43 м.

__UBER LINEARE DIFFERENTIALSPIELE__

__Dissertation__

Jorge Gonzáles Guzmán

Eotvos Lorand Universität

Budapest

September 1974

INHALT

Vorbemerkungen 1

Kapitel I

1.- Einführung 4

2.- Umformulierung des Problems 7

3.- Fluchtproblem (Pontrjaguin [1]) 10

4.- Der Ring von Mikusinski 13

5.- Fluchtproblem (Nikolski [2]) 20

6.- Verfolgungsproblem (Pontrjaguin [3]) 23

7.- Verfolgungsproblem (Pontrjaguin [4]) 28

8.- Verfolgungsproblem (Nikolski [5]) 33

Kapitel II

9.- Über das Verfolgungsproblem 39

10.- Eine neue Methode für die Behandlung des Fluchtproblems 42

11.- Konstruktion der Hilfssteuerung $w(t)$ 44

12.- Die Überlegenheitsbedingungen 51

13.- Stellung des Problems einer "optimalen" Flucht 54

14.- Das Problem des "Krokodil und Kind" 55

15.- Der Spezialfall $C^2 = 0$ 58

16.- Der Spezialfall $\pi C = A\pi$ 59

17.- Ein Beispiel 61

18.- Noch ein Beispiel 64

Literaturverzeichnis 67

VORBEMERKUNGEN

Die Theorie der Differentialspiele kann man als einen Teil der allgemeinen mathematischen Spieltheorie betrachten, als deren Begründer von Neumann (in seinen Artikeln von 1928 und 1937 und in dem Buch "Games Theory and Economic Behaviour", 1947) anerkannt wird. Sie kann aber auch als eine Verallgemeinerung der Steuerungstheorie aufgefasst werden, wobei man zwei unabhängige und "entgegengesetzte" Steuerungen betrachtet. Die mathematische Theorie optimaler Steuerung - kurz: Steuerungstheorie - entstand Ende der vierziger Jahre als eine spezielle Richtung in der Differentialgleichungstheorie. Die eigentliche Theorie der Differentialspiele entstand Anfang der fünfziger Jahre, hauptsächlich, indem man militärische Probleme mathematisch zu lösen versuchte. Die ersten systematischen Resultate in diesem speziellen Gebiet stammen von Rufus Isaacs, der ungefähr im Jahr 1951 den Namen "Differentialspiel" geprägt hat. Diese Resultate sind in einem Buch im Jahr 1965 veröffentlicht worden (siehe Isaacs [12]). Hierbei beschränkte er sich auf den "einfachen" Typ des Benehmens: $u(t) = \mathcal{U}(z(t))$, $v(t) = V(z(t))$, welchen er als "Strategie" bezeichnete. Es stellte sich heraus, dass schon in den einfachsten Differentialspielproblemen die "optimalen" Funktionen $\mathcal{U}(t)$, $V(t)$ nicht stetig sein könnten, so dass man in Schwierigkeiten geriet, der Lösung der Gleichung :

$$\dot{z} = Cz + U(z) - v(t)$$

einen Sinn zu geben. In [12] wird bewiesen, dass für das Fluchtproblem $z(t) \notin M$ das Benehmen $v(t) = V(z(t), t)$ mit einer stetigen Funktion $V(z, t)$ nicht mehr möglich ist.

Natürlich haben sich auch früher andere Mathematiker mit Differentialspielproblemen befasst. Zum Beispiel behandelt Pontrjaguin schon in seinem im Jahre 1961 veröffentlichten Buch [13] ein Verfolgungsproblem, wobei er sein Maximum-Prinzip anwendet.

Ausser den militärischen Anwendungsmöglichkeiten der Differentialspieltheorie (Missil-Steuerung, Abwehrraketen, Düsenjägersteuerung, usw.) gibt es viele andere Gebiete, wo diese Theorie prinzipiell angewendet werden kann. Natürlich in der Raumschiffahrt, wenn, zum Beispiel, zwei Raumschiffe zusammentreffen müssen. Hier handelt es sich um ein Verfolgungsproblem, wobei das "Treffen" im Zusammenfallen von Koordinaten und Geschwindigkeiten besteht. Die allgemeine Problemstellung

$$\dot{z} = f(z, u, v, t)$$

lässt auch andere Interpretationen zu: in den Ingenieurwissenschaften gibt es oft Probleme, bei denen es darum geht, dass gewisse Parameter einer Maschine oder eines Prozesses gewisse Wertbereiche nicht annehmen. Zum Beispiel dürfen die einer Maschine gegebenen Schwingungen nicht die Eigenfrequenz der Maschine haben, oder in chemischen Prozessen dürfen gewisse Werte von Druck und Temperatur nicht angenommen werden (z.B. wegen Explosionsgefahr). In diesen Fällen - vorausgesetzt, sie lassen sich durch die mathematische Idealisation eines Differentialspiels beschreiben - handelt es sich um Fluchtprobleme. Dabei kann z.B. besonders nützlich sein, dass man aus Sicherheitsgründen besonders starke Überlegenheitsbedingungen für das "fliehende" Steuerungsparameter stellt. Auch in der Ökonomie können Probleme auftreten, die sich gut durch diese Theorie beschreiben - und lösen - lassen. Die Spieltheorie im Allgemeinen und die Differentialspiele im Besonderen sind noch sehr neue Gebiete der Mathematik und müssen sich noch in der Praxis bewähren.

Kapitel I

1.- Wir werden uns mit folgendem mathematischen Problem befassen: seien zwei Objekte gegeben. deren Zustände beschrieben werden durch Vektoren x und y. Im allgemeinen nimmt man an: $x, y \in \mathbb{R}^n$, aber man kann auch: $x, y \in E$ voraussetzen, wobei E ein Banach-Raum beliebiger Dimension ist. Die Bewegungen dieser Objekte werden beschrieben durch die Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ \dot{y} &= g(y, v) \end{aligned} \qquad (1.1)$$

wobei u und v Steuerungsparameter sind, das heisst, für jede messbare Funktion u(t) bzw. v(t), die man als Steuerung wählt, und für gegebene Anfangspunkte x_0, y_0 im Zeitpunkt $t = t_0$, wird eine Bahn x(t) bzw. y(t) bestimmt. (Wir nehmen an, dass die Lösung für alle $t > t_0$ existiert. Das ist wahr für z.B. lineare rechte Seiten im (1.1).)

Nun, das Spiel besteht aus Folgendem: das Objekt x wird versuchen. das Objekt y zu "erreichen", und das Objekt y wird versuchen, vor x zu "fliehen". Sowohl x als auch y haben zu diesem Zweck die entsprechenden Steuerungen u(t) bzw. v(t) zur Verfügung.

Das "Erreichen" von y bedeutet nicht unbedingt, dass $x(t_1) = y(t_1)$ für einen gewissen Zeitpunkt t_1, sondern vielmehr, dass nur einige Koordinaten von $x(t_1)$ und $y(t_1)$ zusammenfallen:

$$x^i(t_1) = y^i(t_1), \quad i = 1 \dots r, \quad r \leq n \qquad (1.2)$$

denn bei der Beschreibung der Bewegungen der Objekte (1.1) können einige Koordinaten zum Beispiel die Geschwindigkeit oder die Beschleunigung bedeuten.
Es gibt zwei Grundprobleme:

a) das Fluchtproblem

b) das Verfolgungsproblem.

Bei dem Fluchtproblem handelt es sich darum, Bedingungen zu finden, damit das Objekt y fliehen kann, das heisst, dass eine Steuerung $v(t)$ gesucht wird, so dass die Gleichheit (1.2) nicht erfüllt ist für kein $t_1 < \infty$.
Selbstverständlich hängt dann die Fluchtsteuerung von der Steuerung $u(t)$ ab, die der Spieler x wählt. Ausserdem hängt sie von der Lage des Systems ab, das heisst, von $x(t)$ und $y(t)$.
In der Wirklichkeit aber kann der Fliehende nicht wissen, welche Steuerung der Verfolger in der Zukunft wählen wird, also sucht man die Steuerung $v(t)$ als eine Volterrasche Funktional:

$$v(t) = V(u(\tau), x(\tau), y(\tau), t_0 \leq \tau \leq t) \qquad (1.3)$$

Bei dem Verfolgungsproblem handelt es sich darum, Bedingungen zu finden, damit das Objekt x das Objekt y in einer endlichen Zeitspanne erreicht, das heisst, eine Steuerung u(t) zu finden, so dass (1.2) gilt. Man sucht also ein Funktional:

$$u(t) = \mathcal{U}\left(v(\tau), x(\tau), y(\tau), t_0 \leq \tau \leq t \right)$$

Analog zu dem Fall von Flucht kann der Verfolger auch nicht wissen, welche Bewegungen der Fliehende in der Zukunft machen wird. Dennoch ist es zulässig vorauszusetzen, dass der Verfolger weiss, was der Fliehende eine <u>kurze</u> Zeit später tun wird. Der Verfolger richtet sich sozusagen nach einer vorgerückten Lage del Fliehenden (siehe Pontrjaguin [3]). Das gesuchte Funktional hat dann die Form:

$$u(t) = \mathcal{U}\left(v(\tau), x(\tau), y(\tau), t_0 \leq \tau \leq t + \varepsilon \right) \qquad (1.4)$$

für hinreichend kleines ε.

Andererseits, wenn man berücksichtigt. dass der Verfolger (bzw. der Fliehende) eine gewisse Zeit braucht, um die Information über die Lage und Geschwindigkeit des Fliehenden (bzw. des Verfolgers) zu verarbeiten, um dann die entsprechenden Werte für seine Steuerung zu wählen, dann müsste man eigentlich Funktionale des Typs:

$$u(t) = \mathcal{U}\left(v(\tau), x(\tau'), y(\tau), t_0 \leq \tau \leq t - \varepsilon, t_0 \leq \tau' \leq t \right) \qquad (1.5)$$

beziehungsweise:

$$v(t) = V(u(\tau), x(\tau), y(\tau'), t_0 \le \tau \le t - \varepsilon, t_0 \le \tau' \le t) \quad (1.6)$$

bei genügend kleinen Werten für ε betrachten.
(Man kann zeigen, dass der Unterschied zwischen den beiden Formen des Benehmens nicht gross ist.)
Bei dem Verfolgungsproblem ist es auch interessant, die Zeit nachzurechnen, die nötig ist, um y zu erreichen, und wenn möglich, sie zu optimieren. Also hier sucht man eine Steuerung u(t), so dass das Objekt y in der kürzesten Zeit erreicht wird. Man kann auch den Zeitpunkt t_1 fixieren und dann nach $x(t_1) = y(t_1)$ oder $\min_{u(\cdot)} |x(t_1) - y(t_1)|$ fragen.
Die Funktionalen, die für eine bestimmte Flucht oder Verfolgung gebraucht werden, heissen gewöhnlich Strategien (Flucht- oder Verfolgungsstrategie) oder Formen des Benehmens. Die Möglichkeit, den Fliehenden zu erreichen bzw. das Gelingen der Flucht, drückt sich in einer gewissen "Überlegenheit" eines Spielers über den anderen aus. Die Aufgabe besteht dann darin, gute, möglichst feine und einfache Überlegenheitsbedingungen zu finden.

2.- Es ist zweckmässig, die Flucht- und Verfolgungsprobleme neu zu formulieren. Wir definieren einen neuen Phasenraum $\mathcal{R}$ als direkte Summe der Räume der x und y:

$$z = (x, y) \quad , \quad z \in \mathcal{R}$$

z ist dann die neue Zustandsveränderliche, und die Bewegung wird durch die Kombination der Gleichungen (1.1) beschrieben:

$$\dot{z} = F(z, u, v) \qquad (2.1)$$

Hier ist also:

$$F(z,u,v) = \big(f(x,u), g(y,v)\big)$$

Sei ferner die Menge:

$$M = \{z \in R : x^i = y^i, \; i = 1 \ldots r\} \qquad (2.2)$$

das heisst, das Spiel endet im Zeitpunkt t_1, falls $z(t_1) \in M$.

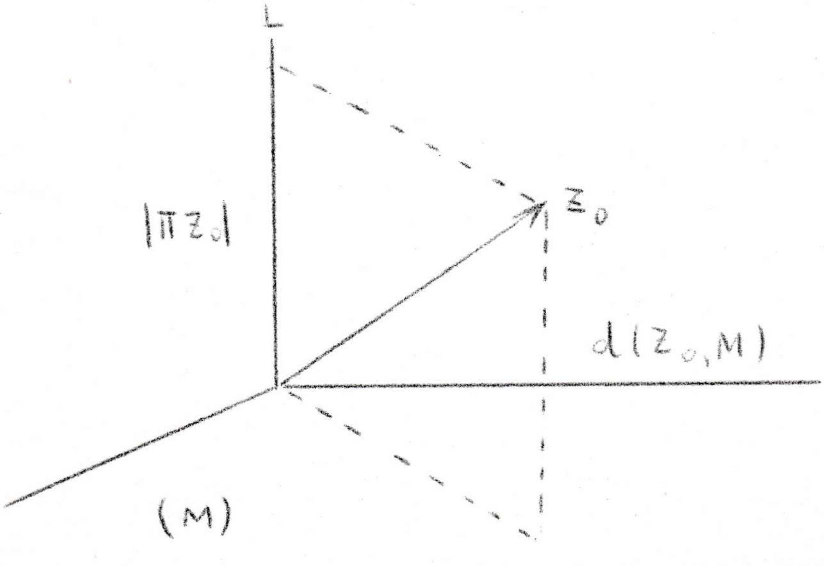
Man definiert ferner: $L = M^\perp$ orthogonales Komplement,

$\pi : R \longrightarrow L$ orthogonale Projektion.

Es ist klar, dass die Entfernung vom Punkt $z_0 \in R$ bis zur Menge M gegeben wird durch:

$$d(z_0, M) = |\pi z_0| \qquad (2.3)$$

falls M ein abgeschlossener Unterraum von R ist.



Tatsächlich rechnet man nach:

$$d(z_0, M) = \inf_{m \in M} d(z_0, m) = \inf_{m \in M} |z_0 - m| =$$

$$= \inf_{m \in M} |\pi z_0 + m' - m| = |\pi z_0|$$

wobei $z_0 = \pi z_0 + m' \in L \oplus M = R$

In dieser Formulierung besteht das Fluchtproblem darin, dass

$$|z(t)| \neq 0 \quad , \quad t \geq t_0$$

und das Verfolgungsproblem:

$$|z(t_1)| = 0 \qquad \text{für geeignetes } t_1 .$$

Wir werden uns in dieser Arbeit auf den linearen Fall beschränken:

$$\dot{z} = C(t) z + L(u, v) \tag{2.4}$$

wobei $C(t)$ eine $n \times n$-Matrix ist, die eventuell von der Zeit abhängt, der Phasenraum $R = \mathbb{R}^n$ ist, und die Steuerungen $u(t)$ und $v(t)$ messbare Funktionen mit Werten in gewissen beschränkten Mengen $P, Q \subseteq \mathbb{R}^n$ sind. L soll eine lineare Funktion von u und v sein. In diesem Fall kann die Lösung der Differentialgleichung (2.4) (die Reaktion des Systems auf die Steuerungen) einfach angegeben werden, so dass man sich auf die spieltheoretische Seite des Problems konzentrieren kann. Das Funktional $\pi z(t_1)$, für festes t_1, ist dann ein lineares Funktional der Trajektorie $\{z(\tau), \tau \geq t_0\}$.
Auf den folgenden Seiten dieses Teils werden einige der wichtigsten Ergebnisse in diesem Gebiet dargestellt, die von Pontrjaguin und Nikolski erzielt worden sind.

3.- Fluchtproblem (Pontrjaguin [1])

Wir betrachten das Differentialspiel

$$\dot{z} = Cz - u + v + a \tag{3.1}$$

wobei C eine konstante Matrix und a ein konstanter Vektor im Phasenraum R = $\mathbb{R}^n$ ist. P und Q sind kompakt und konvex mit Dimensionen p bzw. q. Der Endraum M ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit Dimension $n-\nu$, $\nu \geq 2$.

Die Konstante a kommt vor, weil man später gewisse Verschiebungen der Mengen P und Q vornehmen will.

Seien U, V Unterräume von $\mathbb{R}^n$ mit Dimensionen p, q, die P, Q enthalten, und sei $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow W$ orthogonale Projektion, wobei W ein geeigneter zweidimensionaler Unterraum von L ist.

Wir setzen ferner voraus, dass der Nullpunkt im Innern von P und Q liegt. Das erreicht man durch eine geeignete Verschiebung von P und Q im Raum $\mathbb{R}^n$. Diese Verschiebung beeinflusst nur die Konstante a.

Wir setzen folgende Fluchtbedingung voraus: man kann einen Unterraum W finden, so dass:

I) Es existiert kein 1-dimensionaler von der Zeit unabhängiger Unterraum W1 von W, so dass

$$\pi e^{\tau C} Q \overset{*}{\subset} W^1 , \quad \tau \leq \theta$$

wobei θ beliebig klein, aber nicht Null ist.

II) Es existiert $\mu > 1$, so dass:

$$\mu e^{\tau C} P \overset{*}{\subset} \pi e^{\tau C} Q , \quad \tau \leq \theta , \quad \theta > 0 .$$

Das Symbol $A \overset{*}{\subset} B$ bedeutet: es existiert $a \in \mathbb{R}^n$ so dass $a + A \subset B$. Die Bedingungen I) und II) können vereinfacht werden, wenn man durch neue geeignete Verschiebungen der Mengen P und Q die Symbole $\overset{*}{\subset}$ durch $\subset$ ersetzt.

Unter diesen Bedingungen gilt folgender

<u>Satz 3.1</u>: Sei $z_0 = z(0) \notin M$ der Anfangspunkt. Dann existieren positive Konstanten c, ε, θ, eine natürliche Zahl k und eine Strategie vom Typ (1.3), so dass

$$d(z(t), M) > \frac{c\,\varepsilon^k}{[1 + d(z(t), L)]^k} \qquad (3.2)$$

für $\theta \leq t < \infty$

Wenn $d(z_0, M) \geq \varepsilon$, dann gilt (3.2) für $0 \leq t < \infty$

Wenn $d(z_0, M) \leq \varepsilon$, dann gilt

$$d(z(t), M) > \frac{c\, d(z_0, M)^k}{[1 + d(z(t), L)]^k} \qquad (3.3)$$

für $0 \leq t \leq \theta$, und für $t = \theta$ hat man $d(z(\theta), M) \geq \varepsilon$ also gilt (3.2). Dieser Satz gibt also eine Lösung für das Fluchtproblem und ausserdem eine Abschätzung der Entfernung von $z(t)$ zur Menge M. Man muss beachten, dass diese Entfernung sehr klein sein kann (wenn $d(z(t),L)$ gross wird), also keine feste untere Schranke besitzt, ausser wenn $d(z(t),L) \leq K$ für alle $u()$, $v()$, z_0, und hinreichend grosse $t > t^*$.

Wir möchten hier eine allgemeine Beschreibung der Kon-

struktion der Fluchtstrategie geben:
Unter den Fluchtbedingungen beweist man, dass eine Abbildung $\bar{v}: P \longrightarrow Q$ existiert, so dass die Funktion:

$$v(t) = \bar{v}(u(t)) + v_1(t), \quad 0 \leq t \leq \theta$$

eine zulässige Fluchtfunktion ist, das heisst $v(t) \in Q$, $0 \leq t \leq \theta$. Dabei ist v (t) eine beliebige Funktion mit $|v_1(t)| < \rho$, wobei ρ klein genug ist. Diese Funktion v (t) steht dann zur Verfügung und wird so manipuliert, dass die Flucht gelingt. Man findet eine Konstante β_0 und einen Volterraschen Operator $L_t(\beta_0, u, v)$ so dass

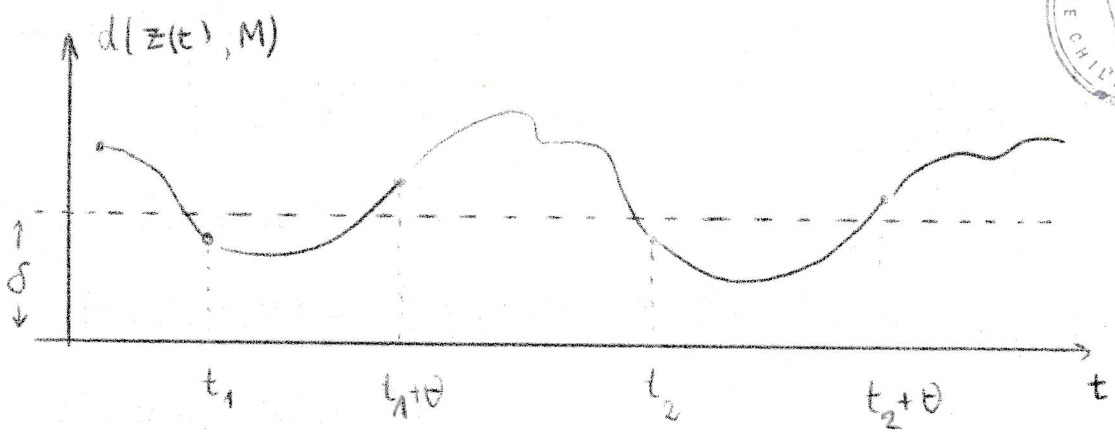
$$v_1(t) = L_t(\beta_0, u(\tau), \bar{v}(u(\tau)), \tau \leq t)$$

die gesuchte Funktion ist. Die Fluchtstrategie findet man also in der Form:

$$v(t) = \bar{v}(u(t)) + L_t(\beta_0, u(t), \bar{v}(u(t))) \qquad (3.4)$$

für $0 \leq t \leq \theta$.
Diese Steuerung v(t), spezielle Steuerung genannt, kann man nur eine kleine Zeitspanne der Länge θ anwenden, um zu versichern, dass v(t) in der Menge Q sich befinden. Also sieht der Fluchtprozess folgendermassen aus: wenn der Punkt z(t) nahe genug an der Menge M ist, dann wendet man die spezielle Steuerung während der Zeit $t_1 \leq t \leq t_1 + \theta$ an, und der Punkt z(t) entfernt sich. Danach wendet man eine beliebige Steuerung v(t) an, bis

der Punkt $z(t\ )$ wieder nahe genug an der Menge M ist:



Auf diese Weise kann die Flucht für alle $t \geqslant 0$ gewährleistet werden.

4.- Wir möchten hier einige Hilfsmittel über die Operatorenrechnung von Mikusinski darstellen, die wir später gebrauchen werden (siehe Gamkrelidze - Charatischwili [5]).
Sei $K = \{ f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$; f integrierbar über endlichen Intervallen $\}$. Für zwei Funktionen f,g aus K sei

$$f * g = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau$$

die Konvolutionsoperation.
Es ist leicht zu zeigen, dass $(K, + , *)$ ein kommutativer Ring ohne Einselement ist. Bezeichnen wir durch S die Funktion $S(t) \equiv 1$. Es gilt dann:

$$S * f = f * S = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$$

Die Funktion S hat keine Nullteiler in K:

wenn $S * f = 0$, so ist $\int_0^t f(\tau)\,d\tau = 0$

für alle t, also $f(t) = 0$ fast überall.

Man kann den Ring K in einen Ring $\mathfrak{M}$ mit Einselement einbetten. Dafür betrachtet man die Menge aller Paare der Form (f, S^n), $n \in \mathbb{N}$, wobei $f \in K$ und $S^n = S * S * \dots * S$ n-mal. In dieser Menge definiert man folgende Äquivalenzrelation:

$$(f, S^n) \sim (g, S^m) \iff_{\text{df.}} f * S^m = g * S^n \qquad (4.1)$$

Da die Funktion S keine Nullteiler hat, ist (4.1) gleichbedeutend mit:

$$S^{m-n} * f = g \quad \text{, falls } m \geq n.$$

Hieraus folgen leicht die Axiomen der Äquivalenzrelationen. Man betrachtet ferner die Äquivalenzklassen und bezeichnet:

$$\text{Klasse } (f, S^n) =: \frac{f}{S^n}$$

In der Menge der Äquivalenzklassen definiert man das Produkt in der Form:

$$\frac{f}{S^n} * \frac{g}{S^m} = \frac{f * g}{S^{n+m}}$$

Diese Menge bildet einen Ring $\mathfrak{M}$ mit dem Einselement:

$\delta = \frac{S}{S}$. Der Ring $\mathfrak{M}$ heisst Ring von Mikusinski.

Der Ring K wird in $\mathfrak{M}$ eingebettet durch die Abbildung:

$$f \longrightarrow \frac{S * f}{S} \qquad (4.2)$$

Durch diese Einbettung kann man die Funktion f mit der Klasse $\frac{S*f}{S}$ identifizieren. In dem Ring von Mikusinski kann man einige nützliche Operatoren definieren:

a) Integraloperator.- Der Integraloperator S in K ist auch ein Operator in $\mathfrak{M}$:

$$S * \frac{f}{S^n} = \frac{S*S}{S} * \frac{f}{S^n} = \frac{f*S}{S^n}$$

b) Eskalaroperator.- Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, und nennen wir auch α die Funktion $\alpha(t) \equiv \alpha$. Man definiert:

$$\hat{\alpha} = \frac{\alpha}{S}$$

Folgende Elementarregeln sind leicht zu überprüfen:

1.- $\hat{1} = \frac{S}{S} = \delta$

2.- $(\widehat{\alpha + \beta}) = \hat{\alpha} + \hat{\beta}$

3.- $\hat{\alpha} * \hat{\beta} = (\widehat{\alpha\beta})$

4.- $\hat{\alpha} * \frac{f}{S^n} = \frac{\alpha f}{S^n}$ und insbesondere

$$S * \hat{\alpha} = \alpha$$

c) Differentialoperator.- Das ist das Inverse von S im Ring $\mathfrak{M}$:

$$D =: S^{-1} = \frac{\delta}{S} = \frac{S}{S^2}$$

Sei f eine differenzierbare Funktion in K. Dann gilt die Formel:

$$D * f = f' + \widehat{f(0)} = f' + D * f(0) \qquad (4.3)$$

Zum Beweis von (4.3) braucht man nur nachzurechnen:

$$\frac{\delta}{S} * \frac{f * S}{S} = \frac{f}{S} = \frac{S * f' + f(0)}{S} =$$

$$= \frac{S * f'}{S} + \frac{f(0)}{S} = f' + \widehat{f(0)}$$

Die Formel (4.3) verallgemeinert man durch Induktion und erhält:

$$D^n * f = f^{(n)} + D^n * f(0) + \cdots + D * f^{(n-1)}(0) \qquad (4.4)$$

falls f n-mal differenzierbar ist.

Es ist zu bemerken, dass in dieser Formel die Konstanten $f^{(i)}(0)$ Funktionen mit konstanten Werten sind, die mit den entsprechenden Elementen $\dfrac{S * f^{(i)}(0)}{S}$

von $\mathfrak{M}$ identifiziert worden sind.

Eine analytische Funktion in K:

$$x(t) = a_1 + t a_2 + \frac{t^2}{2!} a_3 + \cdots\cdots , \qquad t \geq 0$$

kann man als Element von $\mathfrak{M}$ auffassen und lässt folgende Darstellung zu:

$$x(t) = x(S) = S * \hat{a}_1 + S^2 * \hat{a}_2 + S^3 * \hat{a}_3 + \cdots$$

Ganze Elemente in $\mathfrak{M}$ heissen die Elemente der Form:

$$x = \hat{x}_0 + S * \hat{x}_1 + S^2 * \hat{x}_2 + S^3 * \hat{x}_3 + \cdots \qquad (4.5)$$

Ein ganzes Element ist also nach Definition gleich

$$x = \hat{x}_0 + \frac{S * x(t)}{S}$$, wobei

$$x(t) = x_1 + t x_2 + \frac{t^2}{2!} x_3 + \cdots$$ ist.

Man kann ferner Matrizen mit Elementen im Ring $\mathfrak{M}$ betrachten. Die Matrix A heisst ganz, wenn ihre Elemente ganz in $\mathfrak{M}$ sind. Eine ganze Matrix A kann man darstellen in der Form:

$$A = \hat{A}_0 + S * \hat{A}_1 + S^2 * \hat{A}_2 + \cdots\cdots$$

wobei: $$\hat{A}_k = \left(\hat{a}_{ij(k)} \right)_{i,j}$$

und: $$S^n * \hat{A}_k = \left(S^n * \hat{a}_{ij(k)} \right)_{i,j}$$

Es ist klar, dass durch die Identifikation (4.2) folgende Identität gilt:

$$S * \hat{A}_1 + S^2 * \hat{A}_2 + \cdots = A_1 + t A_2 + \frac{t^2}{2!} A_3 + \cdots \quad (4.6)$$

Wenn A eine quadratische Matrix auf $\mathfrak{M}$ ist, kann man die Determinante von A definieren, indem man die Operationen des Ringes $\mathfrak{M}$ benutzt. Wir werden diese Determinante mit $\overset{*}{\det}\, A$ bezeichnen. Es ist leicht zu zeigen, dass $\overset{*}{\det}\, A$ ein ganzes Element in $\mathfrak{M}$ ist, falls A eine ganze Matrix ist.

Sei $\hat{I} = \begin{pmatrix} \delta & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta \end{pmatrix}$ die Einheitsmatrix auf $\mathfrak{M}$

Wir beweisen schliesslich folgenden

<u>Satz 4.1</u>: Sei $A = \hat{I} + S * \hat{A}_1 + \cdots$ eine ganze Matrix auf $\mathfrak{M}$. Dann existiert eine ganze Matrix A^{-1}, so dass $A^{-1} * A = A * A^{-1} = \hat{I}$

<u>Beweis</u>.- Setzen wir

$$C(S) = -\left(S * \hat{A}_1 + S^2 * \hat{A}_2 + \cdots \right)$$

Das ist eine ganze Matrix, die man als Matrix auf K auffassen kann:

$$C(S) = C(t) = -\left(A_1 + t A_2 + \frac{t^2}{2!} A_3 + \cdots \right)$$

Wir suchen die Inverse A^{-1} von A in der Form:

$$A^{-1}(S) = \hat{I} + C(S) + C^2(S) + C^3(S) + \cdots \qquad (4.7)$$

wobei $C^k(S) = C(S) * \ldots\ldots * C(S)$, k-mal, ist.
Wir werden nun beweisen, dass die Reihe im Ring K:

$$C(t) + C^2(t) + C^3(t) + \cdots \qquad (4.8)$$

gleichmässig in der Kugel Σ_T, mit Zentrum O und Radius T in der komplexen Ebene konvergiert. Dabei ist T beliebig. Dann stellt diese Reihe eine analytische Funktion dar, und die Gleichung (4.7) stellt eine ganze Matrix auf $\mathfrak{M}$ dar.
Sei nun

$$m_T = \sup_{t \in \Sigma_T} \left\{ \|A_1\| + t\,\|A_2\| + \frac{t^2}{2!}\|A_3\| + \cdots \right\}$$

wobei $\|A_k\|$ irgendeine Matrizennorm ist.
Dann ist für t $\in \Sigma_T$:

$$\|C(t)\| \leq m_T$$

$$\|C^2(t)\| = \|C(t) * C(t)\| = \left\| \int_0^t C(t-\tau)\,C(\tau)\,d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \int_0^t m_T^2\,d\tau = m_T^2\,t \leq m_T^2\,T$$

und durch Induktion:

$$\|C^k(t)\| \leq \int_0^t \|C^{k-1}(t-\tau)\|\,\|C(\tau)\|\,d\tau \leq m_T^k \frac{T^{k-1}}{(k-1)!}$$

also gilt die Abschätzung:

$$\| C(t) + C^2(t) + \cdots \| \leq m_T \left[1 + T m_T + \frac{(T m_T)^2}{2!} + \cdots \right] \qquad (4.9)$$

Daraus folgt, dass die Reihe (4.8) gleichmässig in Σ_T konvergiert.

5.- Fluchtproblem (Nikolski [2]).

Dasselbe Fluchtproblem (3.1) wird von Nikolski in [2] auch behandelt. Um die Flucht zu ermöglichen, setzt man voraus, dass der Fliehende folgende Information besitzt:

a) Er kennt die Dynamik des gesamten Systems, also die Matrix C, die Mengen P und Q und die n-dimensionale Konstante a.

b) Er kennt im Zeitpunkt t die Lage $z(S)$ und die Verfolgungssteuerung $u(S)$ für $t - h \leq S \leq t$, $S \geq 0$, wobei h eine kleine Konstante ist.

Nikolski führt folgende Fluchtbedingungen ein: es gibt einen zweidimensionalen Unterraum W von L, so dass:

I') Es existiert kein eindimensionaler von t unabhängiger Unterraum W^1 von W, so dass:

$$\pi e^{\tau C} Q \overset{*}{\subset} W^1, \qquad 0 < \tau \leq \theta$$

II') Es existiert $\tilde{\mu} > 0$, so dass:

$$\tilde{\mu}\, \pi (E - \tau C)^{-1} P \overset{*}{\subset} \pi (E - \tau C)^{-1} Q, \qquad 0 < \tau \leq \theta$$

wobei θ eine beliebige Positive Zahl ist.
Nikolski beweist, dass, wenn die Fluchtbedingungen I') und II') erfüllt sind, dann gilt der Satz 3.1.
Wir werden die Methoden dieses Beweises kurz skizzieren:

Seien U, V, mit Dimensionen α, β die linearen Unterräume, die die Mengen P, Q enthalten. Durch D, F bezeichnet man lineare Homöomorphismen, die $\mathbb{R}^\alpha$, $\mathbb{R}^\beta$ auf U, V abbilden. Durch geeignete parallele Verschiebung erreicht man, dass P und Q den Nullpunkt in ihrem Innern enthalten. Sei ferner $u = D\tilde{u}$, $v = F\tilde{v}$, $P = D\tilde{P}$, $Q = F\tilde{Q}$. Also die Mengen $\tilde{P} \subset \mathbb{R}^\alpha$, $\tilde{Q} \subset \mathbb{R}^\beta$ sind kompakt und konvex und enthalten den Nullpunkt in ihrem Innern.
Die Lösung der Gleichung (3.1) mit Anfangsbedingung $z(0) = z_0$ ist dann:

$$\pi z(t) = \pi e^{tC} z_0 + \int_0^t \pi e^{(t-s)C} a \, ds + \int_0^t \pi e^{(t-s)C} (F\tilde{v}(s) - D\tilde{u}(s)) \, ds \qquad (5.1)$$

Man sucht eine Fluchtsteuerung $\tilde{v}(t) \in \tilde{Q}$ in der Form:
$\tilde{v}(t) = \tilde{v}_1(t) + \tilde{v}_2(t)$. Hier ist $\tilde{v}_1(t) \in (1 - \nu)\tilde{Q}$, $1/\mu < \nu < 1$ und wird aufgebaut auf dieselbe Art und Weise wie $v_1(t)$ im Pontrjaguin [1].
Aber $\tilde{v}_2(t) \in \nu\tilde{Q}$, und man sucht sie als Lösung der Volterraschen Gleichung:

$$\int_0^t \pi e^{(t-s)C} F\tilde{v}_2(s) \, ds = \int_0^t \pi e^{(t-s)C} D\tilde{u}(s) \, ds \qquad (5.2)$$

Die Gleichung (5.2) wird mit Hilfe der Mikusinski-Operatoren gelöst. Man setzt:

$$f(r) = \pi e^{r C_D} \quad , \quad g(r) = \pi e^{r C_F} \quad , \quad r \geq 0.$$

Die Gleichung (5.2) kann man symbolisch schreiben in der Form:

$$g * \tilde{v}_2 = f * \tilde{u}_2 \qquad (5.3)$$

Nikolski kommt schliesslich, indem er die Bedingung II') benutzt, zu einer Volterraschen Integralgleichung zweiter Art:

$$w(t) + \int_0^t R(t-s)\chi'(w(s))\,ds = K_0\,\tilde{u}(t) + \int_0^t T(t-s)\,\tilde{u}(s)\,ds \qquad (5.4)$$

wobei $\tilde{v}_2(t) = \chi'(w(t))$. Die Gleichung (5.4) kann man durch die Methode der Sukzessiven Approximationen lösen. Diese Lösung wird für eine kleine Zeitspanne $[0, \theta]$ gegeben, und das Fluchtmanöver erfolgt dann genau wie im Pontrjaguin [1] . Nikolski bemerkt, dass die Fluchtbedingungen I') II') nicht mit I) II) äquivalent sind, das heisst, es gibt Fälle, wo die Bedingungen von Nikolski erfüllt sind, aber nicht die von Pontrjaguin und umgekehrt. Das wird durch folgendes Beispiel gezeigt:

$$\begin{aligned} x_1^{(k_1+1)} &= u_1 \\ x_2^{(k_2+1)} &= u_2 \\ y_1^{(k_1)} &= v_1 \\ y_2^{(k_2)} &= v_2 \end{aligned} \qquad (5.5)$$

wobei $1 \leq k_1 < k_2$, $u = (u_1, u_2) \in P_0$, $v = (v_1, v_2) \in Q_0$; P_0 und Q_0 sind eindimensionale Strecken. Der Nullpunkt liegt im Innern von P_0 und Q_0. Q_0 ist nicht parallel zu der Geraden $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ und $M = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = y_1, x_2 = y_2\}$

Man kann zeigen:

a) Wenn P_0 im Innern von Q_0 liegt, dann gilt die Fluchtbedingung von Nikolski, aber nicht die von Pontrjaguin.

b) Wenn P_0 im Innern von $\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} Q_0$ liegt, dann gilt die Fluchtbedingung von Pontrjaguin, aber nicht die von Nikolski.

6.- Verfolgungsproblem (Pontrjaguin [3]).

Man betrachtet das Differentialspiel

$$\dot{z} = Cz - U(u) + V(v) \tag{6.1}$$

wobei die Endmenge M $(n - \nu)$-dimensional ist. Die Mengen P und Q sind Mannigfaltigkeiten, die homöomorph der $(\nu - 1)$-dimensionalen Sphäre sind. U und V sind stetige Funktionen über P bzw. Q. Es werden folgende Verfolgungsbedingungen vorausgesetzt:

A) Für festen $\tau > 0$ soll die Abbildung $\pi e^{\tau C} U : P \longrightarrow L = M^{\perp}$ ein Homöomorphismus zwischen P und einer konvexen Hyperfläche in L sein. Durch $\hat{u}(\tau)$ bezeichnet man den ν-dimensionalen konvexen Körper, der durch diese Hyperfläche bestimmt wird.

$\hat{u}(\tau)$ enthält auch seinen Rand.
Analog dazu definiert man $\pi\, e^{\tau C}\, V$ und den konvexen Körper $\hat{v}(\tau)$.
B) Für jeden $\tau > 0$ existiert $a(\tau) \in \mathbb{R}^n$, so dass $\hat{v}(\tau) + a(\tau) \subset \operatorname{Int} \hat{u}(\tau)$. Hier ist $\operatorname{Int} \hat{u}(\tau)$ das Innere von $\hat{u}(\tau)$.
Man führt folgende Bezeichnung ein:

$$A \stackrel{*}{-} B = \{ x \in \mathbb{R}^n : x + B \subset A \}$$

für $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Es ist leicht zu beweisen, dass $A \stackrel{*}{-} B$ konvex ist, falls A konvex ist. Die Bedingung B) bedeutet also, dass $\hat{u}(\tau) \stackrel{*}{-} \hat{v}(\tau)$ eine nicht leere, konvexe Menge darstellt.
Wir definieren noch den Begriff des Integrals über stetige, kompakte, konvexe Mengenfunktionen:
Sei $\mathcal{K}$ die Menge aller kompakten, konvexen Mengen in $\mathbb{R}^n$.
Es ist leicht zu zeigen, dass die Beziehung:

$$\rho(A,B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x,y),\ \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} d(x,y) \right\}$$

eine Metrik über $\mathcal{K}$ definiert.
Sei $A(t)$ eine bezüglich dieser Metrik stetige Funktion mit reeller Veränderlichen t. Man definiert das Integral:

$$\int_a^b A(t)\,dt \in \mathcal{K}$$

als Grenzwert der Riemannschen Summen:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} A(\theta_i)(t_{i+1} - t_i)$$

wobei $\Theta_i \in [t_i, t_{i+1}]$ und $a = t_1 < \cdots < t_{n+1} = b$ ist.
Man kann beweisen (Ljapunoff, Olech, Aumann), dass die Menge $\int_a^b A(t)dt$ gleich der Menge aller Punkte der Form

$\int_a^b a(t)dt$ ist, wobei $a(t) \in A(t)$ eine messbare Funktion ist.

Aus der Definition wird klar, dass $\int_a^b A(t)$ eine konvexe Menge ist, wenn $A(t)$ konvex ist.

<u>Satz 6.1.</u>- Sei $z_0 \in \mathbb{R}^n$, $z_0 \notin M$. Setzen wir für $\tau > 0$:

$\hat{W}(\tau) = \int_0^\tau (\hat{U}(\tau) \overset{*}{-} \hat{V}(\tau))dt$ Wenn $\tau > 0$ existiert, so dass

$$\pi e^{\tau C} z_0 \in \hat{W}(\tau)$$

und wenn $\tau_0 = \min\{\tau > 0 : \pi e^{\tau C} z_0 \in \hat{W}(\tau)\}$, dann kann das Spiel in einer Zeit kleiner oder gleich τ_0 beendet werden.

<u>Beweis.</u>- Setzen wir für jeden $z \in \mathbb{R}^n$:

$$T(z) = \min\{\tau > 0 : \pi e^{\tau C} z \in \hat{W}(\tau)\} \qquad (6.2)$$

falls die Menge auf der rechten Seite nicht leer ist.
Wir bemerken, dass $\pi e^{\tau C} z_0 \notin \hat{W}(\tau)$ wenn τ klein genug ist, denn $\hat{W}(\tau) \xrightarrow[\tau \to 0]{} \{0\}$ aber

$\pi e^{\tau C} z_0 \xrightarrow{\tau \to 0} \pi z_0 \neq 0$. Also $\tau_0 > 0$.
Der Aufbau der Verfolgungssteuerung $u(t)$ für $t = t_1$ setzt voraus, dass der Verfolger $z(t_1)$ und $v(s)$, $t_1 \leq s \leq t_1 + \varepsilon$, kennt, wobei $\varepsilon > 0$ beliebig klein

sein kann. Es handelt sich also um eine Strategie des Typs (1.4).

Sei $\hat{w}(\tau) =: \hat{u}(\tau) \overset{*}{-} \hat{v}(\tau)$.

Da $\pi e^{\tau C} V(Q) \subset \hat{V}(\tau)$, also gilt

$$\hat{\omega}(\tau) \subset \hat{u}(\tau) \overset{*}{-} \pi e^{\tau C} V(Q) \qquad (6.3)$$

Sei eine beliebige Fluchtsteuerung v(t) im Intervall $0 \leq t \leq \varepsilon$ gegeben, und sei $\tau - \varepsilon \leq r \leq \tau$.

Aus (6.3) folgt unmittelbar:

$$\hat{\omega}(r) \subset \hat{u}(r) \overset{*}{-} \pi e^{rC} V(v(\tau - r)) \qquad (6.4)$$

Wir integrieren die Beziehung (6.4) von $\tau - \varepsilon$ bis τ und addieren die Menge: $\hat{W}(\tau - \varepsilon) = \int_0^{\tau-\varepsilon} \hat{\omega}(s)\,ds$.

Es folgt:

$$\int_0^{\tau-\varepsilon} \hat{\omega}(r)\,dr + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \hat{\omega}(r)\,dr \subset \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \left[\hat{u}(r) \overset{*}{-} \pi e^{rC} V(v(\tau - r))\right] dr + \hat{W}(\tau-\varepsilon)$$

also:

$$\hat{W}(\tau) \subset \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \left[\hat{u}(r) \overset{*}{-} \pi e^{rC} V(v(\tau - r))\right] dr + \hat{W}(\tau - \varepsilon) \qquad (6.5)$$

Sei τ_1 der kleinste Wert von τ, für den $\pi e^{\tau C} z_0$ in der rechten Seite von (6.5) enthalten ist. Nach Definition (6.2) ist:

$$\tau_1 \leq T(z_0) = \tau_0$$

Es existiert eine Steuerung u(t), $0 \leq t \leq \varepsilon$,
so dass:

$$\pi e^{\tau_1 C} z_0 - \int_{\tau_1-\varepsilon}^{\tau_1} \pi e^{rC} [U(u(\tau_1 - r)) - V(v(\tau_1 - r))] dr \in \hat{W}(\tau_1 - \varepsilon) \qquad (6.6)$$

Aber es ist leicht nachzurechnen, dass die linke Seite von (6.6) gleich $\pi e^{(\tau_1 - \varepsilon)C} z(\varepsilon)$ ist. Also haben wir:

$$\pi e^{(\tau_1 - \varepsilon)C} z(\varepsilon) \in \hat{W}(\tau_1 - \varepsilon)$$

und daraufhin $T(z(\varepsilon)) \leq \tau_1 - \varepsilon$ nach Definition (6.2). Da $\tau_1 - \varepsilon \leq T(z_0) - \varepsilon$ ist, erhält man:

$$T(z(\varepsilon)) \leq T(z_0) - \varepsilon \qquad (6.7)$$

Man wiederholt diesen Prozess mit z(ε) als Anfangspunkt und t = ε als Anfangszeit. So kommt man zu:

$$T(z(2\varepsilon)) \leq T(z(\varepsilon)) - \varepsilon \leq T(z_0) - 2\varepsilon$$

und nach k Schritten:

$$T(z(k\varepsilon)) \leq T(z_0) - k\varepsilon \qquad (6.8)$$

wobei $\pi e^{(\tau_k - k\varepsilon)C} z(k\varepsilon) \in \hat{W}(\tau_k - k\varepsilon)$
und für k gross genug, in einer Zeit $k\varepsilon = \tau_k \leq T(z_0)$
haben wir

$$\pi e^{(\tau_k - k\varepsilon)C} z(k\varepsilon) = z(k\varepsilon) \in \hat{W}(0) = \{0\}$$

das heisst, das Spiel endet in einer Zeit $k\varepsilon \leq T(z_0) = \tau_0$.

In Kapitel II, Paragraph 9, geben wir einen einfachen Beweis dieses Satzes, unter Benutzung des Lemma von Filippov.

7.- Verfolgungsproblem (Pontrjaguin [4]).

Man betrachtet das Differentialspiel

$$\dot{z} = Cz + v - u \tag{7.1}$$

wobei die Endmenge M konvex und abgeschlossen ist, das heisst, M braucht hier kein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ zu sein. P und Q sind kompakt und Konvex.

Pontrjaguin führt den Begriff des "alternierenden Integrals mit Anfangsmenge" ein. Dafür braucht man einige einfache Lemmata:

__Lemma 1.__ Es gilt für beliebige Untermengen von $\mathbb{R}^n$:

$$(A \overset{*}{-} U) \overset{*}{-} V = A \overset{*}{-} (U + V)$$

__Beweis.__

$$x \in (A \overset{*}{-} U) \overset{*}{-} V \iff$$

$$\iff x + V \subset A \overset{*}{-} U$$

$$\iff x + v + U \subset A, \quad \forall v \in V$$

$$\iff x + (U + V) \subset A$$

$$\iff x \in A \overset{*}{-} (U + V).$$

Lemma 2.

$$(A + U) \stackrel{*}{-} V \supseteq (A \stackrel{*}{-} V) + U$$

Beweis. Sei $x \in (A \stackrel{*}{-} V) + U$. Also:

$x = y + z$ mit $z \in U$ und $y \in A \stackrel{*}{-} V$.

Also $y + V \subset A$ und $y + v + z \in A + U$ für alle

$v \in V$. Aber das heisst: $x + v \in A + U$ also

$x \in (A + U) \stackrel{*}{-} V$.

Wir definieren zunächst den Begriff der alternierenden Summe:

Seien A_0, U_1 ...... U_n, V_1 ...... V_n konvexe Untermengen von $\mathbb{R}^n$. Setzen wir:

$A_1 = (A_0 + U_1) \stackrel{*}{-} V_1$

$A_2 = (A_1 + U_2) \stackrel{*}{-} V_2$

— - - - - - - - - - - - -

$A_n = (A_{n-1} + U_n) \stackrel{*}{-} V_n$

Die Menge A_n heisst alternierende Summe der Folgen U_1 ..... U_n, V_1 ..... V_n mit Anfangswert A_0. Wir werden bezeichnen:

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} (A_0, U_i, V_i)$$

Lemma 3. Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} (A_0, U_i, V_i) \subset \left(A_0 + \sum_{i=1}^{n} U_i\right) \stackrel{*}{-} \sum_{i=1}^{n} V_i$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion durch. Die Behauptung ist für n = 1 trivial. Angenommen, es gilt für $n - 1$, dann ist:

$$\sum_{i=1}^{n}(A_0;\, U_i,\, V_i) = (A_{n-1} + U_n) \overset{*}{-} V_n =$$

$$= \left\{\left[\left(A_0 + \sum_{i=1}^{n-1} U_i\right) \overset{*}{-} \sum_{i=1}^{n-1} V_i\right] + U_n\right\} \overset{*}{-} V_n \subseteq$$

$$\subseteq \left[\left(A_0 + \sum_{i=1}^{n-1} U_i + U_n\right) \overset{*}{-} \sum_{i=1}^{n-1} V_i\right] \overset{*}{-} V_n =$$

$$= \left(A_0 + \sum_{i=1}^{n} U_i\right) \overset{*}{-} \sum_{i=1}^{n} V_i$$

wobei man Lemma 1 und 2 benutzt hat.

Seien nun $U(t)$, $V(t)$ kompakte, konvexe Mengen, die stetig von t abhängen, und sei A eine abgeschlossene Menge. Sei ferner die Zerlegung des Intervalls $[a,b]$:

$a = t_1 < t_2 < \dots\dots\dots < t_{n+1} = b$ beliebig.

Man definiert das alternierende Integral mit Anfangsmenge A:

$$\int_{A,a}^{b} \left[U(t)\,dt \overset{*}{-} V(t)\,dt\right]$$

als Grenzwert der alternierenden Summen:

$$\sum_{i=1}^{n}(A;\, U_i,\, V_i)$$

wobei
$$U_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} U(t)\,dt$$

$$V_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} V(t)\,dt \qquad i = 1, \dots, n$$

für alle möglichen Zerlegungen des Intervalls.

Aus Lemma 3 folgt:

<u>Lemma 4.</u> Sei $p < q < r$. Dann ist:

$$\int_{A,p}^{r} u(t)dt \overset{*}{-} v(t)dt \subseteq \left(\int_{A,p}^{q} u(t)dt \overset{*}{-} v(t)dt + \int_{q}^{r} u(t)dt \right) \overset{*}{-} \int_{q}^{r} v(t)dt$$

<u>Satz 7.1.</u>- Sei $z_0 \in \mathbb{R}^n$, $z_0 \notin M$.

Setzen wir für $\tau > 0$:

$$W(\tau) = \int_{M,0}^{\tau} \left[e^{rC} P dr \overset{*}{-} e^{rC} Q dr \right] \qquad (7.2)$$

Wenn $\tau > 0$ existiert, so dass

$$e^{\tau C} z_0 \in W(\tau)$$

und wenn $\tau_0 = \min \{ \tau > 0 : e^{\tau C} z_0 \in W(\tau) \}$

dann kann das Spiel in einer Zeit kleiner oder gleich τ_0 beendet werden.

<u>Beweis.</u> Die Verfolgungsüberlegenheit drückt sich darin aus, dass das alternierende Integral (7.2) für einige $\tau > 0$ nicht leer ist. Man konstruiert die Verfolgungssteuerung u(t) mit einer Strategie des Typs (1.4).

Setzen wir für $z \in \mathbb{R}^n$:

$$T(z) = \min \{ \tau > 0 : e^{\tau C} z \in W(\tau) \} \qquad (7.3)$$

falls die Menge auf der rechten Seite nicht leer ist.

Sei v(t) eine beliebige Fluchtsteuerung im Intervall $0 \leq t \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ beliebig klein. Aus Lemma 4 folgt unmittelbar:

$$W(\tau) \subset \left(W(\tau-\varepsilon) + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} e^{rC} P\,dr \right) \stackrel{*}{-} \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} e^{rC} Q\,dr$$

und da immer $A \stackrel{*}{-} B \subset A - B$ gilt,

$$W(\tau) \subset W(\tau-\varepsilon) + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} e^{rC} P\,dr - \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} e^{rC} v(\tau-r)\,dr \qquad (7.4)$$

Nach Voraussetzung ist $e^{T(z_0)C} z_0 \in W(T(z_0))$,

also $e^{T(z_0)C} z_0$ ist auch in der rechten Seite von (7.4) enthalten, wenn man $\tau = T(z_0) = \tau_0$ setzt. Sei nun $\tau_1 \leq T(z_0)$ der kleinste Wert von τ, für den $e^{\tau C} z_0$ in der rechten Seite von (7.4) enthalten ist. Das heisst:

$$e^{\tau_1 C} z_0 + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} e^{rC} v(\tau-r)\,dr \in W(\tau_1-\varepsilon) + \int_{\tau_1-\varepsilon}^{\tau_1} e^{rC} P\,dr$$

also existiert eine Steuerung $u(\tau)$, $0 \leq \tau \leq \varepsilon$, so dass:

$$e^{\tau_1 C} z_0 + \int_{\tau_1-\varepsilon}^{\tau_1} e^{rC} v(\tau_1-r)\,dr - \int_{\tau_1-\varepsilon}^{\tau_1} e^{rC} u(\tau_1-r)\,dr \in W(\tau_1-\varepsilon) \qquad (7.5)$$

Man rechnet leicht nach, dass die linke Seite von (7.5) gleich $e^{(\tau_1-\varepsilon)C} z(\varepsilon)$ ist.

Das heisst also: $e^{(\tau_1-\varepsilon)C} z(\varepsilon) \in W(\tau_1-\varepsilon)$

also, nach Definition (7.3):

$$T(z(\varepsilon)) \leq \tau_1 - \varepsilon \leq T(z_0) - \varepsilon \qquad (7.6)$$

Der Beweis wird auf dieselbe Art und Weise wie im vorigen Fall zu Ende geführt, wenn man bemerkt, dass

$$W(0) = \int_{M,0}^{0} \left[U(t)\,dt \overset{*}{-} V(t)\,dt \right] = M$$

ist.

8.- Verfolgungsproblem (Nikolski [5]).

In diesem Artikel werden die vorangegangenen Fälle weiter verallgemeinert. Die Methoden, die angewendet werden, sind analog.

Wir betrachten das Spiel:

$$\dot{z} = A(t)\,z - u + v \qquad (8.1)$$

wobei $A(t)$ $m \times n$ -Matrix, stetig bezüglich t, $u \in P(t)$, $v \in Q(t)$, $P(t)$, $Q(t)$ sind konvex und kompakt und stetig bezüglich t. Hier ist $u(t)$ die Verfolgungssteuerung und $v(t)$ die Fluchtsteuerung, beide messbare Funktionen. Man betrachtet M, die Endmenge, als eine abgeschlossene, konvexe Menge. $z(t_0) = z_0 \notin M$ ist der Anfangspunkt.

Wir brauchen einige einfache Tatsachen:

<u>Lemma 1.</u>- Ist U_1 eine abgeschlossene Menge, so ist auch $U_1 \overset{*}{-} U_2$ abgeschlossen.

<u>Beweis.</u>- Nehmen wir an, die Folge $x_n \in U_1 \overset{*}{-} U_2$ konvergiert gegen x. Wir haben also:

$$x_n + U_2 \subset U_1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Sei $y \in U_2$ beliebig, die Folge $y_n = x_n + y$ ist in U_1 enthalten, also

$$\lim_{n \to \infty} y_n = x + y \in U_1$$

daraufhin: $x + U_2 \subset U_1$.

Nikolski definiert - analog zu dem Integral mit Anfangsmenge - ein Integral mit Endmenge:

Seien $U(\tau)$, $V(\tau)$ konvexe, kompakte Mengen, die stetig von τ abhängen. Sei B abgeschlossen und konvex. Man nimmt eine rationale Zerlegung des Intervalls $[p,q]$, das heisst $p = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k = q$, wobei τ_i $i = 1, \dots, k$ rationale Zahlen sind. Diese Zerlegung bezeichnen wir durch ω . Wir bilden die Summe:

$$\Sigma(\omega) = \left(\left(\left(\left(B + \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} U(\tau)\,d\tau \right) \overset{*}{-} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} V(\tau)\,d\tau \right) + \int_{\tau_{k-2}}^{\tau_{k-1}} U(\tau)\,d\tau \right) \overset{*}{-} \dots \right.$$

Sei nun Ω die Menge aller rationalen Zerlegungen des Intervalls $[p,q]$. Man definiert:

$$\int_p^{B,q} \left[U(\tau)\,d\tau \overset{*}{-} V(\tau)\,d\tau \right] =_{df} \bigcap_{\omega \in \Omega} \Sigma(\omega) \qquad (8.2)$$

Es ist klar, wenn dieses Integral existiert, das heisst, wenn es nicht leer ist, dann ist es abgeschlossen und konvex.

<u>Lemma 2.</u>- Sei $p \leq t_1 < q$. Dann ist:

$$\int_p^{B,q} \left[U(\tau)\,d\tau \overset{*}{-} V(\tau)\,d\tau \right] \subset \left[\int_{t_1}^{B,q} \left[U(\tau)\,d\tau \overset{*}{-} V(\tau)\,d\tau \right] + \int_p^{t_1} U(\tau)\,d\tau \right] \overset{*}{-} \int_p^{t_1} V(\tau)\,d\tau \qquad (8.3)$$

Das beweist man analog zum Lemma 4, Paragraph 7, falls t_1 rational. Für t_1 nicht rational, nimmt man eine Folge rationaler Zahlen t_k, die gegen t_1 konvergiert.

Lemma 3.- Seien $U_1(s)$, $U_2(s)$ kompakte und konvexe Mengen in $\mathbb{R}^m$. Sei $U_1(s) \overset{*}{-} U_2(s) \neq \emptyset$ für alle s in einer Umgebung von s_0; $U_1(s)$ halbstetig nach oben per Inklusion im Punkt s_0 (siehe Definition in Paragraph 9) und $U_2(s)$ stetig im Punkte s_0. Dann ist

$$U_1(s) \overset{*}{-} U_2(s)$$

halbstetig nach oben per Inklusion im Punkt s_0.

Sei nun $C(t,\tau)$, $t \geq \tau$ die Fundamentale Matrix des homogenen Systems:

$$\dot{z} = A(t)z \qquad (8.4)$$

Durch die Cauchy-Formel erhalten wir:

$$z(t) = C(t,t_0)z_0 + \int_{t_0}^{t} C(t,\tau)(-u(\tau)+v(\tau))\,d\tau \qquad (8.5)$$

als Lösung von (8.1) mit Anfangswerten $z(t_0) = z_0$.

Wir erinnern an drei Grundeigenschaften der Matrix $C(t,\tau)$:

i) $\dot{C}(t,\tau) = A(t)C(t,\tau)$

ii) $C(t,t) = I$ die Einheitsmatrix

iii) $C(t,t_0) = C(t,t_1)C(t_1,t_0)$ falls $t_0 \leq t_1 \leq t$

Sei ferner

$$W(t,t_0) = \int_{t_0}^{M,t} \left[C(t,\tau)P(\tau)d\tau \overset{*}{-} C(t,\tau)Q(\tau)d\tau\right] \qquad (8.6)$$

Wir setzen folgende Verfolgungsbedingungen voraus:

I) $W(t, t_0) \neq \emptyset \quad \forall\, t \geq t_0$

II) $\exists\, \bar{t} \geq t_0$ so dass

$$C(\bar{t}, t_0) z_0 \in W(\bar{t}, t_0)$$

Man kann ausserdem beweisen, wenn diese Bedingungen erfüllt sind, dass ein minimales $\bar{t}$ existiert mit der Eigenschaft (II).

<u>Satz (8.1).</u>- Unter diesen Voraussetzungenkann das Spiel beendet werden, und zwar in einer Zeit, die nicht grösser ist als $T(z_0, t_0)$, wobei

$$T(z_0, t_0) = \min \{ \bar{t} \geq t_0 : C(\bar{t}, t_0) z_0 \in W(\bar{t}, t_0) \} \quad (8.7)$$

<u>Beweis.</u>- Um die Verfolgungssteuerung u(t) im Punkt t zu konstruieren, muss man die Werte von v(s) für $t \leq s \leq t + \varepsilon$ wissen, wobei $\varepsilon > 0$ beliebig klein sein kann. Insbesondere kennt man v(s) für $t_0 \leq s \leq t_0 + \varepsilon$, wobei wir voraussetzen, dass $\varepsilon \leq T(z_0, t_0) = T$ ist. Nach Lemma 2, für B = M, $p = t_0$, $q = t_0 + T$, $t_1 = t_0 + \varepsilon$ erhalten wir:

$$W(t_0+T, t_0) \subset \left[W(t_0+T, t_0+\varepsilon) + \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} C(t_0+T, \tau) P(\tau)\, d\tau \right] \overset{*}{-}$$

$$\overset{*}{-} \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} C(t_0+T, \tau) Q(\tau)\, d\tau \quad (8.8)$$

Aber es gilt $A \overset{*}{-} B \subset A - B$ immer, also:

$$W(t_0+T, t_0) \subset W(t_0+T, t_0+\varepsilon) + \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} C(t_0+T, \tau) P(\tau) d\tau - \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} C(t_0+T, \tau) Q(\tau) d\tau \tag{8.9}$$

Aber nach Voraussetzung ist $C(t_0+T, t_0) z_0 \in$ $\in W(t_0+T, t_0)$, also ist auch in der rechten Seite von (8.7) enthalten. Dann kann man für $v(t) \in Q(t)$, $t_0 \leq t \leq t_0+\varepsilon$ eine messbare Funktion u(t) finden, $u(t) \in P(t)$, $t_0 \leq t \leq t_0+\varepsilon$, so dass :

$$C(t_0+T, t_0) z_0 - \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} C(t_0+T, \tau) u(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} C(t_0+T, \tau) v(\tau) d\tau \in$$

$$\in W(t_0+T, t_0+\varepsilon) \tag{8.10}$$

Wir wenden die Eigenschaft iii) der Fundamentalmatrix an und erhalten:

$$C(t_0+T, t_0+\varepsilon) \Big[C(t_0+\varepsilon, t_0) z_0 - \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} C(t_0+\varepsilon, \tau) u(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} C(t_0+\varepsilon, \tau) v(\tau) d\tau \Big] = C(t_0+T, t_0+\varepsilon) z(\varepsilon) \in$$

$$\in W(t_0+T, t_0+\varepsilon) \tag{8.11}$$

Wenn wir $T(z(\varepsilon), t_0+\varepsilon)$ genauso wie bei (8.7) definieren, dann haben wir:

$$T(z(\varepsilon), t_0+\varepsilon) \leq T-\varepsilon$$

Wenn man betrachtet, dass W(t,t) = M, so sieht man, dass das Spiel beendet werden kann in einer gewissen Anzahl von Schritten der Länge ε , und also in einer Zeit, die nicht grösser ist als $T = T(z_0, t_0)$.

Kapitel II

9.- In diesem Paragraphen geben wir eine einfache Methode für die Konstruktion der Verfolgungssteuerung an, welche ähnliche Aspekte mit der im 10. Paragraphen behandelten Methode für die Konstruktion der Fluchtsteuerung aufweist, die allerdings komplizierter ist und als das Hauptergebnis unserer Arbeit gesehen werden sollte.

Wir untersuchen das Differentialspiel:

$$\dot{z} = Cz + v - u \tag{9.1}$$

wobei $z \in \mathbb{R}^n$, C eine konstante $n \times n$-Matrix, $v \in Q$, $u \in P$, P und Q kompakte, konvexe Untermengen von $\mathbb{R}^n$ sind. Die Endmenge M ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.
Wir werden sowohl das Verfolgungs- als auch das Fluchtproblem für dieses Spiel behandeln. Wir betrachten zuerst das Verfolgungsproblem. Wir brauchen einige Hilfsmittel:
Sei Q(t) eine Menge in $\mathbb{R}^m$, die von einem reellen Parameter t abhängt. Man sagt, dass Q(t) halbstetig nach oben per Inklusion in t_0 ist, falls:

$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \delta > 0$ so dass:

$$|t_0 - t| < \delta \Rightarrow Q(t) \subset U_\varepsilon(Q(t_0))$$

wobei $\mathcal{U}_\varepsilon$ eine ε-Umgebung der Menge Q(t) im Raum $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Es gilt folgendes

<u>Lemma</u>.- (Filippov [7]). Sei f(t,u) eine stetige Funktion auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, und sei Q(t) halbstetig nach oben per Inklusion in jedem t, die Mengen Q(t) sind kompakt. Für jeden festen t sei

$$R(t) = f(t, Q(t)) = \{ f(t,u) , \ u \in Q(t) \}$$

Sei ferner $y(t) \in R(t)$ eine messbare Funktion. Dann existiert eine messbare Funktion u(t) $\in$ Q(t), so dass f(t, u(t)) = y(t) fast überall.

<u>Beweis</u>.- Man konstruiert die Funktion u(t) auf folgende Art und Weise:

Zwischen allen Vektoren u $\in$ Q(t), t fest, wählt man denjenigen, der den kleinsten Wert der ersten Komponenten u_1 besitzt. Dieser kleinste Wert wird auch angenommen, denn die Menge:

$$\{ u \in Q(t) : f(t,u) = y(t) \}$$

ist nach Stetigkeit von f(t,u) abgeschlossen und beschränkt.

Wenn mehr als ein Vektor u mit dieser Eigenschaft existiert, dann nimmt man denjenigen, der den kleinsten Wert von u_2 hat. So fährt man weiter fort, bis man einen wohldefinierten Vektor u = u(t) erhält. Diese Konstruktion wird für jeden t durchgeführt, und so erhält man eine Funktion u(t) $\in$ Q(t), mit f(t, u(t)) = y(t).

Man beweist, indem man einen Induktionsprozess durchführt, dass die Komponenten $u_1(t),\ldots,u_m(t)$ von $u(t)$ messbare Funktionen sind.

Mit Hilfe dieses Lemmas kann man folgenden Satz beweisen:

<u>Satz(9.1).-</u> Sei für jedes $\tau > 0$ folgende Überlegenheitsbedingung für den Verfolger gültig:

$$\pi e^{\tau C} P \supseteq \pi e^{\tau C} Q + W(\tau) \tag{9.2}$$

wobei $W(\tau)$ eine nicht leere Menge ist.

Wenn ein τ_0 existiert, so dass

$$\pi e^{\tau_0 C} z_0 = \int_0^{\tau_0} w(\tau)\,d\tau$$

mit $w(\tau) \in W(\tau)$ messbar, $0 \leq \tau \leq \tau_0$,

dann kann das Spiel beendet werden in einer Zeit, die nicht grösser als τ_0 ist.

<u>Beweis.-</u> Sei $v(t) \in Q$ eine beliebige Fluchtsteuerung.

Nach der Bedingung (9.2) ist dann:

$$\pi e^{(\tau_0 - s)C} v(s) + w(s) \in \pi e^{(\tau_0 - s)C} P$$

für $0 \leq s \leq \tau_0$. Wir wenden das Lemma von Filippov an für den Fall: $f(t,u) = \pi e^{tC} u$, $Q(t) = P$, $R(t) = \pi e^{tC} P$ und

$$y(t) = \pi e^{tC} v(s) + w(s), \qquad t = \tau_0 - s.$$

Es existiert also eine messbare Funktion $u(s) \in P$, so dass:

$$\pi e^{(\tau_0 - s)C} v(s) + w(s) = \pi e^{(\tau_0 - s)C} u(s) \tag{9.3}$$

fast überall.

Wenn man (9.3) van 0 bis τ_0 integriert:

$$\int_0^{\tau_0} \pi e^{(\tau_0 - s)C} v(s)\,ds + \pi e^{\tau_0 C} z_0 = \int_0^{\tau_0} \pi e^{(\tau_0 - s)C} u(s)\,ds$$

das heisst aber:

$$\pi z(\tau_0) = \pi e^{\tau_0 C} z_0 + \int_0^{\tau_0} \pi e^{(\tau_0 - s)C} (v(s) - u(s))\,ds = 0$$

Also das Spiel endet schon für $t = \tau_0$.-

10.- Wir untersuchen jetzt das Fluchtproblem.
Wir setzen noch voraus, dass M eine Dimension nicht grösser als n - 2 hat, also $L = M^{\perp}$ hat eine Dimension nicht kleiner als 2. Wir setzen dann $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow L$ die orthogonale Projektion. Wir fangen das Spiel im Zeitpunkt t = 0 mit dem Anfangspunkt $z_0 \notin M$ an.
Die Lösung der Gleichung (9.1) ist dann:

$$z(t) = e^{tC} z_0 + \int_0^t e^{(t-s)C} (v(s) - u(s))\,ds \qquad (10.1)$$

wobei u(t), v(t) messbare Steuerungen sind. Wir definieren eine neue Hilfssteuerung w(t) durch die Bedingung:

$$\int_0^t w(s)\,ds = \pi \int_0^t e^{(t-s)C} (v(s) - u(s))\,ds$$

also durch Derivation:

$$w(t) = \pi \int_0^t C e^{(t-s)C} (v(s) - u(s))\, ds + \pi (v(t) - u(t)) , \quad t > 0$$

und durch Umformung:

$$\pi v(t) + \int_0^t \pi C e^{(t-s)C} v(s)\, ds = w(t) + \pi u(t) + \int_0^t \pi C e^{(t-s)C} u(s)\, ds \qquad (10.2)$$

Mit dieser neuen "Steuerung" erhalten wir durch Einsetzen in (10.1):

$$\pi z(t) = \pi e^{tC} z_0 + \int_0^t w(s)\, ds \qquad (10.3)$$

Wir werden "Steuerungen" w(t) betrachten, die die Flucht ermöglichen, das heisst:

$$| \pi z(t) | = | \pi e^{tC} z_0 + \int_0^t w(s) ds | > 0$$

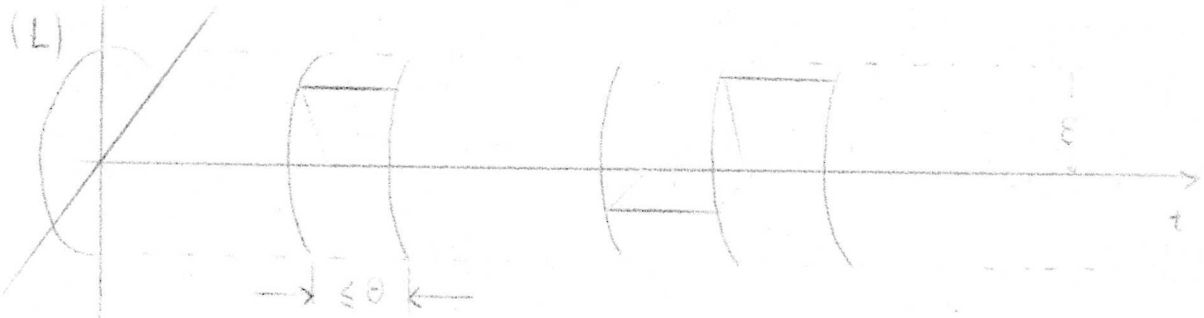
für alle positiven Zeiten t. Danach werden wir eine Überlegenheitsbedingung stellen, die die Gleichung (10.2) nach $v(t) \in Q$ und bei beliebiger Steuerung u(t) lösbar macht.

Die Steuerung w(t) suchen wir in folgender Form:
Seien $\varepsilon , \Theta > 0$ beliebig klein. Bezeichnen wir durch $W(\varepsilon, \Theta)$ die Menge aller Funktionen $w: \mathbb{R}^+ \longrightarrow W$ mit den Bedingungen: es existiert eine Folge $I_1, I_2, I_3, \ldots$ von Intervallen in der positiven reellen Achse, ohne gemeinsame innere Punkte, mit einer Länge nicht grösser als θ

und es existiert eine Folge von Vektoren $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ in L, mit $|\varepsilon_n| = \varepsilon$, so dass:

$$w(t) = \begin{cases} \varepsilon_n & \text{für } t \in I_n \\ 0 & \text{für } t \notin I_k, \ k = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Es handelt sich also um Treppenfunktionen mit Werten mit konstanter Norm ε , die unendlich viele Stufen haben können:



11.- Wir werden jetzt eine Funktion $w \in W(\varepsilon, \theta)$ konstruieren, so dass die Flucht gelingt. Diese Funktion wird nur von z_0 und C abhängig sein.

Wir brauchen folgendes

<u>Lemma 11.1</u> .- Sei $z(t)$, $a \leq t \leq b$, eine stetigdifferenzierbare Trajektorie im Raum $\mathbb{R}^k$, und sei $z_0 = z(t_0)$ ein Punkt in der Trajektorie. Dann existiert eine Umgeb_ung $U(t_0)$ des Punktes t_0 , so dass für jeden $t \in U(t_0)$:

$$\{ z(t) : t \in U(t_0) \} \subset K_{(z(t))}$$

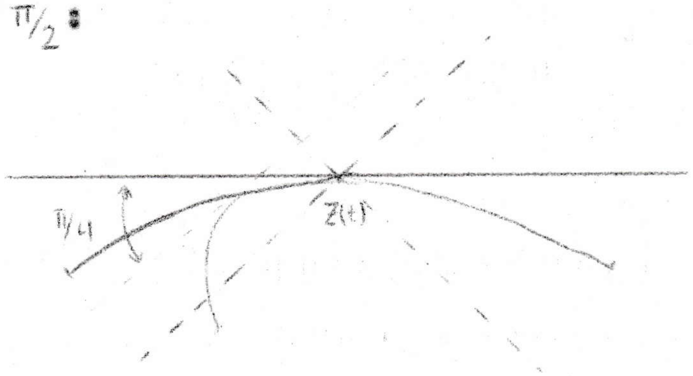
wobei $K_{z(t)}$ ein Kegel mit Spitze im Punkte $z(t)$ und Winkel $\pi/2$ ist.

<u>Beweis</u>.- Nach der Stetigkeit der Ableitung von $z(t)$ kann man eine Umgebung $U(t_0)$ finden, wo die Tangenten in jedem Punkt des Bogenstückes:

$$B(U,t_0) = \{ z(t) ; t \in U(t_0) \}$$

einen Winkel nicht grösser als $\pi/8$ mit der Tangente in z_0 bilden. Also bilden die Tangenten in zwei beliebigen Punkten des Bogenstückes $B(U,t_0)$ einen Winkel nicht grösser als $\pi/4$.

Nehmen wir nun einen beliebigen Punkt $z(t) \in B(U,t_0)$, und bilden wir einen Kegel mit Spitze in $z(t)$ und Winkel $\pi/2$:



Falls das Bogenstück $B(U,t_0)$ aus dem Kegel $K_{z(t)}$ hinausgeht, muss es einen Punkt haben, wo die Tangente einen Winkel grösser als $\pi/4$ mit der Tangente in $z(t)$ bildet, was nach Konstruktion nicht möglich ist.

Wir können jetzt folgenden Satz beweisen:

<u>**Satz 11.1**</u> Sei $|\pi z_0| > 0$. Dann existiert eine Funktion $w \in W(\varepsilon, \theta)$, so dass:

$$\left| \pi e^{tC} z_0 + \int_0^t w(s)\,ds \right| > 0$$

für alle $t \geq 0$.

<u>Beweis</u>.- Falls $\pi e^{tC} z_0 \neq 0 \quad t \geq 0$, braucht man nur $w(t) \equiv 0$ zu setzen.

Nehmen wir also an, die Trajektorie $\pi e^{tC} z_0$ geht durch Null, und sei τ_1 der erste Zeitpunkt, wo das geschieht:

$$\pi e^{\tau_1 C} z_0 = 0 \qquad \tau_1 > 0$$

Wir bilden einen Kegel K_0 mit Null als Spitze, die Tangente an der Trajektorie im Nullpunkt als Achse und Winkel $\pi/2$:

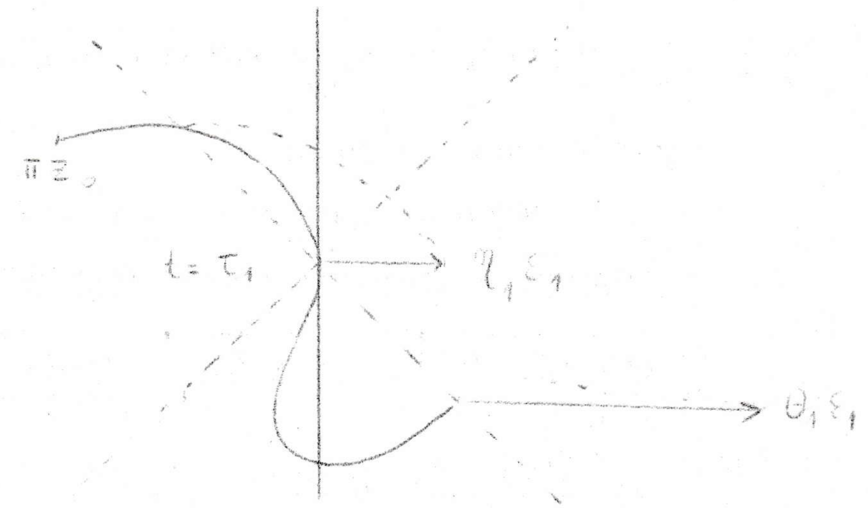


fig (1)

Sei η_1 das Zeitintervall, in dem die Trajektorie in dem ersten Halbkegel bleibt, bis sie an dem Nullpunkt ankommt. Wir unterscheiden drei Fälle:

1°) $\theta \leq \eta_1$.- In diesem Fall setzen wir

$w(t) = 0$ für $0 \leq t < \tau_1 - \theta$

$w(t) = \varepsilon_1$ für $\tau_1 - \theta \leq t \leq \tau_1$

wobei ε_1 ein Vektor mit Norm ε und normal zur Trajektorie im Punkt Null ist.

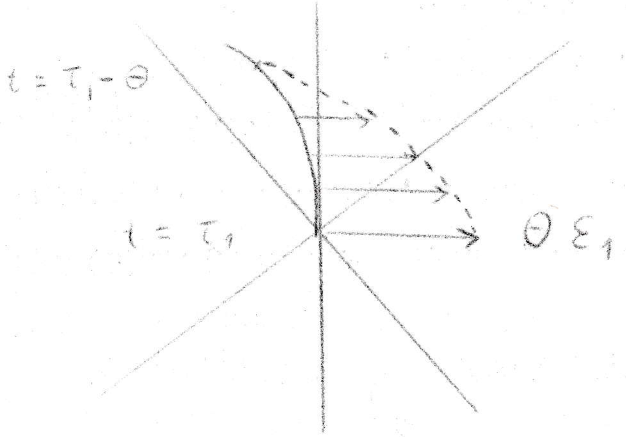


fig (2)

Die Trajektorie im Intervall $[\tau_1 - \theta\, ,\, \tau_1]$ ist:

$$\pi e^{tC} z_0 + \int_0^t w(s)\, ds = \pi e^{tC} z_0 + t\,\varepsilon_1$$

und geht nicht durch Null.

2°) $\theta > \eta_1$, aber die Trajektorie bleibt in dem Kegel eine Zeit grösser als θ . In diesem Fall setzen wir:

$$w(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t < \tau_1 - \eta_1 \\ \varepsilon_1 & \text{für } \tau_1 - \eta_1 \leq t \leq \tau_1 - \eta_1 + \theta \end{cases}$$

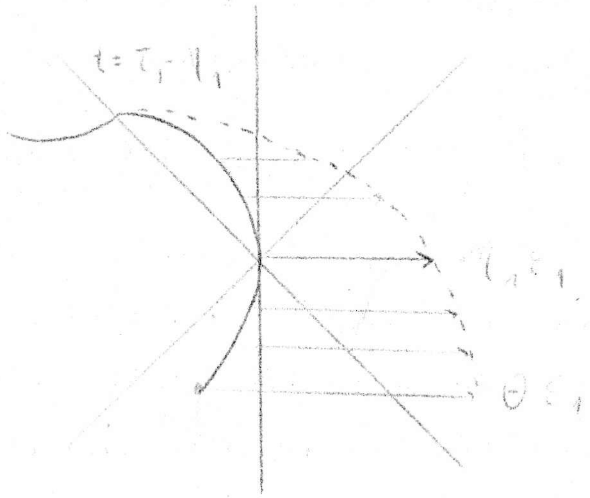


fig (3)

3°) $\Theta > \eta_1$ und die Trajektorie bleibt in dem Kegel eine Zeit kürzer als Θ (siehe fig (1)).
Bezeichnen wir durch $\bar{\Theta}_1$ die gesamte Zeit, in der die Trajektorie, angefangen von Punkt πz_0, innerhalb des Kegels bleibt. Wir setzen:

$$w(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t < \tau_1 - \eta_1 \\ \varepsilon_1 & \text{für } \tau_1 - \eta_1 \leq t \leq \tau_1 - \eta_1 + \bar{\Theta}_1 \end{cases}$$

Wir haben dann dasselbe Fluchtmanöver, aber wir können die Ausweichung $\int_0^t w(s)\,ds = t\,\varepsilon_1$ nur eine Zeitspanne $\bar{\Theta}_1 < \Theta$ anwenden.
Bezeichnen wir durch $t_1 \leq \tau_1$ den Zeitpunkt, in dem wir anfangen, die Steuerrung w(t) anzuwenden, also $\tau_1 - \Theta$ oder $\tau_1 - \eta_1$, und sei Θ_1 die Zeitspanne, in der wir w(t) anwenden können, also Θ oder $\bar{\Theta}_1$.

Wir wiederholen die ganze Überlegung mit der modifizierten Trajektorie:

$$\varphi(t) = \pi e^{tC} z_0 + \vartheta_1 \varepsilon_1$$

für die Zeit $t \geq t_1 + \vartheta_1$. Wenn diese Trajektorie nicht durch Null geht, dann ist der Satz bewiesen. Wenn das nicht der Fall ist, sei τ_2 der erste Zeitpunkt, wo

$$\pi e^{\tau_2 C} z_0 + \vartheta_1 \varepsilon_1 = 0$$

Es ist $\tau_2 > t_1 + \vartheta_1$. Wir finden also eine geeignete Steuerung w(t) im Intervall $t_1 + \vartheta_1 \leq t \leq t_2 + \vartheta_2$, so dass:

$$|\pi z(t)| = |\pi e^{tC} z_0 + \vartheta_1 \varepsilon_1 + \vartheta_2 \varepsilon_2| > 0$$

Auf diese Weise können wir die Ausweichung wiederholen so oft es nötig ist:

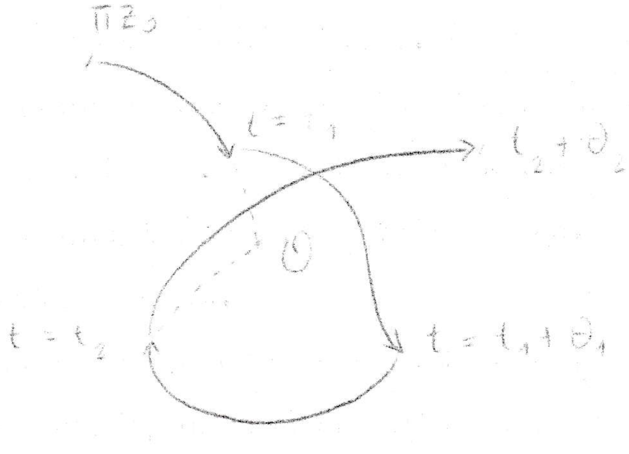


fig (4)

Wenn dieser Prozess nach einer endlichen Anzahl von Ausweichungen aufhört, dann ist der Satz bewiesen. Nehmen wir an, der Prozess hört nicht auf. Wir erhalten dann unendliche Folgen von Zeitpunkten t_1, t_2, ...; $\tau_1, \tau_2, \dots$ und Zeitintervallen $\theta_1, \theta_2, \dots$ mit den Beziehungen:

$$t_n < \tau_n \leq t_n + \theta_n \leq t_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Nach unserer Konstruktion ist es klar, dass die Ausweichung des Nullpunktes im Intervall $[0, t_n + \theta_n]$, n beliebig, möglich ist. Wir müssen beweisen, dass

$$\lim_{n \to \infty} t_n = \infty$$ ist.

Nehmen wir an, es wäre $\lim_{n \to \infty} t_n = T < \infty$.
Dann ist $\lim_{n \to \infty} \tau_n = T$ und $\lim_{n \to \infty} \theta_n = 0$.

Wir betrachten die stetigdifferenzierbare (eigentlich analytische) Trajektorie $\pi e^{tC} z_0$ im Intervall $[0, T]$ und wenden das Lemma 11.1 für den Endpunkt $\pi e^{TC} z_0$ der Trajektorie an:

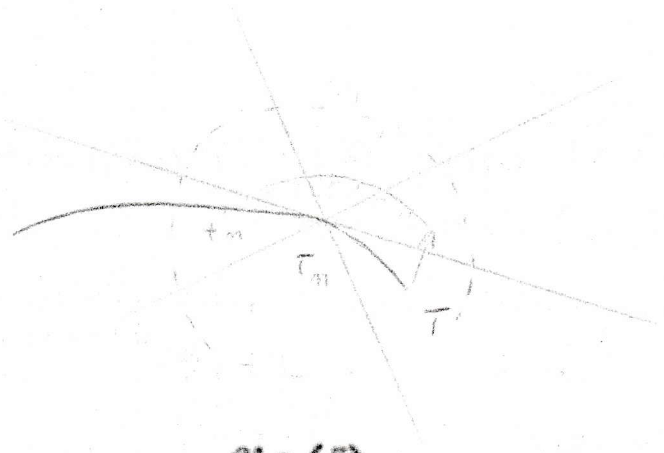


fig (5)

Es existiert also eine Umgebung U(T) mit den Eigenschaften von Lemma 11.1 . Sei n gross genug, dass $t_n, \tau_n \in U(T)$

und $\theta_n < \vartheta$. Dann befindet sich das ganze Bogenstück

$$B(\Pi, T) = \{ \pi e^{tC} z_0 , \quad t_n < t \le T \}$$

innerhalb des Kegels mit Spitze im Punkt $\pi e^{\tau_n C} z_0$

Aber die modifizierte Trajektorie für $t \geq t_{n-1} + \theta_{n-1}$ ist:

$$\varphi(t) = \pi e^{tC} z_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \theta_k \varepsilon_k$$

Das heisst, $\varphi(t)$ ist gleich der Trajektorie $\pi e^{tC} z_0$ parallel verschoben durch den konstanten Vektor $\sum_{k=1}^{n-1} \theta_k \varepsilon_k$

Nach unserer Konstruktion wäre dann: $t_n + \theta_n \geq T$

Aber nach der Beziehung (11.1) ist

$$\tau_{n+1} > t_{n+1} \geq t_n + \theta_n \geq T$$

was unserer Annahme widerspricht.

Es ist klar, dass derselbe Satz gültig ist, wenn man die Projektion π auf einen k-dimensionalen Unterraum W von L, k $\geq$ 2, vornimmt.

12.- Wir werden jetzt die Gleichung (10.2) betrachten.

Setzen wir:

$$f(t) = \omega(t) + \pi u(t) + \int_0^t \pi C e^{(t-s)C} u(s)\, ds \qquad (12.1)$$

wobei $u(t)$ eine beliebige Verfolgungssteuerung und $w(t) \in W(\varepsilon, \theta)$ ist. Die Gleichung (10.2) wird dann:

$$\pi v(t) + \int_0^t \pi C e^{(t-s)C} v(s)\,ds = f(t) \qquad (12.2)$$

Wir stellen folgende Überlegenheitsbedingungen für den Fliehenden:

Es existiert ein k-dimensionaler Unterraum W von L und ein k-dimensionaler Unterraum W_0 von $\mathbb{R}^n$, k $\geqslant$ 2, so dass:

I) Die Projektion $\pi|_{W_0} : W_0 \longrightarrow W$ ist umkehrbar. Bezeichnen wir durch $\pi' : W \longrightarrow W_0$ die Inverse:

II) Es gilt: $\pi' \pi P \subset \mathrm{Int}(W_0 \cap Q)$

Unter diesen Voraussetzungen gilt folgender

__Satz 12.1__ .- Es existieren $\varepsilon, \theta > 0$ und eine messbare Funktion v(t) $\in Q \cap W_0$, so dass die Gleichung (12.2) erfüllt ist, für eine beliebige Steuerung u(t) $\in$ P und beliebige Hilfssteuerung w(t) $\in$ W(ε, θ), und zwar im Intervall $0 \leqslant t \leqslant \theta$.

__Beweis.__- Die Gleichung (12.2) wird im Raum W_0 in folgender Form gestellt:

$$v(t) + \int_0^t \pi' \pi C e^{(t-s)C} v(s)\,ds = \pi' f(t) \qquad (12.3)$$

Mit Hilfe der Mikusinski Operatoren kann man die Gleichung (12.3) in der Form:

$$\hat{I} * v + \pi' \pi C e^{(\,)C} * v = \pi' f \qquad (12.4)$$

stellen.

Sei K(t) = $-\pi'\pi C e^{tC}$, also

$$-K(t) = \pi'\pi\left(C + tC^2 + \frac{t^2}{2!}C^3 + \dots\right)$$

das heisst, im Ring von Mikusinski:

$$-K(s) = s * \pi'\pi\hat{C} + s^2 * \pi'\pi\hat{C}^2 + \dots$$

Die Gleichung (12.4) wird dann:

$$(\hat{I} - K) * v = \pi' f \qquad (12.5)$$

Die Inverse :

$$(\hat{I} - K)^{-1} = \hat{I} + K + K^2 + \dots$$

stellt eine ganze Matrix im Ring $\mathbb{M}$ dar, denn im Intervall $[0\ \Theta]$ gilt:

$$\| K(s) \|_{\Sigma_\Theta} = \| \pi'\pi C e^{(\cdot)C} \|_{\Sigma_\Theta} \leq m_\Theta < \infty$$

Ausserdem, nach (4.9):

$$\| K + K^2 + K^3 + \dots \| \leq m_\Theta e^{\Theta m_\Theta} \qquad (12.6)$$

Man kann die Funktion v(t) in der Form:

$$v = (\hat{I} + K + K^2 + \dots) * \pi' f$$

ausdrücken, das heisst:

$$v = \pi'\pi u + \pi' w + \pi'\pi C e^{(\cdot)C} * u + (K + K^2 + \dots) * \pi' f$$

Sei nun:

$$R(\varepsilon, \Theta) = \pi' w + \pi'\pi C e^{(\cdot)C} * u + (K + K^2 + \dots) * \pi' f$$

Also gilt:

$$v = \pi'\pi u + R(\varepsilon, \theta) \qquad (12.7)$$

wobei folgende Abschätzung gilt:

$$\| R(\varepsilon,\theta) \| \leq \varepsilon \| \pi' \| + \theta \| \pi'\pi C e^{\theta C} u \| + \theta m_0 e^{\theta m_0} \| \pi' f \|$$

das heisst:

$$\| R(\varepsilon,\theta) \| \leq \varepsilon K_1 + \theta K_2 \qquad (12.8)$$

Man kann also ε und θ so klein wählen, dass $v(t) \in W_0 \cap Q$, $0 \leq t \leq \theta$.

Man kann also folgenden Satz stellen:

__Satz 12.2__ .- Seien die Überlegenheitsbedingungen I) und II) erfüllt. Dann hat das Fluchtproblem für das Spiel (9.1) eine Lösung.

__Beweis__.- Nach Satz 12.1 kann man ε und θ finden, so dass die Gleichung (10.2) eine Lösung $v(t) \in Q$ für $0 \leq t \leq \theta$ und beliebige $u(t)$ und $w(t) \in W(\varepsilon, \theta)$ besitzt. Nach Satz 11.1 kann man $w(t)$ finden, so dass die Flucht im Intervall $0 \leq t \leq \theta$ gelingt. Man kann den Prozess wiederholen für Anfangspunkt $z(\theta)$ und Anfangszeit $t = \theta$. Somit wird die Flucht für $t \geq 0$ gewährleistet.

13.- Wir möchten hier bemerken, dass diese Methode die Stellung des Problems einer "optimalen" Flucht ermöglicht.

Sei $W(\Theta)$ die Menge aller Hilfssteuerungen $w(t)$, $0 \leq t \leq \Theta$, die die Flucht ermöglichen, das heisst:

$$|\pi z(t)| = \left|\pi e^{tC} z_0 + \int_0^t w(s)\,ds\right| > 0 \;, \quad 0 \leq t \leq \Theta$$

wobei die Gleichung (10.2) lösbar sein muss.

Wir haben gezeigt, dass diese Menge, unter gewissen Bedingungen, nicht leer ist.

Sei das Funktional über $W(\Theta)$:

$$F(w) = \min_{0 \leq t \leq \Theta} |\pi z(t)| > 0$$

Man kann also das Problem stellen, eine Hilfssteuerung $w(t) \in W(\Theta)$ zu finden, so dass

$$\max_{w \in W(\Theta)} F(w)$$

angenommen wird. Die extremale Lösung w^* für dieses Optimale Steuerungsproblem könnte charakterisiert werden durch ein Maximum-Prinzip. (Siehe Pschenischni [9] und Girsanov [10]).

14.- Das allgemeine Fluchtmanöver, das wir gestellt haben, kann wesentlich vereinfacht werden, wenn man Spezialfälle betrachtet. Wir behandeln zunächst das Problem des "Krokodil und Kind":

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= u \\ \dot{y} &= v \end{aligned} \qquad (14.1)$$

wobei $x, y \in \mathbb{R}^k$, $k \geq 2$, $|u| \leq \varrho$, $|v| \leq \sigma$.
Man kann auch lediglich voraussetzen, dass $u \in P$, $v \in Q$, P beschränkt und $0 \in \mathrm{Int}(Q)$. P und Q sind Untermengen von $\mathbb{R}^k$.

Wir setzen:

$z_1 = - x + y$

$z_2 = - x$

und die Gleichung (14.1) nimmt die Form:

$$\dot{z} = Cz + \bar{v} - \bar{u} \qquad (14.2)$$

wobei der Phasenraum $\mathbb{R}^{2k}$, die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$$

ist. Die Projektion kann man setzen:

$\pi z = z_1$, denn $z_1 = 0$ ist gleichbedeutend mit $x = y$.

Man rechnet nach:

$$C^2 = 0$$

$$e^{tC} = \begin{pmatrix} E & tE \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

$$Ce^{tC} = C = \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C\bar{v} = 0$$

$$C\bar{u} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung (10.2) wird dann:

$$v(t) = \omega(t) + \int_0^t u(s)\,ds \qquad (14.3)$$

im Raum $\mathbb{R}^k$. Da $0 \in$ Int Q, kann man ε und θ so klein finden, dass

$$|v(t)| \leq \varepsilon + \theta\rho$$

beliebig klein wird, also $v(t) \in Q$ für $0 \leq t \leq \theta$.

Es ist hier zu bemerken, dass die Fluchtbedingungen I) und II) des 12. Paragraphen erfüllt sind. In diesem Fall ist $W_0 = W = \mathbb{R}^k$ (man kann auch k = 2 setzen) und

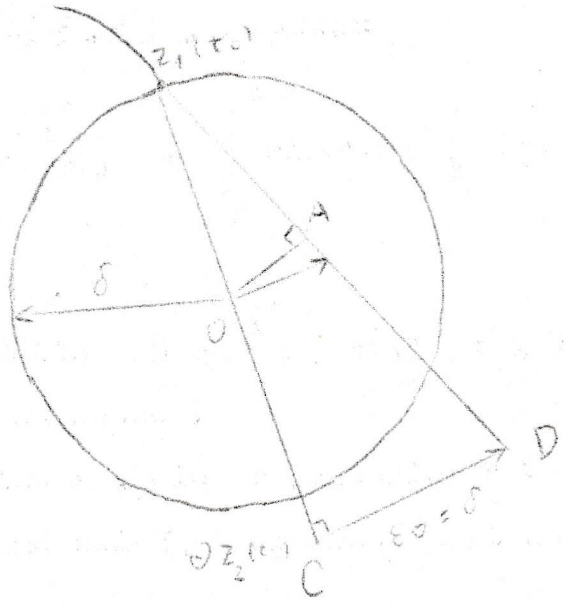
$\pi' \pi P = \pi P = \{0\}$

Die Gleichung (10.3) wird:

$$\pi z(t) = \pi \begin{pmatrix} E & tE \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{pmatrix} + \int_0^t w(s)\,ds$$

$$\pi z(t) = z_1(0) + t\, z_2(0) + \int_0^t w(s)\,ds \qquad (14.4)$$

Sei $\delta = \theta\varepsilon$. Wir setzen $w(t) = 0$, solange die Entfernung des Punktes $\pi z(t)$ zum Nullpunkt grösser ist als δ. (Man kann auch eine beliebige Steuerung $v(t)$ nehmen.) Wenn $|\pi z(t)| = \delta$, kann man eine geeignete Steuerung $w(t)$ die ganze Zeitspanne θ anwenden:



Man erhält folgende Abschätzung:

$$\frac{\delta}{OA} = \frac{\sqrt{|\theta z_2|^2 + \delta^2}}{\delta}$$ also

$$OA = \frac{\varepsilon \delta}{\sqrt{|z_2(t_0)|^2 + \varepsilon^2}}$$

Die Entfernung des Punktes π z(t) zu Null wird also:

$$|\pi z(t)| \geq \min \left\{ \delta \, , \, \frac{\varepsilon \delta}{\sqrt{|z_2(t_0)|^2 + \varepsilon^2}} \right\}$$

15.- Ganz analog dazu wird das etwas allgemeinere Problem mit $\sigma^2 = 0$ gelöst. In diesem Fall ist die Bewegung auch gradlinig:

$$\pi z(t) = \pi e^{Ct} z_0 + \int_0^t w(s)\,ds =$$

$$= \pi z_0 + t\,\pi C z_0 + \int_0^t w(s)\,ds$$

Für geeignete ε , $\vartheta > 0$, sei $\delta = \varepsilon\vartheta$.
Man erhält die Abschätzung:

$$|\pi z(t)| \geqslant \min \left\{ \delta , \frac{\varepsilon\delta}{\sqrt{|\pi C z_0|^2 + \varepsilon^2}} \right\}$$

Die Fluchtbedingungen sind dann I) und II).

16.- Setzen wir jetzt voraus $\pi C = A\pi$, das heisst, die $n_\times n$-Matrix C ist der Form:

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ F & G \end{pmatrix}$$

wobei A eine $k_\times k$-Matrix und die Projektion $\pi(z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, z_k)$ ist.
In diesem Fall ist es leicht nachzurechnen, dass:

$$\pi e^{tC} z = e^{tA} \pi z \quad , \quad z \in \mathbb{R}^n$$

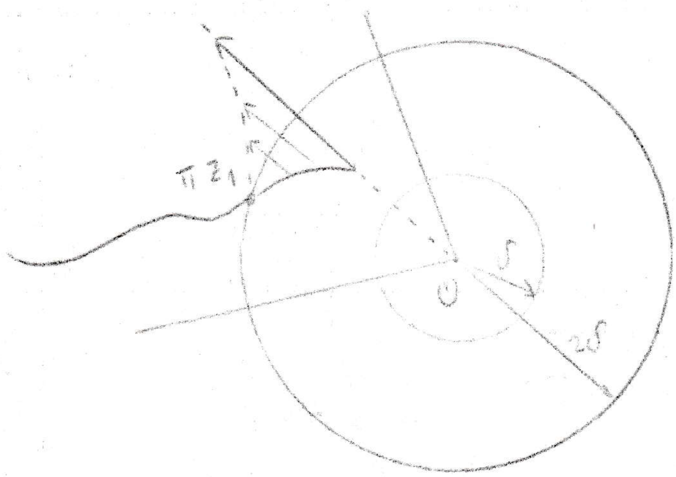
ist.
Sei $\delta > 0$ gegeben und fangen wir das Spiel im Punkt z_0 an, mit $|\pi z_0| \geqslant 2\delta$. Wir untersuchen folgende

Frage: welche Überlegenheitsbedingung muss erfüllt sein, damit $|\pi z(t)| \geqslant \delta$, $t \geqslant 0$ ist?

Betrachten wir die Trajektorie

$$\pi e^{tC} z_1 = e^{tA} \pi z_1 \qquad \text{im Raum } W,$$

in dem Augenblick, wo die Entfernung des Punktes $\pi z(t)$ gleich 2δ ist:



Sei θ_{z_1} die Zeitspanne, in der die Trajektorie in einem Kegel mit Spitze im Null und Winkel $\pi/2$, die πz_1 enthält, und $|\pi z(t)| \geqslant \delta$ bleibt.

Da die Sphäre $S(0, 2\delta)$ kompakt ist, ist dann

$$\theta =: \inf \{ \theta_{z_1} : \pi z_1 \in S(0, 2\delta) \}$$

streng grösser als Null.

Sei $\varepsilon = \frac{\delta}{\theta}$ und setzen wir eine Steuerung $w(t)$ mit $|w(t)| = \varepsilon$ und in der Richtung des Endpunktes $\pi z(t_1 + \theta)$. Es ist klar, dass $|\pi z(t)| \geqslant \delta$ im Intervall $0 \leqslant t \leqslant \theta$ ist, und im Endpunkt:

$$|\pi z(t_1+\theta)| = \left| e^{A(t_1+\theta)} \pi z_1 + \vec{\varepsilon}\theta \right| \geqslant$$

$$\geqslant \delta + \varepsilon\theta = \delta + \delta = 2\delta$$

Auf diese Weise geht die Trajektorie aus der Sphäre $S(0, 2\delta)$ heraus, und der Prozess kann wiederholt werden. Da ε nicht beliebig klein ist, muss die Fluchtbedingung II) auf folgende Weise modifiziert werden:

II') $\mathcal{U}_\varepsilon(\pi' \pi P) \subset \operatorname{Int}(W_0 \cap Q)$

wobei $\mathcal{U}_\varepsilon$ eine ε-Umgebung der Menge $\pi' \pi P$ ist.
Die Bedingung I) bleibt unverändert.

17.- Wir betrachten jetzt ein Beispiel, wo die Fluchtbedingungen I) und II) nicht erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= \lambda z_2 + u \\ \dot z_2 &= -\lambda z_1 + v \end{aligned} \qquad (17.1)$$

wobei z_1, z_2 Vektoren in $\mathbb{R}^2$ sind, u und v sind dann 2-dimensional.
Die Gleichung (17.1) bringt man in der Form:

$$\dot z = C z + \bar v - \bar u \qquad (17.2)$$

mit $z \in \mathbb{R}^4$, $C = \begin{pmatrix} 0 & \lambda E \\ -\lambda E & 0 \end{pmatrix}$,

$\bar{u} = \begin{pmatrix} -u \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$.

Man rechnet nach:

$$C^{4n+1} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{4n+1} E \\ -\lambda^{4n+1} E & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^{4n+2} = \begin{pmatrix} -\lambda^{4n+2} E & 0 \\ 0 & -\lambda^{4n+2} E \end{pmatrix}$$

$$C^{4n+3} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^{4n+3} E \\ \lambda^{4n+3} E & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^{4n+4} = \begin{pmatrix} \lambda^{4n+4} E & 0 \\ 0 & \lambda^{4n+4} E \end{pmatrix}$$

also erhält man:

$$e^{tC} = \begin{pmatrix} \cos \lambda t \, E & \sin \lambda t \, E \\ -\sin \lambda t \, E & \cos \lambda t \, E \end{pmatrix}$$

Wir setzen voraus: $\Pi z = z_1$

Man erhält dann:

$$\Pi z(t) = z_1(0) \cos \lambda t + z_2(0) \sin \lambda t + \int_0^t w(s) ds \qquad (17.3)$$

und die Gleichung für v(t) wird:

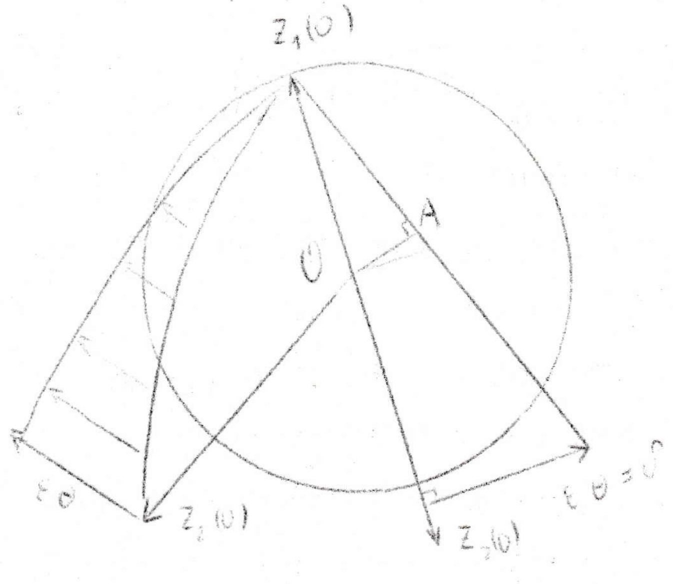
$$\int_0^t \sin \lambda (t-s) v(s) ds = w(t) - u(t) + \int_0^t \cos \lambda (t-s) u(s) ds \qquad (17.4)$$

Wenn wir voraussetzen, dass die Gleichung (17.4) für beliebige $w(t) \in W(\varepsilon, \theta)$, ε und θ klein genug, gelöst werden kann, dann kann man trotzdem das Fluchtproblem lösen:

Sei $\delta = \varepsilon\theta > 0$. Wir nehmen θ so klein, dass $\theta \leq \pi/2\lambda$ ist. Wir setzen die Steuerung $w(t)$ ein, wenn der Punkt $\pi z(t)$ eine Entfernung gleich δ hat. Diesen Punkt wählen wir als Anfangspunkt, mit Anfangszeit $t = 0$. Nach (17.3) haben wir:

$$\pi e^{tC} z_0 = z_1(0) \cos \lambda t + z_2(0) \sin \lambda t \qquad (17.5)$$

Im Intervall $0 \leq t \leq \theta \leq \pi/2\lambda$ stellt diese Funktion einen Ellipsenbogen dar. Sie geht nur durch Null, wenn $z_1(0) = \nu z_2(0)$ ist, wobei $\nu \in \mathbb{R}$ ist. Dann ist die Trajektorie eine Gerade und wir können dieselben Methoden wie für den Fall des "Krokodil und Kind" anwenden. Wenn $z_1(0) \neq \nu z_2(0)$ ist, so wird unsere Abschätzung nur verbessert:



$$\frac{\delta}{OA} = \frac{\sqrt{\theta^2 |z_2(0)|^2 + \delta^2}}{\delta}$$

also

$$OA = \frac{\varepsilon \delta}{\sqrt{|z_2(0)|^2 + \varepsilon^2}}$$

Das heisst, genau wie im Fall des "Krokodil und Kind" erhalten wir eine Abschätzung für die Entfernung d des Punktes $\pi z(t)$ zum Null:

$$d \geq \min \left\{ \delta , \frac{\varepsilon \delta}{\sqrt{|z_2(0)|^2 + \varepsilon^2}} \right\}$$

18.- Wir behandeln jetzt das Beispiel der "isotropischen Raketen":

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \alpha \dot{x} &= u \\ \ddot{y} + \beta \dot{y} &= v \end{aligned} \qquad (18.1)$$

wobei $x, y \in \mathbb{R}^k$, $k \geq 2$, $|u| \leq \rho$; $|v| \leq \sigma$, das heisst, die Mengen P und Q sind Kugeln mit Zentrum im Nullpunkt und Radius ρ bzw. σ

α und β sind von Null verschiedene Konstanten. Das Treffen findet statt, wenn $x = y$. Die Gleichungen (18.1) werden durch die Beziehungen:

$$\begin{aligned} z_1 &= x - y \\ z_2 &= \dot{x} \\ z_3 &= \dot{y} \end{aligned} \qquad (18.2)$$

auf die Form

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 - z_3 \\ \dot{z}_2 &= u - \alpha z_2 \\ \dot{z}_3 &= v - \beta z_3 \end{aligned} \qquad (18.3)$$

gebracht.

Also die Matrix C ist:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & E & -E \\ 0 & -\alpha E & 0 \\ 0 & 0 & -\beta E \end{pmatrix}$$

wobei E die $k \times k$-Einheitsmatrix bedeutet.

Man rechnet nach:

$$C^n = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{n-1}\alpha^{n-1}E & (-1)^n \beta^{n-1} E \\ 0 & (-1)^n \alpha^n E & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \beta^n E \end{pmatrix}$$

also ist

$$e^{tC} = \begin{pmatrix} E & \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} E & -\frac{1-e^{-\beta t}}{\beta} E \\ 0 & e^{-\alpha t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta t} \end{pmatrix}$$

und

$$C e^{tC} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\alpha t} & -e^{-\beta t} \\ 0 & -\alpha e^{-\alpha t} & 0 \\ 0 & 0 & -\beta e^{-\beta t} \end{pmatrix}$$

wir erhalten dann folgende Gleichungen:

$$\pi z(t) = z_1(0) + \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} z_2(0) - \frac{1-e^{-\beta t}}{\beta} z_3(0) + \int_0^t w(s)\,ds \qquad (18.4)$$

$$\int_0^t -e^{-\beta(t-s)} v(s)\,ds = w(t) + \int_0^t -e^{-\alpha(t-s)} u(s)\,ds \qquad (18.5)$$

Da die Hilfssteuerung w(t) stückweise konstant ist, kann man die Gleichung (18.5) ableiten:

$$\int_0^t \beta e^{-\beta(t-s)} v(s)\,ds + v(t) = \int_0^t \alpha e^{-\alpha(t-s)} u(s)\,ds + u(t) \qquad (18.6)$$

Diese Gleichung hat eine Lösung v(t) mit folgender Abschätzung (siehe Paragraph 12):

$$|v(t)| \le \left| u(t) + \int_0^\theta \alpha e^{-\alpha(t-s)} u(s)\,ds \right| \left(1 + \theta m_\theta e^{\theta m_\theta}\right)$$

für $0 \le t \le \theta$. Daraufhin:

$$|v(t)| \le |u(t)| + \theta K_1 \qquad (18.7)$$

Die Abschätzung (18.7) besagt, dass, wenn wir $\sigma > \rho$ als Überlegenheitsbedingung voraussetzen, das Fluchtproblem (18.1) lösbar ist.

oooOooo

Literaturverzeichnis

1.- Pontrjaguin: Lineare differentiale Fluchtspiele.
Trud. Mat. Inst. 122, 1971. (russisch)

2.- Nikolski: Über eine Fluchtmethode.
Dokl.Ak.Nauk UdSSR, 1974. Tom 214 No. 2. (russisch)

3.- Pontrjaguin: Lineare Differentialspiele I.
Dokl.Ak.Nauk UdSSR, 1967. Tom 174. (englisch)

4.- Pontrjaguin: Lineare Differentialspiele II.
Dokl.Ak.Nauk UdSSR, 1967. Tom 175. (englisch)

5.- Nikolski: Nichtstationäre lineare Differentialspiele.
Bect.MY No. 3, 1969. (russisch)

6.- Gamkrelidze - Charatischwili: Differentiale Fluchtspiele mit nichtlinearen Steuerungen.
Mat.Inst. A.B. Steklowa. (russisch)

7.- Filippov: Über einige Fragen in der Theorie der optimalen Regulierung.
Bect.MY No. 2, 1959. (russisch)

8.- Filippov: Klassische Lösungen für Differentialgleichungen mit vielwertigen rechten Seiten.
Bect.MY No. 3, 1967. (russisch)

9.- Pschenischni: Notwendige Optimalitätsbedingungen.
Leipzig 1972. (deutsch)

10.- Girsanov: Vorlesungen über die mathematische Theorie extremaler Aufgaben. 1970. (englisch)

11.- Rufus Isaacs: Differentialspiele.
Academic Press, 1965. (englisch)

12.- Barabanova - Subbotij.
Prikl.Mat.Mex. 1970 No. 4. (russisch)

13.- Pontrjaguin; Boltjanski, Gamkrelidze, Mischenko:
Mathematische Theorie Optimaler Prozesse.
Moskau 1961, dtsch. Üb. DVW Berlin 1964.

14.- Mesenzef: Direkte Methoden in den Differentialspielen.
Ak.Nauk UdSSR, 1971, Tom 11. (russisch)