



UNIVERSIDAD DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

MODELACIÓN NUMÉRICA DE LOS PROCESOS DE EROSIÓN/DEPOSITACIÓN
EN FLUJOS DETRÍTICOS. APLICACIÓN EN QUEBRADAS AFLUENTES A RÍO
EL CARMEN, HUASCO.

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA, MENCIÓN RECURSOS Y MEDIO AMBIENTE HÍDRICO

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

ÁLVARO CAMILO GONZÁLEZ BILBAO

PROFESOR GUÍA:
ALDO TAMBURRINO TAVANTZIS

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
YARKO NIÑO CAMPOS
SANTIAGO MONTSERRAT MICHELINI
LUIS ZAMORANO RIQUELME

Este trabajo ha sido financiado por la beca de Magíster Nacional
CONICYT-PFCHA/MagísterNacional/2019-22191193
Powered@NLHPC: Esta investigación fue parcialmente apoyada por la infraestructura de
supercómputo del NLHPC (ECM-02)

SANTIAGO DE CHILE
2021

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE: MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA MENCIÓN RECURSOS Y MEDIO AMBIENTE HÍDRICO Y TÍTULO DE INGENIERO CIVIL
POR: ÁLVARO CAMILO GONZÁLEZ BILBAO
FECHA: OCTUBRE 2021
PROFESOR GUÍA: ALDO TAMBURRINO TAVANTZIS

MODELACIÓN NUMÉRICA DE LOS PROCESOS DE EROSIÓN/DEPOSITACIÓN EN FLUJOS DETRÍTICOS. APLICACIÓN EN QUEBRADAS AFLUENTES A RÍO EL CARMEN, HUASCO.

Los flujos detríticos son un fenómeno natural al cual Chile es especialmente susceptible, contándose cientos de muertes y millones de dólares en pérdidas en las últimas décadas. Debido a que la magnitud de estos está principalmente controlada por la cantidad de material que son capaces de incorporar a su paso, los procesos de erosión y depositación son de particular importancia y deben ser incluidos en las simulaciones numéricas que busquen estimar el riesgo que estos suponen.

El objetivo de esta Tesis es incluir los procesos de erosión y depositación en la modelación numérica de este tipo de flujos. Para esto se crea un modelo numérico que, además de incorporar los, permite simular el flujo por medio de un conjunto de ecuaciones de conservación promediadas en la vertical. Dichas ecuaciones, válidas para un fluido equivalente de densidad variable, son resueltas sobre una geometría tridimensional compleja de lecho móvil, el cual se adapta en función del material incorporado y depositado por el flujo. El modelo numérico es implementado en OpenFOAM® utilizando el método de áreas finitas y está disponible para ser modificado y usado de forma libre por cualquier usuario.

El modelo numérico es capaz de representar de buena forma los resultados obtenidos por otros modelos y por mediciones experimentales realizadas en flujos detríticos reales de gran escala. Se prueba el modelo en distintas geometrías variando las ecuaciones utilizadas para representar los procesos de erosión y depositación, además de la fricción del flujo con el lecho. Los resultados obtenidos son fuertemente dependientes de las ecuaciones y los parámetros utilizados, siendo la erosión uno de los procesos más importantes. Esto último debido a su capacidad para aumentar en hasta un orden de magnitud el volumen total de la mezcla, lo cual modifica, entre otros, el caudal, altura y velocidad del flujo.

El modelo generado puede ser de gran utilidad para evaluar el riesgo que pueden provocar los flujos detríticos sobre las personas y la infraestructura ubicada en quebradas susceptibles a generarlos. No obstante, el modelo sigue estando en una etapa temprana de su desarrollo y es necesario continuar probando y mejorando su funcionamiento.

A Terry

Agradecimientos

A mi madre y a mi padre, gracias por educarme y por todo el esfuerzo que ponen en hacer mi vida más fácil. A Daniel, por su apoyo constante. A Rena, por moverme la cola.

Al profe Aldo, por todo su apoyo en este proceso y por la incondicional confianza puesta en mí. A los profesores Luis y Santiago, cuyos comentarios mejoraron la calidad de este trabajo. Al profe Yarko y a Jaquie, por ayudarme cada vez que lo necesité. A Alex y Rodrigo, cuyas contribuciones permitieron finalizar este trabajo.

A Matías, Cerón, Pipe y Pedro, quienes estuvieron desde el primer día, y a los amigos de civil, especialmente a Consuelo, Monse, Memo, Cata, Tomás S., Danko, Carla, Fabi, Tomás E., Felipe y Pablo. A todos ellos, y a tantas otras personas que conocí en estos años y que algo dejaron en mí, muchas gracias por su ayuda, por las enseñanzas, por los buenos momentos y por su sincera amistad.

Al fútbol y a los amigos que este me ha dado, especialmente los cabros del Patasucia, la Sub21 y el Cereal Madrid, porque la felicidad que se siente en la cancha cuando se juega con amigos es superior a cualquier problema que te da la vida.

Al WSL y especialmente a Brian, por recibirme durante mi pasantía y por facilitar la información necesaria para cumplir con los objetivos de esta Tesis.

A quien está leyendo esta Tesis, por hacer que tenga sentido todo este esfuerzo.

A CONICYT por la beca CONICYT-PFCHA/MagísterNacional/2019-22191193.

A la Universidad de Chile por el apoyo económico brindado mediante el programa *Ayudas para estadías cortas de investigación destinadas a tesistas de doctorado y magíster de la Universidad de Chile. 2019-2020. Departamento de Postgrado y Postítulo.*

Powered@NLHPC: Esta investigación fue parcialmente apoyada por la infraestructura de supercómputo del NLHPC (ECM-02).

Tabla de contenido

1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Objetivos	2
1.3. Organización del informe	2
2. Revisión bibliográfica	4
2.1. Descripción general de los flujos detríticos	4
2.2. Descripción física	6
2.2.1. Ecuaciones de movimiento	11
2.2.2. Leyes de resistencia	16
2.3. Procesos de erosión y depositación	19
2.3.1. Erosión en flujos detríticos	20
2.3.2. Depositación en flujos detríticos	30
3. Deducción de ecuaciones	35
3.1. Introducción	35
3.2. Conservación de masa de la mezcla de agua y sedimento	37
3.3. Conservación de masa de agua	41
3.4. Conservación de momentum en la mezcla de agua y sedimento	42
3.5. Sistema de ecuaciones gobernante	48
3.6. Leyes de resistencia	50
3.7. Condiciones de borde	51
3.8. Algoritmo de modificación del terreno	56
4. Método de áreas finitas	65
4.1. Introducción	65
4.2. Discretización geométrica	66
4.3. Discretización de ecuaciones	68

4.3.1.	Cálculo del gradiente	72
4.3.2.	Término advectivo	76
4.3.3.	Término transiente.....	80
4.3.4.	Término fuente.....	81
4.3.5.	Condiciones de borde.....	83
4.4.	Método de resolución	84
4.4.1.	Métodos de gradiente	85
4.4.2.	Precondicionamiento	87
4.4.3.	Criterio de detención.....	89
4.4.4.	Relajación.....	90
5.	Funcionamiento del solver	92
5.1.	Introducción.....	92
5.2.	Creación de la malla.....	93
5.3.	Condiciones iniciales.....	96
5.4.	Ecuaciones de fricción, erosión y depositación	96
5.5.	Funcionamiento del solver	100
5.5.1.	Constantes	100
5.5.2.	Condiciones de borde.....	101
5.5.3.	Ecuaciones de movimiento.....	102
5.5.4.	Número de Courant	110
5.5.5.	Aplicación del algoritmo de modificación del terreno.....	112
6.	Resultados.....	114
6.1.	Introducción.....	114
6.2.	Aplicación a una geometría con forma de cuña	115
6.2.1.	Geometría de la superficie.....	115
6.2.2.	Inputs.....	117
6.2.3.	Resultados.....	121
6.3.	Aplicación a quebradas afluentes al río El Carmen, Huasco.....	140
6.3.1.	Quebrada La Mesilla.....	140
6.3.2.	Quebrada Crucecita.....	144
6.3.3.	Quebrada Crucecita junto al río El Carmen	152
6.4.	Aplicación al Illgraben	154

6.5. Escalamiento del solver	161
7. Conclusiones	164
Bibliografía	168
Anexos	175
A. Esquemas de interpolación de alta resolución.....	176
B. Instalación y tutorial del solver	180
B.1. Instalación	180
B.2. Tutorial.....	181
B.3. Estructura de archivos	183
B.4. Reconstrucción de casos ejecutados en paralelo.....	185
C. Creación de la malla	187
D. Procesamiento de resultados	189

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Los flujos detríticos consisten en el movimiento gravitacional de mezclas de masas de sedimentos agitadas y saturadas por agua, estando la dinámica de estos controlada por los esfuerzos que actúan en cada una de sus fases y entre ellas (Iverson, 1997). Debido a los grandes volúmenes que estos pueden alcanzar, sumado a las extensas distancias que son capaces de recorrer, los efectos negativos asociados a estos flujos suelen ser considerables (Iverson, 2013). En Chile, en las últimas décadas este tipo de flujos han provocado cientos de muertes y miles de millones de dólares en pérdidas económicas (Cotroneo et al., 2018), lo que ha incrementado la preocupación de la población frente a este tipo de fenómenos.

Si bien la mayoría de estos flujos se inicia a partir de deslizamientos de tierra ocurridos en zonas de gran pendiente (Iverson et al., 1997), el volumen de estos no se mantiene fijo, pudiendo experimentar importantes aumentos debido a la incorporación del material que encuentran en su camino (McDougall & Hungr, 2005). Debido a esto, diversos autores plantean que es la eficiencia del proceso de erosión el que determina el volumen final de la mezcla, por lo que este debe ser incorporado a los modelos que buscan simular este tipo de flujos (Berger et al., 2011b; McDougall & Hungr, 2005). A este proceso se debe sumar el de la depositación de la mezcla, la cual estaría fuertemente controlada por la pendiente y composición de esta (de Haas et al., 2015; Van Dine, 1996). Este proceso es usualmente incluido en los modelos a partir de alguna ley de resistencia, la cual permite ligar el esfuerzo de corte basal con algún parámetro del flujo, como su altura o velocidad.

En la última década se han desarrollado importantes avances en el entendimiento de los procesos de erosión y depositación asociados a este tipo de flujos, esto por medio de experimentos de laboratorio y mediciones realizadas en flujos reales de gran escala. No obstante, es mucho lo que resta aún por comprender sobre estos procesos y acerca de los efectos que tienen sobre los flujos detríticos. Debido a esto, los modelos numéricos suelen omitirlos o incorporarlos de forma sumamente simplificada. Esto se hace patente

al notar que usualmente no se consideran los cambios geomorfológicos que estos flujos provocan sobre los cauces. Así como tampoco es común incorporar las modificaciones de densidad, composición y reología que resultan en la mezcla producto del intercambio de masa entre esta y el lecho (McDougall & Hungr, 2005).

Chile es un país particularmente susceptible a estos eventos, lo que se debe, al menos en parte, a su accidentada geografía. Junto a esto, se estima que producto del cambio climático la intensidad de las precipitaciones aumentará, sumado al retroceso de la línea de nieve y a eventos de sequía más extensos y severos (Trenberth, 2011). Estos procesos tienen directa relación con la generación y la magnitud de los flujos detríticos. Luego, resulta de particular interés mejorar las herramientas disponibles para simular el movimiento de este tipo de flujos, las cuales pueden ser utilizadas para definir zonas de riesgo, en el correcto diseño de obras de protección y en la planificación territorial de zonas susceptibles a este tipo de fenómenos.

1.2. Objetivos

El objetivo general de este trabajo es el de modelar numéricamente el escurrimiento de flujos detríticos incorporando los procesos de erosión y depositación, para la cual se diseña e implementa un modelo numérico capaz de resolver las ecuaciones de conservación sobre geometrías complejas.

Además, se cuenta con los siguientes objetivos específicos:

1. Entender los distintos fenómenos involucrados en los procesos de erosión y depositación en quebradas y cauces debido a flujos detríticos y la forma como los modelos numéricos los han incorporado previamente.
2. Comparar en una geometría simple los efectos que tiene sobre el flujo el considerar distintas condiciones de erosión y depositación.
3. Aplicar el modelo numérico desarrollado para simular flujos detríticos ocurridos en quebradas reales y comparar con los resultados medidos o simulados por otros autores.
4. Generar y documentar el marco teórico del modelo desarrollado, junto a las rutinas de programación necesarias para generar los *inputs* que este requiere y para analizar cuantitativamente los resultados obtenidos.

1.3. Organización del informe

El trabajo se divide, incluyendo este, en siete capítulos, además de bibliografía y anexos.

En el capítulo 2 se presenta la revisión bibliográfica, la cual busca condensar todos los conceptos detrás de la física de los flujos detríticos, haciendo especial énfasis en la forma como estos son representados por medio de ecuaciones. Además, se describe una serie de mediciones y experimentos que han permitido aumentar el conocimiento asociado a los procesos de erosión y depositación que ocurren en este tipo de flujos.

La primera mitad del capítulo 3 incluye la deducción de las ecuaciones que describen el movimiento de un flujo detrítico de densidad variable sobre una geometría compleja tridimensional. Si bien estas ecuaciones están basadas en el trabajo de Rauter & Tuković (2018), las ecuaciones aquí deducidas son más generales y no requieren definir de antemano un modelo reológico para la mezcla agua-sedimento. En la segunda mitad del capítulo se presenta la deducción de las ecuaciones utilizadas para incorporar como condición de borde un flujo de densidad y caudal variable, además del algoritmo aquí diseñado para modificar la geometría que representa al terreno en función del material erosionado y/o depositado por el flujo.

En el capítulo 4 se presenta el método de áreas finitas, el cual es utilizado para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales deducido en el capítulo anterior. Si bien los aportes realizados en esta Tesis al desarrollo del método y su implementación en OpenFOAM® son pocos, se optó por presentar de forma detallada su funcionamiento. Esto se debe, principalmente, a que es escasa la presencia de este método en la literatura, siendo necesario en muchas ocasiones acceder a los códigos de OpenFOAM® para entender su funcionamiento. Es de esperar que cualquier persona que utilice el *solver* aquí desarrollado lo haga en conocimiento de las limitaciones y supuestos inherentes a este.

El capítulo 5 muestra como las ecuaciones deducidas en el capítulo 3 son implementadas en OpenFOAM® utilizando el método de áreas finitas, lo que da origen al *solver* desarrollado en esta Tesis, el cual ha sido nombrado *debrisfaSavageHutterFoam*. En Anexos se incluye toda la información necesaria para compilar y utilizar el *solver*, junto al código usado para crear la malla que representa al terreno y los códigos que se encargan del procesamiento de los resultados. Si bien estos códigos fueron desarrollados en esta Tesis para ser usados en conjunto con *debrisfaSavageHutterFoam*, gran parte de estos pueden ser utilizados junto con otros *solver* de OpenFOAM® sin la necesidad de realizarles cambios significativos.

En el capítulo 6 se presentan los resultados obtenidos al utilizar el *solver* en tres geometrías distintas, donde se prueban distintas configuraciones de flujo y las capacidades del *solver*. Junto a esto, se efectúan comparaciones con mediciones realizadas en flujo a escala real y con resultados obtenidos por otros modelos numéricos. El escalamiento del *solver* es incluido en la parte final de este capítulo. Finalmente, las conclusiones generales obtenidas en esta Tesis se presentan en el capítulo 7, donde además se analizan posibles avances y aplicaciones que se pueden implementar siguiendo la línea de trabajo aquí desarrollada.

Capítulo 2

Revisión bibliográfica

2.1. Descripción general de los flujos detríticos

Los flujos detríticos consisten en el movimiento de mezclas de masas de sedimento agitadas y saturadas con agua sobre una pendiente por acción de la gravedad. En un flujo detrítico las fuerzas asociadas a sus fases sólida y líquida ejercen gran influencia sobre la dinámica de la mezcla, distinguiendo a este tipo de flujo de otros fenómenos, como avalanchas de rocas o flujos de agua cargados con sedimento, donde alguna de sus fases domina el movimiento. Como consecuencia, los flujos detríticos son capaces de recorrer grandes distancias en canales con modestas pendientes, inundando vastas superficies y causando grandes daños a su paso debido a su singular poder destructivo (Iverson, 1997; 2005).

Aunque los flujos detríticos se pueden originar de diversos modos, como a partir del derretimiento de grandes masas de nieve ubicadas en las laderas de volcanes que entran en erupción (Pierson et al., 1990), la gran mayoría tienen su origen en deslizamientos de tierra ocurridos en zonas con pendiente mayor a 20° (Gallino & Pierson, 1984), donde por efecto de lluvias, escurrimientos superficiales o el derretimiento de nieve, la presión del agua ubicada en los poros del suelo se incrementa, rompiendo el equilibrio de fuerzas existente y propiciando que masas de sedimento de tamaño variable deslicen pendiente abajo. La masa de sedimento recién colapsada se transporta incrementando su volumen de sedimento y agua debido a la incorporación de material que encuentra en su camino, al tiempo que pierde rigidez debido a los choques entre sus partículas y el lecho. Diversa nomenclatura es usada para referirse a los flujos detríticos, esto debido a sus distintos orígenes, composiciones y apariencias, existiendo en todos los casos una transferencia constante de momentum entre sólidos y fluido, siendo esto lo que caracteriza y sustenta a este tipo de flujos (Costa, 1984; Iverson et al., 1997; Iverson, 2013).

En Chile, los flujos detríticos usualmente se desencadenan luego de intensas lluvias ocurridas como parte de una tormenta cálida, generándose precipitaciones líquidas a gran altura en suelos con altas pendientes y material disponible para ser incorporado al

flujo; o intensas precipitaciones en los meses de verano, donde producto de la ausencia de precipitaciones previas el suelo de algunas laderas puede encontrarse resquebrajado, lo que disminuye su resistencia (Hauser, 1985; Hungr et al., 1984; Montserrat, 2005).

Un flujo detrítico puede tener significativos cambios de volumen debido a la incorporación de material que encuentra en su camino, el cual puede estar formado por depósitos de varios metros de espesor. El material incorporado, cuyas propiedades pueden ser muy distintas a las del material inicial, pudiendo inclusive contener gran cantidad de agua, es capaz de modificar la composición y reología de la mezcla. Así, estos cambios en la constitución del flujo pueden traducirse en un incremento en su capacidad de desplazamiento y por tanto elevar sus potenciales impactos negativos (McDougall & Hungr, 2004; 2005). El volumen total de un flujo detrítico ha sido empíricamente correlacionado con otros parámetros del flujo, como el caudal máximo, velocidad del frente y la distancia total de desplazamiento (Rickenmann, 1999). Es claro entonces que para estimar de buena forma los daños de un posible flujo detrítico se debe determinar el volumen que este puede incorporar durante su desplazamiento, siendo este generalmente mucho mayor al volumen inicial del flujo. Un ejemplo clásico que muestra esto es el flujo detrítico ocurrido en 1990 en Tsing Shan, Hong Kong, donde a partir de un volumen de 2.000 m^3 se generó un flujo de 20.000 m^3 producto de la incorporación de sedimentos encontrados en su paso (King, 1996). Esto lleva a concluir que es la eficiencia del proceso de erosión el que principalmente determina el volumen total de un flujo detrítico (Hungr et al., 2005; Berger et al., 2011a), y que este proceso, junto con sus efectos en la dinámica del flujo, debiese ser incluido en los modelos que buscan determinar las consecuencias y peligros de este tipo de eventos (Berger et al., 2011b; McDougall & Hungr, 2005).

La disponibilidad de material para ser transportado por un flujo detrítico es variable y responde a procesos cíclicos de erosión y depositación, siendo necesario que material sea incorporado a los cauces por medio de deslizamientos de tierra y la denudación del terreno para luego ser evacuado por flujos detríticos. Así, este tipo de flujos son sumamente importantes en la evolución del paisaje, controlando los procesos de transferencia de sedimentos en algunas cuencas montañosas (Benda 1990; Berger et al, 2011a; Costa, 1984).

Los flujos detríticos son un proceso natural al cual Chile es particularmente susceptible debido a su accidentada topografía, donde altas montañas se encuentran separadas al mar por una angosta faja de tierra. Sumado a esto, el desarrollo urbano y el aumento de la población han llevado a que cada vez se ocupen superficies más expuestas a este tipo de flujos, como zonas ribereñas, sectores altos cercanos a quebradas o terrenos que históricamente han formado parte de conos de deyección aluvial (Montserrat, 2005). Debido a esto, en las últimas décadas los flujos detríticos han atraído la atención pública en el país producto de las cuantiosas pérdidas humanas y daños materiales que han provocado. Según el Servicio Nacional de Geología y Minería de Chile, los 5 flujos aluvionales más grandes ocurridos entre 1980 y 2015 reportan 189 muertos, 91 desaparecidos y un costo económico de 1.600 millones de dólares (ver Figura 2.1) (Cotroneo et al., 2018). Estos efectos negativos se verían acrecentados en el futuro producto del cambio climático, ya que se pronostica que las precipitaciones se volverán más intensas y que aumentará el área pluvial asociada a cada evento debido al retroceso

de la línea de nieve (Trenberth, 2011). Esto estaría acompañado de una mayor disponibilidad de sedimentos, debido a que el cambio en la distribución de precipitaciones haría que las sequías sean más intensas en las zonas secas, afectando la distribución de vegetación, la cual tiene un efecto estabilizador en el terreno limitando la tasa de generación de sedimentos que luego es aportado a los cauces (Schlunegger et al., 2009).

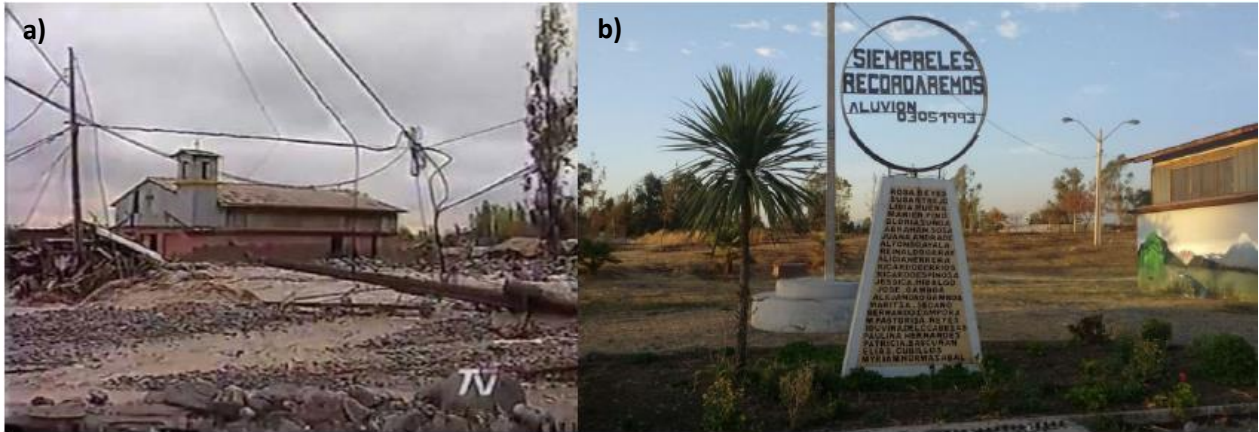


Figura 2.1: (a) Destrucción generada por el aluvión ocurrido el día 3 de mayo de 1993 en la Quebrada de Macul, Región Metropolitana, Chile. (b) Memorial en recuerdo de las víctimas (Servicio Nacional de Geología y Minería de Chile, 2016).

Para prevenir y/o reducir los efectos negativos que este tipo de flujo tiene sobre las personas y la infraestructura, se han implementado distintos tipos de estructuras de control con variados propósitos, entre las que destacan la estabilización del lecho para reducir la incorporación de material al flujo, y obras de retención que posibilitan la detención del flujo detrítico (Montserrat, 2005). Al diseñar obras de control, algunas de las características que deben ser consideradas son: volumen de diseño, caudal máximo, altura y velocidad del flujo, distancia recorrida probable, etc. (VanDine, 1996). Con este fin, el volumen de diseño ha sido definido como el evento más grande que puede razonablemente ocurrir durante el tiempo de vida de la obra, el cual depende del tamaño del área donde se origina el flujo y de la disponibilidad de sedimento para ser movilizado desde el lecho y bordes de los cauces. Resulta lógico entonces calcular el volumen de diseño a partir del volumen de sedimento disponible para ser movilizado antes que en función del volumen de agua asociado al evento (Hungry et al., 1984). Es evidente entonces la importancia que tiene entender y modelar los procesos de erosión y deposición en flujos detríticos, lo cual, además de en el diseño de obras, tiene importantes aplicaciones en las áreas de planificación territorial y morfología fluvial, entre otros.

2.2. Descripción física

Los flujos detríticos son un fenómeno cuyas características se encuentran entre las de avalanchas de rocas y las de flujos rápidos de grandes masas de agua. Estos flujos consisten en una mezcla de agua y sedimentos que pueden alcanzar velocidades

superiores a los 10 m/s y volúmenes de hasta 10^9 m^3 , con un comportamiento impermanente y no uniforme que raramente se desarrolla por periodos de tiempo mayores a 10^4 s (Iverson, 1997; 2013). Comúnmente los flujos detríticos se generan como una seguidilla de frentes, cada uno con una parte delantera formada por el material más grueso, el que accidentalmente puede incluir algunos elementos de gran tamaño que encuentre en su camino, como árboles y autos. El frente es seguido por un cuerpo menos denso compuesto de material más fino y al final una cola de menor densidad que se asemeja a un flujo turbulento de agua cargado con sedimento. Observaciones experimentales han mostrado que estos frentes se pueden generar de forma espontánea, sin necesidad de perturbaciones externas, y que el máximo caudal suele generarse luego del paso del frente del flujo detrítico (Hung et al., 1984; Iverson, 1997; Major, 1997). El valor de este caudal máximo es usualmente mucho mayor al asociado a una crecida de agua bajo las mismas condiciones meteorológicas que generaron el flujo (Rickenmann, 1999).

En la Figura 2.2 se muestra el esquema idealizado de un flujo detrítico cuya parte delantera está formada por un frente pedregoso. No obstante, se debe tener en cuenta que la composición de estos flujos es sumamente variable, por lo que este esquema no es representativo de todos los flujos detríticos generados en la naturaleza (de Haas, 2015).

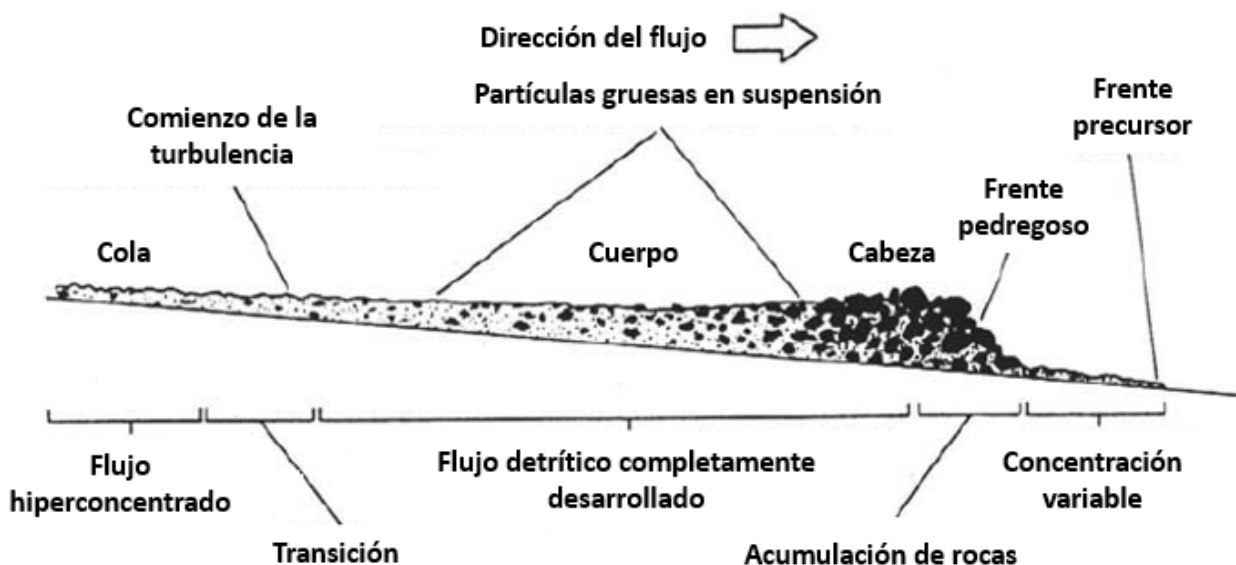


Figura 2.2: Esquema de un flujo detrítico cuya parte delantera se compone de un frente rocoso. Modificado de Hungr (2005).

El tamaño de los sedimentos que forman este tipo de flujos va desde arcillas hasta grandes bloques que pueden exceder los 10 m de diámetro (ver Figura 2.3), ocupando típicamente entre un 50 y 70% del volumen total de la mezcla. Se ha reportado que arenas, gravas y piedras conforman la mayor parte de la fracción sólida, mientras que partículas del tamaño de limos y arcillas comúnmente constituyen menos del 10% de la masa (Hung et al., 1984; Iverson, 1997; 2013). En la Figura 2.4 se muestra la variedad

del tamaño de los sedimentos que se pueden encontrar en el lecho de un canal que es constantemente sometido al paso de flujos detríticos.

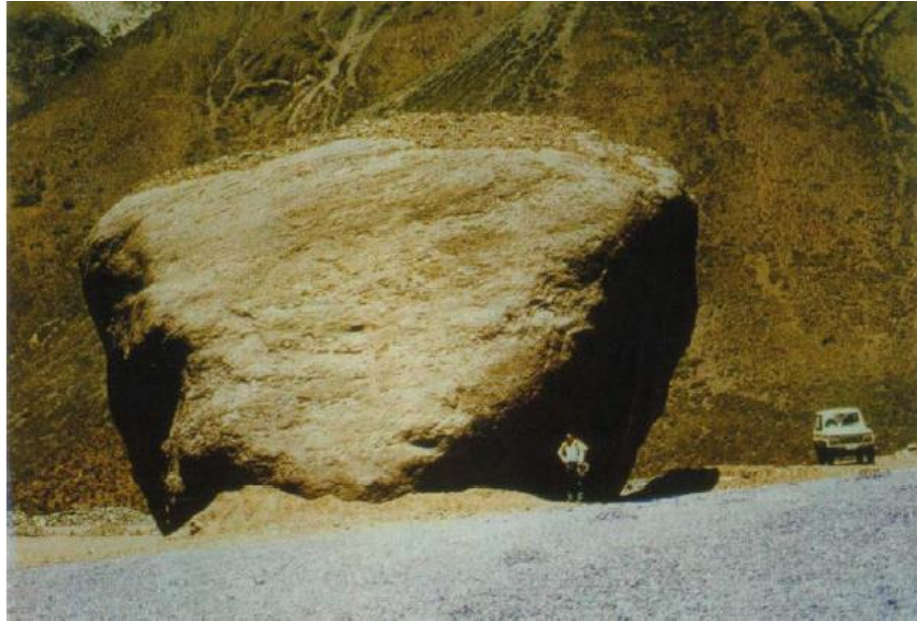


Figura 2.3: Bloque de aproximadamente 2700 toneladas, el cual fue movilizado por 11 km durante el flujo detrítico ocurrido el día 29 de noviembre de 1987 en el Río Colorado, Región Metropolitana, Chile (Hauser, 2002).



Figura 2.4: Depósitos y sedimentos de tamaño variable ubicados en una presa contenedora (*check dam*) de la quebrada Illgraben, cantón de Valais, Suiza.

La gran variedad del tamaño de los granos permite que los flujos alcancen densidades mucho mayores a las que alcanzarían en caso de ser partículas uniformes, habiéndose medido a partir de depósitos densidades que rara vez se encuentran fuera del rango $1800 - 2300 \text{ kg/m}^3$. Si bien la distribución granulométrica es la propiedad más recurrentemente medida en flujos detríticos, este dato por sí solo agrega poca información al entendimiento del fenómeno, siendo necesario medir sus propiedades

durante el movimiento de la mezcla. Parámetros importantes como la temperatura granular y el exceso de presión de poros dependen del tamaño de los sedimentos, pero no pueden ser modelados solo a partir de la distribución granulométrica de la mezcla (Iverson, 1997).

Es importante entender el efecto que tiene sobre el comportamiento del flujo la gran variedad de tamaños de partículas que se pueden encontrar en este, ya que mientras las partículas más pequeñas pueden modificar las propiedades de la fase fluida, las partículas más grandes son relevantes en el intercambio de momentum debido a la colisión inelástica entre estas. En primer lugar, es necesario determinar cuáles son las partículas que forman parte de la fracción fluida de un flujo detrítico y pueden afectar algunas de sus propiedades, como densidad ρ_f y viscosidad dinámica μ_f . Se ha propuesto utilizar como criterio la comparación entre la duración del flujo y el tiempo de depositación de las partículas (Iverson, 1997). Si la duración del flujo detrítico t_D , que suele estar en el rango $10 - 10^4$ s, es mayor al tiempo requerido por una partícula para depositar, entonces la partícula debe ser considerada como parte de la fracción sólida, pues esta no es capaz de mantenerse suspendida sin interactuar con otras partículas o con la turbulencia del flujo. Por otro lado, si el tiempo de depositación es mayor a la duración del flujo, entonces la partícula es capaz de mantenerse en suspensión solo por efecto de los esfuerzos viscosos del agua y la partícula actúa como parte del fluido. Si se define a la velocidad de depositación como v_D y la distancia que esta debe recorrer como $h/2$, con h la profundidad del flujo, el criterio indica que si $h/(2t_D v_D) > 1$ entonces la partícula forma parte del fluido. Para estimar v_D se puede utilizar la Ley de Stokes considerando al fluido como agua pura. Usualmente se considera que partículas más grandes que limos forman parte de la fracción sólida, mientras que arcillas y limos forman parte del fluido (Iverson, 1997; O'Brien & Julien, 1988). La densidad del fluido intersticial del flujo detrítico se puede calcular entonces a partir de la concentración volumétrica de los finos C_f , la densidad de los granos finos ρ_{sf} y la densidad del agua pura ρ_w :

$$\rho_f = \rho_{sf} C_f + \rho_w (1 - C_f) \quad (2.1)$$

Mediciones experimentales de ρ_f muestran que su valor varía en el rango $1030 - 1110 \text{ kg/m}^3$ (Iverson, 1997). Es importante notar que ρ_f es variable tanto en el espacio como en el tiempo para un mismo flujo detrítico. Esto se debe a que por procesos de segregación dentro del flujo o por efecto de la erosión y depositación de sedimento los valores de ρ_{sf} y C_f pueden variar (McDougall & Hungr, 2004). En el caso de la viscosidad del fluido intersticial, algunas fórmulas han sido propuestas a partir de ensayos de laboratorio por medio del uso de reómetros y muestras de depósitos de flujos detríticos, obteniéndose variaciones de varios ordenes de magnitud dependiendo de la concentración del material fino y de sus propiedades electroquímicas (Major & Pierson, 1992; O'Brien & Julien, 1988). La importancia del aumento de la viscosidad por la presencia de granos finos es que permite el desarrollo de presiones de poros que facilitan el movimiento del flujo al limitar el contacto entre granos (Iverson, 2013). En la Tabla 2.1 se muestran los rangos de valores de algunas de las propiedades físicas más usadas en flujos detríticos.

Tabla 2.1: Valores típicos de algunas propiedades físicas básicas en flujos detríticos (Iverson, 1997)

Propiedades	Símbolo	Valores típicos
Propiedades de los granos sólidos		
Densidad (kg/m^3)	ρ_s	2500 – 3000
Diámetro característico (m)	d	10^{-5} – 10
Ángulo de fricción ($^\circ$)	ϕ_g	25 – 45
Propiedades del fluido intersticial		
Densidad (kg/m^3)	ρ_f	1000 – 1200
Viscosidad ($Pa\ s$)	μ_f	0,001 – 0,1
Propiedades de la mezcla		
Concentración volumétrica de sólidos (-)	C_v	0,4 – 0,8
Permeabilidad hidráulica (m^2)	k	10^{-13} – 10^{-9}
Ángulo de fricción ($^\circ$)	ϕ	25 – 45

Si bien el reconocer que en un flujo detrítico las propiedades de la fase fluida son modificadas por las partículas finas que lo componen es un comienzo, no es suficiente para describir la dinámica del flujo. Esto se debe a que el fluido intersticial puede mediar los procesos de fricción y colisión entre granos, siendo estos capaces de transferir gran cantidad de momentum de forma simultánea con los esfuerzos viscosos en el fluido. Además, las observaciones de flujos detríticos en la naturaleza y laboratorio muestran que la presencia del fluido intersticial incrementa la distancia recorrida por el flujo si se compara con la de flujos granulares, esto a pesar de que el fluido disipa energía (Iverson, 1997). Para comprender cómo interactúa la fase fluida con las partículas de mayor tamaño se analizarán dos procesos relevantes que se generan en los flujos detríticos, los cuales incrementan su movilidad.

Un importante parámetro en flujos detríticos y flujos granulares corresponde a la temperatura granular, la cual es una medida del grado de agitación de las partículas en el flujo. La temperatura granular T_g puede ser evaluada a partir del promedio de las fluctuaciones de velocidad v'_s de los granos en la mezcla:

$$T_g = \langle v_s'^2 \rangle = \langle (v_s - \bar{v}_s)^2 \rangle \quad (2.2)$$

donde $\langle \rangle$ refiere a algún promedio adecuado realizado sobre $v'_s = v_s - \bar{v}_s$, con v_s la velocidad instantánea de una partícula y \bar{v}_s su promedio temporal. La importancia de la temperatura granular es que la agitación de las partículas influye en la transformación de energía potencial a energía cinética en el flujo. Esto es sumamente relevante, por ejemplo, en la iniciación de flujos detríticos producto del deslizamiento de laderas, pues se requiere que una masa previamente ordenada y estática de material se desordene permitiendo que las partículas tengan movimiento relativo unas con otras y fluyan pendiente abajo. Este aumento en la movilidad de las partículas tiene como consecuencia un incremento en la pérdida de energía por efecto de las colisiones inelásticas entre los granos, además de la disipación de energía producto del movimiento de estos a través del fluido intergranular. Para compensar este incremento en las pérdidas de energía se requiere que el flujo interactúe con el terreno en superficies irregulares, lo que posibilita

que ocurra una conversión de energía cinética de traslación en energía cinética de fluctuación de los granos. (Iverson, 1997; Montserrat, 2005).

La agitación de las partículas no solo tiene efectos en la movilización del flujo producto de los choques entre estas, lo que genera intercambios de energía cinética, sino que su movimiento reduce la concentración de la mezcla, lo que facilita el movimiento de los granos y permite el movimiento selectivo de partículas. Esto último explica, al menos en parte, la presencia de partículas más grandes en los bordes y en la superficie de los flujos detríticos. La conclusión es que a mayor temperatura granular la mezcla se comporta más como un fluido y menos como un sólido. Es importante tener en cuenta que en un mismo instante se pueden tener variados comportamientos en distintos sectores del flujo, por lo que las colisiones no siempre predominaran por sobre los esfuerzos friccionales entre partículas o sobre los esfuerzos generados en la fase fluida (Iverson, 1997).

Experimentalmente, junto a la existencia de temperatura granular, en los flujos detríticos se ha demostrado la presencia de presión de poros, que corresponde a la diferencia de presión en el fluido intersticial con respecto a la presión hidrostática. La importancia de la presión de poros en el movimiento de flujos detríticos radica en su capacidad de reducir la fricción entre partículas, lo que disminuye el esfuerzo efectivo y la pérdida de energía. Esto queda más claro al considerar el criterio de Coulomb, donde el aumento en la presión de poros disminuye el esfuerzo normal efectivo. La presencia y preservación de la presión de poros reduce la rigidez de la mezcla y facilita su desplazamiento, además de transferir esfuerzos desde la fase sólida a la fase fluida.

La presión de poros tiene además particular importancia en el proceso de detención de flujos detríticos, pues se ha comprobado experimentalmente que el frente y los bordes del flujo tienen menor presión de poros que la parte interior, por lo que la fricción en dichas partes es mayor (Iverson, 1997). La capacidad del flujo para desarrollar y mantener el exceso de presión está relacionada con la viscosidad de la matriz fluida y la permeabilidad de la mezcla (Iverson & Vallance, 2001). A partir de mediciones realizadas en terreno, en flujos detríticos a gran escala, se ha comprobado que la presión de poros puede mantenerse por una larga cantidad de tiempo en la mezcla, alcanzando inclusive valores del orden de la presión hidrostática. Esto contribuye a la inusual movilidad que estos flujos pueden alcanzar (McArdell et al., 2007; McCoy et al., 2010). A pesar de lo antes mencionado, se ha demostrado que estos flujos pueden fluir en ausencia de altas presiones de poros, esto en la medida de que tengan suficiente temperatura granular (Iverson, 1997).

2.2.1. Ecuaciones de movimiento

Debido a las grandes pérdidas económicas y humanas producidas por flujos detríticos, junto a un significativo avance en la capacidad de los computadores modernos, en las últimas décadas se ha visto incrementado el interés en desarrollar modelos computacionales capaces de simular el comportamiento de este tipo de flujos. No obstante, la descripción matemática de los procesos físicos que intervienen es un problema altamente complejo que aún no ha sido resuelto. A continuación, se

presentarán algunas de las ecuaciones que han sido utilizadas por diversos autores para representar la dinámica de este tipo de flujos.

En primer lugar, es posible aplicar a cada fase del flujo, así como a la mezcla total, el principio de conservación de masa, el cual expresado en su forma diferencial equivale a:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.3)$$

donde ρ es la densidad y \vec{v} la velocidad de la mezcla o de alguna de sus fases. La conservación de momentum lineal para la mezcla o para cada una de sus fases es:

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = \rho \vec{g} - \nabla \cdot T \quad (2.4)$$

donde \vec{g} es la aceleración de gravedad y T es el tensor de esfuerzos (Iverson, 2013). Un signo menos antecede al tensor de esfuerzos pues este es típicamente definido positivo para la compresión (Iverson, 2005), aunque esto puede variar de una deducción a otra.

El supuesto básico es que estas ecuaciones, las cuales se encuentran fuertemente acopladas, son aplicables de forma simultánea en todas las regiones del flujo, el cual es considerado como un medio isotérmico continuo (Iverson, 1997). Además de estas ecuaciones de conservación, algunos autores han propuesto ecuaciones de transporte para la temperatura granular y la presión de poros, esto con el objetivo de modelar su evolución en conjunto con el movimiento del flujo (Iverson, 1997; 2013). No obstante, su incorporación no es común y aquí será obviada.

Es usual definir la densidad de la mezcla ρ a partir de ρ_s y ρ_f , las densidades representativas de las fases sólida y fluida, las cuales son supuestas constantes, y de C_v , la concentración volumétrica de los sólidos.

$$\rho = \rho_s C_v + \rho_f (1 - C_v) \quad (2.5)$$

Si bien algunos autores han utilizado distintas velocidades para las fases fluida y sólida, definiendo \vec{v} de forma análoga a ρ , tal como se muestra en la ecuación (2.6), lo usual ha sido considerar que $\vec{v}_s = \vec{v}_f = \vec{v}$, con lo cual el flujo detrítico, originalmente formado por una masa heterogénea de sedimentos y agua, es modelado como un fluido equivalente de una sola fase y de densidad variable (Iverson, 2013; McDougall & Hungr, 2004).

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}_s \rho_s C_v + \vec{v}_f \rho_f (1 - C_v)}{\rho} \quad (2.6)$$

Mientras que el método utilizado para resolver el sistema formado por las ecuaciones (2.3) a (2.5) será revisado en los capítulos 3 y 4, en esta sección el énfasis estará puesto en evaluar el tensor de esfuerzos T , el cual debe dar cuenta de todas las interacciones al interior de la mezcla.

La dinámica de un flujo detrítico está controlada por los esfuerzos que actúan en este, donde a priori, los esfuerzos debido a la fase fluida son igual de importantes que los esfuerzos de la fase sólida. Omitiendo el análisis dimensional, el cual puede ser revisado en detalle en Iverson (1997), se tiene que son cinco los esfuerzos que actúan en la dirección del flujo al interior de la mezcla. El primero de estos corresponde al esfuerzo debido a fricción entre granos T_{s-q} , el cual se estima a partir del esfuerzo cuasi-estático de Coulomb a una profundidad h . Además, se debe considerar el esfuerzo debido a los choques entre partículas T_{s-i} , el cual depende de la masa de la fase sólida y la velocidad relativa entre granos, la cual puede ser estimada como $v \sim \dot{\gamma}d$, siendo $\dot{\gamma}$ la tasa de deformación angular y d un diámetro característico. Para la fase fluida se debe considerar el esfuerzo viscoso T_{f-q} , el cual es obtenido a partir de la ley de Newton, y un esfuerzo debido a las fluctuaciones inerciales del fluido T_{f-i} , el cual se calcula de forma análoga a T_{s-i} . El último esfuerzo, T_{s-f} , corresponde a interacción entre ambas fases, y se obtiene a partir de la ley de Darcy, ya que $T_{s-f}/d \sim \mu_f v/k$ y $v \sim \dot{\gamma}d$, con k y μ_f definidos en la Tabla 2.1 (Iverson, 1997):

$$T_{s-q} \sim C_v(\rho_s - \rho_f)gh \tan \phi \quad (2.7)$$

$$T_{s-i} \sim C_v \rho_s \dot{\gamma}^2 d^2 \quad (2.8)$$

$$T_{f-q} \sim C_w \dot{\gamma} \mu_f \quad (2.9)$$

$$T_{f-i} \sim C_w \rho_w \dot{\gamma}^2 d^2 \quad (2.10)$$

$$T_{s-f} \sim \frac{\dot{\gamma} \mu_f d^2}{k} \quad (2.11)$$

Los procesos de transporte de momentum recién enunciados fueron estimados para el caso de un flujo en que $\dot{\gamma}$ es constante y con sedimento uniforme formado por partículas esféricas del mismo tamaño. Si bien parece poco probable que un modelo reológico sea capaz de dar cuenta de todos estos procesos, lo cierto es que en ciertas circunstancias se pueden hacer aproximaciones en el caso que solo algunos de estos esfuerzos dominen la dinámica de la mezcla (Iverson, 1997).

La importancia relativa entre algunos de estos esfuerzos ha sido medida por medio de números adimensionales. A continuación, se enunciarán solo cuatro de los principales, que corresponden, respectivamente, al número de masa, número de Darcy, número de Bagnold y número de Savage:

$$N_{mass} = \frac{T_{s-i}}{T_{f-i}} = \frac{C_v \rho_s}{1 - C_v \rho_f} \quad (2.12)$$

$$N_{Dar} = \frac{T_{s-f}}{T_{s-i}} = \frac{\mu_f}{C_v \rho_s \dot{\gamma} k} \quad (2.13)$$

$$N_{bag} = \frac{T_{s-i}}{T_{f-q}} = \frac{C_v \rho_s d^2 \dot{\gamma}}{1 - C_v \mu_f} \quad (2.14)$$

$$N_{sav} = \frac{T_{s-i}}{T_{s-q}} = \frac{\rho_s \dot{\gamma}^2 d^2}{(\rho_s - \rho_f)gh \tan \phi} \quad (2.15)$$

Mientras que el número de masa es una medida de la razón entre los esfuerzos de inercia de las fases sólida y fluida, el número de Darcy describe la tendencia de la presión de poros para limitar la interacción entre granos (Iverson, 1997). El tercer adimensional fue identificado inicialmente por Bagnold al introducir el concepto de esfuerzos dispersivos, los cuales refieren al efecto de los choques entre partículas sobre el flujo (Bagnold, 1954). El número de Bagnold es usualmente descrito utilizando la concentración lineal λ , la cual es definida como la razón entre el diámetro d del sedimento y la distancia libre s entre dos partículas, tal que $\lambda = d/s$:

$$Ba = \frac{\rho_s \dot{\gamma} d^2 \lambda^{\frac{1}{2}}}{\mu_f} \quad (2.16)$$

Para un fluido con partículas homogéneas y uniformemente distribuidas se puede demostrar que λ es función de C_v y de la concentración de empaquetamiento de los sólidos, C_{vmax} :

$$\lambda = \left[\left(\frac{C_{vmax}}{C_v} \right)^{1/3} - 1 \right]^{-1} \quad (2.17)$$

Acorde a los resultados de Bagnold, se pueden distinguir tres regímenes de flujo en función de Ba . Para valores menores que 40 el comportamiento del flujo es newtoniano, teniéndose una relación lineal entre el esfuerzo de corte y la deformación angular del flujo. A este régimen de flujo se le denomina macroviscoso y el escurrimiento de la mezcla es laminar, equivalente al de un fluido de gran viscosidad. Para valores de Ba mayores a 450 el régimen se denomina inercial, y el esfuerzo de corte es proporcional al cuadrado de la deformación angular. Este cambio de comportamiento se debe a que los choques dominan por sobre los esfuerzos viscosos del fluido intersticial. Para valores de Ba entre 40 y 450 se habla de régimen de transición (Bagnold, 1954; Montserrat, 2005). La relación entre el esfuerzo de corte τ y el número de Bagnold se muestra de forma gráfica en la Figura 2.5, donde se incluye el régimen cuasiestático, el cual es válido para $Ba < 5$.

A pesar de la importancia del descubrimiento realizado por Bagnold, se ha demostrado que el número de Bagnold por sí solo no es suficiente para representar las características de los flujos detríticos. Por ejemplo, en el caso límite en que λ adopta valores altos, lo que ocurre cuando la concentración de sólidos tiende a la concentración de empaquetamiento, el número de Bagnold indica que el flujo se encuentra en el régimen inercial, con lo cual se esperarí que las colisiones entre partículas superen ampliamente los efectos asociados a la viscosidad del fluido. No obstante, esta conclusión puede resultar errada, debido a que es posible tener flujos con elevado número de Bagnold y con reducido movimiento por efecto de la alta concentración de sólidos, por lo que en dicho caso no son las colisiones entre partículas las que dominan el movimiento (Montserrat, 2005).

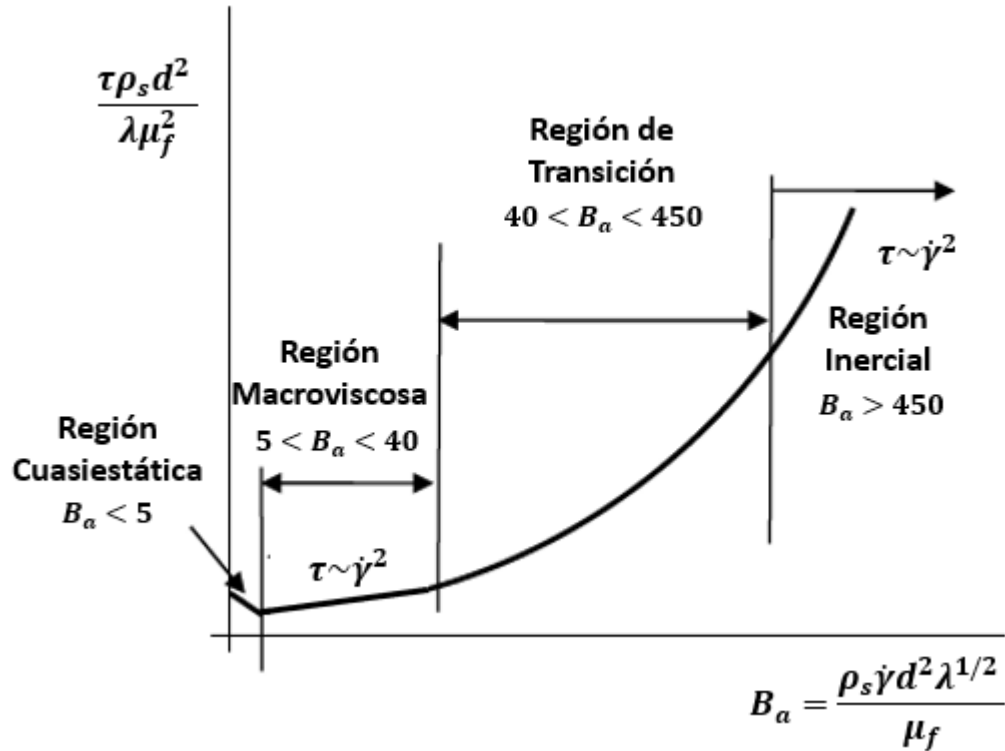


Figura 2.5: Relación esfuerzo-deformación obtenida a partir de los experimentos de Bagnold. Modificado de Takahashi (1991).

Para determinar cuándo es útil el número de Bagnold se ha propuesto utilizar el número de Savage, el cual mide la razón entre los esfuerzos de corte inerciales asociados al choque entre partículas y el esfuerzo de corte cuasiestático debido a la fricción Coulómbica entre los granos (Iverson & Denlinger, 2001). El número de Savage, introducido inicialmente en la ecuación (2.15), es comúnmente definido como:

$$S_\alpha = \frac{\rho_s \dot{\gamma}^2 d^2}{(\rho_s - \rho_f)gh} \quad (2.18)$$

Se ha identificado que en el caso que $S_\alpha < 0,1$ la fricción domina por sobre el efecto del choque entre partículas y el número de Bagnold se vuelve irrelevante. En cambio, si $S_\alpha > 0,1$ el choque entre partículas domina por sobre la fricción y el número de Bagnold puede ser utilizado (Iverson & Denlinger, 2001; Savage & Hutter, 1989).

La mayoría de los investigadores han seguido un enfoque similar al propuesto por Bagnold, donde se escoge un modelo reológico que relaciona el esfuerzo total sobre la mezcla con algún parámetro del flujo, tal como la deformación angular o la velocidad. También ha sido propuesto un enfoque distinto basado en el modelo de Coulomb, donde el esfuerzo tangencial es calculado de forma proporcional al esfuerzo normal al flujo (Iverson & Vallance, 2001). Así, se propone calcular el esfuerzo tangencial como:

$$\tau = (\sigma - p) \tan \phi \quad (2.19)$$

donde ϕ es el ángulo de fricción interna, σ es el esfuerzo normal y p la presión de poros. La ventaja de usar este enfoque es que se evita utilizar algún modelo reológico con sus limitaciones y supuestos, aunque se debe resolver una nueva ecuación para calcular la variación de la presión de poros en el flujo (Iverson & Denlinger, 2001; Iverson, 2003). Mediciones experimentales indican que la resistencia de tipo Coulómbica dominaría en el frente y bordes del flujo, donde la presión de poros es menor, mientras que la resistencia viscosa y la colisión entre partículas ganaría importancia hacia el interior del flujo (Iverson & Vallance, 2001).

Hasta aquí se ha omitido mencionar la turbulencia del flujo, ya que, si bien esta se podría generar en flujos detríticos, lo normal sería que esta sea suprimida por la presencia de altas concentraciones de partículas sólidas, especialmente si estas son finas (Fagents & Baloga, 2006). El estado agitado que es usualmente evidenciado en flujos detríticos se puede relacionar a la temperatura granular del flujo, la cual puede surgir en ausencia de turbulencia o inclusive de fluido, disipando energía a una tasa que obstruiría la generación de vórtices asociados a la turbulencia. Si bien un mayor entendimiento del funcionamiento de la turbulencia en este tipo de flujos es aún necesario, la inclusión de esta como parte de las ecuaciones del modelo no respondería a evidencia empírica, por lo que no aportaría mayor poder predictivo (Costa, 1984; Iverson, 2005; O'Brien & Julien, 1985).

2.2.2. Leyes de resistencia

Si bien se reconoce que los esfuerzos tienen múltiples orígenes, esto por las características propias del flujo, lo normal ha sido incorporar dichos términos de forma explícita, considerando al flujo como un medio continuo de una sola fase y definiendo leyes de resistencia que representan el efecto conjunto de todos los esfuerzos existentes en la mezcla. Aunque este enfoque es sumamente atractivo por su simplicidad, pues solo requiere calibrar una serie de parámetros, lo cierto es que este no es capaz de representar la evolución de los procesos que generan los esfuerzos al interior del flujo. Este no coincide además con las observaciones de laboratorio y de terreno, las cuales indican que los procesos que generan los esfuerzos dentro del flujo difieren entre el frente, formado principalmente por material grueso, y el interior de este, el cual está compuesto por material de menor tamaño que se comporta de forma más fluida (Iverson, 2003; 2005). Junto a esto, la reología de la mezcla varía durante el desplazamiento de esta, evolucionando en respuesta a cambios en la agitación de las partículas, en la concentración de los granos y en la presión del fluido, siendo estos cambios evidenciados desde que este se inicia hasta su depositación (Hung 1995; Iverson & Vallance, 2001).

Se debe tener en cuenta además que, al definir estas ecuaciones, se está comprimiendo en una serie de parámetros la falta de conocimiento asociada a los esfuerzos que actúan en el interior del flujo. Dichos parámetros deben ser luego calibrados a partir de eventos anteriores o a partir de mediciones experimentales sobre el material propenso a formar parte del flujo detrítico. Mientras que usar información de eventos anteriores resta predictibilidad al modelo (aunque ha demostrado recrear de buena forma las mediciones realizadas en terreno y laboratorio), la adquisición experimental de parámetros reológicos no cuenta con procedimientos estandarizados, además que el comportamiento real de la

mezcla no puede ser reproducido en su totalidad por medio de ensayos reométricos donde solo una fracción del tamaño de los sedimentos es considerada (Iverson, 2005)

A partir de un análisis de escala se puede demostrar que el esfuerzo de corte basal es el término más importante asociado a T (ecuación (2.4)). Mencionadas sus limitaciones, a continuación, se introducirán algunas de las leyes de resistencia presentadas en la literatura, las cuales han sido usadas y probadas para modelar el comportamiento de flujos detríticos generados tanto en la naturaleza como en experimentos. Comúnmente se ha supuesto que el esfuerzo basal en la dirección del flujo, referido de aquí en más como τ_b , es una función de la componente tangencial a la superficie del promedio vertical de la velocidad, \bar{v} , de modo que en su forma general puede ser escrita a partir de:

$$\tau_b = a_0 + a_1 \bar{v} + a_2 \bar{v}^2 + \dots + a_N \bar{v}^N \quad (2.20)$$

donde los coeficientes a_0 a a_N deben ser ajustados libremente dependiendo del nivel de precisión deseado (Iverson, 2005). No obstante, la atención ha estado restringida solamente a los tres primeros términos del lado derecho de (2.20).

Hungr (1995) presenta siete leyes de resistencia, de las cuales aquí solo se mencionarán las más relevantes. En primer lugar, está el modelo de Coulomb, el cual ya fue introducido en la ecuación (2.19) y es típicamente reescrito como:

$$\tau_b = \gamma h \left(\cos \theta + \frac{a_c}{g} \right) (1 - r_u) \tan \phi \quad (2.21)$$

donde h es la altura del flujo, γ es el peso específico de la mezcla, θ es la pendiente del terreno, $a_c = \bar{v}^2/R$ es la aceleración centrífuga, la cual depende del radio de curvatura R , y r_u es el coeficiente de presión de poros, el cual es definido como la razón entre la presión de poros y el esfuerzo normal medido en la base del flujo.

Para flujos turbulentos se propone utilizar la ecuación de Manning, con el coeficiente de fricción n como el único valor que debe ser estimado externamente:

$$\tau_b = \frac{\gamma \bar{v}^2 n^2}{h^{1/3}} \quad (2.22)$$

En el caso de fluidos que se comporten como plásticos de Bingham se tiene la siguiente ecuación cúbica, donde el esfuerzo de corte depende, además de la altura y velocidad del flujo, de la viscosidad μ_v y el esfuerzo de fluencia τ_y de la mezcla:

$$\bar{v} = \frac{h}{6\mu_v} \left(2\tau_b - 3\tau_y + \frac{\tau_y^3}{\tau_b^2} \right) \quad (2.23)$$

Las siguientes dos ecuaciones corresponden al modelo de Voellmy y al modelo cuadrático, los cuales tienen gran importancia pues son las leyes de resistencia usadas, respectivamente, por RAMMS y FLO-2D, que son dos de los modelos comerciales más usados para modelar flujos detríticos.

El modelo de Voellmy fue introducido por Voellmy (1955) para su uso en avalanchas de nieve y está formado por un término asociado a la fricción coulómbica (coeficiente μ) y un término turbulento-dispersivo (coeficiente ξ) (Bartelt et al., 2017; Salm, 1993). Si bien esta ecuación tiene un origen diferente, se ha demostrado su utilidad para modelar flujos detríticos y es el modelo reológico usado en RAMMS (Christen et al., 2012). En la ecuación (2.24) se escribe la ley de resistencia en su versión más simple, siendo posible agregar además un término asociado a la aceleración centrípeta (Hunggr, 1995) y otro relacionado a la cohesión (Bartelt et al., 2017).

$$\tau_b = \mu\gamma h \cos \theta + \frac{\gamma\bar{v}^2}{\xi} \quad (2.24)$$

El coeficiente μ controla la desaceleración del flujo, especialmente cuando este se mueve lentamente, mientras que el término turbulento-dispersivo prevalece cuando el flujo se mueve a gran velocidad (Bartelt et al., 2017; Frank et al., 2015). Ninguno de estos coeficientes está explícitamente relacionado a la rugosidad del cauce o a las propiedades del flujo, por lo que deben ser calibrados a partir de eventos previos (Frank et al., 2017).

Finalmente, se hará referencia al modelo cuadrático, el cual, en teoría, es capaz de describir un amplio espectro de regímenes de flujo, pasando desde flujos altamente viscosos a flujos donde los esfuerzos dispersivos son dominantes (Julien & Lan, 1991). Acorde a O'Brien et al. (1993), el esfuerzo de corte en flujos hiperconcentrados puede ser determinado a partir de la suma de cinco componentes, que corresponden a un esfuerzo cohesivo, un esfuerzo debido a fricción entre granos, esfuerzos viscosos y turbulentos del fluido y un esfuerzo de origen dispersivo debido a los choques inelásticos entre las partículas de mayor tamaño. Estos esfuerzos pueden ser condensados en el siguiente modelo reológico cuadrático:

$$\tau = \tau_y + \eta \left(\frac{dv}{dy} \right) + C \left(\frac{dv}{dy} \right)^2 \quad (2.25)$$

donde τ_y es el esfuerzo de corte de fluencia que considera los dos primeros esfuerzos antes mencionados, η es la viscosidad dinámica del fluido y C es un coeficiente relacionado a los esfuerzos turbulentos y dispersivos en la mezcla (una expresión para C puede ser encontrada en O'Brien et al. (1993)). Es claro que el modelo cuadrático se forma a partir de la reología de un plástico de Bingham y un término dispersivo-turbulento asociado al régimen inercial descrito por Bagnold (O'Brien & Julien, 1988). De la ecuación (2.25) se deduce la siguiente expresión para el esfuerzo de corte basal:

$$\tau_b = \tau_y + \frac{K\eta\bar{v}}{8h} + \frac{\gamma\bar{v}^2 n_{td}^2}{h^{1/3}} \quad (2.26)$$

donde K es un parámetro resistivo y n_{td} es un número de Manning equivalente que combina los términos resistivos turbulentos y dispersivos del flujo (O'Brien & Julien, 1985). Mientras que valores razonables de K y n_{td} pueden ser escogidos a partir de las características del terreno, τ_y y η varían principalmente con la concentración de sedimentos en la mezcla (FLO-2D, 2015). A menos que un análisis reológico del material

que forma el flujo esté disponible, las siguientes relaciones pueden ser utilizadas para calcular la viscosidad y el esfuerzo de fluencia:

$$\eta = \alpha_1 e^{\beta_1 C_v} \quad (2.27)$$

$$\tau_y = \alpha_2 e^{\beta_2 C_v} \quad (2.28)$$

donde α_i y β_i son coeficientes empíricos definidos a partir de experimentos de laboratorio (O'Brien & Julien, 1988). Si bien en teoría τ_y y η debiesen ser función exclusivamente de la concentración de sedimentos finos, es decir, arcillas, limos y, eventualmente, arenas finas (O'Brien et al., 1993), lo cierto es que esto requiere llevar el registro de la distribución granulométrica de las partículas del flujo, lo cual no es realizado en los modelos numéricos.

2.3. Procesos de erosión y depositación

Tal como se mencionó en las secciones anteriores, los flujos detríticos suelen incorporar gran cantidad de material a medida que se transportan por canales suficientemente inclinados y que contienen sedimento susceptible a ser erosionado, mientras que pierden material y forman depósitos una vez alcanzan terrenos con baja pendiente. Si bien no existe un criterio preciso para determinar dónde ocurre esta transición, algunos autores han presentado rangos de pendientes para cada zona del flujo (Iverson, 2013).

Acorde a VanDine (1996), el perfil de un canal o cauce susceptible a transportar flujos detríticos puede ser dividido en tres zonas: iniciación; transporte y erosión; y depositación. Mientras que para iniciar un flujo detrítico se necesita generalmente una pendiente mayor a 25° , el transporte y erosión requiere usualmente pendientes sobre los 15° . Finalmente, la depositación de este tipo de flujos se iniciaría en terrenos donde la pendiente se ha reducido a valores cercanos al 10° . Se debe notar, no obstante, que estos valores varían de un cauce a otro, además de depender del tipo de partículas que forman el flujo, el grado de selección vertical y longitudinal de estas, y su contenido de agua.

Si bien en las ecuaciones de movimiento (2.3) y (2.4) no aparece ningún término asociado a las tasas de erosión y de depositación, lo cierto es que es posible hacer surgir estos términos al desarrollar el lado izquierdo de ambas ecuaciones. Así, en esta sección se busca presentar distintas ecuaciones que han sido propuestas para representar estos procesos en los flujos detríticos.

Se debe mencionar que, en el nombre de esta Tesis y en la literatura, el término depositación refiere tanto a la incorporación de material desde el flujo al lecho cuando este se encuentra en movimiento como a la detención del flujo y posterior formación de depósitos a partir de estos. La razón de diferenciar ambos casos se debe a la forma como estos son incorporados a las ecuaciones de conservación, esto debido a que algunas relaciones presentadas para la depositación son solo aplicables en flujos en movimiento.

Por su parte, la detención del flujo está controlada principalmente por la topografía del terreno y por los esfuerzos que actúan sobre el flujo.

En las subsecciones siguientes, junto a distintas ecuaciones que han sido formuladas y validadas experimentalmente, se presentan resultados de experimentos de laboratorio y algunas mediciones obtenidas en terreno que buscan explicar el origen y factores que inciden en los procesos de erosión y depositación. Se debe tener en cuenta que, debido a la imposibilidad de predecir el tiempo y lugar en que ocurren estos fenómenos, junto a la dificultad para recolectar datos tanto en terreno como en laboratorio, es mucho lo que aún no se sabe de estos procesos, por lo que su incorporación a los modelos es usualmente realizada por medio de ecuaciones simples, las cuales buscan reproducir, al menos en parte, el fenómeno. La validez de estas ecuaciones está restringida a los supuestos, condiciones experimentales y datos usados en su formulación.

2.3.1. Erosión en flujos detríticos

Producto de la incorporación de material desde el lecho y desde sus bordes, los flujos detríticos pueden incrementar su volumen en un orden de magnitud o más antes de que estos depositen en un terreno de menor pendiente aguas abajo de su punto de origen (Berger et al., 2011a; Iverson et al., 2011). Si bien la diferencia entre lecho y bordes puede parecer difusa, la primera apunta a la reducción vertical de la cota del cauce, lo que puede generar la canalización de este y la pérdida de estabilidad en sus bordes, los cuales son susceptibles a colapsar e incorporar sedimentos directamente al flujo o a un pulso posterior. El volumen de material incorporado por este mecanismo puede ser significativo, aunque difícil de cuantificar (McDougall & Hungr, 2005). Aun cuando los flujos detríticos suelen seguir caminos moldeados por flujos anteriores, estos también tienen la capacidad de formar sus propios cauces producto de la creación de diques laterales. Estos diques están formados por las partículas de mayor tamaño, las cuales producto del transporte selectivo llegan a los bordes y son depositadas (Costa, 1984; de Haas, 2015).

Al momento de estimar cuánto material puede ser incorporado por un flujo se debe considerar, además del material erosionado directamente desde el lecho, los posibles desprendimientos de laderas y el material descargado hacia el cauce por el arrastre ordinario de sedimento. Se debe recordar siempre que cada cuenca es capaz de producir una cierta cantidad de sedimento, la cual dependerá de una serie de variables (FLO-2D, 2015). Se ha estimado que, además del área de drenaje, la magnitud de cada evento varía según la pendiente media del cauce, condiciones geológicas y clima, siendo importante considerar además otros factores, como la distribución y tamaño de sedimentos, la profundidad potencial de erosión y la estabilidad de las laderas del o los cauces principales (Montserrat, 2005).

Tal como se mencionó, los deslizamientos de tierra pueden ocurrir en diferentes escalas, dando origen a la gran mayoría de los flujos detríticos observados en la naturaleza. Los eventos pequeños comúnmente ocurren cuando una ladera cuya pendiente es cercana a la del ángulo de reposo es saturada por agua y colapsa. Por otro lado, los flujos detríticos de mayor tamaño se generan de la unión del material de múltiples colapsos de

menor tamaño, los cuales incorporan parte del material que encuentran a su paso, o por un único deslizamiento de tierra de gran magnitud (Iverson et al., 1997).

La incorporación de material desde el lecho implica la mezcla de este con el flujo, lo cual puede modificar significativamente su reología y sus propiedades, esto debido, entre otras posibilidades, a que el material erosionado puede tener una gran proporción de agua, lo cual tendría importantes efectos en la movilidad del flujo al modificar su densidad y los esfuerzos que actúan sobre este (Iverson, 2013; McDougall & Hungr, 2005). Flujos con menor concentración volumétrica de sólidos debiesen ser más erosivos y también tener los menores ángulos de depositación. La consecuencia de esto sería que el material que formaba parte de un flujo con una concentración relativamente alta puede ser erosionado y removilizado por un flujo posterior de menor concentración. Este tipo de comportamiento ha sido observado en muchos abanicos aluviales, donde los patrones de erosión y depositación siguen un comportamiento complejo (Hungr et al., 2005).

Además de depósitos laterales, el transporte selectivo produce un frente compuesto por los elementos de mayor tamaño, lo cual magnifica el caudal máximo del flujo y sería responsable de incrementar las fuerzas de arrastre en el frente, teniendo esto directo efecto en la tasa de incorporación de sedimento desde el lecho. Las partículas de mayor tamaño también pueden ser incorporadas por la parte delantera del flujo y luego ser retenidas ahí hasta su detención (Hungr et al., 2005; Iverson, 2013).

La falla y posterior desprendimiento de material es resistido principalmente por el contacto entre granos debido a la fricción, siendo esto válido tanto en la escala de granos individuales como en grandes deslizamientos de tierra. El criterio de Coulomb (ecuación (2.19)) representaría adecuadamente el estado de los esfuerzos al momento en que una superficie o una partícula del lecho falla, siendo posible agregar en el lado derecho de la ecuación el término asociado a la cohesión (Hungr et al., 2005; Iverson, 1997).

Previamente ya se mencionó que en un cauce el material es incorporado desde el lecho y desde sus bordes (ver Figura 2.6). Acorde a McDougall & Hungr (2005), la desestabilización del material que forma el lecho es similar al caso de transporte ordinario de sedimento por flujos de agua, siendo la falla de material provocada por el esfuerzo de corte que el flujo aplica a su paso. Esto se puede ver acompañado y ayudado por: los impactos de granos que forman parte de la matriz sólida; y la generación de exceso de presión de poros debido a la rápida carga no saturada, la cual puede provocar inclusive la licuefacción del lecho. La turbulencia y la sustentación podrían también jugar un rol importante, esto especialmente en zonas más diluidas del flujo, como el cuerpo o la cola. El material desestabilizado del lecho puede ser incorporado por el mismo flujo, por un pulso siguiente o en un evento posterior ocurrido en el mismo cauce.

En el caso de los bordes, la pérdida de estabilidad proviene del descenso del lecho. Los taludes, los cuales se mantendrían en un estado de equilibrio marginal, pueden responder de forma inmediata y liberar parte de su material, o hacerlo con cierto retraso, esto debido a que el flujo, al menos en parte, es capaz de frenar el colapso del talud. Este proceso es difícil de definir y cuantificar de forma analítica, debido a que la información requerida, la cual está relacionada a la pendiente y material del talud, las características del frente del

flujo y la tasa y profundidad de erosión del lecho, entre otros, no puede ser normalmente obtenida (Hungr et al., 2005).



Figura 2.6: Flujo detrítico ocurrido en Tsing Shan, Hong Kong, en septiembre de 1990. Es posible apreciar la erosión generada por el flujo en el lecho (King, 1996).

Otro mecanismo que puede ser dominante en la desestabilización del lecho en los bordes y frente del flujo es el llamado *plowing*, el cual consiste en el desplazamiento de material del fondo debido a la rápida carga que el flujo ejerce. Este mecanismo ocurre, por ejemplo, cuando hay una disminución de pendiente en la dirección del flujo. El material desplazado puede ser incorporado por el flujo o por un pulso posterior, a la vez que en la parte delantera del flujo se puede generar un nuevo pulso que precede al flujo principal (McDougall & Hungr, 2005).

Hungr et al. (2005) analizaron analíticamente la estabilidad de un lecho por medio de un balance de esfuerzos en un talud infinito con pendiente única y flujo uniforme. Si bien es posible obtener una profundidad z en la cual el suelo se vuelve inestable y puede ser incorporado al flujo (tanto para la condición drenada como no drenada de la presión de poros), se reconoce que los resultados obtenidos son de poca utilidad en casos prácticos, debido a la poca generalidad de los supuestos utilizados y a la falta de conocimiento que se tiene respecto al comportamiento de ciertas variables, como la presión de poros. Además, el cálculo de z no permite conocer la tasa a la cual el material es incorporado al flujo. El proceso de erosión asociado a la desestabilización de los márgenes del cauce

es incluso más difícil de manejar teóricamente, por lo que los autores proponen abordar el problema desde un enfoque empírico para obtener la cantidad de sedimento que es incorporado por un flujo detrítico.

A partir de mediciones realizadas en British Columbia, Canadá, Hungr et al. (1984) presentaron el concepto de tasa de rendimiento del cauce (*yield rate*) Y_i , definido como el volumen por unidad de largo erosionado del lecho de un cauce. Los autores proponen que existe una serie de parámetros que controlan el valor de Y_i para un tramo i , estos son: pendiente; ancho y profundidad del canal existente; material del lecho; ángulo de los taludes del cauce; altura, estabilidad y material de los taludes; y área drenada por el cauce. Para aplicar el método, la red de canales de la cuenca debe ser dividido en tramos cuyos parámetros sean aproximadamente constantes, y luego estimar los valores de Y_i para los n tramos definidos. Así, el volumen total del flujo detrítico puede ser estimado a partir de:

$$V = V_{inicial} + \sum V_{puntual} + \sum_{i=1}^n Y_i L_i \quad (2.29)$$

donde $V_{inicial}$ representa típicamente el volumen del deslizamiento de tierra que da origen al flujo, $V_{puntual}$ refiere a un volumen incorporado por una fuente puntual, y L_i es el largo de un tramo con tasa de rendimiento Y_i . Para estimar los distintos parámetros se debe tener conocimiento del tiempo pasado desde el último flujo detrítico generado en la cuenca, debido a que esto entrega información del material disponible para ser erosionado. Se debe diferenciar además entre canales que sean rocosos, donde el material erosionable es limitado y puede ser estimado visualmente, de canales donde no existe una capa de material no erosionable, en los cuales la cantidad de material incorporado al flujo estará limitado por la capacidad de este de transportarlo e incorporarlo como parte del flujo. Para estimar Y_i se pueden multiplicar el ancho del cauce B_i por una profundidad de erosión D_i , la que debe ser estimada visualmente o a partir de estudios del subsuelo en la zona. A partir de una serie de valores reportados desde distintos lugares del mundo, se ha estimado que la tasa de rendimiento puede llegar a valores superiores a $30 \text{ m}^3/\text{m}$, mientras que mediciones en base a flujos ocurridos en British Columbia indican que las alturas de erosión y depositación varían entre -3 y 3 m , con unos pocos valores en el rango -5 y 5 m (Hungr et al., 2005). No obstante, en otros lugares se han reportado alturas de erosión excepcionalmente altas que han sobrepasado los 10 m (Pierson, 1980).

Además del enfoque recién mostrado, Hungr et al. (1984) proponen como primera aproximación estimar la magnitud del evento a partir del tamaño de la cuenca aportante, esto por medio de un coeficiente de productividad de la cuenca. No obstante, esto no reconoce que la mayor cantidad de sedimentos incorporados al flujo provienen de la erosión del lecho y de sus laderas inmediatas, siendo por tanto mejor utilizar el coeficiente Y_i y la ecuación (2.29). A pesar de esto, se ha reportado que Y_i puede variar al menos en tres órdenes de magnitud entre distintos cauces. Cualquiera sea el enfoque usado, se debe tratar de acotar la profundidad máxima de erosión, lo cual, si bien en algunos casos no es posible, en muchos otros existe una capa límite de sustrato que no puede ser

erosionada y que determina el material disponible para ser movilizado (McDougall & Hungr, 2005).

Si bien es posible medir en terreno los cambios en elevación del fondo de un cauce producto del paso de un flujo detrítico, esto no aporta información sobre la tasa a la que el flujo incorpora material. Esto tampoco permite dilucidar cuáles de los múltiples parámetros que han sido propuestos, entre los que se encuentran la concentración de sólidos, densidad y tamaño de las partículas, el grado de saturación del sustrato y la pendiente y la estabilidad del lecho (Cuomo et al., 2016), son los más importantes en este proceso. Para lidiar con esto, en las últimas dos décadas se han desarrollado interesantes experimentos de laboratorio y mediciones en terreno, los cuales han entregado valiosa información sobre el proceso de incorporación de material al flujo. Algunos de estos experimentos y mediciones se presentan a continuación.

Por medio de experimentos realizados en el canal del USGS con un fondo erosionable, Iverson et al. (2011) demostraron que el contenido volumétrico de agua en el sedimento tiene directa influencia en la variación de momentum en la mezcla producto de la incorporación de sedimento del lecho. Para el experimento se varió el contenido volumétrico de agua θ en el sedimento entre 0,15 y 0,28, y se midió la tasa de erosión en distintas posiciones del lecho con sensores eléctricos, reportándose valores entre 0,05 y 0,10 m/s . Se obtuvo además que los flujos sobre los lechos más húmedos incrementaron su velocidad y grado de agitación rápidamente, mientras que los flujos sobre los lechos más secos disminuyeron su velocidad. Además, los flujos que interactuaron con los lechos más húmedos también incorporaron más material y recorrieron mayores distancias. La diferencia en el comportamiento del flujo sobre ambos tipos de lecho se debe, al menos en parte, al cambio de densidad producto de su mezcla con material más húmedo o seco. A esto se debe sumar que en suelos más húmedos la rápida carga generada por el flujo detrítico produce altas presiones de poros, lo que disminuye la fricción con el flujo, aumentando su momentum y la erosión del lecho, y, por consiguiente, su velocidad y masa.

En la quebrada Illgraben, ubicada en el suroeste de Suiza, se midieron tasas de erosión para una serie de flujos detríticos utilizando sensores verticales, los cuales consistían en una sucesión de cilindros dispuestos uno encima de otro y enterrados en el lecho del cauce (ver Figura 2.7). La medición de la remoción de estos cilindros permitió estimar la tasa de erosión en tiempo real para una serie de flujos, reportándose un valor puntual máximo de 0,8 m/s y una tasa promedio de 0,05 m/s . Junto a esto se registró la altura y velocidad del flujo, sugiriendo estos datos que la erosión ocurre pocos segundos antes de la llegada del caudal máximo, lo que es coincidente con los mayores esfuerzos de corte y los mayores esfuerzos debido a los impactos entre las partículas sólidas y el lecho. En particular, los resultados obtenidos sugieren que estos últimos esfuerzos son los que podrían dominar el proceso de erosión en el frente del flujo, al igual que sus fluctuaciones, las cuales también se reportan son máximas en el frente. El último resultado presentado es que, luego del paso del frente, cierto volumen de material es depositado en el lecho, lo que indicaría que la profundidad de erosión máxima puede ser mayor a la medida posterior al evento, además de constatarse la generación de un proceso secuencial de erosión y depositación en el cauce durante el paso de un flujo detrítico (Berger et al., 2011b).

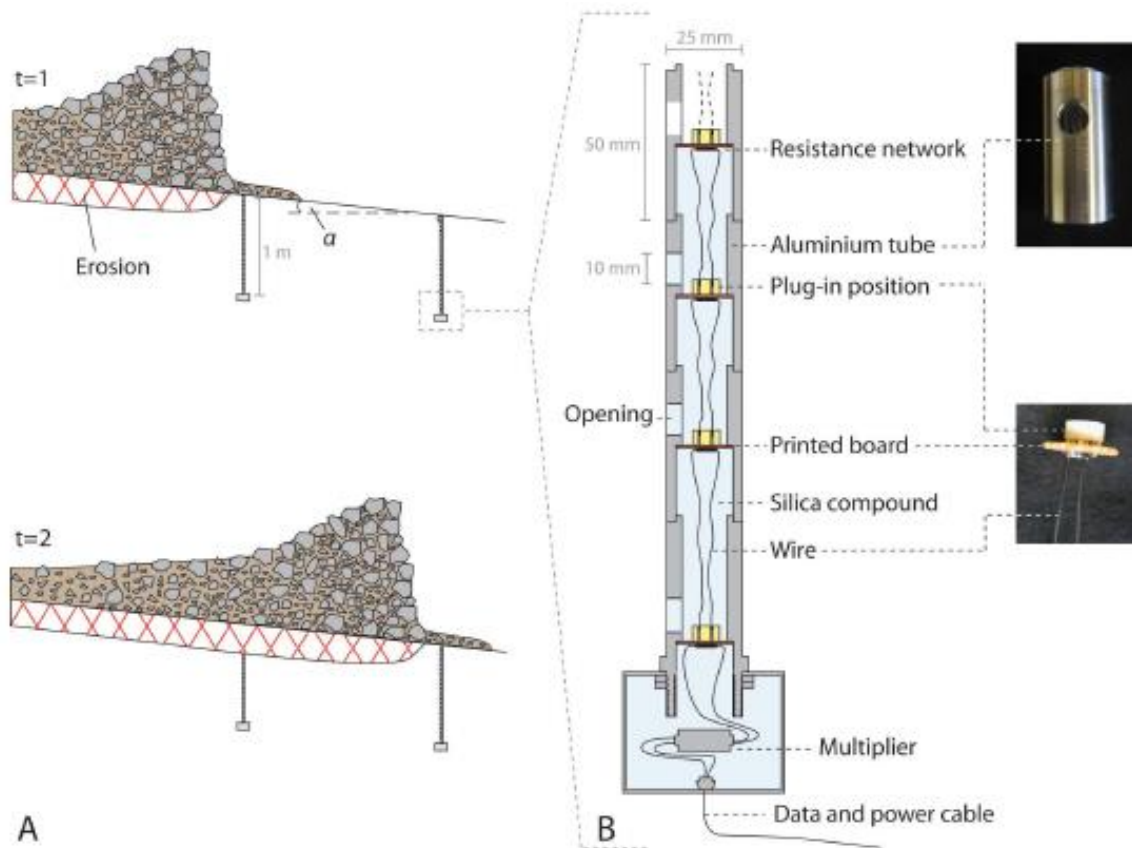


Figura 2.7: Detalles de instalación y construcción de los sensores de erosión. (a) Esquema de la ubicación de los sensores. Se puede observar la erosión provocada por el frente de flujo en dos pasos de tiempo consecutivos (b) Detalles del sensor de erosión (Berger et al., 2011b).

A partir de mediciones experimentales y en terreno, Rickenmann et al. (2003) sugieren que flujos con mayor concentración de sólidos son menos erosivos que flujos con menor concentración de sedimento, esto especialmente cuando se supera una concentración volumétrica de sólidos de 0,4. Además, en sus resultados se observa que el volumen erosionado tiene cierta dependencia con el valor máximo de caudal, la pendiente del canal, el volumen inicial de la mezcla y el contenido de agua de esta.

Por su parte, Mangeney et al. (2010) realizaron una serie de experimentos para determinar el efecto que tiene sobre la eficiencia de erosión la pendiente del lecho y el espesor de la capa de sedimento erosionable. Sus resultados sugieren que la eficiencia de la erosión tiene una fuerte dependencia con la inclinación del cauce, pues la distancia recorrida por el flujo se incrementa de forma casi lineal con el espesor de la capa erosionable para pendientes superiores a cierto ángulo crítico. Para pendientes inferiores a dicho ángulo, el flujo y sus depósitos son insensibles a la presencia y espesor de la capa de sedimento erosionable. A partir de la configuración utilizada en sus experimentos, los autores obtuvieron que el ángulo crítico se aproxima a la mitad del ángulo de reposo del material que forma el lecho. De este modo, se tiene un fuerte incremento en la eficiencia de erosión producto del aumento de la pendiente del lecho, lo cual se explica debido a que, a mayores pendientes, es menor la energía que se requiere

para desestabilizar las partículas que forman parte de este. Los autores pudieron comprobar además que el lecho es erosionado por el frente del flujo detrítico.

Siguiendo la metodología e instalación experimental implementada en el canal del USGS por Iverson et al. (2011) y en el Illgraben por Berger et al. (2011b), McCoy et al. (2012) obtuvieron datos de seis flujos detríticos ocurridos en la parte alta de una cuenca ubicada en Colorado, Estados Unidos. El principal resultado obtenido es que la tasa de erosión incrementa significativamente con el grado de saturación del lecho previo al arribo del frente del flujo, además de constatarse que la incorporación de material desde el lecho se genera de forma progresiva y no debido a la falla súbita de una porción de este. La tasa de erosión promedio para los flujos detríticos ocurridos sobre lechos secos está en el rango $0,2 - 0,5 \text{ cm/s}$. En el caso de flujos detríticos que se desarrollan sobre lechos previamente saturados, la tasa de incorporación de sedimento promedio se encuentra en el rango $1,1 - 14,3 \text{ cm/s}$. En ambos casos se observó además que la incorporación de material se mantiene luego del paso del frente del flujo, esto inclusive ante cambios de altura, densidad y velocidad del flujo. McCoy et al. (2012) explican esta diferencia generada por el contenido de humedad en el lecho a partir de su efecto en la propagación de las fluctuaciones de los esfuerzos normales y del exceso de presión de poros, los cuales ayudan a reducir el esfuerzo normal sobre el lecho. Esto fue constatado empíricamente, pues el arribo del frente de humedad usualmente precede por pocos segundos la desestabilización y posterior incorporación del material. Así, los resultados indican que en el caso de lechos secos la tasa de incorporación de material queda limitada por la velocidad a la cual el agua puede infiltrar el sedimento ubicado en el lecho. Finalmente, de sus mediciones los autores concluyen que la tasa y la ocurrencia de la incorporación de material desde el lecho no está bien correlacionada con algunas propiedades de la mezcla, tales como su densidad, altura y velocidad.

A continuación, se enumerarán algunas de las ecuaciones propuestas por diversos autores para incorporar la erosión de sedimento a los modelos numéricos. Muchas de estas ecuaciones fueron obtenidas de experimentos de laboratorio o mediciones en terreno, por lo que su directa aplicación no es aconsejable sin realizar un análisis crítico de las condiciones en que estas fueron deducidas ni de los supuestos que consideran. Debido a la gran incertidumbre que existe aún sobre los procesos que propician tanto la desestabilización del lecho como la posterior incorporación de material al flujo, parece ser recomendable utilizar ecuaciones simples con pocos parámetros para modelar estos procesos, de modo tal de reducir los posibles errores en la estimación de las variables y aumentar la confianza sobre los resultados obtenidos (Christen et al., 2010; McDougall & Hungr, 2005). En las ecuaciones mostradas a continuación se mantiene la notación usada originalmente por sus autores, siendo posible encontrar algunas más en Iverson & Ouyang (2015).

El módulo de incorporación de sedimento usado en RAMMS calcula una profundidad potencial de erosión y la tasa a la cual esta ocurre a partir de la generalización de los datos medidos en el Illgraben, Suiza (Frank et al., 2015). La máxima profundidad de erosión e_m es calculada comparando el esfuerzo de corte $\tau = \rho ghS$, siendo S la pendiente del canal, con un esfuerzo de corte crítico τ_c , el cual surge de la constatación empírica de que los flujos detríticos más pequeños no son siempre capaces de incorporar

sedimento (Bartelt et al., 2017). A partir de las mediciones realizadas por Schürch et al. (2011) se propone la siguiente relación lineal para calcular e_m :

$$e_m = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau < \tau_c \\ \frac{dz}{d\tau}(\tau - \tau_c) & \text{si } \tau \geq \tau_c \end{cases} \quad (2.30)$$

siendo $\frac{dz}{d\tau}$ un valor constante estimado como $\frac{dz}{d\tau} = -0,1 \text{ m kPa}^{-1}$, mientras que para el esfuerzo de corte crítico se propone usar $\tau_c = 1 \text{ kPa}$. Ambos valores recién enunciados representan los valores promedio ajustados a partir de las curvas presentadas por Schürch et al. (2011). Debido a que τ depende de h , siendo la altura del flujo variable en el espacio y el tiempo, e_m se va ajustando durante el transcurso de la simulación. Por su parte, la tasa de erosión $\frac{dz}{dt}$ es estimada a partir del valor promedio de las mediciones realizadas por Berger et al. (2011b). En el modelo, la incorporación de sedimento se activa cuando τ_c es superada y siempre y cuando la profundidad de erosión e_t no supere el valor calculado para e_m (Frank et al., 2015).

$$\frac{dz}{dt} = -0,025 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{si } e_t \leq e_m \quad (2.31)$$

La profundidad de erosión e_t es calculada a partir de la tasa de erosión $\frac{dz}{dt}$, el paso de tiempo usado y el valor de e_t en el paso de tiempo previo, de modo que este valor se va incrementando de forma progresiva durante la simulación.

Takahashi et al. (1992) proponen ecuaciones de erosión que fueron probadas en un experimento 1-D considerando sedimentos de tamaño variable. Estas ecuaciones buscan representar el caso saturado y el no saturado. Para el caso no saturado, se supone que se agregaran partículas desde el lecho al flujo mientras la concentración en el flujo sea menor que la concentración de equilibrio C_∞ , la cual se obtiene al igualar esfuerzos en el lecho considerando el peso de la columna de fluido y la resistencia de tipo Coulómbica ejercida por las partículas vecinas:

$$C_\infty = \frac{\rho_f \tan \phi}{(\rho_s - \rho_f)(\tan \phi - \tan \theta)} \quad (2.32)$$

donde ρ_f es la densidad del fluido intersticial, ρ_s es la densidad de los sedimentos, θ es la pendiente y ϕ es el ángulo de fricción interna del sedimento. Así, cuando $C_v < C_\infty$ y la pendiente del canal es mayor que la pendiente de equilibrio, la tasa de erosión se calcula a partir de:

$$\frac{i}{\sqrt{gh}} = K \sin^{\frac{3}{2}} \theta \left(1 - \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w} C_v \left(\frac{\tan \phi}{\tan \theta} - 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\tan \phi}{\tan \theta} - 1 \right) (C_\infty - C_v) \frac{h}{d} \quad (2.33)$$

siendo h la altura del flujo, C_v la concentración de sedimento, d el diámetro medio de las partículas y K una constante (un valor de 0,06 es considerado como apropiado). Si $C_v <$

6,7 C_{∞}^2 y la pendiente del canal es menor que el valor crítico, se debe reemplazar C_{∞} por $6,7 C_{\infty}^2$ en la ecuación previa. Cuando el lecho está saturado la siguiente fórmula es la propuesta:

$$i = \delta_e \frac{C_{\infty} - C_v hU}{C^* - C_{\infty} d} \quad (2.34)$$

donde δ_e es una constante (Uchida et al. (2013) utilizan un valor de $7 \cdot 10^{-4}$), U es la velocidad del flujo y C^* es la concentración volumétrica de sedimentos en el lecho. Además de estas ecuaciones, los autores formulan una ecuación para la tasa de depositación, no obstante, resulta de mayor interés considerar una versión modificada presentada por Uchida et al. (2013):

$$i = \delta_d \frac{C_{\infty} - C_v hU}{C^* d_c} \quad (2.35)$$

donde δ_d es una constante (Uchida et al. (2013) utilizan un valor de $5 \cdot 10^{-2}$), d_c es un diámetro representativo de las partículas gruesas de la mezcla e i es supuesto como un valor negativo, por lo que en la práctica esta ecuación es aplicable solo si $C_{\infty} < C_v$.

Investigadores han demostrado que el tamaño de los sedimentos en el lecho y la concentración de sedimento en el flujo modifican la tasa de erosión. Egashira et al. (2001) evaluaron calcular la tasa de erosión E a partir de la pendiente de equilibrio θ_e , la pendiente θ del lecho, la velocidad del flujo promediada en la vertical v y la concentración volumétrica de sedimento en el lecho c^* :

$$E = c^* v \tan(\theta - \theta_e) \quad (2.36)$$

Esto supone que la pendiente del lecho siempre se readecua a su valor de equilibrio, de modo que si $\theta_e > \theta$ se genera depositación de sedimento, aunque esto no fue probado en sus experimentos. La pendiente θ_e se obtiene del equilibrio de fuerzas en el lecho considerando el efecto del peso de la columna de fluido y la resistencia Coulómbica ejercida por las partículas vecinas. De dicho análisis se obtiene:

$$\theta_e = \tan^{-1} \left(\frac{(\rho_s - \rho_w) C_v}{(\rho_s - \rho_w) C_v + \rho_w} \tan(\phi) \right) \quad (2.37)$$

donde C_v es la concentración volumétrica de sedimento en el flujo y el resto de las variables son las mismas definidas para la ecuación (2.32). Esta ecuación para la tasa de erosión fue probada experimentalmente para el caso en que el diámetro de las partículas del lecho es igual al de las partículas del flujo, mientras que, si el diámetro de las partículas del lecho aumenta, se demostró que la tasa disminuye. Se comprobó además que, para las condiciones del experimento, a mayor concentración de sedimentos en el flujo se produce una leve disminución en la tasa de erosión del lecho.

McDougall & Hungr (2005) proponen como hipótesis el crecimiento exponencial del flujo con su desplazamiento, lo cual permite calcular la tasa de erosión de forma simple a partir de la altura y velocidad del flujo:

$$\frac{\partial b}{\partial t} = E_x h \bar{v} \quad (2.38)$$

siendo $\frac{\partial b}{\partial t}$ la variación de la altura del fondo o tasa de erosión y E_x un coeficiente que se supone independiente de la velocidad del flujo. Aunque sumamente empírico, los autores subrayan que la metodología tiene una base física, debido a que los cambios en la condición de equilibrio en el fondo están relacionadas al esfuerzo normal en el lecho y por consiguiente con la altura del flujo. Dado que la altura de flujo aumenta con $\frac{\partial b}{\partial t}$, es claro que los valores de la tasa de erosión aumentarán de forma no acotada al igual que la altura del flujo, esto a menos que se limite la cantidad de material que puede ser erosionado. En su modelo, McDougall & Hungr (2005) suponen que el material incorporado tiene igual densidad que el flujo.

Por su parte D’Aniello et al. (2015) presentan un modelo numérico 1D para la simulación de flujos detríticos utilizando el modelo reológico cuadrático (ecuación (2.25)) y considerando un flujo de densidad variable. El intercambio de sedimento entre el flujo y el lecho es controlado a partir de la tasa de erosión E y la tasa de depositación D , ambas evaluadas a partir de las ecuaciones empíricas propuestas por Cao et al. (2004), donde θ es el esfuerzo de corte adimensional de Shields, θ_c es un valor crítico del esfuerzo adimensional, d es el diámetro del sedimento, ω_0 es la velocidad de depositación de una partícula de sedimento en agua estática, y α , β y m son constantes empíricas por determinar (h , \bar{v} y C_v son las variables usuales):

$$E = \begin{cases} \beta(\theta - \theta_c) |\bar{v}| h^{-1} d^{-0.2}, & \text{si } \theta > \theta_c \\ 0, & \text{si } \theta \leq \theta_c \end{cases} \quad (2.39)$$

$$D = \alpha C_v \omega_0 (1 - \alpha C_v)^m \quad (2.40)$$

Luego, el cálculo del flujo neto de sedimento entre el lecho susceptible a ser erosionado y el flujo es $\rho_b N_b$, donde N_b se calcula como la resta entre E y D (ambos valores son positivos) y ρ_b es la densidad del material que forma el lecho. Lo interesante del modelo es que considera que la densidad del lecho es distinta a la del flujo, junto a una ecuación para la depositación, aunque esta no proviene de mediciones realizadas en flujos detríticos.

Finalmente, Fagents & Baloga (2006) proponen como parte de su modelo que la tasa de incorporación de material desde el lecho en el caso de lahares puede ser representada por medio de la siguiente ecuación:

$$B = \alpha u h \frac{\rho_{max} - \rho}{\rho_{max} - \rho_0} \quad (2.41)$$

donde α es un coeficiente de proporcionalidad, ρ_0 es la densidad de la mezcla al momento de iniciarse el flujo y ρ_{max} la máxima densidad que alcanza el flujo. De este modo, el supuesto es que la incorporación de material se debe principalmente a la turbulencia del flujo, la cual disminuye a medida que aumenta la densidad de la mezcla.

Para la depositación los autores proponen agregar el siguiente término a la ecuación de continuidad, donde v_s es una constante con dimensiones de velocidad:

$$D = -v_s \frac{\rho - \rho_w}{\rho_s - \rho_w} \quad (2.42)$$

con ρ la densidad de la mezcla, ρ_w la densidad del agua y ρ_s la densidad de los sólidos. Por medio de esta ecuación, los autores plantean que las pérdidas de volumen ocurren debido a una depositación selectiva de los sedimentos más pesados, los cuales tendrían una densidad más alta que la de la mezcla.

2.3.2. Depositación en flujos detríticos

En la literatura se usa el término depositación tanto para el proceso de incorporación de material desde el flujo hacia el lecho, lo que ha sido medido y observado en terreno por diversos investigadores (Berger et al., 2011b; Hungr et al., 2005; McCoy et al., 2012; Schürch et al., 2011), como a la detención del flujo en zonas de baja pendiente y/o gran sección transversal. El primer proceso puede ser incluido en los modelos por medio de una tasa de depositación, la cual resulta análoga a una tasa de erosión negativa (Iverson, 2012), mientras que el segundo es incorporado en todos los modelos por medio de una ley de resistencia, la cual controla la distancia que el flujo es capaz de recorrer antes de detenerse. Debido a las escasas mediciones obtenidas, ya sea en terreno o laboratorio, la gran mayoría de los modelos no incorporan una ecuación que permita simular la tasa de depositación. No obstante, esto también se puede deber a que este proceso ocurriría típicamente en la parte final del flujo y a que al evaluar el riesgo asociado a un flujo detrítico lo mejor es considerar la condición más desfavorable posible.

En la subsección anterior ya se hizo referencia a mediciones de los depósitos que se pueden generar en cauces y quebradas, los cuales pueden tener varios metros de espesor (Hungr et al., 2005), y a ecuaciones planteadas para estimar la tasa de depositación (ver ecuaciones (2.35), (2.36), (2.40) y (2.42)). No obstante, se debe notar que dichas ecuaciones no han sido validadas experimentalmente y que rara vez han sido usadas en la modelación de flujos detríticos.

En lo que resta de esta subsección, solo se hará referencia a la depositación entendida como la etapa final del flujo, donde, debido a los choques internos entre partículas y a su interacción con el lecho, toda la energía cinética es degradada de forma irreversible. Como parte de este proceso, la mezcla eventualmente comienza a desacelerar hasta detenerse, dando forma a un depósito sólido cuyo espesor disminuye en la dirección del flujo (Costa, 1984; Iverson, 1997).

Acorde a Major & Iverson (1999), el proceso de depositación está fuertemente relacionado a la distribución de presiones de poros en la mezcla, ya que mientras en su interior se tienen altas presiones (inclusive cercanas al límite de licuefacción), las que se pueden mantener durante la desaceleración y depositación del flujo, en los bordes estas presiones son bajas o nulas, lo que aumenta la fricción producto del contacto entre los granos y la superficie. Esto indicaría que la depositación no ocurre en todo el flujo al mismo tiempo, sino que está focalizada en el perímetro, donde experimentalmente se ha comprobado que se acumulan las partículas de mayor tamaño, las cuales, debido a su alta permeabilidad, no son capaces de preservar altas presiones de poros. Luego, el flujo es detenido por su parte delantera, la cual actúa como una presa móvil que impide que el resto de la mezcla avance libremente.

Debido a que las mezclas con sedimentos más pequeños tienen menor permeabilidad, en los bordes de estas las presiones de poros son mayores y son mantenidas por mayor tiempo, lo que reduce la fricción y permite que el flujo se despliegue por una zona más amplia. Esto produce que flujos detríticos con sedimentos de menor tamaño formen depósitos de menor espesor y cubran un área mayor. Esto no es reflejado, por ejemplo, por modelos que no consideren la presión de poros, pues mientras mayor sea la concentración de los sedimentos mayor será su viscosidad y esfuerzo de fluencia, por lo que deberían alcanzar depósitos más gruesos y un menor desplazamiento (Major & Iverson, 1999).

A partir de experimentos se ha observado que la detención de estos flujos ocurre primero en su base, propagándose luego al resto de la columna de fluido. Los depósitos generados suelen ser secos y de mayor firmeza en los extremos, mientras que el interior se mantiene húmedo y débil, pudiendo mantener altas presiones de poros por varios días o semanas antes de que el material se consolide y parte del fluido sea drenado (Iverson, 1997; 2013).

Si bien la presión de poros explica, al menos en parte, la depositación del flujo, esta no permite estimar de forma simple en qué parte del cauce o del cono de deyección el flujo se detiene. Para esto usualmente se ha planteado la existencia de una pendiente límite, la cual indicaría la zona en la cual el flujo pierde su capacidad de transportar sedimento a una velocidad uniforme, por lo que este comenzaría a desacelerar y a depositar material. Este proceso se intensificaría una vez el flujo alcanza un canal suficientemente ancho, donde debido al colapso del frente del flujo este reduce su altura y su fuerza (Costa, 1984; Hungr et al., 1984; Takahashi et al., 1992)

Se ha planteado a partir de observaciones experimentalmente que la detención y posterior depositación de un flujo detrítico es el resultado de una serie de condiciones, siendo las más importantes la disminución de la pendiente del cauce, la pérdida de confinamiento del flujo producto del ensanchamiento del canal y la presencia de cualquier obstáculo, sea natural o artificial, en la dirección del flujo. Estas condiciones pueden actuar de forma separada o conjunta, variando su importancia en cada cauce y para cada flujo (VanDine, 1996). Hungr et al. (1984) sugieren que la depositación en flujos detríticos empezaría alrededor de los 8 y 12° para canales confinados y entre 10 y 14° cuando no lo son, siendo posible, en ciertos casos, que flujos no confinados depositen en pendientes entre 16 y 20°. Se propone que el confinamiento es más crítico que el gradiente del canal

para determinar la depositación del flujo cuando la pendiente es menor a 18° , esto probablemente debido a la existencia de un espesor crítico del flujo (Ancey, 2001). Además, la experiencia muestra que, para un mismo canal, los flujos más grandes depositarían en zonas con menor pendiente, pudiendo inclusive recorrer varios kilómetros de distancia. El contenido de agua, la composición de la mezcla y el tamaño de las partículas también tendrían un rol importante en el proceso (Costa, 1984; Hungr et al., 2005)

Cuando el flujo alcanza el cono de deyección, lo usual es que este se expanda y cubra una gran área o que se genere avulsión del flujo y este deposite formando varios brazos. Fuera de los márgenes, donde suelen acumularse las partículas de mayor tamaño, el resto del depósito suele estar pobremente estratificado y el grado de selección de las partículas es bajo (Costa, 1984, Fagents & Baloga, 2006; VanDine, 1996). Depósitos laterales (*levee* en inglés) son usualmente observados por sobre los bordes del cauce o en los bordes del flujo cuando estos escurren por sus conos de deyección. Estos embancamientos se pueden apreciar inclusive cientos de metros antes de la zona donde el flujo comienza a desacelerar y están usualmente formados por las partículas de mayor tamaño, las cuales por el transporte selectivo se encuentran naturalmente ubicadas en los bordes del flujo (Benda, 1990; Iverson, 2013; Schürch et al., 2011). En particular, en un estudio que comprendió 46 flujos detríticos ocurridos en cuencas previamente sometidas a incendios forestales, Santi et al. (2008) observaron que en 87% de los casos se desarrollaron depósitos laterales, considerando estos una media del 10% del volumen total del depositado (Santi et al., 2008).

A partir de una serie de experimentos a pequeña escala, realizados en un canal de 2 m de largo y una zona de depositación de 1,45 m, de Haas et al. (2015) evidenciaron que la geometría de los depósitos: ancho, espesor y forma; así como la distancia recorrida por este tipo de flujos, estarían fuertemente determinados por su composición, siendo esta al menos tan importante como la pendiente del lecho. Para las condiciones de sus experimentos, los investigadores encontraron un óptimo para la fracción de material grueso y fino que genera el mayor desplazamiento longitudinal de la mezcla. En el caso del material grueso, un incremento inicial conlleva un mayor desplazamiento de la mezcla, el cual está asociado, probablemente, a la formación de depósitos laterales que permiten encausar el flujo. Por el contrario, a medida que sigue aumentando la fracción que el material grueso ocupa en la mezcla, mayor es la cantidad de material grueso que se acumula en el frente del flujo, lo que incrementa la fricción y disminuye la distancia que este puede desplazarse. En el caso del material fino, si su fracción en la mezcla es baja, un incremento inicial permite aumentar su desplazamiento, estando esto relacionado a la capacidad de generar presiones de poros que limiten el contacto entre los granos sólidos. A pesar de esto, se ha comprobado que sobre cierta fracción de material fino el incremento en la viscosidad es tal que termina por reducir su capacidad para desplazarse.

Además de variar la fracción que ocupan tanto el material grueso como fino en la mezcla, de Haas et al. (2015) probaron distintas configuraciones de pendiente y ancho del canal, variar la pendiente de la zona de depositación, cambios en el volumen total del flujo y el uso de un rango de valores de fracción de agua en la mezcla. En todos estos casos se observó que un incremento de las variables genera un aumento en la distancia que el

flujo es capaz de recorrer antes de detenerse. No obstante, se evidenciaron diferentes efectos en la geometría de los depósitos, pues mientras que un mayor contenido de agua reduce el espesor de estos, el incremento del resto de las variables tiene un efecto despreciable, salvo por el área inundada, en la forma del material depositado.

Respecto a la forma de los depósitos generados, de Haas et al. (2015) observaron que la mayoría tienen una morfología similar, la cual consiste en un cauce bordeado por diques laterales y una forma lobular en el frente del flujo, acumulándose en ambas las partículas de mayor tamaño (ver Figura 2.8). De sus resultados se concluye que la composición de la mezcla controla el alto y ancho del frente, además de la altura de los depósitos laterales. En particular, para flujos con una muy alta concentración de finos ($>0,22$) las partículas gruesas no se acumulan en el frente y no se forman depósitos laterales, lo que provoca que el flujo se propague lateralmente luego de dejar el canal. En cambio, para una gran cantidad de condiciones del flujo, la forma del depósito es la previamente mencionada, con depósitos laterales y un frente formado por las partículas más grandes, estando estas geometrías determinadas por la fracción que ocupa el material grueso y la segregación de este en la mezcla. Para las condiciones de los experimentos, se comprobó que el máximo desplazamiento ocurre para fracciones de material grueso entre 0,25 y 0,50 del total de la mezcla.



Figura 2.8: Comparación entre los depósitos obtenidos de flujos detríticos generados en el laboratorio y en la naturaleza. En (a) y (b) se pueden observar los depósitos laterales formados por las partículas de mayor tamaño. En (c) y (d) se tiene el frente del flujo, el cual está formado por las partículas más gruesas y tiene una forma lobular (de Haas et al., 2015).

Los autores proponen que son cuatro los posibles procesos que pueden generar la depositación de un flujo detrítico: decaimiento del exceso de presión de poros; decaimiento de los esfuerzos debido a la colisión entre partículas sólidas y el incremento de la fricción debido al contacto entre estas; incremento de la fricción en los márgenes del flujo debido a la acumulación de las partículas de mayor tamaño y la ausencia de presión de poros; y el efecto de la viscosidad y esfuerzo de fluencia de la mezcla. De estos, se reporta que solo el penúltimo fue evidenciado en la gran mayoría de los experimentos, mientras que el último proceso es probablemente la causa de la depositación de las mezclas formadas por gran cantidad de material fino.

Ocupando el canal de grandes dimensiones del USGS, Major (1997) desarrolló una serie de experimentos en los que demostró que la depositación en flujos detríticos puede ocurrir por acreción vertical del material proveniente de distintos pulsos de uno o más flujos de similar composición. Como resultado de esto, se pueden generar depósitos con baja o nula estratificación, y cuya estructura no puede ser diferenciada de la de otros flujos donde se observó la detención súbita y en masa del material. En sus experimentos, donde se usó material no cohesivo y se generaron flujos rápidos de limitada extensión longitudinal, se pudo constatar que el confinamiento del flujo en la zona de depositación permite aumentar considerablemente el desplazamiento de este. Además, se observaron distintos patrones de depositación, entre los que se incluyen: desplazamiento por empuje de los depósitos generados por pulsos previos; desplazamiento horizontal del nuevo pulso, esto a modo de evitar depósitos existentes; y la ya mencionada acreción vertical y horizontal de material. En estos experimentos los depósitos generados exhiben características morfológicas comunes a los depósitos observados en flujos naturales, con un frente lobular de pendiente pronunciada, depósitos laterales de material grueso y bordes arqueados con pendientes suaves. Dentro de los experimentos realizados se probaron distintos grados de saturación en la mezcla, observándose distintos comportamientos entre los depósitos saturados y los no saturados. En el caso de los flujos saturados, los depósitos generados fueron más largos y de menor espesor que en flujos no saturados, observándose principalmente acreción vertical de material, mientras que en flujos no saturados la acreción horizontal es más importante que la vertical.

Capítulo 3

Deducción de ecuaciones

3.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es deducir el sistema de ecuaciones que gobierna el movimiento de un flujo detrítico somero sobre una superficie levemente curvada, tal que es posible eliminar una de las dimensiones del problema al promediar las ecuaciones en la vertical. Las ecuaciones deducidas corresponden a ecuaciones de conservación, específicamente a ecuaciones de continuidad y de momentum, y el promedio vertical se realiza usando un sistema de coordenadas ortogonal local alineado con la curvatura del terreno. El flujo es representado por medio de un fluido equivalente (Hungry, 1995), el cual está formado por una mezcla de agua y sedimento homogéneo de densidad constante, de modo tal que la densidad del fluido varía en función de la proporción de agua y sedimento en este.

Dentro de las ecuaciones de movimiento se incluyen los procesos de erosión y depositación, los cuales corresponden a intercambios de masa entre el flujo y el terreno sobre el cual este escurre. En la naturaleza, junto a modificar el volumen del flujo, estos procesos cambian la geometría del terreno, lo cual tiene efecto en la dinámica del flujo y en la evolución geomorfológica del cauce. Debido a esto, se presenta un algoritmo diseñado para modificar la forma del terreno en función del material erosionado y/o depositado. Las ecuaciones del modelo incluyen además un término asociado a la fricción, la cual depende principalmente del esfuerzo que ejerce la superficie sobre el flujo, controlando la velocidad con que este se desplaza y la distancia que es capaz de recorrer antes de detenerse.

El volumen de control utilizado en las deducciones presentadas en las secciones siguientes está definido de tal modo que su base es la superficie en que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, con \mathbf{u} la velocidad del fluido, mientras que su frontera superior coincide con la superficie libre. De este modo, el volumen de control considera la totalidad de la columna de fluido y permite definir cuál es la interfaz entre el flujo y el terreno, lo que es necesario para introducir modificaciones a este último en respuesta a su interacción con el flujo. La erosión y

deposición de material se representan como movimientos de la frontera inferior del volumen de control. Esto quiere decir que en vez de tener flujos desde y hacia un volumen de control fijo, se tiene un volumen de control variable que puede aumentar o disminuir la cantidad de materia que forma parte de la mezcla. Esto lleva a que los únicos flujos de masa y momentum desde y hacia el volumen de control correspondan a los provenientes desde las caras laterales, las cuales se definen como estáticas. En la Figura 3.1 se puede apreciar como el material es incorporado al flujo por medio de desplazar hacia abajo la posición de la frontera inferior del volumen de control. El volumen incorporado al flujo debe ser acelerado por encontrarse ahora por sobre la frontera $u = 0$, por lo que esta modificación del volumen de control tiene efecto tanto en la ecuación de continuidad como en la ecuación de momentum presentadas en las siguientes secciones.

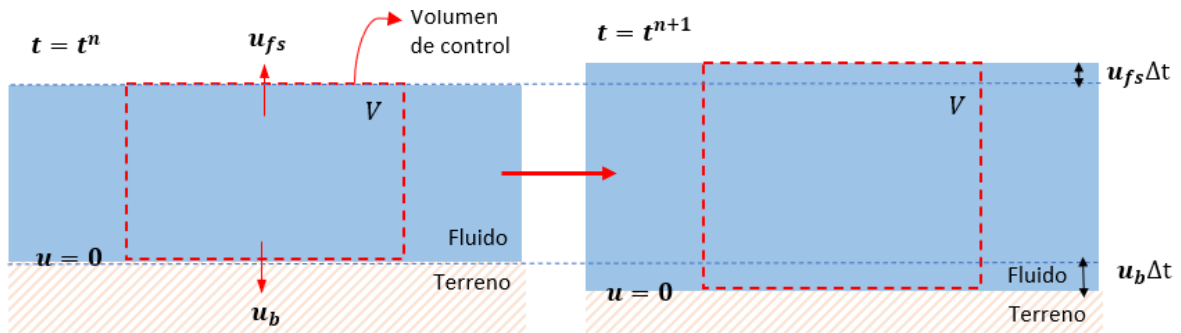


Figura 3.1: Corte transversal del volumen de control usado en las ecuaciones de conservación. El volumen de control (línea punteada roja) cambia en función de la velocidad de su frontera inferior u_b y de su superficie libre u_{fs} , donde $t^{n+1} = t^n + \Delta t$, con Δt el intervalo de tiempo entre ambas configuraciones del volumen de control.

La deducción de las ecuaciones de continuidad y momentum, mostrada en las secciones 3.2 a 3.4, está basada en el trabajo de Rauter & Tuković (2018). No obstante, se introdujeron modificaciones con el fin de considerar un flujo con densidad variable, la incorporación de los procesos de erosión y depositación, y el uso de un volumen de control cuya superficie basal puede ser modificada. En la sección 3.5 se presenta, junto a la ecuación de balance de sedimento en el terreno, la estrategia de resolución del sistema de ecuaciones, la cual es secuencial e iterativa. Para finalizar el capítulo, en las secciones 3.7 y 3.8 se presentan, respectivamente, las ecuaciones necesarias para implementar las condiciones de borde en flujos detríticos y el algoritmo diseñado para modificar el terreno en respuesta a los procesos de erosión y depositación. Debido a que para evaluar las condiciones de borde se requiere haber definido una ecuación para la fricción con el lecho, en la sección 3.6 se incluyen algunas de las leyes de resistencia presentadas en la literatura. Si bien las tasas de erosión y depositación son incorporadas a las ecuaciones de movimiento, en las deducciones realizadas en este capítulo no es necesario darles forma funcional, por lo que estas volverán a ser analizadas en el capítulo 5. En el próximo capítulo se muestra cómo las ecuaciones de movimiento aquí obtenidas son resueltas utilizando el método de áreas finitas.

3.2. Conservación de masa de la mezcla de agua y sedimento

La deducción comienza con la ecuación de continuidad en su forma diferencial, la cual fue previamente introducida en la ecuación (2.3):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.1)$$

donde ρ y \mathbf{u} son, respectivamente, la densidad y velocidad del fluido (mezcla de agua y sedimento), mientras que t es el tiempo. En esta deducción, tal como en Rauter & Tuković (2018), los vectores son representados con letras en negritas.

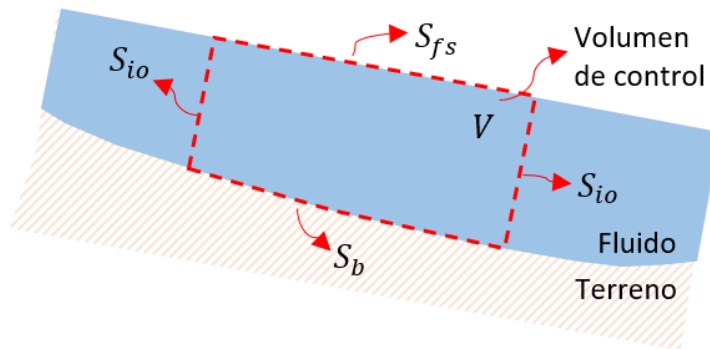


Figura 3.2: Corte transversal del volumen de control V (línea punteada roja) y sus superficies S_{io} (caras laterales), S_{fs} (superficie libre) y S_b (fondo). Modificado de Rauter & Tuković (2018).

Integrando la ecuación (3.1) sobre un volumen de control V (ver Figura 3.2), y usando el teorema de la divergencia y la regla de Leibniz de derivación se obtiene (Ferziger & Perić, 2002, pp. 3-6):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \oint_S \rho(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{n}_s dS = 0 \quad (3.2)$$

donde $S = \partial V$ es la frontera del volumen de control V ; \mathbf{u}_s es la velocidad de la superficie S ; y \mathbf{n}_s es el vector normal unitario a S , el cual se orienta hacia afuera de V . El primer término en la ecuación (3.2) describe el cambio de masa en el interior del volumen de control, mientras que el flujo de masa a través de sus fronteras está representado por el segundo término. Para simplificar los flujos advectivos, la frontera del volumen de control se separa en los tres segmentos definidos en la Figura 3.2:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_{S_{fs}} \rho(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{fs}) \cdot \mathbf{n}_{fs} dS \\ + \int_{S_b} \rho(\mathbf{u} - \mathbf{u}_b) \cdot \mathbf{n}_b dS + \int_{S_{io}} \rho(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{io}) \cdot \mathbf{n}_{io} dS = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

con \mathbf{n}_{io} , \mathbf{n}_{fs} y \mathbf{n}_b los vectores unitarios normales a los segmentos de S (ver Figura 3.3); y \mathbf{u}_{io} , \mathbf{u}_{fs} y \mathbf{u}_b las respectivas velocidades de las fronteras. Al imponer que la velocidad de la superficie superior tenga igual componente normal que el fluido, tal que $\mathbf{n}_{fs} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{n}_{fs} \cdot \mathbf{u}_{fs}$, se logra que el volumen de control capture completamente la columna de fluido y se cumpla que $\mathbf{n}_{fs} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{fs}) = 0$, por lo que el flujo a través de la superficie libre es nulo. En la superficie S_b por definición se tiene que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, no obstante, se define $\mathbf{u}_b = u_b \mathbf{n}_b$, tal que en caso de que exista erosión en el volumen de control se tiene $u_b > 0$, y si hay depositación $u_b < 0$. Las fronteras laterales S_{io} son definidas como estacionarias, por lo que $u_{io} = 0$. Por consiguiente, la ecuación (3.3) es reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_{S_{io}} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{io} dS = \int_{S_b} \rho_b \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}_b dS \quad (3.4)$$

donde ρ_b es la densidad del flujo a través de la base del volumen de control. La densidad del fluido es el resultado de la mezcla entre el agua y el sedimento:

$$\rho = (1 - C_v) \rho_w + C_v \rho_s \quad (3.5)$$

$$C_v = \frac{\text{Volumen de sedimento}}{\text{Volumen de sedimento} + \text{agua}} \quad (3.6)$$

con C_v la concentración volumétrica de sedimento, ρ_w la densidad del agua y ρ_s la densidad del sedimento. Evidentemente, se cumple que $0 \leq C_v \leq 1$.

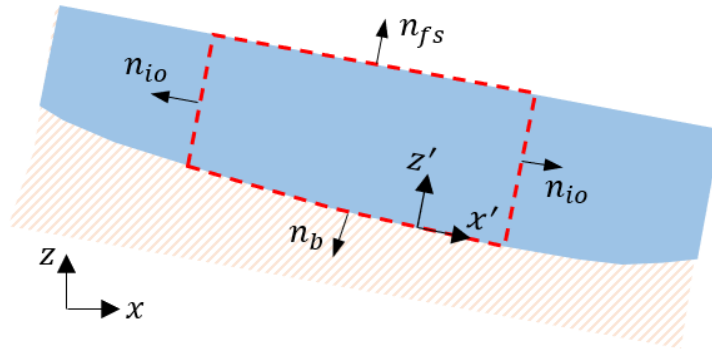


Figura 3.3: Vectores normales a las superficies del volumen de control y sistemas de coordenadas global (x, y, z) y local (x', y', z') . Modificado de Rauter & Tuković (2018).

Tal como se encuentra escrita en la ecuación (3.4), la ecuación de continuidad es válida para todo volumen de control utilizando cualquier sistema de coordenadas. Con tal de simplificar esta ecuación, se define un sistema de coordenadas local alineado a la curvatura del volumen de control (ver Figura 3.3), de modo tal que la integral de volumen se pueda promediar en la vertical. Así, desde el sistema de coordenadas cartesiano global (x, y, z) se pasa al sistema de coordenadas local (x', y', z') utilizando la matriz jacobiana de transformación J . Para el caso de una integral de volumen se tiene:

$$\int_V \rho dV = \int_{S_b} \int_0^{h'} \rho |\det(\mathbf{J})| dz' dS \quad (3.7)$$

En esta última ecuación h' representa la altura del flujo medida normal a la superficie, es decir, en la dirección local z' . Rauter & Tuković (2018) simplifican esta ecuación introduciendo la aproximación $\det(\mathbf{J}) \approx 1$, la cual es válida para flujos someros en superficies levemente curvadas (por ejemplo, esta simplificación es exacta en un plano inclinado de pendiente constante, independiente del valor de esta). Esta aproximación puede ser introducida en una integral de volumen obteniéndose:

$$\int_V dV \approx \int_{S_b} \int_0^{h'} dz' dS \quad (3.8)$$

El mismo argumento puede ser utilizado para separar la integral de superficie en las caras laterales del volumen de control:

$$\int_{S_{io}} dS = \oint_{L_{io}} \int_0^{h'} |\det(\mathbf{J})| dz' dL \approx \oint_{L_{io}} \int_0^{h'} dz' dL \quad (3.9)$$

donde $L_{io} = \partial S_b$ es el perímetro de la superficie S_b (ver Figura 3.4). Utilizando el cambio de coordenadas y la aproximación $\det(\mathbf{J}) \approx 1$ en el lado izquierdo de la ecuación (3.4):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_b} \int_0^{h'} \rho dz' dS + \oint_{L_{io}} \int_0^{h'} \rho \mathbf{u} dz' \cdot \mathbf{n}_{io} dL = \int_{S_b} \rho_b \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}_b dS \quad (3.10)$$

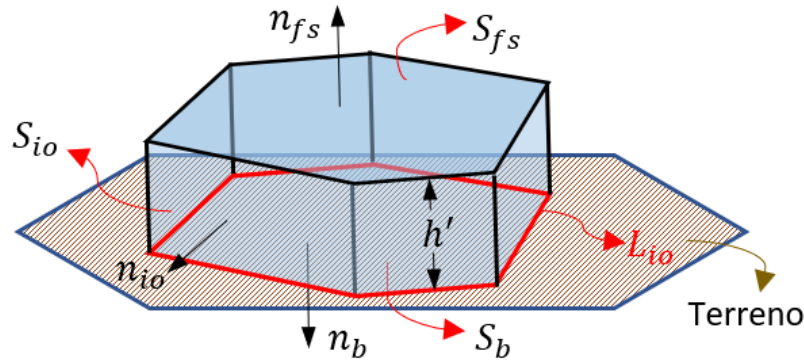


Figura 3.4: Volumen de control tridimensional para un flujo detrítico somero. L_{io} (línea roja) representa el perímetro de la superficie que define el fondo. h' es la altura del fluido medida normal a la superficie S_b . Modificado de Rauter & Tuković (2018).

Debido a que este es un flujo somero y a la falta de información experimental sobre la distribución vertical de densidad en flujos detríticos, es usual suponer que la densidad del fluido no varía en la dirección normal a la superficie (Iverson, 2013):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_b} \rho h' dS + \oint_{L_{io}} \rho \left(\int_0^{h'} \mathbf{u} dz' \right) \cdot \mathbf{n}_{io} dL = \int_{S_b} \rho_b u_b \mathbf{n}_b \cdot \mathbf{n}_b dS \quad (3.11)$$

En la ecuación (3.11) se reemplazó con $\mathbf{u}_b = u_b \mathbf{n}_b$. Para calcular la segunda integral del lado izquierdo de la ecuación se requiere integrar en la vertical la velocidad \mathbf{u} del fluido. Para lograr esto, se define la velocidad promediada en la vertical $\bar{\mathbf{u}}$ como:

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_b) = \frac{1}{h'(\mathbf{x}_b)} \int_0^{h'(\mathbf{x}_b)} \mathbf{u}(\mathbf{x}_b - \mathbf{n}_b z') dz' \quad (3.12)$$

Notar que la velocidad promediada en la vertical continúa siendo un vector tridimensional, tal que $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_b) \in R^3$, con $\mathbf{x}_b \in S_b$. Reemplazando en la ecuación (3.11):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_b} \rho h' dS + \oint_{L_{io}} \rho h' \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}_{io} dL = \int_{S_b} \rho_b u_b dS \quad (3.13)$$

Al usar el método de áreas finitas usualmente se escoge definir los valores de las variables asociadas al flujo en el centroide de cada elemento. Para esto, la ecuación (3.13) es promediada en la superficie S_b definiendo las siguientes variables:

$$(\rho)_{S_b} = \frac{1}{S_B} \int_{S_b} \rho dS \quad (3.14)$$

$$(h')_{S_b} = \frac{1}{S_B} \int_{S_b} h' dS \quad (3.15)$$

$$(\bar{\mathbf{u}})_{S_b} = \frac{1}{S_B} \int_{S_b} \bar{\mathbf{u}} dS \quad (3.16)$$

$$(\rho_b u_b)_{S_b} = \frac{1}{S_B} \int_{S_b} \rho_b u_b dS \quad (3.17)$$

con $(\rho)_{S_b}$, $(h')_{S_b}$, $(\bar{\mathbf{u}})_{S_b}$ y $(\rho_b u_b)_{S_b}$ los valores promediados de ρ , h' , $\bar{\mathbf{u}}$ y $\rho_b u_b$, respectivamente; S_B es el área basal del volumen de control. Reemplazando en la ecuación (3.13), usando el teorema de la divergencia y omitiendo los subíndices S_b se obtiene:

$$\frac{\partial(\rho h' S_B)}{\partial t} + \int_{S_b} \nabla \cdot (\rho h' \bar{\mathbf{u}}) dS = \rho_b u_b S_B \quad (3.18)$$

En la ecuación (3.18) se aproximó $(\rho h')_{S_b} = (\rho)_{S_b} (h')_{S_b}$, lo cual es válido en la medida que la superficie S_b sea pequeña. En las siguientes secciones este tipo de aproximaciones serán introducidas de forma implícita, del mismo modo que se omitirá el uso de los subíndices S_b para representar los valores promediados sobre el elemento de área. La justificación de definir los valores promediados en el centroide del elemento S_b se dejará para el siguiente capítulo.

3.3. Conservación de masa de agua

La deducción de esta ecuación es análoga a la realizada para la mezcla de agua y sedimento, y por tanto solo las partes más importantes serán mostradas. Partiendo del teorema de transporte de Reynolds para una cantidad N , con $\eta = \frac{dN}{dm}$ su cantidad intensiva y m la masa de la mezcla:

$$\frac{\partial(\rho\eta)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\eta\mathbf{u}) = R_v \quad (3.19)$$

donde ρ , \mathbf{u} y t ya fueron definidos y R_v es la tasa de producción volumétrica de la cantidad N . Al definir $N = m_w$, con m_w la masa de agua en el volumen de control, η puede calcularse como:

$$\eta = \frac{dm_w}{dm} = \frac{d}{dm} \left(\frac{\rho_w V_w}{\rho V} m \right) = \frac{d}{dm} \left(\frac{\rho_w}{\rho} (1 - C_v) m \right) = \frac{\rho_w}{\rho} (1 - C_v) \quad (3.20)$$

donde V_w y V_s son, respectivamente, los volúmenes de agua y sedimento en el volumen de control, y V la suma de ambos; C_v , tal como se definió en la ecuación (3.6), es la concentración volumétrica de sedimento.

Reemplazando η en la ecuación (3.19) se obtiene:

$$\frac{\partial(\rho_w(1 - C_v))}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w(1 - C_v)\mathbf{u}) = R_v \quad (3.21)$$

El principio de conservación de masa dice que $R_v = 0$, y al considerar al agua como un fluido incompresible es posible eliminar ρ_w de ambos términos:

$$\frac{\partial(C_w)}{\partial t} + \nabla \cdot (C_w\mathbf{u}) = 0 \quad (3.22)$$

Por simplicidad, se ha definido $C_w = 1 - C_v$, que corresponde a la concentración volumétrica de agua en la mezcla. Las ecuaciones (3.1) y (3.22) son análogas, por lo que siguiendo el mismo procedimiento es posible deducir:

$$\frac{\partial(C_w h' S_B)}{\partial t} + \int_{S_b} \nabla \cdot (C_w h' \bar{\mathbf{u}}) dS = C_{wb} u_b S_B \quad (3.23)$$

Es evidente que los posibles valores de C_w deben estar en el rango $[0, 1]$, lo que implica que los valores de ρ están constreñidos por el valor de la densidad del agua, ρ_w , y el de la densidad del sedimento, ρ_s .

3.4. Conservación de momentum en la mezcla de agua y sedimento

Partiendo de la ecuación de conservación de momentum en su versión diferencial:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (3.24)$$

donde ρ , \mathbf{u} y t ya fueron definidos, \mathbf{g} es el vector aceleración gravitacional y \mathbf{T} es el tensor de esfuerzos totales. Sumando (3.24) con la ecuación de continuidad multiplicada por la velocidad del fluido se obtiene:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (3.25)$$

El tensor \mathbf{T} puede ser dividido en dos términos: el tensor de esfuerzos deviatoricos $\boldsymbol{\tau}$; y la matriz de presión, la cual se forma a partir de la presión p y la matriz identidad \mathbf{I} (Moukalled et al., 2016, pp. 50-54; Rauter & Tuković, 2018), tal que:

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I} \quad (3.26)$$

Reemplazando en la ecuación (3.25), integrando sobre un volumen de control V y usando el teorema de la divergencia se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{u} dV + \oint_S \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{n}_s dS \\ = \int_V \rho \mathbf{g} dV + \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} dV - \oint_S \mathbf{n}_s p dS \end{aligned} \quad (3.27)$$

Tal como se realizó en la deducción de la ecuación de continuidad, en los cinco términos en la ecuación (3.27) se transforma el sistema de coordenadas hacia uno alineado con la curvatura y la simplificación $\det(\mathbf{J}) \approx 1$ es aplicada. El primer término a ambos lados de la ecuación puede ser fácilmente calculado:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_b} \int_0^{h'} \rho \mathbf{u} dz' dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_b} \rho h' \bar{\mathbf{u}} dS \quad (3.28)$$

$$\int_V \rho \mathbf{g} dV = \int_{S_b} \int_0^{h'} \rho \mathbf{g} dz' dS = \int_{S_b} \rho h' \mathbf{g} dS \quad (3.29)$$

Para el segundo término en el lado izquierdo de la ecuación (3.27), el cual corresponde al flujo advectivo de momentum, el procedimiento es bastante similar al aplicado para la ecuación de continuidad, en el cual se divide la frontera del volumen de control en tres componentes:

$$\oint_S \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{n}_s dS = \int_{S_{fs}} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{fs}) \cdot \mathbf{n}_{fs} dS \quad (3.30)$$

$$+ \int_{S_{io}} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{io}) \cdot \mathbf{n}_{io} dS + \int_{S_b} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_b) \cdot \mathbf{n}_b dS$$

En el fondo del volumen de control la velocidad del fluido es cero, por lo que no existe flujo de momentum a través de esta superficie. En el segundo término $\mathbf{u}_{io} = \mathbf{0}$ dado que las superficies laterales se encuentran fijas. En último lugar, $\mathbf{n}_{fs} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{fs}) = 0$, por lo que no existe flujo de momentum a través de la superficie libre. Considerando todos estos supuestos, la ecuación (3.30) se convierte en:

$$\oint_S \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{n}_s dS = \int_{S_{io}} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{io} dS = \oint_{L_{io}} \rho \left(\int_0^{h'} \mathbf{u} \mathbf{u} dz' \right) \cdot \mathbf{n}_{io} dL \quad (3.31)$$

La velocidad al cuadrado promediada en la vertical no es igual al cuadrado del promedio vertical de la velocidad: $\overline{\mathbf{u} \mathbf{u}} \neq \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}$. Por lo que se vuelve necesario introducir el factor χ con el fin de continuar utilizando $\bar{\mathbf{u}}$, tal como en ambas ecuaciones de continuidad.

$$\overline{\mathbf{u} \mathbf{u}} = \frac{1}{h} \int_0^{h'} \mathbf{u} \mathbf{u} dz' = \chi \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}} \quad (3.32)$$

No obstante, se ha reportado que los perfiles de velocidad en flujos detriticos son variables (Iverson & Vallance, 2001), razón por la cual en la gran mayoría de los modelos numéricos el factor correctivo χ es omitido, pues no aportaría información al modelo (Christen et al., 2010; Iverson, 2005; Savage & Hutter, 1989). Si bien se mantendrá χ en las ecuaciones, luego se supondrá que su valor es uno.

Reemplazando en la ecuación (3.31) y suponiendo que χ es un valor constante se obtiene:

$$\oint_S \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{n}_s dS = \chi \oint_{L_{io}} \rho h' \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}_{io} dL \quad (3.33)$$

Algunos autores al desarrollar el lado izquierdo de la ecuación (3.25) obtienen un término resistivo asociado al intercambio de momentum que se debe realizar para acelerar el material incorporado al flujo, el cual pasa de estar quieto a tener la misma velocidad que el resto del fluido (McDougall & Hungr, 2005; Iverson, 2013). En el modelo aquí desarrollado es posible obtener un término resistivo a partir de la tercera integral del lado derecho de la ecuación (3.30), esto por medio de definir $\mathbf{u}(z' = 0) \neq \mathbf{0}$ perpendicular a \mathbf{n}_b . No obstante, esto genera el problema de tener que determinar \mathbf{u} en el fondo, junto a la pérdida de diferencia entre flujo y terreno, pues este último se supone sin movimiento en la dirección longitudinal del flujo.

Es posible demostrar que el término resistivo ya se encuentra incluido en el primer término del lado izquierdo de la ecuación (3.25). Partiendo de la ecuación (3.28) y definiendo $m = \rho h' S_B$ como la masa de fluido en el volumen de control:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h' \bar{\mathbf{u}} S_B) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(m \bar{\mathbf{u}})^{t+\Delta t} - (m \bar{\mathbf{u}})^t}{\Delta t} \quad (3.34)$$

donde producto de la incorporación de material al flujo se puede calcular $m^{t+\Delta t}$ como:

$$m^{t+\Delta t} = m^t + \Delta m = m^t + \rho_b u_b \Delta t S_B \quad (3.35)$$

Reemplazando en (3.34):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h' \bar{\mathbf{u}} S_B) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(m^t \frac{\bar{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} - \bar{\mathbf{u}}^t}{\Delta t} + \frac{\bar{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} \Delta m}{\Delta t} \right) = m^t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \rho_b u_b \bar{\mathbf{u}}^t S_B \quad (3.36)$$

Los últimos dos términos en la ecuación (3.36) corresponden, respectivamente, al término transiente y al resistivo presentados por McDougall & Hungr (2005) en su modelo numérico. Se concluye por tanto que dicho término no está asociado a la pérdida de momentum, sino a la redistribución de este, lo que se logra en el modelo deducido en esta Tesis gracias al movimiento de las fronteras del volumen de control y al acoplamiento de las ecuaciones de continuidad y de momentum.

Para el último término del lado derecho de la ecuación (3.27) se impone una distribución lineal de presiones, lo cual es consistente con las variaciones de presión debido al efecto de la gravedad, como en el caso hidrostático o litostático (McDougall & Hungr, 2004). Interpolando entre la presión basal p_b y la presión en la superficie libre $p_{fs} = 0$ se obtiene:

$$p(z') = p_b \frac{h' - z'}{h'} \quad (3.37)$$

La presión basal p_b es definida como el esfuerzo total actuando en la dirección z' en el plano $z' = 0$, tal que $T_{z'z'}(z' = 0) = -p_b$. El término asociado a la presión en la ecuación (3.27) puede ser dividido en las superficies que definen el volumen de control.

$$\oint_S \mathbf{n}_s p dS = \oint_{S_{fs}} \mathbf{n}_{fs} p dS + \oint_{S_{io}} \mathbf{n}_{io} p dS + \oint_{S_b} \mathbf{n}_b p dS \quad (3.38)$$

Dado que en la superficie libre la presión es cero, el primer término del lado derecho se cancela, mientras que la segunda integral de superficie puede ser resuelta analíticamente:

$$\oint_{S_{io}} \mathbf{n}_{io} p dS = \oint_{L_{io}} \mathbf{n}_{io} \left(\int_0^{h'} p dz' \right) dL = \frac{1}{2} \oint_{L_{io}} \mathbf{n}_{io} h' p_b dL \quad (3.39)$$

Evaluando con $p = p_b$ en el último término de la ecuación (3.38) y luego reemplazando:

$$\oint_S \mathbf{n}_s p dS = \frac{1}{2} \oint_{L_{io}} \mathbf{n}_{io} h' p_b dL + \oint_{S_b} \mathbf{n}_b p_b dS \quad (3.40)$$

Antes de desarrollar el término asociado a los esfuerzos deviatoricos es necesario realizar un análisis de escala de las variables que forman parte del problema. Como escala de longitud se utiliza h' en la dirección vertical y L en la dirección del flujo, definiéndose la razón $\epsilon = h'/L$. Para la escala de velocidad en la dirección del flujo se utiliza la celeridad de la onda gravitacional $U = \sqrt{gh'}$, mientras que usando la ecuación de continuidad se puede demostrar que la escala de velocidad vertical es $W = \epsilon U$. La escala de tiempo es $T = L/U$. Para la densidad se utiliza $\bar{\rho}$, que representa la densidad promedio del flujo. Tanto para la presión como para los esfuerzos deviatoricos se utiliza la presión estática $\bar{\rho}gh'$, esto debido a que la gravedad es la fuerza motriz de este tipo de flujos (Gray & Edwards, 2014; Iverson, 2005). En la ecuación (3.41), las variables adimensionalizadas son aquellas indicadas con un sombrero.

$$\begin{aligned} (x', y', z') &= L(\hat{x}', \hat{y}', \epsilon \hat{z}') \\ t &= L/\sqrt{gh'} \hat{t} \\ \rho &= \bar{\rho} \hat{\rho} \\ (u_{x'}, u_{y'}, u_{z'}, \bar{\mathbf{u}}) &= \sqrt{gh'} (\hat{u}_{x'}, \hat{u}_{y'}, \epsilon \hat{u}_{z'}, \hat{\mathbf{u}}) \\ (p, \tau_{x'x'}, \tau_{y'x'}, \tau_{z'x'}, \tau_{y'y'}, \tau_{z'y'}, \tau_{z'z'}) \\ &= \bar{\rho}gh' (\hat{p}, \hat{\tau}_{x'x'}, \hat{\tau}_{y'x'}, \hat{\tau}_{z'x'}, \hat{\tau}_{y'y'}, \hat{\tau}_{z'y'}, \hat{\tau}_{z'z'}) \end{aligned} \quad (3.41)$$

En los flujos detríticos es usual que las alturas sean pequeñas respecto a la dimensión horizontal del flujo, lo que lleva a imponer que $\epsilon \ll 1$ y a que la velocidad en la dirección perpendicular al flujo sea despreciable respecto a las componentes tangenciales a la superficie. Del mismo modo, se puede concluir que variaciones de velocidad y de esfuerzos en la dirección del flujo son despreciables respecto a variaciones de dichas variables en la dirección perpendicular a la superficie.

Desarrollando la divergencia del tensor de esfuerzos deviatoricos $\boldsymbol{\tau}$ y adimensionalizando sus términos se obtiene:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} &= \bar{\rho}g \left(\epsilon \frac{\partial \hat{\tau}_{x'x'}}{\partial \hat{x}'} + \epsilon \frac{\partial \hat{\tau}_{y'x'}}{\partial \hat{y}'} + \frac{\partial \hat{\tau}_{z'x'}}{\partial \hat{z}'} \right) \mathbf{i}' \\ &+ \bar{\rho}g \left(\epsilon \frac{\partial \hat{\tau}_{x'y'}}{\partial \hat{x}'} + \epsilon \frac{\partial \hat{\tau}_{y'y'}}{\partial \hat{y}'} + \frac{\partial \hat{\tau}_{z'y'}}{\partial \hat{z}'} \right) \mathbf{j}' \\ &+ \bar{\rho}g \left(\epsilon \frac{\partial \hat{\tau}_{x'z'}}{\partial \hat{x}'} + \epsilon \frac{\partial \hat{\tau}_{y'z'}}{\partial \hat{y}'} + \frac{\partial \hat{\tau}_{z'z'}}{\partial \hat{z}'} \right) \mathbf{k}' \end{aligned} \quad (3.42)$$

Utilizando que $\epsilon \ll 1$ es posible reducir esta expresión y obtener (3.43), la cual puede ser utilizada para reemplazar el término asociado a los esfuerzos deviatoricos en la ecuación (3.27).

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \approx \frac{\partial \hat{\tau}_{z'x'}}{\partial \hat{z}'} \mathbf{i}' + \frac{\partial \hat{\tau}_{z'y'}}{\partial \hat{z}'} \mathbf{j}' + \frac{\partial \hat{\tau}_{z'z'}}{\partial \hat{z}'} \mathbf{k}' \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned}
\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} dV &= \int_{S_b} \int_0^h \left(\frac{\partial \tau_{z'x'}}{\partial z'} \mathbf{i}' + \frac{\partial \tau_{z'y'}}{\partial z'} \mathbf{j}' + \frac{\partial \tau_{z'z'}}{\partial z'} \mathbf{k}' \right) dz' dS \\
&= - \int_{S_b} (\tau_{z'x'}(z'=0) \mathbf{i}' + \tau_{z'y'}(z'=0) \mathbf{j}' + \tau_{z'z'}(z'=0) \mathbf{k}') dS
\end{aligned} \tag{3.44}$$

En el último paso se supuso que los esfuerzos en la superficie libre son nulos (Iverson, 2013).

Debido a que se definió $p_b = -T_{z'z'}(z'=0)$, es claro que $\tau_{z'z'}(z'=0) = 0$, esto debido a que $T_{z'z'} = \tau_{z'z'} - p$ (ver ecuación (3.26)). Reemplazando en la ecuación (3.44):

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} dV = - \int_{S_b} (\tau_{z'x'}(z'=0) \mathbf{i}' + \tau_{z'y'}(z'=0) \mathbf{j}') dS = - \int_{S_b} \boldsymbol{\tau}_b dS \tag{3.45}$$

Del resultado obtenido en la ecuación (3.45) se concluye que el efecto de los esfuerzos deviatoricos sobre el volumen de control queda representado por el esfuerzo de corte basal $\boldsymbol{\tau}_b$, el cual actúa en la dirección del flujo. Este resultado ha sido ampliamente usado por modelos de flujos detríticos en que las ecuaciones de conservación son promediadas en la vertical (Frank et al., 2017; O'Brien et al., 1993; Rauter et al., 2018), los cuales usan distintas ecuaciones para calcular $\boldsymbol{\tau}_b$.

Reuniendo todos los términos y reemplazando en la ecuación (3.27):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_b} \rho h' \bar{\mathbf{u}} dS + \chi \oint_{L_{io}} \rho h' \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}_{io} dL \\
= \int_{S_b} \rho h' \mathbf{g} dS - \int_{S_b} \boldsymbol{\tau}_b dS - \frac{1}{2} \oint_{L_{io}} \mathbf{n}_{io} h' p_b dL - \oint_{S_b} \mathbf{n}_b p_b dS
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Utilizando las definiciones mostradas en las ecuaciones (3.14) a (3.17) y el teorema de la divergencia se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} (\rho h' \bar{\mathbf{u}} S_B) + \int_{S_b} \chi \nabla \cdot (\rho h' \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}) dS \\
= \rho h' S_B \mathbf{g} - \boldsymbol{\tau}_b S_B - \frac{1}{2} \int_{S_b} \nabla (p_b h') dS - \mathbf{n}_b p_b S_B
\end{aligned} \tag{3.47}$$

La cual puede ser reescrita para formar la ecuación (3.48), desde la cual es posible recuperar la ecuación de momentum presentada por Rauter & Tuković (2018), esto en el caso que S_B y ρ sean constantes.

$$\frac{1}{S_B} \frac{\partial}{\partial t} (\rho h' \bar{\mathbf{u}} S_B) + \chi \nabla \cdot (\rho h' \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}) = \rho h' \mathbf{g} - \boldsymbol{\tau}_b - \frac{1}{2} \nabla (p_b h') - \mathbf{n}_b p_b \tag{3.48}$$

Para poder resolver esta ecuación se utilizará la condición de borde mostrada en la ecuación (3.49), la cual permite asegurar que el fluido se desplaza tangente a la superficie a la vez que se mantiene como un vector tridimensional (Savage & Hutter, 1989).

$$\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}_b = 0 \quad (3.49)$$

Al multiplicar la ecuación (3.48) por el vector normal \mathbf{n}_b es posible obtener la proyección normal de la ecuación de momentum, permitiendo calcular la presión basal p_b :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_b \cdot \frac{1}{S_B} \frac{\partial}{\partial t} (\rho h' \bar{\mathbf{u}} S_B) + \mathbf{n}_b \cdot \chi \nabla \cdot (\rho h' \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}) \\ = \mathbf{n}_b \cdot \rho h' \mathbf{g} - \mathbf{n}_b \cdot \boldsymbol{\tau}_b - \mathbf{n}_b \cdot \frac{1}{2} \nabla (p_b h') - \mathbf{n}_b \cdot \mathbf{n}_b p_b \end{aligned} \quad (3.50)$$

Usando la condición de borde, el primer término en el lado izquierdo es cero, del mismo modo el esfuerzo de corte basal $\boldsymbol{\tau}_b$ se anula, pues tiene la misma dirección que $\bar{\mathbf{u}}$.

$$\chi \mathbf{n}_b \cdot \nabla \cdot (\rho h' \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{n}_b \cdot \mathbf{g} \rho h' - \frac{1}{2} \mathbf{n}_b \cdot \nabla (p_b h') - p_b \quad (3.51)$$

El primer término en esta ecuación da cuenta de la fuerza centrífuga, mientras que el segundo término en el lado derecho considera la posibilidad de que, producto de la curvatura del terreno, el gradiente de presiones pueda tener una componente normal. Este último término es generalmente pequeño, lo cual se puede demostrar a partir de un análisis de escala usando los valores mostrados en la ecuación (3.41). Para simplificar la resolución de la ecuación (3.51), este último término puede ser omitido (Rauter & Tuković, 2018).

Al multiplicar nuevamente esta ecuación por \mathbf{n}_b , y definiendo el operador diferencial normal a la superficie $\nabla_n = (\mathbf{n}_b \mathbf{n}_b) \cdot \nabla$ y $\mathbf{g}_n = (\mathbf{n}_b \cdot \mathbf{n}_b) \mathbf{g}$, se obtiene:

$$\chi \nabla_n \cdot (\rho h' \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}) = \rho h' \mathbf{g}_n - \frac{1}{2} \nabla_n (p_b h') - \mathbf{n}_b p_b \quad (3.52)$$

Finalmente, al restar las ecuaciones (3.48) y (3.52) se obtiene la componente tangencial de la ecuación de momentum:

$$\frac{1}{S_B} \frac{\partial}{\partial t} (\rho h' \bar{\mathbf{u}} S_B) + \chi \nabla_s \cdot (\rho h' \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}) = \rho h' \mathbf{g}_s - \boldsymbol{\tau}_b - \frac{1}{2} \nabla_s (p_b h') \quad (3.53)$$

donde se usó $\nabla_s = (\mathbf{I} - \mathbf{n}_b \mathbf{n}_b) \cdot \nabla$ y $\mathbf{g}_s = (\mathbf{I} - \mathbf{n}_b \mathbf{n}_b) \cdot \mathbf{g}$.

La ventaja de este método es que no aparece en las ecuaciones ningún término asociado a la transformación de coordenadas, ya que estos términos suelen incluir la curvatura del terreno, como en Frank et al. (2017) y McDougall & Hungr (2005), lo cual es difícil de generalizar para geometrías irregulares (Rauter & Tuković, 2018).

3.5. Sistema de ecuaciones gobernante

Resumiendo, el conjunto de ecuaciones cuasi-bidimensionales que gobierna el movimiento de un flujo detrítico de densidad variable y que incorpora los procesos de erosión y depositación es:

$$\frac{\partial(\rho h' S_B)}{\partial t} + \int_{S_b} \nabla \cdot (\rho h' \bar{\mathbf{u}}) dS = \rho_b u_b S_B \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial(C_w h' S_B)}{\partial t} + \int_{S_b} \nabla \cdot (C_w h' \bar{\mathbf{u}}) dS = C_{wb} u_b S_B \quad (3.55)$$

$$\rho = (1 - C_v) \rho_w + C_v \rho_s \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho h' \bar{\mathbf{u}} S_B) + \int_{S_b} \chi \nabla_s \cdot (\rho h' \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}) dS = \rho h' \mathbf{g}_s S_B - \boldsymbol{\tau}_b S_B - \frac{1}{2} \int_{S_b} \nabla_s (p_b h') dS \quad (3.57)$$

$$p_b = \mathbf{n}_b \left(\rho h' \mathbf{g}_n - \frac{1}{S_B} \int_{S_b} \chi \nabla_n \cdot (\rho h' \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}) dS - \frac{1}{2 S_B} \int_{S_b} \nabla_n (p_b h') dS \right) \quad (3.58)$$

donde ρ , h' , C_w (o C_v), $\bar{\mathbf{u}}$ y p_b son las incógnitas; χ , C_{wb} , ρ_b , ρ_s , ρ_w y \mathbf{g} son constantes; S_B y \mathbf{n}_b se obtienen a partir de la geometría; y u_b y $\boldsymbol{\tau}_b$ deben ser incorporadas al modelo a partir de ecuaciones obtenidas y/o validadas de forma experimental.

Se define la concentración volumétrica de agua en el lecho como C_{wb} , la cual está relacionada a ρ_b por medio de:

$$C_{wb} = \frac{\rho_s - \rho_b}{\rho_s - \rho_w} \quad (3.59)$$

Debido a que este es un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales altamente acopladas, su resolución se realiza de forma secuencial, de modo que se resuelve una ecuación tras otra, actualizando los valores obtenidos en los pasos anteriores y luego iterando hasta que el sistema converja a la solución (Ferziger & Perić, 2002, pp. 116-118). Por simplicidad, se deben resolver en primer lugar las ecuaciones (3.57) y (3.58), obteniendo así los valores de p_b y $\bar{\mathbf{u}}$. Luego se resuelven las ecuaciones (3.54) y (3.55), utilizando como variables, respectivamente, $(\rho h')$ y $(C_w h')$. A partir de las soluciones obtenidas para $(\rho h')$ y $(C_w h')$ junto a la ecuación (3.60) se obtiene el valor de C_w y luego los de ρ y h' . El procedimiento se repite hasta que los valores de todas las variables dependientes no cambien de una iteración a otra.

$$\lambda = \frac{(\rho h')}{(C_w h')} = \frac{\rho}{C_w} = \frac{\rho_s - C_w(\rho_s - \rho_w)}{C_w} \Rightarrow C_w = \frac{\rho_s}{\lambda + (\rho_s - \rho_w)} \quad (3.60)$$

Al sistema de ecuaciones recién presentado se debe incluir la ecuación de conservación de sedimento en el estrato erosionable que forma el fondo (ver Figura 3.5). Esto se debe, en primer lugar, a que la cantidad de sedimento disponible para ser incorporado al flujo es limitada, por lo que esto debe poder incluirse en las ecuaciones del modelo,

especialmente en las ecuaciones (3.54) y (3.55). En segundo lugar, los procesos de erosión y depositación alteran la topografía del terreno, modificando su geometría y por tanto algunos de los parámetros que fueron incluidos en las ecuaciones de movimiento, como S_B y \mathbf{n}_b . Es necesario por tanto saber cuánto material ha sido movilizado y en dónde, para luego recalculer dichos parámetros.

La ecuación de conservación de sedimento en la capa erosionable es deducida de forma análoga a la ecuación (3.18), aunque se impone $\rho = \rho_b$ constante en el lecho:

$$\frac{\partial(h_e S_B)}{\partial t} = -u_b S_B \quad (3.61)$$

donde h_e , definido como un valor no negativo, es el espesor de la capa de sedimento disponible para ser incorporada al flujo. En la Figura 3.5 se define además z como la altura de la interfaz fluido-terreno medida desde un nivel de referencia global. Cualquier cambio en el valor de h_e debe ser acompañado por un desplazamiento del volumen de control y un cambio en z . Esta conexión entre h_e y z será importante al momento de deducir el algoritmo usado para modificar el terreno, lo cual será presentado en la sección 3.8.

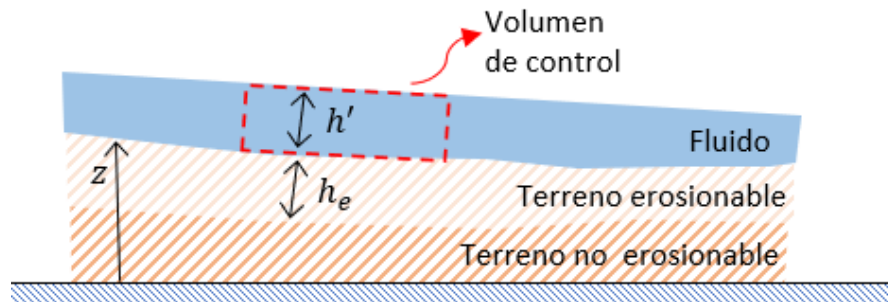


Figura 3.5: Esquema de división del terreno en un estrato erosionable y uno no erosionable, siendo el espesor del primero h_e , el cual es medido normal al terreno. Se define la altura z medida desde un nivel de referencia global hasta la interfaz fluido-terreno.

Debido a que la ecuación (3.61) no se encuentra acoplada a las ecuaciones (3.54) a (3.58), esta puede ser resuelta una vez las ecuaciones de movimiento han convergido. Además, debido a que u_b pasa a ser un valor conocido, la ecuación (3.61) puede ser integrada directamente:

$$h_e^{t+\Delta t} = \frac{S_B^t h_e^t - u_b S_B^t \Delta t}{S_B^{t+\Delta t}} \quad (3.62)$$

Al modificar el terreno se obtiene que los cambios de S_B de una iteración a otra son pequeños, esto debido a que, al ser las caras laterales estáticas, el fondo del volumen de control se inclina o deforma, pero no se extiende o comprime, por lo que al resolver la ecuación (3.62) se impondrá que $S_B^{t+\Delta t} \approx S_B^t$.

Es claro que la definición usada en (3.61) fuerza que el material erosionado y depositado tenga igual densidad que el fondo, lo cual no es necesariamente válido. Si bien en otros modelos se impone que la densidad del material incorporado y depositado tenga igual densidad que el flujo (Iverson, 2005), esto trae dos problemas. El primero es que no permite que la densidad del flujo varíe por efecto del material incorporado, lo cual se observa en la naturaleza y en los experimentos de laboratorio. El segundo problema es que forzaría resolver una ecuación adicional para evaluar la evolución de la densidad en el lecho, donde, a diferencia de lo que ocurre en el fluido, no sería posible suponer que existe un valor homogéneo en el volumen de control. Debido a esto, en este modelo se ha optado por imponer que el material erosionado y depositado tengan igual densidad que el lecho.

Notar que si bien no existe limitante matemática en las ecuaciones para que C_v sea igual a uno, lo cierto es que esto no es físicamente posible y su valor máximo debiese estar acotado (Iverson, 1997; FLO-2D, 2015). Esto debe ser tenido en cuenta al momento de definir C_{wb} (o ρ_b).

En la siguiente subsección se presentan algunas de las ecuaciones disponibles en la literatura para τ_b , las cuales debe ser reescritas con tal de expresar el esfuerzo de corte de forma vectorial. En el caso de u_b , esta representa la velocidad resultante de considerar la erosión y depositación de sedimento en el volumen de control, por lo que puede ser reescrita como:

$$u_b = u_{bE} - u_{bD} \quad (3.63)$$

siendo u_{bE} y u_{bD} , respectivamente, las tasas de erosión y depositación, definidas ambas como variables no negativas. Ecuaciones para u_{bE} y u_{bD} fueron presentadas en la sección 2.3 y no son reintroducidas hasta la sección 5.4.

3.6. Leyes de resistencia

Diversas leyes de resistencia han sido formuladas para representar el esfuerzo de corte basal en flujos detríticos. En algunos casos, estas han sido incorporadas desde otro tipo de flujos, como avalanchas, y otras desarrollados exclusivamente para flujos detríticos y deducidos a partir de datos experimentales. Si bien en la subsección 2.2.2 se presentan cinco de estas ecuaciones, en el desarrollo de esta Tesis se hizo uso solo de tres de estas, las cuales son reescritas a continuación utilizando la nomenclatura usada en la deducción de las ecuaciones de movimiento. En todas las ecuaciones se tiene que τ_b es un vector definido paralelo a \bar{u} , utilizándose en algunos casos los valores u_0 y h_0 para evitar dividir por cero. A estas constantes, las cuales no tienen significado físico alguno, se les debe asignar un valor pequeño y positivo.

La primera de las leyes de resistencia usadas es la ecuación de Voellmy (ecuación (2.24)), la cual se reescribe utilizando la presión basal p_b , incorporando así el efecto de

la aceleración centrífuga. Los parámetros μ y ξ deben ser calibrados o estimados de forma externa al modelo, preferentemente a partir de datos de eventos anteriores ocurridos en el área de interés.

$$\tau_b = \mu p_b \frac{\bar{u}}{|\bar{u}| + u_0} + \frac{\rho g}{\xi} |\bar{u}| \bar{u} \quad (3.64)$$

Se utiliza además el modelo cuadrático (ecuación (2.26)), el cual requiere valores para τ_y , K , η y n , aunque τ_y y η pueden ser calculados como función de C_v , tal como se muestra en las ecuaciones (2.27) y (2.28).

$$\tau_b = \tau_y \frac{\bar{u}}{|\bar{u}| + u_0} + \frac{K\eta}{8(h' + h_0)} \bar{u} + \frac{n^2 \rho g}{(h' + h_0)^{1/3}} |\bar{u}| \bar{u} \quad (3.65)$$

La última ecuación corresponde a la ecuación de Manning (ecuación (2.22)), donde n es el único valor que debe ser definido externamente al modelo.

$$\tau_b = \frac{n^2 \rho g}{(h' + h_0)^{1/3}} |\bar{u}| \bar{u} \quad (3.66)$$

3.7. Condiciones de borde

En los modelos de flujos detríticos usualmente se tienen dos opciones para dar comienzo al flujo. La primera es definir un volumen inicial inmóvil que por efecto de la gravedad comienza a desplazarse siguiendo la pendiente del terreno. Esta opción es fácil de incorporar a los modelos, pues basta con definir $h' \neq 0$ en una sección del dominio. Esto es usualmente acompañado de restar dicha altura inicial h' al espesor del sedimento disponible para ser erosionado, h_e , en la misma zona del dominio. Ejemplos de modelos que incorporan esta posibilidad son RAMMS (Bartelt et al., 2017), DAN (McDougall & Hungr, 2005) y el *solver* de OpenFOAM® *faSavageHutterFoam* (Rauter et al., 2018), entre otros.

La segunda opción, la cual será analizada en esta sección, consiste en definir un flujo de entrada al dominio geométrico por medio de un hidrograma, el cual está formado por una serie de valores (Q, C_v, t) , siendo Q el caudal detrítico. Esta opción también es utilizada por RAMMS, aunque considerando C_v como un valor constante en el tiempo y siendo requerido indicar la velocidad del flujo en el perfil de entrada de este (Bartelt et al., 2017). Por su parte, FLO-2D también permite definir el flujo a partir de una serie de valores (Q, C_v, t) (FLO-2D, 2017), aunque en la práctica el hidrograma es usado directamente en la ecuación de continuidad. Así, esto resulta análogo a definir en cada instante de tiempo un nuevo volumen de mezcla, el cual es acelerado por su propio peso desde el reposo.

Es importante notar que en las ecuaciones (3.54) a (3.58) no se tiene como variable a Q , por lo que la condición de borde debe traducirse en valores para las variables

dependientes h' y \bar{u} . En el desarrollo venidero se omite el apóstrofo de h' y se utiliza v en vez de \bar{u} , no obstante, se debe tener presente que se sigue trabajando con la altura normal local y que la velocidad representa el valor promedio vertical. En primer lugar, se debe notar que, al resolver el sistema de ecuaciones utilizando un método discreto, el dominio geométrico es dividido en una cantidad finita de elementos. Luego, el flujo de entrada Q es definido sobre un conjunto de N elementos que forman parte del perímetro de la malla, tal como se aprecia en la Figura 3.6. De aquí en más se omitirá el tratamiento de ρ y C_w , pues se consideran uniformes en la sección de entrada del flujo y se calculan directamente a partir de los valores C_v ingresados en el hidrograma.

Así, el caudal Q se separa en una serie de flujos Q_j , cada uno de los cuales puede ser calculado a partir de los valores de h y v en el perfil transversal de entrada (ver Figura 3.6), tal que:

$$Q = \sum_{j=1}^N Q_j = \sum_{j=1}^N b_j h_j v_j \cdot \hat{e}_j \quad (3.67)$$

donde b_j es el largo de la arista j y \hat{e}_j el vector unitario normal a la arista orientado hacia afuera del dominio geométrico. Notar que v_j y \hat{e}_j tienen sentidos casi opuestos, pues v_j apunta hacia dentro del dominio, por lo que los valores Q_j serán negativos. Esto no generará problema alguno en la medida que se tenga claro que solo significa que el flujo está ingresando al dominio. Se definen Q^{hid} y Q^{calc} como el caudal ingresado en el hidrograma y el caudal calculado con la ecuación (3.67). Es claro que se deben obtener valores de h_j y v_j que aseguren que $Q^{hid} = -Q^{calc}$.

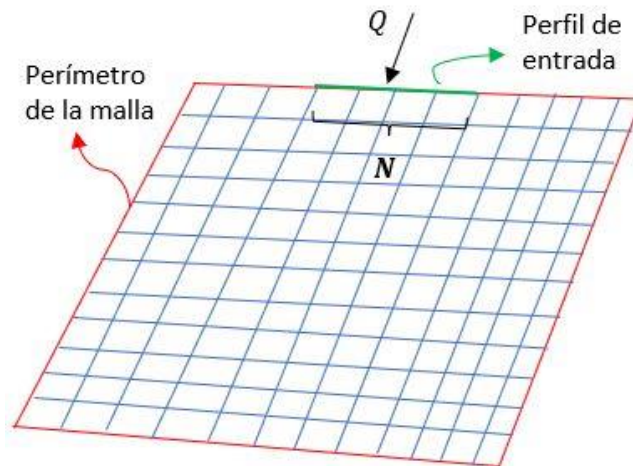


Figura 3.6: Ejemplo de un flujo de entrada Q definido sobre un perfil transversal formado por N aristas.

Se tiene entonces una sola ecuación y $2N$ incógnitas. Con tal de reducir el número de incógnitas se define v_j a partir de un valor escalar medio \bar{v} , tal que:

$$\mathbf{v}_j = \frac{\bar{v}}{|\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_j|} \hat{\mathbf{e}} \quad (3.68)$$

donde $\hat{\mathbf{e}}$ es un vector unitario que apunta en el sentido del flujo. Además, como aproximación inicial, se supondrá $h_j = \bar{h}$ uniforme. Reemplazando en la ecuación (3.67) se obtiene:

$$Q^{calc} = \sum_{j=1}^N b_j \bar{h} \left(\frac{\bar{v}}{|\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_j|} \hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_j \right) = -\bar{h} \bar{v} \sum_{j=1}^N b_j = -\bar{h} \bar{v} B \Rightarrow Q^{hid} = \bar{h} \bar{v} B \quad (3.69)$$

donde B es la suma de los largos de las aristas que forman el perfil transversal de entrada del flujo. Así, se tienen dos incógnitas para una sola ecuación. Para obtener la ecuación faltante se supondrá que en el borde se tiene flujo normal y permanente, es decir, se anulan las derivadas temporales y espaciales en la ecuación de momentum (ecuación (3.57)), obteniéndose:

$$|\boldsymbol{\tau}_b| = \rho h |\mathbf{g}_s| = \rho h g \sin(\theta) \quad (3.70)$$

con θ la pendiente del terreno. La ecuación (3.70) aplica para cada una de las aristas que forman la zona de entrada del flujo, por lo que junto a la definición de $\boldsymbol{\tau}_b$ permite obtener una nueva ecuación que relaciona \bar{h} y \bar{v} . A continuación, se muestran las deducciones para las leyes de resistencia presentadas en la sección anterior, donde por simplicidad se denotará $Q = Q^{hid}$.

En el caso de la ecuación de Manning (ecuación (3.66)), esta permite ligar directamente Q_j con h_j , pues al aproximar el radio hidráulico $R_{h_j} \approx h_j$ se obtiene:

$$Q_j = \frac{1}{n} \sqrt{i_j} b_j h_j^{5/3} \Rightarrow Q = \sum_{j=1}^N Q_j = \frac{\bar{h}^{5/3}}{n} \sum_{j=1}^N b_j \sqrt{i_j} \quad (3.71)$$

Luego, es posible despejar los valores de \bar{h} y \bar{v} :

$$\bar{h} = \left(\frac{Qn}{\sum_{j=1}^N b_j \sqrt{i_j}} \right)^{3/5} \quad (3.72)$$

$$\bar{v} = \frac{Q^{2/5}}{B} \left(\frac{\sum_{j=1}^N b_j \sqrt{i_j}}{n} \right)^{3/5} \quad (3.73)$$

Para la ecuación de Voellmy, ver ecuación (3.64), se reemplaza en la ecuación (3.70) con la definición de $\boldsymbol{\tau}_b$, además de usarse el valor de p_b obtenido de simplificar la ecuación (3.58), obteniéndose así:

$$\rho h g \sin(\theta) = \mu \rho h g \cos(\theta) + \frac{\rho g}{\xi} v^2 \quad (3.74)$$

De esta ecuación es posible deducir una relación para v_j :

$$v_j^2 = \xi h_j (\sin(\theta_j) - \mu \cos(\theta_j)) \quad (3.75)$$

Definiendo $\lambda_j = \sin(\theta_j) - \mu \cos(\theta_j)$ y reemplazando en la ecuación (3.67):

$$Q_j = \bar{h}^{3/2} b_j \sqrt{\xi \lambda_j} \Rightarrow Q = \sum_{j=1}^N Q_j = \bar{h}^{3/2} \sqrt{\xi} \sum_{j=1}^N \sqrt{\lambda_j} b_j \quad (3.76)$$

Luego, es posible despejar los valores de \bar{h} y \bar{v} :

$$\bar{h} = \left(\frac{Q}{\sqrt{\xi} \sum_{j=1}^N \sqrt{\lambda_j} b_j} \right)^{2/3} \quad (3.77)$$

$$\bar{v} = \frac{(Q\xi)^{1/3}}{B} \left(\sum_{j=1}^N \sqrt{\lambda_j} b_j \right)^{2/3} \quad (3.78)$$

La última ecuación de interés corresponde a la ecuación Cuadrática (ecuación (3.65)). Reemplazando con la definición de τ_b en la ecuación (3.70) se obtiene:

$$\rho h g \sin(\theta) = \rho \left(\frac{\tau_y}{\rho} + \frac{K\eta}{8h\rho} v + \frac{n^2 g}{h^{1/3}} v^2 \right) \quad (3.79)$$

Encontrar expresiones para \bar{h} y \bar{v} a partir de las ecuaciones (3.69) y (3.79) no es tan directo como en los casos anteriores, esto debido a la definición de τ_b , por lo que se requiere hacer alguna simplificación. En primer lugar, se debe notar que los valores de τ_y medidos experimentalmente usando reómetros se encuentran en el rango 0,1 – 400 Pa (Major & Pierson, 1992; O'Brien & Julien, 1988), por lo que, para flujos detríticos en que $h \gg 0,1 m$, el primer término del lado derecho es despreciable (basta compararlo con el lado izquierdo de la ecuación). Con esta simplificación junto a la ecuación (3.69) es posible obtener una expresión para \bar{v} , donde se utilizó $\bar{\theta}$ como el promedio de las pendientes en el perfil transversal.

$$\frac{n^2 g}{(Q/B)^{1/3}} \bar{v}^{10/3} + \frac{K\eta B}{8\rho Q} \bar{v}^3 = \frac{Q g \sin(\bar{\theta})}{B} \quad (3.80)$$

Es posible resolver la ecuación (3.80) de forma iterativa y luego despejar el valor de \bar{h} a partir de la ecuación (3.69).

En los párrafos anteriores se mostró cómo calcular los valores de v_j y h_j a partir del valor de Q introducido en el hidrograma y de la ecuación de fricción escogida. No obstante, al imponer $h_j = \bar{h}$ uniforme en todos los elementos donde se define el flujo de entrada se pueden obtener configuraciones poco realistas. Uno de estos casos es mostrado en la

Figura 3.7, donde la cota de la superficie libre varía de forma excesiva, esto debido a que la condición de borde en el perfil transversal no considera las variaciones de altura del terreno.

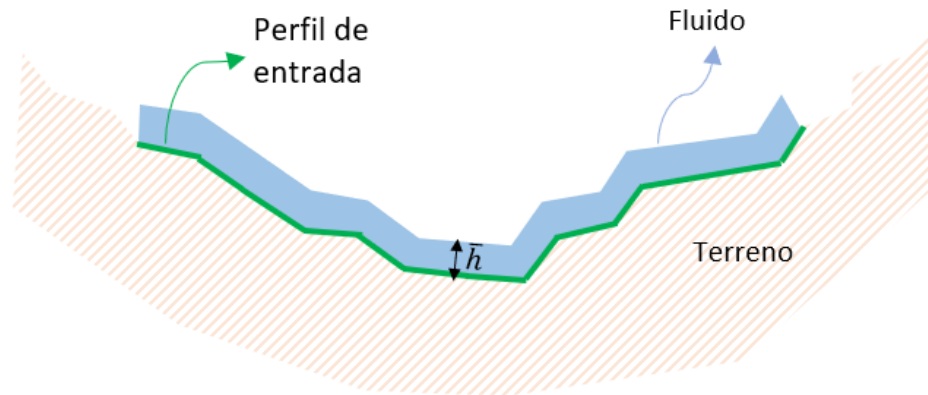


Figura 3.7: Vista transversal del perfil de entrada en el caso que $h_j = \bar{h}$ para todos los elementos del perfil.

Para lidiar con este problema, se recalculan los valores h_j a partir de \bar{h} de tal modo que se tome en cuenta la geometría del perfil transversal, pero sin dejar de cumplir con la ecuación (3.67). Para esto se redefine h_j utilizando la coordenada vertical del centro de la arista z_j :

$$h_j = z_{fs} - z_j \quad (3.81)$$

donde z_{fs} es la altura de la superficie libre. Luego:

$$Q = \sum_{j=1}^N b_j (z_{fs} - z_j) \bar{v} = \bar{v} \left(z_{fs} \sum_{j=1}^N b_j - \sum_{j=1}^N b_j z_j \right) \quad (3.82)$$

Es posible así despejar una expresión para z_{fs} :

$$z_{fs} = \frac{(Q/\bar{v}) + \sum_{j=1}^N b_j z_j}{B} \quad (3.83)$$

No obstante, se debe notar que $z_{fs} \geq z_j$ no es necesariamente válido para todos los elementos del perfil transversal. Será necesario por tanto iterar, calculando un valor inicial de z_{fs} usando la ecuación (3.83) incluyendo todos los elementos en la sumatoria y luego refinar el valor al incluir solo las aristas en que $h_j > 0$. Debido a que se está trabajando con una cantidad finita de elementos, el procedimiento iterativo podría no converger, por lo que en caso de no encontrar una solución rápida es recomendable hacer alguna simplificación en los extremos del perfil transversal o simplemente utilizar $h_j = \bar{h}$ para todos los elementos del perfil.

3.8. Algoritmo de modificación del terreno

En la ecuación (3.61) se mostró como varía el espesor de la capa de sedimento erosionable producto de la erosión o depositación de material. Para que el terreno sea modificado como respuesta a estos procesos cualquier cambio en h_e debe estar acompañado de un cambio en la coordenada vertical z del terreno (ver Figura 3.5). Tal como se muestra en la Figura 3.6 (y se ahondará en el capítulo 4), el problema será resuelto utilizando un método numérico donde el dominio geométrico es dividido en una cantidad finita de elementos, siendo el análisis siguiente conducido para un elemento j cualquiera de esta malla.

Si el espesor de la capa erosionable en el elemento j para los tiempos t^{n+1} y t^n es, respectivamente, h_{ej}^{n+1} y h_{ej}^n , el cambio neto Δh_j se calcula como:

$$\Delta h_j = h_{ej}^{n+1} - h_{ej}^n \quad (3.84)$$

donde $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ y Δt es el paso de tiempo usado. Si $\Delta h_j > 0$ entonces hay depositación, por el otro lado, si $\Delta h_j < 0$ se tiene erosión en el elemento j . El cambio neto de volumen en la capa erosionable se calcula utilizando el área S_j del elemento:

$$\Delta V_j = S_j \Delta h_j \quad (3.85)$$

Tal como se muestra en la Figura 3.8, el cambio neto Δh_j es medido en la dirección normal al fondo y por tanto una versión vertical Δh_j^* debe ser utilizada para calcular z_j^{n+1} , que es la coordenada vertical del centroide del elemento en el tiempo t^{n+1} . Para esto se hace uso de la ecuación (3.86), donde θ es la pendiente del terreno y \hat{n}_j y \hat{k} son vectores unitarios. Δh_j^* es calculado de modo tal que los paralelepípedos azul y rojo en la Figura 3.8 tengan el mismo volumen.

$$z_j^{n+1} = z_j^n + \Delta h_j^* = z_j^n + \frac{\Delta h_j}{\cos \theta} = z_j^n + \frac{\Delta h_j}{(\hat{k} \cdot \hat{n}_j)} \quad (3.86)$$

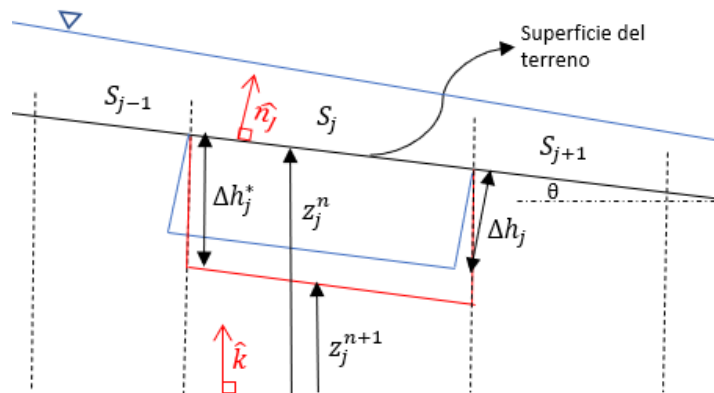


Figura 3.8: Definición de las variables usadas en el algoritmo de modificación del terreno.

Hasta este punto el procedimiento es bastante simple: para cada paso de tiempo un nuevo valor h_{e_j} es calculado, y luego con los valores de Δh_j y Δh_j^* se obtiene un nuevo valor de z_j . El problema de este procedimiento es que z_j no puede ser directamente modificado. Esto debido a que el elemento j es definido por sus vértices y z_j es solo un resultado obtenido a partir de estos. Luego, para modificar la malla es necesario recalcular las coordenadas de los vértices de los elementos, lo cual, con el objetivo de evitar alterar información topológica relacionada a la malla, se efectuará modificando la componente vertical de los vectores posición de los vértices.

En la Figura 3.9 se muestra un ejemplo de una malla no estructurada formada por cuadriláteros y octágonos, donde se aprecia que casi todos los vértices forman parte de más de un elemento. Esto significa que la nueva coordenada de cada vértice debe ser calculada utilizando un conjunto de valores Δh_k^* , específicamente aquellos relacionados a los elementos a los cuales pertenece. La mejor forma de hacer esto es por medio de un promedio ponderado, utilizando las áreas S_k de los elementos. En la ecuación (3.87) \mathbf{r}_i refiere al vector posición de un vértice i que pertenece a M elementos ($k = 1, \dots, M$):

$$\mathbf{r}_i^{n+1} = \mathbf{r}_i^n + \frac{\sum_k S_k \Delta h_k^* \hat{\mathbf{k}}}{\sum_k S_k} \quad (3.87)$$

Este procedimiento asegura que si Δh_k^* es un valor constante, entonces todos los vértices serán desplazados una distancia Δh^* y luego $z_j^{n+1} = z_j^n + \Delta h^*$.

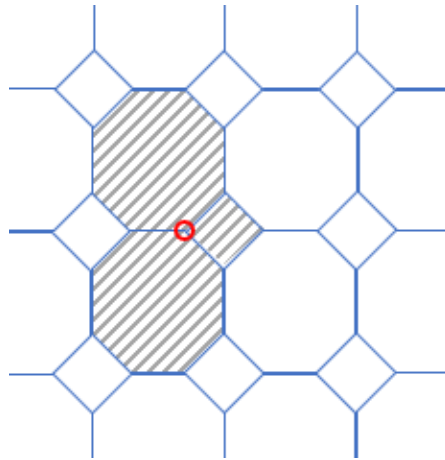


Figura 3.9: Ejemplo de una malla no estructurada. El vértice señalado con el círculo rojo pertenece a tres elementos.

En la Figura 3.10 se muestra un elemento con cinco vértices, los cuales son desplazados, por medio de la ecuación (3.87), desde \mathbf{r}_i^n a \mathbf{r}_i^{n+1} . Se observa que el movimiento de los vértices barre un volumen ΔV_j^* , el cual, para conservar el volumen de sedimento en la capa erosionable, debe ser igual al valor de ΔV_j calculado con la ecuación (3.85).

Se definen las superficies $R_j^n = \{\mathbf{r}_1^n, \mathbf{r}_2^n, \dots, \mathbf{r}_N^n\}$ y $R_j^{n+1} = \{\mathbf{r}_1^{n+1}, \mathbf{r}_2^{n+1}, \dots, \mathbf{r}_N^{n+1}\}$, que están formadas por los N vértices, ordenados en sentido horario, que definen al elemento j en los tiempos t^n y t^{n+1} . Es posible calcular los centroides de ambas superficies \mathbf{r}_c^n y \mathbf{r}_c^{n+1}

y luego dividir el volumen en N poliedros tal que el i -ésimo poliedro P_i está definido por seis puntos: $P_i = \{\mathbf{r}_c^n, \mathbf{r}_i^n, \mathbf{r}_{i+1}^n, \mathbf{r}_c^{n+1}, \mathbf{r}_i^{n+1}, \mathbf{r}_{i+1}^{n+1}\}$, con $\mathbf{r}_{N+1} = \mathbf{r}_1$. Así, el problema se traduce en obtener el volumen V_{P_i} del i -ésimo poliedro P_i y calcular ΔV_j^* utilizando:

$$\Delta V_j^* = \sum_{i=1}^N V_{P_i} \quad (3.88)$$

En los poliedros P_i no se introdujo ninguna notación referida al elemento j , no obstante, se debe tener en cuenta que los vértices de las superficies R_j^n y R_j^{n+1} son distintos en todos los elementos de la malla. En la Figura 3.11 se muestra uno de los poliedros extraídos a partir del volumen mostrado en la Figura 3.10.

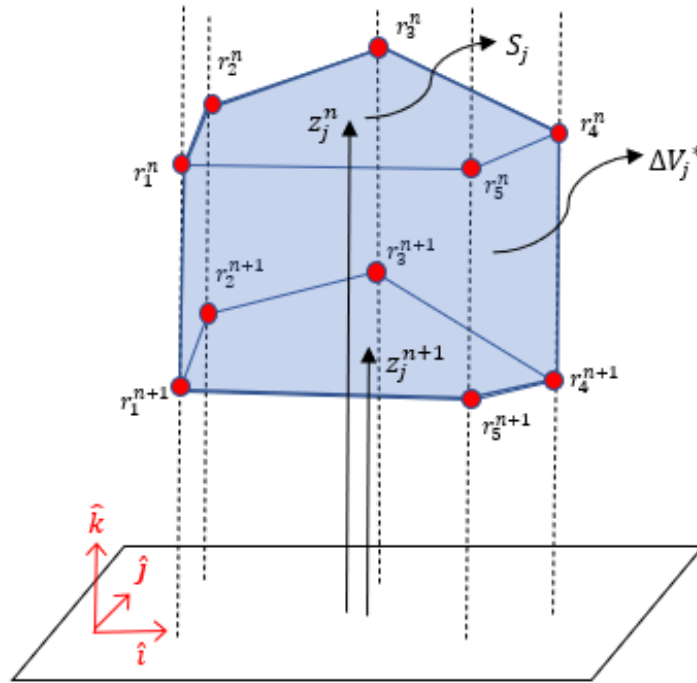


Figura 3.10: Ejemplo del movimiento de un elemento de cinco vértices. El nuevo centroide del elemento es z_j^{n+1} .

Para calcular el volumen del i -ésimo poliedro este es dividido en tres tetraedros, se calcula el volumen de cada uno de estos y luego son sumados (Tuković, 2005, pp. 79). En la Figura 3.11 el tetraedro rojo corresponde al primer término del lado derecho de la ecuación (3.89), basta notar que $\mathbf{r}_5 = \mathbf{r}_i$ y $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{i+1}$. Los tetraedros verde y morado corresponden, respectivamente, al segundo y tercer término de la ecuación.

$$\begin{aligned} V_{P_i} = & \frac{1}{6} (\mathbf{r}_c^{n+1} - \mathbf{r}_c^n) \cdot ((\mathbf{r}_i^n - \mathbf{r}_c^n) \times (\mathbf{r}_{i+1}^n - \mathbf{r}_c^n)) \\ & + \frac{1}{6} (\mathbf{r}_i^{n+1} - \mathbf{r}_i^n) \cdot ((\mathbf{r}_{i+1}^n - \mathbf{r}_i^n) \times (\mathbf{r}_c^{n+1} - \mathbf{r}_i^n)) \\ & + \frac{1}{6} (\mathbf{r}_{i+1}^{n+1} - \mathbf{r}_{i+1}^n) \cdot ((\mathbf{r}_c^{n+1} - \mathbf{r}_{i+1}^n) \times (\mathbf{r}_i^{n+1} - \mathbf{r}_{i+1}^n)) \end{aligned} \quad (3.89)$$

Es importante notar que los valores de ΔV_j y ΔV_j^* calculados tendrán signos opuestos. Si se genera erosión en el elemento j , entonces se tendrá que ΔV_j es negativo y se alcanzará una configuración como la mostrada en la Figura 3.10, donde los nuevos vértices tienen menor coordenada vertical que los originales. De este modo, en la ecuación (3.89) los términos asociados a las áreas, como $(\mathbf{r}_i^n - \mathbf{r}_c^n) \times (\mathbf{r}_{i+1}^n - \mathbf{r}_c^n)$, apuntarán en la dirección de $-\hat{\mathbf{k}}$, igual que los términos asociados a las alturas, como $\mathbf{r}_c^{n+1} - \mathbf{r}_c^n$. Así, cada uno de los productos escalares será positivo y ΔV_j^* tendrá signo opuesto a ΔV_j , pues todos los valores de V_{pi} serán positivos.

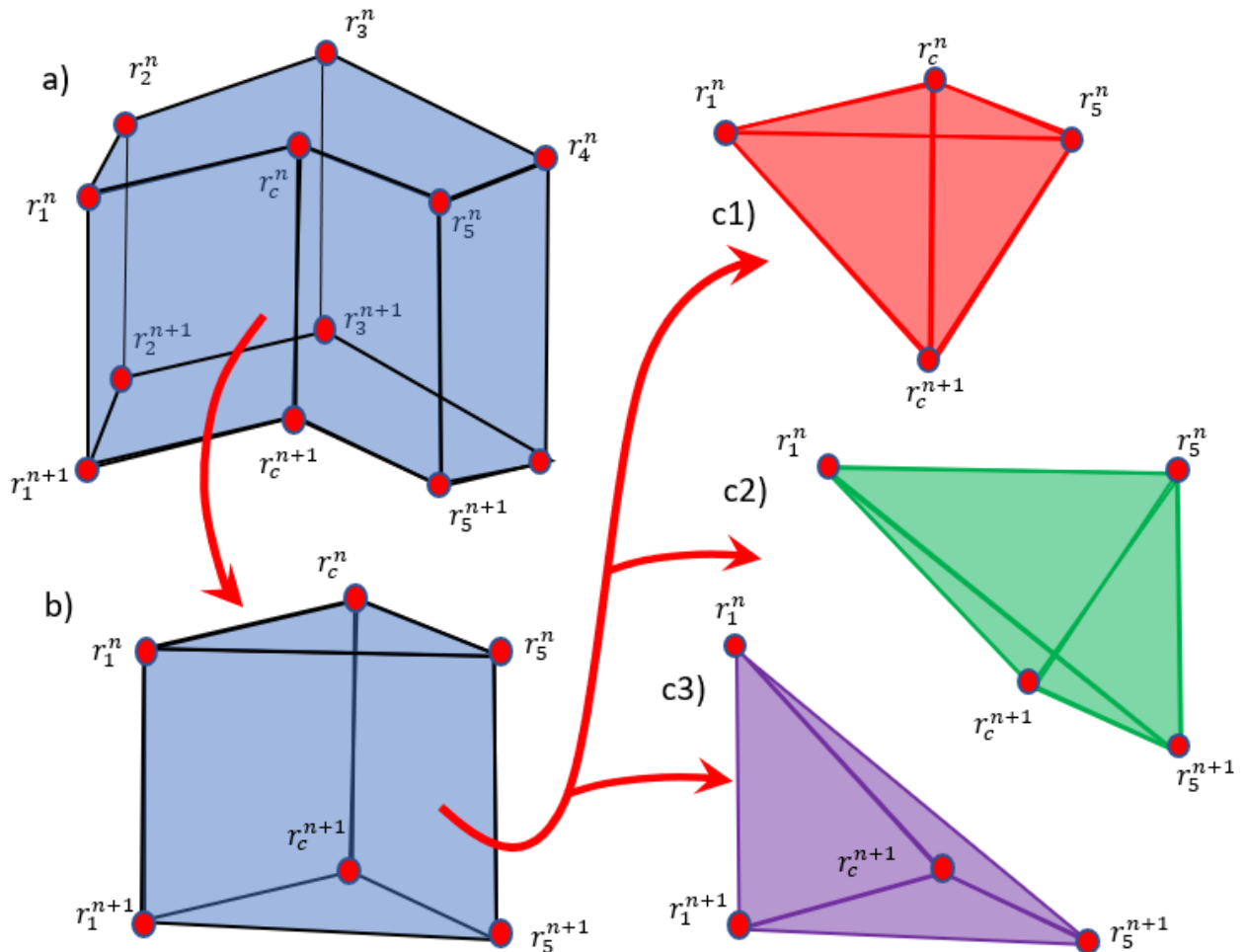


Figura 3.11: Ejemplo de división del volumen inicial (a) en poliedros por medio de definir los centroides r_c^n y r_c^{n+1} . Cada poliedro extraído (b) es dividido en tres tetraedros (c1, c2 y c3).

Dado que no es posible asegurar que $|\Delta V_j|$ y $|\Delta V_j^*|$ serán iguales solo por medio de modificar los vértices utilizando la ecuación (3.87), se aplica el siguiente procedimiento iterativo para alcanzar la solución. Notar que en el cálculo de Δh no se usa directamente la ecuación (3.84), sino que una versión modificada que permite considerar el remanente de la iteración anterior. Con tal de evitar generar cambios bruscos en r^{n+1} , se incluye en su cálculo el coeficiente de relajación α_r .

1. Calcular h_e^{n+1} , $\Delta h = \Delta h + (h_e^{n+1} - h_e^n)$ y $\Delta h^* = \frac{\Delta h}{(\hat{k} \cdot \hat{n})}$
2. Calcular $\Delta V = S \Delta h$
3. Calcular la nueva coordenada de todos los vértices con $\mathbf{r}^{n+1} = \mathbf{r}^n + \alpha_r \frac{\sum_k S_k \Delta h_k^*}{\sum_k S_k} \hat{\mathbf{k}}$
4. Calcular ΔV^* utilizando las ecuaciones (3.88) y (3.89).
5. Recalcular Δh , usando $\Delta h = \frac{(\Delta V + \Delta V^*)}{S}$, y luego Δh^*
6. Si $|\Delta h^*|$ es menor que cierto valor límite avanzar al paso 7, de lo contrario volver al paso 2.
7. Recalcular $\hat{\mathbf{n}}$, \mathbf{g}_n , \mathbf{g}_s y S .

A pesar de que en teoría con los pasos mostrados basta para modificar el lecho en función del material erosionado y/o depositado, lo cierto es que es sumamente difícil que el método iterativo converja. La razón de esto se puede apreciar en la Figura 3.12, donde se tiene el caso de una malla unidimensional con depositación solo en el elemento C_j (ver Figura 3.12 a)). Es claro que aplicando el procedimiento iterativo no será posible alcanzar una solución. Esto se debe a que, al modificar las coordenadas de los vértices de C_j , se estará generado una falsa depositación ($\Delta V^* < 0$) en los elementos vecinos C_{j-1} y C_{j+1} , por lo que en la siguiente iteración tendrán un valor $\Delta h^* < 0$ (ver Figura 3.12 b)). Así, todos los vértices de los elementos vecinos descenderán, generado una falsa erosión ($\Delta V^* > 0$) en C_{j-2} y C_{j+2} (ver Figura 3.12 c)). Se concluye por tanto que al continuar iterando se producirá un frente de ondas que se propagará en ambas direcciones de la malla, modificando el terreno en lugares lejanos de donde realmente se tiene depositación (o erosión), hasta alcanzar la única solución posible, la cual es mostrada en la Figura 3.12 d).

La razón de este problema es el cambio brusco en los valores de Δh^* en su condición inicial. Si en cambio se tuviese una distribución como la mostrada en la Figura 3.13 a) sería posible encontrar una solución, tal como se muestran en la Figura 3.13 b), esto debido a que el movimiento de los vértices de un elemento tendría menor efecto en sus elementos vecinos. Esto lleva a concluir que, además del procedimiento iterativo recién mostrado, es necesario incluir un algoritmo que permita suavizar los valores de Δh^* de modo que la distribución inicial se acerque a una función continua. El algoritmo en cuestión será llamado *Smoother*, el cual, si bien podría ser implementado de muchas formas, en este trabajo se opta por hacer tender los valores de Δh^* a una distribución normal.

A continuación, se explicará el funcionamiento del *Smoother*, cuyo objetivo es que la distribución inicial de volumen depositado (o erosionado) se asemeje al mostrado en la Figura 3.13 a) y no al mostrado en la Figura 3.12 a). En cada elemento es necesario calcular el promedio espacial $\overline{\Delta h^*}$, el valor máximo Δh^{*max} y el valor mínimo Δh^{*min} . Para esto se consideran los valores de Δh^* en el elemento j y en los N elementos vecinos ($i = 1, \dots, N$).

$$\overline{\Delta h_j^*} = \frac{1}{N+1} \left(\Delta h_j^* + \sum_{i=1}^N \Delta h_i^* \right) \quad (3.90)$$

$$\Delta h_j^{*max} = \max(\Delta h_j^*, \Delta h_1^*, \dots, \Delta h_N^*) ; \Delta h_j^{*min} = \min(\Delta h_j^*, \Delta h_1^*, \dots, \Delta h_N^*) \quad (3.91)$$

$$\sigma_j = \Delta h_j^{*max} - \Delta h_j^{*min} \quad (3.92)$$

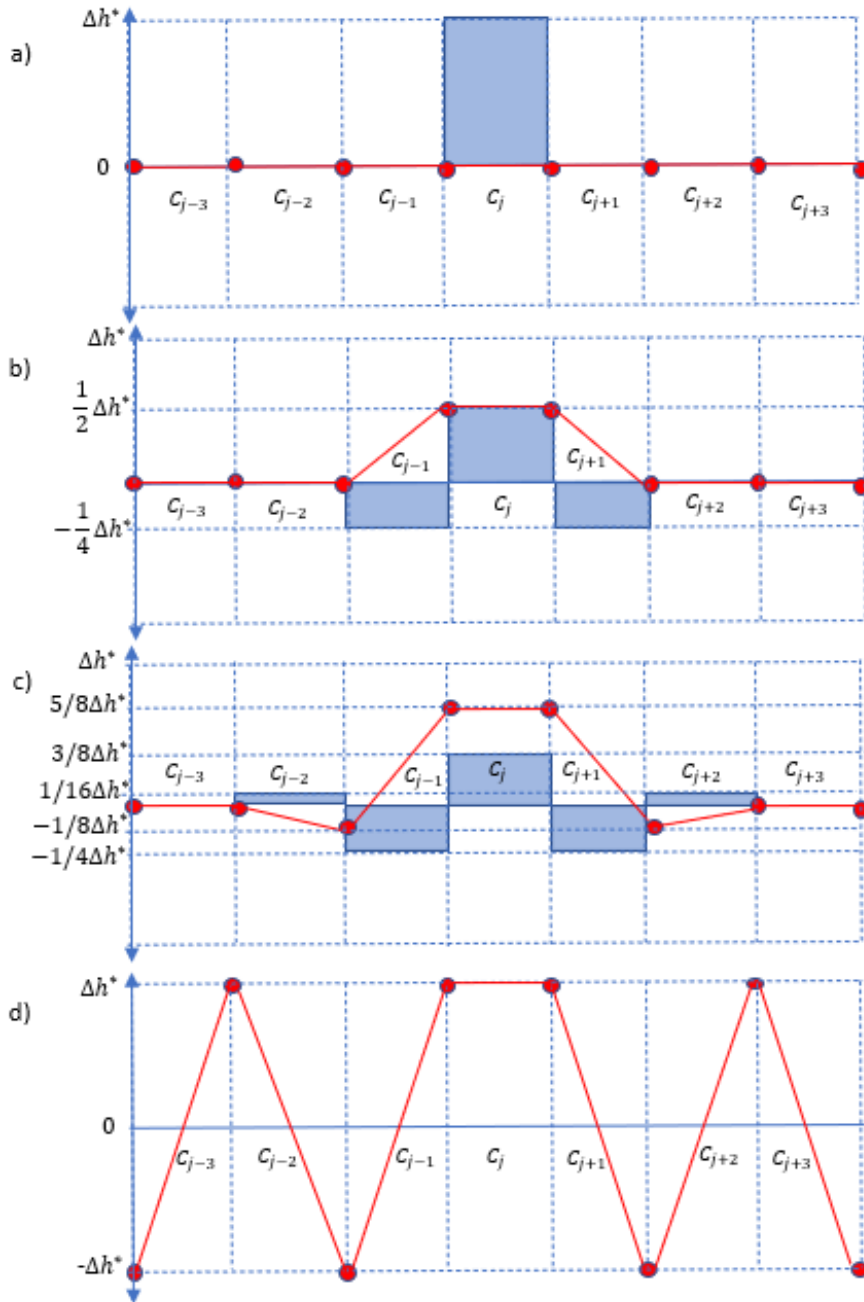


Figura 3.12: Ejemplo de uso del algoritmo de modificación del terreno para una malla unidimensional de elementos uniformes. En las figuras las áreas azuladas representan, dependiendo del signo, volúmenes erosionados y depositados, los cuales deben ser incorporados al terreno. La línea roja representa la superficie del terreno y los puntos rojos los vértices que forman los elementos de la malla. En a) se tiene la condición inicial de solo depositación en el elemento C_j . En b) y c) se tiene la configuración obtenida para las dos siguientes iteraciones del algoritmo. En d) se tiene la única solución posible que preserve el volumen de material en cada elemento de la malla.

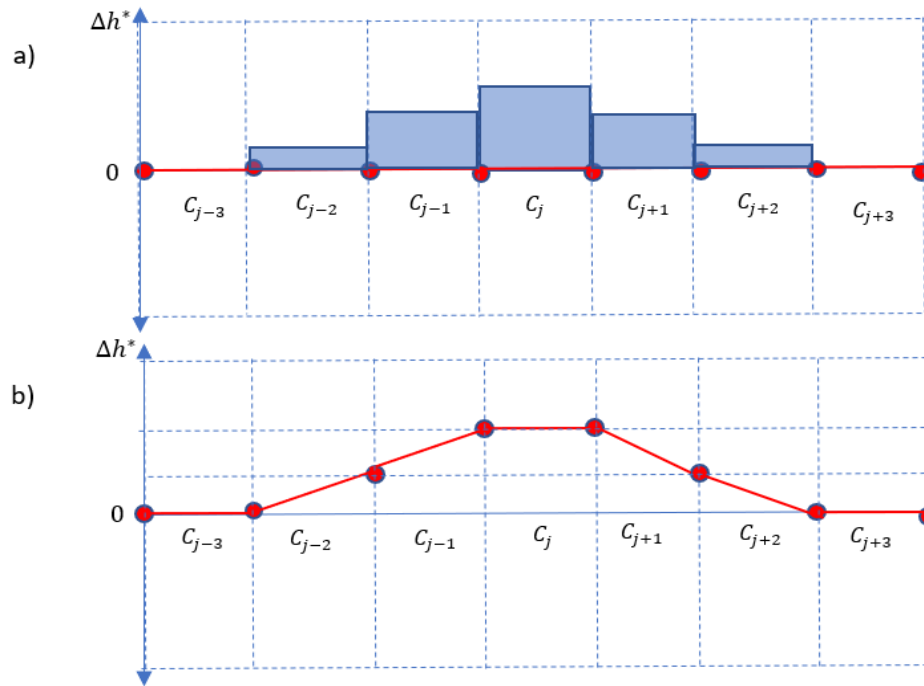


Figura 3.13: Ejemplo de uso del algoritmo de modificación de terreno para el caso en que el volumen depositado sigue, aproximadamente, una función continua suave. En a) se tiene la distribución inicial de volumen depositado ($\Delta h^* > 0$), mientras que en b) la solución final obtenida para los vértices que forman la malla.

En la ecuación (3.92) se calcula además el valor de la variación σ , la cual resulta ser una medida de la dispersión en la distribución de valores de Δh^* . Para hacer tender los valores de Δh^* a una distribución continua, los máximos y mínimos deben ser atenuados, para lo cual se utilizan los valores de $\overline{\Delta h^*}$ y σ . Para decidir si el valor de Δh^* en la celda j debe ser modificado se introduce el coeficiente α_Γ , el cual debe estar en el rango $[0,1]$. Se introduce, además, la variable Γ , la cual se calcula en cada elemento a partir de la ecuación (3.93). Si $\Gamma_j = 1$ entonces Δh_j^* debe ser modificado, mientras que si $\Gamma_j = 0$ este mantiene su valor.

$$\Gamma_j = \begin{cases} 1 & \text{si } |\Delta h_j^* - \overline{\Delta h_j^*}| > \alpha_\Gamma \sigma_j \\ 0 & \text{si } |\Delta h_j^* - \overline{\Delta h_j^*}| \leq \alpha_\Gamma \sigma_j \end{cases} \quad (3.93)$$

Se debe notar que al modificar los valores de Δh^* se estarán cambiando los valores de ΔV calculados con la ecuación (3.85), lo que podría hacer que no se cumpla con la conservación de sedimento en el estrato erosionable. Para evitar que esto ocurra, la forma correcta de modificar los valores de Δh^* es por medio de redistribuir el volumen erosionado o depositado con los elementos vecinos, es decir, se deben modificar los valores de ΔV y como consecuencia de esto obtener nuevos valores de Δh^* . Se define ΔV^{max} como el máximo volumen de sedimento que un elemento puede repartir a los elementos vecinos, tal que si Δh_j^* es mayor al promedio ($\Delta h_j^* > \overline{\Delta h_j^*}$) será positivo y de lo contrario ($\Delta h_j^* < \overline{\Delta h_j^*}$) será negativo. Se introduce el coeficiente β_Γ en el cálculo de ΔV^{max}

para limitar el cambio de volumen en cada elemento, de modo de que aquellos que son máximos o mínimos lo sigan siendo luego de la aplicación del *Smoother*.

$$\Delta V_j^{max} = \beta_{\Gamma} (\Delta h_j^* - \overline{\Delta h_j^*}) \Gamma_j S_j (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_j) \quad (3.94)$$

Dado que no tiene sentido que un elemento que cumpla $\Gamma_j = 1$ envíe volumen a un elemento i en que $\overline{\Delta h_j^*} < \Delta h_j^* < \Delta h_i^*$ o $\overline{\Delta h_j^*} > \Delta h_j^* > \Delta h_i^*$, se introduce el coeficiente α_{ji} , el cual es definido en cada elemento j para sus N elementos vecinos ($i = 1, \dots, N$), tal que:

$$\alpha_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Gamma_j = 1 \wedge \Delta h_j^* > \overline{\Delta h_j^*} \wedge \Delta h_j^* > \Delta h_i^* \\ 1 & \text{si } \Gamma_j = 1 \wedge \Delta h_j^* < \overline{\Delta h_j^*} \wedge \Delta h_j^* < \Delta h_i^* \\ 0 & \text{si } \Gamma_j = 0 \end{cases} \quad (3.95)$$

Luego, el nuevo volumen ΔV en cada celda se calcula a partir del volumen que esta pierde al ceder a los elementos vecinos y el que gana debido al volumen entregado por los elementos vecinos. Estos términos quedan representados en la ecuación (3.96), respectivamente, por el segundo y tercer término del lado derecho. Así como está planteado en la ecuación (3.96), el volumen perdido por un elemento es igual al ganado por el elemento vecino, por lo que se conserva el sedimento en la capa erosionable. En la ecuación (3.96) se realizan sumatorias sobre los elementos que pertenecen a $nb(C_j)$, que es el conjunto de los elementos vecinos a C_j . Mientras que en un término se utiliza el coeficiente α_{ji} , en el otro se utiliza α_{ij} , no siendo correcto hacer ningún supuesto sobre sus valores, pues cualquier combinación se puede obtener para el par $(\alpha_{ji}, \alpha_{ij})$.

$$\Delta V_j = \Delta V_j - \sum_{i \in nb(C_j)} \alpha_{ji} \left(\frac{S_i}{\sum_{i \in nb(C_j)} S_i} \right) \Delta V_j^{max} + \sum_{i \in nb(C_j)} \alpha_{ij} \left(\frac{S_j}{\sum_{k \in nb(C_i)} S_k} \right) \Delta V_i^{max} \quad (3.96)$$

Una vez recalculado ΔV_j es posible obtener un nuevo valor de Δh_j^* .

$$\Delta h_j^* = \frac{\Delta V_j}{S_j (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_j)} \quad (3.97)$$

El algoritmo del *Smoother* puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Calcular $\overline{\Delta h^*}$ y σ utilizando las ecuaciones (3.90) y (3.92)
2. Evaluar Γ y los valores α_{ij} utilizando las ecuaciones (3.93) y (3.95)
3. Calcular ΔV^{max} utilizando la ecuación (3.94)
4. Recalcular ΔV y Δh^* utilizando las ecuaciones (3.96) y (3.97)

Debido a que el *Smoother* afecta los valores de Δh^* este debe ser incorporado dentro del algoritmo que se encarga de la modificación del terreno, incluyéndolo entre los pasos 2 y 3. Así, el algoritmo de modificación del terreno, de aquí en más nombrado TMA, consta de los siguientes pasos:

1. Calcular h_e^{n+1} , $\Delta h = \Delta h + (h_e^{n+1} - h_e^n)$ y $\Delta h^* = \frac{\Delta h}{(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}})}$
2. Calcular $\Delta V = S \Delta h$
3. Usar el *Smoother* para recalculer ΔV y Δh^*
4. Calcular la nueva coordenada de todos los vértices con $\mathbf{r}^{n+1} = \mathbf{r}^n + \alpha_r \frac{\sum_k S_k \Delta h_k^* \hat{\mathbf{k}}}{\sum_k S_k}$
5. Calcular ΔV^* utilizando las ecuaciones (3.88) y (3.89).
6. Recalculer Δh , usando $\Delta h = \frac{(\Delta V + \Delta V^*)}{S}$, y luego Δh^*
7. Si $|\Delta h^*|$ es menor que cierto valor límite avanzar al paso 8, de lo contrario volver al paso 2.
8. Recalculer $\hat{\mathbf{n}}$, \mathbf{g}_n , \mathbf{g}_s y S .

El resultado más importante de este método es que la erosión y depositación de sedimento modifican la malla y por tanto algunos de los términos que forman parte de las ecuaciones de movimiento previamente deducidas. Esto significa, por ejemplo, que la erosión o depositación pueden modificar la pendiente y luego incrementar el valor de \mathbf{g}_s , lo cual debería acelerar el flujo y alterar el resultado de la simulación.

Si bien se podría pensar que luego de modificar el área S_B de los elementos se debería recalculer algunas de las variables del flujo, como h y $\bar{\mathbf{u}}$, de modo de conservar dichas cantidades en el volumen de control, lo cierto es que esto sería un error. El análisis será realizado para la ecuación de continuidad mostrada en (3.54). Reemplazando el término transiente con su derivada discreta y despreciando tanto la derivada espacial como el flujo con el fondo, se obtiene la siguiente igualdad:

$$\frac{(\rho h' S_B)^{n+1}}{\Delta t} = \frac{(\rho h' S_B)^n}{\Delta t} \quad (3.98)$$

Imponiendo $\rho^{n+1} = \rho^n$ se obtiene que $(h' S_B)^{n+1} = (h' S_B)^n$, es decir, se conserva el volumen de fluido en el volumen de control. Si se recalculase h' luego del paso 8 del TMA en el paso de tiempo previo, la ecuación (3.98) ya no sería válida y no se podría obtener la misma conclusión sobre la conservación de masa. Esto puede ser extendido para la conservación de momentum en la mezcla.

Capítulo 4

Método de áreas finitas

4.1. Introducción

En este capítulo se discutirá sobre la forma en que el sistema de ecuaciones deducido en el capítulo anterior es implementado y resuelto utilizando el método de áreas finitas en OpenFOAM®. El método de áreas finitas (FAM), que es una variante del método de volúmenes finitos (FVM), fue presentado inicialmente por Tuković (2005) y Tuković & Jasak (2012), donde el sistema de ecuaciones diferenciales parciales es resuelto en una superficie curva bidimensional definida en un espacio tridimensional. El uso del FAM permite enunciar de forma simple las ecuaciones discretizadas, sin la necesidad de incluir términos que permitan corregir en función de la curvatura de la superficie (Rauter & Tuković, 2018).

Tal como en el FVM, en el FAM el dominio geométrico es discretizado en elementos poligonales que no se traslapan y las ecuaciones diferenciales parciales cuasi-bidimensionales, las cuales representan las leyes de conservación del problema en cuestión, son convertidas en ecuaciones algebraicas. El sistema de ecuaciones algebraicas, una para cada elemento de la malla, es luego resuelto, ya sea implícita o explícitamente, para obtener los valores de las variables dependientes en la totalidad del dominio. La propiedad de conservación inherente al FVM es heredada por el FAM, ya que el flujo entrante a un elemento del dominio es idéntico al flujo que deja al elemento adyacente.

OpenFOAM® (*Open Source Field Operation And Manipulation*) es una librería de código abierto escrita en C++ diseñada, entre otros, para la solución de problemas de fluidodinámica. Esto principalmente mediante el uso del FVM con el soporte necesario para realizar cálculos en paralelo (OpenCFD, 2020a; Moukalled et al., 2016). La librería de áreas finitas (FA), así como múltiples *solvers*, utilidades (*utilities* en inglés) y aplicaciones se encuentran disponibles en la versión de OpenFOAM® distribuida por OpenCFD Ltd y puede ser utilizada y modificada por cualquier usuario. La gran ventaja de OpenFOAM® es que la discretización del dominio y ecuaciones, así como el método

de solución, son independientes entre sí, lo que ofrece gran versatilidad y opciones al usuario.

En las secciones siguientes se presentan los métodos de discretización del dominio geométrico, la discretización de los diferentes términos en las ecuaciones de conservación y el método iterativo escogido para resolver el sistema de ecuaciones algebraicas resultante. Dado que el objetivo es resolver las ecuaciones diferenciales parciales con gran exactitud y estabilidad en un tiempo de cómputo no prohibitivo, en las subsecciones siguientes estas metas serán consideradas al escoger los métodos a emplear en los procedimientos de discretización.

4.2. Discretización geométrica

El primer paso en la discretización del dominio geométrico es la creación de una malla que forme y rellene el dominio computacional del problema a resolver. El resultado de este proceso es un número finito de polígonos convexos contiguos que no se superponen, cada uno de ellos definido por un número variable de aristas rectas (ver Figura 4.1). Estos polígonos, también denotados como elementos, pueden formar tanto una malla estructurada como una no estructurada. No obstante, la última opción es usualmente preferida, esto debido a la flexibilidad en el tipo de polígonos que se pueden utilizar para representar los elementos, así como la facilidad con que pueden ser refinados en donde sea requerido (Moukalled et al., 2016, pp. 137-150; Rauter & Tuković, 2018). Dado que el proceso de discretización geométrico es conducido la mayoría de las veces de forma automática, este no será discutido en este trabajo excepto por su implementación en OpenFOAM®, lo cual es analizado en la sección 5.2.

Los dos pasos siguientes en el proceso de discretización son: definición de la información topológica de la malla, la cual está referida a la disposición y relación entre los elementos de esta; y el cálculo de información geométrica de cada elemento. El almacenamiento de información topológica es especialmente relevante para mallas no estructuradas, esto debido a que la relación entre sus elementos no puede ser deducida a partir de sus índices, como sí ocurre en el caso de mallas estructuradas.

Se mostrará en las siguientes secciones y capítulos que la información topológica, así como algunos parámetros geométricos, son requeridos como parte del procedimiento de discretización de las ecuaciones. La información más relevante que debe ser almacenada incluye: relación entre elementos y entre aristas y elementos; centroide, área y vector normal de cada elemento; centro, largo y vector normal de cada arista; índices de elementos y aristas que forman parte del borde del dominio; coordenada de los vértices; etc. Mientras que muchos de estos valores pueden ser actualizados durante la aplicación del método numérico, como el área y vector normal de un elemento, otros son definidos al momento de crear la malla y su modificación no es recomendable.

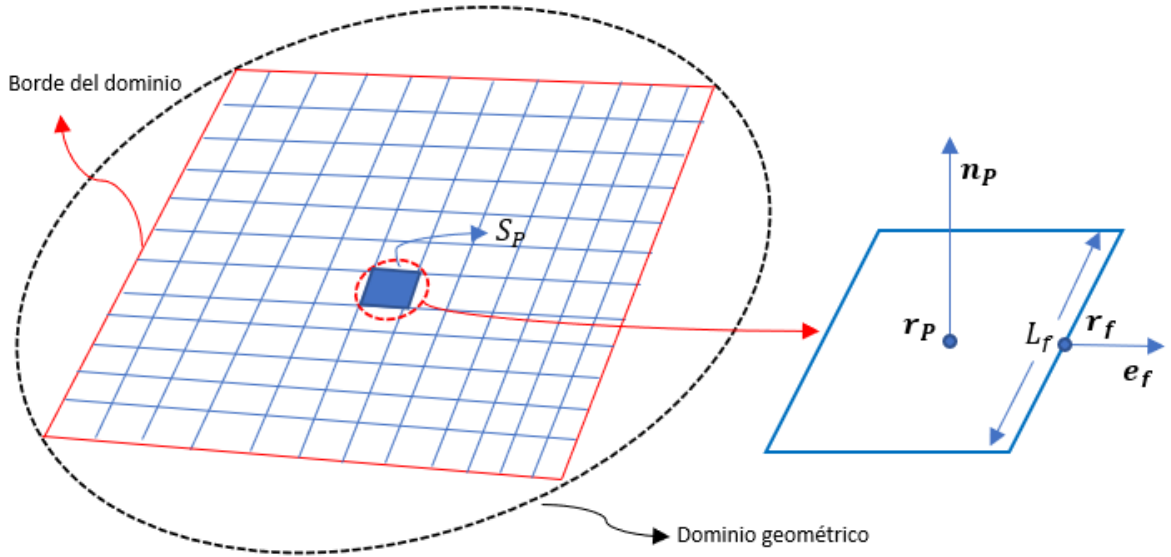


Figura 4.1: Ejemplo de una malla estructurada formada por cuadriláteros convexos. El borde del dominio geométrico está señalado por la curva de color rojo. Se muestra un elemento de la malla junto a los parámetros más importantes de este: centroide (\mathbf{r}_P), área (S_P) y vector normal (\mathbf{n}_P) del elemento P ; y centro (\mathbf{r}_f), largo (L_f) y vector normal (\mathbf{e}_f) de la arista f .

Toda variable dependiente ϕ (escalar o vectorial) es discretizada en el dominio geométrico y sus valores y parámetros relacionados son almacenados en el centroide de cada elemento y en el centro de las aristas que forman el perímetro de la malla. La razón por la cual se calculan todos los valores en el centroide de elementos y aristas, lo que es usualmente llamado como aproximación del valor medio (*mean value approximation*), es que de este modo es posible asegurar que la discretización es de segundo orden (Moukalled et al., 2016, pp. 113-116). Usando este método, $\phi = \phi(\mathbf{r})$ puede ser escrito usando series de Taylor en torno al centroide del elemento \mathbf{r}_P donde $\phi_P = \phi(\mathbf{r}_P)$:

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_P + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_P) \cdot (\nabla\phi)_P + \frac{1}{2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_P)^2 : (\nabla\nabla\phi)_P \quad (4.1)$$

Es posible determinar la exactitud de la aproximación de valor medio integrando ϕ en la celda P , lo que lleva a:

$$\overline{\phi}_P = \frac{1}{S_P} \int_{S_P} \phi dS = \phi_P + O(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_P|^2) \quad (4.2)$$

Al despreciar el último término de la ecuación se introduce un error de orden dos, razón por la cual, en las siguientes secciones la aproximación $\overline{\phi}_P \approx \phi_P$ será realizada implícitamente. Para los flujos advectivos en la arista f del elemento P la serie de Taylor es escrita en torno al centro \mathbf{r}_f de la arista, con $\phi_f = \phi(\mathbf{r}_f)$. Integrando en la arista se obtiene:

$$\begin{aligned} \overline{(\rho_f h_f \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{L}_f) \phi_f} &= \int_{L_f} (\rho h v \phi) \cdot d\mathbf{L} \\ &= (\rho_f h_f \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{L}_f) \phi_f + (\rho_f h_f \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{L}_f) O(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_f|^2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde \mathbf{v} , h y ρ son, respectivamente, la velocidad, altura y densidad del fluido, $\mathbf{v}_f = \mathbf{v}(\mathbf{r}_f)$, $h_f = h(\mathbf{r}_f)$, $\rho_f = \rho(\mathbf{r}_f)$ y $\mathbf{L}_f = L_f \mathbf{e}_f$. Nuevamente, al desprestigiar el último término en el lado derecho de la ecuación se introduce un error de segundo orden en el cálculo de los flujos advectivos. En las subsecciones siguientes la aproximación $\overline{(\rho_f h_f \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{L}_f) \phi_f} \approx (\rho_f h_f \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{L}_f) \phi_f$ se efectuará de forma implícita.

4.3. Discretización de ecuaciones

El procedimiento de discretización usado en el FAM se asemeja al utilizado en el FVM, dado que ambos, como primer paso, transforman el sistema de ecuaciones diferenciales en ecuaciones de conservación en torno a cada elemento por medio de integrar las ecuaciones espacialmente, siendo una integral de superficie para el FAM y una integral de volumen para el FVM, obteniendo como resultado en ambos casos un sistema de ecuaciones semi-discretizadas. En esta sección el primer paso es explicado, mientras que el segundo, que supone la elección de esquemas de interpolación para las variables dependientes, es levemente introducido, dejando una explicación más detallada para las subsecciones siguientes. Es importante tener en cuenta que las aproximaciones escogidas en ambos pasos determinan la exactitud y estabilidad del procedimiento numérico.

Para una variable dependiente ϕ , la cual puede ser escalar o vectorial, su ecuación de conservación puede escribirse en forma general como:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\phi) = Q(\phi) \quad (4.4)$$

siendo ρ la densidad del fluido, \mathbf{v} su velocidad y $Q(\phi)$ el término fuente, el cual puede o no ser función de ϕ . En el lado izquierdo, el primero es el término transiente, mientras que el segundo es el término advectivo. Debido a que no se tiene un término difusivo en las ecuaciones deducidas en el capítulo anterior, el tratamiento de los procesos de difusión no será incluido en el análisis siguiente (para más información revisar Moukalled et al. (2016)).

Si bien en algún problema particular se podría partir directamente integrando sobre una superficie la ecuación (4.4), las ecuaciones de conservación deducidas en esta Tesis corresponden a ecuaciones promediadas en la vertical, así que aquí se comienza con una integral de volumen para luego llegar a una de superficie. Integrando la ecuación (4.4) sobre un volumen de control cuya base es la superficie P (ver Figura 4.2), utilizando

la regla de integración de Leibniz para mover la derivada temporal fuera de la integral y separando la integral de volumen para promediar en la vertical se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_P} \rho h \phi \, dS + \int_{S_P} \nabla \cdot (\rho h \mathbf{v} \phi) \, dS = \int_{S_P} Q'(\phi) \, dS \quad (4.5)$$

Se ha puesto un apóstrofo a la función que describe el término fuente para denotar que esta no es igual a la función original de la ecuación (4.4), aunque no se incluye la posible dependencia de Q' respecto a h , pues esto no modifica el análisis venidero.

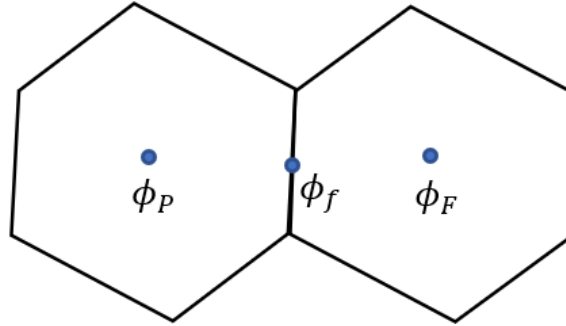


Figura 4.2: Dos elementos hexagonales donde la variable dependiente ϕ es definida en los centroides de P y F , y en el centro de la arista f .

Usando la aproximación del valor medio, el término transiente es escrito en función de ϕ_P , h_P y ρ_P , los cuales son los valores de ϕ , h y ρ evaluados en el centroide del elemento P , y S_P es su área:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_P} \rho h \phi \, dS = \frac{\partial(\rho_P h_P \phi_P S_P)}{\partial t} \quad (4.6)$$

Para el término advectivo se utiliza el teorema de la divergencia para convertir la integral de superficie en una sumatoria de flujos, uno por cada una de las aristas del elemento P , donde la aproximación del valor medio se utiliza para evaluar las variables en el centro de las aristas.

$$\int_{S_P} \nabla \cdot (\rho h \mathbf{v} \phi) \, dS = \int_{\partial S_P} (\rho h \mathbf{v} \phi) \cdot \mathbf{e} \, dL = \sum_{f \sim nb(P)} (\rho_f h_f \phi_f \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{e}_f L_f) \quad (4.7)$$

En la ecuación anterior \mathbf{e}_f es el vector normal a la arista apuntando hacia afuera del elemento. Notar que debido a que los flujos son evaluados en las aristas de todos los elementos, el flujo a través de una arista es igual para los dos elementos que comparten dicha arista, pero con diferente signo debido al cambio en el sentido de \mathbf{e}_f . Esto tiene la importante consecuencia de mantener el método conservativo.

Para el término fuente la integral de superficie se calcula utilizando el valor de ϕ en el centroide de P .

$$\int_{S_P} Q'(\phi) dS = Q'(\phi_P)S_P \quad (4.8)$$

Reemplazando en la ecuación original se obtiene:

$$\frac{\partial(\rho_P h_P \phi_P S_P)}{\partial t} + \sum_{f \sim nb(P)} (\rho_f h_f \phi_f \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{e}_f L_f) = Q'(\phi_P)S_P \quad (4.9)$$

Hasta este punto, en el proceso de discretización ningún supuesto referido al comportamiento físico de cada uno de los términos que forma la ecuación de conservación ha sido realizado, del mismo modo que decisiones sobre si dichos términos serán evaluados de forma implícita o explícita. En el segundo paso del proceso de discretización, las ecuaciones semi-discretizadas son expresadas en términos del valor de las variables en el centroide de los elementos para los instantes de tiempo presente y pasados. El resultado será un conjunto de ecuaciones algebraicas, una para cada elemento de la malla.

Para el término transiente se utiliza el método de diferencias finitas, debido a que este es el enfoque utilizado en OpenFOAM® (OpenCFD, 2020b). Para cualquier esquema de primer o segundo orden es claro que la derivada temporal puede ser expresada como la suma de un término dependiente de la variable ϕ en el tiempo t^n , el cual será denotado por ϕ^n , y una parte asociada a los dos pasados instantes de tiempo ϕ^{n-1} y ϕ^{n-2} , los cuales son evaluados, respectivamente, en $t^{n-1} = t^n - \Delta t$ y $t^{n-2} = t^{n-1} - \Delta t^o$. Notar que Δt y Δt^o no son necesariamente iguales. Luego, el término transiente puede ser escrito como:

$$\frac{\partial(\rho_P h_P \phi_P S_P)}{\partial t} = FluxP_t^n \phi_P^n + FluxP_t^{n-1} \phi_P^{n-1} + FluxP_t^{n-2} \phi_P^{n-2} \quad (4.10)$$

donde los coeficientes $FluxP_t^n$, $FluxP_t^{n-1}$ y $FluxP_t^{n-2}$ dependen del esquema usado para discretizar el término transiente. Dado que los valores de ϕ en t^{n-1} y t^{n-2} son conocidos, la ecuación (4.10) puede ser reescrita, utilizando a $FluxV_t$ como la variable que condensa todos los términos que pueden ser evaluados explícitamente:

$$\frac{\partial(\rho_P h_P \phi_P S_P)}{\partial t} = FluxP_t \phi_P^n + FluxV_t \quad (4.11)$$

En el caso de los términos advectivo y fuente, se debe escoger si estos serán calculados de forma implícita o explícita. El primer caso implica que ϕ_P y ϕ_F (el valor de ϕ en el centroide del elemento F) serán evaluados en el tiempo t^n ($\phi_P = \phi_P^n$ y $\phi_F = \phi_F^n$), por lo que ϕ_P y ϕ_F serán los valores buscados. La segunda opción es que ambos sean evaluados en t^{n-1} ($\phi_P = \phi_P^{n-1}$ y $\phi_F = \phi_F^{n-1}$) o usando los valores de la iteración anterior en caso de que el método sea iterativo ($\phi_P = \phi_P^{n*}$ y $\phi_F = \phi_F^{n*}$), en ambos casos los valores de ϕ_P y ϕ_F son conocidos.

El flujo advectivo para una arista f que es compartida por los elementos P y F puede dividirse en tres términos:

$$\rho_f h_f \phi_f \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{e}_f L_f = FluxP_f \phi_P^n + FluxF_f \phi_F^n + FluxV_f \quad (4.12)$$

donde $FluxP_f$ y $FluxF_f$ son los coeficientes linealizados para P y F , y $FluxV_f$ es la parte no linealizable, la cual no puede ser expresada en términos de ϕ_P^n ni de ϕ_F^n . Es claro que para un esquema explícito tanto $FluxP_f$ como $FluxF_f$ serán cero.

Para el término fuente es posible realizar un análisis similar, pudiendo dividir este término en dos:

$$Q'(\phi_P)S_P = FluxP_Q \phi_P^n + FluxV_Q \quad (4.13)$$

donde $FluxP_Q$ es el coeficiente linealizado para P y $FluxV_Q$ es la parte no linealizada. Nuevamente, para un esquema de interpolación explícito $FluxP_Q$ será cero.

Reuniendo todos los términos en la ecuación (4.9) se obtiene:

$$\begin{aligned} FluxP_t \phi_P^n + FluxV_t + \sum_{F \sim nb(P)} (FluxP_f \phi_P^n + FluxF_f \phi_F^n + FluxV_f) \\ = FluxP_Q \phi_P^n + FluxV_Q \end{aligned} \quad (4.14)$$

Es evidente que para cada elemento el resultado será una ecuación algebraica como la mostrada a continuación, donde el valor de ϕ_P^n está ligado al valor de sus vecinos ϕ_F^n :

$$a_P \phi_P^n + \sum_{F \sim nb(P)} a_F \phi_F^n = b_P \quad (4.15)$$

Los valores de los coeficientes a_P , a_F y b_P dependerán del tipo de términos que forman parte de la ecuación diferencial inicial y de los esquemas utilizados para discretizar y evaluar la ecuación. El sistema de ecuaciones algebraicas puede luego ser sintetizado en una única ecuación matricial:

$$A\Phi = b \quad (4.16)$$

Donde A es la matriz de coeficientes, b es el vector fuente y Φ es el vector de las incógnitas. Es importante notar que A almacenará todos los coeficientes linealizados, mientras que todos los términos no linealizables y explícitos serán sumados en b . En el vector b también se agregan los valores de ϕ que corresponden a las condiciones de borde del problema.

En las siguientes subsecciones se explicará cómo calcular los valores de los coeficientes a_P , a_F y b_P para los términos que aparecen en las ecuaciones de conservación deducidas en el capítulo anterior: gradiente y términos advectivo, fuente y transiente. Las condiciones de borde y el procedimiento para interpolar el valor de las variables dependientes al centro de las aristas también serán analizados. Con tal de mantener la claridad, en las siguientes subsecciones siempre se mencionará si un método de discretización es implícito o explícito, y dado que la variable desconocida es siempre ϕ

en el tiempo t^n , ϕ será utilizado en vez de ϕ^n excepto en la subsección donde se analiza el término transiente. El objetivo de la siguiente sección será presentar el método escogido para resolver la ecuación matricial.

4.3.1. Cálculo del gradiente

Dado que el cálculo del gradiente es requerido para ecuaciones que contengan términos advectivos o la derivada de la presión (ecuaciones (3.57) y (3.58)), entre otros, en esta sección se muestra cómo el gradiente es calculado de forma explícita en el centroide de un elemento. Para esto, el teorema de Green-Gauss es uno de los métodos más utilizados (Moukalled et al., 2016, pp. 275-280):

$$\int_S \nabla \phi \, dS = \oint_{\partial S} \phi \, d\mathbf{L} \Rightarrow \nabla \phi_P = \frac{1}{S_P} \sum_{f \sim nb(P)} \phi_f \mathbf{L}_f \quad (4.17)$$

donde para las integrales de línea se utiliza la regla de integración en el punto medio. Los valores de ϕ_f deben ser definidos antes que $\nabla \phi_P$ pueda ser calculado, para esto se utilizan los valores de ϕ en los centroides de los elementos que comparten la arista. Un coeficiente de ponderación geométrico g_w , relacionado a las distancias entre el centro de la arista \mathbf{r}_f y los puntos \mathbf{r}_P y \mathbf{r}_F , es introducido para medir el grado de dependencia de ϕ_f con ϕ_P y ϕ_F , donde \mathbf{r}_P y \mathbf{r}_F son, respectivamente, los centroides del dueño y vecino de la arista:

$$\phi_f = g_w \phi_P + (1 - g_w) \phi_F \quad (4.18)$$

$$g_w = \frac{\|\mathbf{r}_F - \mathbf{r}_f\|}{\|\mathbf{r}_F - \mathbf{r}_P\|} \quad (4.19)$$

Aunque la ecuación recién presentada parece apropiada, esta conduce a una aproximación de segundo orden para ϕ_f solo cuando la intersección entre \overline{PF} y la arista f está en el centro de esta última (Moukalled et al., 2016, pp. 275-280), lo que usualmente no ocurre para mallas no estructuradas. Inclusive, dado que el FAM es definido en un espacio tridimensional, es posible que el segmento \overline{PF} ni siquiera interseccione a la arista f (ver Figura 4.3). Para asegurar una aproximación de segundo orden en la evaluación del gradiente, una corrección de oblicuidad (*skewness correction*) es incluida en el cálculo de ϕ_f , siendo calculada como:

$$\phi_f = \phi_{f'} + (\nabla \phi)_{f'} \cdot (\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_{f'}) \quad (4.20)$$

donde

$$(\nabla \phi)_{f'} = g_w \nabla \phi_P + (1 - g_w) \nabla \phi_F \quad (4.21)$$

Se define $\mathbf{r}_{f'}$ como el punto en la arista f más cercano al trazo \overline{PF} , y $\phi_{f'}$ es calculado usando la ecuación inicial para ϕ_f (ecuación (4.20)). Dado que $(\nabla\phi)_{f'}$, el valor del gradiente interpolado al punto $\mathbf{r}_{f'}$, depende de $\nabla\phi_P$, la corrección indica que se pueden obtener mejores estimaciones al iterar. Sin embargo, esto rara vez es realizado, al menos no lo es en OpenFOAM® (Moukalled et al., 2016, pp 277; OpenCFD, 2020b).

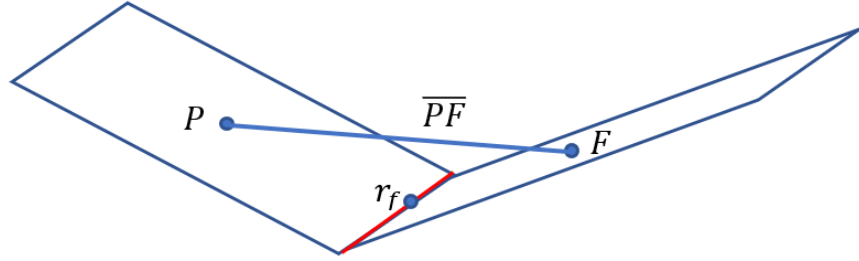


Figura 4.3: Ejemplo de dos elementos adyacentes y la arista que los conecta (línea roja). Debido a la oblicuidad de los elementos, el trazo \overline{PF} que conecta ambos centroides no interseca la arista.

Lo que resta es definir cómo obtener la posición de $\mathbf{r}_{f'}$. Dado que este es un punto perteneciente a la arista f , este puede ser escrito a partir de la posición de los vértices que definen la arista: el punto inicial \mathbf{r}_S y el punto final \mathbf{r}_E . Para esto, un coeficiente α es introducido:

$$\mathbf{r}_{f'} = \mathbf{r}_S + \alpha (\mathbf{r}_E - \mathbf{r}_S) \quad (4.22)$$

Se puede demostrar la siguiente relación para α :

$$\alpha = - \frac{(\mathbf{r}_{PF} \times \mathbf{r}_{SP}) \cdot (\mathbf{r}_{PF} \times \mathbf{r}_{ES})}{(\mathbf{r}_{PF} \times \mathbf{r}_{ES}) \cdot (\mathbf{r}_{PF} \times \mathbf{r}_{ES})} \quad (4.23)$$

con $\mathbf{r}_{PF} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_F$, $\mathbf{r}_{SP} = \mathbf{r}_S - \mathbf{r}_P$ y $\mathbf{r}_{ES} = \mathbf{r}_E - \mathbf{r}_S$ (Tuković, 2005, pp. 138-140). Luego, $\mathbf{r}_{f'}$ puede ser calculado junto a un nuevo valor de g_W :

$$g_W = \frac{\|\mathbf{r}_F - \mathbf{r}_{f'}\|}{\|\mathbf{r}_F - \mathbf{r}_{f'}\| + \|\mathbf{r}_{f'} - \mathbf{r}_P\|} \quad (4.24)$$

Notar que, debido a que $\mathbf{r}_{f'}$ no es necesariamente colineal a los puntos P y F , la igualdad $\|\mathbf{r}_F - \mathbf{r}_P\| = \|\mathbf{r}_F - \mathbf{r}_{f'}\| + \|\mathbf{r}_{f'} - \mathbf{r}_P\|$ no es siempre verdadera.

Luego, el procedimiento de cálculo incluye los siguientes pasos:

1. Calcular α y luego $\mathbf{r}_{f'}$ y g_W
2. Calcular ϕ_f usando $\phi_f = g_W\phi_P + (1 - g_W)\phi_F$
3. Calcular $\nabla\phi_P$ usando $\nabla\phi_P = \frac{1}{S_P} \sum_{f \sim nb(P)} \phi_f \mathbf{L}_f$

Si la corrección de oblicuidad es seleccionada, entonces el procedimiento sigue con:

4. Calcular $(\nabla\phi)_{f'}$ usando $(\nabla\phi)_{f'} = g_W\nabla\phi_P + (1 - g_W)\nabla\phi_F$
5. Actualizar ϕ_f usando $\phi_f = \phi_f + (\nabla\phi)_{f'} \cdot (\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_{f'})$
6. Actualizar $\nabla\phi_P$ usando $\nabla\phi_P = \frac{1}{S_P} \sum_{f \sim nb(P)} \phi_f \mathbf{L}_f$

Hasta el momento de realizar esta Tesis los pasos 4, 5 y 6 no estaban incluidos en la librería FA, razón por la cual esta parte del código fue escrita durante este trabajo.

Para lograr un mejor entendimiento, la interpolación de ϕ y $\nabla\phi$ desde el centroide de los elementos hasta el centro de la arista fue realizado como un simple promedio ponderado. Sin embargo, dicho procedimiento es correcto solo cuando la variable interpolada es un escalar. Para vectores y tensores la interpolación en el FAM debe ser realizada considerando un sistema de coordenadas ortogonal local centrado en la arista (Tuković & Jasak, 2012).

Partiendo de los vectores normales \mathbf{n}_P , \mathbf{n}_f y \mathbf{n}_F , son calculados los vectores tangentes \mathbf{e}_P , \mathbf{e}_f y \mathbf{e}_F y los vectores binormales \mathbf{m}_P , \mathbf{m}_f y \mathbf{m}_F (Tuković, 2005, pp. 142-146):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_P &= \frac{(\mathbf{I} - \mathbf{n}_P \mathbf{n}_P) \cdot (\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_P)}{\|(\mathbf{I} - \mathbf{n}_P \mathbf{n}_P) \cdot (\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_P)\|} \\
 \mathbf{e}_f &= \frac{(\mathbf{I} - \mathbf{n}_f \mathbf{n}_f) \cdot (\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_P)}{\|(\mathbf{I} - \mathbf{n}_f \mathbf{n}_f) \cdot (\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_P)\|} \\
 \mathbf{e}_F &= \frac{(\mathbf{I} - \mathbf{n}_F \mathbf{n}_F) \cdot (\mathbf{r}_F - \mathbf{r}_f)}{\|(\mathbf{I} - \mathbf{n}_F \mathbf{n}_F) \cdot (\mathbf{r}_F - \mathbf{r}_f)\|}
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\mathbf{m}_P = \mathbf{n}_P \times \mathbf{e}_P ; \mathbf{m}_f = \mathbf{n}_f \times \mathbf{e}_f ; \mathbf{m}_F = \mathbf{n}_F \times \mathbf{e}_F \tag{4.26}$$

Los tensores de transformación \mathbf{T}_P , \mathbf{T}_f y \mathbf{T}_F (ver Figura 4.4) son utilizados para transformar cualquier vector o tensor desde el sistema de coordenadas cartesianas hacia un sistema de coordenadas ortogonal local.

$$\mathbf{T}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_P^T \\ \mathbf{m}_P^T \\ \mathbf{n}_P^T \end{bmatrix} ; \mathbf{T}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_f^T \\ \mathbf{m}_f^T \\ \mathbf{n}_f^T \end{bmatrix} ; \mathbf{T}_F = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_F^T \\ \mathbf{m}_F^T \\ \mathbf{n}_F^T \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

Para un campo vectorial $\boldsymbol{\varphi}$ (por ejemplo, la velocidad del fluido) expresado en coordenadas cartesianas, su valor en el centro de la arista f es calculado utilizando la siguiente interpolación lineal:

$$\boldsymbol{\varphi}_f = (\mathbf{T}_f)^T \cdot (g_W \mathbf{T}_P \cdot \boldsymbol{\varphi}_P + (1 - g_W) \mathbf{T}_F \cdot \boldsymbol{\varphi}_F) \tag{4.28}$$

Mientras que para un campo tensorial $\boldsymbol{\sigma}$ (por ejemplo, el gradiente de la velocidad del fluido) su valor en el centro de la arista f es calculado como:

$$\sigma_f = (\mathbf{T}_f)^T \cdot (g_W \mathbf{T}_P \cdot \sigma_P \cdot \mathbf{T}_P^T + (1 - g_W) \mathbf{T}_F \cdot \sigma_F \cdot \mathbf{T}_F^T) \cdot \mathbf{T}_f \quad (4.29)$$

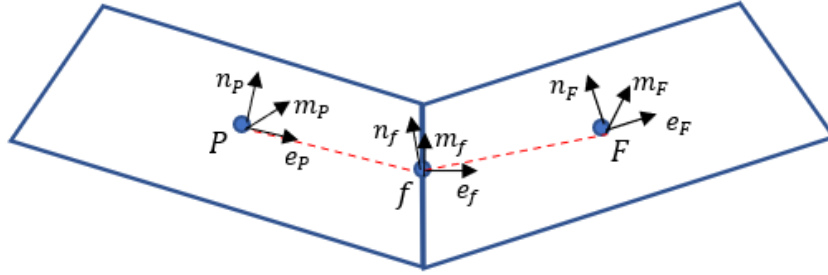


Figura 4.4: Definición de los vectores unitarios que forman los tensores de transformación \mathbf{T}_P , \mathbf{T}_f y \mathbf{T}_F .

Para lograr un mejor entendimiento un caso simple puede ser evaluado. En la Figura 4.5 un sistema de coordenadas local es definido en el centroide de los elementos P y F , y en el centro de la arista f . Si el campo vectorial $\boldsymbol{\varphi}$ tiene una magnitud constante λ y es tangente a la superficie de ambos elementos, entonces $\boldsymbol{\varphi}_P = \lambda (\hat{\mathbf{i}} \sin(\theta) - \hat{\mathbf{k}} \cos(\theta)) = \lambda \mathbf{e}_P$ y $\boldsymbol{\varphi}_F = \lambda (\hat{\mathbf{i}} \sin(\theta) + \hat{\mathbf{k}} \cos(\theta)) = \lambda \mathbf{e}_F$, luego si el valor de $\boldsymbol{\varphi}$ es calculado en el centro de la arista usando la ecuación (4.18):

$$\boldsymbol{\varphi}_f = g_W \boldsymbol{\varphi}_P + (1 - g_W) \boldsymbol{\varphi}_F = \lambda (\hat{\mathbf{i}} \sin(\theta) + \hat{\mathbf{k}} \cos(\theta) (1 - 2g_W)) \quad (4.30)$$

Si $g_W = 1/2$, entonces $\boldsymbol{\varphi}_f = \lambda \sin(\theta) \hat{\mathbf{i}} = \lambda \sin(\theta) \mathbf{e}_f$, por lo que $\|\boldsymbol{\varphi}_f\| < \|\boldsymbol{\varphi}_P\| = \|\boldsymbol{\varphi}_F\|$. Este error puede ser corregido por medio de evaluar $\boldsymbol{\varphi}_f$ en la ecuación (4.28), cuya forma extendida es:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_f = & \mathbf{e}_f (g_W \mathbf{e}_P \cdot \boldsymbol{\varphi}_P + (1 - g_W) \mathbf{e}_F \cdot \boldsymbol{\varphi}_F) \\ & + \mathbf{m}_f (g_W \mathbf{m}_P \cdot \boldsymbol{\varphi}_P + (1 - g_W) \mathbf{m}_F \cdot \boldsymbol{\varphi}_F) \\ & + \mathbf{n}_f (g_W \mathbf{n}_P \cdot \boldsymbol{\varphi}_P + (1 - g_W) \mathbf{n}_F \cdot \boldsymbol{\varphi}_F) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Dado que $\boldsymbol{\varphi}_P \parallel \mathbf{e}_P$ y $\boldsymbol{\varphi}_F \parallel \mathbf{e}_F$, al reemplazar en la última ecuación el valor correcto es obtenido.

$$\boldsymbol{\varphi}_f = \mathbf{e}_f (g_W \lambda + (1 - g_W) \lambda) = \lambda \mathbf{e}_f \quad (4.32)$$

Así, para asegurar que la interpolación de vectores y tensores sea la correcta, las ecuaciones (4.28) y (4.29) deben ser utilizadas en los pasos 2 y 4 del procedimiento de cálculo del gradiente de ϕ cuando este sea un campo vectorial. Notar sin embargo que cuando estas ecuaciones son aplicadas no es posible evaluar ϕ_f de forma implícita.

En las ecuaciones (3.57) y (3.58) se mostró que no se utiliza directamente el gradiente en las ecuaciones de movimiento, sino que las proyecciones tangenciales y normales de este. Para calcular los valores necesarios basta multiplicar el valor de $\nabla \phi_P$, obtenido con el algoritmo previamente mostrado, por $(\mathbf{I} - \mathbf{n}_P \mathbf{n}_P)$ y $\mathbf{n}_P \mathbf{n}_P$, según corresponda (por

definición $\mathbf{n}_P = -\mathbf{n}_b$). Debido a que el gradiente es evaluado explícitamente, introducir la proyección no afecta en nada como este término es incluido en la ecuación matricial.

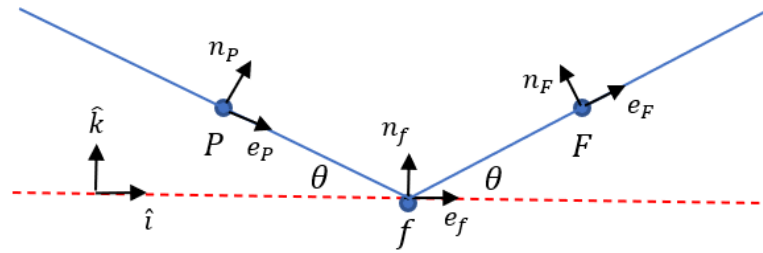


Figura 4.5: Ejemplo de dos elementos P y F y la arista f que los conecta. Ambos elementos tienen una inclinación θ respecto a la horizontal.

4.3.2. Término advectivo

En todas las ecuaciones de conservación presentadas en el capítulo anterior existe un término advectivo, el cual representa el flujo neto de una cantidad ϕ a través de las fronteras de cada elemento. Se mostró usando el teorema de la divergencia (ecuación (4.7)) que el término advectivo en un elemento P puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} \int_S \nabla \cdot (\rho h \mathbf{v} \phi) dS &= \oint_{\partial S} (\rho h \mathbf{v} \phi) \cdot \mathbf{e} dL \\ &= \sum_{f \sim nb(P)} (\rho_f h_f \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{e}_f L_f) \phi_f = \sum_{f \sim nb(P)} Flux_f \phi_f \end{aligned} \quad (4.33)$$

Por lo que se requieren esquemas de interpolación para $Flux_f$, el cual es el flujo a través de la arista f , y para la variable dependiente ϕ . Para el flujo, la opción habitual es interpolar los valores de \mathbf{v}_f , h_f y ρ_f desde las celdas adyacentes usando un perfil de interpolación lineal, lo que es usualmente referido como esquema de diferencia central (*central difference scheme*) o CD (Moukalled et al., 2016, pp. 369-370). Para asegurar una interpolación de segundo orden, el algoritmo para calcular \mathbf{v}_f , h_f y ρ_f es el mismo usado para el cálculo del gradiente, pero omitiendo el sexto paso. De aquí en más, los valores $Flux_f$ serán considerados como conocidos.

Dado que ϕ es la variable en la ecuación, su cálculo en las aristas será realizado de forma implícita, lo que significa que debe ser expresado en términos de los valores de ϕ en los centroides de los elementos vecinos. En el análisis siguiente, los elementos adyacentes a la arista f serán denotados como O (*owner*) y N (*neighbor*), mientras que el elemento de aguas arriba (*upwind*) será denotado por C y el de aguas abajo (*downwind*) como D . El *owner* y *neighbor* de una arista no cambian durante una simulación, aunque los elementos *upwind* y *downwind* pueden cambiar dependiendo de

la dirección del flujo (ver Figura 4.6). Un factor de ponderación W_F es usado para expresar el grado de dependencia de ϕ_f con ϕ_O y ϕ_N .

$$\phi_f = W_{F_f} \phi_O + (1 - W_{F_f}) \phi_N \quad (4.34)$$

El valor de W_F cambia dependiendo de la geometría de la malla, siendo diferente para cada arista f . Este puede cambiar también dependiendo de la dirección del flujo, y es por esto por lo que en la última ecuación es introducido multiplicando los valores de ϕ en O y N en vez de C y D .

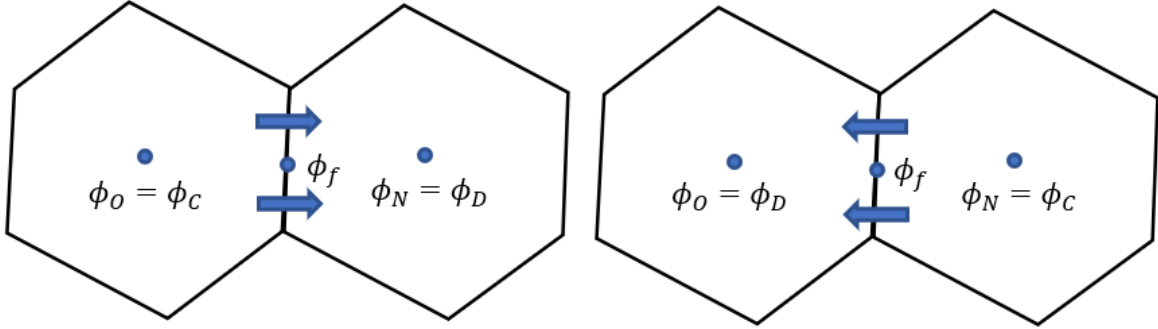


Figura 4.6: Ejemplo de dos elementos y la arista que los conecta. Dependiendo de la dirección del flujo, simbolizado con las flechas azules, cambia cuál elemento es el *upwind* y *downwind* para la arista f . El *owner* y *neighbor* de la arista se definen al crear la malla y no cambian.

Luego, para un elemento P que es *owner* de todas sus aristas, el término advectivo puede ser escrito como:

$$\sum_{f \sim nb(P)} Flux_f \phi_f = \left(\sum_{f \sim nb(P)} Flux_f W_{F_f} \right) \phi_O + \sum_{f \sim nb(P)} \left(Flux_f (1 - W_{F_f}) \right) \phi_{N_f} \quad (4.35)$$

El subíndice f fue introducido en W_{F_f} y ϕ_{N_f} para indicar que estos varían en cada arista. De este modo, los valores de a_p y a_f en la matriz de coeficientes dependerán solo de los valores de $Flux_f$ y W_{F_f} .

Hasta aquí el procedimiento es bastante simple, aunque esconde dos importantes problemas. El primero es que la definición de ϕ_f no asegura que el valor interpolado siga el sistema de coordenadas ortogonal local de la arista. Dado que el esquema de interpolación correcto (ecuaciones (4.28) y (4.29)) no puede ser linealizado, este debe ser incorporado al vector b de la ecuación matricial. Primero, para cada arista un valor ϕ_f^* es calculado a partir de ϕ_O^* y $\phi_{N_f}^*$ usando las ecuaciones de interpolación correctas, pero en vez del factor de ponderación geométrico g_W , un valor W_{F_f} es usado. Los valores ϕ_O^* y $\phi_{N_f}^*$ son conocidos de una iteración previa.

$$\phi_f^* = (\mathbf{T}_f)^T \cdot \left(W_{F_f} \mathbf{T}_P \cdot \phi_O^* + (1 - W_{F_f}) \mathbf{T}_F \cdot \phi_{N_f}^* \right) \quad (4.36)$$

Una versión explícita de ϕ_f es calculada utilizando ϕ_O^* y $\phi_{N_f}^*$ y la ecuación (4.34):

$$\phi_f^{**} = W_{F_f} \phi_O^* + (1 - W_{F_f}) \phi_{N_f}^* \quad (4.37)$$

Luego, la diferencia de los flujos advectivos calculados con ϕ_f^* y ϕ_f^{**} es añadida a la ecuación (4.35) como un término correctivo explícito (OpenCFD, 2020b):

$$\int_S \nabla \cdot (\rho h \mathbf{v} \phi) dS = \left(\sum_{f \sim nb(P)} Flux_f \phi_f^* - \sum_{f \sim nb(P)} Flux_f \phi_f^{**} \right) + \left(\left(\sum_{f \sim nb(P)} Flux_f W_{F_f} \right) \phi_O^* + \sum_{f \sim nb(P)} \left(Flux_f (1 - W_{F_f}) \right) \phi_{N_f}^* \right) \quad (4.38)$$

El efecto de esta corrección puede ser entendido fácilmente cuando $\phi_O^* = \phi_O$ y $\phi_{N_f}^* = \phi_{N_f}$, lo que ocurre cuando la solución converge. En este caso, los términos advectivos calculados con ϕ_f^* y ϕ_f^{**} son iguales y el único término que queda en el lado derecho de la ecuación (4.38) es el calculado con ϕ_f^* . Notar, sin embargo, que ϕ_f^* y ϕ_f^{**} son diferentes solo cuando ϕ es un campo vectorial o tensorial. Para un campo escalar el término correctivo es cero y la ecuación (4.34) es la correcta.

El segundo problema es cómo calcular los valores de W_{F_f} . Aunque el primer enfoque podría ser usar el mismo esquema de interpolación utilizado para el cálculo de $Flux_f$, esto no reconocería que la advección es un proceso altamente direccional que transporta propiedades del flujo solo en la dirección de este. Así, un perfil lineal lleva a resultados erróneos cuando la advección es el principal proceso de transporte en el flujo. En vez de usar un esquema lineal, el cual es una aproximación de segundo orden, el esquema *upwind* parece más apropiado. Sin embargo, este esquema ha mostrado ser altamente difusivo, generando resultados que, aunque físicamente correctos y acotados, son solo de primer orden (Moukalled et al., 2016, pp. 375-378). Los valores de W_{F_f} para el esquema lineal o de diferencia central (CD) y el *upwind* (UP) son:

$$W_{CD} = \frac{\|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_f\|}{\|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_O\|} \quad (4.39)$$

$$W_{UP} = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi_C = \phi_O \\ 0 & \text{si } \phi_C = \phi_N \end{cases} \quad (4.40)$$

Para superar las dificultades presentadas previamente, esquemas de orden superior que combinan en cierto modo el esquema *upwind* con el CD han sido propuestos. Estos esquemas de orden superior (HO por sus siglas en inglés) tienen por objetivo el producir soluciones de segundo orden que sean incondicionalmente estables. Algunos HO son el *Second order Upwind Scheme* (SOU), el esquema QUICK y el esquema FROMM, siendo todos estos al menos de segundo orden y estables. Todos estos esquemas HO son

calculados a partir de los valores de ϕ en los elementos *upwind* (C), *downwind* (D) y *far upwind* (U) (ver Figura 4.7), aunque surge el inconveniente de que en el caso de mallas no estructuradas definir el elemento *U* no es directo. Una forma simple de lidiar con este problema es redefinir los esquemas HO en términos del gradiente de ϕ en los elementos C y D, o con una combinación de ellos (Moukalled et al., 2016, pp. 407-409). Así, los esquemas mencionados anteriormente se calculan a partir de:

$$\text{SOU} \quad \phi_f = \phi_C + (2\nabla\phi_C - \nabla\phi_f) \cdot \mathbf{d}_{cf} \quad (4.41)$$

$$\text{FROMM} \quad \phi_f = \phi_C + \nabla\phi_C \cdot \mathbf{d}_{cf} \quad (4.42)$$

$$\text{QUICK} \quad \phi_f = \phi_C + \frac{1}{2}(\nabla\phi_C + \nabla\phi_f) \cdot \mathbf{d}_{cf} \quad (4.43)$$

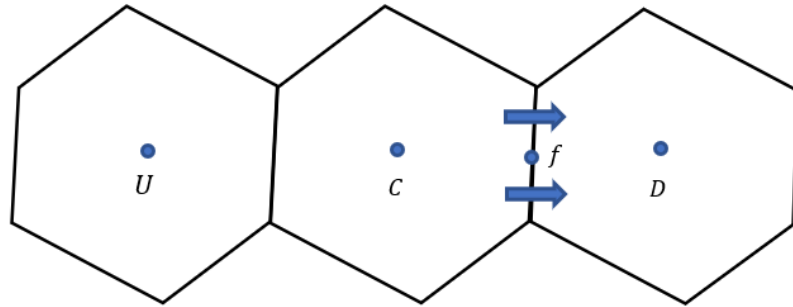


Figura 4.7: Definición de los elementos *downwind* (D), *upwind* (C) y *far Upwind* (U) para la arista *f*. La dirección del flujo en la arista es simbolizada con las flechas azules.

Sin embargo, ya fue mencionado que los gradientes son calculados explícitamente y no pueden ser linealizados. Para superar este problema, una técnica de corrección diferida (*Deferred Correction*) puede usarse. Este método, aplicable a cualquier tipo de malla estructurada o no estructurada, se basa en escribir el flujo advectivo en una arista *f* usando un esquema HO como:

$$Flux_f \phi^{HO} = Flux_f \phi_f^{UP} + Flux_f (\phi_f^{HO} - \phi_f^{UP}) \quad (4.44)$$

donde el primer término del lado derecho es calculado implícitamente y el segundo de forma explícita. Los superíndices *UP* y *HO* refieren, respectivamente, a los esquemas *upwind* y de orden superior. Este procedimiento es fácil de implementar, sin embargo, a medida que aumentan las diferencias entre los valores calculados para ϕ_f con los esquemas HO y *upwind* la velocidad de convergencia disminuye (Moukalled et al., 2016, pp. 409-411). Para implementar este método en el FAM, el término correctivo debe ser definido en la ecuación como un término extra y el esquema *upwind* debe ser seleccionado para el término advectivo.

Los esquemas de orden superior mejoran la estabilidad y precisión de los esquemas más básicos, como *upwind* y CD, pero producen un nuevo tipo de error conocido como dispersión, el cual se manifiesta en los casos en que se tienen gradientes pronunciados, esto por medio de ondulaciones y la generación de máximos y mínimos locales, lo que hace que la solución no se encuentre acotada (Moukalled et al., 2016, pp. 404-406). Para

construir esquemas en donde no se observe un comportamiento oscilatorio en la solución, se deben acotar los esquemas HO para producir los llamados esquemas de alta resolución (HR), los cuales son presentados en el Anexo A.

Para finalizar, al igual como se hizo con el cálculo del gradiente, es necesario mencionar cómo se calculan las proyecciones tangenciales y normales del operador divergencia. Si bien se podría pensar que basta con multiplicar por $(\mathbf{I} - \mathbf{n}_p \mathbf{n}_p)$ y $\mathbf{n}_p \mathbf{n}_p$, esto es válido solo cuando la divergencia es calculada explícitamente, como en la ecuación (3.58). Por el contrario, cuando la divergencia es calculada implícitamente no es posible multiplicar por $(\mathbf{I} - \mathbf{n}_p \mathbf{n}_p)$ o $\mathbf{n}_p \mathbf{n}_p$, esto debido a que si ϕ fuese un vector, se acoplarían las distintas componentes de ϕ , haciendo imposible luego resolver la ecuación matricial de ϕ componente por componente, obteniéndose un único sistema de ecuaciones de gran tamaño (Rauter & Tuković, 2018). Para lidiar con este problema, en el caso de $(\mathbf{I} - \mathbf{n}_p \mathbf{n}_p)$ se divide la ecuación en una componente implícita, ligada a la matriz identidad \mathbf{I} , mientras que el término asociado a $\mathbf{n}_p \mathbf{n}_p$ es evaluado explícitamente y por tanto trasladado al vector de términos fuente. Esto último es aplicado al evaluar el término advectivo de la ecuación (3.57).

4.3.3. Término transiente

En esta subsección se describe la discretización del término transiente utilizado el método de diferencias finitas. Ya se mostró que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_p} \rho h \phi dS = \frac{\partial(\rho_p h_p \phi_p S_p)}{\partial t} \quad (4.45)$$

Para tratar este término usualmente uno o dos instantes de tiempo previos son utilizados, siendo esto lo que determina el orden de precisión de la interpolación. Los esquemas de primer orden más conocidos son el método explícito de Euler (*Forward Euler Scheme*) y el método implícito de Euler (*Backward Euler Scheme*), mientras que esquemas de segundo orden son el método explícito de Crank-Nicolson y el esquema implícito de Adams-Moulton. La diferencia más importante entre esquemas implícitos y explícitos es que estos últimos deben ser estabilizados por medio de limitar los saltos de tiempo, lo que incrementa el tiempo de cómputo. En el caso de esquemas de primer y segundo orden su diferencia está referida a su exactitud y los saltos de tiempo que pueden usar (Moukalled et al., 2016, pp. 489-491). Dado que el método de Adams-Moulton es de segundo orden y estable, este será el esquema utilizado para discretizar el término transiente.

En el esquema de Adams-Moulton los términos advectivo y fuente son evaluados en el tiempo t^n , mientras que el término transiente es evaluado usando t^n y los dos instantes de tiempo previos: $t^n = t^{n-1} + \Delta t$ y $t^{n-1} = t^{n-2} + \Delta t$. Los valores de $\varphi = (\rho_p h_p \phi_p S_p)$ en los tiempos t^{n-1} y t^{n-2} pueden ser escritos usando series de Taylor en torno a t^n como:

$$\varphi^{n-1} = \varphi^n - \frac{\partial \varphi^n}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 \varphi^n}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3) \quad (4.46)$$

$$\varphi^{n-2} = \varphi^n - \frac{\partial \varphi^n}{\partial t} (\Delta t + \Delta t^o) + \frac{\partial^2 \varphi^n}{\partial t^2} \frac{(\Delta t + \Delta t^o)^2}{2} + O((\Delta t + \Delta t^o)^3) \quad (4.47)$$

La derivada de primer orden puede ser obtenida al combinar ambas ecuaciones de tal modo que la segunda derivada sea eliminada, resultado un esquema de segundo orden para el término transiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^n}{\partial t} &= \frac{1}{\Delta t} \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta t + \Delta t^o} \right) \varphi^n \\ &+ \frac{1}{\Delta t} \left(- \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta t^o} \right) \varphi^{n-1} + \left(\frac{\Delta t^2}{(\Delta t + \Delta t^o) \Delta t^o} \right) \varphi^{n-2} \right) + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (4.48)$$

Ahora reemplazando con $\rho_P h_P \phi_P S_P = \varphi$ y denotando $\lambda = 1 + \frac{\Delta t}{\Delta t + \Delta t^o}$, $\lambda^{oo} = \frac{\Delta t^2}{(\Delta t + \Delta t^o) \Delta t^o}$ y $\lambda^o = \lambda + \lambda^{oo} = 1 + \frac{\Delta t}{\Delta t^o}$, la ecuación puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho_P h_P \phi_P S_P)^n}{\partial t} &= \left(\frac{\lambda (\rho_P h_P S_P)^n}{\Delta t} \right) \phi_P^n \\ &+ \left(\frac{-\lambda^o (\rho_P h_P S_P)^{n-1} \phi_P^{n-1}}{\Delta t} + \frac{\lambda^{oo} (\rho_P h_P S_P)^{n-2} \phi_P^{n-2}}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (4.49)$$

Dado que los valores en los tiempos t^{n-1} y t^{n-2} son conocidos, el segundo término del lado derecho puede ser evaluado directamente.

Un problema asociado con el esquema de Adams-Moulton es que este no es acotado, y oscilaciones pueden aparecer si se usan pasos de tiempo muy grandes (Ferziger & Perić, 2002, pp. 150-151). Además, dado que el esquema de Adams-Moulton requiere dos instantes de tiempo previos, este no puede ser usado directamente en la condición inicial. Para resolver este problema, en la primera iteración se utiliza $\Delta t^o \rightarrow \infty$ y el esquema de Euler implícito es recuperado de la ecuación (4.48):

$$\frac{\partial \varphi^n}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} (\varphi^n - \varphi^{n-1}) \quad (4.50)$$

4.3.4. Término fuente

El procedimiento para discretizar términos fuente será analizado para el caso general en que $Q(\phi)$ es una función de ϕ sin suponer ningún comportamiento en particular. Tal como fue mostrado previamente, la integral de superficie sobre un elemento P puede escribirse como:

$$\int_{S_P} Q(\phi) dS = Q(\phi_P)S_P \quad (4.51)$$

Esta aproximación es de segundo orden, dado que $Q(\phi)$ es evaluada en el centroide del elemento P . Para ser incorporado al sistema de ecuaciones, este término debe ser linealizado, para esto una expansión de Taylor de $Q(\phi_P)$ puede realizarse en torno a un valor ϕ_P^* :

$$Q(\phi_P) = Q(\phi_P^*) + \left(\frac{\partial Q}{\partial \phi_P}\right)^* (\phi_P - \phi_P^*) \quad (4.52)$$

Reagrupando en términos implícitos y explícitos:

$$Q(\phi_P) = \left(\frac{\partial Q}{\partial \phi_P}\right)^* \phi_P + \left(Q(\phi_P^*) - \phi_P^* \left(\frac{\partial Q}{\partial \phi_P}\right)^*\right) \quad (4.53)$$

Luego, si el término fuente es evaluado implícitamente se requiere un valor para ϕ_P^* , el cual corresponde al valor de ϕ_P en la iteración pasada del método. Por otro lado, si el término fuente es evaluado explícitamente, entonces $\phi_P = \phi_P^*$ es conocido (el valor en la iteración anterior del método o en el instante de tiempo anterior si se está usando un esquema explícito para el término transiente) y $Q(\phi_P) = Q(\phi_P^*)$.

El hecho de evaluar el término fuente de forma implícita o explícita tiene efectos sobre la estabilidad del sistema de ecuaciones obtenido. Esto puede ser entendido fácilmente al notar que el término implícito es sumado a la diagonal de la matriz A . Se mostrará en la siguiente sección que, para incrementar la estabilidad del método iterativo, se requiere que exista dominancia diagonal en la matriz A (criterio de Scarborough). Luego, si $\left(\frac{\partial Q}{\partial \phi_P}\right)^* < 0$ los coeficientes en la diagonal serán mayores y la estabilidad se incrementará.

Por otro lado, si $\left(\frac{\partial Q}{\partial \phi_P}\right)^* > 0$ los coeficientes diagonales serán menores y la estabilidad se reducirá. Para evitar este efecto indeseado, causado por los coeficientes positivos, una recomendación general es la de evaluar implícitamente términos fuente negativos y explícitamente términos fuente positivos (Moukalled et al., 2016, pp. 550-552).

El análisis previo puede ser extendido para términos fuente en los que $\left(\frac{\partial Q}{\partial \phi_P}\right)^* = 0$, $Q(\phi_P^*) < 0$ y $\phi_P^* > 0$. Para incrementar la estabilidad de la solución una falsa dependencia respecto a ϕ_P puede ser impuesta por medio de definir un nuevo término fuente $Q^*(\phi_P)$:

$$Q^*(\phi_P) = \frac{\phi_P}{\phi_P^*} Q(\phi_P) \quad (4.54)$$

Dado que en la última iteración del método los valores de ϕ_P no continúan cambiando, es claro que $\phi_P = \phi_P^*$ y ambos términos fuente llevan a la misma solución. En el nuevo término fuente el coeficiente del término implícito es $\frac{1}{\phi_P^*} Q(\phi_P) < 0$ y la dominancia diagonal en la matriz A se incrementa.

4.3.5. Condiciones de borde

Cuando se dedujo la ecuación matricial se mencionó que las condiciones de borde son incorporadas al vector b , sin embargo, en las últimas subsecciones, los distintos términos que aparecen en las ecuaciones discretizadas fueron desarrollados para elementos cuyas aristas no forman parte del perímetro. En esta subsección se explica cómo se trabaja con las condiciones de borde.

Se debe notar que en el FAM el tratamiento de las condiciones de borde es el mismo que en el FVM, salvo que, en vez de definir los valores en el centroide de una cara del perímetro, estos se definen en el centro de las aristas que definen el perímetro. Esto es bastante útil, pues no afecta directamente el valor de la variable dependiente ϕ en el centroide de los elementos. Así, las condiciones de borde solo modifican los valores de los coeficientes a_p , a_f y b_p , pero no el tamaño de A y b .

En el FAM, las condiciones de borde más importantes son la condición de primer orden o de Dirichlet, en la cual un valor específico ϕ_b es asignado a la variable dependiente ϕ en cada arista del perímetro; y la condición de segundo orden o de Neumann, donde el valor especificado como condición de borde es el flujo m_{ϕ_b} asociado a la variable ϕ a través de la arista. Se puede demostrar que ambas condiciones de borde están en cierto modo relacionadas, pues para una arista f el flujo a través de esta se calcula a partir de:

$$m_f = (\rho_f h_f \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{e}_f L_f) \phi_f \quad (4.55)$$

Y luego para una arista que forma parte del perímetro:

$$m_{\phi_b} = (\rho_b h_b \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{e}_b L_b) \phi_b \quad (4.56)$$

Sin embargo, se debe notar que para calcular m_{ϕ_b} se deben definir previamente condiciones de borde para ρ , h y \mathbf{v} .

Dado que los términos fuente y transiente son solo función de ϕ_p , es claro que las condiciones de borde no los afectan. Para el caso del cálculo del gradiente usando el teorema de Gauss los valores de ϕ_f son necesarios y para el caso de las aristas perimetrales en vez de usar una interpolación el valor ϕ_b es usado directamente. En el caso de que la condición de borde sea m_{ϕ_b} , el valor de ϕ_b debe ser obtenido antes de realizar el cálculo del gradiente.

Para el término advectivo la ecuación original puede ser dividida en flujos desde aristas internas y desde aristas perimetrales:

$$\begin{aligned}
\int_S \nabla \cdot (\rho h \mathbf{v} \phi) dS &= \sum_{f \sim nb(P)} (\rho_f h_f \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{e}_f L_f) \phi_f \\
&= (\rho_b h_b \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{e}_b L_b) \phi_b + \sum_{\substack{f \sim nb(P) \\ f \neq b}} Flux_f \phi_f
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Dado que el valor relevante es $(\rho_b h_b \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{e}_b L_b) \phi_b$, no importa si la condición de borde es ϕ_b o m_{ϕ_b} , debido a que en ambos casos el resultado es un término explícito que es incorporado al vector b .

Los dos tipos de condiciones de borde recién analizados son usualmente utilizados para simular flujos entrantes al dominio geométrico. En el caso de bordes en que se espera una salida de flujo, lo usual es imponer que el gradiente en la arista sea cero, lo que significa que el valor en el centro de la arista es igual al del elemento del cual forma parte: $\phi_b = \phi_P$. Físicamente, esto es equivalente a decir que ϕ antes del borde ya ha alcanzado un perfil uniforme.

4.4. Método de resolución

En la última sección se mostró cómo a partir de la ecuación de conservación de ϕ en su forma diferencial se puede deducir un conjunto de ecuaciones algebraicas y luego agruparlas en una única ecuación matricial (ver ecuación (4.16)).

Debido a que el valor de ϕ en cada celda puede depender solo de los valores de ϕ en los elementos vecinos, la mayoría de los coeficientes en A serán cero. Los métodos utilizados para resolver esta ecuación son los mismos para FAM y FVM, esto debido a que los métodos empleados son independientes a los esquemas de discretización usados para calcular a_P , a_F y b_P . Sin embargo, las aproximaciones y supuestos usados en los pasos previos para determinar A y b son los que determinan la estabilidad y velocidad de convergencia del método de resolución.

Los métodos existentes para resolver un sistema de ecuaciones algebraicas pueden ser clasificados como directos o iterativos. Los métodos directos incluyen la inversión de la matriz A , pero debido a que los problemas a resolver en fluidodinámica tienen una cantidad enorme de elementos, estos métodos tienen una gran demanda computacional, lo que hace su aplicación inviable. Además, algunos de los términos en las ecuaciones originales no pueden ser linealizados, como gradientes o algunos términos fuente, por lo que el método directo debiese ser aplicado de forma iterativa para actualizar los términos no lineales en la matriz A . Por el contrario, los métodos iterativos son más adecuados para este tipo de problemas debido a que los términos no lineales son actualizados luego de cada iteración como parte del algoritmo y sus requerimientos de cómputo y almacenamiento son muy inferiores a los demandados por los métodos directos (Moukalled et al., 2016, pp. 303-304).

La principal característica de los métodos iterativos es que llegan a la solución por medio de un procedimiento donde se parte con un valor aproximado de la solución y en cada iteración dicho valor es actualizado a un valor más exacto. Para un problema lineal, como el presentado en la ecuación (4.15), los métodos iterativos convergerán a una solución si el criterio de Scarborough es satisfecho (ecuación (4.58)), aunque se debe notar que esta es una condición suficiente mas no necesaria.

$$\frac{\sum_{F \sim nb(p)} a_F}{a_p} \begin{cases} \leq 1 \text{ para todos los elementos} \\ < 1 \text{ para al menos un elemento} \end{cases} \quad (4.58)$$

El criterio de Scarborough se cumple cuando los coeficientes diagonales son más grandes que los coeficientes ubicados fuera de la diagonal de la matriz A , lo que es usualmente referido como dominancia diagonal (Moukalled et al., 2016, pp. 99-100, 120). Esto será particularmente relevante al momento de elegir qué método de relajación será utilizado.

En las siguientes subsecciones los conceptos detrás de los métodos de gradiente serán explicados junto al algoritmo usado en el método del gradiente conjugado. Debido a que estos métodos son iterativos, algunos criterios de detención serán introducidos, los cuales son requeridos para determinar en qué momento un problema ha convergido a su solución. Además, el uso de preconditionadores y métodos de relajación serán presentados, los cuales son necesarios para lidiar con algunos problemas inherentes a los métodos iterativos, como la estabilidad de estos y el tiempo requerido de cómputo.

4.4.1. Métodos de gradiente

Un importante grupo de métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones algebraicas lineales son los métodos de gradiente, entre los que se encuentra el método del descenso más pronunciado (*Steepest Descent Method*) y el método del gradiente conjugado (*Conjugate Gradient Method*). Estos métodos fueron inicialmente desarrollados para casos en que la matriz de coeficientes A es definida simétricamente positiva, para así poder reformular el problema presentado en la ecuación (4.16) como uno de minimización de la función vectorial cuadrática $Q(\Phi)$, dada por:

$$Q(\Phi) = \frac{1}{2} \Phi^T A \Phi - b^T \Phi + c \quad (4.59)$$

donde c es un vector de escalares. Se puede probar que si A es simétrica entonces el mínimo se obtiene cuando $Q'(\Phi) = 0$, por lo que $A\Phi = b$, de modo que encontrar el mínimo de $Q(\Phi)$ es equivalente a resolver el problema original.

Se puede definir una serie de convergencia de $\Phi^{(n)}$ tal que:

$$\Phi^{(n+1)} = \Phi^{(n)} + \alpha^{(n)} (\delta \Phi^{(n)}) \quad (4.60)$$

donde $\alpha^{(n)}$ es un factor de relajación y $\delta\Phi^{(n)}$ está relacionado a la corrección necesaria para minimizar $Q(\Phi)$ en cada iteración. Esto puede hacerse de una gran variedad de formas, lo que deriva en distintos métodos. Sin embargo, debido a que la velocidad de convergencia es mayor en el método del gradiente conjugado, este es el método usado en esta Tesis y el único que será aquí explicado (Moukalled et al., 2016, pp. 337-343).

Si Φ es la solución exacta, el error y residuo en el n -ésimo paso, denotados respectivamente por $e^{(n)}$ y $r^{(n)}$, se definen como:

$$e^{(n)} = \Phi^{(n)} - \Phi \quad (4.61)$$

$$r^{(n)} = b - A\Phi^{(n)} \Rightarrow r^{(n)} = -Ae^{(n)} \quad (4.62)$$

En el método del gradiente conjugado cada movimiento en la búsqueda de la solución es realizado en una dirección diferente a las direcciones usadas en búsquedas anteriores. Esto se logra por medio de seleccionar un conjunto de direcciones de búsqueda $d^{(0)}, d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(N-1)}$ que son A-ortogonales. Dos vectores $d^{(n)}$ y $d^{(m)}$ se dicen A-ortogonales si ellos satisfacen la siguiente condición:

$$(d^{(n)})^T A d^{(m)} = 0 \quad (4.63)$$

Si en cada dirección de búsqueda el desplazamiento se realiza la distancia adecuada, entonces la solución será encontrada luego de N etapas. El paso $n + 1$ es escogido de modo tal que:

$$\Phi^{(n+1)} = \Phi^{(n)} + \alpha^{(n)} d^{(n)} \quad (4.64)$$

Restando Φ de ambos lados de la ecuación anterior es posible obtener ecuaciones para el error y el residuo en el paso $n + 1$.

$$e^{(n+1)} = e^{(n)} + \alpha^{(n)} d^{(n)} \quad (4.65)$$

$$r^{(n+1)} = r^{(n)} - \alpha^{(n)} A d^{(n)} \quad (4.66)$$

Se requiere que $e^{(n+1)}$ sea A-ortogonal a $d^{(n)}$, lo que es equivalente a encontrar el punto mínimo en la dirección de búsqueda $d^{(n)}$. Usando la condición de A-ortogonalidad entre $e^{(n+1)}$ y $d^{(n)}$ se obtiene una expresión para $\alpha^{(n)}$:

$$\alpha^{(n)} = \frac{(d^{(n)})^T r^{(n)}}{(d^{(n)})^T A d^{(n)}} \quad (4.67)$$

Si las direcciones de búsqueda son conocidas, entonces $\alpha^{(n)}$ puede ser calculado. Para obtener las direcciones de búsqueda se acepta que estas están gobernadas por una ecuación de la forma:

$$d^{(n+1)} = r^{(n+1)} + \beta^{(n)} d^{(n)} \quad (4.68)$$

El requerimiento de A-ortogonalidad para los vectores d implica que:

$$(d^{(n+1)})^T Ad^{(n)} = 0 \Rightarrow \beta^{(n)} = \frac{(r^{(n+1)})^T r^{(n+1)}}{(r^{(n)})^T r^{(n)}} \quad (4.69)$$

El algoritmo usado por el método del gradiente conjugado puede ser resumido, utilizando como condición inicial para la dirección el valor inicial del residuo tal que $d^{(0)} = r^{(0)} = b - A\Phi^{(0)}$, como:

1. Calcular $\alpha^{(n)}$ usando $r^{(n)}$ y $d^{(n)}$: $\alpha^{(n)} = \frac{(d^{(n)})^T r^{(n)}}{(d^{(n)})^T Ad^{(n)}}$
2. Calcular un nuevo valor de Φ : $\Phi^{(n+1)} = \Phi^{(n)} + \alpha^{(n)} d^{(n)}$
3. Calcular un nuevo residuo: $r^{(n+1)} = r^{(n)} - \alpha^{(n)} Ad^{(n)}$
4. Calcular un nuevo coeficiente $\beta^{(n)}$: $\beta^{(n)} = \frac{(r^{(n+1)})^T r^{(n+1)}}{(r^{(n)})^T r^{(n)}}$
5. Obtener una nueva dirección de búsqueda: $d^{(n+1)} = r^{(n+1)} + \beta^{(n)} d^{(n)}$
6. Si el criterio de término no se cumple volver al paso 1.

El problema con este método es que se requiere usar una matriz definida simétricamente positiva. Sin embargo, las matrices de coeficientes resultante de las ecuaciones de conservación usadas en fluidodinámica son asimétricas. Para poder usar el método del gradiente conjugado el sistema de ecuaciones debe convertirse en uno simétrico, siendo una forma de hacer esto reescribir la ecuación matricial inicial utilizando la variable auxiliar $\hat{\Phi}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\Phi} \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

Cuando se aplica el método con una ecuación como la mostrada en la ecuación (4.70) resultan dos secuencias de vectores asociados a este, debido a esto esta versión del método es llamada método del gradiente bi-conjugado (BiCG).

La velocidad de convergencia del método BiCG puede ser incrementada al preconditionar el problema, especialmente al momento de resolver sistemas de ecuaciones de gran tamaño. Esto se puede hacer al multiplicar la ecuación matricial inicial por la inversa de la matriz de preconditionamiento P^{-1} . Al preconditionar se introducen leves modificaciones al algoritmo presentado anteriormente, aunque se mantienen los mismos pasos (Moukalled et al., 2016, pp. 340-343). En esta Tesis se utiliza la versión preconditionada y estabilizada de BiCG, llamada PBiCGStab, la cual está implementada en OpenFOAM® siguiendo el algoritmo planteado por Van Der Vorst (1992).

4.4.2. Precondicionamiento

La velocidad de convergencia de los métodos iterativos depende de las propiedades espectrales de la matriz de coeficientes A . Una matriz de preconditionamiento P es definida de modo tal que la ecuación (4.71) tiene la misma solución que el sistema original

$A\Phi = b$, pero las propiedades espectrales de la matriz $P^{-1}A$ permiten obtener la solución de forma más rápida (Moukalled et al., 2016, pp. 319-322).

$$P^{-1}A\Phi = P^{-1}b \quad (4.71)$$

Para definir la matriz P , y luego su inversa, se debe encontrar una matriz que se aproxime a A^{-1} y que sea fácil de invertir. El preconditionador utilizado en esta Tesis se llama DILU (*Diagonal Incomplete LU decomposition*), pero antes de analizar cómo se calcula P en este caso particular, es necesario saber qué es la descomposición LU .

Toda matriz cuadrada puede ser descompuesta en la forma:

$$A = LU \quad (4.72)$$

donde L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y U es una matriz triangular superior. Esta factorización pareciera ser bastante útil para resolver la ecuación matricial inicial, sin embargo, obtener los valores exactos de L y U es computacionalmente tan demandante como invertir la matriz A . Para evitar esta limitación y el problema del *fill-in* (rellenar la matriz con valores no nulos en posiciones donde la matriz original está formada por ceros) una factorización LU incompleta (ILU) es realizada, en la cual las matrices triangulares L y U mantienen la misma estructura de ceros que la matriz A . Luego, la matriz A puede ser dividida en dos términos (Pommerell, 1992, pp. 77-80):

$$A = LU - R \quad (4.73)$$

donde R es el residuo de la factorización. Las matrices L y U , al igual que la matriz A , están formadas mayoritariamente por ceros y son más fáciles de manejar que las que se obtendrían de una factorización completa de A .

Dado que solo se requiere que el preconditionador sea una aproximación de A^{-1} , es suficiente con buscar una descomposición aproximada de A , de modo tal que $A \approx \bar{L}\bar{U}$. Al escoger $P \approx \bar{L}\bar{U}$ se obtiene una evaluación eficiente de la inversa del preconditionador P^{-1} , en el proceso, sin embargo, la precisión se reduce, por lo que aumenta el número de iteraciones que son requeridas para que el sistema converja.

Con el objetivo de reducir la cantidad de información que debe ser almacenada durante el cómputo, Pommerell (1992) introdujo una versión simplificada del ILU llamada Diagonal ILU (DILU). En el DILU el problema del *fill-in* de los elementos fuera de la diagonal es eliminado, es decir, la parte superior y la inferior de la matriz se mantienen sin cambios, y solo los elementos de la diagonal son modificados. En este caso es posible escribir el preconditionador como:

$$P = (D + L_A)D^{-1}(D + U_A) \quad (4.74)$$

donde L_A y U_A son las matrices estrictamente triangulares obtenidas de la descomposición de A ($A = D_A + L_A + U_A$), y D es una matriz diagonal cuyos elementos difieren de la diagonal de A . La matriz D es definida de modo tal que la diagonal de P es

igual a D_A y la inversa del preconditionador puede ser calculada fácilmente utilizando un algoritmo de sustitución. La clara ventaja del DILU, además de su formulación recursiva, es que requiere solo el almacenamiento extra de la matriz diagonal D .

4.4.3. Criterio de detención

Se mostró en el algoritmo del método del gradiente conjugado que se requiere algún criterio de detención, esto debido a que este es un método iterativo. Muchos de los criterios que se utilizan están basados en el error residual, definido como:

$$r^n = b - A\Phi^{(n)} \quad (4.75)$$

Un criterio es encontrar el máximo valor del residuo en el dominio y exigir que dicho valor sea menor que cierto valor límite ϵ para declarar que una solución finalmente convergió.

$$\max_{i=1} \left| b_i - \sum_{j=1}^N a_{ij} \phi_j^{(n)} \right| \leq \epsilon \quad (4.76)$$

Otro posible criterio es calcular la máxima variación normalizada entre dos iteraciones consecutivas y exigir que dicho valor sea menor a un valor ϵ :

$$\max_{i=1} \left| \frac{\phi_i^{(n)} - \phi_i^{(n-1)}}{\phi_i^{(n)}} \right| \leq \epsilon \quad (4.77)$$

Los criterios utilizados en OpenFOAM® por el método PBiCGStab están en cierto modo basados en los recién mostrados, ya que, en vez de calcular el residuo máximo, se calcula la suma de todos los residuos y se impone que su valor normalizado por N_f^ϕ , definido en la ecuación (4.78), sea menor a un valor ϵ_T , que será llamada la tolerancia del *solver*.

$$N_f^\phi = \sum_{i=1}^N \left(\left| b_i - \frac{(\sum_{j=1}^N \phi_j^{(0)}) (\sum_{j=1}^N a_{ij})}{N} \right| + \left| \sum_{j=1}^N a_{ij} \phi_j^{(0)} - \frac{(\sum_{j=1}^N \phi_j^{(0)}) (\sum_{j=1}^N a_{ij})}{N} \right| \right) \quad (4.78)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^N |b_i - \sum_{j=1}^N a_{ij} \phi_j^{(n)}|}{N_f^\phi} \leq \epsilon_T \quad (4.79)$$

Del mismo modo que en la ecuación (4.77), es posible definir un criterio que compare el estado de la solución entre dos iteraciones. Para esto se utilizará el cociente de las sumas de los residuos en r^n y r^0 , el cual es comparado con la tolerancia relativa del *solver* ϵ_R .

$$\frac{\sum_{i=1}^N |b_i - \sum_{j=1}^N a_{ij} \phi_j^{(n)}|}{\sum_{i=1}^N |b_i - \sum_{j=1}^N a_{ij} \phi_j^{(0)}|} \leq \epsilon_R \quad (4.80)$$

En OpenFOAM®, el *solver* se detendrá si alguno de los dos criterios es alcanzado o si el número de iteraciones excede cierto valor, el cual es referido como *maxIter*. Si bien ϵ_T , ϵ_R y *maxIter* tienen valores asignados por defecto, que corresponden a $\epsilon_T = 10^{-6}$, $\epsilon_R = 0$ y *maxIter* = 1.000, lo normal es que los dos primeros reciban otros valores, esto dependiendo del problema que se busca resolver (OpenCFD, 2020b).

4.4.4. Relajación

Para mejorar la estabilidad y convergencia en problemas no lineales, los cambios en ϕ introducidos en cada iteración son limitados por un coeficiente de relajación (Moukalled et al., 2016, pp. 538-540). La relajación de la solución puede hacerse de forma explícita, modificando la solución luego de cada iteración del método, o de forma implícita, incorporando el coeficiente de relajación dentro de la matriz A y el vector b antes de resolver la ecuación matricial. Ambas posibilidades son descritas a continuación.

Para el caso implícito se requiere una expresión para ϕ_P , la cual se obtiene de la ecuación (4.15):

$$\phi_P = \frac{-\sum_{F \sim nb(P)} a_F \phi_F + b_P}{a_P} \quad (4.81)$$

El valor de ϕ_P en la última iteración del método ϕ_P^* puede ser incorporado al lado derecho de la ecuación junto al coeficiente de relajación λ^ϕ :

$$\phi_P = \phi_P^* + \lambda^\phi \left(\frac{-\sum_{F \sim nb(P)} a_F \phi_F + b_P}{a_P} - \phi_P^* \right) \quad (4.82)$$

El último término en el lado derecho de la ecuación (4.82) representa el cambio en ϕ_P producido por la iteración actual del método, cuyo efecto es limitado por λ^ϕ con el objetivo de prevenir grandes variaciones de ϕ_P .

Reagrupando, la nueva ecuación considerando relajación implícita es:

$$\frac{a_P}{\lambda^\phi} \phi_P + \sum_{F \sim nb(P)} a_F \phi_F = b_P + \frac{(1 - \lambda^\phi) a_P}{\lambda^\phi} \phi_P^* \quad (4.83)$$

En el caso de la relajación explícita, al final de cada iteración, y luego de haber obtenido una nueva solución para la variable dependiente $\phi_p^{new\ predicted}$, el nuevo valor se calcula utilizando la ecuación (4.84), donde ϕ_p^{old} es el valor obtenido en la iteración anterior

$$\phi_p^{new\ used} = \phi_p^{old} + \lambda^\phi (\phi_p^{new\ predicted} - \phi_p^{old}) \quad (4.84)$$

En el método implícito, el factor λ^ϕ modifica los coeficientes diagonales y el lado derecho de la ecuación sin modificarla matemáticamente. En el caso que $\lambda^\phi < 1$ se habla de bajo-relajación y se incrementa la dominancia diagonal del sistema de ecuaciones algebraicas, lo que aumenta la estabilidad del método iterativo. Esta es una importante ventaja respecto al enfoque explícito, aunque ambos reducen la velocidad de convergencia del método iterativo.

Capítulo 5

Funcionamiento del solver

5.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es mostrar el funcionamiento interno del *solver* de OpenFOAM® *debrisfaSavageHutterFoam v1.0*, el cual fue desarrollado en esta Tesis usando como base el *solver* presentado por Rauter et al. (2018). El fin de *debrisfaSavageHutterFoam* es resolver las ecuaciones e implementar los algoritmos deducidos en el capítulo 3, utilizando para esto el método de áreas finitas descrito en el capítulo anterior. Es posible que el funcionamiento interno del *solver*, así como los resultados que entrega, varíen respecto a versiones futuras de este, en las cuales se buscará resolver algunos de los problemas de la versión actual, así como ampliar sus capacidades y disminuir el tiempo requerido de cómputo. Las instrucciones de descarga, compilación y un tutorial del *solver* puede ser revisados en el Anexo B.

Tanto el *solver* aquí desarrollado como su precursor, llamado *faSavageHutterFoam*, reciben sus nombres de Savage y Hutter, quienes presentaron por primera vez una derivación formal de las ecuaciones promediadas en la vertical para flujos granulares, introduciendo en ellas conceptos de mecánica de sólidos y utilizando un sistema de coordenadas orientado según la curvatura del terreno, lo que resulta en el uso de velocidades paralelas a la superficie (Rauter & Tuković, 2018; Savage & Hutter, 1989; 1991).

Las ecuaciones de movimiento son resueltas en el *solver* de forma implícita y secuencial sobre una superficie curva tridimensional, la cual es generada a partir de la información geométrica contenida en un archivo *raster*, esto por medio del uso de algunas de las utilidades existentes en OpenFOAM®. De este modo, es posible modelar el movimiento de flujos detríticos sobre topografías reales y complejas, sin la necesidad de profundizar en la forma como la malla es creada y a partir de un tipo de archivo de uso extendido.

A lo largo del capítulo se mencionan los distintos *inputs* necesarios para hacer funcionar el *solver*, mostrándose en la Figura B.1 del Anexo B la estructura de los archivos requeridos.

5.2. Creación de la malla

En capítulos anteriores se mencionó que el sistema de ecuaciones deducido busca resolver el movimiento de un flujo detrítico sobre una superficie curva tridimensional, la cual representa la topografía del terreno de interés. Para esto usualmente se parte de un archivo *raster*, el cual puede ser obtenido a partir de información altimétrica de una topografía real, o creado por medio de un código, esto en caso de querer generar una superficie particular, como podría ser al buscar recrear un experimento de laboratorio.

A partir del *raster* se genera un archivo de formato OBJ, el cual es un formato de datos simple, desarrollado inicialmente por *Wavefront Technologies*, que permite representar una geometría 3D por medio de una lista de vértices y otra de caras. El conjunto de caras forma el contorno de un poliedro, el cual es posteriormente utilizado para generar dicha geometría en OpenFOAM®. Una de las caras del poliedro corresponde a la superficie del terreno, la cual es extraída para ser utilizada como el dominio geométrico de la simulación.

En primer lugar, se explicará cómo generar el archivo OBJ a partir de un archivo *raster*. Para esto se utiliza un código de Python llamado *txt2obj.py*, el cual fue inicialmente desarrollado para ser usado junto a *faSavageHutterFoam* y que ha sido modificado y mejorado durante el desarrollo de esta Tesis. En el Anexo C se entrega una explicación detallada de cómo hacer funcionar el código *txt2obj.py*, mientras que en esta sección se detallan sus usos.

En la Figura 5.1 se muestran tres de las opciones que entrega el código, en las cuales se utiliza solo una fracción del *raster* para generar la malla que es posteriormente escrita en el archivo OBJ. En los dos primeros casos, Figura 5.1 a) y b), los puntos P1, P2, P3 y P4 definen el área que será usada para generar la malla. En el último caso, la malla es definida por medio de cuatro poligonales, las cuales buscan ajustar la malla a partir del camino que se espera siga el flujo. En las tres opciones es posible modificar la cantidad de elementos y la distancia entre estos.

Además de las tres opciones antes mencionadas, es posible utilizar la totalidad del área del *raster*, pero con un mayor número de elementos en cada dirección. Se debe notar que aumentar el número de elementos en el archivo OBJ no necesariamente mejorará la resolución de la superficie creada posteriormente en OpenFOAM®, pues el tamaño usado en las celdas debe ser definido a posteriori. No obstante, es claro que es recomendable utilizar una resolución al menos igual a la del *raster* al crear el archivo OBJ.

El perímetro de la malla, pensada como un elemento bidimensional, es dividido inicialmente en cuatro parches (entendiendo por parche un conjunto de aristas que

forman parte del perímetro de la malla): $minX$, $maxX$, $minY$ y $maxY$. Luego, el código `txt2obj.py` permite dividir cada uno de estos parches en un número ilimitado de segmentos, pudiendo recibir cada uno su propia condición de borde (ver Figura 5.2). Los vértices y caras asociados a estos parches son escritos en el archivo OBJ junto a los parches asociados al terreno (*terrain*) y a la tapa del volumen (*maxZ*) (ver Figura 5.3 c)).

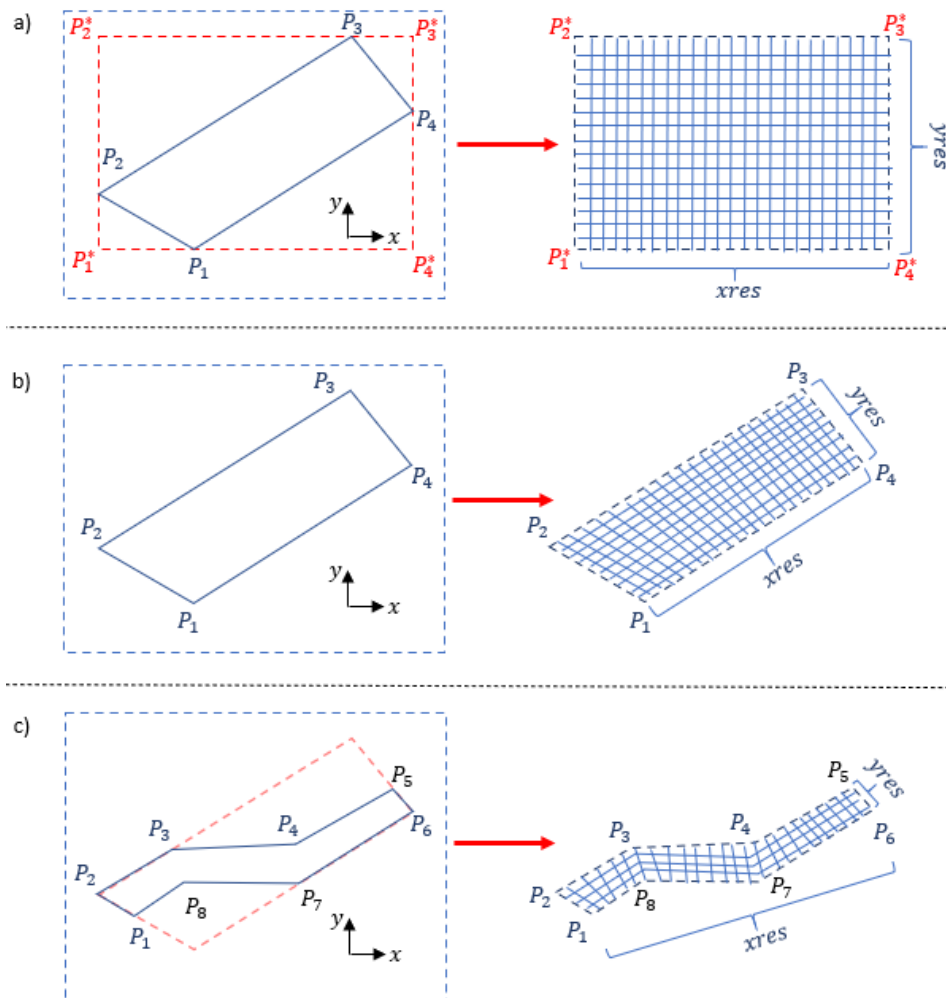


Figura 5.1: Ejemplo de las posibles mallas que se pueden generar a partir de un archivo *raster* (la línea segmentada azul representa el área cubierta por este). En a) se utiliza el rectángulo de menor tamaño que contiene al cuadrilátero formado por los puntos P_1 , P_2 , P_3 y P_4 , mientras que en b) se reduce la malla al cuadrilátero definido por dichos puntos. En c) se utiliza la malla definida a partir de las poligonales $P_1 - P_2$, $P_2 - P_3 - P_4 - P_5$, $P_5 - P_6$ y $P_6 - P_7 - P_8 - P_1$.

A partir del archivo OBJ se genera en OpenFOAM® un volumen formado por una cantidad finita de elementos tridimensionales que rellenan el dominio geométrico sin superponerse. Esto se logra por medio de la utilidad *pMesh*, la cual es parte de *CfMesh*, una librería multiplataforma utilizada para la generación automática de mallas y que está incorporada por defecto en OpenFOAM® (Juretić, 2015). El proceso de generación de la malla es conducido por los valores escritos en el archivo `system/meshDict`, requiriendo *pMesh* dos valores como *inputs* obligatorios para comenzar el proceso. El primero de estos es la ubicación del archivo que contiene la información geométrica, en este caso el

archivo OBJ, y el segundo es el tamaño máximo que debe tener cada uno de los elementos de la malla (*maxCellSize*). También es posible incluir algunos valores opcionales para lograr un mejor refinado en ciertas partes del dominio, lo cual aquí es sumamente útil debido a que solo interesa el parche asociado al terreno (*terrain*). Más información de cómo hacer esto junto a otras opciones se pueden encontrar en Juretić (2015).

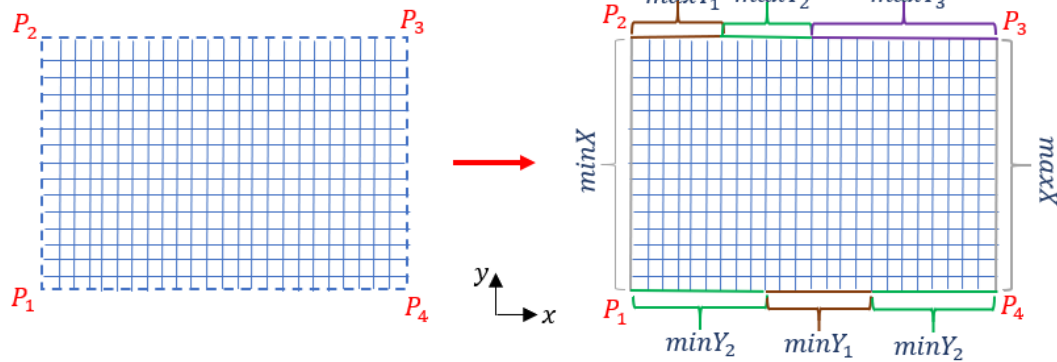


Figura 5.2: Ejemplo de segmentación del perímetro de una malla rectangular, donde el parche *minY* es dividido en dos, estando *minY₂* definido en dos segmentos no conectados, mientras que *maxY* es dividido en tres segmentos.

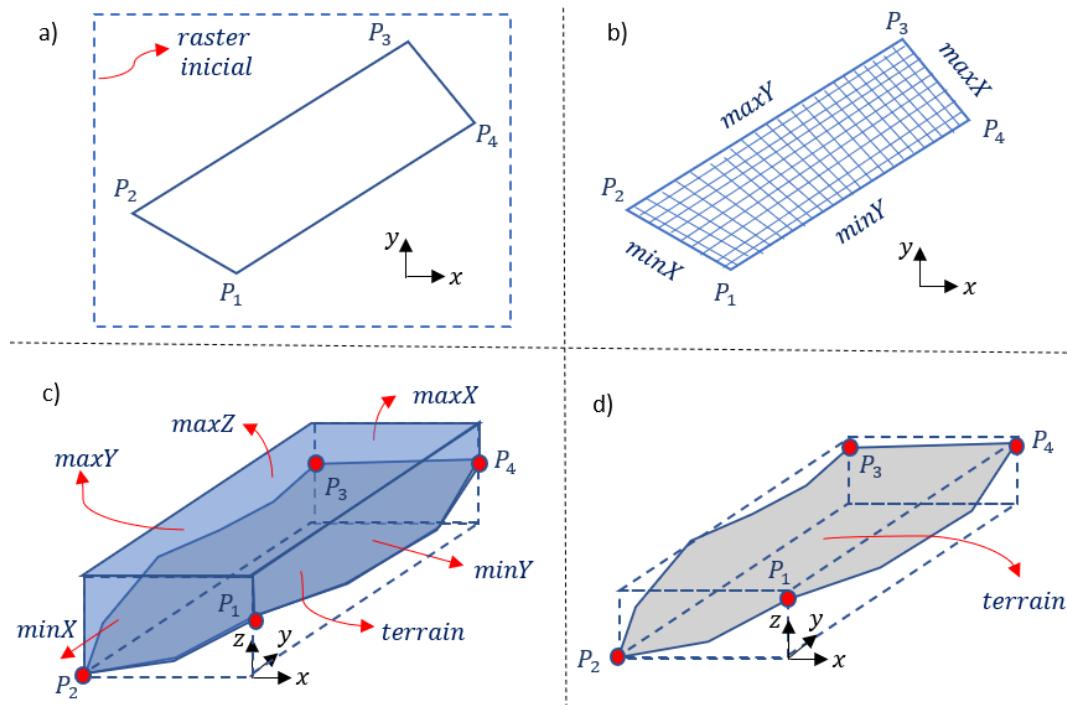


Figura 5.3: Ejemplo del procedimiento realizado para la creación de la malla a ser usada en la modelación. Se parte de un archivo *raster* (a), del cual es posible extraer una fracción de sus datos para generar un archivo OBJ, en el cual se han definido al menos cuatro parches laterales (b). Luego se utiliza *pMesh* para generar una geometría asociada al FVM (c), del cual se extrae una de sus fronteras (*terrain*) para generar un objeto asociado al FAM (d), esto por medio de la utilidad *makeFaMesh*.

El último paso corresponde a la extracción de una de las superficies del volumen creado con *pMesh*, en este caso la que sigue la curvatura del terreno, de modo de utilizarla para resolver sobre esta las ecuaciones promediadas en la vertical deducidas en el capítulo 3. Para esto se debe especificar en el archivo '*constant/faMesh/faMeshDefinition*' cuál es la superficie que se desea extraer y utilizar la utilidad *makeFaMesh*, la cual se encuentra compilada por defecto en OpenFOAM®, para crear los archivos relacionados a esta. En la Figura 5.3 se muestra gráficamente todo el proceso asociado a la creación de la malla usada en el método de áreas finitas.

5.3. Condiciones iniciales

Antes de comenzar una simulación, es necesario crear las condiciones iniciales asociadas a las variables dependientes involucradas en las ecuaciones gobernantes. En vez de hacer esto en el interior del *solver*, se utiliza la utilidad *newreleaseAreaMapping*, la cual ha sido creada a partir de la utilidad *releaseAreaMapping*. Debido a que esta utilidad no es parte de OpenFOAM®, debe ser compilada antes de poder ser utilizada.

Resulta de utilidad el establecer una condición inicial distinta de cero para h' y ρ en un único caso, el cual corresponde a un flujo detrítico iniciado a partir de un volumen estático de mezcla que comienza a acelerar por efecto de la gravedad. Además de esta posibilidad, que será raramente utilizada, se debe dar una condición inicial para h_e , representando este el espesor de la capa de sedimento erosionable. En caso de querer originar el flujo detrítico a partir de un caudal conocido, lo correcto es incorporarlo como un flujo que atraviesa uno de los bordes del dominio geométrico, lo cual se define como una condición de borde del modelo, lo cual será analizado en la subsección 5.5.2.

Para establecer la condición inicial para una variable cualquiera, se debe ingresar en el archivo '*constant/releaseArea*' las coordenadas del o los polígonos donde aplica dicha condición inicial, pudiendo esta ser válida en todo el dominio. Además, se debe incluir el valor que debe tomar la variable, el cual no necesariamente debe ser un valor constante, pudiéndose definir gradientes verticales y horizontales, además de modificar el valor en función de la vertical local del terreno. Esta condición inicial se aplicará típicamente al tiempo $t = 0$, aunque en el archivo '*system/controlDict*' se puede elegir un tiempo inicial distinto.

5.4. Ecuaciones de fricción, erosión y depositación

La forma más simple de incorporar los distintos modelos de fricción, erosión y depositación al *solver* es por medio de una librería de OpenFOAM® (*faDebrisflow*) que contenga a las clases *frictionModel*, *entrainmentModel* y *depositionModel*, y luego definir subclases que hereden las funciones de las tres clases principales. Esto permite que, en vez de incluir en el interior del *solver* las ecuaciones a ser usadas, estas se definan

externamente y luego se escoja en el archivo '*constant/transportProperties*' los modelos a usar. La librería *faDebrisflow* debe ser compilada antes que el *solver debrisfaSavageHutterFoam*, debido a que esta no forma parte de las librerías estándar de OpenFOAM® y es requerida al momento de compilar el *solver*.

La gran ventaja de usar herencia para definir los modelos de fricción, erosión y depositación es que de un modelo a otro lo único que cambia son los valores dentro de cada función, pero no la estructura ni el nombre de las funciones. Esto hace que incorporar nuevos modelos sea sumamente sencillo, del mismo modo que para incluir una nueva función o variable común a todos los modelos baste con definirla en la clase principal, es decir, en *frictionModel*, *erosionModel* o *depositionModel*, según corresponda.

En el archivo '*constant/transportProperties*', junto al nombre de los modelos que se utilizarán para las ecuaciones de fricción, erosión y depositación se deben incluir los coeficientes asociados a cada uno de estos modelos (por ejemplo, los valores μ y ξ en el modelo de Voellmy). En el caso de la fricción se puede incluir un número ilimitado de polígonos a los cuales se asignan distintos coeficientes, lo que permite representar de mejor manera los cambios que se tienen en las propiedades del terreno en la dirección del flujo. Por otro lado, en el caso de la erosión y depositación, es posible definir un número ilimitado de zonas donde el flujo puede incorporar o depositar material. Esto con el objetivo de evitar que esto ocurra en zonas donde no existe material para ser incorporado o donde la erosión o depositación no son físicamente posibles (aunque las ecuaciones digan lo contrario).

En primer lugar, se enumerarán los modelos de fricción disponibles en la librería, pues si bien las ecuaciones fueron mostradas en la sección 3.6, nada se ha dicho sobre cómo estas son incorporadas dentro de la ecuación matricial (4.16). Para cada modelo el esfuerzo de corte τ_b es dividido en una componente implícita y otra explícita, tal como se muestra en la ecuación (5.1), siendo τ_{sp} un escalar.

$$\tau_b = \tau_{sc} + \tau_{sp}\bar{\mathbf{u}} \quad (5.1)$$

La ventaja de hacer esto es que el término resistivo es siempre negativo (ver ecuación (3.57)), por lo que τ_{sp} es no negativo y aumenta la dominancia diagonal de la matriz A en la ecuación de momentum. En particular, para las tres ecuaciones de fricción presentadas en la sección 3.6 se tiene que $\tau_{sc} = \mathbf{0}$, por lo que solo interesará la definición de τ_{sp} . En todos los casos se deben asignar valores para u_0 y h_0 , cuya utilidad es evitar que se divida por cero en alguna celda del dominio.

Para el modelo de Voellmy se tiene la siguiente ecuación, siendo necesario que el usuario entregue valores para μ y ξ :

$$\tau_{sp} = \mu p_b \frac{1}{|\bar{\mathbf{u}}^*| + u_0} + \frac{\rho g}{\xi} |\bar{\mathbf{u}}^*| \quad (5.2)$$

En esta ecuación y en las siguientes $\bar{\mathbf{u}}^*$ refiere a la velocidad en la iteración previa del método o en el anterior paso de tiempo. En el modelo cuadrático se utiliza la ecuación

(5.3) junto a las ecuaciones para η y τ_y mostradas en (2.27) y (2.28), por lo que se requiere entregar al modelo valores para K , n , α_1 , α_2 , β_1 y β_2 .

$$\tau_{sp} = \tau_y \frac{1}{|\bar{\mathbf{u}}^*| + u_0} + \frac{K\eta}{8(h' + h_0)} + \frac{n^2 \rho g}{(h' + h_0)^{1/3}} |\bar{\mathbf{u}}^*| \quad (5.3)$$

La última ecuación corresponde a la ecuación de Manning, donde n es el único valor que debe ser ingresado.

$$\tau_{sp} = \frac{n^2 \rho g}{(h' + h_0)^{1/3}} |\bar{\mathbf{u}}^*| \quad (5.4)$$

Algunas de las ecuaciones que pueden ser utilizadas para incorporar la erosión a las ecuaciones de movimiento fueron introducidas en la subsección 2.3.1. A continuación, estas ecuaciones son reescritas utilizando la notación hasta aquí utilizada.

En primer lugar, está la ecuación planteada por Frank et al. (2015), la cual es utilizada por RAMMS para simular la incorporación de material al flujo. A diferencia de lo mostrado en la ecuación (2.31), aquí el valor usado debe ser positivo y puede adquirir cualquier valor. Junto a esto, se reescribe la ecuación para e_m , usando como esfuerzo de corte el valor de τ_b calculado por el modelo. Para usar esta ecuación se deben indicar los valores de τ_c , $\frac{dz}{d\tau}$ y E_R .

$$e_m = \begin{cases} 0 & \text{si } |\tau_b| < \tau_c \\ \frac{dz}{d\tau} (|\tau_b| - \tau_c) & \text{si } |\tau_b| \geq \tau_c \end{cases} \quad (5.5)$$

$$u_{bE} = E_R \quad \text{si } e_t \leq e_m \quad (5.6)$$

Se opta por incluir la ecuación (2.34) en desmedro de (2.33), esto debido a su mayor simplicidad. Antes de obtener la tasa de erosión se debe utilizar la ecuación (2.32) para calcular C_∞ , imponiendo que $\rho_f = \rho_w$, mientras que d y δ_e deben ser ingresados como *inputs*. En la librería *faDebrisflow* esta ecuación recibe el nombre de *Takahashi*.

$$u_{bE} = \delta_e \frac{C_\infty - C_v}{C_{vb} - C_\infty} \frac{h' |\bar{\mathbf{u}}|}{d} \quad (5.7)$$

En la ecuación de Egashira (ecuación (2.36)) la mayor modificación es la no inclusión de c^* , pues sería redundante debido a la forma como se dedujeron las ecuaciones de movimiento en esta Tesis. Brufau et al. (2000), entre otros autores, proponen incluir el coeficiente empírico K a la ecuación, el cual debe ser ingresado como *input*. El valor de θ_e es calculado a partir de la ecuación (2.37), siendo necesario un valor de ϕ . Esta ecuación es nombrada *Egashira* en la librería *faDebrisflow*.

$$u_{bE} = K |\bar{\mathbf{u}}| \tan(\theta - \theta_e) \quad (5.8)$$

La ecuación presentada por McDougall & Hungr (2005) es nombrada *Exponential* en la librería, siendo el único *input* necesario el valor de E_x .

$$u_{bE} = E_x h' |\bar{\mathbf{u}}| \quad (5.9)$$

Para el modelo de Cao (Cao et al., 2004; D'Aniello et al., 2015) se utiliza directamente la ecuación (2.39), con β , θ_c y d como *inputs*.

$$u_{bE} = \begin{cases} \beta(\theta - \theta_c) |\bar{\mathbf{u}}| h'^{-1} d^{-0.2}, & \text{si } \theta > \theta_c \\ 0, & \text{si } \theta \leq \theta_c \end{cases} \quad (5.10)$$

Finalmente, en el modelo propuesto por Fagents & Baloga (2006) se utiliza la ecuación (2.41), donde α , ρ_0 y ρ_{max} deben ser incorporados por el usuario antes de comenzar la simulación.

$$u_{bE} = \alpha |\bar{\mathbf{u}}| h' \frac{\rho_{max} - \rho}{\rho_{max} - \rho_0} \quad (5.11)$$

Un parámetro común es necesario en todos los modelos y corresponde al esfuerzo de corte crítico τ_c . La razón de incluirlo no es solo física, sino que busca evitar la ocurrencia de un error numérico detectado durante el desarrollo de esta Tesis.

Partiendo de la ecuación de conservación de la mezcla agua-sedimento en su versión diferencial sin considerar depositación:

$$\frac{\partial(\rho h')}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho h' \bar{\mathbf{u}}) = \rho_b u_{bE} \quad (5.12)$$

se obtiene que en celdas ubicadas en los bordes del flujo donde $\bar{\mathbf{u}}$ es muy pequeño, aunque no nulo, se tiene:

$$\frac{\partial(\rho h')}{\partial t} \approx \rho_b u_{bE} \quad (5.13)$$

Si se utiliza, por ejemplo, la ecuación (5.9), se llega a que $\rho \approx \rho_b$, mientras que $h' \approx u_{bE} \Delta t \approx 0$, es decir, se genera una capa de líquido con igual densidad que el fondo que no fluye y tiene altura despreciable. Esto surge netamente de la forma como se resuelven las ecuaciones de movimiento y del hecho de que ecuaciones como (5.9) no incluyen un rango de valores de h' y $|\bar{\mathbf{u}}|$ en que son válidas. Para subsanar este error, se fuerza en todas las ecuaciones que $u_{bE} = 0$ si $|\tau_b| < \tau_c$.

Algunas de las ecuaciones que pueden ser utilizadas para incorporar el proceso de depositación a las ecuaciones previamente desarrolladas se presentan a continuación.

Para la ecuación mostrada por Uchida et al. (2013) se deben entregar valores para δ_d y d_c , mientras que C_∞ se calcula a partir de la ecuación (2.32), imponiendo, nuevamente, que $\rho_f = \rho_w$.

$$u_{bD} = \delta_a \frac{C_\infty - C_v h' |\bar{u}|}{C_{vb} d_c} \quad (5.14)$$

Una versión análoga a la ecuación (5.8) puede ser utilizada para la depositación, la cual estará activa solo si $\theta_e > \theta$, pues $u_{bD} \geq 0$.

$$u_{bD} = K |\bar{u}| \tan(\theta_e - \theta) \quad (5.15)$$

Se incluye además la ecuación usada por Cao et al. (2004) y D'Aniello et al. (2015), con α , ω_0 y m como *inputs*.

$$u_{bD} = \alpha C_v \omega_0 (1 - \alpha C_v)^m \quad (5.16)$$

La última ecuación corresponde a la planteada por Fagents & Baloga (2006), donde es necesario definir un valor para la velocidad de depositación v_s .

$$u_{bD} = v_s \frac{\rho - \rho_w}{\rho_s - \rho_w} \quad (5.17)$$

Debido a que se usa como supuesto que el material depositado tiene igual densidad que el terreno, puede ocurrir que no se cumpla continuidad de sedimento en el volumen de control. Esto ya que si C_v es muy pequeño, entonces al recalcular ρ se puede obtener $\rho < \rho_w$. Para evitar esto, se fuerza que u_{bD} tenga un valor máximo, tal como se muestra en la ecuación (5.18)

$$u_{bD} = \min \left(u_{bD}, \frac{h' C_v}{\Delta t C_{vb}} \right) \quad (5.18)$$

En caso de no querer simular la erosión o depositación de sedimento en el modelo basta con seleccionar, respectivamente, *entrainmentOff* y *depositionOff* como modelos de erosión y depositación.

5.5. Funcionamiento del solver

5.5.1. Constantes

Antes de comenzar la primera iteración, el *solver* lee el valor de todas las constantes que son utilizadas en las ecuaciones de movimiento. Dichas constantes deben ser ingresadas de forma manual en los archivos '*constant/g*', donde se tiene el valor de la aceleración de gravedad, y '*constant/transportProperties*', donde se deben escribir, entre otros, los valores de ρ_b , ρ_w , ρ_s , χ , u_0 , h_0 y los nombres de los modelos de fricción, erosión y

deposición junto a sus variables. Otros valores que deben ser ingresados en ‘*constant/transportProperties*’ serán mencionados más adelante en esta sección.

Además de las variables mencionadas anteriormente, en el archivo ‘*system/controlDict*’ se debe asignar valores a todos los parámetros asociados al control de los pasos de tiempo, específicamente el máximo valor que puede tener el número de Courant (*maxCo*), el tiempo inicial de la simulación (*startTime*), el tiempo final (*endTime*), entre otros.

5.5.2. Condiciones de borde

En el *solver* se utilizan condiciones de borde de primer orden para simular la entrada de flujo al dominio geométrico. Esto quiere decir que se asignan valores a las variables dependientes h' , $\bar{\mathbf{u}}$, ρ y C_w en las aristas que forman el borde. Para los otros parches, donde no se tiene flujo, se escoge usar una condición de gradiente cero como condición de borde, lo que corresponde a suponer que el flujo ha alcanzado una distribución uniforme antes de llegar al borde del dominio geométrico. En la Figura 5.4 se muestra un ejemplo de una malla donde solo dos de sus parches tienen una condición de borde de flujo que ingresa al dominio. Tal como se mencionó previamente, la posición de dichas entradas debe ser escogida al momento de generar la malla, quedando pendiente ingresar la información asociada a cada flujo.

Antes de comenzar con su primera iteración, el *solver* lee el archivo ‘*constant/releaseFlow*’, el cual contiene información referida a los hidrogramas de los flujos que forman las condiciones de borde. Para cada parche se debe incluir, además de una lista ilimitada de valores de Q , C_v y t , el vector $\hat{\mathbf{e}}$ que refiere a la dirección del flujo (ver ecuación (3.68)). El archivo ‘*constant/releaseFlow*’ es inicialmente leído al utilizar *newreleaseAreaMapping*, lo que crea el archivo ‘*constant/Hidrogramas*’, el cual es leído al comienzo de la simulación. Luego de leer este archivo, se obtiene toda la información geométrica necesaria para calcular la altura del flujo h'_j y su velocidad $\bar{\mathbf{u}}_j$ en una arista j , dicha información refiere al ancho de la arista b_j , la pendiente θ_j , el vector normal a la arista $\hat{\mathbf{e}}_j$ y la cota en el centro de la arista z_j .

Para cada instante de tiempo t se deben calcular los valores de h' , $\bar{\mathbf{u}}$, ρ y C_w . Debido a que los valores de Q y C_v son discretos, la mayoría de las veces el tiempo t no coincide con alguno de los introducidos en el hidrograma, por lo que los valores de Q_t y C_{v_t} se deben interpolar por medio de:

$$Q_t = Q_i + \frac{Q_j - Q_i}{t_j - t_i} (t - t_i) \quad (5.19)$$

$$C_{v_t} = C_{v_i} + \frac{C_{v_j} - C_{v_i}}{t_j - t_i} (t - t_i) \quad (5.20)$$

donde $t_i < t < t_j$, con t_i y t_j valores de tiempo escritos en el hidrograma. Q_i y C_{v_i} son los valores asociados a t_i , y Q_j y C_{v_j} a t_j .

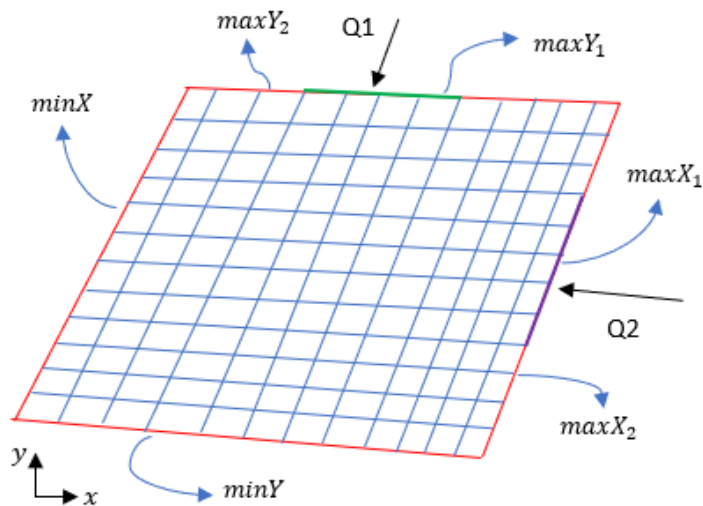


Figura 5.4: Ejemplo de una malla donde sus parches laterales $maxY$ y $maxX$ han sido divididos en dos: $maxY_1$ y $maxY_2$, y $maxX_1$ y $maxX_2$. Se tiene una condición de borde de un flujo que ingresa al dominio en $maxY_1$ y $maxX_1$.

Luego, con Q_t y la ecuación de fricción seleccionada es posible calcular los valores de h' y \bar{u} en dicho borde, tal como se mostró en la sección 3.7, mientras que de C_{vt} se obtienen directamente los valores de C_w y ρ . Debido a que en las ecuaciones de movimiento se utilizan como variables $(\rho h')$ y $(C_w h')$ sus valores en los bordes también deben ser calculados para cada paso de tiempo, lo que se hace de forma directa a partir de los valores de h' , ρ y C_w .

Se debe tener en cuenta que el caudal ingresado al hidrograma debe corresponder al caudal de la mezcla de agua más sedimento, usualmente referido como caudal detrítico Q_D , y no al caudal líquido Q_L , como es en el caso de FLO-2D. En caso de que el valor conocido sea Q_L , de forma externa al modelo se deben calcular los valores de Q_D a partir de la ecuación (5.21) para cada valor ingresado al hidrograma.

$$Q_D = \frac{1}{1 - C_v} Q_L \quad (5.21)$$

5.5.3. Ecuaciones de movimiento

En esta sección se muestra la forma que toman las ecuaciones de movimiento al ser escritas en OpenFOAM®, el procedimiento iterativo utilizado para resolverlas de forma secuencial y los cálculos secundarios que deben ser realizados entre ecuaciones. En lo que resta del capítulo, se omitirá el uso del apostrofó al referirse a la altura del flujo, además de renombrar la velocidad promediada en la vertical como U_s .

En primer lugar, se deben leer las condiciones iniciales para h_e , h y ρ , realizándose para las dos últimas un cálculo adicional relacionado a asegurar que sus valores estén acotados inferiormente:

$$h = \max(h, h_{min}) \quad (5.22)$$

$$\rho = \max(\rho, \rho_w) \quad (5.23)$$

donde h_{min} , que se puede interpretar como la altura mínima del fluido, es un valor leído desde el archivo '*constant/transportProperties*'. En caso de que no se haya ingresado una condición inicial para h y ρ , estas variables adquieren en todo el dominio los valores $h = h_{min}$ y $\rho = \rho_w$, lo que corresponde a tener una capa de agua de altura h_{min} en todo el dominio. La razón principal de hacer esto se explica más adelante. No obstante, un motivo secundario nace del hecho de que C_w , calculado con la ecuación (5.24), y C_v no pueden ser simultáneamente cero, que es lo que ocurriría de tenerse $h = 0$.

$$C_w = \frac{\rho_s - \rho}{\rho_s - \rho_w} \quad (5.24)$$

Leídos los valores de h y ρ , y calculado C_w , se obtienen directamente los valores de (ρh) y $(C_w h)$ que en esta subsección serán renombrados, respectivamente, como *rho h* y *C w h*.

En cada instante de tiempo se parte calculando el valor de la presión basal p_b (ecuación (3.58)), cuya expresión, escrita en formato OpenFOAM®, se muestra a continuación:

$$p_b = -\chi \cdot fac :: ndiv(phi2s, \mathbf{U}_s) \cdot \mathbf{n}_b + \rho \mathbf{g} h \cdot \mathbf{n}_b - fac :: ngrad\left(\frac{p_b h}{2}\right) \cdot \mathbf{n}_b \quad (5.25)$$

donde *fac :: ndiv* refiere a la componente normal de la integral de superficie sobre el operador divergencia y *fac :: ngrad* a la componente normal de la integral de superficie sobre el operador gradiente. El resto de las variables ya fueron definidas previamente a excepción de $phi2s = fac :: interpolate(\rho h \mathbf{U}_s) \cdot \mathbf{L}e$, siendo *fac :: interpolate* un operador definido en OpenFOAM® que interpola el valor de la variable $\rho h \mathbf{U}_s$ a las aristas de cada elemento, cono L el largo de la arista y e su vector normal. En *fac :: ndiv* la primera variable debe ser un campo escalar definido sobre las aristas de la malla, mientras que la segunda un campo escalar o vectorial definido en el centroide de los elementos. Para añadir al cálculo el último término de la ecuación (5.25) esto debe ser seleccionado en el archivo '*constant/transportProperties*', en cuyo caso se utiliza el valor de p_b obtenido en la iteración previa.

El nuevo valor de p_b es utilizado para calcular los valores de τ_{sc} y τ_{sp} , los cuales dependen de la ecuación de fricción escogida. La ecuación de momentum (ecuación (3.57)) escrita en la notación de OpenFOAM® es:

$$\begin{aligned} fam :: ddt(rho h, \mathbf{U}_s) + \chi \cdot fam :: div(phi2s, \mathbf{U}_s) \\ = \rho \mathbf{g}_s h - \tau_{sc} - fam :: Sp(\tau_{sp}, \mathbf{U}_s) - fac :: grad\left(\frac{p_b h}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.26)$$

donde $fam :: ddt$ refiere a la derivada temporal, con $rhoh$ un valor conocido y U_s la incógnita de la ecuación. De forma análoga a la ecuación (5.25), $fam :: div$ y $fac :: grad$ refieren, respectivamente, a las componentes tangenciales de la integral de superficie sobre los operadores divergencia y gradiente. Los operadores en que se utiliza el prefijo fam refieren a operadores implícitos, mientras que los que utilizan el prefijo fac evalúan la variable en cuestión de forma explícita. Es por esto que en la ecuación (5.26) se utiliza $fam :: div$ en vez de $fac :: div$, pues así se evalúa el término advectivo de forma implícita, de modo que los valores de $phi2s$ pasan a formar parte de la matriz de coeficientes de la ecuación matricial. Por su parte, $fam :: Sp$ es un operador que permite evaluar de forma implícita el término fuente $\tau_{Sp} U_s$. El operador $fac :: Sp$ es definido para evaluar explícitamente términos fuente, aunque lo normal es escribir dichos términos sin la necesidad de usar este operador, tal como se muestra para los términos $\rho g_s h$ y τ_{Sc} .

Una vez resuelta esta ecuación, para lo cual se utiliza el método de gradiente descrito en la subsección 4.4.1 es posible calcular $\tau_b = \tau_{Sc} + \tau_{Sp} U_s$ y $phis = fac :: interpolate(U_s) \cdot Le$, donde $phis$ es definida en cada arista de la malla. Para las ecuaciones de continuidad, además del valor recién obtenido de U_s , es necesario utilizar los modelos de erosión y depositación para calcular u_{bE} y u_{bD} , siendo (5.27) la ecuación de conservación de la mezcla y (5.28) la ecuación de conservación de la masa de agua. Notar que en las ecuaciones se fuerza la evaluación implícita del término fuente asociado a la depositación, tal como se mostró en la ecuación (4.54).

$$fam :: ddt(rhoh) + fam :: div(phis, rhoh) = \rho_b u_{bE} - fam :: Sp \left(\frac{\rho_b u_{bD}}{rhoh}, rhoh \right) \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} fam :: ddt(Cwh) + fam :: div(phis, Cwh) \\ = C_{wb} u_{bE} - fam :: Sp \left(\frac{C_{wb} u_{bD}}{Cwh}, Cwh \right) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Para evitar la aparición de valores máximos o mínimos de h y ρ en lugares erróneos, además de aumentar la velocidad de convergencia del *solver*, lo mejor es plantear las ecuaciones de continuidad con $rhoh$ y Cwh como incógnitas, lo que se debe realizar tanto en el término transiente como en los términos advectivo y fuente. En caso de introducir coeficientes de relajación al resolver estas ecuaciones, se debe tener el cuidado de utilizar el mismo valor en ambas. Para entender el por qué, basta pensar en el caso en que $\rho = \rho_w$ ($C_w = 1$) en todo el dominio y reemplazar en la ecuación (3.60) con los valores de $rhoh$ y Cwh obtenidos a partir de la relajación explícita (ecuación (4.84)):

$$\lambda = \frac{(rhoh)^{new\ used}}{(Cwh)^{new\ used}} = \frac{\rho_w (h^{old} + \lambda^{rhoh} (h^{new\ predicted} - h^{old}))}{(h^{old} + \lambda^{Cwh} (h^{new\ predicted} - h^{old}))} \quad (5.29)$$

Luego, si $\lambda^{rhoh} > \lambda^{Cwh}$ y $h^{new\ predicted} > h^{old}$ es posible demostrar que:

$$\lambda = \rho_w \left(1 + \frac{(\lambda^{rhoh} - \lambda^{Cwh})(h^{new\ predicted} - h^{old})}{h^{old} + \lambda^{Cwh}(h^{new\ predicted} - h^{old})} \right) > \rho_w \quad (5.30)$$

Reemplazando con $\lambda > \rho_w$ en la ecuación (3.60) se obtiene que $C_v > 0$ y por tanto que $\rho > \rho_w$. Es decir, el utilizar distintos valores para $\lambda^{rho h}$ y λ^{Cwh} lleva a que se modifiquen erradamente los valores de ρ , haciendo aparecer o desaparecer sedimento de la mezcla. Esta conclusión puede ser extendida al caso de relajación implícita y levantando la restricción $\rho = \rho_w$, aunque su demostración aquí se obviará.

Luego de resolver las ecuaciones (5.27) y (5.28), se procede a recalcular $phi2s$ junto a los valores de C_w , ρ y h :

$$C_w = \min \left(\max \left(\frac{\rho_s}{\left(\frac{rho h}{C_w h} + \rho_s - \rho_w \right)}, 0 \right), 1 \right) \quad (5.31)$$

$$\rho = \rho_s - (\rho_s - \rho_w) C_w \quad (5.32)$$

$$h = \max \left(\frac{C_w h}{C_w}, h_{min} \right) \quad (5.33)$$

además, se deben actualizar los valores de Cwh , $rho h$ y C_v . En esta parte resulta práctico además calcular el caudal que fluye por cada una de las aristas de la malla: $Q = fac :: interpolate(hU_s) \cdot Le$. Si bien este valor no interviene directamente en el cálculo, será útil luego en el procesamiento de los resultados.

El procedimiento recién mostrado es la forma secuencial de resolver las ecuaciones de movimiento. Se debe notar que una sola iteración de este método no permite obtener la solución de las variables dependientes. Esto debido a que, por ejemplo, luego de resolver las ecuaciones (5.27) y (5.28) se recalcula $phi2s$, valor que fue previamente usado para calcular p_b , por lo que el valor obtenido de la presión basal ya no cumple con la ecuación (5.25). Se debe por tanto iterar, resolviendo de forma secuencial las ecuaciones hasta que las variables dependientes no cambien de una iteración a otra.

Se define para cada una de las ecuaciones el residuo inicial r^ϕ , el cual mide el grado de error en los valores ϕ_j antes de resolver las ecuaciones matriciales respectivas. En la definición de r^ϕ se utiliza el factor de normalización N_f^ϕ , el cual fue previamente introducido en la ecuación (4.78).

$$r^\phi = \frac{\sum_{i=1}^N |b_i - \sum_{j=1}^N a_{ij} \phi_j^{(0)}|}{N_f^\phi} \quad (5.34)$$

Es decir, se tendrán tres residuos iniciales: r^{Us} , $r^{rho h}$ y r^{Cwh} , uno para cada ecuación matricial mostrada en (5.26), (5.27) y (5.28). Se dirá que el método iterativo secuencial ha convergido cuando todos los valores r^ϕ en una iteración han caído bajo cierto valor máximo r_{max}^ϕ , lo que quiere decir que antes de resolver las ecuaciones matriciales las variables dependientes ya tienen valores aproximadamente correctos y que la resolución de las ecuaciones no modifica significativamente dicho valor.

Los valores r_{max}^{Φ} , que en este caso corresponden a $r_{max}^{U_s}$, r_{max}^{rhoh} y r_{max}^{Cwh} , son leídos desde el archivo 'system/faSolution', junto a $minCorr$, el número mínimo de iteraciones y $nCorr$, el número máximo de iteraciones. Este último valor es utilizado para que, en caso de que una solución no se obtenga de forma rápida, se pueda continuar al siguiente paso de tiempo.

Es importante no confundir los procesos iterativos que se llevan a cabo en cada paso de tiempo. En la resolución de las ecuaciones matriciales de U_s , $rhoh$ y Cwh se utiliza un método de gradiente, con ϵ_T y ϵ_R como criterios de detención. En cambio, el procedimiento iterativo secuencial descrito en esta sección resuelve las tres ecuaciones matriciales en cada iteración y luego decide la convergencia del método utilizando los valores r_{max}^{Φ} . En caso de que la condición de término no se cumpla se deben volver a resolver las ecuaciones de U_s , $rhoh$ y Cwh utilizando el método de gradiente (ver Figura 5.5).

Una vez se han obtenido las soluciones para h , ρ , C_w , U_s y el resto de las variables, se procede a resolver la ecuación de continuidad en la capa de sedimento erosionable. Este cálculo se deja para el final debido a que no es necesario iterar para obtener un nuevo valor de h_e , de modo que incluir este cálculo dentro del procedimiento iterativo sería ineficiente. En la ecuación (5.35) se muestra cómo se actualiza el valor de h_e utilizando el paso de tiempo Δt y las tasas u_{bE} y u_{bD} calculadas a partir de las ecuaciones de erosión y depositación:

$$h_e = h_e - (u_{bE} - u_{bD})\Delta t \quad (5.35)$$

El último paso del *solver* corresponde a la implementación del TMA, el cual será analizado en la subsección 5.5.5. La razón de que este sea el último paso, y que por tanto no sea incluido en el procedimiento iterativo, está relacionada al alto tiempo de cómputo que este requiere, lo que hace infactible que sea utilizado más de una vez en cada paso de tiempo. Esta decisión no tendrá efecto alguno sobre la solución obtenida en la medida de que los cambios introducidos en el terreno en cada aplicación del algoritmo sean pequeños.

A continuación, se analizarán algunos aspectos del procedimiento secuencial que, con el fin de mejorar la claridad del texto, fueron pospuestos hasta ahora. Se mencionó previamente que, además del problema referido a la definición de C_v y C_w , existe una segunda razón para definir $h_{min} \neq 0$ en todo el dominio. Esta está relacionada a la forma como se resuelven las ecuaciones y la ubicación del frente mojado, el cual puede ser definido como la interfaz entre celdas que contienen fluido, dígame $h > h_{min}$ y $U_s \neq 0$, y celdas sin fluido, donde $h = h_{min}$ y $U_s = 0$. Para explicar esto se utilizará la ecuación (5.26) para $t^1 = t^0 + \Delta t$, con Δt el paso de tiempo y t^0 el tiempo inicial, en una celda ubicada junto a un parche donde se tiene una condición de borde de flujo que ingresa al dominio.

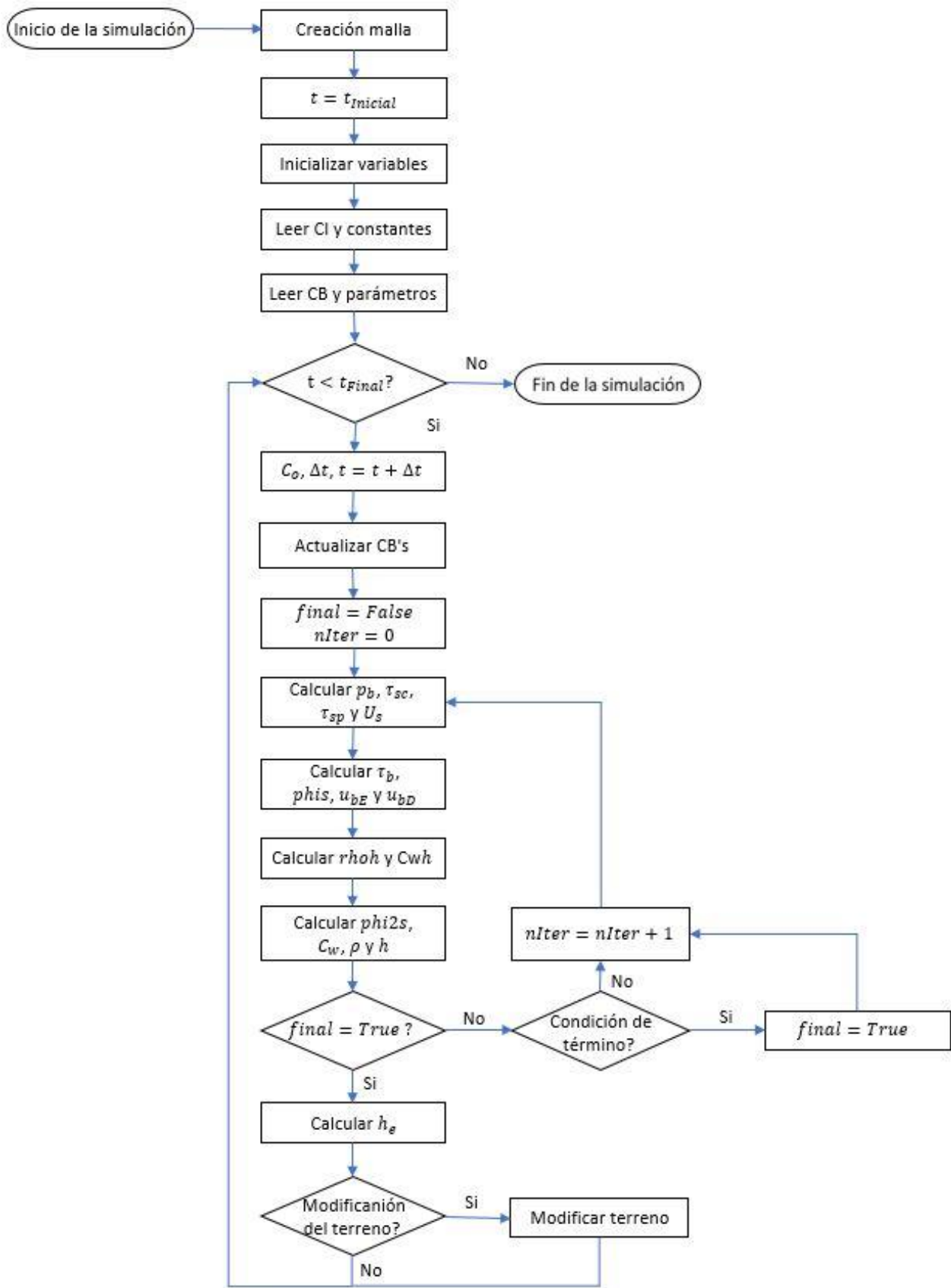


Figura 5.5: Diagrama de procesos de *debrisSavageHutterFoam*.

En la celda P de la Figura 5.6 se tiene $h = h_{min}$ y $\mathbf{U}_s = \mathbf{0}$, por lo que se eliminan los tres primeros términos del lado derecho de la ecuación (5.26), mientras que el término advectivo y el gradiente para el elemento P pueden ser desarrollados utilizando las ecuaciones (4.17) y (4.57), obteniendo:

$$fam :: div(phi2s, \mathbf{U}_s) = phi2s_b \mathbf{U}_{s_b} + \sum_{\substack{f \sim nb(P) \\ f \neq b}} phi2s_f \mathbf{U}_{s_f} \quad (5.36)$$

$$fac :: grad\left(\frac{p_b h}{2}\right) = \frac{1}{2} p_{b_b} h_b \mathbf{L}_b + \sum_{\substack{f \sim nb(P) \\ f \neq b}} \frac{1}{2} p_{b_f} h_f \mathbf{L}_f \quad (5.37)$$

Si se tuviese $h_{min} = 0$, h sería cero en todas las aristas de P salvo en el borde, lo que permite simplificar las ecuaciones (5.36) y (5.37) y reemplazar en (5.26).

$$\frac{(rho h \cdot S_B \mathbf{U}_s)_P^1 - (rho h \cdot S_B \mathbf{U}_s)_P^0}{\Delta t} + \chi phi2s_b \mathbf{U}_{s_b} = -\frac{1}{2} p_{b_b} h_b \mathbf{L}_b \quad (5.38)$$

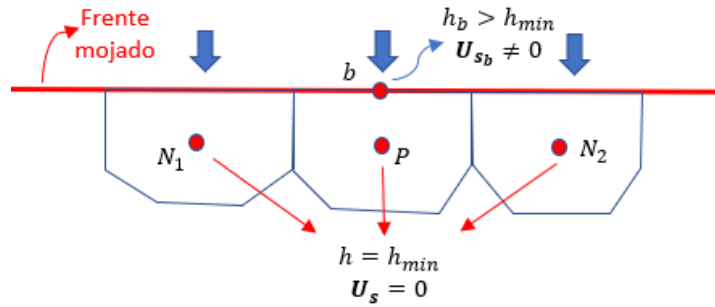


Figura 5.6: Ejemplo de la ubicación del frente mojado en el parche donde se tiene un flujo que ingresa al dominio (flechas azules). En la arista b se tiene $h_b > h_{min}$ y $\mathbf{U}_{s_b} \neq \mathbf{0}$, mientras que en todos los elementos ubicados aguas abajo del frente mojado se tiene $h = h_{min}$ y $\mathbf{U}_s = \mathbf{0}$.

En la ecuación (5.38) además se evaluó el término transiente utilizando el método de Euler, el cual fue mostrado previamente en la ecuación (4.50). Reordenando para despejar $(\mathbf{U}_s)_P^1$, que es la incógnita de la ecuación, y notando que $(\mathbf{U}_s)_P^0 = \mathbf{0}$, se obtiene:

$$(\mathbf{U}_s)_P^1 = \frac{-\Delta t}{(rho h \cdot S_B)_P^1} \left(\frac{1}{2} p_{b_b} h_b \mathbf{L}_b + \xi phi2s_b \mathbf{U}_{s_b} \right) \quad (5.39)$$

El problema con la ecuación (5.39) es que en la primera iteración del procedimiento iterativo secuencial se tiene $rho h^1 = rho h^0 = 0$, por lo que la ecuación se debería indeterminar, aunque en la práctica esto no ocurre pues, con tal de evitar realizar divisiones por cero, se suma al denominador un valor muy pequeño, por lo que $(\mathbf{U}_s)_P \rightarrow \infty$. Este problema se tiene para todas las celdas secas ubicadas inmediatamente aguas abajo de la interfaz mojada, tal como ocurre al elemento P de la Figura 5.6 en $t^1 = \Delta t + t^0$. La forma más simple de evitar que $(\mathbf{U}_s)_P$ tienda a infinito es imponer que $h \geq h_{min}$ en

todo el dominio, con h_{min} un valor positivo muy pequeño. Al hacer esto es posible resolver la ecuación (5.26) y luego con las ecuaciones (5.27) y (5.28) calcular un nuevo valor para h , el cual será usado en la siguiente iteración para resolver nuevamente (5.26). Mientras más pequeño sea el valor de h_{min} escogido se requerirán más iteraciones para que el método converja, pues se partirá de valores más altos de U_s . No obstante, valores muy altos pueden provocar efectos indeseados, como que la pequeña capa de fluido se acelere en zonas donde se tienen altas pendientes (especialmente en los bordes de la malla), lo que provocaría tener velocidades distintas de cero en áreas donde no debería haber flujo.

Es importante notar que el problema recién mencionado no había sido evidenciado anteriormente debido a que su origen está en la forma escalonada en que se resuelven las ecuaciones, lo cual es inevitable debido al grado de no linealidad del sistema de ecuaciones obtenido. Se debe mencionar además que en las ecuaciones (5.36) y (5.37) se omitió el hecho de que los operadores diferenciales ocupados en la ecuación (5.26) corresponden a las proyecciones tangenciales de la divergencia y gradiente. Esto se hizo por simplicidad y no tiene ningún efecto en la conclusión obtenida.

Para finalizar esta subsección, se hará referencia a los métodos usados para evaluar los operadores diferenciales incluidos en las ecuaciones (5.25) a (5.28), junto a los *inputs* requeridos para resolver las ecuaciones matriciales utilizando un método de gradiente.

En el archivo '*system/faSchemes*' se debe indicar qué método se utilizará para evaluar los términos transiente, advectivo, gradiente e interpolaciones. Para las derivadas temporales se utilizará el método de segundo orden de Adams-Moulton (llamado *backward* en OpenFOAM®), estando también disponible en la librería FA el método de Euler en su versión implícita y explícita. Por su parte, para el gradiente se escoge el método de Gauss con interpolación lineal entre elementos y aristas. La otra posibilidad es elegir el método de mínimos cuadrados (*Least-Square Gradient*), el cual se descarta debido a su alto costo computacional (Moukalled et al., 2016, pp. 285-288). Para la divergencia lo realmente importante es seleccionar el método de interpolación requerido para calcular los coeficientes W_{F_f} mostrados en la ecuación (4.34), esto debido a que el método de Gauss es la única opción disponible para evaluar este término. Si bien existen variadas opciones (*blended*, *Gamma*, *linear*, *linearUpwind*), aquí se optó por el esquema *upwind*, siendo esto justificado en el siguiente párrafo. El último valor que es necesario ingresar es el método utilizado para interpolar variables dependientes desde el centroide de un elemento al centro de sus aristas, el cual se utiliza, por ejemplo, para calcular *phi2s* y *phis*, eligiéndose por defecto el esquema lineal.

Si bien en la subsección 4.3.2 se mencionaron muchos esquemas que pueden ser utilizados en vez del *upwind*, lo cierto es que ninguno de estos logra funcionar de buena forma. Al utilizar el esquema HO SOU (ecuación (4.41)) por medio del método de corrección diferida (ecuación (4.44)) el *solver* no es capaz de lidiar con el problema de dispersión generado. Esto debido a que la solución busca crear un mínimo local con $h < 0$ aguas abajo del frente mojado, lo cual es impedido por la ecuación (5.33), por lo que el método iterativo secuencial no es capaz de converger. Se descartó utilizar el método HR Gamma debido a la sabida inestabilidad de estos métodos al ser evaluados implícitamente en OpenFOAM® (ver Anexo A). Queda pendiente para un trabajo

posterior utilizar un esquema HR basado en SOU por medio del método de corrección diferida para evaluar el término advectivo.

En el archivo *'system/faSolution'* se debe incluir qué método iterativo se utilizará para resolver las ecuaciones cuyas variables dependientes son U_s , rho_h y Cwh , siendo escogido en todos los casos el método de gradiente PBiCGStab junto al preconditionador DILU, esto debido a la velocidad y estabilidad que alcanzan combinados (Rauter & Tuković, 2018). No se mencionarán otros *solvers* y preconditionadores disponibles, esto debido a que estos no están relacionados con la librería FA y sus características pueden ser revisadas en OpenCFD (2020a). Además del par solver-preconditionador, se debe incluir para cada ecuación el valor de la tolerancia ϵ_T y la tolerancia relativa ϵ_R , los cuales fueron introducidos en las ecuaciones (4.79) y (4.80). Opcionalmente se puede incluir un coeficiente de relajación para cada ecuación, no siendo posible elegir si la relajación se aplica de forma implícita (ecuación (4.83)) o explícita (ecuación (4.84)), pues esto queda definido al interior de cada *solver*. En particular, en el *solver* desarrollado en esta Tesis se optó por la relajación implícita para las tres ecuaciones matriciales, esto debido a las ventajas que ofrece en términos de estabilidad y dominancia diagonal de la matriz de coeficientes de la ecuación matricial.

5.5.4. Número de Courant

Es necesario definir un criterio que permita calcular el paso de tiempo dentro de la simulación, siendo la opción usual utilizar el número de Courant. Para esquemas explícitos, el número de Courant tiene una interpretación relacionada a que los coeficientes que acompañan a la variable dependiente en tiempos consecutivos deben tener signos opuestos, esto cuando se ubican en el mismo lado de la ecuación. No obstante, dicho análisis no es aplicable cuando se utilizan esquemas implícitos para discretizar el término transiente, como el de Adams-Moulton, pues los coeficientes siempre tienen el signo correcto y la condición impuesta por el número de Courant no es válida. Así, en esquemas implícitos es posible escoger cualquier paso de tiempo sin correr el riesgo de que la solución se vuelva inestable (Moukalled et al., 2016, pp. 494-498).

Una segunda interpretación que se puede dar a la restricción que da el número de Courant está relacionada a que el paso de tiempo Δt está limitado por la velocidad con que viaja la información y la distancia que esta puede recorrer. Esto debido a que en cada paso de tiempo un elemento solo puede transmitir su información a los elementos vecinos (Ferziger & Perić, 2002, pp. 142-151). Es en función de esta interpretación que se utilizará el número de Courant para determinar el paso de tiempo entre dos iteraciones de la simulación, siendo este un buen indicador para un paso de tiempo apropiado para las condiciones del flujo (Rauter & Tuković, 2018).

En primer lugar, se debe calcular la velocidad de la onda característica normal a cada arista de la malla. Para esto se requiere interpolar los valores de U_s , h y $(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})$ desde el centroide de los elementos a las aristas usando el operador *fac :: interpolate*. Para

calcular la velocidad de la onda en una arista f , denotada por v_f , se utiliza la ecuación (5.40), con \mathbf{e}_f el vector unitario normal a la arista (ver Figura 5.7). En el último término de la ecuación (5.40) se debe tener en cuenta que \mathbf{n}_b es definido en el interior de OpenFOAM® orientado hacia fuera del volumen de control, tal como en la Figura 3.3, por lo que $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_b$ es positivo.

$$v_f = \mathbf{U}_{Sf} \cdot \mathbf{e}_f + \sqrt{h_f(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_b)_f} \quad (5.40)$$

Si bien es posible calcular un número de Courant para cada arista, solo interesa el valor máximo en la malla, el cual será nombrado C_o . En la ecuación (5.41), Δ_f , cuya definición se dejará para más adelante, es una medida de la distancia entre los centroides de los elementos que contienen a la arista f . En esta ecuación $v_f \Delta t$ representa la distancia que viaja la información, mientras que Δ_f es la máxima distancia que puede viajar en un paso de tiempo. Es claro entonces que se debe imponer $C_o \leq 1$.

$$C_o = \max_f \left(\frac{v_f \Delta t}{\Delta_f} \right) \quad (5.41)$$

Obtenido C_o se calcula el coeficiente α_{C_o} , el que da cuenta de la razón entre el número de Courant máximo, el cual es leído desde el archivo 'system/controlDict', y el valor actual de C_o .

$$\alpha_{C_o} = \frac{\max C_o}{C_o} \quad (5.42)$$

El paso final corresponde a calcular el coeficiente $\alpha_{\Delta t}$, el cual es utilizado para calcular el nuevo paso de tiempo Δt . En la ecuación (5.43) se busca limitar el valor de $\alpha_{\Delta t}$ en función de α_{C_o} , entendiéndose que si $C_o > \max C_o$, entonces $\alpha_{C_o} = \alpha_{\Delta t} < 1$, de modo que Δt disminuirá y al recalcularse C_o con la ecuación (5.41) el resultado será $\max C_o$. Por otro lado, si $C_o < \max C_o$ entonces $\alpha_{C_o} > 1$ y $\alpha_{\Delta t}$ tendrá un valor mayor a uno, pero no necesariamente igual a α_{C_o} , debido a que esto último forzaría $C_o = \max C_o$ y una posible variación muy drástica en el valor de Δt , lo cual no es recomendable.

$$\alpha_{\Delta t} = \min(\min(\alpha_{C_o}, 1 + 0,1\alpha_{C_o}), 1,2) \quad (5.43)$$

$$\Delta t = \min(\alpha_{\Delta t} \cdot \Delta t, \maxDeltaT) \quad (5.44)$$

En la ecuación (5.43), \maxDeltaT es leído desde el archivo 'system/controlDict', aunque lo usual es no incluirlo y dejar que adquiera el valor definido por *default*, el cual es un valor sumamente alto (en la práctica infinito). Esta forma de calcular C_o y un nuevo Δt se encuentra por defecto incluida en la librería FA de OpenFOAM® y en esta Tesis no se le hizo modificación alguna (OpenCFD, 2020b).

Para finalizar se mostrará cómo calcular Δ_f , para lo cual se hace uso de la Figura 5.7, donde se representan dos elementos P y F , y la arista f que los conecta. La arista f

queda definida por los vectores \mathbf{r}_E y \mathbf{r}_S , pudiendo calcular el vector unitario \mathbf{n}_f a partir de la ecuación (5.45), donde \mathbf{e}_f es el vector unitario normal a f .

$$\mathbf{n}_f = \frac{\mathbf{e}_f \times (\mathbf{r}_E - \mathbf{r}_S)}{\|\mathbf{e}_f \times (\mathbf{r}_E - \mathbf{r}_S)\|} \quad (5.45)$$

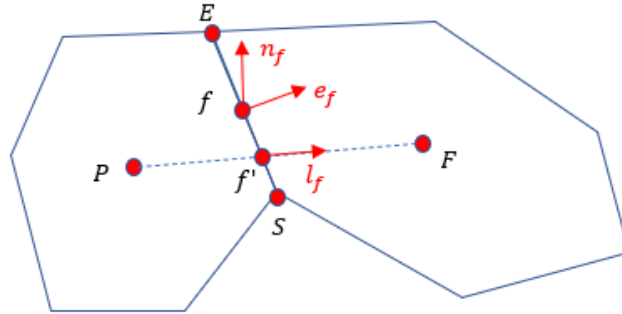


Figura 5.7: Ejemplo de dos celdas P y F y la arista f que los conecta. Los puntos E y S corresponden a los extremos de la arista, con f el punto que marca el centro de esta y f' el punto de f más cercano a \overline{PF} . \mathbf{e}_f , \mathbf{n}_f y \mathbf{l}_f son vectores unitarios.

En la ecuación (5.46) \mathbf{l}_f es la proyección tangente al plano definido por \mathbf{n}_f del vector unitario que conecta los centroides P y F .

$$\mathbf{l}_f = \frac{(\mathbf{I} - \mathbf{n}_f \mathbf{n}_f) \cdot (\mathbf{r}_F - \mathbf{r}_P)}{\|(\mathbf{I} - \mathbf{n}_f \mathbf{n}_f) \cdot (\mathbf{r}_F - \mathbf{r}_P)\|} \quad (5.46)$$

Tal como se mostró en la Figura 4.3, el trazo \overline{PF} no necesariamente intersecta a la arista f , por lo que se define f' como el punto de la arista más cercano a \overline{PF} , cuya posición $\mathbf{r}_{f'}$ queda determinada al resolver las ecuaciones (4.22) y (4.23). En la ecuación (5.47), λ_f corresponde a la menor distancia entre los centroides P y F siguiendo la trayectoria curva de la malla, siendo Δ_f (ecuación (5.48)) la proyección de dicha distancia en la dirección \mathbf{e}_f .

$$\lambda_f = \|\mathbf{r}_F - \mathbf{r}_{f'}\| + \|\mathbf{r}_{f'} - \mathbf{r}_P\| \quad (5.47)$$

$$\Delta_f = \lambda_f (\mathbf{l}_f \cdot \mathbf{e}_f) \quad (5.48)$$

5.5.5. Aplicación del algoritmo de modificación del terreno

En esta sección solo se mencionarán los *inputs* requeridos para utilizar el TMA junto a detalles referidos a la implementación de este. Fuera de esto, el algoritmo usado es el mostrado en la sección 3.8, el que puede ser resumido en los siguientes pasos:

1. Calcular h_e^{n+1} , Δh y Δh^*
2. Calcular ΔV
3. Usar el *Smoother*:
 - 3.1. Calcular $\overline{\Delta h^*}$ y σ
 - 3.2. Evaluar Γ y los valores α_{ij}
 - 3.3. Calcular ΔV^{max}
 - 3.4. Recalcular ΔV y Δh^*
4. Calcular la nueva coordenada r^{n+1} de todos los vértices
5. Calcular ΔV^*
6. Recalcular Δh y luego Δh^*
7. Si $|\Delta h^*|$ es menor que cierto valor límite avanzar al paso 8, de lo contrario volver al paso 2.
8. Recalcular \hat{n} , g_n , g_s y S .

Para aplicar este algoritmo se debe activar esta opción en el archivo '*constant/transportProperties*', además de entregar todos los inputs necesarios, los cuales se enumeran a continuación: α_r , α_Γ , β_Γ , α_{smooth} , Δh_{min} , $h_{min}^{terrain}$ y $nTerrainIter$. Mientras que los tres primeros ya fueron introducidos en las ecuaciones del algoritmo, la función de los últimos cuatro se mencionará a continuación.

El *Smoother* será utilizado solo si $\Delta h_{min}\alpha_{smooth} < \max(\Delta h^*)$ o si $-\Delta h_{min}\alpha_{smooth} > \min(\Delta h^*)$, con $0 < \alpha_{smooth} < 1$, esto evita utilizarlo de forma excesiva y aumentar el tiempo de cómputo de forma innecesaria. De forma similar, se evita calcular las nuevas coordenadas r^{n+1} a menos que el material erosionado o depositado supere una cierta altura mínima Δh_{min} , de modo que el método se aplicará solo si $\Delta h_{min} < \max(\Delta h^*)$ o si $-\Delta h_{min} > \min(\Delta h^*)$. Esta última condición es luego usada en el paso 7 para determinar si se continúa iterando o si se pasa al paso 8, estando el número de iteraciones posibles limitado por $nTerrainIter$. El último coeficiente que debe ser introducido al *solver* es $h_{min}^{terrain}$, el cual es utilizado en el paso 4 para evitar la propagación de valores $\Delta h^* \neq 0$ lejos de la zona donde se tiene el flujo, esto por medio de recalcular cada vértice r^{n+1} solo si $\frac{\sum_k S_k h_k}{\sum_k S_k} > h_{min}^{terrain}$, con la sumatoria realizada sobre todos los elementos que contienen al vértice en cuestión.

El fin del algoritmo es modificar la malla de modo que responda a los procesos de erosión y depositación. Los cambios se realizan sin modificar la topología de la malla y tratando de realizar la menor cantidad de iteraciones posible.

El algoritmo fue inicialmente desarrollado para ser utilizado en simulaciones que utilicen un solo procesador y luego fue adaptado para que pueda funcionar en simulaciones en paralelo. No obstante, la eficiencia del *solver* disminuye cuando se utiliza el *solver* en múltiples procesadores y la modificación del terreno está activa. Este problema está probablemente relacionado a la forma como se envía información de un procesador a otro dentro del método, siendo posible hacer modificaciones para aumentar su eficiencia.

Capítulo 6

Resultados

6.1. Introducción

En esta sección se presentan los resultados obtenidos a partir del *solver* *debrisfaSavageHutterFoam*, el cual es aplicado a una serie de casos para modelar distintas condiciones de flujo.

La primera aplicación corresponde a su uso en una geometría simple, la cual está compuesta por dos planos inclinados que enlazan por medio de una curva suave. Este caso fue ampliamente utilizado durante esta Tesis al momento de probar y formular el *solver* *debrisfaSavageHutterFoam*. Esto se debe a que por la forma de la geometría es posible intuir los resultados para distintas condiciones del flujo, además que detectar cualquier resultado anómalo es relativamente fácil. Con este ejemplo se busca mostrar lo sensible que son los resultados obtenidos ante distintas condiciones de erosión; la utilidad del algoritmo de modificación del terreno (TMA); los cambios de volumen, densidad, altura y velocidad que ocurren en el flujo producto de la erosión del lecho; y que el flujo es capaz de esquivar obstáculos y depositar al alcanzar zonas de baja pendiente.

Para dos quebradas del río El Carmen, ubicado en la provincia de Huasco, Chile, se muestran las distintas posibilidades que ofrece el *solver* al ser aplicado a geometrías reales. En primer lugar, se buscan recrear los resultados obtenidos por medio de FLO-2D para un aluvión ocurrido en la quebrada La Mesilla en marzo de 2015. Luego, se simulan distintos escenarios de flujo en la quebrada Crucecita, para lo cual se varía el caudal de entrada y la concentración de sólidos en la mezcla. En una tercera aplicación, se muestra que el *solver* puede ser usado para modelar, de forma sumamente simplificada, la interacción entre el río El Carmen y un flujo detrítico descargado desde una de sus quebradas afluentes.

La última aplicación corresponde a la simulación de un flujo detrítico ocurrido en la quebrada Illgraben, ubicada en el suroeste de Suiza. El fin de esto es utilizar el *solver* en

una geometría real sumamente monitoreada, donde se cuentan con datos fiables de velocidad, altura, caudal, densidad y profundidad de erosión en el lecho.

Los casos aquí mostrados han sido simulados utilizando una gran variedad de parámetros de entrada y de ecuaciones de fricción, erosión y depositación, a la vez que usando uno o múltiples procesadores. No obstante, no es posible asegurar que el *solver* funciona en cualquier geometría y con cualquier combinación físicamente posible de parámetros de entrada. Para lograr eso sería necesario hacer muchas más pruebas, considerando otras geometrías e idealmente por distintos usuarios.

Los resultados presentados en las siguientes secciones representan solo una fracción de los que se pueden obtener a partir del código *read_debris_case.py*, el cual fue desarrollado íntegramente como parte de este trabajo. El funcionamiento del código, cuya función es la de procesar los resultados entregados por el *solver debrisfaSavageHutterFoam*, pueden ser revisados en el Anexo D del presente documento. Algunos de los resultados más relevantes que se pueden obtener a partir de *read_debris_case.py* son enumerados a continuación: caudal detrítico en el cauce en función del tiempo; distribución de velocidad, altura y densidad del flujo en el tiempo; área de inundación; distancia recorrida por el flujo; volumen erosionado y de la mezcla en función del tiempo; evolución geomorfológica del lecho; etc. Todos estos valores pueden ser utilizados para estimar el daño potencial del flujo, definir zonas de riesgo, diseñar obras de protección y evaluar la evolución geomorfológica del cauce en que se desarrolla el flujo.

6.2. Aplicación a una geometría con forma de cuña

6.2.1. Geometría de la superficie

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al utilizar el *solver* sobre la superficie curva mostrada en la Figura 6.1, la cual está formada por un plano inclinado de pendiente $\tan(\alpha_2)$ que por medio de una circunferencia de radio r y centro P_c enlaza con otro plano inclinado de pendiente $\tan(\alpha_1)$. Los valores r , y_c y z_c se calculan de modo tal que la curva y la pendiente de esta sean funciones continuas. En la ecuación (6.1) se describen las relaciones usadas para calcular la coordenada vertical de los puntos que forman el perfil longitudinal (ver Figura 6.1 b)):

$$z(x, y) = \begin{cases} y \cdot \tan(\alpha_1) & \text{si } y \leq y_{P_1} \\ z_c - \sqrt{r^2 - (y_c - y)^2} & \text{si } y_{P_1} < y \leq y_{P_3} \\ (y - y_m) \cdot \tan(\alpha_2) + y_m \cdot \tan(\alpha_1) & \text{si } y_{P_3} < y \end{cases} \quad (6.1)$$

En la definición de $z(x, y)$ se utiliza y_m como la coordenada en la dirección y del punto P_2 . Se escoge utilizar $y_{P_1} = y_m/2$ y que P_2 sea el punto medio del arco de circunferencia definido entre P_1 y P_3 , por lo que $y_{P_3} = y_m \tan(\alpha_1) + y_m \sin(\alpha_2) / \cos(\alpha_1)$.

Con tal de encauzar el flujo, el cual se inicia desde la sección $y = L_y$, se utiliza la siguiente corrección para generar un perfil transversal simétrico respecto a $x = L_x/2$, con A_1 una constante y L_x y L_y el ancho y largo de la superficie en sus coordenadas planimétricas (ver Figura 6.1 a)).

$$z(x, y) = z(x, y) - A_1 \sin\left(\frac{x}{L_x} \pi\right) \sin\left(\frac{y}{L_y} \frac{\pi}{2}\right) \quad (6.2)$$

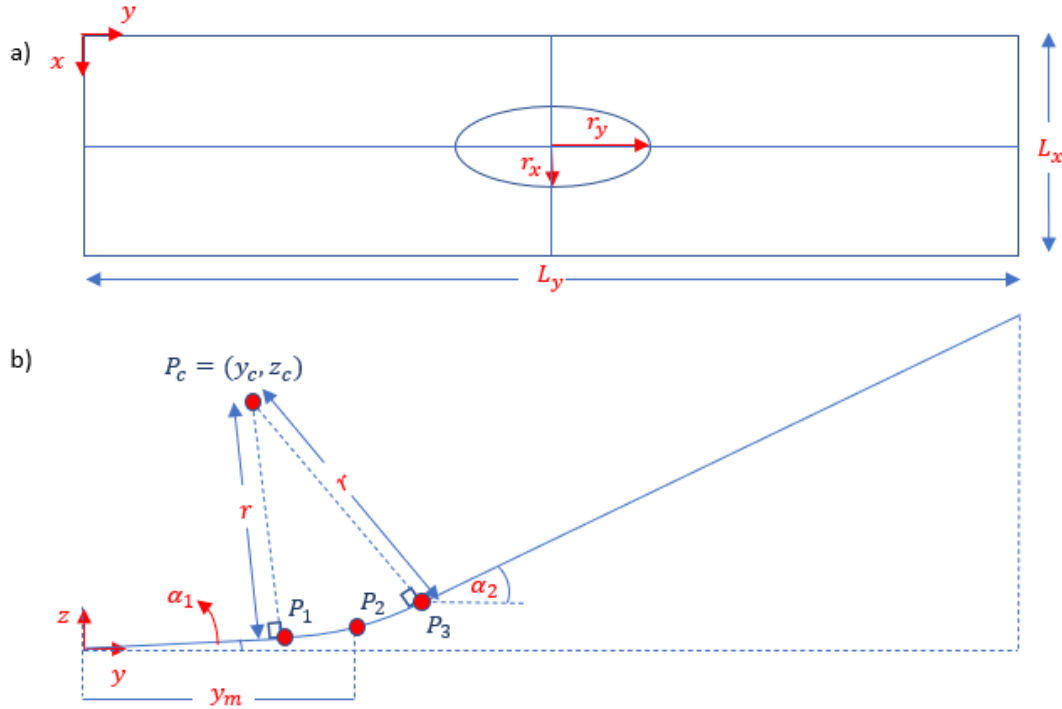


Figura 6.1: Definición de las variables usadas para generar la superficie curva con forma de cuña. (a) Vista en planta de la geometría. (b) Perfil longitudinal de la geometría (se omite la existencia del elipsoide).

Una segunda corrección es introducida para incluir en la superficie el cascarón del elipsoide de radios r_x y r_y mostrado en la Figura 6.1 a). En la ecuación (6.3) ξ_x y ξ_y son utilizados para desplazar el centro del elipsoide en las direcciones x y y . Para introducir la corrección se utiliza la constante A_2 , la cual corresponde al radio del elipsoide en la dirección z .

$$\Delta_{corr}(x, y) = \max\left(0, \left(1 - \left(\left(\frac{y - \xi_y \frac{L_y}{2}}{r_y}\right)^2 + \left(\frac{x - \xi_x \frac{L_x}{2}}{r_x}\right)^2\right)\right)\right) \quad (6.3)$$

$$z(x, y) = z(x, y) + A_2 \Delta_{corr}(x, y) \quad (6.4)$$

En particular, para los resultados mostrados en esta sección se utilizan los siguientes valores para crear la geometría: $\alpha_1 = 10^\circ$, $\alpha_2 = 20^\circ$, $y_m = 250 \text{ m}$, $r_x = 15 \text{ m}$, $r_y = 100 \text{ m}$, $L_x = 200 \text{ m}$, $L_y = 1000 \text{ m}$, $A_1 = 50 \text{ m}$, $A_2 = 20 \text{ m}$, $\xi_x = 1,05$ y $\xi_y = 1,4$. Los valores de r , y_c y z_c no son presentados pues deben ser calculados a partir de los otros datos geométricos. Los valores de α_1 y α_2 fueron definidos a partir de los rangos de pendientes reportados por Van Dine (1996) para las zonas de erosión y detención. El código utilizado para crear esta malla se incluye con el material anexo a esta Tesis bajo el nombre *wedge_generator.py*.

Los parámetros geométricos definidos en el párrafo anterior fueron elegidos de modo tal que en la geometría se pueda generar un flujo detrítico de un caudal entre 10^2 y $10^3 \text{ (m}^3/\text{s)}$ y de una duración superior a 10^2 s . Se escoge $\xi_x \neq 1,0$ con tal de generar asimetría en el perfil transversal del cauce en la zona donde se tiene el elipsoide, esto con el fin de evaluar si el flujo es capaz de evadir obstáculos y observar cómo varían ciertos parámetros del flujo (h , U_s , etc.) en cada una de sus ramas. Se selecciona $\xi_y > 1,0$ de modo tal que la zona donde ambas ramas del flujo confluyen aguas abajo del elipsoide no esté controlada desde aguas abajo.

La variación en la pendiente junto a la expansión del flujo producto del cambio en la sección transversal (ecuación (6.2) propician que este se detenga en la parte baja de la geometría. El cambio gradual de pendiente permite además que el desplazamiento máximo del flujo dependa de los parámetros de fricción y de su volumen. Por el contrario, en caso de tenerse un cambio brusco de pendiente, el flujo depositaría en torno al punto de inflexión sin exhibir diferencias notables en función de los parámetros de fricción escogidos. Esto último se cumple para todas las leyes de resistencia a excepción de aquellas que no incluyen un término de origen Coulómbico, como la ecuación de Manning, las cuales no son capaces de detener el flujo en función del cambio de pendiente.

6.2.2. Inputs

En esta subsección se detallan los *inputs* utilizados en cada una de las simulaciones realizadas sobre la superficie previamente definida. El objetivo es utilizar el *solver* con distintos conjuntos de parámetros para comprobar así su correcto comportamiento físico. Es decir, que se conserve la masa del material detrítico en caso de que no haya intercambios con el lecho, que el flujo sea capaz de erosionar modificando la geometría de la malla, que aumente el volumen en función del material incorporado, que sea capaz de eludir el obstáculo que representa el elipsoide y que la distancia recorrida por el flujo varíe en función de los parámetros de fricción y el volumen del flujo.

Debido a que esta es una geometría creada para servir de ejemplo, no es posible definir el hidrograma, constantes y parámetros de fricción y erosión a partir de información de flujos detríticos previos. Por lo que dichos valores serán elegidos a partir de los valores usualmente recomendados en la literatura.

Para generar el flujo se opta por definir un hidrograma de cuatro puntos, debido a que se ha reportado que estos describen de buena forma los hidrogramas de flujos reales (Bartelt et al., 2017). Los valores $Q = 80 \text{ m}^3/\text{s}$ y $Q = 20 \text{ m}^3/\text{s}$ (ver Figura 6.2) fueron escogidos de forma arbitraria, pero con el objetivo de generar un *peak* marcado, seguido luego por un cuerpo y cola de menor caudal y concentración. Al brazo ascendente del hidrograma se le asigna una mayor concentración volumétrica de sólidos, esto para simular la ola frontal, mientras que al caudal máximo, el cual ocurre unos pocos segundos antes, se le asigna una concentración levemente menor. Siguiendo la recomendación dada en FLO-2D (2015) se utiliza un valor mínimo $C_v = 0,2$ en todo el flujo, mientras que se escoge $C_v = 0,35$ como valor *peak*. Si bien en FLO-2D (2015) se recomienda utilizar valores en torno a 0,45 y 0,53 para el valor máximo, se debe tener en cuenta que FLO-2D no incluye la incorporación de material desde el lecho. Debido a que el *solver* desarrollado en esta Tesis no cuenta con dicha limitante, aquí se opta por un valor *peak* menor. En todas las simulaciones se utilizará el hidrograma mostrado en la Tabla 6.1, el cual es además presentado de forma gráfica en la Figura 6.2.

Tabla 6.1: Hidrograma usado para generar el flujo.

$t(s)$	$Q(m^3/s)$	$C_v (-)$
0	0	0,20
40	40	0,20
75	75	0,35
80	80	0,33
120	20	0,20
200	0	0,20

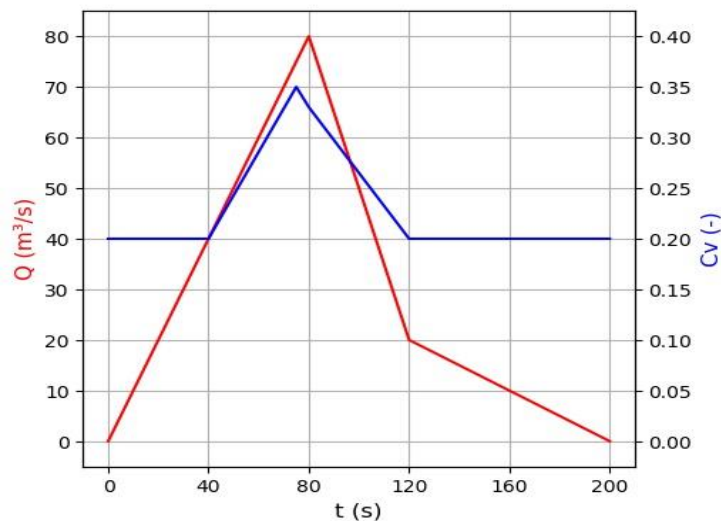


Figura 6.2: Hidrograma usado para generar el flujo.

En total, el material incorporado equivale a un volumen de 6.000 m^3 y una masa de $8,68 \cdot 10^6 \text{ kg}$. Todas las simulaciones tendrán una duración de 600 s , de modo que el material que ingresa al dominio geométrico tiene tiempo suficiente para desplazarse hasta la zona del cambio de pendiente y luego detenerse.

Para modelar la fricción se elige el modelo de Voellmy, esto debido a que es más simple de utilizar que el modelo cuadrático de FLO-2D (ecuación (2.26)), Se descarta además el uso de la ecuación de Manning (ecuación (2.22)), debido a que esta no permite representar la detención del flujo. Si bien Bartelt et al. (2017) describen el procedimiento para obtener los coeficientes μ y ξ que permiten representar de mejor forma cada flujo detrítico, este es válido para flujos en geometrías reales, de modo que aquí se optará por utilizar una gama de valores.

Los valores de μ suelen estar en el rango entre 0,05 y 0,4, siendo una buena suposición inicial utilizar la pendiente del terreno en la zona de detención. Por su parte, los valores de ξ son más difíciles de estimar y se recomiendan valores en el rango 100-1000 (m/s^2), usando como valor inicial $\xi = 200 m/s^2$ (Bartelt et al., 2017). Debido a que la zona de detención estará en el cambio de pendiente, se estima que $\mu = 0,2$ y se aceptará que $\xi = 200 m/s^2$. Se utilizará además μ igual a 0,15 y 0,25, con valores de ξ de 100 m/s^2 y 400 m/s^2 . Esto permite generar tres pares de valores, los cuales serán nombrados F1, F2 y F3 acorde a lo mostrado en la Tabla 6.2.

Tabla 6.2: Conjunto de valores utilizados para modelar la fricción basal.

	μ (-)	ξ (m/s^2)
F1	0,15	400
F2	0,20	200
F3	0,25	100

Es claro que a mayores valores de μ y menores de ξ aumentará el valor de τ_b , lo que debería provocar que el flujo se detenga más rápido y recorra una menor distancia.

Para la erosión se utilizará por su simplicidad el modelo exponencial, esto debido a que la tasa de erosión depende solo del parámetro E_x (ecuación (5.9)). No obstante, se debe mencionar que E_x es estimado a partir de la razón entre el volumen inicial, el volumen final (inicial + erosionado) y la distancia recorrida por la mezcla (McDougall & Hungr, 2005), y no a partir de las características del sedimento o del flujo. En particular, E_x debiese estar limitado por los valores de u_{bE} medidos en terreno y en laboratorio, los cuales están en el rango 0,025 – 0,14 m/s (Frank et al., 2015; Iverson et al., 2011; McCoy et al., 2012). Si bien aquí se utilizará una serie de valores de E_x , la validez de los resultados se debe decidir en función de los valores de u_{bE} calculados. Como máximo valor de se escoge $E_x = 5 \cdot 10^{-3} m^{-1}$, el cual parece razonable, pues si $h \approx 2,5 m$ y $U_s \approx 8 m/s$ entonces se obtiene $u_{bE} = 0,1 m/s$. Este valor además es del mismo orden de magnitud que $E_x = 1,9 \cdot 10^{-3} m^{-1}$, siendo este el valor usado por McDougall & Hungr (2005). Además de $E_x = 5 \cdot 10^{-3} m^{-1}$ se utilizarán otros tres valores, los cuales se muestran en la

Tabla 6.3.

Junto a E_x se debe entregar el valor del esfuerzo de corte crítico, el cual es el fuerza de corte basal en el que comienza a haber erosión en el lecho. Se utilizará, junto a otros tres valores del mismo orden de magnitud, $\tau_c = 1 kPa$, el cual es el valor usado por defecto en RAMMS (Bartelt et al., 2017). Esta serie de valores de E_x y τ_c permiten definir cuatro pares de valores, los cuales son enumerados en la

Tabla 6.3. Junto a estos se definen los valores E5, los que corresponden al caso sin erosión y que más adelante serán usados como base de comparación.

Tabla 6.3: Conjunto de valores utilizados para modelar la erosión de material desde el lecho.

	$E_x (m^{-1})$	$\tau_c (Pa)$
E1	0,005	500
E2	0,002	750
E3	0,001	1000
E4	0,0005	1500
E5	-	-

Además del modelo de erosión y sus parámetros, se debe generar una distribución inicial de valores para h_e (altura de la capa de sedimento erosionable). Se escoge utilizar un valor máximo igual a $2 m$, el cual se encuentra en el rango de las mediciones experimentales realizadas por diversos autores (Hungry et al., 2005). En el *solver* es posible definir zonas donde estará limitada la erosión, lo que equivale a imponer $u_{bE} = 0$ en las zonas no seleccionadas. En particular, en todas las simulaciones se escoge que la erosión ocurra solo en el rectángulo definido por las rectas $y = 450 m$ e $y = 950 m$, existiendo dos grandes razones para hacer esto. La primera es evitar que la modificación del fondo pueda afectar a la condición de borde ubicada en $y = 1000 m$, lo cual, si bien no es estrictamente necesario, en ciertas geometrías puede generar problemas haciendo que el *solver* diverja, por lo que es recomendable limitar la zona de erosión de modo que ocurra a cierta distancia de los bordes. La segunda razón es evitar que se produzca erosión en la zona de detención, ya que, por la forma del modelo exponencial, a pesar de que U_s disminuye drásticamente con el cambio de pendiente, h se incrementa al igual que τ_b , incorporándose una gran cantidad de material en una zona donde no se espera que esto ocurra.

Debido a que el fondo es modificado en función del material erosionado, un cambio brusco en los valores iniciales de h_e no es recomendable. Esto se debe a que, en caso de alcanzarse la máxima erosión posible, se tendría una sobreelevación en el terreno en la parte final de la zona de erosión (en este caso de $2m$). Esta sobreelevación actuaría como un obstáculo para el flujo, forzándolo a aumentar su altura hacia aguas arriba y a descargar sobre el obstáculo como un flujo supercrítico. Si bien esto se podría dar en el caso de que cambiasen las propiedades del sedimento en el terreno, este efecto es indeseado para el análisis que aquí se quiere realizar. Así, con el fin de evitarlo, se opta por calcular h_e utilizando la siguiente ecuación, la cual es definida por intervalos, permitiendo así pasar de forma suave desde $h_e = 0 m$ a $h_e = 2 m$.

$$h_e(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 450 \\ 0,02 \cdot (y - 450) & \text{si } 450 < y \leq 950 \\ 2 & \text{si } 950 < y \end{cases} \quad (6.5)$$

En estas simulaciones no se incluirá el término asociado a la depositación, esto debido a la falta de una ecuación que permita describirla de forma simple, además que incorporar este proceso podría afectar la claridad de las conclusiones que se busca obtener al variar los parámetros de fricción y erosión.

En la Tabla 6.4 se presentan los valores escogidos para algunas constantes y parámetros usados en el *solver*. Mientras que ρ_w y ρ_s son los valores usuales (ver Tabla 2.1), ρ_b es definido de modo tal que el valor máximo de C_v resulte ser menor a 0,5 (FLO-2D, 2015). El tamaño máximo de los elementos de la malla se fija en 5 m, estando este valor en el orden de magnitud recomendado en otros modelos de flujos detríticos, como RAMMS y FLO-2D (Bartelt et al., 2017; FLO-2D, 2017). El último valor corresponde al máximo número de Courant (ver ecuación (5.42)), el cual se fija en 0,7. Si bien no es necesario que este sea menor a 1,0, pues el esquema usado es implícito e incondicionalmente estable, se escoge utilizar un valor menor a uno de modo de reducir los valores de Δt . Como consecuencia de esto, el material erosionado y/o depositado en cada iteración disminuye, a la vez que se previene la aparición de oscilaciones producto del uso del esquema de Adams-Moulton, el cual es no acotado (Ferziger & Perić, 2002, pp. 150-151).

Tabla 6.4: Valores de parámetros y constantes usados en las simulaciones.

ρ_w (kg/m^3)	ρ_s (kg/m^3)	ρ_b (kg/m^3)	$maxCellSize$ (m)	$maxCo$ (-)
1000	2700	1850	5	0,7

Finalmente, se presentan los valores usados para los parámetros definidos como parte del algoritmo de modificación del terreno (TMA), los cuales no cambiarán de una simulación a otra. Si bien no se compararán los resultados obtenidos al variar estos parámetros, los valores aquí presentados son los que se ha observado incrementan la velocidad y estabilidad del *solver*, a la vez que no generan efectos indeseados en los resultados.

Tabla 6.5: Valores de parámetros asociados al TMA usados en las simulaciones.

α_r	α_Γ	β_Γ	α_{smooth}	Δh_{min} (m)	$h_{min}^{terrain}$ (m)	$nTerrainIter$
0,85	0,2	0,6	0,7	0,01	0,001	5

6.2.3. Resultados

En todas las simulaciones se utiliza la misma geometría y los mismos parámetros, a excepción de aquellos asociados a los modelos de erosión y fricción. Dado que se tienen cinco pares de valores (E_x, τ_c) y tres pares (μ, ξ) se obtienen quince combinaciones posibles, las cuales serán referidas a partir de los pares que la forman. Así, la simulación en que se utilizan los parámetros E2 y F3 será nombrada E2F3. Además de estas quince simulaciones, se utilizará el *solver* en los casos E1 y E3 sin activar el TMA, esto para evaluar el efecto que este tiene sobre los resultados. Esto suma seis nuevas simulaciones, las cuales serán diferenciadas de las otras con un signo +. Por ejemplo, la simulación E1F1+ utiliza los parámetros E1 y F1 sin activar el TMA.

Si bien se selecciona $maxCellSize = 5$ m como el tamaño máximo de los elementos de la malla, lo cierto es que las dimensiones de las celdas creadas por *pMesh* son variables. De este modo, no se tiene gran control sobre los tamaños máximos y mínimos, así como de la forma de los elementos generados. No obstante, se observa que el tamaño de las

celdas es proporcional al valor escogido de $maxCellSize$. Para poder analizar el tamaño de los elementos de la malla, se utiliza el concepto de diámetro equivalente, el cual consiste en calcular para cada elemento el diámetro asociado a una circunferencia de igual área. Para la malla generada en esta sección, se obtiene un diámetro equivalente máximo y mínimo de 2,9 y 0,4 m, mientras que el diámetro equivalente promedio es de 2,1 m.

En la Figura 6.3 se muestra como luce la malla creada en OpenFOAM®, junto a la altura de escurrimiento resultante del caso E2F3 para $t = 175$ s. En la imagen de la izquierda se tiene la vista frontal, donde se puede ver que el flujo evita al elipsoide al dividirse en dos ramas. La rama derecha (vista en la dirección del flujo) tiene una mayor altura, esto debido a que el elipsoide se encuentra ubicado de forma asimétrica, por lo que la superficie de esta rama se encuentra a una menor cota. En la imagen de la derecha se aprecia la curvatura longitudinal de la superficie, la cual pasa de un plano inclinado en 20° a uno de 10° . En ambas imágenes se puede observar la curvatura del terreno en la dirección transversal al flujo, la cual parte de un valor máximo en la parte alta hasta ser prácticamente nula en la zona de deposición.

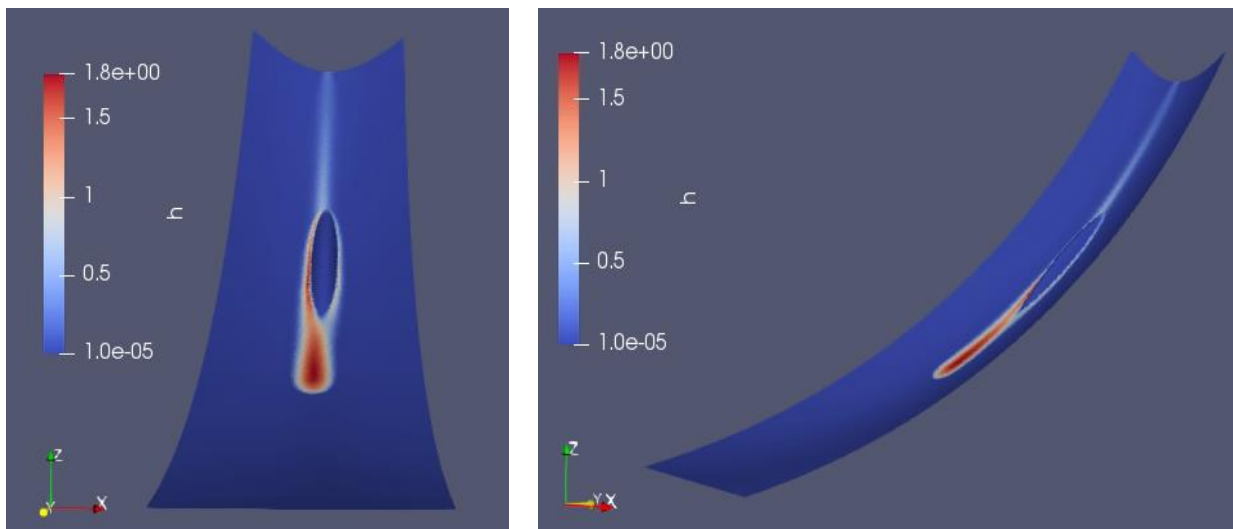


Figura 6.3: Vistas de la geometría creada en OpenFOAM®. Los valores mostrados corresponden a la altura del flujo h medida en metros.

En el análisis venidero se presentan los resultados obtenidos al considerar los perfiles longitudinales LP1 y LP2 mostrados en la Figura 6.4. Estos perfiles siguen la dirección del flujo, diferenciándose solo en la zona donde se ubica el elipsoide y superponiéndose en el resto de la geometría. Para ambos perfiles longitudinales se indica la ubicación de los perfiles transversales TP140, TP190 y TP240. Debido a que el TP140 se ubica en la zona del elipsoide, se define un perfil transversal distinto para cada perfil longitudinal. Por el contrario, los perfiles TP190 y TP240 se ubican aguas abajo de la zona donde ambas ramas del flujo confluyen, por lo que son comunes en ambos perfiles longitudinales. Las coordenadas (x, y) medidas en metros de los extremos del TP140 asociados al LP1 son $(105, 688,6)$ y $(42,6, 687)$, mientras que para LP2 son $(167,4, 687)$ y $(105, 688,6)$. El

perfil transversal común TP190 tiene coordenadas (160, 536) y (40, 536), mientras que los extremos del TP240 son los puntos (160, 436) y (40, 436). En la Figura 6.4 se aprecia además la ubicación de la zona donde se genera incorporación de material al flujo (fuera de esta se tiene $u_{bE} = 0$) y las curvas de nivel asociadas a la cota de la superficie (z).

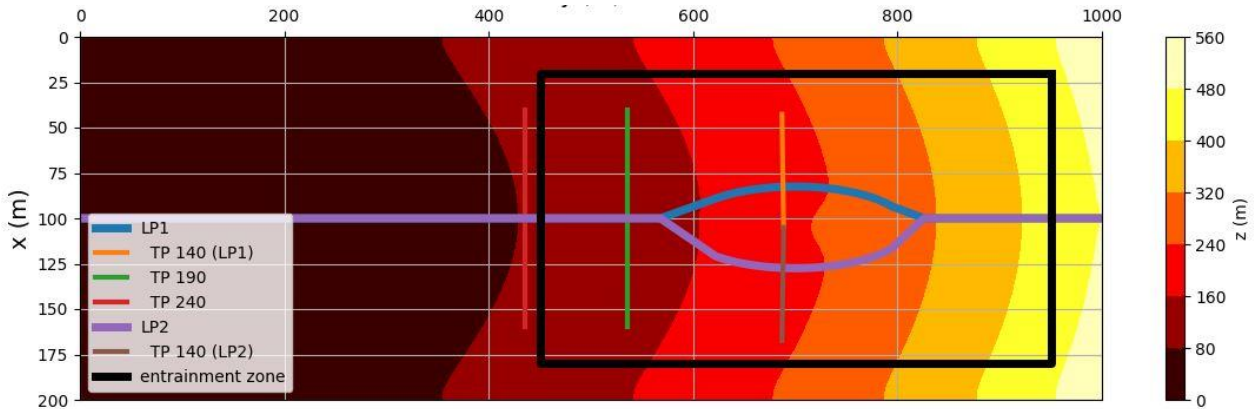


Figura 6.4: Definición de los perfiles longitudinales LP1 y LP2 junto a los perfiles transversales TP140, TP190 y TP240. El rectángulo de color negro (*entrainment zone*) corresponde a la zona donde se limita la incorporación de material desde el lecho.

La definición de los perfiles longitudinales del flujo, y por tanto de los perfiles transversales asociados a estos, se hace de forma externa al *solver*, en este caso dentro del código *wedge_generator.py*. Los perfiles transversales son utilizados para interpolar las variables dependientes, como h y U_s , y así evaluar cómo estas varían en cada sección del flujo. Además, estos son requeridos al calcular el caudal del flujo, el cual no se obtiene a partir de los valores interpolados de h y U_s , sino que de los valores de $Q = fac :: interpolate(hU_s) \cdot Le$ calculados al interior del *solver*, tal como se mencionó en la subsección 5.5.3. Debido a que en el *solver* se conserva la cantidad de material durante la simulación, los valores de caudal calculados a partir de Q cumplen con la ecuación de continuidad en todo el dominio.

El análisis de los resultados se dividirá en tres partes. En primer lugar, se mostrarán los resultados obtenidos solo considerando los casos donde está activo el TMA. Para estos se calcula el valor de ciertas variables dependientes en todo el dominio o en los perfiles TP190 y TP240, según corresponda. Luego, se presenta cómo varían algunas variables del flujo en el tramo en que este se divide por efecto del elipsoide. Para esto se utilizarán los perfiles transversales TP140 definidos en cada perfil longitudinal. Finalmente, se mostrará cómo varían algunos de los resultados mostrados en la primera parte al modelar los mismos casos sin activar el TMA.

Se calcula en primer lugar el volumen de material detrítico y la concentración volumétrica de sedimentos en todo el dominio en función del tiempo. El valor de estas variables cambia durante cada simulación por dos razones. La primera es el flujo ingresado en la parte alta (ver Figura 6.2), el cual tiene caudal y concentración variable. La segunda y principal razón es la incorporación de material desde el fondo del cauce, la cual debiese estar controlada por los parámetros de erosión y fricción escogidos. Los resultados obtenidos se muestran en las figuras 6.5 y 6.6, donde solo se grafica hasta $t = 400$ s

debido a que para tiempos mayores no se observa cambio alguno. En las figuras se optó por separar las simulaciones de modo tal que en cada cuadro aparezcan solo aquellas con iguales parámetros de fricción (F1, F2 o F3).

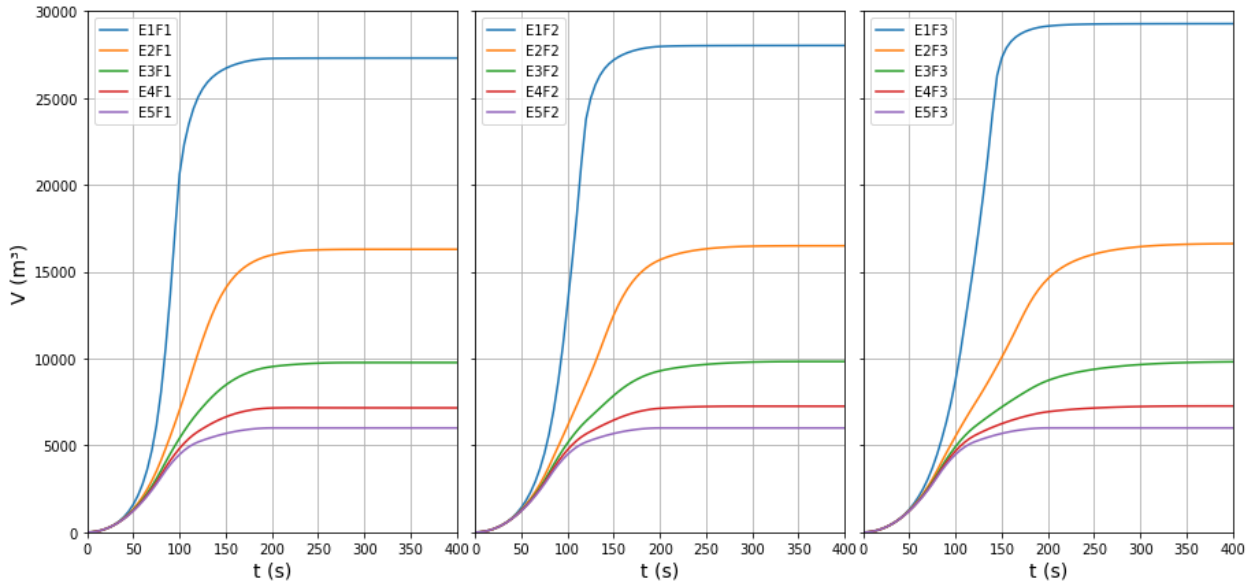


Figura 6.5: Volumen del material detrítico en todo el dominio en función del tiempo.

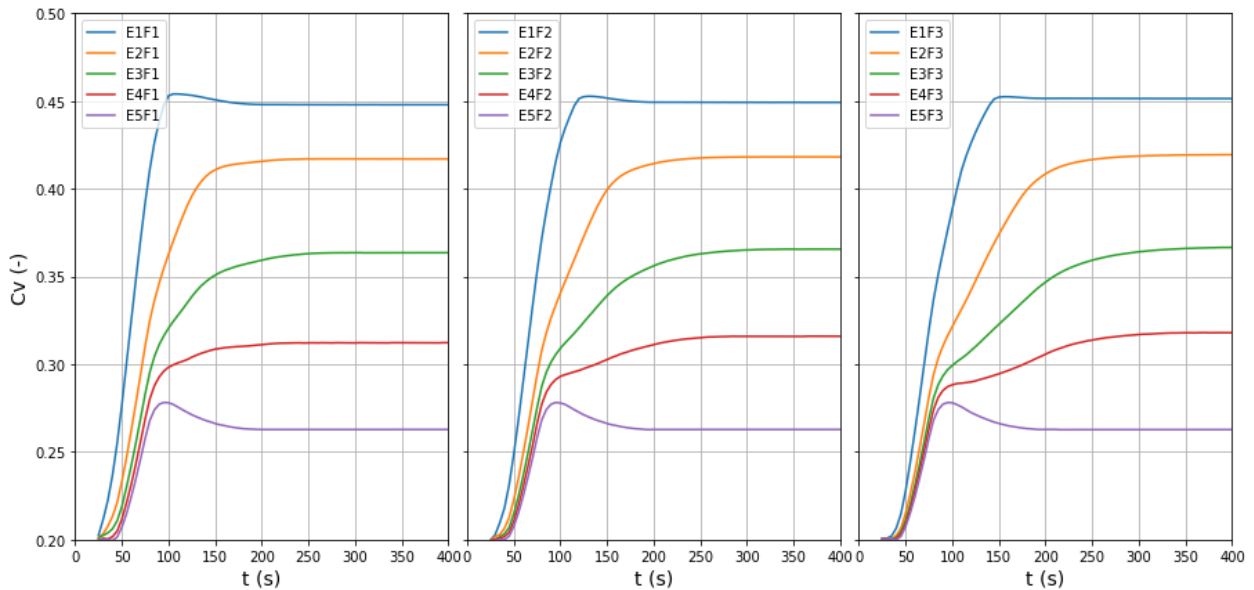


Figura 6.6: Concentración volumétrica de sedimentos promedio en función del tiempo.

En la Tabla 6.6 se presentan tabulados los volúmenes finales asociados a las curvas mostradas en la Figura 6.5.

Se observa que el volumen detrítico total, y por tanto el material incorporado, está fuertemente controlado por el valor de E_x usado, pasando a segundo plano los valores de los parámetros del modelo de fricción. El hecho de que todas las curvas en la Figura 6.5 tiendan a un valor constante se debe a que el hidrograma está formado por un solo

pulso de corta duración, siendo incorporado el material principalmente por la parte delantera del flujo.

Tabla 6.6: Volumen detrítico final calculado para cada simulación.

		F1	F2	F3
	$E_x (m^{-1})$	Volumen detrítico (m^3)		
E5	0	6.000	6.000	6.000
E4	0,0005	7.168	7.252	7.265
E3	0,001	9.768	9.827	9.838
E2	0,002	16.287	16.490	16.624
E1	0,005	27.296	28.019	29.276

Para la mayoría de los valores usados, la fricción no genera cambios notables en el volumen detrítico final, aunque lo cierto es que los valores F3 generan más erosión que F2 y estos que F1 (ver Tabla 6.6). Puede parecer poco intuitivo que a mayor fricción aumente la erosión, aunque esto se puede asociar a la existencia del valor τ_c . Al ser frenado, el frente del flujo tiene más tiempo para incorporar material desde el lecho, además de que aumenta el área mojada, por lo que es más grande la zona que aporta material. Esto se puede apreciar para los casos E1 en la Figura 6.13, donde el ancho de la zona que aporta material es mayor en F3. En las curvas mostradas en la Figura 6.5 se observa que la fricción controla además cuanto tiempo le toma a cada caso alcanzar su volumen final. Esto se debe a que a mayor fricción el flujo es más lento y a la parte delantera le toma más tiempo llegar a la zona de erosión y luego atravesarla.

Es evidente que la concentración máxima está limitada por el valor de ρ_b utilizado (ver Tabla 6.4 y ecuación (3.59)). La concentración final no varía significativamente de un caso a otro en función de los parámetros de fricción empleados, aunque si cambia el tiempo que le toma alcanzar dicho valor. En la Figura 6.6 se observa que los casos E5 alcanzan un valor C_v máximo antes de los 100 s y que luego este disminuye. Esto se debe a la forma del hidrograma, el cual tiene un valor máximo de C_v en $t = 75$ s, seguido luego por flujo de menor densidad. Un comportamiento parecido se observa para los casos E1, donde se tiene una concentración de sedimentos máxima mayor a la final. En estos casos, esto es un efecto de la rápida incorporación de sedimento al flujo, el cual logra alcanzar una alta concentración de sedimentos. Posteriormente, debido a la entrada al dominio de flujo menos denso proveniente desde la condición de borde, el promedio espacial realizado indica que la densidad promedio de la mezcla disminuye.

Es posible además calcular la posición del centro de gravedad del material detrítico en función del tiempo, el cual varía producto su desplazamiento desde $y = 1000$ m hasta la zona de detención. Los resultados se pueden apreciar en la Figura 6.7, donde nuevamente se optó por separar las simulaciones de modo tal que en cada cuadro aparezcan solo aquellas con iguales parámetros de fricción (F1, F2 o F3). Se omite presentar los resultados para la coordenada z , esto debido a que variaciones verticales son difíciles de apreciar producto de la baja pendiente en la zona. No obstante, ambas coordenadas pueden ser ligadas a partir de la ecuación (6.1).

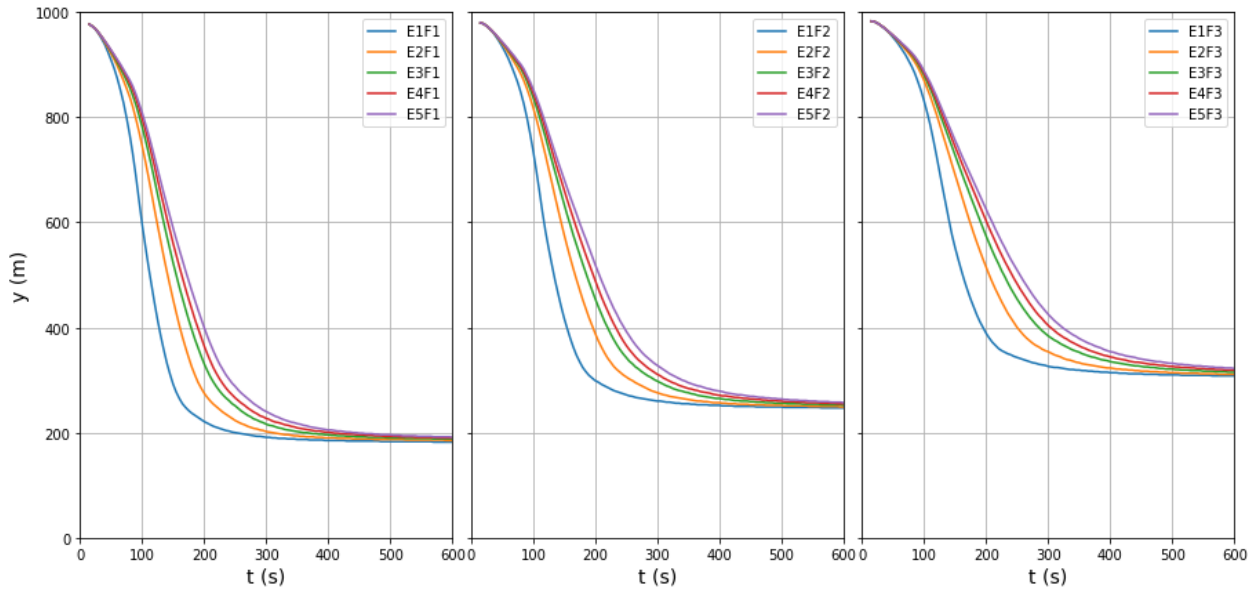


Figura 6.7: Posición del centro de gravedad del volumen detrítico en la dirección del flujo en función del tiempo.

Es interesante notar que el proceso más importante es la fricción, aunque en cada cuadro los resultados se ordenan a partir de los valores de E_x y τ_c usados. Como era de esperar, mientras menor es la fricción mayor es la distancia que alcanza el flujo, lo que está fuertemente controlado por el valor de μ . Se debe notar que estos resultados son válidos para la geometría y para los modelos de fricción y erosión aquí usados, pues el modelo de Voellmy tiene como limitante el que sus parámetros no varían en función de la concentración de sólidos en la mezcla.

Notar además que, si bien las curvas mostradas en la Figura 6.7 no varían significativamente en función de los valores de E_x y τ_c usados, estas coordenadas corresponden a la posición del centro de gravedad. Luego, a mayor volumen, el radio del depósito se incrementa, por lo que la distancia que alcanza el flujo es mayor a la mostrada. No se puede descartar que, además del efecto de la pendiente, el ensanchamiento del cauce juegue un rol fundamental en la detención del flujo. El efecto de esto puede ser fácilmente estudiado al mantener un ancho constante, lo cual se puede hacer fijando $A_1 = 0$ en la ecuación (6.2). Tal como se mencionó previamente, no se muestra la posición vertical del centro de gravedad pues esta está fuertemente ligada a su coordenada y , especialmente en la zona de detención. La coordenada x es mucho menos interesante, pues por la geometría de la superficie, se tiene que el centro de gravedad se ubica en $x = 100 \text{ m}$ prácticamente durante la totalidad del flujo, esto a excepción de la parte en que este se divide al evadir el elipsoide, donde $x < 100 \text{ m}$.

Se calcula el caudal del flujo detrítico en el perfil transversal TP240 (ver Figura 6.4) en función del tiempo. Se escoge este perfil porque se ubica aguas abajo de la zona de erosión, de modo que este no debiese variar hacia aguas abajo. Debido a que se tienen grandes cambios en el caudal máximo dependiendo de los parámetros de erosión usados, en cada cuadro de la Figura 6.8 se comparan los caudales solo para pares consecutivos de los valores escogidos de E_x y τ_c .

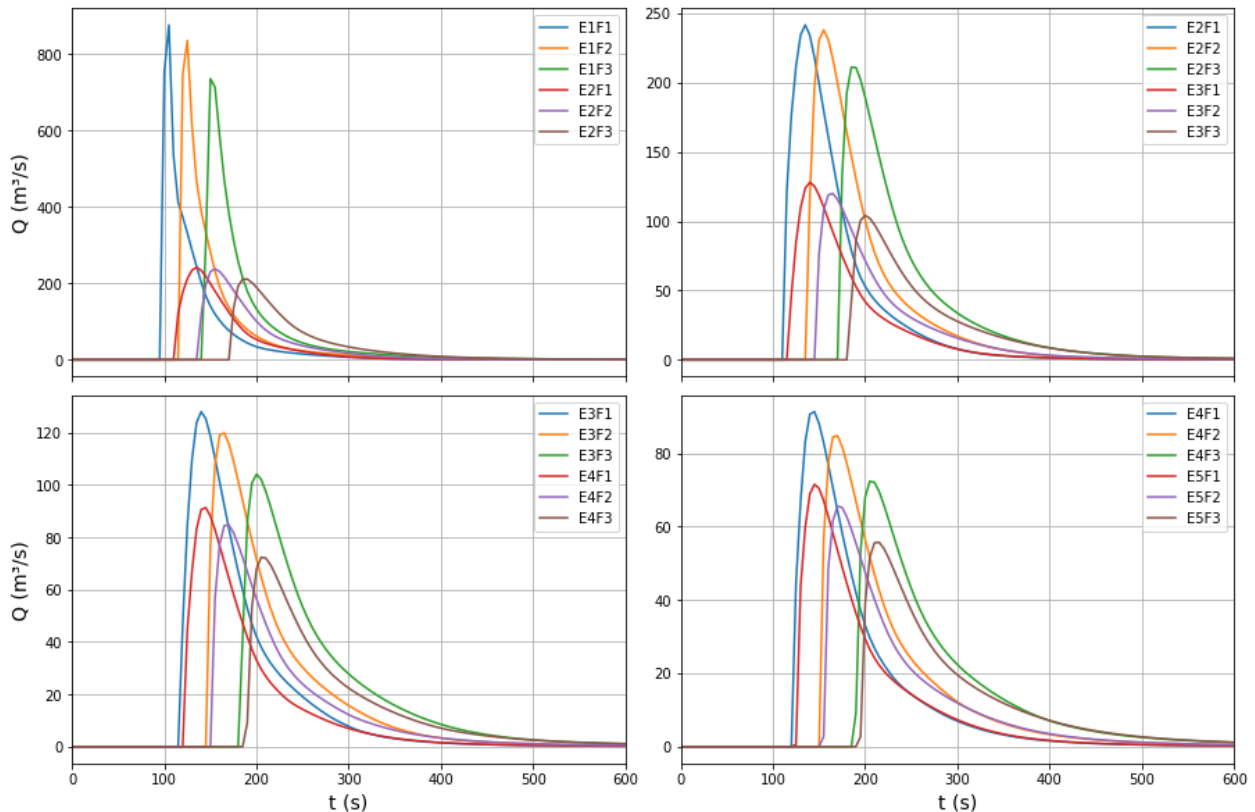


Figura 6.8: Caudal detrítico calculado en el perfil transversal TP240 en función del tiempo.

Se observan fuertes variaciones de caudal en función de los parámetros de erosión y fricción escogidos, pudiendo asociar el caudal máximo a la erosión y el tiempo en que este ocurre a la fricción. En todos los casos se observa que a menor fricción mayor es el valor *peak* del caudal, lo cual es opuesto a lo observado para el volumen detrítico total (ver Tabla 6.6). Este comportamiento se debe a que a menor fricción el cuerpo del flujo se mueve más rápido y de forma más compacta, por lo que el caudal máximo es mayor. Esta conclusión es general y se puede apreciar inclusive para los casos sin erosión.

Para cada instante de tiempo se calcula la tasa de erosión máxima en todo el dominio. Los resultados se muestran en la Figura 6.9, donde no se presentan las simulaciones E5 pues estas no consideran erosión. Debido a los diferentes órdenes de magnitud, se opta por separar los resultados en función de los valores usados para representar la erosión.

En la Figura 6.10 se muestra como varían el volumen detrítico total y la tasa de incorporación máxima en función del valor de E_x utilizado. En el caso de la tasa de incorporación, esta corresponde al máximo valor calculado en cualquier parte del dominio durante todo el tiempo de la simulación. Se muestran los resultados solo para los casos F1, pues la diferencia entre estos y los casos F2 y F3 es leve. Solo con el fin de ser usados en esta figura, se simularon dos casos nuevos, con E_x igual a $0,003$ y $0,004 \text{ m}^{-1}$.

Se observa que la tasa de erosión máxima aumenta de forma exponencial con el valor de E_x usado, lo cual tiene sentido considerando que a mayor erosión aumenta la altura

del flujo y por tanto el valor calculado de u_{bE} . La razón de que este incremento exponencial de u_{bE} no genere un aumento similar del volumen detrítico se debe a que el material erosionado está limitado por h_e y por la duración del flujo. Si el hidrograma estuviese formado por un pulso de caudal constante y h_e tuviese un valor sumamente alto entonces los casos E1 y E2 mostrados en la Figura 6.5 se verían modificados, mas no los asociados a E3 Y E4, obteniéndose una variación no lineal de V respecto a E_x .

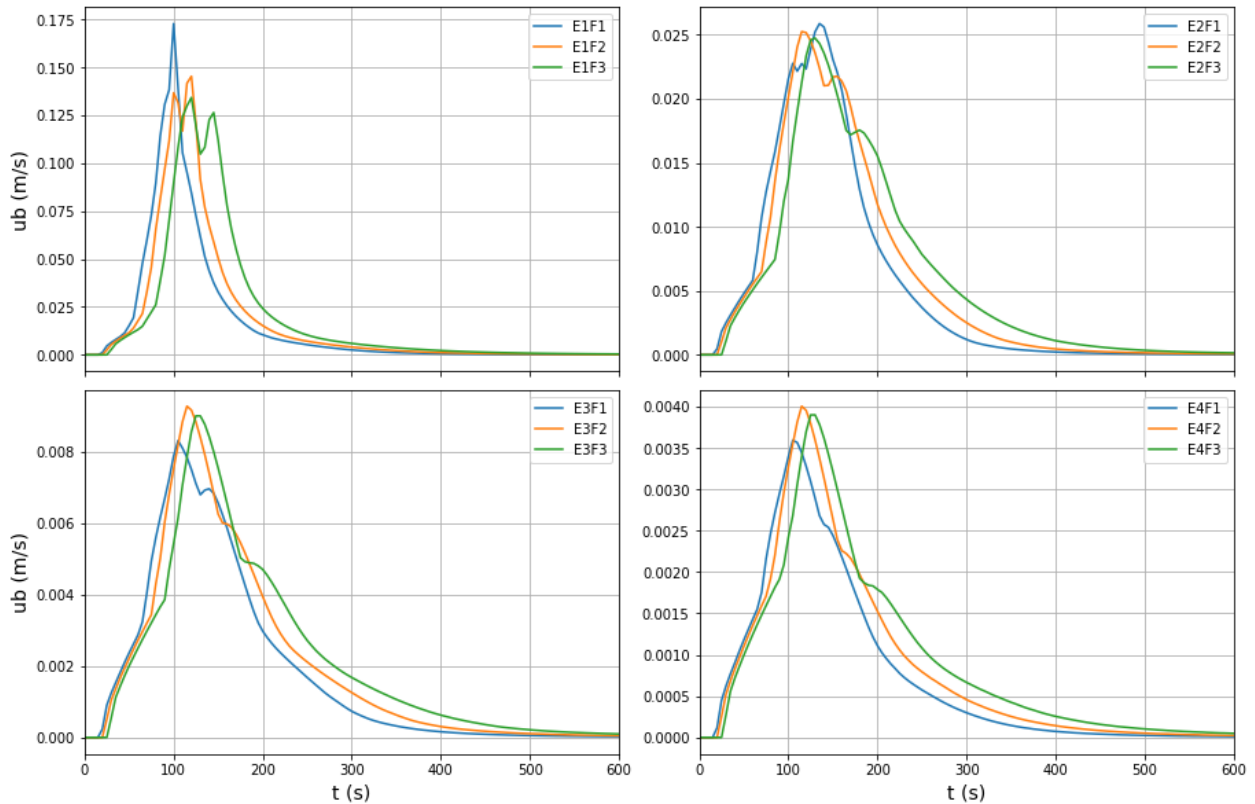


Figura 6.9: Tasa máxima de erosión en todo el dominio en función del tiempo.

Es claro que la variación de los parámetros de fricción tiene un papel menor en la tasa máxima de erosión calculada. No obstante, en la parte descendente de las curvas, a mayor fricción se tiene mayor tasa de erosión. Esto tendría estrecha relación con el hecho de que a mayor fricción se alcanza un mayor volumen detrítico total (ver Tabla 6.6).

En la Figura 6.8 se observa un crecimiento exponencial en los valores de Q respecto a E_x , lo cual está relacionado a las tasas de erosión máxima mostradas en la Figura 6.9. Se debe notar que el modelo exponencial no limita el valor de la tasa de erosión, por lo que puede alcanzar valores muy altos. Si bien se mostraron los resultados asociados a los casos E1, lo cierto es que la tasa de erosión calculada es mayor a la medida en terreno y en experimentos, por lo que los caudales y volúmenes obtenidos pueden ser poco realistas. A pesar de esto, se decidió mostrar de todos modos dichos resultados por dos motivos. El primero es evidenciar el efecto que tiene sobre los resultados el escoger los parámetros de erosión y/o fricción inadecuados, además de no analizar de forma crítica los resultados obtenidos a partir del modelo. La segunda razón es mostrar que el TMA es

capaz de modificar el terreno inclusive en casos en que la tasa de erosión está sobredimensionada, requiriendo siempre solo una iteración para converger.

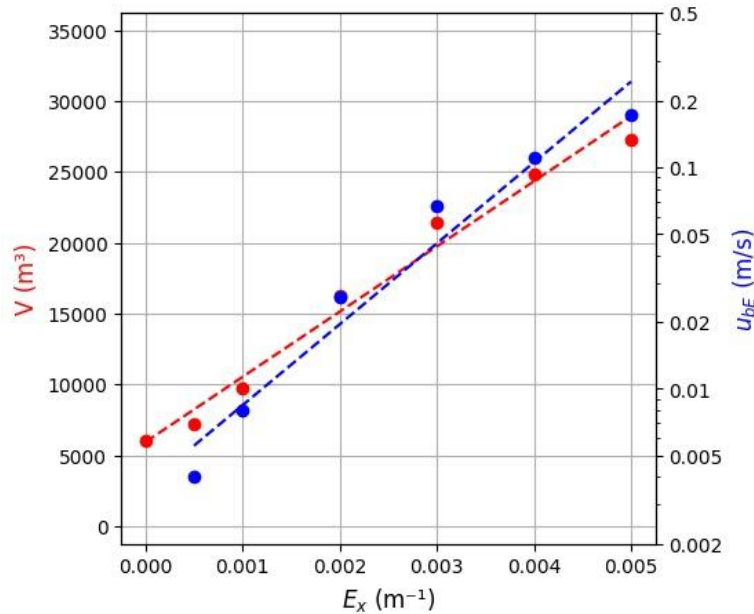


Figura 6.10: Variación del volumen detrítico y tasa máxima de incorporación de material en función del valor de E_x . En todas las simulaciones se usaron los parámetros de fricción F1.

En las figuras 6.11 y 6.12 se muestran los valores máximos de velocidad y altura del flujo en el perfil transversal TP240 en función del tiempo (se interpolan h y U_s para una serie de puntos del perfil y luego se escoge el valor máximo). Para mejorar la visualización de los resultados, estos se presentan agrupados en función de los parámetros de fricción usados. Como era de esperarse, a mayor erosión se obtienen mayores valores de h y U_s , mientras que a mayor fricción se reduce la velocidad y aumenta la altura del flujo. Se puede observar en todos los cuadros que para $t = 400$ s las curvas de h y U_s se juntan, lo que muestra que la diferencia previa se debe a la incorporación de material desde el lecho, lo cual ocurre principalmente en los primeros 200 s del flujo (ver Figura 6.9). Si bien h aumenta significativamente cuando se incrementa el valor de E_x , esto no necesariamente se traduce en un cambio en la posición de la superficie libre, pues h es medido desde la superficie del lecho y este desciende por efecto del TMA.

Es posible graficar la posición del fondo del cauce en el perfil transversal TP190 en $t = 600$ s. Esto se hace en la Figura 6.13 para todas las simulaciones a excepción de las E5, las cuales no consideran erosión. En la figura, junto a la posición del final del lecho (*final bottom*), se grafica la posición inicial de este (*initial bottom*) y el límite de la capa de sedimento erosionable (*erodible layer*). El largo del perfil transversal usado para graficar es menor al mostrado inicialmente en la Figura 6.4, lo cual se hizo para mejorar la visualización de los cambios generados en el lecho.

A excepción de los casos E1, no existe gran diferencia entre las curvas calculadas para distintos parámetros de fricción, lo cual tiene sentido si se revisan los volúmenes detríticos finales obtenidos.

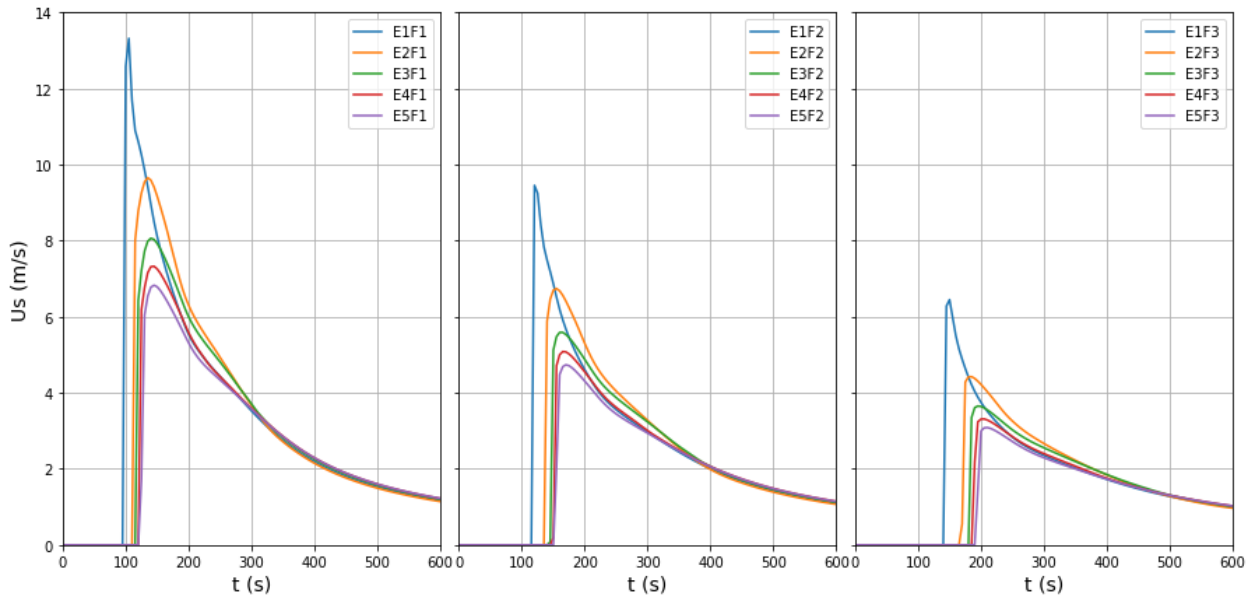


Figura 6.11: Velocidad máxima calculada en el perfil transversal TP240 en función del tiempo.

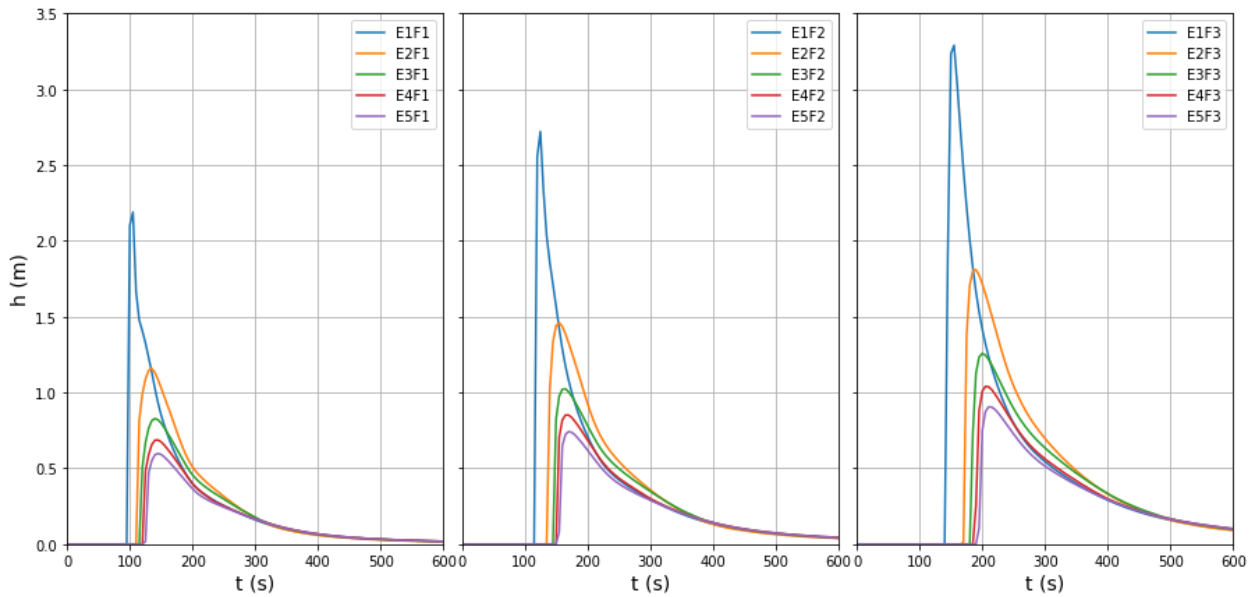


Figura 6.12: Altura máxima calculada en el perfil transversal TP240 en función del tiempo.

Respecto a los parámetros de erosión, es claro que la distribución inicial de valores de h_e no juega un papel importante en los casos E3 y E4. Por el contrario, en los casos E1 y E2 la tasa de erosión es suficiente para que h_e limite la incorporación de material al flujo. En la figura, se observa cierta asimetría en la nueva posición calculada para el lecho, especialmente en los casos E1 y E2. Esto se debe a que el perfil TP190 se encuentra inmediatamente aguas abajo de la confluencia de ambas ramas del flujo, el cual al llegar a dicha sección se encuentra cargado hacia la derecha (visto en la dirección del flujo). Esta asimetría es provocada por la diferencia de cota de cada una de las ramas que bordea al elipsoide, lo que a su vez causa una distribución dispar del caudal detrítico entre estas.

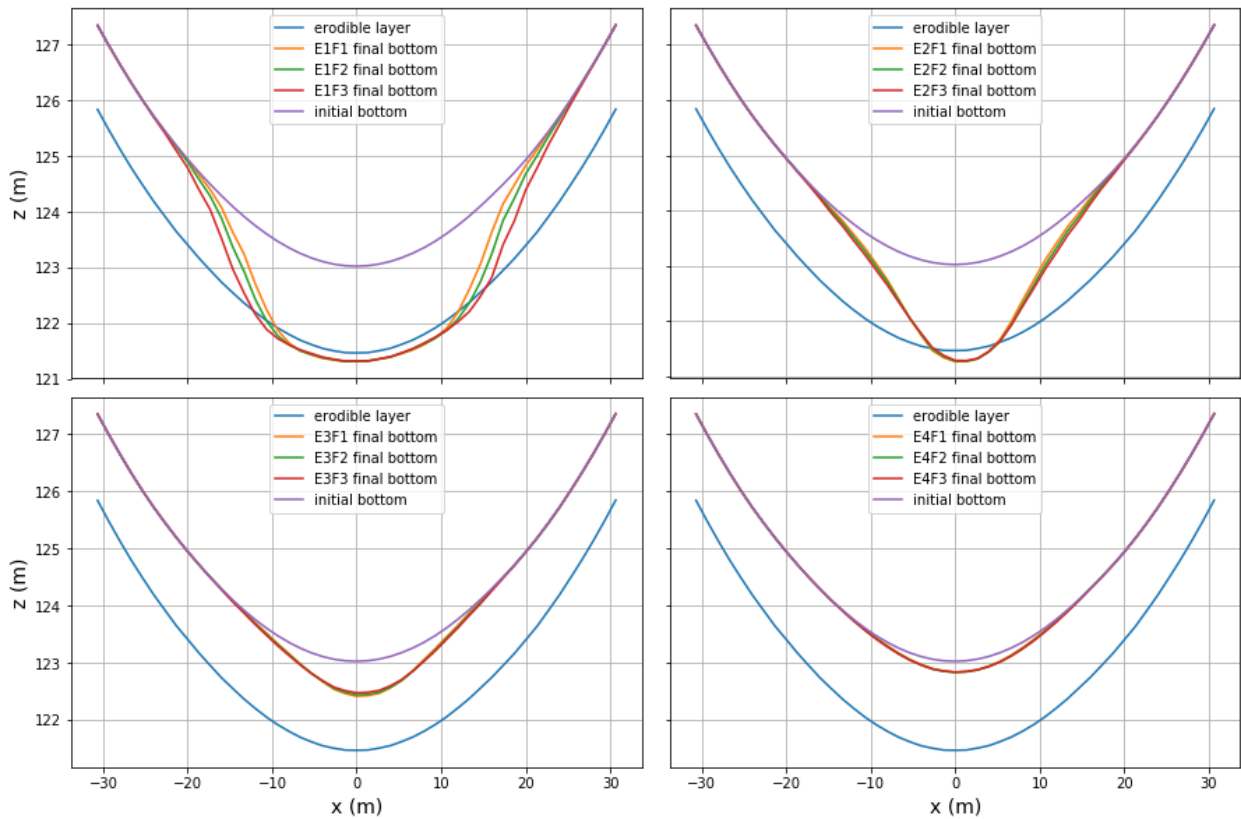


Figura 6.13: Posición de la cota del fondo en el perfil transversal TP190 en $t = 600 s$.

Tal como se dijo, en los casos E1 y E2 de la Figura 6.13 se observa que h_e (*erodible layer*) actúa como limitante para la erosión, aunque el nuevo fondo no coincide exactamente con esta curva. La razón de esta diferencia se debe al uso del *Smoother*, el cual permite que desde celdas cercanas se traspase volumen a celdas donde ya se erosionó lo máximo posible. El TMA no incluye en su formulación el limitar la altura de erosión en función de h_e , pues dicha limitante se aplica en el cálculo de u_{bE} . Si bien se probó acotar la profundidad de erosión en el interior del TMA, esto no fue posible, obteniéndose resultados físicamente incorrectos. En una futura versión del *solver* se buscará corregir este error. Aun así, se observa en todos los casos mostrados en la Figura 6.13 que el fondo del cauce es modificado de modo tal que este siga una curva suave. Esto se debe a la aplicación del *Smoother*, el cual permite que el TMA funcione sin alterar de forma significativa las profundidades de erosión calculadas. De este modo, se observan claramente valores máximos de erosión en el centro del cauce, donde la altura y el esfuerzo de corte basal son máximos.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos en los dos perfiles transversales TP140 mostrados en la Figura 6.4, definiéndose uno en cada rama del flujo.

En las figuras 6.14 y 6.15 se muestran los caudales calculados en ambos perfiles hasta $t = 300 s$. Se omite mostrar los resultados para tiempos mayores pues no aportan nada a la interpretación de los resultados. Al igual que en la Figura 6.8, se opta por presentar los resultados comparando pares consecutivos de los valores escogidos de E_x y τ_c .

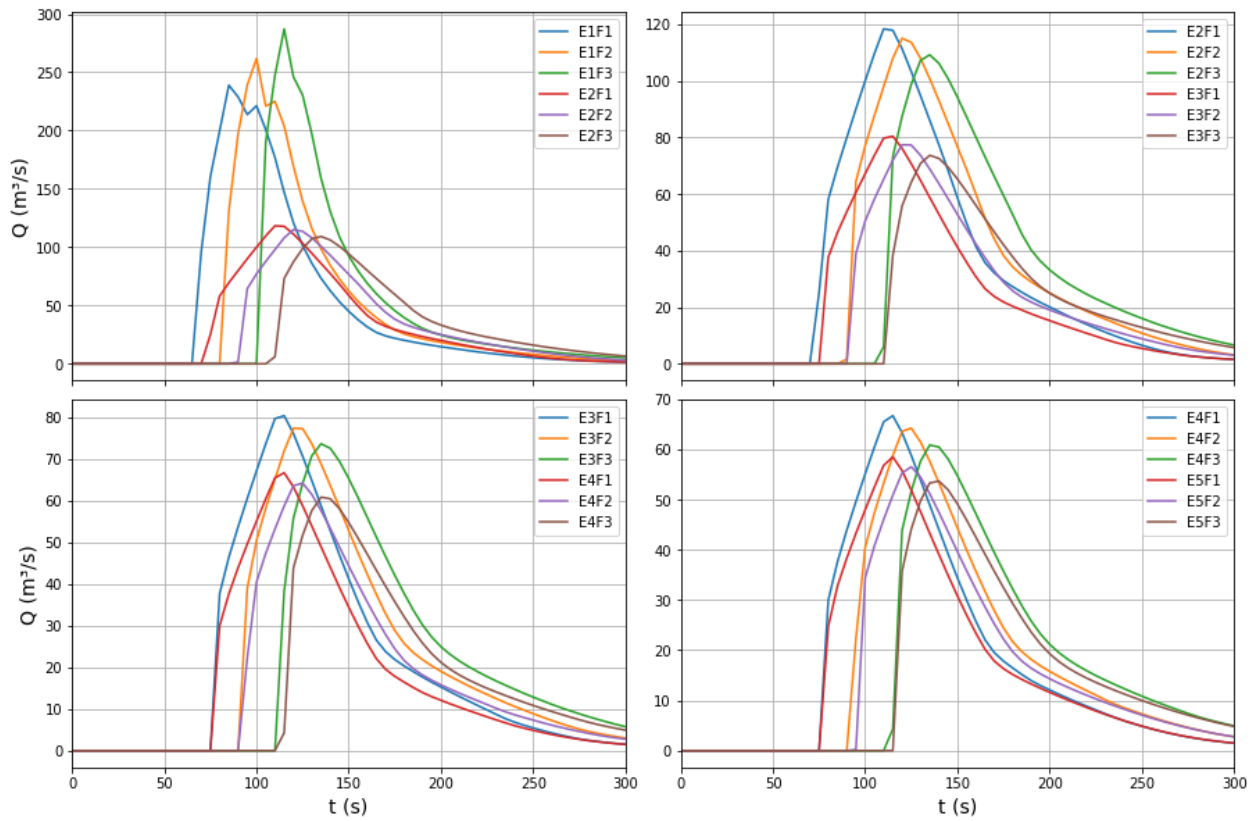


Figura 6.14: Caudal detrítico calculado en el perfil transversal TP140 del perfil longitudinal LP1.

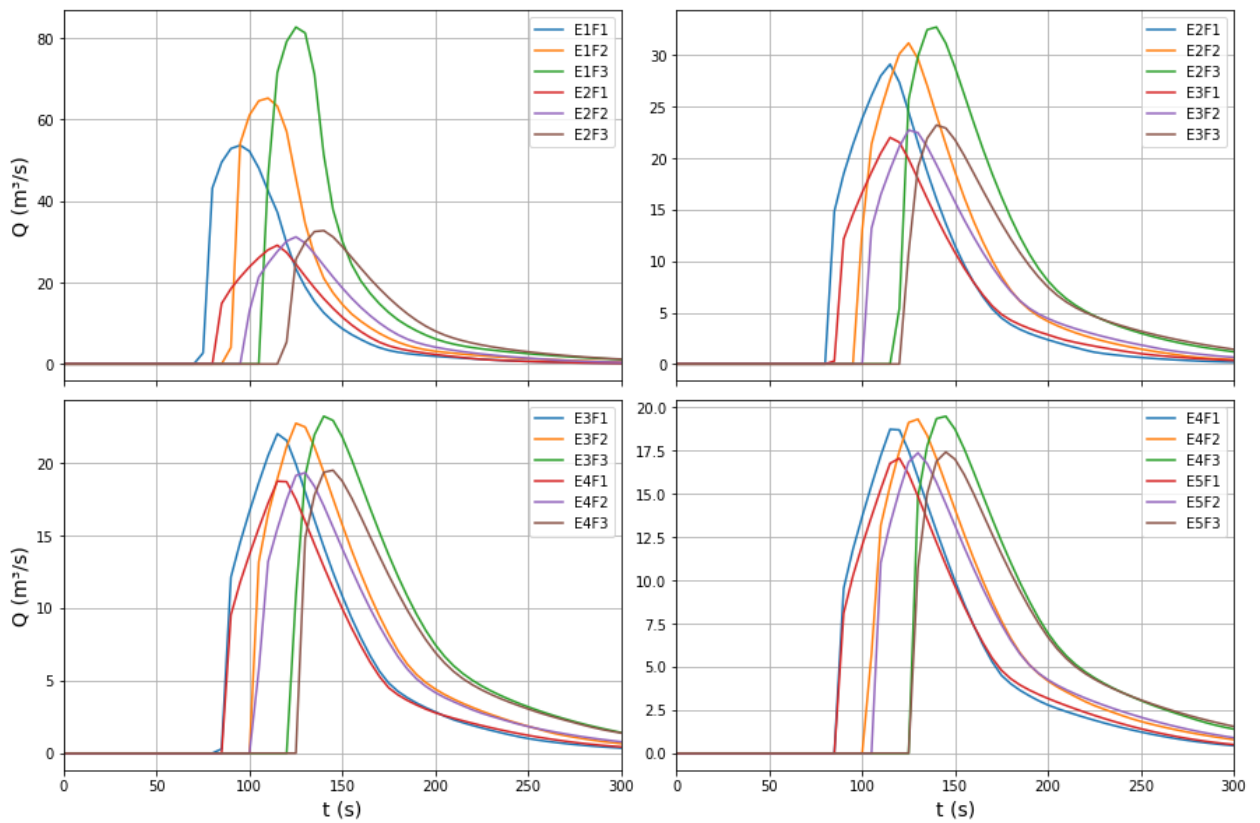


Figura 6.15: Caudal detrítico calculado en el perfil transversal TP140 del perfil longitudinal LP2.

Del mismo modo que en el perfil transversal TP240, es posible graficar la velocidad y altura máxima del flujo en ambos perfiles TP140. Los gráficos obtenidos se muestran en las siguientes figuras, donde los casos son ordenados en función de los parámetros de fricción escogidos.

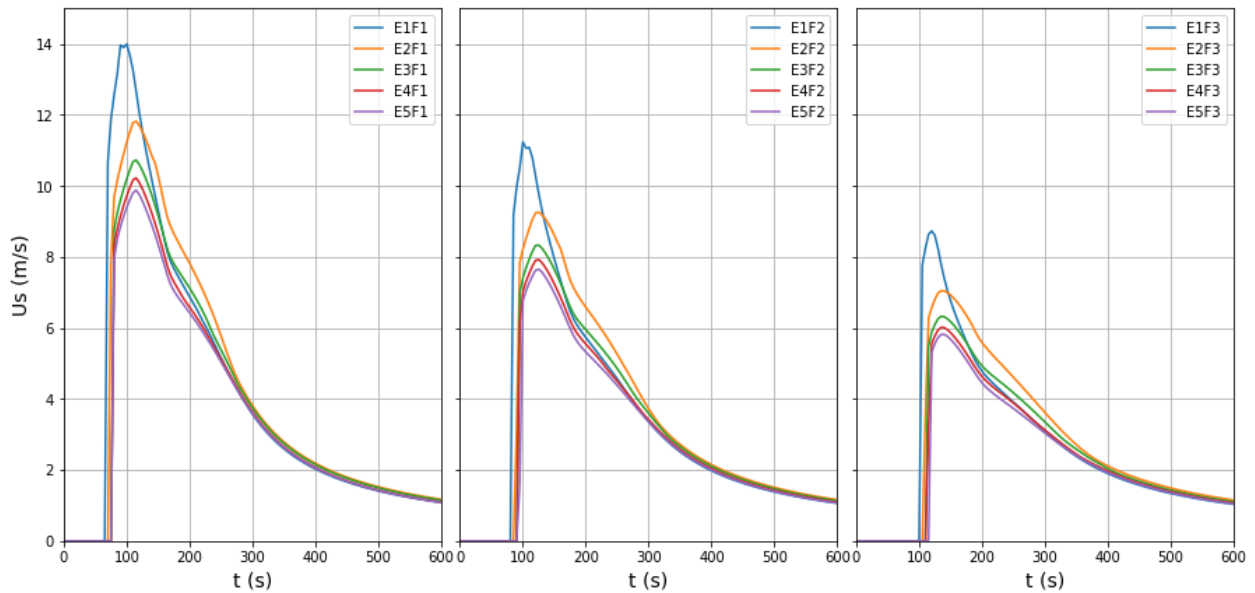


Figura 6.16: Velocidad máxima calculada en el perfil transversal TP140 del perfil longitudinal LP1 para cada instante de tiempo.

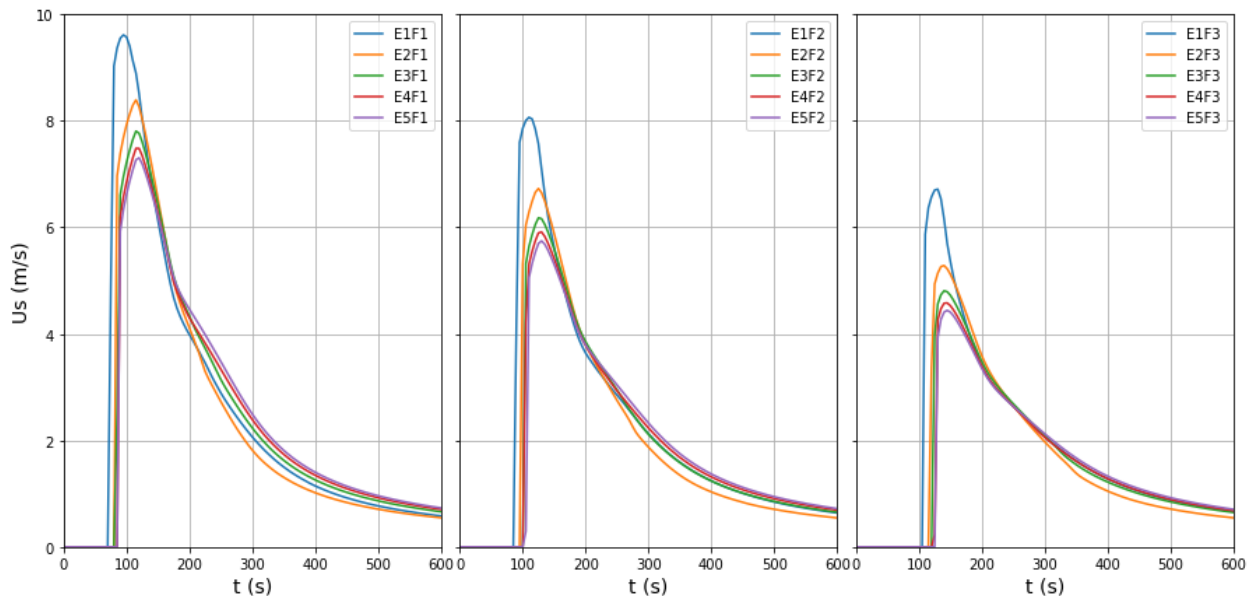


Figura 6.17: Velocidad máxima calculada en el perfil transversal TP140 del perfil longitudinal LP2 para cada instante de tiempo.

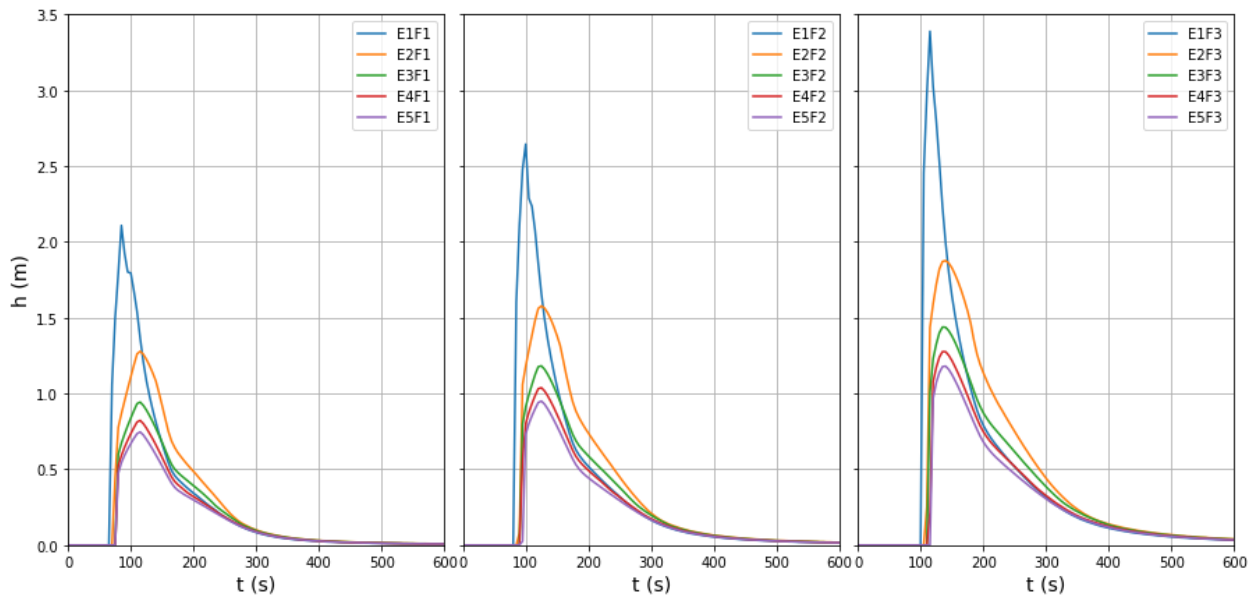


Figura 6.18: Altura máxima calculada en el perfil transversal TP140 del perfil longitudinal LP1 para cada instante de tiempo.

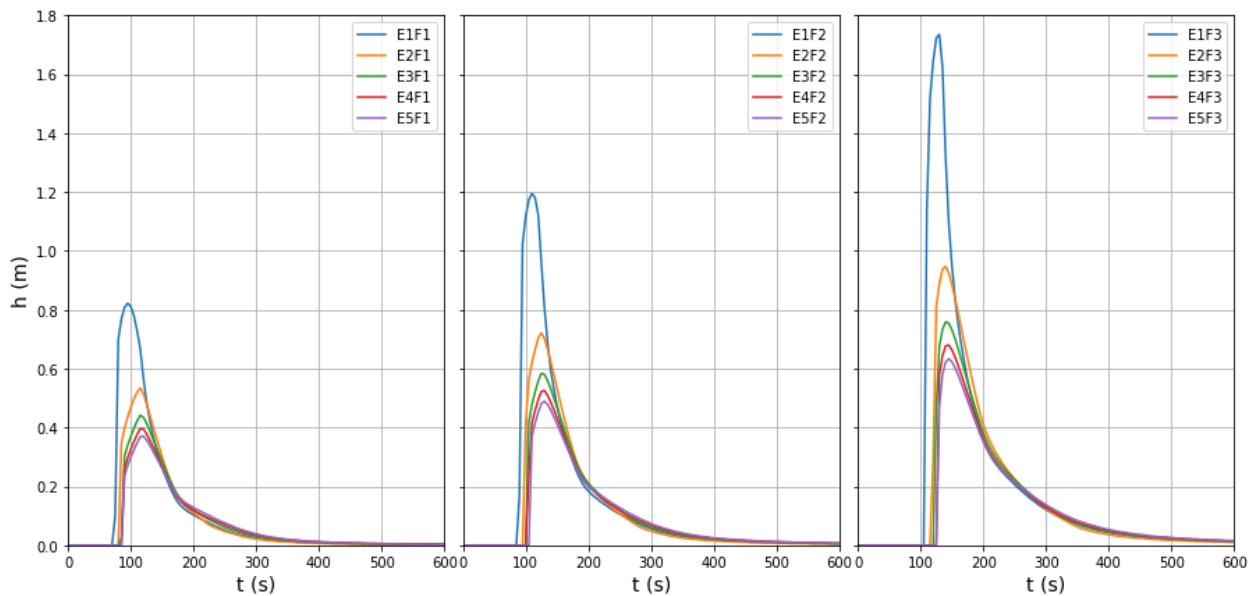


Figura 6.19: Altura máxima calculada en el perfil transversal TP140 del perfil longitudinal LP2 para cada instante de tiempo.

Resulta de interés además comparar cómo varía la superficie del lecho en cada rama del flujo producto de la erosión del material que lo forma. Los resultados obtenidos se presentan en las figuras 6.20 y 6.21, donde evidentemente se omiten los casos E5 por no incluirse en estos el proceso de erosión. En las figuras se muestra la posición final del lecho (*final bottom*), su posición inicial (*initial bottom*) y el límite de la capa de sedimento erosionable (*erodible layer*).

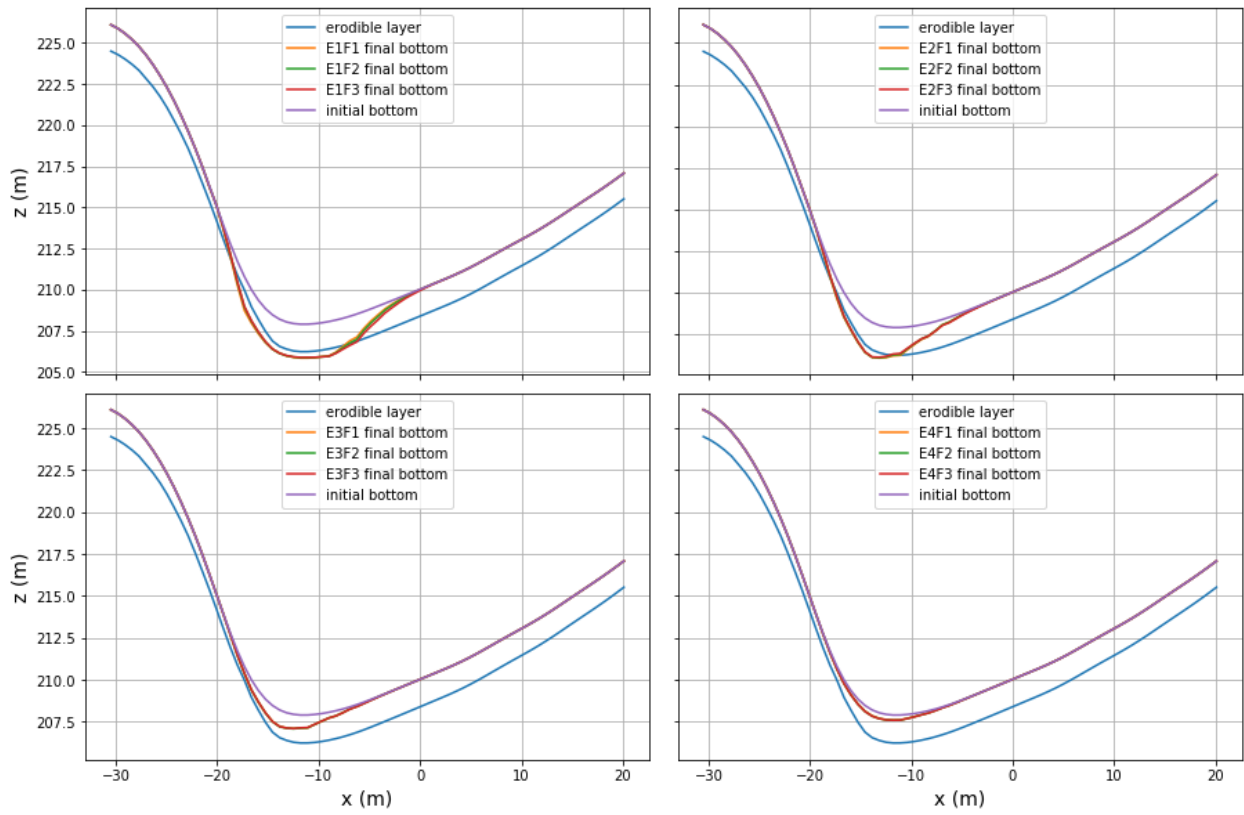


Figura 6.20: Posición final de la cota de fondo en el perfil transversal TP140 perteneciente a LP1.

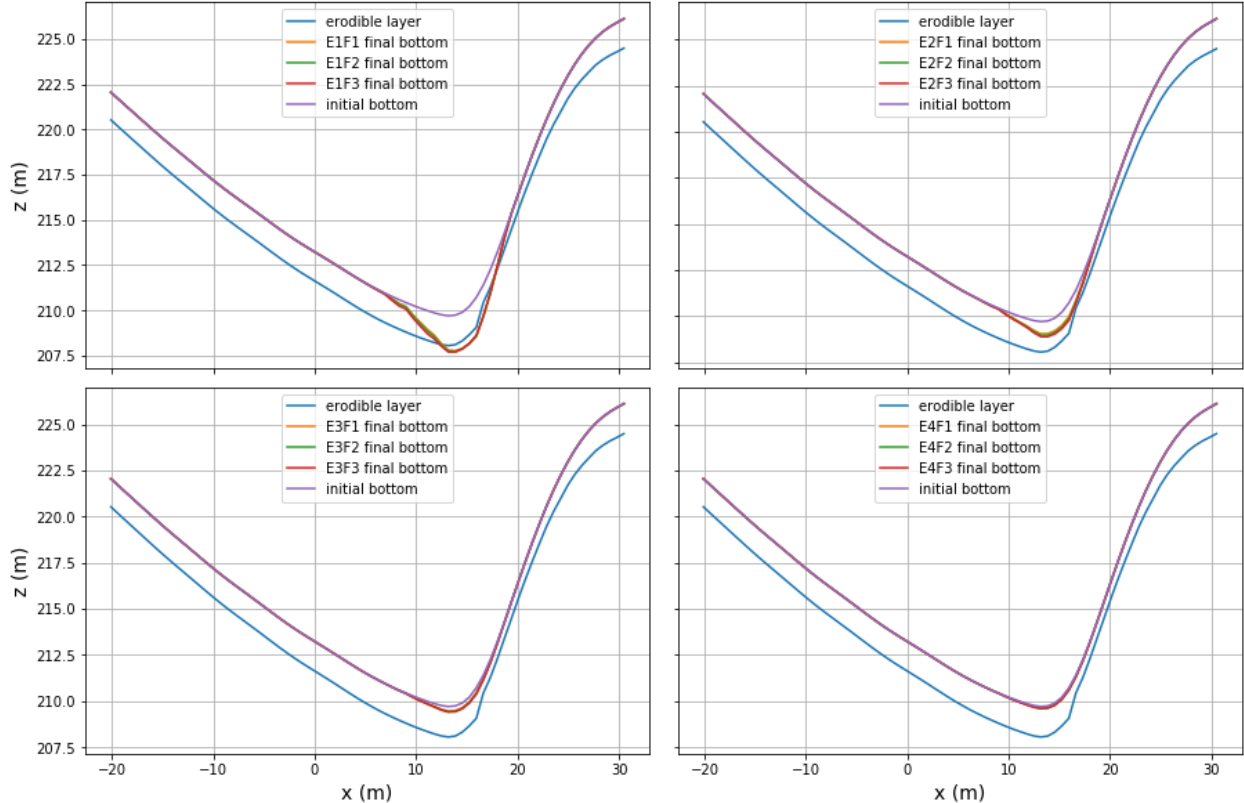


Figura 6.21: Posición final de la cota de fondo en el perfil transversal TP140 perteneciente a LP2.

Se observa claramente que todos los valores calculados: altura, velocidad, caudal y profundidad de erosión, son mayores en la rama derecha. Si bien ambas ramas comienzan y terminan en el mismo punto, el camino seguido por LP1 es más corto que el de LP2, esto debido a la curvatura del elipsoide y su posición asimétrica. Así, LP1 tiene mayor pendiente, lo que explica la diferencia de comportamiento entre ambas ramas.

Todas las variables, a excepción del caudal, tienen en TP140 el mismo comportamiento que los previamente analizados para los perfiles transversales TP190 y TP240. En las figuras 6.14 y 6.15 se observa que, en los casos E1, a mayor fricción se tiene mayor caudal. Este comportamiento se debe probablemente a que el flujo ha tenido menor tiempo para alargarse al llegar al perfil TP140. Es interesante notar que desplazar el centro del elipsoide 5 m en la horizontal (se usó $\xi_x = 1,05$ en la ecuación (6.3)) puede generar que el caudal se divida en una proporción aproximada de 3:1 entre ambas ramas. A esto se debe sumar que la altura del flujo es prácticamente el doble en una rama respecto a la otra y que la erosión del lecho disminuye considerablemente en el lado de menor pendiente.

Para finalizar, se mostrarán los efectos que tiene sobre los resultados el activar o no el algoritmo de modificación del terreno (TMA), para esto se muestran los resultados obtenidos de las simulaciones E1 y E3 en sus dos variantes. Notar que, si bien utilizar el TMA no tiene efecto sobre la tasa de incorporación calculada, sí afecta las condiciones del flujo y el tiempo de cómputo requerido por el *solver*. En las figuras siguientes, un signo + indica las curvas asociadas a los casos en que no está activo el TMA.

En la Figura 6.22 se muestra el volumen detrítico total calculado para cada caso, mientras que en la Figura 6.23 se presenta como varía la posición del centro de gravedad del flujo en función del tiempo.

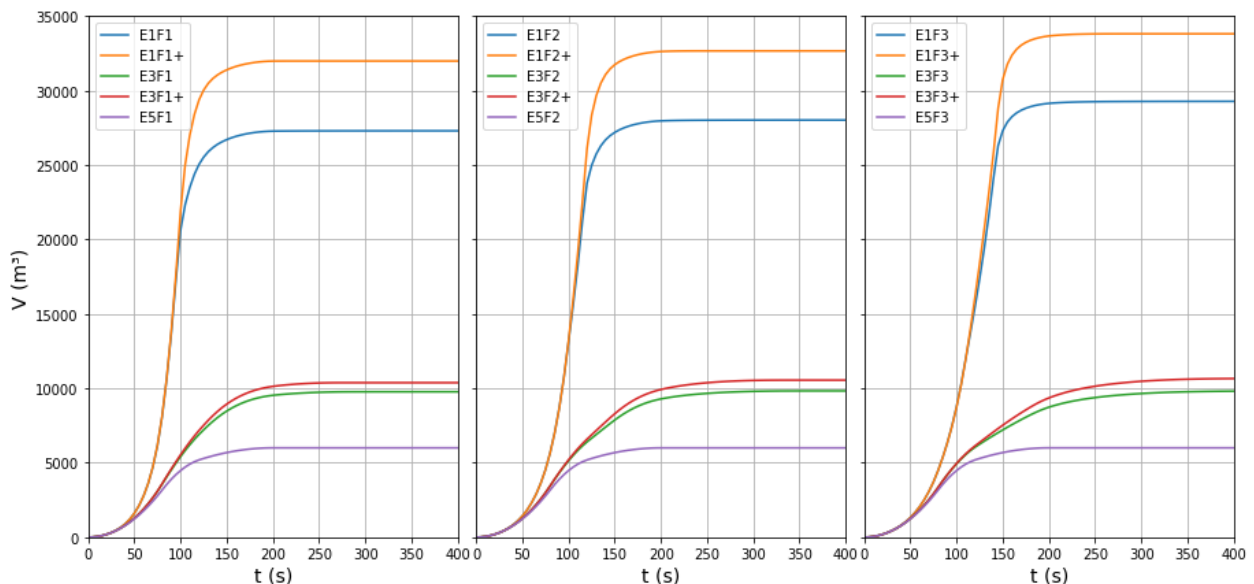


Figura 6.22: Comparación del volumen de material detrítico en todo el dominio para simulaciones que consideran y no el TMA.

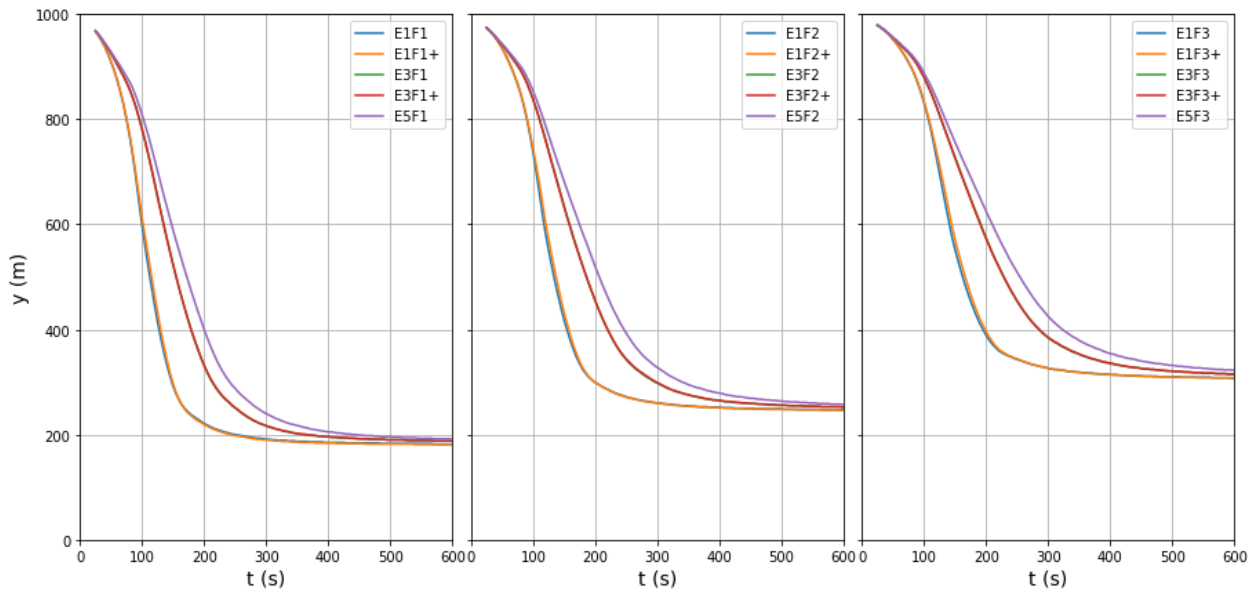


Figura 6.23: Comparación de la posición del centro de gravedad del volumen detrítico en la dirección del flujo para simulaciones que consideran y no el TMA.

Se observa que no utilizar el TMA aumenta el volumen incorporado al flujo en todos los casos simulados. Luego, en términos del volumen detrítico final, la decisión de activar o no el TMA es más relevante que los parámetros de fricción utilizados. Por otro lado, en la Figura 6.23 se aprecia que las curvas se superponen, por lo que la desactivación del TMA no afecta la posición del centro de gravedad del depósito. Esto era esperable, pues en la Figura 6.7 se mostró que el volumen total del flujo tiene un efecto reducido sobre la posición del centro de gravedad de este.

En la Figura 6.24 se muestra el caudal detrítico calculado en el perfil transversal TP240 para los casos E1, E1+, E3 y E3+. En esta se observa un aumento de caudal en los casos en que no se activa el TMA, lo cual es consistente con el incremento en el volumen total del flujo previamente analizado.

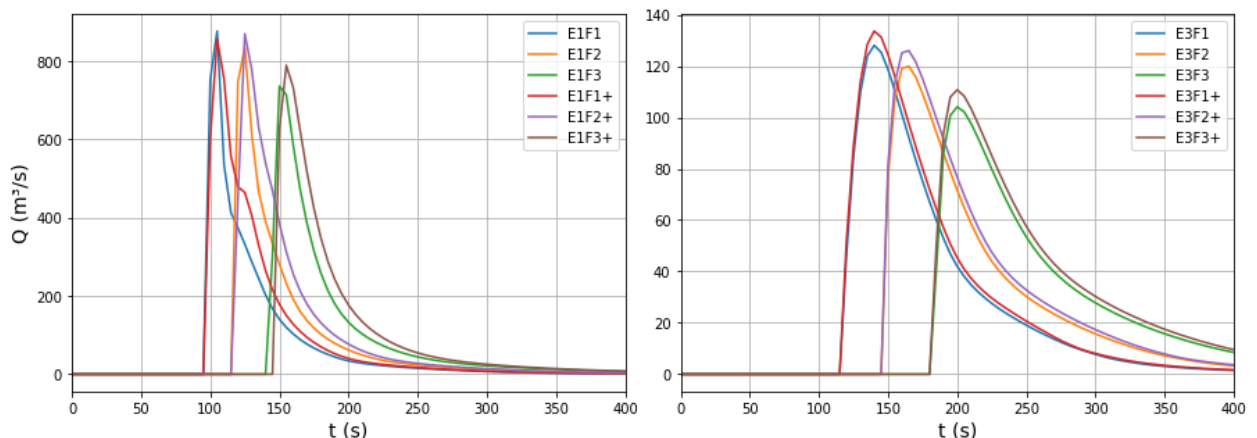


Figura 6.24: Caudal detrítico calculado en el perfil transversal TP240 para los casos E1 y E3 junto a sus variantes sin activar el TMA.

Para finalizar, en las figuras 6.25 y 6.26 se muestra la modificación del lecho en los perfiles transversales TP140 y TP190 para los casos E1F3, E1F3+, E3F3 y E3F3+. No se presentan los resultados para las otras combinaciones de E1 y E3 pues las diferencias son mínimas respecto a los casos ya mencionados. Las curvas mostradas son las mismas usadas inicialmente en la Figura 6.13, salvo por la correspondiente al caso donde no se activa el TMA. Si bien al no activar el TMA la posición del lecho no es modificada, sí se calcula una profundidad de erosión, luego, es posible graficar la nueva posición virtual del lecho (*calculated erosion*).

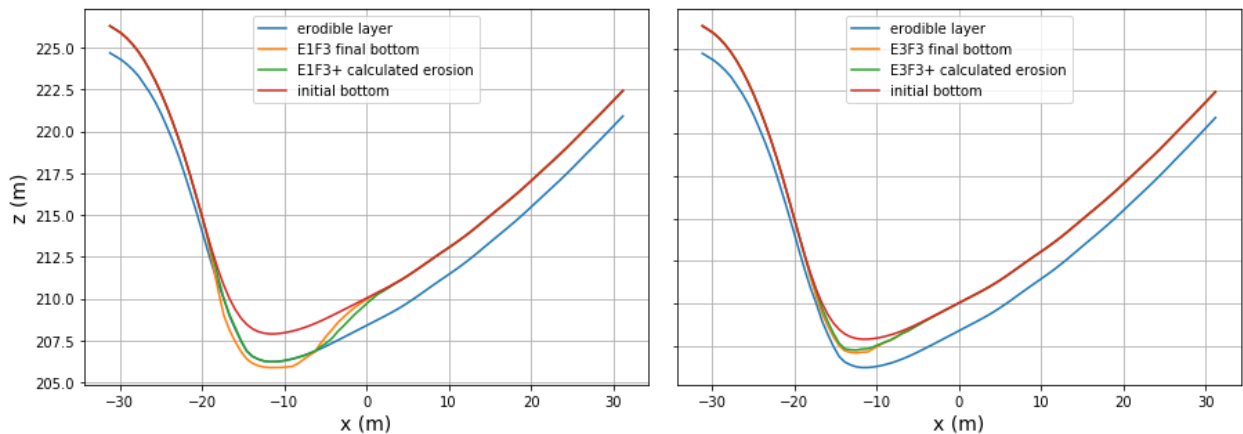


Figura 6.25: Posición de la cota de fondo en el perfil transversal TP140 perteneciente a LP1 en $t = 600$ s para las simulaciones E1F3, E1F3+, E3F3 y E3F3+.

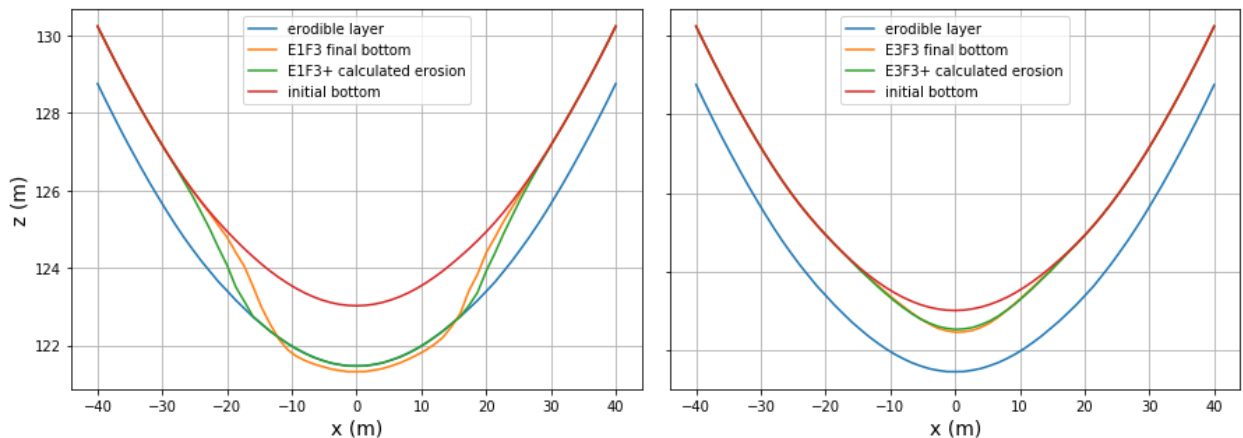


Figura 6.26: Posición de la cota de fondo en el perfil transversal TP190 en $t = 600$ s para las simulaciones E1F3, E1F3+, E3F3 y E3F3+.

El último análisis corresponde a explicar la razón por la cual activar o no el TMA genera cambios en el volumen detrítico total, para lo cual se utilizarán las curvas mostradas en las figuras 6.25 y 6.26. Se debe notar en ambos perfiles transversales que el ancho de la zona donde se tiene erosión es mayor cuando no está activo el TMA. Esto se debe a que, al no modificar el fondo, el volumen incorporado es repartido a lo ancho de la superficie libre. Así, la altura del flujo aumenta en todo el perfil transversal, a la vez que lo hace el esfuerzo de corte y la tasa de incorporación de material. Este aumento se puede apreciar

esquemáticamente en la Figura 6.27 c), donde la superficie libre se desplaza hacia arriba luego de incorporar el volumen erosionado. Debido al aumento del valor de h , la zona del lecho donde se tiene erosión también aumenta. En cambio, si se utiliza el TMA, la altura de flujo es modificada solo en el centro del cauce, que es donde se tiene erosión (ver Figura 6.27 b)). Esto no afecta la altura del flujo en las partes del perfil transversal donde no hay incorporación de material. La Figura 6.27 es una versión simplificada en que $\rho = \rho_b$. De no cumplirse esto, la superficie libre en el perfil transversal necesariamente cambiará.

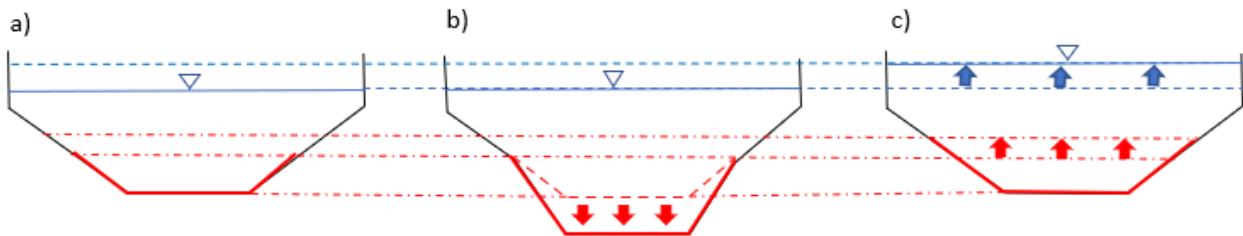


Figura 6.27: Esquema de la variación del fondo y superficie libre en un perfil transversal al activar y desactivar el TMA. (a) Configuración inicial del perfil. Se marca en rojo la zona en que $\tau_b > \tau_c$. (b) Configuración luego de usar el TMA. El fondo cambia, pero no la superficie libre. (c) Caso sin activar el TMA. No se modifica el fondo y sube la posición de la superficie libre, además de cambiar la zona en que $\tau_b > \tau_c$ (línea roja continua).

Luego, no activar el TMA aumenta el área que aporta sedimento y por tanto el volumen final incorporado. Esto lleva a concluir que todos los modelos que no modifican el lecho agregan volumen directamente a la superficie libre del flujo. Mientras que lo opuesto permite que el volumen incorporado se añada en el fondo, que es lo que realmente ocurre.

Se observa que las curvas asociadas al caso E1F3+ coinciden en el centro del cauce en ambos perfiles transversales con la curva dada por h_e , esto a diferencia de lo que ocurre con las curvas del caso E1F3. Esto se debe a que, al no estar activado el TMA, el movimiento calculado para cada uno de los vértices de una celda es el mismo, aunque estos en verdad no se mueven, y coincide con la nueva posición del centro de gravedad. Luego, la limitante asociada al valor de h_e es tanto una condición de volumen como de profundidad de erosión. Por el contrario, si se activa el TMA, h_e limita el volumen de sedimento que es capaz de aportar cada celda, pero no impone ninguna restricción sobre la posición final de los vértices de los elementos de la malla.

Finalmente, se justifica el no incluir una ecuación para la tasa de depositación, esto debido a la detección de muchos comportamientos inesperados en los resultados. Entre estos se encuentra el efecto de la activación y desactivación del TMA sobre el volumen de sedimento incorporado, además del tipo de dependencia entre los parámetros de fricción y el volumen final del flujo. Haber sumado el proceso de depositación a las simulaciones hubiese dificultado el análisis aquí realizado.

6.3. Aplicación a quebradas afluentes al río El Carmen, Huasco.

6.3.1. Quebrada La Mesilla

Se busca validar el *solver* desarrollado en esta Tesis al comparar los resultados que este entrega con los presentados por Zegers et al. (2017). En dicho trabajo, los autores utilizaron el modelo FLO-2D para estudiar el flujo detrítico ocurrido el 25 de marzo de 2015 en la quebrada La Mesilla, ubicada en la cuenca del río El Carmen, provincia de Huasco, Chile (ver Figura 6.28).

Los parámetros reológicos utilizados son los propuestos por D'Agostino & Tecca (2006), los cuales fueron validados por Zegers et al. (2017) para una quebrada aledaña. Si bien en dicho estudio se modelaron distintas geometrías, aquí se considerarán solo los resultados obtenidos con la topografía Alos-Palsar (resolución 12,5x12,5 m). Esto se debe a que esta es de fácil acceso y representa las condiciones aproximadas del terreno antes del evento de 2015. En la Figura 6.28 se muestra la ubicación de las quebradas La Mesilla y Crucecita, siendo esta última utilizada en las siguientes subsecciones. Esta y todas las figuras están georreferenciadas en el sistema geográfico WGS84 19S.

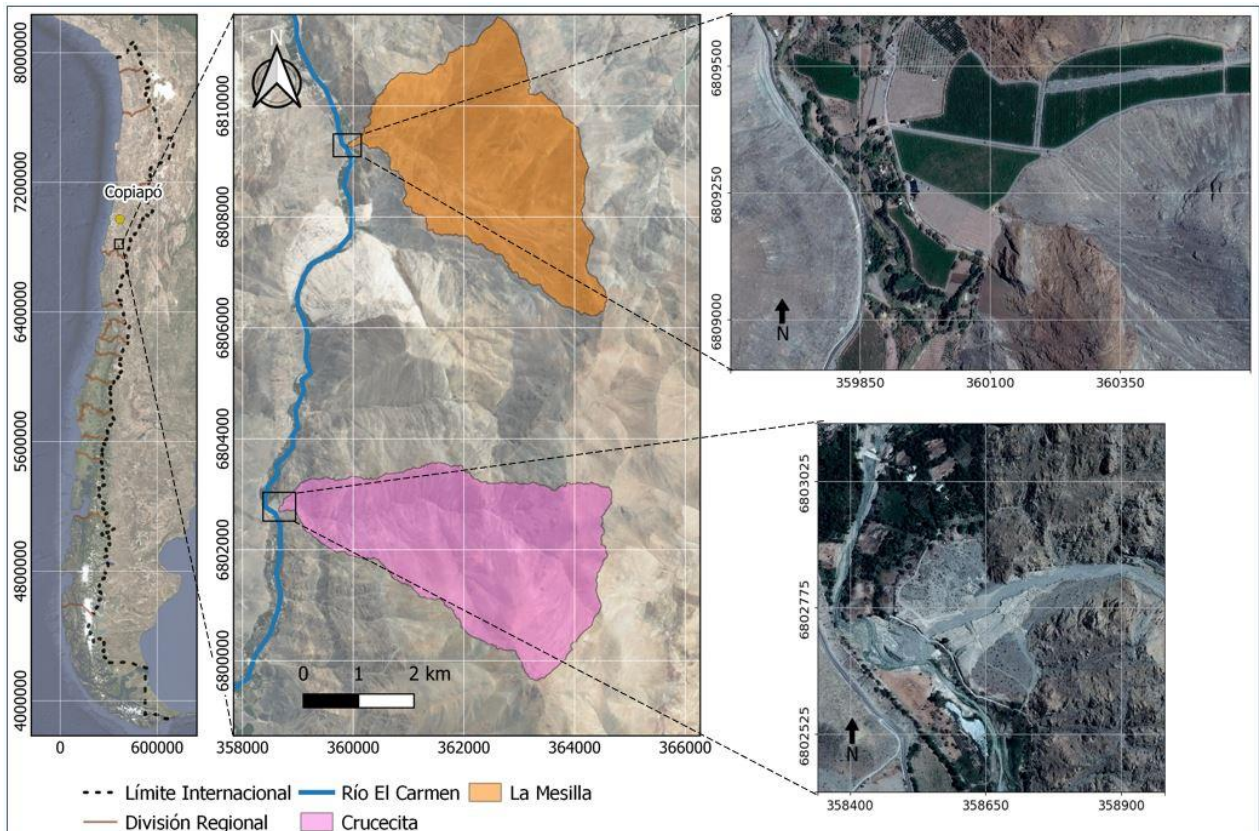


Figura 6.28: Ubicación de las quebradas La Mesilla y Crucecita, junto al río El Carmen, el cual en el sector fluye de Sur a Norte. En ambas quebradas se señala el área de la cuenca que estas drenan, además de imágenes de las zonas donde estas confluyen con el río El Carmen.

Debido a que Zegers et al. (2017) utilizan el modelo FLO-2D, se debe calcular el esfuerzo de corte basal a partir del modelo cuadrático y sin incluir los procesos de erosión y depositación. Los siguientes parámetros se utilizan en ambos casos:

Tabla 6.7: Parámetros del modelo cuadrático para la quebrada La Mesilla.

$\alpha_1(\text{kg/m/s})$	$\beta_1(-)$	$\alpha_2(\text{kg/m/s}^2)$	$\beta_2(-)$	$K(-)$	$n(\text{m}^{-1/3}\text{s})$
0,00075	14,39	0,0152	18,7	1166	0,05

Los valores de α_1 y α_2 mostrados en la Tabla 6.7 difieren de los enunciados por D'Agostino & Tecca (2006) debido a que en *debrisfaSavageHutterFoam* se requiere introducir los datos en las unidades del sistema internacional. El valor de K es calculado a partir del número de Manning n , esto por medio de la ecuación (6.6), la cual es presentada en FLO-2D (2017). Cabe mencionar que K es calculado internamente en FLO-2D solo si este no es entregado por el usuario.

$$K = \begin{cases} 24 & \text{si } n \leq 0,01 \\ 1.460.865,81 \cdot (n)^{2,381} & \text{si } 0,01 < n \leq 0,25 \\ 2480 & \text{si } 0,25 < n \end{cases} \quad (6.6)$$

Si bien Zegers et al. (2017) reportan el hidrograma utilizado para modelar el flujo detrítico, este es demasiado largo para los fines de validar el modelo al comparar las zonas de inundación y las velocidades y alturas máximas obtenidas. Por tanto, con el *solver debrisfaSavageHutterFoam* se modelará solo el *peak* del hidrograma como un flujo de caudal y concentración constante. Para esto se utiliza un caudal líquido de $8,24 \text{ (m}^3/\text{s)}$ y concentración volumétrica de sólidos del 55%. El caudal detrítico, el cual se calcula a partir de la ecuación (5.21), es igual a $18,3 \text{ (m}^3/\text{s)}$. Por la forma del modelo cuadrático, al utilizar $C_v = 0,55$ se obtendrá como resultado las alturas máximas y las velocidades mínimas en la quebrada, por lo que se hace necesario modelar además el caso opuesto. Esto corresponde a utilizar $Q = 18,3 \text{ (m}^3/\text{s)}$ y $C_v = 0,2$, en cuyo caso se obtendrán las velocidades máximas y las alturas mínimas. En el primer caso, la simulación tiene una duración de 3000 s , mientras que en el segundo es de 1000 s .

En las figuras 6.29 y 6.30 se muestran las alturas máximas obtenidas con los dos modelos. La trayectoria seguida por el flujo en ambos casos consiste en un tramo recto en dirección este a oeste, un desvío hacia el Suroeste, un segundo tramo recto y finalmente una bifurcación cuyas ramas fluyen hacia el río El Carmen.

Si bien el área inundada por el flujo simulado en FLO-2D es mayor, la diferencia está formada por zonas con alturas menores a $0,1 \text{ m}$, por lo que pueden ser despreciadas. Además, en los resultados del *solver debrisfaSavageHutterFoam* se observa de forma más clara un segundo brazo del flujo. La existencia de este brazo se debe, probablemente, al uso de una malla no estructurada de menor tamaño, donde los accidentes topográficos quedan mejor representados.

Si se descartan los valores máximos mostrados en la parte baja de la Figura 6.29, los cuales se deben, acorde a Zegers et al. (2017), a un error en la topografía usada, se

obtiene que las alturas máximas del flujo son de alrededor de 2,0 m. Por su parte, el *solver debrisaSavageHutterFoam* entrega valores máximos de 2,3 m. Dichas alturas se alcanzan en la descarga al río El Carmen, mientras que en la quebrada no se supera 1,5 m de altura.

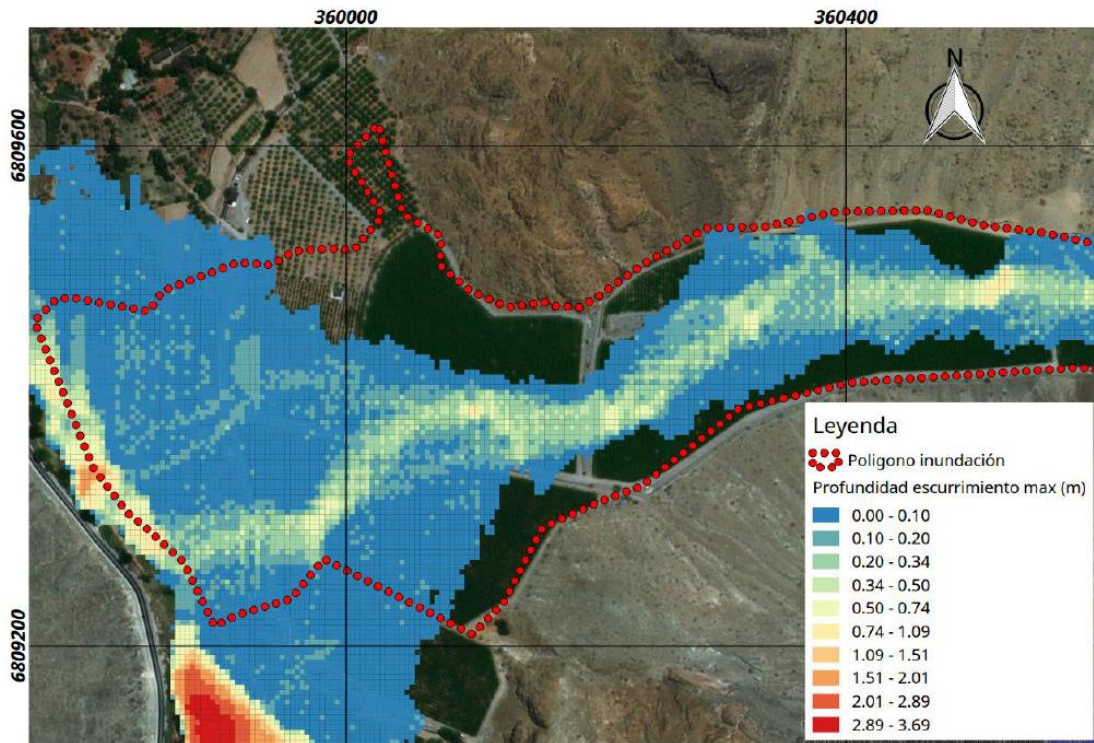


Figura 6.29: Profundidad de escurrimiento máxima (m) calculada con FLO-2D para la topografía Alos-Palsar. Imagen obtenida de Zegers et al. (2017).

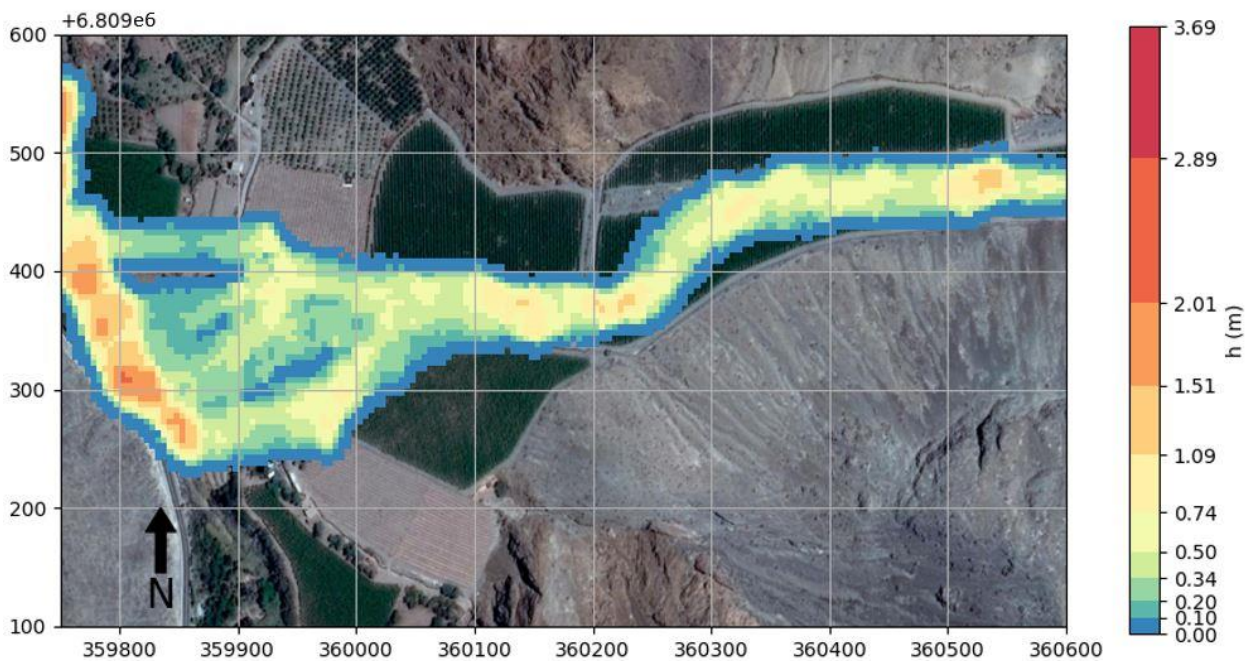


Figura 6.30: Altura máxima del flujo calculada con el *solver debrisaSavageHutterFoam*.

Es claro que el flujo mostrado en la Figura 6.30 tiene una menor sección transversal y mayor altura promedio que el presentado en la Figura 6.29. Esto está probablemente relacionado con la discretización espacial usada, la cual, al ser más fina, permite representar de mejor forma la geometría de la quebrada y por lo tanto confinar el flujo.

En las figuras 6.31 y 6.32 se muestran las velocidades máximas del flujo calculadas con ambos modelos. Prácticamente en la totalidad del flujo se reportan valores máximos de alrededor de 4 m/s , los cuales se ubican en la parte alta del cono de deyección. Por otro lado, en las zonas aledañas a la descarga al río El Carmen se tienen velocidades cercanas a los 2 m/s .

Notar que las áreas de inundación no coinciden entre las figuras 6.30 y 6.32. Esto se debe, principalmente, a que las figuras son obtenidas a partir de distintas simulaciones, donde solo cambia el valor de C_v en la condición de borde. No obstante, es claro que en ambos casos el flujo sigue el mismo camino principal.

Si bien los valores mostrados por Zegers et al. (2017) y los calculados en esta Tesis se obtienen a partir de los mismos parámetros, se debe notar que entre estos cambia el tamaño de la malla, la forma de los elementos, las ecuaciones de conservación, el esquema numérico de resolución, etc. Luego, tomando en cuenta estas diferencias, se puede concluir que los valores calculados con el *solver debrisfaSavageHutterFoam* se ajustan suficientemente bien a los obtenidos con FLO-2D. Esto especialmente si se considera el grado de imprecisión de la información experimental asociada a este tipo de flujos y al nivel de desconocimiento que aún existe sobre la dinámica que los gobierna.

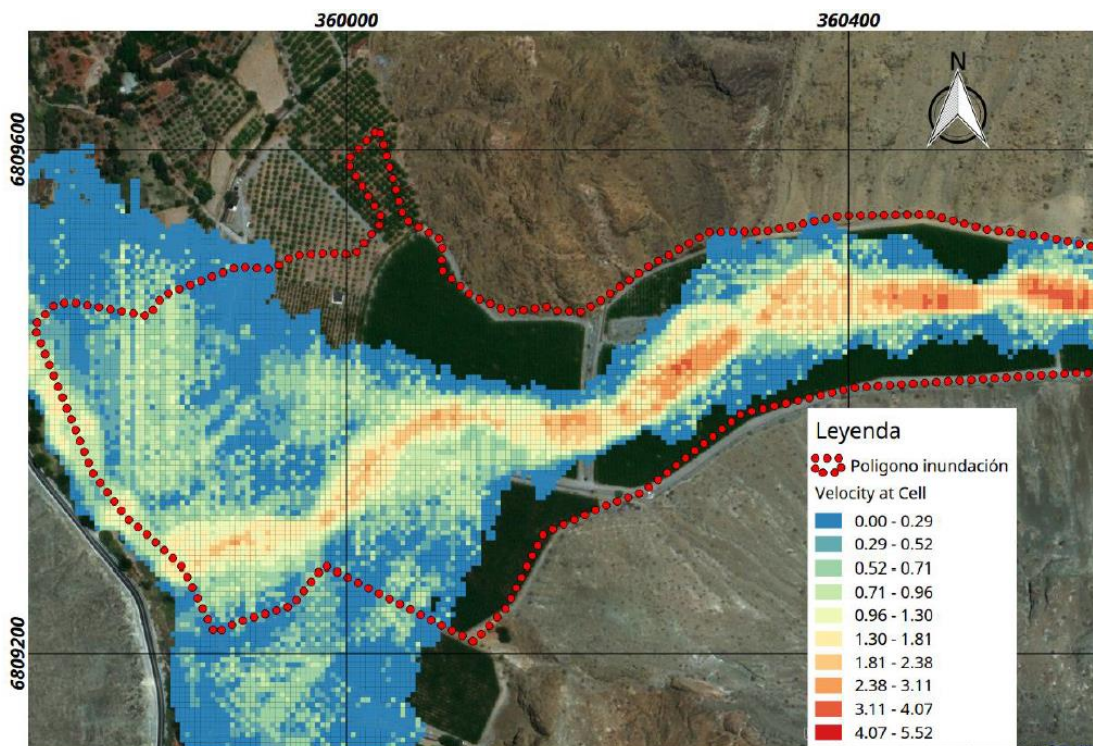


Figura 6.31: Velocidad de escurrimiento máxima (m/s) calculada con FLO-2D para la topografía Alos-Palsar. Imagen obtenida de Zegers et al. (2017).

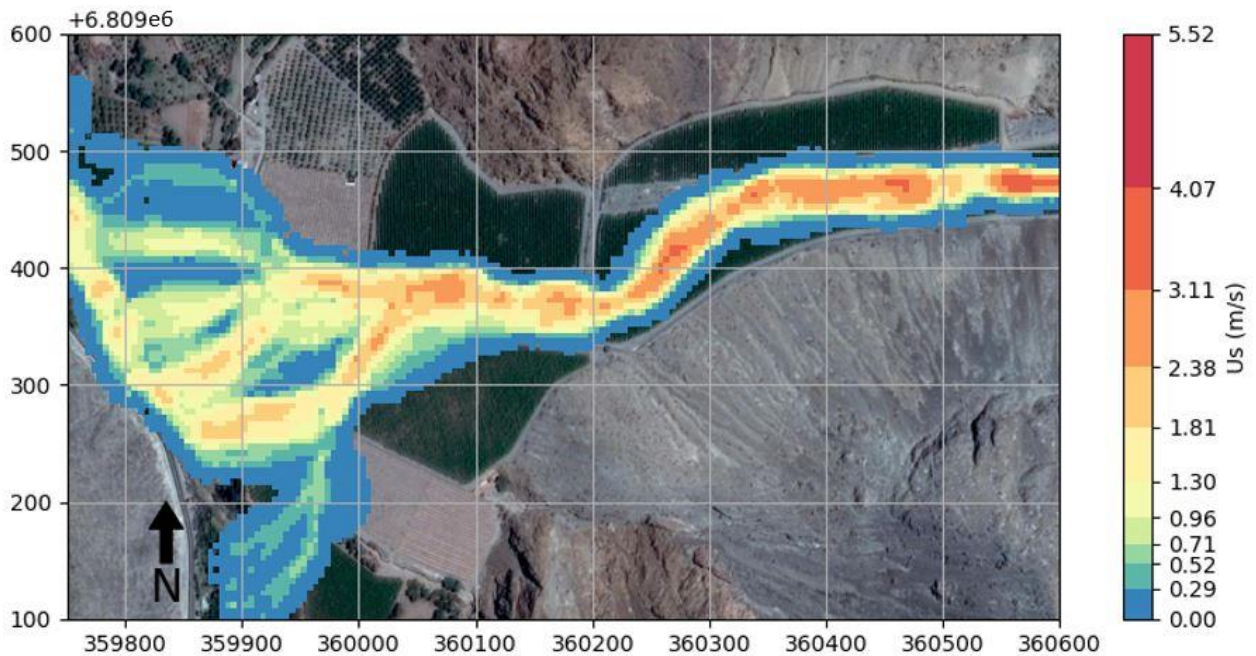


Figura 6.32: Velocidad máxima del flujo calculada con el *solver* *debrisfaSavageHutterFoam*.

6.3.2. Quebrada Crucecita

Con el fin de probar el *solver* *debrisfaSavageHutterFoam*, se modelará una serie de flujos detríticos en la quebrada Crucecita, la cual se ubica, aproximadamente, 7,4 km aguas arriba de La Mesilla (ver Figura 6.28). Para esto se dispone de una topografía Lidar de detalle con curvas de elevación cada 1 m, la cual fue obtenida luego del evento del 25 de marzo de 2015 y ha sido facilitada por el AMTC (*Advanced Mining Technology Center*).

A diferencia de lo hecho en La Mesilla, para la quebrada Crucecita se busca mostrar los resultados obtenidos para distintos hidrogramas de flujo, es decir, diferentes valores de Q y C_v . El objetivo de esto es mostrar que el *solver* puede ser utilizado para modelar diferentes condiciones de flujo, las cuales pueden responder a distintas condiciones de precipitación y/o a cambios en el volumen total incorporado aguas arriba del cono de deyección.

Debido a su cercanía a la quebrada La Mesilla, para representar el esfuerzo de corte basal se utilizarán los mismos parámetros mostrados en la Tabla 6.7.

Para la erosión, se escoge el modelo planteado por Frank et al. (2015), debido a que este limita la tasa máxima de incorporación de material (ver ecuaciones (5.5) y (5.6)). Se utilizarán los parámetros definidos por defecto en RAMMS (ver Tabla 6.8), los cuales fueron medidos en la quebrada Illgraben, ubicada en el suroeste de Suiza (Bartelt et al., 2017). Los datos deben ser ingresados al *solver* en unidades del sistema internacional,

por lo que los valores de $dz/d\tau$ y τ_c , usualmente referidos en kPa , deben ser expresados en pascales.

Tabla 6.8: Parámetros del modelo de erosión.

E_R (m/s)	$dz/d\tau$ (m/Pa)	τ_c (Pa)
0,025	10^{-4}	1000

Para generar el flujo, se utilizará un hidrograma de caudal y concentración constante, aunque los valores de estos variarán entre simulaciones. En particular, se escogen tres pares de valores (Q, C_v), donde Q refiere al caudal detrítico. Los valores usados se presentan en la Tabla 6.9, empleándose de aquí en más la letra H para diferenciar entre simulaciones. El caudal detrítico máximo en la quebrada durante el evento de marzo de 2015, el cual es calculado a partir de la metodología presentada por Gómez et al. (2017), corresponde a $23,5 (m^3/s)$. Así, los valores mostrados en la Tabla 6.9 son del mismo orden de magnitud que el caudal generado en este evento previo.

Tabla 6.9: Caudal detrítico y concentración de sedimentos usados en cada simulación.

	Q (m^3/s)	C_v (-)
H1	20	0,3
H2	35	0,4
H3	50	0,5

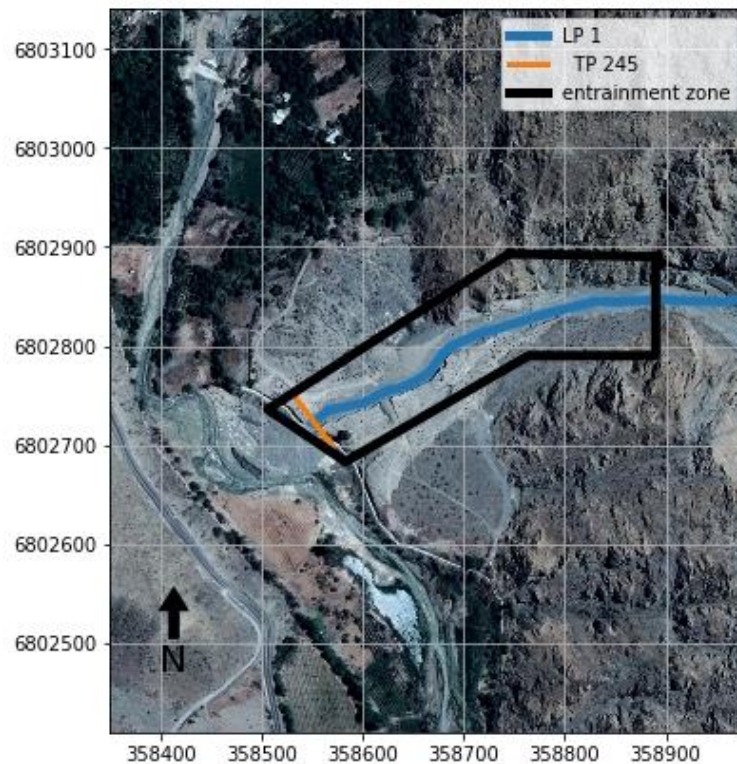


Figura 6.33: Definición del perfil longitudinal LP1 junto al perfil transversal TP245. El rectángulo de color negro (*entrainment zone*) corresponde a la zona donde se limita la incorporación de material desde el lecho.

Se define una profundidad de erosión máxima de 2 m , aunque en el modelo esta es restringida por $dz/d\tau$ y el valor de e_m calculado. Solo se simulará el flujo en el abanico aluvial de la quebrada, siendo esta la zona de mayor interés, pues es donde se podría generar riesgo sobre la vida de las personas o daños en infraestructura. Tal como se muestra en la Figura 6.33, se define una zona de incorporación de material (*entrainment zone*) arbitraria lejos de la condición de borde y que termina antes de la descarga en el río, que es donde la ecuación de erosión deja de ser aplicable. En la imagen se señala además el perfil longitudinal LP1 y el perfil transversal TP245, el cual será usado para mostrar cómo varían ciertas variables del flujo en función del tiempo. Debido a lo pequeña de la zona y a la utilización de un hidrograma uniforme, todas las simulaciones tienen una duración de 300 s . La imagen de fondo en la Figura 6.33 es posterior a marzo de 2015 y fue obtenida desde Google Earth.

Para todas las simulaciones se utilizan los parámetros mostrados en las tablas 6.4 y 6.5, (TMA se encuentra activo) a excepción de $maxCellSize$ y ρ_b , escogiéndose en este caso $maxCellSize = 7,5\text{ m}$ y $\rho_b = 2190\text{ kg/m}^3$. La malla creada, la cual se puede apreciar en la Figura 6.34, tiene un diámetro equivalente promedio de $3,0\text{ m}$, y valores máximo y mínimo de $4,9$ y $0,6\text{ m}$.

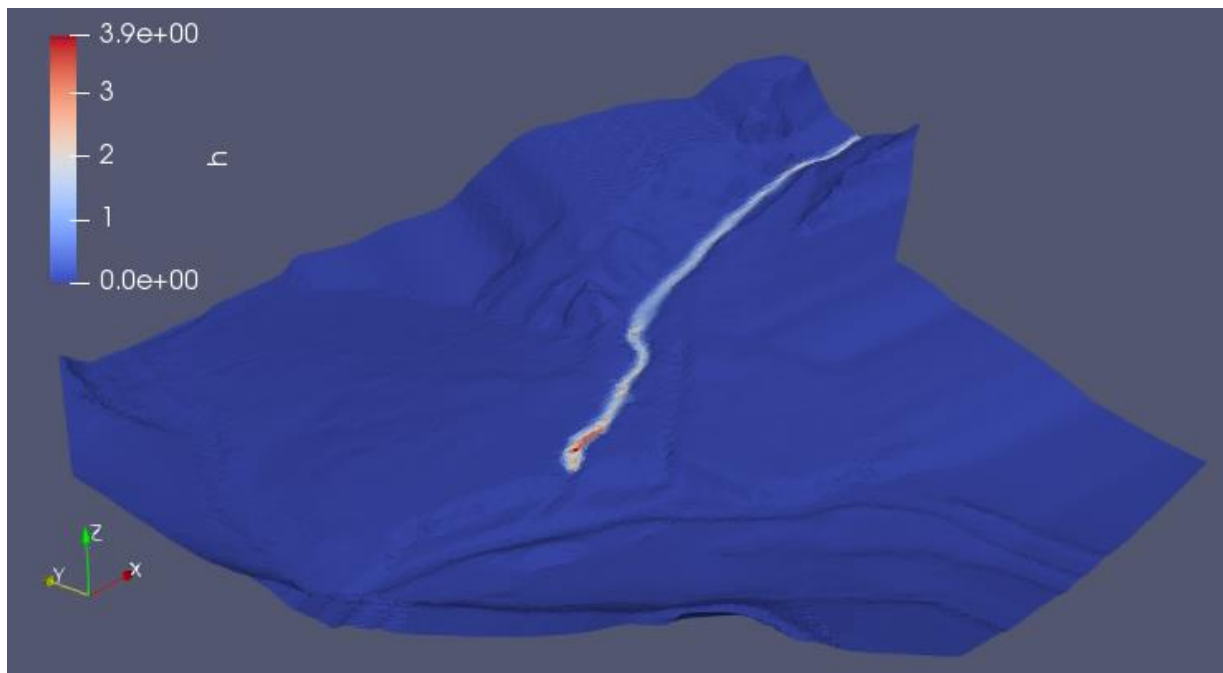


Figura 6.34: Vista de la geometría creada en OpenFOAM®. Los valores mostrados corresponden a la altura del flujo h medida en metros para el caso H3 en $t = 125\text{ s}$.

A continuación, en las figuras 6.35 y 6.36 se muestran las alturas y velocidades máximas del flujo para los casos H1, H2 y H3. Debido a que el término τ_y del modelo cuadrático es muy pequeño, lo cual ya fue discutido en la sección 3.7, el flujo no se detiene y continúa fluyendo por el cauce del río El Carmen. En estas figuras se muestra solo una zona acotada del área modelada, siendo esta la parte de mayor interés.

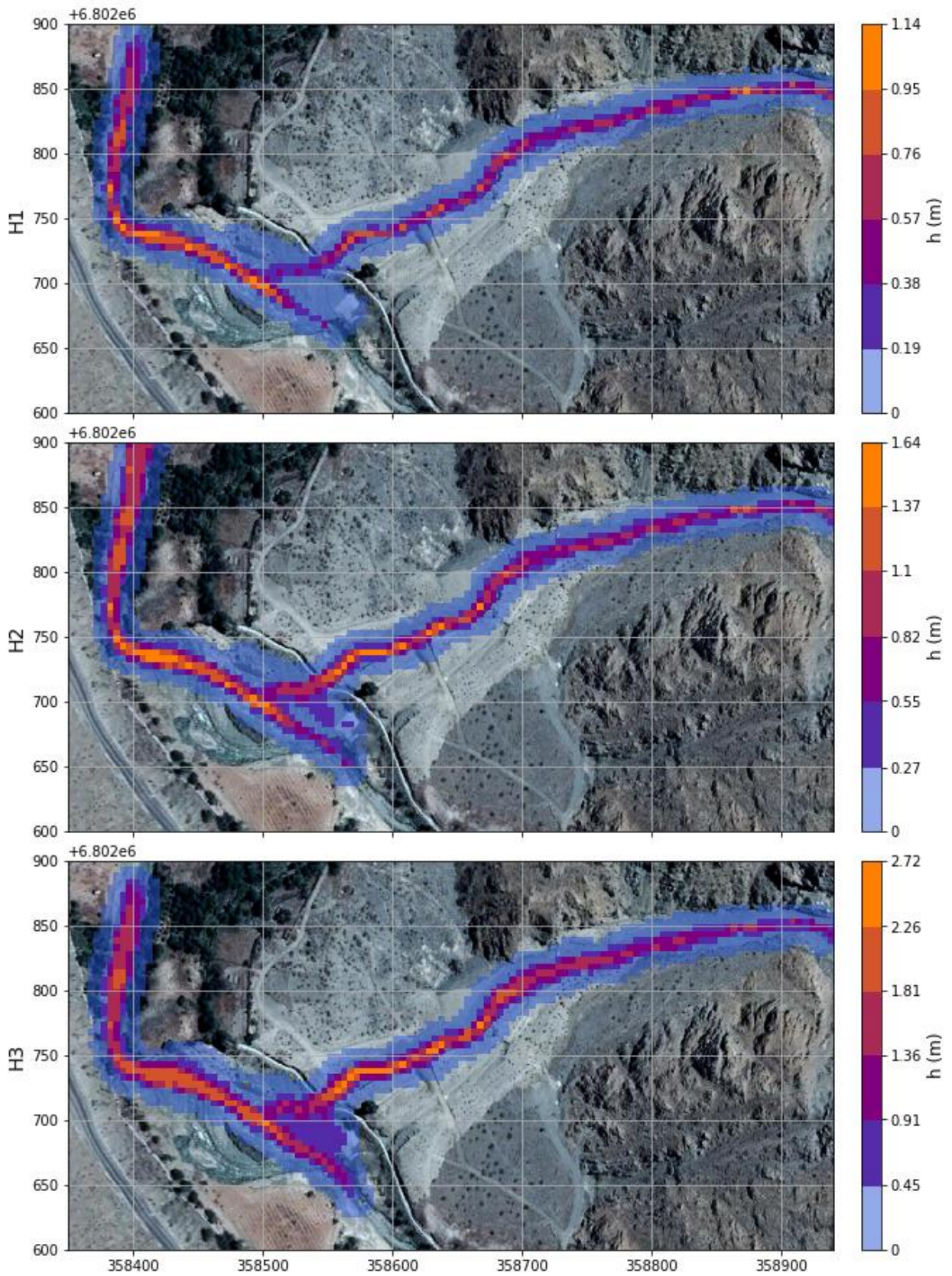


Figura 6.35: Altura máxima del flujo calculada hasta $t = 300$ s.

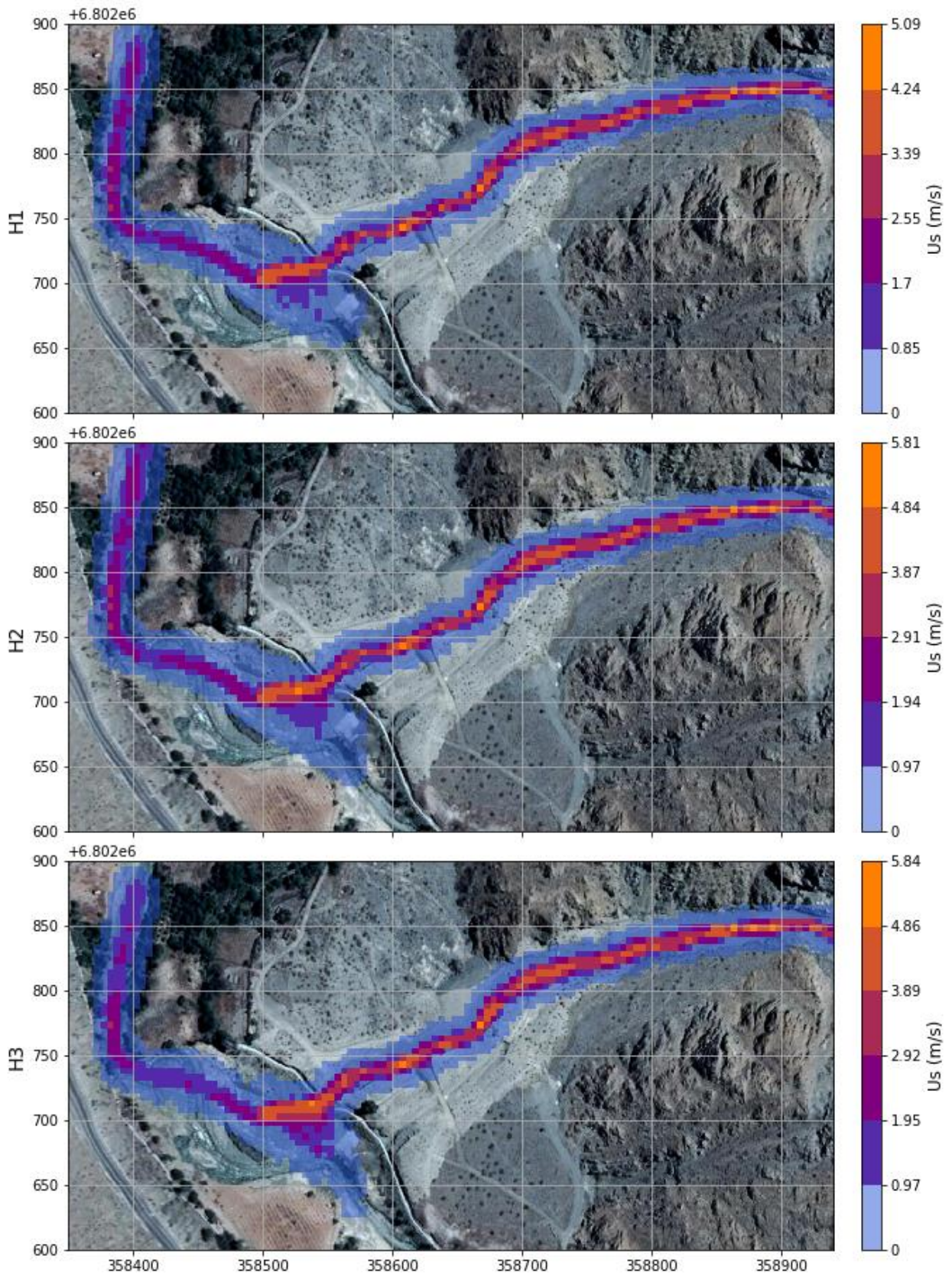


Figura 6.36: Velocidad máxima del flujo calculada hasta $t = 300$ s.

Es claro que la altura del flujo es proporcional al caudal usado, además de mantenerse en las mismas secciones, aproximadamente, los máximos y mínimos. Por su parte, la velocidad se incrementa con el aumento de caudal, aunque su dependencia es menor a la evidenciada para la altura. Esto se debe, probablemente, a que, junto al incremento de caudal, se tiene un aumento en la concentración volumétrica de sedimentos. Al incrementarse el valor de C_v crece exponencialmente el término viscoso en la ecuación (2.26), lo que ralentiza el flujo, formándose un lóbulo de gran densidad en el frente de este, el cual actúa como una presa móvil.

En la Figura 6.37 se muestra la profundidad de erosión calculada en la quebrada para los casos H2 y H3, la cual está limitada por la zona de erosión definida en la Figura 6.33. Se optó por no presentar los resultados para H1 debido a que la erosión calculada es muy pequeña. Esto se puede constatar en la Figura 6.38, donde se grafica para cada caso la profundidad de erosión medida a lo largo del perfil longitudinal LP1.

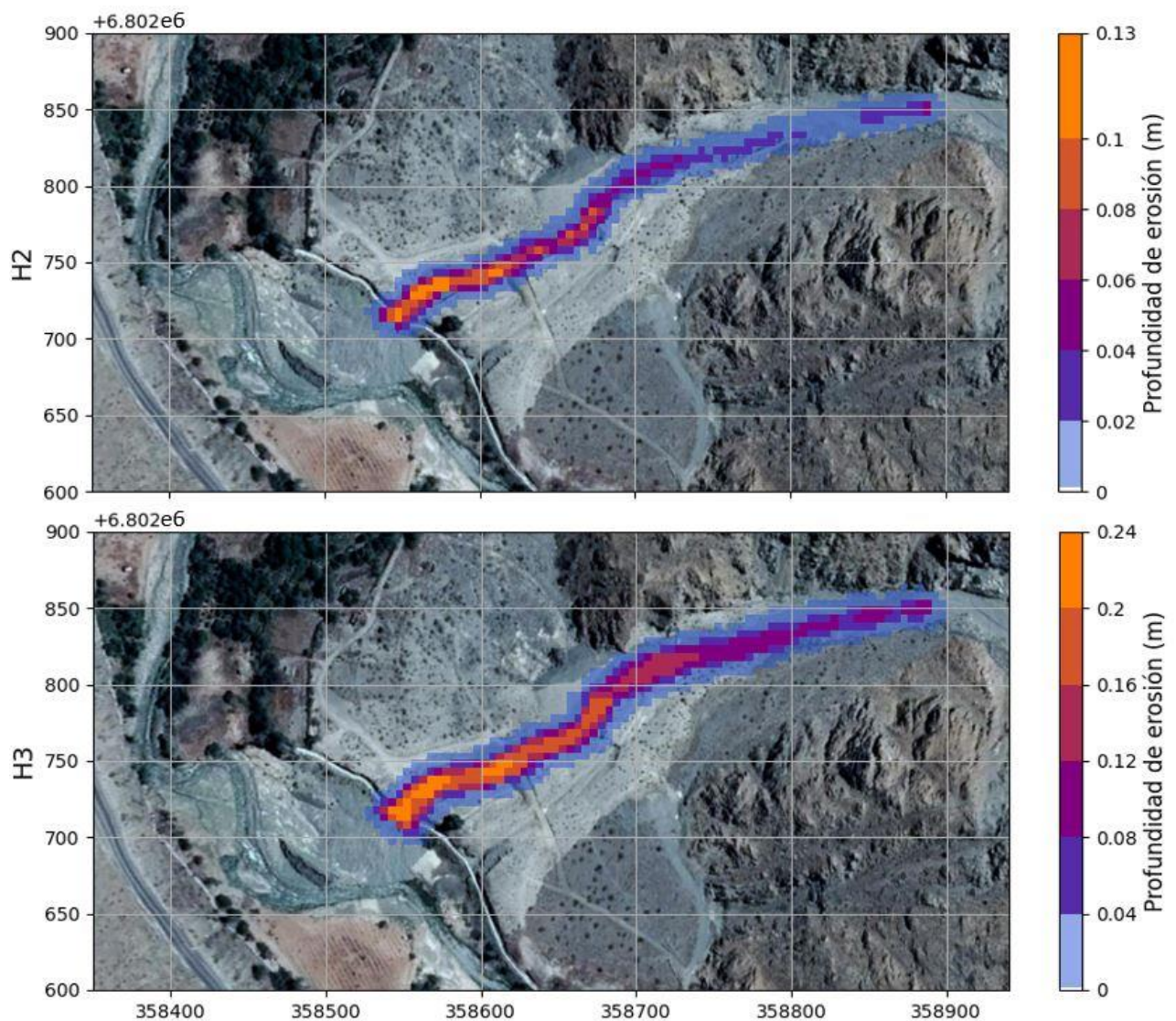


Figura 6.37: Profundidad de erosión máxima calculada para el flujo.

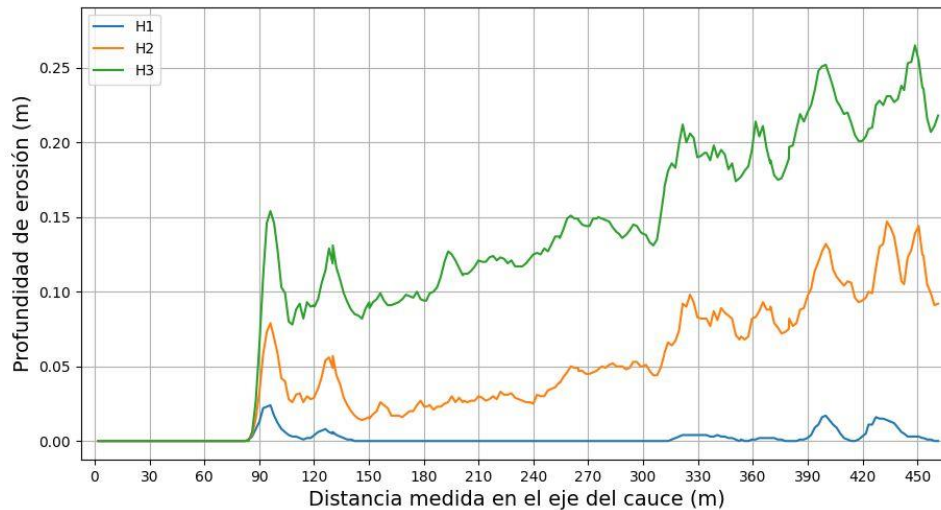


Figura 6.38: Profundidad de erosión en el centro del perfil longitudinal LP1 en $t = 300$ s.

Para finalizar, en las figuras 6.39, 6.40 y 6.41 se presentan las variaciones de Q , h y U_s en función del tiempo en el perfil transversal TP245, el cual se ubica, aproximadamente, al final de la quebrada. Se observa que se alcanza un régimen permanente mucho antes de $t = 300$ s, por lo que no es necesario aumentar la duración de la simulación.

Un resultado interesante es que para $Q = 20$ m³/s la erosión es despreciable y no tiene mayor efecto sobre la altura y velocidad del flujo en la descarga (TP245). No obstante, en los otros casos se tienen variaciones significativas, esto especialmente en la altura del flujo. Así, en el caso H2 la altura del flujo aumenta aproximadamente un 50%, mientras que en H3 un 67%, ambos valores calculados respecto al alcanzado en el régimen permanente. Esto puede ser sumamente relevante, por ejemplo, en el diseño de alguna obra de contención de flujos detríticos en la quebrada.

Por su parte, la velocidad no exhibe grandes variaciones producto de la erosión del lecho. Esto se debe a que la incorporación de sedimento no solo afecta al caudal, sino también a la concentración volumétrica de sólidos, la cual al aumentar modifica la viscosidad de la mezcla, disminuyendo así significativamente su velocidad.

Se observa en la Figura 6.39 que la incorporación de material ocurre en la parte delantera del flujo, teniendo esta una corta duración. Es notable que en H3 el caudal máximo es el doble del usado como condición de borde, lo cual se logra con una profundidad de erosión máxima calculada de 0,25 m y en un tramo de aproximadamente 450 m. No obstante, se debe tener en cuenta que estos resultados se obtuvieron con los parámetros de erosión estimados en el Illgraben, por lo que estos pueden no ser válidos en la quebrada Crucecita.

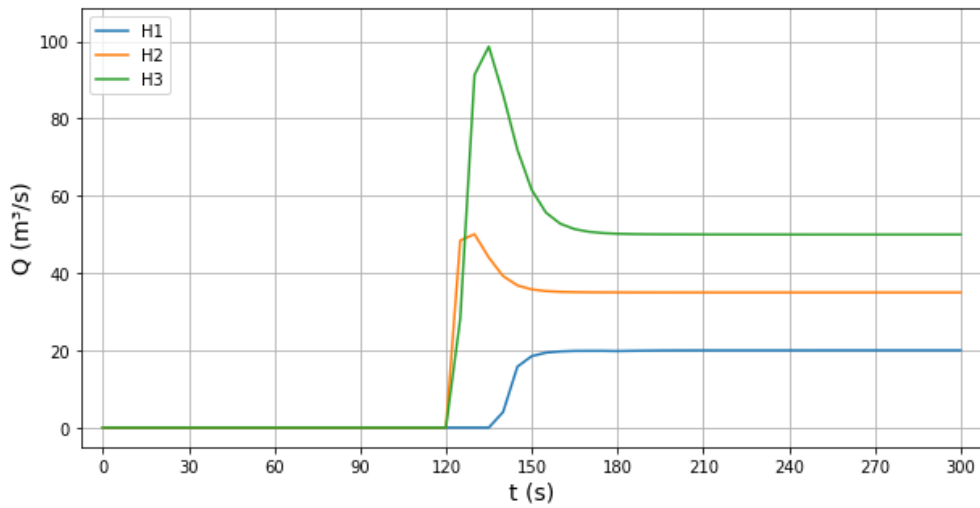


Figura 6.39: Caudal detrítico medido en el perfil transversal TP245 en función del tiempo.

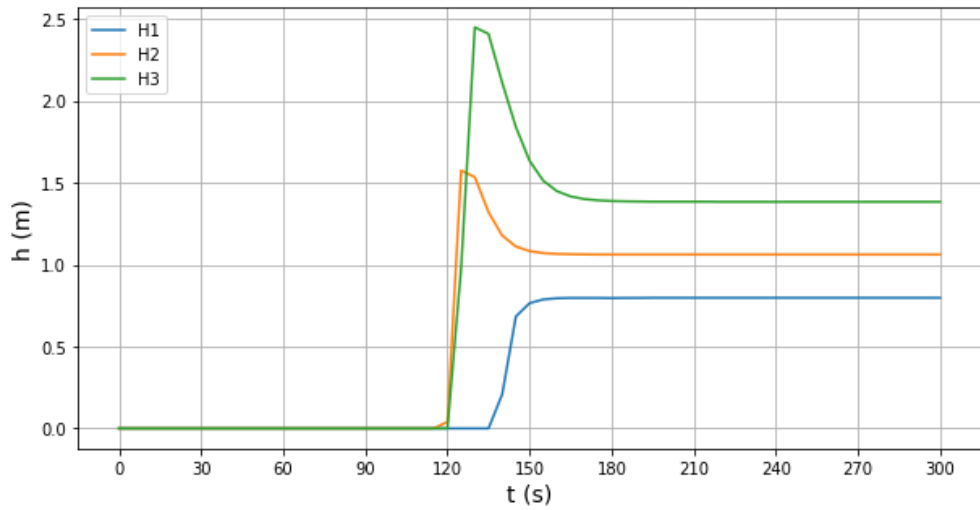


Figura 6.40: Altura calculada en el perfil transversal TP245 en función del tiempo.

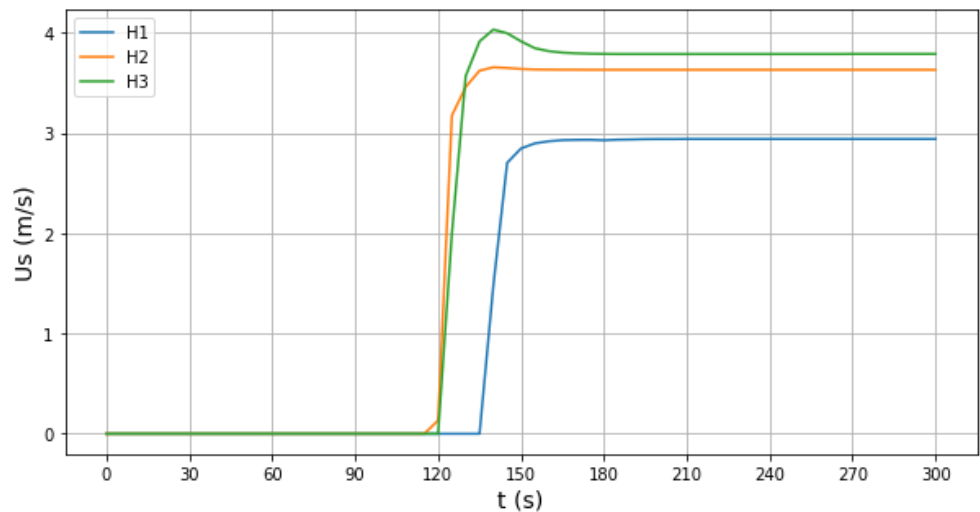


Figura 6.41: Velocidad calculada en el perfil transversal TP245 en función del tiempo.

6.3.3. Quebrada Crucecita junto al río El Carmen

Si bien no es uno de los objetivos de este trabajo, en esta subsección se muestra que el *so/ver* aquí desarrollado puede ser utilizado para modelar, de forma simplificada, la interacción entre flujos detríticos y flujos de agua cargados de sedimento. Para esto se modela el caso H2 (ver Tabla 6.9) sin erosión, junto a un flujo de caudal y concentración constante proveniente del río El Carmen. Se utilizan los parámetros presentados en la Tabla 6.4, a excepción de *maxCellSize*, para el cual se utiliza 7,5 m. El área modelada es la mostrada en la Figura 6.33.

Las ecuaciones resumidas en la sección 3.5 son válidas para cualquier flujo somero, con líneas de corriente cuasi-paralelas y formado por la mezcla de una fase sólida y otra líquida. La diferencia entre modelar un flujo de agua con baja carga de sedimento y modelar un flujo detrítico pasa por las ecuaciones utilizadas para describir u_b y τ_b . Por simplicidad, aquí no se modelarán los procesos de erosión y depositación, estando por tanto el foco puesto en cómo representar τ_b en la totalidad del dominio.

Se define τ_b a partir de la ecuación (6.7), donde se utiliza la ecuación de Manning si C_v se encuentra bajo cierto valor límite y el modelo cuadrático si dicho valor es superado. Para utilizar esta ecuación, se debe seleccionar *QuadraticManning* como modelo de fricción en la librería *faDebrisflow*, además incluir los parámetros de ambas ecuaciones. En la ecuación de Manning se utiliza $n = 0,03$ ($m^{-1/3}s$), mientras que para el modelo cuadrático se utilizarán los valores presentados en la Tabla 6.7. Se fija $C_{vlim} = 0,2$, pues este valor marcaría el límite entre un flujo de agua y uno de barro (FLO-2D, 2015).

$$\tau_b = \begin{cases} \tau_b^{Manning} & \text{si } C_v \leq C_{vlim} \\ \tau_b^{Quadratic} & \text{si } C_v > C_{vlim} \end{cases} \quad (6.7)$$

Por simplicidad, se utilizan valores constantes de Q y C_v en ambas condiciones de borde, aunque el flujo detrítico se inicia en $t = 150$ s, teniendo la simulación una duración total de 500 s. Se eligen arbitrariamente los valores $Q_{rio} = 140$ m³/s y $C_{vrio} = 0,05$, los cuales permiten observar la mezcla de ambos fluidos, a la vez que utilizar la ecuación de Manning prácticamente en la totalidad del cauce del río. Para el flujo detrítico, los valores de Q y C_v corresponden a los del caso H2 mostrado en la subsección anterior.

En las figuras 6.42, 6.43 y 6.44 se presentan los resultados obtenidos para h , U_s y C_v en los tiempos $t = 250$ s y $t = 500$ s. El primero corresponde a un instante de tiempo anterior a la descarga del flujo detrítico en el río El Carmen. El segundo es la configuración obtenida luego de que parte del flujo detrítico ha sido incorporado por el río.

En las dos primeras figuras, se observa el aumento de velocidad y altura del flujo en el cauce del río, esto producto de la incorporación de material proveniente desde la quebrada. El resultado más interesante se presenta en la Figura 6.44, donde se muestra la mezcla de flujos de distinta densidad y como esta se propaga por el cauce del río hacia aguas abajo.

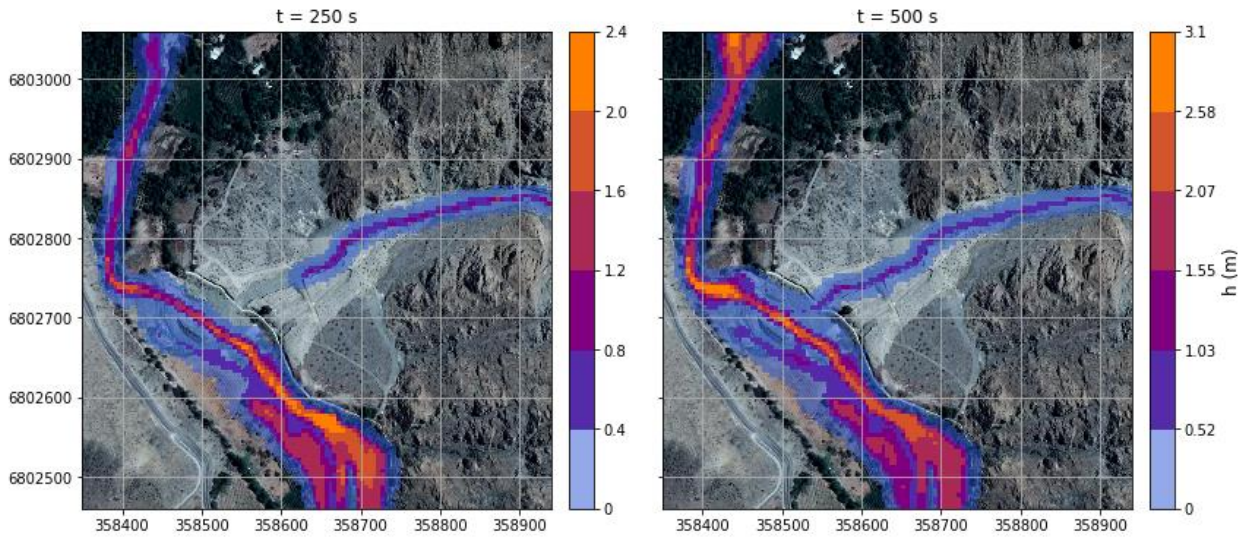


Figura 6.42: Altura del flujo calculada a 250 y 500 s del inicio de la simulación.

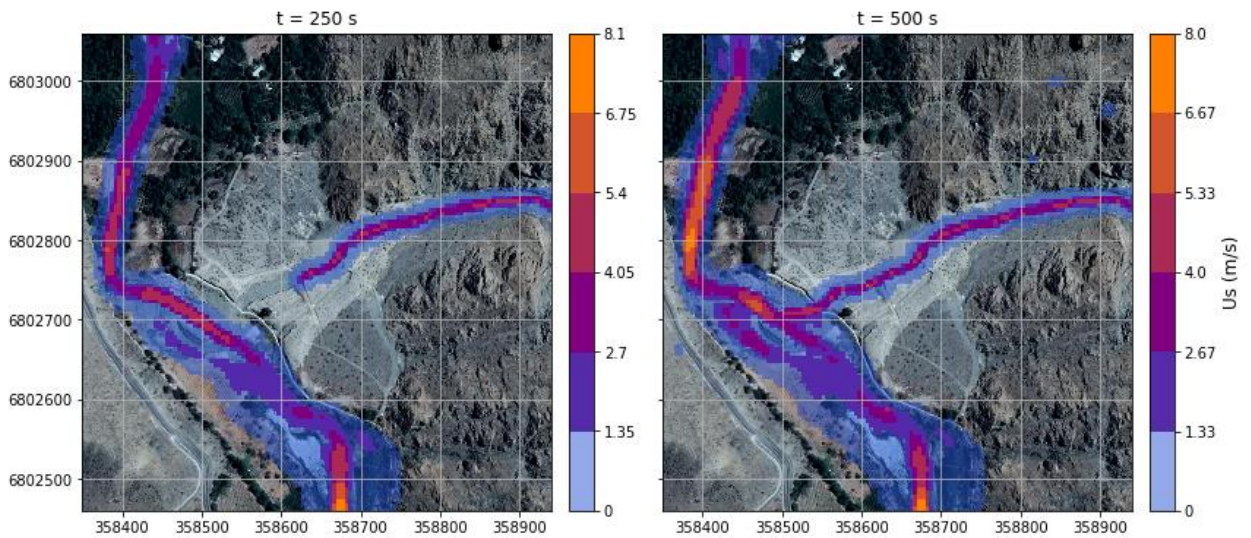


Figura 6.43: Velocidad del flujo calculada a 250 y 500 s del inicio de la simulación.

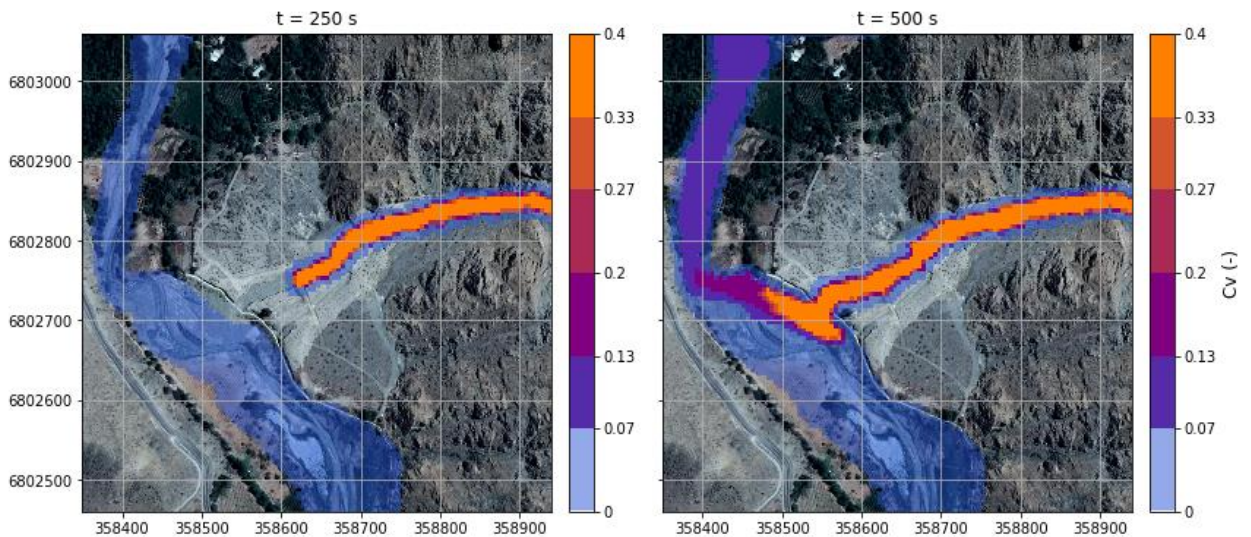


Figura 6.44: Concentración de sedimento calculada a 250 y 500 s del inicio de la simulación.

Se escogió, como simplificación razonable, utilizar $C_{v_{lim}}$ para alternar entre ambas ecuaciones de fricción, aunque se podría haber usado otro criterio, como definir polígonos en que, para cualquier valor de C_v , se utilice una ecuación u otra. Esta última posibilidad no está actualmente incorporada al *solver*, aunque es fácil de añadir.

De momento, al seleccionar *QuadraticManning* como modelo de fricción, la velocidad y altura de las celdas ubicadas en los bordes se calculan utilizando el modelo cuadrático, esto independiente de los valores de C_v en el hidrograma. Esto explica que en la Figura 6.43 se tengan velocidades tan altas en la sección de entrada del río, las cuales disminuyen hacia aguas abajo. En una próxima versión del *solver* se buscará modificar esto, de modo que en cada borde se utilice la ecuación correcta para calcular la altura y velocidad del flujo.

Debido a la descarga de material desde la quebrada, aguas abajo de esta se tiene un desbalance entre el material disponible y el que puede ser transportado por el río. Con el fin de modelar la evolución morfológica del cauce, es posible incluir en el *solver* ecuaciones de transporte de sedimento válidas para el flujo del río.

Si bien existe cierta arbitrariedad en algunos de los parámetros escogidos, como caudal, zona de incorporación (*entrainment zone*), parámetros de erosión, etc., todos estos valores pueden ser modificados por el usuario del *solver*, por lo que es posible probar múltiples configuraciones del flujo. Dado que el objetivo era mostrar resultados posibles y la aplicabilidad de *debrisfaSavageHutterFoam* en geometrías reales, se descartó profundizar más en el análisis, lo cual hubiese sido muy difícil de realizar dado el tiempo acotado de desarrollo de esta Tesis.

Finalmente, se debe mencionar que es posible obtener resultados valiosos tanto a partir de un *raster* de acceso gratuito, en este caso el de Alos-Palsar, como de una topografía de detalle, tal como la usada en la quebrada Crucecita. El primer caso puede ser de utilidad para definir, aproximadamente, la zona que puede ser afectada por un flujo detrítico. Luego, una topografía más fina de la zona delimitada puede ser adquirida, la cual permitiría obtener mejores resultados debido a la mayor resolución de la malla creada en OpenFOAM®.

6.4. Aplicación al Illgraben

La última aplicación del *solver* corresponde a la simulación de un flujo detrítico ocurrido en la quebrada Illgraben, ubicada en el suroeste de Suiza. El Illgraben, cuyo punto más alto es el Illhorn, una montaña que alcanza los 2716 *m s. n. m.*, descarga primero en un cono de deyección cuya sección más alta se ubica a 850 *m s. n. m.* y luego en el río Rhone, a 610 *m s. n. m.*

En esta quebrada se suelen generar un par de flujos detríticos al año, razón por la cual se han construido 29 presas contenedoras (*check dams*) y se han instalado una serie de instrumentos de medición y de alerta temprana en el cauce. En particular, el interés está puesto en simular el flujo entre las *check dams* 28 y 29, esto debido a que es allí donde se tienen datos de erosión. Además, en el puente ubicado sobre la *check dam* 29 están instaladas cámaras y sensores que han permitido medir o estimar otros parámetros, como velocidad, altura y densidad del flujo (Berger et al., 2011b; McArdeell et al., 2007). En la Figura 6.45 se muestra la posición del Illgraben en el mapa de Suiza, además de la ubicación de la zona de estudio. Todas las figuras de esta sección están georreferenciadas respecto al sistema geográfico de coordenadas suizo CH1903.

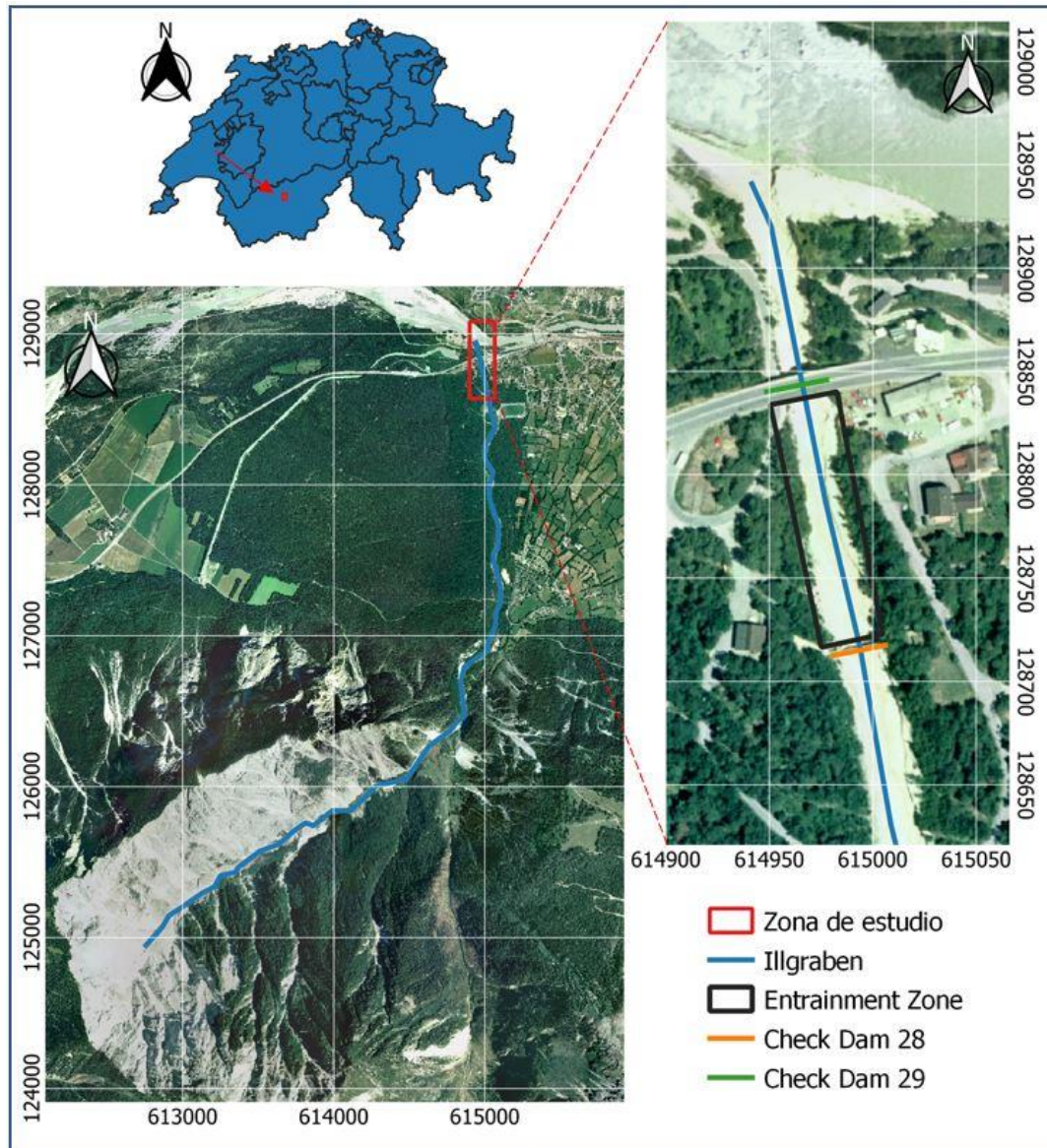


Figura 6.45: Ubicación del Illgraben y de la zona de estudio.

Se busca simular el flujo detrítico ocurrido el 1 de julio de 2008, el cual fue documentado por Berger et al. (2011b). Para este flujo se midieron profundidades de erosión de 0,2 y 0,5 m en los sensores verticales ubicados, aproximadamente, 70 m aguas arriba de la

check dam 29. Por medio de cámaras, se estimó la velocidad máxima del frente en $7,5 \text{ m/s}$, una velocidad promedio entre las *check dams* 27 y 29 de $5,3 \text{ m/s}$ y una velocidad promedio del frente de $4,8 \text{ m/s}$. La altura máxima del flujo en la *check dam* 29 fue de $2,35 \text{ m}$, la cual es utilizada para calcular un caudal *peak* de $89 \text{ m}^3/\text{s}$. Esta altura es medida por medio de un radar dispuesto bajo el puente mostrado en la Figura 6.45. La densidad de flujo, estimada en la *check dam* 29 gracias a la presión medida en una placa de acero (*force plate*), tiene un valor máximo de 2000 kg/m^3 . No obstante, dicho valor se mantiene por un periodo de tiempo menor a 15 s . Un valor promedio más adecuado para los primeros 200 s del flujo es 1500 kg/m^3 .

Para representar el esfuerzo de corte basal se escoge el modelo de Voellmy. Los coeficientes μ y ξ son calibrados de modo tal que la velocidad del flujo entre las *check dams* 28 y 29 sea semejante a la medida durante el evento. Los valores obtenidos se presentan en la Tabla 6.10. En la simulación se utilizan valores constantes de Q y C_v , esto debido a que solo interesa modelar el frente del flujo, el cual tiene una corta duración.

Tabla 6.10: Valores parámetros de fricción y flujo usados en las simulaciones.

μ (–)	ξ (m/s^2)	Q (m^3/s)	C_v (–)
0,05	600	89	0,31

Se escoge utilizar el modelo planteado por Frank et al. (2015) para representar la incorporación de material desde el lecho. Para esto se utiliza la tasa de incorporación y el esfuerzo de corte crítico usados por defecto en RAMMS (ver Tabla 6.8), mientras que para $\frac{dz}{d\tau}$ se opta por utilizar dos valores: 10^{-4} y $5 \cdot 10^{-4} \text{ m/Pa}$. Esto genera dos escenarios, los cuales serán llamados I1a e I1b. Ambas simulaciones tendrán una duración de 150 s y se realizan sin activar el algoritmo de modificación del terreno (TMA).

Si bien el interés está puesto en lo que ocurre entre las *check dams* 28 y 29, en la malla utilizada en la simulación se agrega la mitad del tramo entre las *check dams* 27 y 28. Esto se hace para evitar que la condición de borde pueda afectar los resultados en el área de estudio. Tal como se muestra en la Figura 6.45, se limita la zona de erosión de modo que esta esté suficientemente alejada de ambas *check dams*, esto pues en estas estructuras no puede ocurrir intercambio de sedimento con el flujo.

Por medio de levantamientos topográficos realizados en la zona de estudio pocos días antes y después del evento de julio de 2008, se miden profundidades de erosión máximas de $1,3 \text{ m}$, por lo que se fija $h_e = 1,3 \text{ m}$ constante en todo el dominio (Berger et al., 2011b). Otros valores necesarios para el *solver* se muestran en la Tabla 6.11, obteniéndose los valores de ρ_s y ρ_b de Uchida et al. (2021).

Tabla 6.11: Valores de parámetros y constantes usados en las simulaciones.

ρ_w (kg/m^3)	ρ_s (kg/m^3)	ρ_b (kg/m^3)	<i>maxCellSize</i> (m)	<i>maxCo</i> (–)
1000	2600	2040	5	0,7

En la Figura 6.46 se muestra la malla creada en OpenFOAM®, esto a partir de un archivo *raster* de 2 m de resolución facilitado por el *Swiss Federeal Institute for Forest, Snow and*

Landscape Research WSL. El diámetro equivalente promedio de la malla es de 2,0 m, mientras que sus valores máximo y mínimo son de 3,2 y 0,5 m.

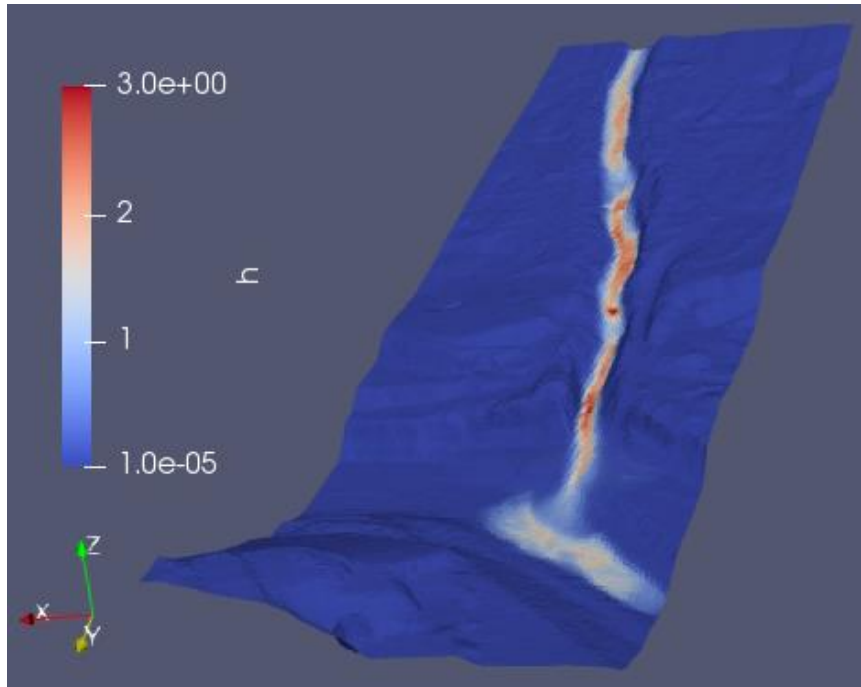


Figura 6.46: Vista de la geometría creada en OpenFOAM®. Los valores mostrados corresponden a la altura del flujo h medida en metros para el caso I1a en $t = 100$ s.

En las figuras 6.47, 6.48 y 6.49 se presentan los valores calculados de caudal, altura y velocidad del flujo en la *check dam* 29 en función del tiempo. Se observa que todas las variables tienden a un valor constante antes de $t = 150$ s, por lo que no es necesario aumentar el tiempo de la simulación. Las curvas asociadas a cada caso se diferencian debido a la cantidad de material incorporado, el cual eleva la altura y el caudal en el frente del flujo, mientras que la velocidad se mantiene prácticamente invariante.

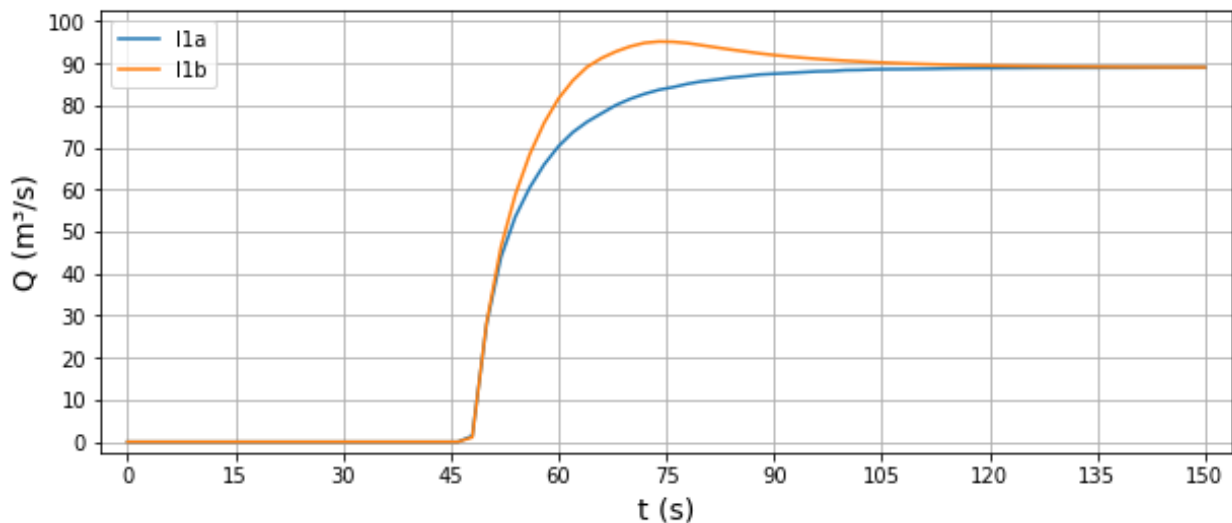


Figura 6.47: Caudal calculado en *check dam* 29 para los casos I1a e I1b.

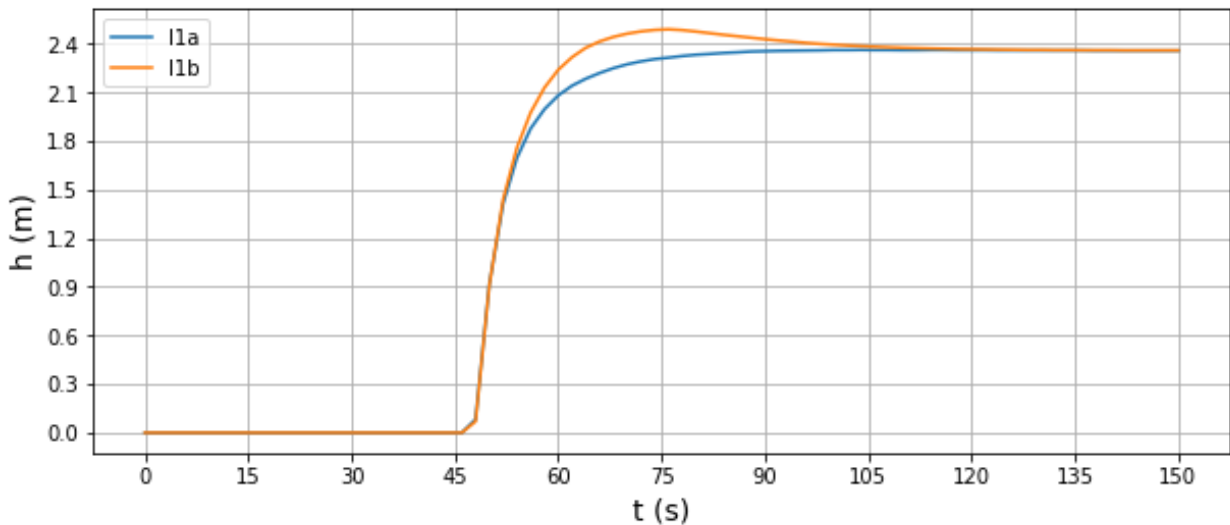


Figura 6.48: Altura del flujo en *check dam* 29 para los casos I1a e I1b.

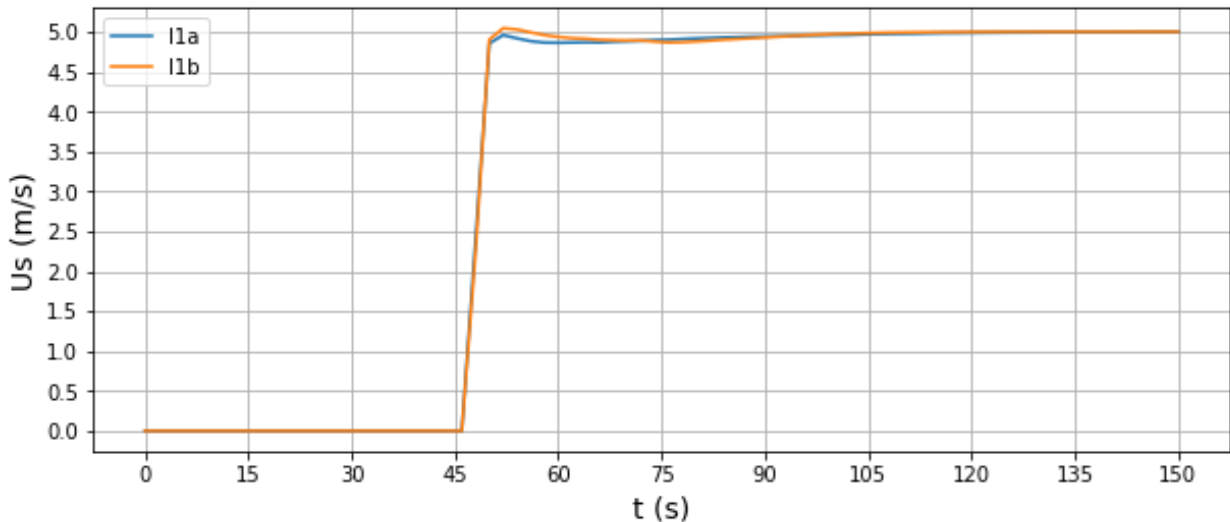


Figura 6.49: Velocidad del flujo en *check dam* 29 para los casos I1a e I1b.

En la Figura 6.50 se presenta la profundidad de erosión obtenida al final de ambas simulaciones. Esta se complementa con la Figura 6.51, donde se muestra la erosión en el centro del cauce medida en la dirección del flujo.

La profundidad de erosión calculada por el caso I1a en el sector de los sensores es igual a $0,12m$, siendo por tanto inferior a las reportadas por Berger et al. (2011b). Es por esto que se definió el caso I1b, donde la erosión alcanza $0,55 m$, siendo este valor mucho más cercano al valor máximo reportado durante el evento de julio de 2008. Entre ambos casos solo se varía el valor de $dz/d\tau$, debido a que es este el que limita cuánto material puede ser incorporado por el flujo. A partir de los cambios de caudal y de altura de flujo mostrados en las figuras 6.47 y 6.48, se concluye que la erosión ocurre en la parte delantera del flujo, tal como se midió durante el evento.

Es claro que, al incrementar cinco veces el valor de $dz/d\tau$, las profundidades de erosión aumentan, aproximadamente, en la misma razón (ver Figura 6.50). Los valores máximos para ambos casos están inmediatamente aguas arriba de *check dam* 29 (ver Figura 6.51), lo que se debe a que esta impone un control hidráulico sobre el flujo, elevando la altura de este y por tanto los valores de τ_b .

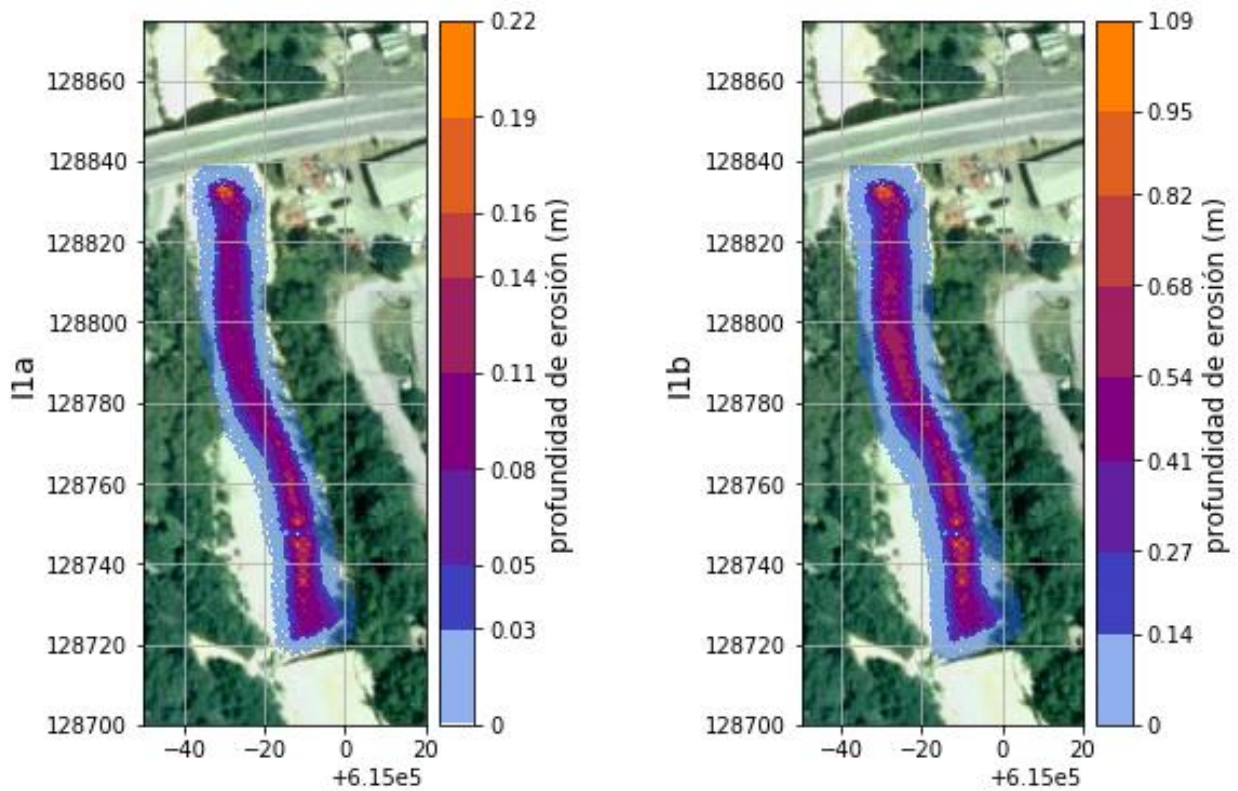


Figura 6.50: Profundidad de erosión calculada para $t = 150$ s.

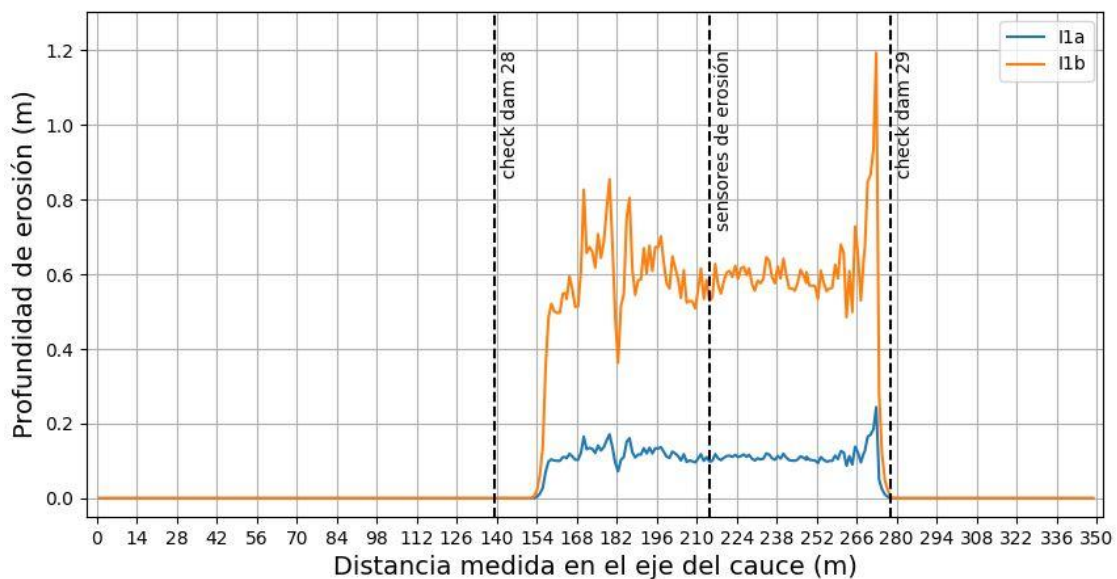


Figura 6.51: Profundidad de erosión máxima medida en el centro del perfil longitudinal.

En la Figura 6.52 se muestra la velocidad calculada en el perfil longitudinal para el caso I1a. En esta se marca además la posición de las *check dams* 28 y 29, junto al promedio de las velocidades entre ellas, el cual corresponde a $5,64 \text{ m/s}$ (*prom1*). No obstante, es claro que la zona inmediatamente aguas abajo de las *check dams* no queda bien representada, esto debido a que al crear la geometría no se genera una pared vertical, sino un plano inclinado donde el flujo acelera (ver Figura 6.53). Para evitar sobredimensionar la velocidad promedio, se calcula un segundo valor entre la *check dam* 29 y el perfil transversal ubicado 20 m aguas abajo de la *check dam* 28, donde la velocidad es igual al valor máximo reportado por Berger et al. (2011b). Este segundo promedio, el cual en la Figura 6.52 corresponde a la recta *prom2*, es igual a $5,36 \text{ m/s}$.

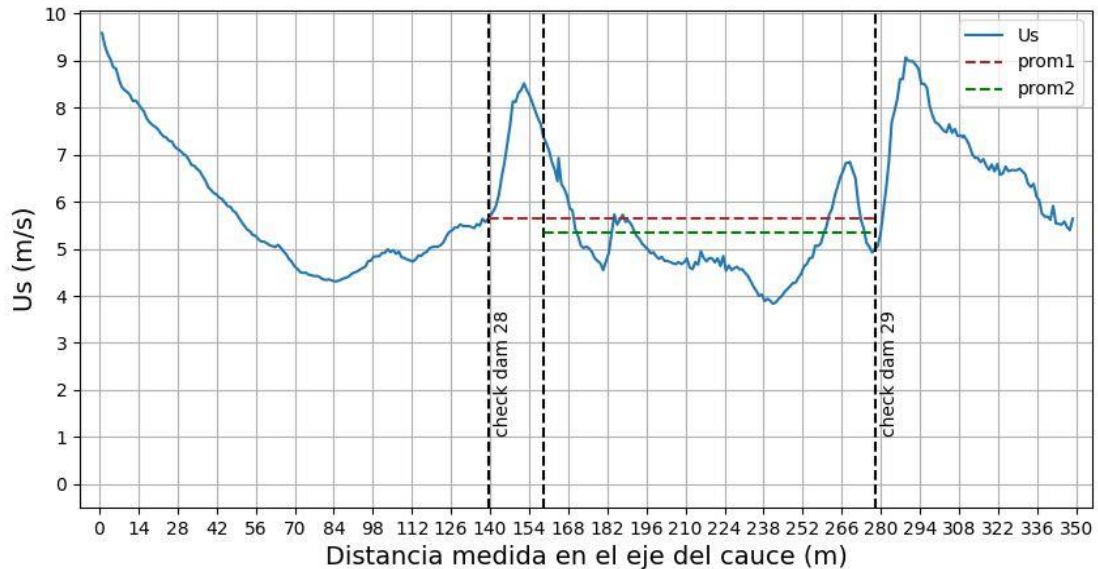


Figura 6.52: Velocidad máxima del flujo medida en el perfil longitudinal para el caso I1a.

Se observa que los parámetros friccionales calibrados permiten generar un buen ajuste respecto a los valores medidos durante el evento. En particular, la altura máxima en la *check dam* 29 es de $2,4 \text{ m}$, mientras que la velocidad promedio entre ambas *check dams* es de $5,36 \text{ m/s}$. Estos valores son muy parecidos a los reportados por Berger et al. (2011b), siendo estos $2,35 \text{ m}$ y $5,3 \text{ m/s}$. No obstante, es claro que el caso I1a considera profundidades de erosión menores a las medidas en los sensores de erosión. Por su parte, el caso I1b genera un mejor ajuste en esta variable, aunque produce un leve incremento en la altura máxima del frente. Se concluye por tanto que el *solver debrisfaSavageHutterFoam* es capaz de reproducir de buena forma el frente del flujo detrítico ocurrido en el Illbragen en julio de 2008. Se debe tener en cuenta, no obstante, que esta conclusión se obtiene a partir de los pocos datos que se tienen del evento.

Para finalizar, se observa que en la condición de borde se tienen velocidades mucho mayores a las reportadas para este evento (ver Figura 6.52), lo cual se debe a la forma como estas son calculadas en el *solver*. Se aprecia de todas formas que la velocidad decae rápidamente, llegando a un valor que oscila en torno a los 5 m/s . Esto muestra la importancia de mover la condición de borde lejos de la zona de interés, de modo que los resultados no se vean afectados. Otros valores máximos de velocidad se aprecian aguas

abajo de ambas *check dams* (ver Figura 6.53), lo cual se debe a que la geometría no es bien representada en dichas secciones, teniéndose un plano inclinado de gran pendiente en vez de una pared vertical y un vertimiento sobre esta.

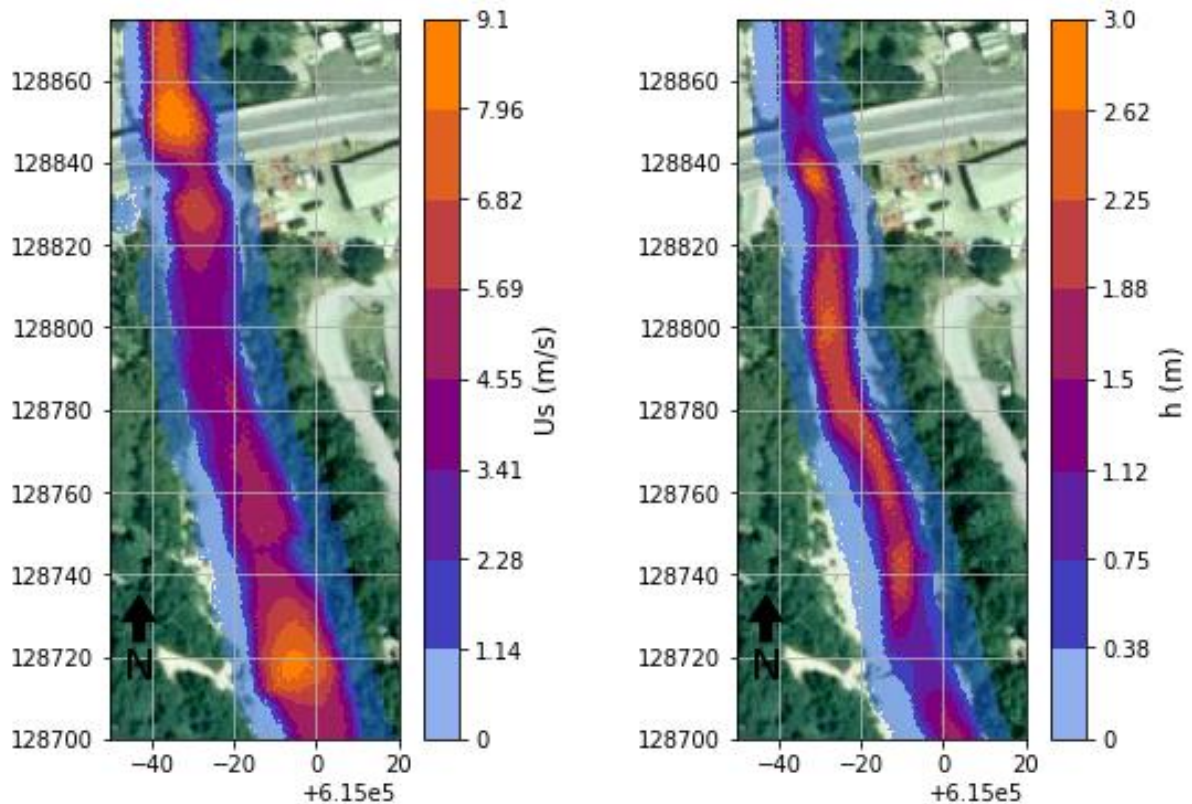


Figura 6.53: Velocidad y altura del flujo para el caso I1a en $t = 150$ s.

6.5. Escalamiento del solver

En esta sección se muestra el escalamiento del *solver debrisfaSavageHutterFoam*. Para esto se utilizarán los casos E3F2 y E3F2+ mostrados en la sección 6.2, el caso H2 de las simulaciones en la quebrada Crucecita y el caso I1b mostrado en el Illgraben. Estas simulaciones se consideran como representativas de sus respectivas geometrías.

Algunos de los parámetros más relevantes de cada una de estas simulaciones se resumen en la Tabla 6.12. En esta, Q_{max} es el caudal máximo calculado en el dominio, L es una medida de la distancia que recorre el flujo, d_{celda} es el diámetro equivalente medio de los elementos de la malla, N es el número de celdas de la malla, $T_{computo}$ es el tiempo que le toma al *solver* resolver cada caso y $T_{simulacion}$ es el tiempo que dura el flujo modelado. Se omite mostrar el número de Courant debido a que en todos los casos este tiende rápidamente al valor máximo ingresado como *input*, el cual siempre es 0,7. El tiempo que le toma al *solver* completar la simulación depende de las capacidades del computador utilizado, además de si la simulación es realizada en serie o en paralelo. En

todos los casos, el valor de $T_{computo}$ mostrado en la Tabla 6.12 corresponde al tiempo requerido por un computador Intel Core i7-4770 3,40 GHz de 8 procesadores y 5,8 GB de RAM. Además, el *solver* es utilizado junto a la versión v1812 de OpenFOAM® con 4 procesadores trabajando en paralelo.

Tabla 6.12: Valores de algunos parámetros representativos de las simulaciones seleccionadas.

	E3F2	E3F2+	H2	I1b
$Q_{max}(m^3/s)$	120,7	127,1	51,9	95,5
$v_{max}(m/s)$	8,4	8,3	5,8	9,6
$L(m)$	748	748	461	350
$d_{celda}(m)$	2,1	2,1	3,0	2,0
$N(-)$	71079	71079	49001	28248
$T_{computo}(s)$	4059	3204	1310	647
$T_{simulacion}(s)$	600	600	300	150

A continuación, se mostrará el escalamiento del *solver*, para lo cual se utiliza cada uno de los casos antes mencionados. Por escalamiento se entiende cuantificar la variación en el tiempo requerido de cómputo para resolver un problema dependiendo de cuántos procesadores o unidades de cálculo se emplean con dicho fin de forma simultánea. Como parámetros de medición se utilizarán el *speedup* (S) y la eficiencia (E), definidos como:

$$S = \frac{T_{seq}}{T_{par}} \quad (6.8)$$

$$E = \frac{S}{p} \quad (6.9)$$

donde T_{seq} es el tiempo que toma ejecutar la tarea en un solo procesador, mientras que T_{par} es el tiempo requerido para ejecutar la misma tarea en p procesadores (Trobec et al., 2018). Los resultados obtenidos se presentan en la Figura 6.54, donde T_{par} incluye el tiempo de reconstrucción de la malla en el caso de simulaciones ejecutadas en paralelo. La reconstrucción de la malla se realiza utilizando el código *Par_reconstructPar.py*, el cual fue desarrollado como parte de esta Tesis y funciona, en términos generales, de mejor forma que la utilidad *reconstrucPar*, la cual se encuentra compilada por defecto en OpenFOAM®. El funcionamiento del código *Par_reconstructPar.py* puede ser revisado en el Anexo B de esta Tesis.

En la Figura 6.54 se observa que, si bien la eficiencia disminuye, esta se mantiene por sobre 0,5 en todos los casos cuando se utilizan cuatro o menos procesadores en conjunto. Así, se concluye que el *solver* está preparado para ser ejecutado en simulaciones en paralelo, aunque no se descarta que se puedan aplicar mejoras que incrementen significativamente su eficiencia.

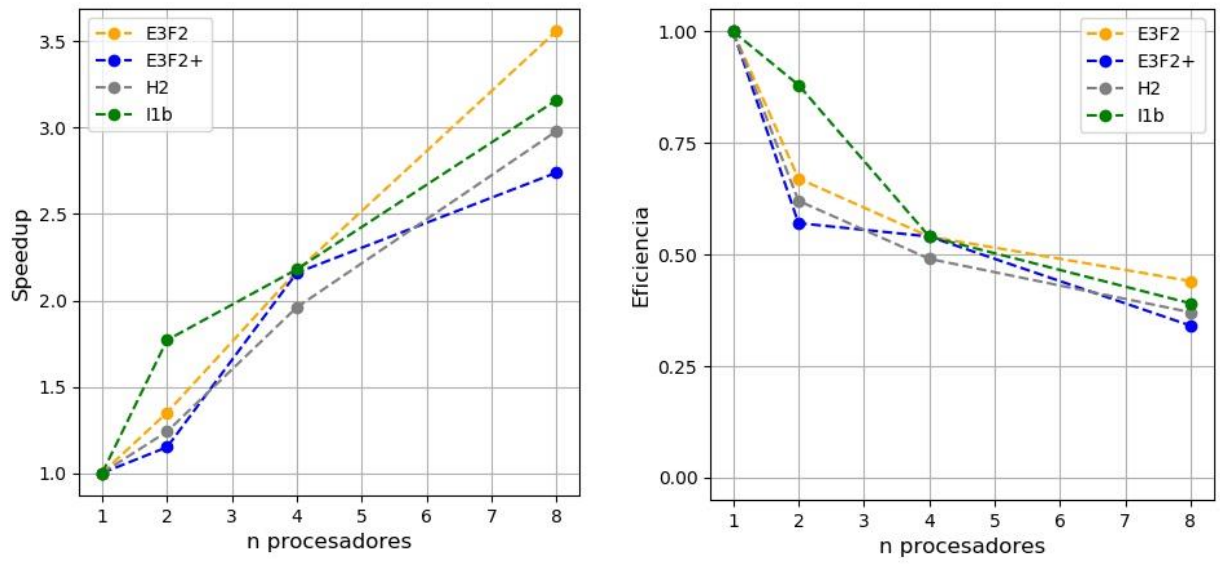


Figura 6.54: *Speedup* y eficiencia calculada para algunas aplicaciones del solver *debrisfaSavageHutterFoam*.

Capítulo 7

Conclusiones

El resultado más importante de esta Tesis es la creación de una herramienta computacional capaz de modelar numéricamente el movimiento de flujos detríticos de densidad variable sobre geometrías tridimensionales complejas. Debido a que el modelo es implementado en OpenFOAM®, una plataforma de código abierto y de libre acceso, cualquier usuario puede extender, mejorar y/o usar el modelo descrito en este trabajo.

Además del *solver*, en este trabajo se generaron una serie de códigos de Python, los cuales permiten crear la malla usada en la modelación (*txt2obj.py*) y procesar los resultados obtenidos (*read_debris_case.py* y *Par_reconstructPar.py*). Si bien estos códigos fueron diseñados para funcionar en conjunto a *debrisfaSavageHutterFoam*, estos pueden ser fácilmente adaptados para funcionar con cualquier otro *solver* de OpenFOAM®.

En el modelo numérico generado se incluyen los procesos de erosión y depositación por medio de una serie de ecuaciones que describen la tasa a la cual se intercambia material entre el flujo y el lecho. Junto a esto, es posible utilizar distintos modelos de fricción, los cuales controlan la velocidad de avance y la zona en que el flujo detrítico se detiene. Los modelos de erosión, depositación y fricción son incluidos al modelo por medio de una librería de OpenFOAM® llamada *faDebrisflow*. Esta librería puede ser fácilmente modificada para añadir ecuaciones que no hayan sido incluidas aún.

En esta Tesis, el proceso de erosión es modelado como incorporación de material desde el lecho, y no desde los taludes laterales. Esto pues el *solver* diseñado no es capaz de diferenciar entre ambas secciones del cauce. En el caso de la depositación, las ecuaciones presentadas corresponden a tasas de erosión negativa, y por tanto deben ser utilizadas en secciones donde el flujo se encuentre en movimiento. La detención del flujo es controlada por medio de la ecuación de fricción seleccionada.

Como parte del *solver debrisfaSavageHutterFoam* se diseñaron dos algoritmos. El primero permite incluir una cantidad ilimitada de hidrogramas como condiciones de borde, lo que permite dar inicio al flujo detrítico. Se comprobó que el caudal del flujo generado es igual al ingresado en el hidrograma, además de que las velocidades y alturas

calculadas son del mismo orden de magnitud que las alcanzadas hacia aguas abajo, cuando se llega a un equilibrio entre fuerzas motrices y resistivas. El segundo algoritmo, nombrado algoritmo de modificación del terreno (TMA), permite modificar la geometría sobre la cual el flujo escurre en respuesta al material erosionado y/o depositado por este. El TMA demostró funcionar de forma eficiente al ser incorporado al modelo, modificando efectivamente la geometría de la malla y generando efectos secundarios sobre el flujo. No obstante, el uso de este último incrementa el tiempo de cómputo, lo que debe ser tomado en cuenta al momento de decidir si incluirlo o no en una simulación.

En este trabajo no se hizo un análisis exhaustivo del efecto que tiene sobre la solución las constantes elegidas para usar el TMA. En cambio, solo se usaron los valores que con la experiencia se obtuvo funcionan mejor, lo cual solo dice son mejores que los usados previamente. Además, los valores determinados pueden ser específicos para los casos simulados en esta Tesis, y por tanto no funcionar adecuadamente en otras aplicaciones.

En la formulación del TMA todo pareciera ser generalmente válido a excepción del *Smoother*, el cual, cabe recordar, surge ante la imposibilidad del TMA para llegar a una solución debido a su aplicación a elementos con volúmenes de erosión y/o depositación que siguen una distribución no continua. No se puede descartar que exista una mejor forma de aplicar el *Smoother*, en cuyo caso el resto del TMA se debiese mantener invariable.

Los casos simulados tienen como función demostrar el correcto funcionamiento físico del modelo, además de mostrar los distintos resultados que se pueden obtener a partir de este. En el caso de la quebrada La Mesilla, las alturas, velocidades y área de inundación calculadas son aproximadamente iguales a las calculadas a partir de FLO-2D (Zegers et al., 2017), esto para el flujo detrítico ocurrido en marzo de 2015. Por otro lado, fue posible reproducir de buena forma las mediciones realizadas en el Illgraben durante el flujo detrítico de julio de 2008 (Berger et al., 2011b). Por medio del modelo numérico aquí desarrollado se pueden obtener los mismos resultados que con modelos comerciales como FLO-2D y RAMMS. No obstante, existen diferencias asociadas al tiempo de cómputo y de aprendizaje requeridos. En ambas variables se tiene que, en su etapa actual de desarrollo, el *solver debrisfaSavageHutterFoam* necesita una mayor inversión de tiempo.

De las modelaciones mostradas en la geometría con forma de cuña y en la quebrada Crucecita se concluye la importancia de incorporar el proceso de erosión en la modelación. Esto se debe a los grandes cambios que se pueden generar en las variables más importantes del flujo, como altura, velocidad, caudal y densidad, entre otros.

El resto de las conclusiones obtenidas aplican para cada caso particular y difícilmente pueden ser generalizadas. Por ejemplo, que la posición del centro de gravedad del flujo dependa principalmente de los parámetros de fricción y luego de los de erosión es válido para los modelos de fricción y erosión y la geometría mostrada en la sección 6.2. En una geometría donde el cauce no se ensanche y con un modelo de fricción cuyos parámetros sean sensibles a la concentración de sedimentos esto probablemente no será válido.

Así, debido a lo mucho que aún se desconoce del funcionamiento de los procesos de erosión y depositación, lo mejor es incluirlos por medio de ecuaciones simples. Esto permitiría reducir, al menos en parte, la incertidumbre asociada a los resultados, además de facilitar el análisis de estos. En esta línea, las ecuaciones presentadas por Frank et al. (2015) y McDougall & Hungr (2005) parecieran ser las de mayor utilidad. Por el contrario, ninguna de las ecuaciones de depositación probadas resultó ser de gran ayuda para incluir el proceso en la modelación.

En el caso de los modelos de fricción, el modelo cuadrático ofrece ciertas ventajas, como el que el esfuerzo de corte dependa de la concentración volumétrica de sedimento. Aunque los coeficientes α y β utilizados no están acotados y existe mucha incertidumbre en su determinación. En el caso del modelo de Voellmy, este pareciera ser más simple de utilizar, aunque requiere contar con datos previos de otros flujos detríticos en la zona de interés.

Una ventaja que ofrece el modelo numérico generado en esta Tesis es que permite utilizar cualquier combinación de estas ecuaciones (erosión, depositación y fricción). No obstante, la validez de los resultados obtenidos a partir de su uso debe ser siempre cuestionada, pues los resultados pueden variar mucho en función de los parámetros escogidos para representar estos procesos dentro del modelo.

Respecto a las limitaciones del modelo, es claro que es necesario incrementar la velocidad de cómputo, lo cual se puede lograr aumentando el tamaño de la malla o utilizando un número de Courant menos restrictivo. Para esto, representar de mejor forma el flujo aguas abajo de la condición de borde también sería de ayuda, pues, al tener velocidades típicamente superiores al resto del flujo, se disminuye el paso de tiempo usado en el dominio. Se hace necesario además mejorar la eficiencia del modelo numérico, esto tanto al utilizar el TMA como cuando no, pues en la sección 6.5 se mostró que la eficiencia es superior a 0,5 solo cuando se utilizan cuatro o menos procesadores. Mejorar esto, al menos en el TMA, es bastante posible, pues el proceso interno de envío de información entre procesadores no ha sido depurado y se transmite mucha más información de la estrictamente necesaria.

Se debe mencionar que es siempre necesario que las celdas ubicadas inmediatamente adyacentes al parche donde introduce el flujo, como $maxY_1$ y $maxX_1$ en la Figura 5.4, no estén controladas desde aguas abajo. Esta condición está relacionada a que, si hay control desde aguas abajo, el *solver* buscará modificar los valores de h y U_s en las aristas que definen el parche, lo cual no es posible, debido a que los valores de dichas variables son calculados utilizando el valor del caudal Q y la ecuación de fricción seleccionada, tal como se mostró en la sección 3.7. De darse esta situación, el *solver* es incapaz de llegar a la solución, calculando valores muy altos de h y/o U_s aguas abajo del parche. Si bien esto no necesariamente hace que el *solver* se detenga, sí disminuye de forma excesiva la velocidad de cómputo, pues afecta el cálculo del número de Courant y reduce el valor de Δt . Durante este trabajo se observaron dos posibles situaciones en que las celdas ubicadas junto a un parche de entrada de flujo pueden llegar a estar controladas desde aguas abajo. La primera es que, muy cerca del parche y en la dirección del flujo, se encuentre un obstáculo o un cambio en la geometría que fuerce al flujo a disminuir su velocidad. La segunda opción es que la pendiente del cauce sea pequeña y que el

término asociado a la fuerza motriz sea del mismo orden de magnitud o inferior al término resistivo.

Si bien el problema mencionado en el párrafo anterior pareciera ser limitante, lo cierto es que rara vez se llega a apreciar al utilizar la versión actual de *debrisfaSavageHutterFoam*, esto debido a que las pendientes de las quebradas donde se generan flujos detríticos suelen ser altas. Es posible de todos modos que la forma como se calculan h y U_s en las condiciones de borde pueda ser mejorada, de modo tal que si hay control desde aguas abajo estos se adapten. Llevar a cabo estas mejoras será uno de los objetivos de una futura versión del *so/ver*.

Es posible evaluar la inclusión al modelo de una ecuación de difusión para la presión de poros, al igual que generar una versión que considere de forma separada las dos fases del flujo. Posiblemente no existe gran ganancia en generar una versión 3D del modelo, no obstante, se debe notar que la misma formulación aquí presentada para el TMA puede ser replicada, sin mayores inconvenientes, para un caso 3D.

En este trabajo se optó por no hacer ningún cambio a la librería de área finitas (FA) de OpenFOAM®, pues esto está más allá de los objetivos iniciales. No obstante, sería recomendable incluir en la librería gran parte de los códigos generados en esta Tesis, lo cual mejoraría la forma como opera el modelo numérico.

Bibliografía

Ancey, C. (2001). 21 Debris Flows and Related Phenomena. In *Geomorphological fluid mechanics* (pp. 528-547). Springer, Berlin, Heidelberg.

Bagnold, R. A. (1954). Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 225(1160), 49-63.

Bartelt, P., Bieler, C., Bühler, Y., Christen, M., Deubelbeiss, Y., Graf, C., McArdell, B. W., Salz, M., Schneider, M. (2017). RAMMS—rapid mass movement simulation, A numerical model for debris flows in research and practice, user manual v1. 7.0, debris flow, manuscript update: Noveber 2017. *WSL Institute for Snow and Avalanche Research SLF*, Disponible en: https://ramms.slf.ch/ramms/downloads/RAMMS_DBF_Manual.pdf (último acceso: 30 abril 2021).

Benda, L. (1990). The influence of debris flows on channels and valley floors in the Oregon Coast Range, USA. *Earth Surface Processes and Landforms*, 15(5), 457-466.

Berger, C., McArdell, B. W., & Schlunegger, F. (2011a). Sediment transfer patterns at the Illgraben catchment, Switzerland: Implications for the time scales of debris flow activities. *Geomorphology*, 125(3), 421-432.

Berger, C., McArdell, B. W., & Schlunegger, F. (2011b). Direct measurement of channel erosion by debris flows, Illgraben, Switzerland. *Journal of Geophysical Research: Earth Surface*, 116(F1).

Brufau, P., Garcia-Navarro, P., Ghilardi, P., Natale, L., & Savi, F. (2000). 1D mathematical modelling of debris flow. *Journal of hydraulic research*, 38(6), 435-446.

Cao, Z., Pender, G., Wallis, S., & Carling, P. (2004). Computational dam-break hydraulics over erodible sediment bed. *Journal of hydraulic engineering*, 130(7), 689-703.

Christen, M., Kowalski, J., & Bartelt, P. (2010). RAMMS: Numerical simulation of dense snow avalanches in three-dimensional terrain. *Cold Regions Science and Technology*, 63(1-2), 1-14.

- Christen, M., Bühler, Y., Bartelt, P., Leine, R., Glover, J., Schweizer, A., ... & Volkwein, A. (2012). Integral hazard management using a unified software environment. In 12th Congress Interpraevent (pp. 77-86).
- Costa, J. E. (1984). Physical geomorphology of debris flows. In Developments and applications of geomorphology (pp. 268-317). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Cotroneo, J., Montserrat, G., Montserrat, S., Niño, Y., & Tamburrino, A. (2018) Modelo físico de obras de desvío aluvional quebrada de Macul, Región Metropolitana, Chile.
- Cuomo, S., Pastor, M., Capobianco, V., & Cascini, L. (2016). Modelling the space–time evolution of bed entrainment for flow-like landslides. *Engineering geology*, 212, 10-20.
- D'Agostino, V., & Tecca, P. R. (2006). Some considerations on the application of the FLO-2D model for debris flow hazard assessment. *WIT Transactions on Ecology and the Environment*, 90.
- D'Aniello, A., Cozzolino, L., Cimorelli, L., Della Morte, R., & Pianese, D. (2015). A numerical model for the simulation of debris flow triggering, propagation and arrest. *Natural Hazards*, 75(2), 1403-1433.
- de Haas, T., Braat, L., Leuven, J. R., Lokhorst, I. R., & Kleinhans, M. G. (2015). Effects of debris flow composition on runout, depositional mechanisms, and deposit morphology in laboratory experiments. *Journal of Geophysical Research: Earth Surface*, 120(9), 1949-1972.
- Egashira, S., Honda, N., & Itoh, T. (2001). Experimental study on the entrainment of bed material into debris flow. *Physics and Chemistry of the Earth, Part C: Solar, Terrestrial & Planetary Science*, 26(9), 645-650.
- Fagents, S. A., & Baloga, S. M. (2006). Toward a model for the bulking and debulking of lahars. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 111(B10).
- Ferziger, J. H., & Peric, M. (2002). *Computational methods for fluid dynamics*. 3th edition. Springer, Germany.
- FLO-2D Software, Inc., 2015, Simulating Mudflows: White Paper, *Disponible en: <https://www.flo-2d.com/download> (último acceso: 30 abril 2021)*.
- FLO-2D Software, Inc., 2017, FLO-2D Reference Manual, Build No. 17: *Disponible en: <https://www.flo-2d.com/download> (último acceso: 30 abril 2021)*.
- Frank, F., McArdell, B. W., Huggel, C., & Vieli, A. (2015). The importance of entrainment and bulking on debris flow runout modeling: examples from the Swiss Alps. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 15(11), 2569-2583.

- Frank, F., McArdell, B. W., Oggier, N., Baer, P., Christen, M., & Vieli, A. (2017). Debris-flow modeling at Meretschibach and Bondasca catchments, Switzerland: sensitivity testing of field-data-based entrainment model. *Natural hazards and earth system sciences*, 17(5), 801.
- Gallino, G. L., & Pierson, T. C. (1984). The 1980 Polallie Creek debris flow and subsequent dam-break flood, East Fork Hood River basin, Oregon (No. 84-578). US Geological Survey.
- Gómez, T., J. Cepeda, M. Lagos y S. Montserrat. (2017). Modelación hidrológica de la tormenta 25m en la cuenca del río Huasco: validación de caudales usando datos sedimentológicos. XXIII Congreso de Ingeniería Hidráulica, Soc. Chilena de Ingeniería Hidráulica, 18-20 de octubre, Valparaíso, Chile.
- Gray, J. M. N. T., & Edwards, A. N. (2014). A depth-averaged $\mu(I)$ -rheology for shallow granular free-surface flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 755, 503.
- Hauser, A. (1985). Flujos de barro en la zona preandina de la Región Metropolitana: características, causas, efectos, riesgos y medidas preventivas. *Revista geológica de Chile: An international journal on andean geology*, (24), 75-92.
- Hauser, A. (2002). Rock avalanche and resulting debris flow in Estero Parraguire and Rio Colorado, Regio'n Metropolitana, Chile. *Catastrophic landslides: effects, occurrence and mechanisms. Geological Society of America Reviews in Engineering Geology*, 15, 135-148.
- Hungr, O., Morgan, G. C., & Kellerhals, R. (1984). Quantitative analysis of debris torrent hazards for design of remedial measures. *Canadian Geotechnical Journal*, 21(4), 663-677.
- Hungr, O. (1995). A model for the runout analysis of rapid flow slides, debris flows, and avalanches. *Canadian Geotechnical Journal*, 32(4), 610-623.
- Hungr, O. (2005). Classification and terminology. In *Debris-flow hazards and related phenomena* (pp. 9-23). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Hungr, O., McDougall, S., & Bovis, M. (2005). Entrainment of material by debris flows. In *Debris-flow hazards and related phenomena* (pp. 135-158). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Iverson, R. M. (1997). The physics of debris flows. *Reviews of geophysics*, 35(3), 245-296.
- Iverson, R. M., Reid, M. E., & LaHusen, R. G. (1997). Debris-flow mobilization from landslides. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 25(1), 85-138.
- Iverson, R. M., & Vallance, J. W. (2001). New views of granular mass flows. *Geology*, 29(2), 115-118.

- Iverson, R. M., & Denlinger, R. P. (2001). Flow of variably fluidized granular masses across three-dimensional terrain: 1. Coulomb mixture theory. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 106(B1), 537-552.
- Iverson, R. M. (2003). The debris-flow rheology myth. *Debris-flow hazards mitigation: mechanics, prediction, and assessment*, 1, 303-314.
- Iverson, R. M. (2005). Debris-flow mechanics. In *Debris-flow hazards and related phenomena* (pp. 105-134). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Iverson, R. M., Reid, M. E., Logan, M., LaHusen, R. G., Godt, J. W., & Griswold, J. P. (2011). Positive feedback and momentum growth during debris-flow entrainment of wet bed sediment. *Nature Geoscience*, 4(2), 116-121.
- Iverson, R. M. (2012). Elementary theory of bed-sediment entrainment by debris flows and avalanches. *Journal of Geophysical Research: Earth Surface*, 117(F3).
- Iverson, R. M. (2013). Mechanics of debris flows and rock avalanches. *Handbook of Environmental Fluid Dynamics*, 1, 573-587.
- Iverson, R. M., & Ouyang, C. (2015). Entrainment of bed material by Earth-surface mass flows: Review and reformulation of depth-integrated theory. *Reviews of Geophysics*, 53(1), 27-58.
- Jasak, H., Weller, H. G., & Gosman, A. D. (1999). High resolution NVD differencing scheme for arbitrarily unstructured meshes. *International journal for numerical methods in fluids*, 31(2), 431-449.
- Julien, P. Y., & Lan, Y. (1991). Rheology of hyperconcentrations. *Journal of Hydraulic Engineering*, 117(3), 346-353.
- Juretić, F. (2015). *cfMesh Version 1.1 User Guide*. *Disponibile en:* http://cfMesh.com/wp-content/uploads/2015/09/User_Guide-cfMesh_v1.1.pdf (último acceso: 30 abril 2021).
- King, J. P. (1996). *Tsing Shan Debris Flow*. Geotechnical Engineering Office, Hong Kong Government, Special Project Report SPR 6/96. Kowloon, Hong Kong. 100 pp.
- Major, J. J., & Pierson, T. C. (1992). Debris flow rheology: Experimental analysis of fine-grained slurries. *Water resources research*, 28(3), 841-857.
- Major, J. J. (1997). Depositional processes in large-scale debris-flow experiments. *The Journal of Geology*, 105(3), 345-366.
- Major, J. J., & Iverson, R. M. (1999). Debris-flow deposition: Effects of pore-fluid pressure and friction concentrated at flow margins. *Geological Society of America Bulletin*, 111(10), 1424-1434.

- Mangoney, A., Roche, O., Hungr, O., Mangold, N., Faccanoni, G., & Lucas, A. (2010). Erosion and mobility in granular collapse over sloping beds. *Journal of Geophysical Research: Earth Surface*, 115(F3).
- McArdell, B. W., Bartelt, P., & Kowalski, J. (2007). Field observations of basal forces and fluid pore pressure in a debris flow. *Geophysical research letters*, 34(7).
- McCoy, S. W., Kean, J. W., Coe, J. A., Staley, D. M., Wasklewicz, T. A., & Tucker, G. E. (2010). Evolution of a natural debris flow: In situ measurements of flow dynamics, video imagery, and terrestrial laser scanning. *Geology*, 38(8), 735-738.
- McCoy, S. W., Kean, J. W., Coe, J. A., Tucker, G. E., Staley, D. M., & Wasklewicz, T. A. (2012). Sediment entrainment by debris flows: In situ measurements from the headwaters of a steep catchment. *Journal of Geophysical Research: Earth Surface*, 117(F3).
- McDougall, S., & Hungr, O. (2004). A model for the analysis of rapid landslide motion across three-dimensional terrain. *Canadian Geotechnical Journal*, 41(6), 1084-1097.
- McDougall, S., & Hungr, O. (2005). Dynamic modelling of entrainment in rapid landslides. *Canadian Geotechnical Journal*, 42(5), 1437-1448
- Montserrat, S. (2005). Estudio experimental de obras de protección contra aluviones. Tesis para optar al grado de Magister en ciencias de la ingeniería, mención Recursos y Medio Ambiente Hídrico, Universidad de Chile.
- Moukalled, F., Mangani, L., & Darwish, M. (2016). *The finite volume method in computational fluid dynamics* (Vol. 113). Berlin, Germany: Springer.
- O'Brien, J. S., & Julien, P. Y. (1985). Physical properties and mechanics of hyperconcentrated sediment flows. *Proc. ASCE HD Delineation of landslides, flash flood and debris flow Hazards*.
- O'Brien, J. S., & Julien, P. Y. (1988). Laboratory analysis of mudflow properties. *Journal of hydraulic engineering*, 114(8), 877-887.
- O'Brien, J. S., Julien, P. Y., & Fullerton, W. T. (1993). Two-dimensional water flood and mudflow simulation. *Journal of hydraulic engineering*, 119(2), 244-261.
- OpenCFD Ltd. (2020a). OpenFOAM - the open source CFD toolbox - User Guide v2012. Disponible en: <https://www.openfoam.com/documentation/overview>. (último acceso: 30 abril 2021).
- OpenCFD Ltd. (2020b). OpenFOAM - the open source CFD toolbox – API Guide v2012. Disponible en: <https://www.openfoam.com/documentation/guides/latest/api/files.html> (último acceso: 30 abril 2021).
- Pierson, T. C. (1980). Debris flows. *Rev*, 39, 3-14.

Pierson, T. C., Janda, R. J., Thouret, J. C., & Borrero, C. A. (1990). Perturbation and melting of snow and ice by the 13 November 1985 eruption of Nevado del Ruiz, Colombia, and consequent mobilization, flow and deposition of lahars. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 41(1-4), 17-66.

Pommerell, C. (1992). Solution of large unsymmetric systems of linear equations (Doctoral dissertation, ETH Zurich).

Rauter, M., Kofler, A., Huber, A., & Fellin, W. (2018). faSavageHutterFOAM 1.0: depth-integrated simulation of dense snow avalanches on natural terrain with OpenFOAM. *Geoscientific Model Development*, 11(7), 2923-2939.

Rauter, M., & Tuković, Ž. (2018). A finite area scheme for shallow granular flows on three-dimensional surfaces. *Computers & Fluids*, 166, 184-199.

Rickenmann, D. (1999). Empirical relationships for debris flows. *Natural hazards*, 19(1), 47-77.

Rickenmann, D., Weber, D., & Stepanov, B. (2003). Erosion by debris flows in field and laboratory experiments. *Debris-flow hazards mitigation: mechanics, prediction, and assessment*, 1, 883-894.

Salm, B. (1993). Flow, flow transition and runout distances of flowing avalanches. *Annals of Glaciology*, 18, 221-226.

Santi, P. M., dewolfe, V. G., Higgins, J. D., Cannon, S. H., & Gartner, J. E. (2008). Sources of debris flow material in burned areas. *Geomorphology*, 96(3-4), 310-321.

Savage, S. B., & Hutter, K. (1989). The motion of a finite mass of granular material down a rough incline. *Journal of fluid mechanics*, 199, 177-215.

Savage, S. B., & Hutter, K. (1991). The dynamics of avalanches of granular materials from initiation to runout. Part I: Analysis. *Acta Mechanica*, 86(1-4), 201-223.

Schlunegger, F., Badoux, A., McArdell, B. W., Gwerder, C., Schnydrig, D., Rieke-Zapp, D., & Molnar, P. (2009). Limits of sediment transfer in an alpine debris-flow catchment, Illgraben, Switzerland. *Quaternary Science Reviews*, 28(11-12), 1097-1105.

Schürch, P., Densmore, A. L., Rosser, N. J., & McArdell, B. W. (2011). Dynamic controls on erosion and deposition on debris-flow fans. *Geology*, 39(9), 827-830.

Servicio Nacional de Geología y Minería de Chile (2016). Registro de los principales desastres de origen geológico en Chile y efectos sobre la población y bienes públicos y privados desde 1980. Sernageomin N°14860-B *Disponible en: <https://biblioteca.sernageomin.cl/opac/datafiles/14860-B.pdf> (último acceso: 30 abril 2021)*.

Takahashi, T. (1991). *Debris Flow*. Rotterdam, Netherlands, Balkema, 165 p.

Takahashi, T., Nakagawa, H., Harada, T., & Yamashiki, Y. (1992). Routing debris flows with particle segregation. *Journal of Hydraulic Engineering*, 118(11), 1490-1507.

Trenberth, K. E. (2011). Changes in precipitation with climate change. *Climate Research*, 47(1-2), 123-138.

Trobec, R., Slivnik, B., Bulic, P., & Robic, B. (2018). *Introduction to Parallel Computing: From Algorithms to Programming on State-of-Art Platforms*. Springer.

Tuković, Ž. (2005). *Metoda kontrolnih volumena na domenama promjenjivog oblika* (Doctoral dissertation, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje).

Tuković, Ž., & Jasak, H. (2012). A moving mesh finite volume interface tracking method for surface tension dominated interfacial fluid flow. *Computers & fluids*, 55, 70-84.

Uchida, T., Nishiguchi, Y., Nakatani, K., Satofuka, Y., Yamakoshi, T., Okamoto, A., & Mizuyama, T. (2013). New numerical simulation procedure for large-scale debris flows (Kanakano-LS). *International Journal of Erosion Control Engineering*, 6(2), 58-67.

Uchida, T., Nishiguchi, Y., McArdeil, B. W., & Satofuka, Y. (2021). The role of the phase shift of fine particles on debris flow behavior: a numerical simulation for a debris flow in Illgraben, Switzerland. *Canadian Geotechnical Journal*, 58(1), 23-34.

Van der Vorst, H. A. (1992). Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on scientific and Statistical Computing*, 13(2), 631-644.

VanDine, D. F. (1996). Debris flow control structures for forest engineering. Res. Br., BC Min. For., Victoria, BC, Work. Pap, 8, 1996.

Voellmy, A. (1955). Uber die Zerstorkraft von Lawinen. *Schweizerische Bauzeitung*, Jahrg., 73: 212-285.

Zegers, G., A. Garcés y S. Montserrat. (2017). Modelación 2D de flujos aluvionales. Aplicación a la quebrada La Mesilla, provincia de Huasco. XXIII Congreso de Ingeniería Hidráulica, Soc. Chilena de Ingeniería Hidráulica, 18-20 de octubre, Valparaíso, Chile.

Anexos

Anexo A

Esquemas de interpolación de alta resolución

Debido a que la implementación en OpenFOAM® de los esquemas HR se basa en la *Normalized Variable Formulation* (NVF) y en el método *Total Variation Diminishing* (TVD) (OpenCFD, 2020b), aquí ambos serán usados para explicar su implementación. Esto sin ningún interés particular en especificar sus diferencias, dado que se puede demostrar que estos son prácticamente iguales (Moukalled et al., 2016, pp. 450-454). Primero, se buscará alcanzar un mayor entendimiento de los criterios de acotamiento o *Convection Boundedness Criterion* (CBC), las cuales son las condiciones que un esquema de advección debe satisfacer para ser acotado. El CBC será explicado usando la formulación NVF-CBC, luego para el cálculo de los coeficientes W_F se introducirá la formulación asociada al TVD.

Se reconoce, en primer lugar, que el valor de ϕ_f depende principalmente de los valores vecinos, tal que $\phi_f = f(\phi_C, \phi_D, \phi_U)$ y que, para preservar la monotonicidad, este valor debe estar acotado por los valores de ϕ en las celdas adyacentes, tal que:

$$\min(\phi_C, \phi_D) \leq \phi_f \leq \max(\phi_C, \phi_D) \quad (\text{A.1})$$

Para un mayor entendimiento, los valores de ϕ pueden ser normalizados usando los valores de ϕ_U y ϕ_D .

$$\tilde{\phi} = \frac{\phi - \phi_U}{\phi_D - \phi_U} \quad (\text{A.2})$$

Esto significa que $\tilde{\phi}_D = 1$ y $\tilde{\phi}_U = 0$, y luego el valor normalizado de ϕ_f puede ser escrito solo como función de $\tilde{\phi}_C$:

$$\tilde{\phi}_f = f(\tilde{\phi}_C) \Rightarrow \min(\tilde{\phi}_C, 1) \leq \tilde{\phi}_f \leq \max(\tilde{\phi}_C, 1) \quad (\text{A.3})$$

Las CBC pueden ser resumidas en (Moukalled et al., 2016, pp. 436-438):

- 1) $f(\tilde{\phi}_C)$ debe ser una función continua. De otro modo la estabilidad y convergencia del método iterativo no pueden ser aseguradas.
- 2) Si $\tilde{\phi}_C = 1$, entonces $\tilde{\phi}_f = 1$. Esto se debe a que $\tilde{\phi}_C = 1 \Rightarrow \phi_C = \phi_D$ y debido a que ambos elementos adyacentes tienen el mismo valor, no hay razón para asignar un valor distinto a la arista que tienen en común.
- 3) Si $\tilde{\phi}_C = 0$, entonces $\tilde{\phi}_f = 0$. Esto se debe a que $\tilde{\phi}_C = 0 \Rightarrow \phi_C = \phi_U$. Lo que significa que el flujo es principalmente advectivo y el esquema *upwind* debe ser seguido.
- 4) Si $0 < \tilde{\phi}_C < 1$ entonces $\tilde{\phi}_C < \tilde{\phi}_f < 1$. Esto preserva la monotonicidad del esquema.
- 5) Si $\tilde{\phi}_C < 0$ o $\tilde{\phi}_C > 1$ entonces $\tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_C$. Esto significa que el valor en el nodo U es un máximo o mínimo y el esquema *upwind* debe ser seguido.

El NVF puede ser representado gráficamente usando el diagrama de variable normalizada (*Normalized Variable Diagram* o NVD), donde la función $f(\tilde{\phi}_C)$ debe pasar a través de los puntos (0,0) y (1,1) (condiciones 2 y 3 de las CBC). Fuera del rango [0,1] $f(\tilde{\phi}_C)$ debe seguir el esquema *upwind* (condición 5 de las CBC) y en el rango [0,1] debe estar en el triángulo superior del cuadrado [0,1]x[0,1] (condición 4). Se puede demostrar que cualquier esquema de segundo orden puede ser escrito como una combinación entre los esquemas CD y SOU, y luego $f(\tilde{\phi}_C)$ debe yacer en la zona limitada por ambos esquemas (área azul de la Figura A.1). Diferentes esquemas HR basados en esquemas HO y que cumplen las CBC han sido desarrollados, como MINMOD, OSHER y SUPERBEE, los cuales se basan todos en el esquema SOU. En la Figura A.1, los esquemas *upwind* (UP), lineal (CD), *downwind* (DW), SOU y SUPERBEE son ilustrados usando el NVD.

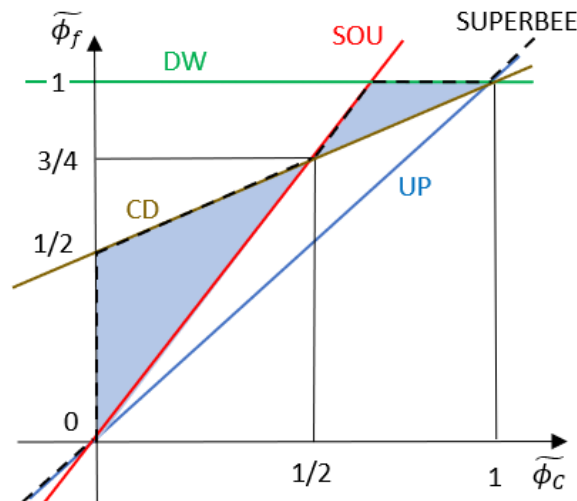


Figura A.1: Representación utilizando el NVD de los esquemas *Upwind* (línea azul), *Downwind* (línea verde), lineal o CD (línea café), SOU (línea roja) y SUPERBEE (línea negra segmentada). Todos los esquemas que estén definidos en la zona azul serán de segundo orden.

Aunque la función $f(\tilde{\phi}_C)$, la cual está formada por un conjunto de curvas en el rango [0,1] del NVD, define a un esquema HR, esta no dice nada acerca de cómo calcular los valores W_{F_f} necesarios para escribir ϕ_f como una función de ϕ_O y ϕ_N (ecuación (4.34)). Para

lograr esto, la formulación del TVD es introducida. Partiendo desde el esquema CD, ϕ_f puede ser escrito como la suma del esquema *upwind* (ϕ_C) y un término anti-difusivo ($\phi_D - \phi_C$):

$$\phi_f = W_{CD}\phi_O + (1 - W_{CD})\phi_N \quad (\text{A.4})$$

$$\Rightarrow \phi_f = \begin{cases} \phi_C + (1 - W_{CD})(\phi_D - \phi_C) & \text{si } \phi_C = \phi_O \\ \phi_C + W_{CD}(\phi_D - \phi_C) & \text{si } \phi_C = \phi_N \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Una función limitante $\psi(r_f)$ es introducida para restringir el efecto del término anti-difusivo con el objetivo de preservar la exactitud de segundo orden del esquema CD, pero previniendo la creación de oscilaciones no físicas. Luego, ϕ_f puede ser calculado como:

$$\phi_f = \begin{cases} \phi_C + (1 - W_{CD})\psi(r_f)(\phi_D - \phi_C) & \text{si } \phi_C = \phi_O \\ \phi_C + W_{CD}\psi(r_f)(\phi_D - \phi_C) & \text{si } \phi_C = \phi_N \end{cases} ; \text{ con } r_f = \frac{\phi_C - \phi_U}{\phi_D - \phi_C} \quad (\text{A.6})$$

Antes de analizar cómo $\psi(r_f)$ está relacionado con $f(\tilde{\phi}_C)$, un nuevo valor de W_{F_f} que incorpora $\psi(r_f)$ será deducido, esto es usualmente referido como el *Downwind Weighing Factor* (DWF) (Moukalled et al., 2016, pp. 459-461). La ecuación (4.34) puede ser reescrita como:

$$\phi_f = \phi_O + (1 - W_{F_f})(\phi_N - \phi_O) \quad (\text{A.7})$$

Comparando con la ecuación (A.6):

$$W_{F_f} = \begin{cases} \psi W_{CD} + (1 - \psi) & \text{si } \phi_C = \phi_O \\ \psi W_{CD} & \text{si } \phi_C = \phi_N \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Luego, introduciendo el esquema *upwind* para juntar ambos casos en una sola ecuación:

$$W_{F_f} = \psi W_{CD} + (1 - \psi)W_{UP} \quad (\text{A.9})$$

Esta ecuación es utilizada por cada esquema HR en OpenFOAM® para calcular W_{F_f} y luego reemplazar este valor en la ecuación (4.34) (OpenCFD, 2020b). Queda pendiente por tanto mostrar cómo calcular $\psi(r_f)$.

Aunque la formulación TVD puede ser deducida de forma separada a NVF, teniendo sus propias CBC y representación gráfica (diagrama $r - \psi$ o de Sweby), debido a que se puede demostrar que son muy similares, aquí solo una relación entre ambas formulaciones es mostrada. Primero, la siguiente relación entre r_f y $\tilde{\phi}_C$ puede demostrarse a partir de las ecuaciones (A.2) y (A.6).

$$r_f = \frac{\tilde{\phi}_C}{1 - \tilde{\phi}_C} \quad (\text{A.10})$$

Luego, la siguiente igualdad puede ser fácilmente probada:

$$f(\tilde{\phi}_C) = \frac{\psi(r_f) + 2r_f}{2(1 + r_f)} \quad (\text{A.11})$$

Esto significa que todo esquema HR desarrollado en NVF puede ser escrito en la formulación TVF y viceversa. Una lista de esquemas HR con sus representaciones usando TVF y NVF puede ser encontrada en Moukalled et al. (2016). En ambos casos, sin embargo, el valor de ϕ_U debe ser reconstruido debido a que en mallas no estructuradas determinar cuál es elemento U no es simple y a veces el resultado no es único. La forma más simple de hacer esto es suponer que el centroide del elemento C se encuentra a medio camino entre U y D , luego ϕ_U puede ser calculado usando el gradiente en C (Jasak et al., 1999; Moukalled et al., 2016, pp. 456):

$$\phi_U = \phi_D - 2\nabla\phi_C \cdot \mathbf{d}_{CD} \quad (\text{A.12})$$

Reemplazando esto en la definición de r_f en la ecuación (A.6) y luego en la ecuación (A.10):

$$r_f = \frac{2\nabla\phi_C \cdot \mathbf{d}_{CD}}{\phi_D - \phi_C} - 1; \quad \tilde{\phi}_C = 1 - \frac{\phi_D - \phi_C}{2\nabla\phi_C \cdot \mathbf{d}_{CD}} \quad (\text{A.13})$$

Luego, el procedimiento para calcular implícitamente el término advectivo utilizando un esquema HR es:

1. Calcular $\nabla\phi_C$ y $\nabla\phi_f$
2. Calcular r_f o $\tilde{\phi}_C$
3. Con la geometría de la malla calcular W_{CD} y con los flujos $Flux_f$ calcular W_{UP}
4. Calcular ψ usando r_f o $f(\tilde{\phi}_C)$
5. Calcular W_F usando $W_F = \psi W_{CD} + (1 - \psi)W_{UP}$ y reemplazar en la ecuación discretizada

Este procedimiento, el cual es el seguido por cada esquema HR en OpenFOAM® para calcular los coeficientes W_F , puede ser utilizado para incorporar cualquier esquema HR al código, siendo la única opción disponible hasta el momento en la librería FA el esquema Gamma (Jasak et al., 1999). Sin embargo, es importante notar que las características alcanzadas con los esquemas HR no están relacionadas a la estabilidad del sistema de ecuaciones. Debido a que no existe dependencia directa con ϕ_U y es demasiada la influencia dada a ϕ_D , el conjunto de ecuaciones resultante es altamente inestable, siendo esta una de las principales causas detrás de algunos de los problemas numéricos que se manifiestan cuando los esquemas HR son usados para resolver problemas donde la advección es dominante en OpenFOAM® (Moukalled et al., 2016, pp. 460-463).

Anexo B

Instalación y tutorial del solver

En este Anexo se entregan los pasos básicos de instalación y compilación del *solver debrisfaSavageHutterFoam* en OpenFOAM®, esto junto al tutorial de un caso simple de aplicación de este. Las siguientes instrucciones están pensadas para ser seguidas por un usuario que esté previamente relacionado con el sistema operativo Ubuntu, el *software* OpenFOAM® y el lenguaje de programación Python.

Los pasos de instalación de OpenFOAM® pueden ser revisados en <https://www.openfoam.com/download/openfoam-installation-from-source>, mientras que los códigos de la última y pasadas versiones se pueden encontrar en <https://www.openfoam.com/download/release-history>. El correcto funcionamiento del *solver*, así como de los códigos de Python que se utilizan junto a este, han sido probados en las versiones de OpenFOAM® desarrolladas por OpenCFD Ltd hasta la versión v2012.

B.1. Instalación

El *solver* junto a los códigos anexos a este pueden ser descargados desde <https://github.com/alvarocgb/debrisfaSavageHutterFoam-v1.0.git> o por medio del programa *git* escribiendo en la terminal de Ubuntu:

```
$ git clone https://github.com/alvarocgb/debrisfaSavageHutterFoam-v1.0.git
```

Para instalar *git* se puede ejecutar en la terminal:

```
$ sudo apt install git
```

En primer lugar, se deben compilar el *solver debrisfaSavageHutterFoam*, la utilidad *newreleaseAreaMapping* y la librería *faDebrisflow*, cuyos códigos fuente se ubican en la carpeta *debrisfaSavageHutterFoam-v1.0/Applications*. Para compilar la librería se debe

utilizar el archivo *Allwmake* ubicado en *Applications/src*. Para ejecutarlo desde la terminal, primero se debe modificar el permiso de acceso al archivo, para lo cual se debe escribir:

```
$ chmod +x Allwmake
```

Luego, se debe ingresar:

```
$ ./Allwmake
```

de no surgir ningún error, la librería *faDebrisflow* debería quedar correctamente compilada.

El siguiente paso es compilar la utilidad *newreleaseAreaMapping*. Para esto desde la terminal se debe acceder a *Applications/newreleaseAreaMapping* y utilizar el compilador incluido por defecto en OpenFOAM®, para lo cual se debe ingresar en la terminal:

```
$ wmake
```

El último paso es compilar el *solver*, el cual se encuentra en *Applications/debrisfaSavageHutterFoam*. Este se compila utilizando *wmake*, esta vez desde la carpeta que tiene el código fuente del *solver*.

B.2. Tutorial

En *debrisfaSavageHutterFoam-v1.0/Run/wedge* se encuentran todos los archivos necesarios para simular un caso simple con el *solver debrisfaSavageHutterFoam*, el cual corresponde al caso E3F2 mostrado en la sección 6.2. La versión incluida en el repositorio está configurada para utilizar cuatro procesadores en paralelo, lo cual, en caso de ser requerido, puede ser modificado cambiando el nombre del archivo *decomposePar* leído desde *Allrun-parallel*, asegurándose, en primer lugar, que el archivo ingresado exista en */Run/wedge/system*. En caso de querer realizar la simulación en un único procesador, el procedimiento siguiente se debe seguir utilizando el archivo *Allrun-serial* en vez de *Allrun-parallel*.

Para simular el caso en paralelo se debe ejecutar el archivo *Allrun-parallel*, para la cual se debe ingresar en la terminal:

```
$ chmod +x Allrun-parallel  
$ ./Allrun-parallel
```

Se ejecutará en primer lugar *pMesh*, que se encarga de crear la malla tridimensional, y luego *makeFaMesh*, que extrae una de las superficies de dicha malla para ser utilizada en el método de áreas finitas. Seguido a esto se utiliza *newreleaseAreaMapping*, que crea las condiciones iniciales, *decomposePar*, que descompone la malla para ejecutar la simulación en paralelo, y luego el *solver debrisfaSavageHutterFoam*. Finalmente, se

utiliza la utilidad *reconstructPar* para reconstruir los resultados a partir de los cálculos realizados por cada procesador.

Si bien con la utilidad *reconstructPar* basta para reconstruir una simulación ejecutada en paralelo, lo cierto es que esta demora demasiado tiempo si es que se ha modificado la malla. Para reducir el tiempo de cómputo asociado a la reconstrucción de los resultados, se puede utilizar el código *Par_reconstructPar.py*, el cual se ejecuta desde la terminal utilizando el archivo de instrucciones *run_Par_reconstruct*, donde se deben ingresar los *inputs* que necesita el código para funcionar. Copias del código de Python y del archivo de instrucciones se encuentran en */Run/wedge*. Mayores detalles de los *inputs* que necesita el código para funcionar se entregan en la sección B.4. Para ejecutar el código *Par_reconstructPar.py* basta con introducir en la terminal:

```
$ bash run_Par_reconstruct
```

El código *read_debris_case.py*, ubicado en la carpeta *debrisfaSavageHutterFoam-v1.0/Postprocessing*, y del cual se dan muchos más detalles en el Anexo D, se utiliza para leer los archivos entregados por OpenFOAM® y generar una serie de resultados a partir del análisis de estos. De forma análoga al código anterior, este se ejecuta desde la terminal por medio de:

```
$ bash run_read_case
```

En el archivo de instrucciones *run_read_case*, del cual se entrega una copia en *debrisfaSavageHutterFoam-v1.0/Run/wedge*, se deben escribir los valores de los *inputs* necesarios, así como activar qué resultados se quieren generar al ejecutar el código.

Para analizar los resultados y generar gráficos y/o videos de la simulación se utiliza el código *read_Results.py*, el cual se ubica en *debrisfaSavageHutterFoam-v1.0/Postprocessing*. La clase básica definida en el código se llama *Results*, la cual requiere como *input* la ubicación de la carpeta de la simulación. A continuación, se muestra un ejemplo de la aplicación del código, el cual debe ser ejecutado directamente en Python, utilizando para esto, por ejemplo, la plataforma Spyder.

```
#Ubicación de la carpeta de la simulación.  
>> path = 'C:\Users\...\debrisfaSavageHutterFoam-v1.0\Run\wedge'  
#Inicialización de un objeto de la clase Results.  
>> R = Results(path)  
#Se activa la lectura de todos los archivos ubicados en la carpeta Results.  
>> R.activate_all()  
#Se leen todos los archivos ubicados en la carpeta Results.  
>> R.get_all()  
#Se crea en Run/wedge/Results/Images un video de la altura del flujo en  
función del tiempo.  
>> R.plot_h_video()
```

Además de la función `plot_h_video()`, existen en el código `read_Results.py` una gran cantidad de funciones, las cuales permiten analizar de forma gráfica y/o cuantitativa los resultados entregados por el `solver` y generar imágenes y videos con los resultados.

B.3. Estructura de archivos

En esta sección se enumeran y describen los archivos requeridos para ejecutar una simulación utilizando el `solver debrisfaSavageHutterFoam`. Una copia de cada uno de estos archivos, los cuales son mostrados en la Figura B.1, se entrega en la carpeta `debrisfaSavageHutterFoam-v1.0/Run/wedge`. En la Figura B.1 los nombres en color azul corresponden a archivos requeridos en el procesamiento de resultados y por tanto el `solver` puede funcionar sin estos.

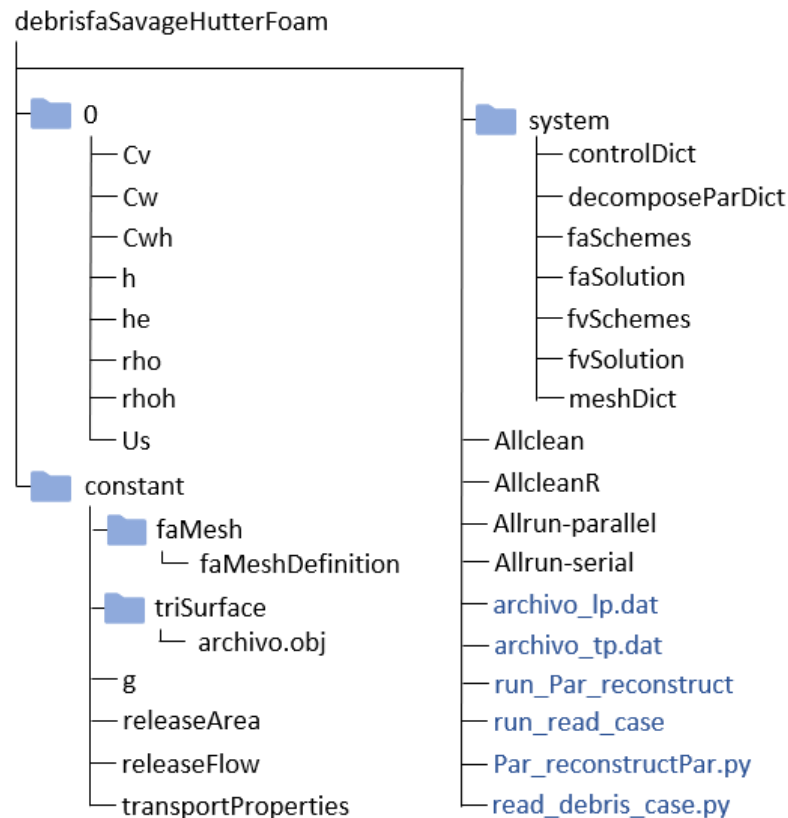


Figura B.1: Estructura de archivos para casos del `solver debrisfaSavageHutterFoam`.

Los archivos en la carpeta `/0` corresponden a las condiciones iniciales de la simulación. En caso de modificar el número o nombre de los parches, lo que ocurre al mover la zona donde ingresa el flujo o al agregar más entradas, se hace necesario modificar los archivos en la carpeta. Por parche se entiende un conjunto de aristas que forman el borde del dominio de modelación. Al utilizar la utilidad `newreleaseAreaMapping` algunos de los archivos pueden ser modificados, específicamente `/0/he`, `/0/h` y `0/rho`, esto para dar cuenta de la condición inicial impuesta por el usuario.

En *debrisfaSavageHutterFoam-v1.0/Run/wedge* está incluida la carpeta */0.orig* en vez de la carpeta */0*, esto se debe a que, al utilizar las funciones internas de OpenFOAM® encargadas de la eliminación de archivos, la carpeta */0* es borrada. Para evitar perder la información asociada a la condición inicial, toda modificación a estos archivos se debe realizar en la carpeta */0.orig*, y luego hacer una copia de esta con el nombre correcto de la carpeta. Esta instrucción está incorporada en los archivos *Allrun-parallel* y *Allrun-serial*.

En la carpeta */constant* se incluyen los archivos que contienen la información de las condiciones de borde, constantes y otros parámetros que controlan los procesos físicos que se incluyen en la simulación. En la tabla siguiente se describe la función de cada uno de estos archivos.

Tabla B.1: Descripción de archivos ubicados en la carpeta *constant*.

<i>faMeshDefinition</i>	Se indica el nombre del parche que se debe extraer al utilizar la utilidad <i>makeFaMesh</i> . El método de áreas finitas es utilizado usando dicha superficie como dominio geométrico.
<i>archivo.obj</i>	Archivo en formato .OBJ que contiene la información geométrica de la malla tridimensional.
<i>g</i>	Valor de la aceleración gravitatoria.
<i>releaseArea</i>	Información de la condición inicial de la simulación.
<i>releaseFlow</i>	Información de la condición de borde de flujo que ingresa al dominio geométrico.
<i>transportProperties</i>	Se asigna el valor a las constantes usadas en las ecuaciones, junto a la selección de los modelos de fricción, erosión y depositación.

En la carpeta */system* se ubican todos los archivos que controlan la discretización de las ecuaciones, el método iterativo y el control de los pasos de tiempo. En la tabla siguiente se entrega una breve descripción de cada uno de estos

Tabla B.2: Descripción de archivos ubicados en la carpeta *system*.

<i>controlDict</i>	Control de pasos de tiempo usados en la simulación.
<i>decomposeParDict</i>	Selección del número de procesadores a usar en una simulación en paralelo.
<i>faSchemes</i>	Selección de los métodos de discretización usados para los términos incluidos en las ecuaciones del modelo.
<i>faSolution</i>	Selección del método iterativo usado para resolver las ecuaciones matriciales, así como valores de las variables que controlan la convergencia del método iterativo secuencial del modelo.
<i>fvSchemes</i> <i>fvSolution</i>	Al crear el elemento de volúmenes finitos se requiere la existencia de archivos con estos nombres. No obstante, estos no contienen ninguna información.
<i>meshDict</i>	Información relativa a la creación de la malla a partir del archivo de formato OBJ (<i>archivo.obj</i>).

Finalmente, existe una serie de archivos que, si bien no son necesarios para utilizar el *solver*, son útiles en la ejecución de este o durante el procesamiento de los resultados que este entrega. Si bien muchos de estos archivos ya fueron mencionados, en la Tabla B.3 se describe la utilidad de cada uno de estos.

Tabla B.3: Descripción de archivos opcionales.

<i>Allclean</i>	Archivo de instrucciones usado para eliminar todos los archivos creados al ejecutar el <i>solver</i> .
<i>AllcleanR</i>	Misma función que <i>Allclean</i> , pero además elimina la carpeta <i>/Results</i> creada por el código <i>read_debris_case.py</i> .
<i>Allrun-parallel</i>	Archivo de instrucciones usado para ejecutar el <i>solver</i> y el resto de utilidades en paralelo.
<i>Allrun-serial</i>	Archivo de instrucciones usado para ejecutar el <i>solver</i> y el resto de utilidades en un único procesador.
<i>archivo_lp.dat</i>	Contiene información del o los perfiles longitudinales que sigue el flujo. Archivo útil en el procesamiento de resultados.
<i>archivo_tp.dat</i>	Contiene información del o los perfiles transversales asociados a cada perfil longitudinal que sigue el flujo. Archivo útil en el procesamiento de resultados.
<i>run_Par_reconstruct</i>	Archivo de instrucciones para ejecutar el código <i>Par_reconstructPar.py</i> .
<i>run_read_case</i>	Archivo de instrucciones para ejecutar el código <i>read_debris_case.py</i> .
<i>Par_reconstructPar.py</i>	Código usado para reconstruir los archivos generados en una simulación en paralelo. Más detalles se entregan en la sección B.4.
<i>read_debris_case.py</i>	Código usado para procesar los resultados de una simulación en que se haya utilizado el <i>solver debrisfaSavageHutterFoam</i> . Más detalles se entregan en el Anexo D.

B.4. Reconstrucción de casos ejecutados en paralelo

Tal como se mencionó previamente, el código *Par_reconstructPar.py* puede ser utilizado para reconstruir los archivos generados por una simulación realizada en paralelo del *solver debrisfaSavageHutterFoam*. La razón de utilizar este código y no la utilidad *reconstructPar*, la cual se encuentra compilada por defecto en OpenFOAM®, es que esta última, en los casos en que se ha modificado la malla, siempre reconstruye los archivos ligados a esta, lo cual requiere una gran cantidad de tiempo de cómputo y de memoria. A esto se debe añadir que la utilidad *reconstructPar* solo puede ser ejecutada en un procesador a la vez. El código *Par_reconstructPar.py* no tiene ninguna de estas

limitantes, por lo que opera de mejor manera en compañía del *solver* creado en esta Tesis.

La forma más simple de utilizar el código *Par_reconstructPar.py* es desde la carpeta de la simulación, utilizando para esto el archivo de instrucciones *run_Par_reconstruct*, del cual se muestra un ejemplo a continuación:

```
#Ejemplo del archivo run_Par_reconstruct
mpirun -n 4 python3 Par_reconstructPar.py -h_flag -Cv_flag -Us_flag -Q_flag
-deltaz0_flag
```

Tal como se puede apreciar, en este se indica que se debe utilizar el código *Par_reconstructPar.py* con cuatro procesadores en paralelo y reconstruyendo los archivos *h*, *Cv*, *Us*, *Q* y *deltaz0*. Más detalles de los posibles *inputs* del código se muestran en la Tabla B.4.

Tabla B.4: Descripción de los *inputs* del código *Par_reconstructPar.py*.

-path	Ubicación de la carpeta de la simulación.
-o	Nombre de la carpeta donde se deben reconstruir los archivos.
-h_flag	Activa la reconstrucción de los archivos <i>h</i> (altura del flujo).
-Cv_flag	Activa la reconstrucción de los archivos <i>Cv</i> (concentración volumétrica de sedimentos).
-deltaz0_flag	Activa la reconstrucción de los archivos <i>deltac0</i> o <i>deltah0</i> (profundidad de erosión), según corresponda.
-Us_flag	Activa la reconstrucción de los archivos <i>Us</i> (velocidad del flujo).
-Q_flag	Activa la reconstrucción de los archivos <i>Q</i> (caudal).
-tau_flag	Activa la reconstrucción de los archivos <i>tau</i> (esfuerzo de corte basal de flujo).
-pb_flag	Activa la reconstrucción de los archivos <i>pb</i> (presión basal del flujo).
-phi2s_flag	Activa la reconstrucción de los archivos <i>phi2s</i> (flujo másico).
-withZero	Activa la reconstrucción de los archivos para $t = 0$.

Si se utiliza el código desde la carpeta de la simulación no es necesario entregar la ubicación de esta por medio de *-path*. En caso de no ingresar un nombre por medio de la variable *-o*, el código reconstruye los resultados directamente en la carpeta de la simulación, tal como lo haría la utilidad *reconstructPar*.

En la versión actual del código este solo es capaz de reconstruir los archivos mostrados en la Tabla B.4, aunque puede ser fácilmente extendido para aumentar su utilidad. El código ha sido probado hasta la versión v2012 de OpenFOAM® y se observaron pequeñas diferencias entre esta versión y las previas, como la v1812, específicamente en el formato de los archivos escritos por el *software*. Estas pequeñas diferencias hacen probable que, para usar el código *Par_reconstructPar.py* con versiones futuras de OpenFOAM®, este requiera ser actualizado.

Anexo C

Creación de la malla

En *debrisfaSavageHutterFoam-v1.0/Mesh generation/Wedge* (ver Anexo B.1) se encuentra el código *wedge_generator.py*, el cual puede ser utilizado para generar el archivo *raster* usado en la simulación del tutorial (Anexo B), llamado *cuna_two_slopes_20y10.asc*, y los archivos *tp_wedge_two_slopes_20y10.dat* y *lp_wedge_two_slopes_20y10.dat*, los cuales son necesarios al usar el código *read_debris_case.py*. El código *wedge_generator.py* debe ser ejecutado directamente desde Python e internamente se pueden modificar las constantes que definen la geometría creada.

El código *txt2obj.py*, ubicado en la misma carpeta que *wedge_generator.py*, sirve para convertir cualquier archivo *raster* en un archivo formato OBJ, siendo este uno de los tipos de archivo que pueden ser utilizados junto a *pMesh* para generar una malla tridimensional en OpenFOAM®. Para utilizar el código se puede usar el archivo de instrucciones *run_txt2obj*, donde se deben ingresar los *inputs* necesarios para la ejecución de *txt2obj.py*. En este se puede seleccionar, entre otros, la resolución de la malla creada, el nombre de esta y las subdivisiones generadas sobre sus parches.

Si no se modifica nada dentro del archivo *run_txt2obj* ubicado en */Mesh generation/Wedge*, entonces al ejecutar en la terminal la línea mostrada a continuación se debería generar un archivo llamado *cuna_two_slopes_20y10.obj*, siendo este igual al archivo ubicado en *debrisfaSavageHutterFoam-v1.0/Run/wedge/constant/trisurface*.

```
$ bash run_txt2obj
```

Toda la información geométrica de la malla creada en OpenFOAM® debe estar contenida en el archivo OBJ. Entendiendo esto, dentro del código *txt2obj.py* están programadas una gran cantidad de opciones y funciones, entre las que se encuentran el cambiar la resolución de la malla, utilizar solo una fracción del área definida por el *raster* original y el separar los bordes de la malla en una cantidad ilimitada de parches. Todas las opciones recién mencionadas son controladas por medio de los *inputs* mostrados en la Tabla C.1.

Tabla C.1: Descripción de los *inputs* del código *txt2obj.py*.

-i	Nombre del archivo <i>raster</i> con la información altimétrica de la superficie a modelar.
-o	Nombre del archivo OBJ de salida.
-xres -yres	Número de elementos de la malla en las direcciones x e y. Estos valores pueden omitirse, en cuyo caso se utiliza, respectivamente, el número de columnas (<i>ncols</i>) y de filas (<i>nrows</i>) del archivo <i>raster</i> .
-p1 -p2 -p3 -p4	Coordenadas usadas para seleccionar un subconjunto del <i>raster</i> original (ver Figura 5.1 a) y b)). Las coordenadas de los nuevos puntos extremos deben ser ingresadas en sentido horario.
-fillup	Se rellena el <i>raster</i> en caso de este tener vacíos. Esto se hace interpolando con los elementos vecinos a cada celda sin datos.
-exactcopy	Indica que se debe utilizar la resolución y la geometría del <i>raster</i> original.
-offsetx -offsety	Utilizados para trasladar el origen del sistema de coordenadas.
-alphamaxY -alphaminY -alphamaxX -alphaminX	En cada <i>input</i> se entrega una lista con una cantidad par de números en el rango $[0,1]$. Indica en cuantos segmentos se debe dividir cada parche, ya sea <i>maxY</i> , <i>minY</i> , <i>maxX</i> o <i>minX</i> (ver Figura 5.2), y como se deben agrupar las aristas que los forman. Si bien esto no modifica la geometría guardada en el archivo OBJ, si cambia la forma y el orden en que son almacenados los vértices y las caras, de modo que es posible dividir las aristas en múltiples segmentos y aplicar luego distintas condiciones de borde en cada una de ellas.
-maxY -minY -maxX -minX	Para cada <i>input</i> se entrega una lista de puntos (coordenadas x,y) que definen los parches <i>maxY</i> , <i>minY</i> , <i>maxX</i> y <i>minX</i> . Estos son utilizados para crear una geometría no rectangular (ver Figura 5.1 c)), cuya ventaja es la posibilidad de generar una superficie que siga la trayectoria esperada del flujo y no un cuadrilátero que comprenda un área mucho mayor.
-zmax	Diferencia de altura entre la superficie superior de la malla tridimensional (<i>maxZ</i>) y la superficie interior (<i>terrain</i>) (ver Figura 5.3). Para la mayoría de los casos no será necesario introducir un valor pues este es calculado internamente.

Anexo D

Procesamiento de resultados

Con tal de analizar los resultados obtenidos al usar el *solver* *debrisfaSavageHutterFoam* se han desarrollado los códigos de Python *read_debris_case.py* y *read_Results.py*, los cuales se encuentran en la carpeta *debrisfaSavageHutterFoam-v1.0/Postprocessing* (ver Anexo B.1).

La función principal del código *read_debris_case.py* es interpolar los resultados desde una malla no estructurada cualquiera a una malla estructurada rectangular. La ventaja de esto es que los nuevos valores son mucho más fáciles de utilizar para generar resultados o imágenes a partir de estos, como mapas de inundación o de riesgo. Es posible además definir perfiles longitudinales y transversales en la dirección del flujo y calcular el caudal, velocidad y altura del frente, cambios en la geometría del cauce, etc.

Mientras que todos los cálculos son realizados en el código anteriormente mencionado, en *read_Results.py* están incluidas las funciones que permiten generar gráficos y videos de la simulación. La ventaja de separar ambos procesos es que de este modo las interpolaciones realizadas en el código *read_Results.py* se realizan solo una vez para cada simulación. Luego, solo se deben cargar los datos en el otro código cada vez que sea necesario, lo que es casi inmediato. Una segunda ventaja es que el tamaño de los archivos generados por *read_Results.py* es al menos un orden de magnitud menor al de los archivos originales generados por OpenFOAM®. Así, es posible solo almacenar estos resultados y eliminar los archivos generados por el *solver*, lo que reduce enormemente la cantidad de memoria requerida.

Se elaboró el código *read_debris_case.py* de modo tal que el usuario tenga la mayor libertad posible al definir qué resultados quiere generar, buscando ser lo más eficiente posible en el tiempo de cómputo y en la utilización de los recursos computacionales disponibles. Los *inputs* requeridos por el código se muestran en la Tabla D.1.

Para ejecutar el código *read_debris_case.py*, lo más sencillo es escribir los *inputs* necesarios en un archivo de instrucciones, el cual en este trabajo ha sido llamado *run_read_case*, y luego ejecutarlo desde la terminal, tal como se muestra a continuación:

```
$ bash run_read_case
```

Una copia del archivo *run_read_case* se entrega junto al material anexo a esta Tesis. No obstante, a continuación, se entrega un ejemplo de este, donde se indica que el código *read_debris_case.py* es ejecutado en cuatro procesadores trabajando en paralelo, que los archivos generados deben ser guardados en la carpeta llamada *Results* y que los perfiles longitudinales y transversales están definidos en los archivos *lp_wedge_two_slopes_20y10.dat* y *tp_wedge_two_slopes_20y10.dat*.

#Ejemplo del archivo run_read_case.

```
mpirun -n 4 python3 read_debris_case.py -path './' -o 'Results' -lp  
'lp_wedge_two_slopes_20y10.dat' -tp 'tp_wedge_two_slopes_20y10.dat' -dx 5  
-dy 5 -rx 10 -ry 10 -alpha 0.9 -niter 3 -alphafield 0 -niterfield 0 -h_flag -Cv_flag  
-Us_flag -deltaz0_flag -Sm_flag -rcg_flag -M_flag -V_flag -Q_flag
```

De todas las variables mencionadas en la Tabla D.1 las únicas que son obligatorias son *-path*, *-dx*, *-dy*, *-rx* y *-ry*. Si se activa el cálculo del caudal o flujo másico se requiere un archivo con el o los perfiles longitudinales del flujo, además de los perfiles transversales de estos, los cuales pueden ser determinados a partir de un archivo externo (*-tp*) o con las variables *-dist* y *-ntp*. En términos generales, con estas dos últimas variables basta para definir correctamente los perfiles transversales, aunque en ciertos casos, como cuando existen obstáculos que hacen que el flujo se bifurque, el algoritmo no es capaz de calcularlos de forma correcta y lo mejor es definirlos de forma externa al código.

Definir los perfiles longitudinales que sigue el flujo no es posible sin antes realizar una simulación de este, por lo que muchas veces se convierte en un procedimiento de prueba y error. Un método que ha demostrado ser efectivo es el de definir los perfiles longitudinales y transversales a partir de una simulación que utilice un caudal superior al máximo esperado, esto sin considerar erosión ni depositación de material. A partir de la trayectoria del flujo se puede definir el o los perfiles longitudinales junto a sus perfiles transversales. Debido a que no hay intercambio de material con el lecho, para un tiempo suficientemente alto el flujo en todo el cauce debiese ser constante y el caudal igual al ingresado en la condición de borde. Es posible que en ciertas zonas el caudal obtenido sea menor al esperado, lo que indica que los perfiles transversales no son suficientemente anchos o que el o los perfiles longitudinales no están correctamente definidos. Se deben modificar los datos de los perfiles ingresados hasta que el caudal calculado sea constante en todo el cauce.

Si bien los dos códigos antes mencionados junto a *Par_reconstructPar.py* fueron creados para operar con los resultados del *solver debrisfaSavageHutterFoam*, gran parte de estos pueden ser utilizado con los resultados de otros *solver* de OpenFOAM®. Mientras que en la mayoría de los casos no hay necesidad de realizar cambio alguno a las funciones definidas, en el resto estas pueden ser adaptadas e inclusive extendidas para incluir nuevas funcionalidades.

Tabla D.1: Descripción de los *inputs* del código *read_debris_case.py*.

-path	Ubicación de la carpeta de la simulación.
-o	Nombre de la carpeta donde se guardarán los resultados. Por defecto se guardan en la carpeta <i>Results</i> .
-h_flag	Activa la interpolación de <i>h</i> (altura del flujo).
-pb_flag	Activa la interpolación de <i>pb</i> (presión basal del flujo).
-Cv_flag	Activa la interpolación de <i>Cv</i> (concentración volumétrica de sedimentos).
-deltaz0_flag	Activa la interpolación de <i>deltac0</i> o <i>deltah0</i> (profundidad de erosión), según corresponda.
-Us_flag	Activa la interpolación de <i>Us</i> (velocidad del flujo).
-tau_flag	Activa la interpolación de <i>tau</i> (esfuerzo de corte basal del flujo).
-phi2s_flag	Activa el cálculo del flujo <i>phi2s</i> (flujo másico) en la dirección de cada perfil longitudinal.
-Q_flag	Activa el cálculo del flujo <i>Q</i> (caudal) en la dirección de cada perfil longitudinal.
-lp	Archivo con las coordenadas planimétricas del o los perfiles longitudinales del cauce.
-tp	Archivo con las coordenadas planimétricas que definen los perfiles transversales de cada perfil longitudinal.
-dx -dy	Distancia horizontal en las direcciones <i>x</i> e <i>y</i> de los elementos de la nueva malla rectangular.
-rx -ry	Radio de búsqueda en las direcciones <i>x</i> e <i>y</i> . Estos valores son usados para interpolar de una malla a otra.
-alpha	Valor usado para suavizar la matriz <i>z</i> (coordenada vertical) de la nueva malla.
-niter	Número de iteraciones realizadas al suavizar la matriz <i>z</i> .
-alphafield	Valor usado para suavizar campos escalares y vectoriales de la nueva malla.
-niterfield	Número de iteraciones realizadas al suavizar campos escalares y vectoriales.
-dist -ntp	En caso de no introducir un archivo con las coordenadas de los perfiles transversales, estos son calculados por el código. Los perfiles transversales definidos tendrán un ancho igual a <i>dist</i> y un total de <i>ntp</i> puntos.
-Sm_flag	Activa el cálculo de <i>Sm</i> (tasa de erosión).
-rho_flag	Activa el cálculo de <i>rho</i> (densidad del flujo).
-rcg_flag	Activa el cálculo de <i>rcg</i> (vector posición del centro de gravedad del flujo).
-M_flag	Activa el cálculo de <i>M</i> (masa total de fluido en el dominio geométrico).
-V_flag	Activa el cálculo de <i>V</i> (volumen total de fluido en el dominio geométrico).
-Vsed_flag	Activa el cálculo aproximado de <i>Vsed</i> (volumen total de sedimento incorporado por el flujo en el dominio geométrico).