. 5.16 Curvas de capacidad, W12.

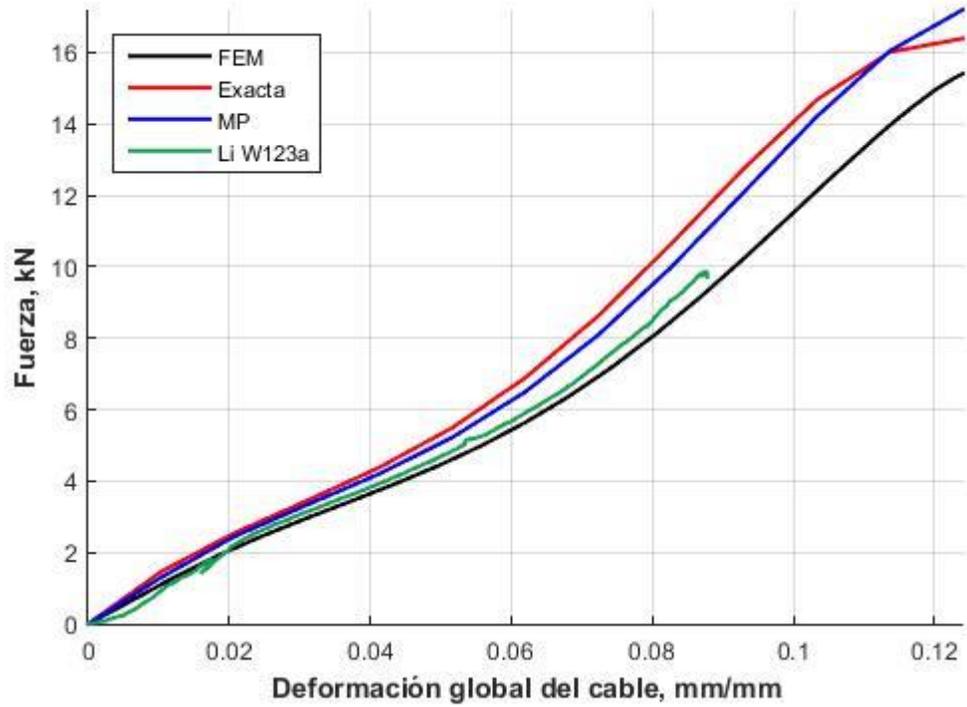


Fig. 5.17 Curvas de capacidad, W123.

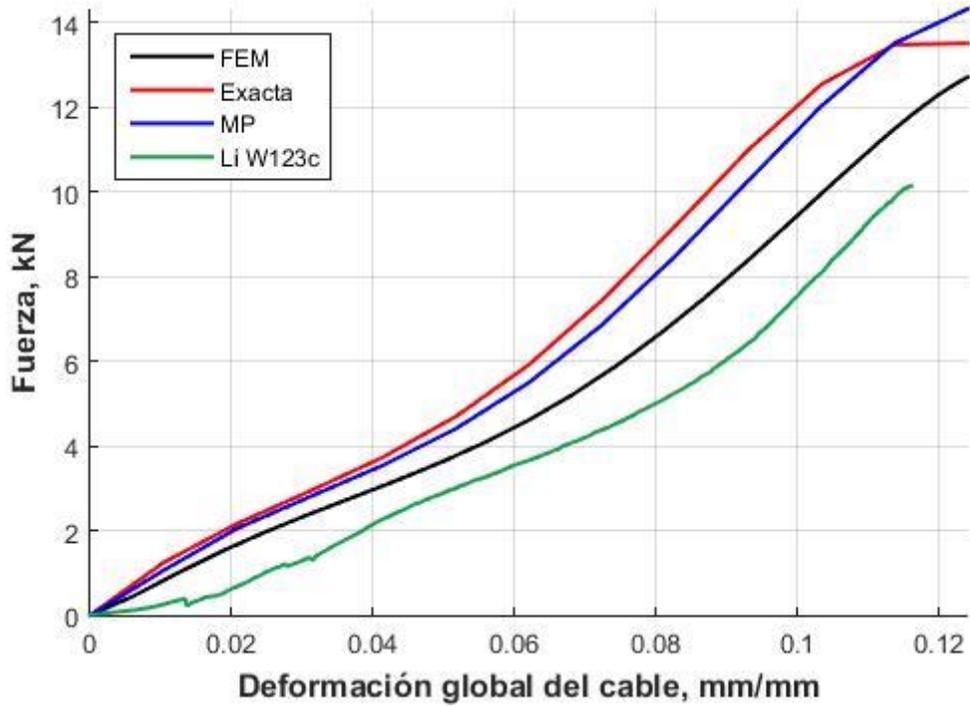


Fig. 5.18 Curvas de capacidad, W1234.

La *Tabla 5.14* resume y analiza porcentualmente la diferencia de capacidades máximas con respecto a la estimación FEM. Además, reitera los valores de Índice de Asimetría de cada sección dañada, *Tabla 1.2*, representando su impacto en las diferencias porcentuales de capacidad en la *Fig. 5.19*.

*Tabla 5.14 Análisis de curvas de capacidad.*

<b>Configuración de daño</b>	<b>Modelo</b>	<b>Deformación máx, mm/mm</b>	<b>Fuerza máx, kN</b>	<b>Dif. % Def.</b>	<b>Dif. % F.</b>
<b>W136</b> <b>IA = 0,093</b>	FEM	0,123	15,60	-	-
	Exacta	0,124	16,95	0,81 %	8,66 %
	MP	0,124	17,00	0,81 %	8,99 %
	Li a	0,121	17,03	-1,63 %	9,17 %
	Li b	0,106	13,39	-13,82 %	-14,17 %
	Li c	0,101	12,14	-17,89 %	-22,18 %
<b>W1</b> <b>IA = 0,162</b>	FEM	0,121	20,50	-	-
	Exacta	0,124	22,29	2,48 %	8,75 %
	MP	0,124	22,54	2,48 %	9,96 %
	Li a	0,124	19,83	2,48 %	-3,27 %
	Li b	0,124	20,03	2,48 %	-2,29 %
	<b>W12</b> <b>IA = 0,313</b>	FEM	0,121	17,83	-
Exacta		0,124	19,31	2,48 %	8,29 %
MP		0,124	19,90	2,48 %	11,58 %
Li b		0,079	11,84	-34,71 %	-33,60 %
Li c		0,124	18,61	2,48 %	4,37 %
<b>W123</b> <b>IA = 0,441</b>		FEM	0,118	14,61	-
	Exacta	0,124	16,39	5,08 %	12,17 %
	MP	0,124	17,20	5,08 %	17,69 %
	Li a	0,088	9,72	-25,42 %	-33,47 %
	<b>W1234</b> <b>IA = 0,538</b>	FEM	0,116	11,87	-
Exacta		0,124	13,51	6,90 %	13,79 %
MP		0,124	14,32	6,90 %	20,61 %
Li c		0,116	10,14	0,00 %	-14,57 %

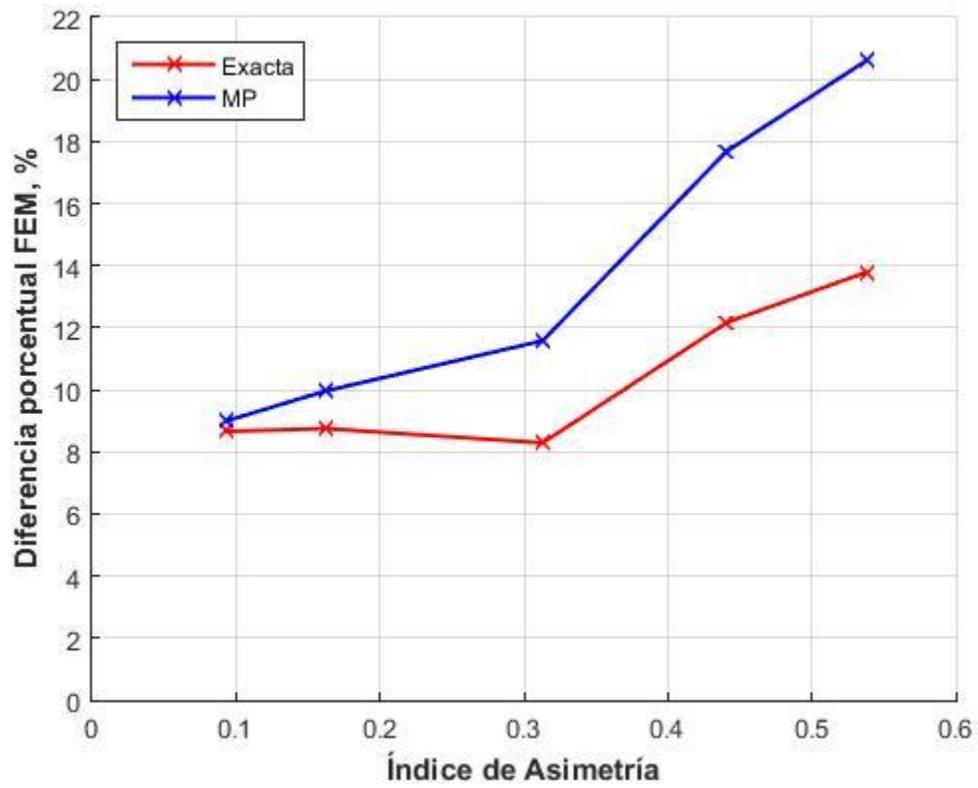


Fig. 5.19 Comparación capacidades finales propuestas con respecto a FEM, según IA.

### 5.3.4. Desplazamientos transversales

Se grafican desplazamientos transversales por plano correspondientes al núcleo de cada cable estudiado. Los modelos son solicitados al 25 y 60 % de la deformación máxima de los cables; es decir,  $e = 0,031$  de la Fig. 5.20 a la Fig. 5.24, y, en el Anexo F,  $e = 0,074$  más las combinaciones 3D de ambos planos.

La Tabla 5.15 resume las solicitaciones transversales máximas debido a la falta de hebras,  $F_{des}$ ; con sus consecuentes desplazamientos tridimensionales y relación desplazamiento - diámetro de sección, según el MP, al estirar los cables a sus fallas.

Tabla 5.15 Solicitaciones y desplazamientos máximos del modelo.

<b><i>Daño</i></b>	<b><i>IA</i></b>	<b><i>F<sub>des</sub> [N/mm]</i></b>	<b><i>Δ<sub>3D</sub> [mm]</i></b>	<b><i>Δ<sub>3D</sub>/d<sub>s</sub></i></b>
W136	0,093	11,94	0,25	12,3 %
W1	0,162	28,82	0,45	21,9 %
W12	0,313	53,25	0,94	46,3 %
W123	0,441	69,58	1,47	72,2 %
W1234	0,538	75,31	1,59	78,3 %

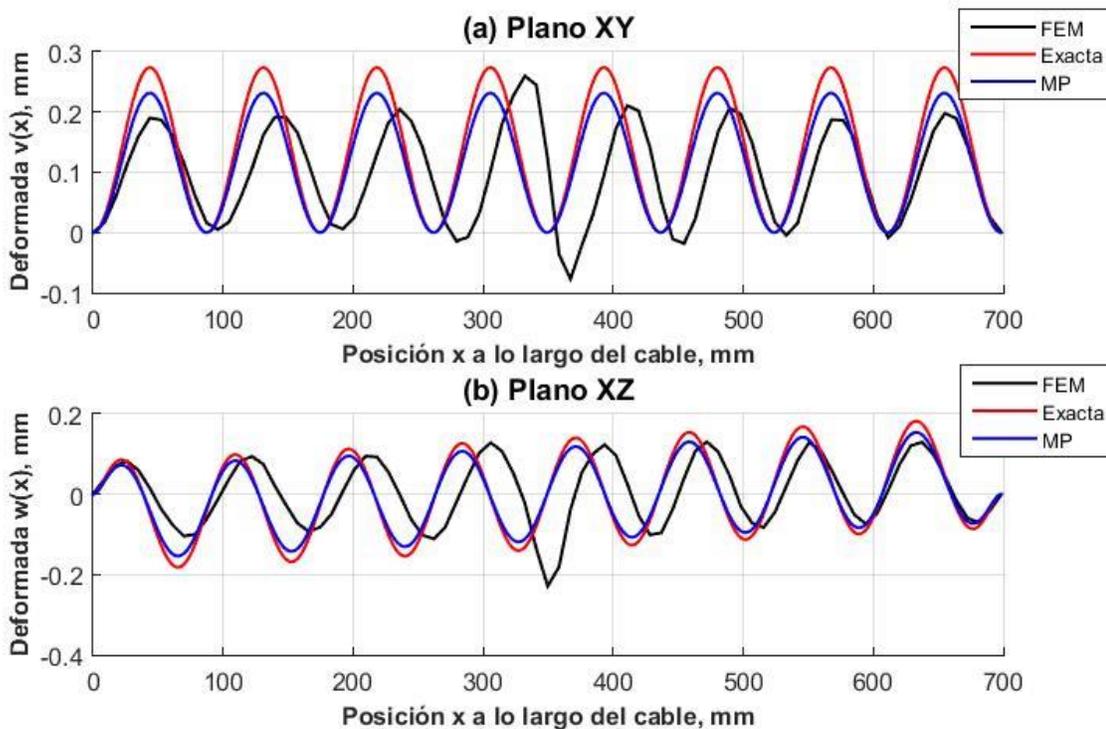


Fig. 5.20 Desplazamiento transversal por plano,  $e=0.031$ , W136.

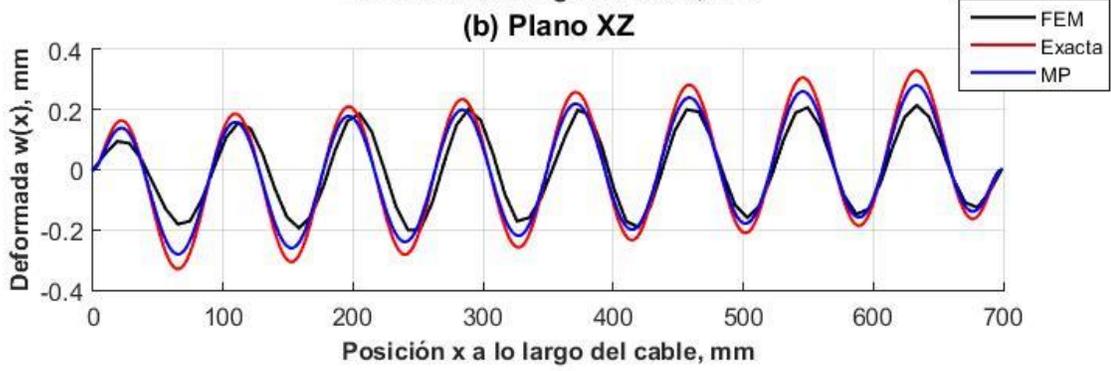
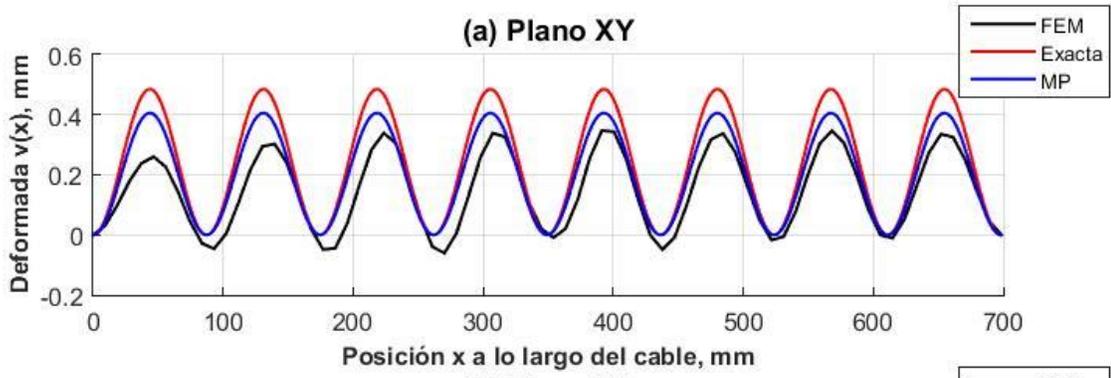


Fig. 5.21 Desplazamiento transversal por plano,  $e=0.031$ ,  $W1$ .

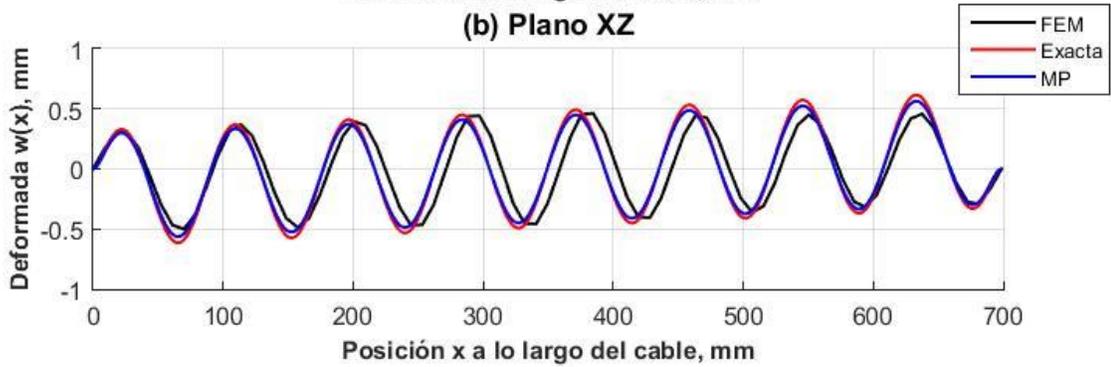
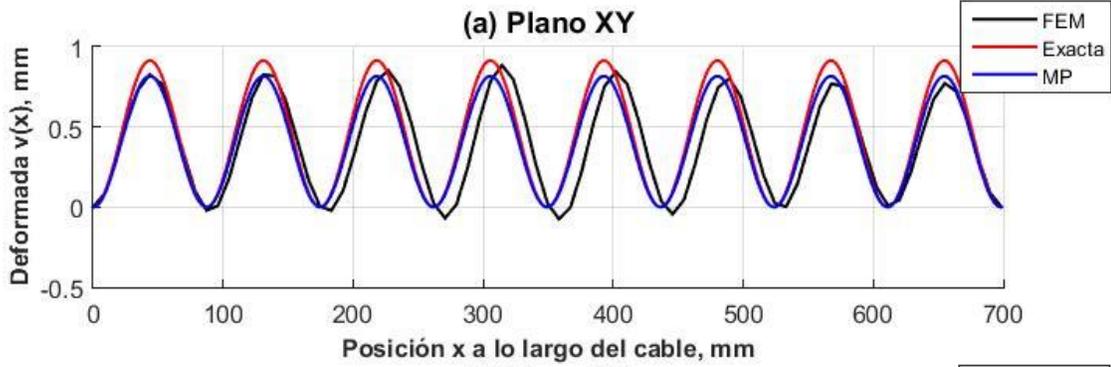


Fig. 5.22 Desplazamiento transversal por plano,  $e=0.031$ ,  $W12$ .

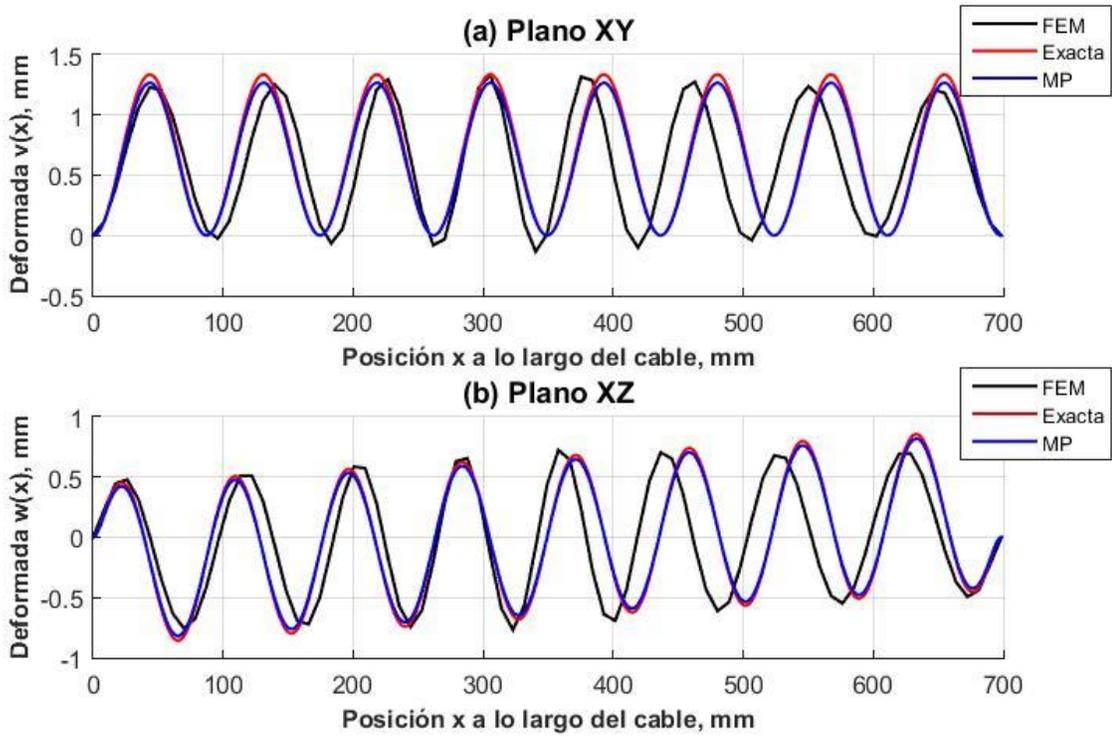


Fig. 5.23 Desplazamiento transversal por plano,  $e=0.031$ , W123.

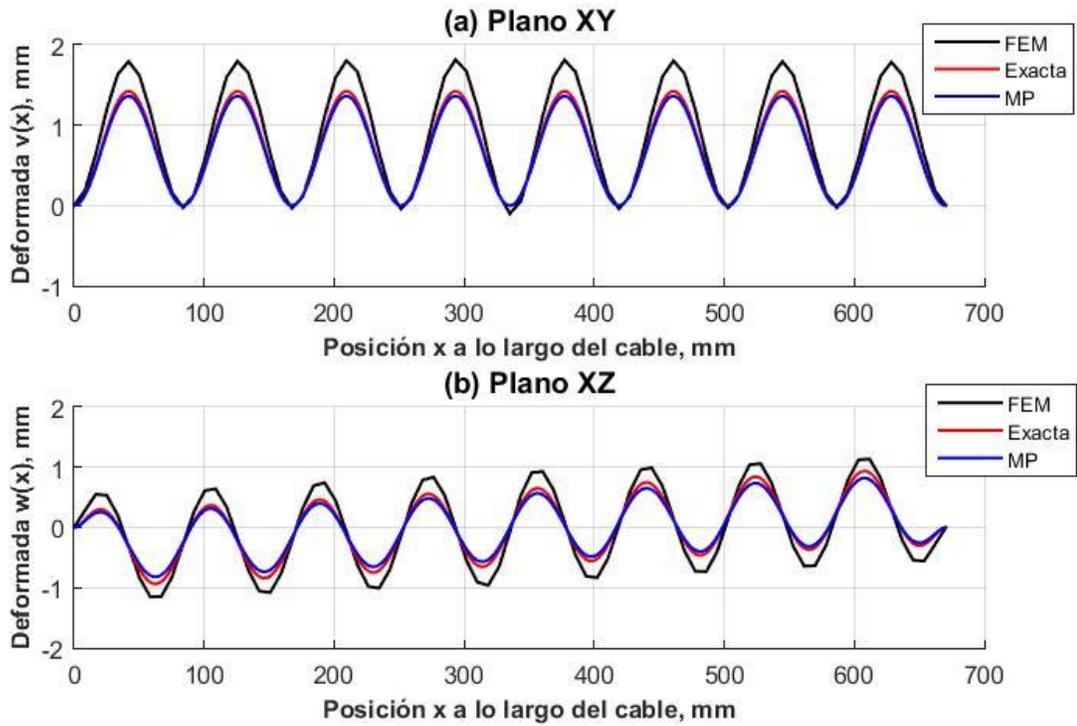


Fig. 5.24 Desplazamiento transversal por plano,  $e=0.031$ , W1234.

# Capítulo 6 Análisis de resultados y conclusiones

## 6.1. Análisis de resultados

Los resultados otorgados por el algoritmo empleado permiten concluir los siguientes puntos.

En el plano XZ existe un notable aumento de curvatura conforme se compara los extremos con su centro, destacado en la *Tabla 5.1*. Estos incrementos de entre 185,9 y 230,8 % afectan directamente a los valores de deformación axial en *Ec. 5.5* y, por consecuencia de ley constitutiva, a las tensiones por componentes.

Las *Fig. 5.2* y *Fig. 5.8*, junto a las *Tabla 5.2* y *Tabla 5.8*, capturan los incrementos de solicitaciones en los bordes. Fuera de las Capas Límites, debido a que la inclinación de hebras externas disminuye la distribución de cargas que reciben, el núcleo de la sección es el componente más solicitado. No obstante, el aumento de curvatura en los bordes contrarresta el efecto de inclinación; con lo que las hebras más solicitadas suelen ser las externas que se encuentran más alejadas de los elementos faltantes. La *Tabla 6.1* resume las solicitaciones y posición de las hebras más exigidas.

*Tabla 6.1 Hebras críticas a la falla del MP, para cada daño.*

<i>Daño</i>	<i>Elemento</i>	<i>Sección transversal, x</i>	<i>Deformación, mm/mm</i>	<i>Tensión, MPa</i>
<b>W136</b>	0	0	0,1242	898,12
<b>W1</b>	8	0	0,1269	909,87
<b>W12</b>	6	$L_f$	0,1318	920,47
<b>W123</b>	7	$L_f$	0,1343	920,45
<b>W1234</b>	0	0	0,1345	-
	7	$L_f$	-	920,69

En suma, los resultados referenciados concluyen que las secciones más solicitadas nunca están en medio del cable; confirmando el efecto e influencia de las Capas Límites para los cálculos posteriores. **Dando por concluido el quinto objetivo específico planteado.**

Si bien la falla del modelo se considera cuando el cable global alcanza la máxima deformación axial permitida por el poliéster,  $e_b = 0,124 \text{ mm/mm}$ , lo primero a destacar es

que las hebras críticas superan dicho valor y su consecuente tensión límite,  $\sigma_b = 897 \text{ MPa}$ . Esto se debe a que, si bien el cable de manera global no supera la deformación de falla, el efecto de las curvaturas vuelve a incidir en los cálculos según la distancia de las hebras con respecto al centro de gravedad de la sección dañada. Detalle que afecta tanto las hebras exteriores como las del núcleo.

Dado que el superar las limitaciones del material se traduce en nuevas hebras cortadas, una posible mejora del algoritmo es acotar sus solicitaciones calculadas. Esto permitiría reconocer el orden de ruptura de elementos, caracterizando de mejor manera la falla total.

La no linealidad de la ley constitutiva del poliéster implica que no necesariamente, a mayor deformación, las hebras conllevan mayor tensión normal. Por esto, aunque la hebra más tensionada en  $W123$  se encuentra en  $x = 0$ , se considera la zona más crítica en  $x = L_f$ ; ya que posee tres elementos de solicitación apenas menor a la única máxima del otro extremo. En el caso de  $W1234$  es más notorio el efecto, en donde se considera la sección para el cálculo de análisis tensional en  $x = L_f$ .

Los resultados por componentes de distribución de deformaciones y tensiones, *Fig. 5.3 a Fig. 5.7 y Fig. 5.9 a Fig. 5.13*, se expresan como gradientes cuasi simétricos con respecto a los ejes principales de sus secciones transversales dañadas. Si bien, para la mayoría de los casos, ambos modelos predictivos calculan solicitaciones entre cotas máximas y mínimas del modelo FEM, esto no se cumple siempre. Dicho desfase es consecuencia de comparar datos FEM, fuera de las Capas Límites, con tensiones y deformaciones amplificadas al ser estudiadas en sectores de mayor curvatura. Por lo tanto, para que se pueda comparar las predicciones numéricas de manera más precisa, se recomienda a futuro realizar modelaciones en elementos finitos que se enfoquen en las cercanías de los apoyos.

El efecto de la relación no directa entre deformación y tensión del poliéster, ya comentado, se vuelve a apreciar en decaimientos tensionales en los tramos finales de las curvas entre la *Fig. 5.9* y la *Fig. 5.13*.

Así mismo, de la *Tabla 5.3* a la *Tabla 5.7* y de la *Tabla 5.9* a *Tabla 5.13*, se resume la diferencia porcentual entre las máximas deformaciones y tensiones, por componentes, con respecto al promedio de los elementos FEM. Siendo esta comparación netamente referencial, al evaluar distintas secciones dentro y fuera de las Capas Límites. Se destaca

que el Modelo Propuesto, MP, presenta, solicitaciones máximas más similares a los datos FEM que los obtenidos mediante el Modelo Exacto, ME. Siendo las mayores diferencias de deformación y tensión de 15,38 y 30,53 % para el MP; y 21,68 y 26,77 % para el ME. El único daño en donde MP no posee mejores resultados es en *W1234*.

El estudio de capacidad, *Tabla 5.14*, corrobora que las cargas máximas predichas por el ME, esta vez, son más cercanas a las del modelo FEM que las del MP. Esto se expresa en diferencias porcentuales de 8,99 a 20,61 %, con respecto al MP; y de 8,29 a 13,79 %, con respecto al ME. Gráficamente las diferencias son observables, según la variación del Índice de Asimetría por daño, en la *Fig. 5.19*. Donde el sobredimensionamiento de ambos modelos, y en especial del MP, ocurre por la combinación de estimaciones mayores de tensión individual por hebra.

Paralelamente, los resultados por Li et Al. (2002) sirven para comparar satisfactoriamente el recorrido del modelo FEM; no obstante, no son útiles para concluir cargas de críticas. Esto debido a que los cables ensayados fallan a deformaciones muy variadas con respecto al cable puro, de entre 2,48 y -34,71 %. Incongruencias provocadas probablemente por detalles de los cables y errores aleatorios durante los ensayos.

El análisis de desplazamientos transversales máximos, en la *Tabla 5.15*, concluye que la fuerza desbalanceada transversal, por ausencia de hebras, aumenta conforme más dañado y más asimétrica sea la sección modelada. Lo que se traduce en desplazamientos transversales máximos de entre 12,3 y 78,3 % del diámetro original del cable.

Por último, el estudio por plano de la deformación transversal, de la *Fig. 5.20* a la *Fig. 5.24*, expone que las amplitudes del MP son siempre menores a las del ME; mientras que sus valores máximos crecen conforme se aumenta la asimetría de la sección. Condiciones que indican al MP como el más representativo a los datos FEM; para todos los casos excepto *W1234*, donde el ME es apenas superior. No obstante, se debe comentar que la periodicidad de las oscilaciones FEM se desfasa en los casos *W136*, *W12* y *W123*; por lo que se recomienda volver a realizar dichas modelaciones en elementos finitos para validar datos usados.

## 6.2. Conclusiones y discusión

Si bien cada capítulo tiene su propia sección de análisis pertinente; a continuación, se presentan las conclusiones más importantes a modo de resumen. Se centra en los temas de resultados no numéricos de la investigación.

En el Capítulo 2 se redefine el modelo planteado por De Vico (2013) y se demuestra satisfactoriamente la existencia del efecto de las Capas Límites, CL, en la deformación transversal de un cable dañado estirado. Esto ya que la única manera de acoplar las soluciones diferenciales del modelo exacto (cuarto orden), con su par no perturbado (segundo orden) es considerando únicamente las condiciones de borde, CB, de desplazamiento nulo en los apoyos. Dado que las derivadas de cuarto orden son los términos que aportan la rigidez del problema, y que este no se debe despreciar para obtener resultados realistas; se concluye que la incongruencia de considerar las CB de giro confirma que el efecto de CL existe y se asocia a dichas condiciones.

El Capítulo 4 cumple con la función de validar el uso de las soluciones de desplazamientos transversales propuestas en el Capítulo 3, *Ec. 3.178* y *Ec. 3.179*. Si bien, la propuesta es una respuesta aproximada para un problema de solución exacta, es posible caracterizar la forma en que esta tiende a la exacta conforme más términos en expansión se contemplen. Dado que el truncar al cuarto término entrega resultados que difieren en menos de 5% con respecto al problema idealizado, se concluye que solución propuesta es aceptable, *Tabla 4.1*.

También en el Capítulo 4 se caracteriza el desarrollo de las CL, según sollicitación externa y parámetros físicos del modelo. Si bien los factores perturbadores dependen de sus rigideces transversales, largo inicial y carga axial del modelo; es este último término el que realmente incide en el porcentaje del recorrido del cable que se encuentra bajo el efecto de CL. Graficando el impacto del factor perturbador en el plano XZ, de entre 2 y 14 % en la *Fig. 4.13*, concluyendo que actúa de manera indiferente al tipo de daño.

Finalmente, las deformadas planteadas en las secciones 4.2.1 y 4.2.2 también exponen el carácter envolvente de la respuesta No Perturbada, NP, sobre las soluciones de los modelos de cuarto orden. Esto implica que modelar un cable bajo un análisis de teoría de cuerdas completamente flexibles, *String Theory*, entrega desplazamientos transversales sobredimensionados; lo que termina implicando mayores estimaciones de deformación y tensiones límites que el cable puede resistir.

Del punto anterior se concluye que los modelos cable-viga entregan cotas máximas de solicitaciones menores que los tipo fibra, un escenario más recatado y seguro en la vida real. Es por ello que se recomienda estudiar cables de esta manera antes que por *String Theory*. **Dando por concluido el sexto objetivo específico planteado.**

### **6.3. Recomendación para futuras investigaciones**

Se sugiere constatar los resultados obtenidos con ensayos en laboratorio de las mismas y nuevas configuraciones. Se recomienda variar el tipo de material, capas, cantidad y disposición de los componentes internos; tomando nota de los puntos de falla y orden de ruptura de hebras para dejar constancia que se ubiquen dentro de las Capas Límites que desarrollan.

Paralelamente se propone aplicar y comparar este modelo en estudios de cables con daños focalizados, es decir, en donde las hebras cortadas recuperen carga por el roce con las hebras contiguas conforme se alejen del punto de falla. Siendo esto posible si, en las deducciones de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el modelo, se pondera la fuerza de desbalance transversal por un factor, menor o igual uno, que alcance su valor máximo donde se hayan cortado las hebras, disminuyendo paulatinamente en el resto del recorrido.

Por último, es posible afinar los supuestos de las hipótesis de este trabajo. Por ejemplo, no simplificar la geometría de las hebras externas en el cálculo de sus respectivas inercias locales, o no despreciar los efectos de torsión provocados por el desplazamiento de los ejes principales de inercias con respecto al centro geométrico de la sección transversal pura.

# Bibliografía

- [1] Alfosil F. K., Nayfeh A. H., Younis M. I., 2016, "*An analytic solution of the static problem of inclined risers conveying fluid*". *Meccanica*, Vol 52, No 4-5, pp. 1175-1187.
- [2] Beltrán J. F., De Vico E., 2015, "*Assessment of static rope behavior with asymmetric damage distribution*". *Engineering Structures*, No 86, pp. 84-98.
- [3] Canor T., Denoël V., 2013, "*Vibrations of cables with bending stiffness by an asymptotic approach*". Université de Liege, Liege, Bélgica.
- [4] Castello D. A. y Trotta Matt C. F., 2011, "*A Validation Metrics Based Model Calibration Applied on Stranded Cables*". *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol 33, No 4.
- [5] Denoël V., Detornay E., 2010, "*Multiple Scales Solution for a Beam with a Small Bending Stiffness*". *Journal of Engineering Mechanics*, No 136, pp. 69-77.
- [6] De Vico E., 2013, "*Efecto de la Distribución Asimétrica de Daño en la Sección Transversal de un Cable: Modelación Numérica*". Memoria para optar al título de Ingeniero Civil, Universidad de Chile, Santiago, Chile.
- [7] Gerstmayr J. y Shabana A. A., 2006, "*Analysis of Thin Beams and Cables Using the Absolute Nodal Co-ordinate Formulation*". Springer, *Nonlinear Dynamics* No 45, pp. 109-130.
- [8] Lacarbonara W., 2013, "*Nonlinear Structural Mechanics. Theory, Dynamical Phenomena and Modeling*". Springer Science+Business Media, New York, USA.
- [9] Li D., Miyase A., Williams J.G., Wang S.S., 2002, "Damage Tolerance of Synthetic-Fiber Mooring Rope: Small-Scale Experiments and Analytical Evaluation of Damaged Subropes and Elements". *Composites Engineering and Application*

Center (CEAC). College of Engineering, University of Houston, Houston, TX, 77204-0903.

- [10] Logan J. D., 1996, *“Applied Mathematics”*. Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., pp. 32-106, New York, USA.
- [11] Luongo A., Zulli D., 2018, *“Static of Shallow Inclined Elastic Cables under General Vertical Loads: A Perturbation Approach”*. MDPI, L’Aquila, Italia.
- [12] Luongo A. y Zulli D., 2018, *“Static Perturbation Analysis of Inclined Shallow Elastic Cables under general 3D-loads”*. De Gruyter, L’Aquila, Italia.
- [13] Nayfeh A. H., 1993, *“Introduction to Perturbation Techniques”*. John Wiley & Sons, Inc., pp. 257-324, New York, USA.
- [14] Papailiou K.O., 1997, *“On the Bending Stiffness of Transmission Line Conductors”*. IEEE Transactions on Power Delivery, Vol 12, No 4, pp 1576-1588.
- [15] Ruiz R. O., Loyola L., Beltrán J. F., 2019, *“Numerical framework for stress cycle assessment of cables under vortex shedding excitations”*. Wind and Structures, Vol 28, No 4, pp. 228.
- [16] Siegert D. y Brevet P., 2005, *“Fatigue of stay cables inside end fittings: High frequencies of wind induced vibrations”*. OIPEEC Bulletin, Vol 89, pp. 43-51.
- [17] Vargas D., 2010, *“Análisis de cables de sección transversal sin daño y con daño simétrico y asimétrico sujetos a cargas axisimétricas utilizando modelos tridimensionales de elementos finitos”*. Tesis de magister en Ingeniería Civil, Universidad de Chile, Santiago, Chile.
- [18] Zhang D., Ostoja-Starzewski M., 2016, *“Finite Element Solutions to the Bending Stiffness of a Single-Layered Helically Wound Cable with Internal Friction”*. Journal of Applied Mechanics, Vol 83.

# Anexos

## Anexo A Método de las perturbaciones en plano XZ

### A.1. Fuera de las Capas Límites

Considerando la notación del superíndice “o” por *outer*, la propuesta de solución externa al efecto de la Capa Límite en expansión queda definida como:

$$\hat{w}^o(\hat{x}, \epsilon_{xz}) = \hat{w}_0^o(\hat{x}) + \sqrt{\epsilon_{xz}} \hat{w}_1^o(\hat{x}) + \epsilon_{xz} \hat{w}_2^o(\hat{x}) + \epsilon_{xz}^{3/2} \hat{w}_3^o(\hat{x}) + \dots \quad \text{Ec. 6.1}$$

Reemplazando la respuesta *Ec. 6.1* en *Ec. 2.2*, obteniéndose:

$$\epsilon_{xz} \left[ \frac{\partial^4 \hat{w}_0^o}{\partial \hat{x}^4} + \sqrt{\epsilon_{xz}} \frac{\partial^4 \hat{w}_1^o}{\partial \hat{x}^4} + \dots \right] - \left[ \frac{\partial^2 \hat{w}_0^o}{\partial \hat{x}^2} + \sqrt{\epsilon_{xz}} \frac{\partial^2 \hat{w}_1^o}{\partial \hat{x}^2} + \epsilon_{xz} \frac{\partial^2 \hat{w}_2^o}{\partial \hat{x}^2} + \epsilon_{xz}^{3/2} \frac{\partial^2 \hat{w}_3^o}{\partial \hat{x}^2} \dots \right] = A \sin(\delta \hat{x})$$

Igualando los primeros cuatro términos según potencias de  $\epsilon_{xz}$ , se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\epsilon_{xz}^0 \rightarrow -\frac{\partial^2 \hat{w}_0^o}{\partial \hat{x}^2} = A \sin(\delta \hat{x}) \quad \text{Ec. 6.2}$$

$$\sqrt{\epsilon_{xz}} \rightarrow -\frac{\partial^2 \hat{w}_1^o}{\partial \hat{x}^2} = 0 \quad \text{Ec. 6.3}$$

$$\epsilon_{xz} \rightarrow \frac{\partial^4 \hat{w}_0^o}{\partial \hat{x}^4} - \frac{\partial^2 \hat{w}_2^o}{\partial \hat{x}^2} = 0 \quad \text{Ec. 6.4}$$

$$\epsilon_{xz}^{3/2} \rightarrow \frac{\partial^4 \hat{w}_1^o}{\partial \hat{x}^4} - \frac{\partial^2 \hat{w}_3^o}{\partial \hat{x}^2} = 0 \quad \text{Ec. 6.5}$$

Donde las funciones  $\hat{w}_0^o$ ,  $\hat{w}_1^o$ ,  $\hat{w}_2^o$  y  $\hat{w}_3^o$  se despejan como:

$$\hat{w}_0^o(\hat{x}) = \frac{A \sin(\delta \hat{x})}{d^2} + a_2 \hat{x} + a_1 \quad \text{Ec. 6.6}$$

$$\hat{w}_1^o(\hat{x}) = a_3 \hat{x} + a_4 \quad \text{Ec. 6.7}$$

$$\hat{w}_2^o(\hat{x}) = -A \sin(\delta \hat{x}) + a_5 \hat{x} + a_6 \quad \text{Ec. 6.8}$$

$$\hat{w}_3^o(\hat{x}) = a_7 \hat{x} + a_8 \quad \text{Ec. 6.9}$$

Por lo tanto, la solución fuera de la Capa Límite queda determinada como:

$$\begin{aligned} \widehat{w}^o(\hat{x}, \epsilon_{xz}) = & \frac{A \sin(\delta \hat{x})}{d^2} + a_2 \hat{x} + a_1 + \sqrt{\epsilon_{xz}} [a_3 \hat{x} + a_4] \\ & + \epsilon_{xz} [-A \sin(\delta \hat{x}) + a_5 \hat{x} + a_6] + \epsilon_{xz}^{3/2} [a_7 \hat{x} + a_8] \end{aligned} \quad \text{Ec. 6.10}$$

Dado que esta expansión no es válida para los extremos del cable, esta solución no satisface ninguna condición de borde. Las constantes de integración  $a_i$ , con  $i = 1, \dots, 8$ ; se deben determinar igualando expansiones dentro y fuera de la Capa Límite según potencias de  $\epsilon_{xz}$ .

## A.2. Dentro de las Capas Límites

### A.2.1. Rango cercano a $\hat{x} = 0$

En búsqueda de un cambio de escala adecuado para estudiar el comportamiento del cable en los alrededores de  $\hat{x} = 0$ , se aplica el siguiente cambio de variable adimensional que define la variable interna  $\tau$ .

$$\tau = \frac{\hat{x}}{\epsilon_{xz}^\alpha} \leftrightarrow \hat{x} = \tau \epsilon_{xz}^\alpha \quad \text{Ec. 6.11}$$

Reemplazando el cambio de variable en la ecuación a resolver, *Ec. 2.2*; se trabaja algebraicamente, derivando por ley de la cadena, obteniéndose la siguiente expresión.

$$\epsilon_{xz}^{1-4\alpha} \frac{d^4 \widehat{w}(\tau)}{d\tau^4} - \epsilon_{xz}^{-2\alpha} \frac{d^2 \widehat{w}(\tau)}{d\tau^2} = A \sin(\delta \tau \epsilon_{xz}^\alpha) \quad \text{Ec. 6.12}$$

Con el fin de obtener una EDO con la participación de  $\epsilon_{xz}$  en sólo uno de sus términos; se impone el valor  $\alpha = 1/2$  y se trabaja algebraicamente la *Ec. 6.12* para obtener la siguiente ecuación que modela el rango estudiado.

$$\frac{d^4 \widehat{w}(\tau)}{d\tau^4} - \frac{d^2 \widehat{w}(\tau)}{d\tau^2} = \epsilon_{xz} A \sin(\delta \sqrt{\epsilon_{xz}} \tau) \quad \text{Ec. 6.13}$$

Por último, se reemplaza la expansión de Taylor en torno a cero, *Ec. 6.14*, en *Ec. 6.13* para obtener una EDO conformada únicamente por polinomios, *Ec. 6.15*.

$$\cos(ax) = ax \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(ax)^{2n}}{(1+2n)!} \quad \text{Ec. 6.14}$$

$$\frac{d^4 \widehat{w}(\tau)}{d\tau^4} - \frac{d^2 \widehat{w}(\tau)}{d\tau^2} = A \left[ \epsilon_{xz}^{3/2} \delta \tau - \frac{\delta^3 \tau^3}{3!} \epsilon_{xz}^{5/2} + \frac{\delta^5 \tau^5}{5!} \epsilon_{xz}^{7/2} + \dots \right] \quad \text{Ec. 6.15}$$

Debido a que el evaluar  $\hat{x} = 0$  implica un valor de  $\tau = 0$  por el cambio de escala, las condiciones de borde de desplazamiento transversal y giro nulos en los apoyos son reescritas en función de  $\tau$  en las condiciones **Ec. 6.16** y **Ec. 6.17**.

$$\widehat{w}(\hat{x} = 0) = 0 \rightarrow \widehat{w}(\tau = 0) = 0 \quad \text{Ec. 6.16}$$

$$\frac{\partial \widehat{w}}{\partial \hat{x}}(\hat{x} = 0) = 0 \rightarrow \frac{\partial \widehat{w}}{\partial \tau}(\tau = 0) = 0 \quad \text{Ec. 6.17}$$

A continuación, la solución en expansión propuesta en el rango interno a la Capa Límite en  $\hat{x} = 0$  queda denominada por el superíndice “i” por *inner*.

$$\widehat{w}^i(\tau, \epsilon_{xz}) = \widehat{w}_0^i(\tau) + \sqrt{\epsilon_{xz}} \widehat{w}_1^i(\tau) + \epsilon_{xz} \widehat{w}_2^i(\tau) + \epsilon_{xz}^{3/2} \widehat{w}_3^i(\tau) + \dots \quad \text{Ec. 6.18}$$

Evaluando la solución propuesta en  $\tau = 0$ , imponiendo las condiciones de borde **Ec. 6.16** y **Ec. 6.17**; e igualando componentes hasta el cuarto término de  $\epsilon_{xz}$  de la expansión, se obtienen las siguientes seis condiciones de borde asociadas a las subfunciones de **Ec. 6.18**.

$$\widehat{w}_0^i(\tau = 0) = \widehat{w}_1^i(\tau = 0) = \widehat{w}_2^i(\tau = 0) = \widehat{w}_3^i(\tau = 0) = 0 \quad \text{Ec. 6.19}$$

$$\frac{\partial \widehat{w}_0^i}{\partial \tau}(\tau = 0) = \frac{\partial \widehat{w}_1^i}{\partial \tau}(\tau = 0) = \frac{\partial \widehat{w}_2^i}{\partial \tau}(\tau = 0) = \frac{\partial \widehat{w}_3^i}{\partial \tau}(\tau = 0) = 0 \quad \text{Ec. 6.20}$$

Reemplazando la **Ec. 6.18** en **Ec. 2.2** e igualando componentes hasta el cuarto término de  $\epsilon_{xz}$  de la expansión, se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\epsilon_{xz}^0 \rightarrow \frac{\partial^4 \widehat{w}_0^i}{\partial \tau^4} - \frac{\partial^2 \widehat{w}_0^i}{\partial \tau^2} = 0 \quad \text{Ec. 6.21}$$

$$\sqrt{\epsilon_{xz}} \rightarrow \frac{\partial^4 \widehat{w}_1^i}{\partial \tau^4} - \frac{\partial^2 \widehat{w}_1^i}{\partial \tau^2} = 0 \quad \text{Ec. 6.22}$$

$$\epsilon_{xz} \rightarrow \frac{\partial^4 \widehat{w}_2^i}{\partial \tau^4} - \frac{\partial^2 \widehat{w}_2^i}{\partial \tau^2} = 0 \quad \text{Ec. 6.23}$$

$$\epsilon_{xz}^{3/2} \rightarrow \frac{\partial^4 \widehat{w}_3^i}{\partial \tau^4} - \frac{\partial^2 \widehat{w}_3^i}{\partial \tau^2} = A\delta\tau \quad \text{Ec. 6.24}$$

Cuyas soluciones para las funciones  $\widehat{w}_0^i$ ,  $\widehat{w}_1^i$ ,  $\widehat{w}_2^i$  y  $\widehat{w}_3^i$  se presentan a continuación.

$$\widehat{w}_0^i(\tau) = b_1 e^\tau + b_2 e^{-\tau} + b_3 \tau + b_4 \quad \text{Ec. 6.25}$$

$$\widehat{w}_1^i(\tau) = b_5 e^\tau + b_6 e^{-\tau} + b_7 \tau + b_8 \quad \text{Ec. 6.26}$$

$$\widehat{w}_2^i(\tau) = b_9 e^\tau + b_{10} e^{-\tau} + b_{11} \tau + b_{12} \quad \text{Ec. 6.27}$$

$$\widehat{w}_3^i(\tau) = -\frac{A\delta}{6} \tau^3 + b_{13} e^\tau + b_{14} e^{-\tau} + b_{15} \tau + b_{16} \quad \text{Ec. 6.28}$$

Las constantes de integración  $b_1$ ,  $b_5$ ,  $b_9$  y  $b_{13}$  son inmediatamente consideradas nulas. En caso contrario las *Ec. 6.25*, *Ec. 6.26*, *Ec. 6.27*, y *Ec. 6.28* crecerían exponencialmente con respecto a  $\tau$ , lo que sería imposible de acoplar con las soluciones externas.

$$b_1 = b_5 = b_9 = b_{13} = 0 \quad \text{Ec. 6.29}$$

Posteriormente, el resto de las constantes son simplificables mediante el uso de las condiciones de borde *Ec. 6.19* y *Ec. 6.20*. Obteniéndose las siguientes funciones.

$$\widehat{w}_0^i(\tau) = b_2(e^{-\tau} + \tau - 1) \quad \text{Ec. 6.30}$$

$$\widehat{w}_1^i(\tau) = b_6(e^{-\tau} + \tau - 1) \quad \text{Ec. 6.31}$$

$$\widehat{w}_2^i(\tau) = b_{10}(e^{-\tau} + \tau - 1) \quad \text{Ec. 6.32}$$

$$\widehat{w}_3^i(\tau) = -\frac{A\delta}{6} \tau^3 + b_{14}(e^{-\tau} + \tau - 1) \quad \text{Ec. 6.33}$$

A continuación, se procede los pasos requeridos en la metodología de las perturbaciones para cada término  $\widehat{w}_0$ ,  $\widehat{w}_1$ ,  $\widehat{w}_2$  y  $\widehat{w}_3$ .

### Metodología para $\widehat{w}_0$

Primer término externo a las Capas Límites de la expansión  $\widehat{w}^o$  en *Ec. 6.34*.

$$\frac{A \sin(\delta \hat{x})}{\delta^2} + a_2 \hat{x} + a_1 \quad \text{Ec. 6.34}$$

Se reescribe en término de la variable interna  $\tau$ , *Ec. 6.11*, y se aplica la expansión de Taylor *Ec. 6.14*.

$$\frac{A}{\delta^2} [\delta \sqrt{\epsilon_{xz}} \tau + \dots] + a_2 \sqrt{\epsilon_{xz}} \tau + a_1$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xz}$ .

$$a_1 \epsilon_{xz}^0 + \dots$$

Se concluye el primer término de expansión interna a partir de la solución externa dado la constante que acompañan el término  $\epsilon_{xz}^0$ .

$$a_1 \tag{Ec. 6.35}$$

Por otro lado, se tiene el primer término interno a la Capa Límite de la expansión de  $\hat{w}^i$  en la *Ec. 6.36*.

$$b_2(e^{-\tau} + \tau - 1) \tag{Ec. 6.36}$$

Se reescribe en término de la variable externa  $\hat{x}$  de la *Ec. 6.11*.

$$b_2 \left( e^{-\frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}}} + \frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}} - 1 \right)$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xz}$ , donde *EST* denota los pequeños términos exponenciales que no son necesarios en la metodología.

$$-b_2\epsilon_{xz}^0 + b_2 \frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}} + EST$$

Se concluye el primer término de expansión externa a partir de la solución interna depende del valor de  $b_2$  como sigue.

$$\begin{cases} -b_2 & \text{si } b_2 = 0 \\ \frac{b_2 \hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}} & \text{si } b_2 \neq 0 \end{cases} \tag{Ec. 6.37}$$

Finalmente, igualando componentes según potencias de  $\epsilon_{xz}$  de las *Ec. 6.35* y *Ec. 6.37*, se concluye el valor de las siguientes constantes.

$$\epsilon_{xz}^{-1/2}: b_2 = 0 \tag{Ec. 6.38}$$

$$\epsilon_{xz}^0: -b_2 = a_1 \tag{Ec. 6.39}$$

### Metodología para $\hat{w}_1$

Primeros dos términos externos a las Capas Límites de la expansión  $\hat{w}^0$  en *Ec. 6.40*.

$$\frac{A \sin(\delta \hat{x})}{\delta^2} + a_2 \hat{x} + a_1 + \sqrt{\epsilon_{xz}}(a_3 \hat{x} + a_4) \quad \text{Ec. 6.40}$$

Se reescribe en término de la variable interna  $\tau$ , *Ec. 6.11*, y se aplica la expansión de Taylor *Ec. 6.14*.

$$\frac{A}{\delta^2} [\delta \sqrt{\epsilon_{xz}} \tau + \dots] + a_2 \sqrt{\epsilon_{xz}} \tau + a_1 + \sqrt{\epsilon_{xz}}(a_3 \sqrt{\epsilon_{xz}} \tau + a_4)$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xz}$ .

$$a_1 \epsilon_{xz}^0 + \left( \frac{A}{\delta} \tau + a_2 \tau + a_4 \right) \sqrt{\epsilon_{xz}} + \dots$$

Se concluye los primeros dos términos de la expansión interna a partir de la solución externa según los que interactúan con  $\epsilon_{xz}^0$  y  $\sqrt{\epsilon_{xz}}$ .

$$a_1 \epsilon_{xz}^0 + \left( \frac{A}{\delta} \tau + a_2 \tau + a_4 \right) \sqrt{\epsilon_{xz}} \quad \text{Ec. 6.41}$$

Por otro lado, se tienen los primeros dos términos internos a la Capa Límite de la expansión de  $\hat{w}^i$  en la *Ec. 6.42*.

$$b_2(e^{-\tau} + \tau - 1) + \sqrt{\epsilon_{xz}} b_6(e^{-\tau} + \tau - 1) \quad \text{Ec. 6.42}$$

Se reescribe en término de la variable externa  $\hat{x}$  de la *Ec. 6.11*, retomando el valor de  $b_2$  calculado en la *Ec. 6.38*.

$$\sqrt{\epsilon_{xz}} b_6 \left( e^{\frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}}} + \frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}} - 1 \right)$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xz}$ , donde *EST* denota los pequeños términos exponenciales que no son necesarios en la metodología.

$$b_6 \hat{x} \epsilon_{xz}^0 - b_6 \sqrt{\epsilon_{xz}} + EST$$

Se concluye los primeros dos términos de la expansión externa a partir de la solución interna según términos que interactúan con  $\epsilon_{xz}^0$  y  $\sqrt{\epsilon_{xz}}$ .

$$b_6 \hat{x} \epsilon_{xz}^0 - b_6 \sqrt{\epsilon_{xz}} \quad \text{Ec. 6.43}$$

Finalmente, expresando la *Ec. 6.41* en términos de  $\hat{x}$  e igualando sus componentes según potencias de  $\epsilon_{xz}$  con la *Ec. 6.43*, se concluye las siguientes relaciones entre constantes.

$$\epsilon_{xz}^0: b_6 = \frac{A}{\delta} + a_2 \quad \text{Ec. 6.44}$$

$$\sqrt{\epsilon_{xz}}: -b_6 = a_4 \quad \text{Ec. 6.45}$$

### Metodología para $\hat{w}_2$

Primeros tres términos externos a las Capas Límites de la expansión  $\hat{w}^o$  en *Ec. 6.46*.

$$\frac{A \sin(\delta \hat{x})}{\delta^2} + a_2 \hat{x} + a_1 + \sqrt{\epsilon_{xz}}(a_3 \hat{x} + a_4) + \epsilon_{xz}(-A \sin(\delta \hat{x}) + a_5 \hat{x} + a_6) \quad \text{Ec. 6.46}$$

Se reescribe en término de la variable interna  $\tau$ , *Ec. 6.38*, y se aplica la expansión de Taylor *Ec. 6.14*.

$$\begin{aligned} \frac{A}{\delta^2} [\delta \sqrt{\epsilon_{xz}} \tau + \dots] + a_2 \sqrt{\epsilon_{xz}} \tau + a_1 + \sqrt{\epsilon_{xz}}(a_3 \sqrt{\epsilon_{xz}} \tau + a_4) \\ + \epsilon_{xz}(-A[\delta \sqrt{\epsilon_{xz}} \tau + \dots] + a_5 \sqrt{\epsilon_{xz}} \tau + a_6) \end{aligned}$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xz}$ .

$$a_1 \epsilon_{xz}^0 + \left( \frac{A}{\delta} \tau + a_2 \tau + a_4 \right) \sqrt{\epsilon_{xz}} + (a_3 \tau + a_6) \epsilon_{xz} + \dots$$

Se concluye los primeros tres términos de la expansión interna a partir de la solución externa según los que interactúan con  $\epsilon_{xz}^0$ ,  $\sqrt{\epsilon_{xz}}$  y  $\epsilon_{xz}$ .

$$a_1 \epsilon_{xz}^0 + \left( \frac{A}{\delta} \tau + a_2 \tau + a_4 \right) \sqrt{\epsilon_{xz}} + (a_3 \tau + a_6) \epsilon_{xz} \quad \text{Ec. 6.47}$$

Por otro lado, se tienen los primeros tres términos internos a la Capa Límite de la expansión de  $\hat{w}^i$  en la *Ec. 6.48*.

$$b_2(e^{-\tau} + \tau - 1) + \sqrt{\epsilon_{xz}} b_6(e^{-\tau} + \tau - 1) + \epsilon_{xz} b_{10}(e^{-\tau} + \tau - 1) \quad \text{Ec. 6.48}$$

Se reescribe en término de la variable externa  $\hat{x}$  de la *Ec. 6.11*, retomando el valor de  $b_2$  calculado en la *Ec. 6.38*.

$$\sqrt{\epsilon_{xz}} b_6 \left( e^{-\frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}}} + \frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}} - 1 \right) + \epsilon_{xz} b_{10} \left( e^{-\frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}}} + \frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}} - 1 \right)$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xz}$ , donde  $EST$  denota los pequeños términos exponenciales que no son necesarios en la metodología.

$$b_6 \hat{x} \epsilon_{xz}^0 + (-b_6 + b_{10} \hat{x}) \sqrt{\epsilon_{xz}} + -b_{10} \epsilon_{xz} + EST$$

Se concluye los primeros tres términos de la expansión externa a partir de la solución interna según términos que interactúan con  $\epsilon_{xz}^0$ ,  $\sqrt{\epsilon_{xz}}$  y  $\epsilon_{xz}$ .

$$b_6 \hat{x} \epsilon_{xz}^0 + (-b_6 + b_{10} \hat{x}) \sqrt{\epsilon_{xz}} + -b_{10} \epsilon_{xz} \quad \text{Ec. 6.49}$$

Finalmente, expresando la *Ec. 6.47* en términos de  $\hat{x}$  e igualando sus componentes según potencias de  $\epsilon_{xz}$  con la *Ec. 6.49*, se concluye las siguientes nuevas relaciones entre constantes.

$$\sqrt{\epsilon_{xz}}: b_{10} = a_3 \quad \text{Ec. 6.50}$$

$$\epsilon_{xz}: -b_{10} = a_6 \quad \text{Ec. 6.51}$$

### Metodología para $\hat{w}_3$

Primeros cuatro términos externos a las Capas Límites de la expansión  $\hat{w}^0$  en *Ec. 6.52*.

$$\begin{aligned} & \frac{A \sin(\delta \hat{x})}{\delta^2} + a_2 \hat{x} + a_1 + \sqrt{\epsilon_{xz}}(a_3 \hat{x} + a_4) + \epsilon_{xz}(-A \sin(\delta \hat{x}) + a_5 \hat{x} + a_6) \\ & + \epsilon_{xz}^{3/2}(a_7 \hat{x} + a_8) \end{aligned} \quad \text{Ec. 6.52}$$

Se reescribe en término de la variable interna  $\tau$ , *Ec. 6.11*, y se aplica la expansión de Taylor *Ec. 6.14*.

$$\begin{aligned} & \frac{A}{\delta^2} \left[ \delta \sqrt{\epsilon_{xz}} \tau - \frac{\delta^3 \tau^3}{3!} \epsilon_{xz}^{3/2} + \dots \right] + a_2 \sqrt{\epsilon_{xz}} \tau + a_1 + \sqrt{\epsilon_{xz}}(a_3 \sqrt{\epsilon_{xz}} \tau + a_4) \\ & + \epsilon_{xz}(-A[\delta \sqrt{\epsilon_{xz}} \tau + \dots] + a_5 \sqrt{\epsilon_{xz}} \tau + a_6) + \epsilon_{xz}^{3/2}(a_7 \sqrt{\epsilon_{xz}} \tau + a_8) \end{aligned}$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xz}$ .

$$a_1 \epsilon_{xz}^0 + \left( \frac{A}{\delta} \tau + a_2 \tau + a_4 \right) \sqrt{\epsilon_{xz}} + (a_3 \tau + a_6) \epsilon_{xz} + \left( -\frac{A\delta}{6} \tau^3 + a_5 \tau - A\delta \tau + a_8 \right) \epsilon_{xz}^{3/2} + \dots$$

Se concluye los primeros cuatro términos de la expansión interna a partir de la solución externa según los que interactúan con  $\epsilon_{xz}^0$ ,  $\sqrt{\epsilon_{xz}}$ ,  $\epsilon_{xz}$  y  $\epsilon_{xz}^{3/2}$ .

$$a_1 \epsilon_{xz}^0 + \left( \frac{A}{\delta} \tau + a_2 \tau + a_4 \right) \sqrt{\epsilon_{xz}} + (a_3 \tau + a_6) \epsilon_{xz} \\ + \left( -\frac{A\delta}{6} \tau^3 + a_5 \tau - A\delta \tau + a_8 \right) \epsilon_{xz}^{3/2} \quad \text{Ec. 6.53}$$

Por otro lado, se tienen los primeros cuatro términos internos a la Capa Límite de la expansión de  $\hat{w}^i$  en la *Ec. 6.54*.

$$b_2(e^{-\tau} + \tau - 1) + \sqrt{\epsilon_{xz}} b_6(e^{-\tau} + \tau - 1) + \epsilon_{xz} b_{10}(e^{-\tau} + \tau - 1) \\ + \epsilon_{xz}^{3/2} \left( -\frac{A\delta}{6} \tau^3 + b_{14}(e^{-\tau} + \tau - 1) \right) \quad \text{Ec. 6.54}$$

Se reescribe en término de la variable externa  $\hat{x}$  de la *Ec. 6.II*, retomando el valor de  $b_2$  calculado en la *Ec. 6.38*.

$$\sqrt{\epsilon_{xz}} b_6 \left( e^{-\frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}}} + \frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}} - 1 \right) + \epsilon_{xz} b_{10} \left( e^{-\frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}}} + \frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}} - 1 \right) \\ + \epsilon_{xz}^{3/2} \left( -\frac{A\delta}{6} \frac{\hat{x}^3}{\epsilon_{xz}^{3/2}} + b_{14} \left( e^{-\frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}}} + \frac{\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}} - 1 \right) \right)$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xz}$ , donde *EST* denota los pequeños términos exponenciales que no son necesarios en la metodología.

$$\left( b_6 \hat{x} - \frac{A\delta}{6} \right) \epsilon_{xz}^0 + (-b_6 + b_{10} \hat{x}) \sqrt{\epsilon_{xz}} + (-b_{10} + b_{14} \hat{x}) \epsilon_{xz} + (-b_{14}) \epsilon_{xz}^{3/2} + EST$$

Se concluye los primeros cuatro términos de la expansión externa a partir de la solución interna según términos que interactúan con  $\epsilon_{xz}^0$ ,  $\sqrt{\epsilon_{xz}}$ ,  $\epsilon_{xz}$  y  $\epsilon_{xz}^{3/2}$ .

$$\left( b_6 \hat{x} - \frac{A\delta}{6} \right) \epsilon_{xz}^0 + (-b_6 + b_{10} \hat{x}) \sqrt{\epsilon_{xz}} + (-b_{10} + b_{14} \hat{x}) \epsilon_{xz} + (-b_{14}) \epsilon_{xz}^{3/2} \quad \text{Ec. 6.55}$$

Finalmente, expresando la *Ec. 6.53* en términos de  $\hat{x}$  e igualando sus componentes según potencias de  $\epsilon_{xz}$  con la *Ec. 6.55*, se concluye las siguientes nuevas relaciones entre constantes.

$$\epsilon_{xz}: b_{14} = a_5 - A\delta \quad \text{Ec. 6.56}$$

$$\epsilon_{xz}^{3/2}: -b_{14} = a_8 \quad \text{Ec. 6.57}$$

### A.2.2. Rango cercano a $\hat{x} = 1$

En búsqueda de un cambio de escala adecuado para estudiar el comportamiento del cable en los alrededores de  $\hat{x} = 1$ , se aplica el siguiente cambio de variable adimensional que define la variable interna  $\psi$ .

$$\psi = \frac{1 - \hat{x}}{\epsilon_{xz}^\beta} \leftrightarrow \hat{x} = 1 - \psi \epsilon_{xz}^\beta \quad \text{Ec. 6.58}$$

Reemplazando el cambio de variable en la ecuación a resolver, *Ec. 2.2*; se trabaja algebraicamente, derivando por ley de la cadena, obteniéndose la siguiente expresión.

$$\epsilon_{xz}^{1-4\beta} \frac{d^4 \hat{w}(\psi)}{d\psi^4} - \epsilon_{xz}^{-2\beta} \frac{d^2 \hat{w}(\psi)}{d\psi^2} = A \sin\left(\delta \left(1 - \psi \epsilon_{xz}^\beta\right)\right) \quad \text{Ec. 6.59}$$

Con el fin de obtener una EDO con la participación de  $\epsilon_{xz}$  en sólo uno de sus términos; se impone el valor  $\beta = 1/2$  y se trabaja algebraicamente la *Ec. 6.59* para obtener la siguiente ecuación que modela del rango estudiado.

$$\frac{d^4 \hat{w}(\psi)}{d\psi^4} - \frac{d^2 \hat{w}(\psi)}{d\psi^2} = \epsilon_{xz} A \sin\left(\delta \left(1 - \psi \sqrt{\epsilon_{xz}}\right)\right) \quad \text{Ec. 6.60}$$

Por último, se reemplaza la expansión de Taylor en torno a cero, *Ec. 6.61*, en *Ec. 6.60* para obtener una EDO conformada únicamente por polinomios, *Ec. 6.62*.

$$\sin(a(1 - bx)) = \sin(a) - ab \cos(a) x - \frac{a^2 b^2 \sin(a)}{2!} x^2 + \dots \quad \text{Ec. 6.61}$$

$$\frac{d^4 \hat{w}(\psi)}{d\psi^4} - \frac{d^2 \hat{w}(\psi)}{d\psi^2} = A \left[ \sin(\delta) \epsilon_{xz} - \delta \cos(\delta) \psi \epsilon_{xz}^{3/2} + \dots \right] \quad \text{Ec. 6.62}$$

Debido a que el evaluar  $\hat{x} = 1$  implica un valor de  $\psi = 0$  por el cambio de escala, las condiciones de borde de desplazamiento transversal y giro nulos en los apoyos son reescritas en función de  $\tau$  en las condiciones *Ec. 6.63* y *Ec. 6.64*.

$$\hat{w}(\hat{x} = 1) = 0 \rightarrow \hat{w}(\psi = 0) = 0 \quad \text{Ec. 6.63}$$

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}}(\hat{x} = 1) = 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{xz}}} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \psi}(\psi = 0) = 0 \rightarrow \frac{\partial \hat{w}}{\partial \psi}(\psi = 0) = 0 \quad \text{Ec. 6.64}$$

A continuación, la solución en expansión propuesta en el rango interno a la Capa Límite en  $\hat{x} = 1$  queda denominada por el superíndice "I" por *Inner*.

$$\hat{w}^I(\psi, \epsilon_{xz}) = \hat{w}_0^I(\psi) + \sqrt{\epsilon_{xz}} \hat{w}_1^I(\psi) + \epsilon_{xz} \hat{w}_2^I(\psi) + \epsilon_{xz}^{3/2} \hat{w}_3^I(\psi) + \dots \quad \text{Ec. 6.65}$$

Evaluando la solución propuesta en  $\psi = 0$ , imponiendo las condiciones de borde *Ec. 6.63* y *Ec. 6.64*; e igualando componentes hasta el cuarto término de  $\epsilon_{xz}$  de la expansión, se obtienen las siguientes seis condiciones de borde asociadas a las subfunciones de *Ec. 6.65*.

$$\widehat{w}_0^I(\psi = 0) = \widehat{w}_1^I(\psi = 0) = \widehat{w}_2^I(\psi = 0) = \widehat{w}_3^I(\psi = 0) = 0 \quad \text{Ec. 6.66}$$

$$\frac{\partial \widehat{w}_0^I}{\partial \psi}(\psi = 0) = \frac{\partial \widehat{w}_1^I}{\partial \psi}(\psi = 0) = \frac{\partial \widehat{w}_2^I}{\partial \psi}(\psi = 0) = \frac{\partial \widehat{w}_3^I}{\partial \psi}(\psi = 0) = 0 \quad \text{Ec. 6.67}$$

Reemplazando la *Ec. 6.65* en *Ec. 2.2* e igualando componentes hasta el cuarto término de  $\epsilon_{xz}$  de la expansión, se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\epsilon_{xz}^0 \rightarrow \frac{\partial^4 \widehat{w}_0^I}{\partial \psi^4} - \frac{\partial^2 \widehat{w}_0^I}{\partial \psi^2} = 0 \quad \text{Ec. 6.68}$$

$$\sqrt{\epsilon_{xz}} \rightarrow \frac{\partial^4 \widehat{w}_1^I}{\partial \psi^4} - \frac{\partial^2 \widehat{w}_1^I}{\partial \psi^2} = 0 \quad \text{Ec. 6.69}$$

$$\epsilon_{xz} \rightarrow \frac{\partial^4 \widehat{w}_2^I}{\partial \psi^4} - \frac{\partial^2 \widehat{w}_2^I}{\partial \psi^2} = A \sin(\delta) \quad \text{Ec. 6.70}$$

$$\epsilon_{xz}^{3/2} \rightarrow \frac{\partial^4 \widehat{w}_3^I}{\partial \psi^4} - \frac{\partial^2 \widehat{w}_3^I}{\partial \psi^2} = -A\delta \cos(\delta) \psi \quad \text{Ec. 6.71}$$

Cuyas soluciones para las funciones  $\widehat{w}_0^I$ ,  $\widehat{w}_1^I$ ,  $\widehat{w}_2^I$  y  $\widehat{w}_3^I$  se presentan a continuación.

$$\widehat{w}_0^I(\psi) = c_1 e^\psi + c_2 e^{-\psi} + c_3 \psi + c_4 \quad \text{Ec. 6.72}$$

$$\widehat{w}_1^I(\psi) = c_5 e^\psi + c_6 e^{-\psi} + c_7 \psi + c_8 \quad \text{Ec. 6.73}$$

$$\widehat{w}_2^I(\psi) = -\frac{A \sin(\delta)}{2} \psi^2 + c_9 e^\psi + c_{10} e^{-\psi} + c_{11} \psi + c_{12} \quad \text{Ec. 6.74}$$

$$\widehat{w}_3^I(\psi) = \frac{A\delta \cos(\delta)}{6} \psi^3 + c_{13} e^\psi + c_{14} e^{-\psi} + c_{15} \psi + c_{16} \quad \text{Ec. 6.75}$$

Las constantes de integración  $c_1$ ,  $c_5$ ,  $c_9$  y  $c_{13}$  son inmediatamente consideradas nulas. En caso contrario las *Ec. 6.72*, *Ec. 6.73*, *Ec. 6.74* y *Ec. 6.75* crecerían exponencialmente con respecto a  $\psi$ , lo que sería imposible de acoplar con las soluciones externas.

$$c_1 = c_5 = c_9 = c_{13} = 0 \quad \text{Ec. 6.76}$$

Posteriormente, el resto de las constantes son simplificables mediante el uso de las condiciones de borde *Ec. 6.66* y *Ec. 6.67*. Obteniéndose las siguientes funciones.

$$\widehat{w}_0^I(\psi) = c_2(e^{-\psi} + \psi - 1) \quad \text{Ec. 6.77}$$

$$\widehat{w}_1^I(\psi) = c_6(e^{-\psi} + \psi - 1) \quad \text{Ec. 6.78}$$

$$\widehat{w}_2^I(\psi) = -\frac{A \sin(\delta)}{2} \psi^2 + c_{10}(e^{-\psi} + \psi - 1) \quad \text{Ec. 6.79}$$

$$\widehat{w}_3^I(\psi) = \frac{A \delta \cos(\delta)}{6} \psi^3 + c_{14}(e^{-\psi} + \psi - 1) \quad \text{Ec. 6.80}$$

A continuación, se procede los pasos requeridos en la metodología de las perturbaciones para cada término  $\widehat{w}_0$ ,  $\widehat{w}_1$ ,  $\widehat{w}_2$  y  $\widehat{w}_3$ .

### Metodología para $\widehat{w}_0$

Primer término externo a las Capas Límites de la expansión  $\widehat{w}^o$  en *Ec. 6.81*.

$$\frac{A \sin(\delta \hat{x})}{\delta^2} + a_2 \hat{x} + a_1 \quad \text{Ec. 6.81}$$

Se reescribe en término de la variable interna  $\psi$ , *Ec. 6.58*, y se aplica la expansión de Taylor *Ec. 6.61*.

$$\frac{A}{\delta^2} [\sin(\delta) + \dots] + a_2(1 - \sqrt{\epsilon_{xz}} \psi) + a_1$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xz}$ .

$$\left( \frac{A \sin(\delta)}{\delta^2} + a_2 + a_1 \right) \epsilon_{xz}^0 + a_2 \psi \sqrt{\epsilon_{xz}} + \dots$$

Se concluye el primer término de expansión interna a partir de la solución externa dado las constantes que acompañan el término  $\epsilon_{xz}^0$ .

$$\frac{A \sin(\delta)}{\delta^2} + a_2 + a_1 \quad \text{Ec. 6.82}$$

Por otro lado, se tiene el primer término interno a la Capa Límite de la expansión de  $\widehat{w}_0^I$  en la *Ec. 6.83*.

$$c_2(e^{-\psi} + \psi - 1) \quad \text{Ec. 6.83}$$

Se reescribe en término de la variable externa  $\hat{x}$  de la *Ec. 6.58*.

$$c_2 \left( e^{-\frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}}} + \frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}} - 1 \right)$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xz}$ , donde *EST* denota los pequeños términos exponenciales que no son necesarios en la metodología.

$$-c_2 \epsilon_{xz}^0 + c_2 \frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}} + EST$$

Se concluye el primer término de expansión externa a partir de la solución interna depende del valor de  $c_2$  como sigue.

$$\begin{cases} -c_2 & \text{si } c_2 = 0 \\ \frac{c_2(1-\hat{x})}{\sqrt{\epsilon_{xz}}} & \text{si } c_2 \neq 0 \end{cases} \quad \text{Ec. 6.84}$$

Finalmente, igualando componentes según potencias de  $\epsilon_{xz}$  de las *Ec. 6.82* y *Ec. 6.84*, se concluye el valor de las siguientes constantes.

$$\epsilon_{xz}^{-1/2}: c_2 = 0 \quad \text{Ec. 6.85}$$

$$\epsilon_{xz}^0: \frac{A \sin(\delta)}{\delta^2} + a_2 + a_1 = 0 \quad \text{Ec. 6.86}$$

### Metodología para $\hat{w}_1$

Primeros dos términos externos a las Capas Límites de la expansión  $\hat{w}^0$  en *Ec. 6.87*.

$$\frac{A \sin(\delta \hat{x})}{\delta^2} + a_2 \hat{x} + a_1 + \sqrt{\epsilon_{xz}}(a_3 \hat{x} + a_4) \quad \text{Ec. 6.87}$$

Se reescribe en término de la variable interna  $\psi$ , *Ec. 6.58*, y se aplica la expansión de Taylor *Ec. 6.61*.

$$\frac{A}{\delta^2} [\sin(\delta) - \delta \cos(\delta) \psi \sqrt{\epsilon_{xz}} + \dots] + a_2(1 - \sqrt{\epsilon_{xz}} \psi) + a_1 + \sqrt{\epsilon_{xz}}(a_3(1 - \sqrt{\epsilon_{xz}} \psi) + a_4)$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xz}$ .

$$\left(\frac{A \sin(\delta)}{\delta^2} + a_2 + a_1\right) \epsilon_{xz}^0 + \left(-\frac{A \cos(\delta)}{\delta} \psi - a_2 \psi + a_3 + a_4\right) \sqrt{\epsilon_{xz}} + \dots$$

Se concluye los primeros dos términos de la expansión interna a partir de la solución externa según los que interactúan con  $\epsilon_{xz}^0$  y  $\sqrt{\epsilon_{xz}}$ .

$$\left(\frac{A \sin(\delta)}{\delta^2} + a_2 + a_1\right) \epsilon_{xz}^0 + \left(-\frac{A \cos(\delta)}{\delta} \psi - a_2 \psi + a_3 + a_4\right) \sqrt{\epsilon_{xz}} \quad \text{Ec. 6.88}$$

Por otro lado, se tienen los primeros dos términos internos a la Capa Límite de la expansión de  $\hat{w}^I$  en la *Ec. 6.89*.

$$c_2(e^{-\psi} + \psi - 1) + \sqrt{\epsilon_{xz}} c_6(e^{-\psi} + \psi - 1) \quad \text{Ec. 6.89}$$

Se reescribe en término de la variable externa  $\hat{x}$  de la *Ec. 6.58*, retomando el valor de  $c_2$  calculado en la *Ec. 6.85*.

$$\sqrt{\epsilon_{xz}} c_6 \left( e^{-\frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}}} + \frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}} - 1 \right)$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xz}$ , donde *EST* denota los pequeños términos exponenciales que no son necesarios en la metodología.

$$c_6(1 - \hat{x}) \epsilon_{xz}^0 - c_6 \sqrt{\epsilon_{xz}} + EST$$

Se concluye los primeros dos términos de la expansión externa a partir de la solución interna según términos que interactúan con  $\epsilon_{xz}^0$  y  $\sqrt{\epsilon_{xz}}$ .

$$c_6(1 - \hat{x}) \epsilon_{xz}^0 - c_6 \sqrt{\epsilon_{xz}} \quad \text{Ec. 6.90}$$

Finalmente, expresando la *Ec. 6.88* en términos de  $\hat{x}$  e igualando sus componentes según potencias de  $\epsilon_{xz}$  con la *Ec. 6.90*, se concluye las siguientes relaciones entre constantes.

$$\epsilon_{xz}^0: c_6 = -\frac{A \cos(\delta)}{\delta} - a_2 \quad \text{Ec. 6.91}$$

$$\sqrt{\epsilon_{xz}}: -c_6 = a_3 + a_4 \quad \text{Ec. 6.92}$$

## Metodología para $\hat{w}_2$

Primeros tres términos externos a las Capas Límites de la expansión  $\hat{w}^0$  en *Ec. 6.93*.

$$\frac{A \sin(\delta \hat{x})}{\delta^2} + a_2 \hat{x} + a_1 + \sqrt{\epsilon_{xz}}(a_3 \hat{x} + a_4) + \epsilon_{xz}(-A \sin(\delta \hat{x}) + a_5 \hat{x} + a_6) \quad \text{Ec. 6.93}$$

Se reescribe en término de la variable interna  $\psi$ , *Ec. 6.58*, y se aplica la expansión de Taylor *Ec. 6.61*.

$$\begin{aligned} \frac{A}{\delta^2} \left[ \sin(\delta) - \delta \cos(\delta) \psi \sqrt{\epsilon_{xz}} - \frac{\delta^2 \sin(\delta) \psi^2}{2!} \epsilon_{xz} + \dots \right] + a_2(1 - \sqrt{\epsilon_{xz}} \psi) + a_1 \\ + \sqrt{\epsilon_{xz}}(a_3(1 - \sqrt{\epsilon_{xz}} \psi) + a_4) + \epsilon_{xz}(-A[\sin(\delta) + \dots] + a_5(1 - \sqrt{\epsilon_{xz}} \psi) + a_6) \end{aligned}$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xz}$ .

$$\begin{aligned} \left( \frac{A \sin(\delta)}{\delta^2} + a_2 + a_1 \right) \epsilon_{xz}^0 + \left( -\frac{A \cos(\delta)}{\delta} \psi - a_2 \psi + a_3 + a_4 \right) \sqrt{\epsilon_{xz}} \\ + \left( -\frac{A \sin(\delta)}{2} \psi^2 - a_3 \psi - A \sin(\delta) + a_5 + a_6 \right) \epsilon_{xz} + \dots \end{aligned}$$

Se concluye los primeros tres términos de la expansión interna a partir de la solución externa según los que interactúan con  $\epsilon_{xz}^0$ ,  $\sqrt{\epsilon_{xz}}$  y  $\epsilon_{xz}$ .

$$\begin{aligned} \left( \frac{A \sin(\delta)}{\delta^2} + a_2 + a_1 \right) \epsilon_{xz}^0 + \left( -\frac{A \cos(\delta)}{\delta} \psi - a_2 \psi + a_3 + a_4 \right) \sqrt{\epsilon_{xz}} \\ + \left( -\frac{A \sin(\delta)}{2} \psi^2 - a_3 \psi - A \sin(\delta) + a_5 + a_6 \right) \epsilon_{xz} \end{aligned} \quad \text{Ec. 6.94}$$

Por otro lado, se tienen los primeros tres términos internos a la Capa Límite de la expansión de  $\hat{v}_0^I$  en la *Ec. 6.94*.

$$\begin{aligned} c_2(e^{-\psi} + \psi - 1) + \sqrt{\epsilon_{xz}} c_6(e^{-\psi} + \psi - 1) \\ + \epsilon_{xz} \left( -\frac{A \sin(\delta)}{2} \psi^2 + c_{10}(e^{-\psi} + \psi - 1) \right) \end{aligned} \quad \text{Ec. 6.95}$$

Se reescribe en término de la variable externa  $\hat{x}$  de la *Ec. 6.58*, retomando el valor de  $c_2$  calculado en la *Ec. 6.85*.

$$\sqrt{\epsilon_{xz}} c_6 \left( e^{-\frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}}} + \frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}} - 1 \right) + \epsilon_{xz} \left( -\frac{A \sin(\delta) (1-\hat{x})^2}{2 \epsilon_{xz}} + c_{10} \left( e^{-\frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}}} + \frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}} - 1 \right) \right)$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xz}$ , donde  $EST$  denota los pequeños términos exponenciales que no son necesarios en la metodología.

$$\left( c_6(1 - \hat{x}) - \frac{A \sin(\delta)}{2}(1 - \hat{x})^2 \right) \epsilon_{xz}^0 + (-c_6 + c_{10}(1 - \hat{x}))\sqrt{\epsilon_{xz}} - c_{10}\epsilon_{xz} + EST$$

Se concluye los primeros tres términos de la expansión externa a partir de la solución interna según términos que interactúan con  $\epsilon_{xz}^0$ ,  $\sqrt{\epsilon_{xz}}$  y  $\epsilon_{xz}$ .

$$\left( c_6(1 - \hat{x}) - \frac{A \sin(\delta)}{2}(1 - \hat{x})^2 \right) \epsilon_{xz}^0 + (-c_6 + c_{10}(1 - \hat{x}))\sqrt{\epsilon_{xz}} - c_{10}\epsilon_{xz} \quad \text{Ec. 6.96}$$

Finalmente, expresando la *Ec. 6.94* en términos de  $\hat{x}$  e igualando sus componentes según potencias de  $\epsilon_{xz}$  con la *Ec. 6.96*, se concluye las siguientes nuevas relaciones entre constantes.

$$\sqrt{\epsilon_{xz}}: c_{10} = -a_3 \quad \text{Ec. 6.97}$$

$$\epsilon_{xz}: -c_{10} = -A \sin(\delta) + a_5 + a_6 \quad \text{Ec. 6.98}$$

### Metodología para $\hat{w}_3$

Primeros cuatro términos externos a las Capas Límites de  $\hat{w}^0$  en *Ec. 6.99*.

$$\begin{aligned} & \frac{A \sin(\delta \hat{x})}{\delta^2} + a_2 \hat{x} + a_1 + \sqrt{\epsilon_{xz}}(a_3 \hat{x} + a_4) \\ & + \epsilon_{xz}(-A \sin(\delta \hat{x}) + a_5 \hat{x} + a_6) + \epsilon_{xz}^{3/2}(a_7 \hat{x} + a_8) \end{aligned} \quad \text{Ec. 6.99}$$

Se reescribe en término de la variable interna  $\psi$ , *Ec. 6.58*, y se aplica la expansión de Taylor *Ec. 6.61*.

$$\begin{aligned} & \frac{A}{\delta^2} \left[ \sin(\delta) - \delta \cos(\delta) \psi \sqrt{\epsilon_{xz}} - \frac{\delta^2 \sin(\delta) \psi^2}{2!} \epsilon_{xz} + \frac{\delta^3 \cos(\delta) \psi^3}{3!} \epsilon_{xz}^{3/2} + \dots \right] + a_2(1 - \sqrt{\epsilon_{xz}} \psi) \\ & + a_1 + \sqrt{\epsilon_{xz}}(a_3(1 - \sqrt{\epsilon_{xz}} \psi) + a_4) \\ & + \epsilon_{xz}(-A[\sin(\delta) + \delta \cos(\delta) \psi \sqrt{\epsilon_{xz}} + \dots] + a_5(1 - \sqrt{\epsilon_{xz}} \psi) + a_6) \\ & + \epsilon_{xz}^{3/2}(a_7(1 - \sqrt{\epsilon_{xz}} \psi) + a_8) \end{aligned}$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xz}$ .

$$\begin{aligned} & \left( \frac{A \sin(\delta)}{\delta^2} + a_2 + a_1 \right) \epsilon_{xz}^0 + \left( -\frac{A \cos(\delta)}{\delta} \psi - a_2 \psi + a_3 + a_4 \right) \sqrt{\epsilon_{xz}} \\ & + \left( -\frac{A \sin(\delta)}{2} \psi^2 - a_3 \psi - A \sin(\delta) + a_5 + a_6 \right) \epsilon_{xz} \\ & + \left( \frac{A \delta \cos(\delta)}{6} \psi^3 + A \delta \cos(\delta) \psi - a_5 \psi + a_7 + a_8 \right) \epsilon_{xz}^{3/2} + \dots \end{aligned}$$

Se concluye los primeros cuatro términos de la expansión interna a partir de la solución externa según los que interactúan con  $\epsilon_{xz}^0$ ,  $\sqrt{\epsilon_{xz}}$ ,  $\epsilon_{xz}$  y  $\epsilon_{xz}^{3/2}$ .

$$\begin{aligned} & \left( \frac{A \sin(\delta)}{\delta^2} + a_2 + a_1 \right) \epsilon_{xz}^0 + \left( -\frac{A \cos(\delta)}{\delta} \psi - a_2 \psi + a_3 + a_4 \right) \sqrt{\epsilon_{xz}} \\ & + \left( -\frac{A \sin(\delta)}{2} \psi^2 - a_3 \psi - A \sin(\delta) + a_5 + a_6 \right) \epsilon_{xz} \quad \text{Ec. 6.100} \\ & + \left( \frac{A \delta \cos(\delta)}{6} \psi^3 + A \delta \cos(\delta) \psi - a_5 \psi + a_7 + a_8 \right) \epsilon_{xz}^{3/2} \end{aligned}$$

Por otro lado, se tienen los primeros cuatro términos internos a la Capa Límite de la expansión de  $\hat{w}^I$  en la *Ec. 6.101*.

$$\begin{aligned} & c_2(e^{-\psi} + \psi - 1) + \sqrt{\epsilon_{xz}} c_6(e^{-\psi} + \psi - 1) \\ & + \epsilon_{xz} \left( -\frac{A \sin(\delta)}{2} \psi^2 + c_{10}(e^{-\psi} + \psi - 1) \right) \quad \text{Ec. 6.101} \\ & + \epsilon_{xz}^{3/2} \left( \frac{A \delta \cos(\delta)}{6} \psi^3 + c_{14}(e^{-\psi} + \psi - 1) \right) \end{aligned}$$

Se reescribe en término de la variable externa  $\hat{x}$  de la *Ec. 6.58*, retomando el valor de  $c_2$  calculado en la *Ec. 6.85*.

$$\begin{aligned} & \sqrt{\epsilon_{xz}} c_6 \left( e^{-\frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}}} + \frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}} - 1 \right) + \epsilon_{xz} \left( -\frac{A \sin(\delta)}{2} \frac{(1-\hat{x})^2}{\epsilon_{xz}} + c_{10} \left( e^{-\frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}}} + \frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}} - 1 \right) \right) \\ & + \epsilon_{xz}^{3/2} \left( \frac{A \delta \cos(\delta)}{6} \frac{(1-\hat{x})^3}{\epsilon_{xz}^{3/2}} + c_{14} \left( e^{-\frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}}} + \frac{1-\hat{x}}{\sqrt{\epsilon_{xz}}} - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

Se expande y factoriza según potencias de  $\epsilon_{xz}$ , donde *EST* denota los pequeños términos exponenciales que no son necesarios en la metodología.

$$\left( c_6(1 - \hat{x}) - \frac{A \sin(\delta)}{2}(1 - \hat{x})^2 + \frac{A\delta \cos(\delta)}{6}(1 - \hat{x})^3 \right) \epsilon_{xz}^0 + (-c_6 + c_{10}(1 - \hat{x}))\sqrt{\epsilon_{xz}} + (-c_{10} + c_{14}(1 - \hat{x}))\epsilon_{xz} - c_{14}\epsilon_{xz}^{3/2} + EST$$

Se concluye los primeros cuatro términos de la expansión externa a partir de la solución interna según términos que interactúan con  $\epsilon_{xz}^0$ ,  $\sqrt{\epsilon_{xz}}$ ,  $\epsilon_x$  y  $\epsilon_{xz}^{3/2}$ .

$$\left( c_6(1 - \hat{x}) - \frac{A \sin(\delta)}{2}(1 - \hat{x})^2 + \frac{A\delta \cos(\delta)}{6}(1 - \hat{x})^3 \right) \epsilon_{xz}^0 + (-c_6 + c_{10}(1 - \hat{x}))\sqrt{\epsilon_{xz}} + (-c_{10} + c_{14}(1 - \hat{x}))\epsilon_{xz} - c_{14}\epsilon_{xz}^{3/2} \quad \text{Ec. 6.102}$$

Finalmente, expresando la *Ec. 6.100* en términos de  $\hat{x}$  e igualando sus componentes según potencias de  $\epsilon_{xz}$  con la *Ec. 6.102*, se concluye las siguientes nuevas relaciones entre constantes.

$$\epsilon_{xz}: \quad c_{14} = A\delta \cos(\delta) - a_5 \quad \text{Ec. 6.103}$$

$$\epsilon_{xz}^{3/2}: \quad -c_{14} = a_7 + a_8 \quad \text{Ec. 6.104}$$

## Anexo B Comparación soluciones EDO según cantidad de términos en expansión

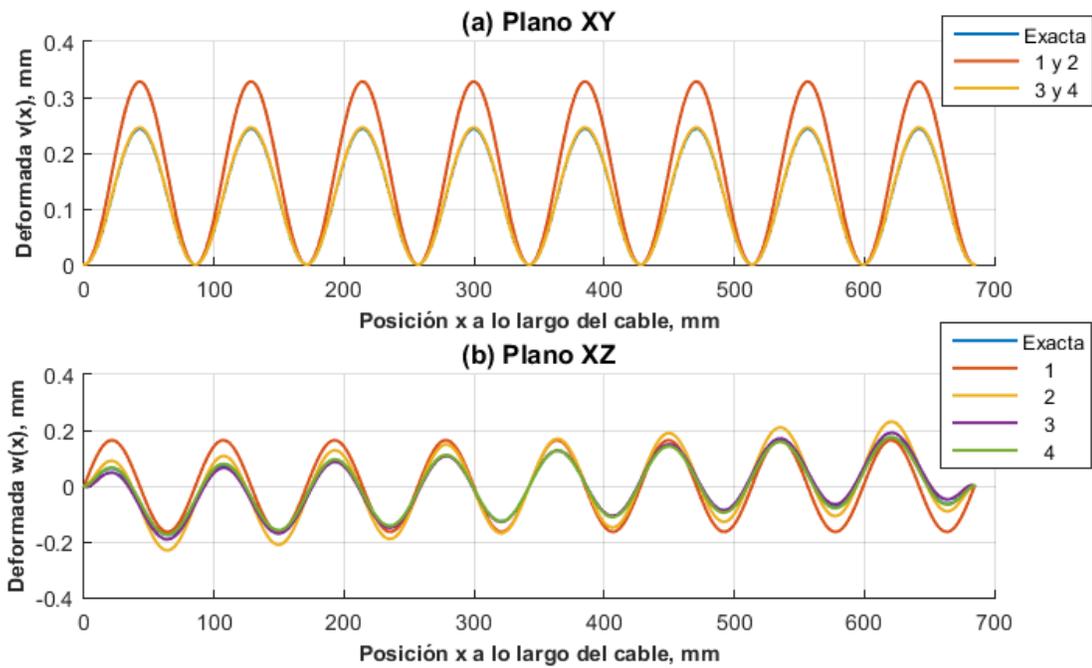


Fig. 6.1 Comparación cantidad de términos en expansión, W136.

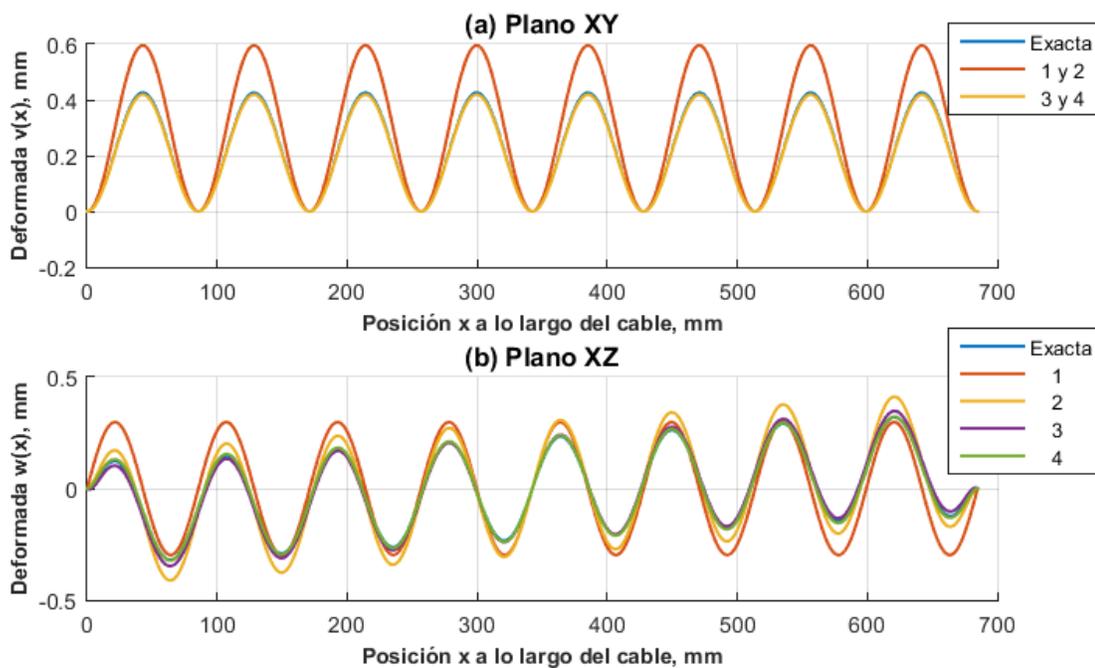


Fig. 6.2 Comparación cantidad de términos en expansión, W1.

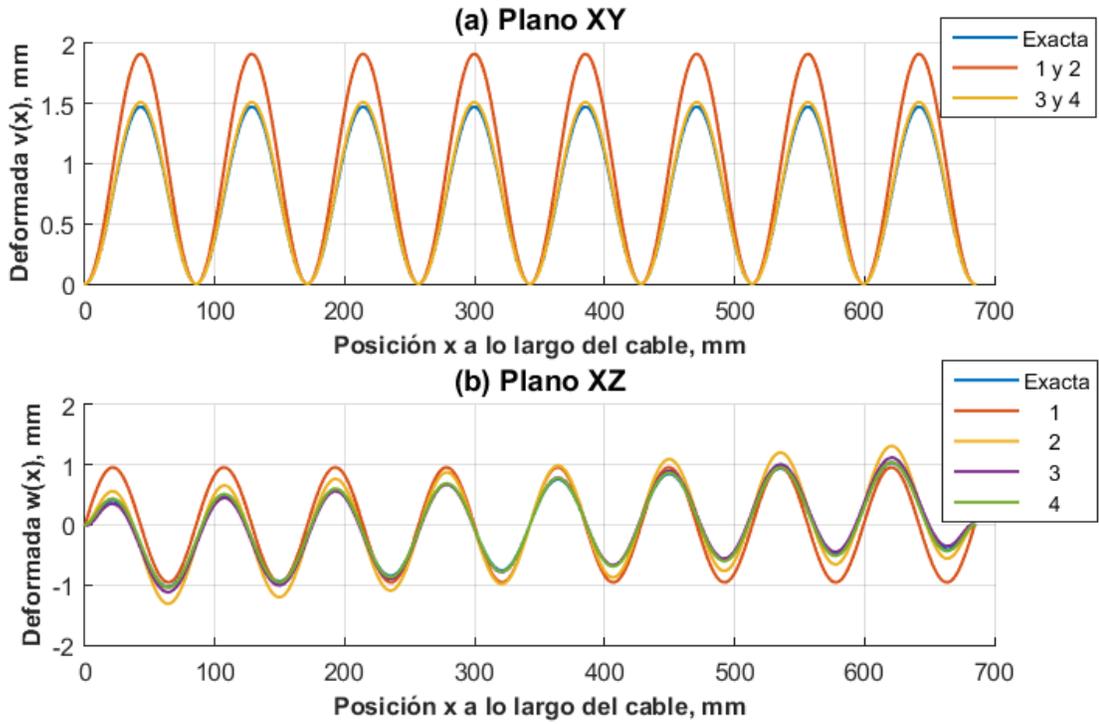


Fig. 6.3 Comparación cantidad de términos en expansión, W123.

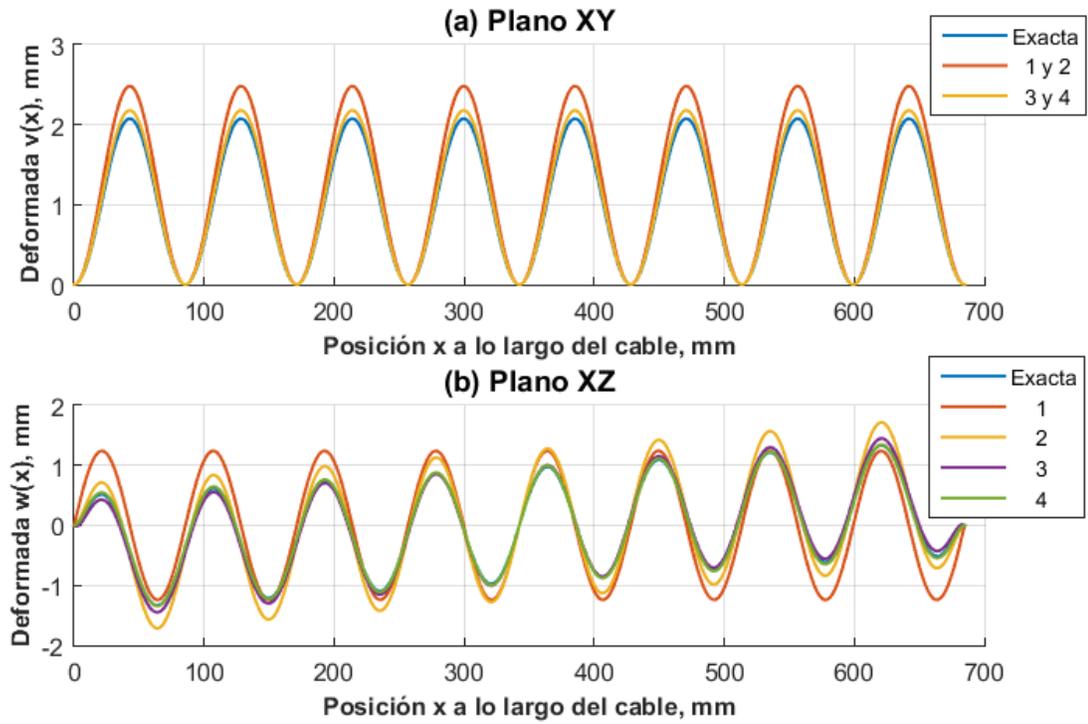


Fig. 6.4 Comparación cantidad de términos en expansión, W1234.

# Anexo C Variación paramétrica en respuestas EDO

## C.1. Largo fijo y carga variable

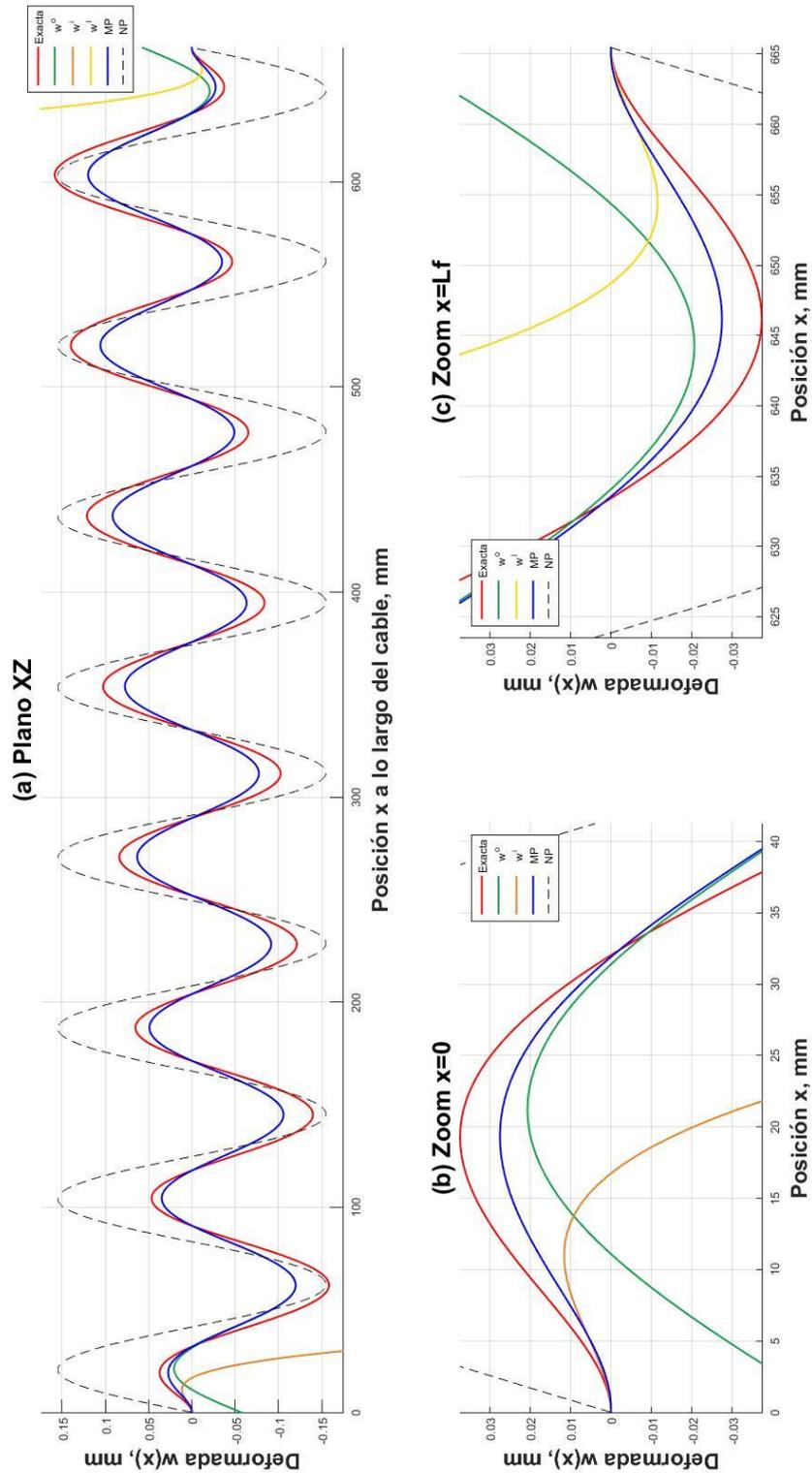


Fig. 6.5 Deformada transversal XZ,  $L=0.65\text{m}$  y  $H=15\%$ , W136.

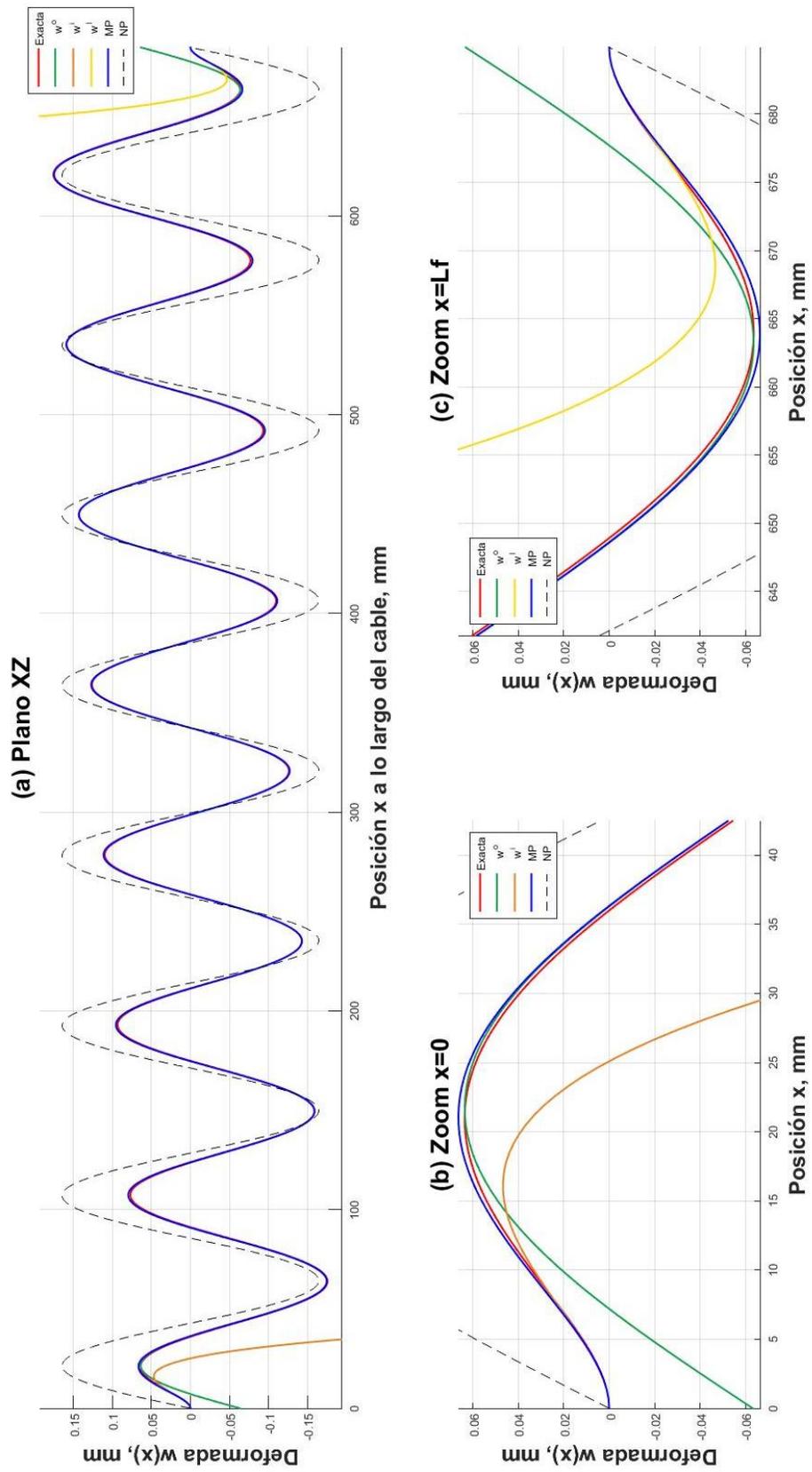


Fig. 6.6 Deformada transversal XZ,  $L=0.65\text{m}$  y  $H=30\%$ , W136.

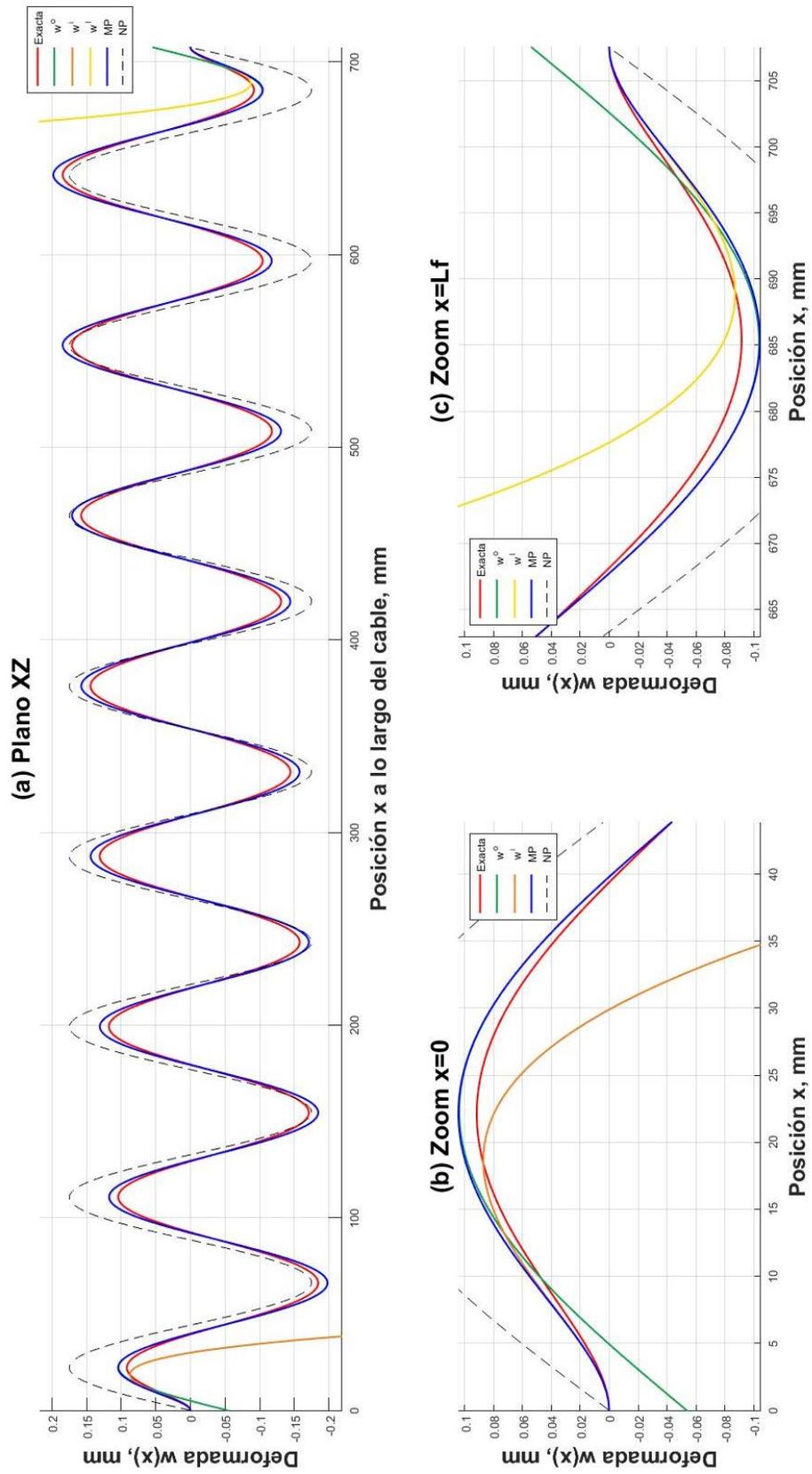


Fig. 6.7 Deformada transversal XZ,  $L=0.65\text{m}$  y  $H=60\%$ , W136.

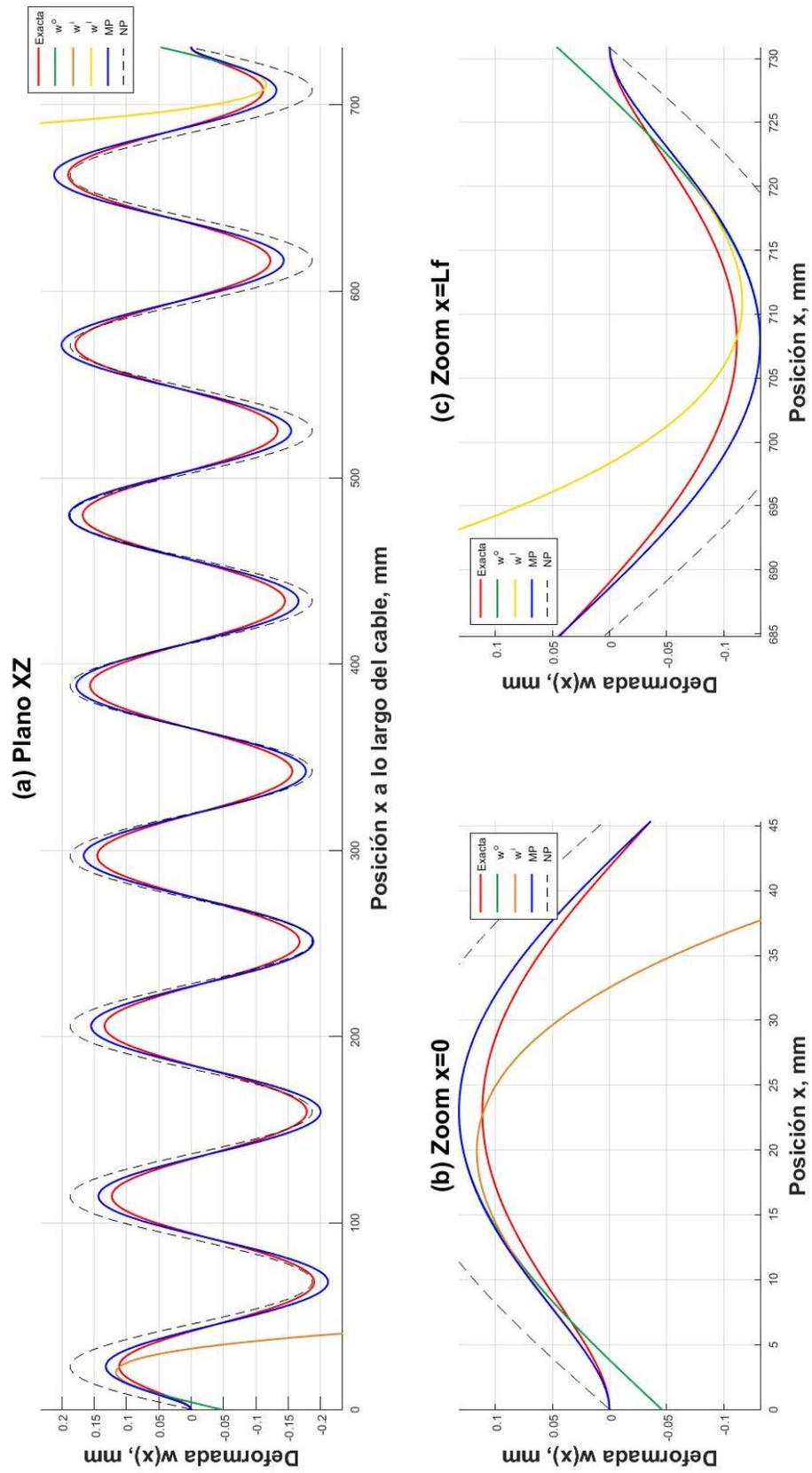


Fig. 6.8 Deformada transversal XZ,  $L=0.65\text{m}$  y  $H=100\%$ , W136.

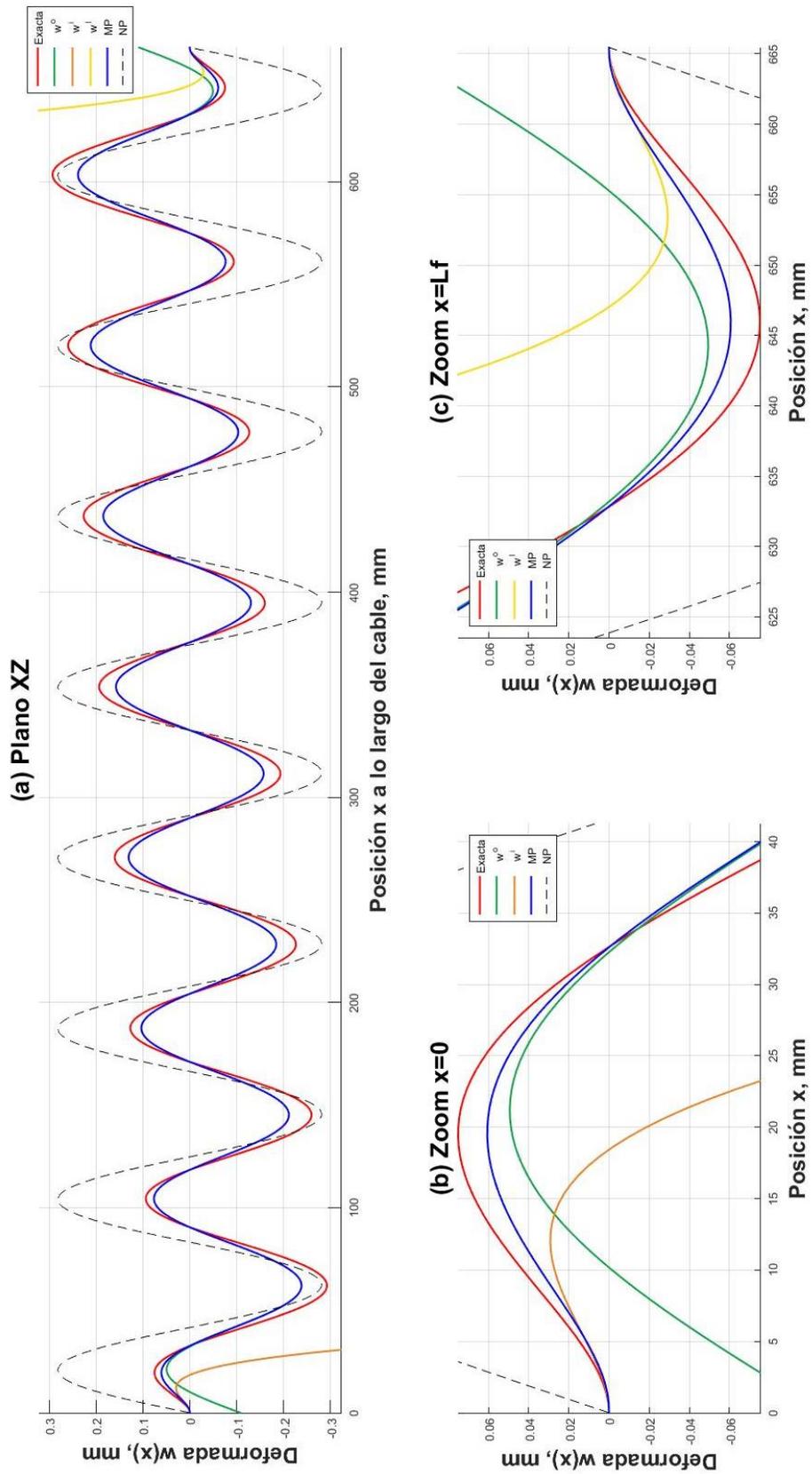


Fig. 6.9 Deformada transversal XZ,  $L=0.65\text{m}$  y  $H=15\%$ ,  $W1$ .

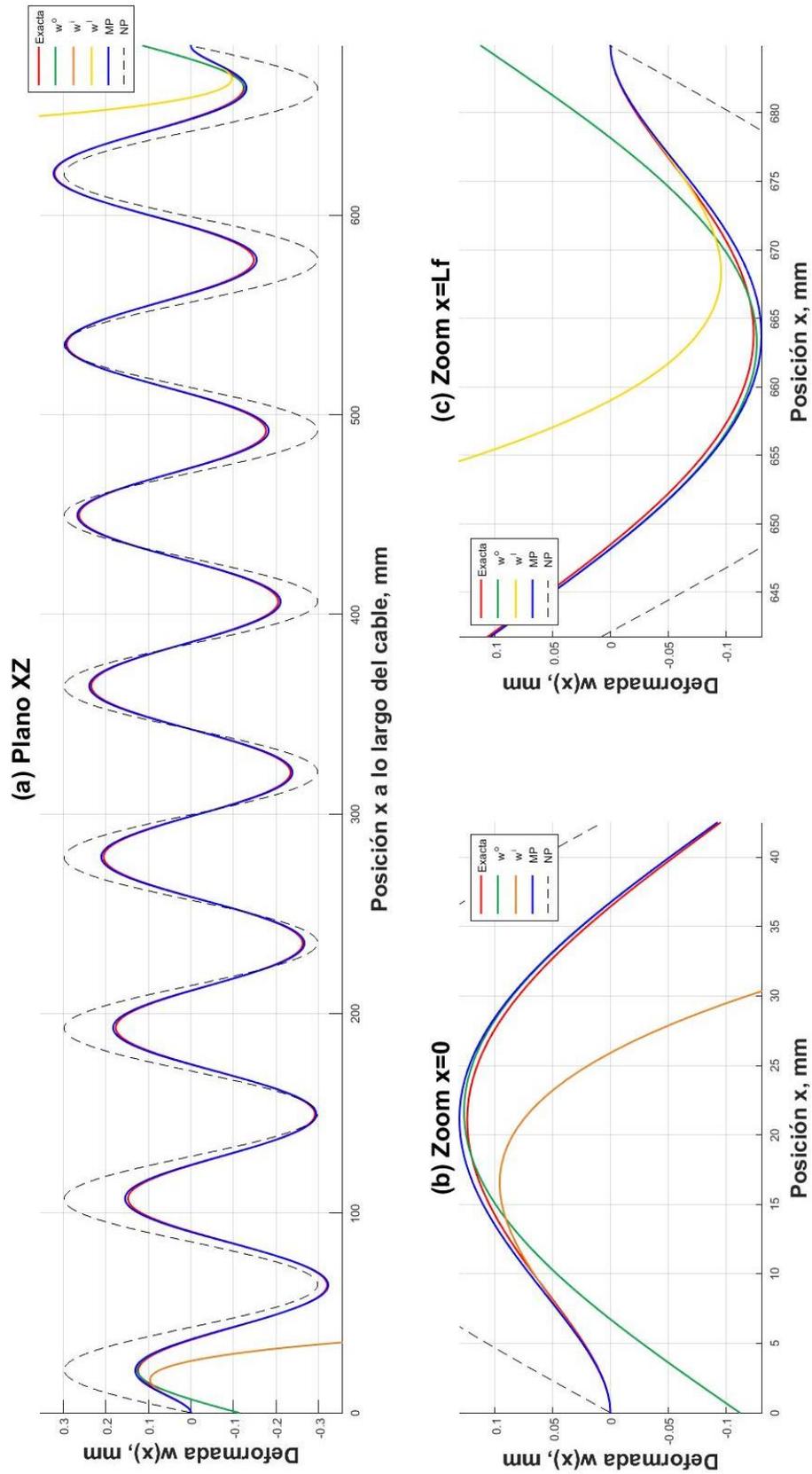


Fig. 6.10 Deformada transversal XZ,  $L=0.65\text{m}$  y  $H=30\%$ , W1.

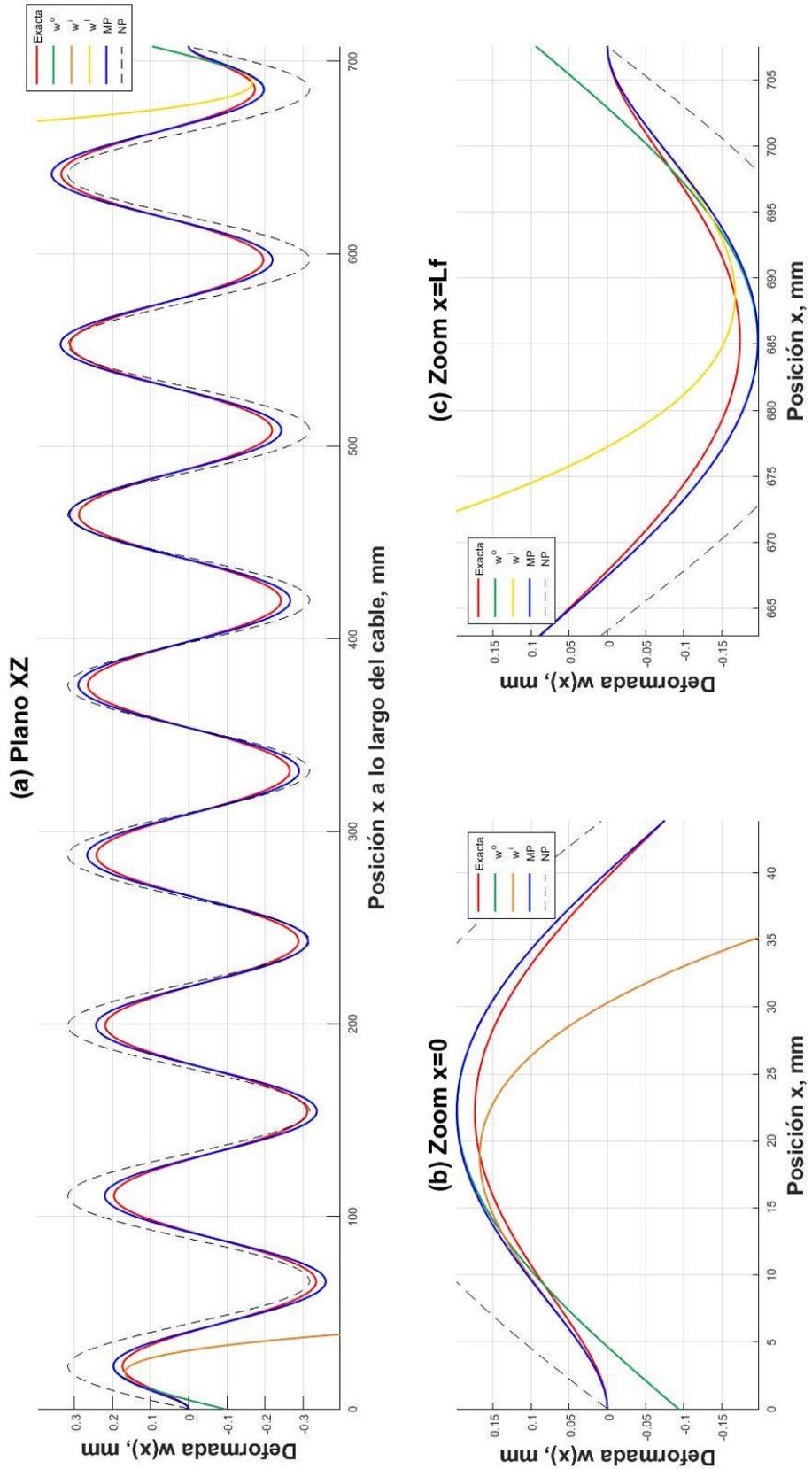


Fig. 6.11 Deformada transversal XZ,  $L=0.65\text{m}$  y  $H=60\%$ , W1.

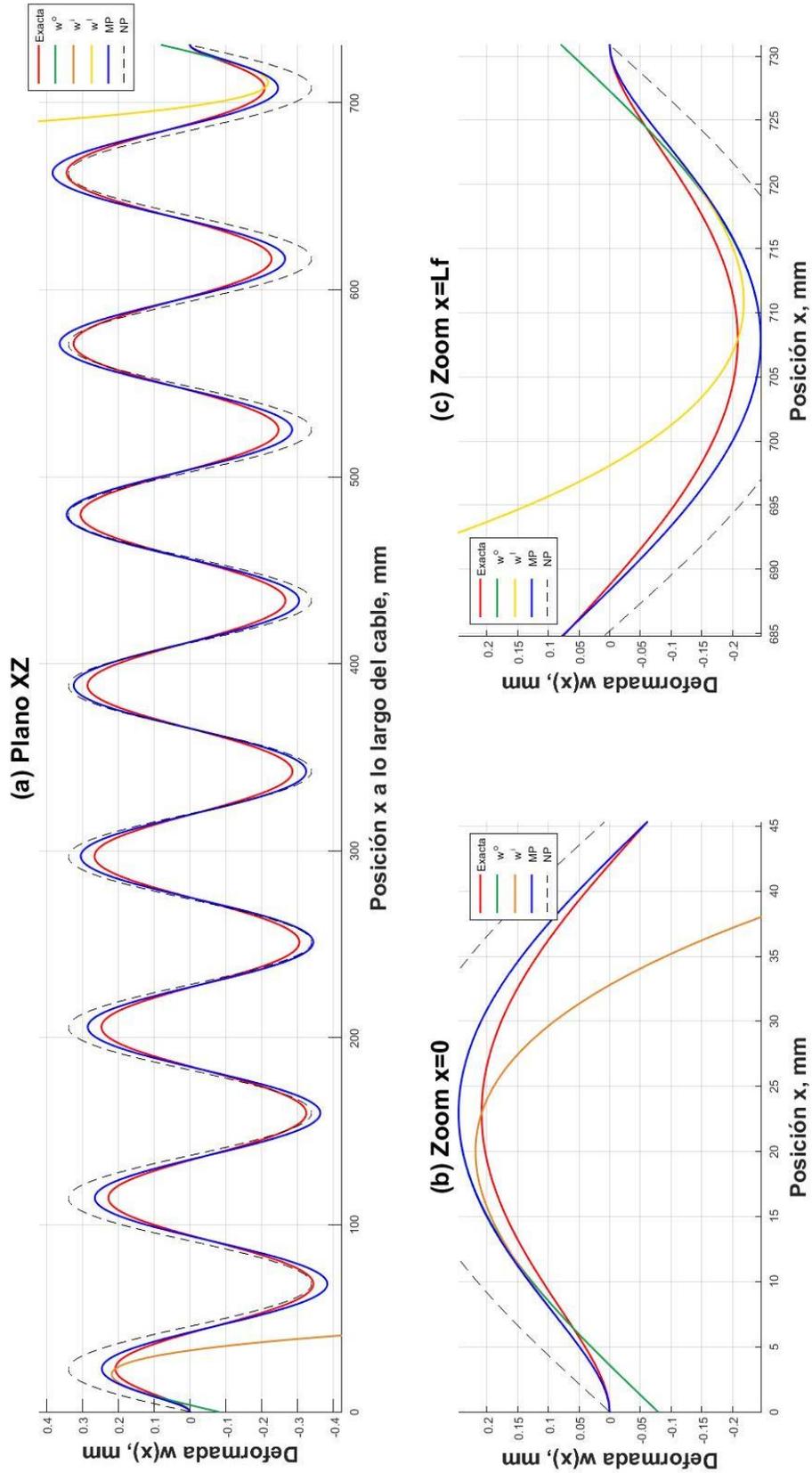


Fig. 6.12 Deformada transversal XZ,  $L=0.65\text{m}$  y  $H=100\%$ ,  $W1$ .

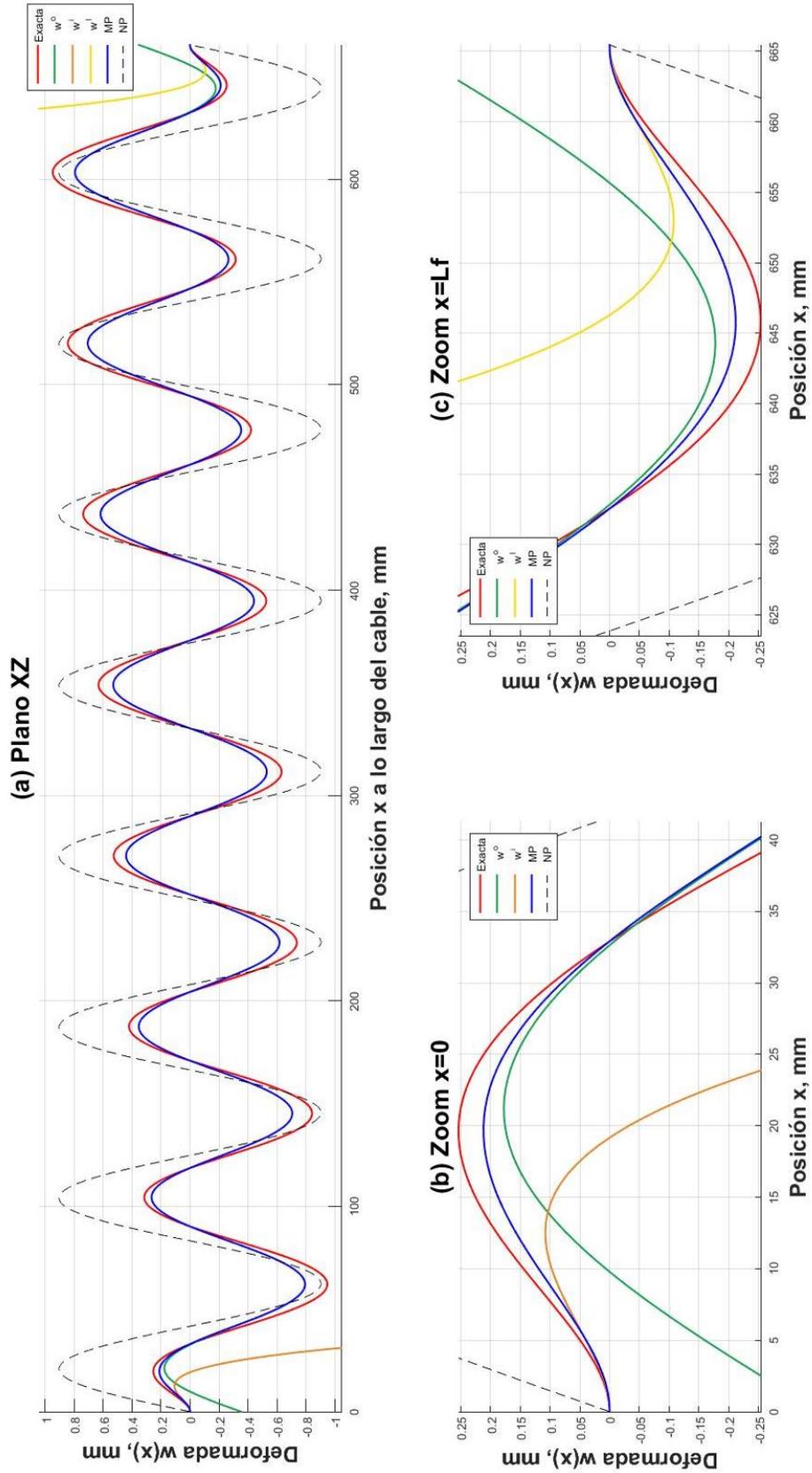


Fig. 6.13 Deformada transversal XZ,  $L=0.65\text{m}$  y  $H=15\%$ , W123.

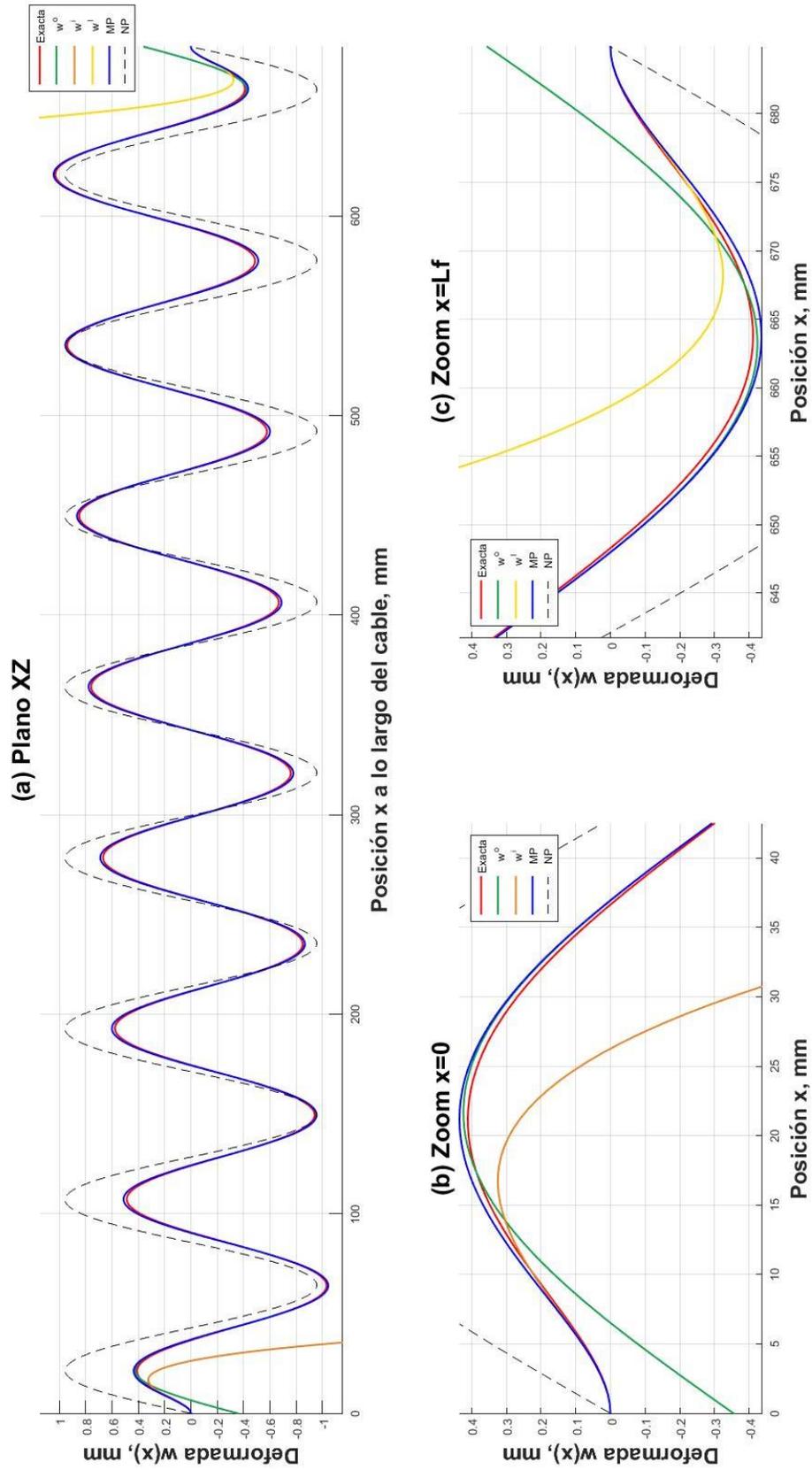


Fig. 6.14 Deformada transversal XZ,  $L=0.65\text{m}$  y  $H=30\%$ , W123.

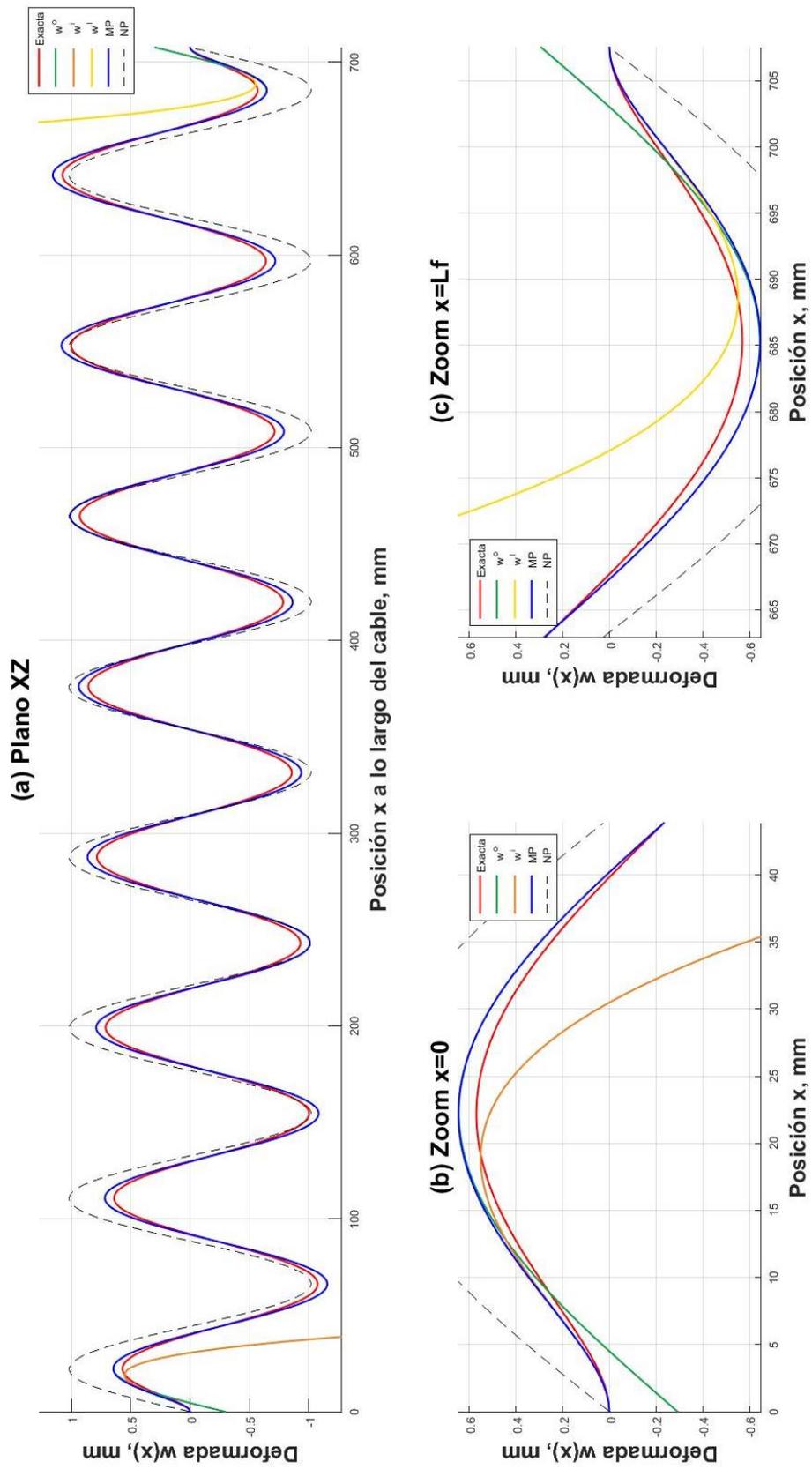


Fig. 6.15 Deformada transversal XZ,  $L=0.65m$  y  $H=60\%$ , W123.

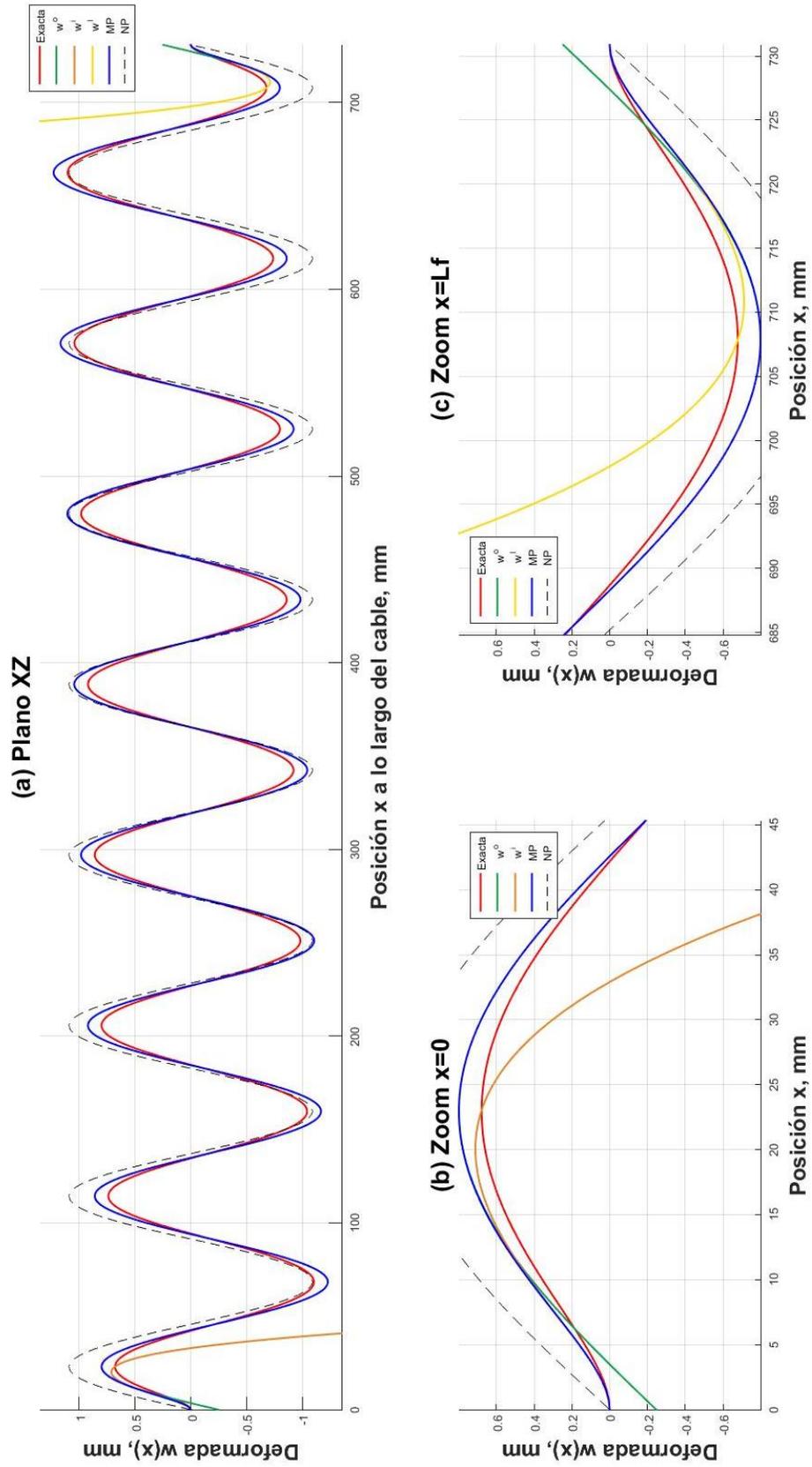


Fig. 6.16 Deformada transversal XZ,  $L=0.65\text{m}$  y  $H=100\%$ , W123.

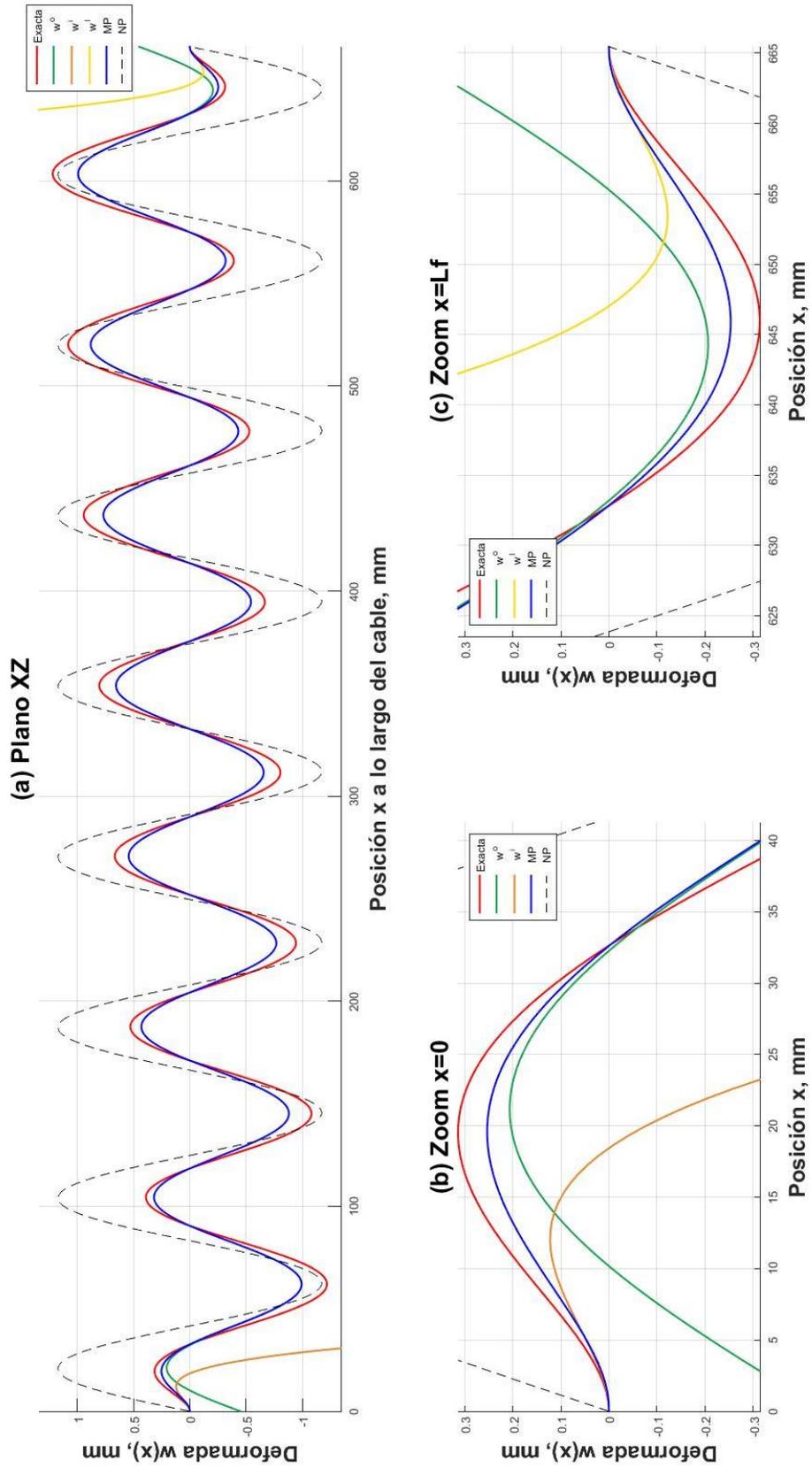


Fig. 6.17 Deformada transversal XZ,  $L=0.65\text{m}$  y  $H=15\%$ , W1234.

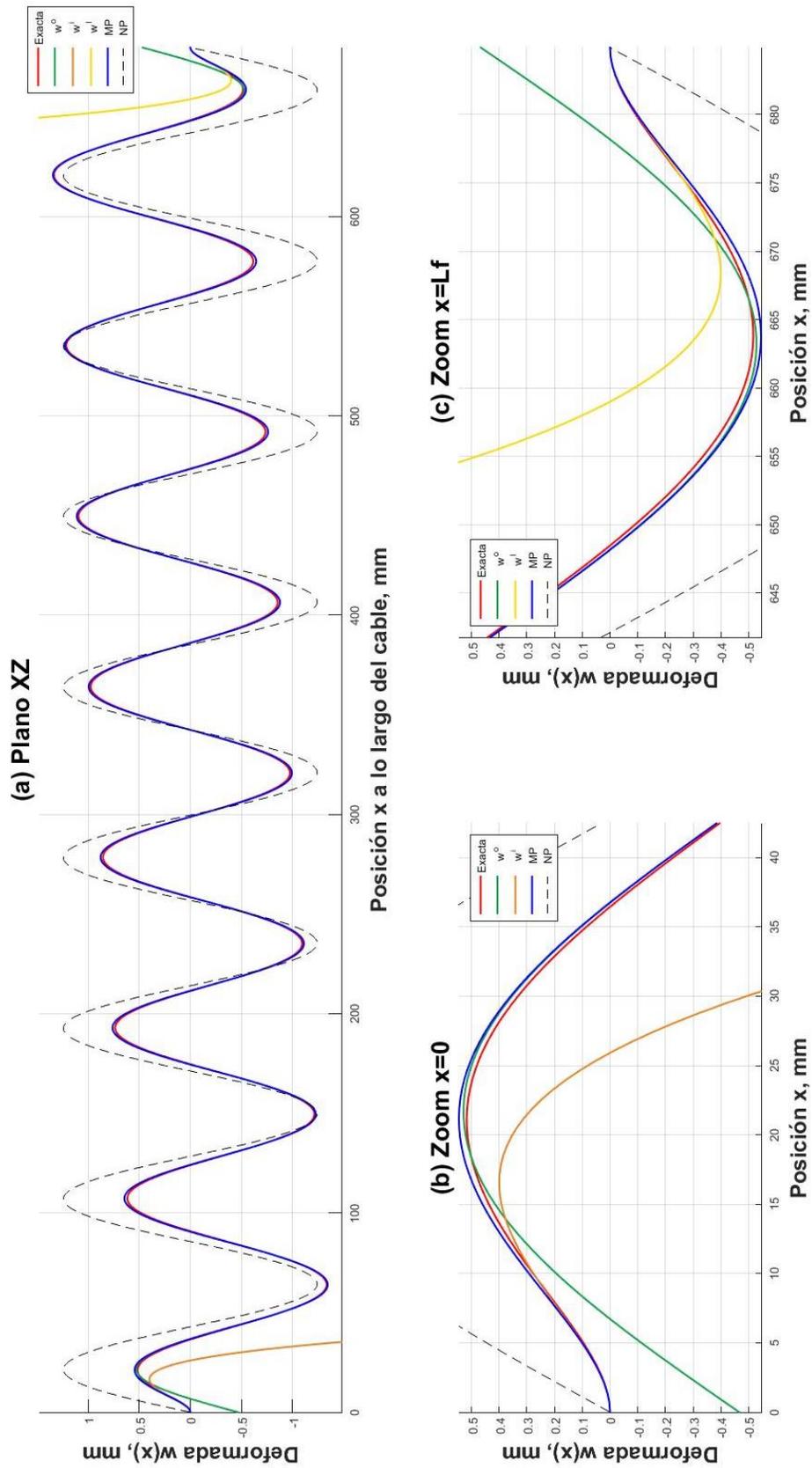


Fig. 6.18 Deformada transversal XZ,  $L=0.65$  m y  $H=30\%$ , W1234.

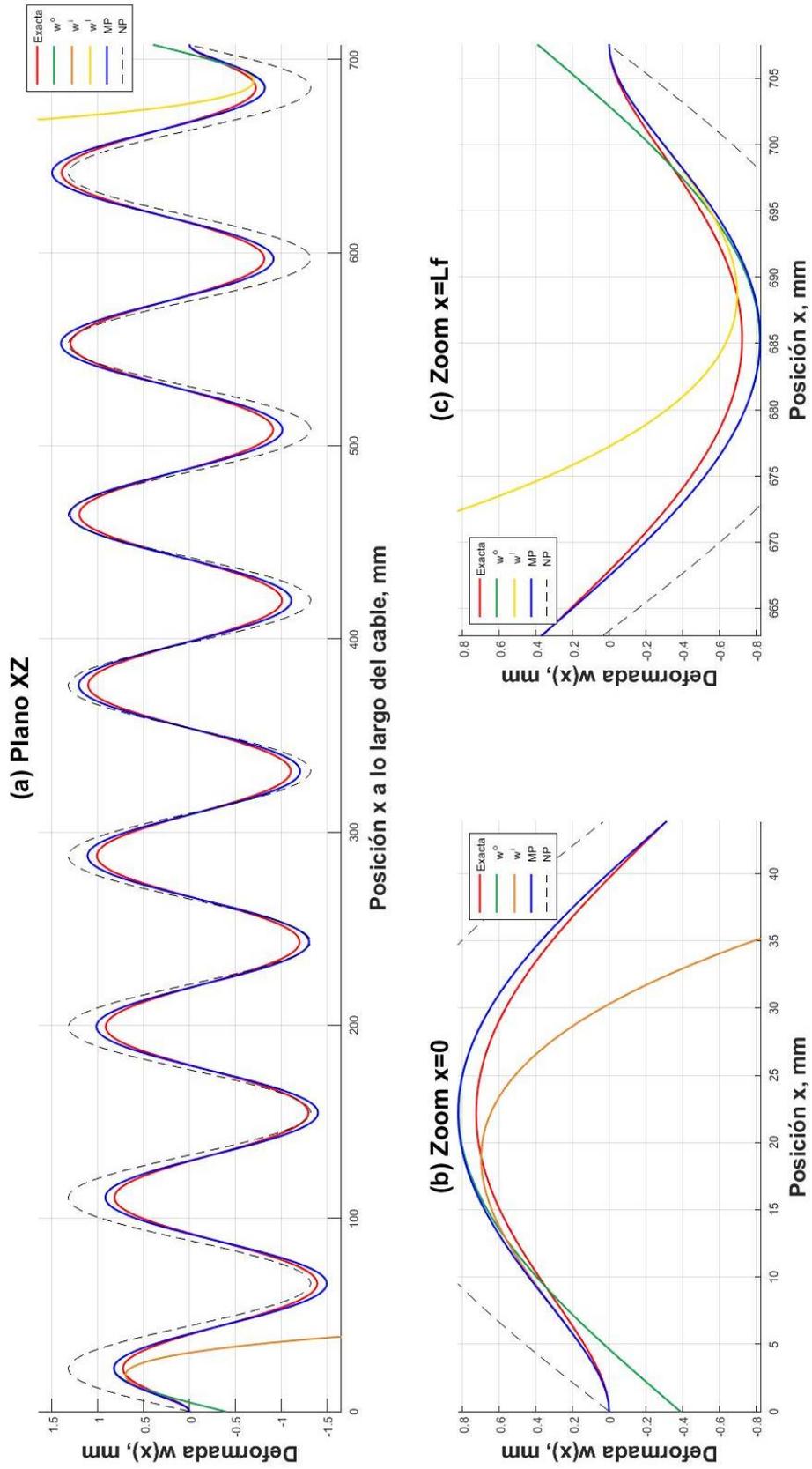


Fig. 6.19 Deformada transversal XZ,  $L=0.65\text{m}$  y  $H=60\%$ , W1234.

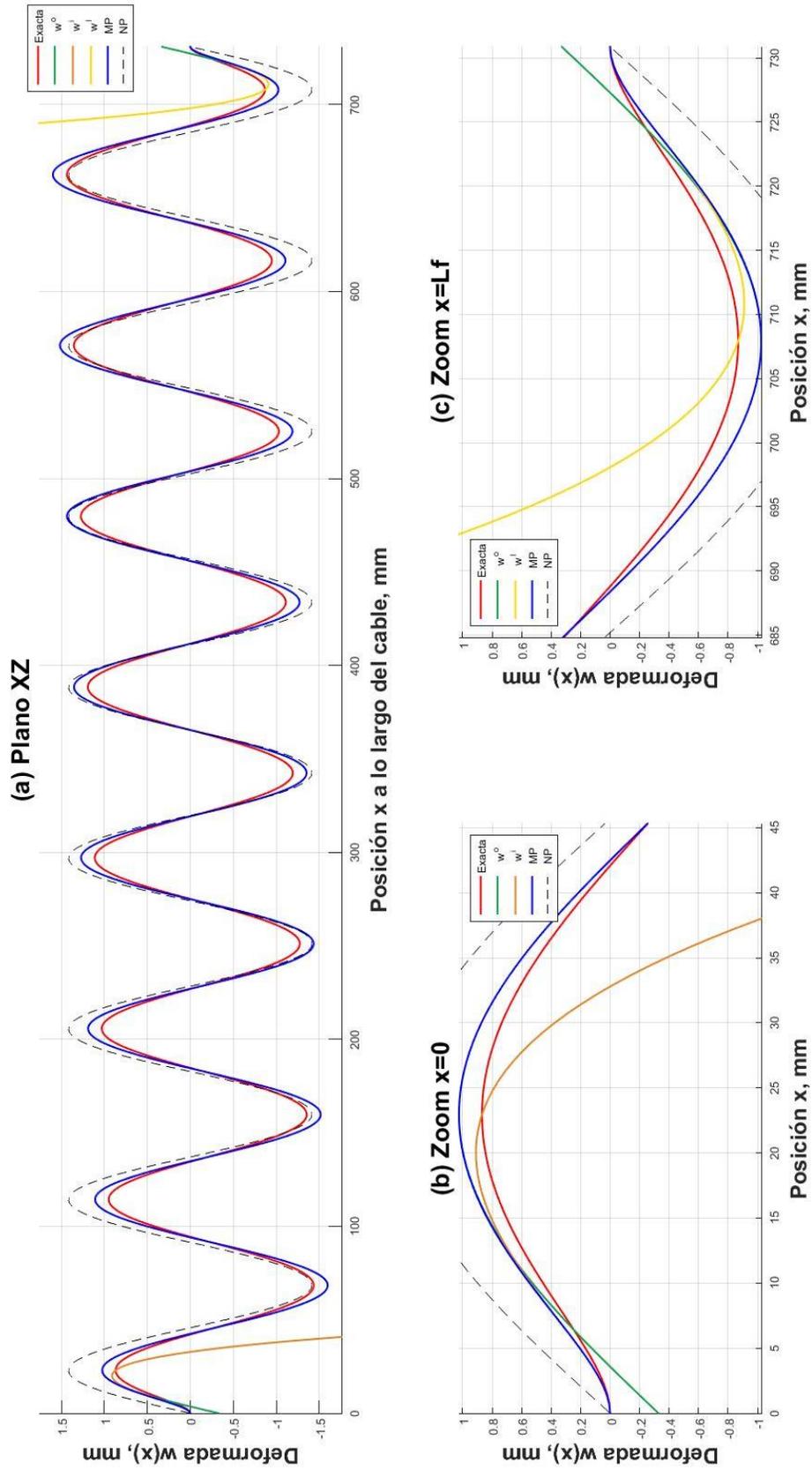


Fig. 6.20 Deformada transversal XZ,  $L=0.65\text{m}$  y  $H=100\%$ , W1234.

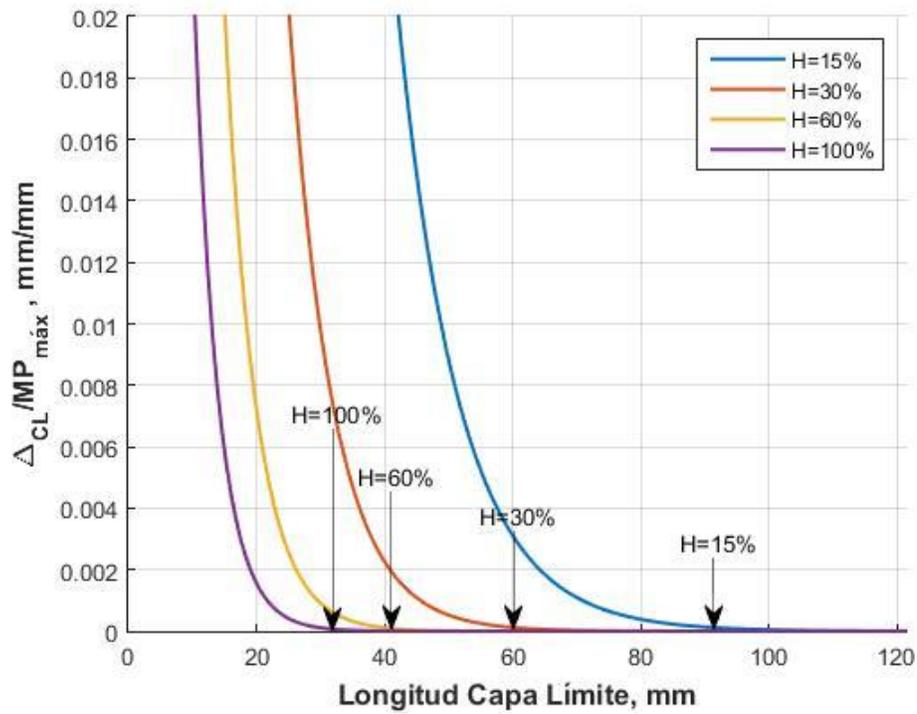


Fig. 6.21 Longitud Capa Limite para diferentes H, L=0.65m, W136.

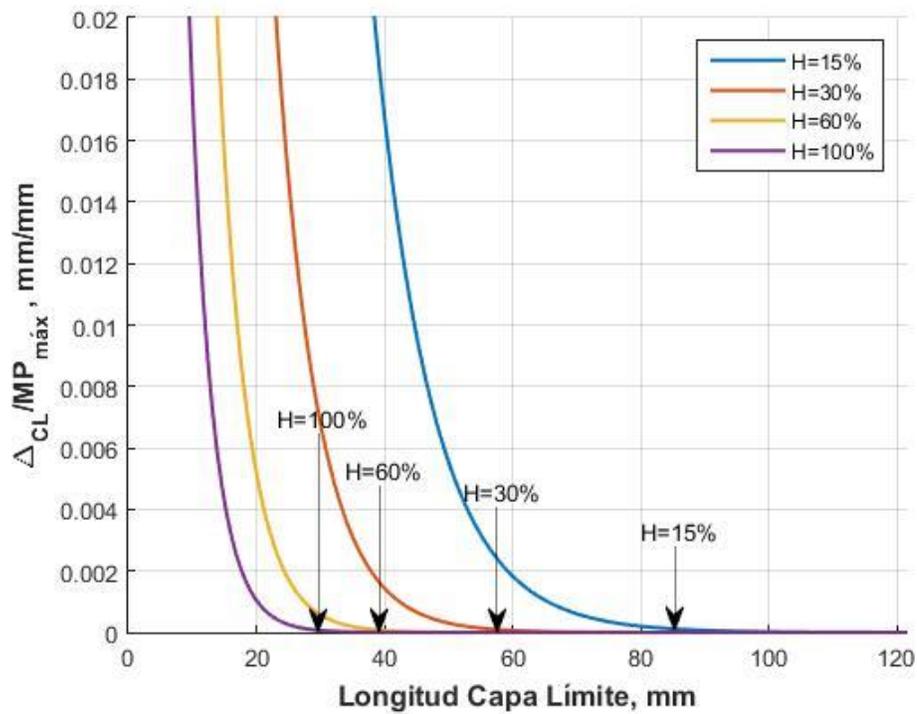


Fig. 6.22 Longitud Capa Limite para diferentes H, L=0.65m, W1.

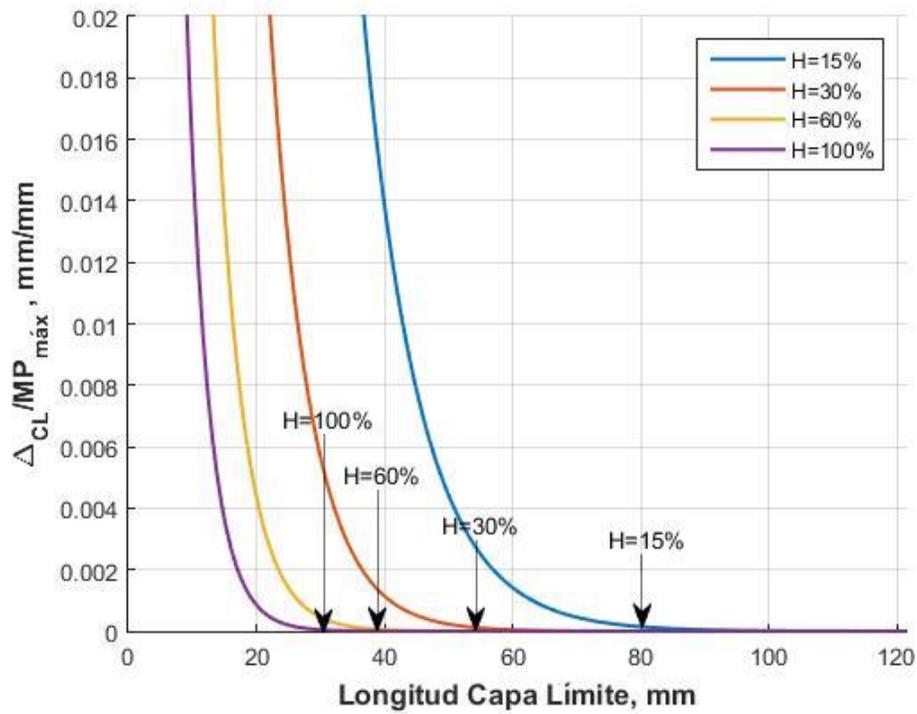


Fig. 6.23 Longitud Capa Limite para diferentes H, L=0.65m, W123.

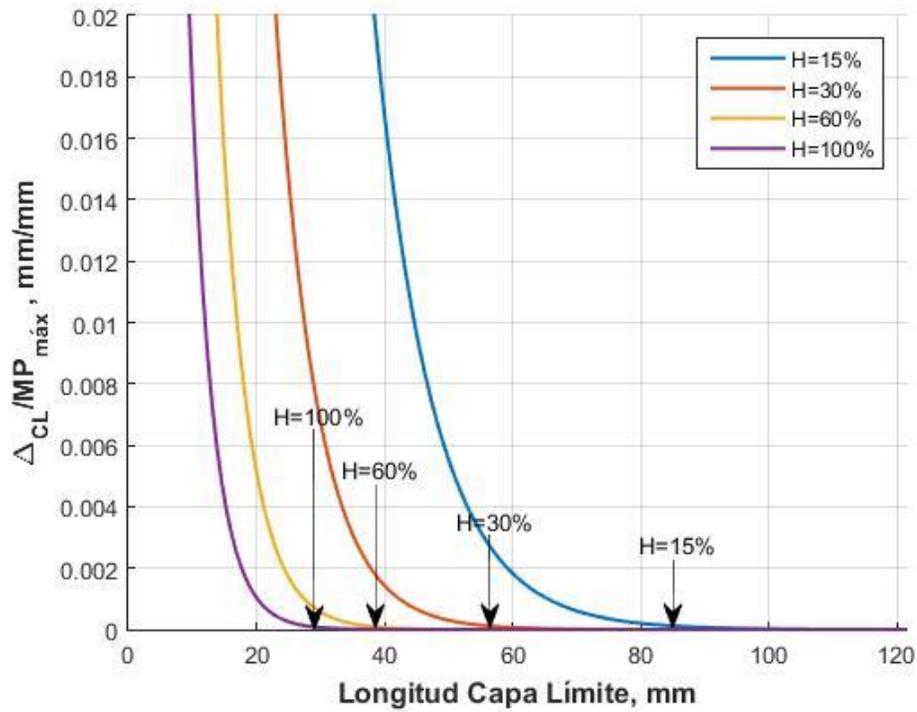


Fig. 6.24 Longitud Capa Limite para diferentes H, L=0.65m, W1234.

## C.2. Carga fija y largo variable

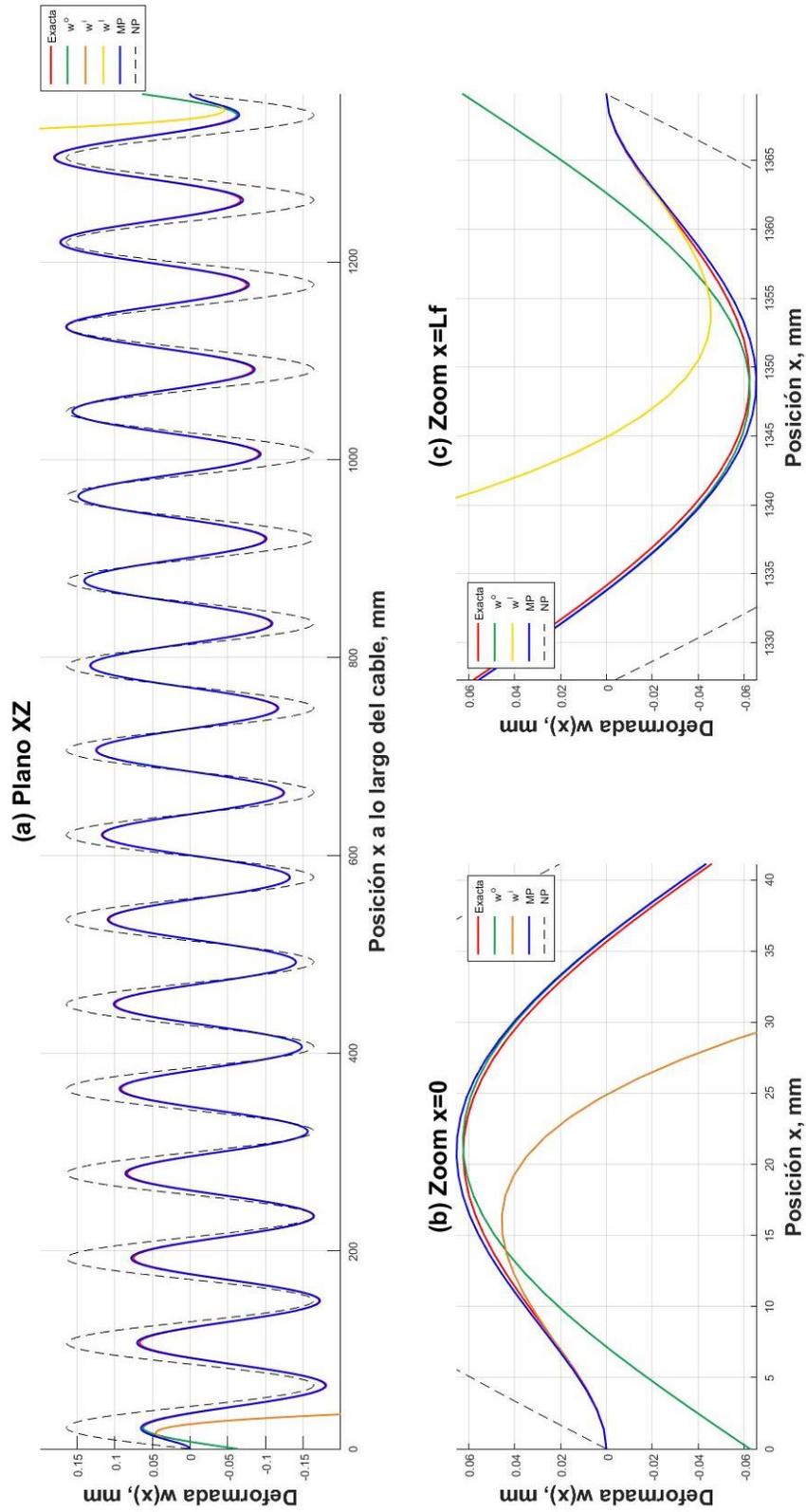


Fig. 6.25 Deformada transversal XZ,  $H=30\%$  y  $L=1.3m$ , W136.

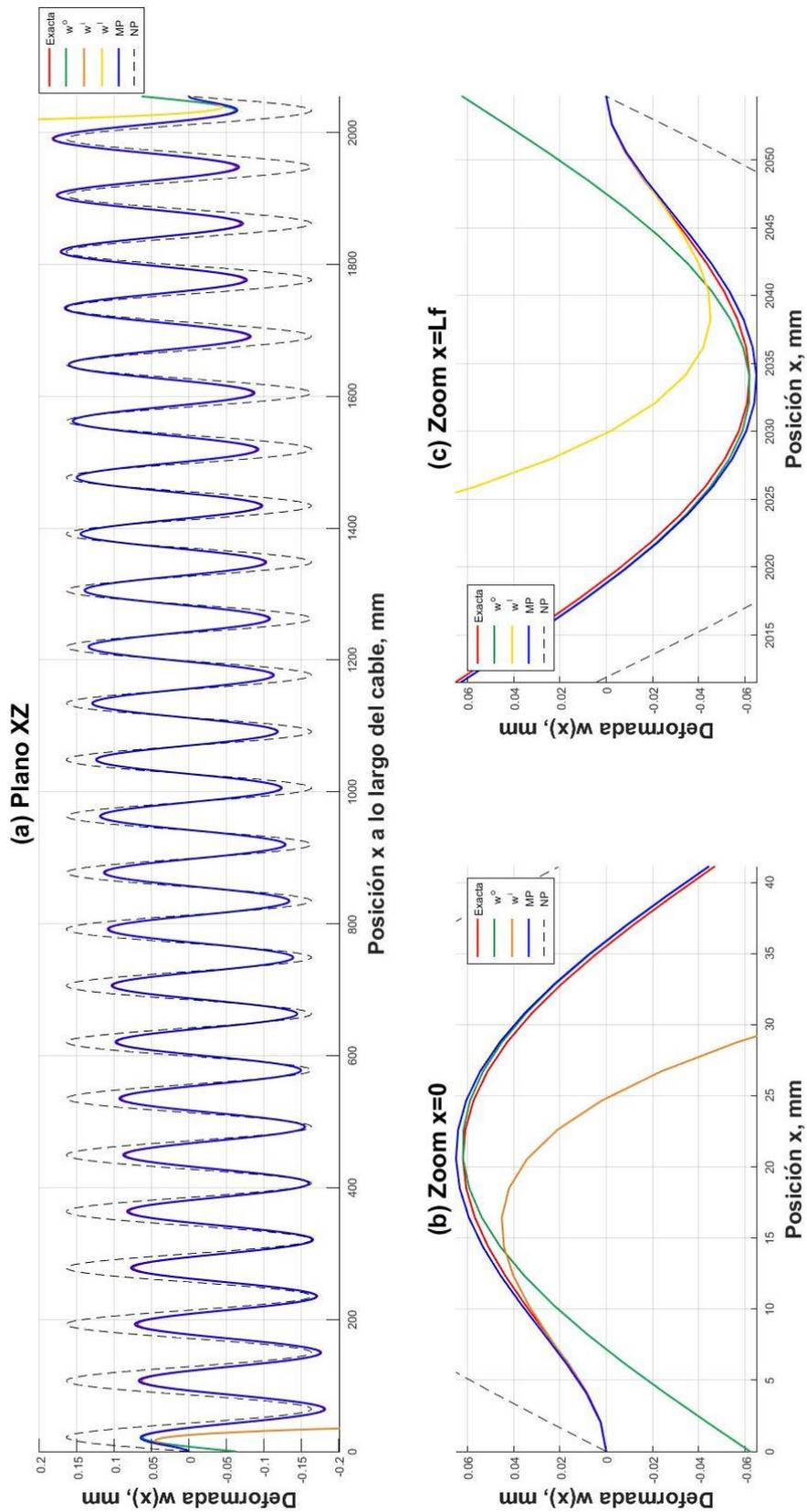


Fig. 6.26 Deformada transversal XZ,  $H=30\%$  y  $L=1.95m$ ,  $W136$ .

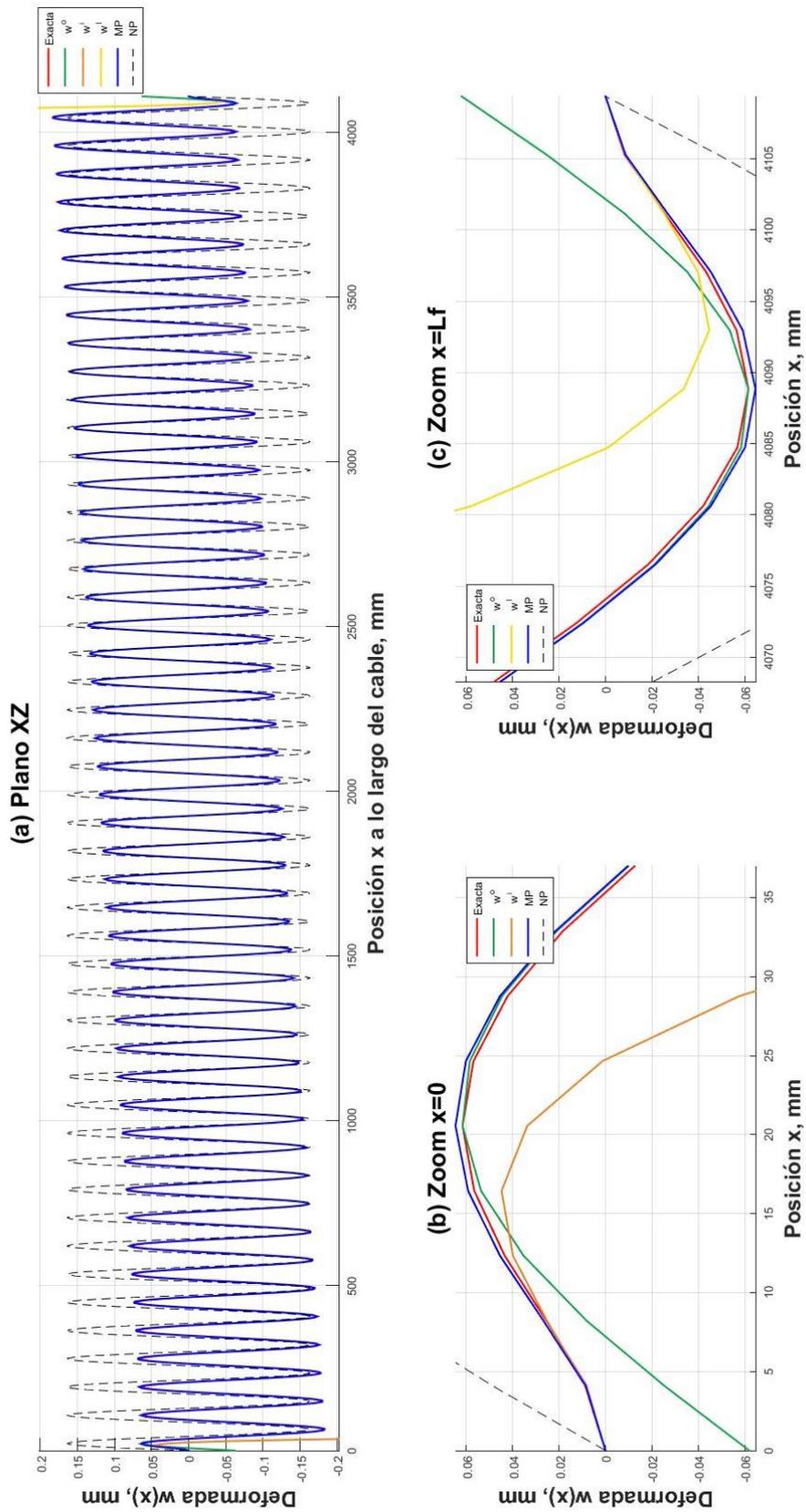


Fig. 6.27 Deformada transversal XZ,  $H=30\%$  y  $L=3.9m$ , W136.

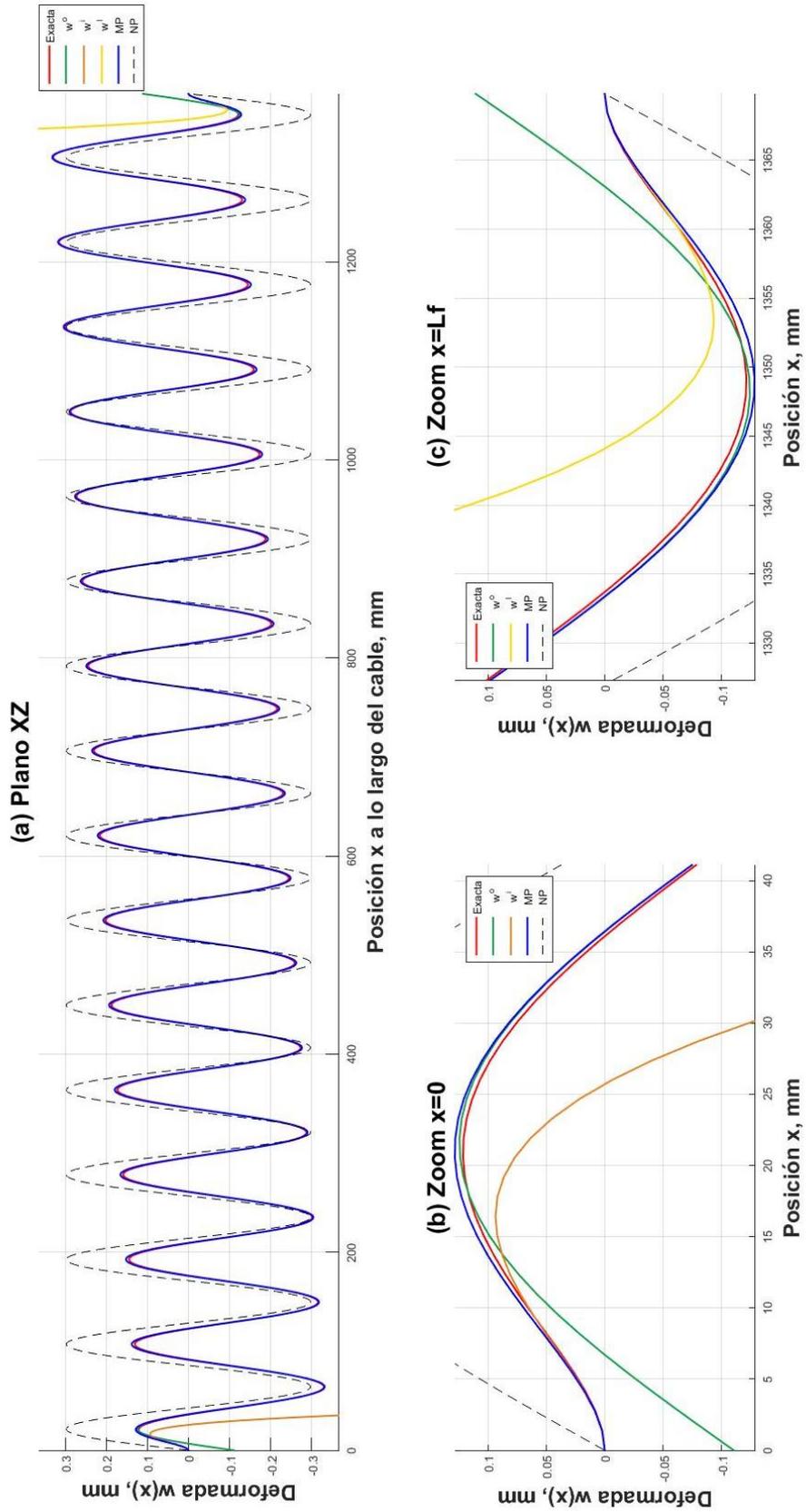


Fig. 6.28 Deformada transversal XZ,  $H=30\%$  y  $L=1.3m$ ,  $W1$ .

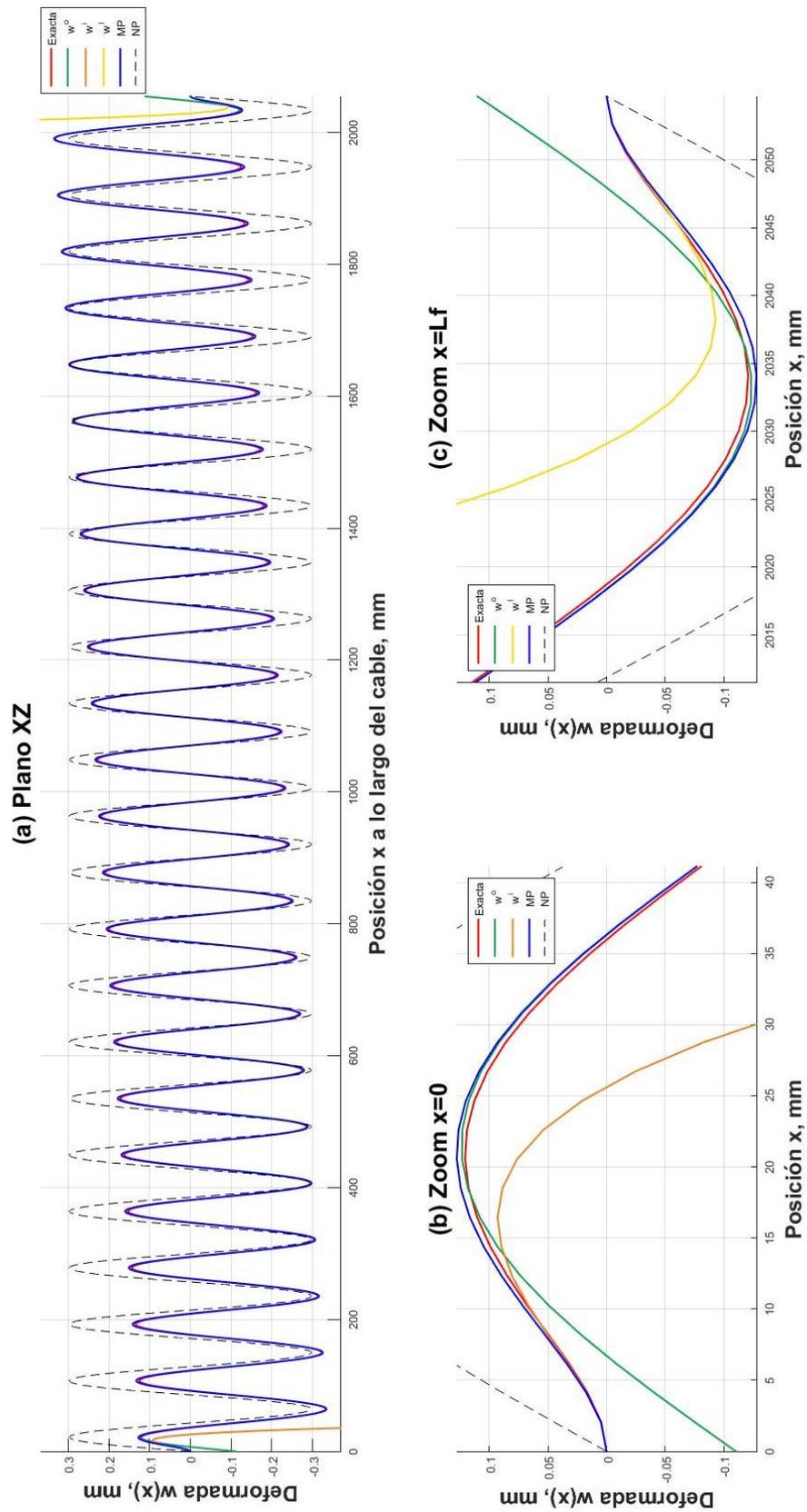


Fig. 6.29 Deformada transversal XZ,  $H=30\%$  y  $L=1.95m$ ,  $W1$ .

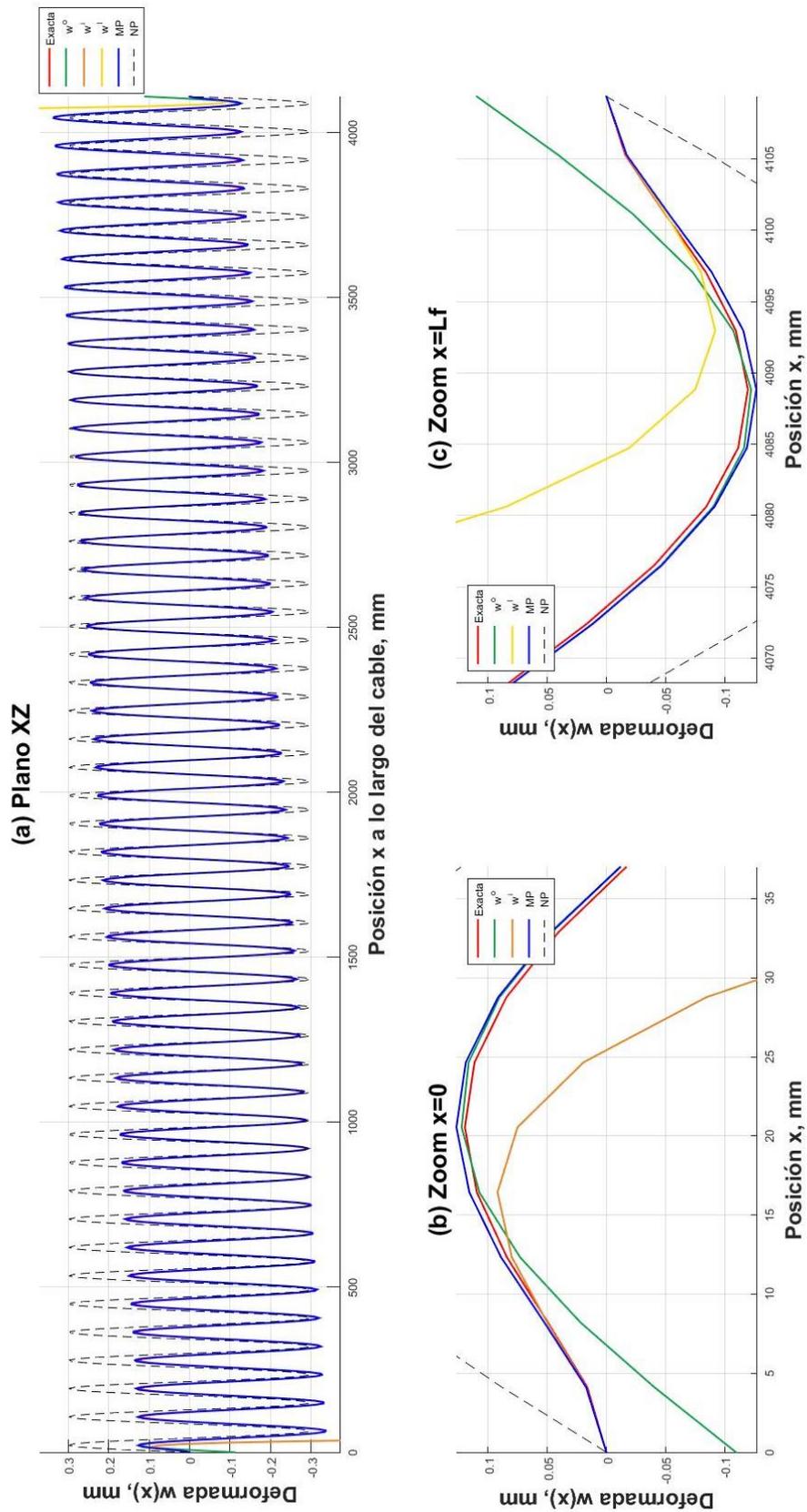


Fig. 6.30 Deformada transversal XZ,  $H=30\%$  y  $L=3.9m$ ,  $W1$ .

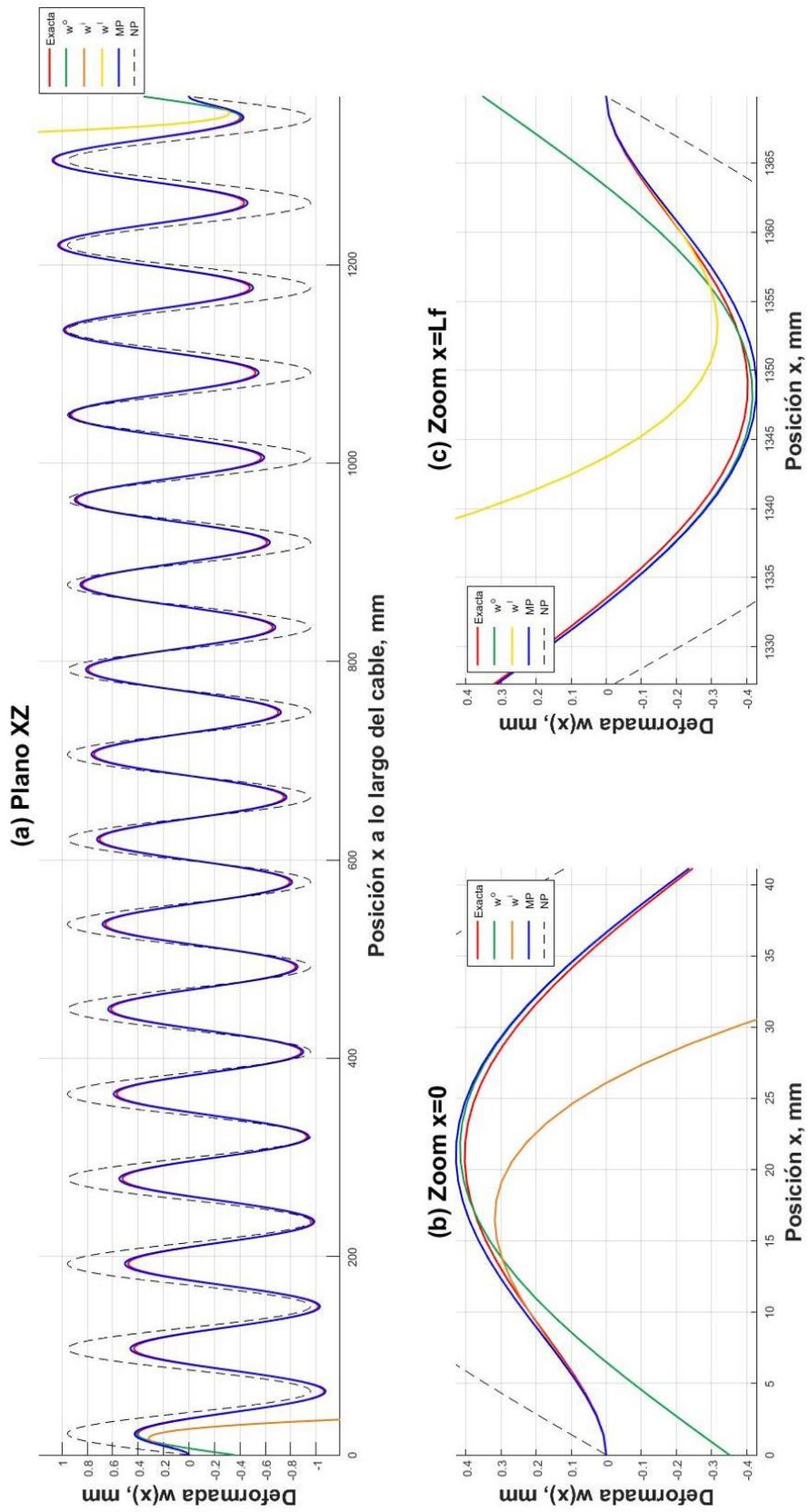


Fig. 6.31 Deformada transversal XZ,  $H=30\%$  y  $L=1.3m$ , W123.

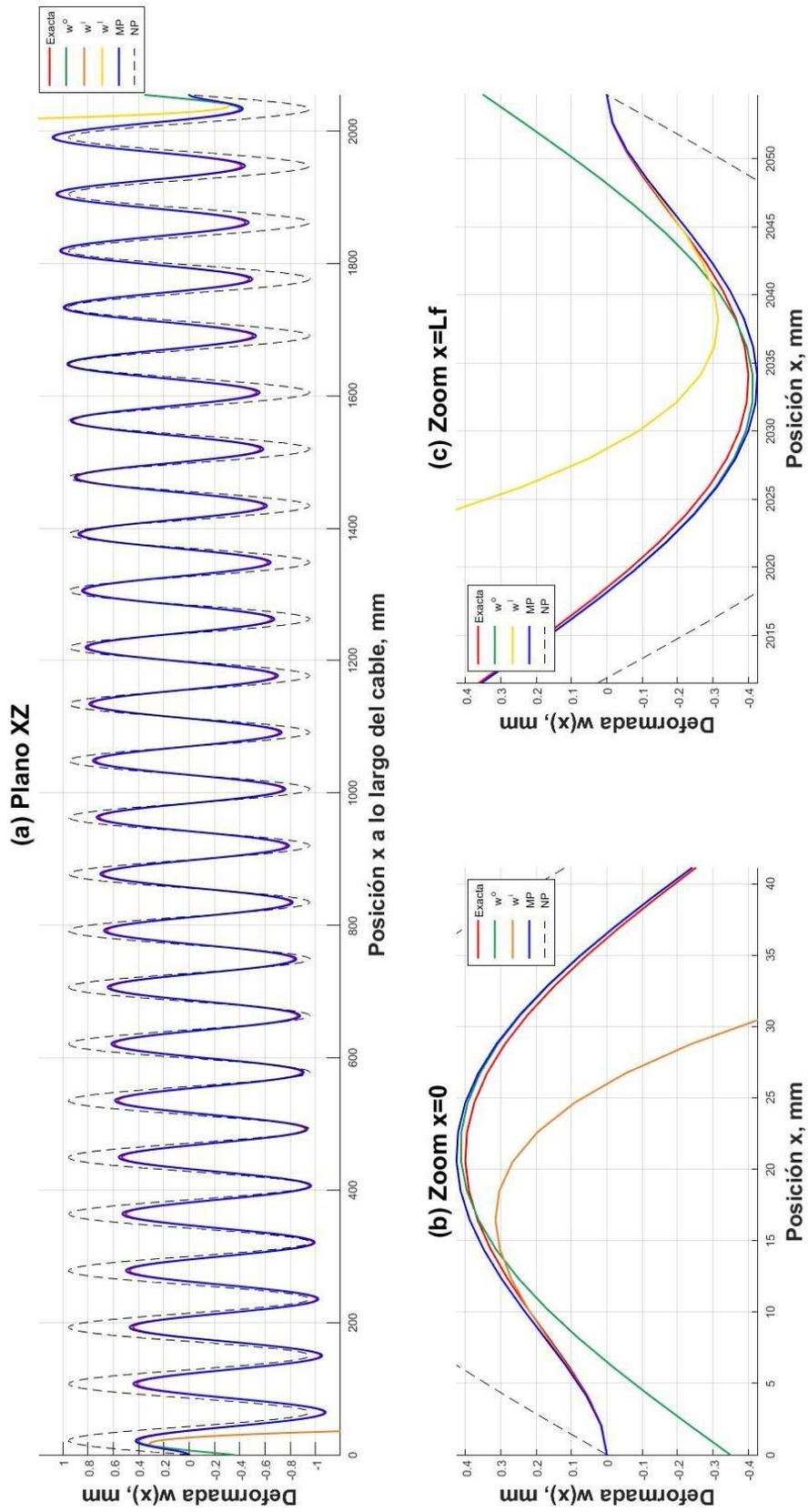


Fig. 6.32 Deformada transversal XZ,  $H=30\%$  y  $L=1.95m$ , W123.

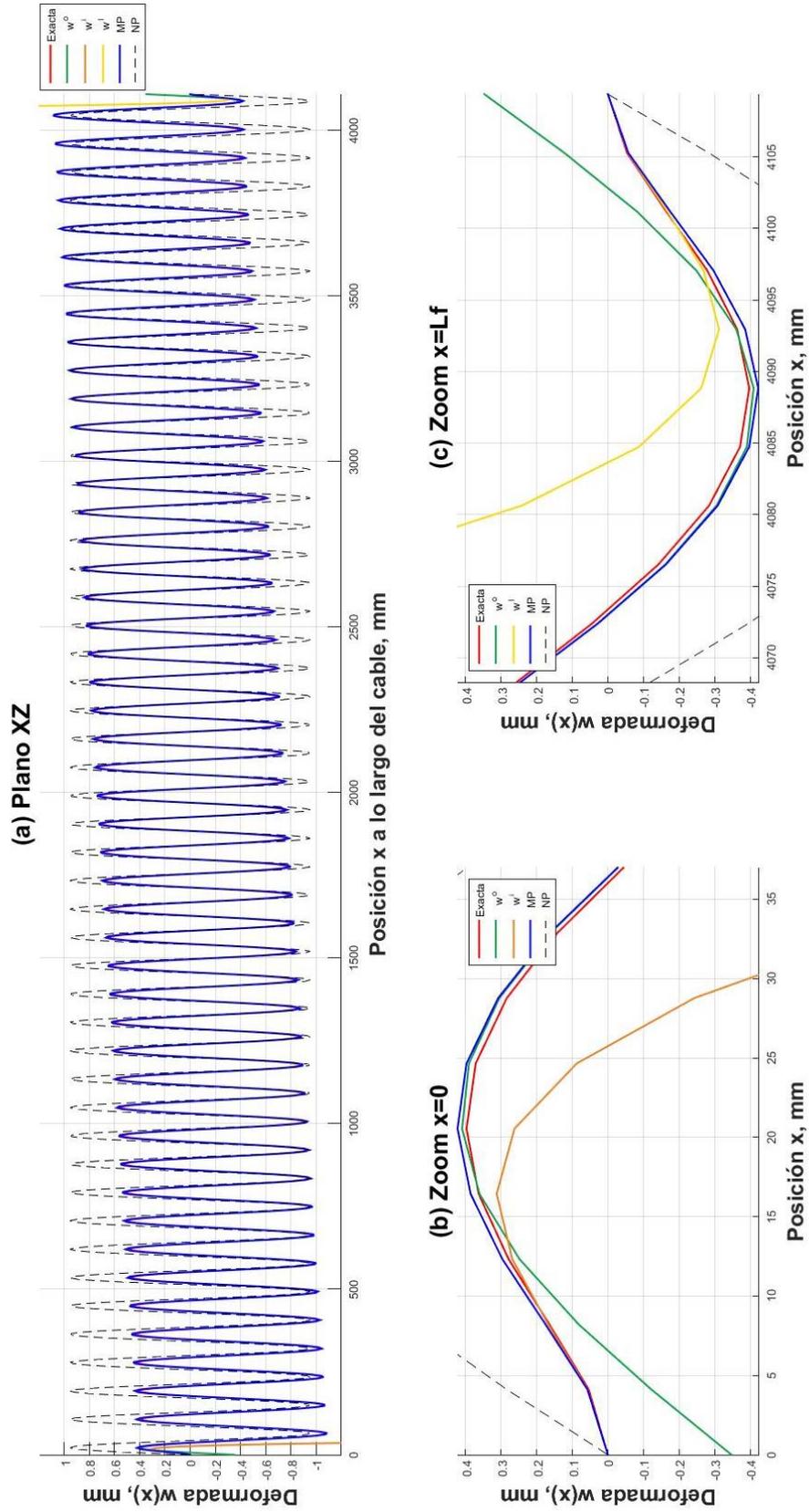


Fig. 6.33 Deformada transversal XZ,  $H=30\%$  y  $L=3.9m$ , W123.

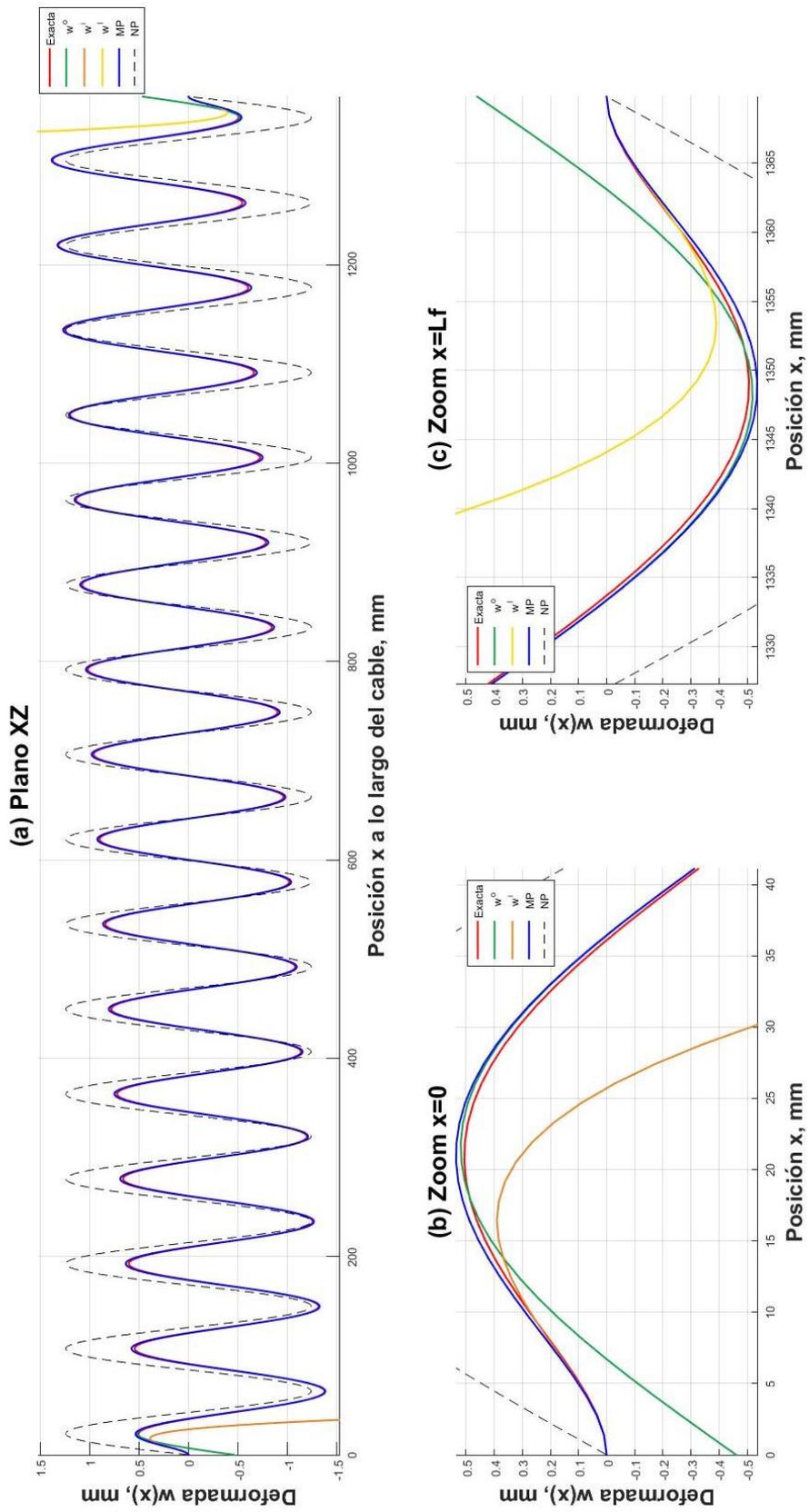


Fig. 6.34 Deformada transversal XZ,  $H=30\%$  y  $L=1.3m$ , W1234.

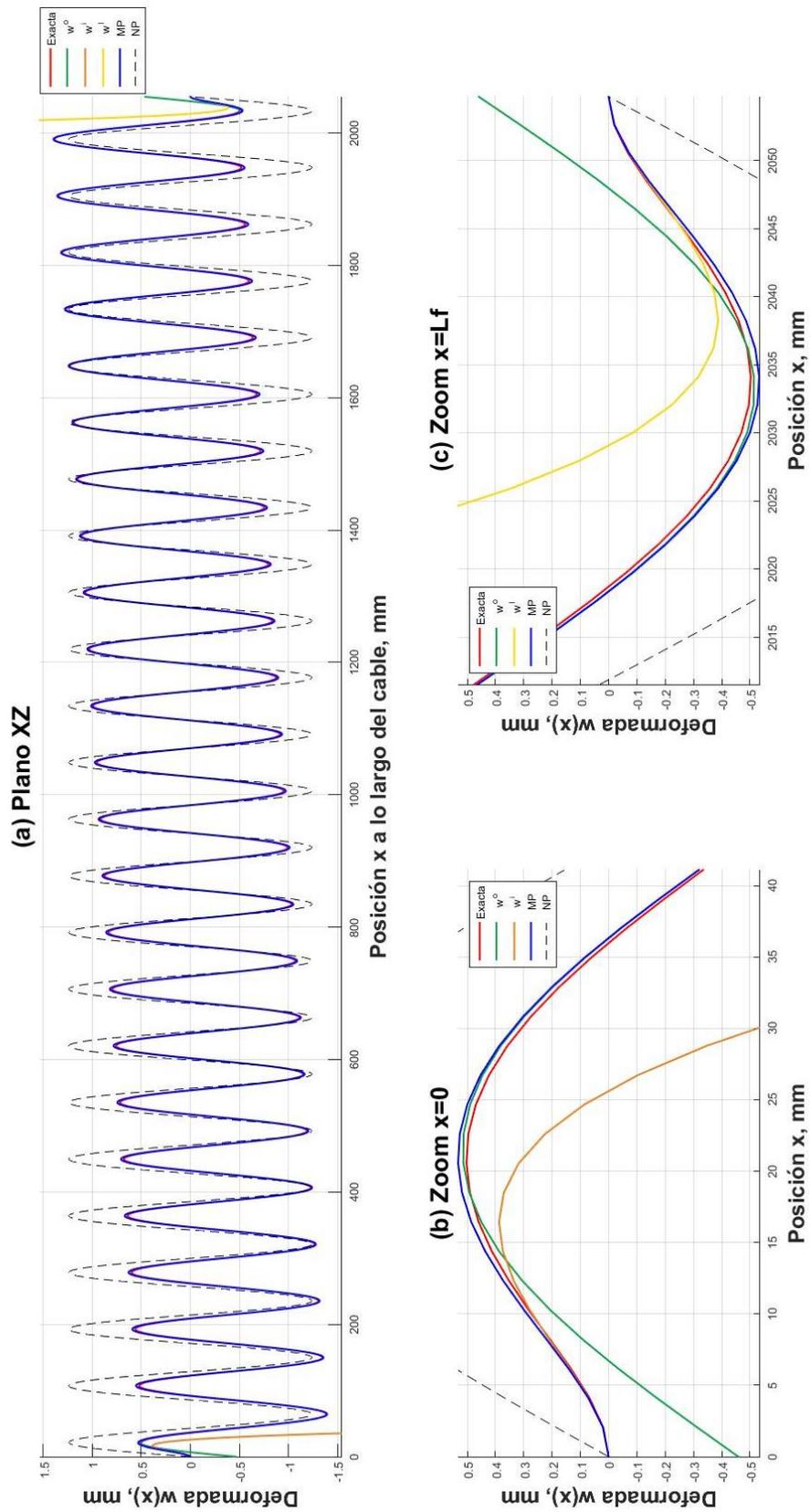


Fig. 6.35 Deformada transversal XZ,  $H=30\%$  y  $L=1.95m$ , W1234.

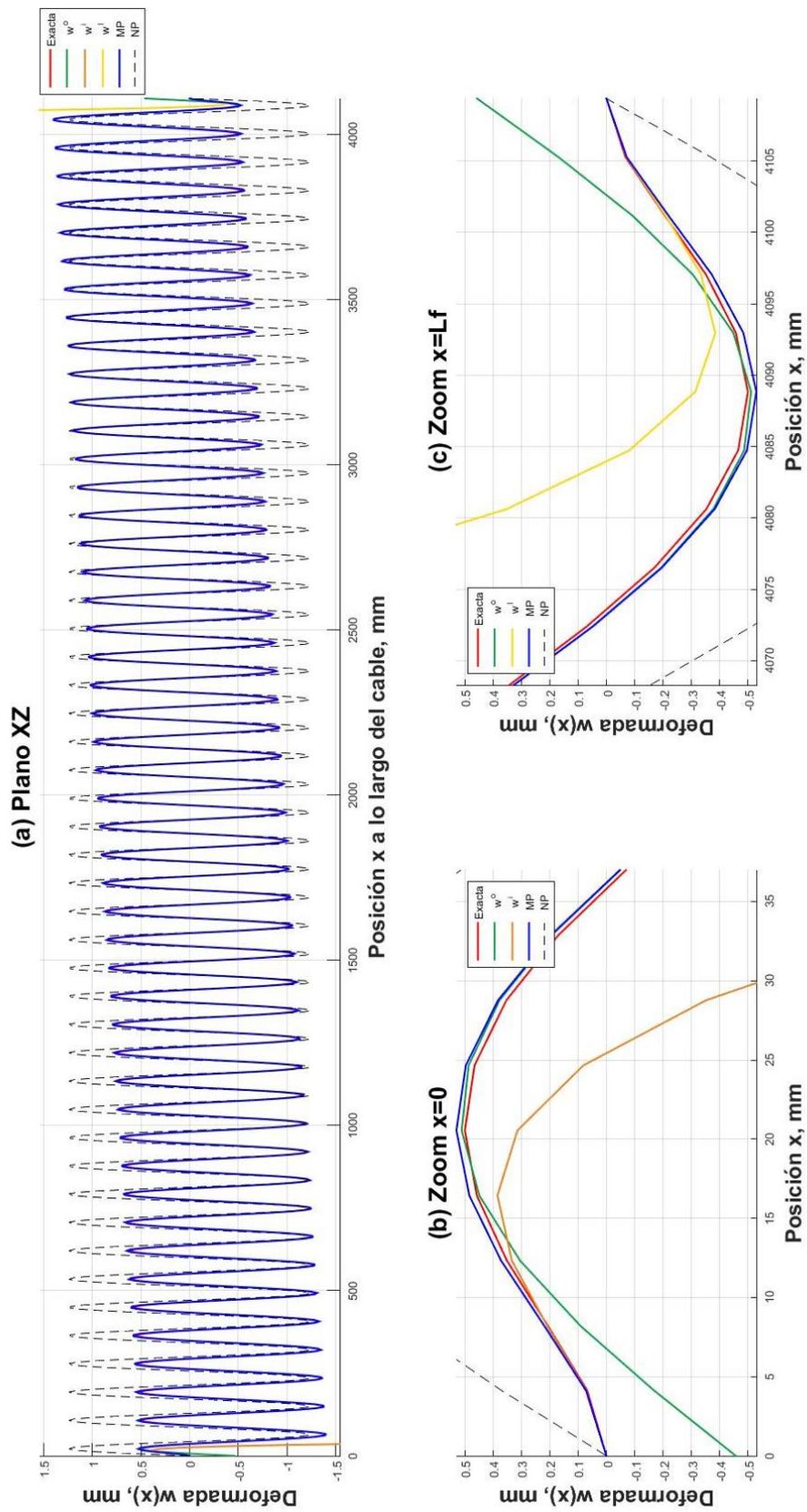


Fig. 6.36 Deformada transversal XZ,  $H=30\%$  y  $L=3.9m$ , W1234.

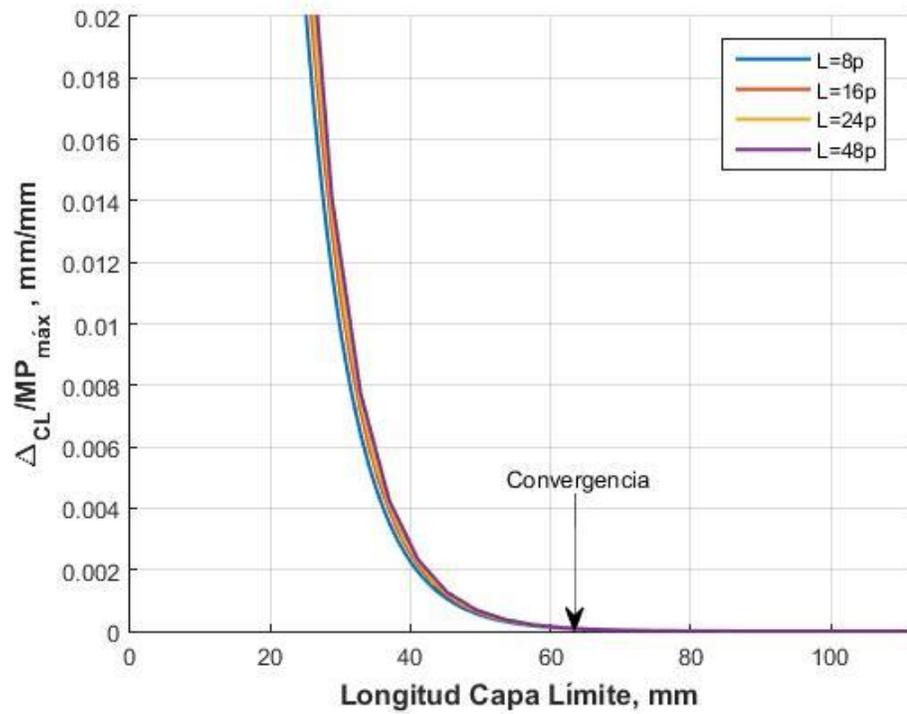


Fig. 6.37 Longitud Capa Límite para diferentes L, H=30%, W136.

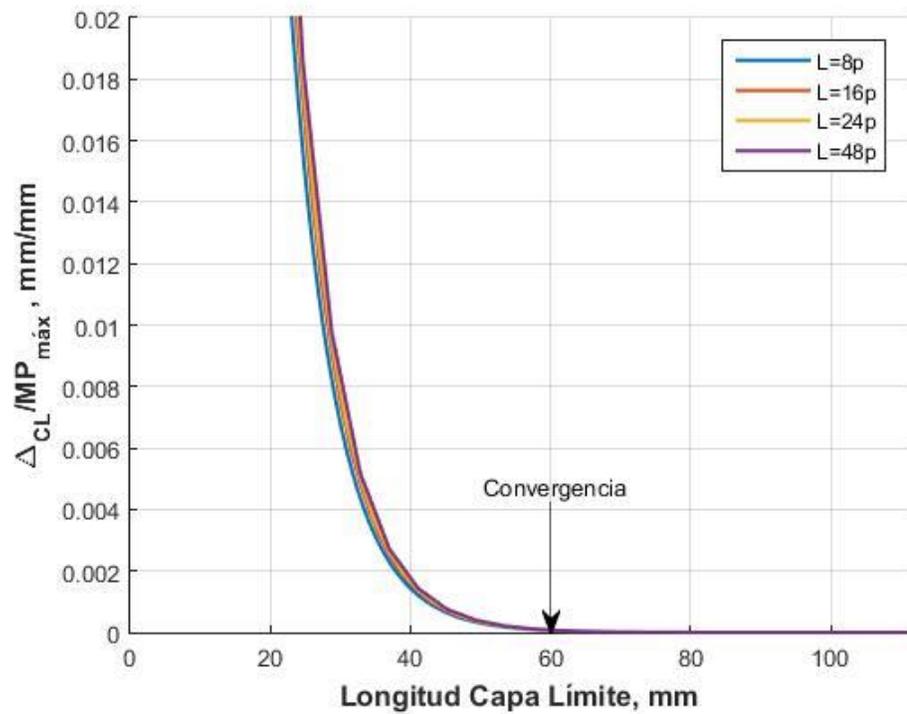


Fig. 6.38 Longitud Capa Límite para diferentes L, H=30%, W1.

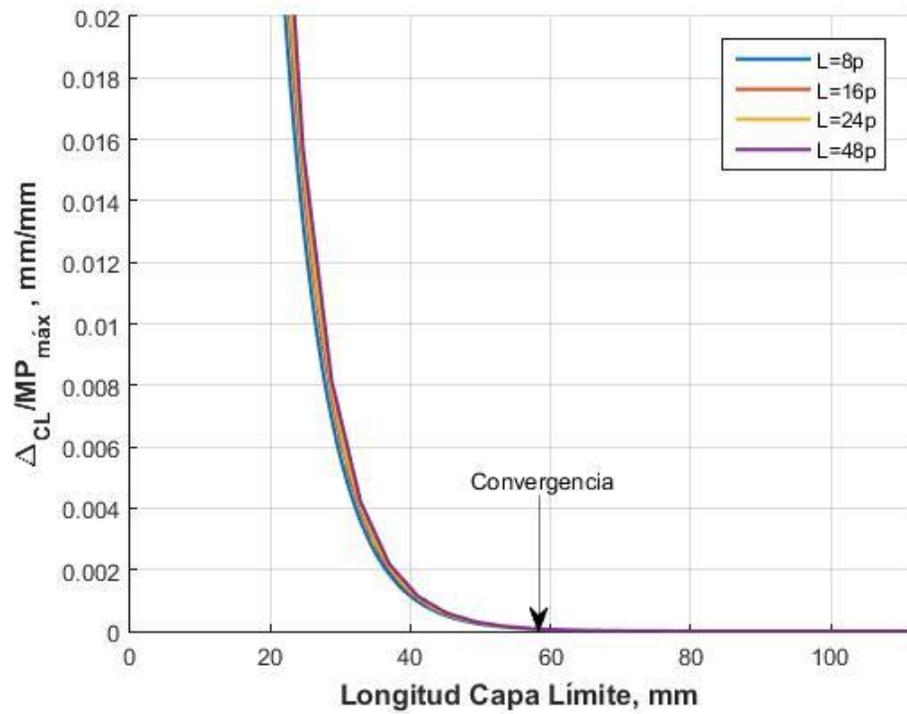


Fig. 6.39 Longitud Capa Límite para diferentes  $L$ ,  $H=30\%$ ,  $W123$ .

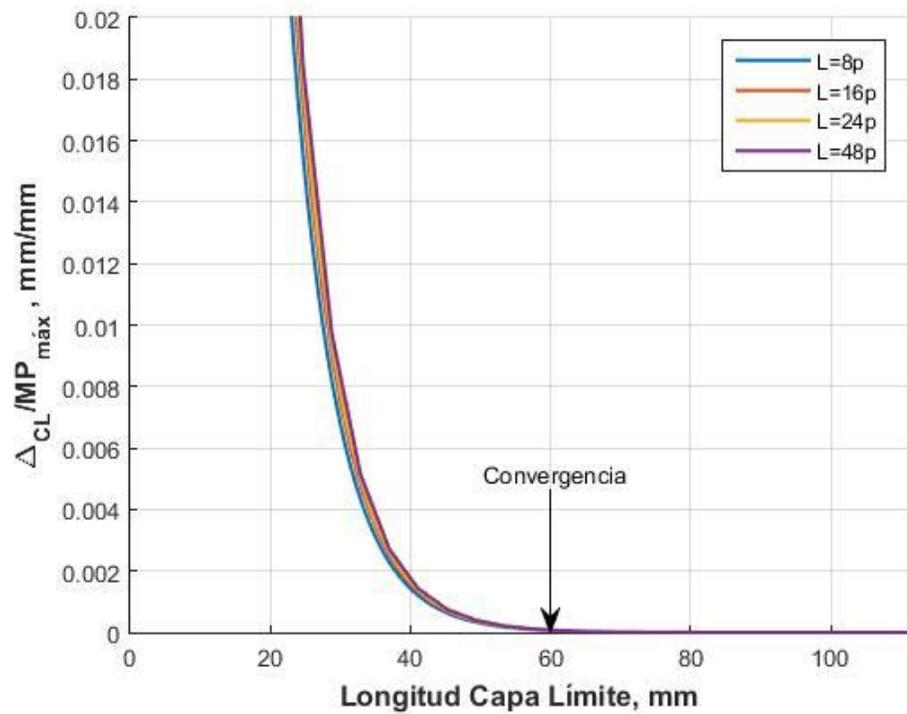


Fig. 6.40 Longitud Capa Límite para diferentes  $L$ ,  $H=30\%$ ,  $W1234$ .

## Anexo D Distribución longitudinal de curvaturas

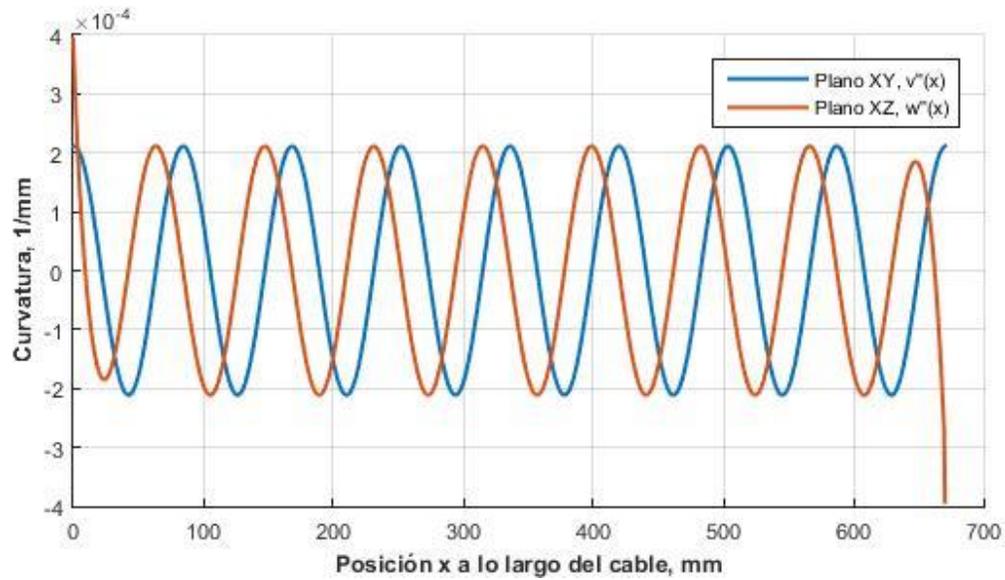


Fig. 6.41 Curvatura por plano,  $e=0.031$ , 136.

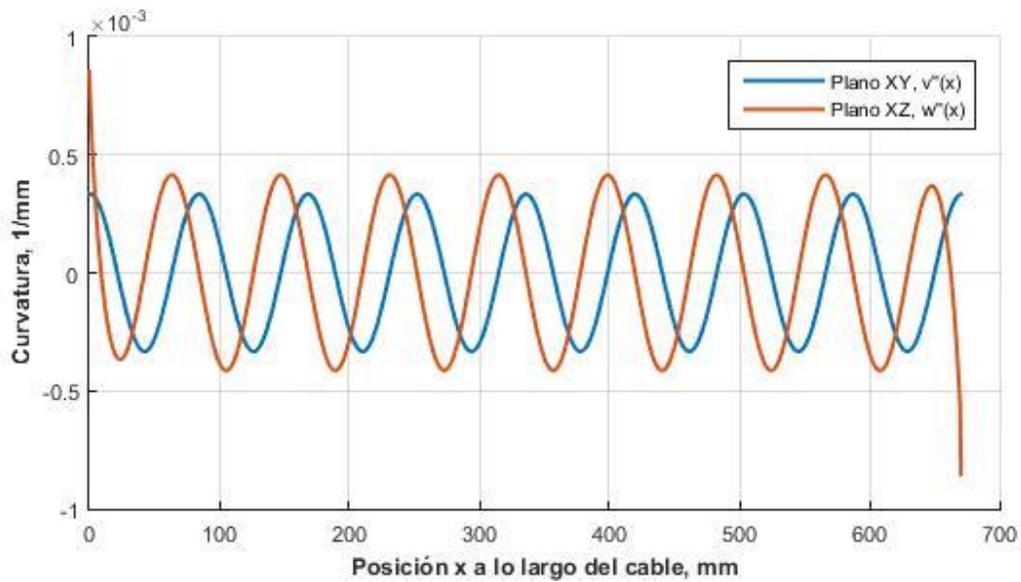


Fig. 6.42 Curvatura por plano,  $e=0.031$ ,  $W1$ .

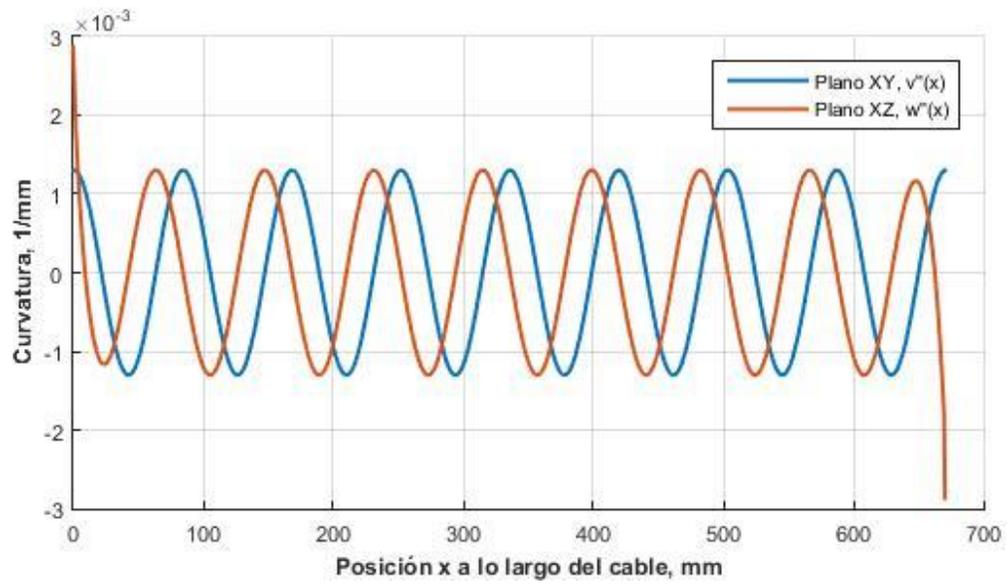


Fig. 6.43 Curvatura por plano,  $e=0.031$ , W123.

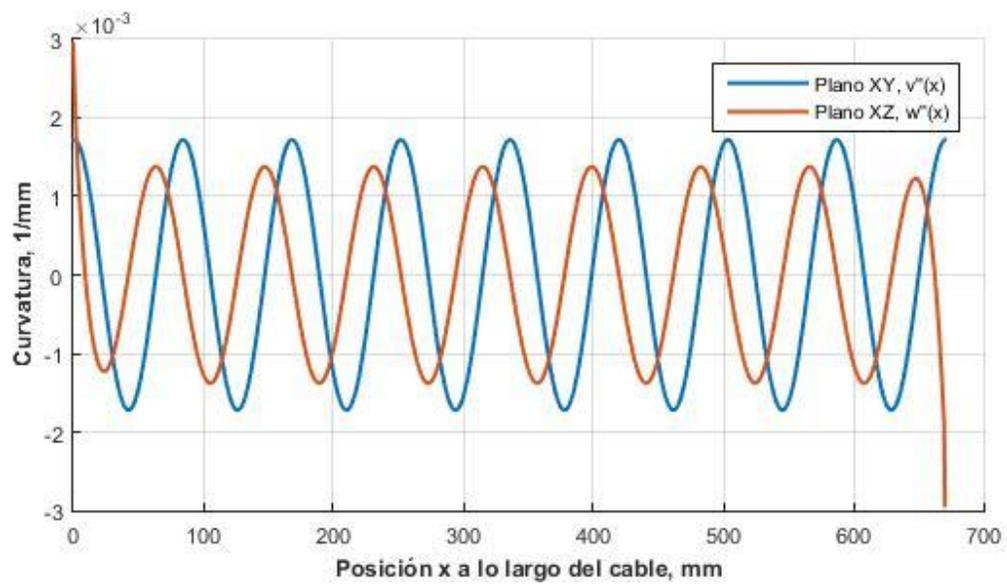


Fig. 6.44 Curvatura por plano,  $e=0.031$ , W1234.

## Anexo E Desplazamientos transversales

### E.1. Desplazamientos por plano

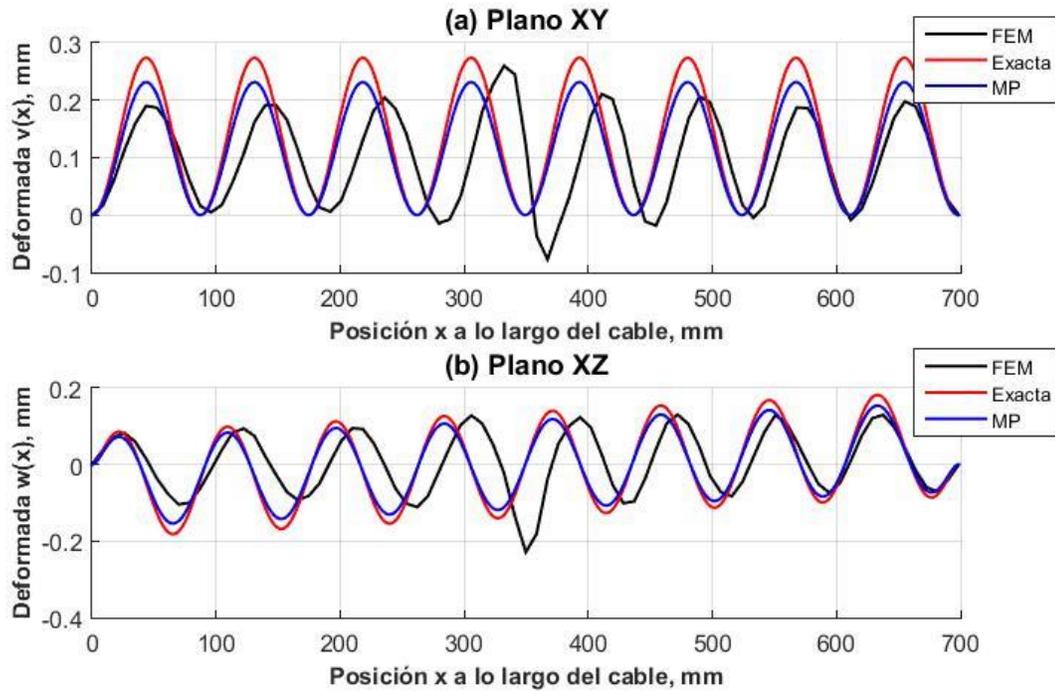


Fig. 6.45 Desplazamiento transversal por plano,  $e=0.074$ , W136.

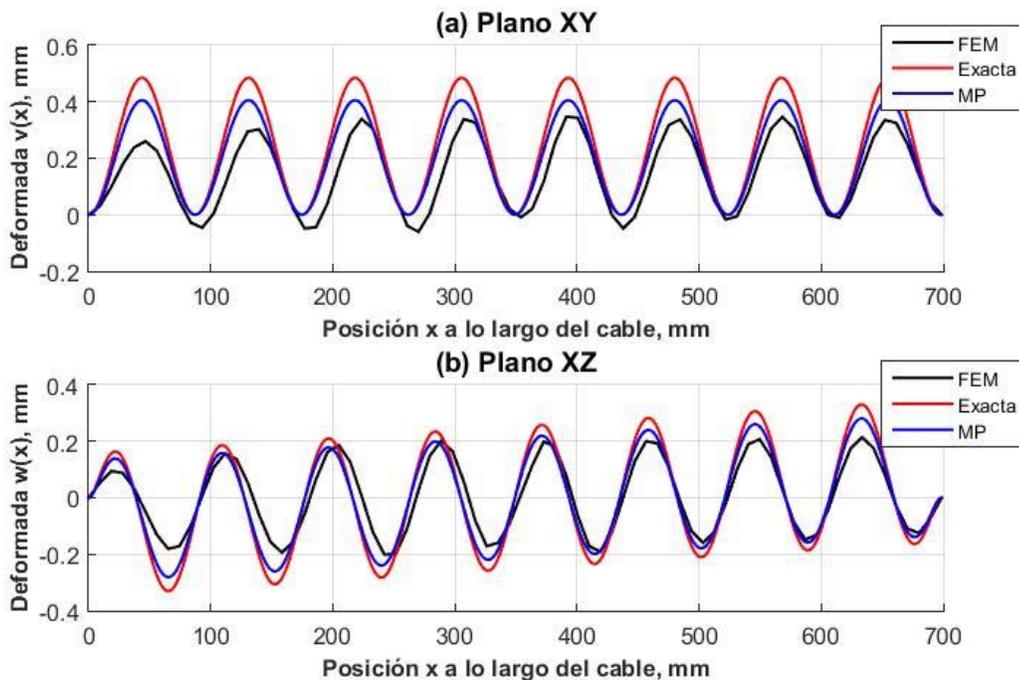


Fig. 6.46 Desplazamiento transversal por plano,  $e=0.074$ , W1.

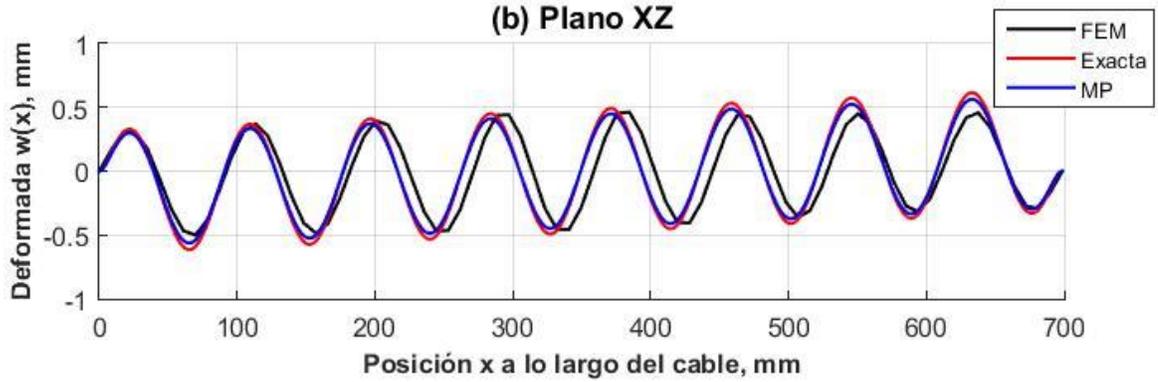
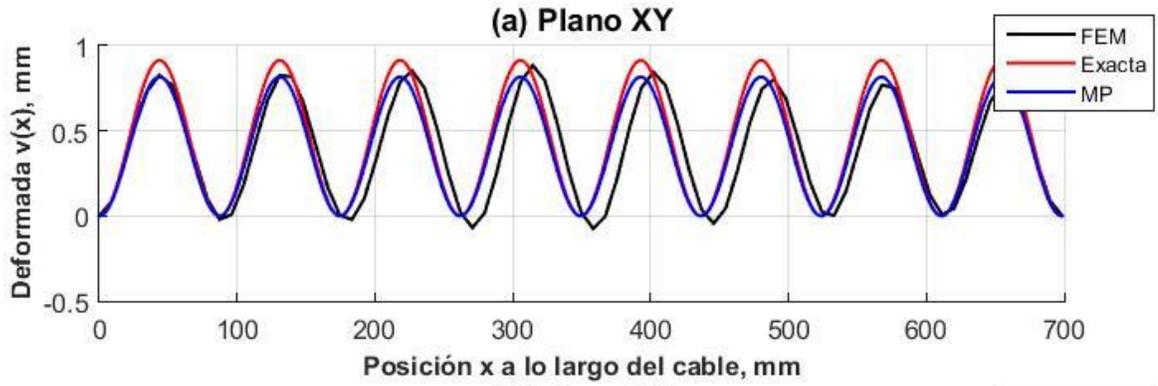


Fig. 6.47 Desplazamiento transversal por plano,  $e=0.074$ , W12.

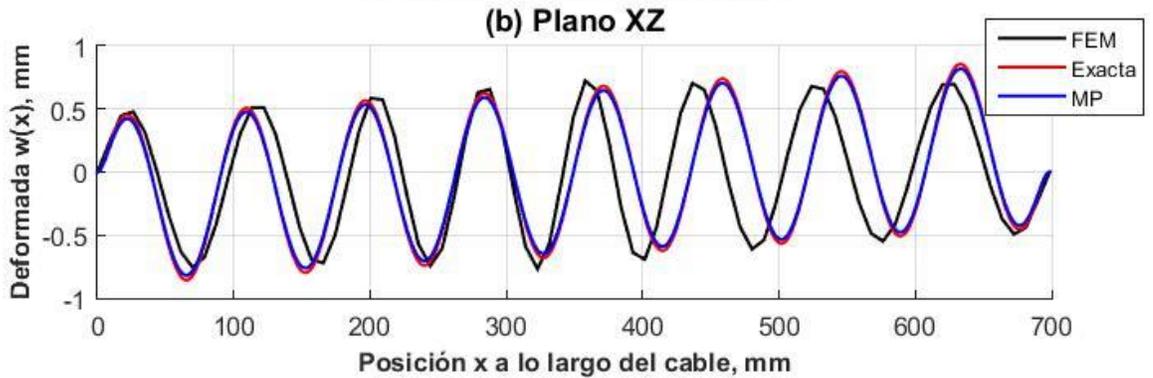
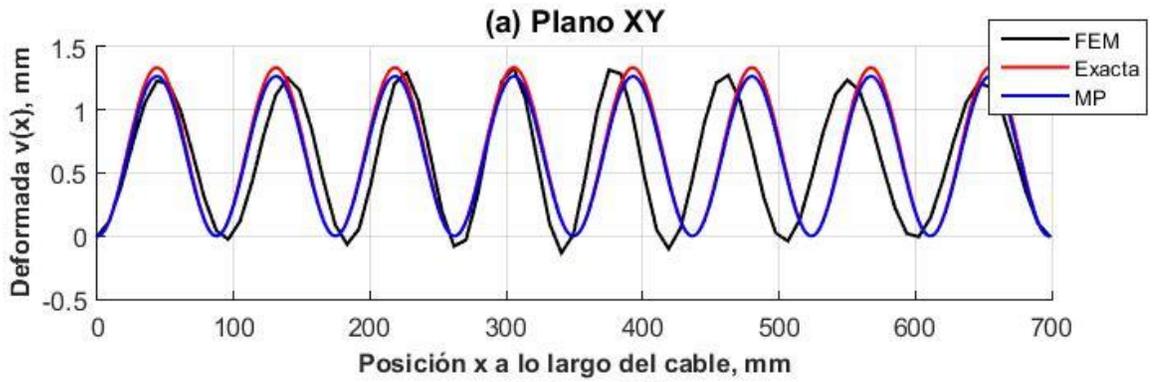


Fig. 6.48 Desplazamiento transversal por plano,  $e=0.074$ , W123.

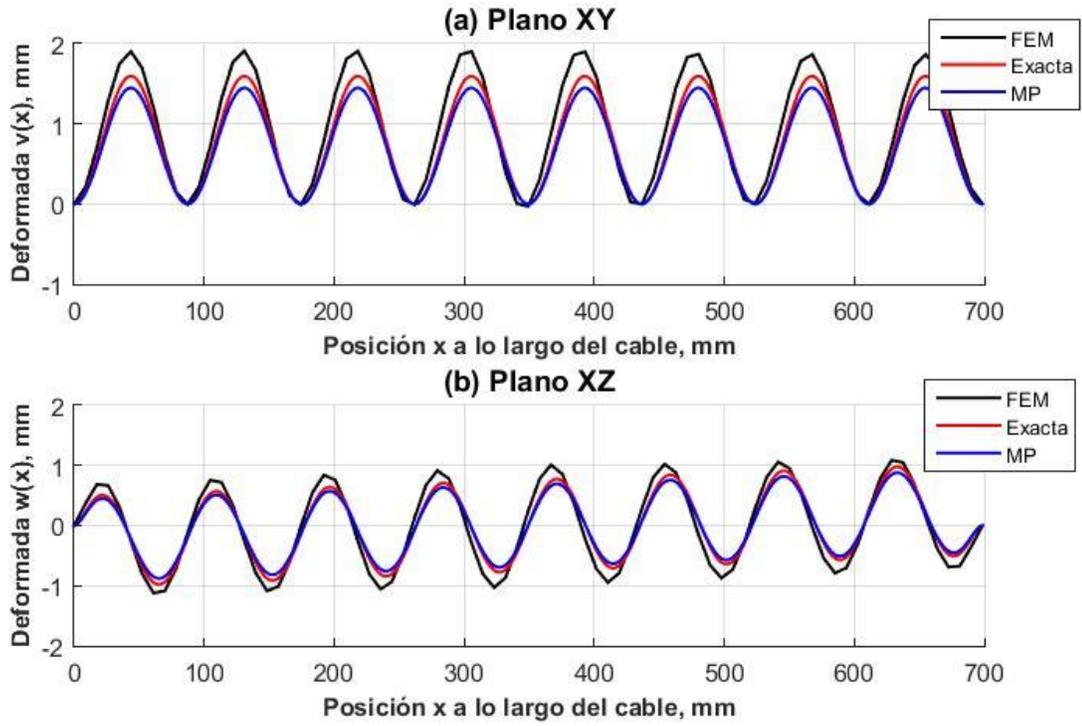


Fig. 6.49 Desplazamiento transversal por plano,  $e=0.074$ , W1234.

## E.2. Desplazamientos 3D

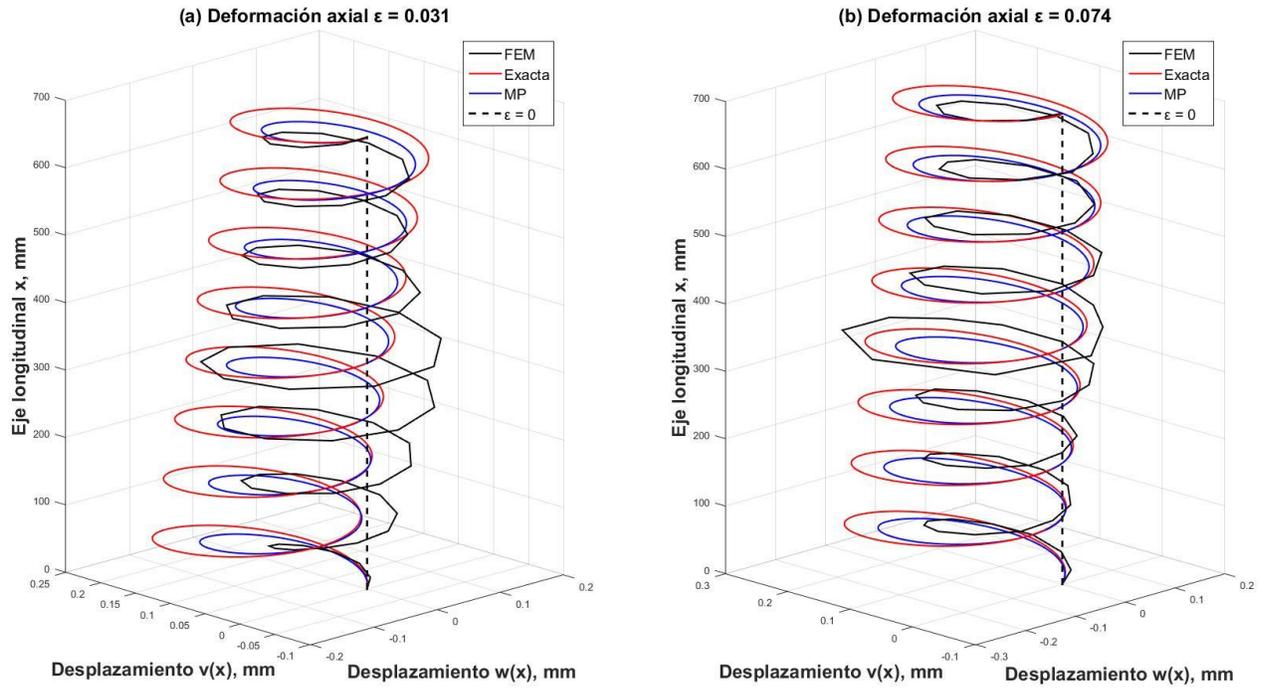


Fig. 6.50 Desplazamiento transversal 3D, W136.

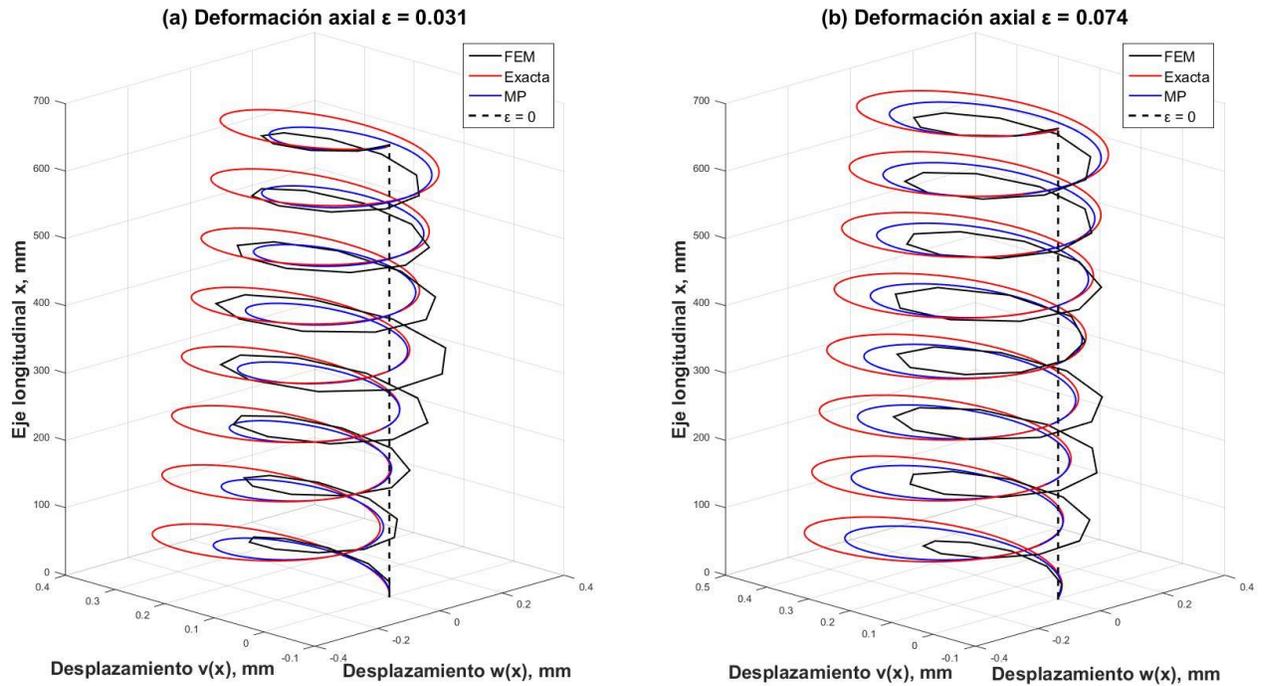


Fig. 6.51 Desplazamiento transversal 3D, W1.

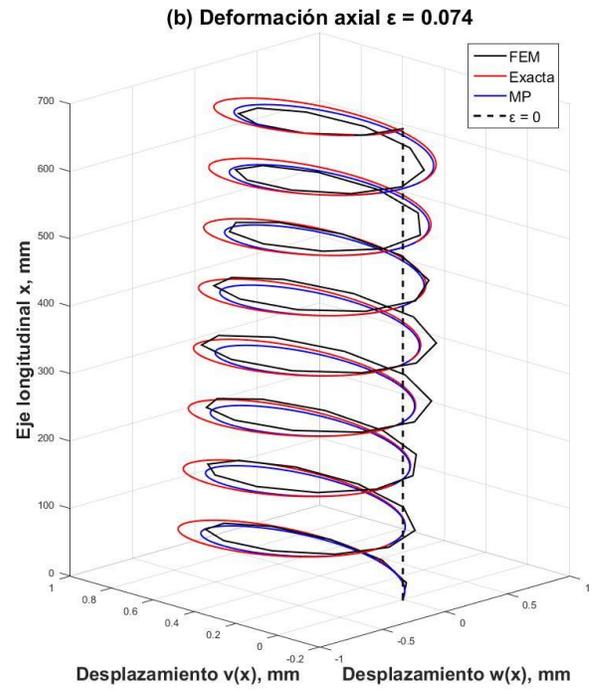
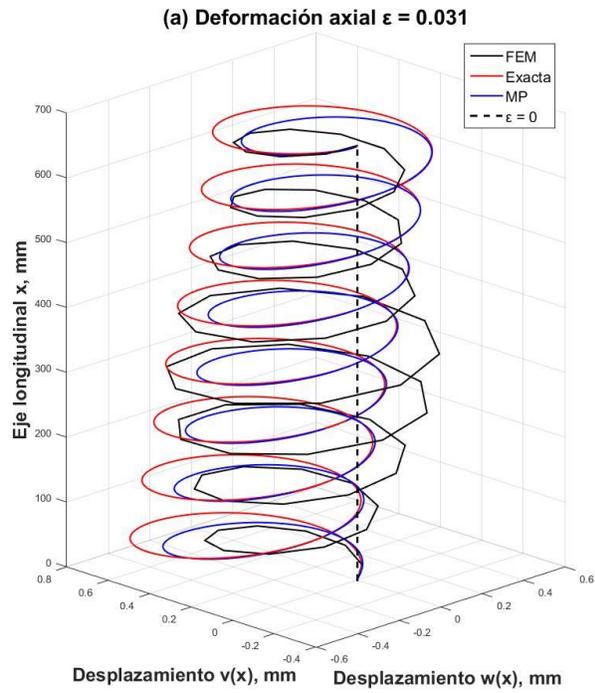


Fig. 6.52 Desplazamiento transversal 3D, W12.

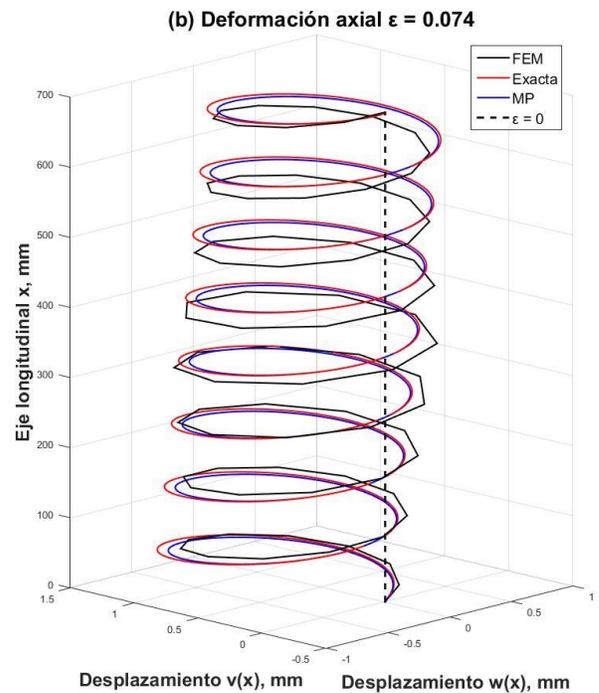
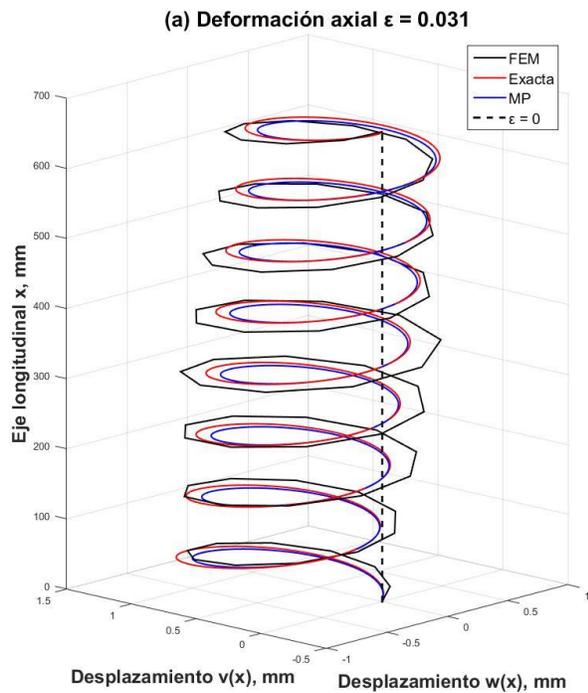


Fig. 6.53 Desplazamiento transversal 3D, W123.

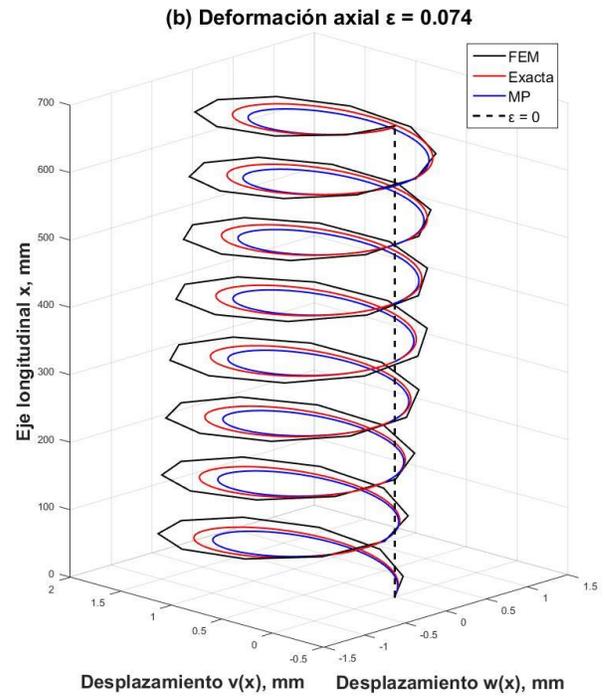
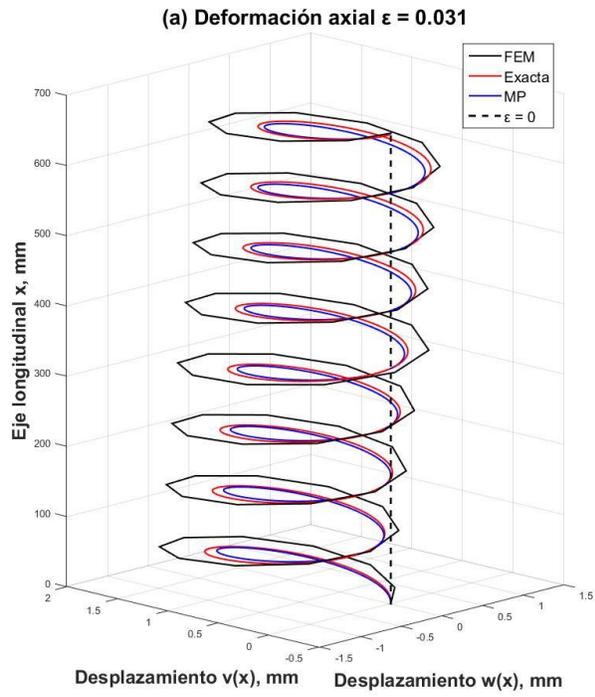


Fig. 6.54 Desplazamiento transversal 3D, W1234.

## Anexo F Datos FEM

### F.1. Deformación por componentes

Tabla 6.2 Datos deformación por componente FEM, W136.

<b>W136 FEMmin-FEMmax, mm/mm</b>								
<b>Cable def</b>	<b>e0</b>		<b>e2</b>		<b>e84</b>		<b>e75</b>	
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,012	0,012	0,013	0,012	0,013	0,010	0,012	0,010	0,012
0,025	0,024	0,026	0,024	0,025	0,022	0,025	0,021	0,024
0,037	0,036	0,038	0,035	0,037	0,032	0,037	0,031	0,036
0,050	0,049	0,050	0,046	0,049	0,044	0,049	0,043	0,048
0,062	0,062	0,063	0,057	0,061	0,055	0,061	0,054	0,060
0,074	0,074	0,075	0,068	0,073	0,066	0,073	0,065	0,072
0,087	0,085	0,088	0,079	0,085	0,077	0,086	0,076	0,084
0,099	0,099	0,100	0,090	0,097	0,088	0,097	0,087	0,096
0,112	0,111	0,112	0,102	0,109	0,099	0,109	0,098	0,108
0,124	0,123	0,125	0,114	0,124	0,111	0,123	0,110	0,121

Tabla 6.3 Datos deformación por componente FEM, W1.

<b>W1 FEMmin-FEMmax, mm/mm</b>										
<b>Cable def</b>	<b>e0</b>		<b>e82</b>		<b>e73</b>		<b>e64</b>		<b>e5</b>	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,012	0,012	0,013	0,012	0,013	0,010	0,013	0,009	0,012	0,009	0,011
0,025	0,024	0,026	0,023	0,026	0,021	0,025	0,020	0,024	0,020	0,023
0,037	0,036	0,034	0,034	0,038	0,032	0,037	0,031	0,036	0,031	0,035
0,050	0,049	0,051	0,045	0,050	0,043	0,049	0,042	0,048	0,042	0,047
0,062	0,061	0,063	0,056	0,062	0,054	0,061	0,053	0,060	0,053	0,060
0,074	0,073	0,076	0,067	0,074	0,065	0,073	0,064	0,072	0,064	0,072
0,087	0,086	0,088	0,078	0,086	0,077	0,085	0,075	0,084	0,075	0,084
0,099	0,098	0,101	0,089	0,098	0,088	0,097	0,086	0,096	0,086	0,096
0,112	0,111	0,113	0,101	0,110	0,099	0,110	0,098	0,109	0,098	0,108
0,122	0,120	0,124	0,111	0,123	0,109	0,121	0,107	0,119	0,107	0,118

Tabla 6.4 Datos deformación por componente FEM, W12.

<b>W12 FEMmin-FEMmax, mm/mm</b>								
<b>Cable def</b>	<b>e0</b>		<b>e83</b>		<b>e74</b>		<b>e65</b>	
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,012	0,011	0,014	0,011	0,015	0,008	0,013	0,006	0,011
0,025	0,023	0,028	0,022	0,028	0,018	0,025	0,016	0,023
0,037	0,035	0,040	0,033	0,039	0,029	0,037	0,027	0,035
0,050	0,048	0,053	0,045	0,051	0,040	0,050	0,038	0,047
0,062	0,060	0,065	0,056	0,063	0,051	0,062	0,049	0,059
0,074	0,073	0,077	0,067	0,075	0,062	0,074	0,060	0,072
0,087	0,085	0,090	0,077	0,088	0,073	0,086	0,072	0,084
0,099	0,098	0,102	0,089	0,100	0,084	0,098	0,083	0,096
0,112	0,110	0,115	0,100	0,112	0,096	0,110	0,094	0,108
0,121	0,119	0,124	0,109	0,124	0,104	0,120	0,102	0,117

Tabla 6.5 Datos deformación por componente FEM, W123.

<b>W123 FEMmin-FEMmax, mm/mm</b>								
<b>Cable def</b>	<b>e0</b>		<b>e84</b>		<b>e75</b>		<b>e6</b>	
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,012	0,010	0,016	0,009	0,015	0,004	0,012	0,004	0,010
0,025	0,023	0,030	0,019	0,028	0,013	0,025	0,013	0,022
0,037	0,035	0,043	0,030	0,040	0,024	0,037	0,024	0,034
0,050	0,047	0,055	0,041	0,053	0,035	0,049	0,035	0,046
0,062	0,057	0,065	0,050	0,062	0,044	0,059	0,045	0,056
0,074	0,072	0,080	0,063	0,076	0,058	0,073	0,058	0,070
0,087	0,085	0,092	0,074	0,088	0,069	0,085	0,070	0,082
0,099	0,097	0,105	0,085	0,101	0,080	0,097	0,081	0,095
0,112	0,109	0,117	0,096	0,113	0,091	0,109	0,092	0,107
0,118	0,116	0,124	0,103	0,122	0,097	0,116	0,098	0,113

Tabla 6.6 Datos deformación por componente FEM, W1234.

<b>W1234 FEMmin-FEMmax, mm/mm</b>						
<b>Cable def</b>	<b>e0</b>		<b>e85</b>		<b>e76</b>	
0	0	0	0	0	0	0
0,012	0,010	0,017	0,005	0,014	0,002	0,011
0,025	0,022	0,032	0,014	0,027	0,011	0,023
0,037	0,035	0,045	0,025	0,040	0,021	0,035
0,050	0,047	0,057	0,036	0,052	0,032	0,047
0,062	0,060	0,070	0,047	0,064	0,044	0,060
0,074	0,072	0,082	0,058	0,076	0,055	0,072
0,087	0,084	0,094	0,069	0,088	0,066	0,084
0,099	0,097	0,107	0,081	0,100	0,077	0,096
0,112	0,109	0,119	0,092	0,112	0,089	0,108
0,116	0,114	0,124	0,096	0,117	0,092	0,112

## F.2. Tensión por componentes

Tabla 6.7 Datos tensión por componente FEM, W136.

<b>Cable def</b> <b>[mm/mm]</b>	<b>W136 FEMmin-FEMmax, MPa</b>							
	<b>e0</b>		<b>e2</b>		<b>e84</b>		<b>e75</b>	
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,01	79,51	85,79	83,74	85,79	71,64	82,64	67,46	81,19
0,02	141,16	147,10	140,10	144,50	129,40	142,97	124,99	140,92
0,04	193,19	199,72	187,68	195,99	176,47	194,68	171,78	192,45
0,05	252,12	258,15	236,44	252,49	224,81	251,14	220,79	248,14
0,06	324,80	333,61	295,80	321,82	281,82	320,80	276,51	316,46
0,07	417,36	432,50	371,91	411,90	353,83	412,13	348,02	403,13
0,09	527,90	556,04	465,07	526,96	446,44	537,26	437,63	516,49
0,10	669,55	682,09	577,92	653,28	551,27	651,94	546,43	643,12
0,11	798,42	809,42	700,59	781,96	672,12	780,46	666,37	771,51
0,12	890,15	903,52	824,18	896,05	797,05	890,38	787,36	880,34

Tabla 6.8 Datos tensión por componente FEM, W1.

Cable def [mm/mm]	W1 FEMmin-FEMmax, MPa									
	e0		e82		e73		e64		e5	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,01	79,56	88,35	81,00	88,25	71,56	84,68	64,29	80,80	63,98	77,87
0,02	140,25	149,29	137,37	147,76	129,29	144,43	120,59	140,51	120,64	137,40
0,04	192,59	184,38	184,49	200,63	175,12	195,83	168,47	192,48	168,71	188,47
0,05	249,46	261,24	231,81	255,23	222,94	251,68	217,35	246,81	216,24	243,00
0,06	321,69	337,07	291,98	326,73	279,80	322,23	271,32	316,13	271,83	311,40
0,07	415,62	435,33	366,21	419,62	351,45	413,56	341,29	405,96	342,16	400,35
0,09	533,79	555,82	459,49	533,41	442,54	527,74	430,43	517,59	431,43	510,63
0,10	664,87	689,15	569,73	664,03	550,48	654,53	536,71	644,78	538,03	637,61
0,11	793,91	815,36	691,67	790,48	670,92	783,08	655,82	773,46	657,52	765,97
0,12	875,68	897,00	798,51	890,09	774,75	877,72	757,52	865,38	758,45	858,61

Tabla 6.9 Datos tensión por componente FEM, W12.

Cable def [mm/mm]	W12 FEMmin-FEMmax, MPa								
	e0		e83		e74		e65		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,01	75,08	94,64	77,63	97,74	55,45	85,60	45,52	76,71	
0,02	136,45	156,12	133,73	155,68	112,05	145,97	102,74	136,72	
0,04	188,96	209,69	180,73	206,18	160,52	197,51	152,56	188,06	
0,05	245,24	270,70	229,07	263,85	207,36	253,94	199,44	242,69	
0,06	316,20	349,53	286,72	337,72	260,95	325,27	251,75	311,07	
0,07	411,17	448,97	360,16	431,89	328,10	417,69	317,26	399,45	
0,09	522,31	576,42	449,14	551,86	412,97	530,74	399,56	511,00	
0,10	656,73	706,97	560,33	679,53	516,99	659,48	501,82	636,51	
0,11	786,70	830,93	680,90	806,81	634,43	787,74	617,58	765,82	
0,12	866,87	897,67	779,32	896,16	728,55	870,61	708,89	850,12	

Tabla 6.10 Datos tensión por componente FEM, W123.

Cable def [mm/mm]	W123 FEMmin-FEMmax, MPa							
	e0		e84		e75		e6	
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,01	71,58	103,04	60,90	97,41	30,84	82,15	29,03	70,16
0,02	133,90	165,09	117,60	157,34	89,31	143,01	88,75	130,82
0,04	186,67	220,05	165,66	209,73	140,97	194,74	141,42	182,39
0,05	242,73	284,28	212,48	270,05	188,13	250,94	189,08	236,13
0,06	297,33	348,62	254,83	328,06	227,77	305,80	229,41	288,05
0,07	405,27	472,52	334,84	442,19	300,43	412,84	303,49	389,48
0,09	519,14	599,76	421,14	556,87	379,07	525,63	383,07	498,36
0,10	650,38	732,93	525,61	689,40	476,79	653,75	481,98	624,15
0,11	780,77	851,27	644,02	814,45	589,61	781,58	595,88	753,11
0,12	839,07	896,13	714,40	886,52	654,59	839,71	660,24	813,46

Tabla 6.11 Datos tensión por componente FEM, W1234.

Cable def [mm/mm]	W1234 FEMmin-FEMmax, MPa					
	e0		e85		e76	
0	0	0	0	0	0	0
0,01	69,49	109,50	34,94	92,83	13,47	74,04
0,02	132,63	173,04	92,78	154,91	72,61	135,93
0,04	185,74	229,72	143,93	207,94	127,34	187,87
0,05	241,68	296,98	190,62	267,02	175,47	242,71
0,06	311,91	383,69	241,07	342,36	224,57	311,28
0,07	403,53	493,19	303,27	439,02	283,26	400,39
0,09	518,51	621,04	382,35	556,30	357,90	511,35
0,10	649,31	753,89	480,17	685,97	451,28	638,19
0,11	779,82	866,53	593,89	810,51	561,01	767,41
0,12	822,48	897,38	634,55	850,75	599,65	810,70

### F.3. Curvas de capacidad

Tabla 6.12 Datos curvas de capacidad FEM.

Cable def [mm/mm]	F, kN				
	W1	W12	W123	W1234	W136
0	0	0	0	0	0
0,006	1,096	0,879	0,655	0,459	0,830
0,012	2,006	1,680	1,326	0,998	1,550
0,019	2,798	2,375	1,931	1,508	2,160
0,025	3,493	2,989	2,469	1,968	2,668
0,031	4,129	3,551	2,961	2,388	3,162
0,037	4,745	4,095	3,432	2,787	3,656
0,043	5,381	4,652	3,911	3,187	4,095
0,050	6,071	5,253	4,423	3,612	4,634
0,056	6,846	5,926	4,993	4,081	5,209
0,062	7,729	6,691	5,640	4,610	5,867
0,068	8,735	7,563	6,374	5,211	6,644
0,074	9,872	8,548	7,205	5,893	7,485
0,081	-	9,645	8,133	6,655	8,442
0,087	12,518	10,844	9,149	7,490	9,483
0,093	-	12,122	10,235	8,386	10,598
0,099	15,510	13,449	11,366	9,323	11,730
0,105	-	14,780	12,505	10,270	12,875
0,112	18,499	16,062	13,606	11,189	13,974
0,113	-	16,306	13,817	11,367	14,182
0,114	19,050	16,545	14,024	11,540	14,385
0,115	-	16,779	14,225	11,709	14,583
0,117	19,571	17,004	14,421	11,874	14,775
0,118	-	17,223	14,611	12,033	14,960
0,119	20,057	17,436	14,793	12,185	15,129
0,120	-	17,643	14,970	12,329	15,297
0,122	20,500	17,831	15,125	12,465	15,460
0,123	-	17,986	15,275	12,593	15,598
0,124	20,848	18,131	15,403	12,707	15,728