

UCH-FC
MAB-M
C764
C. 1



Incrustaciones optimales de órdenes en álgebras de cuaterniones

Tesis

entregada a la

Universidad de Chile

en cumplimiento parcial de los requisitos

para optar al grado de

Magíster en ciencias Matemáticas

facultad de ciencias

por

Jaime Contreras de Rosa

Julio 2015

Director de Tesis: **Dr. Luis Arenas Carmona**

INFORME DE APROBACIÓN
TESIS MAGÍSTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

Jaime Gilberto Contreras de Rosa

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias con mención en Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 1 de Julio del 2015.

Director de Tesis

Dr. Luis Arenas



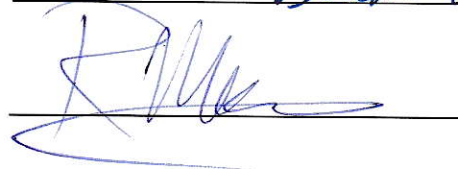


Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Eduardo Friedman



Dr. Ricardo Menares



AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mi familia, especialmente a mis padres Doris y Erik por el apoyo incondicional durante todos estos años, su esfuerzo para criarme lo mejor que pudieron, sus consejos y enseñanzas fueron fundamentales para mi. Agradezco a todos los compañeros y amigos de la carrera que me han acompañado a lo largo de este camino, su compañía ha hecho muy ameno mi camino. Agradecer también, a mis compañeros más cercanos en Matemáticas, en particular, a Ignacio Saavedra, Boris Roa y Alan Chavez por su ayuda, buena disposición y motivación. Deseo agradecer a los profesores que ayudaron a mi formación como matemático y en especial al profesor Luis Arenas, director de esta tesis, quiero agradecer la paciencia y buena disposición que tuvo hacia mi. Por último, quiero agradecer a todos los funcionarios del departamento de matemática por su gran labor y excelente disposición. Muchas gracias a todos.

Índice

1	Introducción	1
2	Preliminares	5
2.1	Álgebras de cuaterniones sobre cuerpos de números	5
2.2	Órdenes y reticulados	7
2.3	Órdenes de Eichler y ramas	8
2.4	Posibles formas para ramas	10
2.5	Imagen espinorial relativa local y cuerpo de representación	11
2.6	Imagen espinorial relativa e imagen espinorial optimal relativa	12
3	Cálculo de la imagen espinorial relativa	14
3.1	Incrustaciones optimales	14
3.2	Consecuencias de la paridad en la distancia de dos órdenes maximales	16
3.3	Incrustaciones explícitas	21
4	Resultados globales	25
4.1	\mathfrak{h} conmutativo	25
4.2	\mathfrak{h} no conmutativo	29
5	Una aplicación	31
5.1	Número de órdenes de Eichler optimales de un nivel dado	31
5.1.1	Caso $d = 2$: Fórmula general	31
5.1.2	Caso $d > 2$: un algoritmo	32

RESUMEN

Sea \mathfrak{A} un álgebra de cuaterniones sobre un cuerpo de números K que satisface la condición de Eichler. Sea L una extensión cuadrática de K que se incrusta en \mathfrak{A} . Sea \mathfrak{H} un \mathcal{O}_K -orden en L , y \mathfrak{D} un orden de Eichler en \mathfrak{A} . Se determinan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de incrustaciones $\sigma : L \rightarrow \mathfrak{A}$ sobre K , que induzcan una incrustación óptima de \mathfrak{H} en \mathfrak{D} en el sentido que $\sigma(L) \cap \mathfrak{D} = \sigma(\mathfrak{H})$. Para ello se aplicará la teoría de árboles y cuerpos de representación.

ABSTRACT

Let \mathfrak{A} be a quaternion algebra over a number field K , and assume that \mathfrak{A} satisfies the Eichler condition. Let L be a quadratic extension of K which embeds in \mathfrak{A} , let \mathfrak{H} be an \mathcal{O}_K -order in L , and suppose that \mathfrak{D} is an Eichler order of \mathfrak{A} . We determine when there exists an embedding $\sigma : L \rightarrow \mathfrak{A}$ over K , which gives an optimal embedding of \mathfrak{H} into \mathfrak{D} in the sense that $\sigma(L) \cap \mathfrak{D} = \sigma(\mathfrak{H})$. For this we will apply the theory of trees and representation fields.

Capítulo 1

Introducción

El estudio de álgebras no conmutativas sobre cuerpos de números tiene una larga y rica historia con aplicaciones en teoría de cuerpos de clases, formas modulares y geometría. En 1932, una parte importante del trabajo fundacional a nivel de cuerpos acaba con la publicación del teorema de Hasse-Brauer-Noether-Albert. Este teorema, en su versión cuaterniónica, dice:

Teorema 1.0.1. (*Hasse-Brauer-Noether-Albert*). *Sea \mathfrak{A} un álgebra de cuaterniones sobre un cuerpo de números K y sea L una extensión de cuerpos cuadrática de K . Entonces existe una incrustación de L en \mathfrak{A} si y solo si ningún primo de K que ramifica en \mathfrak{A} se descompone en L .*

Sean K un cuerpo de números con anillo de enteros \mathcal{O}_K , y \mathfrak{A} un álgebra central simple (ACS) sobre K y $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{A}$ un orden maximal. En 1936 Chevalley [6] estudió el conjunto de clases de conjugación en el género de \mathfrak{D} en el cual un suborden \mathfrak{H} se incrusta. Chevalley resolvió el problema cuando \mathfrak{A} es un álgebra de matrices de dimensión arbitraria, \mathfrak{D} es un orden maximal, y \mathfrak{H} es el orden maximal en un subcuerpo maximal L de \mathfrak{A} . El resultado de Chevalley decía que la proporción de clases en las cuales \mathfrak{H} se incrusta tiene la forma $1/[F : K]$, donde $F = H \cap L$, y H es un subcuerpo del cuerpo de clases de Hilbert de K . De hecho, la proporción de clases de conjugación en que se incrusta un suborden dado, a menudo tiene la forma $1/[F : K]$ para una extensión de cuerpos F/K explícita.

T. Chinburg y E. Friedman [7] probaron una versión integral del clásico teorema Hasse-Brauer-Noether-Albert para álgebras de cuaterniones \mathfrak{A} sobre un cuerpo de números K , asumiendo que \mathfrak{A} satisface la condición de Eichler, i.e., \mathfrak{A} es localmente isomorfo al álgebra de matrices $M_2(K)$ en dicho lugar. En ese trabajo, dado un orden \mathfrak{H} contenido en una extensión cuadrática de K , se determinan los órdenes maximales \mathfrak{D} de \mathfrak{A} que admiten una incrustación de \mathfrak{H} . Además se describen explícitamente los órdenes conmutativos que son selectivos en órdenes maximales. Recuerdese que

un orden \mathfrak{H} contenido en otro orden \mathfrak{D} se dice selectivo si no se incrusta en todos los órdenes en el género de \mathfrak{D} (ver definición de género de un orden en §2.2).

Sea \mathfrak{D} un *orden de Eichler*, es decir la intersección de dos órdenes maximales. Los resultados principales de X. Guo y H. Quin [11], así como W.K. Chan y X. Fu [5], implican que cuando un orden \mathfrak{H} en un subcuerpo cuadrático $L \subseteq \mathfrak{A}$ es selectivo en un género $\text{gen}(\mathfrak{D})$, toda incrustación de \mathfrak{H} dentro de un orden en el género de \mathfrak{D} es optimal en todo lugar que es inerte para L/K . Una incrustación $\sigma(L) \hookrightarrow \mathfrak{A}$ sobre K incrusta *optimalmente* a \mathfrak{H} en \mathfrak{D} cuando $\sigma(L) \cap \mathfrak{D} = \sigma(\mathfrak{H})$. La importancia de estos resultados radica en que extienden la teoría anterior a órdenes de Eichler. B. Linowitz [12] probó una versión integral aún más general del teorema de Hasse-Brauer-Noether-Albert para álgebras de cuaterniones \mathfrak{A} sobre un cuerpo de números K . Asumiendo que \mathfrak{A} satisface la condición de Eichler, Linowitz describió un número de criterios para que todo orden en el género de un orden de rango maximal \mathfrak{D} acepte una incrustación de un orden conmutativo \mathfrak{H} . En el caso en que el *discriminante relativo* de \mathfrak{H} es un ideal coprimo con el nivel de \mathfrak{D} , y el nivel de \mathfrak{D} es coprimo con el discriminante de \mathfrak{A} , Linowitz entregó condiciones necesarias y suficientes para que un orden dado en el género de \mathfrak{D} admita una incrustación de \mathfrak{H} . Maclachlan [14] extendió los resultados de Chinburg y Friedman al caso en que \mathfrak{D} es un orden de Eichler de nivel S libre de cuadrados y la incrustación es optimal.

Antes de mencionar nuestro resultado principal, introduciremos algo de notación. Cuando S es un ideal libre de cuadrados, a menudo se considera como un conjunto de primos. Este es el caso, por ejemplo, en el resultado de Maclachlan. Sea I_K el grupo de ideales fraccionales de K , y consideremos los siguientes subgrupos de I_K :

- a) \mathcal{R} , generado por los ideales primos ramificados en \mathfrak{A} ,
- b) \mathcal{S} , generado por todos los primos $\wp \in S$,
- c) $P_{K,\infty}$, el subgrupo de ideales fraccionales principales con generador en K_{∞}^+ , es decir, cuyos generadores son positivos en todos los lugares reales ramificados en \mathfrak{A} .

Definimos entonces el grupo finito $T_S(\mathfrak{A}) = \frac{I_K}{P_{K,\infty} \mathcal{R} \mathcal{S} I_K^2}$. Dados dos órdenes maximales $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$, se define su *ideal de distancia* como $\rho(\mathcal{O}, \mathcal{O}') = S = \prod_{\wp} \wp^{d_{\wp}(S)}$, donde $d_{\wp} = d_{\wp}(S)$ es la distancia en el árbol de Bruhat-Tits (ver §2.3) entre $\mathcal{O}_{\wp}, \mathcal{O}'_{\wp}$, y $d_{\wp} = 0$ para \wp en el conjunto $\text{Ram}_f(\mathfrak{A})$ de lugares ramificados finitos de \mathfrak{A} . Considérese por ahora el caso en donde S es libre de cuadrados, es decir $d_{\wp}(S) \in \{0, 1\}$, por lo que S puede ser considerado como un conjunto de lugares. Sean \mathcal{O} y \mathcal{O}' dos órdenes maximales en \mathfrak{A} y consideremos el orden de Eichler $\mathfrak{E} = \mathcal{O} \cap \mathcal{O}'$. Entonces la función que envía a \mathfrak{E} en la imagen de $\rho(\mathcal{O}, \mathcal{O}')$ en $T_S(\mathfrak{A})$ induce una biyección entre las clases de conjugación de órdenes de Eichler de \mathfrak{A} de nivel libre de cuadrados S y $T_S(\mathfrak{A})$. El *conductor*

$f(\mathfrak{H})$ del orden conmutativo $\mathfrak{H} \subseteq L$ se define como el \mathcal{O}_K -ideal $f(\mathfrak{H}) = \{x \in K \mid x\mathcal{O}_L \subseteq \mathfrak{H}\}$, donde $L = K\mathfrak{H}$ es un álgebra conmutativa semisimple y \mathcal{O}_L es el \mathcal{O}_K -orden maximal en L . En particular, si consideramos el orden de Eichler $\mathfrak{E} = \mathcal{O} \cap \mathcal{O}'$, diremos que $S = \rho(\mathcal{O}, \mathcal{O}')$ es el *nivel* del orden \mathfrak{E} .

Teorema 1.0.2. (Maclachlan) *Sea \mathfrak{H} un orden en la extensión de cuerpos cuadrática L de K . Asuma que existe una incrustación optimal de \mathfrak{H} en algún orden de Eichler en \mathfrak{A} de nivel S libre de cuadrados. Entonces existe una incrustación optimal de \mathfrak{H} en todo orden de Eichler de nivel S a menos que condiciones especiales, llamadas Condiciones de Selectividad $OE(S)$, se cumplan para \mathfrak{A} , L , y S . Si se cumplen las Condiciones de Selectividad $OE(S)$, entonces existe un orden de Eichler $\mathfrak{D}_0 = \mathcal{O}_0 \cap \mathcal{O}'_0$ de nivel S en el cual \mathcal{O}_L se incrusta optimalmente. En tal caso \mathfrak{H} se incrusta optimalmente en un orden de Eichler $\mathfrak{D} = \mathcal{O} \cap \mathcal{O}'$ de nivel S si y solo si la imagen de $f(\mathfrak{H})\rho(\mathcal{O}_0, \mathcal{O})$ en $T_S(\mathfrak{A})$ está en cierto subgrupo M de índice 2.*

Las condiciones de selectividad $OE(S)$ son:

OE(S)(1) L/K ramifica en exactamente los lugares reales ramificados en \mathfrak{A} .

OE(S)(2) \mathfrak{A} es no ramificada en los lugares finitos de K .

OE(S)(3) Los lugares en S se descomponen en L .

El subgrupo M se define como la imagen del subgrupo $N_{L/K}(I_L) \subseteq I_K$ en $T_S(\mathfrak{A})$. Para demostrar este teorema Maclachlan usó resultados de la teoría de cuerpos de clases extendiendo las ideas usadas en [7], y haciendo uso de resultados de Eichler sobre incrustaciones optimales [9].

El teorema principal de [7] puede ser usado para determinar las clases de conjugación de todos los subgrupos finitos de un grupo aritmético Kleiniano maximal [8, 15]. Subgrupos cíclicos finitos en grupos aritméticos Fuchsianos inducen incrustaciones de extensiones cuadráticas L de un cuerpo de números K en un álgebra de cuaterniones \mathfrak{A} . Para grupos aritméticos Fuchsianos maximales, éstos producen incrustaciones optimales para cierto órdenes en L dentro de órdenes de Eichler. El número de clases de conjugación de subgrupos finitos cíclicos puede determinarse contando clases de conjugación de incrustaciones optimales apropiadas. Esto ha sido empleado para grupos Fuchsianos maximales y aritméticos, y también para otros grupos discretos asociados a álgebras de cuaterniones [23, 15, 16].

En esta tesis, S será un ideal que tiene multiplicidad $d_\varphi(S)$ en cada lugar, y puede escribirse de la forma $S = \prod_\varphi \varphi^{d_\varphi(S)}$, a diferencia del trabajo de Maclachlan que solo consideró el caso en que S era un conjunto de lugares, es decir, para Maclachlan, $d_\varphi(S) \in \{0, 1\}$ para todo φ . El principal

resultado de nuestra tesis generaliza el resultado de Maclachlan.

Teorema 1.0.3. *Sea \mathfrak{H} un orden en una extensión cuadrática de cuerpos L de K . Asuma que \mathfrak{A} satisface la condición de Eichler, esto es, algún lugar arquimediano de K no ramifica en \mathfrak{A} . Supongamos que existe una incrustación optimal de \mathfrak{H} en algún orden de Eichler de nivel S en \mathfrak{A} . Entonces existe una incrustación optimal de \mathfrak{H} en todo orden de Eichler de nivel S , a menos que ocurran las condiciones especiales de selectividad SO , en cuyo caso \mathfrak{H} se incrusta optimalmente en la mitad de los tipos de isomorfismos de órdenes de Eichler en \mathfrak{A} de nivel S .*

Aquí las condiciones de selectividad SO son:

$SO(1)$ L/K es no ramificada en los lugares finitos.

$SO(2)$ $\mathfrak{A} \cong \left(\frac{-1, b}{K}\right)$, donde $L \cong K(\sqrt{b})$ y $\left(\frac{a, b}{K}\right)$ es el símbolo de Hilbert de a y b ([19], §63B).

$SO(3)$ L/K es descompuesta en todos los lugares \wp en los que $d_{\wp}(S)$ es impar.

Claramente la condición $SO(3)$ es una generalización de la condición $OE(S)(3)$, y coinciden cuando S es libre de cuadrados. Ahora, como un álgebra de cuaterniones está totalmente determinada (salvo isomorfismo) por el conjunto de los lugares en los que ramifica, basta ver que el álgebra $\mathfrak{A}' = \left(\frac{-1, b}{K}\right)$ cumple las condiciones $OE(S)$ cuando S es libre de cuadrados. En los lugares reales, \mathfrak{A}' ramifica si y sólo si $b < 0$. En los lugares finitos, \mathfrak{A}' no ramifica dado que -1 es una unidad y L/K es no ramificada. Por lo tanto, cuando S es libre de cuadrados, $SO(2)$ y $SO(3)$ se cumplen si y solo si se cumple $OE(S)(2)$ y $OE(S)$.

En esta tesis también se estudian los casos en que $L = K\mathfrak{H} \cong K \times K$ y $L \cong K(a)$, con a un elemento nilpotente no nulo. En el primer caso se llega a la conclusión de que no puede haber selectividad optimal, mientras que en el segundo la hay. Más aún, un orden de este tipo se incrusta optimalmente en una única clase de conjugación, pese a que no hay selectividad en el sentido usual [7]. Adicionalmente se obtienen algunos resultados en el caso en que \mathfrak{H} es un orden no conmutativo, y además se calcula localmente la cantidad de órdenes de Eichler de un nivel dado en los cuales se incrusta optimalmente un orden fijo de rango maximal (Cap. 5).

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Álgebras de cuaterniones sobre cuerpos de números

En esta sección daremos una primera definición de álgebra de cuaterniones sobre un cuerpo K . Para ver demostraciones de los resultados expuestos en esta sección consultar [10].

Consideraremos primero el caso en que $\text{car}(K) \neq 2$. El caso en que $\text{car}(K) = 2$ requiere consideraciones adicionales que mencionaremos al final de esta sección. Dados $a, b \in K$ definimos el *álgebra de cuaterniones* $\left(\frac{a,b}{K}\right)$ como la K -álgebra con K -base $\{1, i, j, ij\}$ junto con las reglas de multiplicación

$$i^2 = a, \quad j^2 = b, \quad ij = -ji.$$

Si $h = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta ij$, su *conjugado* se define por $\bar{h} = \alpha - \beta i - \gamma j - \delta ij$.

Ejemplo 2.1.1. a) El \mathbb{R} -álgebra $\mathbb{H} = \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right)$ es el anillo de cuaterniones sobre el cuerpo de números reales descubiertos por Hamilton. Llamaremos a los elementos de \mathbb{H} los cuaterniones de Hamilton.

b) El álgebra $\mathbb{M}_2(K)$ de matrices de 2×2 con coeficientes en K es un álgebra de cuaterniones sobre K ; de hecho, se tiene un isomorfismo $\varphi : \left(\frac{1,1}{K}\right) \rightarrow \mathbb{M}_2(K)$ dado por $\varphi(i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, y

$$\varphi(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observación 2.1.1. La clase de isomorfismo de el álgebra $\left(\frac{a,b}{K}\right)$ depende solo de las clases de a y b en K^*/K^{*2} , ya que la sustitución $i \mapsto ui, j \mapsto vj$ induce un isomorfismo

$$\left(\frac{a,b}{K}\right) \cong \left(\frac{u^2a, v^2b}{K}\right)$$

para todo $u, v \in K^*$.

Si $h \in \mathfrak{A} = \left(\frac{a,b}{K}\right)$, podemos definir la *traza* y la *norma* de h respectivamente por $T(h) = h + \bar{h}$ y $N(h) = h\bar{h}$, ambos elementos de K . Recordemos además que $T : \mathfrak{A} \rightarrow K$ es aditiva y $N : \mathfrak{A} \rightarrow K$ es multiplicativa. Si $h \notin K$, su polinomio minimal en K es $(x - h)(x - \bar{h}) = x^2 - T(h)x + N(h)$. El siguiente teorema caracteriza los K -automorfismos de \mathfrak{A} .

Teorema 2.1.1. (Skolem-Noether) Sea \mathfrak{A} una K -álgebra de cuaterniones. Supongamos que L, L' son dos K -álgebras contenidas en \mathfrak{A} . Entonces todo K -isomorfismo $f : L \rightarrow L'$ puede extenderse a un automorfismo interior de \mathfrak{A} . En particular, los K -automorfismos de \mathfrak{A} son automorfismos interiores.

Un álgebra de cuaterniones \mathfrak{A} sobre K se dice *descompuesta* si $\mathfrak{A} \cong \mathbb{M}_2(K)$.

Proposición 2.1.2. Sea $\mathfrak{A} = \left(\frac{a,b}{K}\right)$ un álgebra de cuaterniones. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- 1) El álgebra \mathfrak{A} es descompuesta.
- 2) El álgebra \mathfrak{A} no es un álgebra de división.
- 3) La función norma $N : \mathfrak{A} \rightarrow K$ tiene un cero no trivial.
- 4) $b \in N_{K(\sqrt{a})/K}(K(\sqrt{a})^*)$, donde $N_{K(\sqrt{a})/K}$ es la norma de la extensión $K(\sqrt{a})/K$.

Observación 2.1.2. En la parte 4) de la proposición 2.1.2, si $K(\sqrt{a})$ no es cuerpo, \mathfrak{A} debe ser descompuesta ya que no es un álgebra de división. En tal caso, $K(\sqrt{a}) \cong K \times K$, y la norma de un par $(k_1, k_2) \in K \times K$ viene dada por k_1k_2 .

Observación 2.1.3. Dado un lugar \wp en un cuerpo de números K y $a, b \in K^*$, se define el *símbolo de Hilbert* como: $\left(\frac{a,b}{\wp}\right) = 1$ si $ax^2 + by^2 = 1$ tiene soluciones x, y en la completación K_\wp , y $\left(\frac{a,b}{\wp}\right) = -1$ si no. Equivalentemente, el símbolo es 1 si y solo si el álgebra se descompone.

Dados $a, b \in K$, con K de característica 2, se define el *álgebra de cuaterniones generalizada* $\left[\frac{a,b}{K}\right]$ de la misma forma que antes, a excepción de que las reglas de multiplicación son

$$i^2 + i = a, j^2 = b, ij = ji + j.$$

El equivalente de la proposición 2.1.2 para característica 2 es el siguiente:

Proposición 2.1.3. *Sea K un cuerpo con $\text{car}(K) = 2$, y sea $\mathfrak{A} = \left[\frac{a,b}{K} \right)$ el álgebra de cuaterniones generalizada sobre K . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- 1) El álgebra \mathfrak{A} es descompuesta.
- 2) \mathfrak{A} no es un álgebra de división.
- 3) $b \in N_{K(\alpha)/K}(K(\alpha)^*)$, donde α es una raíz de la ecuación $x^2 + x = a$.
- 4) La cónica proyectiva $ax^2 + by^2 = z^2 + zx$ tiene un punto K -racional.

2.2 Órdenes y reticulados

Sean K un cuerpo de números con anillo de enteros \mathcal{O}_K y V un K -espacio vectorial de dimensión finita n . Un *reticulado* Λ en V es un \mathcal{O}_K -módulo tal que existe una K -base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V tal que $\Lambda \subseteq \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_K v_i$. Sea \mathfrak{A} una K -álgebra de cuaterniones. El *rango* de un reticulado $\Lambda \subseteq \mathfrak{A}$ es la dimensión como K -espacio vectorial de $K\Lambda = \{k\lambda \mid k \in K, \lambda \in \Lambda\}$. Un *orden* $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{A}$ es un reticulado que además es subanillo. Un orden es maximal si lo es respecto al orden parcial inducido por la contención de conjuntos. Sea $a \in \mathfrak{A}$. Se define la *norma reducida de cuaterniones* de a como $N(a) = a\bar{a}$. Si $\mathfrak{A} \cong \mathbb{M}_2(K)$, $N(a) = \det(A)$ [23]. Supongamos que \mathfrak{A} es un álgebra de cuaterniones. Para cada lugar \wp en K se definen:

- ◊ el *álgebra de cuaterniones local* \mathfrak{A}_\wp como $\mathfrak{A}_\wp = \mathfrak{A} \otimes_K K_\wp$.
- ◊ el *orden local* $\mathfrak{D}_\wp \subseteq \mathfrak{A}_\wp$ como $\mathfrak{D}_\wp = \mathfrak{D} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_\wp$ si \wp es no arquimediano y $\mathfrak{D}_\wp = \mathfrak{A}_\wp$ en caso contrario.
- ◊ el *anillo de adeles* de K es el conjunto $\mathbb{A}_K \subseteq \prod_{\wp \in \Pi(K)} K_\wp$ tal que $(a_\wp)_\wp \in \mathbb{A}_K$ si y solo si $a_\wp \in \mathcal{O}_\wp$ para todo \wp salvo un número finito de ellos, donde $\Pi(K)$ es el conjunto de lugares finitos o infinitos de K .
- ◊ el *grupo de ideles* $J_K = \mathbb{A}_K^*$, las unidades del anillo \mathbb{A}_K .
- ◊ la *adelización del álgebra* \mathfrak{A} es $\mathfrak{A}_\mathbb{A} = \mathfrak{A} \otimes_K \mathbb{A}_K$. Los elementos de $\mathfrak{A}_\mathbb{A}$ son tuplas $(a_\wp)_\wp$ con $a_\wp \in \mathfrak{A}_\wp$ para todo \wp y $a_\wp \in \mathfrak{D}_\wp$ para casi todo \wp .
- ◊ la *adelización de un orden de rango maximal* $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{A}$ se define como $\mathfrak{D}_\mathbb{A} = \prod_{\wp \in \Pi(K)} \mathfrak{D}_\wp \subseteq \mathfrak{A}_\mathbb{A}$. La última contención se cumple identificando $\mathfrak{D}_\mathbb{A} \cong \mathfrak{D} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathbb{A}_\infty$, donde $\mathbb{A}_\infty = \{(a_\wp)_\wp \in \mathbb{A}_K \mid |a_\wp|_\wp \leq 1 \text{ para todo lugar finito } \wp\}$.

- ◊ la *norma adélica* $N : \mathfrak{A}_{\mathbb{A}} \rightarrow J_K$ se define por $N((a_\varphi)_\varphi) = (N(a_\varphi))_\varphi$, donde $N(a_\varphi)$ es la norma reducida del elemento a_φ en K_φ .
- ◊ dos órdenes \mathfrak{D} y \mathfrak{D}' , de rango maximal en \mathfrak{A} , están en el mismo *género*, si $\mathfrak{D}'_\varphi = a_\varphi \mathfrak{D}_\varphi a_\varphi^{-1}$ para algún elemento local a_φ en la completación \mathfrak{A}_φ^* , para todo lugar φ . Equivalentemente, \mathfrak{D} y \mathfrak{D}' están en el mismo género si¹ $\mathfrak{D}' = a\mathfrak{D}a^{-1}$ para algún $a \in \mathfrak{A}_{\mathbb{A}}^*$.
- ◊ dos órdenes \mathfrak{D} y \mathfrak{D}' , de rango maximal en \mathfrak{A} , están en el mismo *género espinorial*, si $\mathfrak{D}' = b\mathfrak{D}b^{-1}$ para algún elemento $b = rc \in \mathfrak{A}_{\mathbb{A}}^*$, donde $r \in \mathfrak{A}^*$ es un elemento global, mientras que $c \in \mathfrak{A}_{\mathbb{A}}^*$ tiene norma reducida (adélica) trivial, es decir, c_φ tiene norma reducida trivial en \mathfrak{A}_φ para cada lugar φ .

Observación 2.2.1. Si el álgebra de cuaterniones \mathfrak{A} satisface la condición de Eichler, entonces el género espinorial de un orden $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{A}$ coincide con su clase de conjugación [23].

2.3 Órdenes de Eichler y ramas

Sean K un cuerpo de números, \mathcal{O}_K su anillo de enteros y \mathfrak{A} una K -álgebra. Un *orden de Eichler* se define como la intersección de dos órdenes maximales. Sean \mathfrak{D} , \mathfrak{D}' dos órdenes maximales en \mathfrak{A} y consideremos el orden de Eichler $\mathfrak{E} = \mathfrak{D} \cap \mathfrak{D}'$. Sea φ un primo en K y denotemos por π un parámetro uniformizante del cuerpo local K_φ . En particular tenemos $\mathfrak{E}_\varphi = \mathfrak{D}_\varphi \cap \mathfrak{D}'_\varphi$. Si \mathfrak{A}_φ es un álgebra de división, se cumple que $\mathfrak{E}_\varphi = \mathfrak{D}_\varphi = \mathfrak{D}'_\varphi$ es el único orden maximal en \mathfrak{A}_φ [23]. Si \mathfrak{A} no es un álgebra de división, entonces $\mathfrak{A} \cong M(K_\varphi)$ y \mathfrak{E}_φ es conjugado al orden

$$\begin{pmatrix} \mathcal{O}_{K_\varphi} & \mathcal{O}_{K_\varphi} \\ \pi^r \mathcal{O}_{K_\varphi} & \mathcal{O}_{K_\varphi} \end{pmatrix}$$

para algún único entero r que llamaremos el *nivel* (local) del orden de Eichler \mathfrak{E} [23].

En el resto de esta sección, K es un cuerpo local con anillo de enteros \mathcal{O}_K e ideal maximal $m_K = \pi\mathcal{O}_K$. Sea \mathfrak{T} el árbol de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_2(K)$. Los vértices de \mathfrak{T} son los órdenes maximales en $M_2(K)$. Dos de ellos, \mathfrak{D}_1 y \mathfrak{D}_2 , están unidos por una arista si y solo si $[\mathfrak{D}_1 : \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2] = [\mathcal{O}_K : m_K]$ (véase [22, §II.1]). Todo orden maximal tiene la forma $\mathfrak{D}_\Lambda = \{x \in M_2(K) \mid x\Lambda \subseteq \Lambda\}$ para algún reticulado $\Lambda \subseteq K^2$ de rango 2, y $\mathfrak{D}_\Lambda = \mathfrak{D}_{\Lambda'}$ si y solo si $\Lambda = \lambda\Lambda'$ para algún $\lambda \in K^*$. El árbol de Bruhat-Tits es un árbol en el sentido de la teoría de grafos, es decir, dos vértices cualesquiera están unidos por un único camino. Si $K = \mathbb{Q}_p$, para un primo $p \in \mathbb{N}$, cada vértice de \mathfrak{T} tiene $p+1$ vecinos. Más generalmente, si el cuerpo residual de K tiene q elementos, cada vértice tiene $q+1$ vecinos. Para todo orden $\mathfrak{H} \neq \mathcal{O}_K$ en $M_2(K)$, de rango arbitrario, definimos $\mathfrak{H}^{[s]} = \mathcal{O}_K + \pi^s \mathfrak{H}$.

¹ $\mathfrak{D}' = a\mathfrak{D}a^{-1}$ por definición cuando $\mathfrak{D}'_\varphi = a_\varphi \mathfrak{D}_\varphi a_\varphi^{-1}$ para todo lugar φ .

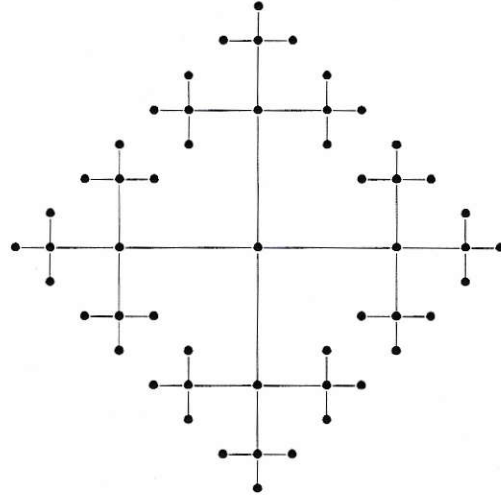


Figure 2.1: Representación gráfica del árbol de Bruhat-Tits de $\mathbb{M}_2(\mathbb{Q}_3)$. Debemos imaginar que el dibujo continúa indefinidamente como un fractal.

Sea $V(\mathfrak{T})$ el conjunto de vértices de \mathfrak{T} . Para todo orden \mathfrak{h} en $\mathbb{M}_2(K)$ y todo entero $r \geq 0$ definimos el conjunto

$$S_r(\mathfrak{h}) = \{\mathfrak{D} \in V(\mathfrak{T}) \mid \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{D}^{[r]}\},$$

y le llamamos la r -rama de \mathfrak{h} .

Proposición 2.3.1. ([4, Prop. 2.3]) Sea K una extensión finita de \mathbb{Q}_p . Las siguientes propiedades se cumplen para todo orden $\mathfrak{h} \subseteq \mathbb{M}_2(K)$:

- (1) $S_0(\mathfrak{h}) \neq \emptyset$.
- (2) La identidad $S_{r+t}(\mathfrak{h}^{[k+t]}) = S_r(\mathfrak{h}^{[k]})$ se cumple para todo trío de números enteros no negativos r, t, k .
- (3) Si $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}'$, entonces $S_r(\mathfrak{h}) \supseteq S_r(\mathfrak{h}')$ para todo entero r .
- (4) Si \mathfrak{h}' es la intersección de una familia de órdenes maximales, y si $S_0(\mathfrak{h}) \supseteq S_0(\mathfrak{h}')$, entonces $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}'$.
- (5) $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{D}^{[r]}$ para algún orden de Eichler \mathfrak{D} de nivel d , si y solo si $S_r(\mathfrak{h})$ contiene dos vértices a distancia d .

Proposición 2.3.2. ([4, Prop. 2.4]) Para todo orden \mathfrak{h} y todo $r \geq 0$, la rama $S_r(\mathfrak{h})$ es conexa.

Proposición 2.3.3. ([4, Prop. 2.5]) Para todo orden \mathfrak{h} y todo $t \geq 0$, la rama $S_0(\mathfrak{h}^{[t]})$ contiene exactamente los órdenes maximales cuya distancia a $S_0(\mathfrak{h})$ no excede t .

Lema 2.3.1. ([4, Lema 2.5]) Si \mathfrak{D} es un orden maximal, $\mathfrak{D}^{[t]}$ es la intersección de todos los órdenes a una distancia a lo más t de \mathfrak{D} .

Un orden maximal $\mathfrak{D} \in S_0(\mathfrak{h})$, tal que todo orden maximal a una distancia a lo más t de \mathfrak{D} pertenece a $S_0(\mathfrak{h})$, se dice que es t -profundo en $S_0(\mathfrak{h})$.

Corolario 2.3.3.1. $S_r(\mathfrak{h})$ es el conjunto de órdenes maximales r -profundos en $S_0(\mathfrak{h})$.

2.4 Posibles formas para ramas

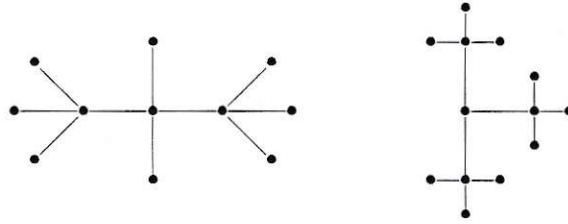


Figure 2.2: En la figura se pueden observar las dos clases de ramas para órdenes \mathfrak{h} y \mathfrak{h}' . A la izquierda, $S_0(\mathfrak{h})$ es un camino de largo 2 engrosado en 1, y a la derecha tenemos la rama estándar de $\mathcal{O}_K[a]$, donde a es un elemento nilpotente, es decir, la hoja infinita.

Dado un orden maximal \mathfrak{D} en un álgebra de cuaterniones local con árbol de Bruhat-Tits \mathfrak{T} y $r > 0$, se define $B[\mathfrak{D}; r] = \{\mathfrak{D}' \in \mathfrak{T} \mid \delta(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}') \leq r\}$, donde δ es la distancia en el árbol de Bruhat-Tits. Sea \mathfrak{h} un orden en un álgebra de cuaterniones local \mathfrak{A} . Definimos la *profundidad* de un orden $\mathfrak{D} \in S_0(\mathfrak{h})$ como el mayor entero t tal que $B[\mathfrak{D}; t] \subseteq S_0(\mathfrak{h})$. Diremos que $S_0(\mathfrak{h})$ es un *camino engrosado en k* si existe un camino $\cdots - \mathfrak{D}_{-1} - \mathfrak{D}_0 - \mathfrak{D}_1 - \cdots \subseteq S_0(\mathfrak{h})$ tal que $S_0(\mathfrak{h}) = \bigcup_{j \in (\mathbb{Z} \cap I)} B[\mathfrak{D}_j; k]$, donde I es un intervalo. Se define el *tallo* de $S_0(\mathfrak{h})$ como el conjunto de órdenes a profundidad máxima (en caso de que exista profundidad máxima), los cuales coinciden con los órdenes del camino ya mencionado. Las formas posibles para la rama de un orden \mathfrak{h} puede ser o un camino engrosado en k o la rama de $\mathfrak{h} = \mathcal{O}_K[a]$, donde a es un elemento nilpotente. El último caso puede consultarse en Ejemplo 3.2.2. A esta última rama le llamamos la *hoja infinita*, y su forma depende solo de la cardinalidad q del cuerpo residual. Si el tallo es finito $\mathfrak{D}_0 - \cdots - \mathfrak{D}_n$, llamaremos a $S_0(\mathfrak{h})$ *camino de largo n engrosado en k* , en caso contrario diremos que es un *camino infinito engrosado en k* .

Lo mencionado es consecuencia de las siguientes proposiciones:

2.5 Imagen espinorial relativa local y cuerpo de representación

A lo largo de esta sección K es un cuerpo local con orden maximal \mathcal{O}_K , parámetro uniformizante π , y valor absoluto $x \rightarrow |x|_K$. Sea \mathfrak{A} una K -álgebra de cuaterniones descompuesta, es decir, $\mathfrak{A} \cong \mathbb{M}_2(K)$, y sea $N : \mathfrak{A}^* \rightarrow K^*$ la norma reducida (determinante). Para todo par de órdenes $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{D}$ en \mathfrak{A} se define la *imagen espinorial relativa local* $H(\mathfrak{D}|\mathfrak{h}) \subseteq K^*$ por

$$H(\mathfrak{D}|\mathfrak{h}) = \{N(u) \mid u \in \mathfrak{A}^*, u\mathfrak{h}u^{-1} \subseteq \mathfrak{D}\}.$$

En el caso en que \mathfrak{D} y \mathfrak{h} sean los completados en un lugar \wp de dos órdenes globales \mathfrak{D}' y \mathfrak{h}' respectivamente, denotaremos a la imagen espinorial relativa local por $H_\wp(\mathfrak{D}|\mathfrak{h})$. Notamos que $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{D}$ si y solo si el nivel de \mathfrak{D} es menor o igual al diámetro de $S_0(\mathfrak{h})$, ya que si $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$, entonces $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{D}_\Lambda$ para todo \mathfrak{D}_Λ que está en el camino que une a \mathfrak{D}_1 y \mathfrak{D}_2 .

Sea $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$ un orden de Eichler de nivel d .

Lema 2.5.1. [4, Lema 3.1] Si $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{D}^{[r]}$, $H(\mathfrak{D}^{[r]}|\mathfrak{h}) = K^*$ si y solo si existe un par $(\mathfrak{D}_3, \mathfrak{D}_4)$ en $S_r(\mathfrak{h}) \times S_r(\mathfrak{h})$, también a distancia d , tal que la distancia entre \mathfrak{D}_1 y \mathfrak{D}_3 es impar.

Proposición 2.5.1. [4, Prop. 3.6] Sea d un entero par. Si d es el diámetro de $S_r(\mathfrak{h})$, y \mathfrak{D} es un orden de Eichler de nivel d con $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{D}^{[r]}$, entonces $H(\mathfrak{D}^{[r]}|\mathfrak{h}) = \mathcal{O}_K^* K^{*2}$.

Corolario 2.5.1.1. Si $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{D}^{[r]}$ y el nivel de $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$ es impar entonces $H(\mathfrak{D}^{[r]}|\mathfrak{h}) = K^*$.

Corolario 2.5.1.2. Si $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{D}^{[r]}$ y el nivel de \mathfrak{D} es menor que el diámetro de $S_r(\mathfrak{h})$, entonces $H(\mathfrak{D}^{[r]}|\mathfrak{h}) = K^*$.

Corolario 2.5.1.3. [4, Coro. 3.4] Si \mathfrak{D} es maximal, entonces $H(\mathfrak{D}|\mathfrak{h}) = \mathcal{O}_K^* K^{*2}$ si y solo si \mathfrak{h} está contenido en un único orden maximal.

El siguiente lema describe los órdenes de una subálgebra semisimple y conmutativa L del álgebra \mathfrak{A} :

Lema 2.5.2. [4, Lema 4.1] Si L es una subálgebra semisimple conmutativa del álgebra de cuaterniones \mathfrak{A} con orden maximal \mathcal{O}_L , y si Ω es cualquier orden en L , entonces $\Omega = \mathcal{O}_L^{[t]}$ para algún $t \geq 0$.

Diremos que un orden $\mathfrak{D}' \in S_0(\mathfrak{h})$ sale por una hoja del orden \mathfrak{D}'' r -profundo en $S_0(\mathfrak{h})$ si ningún orden que está en el camino que une \mathfrak{D}' y \mathfrak{D}'' es r -profundo, salvo \mathfrak{D}'' .

Observación 2.5.1. Notar que la distancia entre \mathfrak{D}' y \mathfrak{D}'' no puede ser mayor que r . Podemos caracterizar cuatro tipos de vértices de acuerdo con las profundidades de sus vecinos [4]. Sea \mathfrak{D} un vértice r -profundo de la rama de un orden \mathfrak{H} . Entonces \mathfrak{D} se dice

- ◊ una *hoja* si tiene un vecino $(r + 1)$ -profundo y los restantes vecinos son $(r - 1)$ -profundos en $S_0(\mathfrak{H})$.
- ◊ que está en *medio del tallo* si tiene dos vecinos r -profundos y los restantes son $(r - 1)$ -profundos en $S_0(\mathfrak{H})$.
- ◊ un *centro* si todos sus vecinos son $(r - 1)$ -profundos en $S_0(\mathfrak{H})$.
- ◊ un *borde del tallo* si tiene un vecino r -profundo y los demás vecinos son $(r - 1)$ -profundos en $S_0(\mathfrak{H})$.

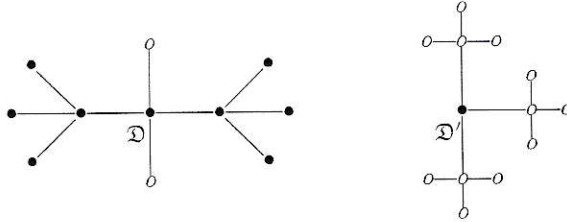


Figure 2.3: En la figura, dos ramas posibles distintas para algún orden \mathfrak{H} . A la izquierda se pueden ver los dos órdenes que salen por alguna hoja de \mathfrak{D} , los cuales hemos denotado por o . A la derecha se pueden apreciar los doce órdenes que salen por alguna hoja de \mathfrak{D}' también denotados por o . En el primer caso \mathfrak{D} es 1-profundo, mientras que en el segundo caso \mathfrak{D}' es 2-profundo.

2.6 Imagen espinorial relativa e imagen espinorial optimal relativa

En esta sección recordaremos algunos resultados globales de la teoría de cuerpos de clases, resumidos en [2] y definiremos la imagen espinorial optimal (global).

Sean K un cuerpo de números, y \mathfrak{A} una K -álgebra de cuaterniones. Como elemento adélico nos referimos a un elemento del álgebra adelicada $\mathfrak{A}_{\mathbb{A}} = \mathfrak{A} \otimes_K \mathbb{A}_K$. Sean $J_K = \mathbb{A}_K^*$, sea $N : \mathfrak{A}_{\mathbb{A}}^* \rightarrow J_K$ la norma reducida adélica, y $\mathfrak{H}, \mathfrak{D}$ dos órdenes en \mathfrak{A} tales que $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{D}$. Se define la *imagen espinorial*

$H(\mathcal{D}|\mathfrak{h})$ como

$$H(\mathcal{D}|\mathfrak{h}) = \{N(u)|u \in \mathfrak{A}_A^*, u^{-1}\mathfrak{h}u \subseteq \mathcal{D}\} = \left[\prod_{\mathfrak{p} \neq \infty} H_{\mathfrak{p}}(\mathcal{D}|\mathfrak{h}) \times \prod_{\mathfrak{p} \in \infty} N(\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}^*) \right] \cap J_K,$$

y denotamos $H(\mathcal{D}|\mathcal{D}) = H(\mathcal{D})$, el grupo de normas reducidas de elementos adélicos que estabilizan a \mathcal{D} por conjugación. Diremos que el género de \mathcal{D} *representa* a \mathfrak{h} si existe $\mathcal{D}' \in \text{gen}(\mathcal{D})$ tal que $\mathfrak{h} \subseteq \mathcal{D}'$. El *cuerpo de clases espinorial* $\Sigma = \Sigma(\mathcal{O})$, para un género de órdenes de rango maximal \mathcal{O} , se define como el cuerpo de clases correspondiente a $K^*H(\mathcal{D})$, donde \mathcal{D} es un orden en \mathcal{O} . Cuando $K^*H(\mathcal{D}|\mathfrak{h})$ es un grupo, el *cuerpo de representación* $F(\mathcal{D}|\mathfrak{h})$ se define como el cuerpo de clases que corresponde a $K^*H(\mathcal{D}|\mathfrak{h})$ [2, §2]. Cuando $F(\mathcal{D}|\mathfrak{h})$ está definido (cuando \mathfrak{A} es un álgebra de cuaterniones, siempre está definido, pero no es cierto para álgebras más generales), el número de géneros espinoriales que representan a \mathfrak{h} divide al número total de géneros espinoriales. Más precisamente, la proporción de clases de conjugación cuyos órdenes contienen un conjugado de \mathfrak{h} es $[F(\mathcal{D}|\mathfrak{h}) : K]^{-1}$.

Similarmente, definimos la *imagen espinorial optimal relativa* $H^{op}(\mathcal{D}|\mathfrak{h})$ como

$$H^{op}(\mathcal{D}|\mathfrak{h}) = \left[\prod_{\mathfrak{p} \neq \infty} H_{\mathfrak{p}}^{op}(\mathcal{D}|\mathfrak{h}) \times \prod_{\mathfrak{p} \in \infty} N(\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}^*) \right] \cap J_K,$$

donde $H_{\mathfrak{p}}^{op}(\mathcal{D}|\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}) = \{N(a)|a \in \mathfrak{A}^*, a^{-1}\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}a \subseteq \mathcal{D}_{\mathfrak{p}}, \text{ y } a^{-1}\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}a \not\subseteq \mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^{[1]}\}$ es la *imagen espinorial relativa optimal local*, la cual será estudiada en la sección 3.2. El *cuerpo de representación optimal* que denotaremos por $F^{op}(\mathcal{D}|\mathfrak{h})$ es el cuerpo de clases asociado a $H^{op}(\mathcal{D}|\mathfrak{h})$.

Observación 2.6.1. Es claro que $H^{op}(\mathcal{D}|\mathfrak{h}) \subseteq H(\mathcal{D}|\mathfrak{h})$, y como veremos en la observación 3.2.1, $H^{op}(\mathcal{D}|\mathfrak{h}) \in \{\mathcal{O}_K^*K^{*2}, K^*\}$ por lo que es subgrupo de $H(\mathcal{D}|\mathfrak{h})$.



Capítulo 3

Cálculo de la imagen espinorial relativa

En este capítulo introduciremos algunas definiciones adicionales necesarias para el desarrollo de incrustaciones optimales. También veremos cómo ésta se relaciona con la paridad de la distancia entre dos órdenes 0-profundos.

3.1 Incrustaciones optimales

En esta sección recordaremos la definición estándar de incrustación optimal, y daremos una definición equivalente más simple para el caso que nos concierne.

Sean \mathfrak{A} un álgebra de cuaterniones sobre un cuerpo de números K , sea $L \cong K \times K$, o bien una extensión cuadrática de K . En cualquier caso supondremos que L se incrusta en \mathfrak{A} . Además sean \mathfrak{h} un \mathcal{O}_K -orden en L , y \mathfrak{D} un \mathcal{O}_K -orden de Eichler en \mathfrak{A} . Diremos que el K -homomorfismo $\sigma : L \rightarrow A$ induce una *incrustación optimal* de \mathfrak{h} en \mathfrak{D} , si y solo si $\sigma(L) \cap \mathfrak{D} = \sigma(\mathfrak{h})$. En nuestro caso \mathfrak{h} es un orden conmutativo, para el cual podemos dar una definición equivalente.

Proposición 3.1.1. *Con la notación anterior, para $t \geq 1$, $L \cap \mathfrak{D} = \mathcal{O}_L^{[t]}$ si y solo si $\mathcal{O}_L^{[t]} \subseteq \mathfrak{D}$ y $\mathcal{O}_L^{[t-1]} \not\subseteq \mathfrak{D}$.*

Demostración: Como $\mathcal{O}_L^{[t]} \subseteq L$ para todo $t \geq 0$, $L \cap \mathfrak{D} = \mathcal{O}_L^{[t]}$ implica $\mathcal{O}_L^{[t]} \subseteq \mathfrak{D}$ y $\mathcal{O}_L^{[t-1]} \not\subseteq \mathfrak{D}$ (evidentemente $\mathcal{O}_L^{[t-1]} \not\subseteq \mathcal{O}_L^{[t]}$). Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{O}_L^{[t]} \subseteq \mathfrak{D}$ y $\mathcal{O}_L^{[t-1]} \not\subseteq \mathfrak{D}$. Basta probar que $L \cap \mathfrak{D} \subseteq \mathcal{O}_L^{[t]}$. Sea $l \in L \cap \mathfrak{D}$, $l \notin K$, entonces como l debe ser entero sobre K , tenemos que $\mathcal{O}_K[l] = \mathcal{O}_L^{[s]}$ para algún s positivo por lema 2.5.2. Ahora como $\mathcal{O}_L^{[t-1]} \not\subseteq \mathfrak{D}$, se sigue que $s \geq t$,

luego $l \in \mathcal{O}_L^{[t]}$. \square

Observación 3.1.1. Alternativamente, usando la identidad (2) de la Proposición 2.3.1, diremos que un orden conmutativo \mathfrak{h} se incrusta optimalmente en \mathfrak{D} , si $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{D}$ y $\mathfrak{h} \not\subseteq \mathfrak{D}^{[1]}$.

En lo que sigue, dado un orden conmutativo $\mathfrak{h} = \mathcal{O}_L^{[t]}$ y un orden $\mathfrak{D} \supseteq \mathfrak{h}$, usaremos la definición equivalente de incrustación optimal. Es decir, \mathfrak{h} se incrusta optimalmente en \mathfrak{D} si y solo si $\mathcal{O}_L^{[t]} \subseteq \mathfrak{D}$ y $\mathcal{O}_L^{[t-1]} \not\subseteq \mathfrak{D}$. Por convención, si $t = 0$, diremos que $\mathfrak{h} = \mathcal{O}_L$ se incrusta optimalmente en \mathfrak{D} si y solo si $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{D}$.

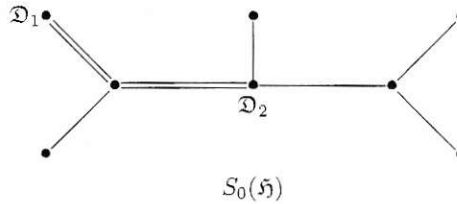


Figure 3.1: Ejemplo de una rama para \mathfrak{h} . Se destaca con doble línea a la rama de un orden de Eichler $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$ en el cual \mathfrak{h} se incrusta optimalmente. Notar que la incrustación es optimal debido a que \mathfrak{D}_1 es 0-profundo.

Supongamos ahora que $\mathfrak{h}^{[t]}$ se incrusta optimalmente en un orden de Eichler $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$ de nivel d , es decir, $\mathfrak{h}^{[t]} \subseteq \mathfrak{D}$ pero $\mathfrak{h}^{[t-1]} \not\subseteq \mathfrak{D}$. Entonces es inmediato que $\mathfrak{h}^{[t]}$ se incrusta optimalmente en \mathfrak{D}_1 o en \mathfrak{D}_2 . Por otro lado si $\mathfrak{h}^{[t]}$ se incrusta en \mathfrak{D}_1 y \mathfrak{D}_2 y además se incrusta optimalmente en uno de ellos, digamos en \mathfrak{D}_1 , es claro que se incrustará optimalmente en \mathfrak{D} . En $S_0(\mathfrak{h})$, los órdenes maximales en los cuales \mathfrak{h} se incrusta optimalmente son los 0-profundos. Esto se sigue directamente de la definición de incrustación optimal, y del hecho de que el conjunto de órdenes 0-profundos en $S_0(\mathfrak{h}^{[t]})$ coincide con $S_0(\mathfrak{h}^{[t]}) \setminus S_0(\mathfrak{h}^{[t-1]})$.

Sean $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ órdenes en $S_0(\mathfrak{h})$, con \mathfrak{D}_1 0-profundo. Diremos que el camino que une a \mathfrak{D}_1 y \mathfrak{D}_2 es un *camino optimal*. Notemos que \mathfrak{h} se incrusta optimalmente en $\mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_\Lambda$, para todo \mathfrak{D}_Λ en el

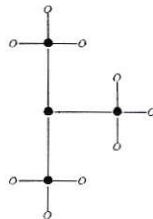


Figure 3.2: Posible representación de $S_0(\mathfrak{h})$, donde los órdenes 0-profundos se denotan por o .

camino optimal.

3.2 Consecuencias de la paridad en la distancia de dos órdenes maximales

Sean K un cuerpo local y $\mathfrak{A} = \mathbb{M}_2(K)$ el álgebra de matrices de 2×2 con coeficientes en K . Sea \mathfrak{H} un orden en \mathfrak{A} . Sea \mathfrak{T} el árbol de Bruhat-Tits de $\mathbb{M}_2(K)$. Dados dos órdenes maximales $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$, definimos $\mathfrak{C}_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2)$ como la cardinalidad del conjunto de órdenes maximales en $S_0(\mathfrak{H})$ que están en el camino que une \mathfrak{D}_1 y \mathfrak{D}_2 . Omitiremos el subíndice \mathfrak{H} cuando el orden sea claro del contexto. Nótese que si \mathfrak{D}_1 y \mathfrak{D}_2 están en $S_0(\mathfrak{H})$, $\delta(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) = \mathfrak{C}_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) - 1$. Nos interesa conocer la paridad de la distancia δ en $S_0(\mathfrak{H}^{[k]})$ de dos órdenes cualesquiera.

Lema 3.2.1. *Sean $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ dos órdenes en $S_0(\mathfrak{H})$, con \mathfrak{D}_1 r -profundo y \mathfrak{D}_2 s -profundo. Si \mathfrak{D}_1 sale por una hoja de \mathfrak{D}_2 , entonces $s \leq r$ y $\delta(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) = s - r$.*

Demostración: Caso I: $S_0(\mathfrak{H})$ es un camino engrosado en k , tal que $\dots - \mathfrak{B}_{-1} - \mathfrak{B}_0 - \mathfrak{B}_1 - \dots$ es su tallo. El caso en que $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2$ es trivial. Supongamos que $\mathfrak{D}_1 \neq \mathfrak{D}_2$. Cuando $k = 1$, el resultado es claro ya que $\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{B}_i$ para algún i , el cual es 1-profundo y \mathfrak{D}_1 debe ser un orden 0-profundo, en consecuencia $\delta(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) = 1 = 1 - 0$. Supongamos ahora que el resultado es cierto para todo par de órdenes $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ en un camino $(k-1)$ -grueso. Sea $S_0(\mathfrak{H})$ un camino finito o infinito engrosado en k . Para terminar la inducción basta probar el resultado en el caso en que \mathfrak{D}_1 es 0-profundo, ya que si \mathfrak{D}_1 no es 0-profundo, \mathfrak{D}_1 y \mathfrak{D}_2 serían vértices de $S_1(\mathfrak{H})$, el cual es un camino engrosado en $k-1$ y el resultado es consecuencia inmediata de la hipótesis de inducción. Sea \mathfrak{D}_2 un orden s -profundo, \mathfrak{D}_1 un orden 0-profundo y \mathfrak{D}'_1 el orden en $S_0(\mathfrak{H})$ vecino de \mathfrak{D}_1 . Entonces, como \mathfrak{D}'_1 es 0-profundo en $S_1(\mathfrak{H})$, por hipótesis de inducción $\delta(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) = \delta(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}'_1) + \delta(\mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}_2) = 1 + (s-1) = s = s - 0$. La primera igualdad sigue, pues como \mathfrak{D}'_1 es el único orden vecino de \mathfrak{D}_1 en $S_0(\mathfrak{H})$, necesariamente está en el camino que une \mathfrak{D}_1 con \mathfrak{D}_2 y por lo tanto \mathfrak{D}'_1 sale por una hoja de \mathfrak{D}_2 .

Caso II: $S_0(\mathfrak{H}) = S_0(\mathcal{O}_K[a])$, con a un elemento nilpotente distinto de cero. Nuevamente supondremos que $\mathfrak{D}_1 \neq \mathfrak{D}_2$ (caso no trivial). De acuerdo con la estructura de $S_0(\mathfrak{H})$ [4] existen $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \dots$ todos distintos tales que $\delta(\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_j) = |i - j|$ y $S_0(\mathfrak{H}) = \bigcup_{i \geq 0} B[\mathfrak{B}_i; i]$. En consecuencia la profundidad de \mathfrak{B}_i es i . Consideremos \mathfrak{B}_k tal que $\delta(\mathfrak{D}_2, \mathfrak{B}_k) = k - s$. Afirmamos que $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \in B[\mathfrak{B}_k; k]$, donde este último conjunto es un camino de largo 0 engrosado en k , por lo que el resultado se sigue por caso I. Para demostrar esta afirmación notamos que si $\mathfrak{D}_1 \notin B[\mathfrak{B}_k; k]$ entonces el camino que une \mathfrak{D}_2 con \mathfrak{D}_1 pasa por \mathfrak{B}_{k+1} el cual es el único orden que une \mathfrak{B}_k con la parte de $S_0(\mathfrak{H})$ no

contenida en $B[\mathfrak{B}_k; k]$, pero \mathfrak{B}_{k+1} es $k + 1$ profundo, lo que contradice que \mathfrak{D}_1 sale por una hoja de \mathfrak{D}_2 . \square

Lema 3.2.2. Sean $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ dos órdenes 0-profundos en $S_0(\mathfrak{H}^{[t]})$. Si el camino que une a \mathfrak{D}_1 y \mathfrak{D}_2 pasa por algún orden en $S_0(\mathfrak{H})$ entonces

$$\delta(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) \equiv \mathfrak{C}_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) - 1 \pmod{2},$$

en caso contrario $\delta(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2)$ es par.

Demostración: Caso I: Supongamos que el camino que une \mathfrak{D}_1 y \mathfrak{D}_2 pasa por $S_0(\mathfrak{H})$. Para $t = 0$ el resultado es claro (de hecho $\delta(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) = \mathfrak{C}_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) - 1$). Supongamos que el resultado es cierto para $t - 1$. Ahora, sean $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ dos órdenes 0-profundos en $S_0(\mathfrak{H}^{[t]})$, entonces existen $\mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}'_2$ órdenes 0-profundos en $S_0(\mathfrak{H}^{[t-1]})$, tales que $\delta(\mathfrak{D}_i, \mathfrak{D}'_i) = 1$, $i = 1, 2$ ([4], Lema 5.2). Luego $\delta(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) = \delta(\mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}'_2) + 2 \equiv \mathfrak{C}(\mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}'_2) - 1 \equiv \mathfrak{C}(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) - 1 \pmod{2}$.

Caso II: Supongamos que el camino que une \mathfrak{D}_1 y \mathfrak{D}_2 no pasa por $S_0(\mathfrak{H})$. Notemos que para que este caso ocurra se debe tener $t \geq 2$. Para $t = 2$, si $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ son órdenes 0-profundos en $S_0(\mathfrak{H}^{[2]})$, y c es el conjunto de órdenes en el camino que une \mathfrak{D}_1 con \mathfrak{D}_2 , entonces existen $\mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}'_2 \in c$ 0-profundos en $S_0(\mathfrak{H}^{[1]})$ tales que $\delta(\mathfrak{D}_i, \mathfrak{D}'_i) = 1$, $i = 1, 2$ (observar que \mathfrak{D}'_i está en el camino que une \mathfrak{D}_1 con \mathfrak{D}_2). Notemos que $\mathfrak{D}'_1 = \mathfrak{D}'_2$, si no existiría $\mathfrak{D}'' \in c \cap S_0(\mathfrak{H})$ vecino de \mathfrak{D}'_1 y el camino que une \mathfrak{D}'_1 y \mathfrak{D}'_2 debe pasar por \mathfrak{D}'' . Se sigue que $\delta(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) = 2$. Supongamos ahora el resultado cierto para $t - 1$. Sean $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ órdenes 0-profundos en $S_0(\mathfrak{H}^{[t]})$ tales que el camino que une a $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ no pasa por $S_0(\mathfrak{H})$, entonces existen $\mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}'_2$ órdenes 0-profundos en $S_0(\mathfrak{H}^{[t-1]})$ tales que $\delta(\mathfrak{D}_i, \mathfrak{D}'_i) = 1$, luego por hipótesis de inducción $\delta(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) \equiv \delta(\mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}'_2) \equiv 0 \pmod{2}$.

\square

Corolario 3.2.0.1. Sean \mathfrak{D}_1 un orden 0-profundo en $S_0(\mathfrak{H}^{[t]})$, y \mathfrak{D}_2 un orden 0-profundo en $S_0(\mathfrak{H}^{[s]})$. Si el camino que une a \mathfrak{D}_1 con \mathfrak{D}_2 pasa por $S_0(\mathfrak{H})$ entonces

$$\delta(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) \equiv \mathfrak{C}_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) + r + s - 1 \pmod{2},$$

en caso contrario $\delta(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) \equiv r + s \pmod{2}$.

A continuación veremos algunos ejemplos de $S_0(\mathfrak{H})$:

Ejemplo 3.2.1. $S_0(\mathfrak{H}) = \{\mathfrak{D}\}$. Sean $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ órdenes 0-profundos en $S_0(\mathfrak{H}^{[t]})$ entonces $\delta(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2)$ es par, pues $\mathfrak{C}_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) \in \{0, 1\}$.

Ejemplo 3.2.2. Sea $\mathfrak{h} = \mathcal{O}_K[a]$ donde $a \neq 0$ y $a^2 = 0$, entonces si $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ son dos órdenes 0-profundos en $S_0(\mathfrak{h}^{[t]})$, la distancia $\delta(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2)$ es par. En efecto, para este caso $S_0(\mathfrak{h})$ es el conjunto de órdenes a distancia $d \leq i$ de \mathfrak{D}_i para algún $i \geq 0$, donde \mathfrak{D}_{j+1} es vecino de $\mathfrak{D}_j \forall j \geq 0$ [4, Prop. 4.2].

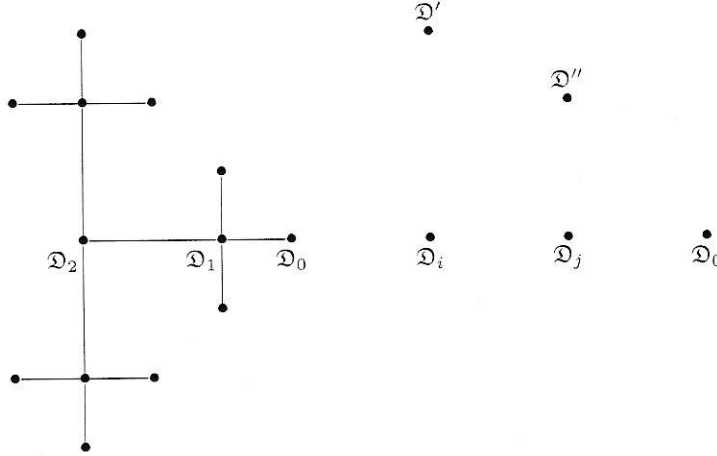


Figure 3.3: A la izquierda la 0-rama de \mathfrak{h} del ejemplo 3.2.2, y a la derecha se destacan los órdenes usados en la demostración.

Basta comprobarlo para $S_0(\mathfrak{h})$. Sean $\mathfrak{D}', \mathfrak{D}''$ dos órdenes 0-profundos en $S_0(\mathfrak{h})$ entonces existen $i, j \geq 0$ tales que $\delta(\mathfrak{D}', \mathfrak{D}_i) = i$, y $\delta(\mathfrak{D}'', \mathfrak{D}_j) = j$. Luego, $\delta(\mathfrak{D}', \mathfrak{D}'') = \delta(\mathfrak{D}', \mathfrak{D}_i) + \delta(\mathfrak{D}_i, \mathfrak{D}_j) + \delta(\mathfrak{D}_j, \mathfrak{D}'') = i + |i - j| + j = 2\max\{i, j\}$ (véase figura 3.3, donde se representa a la izquierda $S_0(\mathfrak{h})$ y a la derecha la ubicación de los órdenes $\mathfrak{D}', \mathfrak{D}'', \mathfrak{D}_i, \mathfrak{D}_j$ y \mathfrak{D}_0). \square

Sea \mathfrak{h} un orden conmutativo en $\mathbb{M}_2(K)$, y $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \in S_0(\mathfrak{h})$, con \mathfrak{D}_1 0-profundo. Para el orden de Eichler $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$ de nivel d , definimos la *imagen espinorial relativa optimal* como:

$$H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{h}^{[t]}) = \{N(a) \mid a \in \mathfrak{A}^*, a\mathfrak{h}^{[t]}a^{-1} \subseteq \mathfrak{D} \text{ y } a\mathfrak{h}^{[t-1]}a^{-1} \not\subseteq \mathfrak{D}\}.$$

Observación 3.2.1. $H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{h}) = H(\mathfrak{D})H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{h})$. La contención $H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{h}) \subseteq H(\mathfrak{D})H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{h})$ es clara. Para la otra contención, sean $a, b \in \mathfrak{A}$ tales que $a\mathfrak{h}a^{-1} \subseteq \mathfrak{D}$, $a\mathfrak{h}a^{-1} \not\subseteq \mathfrak{D}^{[1]}$ y $b\mathfrak{D}b^{-1} = \mathfrak{D}$. Entonces $(ba)\mathfrak{h}(ba)^{-1} = ba\mathfrak{h}a^{-1}b^{-1} \subseteq b\mathfrak{D}b^{-1} = \mathfrak{D}$ y $(ba)\mathfrak{h}(ba)^{-1} = ba\mathfrak{h}a^{-1}b^{-1} \not\subseteq b\mathfrak{D}^{[1]}b^{-1} = (b\mathfrak{D}b^{-1})^{[1]} = \mathfrak{D}^{[1]}$ dado que $H(\mathfrak{D}) \supseteq \mathcal{O}_K^*K^{*2}$. Se sigue que $H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{h}^{[t]}) \in \{\mathcal{O}_K^*K^{*2}, K^*\}$.

Los elementos u que satisfacen $u\mathfrak{h}^{[t]}u^{-1} \subseteq \mathfrak{D}$ son llamados *generadores locales* para $\mathfrak{D}|\mathfrak{h}^{[t]}$, o simplemente *generadores* cuando no hay peligro de confusión. Si además un generador local u

satisface $u\mathfrak{h}^{[l-1]}u^{-1} \not\subseteq \mathfrak{D}$, diremos que u es un *generador optimal local*, o simplemente un *generador optimal*.

Ahora daremos una versión optimal del lema 3.1 de [4].

Lema 3.2.3. *Sea \mathfrak{h} un orden cualquiera, y sean $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \in S_0(\mathfrak{h})$, con \mathfrak{D}_1 0-profundo. Entonces $H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{h}) = K^*$ si y solo si existe otro par $(\mathfrak{D}_3, \mathfrak{D}_4)$ en $S_0(\mathfrak{h}) \times S_0(\mathfrak{h})$ con \mathfrak{D}_3 0-profundo, y $\delta(\mathfrak{D}_3, \mathfrak{D}_4) = d$, tal que $\delta(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_3)$ o $\delta(\mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3)$ es impar.*

Demostración: Supongamos que se cumple la condición con $\delta(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_3)$ impar (el caso en que $\delta(\mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3)$ es impar es similar), y tomemos $\sigma \in GL_2(K)$ tal que $\sigma\mathfrak{D}_1\sigma^{-1} = \mathfrak{D}_3$ y $\sigma\mathfrak{D}_2\sigma^{-1} = \mathfrak{D}_4$. Se sigue que σ^{-1} es un generador optimal local. Entonces $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{D}_3 \cap \mathfrak{D}_4 = \sigma\mathfrak{D}\sigma^{-1}$. Como la distancia entre \mathfrak{D}_1 y \mathfrak{D}_3 es impar y $\sigma\mathfrak{D}_1\sigma^{-1} = \mathfrak{D}_3$, la norma reducida $n(\sigma)$ tiene valuación impar [22, §II.1.2, Cor. de Prop.1]. Supongamos ahora que $H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{h}) = K^*$. Entonces debe existir un generador optimal σ con norma reducida de valuación impar. Sean $\mathfrak{D}_3 = \sigma\mathfrak{D}_1\sigma^{-1}$ y $\mathfrak{D}_4 = \sigma\mathfrak{D}_2\sigma^{-1}$. Se sigue que \mathfrak{D}_3 o \mathfrak{D}_4 debe ser 0-profundo. Como σ es un generador, se tiene que $\mathfrak{h} \subseteq \sigma\mathfrak{D}\sigma^{-1} = \mathfrak{D}_3 \cap \mathfrak{D}_4$, mientras que el hecho de que la norma reducida de σ tenga valuación impar significa que la distancia entre \mathfrak{D}_1 y \mathfrak{D}_3 es también impar [22, §II.1.2, Cor. de Prop.1].□

Corolario 3.2.0.2. *Sean $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ dos órdenes en $S_0(\mathfrak{h})$, con \mathfrak{D}_1 0-profundo. Si el nivel de $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$ es impar, entonces $H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{h}) = K^*$.*

Demostración: Basta definir $(\mathfrak{D}_3, \mathfrak{D}_4) = (\mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_1)$.□

La siguiente proposición determina $H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{h})$ en términos de la 0-rama de \mathfrak{h} en el caso en que el nivel de \mathfrak{D} es par.

Proposición 3.2.1. *Sean $\mathfrak{D}', \mathfrak{D}''$ dos órdenes en $S_0(\mathfrak{h})$, con \mathfrak{D}' 0-profundo, y sea $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}' \cap \mathfrak{D}''$ de nivel s par. Entonces se cumple:*

- (1) Si $\mathfrak{h} = \mathcal{O}_K[a]$, donde a es un elemento nilpotente, entonces $H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{h}) = \mathcal{O}_K^* K^{*2}$.
- (2) Si $S_0(\mathfrak{h})$ es un camino de largo n engrosado en k con $n > 1$, entonces $H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{h}) = K^*$ si y solo si $s < \text{diam}(S_0(\mathfrak{h}))$.
- (3) Si $S_0(\mathfrak{h})$ es un punto $\{\mathfrak{D}_0\}$ engrosado en k , entonces $H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{h}) = \mathcal{O}_K^* K^{*2}$.
- (4) Si $S_0(\mathfrak{h})$ es un camino infinito engrosado en k , entonces $H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{h}) = K^*$.

Demostración: (1) Como $\delta(\mathfrak{D}', \mathfrak{D}'')$ es par, y usando el Ejemplo 3.1.2 que dice que la distancia entre dos órdenes 0-profundos es siempre par, tenemos que $\delta(\mathfrak{D}', \mathfrak{D}_\Lambda) \equiv \delta(\mathfrak{D}'', \mathfrak{D}_\Lambda) \equiv 0 \pmod{2}$ para todo orden \mathfrak{D}_Λ 0-profundo en $S_0(\mathfrak{h})$. El resultado se sigue por Lema 3.2.3.

(2) Supongamos primero que $s < \text{diam}(S_0(\mathfrak{H}))$. Sea \mathfrak{D}_0 - \mathfrak{D}_1 -...- \mathfrak{D}_n el tallo de $S_0(\mathfrak{H})$, y consideremos dos órdenes 0-profundos \mathfrak{D}_a y \mathfrak{D}_b que salgan por una hoja de \mathfrak{D}_0 y \mathfrak{D}_1 respectivamente (véase figura 3.4).

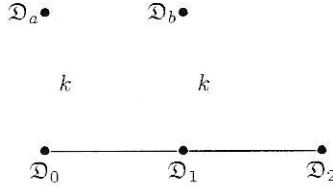


Figure 3.4:

Entonces $\delta(\mathfrak{D}', \mathfrak{D}_a)$ o $\delta(\mathfrak{D}', \mathfrak{D}_b)$ debe ser impar. En el Lema 3.3.3 probaremos que existen órdenes $\mathfrak{D}'_a, \mathfrak{D}'_b \in S_0(\mathfrak{H})$ con $\delta(\mathfrak{D}_a, \mathfrak{D}'_a) = \delta(\mathfrak{D}_b, \mathfrak{D}'_b) = s$, lo cual implica que $H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = K^*$. Ahora probaremos el recíproco. El caso $d > \text{diam}(S_0(\mathfrak{H}))$ no es posible. Si $d = \text{diam}(S_0(\mathfrak{H}))$, entonces $H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = H(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = \mathcal{O}_K^* K^{*2}$. La primera igualdad es a causa de que toda incrustación $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{D}$ es optimal, mientras que la segunda se debe a la Proposición 2.5.1. Toda incrustación es optimal debido a que si $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ son dos órdenes en $S_0(\mathfrak{H})$ tales que $\delta(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2) = \text{diam}(S_0(\mathfrak{H}))$, necesariamente \mathfrak{B}_1 y \mathfrak{B}_2 deben ser 0-profundos. Para ver esto sea \mathcal{C} el camino que une \mathfrak{B}_1 con \mathfrak{B}_2 . Si \mathfrak{B}_1 no es 0-profundo, existe $\mathfrak{B}'_1 \in B[\mathfrak{B}_1; 1] \setminus \mathcal{C} \subseteq S_0(\mathfrak{H})$ (véase figura 3.5), y se tiene que $\delta(\mathfrak{B}'_1, \mathfrak{B}_2) > \delta(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2) = \text{diam}(S_0(\mathfrak{H}))$, lo cual no es posible.

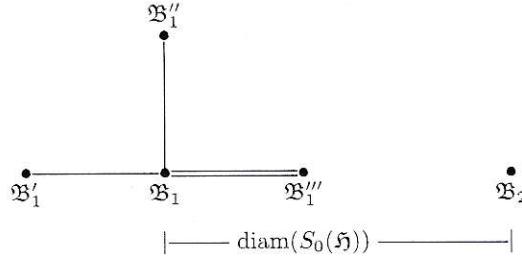


Figure 3.5: (Esquema de la demostración de Prop. 3.2.1 (2)) Como \mathfrak{B}_1 no es 0-profundo en $S_0(\mathfrak{H})$, $B[\mathfrak{B}_1; 1]$ posee al menos cuatro órdenes, digamos $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}'_1, \mathfrak{B}''_1, \mathfrak{B}'''_1$. Se destaca con doble línea el segmento $\mathcal{C} \cap B[\mathfrak{B}_1; 1]$.

(3) Como $\delta(\mathfrak{D}', \mathfrak{D}'')$ es par, y usando el Ejemplo 3.1.1 que dice que la distancia entre dos órdenes 0-profundos es siempre par, tenemos que $\delta(\mathfrak{D}', \mathfrak{D}_\Lambda) \equiv \delta(\mathfrak{D}'', \mathfrak{D}_\Lambda) \equiv 0 \pmod{2}$ para todo orden \mathfrak{D}_Λ 0-profundo en $S_0(\mathfrak{H})$. El resultado se sigue por Lema 3.2.3.

(4) Este caso es consecuencia directa de (2). \square

Recordemos que si \mathfrak{H} está contenido en un álgebra conmutativa semisimple L de dimensión 2 sobre K , entonces $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_L^{[t]}$ para algún $t \geq 0$. También recordemos que para cualquier orden $\mathfrak{H} \in \mathbb{M}_2(K)$, se cumple que $S_0(\mathfrak{H}^{[t]})$ es el conjunto de todos los órdenes maximales en el árbol de Bruhat-Tits de $\mathbb{M}_2(K)$ que están a una distancia no mayor a t de $S_0(\mathfrak{H})$.

Sea L es una extensión cuadrática de K . Se sabe que $S_0(\mathcal{O}_L) = S_0(\mathfrak{D})$, donde \mathfrak{D} es un orden maximal si la extensión L/K es no ramificada, y un orden de Eichler de nivel 1 en caso contrario. Cuando L es isomorfo a $K \times K$, entonces $S_0(\mathfrak{H})$ es un camino maximal en el árbol [4, Prop. 4.2]. El siguiente corolario nos da características de las incrustaciones optimales de un orden \mathfrak{H} en relación con el álgebra en el cual está contenido.

Corolario 3.2.1.1. *Sean L una K -álgebra conmutativa semisimple, $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_L^{[t]}$ para algún $t \geq 0$, sean $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \in S_0(\mathfrak{H})$ con \mathfrak{D}_1 0-profundo, y sea $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$ un orden de Eichler de nivel d , con d par. Entonces se cumple:*

- (1) *Si L/K es no ramificada, entonces $H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = \mathcal{O}_K^* K^{*2}$.*
- (2) *Si L/K es ramificada, entonces $H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = K^*$ si y solo si $d < 2t + 1$.*
- (3) *Si L es isomorfo a $K \times K$, entonces $H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = K^*$.*

Si en cambio d es impar, $H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = K^$ en cualquier caso.*

3.3 Incrustaciones explícitas

En esta sección veremos explícitamente en que órdenes de Eichler se incrusta optimalmente un orden $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{D}$.

Lema 3.3.1. *Supongamos que $S_0(\mathfrak{H}) = \mathfrak{D}_0 - \mathfrak{D}_1 - \dots - \mathfrak{D}_n$ es un camino de largo n . Sean $\mathfrak{D} \in S_0(\mathfrak{H})$ y $d \in \mathbb{N}$. Entonces existe $\mathfrak{D}' \in S_0(\mathfrak{H})$ tal que $\delta(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}') = d$ si y solo si $\delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}) \leq n - d$ o $d \leq \delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D})$.*

Demostración: Primero probaremos la suficiencia. Supongamos que $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_j$ para algún $0 \leq j \leq n - d$ (es decir, $\delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}) \leq n - d$). Entonces $0 \leq j + d \leq n$, luego $\mathfrak{D}_{j+d} \in S_0(\mathfrak{H})$ y $\delta(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_{j+d}) = d$ como se quería (véase figura 3.6). Supongamos ahora que $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_j$ para algún $d \leq j \leq n$ (es decir, $d \leq \delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D})$). Entonces $0 \leq j - d$, luego $\mathfrak{D}_{j-d} \in S_0(\mathfrak{H})$ y $\delta(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_{j-d}) = d$ (véase figura 3.7).

Recíprocamente, sean $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_j \in S_0(\mathfrak{H})$ para algún $0 \leq j \leq n$ y sea $d \in \mathbb{N}$. Notar que en el caso en que $d \leq n - d$, para todo $0 \leq j \leq n$ se cumple $\delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_j) \leq n - d$ o $d \leq \delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_j)$, por lo tanto este caso no se considera. Supongamos que existe $1 \leq i \leq n$ tal que $\delta(\mathfrak{D}_j, \mathfrak{D}_i) = d$. Ahora si $0 \leq i \leq j$ y $d > \delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}) = \delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_j)$, entonces $d > j = i + (j - i) = i + d$ lo cual no es posible. Luego

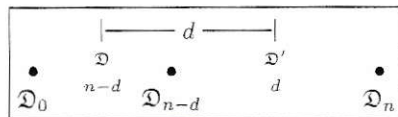


Figure 3.6:

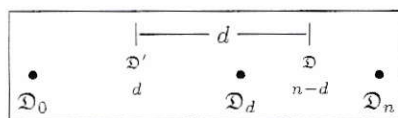


Figure 3.7:

en este caso $d \leq \delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D})$. Por otro lado, si $0 \leq j \leq i$ y $\delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}) = \delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_j) > n - d$, entonces $i - d = j > n - d$ y en consecuencia $i > n$ lo cual es contradictorio. Luego $\delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_j) \leq n - d$. \square

Recordemos que si la rama S' de un orden es finita, esta se puede obtener a partir de un camino de largo n , digamos $\mathfrak{D}_0 - \mathfrak{D}_1 - \dots - \mathfrak{D}_n$, engrosándolo en k para algún k , es decir, es de la forma $S' = \bigcup_{i=0}^n B[\mathfrak{D}_i; k]$ en el árbol de Bruhat-Tits de $\mathbb{M}_2(K)$ (véase [4], sección 5).

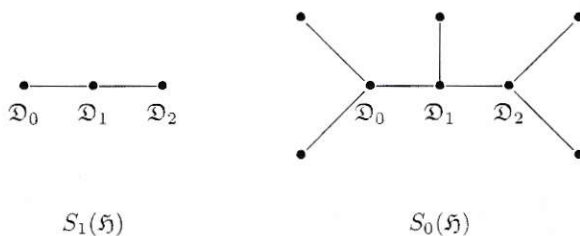


Figure 3.8: Ilustración de la construcción de un camino de largo 2 engrosado en 1, en el caso en que $p = 2$. En este ejemplo $S_0(\mathfrak{h}) = \bigcup_{i=0}^2 B[\mathfrak{D}_i; 1]$.

Se sigue que todo camino de largo maximal en $S_0(\mathfrak{h})$ tiene que pasar por $\mathfrak{D}_0 - \mathfrak{D}_1 - \dots - \mathfrak{D}_n$, y como la bola cerrada de largo k centrada en \mathfrak{D}_0 (respectivamente en \mathfrak{D}_n) tiene diámetro $2k$, entonces $D = \text{diam}(S_0(\mathfrak{h})) = n + 2k$. Recordemos también que un orden $\mathfrak{D}' \in S_0(\mathfrak{h})$ sale por una hoja desde el orden r -profundo \mathfrak{D}'' en $S_0(\mathfrak{h})$ si ningún orden que está en el camino que une \mathfrak{D}' y \mathfrak{D}'' es r -profundo salvo \mathfrak{D}'' , y \mathfrak{D}' es s -profundo para algún s menor que r .

Lema 3.3.2. *Sea $S_0(\mathfrak{h})$ un camino finito de largo n engrosado en k , y sea \mathfrak{D} un orden en $S_0(\mathfrak{h})$. Entonces existe $\mathfrak{D}' \in S_0(\mathfrak{h})$ tal que $\delta(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}') = d > 2k$ si y solo si existe $\mathfrak{D}'' \in S_0(\mathfrak{h})$ 0-profundo tal que $\delta(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'') = d$.*

Demostración: La suficiencia es trivial, así que solo demostraremos la necesidad. Sea \mathfrak{D} un orden t -profundo en $S_0(\mathfrak{H})$ y sea $\mathfrak{D}' \in S_0(\mathfrak{H})$ tal que $\delta(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}') = d > 2k$. Consideremos el conjunto $A = \{\mathfrak{B} \in S_0(\mathfrak{H}) \mid \delta(\mathfrak{D}, \mathfrak{B}) = d\}$. Este conjunto es finito y no vacío pues contiene a \mathfrak{D}' . Sea \mathfrak{E} un orden de Eichler cuya rama es el tallo de $S_0(\mathfrak{H})$. Sea $\mathfrak{D}'' \in A$ tal que $\mathfrak{C}_{\mathfrak{E}}(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'')$ sea mínimo. Demostraremos que \mathfrak{D}'' es 0-profundo. Supongamos que no lo es, y sean \mathfrak{D}_i y \mathfrak{D}_j los órdenes en el tallo de $S_0(\mathfrak{H})$ tales que $\delta(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_i) = k - t$ y $\delta(\mathfrak{D}'', \mathfrak{D}_j) = M = \min_{0 \leq s \leq n} \delta(\mathfrak{D}'', \mathfrak{D}_s)$, y supongamos sin pérdida de generalidad que $i \leq j$ (si no renombramos los órdenes del tallo en orden inverso). Entonces tenemos que $M < k$, luego necesariamente $i < j$. Notemos además que $2k - t < \delta(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}') = \delta(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_i) + \delta(\mathfrak{D}_i, \mathfrak{D}_j) + \delta(\mathfrak{D}_j, \mathfrak{D}')$ y $M < k$ implica que $1 < j - i$. Tomemos el orden \mathfrak{D}_{j-1} que es distinto de \mathfrak{D}_i por el comentario precedente, y un orden \mathfrak{D}''' en $S_0(\mathfrak{H})$ que salga por una hoja de \mathfrak{D}_{j-1} tal que $\delta(\mathfrak{D}_{j-1}, \mathfrak{D}''') = M + 1$ (tal \mathfrak{D}''' existe ya que $B[\mathfrak{D}_{j-1}; M + 1] \subseteq S_0(\mathfrak{H})$ pues $M + 1 \leq k$, luego $\mathfrak{D}''' \in A$ por construcción). La existencia de \mathfrak{D}''' contradice la minimalidad de \mathfrak{D}'' ya que $\mathfrak{C}_{\mathfrak{E}}(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}''') = \mathfrak{C}_{\mathfrak{E}}(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'') + 1$. Se sigue que \mathfrak{D}'' es 0-profundo en $S_0(\mathfrak{H})$ como se quería. \square

Observación 3.3.1. El lema precedente se puede extender al caso en que $d = 2k$ mediante un pequeño refinamiento en el argumento de la demostración, pero no se puede extender al caso en que $d < 2k$ para ninguno de los dos tipos de ramas de un orden \mathfrak{H} . En el caso en que $S_0(\mathfrak{H})$ es un camino, basta tomar un camino de largo 0, digamos $\{\mathfrak{D}_0\}$ engrosado en k , y como la distancia de dos órdenes 0-profundos es siempre par, si $\delta(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}') = d$ es impar con \mathfrak{D} 0-profundo, no existe \mathfrak{D}'' 0-profundo tal que $\delta(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'') = d$. Análogamente se prueba que el resultado no se puede extender al caso $d = 2k$ cuando $S_0(\mathfrak{H})$ es una hoja infinita, pues la distancia de dos órdenes 0-profundos también es siempre par.

Proposición 3.3.1. *Supongamos que $S_0(\mathfrak{H})$ es un camino finito engrosado en k de diámetro D , y sean \mathfrak{D}_0 un extremo del tallo de $S_0(\mathfrak{H})$. Sean $\mathfrak{D} \in S_0(\mathfrak{H})$ un orden 0-profundo y $d \in \mathbb{N}$. Entonces existe $\mathfrak{D}' \in S_0(\mathfrak{H})$ tal que $\mathfrak{D} \cap \mathfrak{D}'$ tiene nivel d si y solo si $\delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}) \leq D - (d - k)$ o $d - k \leq \delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D})$.*

Demostración: Sea $\mathfrak{D}_0 - \mathfrak{D}_1 - \dots - \mathfrak{D}_n$ el tallo de $S_0(\mathfrak{H})$. Sea $\mathfrak{D} \in S_0(\mathfrak{H})$ un orden 0-profundo y $d \in \mathbb{N}$. Si $d \leq 2k$ sea \mathfrak{D}_i el orden en el tallo de $S_0(\mathfrak{H})$ tal que $\delta(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_i) = k$. Entonces como todo orden en el tallo es k -profundo por definición de rama k -gruesa, existe $\mathfrak{D}' \in S_0(\mathfrak{H})$ tal que $\delta(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}') = 2k$ lo cual implica la existencia para cada $t \leq 2k$ de un orden maximal $\mathfrak{D}^t \in S_0(\mathfrak{H})$ tal que $\delta(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^t) = t$. Nótese que en este caso se cumple que $\delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}) \leq D - k \leq D - (d - k)$.

Si $d > 2k$ existe \mathfrak{D}_i en el tallo de $S_0(\mathfrak{H})$ tal que $\delta(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_i) = k$. Ahora, las siguientes afirmaciones son equivalentes (haciendo uso directo de Lema 3.3.1 y Lema 3.3.2);

1) existe $\mathfrak{D}' \in S_0(\mathfrak{H})$ tal que $\delta(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}') = d$,

- 2) existe \mathfrak{D}' 0-profundo $\in S_0(\mathfrak{H})$ tal que $\delta(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}') = d$.
- 3) existe $1 \leq j \leq n$ tal que $\delta(\mathfrak{D}_i, \mathfrak{D}_j) = d - 2k$,
- 4) $\delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_i) \leq n - (d - 2k) = D - d$ o $d - 2k \leq \delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_i)$,
- 5) $\delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}) \leq D - (d - k)$ o $d - k \leq \delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D})$.

El resultado se sigue. \square

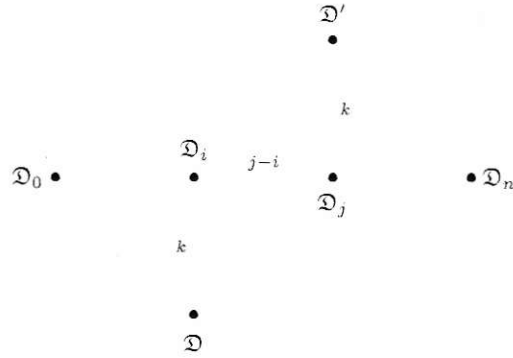


Figure 3.9: Representación gráfica de los órdenes usados en la demostración de la proposición 3.2.1.

Lema 3.3.3. *Sea $S_0(\mathfrak{H})$ un camino de largo n engrosado en k con $n > 1$, cuyo tallo está dado por $\mathfrak{D}_0 - \mathfrak{D}_1 - \dots - \mathfrak{D}_n$. Sean $\mathfrak{D}_a, \mathfrak{D}_b \in S_0(\mathfrak{H})$ 0-profundos tales que \mathfrak{D}_a sale por una hoja de \mathfrak{D}_0 y \mathfrak{D}_b sale por una hoja de \mathfrak{D}_1 . Entonces si $d < \text{diam}(S_0(\mathfrak{H}))$, existen $\mathfrak{D}'_a, \mathfrak{D}'_b \in S_0(\mathfrak{H})$ tales que $\delta(\mathfrak{D}_a, \mathfrak{D}'_a) = \delta(\mathfrak{D}_b, \mathfrak{D}'_b) = d$.*

Demostración: Por la proposición 3.3.1, basta probar que $\delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_a) \leq D - (d - k)$ o $d - k \leq \delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_a)$, y que $\delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_b) \leq D - (d - k)$ o $d - k \leq \delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_b)$, con $D = \text{diam}(S_0(\mathfrak{H}))$. Notamos que como \mathfrak{D}_a sale por una hoja de \mathfrak{D}_0 , tenemos que $\delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_a) \leq k$ por observación 2.5.1. Por hipótesis $d < D$, luego $\delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_a) < D - (d - k)$. Ahora, como \mathfrak{D}_b sale por una hoja de \mathfrak{D}_1 se tiene que $\delta(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_b) \leq k$. Entonces $\delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_b) \leq \delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1) + \delta(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_b) = 1 + k \leq (D - d) + k = D - (d - k)$, lo que termina la demostración. \square

Capítulo 4

Resultados globales

Dividiremos este capítulo de resultados globales en dos secciones, una sección que cubre el caso en que \mathfrak{H} es conmutativo y otra que expone algunos resultados en el caso en que \mathfrak{H} es no conmutativo.

4.1 \mathfrak{H} conmutativo

En este capítulo K es un cuerpo de números, y L es una K -álgebra semisimple que se incrusta en una K -álgebra de cuaterniones \mathfrak{A} que satisface la condición de Eichler. Hasta el teorema 4.1.1, L es una extensión cuadrática de K . Sea \mathfrak{H} un orden de rango dos en L , y sea $\mathfrak{D} \supseteq \mathfrak{H}$ un orden de rango maximal en \mathfrak{A} . Denotemos por $F(\mathfrak{D}|\mathfrak{H})$ al cuerpo de representación de \mathfrak{D} sobre \mathfrak{H} , es decir, el cuerpo de clases correspondiente al grupo $K^*H(\mathfrak{D}|\mathfrak{H})$. Sea $N : \mathfrak{A}_{\mathbb{A}}^* \rightarrow J_K$ la norma reducida adélica. Podemos identificar el grupo de ideles J_L con un subconjunto de $\mathfrak{A}_{\mathbb{A}}^*$ vía la incrustación dada. Cuando $L = K\mathfrak{H}$, se puede probar que $N(J_L) \subseteq H(\mathfrak{D}|\mathfrak{H})$ [17, pág. 20], por lo tanto, dado que $K^*N(J_L)$ es el grupo de clases asociado a L , se tiene $L \supseteq F(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = F$. Recordemos que la proporción de tipos de isomorfismos de órdenes en que \mathfrak{H} se incrusta está dado por $1/[F : K]$. Por ser L/K una extensión de grado 2 tenemos dos posibilidades, podemos tener $F = L$, en cuyo caso tenemos selectividad, o bien $F = K$ y \mathfrak{H} se incrusta en todo orden de Eichler de nivel S .

Observación 4.1.1. Se cumplen las siguientes correspondencias entre grupos de normas y cuerpos de clases [18]:

- a) \wp es ramificado en L/K si y solo si $\mathcal{O}_{K_{\wp}}^* \not\subseteq K^*N(J_L)$.
- b) \wp es descompuesto si y solo si $K_{\wp}^* \subseteq K^*N(J_L)$.
- c) \wp es inerte si y solo si $\mathcal{O}_{K_{\wp}}^* \subseteq K^*N(J_L)$ y $K_{\wp}^* \not\subseteq K^*N(J_L)$.

Consideremos ahora el análogo optimal para $H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H})$ definido en §2.6. Al igual que antes $N(J_L) \subseteq H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H})$ ya que los elementos de J_L , vistos como elementos del anillo \mathfrak{A} de elementos adélicos de \mathfrak{A} , conmutan con \mathfrak{H} . Por lo tanto, también se cumple que $L \supseteq F^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = F^{op}$, siendo $F^{op} \subseteq \Sigma$ el cuerpo de representación asociado al grupo $K^*H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H})$. Entonces, la proporción de órdenes en los que \mathfrak{H} se incrusta optimalmente viene dada por $1/[F^{op} : K]$. Así mismo, por ser L/K una extensión de grado dos, diremos que hay *selectividad optimal* cuando $F^{op} = L$, y en caso de que $F^{op} = K$ diremos que no la hay. En el primer caso, \mathfrak{H} se incrusta en $1/2$ de todas las clases de conjugación y en el segundo en todas.

Ahora, por el Teorema de Hasse-Brauer-Noether-Albert para álgebras de cuaterniones, L se incrusta en \mathfrak{A} si y solo si ningún lugar de K que sea ramificado en \mathfrak{A} se descompone en L . Usaremos un resultado de [3], que nos ayudará a determinar condiciones sobre el álgebra de cuaterniones \mathfrak{A} , para que \mathfrak{H} sea selectivo. Comenzamos con una versión optimal de [3, Teo. 1].

Lema 4.1.1. *Sea \mathfrak{A} un álgebra de cuaterniones y $L \cong K(\sqrt{b})$ un cuerpo cuadrático sobre K . Entonces, un orden \mathfrak{H} de rango maximal en L se incrusta optimalmente en todos los géneros espinoriales en $gen(\mathfrak{D})$ para todo orden de rango maximal \mathfrak{D} que contiene optimalmente a \mathfrak{H} , a menos que \mathfrak{A} sea isomorfa al álgebra de cuaterniones definida por el símbolo de Hilbert $\left(\frac{-1, b}{K}\right)$.*

Demostración: Definamos $F_M = F_M(\mathfrak{A}|\mathfrak{H}) = \max_{\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{A}} F(\mathfrak{D}|\mathfrak{H})$, donde \mathfrak{D} recorre el conjunto de todos los órdenes de rango maximal para los cuales $F(\mathfrak{D}|\mathfrak{H})$ está definido, y la maximalidad es en el sentido de contención de conjuntos [3]. Se sabe que cuando $\dim(\mathfrak{A}) = p^2$ con p primo, F_M siempre existe y tiene una fórmula determinada, además $F \subseteq L$ [3]. En particular, F_M es L o K . En [3] se demostró que F_M es el cuerpo de clases asociado al conjunto de normas reducidas de los estabilizadores de \mathfrak{H} que denotamos por $H(\mathfrak{H})$. Entonces como $H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) \supseteq H(\mathfrak{H})$, se tiene que $F^{op} \subseteq F_M$. Mas aún, $H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = H(\mathfrak{H})H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H})$. La contención $H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) \supseteq H(\mathfrak{H})H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H})$ es clara. Para ver la otra contención, si $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_L^{[r]}$ y $a, b \in \mathfrak{A}$ son tales que $a\mathfrak{D}a^{-1} \supseteq \mathcal{O}_L^{[r]}$, $a\mathfrak{D}a^{-1} \not\supseteq \mathcal{O}_L^{[r+1]}$ y $b\mathfrak{H}b^{-1} = \mathfrak{H}$, entonces $ba\mathfrak{D}a^{-1}b^{-1} \supseteq b\mathcal{O}_L^{[r]}b^{-1} = \mathfrak{H}$, y $ba\mathfrak{D}a^{-1}b^{-1} \not\supseteq b\mathcal{O}_L^{[r+1]}b^{-1} = \mathfrak{H}$. Esto dice $F_M \neq K$ (es decir, \mathfrak{H} es optimalmente selectivo) es posible solo si $\mathfrak{A} = \left(\frac{-1, b}{K}\right)$, pues en [3] se demuestra que $F_M = K$ en cualquier otro caso. \square

Como dijimos arriba, \mathfrak{H} es selectivo si y solo si $L = F^{op}$ o equivalentemente $K^*N(J_L) = K^*H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H})$. Se infiere del Corolario 3.2.1.1 que si \mathfrak{H} es selectivo entonces L/K es descompuesta en los lugares en que el nivel de \mathfrak{D} es impar.

Diremos que \mathfrak{H} satisface las *condiciones de selectividad optimal (SO)* si cumple las siguientes condiciones:

SO(1) L/K es no ramificada en los lugares finitos.



$SO(2)$ $\mathfrak{A} \cong \left(\frac{-1, b}{K}\right)$, donde $L \cong K(\sqrt{b})$.

$SO(3)$ L/K es descompuesta en todos los lugares \wp en los que $d_\wp(S)$ es impar.

Observación 4.1.2. Si se cumple $SO(1)$ y $SO(2)$ con $L = K(\sqrt{b})$ para algún $b \in K$ ($[L : K] = 2$), entonces b debe ser una unidad no ramificada, y como -1 es una unidad, $\left(\frac{-1, b}{K}\right)$ debe ser no ramificada, es decir isomorfa a $M_2(K)$ en los lugares finitos.

Observación 4.1.3. Notemos que globalmente $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K + f(\mathfrak{H})\mathcal{O}_L$, luego la condición para que el orden \mathfrak{H} se incruste en un orden de Eichler de nivel S viene dada por $v_\wp(S) \leq 2v_\wp(f(\mathfrak{H}))$ para los lugares \wp inertes para L , donde v_\wp es la valuación en el lugar \wp y $f(\mathfrak{H})$ es el conductor de \mathfrak{H} .

Resumimos lo anterior en el siguiente teorema.

Teorema 4.1.1. *Sea \mathfrak{H} un orden en una extensión cuadrática de cuerpos L de K . Asuma que \mathfrak{A} satisface la condición de Eichler, esto es, algún lugar arquimediano de K no ramifica en \mathfrak{A} . Supongamos que existe una incrustación optimal de \mathfrak{H} en algún orden de Eichler de nivel S en \mathfrak{A} . Entonces existe una incrustación optimal de \mathfrak{H} en todo orden de Eichler de nivel S , a menos que ocurran las condiciones especiales de selectividad SO , en cuyo caso \mathfrak{H} se incrusta exactamente en la mitad de los tipos de isomorfismos de órdenes en \mathfrak{A} .*

Demostración: Sea \mathfrak{D} un orden de Eichler en \mathfrak{A} . Recordemos que si \mathfrak{A} satisface la condición de Eichler, el género espinorial de \mathfrak{D} coincide con su clase de conjugación. Supongamos que \mathfrak{H} se incrusta en \mathfrak{D} y recordemos que por definición

$$N(J_L) = \prod_{\wp} N((L \otimes_K K_\wp)^*) \text{ y } H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = \left[\prod_{\wp \notin \infty} H_\wp^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) \times \prod_{\wp \in \infty} N(\mathfrak{A}_\wp^*) \right] \cap J_K.$$

Supongamos que \mathfrak{H} es selectivo, es decir $K^*N(J_L) = K^*H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H})$. Como $L \subseteq F^{op}$ y F^{op} está contenido en el cuerpo de clases de Hilbert Σ el cual es no ramificado en los lugares finitos, entonces se sigue $SO(1)$. La condición $SO(2)$ se sigue debido al lema 4.1.1, ya que si $\mathfrak{A} \cong \left(\frac{-1, b}{K}\right)$, donde $L \cong K(\sqrt{b})$, entonces \mathfrak{H} se incrusta optimalmente en todos los géneros espinoriales y por ende \mathfrak{H} no es optimalmente selectivo. Por el corolario 3.2.1.1 $H_\wp^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = K_\wp^*$ en los lugares donde $d_\wp(S)$ es impar. Luego $K_\wp^* \subseteq K^*N(J_L)$. Entonces L/K debe ser descompuesta en los lugares donde $d_\wp(S)$ es impar.

Ahora supongamos que se cumplen las condiciones SO . Para probar que \mathfrak{H} es selectivo basta probar que $N(J_L) \supseteq H^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H})$, lo cual probaremos localmente para cada lugar \wp .

Caso 1) \wp es un lugar finito.

1a) \wp es ramificado. Este caso no ocurre debido a la condición $SO(1)$.

1b) \wp es inerte. En este caso como $N(L_\wp^*) = \mathcal{O}_{K_\wp^*} K_\wp^{*2}$, y por corolario 3.2.1.1 si $d_\wp(S)$ es impar $H_\wp^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = K_\wp^*$, mientras que si $d_\wp(S)$ es par $H_\wp^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = \mathcal{O}_{K_\wp^*} K_\wp^{*2}$. Como asumimos $SO(3)$ se sigue que $H_\wp^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = N(L_\wp^*)$.

1c) \wp es descompuesto. Entonces $N(L_\wp^*) = K_\wp^*$, y como siempre se cumple que $N(L_\wp^*) \subseteq H_\wp^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H})$, es claro que $N(L_\wp^*) = H_\wp^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H})$.

Caso 2) \wp es un lugar real. Entonces, $\mathfrak{D}_\wp = \mathfrak{A}_\wp$ y luego $H_\wp^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = N(\mathfrak{A}_\wp^*)$.

2a) $\mathfrak{A}_\wp \cong \mathbb{M}_2(K_\wp)$, en cuyo caso $b > 0$ en \wp . En este caso $H_\wp^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = \mathbb{R}^*$, y como $b > 0$, $L_\wp \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y $N(L_\wp^*) = \mathbb{R}^*$.

2b) $\mathfrak{A}_\wp \cong \mathbb{H}$, en tal caso $b < 0$ en \wp , y se cumple que $H_\wp^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = N(\mathbb{H}^*) = \mathbb{R}^+ = N(\mathbb{C}) = N(L_\wp^*)$.

Caso 3) \wp es un lugar complejo. Entonces $\mathfrak{A} \cong \mathbb{M}_2(K_\wp)$ y este caso es similar a (2a).

Se concluye que $K^*N(J_L) = K^*H_\wp^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H})$, por lo tanto \mathfrak{H} es optimalmente selectivo. \square

Los casos restantes por examinar del caso conmutativo, son los dos casos en que L no es un cuerpo:

- i) $L \cong K \times K$.
- ii) $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K[a]$, donde a es un elemento nilpotente.

En el caso i) no hay manera de tener selectividad, ya que por Corolario 3.2.1.1 y Proposición 3.2.1 se tiene $H_\wp^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = K_\wp^*$ para todo lugar $\wp \in S$.

Observación 4.1.4. Notemos que en el caso ii), $H_\wp^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = H_\wp(\mathfrak{D})$ para todo lugar \wp . Lo anterior debido a que por Corolario 3.8 de [4], se tiene $H_\wp(\mathfrak{D}) = \mathcal{O}_{K_\wp^*} K_\wp^{*2}$ si d es par y $H_\wp(\mathfrak{D}) = K_\wp^*$ si d es impar.

El cuerpo de clases asociado a $H_\wp(\mathfrak{D})$ corresponde al 2-cuerpo de clases de Hilbert Σ . Esto quiere decir que $F^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = \Sigma$, en consecuencia, \mathfrak{H} se incrusta optimalmente en una proporción de $1/[\Sigma : K] = 2^{-t}$ clases de órdenes, donde $2^t = [\Sigma : K]$ es el número de clases de orden 2. En este caso diremos que \mathfrak{H} es *t-selectivo optimalmente*. En particular, $H_\wp^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = H_\wp(\mathfrak{D})$ quiere decir que \mathfrak{H} se incrusta optimalmente en una sola clase, la clase de \mathfrak{D} . En contraste, el hecho de que el cuerpo de representación $F(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = \bar{K}$ nos dice que \mathfrak{H} se incrusta en cada clase, luego \mathfrak{H} es *t-selectivo optimalmente*, pero no es selectivo en el sentido corriente. Destacamos lo anterior en la siguiente proposición:

Proposición 4.1.2. Sea L/K una K -álgebra de dimensión 2 que no es un cuerpo, sea $\mathfrak{A} \cong \mathbb{M}_2(K)$ y sea \mathfrak{H} un orden de rango 2 en L .

- i) Si $L \cong K \times K$, entonces \mathfrak{H} no es selectivo en el sentido optimal.
- ii) Si $L = K[a]$ con a un elemento nilpotente, entonces \mathfrak{H} es t -selectivo optimalmente con $2^t = [\Sigma : K]$, y se incrusta optimalmente en una única clase. Sin embargo, \mathfrak{H} se incrusta en todas las clases de órdenes maximales.

4.2 \mathfrak{H} no conmutativo

En esta sección las notaciones se mantienen como en la sección anterior a excepción de que en esta sección \mathfrak{H} tiene rango tres o cuatro y el concepto de que \mathfrak{H} se incruste optimalmente en un orden de rango maximal \mathfrak{D} significa que $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{D}$ pero $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{D}^{[1]}$ (Ver Observación 3.1.1).

Proposición 4.2.1. *Si \mathfrak{H} es un orden de rango 3, entonces $F^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = K$. En consecuencia, \mathfrak{H} no es optimalmente selectivo.*

Demostración: Tenemos que $\dim(K\mathfrak{H}) = 3$. En este caso $\mathfrak{A} = \mathbb{M}_2(K)$ Supongamos que $\varphi : K\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathbb{M}_2(K)$ es una representación fiel de dimensión 2. Veremos que la representación no es irreducible. Supongamos que la representación es irreducible, entonces el radical R actúa trivialmente lo que contradice que φ es una representación fiel, salvo si $R = 0$. Pero en este caso $K\mathfrak{H} \cong K \times K \times K$, $K \times L$ con L/K una extensión cuadrática o $K\mathfrak{H}$ es una extensión cúbica y ninguna de ellas tiene una representación fiel de dimensión 2. Entonces φ debe tener una subrepresentación de dimensión 1, y por lo tanto $K\mathfrak{H}$ es conjugada del álgebra de matrices $\begin{pmatrix} K & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$.

En particular, \mathfrak{H} está contenido en un conjugado del orden $\mathfrak{n} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ 0 & \mathcal{O} \end{pmatrix}$. Como $S_0(\mathfrak{n})$ es infinito y no corresponde a la rama de $\mathcal{O}_K[a]$, con a nilpotente, por Proposición 3.2.1 tenemos que $H_\varphi^{op}(\mathfrak{D}_\varphi|\mathfrak{H}_\varphi) = K_\varphi$ para todo lugar φ . Se sigue que $F^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = K$. \square

Si el rango de \mathfrak{H} es 4, $F^{op}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H})$ es la mayor subextensión de Σ/K en la que φ se descompone si $S_0(\mathfrak{H}_\varphi)$ es un camino de largo mayor que 1 y el nivel de \mathfrak{D}_φ es menor a $\text{diam}(S_0(\mathfrak{H}_\varphi))$ (cf. Prop. 3.2.1).

Proposición 4.2.2. *Sea \mathfrak{D} un orden de Eichler de nivel S . Entonces para cada cuerpo F con $K \subseteq F \subseteq \Sigma$, existe un orden \mathfrak{H} de rango 4 que satisface $F(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = F$.*

Demostración: Sea H el subgrupo de $\text{Gal}(\Sigma/K)$ asociado al cuerpo F vía correspondencia de cuerpos de clases. Entonces $H = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_r \rangle$, donde $\sigma_i = [e(\wp_j), \Sigma/K]$ para ciertos primos¹

¹ $[\cdot, \Sigma/K]$ es la función de Artin en ideles, y $e(\wp_i)$ se define coordenada a coordenada como $e(\wp_i)_j = \pi_i$ si $i = j$, donde π_i es un parámetro uniformizante en \wp_i , y $e(\wp_i)_j = 1$ en otro caso.

\wp_1, \dots, \wp_r . Escogamos $J = \prod_{i=1}^r \wp_i$. Sea $\mathfrak{h} = \mathcal{O} + J\mathfrak{D}'$, donde \mathfrak{D}' es un orden de Eichler de nivel² SJ , entonces $F(\mathfrak{D}|\mathfrak{h})$ se descompone en todo lugar que divide a J . Por minimalidad del cuerpo de representación, $F(\mathfrak{D}|\mathfrak{h}) = F$. \square

²Nótese que para que \mathfrak{h} se incruste en \mathfrak{D} , el nivel de \mathfrak{D} en el lugar \wp debe ser menor o igual que diámetro de $S_0(\mathfrak{h}_\wp)$.

Capítulo 5

Una aplicación

Nos gustaría conocer la cantidad de incrustaciones optimales no conjugadas de un orden cualquiera en un orden de Eichler. Como ya mencionamos en la introducción de esta tesis, contar clases de conjugación de incrustaciones optimales tiene aplicaciones en otras áreas de la matemática. Un primer paso para ese cálculo es desarrollar un sistema para contar los órdenes de Eichler de un cierto nivel que contienen un orden dado localmente, lo cual es lo que se hará como aplicación en este capítulo. Sea \mathfrak{H} un orden local contenido en un álgebra de cuaterniones \mathfrak{A} sobre un cuerpo local K . Sea $q = |\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K|$. Denotemos por $C(n; k)$ al camino de largo n engrosado en k , y denotemos por $\mathcal{E}_d(n; k)$ a la cardinalidad del conjunto de órdenes de Eichler de nivel d que se incrustan optimalmente en $C(n; k)$. En este capítulo se da una fórmula explícita para $\mathcal{E}_2(n; k)$. Además se da un algoritmo para calcular $\mathcal{E}_d(n; k)$ para $d > 2$. Para ello construiremos un nuevo árbol asociado a $C(n; k)$ que tiene una estructura más sencilla. Teniendo fijo a $S_0(\mathfrak{H}) = C(n; k)$, llamaremos *orden de Eichler optimal* a un orden de Eichler en el cual \mathfrak{H} se incrusta optimalmente.

5.1 Número de órdenes de Eichler optimales de un nivel dado

5.1.1 Caso $d = 2$: Fórmula general

Lema 5.1.1. $\mathcal{E}_1(n; 1) = \mathcal{E}_0(n; 1) = 2q + (n - 1)(q - 1)$.

Demostración: La primera igualdad es trivial, así que probaremos la segunda. Sea $\mathfrak{D}_0 - \mathfrak{D}_1 - \dots - \mathfrak{D}_n = C(n; k) = S_0(\mathfrak{H})$, entonces $C(n; 1) = S_0(\mathfrak{H}^{[1]})$. Se sigue de la estructura del árbol de \mathfrak{H} que los órdenes 0-profundos en $C(n; 1)$ son los órdenes que son vecinos de algún \mathfrak{D}_r que no están

en el tallo. \mathfrak{D}_0 y \mathfrak{D}_n tienen q vecinos que cumplen esto, mientras que \mathfrak{D}_r tiene $q - 1$ vecinos que cumplen la condición para $0 < r < n$. Por lo tanto hay $2q + (n - 1)(q - 1)$ órdenes 0-profundos. \square

Proposición 5.1.1. $\mathcal{E}_2(n; 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n - 1 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$,

$$\mathcal{E}_2(n; 1) = \begin{cases} \binom{q+1}{2} & \text{si } n = 0 \\ (n+1)\binom{q+1}{2} - (n-1) & \text{si } n \neq 0 \end{cases}, y$$

$$\mathcal{E}_2(n; k) = (2q + (n - 1)(q - 1))\binom{q+1}{2}q^{k-1} \text{ si } k \geq 2.$$

Demostración: Es claro que $\mathcal{E}_2(n; 0) = 0$ cuando $n = 0$. Para $n \geq 3$, todo orden de Eichler de nivel 2 es optimal y la cantidad de éstos es $n - 1$. Si $n = 0$ y $k = 1$, cada par de órdenes 0-profundos en $C(0; 1)$ determina un orden de Eichler optimal de nivel 2, y hay $q + 1$ de éstos. Así, $\mathcal{E}_2(0; 1) = \binom{q+1}{2}$. Ahora si $n > 0$, \mathfrak{D}_0 y \mathfrak{D}_n tienen cada uno, q vecinos 0-profundos y un vecino 1-profundo. De aquí se obtienen $2\binom{q+1}{2}$ órdenes de Eichler optimales de nivel 2. Para $0 < r < n$, \mathfrak{D}_r tiene $q - 1$ vecinos 0-profundos y 2 vecinos 1-profundos. De los pares de órdenes que podemos tomar para formar un orden de Eichler, solo en el par formado por los dos vecinos 1-profundos \mathfrak{D}_r no se incrusta optimalmente. Se sigue que

$$\mathcal{E}_2(n; 1) = 2\binom{q+1}{2} + (n-1)\binom{q+1}{2} - (n-1) = (n+1)\binom{q+1}{2} - (n-1).$$

Por último, probaremos por inducción en k la última fórmula. Para $k = 2$, cada uno de los $2q + (n - 1)(q - 1)$ órdenes 1-profundos en $C(n; k)$ tiene q vecinos 0-profundos y un orden 2-profundo. Con éstos últimos $q + 1$ órdenes, los $\binom{q+1}{2}$ pares que se pueden formar, obtenemos un orden de Eichler optimal. Luego hay $(2q + (n - 1)(q - 1))\binom{q+1}{2}$ órdenes de Eichler optimales, y el resultado es cierto para $k = 2$. El resultado general se sigue del hecho de que si $C(n; k)$ tiene $(2q + (n - 1)(q - 1))q^{k-2}$ vértices optimales, entonces $C(n; k + 1)$ tendrá $(2q + (n - 1)(q - 1))q^{k-1}$, y se repite el argumento que se usó para $k = 2$.

5.1.2 Caso $d > 2$: un algoritmo

Asumamos primero que $q \neq 2$. Sea $\mathcal{T} = \mathfrak{D}_0 - \mathfrak{D}_1 - \dots - \mathfrak{D}_n$ el tallo de $C(n; k)$. Consideremos el siguiente cociente: Dos órdenes \mathfrak{D}' , \mathfrak{D}'' están en la misma clase si ambos son r -profundos para algún $r \geq 1$, y si existe \mathfrak{D}_s en el tallo de $C(n; k)$ tal que $\delta(\mathfrak{D}', \mathcal{T}) = \delta(\mathfrak{D}', \mathfrak{D}_s) = \delta(\mathfrak{D}'', \mathfrak{D}_s) = \delta(\mathfrak{D}'', \mathcal{T})$. Además, cada orden del tallo es el único elemento de su clase. Denotaremos por $[\mathfrak{D}]$ a la clase que representa \mathfrak{D} . Ahora construiremos el *árbol simplificado* de $C(n; k)$. Representaremos a $[\mathfrak{D}']$

unido por una arista a $[\mathfrak{D}'']$ si y solo si existen representantes $\mathfrak{D}'_1 \in [\mathfrak{D}']$ y $\mathfrak{D}''_1 \in [\mathfrak{D}'']$ tales que $\delta(\mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}''_1) = 1$. Por abuso de notación denotaremos por δ a la distancia inducida en dicho cociente. El árbol resultante lo denotamos por $\tilde{C}(n; k)$ y lo representaremos mediante el esquema de la figura 5.1:

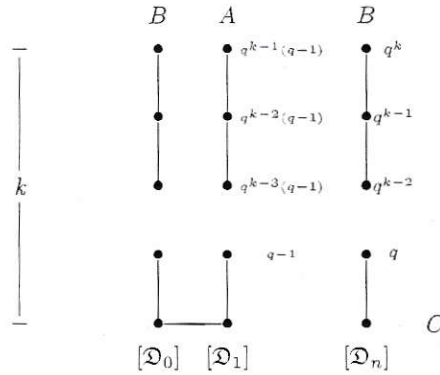


Figure 5.1: Esquema del árbol simplificado para $C(n; k)$. A la derecha de los vértices está la cardinalidad de esa clase de órdenes.

Denotemos por \mathcal{T} a el tallo de $C(n; k)$ y a su respectiva identificación en $\tilde{C}(n; k)$. Diremos que dos clases $[\mathfrak{D}']$, $[\mathfrak{D}'']$ pertenecen a distintas varas si para cierto $[\mathfrak{D}_s]$ en el tallo se cumple $\delta([\mathfrak{D}'], \mathcal{T}) = \delta([\mathfrak{D}'], [\mathfrak{D}_s])$, y $\delta([\mathfrak{D}''], [\mathfrak{D}_s]) > \delta([\mathfrak{D}''], \mathcal{T})$. La vara de un orden del tallo \mathfrak{D}_s , es el conjunto $\mathcal{V}(\mathfrak{D}_s) = \{\mathfrak{D}' \in C(n; k) \mid \delta(\mathfrak{D}', \mathcal{T}) = \delta(\mathfrak{D}', \mathfrak{D}_s)\} \setminus \{\mathfrak{D}_s\}$. Teniendo en cuenta el esquema del árbol simplificado de $C(n; k)$, llamamos vértice de clase C a todo orden del tallo. Llamamos vértice clase A a todo vértice que esté en la vara de un orden \mathfrak{D}_s en el esquema de la figura 5.1, para $2 \leq s \leq n - 1$, y los vértices de clase B serán todos aquellos vértices que no son de clase A ni de clase C. Todo vértice $(k - r)$ -profundo de clase A en $\tilde{C}(n; k)$ contiene $q^{r-1}(q - 1)$ vértices de $C(n; k)$ (órdenes maximales), mientras que los de clase B contienen q^r (Figura 5.1).

Ejemplo 5.1.1. Esquema del árbol $\tilde{C}(2; 3)$.

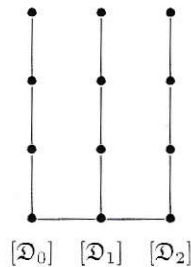


Figure 5.2:

Ahora procederemos a contar cuántos órdenes de Eichler de nivel d hay en $C(n; k)$. Definamos $\mathcal{G}_d([\mathcal{D}], [\mathcal{D}']) = \#\{\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \mid (\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) \in [\mathcal{D}] \times [\mathcal{D}'] \text{ y } \delta(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = d\}$.

Observación 5.1.1. 1) Si $[\mathcal{D}']$ es una clase de órdenes $(k-r)$ -profundos en $C(n; k)$ que está en la vara de $[\mathcal{D}_s]$, entonces $\delta([\mathcal{D}'], [\mathcal{D}_s]) = r$. Luego, si $[\mathcal{D}']$ es de clase A contiene $q^{r-1}(q-1)$ órdenes maximales, mientras que si es de clase B contiene q^r órdenes maximales.

2) Puede ocurrir que $\delta([\mathcal{D}'], [\mathcal{D}'']) < d$ y existan representantes $\mathcal{D}', \mathcal{D}''$ de $[\mathcal{D}'], [\mathcal{D}'']$ respectivamente, tales que $\delta(\mathcal{D}', \mathcal{D}'') = d$. La única manera de que esto ocurra es que exista $[\mathcal{B}]$ del mismo tipo que $[\mathcal{D}']$ y que esté en la misma vara de un orden en el tallo (o que $[\mathcal{B}]$ sea un orden del tallo en cuya vara están $[\mathcal{D}']$ y $[\mathcal{D}'']$), que $[\mathcal{D}'']$ esté entre $[\mathcal{D}']$ y $[\mathcal{B}]$, y tal que $\delta([\mathcal{D}'], [\mathcal{B}]) + \delta([\mathcal{B}], [\mathcal{D}'']) = d$. En este caso $d = \delta([\mathcal{D}'], [\mathcal{D}'']) + 2\delta([\mathcal{D}''], [\mathcal{B}])$.

Ejemplo 5.1.2. En la figura 5.3, al lado izquierdo se aprecia la vara de un elemento del tallo \mathcal{D}_m en $C(n; 3)$ para algún $n > m > 0$, y a la derecha la misma vara en $\tilde{C}(n; 3)$. Notar que $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_3 \cap \mathcal{B}_4$ son dos órdenes de Eichler optimales de nivel 4 en $C(n; 3)$. Visto en $\tilde{C}(n; 3)$, $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ es representado gráficamente por $[\mathcal{B}_1] - [\mathcal{B}] - [\mathcal{B}_2] - [\mathcal{D}_m] - [\mathcal{B}_2]$, mientras que $\mathcal{B}_3 \cap \mathcal{B}_4$ es representado por el circuito $[\mathcal{B}_1] - [\mathcal{B}] - [\mathcal{B}_2] - [\mathcal{B}] - [\mathcal{B}_1]$. Notar que todo elemento en el circuito se repite a lo más una vez, y que todo circuito parte de $[\mathcal{B}_1]$.

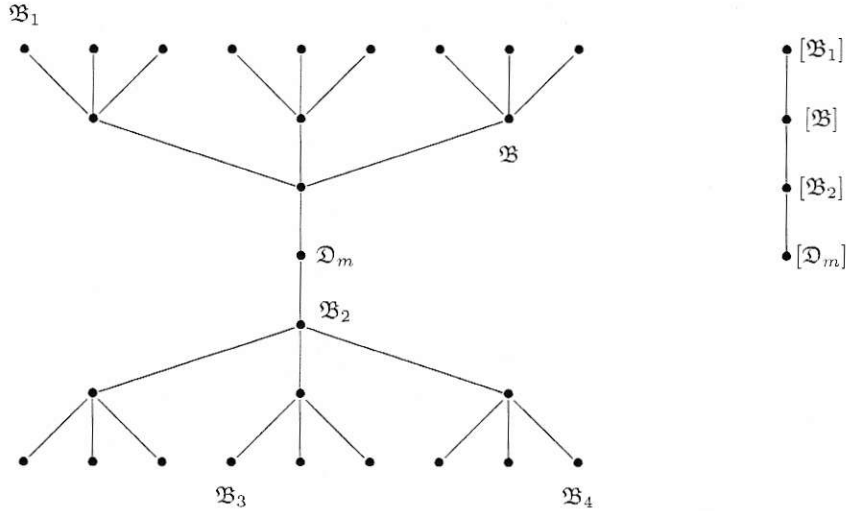


Figure 5.3:

La siguiente proposición nos da un algoritmo para calcular la cantidad de órdenes de Eichler optimales si $q \neq 2$.

Proposición 5.1.2. *Sea d un número natural distinto de 2, y sean $[\mathfrak{D}']$, $[\mathfrak{D}'']$ dos vértices en el árbol simplificado de $C(n; t)$, 0-profundo y $(t-r)$ -profundo respectivamente, con $\delta([\mathfrak{D}'], [\mathfrak{D}'']) = d$. Entonces*

- i) *Si $[\mathfrak{D}']$, $[\mathfrak{D}'']$ son del tipo A y están en distintas varas, tenemos $\mathcal{G}_d([\mathfrak{D}'], [\mathfrak{D}'']) = q^{t+r-2}(q-1)^2$.*
- ii) *Supongamos que $[\mathfrak{D}']$ y $[\mathfrak{D}'']$ son del tipo A y están en la misma vara. Entonces,*
 - a) *Si $\delta([\mathfrak{D}'], [\mathfrak{D}'']) = d$, tenemos $\mathcal{G}_d([\mathfrak{D}'], [\mathfrak{D}'']) = q^{t-1}(q-1)$.*
 - b) *Si $\delta([\mathfrak{D}'], [\mathfrak{D}'']) < d$ y no hay ningún elemento del tallo en el camino que une \mathfrak{D}' con \mathfrak{D}'' , tenemos $\mathcal{G}_d([\mathfrak{D}'], [\mathfrak{D}'']) = q^{\frac{d+t+r}{2}-2}(q-1)^2$.*
 - c) *Si $\delta([\mathfrak{D}'], [\mathfrak{D}'']) < d$ y hay un elemento del tallo en el camino que une \mathfrak{D}' con \mathfrak{D}'' , tenemos $\mathcal{G}_d([\mathfrak{D}'], [\mathfrak{D}'']) = q^{t+r-2}(q-1)(q-2)$.*
- iii) *Si $[\mathfrak{D}']$ es del tipo A y $[\mathfrak{D}'']$ es del tipo B, tenemos $\mathcal{G}_d([\mathfrak{D}'], [\mathfrak{D}'']) = q^{t+r-1}(q-1)$.*
- iv) *Si $[\mathfrak{D}']$ es del tipo A y $[\mathfrak{D}'']$ es del tipo C, tenemos $\mathcal{G}_d([\mathfrak{D}'], [\mathfrak{D}'']) = q^{t-1}(q-1)$.*
- v) *Si $[\mathfrak{D}']$ y $[\mathfrak{D}'']$ son del tipo B y están en distintas varas, tenemos $\mathcal{G}_d([\mathfrak{D}'], [\mathfrak{D}'']) = q^{t+r}$.*
- vi) *Supongamos que $[\mathfrak{D}']$ y $[\mathfrak{D}'']$ son del tipo B y están en la misma vara. Entonces,*
 - a) *Si $\delta([\mathfrak{D}'], [\mathfrak{D}'']) = d$, tenemos $\mathcal{G}_d([\mathfrak{D}'], [\mathfrak{D}'']) = q^t$.*
 - b) *Si $\delta([\mathfrak{D}'], [\mathfrak{D}'']) < d$, tenemos $\mathcal{G}_d([\mathfrak{D}'], [\mathfrak{D}'']) = q^{\frac{d+r+t}{2}-1}(q-1)$.*
- vii) *Si $[\mathfrak{D}']$ es del tipo B y $[\mathfrak{D}'']$ es del tipo A, tenemos $\mathcal{G}_d([\mathfrak{D}'], [\mathfrak{D}'']) = q^{t+r-1}(q-1)$.*
- viii) *Si $[\mathfrak{D}']$ es del tipo B y $[\mathfrak{D}'']$ es del tipo C, tenemos $\mathcal{G}_d([\mathfrak{D}'], [\mathfrak{D}'']) = q^t$.*
- ix) *Si $[\mathfrak{D}']$ y $[\mathfrak{D}'']$ son del tipo C, tenemos $\mathcal{G}_d([\mathfrak{D}'], [\mathfrak{D}'']) = 1$.*

Demostración: i) Como $[\mathfrak{D}']$ es 0-profundo de clase A, contiene $q^{t-1}(q-1)$ órdenes maximales, mientras que por ser $[\mathfrak{D}'']$ $(t-r)$ -profundo de clase B contiene $q^{r-1}(q-1)$. Por otro lado, si $\mathfrak{D}_1 \in [\mathfrak{D}']$ y $\mathfrak{D}_2 \in [\mathfrak{D}'']$ notemos que $\mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$ es un orden de Eichler de nivel d ya que $[\mathfrak{D}']$ y $[\mathfrak{D}'']$ están en distintas varas. En consecuencia $\mathcal{G}_d([\mathfrak{D}'], [\mathfrak{D}'']) = q^{t+r-2}(q-1)^2$.

- ii) a) Como antes $[\mathfrak{D}']$ contiene $q^{t-1}(q-1)$ órdenes maximales. Si $\delta([\mathfrak{D}'], [\mathfrak{D}'']) = d$, para cada \mathfrak{D}_1 en $[\mathfrak{D}']$ hay un único \mathfrak{D}_2 en $[\mathfrak{D}'']$ a distancia d . Así $\mathcal{G}_d([\mathfrak{D}'], [\mathfrak{D}'']) = q^{t-1}(q-1)$.
- b) Supongamos que $[\mathfrak{D}']$ y $[\mathfrak{D}'']$ están en la vara de $[\mathfrak{D}_m]$. Por la observación 5.1.1 (2), debe existir una vértice \mathfrak{B} en la vara de $[\mathfrak{D}_m]$ tal que $[\mathfrak{D}'']$ está entre $[\mathfrak{D}']$ y $[\mathfrak{B}]$ mientras $d = \delta([\mathfrak{D}'], [\mathfrak{D}'']) + 2\delta([\mathfrak{D}''], [\mathfrak{B}])$. Sean $l = \delta([\mathfrak{D}'], [\mathfrak{B}])$ y $h = \delta([\mathfrak{D}''], [\mathfrak{B}])$. Entonces

$l - h = t - r$ y $d = l + h$ (Véase figura 5.4). De estas últimas ecuaciones se deduce que $h = \frac{(d+t-r)}{2}$. Ahora, existen $q^{t-1}(q-1)$ pares de órdenes $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2) \in [\mathfrak{D}'] \times [\mathfrak{B}]$, con $\delta(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2) = l$. Para cada orden $\mathfrak{B}' \in [\mathfrak{B}]$ debemos regresar por el camino que une $[\mathfrak{B}]$ y $[\mathfrak{D}']$. En el primer paso, de las q posibilidades, solo $q-1$ son válidas (en $C(n; t)$ no es válido regresar por un camino ya recorrido). En los siguientes pasos habrán q posibilidades cada vez. En total hay $\frac{(d+t-r)}{2}$ pasos. Se sigue que dado un orden $\mathfrak{B}' \in [\mathfrak{B}]$, hay $q^{\frac{(d+t-r)}{2}-1}(q-1)$ órdenes de Eichler de nivel h de la forma $\mathfrak{B}' \cap \mathfrak{D}''_0$, con $\mathfrak{D}''_0 \in [\mathfrak{D}'']$. Concluimos que $\mathcal{G}_d([\mathfrak{D}'], [\mathfrak{D}'']) = (q^{t-1}(q-1)) \cdot (q^{\frac{d-t-r}{2}-1}(q-1)) = q^{\frac{d+t-r}{2}-2}(q-1)^2$.

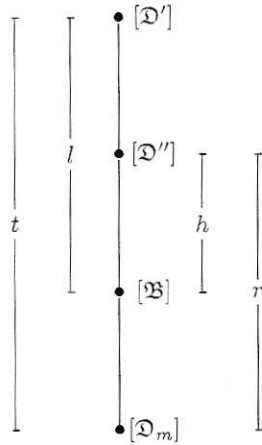


Figure 5.4: Posición relativa en la vara de $[\mathfrak{D}_m]$ de los órdenes usados en la demostración de la parte ii) de Pop. 5.1.2.

c) En este caso $d = r + t$. Supongamos que $[\mathfrak{D}']$ y $[\mathfrak{D}'']$ están en la vara de \mathfrak{D}_m . Hay $q^{t-1}(q-1)$ órdenes de Eichler de la forma $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{D}_m$, todos de nivel t con $\mathfrak{B} \in [\mathfrak{D}']$. Por otro lado, a cada uno de estos órdenes le corresponde un camino en $C(n; k)$ que parte desde un elemento en $[\mathfrak{D}']$ y termina en \mathfrak{D}_m . Si queremos extender uno de estos caminos hasta llegar a un orden en $[\mathfrak{D}'']$, debemos hacerlo en r pasos. En el primer paso, de las $q-1$ maneras que tengo de extenderlo (ya que \mathfrak{D}_m es un elemento del tallo), solo son válidas $q-2$, la otra posibilidad corresponde a recorrer un circuito en el camino ya recorrido lo cual no es posible. En los siguientes $r-1$ pasos hay q maneras de extenderlo cada vez. Esto nos da $q^{r-1}(q-2)$ maneras de extender los $q^{t-1}(q-1)$ caminos correspondientes a los órdenes de Eichler de nivel t formados por la intersección de \mathfrak{D}_m con un elemento en $[\mathfrak{D}']$. Se sigue que $\mathcal{G}_d([\mathfrak{D}'], [\mathfrak{D}'']) = (q^{t-1}(q-1)) \cdot (q^{r-1}(q-2)) = q^{t+r-2}(q-1)(q-2)$.

iii) Similar a demostración de i).

- iv) $[\mathfrak{D}']$ contiene $q^{r-1}(q-1)$ órdenes maximales, mientras que $[\mathfrak{D}''] = \{\mathfrak{D}''\}$. Además hay exactamente un camino que une un elemento de $[\mathfrak{D}']$ con \mathfrak{D}'' . Por lo tanto $\mathcal{G}_d([\mathfrak{D}'], [\mathfrak{D}'']) = q^{t-1}(q-1)$.
 - v) Similar a demostración de i).
 - vi) Similar a demostración de ii).
 - vii) Similar a demostración de i).
 - viii) Similar a demostración de iv).
 - ix) Este resultado es trivial.
-

Observación 5.1.2. 1) Notar que cuando $q = 2$, la parte c) de ii) en Prop. 5.2.1 es un caso vacío (no hay suficientes órdenes para regresar sobre un camino recorrido). Sin embargo la proposición sigue siendo cierta para $q = 2$.

- 2) Si partimos de un vértice optimal, digamos v , y vamos a parar nuevamente a v , estamos contando dos veces los órdenes de Eichler optimales.

Para ilustrar el uso del algoritmo lo usaremos en un par de ejemplos.

Ejemplo 5.1.3. Consideremos el árbol $\tilde{C}(2; 3)$. Contaremos cuantos órdenes de Eichler optimales de nivel 5 hay.

Paso 1: Escogemos un vértice optimal y marcamos todas las clases de órdenes que están a distancia 5 de ese orden. En la figura escogimos el vértice v_0 .

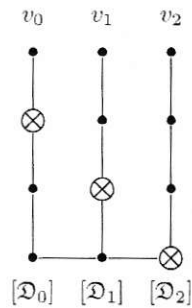


Figure 5.5: Esquema del paso 1 del ejemplo 5.1.3.

Notar que para llegar al primer vértice marcado con \otimes que está en la vara de $[\mathfrak{D}_0]$, partimos del vértice v_0 llegamos hasta $[\mathfrak{D}_0]$ y luego nos devolvemos hasta llegar a \otimes . Luego, usando la

Proposición 5.2.1, más precisamente la parte b) de *vi*), *vii*) y *viii*), y sumando las cantidades correspondientes a todos los vértices marcados, obtenemos que hay $q^4(q-1) + q^3(q-1) + q^3 = q^5$ órdenes de Eichler optimales que tienen como origen el vértice v_0 .

Paso 2: Dibujamos el esquema de $\tilde{C}(2;3)$ sin el vértice que ya utilizamos (en el siguiente ejemplo quedará claro el porqué de esto). A continuación repetimos el Paso 1, pero partiendo del vértice v_1 en lugar de v_0 .

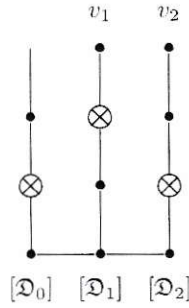


Figure 5.6: Esquema del paso 2 del ejemplo 5.1.3.

Usando *iii*) y la parte *c*) de *ii*) de la Proposición 5.2.1 contamos $q^3(q-1) + q^3(q-1)(q-2) + q^3(q-1) = q^4(q-1)$ órdenes de Eichler optimales que tienen como uno de sus extremos al vértice v_1 .

Paso 3: Dibujamos el esquema de $\tilde{C}(2;3)$ esta vez eliminando los vértices v_0 y v_1 . Repetimos el Paso 1 usando v_2 en lugar de v_0 .

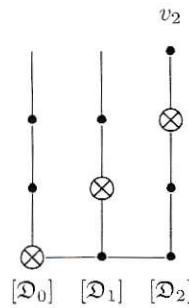


Figure 5.7: Esquema del paso 3 del ejemplo 5.1.3.

Por simetría, al igual que en el paso 1, obtenemos q^5 órdenes de Eichler optimales que tienen como uno de sus extremos al vértice v_2 .

Paso 4: Sumamos todos los órdenes de Eichler optimales obtenidos en los pasos anteriores para obtener el total de órdenes de Eichler optimales, que viene dado por $q^4(3q-1)$.

Observación 5.1.3. 1) Supongamos que $q > 2$. Contemos los órdenes de nivel 4, de $\tilde{C}(2; 3)$ que parten de v_0 como en la figura 5.8. Entonces puede haber más de una marca en una misma vara. Notemos que los caminos de v_0 a v_0 están contados dos veces, luego esta cantidad debe multiplicarse por $\frac{1}{2}$.

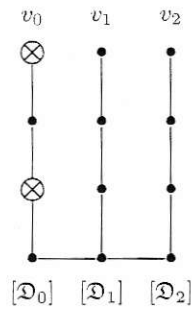


Figure 5.8: Referente a observación 5.1.3 (1).

2) Si contamos los órdenes de Eichler optimales de nivel 7 en $\tilde{C}(2; 3)$, y partimos contando desde v_0 podríamos caer en un vértice optimal como se puede apreciar en la figura 5.9 donde vamos a parar al vértice v_1 . Después cuando contemos desde v_1 podríamos caer en el vértice v_0 nuevamente. Es por esto que eliminamos los vértices optimales desde donde ya contamos.

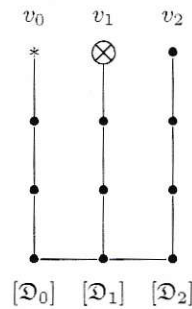


Figure 5.9: Referente a observación 5.1.3 (2). Los caminos parten de v_0 .

Bibliografía

- [1] L. ARENAS-CARMONA *Applications of spinor class fields: embeddings of orders and quaternionic lattices*, Ann. Inst. Fourier **53** (2003) 2021-2038.
- [2] L. ARENAS-CARMONA *Representation Fields for commutative orders*. Ann. Inst. Fourier **62** (2012), 807-819.
- [3] L. ARENAS-CARMONA, *Maximal selectivity for orders in fields*. J. Number Th. **132** (2012), 2748-2755.
- [4] L. ARENAS-CARMONA *Eichler orders, trees and Representation Fields*, Int. J. Number Theory **6** (2013) 1725-1741.
- [5] W.K. CHAN, F. XU, *On representations of spinor genera*, Compos. Math **107.2** (2004), 287-300.
- [6] C. CHEVALLEY, *L'Arithmétique dans les Algèbres de Matrices*, Hermann, Paris, 1936.
- [7] T. CHINBURG, E. FRIEDMAN, *An embedding theorem for quaternion algebras*, J. London Math. Soc., **60** (1999), 33-44.
- [8] T. CHINBURG, E. FRIEDMAN, *The finite subgroups of maximal arithmetic subgroups of $PSL(2, \mathbb{C})$* , Ann. Inst. Fourier **50** (2000), 1765-1798.
- [9] M. EICHLER, *Zur Zahlentheorie der Quaternionenalgebren*, J. Reine Angew. Math. **195** (1955), 127-155.
- [10] P. GUILLE, T. SZAMUELY, *Central Simple Algebras and Galois Cohomology*, Cambridge studies in advanced mathematics, 2006.
- [11] X. GUO AND H. QIN, *An embedding theorem for Eichler orders*, J. Number Th. **107.2** (2004), 207-214.



- [12] B. LINOWITZ, *Selectivity in quaternion algebras*, J. Number Th. **132** (2012), 1425-1437.
- [13] B. LINOWITZ AND T.R. SHEMANSKE, *Embedding orders into central simple algebras*, J. Théor. Nombres Bordeaux **24** (2012), 405-424.
- [14] C. MACLACHLAN, *Optimal embeddings in quaternion algebras*, J. Number Th. **128** (2008), 2852-2860.
- [15] C. MACLACHLAN, *Torsion in arithmetic Fuchsian groups*, J. London Math. Soc. (2) **73** (2006), 14-30.
- [16] C. MACLACHLAN, *Torsion in maximal arithmetic Fuchsian groups*, in: *Combinatorial Group Theory, Discrete Groups, and Number Theory*, vol. **421**, Springer, 2003.
- [17] J.S. MILNE, *Algebraic Number Theory (v3.03)*, 2011. Disponible en www.jmilne.org/math/.
- [18] J.S. MILNE, *Class Field Theory (v4.01)*, 2011. Disponible en www.jmilne.org/math/.
- [19] O. T. O'MEARA, *Introduction to quadratic forms*, Academic Press, New York, 1963.
- [20] I. REINER, *Maximal Orders*, Oxford University Press, 2003.
- [21] I. SAAVEDRA, *Cálculos explícitos de la imagen espinorial local relativa para órdenes cíclicos*, Tesis de magíster, Depto. de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, (2013).
- [22] J.-P. SERRE, *Trees* (translated by John Stillwell), Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [23] M.-F. VIGNÉRAS, *Arithmétique des Algèbres de Quaternions*, Lecture Notes in Math. **800**, Springer, Berlin, 1980.