

UCH-FC  
MAG-M  
G 643a  
C.1



DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE CHILE



# APROXIMACIÓN DE SOLUCIONES CASI PERIÓDICAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE ARGUMENTO CONSTANTE A TROZOS

TESIS

ENTREGADA A LA

UNIVERSIDAD DE CHILE

EN CUMPLIMIENTO PARCIAL DE LOS REQUISITOS

PARA OPTAR AL GRADO DE

MAGISTER EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA

por

Luis Orlando González Valencia

Director de Tesis: Dr. Manuel Pinto Jiménez

Marzo, 2013.

FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN  
TESIS MAGÍSTER

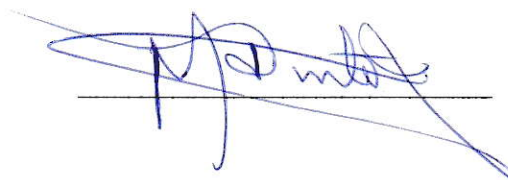
Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

**Luis Orlando González Valencia**

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias con mención en Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 4 de Marzo de 2013.

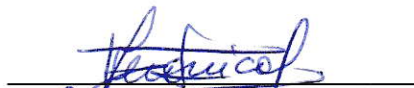
**Director de Tesis**

Dr. Manuel Pinto

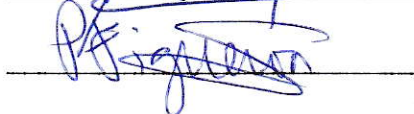
A handwritten signature in blue ink, appearing to be 'M. Pinto', written over a horizontal line.

**Comisión de Evaluación de la Tesis**

Dra. Verónica Poblete

A handwritten signature in blue ink, appearing to be 'V. Poblete', written over a horizontal line.

Dr. Pablo Figueroa

A handwritten signature in blue ink, appearing to be 'P. Figueroa', written over a horizontal line.



*A mis seis hermanos*

---

# Agradecimientos



Por ser de una importancia esencial en esta etapa de mi vida, en la cual he llevado a cabo el desarrollo de este Magister, entregándome su ayuda de una u otra forma, debo agradecer:

A mi Director de tesis, Dr. Manuel Pinto, por confiar en mi incluso cuando las cosas se pusieron complicadas y por tenerme una paciencia única. Muchas gracias Profesor.

A mis Padres, María Teresa y Alejandro, por su no siempre retribuida entrega.

A mis hermanos, por ser mi primer ejemplo de vida, los quiero y admiro.

A mis sobrinos, por su energía y alegría infinitas.

A mis amigos y compañeros de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile, porque hicieron que estos años de Licenciatura y Magister sean una hermosa experiencia de vida. En particular, quiero nombrar : a la bella Natu, por alegrarme, quererme y acompañarme todo este tiempo; al no menos bello Juanca, por salvarme incontables veces, qué grande que eres; a Patricio, por contagiar su compromiso y amor por la Matemática, y por reír siempre, gracias por las risas compartidas; de forma muy especial a Nicole y Luciano, por estar siempre.

Al Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias, por acogerme durante todos estos años. En especial agradecer a todos los Profesores que forman parte de el.

Muchas gracias.



---

# Resumen

Sea  $q$  un número natural. Consideremos el sistema diferencial

$$\dot{y}(t) = D(t)y(t) + f(t) + G(t, y(t)), \quad (1)$$

donde  $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{q \times q}$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$ . Usando  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , una función constante a trozos de tipo generalizado, construimos la siguiente ecuación diferencial con argumento constante a trozos

$$\dot{z}(t) = D(t)z(t) + f(t) + G(t, z(\gamma(t))). \quad (2)$$

Estudiamos la posibilidad de que una solución  $z$  de (2) esté cerca de una solución  $y$  de (1) cuando la función  $\gamma$  esté cerca de la función identidad. Se investiga la existencia de soluciones casi-periódicas de la ecuación diferencial con argumento constante a trozos de tipo generalizado (2), lo cual conlleva el estudio de ecuaciones en diferencias. Mediante el uso de teoremas de punto fijo y el lema de Gronwall, se obtienen las condiciones suficientes para la existencia y unicidad de soluciones casi-periódicas de este sistema, como también condiciones que aseguran la estabilidad exponencial. Nuestros resultados son obtenidos usando la teoría de dicotomía exponencial, la cual en el caso casi-periódico dota a la matriz de Green asociada de una bi-casiperiódicidad.

Finalmente, probamos que el análogo discreto que se obtiene de la ecuación diferencial con argumento constante a trozos (2) y el sistema continuo (1) están efectivamente cerca, lo que nos garantiza que, una solución de (2) puede ser usada como una aproximación de una solución de (1). Aplicaremos los resultados obtenidos en un ejemplo concreto, específicamente estudiaremos sistemas de redes neuronales, donde los resultados se verán reflejados en una simulación computacional.

---

# Abstract

Let  $q$  be a natural number. This work is dedicated to study the system of differential equations

$$\dot{y}(t) = D(t)y(t) + f(t) + G(t, y(t)), \quad (1)$$

where  $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{q \times q}$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$ . Let  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be a piecewise constant function of generalized type, and construct the following differential equation with piecewise constant argument

$$\dot{z}(t) = D(t)z(t) + f(t) + G(t, z(\gamma(t))). \quad (2)$$

We study the possibility that the solution  $z$  of the system (2) is near of solution  $y$  (1), whenever the function  $\gamma$  is close to the identity function. We establish the existence of almost-periodic solutions for the differential equation with piecewise constant argument of generalized type (2). This analysis involves the study of some difference equations. By using fixed point theorems and Gronwall's lemma, sufficient conditions for the existence and uniqueness of almost-periodic solutions of this system are obtained, like also conditions that assure its exponential stability . Our main results are deduced from the exponential dichotomy theory, which in the almost-periodic case implies that the associated Green matrix satisfies a bi-almost periodicity property.

Finally, we prove that effectively the discrete analogue from the differential equation with piecewise constant argument and the solution of the continuous system are close, proving that the solution of (2) can be used as an approximation of a bounded solution of (1). We apply our abstract theorems to a concrete example, specifically we study cellular neural network systems. The results are tested with a computational simulation.

---

# Índice general

Resumen	v
Abstract	vi
Introducción	ix
<b>1. Funciones Casi-Periódicas y Funciones Constantes a Trozos</b>	<b>1</b>
1.1. Casi-Periodicidad . . . . .	1
1.1.1. Sucesiones Equipotencialmente Casi-Periódicas . . . . .	4
1.2. Ecuaciones Diferenciales con Argumento Constante a Trozos (DEPCAG) . . . . .	7
1.2.1. Funciones Constantes a Trozos . . . . .	7
1.2.2. Ecuaciones Diferenciales Con Argumento Constante a Trozos . . . . .	10
1.2.3. La ecuación lineal $x'(t) = ax(t) + bx(\gamma(t))$ . . . . .	12
1.3. Ecuaciones en Diferencias . . . . .	16
1.3.1. Notaciones y Preliminares . . . . .	16
1.3.2. Existencia de Soluciones Casi-Periódicas de Sistemas en Diferencias . . . . .	20
<b>2. Ecuaciones Diferenciales Casi-Periódicas con Argumento Constante a Trozos</b>	<b>26</b>
2.1. Introducción . . . . .	26
2.1.1. Notación . . . . .	27
2.2. Estudio ecuación (B1) . . . . .	27
2.2.1. Preliminares . . . . .	27
2.2.2. Existencia y Unicidad de Soluciones Casi Periódicas para la Ecuación (2.2.4) . . . . .	37
2.2.3. Aproximación de Soluciones Acotadas usando DEPCAG . . . . .	39
2.2.4. Estabilidad Exponencial. . . . .	42
2.3. Promedios y Dicotomía Exponencial . . . . .	44
<b>3. Sistemas Tipo CNN</b>	<b>48</b>
3.1. Introducción . . . . .	48
3.2. Estudio de DEPCAG ( $B1^*$ ) . . . . .	50
3.2.1. Condiciones para la Existencia de una Única Solución Casi Periódica . . . . .	50
3.2.2. Aproximación de Soluciones Acotadas de CNN usando DEPCAG . . . . .	55
3.2.3. Simulación . . . . .	56





---

# Introducción

La teoría de las funciones casi-periódicas fue creada y desarrollada en sus inicios por el matemático danés Harald Bohr (1887-1951) entre 1923 y 1925, en dos artículos publicados bajo el título común «Zur Theorie der Fast Periodische Funktionen». La teoría de las funciones casi-periódicas de Bohr se restringe a la clase de las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  continuas. El principal problema de la teoría consiste en caracterizar la clase de las funciones continuas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  que puedan ser aproximadas uniformemente por polinomios trigonométricos, es decir, por funciones

$$T(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{i\lambda_k x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

donde  $c_k$  es una constante compleja y  $\lambda_k$  es una constante real. La solución a tal problema fue la principal contribución de Bohr. La riqueza de la teoría iniciada por Harald Bohr se pone de manifiesto en las generalizaciones y aplicaciones de ésta. Entre las generalizaciones están por ejemplo, el estudio de las funciones casi-periódicas con valores en espacios de Banach iniciado por S. Bochner [17], la teoría de funciones casi-periódicas definidas sobre grupos debida a Von Neumann [17] y la teoría de las funciones pseudo-casi-periódicas introducida por Zhang en 1992 [34, 35]. Entre las aplicaciones están las ecuaciones diferenciales ordinarias y en la década de los 90's nos encontramos con los primeros trabajos sobre casi-periodicidad en ecuaciones diferenciales con argumento constante a trozos, ecuaciones introducidas por Cooke and Wiener en 1984 [14]. Es sólo en los últimos años que Akhmet [2] introduce el estudio de ecuaciones diferenciales con argumento constante a trozos de tipo generalizado (DEPCAG) y con ello surge el estudio de este tipo de ecuaciones en el caso casi-periódico [4],[28],[27].

Una de las riquezas de una ecuación con argumento constante a trozos es su naturaleza dual, tanto continua como discreta, siendo posible obtener propiedades cualitativas de estas ecuaciones valiéndonos de su naturaleza discreta, la cual se ve concretizada en una ecuación en diferencias fuertemente ligada a ella. Entonces la dinámica es: dada una ecuación diferencial, le asociamos una DEPCAG de la cual derivamos una ecuación en diferencias.

## **Ecuación Diferencial $\rightsquigarrow$ DEPCAG $\rightsquigarrow$ Ecuación en Diferencias.**

Descubriremos que la ecuación en diferencias a la cual hacemos referencia puede ser vista como un análogo discreto de la ecuación diferencial, ya que puede heredar propiedades cualitativas como: dicotomía exponencial, existencia y unicidad de soluciones, estabilidad. Y también propiedades cuantitativas, pudiendo ser empleada como una aproximación numérica, profundicemos un poco en esto.

Nuestro trabajo tiene su génesis en los artículos de Huang et al. [21, 22], donde se estudian sistemas

de redes neurales de  $m$  células, que son descritos por el siguiente sistema diferencial

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -a_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^m b_{ij}(t)f_j(x_j(t)) + E_i(t), \quad i = 1, \dots, m. \quad (1)$$

En [22], los autores estudian el comportamiento de la siguiente ecuación diferencial con argumento constante a trozos

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = -a_i(t)y_i(t) + \sum_{j=1}^m b_{ij}(t)f_j\left(y_j\left(\left[\frac{t}{\delta}\right]\delta\right)\right) + E_i(t), \quad (2)$$

determinando condiciones suficientes para la existencia y estabilidad exponencial de una única solución casi-periódica del sistema discreto formado apartir de la DEPCA (2). Además, por medio de una simulación computacional, muestran las bondades de una solución de la ecuación diferencial con argumento constante a trozos (2) como aproximación de una solución del sistema diferencial (1).

Nosotros pudimos observar que, la capacidad de aproximar de (2) radica en lo siguiente

$$\left| \left[ \frac{t}{\delta} \right] \delta - t \right| \rightarrow 0, \text{ cuando } \delta \rightarrow 0,$$

es decir, que la función constante a trozos usada aproxima a la identidad, cuando  $\delta$  tiende a cero, ver también [15, 20]. Esto nos lleva a querer formular resultados que generalicen lo observado en [21, 22]. Primero, generalizando los objetos de estudios, es decir, las ecuacion (1), (2), de la siguiente manera:

1<sup>ero</sup> Estudiaremos el sistema diferencial

$$\dot{y}(t) = D(t)y(t) + f(t) + G(t, y(t)), \quad (3)$$

donde  $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{q \times q}$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$ .

2<sup>do</sup> Trabajaremos con  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , una función constante a trozos de tipo generalizado, definida por

$$\gamma(t) = s_i, \quad \text{para } t \in J_i = [s_i, s_{i+1}),$$

donde  $\sigma = \{s_i\}_{i=-\infty}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$  es una sucesión, tal que,  $s_i \rightarrow \pm\infty$  cuando  $i \rightarrow \pm\infty$ ,  $s_i \leq s_{i+1}$ . Así construimos la ecuación diferencial con argumento constante a trozos

$$\dot{z}(t) = D(t)z(t) + f(t) + G(t, z(\gamma(t))). \quad (4)$$

Hecho esto, determinaremos condiciones suficientes para la existencia de una única solución casi-periódica de la ecuación en diferencias asociada a de la ecuación con argumento constante a trozos (4). Esto se logrará usando argumentos de punto fijo y el lema de Gronwall. Estos resultados y métodos usados se basan en la teoría de dicotomía exponencial, la que nos entrega propiedades de bi-casiperiodicidad para la matriz de Green asociada, tanto en el caso continuo como en el discreto.

Finalmente, conseguimos un interesante resultado de aproximación: Una solución acotada de la ecuación diferencial (3) está tan cerca como queramos de una solución acotada de la ecuación diferencial

con argumento constante a trozos (4) si, el largo de los intervalos donde la función  $\gamma$  es constante es lo suficientemente pequeño; es decir, una solución acotada de la ecuación diferencial (3) es aproximada uniformemente en  $\mathbb{R}$  por una solución de la ecuación diferencial con argumento constante a trozos (4), cuando

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} |s_{i+1} - s_i| \rightarrow 0.$$

Cabe destacar que, nuestros resultados no sólo son validos para ecuaciones diferenciales cualesquiera, generalizan y dan una demostración formal a los resultados de Huang et al. [22], sino que requieren menos condiciones. La aplicación a sistemas de redes neuronales se detallan en el Capítulo 3 donde, además, simulaciones computacionales mostrarán la factibilidad y precisión de nuestros resultados.



---

## Capítulo 1

# Funciones Casi-Periódicas y Funciones Constantes a Trozos

### 1.1. Casi-Periodicidad

La casi-periodicidad es una generalización de la periodicidad. Harald Bohr definió las funciones casi-periódicas como la clausura del espacio de los polinomios trigonométricos, es decir, funciones de la forma

$$T(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{i\lambda_k x},$$

donde  $c_k \in \mathbb{C}$  y  $\lambda_k \in \mathbb{R}$ , con respecto a la norma del supremo.

Una definición de función casi-periódica, equivalente a la de Bohr, fue dada por Salomon Bochner (1927).

**Definición 1.1.1.** *Una función continua  $f$  es casi-periódica si toda sucesión  $\{f(\cdot + t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ , de traslaciones de  $f$  tiene una subsucesión convergente uniformemente en  $\mathbb{R}$ .*

**Definición 1.1.2.** *(Relativamente denso) Sea  $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$ , tal que  $(\mathbb{A}, +)$  es un grupo aditivo. Diremos que  $B \subseteq \mathbb{A}$  es relativamente denso sobre  $\mathbb{A}$ , si para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $l(\varepsilon) > 0$ , tal que cada intervalo de largo  $l(\varepsilon)$  contiene al menos un elemento de  $B$ .*

Bohr probó que la definición 1.1.1 es equivalente a la siguiente, la cual emplearemos a lo largo de nuestro trabajo:

**Definición 1.1.3.** *Sea  $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$ , tal que  $(\mathbb{A}, +)$  es un grupo aditivo y  $(\mathbb{E}, |\cdot|)$  un espacio lineal de dimensión finita. Sea  $g : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{E}$ . Para  $\varepsilon > 0$ , denotamos*

$$T(g, \varepsilon) = \{\tau \in \mathbb{A} : |g(t + \tau) - g(t)| < \varepsilon, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\},$$

*$g$  se dice casi-periódica si para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $T(g, \varepsilon)$  es relativamente denso. Cada  $\tau \in T(g, \varepsilon)$  es llamado  $\varepsilon$ -periodo de  $g$ .*

**Definición 1.1.4.** Sea  $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$ , tal que  $(\mathbb{A}, +)$  es un grupo aditivo y  $(\mathbb{E}, |\cdot|)$  un espacio lineal de dimensión finita. Sea  $g : \mathbb{A} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$ . Sean  $\varepsilon > 0$  y  $W \subset \mathbb{R}$  compacto, denotamos

$$T(g(\cdot, k), W, \varepsilon) = \{\tau \in \mathbb{A} : |g(t + \tau, k) - g(t, k)| < \varepsilon, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}, \text{ para todo } k \in W\}.$$

Diremos que  $g(\cdot, k)$  es uniformemente casi-periódica sobre compactos, si para todo  $\varepsilon > 0$  y para todo conjunto compacto  $W \subset \mathbb{R}$ ,  $T(g(\cdot, k), \varepsilon, W)$  es relativamente denso. Cada  $\tau \in T(g(\cdot, k), \varepsilon, W)$  es llamado  $\varepsilon$ -periodo de  $g$ .

Directamente de esta definición no es complicado obtener las siguientes propiedades fundamentales, que enunciamos en los siguientes teoremas, cuyas demostraciones podemos encontrar en [7, 17, 19].

**Teorema 1.1.1.** [17] Una función casi-periódica es uniformemente continua y acotada.

**Teorema 1.1.2.** [7] Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  casi-periódica. Para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que, si  $\tau \in T(f, \varepsilon)$ , entonces  $(\tau - \delta, \tau + \delta) \subset T(f, \varepsilon)$ .

**Teorema 1.1.3.** [17] Si  $f$  y  $g$  funciones casi-periódicas,  $c \in \mathbb{C}$  y  $a \in \mathbb{R}$ . Entonces las siguientes funciones son casi-periódicas:

- i)  $\overline{f}(x)$ ,  $cf(x)$ ,  $f(x + a)$  y  $f(ax)$
- ii)  $f(x) + g(x)$  y  $f(x) \cdot g(x)$
- iii)  $\frac{f(x)}{g(x)}$ , si  $0 < m \leq |g(x)|$ .

**Teorema 1.1.4.** [17] El límite uniforme de una sucesión de funciones casi-periódicas es una función casi-periódica.

Denotamos  $\mathcal{AP}(\mathbb{A}, \mathbb{E})$  como el conjunto de las funciones casi-periódicas de  $\mathbb{A}$  en  $\mathbb{E}$ . Como toda función casi-periódica es acotada, para  $g \in \mathcal{AP}(\mathbb{A}, \mathbb{E})$  podemos definir,

$$|g|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{A}} |g(t)|,$$

así tenemos que  $(\mathcal{AP}(\mathbb{A}, \mathbb{E}), |\cdot|_\infty)$  es un espacio de Banach.

- Si consideramos  $\mathbb{A} = \mathbb{R}$ , tenemos el conjunto de las funciones reales casi-periódicas  $\mathcal{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ .
- Si consideramos  $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$ , tenemos el conjunto de las sucesiones casi-periódicas  $\mathcal{AP}(\mathbb{Z}, \mathbb{E})$ .
- Los resultados que obtendremos a lo largo de este trabajo serán considerando  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^q$  y  $\mathbb{E} = \mathbb{C}^q$ .

A continuación presentamos una consecuencia fundamental de la casi-periodicidad.

**Teorema 1.1.5.** [17] Si  $f$  es una función casi-periódica, entonces existe

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_b^{b+T} f(x) dx = M\{f\},$$

uniformemente con respecto a  $b$ .  $M\{f\}$  es independiente de  $b$  y lo llamamos **promedio** de la función casi-periódica  $f$ .

En el siguiente teorema enunciamos un listado de propiedades del promedio de una función casi-periódica.

**Teorema 1.1.6.** [17] Sean  $f$  y  $g$  funciones casi-periódicas. Se verifica que

(i)  $M\{\overline{f}\} = \overline{M\{f\}}$ .

(ii)  $M\{cf\} = cM\{f\}$ , para  $c \in \mathbb{C}$ .

(iii) Si  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , entonces  $M\{f\} \geq 0$ .

(iv)  $M\{f + g\} = M\{f\} + M\{g\}$ .

**Observación 1.1.1.** Hacemos notar que para el punto (iii) el recíproco no es cierto, es decir, podemos tener que el promedio de una función casi-periódica sea positivo sin que esta sea siempre positiva.

Análogamente para  $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$ , es decir, para sucesiones casi-periódicas, se define el promedio de  $f \in \mathcal{AP}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$  como:

$$M\{f\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=m}^{m+N} f(k),$$

para el cual tenemos las mismas propiedades.

Los siguientes Teoremas nos permitirán establecer una relación entre el conjunto de las funciones casi-periódicas  $\mathcal{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$  y el conjunto de las sucesiones casi-periódicas  $\mathcal{AP}(\mathbb{Z}, \mathbb{E})$ . Más específicamente nos permiten decidir cuando la discretización de una función casi-periódica es una sucesión casi-periódica o si sabemos que cierta discretización de una función es casi-periódica, que necesita esta función para ser casi-periódica.

**Teorema 1.1.7.** [17] Una sucesión  $\{a_n\}$  es casi-periódica si y sólo si existe una función  $f$  casi-periódica, tal que  $a_n = f(n)$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

**Teorema 1.1.8.** [7] Sean  $g_1, \dots, g_m \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ . Para todo  $\varepsilon > 0$  se cumple  $T(g_1, \varepsilon) \cap \dots \cap T(g_m, \varepsilon)$  es relativamente denso en  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 1.1.9.** [7] Sea  $f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ . Para todo  $\varepsilon > 0$  el conjunto  $T(f, \varepsilon) \cap \mathbb{Z}$  es relativamente denso.

**Lema 1.1.1.** [24] Si  $x \in \mathcal{AP}(\mathbb{Z})$  y  $f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$ , entonces para todo  $\varepsilon > 0$  tenemos que  $T(x, \varepsilon) \cap T(f, \varepsilon) \cap \mathbb{Z}$  es relativamente denso.

Presentamos a continuación unos ejemplos de funciones casi-periódicas.

### Ejemplos

1. Vimos que la casi-periodicidad es una generalización natural de la periodicidad, luego toda función periódica es un primer ejemplo de función casi-periódica, y para  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{E}$  periódica de periodo  $\omega \in \mathbb{R}^+$ , se cumple que

$$T(f, \varepsilon) = \{n\omega | n \in \mathbb{Z}\},$$

es relativamente denso en  $\mathbb{R}$ . En efecto, considerando  $l > \omega$  tendremos que todo intervalo de largo  $l$  contiene al menos un número de la forma  $n\omega$  con  $n \in \mathbb{N}$ . Además para  $f$  periódica:



- Si  $\mathbb{A} = \mathbb{R}$ , tenemos

$$M\{f\} = \frac{1}{\omega} \int_b^{b+\omega} f(x)dx.$$

- Si  $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$ , tenemos

$$M\{f\} = \frac{1}{\omega} \sum_{k=m}^{m+\omega} f(k).$$

2. Simples ejemplos de funciones casi-periódicas que no son periódicas se pueden obtener por medio de la suma de dos funciones periódicas tales que el cociente entre sus periodos es irracional, por ejemplo

$$f(x) = \sin(2\pi\sqrt{3}x) + \cos(2\pi x).$$

### 1.1.1. Sucesiones Equipotencialmente Casi-Periódicas

**Definición 1.1.5.** Decimos que la sucesión  $\{s_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$  es equipotencialmente casi-periódica si, para cada  $\varepsilon > 0$  el conjunto

$$\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ T \in \mathbb{Z} : |s_{T+n}^{(k)} - s_n^{(k)}| < \varepsilon, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \right\}$$

es relativamente denso en  $\mathbb{Z}$ , donde

$$s_n^{(k)} = s_{n+k} - s_n.$$

La definición nos dice que si  $\sigma^{(k)} = \{s_n^{(k)}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ , entonces para  $\{s_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$  equipotencialmente casi-periódica se cumple que:

(i)  $\sigma^{(k)} \in \mathcal{AP}(\mathbb{Z})$ , para cada  $k \in \mathbb{Z}$ .

(ii) Para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} T(\sigma^{(k)}, \varepsilon)$  es relativamente denso en  $\mathbb{Z}$ .

Es decir, tenemos que el conjunto  $\{\sigma^{(k)}\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathcal{AP}(\mathbb{Z}, \mathbb{E})$ , es uniformemente casi-periódico. Una de las consecuencias de  $\sigma^{(k)} \in \mathcal{AP}(\mathbb{Z})$ , es que son sucesiones acotadas, en particular para  $k = 1$ . Lo anterior nos asegura la existencia de los siguientes reales positivos, que definimos ya que jugarán un rol importante en los capítulos siguientes.

$$\sigma_+ = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |s_{n+1} - s_n| \tag{1.1.1}$$

$$\sigma_- = \inf_{n \in \mathbb{Z}} |s_{n+1} - s_n|. \tag{1.1.2}$$

Para  $\varepsilon > 0$ , definimos  $\Gamma_\varepsilon$  como el conjunto de los  $r \in \mathbb{R}$  para los cuales existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} |s_n^{(k)} - r| \leq \varepsilon. \tag{1.1.3}$$

Para  $r \in \mathbb{R}$  definimos  $P_r(\varepsilon)$  como el conjunto de los  $k \in \mathbb{Z}$  que satisfacen (1.1.3) y

$$P_\varepsilon = \bigcup_{r \in \Gamma_\varepsilon} P_r(\varepsilon).$$

En esta sección siempre nos referiremos a  $\Gamma_\varepsilon$ ,  $P_r(\varepsilon)$  y  $P_\varepsilon$ , como los conjuntos que definimos a partir de la sucesión  $\{s_n\}_{n=-\infty}^\infty$ , equipotencialmente casi-periódica.

**Lema 1.1.2.** [29, §4, Lema 25] *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- (a) *La sucesión  $\{s_n\}_{n=-\infty}^\infty$  es equipotencialmente casi-periódica.*
- (b) *El conjunto  $P_\varepsilon$  es relativamente denso en  $\mathbb{Z}$  para todo  $\varepsilon > 0$ .*
- (c) *El conjunto  $\Gamma_\varepsilon$  es relativamente denso en  $\mathbb{R}$  para todo  $\varepsilon > 0$ .*

**Lema 1.1.3.** [29] Sean  $g_1, \dots, g_m \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^q)$ . Para todo  $\varepsilon > 0$  se cumple  $[T(g_1, \varepsilon) \cap \dots \cap T(g_m, \varepsilon)] \cap \Gamma_\varepsilon$  es relativamente denso en  $\mathbb{R}$ .

**Lema 1.1.4.** [29, §4, Lema 24] Sea  $\Gamma \subset \Gamma_\varepsilon$ ,  $\Gamma \neq \emptyset$ , y sea  $P = \bigcup \{P_\tau | \tau \in \Gamma\}$ .  $\Gamma$  es relativamente denso en  $\mathbb{R}$  si y sólo si  $P$  es relativamente denso en  $\mathbb{Z}$ .

Como consecuencia de los Lemas 1.1.3, 1.1.4, tenemos el siguiente Corolario que nos será de gran ayuda.

**Corolario 1.1.1.** Sean  $g_1, \dots, g_m \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^q)$  y  $\varepsilon > 0$ . Si  $\Gamma = [T(g_1, \varepsilon) \cap \dots \cap T(g_m, \varepsilon)] \cap \Gamma_\varepsilon$ , entonces el conjunto  $P$  dado por

$$P = \bigcup \{P_\tau | \tau \in \Gamma\}$$

es relativamente denso en  $\mathbb{Z}$ .

Para terminar, veamos unos ejemplos de sucesiones equipotencialmente casi-periódicas, que nos ayudarán a entender mejor su definición.

### Ejemplos.

1. Para  $\theta \in \mathbb{R}$ , definamos la sucesión  $s_n = n\theta$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Para ella tenemos

$$s_n^{(k)} = s_{n+k} - s_n = (n+k)\theta - n\theta = k\theta,$$

por lo tanto, para cada  $k \in \mathbb{Z}$  tenemos que  $\sigma^{(k)} = (s_n^{(k)})_{n=-\infty}^\infty$  es la sucesión constante igual a  $k\theta$ . Al ser  $\sigma^{(k)}$  constantes, tenemos que  $\sigma^{(k)} \in \mathcal{AP}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ . Además para  $\varepsilon > 0$  y  $k \in \mathbb{Z}$ , tenemos

$$T(\sigma^{(k)}, \varepsilon) = \mathbb{Z},$$

lo cual nos dice claramente que  $s_n$  es equipotencialmente casi-periódica, ya que para todo  $\varepsilon > 0$  tenemos,

$$\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} T(\sigma^{(k)}, \varepsilon) = \mathbb{Z},$$

relativamente denso en  $\mathbb{Z}$ .

2. Sea  $\{a_n\}$  una sucesión casi-periódica. Para  $\varepsilon > 0$ , tomemos  $p \in T(a_n, \varepsilon/2)$ . Luego para  $k \in \mathbb{Z}$ , tenemos

$$\begin{aligned} |a_{n+p}^{(k)} - a_n^{(k)}| &= |(a_{n+p+k} - a_{n+p}) - (a_{n+k} - a_n)| \\ &\leq |a_{n+k+p} - a_{n+k}| + |a_{n+p} - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

por lo tanto,  $T(a_n, \varepsilon/2) \subset T(a_n^{(k)}, \varepsilon)$ , para cada  $k \in \mathbb{Z}$ . Además, como  $T(a_n, \varepsilon/2)$  es relativamente denso, ya que  $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \mathcal{AP}(\mathbb{Z})$ , tenemos que

$$\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} T(a_n^{(k)}, \varepsilon),$$

es relativamente denso, lo que nos dice que  $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  es equipotencialmente casi periódica.

3. Consideremos  $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \mathcal{AP}(\mathbb{Z})$ , la sucesión

$$s_n = n + a_n,$$

es equipotencialmente casi-periódica. De hecho para  $\varepsilon > 0$ , sea  $p \in T(a_n, \varepsilon/2)$

$$\begin{aligned} |s_{n+p}^{(k)} - s_n^{(k)}| &= |k + (a_{n+k+p} - a_{n+p}) - k - (a_{n+k} - a_n)| \\ &= |(a_{n+k+p} - a_{n+k}) - (a_{n+p} - a_n)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

luego tenemos que  $T(a_n, \varepsilon/2) \subset T(s_n^{(k)}, \varepsilon)$ , para cada  $k \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto, como  $T(a_n, \varepsilon/2)$  es relativamente denso, ya que  $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \mathcal{AP}(\mathbb{Z})$ , tenemos que

$$\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} T(s_n^{(k)}, \varepsilon),$$

es relativamente denso, por lo tanto

$$\{s_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

es equipotencialmente casi periódica.

4. Veamos ahora un ejemplo de una sucesión que no es equipotencialmente casi-periódica.

Sea  $s_n = \theta/(|n| + 1)$ ,  $\theta \neq 0$ . Para esta sucesión tenemos

$$s_n^{(k)} = \frac{\theta}{|n+k|+1} - \frac{\theta}{|n|+1} = \frac{\theta(|n| - |n+k|)}{(|n+k|+1)(|n|+1)},$$

por lo tanto, para todo  $k \in \mathbb{Z}$  la sucesión  $\{s_n^{(k)}\}_{n=-\infty}^{\infty}$  no es casi-periódica, ya que tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} s_n^k = 0,$$

pero una sucesión no constante y casi-periódica no es convergente. Lo anterior nos permite concluir que  $\{s_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  no es equipotencialmente casi-periódica.

## 1.2. Ecuaciones Diferenciales con Argumento Constante a Trozos (DEPCAG)

### 1.2.1. Funciones Constantes a Trozos

Una ecuación diferencial con argumento constante a trozos es, como su nombre lo dice, una ecuación diferencial en la cual dentro de sus argumentos nos encontramos con funciones constantes a trozos, es decir, una función que es localmente constante. Un ejemplo clásico de este tipo de funciones es la función parte entera, función que a cada número real le asocia el número entero menor más cercano, esto es, la función  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que denotamos  $\gamma(t) = [t]$  y es tal que

$$\gamma(t) = n, \quad \text{para} \quad n \leq t < n + 1, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Podemos ver en la Figura (1.1) la gráfica de  $\gamma(t) = [t]$ . A partir de la función parte entera podemos

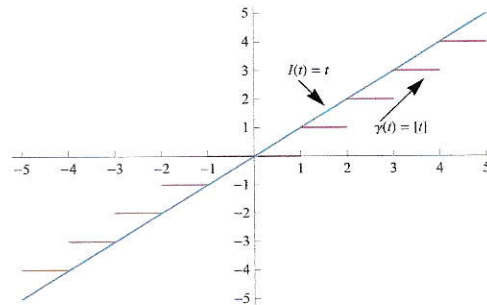


Figura 1.1:  $\gamma(t) = [t]$ .

definir un gran número de interesantes funciones constantes a trozos, como las que presentamos en los siguiente ejemplos:

1. Consideremos  $\gamma(t) = 2 \left[ \frac{t+1}{2} \right]$ . Los intervalos de constancia para esta función constante a trozos

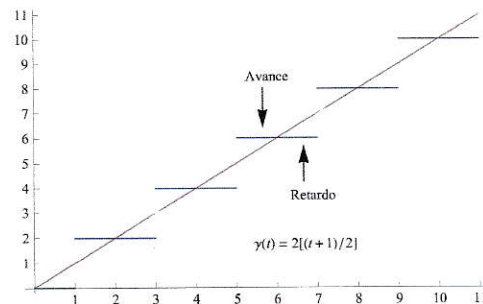


Figura 1.2:  $\gamma(t) = 2 \left[ \frac{t+1}{2} \right]$



son de la forma  $J_n = [2n - 1, 2n + 1)$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ , esto ya que si  $n \in \mathbb{Z}$ , entonces

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{t+1}{2} \right\rfloor = n &\iff n \leq \frac{t+1}{2} < n+1 \\ &\iff 2n-1 \leq t < 2n+1, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\gamma(t) = 2n \iff 2n - 1 \leq t < 2n + 1.$$

Una característica importante a destacar de la función  $\gamma(t)$  es, como se puede ver en Figura (1.2), que dentro de cada intervalo  $J_n$  existe un sub-intervalo donde la gráfica de  $\gamma(t)$  está sobre la gráfica de la función identidad y otro sub-intervalo donde su gráfica está bajo la gráfica de la función identidad, es decir, podemos hablar de intervalos donde la función  $\gamma(t)$  presenta un avance o un retardo con respecto a la identidad. Específicamente tenemos avance en  $J_n^+ = (2n - 1, 2n)$  y retardo en  $J_n^- = (2n, 2n + 1)$ , ya que

$$\begin{cases} \gamma(t) - t = 2n - t > 0, & \text{si } 2n - 1 < t < 2n \\ \gamma(t) - t = 2n - t < 0, & \text{si } 2n < t < 2n + 1. \end{cases} \quad (1.2.1)$$

2. Podemos generalizar el ejemplo anterior de la siguiente manera

$$\gamma(t) = m \left\lfloor \frac{t+k}{m} \right\rfloor,$$

con  $m$  y  $k$  enteros positivos,  $m \neq 0$  tales que  $k < m$ . Para  $n \in \mathbb{Z}$ , tenemos

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{t+k}{m} \right\rfloor = n &\iff n \leq \frac{t+k}{m} < n+1 \\ &\iff mn - k \leq t < m(n+1) - k, \end{aligned}$$

por lo tanto,  $\gamma(t) = mn \iff mn - k \leq t < m(n+1) - k$ . Por lo tanto,  $J_n = [mn - k, m(n+1) - k)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  son los intervalos donde  $\gamma(t)$  es constante. Además tenemos avance en  $J_n^+ = (mn - k, mn)$  y retardo en  $J_n^- = (mn, m(n+1) - k)$ , ya que

$$\begin{cases} \gamma(t) - t = mn - t > 0, & \text{si } mn - k < t < 2n \\ \gamma(t) - t = mn - t < 0, & \text{si } 2n < t < m(n+1) + k. \end{cases} \quad (1.2.2)$$

Otra característica a destacar de esta función es el largo de los intervalos  $J_n$ , que está dado por

$$\delta(m) = m(n+1) - k - (mn - k) = m,$$

es decir, depende solamente de  $m$  y tenemos que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \delta(m) = +\infty.$$

En el siguiente ejemplo presentamos otra familia de funciones constantes a trozos para la cual,

al contrario de lo que se da en la que acabamos de ver, es posible empujarse el largo de sus intervalos de constancia agrandando cierto parámetro.

3. Sea

$$\gamma_m(t) = \frac{1}{m} [mt + l],$$

con  $m \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq l < 1$ . Para  $n \in \mathbb{Z}$ , tenemos

$$\begin{aligned} [mt + l] = n &\iff n \leq mt + l < n + 1 \\ &\iff \frac{n}{m} - \frac{l}{m} \leq t < \frac{n+1}{m} - \frac{l}{m}, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\gamma_m(t) = \frac{n}{m} \iff \frac{n}{m} - \frac{l}{m} \leq t < \frac{n+1}{m} - \frac{l}{m},$$

lo cual nos dice que  $J_n = [\frac{n}{m} - \frac{l}{m}, \frac{n+1}{m} - \frac{l}{m})$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  son los intervalos donde  $\gamma_m(t)$  permanece constante. Así el largo  $\delta(m, l)$  de cada intervalo es:

$$\delta(m, l) = \delta(m) = \frac{1}{m},$$

luego

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \delta(m) = 0.,$$

por lo tanto, podemos hacer tan chico como queramos el largo de los intervalos  $J_n$ , tomando  $m$  lo suficientemente grande, por lo cual tenemos también

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |\gamma_m(t) - t| = 0.$$

Sus intervalos de avance y retardo están dados por  $J_n^+ = (\frac{n}{m} - \frac{l}{m}, \frac{n}{m})$  y  $J_n^- = (\frac{n}{m}, \frac{n+1}{m} - \frac{l}{m})$ .

Finalmente veremos como podemos generalizar los ejemplos hasta aquí visto. Presentaremos a continuación una función constante a trozos generalizada.

4. Dadas  $\{\xi_i\} \subset \mathbb{R}$  y  $\{t_i\} \subset \mathbb{R}$ , sucesiones tales que  $t_i \leq \xi_i < t_{i+1}$  y

$$\lim_{i \rightarrow \pm\infty} t_i = \pm\infty.$$

Definimos la función constante a trozos generalizada  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por:

$$\gamma(t) = \xi_i, \text{ si } t \in J_i = [t_i, t_{i+1}).$$

Podemos darnos cuenta que los ejemplos anteriores son de este tipo:

- Para  $\gamma(t) = m \left[ \frac{t+k}{m} \right]$ , tenemos

$$t_n = mn - k \quad \text{y} \quad \xi_n = mn.$$

- Para  $\gamma(t) = \frac{1}{m} [tm + l]$ , tenemos

$$t_n = \frac{n}{m} - \frac{l}{m} \quad \text{y} \quad \xi_n = \frac{n}{m}.$$

**Observación 1.2.1.** La función constante a trozos

$$\gamma(t) = \frac{1}{m} [mt + l],$$

con  $m \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq l < 1$ , es de gran interés. En particular, para el caso  $l = 0$ , es decir,

$$\gamma(t) = \frac{1}{m} [mt],$$

se tienen dos propiedades fundamentales:

1<sup>ero</sup>:  $\lim_{m \rightarrow +\infty} |\gamma(t) - t| = 0$

2<sup>do</sup>: Tenemos  $t_n = \frac{n}{m}$ , luego

$$t_n^k = t_{n+k} - t_n = \frac{k}{m},$$

por lo tanto, la sucesión  $\sigma^{(k)} = t_n^k$  es constante para cada  $k \in \mathbb{Z}$ , por lo cual  $\{t_n\}_{-\infty}^{\infty}$  es una sucesión equipotencialmente casi-periódica.

En el Capítulo 3, Sección 3.2.1 veremos las consecuencias de que  $\gamma(t) = \frac{1}{m} [mt]$  cuente con estas propiedades.

### 1.2.2. Ecuaciones Diferenciales Con Argumento Constante a Trozos

Un ecuacion diferencial con argumento constante a trozos, es una ecuación de la forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(\gamma(t))), \quad (1.2.3)$$

donde  $\gamma(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , es una función constante a trozos. Es Myshkis quien propone por primera vez el estudio de ecuaciones diferenciales con argumento discontinuo [25], en particular con argumento constante a trozos, conocidas por su abreviatura en ingles como **DEPCA** (Differential Equation with Piecewise Constant Argument). Esto por su gran aplicabilidad en ecuaciones diferenciales con retardo que modelan sistemas físicos y biológicos en los cuales su ritmo de cambio depende de su pasado. El estudio de las DEPCA fue iniciado por Wiener (1983) [31, 33], destacando sus trabajos junto a Cooke [13, 14] y junto a Shah [30]. Posteriormente son muchos los autores que hasta la fecha han desarrollado el tema.

En 1993, Wiener publica su libro recopilatorio [32] con los trabajos sobre DEPCAs publicados hasta ese momento. En el nos encontramos con un estudio sobre existencia, estabilidad y oscilación de soluciones de la ecuación (1.2.3) para los casos:

$$\gamma(t) = [t], \quad \gamma(t) = 2 \left[ \frac{t+1}{2} \right]$$

y en una generalización de estas últimas

$$\gamma(t) = m \left\lfloor \frac{t+k}{m} \right\rfloor.$$

También podemos referir trabajos que hablan sobre la existencia de soluciones periódicas de DEPCA [1, 6].

Dadas las sucesiones  $\{\xi_i\} \subset \mathbb{R}$  y  $\{t_i\} \subset \mathbb{R}$ , tales que  $t_i \leq \xi_i \leq t_{i+1}$  y donde  $\lim_{i \rightarrow \pm\infty} t_i = \pm\infty$ , definimos la función escalonada generalizada  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\gamma(t) = \xi_i \quad \text{si} \quad t \in J_i = [t_i, t_{i+1}). \tag{1.2.4}$$

Cuando el argumento discontinuo en una ecuación diferencial es de este tipo, hablamos de ecuaciones diferenciales con argumento constante a trozos de tipo generalizado, nos referiremos a ellas con su abreviatura en inglés **DEPCAG**. Este concepto fue introducido por Akhmet [2].

En [2] se introduce el estudio de la DEPCAG (1.2.3) donde  $\gamma(t) = t_i$ , si  $t_i \leq t < t_{i+1}$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , es decir, ecuaciones cuyo argumento presenta un retardo total. Y el estudio es extendido en [3, 5] a ecuaciones con argumento que presenta avance y retardo, es decir,  $\gamma(t) = \xi_i$  si  $t \in [t_i, t_{i+1})$ , con  $t_i \leq \xi_i < t_{i+1}$ . En los artículos de M. Pinto citados en [26, 27], se realiza también un estudio sobre la existencia, unicidad y comportamiento asintótico de soluciones de DEPCAG con avance y retardo. En [27] nos encontramos también con la construcción de matrices tipo Cauchy, matrices tipo Green y la obtención de desigualdades tipo Gronwall para DEPCAG.

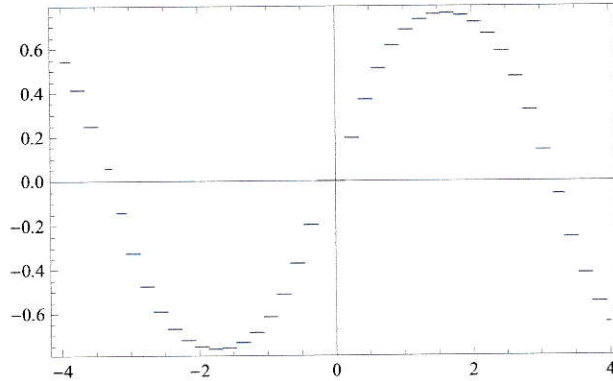


Figura 1.3:  $\tanh(\sin(\gamma(t)))$ , con  $\gamma(t) = \frac{1}{5}[5t + 0,3]$

Es claro que si componemos una función continua con la función constante a trozos  $\gamma(t)$  obtendremos una función constante a trozos, por lo tanto con una cantidad a lo más numerable de discontinuidades, en la Figura (1.3) vemos un ejemplo de ello. Es por este hecho que necesitamos introducir una definición de lo que entenderemos como solución de una DEPCAG.

**Definición 1.2.1.** Diremos que  $x$  es solución de la DEPCAG (1.2.3), donde  $\gamma(t)$  está dada por (1.2.4), si

- (i)  $x$  es continua en  $\mathbb{R}$ .



(ii)  $x$  es diferenciable en  $\mathbb{R}$ , excepto posiblemente en los puntos  $t = t_n$  con  $n \in \mathbb{Z}$ , donde sus derivadas laterales existen.

(iii)  $x$  es una solución de  $x'(t) = f(t, x(t), x(\gamma(t)))$ , en cada intervalo  $J_n$ , excepto posiblemente en los puntos  $t = t_n$  con  $n \in \mathbb{Z}$ .

A continuación estudiaremos una ecuación con argumento constante a trozos, encontraremos una solución explícita para nuestro ejemplo, para luego estudiar alguna propiedad cualitativa de ésta, donde quedará reflejada la naturaleza mixta de una DEPCAG, tanto discreta como continua.

### 1.2.3. La ecuación lineal $x'(t) = ax(t) + bx(\gamma(t))$

Para  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por (1.2.4), consideremos la ecuación lineal escalar con coeficientes constantes

$$x'(t) = ax(t) + bx(\gamma(t)), \quad (1.2.5)$$

donde  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a \neq 0$ . Si  $x_n(t)$  es solución de (1.2.5) en el intervalo  $J_n$ , con la condición  $x_n(\xi_n)$ , debe satisfacer

$$x'_n(t) = ax_n(t) + bx_n(\xi_n),$$

ecuación lineal, cuya solución satisface

$$x_n(t) = x_n(\xi_n) \left\{ e^{a(t-\xi_n)} + \frac{a}{b} \left( e^{a(t-\xi_n)} - 1 \right) \right\}.$$

Definiendo

$$\lambda(t) = e^{at} + \frac{a}{b} \{ e^{at} - 1 \},$$

tenemos

$$x_n(t) = x_n(\xi_n) \lambda(t - \xi_n).$$

Evaluando en esta última para  $t = t_n$  tenemos

$$x_n(t_n) = x_n(\xi_n) \lambda(t_n - \xi_n),$$

y como la solución de (1.2.5) debe ser continua, para  $t = t_{n+1}$  se debe cumplir

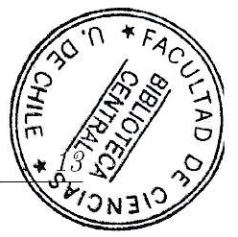
$$x_n(t_{n+1}) = x_n(\xi_n) \lambda(t_{n+1} - \xi_n).$$

Estas dos últimas ecuaciones, para  $\lambda(t_n - \xi_n) \neq 0$ , nos permiten formar la siguiente recurrencia

$$x_n(t_{n+1}) = \frac{\lambda(t_{n+1} - \xi_n)}{\lambda(t_n - \xi_n)} x_n(t_n),$$

cuya solución está dada por

$$x_n(t_n) = \prod_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{\lambda(t_{k+1} - \xi_k)}{\lambda(t_k - \xi_k)} \right\} x_1(t_1), \quad \text{para } n \geq 1.$$



Luego, usando las relaciones anteriores, tenemos para  $x_n(\xi_n)$

$$x_n(\xi_n) = \lambda^{-1}(t_n - \xi_n) \prod_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{\lambda(t_{k+1} - \xi_k)}{\lambda(t_k - \xi_k)} \right\} x_1(t_1)$$

y como

$$x_1(t_1) = x_0(t_1) = x_0(\xi_0)\lambda(t_1 - \xi_0),$$

tenemos finalmente

$$x_n(\xi_n) = x_0(\xi_0) \frac{\lambda(t_1 - \xi_0)}{\lambda(t_n - \xi_n)} \prod_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{\lambda(t_{k+1} - \xi_k)}{\lambda(t_k - \xi_k)} \right\}$$

la cual podemos reescribir como

$$\boxed{x_n(\xi_n) = x_0(\xi_0) \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda(t_{k+1} - \xi_k)}{\lambda(t_{k+1} - \xi_{k+1})}}. \quad (1.2.6)$$

Por lo tanto, la solución de la DEPCA (1.2.5) es

$$x(t) = \lambda(t - \gamma(t)) \prod_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{\lambda(t_{k+1} - \xi_k)}{\lambda(t_{k+1} - \xi_{k+1})} \right\} x_0(\xi_0), \quad \text{para } t \in J_n. \quad (1.2.7)$$

Como antes mencionamos  $\gamma(t) = \frac{1}{m}[mt + l]$ , con  $m \in \mathbb{Z}$  y  $0 \leq l \leq 1$ , nos será de gran interés, ya que nos permite aproximar la identidad. Para familiarizarnos con ella, estudiaremos (1.2.6) para este caso.

Para  $\gamma(t) = \frac{1}{m}[mt + l]$ , tenemos  $t_n = \frac{n-l}{m}$  y  $\xi_n = \frac{n}{m}$ , luego (1.2.6) nos queda

$$x\left(\frac{n}{m}\right) = \left\{ \frac{\lambda\left(\frac{1-l}{m}\right)}{\lambda\left(-\frac{l}{m}\right)} \right\}^n x(0).$$

Luego para  $t \in J_n$ , la solución de (1.2.5) está dada por

$$x(t) = \lambda(t - \xi_n) \left\{ \frac{\lambda\left(\frac{1-l}{m}\right)}{\lambda\left(-\frac{l}{m}\right)} \right\}^n x(0). \quad (1.2.8)$$

Una vez determinada ésta, no es difícil establecer el siguiente resultado

**Teorema 1.2.1.** *La solución  $x \equiv 0$  de (1.2.5) es asintóticamente estable, si y sólo si*

$$\left| \frac{\lambda\left(\frac{1-l}{m}\right)}{\lambda\left(-\frac{l}{m}\right)} \right| < 1$$

*Demostración.* Para  $t \in J_n$ , sea  $T(t) = t - \xi_n = t - \frac{n}{m}$ . Si  $t \in J_n$  tenemos

$$\frac{n}{m} - \frac{l}{m} = \xi_n - \frac{l}{m} \leq t < \frac{n+1}{m} - \frac{l}{m} = \frac{n}{m} + \frac{1-l}{m} = \xi_n + \frac{1-l}{m},$$

luego

$$-\frac{l}{m} \leq t - \xi_n < \frac{1-l}{m}.$$

Así tenemos  $T(t)$  es acotada, de lo cual concluimos que  $\lambda(T(t))$  es acotada. Esto es suficiente para establecer lo que se quiere, ya que si miramos (1.2.8) podemos ver que esto nos dice que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \text{ si y sólo si } \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\lambda(\frac{1-l}{m})}{\lambda(-\frac{l}{m})} \right\}^n = 0,$$

y a su vez

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\lambda(\frac{1-l}{m})}{\lambda(-\frac{l}{m})} \right\}^n = 0, \text{ si y sólo si } \left| \frac{\lambda(\frac{1-l}{m})}{\lambda(-\frac{l}{m})} \right| < 1.$$

□

Ahora estamos en condiciones de enunciar un resultado que nos entregue información sobre las regiones de estabilidad de la ecuación (1.2.5), antes necesitamos el siguiente lema.

**Lema 1.2.1.** *Sea  $\rho(a) = e^{\frac{a}{m}} - 2e^{\frac{a}{m}} + 1$  con  $2l \neq 1$ , luego tenemos que  $\rho(a)$  tiene una raíz distinta de cero.*

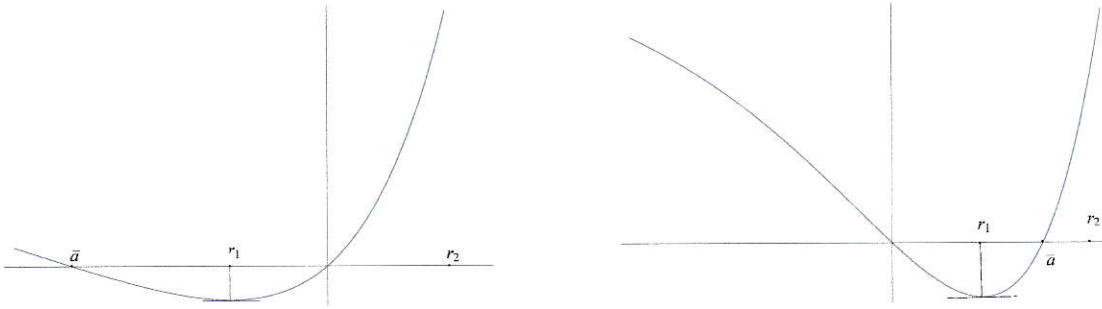


Figura 1.4: Gráfica de  $\rho(a)$ , si  $2l < 1$  (izquierda) y si  $2l > 1$  (derecha).

*Demostración.* Primero notemos que

$$\rho(0) = 0, \quad \rho\left(\frac{m \ln(2)}{1-l}\right) = 1.$$

Llamaremos  $r_2 = \frac{m \ln(2)}{1-l}$ . Derivando  $\rho(a)$  e igualando a 0, es fácil obtener que su único punto crítico



está dado por  $r_1 = \frac{m \ln(2l)}{1-l}$ . Dado que  $0 < l < 1$ , tenemos

$$\begin{aligned} 0 < 2l < 2 \\ \iff \ln(2l) < \ln(2) \\ \iff r_1 < r_2. \end{aligned}$$

Además podemos distinguir los siguientes dos casos

- (i) si  $2l < 1$  tenemos  $\ln(2l) < 0$ , de lo cual concluimos  $r_1 < 0 < r_2$ .
- (ii) si  $1 < 2l$  tenemos  $0 < \ln(2l)$ , de lo cual concluimos  $0 < r_1 < r_2$ .

Por último considerando que

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \rho(a) = +\infty, \quad \lim_{a \rightarrow -\infty} \rho(a) = 1,$$

podemos concluir que:

- si  $2l < 1 \implies$  existe un único  $\bar{a} < 0$ , raíz de  $\rho(a) = 0$ .
- si  $1 < 2l \implies$  existe un único  $\bar{a} > 0$ , raíz de  $\rho(a) = 0$ .

□

**Teorema 1.2.2.** Si  $2l \neq 1$ , sea  $\bar{a}$  la raíz distinta de cero de  $\rho(a) = e^{\frac{a}{m}} - 2e^{a\frac{l}{m}} + 1 = 0$ . Y sea  $\bar{a} = 0$  si  $2l = 1$ . Luego, la solución  $x \equiv 0$  es asintóticamente estable en la ecuación (1.2.5), si y sólo si, se cumple alguna de las siguientes hipótesis.

- (i)  $\bar{a} < a$ ,  $\frac{-a(e^{\frac{a}{m}}+1)}{\rho(a)} < b < -a$ .
- (ii)  $a < \bar{a}$ ,  $b > \frac{-a(e^{\frac{a}{m}}+1)}{\rho(a)}$  ó  $b < -a$ .
- (iii)  $a = \bar{a}$ ,  $b < -a$ .

*Demostración.* No es difícil notar que

- si  $a > \bar{a}$ , entonces  $\text{sgn}(a) = \text{sgn}(\rho(a))$ .
- si  $a < \bar{a}$ , entonces  $\text{sgn}(a) \neq \text{sgn}(\rho(a))$ .
- $\text{sgn}(a) = \text{sgn}\left(e^{a\frac{l}{m}} - 1\right)$ .

Primero, sin pérdida de generalidad, consideraremos  $\lambda(-\frac{l}{m}) > 0$ . Ayudado de las observaciones hechas antes, tenemos que esto es equivalente a

$$b < \frac{a}{e^{a\frac{l}{m}} - 1}.$$

Por Teorema 1.2.1, sabemos que la solución  $x \equiv 0$  de (1.2.5) es asintóticamente estable, si y sólo si, se cumple

$$\left| \frac{\lambda\left(\frac{1-l}{m}\right)}{\lambda\left(-\frac{l}{m}\right)} \right| < 1,$$

es decir, si

$$-\lambda\left(-\frac{l}{m}\right) < \lambda\left(\frac{1-l}{m}\right) < \lambda\left(-\frac{l}{m}\right).$$

Ayudados de las observaciones hechas al inicio de esta demostración, llegamos a que la desigualdad de la derecha es equivalente a

$$b < -a.$$

Luego debemos tener

$$b < \frac{a}{e^{\frac{a}{m}} - 1} \quad \text{y} \quad b < -a,$$

pero  $-a < \frac{a}{e^{\frac{a}{m}} - 1}$ , luego  $b < -a$  implica  $b < \frac{a}{e^{\frac{a}{m}} - 1}$ .

La desigualdad de la izquierda

$$-\lambda\left(-\frac{l}{m}\right) < \lambda\left(\frac{1-l}{m}\right),$$

es equivalente a

$$-b \frac{\rho(a)}{a} < \left(e^{\frac{a}{m}} + 1\right).$$

Para esta desigualdad, tenemos los siguientes casos

- si  $a > \bar{a}$ , es equivalente a  $b > -\frac{a(e^{\frac{a}{m}} + 1)}{\rho(a)}$
- si  $a < \bar{a}$ , es equivalente a  $b < -\frac{a(e^{\frac{a}{m}} + 1)}{\rho(a)}$ .
- si  $a = \bar{a}$ , siempre se cumple ya que  $\rho(\bar{a}) = 0$ .

Con esto quedan demostrados que la solución  $x \equiv 0$  es asintóticamente estable en la ecuación (1.2.5), si y sólo si, se cumple (i), (ii) ó (iii).  $\square$

## 1.3. Ecuaciones en Diferencias

### 1.3.1. Notaciones y Preliminares

El cálculo en diferencias es el análogo discreto del cálculo diferencial e integral, veremos ahora algunos conceptos y para mayores detalles recomendamos el Libro de Elaydi [18]. En esta sección primero introduciremos de forma breve algunas importantes propiedades de dos operadores que son esenciales en el estudio del cálculo en diferencias. Tenemos el *operador diferencia*

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n),$$

y el operador shift

$$Ex(n) = x(n+1).$$

Para estos operadores tenemos las siguientes identidades:

- (a)  $\Delta \{x(n)y(n)\} = \Delta x(n)Ey(n) + x(n)\Delta y(n) = Ex(n)\Delta y(n) + \Delta x(n)y(n).$
- (b)  $\sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x(k) = x(n) - x(n_0).$

Consideremos ahora la ecuación en diferencias lineal homogénea

$$x(n+1) = A(n)x(n), \tag{1.3.1}$$

donde  $A(n) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{q \times q}$  es invertible, con  $q \in \mathbb{N}$ . Sea  $\Psi(n)$  una matriz fundamental de (1.3.1), introducimos para  $\Psi(n, m) = \Psi(n)\Psi^{-1}(m)$  los siguiente operadores parciales

$$E_m \Psi(n, m) = \Psi(n, m+1), \quad E_n \Psi(n, m) = \Psi(n+1, m)$$

$$\Delta_m \Psi(n, m) = \Psi(n, m+1) - \Psi(n, m), \quad \Delta_n \Psi(n, m) = \Psi(n+1, m) - \Psi(n, m), \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

También, para  $\xi \in \mathbb{Z}$ , usaremos las siguientes notaciones

$$A_\xi(n) = A(n+\xi), \quad \Psi_\xi(n, m) = \Psi(n+\xi, m+\xi), \quad \Delta_\xi \Psi(n, m) = \Psi_\xi(n, m) - \Psi(n, m).$$

Para estos operadores parciales tenemos este segundo grupo de identidades:

- (d)  $E_m [\Psi(n, m)] = \Psi(n, m)A^{-1}(m).$
- (e)  $\Delta_n [\Delta_\xi \Psi(n, m)] = [A_\xi(n) - I] \Psi_\xi(n, m) - [A(n) - I] \Psi(n, m).$
- (f)  $E_n [\Delta_\xi \Psi(n, m)] = A_\xi(n)\Psi_\xi(n, m) - A(n)\Psi(n, m).$

Como consecuencia de estas identidades que presentamos, obtenemos las siguientes afirmaciones para la matriz fundamental  $\Psi(n)$ .

**Afirmación 1.3.1.** *Para toda  $\Psi(n)$  matriz fundamental de la ecuación en diferencias (1.3.1), se cumple:*

$$\Psi(n, p+1)\Delta_\xi A(p)\Psi_\xi(p, m) = \Delta_p [\Psi(n, p)\Delta_\xi \Psi(p, m)]. \tag{1.3.2}$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \Delta_\xi A(p)\Psi_\xi(p, m) &= [A_\xi(p) - A(p)]\Psi_\xi(p, m) \\ &= A_\xi(p)\Psi_\xi(p, m) - A(p)\Psi_\xi(p, m) \\ &= A_\xi(p)\Psi_\xi(p, m) - A(p)\Psi_\xi(p, m) - A(p)\Psi(p, m) + A(p)\Psi(p, m) \\ &= [A_\xi(p)\Psi_\xi(p, m) - A(p)\Psi(p, m)] - [A(p)\Psi_\xi(p, m) - A(p)\Psi(p, m)] \\ &= [A_\xi(p)\Psi_\xi(p, m) - A(p)\Psi(p, m)] - A(p) [\Psi_\xi(p, m) - \Psi(p, m)]. \end{aligned}$$

Luego, por la ecuación (1.3.1) y la definición de  $\Delta_\xi \Psi(p, m)$ , tenemos

$$\Delta_\xi A(p) \Psi_\xi(p, m) = E_p[\Delta_\xi \Psi(p, m)] - A(p) \Delta_\xi \Psi(p, m).$$

Además como  $\Psi(n, p+1) = E_p[\Psi(n, p)]$  y a su vez  $E_p[\Psi(n, p)] = \Psi(n, p)A^{-1}(p)$

$$\begin{aligned} \Psi(n, p+1) \Delta_\xi A(p) \Psi_\xi(p, m) &= E_p[\Psi(n, p)] E_p[\Delta_\xi \Psi(p, m)] - E_p[\Psi(n, p)] A(p) \Delta_\xi \Psi(p, m) \\ &= E_p[\Psi(n, p)] E_p[\Delta_\xi \Psi(p, m)] - \Psi(n, p) A^{-1}(p) A(p) \Delta_\xi \Psi(p, m) \\ &= E_p[\Psi(n, p)] E_p[\Delta_\xi \Psi(p, m)] - \Psi(n, p) \Delta_\xi \Psi(p, m) \\ &= \Delta_p[\Psi(n, p) \Delta_\xi \Psi(p, m)]. \end{aligned}$$

□

**Afirmación 1.3.2.**

$$\sum_{k=m}^{n-1} \Psi(n, k+1) \Delta_\xi A(k) \Psi_\xi(k, m) = \Delta_\xi \Psi(n, m). \quad (1.3.3)$$

*Demostración.* Usando la Afirmación 1.3.1, tenemos

$$\sum_{k=m}^{n-1} \Psi(n, k+1) \Delta_\xi A(k) \Psi_\xi(k, m) = \sum_{k=m}^{n-1} \Delta_k[\Psi(n, k) \Delta_\xi \Psi(k, m)].$$

Luego, en virtud de la identidad (c)

$$\sum_{k=m}^{n-1} \Psi(n, k+1) \Delta_\xi A(k) \Psi_\xi(k, m) = [\Psi(n, n) \Delta_\xi \Psi(n, m)] - [\Psi(n, m) \Delta_\xi \Psi(m, m)].$$

Pero como  $\Psi(n, n) = I$  y  $\Delta_\xi \Psi(m, m) = 0$ , finalmente obtenemos la igualdad buscada

$$\sum_{k=m}^{n-1} \Psi(n, k+1) \Delta_\xi A(k) \Psi_\xi(k, m) = \Delta_\xi \Psi(n, m).$$

□

**Observación 1.3.1.** Observar que si  $P$  es una matriz constante, que conmuta con  $\Psi(n)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , tenemos

$$P \Delta_\xi \Psi(n, m) = \sum_{k=m}^{n-1} P \Psi(n, k+1) \Delta_\xi A(k) P \Psi_\xi(k, m)$$

Introducimos ahora el concepto de dicotomía exponencial discreta.

**Definición 1.3.1.** Diremos que la ecuación (1.3.1) tiene  $(\alpha, c, P)$ -dicotomía exponencial, si existen

constantes  $\alpha, c \in \mathbb{R}^+$  y  $P \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$  proyección, tales que:

$$|\Psi(n)P\Psi^{-1}(k+1)|_1 \leq ce^{-\alpha(n-k)}, \quad \text{si } n \geq k$$

$$|\Psi(n)(I-P)\Psi^{-1}(k+1)|_1 \leq ce^{-\alpha(k-n)}, \quad \text{si } k > n,$$

donde  $I$  es la matriz identidad en  $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$  y  $\Psi(n)$  es la matriz fundamental de (1.3.1) que cumple  $\Psi(0) = I$ .

Dada una  $(\alpha, c, P)$ -dicotomía exponencial de la ecuación (1.3.1) definimos la *Matriz de Green* de (1.3.1), con respecto a la proyección  $P$ , como

$$\tilde{\mathcal{G}}(n, k) = \begin{cases} \Psi(n)P\Psi^{-1}(k+1), & \text{si } n \geq k \\ -\Psi(n)(I-P)\Psi^{-1}(k+1), & \text{si } k > n. \end{cases}$$

**Lema 1.3.1.** *Asumamos que el sistema discreto (1.3.1) posee una  $(\alpha, c, P)$ -dicotomía exponencial, tal que  $\Psi(n)$  conmuta con la matriz  $P$ . Luego para todo  $n, m, \xi \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha' \in (0, \alpha)$  existe constante  $c'$  real positiva tal que*

$$|\Delta_\xi \tilde{\mathcal{G}}(n, m)| \leq c' \|A_\xi(\cdot)\| e^{-\alpha'|n-m|}, \quad \text{para } 0 < \alpha' < \alpha. \quad (1.3.4)$$

*Demostración.* Como  $P\Psi(n) = \Psi(n)P$ , tenemos que para  $n > m$  la matriz de Green cumple

$$\tilde{\mathcal{G}}(n, m) = \Psi(n)P[\Psi(m+1)]^{-1} = P\Psi(n, m+1),$$

por lo tanto,

$$\Delta_\xi \tilde{\mathcal{G}}(n, m) = P\Delta_\xi \Psi(n, m+1).$$

De la Afirmación 1.3.2 sabemos,

$$P\Delta_\xi \Psi(n, m+1) = \sum_{k=m+1}^{n-1} P\Psi(n, k+1)\Delta_\xi A(k)P\Psi_\xi(k, m+1).$$

Luego

$$\begin{aligned} |P\Delta_\xi \Psi(n, m+1)| &\leq \sum_{k=m+1}^{n-1} |P\Psi(n, k+1)| |\Delta_\xi A(k)| |P\Psi_\xi(k, m+1)| \\ &= \sum_{k=m+1}^{n-1} |\tilde{\mathcal{G}}(n, k)| |\Delta_\xi A(k)| |\tilde{\mathcal{G}}(k, m)|, \end{aligned}$$



y como por hipótesis tenemos  $|\tilde{\mathcal{G}}(n, m)| \leq ce^{-\alpha(n-m)}$ ,

$$\begin{aligned}
 |P\Delta_\xi\Psi(n, m)| &\leq \sum_{k=m+1}^{n-1} ce^{-\alpha(n-k)}|\Delta_\xi A(k)|ce^{-\alpha(k-m)} \\
 &= \sum_{k=m+1}^{n-1} c^2e^{-\alpha(n-m)}|\Delta_\xi A(k)| \\
 &= c^2e^{-\alpha(n-m)} \sum_{k=m+1}^{n-1} |\Delta_\xi A(k)| \\
 &\leq c^2\|\Delta_\xi A(\cdot)\|(n-m)e^{-\alpha(n-m)}.
 \end{aligned}$$

Luego, tenemos que para todo  $0 < \alpha' < \alpha$  existe  $c' > 0$ , tal que

$$|\Delta_\xi\Psi(m, n)| \leq c'\|\Delta_\xi A(\cdot)\|e^{-\alpha'(n-m)}, \quad \text{para } n > m. \quad (1.3.5)$$

Por otro lado, al conmutar  $\Psi(n)$  con  $P$ , también tenemos que  $\Psi(n)$  conmuta con  $Q := I - P$ , luego, para  $m \geq n$  tenemos

$$\tilde{\mathcal{G}}(n, m) = \Psi(n)Q[\Psi(m+1)]^{-1} = Q\Psi(n, m+1),$$

de igual forma tendremos que para todo  $\alpha' \in (0, \alpha)$ , existe constante  $c' > 0$  tal que

$$|\Delta_\xi\tilde{\mathcal{G}}(m, n)| \leq c'\|\Delta_\xi A(\cdot)\|e^{-\alpha'(m-n)}, \quad \text{para } m \geq n. \quad (1.3.6)$$

Así por (1.3.5) y (1.3.6), tenemos que para todo  $\alpha' \in (0, \alpha)$ , existe  $c' > 0$  tal que

$$|\Delta_\xi\tilde{\mathcal{G}}(n, m)| \leq c'\|A_\xi(\cdot)\|e^{-\alpha'|n-m|}.$$

□

### 1.3.2. Existencia de Soluciones Casi-Periódicas de Sistemas en Diferencias

El método más empleado para estudiar DEPCAG es el que proponen sus propulsores en [14], método que está basado en reducirla a una ecuación en diferencia, tal como pudimos apreciarlo en el estudio que hicimos de la ecuación

$$x'(t) = ax(t) + bx(\gamma(t)).$$

Será este método el que emplearemos en nuestro trabajo, aunque hacemos ver que no es la única forma de abordar el problema. Por ejemplo Akhmet [4] propone un enfoque distinto, se trata de la construcción de una ecuación integral equivalente, enfoque que tiene el beneficio de que no es necesario adicionar suposiciones sobre la ecuación discreta para investigar la DEPCAG. Consideremos las ecuaciones

$$x(n+1) = A(n)x(n), \quad (1.3.7)$$

$$y(n+1) = A(n)y(n) + f(n), \quad (1.3.8)$$

$$z(n+1) = A(n)z(n) + g(n, z(n)). \quad (1.3.9)$$

Los resultados que expondremos siempre supondrán la existencia de una dicotomía exponencial de la ecuación en diferencia (1.3.7), concepto que introducimos en Definición 1.3.1. Además dada una  $(\alpha, c, P)$ -dicotomía exponencial, definiremos

$$J_Z := \sup_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{\mathcal{G}}(n, k)|_1, \quad (1.3.10)$$

donde  $\tilde{\mathcal{G}}(n, k)$  es la matriz de Green asociada con la dicotomía. Tenemos que  $J_Z \in \mathbb{R}$ , ya que podemos verificar que:

$$J_Z \leq c \left( \frac{e^\alpha + 1}{e^\alpha - 1} \right).$$

Las siguientes hipótesis serán necesarias para los resultados que vienen:

(Hd1) :  $A(n), f(n) \in \mathcal{AP}(\mathbb{Z})$ .

(Hd2) : La ecuación (1.3.7) posee una  $(\alpha, c, P)$ -dicotomía exponencial, tal que la proyección  $P$  conmuta con la matriz fundamental  $\Psi(n)$ .

(Hd3) :  $g(\cdot, v) \in \mathcal{AP}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^q)$ , uniformemente sobre  $v \in W \subset \mathbb{R}^q$ , con  $W$  compacto y además  $g(u, \cdot)$  es  $L$ -Lipschitz, es decir:

$$|g(u, v_1) - g(u, v_2)| \leq L|v_1 - v_2|, \text{ para todo } v_1, v_2 \in W$$

(Hd4) :  $LJ_Z < 1$ .

Antes de ir a nuestro Teorema de existencia y unicidad, necesitamos presentar el siguiente Lema que es consecuencia directa del Lema 1.3.1 y del cual podemos concluir que la matriz de Green satisface una propiedad que podemos llamar de bi-casiperiodicidad.

**Lema 1.3.2.** *Asumamos (Hd1), (Hd2). Sea  $\varepsilon > 0$ ,  $\tau \in T(A, \varepsilon)$ . Luego tenemos que para todo  $\alpha' \in (0, \alpha)$ , existe  $c' \in \mathbb{R}^+$  tal que:*

$$(i) \quad |\tilde{\mathcal{G}}(n + \tau, m + \tau) - \tilde{\mathcal{G}}(n, m)| \leq \varepsilon c' e^{-\alpha'|n-m|}.$$

$$(ii) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{\mathcal{G}}(n + \tau, k + \tau) - \tilde{\mathcal{G}}(n, k)| \leq \varepsilon M', \text{ donde } M' = c' \left( \frac{e^{\alpha'} + 1}{e^{\alpha'} - 1} \right).$$

**Lema 1.3.3.** *Asumiendo (Hd1), (Hd2). La ecuación (1.3.8) tiene una única solución  $y_0$  acotada en  $\mathbb{Z}$ , dada por*

$$y_0(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{G}}(n, k) f(k),$$

la cual cumple

$$\|y_0\|_\infty \leq \beta \|f\|_\infty,$$

con  $\beta = \left( \frac{e^\alpha + 1}{e^\alpha - 1} \right) c$ , donde  $c$  está dado por (Hd2).



*Demostración.* Se puede verificar, sin mayor dificultad, que  $y_0(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{G}(n, k)f(k)$  es una solución de (1.3.8). Para  $y_0$  tenemos

$$|y_0(n)| \leq \|f\|_{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{G}(n, k)|,$$

luego por dicotomía exponencial

$$\|y_0\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} \sup_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{G}(n, k)| = \|f\|_{\infty} J_Z \leq \|f\|_{\infty} \left( \frac{e^{\alpha} + 1}{e^{\alpha} - 1} \right) c = \beta \|f\|_{\infty}.$$

Mostrar que  $y_0$  es la única solución acotada es equivalente a demostrar que  $x \equiv 0$  es la única solución acotada de la ecuación homogénea (1.3.7), para demostrar esto supongamos que  $x$  es una solución acotada de (1.3.7), luego para  $n, m \in \mathbb{Z}$  tenemos

$$x(n) = \Psi(n, m)x(m),$$

por lo tanto, para la proyección  $P$  tenemos

$$Px(n) = \Psi(n)P\Psi^{-1}(m+1)x(m),$$

así por la definición 1.3.1 de dicotomía exponencial y dado que  $x$  es acotada tenemos

$$\lim_{m \rightarrow -\infty} |Px(n)| = \lim_{m \rightarrow -\infty} |\Psi(n)P\Psi^{-1}(m+1)x(m)| \leq \lim_{m \rightarrow -\infty} ce^{-\alpha(n-m)}|x(m)| = 0,$$

de este modo

$$Px(n) = 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}. \quad (1.3.11)$$

Por otro lado, para la proyección  $Q$  tenemos

$$Qx(n) = \Psi(n)Q\Psi^{-1}(m+1)x(m),$$

y de igual forma, por dicotomía exponencial y dado que  $x$  es acotada, tenemos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |Qx(n)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |\Psi(n)Q\Psi^{-1}(m+1)x(m)| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} ce^{-\alpha(m-n)}|x(m)| = 0,$$

de este modo

$$Qx(n) = 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}. \quad (1.3.12)$$

Así, dado que  $P$  es una proyección y  $Q = I - P$ , por (1.3.11) y (1.3.12) tenemos

$$x(n) = 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Hemos demostrado que  $x \equiv 0$  es la única solución acotada de la ecuación homogénea (1.3.7), con lo cual tenemos que  $y_0$  es la única solución acotada de la ecuación no homogénea (1.3.8).  $\square$

**Teorema 1.3.1.** *Bajo las hipótesis (Hd1), (Hd2), la ecuación lineal no homogénea (1.3.8) tiene una*

única solución  $y_0 \in \mathcal{AP}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ , que está dada por

$$y_0(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{G}}(n, k) f(k), \quad (1.3.13)$$

la cual cumple

$$\|y_0\|_{\infty} \leq \beta \|f\|_{\infty},$$

con  $\beta = \left( \frac{e^{\alpha+1}}{e^{\alpha}-1} \right) c$ .

*Demostración.* Por Lema 1.3.3, tenemos que (1.3.8) tiene una única solución acotada dada por

$$y_0(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{G}}(n, k) f(k).$$

Como tenemos que la única solución acotada en  $\mathbb{Z}$  es la dada por (1.3.13), de existir una solución casi-periódica debe ser ella. Verifiquemos que efectivamente  $y_0(n) \in \mathcal{AP}(\mathbb{Z})$ .

Para  $\varepsilon > 0$  tomemos  $\tau \in T(A, \varepsilon/2M) \cap T(f, \varepsilon/2M)$ , donde

$$M = \max\{J_Z, M'\}.$$

Primero tenemos que

$$\begin{aligned} y_0(n + \tau) - y_0(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{G}}(n + \tau, k) f(k) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{G}}(n, k) f(k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{G}}(n + \tau, k + \tau) f(k + \tau) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{G}}(n, k) f(k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\tilde{\mathcal{G}}(n + \tau, k + \tau) - \tilde{\mathcal{G}}(n, k)] f(k + \tau) \\ &\quad + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{G}}(n, k) [f(k + \tau) - f(k)]. \end{aligned}$$

Luego en virtud de el Lema 1.3.2 y que  $\tau \in T(A, \varepsilon/2M) \cap T(f, \varepsilon/2M)$ , tenemos

$$\begin{aligned} |y_0(n + \tau) - y_0(n)| &\leq \|f\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{\mathcal{G}}(n + \tau, k + \tau) - \tilde{\mathcal{G}}(n, k)| \\ &\quad + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{\mathcal{G}}(n, k)| |f(k + \tau) - f(k)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2M} M' + \frac{\varepsilon}{2M} J_Z < \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo  $\varepsilon > 0$  tenemos  $T(A, \varepsilon/2M) \cap T(f, \varepsilon/2M) \subset T(y_0, \varepsilon)$ , por lo cual  $T(y_0, \varepsilon)$  es

relativamente denso para todo  $\varepsilon > 0$ . Lo que nos dice que  $y_0(n) \in \mathcal{AP}(\mathbb{Z})$ .  $\square$

**Teorema 1.3.2.** *Supongamos que se cumplen las condiciones (Hd1) – (Hd4). Luego tenemos que existe una única solución  $z_0(n) \in \mathcal{AP}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$  de la ecuación no lineal (1.3.9).*

*Demostración.* Para  $\phi(n) \in \mathcal{AP}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ , sea  $f_\phi(n) = g(n, \phi(n))$  y consideremos la ecuación

$$y(n+1) = A(n)y(n) + f_\phi(n). \quad (1.3.14)$$

El que  $g(\cdot, v) \in \mathcal{AP}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^q)$ , uniformemente sobre  $v \in W \subset \mathbb{R}^q$  compacto y además  $L$ -Lipschitz en su segunda variable, nos permitirá demostrar dos cosas importantes, que  $f_\phi(n) \in \mathcal{AP}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$  y por ende que es uniformemente acotada en  $W$  compacto. Veamos, primero que al ser  $\phi(n)$  una sucesión acotada, podemos definir el siguiente subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^q$ .

$$W = \{v \in \mathbb{R}^q : |v|_\infty \leq \|\phi\|_\infty\}.$$

Tenemos entonces que  $g(\cdot, v) \in \mathcal{AP}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^q)$  uniformemente sobre  $v \in W$ , de lo cual podemos concluir que  $g(\cdot, v)$  es uniformemente acotada sobre  $W$ , es decir, existe  $\beta_W > 0$  tal que

$$\|g(\cdot, v)\| \leq \beta_W, \quad \forall v \in W. \quad (1.3.15)$$

Verifiquemos entonces la casi periodicidad de  $f_\phi(n)$ . Sea  $\varepsilon > 0$  y  $\xi \in T(\phi, \varepsilon') \cap T(g(\cdot, k), W, \varepsilon')$ , luego

$$\begin{aligned} |f_\phi(n+\xi) - f_\phi(n)| &= |g(n+\xi, \phi(n+\xi)) - g(n, \phi(n))| \\ &\leq |g(n+\xi, \phi(n)) - g(n, \phi(n))| + |g(n+\xi, \phi(n+\xi)) - g(n+\xi, \phi(n))| \\ &\leq \varepsilon + L|\phi(n+\xi) - \phi(n)| \\ &\leq \varepsilon' + L\varepsilon' \\ &= \varepsilon'(1+L). \end{aligned}$$

Luego si  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1+L}$ , tenemos que  $[(T(c, \varepsilon') \cap T(g(\cdot, k), W, \varepsilon'))] \subset T(f_\phi, \varepsilon)$ , luego podemos concluir que  $f_\phi \in \mathcal{AP}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ . Por lo tanto tenemos que (1.3.14) satisface las hipótesis del Teorema 1.3.1, luego tenemos que posee una única solución  $y_\phi \in \mathcal{AP}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ , dada por

$$y_\phi(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{G}(n, k) f_\phi(k).$$

Así podemos definir el operador  $\mathcal{F} : \mathcal{AP}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{AP}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ ,

$$\mathcal{F}(\phi)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{G}(n, k) f_\phi(k). \quad (1.3.16)$$

Sean  $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{AP}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ , luego tenemos

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{F}(\phi_1)(n) - \mathcal{F}(\phi_2)(n)| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{G}}(n, k) f_{\phi_2}(k) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{G}}(n, k) f_{\phi_2}(k) \right| \\
 &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{G}}(n, k) \{g(k, \phi_1(k)) - g(k, \phi_2(k))\} \right| \\
 &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{\mathcal{G}}(n, k)|_1 L |\phi_1(k) - \phi_2(k)| \\
 &\leq L \|\phi_1 - \phi_2\|_{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{\mathcal{G}}(n, k)|_1. \\
 &\leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{\infty} L J_Z.
 \end{aligned}$$

Como por hipótesis tenemos que  $LJ_Z < 1$ , tenemos que el operador  $\mathcal{F}$  satisface las hipótesis del Teorema de Punto fijo de Banach, que nos asegura la existencia de un único punto fijo del operador  $\mathcal{F}$ . Es decir, tenemos que existe una única sucesión  $z_0 \in \mathcal{AP}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ , tal que:

$$\mathcal{F}(z_0)(n) = z_0(n).$$

Lo cual implica que  $z_0(n)$  es la única solución casi periódica de (1.3.9). □



---

## Capítulo 2

# Ecuaciones Diferenciales Casi-Periódicas con Argumento Constante a Trozos

### 2.1. Introducción

Para comenzar consideremos el sistema no lineal no homogéneo

$$\dot{y}(t) = D(t)y(t) + f(t) + G(t, y(t)), \quad (A)$$

donde  $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{q \times q}$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$ .

El problema de obtener condiciones que aseguren la existencia de soluciones casi periódicas del sistema diferencial (A) ha sido ampliamente estudiado, por ejemplo en [7, 19] podemos encontrar resultados al respecto, pidiendo fundamentalmente una dicotomía exponencial de la parte homogénea de (A) y condiciones de contracción. En nuestro estudio nos valdremos de estos resultados.

Primero, nuestro fin es obtener ecuaciones en diferencias en algún sentido análogas a la ecuación diferencial (A). Una vez obtenidas estas ecuaciones, valiéndonos de los resultados expuestos en la Sección 1.3, determinaremos condiciones necesarias para la existencia de una única solución casi-periódica de estas ecuaciones en diferencias y obtenemos condiciones de estabilidad.

Las ecuaciones en diferencias las obtendremos usando una DEPCAG, la cual nos permitirá también establecer resultados de aproximación de soluciones acotadas de la ecuación diferencial (A) vía soluciones de DEPCAG usada. La idea de aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales usando DEPCA fue sugerida por I. Györi [20], en donde relaciona soluciones de cierta ecuación diferencial con retardo, con soluciones de DEPCA, obteniendo condiciones que aseguran la convergencia uniforme entre estas soluciones sobre compactos y sobre el semi eje real positivo, todo esto en el caso de soluciones acotadas. También se pueden ver estas ideas en su trabajo junto a K. L. Cooke [15], donde se obtienen resultados del mismo estilo.

La función constante a trozos que utilizaremos tendrá la particularidad de estar definida por una sucesión equipotencialmente casi-periódica, concepto que fue introducido en Sección 1.1.1.

Sea  $\sigma = \{s_i\}_{i=-\infty}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ , tal que,  $s_i \rightarrow \pm\infty$  cuando  $i \rightarrow \pm\infty$ ,  $s_i \leq s_{i+1}$ . Definimos la función

escalonada  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , por

$$\gamma(t) = s_i, \quad \text{para } t \in J_i = [s_i, s_{i+1}).$$

Fijada  $\gamma(t)$ , se pueden construir por ejemplo, las siguientes DEPCAG:

$$\dot{z}(t) = D(t)z(t) + f(t) + G(t, z(\gamma(t))) \quad (\text{B1})$$

$$\dot{z}(t) = D(\gamma(t))z(t) + f(\gamma(t)) + G(\gamma(t), z(\gamma(t))) \quad (\text{B2})$$

En la Sección 2.2 nos abocamos a estudiar la ecuación (B1), determinando condiciones para la existencia de una única solución casi-periódica de ésta, para luego establecer una relación con las condiciones de existencia y unicidad de una solución casi-periódica de (A). Una vez determinadas estas condiciones, veremos de qué forma y hasta qué punto la solución casi-periódica de (B1) es una aproximación de la solución casi-periódica de (A). La ecuación (B2) fue estudiada por Huang et al. [21], para el caso  $\gamma(t) = [t]$ , obteniendo condiciones para la existencia de una única solución casi-periódica de la ecuación en diferencias que se obtiene por la continuidad de la solución de la DEPCA (B2). Como es de esperar, si el fin es obtener una aproximación de una solución de la ecuación diferencial (A), la DEPCAG (B1) será una mejor opción, ya que estaremos aproximando sólo la parte no lineal de la ecuación diferencial.

### 2.1.1. Notación

Dado  $w \in \mathbb{C}$ ,  $\Re(w)$ ,  $\bar{w}$  y  $|w|$  denotarán respectivamente la parte real, el conjugado y el módulo de  $w$ . Para  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$  definimos las normas

$$|z|_1 = \sum_{j=1}^n |z_j| \quad \text{y} \quad |z|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |z_j|.$$

Dado una función vectorial acotada  $t \rightarrow f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)) \in \mathbb{C}^n$ , definimos  $|f|_\infty = \sup\{|f_j(t)| : t \in \mathbb{R}\}$ . Por otra parte, denotamos las normas

$$\|f\|_1 = \sum_{j=1}^n |f_j|_\infty \quad \text{y} \quad \|f\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |f_j|_\infty.$$

Análogamente, dada una función matricial acotada  $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ , consideraremos las normas

$$|B(t)|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |b_{ij}(t)| \quad \text{y} \quad \|B\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |b_{ij}|_\infty.$$

## 2.2. Estudio ecuación (B1)

### 2.2.1. Preliminares

Para la ecuación (B1), consideremos su parte homogénea correspondiente, que es la misma de (A)

$$\dot{z} = D(t)z(t). \quad (2.2.1)$$

Denotaremos  $\Phi(t)$  a la matriz fundamental de (2.2.1) que cumple  $\Phi(s_0) = I$ , donde  $I$  denota la matriz identidad y  $s_0 \in \sigma$ . Además definimos  $\Phi(t, s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$  y  $\Phi^{-1}(t, s) = \Phi(s, t)$ .

En el Capítulo 1, Definición 1.3.1 introducimos el concepto de dicotomía exponencial para ecuaciones en diferencias, para ecuaciones diferenciales daremos una definición análoga.

**Definición 2.2.1.** Diremos que la ecuación (2.2.1) tiene  $(\alpha, c, P)$ -dicotomía exponencial, si existen constantes  $\alpha, c \in \mathbb{R}^+$  y  $P \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$  proyección, tales que:

$$|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)|_1 \leq ce^{-\alpha(t-s)}, \quad \text{si } t \geq s$$

$$|\Phi(t)(I - P)\Phi^{-1}(s)|_1 \leq ce^{-\alpha(s-t)}, \quad \text{si } s > t,$$

donde  $I$  es la matriz identidad en  $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$  y  $\Phi(t)$  es la matriz fundamental de (1.3.1) que cumple  $\Phi(s_0) = I$ .

En el Capítulo 1, Definición 1.2.1 se define lo que entenderemos como solución de una DEPCAG. A continuación, siguiendo esta definición, buscaremos determinar una solución general de la DEPCAG (B1). En este proceso, al exigir la continuidad de la solución en los extremos de los intervalos  $J_n$  se formará una recurrencia, que dará lugar a una ecuación en diferencias análoga a la ecuación diferencial (A).

Miremos nuestra ecuación (B1), por la definición de  $\gamma(t)$ , si  $t \in J_i = [s_i, s_{i+1})$ , entonces  $\gamma(t) = s_i$ , por lo tanto para  $t \in J_i = [s_i, s_{i+1})$ , se cumple

$$\dot{z}(t) = D(t)z(t) + f(t) + G(t, z(s_i)). \quad (2.2.2)$$

Así una solución de (B1), para  $t \in J_i$ , debe satisfacer la ecuación (2.2.2) y usando fórmula de variación de parámetro tenemos que la solución general de (2.2.2) en  $J_i$  está dada por

$$z(t) = \Phi(t, s_i)z(s_i) + \int_{s_i}^t \Phi(t, s)\{G(s, z(s_i)) + f(s)\}ds. \quad (2.2.3)$$

Tenemos que la ecuación (2.2.3) se cumple para  $s_i \leq t < s_{i+1}$ , pero como la solución de una DEPCAG debe ser continua, tenemos que para  $t = s_{i+1}$  también debe satisfacerse la ecuación (2.2.3), por lo tanto tenemos la siguiente ecuación en diferencias.

$$\boxed{z(s_{i+1}) = \Phi(s_{i+1}, s_i)z(s_i) + \int_{s_i}^{s_{i+1}} \Phi(s_{i+1}, s)\{G(s, z(s_i)) + f(s)\}ds.} \quad (C)$$

La ecuación (C) es el análogo discreto que buscábamos de la ecuación diferencial (A) y en ella nos enfocaremos. Lo primero es notar que (C) es de la forma

$$x(n+1) = A(n)x(n) + H(n, x(n)), \quad (2.2.4)$$

donde

$$A(n) := \Phi(s_{n+1}, s_n), \quad H(n, x(n)) := \int_{s_n}^{s_{n+1}} \Phi(s_{n+1}, s)\{G(s, x(n)) + f(s)\}ds. \quad (2.2.5)$$



Es claro que una solución de (2.2.4) es también solución de (C). Ya determinado nuestro análogo discreto, nuestro propósito es determinar condiciones suficientes, que nos garanticen:

- 1<sup>era</sup>: La existencia de una única solución casi-periódica de la ecuación discreta (2.2.4), con ello de la ecuación (C).
- 2<sup>da</sup>: La estabilidad exponencial de toda solución de la ecuación discreta (C) y de la DEPCAG (B1).
- 3<sup>era</sup>: Que una solución de la ecuación discreta (B1) sea una «buena» aproximación de una solución de la ecuación continua (A).

Para obtener lo que buscamos, necesitaremos las siguientes hipótesis.

- (H1) :  $D$  y  $f$  son funciones casi-periódicas.
- (H2) :  $G(\cdot, x) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^q)$ , uniformemente para  $x \in W \subseteq \mathbb{R}^q$  compacto.
- (H3) :  $G(t, \cdot)$  es uniformemente Lipschitz, es decir, existe  $L > 0$  tal que

$$|G(t, x) - G(t, y)| \leq L|x - y|, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

- (H4) : La sucesión  $\sigma = \{s_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  es equipotencialmente casi-periódica.
- (H5) : La ecuación diferencial (A) tiene una  $(\alpha, c, P)$ -dicotomía exponencial

Denotaremos  $\mathcal{G}(t, s)$  a la función de Green asociada a la proyección  $P$  dada por (H5).

**Observación 2.2.1.** *Dada la dicotomía exponencial de (A), tendremos que el sistema discreto (C) también posee una dicotomía exponencial, cuya matriz de Green denotaremos  $\tilde{\mathcal{G}}(n, k)$  y podemos deducir lo siguiente*

$$\tilde{\mathcal{G}}(n, k) = \mathcal{G}(s_n, s_{k+1}). \tag{2.2.6}$$

Los Lemas 2.2.1 y 2.2.2, que presentamos a continuación, son consecuencia directa de la casi-periodicidad de  $D(t)$ .

**Lema 2.2.1.** *Asumiendo (H1), tenemos que, para todo  $\theta > 0$  existe  $K_0 > 0$  tal que:*

$$|\Phi(t, s)|_1 \leq \sqrt{q}K_0, \quad \text{para todo } t, s \in \mathbb{R}, \text{ con } |t - s| \leq \theta,$$

con  $K_0 = e^{\theta\|D\|_\infty}$ .

*Demostración.* Al ser  $\Phi(t)$  una matriz fundamental de la ecuación homogénea (2.2.1), tenemos que  $\Phi^{-1}(t)$  es matriz fundamental de su ecuación adjunta

$$z'(t) = -z(t)D(t).$$

Luego,  $\Phi^{-1}(t)$  satisface la siguiente ecuación integral

$$\Phi^{-1}(t) = I - \int_{s_0}^t \Phi^{-1}(u)D(u)du.$$



Por lo tanto

$$\Phi^{-1}(s) - \Phi^{-1}(t) = - \int_{s_0}^s \Phi^{-1}(u)D(u)du + \int_{s_0}^t \Phi^{-1}(u)D(u)du = \int_s^t \Phi^{-1}(u)D(u)du,$$

y al multiplicar por la izquierda por  $\Phi(t)$ , llegamos a que para  $\Phi(t, s)$  se cumple

$$\Phi(t, s) = I + \int_s^t \Phi(t, u)D(u)du. \quad (2.2.7)$$

De este modo, obtenemos la siguiente desigualdad

$$|\Phi(t, s)|_1 \leq |I|_1 + \int_s^t |\Phi(t, u)|_1 \|D\|_\infty du$$

Así, en virtud del lema de Gronwall-Bellman, tenemos

$$|\Phi(t, s)|_1 \leq \sqrt{q}K_0, \quad \text{donde } K_0 = e^{\theta\|D\|_\infty}.$$

□

Recordando las definiciones de  $\Gamma_\varepsilon$  y  $P_\tau(\varepsilon)$  dadas en Capítulo 1, Sección 1.1.1, tenemos

**Lema 2.2.2.** *Asumamos (H1), (H4). Sea  $\varepsilon > 0$ ,  $\tau \in \Gamma_\varepsilon \cap T(D, \varepsilon)$  y  $p \in P_\tau(\varepsilon)$ , existe  $K_1 > 0$  tal que para todo  $n \in \mathbb{Z}$*

$$|\Phi(s_{n+p+1}, s + \tau) - \Phi(s_{n+1}, s)| \leq K_1\varepsilon, \quad \text{para todo } s \in [s_n, s_{n+1}].$$

*Demostración.* De la ecuación integral (2.2.7), tenemos

$$\begin{aligned} \Phi(s_{n+p+1}, s + \tau) - \Phi(s_{n+1}, s) &= \int_{s+\tau}^{s_{n+p+1}} \Phi(s_{n+p+1}, u)D(u)du - \int_s^{s_{n+1}} \Phi(s_{n+1}, u)D(u)du \\ &= \int_s^{s_{n+p+1}-\tau} \Phi(s_{n+p+1}, u + \tau)D(u + \tau)du - \int_s^{s_{n+1}} \Phi(s_{n+1}, u)D(u)du. \end{aligned}$$

Sumando y restando los términos necesarios obtenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} &\Phi(s_{n+p+1}, s + \tau) - \Phi(s_{n+1}, s) = \\ &= \int_{s_{n+1}}^{s_{n+p+1}-\tau} \Phi(s_{n+p+1}, u + \tau)D(u + \tau)du \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

$$+ \int_s^{s_{n+1}} \Phi(s_{n+1}, u)[D(u + \tau) - D(u)]du \quad (2.2.9)$$

$$+ \int_s^{s_{n+1}} [\Phi(s_{n+p+1}, u + \tau) - \Phi(s_{n+1}, u)]D(u + \tau)du. \quad (2.2.10)$$



En virtud de el Lema 2.2.1 y dado que  $p \in P_\tau(\varepsilon)$ , para la expresión en (2.2.8) se cumple

$$\begin{aligned} \left| \int_{s_{n+1}}^{s_{n+p+1}-\tau} \Phi(s_{n+p+1}, u + \tau) D(u + \tau) du \right| &\leq \|D\|_\infty \int_{s_{n+1}}^{s_{n+1+p}-\tau} \sqrt{q} e^{\|D\|_\infty |s_{n+1+p}-u-\tau|} du \\ &\leq |s_{n+1}^p - \tau| \|D\|_\infty \sqrt{q} e^{\|D\|_\infty |s_{n+1}^p - \tau|} \\ &\leq \varepsilon \|D\|_\infty \sqrt{q} e^{\|D\|_\infty \varepsilon}. \end{aligned}$$

Dado que  $\tau \in T(D, \varepsilon)$  y valiéndonos nuevamente del Lema 2.2.1, para la expresión en (2.2.9) tenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_s^{s_{n+1}} \Phi(s_{n+1}, u) [D(u + \tau) - D(u)] du \right| &\leq \sqrt{q} \int_s^{s_{n+1}} e^{\|D\|_\infty (s_{n+1}-s)} \|D(\cdot + \tau) - D(\cdot)\|_\infty du \\ &\leq \sqrt{q} \varepsilon \sigma_+ e^{\sigma_+ \|D\|_\infty}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, de (2.2.10)

$$\begin{aligned} |\Phi(s_{n+p+1}, s + \tau) - \Phi(s_{n+1}, s)| &\leq \varepsilon \|D\|_\infty \sqrt{q} e^{\|D\|_\infty \varepsilon} \\ &\quad + \sqrt{q} \varepsilon \sigma_+ e^{\sigma_+ \|D\|_\infty} \\ &\quad + \|D\|_\infty \int_s^{s_{n+1}} |\Phi(s_{n+p+1}, u + \tau) - \Phi(s_{n+1}, u)| du. \end{aligned}$$

Entonces, por Lema de Gronwall-Bellman obtenemos el resultado buscado

$$|\Phi(s_{n+p+1}, s + \tau) - \Phi(s_{n+1}, s)| \leq \varepsilon K_1, \quad \text{donde } K_1 = \left( \|D\|_\infty \sqrt{q} e^{\|D\|_\infty \varepsilon} + \sqrt{q} \sigma_+ e^{\sigma_+ \|D\|_\infty} \right) \sqrt{q} e^{\|D\|_\infty \sigma_+}.$$

□

El Lema 2.2.2 nos entrega una propiedad fundamental de  $\Phi(s_n, u)$ , se puede ver que satisface una condición que podemos llamar de "bi-casiperiodicidad" sobre  $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ , es decir, es casi-periódica como función del par  $(n, u)$ , lo cual refleja la dualidad en la dinámica de (B1) que combina las propiedades de un sistema diferencial continuo y de un sistema en diferencias, es decir, tiene una naturaleza híbrida en el sentido expuesto. Esta propiedad es fundamental en la demostración de los siguientes Lemas, demostraciones que nos permitirán apreciar de mejor forma lo importante e imprescindible que resulta ser la bi-casiperiodicidad de  $\Phi(s_n, u)$ .

Antes, presentaremos un resultado técnico, en el cual se puede apreciar las ventajas que nos entrega la hipótesis (H4), es decir, el que la sucesión  $\sigma$  sea equipotencialmente casi-periódica.

**Proposición 2.2.1.** *Asumamos (H4). Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon/2$  tal que, si  $\tau \in T(D, \varepsilon_1) \cap \Gamma_{\varepsilon_1}$  y  $p \in P_\tau(\varepsilon_1)$ , entonces:*

$$\sigma^{(p)} \subset T(D, \varepsilon) \cap \Gamma_\varepsilon.$$

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ .

Primero, por Teorema 1.1.2 sabemos que existe  $\delta > 0$  tal que, para todo  $\tau \in T(D, \varepsilon)$ , tenemos

$$(\tau - \delta, \tau + \delta) \subset T(D, \varepsilon).$$

Ahora, sea  $\varepsilon_1 = \min\{\delta, \varepsilon/2\}$ . Para  $\tau \in T(D, \varepsilon_1) \cap \Gamma_{\varepsilon_1}$  y  $p \in P_\tau(\varepsilon_1)$ , tenemos:

·  $\sigma^{(p)} \subset T(D, \varepsilon)$ , esto ya que

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} |s_n^p - \tau| < \varepsilon_1, \text{ por definición de } P_{\varepsilon_1}(\tau),$$

por lo cual, como  $\varepsilon_1 \leq \delta$ , tenemos que para todo  $n \in \mathbb{Z}$

$$|s_n^p - \tau| < \delta,$$

entonces  $s_n^p \in (\tau - \delta, \tau + \delta) \subset T(D, \varepsilon)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , de donde  $\sigma^{(p)} \subset T(D, \varepsilon)$ .

·  $\sigma^{(p)} \subset \Gamma_\varepsilon$ , esto ya que para todo  $m \in \mathbb{Z}$ , tenemos

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} |s_n^p - s_m^p| \leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} |s_n^p - \tau| + |s_m^p - \tau| \leq 2\varepsilon_1 \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto,  $s_m^p \in \Gamma_\varepsilon$ , para todo  $m \in \mathbb{Z}$ . Lo que nos dice que  $\sigma^{(p)} \subset \Gamma_\varepsilon$ .

Así, hemos demostrado que  $\sigma^{(p)} \subset T(D, \varepsilon) \cap \Gamma_\varepsilon$ . □

**Lema 2.2.3.** *Asumiendo (H1), (H4), tenemos que la sucesión  $A(n) = \Phi(s_{n+1}, s_n) \in AP(\mathbb{Z}, \mathcal{M}_q(\mathbb{R}))$ .*

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ , por Proposición 2.2.1, tenemos que existe  $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$  tal que, si  $\tau \in T(D, \varepsilon_1) \cap \Gamma_{\varepsilon_1}$  y  $p \in P_\tau(\varepsilon_1)$ , entonces:

$$\sigma^{(p)} \subseteq T(D, \varepsilon) \cap \Gamma_\varepsilon.$$

Luego, sean  $\tau \in T(D, \varepsilon_1) \cap \Gamma_{\varepsilon_1}$  y  $p \in P_\tau(\varepsilon_1)$ , tenemos

$$\begin{aligned} A(n+p) - A(n) &= \Phi(s_{n+1+p}, s_{n+p}) - \Phi(s_{n+1}, s_n) \\ &= \Phi(s_{n+1+p}, s_n + s_n^{(p)}) - \Phi(s_{n+1}, s_n). \end{aligned}$$

Por lo tanto, como  $s_n^{(p)} \in T(D, \varepsilon) \cap \Gamma_\varepsilon$  y  $p \in P_\tau(\varepsilon_1)$ , por Lema 2.2.2 tenemos

$$|A(n+p) - A(n)| \leq K_1 \varepsilon.$$

Así, tenemos

$$\tilde{P}_{\varepsilon_1} = \cup \{P_\tau(\varepsilon_1) | \tau \in T(D, \varepsilon) \cap \Gamma_{\varepsilon_1}\} \subseteq T(A, K_1 \varepsilon).$$

Además, como  $T(D, \varepsilon) \cap \Gamma_{\varepsilon_1}$  es relativamente denso, por Lema 1.1.4,  $\tilde{P}_{\varepsilon_1}$  es relativamente denso en  $\mathbb{Z}$ , por lo cual  $T(A, K_1 \varepsilon)$  también lo es para todo  $\varepsilon > 0$ . □

Ahora, para  $\phi = \{\phi(n)\}_{n=-\infty}^{\infty} \in AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$  y  $H(n, x(n))$  en (2.2.5), definimos

$$\mathcal{H}_\phi(n) := H(n, \phi(n)).$$

Veremos que  $\mathcal{H}_\phi \in AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ , para cada  $\phi = \{\phi(n)\}_{n=-\infty}^{\infty} \in AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ . Para ello, hacemos la siguiente descomposición

$$\mathcal{H}_\phi(n) = h_1(n) + h_2(n, \phi(n)),$$

$$h_1(n) = \int_{s_n}^{s_{n+1}} \Phi(s_{n+1}, s) f(s) ds, \quad h_2(n, \phi(n)) = \int_{s_n}^{s_{n+1}} \Phi(s_{n+1}, s) G(s, \phi(n)) ds, \quad (2.2.11)$$

sucesiones para las cuales tenemos el siguiente resultado.

**Lema 2.2.4.** *Asumiendo (H1) – (H4), se cumple:*

(i)  $h_1(n) \in AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ .

(ii)  $h_2(n, \phi) \in AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ , para cada  $\phi \in AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ .

*Demostración. Parte (i):* Sea  $\varepsilon > 0$ , por Proposición 2.2.1 tenemos que existe  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$  tal que, si  $\tau \in T(D, \varepsilon_1) \cap T(f, \varepsilon_1) \cap \Gamma_{\varepsilon_1}$  y  $p \in P_{\varepsilon_1}(\tau)$ , entonces

$$\sigma^{(p)} \subseteq \Gamma_{\varepsilon_1} \cap T(D, \varepsilon_1) \cap T(f, \varepsilon_1). \quad (2.2.12)$$

Sean  $\tau \in T(D, \varepsilon_1) \cap T(f, \varepsilon_1) \cap \Gamma_{\varepsilon_1}$  y  $p \in P_{\varepsilon_1}(\tau)$ ,

$$h_1(n+p) - h_1(n)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{s_{n+p}}^{s_{n+1+p}} \Phi(s_{n+1+p}, s) f(s) ds - \int_{s_n}^{s_{n+1}} \Phi(s_{n+1}, s) f(s) ds \\ &= \int_{s_n}^{s_{n+1} + (s_{n+1}^{(p)} - s_n^{(p)})} \Phi(s_{n+1+p}, s + s_n^{(p)}) f(s + s_n^{(p)}) ds - \int_{s_n}^{s_{n+1}} \Phi(s_{n+1}, s) f(s) ds \\ &= \int_{s_n}^{s_{n+1}} \left[ \Phi(s_{n+1+p}, s + s_n^{(p)}) f(s + s_n^{(p)}) - \Phi(s_{n+1}, s) f(s) \right] ds \\ &\quad + \int_{s_{n+1}}^{s_{n+1} + (s_{n+1}^{(p)} - s_n^{(p)})} \Phi(s_{n+1+p}, s + s_n^{(p)}) f(s + s_n^{(p)}) ds \\ &= \int_{s_n}^{s_{n+1}} \left[ \Phi(s_{n+1+p}, s + s_n^{(p)}) - \Phi(s_{n+1}, s) \right] f(s + s_n^{(p)}) ds \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

$$+ \int_{s_n}^{s_{n+1}} \Phi(s_{n+1}, s) \left[ f(s + s_n^{(p)}) - f(s) \right] \quad (2.2.14)$$

$$+ \int_{s_{n+1}}^{s_{n+1} + (s_{n+1}^{(p)} - s_n^{(p)})} \Phi(s_{n+1+p}, s + s_n^{(p)}) f(s + s_n^{(p)}) ds. \quad (2.2.15)$$

Primero, por (2.2.12), tenemos que  $s_n^{(p)} \in T(D, \varepsilon_1) \cap \Gamma_{\varepsilon_1}$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto, por Lema 2.2.2, para la expresión en (2.2.13) se cumple

$$\left| \int_{s_n}^{s_{n+1}} \left[ \Phi(s_{n+1+p}, s + s_n^{(p)}) - \Phi(s_{n+1}, s) \right] f(s + s_n^{(p)}) ds \right| \leq \sigma_+ \varepsilon K_1 \|f\|_{\infty}.$$

Además, por (2.2.12) también tenemos que  $s_n^{(p)} \in T(f, \varepsilon_1)$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . De este modo, la expresión



en (2.2.14) cumple

$$\left| \int_{s_n}^{s_{n+1}} \Phi(s_{n+1}, s) \left[ f(s + s_n^{(p)}) - f(s) \right] \right| \leq \sigma_+ \sqrt{q} e^{\sigma_+ \|D\|_\infty} \varepsilon.$$

Por último, en virtud del Lema 2.2.1, para la expresión en (2.2.15) tenemos

$$\left| \int_{s_{n+1}}^{s_{n+1} + (s_{n+1}^{(p)} - s_n^{(p)})} \Phi(s_{n+1+p}, s + s_n^{(p)}) f(s + s_n^{(p)}) ds \right| \leq |s_{n+1}^{(p)} - s_n^{(p)}| \sqrt{q} e^{2\sigma_+ \|D\|_\infty} \|f\|_\infty.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |h_1(n+p) - h_1(n)|_1 &\leq \sigma_+ \varepsilon \|f\|_\infty \\ &\quad + \sigma_+ \sqrt{q} e^{\sigma_+ \|D\|_\infty} \varepsilon \\ &\quad + |s_{n+1}^{(p)} - s_n^{(p)}| \sqrt{q} e^{2\sigma_+ \|D\|_\infty} \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Además como  $p \in P_\tau(\varepsilon_1)$  y

$$|s_{n+1}^{(p)} - s_n^{(p)}| \leq |s_{n+1}^{(p)} - \tau| + |s_n^{(p)} - \tau|,$$

entonces

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} |s_{n+1}^{(p)} - s_n^{(p)}| \leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} |s_{n+1}^{(p)} - \tau| + \sup_{n \in \mathbb{Z}} |s_n^{(p)} - \tau| \leq 2\varepsilon_1 \leq \varepsilon.$$

Luego, si  $M = (\sigma_+ \|f\|_\infty + \sigma_+ \sqrt{q} e^{\sigma_+ \|D\|_\infty} + \sqrt{q} e^{2\sigma_+ \|D\|_\infty} \|f\|_\infty)$ , tenemos

$$|h_1(n+p) - h_1(n)|_1 \leq M\varepsilon.$$

Así, tenemos

$$\tilde{P}_{\varepsilon_1} = \cup \{P_\tau(\varepsilon_1) | \tau \in T(D, \varepsilon) \cap T(f, \varepsilon) \cap \Gamma_{\varepsilon_1}\} \subseteq T(h_1, M\varepsilon).$$

Además, como  $T(D, \varepsilon) \cap T(f, \varepsilon) \cap \Gamma_{\varepsilon_1}$  es relativamente denso, por Lema 1.1.4  $\tilde{P}_{\varepsilon_1}$  es también relativamente denso en  $\mathbb{Z}$ , por lo cual  $T(h_1, M\varepsilon)$  también lo es para todo  $\varepsilon > 0$ . Por la arbitrariedad  $\varepsilon > 0$ , tenemos que  $h_1(n)$  es casi-periódica.

**Parte (ii):** Sea  $\varepsilon > 0$ , y sea  $\varepsilon_1 > 0$  dado por Proposición 2.2.1. Luego si  $\tau \in T(D, \varepsilon_1) \cap T(f, \varepsilon_1) \cap T(G(\cdot, k), W, \varepsilon_1) \cap \Gamma_{\varepsilon_1}$  y  $p \in P_\tau(\varepsilon_1) \cap T(\phi, \varepsilon_1)$ , entonces

$$\sigma^{(p)} \subseteq \Gamma_{\varepsilon_1} \cap T(D, \varepsilon_1) \cap T(f, \varepsilon_1). \quad (2.2.16)$$

Ahora, tomemos  $\phi \in AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$  y  $p \in \tilde{P}_{\varepsilon_1} \cap T(\phi, \varepsilon_1)$ , donde

$$\tilde{P}_{\varepsilon_1} = \cup \{P_{\tau'}(\varepsilon_1) | \tau' \in T(D, \varepsilon_1) \cap T(f, \varepsilon_1) \cap T(G(\cdot, k), W, \varepsilon_1) \cap \Gamma_{\varepsilon_1}\}.$$

Inicialmente,  $h_2$  dada por (2.2.11), satisface

$$\begin{aligned}
 h_2(n+p, \phi(n+p)) - h_2(n, \phi(n)) &= \int_{s_{n+p}}^{s_{n+p+1}} \Phi(s_{n+p+1}, s) G(s, \phi(n+p)) ds \\
 &\quad - \int_{s_n}^{s_{n+1}} \Phi(s_{n+1}, s) G(s, \phi(n)) ds,
 \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

y haciendo el cambio de variable  $s = s + s_n^{(p)}$  en la primera integral de (2.2.17), obtenemos

$$\begin{aligned}
 &h_2(n+p, \phi(n+p)) - h_2(n, \phi(n)) = \\
 &= \int_{s_n}^{s_{n+1} + (s_{n+1}^{(p)} - s_n^{(p)})} \Phi(s_{n+p+1}, s + s_n^{(p)}) G(s + s_n^{(p)}, \phi(n+p)) ds \\
 &\quad - \int_{s_n}^{s_{n+1}} \Phi(s_{n+1}, s) G(s, \phi(n)) ds \\
 &= \int_{s_n}^{s_{n+1}} \left[ \Phi(s_{n+p+1}, s + s_n^{(p)}) G(s + s_n^{(p)}, \phi(n+p)) - \Phi(s_{n+1}, s) G(s, \phi(n)) \right] ds \\
 &\quad + \int_{s_{n+1}}^{s_{n+1} + (s_{n+1}^{(p)} - s_n^{(p)})} \Phi(s_{n+p+1}, s + s_n^{(p)}) G(s + s_n^{(p)}, \phi(n+p)) ds.
 \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Ahora, sumando y restando  $\Phi(s_{n+1}, s) G(s + s_n^{(p)}, \phi(n+p))$  en (2.2.18) y reagrupando, llegamos a que

$$\begin{aligned}
 &h_2(n+p, \phi(n+p)) - h_2(n, \phi(n)) = \\
 &= \int_{s_n}^{s_{n+1}} \left[ \Phi(s_{n+p+1}, s + s_n^{(p)}) - \Phi(s_{n+1}, s) \right] G(s + s_n^{(p)}, \phi(n+p)) ds \\
 &\quad + \int_{s_n}^{s_{n+1}} \Phi(s_{n+1}, s) \left[ G(s + s_n^{(p)}, \phi(n+p)) - G(s, \phi(n)) \right] ds \\
 &\quad + \int_{s_{n+1}}^{s_{n+1} + (s_{n+1}^{(p)} - s_n^{(p)})} \Phi(s_{n+p+1}, s + s_n^{(p)}) G(s + s_n^{(p)}, \phi(n+p)) ds \\
 &= \int_{s_n}^{s_{n+1}} \left[ \Phi(s_{n+p+1}, s + s_n^{(p)}) - \Phi(s_{n+1}, s) \right] G(s + s_n^{(p)}, \phi(n+p)) ds
 \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

$$+ \int_{s_n}^{s_{n+1}} \Phi(s_{n+1}, s) \left[ G(s + s_n^{(p)}, \phi(n)) - G(s, \phi(n)) \right] ds \tag{2.2.20}$$

$$+ \int_{s_n}^{s_{n+1}} \Phi(s_{n+1}, s) \left[ G(s + s_n^{(p)}, \phi(n+p)) - G(s + s_n^{(p)}, \phi(n)) \right] ds \tag{2.2.21}$$

$$+ \int_{s_{n+1}}^{s_{n+1} + (s_{n+1}^{(p)} - s_n^{(p)})} \Phi(s_{n+p+1}, s + s_n^{(p)}) G(s + s_n^{(p)}, \phi(n+p)) ds. \tag{2.2.22}$$

Primero, dado que  $p \in \tilde{P}_{\varepsilon_1}$ , tenemos  $s_n^p \in T(D, \varepsilon_1) \cap \Gamma_{\varepsilon_1}$ . Luego por nuestro Lema 2.2.2 de bi-

casiperiodicidad de  $\Phi$ , tenemos que para la expresión en (2.2.19) se cumple

$$\left| \int_{s_n}^{s_{n+1}} \left[ \Phi(s_{n+p+1}, s + s_n^{(p)}) - \Phi(s_{n+1}, s) \right] G(s + s_n^{(p)}, \phi(n+p)) ds \right| \leq \varepsilon \sigma_+ M_1,$$

donde  $M_1 = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \sup_{t \in \mathbb{R}} |G(t, \phi(n))|$ .

Para la expresión en (2.2.20), dado que  $s_n^{(p)} \in T(G(\cdot, k), W, \varepsilon_1)$  y en virtud de el Lema 2.2.1, tenemos

$$\left| \int_{s_n}^{s_{n+1}} \Phi(s_{n+1}, s) \left[ G(s + s_n^{(p)}, \phi(n)) - G(s, \phi(n)) \right] ds \right| \leq \sigma_+ \sqrt{q} e^{\sigma_+ \|D\|_\infty} \varepsilon$$

Para la expresión en (2.2.21), primero sabiendo que

$$|G(s + s_n^{(p)}, \phi(n+p)) - G(s + s_n^{(p)}, \phi(n))| \leq L |\phi(n+p) - \phi(n)|,$$

y como  $p \in T(\phi, \varepsilon_1)$ , entonces

$$\left| \int_{s_n}^{s_{n+1}} \Phi(s_{n+1}, s) \left[ G(s + s_n^{(p)}, \phi(n+p)) - G(s + s_n^{(p)}, \phi(n)) \right] ds \right| \leq \varepsilon L \sqrt{q} e^{\sigma_+ \|D\|_\infty}.$$

Por último, para (2.2.22) se cumple

$$\left| \int_{s_{n+1}}^{s_{n+1} + (s_{n+1}^{(p)} - s_n^{(p)})} \Phi(s_{n+p+1}, s + s_n^{(p)}) G(s + s_n^{(p)}, \phi(n+p)) ds \right| \leq M_1 \sqrt{q} e^{2\sigma_+ \|D\|_\infty} |s_{n+1}^{(p)} - s_n^{(p)}|.$$

Entonces, finalmente se tiene

$$\begin{aligned} |h_2(n+p, \phi(n+p)) - h_2(n, \phi(n))| &\leq \sigma_+ \varepsilon M_1 \\ &\quad + \sigma_+ \sqrt{q} e^{\sigma_+ \|D\|_\infty} \varepsilon \\ &\quad + \sigma_+ \sqrt{q} e^{\sigma_+ \|D\|_\infty} L \varepsilon \\ &\quad + |s_{n+1}^{(p)} - s_n^{(p)}| \sqrt{q} e^{2\sigma_+ \|D\|_\infty} M_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por (H4), si  $M = (\sigma_+ M_1 + \sigma_+ \sqrt{q} e^{\sigma_+ \|D\|_\infty} + \sqrt{q} e^{2\sigma_+ \|D\|_\infty} M_1)$ , tenemos

$$|h_2(n+p, \phi(n+p)) - h_2(n, \phi(n))| < M \varepsilon.$$

Así  $\tilde{P}_{\varepsilon_1} \cap T(\phi, \varepsilon_1) \subseteq T(h_2, M\varepsilon)$ , para toda  $\phi(n)$  casi periódica. Luego por la arbitrariedad de  $\varepsilon > 0$ , tenemos que  $h_2(\phi, n)$  es casi-periódica para toda sucesión  $\phi(n)$  casi-periódica.  $\square$

De este modo, por el Lema 2.2.4, tenemos que para toda sucesión  $\phi(n) \in AP(\mathbb{Z})$ , la sucesión

$$\mathcal{H}_\phi(n) = H(n, \phi(n)) = \int_{s_n}^{s_{n+1}} \Phi(s_{n+1}, s) \{G(s, \phi(n)) + f(s)\} ds$$

es casi-periódica.

### 2.2.2. Existencia y Unicidad de Soluciones Casi Periódicas para la Ecuación (2.2.4)

Para  $\phi \in AP(\mathbb{Z})$ ,  $\mathcal{H}_\phi(n) = H(n, \phi(n))$  consideremos la ecuación

$$x(n+1) = A(n)x(n) + \mathcal{H}_\phi(n). \quad (2.2.23)$$

Los Lemas 2.2.3 y 2.2.4 nos dicen que para cada  $\phi \in AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$  el sistema (2.2.23) es un sistema casi-periódico del tipo del Teorema 1.3.1, además por (H5) tenemos que posee una dicotomía exponencial. Por lo tanto, el Teorema 1.3.1 asegura la existencia de una única solución casi-periódica de (2.2.23), dada por:

$$x_0(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{G}}(n, k) \mathcal{H}_\phi(k).$$

Definamos el operador  $\mathcal{F} : AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \rightarrow AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ , por

$$(\mathcal{F}\phi)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{G}}(n, k) \mathcal{H}_\phi(k),$$

donde  $\phi = \{\phi(n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \in AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ .

Ahora, consideremos

$$J_Z = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{G}(s_n, s)| ds$$

por (H4) tenemos que  $J_Z \in \mathbb{R}$ , ya que de la definición 2.2.1 de dicotomía exponencial se puede verificar que

$$J_Z \leq \frac{2c}{\alpha}.$$

Para la constante  $J_Z$ , consideraremos las siguiente hipótesis.

(H6) :  $LJ_Z < 1$ , donde  $L$  es la constante de Lipschitz dado por (H3).

**Teorema 2.2.1.** *Suponiendo (H1)–(H6). Entonces la ecuación (C) tiene una única solución  $\tilde{z}_\sigma(n) \in AP(\mathbb{Z})$ , que satisface*

$$\tilde{z}_\sigma(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{G}}(n, k) H(k, \tilde{z}_\sigma(k)). \quad (2.2.24)$$

*Demostración.* Sean  $\phi_1, \phi_2 \in AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ , luego tenemos

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}\phi_1)(n) - (\mathcal{F}\phi_2)(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{G}}(n, k) \mathcal{H}_{\phi_1}(k) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{G}}(n, k) \mathcal{H}_{\phi_2}(k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{G}}(n, k) (\mathcal{H}_{\phi_1}(k) - \mathcal{H}_{\phi_2}(k)). \end{aligned}$$



Además sabiendo que,

$$(\mathcal{H}_{\phi_1}(k) - \mathcal{H}_{\phi_2}(k)) = \int_{s_k}^{s_{k+1}} \Phi(s_{k+1}, s) [G(s, \phi_1(k)) - G(s, \phi_2(k))] ds,$$

tenemos

$$|(\mathcal{F}\phi_1)(n) - (\mathcal{F}\phi_2)(n)| \leq L\|\phi_1 - \phi_2\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{s_k}^{s_{k+1}} |\tilde{\mathcal{G}}(n, k)\Phi(s_{k+1}, s)| ds,$$

pero

$$\tilde{\mathcal{G}}(n, k)\Phi(s_{k+1}, s) = \mathcal{G}(s_n, s_{k+1})\Phi(s_{k+1}, s) = \mathcal{G}(s_n, s),$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} |(\mathcal{F}\phi_1)(n) - (\mathcal{F}\phi_2)(n)| &\leq L\|\phi_1 - \phi_2\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{s_k}^{s_{k+1}} |\mathcal{G}(s_n, s)| ds \\ &= L\|\phi_1 - \phi_2\| \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{G}(s_n, s)| ds \\ &\leq LJ_Z\|\phi_1 - \phi_2\|. \end{aligned}$$

Como  $LJ_Z < 1$ , tenemos que el operador  $\mathcal{F}$  satisface las hipótesis del Teorema de Punto Fijo de Banach. Por lo tanto,  $\mathcal{F}$  posee un único punto fijo, es decir, existe una única sucesión  $\tilde{z}_\sigma \in AP(\mathbb{Z})$ , tal que:

$$\mathcal{F}(\tilde{z}_\sigma)(n) = \tilde{z}_\sigma(n).$$

□

En lo que sigue, muy importante es la siguiente definición:

**Definición 2.2.2.** Denotaremos  $\tilde{z}_\sigma(n)$  la solución casi periódica de (C) y llamaremos  $z_\sigma(t)$  a la solución de (B1) definida por esta sucesión casi-periódica según la ecuación 2.2.3, es decir,  $z_\sigma(s_n) = \tilde{z}_\sigma(n)$ .

**Lema 2.2.5.** Asumiendo (H1) – (H6), tenemos que  $z_\sigma(t)$  es uniformemente continua.

*Demostración.* Primero demostramos que  $z_\sigma(t)$  es una función acotada en  $\mathbb{R}$ . Como  $z_\sigma(t)$  es solución de (B1), para  $s_k \leq t < s_{k+1}$  se satisface (2.2.3)

$$z_\sigma(t) = \Phi(t, s_k)z_\sigma(s_k) + \int_{s_k}^t \Phi(t, u)\{G(u, z_\sigma(s_k)) + f(u)\}du.$$

Dado que  $f \in AP(\mathbb{R})$  y  $\{s_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in AP(\mathbb{Z})$  tenemos que son acotadas, ello sumado a que  $G(\cdot, x)$  es uniformemente casi periódica sobre compactos, nos permite definir  $M_1 = \max_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{u \in \mathbb{R}} \{|G(u, \tilde{z}_\sigma(s_k)) + f(u)|\}$ , por lo tanto, por Lema 2.2.1 tenemos

$$|z_\sigma(t)| \leq \sqrt{q}K_0 \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\tilde{z}_\sigma(n)| + \sigma_+ \sqrt{q}K_0 M_1.$$

Por lo tanto, tenemos que  $z_\sigma(t)$  es acotada. Ahora, usando directamente que  $z_\sigma$  es solución de (B1), para  $t, s \in \mathbb{R}$  tenemos

$$z_\sigma(t) - z_\sigma(s) = \int_s^t [D(u)z_\sigma(u) + f(u) + G(u, z_\sigma(\gamma(u)))] du,$$

dado que  $f$  y  $z_\sigma$  son acotadas, por ser  $G(\cdot, x)$  uniformemente casi periódica sobre compactos, podemos definir  $M_2 = \sup_{u \in \mathbb{R}} \{|G(u, z_\sigma(\gamma(u))) + f(u)|\}$ . Así tenemos

$$|z_\sigma(t) - z_\sigma(s)| \leq (\|D\|_1 \|z_\sigma\|_\infty + M_2) |t - s|,$$

lo cual prueba la continuidad uniforme de  $z_\sigma$ .  $\square$

En lo que sigue, determinaremos condiciones que nos aseguren la existencia de una única solución casi-periódica de la ecuación diferencial (A), para luego compararla con  $z_\sigma$  cuando  $\sigma_+ \rightarrow 0$ .

### 2.2.3. Aproximación de Soluciones Acotadas usando DEPCAG

Buscaremos establecer algunos resultados de aproximación para las soluciones acotadas, por tanto también para soluciones casi-periódicas, de la ecuación diferencial (A), usando su análogo discreto que construimos, la ecuación discreta (2.2.4).

Assumiendo la dicotomía exponencial del sistema diferencial (A), expuesta en (H5), podemos considerar la siguiente constante real

$$J_R := \sup_{t \in \mathbb{R}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{G}(t, s)| ds \right). \quad (2.2.25)$$

$J_R \in \mathbb{R}$  ya que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{G}(t, s)| ds \leq \frac{2c}{\alpha}.$$

Consideraremos la siguiente hipótesis

$$(H6)^* : LJ_R < 1.$$

Además  $J_Z \leq J_R$ , por lo tanto, tenemos que (H6)\* implica (H6).

**Definición 2.2.3.** Sea  $\mathcal{UC}(\mathbb{R})$  el conjunto de las funciones reales de variable real uniformemente continuas en  $\mathbb{R}$ . Para  $\phi \in \mathcal{UC}(\mathbb{R})$ , definimos

$$w(\phi, \delta) := \text{máx}\{|\phi(x_1) - \phi(x_2)| : |x_2 - x_1| \leq \delta\}. \quad (2.2.26)$$

**Observación 2.2.2.** Para toda función  $\phi \in \mathcal{UC}(\mathbb{R})$ , se cumple

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} w(\phi, \delta) = 0,$$

ya que esto es equivalente a que, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$|x_2 - x_1| < \delta \implies |\phi(x_1) - \phi(x_2)| < \varepsilon.$$

Lo cual se cumple para toda función uniformemente continua.

**Lema 2.2.6.** [16] Asumiendo (H1), (H2), (H3), (H5), (H6)\*. Tenemos que el sistema (A) tiene una única solución  $y^*$  acotada en  $\mathbb{R}$ , que satisface:

$$y^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(t, s) [f(s) + G(s, y^*(s))] ds.$$

**Lema 2.2.7.** Asumiendo (H1), (H2), (H3), (H5), (H6)\*. La función  $y^*$ , la única acotada en  $\mathbb{R}$  de el sistema (A), es uniformemente continua.

*Demostración.* Al ser  $y^*$  solución de (A), tenemos

$$y^*(t) - y^*(s) = \int_s^t [D(u)y^*(u) + f(u) + G(u, y^*(u))] du.$$

Como  $y^*$  es acotada y  $G(\cdot, x)$  es casi-periódica uniformemente sobre compactos, por ende uniformemente acotada sobre compactos, podemos definir  $M_3 = \sup_{u \in \mathbb{R}} \{|G(u, y)| : |y| \leq \|y^*\|_\infty\}$ . Por lo tanto, tenemos

$$|y^*(t) - y^*(s)| = (\|D\|_1 \|y^*\|_\infty + \|f\|_\infty + M_3) |t - s|,$$

con lo cual concluimos que  $y^*$  es uniformemente continua. □

**Teorema 2.2.2.** Asumiendo (H1) – (H5), (H6)\*, tenemos que

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \left\{ \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\tilde{z}_\sigma(n) - y^*(s_n)|_\infty \right\} = 0.$$

*Demostración.* Primero, por Lemas 2.2.7 tenemos que  $y^* \in \mathcal{UC}(\mathbb{R})$ . De la definición de  $y^*$  y  $z_\sigma$ , tenemos

$$\begin{aligned}
 & |\tilde{z}_\sigma(n) - y^*(s_n)|_1 = \\
 & = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{s_k}^{s_{k+1}} \mathcal{G}(s_n, s) G(s, \tilde{z}_\sigma(k)) ds \right\} - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(s_n, s) G(s, y^*(s)) ds \right|_1 \\
 & = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{s_k}^{s_{k+1}} \mathcal{G}(s_n, s) G(s, \tilde{z}_\sigma(k)) ds \right\} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{s_k}^{s_{k+1}} \mathcal{G}(s_n, s) G(s, y^*(s)) ds \right\} \right|_1 \\
 & = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{s_k}^{s_{k+1}} \mathcal{G}(s_n, s) [G(s, \tilde{z}_\sigma(k)) - G(s, y^*(s))] ds \right\} \right|_1 \\
 & \leq L \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{s_k}^{s_{k+1}} |\mathcal{G}(s_n, s)|_1 |\tilde{z}_\sigma(k) - y^*(s)|_1 ds \right\} \\
 & \leq L \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{s_k}^{s_{k+1}} |\mathcal{G}(s_n, s)|_1 |\tilde{z}_\sigma(k) - y^*(s_k)|_1 ds \right\} \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{s_k}^{s_{k+1}} |\mathcal{G}(s_n, s)|_1 |y^*(s_k) - y^*(s)|_1 ds \right\} \right] \\
 & \leq J_Z L \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\tilde{z}_\sigma(n) - y^*(s_n)|_1 + L \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{s_k}^{s_{k+1}} |\mathcal{G}(s_n, s)|_1 |y^*(s_k) - y^*(s)|_1 ds \right\}
 \end{aligned}$$

Ahora, al ser  $y^*$  uniformemente continua, tenemos que existe  $w(y^*, \sigma_+)$

$$\begin{aligned}
 |\tilde{z}_\sigma(n) - y^*(s_n)|_1 & < J_Z L \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\tilde{z}_\sigma(n) - y^*(s_n)|_1 + w(y^*, \sigma_+) L \sum_{k=-\infty}^{n-1} \left\{ \int_{s_k}^{s_{k+1}} |\mathcal{G}(s_n, s)|_1 ds \right\} \\
 & < J_Z L \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\tilde{z}_\sigma(n) - y^*(s_n)|_1 + w(y^*, \sigma_+) J_Z L.
 \end{aligned}$$

Además de  $(H6)^*$  tenemos  $0 < 1 - LJ_Z$ , luego podemos escribir.

$$\begin{aligned}
 & \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\tilde{z}_\sigma(n) - y^*(s_n)|_1 (1 - J_Z L) \leq w(y^*, \sigma_+) J_Z L \\
 \implies & \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\tilde{z}_\sigma(n) - y^*(s_n)|_1 \leq w(y^*, \sigma_+) \left( \frac{LJ_Z}{1 - J_Z L} \right),
 \end{aligned}$$

y como,  $\lim_{\sigma_+ \rightarrow 0} w(y^*, \sigma_+) = 0$ , tenemos

$$\lim_{\sigma_+ \rightarrow 0} \left\{ \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\tilde{z}_\sigma(n) - y^*(s_n)|_1 \right\} = 0.$$

□



**Teorema 2.2.3.** Para  $z_\sigma(t)$ , tenemos que

$$\lim_{\sigma_+ \rightarrow 0} \left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}} |z_\sigma(t) - y^*(t)|_1 \right\} = 0$$

*Demostración.* Para  $t \in \mathbb{R}$  tenemos que existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que,  $t \in [s_k, s_{k+1})$ . Consideremos la siguiente desigualdad

$$|z_\sigma(t) - y^*(t)|_1 \leq |y^*(t) - y^*(s_k)|_1 + |y^*(s_k) - z_\sigma(s_k)|_1 + |z_\sigma(s_k) - z_\sigma(t)|_1,$$

de esta podemos ver que el teorema es consecuencia directa de la continuidad uniforme de  $z_\sigma(t)$  e  $y^*(t)$  y de Teorema 2.2.2, que nos dice que  $\lim_{\sigma_+ \rightarrow 0} \{ \sup_n |\tilde{z}_\sigma(n) - y^*(s_n)|_1 \} = 0$ .  $\square$

## 2.2.4. Estabilidad Exponencial.

Una solución  $z$  de la DEPCAG (B1), es exponencialmente estable sobre  $[s_0, +\infty)$ , si existe  $\beta \in (0, 1)$  tal que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\rho > 0$  tal que, si  $\tilde{z} = \tilde{z}(t)$  es otra solución de (B1), entonces

$$|z(s_0) - \tilde{z}(s_0)| \leq \rho,$$

implica

$$|z(t) - \tilde{z}(t)| \leq \varepsilon \cdot \beta^t, \quad \text{para todo } t \geq s_0.$$

Además decimos que el sistema (A) es exponencialmente estable si  $P = I$ , es decir, si

$$|\Phi(t, s)| \leq ce^{-\alpha(t-s)} \tag{2.2.27}$$

**Lema 2.2.8.** Para toda  $\tilde{z}(t)$ ,  $z(t)$  soluciones de (B1), existe  $\eta > 0$ , independiente de  $z$  y  $\tilde{z}$ , tal que

$$|z(t) - \tilde{z}(t)| \leq \eta |z(s_k) - \tilde{z}(s_k)|,$$

donde  $t \in [s_k, s_{k+1})$ .

*Demostración.* Directamente de que  $z(t)$  y  $\tilde{z}(t)$  sean soluciones de (B1), tenemos para  $s_k \leq t < s_{k+1}$

$$\begin{aligned} |z(t) - \tilde{z}(t)| &\leq |\Phi(t, s_k)| |z(s_k) - \tilde{z}(s_k)| \\ &\quad + \int_{s_k}^t |\Phi(t, s)| |G(s, z(s_k)) - G(s, \tilde{z}(s_k))| ds \\ &\leq \left\{ |\Phi(t, s_k)| + L \int_{s_k}^t |\Phi(t, s)| ds \right\} |z(s_k) - \tilde{z}(s_k)| \\ &\leq \left\{ ce^{-\alpha(t-s_k)} + \frac{Lc}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(t-s_k)}) \right\} |z(s_k) - \tilde{z}(s_k)|, \end{aligned}$$

luego como  $0 \leq t - s_k < s_{k+1} - s_k \leq \sigma_+$ , tenemos que  $\left\{ ce^{-\alpha(t-s_k)} + \frac{Lc}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(t-s_k)}) \right\}$  es acotada

uniformemente sobre  $t$ , es decir, tenemos que existe  $\eta > 0$ , tal que

$$\left\{ ce^{-\alpha(t-s_k)} + \frac{Lc}{\alpha} \left( 1 - e^{-\alpha(t-s_k)} \right) \right\} < \eta.$$

□

**Teorema 2.2.4.** *Asumiendo (H1), (H2), (H3), (H4). Tenemos que si,*

$$\beta(\sigma) = \left\{ e^{-\alpha\sigma_-} + e^{-\alpha\sigma_-} \frac{Lc}{\alpha} \left( 1 - e^{-\alpha\sigma_+} \right) \right\} < 1,$$

entonces toda  $z(t)$  solución de (B1) es exponencialmente estable.

*Demostración.* Sean  $z(t)$  y  $\tilde{z}(t)$  soluciones de (B1). Luego tenemos que  $z(s_k)$  y  $\tilde{z}(s_k)$  son soluciones de (C), de lo cual, denotando

$$v(k) = |z(s_k) - \tilde{z}(s_k)|,$$

tenemos

$$\begin{aligned} v(k+1) &\leq |\Phi(s_{k+1}, s_k)| v(k) + |\Phi(s_{k+1}, s_k)| \int_{s_k}^{s_{k+1}} |\Phi(s, s_k)| |G(s, z(s_k)) - G(s, \tilde{z}(s_k))| ds \\ &\leq |\Phi(s_{k+1}, s_k)| v(k) + |\Phi(s_{k+1}, s_k)| L |z(s_k) - \tilde{z}(s_k)| \int_{s_k}^{s_{k+1}} |\Phi(s, s_k)| ds \\ &= |\Phi(s_{k+1}, s_k)| v(k) + |\Phi(s_{k+1}, s_k)| Lv(k) \int_{s_k}^{s_{k+1}} |\Phi(s, s_k)| ds \\ &= |\Phi(s_{k+1}, s_k)| \left\{ 1 + L \int_{s_k}^{s_{k+1}} |\Phi(s, s_k)| ds \right\} v(k), \end{aligned}$$

tenemos, por (2.2.27),

$$v(k+1) \leq |\Phi(s_{k+1}, s_k)| \left\{ 1 + L \int_{s_k}^{s_{k+1}} ce^{-\alpha(s-s_k)} ds \right\} v(k) \quad (2.2.28)$$

$$= |\Phi(s_{k+1}, s_k)| \left\{ 1 + \frac{Lc}{\alpha} \left( 1 - e^{-\alpha(s_{k+1}-s_k)} \right) \right\} v(k). \quad (2.2.29)$$

Recordando que  $\sigma_+ = \sup_{n \in \mathbb{Z}} (s_{n+1} - s_n)$ , tenemos

$$1 - e^{-\alpha(s_{k+1}-s_k)} \leq 1 - e^{-\alpha\sigma_+}. \quad (2.2.30)$$

Así por (2.2.29) y (2.2.30),

$$v(k+1) \leq |\Phi(s_{k+1}, s_k)| \left\{ 1 + \frac{Lc}{\alpha} \left( 1 - e^{-\alpha\sigma_+} \right) \right\} v(k). \quad (2.2.31)$$

Procediendo recursivamente en (2.231), obtenemos

$$v(n) \leq |\Phi(s_n, s_0)| \left\{ 1 + \frac{Lc}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\sigma_+}) \right\}^n v(0), \quad \text{para todo } n \geq 0. \quad (2.232)$$

Recordando ahora que definimos  $\sigma_- = \inf_{n \in \mathbb{Z}} (s_{n+1} - s_n)$ ,

$$|\Phi(s_n, s_0)| \leq ce^{-\alpha(s_n - s_0)} \leq ce^{-\alpha\sigma_- n}. \quad (2.233)$$

Así finalmente, por (2.232) y (2.233), tenemos

$$\begin{aligned} v(n) &\leq c \left\{ e^{-\alpha\sigma_-} + e^{-\alpha\sigma_-} \frac{Lc}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\sigma_+}) \right\}^n v(0), \\ &= c[\beta(\sigma)]^n v(0), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Por otro lado, por Lema 2.2.8, sabemos que existe  $\eta > 0$ , tal que  $|z(t) - \tilde{z}(t)| < \eta v(n)$ , para todo  $t \in [s_n, s_{n+1})$ . Por lo tanto

$$v(t) \leq \eta c[\beta(\sigma)]^n v(0).$$

Así para  $\varepsilon > 0$ , tomando  $\rho = \frac{\varepsilon}{\eta c}$ , tenemos:

$$|\tilde{z}(s_0) - z(s_0)| < \rho \Rightarrow |\tilde{z}(t) - z(t)| < \varepsilon[\beta(\sigma)]^n \leq \varepsilon[\beta(\sigma)]^{1/\sigma_-} t,$$

con  $0 < \beta(\sigma) < 1$ , lo cual nos dice que  $z$  es exponencialmente estable.  $\square$

### 2.3. Promedios y Dicotomía Exponencial

Consideremos la ecuación homogénea

$$x'(t) = A(t)x(t),$$

veremos ahora como influyen los promedios de los elemento de la matriz  $A(t)$  en la existencia de una dicotomía exponencial de esta ecuación. Estableceremos una condición sobre los promedios de la matriz casi-periódica  $A(t)$ , que nos asegure la dicotomía exponencial de esta ecuación homogénea.

#### Caso Escalar

Estudiaremos primero el caso escalar, es decir,

$$x'(t) = a(t)x(t), \quad (2.3.1)$$

con  $a \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Si  $\Phi(t)$  denota la matriz fundamental de (2.3.1) con  $\Phi(s_0) = 1$ , entonces

$$\Phi(t) = \exp \left( \int_{s_0}^t a(u) du \right) \quad (2.3.2)$$

**Proposición 2.3.1.** *Sea  $a$  una función casi-periódica, Entonces se cumplen:*

(i) *Sea  $\alpha > 0$ , con  $M\{a\} < -\alpha < 0$ , entonces existe  $c > 0$  tal que*

$$|\Phi(t, s)| \leq ce^{-\alpha(t-s)}, \quad \forall t \geq s.$$

(ii) *Sea  $\alpha > 0$ , con  $M\{a\} > \alpha > 0$ , entonces existe  $c > 0$  tal que*

$$|\Phi(t, s)| \leq ce^{-\alpha(s-t)}, \quad \forall s \geq t.$$

*Demostración.* (i) Si  $M\{a\} < -\alpha < 0$ . Sabemos del Teorema 1.1.5 que para  $M\{a\}$ , se cumple que

$$M\{a\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_s^{t+s} a(u) du,$$

existe uniformemente sobre  $s \in \mathbb{R}$ . Luego

$$M\{a\} = \lim_{t-s \rightarrow \infty} \frac{1}{t-s} \int_s^t a(u) du,$$

uniformemente sobre  $T = t - s$ . Por lo tanto como  $M\{a\} < -\alpha < 0$ , tenemos que existe  $T_0 \in \mathbb{R}$ , tal que si  $t - s \geq T_0$ , entonces

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t-s} \int_s^t a(u) du < -\alpha < 0 \\ \implies & \int_s^t a(u) du < -\alpha(t-s) < 0 \\ \implies & \exp\left(\int_s^t a(u) du\right) < e^{-\alpha(t-s)} \\ \implies & |\Phi(t, s)| < e^{-\alpha(t-s)}. \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Ahora, sea

$$c = \max \left\{ 1, \sup_{0 \leq t-s < T_0} \left( \exp\left(\int_s^t a(u) du\right) e^{\alpha(t-s)} \right) \right\},$$

entonces, si  $0 \leq t - s < T_0$ , tenemos

$$\begin{aligned} & \exp\left(\int_s^t a(u) du\right) e^{\alpha(t-s)} \leq c \\ \implies & \exp\left(\int_s^t a(u) du\right) \leq ce^{-\alpha(t-s)}, \quad \text{si } 0 \leq t - s < T_0. \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Así por (2.3.3) y (2.3.4), tenemos que

$$|\Phi(t, s)| \leq ce^{-\alpha(t-s)}, \quad \forall t \geq s.$$



(ii) Si  $M\{a\} > \alpha > 0$ . Para este caso la demostración es equivalente. Basta considerar que  $\Phi^-(t)$  es matriz fundamental de

$$x'(t) = -a(t)x(t),$$

para el cual tenemos  $M\{-a\} = -M\{a\} < -\alpha < 0$ , pudiendo aplicar lo hecho en (i). □

### Caso Diagonal.

Consideremos ahora un sistema diagonal

$$x'(t) = D(t)x(t) \tag{2.3.5}$$

$D(t) = \text{diag}(d_1(t), \dots, d_q(t))$ , es decir, el sistema

$$\begin{cases} x'_1(t) = d_1(t)x_1(t) \\ \vdots \\ x'_q(t) = d_q(t)x_q(t). \end{cases} \tag{2.3.6}$$

Primero, notemos que para  $\Phi_i(t)$  matriz fundamental de la ecuación

$$x'_i(t) = d_i(t)x_i(t),$$

tenemos,

$$\Phi_i(t) = \exp\left(\int_{s_0}^t d_i(u)du\right).$$

Entonces fácilmente podemos darnos cuenta que  $\Phi(t)$ , la matriz fundamental de (2.3.6), está dada por

$$\Phi(t) = \text{diag}(\Phi_1(t), \dots, \Phi_q(t)). \tag{2.3.7}$$

**Proposición 2.3.2.** Si  $D(t) = \text{diag}(d_1(t), \dots, d_q(t))$ , con  $d_i(t) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , tal que

$$M\{d_i\} \neq 0,$$

para cada  $i = 1, \dots, q$ . Entonces la ecuación (2.3.5) posee una  $(\alpha, c, P)$ -dicotomía exponencial.

*Demostración.* Tenemos  $M\{a_i\} \neq 0$ , luego por Proposición 2.3.1, sabemos que

- Si  $M\{a_i\} < \alpha_1 < 0$ , entonces existe  $c_i \in \mathbb{R}^+$ , tal que

$$|\Phi_i(t, s)| \leq c_i e^{-\alpha_i(t-s)}, \quad \text{si } t \geq s.$$

- Si  $M\{a_i\} > \alpha_i > 0$ , entonces existe  $c_i \in \mathbb{R}^+$ , tal que

$$|\Phi_i(t, s)| \leq c_i e^{-\alpha_i(s-t)}, \quad \text{si } s > t.$$

Definamos

$$\alpha = \min_{1 \leq i \leq q} \{\alpha_i\}, \quad c = \max_{1 \leq i \leq q} \{c_i\},$$

y la matriz proyección, como la matriz diagonal  $P = \text{diag}(p_1, \dots, p_q)$ , donde

$$p_i = \begin{cases} 1, & \text{si } M\{a_i\} < 0 \\ 0, & \text{si } M\{a_i\} > 0. \end{cases}$$

Con estos  $\alpha, c$  y proyección  $P$ , se cumple que

$$|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)|_1 \leq ce^{-\alpha(t-s)}, \quad \text{si } t \geq s$$

$$|\Phi(t)(I - P)\Phi^{-1}(s)|_1 \leq ce^{-\alpha(s-t)}, \quad \text{si } t > s.$$

Es decir, (2.3.6) posee una  $(\alpha, c, P)$ -dicotomía exponencial.  $\square$

Este último resultado, nos asegura la existencia de una dicotomía exponencial para un sistema diagonal casi-periódico pidiendo que los promedios de los elementos de la matriz sean distintos de cero. Esto será de gran relevancia en lo que viene, donde estudiaremos sistemas tipo CNN (Cellular Neural Network), cuyas partes lineales son sistemas diagonales.

---

## Capítulo 3

# Sistemas Tipo CNN

### 3.1. Introducción

Los sistemas CNN ( “*Celular Neural Network*” ) fueron introducidos por Chua y Yang en 1988, un breve resumen de teoría y aplicaciones de CNNs se pueden encontrar en los artículos referidos [11, 12]. Nosotros estudiaremos un sistema CNN consistente de  $m$  células interconectadas, que está descrito por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\boxed{\frac{dx_i(t)}{dt} = -a_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^m b_{ij}(t)f_j(x_j(t)) + E_i(t), \quad i = 1, \dots, m.} \quad (A^*)$$

donde  $x_i(t)$  denota el potencial de la célula  $i$  en el tiempo  $t$ ,  $a_i(t)$  denota la rapidez con la cual la célula  $i$  restaura su potencial al estar aislada,  $f_i(\cdot)$  denota un output no-lineal,  $b_{ij}(t)$  denota la fuerza de conectividad entre la  $j$ -ésima y la  $i$ -ésima células y  $E_i(t)$  denota el  $i$ -ésimo componente de una entrada externa al sistema sobre la  $i$ -ésima célula.

Cellular neural networks han sido de mucha utilidad en diversas áreas, como procesamiento de señales, procesamiento de imágenes, memorias asociativas, reconocimiento de patrones. Su gran aplicabilidad ha despertado el interés de muchos autores, lo que ha generado un amplio estudio de este tipo de sistemas. En particular, en la literatura existente nos encontramos con amplios resultados sobre el problema de la existencia y estabilidad de soluciones periódicas y casi-periódicas de CNNs. Podemos referir en el caso periódico [8, 10] y en el caso casi-periódico [9, 23, 28, 36].

Dada  $\sigma = \{s_i\}_{i=-\infty}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$  una sucesión equipotencialmente casi-periódica con  $s_i \leq s_{i+1}$  y

$$\lim_{i \rightarrow \pm\infty} s_i = \pm\infty,$$

definimos la función escalonada  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$\gamma(t) = s_i, \quad \text{si } t \in J_i = [s_i, s_{i+1}).$$

En este capítulo estudiaremos la siguiente DEPCAG

$$\boxed{\frac{dy_i(t)}{dt} = -a_i(t)y_i(t) + \sum_{j=1}^m b_{ij}(t)f_j(y_j(\gamma(t))) + E_i(t), \quad i = 1, \dots, m.} \quad (B1^*)$$

En la literatura también nos encontramos, por ejemplo, con el estudio de

$$\boxed{\frac{dz_i(t)}{dt} = -a_i(\gamma(t))z_i(t) + \sum_{j=1}^m b_{ij}(\gamma(t))f_j(z_j(\gamma(t))) + E_i(\gamma(t)), \quad i = 1, \dots, m.} \quad (B2^*)$$

Z. Huang et al. [21] en 2006 estudia la ecuación (B2\*) para el caso  $\gamma(t) = [t]$ , es decir, la ecuación

$$\frac{dz_i(t)}{dt} = -a_i([t])z_i(t) + \sum_{j=1}^m b_{ij}([t])f_j(z_j([t])) + E_i([t]),$$

obteniendo condiciones suficientes de existencia y atractividad global de soluciones casi-periódicas. Huang et al. hace mención en su artículo al hecho que esta DEPCA posee la característica de poder ser vista como una aproximación de una solución del sistema CNN continuo ( $A^*$ ). Posteriormente, el mismo Huang et al. [22] obtiene condiciones suficientes para la existencia de una única solución casi-periódica y exponencialmente atractiva de (B1\*), considerando  $\gamma(t) = [t/\delta] \delta$ , es decir, la DEPCA

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = -a_i(t)y_i(t) + \sum_{j=1}^m b_{ij}(t)f_j\left(y_j\left(\left[\frac{t}{\delta}\right] \delta\right)\right) + E_i(t).$$

Nosotros obtendremos resultados análogos y mucho más generales a los de Huang et al. [21, 22] mejorando los resultados, hecho que más adelante detallaremos, y considerando  $\gamma(t)$  como una función constante a trozos de tipo general, esto lo conseguiremos valiéndonos de los resultados obtenidos en el Capítulo 2. Por lo tanto, lo primero es notar que nuestro sistema CNN ( $A^*$ ) es un ecuación diferencial tipo (A) vista en el Capítulo 2, de hecho si consideramos

- Las funciones matriciales  $A, B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}^{m \times m}$ , dadas por

$$A(t) = \text{diag}(-a_1(t), \dots, -a_m(t)), \quad B(t) = (b_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq m}.$$

- La función  $f, E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , definidas como

$$f(x) = (f_1(x_1), \dots, f_m(x_m))^T, \quad E(t) = (E_1(t), \dots, E_m(t)).$$

- Y la función  $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,

$$G(t, x) = B(t)f(x),$$

tenemos que ( $A^*$ ) es equivalente a

$$x'(t) = A(t)x(t) + G(t, x(t)) + E(t). \quad (3.1.1)$$



Por lo tanto, los resultados que obtuvimos en el Capítulo 2, para el sistema diferencial (A), la DEPCAG (B1) y el sistema discreto (C) son aplicables al sistema CNN ( $A^*$ ), la DEPCA ( $B1^*$ ) y el análogo discreto del sistema CNN que obtenemos procediendo de igual forma como lo hicimos para obtener la ecuación discreta (C), para las cuales obtendremos condiciones suficientes para asegurar la existencia de una única solución casi-periódica.

### 3.2. Estudio de DEPCAG ( $B1^*$ )

Reescribamos la DEPCA ( $B1^*$ )

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = -a_i(t)y_i(t) + \sum_{j=1}^m b_{ij}(t)f_j(y_j(\gamma(t))) + E_i(t).$$

Sea  $\Phi(t)$  la matriz fundamental de la parte lineal de la (3.1.1), con  $\Phi(s_0) = I$ . Como la parte lineal de (3.1.1) es diagonal, tenemos que  $\Phi(t)$  es la matriz diagonal dada por

$$\Phi(t) = \exp\left(\int_{s_0}^t A(u)du\right) = \text{diag}(\Phi_1(t), \dots, \Phi_m(t)),$$

donde  $\Phi_i(t) = e^{-\int_{s_0}^t a_i(u)du}$ . Y procediendo como es necesario, es decir, resolviendo esta ecuación en cada intervalo  $J_k$  y usando la recurrencia que se nos forma en los extremos de estos intervalos obtenemos nuestro análogo discreto para el sistema CNN, la siguiente ecuación en diferencias

$$y(s_{k+1}) = \Phi(s_{k+1}, s_k)y(s_k) + \int_{s_k}^{s_{k+1}} \Phi(s_{k+1}, s)\{G(s, y(s_k)) + E(s)\}ds. \quad (C1^*)$$

Miremos también como se ve por coordenadas

$$y_i(s_{k+1}) = e^{-\int_{s_k}^{s_{k+1}} a_i(u)du} y_i(s_k) + \int_{s_k}^{s_{k+1}} e^{-\int_s^{s_{k+1}} a_i(u)du} \left( \sum_{j=1}^m b_{ij}(s)f_j(y_j(s_k)) + E_i(s) \right) ds \quad (3.2.1)$$

Podemos ver que (C1\*) es equivalente a la ecuación (C), que estudiamos en el capítulo anterior. A continuación determinaremos las condiciones que deben cumplir los elementos del sistema continuo ( $A^*$ ) para que su análogo discreto (C1\*) cumpla las hipótesis del Teorema 2.2.1, que nos garantiza la existencia de una única solución casi-periódica.

#### 3.2.1. Condiciones para la Existencia de una Única Solución Casi Periódica

Estableceremos las siguientes hipótesis para nuestro sistema CNN ( $A^*$ ), bajo las cuales podremos asegurar la existencia de una única solución casi-periódica del análogo discreto que construimos, veamos.

(H1)<sub>cn</sub>: Para cada  $i = 1, \dots, m$ ,  $a_i(t) \in AP(\mathbb{R})$  y además existen  $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$ , tales que para el promedio  $M\{a_i\}$ , se tiene  $0 < \alpha_i < M\{a_i\}$ .

(H2)<sub>cnn</sub> :  $b_{ij}(t), E_i(t) \in AP(\mathbb{R})$ , para cada  $i, j = 1, \dots, m$

(H3)<sub>cnn</sub> :  $f_j(t)$  es Lipschitz , es decir, existe  $l_j > 0$  tal que  $|f_j(x) - f_j(y)| \leq l_j|x - y|$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ , para cada  $j = 1, \dots, m$ .

(H4)<sub>cnn</sub> : La sucesión  $\sigma = \{s_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  es equipotencialmente casi-periódica.

(H5)<sub>cnn</sub> : Para

$$J_Z = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{s_n} |\Phi(s_n, u)|_1 du, \quad L = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m \|b_{ij}\|_{\infty} l_j,$$

se cumple que

$$J_Z L < 1.$$

**Teorema 3.2.1.** *Asumiendo (H1)<sub>cnn</sub> – (H5)<sub>cnn</sub>. El sistema discreto (C1\*), posee una única solución casi-periódica  $y_{\sigma}(s_n)$ , la cual satisface la siguiente relación*

$$y_{\sigma}(s_n) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} \left( \int_{s_k}^{s_{k+1}} \Phi(s_n, s) [G(s, y_{\sigma}(s_k)) + E(s)] ds \right). \quad (3.2.2)$$

Por coordenadas

$$y_{i\sigma}(s_n) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} \left( \int_{s_k}^{s_{k+1}} e^{-\int_s^{s_n} a_i(u) du} \left[ \sum_{j=1}^m b_{ij}(s) f_j(y_{j\sigma}(s_k)) + E_i(s) \right] ds \right). \quad (3.2.3)$$

*Demostración.* Separaremos la demostración en 4 puntos, en los cuales verificaremos que (C1\*) satisface las hipótesis del Teorema 2.2.1.

1. Asumiendo (H1)<sub>cnn</sub>, la Proposición 2.3.2 nos dice que existen  $\alpha, c \in \mathbb{R}^+$ , tales que:

$$|\Phi(t, s)|_1 \leq ce^{-\alpha(t-s)}, \quad \text{para todo } t > s, \quad (3.2.4)$$

es decir, tenemos que el sistema (3.1.1) es exponencialmente estable, es decir, tiene una  $(\alpha, c, P)$ -dicotomía exponencial, con  $P = I$ . Además, tenemos que

$$\alpha = \min_{1 \leq i \leq m} \{M(a_i)\}.$$

2. Asumiendo (H2)<sub>cnn</sub>, claramente tenemos que  $B(t) \in AP(\mathbb{R})$ .



3. Veamos que asumiendo  $(H3)_{cnn}$ , tenemos que  $G(t, \cdot)$  es Lipschitz. Para  $x, y \in \mathbb{R}^m$  se cumple

$$\begin{aligned} G(t, x) - G(t, y) &= B(t)f(x) - B(t)f(y) \\ &= \sum_{j=1}^m b_{ij}(t)f_j(x_j) - \sum_{j=1}^m b_{ij}(t)f_j(y_j) \\ &= \sum_{j=1}^m b_{ij}(t)[f_j(x_j) - f_j(y_j)], \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \|G(\cdot, x) - G(\cdot, y)\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq m} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \sum_{j=1}^m b_{ij}(t)[f_j(x_j) - f_j(y_j)] \right| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m \|b_{ij}(\cdot)\|_\infty l_j |x_j - y_j| \\ &\leq \|x - y\|_\infty \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m \|b_{ij}(\cdot)\|_\infty l_j \end{aligned}$$

Esto nos dice que  $G(t, \cdot)$  es  $L$ -Lipschitz, con  $L = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m \|b_{ij}(\cdot)\|_\infty l_j$ .

4. Sea  $W \subset \mathbb{R}^m$  compacto. Como  $f$  es una función continua, tenemos que es acotada sobre compactos, es decir,

$$M = \sup\{|f(x)|_\infty : x \in W\} \in \mathbb{R}.$$

Sea  $\varepsilon > 0$ , para  $\tau \in T(B(t), \varepsilon)$  tenemos

$$|G(t + \tau, x) - G(t, x)| = |B(t + \tau)f(x) - B(t)f(x)| \leq M|B(t + \tau) - B(t)|,$$

es decir, tenemos que  $G(\cdot, x)$  es casi-periódica uniformemente sobre  $x \in W$ , con  $W$  compacto.

5. La condición  $(H4)_{cnn}$  es idéntica a la condición  $(H4)$ .

6. Por último, la hipótesis  $(H5)_{cnn}$  nos asegura la condición de contractividad exigida en  $(H6)$ .

□

Por lo tanto  $y_\sigma(s_n)$  es la única solución casi-periódica de la ecuación discreta  $(C1^*)$ .

**Definición 3.2.1.** Denotaremos como  $y_\sigma(s_n)$  a la solución casi periódica de (2.2.4) dada por el Teorema 3.2.1 y llamaremos  $y_\sigma^*(t)$  a la solución de  $(B1^*)$  definida por esta sucesión casi-periódica, es decir,  $y_\sigma^*(s_n) = y_\sigma(s_n)$ .

Recordemos

$$\sigma_- = \inf_{n \in \mathbb{Z}} (s_{n+1} - s_n), \quad \sigma_+ = \sup_{n \in \mathbb{Z}} (s_{n+1} - s_n),$$

ya que juegan un papel importante en la estabilidad de las soluciones de (C1\*) que establecemos en el siguiente Teorema, que es consecuencia directa del Teorema 2.2.4 de estabilidad exponencial.

**Teorema 3.2.2.** *Asumiendo  $(H1)_{cnn}$ - $(H5)_{cnn}$ . Tenemos que si,*

$$\beta(\sigma) = \left\{ e^{-\alpha\sigma_-} + e^{-\alpha\sigma_-} \frac{Lc}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\sigma_+}) \right\} < 1,$$

*entonces toda  $y(t)$  solución de  $(B1^*)$  y toda solución  $y(s_n)$  de  $(C1^*)$  son exponencialmente estables.*

Tenemos como corolario de los teoremas Teorema 3.2.1 de existencia y Teorema 3.2.6 de estabilidad, el caso particular considerando

$$\gamma(t) = \left[ \frac{t}{\delta} \right] \delta,$$

esto ya que sabemos que para  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $s_n = n\delta$  es equipotencialmente casi-periódica y

$$\gamma(t) = n\delta, \quad \text{si } t \in [n\delta, (n+1)\delta).$$

Por lo tanto, los teoremas antes mencionados son aplicables para  $\gamma(t) = \left[ \frac{t}{\delta} \right] \delta$ , para la cual tenemos

$$\sigma_- = \sigma_+ = \delta,$$

**Corolario 3.2.1.** *Asumiendo  $(H1)_{cnn} - (H3)_{cnn}, (H5)_{cnn}$  y*

$$\gamma(t) = \left[ \frac{t}{\delta} \right] \delta.$$

Luego, tenemos que la ecuación discreta (C1\*) tiene una única solución casi-periódica, la cual satisface

$$y_\delta(n\delta) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} \left( \int_{k\delta}^{(k+1)\delta} \Phi(n\delta, s) [G(s, y_\delta(k\delta)) + E(s)] ds \right). \quad (3.2.5)$$

Además, si se cumple

$$\left\{ e^{-\alpha\delta} + e^{-\alpha\delta} \frac{Lc}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\delta}) \right\} < 1, \quad (3.2.6)$$

tenemos que la solución  $y_\delta$  es exponencialmente estable. Notemos que la condición (3.2.6) es equivalente a

$$\frac{Lc}{\alpha} < 1.$$

**Observación 3.2.1.** *El Corolario 3.2.1 nos entrega un resultado mucho más general al obtenido por Huang et al. [22],*

1. *Los resultados de existencia y estabilidad en [22] se obtienen bajo la exigencia de que  $f(t)$  de  $(A^*)$  sea una función acotada y  $f(0) = 0$ , exigencias que no fueron necesarias en nuestras demostraciones.*



2. En Huang et al. [22] se pide  $\inf_{t \in \mathbb{R}} \{a_i(t)\} > 0$  para todo  $i = 1, \dots, m$ . Nosotros obtenemos nuestro resultado pidiendo que el promedio  $M\{a_i(t)\}$  de  $a_i(t)$  sea positivo para todo  $i = 1, \dots, m$ , lo cual es menos exigente, ya que

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} \{a_i(t)\} > 0 \implies M\{a_i\} > 0,$$

pero

$$M\{a_i\} > 0 \not\Rightarrow \inf_{t \in \mathbb{R}} \{a_i(t)\} > 0$$

3. Si se considera  $\inf_{t \in \mathbb{R}} \{a_i(t)\} > 0$ , tenemos que las constantes  $c, \alpha$  en (2.2.27), están dadas por

$$c = 1, \quad \alpha = \max_{i=1, \dots, m} [M\{a_i\}].$$

Por lo tanto, nuestra condición de estabilidad exponencial en Corolario 3.2.1 sería

$$\left\{ e^{-\alpha\delta} + e^{-\alpha\delta} \frac{L}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\delta}) \right\} < 1.$$

Además tenemos

$$\frac{e^{-\alpha\delta}}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\delta}) \leq \delta,$$

luego

$$\left\{ e^{-\alpha\delta} + e^{-\alpha\delta} \frac{L}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\delta}) \right\} \leq \left\{ e^{-\alpha\delta} + \delta L \right\}.$$

Por último dado que

$$0 < a_{i^*} = \inf_{t \in \mathbb{R}} \{a_i(t)\} \leq M\{a_i\}, \quad \text{para cada } i = 1, \dots, m,$$

y recordando que

$$L = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m \|b_{ij}\|_{\infty} l_j,$$

tenemos

$$\begin{aligned} \left\{ e^{-\alpha\delta} + e^{-\alpha\delta} \frac{L}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\delta}) \right\} &\leq \left\{ e^{-\alpha\delta} + \delta \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m \|b_{ij}\|_{\infty} l_j \right\} \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ e^{-a_{i^*}\delta} + \delta \sum_{j=1}^m \|b_{ij}\|_{\infty} l_j \right\}, \end{aligned}$$

esto último nos dice que nuestra condición es menos exigente que la de Huang et al [22], que es

$$\max_{1 \leq i \leq m} \left\{ e^{-a_{i^*}\delta} + \delta \sum_{j=1}^m \|b_{ij}\|_{\infty} l_j \right\} < 1.$$

Diferencia no menor, ya que en general se cumple que  $\inf_{t \in \mathbb{R}} \{a_i(t)\}$  es mucho más pequeño que  $M\{a_i\}$ , lo que hace que nuestra condición sea mejor que de Huang et al.

### 3.2.2. Aproximación de Soluciones Acotadas de CNN usando DEPCAG

Ahora veremos los teoremas de aproximación vistos en el Capítulo 2 para nuestro sistema CNN  $(A^*)$ . Primero, consideremos las siguientes constantes

$$J_R = \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^t |\Phi(t, u)|_1 du, \quad L = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m \|b_{ij}\|_{\infty} l_j,$$

para las cuales introducimos la hipótesis

$$(H5)_{cnn}^* : J_R L < 1.$$

**Lema 3.2.1.** *Asumiendo  $(H1)_{cnn} - (H4)_{cnn}, (H5)_{cnn}^*$ , tenemos que el sistema CNN continuo  $(A^*)$  tiene una única solución acotada en  $\mathbb{R}$ , que satisface:*

$$x^*(t) = \int_{-\infty}^t \Phi(t, s) [G(u, x^*(u)) + E(u)] du$$

Para  $x^*(t)$  tenemos el siguiente Lema, que nos garantiza que  $y_{\sigma}(s_n)$  estará tan cerca como queramos de  $x^*(s_n)$ , si  $\sigma_+$  es lo suficientemente pequeño.

**Teorema 3.2.3.** *Asumiendo  $(H1)_{cnn} - (H4)_{cnn}, (H5)_{cnn}^*$ , tenemos que*

$$\lim_{\sigma_+ \rightarrow 0} \left\{ \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x^*(s_n) - y_{\sigma}(s_n)|_1 \right\} = 0.$$

Además, si utilizamos la solución  $y_{\sigma}^*(t)$  de la DEPCAG (3.1.1), tenemos que nuestra aproximación es uniforme sobre todo  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 3.2.4.** *Asumiendo  $(H1)_{cnn} - (H4)_{cnn}, (H5)_{cnn}^*$ , tenemos que*

$$\lim_{\sigma_+ \rightarrow 0} \left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}} |x^*(t) - y_{\sigma}^*(t)|_1 \right\} = 0.$$

El Teorema 3.2.4, nos muestra como en el caso acotado las soluciones de la DEPCAG  $(B1^*)$  aproximan la solución acotada del sistema CNN continuo  $(A^*)$ . En la siguiente simulación quedará ilustrado este resultado teórico.

### 3.2.3. Simulación

En nuestro estudio hemos obtenido resultados que nos aseguran que la solución acotada de la ecuación discreta (C1\*) es una aproximación de la solución acotada del sistema continuo (A\*). Ejemplificaremos este hecho con un sistema de 2 células interconectadas. Primero mostraremos que el sistema que expondremos satisface las hipótesis necesarias para la existencia de una única solución casi-periódica exponencialmente estable, para luego simular un problema de valor inicial que nos permitirá ver la aproximación y como el sistema discreto (C1\*) conserva la dinámica del sistema continuo (A\*).

**Ejemplo 1.** Consideremos el siguiente sistema CNN casi-periódico

$$\begin{cases} x_1'(t) = -a_1(t)x_1(t) + b_{11}(t)f_1(x_1(t)) + b_{12}(t)f_2(x_2(t)) + E_1(t), \\ x_2'(t) = -a_2(t)x_2(t) + b_{21}(t)f_1(x_1(t)) + b_{22}(t)f_2(x_2(t)) + E_2(t), \end{cases} \quad (3.2.7)$$

donde

$$\begin{aligned} a_1(t) &= 2 + \sin(\sqrt{3}t), & a_2(t) &= 4 + \cos(t); \\ b_{11}(t) &= 0,5 \sin(t), & b_{12}(t) &= 0,3 \cos(t) \\ b_{21}(t) &= 0,3 \sin(\sqrt{2}t) + 0,2 \sin(t), & b_{22}(t) &= \sin(t); \\ E_1(t) &= 2 \sin(\sqrt{2}t), & E_2(t) &= \cos(\sqrt{3}t), \end{aligned}$$

y tomaremos  $f_1(x) = f_2(x) = \tanh(x)$ , función 1-Lipschitz.

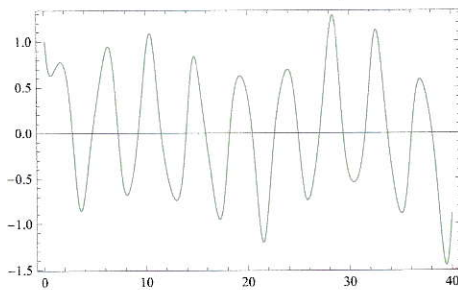


Figura 3.1: Solución  $x_1$  de (3.2.7)

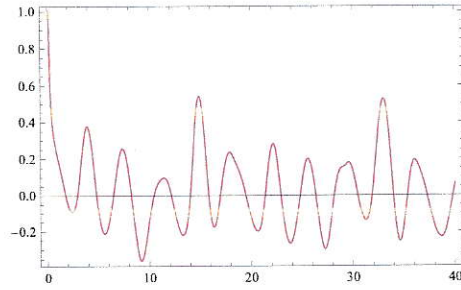


Figura 3.2: Solución  $x_2$  de (3.2.7)

Construiremos nuestro sistema discreto análogo usando la función escalonada

$$\gamma(t) = s_n,$$

con  $s_n = n\delta$ , donde  $\delta > 0$ , es decir,

$$\gamma(t) = \delta \left[ \frac{t}{\delta} \right].$$

Así nuestro análogo discreto está dado por

$$y_i((n+1)\delta) = e^{-\int_{n\delta}^{(n+1)\delta} a_i(u)du} y_i(n\delta) + \int_{n\delta}^{(n+1)\delta} e^{-\int_s^{(n+1)\delta} a_i(u)du} \left( \sum_{j=1}^2 b_{ij}(s) f_j(y_j(n\delta)) + E_i(s) \right) ds \quad (3.2.8)$$

Como la función  $\tanh(x)$  es Lipschitz, con constante de Lipschitz 1, tenemos  $l_i = 1$ , por lo tanto:

$$L = \max_{1 \leq i \leq 2} \sum_{j=1}^2 \|b_{ij}\|_{\infty} l_j = \max\{0,8; 1,5\} = 1,5.$$

Además, los promedios de  $a_1$  y  $a_2$  son

$$M\{a_1\} = 2, \quad M\{a_2\} = 4.$$

Luego,  $\alpha = 2$  y para  $J_Z$  tenemos

$$J_Z = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{s_n} |\Phi(s_n, u)|_1 du \leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{n\delta} e^{-2(n\delta-u)} du = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto,  $J_Z L < \frac{1,5}{2} < 1$ . Así, por Corolario 3.2.1, tenemos que existe una única solución casi periódica del sistema discreto (3.2.8). Además, como

$$\frac{L}{\alpha} = \frac{1,5}{2} < 1 \implies \left\{ e^{-\alpha\delta} + e^{-\alpha\delta} \frac{L}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\delta}) \right\} < 1,$$

por Corolario 3.2.1, tenemos que esta única solución casi-periódica de (3.2.8) es exponencialmente estable.

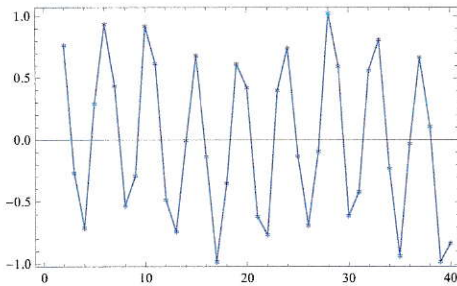


Figura 3.3: Sucesión solución  $y_1$  de (3.2.8), para  $\delta = 1$

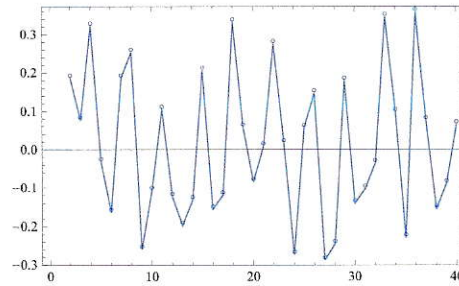


Figura 3.4: Sucesión solución  $y_2$  de (3.2.8) para  $\delta = 1$

Las figuras que presentamos a continuación nos permiten comparar las trayectorias del sistema continuo (3.2.7) y el sistema discreto (3.2.8), ello nos mostrará como el análogo discreto construido preserva la dinámica del comportamiento del sistema continuo. Se verá reflejado que tomar valores más pequeños para  $\delta$  garantiza una mejor aproximación del sistema continuo. En la figura (3.3) y la figura (3.4) vemos el comportamiento de las soluciones  $y_1$ ,  $y_2$  del sistema discreto (3.2.8) tomando  $\delta = 1$ . Se puede observar en los gráficos comparativos de las figuras (3.5), (3.6) como ya tomando



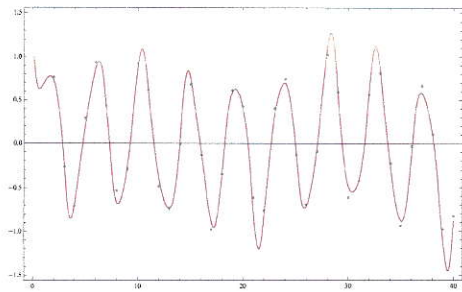


Figura 3.5: Comparación soluciones  $x_1$  y  $y_1$  para  $\delta = 1$

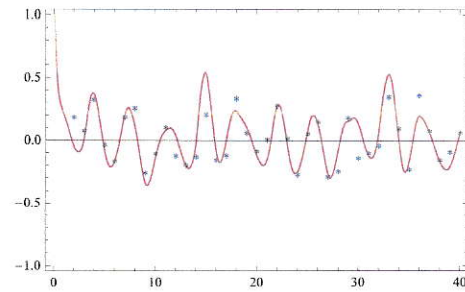


Figura 3.6: Comparación soluciones  $x_2$  y  $y_2$  para  $\delta = 1$

$\delta = 1$  la trayectoria del sistema discreto se acerca a la trayectoria del sistema continuo.

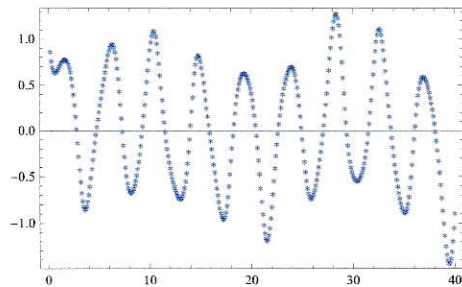


Figura 3.7: Sucesión solución  $y_1$  de (3.2.8), para  $\delta = 0,1$

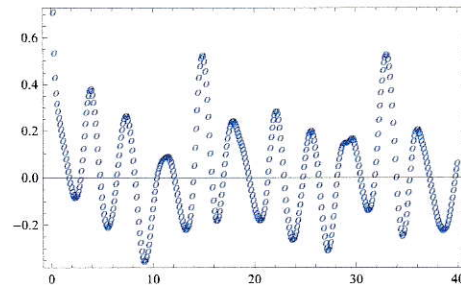


Figura 3.8: Sucesión solución  $y_2$  de (3.2.8), para  $\delta = 0,1$

Como es de esperar, por nuestros resultados teóricos, el tomar un valor más pequeño de  $\delta$  nos entrega una aproximación más precisa. Podemos apreciar este hecho en los gráficos comparativos de las figuras (3.9), (3.10), en donde se considera  $\delta = 0,1$  para el sistema discreto (3.2.8).

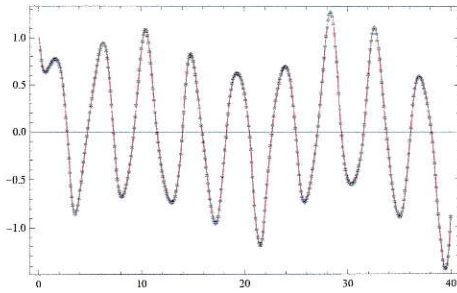


Figura 3.9: Comparación soluciones  $x_1$  e  $y_1$  para  $\delta = 0,1$

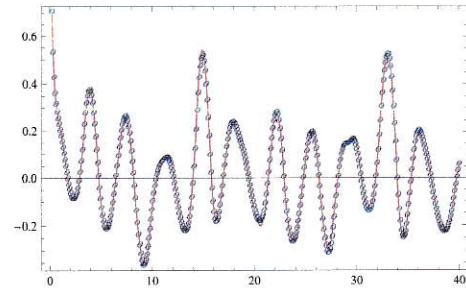


Figura 3.10: Comparación soluciones  $x_2$  e  $y_2$  para  $\delta = 0,1$

**Ejemplo 2.** Consideremos el siguiente sistema CNN casi-periódico

$$\begin{cases} x'_1(t) = -a_1(t)x_1(t) + b_{11}(t)f_1(x_1(t)) + b_{12}(t)f_2(x_2(t)) + E_1(t), \\ x'_2(t) = -a_2(t)x_2(t) + b_{21}(t)f_1(x_1(t)) + b_{22}(t)f_2(x_2(t)) + E_2(t), \end{cases} \quad (3.2.9)$$

donde

$$\begin{aligned} a_1(t) &= 1 + \sin(\sqrt{3}t), & a_2(t) &= 1 + \cos(t); \\ b_{11}(t) &= 0,2 \sin(t), & b_{12}(t) &= 0,3 \cos(t) \\ b_{21}(t) &= 0,1 \sin(\sqrt{2}t) + 0,2 \cos(t), & b_{22}(t) &= \frac{1}{2} \sin(t); \\ E_1(t) &= 2 \cos(\sqrt{2}t), & E_2(t) &= 5 \cos(\sqrt{3}t), \end{aligned}$$

y tomaremos  $f_1(x) = f_2(x) = \ln(x^2 + 1)$ , función 1-Lipschitz no acotada. Construiremos nuestro

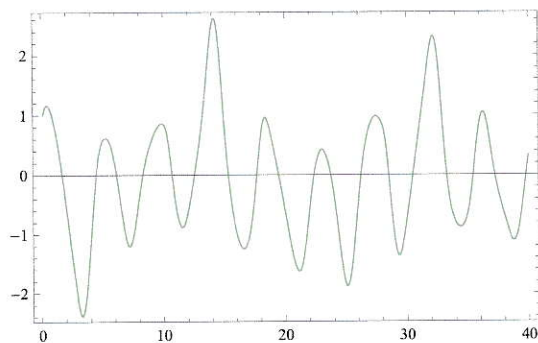


Figura 3.11: solución  $x_1$  de (3.2.9)

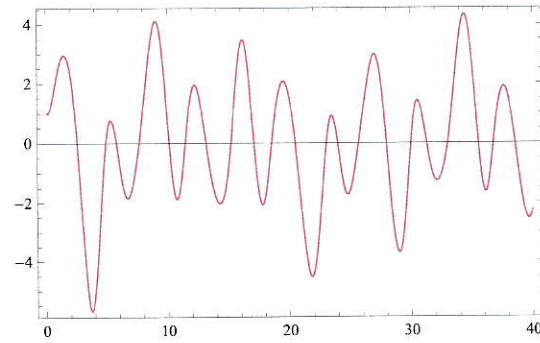


Figura 3.12: Solución  $x_2$  de (3.2.9)

sistema discreto análogo usando la función escalonada

$$\gamma(t) = s_n,$$

con  $s_n = n\delta$ , donde  $\delta > 0$ , es decir,

$$\gamma(t) = \delta \left[ \frac{t}{\delta} \right].$$

Así nuestro análogo discreto está dado por

$$y_i((n+1)\delta) = e^{-\int_{n\delta}^{(n+1)\delta} a_i(u) du} y_i(n\delta) + \int_{n\delta}^{(n+1)\delta} e^{-\int_s^{(n+1)\delta} a_i(u) du} \left( \sum_{j=1}^2 b_{ij}(s) f_j(y_j(n\delta)) + E_i(s) \right) ds \quad (3.2.10)$$

Como la función  $\ln(x^2 + 1)$  es Lipschitz, con constante de Lipschitz 1, tenemos  $l_i = 1$ , por lo tanto:

$$L = \max_{1 \leq i \leq 2} \sum_{j=1}^2 \|b_{ij}\|_{\infty} l_j = \max\{0,5; 0,8\} = 0,8.$$

Además, los promedios de  $a_1$  y  $a_2$  son

$$M\{a_1\} = 1, \quad M\{a_2\} = 1.$$

Luego,  $\alpha = 1$  y para  $J_Z$  tenemos

$$J_Z = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{s_n} |\Phi(s_n, u)|_1 du \leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{n\delta} e^{-(n\delta-u)} du = 1.$$

Por lo tanto,  $J_Z L < 0,8$ . Así, por Corolario 3.2.1, tenemos que existe una única solución casi periódica del sistema discreto (3.2.8). Además, como

$$\frac{L}{\alpha} = \frac{0,8}{1} < 1 \implies \left\{ e^{-\alpha\delta} + e^{-\alpha\delta} \frac{L}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\delta}) \right\} < 1,$$

por Corolario 3.2.1, tenemos que esta única solución casi-periódica de (3.2.10) es exponencialmente estable.

A continuación vemos, que al igual como ocurrió en el ejemplo 1, tenemos que el sistema discreto conserva la dinámica del sistema continuo. Podemos ver también que el tomar un valor más pequeño para  $\delta$ , significa obtener una mayor semejanza entre las soluciones del sistema discreto y continuo. En particular tomamos, primero  $\delta = 1$  y luego  $\delta = 0,1$

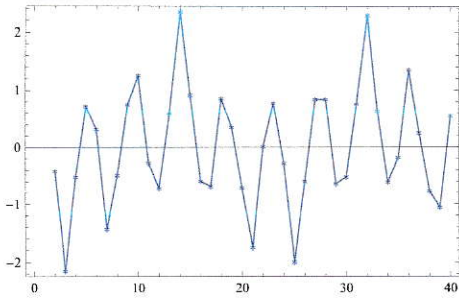


Figura 3.13: Sucesión solución  $y_1$  de (3.2.10), para  $\delta = 1$

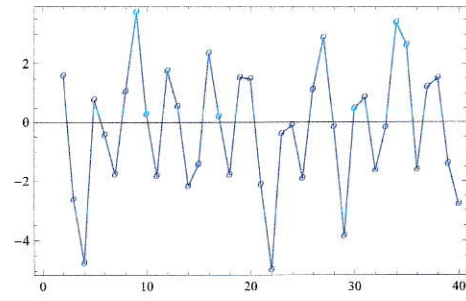


Figura 3.14: Sucesión solución  $y_2$  de (3.2.10), para  $\delta = 1$

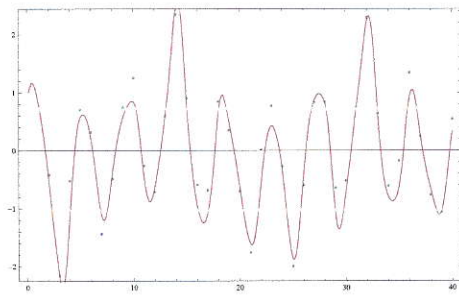


Figura 3.15: Comparación soluciones  $x_1$  y  $y_1$  para  $\delta = 1$

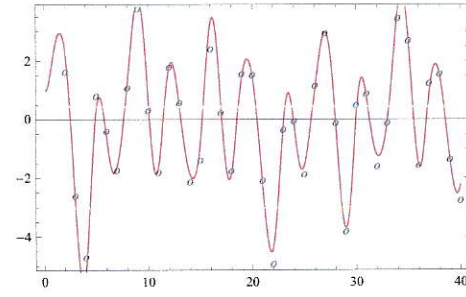


Figura 3.16: Comparación soluciones  $x_2$  y  $y_2$  para  $\delta = 1$

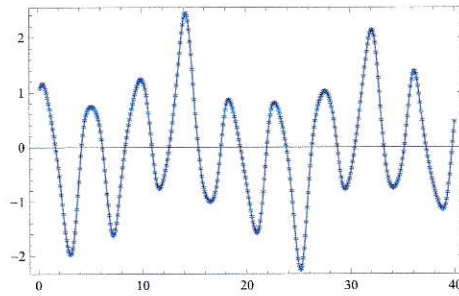


Figura 3.17: Sucesión solución  $y_1$  de (3.2.10), para  $\delta = 0,1$

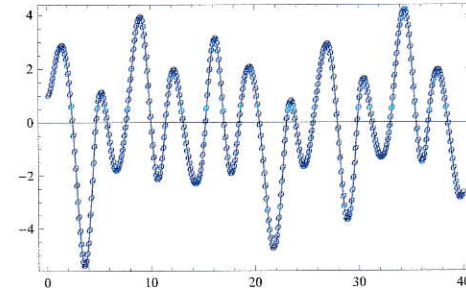


Figura 3.18: Sucesión solución  $y_2$  de (3.2.10), para  $\delta = 0,1$

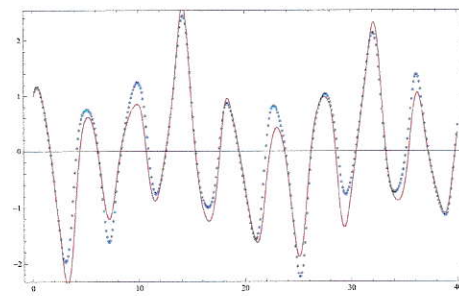


Figura 3.19: Comparación soluciones  $x_1$  e  $y_1$  para  $\delta = 0,1$

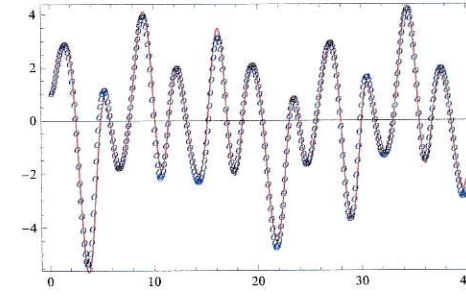


Figura 3.20: Comparación soluciones  $x_2$  e  $y_2$  para  $\delta = 0,1$



---

# Bibliografía

- [1] A. R. Aftabzadeh, J. Wiener, y J. M. Xu. Oscillatory and periodic solutions of delay differential equations with piecewise constant argument. *Proc. Amer. Math. Soc.*, págs. 99–673, 1987.
- [2] M. U. Akhmet. Integral manifolds of differential equations with piecewise constant argument of generalized type. *Nonlinear Analysis TMA*, 66 (2):367–383, 2007.
- [3] M. U. Akhmet. On the reduction principle for differential equations with piecewise constant argument of generalized type. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 336:646–663, 2007.
- [4] M. U. Akhmet. Almost periodic solutions of differential equations with piecewise constant argument of generalized type. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2:456–467, 2008.
- [5] M. U. Akhmet. Stability of differential equations with piecewise constant arguments of generalized type. *Nonlinear Analysis*, 68:794–803, 2008.
- [6] M. U. Akhmet y C. Büyükdalı. On periodic solutions of differential equations with piecewise constant argument. *Comput. Math. Appl.*, 56(8):2034–2042, 2008.
- [7] A. S. Besicovitch. *Almost Periodic Functions*. Dover Publications, Inc. New York, 1955.
- [8] J. Cao. Global exponential stability and periodic solutions of delayed cellular neural networks. *J. Computer. System Sci.*, 60(1):38–46, 2000.
- [9] J. Cao y A.P. Chen. Existence and attractivity of almost periodic solution for cellular neural network with distributed delays and variable coefficients. *Applied Mathematics and Computation*, 14:125–140, 2003.
- [10] Jinde Cao. On exponential stability and periodic solutions of CNNs with delays. *Physics Letters A*, 267(56):312 – 318, 2000.
- [11] I.O. Chua y L. Yang. Cellular neural networks: Applications. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, (35):1273–1290, 1988.
- [12] I.O. Chua y L. Yang. Cellular neural networks: Theory. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, (35):1257–1272, 1988.
- [13] K. L. Cooke y J. Wiener. A survey of differential equation with piecewise continuous argument. *Lecture Notes in Mathematics, Berlin: Springer-Verlag*, 1475:1–15, 1991.

- [14] Kenneth L Cooke y Joseph Wiener. Retarded differential equations with piecewise constant delays. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 99(1):265 – 297, 1984.
- [15] K.L. Cooke y I. Györi. Numerical approximation of the solutions of delay differential equations on an infinite interval using piecewise constant arguments. *Computers & Mathematics with Applications*, 28(1-3):81 – 92, 1994.
- [16] W. A. Coppel. *Dichotomies in Stability Theory*. Lecture Notes in Mathematics, Vol 629, Springer, Berlin, 1978.
- [17] C. Corduneanu. *Almost Periodic Functions*. John Wiley Sons, New York, London, 1968.
- [18] Saber Elaydi. *An Introduction to Difference Equations*. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, USA, 3er edition, 2005.
- [19] A.M. Fink. *Almost Periodic Differential Equations*. Lecture Notes in Mathematics 377 Springer, Berlin, 1974.
- [20] I. Györi. On approximation of the solutions of delay differential equations by using piecewise constant arguments. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 14(1):111–126, 1991.
- [21] Z. Huang, X. Wang, y F. Gao. The existence and global attractivity of almost periodic sequence solution of discrete-time neural networks. *Physics Letters A*, 350:182–191, 2006.
- [22] Z. Huang, Y. Xia, y X. Wang. The existence and exponential attractivity of k-almost periodic sequence solution of discrete time neural networks. *Nonlinear Dyn.*, 50:13–26, 2007.
- [23] Bingwen Liu. Existence and exponential stability of almost periodic solution for cellular neural networks without global lipschitz conditions. *J. Korean Math. Soc.*, 44(4):873–887, 2007.
- [24] G. H. Meisters. On almost periodic solutions of a class of differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, (10):113 –119, 1959.
- [25] A.D Myshkis. On certain problems in the theory of differential equations with deviating argument. *Uspekhi Mat. Nauk*, 32:173–202, 1977.
- [26] M. Pinto. Asymptotic equivalence of nonlinear and quasi linear differential equations with piecewise constant arguments. *Mathematical and Computer Modelling*, 49(910):1750 – 1758, 2009.
- [27] M. Pinto. Cauchy and green matrices type and stability in alternately advanced and delayed differential systems. *Journal of Difference Equations and Applications*, 17(2):235–254, 2011.
- [28] M. Pinto y G. Robledo. Existence and stability of almost periodic solutions in impulsive neural network models. *Applied Mathematics and Computation*, 217(8):4167 – 4177, 2010.
- [29] A.M. Samoilenko y N.A. Perestyuk. *Impulsive Differential Equations*. World Scientific, 1995.
- [30] S. Shah y J. Wiener. Advanced differential equations with piecewise constant argument deviations. *Internat. J. Math.*, págs. 6–671, 1983.

- 
- [31] J. Wiener. Differential equations with piecewise constant delays. *Trends in the Theory and Practice of Nonlinear Differential Equations*, ed. V. Lakshmikantham, Marcel Dekker, págs. 547–552, 1983.
- [32] J. Wiener. *Generalized Solutions of Functional-Differential Equations*. World Scientific, Singapore, 1993.
- [33] J. Wiener. Pointwise initial-value problems for functional differential equations. in *Differential Equations*, I. W. Knowles and R. T. Lewis, Eds., págs. 571–580, North-Holland, New York, NY, USA, 1984.
- [34] C.Y. Zhang. Pseudo almost periodic solutions of some differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 181(1):62 – 76, 1994.
- [35] C.Y. Zhang. *Almost periodic type functions and ergodicity*. Science Press, Kluwer, London, New York, 2003.
- [36] H. Zhao. Existence and global attractivity of almost periodic solution for cellular neural network with distributed delays. *Applied Mathematics and Computation*, 154:683–695, 2004.