

UCH-FC
DOC-F
V632
e 1

Dinámica controlada de solitones discretos

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Doctor en Ciencias con mención en Física
Facultad de Ciencias

por

Rodrigo Andrés Vicencio Poblete

Diciembre, 2004

Director de Tesis: Dr. Mario I. Molina

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN
TESIS DE DOCTORADO

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por el candidato

Rodrigo Andrés Vicencio Poblete

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Física, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 30 de Noviembre de 2004.

Director de Tesis

Dr. Mario I. Molina



Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Marcel Clerc

Dr. David Gottlieb (Presidente)

Dr. Miguel Orszag



AGRADECIMIENTOS

Agradezco enormemente a mi amada esposa, Lucia, por su gran apoyo siempre, y disponibilidad para ayudarme a corregir la redacción de esta tesis. Deseo además, agradecer a todos quienes tuvieron algo que ver con que esta tesis llegara a buen término. En particular al Dr. Mario Molina, por su constante entusiasmo y prestancia para resolver los problemas que surgieron a lo largo de este trabajo. Al Dr. Yuri Kivshar, por su excelente colaboración con nuestro grupo de investigación. Al Dr. Roberto Morandotti, por su interés en nuestros estudios, y en posibles proyectos tecnológicos futuros.

En especial me gustaría agradecer a todos los profesores que tuve desde Licenciatura hasta Doctorado, los cuales me enseñaron algo más que sólo teoría. Gracias.

Mi permanencia en los cuatro años de doctorado desde Marzo del 2001, incluyendo una estadía de un semestre en la Unicamp (Sao Paulo, Brasil), y la participación en el XIV congreso de la Sociedad Chilena de Física, fue posible gracias a una Beca de Doctorado CONICYT.

Agradezco enormemente también a FONDECYT, por los proyectos No. 1020139 y No. 7020139, que hicieron posible realizar este trabajo junto al Dr. Mario Molina.

Finalmente agradezco a la *Optical Society of America* (OSA) por la ayuda económica (*travel grant*) otorgada para asistir al congreso *Nonlinear Guided Waves and Their Applications* en Toronto, Canadá, en Marzo del 2004.

RESUMEN

En la presente tesis se estudia como controlar eficientemente la transferencia de energía, en sistemas discretos no lineales. Para esto, investigamos las propiedades dinámicas de arreglos de guías de ondas ópticas no lineales de tipo *cúbicos*, *cuadráticos*, y *cúbicos birrefringentes*. Además, y como una extensión a otras áreas de la Física, estudiamos las propiedades dinámicas en arreglos de condensados de Bose-Einstein inmersos en un potencial magneto-óptico periódico.

En todos los arreglos estudiados, utilizamos el concepto de *solitones discretos*, como entidad portadora de la energía; la cual en el caso óptico, corresponde a un haz de luz; y en el caso atómico, corresponde a un *cluster* de átomos condensados en el primer nivel energético.

ABSTRACT

In this Dissertation, we study how to efficiently control the energy transfer process in nonlinear discrete systems. We investigate the dynamical properties of *cubic*, *quadratic*, and *birefringent cubic* nonlinear optical waveguide arrays. As an application to other fields, we study the dynamical properties of Bose-Einstein condensate arrays trapped in a deep periodical magneto-optical lattice.

In all cases we use the concept of *discrete solitons*, as an energy carrier; in the optical case, it corresponds to a light beam; in the atomic case, it corresponds to the ground state of an atomic cluster.

Índice

1. Introducción	1
2. Teoría de modos acoplados para arreglos de guías de ondas ópticas no lineales	7
2.1. Derivación de ecuaciones	7
2.1.1. Derivación de la ecuación de ondas con fuente	8
2.1.2. Derivación general	11
2.2. Derivación de ecuaciones dinámicas	13
2.2.1. Ecuación de Schrödinger no lineal discreta (DNLS) para arreglos cúbicos	15
2.2.2. Ecuación de Schrödinger no lineal discreta modificada (DNLSE-m) para arreglos cuadráticos	21
2.2.3. Ecuación de Schrödinger no lineal discreta vectorial (DNLSE-v) para arreglos cúbicos birrefringentes	29
3. Transferencia controlada de energía para arreglos cúbicos	38
3.1. Introducción	38
3.2. Teoría y Resultados	43
3.2.1. Arreglos Homogéneos	43

	v
3.2.2. Barrido numérico para arreglos homogéneos	47
3.2.3. Modos fuertemente localizados	49
3.2.4. Potencial de Peierls-Nabarro para arreglos cúbicos	52
3.2.5. Ingeniería de Peierls-Nabarro	56
3.2.6. Dinámica controlada en arreglos cúbicos mediante la modifi- cación local del parámetro de acoplamiento	58
4. Transferencia controlada de energía para arreglos cuadráticos	63
4.1. Introducción	63
4.2. Teoría y Resultados	65
4.2.1. Arreglos Homogéneos	65
4.2.2. Modos fuertemente localizados	66
4.2.3. Arreglos Homogéneos	68
4.2.4. Potencial de Peierls-Nabarro para arreglos cuadráticos	71
4.2.5. Dinámica controlada en arreglos cuadráticos mediante la mo- dificación local del parámetro de acoplamiento	75
5. Transferencia de energía para arreglos cúbicos birrefringentes	79
5.1. Introducción	79
5.2. Teoría y Resultados	82
5.2.1. Arreglos Homogéneos	82
5.2.2. Inestabilidad Modulacional	84
5.2.3. Modos fuertemente localizados	87
5.2.4. Observación numérica	90
5.2.5. Transferencia de energía	91
5.2.6. Inestabilidad inducida por la birrefringencia	104

5.2.7. Potencial de Peierls-Nabarro para arreglos cúbicos birrefringentes	106
5.2.8. Switching multi-puertos vectorial	108
6. Transferencia de energía para arreglos de condensados de Bose-Einstein	113
6.1. Introducción	113
6.2. Teoría y resultados	116
6.2.1. Ecuación de Gross-Pitaevskii	116
6.2.2. Ecuación de Schrödinger no lineal discreta para un arreglo de condensados de Bose-Einstein	119
6.2.3. Potencial de Peierls-Nabarro para arreglos de condensados de Bose-Einstein	121
6.2.4. Resultados numéricos	124
6.2.5. Dinámica de Peierls-Nabarro	127
7. Conclusiones	132

Índice de figuras

2.1. Esquema simple de dos guías cercanas, débilmente acopladas por las evanescentes de los campos eléctricos.	8
2.2. Esquema DNLSE donde una onda de frecuencia ω y polarización \hat{x} incide en el arreglo.	15
2.3. Esquema DNLSE-m donde dos ondas de distinta frecuencia ω (rojo) y 2ω (azul), pero de igual polarización \hat{x} , inciden en el arreglo.	22
2.4. Esquema DNLSE-v donde dos ondas de igual frecuencia ω , y diferentes polarizaciones \hat{x} (rojo) e \hat{y} (verde), inciden en el arreglo.	29
3.1. Esquema de un arreglo de guías de ondas cúbicas homogéneas, débilmente acopladas.	44
3.2. Simulaciones numéricas de la ec.(3.1) con el <i>ansatz</i> (3.4) como condición inicial, para un arreglo de 151 guías. a) $A = 1.2, k = -1.4$. b) $A = 1.5, k = -1.4$. c) $A = 1.2, k = -0.5$	45
3.3. Simulaciones numéricas de la ec.(3.1), con el <i>ansatz</i> (3.4) como condición inicial, para un arreglo de 151 guías. a) $A = 1.15, k = -0.5$. b) $A = 1.5, k = -0.5$. c) $A = 1.315, k = -0.5$	46
3.4.	48

3.5. Barrido del <i>kick</i> k para $A = 1.55$, para un arreglo homogéneo de 111 guías de ondas y $z_{max} = 45$. $V = \gamma = 1$	49
3.6. Ejemplo de switching no controlado, para el barrido de la Fig. 3.4. . .	50
3.7. Dinámica transversal de modos impares y pares.	50
3.8. Hamiltoniano versus Potencia para ambos modos en unidades adimensionales. La región pintada representa la barrera de Peierls-Nabarro. .	54
3.9. Simulación numérica de la ec. (3.1) con la condición inicial (3.4) para modos impares (columna izquierda) y modos pares (columna derecha). a) $A = 1.4$, $k = -0.7$. b) $A = 1.6$, $k = 0$	56
3.10. Switching digital controlado hasta 11 sitios de solitones discretos cúbicos para un arreglo con una ingeniería del parámetro V presentada en la fig. 3.11, mediante un barrido de la amplitud del haz para un ángulo fijo dado por $k = -0.9$ y una no linealidad $\gamma = 1$	59
3.11. Ingeniería del parámetro de acoplamiento V para el barrido de la amplitud presentado en la figura 3.10.	60
3.12. Switching digital controlado hasta 9 sitios de solitones discretos cúbicos para un arreglo con una ingeniería del parámetro V presentada en la fig. 3.13, mediante un barrido del ángulo del haz para una amplitud fija dada por $A = 1.55$ y una no linealidad $\gamma = 1$	60
3.13. Ingeniería del parámetro de acoplamiento V para el barrido del ángulo presentado en la figura 3.12.	61
3.14. Ejemplo de switching controlado dada la ingeniería del parámetro de acoplamiento presentado en la figura 3.11.	62

4.1. Esquema de un arreglo de guías de ondas cuadráticas homogéneas debilmente acopladas.	65
4.2. Barrido de la amplitud del armónico fundamental u_0 , para un ángulo inicial dado por $k = -1$, en un arreglo homogéneo de 41 guías de ondas y una distancia máxima de propagación $z_{max} = 45$. $C_u = C_v = 0.3$, $\beta = 0$, y $\gamma = 1$	69
4.3. Ejemplo de switching no controlado, para el barrido de la fig. 4.2. . .	70
4.4. Hamiltoniano versus Potencia para ambos modos en unidades adimensionales. La región pintada representa la barrera de Peierls-Nabarro. .	73
4.5. Simulación numérica de las ecuaciones (4.1a) y (4.1b) con la condición inicial (4.4) para modos impares (columna izquierda), y (4.6) como condición inicial para modos pares (columna derecha). a) $u_0 = 0.87$, $k = -1$. b) $u_0 = 1$, $k = 0$	74
4.6. Switching digital controlado de solitones discretos para un arreglo cuadrático con una ingeniería de los parámetros C_u y C_v (fig. 4.6), mediante un barrido de la amplitud del armónico fundamental para un ángulo fijo dado por $k = -1$. $\beta = 0$, $\gamma = 1$. El barrido de la amplitud del segundo armónico genera idénticos resultados.	76
4.7. Ingeniería del parámetro de acoplamiento $C_u = C_v$ para el barrido de la amplitud del armónico fundamental presentado en la figura 4.4. . .	77
4.8. Ejemplo de switching controlado dada la ingeniería del parámetro de acoplamiento presentado en la figura 4.6.	78

5.1. Esquema de un arreglo de guías de ondas cúbicas birrefringentes homogéneas, débilmente acopladas. Las flechas bajo las curvas indican la dirección de polarización de cada modo. 82

5.2. Ganancia de la inestabilidad modulacional como función de las amplitudes de ambos modos, u_0 y v_0 , para (a) $C = 0.1$, y (b) $C = 0.5$. $Q = \pi$. Las regiones oscuras no presentan inestabilidad. 86

5.3. Ejemplos de la evolución de MFL's impares para diferentes casos: (a) $U = V = 0.3$ y $C = 0.1$, (b) $U = V = 0.4$ y $C = 0.1$, (c) $U = V = 0.6$ y $C = 0.5$, (d) $U = V = 0.8$ y $C = 0.5$ 88

5.4. Ejemplos de la evolución de MFL's pares para diferentes casos: (a) $U = V = 0.2$ y $C = 0.1$, (b) $U = V = 0.5$ y $C = 0.1$, (c) $U = V = 0.5$, $C = 0.1$, y $k = 0.0001$, (d) $U = V = 0.45$ y $C = 0.5$, (e) $U = V = 0.7$ y $C = 0.5$, (f) $U = V = 0.7$, $C = 0.5$, y $k = 0.0001$ 88

5.5. Comparación del *output* promedio de la potencia del modo TE como función de las amplitudes iniciales U y V , para $C = 0.1$, y $z_{max} = 100$. Izq.: predicciones analíticas. Der.: resultados numéricos. (a,b) $\Delta\phi = 0$, (c,d) $\Delta\phi = \pi/2$, (e,f) $\Delta\phi = \pi/4$ 95

5.6. Resultados analíticos para las potencias de salida promediadas de los modos TE y TM para el caso $U = V$, y parámetro de acoplamiento $C = 0.1$. Figs. (a), (b), y (c) corresponden a las líneas negras en las figs. 5.5a, 5.5c, y 5.5e, respectivamente. 97

5.7. Resultados numéricos (líneas oscuras), analíticos (líneas grises claras), y analíticos promediados (líneas grises) de la evolución de la potencia de los modos TE (líneas solidas) y TM (líneas cortadas), para $C = 0.1$. La dinámica es mostrada en dos rangos diferentes de z . Izq.: $z = 0 - 5$. Der.: $z = 95 - 100$. Los casos (a), (b), y (c) representan los puntos P1, P2, y P3 de las figs. 5.5a (5.6a), 5.5c (5.6b), y 5.5e (5.6c), respectivamente. 98

5.8. Comparación del *output* promedio de la potencia del modo TE como función de las amplitudes iniciales U y V , para $C = 0.5$, y $z_{max} = 100$. Izq.: predicciones analíticas. Der.: resultados numéricos. (a,b) $\Delta\phi = 0$, (c,d) $\Delta\phi = \pi/2$, (e,f) $\Delta\phi = \pi/4$ 100

5.9. Resultados analíticos para las potencias de salida promediadas de los modos TE y TM para el caso $U = V$, y parámetro de acoplamiento $C = 0.5$. Figs. (a), (b), y (b) corresponden a las líneas negras en las figs. 5.8a, 5.8c, y 5.8e, respectivamente. 102

5.10. Resultados numéricos (líneas oscuras), analíticos (líneas grises claras), y analíticos promediados (líneas grises) de la evolución de la potencia de los modos TE (líneas solidas) y TM (líneas cortadas), para $C = 0.5$. La dinámica es mostrada en dos rangos diferentes de z . Izq.: $z = 0 - 5$. Der.: $z = 95 - 100$. Los casos (a), (b), y (c) representan los puntos P4, P5, y P6 de las figs. 5.8a (5.9a), 5.8c (5.9b), y 5.8e (5.9c), respectivamente. 103

5.11. Diagramas de potencia para el caso $U = V$: (a) polarización lineal, (b) polarización elíptica. 105

- 5.12. Ejemplos de switching completamente óptico multi-puertos basados en solitones discretos vectoriales, para $C = 0.92$ y $z_{max} = 50$. Polarización lineal: (a) $k_u = 0$, $k_v = -0.5$, $u_0 = 0.1$ y $v_0 = 1.248$, y (b) $k_u = k_v = 0$, $u_0 = 0.1$ y $v_0 = 1.5$. Notar las diferentes escalas de potencia para los modos TE y TM. 110
- 5.13. Ejemplos de switching completamente óptico multi-puertos basados en solitones discretos vectoriales, para $C = 0.92$ y $z_{max} = 50$. Polarización elíptica: (a) $k_u = -0.8$, $k_v = 0$, $u_0 = 1.38$ y $v_0 = 0.1$, y (b) $k_u = k_v = 0$, $u_0 = 1.5$ y $v_0 = 0.1$. Notar las diferentes escalas de potencia para los modos TE y TM. 111
- 6.1. Posición central final del condensado como función de la longitud de *scattering*. El tiempo máximo fue de $t_{max} = 100$, y el número de trampas magnéticas fue de 120. 125
- 6.2. Posición central final del condensado como función de la longitud de *scattering* creciente en el tiempo. El tiempo máximo fue de $t_{max} = 100$, y el número de trampas magnéticas fue de 120. 126
- 6.3. Modo inicial impar. $u_0 = 0.9$, $\alpha = 0.7$, $k = 0.2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0.34$. Izq.: $\omega = 0.05$. Der.: $\omega = 0.03$ 129
- 6.4. Modo inicial impar. $u_0 = 1$, $\alpha = 0.7$, $k = 0.2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0.34$. Izq.: $\omega = 0.05$. Der.: $\omega = 0.08$ 129
- 6.5. Modo inicial par. $v_0 = 1$, $\alpha = 0.7$, $k = 0.2$, $a_0 = 1$. Izq.: $a_1 = -0.35$, $\omega = 0.06$. Der.: $a_1 = -0.33$, $\omega = 0.025$ 130
- 6.6. Modo inicial par. $v_0 = 1$, $\alpha = 0.7$, $a_0 = 1$, $a_1 = -0.33$, $\omega = 0.04$. Izq.: $k = 0.2$. Der.: $k = 0.05$ 130

Capítulo 1

Introducción

El estudio de la naturaleza por parte de la Física depende, en gran medida, de la geometría del problema, así como también de la escala en que observemos los fenómenos. Cuando hacemos una descripción macroscópica de la mayor parte de los sistemas físicos hablamos de sistemas continuos desde un punto de vista de las ecuaciones que rigen el problema. Sin embargo, cuando observamos fenómenos a una escala menor, en donde los constituyentes del sistema son fundamentales, la descripción que hacemos es discreta. En ésta, consideramos las interacciones entre los elementos y, en ciertos casos, también las propiedades no lineales específicas de los sistemas que dan lugar a una dinámica más rica y más diversa. En sistemas discretos no lineales es posible crear estructuras en forma de modos auto-localizados. Esto resulta de un balance entre el acoplamiento lineal entre los sitios de la red, y la no linealidad de ésta. Tales modos, espacialmente localizados de redes discretas, que existen sin la presencia de defectos o impurezas, son conocidos como *solitones discretos* (SD) o como *modos intrínsecamente localizados* (MIL) [1]. Los modos discretos no lineales se caracterizan por ser soluciones estables del Hamiltoniano del sistema y por propagarse sin distorsión a través del arreglo. Pareciera ser evidente que la discretitud en la materia es parte de la naturaleza física, por lo que un tratamiento en el continuo

de fenómenos, por ejemplo de transporte de electrones a nivel de átomos, es una mala práctica cuando las excitaciones cubren unos cuantos sitios de red. En varias publicaciones se hace énfasis en que cuando las excitaciones son estrechas su dinámica no puede ser descrita por aproximaciones continuas, y cuando las excitaciones son lo suficientemente anchas, la aproximación sí tiene alguna cabida [2, 3]. Ecuaciones tipo Schrödinger no lineal describen a estos sistemas y parecen ser ecuaciones de carácter fundamental ya que aparecen en numerosos sistemas físicos de diferente origen [1, 4–12], los cuales han sido ampliamente estudiados tanto en su versión continua (NLSE) como en su versión discreta (DNLSE) bajo diversos contextos y estructuras particulares.

Como punto de partida, es importante citar una publicación seminal en lo que se refiere al estudio numérico de problemas de interacción discreta no lineal. En 1955 Fermi, Pasta y Ulam [13] realizaron por primera vez un cálculo numérico de este tipo para un arreglo de 64 átomos. Ellos (en verdad) estudiaron el comportamiento en una cadena de osciladores con acoplamientos no lineales de segundo y tercer orden sin entrar en detalles respecto a la naturaleza de estos términos. Más tarde, se estudiaron diversos sistemas físicos en los cuales es posible observar estas estructuras localizadas. Como ejemplo podemos mencionar a sólidos fuertemente anarmónicos tales como cristales cuánticos o sólidos convencionales [14, 15]; arreglos de cadenas moleculares [16, 17]; cadenas de juntas superconductoras de Josephson [18–20]; materiales ferromagnéticos [21]; cristales fotónicos [22–25]; redes ópticas fotorefractivas [26–28]; y condensados de Bose-Einstein en trampas magneto-ópticas [29, 30]. Gran parte de la investigación sobre ecuaciones tipo DNLS ha sido enfocada en el estudio de las propiedades de estos arreglos y de las condiciones necesarias para la formación de modos localizados [14, 15, 31–39]. Pareciera entonces, que los resultados

que se obtengan del estudio de este tipo de ecuaciones, al menos en el caso óptico no lineal, podrían ser ampliamente expandidos a muchas áreas de la Física en donde la descripción bajo estas ecuaciones tenga sentido.

En este punto es importante aclarar qué se entiende por excitaciones o solitones discretos en los diversos sistemas físicos. En Biofísica podrían relacionarse con la energía química que viaja a través de una cadena polipéptida; en Física del Estado Sólido están relacionados con las funciones de onda de los electrones moviéndose entre redes uni-dimensionales atómicas, por ejemplo; en condensados de Bose-Einstein dan cuenta de la función de onda de un *cluster* coherente de átomos; y en Óptica, son haces de luz que son inyectados en los arreglos ópticos cubriendo unas pocas guías. La razón de llamarlos "discretos", resulta evidente al pensar que sólo abarcan unos cuantos sitios o elementos del arreglo. Respecto al concepto de "Solitón", debemos recalcar que éste es ambiguo en su uso. Una onda solitaria o solitón, por definición matemática, es un objeto que resulta como solución de un sistema integrable, lo que implica que estas soluciones serán estables frente a la colisión con otras soluciones (choque entre dos solitones). Sin embargo, la mayoría de los sistemas no lineales relevantes en óptica no lineal y en física en general, no son integrables y las ondas solitarias no son, rigurosamente hablando, soluciones del sistema. A pesar de esto, solitones discretos "viven" un tiempo suficientemente largo como para ser de interés físico y por lo tanto relevantes como objeto de estudio. Por conveniencia entonces, y debido a que tenemos en mente excitaciones que se propagan indefinida y establemente, hacemos uso de este concepto [40].

La explicación mediante fenómenos ópticos no lineales de los sistemas discretos tiene gran relevancia debido a, como dicen algunos autores [4, 27, 41, 42]: "El lecho óptico es el ambiente experimental más adecuado que existe en la actualidad para

el análisis de las propiedades de sistemas discretos lineales y no lineales, debido a su factibilidad técnica inmediata y a los pocos y controlables parámetros experimentales". Además, una de las aplicaciones más importantes de este tipo de estudio se encuentra en la utilización del concepto de solitones discretos en sistemas de comunicación óptica, para controlar no linealmente el "switching"¹ multi-puertos de forma completamente óptica en arreglos de guías de ondas acopladas. Es por esto que el campo de la óptica no lineal ha sido explorado extensamente durante los últimos quince años en un gran número de publicaciones teóricas y, más importante aún, solitones discretos ópticos han sido generados experimentalmente en distintos tipos de estructuras fabricadas de guías de ondas ópticas no lineales periódicas [26,27,41-43].

Para dar cuenta de la importancia de este tema desde el punto de vista aplicado en óptica, podríamos partir diciendo que: *así como la electrónica mejoró dramáticamente la calidad de vida en el siglo 20, la fotónica promete hacer lo mismo en el siglo 21*. La propuesta es clara y exigente. Implica cambiar el actual sistema tecnológico basado casi completamente en componentes electrónicos, a componentes de tipo óptico. Sin duda el avance producido en las últimas dos décadas ha hecho que hoy en día el concepto de Opto-Electrónica sea ampliamente utilizado. En esta área se busca una unión de la electrónica con la óptica con el fin de acelerar y mejorar distintos procesos, esencialmente de información. Sin embargo, las cotas en cuanto a la velocidad de reacción en el campo de la electrónica están llegando a un límite lo cual resulta insuficiente para las exigencias de hoy y el futuro [44].

En la actualidad es ampliamente utilizado el transporte de información mediante fibras ópticas. Hace un poco más de diez años, la pérdida debida a la atenuación natural de las fibras era compensada por amplificación electrónica, la que consistía en

¹Por "switching" nos referiremos a Transferencia de Energía entre las guías ó sitios del arreglo.

una traducción de la información óptica a una señal eléctrica, amplificación electrónica, y una vuelta atrás convirtiendo la señal eléctrica en señal óptica, y reenviándola en una nueva fibra. Todo esto generaba gran pérdida de tiempo y energía debido a la gran cantidad de pasos del proceso. Actualmente, se utilizan los amplificadores de fibras dopadas con Erblio (EDFA's) los que no requieren intervención electrónica. En cambio, dentro de la misma fibra se produce un mecanismo de amplificación tipo Láser el cual amplifica la señal que llega y la reenvía a velocidades ópticas en nuevas fibras. Este proceso es claramente más rápido y las pérdidas producidas en las uniones son mínimas. Con este ejemplo lo que quiero poner de manifiesto es lo importante de este estudio. La óptica hoy por hoy es un área muy explorada debido a la necesidad tecnológica de mejores y más veloces sistemas de imagen, almacenaje y transporte de información, etc. El objetivo final de los esfuerzos teóricos y experimentales de la comunidad óptica y física, debiera ser la obtención de los elementos básicos para la creación de un computador completamente-óptico, y de sistemas de multi-redes por fibra óptica controladas solamente por dispositivos de este tipo.

Respecto a los materiales que se emplean en esta área de la Física, en la última década se ha progresado mucho en la respuesta no lineal de los materiales, la cual es generalmente muy débil. En materiales con susceptibilidad de tercer orden parece haberse logrado un material semiconductor "estrella" como el AlGaAs [45-47]. Este material ofrece una respuesta de tercer orden 10 veces mayor que la de polímeros, y 100 veces mayor que la del Silicio. En los materiales de segundo orden, el tema se ha retrasado un poco más debido a la dificultad extra que implica el problema de "phase-matching"². Sin embargo esto, recientemente ha empezado a ser

²Debido a la dispersión cromática es muy difícil lograr que $n(\omega) \sim n(2\omega)$. Esta condición es necesaria para que los pulsos de frecuencia ω y 2ω generados en el material viajen juntos en fase con sus respectivos haces incidentes, y la conversión sea óptima en un material de segundo orden.

resuelto usando un material como el LiNbO_3 con el que se construyen arreglos de guías de ondas cuadráticas con una técnica denominada “periodically poled Lithium Niobate” (PPLN) [43, 46]. Con estos arreglos se consigue lo que se llama “quasi-phase-matching” (QPM), obteniéndose un mínimo de corrimiento de fase entre los pulsos generados y los pulsos incidentes, y una mejor eficiencia de conversión.

En resumen, el estudio de sistemas discretos no lineales es de gran importancia, ya que explora la física de estos sistemas, permite hacer extensiones a otras áreas muy diversas, y tiene una aplicabilidad tecnológica evidente, ya que siempre va a ser importante en Física el estudio de la transferencia de energía en sus diversas formas, y el cómo poder controlar esa transferencia para generar respuestas predecibles de los sistemas de interés.

Capítulo 2

Teoría de modos acoplados para arreglos de guías de ondas ópticas no lineales

2.1. Derivación de ecuaciones

En este capítulo derivamos las ecuaciones básicas que describen la dinámica de una onda de rango óptico que se propaga en un arreglo de guías ópticas no lineales. Para ésto, partiremos desde las ecuaciones de Maxwell en el sistema MKS [48] en un montaje que consta, inicialmente, de sólo dos guías débilmente acopladas (fig. 2.1), y derivaremos la ecuación de ondas con fuente externa. A continuación, expandiremos los campos eléctricos en una suma de sus modos y tomaremos la aproximación de campos lentamente variables en el tiempo. Escribiremos, en una forma conveniente para cada problema, el término de polarización no lineal, reduciremos coeficientes, y obtendremos formas simplificadas de las ecuaciones dinámicas, finalmente generalizadas a N guías idénticas usando la aproximación de interacción a vecinos cercanos (*tight-binding*). Analizaremos, en este proceso, tres casos distintos incluyendo la ecuación de Schrödinger no lineal discreta (DNLS) para medios cúbicos, la ecuación de Schrödinger no lineal discreta modificada (DNLS-m) para medios cuadráticos y, por

último, la ecuación de Schrödinger no lineal discreta vectorial (DNLS-v) para medios cúbicos birrefringentes.

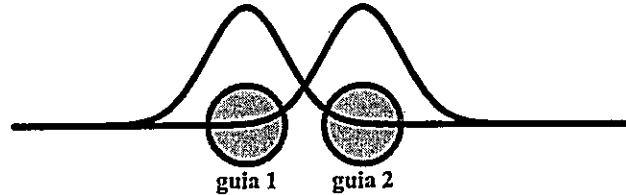


Figura 2.1: Esquema simple de dos guías cercanas, débilmente acopladas por las evanescentes de los campos eléctricos.

2.1.1. Derivación de la ecuación de ondas con fuente

Ecuaciones de Maxwell [48]:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.1a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.1b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.1c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.1d)$$

Relaciones constitutivas:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (2.2a)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (2.2b)$$

En óptica clásica, la polarización de un medio dieléctrico en presencia de un campo eléctrico, es linealmente proporcional a ese campo y el factor de proporcionalidad es conocido como susceptibilidad eléctrica. En óptica no lineal, la respuesta del medio puede ser descrita como una serie de potencias respecto al campo interactuante¹

¹El campo eléctrico incidente (láser) es mucho menor que los campos eléctricos atómicos, por lo que la expansión se justifica.

[49, 50]:

$$\vec{P} = \vec{P}^L + \vec{P}^{NL} = \epsilon_0 \left(\chi^{(1)} \vec{E} + \chi^{(2)} \vec{E}^2 + \chi^{(3)} \vec{E}^3 + \dots \right),$$

con $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \chi^{(3)}$, las susceptibilidades eléctricas lineal, no lineal de 2^{do} orden, y no lineal de 3^{er} orden, respectivamente. A bajas intensidades del campo eléctrico, el electrón sólo permanece en la parte armónica de su potencial de ligazón, ejecutando oscilaciones armónicas simples. Cuando la intensidad del campo aplicado es grande, el electrón comienza a sentir la interacción no lineal del potencial y oscila de forma anarmónica.

En este trabajo consideramos materiales no conductores eléctricamente y no magnéticos debido a que estamos interesados en cómo la luz interactúa no linealmente consigo misma. En términos matemáticos, esto implica que:

$$\rho, \vec{J}, \vec{M} = 0, \mu = \mu_0$$

Experimentalmente se trabaja con longitudes de onda de baja absorción lineal y no lineal que dependen del material con que se fabrican las guías de ondas². La baja absorción permite considerar la respuesta lineal y no lineal del material como instantánea, lo cual simplifica enormemente la descripción teórica de los procesos no lineales que allí ocurren. En este punto buscamos encontrar una ecuación de ondas general a partir de las ecuaciones de Maxwell. Para esto derivamos parcialmente con respecto al tiempo, la ec. (2.1c), reemplazamos las relaciones constitutivas (2.2a) y (2.2b), y usamos las suposiciones anteriores:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \right) \rightarrow \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \rightarrow \\ -\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P} \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P} \end{aligned}$$

²Tipicamente en el infrarojo debido al interés en comunicaciones ópticas.

Usamos la siguiente relación vectorial:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E},$$

y consideramos la divergencia del campo eléctrico nula³

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \approx 0$$

Con esto podemos escribir la ecuación de onda en una forma más familiar, permitiéndonos tener una fuente externa de energía en el sistema (polarización lineal y no lineal del medio debido a un campo externo). Usamos la relación $c^2 = 1/(\mu_0 \epsilon_0)$, diferenciando en los campos de cada guía, siguiendo el diagrama de la fig. 2.1:

$$\nabla^2 \vec{E}_\alpha^\beta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}_\alpha^\beta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\vec{P}_\alpha^\beta}{\epsilon_0 c^2} \right) ; \alpha, \beta = 1, 2 \quad (2.3)$$

\vec{E}_α^β es el campo de la guía α en la guía β (lo mismo se utiliza para la polarización). Esta notación nos permitirá, más adelante, considerar el acoplamiento lineal de los campos eléctricos en el arreglo.

Ecuación de ondas sin fuente

Con el objetivo de una simplificación posterior, observemos qué sucede con la ec. (2.3) sin fuente ($\vec{P}_\alpha^\beta = 0$):

$$\nabla^2 \vec{E}_\alpha^\beta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}_\alpha^\beta = 0 ; \alpha, \beta = 1, 2$$

Consideremos que la propagación del campo eléctrico es en la dirección \hat{z} y que éste puede ser expresado como una suma de sus modos de la siguiente manera:

$$\vec{E}_\alpha^\beta(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_j [\vec{f}_{\alpha j}^\beta(x, y) e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c.],$$

³Se puede demostrar que $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{E} \cdot \nabla \ln \epsilon \approx 0$, ya que la función $\epsilon(\vec{r})$ puede ser construida de tal manera que varíe lentamente en el arreglo.

con k_j y ω_j el número de onda y frecuencia del modo j , respectivamente. Para esta forma del campo eléctrico, la acción del Laplaciano y de la segunda derivada temporal, pueden ser expresadas como:

$$\nabla^2 \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_j^2 \equiv \nabla_{\perp}^2 - k_j^2; \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega_j^2$$

Con esto obtenemos una expresión que nos será de gran utilidad más adelante:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_j \left[\left(\nabla_{\perp}^2 - k_j^2 + \frac{\omega_j^2}{c^2} \right) \vec{f}_{\alpha j}^{\beta}(x, y) e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c. \right] &= 0 \\ \Rightarrow \left(\nabla_{\perp}^2 - k_j^2 + \frac{\omega_j^2}{c^2} \right) \vec{f}_{\alpha j}^{\beta}(x, y) e^{i(k_j z - \omega_j t)} &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.1.2. Derivación general

En el caso en que la fuente de polarización lineal y no lineal están presentes, y asumiendo una dirección de propagación del campo eléctrico en \hat{z} , podemos esperar una variación lenta de la amplitud del campo eléctrico en esa misma dirección⁴. Entonces, podemos expresar al campo como una superposición lineal de sus modos y, además, dada la dirección de propagación propuesta, podemos considerar separación de variables permitiendo así que el campo varíe en la dirección transversal y longitudinal, de forma independiente. En resumen, podemos escribir el campo eléctrico como:

$$\vec{E}_{\alpha}^{\beta}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_j \left[\vec{E}_{\alpha j}^{\beta}(\vec{r}) e^{-i\omega_j t} + c.c. \right] = \frac{1}{2} \sum_j \left[\vec{f}_{\alpha j}^{\beta}(x, y) a_{\alpha j}^{\beta}(z) e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c. \right],$$

donde hemos tomado $\vec{f}(x, y)$ como la función del campo eléctrico transversal a la dirección de propagación; y $a(z)$ como la función del campo eléctrico longitudinal a la dirección de propagación. La dirección de polarización del campo está dada por

⁴El término de polarización no lineal produce un decrecimiento lento del campo eléctrico en la dirección de propagación.

la dirección del vector \hat{f} . Las unidades de campo eléctrico (V/m) las hemos dejado, por conveniencia, en la función $a(z)$.

Como primer paso, introduzcamos este *ansatz* para el campo en la ec.(2.3) y observemos lo que resulta en el lado izquierdo de esta ecuación:

$$\nabla^2 \vec{E}_\alpha^\beta(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}_\alpha^\beta(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_j \left\{ \left[a_{\alpha j}^\beta \left(\nabla_1^2 - k_j^2 + \frac{\omega_j^2}{c^2} \right) \vec{f}_{\alpha j}^\beta + \left(\frac{d^2 a_{\alpha j}^\beta}{dz^2} + 2ik_j \frac{da_{\alpha j}^\beta}{dz} \right) \vec{f}_{\alpha j}^\beta + c.c. \right] e^{i(k_j z - \omega_j t)} \right\},$$

El primer término del paréntesis cuadrado es idénticamente nulo debido al resultado de la ec.(2.4). Además, en este punto, es necesario hacer válida la aproximación de amplitud lentamente variable longitudinalmente,

$$\left| \frac{d^2 a_{\alpha j}^\beta}{dz^2} \right| \ll 2k_j \left| \frac{da_{\alpha j}^\beta}{dz} \right|. \quad (2.5)$$

En resumen, el lado izquierdo de la ec.(2.3) es dado aproximadamente por:

$$\nabla^2 \vec{E}_\alpha^\beta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}_\alpha^\beta \approx \frac{1}{2} \sum_j \left[2ik_j \frac{da_{\alpha j}^\beta}{dz} \vec{f}_{\alpha j}^\beta e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c. \right]$$

Ahora debemos concentrarnos en el lado derecho de la ec.(2.3), o sea, en las fuentes de energía externas del problema. Podemos separar el término de polarización en su contribución lineal más su contribución no lineal y, escribirlo como una suma de sus modos en la siguiente forma:

$$\vec{P}_\alpha^\beta(\vec{r}, t) = \vec{P}_\alpha^{\beta,L}(\vec{r}, t) + \vec{P}_\alpha^{\beta,NL}(\vec{r}, t) = \sum_j \left[\vec{P}_{\alpha j}^{\beta,L}(\vec{r}, t) + \vec{P}_{\alpha j}^{\beta,NL}(\vec{r}, t) \right]$$

En este punto es necesario precisar que la polarización lineal de la guía α depende de todos los campos presentes en en la misma⁵. La polarización no lineal en cambio, depende sólo del campo local de cada guía debido a lo débil y localizado del fenómeno.

⁵Campo de la guía más los campos de las guías vecinas.

Como nuestra derivación está basada en el esquema de la fig. 2.1 sigamos, por conveniencia, el desarrollo situados en la guía $\alpha = 1$. El término de polarización lineal en esta guía para el modo j está dado por:

$$\vec{P}_{1j}^{1,L}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi_{1j}^{(1)} \vec{E}_{Tj}^1(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \chi_{1j}^{(1)} \left[(\vec{f}_{1j}^1 a_{1j}^1 + \vec{f}_{2j}^1 a_{2j}^1) e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c. \right]$$

En el lado derecho de la ec. (2.3) el término de polarización está derivado dos veces respecto al tiempo, así que, debido a la dependencia temporal del *ansatz* propuesto, esta derivación simplemente lleva a una multiplicación por un factor $-\omega_j^2$. Agrupando todo lo anterior, y agregando una descomposición en modos de la polarización no lineal, podemos llegar directamente a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_j \left[\left\{ 2ik_j \vec{f}_{1j}^1 \frac{da_{1j}^1}{dz} + \frac{\omega_j^2}{c^2} \chi_{1j}^{(1)} (\vec{f}_{1j}^1 a_{1j}^1 + \vec{f}_{2j}^1 a_{2j}^1) \right\} e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c. \right] = \\ = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_j \vec{P}_{1j}^{NL}(\vec{r}, t) \quad (2.6) \end{aligned}$$

$\chi_{1j}^{(1)}$ representa la susceptibilidad lineal de la guía 1 para el modo j ⁶. Si la suma fuese respecto a modos de distinta frecuencia, por "dispersión cromática", este término sería diferente para cada modo. En cambio, si la suma considerara modos con distinta polarización, es claro por "birrefringencia", que este término de susceptibilidad lineal tiene distintos valores según cada modo.

2.2. Derivación de ecuaciones dinámicas

Ahora usamos la teoría de la óptica no lineal para escribir los términos de polarización no lineal propios de cada arreglo de guías a estudiar. En el caso más simple de arreglos de guías con una susceptibilidad eléctrica no lineal de tercer orden como

⁶Este grado de libertad es necesario cuando trabajamos con arreglos inhomogéneos.

respuesta no lineal más baja (arreglos cúbicos), necesitamos escribir las ecuaciones acopladas de un sólo modo de frecuencia ω y dirección de polarización \hat{x} . En el caso de arreglos con una susceptibilidad eléctrica no lineal de segundo orden como primera respuesta no lineal (arreglos cuadráticos), necesitamos escribir las ecuaciones para dos modos de frecuencias distintas, ω y 2ω , pero con igual polarización \hat{x} . Por último, para arreglos con una susceptibilidad eléctrica no lineal de tercer orden como primera respuesta no lineal, y además birrefringentes (arreglos cúbicos birrefringentes), necesitamos escribir las ecuaciones para dos modos de igual frecuencia ω , pero con distintas polarizaciones, \hat{x} e \hat{y} . Todas las derivaciones serán realizadas asumiendo que las susceptibilidades eléctricas lineales y no lineales son cantidades reales. Con esto estamos asumiendo materiales sin pérdidas lineales y no lineales relevantes⁷. Para escribir las ecuaciones dinámicas, consideramos un haz de operación continua (CW, no pulsado), ya que con esto, desde el punto teórico y numérico, nuestro trabajo se ve simplificado al no incluir el tiempo como parámetro del problema (cuando se consideran haces pulsados, de inmediato debemos considerar el tiempo, asunto que complica de gran manera al cálculo numérico). Es importante destacar, que la inclusión del tiempo no aporta demasiado a la dinámica ya que, esencialmente lo que ocurre es que, los valores numéricos finales probablemente serán más cercanos al experimento pero, las propiedades dinámicas características de los sistemas discretos, serán las mismas [3].

⁷Reportes numéricos y experimentales demuestran que la absorción puede ser despreciada trabajando con longitudes de onda apropiadas ($\sim 1.5 \mu m$), y con arreglos de corta extensión ($\sim 4 mm$).

2.2.1. Ecuación de Schrödinger no lineal discreta (DNLS) para arreglos cúbicos

Por simetría, un medio centrosimétrico tiene una susceptibilidad eléctrica no lineal de segundo orden nula⁸ y, por lo tanto, la contribución no lineal más baja es la de tercer orden. En estos materiales las contribuciones no lineales quinta, séptima, etc., no son consideradas relevantes en la dinámica, por tener un valor numérico muy pequeño y por lo tanto requieren de un haz muy potente para ser excitadas.

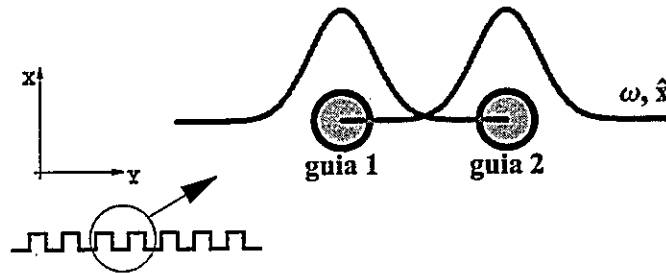


Figura 2.2: Esquema DNLS donde una onda de frecuencia ω y polarización \hat{x} incide en el arreglo.

Para escribir las ecuaciones consideramos un haz de frecuencia ω y polarización \hat{x} incidiendo en el arreglo, como se muestra en la fig. 2.2. Tomamos entonces un solo modo en la derivación⁹. Esto implica: $j = 1 \Rightarrow \omega_1 \rightarrow \omega$, $k_1 \rightarrow k = k(\omega) \equiv n(\omega)k_0$. Por lo tanto, reescribimos la ec. (2.6) para $j = 1$ y para la guía 1 ya que, por la simetría del problema, las ecuaciones serán idénticas para ambas guías¹⁰:

$$\frac{1}{2} \left[\left\{ 2ik\vec{f}_{11} \frac{da_{11}}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{11}^{(1)} (\vec{f}_{11}a_{11} + \vec{f}_{21}a_{21}) \right\} e^{i(kz-\omega t)} + c.c. \right] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\vec{P}_{11}^{NL}}{\epsilon_0 c^2} \right) \quad (2.7)$$

⁸En efecto, todos los términos pares son nulos para este tipo de materiales

⁹Puede lograrse escogiendo adecuadamente la geometría y las dimensiones de la guía.

¹⁰Eliminamos el índice β ya que, no aporta información al estar implícito que estamos sobre la guía 1.

Podemos escribir el término de polarización no lineal de tercer orden en una forma sencilla [9, 49] considerando la respuesta no lineal del medio como instantánea¹¹:

$$\vec{P}_1^{NL}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi_1^{(3)} \left| \vec{E}_1(\vec{r}, t) \right|^2 \vec{E}_1(\vec{r}, t)$$

Si tomamos el campo eléctrico incidente en la guía 1 como:

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left[\vec{f}_{11} a_{11} e^{i(kz - \omega t)} + c.c. \right],$$

el desarrollo del término no lineal es

$$\chi_1^{(3)} \left| \vec{E}_1 \right|^2 \vec{E}_1 = \frac{1}{8} \left[3\chi_{11}^{(3)} \left| \vec{f}_{11} \right|^2 \left| a_{11} \right|^2 \vec{f}_{11} a_{11} e^{i(kz - \omega t)} + \chi_{13}^{(3)} \vec{f}_{11}^3 a_{11}^3 e^{i(3kz - 3\omega t)} + c.c. \right].$$

Como se puede apreciar, la interacción no lineal cúbica genera un término de frecuencia ω y un término de tercera armónica (3ω). La onda de tercera armónica es generada por el término de susceptibilidad no lineal $\chi_{13}^{(3)}$ el cual, en notación tensorial, puede ser expresado como: $\chi_{xxxx}^{(3)}(3\omega; \omega, \omega, \omega)$ y que, claramente cuenta sólo con una posibilidad de combinación (por eso el término es multiplicado adelante por un 1). El término en resonancia con la onda incidente es un término en donde el campo en sí mismo se inyecta energía. En lenguaje óptico, esto corresponde a un término de Auto-Enfocamiento (*self-focusing*) o de Auto-Modulación de Fase (*self-phase-modulation* (SPM)), debido al cual el haz compensa la difracción natural aumentando no linealmente el índice de refracción¹². Este término es resultado de la interacción no lineal $\chi_{11}^{(3)}$ la cual, en notación tensorial, puede ser expresada como: $\chi_{xxxx}^{(3)}(\omega; \omega, \omega, -\omega) = \chi_{xxxx}^{(3)}(\omega; \omega, -\omega, \omega) = \chi_{xxxx}^{(3)}(\omega; -\omega, \omega, \omega)$. La igualdad de los términos tensoriales se obtiene tomando propiedades de simetría, dada la frecuencia y polarización única del problema [49]. Esto además, es el motivo por el cual

¹¹Una respuesta instantánea desprecia la contribución de vibraciones moleculares al valor de $\chi^{(3)}$.

¹² $n = n_0 + n_2 |E|^2$.

delante de este término aparece un factor 3. La generación de tercera armónica es un proceso no resonante con la frecuencia fundamental ω [51], por este motivo, la tercera armónica generada se desprecia y no es considerada en la derivación de las ecuaciones dinámicas¹³.

Seguimos el desarrollo considerando sólo los términos proporcionales al modo fundamental (*omega*):

$$\vec{F}_{11}^{NL} = \vec{F}_1^{NL}(\omega) = \frac{3}{8}\epsilon_0\chi_1^{(3)}(\omega) \left[|\vec{f}_{11}|^2 |a_{11}|^2 \vec{f}_{11} a_{11} e^{i(kz-\omega t)} + c.c. \right], \quad (2.8)$$

donde hemos usado $\chi_{11} = \chi_1(\omega)$. Agrupando las ecuaciones (2.7) y (2.8), obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\left\{ 2ik\vec{f}_{11} \frac{da_{11}}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{11}^{(1)}(\omega) (\vec{f}_{11} a_{11} + \vec{f}_{21} a_{21}) \right\} e^{i(kz-\omega t)} + c.c. \right] = \\ = -\frac{3\omega^2}{8c^2} \chi_{11}^{(3)}(\omega) \left[|\vec{f}_{11}|^2 |a_{11}|^2 \vec{f}_{11} a_{11} \right] e^{i(kz-\omega t)} + c.c., \end{aligned}$$

De aquí en adelante dejamos de escribir el término complejo conjugado de cada lado de las ecuaciones, manteniendo todavía la igualdad¹⁴. Además, por simplicidad, eliminamos el índice j y la notación vectorial para el campo eléctrico ($\vec{f} = f\hat{x}$). Obtenemos entonces

$$2ikf_1 \frac{da_1}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2} \chi_1^{(1)}(\omega) (f_1 a_1 + f_2 a_2) + \frac{3\omega^2}{4c^2} \chi_1^{(3)}(\omega) |f_1|^2 |a_1|^2 f_1 a_1 = 0. \quad (2.9)$$

Necesitamos ahora despejar la dependencia transversal de la ec. (2.9). Para esto multiplicamos por el campo eléctrico transversal conjugado y luego integramos transversalmente en el área del arreglo desde menos infinito a más infinito, en la dirección \hat{y} y en la altura (L) de la guía en la dirección \hat{x} :

¹³Experimentalmente para obtener generación de tercera armónica eficientemente se debe considerar el *phase matching* entre las ondas, si no, la conversión es despreciable así como también la participación en la dinámica.

¹⁴El término c.c. ayuda a escribir correctamente el campo eléctrico y las interacciones no lineales que se producen no aportando nueva información en adelante.

$$\times f_1^* \rightarrow \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \equiv \int_{arr} dx dy,$$

donde "arr" da cuenta de la integral en todo el arreglo. Haciendo ésto se obtienen las siguientes integrales:

$$\begin{aligned} p_\omega &\equiv \int_{arr} |f_1|^2 dx dy, \\ V_\omega &\equiv \frac{1}{p_\omega} \int_{arr} f_2 f_1^* dx dy, \\ \phi_\omega &\equiv \frac{1}{p_\omega} \int_{arr} |f_1|^4 dx dy. \end{aligned}$$

p_ω es definida como *integral de potencia* con unidades de area; V_ω es definida como *integral de acoplamiento lineal*; y ϕ_ω se define como *integral no lineal*. Además, es conveniente definir algunas constantes del problema:

1. Coeficiente de propagación:

$$C_a \equiv \frac{\omega^2}{2kc^2} \chi^{(1)}(\omega) = \frac{\omega}{2cn} \chi^{(1)}(\omega) \quad (2.10)$$

2. Coeficiente de acoplamiento lineal:

$$V_a \equiv \frac{\omega^2}{2kc^2} \chi^{(1)}(\omega) V_\omega = C_a * V_\omega \quad (2.11)$$

3. Coeficiente no lineal:

$$\gamma \equiv \frac{3\omega^2}{8kc^2} \chi^{(3)}(\omega) \phi_\omega = \frac{1}{2} \frac{\omega n_2}{cn} \phi_\omega \quad (2.12)$$

n , n_2 , y η , son el índice de refracción lineal¹⁵, índice de refracción no lineal (coeficiente Kerr)¹⁶, y la impedancia¹⁷ para el modo fundamental en la guía, respectivamente.

¹⁵ $n = n(\omega)$.

¹⁶El coeficiente Kerr es definido como: $n_2 \equiv 3\chi^{(3)} / (4n^2 \epsilon_0 c)$.

¹⁷ $\eta = \eta_0 / n(\omega)$, con η_0 la impedancia del vacío.

Haciendo los reemplazos pertinentes en la ecuación (2.9) y generalizando a un arreglo de N guías homogéneas débilmente acopladas por la evanescente del campo eléctrico de las guías vecinas¹⁸, obtenemos una primera forma de la ecuación DNLS:

$$i \frac{da_n}{dz} + C_a a_n + V_a (a_{n+1} + a_{n-1}) + \gamma |a_n|^2 a_n = 0$$

Buscaremos ahora una manera de escribir esta ecuación en unidades más prácticas experimentalmente de modo tal que, por ejemplo, la amplitud del campo al cuadrado esté en unidades de potencia (Watts). Veamos primero las unidades de los distintos términos de esta ecuación:

$$[a_n] = Vm^{-1}; [C_a, V_a] = m^{-1}; [\gamma] = mV^{-2}; [z] = m ,$$

Haciendo la transformación:

$$a_n = \sqrt{\frac{2\eta}{p_\omega}} * A_n * e^{iC_a z},$$

obtenemos la Ecuación No Lineal de Schrödinger Discreta (DNLS):

$$i \frac{dA_n}{dz} + V_A (A_{n+1} + A_{n-1}) + \gamma_{eff} |A_n|^2 A_n = 0, \quad (2.13)$$

con el coeficiente no lineal efectivo dado por:

$$\gamma_{eff} \equiv \frac{\omega * n_2}{cA_{eff}}, \quad (2.14)$$

y el área efectiva definida como:

$$A_{eff} \equiv \frac{p_\omega}{\phi_\omega}. \quad (2.15)$$

¹⁸Tight-Binding en lenguaje de Física del Estado sólido, donde se considera que el acoplamiento es suficientemente débil tal que sólo hay interacción lineal con el vecino más cercano, en este caso, a la izquierda y a la derecha del arreglo.

Estas ecuaciones están en unidades de fácil uso práctico¹⁹, las cuales para la ec. (2.13) son:

$$[A_n] = W^{1/2}; [V_A] = m^{-1}; [\gamma_{eff}] = m^{-1}W^{-1}; [z] = m$$

La potencia total del arreglo (en unidades de Watts) puede ser definida como la suma total de todas las contribuciones del campo eléctrico presentes en el arreglo:

$$P \equiv \sum_n |A_n|^2 \quad (2.16)$$

Por último, y para ser más exhaustivos en la derivación de esta ecuación, busquemos dejarla en un formato completamente adimensional. Esto nos será de gran utilidad al momento de realizar simulaciones numéricas y cálculos teóricos así como también, para definir el Hamiltoniano del sistema. Consideramos dos parámetros experimentales como son la amplitud del peak del haz, A_p y una longitud característica L_0 ²⁰. Tomemos entonces, una última transformación dada por

$$A_n = A_p * u_n,$$

y multipliquemos la ec. (2.13) por L_0 . Obtenemos entonces, una versión de la ecuación DNLS completamente adimensional:

$$i \frac{du_n}{d\xi} + V(u_{n+1} + u_{n-1}) + \gamma |u_n|^2 u_n = 0, \quad (2.17)$$

con

$$\xi \equiv z/L_0; V \equiv V_A * L_0; \gamma \equiv \gamma_{eff} * |A_p|^2 * L_0 \Rightarrow [u_n] = [\xi] = [V] = [\gamma] = 1.$$

De esta manera podemos definir dos cantidades conservadas del problema en un formato adimensional²¹. Estas cantidades son la *Potencia* (P) y el *Hamiltoniano*

¹⁹Esto nos permitirá, más adelante, estimar ordenes de magnitud experimentales desde nuestros resultados teóricos.

²⁰Por ejemplo la longitud del arreglo.

²¹Es fácil demostrar la conservación de estas cantidades ya que los sistemas estudiados en esta tesis son todos Hamiltonianos.

(H), ambos de gran importancia para realizar sucesivos cálculos teóricos, así como también para la verificación de la precisión de nuestras simulaciones numéricas²². Redefinimos entonces la potencia, ahora normalizada, como

$$P_0 \equiv \sum_n |u_n|^2, \quad (2.18)$$

y definimos el Hamiltoniano del problema como:

$$H \equiv - \sum_n \left\{ V (u_{n+1} u_n^* + u_{n+1}^* u_n) + \frac{\gamma}{2} |u_n|^4 \right\}, \quad (2.19)$$

desde donde podemos obtener las ecuaciones de movimiento (2.17), mediante

$$i \frac{du_n}{d\xi} = \frac{\partial H}{\partial u_n^*}.$$

Con estas definiciones resulta fácil determinar nuestros resultados teóricos en unidades experimentales. Para la potencia calculamos numéricamente P_0 y, dado ciertos valores típicos experimentales para arreglos cúbicos, obtenemos la potencia estimada en unidades de Watts. Para los valores dados en la Ref. [41],

$$P_{real} = P = |A_p|^2 * P_0 \approx 200 * P_0 [W]$$

2.2.2. Ecuación de Schrödinger no lineal discreta modificada (DNLSE-m) para arreglos cuadráticos

La derivación de esta ecuación se realiza considerando un arreglo de guías de ondas ópticas no lineales, las cuales presentan una susceptibilidad eléctrica de segundo orden como respuesta no lineal más baja. Es importante mencionar que los siguientes términos no lineales no son considerados en esta derivación, debido a su debilidad en relación al término cuadrático. En lenguaje de Física del estado sólido, este tipo de

²²Se sabe que, un cálculo numérico correcto, para un sistema Hamiltoniano, debe conservar al menos estas cantidades [52].

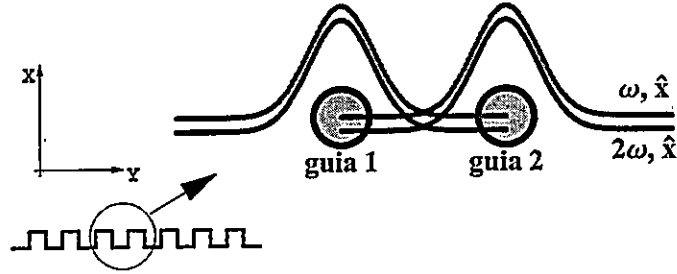


Figura 2.3: Esquema DNLSE-m donde dos ondas de distinta frecuencia ω (rojo) y 2ω (azul), pero de igual polarización \hat{x} , inciden en el arreglo.

material corresponde a un material no centro-simétrico [49]. Comenzamos entonces, desde la ec. (2.6), considerando el montaje descrito en la fig. 2.3. Este montaje considera dos ondas de frecuencias ω y 2ω , con igual polarización \hat{x} , incidiendo en la guía ¹²³. Para escribir las ecuaciones consideramos: $j = 1 \Rightarrow \omega_1 = \omega$, $k_1 = k(\omega) \equiv k_0 n_\omega$ y $j = 2 \Rightarrow \omega_2 = 2\omega$, $k_2 = k(2\omega) \equiv 2k_0 n_{2\omega}$, con $k_0 = \omega/c$, y con n_ω y $n_{2\omega}$ los índices de refracción respectivos de cada modo. De esta manera, las ecuaciones de partida para este problema son:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\vec{P}_{11}^{NL}}{\epsilon_0 c^2} \right) = \frac{1}{2} \left[\left\{ 2ik_1 \vec{f}_{11} \frac{da_{11}}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{11}^{(1)} (\vec{f}_{11} a_{11} + \vec{f}_{21} a_{21}) \right\} e^{i(k_1 z - \omega t)} + c.c. \right] \quad (2.20a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\vec{P}_{12}^{NL}}{\epsilon_0 c^2} \right) = \frac{1}{2} \left[\left\{ 2ik_2 \vec{f}_{12} \frac{da_{12}}{dz} + \frac{4\omega^2}{c^2} \chi_{12}^{(1)} (\vec{f}_{12} a_{12} + \vec{f}_{22} a_{22}) \right\} e^{i(k_2 z - 2\omega t)} + c.c. \right] \quad (2.20b)$$

Debemos entonces, escribir los términos de polarización no lineal de segundo orden y luego separar los que tengan relación con los modos 1 y 2. El término de polarización no lineal en la guía 1 puede escribirse como [49]:

$$\vec{P}_1^{NL} = \epsilon_0 \chi_1^{(2)} |\vec{E}_1(\vec{r}, t)|^2$$

²³El coeficiente β no es necesario tomarlo en consideración debido a que, implícitamente, estamos parados en la guía 1.

En este punto consideramos un campo eléctrico total en la guía 1 igual a la suma de los dos modos relevantes del problema: ω y 2ω . Es importante hacer notar que, en principio, no es necesario tener ambos modos incidiendo en la guía. La interacción no lineal de segundo orden generará instantáneamente²⁴ una segunda armónica debido a la incidencia de un modo de frecuencia ω . Tomamos entonces el campo eléctrico como

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left[\vec{f}_{11} a_{11} e^{i(k_1 z - \omega t)} + \vec{f}_{12} a_{12} e^{i(k_2 z - 2\omega t)} + c.c. \right]$$

Observemos el desarrollo del término no lineal para el campo propuesto:

$$\begin{aligned} |\vec{E}_1|^2 &= \frac{1}{4} \left[|\vec{f}_{11} a_{11}|^2 + |\vec{f}_{12} a_{12}|^2 + 2\vec{f}_{12} a_{12} \vec{f}_{11}^* a_{11}^* e^{i((k_2 - k_1)z - \omega t)} + \vec{f}_{11}^2 a_{11}^2 e^{i(2k_1 z - 2\omega t)} \right. \\ &\quad \left. + 2\vec{f}_{12} a_{12} \vec{f}_{11} a_{11} e^{i(k_1 + k_2)z - 3\omega t} + \vec{f}_{12}^2 a_{12}^2 e^{i(2k_2 z - 4\omega t)} + c.c. \right] \end{aligned}$$

Esta última expresión nos muestra los distintos procesos generados no linealmente para este montaje. Los dos primeros términos son conocidos como términos de rectificación óptica ya que generan una polarización continua en el material [50]. Los siguientes, son términos oscilatorios de frecuencias ω , 2ω , 3ω y 4ω . Nosotros, en particular, sólo estamos interesados en los dos primeros términos resonantes con las frecuencias incidentes²⁵. Como hemos considerado para ambos modos una dirección de polarización idéntica, esto en resumen, nos permite olvidar la notación vectorial y escribir los términos de polarización no lineal para cada modo como:

$$\begin{aligned} P_{11}^{NL} &= \frac{\epsilon_0}{2} \chi_{11}^{(2)} \left[f_{12} a_{12} f_{11}^* a_{11}^* e^{i((k_2 - k_1)z - \omega t)} + c.c. \right], \\ P_{12}^{NL} &= \frac{\epsilon_0}{4} \chi_{12}^{(2)} \left[f_{11}^2 a_{11}^2 e^{i(2k_1 z - 2\omega t)} + c.c. \right]. \end{aligned}$$

²⁴Dependiendo de la respuesta temporal del material utilizado; sin embargo, en nuestras derivaciones estamos considerando por simplicidad respuestas instantáneas.

²⁵La generación de tercera y cuarta armónica son procesos no resonantes, y por ende no los consideramos en la dinámica [51]. Además, la consideración de *phase matching* para estos procesos, experimentalmente, es muy difícil de lograr.

Las contribuciones no lineales en notación tensorial, para el primer y segundo modo, son: $\chi_{xxx}^{(2)}(\omega; 2\omega, -\omega) = \chi_{xxx}^{(2)}(\omega; -\omega, 2\omega)$, y $\chi_{xxx}^{(2)}(2\omega; \omega, \omega)$, respectivamente. La primera identidad da cuenta del factor dos de diferencia entre ambos procesos que se observa en las expresiones no lineales de ambos modos. Ahora, podemos escribir completamente las ecuaciones (2.20a) y (2.20b) incorporando los términos no lineales. Es fácil notar que, debido a la doble derivada temporal, los términos no lineales deben multiplicarse por un factor $-\omega^2$ y $-4\omega^2$ para el modo 1 y 2, respectivamente. Además, para simplificar la notación, podemos introducir las siguientes definiciones para los campos:

$$a_{\alpha 1} = a_{\alpha}(\omega) \equiv A_{\alpha},$$

$$a_{\alpha 2} = a_{\alpha}(2\omega) \equiv B_{\alpha}.$$

Escribamos entonces una primera forma para la ecuación DNLS-m, simplificando las exponenciales y dejando de lado el término c.c.:

$$2ik_1 f_{11} \frac{dA_1}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{11}^{(1)} (f_{11} A_1 + f_{21} A_2) + \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{11}^{(2)} f_{12} B_1 f_{11}^* A_1^* e^{-i\Delta k z} = 0, \quad (2.21a)$$

$$2ik_2 f_{12} \frac{dB_1}{dz} + \frac{4\omega^2}{c^2} \chi_{12}^{(1)} (f_{12} B_1 + f_{22} B_2) + \frac{2\omega^2}{c^2} \chi_{12}^{(2)} f_{11}^2 A_1^2 e^{i\Delta k z} = 0, \quad (2.21b)$$

con $\Delta k \equiv 2k_1 - k_2$. Necesitamos integrar en el área transversal del arreglo para despejar la dependencia en el plano xy. Para ésto, multiplicamos por el campo conjugado en ambas ecuaciones (por f_{11}^* para la ec. (2.21a) y por f_{12}^* para la ec. (2.21b)) y luego integramos de la siguiente forma:

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \equiv \int_{arr} dx dy$$

Definimos las siguientes integrales:

$$p_{\omega} \equiv \int_{arr} |f_{11}|^2 dx dy \quad ; \quad p_{2\omega} \equiv \int_{arr} |f_{12}|^2 dx dy;$$

$$V_\omega \equiv \frac{1}{p_\omega} \int_{arr} f_{21} f_{11}^* dx dy ; \quad V_{2\omega} \equiv \frac{1}{p_{2\omega}} \int_{arr} f_{22} f_{12}^* dx dy ;$$

$$N_\omega \equiv \frac{1}{p_\omega} \int_{arr} f_{12} f_{11}^{*2} dx dy ; \quad N_{2\omega} \equiv \frac{1}{p_{2\omega}} \int_{arr} f_{12}^* f_{11}^2 dx dy ;$$

donde p_j es definida como *integral de potencia* con unidades de area, V_j es definida como *integral de acoplamiento lineal*, y N_j es definida como *integral no lineal*, para cada modo j respectivo. Definamos ahora los coeficientes necesarios para una escritura más simple de las ecuaciones:

1. Coeficiente de propagación:

$$C_A \equiv \frac{\omega^2}{2k_1 c^2} \chi^{(1)}(\omega) ; \quad C_B \equiv \frac{2\omega^2}{k_2 c^2} \chi^{(1)}(2\omega) \quad (2.22)$$

2. Coeficiente de acoplamiento lineal:

$$V_a \equiv C_A * V_\omega ; \quad V_B = C_B * V_{2\omega} \quad (2.23)$$

3. Coeficiente no lineal de segundo orden:

$$\Gamma_A \equiv \frac{\omega^2}{2k_1 c^2} \chi^{(2)}(\omega) N_\omega^{(2)} ; \quad \Gamma_B \equiv \frac{\omega^2}{k_2 c^2} \chi^{(2)}(2\omega) N_{2\omega}^{(2)} \quad (2.24)$$

Agrupando todo lo anterior, y generalizando a N guías mediante una interacción a primeros vecinos (*tight-binding*), se obtienen las siguientes ecuaciones DNLS-m:

$$i \frac{dA_n}{dz} + C_A A_n + V_A (A_{n+1} + A_{n-1}) + \Gamma_A B_n A_n^* e^{-i\Delta k z} = 0,$$

$$i \frac{dB_n}{dz} + C_B B_n + V_B (B_{n+1} + B_{n-1}) + \Gamma_B A_n^2 e^{i\Delta k z} = 0.$$

Hacemos una transformación de fase, tal que, podamos eliminar la exponencial de ambas ecuaciones y los coeficientes de propagación:

$$A_n \rightarrow A_n * e^{iC_A z} ; \quad B_n \rightarrow B_n * e^{i(2C_A + \Delta k)z} ;$$

obteniendo como resultado:

$$i \frac{dA_n}{dz} + V_A (A_{n+1} + A_{n-1}) + \Gamma_A B_n A_n^* = 0, \quad (2.25a)$$

$$i \frac{dB_n}{dz} + V_B (B_{n+1} + B_{n-1}) + \beta B_n + \Gamma_B A_n^2 = 0, \quad (2.25b)$$

$$\beta \equiv C_B - 2C_A - \Delta k, \quad (2.26)$$

donde β es definido como *coeficiente de mismatch efectivo*. Buscamos ahora escribir estas ecuaciones en unidades más útiles, desde un punto de vista práctico. Para ésto hacemos una nueva transformación similar a la realizada para el caso cúbico, en la cual deseamos que las amplitudes de los campos estén en unidades proporcionales a los Watts. Veamos primero las unidades de las últimas ecuaciones ($i = A, B$):

$$[A_n, B_n] = V m^{-1}; [V_i, \beta] = m^{-1}; [\Gamma_i] = V^2 m^{-1}; [z] = m,$$

Hacemos la siguiente transformación:

$$A_n = \sqrt{\frac{2\eta_1}{p_\omega}} * a_n, \quad B_n = \sqrt{\frac{2\eta_2}{p_{2\omega}}} * b_n,$$

donde η_1 y η_2 son las impedancias de las guías para los modos de frecuencia ω y 2ω , respectivamente. Los parámetros no lineales son modificados por esta transformación permitiéndonos expresarlos con una misma cantidad para ambas ecuaciones. Además, desde la Ref. [49] sabemos que, podemos definir de la siguiente manera a la susceptibilidad no lineal de segundo orden para ambos modos:

$$d_{eff} \equiv \frac{1}{2} \chi^{(2)}$$

Por lo tanto podemos re-escribir los coeficientes no lineales de segundo orden como:

$$\Gamma_A \rightarrow \Gamma_a = \frac{\omega}{c n_\omega} d_{eff} N_\omega^{(2)}; \quad \Gamma_B \rightarrow \Gamma_b = \frac{\omega}{c n_{2\omega}} d_{eff} N_{2\omega}^{(2)}.$$

Observemos ahora cómo queda el término no lineal de segundo orden, después de efectuar esta transformación:

$$\Gamma_a \sqrt{\frac{2\eta_2}{p_{2\omega}}} = 2 \frac{\omega * d_{eff}}{(2\varepsilon_0 c^3 n_\omega^2 n_{2\omega})^{1/2}} \Psi \equiv 2\Gamma$$

$$\Gamma_b \frac{2\eta_1}{p_\omega} \sqrt{\frac{p_{2\omega}}{2\eta_2}} = 2 \frac{\omega * d_{eff}}{(2\varepsilon_0 c^3 n_\omega^2 n_{2\omega})^{1/2}} \Psi \equiv 2\Gamma$$

, con²⁶:

$$\Psi \equiv \frac{1}{p_\omega p_{2\omega}^{1/2}} \int_{arr} f_{12} f_{11}^2 dx dy \quad (2.27)$$

Como se ve, logramos escribir el término no lineal de segundo orden como una misma constante efectiva para ambos modos, lo cual hace el tratamiento teórico y numérico de las ecuaciones dinámicas mucho más simple. Considerando $V_A \rightarrow V_a$, $V_B \rightarrow V_b$, estamos en condiciones de escribir la ecuación DNLS-m como:

$$i \frac{da_n}{dz} + V_a (a_{n+1} + a_{n-1}) + 2\Gamma b_n a_n^* = 0, \quad (2.28a)$$

$$i \frac{db_n}{dz} + V_b (b_{n+1} + b_{n-1}) + \beta b_n + 2\Gamma a_n^2 = 0. \quad (2.28b)$$

Las unidades en las que queda esta ecuación son:

$$[a_n, b_n] = W^{1/2}; [V_i, \beta] = m^{-1}; [\Gamma] = W^{-1/2} m^{-1}; [z] = m$$

Esta forma de la ecuación DNLS-m posee unidades fáciles de encontrar experimentalmente y resulta cómoda cuando se quiere entregar un resultado numérico en unidades reales. La potencia total del arreglo en unidades de Watts puede ser definida como la suma de todas las contribuciones del campo eléctrico de ambos modos presentes en el arreglo:

$$P \equiv \sum_n (|a_n|^2 + |b_n|^2) \quad (2.29)$$

²⁶Los factores transversales del campo eléctrico son cantidades reales por lo que la definición de esta integral es correcta y, es la misma para ambos modos.

Finalmente, haremos una última normalización que nos permitirá dejar estas ecuaciones absolutamente adimensionales. Para ésto, debemos introducir dos cantidades experimentales, como son: la amplitud del peak del haz de segundo armónico²⁷ b_p y una longitud característica L_0 . Introducimos entonces, la siguiente transformación:

$$a_n = \frac{b_p}{\sqrt{2}} * u_n, \quad b_n = b_p * v_n,$$

multiplicamos las ecuaciones (2.28a) y (2.28b) por L_0 , obteniendo como resultado las ecuaciones DNLS-m adimensionalizadas:

$$i \frac{du_n}{d\xi} + C_u (u_{n+1} + u_{n-1}) + 2\gamma v_n u_n^* = 0, \quad (2.30a)$$

$$i \frac{dv_n}{d\xi} + C_v (v_{n+1} + v_{n-1}) + \bar{\beta} v_n + \gamma u_n^2 = 0, \quad (2.30b)$$

dado las siguientes definiciones:

$$\xi \equiv z/L_0; \quad C_{u,v} \equiv V_{a,b} * L_0; \quad \bar{\beta} \equiv \beta * L_0; \quad \gamma \equiv \Gamma * L_0 * b_p,$$

tal que

$$[u_n, v_n] = [\xi] = [C_{u,v}] = [\bar{\beta}] = [\gamma] = 1.$$

Definimos dos cantidades conservadas del problema, la potencia y el Hamiltoniano, como:

$$P_0 = \sum_n (|u_n|^2 + 2|v_n|^2), \quad (2.31)$$

y

$$H \equiv - \sum_n \left\{ C_u u_{n+1} u_n^* + C_v v_{n+1} v_n^* + \frac{\bar{\beta}}{2} |v_n|^2 + \gamma u_n^2 v_n^* + c.c. \right\}. \quad (2.32)$$

Las ecuaciones de movimiento (2.30a y 2.30b) se pueden obtener desde H por,

$$i \frac{du_n}{d\xi} = \frac{\partial H}{\partial u_n^*}; \quad i \frac{dv_n}{d\xi} = \frac{\partial H}{\partial v_n^*}.$$

²⁷También se puede tomar la del modo fundamental.

Para determinar, en unidades experimentales, los niveles de potencia necesarios para realizar los mecanismos de switching que proponemos en esta tesis, debemos calcular numéricamente P_0 y, dado ciertos valores típicos experimentales para arreglos cuadráticos, obtenemos la potencia estimada en unidades de Watts. Utilizando los valores experimentales de la Ref. [53], obtenemos:

$$P_{real} = P = \frac{|b_p|^2}{2} * P_0 \approx 100 * P_0 [W].$$

2.2.3. Ecuación de Schrödinger no lineal discreta vectorial (DNLSE-v) para arreglos cúbicos birrefringentes

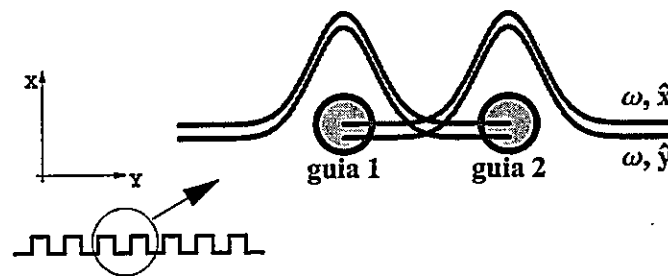


Figura 2.4: Esquema DNLSE-v donde dos ondas de igual frecuencia ω , y diferentes polarizaciones \hat{x} (rojo) e \hat{y} (verde), inciden en el arreglo.

La derivación de esta ecuación se realiza considerando un arreglo de guías no lineales, las cuales presentan una susceptibilidad eléctrica de tercer orden como respuesta no lineal más baja. Este tipo de arreglo es idéntico al arreglo cúbico descrito por la ecuación DNLS. La única diferencia es que, tal como se muestra en la fig. 2.4, inciden en el arreglo dos haces de igual frecuencia ω , pero con distinta dirección de polarización (\hat{x} e \hat{y}). La interacción no lineal entre ambas polarizaciones es la responsable del nombre de solitones discretos vectoriales²⁸.

²⁸En efecto, los solitones discretos cuadráticos también son un tipo de solitón vectorial.

Comenzamos desde la ecuación (2.6) considerando el montaje descrito en la fig. 2.4 situados en la guía 1. Para escribir las ecuaciones consideramos dos modos: $j = 1 \Rightarrow \omega_1 = \omega_x$, $k_1 = k_x \equiv k_0 n_x$ y $j = 2 \Rightarrow \omega_2 = \omega_y$, $k_2 = k_y \equiv k_0 n_y$, con $n_x \neq n_y$ por la birrefringencia del material²⁹. De esta manera, las ecuaciones de partida para este problema son:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\vec{P}_{1x}^{NL}}{\epsilon_0 c^2} \right) = \frac{1}{2} \left[\left\{ 2ik_x \vec{f}_{1x} \frac{da_{1x}}{dz} + \frac{\omega_x^2}{c^2} \chi_{1x}^{(1)} (\vec{f}_{1x} a_{1x} + \vec{f}_{2x} a_{2x}) \right\} e^{i(k_x z - \omega_x t)} + c.c. \right] \quad (2.33a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\vec{P}_{1y}^{NL}}{\epsilon_0 c^2} \right) = \frac{1}{2} \left[\left\{ 2ik_y \vec{f}_{1y} \frac{da_{1y}}{dz} + \frac{\omega_y^2}{c^2} \chi_{1y}^{(1)} (\vec{f}_{1y} a_{1y} + \vec{f}_{2y} a_{2y}) \right\} e^{i(k_y z - \omega_y t)} + c.c. \right] \quad (2.33b)$$

Para escribir el término de polarización no lineal, primero debemos introducir un campo eléctrico apropiado que considere los dos modos del problema. Tomamos, de ahora en adelante $\omega_x = \omega_y = \omega$, y consideramos el campo de cada modo sin separación de variables³⁰, escribiéndolo en la guía 1 como:

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left[\vec{E}_{1x}(\vec{r}) e^{i(k_x z - \omega t)} + \vec{E}_{1y}(\vec{r}) e^{i(k_y z - \omega t)} + c.c. \right]$$

En un medio centrosimétrico con simetría cúbica como el AlGaAs, existen sólo cuatro elementos independientes del tensor de susceptibilidad no lineal de tercer orden $\chi_{ijkl}^{(3)}$ ³¹.

$$\chi_{xxxx}^{(3)}, \chi_{yyyy}^{(3)}, \chi_{xyxy}^{(3)}, \chi_{xxyy}^{(3)}.$$

El término de polarización no lineal de tercer orden en la guía 1, tiene la siguiente forma [9, 49, 50]:

$$\vec{P}_1^{NL}(\vec{r}) = \epsilon_0 \chi_1^{(3)} |\vec{E}_1(\vec{r})|^2 \vec{E}_1(\vec{r})$$

²⁹Tanto para solitones discretos cúbicos como para discretos vectoriales, se usan arreglos fabricados de AlGaAs. Estos presentan una pequeña anisotropía la que se manifiesta en la dependencia del índice de refracción según la dirección de polarización.

³⁰Para una escritura más breve de las ecuaciones.

³¹Lejos de la resonancias sólo tres ya que, $\chi_{xxyy}^{(3)} = \chi_{xyxy}^{(3)}$.

En la expresión anterior hemos escrito la susceptibilidad de tercer orden sin especificación del modo, sólo para ahorrar notación. Luego, cuando sea necesario, expresaremos cada tensor según la interacción particular que genera. El desarrollo del término no lineal para el campo eléctrico propuesto es:

$$\begin{aligned} |\vec{E}_1(\vec{r})|^2 \vec{E}_1(\vec{r}) = & \frac{1}{2} \left[\frac{3}{4} \left(|\vec{E}_{1x}|^2 + 2 |\vec{E}_{1y}|^2 \right) \vec{E}_{1x} e^{i(k_x z - \omega t)} + \right. \\ & + \frac{3}{4} \left(|\vec{E}_{1y}|^2 + 2 |\vec{E}_{1x}|^2 \right) \vec{E}_{1y} e^{i(k_y z - \omega t)} + 3 \vec{E}_{1x}^2 \vec{E}_{1y}^* e^{i(2k_x - k_y)z - \omega t} + \\ & + 3 \vec{E}_{1x}^2 \vec{E}_{1y} e^{i(2k_x + k_y)z - 3\omega t} + 3 \vec{E}_{1y}^2 \vec{E}_{1x}^* e^{i(2k_y - k_x)z - \omega t} + \\ & \left. + 3 \vec{E}_{1y}^2 \vec{E}_{1x} e^{i(2k_y + k_x)z - 3\omega t} + \vec{E}_{1x}^3 e^{i(3k_x z - 3\omega t)} + \vec{E}_{1y}^3 e^{i(3k_y z - 3\omega t)} + c.c. \right] \end{aligned}$$

Al igual que en el caso cúbico anterior, la generación de tercera armónica es un proceso no resonante, por lo que nos concentramos sólo en los términos que estén en resonancia con la frecuencia fundamental ω , para ambas polarizaciones. Desde la expresión anterior diferenciamos entre modos, esencialmente, por la dirección de polarización. Para el modo 1 hemos tomado una dirección en \hat{x} y, para el modo 2, en \hat{y} . Con esto, podemos escribir los términos no lineales para cada modo, incorporando la expresión completa para el tensor de susceptibilidad no lineal, como:

$$\vec{P}_{1x}^{NL} = \frac{3\epsilon_0}{8} \left\{ \left[\left(\chi_{xxxx}^{(3)} |\vec{E}_{1x}|^2 + 2\chi_{xyxy}^{(3)} |\vec{E}_{1y}|^2 \right) \vec{E}_{1x} + \chi_{xyyx}^{(3)} \vec{E}_{1y}^2 \vec{E}_{1x}^* e^{-2i\Delta kz} \right] e^{i(k_x z - \omega t)} + c.c. \right\},$$

$$\vec{P}_{1y}^{NL} = \frac{3\epsilon_0}{8} \left\{ \left[\left(\chi_{yyyy}^{(3)} |\vec{E}_{1y}|^2 + 2\chi_{yxyx}^{(3)} |\vec{E}_{1x}|^2 \right) \vec{E}_{1y} + \chi_{yxyx}^{(3)} \vec{E}_{1x}^2 \vec{E}_{1y}^* e^{2i\Delta kz} \right] e^{i(k_y z - \omega t)} + c.c. \right\},$$

con $\Delta k \equiv k_x - k_y \equiv k_0(n_x - n_y) \equiv k_0 \Delta n$. Ambas expresiones para cada modo, tienen una misma estructura. Primero, existe un término no lineal de SPM

dado por $\chi_{jjjj}(\omega_j; \omega_j, \omega_j, -\omega_j) = \chi_{jjjj}(\omega_j; \omega_j, -\omega_j, \omega_j) = \chi_{jjjj}(\omega_j; -\omega_j, \omega_j, \omega_j)$ para $j = x, y$ ³². Esto resulta natural ya que, si tomamos a uno de los dos modos como nulo, las ecuaciones originarían la ecuación DNLS. Los términos no lineales siguientes, segundo y tercero, son términos propiamente vectoriales o de acoplamiento no lineal. Estos términos representan cuánto es capaz de contribuir el otro haz presente en el arreglo al primer haz. El primero de estos términos vectoriales es el de Modulación de Fase Cruzada (*cross-phase-modulation* (XPM)) dado por: $\chi_{jjkk}(\omega_j; \omega_j, \omega_k, -\omega_k) = \chi_{jjkk}(\omega_j; \omega_j, -\omega_k, \omega_k) = \chi_{jkjk}(\omega_j; \omega_k, \omega_j, -\omega_k) = \chi_{jkjk}(\omega_j; -\omega_k, \omega_j, \omega_k) = \chi_{jkkj}(\omega_j; \omega_k, -\omega_k, \omega_j) = \chi_{jkkj}(\omega_j; -\omega_k, \omega_k, \omega_j)$, para $j, k = x, y$ con $j \neq k$. Este término ayuda a aumentar el enfoque del primer haz mediante una modificación no lineal del índice de refracción³³. El segundo término no lineal vectorial es el de Mezcla de cuatro ondas (*four-wave mixing* (FWM)) dado por $\chi_{jjkk}(\omega_j; -\omega_j, \omega_k, \omega_k) = \chi_{jkjk}(\omega_j; \omega_k, -\omega_j, \omega_k) = \chi_{kkjj}(\omega_j; \omega_k, \omega_k, -\omega_j)$ para $j = x, y$ con $j \neq k$. Este término es responsable de la transferencia de energía entre los haces presentes en el arreglo³⁴. Para que este término exista es necesario que la frecuencia de ambos haces sea la misma. En ese sentido, se suele hablar de ésta como una interacción coherente³⁵.

En este tipo de cristales, por simetría, se cumplen las siguientes relaciones tensoriales:

$$\chi_{xxxx} = \chi_{yyyy}; \chi_{xyxy} = \chi_{yxyx}; \chi_{xxyy} = \chi_{yyxx}; \chi_{xyyx} = \chi_{yxyx}$$

³²Escribimos las frecuencias como ω_j y ω_k para comprender mejor la interacción no lineal entre modos distintos. Sin embargo, es claro que $\omega_j = \omega_k = \omega$.

³³ $n_x = n_{0x} + n_2 (|E_x|^2 + |E_y|^2)$ y $n_y = n_{0y} + n_2 (|E_y|^2 + |E_x|^2)$

³⁴Luego en el capítulo 5 demostraremos como este mecanismo ocurre.

³⁵Para solitones vectoriales cuadráticos no existe este término.

Definimos entonces, dos parámetros relevantes para este problema:

$$a \equiv \chi_{xxxx} = \chi_{yyyy}$$

$$b \equiv \chi_{xyxy} = \chi_{xyyx} = \chi_{yyxx}$$

El parámetro definido como "a" representa al término de SPM, en donde tres ondas de igual frecuencia e igual polarización generan, no linealmente, una cuarta onda de iguales características. El parámetro "b" representa al término de acoplamiento no lineal. Se conoce en la literatura que, materiales como el AlGaAs presentan este tipo de característica, en la cual el tensor no lineal es similar para estas interacciones de acoplamiento [42,54,55]. Esta notación nos permite escribir en una forma más simple las expresiones para la polarización no lineal de ambos modos como:

$$\frac{\vec{P}_{1x}^{NL}}{\epsilon_0} e^{-i\omega t} = \frac{3a}{4} \left[\left(|\vec{E}_{1x}|^2 + \frac{2b}{3a} |\vec{E}_{1y}|^2 \right) \vec{E}_{1x} + \frac{b}{3a} \vec{E}_{1y}^2 \vec{E}_{1x}^* e^{-2i\Delta kz} \right] e^{i(k_x z - \omega t)},$$

$$\frac{\vec{P}_{1y}^{NL}}{\epsilon_0} e^{-i\omega t} = \frac{3a}{4} \left[\left(|\vec{E}_{1y}|^2 + \frac{2b}{3a} |\vec{E}_{1x}|^2 \right) \vec{E}_{1y} + \frac{b}{3a} \vec{E}_{1x}^2 \vec{E}_{1y}^* e^{2i\Delta kz} \right] e^{i(k_y z - \omega t)}.$$

Antes de escribir las ecuaciones finales definimos, por simplicidad, dos nuevos parámetros:

$$A \equiv \frac{2b}{3a}; \quad B \equiv \frac{b}{3a} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{A}{2}$$

Procedemos ahora a escribir una primera forma de las ecuaciones DNLS-v desde (2.33a) y (2.33b), incluyendo el término no lineal para ambos modos. Notamos que, debido a la doble derivada temporal, los términos no lineales deben multiplicarse por un factor $-\omega^2$ para ambos modos. Para esto, dejamos de escribir la notación vectorial, incorporamos la separación de variables en las expresiones para el campo eléctrico, dejamos de lado el complejo conjugado, e incorporamos el término de polarización

no lineal con las definiciones ya antes realizadas. Introduciendo la notación:

$$a_{\alpha x} \equiv E_{\alpha}, \quad a_{\alpha y} \equiv F_{\alpha},$$

obtenemos:

$$2ik_x f_{1x} \frac{dE_1}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{1x}^{(1)} (f_{1x} E_1 + f_{2x} E_2) + \frac{3a\omega^2}{4c^2} \left[(|f_{1x}|^2 |E_1|^2 + \right. \\ \left. + A |f_{1y}|^2 |F_1|^2) f_{1x} E_1 + B f_{1y}^2 F_1^2 f_{1x}^* E_1^* e^{-2i\Delta kz} \right] = 0, \quad (2.34a)$$

$$2ik_y f_{1y} \frac{dF_1}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{1y}^{(1)} (f_{1y} F_1 + f_{2y} F_2) + \frac{3a\omega^2}{4c^2} \left[(|f_{1y}|^2 |F_1|^2 + \right. \\ \left. + A |f_{1x}|^2 |E_1|^2) f_{1y} F_1 + B f_{1x}^2 E_1^2 f_{1y}^* F_1^* e^{2i\Delta kz} \right] = 0. \quad (2.34b)$$

Al igual que en las derivaciones previas eliminamos la dependencia transversal, multiplicando por el campo transversal conjugado de cada ecuación³⁶, e integrando en el plano xy el área del arreglo. Con esto se definen las siguientes integrales del problema para $j, k = x, y$, con $j \neq k$:

$$p_j \equiv \int_{arr} |f_{1j}|^2 dx dy \\ V_j \equiv \frac{1}{p_j} \int_{arr} f_{2j} f_{1j}^* dx dy \\ N_{S,j} \equiv \frac{1}{p_j} \int_{arr} |f_{1j}|^4 dx dy \\ N_{X,j} \equiv \frac{1}{p_j} \int_{arr} |f_{1j}|^2 |f_{1k}|^2 dx dy \\ N_{F,j} \equiv \frac{1}{p_j} \int_{arr} f_{1k}^2 f_{1j}^{*2} dx dy$$

p_j es definida como la *integral de potencia* para el modo j con unidades de área; V_j es definida como la *integral de acoplamiento lineal* para el modo j ; $N_{S,j}$, $N_{X,j}$, y $N_{F,j}$, se definen como *integrales no lineales de Automodulación de Fase, Modulación de Fase Cruzada, y Mezcla de Cuatro Ondas*, respectivamente. Como las formas transversales

³⁶Por f_{1x}^* y f_{1y}^* para las ecuaciones (2.34a) y (2.34b), respectivamente.

de ambos modos son idénticas, las tres integrales no lineales poseen un idéntico valor numérico, es decir: $N \equiv N_S = N_X = N_F$. Asumiendo además un perfil transversal tipo Gaussiana, esta integral es aproximada por:

$$N \approx \frac{\pi/4}{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

Es conveniente introducir algunas constantes del problema usando algunas definiciones formales de la óptica:

1. Coeficiente de propagación

$$n_j^2 \equiv 1 + \chi_j^{(1)} \Rightarrow C_j \equiv \frac{\omega^2}{2k_j c^2} \chi_j^{(1)} = \frac{k_0}{2n_j} (n_j^2 - 1) \approx \frac{k_0}{2} \left(n_k - \frac{1}{n_0} \right) \quad (2.35)$$

2. Coeficiente de acoplamiento lineal³⁷:

$$\kappa \equiv \frac{\omega^2}{2k_j c^2} \chi_j^{(1)} V_j \quad (2.36)$$

3. Coeficiente no lineal:

$$\frac{3a\omega^2}{8k_j c^2} N = \frac{1}{2} n_2 k_0 = \frac{\hat{n}_2 n_0 k_0}{4\eta_0} \quad (2.37)$$

Con n_0 el valor nominal o promedio del índice de refracción³⁸, y $\hat{n}_2 \equiv 2\eta n_2$. Escribamos entonces nuevamente las ecuaciones DNLS-v en un formato más simplificado, agrupando todo lo anterior y generalizando a N guías:

$$i \frac{dE_n}{dz} + C_x E_n + \kappa (E_{n+1} + E_{n-1}) + \frac{n_2 k_0}{2} \left[(|E_n|^2 + A |F_n|^2) E_n + B F_n^2 E_n^* e^{-2i\Delta k z} \right] = 0,$$

$$i \frac{dF_n}{dz} + C_y F_n + \kappa (F_{n+1} + F_{n-1}) + \frac{n_2 k_0}{2} \left[(|F_n|^2 + A |E_n|^2) F_n + B E_n^2 F_n^* e^{2i\Delta k z} \right] = 0.$$

³⁷El coeficiente de acoplamiento lineal lo hemos considerado igual para ambos modos debido a que, estamos suponiendo un perfil transversal similar para ambos haces.

³⁸En guías de AlGaAs $n_0 = 3.3$.

Buscamos, en este punto, eliminar la dependencia exponencial de las ecuaciones. Para ésto debemos realizar una transformación de fase para ambos modos, de la siguiente forma:

$$E_n \rightarrow E_n * e^{ik_0(n_v - n_0^{-1})z/2}; \quad F_n \rightarrow F_n * e^{ik_0(n_x - n_0^{-1})z/2}$$

Además, debemos asumir la siguiente aproximación para una birrefringencia débil:

$$e^{ik_0(n_j/2 \pm \Delta n)z} \approx e^{ik_j z/2}.$$

Resumiendo todo lo anterior obtenemos las ecuaciones DNLSE-v como:

$$i \frac{dE_n}{dz} + \frac{\Delta k}{2} E_n + \kappa (E_{n+1} + E_{n-1}) + \frac{n_2 k_0}{2} \times \left[(|E_n|^2 + A |F_n|^2) E_n + B F_n^2 E_n^* \right] = 0, \quad (2.38a)$$

$$i \frac{dF_n}{dz} - \frac{\Delta k}{2} F_n + \kappa (F_{n+1} + F_{n-1}) + \frac{n_2 k_0}{2} \times \left[(|F_n|^2 + A |E_n|^2) F_n + B E_n^2 F_n^* \right] = 0, \quad (2.38b)$$

donde las unidades de esta ecuación son:

$$[E_n, F_n] = V m^{-1}; \quad [z] = m; \quad [\Delta k, \kappa, k_0] = m^{-1}; \quad [n_2] = m^2 W^{-1}; \quad [A, B] = 1.$$

Para adimensionalizar estas ecuaciones, hacemos la siguiente transformación en las amplitudes de los modos:

$$(E_n, F_n) = \sqrt{\frac{\Delta n}{n_2}} * (u_n, v_n)$$

Con esto llegamos a la forma completamente adimensional de las ecuaciones DNLS-v:

$$i \frac{du_n}{d\xi} + u_n + V (u_{n+1} + u_{n-1}) + (|u_n|^2 + A |v_n|^2) u_n + B v_n^2 u_n^* = 0, \quad (2.39a)$$

$$i \frac{dv_n}{d\xi} - v_n + V (v_{n+1} + v_{n-1}) + (|v_n|^2 + A |u_n|^2) v_n + B u_n^2 v_n^* = 0, \quad (2.39b)$$

con

$$\xi \equiv \frac{k_0 \Delta n}{2} * z, \quad V \equiv \frac{2\kappa}{k_0 \Delta n},$$

tal que:

$$[u_n, v_n] = [\xi] = [V] = [A] = [B] = 1$$

Con las ecuaciones de esta forma, es fácil definir la potencia adimensional (P_0) como la suma de las contribuciones de los campos de ambos modos en el arreglo:

$$P_0 \equiv \sum_n (|u_n|^2 + |v_n|^2) \quad (2.40)$$

Además, escribimos la segunda cantidad conservada de este sistema, el Hamiltoniano H como,

$$H = - \sum_n \left[V (u_n^* u_{n+1} + u_n u_{n+1}^* + v_n^* v_{n+1} + v_n v_{n+1}^*) + |u_n|^2 - |v_n|^2 + \frac{1}{2} (|u_n|^4 + |v_n|^4) + A |u_n|^2 |v_n|^2 + \frac{B}{2} (v_n^2 u_n^{*2} + u_n^2 v_n^{*2}) \right] \quad (2.41)$$

Las ecuaciones de movimiento (2.39a) y (2.39b) se obtienen desde H , mediante:

$$i \frac{du_n}{d\xi} = \frac{\partial H}{\partial u_n^*}; \quad i \frac{dv_n}{d\xi} = \frac{\partial H}{\partial v_n^*}.$$

Para obtener una expresión realista de la potencia desde el punto de vista experimental, consideramos la definición de Intensidad (I) y de Potencia (P) formales, desde la teoría óptica [56]:

$$I \equiv \frac{1}{2\eta} |\vec{E}_{total}(\vec{r}, t)|^2 = \frac{1}{2\eta} \sum_n (|E_n|^2 + |F_n|^2)$$

$$P \equiv I * A_{eff} = \frac{A_{eff}}{2\eta} * \sum_n (|E_n|^2 + |F_n|^2)$$

Usando esto último, y la definición de P_0 , obtenemos la potencia P en unidades reales usando valores de parámetros experimentales típicos, como los de la Ref. [42],

$$P = \frac{\Delta n A_{eff}}{\hat{n}_2} * P_0 \approx 56 * P_0 [W]. \quad (2.42)$$

Capítulo 3

Transferencia controlada de energía para arreglos cúbicos

3.1. Introducción

En arreglos de guías de ondas ópticas con una no linealidad de tercer orden, la ecuación DNLS (2.17) ha demostrado ser de gran valor para la predicción de una serie de fenómenos particulares de los sistemas discretos no lineales. En 1988, Christodoulides y Joseph [57] predijeron la existencia de estructuras localizadas en un arreglo de este tipo, estructuras que más adelante se conocieron como *solitones discretos ópticos*. Una década después se observó, por primera vez, la formación de un solitón discreto en un arreglo de guías de ondas no lineales semiconductoras de AlGaAs [41]. Luego vinieron estudios de las propiedades de estos arreglos. Por ejemplo, Darmanyán *et al.* [58] realizaron el estudio de la inestabilidad de ondas planas (inestabilidad modulacional (MI)), concepto que establece que, cuando hay inestabilidad, es posible la formación de estructuras localizadas como los solitones discretos. Recientemente, Meier *et al.* observaron experimentalmente este concepto [59], concordando con la predicción teórica de filamentación de un haz ancho u onda plana. Otro fenómeno interesante en sistemas discretos son las oscilaciones de Bloch.

Por ejemplo, cuando un campo eléctrico estático es aplicado perpendicularmente a una red semiconductor, las partículas cargadas no reaccionan a la fuerza eléctrica como es esperado. En cambio, se genera una corriente oscilante [60]. Peschel *et al.* [61] demostraron teóricamente que, oscilaciones de Bloch pueden ser observadas en este tipo de arreglos discretos ópticos, dada una variación creciente de las constantes de propagación de las guías en el arreglo. Un poco más tarde, Morandotti *et al.* [62] observaron experimentalmente esta predicción teórica en arreglos de AlGaAs. Luego se estudiaron las propiedades lineales de este tipo de arreglos, concentrándose los esfuerzos en el tipo de difracción característica [63–65]. Cuando la luz es inyectada en forma perpendicular a la cara incidente del arreglo (ángulo nulo), o con un ángulo pequeño (por ejemplo ~ 0.5 grados), la difracción es *normal* y el arreglo puede exhibir auto-enfoque discreto el cual, eventualmente, conduce a la formación de un solitón discreto *brillante*¹. Si inclinamos aún más el haz al momento de incidirlo sobre el arreglo (por ejemplo ~ 3 grados), se induce un corrimiento de fase entre las guías adyacentes. Ésto es lo requerido para generar difracción anómala y, por ende, auto-desenfoque discreto a altas potencias. Con estas condiciones es posible observar la formación de un solitón discreto *oscuro*², incluso en un medio con no linealidad Kerr positiva [66].

Con respecto a la utilización de solitones ópticos discretos para realizar operaciones lógicas en un posible computador óptico, se han hecho numerosos aportes, esencialmente teóricos, de esquemas de control, amplificación y switching, para arreglos cúbicos no lineales. Królikowski *et al.* [52] en 1993 propusieron, mediante una diferencia de fase entre guías vecinas (experimentalmente esto se refiere al ángulo),

¹Brillante se refiere a que la amplitud del solitón abarca pocos sitios del arreglo localizándose el máximo de amplitud en el centro del solitón, siendo los demás sitios del arreglo nulos.

²Oscuro debido a que todo el arreglo tiene una amplitud constante excepto algunos sitios de red los cuales forman un solitón invertido con un centro de amplitud nula.

direccionar un haz tipo solitón a cualquier sitio del arreglo. Más tarde Aceves *et al.* [67] demostraron otro mecanismo de control en el cual es posible usar colisiones entre dos solitones para generar estados localizados en un sitio del arreglo particular. Además, observaron numéricamente que, es posible localizar a un solitón discreto en diferentes sitios del arreglo variando la potencia incidente. Królikowski y Kivshar [68] en 1996, utilizaron un arreglo homogéneo con sólo una guía de distinto acoplamiento lineal, proponiendo un esquema capaz de reflejar, refractar, y atrapar un haz que incide sobre la guía "impureza". Más tarde Bang y Miller [69] propusieron un mecanismo de switching que utilizaba la discretitud del arreglo, sin embargo demostraron un mecanismo de switching no controlado para un arreglo de guías homogéneas.

Utilizar la discretitud se refiere a usar las propiedades características de los sistemas discretos como, por ejemplo, el potencial de Peierls-Nabarro. Este tipo de potencial auto-inducido fue estudiado para arreglos cúbicos por Kivshar y Campbell [15], esencialmente da cuenta de la barrera de energía que el solitón discreto debe sobrepasar para poder desplazarse transversalmente en el arreglo³. Recientemente fue publicado un trabajo que calcula este potencial para sistemas discretos con una no linealidad saturable [70]. En él se predice una dinámica oscilatoria de las propiedades de estabilidad dependiendo de la amplitud del solitón. También otros trabajos sobre dinámica han sido realizados. Por ejemplo, en Ref. [71] se estudian los límites entre excitaciones iniciales muy anchas que tienen una evolución típicamente continua, y excitaciones estrechas que tienen una dinámica discreta característica. Además, se estudia la variación de la salida del haz para distintas posiciones de incidencia, barriendo la posición entre una guía hasta una posición entre dos guías. Para una revisión detallada de la formación y de las propiedades dinámicas de solitones discretos

³A diferencia del caso continuo, aquí no hay simetría de invariancia traslacional.

ópticos, ver Refs. [2, 3, 7].

La mayor parte de la investigación sobre solitones discretos ópticos ha sido desarrollada en el marco de la “teoría de modos acoplados” (Cap. 2). Bajo esta descripción, el haz es descrito por modos individuales de cada guía de onda que evanescentemente se acoplan con las guías vecinas. Para una descripción más detallada de la dinámica, considerando otros modos que pueden generarse en el arreglo, se utiliza un análisis llamado de Floquet-Bloch [72] el cual analiza la estructura periódica óptica. Este análisis predice que el espectro de la constante de propagación es dividido en *bandas*, y separadas por *gaps*, en los cuales no hay propagación de modos. De esta manera, es importante tener presente que el estudio de la dinámica discreta no lineal, usando ecuaciones tipo Schrödinger, describe sólo la primera de esas bandas donde la energía está concentrada en las guías o en los sitios del arreglo⁴. La geometría en la cual la mayoría de los experimentos son realizados favorecen la excitación de la primera banda, lo que explica el éxito de la teoría de modos acoplados dada por ecuaciones tipo DNLS como las que usaremos en esta tesis. El diagrama de bandas presenta zonas en las cuales se predice una velocidad de propagación nula para diferentes modos, dependiendo de la banda de existencia. Solitones discretos de esas características son conocidos como *solitones gap* [73, 74] y son compuestos de dos ondas, una de avance y otra de retroceso, las cuales se acoplan no linealmente (por medio de modulación de fase cruzada) experimentando ambas scattering de Bragg debido a la estructura periódica.

Finalmente, y como ejemplo de otro tipo de solitón discreto óptico, se han predicho los *solitones discretos de cavidad* [75]. Estos han sido propuestos como una forma de mejorar el proceso de integración con otros dispositivos ópticos ya que

⁴En la Ref. [72] se pueden observar diferentes formas espaciales de modos de bandas superiores excitadas experimentalmente.

disminuirían el espacio y la potencia requerida.

Arreglos de guías de ondas ópticas en dos dimensiones han sido muy poco explorados aún. Sólo recientemente se publicó un primer trabajo que analiza las propiedades lineales de un arreglo de guías de ondas fabricadas de Silicio [76]. También este año, Hudock *et al.* [77] analizaron teóricamente las propiedades lineales y no lineales de este tipo de arreglos, para un tipo de no linealidad saturable, y sugirieron que existe en ellos una dinámica más compleja y versátil que en los arreglos unidimensionales.

3.2. Teoría y Resultados

A continuación detallaremos el estudio realizado para este tipo de arreglos no lineales cúbicos, describiendo los trabajos (publicaciones y presentaciones en congresos) que se han originado, en el transcurso de esta tesis [78–82].

3.2.1. Arreglos Homogéneos

La ecuación de Schrödinger no lineal discreta derivada en el capítulo 2, es dada por

$$i \frac{du_n}{dz} + V(u_{n+1} + u_{n-1}) + \gamma |u_n|^2 u_n = 0, \quad (3.1)$$

donde u_n representa la envolvente normalizada efectiva del campo eléctrico en la n -ésima guía de ondas; V es el parámetro normalizado de acoplamiento lineal proporcional a la integral de superposición de las evanescentes de los campos eléctricos de guías vecinas; y z es la distancia de propagación a lo largo del arreglo de guías⁵. El parámetro no lineal γ representa la no linealidad efectiva de las guías de ondas y es proporcional al coeficiente no lineal Kerr característico de sistemas ópticos no lineales de tercer orden. En la figura 3.1 se muestra un esquema típico de un arreglo cúbico de guías de ondas ópticas.

La ecuación DNLS presenta dos importantes cantidades conservadas, la Potencia (P) y el Hamiltoniano (H), dadas por

$$P = \sum_n |u_n(z)|^2, \quad (3.2)$$

$$H = - \sum_n \left\{ V(u_n u_{n+1}^* + u_n^* u_{n+1}) + (\gamma/2) |u_n|^4 \right\}. \quad (3.3)$$

Ambas cantidades son muy importantes como medio de obtención de las propiedades dinámicas del sistema y, también, como método de control del cálculo numérico, ya

⁵Cambiamos ξ por z por simplicidad de notación desde la ecuación (2.17).

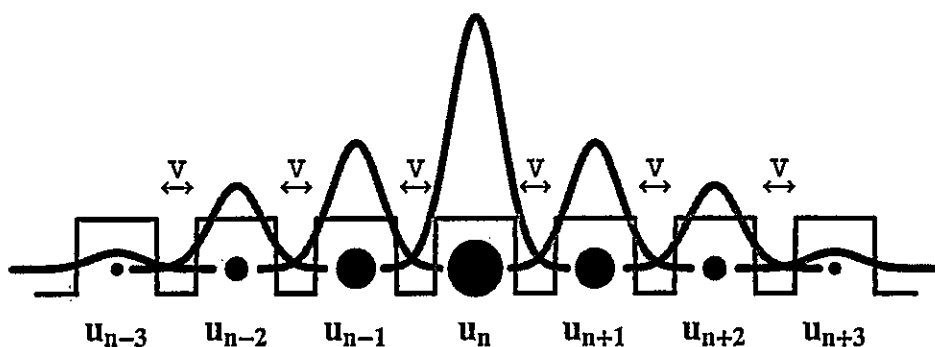


Figura 3.1: Esquema de un arreglo de guías de ondas cúbicas homogéneas, debilmente acopladas.

que estas cantidades deben conservarse a través de la propagación del solitón en la dirección z .

Para estudiar la respuesta del arreglo homogéneo frente a una variación de la potencia inicial y/o del ángulo inicial, debemos hacer un barrido numérico. Para esto, tomamos en consideración trabajos anteriores donde se ha estudiado el problema de switching en estos arreglos. Desde la Ref. [52] sabemos que si le damos un *kick* o golpe inicial, al solitón éste debiera moverse transversalmente. Esto, teóricamente hablando, se traduce en dar una diferencia de fase entre sitios vecinos del arreglo para el perfil inicial, generando un retraso o adelantamiento de los sitios entre sí. Como consecuencia, el haz se propaga inclinadamente en forma "diagonal" en el arreglo⁶. Como resultado, para valores pequeños del *kick*, la salida (*output*) es cercana a la posición de ingreso (*input*). Para *kicks* más grandes, la salida es más lejana⁷. Experimentalmente hablando, esto se traduce en el ángulo de incidencia en el arreglo. Por otro lado, desde las Refs. [67] y [69], sabemos que la variación de la potencia

⁶Diagonal quiere decir que posee un ángulo $\neq 0$ respecto de la dirección longitudinal.

⁷El valor del *kick* puede ser entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. Para valores mayores que $|\pi/2|$ el efecto del arreglo es desenfocante debido a la que la difracción es anómala [63].

inicial se traduce en que, para altas potencias, la no linealidad genera un efecto de auto-enfocamiento lo que produce que al haz le “cueste más saltar” a las guías vecinas. Por el contrario, para potencias más bajas, el haz puede viajar más lejos transversalmente desde la posición inicial. Para poder visualizar esta dinámica típica de sistemas discretos no lineales, debemos seleccionar un perfil inicial que nos permita realizar nuestras simulaciones numéricas. Para ésto, tomamos un perfil tipo secante hiperbólica⁸ fuertemente localizado en sólo tres sitios del arreglo:

$$u_n(0) = A \operatorname{sech}[A(n - n_c)/\sqrt{2}] e^{-ik(n-n_c)}, \quad (3.4)$$

para $n - n_c = 0, \pm 1$, y $u_n(0) = 0$ para los demás sitios del arreglo, con n_c como la

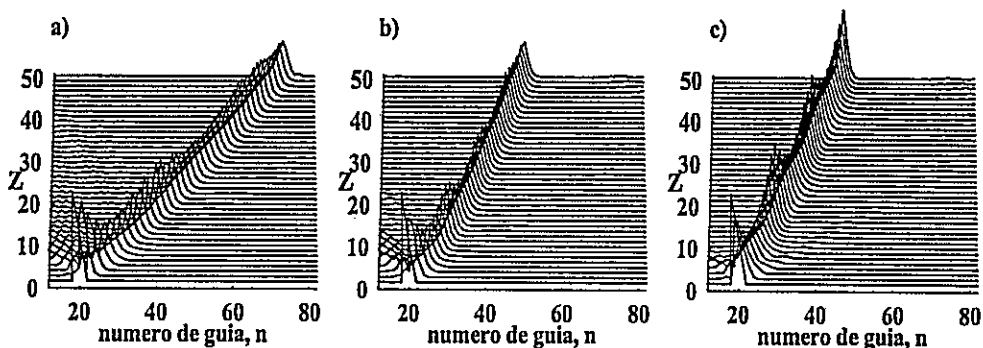


Figura 3.2: Simulaciones numéricas de la ec. (3.1) con el *ansatz* (3.4) como condición inicial, para un arreglo de 151 guías. a) $A = 1.2$, $k = -1.4$. b) $A = 1.5$, $k = -1.4$. c) $A = 1.2$, $k = -0.5$.

guía central del *input*. El parámetro k , representa el *kick* o la velocidad transversal del haz, en analogía con la aproximación continua. En la figura 3.2 se muestran tres

⁸Se suele usar este tipo de perfil inicial para arreglos cúbicos ya que las ecuaciones tipo DNLS no poseen soluciones analíticas exactas, y este *ansatz* se obtiene al discretizar la solución exacta de la ecuación NLS.

situaciones distintas en donde hemos variado el *kick* inicial (k), y la amplitud inicial (A). Para estas simulaciones se ha escogido un arreglo de 151 guías de ondas y una distancia máxima de propagación de $z_{max} = 50$. Se observa que la variación creciente de la amplitud inicial y decreciente del *kick* inicial, genera que el *output* del haz ocurra más cerca de la posición *input*. Por el contrario, una variación decreciente de la amplitud inicial y creciente del *kick* inicial, producen que el *output* se produzca en sitios más lejanos en el arreglo. Como hemos observado, utilizando los parámetros

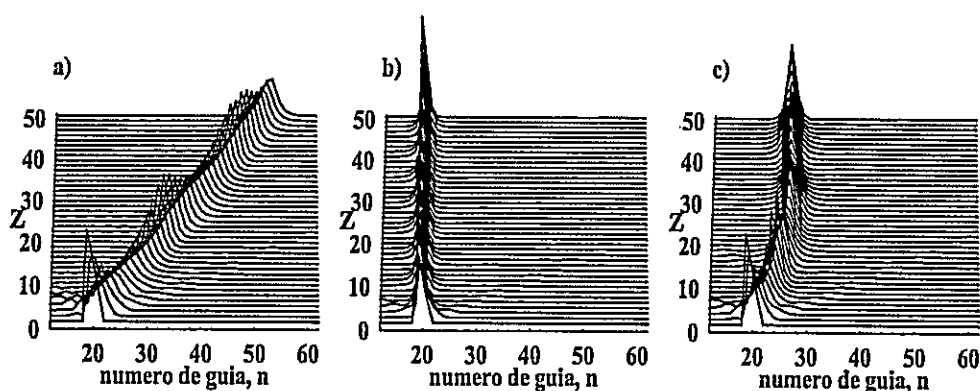


Figura 3.3: Simulaciones numéricas de la ec. (3.1), con el *ansatz* (3.4) como condición inicial, para un arreglo de 151 guías. a) $A = 1.15$, $k = -0.5$. b) $A = 1.5$, $k = -0.5$. c) $A = 1.315$, $k = -0.5$.

iniciales de nuestro *ansatz*, podemos controlar, en principio, la salida o *output* del solitón discreto en el arreglo. Sin embargo, existe otra característica dinámica propia de los sistemas discretos que nos permite controlar aún más la posición final del haz, y que será el concepto en el cual trabajaremos en esta tesis. En la figura 3.3a se observa la conducta “diagonal” típica recién descrita en la fig. 3.2 para un ángulo fijo y una potencia moderada⁹. Si aumentamos drásticamente la potencia inicial para un

⁹Es importante destacar que para potencias bajas el término no lineal es despreciable provocando

ángulo dado (figura 3.3b) podemos provocar que el haz quede atrapado en la posición inicial, desacoplándose del resto del arreglo. Esto se debe a que el término no lineal pasa a ser el predominante en la ecuación (3.1) mientras que, el acoplamiento lineal entre vecinos se hace despreciable. Esta conducta de auto-focalización es producto de la no linealidad de las guías y es particular de los sistemas discretos. Para un ángulo inicial dado, en sistemas continuos no es posible de encontrar este tipo de dinámica ya que son invariantes bajo traslaciones y rotaciones a diferencia de los sistemas discretos.

La figura 3.3c nos muestra un concepto aún más interesante, que es lo que denominamos como "switching curvado". Este tipo de switching es propio de los sistemas discretos y se da para valores de la potencia intermedios entre los de la propagación diagonal, y los de desacople. La razón por la cual se produce este tipo de switching será explicada más adelante, cuando desarrollemos el concepto de Potencial de Peierls-Nabarro para este tipo de arreglo. Es en este switching en que nos concentraremos en esta tesis ya que, a mi juicio responde de manera muy satisfactoria a la búsqueda de soluciones para sistemas multi-puertos o de localización de excitaciones tipo solitón discreto en guías ó sitios particulares. El switching diagonal, a mi juicio, no responde satisfactoriamente como esquema multi-puerto, ya que es altamente dependiente de las dimensiones longitudinales del arreglo.

3.2.2. Barrido numérico para arreglos homogéneos

Presentamos a continuación los resultados obtenidos al realizar barridos numéricos de la amplitud inicial dado un ángulo fijo (fig. 3.4), y barridos del *kick* inicial dado una amplitud fija (fig. 3.5). El barrido es realizado en las regiones de parámetros que el haz difracte en el arreglo sin la posibilidad de formar un solitón discreto, por lo que es necesario considerar potencias medias o medias altas.

(A, k) desde donde se observa el switching curvado hasta la situación de desacople, lo que implica que no hay switching o transferencia de energía a otros sitios del arreglo. Estos barridos consisten en obtener la posición del centro del haz al final del arreglo.

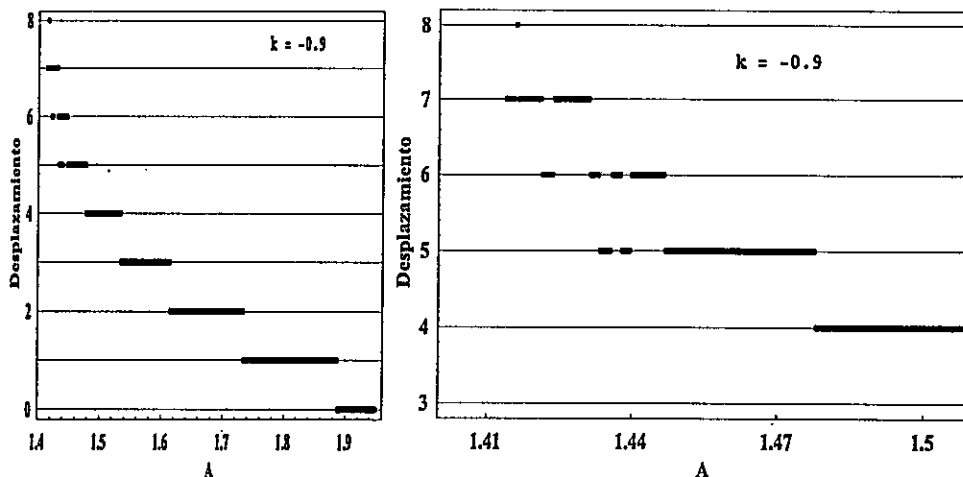


Figura 3.4: Barrido de la amplitud A para $k = -0.9$ para un arreglo homogéneo de 111 guías de ondas y $z_{max} = 45$. $V = \gamma = 1$. Izq.: Barrido completo. Der.: Acercamiento de la zona no controlada.

Los resultados muestran una estructura tipo escalera para sitios próximos al sitio inicial. Luego, para ciertas amplitudes o ángulos, la estructura no es monótonica y el switching no es controlado. Se aprecia en ambas figuras que, para arreglos homogéneos, no es posible controlar la transferencia de energía más allá de la guía 6 para un barrido de la amplitud, y de la guía 4 para un barrido del ángulo. Esto ratifica los resultados obtenidos previamente por Aceves *et al.* [67] y por Bang y Miller [69]. En la figura 3.6 se puede apreciar cómo una pequeña variación de la amplitud da como resultado un switching no controlado, observándose una respuesta caótica del arreglo homogéneo.

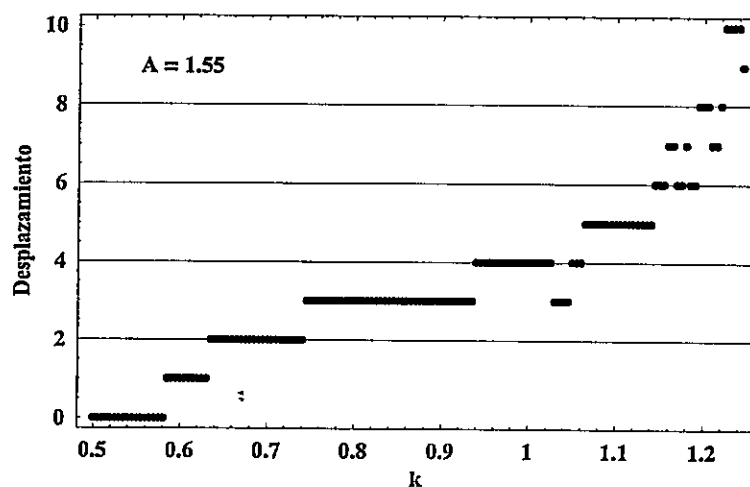


Figura 3.5: Barrido del *kick* k para $A = 1.55$, para un arreglo homogéneo de 111 guías de ondas y $z_{max} = 45$. $V = \gamma = 1$.

La observación de los resultados de los barridos numéricos obtenidos en arreglos homogéneos, nos hace plantear la principal hipótesis de esta tesis: obtener un esquema de switching curvado en el cual el número de guías controladas sea superior al obtenido para arreglos homogéneos.

3.2.3. Modos fuertemente localizados

Derivamos en esta sección las formas aproximadas de un tipo de modo no lineal de este sistema¹⁰. Para ésto, usamos el concepto de *modos fuertemente localizados* (MFL) en donde consideramos excitaciones estrechas, muy localizadas, con el objetivo de realizar ciertos cálculos analíticos, para obtener una mejor comprensión de la dinámica en estos arreglos discretos no lineales. Debemos definir primero dos tipos de modos fundamentales, el modo *impar* y el modo *par*. Un modo *impar* es aquel que tiene su centro en la posición de una guía o de un sitio; un modo *par* en

¹⁰Recordemos que el solitón discreto puede ser entendido como un modo del sistema no lineal.

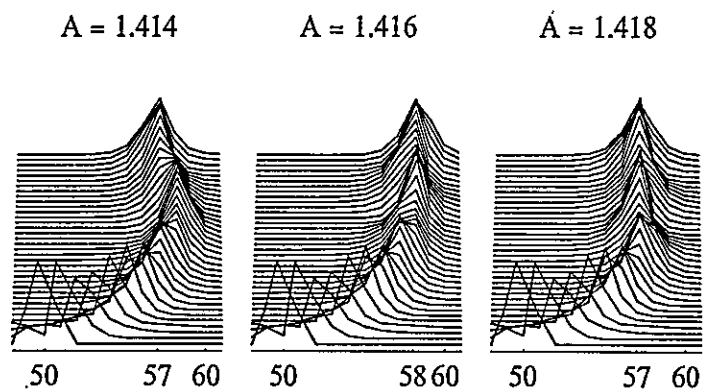


Figura 3.6: Ejemplo de switching no controlado, para el barrido de la Fig. 3.4.

cambio, corresponde a un modo que está centrado entre 2 guías o entre dos sitios del arreglo discreto. A medida que el solitón discreto viaja transversalmente a través del arreglo, va cambiando su configuración espacial, pasando desde configuraciones impares a pares, y viceversa, hasta quedar localizado en una guía o hasta llegar al final del arreglo. En la figura 3.7 se observa un diagrama de este tipo de dinámica. Ambos modos pueden ser entendidos como dos configuraciones diferentes de un único

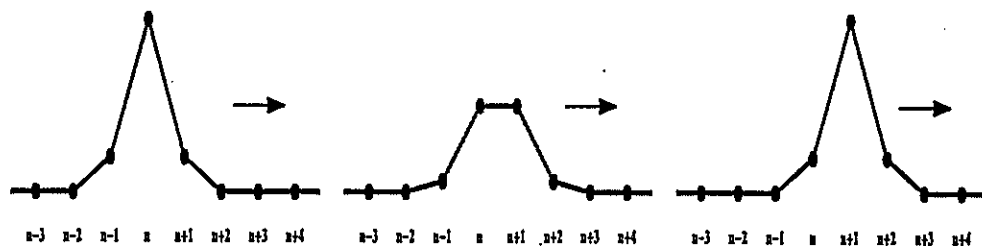


Figura 3.7: Dinámica transversal de modos impares y pares.

modo en distintos instantes de tiempo o del espacio. Es claro desde esta figura que, estamos pensando en modos pares e impares brillantes y no escalonados. Los modos

no escalonados (unstaggered) son aquellos en los cuales no existe diferencia de fase entre los sitios vecinos. En cambio, los modos escalonados (staggered), son aquellos en los cuales existe una diferencia de fase π entre sitios vecinos. En la presente tesis estudiaremos sólo la dinámica de modos brillantes no escalonados, dejando el estudio de los modos escalonados como propuesta de un trabajo futuro para medios saturables [70].

Modos impares

Consideramos MFL's con sólo tres sitios excitados de la forma:

$$u_n(z) = u_n e^{i\lambda z} \approx u_0 \{ \dots, 0, \epsilon e^{ik}, 1, \epsilon e^{-ik}, 0, \dots \} e^{i\lambda z}, \quad (3.5)$$

con u_0 como la amplitud del modo; k el *kick* inicial aplicado al modo; y λ la constante de propagación longitudinal. ϵ es un parámetro pequeño que nos dice cuán localizado es el modo. Además, y es función de los parámetros del arreglo y de los parámetros del modo. Substituimos entonces la expresión (3.5) en la ecuación (3.1) y mantenemos sólo los términos de orden lineal en ϵ en las etapas siguientes ($\epsilon^2 \rightarrow 0$). Haciendo esto, se puede demostrar que

$$\lambda = 2\epsilon V \cos(k) + \gamma u_0^2, \quad \epsilon = V \cos(k) / \lambda,$$

por lo que es directo encontrar que:

$$\lambda \approx \gamma u_0^2 \Rightarrow \epsilon \approx \frac{V \cos(k)}{\gamma u_0^2}. \quad (3.6)$$

Modos pares

En este caso, el MFL tiene la forma:

$$\tilde{u}_n(z) = \tilde{u}_n e^{i\tilde{\lambda}z} \approx \tilde{u}_0 \{ \dots, 0, \tilde{\epsilon} e^{ik}, 1, e^{-ik}, \tilde{\epsilon} e^{-2ik}, 0, \dots \} e^{i\tilde{\lambda}z} \quad (3.7)$$

con \tilde{u}_0 como la amplitud del modo par; k el *kick* inicial; $\tilde{\lambda}$ la constante de propagación longitudinal del modo par; y $\tilde{\epsilon}$ es un parámetro pequeño a determinar en términos de los parámetros del sistema. Haciendo la misma substitución anterior en la ecuación DNLS, y manteniendo las expresiones lineales en el parámetro $\tilde{\epsilon}$, obtenemos lo siguiente

$$\tilde{\lambda} = (1 + \tilde{\epsilon}) V \cos(k) + \gamma \tilde{u}_0^2, \quad \tilde{\epsilon} = V \cos(k) / \tilde{\lambda},$$

con lo cual,

$$\tilde{\lambda} \approx V \cos(k) + \gamma \tilde{u}_0^2 \Rightarrow \tilde{\epsilon} \approx \frac{V \cos(k)}{V \cos(k) + \gamma \tilde{u}_0^2}. \quad (3.8)$$

Es claro desde las ecuaciones (3.6) y (3.8) que para satisfacer realmente el concepto de modos fuertemente localizados, la contribución no lineal dada por los términos γu_0^2 y $\gamma \tilde{u}_0^2$ debe ser mucho más grande que la contribución lineal dada por el término $V \cos(k)$.

3.2.4. Potencial de Peierls-Nabarro para arreglos cúbicos

Buscando entender más profundamente las propiedades dinámicas de este tipo de arreglo realizamos una estimación cualitativa del Potencial, o Barrera de Peierls-Nabarro (PPN o BPN), en el contexto del modelo discreto dado por la ecuación DNLS, utilizando teoría de perturbaciones. Estudiamos el caso de MFL's que se propagan en un arreglo de guías homogéneas con un acoplamiento lineal entre ellas idéntico a lo largo de todo el arreglo dado por las ecuaciones (3.1), (3.2), y (3.3). Debido a la discretitud, este sistema sufre una suerte de pérdida de invariancia translacional, siendo necesario dar una diferencia de fase entre sitios vecinos o un *kick* al modo para que éste se mueva transversalmente en el arreglo. Otra forma de entender este concepto es considerar que, debido a la discretitud de la red, el modo localizado "ve" o "siente" una barrera de potencial (la BPN) cuya altura depende de la

discretitud efectiva del sistema visto por la excitación [15]. Esto quiere decir que, la BPN es una barrera auto-inducida producto de la no linealidad del arreglo (es decir por la presencia del modo), y producto de la discretitud del sistema, lo que genera una dinámica propiamente discreta como se muestra en las figuras 3.3 y 3.7. Debido a esto, es fácil entender que la BPN será más pequeña para modos más anchos ya que éstos “verán” o “sentirán” menos la discretitud del sistema, a diferencia de modos más estrechos los que serán mayormente afectados por la discretitud. Esta es una de las razones por las cuales en la presente tesis consideramos siempre, tanto para cálculos analíticos como numéricos, excitaciones muy localizadas sólo en tres sitios del arreglo. Esto nos asegura que los resultados reflejarán fielmente la dinámica discreta.

Una forma aproximada de obtener el PPN es calculando la diferencia de los valores del Hamiltoniano para modos pares e impares [15, 70], considerando ambos modos como estados diferentes de un único modo, los cuales tienen su centro corrido por medio sitio a lo largo del arreglo. Esto implica considerar la potencia de ambos modos como idéntica, ya que esta cantidad es una cantidad conservada a lo largo de la propagación. Calculamos entonces la barrera de Peierls-Nabarro manteniendo términos de orden lineal en los parámetros pequeños ϵ y $\tilde{\epsilon}$. Primero calculamos la potencia para cada uno de los modos:

$$P_{impar} = u_0^2 + O(\epsilon^2), \quad P_{par} = 2\tilde{u}_0^2 + O(\tilde{\epsilon}^2). \quad (3.9)$$

Exigimos ahora la condición de igualdad de potencia para ambos modos, obteniendo la siguiente relación entre las amplitudes u_0 y \tilde{u}_0 :

$$P_0 \equiv P_{impar} = P_{par} \Rightarrow u_0^2 \approx 2\tilde{u}_0^2. \quad (3.10)$$

Procedemos a continuación a calcular los respectivos Hamiltonianos en esta aproxi-

mación de MFL's. Nuevamente consideramos sólo los términos de primer orden en los parámetros pequeños, obteniéndose:

$$H_{impar} \approx -\frac{\gamma}{2} u_0^4 + O(\epsilon^2), \quad (3.11)$$

$$H_{par} \approx -\gamma \tilde{u}_0^4 - 2V \cos(k) \tilde{u}_0^2 + O(\tilde{\epsilon}^2) \approx -\frac{\gamma}{4} u_0^4 - V \cos(k) u_0^2 + O(\epsilon^2). \quad (3.12)$$

Ahora, una vez calculado los Hamiltonianos aproximados para ambos modos, estamos en condiciones de hacer una estimación analítica de la BPN. Para ello restamos estas cantidades, obteniendo la siguiente expresión para la barrera:

$$\Delta^{(3)} = H_{impar} - H_{par} \approx -\frac{\gamma}{4} u_0^4 + V \cos(k) u_0^2 \cong -\frac{\gamma}{4} P_0^2 + V \cos(k) P_0. \quad (3.13)$$

El aporte de este cálculo, en comparación con el anterior realizado por Kivshar

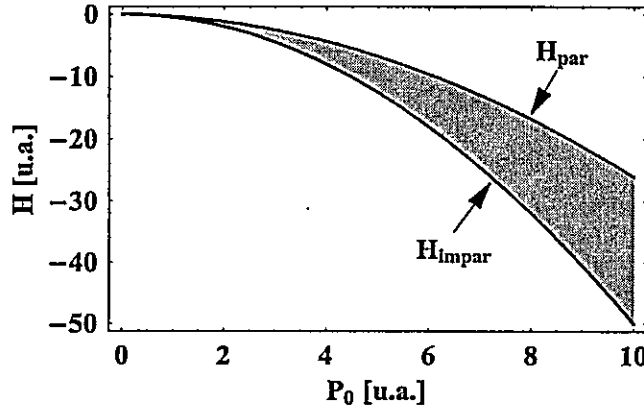


Figura 3.8: Hamiltoniano versus Potencia para ambos modos en unidades adimensionales. La región pintada representa la barrera de Peierls-Nabarro.

y Campbell [15], es que considera un término extra en la derivación. Este nuevo término muestra cómo la barrera de PN es modificada por el efecto del *kick* inicial y por la discretitud del sistema dado por el parámetro de acoplamiento. De hecho, como estamos trabajando en la región de difracción normal, el término extra adhiere

siempre un factor positivo a la barrera¹¹, disminuyéndola y generando que el solitón pueda desplazarse transversalmente en el arreglo. Como se observa en la figura 3.8 la barrera crece para potencias altas, lo que se traduce en que el solitón queda atrapado en el sitio inicial o cerca de éste (ver figs. 3.3b y 3.3c). Para valores más bajos de la potencia la barrera es pequeña o despreciable y el solitón puede saltar a sitios más lejanos desde la posición incidente (ver fig. 3.3a) propagándose libremente a través del arreglo.

Estabilidad modal en arreglos no lineales cúbicos

Un estudio de la estabilidad de este sistema no lineal cúbico puede ser realizado utilizando un análisis de estabilidad lineal convencional [45]. Con él, es posible estimar la ganancia de la inestabilidad y predecir la evolución en la dirección longitudinal de propagación. Sin embargo, en esta sección sólo estamos interesados en la estabilidad modal, lo que significa determinar cual modo (par o impar), es estable bajo iguales condiciones de los parámetros del sistema. Observando el cálculo de la BPN (ec. 3.13) vemos que, para un mismo nivel de potencia, el Hamiltoniano del modo impar es siempre menor que el del modo par. Esta consideración de energía modal nos permite saber que, siempre modos pares discretos cúbicos evolucionaran a modos impares al propagarse en el arreglo ya que, el sistema Hamiltoniano exige un estado final de menor energía. En la figura 3.9 se observan diferentes simulaciones numéricas de la propagación de modos pares e impares. Esta figura demuestra que la propagación es estable para modos impares ya que conservan su topología. En cambio, es inestable para modos pares debido a que estos decaen rápidamente a un modo impar el cual posee menor energía.

¹¹El parámetro de acoplamiento es definido positivamente por lo que no puede tomar valores negativos.

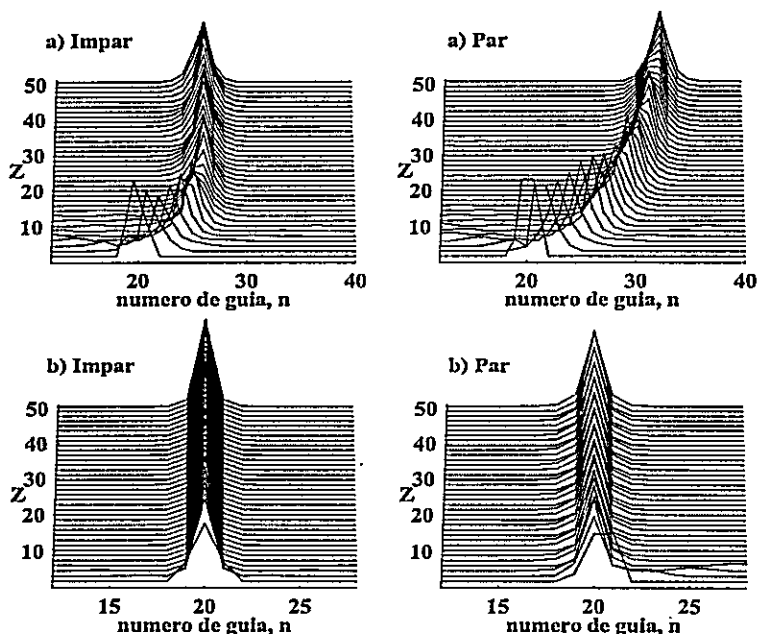


Figura 3.9: Simulación numérica de la ec. (3.1) con la condición inicial (3.4) para modos impares (columna izquierda) y modos pares (columna derecha). a) $A = 1.4$, $k = -0.7$. b) $A = 1.6$, $k = 0$.

3.2.5. Ingeniería de Peierls-Nabarro

Los resultados obtenidos con los barridos numéricos para arreglos homogéneos (figs. 3.4 y 3.5) nos sugieren que es necesario alterar, de alguna forma, la estructura del arreglo con el fin de obtener un mejor control en lo que se refiere a la posición de salida del solitón discreto. Desde la expresión para la barrera (ec. 3.13) resulta natural pensar que una forma de mejorar el control es variando el parámetro no lineal γ en las guías de ondas. De esta manera, podríamos modificar este parámetro localmente en los sitios donde no se obtiene un buen control, obteniendo así una mejor respuesta del arreglo. Este tipo de ingeniería es desechada de inmediato en

arreglos de guías semiconductoras ya que el efecto no lineal es un efecto débil y muy poco modificable en la práctica. La no linealidad en guías, por ejemplo de AlGaAs, es un parámetro tan pequeño que el coeficiente Kerr es dado, aproximadamente, por $n_2 \approx 1.5 \cdot 10^{-17} \text{ m}^2/W$. De modo que alterar experimentalmente este parámetro no es una tarea simple. En otro tipo de sistemas discretos, como por ejemplo el de condensados de Bose-Einstein, es posible modificar este parámetro fácilmente [83] ya que, la no linealidad de este tipo de sistemas atómicos está relacionada con la longitud de scattering entre las partículas del condensado, la cual es modificada con un campo magnético externo [30]. En medios ópticos fotorrefractivos [26] la no linealidad también es un parámetro que puede ser ajustado más fácilmente ya que depende del voltaje aplicado sobre la muestra. La desventaja en esos materiales es que la respuesta no lineal no es inmediata, y eso complica su aplicación tecnológica futura, además que el sistema no es propiamente cúbico sino que saturable [70]. Tanto la potencia (dada por la amplitud del modo) como el ángulo (dado por el *kick*) iniciales son parámetros externos al arreglo, y como hemos visto en los barridos homogéneos, con la variación de ellos no es posible obtener una mejor respuesta del sistema. El único parámetro en el cual podemos poner atención finalmente, es el parámetro de acoplamiento V . Éste está relacionado con el acoplamiento entre los campos eléctricos de las guías vecinas. Por este motivo, depende fuertemente de la distancia de separación entre ellas, siendo su valor pequeño para guías más lejanas, aumentando para distancias entre guías más cortas¹². Como ejemplo de esta dependencia, tomamos los valores experimentales desde la Ref. [41] donde el parámetro de acoplamiento es de 0.82 mm^{-1} para una separación entre guías de $5 \mu\text{m}$, y disminuyendo a 0.52 mm^{-1} para una separación de $7 \mu\text{m}$. Un hecho importante es

¹²El parámetro de acoplamiento lineal decae exponencialmente con la distancia entre guías [76].

que V puede efectivamente ser alterado en los experimentos por lo que, en principio, podríamos fijar nuestra atención en la modificación local de este parámetro para lograr un switching controlado en una mayor cantidad de sitios. Es claro, desde la expresión para la BPN, que el aumento de V genera una disminución de la barrera. Por este motivo, una forma de controlar la salida en más sitios sería aumentando su valor entre las guías en donde se pierde el control, permitiendo que el solitón discreto salte más lejos en el arreglo al disminuir efectivamente la BPN.

3.2.6. Dinámica controlada en arreglos cúbicos mediante la modificación local del parámetro de acoplamiento

Dada la forma de la barrera, y concentrándonos en la modificación del parámetro de acoplamiento, proponemos el siguiente modelo DNLS:

$$i \frac{du_n}{dz} + V_{n+1,n} u_{n+1} + V_{n,n-1} u_{n-1} + \gamma |u_n|^2 u_n = 0, \quad (3.14)$$

donde el parámetro $V_{n,m}$ describe el acoplamiento entre dos guías o sitios, con índices n y m . Para estudiar si este nuevo modelo permite un mejor control del sistema, usamos nuevamente como condición inicial, un perfil secante hiperbólica dado por el *ansatz* 3.4. La variación del acoplamiento en el arreglo quiebra la simetría entre el movimiento del haz hacia la derecha y hacia la izquierda al momento de atrparse. Esto eliminaría, en principio, el atrapamiento caótico observado para el caso homogéneo.

Para utilizar nuestro modelo de ingeniería de acoplamiento con el fin de lograr un switching controlado de más sitios, hacemos una pequeña variación de este parámetro entre las guías vecinas que no presentan una estructura tipo escalera (figs. 3.4 y 3.5). Esto lo realizamos hasta lograr mejores resultados que en el caso homogéneo, y hacemos tantos cambios en el parámetro V como sea necesario (en ambos barridos

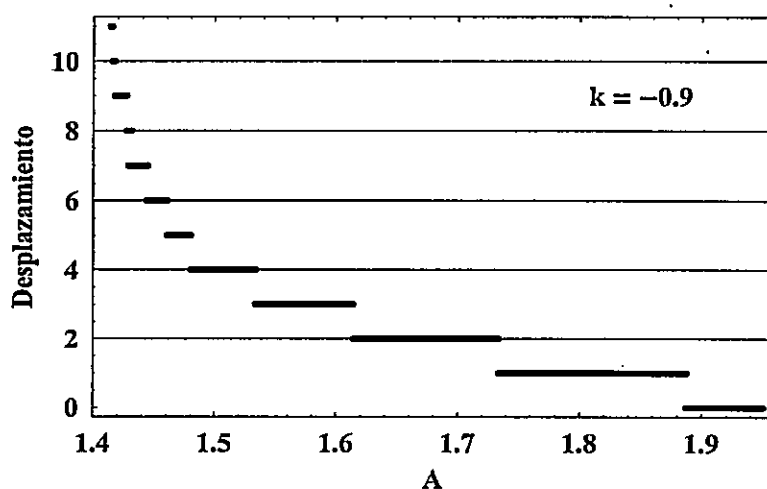


Figura 3.10: Switching digital controlado hasta 11 sitios de solitones discretos cúbicos para un arreglo con una ingeniería del parámetro V presentada en la fig. 3.11, mediante un barrido de la amplitud del haz para un ángulo fijo dado por $k = -0.9$ y una no linealidad $\gamma = 1$.

hicimos sólo dos cambios), manteniéndonos en el regimen de switching curvado¹³. Para un barrido de la amplitud, observamos como resultado, una forma monotónica del switching (fig. 3.10) dada la variación de V presentada en la figura 3.11, para un ángulo fijo (en este caso $k = -0.9$). Debe recalarse que $V_{n,m}$ (fig. 3.11) dependerá del ángulo en particular, por lo que no existe una fórmula a seguir en este tipo de proceso.

Hacemos también una ingeniería del parámetro de acoplamiento para un barrido del *kick* inicial manteniendo la amplitud fija, realizando lo mismo que para el barrido anterior: variamos V hasta conseguir una forma monotónica tipo escalera para el switching. En este caso, la forma de la ingeniería de acoplamiento $V_{n,m}$, dependerá de la amplitud (A). Como un ejemplo de esta optimización, se muestran los resultados del barrido del ángulo en la fig.3.12 y de su correspondiente ingeniería en la fig.3.13.

¹³Es probable conseguir switching controlado en más sitios pero, se debe tener presente que, el tipo de switching que nos interesa sólo es el de tipo curvado.

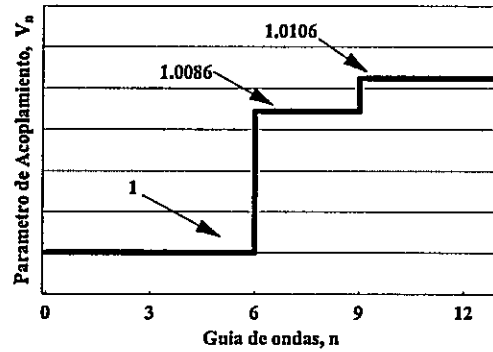


Figura 3.11: Ingeniería del parámetro de acoplamiento V para el barrido de la amplitud presentado en la figura 3.10.

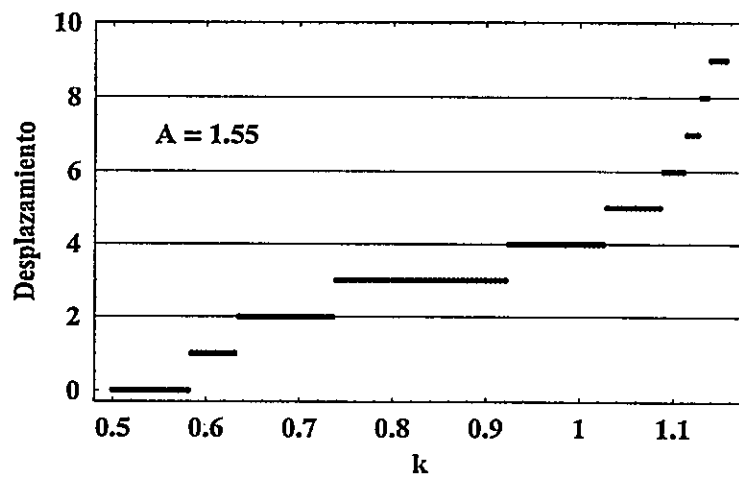


Figura 3.12: Switching digital controlado hasta 9 sitios de solitones discretos cúbicos para un arreglo con una ingeniería del parámetro V presentada en la fig. 3.13, mediante un barrido del ángulo del haz para una amplitud fija dada por $A = 1.55$ y una no linealidad $\gamma = 1$.

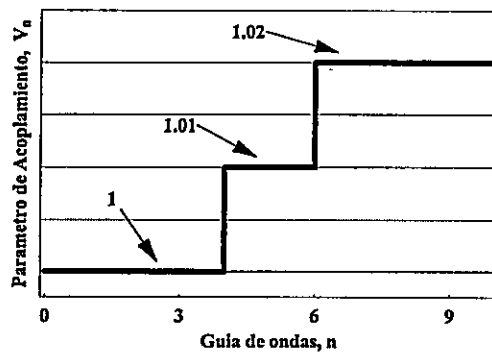


Figura 3.13: Ingeniería del parámetro de acoplamiento V para el barrido del ángulo presentado en la figura 3.12.

Nuestros resultados muestran una mejora substancial en el control de la salida de excitaciones tipo solitón en estos arreglos discretos no lineales. Es notable la mejora en comparación a trabajos anteriores como los de las Refs. [67] y [69]. La modulación, o ingeniería del parámetro de acoplamiento, como lo sugiere la expresión para la BPN, nos permite obtener una respuesta muy eficiente de control. Alcanzándose 11 sitios controlados para un barrido de la amplitud y de 9, para un barrido del ángulo. Además, como se observa numéricamente, un ángulo negativo hace que la excitación viaje hacia la derecha, en cambio uno positivo mueve al solitón hacia la izquierda, simétricamente. Esto implica que nuestros resultados se amplifican, en realidad, a 23 sitios controlados para un barrido de la amplitud y de 19 sitios controlados para un barrido del ángulo. Con esto estamos en condiciones de proponer nuestro modelo como un mecanismo eficiente para el control de excitaciones en sistemas discretos cúbicos no lineales.

En la figura 3.14 se observa el switching controlado para una pequeña variación de la amplitud, utilizando la ingeniería de la figura 3.11. Se puede apreciar que, para un incremento de la amplitud, el solitón discreto se localiza más y más cerca de la

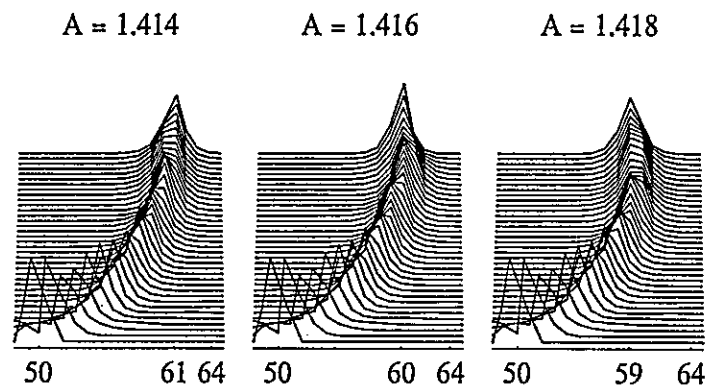


Figura 3.14: Ejemplo de switching controlado dada la ingeniería del parámetro de acoplamiento presentado en la figura 3.11.

posición incidente, a diferencia del resultado homogéneo presentado en la fig. 3.6 donde lo que se observa es una salida caótica o no controlada.

En un estudio similar, alteramos el parámetro de acoplamiento en la forma de una rampa lineal, es decir, como $V_n = an$. El resultado no fue positivo ya que se observa un switching incluso más caótico que el de un arreglo homogéneo, debido al fenómeno de las oscilaciones de Bloch, las cuales son muy azarosas en el régimen no lineal [62].

Capítulo 4

Transferencia controlada de energía para arreglos cuadráticos

4.1. Introducción

En el capítulo anterior discutimos la transferencia de energía en arreglos de guías de ondas débilmente acopladas con no linealidad de tipo cúbica. Sin embargo, en los últimos años ha habido un creciente interés en el estudio de efectos no lineales ópticos basados en las llamadas *no linealidades cuadráticas*. En contraste a los estudios convencionales de este tipo de no linealidad, donde la principal atención es puesta en procesos paramétricos y de conversión de frecuencias, recientemente la atención ha estado enfocada en la modulación de fase de la onda fundamental, así como en la de la onda de segunda armónica. Este efecto en la fase produce una modulación de la amplitud, la base de todo proceso de conversión de frecuencias, generando efectos que son similares a los conocidos en materiales no lineales cúbicos, que conducen a la formación de estructuras localizadas tipo solitón. Debido a esto, han sido predichos teóricamente, solitones brillantes en medios continuos [84–87] y, recientemente, Kim *et al.* [88] observaron experimentalmente un solitón espacial cuadrático. En arreglos de guías de ondas con no linealidad cuadrática, se han predicho teóricamen-

te solitones brillantes [89], modos fuertemente localizados [90], y solitones discretos cuasi-rectangulares [53]. Sólo hace unos meses, se ha observado experimentalmente la formación de solitones discretos brillantes [43] en arreglos de $LiNbO_3$, para una longitud de onda de 1572 nm que cae dentro del rango de las comunicaciones ópticas.

Otros trabajos han sido realizados analizando las propiedades de este tipo de sistemas cuadráticos. Darmanyán *et al.* [90] estudiaron la inestabilidad de ondas planas en arreglos de guías de ondas mediante un análisis de inestabilidad modulacional (MI). Sukhorukov *et al.* [91] analizaron el efecto de una interface no lineal cuadrática entre dos medios lineales, lo cual es un problema típico de impurezas. Recientemente en nuestro grupo, estudiamos este mismo problema pero situados en un arreglo discreto lineal, con una impureza central cuadrática [92]. Corney y Bang [93] estudiaron la inestabilidad modulacional en un medio cuadrático continuo con un pulido periódico a lo largo de la dirección de propagación, con el fin de observar el efecto de la técnica de *quasi-phase matching*. Respecto a la transferencia de energía en arreglos de guías cuadráticas un muy interesante esquema de switching multi-puertos fue propuesto por Pertsch *et al.* [94]. En él el cual, un haz de baja potencia paramétricamente acoplado a un haz de bombeo (haz de alta potencia), genera un tercer haz el que puede ser eficientemente controlado de forma tal de elegir su salida al final del arreglo. Otros trabajos experimentales recientes han sido enfocados en el estudio de incidencias sobre interfaces o discontinuidades, observando propiedades de reflexión, transmisión, y localización [95–97].

4.2. Teoría y Resultados

En esta sección detallaremos el estudio de la transferencia de energía realizado para arreglos no lineales cuadráticos, presentando los trabajos que han sido originados en el transcurso de esta tesis [79, 80, 98] sobre este tópico.

4.2.1. Arreglos Homogéneos

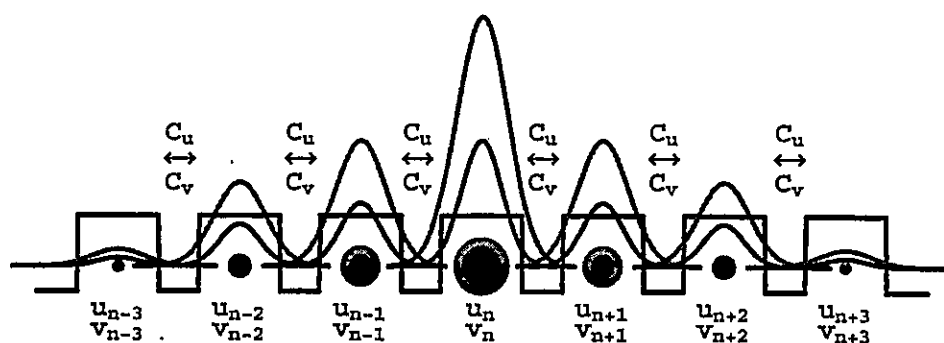


Figura 4.1: Esquema de un arreglo de guías de ondas cuadráticas homogéneas débilmente acopladas.

El modelo discreto estándar para un arreglo de guías de ondas no lineales cuadráticas débilmente acopladas, es el que fue derivado en el capítulo 2, y corresponde a la ecuación de Schrödinger no lineal discreta modificada (DNLS-m):

$$i \frac{du_n}{dz} + C_u (u_{n+1} + u_{n-1}) + 2\gamma v_n u_n^* = 0 \quad (4.1a)$$

$$i \frac{dv_n}{dz} + C_v (v_{n+1} + v_{n-1}) + \beta v_n + \gamma u_n^2 = 0 \quad (4.1b)$$

donde u_n y v_n representan las amplitudes normalizadas efectivas de la n -ésima guía para los campos eléctricos del armónico fundamental (ω) y de la segunda armónica (2ω), respectivamente. C_u y C_v dan cuenta del acoplamiento lineal de ambos modos entre guías vecinas. El parámetro γ describe el coeficiente no lineal de segundo orden

proporcional a la susceptibilidad dieléctrica de segundo orden. β es definido como el *mismatch* efectivo entre los campos en el arreglo, y z da cuenta de la distancia de propagación longitudinal¹. En la fig. 4.1 puede apreciarse un esquema típico para un arreglo de guías no lineales cuadráticas con los dos armónicos presentes.

Al igual que en el caso cúbico, el sistema posee dos cantidades conservadas: la *Potencia* total,

$$P = \sum_n (|u_n(z)|^2 + 2|v_n(z)|^2) \quad (4.2)$$

y el *Hamiltoniano*,

$$H = - \sum_n \left(C_u u_n^* u_{n+1} + C_v v_n^* v_{n+1} + \frac{\beta}{2} |v_n|^2 + \gamma u_n^2 v_n^* + c.c. \right), \quad (4.3)$$

cantidades que serán de gran utilidad en el chequeo del cálculo numérico, así como también, en la derivación de las propiedades dinámicas características de este tipo de arreglo no lineal.

4.2.2. Modos fuertemente localizados

A diferencia del caso cúbico, en donde es posible encontrar soluciones analíticas aproximadas a partir de las soluciones exactas del límite continuo, en el caso de no linealidades cuadráticas no hay soluciones exactas conocidas, ni siquiera en el modelo continuo. De esta manera, usamos modos fuertemente localizados (MFL's) para realizar nuestros cálculos numéricos y los analíticos.

Modos impares

Buscamos soluciones aproximadas de las ecuaciones (4.1a) y (4.1b) de la forma:

$$u_n(z) = u_0 \{ \dots, 0, u_1 e^{ik}, 1, u_1 e^{-ik}, 0, \dots \} e^{i\lambda_1 z},$$

¹Desde las ecuaciones (2.30a) y (2.30b), hemos modificado por simplicidad de notación: $\bar{\beta} \rightarrow \beta$ y $\xi \rightarrow z$.

$$v_n(z) = v_0 \{ \dots, 0, v_1 e^{2ik}, 1, v_1 e^{-2ik}, 0, \dots \} e^{2i\lambda_1 z}, \quad (4.4)$$

donde u_0 y v_0 son las amplitudes de ambos MFL's; k es el ángulo inicial o *kick* efectivo; λ_1 es la constante de propagación longitudinal; u_1 y v_1 son parámetros pequeños para modos impares los cuales son determinados desde las ecuaciones en términos de los parámetros del sistema.

Después de sustituir el *ansatz* (4.4) en las ecuaciones DNLS-m y mantener sólo términos lineales de los parámetros pequeños (tal que: $u_1^2, v_1^2 \rightarrow 0$), obtenemos:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2C_u \cos(k) u_1 + 2\gamma v_0 \quad ; \quad u_0^2 = \frac{v_0}{\gamma} [2\lambda_1 - \beta - 2C_v \cos(2k) v_1], \\ u_1 &= \frac{C_u \cos(k)}{\lambda_1} \quad , \quad v_1 = \frac{C_v \cos(2k)}{2\lambda_1 - \beta} \end{aligned}$$

Tomando, otra vez más, la aproximación lineal encontramos que $\lambda_1 \approx 2\gamma v_0$, lo que implica :

$$u_0^2 \approx 4v_0^2 - \frac{\beta}{\gamma} v_0 \quad , \quad u_1 \approx \frac{C_u \cos(k)}{2\gamma v_0} \quad , \quad v_1 \approx \frac{C_v \cos(2k)}{4\gamma v_0 - \beta}. \quad (4.5)$$

Modos pares

Ahora buscamos las soluciones aproximadas de las ecuaciones (4.1a) y (4.1b) de la forma:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n(z) &= \tilde{u}_0 \{ \dots, 0, \tilde{u}_1 e^{ik}, 1, e^{-ik}, \tilde{u}_1 e^{-2ik}, 0, \dots \} e^{i\lambda_2 z}, \\ \tilde{v}_n(z) &= \tilde{v}_0 \{ \dots, 0, \tilde{v}_1 e^{2ik}, 1, e^{-2ik}, \tilde{v}_1 e^{-4ik}, 0, \dots \} e^{2i\lambda_2 z}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde \tilde{u}_0 y \tilde{v}_0 son las amplitudes de los MFL's pares acoplados; k es el ángulo inicial o *kick* efectivo; y λ_2 es la constante de propagación longitudinal. \tilde{u}_1 y \tilde{v}_1 son parámetros pequeños para modos pares determinados desde las ecuaciones de movimiento DNLS-m. Después de substituir (4.6) en las ecuaciones (4.1a) y (4.1b) y, manteniendo sólo

términos de orden lineal en \tilde{u}_1 y \tilde{v}_1 , obtenemos:

$$\lambda_2 = (1 + \tilde{u}_1) C_u \cos(k) + 2\gamma\tilde{v}_0, \quad \tilde{u}_0^2 = \frac{\tilde{v}_0}{\gamma} [2\lambda_2 - \beta - (1 + \tilde{v}_1) C_v \cos(2k)],$$

$$\tilde{u}_1 = \frac{C_u \cos(k)}{\lambda_2}, \quad \tilde{v}_1 = \frac{C_v \cos(2k)}{2\lambda_2 - \beta}.$$

A orden lineal se puede demostrar que $\lambda_2 \approx C_u \cos(k) + 2\gamma\tilde{v}_0$, lo que implica

$$\tilde{u}_0^2 \approx 4\tilde{v}_0^2 - \frac{\tilde{v}_0}{\gamma} [\beta - 2C_u \cos(k) + C_v \cos(2k)],$$

$$\tilde{u}_1 \approx \frac{C_u \cos(k)}{C_u \cos(k) + 2\gamma\tilde{v}_0}, \quad \tilde{v}_1 \approx \frac{C_v \cos(2k)}{2C_u \cos(k) + 4\gamma\tilde{v}_0 - \beta} \quad (4.7)$$

Desde las ecuaciones (4.5) y (4.7) podemos notar que, para obtener la aproximación de MFL's, el término no lineal $\gamma v_0(\tilde{v}_0)$ debe ser mucho más grande que los términos de acoplamiento lineal para ambos modos, dados por las expresiones $C_u \cos(k)$ y $C_v \cos(2k)$.

4.2.3. Arreglos Homogéneos

Estudiamos ahora, la respuesta del arreglo homogéneo cuadrático frente a una variación de la potencia inicial mediante un barrido numérico de la amplitud de uno de los dos modos². Para ésto usamos como *input* inicial los MFL's encontrados en la sección anterior. Dada la cantidad de parámetros libres desde las ecuaciones DNLS-m, existen multiples configuraciones posibles, en particular de los acoplamientos lineales C_u y C_v y del mismatch efectivo β . El parámetro β lo consideramos como nulo en nuestros cálculos numéricos ya que suponemos una condición ideal para la conversión de frecuencias. Esto implica que ambos modos se propagan y viajan a una velocidad similar, permitiendo que el proceso de conversión sea realizado en fase. Si esto no ocurriera, las frecuencias ω y 2ω generadas no linealmente estarían desfasadas de las

²Como se ve desde (4.5) y (4.7), dada una de las dos amplitudes, se puede conocer la otra.

frecuencias incidentes, produciendo una señal incoherente al final del arreglo. Hoy en día, existen técnicas que permiten experimentalmente lograr que este parámetro sea nulo o muy pequeño [43, 46, 88]. Un solitón cuadrático es formado debido a la interacción no lineal entre el modo fundamental y el de segundo armónico, proceso denominado de *cascada* [87, 99]. Este proceso genera un estado ligado entre ambos modos, lo cual se manifiesta en una propagación simultánea a través del arreglo. Por otra parte, la decisión del cómo elegir los acoplamientos lineales es un poco

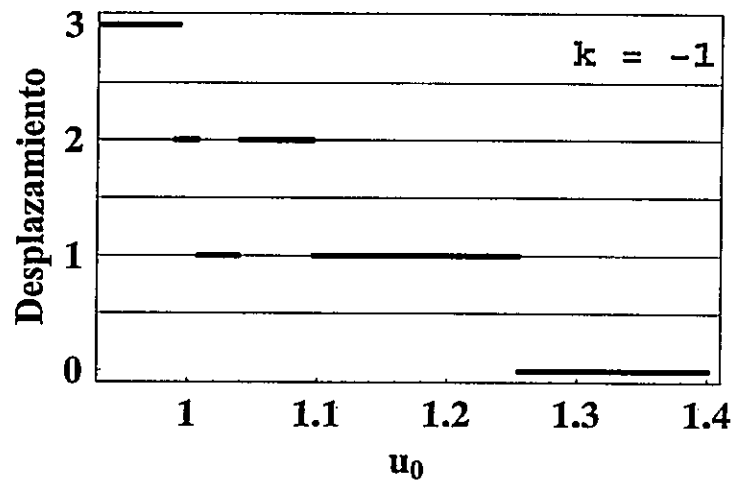


Figura 4.2: Barrido de la amplitud del armónico fundamental u_0 , para un ángulo inicial dado por $k = -1$, en un arreglo homogéneo de 41 guías de ondas y una distancia máxima de propagación $z_{max} = 45$. $C_u = C_v = 0.3$, $\beta = 0$, y $\gamma = 1$.

más compleja. Hemos testeado múltiples configuraciones para las relaciones entre los parámetros de ambos modos, incluyendo los casos $C_v = 0$ (segundo armónico desacoplado en el arreglo) y $C_v = \alpha C_u$ (acoplamiento del segundo armónico reducido) con $\alpha < 1$, etc. En todos esos casos hemos observado un comportamiento similar del arreglo para el problema de switching de solitones discretos cuadráticos. Escogemos entonces, un caso particular para ilustrar las principales propiedades dinámicas de

estos arreglos: $C_u = C_v$. En la figura 4.2 se muestra el barrido numérico de la amplitud del armónico fundamental u_0 , para un ángulo inicial fijo $k = -1$, en un arreglo de 41 guías de ondas y una distancia de propagación máxima $z_{max} = 45$. En este barrido los parámetros de acoplamiento fueron tomados idénticos ($C_u = C_v = 0.3$); el mismatch fue considerado nulo ($\beta = 0$), y la no linealidad $\gamma = 1$. Se muestra en esta figura cómo la dinámica no es controlada más allá del segundo sitio del arreglo homogéneo. La

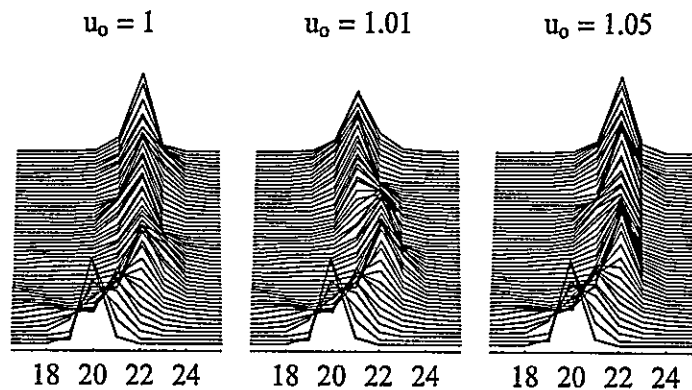


Figura 4.3: Ejemplo de switching no controlado, para el barrido de la fig. 4.2.

figura 4.3 muestra simulaciones numéricas realizadas con los parámetros utilizados en el barrido numérico (fig. 4.2). En ella se observa que, una pequeña variación de la amplitud inicial, genera una respuesta no controlada. Estos resultados nos sugieren realizar algo similar al procedimiento anterior, para el caso cúbico. Por esto parece natural calcular analíticamente la BPN y, desde esa expresión, proponer un mecanismo eficiente de control de las excitaciones.

4.2.4. Potencial de Peierls-Nabarro para arreglos cuadráticos

Realizamos una estimación analítica de la Barrera, o Potencial de Peierls-Nabarro, en el marco teórico del modelo discreto no lineal cuadrático dado por la ecuación DNLS-m (4.1a) y (4.1b), en un arreglo de guías homogéneas con acoplamientos lineales C_u y C_v . Al igual que en arreglos no lineales cúbicos, mantenemos excitaciones muy localizadas de sólo tres sitios para conservar las propiedades dinámicas del sistema discreto. Calculamos entonces, la diferencia de los valores del Hamiltoniano para modos pares (4.6) e impares (4.4), considerando a ambos modos como 2 estados diferentes de un mismo modo, lo que implica considerar la potencia de ambos idéntica. Manteniendo términos de orden lineal en los parámetros pequeños u_1 , v_1 , \tilde{u}_1 y \tilde{v}_1 , calculamos la barrera de Peierls-Nabarro. Primero obtenemos la potencia para ambos modos usando la definición dada por la ec. (4.2):

$$P_{impar} \approx u_0^2 + 2v_0^2 + O(u_1^2, v_1^2), \quad P_{par} \approx 2\tilde{u}_0^2 + 4\tilde{v}_0^2 + O(\tilde{u}_1^2, \tilde{v}_1^2), \quad (4.8)$$

y los Hamiltonianos desde la expresión (4.3),

$$\begin{aligned} H_{impar} &\approx -4u_1 C_u \cos(k) u_0^2 - 4v_1 C_v \cos(2k) v_0^2 - \beta v_0^2 - 2\gamma u_0^2 v_0 + O(u_1^2, v_1^2), \\ H_{par} &\approx -2 \left[(1 + 2\tilde{u}_1) C_u \cos(k) \tilde{u}_0^2 - (1 + 2\tilde{v}_1) C_v \cos(2k) \tilde{v}_0^2 - \beta \tilde{v}_0^2 - 2\gamma \tilde{u}_0^2 \tilde{v}_0 \right] + \\ &\quad + O(\tilde{u}_1^2, \tilde{v}_1^2). \end{aligned}$$

El cálculo analítico de la BPN se torna muy complejo si consideramos un parámetro de mismatch $\beta \neq 0$. Sin embargo, y como discutimos anteriormente, el caso $\beta = 0$ es un caso de importancia física ya que es reproducible en los experimentos actuales. Además, el desarrollo analítico se simplifica enormemente, capturándose de igual forma la esencia de la dinámica de arreglos discretos cuadráticos. Imponiendo la misma potencia contenida de ambos modos, impares y pares, y utilizando las relaciones

entre las amplitudes u_0 y v_0 (4.5), y entre \tilde{u}_0 y \tilde{v}_0 (4.7), obtenemos

$$\begin{aligned} P_0 \equiv P_{impar} = P_{par} &\Rightarrow 6v_0^2 \approx 12\tilde{v}_0^2 + \frac{\tilde{v}_0}{\gamma} [4C_u \cos(k) - 2C_v \cos(2k)] \\ &\Rightarrow \tilde{v}_0 \approx \frac{1}{\sqrt{2}} v_0 - \frac{1}{12\gamma} [2C_u \cos(k) - C_v \cos(2k)]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

En términos de la amplitud del segundo armónico (v_0) podemos aproximar el Hamiltoniano de ambos modos a:

$$\begin{aligned} H_{impar} &\approx -8\gamma v_0^3 + O(u_1^2, v_1^2) \\ H_{par} &\approx -4\sqrt{2}\gamma v_0^3 - [4C_u \cos(k) + C_v \cos(2k)] v_0^2 + O(u_1^2, v_1^2). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Finalmente, obtenemos la barrera de Peierls-Nabarro para MFL's en términos de la amplitud del segundo armónico (v_0), de la amplitud del armónico fundamental (u_0), y en términos de la potencia (P_0) como:

$$\begin{aligned} \Delta^{(2)} = H_{impar} - H_{par} &\approx -8 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \gamma v_0^3 + [4C_u \cos(k) + C_v \cos(2k)] v_0^2 \approx \\ &\approx - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \gamma u_0^3 + \left[C_u \cos(k) + \frac{1}{4}C_v \cos(2k)\right] u_0^2 \approx \\ &\cong - \frac{2(\sqrt{2}-1)}{3\sqrt{3}} \gamma P_0^{3/2} + \frac{1}{6} [4C_u \cos(k) + C_v \cos(2k)] P_0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Este cálculo de la BPN cuadrática muestra interesantes características: El término principal de la barrera es cúbico en la amplitud del modo, mientras que en el caso de arreglos cúbicos este término es cuártico (3.13). Esto se manifiesta en una caída más suave del Hamiltoniano para un potencia dada (fig. 4.4) en comparación a igual figura para el caso cúbico (fig. 3.8). También se puede apreciar que, la primera corrección en ambas expresiones es lineal en los acoplamientos y cuadrática en las amplitudes de los MFL's. De esta manera, la corrección de primer orden es más importante en el arreglo no lineal cuadrático que en el arreglo no lineal cúbico, sugiriendo que una ingeniería del acoplamiento en estos arreglos debiera ser más simple de lograr.

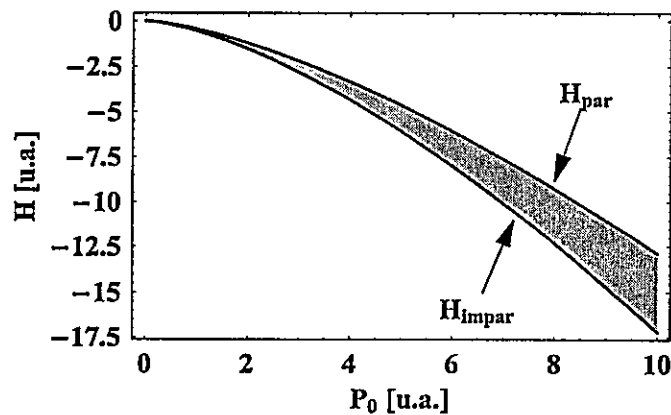


Figura 4.4: Hamiltoniano versus Potencia para ambos modos en unidades adimensionales. La región pintada representa la barrera de Peierls-Nabarro.

Estabilidad modal en arreglos no lineales cuadráticos

Un estudio anítico de la estabilidad en arreglos no lineales cuadráticos, es muchísimo más complejo que en el caso cúbico, debido a los dos modos acoplados de este problema. Por esto, un análisis de estabilidad lineal convencional en este sistema, no es recomendado. De esta manera es necesario estudiar numéricamente la estabilidad, usando perturbaciones. De este procedimiento se encuentra que los modos pares son inestables mientras que los modos impares son estables [45]. Observando nuestro cálculo de la BPN (4.11) vemos que, para un mismo nivel de potencia, el Hamiltoniano del modo impar es siempre menor que el del modo par, por lo que esta observación numérica es respaldada. Al igual que en arreglos cúbicos, si consideramos la energía de ambos modos podemos determinar que siempre, en este tipo de arreglo, modos pares discretos cuadráticos evolucionarán a modos impares al propagarse en el arreglo, por ser éste un estado de menor energía. En la figura 4.5 se muestran

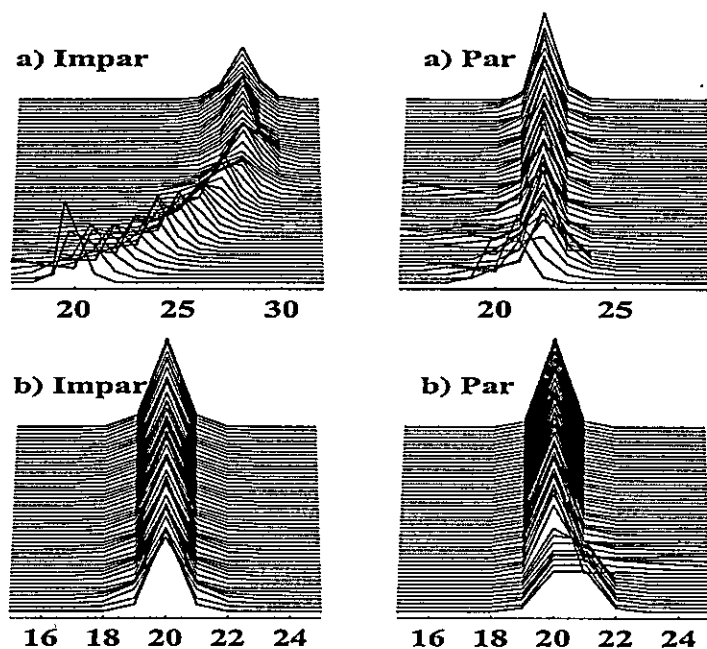


Figura 4.5: Simulación numérica de las ecuaciones (4.1a) y (4.1b) con la condición inicial (4.4) para modos impares (columna izquierda), y (4.6) como condición inicial para modos pares (columna derecha). a) $u_0 = 0.87$, $k = -1$. b) $u_0 = 1$, $k = 0$.

distintas simulaciones numéricas de la propagación de modos pares e impares³. Se demuestra numéricamente entonces que, la propagación de modos pares es inestable decayendo éstos a una forma modal impar, ya que esta configuración es la de menor energía de este sistema. Los modos impares, en cambio, son estables ya que conservan su topología a medida que se propagan en el arreglo.

³Se muestra sólo la propagación del modo fundamental ya que la del segundo armónico es idéntica.

4.2.5. Dinámica controlada en arreglos cuadráticos mediante la modificación local del parámetro de acoplamiento

Desde la expresión de la BPN cuadrática (4.11) y al igual que en el caso cúbico, centrándonos en la modificación del parámetro de acoplamiento debido a su posibilidad de ejecución experimental [43], proponemos el siguiente nuevo modelo DNLS-m:

$$i \frac{du_n}{dz} + C_{u(n+1,n)}u_{n+1} + C_{u(n,n-1)}u_{n-1} + 2\gamma v_n u_n^* = 0, \quad (4.12a)$$

$$i \frac{dv_n}{dz} + C_{v(n+1,n)}v_{n+1} + C_{v(n,n-1)}v_{n-1} + \beta v_n + \gamma u_n^2 = 0, \quad (4.12b)$$

donde los parámetros $C_{u(n,m)}$ y $C_{v(n,m)}$ describen el acoplamiento entre dos sitios con índices n y m , para el modo fundamental y segundo armónico, respectivamente. Estos coeficientes pueden efectivamente ser modificados mediante una variación de la distancia entre las guías del arreglo. Estudiamos entonces, la variación de estos parámetros en el caso en que ambos coeficientes son modificados simétricamente. Para realizar el barrido numérico utilizamos el mismo *ansatz* inicial (MFL's desde las ecuaciones (4.4) a (4.7)) y los mismos parámetros (k, β, N^0 guías, z_{max} .) que los utilizados en el barrido del caso homogéneo (fig. 4.2). En la figura 4.4 se presenta el resultado para el switching controlado de solitones discretos cuadráticos utilizando la ingeniería de acoplamiento presentada en la figura 4.6. El método a seguir para obtener un switching controlado es similar al del caso cúbico en el cual modificamos el acoplamiento en el sitio en donde surgían problemas de control hasta mejorar el resultado homogéneo. Es posible conseguir switching controlado en más sitios, sin embargo, sólo estamos interesados en el rango de parámetros en donde observamos el switching tipo "curvado". Obtenemos entonces, debido a la ingeniería de Peierls-Nabarro, una forma monotónica del switching de solitones discretos cuadráti-

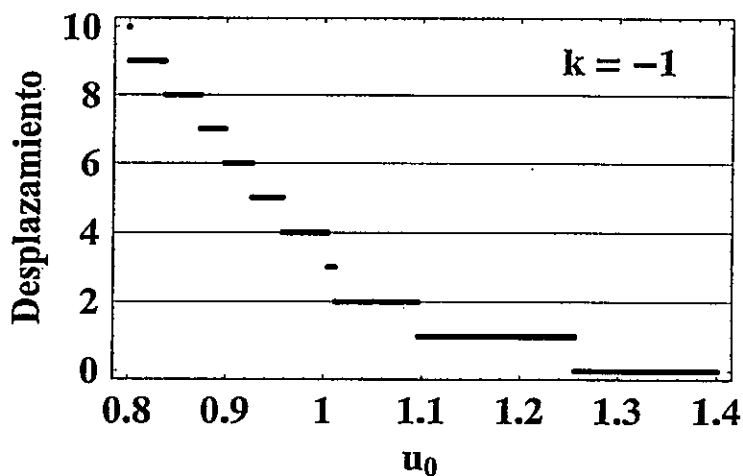


Figura 4.6: Switching digital controlado de solitones discretos para un arreglo cuadrático con una ingeniería de los parámetros C_u y C_v (fig. 4.6), mediante un barrido de la amplitud del armónico fundamental para un ángulo fijo dado por $k = -1$. $\beta = 0$, $\gamma = 1$. El barrido de la amplitud del segundo armónico genera idénticos resultados.

cos (fig. 4.4) de hasta 10 sitios controlados, lo que, considerando la simetría observada al cambiar el ángulo de signo, corresponde a un sistema de switching multi-puertos de hasta 21 sitios. En la figura 4.7 se observa el switching controlado para una pequeña variación de la amplitud utilizando la ingeniería de la figura 4.6.

La ingeniería de Peierls-Nabarro en este tipo de arreglos no lineales cuadráticos, tiene esencialmente tres ventajas comparativas respecto a arreglos cúbicos, lo que nos hacen proponerlo como un mecanismo efectivo para la transferencia controlada de energía. La primera es que, como los solitones discretos cuadráticos son en realidad un estado ligado entre dos modos de distinta frecuencia, sería posible, en principio, enviar simultáneamente una misma información repetida, pudiendo servir como método de verificación de la señal recibida en sistemas de comunicaciones ópticas. Segundo, la potencia requerida para el proceso de switching es menor que en el caso cúbico: ~ 140

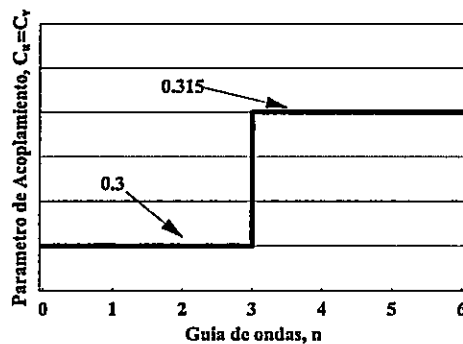


Figura 4.7: Ingeniería del parámetro de acoplamiento $C_u = C_v$ para el barrido de la amplitud del armónico fundamental presentado en la figura 4.4.

Watts para un switching de 7 guías, mientras que en un arreglo cúbico este mismo proceso requiere de ~ 660 Watts. Esto es de gran importancia a la hora de decidir si un dispositivo entra al mercado o no. La tendencia mundial en comunicaciones es la búsqueda de sistemas que funcionen con bajos niveles de potencia, esencialmente debido al costo económico asociado a las altas potencias. Finalmente, desde el punto de vista de la ingeniería necesaria para obtener un sistema de switching multi-puertos, los arreglos cuadráticos requieren una menor modificación del arreglo homogéneo que los sistemas cúbicos. Es decir, para lograr un resultado controlado en arreglos cúbicos requerimos hacer *dos* modificaciones al parámetro de acoplamiento del orden de un uno por ciento lo cual es una variación muy difícil de obtener en la práctica ($\sim 0.04 \mu m$). En cambio, para arreglos cuadráticos, requerimos sólo *una* variación del coeficiente de acoplamiento, la cual es del orden de un 5% , algo así como $\sim 0.2 \mu m$, lo cual es más factible de lograr en un experimento.

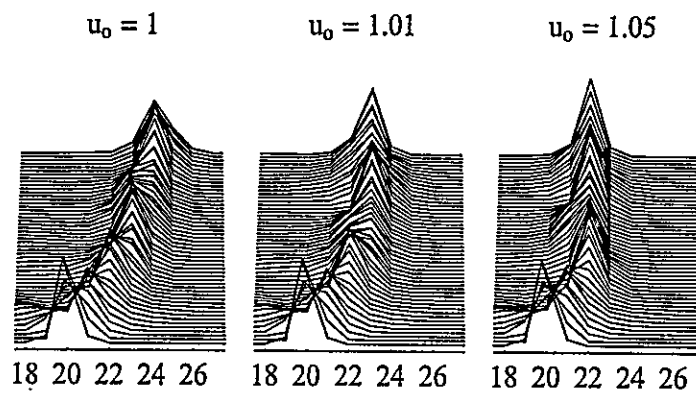


Figura 4.8: Ejemplo de switching controlado dada la ingeniería del parámetro de acoplamiento presentado en la figura 4.6.

Capítulo 5

Transferencia de energía para arreglos cúbicos birrefringentes

5.1. Introducción

En materiales con una no linealidad de tipo cúbica, podemos esperar una dinámica no lineal muy rica gracias al acoplamiento entre diferentes modos del arreglo. En particular, el acoplamiento entre dos ondas con polarización ortogonal entre sí debido a la birrefringencia del material, puede resultar en la formación de un tipo de solitón llamado *solitón vectorial* [9]. Gran parte del estudio de estos sistemas ha sido realizado en el continuo para una guía de ondas no lineal cúbica birrefringente como por ejemplo, en fibras ópticas no lineales y guías de AlGaAs. La mayoría de los esfuerzos teóricos han sido enfocados en el estudio de la dinámica de las polarizaciones, observándose la existencia de una inestabilidad llamada *inestabilidad de polarización*. Esta inestabilidad ha sido predicha en fibras ópticas birrefringentes [100–106] y guías de ondas ópticas planas (continuas) [55, 107–109]. En este tipo de materiales las ondas son definidas como ondas rápidas y ondas lentas, y su relación con los modos de polarización TE y TM, depende de la geometría del problema. Las ondas rápidas tienen un índice de refracción más pequeño que las ondas lentas, lo que resulta

en diferentes velocidades de propagación (en arreglos de guías de AlGaAs, el modo TE corresponde a la onda lenta, y el modo TM a la onda rápida [55]). El estudio de la inestabilidad de polarización predice que las ondas rápidas serán inestables, mientras que las ondas lentas serán estables. Esta dinámica de inestabilidad genera un intercambio de energía, con una direccionalidad definida desde la onda inestable hacia la estable. Se puede entender esto como que la onda rápida (inestable), decae a un estado estable dado por la onda lenta.

El uso de solitones vectoriales ha sido sugerido para distintos esquemas de switching completamente óptico. Por ejemplo, se ha estudiado el empleo de colisiones entre solitones ortogonalmente polarizados con [54] o sin [110] la consideración de efectos de *four-wave mixing* (FWM). El efecto de FWM es el efecto no lineal responsable del intercambio de energía entre los modos de polarizaciones ortogonales (TE y TM)¹. Otros esquemas de switching han estudiado el cómo controlar señales débiles mediante haces de polarización ortogonal de potencias mayores [111]. También Kang *et al.* [112, 113] estudiaron, teórica y experimentalmente, cómo se puede obtener un control de la salida de solitones TE y TM, dada la presencia o ausencia de su par ortogonal en una guía de ondas de AlGaAs, eliminando el efecto de FWM (solitones tipo Manakov [114]). Este estudio muestra, además, cómo la presencia simultánea de ambos haces ortogonales, produce un mayor confinamiento de cada uno de los solitones a la salida del arreglo debido a que el índice de refracción aumenta no linealmente² generando un angostamiento de ambos haces.

El trabajo en sistemas discretos de solitones vectoriales ha sido, hasta la fecha, muy reducido y sin la consideración del efecto no lineal de FWM. El grupo de

¹Como se demostró en el primer capítulo de esta tesis, el término de FWM aparece sólo cuando la interacción vectorial es monocromática.

²En el Cap. 2, se analizó esta propiedad.

Falk Lederer estudió modos brillantes fuertemente localizados y su estabilidad [115], así como también solitones discretos oscuros y un análisis de inestabilidad modulacional [116]. Hudock *et al.* [117] estudiaron solitones discretos vectoriales en arreglos de dos dimensiones, y Ablowitz *et al.* [118], en arreglos de una dimensión. Recientemente, Sukhorukov y Kivshar [119] estudiaron lo que ellos denominan *solitones discretos vectoriales de multi-gaps*. En su trabajo observaron el acoplamiento no lineal vectorial entre modos de diferentes bandas, tanto en arreglos ópticos como en condensados de Bose-Einstein inmersos en redes ópticas. El año 2003, Meier *et al.* [42] observaron, por primera vez, la formación de un solitón discreto vectorial en arreglos de guías de AlGaAs. Ellos demostraron, teórica y experimentalmente, considerando el término de FWM, que existen regiones de parámetros en los cuales existe una propagación estable de los modos TE y TM, así como también regiones en las cuales esta propagación se vuelve inestable. Observaron como la formación del solitón discreto vectorial es producto de la interacción no lineal entre ambos modos, y el efecto que generan diferentes condiciones de fase inicial en la dinámica.

5.2. Teoría y Resultados

En esta sección detallaremos nuestro estudio realizado con solitones discretos vectoriales para entender los mecanismos de inestabilidad de polarización, las regiones de inestabilidad modulacional, y finalmente la transferencia de energía controlada. Presentaremos los trabajos sobre este tópico que han sido originados en el transcurso de esta tesis, y que se encuentran actualmente aceptados [120,121] y en revisión [122].

5.2.1. Arreglos Homogéneos

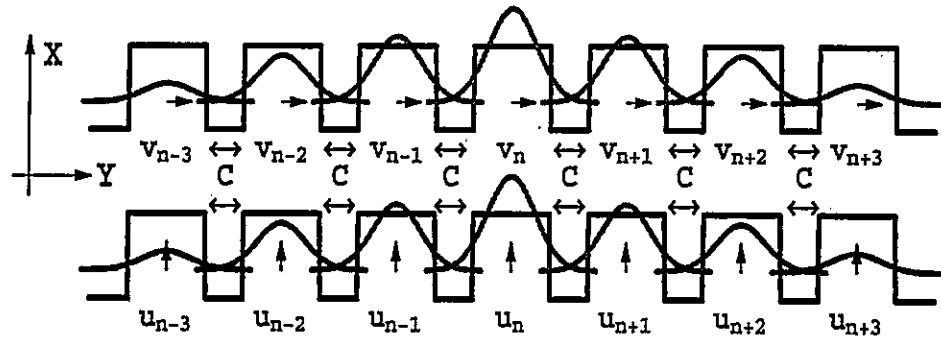


Figura 5.1: Esquema de un arreglo de guías de ondas cúbicas birrefringentes homogéneas, débilmente acopladas. Las flechas bajo las curvas indican la dirección de polarización de cada modo.

El modelo discreto para un arreglo de guías de ondas no lineales cúbicas birrefringentes débilmente acopladas, es el derivado en el capítulo 2, y corresponde a la ecuación de Schrödinger no lineal discreta vectorial (DNLS-v):

$$i \frac{du_n}{dz} + u_n + C(u_{n+1} + u_{n-1}) + (|u_n|^2 + A|v_n|^2) u_n + Bv_n^2 u_n^* = 0, \quad (5.1a)$$

$$i \frac{dv_n}{dz} - v_n + C(v_{n+1} + v_{n-1}) + (|v_n|^2 + A|u_n|^2) v_n + Bu_n^2 v_n^* = 0, \quad (5.1b)$$

donde u_n y v_n son las amplitudes normalizadas de las componentes del campo eléctrico

co TE y TM, respectivamente; z es la distancia de propagación; C es el parámetro de acoplamiento el cual es igual para ambas polarizaciones (ambos modos tienen una extensión transversal similar); los coeficientes A y B representan las interacciones no lineales de *cross phase modulation* (XPM) y de *four-wave mixing* (FWM), respectivamente (ambas cantidades han sido normalizadas por el término de *self-phase modulation* (SPM)). La figura 5.1 muestra un esquema del arreglo de guías y los modos presentes en este problema, donde las polarizaciones ortogonales han sido elegidas a lo largo de las direcciones x e y . Para un arreglo de guías de ondas de AlGaAs [42], los parámetros de interacción no lineal están dados por: $A = 1$, $B = 0.5$. El modo TE corresponde a la onda lenta, mientras que el modo TM a la onda rápida. La potencia (P) y Hamiltoniano (H) normalizados, están dados por

$$P = P_u + P_v = \sum_n (|u_n|^2 + |v_n|^2), \quad (5.2)$$

$$H = - \sum_n [C(u_n^* u_{n+1} + u_n u_{n+1}^* + v_n^* v_{n+1} + v_n v_{n+1}^*) + |u_n|^2 - |v_n|^2 + \frac{1}{2}(|u_n|^4 + |v_n|^4) + A|u_n|^2 |v_n|^2 + \frac{B}{2}(v_n^2 u_n^{*2} + u_n^2 v_n^{*2})], \quad (5.3)$$

siendo ambas cantidades conservadas en la dinámica. Además, juegan un importante rol en el análisis teórico, en la verificación de la precisión del cálculo numérico, y en la estimación de los niveles de potencia reales para los distintos procesos de amplificación y de switching que realizaremos (para arreglos de AlGaAs [42], $P_{\text{real}} \approx 56 \times P$ [Watts]).

Las ecuaciones (5.1a)–(5.3) muestran explícitamente que los modos rápidos y lentos no son equivalentes. Esto es confirmado por ejemplo, por las simulaciones numéricas de la dinámica no lineal de ambos modos. Más aún, es fácil notar que el Hamiltoniano de la onda lenta es siempre menor que el de la onda rápida, para

iguales condiciones de potencia (basta con hacer uno de los modos igual a cero). Esto sugiere que la onda rápida será inestable con respecto a su transformación en una onda lenta, desapareciendo para una dirección de propagación suficientemente larga.

5.2.2. Inestabilidad Modulacional

Estudiamos en esta sección, la inestabilidad modulacional (MI) de soluciones de amplitud constante para el modelo discreto vectorial, con el fin de identificar las regiones de parámetros en donde podemos encontrar estructuras localizadas tipo solitón. Utilizamos para este propósito, un método estándar [35, 58] considerando la evolución de ondas planas de amplitud finita, débilmente perturbadas en la forma

$$\begin{aligned} u_n(z) &= [u_0 + \delta u_n(z)]e^{i(q_u n + k_u z)}, \\ v_n(z) &= [v_0 + \delta v_n(z)]e^{i(q_v n + k_v z)}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde u_0 y v_0 son las amplitudes de los modos; δu_n y δv_n son funciones de perturbación pequeñas; q_u y q_v son las componentes transversales de los vectores de onda; y k_u y k_v son las constantes de propagación de los modos TE y TM, respectivamente. Las funciones de perturbación son tomadas de la forma

$$\begin{aligned} \delta u_n(z) &= u_1 e^{i(Qn - Kz)} + u_2^* e^{-i(Qn - K^*z)}, \\ \delta v_n(z) &= v_1 e^{i(Qn - Kz)} + v_2^* e^{-i(Qn - K^*z)}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde las amplitudes u_1 , u_2^* , v_1 , y v_2^* , son asumidas como pequeñas; Q y K son los vectores de onda de la perturbación.

La ganancia de la inestabilidad modulacional G puede ser definida como $G \equiv \text{Im}[K]$. Las regiones de inestabilidad corresponden a la condición $G > 0$, mientras que para $G < 0$, las soluciones de ondas planas son estables. Los resultados del

análisis de MI sugieren que cuando las ondas planas son inestables, podemos esperar la formación de estructuras localizadas espacialmente en el arreglo de guías [59], en este caso solitones discretos vectoriales.

Sustituyendo las expresiones (5.5) en las ecuaciones dinámicas (5.1a) y (5.1b), y siguiendo un análisis estándar, obtenemos una ecuación cuadrática para K^2 :

$$K^4 + a_1 K^2 + a_2 = 0, \quad (5.6)$$

donde

$$a_1 \equiv -(f^2 + g^2) + (1 + B^2)u_0^4 - 4B(2A + 2B - 1)u_0^2 v_0^2 + (1 + B^2)v_0^4,$$

y

$$a_2 \equiv \{(f - u_0^2)(g - Bu_0^2) - [f + Bg + (3B^2 - 1)u_0^2]v_0^2 + Bv_0^4\} \times \\ \times \{(f + u_0^2)(g + Bu_0^2) + [f + Bg - ((2A + B)(2A + 3B) - 1)u_0^2]v_0^2 + Bv_0^4\},$$

con

$$f = -4C\sigma_u \sin^2\left(\frac{Q}{2}\right) + u_0^2 - Bv_0^2, \\ g = -4C\sigma_v \sin^2\left(\frac{Q}{2}\right) + v_0^2 - Bu_0^2,$$

donde $\sigma_u = \cos q_u$ y $\sigma_v = \cos q_v$, describen la estructura o topología de ambas ondas.

En este estudio estamos interesados sólo en modos no-escalonados, lo que implica tomar $q_u = q_v = 0$ (para modos escalonados necesitamos tomar $q_u = q_v = \pi$).

Resolviendo la ecuación (5.6), obtenemos la ganancia de la MI como:

$$G \equiv \text{Im}[K] = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Im} \left[\left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2} \right)^{1/2} \right]. \quad (5.7)$$

Para identificar las regiones de inestabilidad modulacional, en la fig. 5.2 mostramos

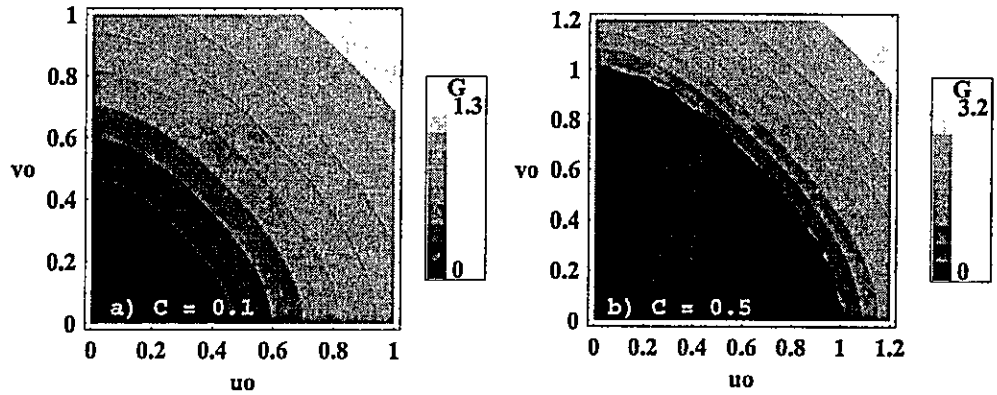


Figura 5.2: Ganancia de la inestabilidad modulacional como función de las amplitudes de ambos modos, u_0 y v_0 , para (a) $C = 0.1$, y (b) $C = 0.5$. $Q = \pi$. Las regiones oscuras no presentan inestabilidad.

los resultados de nuestro análisis utilizando dos gráficos de contornos en el espacio (u_0, v_0) donde las regiones más claras corresponden a mayores valores de la ganancia de MI, mientras que las regiones más oscuras corresponden a una menor ó nula ganancia de MI. En la fig. 5.2a el parámetro de acoplamiento es débil, $C = 0.1$, y se espera que los solitones discretos existan a partir de $u_0 = v_0 \geq 0.4$. En la fig. 5.2b el acoplamiento es más fuerte, $C = 0.5$, por lo que estructuras localizadas son esperadas para $u_0 = v_0 \geq 0.7$.

Los resultados obtenidos en este análisis de MI para el caso vectorial pueden ser transformados en los resultados del caso escalar cúbico estudiado en la Ref. [58]. Sí consideramos a una de las amplitudes igual a cero (por ejemplo $v_0 = 0$), obtenemos $a_2 = 0$ y $G = \pm\sqrt{a_1}$, ganancia que corresponde al caso escalar [58], y es dada por

$$G = \pm \left\{ 4C\sigma_u \sin^2 \left(\frac{Q}{2} \right) \left[2u_0^2 - 4C\sigma_u \sin^2 \left(\frac{Q}{2} \right) \right] \right\}^{1/2}.$$

5.2.3. Modos fuertemente localizados

Modos impares

En primer lugar, buscamos los perfiles de los modos fuertemente localizados (MFL's) de tipo *impar*, tomando el *ansatz* usual:

$$\begin{aligned} u_n(z) &\approx U\{\dots, 0, \epsilon e^{ik_u}, 1, \epsilon e^{-ik_u}, 0, \dots\} e^{i\lambda z}, \\ v_n(z) &\approx V\{\dots, 0, \delta e^{ik_v}, 1, \delta e^{-ik_v}, 0, \dots\} e^{i\lambda z}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

donde U y V son las amplitudes; k_u y k_v son las componentes transversales de los vectores de onda (describen los *kicks* iniciales o ángulos aplicados a las componentes vectoriales); los parámetros ϵ y δ caracterizan el decaimiento del modo para las componentes TE y TM y son asumidas como pequeñas. Por simplicidad, tomamos la misma constante de propagación λ para ambas componentes. Después de substituir este *ansatz* en las ecuaciones (5.1a) y (5.1b), y manteniendo sólo los términos de primer orden en ϵ y δ , obtenemos como resultado:

$$\epsilon \approx \frac{C \cos(k_u)}{U^2 + (A+B)V^2}, \quad \delta \approx \frac{C \cos(k_v)}{V^2 + (A+B)U^2}. \quad (5.9)$$

Modos pares

De igual forma, podemos encontrar los perfiles para MFL's de tipo *par*, usando el *ansatz*,

$$\begin{aligned} \bar{u}_n &\approx \bar{U}\{\dots, 0, \bar{\epsilon} e^{ik_u}, 1, e^{-ik_u}, \bar{\epsilon} e^{-2ik_u}, 0, \dots\} e^{i\bar{\lambda} z}, \\ \bar{v}_n &\approx \bar{V}\{\dots, 0, \bar{\delta} e^{ik_v}, 1, e^{-ik_v}, \bar{\delta} e^{-2ik_v}, 0, \dots\} e^{i\bar{\lambda} z}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde \bar{U} y \bar{V} son las amplitudes de los modos; k_u y k_v son las componentes transversales de los vectores de onda; $\bar{\epsilon}$ y $\bar{\delta}$ son parámetros pequeños correspondientes a los modos TE y TM, respectivamente. Al igual que para modos impares, tomamos una

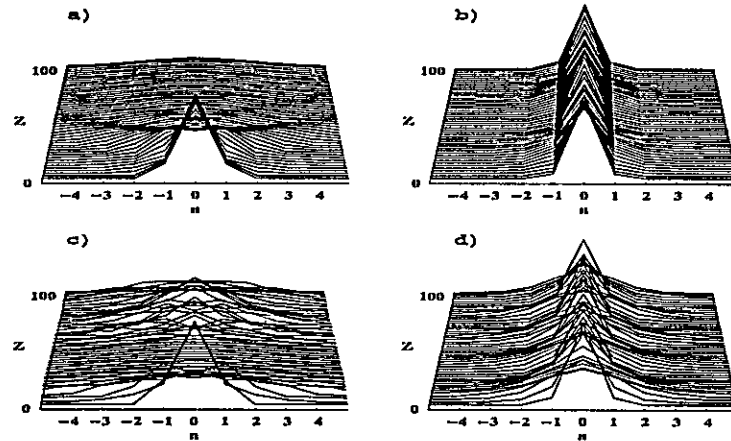


Figura 5.3: Ejemplos de la evolución de MFL's impares para diferentes casos: (a) $U = V = 0.3$ y $C = 0.1$, (b) $U = V = 0.4$ y $C = 0.1$, (c) $U = V = 0.6$ y $C = 0.5$, (d) $U = V = 0.8$ y $C = 0.5$.

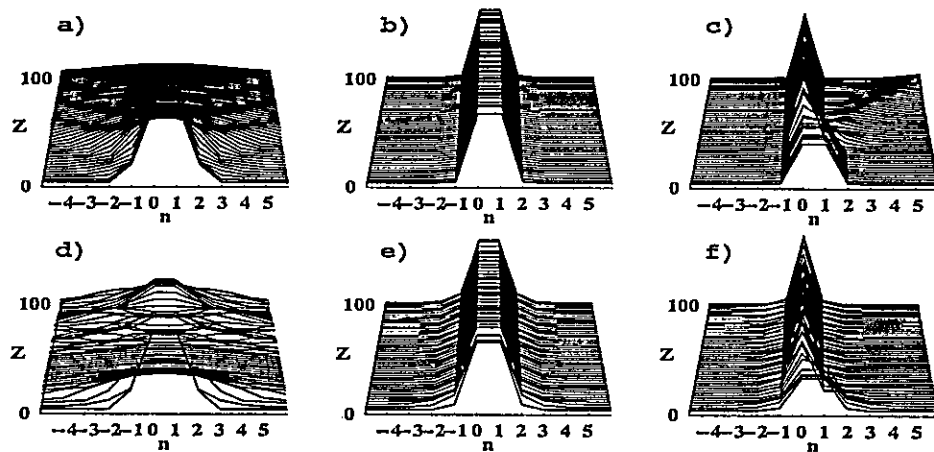


Figura 5.4: Ejemplos de la evolución de MFL's pares para diferentes casos: (a) $U = V = 0.2$ y $C = 0.1$, (b) $U = V = 0.5$ y $C = 0.1$, (c) $U = V = 0.5$, $C = 0.1$, y $k = 0.0001$, (d) $U = V = 0.45$ y $C = 0.5$, (e) $U = V = 0.7$ y $C = 0.5$, (f) $U = V = 0.7$, $C = 0.5$, y $k = 0.0001$.

misma constante de propagación $\bar{\lambda}$ para ambos modos. A primer orden, obtenemos los resultados,

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon} &\approx \frac{C \cos(k_u)}{C \cos(k_u) + \bar{U}^2 + (A+B)\bar{V}^2}, \\ \bar{\delta} &\approx \frac{C \cos(k_v)}{C \cos(k_v) + \bar{V}^2 + (A+B)\bar{U}^2}.\end{aligned}\quad (5.11)$$

Observando las ecuaciones (5.9) y (5.11), se puede ver que la suposición de que todos los parámetros (ϵ , δ , $\bar{\epsilon}$, $\bar{\delta}$) sean pequeños, puede ser satisfecha siempre para valores bajos del parámetro de acoplamiento y amplitudes modales suficientemente grandes.

En las figs. 5.3 y 5.4 se muestran ejemplos de la dinámica típica de MFL's para el modo de polarización TE (la dinámica de la componente TM es idéntica) sin momentum transversal inicial (excepto por las figs. 5.4c y 5.4f). Las propiedades de estabilidad de estos modos, durante la propagación, son consistentes con el diagrama de inestabilidad modulacional (fig. 5.2). Un análisis más completo de las familias de modos localizados y su correspondiente estabilidad, es todavía un problema abierto y está más allá del alcance de esta tesis. Es importante notar como los modos pares pueden propagarse establemente para un ángulo nulo en este sistema (figs. 5.4b y 5.4d). Esto se debe a que, para el caso vectorial, la no linealidad efectiva es mayor que en el caso cúbico escalar. Esto genera que el modo par, al evolucionar sin ángulo inicial en el arreglo, conserva su forma debido a que está muy localizado. Sin embargo, un pequeño *kick* ($k \sim 0.0001$) provoca una situación como la del caso escalar usual, decayendo el modo par a una configuración impar (figs. 5.4c y 5.4f). En este sentido podríamos hablar de un equilibrio inestable para este tipo de modo en este sistema. Luego cuando calculemos la barrera de Peierls-Nabarro, confirmaremos esta predicción numérica de estabilidad modal.

5.2.4. Observación numérica

Al realizar un conjunto de simulaciones numéricas con distintos perfiles iniciales para este sistema cúbico birrefringente, observamos una fenomenología que no tiene símil en otros sistemas discretos no lineales. Lo primero que se observa es que existe transferencia de energía entre ambas polarizaciones. Para analizar con más detalle esta propiedad consideramos la diferencia de fase entre los modos TE y TM en el *input* del arreglo. Definimos entonces *polarización lineal* como “aquella en que la diferencia de fase inicial está dada por: $\Delta\phi = 0$, o π ”, y *polarización elíptica* cuando “la diferencia de fase inicial es: $\Delta\phi = \pi/2$ ” (para $\Delta\phi \equiv \phi_u - \phi_v$, con ϕ_u y ϕ_v las fases de los modos TE y TM al inicio del arreglo, respectivamente). Para iguales amplitudes de ambos modos, vemos que para la condición de polarización inicial lineal, y con el término de FWM presente ($B \neq 0$), se observa transferencia de energía desde el modo TM hacia el modo TE. En cambio, para una polarización inicial elíptica, el proceso de transferencia de energía es revertido desde el modo TE hacia el modo TM. Esta observación abre muchas perspectivas para lograr sistemas de switching completamente óptico ya que, al ser un arreglo cúbico y por lo tanto poseer propiedades dinámicas similares al caso escalar (DNLS), es posible lograr el switching tipo curvado estudiado en los capítulos anteriores. Pero además, en este caso, en principio podríamos intercambiar energía entre ambos modos generando un mecanismo de switching y amplificación simultánea. Por último observamos que, para un coeficiente de FWM nulo ($B = 0$), no hay intercambio de energía entre modos para los dos tipos de polarización iniciales definidas (lineal ó elíptica). Concluimos desde este análisis numérico que la transferencia de energía entre los modos TE y TM es producto de la interacción no lineal de FWM, tal como ha sido predicho en estudios anteriores (ver Ref. [114]).

5.2.5. Transferencia de energía

Estudio analítico

Al igual que en sistemas continuos [55,100,105,107,108], en sistemas discretos los modos de polarización TE y TM intercambian sus potencias mientras se propagan a lo largo del arreglo de guías. Más aún, este efecto puede ser revertido si modificamos la diferencia de fase inicial entre las dos polarizaciones al inicio del arreglo, como fue descrito en la sección anterior.

Para entender más profundamente la dinámica de polarización inestable, y estudiar el mecanismo de intercambio de potencia, fijamos nuestra atención en la definición de la potencia total e individual de este sistema (5.2). Sabemos que esta cantidad se conserva en este sistema Hamiltoniano, por lo tanto observamos es claro que

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial P_u}{\partial z} = -\frac{\partial P_v}{\partial z}. \quad (5.12)$$

Esta última expresión demuestra que mientras una de las polarizaciones gana una cantidad extra de potencia, la otra polarización pierde parte de su potencia en una cantidad similar. Este concepto es simple pero a la vez muy importante, ya que nos demuestra, analíticamente, lo que observamos numéricamente en el computador. Usando las ecuaciones dinámicas (5.1a y 5.1b), se demuestra que:

$$\frac{\partial P_u}{\partial z} = -\frac{\partial P_v}{\partial z} = \sum_n \left(u_n^* \frac{\partial u_n}{\partial z} + u_n \frac{\partial u_n^*}{\partial z} \right) = 2B \sum_n \text{Im} [u_n(z)^2 v_n^*(z)^2], \quad (5.13)$$

lo cual demuestra en una forma muy directa, la importancia del término no lineal de FWM en el proceso de intercambio de energía. Es claro entonces, desde (5.13), que en ausencia de efectos de FWM ($B = 0$) no es posible observar procesos de ganancia o pérdida de potencia, lo cual confirma la predicción numérica de la sección anterior. También esta expresión muestra que, la fase relativa entre ambos modos de polariza-

ción a lo largo de la dirección de propagación z , es muy relevante en el intercambio de potencia. Esto sugiere una respuesta a la asimetría observada numéricamente para diferentes fases iniciales entre ambos modos. En efecto, si la fase relativa fuese nula (ambos campos tratados como reales), no existiría intercambio de potencia, por lo que las fases iniciales entre los modos se transforman en una cantidad muy importante que determina la dinámica de los modos de polarización en el arreglo. Para poder desarrollar más esta idea analíticamente y examinar el mecanismo de transferencia de potencia en detalle, usamos la aproximación de MFL's. Esta aproximación es muy útil porque simplifica considerablemente el problema matemático y describe correctamente la dinámica de diferentes tipos de estados muy localizados³ como veremos al final de este capítulo.

Transferencia de energía de MFL's vectoriales

Desde la ec. (5.13) notamos que sólo la contribución del campo de la guía central es importante en el límite de MFL's impares⁴, mientras los demás términos en la suma son proporcionales a $\epsilon^2\delta^2$ o más pequeños que éste. De esta manera, sólo estamos interesados en la evolución de los campos de la guía central $u_0(z)$ y $v_0(z)$. Por simplicidad, consideramos los modos en el término de FWM como reales y, demostramos más abajo que esta aproximación funciona correctamente en la descripción del mecanismo de transferencia de energía. Con esto, asumimos que los campos de la guía central cambian muy lentamente y que, la amplitud inicial es aproximadamente conservada durante la propagación. Como resultado, sólo debemos trabajar con las

³Los cuales pueden ser generados en los experimentos actuales.

⁴Estudiamos la transferencia de potencia para modos impares ya que como se demostrará más adelante, estos corresponden a los modos estables del sistema.

siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} -i\frac{\partial u_0}{\partial z} &\approx [1 + 2C\varepsilon + U^2 + (A + B)V^2] u_0, \\ -i\frac{\partial v_0}{\partial z} &\approx [-1 + 2C\delta + V^2 + (A + B)U^2] v_0, \end{aligned} \quad (5.14)$$

cuyas soluciones son:

$$\begin{aligned} u_0(z) &\approx u_0(0) \exp\{i[1 + 2C\varepsilon + U^2 + (A + B)V^2]z\}, \\ v_0(z) &\approx v_0(0) \exp\{i[-1 + 2C\delta + V^2 + (A + B)U^2]z\}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Cuando las amplitudes iniciales $u_0(0)$ y $v_0(0)$ son complejas, la fase relativa entre las componentes de polarización se transforma en un nuevo parámetro que define la dinámica de los modos. Usamos, como condición inicial para los campos de la guía central

$$u_0(0) = Ue^{i\phi_u}, \quad v_0(0) = Ve^{i\phi_v}, \quad (5.16)$$

donde ϕ_u y ϕ_v son las fases iniciales de los modos. Utilizamos las soluciones aproximadas para los modos fuertemente localizados ((5.15) y (5.16)) y obtenemos un resultado para la transferencia de potencia:

$$\frac{\partial P_u}{\partial z} = -\frac{\partial P_v}{\partial z} \approx 2BU^2V^2 \sin[dz + 2\Delta\phi], \quad (5.17)$$

con

$$d \equiv 4 + 4C(\varepsilon - \delta) - 2(A - 1 + B)(U^2 - V^2), \quad (5.18)$$

y $\Delta\phi \equiv \phi_u - \phi_v$. Integrando esta expresión, encontramos la solución aproximada para la variación de la potencia en z ,

$$\begin{aligned} P_u(z) &\approx U^2(1 + \varepsilon^2) + \frac{2BU^2V^2}{d} \{\sin(2\Delta\phi) \sin(dz) + \cos(2\Delta\phi) [1 - \cos(dz)]\}, \\ P_v(z) &\approx V^2(1 + \delta^2) - \frac{2BU^2V^2}{d} \{\sin(2\Delta\phi) \sin(dz) + \cos(2\Delta\phi) [1 - \cos(dz)]\}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

y desde estos resultados, encontramos la variación espacial promedio de las potencias para ambos modos como:

$$\begin{aligned}\langle P_u \rangle_z &\approx U^2(1 + \varepsilon^2) + \frac{2BU^2V^2}{d} \cos(2\Delta\phi), \\ \langle P_v \rangle_z &\approx V^2(1 + \delta^2) - \frac{2BU^2V^2}{d} \cos(2\Delta\phi).\end{aligned}\quad (5.20)$$

Las ecuaciones (5.19) y (5.20) describen la dependencia de la transferencia de potencia sobre la fase relativa entre los modos de polarización. Para una polarización inicial lineal ($\Delta\phi = 0, \pi$), el modo TE gana potencia extra desde el modo TM. Por otro lado, si la polarización inicial es elíptica ($\Delta\phi = \pi/2$), el proceso de intercambio de potencia se revierte y el modo TM gana una cierta cantidad de potencia desde el modo TE. Estos resultados demuestran analíticamente las observaciones numéricas de la sección anterior. A continuación, presentaremos los resultados para dos casos distintos: acoplamiento débil ($C = 0.1$) y acoplamiento medio ($C = 0.5$).

Discusión de casos específicos

Acoplamiento débil: $C = 0.1$ En la fig. 5.5 presentamos los diagramas de contorno de la potencia promedio del modo TE para un acoplamiento lineal débil ($C = 0.1$) como función de las amplitudes de ambos modos. Presentamos también una comparación entre nuestras predicciones teóricas basadas en las ecuaciones (5.20) (columna izquierda) y las simulaciones numéricas directas que realizamos integrando las ecuaciones (5.1a) y (5.1b) (columna derecha). En las figs. 5.5(a,b) (polarización inicial lineal) la tendencia muestra que mientras más grande es la amplitud inicial de los modos, más grande es la potencia de salida del modo TE. En este caso, la ganancia máxima para el modo TE desde el modo TM es $\sim 25\%$. En las figs. 5.5(c,d) (polarización inicial elíptica) la potencia de salida del modo TE es siempre menor que la potencia de entrada del mismo modo. Esto significa una ganancia simétrica

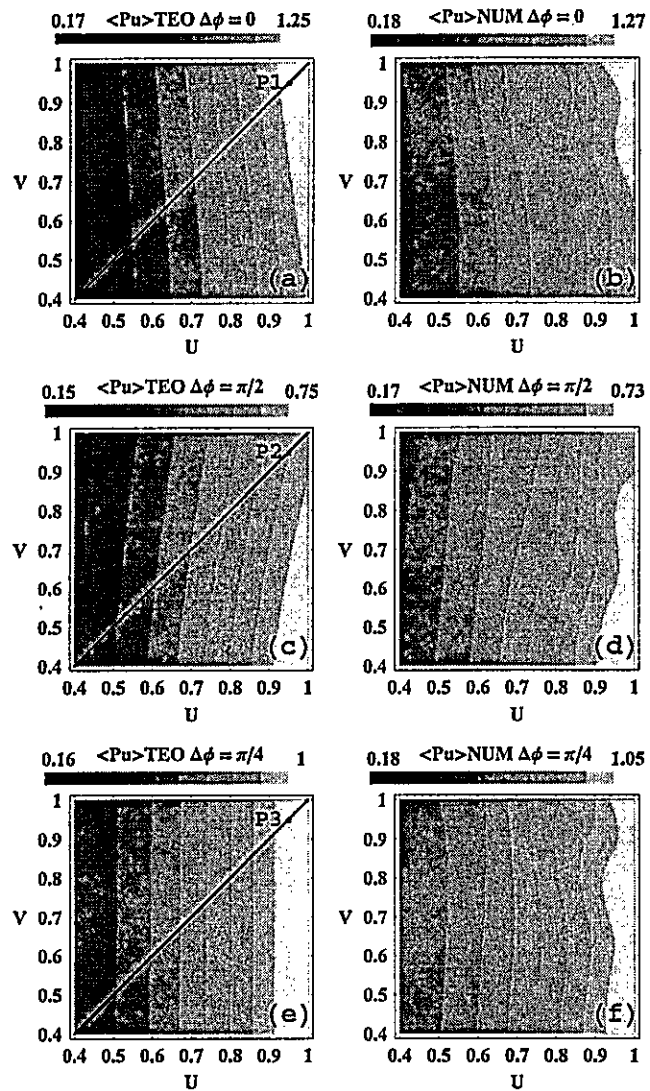


Figura 5.5: Comparación del *output* promedio de la potencia del modo TE como función de las amplitudes iniciales U y V , para $C = 0.1$, y $z_{max} = 100$. Izq.: predicciones analíticas. Der.: resultados numéricos. (a,b) $\Delta\phi = 0$, (c,d) $\Delta\phi = \pi/2$, (e,f) $\Delta\phi = \pi/4$.

al caso anterior para el modo TM de hasta $\sim 25\%$. En las figs. 5.5(e,f), $\Delta\phi = \pi/4$, no se observa ganancia en la potencia para ninguno de los dos modos. Esta situación corresponde, en promedio, a una dinámica sin intercambio de potencia.

Los tres casos presentados en la fig. 5.5 muestran una muy buena correspondencia entre los resultados numéricos y nuestras aproximaciones teóricas, tanto para la potencia transferida como para la potencia máxima y mínima esperada a la salida del arreglo para el modo TE. La potencia de salida promedio para el modo TM puede ser calculada como: $\langle P_v \rangle \approx U^2 + V^2 - \langle P_u \rangle$. Para mostrar una conducta dinámica típica, en la fig. 5.6 graficamos la potencia versus la amplitud para el caso $U = V$ (líneas negras en las figs. 5.5(a,c,e)). La figura 5.6a muestra el caso de polarización inicial lineal donde el modo TE (línea oscura) gana potencia desde el modo TM (línea cortada). Como ayuda visual, hemos adherido la curva correspondiente a la potencia inicial para ambos modos (línea gris). En la fig. 5.6b, podemos ver que el mecanismo de transferencia de potencia puede ser efectivamente revertido de tal forma que, el modo TM gana energía desde el modo TE. Esto sucede para el caso en que la polarización inicial es elíptica. La figura 5.6c muestra una anulación de la inestabilidad de polarización y, por ende, una anulación del mecanismo de transferencia de potencia entre los modos para una polarización inicial $\Delta\phi = \pi/4$.

En las figs. 5.5a y 5.6a, 5.5c y 5.6b, 5.5e y 5.6c, hemos indicado tres puntos ("P1", "P2", y "P3"), los que corresponden a $U = V = 0.95$. En la fig. 5.7, mostramos la evolución de la potencia para esos puntos en la dirección z presentando la dinámica para dos intervalos de z : desde 0 a 5 (izquierda), y desde 95 a 100 (derecha). El propósito de esto es mostrar la dinámica inicial y final y así, observar cómo funciona nuestra aproximación analítica al inicio y al final del arreglo. En esta figura, mostramos los resultados numéricos (líneas negras), los teóricos (líneas grises claras),

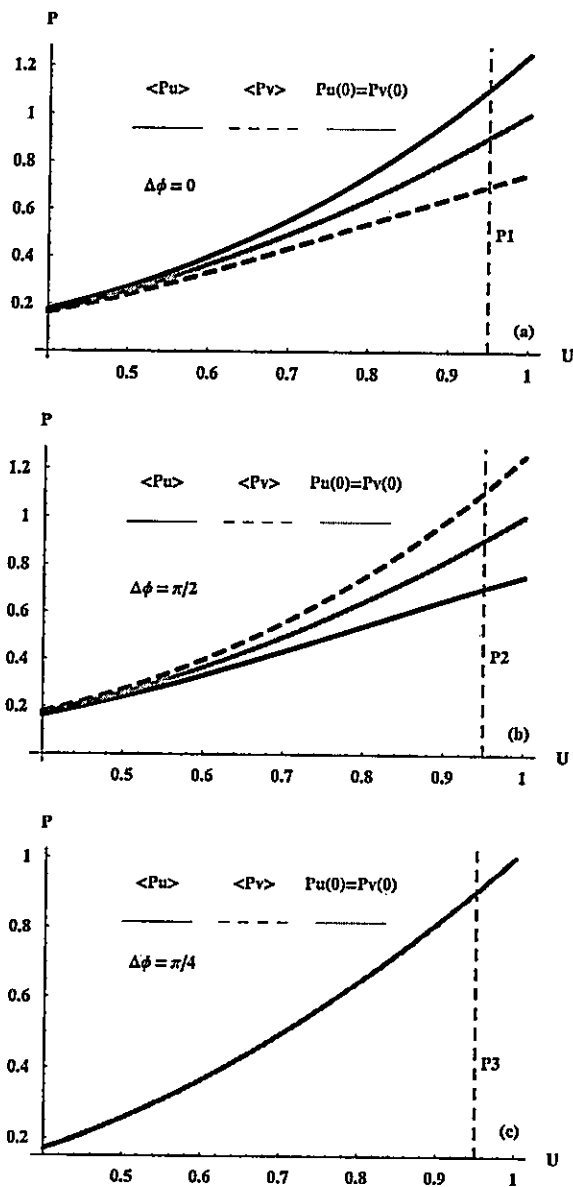


Figura 5.6: Resultados analíticos para las potencias de salida promediadas de los modos TE y TM para el caso $U = V$, y parámetro de acoplamiento $C = 0.1$. Figs. (a), (b), y (b) corresponden a las líneas negras en las figs. 5.5a, 5.5c, y 5.5e, respectivamente.

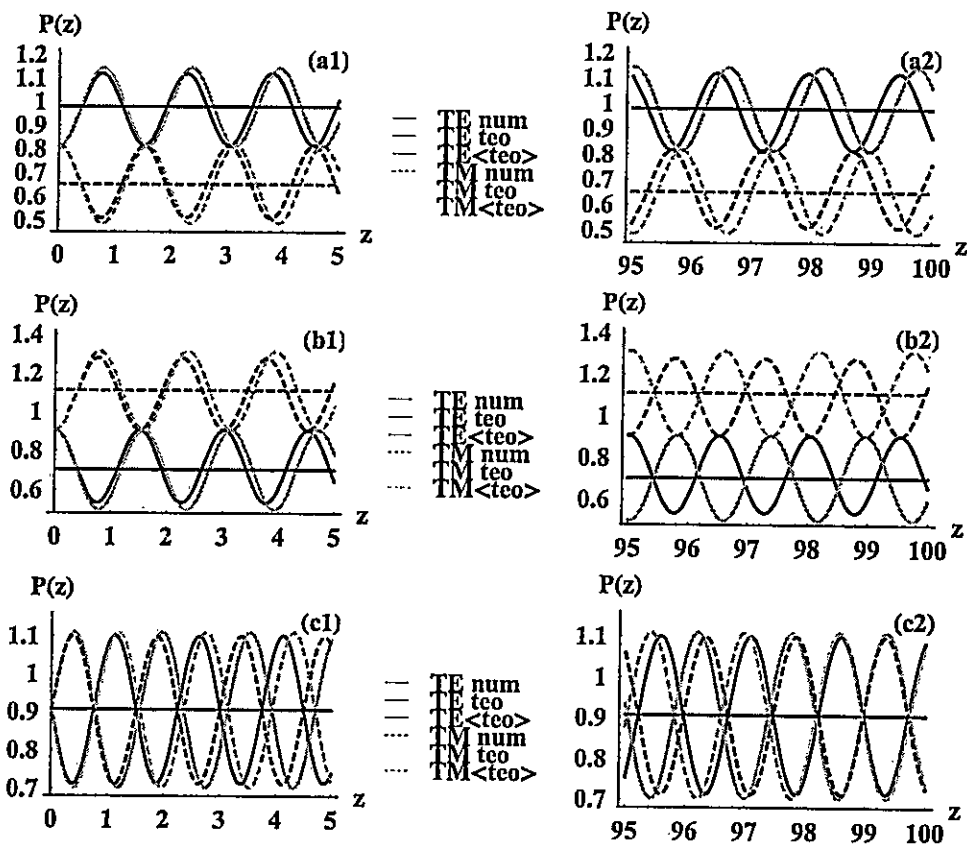


Figura 5.7: Resultados numéricos (líneas oscuras), analíticos (líneas grises claras), y analíticos promediados (líneas grises) de la evolución de la potencia de los modos TE (líneas solidas) y TM (líneas cortadas), para $C = 0.1$. La dinámica es mostrada en dos rangos diferentes de z . Izq.: $z = 0 - 5$. Der.: $z = 95 - 100$. Los casos (a), (b), y (c) representan los puntos P1, P2, y P3 de las figs. 5.5a (5.6a), 5.5c (5.6b), y 5.5e (5.6c), respectivamente.

y el promedio teórico (líneas grises) para la dinámica de la potencia de los modos TE (líneas sólidas) y TM (líneas cortadas). La figura 5.7 muestra una muy buena concordancia entre los resultados teóricos y los numéricos. En la fig. 5.7a (punto P1), el modo TE adquiere potencia desde el modo TM para el caso de una polarización inicial lineal. También se observa que, la predicción para la potencia promedio desde las ecuaciones (5.20), calza perfectamente con el resultado numérico. La figura 5.7b (punto P2) muestra una dinámica de potencia opuesta: para una polarización inicial elíptica, el modo TM gana potencia desde el modo TE. También en este caso, la predicción analítica del promedio de la potencia se corresponde perfectamente con el cálculo numérico. En la fig. 5.7c (punto P3), la estimación de la potencia promedio concuerda muy bien con los resultados numéricos, pero falla para describir los detalles de la dinámica de la potencia en la dirección z .

Acoplamiento medio: $C = 0.5$ Estudiamos en esta sección, el intercambio de potencias entre los modos de polarización ortogonal para un parámetro de acoplamiento medio, $C = 0.5$. En la fig. 5.8, consideramos los tres casos de polarización inicial estudiados antes para $C = 0.1$. De igual forma, en la columna izquierda mostramos nuestra aproximación teórica promediada para la potencia del modo TE dada por las ecuaciones (5.20), y en la columna derecha, los resultados numéricos al integrar las ecuaciones dinámicas vectoriales. En este caso, los resultados teóricos y numéricos no se corresponden con tanta precisión como los resultados anteriores. Las gráficas de contorno numéricas muestran una estructura oscilatoria, la cual no es predicha en las gráficas de contorno teóricas. A pesar de esta diferencia, la tendencia de crecimiento de la potencia del modo TE es bien predicha bajo nuestra aproximación. Así mismo, la potencia máxima y mínima teóricamente esperadas para el modo TE son bastante

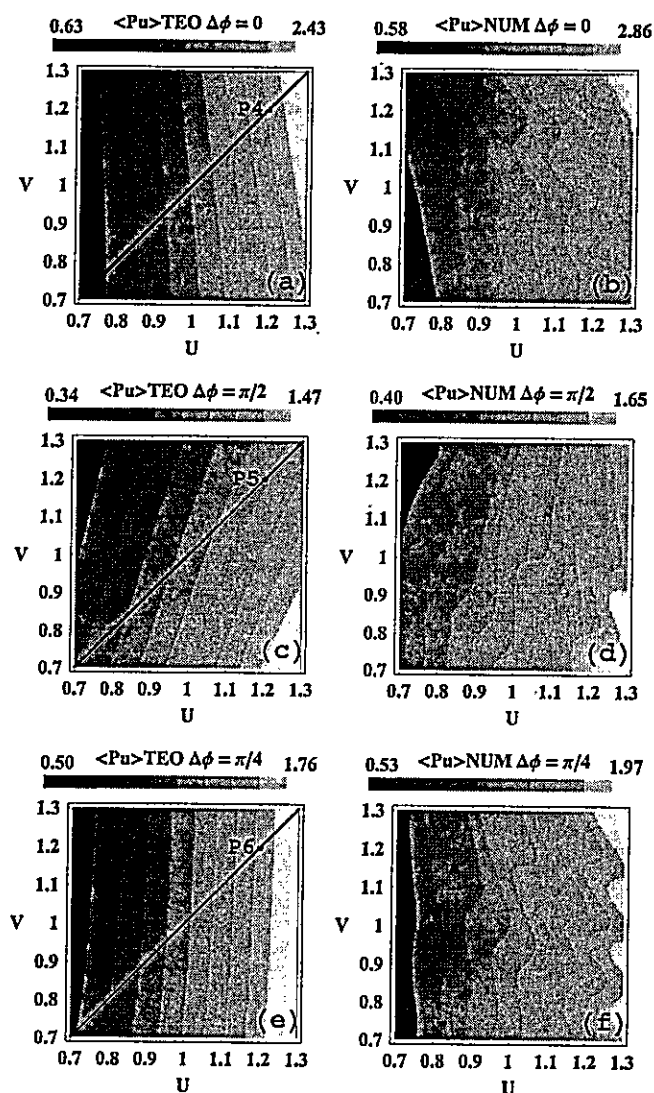


Figura 5.8: Comparación del *output* promedio de la potencia del modo TE como función de las amplitudes iniciales U y V , para $C = 0.5$, y $z_{max} = 100$. Izq.: predicciones analíticas. Der.: resultados numéricos. (a,b) $\Delta\phi = 0$, (c,d) $\Delta\phi = \pi/2$, (e,f) $\Delta\phi = \pi/4$.

cercanas a las calculadas numéricamente.

En la fig. 5.8a, se muestra el caso de polarización inicial lineal donde el modo TE gana potencia desde el modo TM. En este caso, la potencia del modo TE puede crecer hasta $\sim 45\%$. En la fig. 5.8b, o sea para el caso de una polarización inicial elíptica, el modo TM incrementa su potencia de salida también hasta $\sim 45\%$. La figura 5.8c muestra que, esencialmente, no hay crecimiento de la potencia para ambos modos en una situación inicial: $\Delta\phi = \pi/4$. Los contornos en esta última figura muestran una pequeña inclinación debido a que las amplitudes modales en los sitios vecinos (dados por las cantidades ε y δ) son más grandes que para el caso $C = 0.1$. De esta manera, el crecimiento de la potencia promediada del modo TE no es sólo cuadrática en la amplitud como en el caso de acoplamiento débil, en donde los parámetros pequeños son despreciables.

En la fig. 5.9 graficamos la potencia versus la amplitud para el caso $U = V$, caso que fue marcado por las líneas negras en la fig. 5.8a, fig. 5.8c, y fig. 5.8e. La conducta es similar a la obtenida para el caso $C = 0.1$. El modo TE gana potencia desde el modo TM para el caso de polarización inicial lineal (fig. 5.9a); el modo TE pierde parte de su potencia hacia el modo TM para el caso de una polarización inicial elíptica (fig. 5.9b); y, no se observa transferencia de potencia entre modos para el caso $\Delta\phi = \pi/4$ (fig. 5.9c).

En la fig. 5.10 se muestra la dinámica de la potencia de los puntos P4, P5 y P6 (figs. 5.8 y 5.9) en la dirección z . En el caso de una polarización inicial lineal donde el modo TE incrementa su potencia a expensas del modo TM (fig. 5.10a), la potencia promedio predicha es similar a la obtenida numéricamente, lo que también se cumple para el caso de una polarización inicial elíptica (fig. 5.10b). Finalmente, para $\Delta\phi = \pi/4$ (fig. 5.10c), la predicción de la potencia promedio es similar a la

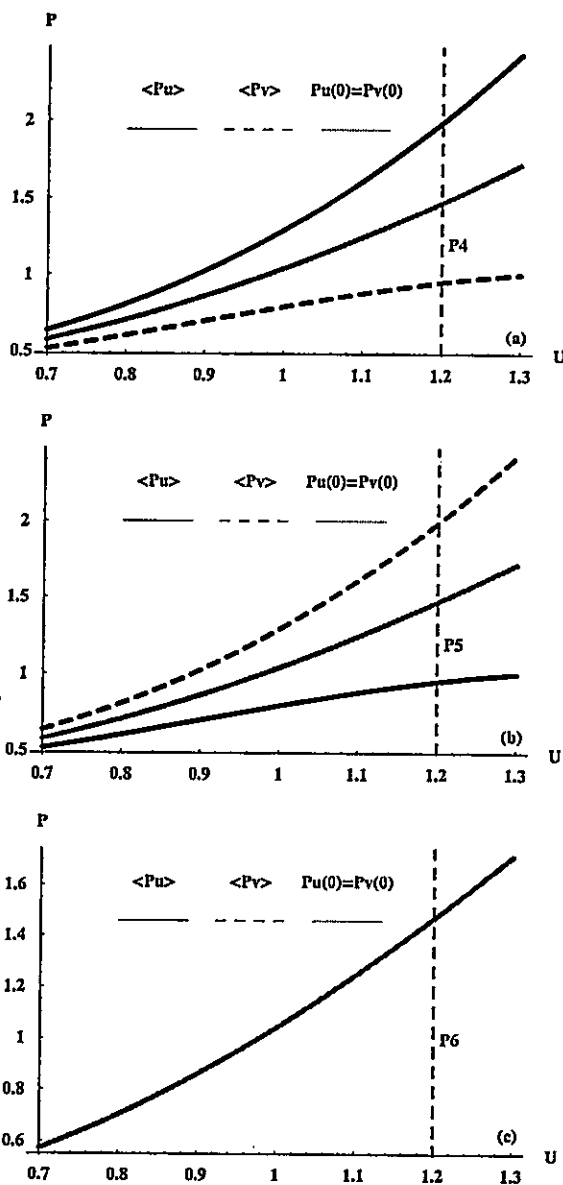


Figura 5.9: Resultados analíticos para las potencias de salida promediadas de los modos TE y TM para el caso $U = V$, y parámetro de acoplamiento $C = 0.5$. Figs. (a), (b), y (b) corresponden a las líneas negras en las figs. 5.8a, 5.8c, y 5.8e, respectivamente.

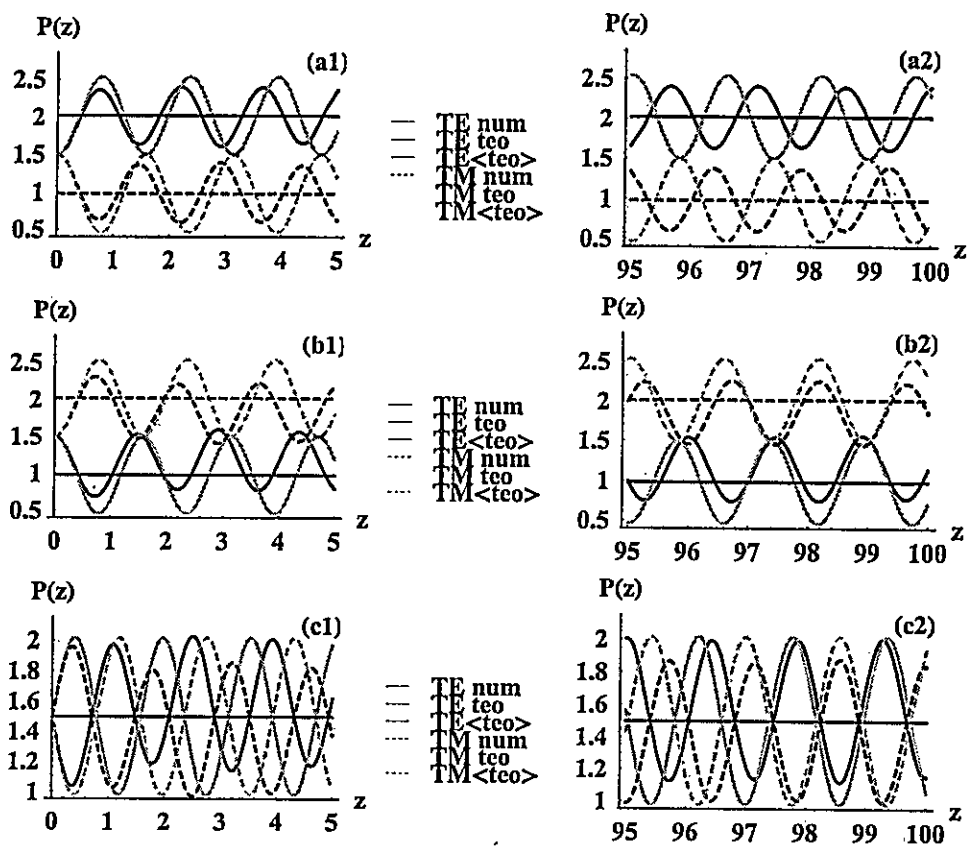


Figura 5.10: Resultados numéricos (líneas oscuras), analíticos (líneas grises claras), y analíticos promediados (líneas grises) de la evolución de la potencia de los modos TE (líneas solidas) y TM (líneas cortadas), para $C = 0.5$. La dinámica es mostrada en dos rangos diferentes de z . Izq.: $z = 0 - 5$. Der.: $z = 95 - 100$. Los casos (a), (b), y (c) representan los puntos P4, P5, y P6 de las figs. 5.8a (5.9a), 5.8c (5.9b), y 5.8e (5.9c), respectivamente.

obtenida numéricamente. Se debe recalcar que, en todos estos casos, la predicción de la evolución dinámica detallada difiere bastante de los resultados numéricos (ver fig. 5.10).

Es necesario, en este punto, destacar que nuestra aproximación para MFL's, como muestran las comparaciones previas, funciona muy bien para parámetros de acoplamientos lineales pequeños. Sin embargo, para valores intermedios (como por ejemplo $C = 0.5$), nuestra aproximación predice correctamente la dirección de la inestabilidad, pero falla en la estimación de la energía promedio final para ambos modos.

5.2.6. Inestabilidad inducida por la birrefringencia

Análisis lineal de la transferencia de potencia

La física del mecanismo de transferencia de potencia observado en la interacción entre los modos TE y TM es explicada por las propiedades específicas de la birrefringencia de la respuesta no lineal cúbica, y es similar al caso de un medio homogéneo (continuo). Para analizar este efecto en más detalle, consideramos las ecuaciones (5.14) y mantenemos sólo los términos lineales de birrefringencia, es decir:

$$-i\frac{\partial u_0}{\partial z} \approx (+1) u_0, \quad -i\frac{\partial v_0}{\partial z} \approx (-1) v_0. \quad (5.21)$$

Si imponemos las mismas condiciones iniciales anteriores (5.16), la variación de la potencia para ambos modos estaría dada por

$$\frac{\partial P_u}{\partial z} = -\frac{\partial P_v}{\partial z} \approx \pm 2BU^2V^2 \sin(4z),$$

donde los signos + y - representan los casos de polarización inicial lineal y elíptica, respectivamente. Para el caso de una polarización inicial lineal, la evolución de la potencia sería

$$\frac{\partial P_u}{\partial z} = -\frac{\partial P_v}{\partial z} \approx 2BU^2V^2 \sin(4z). \quad (5.22)$$

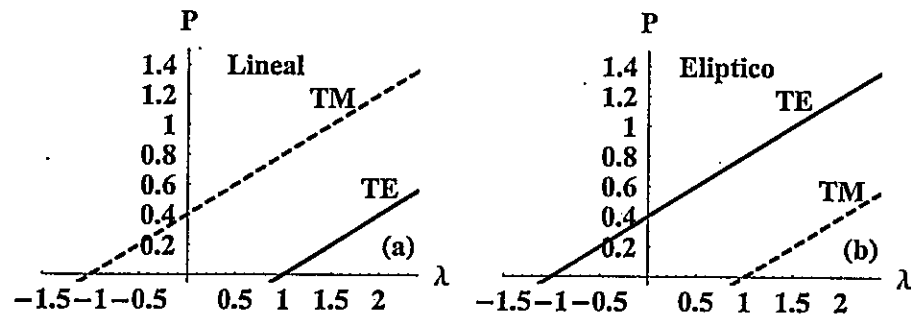


Figura 5.11: Diagramas de potencia para el caso $U = V$: (a) polarización lineal, (b) polarización elíptica.

Intercambiando por un momento la birrefringencia, lo que implica: $TE \leftrightarrow TM \Rightarrow$ onda rápida \leftrightarrow onda lenta $\Rightarrow \sin(4z) \rightarrow \sin(-4z) = -\sin(4z)$, la ec. (5.22) muestra que la birrefringencia juega un rol muy importante en la dinámica de los modos. Elegir una polarización inicial elíptica, es lo mismo que cambiar el signo de la birrefringencia y, por lo tanto, redefinir las ondas lentas y rápidas. Esta conclusión es muy importante ya que, uno observa en las ecuaciones y también numéricamente que, la única diferencia formal entre ambos modos es el signo de la birrefringencia.

Diagrama de potencia

Para demostrar la inestabilidad de modos de polarización, utilizamos un diagrama típico de potencia y estudiamos la potencia modal como función de su constante de propagación. Para un valor dado de la constante de propagación, el modo con menor potencia será el más estable [108]. Este diagrama puede ser construido en la aproximación de MFL's, asumiendo que el modo está localizado mayoritariamente en la guía central. Con esto podemos escribir:

$$\begin{aligned} u_0(z) &\approx u_0(0) \exp\{i[1 + U^2 + (A + B)V^2]z\}, \\ v_0(z) &\approx v_0(0) \exp\{i[-1 + V^2 + (A + B)U^2]z\}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Por simplicidad, elegimos la condición $U = V$. Esto implica que $P_u = U^2 = P_v = V^2$. Usa esta condición en la ec. (5.23), obtenemos una aproximación para las constantes de propagación λ_u y λ_v como la siguiente:

$$\begin{aligned}\lambda_u &\approx 1 + (1 + A + B)P_u \Rightarrow P_u(\lambda) \approx \frac{(\lambda - 1)}{1 + A + B}, \\ \lambda_v &\approx -1 + (1 + A + B)P_v \Rightarrow P_v(\lambda) \approx \frac{(\lambda + 1)}{1 + A + B},\end{aligned}$$

donde hemos asumido el caso de polarización inicial lineal ($\Delta\phi = 0$ o $\Delta\phi = \pi$). Para el caso de una polarización inicial elíptica, como discutimos en la sección anterior, debemos cambiar el signo de la birrefringencia de ambos modos. Esto significa que la ecuación para λ de ambos modos es intercambiada: $\lambda_u \rightarrow \lambda_v$ y $\lambda_v \rightarrow \lambda_u$. Este análisis nos muestra inmediatamente que, el modo TM es inestable para el caso de polarización inicial lineal (ver fig. 5.11a), y el modo TE es inestable para el caso de una polarización inicial elíptica (ver fig. 5.11b).

5.2.7. Potencial de Peierls-Nabarro para arreglos cúbicos birrefringentes

Después de estudiar la dinámica longitudinal buscamos ahora, entender la dinámica transversal de solitones discretos vectoriales, calculando la barrera de Peierls-Nabarro (BPN). Usando las definiciones para la potencia y el Hamiltoniano desde las ecuaciones (5.2) y (5.3) y, asumiendo una fuerte localización de modos no lineales pares e impares descritos por las ecuaciones (5.8) – (5.11), podemos estimar la potencia

$$P_{\text{impar}} \approx U^2 + V^2, \quad P_{\text{par}} \approx 2(\bar{U}^2 + \bar{V}^2), \quad (5.24)$$

y el Hamiltoniano de los modos como

$$H_{\text{impar}} \approx -[U^2 - V^2 + \frac{1}{2}(U^4 + V^4) + (A + B)U^2V^2],$$

$$H_{\text{par}} \approx -2[\bar{U}^2 - \bar{V}^2 + \frac{1}{2}(\bar{U}^4 + \bar{V}^4) + (A + B)\bar{U}^2\bar{V}^2 + C(\bar{U}^2 + \bar{V}^2) \cos k], \quad (5.25)$$

donde hemos tomado $k_u = k_v = k$. Ahora, y por simplicidad, tomamos $U = V$ y $\bar{U} = \bar{V}$. Siguiendo el procedimiento estándar (Caps. 3 y 4), consideramos a los modos pares e impares como dos estados diferentes del mismo modo no lineal corridos en la mitad de un período del arreglo. Esto implica que la potencia debe ser la misma para ambos modos ($P_{\text{impar}} = P_{\text{par}}$). Con esas suposiciones evaluamos el valor del Hamiltoniano para los dos tipos de MFL's en términos de la amplitud modal U , obteniendo como resultado:

$$\begin{aligned} H_{\text{impar}} &\approx -(1 + A + B) U^4, \\ H_{\text{par}} &\approx -\frac{1}{2}(1 + A + B)U^4 - 2CU^2 \cos k. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Finalmente, hallamos una expresión aproximada para la barrera de Peierls-Nabarro restando los valores del Hamiltoniano de ambas configuraciones:

$$\Delta_v^{(3)} \equiv H_{\text{impar}} - H_{\text{par}} \approx -\frac{1}{2}(1 + A + B)U^4 + 2CU^2 \cos k. \quad (5.27)$$

Esta expresión es similar al caso escalar discutido antes en el Cap. 3, pero ahora se incluye el efecto de la renormalización debida al acoplamiento no lineal de XPM y de FWM. Este resultado (5.27) nos dice que, a grandes potencias, para un momentum transversal inicial dado (el también llamado *kick*), el solitón discreto vectorial no es capaz de propagarse a través del arreglo puesto que necesita sobrepasar una barrera de energía efectiva muy profunda debido a la alta potencia. Así entonces, el solitón discreto queda atrapado en la guía incidente. A bajas potencias, y dado un *kick* inicial, la energía efectiva de atrapamiento es baja y el solitón discreto vectorial puede viajar a través del arreglo. Para niveles de potencia intermedios, el solitón viaja a través del arreglo cubriendo unos pocos sitios de la red desde la guía incidente, quedando atrapado en alguna guía debido a la no linealidad de ésta. Este

tipo de dinámica es una característica propia de los sistemas discretos no lineales y corresponde a lo que llamamos switching "curvado" en los capítulos anteriores.

Al igual que en arreglos cúbicos y cuadráticos, la BPN predice que los solitones discretos pares serán inestables decayendo a una configuración impar más estable. Esto se debe a que, para igual valor de la potencia, siempre el modo par tendrá un valor del Hamiltoniano más grande⁵.

5.2.8. Switching multi-puertos vectorial

En esta sección buscamos una aplicación para el problema de switching completamente óptico multi-puertos, utilizando las propiedades de los solitones discretos vectoriales estudiadas en este capítulo. Primero, introducimos un perfil inicial más realista desde un punto de vista experimental, para el cálculo numérico. Como no existen soluciones exactas de las ecuaciones (5.1a) y (5.1b), tomamos un perfil truncado tipo secante hiperbólica similar al utilizado en el capítulo (3):

$$\begin{aligned} u_n(0) &= u_0 \operatorname{sech}[u_0(n - n_{cu})/\sqrt{2}] e^{-ik_u(n-n_{cu})} e^{i\phi_u} \\ v_n(0) &= v_0 \operatorname{sech}[v_0(n - n_{cv})/\sqrt{2}] e^{-ik_v(n-n_{cv})} e^{i\phi_v}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

para $n - n_{cu} = n - n_{cv} = 0, \pm 1$, y $u_n(0) = v_n(0) = 0$, para los demás sitios del arreglo. Los parámetros u_0 y v_0 son las amplitudes iniciales⁶; k_u y k_v son los *kicks* iniciales (ángulos iniciales); n_{cu} y n_{cv} son las guías iniciales de ambos perfiles; y ϕ_u y ϕ_v son las fases iniciales para ambas componentes de la polarización TE y TM, respectivamente. Sabemos que este *ansatz* funciona muy bien para el caso escalar [78, 79] cuando el modelo es reducido a la ecuación discreta no lineal de Schrödinger.

Dejamos claro que la elección del *input* inicial no es un paso fundamental en el

⁵La conducta de la barrera es similar al caso cúbico presentado en la fig. 3.8

⁶No confundir con las amplitudes de las ondas planas utilizadas en el análisis de MI.

estudio de la dinámica puesto que el solitón discreto es un modo que se auto-ajusta en el arreglo y el exceso de energía es liberada en forma de modos de radiación [55]. Hemos realizado simulaciones numéricas con otros tipos de perfiles iniciales, tales como modos fuertemente localizados y modos tipo gaussianas discretizadas, y la conducta dinámica es similar. Sin embargo, el *input* tipo secante hiperbólica, funciona mejor en las simulaciones.

Considerando algunos conceptos previos, utilizamos la inestabilidad de polarización y la dinámica de atrapamiento de Peierls-Nabarro para controlar la salida de solitones discretos vectoriales. La idea es controlar un haz de señal débil TE (o TM) mediante un haz de bombeo (alta potencia) angulado TM (o TE). En las simulaciones numéricas tomamos $z_{\max} = 50$ y un arreglo de 110 guías de ondas. El valor del parámetro de acoplamiento, $C = 0.92$, es tomado desde experimentos recientes [42]. Usamos una señal débil sin ángulo inicial con una potencia de 0.03 (amplitud inicial de 0.1, y potencia real estimada de 1.68 Watts). En ausencia de un haz de bombeo, esta señal difractaría en el arreglo y no habría formación de un solitón discreto escalar (cúbico) ni tampoco vectorial. Cuando un haz de bombeo de alta potencia está presente en el arreglo, se observa transferencia de energía con una ganancia dada por $G \equiv ((P_{u,v}(z_{\max})) - P_{u,v}(0))/P_{u,v}(0)$. La dinámica acoplada de las dos componentes de polarización, conduce a la formación de un solitón discreto vectorial que puede ser transferido a otro sitio del arreglo mediante la variación del ángulo inicial.

Las figuras 5.12 y 5.13 muestran ejemplos de switching multi-puertos gracias al acoplamiento entre los modos TE y TM. Para una polarización inicial lineal, la figura 5.12a muestra un ejemplo de switching de ocho sitios. En este caso, la ganancia de potencia para el modo TE es de $\sim 90\%$. En la fig. 5.11b (caso lineal) no hay switching, pero la ganancia para el modo TE es muy grande $\sim 6000\%$. Un ejemplo

de switching de cuatro sitios es mostrado en la fig. 5.13a donde la polarización inicial es elíptica, y la ganancia para el modo TM es $\sim 45\%$. Finalmente, y nuevamente para el caso elíptico, la fig. 5.13b muestra un ejemplo sin switching para ambos modos, pero con una ganancia de $\sim 30\%$.

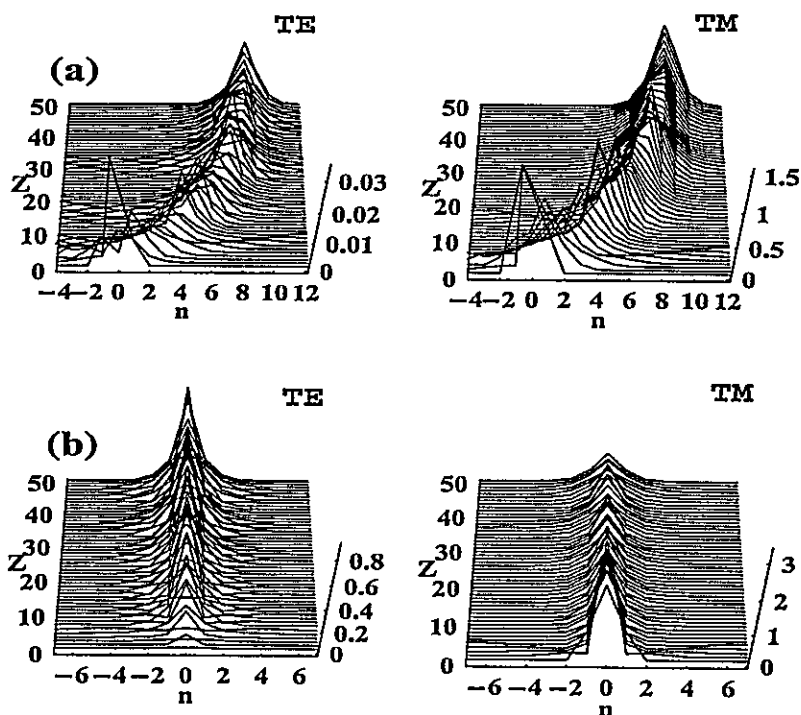


Figura 5.12: Ejemplos de switching completamente óptico multi-puertos basados en solitones discretos vectoriales, para $C = 0.92$ y $z_{\max} = 50$. Polarización lineal: (a) $k_u = 0$, $k_v = -0.5$, $u_0 = 0.1$ y $v_0 = 1.248$, y (b) $k_u = k_v = 0$, $u_0 = 0.1$ y $v_0 = 1.5$. Notar las diferentes escalas de potencia para los modos TE y TM.

Como conclusión, es importante notar que la señal (TE o TM) posee una muy baja potencia (~ 1.7 Watts) y un ángulo nulo. Con esto queremos destacar las reales posibilidades de la implementación de este concepto de switching multi-puertos

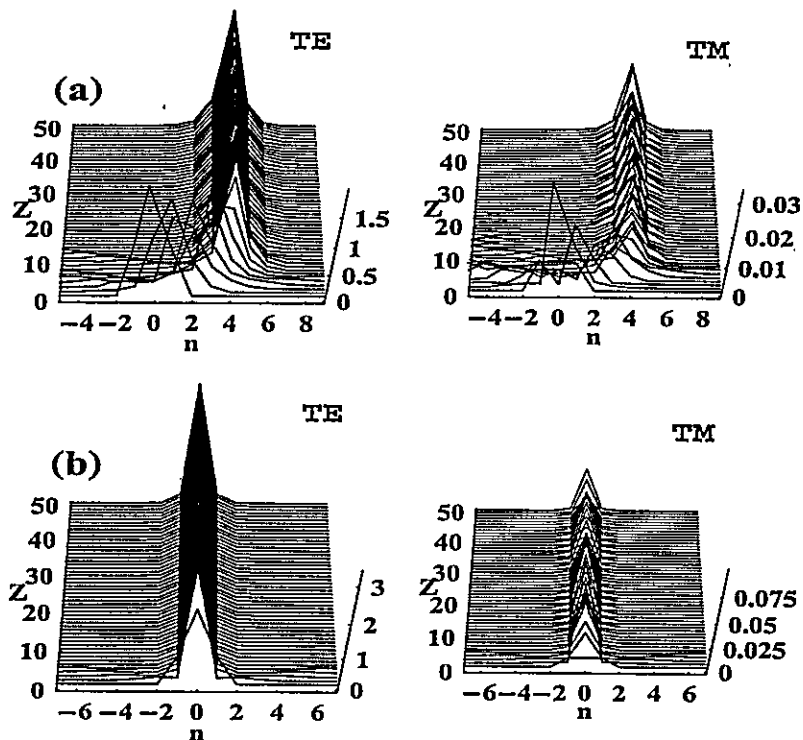


Figura 5.13: Ejemplos de switching completamente óptico multi-puertos basados en solitones discretos vectoriales, para $C = 0.92$ y $z_{\max} = 50$. Polarización elíptica: (a) $k_u = -0.8$, $k_v = 0$, $u_0 = 1.38$ y $v_0 = 0.1$, y (b) $k_u = k_v = 0$, $u_0 = 1.5$ y $v_0 = 0.1$. Notar las diferentes escalas de potencia para los modos TE y TM.

completamente óptico. La idea sugerida consiste en que, una muy pequeña y no angulada señal, llegando a cualquier sitio del arreglo puede, como consecuencia de la inestabilidad de polarización y a la discretitud del sistema ser amplificada en un rango desde un 30% hasta un 6000%, y puede ser direccionada a cualquier sitio del arreglo, escogiendo correctamente la potencia y ángulo del haz de bombeo de polarización ortogonal a la señal incidente. La implementación de esta idea, creemos, es fácil de lograr en el laboratorio y, más importante aún, debido a la baja

potencia requerida para la señal, podría tener grandes aplicaciones en sistemas de comunicaciones ópticas que funcionan actualmente con muy bajas potencias.

Capítulo 6

Transferencia de energía para arreglos de condensados de Bose-Einstein

6.1. Introducción

La idea de este capítulo es presentar, de forma simple, una importante extensión de la teoría estudiada en los capítulos anteriores, a otro sistema físico de interés: el Condensado de Bose-Einstein (BEC). Sólo por citar algunos trabajos sobre estos sistemas, partimos mencionando un paper seminal que se refiere a la descripción teórica de los condensados en trampas magnéticas dados por la ecuación de Gross-Pitaevskii (GP) [123] y, algunos trabajos que han estudiado esta ecuación en su forma continua [124–126]. Recientemente, fue publicada la primera observación experimental de un solitón brillante para un condensado de Bose-Einstein [30] en trampas magneto-ópticas, confirmando la predicción teórica de la ec. de GP, la que predice estructuras localizadas tipo solitón.

Durante los últimos años se ha puesto un gran énfasis en la similitud de los condensados inmersos en redes ópticas con los sistemas discretos, como los de física del estado-sólido (por ejemplo redes uni-dimensionales), o sistemas ópticos no lineales

como los arreglos de guías de ondas estudiados en los capítulos anteriores. Cuando las dimensiones del condensado son comparables a la longitud de onda de la red, la descripción de la dinámica puede ser realizada en una aproximación discreta. De hecho, la estructura discreta introducida por el potencial de la red es idéntica al de guías de ondas no lineales cúbicas. En particular, la formación y el análisis de solitones discretos en estos sistemas ha experimentado una creciente atención en las publicaciones de este siglo [29, 39, 83, 127–132]. Así también, se ha enfatizado en la importancia del estudio de la dinámica discreta en estos sistemas mediante el análisis de la Barrera de Peierls-Nabarro (PN) [131]. Se observa que, la profundidad del potencial es el parámetro de control de la dinámica a diferencia del caso óptico, donde el principal parámetro dinámico es la potencia del solitón. Es claro que, mientras más profundo el potencial óptico (es decir más atrapado el condensado) menor es el número de sitios que abarca el solitón discreto y, por lo tanto, cuando la profundidad del potencial óptico es baja, el solitón discreto es más extendido aproximándose a una descripción continua. Un estudio de particular interés fue realizado recientemente por Abdullaev *et al.* [83]. En su trabajo ellos consideran una interacción no lineal dada por la longitud de *scattering*, variable en el tiempo¹. La gran ventaja de esta dependencia temporal, es la comparación con los arreglos de guías ópticas; la no linealidad en guías de ondas, por ejemplo de AlGaAs, es proporcional al coeficiente Kerr el cual es un parámetro muy pequeño ($n_2 \sim 1 \cdot 10^{-17} \text{ m}^2/W$) y, por lo tanto, muy difícil de modificar en la práctica. Por esto carece de sentido expresar la no linealidad como una función variable, en este caso como función de la dirección de propagación z . En cambio, para arreglos de condensados, el campo magnético puede ser ajustado tanto en forma continua como alterna, dentro del rango que permita

¹Ha sido demostrado experimentalmente [30] que, la longitud de *scattering* puede ser efectivamente modificada mediante la variación del campo magnético aplicado sobre el condensado.

mantener las condiciones de atrapamiento o condensación. Con esto, la no linealidad puede, efectivamente, ser representada como una función dependiente del tiempo y, adquirir así el sistema propiedades dinámicas que no se manifiestan en otros arreglos discretos no lineales típicos.

A continuación presentamos algunos resultados no publicados que consideran la no linealidad como una función dependiente del tiempo y que, como veremos, demuestran una dinámica exclusiva de este sistema, manifestándose esencialmente en una modificación de la estabilidad modal en el arreglo discreto no lineal.

6.2. Teoría y resultados

Comenzamos este estudio mostrando cómo se obtienen las ecuaciones dinámicas en este tipo de arreglos, conocidas como ecuaciones de Gross-Pitaevskii (GP) [123]. A continuación presentaré derivación de la ecuación continua de GP y luego, realizaremos la aproximación discreta considerando un arreglo uni-dimensional de trampas magneto-ópticas, llegando a la ecuación de Schrödinger no lineal discreta.

6.2.1. Ecuación de Gross-Pitaevskii

El Hamiltoniano de muchos cuerpos para N bosones interactuantes confinados en un potencial externo, está dado, en segunda cuantización, por

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}), \quad (6.1)$$

donde $\hat{\Psi}$ y $\hat{\Psi}^\dagger$ son los operadores de campo bosónicos que aniquilan y crean una partícula en la posición \mathbf{r} , respectivamente; y $V(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ es el potencial interatómico de dos cuerpos.

La condensación de Bose-Einstein ocurre cuando el número de átomos n_0 del estado base se hace muy grande ($n_0 \equiv N_0 \gg 1$) y la fracción N_0/N permanece finita en el límite termodinámico ($N \rightarrow \infty$). Para un gas uniforme en un volumen V , la condensación ocurre en el estado de una partícula $\Psi_0 = 1/\sqrt{V}$ con un momentum nulo, tal que el operador de aniquilación $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ puede ser descompuesto en la forma $\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sqrt{N_0/V} + \hat{\Psi}'(\mathbf{r})$. Tratando el operador $\hat{\Psi}'$ como una pequeña perturbación, Bogoliubov desarrolló la teoría a "primer orden" para las excitaciones de gases bosónicos interactuantes. La generalización de la descripción de Bogoliubov para el

caso de una configuración no-uniforme y tiempo-dependiente, es dado por

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t) + \hat{\Psi}'(\mathbf{r}, t), \quad (6.2)$$

en la representación de Heisenberg. $\Phi(\mathbf{r}, t)$ es una función compleja definida como el valor de expectación del operador de campo: $\Phi(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \rangle$, y su módulo determina la densidad del condensado: $n_0(\mathbf{r}, t) = |\Phi(\mathbf{r}, t)|^2$. La función $\Phi(\mathbf{r}, t)$ es un campo clásico que tiene el significado de un parámetro de orden y es, a menudo, llamada como "función de onda del condensado."

Para derivar la ecuación dinámica de $\Phi(\mathbf{r}, t)$, primero debemos escribir el operador de evolución $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$ usando la ecuación de Heisenberg con el Hamiltoniano de muchos cuerpos (6.1):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = [\hat{\Psi}, H] = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}', t) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \quad (6.3)$$

En un gas diluido y frío, uno puede obtener una aproximación para el término de interacción, observando que en este caso, únicamente colisiones binarias de baja energía son relevantes y que esas colisiones son caracterizadas por un parámetro simple: la longitud de *scattering* de la onda s (a), independientemente de los detalles del potencial de dos cuerpos. Esto nos permite reemplazar $V(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ por una interacción efectiva:

$$V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = g\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \quad (6.4)$$

donde la constante de acoplamiento g está relacionada con la longitud de *scattering* por

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}, \quad (6.5)$$

con m la masa atómica.

El uso de este potencial efectivo (6.4) en la ecuación (6.3) es compatible con el reemplazo de $\hat{\Psi}$ con Φ , y genera la siguiente ecuación, para el parámetro de orden²:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r}) + g|\Phi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \Phi(\mathbf{r}, t). \quad (6.6)$$

La expresión (6.6) es conocida como la ecuación de Gross-Pitaevskii (GP). Su validez está basada en que el valor de la longitud de *scattering* de la onda s es mucho menor que la distancia promedio entre los átomos del condensado y, que el número de átomos de éste es mucho mayor que 1. La ecuación de GP puede ser utilizada, a bajas temperaturas, para explorar la conducta macroscópica del sistema caracterizado por las variaciones del parámetro de orden sobre distancias más grandes que la distancia media entre átomos. Esta ecuación puede ser obtenida variacionalmente desde:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi = \frac{\delta E}{\delta \Phi^*}, \quad (6.7)$$

donde el funcional de energía E , es dado por

$$E[\Phi] = \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Phi|^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) |\Phi|^2 + \frac{g}{2} |\Phi|^4 \right]. \quad (6.8)$$

El primer término de este funcional representa la energía cinética del condensado; el segundo término representa la energía del oscilador armónico dado por la trampa magneto-óptica; y el tercer y último término, representa la energía de interacción de campo medio, la cual corresponde a la primera corrección de la expansión virial para la energía del gas.

Como la ecuación de GP es similar a la ecuación de Schrödinger no lineal (NLSE), es natural esperar la formación de solitones brillantes para una interacción interatómica atractiva ($a < 0$), y de solitones oscuros para una interacción repulsiva ($a > 0$) [29].

²Este reemplazo es únicamente válido en el límite de temperatura cero, cuando todas las partículas están en el condensado.

6.2.2. Ecuación de Schrödinger no lineal discreta para un arreglo de condensados de Bose-Einstein

Partiendo desde la ecuación de GP (6.6) y, siguiendo la derivación utilizada en las Refs. [29] y [83], obtenemos la ecuación de Schrödinger no lineal discreta (DNLSE). Consideramos al condensado atrapado en una red óptica profunda generada por la interferencia de dos haces ópticos contra-propagantes. El potencial óptico externo V_{ext} , en este caso, puede ser tomado de la forma: $V_{ext}(\mathbf{r}) = V_0(x, y) \sin^2(kz)$. Como el campo magnético puede ser ajustado en el condensado [30] podemos considerar una dependencia temporal de la longitud de scattering: $g \rightarrow g(t) = 4\pi\hbar^2 a(t)/m$. El potencial externo tiene una periodicidad en el plano (x, y) por lo que consideramos un arreglo débilmente acoplado de BEC's y, suponemos una solución de la forma

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{n'} u_{n'}(t) \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{n'}), \quad (6.9)$$

donde la función real $\psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{n'})$ es tomada como fuertemente localizada en el n' -ésimo sitio del arreglo. Esta función cumple las siguiente relaciones:

$$\int d\mathbf{r} \psi_{n'} \psi_{n'+1} \approx 0 ; \int d\mathbf{r} \psi_{n'}^2 = 1.$$

Introducimos entonces el *ansatz* (6.9) en la ecuación de GP (6.6); multiplicamos por $\psi_{n'}$, e integramos en el espacio utilizando las propiedades recién descritas para la función ψ . Con ésto eliminamos la dependencia espacial de las ecuaciones, reduciéndolas a sólo una dimensión espacial más el tiempo. La primera integral que aparece es de la forma:

$$\sum_{n'} \int d\mathbf{r} \psi_n \psi_{n'} = \sum_{n'} \delta_{n, n'} \quad (6.10)$$

La segunda integral es un poco más compleja y corresponde a la energía cinética del condensado. Para resolverla consideramos sólo una interacción a primeros vecinos

tipo *tight-binding*, donde la sumatoria considera sólo dos sitios³: n y $n + 1$. Esta integral es dada por:

$$\sum_{n'} \int d\mathbf{r} \psi_n \nabla^2 \psi_{n'} = \int d\mathbf{r} \psi_n (\nabla^2 \psi_n + \nabla^2 \psi_{n+1}) = - \int d\mathbf{r} (\nabla \psi_n)^2 - \int d\mathbf{r} \nabla \psi_n \cdot \nabla \psi_{n+1} \quad (6.11)$$

Luego corresponde resolver la integral relacionada con el potencial óptico. Esta integral es más simple y, al igual que en el caso anterior sólo consideramos la interacción a primeros vecinos debida al potencial,

$$\sum_{n'} \int d\mathbf{r} \psi_n V_{ext}(\mathbf{r}) \psi_{n'} = \int d\mathbf{r} V_{ext}(\mathbf{r}) \psi_n^2 + \int d\mathbf{r} \psi_n V_{ext}(\mathbf{r}) \psi_{n+1} \quad (6.12)$$

Por último, resolvemos la integral de interacción entre partículas:

$$\sum_{n'} \int d\mathbf{r} \psi_n \psi_{n'}^3 = \int d\mathbf{r} \psi_n^4. \quad (6.13)$$

Dadas estas integrales, hacemos las definiciones:

$$\begin{aligned} E_n &\equiv \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \psi_n)^2 + V_{ext} \psi_n^2 \right], \\ \lambda(t) &\equiv g(t) \int d\mathbf{r} \psi_n^4, \\ K &\equiv - \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \psi_n) \cdot (\nabla \psi_{n+1}) + \psi_n V_{ext}(\mathbf{r}) \psi_{n+1} \right], \end{aligned} \quad (6.14)$$

donde E_n representa la energía del condensado en el n -ésimo sitio; λ es la interacción no lineal entre las partículas del condensado; y K , la interacción entre sitios vecinos dada por un término de origen cinético y por la red formada por el potencial óptico. Reagrupando estas integrales y definiciones podemos escribir una primera versión de la ec. discreta de GP:

$$i\hbar \frac{\partial u_n}{\partial t} = -K (u_{n+1} + u_{n-1}) + E_n u_n + \lambda(t) |u_n|^2 u_n \quad (6.15)$$

³El sitio $n - 1$ es considerado simétrico al sitio $n + 1$.

Si dividimos por $2K$, y definimos lo siguiente:

$$\frac{2K}{\hbar}t \rightarrow t; \epsilon_n \equiv \frac{E_n}{2K}; \Lambda(t) \equiv \frac{\lambda(t)}{2K};$$

podemos escribir la ecuación discreta de GP adimensional como:

$$i\frac{\partial u_n}{\partial t} = -\frac{1}{2}(u_{n+1} + u_{n-1}) + (\epsilon_n + \Lambda(t)|u_n|^2)u_n \quad (6.16)$$

Esta ecuación es idéntica a la ecuación de Schrödinger no lineal discreta que hemos estudiado en el Cap. 3. La única diferencia formal es el término ϵ_n que representa la energía del condensado en el sitio n , lo que en el caso óptico correspondería a los índices efectivos de refracción de las guías de ondas individuales.

6.2.3. Potencial de Peierls-Nabarro para arreglos de condensados de Bose-Einstein

En esta sección derivamos la expresión exacta para el potencial de Peierls-Nabarro (PN) y, estudiamos la nueva fenomenología que adquiere este sistema al poseer una no linealidad dependiente del tiempo. Comenzamos el análisis desde la ecuación tipo DNLS obtenida en la sección anterior (6.16), haciendo una simplificación de ésta, consideramos un arreglo simétrico de trampas que poseen una energía de sitio idéntica, $\epsilon_n \equiv \epsilon$, e introducimos un cambio de fase en la amplitud del condensado: $u_n \rightarrow u_n e^{-i\epsilon t}$. Así, obtenemos una ecuación DNLS típica con una no linealidad variable en el tiempo

$$i\frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_{n-1}) - \Lambda(t)|u_n|^2 u_n = 0 \quad (6.17)$$

El término no lineal de la ecuación (6.17) tiene un signo menos por delante. Esto es debido a que, en el caso de condensados de Bose-Einstein, cuando la interacción entre partículas es *atractiva*, la longitud de *scattering* es negativa generando un

término auto-enfocante, como en el caso óptico. Esto lleva a la formación de solitones discretos brillantes no-escalonados. En cambio, una longitud de *scattering* positiva implica una interacción *repulsiva* del condensado, lo que desencadena un efecto no lineal desenfocante, con el cual es posible generar solitones del tipo oscuros o brillantes escalonados, los cuales no son de interés en esta tesis. Definimos entonces, por simplicidad de notación,

$$\Lambda(t) \equiv -a(t) \quad (6.18)$$

siendo la función $a(t)$ proporcional a menos la longitud de *scattering* del condensado y, por ende proporcional también al campo magnético⁴. Finalmente reescribimos la ecuación discreta de GP como,

$$i \frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_{n-1}) + a(t)|u_n|^2 u_n = 0 \quad (6.19)$$

El número total de partículas (N) y el Hamiltoniano⁵ (H) del condensado están dados por

$$N = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u_n|^2, \quad (6.20)$$

$$H = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} [(u_n^* u_{n+1} + u_n u_{n+1}^*) + a(t)|u_n|^4]. \quad (6.21)$$

Para el cálculo del potencial de PN necesitamos obtener configuraciones pares e impares de un tipo de perfil inicial. Utilizamos para esto, perfiles exponenciales como en la Ref. [83], dados por:

$$u_n(0) = u_0 e^{-\alpha|n|} e^{ikn}, \quad (6.22)$$

⁴Se usa el mismo símbolo que para la longitud de *scattering* del condensado (a) para mantener en mente la relación directa entre estos conceptos.

⁵A pesar de la dependencia temporal del Hamiltoniano, la conservación se asegura al utilizar campos magnéticos continuos y oscilantes, los que en promedio se conservarán.

para el modo impar⁶, y una forma similar para el modo par

$$v_n(0) = v_0 e^{-\alpha|n-1/2|} e^{ik(n-1/2)}. \quad (6.23)$$

Por simplicidad, tomamos los parámetros α y k iguales para ambos modos. Calculamos entonces, exactamente (resolviendo las sumatorias), los Hamiltonianos y el número de partículas para ambos modos:

$$\begin{aligned} H_u &= -\frac{u_0^4 a(t)}{2} \coth(2\alpha) - \frac{u_0^2 \cos k}{\sinh \alpha} \\ H_v &= -\frac{v_0^4 a(t)}{2 \sinh(2\alpha)} - \frac{v_0^2 (1 + 2e^{-\alpha} - e^{-2\alpha}) \cos k}{2 \sinh \alpha} \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} N_u &= u_0^2 \coth \alpha \\ N_v &= \frac{v_0^2}{\sinh \alpha} \end{aligned} \quad (6.25)$$

Consideramos ahora que ambos modos (pares e impares) representan dos instantes de tiempo diferentes para un mismo modo discreto. Por esto, consideramos al número de partículas de ambas configuraciones como iguales:

$$N_u = N_v \Rightarrow v_0^2 = u_0^2 \cosh \alpha \quad (6.26)$$

Con esta condición, resulta directo obtener el Hamiltoniano par (H_v) en términos de la amplitud del modo impar (u_0):

$$H_v \rightarrow H_v(u_0) = -\frac{u_0^4 a(t)}{4} \coth \alpha - \frac{u_0^2 \cos k}{2} (1 + 2e^{-\alpha} - e^{-2\alpha}) \coth \alpha \quad (6.27)$$

Finalmente, calculamos exactamente la barrera de PN como una resta de ambos Hamiltonianos [15]:

$$\Delta_{BEC} = -\frac{u_0^4 a(t)}{4} \tanh \alpha + \frac{u_0^2 \cos k}{\sinh \alpha} \left[\frac{(1 + 2e^{-\alpha} - e^{-2\alpha})}{2} \cosh \alpha - 1 \right]. \quad (6.28)$$

⁶Esto es equivalente a: $u_0 \xi^{|n|} e^{ikn}$, con $\alpha \equiv \ln(1/\xi)$ para $0 < \xi < 1$.

Esta expresión muestra el potencial, o barrera de PN, para un arreglo de condensados de Bose-Einstein atrapados en un campo magnético DC y AC (dado por la función $a(t)$). El cálculo de la barrera de PN fue hecho sin aproximaciones matemáticas a diferencia del caso de *modos fuertemente localizados* de los capítulos anteriores. Este resultado muestra que es posible cambiar las propiedades de estabilidad de modos pares e impares en este tipo de sistema discreto, mediante la elección adecuada de los campos magnéticos externos los que, efectivamente, variarían la longitud de *scattering*. En principio, sería posible realizar un switch temporal en las propiedades de propagación del arreglo observándose una propagación estable para modos pares e impares, en diferentes instantes de tiempo. Esta característica es propia de sistemas con este tipo de no linealidad ya que, en los arreglos estudiados anteriormente en esta tesis (Caps. 3, 4, y 5), las propiedades de estabilidad están fijas, observándose siempre una propagación estable para modos impares, e inestable para modos pares.

Es importante notar que, la expresión para la barrera de PN (6.28) es similar a la obtenida para el caso DNLS en el Cap. 3 (3.13). Esto es debido a que, ambos sistemas poseen una no linealidad de tipo cúbica, por lo que la barrera tiene un término negativo de orden cuártico (proporcional al coeficiente no lineal) y uno positivo de orden cuadrático (proporcional al parámetro de acoplamiento), en la amplitud del solitón. La diferencia, se encuentra en que la no linealidad en el caso de BEC's es función del tiempo. El límite entre ambos cálculos se puede obtener considerando una muy fuerte localización para el input (6.22), dado por: $\alpha \gg 1$.

6.2.4. Resultados numéricos

En esta sección presento dos diferentes estudios numéricos. Primero, la transferencia de energía controlada para dos diferentes funciones de campo magnético.

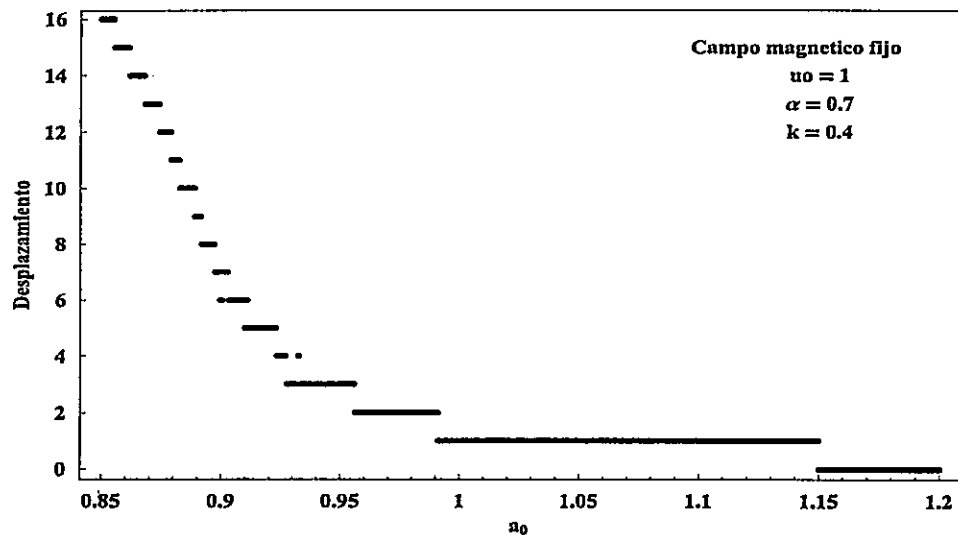


Figura 6.1: Posición central final del condensado como función de la longitud de *scattering*. El tiempo máximo fue de $t_{max} = 100$, y el número de trampas magnéticas fue de 120.

Finalmente, y como resultado más importante, muestro cómo, para diferentes funciones oscilatorias del campo magnético, es posible alterar efectivamente la barrera de PN y, observar así una muy rica dinámica propia de este arreglo de BEC's.

Switching controlable

La función más simple posible para la longitud de *scattering* es una función constante dada como: $a(t) = a_0$. La idea es observar cómo cambia la posición final del solitón discreto o condensado para distintos valores del parámetro no lineal. La fig. 6.1 muestra un muy buen control de la transferencia de energía hasta 16 sitios desde la posición inicial, con muy pocos errores de control (sitios 4 y 6). El tiempo máximo elegido en este barrido fue de $t_{max} = 100$. Desde la Ref. [30] sabemos que, un cambio del campo magnético se traduce en una variación de la longitud de *scattering* por lo que, en principio, este tipo de switching controlable podría ser testeado en un

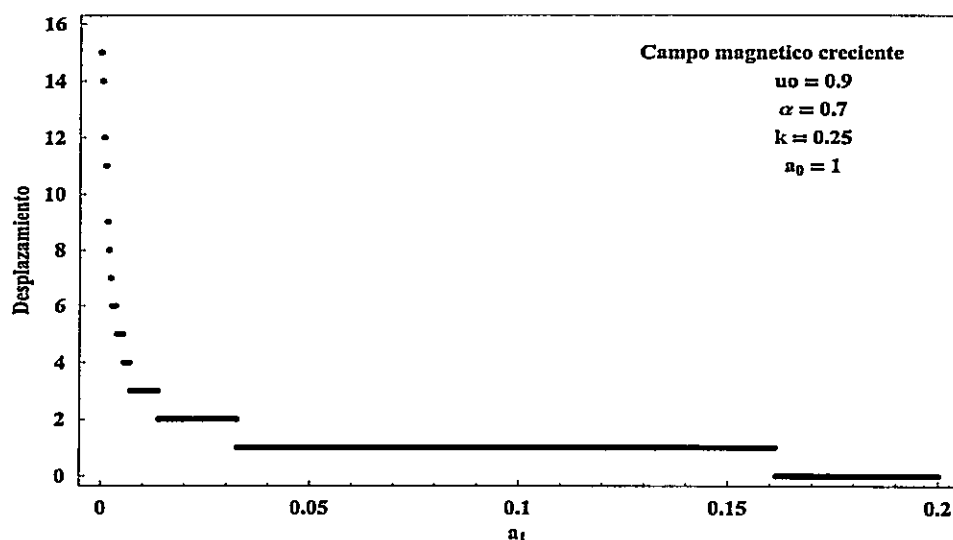


Figura 6.2: Posición central final del condensado como función de la longitud de *scattering* creciente en el tiempo. El tiempo máximo fue de $t_{max} = 100$, y el número de trampas magnéticas fue de 120.

experimento real.

Otra forma de estudiar un mecanismo simple de switching es tomando un campo magnético "creciente". Esto implicaría tomar una función para la longitud de *scattering* como: $a(t) = a_0 + a_1 z$. En este caso, la idea es obtener diferentes posiciones de salida para el condensado con un campo magnético creciente en el tiempo. La fig. 6.2 también muestra un muy buen switching controlable hasta alrededor de 15 sitios desde el sitio inicial, sin errores de control. El tiempo máximo en este barrido fue de $t_{max} = 100$. Este último caso implica incrementar el campo magnético hasta un cierto nivel, para obtener localización en un sitio del arreglo deseado. La diferente respuesta del arreglo, para cada uno de los parámetros a_1 , es debida a la diferente pendiente de crecimiento del campo magnético y, por ende, a una diferente no linealidad.

6.2.5. Dinámica de Peierls-Nabarro

En esta sección mostramos numéricamente cómo es posible observar, en este sistema particular, una dinámica estable tanto para modos impares como también para modos pares. Este comportamiento se debe a la forma particular del término no lineal en el condensado dada una elección apropiada del campo magnético aplicado sobre este. La expresión para el potencial de PN (6.28) predice una nueva e interesante dinámica no observada en arreglos discretos no lineales típicos, en los cuales, debido a que la no linealidad está fija, no es posible modificar la barrera en el tiempo⁷. Este es un nuevo efecto no observado en ningún trabajo publicado hasta la fecha en sistemas discretos no lineales.

Para observar este tipo de dinámica, elegimos una función del campo magnético oscilante como la utilizada en la Ref. [83]: $a(t) = a_0 + a_1 \sin(\omega t)$. En este punto es muy importante elegir los parámetros correctos. Es muy fácil tomar, por ejemplo $a_0 \sim a_1$, ya que en este caso la expresión para la barrera de PN predeciría una propagación estable del modo par, oscilando la barrera entre un término positivo y uno negativo, por lo que modos pares e impares podrían ser estables. Sin embargo, las oscilaciones del término no lineal serían muy grandes en la ecuación (6.19) pasando por valores nulos, lo que produciría que el término no lineal fuese muy pequeño para ciertos instantes de tiempo, generando difracción discreta a través del arreglo y, como consecuencia esparcimiento de las partículas, destruyendo así el perfil tipo solitón. Por esto debemos elegir parámetros pequeños para la amplitud oscilante (a_1), y observar así la dinámica predicha.

Con respecto a la frecuencia ω de la función $a(t)$, se debe tener en cuenta los tiempos de reacción de las partículas. Para altas frecuencias, es muy probable que,

⁷En arreglos de guías, el tiempo corresponde a la dirección de propagación z .

las partículas no puedan sentir la oscilación rápida del campo magnético y, como consecuencia, las ecuaciones no describirían correctamente la dinámica del condensado⁸. La frecuencia ω entonces, se puede considerar dentro del rango de la frecuencia característica de *tunneling* entre sitios: $\Omega_L = 2K/\hbar \sim 10^3 s^{-1}$ y, la frecuencia de la separación entre los niveles de energía del pozo de potencial: $\Omega_p \sim 10^4 - 10^5 s^{-1}$ [83]. Por lo tanto, para asegurar una descripción adecuada de la fenomenología del condensado por las ecuaciones de GP (6.19), consideramos a ω dentro del rango: 0 – 100 (en particular los resultados que mostraremos están en el rango: 0.025 – 0.08).

A continuación, mostramos diferentes figuras en las cuales observamos la dinámica para modos iniciales pares (6.23) e impares (6.22). Las figuras están compuestas de simulaciones numéricas de la ecuación (6.19) representadas con gráficas de densidad, y la gráfica de la barrera de PN en la parte superior de cada figura. Los modos impares se ven más intensos debido a su localización central en una sola guía, mientras que los modos pares se ven más difusos debido a su más ancha extensión transversal. Como se puede observar en las figs. 6.3, 6.4, 6.5, y 6.6, para diferentes condiciones iniciales, la barrera de PN calculada en forma exacta para un arreglo de condensados de Bose-Einstein (6.28) predice de forma correcta la dinámica observada numéricamente. Es así como, cuando la barrera de PN es negativa, se observa una dinámica estable para modos impares, y cuando ésta es positiva, se observa una dinámica estable para modos pares. Por primera vez observamos el decaimiento de un modo impar en uno par; fenomenología que estaba prohibida en arreglos típicos con una no linealidad fija.

Tanto el estudio del switching controlado, como también el de la dinámica estable para modos pares e impares en arreglos de condensados de Bose-Einstein, abre una

⁸Para oscilaciones rápidas se suele realizar una transformación en las escalas temporales del problema [83].

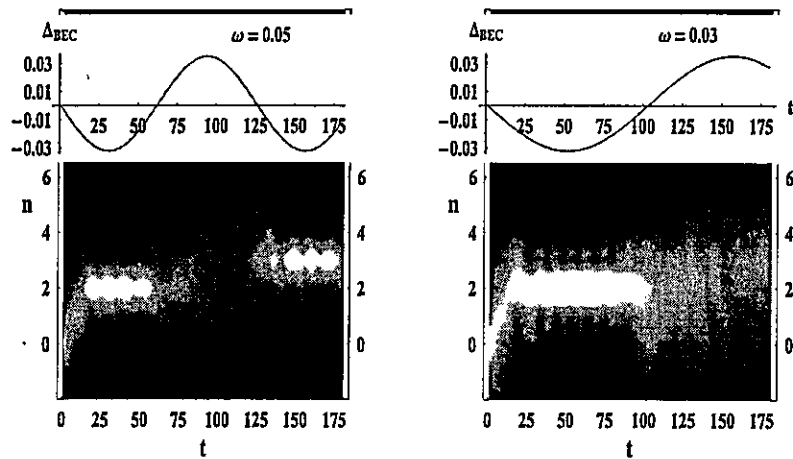


Figura 6.3: Modo inicial impar. $u_0 = 0.9$, $\alpha = 0.7$, $k = 0.2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0.34$. Izq.: $\omega = 0.05$. Der.: $\omega = 0.03$.

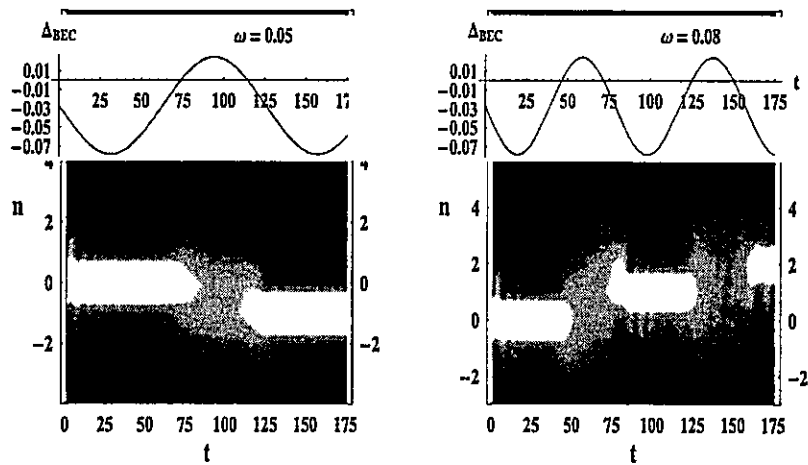


Figura 6.4: Modo inicial impar. $u_0 = 1$, $\alpha = 0.7$, $k = 0.2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0.34$. Izq.: $\omega = 0.05$. Der.: $\omega = 0.08$.

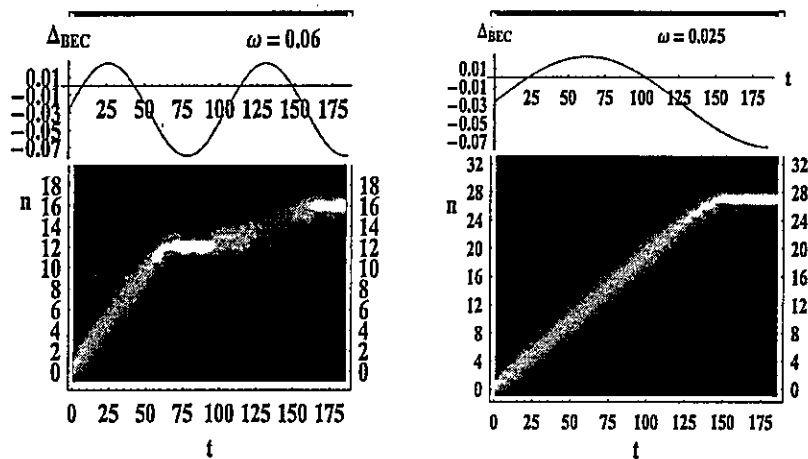


Figura 6.5: Modo inicial par. $v_0 = 1$, $\alpha = 0.7$, $k = 0.2$, $a_0 = 1$. Izq.: $a_1 = -0.35$, $\omega = 0.06$. Der.: $a_1 = -0.33$, $\omega = 0.025$.

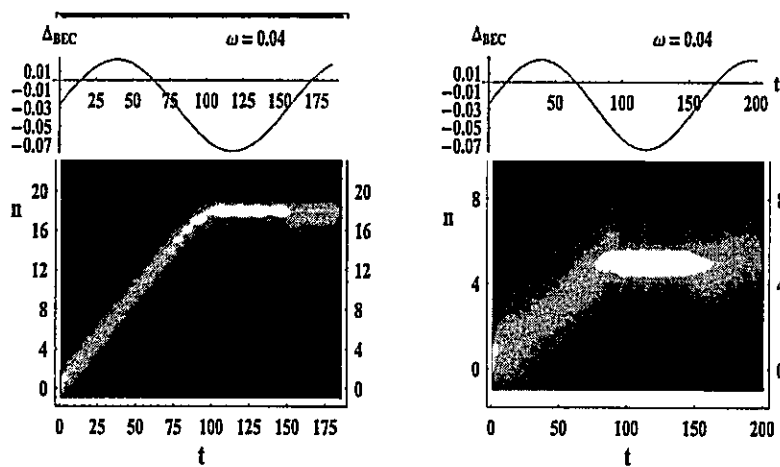


Figura 6.6: Modo inicial par. $v_0 = 1$, $\alpha = 0.7$, $a_0 = 1$, $a_1 = -0.33$, $\omega = 0.04$. Izq.: $k = 0.2$. Der.: $k = 0.05$.

gran ventana a posibles aplicaciones tecnológicas. Es por esto entonces que, el uso del concepto de solitones discretos podría permitir, en el futuro, la manipulación y el transporte de los condensados en el arreglo para fines aún insospechados.

Capítulo 7

Conclusiones

La investigación realizada en esta tesis estuvo enfocada en la búsqueda de cómo transferir eficientemente energía entre distintos sitios del arreglo discreto. Para esto, utilizamos el concepto de solitón discreto, el cual es producto del balance entre la no linealidad del medio y la discretitud del sistema. Las propiedades dinámicas de estos arreglos pueden ser estudiadas y, como consecuencia, modificadas, utilizando el Potencial de Peierls-Nabarro (PPN). Hemos demostrado, a lo largo de esta tesis, que el estudio de este potencial (propio de los sistemas discretos) es una herramienta analítica fundamental para comprender y manejar la propagación de solitones discretos en este tipo de sistemas.

En los capítulos 3 y 4 la derivación del PPN nos sugirió que, mediante una ingeniería del parámetro de acoplamiento, la transferencia de energía podía ser efectivamente controlada. Como resultado, obtuvimos un sistema de multipuertos óptico de 23 sitios controlados en el caso cúbico, y de 21 en el cuadrático. Demostrando así que es posible modificar las propiedades dinámicas del sistema discreto no lineal, con un decrecimiento controlado de la Barrera de Peierls-Nabarro.

En el capítulo 5 estudiamos dos propiedades fundamentales de arreglos no lineales de tipo cúbico birrefringente, en donde las estructuras localizadas son conocidas

como solitones discretos vectoriales. Producto de la birrefringencia del arreglo, los solitones experimentan una inestabilidad, la cual desencadena una transferencia de energía en la dirección longitudinal. Demostramos analítica y numéricamente que, la inestabilidad es generada por el coeficiente no lineal de *four-wave mixing* y, que la direccionalidad de esta transferencia de energía, puede ser efectivamente controlada mediante la elección apropiada de la diferencia de fase entre los modos TE y TM al inicio del arreglo. Además estudiamos, mediante el cálculo del PPN, la dinámica transversal con el fin de direccionar controladamente este tipo de solitón en el arreglo. Propusimos, al final del capítulo, un novedoso sistema de switching multi-puertos capaz de amplificar y posicionar una débil señal no-angulada, a voluntad en el arreglo, gracias al acoplamiento no lineal con un haz de polarización ortogonal que posea una mayor potencia y un ángulo dado.

Por último, en el capítulo 6, estudiamos un arreglo de condensados de Bose-Einstein dada una no linealidad variable en el tiempo. En la práctica, esta condición es particular de este tipo de sistemas, y sugiere una nueva y rica dinámica. Como es usual en este tipo de sistemas (Cap. 3), logramos controlar casi completamente la transferencia de energía hacia diferentes sitios del arreglo. Calculamos además, la Barrera de Peierls-Nabarro exactamente, cálculo que nos permitió estudiar un tipo de estabilidad modal que no es apreciada en los arreglos típicos (con parámetros constantes en el tiempo). Para los arreglos de tipo óptico estudiados en los capítulos anteriores, siempre se observa que los modos pares son inestables decayendo a la configuración de menor energía: el modo impar. Sin embargo, en arreglos con una no linealidad de tipo oscilante en el tiempo, es posible observar numéricamente y demostrar analíticamente, una inversión de esta inestabilidad modal, con lo cual, dependiendo del valor del tiempo, modos pares e impares pueden propagarse esta-

blemente en este sistema.

Es posible realizar, como trabajo futuro, la extensión de nuestros estudios a otros sistemas físicos en los cuales la discretitud y la no linealidad sean predominantes en la dinámica de excitaciones localizadas. Cuando tenemos una red débilmente acoplada de osciladores no lineales, como por ejemplo una biomolécula, podemos crear modos no lineales localizados o *breathers* discretos (BD's). Tales BD's son excitaciones periódicas en el tiempo y exponencialmente localizadas en el espacio [1, 16]. Es claro que este tipo de estructuras localizadas existen en redes Hamiltonianas pero el estudio en sistemas biológicos complejos, como proteínas, aún no ha sido resuelto (Ref. [16] y sus referencias). La transferencia de energía por medio de BD's en este tipo de redes, en forma totalmente controlada, no ha sido lograda aún y se ve como una gran ventana de continuidad para la expansión de los resultados de esta tesis. En efecto, el proceso llamado como "transferencia de energía precisa" (*targeted energy transfer* (TET)) [133] puede explicarse en el contexto de la ecuación DNLS.

Finalmente, mencionamos ejemplos en los cuales esperamos seguir trabajando a futuro. Actualmente estamos muy interesados en el estudio de las propiedades dinámicas de arreglos de guías de ondas ópticas con una no linealidad de tipo saturable. Esto porque hace muy poco tiempo fue predicho un tipo de Barrera de Peierls-Nabarro oscilante dependiendo de la amplitud [70, 134], y recientemente fue observada experimentalmente la formación de un solitón brillante de tipo escalonado en este tipo de medio óptico no lineal [135]. También comenzaremos a trabajar en la dinámica no lineal de excitaciones localizadas en arreglos discretos de junturas superconductoras de Josephson [1, 18]. Esperamos además, continuar el estudio de la dinámica en arreglos de condensados de Bose-Einstein ya que creemos que este tópico es muy importante para la teoría Física general, y para las posibles aplicaciones

tecnológicas que pueden desencadenarse en el futuro. Finalmente, arreglos discretos no lineales en dos dimensiones, y arreglos discretos no lineales disipativos, han sido hasta este momento muy poco explorados. Existe en esos temas, una enorme cantidad de estudios a realizar los cuales podrían tener nuevas y muy particulares propiedades dinámicas utilizables.

Concluimos finalmente que, el estudio de los mecanismos de transferencia de energía en sistemas discretos no lineales de cualquier naturaleza, podría ser la clave para futuros procesos tecnológicos en diversas áreas de la ciencia, por lo que aún hay muchísimo trabajo por hacer.

Bibliografía

- [1] D. K. Campbell, S. Flach y Y. S. Kivshar, *Localizing Energy Through Nonlinearity and Discreteness*, Phys. Tod. **57**, 43 (2004).
- [2] H. S. Eisenberg, R. Morandotti, Y. Silberberg, J. M. Arnold, G. Penneli y J. S. Aitchison, *Optical discrete solitons in waveguide arrays. I. Soliton formation*, J. Opt. Soc. Am. B **19**, 2938 (2002).
- [3] U. Peschel, R. Morandotti, J. M. Arnold, J. S. Aitchison, H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, T. Pertsch y F. Lederer, *Optical discrete solitons in waveguide arrays. II. Dynamics properties*, J. Opt. Soc. Am. B **19**, 2637 (2002).
- [4] G. I. Stegeman y M. Segev, *Optical Spatial Solitons and Their Interactions: Universality and Diversity*, Science **286**, 1518 (1999).
- [5] F. Lederer y Y. Silberberg, *Discrete Solitons*, Optics & Photonics News **13**, 48 (2002).
- [6] M. I. Molina, *Nonlinearity in Materials Science*, Mod. Phys. **B15**, 2409 (2001).
- [7] D. Christodoulides, F. Lederer y Y. Silberberg, *Discretizing light behaviour in linear and nonlinear waveguide lattices*, Nature **424**, 817 (2003).
- [8] S. Trillo y W. Torruelas, editores, *Spatial Solitons*, Springer Series in Optical Sciences (Springer, Berlin, New York, 2001).

- [9] Y. S. Kivshar y G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals* (Academic Press, San Diego, CA, 2003).
- [10] K. Porsezian y V. C. Kuriakose, editores, *Optical Solitons: Theoretical and Experimental Challenges* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2003).
- [11] L. Vázquez, L. Streit y V. M. Pérez-García, editores, *Nonlinear Klein-Gordon and Schrodinger Systems: Theory and Applications* (World Scientific, Singapore, 1996).
- [12] C. Sulem y P.-L. Sulem, *The Nonlinear Schrodinger Equation: Self-Focusing and Wave Collapse* (Springer-Verlag, New York, 1999).
- [13] E. Fermi, J. Pasta y S. Ulam, Studies of nonlinear problems, los Alamos National Laboratory, Los Alamos, NM.
- [14] A. J. Sievers y S. Takeno, *Intrinsic Localized Modes in Anharmonic Crystals*, Phys. Rev. Lett. 61, 970 (1988).
- [15] Y. S. Kivshar y D. K. Campbell, *Peierls-Nabarro potential barrier for highly localized nonlinear modes*, Phys. Rev. E 48, 3077 (1993).
- [16] G. P. Tsironis, *If "discrete breather" is the answer, what is the question*, Chaos 13, 657 (2003).
- [17] M. Eleftheriou, S. Flach y G. P. Tsironis, *Breathers in one-dimensional thermalized lattice with an energy gap*, Physica D 186, 20 (2003).
- [18] P. Binder, D. Abraimov, A. V. Ustinov, S. Flach y Y. Zolotaryuk, *Observation of Breathers in Josephson Ladders*, Phys. Rev. Lett. 84, 745 (2000).

- [19] E. Trias, J. J. Mazo y T. P. Orlando, *Discrete Breathers in Nonlinear Lattices: Experimental Detection in a Josephson Array*, Phys. Rev. Lett. **84**, 741 (2000).
- [20] J. J. Mazo, *Discrete Breathers in Two-Dimensional Josephson Arrays*, Phys. Rev. Lett. **89**, 234101 (2002).
- [21] U. T. S. L. Q. English y S. A. J., *Experimental Generation and Observation of Intrinsic Localized Spin Wave in Modes in an Antiferromagnet*, Phys. Rev. Lett. **83**, 223 (1999).
- [22] M. Yanik, S. Fan, M. Soljačić y J. D. Joannopoulos, *All-optical transistor action with bistable switching in a photonic crystal cross-waveguide geometry*, Opt. Lett. **28**, 2506 (2003).
- [23] D. Christodoulides y N. K. Efremidis, *Discrete temporal solitons along a chain of nonlinear coupled microcavities embedded in photonic crystals*, Opt. Lett. **27**, 568 (2002).
- [24] S. F. Mingaleev y Y. S. Kivshar, *Self-Trapping and Stable Localized Modes in Nonlinear Photonic Crystals*, Phys. Rev. Lett. **86**, 5474 (2001).
- [25] S. F. Mingaleev y Y. S. Kivshar, *Effective equations for photonic-crystal waveguides and circuits*, Opt. Lett. **27**, 231 (2002).
- [26] J. W. Fleischer, M. Segev, N. K. Efremidis y D. Christodoulides, *Observation of two-dimensional discrete solitons in optically induced nonlinear photonic lattices*, Nature **422**, 147 (2003).

- [27] J. W. Fleischer, T. Carmon, M. Segev, N. K. Efremidis y D. Christodoulides, *Observation of Discrete solitons in Optically Induced Real Time Waveguide Arrays*, Phys. Rev. Lett. **90**, 023902 (2003).
- [28] N. K. Efremidis, J. Hudock, D. Christodoulides, J. Fleischer, O. Cohen y M. Segev, *Two-Dimensional Optical Lattice Solitons*, Phys. Rev. Lett. **91**, 213906 (2003).
- [29] A. Trombettoni y A. Smerzi, *Discrete Solitons and Breathers with Dilute Bose-Einstein Condensates*, Phys. Rev. Lett. **86**, 2353 (2001).
- [30] L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, L. D. Carr, Y. Castin y C. Salomon, *Formation of a Matter-Wave Bright Soliton*, Science **296**, 1290 (2002).
- [31] S. Darmanyan, A. Kobayakov, F. Lederer y L. Vázquez, *Discrete fronts and quasirectangular solitons*, Phys. Rev. B **59**, 5994 (1999).
- [32] N. K. Efremidis y D. Christodoulides, *Discrete Ginzburg-Landau solitons*, Phys. Rev. E **67**, 026606 (2003).
- [33] T. Pertsch, U. Peschel y F. Lederer, *Hybrid discrete solitons*, Phys. Rev. E **66**, 066604 (2002).
- [34] D. P. Caetano, S. B. Cavalcanti, J. M. Hickmann, A. M. Kamchatnov, R. A. Kraenkel y E. A. Makarova, *Soliton propagation in a medium with Kerr non-linearity and resonant impurities: A variational approach*, Phys. Rev. E **67**, 046615 (2003).

- [35] Y. S. Kivshar y M. Peyrard, *Modulational instabilities in discrete lattices*, Phys. Rev. A **46**, 3198 (1992).
- [36] D. Cai, A. R. Bishop y N. Gronbech-Jensen, *Localized States in Discrete Nonlinear Schrodinger Equations*, Phys. Rev. Lett. **72**, 591 (1994).
- [37] Y. S. Kivshar y M. Salerno, *Modulational instabilities in the discrete deformable nonlinear Schrodinger equation*, Phys. Rev. E **49**, 3543 (1994).
- [38] V. M. Burlakov, S. A. Darmanyan y V. Pyrkov, *Modulation instability and recurrence phenomena in anharmonic lattices*, Phys. Rev. B **54**, 3257 (1996).
- [39] A. Trombettoni, A. Smerzi y A. R. Bishop, *Superfluidity versus Disorder in the Discrete Nonlinear Schrodinger Equation*, Phys. Rev. Lett. **88**, 173902 (2002).
- [40] F. Lederer, Solitons, www.photonics.uni-jena.de/solitons.htm.
- [41] H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti, A. R. Boyd y J. S. Aitchison, *Discrete Spatial Optical Solitons in Waveguide Arrays*, Phys. Rev. Lett. **81**, 3383 (1998).
- [42] J. Meier, J. Hudock, D. Christodoulides, G. Stegeman, Y. Silberberg, R. Morandotti y J. Aitchison, *Discrete Vector Solitons in Kerr Nonlinear Waveguide Arrays*, Phys. Rev. Lett **91**, 143907 (2003).
- [43] T. Pertsch, U. Peschel, F. Lederer, J. Meier, R. Schiek, R. Iwanow, G. Stegeman, Y. Hong y W. Sohler, *Discrete Solitons in Quadratic Nonlinear Waveguide Arrays*, Phys. Rev. Lett. In press.
- [44] G. G. Luther y M. S. Alber, *Nonlinear Optics and Your Communications Future* (Springer-Verlag, New York, 1997).

- [45] F. Lederer, S. Darmanyan y A. Kobayakov, *Spatial Solitons* (Springer; Berlin, New York, 2001), Vol. 82 de *Springer Series in Optical Sciences*, Cap. Discrete Solitons, págs. 269–292.
- [46] B. Luther-Davies y G. Stegeman, *Spatial Solitons* (Springer, Berlin, New York, 2001), Vol. 82 de *Springer Series in Optical Sciences*, Cap. Materials for Spatial Solitons, págs. 19–35.
- [47] R. Morandotti, *Discrete Solitons*, Ph. d. thesis, University of Glasgow (1998).
- [48] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York, 1975), second edition edición.
- [49] R. W. Boyd, *Nonlinear Optics* (Academic Press, San Diego, CA, 1992).
- [50] Y. S. Shen, *The Principles of Nonlinear Optics* (Wiley, New York, 1984).
- [51] J. Moloney y A. Newell, *Nonlinear Optics* (Westview Press, USA, 2003).
- [52] W. Królikowski, U. Trutschel, M. Cronin-Golomb y C. Schmidt-Hattenberger, *Solitonlike optical switching in a circular fiber array*, *Opt. Lett.* **19**, 320 (1994).
- [53] A. Kobayakov, S. Darmanyan, T. Pertsch y F. Lederer, *Stable discrete domain walls and quasi-rectangular solitons in quadratically nonlinear waveguide arrays*, *J. Opt. Soc. Am. B* **16**, 1737 (1999).
- [54] A. Schauer, I. V. Mel'nikov y J. S. Aitchison, *Collisions of orthogonally polarized spatial solitons in AlGaAs slab waveguides*, *J. Opt. Soc. Am. B* **21**, 57 (2004).

- [55] R. R. Malendevich, L. Friedrich, G. I. Stegeman, J. M. Soto-Crespo, N. Akhmediev y J. S. Aitchison, *Radiation-related polarization instability of Kerr spatial vector solitons*, J. Opt. Soc. Am. B 19, 695 (2002).
- [56] J. T. Verdeyen, *Laser Electronics* (Prentice Hall, USA, 2000).
- [57] D. Christodoulides y R. I. Joseph, *Discrete self-focusing in nonlinear arrays of coupled waveguides*, Opt. Lett. 13, 794 (1988).
- [58] S. Darmanyán, I. Relke y F. Lederer, *Instability of continuous waves and rotating solitons in waveguide arrays*, Phys. Rev. E 55, 7662 (1997).
- [59] J. Meier, G. I. Stegeman, D. Christodoulides, Y. Silberberg, R. Morandotti, H. Yang, G. Salamo, M. Sorel y J. S. Aitchison, *Experimental Observation of Discrete Modulational Instability*, Phys. Rev. Lett. 92, 163902 (2004).
- [60] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics* (Wiley, New York, 1996), 7^a edición.
- [61] U. Peschel, T. Pertsch y F. Lederer, *Optical Bloch oscillations in waveguide arrays*, Opt. Lett. 23, 1701 (1998).
- [62] R. Morandotti, U. Peschel, J. S. Aitchison, H. S. Eisenberg y Y. Silberberg, *Experimental Observation of Linear and Nonlinear optical Bloch Oscillations*, Phys. Rev. Lett. 83, 4756 (1999).
- [63] H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti y J. S. Aitchison, *Diffraction Management*, Phys. Rev. Lett. 85, 1863 (2000).
- [64] M. J. Ablowitz y Z. H. Musslimani, *Discrete Diffraction Managed Spatial Solitons*, Phys. Rev. Lett. 87, 254102 (2001).

- [65] T. Pertsch, T. Zentgraf, U. Peschel, A. Brauer y F. Lederer, *Anomalous Refraction and Diffraction in Discrete Optical Systems*, Phys. Rev. Lett. **88**, 093901 (2002).
- [66] R. Morandotti, H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, M. Sorel y J. S. Aitchison, *Self-Focusing and Defocusing in Waveguide Arrays*, Phys. Rev. Lett. **86**, 3296 (2001).
- [67] A. Aceves, C. D. Angelis, T. Peschel, R. Muschall, F. Lederer, S. Trillo y S. Wabnitz, *Discrete self-trapping, soliton interactions, and beam steering in nonlinear waveguide arrays*, Phys. Rev. E **53**, 1172 (1996).
- [68] W. Królikowski y Y. S. Kivshar, *Soliton-based optical switching in waveguide arrays*, J. Opt. Soc. Am. B **13**, 876 (1996).
- [69] O. Bang y P. D. Miller, *Exploiting discreteness for switching in waveguide arrays*, Opt. Lett. **21**, 1105 (1996).
- [70] L. Hadžievski, A. Maluckov, M. Stepić y D. Kip, *Power Controlled Soliton Stability and Steering in Lattices with Saturable Nonlinearity*, Phys. Rev. Lett. **93**, 033901 (2004).
- [71] R. Morandotti, U. Peschel, J. S. Aitchison, H. S. Eisenberg y Y. Silberberg, *Dynamics of Discrete Solitons in Optical Waveguide Arrays*, Phys. Rev. Lett. **83**, 2726 (1999).
- [72] D. Mandelik, H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti y J. S. Aitchison, *Band-Gap Structure of Waveguide Arrays and Excitation of Floquet-Bloch Solitons*, Phys. Rev. Lett. **90**, 053902 (2003).

- [73] D. Mandelik, R. Morandotti, J. S. Aitchison y Y. Silberberg, *Gap Solitons in Waveguide Arrays*, Phys. Rev. Lett. **92**, 093904 (2004).
- [74] Neshev, A. Sukhorukov, B. Hanna, W. Królikowski y Y. S. Kivshar, *Controlled Generation and Steering of Spatial Gap Solitons*, Phys. Rev. Lett. **93**, 083905 (2004).
- [75] U. Peschel, O. Egorov y F. Lederer, *Discrete cavity solitons*, Opt. Lett. **29**, 1909 (2004).
- [76] T. Pertsch, U. Peschel, F. Lederer, J. Burghoff, M. Bill, S. Nolte y A. Tnnermann, *Discrete diffraction in two-dimensional arrays of coupled waveguides in silica*, Opt. Lett. **29**, 468 (2004).
- [77] J. Hudock, N. K. Efremidis y D. Christodoulides, *Anisotropic diffraction and elliptic discrete solitons in two-dimensional waveguide arrays*, Opt. Lett. **29**, 268 (2004).
- [78] R. A. Vicencio, M. I. Molina y Y. S. Kivshar, *Controlled switching of discrete solitons in waveguide arrays*, Opt. Lett. **28**, 1942 (2003).
- [79] R. A. Vicencio, M. I. Molina y Y. S. Kivshar, *Switching of discrete optical solitons in engineered waveguide arrays*, Phys. Rev. E **70**, 026602 (2004).
- [80] R. A. Vicencio, M. I. Molina y Y. S. Kivshar, *Controlled switching of discrete solitons in arrays of cubic and quadratic nonlinear optical waveguides*, Nonlinear Guided Waves and Their Applications OSA meeting, Toronto, Canada, March MC37 (2004).

- [81] R. A. Vicencio, *Switching de Solitones Ópticos Discretosen arreglos de guías de ondas no lineales*, Simposio de Estudiantes de Física, PUC, Chile (2004).
- [82] R. A. Vicencio, M. I. Molina y Y. S. Kivshar, *Controlled switching of discrete solitons in nonlinear cubic waveguide arrays*, XIV Simposio chileno de Física, 17-19 Noviembre, Antofagasta, Chile. (2004).
- [83] F. K. Abdullaev, E. Tsoy, B. A. Malomed y R. A. Kraenkel, *Array of Bose-Einstein condensates under time-periodic Feshbach-resonance management*, Phys. Rev. A **68**, 053606 (2003).
- [84] A. V. Buryak y Y. S. Kivshar, *Solitons due to second harmonic generation*, Phys. Lett. A **197**, 407 (1995).
- [85] L. Torner, C. R. Menyuk y G. I. Stegeman, *Bright solitons with second-order nonlinearities*, J. Opt. Soc. Am. B **12**, 889 (1995).
- [86] U. Peschel, C. Etrich, F. Lederer y B. A. Malomed, *Vectorial solitary waves in optical media with a quadratic nonlinearity*, Phys. Rev. E **55**, 7704 (1997).
- [87] G. Assanto y G. I. Stegeman, *Simple physics of quadratic spatial solitons*, Opt. Express **10**, 388 (2002).
- [88] K. Kim, L. Jankovic, G. I. Stegeman, S. Carrasco, L. Torner, D. Eger y M. Katz, *Quadratic spatial solitons in periodically poled $KTiOPO_4$* , Opt. Lett. **28**, 640 (2003).
- [89] T. Pertsch, U. Peschel y F. Lederer, *Discrete bright solitary waves in quadratically nonlinear media*, Phys. Rev. E **57**, 1127 (1998).

- [90] S. Darmanyán, A. Kobayakov y F. Lederer, *Strongly localized modes in discrete systems with quadratic nonlinearity*, Phys. Rev. E **57**, 2344 (1998).
- [91] A. A. Sukhorukov, Y. S. Kivshar y O. Bang, *Two-color nonlinear localized photonic modes*, Phys. Rev. E **60**, R41 (1999).
- [92] A. E. Miroschnichenko, Y. S. Kivshar, R. A. Vicencio y M. I. Molina, *Fano resonance in quadratic waveguide arrays*, submitted to Opt. Lett. (2004).
- [93] J. F. Corney y O. Bang, *Modulational Instability in Periodic Quadratic Nonlinear Materials*, Phys. Rev. Lett. **87**, 133901 (2001).
- [94] T. Pertsch, U. Peschel y F. Lederer, *All-optical switching in quadratically nonlinear waveguide arrays*, Opt. Lett. **28**, 102 (2003).
- [95] D. V. Petrov, S. Carrasco, G. Molina-Terriza y L. Torner, *Deflection of quadratic solitons at edge dislocations*, Opt. Lett. **28**, 1439 (2003).
- [96] L. Jankovic, H. Kim, G. I. Stegeman, S. Carrasco, L. Torner y M. Katz, *Quadratic soliton self-reflection at a quadratically nonlinear interface*, Opt. Lett. **28**, 2103 (2003).
- [97] F. Baronio, C. D. Angelis, P.-H. Plioger, V. Couderc, A. Barthélémy, Y. Min, V. Quiring y W. Sohler, *Soliton emission at a phase-mismatch boundary in a quadratic nonlinear film waveguide*, Opt. Lett. **28**, 2348 (2003).
- [98] R. A. Vicencio, M. I. Molina y Y. S. Kivshar, *Controlled Switching of Discrete Solitons in Nonlinear Quadratic Waveguides Arrays*, XIV Simposio chileno de Física, 17-19 Noviembre, Antofagasta, Chile. (2004).

- [99] C. Trevino, *Novel Effect in Waveguide Second Harmonic Generation*, Phd thesis, University of Central Florida (1998).
- [100] K. J. Blow, N. J. Doran y D. Wood, *Polarization instabilities for solitons in birefringent fibers*, Opt. Lett. **12**, 202 (1987).
- [101] C. R. Menyuk, *Stability of solitons in birefringent optical fibers. I: Equal propagation amplitudes*, Opt. Lett. **12**, 614 (1987).
- [102] D. Christodoulides y R. J. Joseph, *Vector solitons in birefringent nonlinear dispersive media*, Opt. Lett. **13**, 53 (1988).
- [103] C. R. Menyuk, *Stability of solitons in birefringent optical fibers. I: Arbitrary amplitudes*, J. Opt. Soc. Am. B **5**, 392 (1988).
- [104] X. D. Cao y C. J. McKinstrie, *Solitary-wave stability in birefringent optical fibers*, J. Opt. Soc. Am. B **10**, 1202 (1993).
- [105] N. Akhmediev y J. M. Soto-Crespo, *Dynamics of solitonlike pulse propagation in birefringent optical fibers*, Phys. Rev. E **49**, 5742 (1994).
- [106] N. Akhmediev, A. V. Buryak, J. M. Soto-Crespo y D. R. Andersen, *Phase-locked stationary soliton states in birefringent nonlinear optical fibers*, J. Opt. Soc. Am. B **12**, 434 (1995).
- [107] C. M. de Sterke y J. E. Sipe, *Polarization instability in a waveguide geometry*, Opt. Lett. **16**, 202 (1991).
- [108] E. A. Ostrovskaya, N. Akhmediev, G. I. Stegeman, J. U. Kang y J. S. Aitchison, *Mixed-mode spatial soliton in semiconductor waveguides*, J. Opt. Soc. Am. B **14**, 880 (1997).

- [109] D. Mihalache, D. Mazilu y L. Torner, *Stability of Walking Vector Solitons*, Phys. Rev. Lett. **81**, 4353 (1998).
- [110] X. D. Cao y D. D. Meyerhofer, *All-optical switching by means of collisions of spatial vector solitons*, Opt. Lett. **19**, 1711 (1994).
- [111] J. U. Kang, G. I. Stegeman y J. S. Aitchison, *Weak-beam trapping by bright spatial solitons in AlGaAs planar waveguides*, Opt. Lett. **20**, 2069 (1995).
- [112] J. U. Kang, G. I. Stegeman y J. S. Aitchison, *One-dimensional spatial soliton dragging, trapping, and all-optical switching in AlGaAs waveguides*, Opt. Lett. **21**, 189 (1996).
- [113] J. U. Kang, G. I. Stegeman, J. S. Aitchison y N. Akhmediev, *Observation of Manakov Spatial Solitons in AlGaAs Planar Waveguides*, Phys. Rev. Lett. **76**, 3699 (1996).
- [114] Y. Silberberg y G. Stegeman, *Spatial Solitons* (Springer, Berlin, New York, 2001), Vol. 82 de *Springer Series in Optical Sciences*, Cap. One-Dimensional Spatial Solitons in Kerr Media, págs. 37-60.
- [115] S. Darmanyan, A. Kobayakov, E. Schmidt y F. Lederer, *Strongly localized vectorial modes in nonlinear waveguides arrays*, Phys. Rev. E **57**, 3520 (1998).
- [116] A. Kobayakov, S. Darmanyan, F. Lederer y E. Schmidt, *Dark spatial solitons in discrete cubic media with self- and cross-phase modulation*, Opt. Quant. Electron. **30**, 795 (1998).

- [117] J. Hudock, P. G. Kevrekidis, B. A. Malomed y D. Christodoulides, *Discrete vector solitons in two-dimensional nonlinear waveguides arrays: Solutions, stability, and dynamics*, Phys. Rev. E **65**, 056618 (2003).
- [118] M. J. Ablowitz y Z. H. Musslimani, *Discrete vector spatial solitons in a nonlinear waveguide array*, Phys. Rev. E **65**, 056618 (2003).
- [119] A. A. Sukhorukov y Y. S. Kivshar, *Multigap Discrete Vector Solitons*, Phys. Rev. Lett. **91**, 113902 (2003).
- [120] R. A. Vicencio, M. I. Molina y Y. S. Kivshar, *All-optical switching and amplification of discrete vector solitons in nonlinear cubic birefringent waveguide arrays*, aceptado en Opt. Lett. (2004).
- [121] R. A. Vicencio, M. I. Molina y Y. S. Kivshar, *Switching and amplification of discrete vector solitons in nonlinear waveguide arrays*, XIV Simposio chileno de Física, 17-19 Noviembre, Antofagasta, Chile. (2004).
- [122] R. A. Vicencio, M. I. Molina y Y. S. Kivshar, *Polarization instability, steering, and switching of discrete vector solitons*, enviado a Phys. Rev. E (2004).
- [123] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii y S. Stringari, *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).
- [124] F. K. Abdullaev y R. A. Kraenkel, *Coherent atomic oscillations and resonances between coupled Bose-Einstein condensates with time-dependent trapping potential*, Phys. Rev. A **62**, 023613 (2000).
- [125] V. S. Shchesnovich, A. M. Kamchatnov y R. A. Kraenkel, *Mixed-isotope Bose-Einstein condensates in Rubidium*, Phys. Rev. A **69**, 033601 (2004).

- [126] A. M. Kamchatnov, A. Gammal y R. A. Kraenkel, *Dissipationless shock waves in Bose-Einstein condensates with repulsive interaction between atoms*, Phys. Rev. A **69**, 063605 (2004).
- [127] E. A. Ostrovskaya, Y. S. Kivshar, M. Lisak, B. Hall y F. Cattani, *Coupled-mode theory for Bose-Einstein condensates*, Phys. Rev. A **61**, 031601 (2000).
- [128] F. K. Abdullaev, B. B. Baisakov, S. A. Darmanyany, V. V. Konotop y M. Salerno, *Nonlinear excitations in arrays Bose-Einstein condensates*, Phys. Rev. A **64**, 043606 (2001).
- [129] N. Tsukada, *Spatiotemporal dynamics of Bose-Einstein condensates in linear- and circular-chain optical lattices*, Phys. Rev. A **65**, 063608 (2002).
- [130] F. K. Abdullaev y V. V. Konotop, *Intrinsic localized modes in arrays of atomic-molecular Bose-Einstein condensates*, Phys. Rev. A **68**, 013605 (2003).
- [131] V. Ahufinger, A. Sampera, P. Pedri, L. Santos y M. Lewenstein, *Creation and mobility of discrete solitons in Bose-Einstein condensates*, Phys. Rev. A **69**, 053604 (2004).
- [132] E. A. Ostrovskaya y Y. S. Kivshar, *Localization of Two-Component Bose-Einstein Condensates in Optical Lattices*, Phys. Rev. Lett. **92**, 180405 (2004).
- [133] G. Kopidakis, S. Aubry y G. P. Tsironis, *Targeted Energy Transfer through Discrete Breathers in Nonlinear Systems*, Phys. Rev. Lett. **87**, 165501 (2001).
- [134] M. Stepić, D. Kip, L. Hadžievski y A. Maluckov, *One-dimensional bright discrete solitons in media with saturable nonlinearity*, Phys. Rev. E. **69**, 066618 (2004).

- [135] F. Chen, M. Stepić, D. Runde, R. C. E. D. Kip y V. Shandarov, *Discrete Solitons in Photorefractive Nonlinear Waveguide Arrays*, personal communication (2004).