



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

APROXIMACIÓN DÉBIL PARA ESPACIOS HOMOGÉNEOS SOBRE CUERPOS GLOBALES GEOMÉTRICOS

Felipe Antonio Gambardella d'Etigny

Tesis para optar al título de Magíster en Ciencias Matemáticas

Director de tesis:

Dr. Giancarlo Lucchini Arteche

Miembros de la comisión:

Dr. Luis Arenas Carmona

Dr. Cristián González Avilés

Dr. Diego Izquierdo

Santiago de Chile

Diciembre 2021

Agradecimientos

Me gustaría agradecerle especialmente a Giancarlo Lucchini por ser el mejor profesor guía que podría haber imaginado. Para dejarlo escrito: no se me vaya a olvidar invitarlo a tomar algo.

También me gustaría agradecerle a otros profesores que me acompañaron durante este magíster virtual. Gracias Robert, Nico, Lucho y Anita.

Me gustaría agradecerle a mi familia por el apoyo y por aguantar mis monólogos incomprensibles de matemática durante la elaboración de esta tesis (y quizás durante toda mi carrera...). Hacer esta tesis habría sido imposible sin el apoyo de mis padres, mis hermanas, la Fer y la Juana Rosa. Sobre todo en pandemia, su apoyo fue importantísimo.

Por último me gustaría darle un agradecimiento especial al Rafa. Aunque no alcancé a invitarte a la defensa de esta tesis, te voy a dejar un asiento.

Índice general

1	Introducción	5
2	Resultados preliminares y notaciones	8
2.1	Notaciones	8
2.1.1	Cuerpos	8
2.1.2	K -grupos	9
2.1.3	Grupo de Brauer	9
2.2	Resultados preliminares	10
2.2.1	Cuerpos de funciones	10
2.2.2	Cuerpos estrictamente henselianos 2-dimensionales	17
2.3	Más notación	24
3	La obstrucción de Brauer-Manin	26
3.1	Definición de la obstrucción	26
3.2	Propiedad (BM_B)	31
4	(BM_ω) para grupos abelianos finitos	35
4.1	Emparejamiento de Brauer-Manin y producto cup	35
4.2	Traducción a la cohomología	43
5	Aproximación muy débil para productos semidirectos iterados	46
5.1	Reocurrencia	46
5.2	Reocurrencia y cohomología	53
5.3	Aproximación muy débil	57

Resumen

En los últimos años se han demostrado muchas similitudes entre cuerpos globales clásicos y otros cuerpos globales de origen geométrico, por ejemplo, cuerpos de funciones de curvas sobre $\mathbb{C}((t))$. En esta tesis buscamos entender los resultados de Izquierdo sobre la dualidad de tipo Poitou-Tate para estos cuerpos y aprovecharlos para demostrar propiedades de aproximación débil para espacios homogéneos con estabilizador finito. Más explícitamente, usamos los resultados de dualidad para probar que la obstrucción de Brauer-Manin es la única obstrucción a la aproximación débil para espacios homogéneos de grupos semisimples simplemente conexos con estabilizador abeliano finito. Después probamos una versión más débil del teorema de densidad de Chebotarev para estos cuerpos y lo usamos para probar la propiedad de aproximación muy débil cuando el estabilizador del espacio homogéneo es un producto semidirecto iterado de grupos abelianos, haciendo una analogía con los resultados de Demarche, Lucchini y Neftin.

1. Introducción

En la presente tesis nos interesará estudiar dos familias de cuerpos de origen geométrico con comportamientos similares a los cuerpos globales clásicos. Sea $k = \mathbb{C}((t))$ el cuerpo de series de Laurent. Consideremos C una curva suave, proyectiva y geoméricamente íntegra sobre k . Nos interesará el cuerpo de funciones de C , que denotamos por K . Notemos que cada punto cerrado $P \in C^{(1)}$ induce una valuación discreta v en K . Podemos considerar las completaciones con respecto a ellas, K_v , y pensarlas como “cuerpos locales”. Esto nos permite enunciar propiedades de tipo local-global, como el principio de Hasse o la aproximación débil. Nos parece una pregunta interesante saber cuáles de estas propiedades se cumplen, particularmente la aproximación débil. Además, el grupo de Galois absoluto de k es isomorfo a $\widehat{\mathbb{Z}}$, haciendo más explícita la similitud entre K y un cuerpo global de característica positiva porque ambos son cuerpos de funciones sobre un cuerpo cuasi-finito. Ésta es la primera familia de cuerpos de origen geométrico que nos interesa. Supongamos ahora que k es algún cuerpo de característica 0 algebraicamente cerrado. La segunda familia de interés son cuerpos de fracciones de k -álgebras R locales, conmutativas, geoméricamente íntegras, excelentes, henselianas y de dimensión 2. Para ver la geometría detrás de estos cuerpos es más sencillo pensar en un ejemplo: $R = \mathbb{C}[[X, Y]]$. Podemos pensar el esquema $C = \text{Spec } \mathbb{C}[[X, Y]]$ como el espacio de curvas del plano afín que pasan por el origen, junto al origen. Así, la familia de valuaciones que consideraremos son los puntos de codimensión 1 en C que corresponden a las curvas. En el capítulo 2 estudiaremos estos cuerpos. Más específicamente, presentaremos los resultados análogos a Poitou-Tate

conseguidos en [8] con algunas de las demostraciones. Estos y otros cuerpos de origen geométrico han comenzado a ganar interés en los últimos años. Por ejemplo, sus propiedades aritméticas son estudiadas en [3], [8] o [1].

En esta tesis, nos interesará estudiar la propiedad de aproximación débil o, más precisamente, las obstrucciones a ella. Sea X una K -variedad y $S \subseteq C^{(1)}$ un conjunto finito de lugares de K . Decimos que X tiene aproximación en S si la imagen de la aplicación diagonal

$$\Delta : X(K) \rightarrow \prod_{v \in S} X(K_v)$$

es densa. Decimos que X tiene aproximación débil si tiene aproximación para cada conjunto finito S y tiene aproximación muy débil cuando existe un conjunto finito $T \subseteq C^{(1)}$ tal que X tiene aproximación para cualquier conjunto finito S disjunto de T . Tener aproximación débil es una propiedad muy fuerte, de hecho, muchas veces no se cumple. Por eso, definimos una obstrucción análoga a la obstrucción de Brauer-Manin para cuerpos globales. Explícitamente, en el capítulo 3 definiremos un subconjunto cerrado $X(K_{C^{(1)}})^{\mathbb{B}_\omega(X)}$ de $\prod_{v \in C^{(1)}} X(K_v)$ que contiene a la imagen diagonal de $X(K)$, donde la topología de $\prod_{v \in C^{(1)}} X(K_v)$ está dada por el producto de las topologías v -ádicas. Diremos que la obstrucción de Brauer-Manin es la única obstrucción a la aproximación débil si

$$\overline{\Delta(X(K))} = X(K_{C^{(1)}})^{\mathbb{B}_\omega(X)}.$$

donde $\overline{\Delta(X(K))}$ es la clausura topológica de $\Delta(X(K))$ y $\Delta : X(K) \rightarrow \prod_{v \in C^{(1)}} X(K_v)$ es la aplicación diagonal.

El objetivo del capítulo 4 es estudiar la obstrucción de Brauer-Manin para espacios homogéneos de grupos algebraicos semisimples simplemente conexos con estabilizador geométrico finito. Específicamente, traducirla al lenguaje cohomológico y probar que es la única obstrucción a la aproximación débil cuando el estabilizador es finito abeliano. Este resultado es conocido para cuerpos globales, de hecho, es una consecuencia de los

resultados en [16].

El capítulo 5 está dedicado a probar que los productos semidirectos iterados de grupos abelianos tienen aproximación muy débil y especificamos el conjunto fuera del cual tenemos aproximación. Este resultado se demuestra para cuerpos globales en [5]. Intentamos seguir la demostración de [5], pero antes de ello necesitamos probar una versión más débil del teorema de densidad de Chebotarev en este contexto.

2. Resultados preliminares y notaciones

En este capítulo presentaremos los resultados preliminares necesarios para nuestro objetivo y fijaremos las notaciones y convenciones que usaremos. Los resultados son análogos a los teoremas de dualidad de Poitou-Tate para cuerpos de números, pero para otras familias de cuerpos de origen geométrico.

2.1. Notaciones

2.1.1. Cuerpos

Sea K un cuerpo de característica 0. Usaremos las siguientes notaciones:

- \overline{K} representa una clausura algebraica fija de K .
- μ_n son las raíces n -ésimas de la unidad contenidas en \overline{K} y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)$ son todas las raíces de la unidad contenidas en \overline{K} .
- Γ_K es el grupo de Galois absoluto de K , es decir, $\text{Gal}(\overline{K}/K)$.
- Vamos a suponer que todos los Γ_K -módulos son discretos.
- Para A un Γ_K -módulo denotamos por $H^r(K, A)$ el r -ésimo grupo de cohomología galoisiana. Para F un Γ_K -grupo, denotamos por $H^i(K, F)$ los conjuntos de cohomología no abeliana para $i = 0, 1$.

- Denotamos por $\text{Br } K$ el grupo de Brauer de K .

Para el primer grupo de cohomología, no haremos distinción entre los grupos de cohomología galoisiana definidos como funtores derivados, clases de equivalencia de espacios homogéneos o clases cohomólogas de cociclos. De hecho, salvo por la interpretación como funtores derivados, esto sigue siendo verdad para los conjuntos no abelianos. La equivalencia se demuestra en [18, I,§5].

2.1.2. K -grupos

Un K -grupo finito es un grupo finito F dotado de una acción de Γ_K . En ocasiones interpretaremos los K -grupos como K -esquemas en grupos finitos. Haremos el abuso de no distinguir y esperar que sea claro del contexto si nos referimos al grupo de \overline{K} -puntos o al esquema.

2.1.3. Grupo de Brauer

A lo largo de esta tesis vamos a asumir que las componentes conexas de un K -esquema son geoméricamente íntegras y suaves. Sea X un esquema. Definimos su grupo de Brauer como

$$\text{Br } X := H_{et}^2(X, \mathbb{G}_m).$$

No prestaremos mayor atención a la diferencia entre el grupo de Brauer cohomológico y el definido como clases de equivalencia de álgebras de Azumaya porque, como asumimos que X es suave, coinciden. Esto se deduce del teorema de Gabber, Teorema 3.2.2 de [4]. También se puede demostrar sin recurrir a resultados tan profundos, ver [15, IV] Teorema 2.16.

Nos será útil el grupo de Brauer algebraico. Para definirlo, primero definimos las clases algebraicas y constantes del grupo de Brauer

- $\text{Br}_1 X := \ker (\text{Br } X \rightarrow \text{Br } \overline{X})$ donde $\overline{X} := X \times_K \overline{K}$.
- $\text{Br}_0 X := \text{Im} (\text{Br } K \rightarrow \text{Br } X)$.

El grupo de Brauer algebraico se define como las clases algebraicas módulo las constantes. En símbolos,

$$\text{Br}_a X := \text{Br}_1 X / \text{Br}_0 X.$$

Aprovecho de recordar la siguiente sucesión espectral que usaremos frecuentemente

$$H^p(K, H^q(\overline{X}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{G}_m),$$

a la que nos referimos como sucesión espectral de Hochschild-Serre. Para dar alguna referencia, ver [15, III] Teorema 2.20, aunque es un avatar más de la sucesión espectral de Grothendieck y ese resultado no se demuestra en [15]. Además, la sucesión exacta en términos de grado pequeño nos da la siguiente sucesión exacta

$$(2.1) \quad \text{Br } K \rightarrow \text{Br } X \xrightarrow{r} H^1(K, \text{Pic } \overline{X}) \rightarrow H^3(K, \mathbb{G}_m).$$

2.2. Resultados preliminares

2.2.1. Cuerpos de funciones

Para hacer la notación menos intrincada, vamos a denotar por k al cuerpo de series de Laurent $\mathbb{C}((t))$. Sea C una curva proyectiva, geoméricamente íntegra y suave sobre k . Denotemos por K el cuerpo de funciones $k(C)$ de la curva. Vale la pena tener en mente que estos cuerpos se parecen mucho a cuerpos globales de característica positiva, pero tenemos la suerte de estar en característica 0. Para seguir con esta analogía, digamos quién tomará el rol de los lugares del cuerpo. Denotemos por $C^{(1)}$ el conjunto de los puntos de codimensión 1 de C . Como C es suave, cada $v \in C^{(1)}$ induce una va-

luación discreta de rango 1 en K . Podemos completar el cuerpo K con respecto a estas valuaciones y conseguimos cuerpos locales completos con cuerpo residual isomorfo a $\mathbb{C}((t))$ (aunque en estricto rigor son extensiones finitas de éste). Escribamos K_v para la completación de K en $v \in C^{(1)}$.

El procedimiento descrito en [17, XII] para calcular el grupo de Brauer nos permite identificar $\text{Br } K_v$ con el grupo de caracteres $\text{Hom}(\Gamma_k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Ahora hacemos notar que Γ_k es el grupo $\widehat{\mathbb{Z}}$, pero esta identificación requiere que elijamos raíces de la unidad de forma compatible. En efecto, toda extensión finita de $\mathbb{C}((t))$ es de la forma $\mathbb{C}((t^{1/n}))$ (como \mathbb{C} es algebraicamente cerrado, la extensión debe ser totalmente ramificada) y el grupo de Galois es isomorfo a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (eligiendo una raíz primitiva de la unidad). Como queremos considerar varias valuaciones simultáneamente, podría ser un problema elegir raíces de la unidad de forma compatible, pero esto se puede evitar.

Proposición 2.1. Para todo $v \in C^{(1)}$, existe un isomorfismo canónico

$$j_v : \text{Br } K_v \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(-1).$$

Para una demostración ver [3] aunque los argumentos están realmente en [17]. Por supuesto que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(-1)$ es isomorfo a \mathbb{Q}/\mathbb{Z} , eligiendo raíces de la unidad de forma consistente. El problema con esta identificación es que buscamos tener una sucesión análoga a Brauer-Hasse-Noether y eso nos obligaría a hacer la elección de raíces de la unidad consistente para cada $v \in C^{(1)}$. Aunque es posible, podemos ahorrar espacio considerando $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(-1)$ por mientras.

Este teorema es parte de la Proposición 2.1 de [3].

Teorema 2.2. Tenemos una sucesión exacta natural

$$0 \rightarrow \text{Br } C \rightarrow \text{Br } K \rightarrow \bigoplus_{v \in C^{(1)}} \text{Br } K_v \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(-1) \rightarrow 0.$$

Notemos que podemos remplazar $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(-1)$ por \mathbb{Q}/\mathbb{Z} , pero no es obvio que la palabra “natural” pueda seguir en el enunciado. Aunque si fijamos una identificación entre \mathbb{Q}/\mathbb{Z} y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(-1)$, podríamos seguir diciendo que es natural siempre que no se cambie la identificación. De ahora en adelante vamos a identificar $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(-1)$ con \mathbb{Q}/\mathbb{Z} .

Sea L/K una extensión galoisiana finita de grupo G y $v \in \Omega_K$. Podemos definir una acción de G en el conjunto de lugares sobre v mediante la fórmula

$$s \cdot w := w \circ s^{-1}.$$

para cualquier $w \in \Omega_L$ sobre v .

Definición 2.3. Manteniendo la notación de arriba. Definimos el grupo de descomposición de v en L/K como el estabilizador de algún w sobre v bajo la acción de G . Lo denotaremos por G_v .

Vale la pena mencionar que G_v está bien definido como subgrupo de G salvo conjugación porque la acción de G es transitiva (Proposición 19 de [17, I,§7]). Además, G_v es el grupo de Galois de la extensión local L_v/K_v (Corolario 4 [17, II, §3]). Podemos elegir los subgrupos de descomposición para todas las extensiones simultáneamente fijando una inclusión $\Gamma_{K_v} \hookrightarrow \Gamma_K$ de ahora en adelante. Es importante notar que esta inclusión depende de una elección de clausuras algebraicas de K_v .

Sea A un módulo galoisiano. Podemos entender A como un Γ_{K_v} -módulo para todo $v \in C^{(1)}$ mediante la inclusión que fijamos $\Gamma_{K_v} \hookrightarrow \Gamma_K$. La ambigüedad de la definición no es problema porque no nos interesa la acción explícita sino los grupos de cohomología $H^r(\Gamma_{K_v}, A)$ y, para $r > 0$, estos grupos no dependen de nuestra elección porque la cohomología no ve las conjugaciones. Entonces, podemos hablar de $H^r(K_v, A)$ sin ambigüedad y, más aún, del morfismo de restricción $H^r(K, A) \rightarrow H^r(K_v, A)$. También podemos hablar del morfismo de restricción para los conjuntos de cohomología no abeliana $H^1(K, F)$ usando los mismos argumentos.

Para un subconjunto S de $C^{(1)}$ vamos a usar la siguiente notación

$$H^r(K_S, A) := \prod_{v \in S} H^r(K_v, A).$$

Definición 2.4. Sea $S \subseteq C^{(1)}$ finito. Definimos los grupos de Tate-Shafarevich como

$$\text{III}_S^r(K, A) := \ker(H^r(K, A) \rightarrow H^r(K_{C^{(1)} \setminus S}, A)).$$

En palabras, son los elementos de $H^r(K, A)$ que se anulan por restricción fuera de S . Además fijamos $\text{III}^r(K, A) := \text{III}_\emptyset(K, A)$ y

$$\text{III}_\omega^r(K, A) := \bigcup_{\substack{S \subseteq C^{(1)} \\ \text{finito}}} \text{III}_S^r(K, A).$$

A continuación enunciaremos resultados análogos a la dualidad de Poitou-Tate en el contexto de cuerpos de funciones. Estos resultados son el tema de [8, Capítulo 1, sección 2].

Teorema 2.5. Sea A un Γ_K -módulo finito y discreto. Denotemos por \widehat{A} su dual de Cartier, es decir, $\widehat{A} := \text{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$. Tenemos un emparejamiento perfecto entre grupos finitos para $r = 1, 2$

$$\text{III}^r(K, A) \times \text{III}^{3-r}(K, \widehat{A}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Vamos a denotar por K_v^{nr} la extensión no ramificada maximal de K_v . Para la definición de extensión no ramificada se puede ver [17].

Definición 2.6. Supongamos que A es no ramificado en v , es decir, que el grupo de inercia $I = \Gamma_{K_v^{nr}}$ actúa trivialmente sobre A . Definimos los grupos de cohomología no

ramificada como

$$H_{nr}^i(K_v, A) := H^i(\text{Gal}(K_v^{nr}/K_v), A).$$

Es claro que $H_{nr}^0(K_v, A) = H^0(K_v, A)$ y $H_{nr}^r(K_v, A) = 0$ para $r \geq 2$ porque $\text{Gal}(K_v^{nr}/K_v) \simeq \widehat{\mathbb{Z}}$ tiene dimensión cohomológica 1. Además usando inflación-restricción (ver [18, I.2.6]) podemos identificar $H_{nr}^1(K_v, A)$ con un subgrupo de $H^1(K_v, A)$.

Recordemos que la cohomología no ramificada coincide con la cohomología étale del anillo local \mathcal{O}_v . Para una referencia ver el Teorema 4.1.1 de [2]. Aunque en [2] se demuestra solo para los módulos $\mu_n^{\otimes j}$, los argumentos funcionan para otros módulos finitos porque se basa en el teorema de pureza en codimensión uno, Teorema 3.8.2 de [2].

Proposición 2.7. Para $r = 0, 1, 2$, el emparejamiento

$$H^r(K_v, A) \times H^{2-r}(K_v, \widehat{A}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

definido como la composición del producto cup con el invariante local j_v de la Proposición 2.1. es perfecto. Además los grupos $H_{nr}^r(K_v, A)$ y $H_{nr}^{2-r}(K_v, \widehat{A})$ son complementos ortogonales el uno del otro para el emparejamiento.

Definición 2.8. Para $r \in \{0, 1, 2\}$ definimos el grupo $\mathbb{P}^r(A)$ como el producto restringido de los $H^r(K_v, A)$ con respecto a $H_{nr}^r(K_v, A)$.

Vale la pena destacar que $H_{nr}^r(K_v, A)$ no está definido para todo lugar v , pero esto no influye en la definición de los $\mathbb{P}^r(A)$ porque solo son finitos.

Notemos que $\mathbb{P}^r(A)$ es un grupo abeliano localmente compacto. Además, para $r =$

0, 2 son sencillos de describir:

$$\mathbb{P}^0(A) = \prod_{v \in C^{(1)}} H^0(K_v, A)$$

$$\mathbb{P}^2(A) = \bigoplus_{v \in C^{(1)}} H^2(K_v, A).$$

Como los grupos de cohomología no ramificada son ortogonales, podemos definir una dualidad perfecta entre grupos localmente compactos

$$\mathbb{P}^r(A) \times \mathbb{P}^{2-r}(\widehat{A}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Teorema 2.9. Tenemos una sucesión exacta de 9 términos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(K, A) & \xrightarrow{\beta^0} & \prod_{v \in C^{(1)}} H^0(K_v, A) & \xrightarrow{\gamma^0} & H^2(K, \widehat{A})^* \\ & & & & \delta^0 & & \curvearrowright \\ & & H^1(K, A) & \xrightarrow{\beta^1} & \mathbb{P}^1(A) & \xrightarrow{\gamma^1} & H^1(K, \widehat{A})^* \\ & & & & \delta^1 & & \curvearrowright \\ & & H^2(K, A) & \xrightarrow{\beta^2} & \bigoplus_{v \in C^{(1)}} H^2(K_v, A) & \xrightarrow{\gamma^2} & H^0(K, \widehat{A})^* \longrightarrow 0. \end{array}$$

Las flechas β^i corresponden a la aplicación diagonal inducida por los morfismos hacia la cohomología local dados por restricción. Las flechas γ^i corresponden a la suma de las dualidades locales, es decir, $\gamma^i((f_v)) = (f' \mapsto \sum_{v \in C^{(1)}} (f_v, f'_v)_v)$ donde $(-, -)_v$ representa el emparejamiento local de la Proposición 2.7. Finalmente, las flechas δ^i provienen de la dualidad entre los grupos de Tate-Shafarevich. Explícitamente, dualizando la inclusión $\text{III}^r(K, \widehat{A}) \hookrightarrow H^r(K, \widehat{A})$ conseguimos una sobreyección

$H^r(K, \widehat{A})^* \rightarrow \mathbb{H}^r(K, \widehat{A})^*$, así δ^i es la composición

$$H^{2-r}(K, \widehat{A})^* \rightarrow \mathbb{H}^{2-r}(K, \widehat{A})^* \simeq \mathbb{H}^{1+r}(K, A) \hookrightarrow H^{1+r}(K, A).$$

Nos va a interesar describir el conúcleo al restringir la cantidad de coordenadas. Ése es el contenido del siguiente corolario.

Corolario 2.10. Sea $S \subseteq C^{(1)}$ un subconjunto finito. Tenemos una sucesión exacta

$$H^1(K, A) \rightarrow H^1(K_S, A) \rightarrow \left(\mathbb{H}_S^1(K, \widehat{A}) / \mathbb{H}^1(K, \widehat{A}) \right)^* \rightarrow 0.$$

Este corolario es un caso particular del lema 2.2 del segundo capítulo de [8] y la demostración que presentamos no es más que una traducción.

Demostración. Gracias al Teorema 2.9, tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathbb{H}^1(K, \widehat{A}) \rightarrow H^1(K, \widehat{A}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\widehat{A}) \rightarrow H^1(K, A)^*.$$

Levantando los elementos de $H^1(K_S, \widehat{A})$ a $\mathbb{P}^1(\widehat{A})$ poniendo cero en las coordenadas fuera de S , conseguimos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathbb{H}^1(K, \widehat{A}) \rightarrow \mathbb{H}_S^1(K, \widehat{A}) \rightarrow H^1(K_S, \widehat{A}) \rightarrow H^1(K, A)^*.$$

Dualizando esta sucesión y notando que el núcleo de $\mathbb{H}_S^1(K, \widehat{A})^* \rightarrow \mathbb{H}^1(K, \widehat{A})^*$ es $\left(\mathbb{H}_S^1(K, \widehat{A}) / \mathbb{H}^1(K, \widehat{A}) \right)^*$, conseguimos el resultado. \square

2.2.2. Cuerpos estrictamente henselianos 2-dimensionales

En esta sección presentamos la segunda familia de cuerpos que nos interesa. Además, mostramos los resultados de dualidad aritmética de tipo Poitou-Tate en este nuevo contexto. Uno de los objetivos de esta tesis es comprender las demostraciones de estos resultados, por lo que presentamos los argumentos principales de estas demostraciones.

Definición 2.11. Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Un cuerpo K se dice estrictamente henseliano 2-dimensional si es el cuerpo de fracciones de una k -álgebra R conmutativa, local, geoméricamente íntegra, henseliana, excelente, de dimensión 2 y con cuerpo residual k

El ejemplo de estos cuerpos que conviene tener en mente son extensiones finitas de $\mathbb{C}((x, y))$. En este caso R sería la clausura entera de $\mathbb{C}[[x, y]]$ en K . Notemos que estos cuerpos cumplen las hipótesis porque todo anillo Noetheriano local completo es excelente y henseliano (ver Teoremas 68 y 74 de [12] y Teorema 8.3 de [13]).

Proposición 2.12. Sea R un anillo local, henseliano, íntegro excelente con cuerpo residual algebraicamente cerrado k . Entonces, R es normal.

Demostración. Como R es excelente, la clausura normal de R en K es un R -módulo finitamente generado (esto se deduce de que todo anillo excelente es un anillo de Nagata, Teorema 78 de [12]). Denotemos por T la clausura normal de R en K y fijemos x_1, \dots, x_n un conjunto minimal de generadores de T . Por definición de la clausura normal, existe un polinomio mónico $p(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots \in R[X]$ tal que $p(x_1) = 0$. Supongamos que p es del menor grado posible. Reduciendo módulo el ideal maximal de R , conseguimos un polinomio $\bar{p} \in k[X]$. Usando que R es henseliano, deducimos que \bar{p} debe ser irreducible. En efecto, si no lo fuera, podríamos levantar una descomposición en factores coprimos a $R[X]$ lo que es una contradicción. Como k es

algebraicamente cerrado, los únicos polinomios irreducibles son lineales, probando que $x_1 \in R$. Esto contradice la minimalidad del conjunto generador. Concluimos que R es un anillo normal. \square

Fijemos $C = \text{Spec } R \setminus \mathfrak{m}$ donde \mathfrak{m} es el ideal maximal de R . Como el anillo R es normal, cada $v \in C^{(1)}$ induce una valuación en K . En [9] se consiguen resultados de dualidad aritmética que procedemos a enunciar sin demostración.

Para cada $v \in C^{(1)}$, el cuerpo residual $k(v)$ tiene por grupo de Galois a $\widehat{\mathbb{Z}}$ porque es el cuerpo de fracciones de un anillo de valuación discreta henseliana con cuerpo residual algebraicamente cerrado. Así, el Ejemplo I.1.10 de [14] nos asegura que tenemos una dualidad perfecta entre grupos finitos:

$$H^0(k(v), A) \times H^1(k(v), \widehat{A}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

El siguiente resultado es el Teorema 1.6 de [9].

Teorema 2.13. Tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{n_C} \rightarrow \text{Br } K \rightarrow \bigoplus_{v \in C^{(1)}} \text{Br } K_v \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

donde n_C es un número explícito que solo depende de C .

Teorema 2.14. Sea U un abierto de C y \mathcal{A} un haz constructible localmente constante sobre U . Denotemos por $\widehat{\mathcal{A}}$ su dual de Cartier, es decir, el haz $\text{Hom}_U(\mathcal{A}, \mathbb{G}_m)$. Entonces, existe un emparejamiento perfecto de grupos finitos

$$H^r(U, \widehat{\mathcal{A}}) \times H_c^{3-r}(U, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Para una demostración de este hecho, ver teorema 2.1 de [9].

Definición 2.15. Sea S un subconjunto de $C^{(1)}$. Definimos los grupos de Tate-Shafarevich como

$$\text{III}_S^r(K, A) := \ker \left(H^r(K, A) \rightarrow H^r(K_{C^{(1)} \setminus S}, A) \right).$$

De igual manera $\text{III}^r(K, A) := \text{III}_\emptyset(K, A)$ y $\text{III}_\omega(K, A)$ es análogo al definido en la sección anterior. El siguiente teorema es el Teorema 3.5 de [9]

Teorema 2.16. Sea A un Γ_K -módulo discreto y finito. Para todo $r \in \{1, 2\}$ tenemos una dualidad perfecta entre grupos finitos

$$\text{III}^r(K, A) \times \text{III}^{3-r}(K, \widehat{A}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

En lo que sigue vamos a establecer la sucesión exacta de 9 términos análoga a la del Teorema 2.9.

Sea A un Γ_K -módulo finito, U un abierto de C y \mathcal{A} un haz de grupos finitos sobre U tal que $A = \mathcal{A} \times_U \text{Spec } K$. Además, denotemos por \mathcal{O}_v el anillo local en v de C para cada $v \in C^{(1)}$. Recordemos que podemos identificar $H^r(\mathcal{O}_v, \mathcal{A})$ con el subgrupo $H_{nr}^r(K, A) = H^r(k(v), A)$ de $H^r(K, A)$.

Proposición 2.17. Los subgrupos $H^r(\mathcal{O}_v, \mathcal{A})$ y $H^{2-r}(\mathcal{O}_v, \widehat{\mathcal{A}})$ de $H^r(K_v, A)$ y $H^{2-r}(K_v, \widehat{A})$ respectivamente son complementos ortogonales con respecto al emparejamiento

$$H^r(K_v, A) \times H^{2-r}(K_v, \widehat{A}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Demostración. Por functorialidad vemos que la restricción del emparejamiento a $H^r(k(v), A) \times H^{2-r}(k(v), \widehat{A})$ se factoriza por $H^2(k(v), \mathbb{G}_m) = \text{Br } k(v) = 0$. Supongamos que $r = 1$.

Por la dualidad de $k(v)$ vemos que

$$H^0(k(v), H^1(I_v, A)) \simeq H^0(k(v), A(-1)) \simeq H^1(k(v), \widehat{A})^*.$$

Juntando la sucesión espectral de Hochschild-Serre con el hecho que el grupo I_v tiene dimensión cohomológica 1, deducimos que $|\mathrm{H}^1(K_v, A)|/|\mathrm{H}^1(k(v), A)| = |\mathrm{H}^1(k(v), \widehat{A})|$. Para $r = 0, 2$ debemos notar que $\mathrm{H}^0(k(v), A) = \mathrm{H}^0(K_v, A)$, $\mathrm{H}^2(k(v), A) = 0$ y lo mismo para \widehat{A} . Como los emparejamientos locales son perfectos, concluimos que son complementos ortogonales. \square

Definición 2.18. Definimos $\mathbb{P}^r(F)$ como el producto restringido de los $\mathrm{H}^r(K_v, A)$ con respecto a $\mathrm{H}^r(\mathcal{O}_v, \mathcal{A})$ para $v \in C^{(1)}$.

Como los grupos $\mathrm{H}^r(\mathcal{O}_v, \mathcal{A})$ y $\mathrm{H}^r(\mathcal{O}_v, \widehat{\mathcal{A}})$ son ortogonales, podemos definir una dualidad perfecta entre grupos localmente compactos

$$\mathbb{P}^r(A) \times \mathbb{P}^{2-r}(\widehat{A}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Para poder demostrar el resultado análogo a la sucesión exacta de 9 términos de Poitou-Tate, necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.19. Sea $j : V \hookrightarrow U$ un abierto y $\alpha \in \mathrm{H}^r(V, \mathcal{A})$ tal que para todo $v \in U \setminus V$ el elemento α_v de $\mathrm{H}^r(K_v, A)$ pertenece a $\mathrm{H}^r(\mathcal{O}_v, \mathcal{A})$. Entonces, α está en la imagen del morfismo de restricción $\mathrm{H}^r(U, \mathcal{A}) \rightarrow \mathrm{H}^r(V, \mathcal{A})$.

Demostración. Esto se deduce por una persecución de diagrama en el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{H}^r(U, \mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^r(V, \mathcal{A}) & \xrightarrow{\oplus \partial_v} & \bigoplus_{v \in U \setminus V} \mathrm{H}^{r-1}(\kappa(v), A(-1)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \bigoplus_{v \in U \setminus V} \mathrm{H}^r(\mathcal{O}_v, \mathcal{A}) & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in U \setminus V} \mathrm{H}^r(K_v, A) & \xrightarrow{\oplus \partial_v} & \bigoplus_{v \in U \setminus V} \mathrm{H}^{r-1}(\kappa(v), A(-1)) \end{array}$$

donde ∂_v son las aplicaciones residuo (Definición 1.4.2 de [4]). La exactitud de la fila de arriba no es evidente. Primero la sucesión exacta de Gysin [15, VI 5.3] nos dice que la siguiente sucesión es exacta

$$H^r(U, \mathcal{A}) \rightarrow H^r(V, \mathcal{A}) \rightarrow H^{r-1}(U \setminus V, \mathcal{A}(-1)).$$

Como $U \setminus V$ es un conjunto finito de puntos, es fácil convencerse con el formalismo de Čech o usando el Lema III 1.16 de [15] que el último término es la suma de las cohomologías en los cuerpos residuales y las aplicaciones correspondientes son los residuos. \square

Teorema 2.20. La sucesión

$$H^r(K, A) \xrightarrow{\beta^r} \mathbb{P}^r(A) \xrightarrow{\gamma^r} H^{2-r}(K, \widehat{A})^*$$

es exacta para $r \neq 0$. Explícitamente, β^r es la aplicación diagonal y γ^r está dada explícitamente por

$$\gamma^r((f_v)) := \left(f \mapsto \sum_{v \in C^{(1)}} (f_v, f)_v \right)$$

donde $(-, -)_v$ es el emparejamiento local.

Demostración. Tomemos un abierto $j : V \hookrightarrow C$ de C , A un Γ_K -módulo discreto finito y \mathcal{A} una haz de grupos abelianos sobre V tal que $\mathcal{A} \times_V \text{Spec } K = A$. Si consideramos la sucesión exacta de localización [15, III 1.25] para el haz $j_! \mathcal{A}$, conseguimos una sucesión exacta

$$\cdots \rightarrow H_c^r(V, \mathcal{A}) \rightarrow H^r(V, \mathcal{A}) \rightarrow H_{C \setminus V}^{r+1}(C, j_! \mathcal{A}) \rightarrow H_c^{r+1}(V, \mathcal{A}) \rightarrow \cdots$$

Además, la Proposición [15, III 1.28] nos entrega un isomorfismo

$$H_{C \setminus V}^{r+1}(X, j_! \mathcal{A}) \simeq \bigoplus_{v \in C \setminus V} H_{\{v\}}^{r+1}(\mathcal{O}_v^h, \mathcal{A})$$

donde \mathcal{O}_v^h es la henselización de \mathcal{O}_v . Juntando la Proposición [14, II 1.1] y el Lema 2.7 de [7], deducimos un isomorfismo para $r \neq 0$,

$$H_{C \setminus V}^{r+1}(V, j_! \mathcal{A}) \simeq \bigoplus_{v \in C \setminus V} H^r(K_v, A).$$

Entonces, cuando $r > 0$ tenemos una sucesión exacta de la forma

$$(2.2) \quad \cdots \rightarrow H_c^r(V, \mathcal{A}) \rightarrow H^r(V, \mathcal{A}) \rightarrow \bigoplus_{v \in C \setminus V} H^r(K_v, A) \rightarrow H_c^{r+1}(V, \mathcal{A}) \rightarrow \cdots$$

Sea U un abierto de C que contenga a V . Juntando la sucesión exacta (2.2) y el Lema 2.19, conseguimos una sucesión exacta

$$H^r(U, \mathcal{A}) \xrightarrow{\psi_V} \bigoplus_{v \notin U} H^r(K_v, A) \oplus \bigoplus_{v \in U \setminus V} H^r(\mathcal{O}_v, \mathcal{A}) \xrightarrow{\varphi_V} H_c^{r+1}(V, \mathcal{A}).$$

La dualidad de Artin-Verdier (Teorema 2.14) nos dice que $H_c^{r+1}(V, \mathcal{A})$ es dual de $H^{2-r}(V, \widehat{\mathcal{A}})$. Entonces, tomando límite inverso sobre V , conseguimos una sucesión exacta

$$(2.3) \quad H^r(U, \mathcal{A}) \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{v \notin U} H^r(K_v, A) \oplus \prod_{v \in U} H^r(\mathcal{O}_v, \mathcal{A}) \xrightarrow{\varphi} H^{2-r}(K, \widehat{A})^*.$$

En estricto rigor debemos verificar que sigue siendo exacta porque estamos tomando un límite inverso indexado por algo no necesariamente numerable. En efecto, es claro que sigue siendo un complejo. Sea $(f_v) \in \bigoplus_{v \notin U} H^r(K_v, A) \oplus \prod_{v \in U} H^r(\mathcal{O}_v, \mathcal{A})$ tal que

$\varphi(f_v) = 0$. Para cada abierto V , denotemos por E_V el conjunto $\psi_V^{-1}((f_v)_{v \notin V})$. Sabemos que en cada abierto V se cumple $\emptyset \neq E_V$ gracias a la sucesión exacta (2.3). Además, si $V \subseteq V'$, tenemos la contención $E_V \subseteq E_{V'}$. Así, la preimagen de (f_v) es no vacía porque es una intersección de conjuntos finitos no vacíos encajonados en el conjunto finito $H^r(U, A)$. Concluimos la demostración tomando límite directo sobre U para conseguir la sucesión exacta

$$H^r(K, A) \rightarrow \mathbb{P}^r(A) \rightarrow H^{2-r}(K, \widehat{A})^*.$$

□

Teorema 2.21. Existe una sucesión exacta de 9 términos

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^0(K, A) & \xrightarrow{\beta^0} & \prod_{v \in C^{(1)}} H^0(K_v, A) & \xrightarrow{\gamma^0} & H^2(K, \widehat{A})^* \\
& & & & \delta^0 & & \\
& & \searrow & & & & \searrow \\
& & H^1(K, A) & \xrightarrow{\beta^1} & \mathbb{P}^1(A) & \xrightarrow{\gamma^1} & H^1(K, \widehat{A})^* \\
& & & & \delta^1 & & \\
& & \searrow & & & & \searrow \\
& & H^2(K, A) & \xrightarrow{\beta^2} & \bigoplus_{v \in C^{(1)}} H^2(K_v, A) & \xrightarrow{\gamma^2} & H^0(K, \widehat{A})^* \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Demostración. El Teorema 2.20 nos reduce a verificar la inyectividad de β^0 , la sobreyectividad de γ^2 y la exactitud en las conexiones. La inyectividad de β^0 es directa porque a nivel de H^0 solamente estamos tomando invariantes por un grupo más pequeño. Intercambiando los roles de A y \widehat{A} , vemos que γ^2 se consigue como dual de β^0 , probando que es sobreyectiva. Para probar lo que queda, recordemos que δ^i se define como la composición

$$H^r(K, \widehat{A})^* \twoheadrightarrow \text{III}^r(\widehat{A})^* \simeq \text{III}^{3-r}(A) \hookrightarrow H^{3-r}(K, A).$$

Con esto en mente es sencillo ver que tenemos un complejo. Claramente la sucesión

$$(2.4) \quad 0 \rightarrow \text{III}^r(K, \widehat{A}) \rightarrow \text{H}^r(K, \widehat{A}) \rightarrow \mathbb{P}^r(\widehat{A})$$

es exacta. Para aplicar el Lema 2.4 de [6] y ver que la sucesión dual a (2.4) es exacta, nos quedaría probar que β^r es estricta, es decir, que la imagen I de $\text{H}^r(K, \widehat{A})$ en $\mathbb{P}^r(\widehat{A})$ es discreta. El Lema 2.19 nos dice que $I \cap \left(\prod_{v \in C \setminus U} \text{H}^r(K_v, A) \times \prod_{v \in U} \text{H}^r(\mathcal{O}_v, A) \right)$ proviene de $\text{H}^r(U, A)$. Como este último es finito, concluimos que I es discreto. El Lema 2.4 de [6] nos dice que

$$\mathbb{P}^r(A) \rightarrow \text{H}^{2-r}(K, A) \rightarrow \text{III}^{1+r}(K, A) \rightarrow 0$$

es exacta, concluyendo el teorema. \square

El mismo argumento que la demostración del Corolario 2.10 permite conseguir el siguiente resultado ya que lo único necesario para la demostración es la sucesión del Teorema 2.21 y que el emparejamiento local sea perfecto.

Corolario 2.22. Sea $S \subseteq C^{(1)}$ un conjunto finito. Tenemos una sucesión exacta

$$\text{H}^1(K, A) \rightarrow \text{H}^1(K_S, A) \rightarrow \left(\text{III}_S^1(K, \widehat{A}) / \text{III}^1(K, \widehat{A}) \right)^* \rightarrow 0.$$

2.3. Más notación

Nos referiremos a los cuerpos de los tipos descritos en las últimas dos secciones como cuerpos globales geométricos y denotaremos por K cualquiera de ellos. Es decir, el cuerpo K es un cuerpo de funciones o un cuerpo estrictamente henseliano 2-dimensional.

Notación. Denotaremos por Ω a $C^{(1)}$, es decir, para cuerpos de funciones, los puntos

cerrados de la curva y para cuerpos estrictamente henselianos de dimensión 2, los puntos cerrados de $\text{Spec } R \setminus \{\mathfrak{m}\}$.

Para estudiar la obstrucción a la aproximación débil vamos a necesitar algunos subgrupos del grupo de Brauer algebraico. Sea X un K -esquema. Definimos los siguientes grupos:

- $B_S(X) := \{\alpha \in \text{Br}_a X \mid \alpha_v = 0 \text{ para todo } v \notin S\}$ donde α_v representa la imagen de α por el morfismo natural $\text{Br}_a X \rightarrow \text{Br}_a X_v$ con $X_v := X \times_K K_v$.
- $B_\omega(X) = \bigcup_{\substack{S \subset \Omega \\ \text{finito}}} B_S(X)$.
- $B(X) = B_\emptyset(X)$.

Denotaremos por $B_S(X)$, $B_\omega(X)$ y $B(X)$ sus respectivas preimagenes en $\text{Br}_1 X$.

3. La obstrucción de Brauer-Manin

3.1. Definición de la obstrucción

Vamos a definir una obstrucción a la aproximación débil de forma análoga a lo que se hace para cuerpos de números (por ejemplo en la sección 5.2 de [19]). No olvidar que en todo este texto estamos asumiendo que las componentes conexas de un esquema son suaves y geoméricamente íntegras. Además el cuerpo K siempre será un cuerpo global geométrico cf. sección 2.3.

Denotemos por $X(K_\Omega)$ al producto $\prod_{v \in \Omega} X(K_v)$ y de forma análoga $X(K_S)$ para cualquier S subconjunto de Ω .

Definición 3.1. Sea X un K -esquema y B un subgrupo de $\text{Br } X$. Definimos el emparejamiento de Brauer-Manin con respecto a B

$$\text{BM} : X(K_\Omega) \times B \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

mediante la fórmula $\text{BM}((P_v)_{v \in \Omega}, \alpha) = \sum_{v \in \Omega} j_v(\alpha(P_v))$ siempre que B sea tal que esa suma es finita para todo $(P_v)_{v \in \Omega}$. El isomorfismo j_v proviene del Teorema 2.2 para cuerpos de funciones y del Teorema 2.13 para cuerpos estrictamente henselianos de dimensión 2.

Además, definimos el conjunto de Brauer-Manin con respecto a B , denotado por $X(K_\Omega)^B$, como el núcleo por la izquierda del emparejamiento, es decir, todos los $(P_v)_{v \in \Omega} \in X(K_\Omega)$ tales que $\text{BM}((P_v)_{v \in \Omega}, \alpha) = 0$ para cada $\alpha \in B$.

Notemos que este emparejamiento es functorial porque la evaluación del grupo de Brauer y los isomorfismos j_v lo son.

Sea B un subgrupo de $\text{Br } X$ tal que el emparejamiento de la Definición 3.1 está bien definido. Consideremos la topología discreta en B y el producto de las topologías v -ádicas en $X(K_\Omega)$. Se puede demostrar que el emparejamiento de Brauer-Manin es continuo. Para una demostración ver el Lema 6.2 de [16]; aunque este lema está enunciado para cuerpos de números, el mismo argumento funciona en nuestro contexto. Además, gracias a la sucesión exacta de Brauer-Hasse-Noether (Teoremas 2.2 y 2.13) la imagen diagonal de $X(K)$ está en el conjunto de Brauer-Manin. Juntando estos dos hechos, notamos que

$$\overline{X(K)} \subseteq X(K_\Omega)^B,$$

donde $\overline{X(K)}$ es la clausura topológica de la imagen diagonal de $X(K)$ en el producto $X(K_\Omega)$. Con esto en mente, hacemos la siguiente definición

Definición 3.2. Decimos que la única obstrucción a la aproximación débil es la obstrucción de Brauer-Manin con respecto a B si

$$\overline{X(K)} = X(K_\Omega)^B.$$

Para efectos del próximo capítulo, nos interesa usar esta definición con $B = B_\omega(X)$, pero debemos verificar que este grupo cumple las hipótesis para que el emparejamiento esté bien definido.

Lema 3.3. Sea X un K -esquema. Supongamos que X tiene un K -punto. Entonces, tenemos la siguiente igualdad

$$B_\omega(X) = \{\alpha \in \text{Br}_1 X \mid \alpha_v = 0 \text{ para casi todo } v\}$$

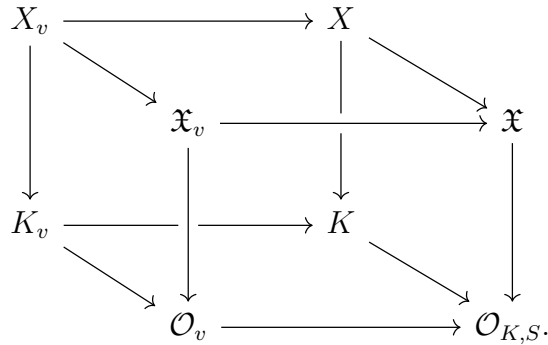
donde α_v es la imagen de α por el morfismo natural $\text{Br } X \rightarrow \text{Br } X_v$ con $X_v :=$

$X \times_K K_v$.

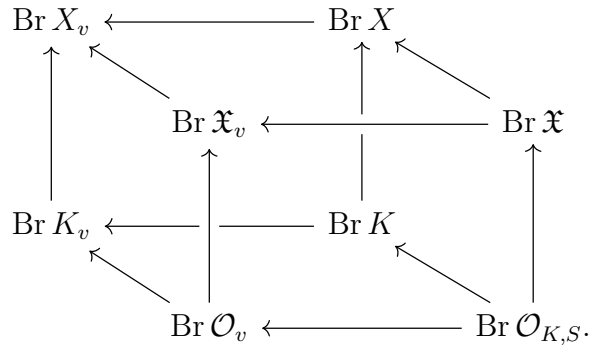
Vale la pena destacar que esto no es obvio, porque en principio α_v solo pertenece a $\text{Br}_0 X_v$ para casi todo v y no tiene por qué ser nulo.

Demostración. Para evitar notaciones demasiado intrincadas, escribiremos R en vez de $\text{Spec } R$ para cualquier anillo R esperando que sea claro del contexto si nos referimos al anillo o al esquema.

Algún conjunto finito S de Ω_K es tal que existe un modelo \mathfrak{X} sobre el anillo de S -enteros $\mathcal{O}_{K,S}$. Estamos imitando la notación estándar en cuerpo globales, es decir, $\mathcal{O}_{K,S}$ son los elementos de K enteros fuera de S i.e. $v(x) \geq 0$ para todo $v \notin S$. Podemos agrandar S y suponer que el modelo es suave. Fijemos $\mathfrak{X}_v = \mathfrak{X} \times_{\mathcal{O}_{K,S}} \mathcal{O}_v$. Juntando todos estos elementos, conseguimos el siguiente cubo conmutativo



Todo el siguiente desarrollo sucede en el diagrama conmutativo



Sea $\alpha \in B_\omega(X)$. Si pensamos α como un álgebra de Azumaya sobre X , es finitamente presentada y, salvo agrandar S , podemos asegurar que todos los coeficientes de las relaciones están en $\mathcal{O}_{K,S}$. Así, podemos asumir que α proviene de algún elemento $\beta \in \text{Br } \mathfrak{X}$ y que S sigue siendo finito. Usando la cara superior del cubo, notamos que α_v proviene de $\beta_v \in \text{Br } \mathfrak{X}_v$ para todo $v \notin S$. Más aún, α_v debe caer en $\text{Br}_0 X_v = \text{Im}(\text{Br } K_v \rightarrow \text{Br } X_v)$, por definición de $B_\omega(X)$ y nuestra elección de S . Llamemos γ_v algún elemento de $\text{Br } K_v$ que se envíe a α_v . Resumiendo esto en un diagrama nos queda lo siguiente

$$\begin{array}{ccccc}
 \alpha_v & \longleftarrow & & \alpha & \\
 & \swarrow & & \swarrow & \\
 & & \beta_v & \longleftarrow & \beta \\
 & \uparrow & & \uparrow & \\
 \gamma_v & & & & 0. \\
 & \swarrow & & \swarrow & \\
 & & & &
 \end{array}$$

Para ordenar un poco los cálculos, fijemos la siguiente notación

$$\begin{array}{ccc}
 X_v & \xrightarrow{m} & \mathfrak{X}_v \\
 \downarrow p & & \downarrow \pi \\
 K_v & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_v.
 \end{array}$$

Como X tiene un K -punto, salvo agrandar S , podemos asumir que \mathfrak{X}_v tiene un \mathcal{O}_v -punto y . Éste induce un K_v -punto x de X_v . Explícitamente, tenemos el siguiente dia-

grama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X_v & \xrightarrow{m} & \mathfrak{X}_v \\ \uparrow x & & \uparrow y \\ K_v & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_v. \end{array}$$

Como x es un K_v -punto, tenemos que $\gamma_v = x^* \circ p^*(\gamma_v) = \alpha_v(x)$. Por otro lado, vemos que $\iota(\beta_v(y)) = \alpha_v(x)$. Como $\text{Br } \mathcal{O}_v = 0$ [15, IV 1.7], vemos que $\gamma_v = 0$ y $\alpha_v = 0$. \square

Otra cosa interesante es que podemos quitar las clases “trascendentes” del lema anterior cuando estamos sobre ciertos espacios homogéneos

Lema 3.4. Sea X un espacio homogéneo de un grupo semisimple simplemente conexo y estabilizador geométrico F finito. Supongamos que X tiene un K -punto. Entonces, tenemos la siguiente igualdad

$$B_\omega(X) = \{\alpha \in \text{Br } X \mid \alpha_v = 0 \text{ para casi todo } v\}$$

Demostración. En virtud del lema anterior debemos probar que si $\alpha \notin \text{Br}_1 X$, existen infinitos lugares donde $\alpha_v \neq 0$. Podemos considerar el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Br } X & \longrightarrow & \text{Br } \overline{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Br } X_v & \longrightarrow & \text{Br } \overline{X}_v. \end{array}$$

Estamos asumiendo que $\overline{\alpha} \in \text{Br } \overline{X}$ es no trivial. Si logramos probar que la imagen de $\overline{\alpha}$ en $\text{Br } \overline{X}_v$ es no trivial, concluimos que $\alpha_v \in \text{Br } X_v$ es no trivial. Probaremos un poco más, el morfismo $\text{Br } \overline{X} \rightarrow \text{Br } \overline{X}_v$ es inyectivo para cada v . En efecto, la proposición 3.2 de [11] muestra que $\text{Br } \overline{X} = \text{H}^2(F, \overline{K}^*)$ donde F actúa trivialmente en \overline{K}^* y el morfismo $\text{Br } \overline{X} \rightarrow \text{Br } \overline{X}_v$ se convierte en el morfismo $\text{H}^2(F, \overline{K}^*) \rightarrow \text{H}^2(F_v, \overline{K}_v^*)$ inducido por la

inclusión $K \subseteq K_v$. Consideremos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \overline{K}^* \rightarrow \overline{K}_v^* \rightarrow \overline{K}_v^*/\overline{K}^* \rightarrow 0.$$

Como $F_v = F$, la sucesión exacta larga asociada nos reduce a probar la nulidad de $H^1(F, \overline{K}_v^*/\overline{K}^*)$. Esto es claro porque $H^1(F, \overline{K}_v^*/\overline{K}^*) = \text{Hom}(F, \overline{K}_v^*/\overline{K}^*)$ y F es finito mientras que $\overline{K}_v^*/\overline{K}^*$ no tiene torsión. \square

El Lema 3.3 nos asegura que el emparejamiento de Brauer-Manin con respecto a $B_\omega(X)$ está bien definido. Más aún, gracias a la sucesión exacta de Brauer-Hasse-Noether (Teoremas 2.2 y 2.13), vemos que podemos considerarlo como un emparejamiento

$$\text{BM}_\omega : X(K_\Omega) \times B_\omega(X) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

3.2. Propiedad (BM_B)

En esta sección probamos el hecho que la obstrucción de Brauer-Manin sea la única obstrucción a la aproximación débil para un espacio homogéneo de SL_n con estabilizador finito depende únicamente del estabilizador.

Proposición 3.5. Sea F un K -grupo finito. Supongamos que tenemos dos incrustaciones $F \hookrightarrow \text{SL}_{n_1}$ y $F \hookrightarrow \text{SL}_{n_2}$. Sean $X_1 = \text{SL}_{n_1}/F$ y $X_2 = \text{SL}_{n_2}/F$. Entonces, $\text{Br } X_1 = \text{Br } X_2$.

Además, sea B un subgrupo $\text{Br } X_1$ tal que el emparejamiento 3.1 esté bien definido. Entonces, la obstrucción de Brauer-Manin asociada a B es la única obstrucción a la aproximación débil para X_1 si y solo si lo es para X_2 .

Demostración. Probemos la igualdad $\text{Br } X_1 = \text{Br } X_2$. Esto es consecuencia de la Proposición 3.2 de [1]. En efecto, si elegimos los puntos racionales e_1 y e_2 de X_1 y X_2

correspondientes al neutro de SL_{n_1} y SL_{n_2} , esta fórmula nos dice que

$$\mathrm{Br} X_1 = \mathrm{H}^2(F \rtimes \Gamma_K, \overline{K}^*) = \mathrm{Br} X_2.$$

Fijar los puntos e_1 y e_2 es para poder considerar el producto semidirecto y no los grupos F^{X_1} y F^{X_2} definidos en [11]. Incrustemos F diagonalmente en $\mathrm{SL}_{n_1} \times \mathrm{SL}_{n_2}$ y definamos $X := \mathrm{SL}_{n_1} \times \mathrm{SL}_{n_2} / F$. La Proposición 3.2 de [11] también nos permite identificar $\mathrm{Br} X_i$ con $\mathrm{Br} X$ para $i = 1, 2$. El siguiente diagrama conmuta por la naturalidad del emparejamiento de Brauer-Manin

$$(3.1) \quad \begin{array}{ccccc} X_1(K) & \xrightarrow{\Delta} & X_1(K_\Omega) & \longrightarrow & B^* \\ g_1 \uparrow & & f_1 \uparrow & & \parallel \\ X(K) & \xrightarrow{\Delta} & X(K_\Omega) & \longrightarrow & B^* \\ g_2 \downarrow & & f_2 \downarrow & & \parallel \\ X_2(K) & \xrightarrow{\Delta} & X_2(K_\Omega) & \longrightarrow & B^* \end{array}$$

donde B^* es el dual de B , es decir, $B^* = \mathrm{Hom}(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Antes de demostrar la equivalencia, probemos que f_i y g_i son sobreyectivas y abiertas. Sea L una extensión de K . Para probar sobreyectividad nos basta notar que $X \rightarrow X_i$ es un SL_n -torsor y que $\mathrm{H}^1(L, \mathrm{SL}_n) = 0$. Porque así tenemos una sucesión exacta de conjuntos punteados

$$0 \rightarrow \mathrm{SL}_{n_i}(L) \rightarrow X(L) \rightarrow X_i(L) \rightarrow 0.$$

Para ver que son abiertas, vemos que lo son en los \overline{K} y \overline{K}_v puntos para las topologías Zariski y v -ádica respectivamente. En efecto, esto se desprende de algunas verificaciones

topológicas elementales y del hecho que

$$X(\overline{K_v}) = (\mathrm{SL}_{n_1}(\overline{K_v}) \times \mathrm{SL}_{n_2}(\overline{K_v})) / F(\overline{K_v})$$

$$X_i(\overline{K_v}) = \mathrm{SL}_{n_i}(\overline{K_v}) / F(\overline{K_v})$$

Para concluir que f_i y g_i son abiertas, basta tomar invariantes por el grupo de Galois absoluto correspondiente y, por supuesto, verificar que esta acción es continua para la topología v -ádica de la clausura algebraica.

Supongamos que X_2 cumple la propiedad. Ahora, sea $U \subseteq X_1(K_\Omega)$ un abierto que interseca al conjunto de Brauer-Manin con respecto a B y $x_1 \in U \cap X_1(K_\Omega)^B$. Como f_1 es sobreyectiva, existe $x \in f_1^{-1}(x_1)$. Por el diagrama (3.1) vemos que $x_2 := f_2(x)$ está en el conjunto de Brauer-Manin. Por lo tanto, cualquier vecindad abierta V de x_2 cumple $\Delta^{-1}(V) \neq \emptyset$. Esto implica que el conjunto $A = g_1(g_2^{-1}(\Delta^{-1}(f_2(f_1^{-1}(U))))))$ es no vacío porque g_2 es sobreyectiva, f_1 es continua sobreyectiva y f_2 es una aplicación abierta. Como A está contenido en $\Delta^{-1}(U)$, concluimos que la única obstrucción a la aproximación débil para X_1 es la obstrucción de Brauer-Manin. Cambiando los roles de X_1 y X_2 vemos que es un equivalencia. \square

Definición 3.6. Sea F un K -grupo finito junto a una incrustación $F \hookrightarrow \mathrm{SL}_n$. Sea $X = \mathrm{SL}_n / F$ y B un subgrupo de $\mathrm{Br} X$ tal que el emparejamiento de la Definición 3.1 esté bien definido. Decimos que F cumple (BM_B) si la obstrucción de Brauer-Manin con respecto a B es la única obstrucción a la aproximación débil para el espacio homogéneo X .

Observación. La Proposición 3.5 nos enseña que esta propiedad solo depende del K -grupo F y no de la incrustación. De hecho, solo usamos que SL_n es un K -grupo semisimple, simplemente conexo y K -especial. Más aún, como la conjetura II de Serre es válida en este contexto, todo K grupo semisimple simplemente conexo es K -especial

(para cuerpos de funciones ver el Teorema 3.3 de [8] y para cuerpos estrictamente henselianos 2-dimensionales ver Teorema 1.4 de [1]). Entonces, podríamos cambiar SL_n por cualquier K -grupo semisimple simplemente conexo G y verificar si la obstrucción de Brauer-Manin a la aproximación débil es la única para G/F es equivalente a verificarlo para SL_n/F .

En el próximo capítulo nos interesará estudiar la obstrucción asociada al grupo $B_\omega(X)$. Para alivianar un poco la notación, nos referiremos a $(BM_{B_\omega(X)})$ como (BM_ω)

4. (BM_ω) para grupos abelianos finitos

4.1. Emparejamiento de Brauer-Manin y producto cup

Fijemos la siguiente notación para todo el capítulo. Denotamos por A un K -grupo abeliano finito y consideramos una incrustación fija $A \hookrightarrow \text{SL}_n$. En este capítulo estudiaremos la obstrucción a la aproximación débil del espacio homogéneo

$$X = \text{SL}_n / A.$$

Como ya señalamos, las propiedades que estudiamos son independientes de la incrustación y podríamos cambiar SL_n por cualquier K -grupo semisimple simplemente conexo.

En la primera parte de esta sección, K es un cuerpo arbitrario. Denotemos por \widehat{A} al dual de Cartier de A , es decir, el grupo $\text{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$. Para relacionar \widehat{A} con X , notemos que $H^0(\text{SL}_{n, \overline{K}}, \mathbb{G}_m) = \overline{K}^*$ y $\text{Pic } \text{SL}_{n, \overline{K}} = 0$. Entonces, gracias a la variante 1 del ejemplo 2 en la página 16 de [19], podemos identificar el grupo de picard geométrico $\text{Pic } \overline{X}$ con \widehat{A} como Γ_K -módulos. En particular, podemos identificar $H^1(K, \widehat{A})$ con $H^1(K, \text{Pic } \overline{X})$.

Proposición 4.1. Sea $P \in X(K)$. Consideremos la clase de equivalencia $[\text{SL}_n \rightarrow X]$ en $H^1(X, A)$. Entonces,

$$[\text{SL}_n \rightarrow X](P) = \delta(P)$$

donde $\delta : X(K) \rightarrow H^1(K, A)$ es la función de borde asociada a la sucesión exacta de Γ_K -conjuntos punteados $1 \rightarrow A(\overline{K}) \rightarrow \text{SL}_n(\overline{K}) \rightarrow X(\overline{K}) \rightarrow 1$.

Demostración. Denotamos por $\pi : \mathrm{SL}_n \rightarrow X$ la proyección canónica y por $\pi_L : \mathrm{SL}_n(L) \rightarrow X(L)$ la aplicación a nivel de L -puntos para cualquier extensión L/K . Por definición $\delta(P)$ es la clase del espacio principal homogéneo $\pi_{\overline{K}}^{-1}(P)$ en $H^1(K, A)$ (Proposición 36 de [18] sección 5). Por otro lado $[\mathrm{SL}_n \rightarrow X](P)$ corresponde a la clase $[\mathrm{SL}_n \times_X K \rightarrow K]$ donde el producto fibrado es con respecto a $\mathrm{SL}_n \rightarrow X$ y $P : K \rightarrow X$. Para concluir nos bastará entender los L -puntos del producto $\mathrm{SL}_n \times_X K$ como los L -puntos de SL_n que se envían a P por π_L . En efecto, la propiedad universal del producto fibrado nos asegura que $(\mathrm{SL}_n \times_X K)(L)$ está en correspondencia con los $\gamma \in \mathrm{SL}_n(L)$ que dejan el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & K \\ \downarrow \gamma & & \downarrow P \\ \mathrm{SL}_n & \xrightarrow{\pi} & X. \end{array}$$

Entonces, corresponde con $\pi_L^{-1}(P)$. Como esto es verdad para toda extensión L/K , vemos que $\pi_{\overline{K}}^{-1}(P)$ y $(\mathrm{SL}_n \times_X K)(\overline{K})$ coinciden como Γ_K -conjuntos y por lo tanto

$$[\mathrm{SL}_n \rightarrow X](P) = \delta(P).$$

□

En lo que sigue vamos a denotar por e al K -punto de X que proviene del neutro en $\mathrm{SL}_n(K)$. Además, definimos el siguiente subgrupo de $\mathrm{Br}_1 X$,

$$\mathrm{Br}_e X := \{\alpha \in \mathrm{Br}_1 X \mid \alpha(e) = 0\}.$$

Lema 4.2. Denotemos por $r : \mathrm{Br}_1 X \rightarrow H^1(K, \widehat{A})$ el morfismo que proviene de la sucesión espectral de Hochschild-Serre cf. (2.1). Tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Br}_e(X) \times X(K) & \xrightarrow{r \times \delta} & \mathrm{H}^1(K, \widehat{A}) \times \mathrm{H}^1(K, A) \\
\searrow \mathrm{BM} & & \swarrow \cup \\
& & \mathrm{Br} K
\end{array}
.$$

Demostración. El Teorema 4.1.1 de [19] nos asegura que para cualquier $\alpha \in \mathrm{H}^1(K, \widehat{A})$,

$$(4.1) \quad r(p^*(\alpha) \cup [\mathrm{SL}_n \rightarrow X]) = \alpha,$$

donde entendemos $[\mathrm{SL}_n \rightarrow X]$ como la clase del torsor en el grupo de cohomología $\mathrm{H}^1(X, A)$ y $p : X \rightarrow K$ es el morfismo estructural. Sea $\gamma \in \mathrm{Br}_e X$ y $P \in X(K)$. Aplicando (4.1), vemos directamente que

$$r(p^*(r(\gamma)) \cup [\mathrm{SL}_n \rightarrow X]) = r(\gamma).$$

Entonces, $p^*(r(\gamma)) \cup [\mathrm{SL}_n \rightarrow X] - \gamma$ está en $\mathrm{Br}_0(X)$ porque éste es el núcleo de r . Recordemos que el producto cup se porta bien con la evaluación. Más específicamente, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^1(X, \widehat{A}) \times \mathrm{H}^1(X, A) & \xrightarrow{\cup} & \mathrm{H}^2(X, \mathbb{G}_m) \\
\downarrow e^* & & \downarrow e^* \\
\mathrm{H}^1(K, \widehat{A}) \times \mathrm{H}^1(K, A) & \xrightarrow{\cup} & \mathrm{H}^2(K, \mathbb{G}_m).
\end{array}$$

Al evaluar en e , vemos que

$$\begin{aligned}
(p^*(r(\gamma)) \cup [\mathrm{SL}_n \rightarrow X] - \gamma)(e) &= (p^*(r(\gamma)) \cup [\mathrm{SL}_n \rightarrow X])(e) \\
&= e^* p^*(r(\gamma)) \cup [A \rightarrow K] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Usamos la Proposición 4.1 y el hecho que δ es una aplicación entre conjuntos punteados para ver que $[\mathrm{SL}_n \rightarrow X](e) = [A \rightarrow K] = 0$. Entonces, aprendemos que $p^*(r(\gamma)) \cup [\mathrm{SL}_n \rightarrow X] - \gamma$ vale 0 en e y como es una clase constante al estar en $\mathrm{Br}_0 X$, deducimos que $\gamma = p^*(r(\gamma)) \cup [\mathrm{SL}_n \rightarrow X]$. Evaluando en P , concluimos que

$$\gamma(P) = P^*p^*(r(\gamma)) \cup \delta(P).$$

Notando que P^*p^* es la identidad porque P es un K -punto, concluimos la conmutatividad que queríamos. \square

La importancia del grupo $\mathrm{Br}_e X$ viene del Lema 4.2 y el hecho que es un complemento para $\mathrm{Br}_0 X$ en $\mathrm{Br}_1 X$. En efecto, es fácil verificar que

$$\alpha \mapsto (\alpha - p^*(\alpha(e)), p^*(\alpha(e)))$$

es un isomorfismo entre $\mathrm{Br}_1 X$ y $\mathrm{Br}_e X \oplus \mathrm{Br}_0 X$ porque para todo $\alpha \in \mathrm{Br}_0 X$ tenemos $p^*e^*(\alpha) = \alpha$.

La identificación $\mathrm{Pic} \bar{A}$ con \widehat{A} más arriba, sigue siendo válida para grupos no abelianos, de hecho, sigue siendo gracias a la variante 1 del ejemplo 2 en la página 16 de [19]. En particular, el morfismo $r : \mathrm{Br}_e X \rightarrow \mathrm{H}^1(K, \widehat{A})$ sigue teniendo sentido.

Corolario 4.3. Sea F un K -grupo y $F \hookrightarrow \mathrm{SL}_n$ una incrustación dada. Denotamos por X la variedad SL_n/F . Entonces, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Br}_e(X) \times X(K) & \xrightarrow{r \times \delta^{ab}} & \mathrm{H}^1(K, \widehat{F}) \times \mathrm{H}^1(K, F^{ab}) \\ & \searrow \mathrm{BM} & \swarrow \cup \\ & \mathrm{Br} K. & \end{array}$$

donde δ^{ab} es la composición de $\delta : X(K) \rightarrow \mathrm{H}^1(K, F)$ con el morfismo $\mathrm{H}^1(K, F) \rightarrow \mathrm{H}^1(K, F^{ab})$ inducido por la abelianización.

Demostración. Tomemos una incrustación $F^{ab} \hookrightarrow \mathrm{SL}_m$. Esto da origen un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F & \hookrightarrow & \mathrm{SL}_n \times \mathrm{SL}_m \\ \downarrow & & \downarrow \\ F^{ab} & \hookrightarrow & \mathrm{SL}_m. \end{array}$$

Podemos remplazar X por $X' = \mathrm{SL}_n \times \mathrm{SL}_m / F$. En efecto, si conmuta con X' , podemos usar que el morfismo $X \rightarrow X'$ tiene una sección y argumentar con un diagrama conmutativo similar al diagrama conmutativo de abajo (4.2).

Denotemos por X^{ab} la variedad SL_m / F^{ab} . La compatibilidad entre las incrustaciones nos da morfismos $\mathrm{Br}_1 X^{ab} \rightarrow \mathrm{Br}_1 X$ y $X(K) \rightarrow X^{ab}(K)$. Como el morfismo $X \rightarrow X^{ab}$ es un K -morfismo, va a ser compatible con la evaluación y podemos asegurar que $\mathrm{Br}_e X^{ab}$ se envía a $\mathrm{Br}_e X$. Entonces, tenemos un diagrama conmutativo

$$(4.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{Br}_e X \times X(K) & \xrightarrow{r \times \delta^{ab}} & \mathrm{H}^1(K, \widehat{F}) \times \mathrm{H}^1(K, F^{ab}) \\ \uparrow & & \parallel \quad \parallel \\ \mathrm{Br}_e X^{ab} \times X^{ab}(K) & \xrightarrow{r \times \delta} & \mathrm{H}^1(K, \widehat{F}) \times \mathrm{H}^1(K, F^{ab}) \\ & \searrow \text{BM} & \swarrow \cup \\ & \mathrm{Br} K. & \end{array}$$

donde el triangulo inferior proviene del Lema 4.2. Probemos que el morfismo $\mathrm{Br}_e X^{ab} \rightarrow \mathrm{Br}_e X$ es un isomorfismo. Notemos que tenemos un morfismo entre las sucesiones espectrales de Hochschild-Serre

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^p(K, \mathrm{H}^q(\overline{X^{ab}}, \mathbb{G}_m)) & \Longrightarrow & \mathrm{H}^{p+q}(X^{ab}, \mathbb{G}_m) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}^p(K, \mathrm{H}^q(\overline{X}, \mathbb{G}_m)) & \Longrightarrow & \mathrm{H}^{p+q}(X, \mathbb{G}_m) \end{array}$$

Dado por la naturalidad de la sucesión espectral de Grothendieck. A nivel de la filtración en grado 2 esto nos da un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Br}_0 X^{ab} & \longrightarrow & \mathrm{Br}_1 X^{ab} & \longrightarrow & \mathrm{Br}_a X^{ab} \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Br}_0 X & \longrightarrow & \mathrm{Br}_1 X & \longrightarrow & \mathrm{Br}_a X \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Además, tanto $\mathrm{Br}_a X$ como $\mathrm{Br}_a X^{ab}$ son isomorfos a $H^1(K, \widehat{F})$ de una forma consistente con la el morfismo de arriba, gracias a la sucesión espectral de Hochschild-Serre. Para concluir solo nos faltaría ver que este isomorfismo es consistente con nuestro isomorfismo entre $\mathrm{Br}_a X$ y $\mathrm{Br}_e X$, pero esto es fácil porque identifica $\mathrm{Br}_0 X^{ab}$ con $\mathrm{Br}_0 X$. \square

Lema 4.4. Para cada $v \in \Omega$ tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Br}_1 X & \longrightarrow & \mathrm{Br}_1 X_v \\
\downarrow r & & \downarrow r \\
H^1(K, \widehat{A}) & \longrightarrow & H^1(K_v, \widehat{A}),
\end{array}$$

donde las flechas verticales son las de (1).

Demostración. Esto es una consecuencia directa de la naturalidad de la sucesión espectral de Grothendieck. \square

Fijemos la siguiente notación: si B es un subgrupo de $\mathrm{Br}_1 X$, denotaremos por B_e al subgrupo $\mathrm{Br}_e X \cap B$. En lo que queda del capítulo, asumiremos que K es un cuerpo global geométrico cf. sección 2.3.

Proposición 4.5. Sea F un K -grupo finito. Mantengamos la notación del Corolario 4.3. Para todo subconjunto finito S de Ω existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
X(K_S) \times B_{S,e}(X)/B_e(X) & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
\downarrow & \searrow & \\
H^1(K_S, F^{ab}) \times \mathbb{H}_S^1(K, \widehat{F})/\mathbb{H}^1(K, \widehat{F}) & &
\end{array}$$

donde la flecha horizontal proviene por el emparejamiento de Brauer-Manin, la diagonal de Poitou-Tate y la vertical es (δ^{ab}, r) .

Demostración. Aplicando el Corolario 4.3 a los cuerpos K_v para $v \in S$ y sumando los diagramas conseguimos directamente un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X(K_S) \times \text{Br}_e X & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in S} \text{Br } K_v \xrightarrow{\sum j_v} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \text{H}^1(K_S, F^{ab}) \times \text{H}^1(K_S, \widehat{F}). & & \end{array}$$

Podemos remplazar $\text{H}^1(K_S, \widehat{F})$ por $\text{H}^1(K, \widehat{F})$ combinando los Lemas 4.2 y 4.4. Así, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X(K_S) \times \text{Br}_e X & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in S} \text{Br } K_v \xrightarrow{\sum j_v} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \text{H}^1(K_S, F^{ab}) \times \text{H}^1(K, \widehat{F}). & & \end{array}$$

Para concluir nos quedaría justificar que $B_{S,e}$ y B_e se envían a $\text{III}_S^1(K, \widehat{F})$ y $\text{III}^1(K, \widehat{F})$ respectivamente, pero esto es claro del Lema 4.4. Así conseguimos el diagrama que buscábamos. Vale la pena notar una sutileza: la flecha diagonal que conseguimos es el emparejamiento que aparece en la sucesión de Poitou-Tate. \square

Sería agradable cambiar el grupo $B_{S,e}(X)/B_e(X)$ por $\mathbb{B}_S(X)/\mathbb{B}(X)$, al menos visualmente. Esto se puede hacer, pero hay que tener mucho cuidado, porque la tentadora identificación entre $\text{Br}_a X$ y $\text{Br}_e X$ depende del punto e . En este caso, tenemos un punto distinguido para hacerla, pero debemos tener cuidado porque el emparejamiento $X(K_S) \times \mathbb{B}_S(X)/\mathbb{B}(X) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ depende del punto e . Aunque en “el límite”, es el emparejamiento de Brauer-Manin de la Definición 3.1.

El siguiente es el resultado principal de este capítulo.

Teorema 4.6. Todo K -grupo abeliano A cumple (BM_ω) .

Demostración. Debemos probar que cualquier abierto $U \subseteq X(K_\Omega)$ que intersekte a $X(K_\Omega)^{\text{B}_\omega(X)}$ tiene preimagen no vacía por la aplicación diagonal $\Delta : X(K) \rightarrow X(K_\Omega)$.

Aprovechemos de fijar notación con el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X(K) & \xrightarrow{\delta} & \text{H}^1(K, A) \\ \downarrow \Delta_S & & \downarrow \beta \\ X(K_S) & \xrightarrow{\delta_S} & \text{H}^1(K_S, A) \end{array}$$

con S un subconjunto finito de Ω . Además denotemos por $p_S : X(K_\Omega) \rightarrow X(K_S)$ la proyección canónica. Sea $(x_v)_{v \in \Omega} \in U \cap X(K_\Omega)^{\text{B}_\omega(X)}$. Por la Proposición 4.5 sabemos que $\delta_S((x_v)_{v \in S})$ está en el núcleo por la izquierda del emparejamiento $\text{H}^1(K_S, A) \times \text{III}_S^1(K, \widehat{A}) / \text{III}^1(K, \widehat{A}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ para cada S finito. Entonces, gracias al Corolario 2.10, debe existir un $y \in \text{H}^1(K, A)$ tal que $\beta^1(y) = \delta_S((x_v)_{v \in S})$. Ahora, recordando que $\delta : X(K) \rightarrow \text{H}^1(K, A)$ es sobreyectiva porque $\text{H}^1(K, \text{SL}_n) = 0$, aprendemos que existe un $x \in X(K)$ tal que

$$\delta_S(\Delta_S(x)) = \delta_S((x_v)_{v \in S}).$$

El Corolario 1 de [18, §5.4] nos dice que existen un $A_v \in \text{SL}_n(K_v)$ para cada $v \in S$ tales que $\Delta_S(x) = (A_v \cdot x_v)_{v \in S}$. Nos gustaría poder decir que la tupla (A_v) proviene de un elemento $A \in \text{SL}_n(K)$ y cambiar x por $A^{-1}x$ para poder asumir que $\Delta_S(x) = (x_v)_{v \in S}$. En general, no tiene por qué ser verdad, pero podemos aproximarla. En efecto, existe una matriz $A \in \text{SL}_n(K)$ tal que su imagen en $\text{SL}_n(K_v)$ esté cuán cerca necesitamos de A_v para todo $v \in S$. Poder aproximar las matrices es sencillo porque K es denso en K_v , pero para poder hacerlo simultáneamente necesitamos el teorema 12.6 de [13]. Así, podemos asumir que $\Delta_S(x)$ está en $p_S(U)$. Si tomamos S suficientemente grande para que exista una vecindad de la forma $\prod_{v \in S} U_v \times \prod_{v \notin S} X(K_v)$ que esté contenida en U , deducimos que $\Delta(x)$ está en U . Concluimos que $\Delta^{-1}(U) \neq \emptyset$. \square

4.2. Traducción a la cohomología

La sección anterior deja la sensación que la propiedad (BM_ω) tiene una traducción cohomológica. Para el caso abeliano es exactamente lo que hicimos en las demostraciones. Sin embargo, sigue siendo verdad para estabilizadores no abelianos y para obstrucciones asociadas a otros subgrupos de $\text{Br } X$.

Sea X un espacio homogéneo de un grupo algebraico G seimisimple simplemente conexo con estabilizador finito F sobre K . En [11] se demuestra que $\text{Br } X$ es igual a $\text{H}^2(F^X, \overline{K}^*)$ donde F^X es cierta extensión de Γ_K por F y F^X actúa en \overline{K}^* por el morfismo hacia Γ_K que define la extensión. Es importante decir que cada punto racional $P \in X(K)$ da origen a una descomposición $F^X = F \rtimes \Gamma_K$. De ahora en adelante, pensaremos X como un espacio punteado donde el elemento distinguido es el punto racional proveniente del neutro. Además, se demuestra que, a través de esta identificación y la aplicación $\delta : X(K) \rightarrow \text{H}^1(K, F)$, el emparejamiento $X(K) \times \text{Br } X \rightarrow \text{Br } K$ dado por evaluación se transforma en un emparejamiento

$$(4.3) \quad \text{H}^1(K, F) \times \text{H}^2(F^X, \overline{K}^*) \rightarrow \text{Br } K$$

independientemente del cuerpo K . Este emparejamiento se define como sigue: el conjunto $\text{H}^1(K, F)$ se puede entender como secciones de $\Gamma_K \rightarrow F \rtimes \Gamma_K$ módulo conjugación. El emparejamiento envía un par $([s], \alpha)$ a $s^* \alpha$ donde s^* es el morfismo inducido por la sección s en cohomología. Vale la pena recalcar que esta definición del emparejamiento depende del punto que elegimos.

Sea B un subgrupo de $\text{H}^2(F^X, \overline{K}^*)$ tal que para cada $\alpha \in B$ y $(x_v)_{v \in \Omega} \in \text{H}^1(K_\Omega, F)$ la suma $\sum_{v \in \Omega} j_v(\alpha_v(x_v))$ es finita donde α_v es la imagen de α en $\text{Br } X_v$ y $\alpha_v(x_v)$ es la evaluación del emparejamiento (4.3). Podemos traducir la propiedad (BM_B) a cohomología como sigue: para cada $S \subseteq \Omega_K$ finito podemos definir el conjunto de

Brauer-Manin cohomológico, $H^1(K_S, F)^{B(S)}$, como el núcleo por la izquierda del emparejamiento

$$H^1(K_S, F) \times B(S) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

donde $B(S)$ es el subgrupo de B formado por los elementos α tales que para $v \notin S$ la clase $\alpha_v \in \text{Br}(X \times_K K_v)$ tiene evaluaciones triviales. Decimos que el grupo F cumple (BM_B) cohomológico si la aplicación diagonal $\Delta : H^1(K, F) \rightarrow \prod_{v \in S} H^1(K_v, F)$ es sobreyectiva en el conjunto de Brauer-Manin cohomológico con respecto a B para cada S finito.

Proposición 4.7. Mantengamos las notaciones anteriores. El K -grupo finito F cumple (BM_B) si y solo si cumple (BM_B) cohomológico.

Demostración. Incrustemos F en SL_n para cierto n y denotemos por X el espacio homogéneo SL_n/F . Razonemos sobre el siguiente diagrama conmutativo

$$(4.4) \quad \begin{array}{ccc} X(K) & \xrightarrow{\delta} & H^1(K, F) \\ \downarrow \Delta & & \downarrow \\ X(K_S) & \xrightarrow{\prod \delta_v} & H^1(K_S, F). \end{array}$$

Supongamos que F cumple (BM_B) . Sea $(\alpha_v)_{v \in S} \in H^1(K_S, F)^{B(S)}$. Notando que $\delta_v : X(K_v) \rightarrow H^1(K_v, F)$ es sobreyectiva y aplicando la Proposición 3.4 de [11], vemos que existe un elemento $(x_v)_{v \in S} \in X(K_S)^{B(S)}$ tal que $\delta_v(x_v) = \alpha_v$. Usando la continuidad de δ_v , podemos encontrar una vecindad abierta U de $(x_v)_{v \in S}$ en $X(K_S)$ tal que $\prod \delta_v(U) = (\alpha_v)_{v \in S}$. Como U intersecta al conjunto de Brauer-Manin y F cumple (BM_B) , existe un punto racional x tal que $\prod \delta_v(\Delta(x)) = (\alpha_v)_{v \in S}$. Por lo tanto, por la conmutatividad de (4.4), concluimos que $\alpha := \delta(x)$ se envía a $(\alpha_v)_{v \in S}$. Probando que F cumple (BM_B) cohomológico.

La implicancia recíproca está en la demostración del teorema 4.6. Solo hay que reemplazar el uso del Corolario 2.10 por el hecho que se cumple (BM_B) cohomológico,

el uso de la Proposición 4.5 por la Proposición 3.4 de [11] y $\mathbb{E}_\omega(X)$ por B donde corresponda. □

5. Aproximación muy débil para productos semidirectos iterados

Por todo este capítulo asumiremos que K es un cuerpo de funciones y no un cuerpo estrictamente henseliano de dimensión 2. El único lugar donde necesitamos que sea un cuerpo de funciones es en la sección 5.1. Todo el resto del capítulo debería funcionar sin problemas una vez se consigan los resultados análogos a los conseguidos en la sección 5.1 para los cuerpos estrictamente henselianos de dimensión 2.

5.1. Reocurrencia

Una herramienta central para tratar la aproximación débil en cuerpos de números ha sido el teorema de densidad de Chebotarev. No podemos esperar un análogo a este teorema en nuestro contexto porque la noción de densidad deja de tener sentido. Aún así, podemos conseguir una versión más débil. En esta sección conseguimos el teorema de reocurrencia, el cual remplazará al teorema de Chebotarev en la mayoría de los argumentos donde cualquier especialista se vería tentado a usarlo.

Para aligerar un poco la notación y redacción, no vamos a hacer diferencia entre las valuaciones y los puntos cerrados de los que provienen. Esperamos que sea claro a cuál nos referimos del contexto. Además denotaremos por κ_v al cuerpo residual en $v \in \Omega$.

Teorema 5.1. Sea L/K una extensión galoisiana finita de grupo G y v un lugar no ramificado en L/K . Entonces, hay un abierto analítico U de $C(\kappa_v)$ tal que G_w y G_v son

conjugados para cada $w \in U$.

Recordemos que el cuerpo k y sus extensiones son cuerpos “grandes”, ver Ejemplo 5.6.2 de [10] (en [10] los llaman “ample fields”). Entonces, si encontramos un punto racional de la curva C , habremos encontrado infinitos. Antes de probar este teorema, debemos pasar por un par de lemas.

Lema 5.2. Sea $f \in H^1(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ tal que su imagen $f_v \in H^1(K_v, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ es no ramificada y tiene orden m . Entonces, hay una vecindad abierta U de v en $C(\kappa_v)$ donde f_w tiene orden m para todo $w \in U$.

Demostración. Notemos que $H^1(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq H^1(K, \mu_n)$ (no canónicamente) porque K contiene todas las raíces de la unidad. Además gracias a la teoría de Kummer y Hilbert 90, $H^1(K, \mu_n) = K^*/K^{*n}$. Sea $g \in K^*$ tal que su clase en K^*/K^{*n} es f .

Supongamos que $m = n$, es decir, que la primera potencia de g que es una potencia n -ésima en K_v es g^n . Sea π un uniformizante en v y $u \in \mathcal{O}_v^*$ tal que $g = u\pi^n$.

Como la curva C está definida sobre un cuerpo completo, es suave y geométricamente íntegra, podemos aplicar el teorema de la función inversa a la evaluación $\pi : C(\kappa_v) \rightarrow \kappa_v$ para asegurar que existen abiertos analíticos U y V de $C(\kappa_v)$ y κ_v respectivamente tales que $v \in U$, $0 \in V$ y π induce un isomorfismo entre ellos. Notemos que por continuidad, salvo hacer U más pequeño podemos escribir

$$\begin{aligned} u(w) - u(v) &= c_a t^a + \dots \\ \pi(w) - \pi(v) &= c'_b t^b + \dots \end{aligned}$$

para a y b cuan grandes queramos. Recordemos que para ser una potencia n -ésima de $\mathbb{C}((t))$ basta con que el primer término lo sea. Por lo tanto, para cada $w \in U$ la clase de $u(w)$ en κ_v^*/κ_v^{*n} es igual a la de $u(v)$. Además, a medida que varía w en U , $\pi(w)$ recorre todas las clases porque $\pi(v) = 0$. Más aún, este mismo argumento nos dice que

$\pi(w)$ toma infinitas veces cada valor de κ_v^*/κ_v^{*n} .

Podemos identificar κ_v^*/κ_v^{*n} con $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ porque κ_v es una extensión finita de $\mathbb{C}((t))$. Salvo elegir un U más pequeño, podemos asumir que g es invertible en w para cada $w \in U$. Como f no ramifica, n divide a r y necesariamente u debe tener orden n en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ para que f_v lo tenga en $H^1(K_v, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Entonces, $g(w)$ visto como elemento de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es un generador.

Sea $w \in U$. Tenemos que $\kappa_w \subseteq \kappa_v$, $w(g) = 0$ y la imagen de g en κ_w^*/κ_w^{*n} genera porque lo hace en κ_v^*/κ_v^{*n} . Esto nos permite concluir que la imagen de f en K_w^*/K_w^{*n} tiene orden n porque si g^i fuera una potencia n -ésima en K_w con $i < n$, su imagen en κ_w también lo sería, lo que es una contradicción.

Nos queda ver qué pasaría si $m \neq n$. En este caso, la clase de f en $H^1(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ proviene de $H^1(K, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ vía el morfismo inducido por $1 \mapsto \frac{n}{m}$. Debemos pensar en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H^1(K, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(K_v, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(K_v, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}). \end{array}$$

El argumento anterior nos permite asegurar que existe un abierto analítico U donde la clase de f en $H^1(K, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ tiene orden m . Nos basta notar que las flechas horizontales son inyectivas porque las acciones son triviales. \square

Lema 5.3. Sea L/K una extensión finita, D la curva correspondiente a L y ℓ/k una extensión finita tal que $D(\ell) \neq \emptyset$. Entonces, el conjunto de lugares en $C(\ell)$ totalmente descompuestos en L/K es un abierto denso en $C(\ell)$.

Demostración. Probemos primero que es abierto. Sea $v \in C(\ell)$ un lugar totalmente descompuesto. A la extensión L/K le corresponde un morfismo finito de curvas, denotémoslo por $\pi : D \rightarrow C$. Como π es étale en v , podemos aplicar el teorema de

la función inversa al morfismo $\pi_\ell : D(\ell) \rightarrow C(\ell)$ para conseguir abiertos analíticos U_1, \dots, U_n de $D(\ell)$ disjuntos y V de $C(\ell)$ tales que π_ℓ induce isomorfismos (analíticos) entre U_i y V . Dicho de otra forma, cerca de v este morfismo se comporta como un recubrimiento en el sentido topológico. Esto nos permite asegurar que cada elemento de V tiene n preimágenes. Lo que corresponde, después de hacer todas las traducciones adecuadas, a que la extensión L/K sea totalmente descompuesta en cada $w \in V$.

Probemos que es denso. Para encontrar lugares totalmente descompuestos en la extensión L/K , nos bastaría encontrar lugares totalmente descompuestos en $L/k(\mathbb{P}_k^1)$. Podemos remplazar L por su clausura galoisiana para asumir que la extensión $L/k(\mathbb{P}_k^1)$ es galoisiana. Supongamos por un momento que $\ell = k$, es decir, que D tiene puntos racionales. Entonces, todos los puntos racionales de D donde la extensión es no ramificada son totalmente descompuestos. Como solo hay finitos lugares ramificados, es claro que es denso. Consideremos el caso general. Tenemos un diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccc} D_\ell & \longrightarrow & D \\ \pi_\ell \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}_\ell^1 & \xrightarrow{p} & \mathbb{P}_k^1. \end{array}$$

Nos basta demostrar que el conjunto de lugares totalmente descompuesto en $k(D_\ell)/k(\mathbb{P}_k^1)$ es denso en $\mathbb{P}_k^1(\ell)$ porque si son totalmente descompuestos en esa extensión, lo serán en la subextensión $L/k(\mathbb{P}_k^1)$. Notemos que el conjunto de lugares totalmente descompuestos de la extensión $k(D_\ell)/k(\mathbb{P}_\ell^1)$ en $\mathbb{P}_\ell^1(\ell) = \mathbb{P}_k^1(\ell)$ es todo salvo una cantidad finita de puntos. Entonces, nos quedaría probar que el conjunto de lugares totalmente descompuestos en la extensión asociada a p es denso en $\mathbb{P}_k^1(\ell)$. En efecto, un lugar $x \in \mathbb{P}_k^1(\ell)$ es totalmente descompuesto en la extensión asociada a p si no proviene de $\mathbb{P}_k^1(m)$ para una extensión $k \subset m \subsetneq \ell$ y es no ramificado. Entonces, buscamos elementos en el

conjunto

$$(5.1) \quad \mathbb{P}_k^1(\ell) \setminus \bigcup_{k \subseteq m \subsetneq \ell} \mathbb{P}_k^1(m).$$

Tomando un abierto afín U de \mathbb{P}_k^1 , vemos que (5.1) se convierte en

$$\ell \setminus \bigcup_{k \subseteq m \subsetneq \ell} m.$$

Probar que este conjunto es denso para la topología analítica de ℓ no es más que hacer la situación más explícita. El cuerpo ℓ es de la forma $\mathbb{C}((t^{1/n}))$ y la unión es sobre todos los subcuerpos $\mathbb{C}((t^{1/d}))$ para $d|n$. \square

Demostración del Teorema 5.1. Por comodidad escribiremos igualdades a pesar de que la mayoría de éstas son salvo conjugación, porque el grupo de descomposición está bien definido salvo conjugación.

El Lema 5.2 soluciona el caso cíclico. En general, consideremos L' como el cuerpo fijo por G_v . Denotemos por D' la curva correspondiente a L' . Sabemos que la extensión L'/K es totalmente descompuesta en v , luego aplicamos el Lema 5.3 para conseguir un abierto analítico denso U de $C(\kappa_v)$ donde L'/K es totalmente descompuesta. Notemos que el Lema 5.2 se aplica a la extensión L/L' . Esto nos entrega un abierto analítico $U' \subseteq D'(\kappa_v)$ tal que $G_v = G_{w'}$ para $w' \in U'$ vistos como grupos de descomposición en $\text{Gal}(L/L')$. Nos basta intersectar la imagen de U' con U para conseguir un abierto analítico no vacío V tal que G_v y G_w son conjugados para cada $w \in V$. \square

La siguiente proposición es una consecuencia sencilla del Lema 2.6 de [3]. La importancia del resultado es que la obstrucción con respecto a $\mathbb{B}_\omega(X)$ es en cierto sentido “calculable” para espacios homogéneos de grupos semisimples simplemente conexos con estabilizador finito.

Proposición 5.4. Sea X un espacio homogéneo de un grupo semisimple simplemente conexo con estabilizador finito F . Entonces, el grupo $\mathbb{B}_\omega(X)/\mathbb{B}(X)$ es finito.

Demostración. Es sencillo notar que $\mathbb{B}_\omega(X)/\mathbb{B}(X)$ se identifica con $\text{III}_\omega^1(K, \widehat{F})/\text{III}^1(K, \widehat{F})$. Sabemos que \widehat{F} es escindido por una extensión finita galoisiana L/K . Entoncces, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{H}^1(L/K, \widehat{F}) \xrightarrow{\text{Inf}} \text{H}^1(K, \widehat{F}) \rightarrow \text{H}^1(L, \widehat{F}).$$

El Lema 5.2 nos dice que $\text{III}_\omega^1(L, \widehat{F}) = \text{III}^1(L, \widehat{F})$. Vemos que $\text{III}^1(K, \widehat{F})$ debe tener índice finito en $\text{III}_\omega^1(K, \widehat{F})$ porque coinciden módulo el subgrupo finito $\text{Inf}(\text{H}^1(L/K, \widehat{F}))$. \square

Para terminar esta sección conseguiremos un resultado similar al teorema de recurrencia, pero para los elementos en vez de los grupos de descomposición. Recordemos que cada cuerpo local K_v es isomorfo a $\mathbb{C}((t'))((u))$. Como estamos considerando K como un cuerpo de funciones de una curva sobre $\mathbb{C}((t))$, podemos elegir que t' sea una potencia de un t fijado globalmente. Aunque no podemos hacer lo mismo con u , podemos elegir alguno y conseguir isomorfismos

$$\psi_v : \Gamma_{K_v} \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}}(1) \times \widehat{\mathbb{Z}}(1)$$

donde $\widehat{\mathbb{Z}}(1) = \varprojlim \mu_n$. Consideremos el isomorfismo $\phi_{v,w} = \psi_w^{-1} \circ \psi_v$ entre Γ_{K_v} y Γ_{K_w} .

Teorema 5.5. Sea L/K una extensión galoisiana finita de grupo G y $v \in \Omega_K$ donde la extensión no ramifique. Entonces, existe un vecindad abierta U de v en $C(\kappa_v)$ tal que para cada $w \in U$ la extensión L/K no es ramificada en w y existe $\rho_w \in \Gamma_K$ tal que la imagen de $\rho_w s \rho_w^{-1}$ en G coincide con la de $\phi_{v,w}(s)$ para cada $s \in \Gamma_{K_v}$.

Notemos que como estamos trabajando solo en lugares no ramificados, la ambigüedad del isomorfismo ψ_v no es un problema.

Demostración. Supongamos que G es cíclico de orden n . Sea $f : \Gamma_K \rightarrow G$ el morfismo inducido por la extensión y f_v su restricción a Γ_{K_v} . El Lema 5.2 nos entrega un abierto U tal que para $w \in U$ la restricción f_w tiene la misma imagen que f_v . Entonces, el teorema se convierte en probar conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{K_v} & \xrightarrow{f_v} & G \\ \downarrow \phi_w & & \uparrow f_w \\ \Gamma_{K_w} & \xrightarrow{f_w} & G \end{array}$$

Podemos asumir que L/K no ramifica en w . Como ya mencionamos, tenemos isomorfismos

$$\begin{aligned} K_v &\simeq \mathbb{C}((t'))((u')) \\ K_w &\simeq \mathbb{C}((t''))((u'')), \end{aligned}$$

donde $t' = t^{1/n_v}$, $t'' = t^{1/n_w}$ para ciertos n_v y n_w . Justifiquemos que podemos tomar un abierto más pequeño y asumir que $n_v = n_w$. Recordemos que el abierto U está en $C(\kappa_v)$, en particular, $\kappa_w \subseteq \kappa_v$ para cada $w \in U$. Justificamos al final de la demostración del Lema 5.3 que los puntos w tales que $\kappa_w = \kappa_v$ forman un abierto denso de $C(\kappa_v)$. Cambiando U por la intersección de U con este conjunto, podemos asumir que $\kappa_w = \kappa_v$ para cada $w \in U$, o en otros símbolos, $n_w = n_v$. Sea $s \in \Gamma_{K_v}$. Como la extensión no ramifica en v y, salvo tomar U más pequeño, en w tampoco, nos basta asumir que $\psi_v(s)$ está en $\widehat{\mathbb{Z}}(1) \times \{0\}$. Bajo la identificación anterior, el elemento s debe actuar multiplicando por raíces de la unidad, es decir, existe $(\zeta_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \widehat{\mathbb{Z}}(1)$ tal que $s(t^{1/m}) = \zeta_m \cdot t^{1/m}$. Más aún, $\phi_w(s)$ actúa por la misma fórmula para t'' en vez de t' . Como tenemos $n_w = n_v$, tenemos que $t' = t''$ y esto prueba que el diagrama conmuta.

Consideremos el caso general. Sea L' el cuerpo fijo por el grupo de descomposición

G_v . Sea D' la curva correspondiente a L' . El párrafo anterior nos asegura que existe una vecindad abierta U' de v' en $D'(\kappa_{v'})$ (donde v' es alguna valuación sobre v) tal que para cada $w' \in U'$ las imágenes de s y $\phi_{v,w'}(s)$ coinciden en G_v para cada $s \in \Gamma_{K_v}$. Salvo intersectar la imagen de U' en $C(\kappa_v)$ con el abierto analítico denso conformado por los lugares totalmente descompuestos (ver Lema 5.3), vemos que si hubiésemos elegido el lugar w' para definir el grupo de descomposición del lugar w que induce en K , tenemos el resultado. Como el grupo de descomposición está bien definido salvo conjugación, concluimos. \square

5.2. Reocurrencia y cohomología

En esta sección demostraremos los resultados análogos a aquellos en la sección 3 de [5] para poder demostrar la aproximación muy débil para productos semidirectos iterados de grupos abelianos.

Antes de comenzar, necesitamos un pequeño lema.

Lema 5.6. Fijemos una clausura algebraica de K . Sea \tilde{K} el composito de todas las extensiones finitas L/K tales que $L_v = K_v$ para todo lugar $v \in \Omega_K$. La extensión \tilde{K}/K es Galois.

Demostración. Sea $p(X) \in K[X]$ un polinomio irreducible que admite una raíz $x \in \tilde{K}$. Sean $x_2, \dots, x_n \in \overline{K}$ las otras raíces de p . Vemos que las extensiones $K(x_i)$ son triviales en todos los lugares ya que el polinomio p se descompone en factores lineales en $K_v[X]$ para cada $v \in \Omega$. Concluimos que $x_i \in \tilde{K}$. \square

Lema 5.7. Sea A un K -grupo abeliano finito, L/K una extensión galoisiana finita que escinde a A y \tilde{L} como en el lema anterior. Sea $S \subseteq \Omega_K$ un conjunto finito. Entonces, el grupo $\text{III}_S^1(K, A)$ proviene por inflación de $H^1(\tilde{L}/K, A)$.

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$(5.2) \quad \begin{array}{ccccc} H^1(\tilde{L}/K, A) & \longrightarrow & H^1(K, A) & \xrightarrow{\text{Res}} & H^1(\tilde{L}, A) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \prod_{v \in \Omega} H^1(K_v, A) & \xrightarrow{\prod \text{Res}_v} & \prod_{v \in \Omega_L} H^1(\tilde{L}_v, A). \end{array}$$

Como L escinde a A , es sencillo probar usando el Lema 5.2 que

$$\text{III}_{\omega}^1(\tilde{L}, A) = \text{III}^1(\tilde{L}, A)$$

o puede revisarse la Proposición 2.6 de [3]. Esto prueba que $\beta := \text{Res}(\alpha)$ es trivial en todo lugar. Como \tilde{L} escinde a A , podemos interpretar β como un morfismo $\beta : \Gamma_{\tilde{L}} \rightarrow A$. Si β fuera no trivial, le correspondería una extensión no trivial M/\tilde{L} . Por la definición de \tilde{L} , existiría un lugar v tal que $M_v \neq L_v$. Esto contradice que $\beta_v = 0$. Concluimos por exactitud de la fila superior de (5.2). \square

Siguiendo las notaciones de [5], denotemos por Bad_F el conjunto de lugares donde ramifica la extensión minimal que escinde a un K -grupo finito F .

Lema 5.8. Sea F un K -grupo finito y $v \notin \text{Bad}_F$. Entonces, existen infinitos lugares w con isomorfismos

$$\rho_{v,w}^* : H^1(K_v, F) \rightarrow H^1(K_w, F).$$

Demostración. Sea L/K una extensión que escinde a F . Gracias al Teorema 5.5, existen infinitos lugares w y $\rho_w \in \Gamma_K$ tales que $\rho_s \rho^{-1}$ y $\phi_{v,w}(s)$ tienen la misma imagen en $\text{Gal}(L/K)$ para cada $s \in \Gamma_{K_v}$. Denotemos por ${}_{\rho}F$ al K_v -grupo donde $s \in \Gamma_{K_v}$ actúa por $f \mapsto {}^{\rho} s \rho^{-1} f$. Así, la función $f \mapsto {}^{\rho} f$ de F a ${}_{\rho}F$ es un morfismo de K -grupos, por lo tanto, induce un isomorfismo $\rho^* : H^1(K_v, F) \rightarrow H^1(K_v, {}_{\rho}F)$.

Por otro lado, tenemos un isomorfismo $\phi_{v,w} : \Gamma_{K_v} \rightarrow \Gamma_{K_w}$. El isomorfismo ρ_w^* que

buscamos es la composición

$$H^1(K_v, F) \xrightarrow{\rho^*} H^1(K_v, {}_\rho F) \xrightarrow{\phi_{v,w}^*} H^1(K_w, F).$$

Notemos que $\phi_{v,w}$ induce un morfismo en la cohomología porque $\rho s \rho^{-1} = \phi_{v,w}(s)$ en $\text{Gal}(L/K)$. En efecto, gracias a esa igualdad, la función $h : {}_\rho F \rightarrow F$ definida como $h(f) = f$ cumple $\phi_{v,w}(s)h(f) = h(s f)$. \square

Lema 5.9. Sean $F, v, w, \rho_{v,w}^*$ como en el lema anterior. Sea L/K una extensión que escinde a F . Sea $\alpha \in H^1(K_v, F)$ y supongamos que existe una clase $\beta = [b] \in H^1(K, F)$ tal que $\beta_v = \alpha$, $\beta_w = \rho_{v,w}^* \alpha$ y el morfismo de grupo $\Gamma_L \rightarrow F$ obtenido al restringir b es sobreyectivo. Denotemos por L' la extensión correspondiente al núcleo del morfismo anterior. Entonces, los grupos de descomposición de v y w son conjugados en $\text{Gal}(L'/K)$.

Antes de comenzar la demostración, notemos que la extensión L'/K es galoisiana por el Lema 3.4 de [5].

Demostración. Vamos a traducir la demostración de [5] a nuestro contexto.

Sabemos que existe un elemento $\rho \in \Gamma_K$ tal que $\phi_{v,w}(s)$ y $\rho s \rho^{-1}$ coinciden en $\text{Gal}(L/K)$ para cada $s \in \Gamma_{K_v}$ (porque para construir w en el lema anterior, usamos un w que nos entrega el Teorema 5.5). Probemos la siguiente afirmación.

Afirmación: Podemos elegir ρ de tal forma que $b_\rho = 1$.

Notemos que para cada $\chi \in \Gamma_L$ tenemos que $b_{\chi\rho} = b_\chi b_\rho$ porque L escinde a F . Como la restricción de b a Γ_L es sobreyectiva, existe algún $\chi \in \Gamma_L$ tal que $b_\chi = b_\rho^{-1}$. Juntando estas dos cosas, vemos que $b_{\chi\rho} = b_\chi b_\rho = 1$. Además, $\phi_{v,w}(s)$ y $(\chi\rho)s(\chi\rho)^{-1}$ coinciden en $\text{Gal}(L/K)$.

Si revisamos la demostración de Lema 5.8, notamos que el morfismo $\rho_{v,w}^*$ está dado por los morfismos ρ^* y $\phi_{v,w}$. Traduciendo esto a nivel de cociclos, si $\alpha = [a]$ con

$a \in Z^1(\Gamma_{K_v}, F)$ y $\rho_{v,w}^* \alpha = [a']$, el cociclo a' está definido por

$$a'_t = {}^\rho a_{\phi_{v,w}^{-1}(t)}$$

para $t \in \Gamma_{K_w}$.

Como $\beta_v = \alpha$ y $\beta_v = \rho_{v,w}^* \alpha$, sabemos que deben existir $f, f' \in F$ tales que

$${}^\rho (f b_s^s f^{-1}) = {}^\rho a_s = a'_{\phi_{v,w}(s)} = f' b_{\phi_{v,w}(s)}^{\phi_{v,w}(s)} f'^{-1}.$$

Por definición, la restricción de b a $\text{Gal}(L'/L)$ es un isomorfismo. Entonces, existen únicos $\chi, \chi' \in \text{Gal}(L'/L)$ tales que $b_\chi = f$ y $b_{\chi'} = f'$. Por lo tanto,

$$(5.3) \quad {}^\rho b_\chi {}^\rho b_s {}^\rho b_\chi^{-1} = b_{\chi'} b_{\phi_{v,w}(s)}^{\phi_{v,w}(s)} b_{\chi'}^{-1}$$

Fijemos $\rho_0 := \chi'^{-1} \rho \chi \in \text{Gal}(L'/K)$. Probemos que $\rho_0 s \rho_0^{-1}$ coincide con $\phi_{v,w}(s)$ en $\text{Gal}(L'/K)$ para cada $s \in \Gamma_{K_v}$. Como χ y χ' pertenecen a Γ_L , sus imágenes en $\text{Gal}(L/K)$ coinciden y actúan trivialmente en F . Por otro lado, notando que $b_{\rho\eta\rho^{-1}} = {}^\rho b_\eta$ para cada $\eta \in \text{Gal}(L'/L)$ porque $b_\rho = 1$ y usando la igualdad (5.3) vemos que

$$b_{\rho_0} b_s^s b_{\rho_0}^{-1} = b_{\phi_{v,w}(s)}.$$

Como la extensión L/K es galoisiana, tenemos que $\text{Gal}(L'/L)$ es un subgrupo normal de $\text{Gal}(L'/K)$. Entonces, tenemos que $\rho_0 s \rho_0 = \psi \phi_{v,w}(s)$ para cierto $\psi \in \text{Gal}(L'/L)$. Aplicando b a la igualdad anterior, conseguimos

$$b_{\rho_0} {}^\rho b_s {}^\rho b_{\rho_0}^{-1} = b_\psi b_{\phi_{v,w}(s)}.$$


Juntando las últimas igualdades, vemos que $b_\psi = 1$ y como b induce un isomorfismo en

$\text{Gal}(L'/L)$, $\psi = 1$, probando lo que buscábamos. □

5.3. Aproximación muy débil

Procedemos a demostrar la aproximación muy débil para productos semidirectos iterados con técnicas análogas a las de [5].

Teorema 5.10. Sean A un K -grupo abeliano y F un K -grupo que tiene aproximación débil fuera de Bad_F . Si tenemos una sucesión exacta escindida

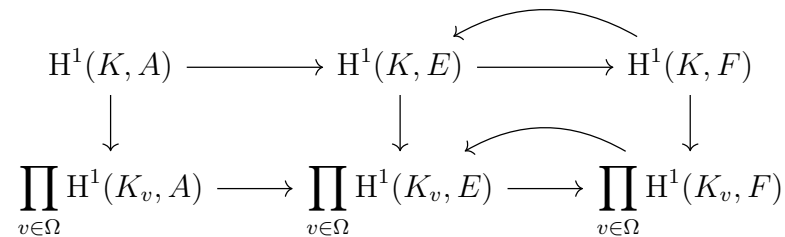
$$0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow 0,$$


E tiene aproximación fuera de Bad_E .

Demostración. Sea $S \subseteq \Omega$ un conjunto finito disjunto de Bad_E y $\beta_v \in H^1(K_v, E)$ fijas para cada $v \in S$. Sea L/K la extensión minimal que escinda a E . Seguimos pasos análogos a [5].

Paso 1: Fabricar una clase $\beta' \in H^1(K, E)$ con imágenes fijas en $H^1(K_v, F)$ para $v \in S \cup S'$ con S' un conjunto finito adecuado.

Primero consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$(5.4) \quad \begin{array}{ccccc} H^1(K, A) & \longrightarrow & H^1(K, E) & \longrightarrow & H^1(K, F) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{v \in \Omega} H^1(K_v, A) & \longrightarrow & \prod_{v \in \Omega} H^1(K_v, E) & \longrightarrow & \prod_{v \in \Omega} H^1(K_v, F) \end{array}$$


donde las flechas hacia la izquierda son secciones conjuntistas inducidas por una sección $F \rightarrow E$ fija. Notemos que son morfismos de conjuntos punteados.

Denotemos por $\gamma_v \in H^1(K_v, F)$ la imagen de β_v para $v \in S$. Gracias al Lema 5.8 aplicado a L , podemos elegir un $v' \notin S \cup \text{Bad}_E$ para cada $v \in S$ con isomorfismos

$$\rho_{v,w}^* : H^1(K_v, F) \rightarrow H^1(K_{v'}, F).$$

Elegimos un v' por cada $v \in S$ y denotamos por S' el conjunto de estos v' . Podemos suponer que todos los v' son diferentes porque tenemos infinitos lugares de donde elegir. Fijemos $\gamma_{v'} = \phi_{v,v'}^*(\gamma_v)$.

Como elegimos los nuevos lugares fuera de Bad_E y Bad_F está contenido en Bad_E , sabemos que hay una clase global $\gamma \in H^1(K, F)$ que se envía a γ_v para cada $v \in S \cup S'$. Más aún, podemos asumir que el cociclo c que representa a γ es sobreyectivo cuando lo restringimos a Γ_L . En efecto, aplicando el Lema 5.3 podemos conseguir infinitos lugares $w \notin S \cup S' \cup \text{Bad}_E$ que descomponen totalmente en L/K . En particular, F es constante sobre K_w . Entonces, para cada clase de conjugación de F podemos elegir un lugar w y una clase no ramificada $\gamma_w \in H^1(K_w, F)$ representada por un morfismo que envía un generador topológico del grupo de Galois no ramificado $\Gamma_{K_w}^{nr}$ a algún elemento de la clase de conjugación. Como tenemos infinitas opciones para cada g , podemos asumir que son todas distintas. Finalmente, podemos agregar estas condiciones locales a $S \cup S'$ forzando la sobreyectividad de c al restringirlo a Γ_L porque un morfismo de grupos cuya imagen interseca no trivialmente a todas las clases de conjugación, es sobreyectivo.

Denotamos por β' la imagen por la sección de γ . Notemos que si γ está representado por un cociclo c , β' también una vez interpretamos F como subgrupo de E .

Paso 2: Torcer por c en busca de una clase que cumpla las condiciones locales.

Podemos torcer el diagrama (5.4) para conseguir

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \curvearrowright & \\
 H^1(K, {}_cA) & \longrightarrow & H^1(K, {}_cE) & \longrightarrow & H^1(K, {}_cF) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \prod_{v \in \Omega} H^1(K_v, {}_cA) & \longrightarrow & \prod_{v \in \Omega} H^1(K_v, {}_cE) & \longrightarrow & \prod_{v \in \Omega} H^1(K_v, {}_cF) \\
 & & & \curvearrowleft &
 \end{array}$$

Para cualquier clase ξ en algún conjunto de (5.4), denotemos por ${}_c\xi$ la clase correspondiente en el torcido. Es importante notar que esto no tiene sentido en la primera columna porque en ella estamos torciendo exteriormente, por lo tanto, los K -grupos A y ${}_cA$ no tienen por qué ser comparables.

Sabemos que la imagen de β' y los β_v coinciden en $H^1(K_v, F)$. Por la definición del torcido, ${}_c\beta'$ es el elemento distinguido y gracias a la exactitud de la fila de abajo, aprendemos que los ${}_c\beta_v$ provienen de algún $\alpha_v \in H^1(K_v, {}_cA)$. Entonces, para poder concluir nos bastaría poder encontrar una clase global $\alpha \in H^1(K, {}_cA)$ que se envíe a $(\alpha_v)_{v \in S}$. En efecto, por la conmutatividad del diagrama, la imagen de α en $H^1(K_v, {}_cF)$ es ${}_c\beta_v$. Así la clase “destorcida” en $H^1(K, E)$ correspondiente a la imagen de α se envía a $(\beta_v)_{v \in S}$.

Entonces, gracias a la sucesión exacta de Poitou-Tate (Teorema 2.9) nos bastaría probar que $\text{III}_S^1(K, {}_c\widehat{A}) = \text{III}^1(K, {}_c\widehat{A})$.

Paso 3: Probar $\text{III}_S^1(K, {}_c\widehat{A}) = \text{III}^1(K, {}_c\widehat{A})$.

Tomemos un $\alpha \in \text{III}_S^1(K, \widehat{A})$. Fijemos $v \in S$ y el $v' \in S'$ correspondiente. El Lema 5.9 nos dice que los grupos de descomposición de v y v' son conjugados en $\text{Gal}(L'/K)$ donde L' es la extensión correspondiente al núcleo de c restringido a Γ_L . Notemos que L' escinde a ${}_c\widehat{A}$. En efecto, basta que escinda a ${}_cA$ porque ${}_c\widehat{A} = \text{Hom}({}_cA, \mu)$ y K ya contiene todas las raíces de la unidad. Esto es verdad porque la acción de $\sigma \in \Gamma_{L'}$ en $a \in {}_cA$ es $c_\sigma^\sigma a c_\sigma^{-1}$ donde σa es la acción viendo a a como un elemento de A .

Finalmente esa acción es trivial porque c es trivial en $\Gamma_{L'}$ por la definición de L' y L' claramente escinde a A porque L ya lo hace.

Recordemos que \tilde{L}' es el composito de todas las extensiones finitas M de L' tales que $M_v = L'_v$ para todo $v \in \Omega_{L'}$. De El Lema 5.7 nos dice que α proviene por inflación de $H^1(\tilde{L}'/K, \widehat{cA})$. Como los grupos de descomposición de v y v' con conjugados en $\text{Gal}(L'/K)$, existe un isomorfismo

$$H^1(L'_v/K_v, \widehat{cA}) \xrightarrow{\sim} H^1(L'_{v'}/K_{v'}, \widehat{cA}).$$

Fijemos \tilde{v} y \tilde{v}' lugares de \tilde{L}' sobre v y v' respectivamente. Este isomorfismo es compatible con las restricciones, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} & H^1(\tilde{L}'/K, \widehat{cA}) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ H^1(L'_{\tilde{v}}/K_v, \widehat{cA}) & \longrightarrow & H^1(L'_{\tilde{v}'}/K_{v'}, \widehat{cA}). \end{array}$$

Por la definición de \tilde{L}' , tenemos que $L'_{\tilde{v}} = L'_v$ y $L'_{\tilde{v}'} = L'_{v'}$. Como $v' \notin S$, tenemos que $\alpha_{v'} = 0$. Por lo tanto, α_v también es nulo. Repetimos este argumento para cada $v \in S$ y concluimos que α está en $\text{III}^1(K, \widehat{cA})$.

□

Notemos que el Teorema anterior vale cuando F es el grupo trivial. Entonces, un K -grupo abeliano finito A tiene aproximación fuera de Bad_A . Aplicando inducción, conseguimos el siguiente resultado.

Corolario 5.11. Sea F un K -grupo de la forma

$$F = A_1 \rtimes (A_2 \rtimes (\cdots \rtimes A_n))$$

donde A_i es un K -grupo abeliano finito. Entonces, F tiene aproximación muy débil. Más aún, F tiene aproximación para todo conjunto finito S disjunto de Bad_F .

Es importante recalcar que la finitud de $\mathbb{B}_\omega(X)/\mathbb{B}(X)$ (ver Proposición 5.4) junto al Teorema 4.6 implica que todo grupo abeliano cumple aproximación muy débil, pero no tenemos control sobre el conjunto fuera del cuál tenemos aproximación.

Bibliografía

- [1] J.-L. Colliot-Thélène, P. Gille, and Parimala R. Arithmetic of linear algebraic groups over two-dimensional geometric fields. *Duke Mathematical Journal*, 121(2):285–341, 2004.
- [2] J.-L. Colliot-Thélène. *Birational invariants, purity and the Gersten conjecture*, volume 58 of *Proc. Sympos. Pure Math.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [3] Jean-Louis Colliot-Thélène and David Harari. Dualité et principe local-global pour les tores sur une courbe au-dessus de $\mathbb{C}((t))$. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 110(6):1475–1516, 2015.
- [4] Jean-Louis Colliot-Thélène and Alexei N. Skorobogatov. *The Brauer-Grothendieck group*, volume 71 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer, Cham, [2021] ©2021.
- [5] Cyril Demarche, Giancarlo Lucchini Arteche, and Danny Neftin. The Grunwald problem and approximation properties for homogeneous spaces. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 67(3):1009–1033, 2017.
- [6] David Harari, Claus Scheiderer, and Tamás Szamuely. Weak approximation for tori over p -adic function fields. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (10):2751–2783, 2015.

- [7] David Harari and Tamás Szamuely. Arithmetic duality theorems for 1-motives. *J. Reine Angew. Math.*, 578:93–128, 2005.
- [8] Diego Izquierdo. *Thèse de doctorat: Dualité et principe local-global pour les corps de fonctions*. 2016. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01395483v1>.
- [9] Diego Izquierdo. Dualité et principe local-global pour les anneaux locaux henséliens de dimension 2. *Algebr. Geom.*, 6(2):148–176, 2019. With an appendix by Joël Riou.
- [10] Moshe Jarden. *Algebraic patching*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Heidelberg, 2011.
- [11] Giancarlo Lucchini Arteche. The unramified Brauer group of homogeneous spaces with finite stabilizer. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 372(8):5393–5408, 2019.
- [12] Hideyuki Matsumura. *Commutative algebra*, volume 56 of *Mathematics Lecture Note Series*. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, Mass., second edition, 1980.
- [13] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1989. Translated from the Japanese by M. Reid.
- [14] J. S. Milne. *Arithmetic duality theorems*. BookSurge, LLC, Charleston, SC, second edition, 2006.
- [15] James S. Milne. *Étale cohomology*. Princeton Mathematical Series, No. 33. Princeton University Press, Princeton, NJ., 1980.
- [16] J.-J. Sansuc. Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres. *J. Reine Angew. Math.*, 327:12–80, 1981.

- [17] Jean-Pierre Serre. *Corps locaux*. Publications de l'Université de Nancago, No. VIII. Hermann, Paris, 1968. Deuxième édition.
- [18] Jean-Pierre Serre. *Galois cohomology*. Springer-Verlag, Berlin, 1997. Translated from the French by Patrick Ion and revised by the author.
- [19] Alexei Skorobogatov. *Torsors and rational points*, volume 144 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.