

UCH-Fc  
MAG-F  
R 763  
C.1

# CORRELACIONES ANGULARES INDUCIDAS POR CAMPOS MEDIOS EXACTOS EN MATERIA NUCLEAR



Tesis  
Entregada A La  
Universidad De Chile  
En Cumplimiento Parcial De Los Requisitos  
Para Optar Al Grado De

Magíster en Ciencias con Mención Física

Facultad de Ciencias

Por

**Jaime Romero Barrientos**

Julio, 2014

Director de Tesis: **Prof. Hugo F. Arellano**

FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN  
TESIS DE MAGÍSTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

**Jaime Alfonso Romero Barrientos**

Ha sido aprobada por la comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias con mención en Física, en el examen de Defensa Privada de Tesis rendido el día 15 de enero de 2014.

**Director de Tesis**

Prof. Hugo F. Arellano

*Hugo Arellano*



**Comisión de Evaluación de la tesis**

Prof. Jose Roberto Morales

*José Roberto Morales*

Prof. Iván Schmidt

*Iván Schmidt*

Prof. Claudio Tenreiro

*Claudio Tenreiro*

## Biografía



Nací en Santiago el 19 de diciembre de 1982 y después de unos pocos años nos fuimos a vivir a Chuquicamata. En ese lugar crecí y cursé mis estudios básicos y medios. En 4º medio me fui un año a Finlandia como parte de un programa de intercambio. Después de volver de la prueba y entré al Bachillerato acá en Chile porque no tenía muy claro que estudiar. Terminé estudiando Licenciatura en Física en la Facultad de Ciencias, entre medio viaje a trabajar a EEUU, trabajé en un colegio y me gradúe. Luego entré al Magíster en Biofísica Médica, que no completé y me cambié al programa de Magíster en Física de esta Facultad. Actualmente sigo trabajando con mi Director de Tesis en tópicos de Física Nuclear. Otros intereses además de la física son la docencia (dedicándome a ello actualmente también), ciclismo urbano y el Crossfit.

# Agradecimientos

Este trabajo no podría haber sido posible sin la ayuda de varias personas que de alguna u otra forma estuvieron conmigo a lo largo de este largo (sic) camino.

En primer lugar quiero agradecer a mi profesor guía, Hugo Arellano, primero por haberme dado la oportunidad de trabajar con él y segundo por su inconmesurable, infinita e ilimitada paciencia cuando no entendía nada de lo que estaba haciendo. Muchas gracias por todo el apoyo, por todos los consejos, la preocupación, las conversas de política y las clases de gramática. Realmente creo que usted es un excelente profesor y una excelente persona.

Debo agradecer también al departamento de Física de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, por haberme acogido y por haberme dado un lugar donde trabajar y sentirme bienvenido. Al departamento de Física de la Facultad de Ciencias, por la beca de Pedagogía, que me permitió mantenerme durante gran parte del magíster y en especial a la profesora Orfa Reyes, por su preocupación.

A mis amigos, muchas gracias: a César por los papers, a la Frau por aparecer en los momentos justos, al Ale por los cafés y a todos los demás del tercero del DFI: el Nico, la Vicina, la Tefa, el Nacho y Pancho.

A mi familia, a mi madre por su apoyo incondicional, a mi padre y a mis hermanos por la paciencia y preocupación.

Y a Ariel, tu sabes por que.

Este trabajo contó con financiamiento parcial del proyecto FONDECYT N° 1120396.

## Resumen

Investigamos los efectos de correlaciones angulares en campos medios exactos para materia nuclear simétrica, tratando explícitamente la dependencia angular del propagador nucleón–nucleón de la ecuación de Brueckner–Hartree–Fock para la matriz  $g$  en la teoría de Brueckner–Bethe–Goldstone. Al incluir de forma exacta la dependencia angular del propagador, éste exhibe estructuras irregulares y fluctuantes que dificultan su manejo en la búsqueda de soluciones autoconsistentes para la energía de partícula independiente. Ante esta dificultad, fue necesaria la introducción de un esquema perturbativo para retener a primer orden la dependencia angular del propagador. Esto nos permitió estudiar en forma separada las partes real e imaginaria de la corrección a la matriz  $g$ . Bajo este esquema, fue factible calcular el operador de masa basado en el potencial de Argonne  $v_{18}$  como la interacción  $NN$  desnuda. Las aplicaciones se llevan a cabo a densidades nucleares correspondientes a momenta de Fermi entre  $1.20$  y  $1.75 \text{ fm}^{-1}$ . Encontramos que el punto de saturación de materia nuclear simétrica difiere marginalmente del valor calculado al aproximar la dependencia angular del denominador del propagador por el promedio de éste. Este resultado nos permite concluir que esta aproximación es confiable.

# Abstract

We investigated the effects of angular correlations in exact mean fields for symmetric nuclear matter, treating explicitly the angular dependence of the nucleon–nucleon propagator in the Brueckner–Hartree–Fock equation for the  $g$  matrix in the Brueckner–Bethe–Goldstone theory. When the exact angular dependence of the propagator was included, we found that it exhibits irregular and fluctuating structures that made difficult to handle the search of a self–consistent solution for the single particle energy. In view of this problem, the introduction of a perturbative scheme to retain at first order the angular dependence of the propagator was necessary. This allowed us to study in a separate way the real and imaginary contributions of the correction to the  $g$  matrix. Following this scheme, we were able to calculate the mass operator based on the Argonne  $v_{18}$  potential as the  $NN$  bare interaction. Applications take place at nuclear densities corresponding to Fermi momenta between 1.20 and 1.75  $\text{fm}^{-1}$ . We found that the saturation point of symmetric nuclear matter differs marginally from the value calculated when the angular dependence of the denominator of the propagator is approximated using its angular average. This lead us to conclude that the angle–averaged approximation of the angular dependence of the propagator is accurate.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>5</b>
2.1. Aproximación de Brueckner-Hartree-Fock . . . . .	5
2.2. Tratamiento de la dependencia angular . . . . .	15
2.3. Enfoque Perturbativo . . . . .	18
<b>3. Consideraciones Numéricas</b>	<b>26</b>
3.1. Discretización de la ecuación de BHF . . . . .	26
3.2. Integrales de movimiento de Fermi . . . . .	28
3.3. Corrección $g_1$ . . . . .	34
3.4. Niveles de aproximación . . . . .	37
<b>4. Resultados y Discusión</b>	<b>40</b>
4.1. Soluciones autoconsistentes . . . . .	40
4.2. Propiedades de saturación . . . . .	50
<b>5. Resumen y Conclusiones</b>	<b>56</b>
<b>A. Integración trapezoidal adaptativa</b>	<b>59</b>

# Índice de figuras

2.1.	Esquema donde se muestra el procedimiento iterativo usado para encontrar los campos autoconsistentes $U$ . . . . .	8
2.2.	Gráfico de la diferencia $(\Sigma - \bar{\Sigma})$ como función de $q$ y $x$ , con $K = 3k_F$ . Panel (a): $k_F = 1.50 \text{ fm}^{-1}$ . Panel (b): $k_F = 1.60 \text{ fm}^{-1}$ . La escala en colores para el eje vertical está dada en MeV. . . . .	19
2.3.	Panel (a): Propagador exacto en la aproximación monopolar $\Lambda(K, q)$ como función de $q$ para una densidad de $k_F = 1.5 \text{ fm}^{-1}$ y $K = 2.55 \text{ fm}^{-1}$ , con la parte real de color rojo y la parte imaginaria azul. Panel (b): Propagador $\Lambda_0(K, q)$ en la aproximación angular usando los mismos parámetros. . . .	20
3.1.	Dominios de integración en el plano $(\frac{1}{2}K, q)$ para diferentes valores de $k$ relativos a $k_F$ . Los radios $R$ de los arcos satisfacen $R^2 = (k^2 + k_F^2)/2$ . Las pendientes de las líneas rectas son $\pm 1$ . . . . .	32
3.2.	Panel (a): Suma de los campos exactos $\Sigma(K, q, x)$ como función de $x$ . Panel (b) Comparación de $\Sigma(K, q, x)$ con un ajuste cuadrático de la forma $A + Bx^2$ y una expansión en polinomios de Legendre con $n = 2$ . Panel (c): Mostramos como se ajustan los campos exactos con una expansión en polinomios de Legendre con $n = 6$ . Aquí, $k_F = 1.60 \text{ fm}^{-1}$ , $K = 3k_F \text{ fm}^{-1}$ y $q = 1.00 \text{ fm}^{-1}$ . . . . .	35
3.3.	La curva roja (azul) muestra los corrimientos de fase para la onda $^1S_0$ usando $\eta = 0$ ( $\eta = 0.3 \text{ MeV}$ ). . . . .	39
4.1.	Potencial de Argonne $v_{18}$ en espacio de momentum como función de $k'$ y $k$ . Panel (a): $u(k', k)$ para la onda $^1S_0$ . Panel (b): $u(k', k)$ para la onda $^1P_1$ . . . . .	41



4.2.	Soluciones autoconsistentes para $U(k)$ en el nivel $LS$ en el rango de $1.2 \leq k_F \leq 1.75 \text{ fm}^{-1}$ usando el potencial de Argonne $v_{18}$ como potencial de interacción desnudo. Incluimos todas las ondas parciales hasta momento angular total $J = 7$ . . . . .	43
4.3.	Soluciones autoconsistentes para $U(k)$ en el nivel $LS_0$ en el rango de $1.2 \leq k_F \leq 1.75 \text{ fm}^{-1}$ usando el potencial de Argonne $v_{18}$ como potencial de interacción desnudo. Incluimos todas las ondas parciales hasta momento angular total $J = 7$ . . . . .	44
4.4.	Comparación entre las soluciones obtenidas para $LS$ (rojo, líneas continuas) y $LS_0$ (azul, líneas punteadas) en el rango de $1.2 \leq k_F \leq 1.75 \text{ fm}^{-1}$ usando el potencial de Argonne $v_{18}$ como potencial de interacción desnudo. Incluimos todas las ondas parciales hasta momento angular total $J = 7$ . . . . .	45
4.5.	Soluciones autoconsistentes para $U(k)$ en el nivel $LS_2$ en el rango de $1.2 \leq k_F \leq 1.75 \text{ fm}^{-1}$ usando el potencial de Argonne $v_{18}$ como potencial de interacción desnudo. Incluimos todas las ondas parciales hasta momento angular total $J = 7$ . . . . .	47
4.6.	Soluciones autoconsistentes para $U(k)$ en el nivel $LS_3$ en el rango de $1.2 \leq k_F \leq 1.75 \text{ fm}^{-1}$ usando el potencial de Argonne $v_{18}$ como potencial de interacción desnudo. Incluimos todas las ondas parciales hasta momento angular total $J = 7$ . . . . .	48
4.7.	Comparación entre las soluciones autoconsistentes para $U(k)$ entre los niveles $LS_0$ (rojo, líneas continuas) y $LS_3$ (negro, líneas discontinuas) en el rango de $1.2 \leq k_F \leq 1.75 \text{ fm}^{-1}$ usando el potencial de Argonne $v_{18}$ como potencial de interacción desnudo. Incluimos todas las ondas parciales hasta momento angular total $J = 7$ . . . . .	49
4.8.	Panel (a): Energías de ligazón por nucleón, $B/A$ para los cuatro niveles considerados en este trabajo. Panel (b): se muestra un detalle alrededor del mínimo (cuadrado negro, no a escala). . . . .	51
4.9.	Densidades y energías de saturación para materia nuclear obtenidas en varios trabajos: $AV_{14} - BHF(A)$ , $AV_{14} - VAR$ [12], $AV_{18} - PAULI$ , $BONN - PAULI$ [31], $AV_{14} - BHF(B)$ , $AV_{14} - BHF + TBF$ , $AV_{18} - BHF(A)$ , $AV_{18} - BHF + TB$ [25], $AV_{14} - BHF(C)$ [32], $AV_{18} - BHF(B)$ , $BONN - BHF$ [6]. La flecha negra muestra los valores obtenidos para este trabajo y el cuadrado muestra donde se ubican los valores aceptados para la densidad y energía de saturación. . . . .	54

# Índice de tablas

4.1. Coeficientes encontrados para la parametrización de la energía de ligazón por nucleón para los cuatro niveles calculados en este trabajo. . . . .	52
4.2. Propiedades de saturación de materia nuclear simétrica basadas en los cuatro niveles de aproximación explorados en este trabajo. Mostramos el tercer decimal para la energía y densidad de saturación como una forma de ilustrar las diferencias entre cada uno de los niveles. . . . .	52

# Capítulo 1

## Introducción

La teoría de Brueckner–Bethe–Goldstone (BBG) para nucleones interactuantes ha jugado un rol protagónico en la búsqueda de una descripción unificada para fenómenos de muchos cuerpos basados en la interacción desnuda entre nucleones [15, 5, 21]. A energías negativas ha sido ampliamente usada en el estudio de propiedades de saturación de materia nuclear [5, 14, 32] así como también en la determinación de la ecuación de estado para todo el rango de asimetrías de isospin [34, 26, 24, 22]. La ecuación de estado de materia nuclear asimétrica juega un rol preponderante en la descripción de fenómenos astrofísicos tales como las explosiones de supernovas, estructura estelar, explosiones de rayos gamma [28, 27] (*gamma-ray bursts*) e incluso explosiones de rayos x (*x-ray bursts*). Debido a las altas densidades presentes (alrededor de 10 veces la densidad de saturación,  $\rho = 0.17 \text{ fm}^{-3}$ ) los resultados para la ecuación de estado de estrellas de neutrones son muy sensibles a la compresibilidad y a la energía de simetría. Además se ha mostrado [23, 7] que en reacciones de iones pesados, la dinámica de la colisión entre dos núcleos pesados también es sensible a la dependencia en la densidad de la energía de simetría. Dentro del marco de la aproximación de Brueckner–Hartree–Fock (BHF) para la teoría de BBG, se ha modelado la interacción efectiva entre los nucleones blanco y proyectil [2, 1, 17] en

scattering nuclear. Estos modelos buscan entregar una descripción microscópica detallada del tránsito de nucleones a través del núcleo. Esto es de particular importancia en estudios actuales de procesos nucleares que involucran haces radiactivos, donde estructuras exóticas de baja densidad (halos nucleares [19]) aparecen en la superficie del núcleo [20].

Las propiedades de la materia nuclear han sido exhaustivamente estudiadas en el marco de la teoría BBG basada en la expansión agujero-línea para la energía del estado basal [5]. Aquí los diagramas de Goldstone son agrupados de acuerdo a su número de agujeros-líneas, con cada grupo sumado de forma separada. La suma de los diagramas de dos agujeros-líneas da como resultado la aproximación de Brueckner, donde la matriz  $g$  es calculada de manera auto-consistente con el espectro de energía de partícula independiente. Aunque el potencial de partícula independiente se introduce como una cantidad auxiliar, su elección condiciona la tasa de convergencia de la expansión para la energía de ligazón. En la Ref. [32] se ha mostrado que la elección continua para el potencial auxiliar resulta en una mejor convergencia que cuando se usa la elección estándar, donde el potencial de partícula independiente se toma igual a cero sobre la superficie de Fermi. Esta conclusión está basada en una comparación de ambas prescripciones hasta tres contribuciones de agujero-línea, obteniéndose resultados similares para las propiedades de saturación, pero con la contribución de tercer orden en la elección continua mucho más débil.

Un aspecto central de la ecuación de BHF para la matriz  $g$  es el tratamiento del propagador mientras se aplica el principio de exclusión de Pauli en los estados intermedios. El propagador usualmente se representa como el cociente entre dos operadores que conmutan,  $Q/e$ , con  $Q$  el operador *blocking* de Pauli y  $e$  la diferencia (en el borde superior del eje real) entre una energía inicial y energías de estados intermedios de partícula independiente. Tradicionalmente se ha prestado atención especial a la no-esfericidad del dominio de integración inducido por  $Q$ , mientras que las complicaciones surgidas de la dependencia angular del denominador de la energía han sido manejadas sistemáticamente

mediante promedios angulares o aproximaciones de masa–efectiva [29, 33, 31, 11] . En estas aproximaciones, yace implícito el supuesto de que las restricciones debidas al principio de exclusión de Pauli, no condicionan la propagación de las partículas interactuantes bajo los campos autoconsistentes. En los enfoques tradicionales [5], los promedios angulares del cociente de los dos operadores se aproximan por el cociente de los promedios. Sin embargo, los requerimientos de auto–consistencia de la solución de la ecuación de BHF –particularmente dentro de la elección continua [5]– llaman a un análisis más cuidadoso en el manejo del cociente  $Q/e$ . Esto fue notado tempranamente por Sartor [30], reportando soluciones a la ecuación de BHF mediante un tratamiento del propagador en su forma completa, incluyendo acoplamientos de momento angular entre diferentes estados. Se concluyó que el tratamiento explícito de la dependencia angular del denominador de la energía entrega correcciones marginales a su forma promediada en los ángulos. De todas formas, como se explicará luego, las estrategias numéricas utilizadas en el trabajo antes referido son inadecuadas para dar cuenta de sutilezas en la dependencia angular del propagador. De hecho, estructuras originalmente no previstas emergen en el propagador cuando la dependencia angular del *cociente* se retiene dentro de una representación controlada, mostrando estructuras agudas y angostas en el espacio de momentum, que requieren de técnicas específicas para mantenerlas bajo control.

Como una forma de investigar las correlaciones angulares resultantes de la propagación partícula–partícula en materia nuclear simétrica, Arellano y Delaroche [4] recurrieron a una expansión cuadrática para la dependencia angular del propagador. Siguiendo una integración monopolar en el ángulo para el propagador, encontraron que el comportamiento del operador de masa se ve afectado, haciendo un poco más profundo el punto de saturación que cuando se usa el promedio de los cocientes.

Aunque en este trabajo usaremos un tratamiento no relativista, es importante notar que se ha reportado [13] que al usar el modelo de Walecka (que incluye efectos relativistas) se

obtiene que el punto de saturación se desplaza hacia el valor empírico.

El objetivo de esta tesis va en la línea de continuar el trabajo de Arellano y Delaroche, tratando la dependencia angular del propagador de manera exacta (en contraste con una aproximación cuadrática), aunque manteniendo la aproximación monopolar para el ángulo. Es decir, queremos investigar los efectos en las propiedades de materia nuclear simétrica que tiene el tratamiento exacto de la dependencia angular del propagador.

Este trabajo está dividido en cinco capítulos y un apéndice. En el capítulo 2 mostramos los desarrollos teóricos que fueron necesarios para llevar a cabo el objetivo planteado en esta tesis. En el capítulo 3 presentamos las estrategias numéricas usadas. En el capítulo 4 mostramos los resultados obtenidos y discutimos los mismos. Finalmente, entregamos las conclusiones más importantes junto con posibles continuaciones de este trabajo en el capítulo 5.

# Capítulo 2

## Marco Teórico

En este capítulo mostraremos los desarrollos teóricos necesarios para llevar a cabo el objetivo planteado en esta tesis. En la primera parte, describiremos a grandes rasgos la aproximación de BHF en la teoría de Brueckner-Bethe-Goldstone. Luego discutiremos algunas de las estrategias usadas para controlar la dependencia angular en el propagador de la ecuación. Después, introduciremos la forma de tratar la dependencia angular del propagador y finalmente planteamos un tratamiento perturbativo para controlar tal dependencia.

### 2.1. Aproximación de Brueckner-Hartree-Fock

En la teoría de BBG para materia nuclear, la matriz  $g$  depende de la densidad del medio, caracterizada por el momentum de Fermi  $k_F$  y de una energía de inicio (*starting energy*)  $\omega$ . En la aproximación de BHF la matriz  $g$  satisface la ecuación

$$g(\omega) = v + v \frac{Q}{\omega - \hat{h}_1 - \hat{h}_2 + i\eta} g(\omega), \quad (2.1)$$

con  $v$  la interacción desnuda entre dos nucleones en el vacío,  $\hat{h}_1$  y  $\hat{h}_2$  sus respectivas energías de partícula independiente y  $Q$  el operador de bloqueo de Pauli, que impide la

ocupación de estados intermedios bajo el nivel de Fermi. Además, el parámetro infinitesimal  $i\eta$  de la Ec. (2.1) es necesario para garantizar ondas emergentes. A temperatura nula, el operador de bloqueo se expresa en espacio de momentum, por

$$\langle \mathbf{k}' \mathbf{p}' | \hat{Q} | \mathbf{k} \mathbf{p} \rangle = \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \Theta(k - k_F) \Theta(p - k_F). \quad (2.2)$$

En este caso  $|\mathbf{k} \mathbf{p}\rangle$  representan estados de dos partículas.

La resolución de la Ec. (2.1) para  $g$  nos permite evaluar el operador de masa

$$M(k; E) = \sum \langle \frac{1}{2}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) | g_{\mathbf{K}}(E + \epsilon_p) | \frac{1}{2}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \rangle, \quad (2.3)$$

donde  $\mathbf{K} = \mathbf{k} + \mathbf{p}$  corresponde al momentum total de las partículas interactuantes. La energía de partícula independiente  $\epsilon_k$  se define en términos de un campo auxiliar  $U(k)$

$$\epsilon_k = \frac{k^2}{2m} + U(k). \quad (2.4)$$

El momentum de Fermi,  $k_F$ , es aquel momentum máximo que permite la ocupación de  $N$  estados en un volumen  $V$

$$N = \frac{2}{3} \frac{V}{\pi^2} k_F^3. \quad (2.5)$$

Notemos que en esta expresión se da cuenta de la ocupación de los estados de spin e isospin de los nucleones. Con lo anterior la densidad de materia nuclear simétrica queda dada por

$$\rho = \frac{2}{3} \frac{k_F^3}{\pi^2}. \quad (2.6)$$

Tomando en cuenta que la densidad de saturación de materia nuclear es, experimentalmente,  $\rho = 0.17 \text{ fm}^{-3}$ , se infiere que el momentum de Fermi de saturación resulta  $k_F \sim 1.35 \text{ fm}^{-1}$ . En la aproximación BHF el potencial de partícula independiente se obtiene evaluando la



parte real del operador de masa en la capa de energía (*on shell*)

$$U(k) = \text{Re}\{M(k; \epsilon_k)\}. \quad (2.7)$$

Notemos que  $U$  depende del operador de masa  $M$ , el que a su vez depende de la matriz  $g$ . Esta última está definida en términos del mismo potencial auxiliar  $U$ . Esta construcción altamente no lineal se puede resolver mediante un procedimiento iterativo partiendo de una solución inicial razonable para  $U$ . En la Fig. 2.1 mostramos una explicación esquemática de este proceso, que parte con una adivinanza  $U_0(k)$ , la que se usa para resolver la Ec. (2.1) para la matriz  $g$ , lo que permite evaluar la traza de  $g$  para así encontrar un nuevo campo  $U_1(k)$ . Si  $U_0(k) \approx U_1(k)$  entonces el proceso iterativo ha convergido y la solución es  $U_1$ . En caso contrario, el nuevo campo  $U_1 \rightarrow U_0$  y el proceso vuelve a comenzar, hasta que se cumpla que la condición  $U_0 \approx U_1$ .

Definiendo el momentum relativo entre dos nucleones como

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{k} - \mathbf{p}}{2}, \quad (2.8)$$

y el total como

$$\mathbf{K} = \mathbf{k} + \mathbf{p}, \quad (2.9)$$

entonces, podemos expresar los momenta,  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{p}$  de cada nucleón, en términos de los momenta total y relativo

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2}\mathbf{K} + \mathbf{q}, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2}\mathbf{K} - \mathbf{q}. \quad (2.11)$$

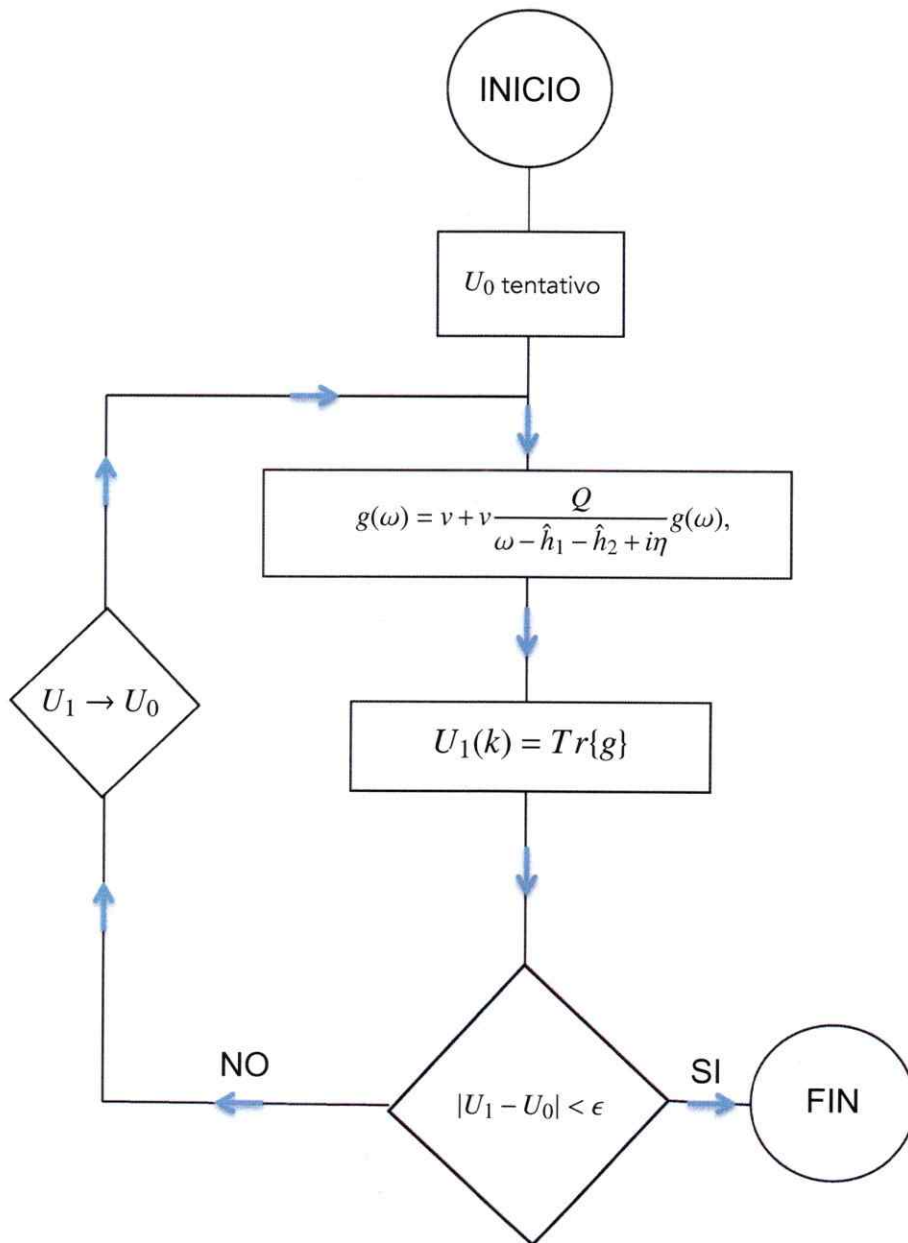


Figura 2.1: Esquema donde se muestra el procedimiento iterativo usado para encontrar los campos autoconsistentes  $U$ .

Por lo tanto,

$$|\mathbf{k}| = \sqrt{\frac{1}{4}K^2 + q^2 + Kqx}; \quad (2.12)$$

$$|\mathbf{p}| = \sqrt{\frac{1}{4}K^2 + q^2 - Kqx}; \quad (2.13)$$

donde  $x = \hat{\mathbf{K}} \cdot \hat{\mathbf{q}}$ , corresponde al coseno del ángulo entre  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{q}$ .

Con estas definiciones, luego de insertar un conjunto completo  $\int d\mathbf{k}d\mathbf{p}|\mathbf{k}\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{k}\mathbf{p}|$  en la Ec. (2.1) para  $g$  y llevar a cabo ciertas simplificaciones, la ecuación de BHF en representación de momentum toma la forma explícita

$$\langle\kappa'|g_{\mathbf{K}}(\omega)|\kappa\rangle = \langle\kappa'|v|\kappa\rangle + \int d\mathbf{q}\langle\kappa'|v|\mathbf{q}\rangle \frac{Q(\mathbf{K}, \mathbf{q})}{\omega + i\eta - \frac{k_+^2}{2m} - \frac{k_-^2}{2m} - \Sigma} \langle\mathbf{q}|g_{\mathbf{K}}(\omega)|\kappa\rangle. \quad (2.14)$$

En esta ecuación  $\Sigma$  corresponde a la suma de los campos auxiliares evaluados en momenta diferentes

$$\Sigma(K, q, x) \equiv U(k_+) + U(k_-), \quad (2.15)$$

donde

$$k_{\pm}^2 = \frac{K^2}{4} + q^2 \pm qKx. \quad (2.16)$$

Como se observa, el denominador del propagador en la Ec. (2.14) depende del ángulo entre  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{q}$ .

En la Ec. (2.14), el operador de bloqueo de Pauli toma la forma

$$Q(\mathbf{K}, \mathbf{q}) \equiv \Theta(k_+ - k_F)\Theta(k_- - k_F). \quad (2.17)$$

Este operador no sólo depende de las magnitudes de los momenta  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{q}$ , si no que también del ángulo entre ellos, lo que lleva a acoplamientos entre estados con distintos momenta angulares.

A fin de dar una forma más explícita a la Ec. (2.14) para  $g$ , usaremos los vectores esféricos armónicos. Estas funciones son del tipo

$$\mathcal{Y}_{JLS}^M(\hat{\mathbf{k}}) = \sum_{m\mu} \langle \hat{\mathbf{k}} | Lm \rangle | S\mu \rangle \langle LS m\mu | JM \rangle, \quad (2.18)$$

donde  $\langle \hat{\mathbf{k}} | Lm \rangle = Y_L^m(\hat{\mathbf{k}})$  son las funciones esféricas armónicas,  $\hat{\mathbf{k}} = (\theta, \phi)$  son las componentes angulares de  $\mathbf{k}$ ,  $|S\mu\rangle$  corresponde a la proyección del spin y  $\langle LS m\mu | JM \rangle$  es el coeficiente de Clebsh-Gordan que resulta de acoplar los momenta angular orbital  $L$  y magnético  $S$  en el total  $J$ .

Expandamos la Ec. (2.14) en ondas parciales usando los vectores esféricos armónicos presentados en la Ec. (2.18)

$$g(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \sum_{J'L'M'} \sum_{JLM} \mathcal{Y}_{J'L'S}^{M'}(\hat{\mathbf{k}}') g_{J'L'L}^{ST}(k', k) \mathcal{Y}_{JLS}^M(\hat{\mathbf{k}})^\dagger, \quad (2.19)$$

esta expresión corresponde a un estado de isospin total  $T$ , que para un sistema de dos nucleones interactuantes toma los valores 0 ó 1. Puesto que despreciamos efectos coulombianos, no habrá dependencia en la componente  $z$  de isospin. El spin total, además, también puede ser 0 ó 1.

En el caso de la interacción desnuda  $v(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ , las propiedades de simetría del potencial nucleón-nucleón nos permiten expandirla en forma análoga

$$v(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \sum_{J'JST} \sum_{L'L} \mathcal{Y}_{J'L'S}^{M'}(\hat{\mathbf{k}}') v_{J'L'L}^{ST}(k', k) \mathcal{Y}_{JLS}^M(\hat{\mathbf{k}})^\dagger \delta_{J'J}. \quad (2.20)$$

Reemplazando las Ecs. (2.19) y (2.20) en la Ec. (2.14) obtenemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{J'L'M'} \sum_{JLM} \mathcal{Y}_{J'L'S}^{M'}(\hat{\mathbf{k}}') g_{J'JL'L}^{ST}(k', k) \mathcal{Y}_{JLS}^M(\hat{\mathbf{k}})^\dagger = \\
& \sum_{J'JST} \sum_{L'L} \mathcal{Y}_{J'L'S}^M(\hat{\mathbf{k}}') v_{J'L'L}^{ST}(k', k) \mathcal{Y}_{JLS}^M(\hat{\mathbf{k}})^\dagger \delta_{J'J} + \int q^2 dq d\hat{\mathbf{q}} \times \\
& \sum_{J_1L_1M_1} \sum_{J_2L_2M_2} \mathcal{Y}_{J_1L_1S}^{M_1}(\hat{\mathbf{q}})^\dagger v_{J'J_1L_1L_1}^{ST}(k', q) \mathcal{Y}_{J_1L_1S}^{M_1}(\hat{\mathbf{q}})^\dagger \times \\
& \Lambda(\mathbf{K}, \mathbf{q}) \mathcal{Y}_{J_2L_2S}^{M_2}(\hat{\mathbf{q}}) g_{J_2JL_2L}(q, k) \mathcal{Y}_{JLS}^M(\hat{\mathbf{k}})^\dagger \delta_{J'J},
\end{aligned} \tag{2.21}$$

usando la ortogonalidad de los vectores esféricos armónicos, la ecuación anterior se reduce a

$$\begin{aligned}
g_{J'JL'L}^{ST}(k', k) = & v_{J'L'L}^{ST}(k', k) \delta_{J'J} + \int q^2 dq \sum_{J'L'M'} \sum_{JLM} v_{J_1L_1L_1}^{ST}(k', q) \times \\
& \int d\hat{\mathbf{q}} \mathcal{Y}_{J_1L_1S}^{M_1}(\hat{\mathbf{q}})^\dagger \Lambda(\mathbf{K}, \mathbf{q}) \mathcal{Y}_{J_2L_2S}^{M_2}(\hat{\mathbf{q}}) g_{J_2JL_2L}^{ST}(q, k) \delta_{J'J}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

El acoplamiento angular debido a la dependencia en  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{q}$  del propagador puede verse si examinamos la integral  $\lambda_S(J_1M_1L_1; J_2M_2L_2)$  en  $d\hat{\mathbf{q}}$

$$\lambda_S(J_1M_1L_1; J_2M_2L_2) \equiv \int d\hat{\mathbf{q}} \mathcal{Y}_{J_1L_1S}^{M_1}(\hat{\mathbf{q}})^\dagger \Lambda(\mathbf{K}, \mathbf{q}) \mathcal{Y}_{J_2L_2S}^{M_2}(\hat{\mathbf{q}}), \tag{2.23}$$

entonces podemos reemplazar las ecuaciones para los vectores esféricos armónicos en la Ec. (2.23) para obtener

$$\begin{aligned}
\lambda_S(J_1M_1L_1; J_2M_2L_2) = & \sum_{m_1\mu_1} \sum_{m_2\mu_2} \int d\hat{\mathbf{q}} \langle J_1M_1|L_1S m_1\mu_1 \rangle \langle S\mu_1|Y_{L_1}^{m_1*}(\hat{\mathbf{q}}) \\
& \times \Lambda(\mathbf{K}, \mathbf{q}) |S\mu_2\rangle Y_{L_2}^{m_2}(\hat{\mathbf{q}}) \langle L_2S m_1\mu_1|J_2M_2 \rangle.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Notemos que las componentes  $z$  del spin total  $S$  satisfacen  $\mu_1 = \mu_2 \equiv \mu$  y que además

contribuciones no nulas ocurren sólo si  $m_1 = m_2 \equiv m_L$ . Entonces

$$\lambda_S(J_1 M_1 L_1; J_2 M_2 L_2) = \sum_{m_L \mu} \int d\hat{q} \langle J_1 M_1 | L_1 S m_L \mu \rangle Y_{L_1}^{m_L*}(\hat{q}) \Lambda(\mathbf{K}, \mathbf{q}) Y_{L_2}^{m_L}(\hat{q}) \langle L_2 S m_L \mu | J_2 M_2 \rangle. \quad (2.25)$$

De las Ecs. (2.22) y (2.25), podemos ver que la ecuación de BHF puede escribirse en forma exacta y completa como

$$g_{J' J L' L}^{ST}(k', k) = v_{J' J L' L}^{ST}(k', k) \delta_{J'} + \int q^2 dq \sum_{J_1 L_1 M_1} \sum_{J_2 L_2 M_2} v_{J' J L' L_1}^{ST}(k', q) \times \lambda_S(J_1 M_1 L_1; J_2 M_2 L_2) g_{J_2 J L_2 L}^{ST}(q, k) \delta_{J J_1}. \quad (2.26)$$

Cuando se resuelve la Ec. anterior, debemos considerar dos estados de spin ( $S = 0, 1$ ) e isospin ( $T = 0, 1$ ). Además, los valores de  $J$  varían desde 0 hasta un valor máximo que hemos tomado igual a 7 ( $J_{max} = 7$ ) y que está restringido, según el principio de Pauli, a estados cuyos números cuánticos de momento angular orbital, de spin e isospin cumplan con  $(-1)^{(L+S+T)} = -1$ . Esto implica considerar los estados de momento angular:

- $S = 0, T = 0.$

$${}^1P_1, {}^1F_3, {}^1H_5, {}^1K_7.$$

- $S = 0, T = 1.$

$${}^1S_0, {}^1D_2, {}^1G_4, {}^1I_6$$

- $S = 1, T = 0.$

$${}^3S_1, {}^3D_1, {}^3D_2, {}^3D_3, {}^3G_3, {}^3G_4, {}^3G_5, {}^3I_5, {}^3I_6, {}^3I_7$$

- $S = 1, T = 1.$



donde cada elemento de matriz, es una matriz en espacio de momentum. Al considerar todos los estados hasta  $J = 7$ , en los canales  $(S, T) = (0, 0), (0, 1), (1, 0)$  y  $(1, 1)$ , las dimensiones respectivas de las ecuaciones a resolver son de  $(4 \times 4)$ ,  $(4 \times 4)$ ,  $(7 \times 7)$  y  $(9 \times 9)$ , respectivamente, cada una de ellas discretizada en momentum. Ciertamente este número se reduce significativamente debido a coeficientes de Clebsch-Gordan que son nulos. Aún así, este problema sigue siendo de gran complejidad. Esto debido a la dependencia angular de  $Q/e$ , cuyo tratamiento analizamos en la sección siguiente. En esta notación,  $e$  corresponde al denominador de la Ec. (2.14)

$$e \equiv \omega - \frac{K^2}{4} - q^2 - \Sigma. \quad (2.28)$$

Notemos que si  $\Lambda$  no depende de la variable angular  $x$ ,  $\lambda_s$  se reduce a

$$\lambda_S(J_1 M_1 L_1; J_2 M_2 L_2) = \Lambda_0(K, q) \delta_{J_1 J_2} \delta_{L_1 L_2} \delta_{M_1 M_2}, \quad (2.29)$$

donde  $\Lambda(\mathbf{K}, \mathbf{q}) \rightarrow \Lambda_0(K, q)$ , independiente del ángulo entre  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{q}$  y obtenemos lo esperado. Luego, si el propagador no depende del ángulo, la ecuación de BHF para la matriz  $g$  se escribe como

$$g_{J' J L}^{ST}(k', k) = v_{J L' L}^{ST}(k', k) \delta_{J' J} + \int q^2 dq \sum_{L''} v_{J L' L''}^{ST}(k', q) \Lambda_0(K, q) g_{J'' J L''}^{ST}(q, k) \delta_{J J''}. \quad (2.30)$$

Aquí se observa el desacoplamiento entre estados de diferente momento angular total  $J$ .

En la siguiente sección abordaremos el tratamiento de la dependencia del propagador en  $x$ .



## 2.2. Tratamiento de la dependencia angular

En la literatura se pueden observar distintos grados de aproximación en el tratamiento de la dependencia angular del propagador  $Q/e$ . Notemos que tanto  $Q$  como  $e$  dependen de la variable angular  $x$ , donde  $\hat{\mathbf{K}} \cdot \hat{\mathbf{q}} = x$ . Algunas de las formas de tratar esta dependencia angular que se encuentran en la literatura son las siguientes:

### 1. Tratamiento exacto de $Q$ con denominador en aproximación de masa efectiva.

En esta aproximación, muchas veces referida por sus autores como tratamiento exacto del operador de bloqueo de Pauli [31, 11], se supone que los campos autoconsistentes son cuadráticos en el momentum. En tal caso,

$$U(p) = A + Bp^2, \quad (2.31)$$

por lo tanto,

$$U(k_+) + U(k_-) = 2A + B\frac{K^2}{2} + 2Bq^2. \quad (2.32)$$

Entonces la suma de las energías de partícula independiente queda expresada como

$$\epsilon(k) + \epsilon(p) = 2A + \frac{K^2}{4} + q^2 + 2A + B\frac{K^2}{2} + 2Bq^2, \quad (2.33)$$

reagrupando términos con  $q^2$  en la ecuación anterior

$$\epsilon(k) + \epsilon(p) = 2A + \frac{K^2}{4}(1 + 2B) + \frac{q^2}{2m^*}, \quad (2.34)$$

con  $m^* = (1 + 2B)/2$ , comúnmente referida como *masa efectiva*. En este caso particular la dependencia angular en el denominador desaparece completamente, lo que

se traduce en una enorme simplificación al problema. Notar que si bien el operador de Pauli es tratado en detalle, ello no es efectivo para el propagador exacto  $Q/e$ .

2. *Tratamiento exacto de  $Q$  con denominador promediado angularmente.*

A diferencia del caso anterior, en esta aproximación [16, 29] se trabaja con el promedio angular de  $\epsilon(k) + \epsilon(p)$ . Para ello se evalúa la integral

$$\bar{\Sigma} = \frac{1}{2\Delta} \int_{-\Delta}^{\Delta} \left[ U \left( \sqrt{\frac{K^2}{4} + q^2 + qKx} \right) + U \left( \sqrt{\frac{K^2}{4} + q^2 + qKx} \right) \right] dx. \quad (2.35)$$

En este caso la dependencia angular también desaparece completamente del denominador y éste adopta la forma

$$\bar{\epsilon} = \omega - \frac{K^2}{4} - q^2 - \bar{\Sigma}. \quad (2.36)$$

3. *Cuociente de promedios.*

En este caso el promedio angular del cuociente  $Q/(e + i\eta)$  se aproxima al cuociente de los promedios angulares respectivos [9]

$$\left\langle \frac{Q}{e} \right\rangle \approx \frac{\bar{Q}}{\bar{e} + i\eta}, \quad (2.37)$$

donde el promedio del operador de bloqueo de Pauli corresponde a

$$\bar{Q} = \frac{1}{4\pi} \int Q(\mathbf{K}, \mathbf{q}) d\Omega_q = \Delta, \quad (2.38)$$

con

$$\Delta = \min\{1, \max\{0, (K^2/4 - q^2 - k_F^2)/qK\}\}, \quad (2.39)$$

el propagador queda expresado por

$$\frac{\bar{Q}}{\bar{e}} = \frac{\Delta}{\omega - \frac{K^2}{4} - q^2 - \bar{\Sigma}}. \quad (2.40)$$

Cabe destacar que no es evidente que el promedio de un cuociente sea aproximable al cuociente de los promedios.

Contrastando con los trabajos mencionados anteriormente, en esta tesis se trata en forma explícita la dependencia angular del denominador. Sin embargo, trabajaremos en la aproximación “monopolar”, vale decir, aproximando  $\lambda_S$  en la Ec. (2.25) por

$$\lambda_S(K, q) \rightarrow \lambda(K, q) = \int d\hat{\mathbf{q}} Y_0^0(\hat{\mathbf{q}}) \frac{Q}{e + i\eta} Y_0^0(\hat{\mathbf{q}}). \quad (2.41)$$

Al integrar en  $\phi$  y recordando que  $Y_0^0(\hat{\mathbf{q}}) = 1/\sqrt{4\pi}$ , podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\lambda_S(K, q) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{Q}{e + i\eta} dx. \quad (2.42)$$

Además, se puede demostrar que

$$\int_{-1}^1 Q dx = \int_{-\Delta}^{\Delta} du, \quad (2.43)$$

con  $\Delta$  definido según la Ec. (2.39). Esto permite reescribir la Ec. (2.42)

$$\lambda(K, q) = \int_0^{\Delta} \frac{1}{e + i\eta} du. \quad (2.44)$$

Consideremos la Fig. 2.2, donde graficamos la diferencia  $\delta\Sigma = \Sigma - \bar{\Sigma}$ , como función de  $x$  y  $q$ , con  $U$  encontrado de manera autoconsistente con métodos convencionales basados en el potencial de Argonne  $v_{18}$  [35], donde vemos que las diferencias entre la suma de

los campos  $\Sigma$  y el promedio  $\bar{\Sigma}$  de la suma resultan evidentes. Podemos notar que ambas superficies son simétricas en  $x$  y que para valores de  $x = \pm 1$  la curvatura es negativa y para  $x = 0$  la curvatura es positiva, tomando la forma de una joroba simétrica en  $x$  para estos valores de  $q$ .

Las diferencias entre el propagador exacto y el propagador promediado angularmente se pueden apreciar en la Fig. 2.3 para un caso particular de  $K$ , donde se muestran ambos propagadores,  $\Lambda(K, q)$  y  $\Lambda_0(K, q)$ , como funciones del momentum  $q$ . Lo primero que notamos es que la estructura del propagador se simplifica considerablemente al promediarlo angularmente. En efecto, pasamos de tener una estructura con dos máximos para la parte real del propagador, a una función similar a una delta para  $\Lambda_0$ ; y pasamos de tener un mínimo y un máximo separados por  $\sim 0.1 \text{ fm}^{-1}$  a tener una función de la forma  $\frac{1}{x}$ . Es decir, la estructura del propagador queda contenida en un intervalo de alrededor de  $0.03 \text{ fm}^{-1}$ .

Inicialmente, nos planteamos como objetivo encontrar los campos autoconsistentes sin recurrir a aproximaciones en el tratamiento de la variable angular, dentro de la aproximación monopolar dada por la Ec. (2.41). Lo anterior supuso el tratamiento exacto de la dependencia angular del propagador según la Ec. (2.44), para luego encontrar la matriz  $g$  según el proceso iterativo anteriormente descrito.

Los resultados obtenidos para el operador de masa siguiendo esta estrategia de cálculo, resultaron ser extremadamente inestables. Ello nos condujo a la búsqueda de un esquema alternativo, que permitiese un control sistemático de la dependencia angular del propagador.

### 2.3. Enfoque Perturbativo

Una manera para poder dar cuenta de la estructura del propagador y al mismo tiempo llegar a resultados estables para los campos  $U(k)$ , fue mediante un cálculo perturbativo, que describiremos a continuación.

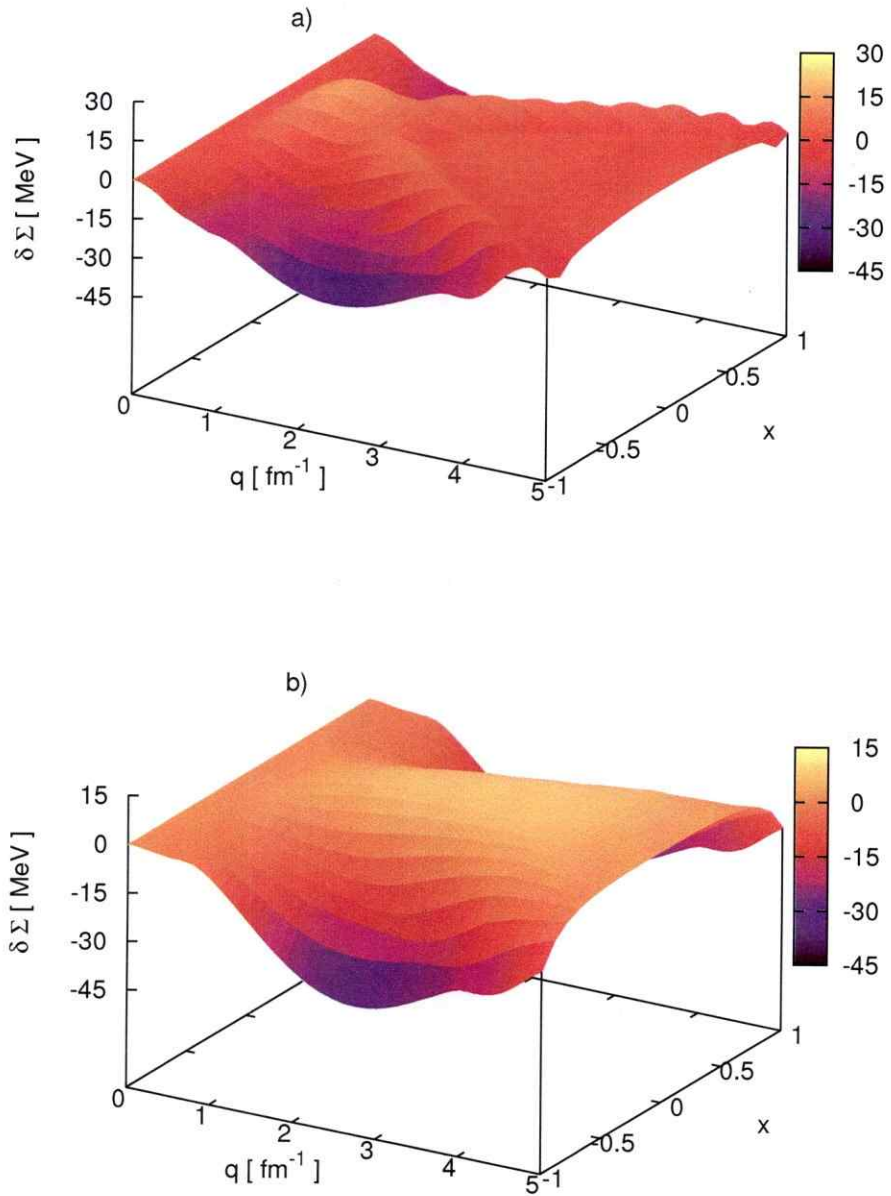


Figura 2.2: Gráfico de la diferencia ( $\Sigma - \bar{\Sigma}$ ) como función de  $q$  y  $x$ , con  $K = 3k_F$ . Panel (a):  $k_F = 1.50$  fm $^{-1}$ . Panel (b):  $k_F = 1.60$  fm $^{-1}$ . La escala en colores para el eje vertical está dada en MeV.

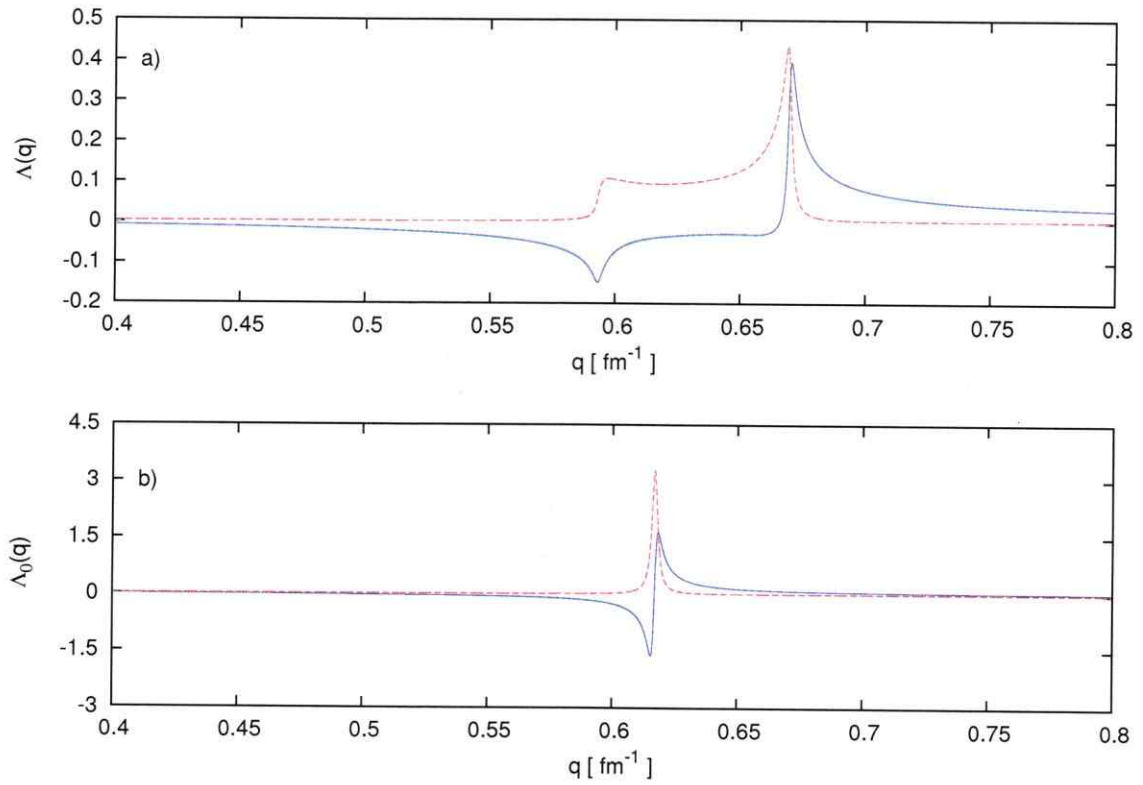


Figura 2.3: Panel (a): Propagador exacto en la aproximación monopolar  $\Lambda(K, q)$  como función de  $q$  para una densidad de  $k_F = 1.5 \text{ fm}^{-1}$  y  $K = 2.55 \text{ fm}^{-1}$ , con la parte real de color rojo y la parte imaginaria azul. Panel (b): Propagador  $\Lambda_0(K, q)$  en la aproximación angular usando los mismos parámetros.

La ecuación exacta para la matriz  $g$  está dada por

$$g = v + v\Lambda g, \quad (2.45)$$

donde  $\Lambda$  representa el propagador exacto en la aproximación monopolar. Por otro lado, denotemos mediante  $\Lambda_0$  al propagador  $\frac{\Lambda}{e}$ . Entonces

$$g = v + v(\Lambda - \Lambda_0)g + v\Lambda_0g. \quad (2.46)$$

En lo que sigue,  $\Lambda - \Lambda_0 \equiv \delta\Lambda$ , se tratará como una perturbación.

Expresemos la matriz  $g$  como una serie infinita de matrices  $g_i$  a diferentes órdenes en  $\delta\Lambda$ ,

$$g = g_0 + g_1 + g_2 + \dots. \quad (2.47)$$

Combinando las Ecs. (2.46) y (2.47) obtenemos

$$g_0 + g_1 + \dots = v + v(\Lambda - \Lambda_0)(g_0 + g_1 + \dots) + v\Lambda_0(g_0 + g_1 + \dots) + \dots. \quad (2.48)$$

Igualando términos del mismo orden identificamos

$$g_0 = v + v\Lambda_0g_0 \quad (2.49a)$$

$$g_1 = v\delta\Lambda g_0 + v\Lambda_0g_1. \quad (2.49b)$$

La primera ecuación representa la matriz  $g_0$  para el caso en que el propagador está dado por el promedio angular de la energía en el denominador. Esto es, el cálculo convencional de la matriz  $g$  basada en el cociente de los promedios. De la Ec. (2.49a) obtenemos

$$g_0 = (1 - \nu\Lambda_0)^{-1}\nu. \quad (2.50)$$

Sustituyendo este resultado en la Ec. (2.49b), luego de cierto desarrollo, encontramos que

$$g_1 = g_0(\Lambda - \Lambda_0)g_0 \equiv g_0\delta\Lambda g_0. \quad (2.51)$$

Por lo tanto,

$$g \approx g_0 + g_1. \quad (2.52)$$

Nótese que para evaluar  $g_1$  basta con calcular  $g_0$  y evaluar el valor de expectación  $\langle g_0 \delta\Lambda g_0 \rangle$ . Si bien esto parece simple, como veremos más adelante, en este paso hay que proceder con cuidados adicionales. La ventaja de este esquema es que el cálculo de  $g_0$  involucra el uso de métodos bastante conocidos. La dificultad se produce en la evaluación de  $g_1$ , que involucra integrandos muy irregulares, como se ilustra en la figura 2.3.

Examinemos ahora la forma detallada de la evaluación de  $g_1$ . Para ello, denotemos por  $\xi$  la diferencia entre la energía de inicio  $\omega$  y la energía cinética de los nucleones

$$\xi \equiv \omega - \frac{K^2}{4} - q^2, \quad (2.53)$$

además, denotemos como  $\bar{\Sigma} \equiv \Sigma(K, q)$  la suma de los potenciales de partícula independiente que han sido promediados en el ángulo. Con estas definiciones, podemos escribir el propagador exacto como

$$\Lambda = \frac{Q}{\xi - \bar{\Sigma} + i\eta}, \quad (2.54)$$

mientras que para el propagador  $\Lambda_0$  tenemos



$$\Lambda_0 = \frac{Q}{\xi - \bar{\Sigma} + i\eta}. \quad (2.55)$$

Entonces, la diferencia entre ambos propagadores bajo la aproximación monopolar adopta la forma

$$\delta\Lambda = \int_{-\Delta}^{\Delta} \int_0^{2\pi} d\phi dx \left( \frac{1}{\xi - \Sigma + i\eta} - \frac{1}{\xi - \bar{\Sigma} + i\eta} \right). \quad (2.56)$$

Al integrar en  $\phi$  obtenemos un factor  $2\pi$  y queda una integral interior en  $dx$

$$\delta\Lambda = 2\pi \int_{-\Delta}^{\Delta} dx \left( \frac{1}{\xi - \Sigma + i\eta} - \frac{1}{\xi - \bar{\Sigma} + i\eta} \right). \quad (2.57)$$

Si sumamos y restamos  $\bar{\Sigma}$  del primer denominador de la ecuación anterior

$$\delta\Lambda = 2\pi \int_{-\Delta}^{\Delta} dx \left( \frac{1}{\xi - \bar{\Sigma} - \Sigma + \bar{\Sigma} + i\eta} - \frac{1}{\xi - \bar{\Sigma} + i\eta} \right), \quad (2.58)$$

y si además, definimos las diferencias

$$e_0 \equiv \xi - \bar{\Sigma}, \quad (2.59)$$

$$u_x \equiv \Sigma - \bar{\Sigma}, \quad (2.60)$$

la Ec. (2.58) puede escribirse como

$$\delta\Lambda = 2\pi \int_{-\Delta}^{\Delta} dx \left( \frac{1}{e_0 - u_x + i\eta} - \frac{1}{e_0 + i\eta} \right). \quad (2.61)$$

Notar que  $e_0$  es independiente de  $x$ . Examinemos separadamente la parte real e imaginaria de esta diferencia.

## 1. Parte Real

$$\delta\Lambda_R = 2\pi \frac{e_0}{e_0^2 + \eta^2} \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{u_x(e_0 - u_x)}{(e_0 - u_x)^2 + \eta^2} dx. \quad (2.62)$$

Podemos ver que la diferencia de energías definida en la Ec. (2.59) corresponde al denominador de energía del propagador promediado en el ángulo y que podemos expresar este mismo propagador como la suma de sus partes real e imaginaria según

$$\Lambda_0 = \frac{1}{e_0 + i\eta} = \frac{e_0^2}{e_0^2 + \eta^2} - i \frac{\eta^2}{e_0^2 + \eta^2}, \quad (2.63)$$

por lo que la parte real de la corrección del propagador a primer orden no es más que la parte real de  $\Lambda_0$  multiplicado por una integral en el ángulo

$$\delta\Lambda_R = 2\pi \operatorname{Re}\{\Lambda_0\} \times \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{u_x(e_0 - u_x)}{(e_0 - u_x)^2 + \eta^2} dx. \quad (2.64)$$

## 2. Parte Imaginaria

Tomemos ahora la parte imaginaria de la Ec. (2.61) para  $\delta\Lambda$

$$\delta\Lambda_I = 2\pi \int_{-\Delta}^{\Delta} \left[ \frac{\eta}{(e_0 - u_x)^2 + \eta^2} - \frac{\eta}{e_0^2 + \eta^2} \right] dx. \quad (2.65)$$

Definamos el integrando de esta ecuación como una función  $f(u_x)$

$$f(u_x) = \frac{\eta}{(e_0 - u_x)^2 + \eta^2} - \frac{\eta}{e_0^2 + \eta^2}, \quad (2.66)$$

que según la fórmula de Plemelj (límite  $\eta \rightarrow 0$ ) equivale a

$$f(u_x) = \delta(e_0 - u_x) - \delta(e_0). \quad (2.67)$$

Si ahora expandemos la ecuación anterior como serie de potencias en torno a  $u_x = 0$ , obtenemos

$$f(u_x) \approx u_x \delta'(e_0) + u_x^2 \frac{1}{2} \delta''(e_0) + O(u_x^3), \quad (2.68)$$

por lo que al reemplazar este resultado en la Ec. (2.65) para la parte imaginaria de la corrección se tiene que

$$\delta\Lambda_I = 2\pi \int_{-\Delta}^{\Delta} \left[ u_x \delta'(e_0) + u_x^2 \frac{1}{2} \delta''(e_0) \right] dx. \quad (2.69)$$

Notemos que al integrar la Ec. (2.69) obtenemos que el primer término es nulo. En efecto, por la definición de  $u_x$ , tenemos que  $\int_{-\Delta}^{\Delta} u_x dx \equiv 0$ . Por lo tanto, la cuadratura a evaluar para encontrar la parte imaginaria de  $g_1$  es

$$\delta\Lambda_I = \pi \int_{-\Delta}^{\Delta} u_x^2 \delta''(e_0) dx. \quad (2.70)$$

Así, hemos encontrado expresiones que permiten evaluar la corrección angular  $\delta\Lambda$  para el propagador. Una vez encontrada, calculamos el valor de expectación con  $g_0$ , obtenemos  $g_1$  y la añadimos a  $g_0$  para así calcular la matriz  $g$ . Es importante recalcar que este esquema nos permite manejar de manera separada las partes real e imaginaria de la corrección, dados por las Ecs. (2.64) y (2.70) respectivamente, lo que a su vez nos permitió manejar de manera separada sus efectos en el cálculo de los campos de partícula independiente. La conveniencia de esta estrategia se hizo patente cuando nos encontramos con inestabilidades en las soluciones, ya que pudimos identificar la fuente de las mismas y tratarlas adecuadamente.

# Capítulo 3

## Consideraciones Numéricas

En este capítulo presentaremos algunas de las herramientas usadas en el desarrollo de este trabajo. En la primera parte mostraremos como discretizamos la ecuación de BHF. Luego detallamos la evaluación del operador de masa mediante el cálculo autoconsistente mencionado en el capítulo anterior, para después explicar como se añade la corrección  $g_1$  en nuestro cálculo.

### 3.1. Discretización de la ecuación de BHF

Podemos reescribir la ecuación (2.30) para la matriz  $g$  como

$$g_{JL'L}^{ST}(k', k) = v_{JL'L}^{ST}(k', k) + \sum_{L''} \int_0^\infty q^2 dq F_{JL'L''}^{ST}(k', q) g_{JL''L}^{ST}(q, K), \quad (3.1)$$

donde hemos definido la función  $F$  como

$$F_{L'L''}^{ST}(k', q) = v_{JL'L''}^{ST}(k', q) \Lambda_0(K, q), \quad (3.2)$$

y el potencial desnudo de interacción en el espacio de momentum se obtiene de

$$v_{JLL}^{ST}(k, k') = \int_0^\infty j_L(kr) u_{JLL}^{ST}(r) j_L(k'r) r^2 dr; \quad (3.3)$$

esta transformada se calcula mediante una cuadratura. Notemos que los rótulos de  $v$  implican que esta integración se realiza para cada estado definido por  $J, L, S$  y  $T$ . En la Ec. (3.3),  $j_L(kr)$  son las funciones de Bessel esféricas y  $u_{JLL}^{ST}(r)$  es el potencial local desnudo  $NN$  en espacio de coordenadas.

Discretizando la ecuación anterior en el momentum, encontramos que esta toma la forma

$$g_{JL'L}^{ST}(k'_i, k_j) = v_{JL'L}^{ST}(k'_i, k_j) + \sum_{L''=|J-S|}^{J+S} \sum_{m=1}^N q_m^2 F_{JL'L''}^{ST}(k'_i, q_m) g_{JL''L}^{ST}(q_m, k_j) w(q_m), \quad (3.4)$$

donde los  $w(q_m)$  corresponden a ciertos pesos dados por la regla de cuadratura usada para discretizar el momentum.

Con el fin de simplificar el desarrollo, revisaremos el caso donde no hay acoplamientos con otras ondas parciales. En ese caso y obviando las etiquetas para  $S$  y  $T$ , la ecuación (3.4) puede escribirse usando notación de índices

$$g_{ij} = v_{ij} + \sum_{k=1}^N F_{ik} g_{kj} w_k. \quad (3.5)$$

En esta ecuación discretizamos  $q \rightarrow q_i$  en el intervalo entre 0 y  $q_0$  mediante  $N$  puntos gaussianos y añadimos  $M$  puntos gaussianos  $u_i$  parametrizados como [8]

$$q_i = q_0 + \bar{q} \tan[\pi(u_i + 1)/4], \quad (3.6)$$

con  $q_0$  el cero del denominador de energía y elegimos  $\bar{q}$  de forma que  $q_M \approx 500 \text{ fm}^{-1}$ . Los  $N$  son tales que las densidades de puntos son similares a ambos lados del polo ( $N = M \sqrt{2q_0/\pi\bar{q}}$ ).

Matricialmente, la ecuación anterior adopta la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{V} + \mathbf{F}\mathbf{G} \\ (\mathbf{1} - \mathbf{F})\mathbf{G} &= \mathbf{V} \\ \mathbf{G} &= (\mathbf{1} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{V}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Es decir, la matriz  $\mathbf{G}$  puede obtenerse al invertir la matriz  $(\mathbf{1} - \mathbf{F})$  y multiplicar el resultado de la inversión por la matriz  $\mathbf{V}$ , que contiene la interacción desnuda  $NN$ .

### 3.2. Integrales de movimiento de Fermi

Para la evaluación de los campos autoconsistentes, necesitamos sumar los elementos en la capa de energía de la matriz  $g$ , manteniendo el momentum de una de las partículas bajo la superficie de Fermi. Explícitamente, debemos evaluar

$$M(k, e_k) = \sum_{\alpha} n_{\alpha} \int_0^{k_F} p^2 dp \int_{-1}^1 du g_K^{\alpha} \left( \frac{|\mathbf{k} - \mathbf{p}|}{2}, \frac{|\mathbf{k} - \mathbf{p}|}{2}; \omega \right). \tag{3.8}$$

Aquí  $u = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ , la energía  $\omega$  está evaluada en la capa de energía ( $\omega = e_k + e_p$ ),  $\alpha$  denota los estados de spin, isospin y momento angular y  $n_{\alpha}$  contiene todos los factores geométricos y de degeneración. Para la mayoría de los estados  $NN$  la integración dentro de la esfera de Fermi involucra integrandos bien comportados, dados por los elementos en la capa de energía de la matriz  $g$ . Sin embargo, encontramos que debíamos tomar medidas extras al considerar los canales  $^1S_0$  y  $^3S_1$ - $^3D_1$ . Esto ya que cualquier elemento de matriz con una energía de inicio cercana a la de uno de los estados ligados  $S$  o  $D$ , lleva a contribuciones excesivamente grandes para  $g$ . Es decir, si durante la evaluación de las integrales  $dp du$  de la Ec. (3.8) una configuración de momentum total y energía de inicio resulta estar cerca (o

en una) de estas singularidades, entonces contribuciones grandes (o no definidas) para  $g$  se vuelven inevitables.

A fin de ilustrar la implicancia de estados ligados en la matriz  $g$ , consideremos el caso particular de la ec. de Lippmann–Schwinger para la matriz  $t$ :

$$t(\omega) = v + v \frac{1}{\omega + i\eta - \hat{k}_1 - \hat{k}_2} t(\omega). \quad (3.9)$$

Su solución formal se puede expresar como

$$t(\omega) = v + v \frac{1}{\omega + i\eta - \hat{H}} v, \quad (3.10)$$

donde  $\hat{H} = \hat{k}_1 + \hat{k}_2 + v$ , es el hamiltoniano de las dos partículas interactuantes. Al insertar un conjunto completo de autofunciones de  $\hat{H}$ ,

$$\hat{H}|\alpha\rangle = \epsilon_\alpha|\alpha\rangle, \quad (3.11)$$

se obtiene

$$t(\omega) = v + \sum_{\alpha} \frac{v|\alpha\rangle\langle\alpha|v}{\omega + i\eta - \epsilon_\alpha}. \quad (3.12)$$

Claramente, si  $\omega \rightarrow \epsilon_\alpha$ , para algún  $\beta$ , entonces  $t(\epsilon_\beta)$  diverge como  $1/i\eta$ , lo que explica el origen de contribuciones muy grandes si  $\omega$  es muy próximo a un estado ligado. Este escenario se replica en materia nuclear, lo que conlleva a matrices  $g$  muy grandes si  $\omega$  se evalúa cerca de un polo.

Con el fin de controlar posibles ocurrencias del escenario descrito anteriormente, se hace conveniente trabajar con nuevas variables de integración para el operador de masa. Estas son  $q$  y  $K$ , definidas por [18]

$$q = \frac{1}{2}(k^2 + p^2 - 2kpu)^{1/2}, \quad (3.13)$$

$$K = (k^2 + p^2 + 2kpu)^{1/2}. \quad (3.14)$$

De esta forma

$$p^2 dp du = \frac{2Kq}{k} dK dq. \quad (3.15)$$

Así, el operador de masa en la capa de energía puede ser expresado como

$$M(k, e_k) = \sum_{\alpha} n_{\alpha} \int_{K_{min}}^{K_{max}} K dK \int_{q_{min}}^{q_{max}} \frac{2q dq}{k} g_K^{\alpha}(q, q; \omega). \quad (3.16)$$

Con estas variables de integración, para  $k_F$ ,  $k$  y  $K$  dados, los límites de integración en  $q$  pasan a ser

$$q_{min} = |k - \frac{1}{2}K|$$

$$q_{max} = \begin{cases} \text{mín}\{k + \frac{1}{2}, (R^2 - \frac{1}{4}K^2)^{1/2}\} & \text{para } k \leq k_F \\ (R^2 - \frac{1}{4}K^2)^{1/2} & \text{para } k > k_F, \end{cases} \quad (3.17)$$

donde

$$R^2 = \frac{1}{2}(k^2 + k_F^2). \quad (3.18)$$

Para la variable  $K$  los límites de integración están dados por

$$K_{min} = \text{máx}\{0, k - k_F\}, \quad K_{max} = k + k_F. \quad (3.19)$$

Estas coordenadas de integración, que definen dominios en el plano  $(\frac{1}{2}K, q)$  como puede



verse en la Fig. 3.1, facilitan el control de singularidades debidas a estados ligados nucleón-nucleón. En efecto, para momentum constante  $K$ , la auto-energía  $\omega_K^*$  de un eventual estado ligado no cambia mientras tiene lugar la integración en  $q$ . Además, considerando la representación espectral de  $g$  cuando estados ligados ocurren [3], su comportamiento para  $\omega$  cerca de la energía del estado ligado adopta la forma

$$g_K^\alpha(\omega) \sim \frac{|\phi_K^\alpha\rangle\langle\phi_K^\alpha|}{\omega - \omega_K^*}, \quad (3.20)$$

con  $|\phi_K^\alpha\rangle$  la autofunción en el polo. Esta propiedad analítica nos permite asegurar que el operador de masa, expresado como una integral sobre momenta de  $g$  con singularidades aisladas, debe ser finito. La justificación de esta afirmación es que si hay ocurrencia de polos simples, la integración sobre  $q$  de la parte singular de  $g$  en la Ec. (3.16) se reduce a

$$I = \int_{q_{min}}^{q_{max}} \frac{2q dq}{k} \frac{|\langle q|\phi_K^\alpha\rangle|^2}{E(K, q) - \omega_K^*}. \quad (3.21)$$

Notemos que el numerador está acotado. Si expandimos el denominador a primer orden en  $q$  alrededor de su cero, el que supondremos dentro del intervalo de integración, la contribución alrededor de la singularidad puede ser reducida a la forma  $\int_{-\delta}^{\delta} \frac{dx}{x}$ , la que se vuelve finita. Entonces, las integrales sobre momenta de la matriz  $g$  que contienen polos debido a dinucleones no sólo son finitos, sino que además son manejables. En nuestros cálculos, controlamos estas singularidades con la regularización

$$g(\omega) \rightarrow g(\omega) \times \frac{(\Delta\omega)^2}{(\Delta\omega)^2 + \eta^2}, \quad (3.22)$$

donde  $\Delta\omega = \omega - \omega_K^*$ , y  $\eta$  es infinitesimal. De esta manera, las contribuciones a la matriz  $g$  cercanas al polo, esto es  $\Delta\omega/\eta \rightarrow 0$ , se atenuan. Por otro lado, si  $|\Delta\omega|/\eta \gg 1$ , entonces  $g$  prácticamente no cambia. En la implementación de esta técnica, hemos usado  $\eta = 0.1$  MeV.

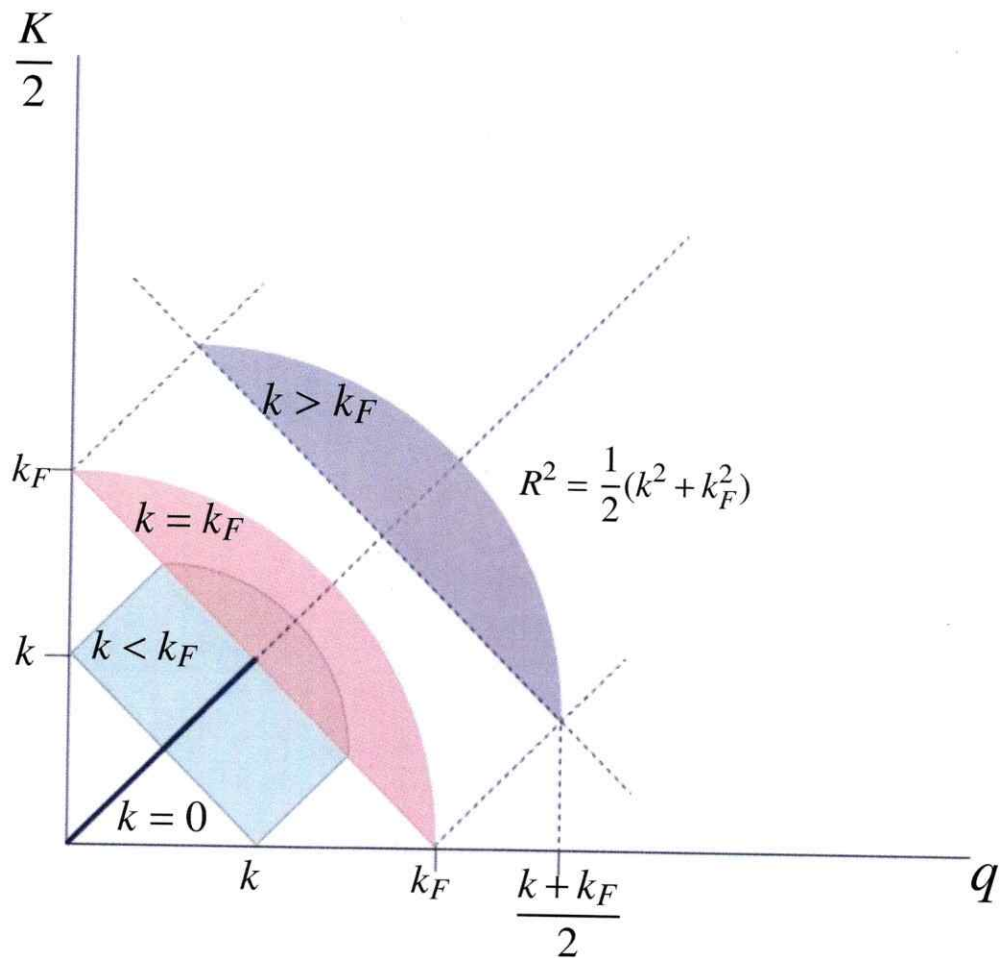


Figura 3.1: Dominios de integración en el plano  $(\frac{1}{2}K, q)$  para diferentes valores de  $k$  relativos a  $k_F$ . Los radios  $R$  de los arcos satisfacen  $R^2 = (k^2 + k_F^2)/2$ . Las pendientes de las líneas rectas son  $\pm 1$ .

Para asegurar una evaluación precisa de la integral del operador de masa de la ec. (3.16), usamos el método descrito en el apéndice A, interrumpiendo el ciclo si y sólo si la diferencia entre dos evaluaciones sucesivas es de un 1 % y el número mínimo de trapezoides en el intervalo es de 63. Este esquema fue aplicado primero a la integración interior en  $q$  y luego a la cuadratura en  $K$ .

Como se puede ver en la ecuación (3.16),  $k = 0$  es un caso especial. Para este caso, definimos

$$M(0, e_0) = \sum_{\alpha} n_{\alpha} \int_{K_{min}}^{K_{max}} 2K^2 dK \int_{q_{min}}^{q_{max}} dq g_K^{\alpha}(q, q; \omega). \quad (3.23)$$

La condición de autoconsistencia para  $U(k)$  se alcanza una vez que las máximas fluctuaciones para  $U(k_i)$  durante tres iteraciones consecutivas son menores a 0.05 MeV; este requerimiento se impone para todos los  $k_i$ . Durante los cálculos encontramos que fue determinante introducir un coeficiente de arrastre (*drag*) para poder controlar las oscilaciones entre valores sucesivos de  $U(k_i)$ . Supongamos que estamos en la iteración cuyo resultado será el campo  $U_n$ , entonces el campo que servirá de entrada para la próxima iteración ( $n + 1$ ) será

$$U_n = U_{n-2} + 5(1 - C_d) \tanh \left[ \frac{U_{n-1} - U_{n-2}}{5} \right], \quad (3.24)$$

con  $C_d$  el coeficiente de arrastre y  $U_n$  tiene unidades de MeV. Es decir, el valor de  $U_n$  no sólo depende del campo anterior  $U_{n-1}$ , sino que también del valor anterior a aquel,  $U_{n-2}$ . De esta forma nos aseguramos de que las variaciones entre valores de  $U(k_i)$  sucesivos no fueran bruscas y se mantuvieran acotadas. Para nuestros cálculos usamos valores para  $C_d$  que fluctuaron entre 0.85 y 0.95.

### 3.3. Corrección $g_1$

Según ya hemos visto, la corrección  $g_1$  para  $g$  consta de dos contribuciones, una real y otra imaginaria. Una vez calculadas se calcula el valor de expectación con  $g_0$  de la Ec. (2.51) y luego se añade como una perturbación en  $\Lambda$ . Para calcular esta corrección, lo primero es resolver las integrales angulares de las Ecs. (2.64) y (2.69), las que contienen a los potenciales de partícula independiente.

Debido a que encontramos que ayudaba a la estabilidad y velocidad de los cálculos, escribimos la suma de estos potenciales de partícula independiente,  $\Sigma(K, q, x) = U(k_+) + U(k_-)$ , como una expansión en polinomios de Legendre en  $x$

$$\Sigma(x) = \sum_{n=0}^{10} B_n P_n(x). \quad (3.25)$$

Esta expansión aproxima de manera bastante precisa los campos, como puede verse en la Fig. 3.2. Podemos notar que para este caso, el ajuste cuadrático de la forma  $A + Bx^2$  no es capaz de dar cuenta de toda la estructura de los campos exactos, ya que la forma de la curvatura en torno a  $x = 0$  se reproduce relativamente bien, no así lo que sucede en los extremos, donde  $\Sigma$  muestra dos cambios de curvatura, que claramente un polinomio de grado  $n = 2$  no puede reproducir. No sucede lo mismo cuando usamos un polinomio de Legendre de grado  $n = 6$ , el que ajusta los campos exactos de manera casi perfecta, excepto por los bordes, donde las diferencias no superan los  $\sim 1.3$  MeV. Para nuestros cálculos, usamos polinomios de Legendre de orden  $n = 10$ , lo que asegura una representación muy fiable para los campos.

Para calcular la parte real de la corrección a la matriz  $g$ , tomamos  $\eta = 0.3$  MeV. Para asegurarnos de que este valor fuese confiable, calculamos los corrimientos de fase (*phaseshifts*) para el estado  $^1S_0$  usando este valor para  $\eta$  y comparamos con lo obtenido al usar  $\eta = 0$ . Como podemos ver en la Fig. 3.3, las mayores diferencias se obtienen para bajas energías

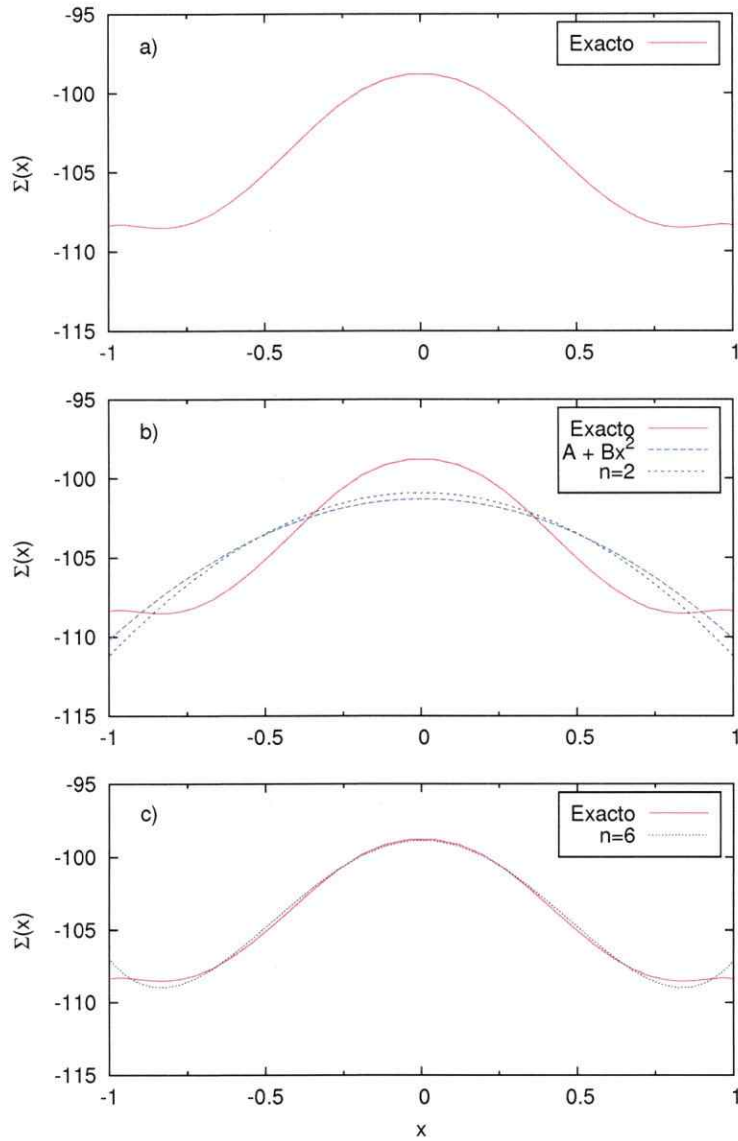


Figura 3.2: Panel (a): Suma de los campos exactos  $\Sigma(K, q, x)$  como función de  $x$ . Panel (b) Comparación de  $\Sigma(K, q, x)$  con un ajuste cuadrático de la forma  $A + Bx^2$  y una expansión en polinomios de Legendre con  $n = 2$ . Panel (c): Mostramos como se ajustan los campos exactos con una expansión en polinomios de Legendre con  $n = 6$ . Aquí,  $k_F = 1.60 \text{ fm}^{-1}$ ,  $K = 3k_F \text{ fm}^{-1}$  y  $q = 1.00 \text{ fm}^{-1}$ .

y los corrimientos de fase se reproducen satisfactoriamente para energías sobre 10 MeV. Luego procedimos a calcular la corrección, usando el esquema de integración adaptativo mostrado en el apéndice A, exigiendo que la diferencia entre dos evaluaciones consecutivas sea menor a un 1% y que además el intervalo de integración tenga por lo menos 63 trapezoides y a lo más 2047.

Por otro lado, recordemos que para encontrar la corrección para la parte imaginaria necesitamos calcular la integral

$$\delta u_x = \int_{-\Delta}^{\Delta} u_x^2 dx. \quad (3.26)$$

Los requerimientos numéricos para esta integral fueron los mismos que para la parte real de la corrección del propagador. Al evaluar la integral de la Ec. (3.26) nos encontramos con algunos valores para  $\delta u_x$  muy grandes, lo que se traducía en inestabilidades numéricas. Para mantener acotado el valor de esta integral, definimos el resultado de la cuadratura anterior como

$$\delta u_x = \begin{cases} \delta u_x & \text{si } q < q_c \\ \delta u_x e^{-(q-q_c)^2} & \text{si } q > q_c, \end{cases} \quad (3.27)$$

es decir, para momenta  $q$  sobre  $q_c = 5 \text{ fm}^{-1}$ , se agrega un término que amortigua valores excesivamente grandes de  $\delta u_x$ . La identificación y manejo de estas inestabilidades fue posible debido a que en nuestro esquema podemos evaluar separadamente la parte real de la imaginaria de la corrección. Una vez determinada la diferencia  $\delta\Lambda$ , podemos encontrar la corrección  $g_1$  según la Ec. (2.51). Recordemos que estamos tratando con matrices, por lo que la corrección a la parte imaginaria de la matriz  $g$ , para el caso no acoplado, tiene la forma de la Ec. (3.28)

$$\begin{aligned}
& \sim \int g(x, y) \delta''(y - y_0) g(y, x) dy \\
& \sim \frac{\partial^2}{\partial y^2} (g(x, y) g(y, x)) \Big|_{y=y_0}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

### 3.4. Niveles de aproximación

Abordamos 4 niveles aproximación para el cálculo de los campos autoconsistentes. Usamos la notación  $LS_i$ , con  $i = 0, 2, 3$  más un nivel denominado  $LS$ . La explicación para cada uno de ellos la detallamos a continuación:

- $LS$ .

Llamamos  $LS$  al cálculo realizado usando el enfoque convencional donde se usa el promedio de los cuocientés. En este caso evaluamos la energía de inicio  $\omega = \epsilon(p) + \epsilon(k)$

$$\epsilon(p) + \epsilon(k) \rightarrow \omega = \frac{K^2}{4} + q^2 + \bar{\Sigma}. \tag{3.29}$$

Este enfoque está motivado en respetar las diferencias en el denominador del propagador,  $\sim 1/(\omega - \omega' + i\eta)$ , enfatizando un tratamiento simétrico de las energías  $\omega$  y  $\omega'$ . De esta forma, se cuida que la parte imaginaria del operador de masa sea nulo para  $k < k_F$ .

- $LS_0$ .

El cálculo que llamamos  $LS_0$  también lo realizamos usando el enfoque convencional del promedio de los cuocientes. La diferencia con  $LS$  radica en la forma de evaluar la energía de inicio. En este caso tomamos  $\omega$  como la suma de energías de partícula independiente

$$\omega_0 = \epsilon(k) + \epsilon(p). \quad (3.30)$$

Como veremos en el próximo capítulo, no es lo mismo evaluar la energía de inicio usando la Ec. (3.29) o la Ec. (3.30).

- $LS_2 = LS_0 + \text{Re}\{g_1\}$ .

Este nivel corresponde al cálculo convencional  $LS_0$ , al que añadimos *sólo* la parte real de la corrección angular  $g_1$ .

- $LS_3 = LS_0 + g_1$ .

Llamamos  $LS_3$  al cálculo convencional  $LS_0$ , al que añadimos  $g_1$  completa, es decir, incluimos las partes real e imaginaria de la corrección angular.



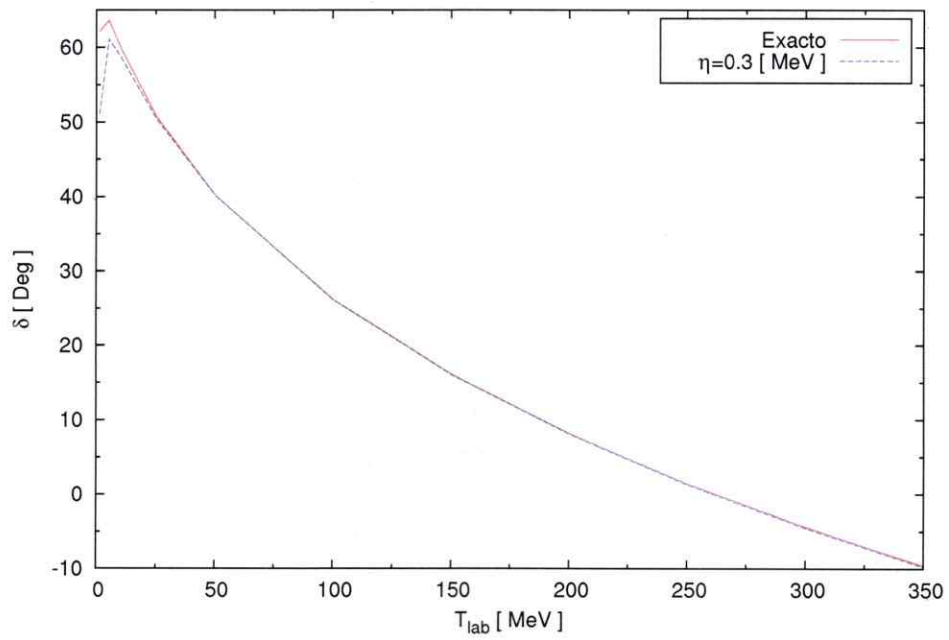


Figura 3.3: La curva roja (azul) muestra los corrimientos de fase para la onda  $^1S_0$  usando  $\eta = 0$  ( $\eta = 0.3$  MeV).

# Capítulo 4

## Resultados y Discusión

Obtuvimos 12 soluciones autoconsistentes para  $U(k)$  en los cuatro niveles de aproximación  $LS$ ,  $LS_0$ ,  $LS_2$  y  $LS_3$ , para  $k_F = 1.20(0.05)1.75 \text{ fm}^{-1}$  usando el potencial de Argonne  $v_{18}$  como potencial de interacción desnudo. Este es un potencial nucleón–nucleón de alta calidad, con dependencia de carga explícita y con asimetría de carga. Contiene una parte independiente de la carga con 14 operadores que son una versión actualizada del potencial Argonne  $v_{14}$ . Este potencial está ajustado a la base de datos para scattering  $np$  y  $pp$  de Nijmegen, a parámetros de scattering  $nn$  de baja energía y a la energía de ligazón del deuterón [35]. Incluimos todas las ondas parciales hasta momento angular total  $J = 7$ . En la Fig. 4.1 ilustramos la forma de este potencial en espacio de momentum como función de  $k'$  y  $k$ , para los canales  $^1S_0$  y  $^1P_1$ . Para el canal  $^1S_0$  podemos apreciar que tiene una parte negativa para momenta bajo  $k \sim 2.5 \text{ fm}^{-1}$  y otra positiva a partir de ese valor. El potencial para el canal  $^1P_1$ , por otro lado, es positivo para todos los valores de los momenta.

### 4.1. Soluciones autoconsistentes

En las Figs. 4.3 y 4.2 mostramos los campos autoconsistentes obtenidos como función de  $k$  para distintos valores del momentum de Fermi correspondiente a los niveles  $LS$  y  $LS_0$ . El

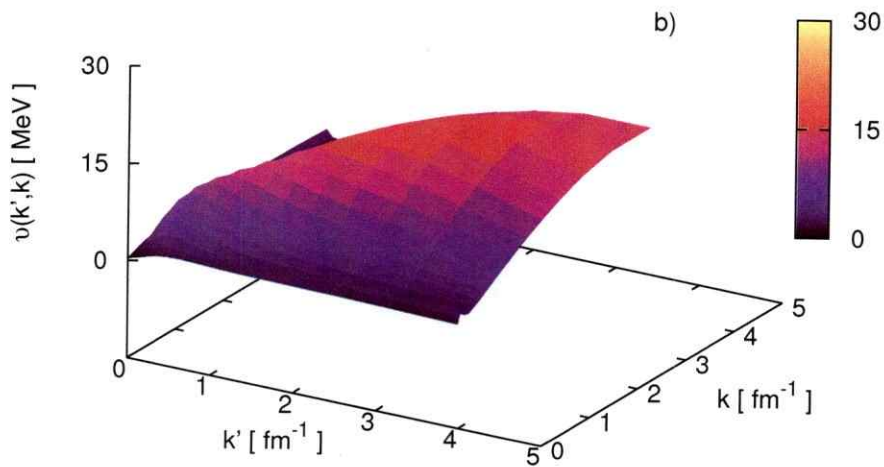
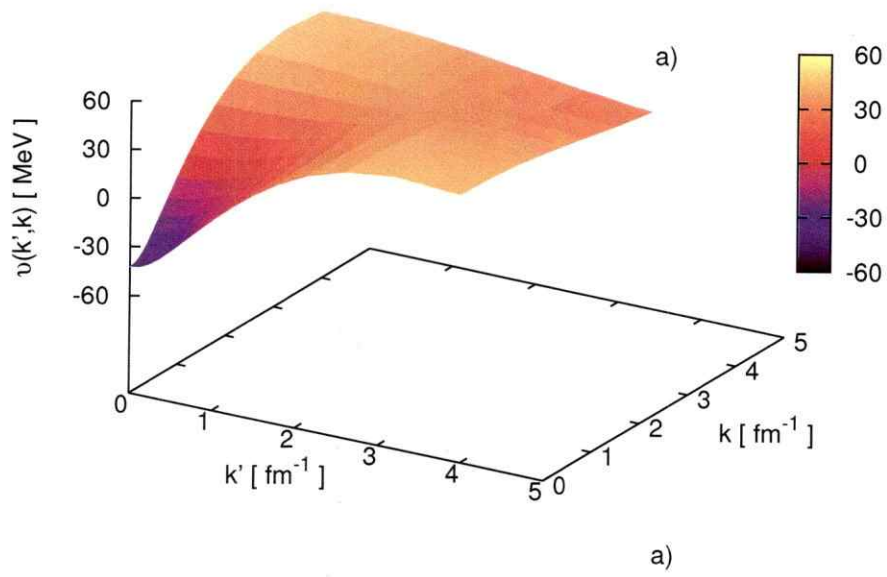


Figura 4.1: Potencial de Argonne  $v_{18}$  en espacio de momentum como funcion de  $k'$  y  $k$ . Panel (a):  $u(k',k)$  para la onda  $^1S_0$ . Panel (b):  $u(k',k)$  para la onda  $^1P_1$ .

panel superior muestra la parte real del operador de masa *on-shell* y el inferior muestra la parte imaginaria. La curva azul (roja) corresponde a  $k_F = 1.20(1.75) \text{ fm}^{-1}$ . Notemos que la parte real del operador de masa es una función monótona creciente y que estas se cruzan en  $k \sim 3.3 \text{ fm}^{-1}$ . La curva más externa, para  $k_F = 1.75 \text{ fm}^{-1}$  es la primera que se vuelve positiva y la curva más interna para  $k_F = 1.20 \text{ fm}^{-1}$  es la última. La parte imaginaria es nula hasta el momentum de Fermi, cuando comienza a hacerse negativa monotonamente. Al igual que para la parte real, las soluciones tienen un punto de inflexión donde se entrecruzan en  $k \sim 2.2 \text{ fm}^{-1}$ .

Como una forma de mostrar las diferencias entre  $LS$  y  $LS_0$ , presentamos la Fig. 4.4, donde podemos ver que la forma de las soluciones es la misma, pero que hay ligeras diferencias. Para la parte real, para momenta hasta  $\sim 3.5 \text{ fm}^{-1}$  las soluciones son prácticamente idénticas, luego  $LS_0$  es ligeramente mayor que  $LS$ . Notemos también que las soluciones para  $k_F = 1.75$  y  $1.70 \text{ fm}^{-1}$  muestran diferencias para  $k \sim 2 \text{ fm}^{-1}$ . La parte imaginaria para ambas soluciones también es cualitativamente similar, pero se aprecian diferencias mayores que para la parte real a partir de  $k \sim 2 \text{ fm}^{-1}$ , las que aumentan junto con  $k$ . Vemos que en  $k = 5.5 \text{ fm}^{-1}$  la diferencia entre  $LS$  y  $LS_0$  para  $k_F = 1.20 \text{ fm}^{-1}$  es de  $\sim 1 \text{ MeV}$ , mientras que para  $k_F = 1.75 \text{ fm}^{-1}$  esta es de  $\sim 4 \text{ MeV}$ .

En la Fig. 4.5 se muestran los resultados obtenidos para  $LS_2$ , correspondientes a soluciones donde la corrección angular se agrega mediante la parte real de  $\delta\Lambda$ . El comportamiento del operador de masa es cualitativamente similar al observado para la Fig. 4.3 en cuanto a su monotonocidad. Para la parte real, la intersección de las curvas está ligeramente desplazada hacia la derecha en  $k$  y no es tan uniforme como para  $LS_0$ . Las diferencias más importantes se dan a partir de  $k \sim 3.5 \text{ fm}^{-1}$ . Observamos algunas estructuras, las que son evidentes para las tres curvas rojas (correspondientes a los momenta de Fermi más altos,  $k_F = 1.75, 1.70$  y  $1.65 \text{ fm}^{-1}$ ) a partir de  $k \sim 4 \text{ fm}^{-1}$ . Notemos también que las curvas amarillas para  $k_F = 1.60$  y  $k_F = 1.55 \text{ fm}^{-1}$  se cruzan con la de  $k_F = 1.65$  en  $k = 4.5 \text{ fm}^{-1}$ ,

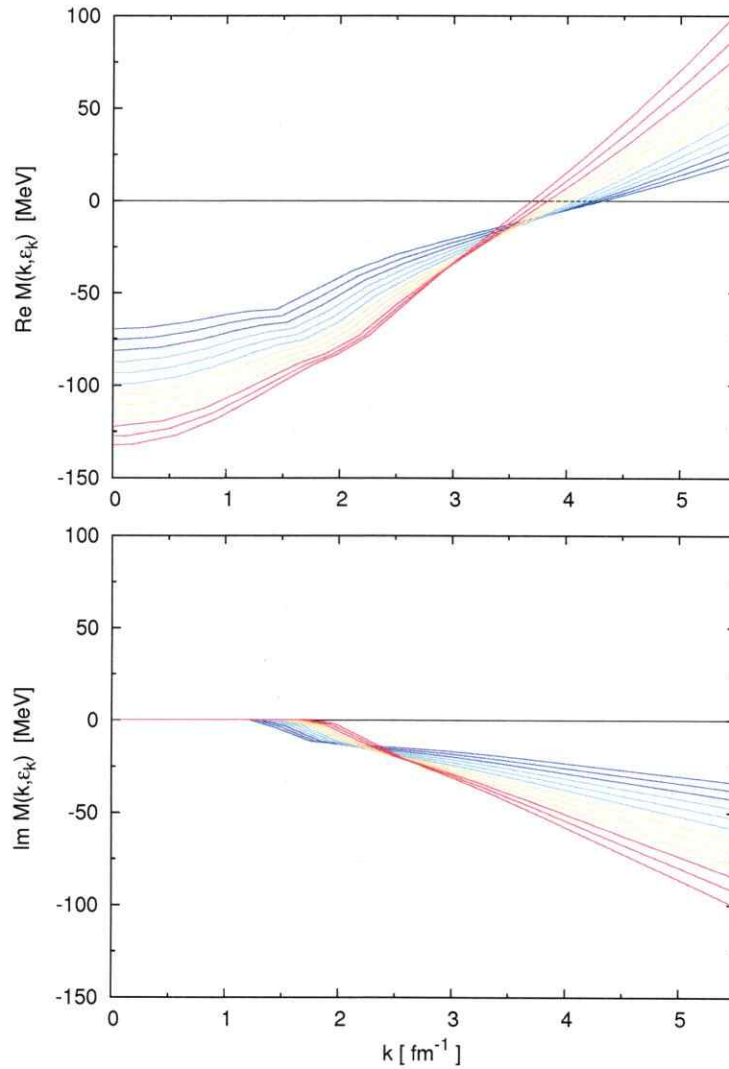


Figura 4.2: Soluciones autoconsistentes para  $U(k)$  en el nivel  $LS$  en el rango de  $1.2 \leq k_F \leq 1.75 \text{ fm}^{-1}$  usando el potencial de Argonne  $v_{18}$  como potencial de interacción desnudo. Incluimos todas las ondas parciales hasta momento angular total  $J = 7$ .

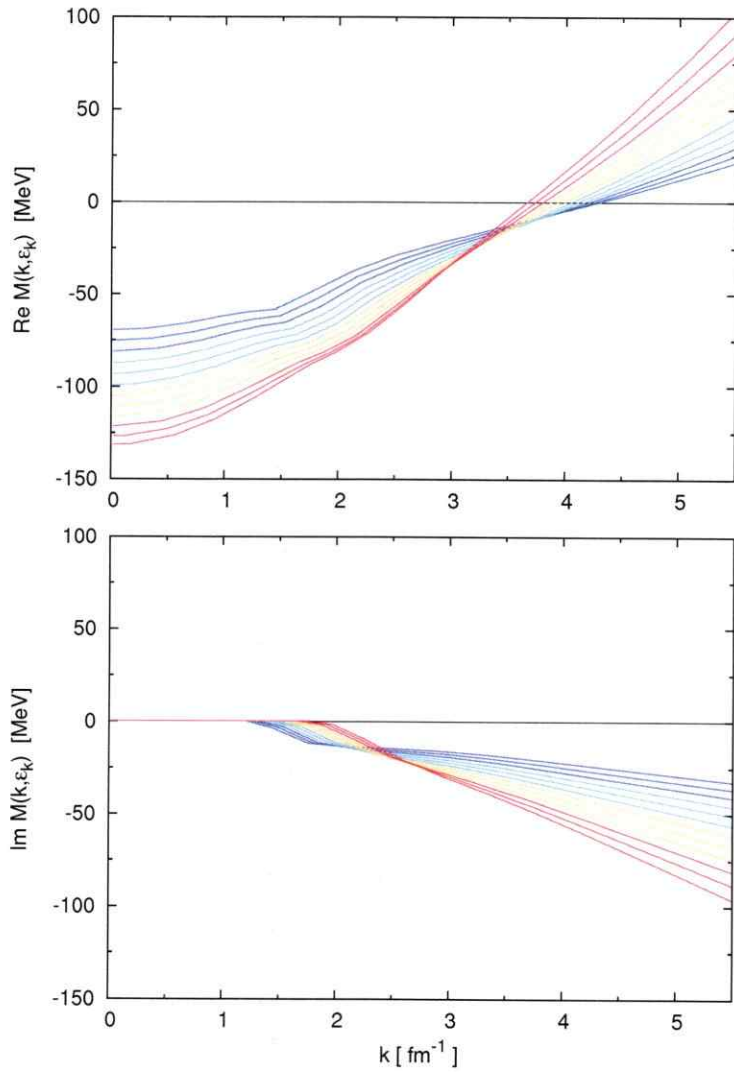


Figura 4.3: Soluciones autoconsistentes para  $U(k)$  en el nivel  $LS_0$  en el rango de  $1.2 \leq k_F \leq 1.75 \text{ fm}^{-1}$  usando el potencial de Argonne  $v_{18}$  como potencial de interacción desnudo. Incluimos todas las ondas parciales hasta momento angular total  $J = 7$ .

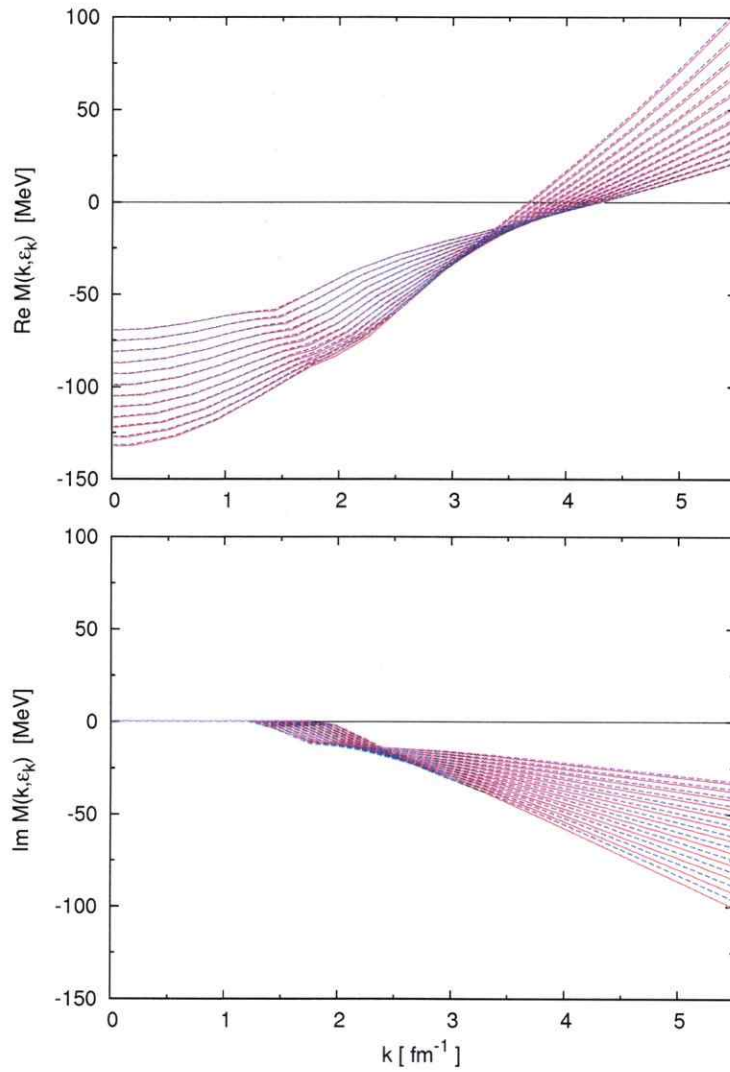


Figura 4.4: Comparación entre las soluciones obtenidas para  $LS$  (rojo, líneas continuas) y  $LS_0$  (azul, líneas punteadas) en el rango de  $1.2 \leq k_F \leq 1.75 \text{ fm}^{-1}$  usando el potencial de Argonne  $v_{18}$  como potencial de interacción desnudo. Incluimos todas las ondas parciales hasta momento angular total  $J = 7$

lo mismo ocurre para  $k_F = 1.45 \text{ fm}^{-1}$ , la que a partir del punto de intersección se cruza con todas las curvas azules correspondientes a los tres momenta de Fermi más bajos y luego vuelve a cruzarse con las correspondientes a  $k_F = 1.35$  y  $k_F = 1.40 \text{ fm}^{-1}$ . Este comportamiento es radicalmente distinto al observado para la parte real de los campos para  $LS_0$ , donde las curvas, exceptuando por el punto de intersección, nunca se cruzan.

Para la parte imaginaria, por otro lado, vemos que para  $k < 3.5 \text{ fm}^{-1}$  tampoco se aprecian diferencias significativas respecto a  $LS_0$ . Las curvas también son nulas bajo  $k_F$  y se intersectan alrededor de  $k = 2.4 \text{ fm}^{-1}$ . En los tres últimos  $k_F$  se aprecian diferencias importantes con respecto a  $LS_0$  a partir de  $k = 4 \text{ fm}^{-1}$ . De nuevo nos encontramos con que los campos se cruzan entre sí, revelando una estructura ausente en la Fig. 4.3. La única intersección entre las curvas para  $k_F = 1.60, 1.55$  y  $1.50 \text{ fm}^{-1}$  se da en  $k \sim 4.4 \text{ fm}^{-1}$ . Las curvas para los tres siguientes  $k_F = 1.45, 1.40$  y  $1.35 \text{ fm}^{-1}$ , tienen estructuras menos notorias que su contraparte real y estas se encuentran en  $k \sim 4, \sim 4.8$  y  $\sim 5.4 \text{ fm}^{-1}$  aproximadamente. Finalmente, para las últimas tres curvas no notamos mayores diferencias.

En la Fig. 4.6 se muestran los resultados obtenidos para  $LS_3$ , correspondientes a soluciones donde se agrega la corrección angular completa al propagador. Observamos que no hay mayores diferencias en comparación a  $LS_2$ , lo que se verá reflejado en las propiedades de saturación que encontraremos y que discutiremos más adelante. Cabe destacar también que el último punto de  $U(k)$  para  $k_F = 1.60 \text{ fm}^{-1}$  no logró convergencia estable y se mantuvo oscilando con  $\Delta U_k \sim 0.2 \text{ fm}^{-1}$ , lo que no influyó en los resultados para el punto de saturación.

Para ilustrar las diferencias entre las soluciones encontradas con y sin corrección en el propagador, mostramos la Fig. 4.7, donde podemos ver una comparación entre el operador de masa  $M(k; \epsilon_k)$  encontrado en el nivel  $LS_0$  y en el nivel  $LS_3$ . Notemos que las diferencias que se ven son muy similares a las observadas entre  $LS_0$  y  $LS_2$ , tanto en la ubicación de las estructuras observadas, como en su forma.



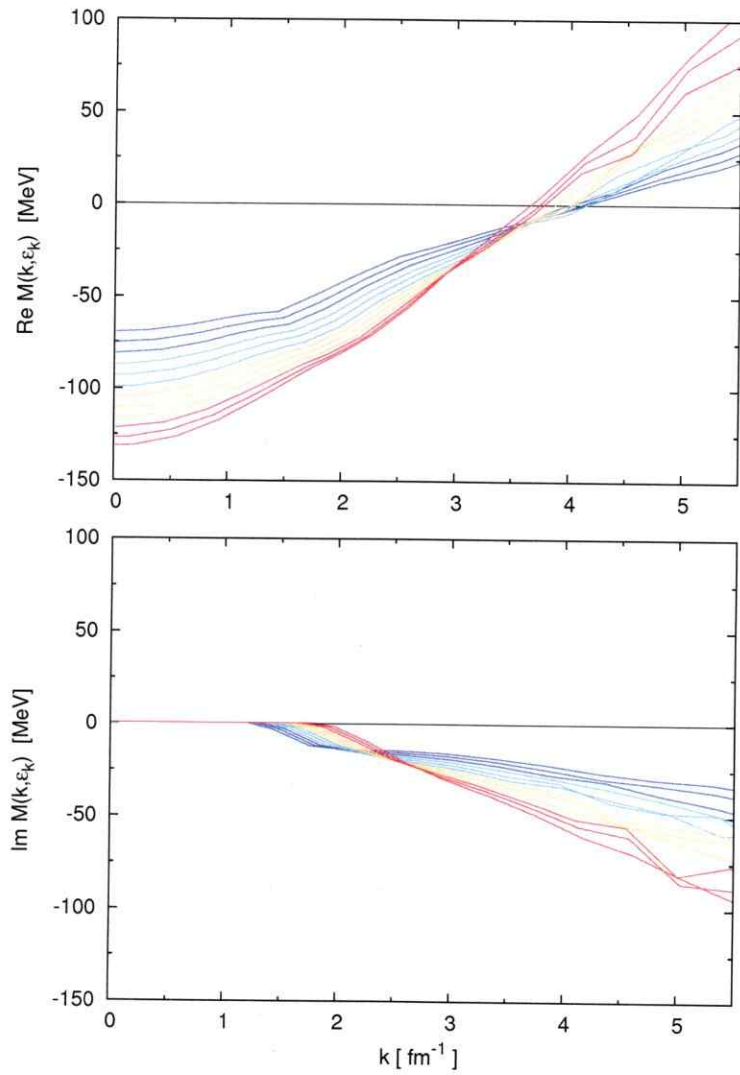


Figura 4.5: Soluciones autoconsistentes para  $U(k)$  en el nivel  $LS_2$  en el rango de  $1.2 \leq k_F \leq 1.75 \text{ fm}^{-1}$  usando el potencial de Argonne  $v_{18}$  como potencial de interacción desnudo. Incluimos todas las ondas parciales hasta momento angular total  $J = 7$ .

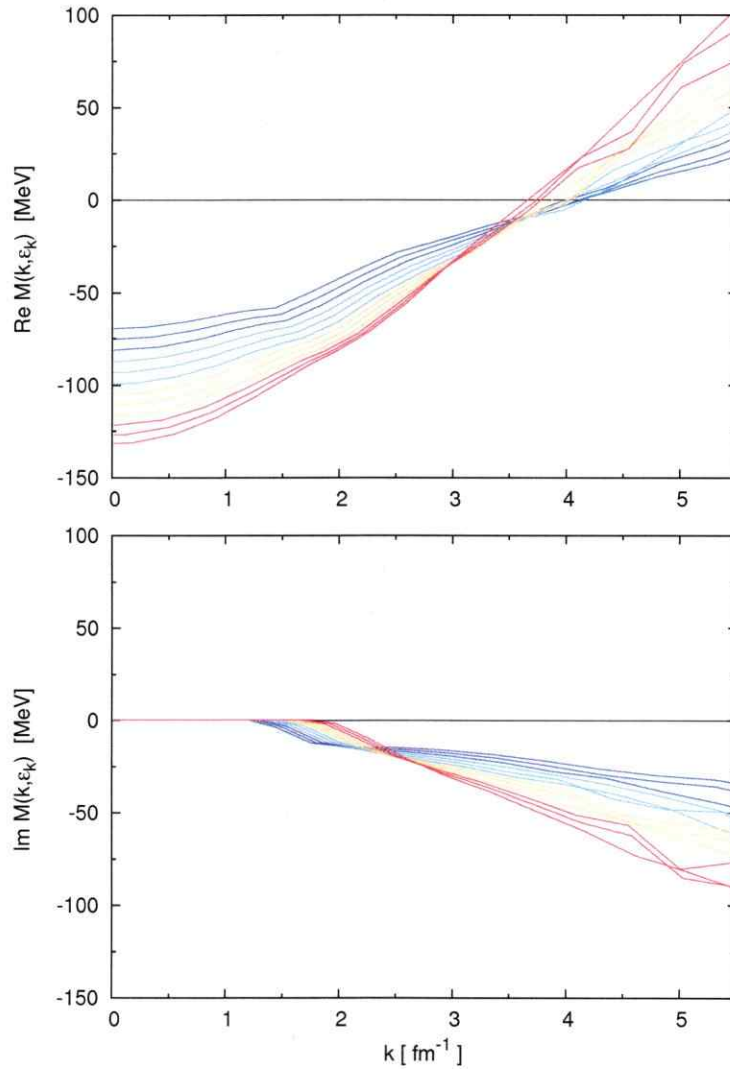


Figura 4.6: Soluciones autoconsistentes para  $U(k)$  en el nivel  $LS_3$  en el rango de  $1.2 \leq k_F \leq 1.75 \text{ fm}^{-1}$  usando el potencial de Argonne  $v_{18}$  como potencial de interacción desnudo. Incluimos todas las ondas parciales hasta momento angular total  $J = 7$ .

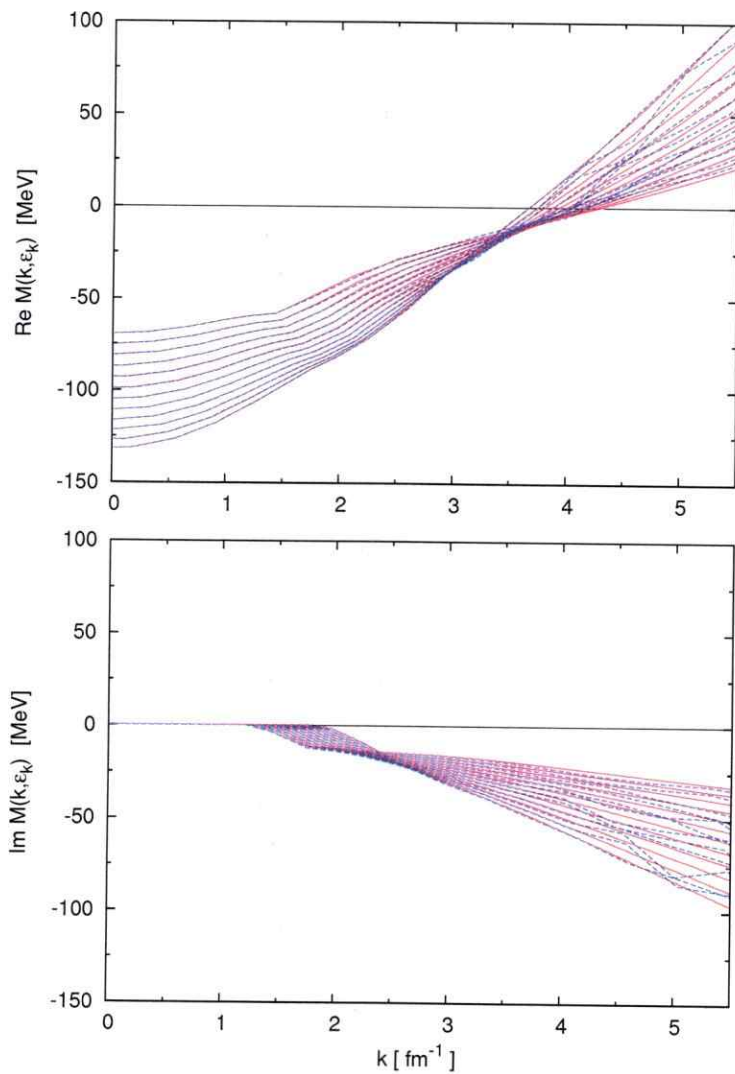


Figura 4.7: Comparación entre las soluciones autoconsistentes para  $U(k)$  entre los niveles  $LS_0$  (rojo, líneas continuas) y  $LS_3$  (negro, líneas discontinuas) en el rango de  $1.2 \leq k_F \leq 1.75 \text{ fm}^{-1}$  usando el potencial de Argonne  $v_{18}$  como potencial de interacción desnudo. Incluimos todas las ondas parciales hasta momento angular total  $J = 7$ .

## 4.2. Propiedades de saturación

Los campos de partícula independiente  $U(k)$  permiten la evaluación de la energía del sistema,

$$B = \sum_{\alpha} \frac{k_{\alpha}^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} U(k_{\alpha}). \quad (4.1)$$

Para la energía de ligazón por nucleón debemos dividir por el número de partículas del sistema, lo que lleva a

$$B/A = \frac{3}{10} \frac{k_F^2}{m} + \frac{3}{k_F^3} \int_0^{k_F} u(k_{\alpha}) k_{\alpha}^2 dk_{\alpha}. \quad (4.2)$$

En el panel (a) de la Fig. 4.8 graficamos  $B/A$  como función de  $k_F$ . En estas figuras, cada punto representa un valor calculado y las curvas continuas representan una parametrización optimizada. El punto de saturación está dado por aquel de mínima energía, el cual ocurre para  $k_F = 1.52 \text{ fm}^{-1}$ . En esta figura se puede ver que los cambios en la energía de saturación como función de  $k_F$  son bastante moderados.

En el panel (b) de la Fig. 4.8 mostramos un detalle de las curvas de saturación para los tres niveles. Podemos apreciar que las diferencias entre las 3 curvas son realmente muy pequeñas, del orden de 0.002 MeV. Para facilitar el análisis de las soluciones, hemos recurrido a una parametrización de la energía de ligazón por nucleón como función del momentum de Fermi  $k_F$

$$B/A = a_2 k_F^2 + a_3 k_F^3 + a_6 k_F^6. \quad (4.3)$$

Los coeficientes  $a$  se muestran en la tabla 4.1 y fueron obtenidos mediante un ajuste de mínimos cuadrados. Los valores de  $\chi^2$  asociados a cada conjunto de coeficientes fueron del orden de  $10^{-2}$  MeV.

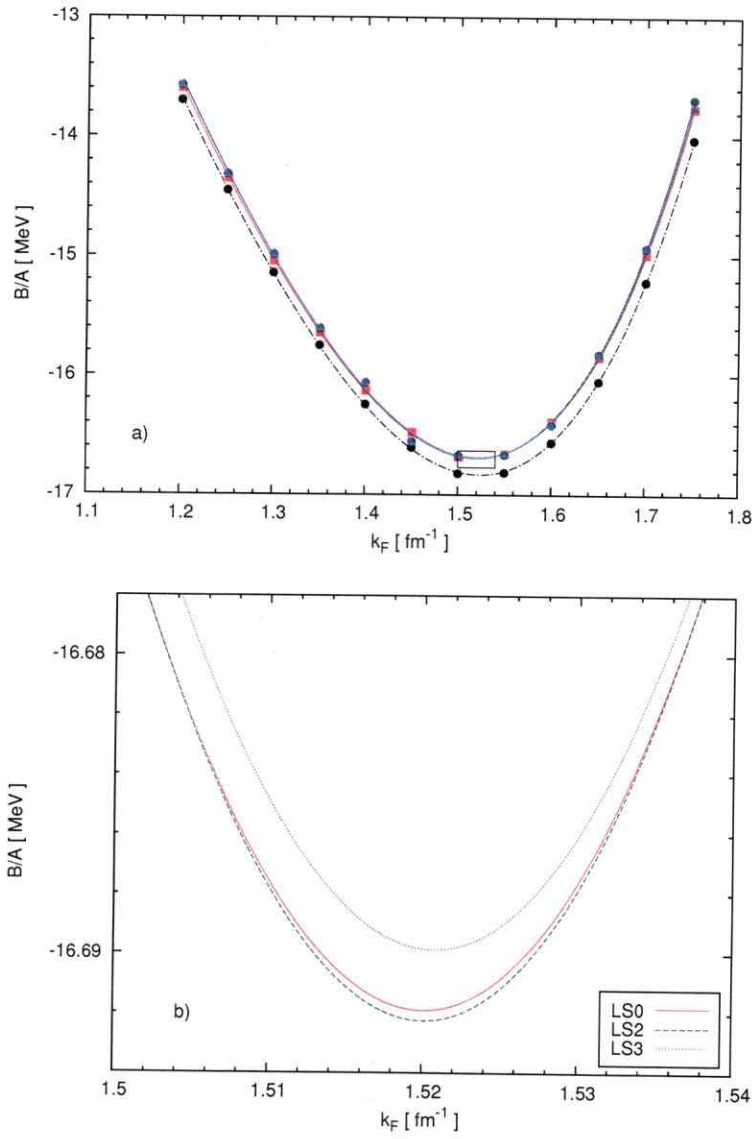


Figura 4.8: Panel (a): Energías de ligazón por nucleón,  $B/A$  para los cuatro niveles considerados en este trabajo. Panel (b): se muestra un detalle alrededor del mínimo (cuadrado negro, no a escala).

Nivel	$a_2$ [MeV fm <sup>2</sup> ]	$a_3$ [MeV fm <sup>3</sup> ]	$a_6$ [MeV fm <sup>6</sup> ]	$\chi^2$
<i>LS</i>	-11.14	0.23	0.66	0.01
<i>LS<sub>0</sub></i>	-10.93	0.08	0.67	0.01
<i>LS<sub>2</sub></i>	-10.38	-0.39	0.71	0.03
<i>LS<sub>3</sub></i>	-10.53	-0.25	0.69	0.04

Tabla 4.1: Coeficientes encontrados para la parametrización de la energía de ligazón por nucleón para los cuatro niveles calculados en este trabajo.

Nivel	$k_F$ [fm <sup>-1</sup> ]	$B/A$ [MeV]	$K_{nm}$ [MeV]
<i>LS</i>	1.524	-16.831	199.4
<i>LS<sub>0</sub></i>	1.520	-16.691	199.4
<i>LS<sub>2</sub></i>	1.520	-16.692	204.5
<i>LS<sub>3</sub></i>	1.521	-16.689	202.9

Tabla 4.2: Propiedades de saturación de materia nuclear simétrica basadas en los cuatro niveles de aproximación explorados en este trabajo. Mostramos el tercer decimal para la energía y densidad de saturación como una forma de ilustrar las diferencias entre cada uno de los niveles.

En mecánica de fluidos, la incompresibilidad  $K$  de una sustancia es una medida de la resistencia de una sustancia a compresión uniforme y está definida como  $K = -V(\partial P/\partial V)$ . En el caso de materia nuclear simétrica, tenemos que la incompresibilidad de materia nuclear está dada por

$$K_{nm} = k_F^2 \frac{\partial^2(B/A)}{\partial k_F^2}, \quad (4.4)$$

con la segunda derivada evaluada en el momentum de saturación  $k_F$ . Resumimos las propiedades de la materia nuclear encontradas en los niveles *LS*, *LS<sub>0</sub>*, *LS<sub>2</sub>* y *LS<sub>3</sub>* en la tabla 4.2, donde mostramos el momentum de Fermi de saturación  $k_F$ , la energía de saturación por nucleón  $B/A$ , y la incompresibilidad  $K_{nm}$ .

Encontramos que la densidad de saturación obtenida es la misma para los cuatro niveles considerados en este trabajo, lo que implica que la corrección  $g_1$  es muy pequeña, además la densidad encontrada es mayor en un 13 % a la aceptada experimentalmente. La energía de saturación, por otro lado, está en el rango del valor aceptado empíricamente y mientras que para  $LS_0$ ,  $LS_2$  y  $LS_3$  el valor de esta energía es prácticamente el mismo, para  $LS$  obtenemos un valor 0.14 MeV mayor. Cabe destacar que aunque no fuimos capaces de reproducir la densidad de saturación experimental, el valor obtenido en este trabajo se acercó ligeramente al valor aceptado, lo que sugiere que incluir una fuerza de tres cuerpos podría mejorar aún más el valor para  $k_F$  y según lo mostrado aquí, un esquema para incluir fuerzas de tres cuerpos mejoraría el resultado de igual manera para cualquiera de los cuatro niveles.

La incompresibilidad por otra parte, resultó ser más sensible a las correcciones a la matriz  $g$ . El mayor valor para  $K_{nm}$  se obtiene para  $LS_2$  y corresponde a 204.5 MeV. El menor valor, en tanto, se obtiene con  $LS$  y  $LS_0$  y corresponde a 199.4 MeV. Entre  $LS_0$  y  $LS_2$  hay alrededor de 5 MeV de diferencia, entre  $LS_0$  y  $LS_3$  hay 3.5 MeV de diferencia y entre  $LS_2$  y  $LS_3$  hay 1.6 MeV de diferencia. En la Fig. 4.9 mostramos los distintos valores para el punto de saturación y la densidad de saturación obtenidos usando distintos enfoques y potenciales de interacción desnudos  $NN$ .

Como podemos ver, todos los valores encontrados para  $B/A$  y  $k_F$  están fuera del valor aceptado (cuadro azul). Los que logran reproducir la densidad de saturación fallan en reproducir la energía de saturación y viceversa. Notemos que el punto de saturación encontrado usando la aproximación  $LS$  esta corrido ligeramente hacia la derecha con respecto a los valores encontrados con las restantes aproximaciones. Se puede ver también que la energía de saturación es, de igual forma, distinta para  $LS$  en comparación con  $LS_i$  ( $i = \{0, 2, 3\}$ ), lo que vuelve a sugerir que la elección de la forma en que se evalúan las energías de partícula

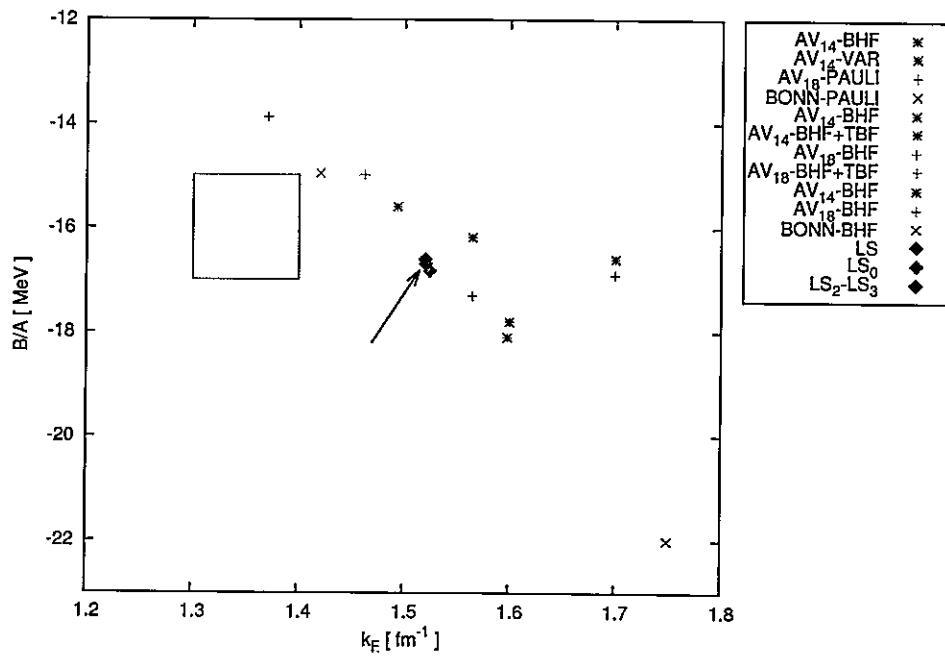


Figura 4.9: Densidades y energías de saturación para materia nuclear obtenidas en varios trabajos:  $AV_{14} - BHF(A)$ ,  $AV_{14} - VAR$  [12],  $AV_{18} - PAULI$ ,  $BONN - PAULI$  [31],  $AV_{14} - BHF(B)$ ,  $AV_{14} - BHF + TBF$ ,  $AV_{18} - BHF(A)$ ,  $AV_{18} - BHF + TB$  [25], "AV<sub>14</sub> - BHF(C)" [32],  $AV_{18} - BHF(B)$ ,  $BONN - BHF$  [6]. La flecha negra muestra los valores obtenidos para este trabajo y el cuadrado muestra donde se ubican los valores aceptados para la densidad y energía de saturación.



independiente y los promedios de los campos influye en los resultados obtenidos para las propiedades de saturación en materia nuclear simétrica.

# Capítulo 5

## Resumen y Conclusiones

Hemos investigado los efectos de correlaciones angulares que resultan al considerar la dependencia angular a nivel “monopolar” del propagador partícula – partícula de la ecuación de BHF en materia nuclear simétrica. Para esto, calculamos los potenciales de partícula independiente para momenta de Fermi entre 1.20 y 1.75 fm<sup>-1</sup> en la elección continua. Este estudio está basado en el potencial desnudo *NN* de Argonne *v*<sub>18</sub> y considera ondas parciales hasta momento angular total  $J = 7$ . El tratamiento de la dependencia angular del propagador fue mediante un esquema perturbativo, donde el parámetro de perturbación fue  $\delta\Lambda = \Lambda - \Lambda_0$ . Fuimos capaces de manejar las partes real e imaginaria de esta perturbación por separado, lo que permitió identificar fuentes de inestabilidad en las soluciones y manejarlas adecuadamente. Se trató explícitamente la ocurrencia de posibles estados ligados en los canales  $^1S_0$  y  $^3S_1 - ^3D_1$  durante la evaluación del operador de masa; esto implicó la regularización de la matriz  $g$  en presencia de polos debidos a dinucleones. Trabajamos a cuatro niveles de aproximación, los que llamamos  $LS$ ,  $LS_0$ ,  $LS_2$  y  $LS_3$ . El primero de estos niveles corresponde a usar la aproximación angular del propagador, en particular, el cociente de los promedios, con la energía de inicio evaluada usando el promedio de la suma de los campos de partícula independiente.  $LS_0$  se calcula usando la misma aproxi-

mación que  $LS$ , pero la energía de inicio se evalúa tomando la suma de las energías de partícula independiente,  $\omega = (\epsilon_1 + \epsilon_2)$ . Los últimos dos niveles corresponden a agregar la corrección angular a primer orden al propagador: sólo la parte real para  $LS_2$  y la corrección completa para  $LS_3$ .

Como resultado, encontramos cuatro familias o clases de soluciones para los campos autoconsistentes. La primera y segunda clase,  $LS$  y  $LS_0$ , corresponden a usar el propagador promediado angularmente. La tercera clase,  $LS_2$ , se obtiene al considerar sólo la parte real de la perturbación al propagador y la cuarta clase,  $LS_3$ , se obtiene al usar la perturbación completa (partes real e imaginaria). Las soluciones autoconsistentes para  $LS$  y  $LS_0$  mostraron diferencias importantes, lo que muestra que la forma en que se manejan la evaluación de los campos de partícula independiente en el denominador de energía incide en los resultados para el operador de masa. Encontramos estructuras para  $LS_2$  y  $LS_3$ , las que se hacen presentes a partir de  $k \sim 3.5 \text{ fm}^{-1}$ , sin embargo, las diferencias entre ellas son pequeñas, lo que nos indica que la parte real es más importante que la imaginaria al momento de evaluar  $g$ . Observamos también que las mayores diferencias para los campos  $U(k)$  se dieron para los 3 mayores valores de  $k_F$  considerados en este trabajo.

Para cada una de estas familias de soluciones encontramos ajustes polinomiales para la energía de ligazón por partícula  $B/A$ , encontrando el mínimo de esta función, pudimos encontrar el punto y la energía de saturación para materia nuclear simétrica. Para las 4 soluciones descritas encontramos que, salvo diferencias del orden de  $10^{-3} \text{ MeV}$ , el punto de saturación se encuentra en  $k_F = 1.52 \text{ fm}^{-1}$ . Las energías de ligazón eso sí, cambian ligeramente. Para la solución  $LS$  obtuvimos que  $B/A = -16.8 \text{ MeV/nucleón}$ , mientras que para  $LS_0$  obtenemos que  $B_0/A = -16.7 \text{ MeV/nucleón}$  y para las soluciones  $LS_2$  y  $LS_3$  tenemos que  $B_2/A = B_3/A = -16.6 \text{ MeV/nucleón}$ . Estos resultados permiten concluir que el uso del promedio angular del propagador es una buena aproximación para calcular los potenciales medios de partícula independiente, si es que ello va acompañado de una

evaluación exacta de la energía de inicio,  $\omega = (\epsilon_1 + \epsilon_2)$ . La incompresibilidad en tanto, fluctuó entre  $K_{nm} = 199.4$  MeV para  $LS$  y  $LS_0$  y  $204.5$  MeV para  $LS_2$  ( $\Delta K_{nm} \sim 5$  MeV). Para  $LS_3$  obtuvimos un valor intermedio de  $202.9$  MeV (diferencia con el valor obtenido para  $LS$  de  $\Delta K_{nm} \sim 3.5$  MeV y  $\Delta K_{nm} \sim 2.5$  MeV con respecto a  $LS_2$ ).

Estudios en los cuales se ha evaluado el entrelazamiento entre distintos canales debido solamente al operador de Pauli, indican una incerteza en la energía de saturación del orden de  $1$  MeV. Cabe resaltar que este trabajo se ha focalizado en el tratamiento del cociente  $Q/e$ . Queda por verse la forma en que se extienden estos efectos si el entrelazamiento es tratado. Tal sería una extensión natural del trabajo realizado. En cualquier caso es razonable anticipar que un tratamiento exacto del propagador redundará en correcciones comparables con las obtenidas en este estudio, por lo cual el tratamiento no relativista de materia nuclear basado en fuerzas de dos cuerpos mantiene los resultados para  $B/A$  en la banda de Coester. Otras posibles extensiones del presente trabajo serían estudiar el rol de estas correlaciones angulares en materia nuclear asimétrica para distintos valores de asimetría isotrópica  $\beta$ . El caso  $\beta = 0$  corresponde a materia nuclear simétrica como la estudiada en este trabajo. El otro caso extremo es para  $\beta = 1$ , correspondiente a materia neutrónica pura. Desde un punto de vista práctico, ambos casos tienen tratamientos numéricos idénticos. Para valores  $0 < \beta < 1$  se requiere una reprogramación no trivial de los códigos existentes. Ello permitiría la obtención de la ecuación de estado para analizar el efecto que tiene en la energía de simetría y en la compresibilidad el tratar de manera exacta el propagador.

También se podría estudiar como cambian las propiedades de saturación de materia nuclear al usar un potencial *chiral* (N3LO) e incluyendo fuerzas de tres cuerpos (TBF). Es sabido que potenciales de tres cuerpos tienen un rol importante en la identificación del punto de saturación en materia nuclear [10]. Sería interesante, por lo tanto, evaluar la sensibilidad del punto de saturación con potenciales *chirales* (tales como el N3LO) cuando las correlaciones angulares son tratadas como se ha descrito en este trabajo.

# Apéndice A

## Integración trapezoidal adaptativa

Consideremos una integral de la forma

$$I = \int_0^1 f(x) dx, \quad (\text{A.1})$$

con  $f(x)$  función finita en el intervalo de integración. Además, esta función puede tener un número finito de picos. Definamos la integral

$$I_0 = \frac{1}{2}[f(0) + f(1)]. \quad (\text{A.2})$$

Consideremos también los siguientes conjuntos de puntos en el intervalo  $[0 : 1]$

$$\begin{aligned} s_1 &= \left\{ \frac{1}{2} \right\} \\ s_2 &= \left\{ \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right\} \\ s_3 &= \left\{ \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8} \right\} \\ s_4 &= \left\{ \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \dots, \frac{15}{16} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Notemos que la unión de los  $N$  primeros conjuntos resulta en una distribución uniforme de puntos donde no se repite ningún elemento. Así, podemos mapear el intervalo de interés mediante uno de los conjuntos  $s_N$ , en el cual la separación entre dos elementos consecutivos corresponde a  $1/2^N$ . Con esta construcción, podemos verificar que una cuadratura trapezoidal puede ser representada con la recurrencia

$$I_n = \frac{1}{2}I_{n-1} + \frac{1}{2^N} \sum_{x_j \in S_n} f(x_j), \quad (\text{A.4})$$

donde  $I_0$  está dado por la ec. (A.2). La recurrencia se interrumpe para algún  $n = M$  cuando se alcanza cierto criterio de convergencia  $|I_n - I_{n-1}| < \epsilon$ . Una ventaja de este método es que los valores anteriores para  $(n - 1)$  no se descartan y son usados para calcular la nueva integral si es que no se alcanza el criterio de convergencia. Además, nuestra implementación de este cuadratura calcula el arreglo  $s_N$  sólo una vez al principio de todas las evaluaciones. Estas dos consideraciones fueron muy importantes en términos de ahorro de tiempo de cálculo.

# Bibliografía

- [1] K. Amos y col. «Nucleon-Nucleus Scattering: A Microscopic Nonrelativistic Approach». En: *Advances in Nuclear Physics*. Ed. por J. Negele y E. Vogt. Vol. 25. *Advances in Nuclear Physics*. Springer US, 2002, págs. 276-536.
- [2] H. F. Arellano y E. Bauge. «7D-folding integral in a density-dependent microscopic optical model potential for nucleon-nucleus scattering». En: *Phys. Rev. C* 84 (3 sep. de 2011), pág. 034606.
- [3] H. F. Arellano, F. A. Brieva y W. G. Love. «Deuteron effects in nucleon-nucleus scattering at intermediate energies». En: *Phys. Rev. C* 50 (5 nov. de 1994), págs. 2480-2489.
- [4] H. F. Arellano y J.-P. Delaroche. «Toward an actual account for the angular dependence of the Brueckner-Bethe-Goldstone propagator in nuclear matter». En: *Phys. Rev. C* 83.4 (abr. de 2011), pág. 044306.
- [5] M. Baldo. «Nuclear Methods and the Nuclear Equation of State». En: vol. 8. *International Review of Nuclear Physics*. Singapore: World Scientific, 1999.
- [6] M. Baldo y A. E. Shaban. «Dependence of the nuclear equation of state on two-body and three-body forces». En: *Physics Letters B* 661.5 (2008), págs. 373 -377.
- [7] V. Baran y col. «Reaction dynamics with exotic nuclei». En: *Physics Reports* 410.5-6 (2005), págs. 335 -466.

- [8] G. Brown, A. Jackson y T. Kuo. «Nucleon-nucleon potential and minimal relativity». En: *Nuclear Physics A* 133.3 (1969), págs. 481 -492.
- [9] K. A. Brueckner y J. L. Gammel. «Properties of Nuclear Matter». En: *Phys. Rev.* 109 (4 feb. de 1958), págs. 1023-1039.
- [10] A. Carbone y col. «Self-consistent Green's functions formalism with three-body interactions». En: *Phys. Rev. C* 88 (5 nov. de 2013), pág. 054326.
- [11] T. Cheon y E. F. Redish. «Exact treatment of the Pauli exclusion operator in the nuclear matter Bethe-Goldstone equation». En: *Phys. Rev. C* 39.2 (feb. de 1989), págs. 331-335.
- [12] B. D. Day y R. B. Wiringa. «Brueckner-Bethe and variational calculations of nuclear matter». En: *Phys. Rev. C* 32 (3 sep. de 1985), págs. 1057-1062.
- [13] A. Delfino y col. «The Coester Line in Relativistic Mean Field Nuclear Matter». En: *Braz. J. of Phys.* 35 (1 ene. de 2005), pág. 190.
- [14] Y. Dewulf y col. «Saturation of Nuclear Matter and Short-Range Correlations». En: *Phys. Rev. Lett.* 90.15 (abr. de 2003), pág. 152501.
- [15] W. Dickhoff y D. V. Neck. *Many-Body Theory Exposed!* Singapore: World Scientific, 2005.
- [16] T. Frick y col. «Nuclear self-energy and realistic interactions». En: *Phys. Rev. C* 65 (3 mar. de 2002), pág. 034321.
- [17] H. von Geramb. Ed. por H. Meyer. New York: American Institute of Physics, 1983.
- [18] M. I. Haftel y F. Tabakin. «Nuclear saturation and the smoothness of nucleon-nucleon potentials». En: *Nuclear Physics A* 158.1 (1970), págs. 1 -42.
- [19] P. Hansen, A. Jensen y B. Jonson. «Nuclear halos». En: *Annual Review of Nuclear and Particle Science* 45.1 (1995), págs. 591-634.



- [20] A. S. Jensen y col. «Structure and reactions of quantum halos». En: *Rev. Mod. Phys.* 76 (1 feb. de 2004), págs. 215-261.
- [21] D. Koltun y J. M. Eisenberg. *Quantum Mechanics of Many Degrees of Freedom*. New York: Wiley-Interscience, 1998.
- [22] A. Li y col. «Protoneutron stars in the Brueckner-Hartree-Fock approach and finite-temperature kaon condensation». En: *Phys. Rev. C* 81 (2 feb. de 2010), pág. 025806.
- [23] B.-A. Li, C. M. Ko y W. Bauer. «Isospin Physics in Heavy-Ion Collisions at Intermediate Energies». En: *International Journal of Modern Physics E* 07.02 (1998), págs. 147-229.
- [24] Z. H. Li y W. Zuo. «Isospin and temperature dependence of the rearrangement term in Brueckner theory». En: *Phys. Rev. C* 85 (3 mar. de 2012), pág. 037001.
- [25] Z. H. Li y col. «Nuclear matter saturation point and symmetry energy with modern nucleon-nucleon potentials». En: *Phys. Rev. C* 74.4 (oct. de 2006), pág. 047304.
- [26] J. Margueron, E. v. Dalen y C. Fuchs. «Low densities in asymmetric nuclear matter». En: *Phys. Rev. C* 76 (3 sep. de 2007), pág. 034309.
- [27] C. Meegan y col. «The Fermi Gamma-ray Burst Monitor». En: *The Astrophysical Journal* 702.1 (2009), pág. 791.
- [28] T. Piran. «The physics of gamma-ray bursts». En: *Rev. Mod. Phys.* 76 (4 ene. de 2005), págs. 1143-1210.
- [29] F. Sammarruca, X. Meng y E. J. Stephenson. «Exact treatment of the Pauli exclusion operator in nuclear matter». En: *Phys. Rev. C* 62.1 (jun. de 2000), pág. 014614.
- [30] R. Sartor. «Solution of the Bethe-Goldstone equation with an exact propagator». En: *Phys. Rev. C* 54.2 (ago. de 1996), págs. 809-814.

- [31] E. Schiller, H. Müther y P. Czerski. «Pauli exclusion operator and binding energy of nuclear matter». En: *Phys. Rev. C* 59.5 (mayo de 1999), págs. 2934-2936.
- [32] H. Q. Song y col. «Bethe-Brueckner-Goldstone Expansion in Nuclear Matter». En: *Phys. Rev. Lett.* 81.8 (ago. de 1998), págs. 1584-1587.
- [33] K. Suzuki y col. «Exact Treatment of the Pauli Exclusion Operator in Nuclear Matter Calculation». En: *Nucl. Phys.* A665 (2000), págs. 92-104.
- [34] I. Vidaña, A. Providencia y A. Rios. «Density dependence of the nuclear symmetry energy: A microscopic perspective». En: *Phys. Rev. C* 80 (4 oct. de 2009), pág. 045806.
- [35] R. B. Wiringa, V. G. J. Stoks y R. Schiavilla. «Accurate nucleon-nucleon potential with charge-independence breaking». En: *Phys. Rev. C* 51.1 (ene. de 1995), págs. 38-51.

