

GRAVITACION EN ESPACIO-TIEMPOS D-DIMENSIONALES CON TORSION.

Tesis  
entregada a la  
Universidad de Chile  
en cumplimiento parcial  
de los requisitos para  
optar al grado de  
Magíster en Ciencias Físicas.

Por

ALEJANDRO ALBERTO MARDONES RIVERA

1990



Director de la Tesis: Dr. Jorge Zanelli I.

Facultad de Ciencias  
Universidad de Chile

I N F O R M E   D E   A P R O B A C I O N  
T E S I S   D E   M A G I S T E R

Se informa a la Comisión de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por el candidato:

ALEJANDRO ALBERTO MARDONES RIVERA

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito de tesis para el grado de Magister en Ciencias Físicas.

Patrocinante de Tesis:

Dr. Jorge Zanelli

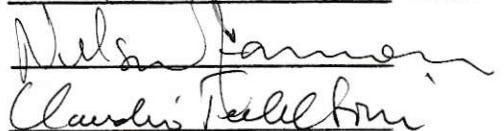


Comisión Informante de Tesis:

Dr. Roberto Hojman

Dr. Nelson Zamorano

Dr. Claudio Teitelboim



A mis padres,  
hermanos y  
esposa.



Deseo expresar mis agradecimientos a todos quienes colaboraron, conciente o inconcientemente, a llevar a cabo este trabajo, y, especialmente, a mis estimados profesores Jorge Zanelli, Roberto Hojman y Claudio Teitelboim por su continuo y prolongado apoyo y preocupación.



# Indice

Resumen	1
<b>1 Introducción</b>	<b>3</b>
1.1 Gravedad en mayores dimensiones. . . . .	3
1.2 Gravedad con torsión. . . . .	4
<b>2 El Lagrangiano de Lovelock.</b>	<b>8</b>
2.1 Derivación original. . . . .	8
2.2 Construcción geométrica del Lagrangiano de Lovelock. . . . .	9
<b>3 Generalización del Lagrangiano de Lovelock.</b>	<b>14</b>
3.1 Construcción del Lagrangiano. . . . .	14
3.2 Invariantes geométricos en espacios de Riemann–Cartan. . . . .	23
<b>4 Dimensiones particulares.</b>	<b>36</b>
4.1 3 dimensiones. . . . .	36
4.2 4 dimensiones. . . . .	38
<b>5 Conclusiones.</b>	<b>41</b>
Apéndice A	43
Apéndice B	46
Apéndice C	57
Referencias	60



## RESUMEN

La Teoría de la Gravitación de Lovelock [1] es la generalización natural de la Teoría de la Relatividad de Einstein, válida para 4 dimensiones, a espacio-tiempos Riemannianos de cualquiera dimensión.

En este trabajo se presenta una extensión de este modelo de gravedad a espacio-tiempos que poseen la estructura diferenciable de una variedad de Riemann-Cartan (cuya geometría queda determinada por la métrica y la torsión). La atención se ha focalizado principalmente en comprender el origen y la estructura geométrica del Lagrangiano gravitacional con torsión, y se harán sólo consideraciones generales respecto de las eventuales consecuencias físicas que se pudieran derivar de tal teoría.

El Capítulo 1 presenta los argumentos que se invocan para motivar el estudio de modelos de gravitación con torsión en dimensiones arbitrarias.

En el Capítulo 2 se resumen las ideas fundamentales contenidas en la formulación de Lovelock. Se pone énfasis en detallar la forma en que el Lagrangiano se construye usando el lenguaje de la geometría diferencial moderna.

El Capítulo 3 describe la manera en que se generaliza el Lagrangiano de Lovelock cuando el espacio-tiempo tiene torsión. En primer lugar, se discute una manera de tipificar cada término nuevo en la acción y se deduce una fórmula que contabiliza el número total de ellos en una dimensión cualquiera. Además, se presenta un procedimiento sistemático para generar todos esos términos en dimensiones pares; se muestra también una manera de obtener las densidades Lagrangianas de una dimensión impar a partir de las densidades de las dimensiones pares inmediatamente inferior y superior. Luego, se analiza la condición de invariantes de la estructura diferenciable del espacio-tiempo de una clase especial de tales términos. La existencia de éstos da pie a una reducción del Lagrangiano

eliminando las densidades Lagrangianas triviales (o sea, que no contribuyen a las ecuaciones de campo) y aquellas que son linealmente dependientes de las demás.

En el Capítulo 4 se revisan algunas dimensiones especiales. En particular, se muestra que en 4 dimensiones el Lagrangiano de Hilbert (que depende implícitamente de la torsión en espacios de Riemann–Cartan) puede ser suplementado, a lo más, con un sólo término.

Finalmente, el Capítulo 5 resume las conclusiones más importantes del trabajo, así como se presentan algunas eventuales extensiones del mismo.

# 1 Introducción

## 1.1 Gravedad en mayores dimensiones.

El espacio-tiempo tiene, al menos macroscópicamente, 4 dimensiones. A este nivel, se considera a la Relatividad General (R.G.) como la teoría apropiada para describir el espacio-tiempo y la gravedad.

Sin embargo, los actuales modelos que pretenden unificar todas las interacciones (por ejemplo, supergravedad y supercuerdas) siempre postulan la existencia de dimensiones extra en el espacio-tiempo. Esto puede considerarse como una fuerte evidencia teórica para motivar la aceptación de que tales dimensiones adicionales son físicamente posibles, y, con ello, el estudio de modelos de gravedad que generalicen la R.G. a dimensiones superiores.

El Lagrangiano de Lovelock [1] es la generalización más natural a dimensiones mayores que 4 de la acción de Hilbert con constante cosmológica, por cuanto da lugar a ecuaciones de segundo orden para la métrica. El origen geométrico de este Lagrangiano queda de manifiesto si se conviene en usar el marco del formalismo de formas diferenciales (véase Apéndice A) para encontrar la referida generalización. En efecto, la acción de Hilbert en este lenguaje tiene la forma  $S = \int_M R^{ab} \wedge V^c \wedge V^d \epsilon_{abcd}$ , donde  $M$  es el espacio-tiempo de 4 dimensiones. Se observa que el integrando es una 4-forma invariante ante rotaciones locales en el espacio tangente. Esta propiedad, promovida a la condición de postulado para cualquier teoría métrica que sea la extensión de la R. G. a mayores dimensiones, conduce naturalmente al Lagrangiano de Lovelock (véase sección 2.1).

Una propiedad interesante es que la acción correspondiente es una combinación lineal de las continuaciones dimensionales de los invariantes topológicos de Euler de todas las dimensiones pares menores o iguales que la dimensión  $D$  considerada [2].

## 1.2 Gravedad con torsión.

Einstein concibió a la Geometría Riemanniana como la opción más natural y simple para desarrollar la R.G. como una teoría de la Gravitación. En ella se identifica a la métrica como el potencial gravitacional y la conexión de Christoffel  $\{\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}\}$  como la intensidad del campo, y la existencia de un campo gravitacional está determinada por la no trivialidad de la curvatura de Riemann. Se dice entonces que la R.G. es una teoría puramente métrica.

Una alternativa a la R.G. consiste en considerar que el espacio-tiempo es una variedad métrica con una conexión métrica que no es necesariamente la de Christoffel, y cuya parte antisimétrica es la torsión.

La inclusión de la torsión en teorías de la Gravitación es una idea casi tan antigua como la R.G. misma, cuyos primeros antecedentes se remontan a trabajos de Cartan [3] sobre la extensión de la teoría puramente métrica de Einstein a espacio-tiempos no-Riemannianos, y sobre lo cual ambos científicos mantuvieron un intenso intercambio epistolar [4].

La motivación usual [5] que se invoca para considerar modelos generalizados de gravedad que incluyan torsión, es el deseo de extrapolar los conceptos de la R.G. —formulada originalmente como una teoría para distribuciones macroscópicas de materia— al dominio de la microfísica. En tal sentido, se trata de extender la idea presente en R.G. de que la geometría determina el movimiento de la materia y la distribución de materia determina la geometría.

En primer lugar, se argumenta que a esa escala las propiedades ondulatorias de la mate-

ria no debieran ser despreciables. Se debiera esperar que la dinámica de la materia esté gobernada, por ejemplo, por ecuaciones del tipo de Dirac en un fondo curvo. (De paso, esto obliga a usar el formalismo de tétradas ya que para poder acomodar espinores en tal espacio se debe necesariamente cubrirlo con bases ortonormales locales o vierbein.). En segundo término, para determinar la forma en que la materia afecta a la geometría, se considera que los componentes básicos de ella son partículas que obedecen los principios de la Mecánica Cuántica y localmente la Relatividad Especial, de modo que tienen spin y masa, nociones elementales independientes entre sí y no reducibles una a la otra. Salvo para escalas macroscópicas (como en R.G.) —en que la masa bastaría para caracterizar dinámicamente a la materia—, esto conduce naturalmente a que tanto el tensor de energía-momento como el tensor de momento angular de spin son necesarios para describir la materia. En R.G. usual, la densidad de energía-momento es la fuente del campo gravitacional, generado a través del acoplamiento minimal de los campos de materia con la conexión (simétrica) de un espacio-tiempo Riemanniano. Similarmente, en una teoría métrica-torsional, la densidad de momento angular de spin es la fuente de la parte torsional del campo gravitacional, generado por el acoplamiento minimal con la parte antisimétrica de la conexión de una variedad de Riemann-Cartan. En este caso, la conexión es

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = \{\overset{\mu}{\nu\rho}\} + K^{\mu}_{\nu\rho}$$

donde los  $\{\overset{\mu}{\nu\rho}\}$  son los símbolos de Christoffel y  $K^{\mu}_{\nu\rho}$  es el tensor de contorsión definido por

$$K^{\mu}_{\nu\rho} = T^{\mu}_{\nu\rho} - T^{\mu}_{\rho\nu} + T_{\nu\rho}^{\mu}$$

en que  $T^{\mu}{}_{\nu\rho}$  es la torsión. Los tensores de energía-momento y de momento angular de spin están dados, respectivamente, por

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}}$$

$$S_{\mu}{}^{\nu\rho} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_m}{\delta K^{\mu}{}_{\nu\rho}}$$

donde  $S_m$  representa la acción de la materia.

La extensión más simple de la gravitación que incluye torsión es la llamada Teoría ECSK (por Einstein-Cartan-Sciama-Kibble) [5]. En ella el Lagrangiano gravitacional es el de Hilbert (además del término cosmológico), en que la curvatura escalar está construída con una conexión métrica asimétrica, de modo que hay una dependencia implícita respecto de la torsión.

Existen otras maneras de incluir la torsión en una teoría para la Gravitación. En efecto, en la literatura hay una proliferación de argumentos para incluirla en el Lagrangiano de distintas maneras [5]. Sin embargo, así como el Teorema de Lovelock demuestra la unicidad del Lagrangiano de Hilbert (módulo derivadas totales y el término cosmológico) para una teoría métrica de la gravedad en 4 dimensiones, uno desearía poder disponer de un resultado similar para las teorías que incluyen torsión, tanto más cuanto que la forma de introducir ésta no es en modo alguno estándar.

Al parecer la ref. [6] es el único antecedente de una versión generalizada del Teorema de Lovelock para espacio-tiempos 4-dimensionales con torsión. La conclusión de ese trabajo se resume en que las ecuaciones de campo más generales, que sean polinomiales en la métrica y la torsión y sus respectivas derivadas, y en las que la única

constante fundamental de dimensión  $\neq 1$  es la constante de Newton, son las ecuaciones de Euler-Lagrange con respecto a la métrica y la torsión del Lagrangiano de Hilbert, en que la curvatura escalar está construida con una conexión métrica asimétrica; es decir, corresponde a la teoría ECSK.

El enfoque que adoptamos aquí es, en cierta medida, la extensión natural de la Teoría de Lovelock a variedades de Riemann–Cartan sugerida por la prescripción geométrica para construir la acción gravitacional; esto es, que la teoría debe poder expresarse enteramente en términos de formas diferenciales. En este marco se observa que la curvatura y la torsión son objetos que, desde el punto de vista geométrico, pueden considerarse en pie de igualdad, de donde parece arbitrario que la teoría de Lovelock privilegie el rol de la curvatura por sobre el de la torsión, partiendo del supuesto de que ésta debe ser cero, en tanto que la primera debe satisfacer las ecuaciones (generalizadas) de Einstein. El paso siguiente es, pues, independizar el papel de la torsión, y proceder a construir el Lagrangiano gravitacional como la  $D$ -forma diferencial escalar más general construida con la conexión de spin,  $\omega^a_b$ , el vielbein (base ortonormal local en cualquiera dimensión),  $V^a$ , y sus derivadas exteriores.

Se establece así, entonces, un criterio que, si bien no se fundamenta sobre consideraciones de carácter físico, al menos es geoméricamente simple.

Como se verá, las posibilidades de agregar términos con torsión en la acción quedan fuertemente restringidas con la forma convenida para construir el Lagrangiano; de hecho, habrá dimensiones para las que no es posible agregar término nuevo alguno y otras para las que sólo será posible suplementar con un término al Lagrangiano de Lovelock.

## 2 El Lagrangiano de Lovelock.

### 2.1 Derivación original.

En la búsqueda de una teoría métrica de la Gravitación que generalice la Teoría de Einstein para dimensiones mayores que 4, Lovelock [1] encontró que la densidad lagrangiana más general en  $D$  dimensiones que genera ecuaciones tensoriales de segundo orden para la métrica es de la forma

$$\mathcal{L}^{(D)} = \sum_{2p \leq D} \alpha_p \mathcal{L}_p^{(D)} \quad (2.1)$$

donde

$$\mathcal{L}_p^{(D)} = \delta_{[\nu_1 \dots \nu_{2p}] }^{\mu_1 \dots \mu_{2p}} R^{\nu_1 \nu_2}_{\mu_1 \mu_2} \dots R^{\nu_{2p-1} \nu_{2p}}_{\mu_{2p-1} \mu_{2p}} \quad (2.2)$$

y los  $\alpha_p$  son coeficientes arbitrarios con unidades de  $[masa]^{(D-2p)}$ .

Las acciones  $S_p^{(D)} = \int_M \mathcal{L}_p^{(D)} \sqrt{g} d^D x$  correspondientes a los primeros términos de (2.1) son (salvo constantes de proporcionalidad):

$$S_0^{(D)} = \int_M \sqrt{g} d^D x \quad (2.3)$$

$$S_1^{(D)} = \int_M R \sqrt{g} d^D x \quad (2.4)$$

$$S_2^{(D)} = \int_M (R^2 - 4R^\mu_\nu R^\nu_\mu + R^{\mu\nu\rho\sigma} R^{\sigma\mu\nu}) \sqrt{g} d^D x \quad (2.5)$$

$$S_3^{(D)} = \int_M (7 \text{ términos del tipo } R^3) \sqrt{g} d^D x \quad (2.6)$$

El tipo de ecuaciones generadas por  $S^{(D)} = \int_M \mathcal{L}^{(D)}$  son más complicadas aún de resolver que las ecuaciones de Einstein en  $D = 4$  dimensiones. Sin embargo, para esta teoría se han encontrado y estudiado soluciones para los casos de agujeros negros y modelos cosmológicos homogéneos (véase [7] y referencias ahí contenidas).

Originalmente el Lagrangiano de Lovelock se obtuvo buscando aquel que generaba lo

que debía ser la generalización de las ecuaciones de Einstein en dimensiones mayores . Es posible reobtener el mismo resultado reformulando el problema desde una perspectiva completamente diferente. El punto central es promover la Gravitación a una teoría enteramente geométrica, utilizando solamente formas diferenciales. (Debido a esto, en lo que sigue usaremos las convenciones y definiciones indicadas en el Apéndice A.)

## 2.2 Construcción geométrica del Lagrangiano de Lovelock.

La acción de Lovelock se puede construir del siguiente modo:

a) De todas las posibles  $D$ -formas construídas con la conexión  $\omega^a_b$  (1-forma) y el vielbein  $V^a$  (1-forma), usando sólo las operaciones de producto y derivada exteriores, evitando el operador de dualidad, y con la restricción  $T^a = D \wedge V^a = 0$  (es decir, el espacio-tiempo es una variedad Riemanniana), el Lagrangiano gravitacional,  $\mathcal{L}^{(D)}$ , contiene, *por definición*, sólo aquéllas en que el Lagrangiano sea la  $D$ -forma escalar (invariante) más general construída usando la curvatura y el vielbein. (Esto excluye, para las dimensiones impares, una clase de densidades Lagrangianas no invariantes pero que dan acciones invariantes: las densidades de Chern-Simons. Estas acciones no dan ecuaciones de segundo orden para la métrica (véase Capítulo 4).)

b) La acción  $S^{(D)} = \int_M \mathcal{L}^{(D)}$ , donde  $M$  es el espacio-tiempo, es un funcional de la conexión métrica  $\omega^{ab}$  y el vielbein  $V^a$ . Sin embargo, las condiciones de metricidad de la conexión y nulidad de la torsión, determinan unívocamente a la conexión. Por lo tanto, las ecuaciones dinámicas se obtienen exigiendo que  $S^{(D)}$  sea estacionaria ante variaciones del vielbein solamente. Tales variaciones deben efectuarse tanto en las apari-

ciones explícitas de  $V^a$  como a través de la conexión.

Estas restricciones conducen a que

$$\mathcal{L}^{(D)} = \sum_{2p \leq D} a_p \mathcal{L}_p^{(D)} + P(R) \quad (2.7)$$

con

$$\mathcal{L}_p^{(D)} = R^{a_1 a_2} \wedge \dots \wedge R^{a_{2p-1} a_{2p}} \wedge V^{a_{2p+1}} \wedge \dots \wedge V^{a_D} \epsilon_{a_1 \dots a_D} \quad (2.8)$$

$$P(R) = \sum_k \sigma_k (R^{a_1 a_2} \wedge R^{a_2 a_3} \wedge \dots \wedge R^{a_{2k-1} a_{2k}}) \wedge \dots \wedge (R^{k_1 k_2} \wedge R^{k_2 k_3} \wedge \dots \wedge R^{k_{p_k} k_1}) \quad (2.9)$$

donde los  $\sigma_k$  son constantes.

La ecuación (2.8) es precisamente el Lagrangiano de Lovelock expresado en lenguaje de formas diferenciales y pone de manifiesto la estructura similar de cada uno de los términos que lo conforman, además de exhibirlo como un objeto de evidente origen geométrico.

Cuando  $D = 2p$ , el término  $\mathcal{L}_p^{(2p)}$  es la densidad de Euler, cuya integral sobre variedades compactas es el invariante topológico del mismo nombre, de modo que no contribuye a las ecuaciones de campo (porque ante variaciones respecto de la métrica, esa integral no cambia en tanto tales variaciones sean nulas en el borde).

La ecuación (2.9) muestra las denominadas densidades de Pontrjagin que están presentes si se cumple

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = \frac{D}{2} \quad , p_i \text{ par, } i = 1, 2, \dots, k ; k = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

es decir, sólo si  $D = 4n$ .

Según se muestra en el Apéndice B, el número total de estos términos en  $4n$  dimensiones es igual al número de maneras en que  $n$  se puede escribir como suma de números naturales, lo que se denota por  $p(n)$  (llamada *función partición* en Teoría de Números)

[18], y cuyos primeros valores se muestran en la Tabla B.1.

No obstante, en lo que se refiere a las ecuaciones de campo, la presencia de estos términos en el Lagrangiano es irrelevante pues la integral de cada uno de ellos es un número que no depende de la geometría local.

Conviene destacar que, aun cuando las ecuaciones clásicas de la Gravitación son insensibles a los invariantes de Euler y Pontrjagin, éstos podrían inducir algún efecto en la teoría cuántica a través de ponderaciones distintas en la integral funcional para configuraciones del espacio-tiempo topológicamente no-equivalentes (esto es, geometrías no homeomórficas).

Para dimensiones pares,  $D = 2m$ , el Lagrangiano (2.1) es factorizable en una forma semejante a la densidad de Euler:

$$\mathcal{L}^{(D)} = \beta_0 Z^{a_1 a_2}(\beta_1) \wedge \dots \wedge Z^{a_{2m-1} a_{2m}}(\beta_m) \epsilon_{a_1 \dots a_{2m}} \quad (2.11)$$

donde

$$Z^{ab}(\beta) = R^{ab} - \beta V^a \wedge V^b \quad (2.12)$$

es la llamada *curvatura concircular* (o *conircularidad*) de escala  $\beta$  [8], y los  $\beta$ 's son las raíces de la ecuación algebraica [7]

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_m x^m = 0 \quad (2.13)$$

La factorización correspondiente al caso  $D = 2m + 1$  se obtiene simplemente agregando un vielbein  $V^{a_{2m+1}}$  en (2.11) (además de un índice al tensor de Levi-Civita).

Observemos que si  $D = 2m$ , una forma rápida de obtener todos los términos del Lagrangiano de Lovelock es reemplazar cada curvatura  $R^{ab}$  en la densidad de Euler por

una curvatura concircular  $Z^{ab}(\beta_i)$ , asignando, en general, escalas distintas a cada concircularidad (inclusive, las  $\beta_i$  podrían ser complejas, siempre que ellas aparezcan en pares conjugados). En el Capítulo 3 veremos que un procedimiento similar a este existe para la obtener todos los términos que suplementan al Lagrangiano de Lovelock cuando se permite la presencia explícita de torsión en la acción.

La variación de la acción respecto de  $V^a$  da las ecuaciones de Einstein generalizadas

$$\sum_{p=0}^{[\frac{D}{2}]-1} \alpha_p (D - 2p) R^{a_1 a_2} \wedge \dots \wedge R^{a_{2p-1} a_{2p}} \wedge V^{a_{2p+1}} \wedge \dots \wedge V^{a_{D-1}} \epsilon_{a_1 \dots a_D} = 0 \quad (2.14)$$

Debemos mencionar que si relajamos la condición de nulidad de la torsión, entonces en el Lagrangiano de Lovelock (2.7) la conexión adquiere la condición de un campo independiente del vielbein, de donde el principio de acción debe modificarse para permitir variaciones respecto de ella. En tal caso, la variación respecto de  $\omega^{ab}$  da las ecuaciones adicionales

$$\sum_{p=0}^{[\frac{D}{2}]-1} \alpha_p (D - 2p) p R^{a_3 a_4} \wedge \dots \wedge R^{a_{2p-1} a_{2p}} \wedge V^{a_{2p+1}} \wedge \dots \wedge V^{a_{D-1}} \wedge T^{aD} \epsilon_{a_1 \dots a_D} = 0 \quad (2.15)$$

El punto importante es que (2.15) muestra que en este caso la acción de Lovelock corresponde a la de una teoría métrico-torsional porque da ecuaciones para la torsión. Excepto en el caso de 4 dimensiones, estas ecuaciones no conducen necesariamente a que la torsión sea nula (aunque permiten tal situación como solución particular). En efecto, si  $D > 4$  y consideramos un espacio-tiempo de curvatura constante,  $\lambda^2 (\iff Z^{ab}(\lambda^2) = 0)$ , y las constantes  $\alpha_p$  son tales que

$$\sum_{2p \leq D} \alpha_p (D - 2p) p \lambda^{2p-2} = 0 \quad (2.16)$$

entonces en (2.15) la torsión queda totalmente indeterminada.

Sólo cuando  $D = 4$ , los principios variacionales de ambas teorías (la de Lovelock puramente métrica y la métrica con torsión) son equivalentes (en ausencia de materia), pues la nulidad de la torsión, que en una de ellas se impone desde un comienzo en el principio de acción, se deriva como consecuencia de (2.15) en la segunda.

Así pues, debemos tener presente, al momento de generalizar el Lagrangiano gravitacional para espacio-tiempos con torsión, que aun cuando el Lagrangiano de Lovelock no incluye a la torsión explícitamente, es decir  $D \wedge V^a$  no aparece explícitamente, genera ecuaciones para ella si el principio de acción se efectúa exigiendo que la acción sea estacionaria ante variaciones independientes de la conexión y el vielbein.

### 3 Generalización del Lagrangiano de Lovelock.

Para generalizar la acción gravitacional a espacios de Riemann–Cartan procedemos a relajar la condición de nulidad de la torsión en la prescripción para construir el Lagrangiano de Lovelock, manteniendo las otras condiciones. En consecuencia, el Lagrangiano generalizado se obtiene encontrando, para una dimensión arbitraria  $D$ , todas las  $D$ –formas, escalares bajo el grupo de Lorentz local, construídas con la conexión, el vielbein y sus derivadas exteriores, que sean distintas de las  $[\frac{D}{2}] + 1$  que conforman el Lagrangiano de Lovelock.

Esta inclusión de la torsión en el método geométrico para construir la acción puede sugerir una proliferación de términos nuevos para el Lagrangiano gravitacional. Sin embargo, veremos que, esencialmente debido a las identidades de Bianchi, el número de términos nuevos que se puede añadir al Lagrangiano es bastante menor de lo que parece. Posteriormente, se determinarán aquellas densidades que son las realmente relevantes para las ecuaciones de campo; es decir, se considerará la eventual eliminación de derivadas totales y aquellos términos que sean linealmente dependientes de otros.

#### 3.1 Construcción del Lagrangiano.

Supongamos que un término típico contiene  $r$  potencias de la curvatura,  $t$  potencias de la torsión y  $v$  potencias del vielbein. Lo que resulta es una  $(2r + 2t + v)$ –forma, que debe ser una  $D$ –forma:

$$2r + 2t + v = D \tag{3.1}$$

El número de índices locales de esa  $D$ –forma es

$$n = 2r + t + v \tag{3.2}$$

todos los cuales deben ser contraídos para obtener una  $D$ -forma escalar. Para la contracción de índices disponemos de los tensores invariantes de Levi-Civita y métrico,  $\epsilon_{a_1 \dots a_D}$  y  $\eta_{ab}$ . Sin embargo, debido a que  $n \leq D$ ,  $\epsilon_{a_1 \dots a_D}$  sólo se puede usar si  $t = 0$  ( $n = D$ ); es decir, si la torsión no aparece explícitamente. Pero en tal caso, los únicos términos posibles son los que ya están incluidos en el Lagrangiano de Lovelock.

Así, pues, la contracción de índices debe hacerse usando sólo  $\eta_{ab}$ .

Al considerar la forma general que tendrá cada uno de los términos que se pueden construir con los factores de que disponemos, se puede resumir que *el problema se reduce a construir  $D$ -formas diferenciales escalares usando las formas escalares básicas  $\mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{V}^n$ ,  $\mathbf{T}^n$  y  $\mathbf{K}^n$ , definidas por:*

$$\mathbf{R}^n = R^{a_1}_{a_2} \wedge R^{a_2}_{a_3} \wedge \dots \wedge R^{a_{n-1}}_{a_n} \wedge R^{a_n}_{a_1} \quad , \quad (3.3)$$

$$\mathbf{V}^n = V_{a_1} \wedge R^{a_1}_{a_2} \wedge \dots \wedge R^{a_n}_{a_{n+1}} \wedge V^{a_{n+1}} \quad , \quad (3.4)$$

$$\mathbf{T}^n = T_{a_1} \wedge R^{a_1}_{a_2} \wedge \dots \wedge R^{a_n}_{a_{n+1}} \wedge T^{a_{n+1}} \quad , \quad (3.5)$$

$$\mathbf{K}^n = T_{a_1} \wedge R^{a_1}_{a_2} \wedge \dots \wedge R^{a_n}_{a_{n+1}} \wedge V^{a_{n+1}} \quad , \quad (3.6)$$

donde el índice  $n$  del lado izquierdo de cada una de estas definiciones hace referencia al número de curvaturas presentes en el lado derecho.

Es fácil demostrar que estas formas escalares básicas verifican:

$$\mathbf{R}^n \begin{cases} \equiv 0 & , n \text{ impar} \\ \neq 0 & , n \text{ par} \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{V}^n \begin{cases} \equiv 0 & , n \text{ par} \\ \neq 0 & , n \text{ impar} \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{T}^n \begin{cases} \equiv 0 & , n \text{ impar} \\ \neq 0 & , n \text{ par} \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{K}^n \neq 0, \forall n \quad (3.10)$$

Estas relaciones son una primera restricción a los posibles Lagrangianos que podemos construir.

Si para una  $p$ -forma,  $\Omega$ , denotamos por  $g(\Omega)$  su grado (es decir,  $g(\Omega) = p$ ), tenemos:

$$g(\mathbf{R}^n) = 2n \quad (3.11)$$

$$g(\mathbf{V}^n) = 2n + 2 \quad (3.12)$$

$$g(\mathbf{T}^n) = 2n + 4 \quad (3.13)$$

$$g(\mathbf{K}^n) = 2n + 3 \quad (3.14)$$

Observemos que  $\mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{V}^n$  y  $\mathbf{T}^n$  son de grado par, mientras que  $\mathbf{K}^n$  es de grado impar. Si recordamos que las formas impares anticonmutan, entonces

$$\mathbf{K}^n \wedge \mathbf{K}^n = 0 \quad (3.15)$$

y  $\mathbf{K}^n$  puede aparecer sólo una vez en una densidad Lagrangiana.

También se puede verificar que la aplicación sucesiva de las identidades de Bianchi,  $D \wedge R^a_b = 0$  y  $D \wedge T^a = R^a_b \wedge V^b$ , conduce a las identidades

$$d \wedge \mathbf{R}^n = 0 \quad (3.16)$$

$$d \wedge V^n = [1 + (-1)^{n+1}] K^n \quad (3.17)$$

$$d \wedge T^n = [1 + (-1)^n] K^{n+1} \quad (3.18)$$

$$d \wedge K^n = T^n - V^{n+1} \quad (3.19)$$

Estas últimas relaciones son las que permitirán discernir qué términos del Lagrangiano con torsión no contribuyen a las ecuaciones de campo por ser derivadas totales, o son dependientes de otros. En efecto, observemos que estas identidades establecen, entre otras consecuencias, que  $K^{2n-1}$  es una forma escalar exacta, de modo que será una densidad lagrangiana trivial. Volveremos sobre este punto más adelante.

Como los nuevos términos que conforman el Lagrangiano gravitacional se construyen buscando todas las posibles combinaciones de formas escalares básicas, definamos las *cadena*s de formas escalares básicas

$$R^{a_1 a_2 \dots a_r} = R^{a_1} \wedge R^{a_2} \wedge \dots \wedge R^{a_r} \quad , a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_r \quad (3.20)$$

$$V^{b_1 b_2 \dots b_v} = V^{b_1} \wedge V^{b_2} \wedge \dots \wedge V^{b_v} \quad , b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_v \quad (3.21)$$

$$T^{c_1 c_2 \dots c_t} = T^{c_1} \wedge T^{c_2} \wedge \dots \wedge T^{c_t} \quad , c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_t \quad (3.22)$$

$$K^{d_1 d_2 \dots d_k} = K^{d_1} \wedge K^{d_2} \wedge \dots \wedge K^{d_k} \quad , d_1 > d_2 > \dots > d_k \quad (3.23)$$

Hagamos algunas observaciones:

a) Convenimos en distribuir los índices en secuencia decreciente de izquierda a derecha (lo que denominaremos *orden normal*), porque cualquiera otra distribución de los mismos índices siempre puede obtenerse del orden normal con permutaciones de ellos; salvo para  $K^{d_1 \dots d_k}$ , en cada permutación no hay cambio de signo.

b) Las desigualdades estrictas  $d_1 > d_2 > \dots > d_k$  se justifican porque cuando hay dos índices iguales, la cadena es idénticamente nula (ecuación (3.15)).

A continuación listamos algunas propiedades de estas cadenas que se deducen de las ecuaciones (3.7 - 3.10):

$$\mathbf{R}^{a_1 \dots a_r} \begin{cases} \neq 0 & , a_j \text{ par}, \forall j \\ \equiv 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{V}^{b_1 \dots b_v} \begin{cases} \neq 0 & , b_j \text{ impar}, \forall j \\ \equiv 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{T}^{c_1 \dots c_t} \begin{cases} \neq 0 & , c_j \text{ par}, \forall j \\ \equiv 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.26)$$

No existen restricciones de este tipo sobre  $\mathbf{K}^{d_1 \dots d_k}$ .

Los grados correspondientes son:

$$g(\mathbf{R}^{a_1 \dots a_r}) = \sum_{j=1}^r 2a_j \quad (3.27)$$

$$g(\mathbf{V}^{b_1 \dots b_v}) = \sum_{j=1}^v (2b_j + 2) \quad (3.28)$$

$$g(\mathbf{T}^{c_1 \dots c_t}) = \sum_{j=1}^t (2c_j + 4) \quad (3.29)$$

$$g(\mathbf{K}^{d_1 \dots d_k}) = \sum_{j=1}^k (2d_j + 3) \quad (3.30)$$

De ahora en adelante, y de acuerdo con (3.24 - 3.26), consideraremos  $a$ , y  $c$ , par,  $b$ , impar y  $d$ , sin restricciones.

Las identidades de Bianchi correspondientes son:

$$d \wedge \mathbf{R}^{a_1 \dots a_r} = 0 \quad (3.31)$$

$$d \wedge \mathbf{V}^{b_1 \dots b_v} = 2 \sum_{j=1}^v \mathbf{V}^{b_1 \dots \hat{b}_j \dots b_v} \wedge \mathbf{K}^{b_j} \quad (3.32)$$

$$d \wedge T^{c_1 \dots c_t} = 2 \sum_{j=1}^t T^{c_1 \dots \hat{c}_j \dots c_t} \wedge K^{c_j+1} \quad (3.33)$$

$$d \wedge K^{d_1 \dots d_k} = \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} K^{d_1 \dots \hat{d}_j \dots d_k} \wedge [T^{d_j} - V^{d_j+1}] \quad (3.34)$$

donde la notación  $\hat{a}$  indica que  $a$  debe omitirse.

Con esto podemos, finalmente, establecer que los nuevos términos del Lagrangiano serán de la forma

$$L = R^{a_1 \dots a_r} \wedge V^{b_1 \dots b_s} \wedge T^{c_1 \dots c_t} \wedge K^{d_1 \dots d_k} \quad (3.35)$$

y el número total de ellos en  $D$  dimensiones está dado por el número de soluciones de la ecuación:

$$D = g(L) \quad (3.36)$$

es decir,

$$D = 4 [m_1 + \dots + m_r + n_1 + \dots + n_s + p_1 + \dots + p_t] + 2 [q_1 + \dots + q_k] + k \quad (3.37)$$

donde  $a_j = 2m_j$ ,  $b_j = 2n_j - 1$ ,  $c_j = 2(p_j - 1)$  y  $d_j = q_j - 1$ .

Según se muestra en el Apéndice B, el número de soluciones de (3.37) es

$$T(D) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{D}{4} \rfloor} G_2(m) F_2(D - 4m) \quad (3.38)$$

donde

$$G_2(n) = \sum_{\substack{k_0 k_1 k_2=0 \\ k_0+k_1+k_2=n}}^n p(k_0)p(k_1)p(k_2) \quad (3.39)$$

$$F_2(n) = \sum_{k=0}^n \hat{p}_k \left( \frac{n-k}{2} \right) \quad (3.40)$$

y  $p(n)$  es el número de maneras distintas en que se puede escribir  $n$  como suma de números naturales, en tanto que  $\hat{p}_k(n)$  es el número de maneras distintas en que se puede escribir  $n$  como suma de  $k$  números naturales distintos.

La siguiente tabla muestra los primeros valores de  $T(D)$ .

**TABLA 3.1**  
Formas escalares que se agregan  
al Lagrangiano de Lovelock.

$D$	$T(D)$	$D$	$T(D)$
1	0	13	13
2	0	14	6
3	1	15	36
4	3	16	69
5	1	17	36
6	0	18	18
7	4	19	91
8	10	20	161
9	4	21	92
10	1	22	53
11	13	23	213
12	27	24	361

Observemos que el número de términos nuevos que se pueden agregar al Lagrangiano gravitacional de Lovelock es fuertemente dependiente de la dimensión, y no parece ser una función que tenga regularidad alguna.

Hay casos excepcionales. Por ejemplo, en  $D = 6$  obtenemos que el Lagrangiano gravitacional más general es el de Lovelock, que no contiene explícitamente a la torsión; ésta aparece más bien indirectamente a través de las ecuaciones dinámicas que se derivan de tal Lagrangiano. (Véase Capítulo 2.)

Evidentemente resultaría cómodo disponer de un procedimiento sistemático de generar todos los términos con torsión que se están considerando para una dimensión cualquiera. Según lo señalado en el Capítulo 2, un procedimiento tal existe para engendrar el Lagrangiano de Lovelock a partir de la densidad de Euler en dimensiones pares por sustitución de la curvatura usual por la curvatura concircular.

Para el caso que nos ocupa, se puede imitar tal procedimiento usando las densidades de Pontrjagin. En efecto, para fijar ideas, consideremos  $D = 8$ . En esta dimensión existen dos densidades de Pontrjagin:  $\mathbf{R}^4 = R^a_b \wedge R^b_c \wedge R^c_d \wedge R^d_a$  y  $\mathbf{R}^{2,2} = R^a_b \wedge R^b_a \wedge R^c_d \wedge R^d_c$ . Si en estas densidades reemplazamos las curvaturas por concircularidades (que tomaremos, por simplicidad, de igual escala), obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^4 &\longrightarrow Z^a_b(\beta) \wedge Z^b_c(\beta) \wedge Z^c_d(\beta) \wedge Z^d_a(\beta) = \mathbf{R}^4 + 4\beta \mathbf{V}^3 - 2\beta^2 \mathbf{V}^{1,1} \\ \mathbf{R}^{2,2} &\longrightarrow Z^a_b(\beta) \wedge Z^b_a(\beta) \wedge Z^c_d(\beta) \wedge Z^d_c(\beta) = \mathbf{R}^{2,2} + 4\beta \mathbf{R}^2 \wedge \mathbf{V}^1 + 2\beta^2 \mathbf{V}^{1,1} \end{aligned}$$

Es evidente que este simple reemplazo no puede generar aquellos términos que incluyen a la torsión explícitamente. Lo que se debe hacer es usar un reemplazo en que esté también involucrada la torsión. Una sustitución adecuada es:

$$R^a_b \wedge R^b_c \longrightarrow Z^a_b(\beta_1) \wedge Z^b_c(\beta_2) - \gamma T^a \wedge T_c \quad (3.41)$$

donde  $\gamma$  es una constante adimensional.

Con estos reemplazos se generan todas las formas escalares a partir de las densidades de Pontrjagin. Por ejemplo, en el caso anterior se tiene (haciendo, por simplicidad, todos los  $\beta$ 's iguales entre sí y los  $\gamma$ 's iguales entre sí):

$$\begin{aligned} \alpha_1 \mathbf{R}^4 + \alpha_2 \mathbf{R}^{2,2} \longrightarrow & \alpha_1 \{ \mathbf{R}^4 + 4\beta \mathbf{V}^3 - 2\beta^2 \mathbf{V}^{1,1} \\ & - 2\gamma \mathbf{T}^2 + \gamma^2 \mathbf{T}^{0,0} + 2\gamma\beta \mathbf{K}^{1,0} \} \\ & + \alpha_2 \{ \mathbf{R}^{2,2} + 4\beta \mathbf{R}^2 \wedge \mathbf{V}^1 \\ & + 4\beta^2 \mathbf{V}^{1,1} - 2\gamma\beta \mathbf{V}^1 \wedge \mathbf{T}^0 + \gamma^2 \mathbf{T}^{0,0} \} \end{aligned}$$

obteniéndose los 10 términos que existen en 8 dimensiones.

En las dimensiones que *no* son múltiplo de 4 los invariantes de Pontrjagin son idénticamente nulos. Sin embargo, esto no es obstáculo porque el referido reemplazo igualmente genera los términos con torsión. Por ejemplo, en  $D = 10$  tenemos (tomando sólo escalas  $\beta$  y  $\gamma$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^5 &= R^a_b \wedge R^b_c \wedge R^c_d \wedge R^d_e \wedge R^e_a \equiv 0 \\ \longrightarrow & (Z^a_b(\beta) \wedge Z^b_c(\beta) - \gamma T^a \wedge T_c) \wedge (Z^c_d(\beta) \wedge Z^d_e(\beta) - \gamma T^c \wedge T_e) \wedge R^e_a \\ &= 2\beta\gamma T_a \wedge R^a_b \wedge R^b_c \wedge V^c \wedge T_d \wedge V^d = 2\beta\gamma \mathbf{K}^{2,0} \end{aligned}$$

con lo que obtenemos el único término no nulo en esa dimensión (véase Tabla 3.1).

En resumen, podemos establecer que el Lagrangiano gravitacional más general en un espacio-tiempo de Riemann-Cartan  $D$ -dimensional ( $D$  par) puede escribirse como:

$$\mathcal{L}^{(D)} = \mathcal{L}_{\text{Love\,lock}}^{(D)} + P(\bar{R}) \quad (3.42)$$

con

$$P(\bar{R}) = \sum_k \sigma_k \bar{\mathbf{R}}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} \quad (3.43)$$

donde  $a_1 + \dots + a_k = \frac{D}{2}$ , y la barra indica que en cada cadena  $\mathbf{R}$  se ha hecho el reemplazo (3.41).

Cuando la dimensión es impar,  $D = 2n + 1$ , obviamente no puede haber una prescripción de este tipo pues no es posible construir nada parecido a una densidad de Pontrjagin. En este caso se puede proceder del modo siguiente: una vez generadas las densidades Lagrangianas de las dimensiones inferior y superior,  $D = 2n$  y  $D = 2n + 2$ , se sustituye un vielbein por una torsión (lo que sube en 1 el grado de la forma) en las densidades de  $2n$  dimensiones (donde se pueda hacer ello), y una torsión por un vielbein (lo que baja en 1 el grado de la forma) en las de  $2n + 2$  dimensiones. En nuestra notación, esto equivale a reemplazar cada cadena  $\mathbf{V}$  por una cadena  $\mathbf{K}$  y cada  $\mathbf{K}$  por una  $\mathbf{T}$ , en el primer caso, en tanto que en el segundo se sustituye cada cadena  $\mathbf{T}$  por una  $\mathbf{K}$  y cada  $\mathbf{K}$  por una  $\mathbf{V}$ .

Para ilustrar esto último, consideremos el caso  $D = 7$ . Si nos remitimos a la Tabla 3.3 (véase más adelante), observamos que las densidades Lagrangianas de 7 dimensiones se obtienen de las de 8 dimensiones en la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{0,0} &\longrightarrow \mathbf{T}^0 \wedge \mathbf{K}^0 \\ \mathbf{R}^2 \wedge \mathbf{T}^0 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \wedge \mathbf{K}^0 \\ \mathbf{T}^2 &\longrightarrow \mathbf{K}^2 \\ \mathbf{K}^{1,0} &\longrightarrow \mathbf{V}^1 \wedge \mathbf{K}^0 \end{aligned}$$

### 3.2 Invariantes geométricos en espacios de Riemann–Cartan.

La función  $T(D)$  cuenta todas las  $D$ -formas escalares no nulas construídas con la curvatura, torsión y vielbein que no están contenidas en el Lagrangiano de Lovelock. Sin embargo, a partir de las ecuaciones (3.31 – 3.34) se concluye que algunos términos in-

cluidos en  $T(D)$  son densidades Lagrangianas triviales (es decir, derivadas totales), en tanto que otros dependen de los restantes.

Consideremos el Lagrangiano de la forma (3.35). Usando las ecuaciones (3.31 - 3.34) obtenemos:

$$d \wedge L = A + B + C \quad (3.44)$$

con

$$A = 2 \sum_{j=1}^v \mathbf{R}^{a_1 \dots a_r} \wedge \mathbf{V}^{b_1 \dots b_j \dots b_v} \wedge \mathbf{T}^{c_1 \dots c_i} \wedge \mathbf{K}^{b_j, d_1 \dots d_k} \quad (3.45)$$

$$B = 2 \sum_{j=1}^i \mathbf{R}^{a_1 \dots a_r} \wedge \mathbf{V}^{b_1 \dots b_v} \wedge \mathbf{T}^{c_1 \dots c_i \dots c_i} \wedge \mathbf{K}^{(c_j+1) d_1 \dots d_k} \quad (3.46)$$

$$C = \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \mathbf{R}^{a_1 \dots a_r} \wedge \mathbf{V}^{b_1 \dots b_v} \wedge \mathbf{T}^{c_1 \dots c_i} \wedge \mathbf{K}^{d_1 \dots d_j \dots d_k} \wedge [\mathbf{T}^{d_j} - \mathbf{V}^{d_j+1}] \quad (3.47)$$

De las ecuaciones (3.24 - 3.26) se infiere que

$$A \equiv 0 \iff \forall b_i, \exists d_j / b_i = d_j \quad (3.48)$$

$$B \equiv 0 \iff \forall c_i, \exists d_j / c_{i+1} = d_j \quad (3.49)$$

$$C \equiv 0 \iff d_i \text{ impar}, \forall d_i \quad (3.50)$$

Si (3.48 - 3.50) se cumplen, entonces  $L$  es una forma escalar cerrada y, por lo tanto, localmente exacta:  $L = d \wedge F$ .

Por ejemplo, en  $D = 13$  tenemos  $\mathbf{R}^2 \wedge \mathbf{T}^0 \wedge \mathbf{K}^1 = \frac{1}{2} d \wedge (\mathbf{R}^2 \wedge \mathbf{T}^0 \wedge \mathbf{V}^1)$  y  $\mathbf{V}^{1,1} \wedge \mathbf{K}^1 = \frac{1}{2} d \wedge (\mathbf{V}^{1,1,1})$ , entre otras.

Estos términos son densidades Lagrangianas triviales. No obstante, tienen interés geométrico - si no topológico- en cuanto que verifican

$$\Gamma_L(M) = \int_M L = \int_{\partial M} F \quad (3.51)$$

cuando  $M$  es contractible a un punto, de modo que  $L$  es globalmente exacta (Lema de Poincaré) [9].

Al igual que en el caso de las expresiones integrales de los invariantes de Euler y Pontrjagin, estas relaciones establecen una conexión entre la geometría local del espacio-tiempo  $M$  e invariantes globales del mismo, pues si se hacen variaciones de esas expresiones respecto de la conexión y el vielbein, se observa que ellas no cambian en tanto tales variaciones sean nulas en  $\partial M$ . Es en este sentido que en Física se acostumbra decir que ellas corresponden a invariantes topológicos del espacio-tiempo. Sin embargo, respecto de este punto, cabe señalar que en Matemáticas se distinguen categorías de invariantes globales, entre las que se encuentran las de invariantes de la estructura topológica e invariantes de la estructura diferenciable de una variedad  $M$ . Los primeros son invariantes ante un cambio de  $M$  por una variedad homeomorfa  $M'$ , en tanto que los segundos lo son ante un cambio de  $M$  por una variedad difeomorfa  $M'$ , de modo que la invariancia topológica es una propiedad mucho más fuerte que la difeomórfica.

El mencionado criterio usado en Física permite sólo establecer la condición de invariantes de la estructura diferenciable del espacio-tiempo  $M$  de los invariantes de Euler, Pontrjagin y los  $\Gamma_L(M)$ . El determinar si ellos corresponden a invariantes topológicos del espacio-tiempo no es una interrogante de respuesta inmediata y es claro que la solución debe buscarse necesariamente fuera del dominio de la geometría diferencial porque se debe considerar espacios topológicos que en general no tienen estructura diferenciable (o pueden tener muchas) [9].

En lo que respecta al invariante geométrico de Euler, sin embargo, la solución es conocida: la característica de Euler,  $\chi(M)$ , de un espacio topológico cualquiera  $M$ , está definida como la suma alternada de los rangos de los grupos de homología (o *números de Betti*) de  $M$ , lo que inmediatamente le confiere el carácter de invariante topológico

(pues los grupos de homología lo son). En el *caso particular* en que  $M$  es una variedad diferenciable  $2p$ -dimensional compacta y orientable, el Teorema Generalizado de Gauß-Bonnet establece una relación entre este número invariante y la integral sobre  $M$  de la curvatura:

$$\chi(M) = \int_M R^{a_1 a_2} \wedge \dots \wedge R^{a_{2p-1} a_{2p}} \epsilon_{a_1 \dots a_{2p}} \quad (3.52)$$

lo que justifica que a la expresión del lado derecho de esta ecuación se le califique como invariante topológico.

No se conoce un resultado análogo a éste para el caso de los nuevos invariantes geométricos que incluyen torsión. Es probable que, en realidad, no sean invariantes topológicos, por cuanto ellos parecen ser objetos del mismo tipo que los invariantes de Pontrjagin (a partir de los cuales hemos exhibido una manera de generarlos), los que son sólo invariantes difeomórficos; en efecto, hay ejemplos [10] en que estos números difieren en variedades homeomórficas no-difeomórficas.

Al igual que los invariantes de Euler y Pontrjagin, estos nuevos invariantes –aun cuando no aportan a las ecuaciones de campo– se incluyen en el Lagrangiano por completitud. Sin embargo, se debe mencionar que su presencia pudiera ser relevante en la teoría cuántica al asignar, en la integral funcional, pesos diferentes a variedades difeomórficamente distintas, aun si ellas fueran configuraciones topológicamente equivalentes.

No parece un ejercicio de rápida solución el determinar todos los invariantes con torsión que existen en una dimensión dada.

Denominemos *invariantes simples* al tipo de integrales que estamos considerando, por contraposición a otros invariantes más complejos que mencionaremos posteriormente.

No hemos logrado, hasta la fecha en que se escribe la tesis, la obtención de una fórmula

general (a la manera de la expresión para  $T(D)$ ), para la función  $I(D)$  que cuenta todos los invariantes simples no está aún resuelta. Hay resultados parciales.

Por ejemplo, por un lado tenemos los invariantes simples contruídos sólo de curvaturas, que se determinan por

$$g(\mathbf{R}^{a_1 a_2 \dots}) = D \quad , \text{ con } a_i = 2m_i \quad , \forall i \quad (3.53)$$

o sea,

$$4(m_1 + m_2 + \dots) = D \quad (3.54)$$

Estos son los invariantes de Pontrjagin; el número de ellos, ya sabemos, es  $p(\frac{D}{4})$  (véase Capítulo 2).

Los demás invariantes simples, de acuerdo con las ecuaciones (3.48 - 3.50), siempre incluyen las cadenas  $\mathbf{K}$ 's, y ocasionalmente las  $\mathbf{V}$ 's y  $\mathbf{T}$ 's

En el caso en que tales invariantes sólo están formados por cadenas  $\mathbf{R}$ 's y  $\mathbf{K}$ 's, también podemos derivar una fórmula que los contabilice. A saber, lo que debe ocurrir es que

$$g(\mathbf{R}^{a_1 a_2 \dots} \wedge \mathbf{K}^{d_1 \dots d_k}) = D \quad (3.55)$$

con  $a_1 \geq a_2 \geq \dots$ ,  $d_1 > d_2 > \dots$ ,  $a_i = 2m_i$  y  $d_i = 2q_i - 1$ ; es decir

$$4(m_1 + m_2 + \dots) + 4(q_1 + \dots + q_k) + k = D \quad (3.56)$$

El número de soluciones de esta ecuación es (de acuerdo con lo que está desarrollado en el Apéndice B)

$$K(D) = \sum_{m=0}^{[\frac{D}{4}]} G_0(m) F_4(D - 4m) \quad (3.57)$$

(Las funciones  $G_0(m)$  y  $F_4(D - 4m)$  están definidas y tabuladas en el referido apéndice.)  
Queda, sin embargo, por contabilizar los invariantes simples que además incluyen cadenas  $\mathbf{V}$ 's y  $\mathbf{T}$ 's.

Aun cuando no disponemos de una fórmula que los contabilice, es, sin embargo, fácil determinar por inspección directa cuántas son para dimensiones bajas.

En la Tabla siguiente se resumen los valores de la función  $I(D)$  que cuenta el número de  $D$ -formas lagrangianas triviales incluidas en  $T(D)$ :

TABLA 3.2

Densidades Lagrangianas triviales.

$D$	$I(D)$	$D$	$I(D)$
1	0	13	9
2	0	14	1
3	0	15	0
4	1	16	5
5	1	17	20
6	0	18	4
7	0	19	0
8	2	20	7
9	4	21	35
10	0	22	14
11	0	23	0
12	3	24	11

(El examen de estas tablas de valores puede a veces, erróneamente, sugerir la existencia de ciertas regularidades. Por ejemplo, en la anterior tabla pareciera que estos invariantes no existen en dimensiones  $D = 3, 7, 11, \dots, 4k - 1$ . Sin embargo, en  $D = 27$  tenemos la 27-forma (localmente) exacta  $\mathbf{K}^{5,3,1} = \frac{1}{2}d \wedge (\mathbf{V}^5 \wedge \mathbf{K}^{3,1})$ .)

Aun cuando los invariantes simples fueran eliminados del Lagrangiano gravitacional (por las razones ya indicadas), generalmente en lo que queda persiste una redundancia de términos debido a que ciertas combinaciones lineales de las formas escalares remanentes (cuyas integrales no son invariantes simples) también son formas exactas, cuyas

integrales llamaremos *invariantes compuestos*.

En efecto, por ejemplo, en  $D = 4$  hay 3 formas escalares básicas:  $\mathbf{R}^2 = R^a_b \wedge R^b_a$ ,  $\mathbf{V}^1 = V_a \wedge R^a_b \wedge V^b$  y  $\mathbf{T}^0 = T_a \wedge T^a$ . De éstas, sólo  $\mathbf{R}^2$  es trivial (es una densidad de Pontrjagin). Sin embargo, existe el invariante compuesto que se obtiene de integrar  $\mathbf{T}^0 - \mathbf{V}^1 = d \wedge \mathbf{K}^0$  (véase ecuación (3.19)), de modo que  $\mathbf{V}^1$  y  $\mathbf{T}^0$  son equivalentes (véase Capítulo 4).

La existencia de invariantes compuestos se puede usar como otro mecanismo de reducción del Lagrangiano gravitacional por eliminación de términos que se expresen como combinación lineal (módulo formas exactas) de los demás.

A continuación se exhibe el listado explícito de todas las formas escalares no nulas que se pueden agregar al Lagrangiano gravitacional de Lovelock cuando el espacio-tiempo es una variedad de Riemann–Cartan de dimensión  $D = 3, 4, \dots, 14$ . En la lista se indica para cada término la clase a la que pertenece. Las clases se denotan por:

- Ex  $\longrightarrow$  forma (localmente) exacta
- no Ex  $\longrightarrow$  forma no-exacta
- L.D.  $\longrightarrow$  forma no-exacta linealmente  
dependiente de las demás

Tabla 3.3

Dimensión	Formas escalares	Clase
3	$K^0$	No Ex
4	$R^2$	Ex
	$V^1$	No Ex
	$T^0$	L.D.
5	$K^1$	Ex
6	—	—
7	$R^2 \wedge K^0$	No Ex
	$V^1 \wedge K^0$	No Ex
	$T^0 \wedge K^0$	No Ex
	$K^2$	No Ex
8	$R^4$	Ex
	$R^{2,2}$	Ex
	$R^2 \wedge V^1$	No Ex
	$V^3$	No Ex
	$V^{1,1}$	No Ex
	$T^{0,0}$	L.D.
	$R^2 \wedge T^0$	L.D.
	$T^2$	L.D.
	$V^1 \wedge T^0$	L.D.
	$K^{1,0}$	No Ex

Tabla 3.3 (Cont.)

Dimensión	Formas escalares	Clase
9	$K^3$	Ex
	$R^2 \wedge K^1$	Ex
	$V^1 \wedge K^1$	Ex
	$T^0 \wedge K^1$	Ex
10	$K^{2,0}$	No Ex
11	$R^4 \wedge K^0$	No Ex
	$R^{2,2} \wedge K^0$	No Ex
	$R^2 \wedge V^1 \wedge K^0$	No Ex
	$V^3 \wedge K^0$	No Ex
	$V^{1,1} \wedge K^0$	No Ex
	$T^{0,0} \wedge K^0$	No Ex
	$R^2 \wedge T^0 \wedge K^0$	No Ex
	$T^2 \wedge K^0$	L.D.
	$V^1 \wedge T^0 \wedge K^0$	No Ex
	$R^2 \wedge K^2$	No Ex
	$V^1 \wedge K^2$	No Ex
	$T^0 \wedge K^2$	No Ex
	$K^4$	No Ex

Dimensión	Formas escalares	Clase
12	$R^6$	Ex
	$R^{4,2}$	Ex
	$R^{2,2,2}$	Ex
	$V^6$	No Ex
	$R^4 \wedge V^1$	No Ex
	$R^{2,2} \wedge V^1$	No Ex
	$R^2 \wedge V^3$	No Ex
	$R^2 \wedge V^{1,1}$	No Ex
	$V^{3,1}$	No Ex
	$V^{1,1,1}$	No Ex
	$T^{0,0,0}$	L.D.
	$R^2 \wedge T^{0,0}$	L.D.
	$T^{2,0}$	L.D.
	$V^1 \wedge T^{0,0}$	L.D.
	$T^0 \wedge K^{1,0}$	No Ex
	$R^4 \wedge T^0$	L.D.
	$R^{2,2} \wedge T^0$	L.D.
	$R^2 \wedge T^2$	L.D.
	$T^4$	L.D.
	$V^3 \wedge T^0$	L.D.
	$R^2 \wedge V^1 \wedge T^0$	L.D.
	$V^1 \wedge T^2$	L.D.
	$K^{3,0}$	No Ex
	$R^2 \wedge K^{1,0}$	No Ex
	$V^{1,1} \wedge T^0$	L.D.
	$V^1 \wedge K^{1,0}$	No Ex
	$K^{2,1}$	no Ex

Tabla 3.3 (Cont.)

Dimensión	Formas escalares	Clase
13	$K^5$	Ex
	$R^2 \wedge K^3$	Ex
	$V^1 \wedge K^3$	L.D.
	$T^0 \wedge K^3$	L.D.
	$R^4 \wedge K^1$	Ex
	$R^{2,2} \wedge K^1$	Ex
	$V^3 \wedge K^1$	No Ex
	$R^2 \wedge V^1 \wedge K^1$	Ex
	$V^{1,1} \wedge K^1$	Ex
	$T^2 \wedge K^1$	Ex
	$R^2 \wedge T^0 \wedge K^1$	Ex
	$V^1 \wedge T^0 \wedge K^1$	Ex
	$T^{0,0} \wedge K^1$	Ex
14	$T^0 \wedge K^{2,0}$	No Ex
	$T^1 \wedge K^{1,0}$	No Ex
	$K^{4,0}$	No Ex
	$R^2 \wedge K^{2,0}$	No Ex
	$K^{3,1}$	Ex
	$V^1 \wedge K^{2,0}$	No Ex

De las anteriores tablas podemos confeccionar la siguiente que muestra, para cada dimensión, los valores de la función  $R(D)$  que cuenta el número de términos que no son densidades Lagrangianas triviales (compárese con la Tabla 3.1 para  $T(D)$  que cuenta todos los términos posibles):

**TABLA 3.4**

Formas escalares no-triviales.

$D$	$R(D)$	$D$	$R(D)$
1	0	13	1
2	0	14	5
3	1	15	$\leq 36$
4	1	16	$\leq 33$
5	0	17	$\leq 16$
6	0	18	$\leq 14$
7	4	19	$\leq 91$
8	4	20	$\leq 82$
9	0	21	$\leq 57$
10	1	22	$\leq 39$
11	12	23	$\leq 213$
12	12	24	$\leq 194$

(Los valores de  $R(D)$  son rigurosamente exactos hasta  $D = 14$ ; para  $D \geq 15$  los valores tabulados son cotas máximas determinadas sólo por la eliminación de los invariantes simples (Tabla 3.2), sin considerar que existen igualmente invariantes compuestos, lo que permite reducir aún más el número de términos; para las dimensiones  $D = 4n$  hay argumentos de los que se puede deducir que  $R(4n) \leq T(4n) - (G_2(n) - G_1(n))$ , donde las funciones  $G$ 's están definidas en el Apéndice B.)

## 4 Dimensiones particulares.

La Tabla 3.4 muestra que el número de densidades Lagrangianas con torsión no-triviales que pueden suplementar al Lagrangiano de Lovelock queda severamente restringido por las condiciones geométricas impuestas para la construcción de esos términos. En particular, encontramos que para 5, 6 y 9 dimensiones no hay ninguno de tales términos, de modo que en esos casos el Lagrangiano de Lovelock es el Lagrangiano gravitacional más general; esto es, la torsión está incluida en el Lagrangiano a través de la curvatura (que está construída con una conexión métrica no-simétrica), y en las ecuaciones aparece explícitamente al variar la acción respecto de la conexión (véase Capítulo 2). Por otra parte, en 3, 4, 10 y 13 dimensiones es posible agregar nada más que un término no-trivial dependiente explícitamente de la torsión.

### 4.1 3 dimensiones.

En la teoría de gravedad de Lovelock en 3 dimensiones, la acción está dada por:

$$S_{Lovelock}^{(3)} = \int_M \{ \alpha_0 V^a \wedge V^b \wedge V^c + \alpha_1 R^{ab} \wedge V^c \} \epsilon_{abc} \quad (4.1)$$

o bien, en componentes tensoriales:

$$S_{Lovelock}^{(3)} = \int_M \{ \alpha'_0 + \alpha'_1 R \} \sqrt{g} d^3 x \quad (4.2)$$

Es un hecho conocido [11] que este modelo de Relatividad General es trivial en cuanto que el tensor de Riemann en una región queda completamente determinado por la distribución de materia local y la constante cosmológica, de donde no cabe la posibilidad de que el campo gravitacional se propague en el vacío (es decir, no hay ondas gravitacionales). En este sentido, la ausencia de dinámica en este modelo ha desviado la

atención al estudio de efectos globales y topológicos no triviales, o bien a la búsqueda de alguna teoría distinta.

La alternativa más conocida a la Teoría de Einstein en 3 dimensiones es el modelo de gravedad topológica [12] que consiste en agregar al Lagrangiano de Hilbert una densidad Lagrangiana no invariante construída con la conexión de spin

$$\mathcal{L}_{CS}^{(3)} = \omega^a_b \wedge d \wedge \omega^b_a + \frac{2}{3} \omega^a_b \wedge \omega^b_c \wedge \omega^c_a \quad (4.3)$$

denominada densidad Lagrangiana de Chern-Simons.

En este tipo de términos existe siempre en dimensiones impares,  $D = 4k - 1$ , y no está presente en el Lagrangiano de Lovelock porque no son formas diferenciales escalares (pues la 1-forma de conexión no transforma como un tensor en el espacio tangente). Además, ellas generan ecuaciones diferenciales de orden mayor que 2 para la métrica. En efecto, en 3 dimensiones al variar la acción de Hilbert más la acción de Chern-Simons  $S_{CS}^{(3)} = \int_M \mathcal{L}_{CS}^{(3)}$  respecto de la métrica se obtiene

$$G^{\mu\nu} + \frac{1}{\mu} C^{\mu\nu} = 0 \quad (4.4)$$

donde  $\mu$  es una constante de acoplamiento,  $G^{\mu\nu}$  es tensor de Einstein y  $C^{\mu\nu}$  está definido por

$$C^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{\alpha\beta\mu} (R^\nu_\alpha - \frac{1}{4} \delta^\nu_\alpha R)_{;\beta} \quad (4.5)$$

que manifiestamente contiene terceras derivadas de la métrica y corresponde al análogo 3-dimensional del tensor de Weyl de mayores dimensiones [11].

En nuestro caso, tenemos una modificación distinta de la Teoría de Einstein para 3-variedades con torsión, a través de la incorporación del término  $T_a \wedge V^a$  a la acción

$$S^{(3)} = \int_M \{ \alpha V^a \wedge V^b \wedge V^c + \beta R^{ab} \wedge V^c \} \epsilon_{abc} + \gamma T_a \wedge V^a \quad (4.6)$$

o bien,

$$S^{(3)} = \int_M \{ \alpha \sqrt{g} + \beta R \sqrt{g} + \gamma T_{\mu\nu\sigma} \epsilon^{\mu\nu\sigma} \} d^3x \quad (4.7)$$

Es conveniente observar que, de acuerdo con el análisis de la reducción dimensional de las ecuaciones estructurales de Cartan detallado en el Apéndice C, se observa que la suma de este término con torsión y la densidad de Chern-Simons es aquella 3-forma cuya derivada exterior da la densidad de Pontrjagin de 4 dimensiones.

## 4.2 4 dimensiones.

La acción de Lovelock en este caso es:

$$S_{Lovelock}^{(4)} = \int_M \{ \alpha_0 V^a \wedge V^b \wedge V^c \wedge V^d + \alpha_1 R^{ab} \wedge V^c \wedge V^d + \alpha_2 R^{ab} \wedge R^{cd} \} \epsilon_{abcd} \quad (4.8)$$

o, escrita en componentes tensoriales:

$$S_{Lovelock}^{(4)} = \int_M \{ \alpha'_0 + \alpha'_1 R + \alpha'_2 (R^2 - 4R^\mu{}_\nu R^\nu{}_\mu + R^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho} R^{\sigma\rho}{}_{\mu\nu}) \} \sqrt{g} d^4x \quad (4.9)$$

El primer término en el integrando corresponde a la constante cosmológica, el segundo al Lagrangiano de Hilbert y el tercero a la densidad de Euler (Gauß-Bonnet) de 4 dimensiones que es una derivada total.

Esta acción puede ser suplementada por:

$$\tilde{S}^{(4)} = \int_M \{ \beta_0 R^a{}_b \wedge R^b{}_a + \beta_1 R^{ab} \wedge V_a \wedge V_b + \beta_2 T^a \wedge T_a \} \quad (4.10)$$

o, en componentes,

$$\tilde{S}^{(4)} = \int_M \{ \beta_0 R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} R^\beta{}_{\alpha\sigma\rho} + \beta_2 R_{\mu\nu\sigma\rho} + \beta_3 T^\alpha{}_{\nu\mu} T_{\alpha\sigma\rho} \} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} d^4x \quad (4.11)$$

El primer término es la densidad de Pontrjagin de 4 dimensiones, que es una derivada total. Según ya se ha mencionado, el segundo y el tercer términos (que existen sólo en

espacio-tiempos con torsión) difieren por una derivada total, cuya integral da un invariante difeomórfico (aparentemente no conocido con anterioridad a [13]). De esta forma, en variedades de Riemann-Cartan 4-dimensionales existen 3 invariantes geométricos expresables como integrales de densidades locales [14], uno de los cuales es nulo si la torsión es nula:

$$\begin{aligned} E &= \int_{\mathbf{M}} R^{ab} \wedge R^{cd} \epsilon_{abcd} \\ P &= \int_{\mathbf{M}} R^a_b \wedge R^b_a \\ \Gamma &= \int_{\mathbf{M}} R^{ab} \wedge V_a \wedge V_b - T_a \wedge T^a \end{aligned}$$

Descartando las formas cerradas obtenemos que la acción más general en 4 dimensiones es de la forma:

$$S^{(4)} = \int_{\mathbf{M}} (\alpha V^a \wedge V^b \wedge V^c \wedge V^d + \beta R^{ab} \wedge V^c \wedge V^d) \epsilon_{abcd} + \gamma R^{ab} \wedge V_a \wedge V_b \quad (4.12)$$

o bien, en componentes tensoriales:

$$S^{(4)} = \int_{\mathbf{M}} \{ \alpha \sqrt{g} + \beta \sqrt{g} R + \gamma \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} R_{\mu\nu\sigma\rho} \} d^4x \quad (4.13)$$

El último término en el Lagrangiano fue por primera vez incluido en [15] a partir de consideraciones que no tienen relación directa con las que en este trabajo se han descrito. El punto interesante es que, si se acepta el método que se ha indicado para construir el Lagrangiano (a saber, que éste sea expresable como una forma diferencial), tal procedimiento selecciona solamente a éste como el único término que puede suplementar al Lagrangiano de Hilbert en una teoría con torsión. (Incidentalmente, mencionemos que se han considerado métodos para construir Lagrangianos con torsión en que se permiten términos lineales y cuadráticos en la métrica, torsión, curvatura, y sus respectivas derivadas, obteniéndose que en 4 dimensiones hay 194 densidades Lagrangianas funcionalmente independientes (véase ref. [16], citada en [15]). En general,

estos Lagrangianos conducen a ecuaciones de orden superior a dos en los campos.)

Si variamos la acción (4.12) obtenemos las ecuaciones (válidas en ausencia de materia):

$$2(2\alpha V^a \wedge V^b \wedge V^c + \beta R^{ab} \wedge V^c) \epsilon_{abcd} + \gamma R^a{}_d \wedge V_a = 0 \quad (4.14)$$

$$\beta T^c \wedge V^d \epsilon_{abcd} + \gamma T_a \wedge V_b = 0 \quad (4.15)$$

Según se demuestra en ref. [15], al resolver (4.15) para la torsión se obtiene que debe ser nula. Esto indica que cualquiera sea la fuente que genera torsión, ésta no se propaga en el vacío porque donde no hay materia no puede haber torsión. De esta forma, en ausencia de materia no es posible distinguir una teoría basada en este Lagrangiano de la teoría de Einstein.

## 5 Conclusiones.

En este trabajo se ha estudiado la forma más general que debe tener una teoría de la gravedad cuando la geometría del espacio-tiempo  $D$ -dimensional corresponde a la de una variedad métrica con torsión.

Se han explorado las consecuencias derivadas de postular un criterio fundamentalmente geométrico para construir el Lagrangiano gravitacional. A saber, así como la teoría métrica de Lovelock se determina apelando al requerimiento de que la acción gravitacional sea la integral de una forma diferencial escalar en el espacio tangente, este mismo principio se invoca para obtener la generalización de esta teoría a espacio-tiempos con torsión.

Hay que destacar que esta prescripción elimina toda ambigüedad respecto de la manera en que la torsión debe incluirse en la acción gravitacional. De hecho, se ha deducido, para  $D$  dimensiones, una expresión que contabiliza el número de densidades Lagrangianas que se pueden agregar a la acción de Lovelock. Constituye un resultado interesante el hecho que muchos de estos términos son irrelevantes para las ecuaciones de campo por ser derivadas totales, pero que contienen información sobre propiedades globales del espacio-tiempo.

Esta construcción axiomática de un modelo de gravedad, sin embargo, tiene el evidente inconveniente —ya presente en la Teoría de Lovelock— de la absoluta arbitrariedad que hay para elegir el peso relativo de cada densidad Lagrangiana en la acción. Respecto de esto, no se puede más que decir que una solución debiera esperarse que provenga de alguna teoría cuántica que, en algún límite, se reduzca a la que se está considerando, y fije la "intensidad" de cada término [2,22].

Además, esta arbitrariedad en la elección de coeficientes conduce en la Teoría de Lovelock a una dinámica de tipo caótica no-determinista [7,23], característica que, con se-

guridad, es heredada por la versión generalizada de ella.

Un aspecto muy importante que queda todavía por explorar es el estudio de soluciones a las ecuaciones de campo en este modelo. Esto no es fácil si se considera que sólo un par de soluciones analíticas se han encontrado a las ecuaciones de Lovelock–Einstein, y se han considerado métodos numéricos para estudiar otras. Así, es poco probable encontrar soluciones cerradas en este modelo.

Como aquí sólo se ha considerado la teoría en el vacío, queda también abierta la posibilidad de estudiar las ecuaciones en presencia de materia. A diferencia del modelo ECSK, la teoría generalizada con torsión no se puede reducir a una teoría métrica efectiva. A saber, las ecuaciones de campo en el modelo ECSK son, simbólicamente,

$$\text{Tensor de Einstein} + \text{constante cosm.} \sim \text{masa}$$

$$\text{Torsión} \sim \text{spin}$$

Como la segunda ecuación es algebraica para la torsión, ésta siempre se puede eliminar reemplazándola en la primera para obtener una ecuación de campo efectiva, sin ninguna referencia a la torsión, y con correcciones cuadráticas en el spin al lado derecho. Esto ya no es posible con la inclusión de potencias superiores de la curvatura y la torsión en el Lagrangiano.

## A Apéndice A

### Formas diferenciales.

Las formas diferenciales se discuten en una serie de referencias estándar (véase [17] y referencias ahí contenidas). Aquí se exponen las convenciones y definiciones usadas en todo el presente trabajo.

Un punto  $P$  en una variedad diferenciable  $D$ -dimensional  $M$  se describe por coordenadas  $x^\mu$  ( $\mu = 1, 2, \dots, D$ ). En  $P$  hay un espacio (vectorial  $D$ -dimensional) tangente  $T_P(M)$  y, asociado, su correspondiente espacio cotangente  $T_P^*(M)$ .

Los vectores base de  $T_P(M)$  se denotan por  $\tilde{e}_\mu$ , entendido como el vector tangente a la línea de coordenadas a lo largo del cual sólo varía la coordenada  $x^\mu$ . Los vectores base correspondientes en  $T_P^*(M)$  se denotan por  $dx^\mu$ .  $\{\tilde{e}_\mu\}_{\mu=1,\dots,D}$  se denomina base de coordenadas y  $\{dx^\mu\}_{\mu=1,\dots,D}$  base coordenada de 1-formas.

La métrica se define por el producto interno no-degenerado  $g_{\mu\nu} = \tilde{e}_\mu \cdot \tilde{e}_\nu$ , que supondremos tiene una signatura  $(-, +, +, \dots)$ .

El método de ortonormalización de Gram-Schmidt asegura la existencia de una matriz de transformación no-singular de la base  $\{\tilde{e}_\mu\}$  a una base ortonormal  $\{\tilde{e}_a\}$ :

$$\tilde{e}_a = V_a^\mu \tilde{e}_\mu \quad (\text{A.1})$$

$$\eta_{ab} = \tilde{e}_a \cdot \tilde{e}_b = V_a^\mu V_b^\nu \tilde{e}_\mu \cdot \tilde{e}_\nu = V_a^\mu V_b^\nu g_{\mu\nu} \quad (\text{A.2})$$

la transformación inversa es

$$\tilde{e}_\mu = V^a_\mu \tilde{e}_a \quad (\text{A.3})$$

$$g_{\mu\nu} = \tilde{e}_\mu \cdot \tilde{e}_\nu = V^a_\mu V^b_\nu \tilde{e}_a \cdot \tilde{e}_b = V^a_\mu V^b_\nu \eta_{ab} \quad (\text{A.4})$$

de donde

$$V^a{}_{\mu} V_a{}^{\nu} = \delta^{\nu}{}_{\mu} \quad (\text{A.5})$$

$$V_a{}^{\mu} V^b{}_{\mu} = \delta^b{}_a \quad (\text{A.6})$$

Dos bases ortonormales  $\{\vec{e}_a\}$  y  $\{\vec{r}_a\}$  se relacionan por

$$\vec{r}_a = \Lambda^b{}_a \vec{e}_b, \quad \Lambda \in O(1, D-1) \quad (\text{A.7})$$

Se puede ver que  $V_a{}^{\mu}$  (llamada tétrada o vielbein) es la matriz de transformación de la base  $\{dx^{\mu}\}$  a una base ortonormal de 1-formas  $\{V^a\}$  de  $T_P^*(M)$ :

$$V^a = V^a{}_{\mu} dx^{\mu} \quad (\text{A.8})$$

Un tensor  $\binom{p}{n}$  en  $T_P(M)$  transforma según

$$A^{a_1 \dots a_p}{}_{b_1 \dots b_k} \longrightarrow A' = \underbrace{(\Lambda \dots \Lambda)}_{p \text{ veces}} \underbrace{(\Lambda^{-1} \dots \Lambda^{-1})}_{n \text{ veces}} A, \quad \Lambda \in O(1, D-1). \quad (\text{A.9})$$

Introduciendo un conjunto de 1-formas  $\omega^a{}_b$  se define la derivada covariante de un tensor  $\binom{p}{n}$

$$\begin{aligned} D \wedge A^{a_1 \dots a_p}{}_{b_1 \dots b_k} &= d \wedge A^{a_1 \dots a_p}{}_{b_1 \dots b_k} \\ &+ \omega^{a_1}{}_{a'} \wedge A^{a' \dots a_p}{}_{b_1 \dots b_k} + \dots + \omega^{a_p}{}_{a'} \wedge A^{a_1 \dots a}{}_{b_1 \dots b_k} \\ &+ \omega^b{}_{b_1} \wedge A^{a_1 \dots a_p}{}_{b \dots b_k} + \dots + \omega^b{}_{b_k} \wedge A^{a_1 \dots a_p}{}_{b_1 \dots b} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

La 2-forma de torsión se define por

$$T^a = D \wedge V^a = d \wedge V^a + \omega^a{}_b \wedge V^b \quad (\text{A.11})$$

y la 2-forma de curvatura por

$$R^a{}_b = d \wedge \omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \quad (\text{A.12})$$

Las relaciones (A.11 - A.12) se denominan ecuaciones de estructura de Cartan. De ellas se deducen las identidades de Bianchi

$$D \wedge T^a - R^a_b \wedge V^b = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$D \wedge R^a_b = 0 \quad (\text{A.14})$$

## B Apéndice B

Cálculo del número de Lagrangianos que se agregan al Lagrangiano de Lovelock en espacios de Riemann–Cartan.

i) Revisión de nociones estándar de Teoría de Números.

En Teoría de Números el estudio de las maneras en que un número natural se puede expresar como suma de números naturales menores o iguales que él constituye la denominada Teoría de Particiones.

Una *partición* de un entero positivo  $n$  es una representación de  $n$  como una suma de enteros positivos

$$n = n_1 + n_2 + \cdots, \quad n_i > 0 \quad (\text{B.1})$$

A cada término en esta suma se le llama *parte*. Si en esta descomposición se permite o no la repetición de partes, entonces la partición se dice *no-restringida* o *restringida*, respectivamente. Dos particiones que difieren en el orden de las partes se consideran iguales.

Designemos por  $p_k(n)$  al número de particiones no-restringidas de  $n$  en  $k$  partes, y por  $\hat{p}_k(n)$  al número de particiones restringidas de  $n$  en  $k$  partes.

Una partición de  $n$  en  $k$  partes se la exhibe usualmente listando las partes en orden decreciente. De esa forma,  $p_k(n)$  es el número de soluciones de

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k, \quad n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k \geq 1 \quad (\text{B.2})$$

en tanto que  $\hat{p}_k(n)$  es el número de soluciones de

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k, \quad n_1 > n_2 > \cdots > n_k \geq 1 \quad (\text{B.3})$$

Se denota por  $p(n)$  al número total de particiones no-restringidas de  $n$ , que se obtiene de

$$p(n) = \sum_{k=1}^n p_k(n) \quad (\text{B.4})$$

en tanto que  $\hat{p}_k(n)$  cuenta el número total de particiones restringidas de  $n$

$$\hat{p}(n) = \sum_{k=1}^n \hat{p}_k(n) \quad (\text{B.5})$$

**Ejemplo:** Las particiones de  $n=5$  son  $5$ ,  $4 + 1$ ,  $3 + 2$ ,  $3 + 1 + 1$ ,  $2 + 2 + 1$ ,  $2 + 1 + 1 + 1$  y  $1 + 1 + 1 + 1 + 1$ . De modo que

$$p_1(5) = 1, \quad \hat{p}_1(5) = 1$$

$$p_2(5) = 2, \quad \hat{p}_2(5) = 2$$

$$p_3(5) = 2, \quad \hat{p}_3(5) = 0$$

$$p_4(5) = 1, \quad \hat{p}_4(5) = 0$$

$$p_5(5) = 1, \quad \hat{p}_5(5) = 0$$

$$p(5) = 7, \quad \hat{p}(5) = 3$$

(Véase Tabla B.1)

No se dispone de fórmulas generales para  $p_k(n)$  y  $\hat{p}_k(n)$ . Sin embargo, es posible, por ejemplo, calcular  $p_k(n)$  para valores pequeños de  $k$  y todos los valores de  $n$ , pero a medida que  $k$  aumenta, los cálculos se complican demasiado [18].

La Tabla siguiente muestra los primeros valores de  $p_k(n)$ ,  $\hat{p}_k(n)$ ,  $p(n)$  y  $\hat{p}(n)$ .

TABLA B.1

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$p_2$		1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	6
$p_3$			1	1	2	3	4	5	7	8	10	12
$p_4$				1	1	2	3	4	6	10	11	15
$p_5$					1	1	2	3	5	7	10	13
$p_6$						1	1	2	3	4	7	11
$p_7$							1	1	2	3	5	8
$p_8$								1	1	2	3	4
$p_9$									1	1	2	3
$p_{10}$										1	1	2
$p_{11}$											1	1
$p_{12}$												1
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	21	30	42	56	77
$\hat{p}_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\hat{p}_2$			1	1	2	2	3	3	4	4	5	5
$\hat{p}_3$						1	1	2	3	4	5	7
$\hat{p}_4$										1	1	2
$\hat{p}_5$												
$\hat{p}(n)$	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15

En la práctica, la utilización de estas tablas de valores para evaluar fórmulas en que se ven involucradas estas funciones (como las que derivaremos más adelante) se hace ineludible. Lo que ocurre es que algunas de estas funciones no tienen fórmulas de validez general conocidas, en cambio otras tienen expresiones de una complejidad tal que son

de difícil uso.

Para ilustrar esto, mencionemos que la obtención de una fórmula para  $p(n)$  (conocida como *función partición*) fue uno de los problemas fundamentales en la Teoría de Números, finalmente resuelto en 1939 en términos de la serie convergente [19,20]

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n) \sqrt{k} \frac{d}{dn} \left\{ \frac{\operatorname{senh} \left[ \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{2}{3} \left( n - \frac{1}{4} \right)} \right]}{\sqrt{\left( n - \frac{1}{24} \right)}} \right\} \quad (\text{B.6})$$

donde

$$A_k(n) = \sum_{\substack{0 < h < k \\ (h,k)=1}} \exp \left\{ i\pi \left( s(h,k) - \frac{2nh}{k} \right) \right\} \quad (\text{B.7})$$

y  $s(h, k)$  es la llamada suma de Dedekind, definida por

$$s(h, k) = \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{k} \left( \frac{hr}{k} - \left[ \frac{hr}{k} \right] - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{B.8})$$

con  $[x] =$  parte entera de  $x$  y  $(h, k) =$  máximo común divisor entre  $h$  y  $k$ .

En 1918 [19,20] ya se había demostrado la expresión asintótica

$$p(n) \sim \frac{\exp(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}})}{4n\sqrt{3}}, \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{B.9})$$

En la práctica, la evaluación de  $p(n)$  se hace mediante el uso de fórmulas de recurrencia [21] para valores pequeños de  $n$ , o mediante la expresión asintótica (B.9) para valores grandes de  $n$ . En lo que respecta a  $\hat{p}(n)$ , al parecer no se conoce una relación equivalente a la serie de  $p(n)$  dada en (B.6–B.8).

Una aplicación directa de las funciones de particiones es la determinación del número de invariantes geométricos de Pontrjagin para una variedad riemanniana  $D$ -dimensional. Según se menciona en el Capítulo 2, tal número está dado por todas las soluciones de

la ecuación

$$p_1 + p_2 + \dots = \frac{D}{4}, \quad p_1 \geq p_2 \geq \dots \quad (\text{B.10})$$

que, de acuerdo con lo que se ha visto, es  $p(\frac{D}{4})$ , el número de particiones del número  $\frac{D}{4}$  (que obviamente es no nulo sólo si  $D$  es un múltiplo de 4).

ii) Primera aplicación.

Sea  $\mathbf{N}$  el conjunto de los números naturales (incluyendo el cero) y definamos el conjunto

$$\mathbf{N}^{l+1} = \underbrace{\mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \cdots \times \mathbf{N}}_{l+1 \text{ veces}} \quad (\text{B.11})$$

Un elemento de este conjunto,  $\mathbf{n} \in \mathbf{N}^{l+1}$ , se lo exhibe escrito en componentes

$$\mathbf{n} = (n^{(0)}, n^{(1)}, \dots, n^{(l)}) \quad (\text{B.12})$$

Consideremos el problema de determinar, para un número natural  $N$  dado, todas las posibilidades de tomar elementos de  $\mathbf{N}^{l+1}$ , tales que

$$N = n_1^{(0)} + n_2^{(0)} + \cdots + n_1^{(1)} + n_2^{(1)} + \cdots + n_1^{(l)} + n_2^{(l)} + \cdots \quad (\text{B.13})$$

con  $n_1^{(j)} \geq n_2^{(j)} \geq \cdots$ ,  $j = 0, 1, \dots, l$

**Ejemplo:** Sea  $N = 3$ , y queremos encontrar todos los elementos de  $\mathbf{N}^2$  que cumplen con (B.13). Las soluciones son

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$m_1$	$m_2$	$m_3$
3	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	0	0	2	0	0
1	0	0	1	1	0
0	0	0	3	0	0
0	0	0	2	1	0
0	0	0	1	1	1

De modo que el número total de soluciones es 10.

Para el caso general, separemos (B.13) en las sumas parciales de las  $j$ -ésimas componentes:

$$n_1^{(j)} + n_2^{(j)} + \dots = k_j \quad (\text{B.14})$$

con  $n_1^{(j)} \geq n_2^{(j)} \geq \dots$ ,  $j = 0, 1, \dots, l$

donde los  $k_j$  son números que pueden variar entre 0 y  $N$ , pero siempre sujetos a la condición

$$k_1 + k_2 + \dots + k_l = N \quad (\text{B.15})$$

Para cada  $j$ , el número de soluciones de (B.14) es  $p(k_j)$ , el número de particiones (no-restringidas) de  $k_j$ . Por lo tanto, el número de soluciones de (B.13) está dado por

$$G_l(N) = \sum_{\substack{k_0 \dots k_l = 0 \\ k_0 + \dots + k_l = N}}^N p(k_0) \dots p(k_l), \quad l = 1, 2, \dots \quad (\text{B.16})$$

Una forma conveniente de evaluar estos  $G_l$  es separar la suma sobre  $k_l$

$$G_l(N) = \sum_{k_l=0}^N p(k_l) \sum_{\substack{k_0 \dots k_{l-1} = 0 \\ k_0 + \dots + k_{l-1} = N - k_l}}^{N - k_l} p(k_0) \dots p(k_{l-1}) \quad (\text{B.17})$$

para obtener la fórmula de recurrencia

$$G_l(N) = \sum_{k=0}^N p(k) G_{l-1}(N - k) \quad (\text{B.18})$$

$$G_0(N) = p(N) \quad (\text{B.19})$$

La tabla siguiente muestra algunos valores de  $G_l(N)$ :

**TABLA B.2**

$N$	$G_0(N)$	$G_1(N)$	$G_2(N)$	$G_3(N)$
1	1	2	3	4
2	2	5	9	14
3	3	10	22	40
4	5	20	51	105
5	7	36	108	252
6	11	65	221	574
7	15	110	429	1240
8	21	183	807	2576
9	30	298	1473	5168
10	42	477	2625	10072

iii) Segunda aplicación.

Para dos números naturales dados,  $n$  y  $m$ , se busca determinar el número de particiones que son solución de

$$m [d_1 + d_2 + \dots + d_k] + k = n, \quad d_1 > d_2 > \dots > d_k \geq 1 \quad (\text{B.20})$$

para  $k = 1, \dots, n$ .

**Ejemplo:** Si  $m = 2$  y  $n = 10$ , es fácil verificar que la única solución es una partición con  $k = 2$  términos:  $d_1 = 3$  y  $d_2 = 1$ .

Para un  $k$  fijo, hay que determinar de cuántas formas se puede escribir  $\frac{n-k}{m}$  como una suma de  $k$  números naturales distintos. Por definición, esa cantidad es  $\hat{p}_k(\frac{n-k}{m})$  (que obviamente será cero si  $\frac{n-k}{m}$  no es número natural). Por lo tanto, la cantidad total de soluciones a (B.20) es

$$F_m(n) = \sum_{k=0}^n \hat{p}_k\left(\frac{n-k}{m}\right) \quad (\text{B.21})$$

En la tabla siguiente se exhiben los primeros valores de  $F(n)$ :

**TABLA B.3**

Algunos valores de  $F_m(n)$

$n$	$F_2(n)$	$F_4(n)$	$n$	$F_2(n)$	$F_4(n)$
1	0	0	13	1	1
2	0	0	14	2	1
3	1	0	15	2	0
4	0	0	16	3	0
5	1	1	17	2	1
6	0	0	18	3	1
7	1	0	19	3	0
8	1	0	20	4	0
9	1	1	21	4	1
10	1	0	22	4	2
11	1	0	23	5	0
12	2	0	24	6	0

iv) Tercera aplicación.

Según se menciona en el Capítulo 3, el número de densidades lagrangianas que se añaden al Lagrangiano de Lovelock en un espacio de Riemann–Cartan  $D$ -dimensional es el número de particiones que solucionan la ecuación:

$$4[m_1 + m_2 + \cdots + n_1 + n_2 + \cdots + p_1 + p_2 + \cdots] + 2[q_1 + q_2 + \cdots + q_k] + k = D \quad (\text{B.22})$$

con

$$m_1 \geq m_2 \geq \cdots$$

$$n_1 \geq n_2 \geq \cdots$$

$$p_1 \geq p_2 \geq \cdots$$

$$q_1 > q_2 > \cdots q_k \geq 1$$

Supongamos que

$$m_1 + m_2 + \cdots + n_1 + n_2 + \cdots + p_1 + p_2 = m \quad (\text{B.23})$$

donde  $m$  es un número natural tal que  $4m \leq D$ .

El número de soluciones de (B.22) es, según se demostró en el Problema 1,  $G_2(m)$ , cada una de las cuales se puede combinar con las de

$$2[q_1 + q_2 + \cdots + q_k] + k = D - 4m \quad (\text{B.24})$$

que, según se demostró en el Problema 2, son  $F_2(D - 4m)$ .

Por lo tanto, haciendo que  $m$  tome los valores  $0, 1, \dots, [\frac{D}{4}]$ , obtenemos que el número de soluciones a (B.21) es

$$T(D) = \sum_{m=0}^{[\frac{D}{4}]} G_2(m) F_2(D - 4m) \quad (\text{B.25})$$

La Tabla 3.1 (pág. 20) muestra los primeros valores de  $T(D)$ .

## C Apéndice C

Extensión y reducción dimensional de las ecuaciones de Cartan.

Dados un vielbein,  $V^a$ , y una conexión métrica,  $\omega^{ab} = -\omega^{ba}$ , ( $a, b = 1, \dots, D$ ), las ecuaciones de estructura de Cartan son:

$$R^{ab} = d \wedge \omega^{ab} + \omega^a_c \wedge \omega^{cb} \quad (C.1)$$

$$T^a = d \wedge V^a + \omega^a_b \wedge V^b \quad (C.2)$$

El que ambas ecuaciones presenten cierto grado de simetría, sugiere la posibilidad de condensarlas en una sola expresión. En efecto, una manera de conseguir esto es pensar que el espacio  $D$ -dimensional en el que están definidas tales ecuaciones es una superficie inmersa en un espacio  $(D + 1)$ -dimensional para el cual podemos definir una conexión métrica  $\Omega^{AB}$  usando  $\omega^{ab}$  y  $V^a$ :

$$\Omega^{AB}(\beta) = \begin{cases} \omega^{ab} & , A, B = a, b = 1, \dots, D. \\ \sqrt{|\beta|} V^a & , A = a = 1, \dots, D ; B = D + 1 \\ -\sqrt{|\beta|} V^b & , B = b = 1, \dots, D ; A = D + 1 \\ 0 & , A, B = D + 1 \end{cases} \quad (C.3)$$

Con esta conexión podemos definir una curvatura para el espacio  $(D + 1)$ -dimensional, a través de la correspondiente ecuación de Cartan:

$$\bar{R}^{AB} = d \wedge \Omega^{AB} + \Omega^A_C \wedge \Omega^{CB} \quad (C.4)$$

Al usar (C.3) obtenemos las componentes de esta curvatura en términos de la curvatura y la torsión del espacio  $D$ -dimensional:

$$\bar{R}^{AB}(\beta) = \begin{cases} Z^{ab}(\beta) & , A, B = a, b = 1, \dots, D. \\ \sqrt{|\beta|} T^a & , A = a = 1, \dots, D ; B = D + 1 \\ -\sqrt{|\beta|} T^b & , B = b = 1, \dots, D ; A = D + 1 \\ 0 & , A, B = D + 1 \end{cases} \quad (C.5)$$

donde  $Z^{ab}(\beta) = R^{ab} - \beta V^a \wedge V^b$  es la curvatura concircular de escala  $\beta$  [8].

Recíprocamente, en una variedad  $(D + 1)$ -dimensional con conexión  $\Omega^{AB}$ , se puede considerar una superficie  $D$ -dimensional para la cual la conexión es  $\omega^{ab} = \Omega^{ab}$ , y el vielbein es  $V^a = \frac{1}{\sqrt{|\beta|}} \Omega^{a,D}$ .

Este tipo de relaciones permiten expresar cantidades de un espacio en términos de cantidades del otro espacio. Por ejemplo, los invariantes de Pontrjagin de  $4n$  dimensiones en función de integrales sobre el borde de densidades de  $4n - 1$  dimensiones. En 4 dimensiones tenemos que la densidad de Pontrjagin se puede escribir

$$\bar{R}_B^A \wedge \bar{R}_A^B = d \wedge \{ \Omega^A_B \wedge d \wedge \Omega^B_A + \frac{2}{3} \Omega^A_B \wedge \Omega^B_C \wedge \Omega^C_A \} \quad (C.6)$$

Al descomponer la conexión  $\Omega$  según (C.3), obtenemos

$$\bar{R}_B^A \wedge \bar{R}_A^B = d \wedge \{ \omega^a_b \wedge d \wedge \omega^b_a + \frac{2}{3} \omega^a_b \wedge \omega^b_c \wedge \omega^c_a - 2\beta T_a \wedge V^a \} \quad (C.7)$$

quedando en el lado derecho la densidad de Chern-Simons de 3 dimensiones,  $\mathcal{L}_{CS}^{(3)}$ , con el único término con torsión explícita en esa dimensión,  $\mathbf{K}^0$ .

Igualmente, esta descomposición permite encontrar la siguiente expresión para el invariante de Euler de  $2p$  dimensiones:

$$\chi_{2p} = \int_M \mathcal{L}_p^{(2p)} = -2 \int_{\partial M} \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k^{(p)} \mathcal{L}_k^{(2p-1)} \quad (C.8)$$

con

$$\alpha_k^{(p)} = (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \left\{ \frac{p-k}{2p-2k-1} \right\} \beta^{2p-2k-1}$$

y  $\mathcal{L}_k^{(m)}$  está dado por ec. (2.8) (pág 10).

## Referencias

- [1] D. Lovelock, *J. Math. Phys.* 12 (1971) 498.
- [2] B. Zumino, *Phys. Rep.* 137 (1986) 109.; C. Teitelboim and J. Zanelli, *Class. Quant. Grav.* 4 (1987) L125 y contribución a *Constraint Theory and Relativistic Dynamics*, G. Longhi and L. Lussana, eds., (World Scientific, Singapore, 1987).
- [3] E. Cartan, *C. R. Acad. Sci. (Paris)* 174 (1922); *Ann. Ec. Norm. Suppl.* 40 (1923) 325; 42 (1925) 17.
- [4] *Elie Cartan - Albert Einstein, Lettres sur le Parallélisme Absolu 1929 - 1932*, R. Debever ed. (Académie Royale de Belgique, Bruxelles, 1979).
- [5] F. Hehl, P. von der Heyde, G. D. Kerlick and J. Nester, *Rev. Mod. Phys.* 48 (1976) 393.
- [6] P. von der Heyde, *Phys. Lett. A* 51 (1975) 381.
- [7] M. Bañados, C. Teitelboim and J. Zanelli, contribución a *Essays in Honor of J. J. Giambiagi* (en prensa).
- [8] K. Yano and S. Bochner, *Curvature and Betti Numbers*, (Princeton University Press, 1953).
- [9] C. Nash and S. Sen, *Topology and Geometry for Physicists*, (Academic Press, New York, 1983).
- [10] J. W. Milnor, *Topology* 3 (Suppl. 1) (1964) 53.
- [11] J. D. Brown, *Lower Dimensional Gravity*, (World Scientific, Singapore, 1988).
- [12] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Ann. Phys.* 140 (1982) 372.

- [13] H. T. Nieh and M. L. Yan, *J. Math. Phys.* **23** (1982) 373.
- [14] R. de Azeredo Campos, *J. Math. Phys.* **31** (1990) 1217.
- [15] R. Hojman, C. Mukku and W. A. Sayed, *Phys. Rev. D* **22** (1980) 1915.
- [16] M. Hovak and P. Krupka, *Int. J. Theor. Phys.* **17** (1978) 543.
- [17] T. Eguchi, P. B. Gilkey and A. J. Hanson, *Phys. Rep.* **66** (1980) 213.
- [18] M. Hall, Jr., *Combinatorial Theory*, (John Wiley and Sons, Inc., New York, 1967).
- [19] T. Apostol, *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory*, (Springer-Verlag, New York, 1976).
- [20] K. Chandrasekharan, *Arithmetical Functions*, (Springer-Verlag, Berlin, 1970).
- [21] T. Apostol, *Introduction to Number Theory*, (Springer-Verlag, New York, 1976).
- [22] D. Boulware and S. Deser, *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 2656.
- [23] M. Henneaux, C. Teitelboim and J. Zanelli, en *SILARG VI*, M. Novello, ed., (World Scientific, Singapore, 1988).