



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**BANDAS PLANAS INDUCIDAS POR INTERACCIONES INTRA-ORBITALES Y
ESTADOS DE BORDE INDUCIDOS POR DIMERIZACIÓN EN REDES
FOTÓNICAS**

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS, MENCIÓN FÍSICA

GABRIEL ERNESTO CÁCERES ARAVENA

PROFESOR GUÍA:
RODRIGO VICENCIO POBLETE

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
MARIO MOLINA GÁLVEZ
LUIS FOA TORRES

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por los proyectos Fondecyt Regular 1191205 y 1231313, y al Instituto Milenio para la Investigación en Óptica (MIRO) ICN17_012.

SANTIAGO DE CHILE
2023

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR
AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS
CON MENCIÓN EN FÍSICA
POR: GABRIEL ERNESTO CÁCERES ARAVENA
FECHA: 2023
PROF. GUÍA: RODRIGO VICENCIO POBLETE

BANDAS PLANAS INDUCIDAS POR INTERACCIONES INTRA-ORBITALES Y ESTADOS DE BORDE INDUCIDOS POR DIMERIZACIÓN EN REDES FOTÓNICAS

En esta tesis estudiamos las propiedades de localización y dispersión de redes fotónicas compuestas por guías de onda. Una guía de onda siempre soporta al menos un modo óptico y puede soportar un segundo o tercer modo dependiendo de las propiedades de la guía. En este trabajo hemos propuesto la interacción del modo fundamental con un modo de orden superior de otra guía, esta interacción se produce por un fenómeno de resonancia cuando las constantes de propagación de los modos se ajustan para que sean similares. Llamamos a este fenómeno *interacción intra-orbital* [1]. Una de las ventajas de esta interacción es que podemos utilizar la geometría de la red y la estructura de fase del modo de segundo orden para producir un acoplamiento negativo. Este signo negativo en el acoplamiento nos permite explorar nuevas dinámicas en redes fotónicas, y es un concepto clave en nuestro trabajo de tesis. De esta forma, la primera parte de nuestro estudio son las interacciones intra-orbitales y sus aplicaciones en redes fotónicas. Comenzamos estudiando la adición de segundos modos en redes unidimensionales [2, 3], y observamos que el acoplamiento negativo induce bandas planas, es decir, localización. Esto es debido a que el signo negativo produce interferencia destructiva cuando las constantes de propagación y los acoplamientos son iguales. Este resultado nos motiva a aprovechar el signo negativo para diseñar sistemas de redes con todas las bandas planas para cualquier valor de acoplamiento. De esta forma, vamos al siguiente capítulo de nuestra tesis en el que proponemos y estudiamos sistemas con todas sus bandas planas para cualquier valor de los acoplamientos [4]. A lo largo de nuestro estudio diseñamos y proponemos varios sistemas con todas sus bandas planas, pero para mantener la tesis ligera vamos a describir sólo dos de ellos que consideramos ser los más importantes. Durante nuestro estudio de interacciones intra-orbitales observamos estados de borde que se unen al bulk cuando un parámetro supera cierto límite [2]. Este resultado orienta nuestro trabajo al estudio de estados de borde inducidos por dimerización en redes de bandas planas. Estudiamos la dimerización en la red de Stub [5], y en la red de diamante [6]. Además, estudiamos la transferencia de un estado de borde de un lado de la red al otro. Para ambos modelos proponemos un operador de quiralidad, y para la red de diamante estudiamos cómo la banda plana es robusta ante el desorden simétrico, pero se desordena para el desorden asimétrico. Para finalizar nuestra tesis estudiamos una red con interacción intra-orbital y además dimerización. Encontramos que la cantidad de estados de borde es igual a la cantidad de bandas, además los estados de borde son robustos ante el desorden, y hay dos puntos de cruce de bandas donde los estados de borde se unen al bulk. Finalmente proponemos un operador de quiralidad para este sistema.

Agradecimientos

Agradezco enormemente a mi madre por financiar mis estudios universitarios, y su apoyo incondicional a mi decisión de dedicarme a las ciencias.

Agradezco a Francisca Díaz por todo su apoyo, su dedicación y su ayuda en la escritura de esta tesis. Gracias por su tiempo, paciencia y apoyo emocional.

Agradezco a Rodrigo Vicencio por su guía, apoyo, buena disposición y dar un buen ejemplo de cómo un profesor guía debe ser.

Agradezco a mi familia y amigos, que han sabido perdonarme por mi ausencia durante la escritura de esta tesis.

Agradezco financiamiento durante el desarrollo de mi tesis a los proyectos Fondecyt Regular 1191205 y 1231313, y al Instituto Milenio para la Investigación en Óptica (MIRO) ICN17.012.

TABLA DE CONTENIDO

Índice de figuras	v
1. Introducción	1
2. Métodos y cálculos	4
2.1. Conceptos preliminares	4
2.2. Teoría acoplada de modos	4
2.3. Aproximación de ondas planas	5
2.4. Ondas de Bloch	7
2.5. Espectrograma y Grado de Participación	7
2.6. Estados de borde	8
2.7. Operador de Quiralidad	8
3. Estados topológicos y estados de banda plana inducidos por interacciones intra-orbitales en redes fotónicas unidimensionales	12
3.1. Modos de orden superior e interacciones inter orbitales	12
3.2. Red Híbrida Horizontal	13
3.2.1. Modelo y autovalores (bandas)	13
3.2.2. Espectro Numérico y estados de borde	18
3.3. Red Híbrida Alternada	21
3.3.1. Modelo y autovalores	21
3.3.2. Estados de borde	25
4. Bandas planas inducidas por interacciones intra-orbitales en redes fotónicas cuasi unidimensionales	26
4.1. Diamante inter orbital	26
4.1.1. Modelo y bandas	27
4.2. Grafeno de bandas planas	29
4.2.1. Modelo y bandas	29
5. Diamante y Stub Dimerizados	32
5.1. Introducción	32
5.2. Diamante	32
5.2.1. Modelo y bandas	33
5.2.2. Espectro	34

5.2.3.	Energía de sitio	35
5.2.4.	Conexión con SSH	36
5.2.5.	Desorden	39
5.2.6.	Simetría quiriral	44
5.2.7.	Transferencia topológica	45
5.2.8.	Conclusiones	46
5.3.	Stub	47
5.3.1.	Modelo y bandas	48
5.3.2.	Espectrograma	49
5.3.3.	Estados de borde	49
5.3.4.	Operador quiriral	49
6.	Red dimerizada con modos de segundo orden e interacciones intra-orbitales	52
6.1.	Modelo y espectrograma	52
6.2.	Estados de borde	53
6.3.	Desorden	54
6.4.	Operador de Quiralidad	55
6.4.1.	Desorden y quiralidad	57
6.5.	Conclusiones	58
7.	Conclusiones	59
8.	Bibliografía	62
9.	Anexo	64
9.1.	Portadas de artículos publicados durante este Magíster	64

Índice de figuras

2.1.	(a) Esquema representativo del modelo SSH. El rectángulo segmentado muestra la n -ésima celda compuesta por el modo U_n representado con un círculo negro y V_n con un círculo rojo. El acoplamiento entre los sitios de la celda unitaria es t_1 , representado por la línea doble y fuera de la celda unitaria es t_2 representado por la línea simple. (b.1,2,3) Las bandas encontrados teóricamente a partir de la Eq.(2.8) para $t_1/t_2 \equiv \delta = \{0,5, 1, 1,5\}$, respectivamente. (c) El espectro de autovalores calculados a partir de la matriz de acoplamiento para 20 celdas unitarias. Cada autovalor fue coloreado según el grado de participación (PR) del autovector asociado, por lo que rojo significa altamente localizado y azul significa estados grandes y extendidos.	6
2.2.	Gráfico de la amplitud en cada sitio de los estados de borde. En rojo están los sitios U_n y en negro los sitios V_n . (a) El estado con ambos bordes en fase. (b) El estado con los bordes en desfase.	9
2.3.	(a) Espectrograma del modelo de SSH con desorden en el acoplamiento. (b) Espectrograma de SSH con desorden en la energía de sitio.	11
3.1.	(a) Esquema de la red real compuesta por sitios bimodales que albergan el modo S y el modo P . (b) Esquema del modelo efectivo en el que los modos son los que interactúan. El rectangulo gris segmentado muestra la n -ésima celda unitaria que está compuesta de dos sitios: el sitio fundamental U_n y el sitio “P” V_n . Las líneas conectando los sitios representan los acoplamientos. La línea negra es C_s que es el acoplamiento entre sitios S. La línea roja es $-C_p = - C_p $ que es el acoplamiento entre sitios P. Las líneas punteadas son los acoplamientos $\pm C_{sp}$ entre sitios S y sitios P, y el color representa el signo, el negro es para acoplamiento positivo y rojo para acoplamiento negativo.	14
3.2.	(a) Las dos bandas para $\Delta\beta = 1$ graficado en función de k . (b) Las bandas para $\Delta\beta = 3$ en función de k . (c) Las bandas teóricas en función de $\Delta\beta$ para diferentes valores de k . Para todos los gráficos se ha usado $C_s = 0.5$, $C_{sp} = 0.7$ y $C_p = 1$	17
3.3.	(a) Los autovalores numéricos calculados con 14 celdas unitarias. (b) Los autovalores numéricos calculados con 40 celdas unitarias. Para ambos gráficos se ha usado $C_s = 0,5$, $C_{sp} = 0,7$ y $C_p = 1$	19

3.4.	(a) La intensidad de los autoestados de borde para $\Delta\beta = 0,5$, los puntos negros es la intensidad en los sitios S y los puntos rojos son la intensidad en los sitios P. (b) La intensidad de los autoestados de borde para $\Delta\beta = 1,5$. (c) y (d) muestran la amplitud para los estados de borde para $\Delta\beta = 0,5$. (e) y (f) son esquemas representativos de los estados de borde en el que el color representa la amplitud y el signo. Los estados de (e) y (f) son los mismos de (c) y (d) respectivamente, la estrellas son identificadores visuales.	20
3.5.	(a) Esquema de la red en la que cada sitio alberga dos modos, el modo S y el P. (b) Esquema de la red efectiva en la que el cuadrado gris segmentado muestra la n -ésima celda unitaria con 4 modos: el modo S vertical u_n , el modo S horizontal v_n , el modo P vertical x_n y el modo P horizontal w_n . La línea negra es el acoplamiento V_s , la línea punteada es el acoplamiento V_{sp} entre modos S y P, el color representa el signo, negro para positivo y rojo para negativo.	22
3.6.	(a) Espectro teórico encontrado a partir de los autovalores de la matriz de acoplamientos de la ecuación (3.24). (b) Espectro numérico calculado a partir de una red finita de 10 celdas unitarias. Para ambos gráficos se ha usado $\beta_s = 0$, $\beta_p = 5$, $V_s = 1$. (c) Esquema del estado de borde en el que los colores muestran la amplitud en cada sitio para $V_{sp} = 1,5$. (d) Gráfico de amplitudes con $V_{sp} = 1,5$, los puntos azules son los sitios u_n , los naranjos son los v_n , los verdes son los x_n y los rojos son los w_n . Gráfico de amplitudes con (e) $V_{sp} = 2$, (f) $V_{sp} = 2,5$, (g) $V_{sp} = 3$. Para todos los gráficos se ha usado $\beta_s = 0$, $\beta_p = 5$ y $V_s = 1$	23
4.1.	(a) El modelo propuesto en el que los óvalos negros representan los sitios S y los óvalos grises representan los sitios bimodales con modos P que están sintonizados para interactuar con los sitios S adyacentes. (b) Esquema del modelo efectivo en el que el rectángulo gris segmentado representa la n -ésima celda unitaria. La línea negra es el acoplamiento V_s y la línea segmentada representa el acoplamiento $\pm V_{sp}$ usando negro para acoplamiento positivo y rojo para acoplamiento negativo.	28
4.2.	Esquemas de los estados localizados de banda plana. (a) y (b) son los estados asociados a los autoestados $\lambda_1 = \lambda_2 = \beta_s$. (c) es el estado asociado a $\lambda_3 = \beta_s + 2V_s$. (d) es el estado asociado a $\lambda_4 = \beta_s - 2V_s$. (e) es el estado asociado a λ_5 . (f) es el estado asociado a λ_6	28
4.3.	Esquema del modelo de grafeno con modos P . Las líneas representan los acoplamientos entre los modos respectivos tal como se indica en la figura y texto.	29
4.4.	Cálculo de bandas barriendo todos los parámetros, las bandas son delgadas porque son planas. Para el cálculo de bandas se han usado parámetros nominales: $V_S = 1$, $V_P = 1,6$, $V_H = 0,7$, $V_{SP} = 0,7$, $\beta_S = 0$ y $\beta_P = 0$. (a) Autovalores en función de V_S , (b) Autovalores en función de V_H , (c) En función de V_{SP} , (d) V_P , (e) β_S , (f) β_P . . .	30
4.5.	Esquema de los 12 modos de banda plana del grafeno utilizando $\beta_s = 0,9$, $\beta_p = 0$, $V_S = 1$, $V_H = 0,7$, $V_{SP} = 2$ y $V_P = 3$	31

5.1.	(a) Representación esquemática del modelo diamante dimerizado. El rectángulo segmentado muestra la n -ésima celda unitaria compuesta de los sitios U_n (en azul), V_n (en verde) y W_n (en rojo), y con una línea doble mostramos el acoplamiento C_1 y con una línea simple el acoplamiento C_1 . (b) El espectrograma del modelo diamante dimerizado utilizando $C_2 = 1$ y todas las energías de sitio igual a cero. El color de cada autovalor representa el grado de participación (PR) del autovector asociado. (c) Los dos estados de borde para $\delta = 0,5$, utilizando azul para los sitios U , rojo para los sitios W y verde para los sitios V acorde a los colores del esquema en (a).	33
5.2.	El espectro de autovalores calculado para $C_2 = 1$, $\beta_V = 0$, $\beta_U = 1$, $\beta_W = -1$ y 10 celdas unitarias, o sea, 30 sitios. El color de cada autovalor representa el grado de participación desde azul que es extendido hasta rojo que es localizado.	36
5.3.	Figura esquemática que representa la red con desorden que preserva la transformación del sistema con el modelo de SSH y el de Rice-Mele. Los sitios U y W son movidos juntos para mantener el desorden simétrico.	39
5.4.	Espectrograma de autovalores calculados con $C_2 = 1$, $\beta_V = 0$, $\beta_U = 1$, $\beta_W = 1$ y 20 celdas unitarias. En este caso hemos utilizado desorden simétrico con respecto a los sitios V . Se ha cambiado la forma del borde para que los estados de borde aparezcan para $\delta > 1$ y sean mejor de observar con el desorden.	42
5.5.	El espectrograma de autovalores calculado con $C_2 = 1$, $\beta_V = 0$, $\beta_U = -\beta_W = 1$ y 20 celdas unitarias. Además se ha usado desorden $0 \leq \gamma_i \leq 1$ simétrico con respecto a los sitios V . Se ha cambiado la forma de los bordes para que los estados de borde aparezcan para $\delta > 1$, y sea más sencillo observarlos.	43
5.6.	Espectrograma de autovalores calculados para $C_2 = 1$, $\beta_V = 0$, $\beta_U = 1$, $\beta_W = -1$ y 20 celdas unitarias con desorden asimétrico.	43
5.7.	La evolución de una condición inicial tipo excitación de subred V para (a) $z = 0$, (b) $z = 15,6$, (c) $z = 31,2$, (d) $z = 46,8$, (e) $z = 62,4$ y (f) $z = \frac{\pi}{2\Delta\lambda} = 78$. La simulación fue hecha para $C_2 = 1$ y $\delta = 0,7$	46
5.8.	Espectrograma de diamante dimerizado en el que hemos cambiado los parámetros de constante de propagación para hacer las 3 bandas dispersivas. Observamos que hay 3 estados altamente localizados cuando $\delta < 1$	47
5.9.	(a) Esquema del modelo con los sitios U en verde, los sitios V en rojo y los sitios W en azul. La línea doble representa el acoplamiento t_1 , la línea simple representa el acoplamiento t_2 y la línea segmentada representa el acoplamiento t_3 . (b) Usando $\beta_{\{u,v,w\}} = 0$ y $t_3 = 1$, se han graficado las tres bandas: con una líneas azules delgadas se grafica $t_2/t_1 = 0,5$, con líneas negras $t_2/t_1 = 1,0$ y las rojas segmentadas son para $t_2/t_1 = 1,5$. (c) Espectrograma para $t_3 = 1$, 10 celdas unitarias y sin considerar energía de sitio.	50
5.10.	(a) El estado de borde con las amplitudes en fase. (b) El estado de borde con las amplitudes en desfase. Para ambos gráficos se ha usado $t_3 = 1$ y $\delta = 0,5$	51

6.1.	(a) Esquema de la celda unitaria con 4 modos: U_n , V_n , X_n y W_n como se muestra en la figura. (b) Esquema de la red efectiva con dimerización, el rectángulo muestra la celda unitaria con los 4 modos. Las líneas entre modos muestran los acoplamientos usando azul para acople positivo y rojo para acoplamiento negativo. (c) Espectro de autovalores en función de δ para $C_s = 0,5$, $C_{sp} = 0,2$, $C_p = 1$, y $\Delta\beta = 0$. (d) Espectro de autovalores en función de delta para $C_s = 0,5$, $C_{sp} = 1,5$, $C_p = 0,4$ y $\Delta\beta = 0$	53
6.2.	(a)-(d) La amplitud de los 4 estados de borde para $\delta = 0,2$. (e)-(f) Los dos estados de borde para $\delta = 1$. Rojo es para los modos U_n , azul para los modos V_n , verde para los sitios X_n y morado para los sitios W_n . Se ha usado $C_s = 0.5$, $C_{sp} = 0.2$, $C_p = 1$ y 10 celdas unitarias.	54
6.3.	Espectro con desorden, el color de cada autovalor representa el grado de participación desde azul que es extendido hasta rojo que es localizado.	55

Capítulo 1

Introducción

El objetivo principal de esta tesis es el estudio de las propiedades de dispersión y de localización de sistemas periódicos fotónicos con un foco en de bandas planas y estados de borde [7]. A lo largo del trabajo de tesis hemos propuesto y analizado teóricamente varios tipos de redes fotónicas, y nos enfocamos en cómo su diseño y geometría nos permite controlar las propiedades de localización y dispersión. En esta tesis vamos a revisar 5 artículos científicos [1–5] que hemos publicado en el área de redes fotónicas y, además, resultados que están en revisión [6]. Dado que el trabajo realizado es extenso lo que vamos a hacer es presentar la información de manera resumida enfocandonos en algunas propiedades de los sistemas, sin ahondar en detalles ni tecnicismos para que la tesis sea ligera de leer, ya que estos detalles se pueden hallar en las publicaciones respectivas. La especialidad de nuestra tesis es el trabajo conceptual teórico, por lo tanto, hemos ordenado los resultados en el orden cronológico en el que cada idea teórica fue desarrollada. El enfoque principal de cada estudio son las propiedades de localización y dispersión de los sistemas fotónicos acoplados; sin embargo, lo hacemos desde tres perspectivas principales: Las interacciones inter-orbitales, los modos de borde en redes unidimensionales, y cómo interacciones inter-orbitales producen estados de borde. Comenzamos la tesis con una introducción compuesta de una breve descripción de los capítulos, además de resaltar los objetivos principales de esta tesis que es el estudio de las propiedades de localización y dispersión. Luego, el segundo capítulo es de *Métodos y cálculos* en el que explicamos las transformaciones desde las cuales podemos obtener un sistema de bandas a partir de un set de ecuaciones diferenciales acopladas que simulan el sistema, y cómo podemos obtener los espectros de soluciones numéricamente. En esta tesis el cálculo de bandas y espectros son una herramienta clave, puesto que a partir de las bandas podemos estudiar las propiedades de dispersión y localización de los sistemas. Para entender cómo las bandas afectan las propiedades de localización y dispersión, debemos entender que si por ejemplo, tenemos un sistema con 3 bandas, una banda plana y dos bandas dispersivas, entonces el espectro de soluciones tiene $1/3$ de estados altamente localizados y $2/3$ de estados que están dispersos a lo largo del arreglo [5]. Mientras más estados localizados hayan, mejor la red localiza energía. Por esta razón, dada la importancia de los cálculos de bandas y espectros, usamos el capítulo dos para explicar correctamente estos conceptos y utilizamos el modelo de SSH [8] como ejemplo. Luego, en el tercer capítulo estudiamos interacciones con modos de ordenes superiores [1] y cómo la aplicación de los ordenes superiores en redes unidimensionales produce localización y estados de borde topológicos [2,3]. De los resultados del capítulo tres observamos que los modelos estudiados tienen buenas propiedades de localización debido al acoplamiento negativo,

y esto nos hacen pensar que los acoplamientos negativos favorecen la localización por un fenómeno de interferencia destructiva [2,3]. Por lo tanto queremos aprovechar esta propiedad para crear una red con propiedades de localización perfecta. Esto nos lleva al cuarto capítulo cuyo objetivo es la búsqueda de sistemas de redes acopladas cuyos estados sean completamente localizados, es decir, que todas sus bandas sean planas. El estudio de las propiedades de localización y transporte en redes fotónicas han sido un concepto clave en física [9–11]. Por esto, uno de los objetivos de nuestra tesis es controlar las propiedades de localización de los sistemas acoplados. Cuando una red tiene todas sus bandas planas entonces cualquier excitación permanecerá en una región localizada del arreglo [4], sin experimentar dispersión, esto tiene un uso en compuertas lógicas puesto que para compuertas lógicas necesitamos mantener paquetes localizados en un arreglo dado.

Durante el estudio de modos de segundo orden en sistemas acoplados nos encontramos con estados de borde que desaparecen a medida que los parámetros cambian, este fenómeno nos orientó al estudio de la topología en sistemas unidimensionales. Esto motiva nuestro estudio a topología en el capítulo 5 en el que estudiamos una red de stub dimerizada [5] y una red de diamante dimerizada [6], la dimerización es parecida a la del modelo de SSH; de esta forma, estudiamos como la dimerización induce la creación de estados de borde que se unen al bulk cuando el parámetro de dimerización cruza cierto límite. Además, para ambos modelos proponemos un operador de quiralidad. Hasta el capítulo 5 este trabajo se puede diferenciar en dos partes: redes fotónicas con modos de segundo orden y cómo la dimerización produce estados de borde junto a estudios de operadores de quiralidad. Así que para finalizar esta tesis combinaremos ambos efectos y en el capítulo 6 estudiamos un modelo dimerizado con modos de segundo orden.

Las redes fotónicas han sido una gran plataforma para el estudio de sistemas de resonadores acoplados. Esto es porque las propiedades de los resonadores acoplados son fenomenológicamente similares en diferentes plataformas, siempre y cuando se cumpla que las ecuaciones diferenciales acopladas de ambos sistemas en su forma adimensional sean equivalentes. Por esta razón podemos utilizar redes fotónicas para simular lo que ocurre en un modelo de tight binding, y de esta forma podemos simular el comportamiento de por ejemplo electrones en estructuras periódicas. El área de nuestro estudio son las redes fotónicas acopladas. Cada red fotónica está compuesta de varias guías de ondas ópticas, y cada guía es esencialmente un resonador. Al poner dos guías de onda lo suficientemente cerca, se acoplan. El acoplamiento entre dos modos de onda fotónicos viene dado por la interacción evanescente entre los modos confinados [9,12,13]. Uno de los puntos principales de nuestra tesis es utilizar modos de orden superior y demostrar que se logra un acoplamiento cuando las constantes de propagación de los modos están en resonancia [1].

Los medios periódicos son un sistema ideal para el estudio de transporte y localización [10,14,15], ya sea, localización inducida por bandas planas [16,17] o localización inducida por desorden llamada localización de Anderson [18]. En fotónica las guías de onda albergan un modo fotónico de manera similar a la que un átomo alberga un modo electrónico. A pesar de que ambos sistemas son similares, el área de fotónica tiene una ventaja sustancial que es poder controlar la constante de propagación de un modo fotónico [19]. De esta forma, podemos sintonizar o afinar modos de distintos ordenes. Este es uno de los primeros resultados de este trabajo de tesis, es *el acoplamiento evanescente entre modos de distintos ordenes* o para abreviar *acoplamiento inter-orbital* (con “orbital” haciendo referencia a los modos de distinto orden). Este fenómeno fue comprobado experimentalmente en nuestro grupo de investigación [1]. Otro punto importante de este acoplamiento inter-orbital es que

el segundo modo puede experimentar un acoplamiento negativo, y este acoplamiento negativo es una herramienta sumamente útil para el desarrollo de sistemas acoplados con nuevas propiedades de transporte y localización.

Al final de esta tesis hay un anexo en el que tenemos las primeras páginas de los artículos científicos que han sido publicados durante el desarrollo del trabajo de magíster.

Capítulo 2

Métodos y cálculos

2.1. Conceptos preliminares

A lo largo de la tesis estudiamos varias redes fotónicas utilizando los mismos métodos en cada red para calcular sus bandas y estados de borde. Para el cálculo de bandas utilizaremos repetidamente la aproximación de ondas planas y el Ansatz de ondas de Bloch, por lo tanto las explicaremos en este capítulo para que la lectura de capítulos posteriores sea más ligera. De la misma forma, explicaremos en este capítulo el cálculo de los espectrogramas, que es una herramienta útil para analizar visualmente el espectro de soluciones junto a su grado de participación para dar cuenta del tamaño de los modos. Los espectrogramas son imágenes en las que proyectamos los autovalores de la matriz de acoplamientos y son útiles para la detección de estados altamente localizados que pueden ser de estados de banda plana o de borde.

2.2. Teoría acoplada de modos

En esta tesis estudiamos la evolución de sistemas de redes fotónicas compuesto por muchas guías de ondas ópticas. Cada guía fotónica alberga al menos un modo estacionario del campo eléctrico transversal, y este modo posee una forma, una amplitud y una fase, entre otras propiedades. Principalmente asumimos que los sitios no cambian en la dirección de propagación y, de esta forma, los modos de cada guía son estacionarios. Para estudiar la propagación y evolución de un sistema de guías de ondas acopladas vamos a utilizar la *teoría de modos acoplados* [12, 13], en la que aproximamos el sistema a un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden. En este sistema de ecuaciones diferenciales, la amplitud de los modos están acopladas las unas a las otras con un acoplamiento C que es proporcional a la integral del producto de los modos (lo que es similar a la convolución). En otras palabras, el acoplamiento t entre un modo $e_1(x, y)$ y un modo $e_2(x, y)$ que están separados por una distancia s en el eje \hat{x} , es proporcional a la siguiente integral [12, 13]:

$$t(s) \propto \int dx dy \Delta n(x, y) e_1(x, y) e_2(x - s, y) , \quad (2.1)$$

con $\Delta n(x, y)$ el cambio en el índice de refracción de la guía con respecto al material.

2.3. Aproximación de ondas planas

Para explicar la aproximación de ondas planas vamos a utilizar un modelo simple. La Fig. 2.1.(a) muestra el modelo de Su–Schrieffer–Heeger (SSH) [8], que usaremos como ejemplo a lo largo del capítulo para explicar los métodos analíticos y los numéricos. Este sistema es un arreglo simple unidimensional acoplado con una dimerización producido por los acoplamientos t_1 y t_2 . Por simplicidad, vamos a definir el parámetro de dimerización $\delta \equiv t_1/t_2$. Este sistema tiene dos sitios por celda unitaria, en un sistema finito vamos a definir a N como la cantidad de celdas unitarias y por lo tanto $2N$ la cantidad de sitios en total. La amplitud de onda en cada sitio de este sistema acoplado está descrito por $2N$ ecuaciones diferenciales que podemos escribir de forma compacta de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} -i\partial_z U_n(z) &= t_1 V_n(z) + t_2 V_{n-1}(z) , \\ -i\partial_z V_n(z) &= t_1 U_n(z) + t_2 U_{n+1}(z) , \end{aligned} \quad (2.2)$$

con n un entero que va entre 1 y N . Las dos ecuaciones diferenciales anteriores resumen las $2N$ ecuaciones por medio del índice $n = 1, \dots, N$ y definiendo $V_0 = V_{N+1} = U_0 = U_{N+1} = 0$. Este modelo es conocido como SSH y lo utilizaremos como ejemplo para mostrar los conceptos preliminares de esta tesis.

La aproximación de ondas planas consiste en buscar soluciones estacionarias, en otras palabras, es utilizar el siguiente Ansatz:

$$\{U_n(z), V_n(z)\} = \{U_n, V_n\} e^{i\lambda z} , \quad (2.3)$$

con λ siendo un número real. Al aplicar este Ansatz en las ecuaciones (2.2) obtenemos que:

$$\begin{aligned} \lambda U_n &= t_1 V_n + t_2 V_{n-1} , \\ \lambda V_n &= t_1 U_n + t_2 U_{n+1} , \end{aligned} \quad (2.4)$$

Y esta ecuación describe un problema de autovalores. De esta forma, si encontramos un set de U_n y V_n en conjunto con un set de λ reales que satisfacen las ecuaciones (2.4), entonces también serán soluciones de la ecuación (2.2). Esto es porque el sistema es lineal, si la solución existe entonces es única.

La explicación física del Ansatz es que buscamos que las soluciones son soluciones estacionarias, es decir, que la aplicación del operador de evolución mantiene la solución invariante, es decir:

$$-i\partial_z \vec{\psi}(z) = \lambda \vec{\psi}(z) . \quad (2.5)$$

En otras palabras, lo que hacemos con el Ansatz es buscar una función vectorial que sea invariante ante la aplicación del operador de evolución, es decir, una autofunción vectorial del operador de evolución. Dado que el operador de evolución es equivalente a aplicar el Hamiltoniano (en tight-binding) o la matriz de acoplamientos (en redes fotónicas), es decir, $-i\partial_z \vec{\psi} = H \vec{\psi}$ con H una matriz, entonces las soluciones también son autofunciones vectoriales de la matriz H .

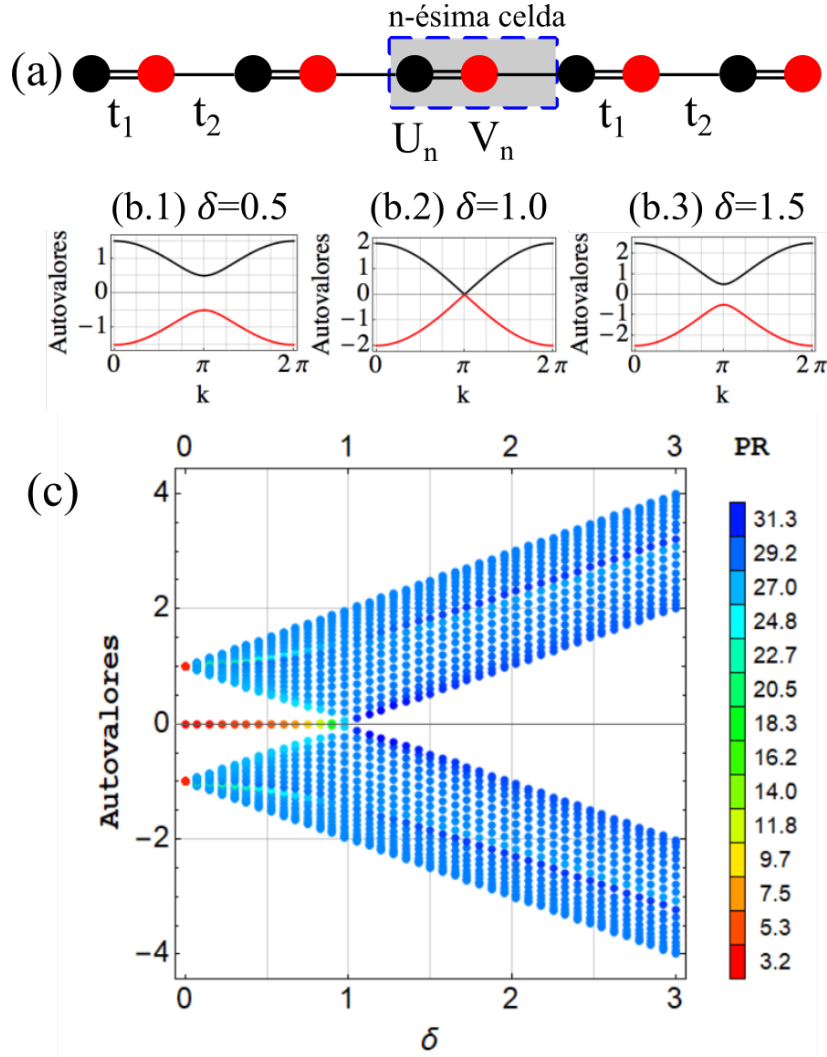


Figura 2.1: (a) Esquema representativo del modelo SSH. El rectángulo segmentado muestra la n -ésima celda compuesta por el modo U_n representado con un círculo negro y V_n con un círculo rojo. El acoplamiento entre los sitios de la celda unitaria es t_1 , representado por la línea doble y fuera de la celda unitaria es t_2 representado por la línea simple. (b.1,2,3) Las bandas encontradas teóricamente a partir de la Eq.(2.8) para $t_1/t_2 \equiv \delta = \{0,5, 1, 1,5\}$, respectivamente. (c) El espectro de autovalores calculados a partir de la matriz de acoplamiento para 20 celdas unitarias. Cada autovalor fue coloreado según el grado de participación (PR) del autovector asociado, por lo que rojo significa altamente localizado y azul significa estados grandes y extendidos.

2.4. Ondas de Bloch

El Ansatz de ondas de Bloch [20] se aplica a una red periódica como por ejemplo de la ecuación (2.4), y el Ansatz consiste en la siguiente transformación: $\{U_n, V_n\} \rightarrow \{U, V\}e^{ikn}$. Generalmente en sistemas electrónicos se utiliza la cantidad ka con a la distancia entre átomos y en ese contexto, k tiene dimensión $1/a$, sin embargo, en esta tesis vamos a trabajar sólo con k y, por ende, k es adimensional. Al aplicar esta transformación en la ecuación (2.4) obtenemos que:

$$\lambda \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t_1 + t_2 e^{-ik} \\ t_1 + t_2 e^{ik} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

lo que se resuelve como un problema de autovalores. De esta forma, si encontramos los autovalores y autovectores de la ecuación anterior, habremos encontrado la solución al problema. Si calculamos el polinomio característico de la ecuación anterior obtenemos:

$$\lambda^2 - [t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 t_2 \cos(k)] = 0, \quad (2.7)$$

por lo que los autovalores son:

$$\lambda_{\pm} = \pm \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 t_2 \cos(k)}. \quad (2.8)$$

Los autovectores están determinados por:

$$-U\lambda_{\pm} + V(t_1 + t_2 e^{-ik}) = 0, \quad (2.9)$$

y, de esta forma, los autovectores sin normalizar son:

$$\vec{\psi}_{\pm} = \begin{pmatrix} t_1 + t_2 e^{-ik} \\ \lambda_{\pm} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

La Fig. 2.1.(b) muestra las bandas del sistema para tres valores de dimerización distintos $\delta = \{0.5, 1, 1.5\}$, respectivamente. A partir de los autovalores observamos que hay un gap en $k = \pi$ para $\delta < 1$ o $\delta > 1$ y este gap se cierra cuando $\delta = 1$.

De esta forma, con el Ansatz de ondas de Bloch podemos encontrar las bandas de manera teórica resolviendo el polinomio característico. Sin embargo, para matrices de dimensiones mayores, el polinomio característico no siempre tiene solución analítica. Por lo tanto, no siempre podremos encontrar expresiones analíticas compactas/simples para los autovalores.

2.5. Espectrograma y Grado de Participación

Para calcular el espectro de autovalores de una red finita de N sitios totales, escribimos la matriz de acoplamiento M que produce el siguiente set de N ecuaciones diferenciales acopladas:

$$-i\partial_z \phi_n = \sum_m^N M_{n,m} \phi_m, \quad (2.11)$$

con ϕ_n la amplitud del campo del modo en la n -ésima guía de onda. $M_{n,m}$ es el acoplamiento entre el modo de la guía n -ésima y el modo de la guía m -ésima, y N la cantidad total de modos del sistema. A partir de la matriz de acoplamientos M calculamos computacionalmente los autovalores y autovectores asociados. Los autovalores son equivalentes a la autoenergía en la aproximación de tight-binding. Al usar este espectrograma podemos observar los autovalores para diferentes parámetros. Además, podemos ver si hay estados altamente localizados que son de color rojo en la Fig. 2.1.(c), donde se muestra el espectro de autovalores del modelo SSH con 20 celdas unitarias, y donde cada autovalor fue coloreado con el grado de participación (PR por sus siglas en inglés *Participation Ratio*) del autovector asociado. El grado de participación lo calculamos de la siguiente manera:

$$\text{PR} = \frac{(\sum_i |\phi_i|^2)^2}{\sum_i |\phi_i|^4}, \quad (2.12)$$

con ϕ_i los componentes del autovector $\vec{\phi} = \{\phi_1, \dots, \phi_i, \dots, \phi_N\}$ con N la dimensión del autovector. Un PR bajo alrededor de 3 o 5 [puntos rojos en la Fig. 2.1.(c)] significa estados altamente localizados, por otro lado un PR alto significa que el estado es extendido. En la Fig. 2.1.(c) vemos que hay estados en cero y altamente localizados cuando $\delta < 1$. Esto es porque el modelo de SSH tiene una transición topológica en $\delta = 1$ y cuando se cruza esta transición a $\delta < 1$ emergen dos estados de borde desde el bulk. De esta forma, estos espectros nos sirven para detectar estados de borde que emergen al cambiar parámetros. Además, el espectro nos da información del ancho de la banda, dado que la distancia entre el punto inferior y superior de una banda corresponde al ancho de la banda, y cuando la banda tiene ancho cero entonces es una banda plana [17].

2.6. Estados de borde

Los estados de borde son estados que están altamente localizados en el borde de una red. Por ejemplo, el espectro de autovalores de la Fig. 2.1.(c) muestra que hay dos estados altamente localizados cuando $\delta < 1$. Estos estados altamente localizados son estados de borde y la Fig. 2.2.(a-b) muestra la amplitud en cada sitio de cada estado de borde, donde la diferencia entre estos estados es la fase relativa entre los sitios de los bordes. Podemos ver que un estado de borde tiene los extremos en fase y el otro en desfase. Además, podemos ver que los estados tienen una estructura alternada, es decir, que en un extremo sólo hay sitios U_n excitados y en el otro extremo sólo hay sitios V_n excitados. Esto se conoce como estructura de subred [7].

2.7. Operador de Quiralidad

El operador quiral es un operador que representa la simetría quiral de un sistema [7]. En otras palabras, si el sistema tiene simetría quiral, entonces debe tener un operador de quiralidad asociado. Una consecuencia de la simetría quiral es que el espectro es simétrico [7], si vemos el espectrograma de la Fig. 2.1.(c) observamos que el espectro es simétrico con respecto a cero.

Para estudiar el operador de quiralidad vamos a utilizar la descripción Hamiltoniana del sistema.

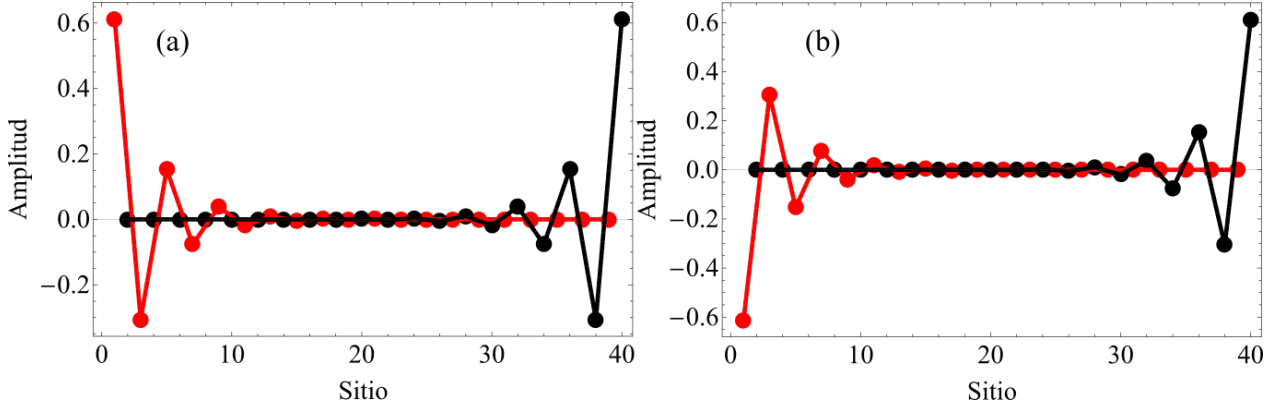


Figura 2.2: Gráfico de la amplitud en cada sitio de los estados de borde. En rojo están los sitios U_n y en negro los sitios V_n . (a) El estado con ambos bordes en fase. (b) El estado con los bordes en desfase.

Por ejemplo, sea \hat{H}_{ssh} el Hamiltoniano del modelo de SSH descrito de la siguiente forma:

$$\hat{H}_{ssh} = \sum_n t_1 |u_n\rangle \langle v_n| + t_2 |u_n\rangle \langle v_{n-1}| + h.c. , \quad (2.13)$$

utilizando la nomenclatura u y v acorde a la Fig. 2.1.(a). El operador de quiralidad $\hat{\Gamma}$ es un operador que debe cumplir con una serie de condiciones [7]. La condición principal es que cumpla con:

$$\hat{\Gamma} \hat{H} \hat{\Gamma}^\dagger = -\hat{H} , \quad (2.14)$$

además debe ser hermítico $\hat{\Gamma}^\dagger = \hat{\Gamma}$, unitario $\hat{\Gamma} \hat{\Gamma}^{-1} = \hat{I}$, y su propio inverso $\hat{\Gamma}^{-1} = \hat{\Gamma}$ con

$$\hat{I} = \sum_n |u_n\rangle \langle u_n| + |v_n\rangle \langle v_n| . \quad (2.15)$$

También se requiere que el operador sea local, es decir, que sus elementos sean estados de la misma celda unitaria, otra forma de decirlo es que el operador actúe de igual forma en cada celda unitaria. Otro punto importante es que el operador sea robusto al desorden en acoplamiento. En el caso de SSH el operador de quiralidad es:

$$\hat{\Gamma}_{ssh} = \sum_n |u_n\rangle \langle u_n| - |v_n\rangle \langle v_n| . \quad (2.16)$$

Verificamos que el operador cumple con ser autohermítico $\hat{\Gamma}_{ssh}^\dagger = \hat{\Gamma}_{ssh}$, además que $\hat{\Gamma}_{ssh}^{-1} = \hat{\Gamma}_{ssh}$ dado que $\hat{\Gamma}_{ssh} \hat{\Gamma}_{ssh} = \hat{I}$. También verificamos que cada elemento del operador pertenece a la misma celda unitaria y, por lo tanto, es un operador quiral.

Para evaluar la respuesta del operador al desorden primero vamos a escribir el Hamiltoniano con un tipo de desorden. Consideremos un vector de números aleatorios $\vec{\epsilon}$ que representa el desorden. Entonces vamos a escribir el Hamiltoniano con desorden en acoplamiento de la siguiente forma:

$$\hat{H}_{ssh}(\vec{\epsilon}) = \sum_n (t_1 + \epsilon_{2n}) |u_n\rangle \langle v_n| + (t_2 + \epsilon_{2n+1}) |u_n\rangle \langle v_{n-1}| + h.c. . \quad (2.17)$$

El desorden se agrega de tal forma que el Hamiltoniano sigue siendo hermítico, esto es porque este tipo de desorden corresponde a que los modos no están exactamente a la misma distancia y hay pequeñas variaciones en la distancia entre los modos que producen un desorden de acoplamiento que mantiene el Hamiltoniano hermítico. Nos damos cuenta de que el operador quiral es robusto ante este tipo de desorden puesto que

$$\hat{\Gamma}_{ssh} \hat{H}_{ssh}(\vec{\epsilon}) \hat{\Gamma}_{ssh} = -\hat{H}_{ssh}(\vec{\epsilon}) . \quad (2.18)$$

Cuando decimos que los estados de borde son robustos ante el desorden, nos referimos a que la energía de estos estados no cambia ante este tipo de desorden. Hablamos de tipos de desorden debido a que en el ejemplo anterior utilizamos desorden de acoplamiento, sin embargo, hay otros tipos de desorden como por ejemplo el desorden en la energía de sitio. El desorden en la energía de sitio se ve de la siguiente forma

$$\hat{H}_{ssh}(\vec{\epsilon}_\beta) = \sum_n \epsilon_{2n} |u_n\rangle \langle u_n| + \epsilon_{2n+1} |v_n\rangle \langle v_n| + \hat{H}_{ssh} , \quad (2.19)$$

con $\vec{\epsilon}_\beta$ el vector de desorden de energía de sitio y \hat{H}_{ssh} el Hamiltoniano de la ecuación 2.13. Con este tipo de desorden en energía de sitio el operador de quiralidad ya no preserva la simetría, esto es:

$$\hat{\Gamma}_{ssh} \hat{H}_{ssh}(\vec{\epsilon}_\beta) \hat{\Gamma}_{ssh} \neq -\hat{H}_{ssh}(\vec{\epsilon}_\beta) . \quad (2.20)$$

La Fig. 2.3.(a) muestra el espectrograma con desorden de acoplamiento y observamos que la energía de los estados de borde se mantiene en cero, esto significa que los estados sean robustos ante este tipo de desorden. Para obtener la figura anterior se ha usado como desorden un número aleatorio entre 0 y 0.5. Por otro lado, la Fig. 2.3.(b) muestra el espectrograma con desorden en la energía de sitio usando un desorden como un número aleatorio entre 0 y 0.3. Vemos que con el desorden en energía de sitio los estados de borde cambian de energía, esto quiere decir que estos estados no son robustos ante este tipo de desorden. Más adelante, en el capítulo de Diamante Dimerizado estudiaremos una red con simetría quiral y dos tipos de desorden. Además, demostraremos cómo la banda plana permanece intacta ante un desorden simétrico y que luego se ensancha al hacer un desorden asimétrico.

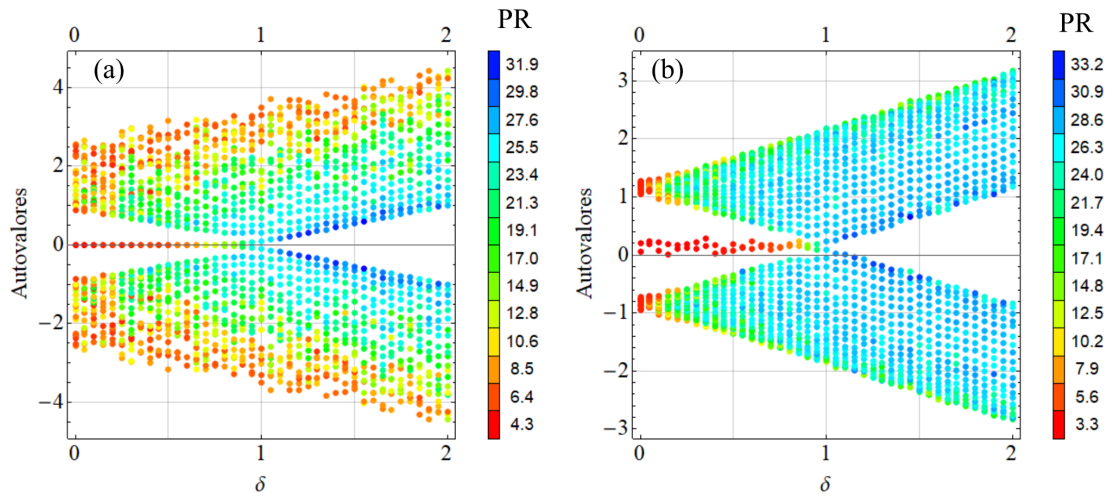


Figura 2.3: (a) Espectrograma del modelo de SSH con desorden en el acoplamiento. (b) Espectrograma de SSH con desorden en la energía de sitio.

Capítulo 3

Estados topológicos y estados de banda plana inducidos por interacciones intra-orbitales en redes fotónicas unidimensionales

Los modelos unidimensionales acoplados monomodales periódicos no presentan bandas planas, puesto que cualquier onda que viaje a lo largo del arreglo experimentará una reflexión y una transmisión al propagarse en el arreglo, de esta forma no se producen modos localizados. Para obtener una banda plana debemos considerar modelos que sean al menos cuasi unidimensionales como por ejemplo el modelo de Stub o la red de diamante. La importancia de las bandas planas tiene que ver con la existencia de estados altamente localizados, donde es posible utilizar estos estados de banda plana para la transmisión de señales en la red sin que estos estados se pierdan por fenómenos dispersivos. En este contexto, hemos estudiado redes unidimensionales bimodales, con interacciones intra orbitales, con el objetivo de que estas interacciones nos den nueva fenomenología de bandas planas. En este capítulo estudiaremos dos modelos unidimensionales bimodales, en los que hemos encontrado bandas planas y cuasi planas. Como se ha mencionado antes no hay bandas planas en sistemas unidimensionales monomodales, pero al considerar un segundo modo aparecen bandas planas porque estos modos tienen la distinción de tener acoplamiento negativo y positivo dependiendo de la orientación, y esto produce un fenómeno de interferencia destructiva que permite tener bandas planas incluso en sistemas completamente unidimensionales.

3.1. Modos de orden superior e interacciones inter orbitales

Las redes fotónicas han servido como una gran plataforma para simular interacciones atómicas tipo tight-binding, pues las ecuaciones que determinan la evolución del sistema son similares entre redes fotónicas y sistemas de tight-binding. De esta forma, la luz clásica emula el comportamiento de electrones en átomos, con la diferencia de que en redes fotónicas la distancia de propagación z actúa como el tiempo para los sistemas de tight binding. Cuando dos sistemas tienen ecuaciones similares, tienen soluciones similares, y se dice que los sistemas son equivalentes. En el caso de redes fotónicas, la ecuación de ondas paraxial es equivalente a la ecuación de Schrödinger de mecánica

cuántica. Por otro lado, la teoría muestra que un pozo de potencial siempre tendrá un estado ligado independiente del tamaño del pozo, pero un segundo modo puede o no aparecer dependiendo de los parámetros de este pozo. Para pozos unidimensionales los estados de orden superior aparecen sólo cuando el pozo es lo suficientemente profundo en relación al ancho. Para redes unidimensionales los modos de mayor orden aparecen cuando se cumple la siguiente condición [1]:

$$8n_0\Delta n w^2 \geq \lambda^2, \quad (3.1)$$

con n_0 el índice de refracción del material, Δn el contraste en el índice de refracción, w el ancho de la guía, y λ la longitud de onda del láser usado para excitar la guía.

En redes fotónicas hemos observado experimentalmente que al aumentar el cambio del índice de refracción la guía pasa de ser monomodal a ser bimodal. Para simplificar la notación llamaremos “modo S ” al modo fundamental de la guía fotónica y “modo P ” al segundo modo, esto es por la similitud de la forma del modo fotónico con la forma de las soluciones del átomo de hidrogeno. Al acercar dos guías fotónicas los modos de una guía resuenan con los modos de la otra guía, produciéndose así una interacción de acoplamiento. Sin embargo, si las guías no son iguales y los modos tienen diferente constante de propagación entonces no se produce resonancia completa y los modos S y P no interactúan efectivamente el uno con el otro. A la interacción entre un modo S y un modo P lo llamamos interacción *intra orbital*.

3.2. Red Híbrida Horizontal

En este capítulo revisaremos el trabajo titulado “Topological and flat-band states induced by hybridized linear interactions in one-dimensional photonic lattices” [2]. En este trabajo estudiamos una red unidimensional en el que cada sitio soporta dos modos: el modo fundamental o modo S y además el segundo modo o modo P . En esta red tenemos dos bandas, y para ciertas condiciones realistas logramos que una sea cuasi plana. Sin embargo, al pedir que los modos S tengan la misma frecuencia de propagación que los modos P podemos hacer que el sistema tenga ambas bandas planas simultáneamente. Es poco realista que ambos modos tengan la misma frecuencia de propagación si es que viven en el mismo sitio de la red, sin embargo, esto puede realizarse con un modelo cuasi unidimensional diferente que produzca el mismo modelo efectivo que estudiamos en esta sección, y con un sintonizado de las frecuencias de propagación.

3.2.1. Modelo y autovalores (bandas)

La Fig. 3.1.(a) muestra la red a estudiar que es una red unidimensional bimodal en la que cada sitio soporta dos modos, por lo que la red real se traduce en una red efectiva como la que se muestra en la Fig. 3.1.(b). En la figura los ovalos negros representan los modos S , y los óvalos con una mitad negra y una mitad roja representan los modos P . En la figura, las líneas que conectan los ovalos representan los acoplamientos, como explicamos a continuación: Las líneas negras son el acoplamiento C_s entre los modos S , las líneas rojas representan el acoplamiento $-C_p = -|C_p|$ entre los modos P , la línea segmentada negra es el acoplamiento positivo C_{sp} entre los modos S y P , y la línea segmentada roja representa el acoplamiento negativo $-|C_{sp}| = -C_{sp}$ entre modos S y P . Dada la manera en que los modos P fueron definidos, los acoplamientos son negativos cuando se

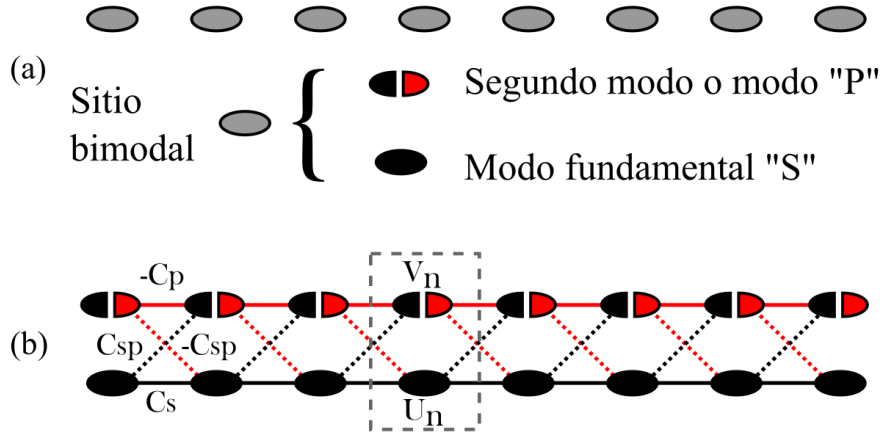


Figura 3.1: (a) Esquema de la red real compuesta por sitios bimodales que albergan el modo S y el modo P . (b) Esquema del modelo efectivo en el que los modos son los que interactúan. El rectángulo gris segmentado muestra la n -ésima celda unitaria que está compuesta de dos sitios: el sitio fundamental U_n y el sitio "P" V_n . Las líneas conectando los sitios representan los acoplamientos. La línea negra es C_s que es el acoplamiento entre sitios S . La línea roja es $-C_p = -|C_p|$ que es el acoplamiento entre sitios P . Las líneas punteadas son los acoplamientos $\pm C_{sp}$ entre sitios S y sitios P , y el color representa el signo, el negro es para acoplamiento positivo y rojo para acoplamiento negativo.

acopla un modo S con un lóbulo negativo del modo P , ó cuando un lóbulo positivo del modo P se acopla con un lóbulo negativo de otro modo P .

Los modelos convencionales son monomodales y, por lo tanto, tienen una banda por cada sitio en la celda unitaria, sin embargo, nosotros tenemos una red bimodal y tenemos un sitio por celda unitaria pero dos modos en cada sitio y, por lo tanto, dos sitios por celda unitaria y en consecuencia, tendremos dos bandas. De esta forma, la cantidad de bandas ahora tiene que ver con la cantidad de modos en la celda unitaria.

Este sistema puede escribirse como un Hamiltoniano conservativo, sin embargo, dado que buscamos el espectro vamos a escribir las ecuaciones diferenciales acopladas que rigen el sistema:

$$-i \frac{\partial U_n}{\partial z} = \beta_s U_n + C_s (U_{n-1} + U_{n+1}) + C_{sp} (V_{n+1} - V_{n-1}), \quad (3.2)$$

$$-i \frac{\partial V_n}{\partial z} = \beta_p V_n - C_p (V_{n-1} + V_{n+1}) + C_{sp} (U_{n-1} - V_{n+1}), \quad (3.3)$$

con β_s la constante de propagación del modo S también conocida como energía de sitio en la aproximación de tight binding, y β_p la constante de propagación del modo P . Ahora usamos el siguiente cambio de variable $\{U_n, V_n\} \rightarrow \{U_n, V_n\} e^{i\beta_p z}$, obteniendo:

$$-i \frac{\partial U_n}{\partial z} = \Delta\beta U_n + C_s (U_{n-1} + U_{n+1}) + C_{sp} (V_{n+1} - V_{n-1}), \quad (3.4)$$

$$-i \frac{\partial V_n}{\partial z} = -C_p (V_{n-1} + V_{n+1}) + C_{sp} (U_{n-1} - V_{n+1}), \quad (3.5)$$

con $\Delta\beta \equiv \beta_s - \beta_p$. Ahora, usamos la aproximación de ondas planas y el Ansatz de Bloch como se

explica en la sección (1), y el sistema de ecuaciones anteriores se re-escribe de la siguiente forma:

$$\lambda u = (\Delta\beta + 2C_s \cos(k))u + (2iC_{sp} \sin(k))v , \quad (3.6)$$

$$\lambda v = (-2C_p \cos(k))v + (-2iC_{sp} \sin(k))u , \quad (3.7)$$

matricialmente esto se escribe como:

$$\lambda \vec{\psi} = \begin{pmatrix} \Delta\beta + 2C_s \cos(k) & 2iC_{sp} \sin(k) \\ -2iC_{sp} \sin(k) & -2C_p \cos(k) \end{pmatrix} \vec{\psi} . \quad (3.8)$$

con $\vec{\psi} = \{u, v\}^T$. Los autovalores son las soluciones del siguiente polinomio:

$$0 = \lambda^2 - \lambda(\Delta\beta + 2(C_s - C_p) \cos(k)) - 2C_p \cos(k)[\Delta\beta + 2C_s \cos(k)] - 4C_{sp}^2 \sin^2(k) . \quad (3.9)$$

Ahora vamos a definir funciones auxiliares para simplificar el algebra

$$g_-(k) = \frac{\Delta\beta}{2} + (C_s - C_p) \cos(k) , \quad (3.10)$$

$$g_+(k) = \frac{\Delta\beta}{2} + (C_s + C_p) \cos(k) , \quad (3.11)$$

$$\gamma^2(k) = g_+^2 + 4C_{sp}^2 \sin^2(k) , \quad (3.12)$$

y el polinomio anterior queda escrito de una manera más simple

$$0 = \lambda^2 - 2g_- \lambda - (g_+ - g_-)(g_+ + g_-) - 4C_{sp}^2 \sin^2(k)^2 . \quad (3.13)$$

Las soluciones son:

$$\lambda_{\pm} = g_- \pm \sqrt{g_-^2 + (g_+ - g_-)(g_+ + g_-) + 4C_{sp}^2 \sin^2(k)} = g_- \pm \sqrt{g_+^2 + 4C_{sp}^2 \sin^2(k)} . \quad (3.14)$$

reconocemos la γ definida en la Eq. (3.12), y finalmente los autovalores son (de forma compacta y extendida respectivamente):

$$\lambda_{\pm}(k) = g_-(k) \pm \gamma(k) \quad (3.15)$$

$$= \frac{\Delta\beta}{2} + (C_s - C_p) \cos(k) \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta\beta}{2} + (C_s + C_p) \cos(k)\right)^2 + 4C_{sp}^2 \sin^2(k)} . \quad (3.16)$$

Utilizamos estas expresiones analíticas para graficar las bandas. La Fig. 3.2.(a) muestra los autovalores en función de k para el caso en el que hay una banda semi plana $\lambda = 2$ usando $\Delta\beta = 1$, $C_s = 0.5$, $C_{sp} = 0.7$ y $C_p = 1$. Hemos utilizado esos valores de acoplamiento puesto que los modos P son naturalmente más extendidos que los modos S y, de esta forma, $C_s < C_{sp} < C_p$. Con esos valores de acoplamiento, en la figura tenemos una banda dispersiva y una semiplana con un ancho de banda de 0.013. La Fig. 3.2.(b) muestra las bandas en función de k y hemos cambiado $\Delta\beta = 3$ con el fin de observar el cruce de bandas en $k = \pi$. La Fig. 3.2.(c) muestra las bandas en función de $\Delta\beta$ para k desde 0 hasta 2π en pasos de $\pi/15$. Con este espectro observamos como la banda superior se aplana a medida que $\Delta\beta$ se acerca a $\Delta\beta = 1$ y luego se ensancha hasta el cruce de

bandas que ocurre en $\Delta\beta = 3$.

En este estudio hemos considerado que los sitios soportan dos modos y son estos modos los que producen el espectro de bandas, sin embargo, dado que los modos existen en la misma guía entonces no se puede lograr una sintonización perfecta y $\Delta\beta \neq 0$. Pero si en lugar de usar una red unidimensional utilizamos una red cuasi-unidimensional con sitios abajo y sitios arriba con una sintonización entre los modos S de las guías inferiores con los modos P de las guías superiores, entonces logramos el mismo modelo efectivo, esto nos permitiría explorar un espectro de parámetros más grande incluso pudiendo obtener un $\Delta\beta = 0$. Si además de esto se logra la condición $C_s = C_{sp} = C_p = C$ con $\Delta\beta = 0$ entonces

$$g_- = 0 , \tag{3.17}$$

$$g_+ = 2C \cos(k) , \tag{3.18}$$

$$\gamma = \sqrt{g_+^2 + 4C^2 \sin^2(k)} = 2C . \tag{3.19}$$

De esta forma, obtenemos dos bandas planas $\lambda_{\pm} = g_{\pm} \pm \gamma = \pm 2C$. Con este modelo efectivo tendríamos sólo modos S en la red inferior y en la red superior tenemos modos S y modos P , sin embargo, los resultados experimentales nos han demostrado que al sintonizar los modos S de una guía con los modos P de una segunda guía, entonces se desintoniza la interacción entre modos S de las guías [1]. De esta forma, podemos considerar un modelo efectivo en el que no haya interacción entre los modos S de la red inferior con los modos S de la red superior.

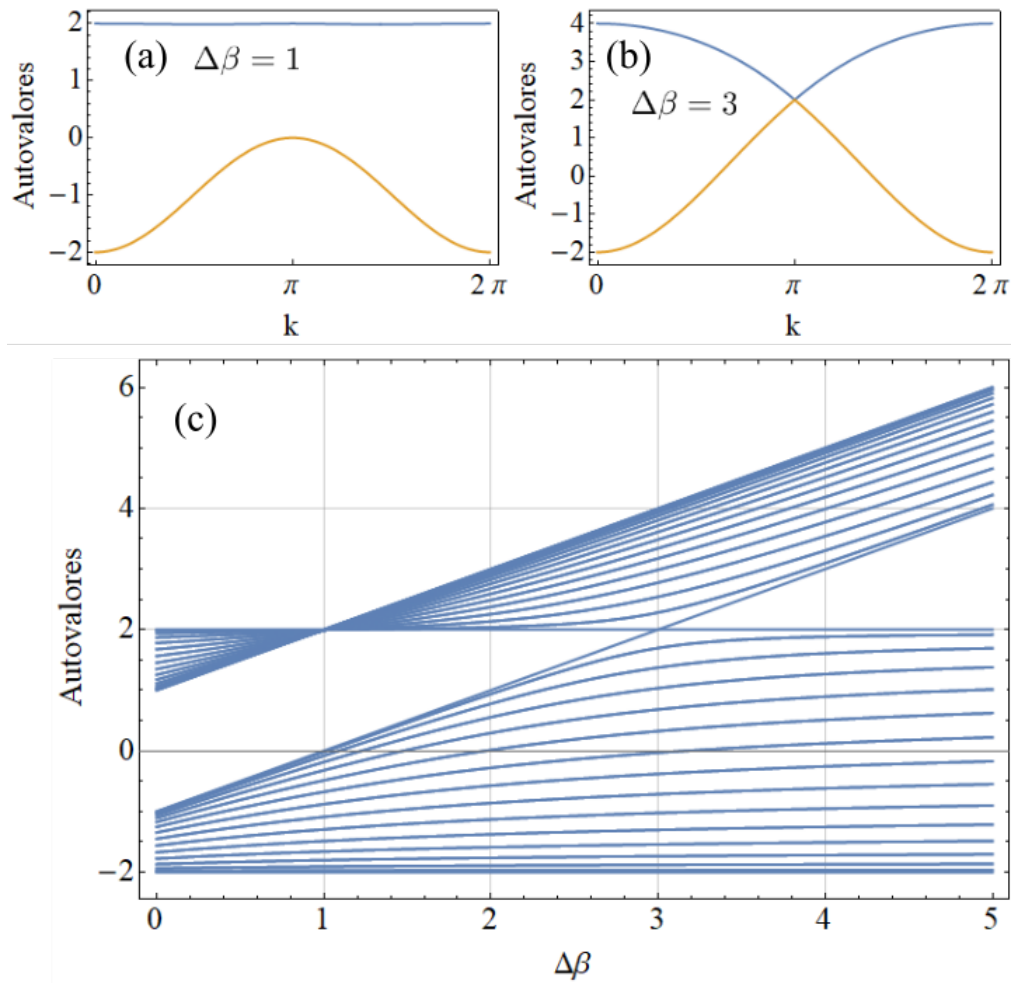


Figura 3.2: (a) Las dos bandas para $\Delta\beta = 1$ graficado en función de k . (b) Las bandas para $\Delta\beta = 3$ en función de k . (c) Las bandas teóricas en función de $\Delta\beta$ para diferentes valores de k . Para todos los gráficos se ha usado $C_s = 0.5$, $C_{sp} = 0.7$ y $C_p = 1$.

3.2.2. Espectro Numérico y estados de borde

La Fig. 3.3.(a) muestra el espectro de autovalores numérico utilizando 14 celdas unitarias (28 estados), $C_s = 0,5$, $C_{sp} = 0,7$ y $C_p = 1$. El color de cada autovalor es el grado de participación (PR definido en Ec. 2.12) del autovector asociado. Si lo comparamos con el espectro teórico en la Fig. 3.2.(c) nos damos cuenta de que hay un par de estados altamente localizado (color rojo) que se unen a los estados de bulk cuando $\Delta\beta > 3$. El punto de transición en el que estos estados desaparecen se vuelve más claro cuando aumentamos la cantidad de celdas unitarias. La Fig. 3.3.(b) es el espectro de autovalores para 40 celdas unitarias y podemos apreciar claramente que los estados desaparecen en el cruce de bandas en $\Delta\beta = 3$. Al analizar estos dos estados altamente localizados vemos que son estados que están predominantemente en los bordes, y la intensidad decae exponencialmente hacia el bulk. La Fig. 3.4.(a) muestra la intensidad de uno de los estados de borde para $\Delta\beta = 0,5$, para los mismos parámetros de la Fig. 3.3.(a), los puntos negros representan los modos S y los puntos rojos representan los modos P. Este gráfico de intensidad es igual para ambos modos de borde puesto que los modos de borde tienen la misma intensidad y sólo cambia la fase en un factor de π . El decaimiento de la intensidad es demasiado abrupto en el gráfico, pero al aumentar $\Delta\beta$ a 1,5 entonces el decaimiento es más suave. La Fig. 3.4.(b) muestra la intensidad para $\Delta\beta = 1,5$ y observamos un decaimiento exponencial. La Fig. 3.4.(c) y (d) muestran la amplitud de los dos estados de borde para $\Delta\beta = 0,5$. Si calculamos la intensidad de los estados mostrados en Fig. 3.4.(c) y (d) obtenemos el gráfico de intensidad de Fig. 3.4.(a), esto es porque los estados de borde sólo se diferencian por los signos en las amplitudes. La Fig. 3.4.(e) y (f) son esquemas representativos de los estados de borde y vemos que en ambos estados la excitación está en ambos bordes simultáneamente y la diferencia es la fase está en el borde derecho. Las estrellas a la izquierda indican que son los mismos estados que están en la Fig. 3.4.(c) y (d).

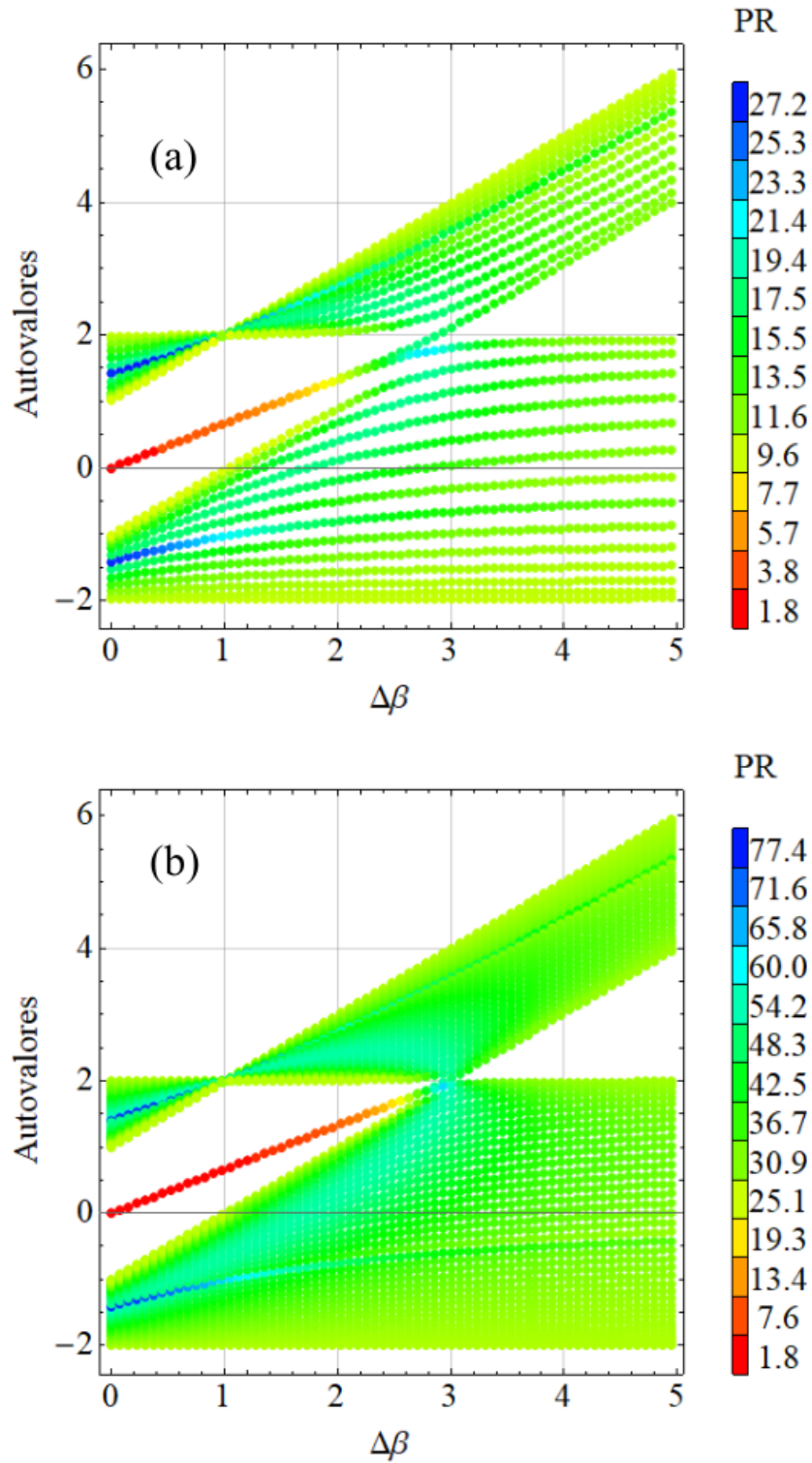


Figura 3.3: (a) Los autovalores numéricos calculados con 14 celdas unitarias. (b) Los autovalores numéricos calculados con 40 celdas unitarias. Para ambos gráficos se ha usado $C_s = 0,5$, $C_{sp} = 0,7$ y $C_p = 1$.

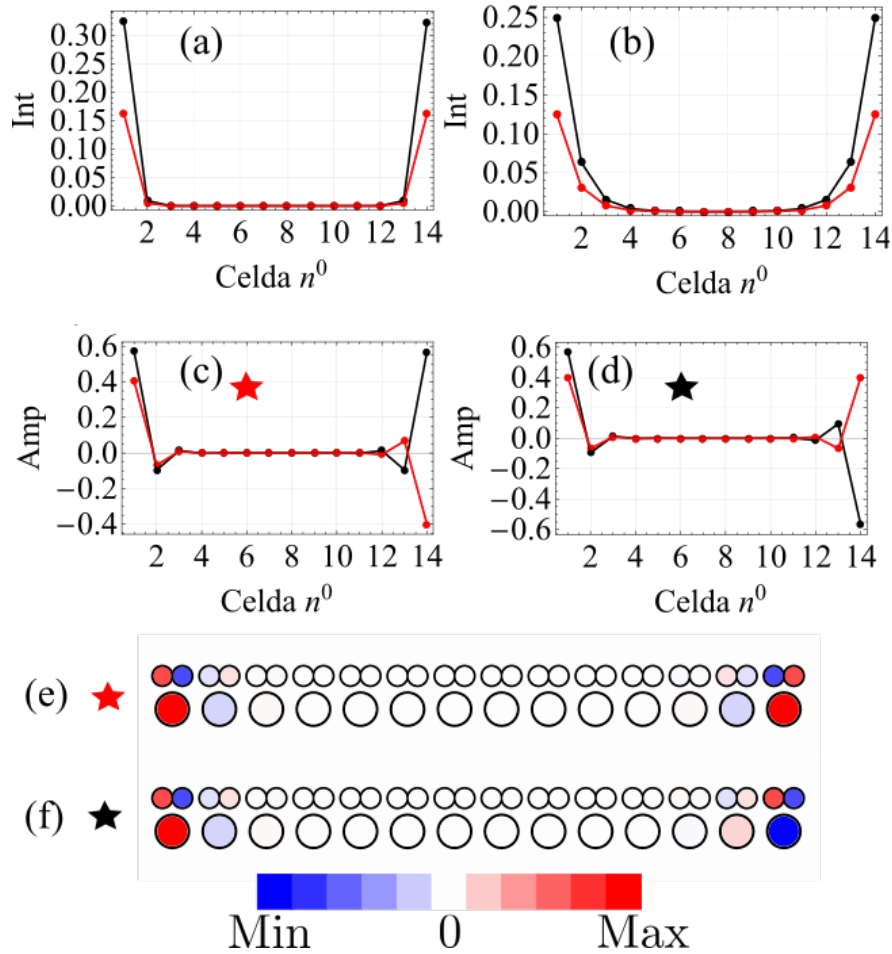


Figura 3.4: (a) La intensidad de los autoestados de borde para $\Delta\beta = 0,5$, los puntos negros es la intensidad en los sitios S y los puntos rojos son la intensidad en los sitios P. (b) La intensidad de los autoestados de borde para $\Delta\beta = 1,5$. (c) y (d) muestran la amplitud para los estados de borde para $\Delta\beta = 0,5$. (e) y (f) son esquemas representativos de los estados de borde en el que el color representa la amplitud y el signo. Los estados de (e) y (f) son los mismos de (c) y (d) respectivamente, la estrellas son identificadores visuales.

3.3. Red Híbrida Alternada

En este capítulo revisaremos el trabajo titulado “Perfect localization on flat-band binary one-dimensional photonic lattices” [3]. En la sección anterior encontramos que el sistema presenta dos bandas planas cuando $\Delta\beta = 0$ y todos los acoplamientos son iguales, sin embargo, esto resulta ser poco realista puesto que si los sitios son bimodales entonces naturalmente el $\Delta\beta \neq 0$ y los acoplamientos naturalmente son diferentes por la forma de los modos. En esta sección estudiamos otra red unidimensional bimodal, sin embargo, encontramos una banda plana independiente de los valores de acoplamiento y energías de sitio. Para lograrlo hemos aprovechado la geometría de los sitios, puesto que los modos P aparecen en guías elípticas, de esta forma, hemos jugado con la elipticidad de los sitios para crear un modelo efectivo en el que una banda siempre es plana. Además de esto, hemos encontrado otras dos condiciones de banda plana más realistas e incluso una condición de banda plana cuando $\Delta\beta = 0$.

3.3.1. Modelo y autovalores

La Fig. 3.5.(a) muestra el arreglo compuesto por dos tipos de sitios, los sitios con elipticidad horizontal y con elipticidad vertical. Cada sitio puede albergar dos modos: el modo S y el modo P. Dada la geometría del arreglo, los modos P verticales no interactúan con modos adyacentes, esto es porque el acoplamiento entre dos modos es proporcional a la integral del producto de los modos (también llamado *convolución* como se explica en el capítulo 2), y la forma del modo P vertical hace que el resultado de la convolución sea cero al calcularlo con los modos adyacentes. La Fig. 3.5.(b) muestra el modelo efectivo con las interacciones entre los dos tipos de modos de sitios verticales y horizontales. Usando los acoplamientos y los modos como se definen en la figura, las ecuaciones diferenciales acopladas que rigen el sistema son:

$$-i\frac{\partial u_n(z)}{\partial z} = \beta_s u_n(z) + V_s(v_n + v_{n-1}) + V_{sp}(w_n - w_{n-1}), \quad (3.20)$$

$$-i\frac{\partial v_n(z)}{\partial z} = \beta_s v_n(z) + V_s(u_n + u_{n+1}), \quad (3.21)$$

$$-i\frac{\partial x_n(z)}{\partial z} = \beta_p x_n(z), \quad (3.22)$$

$$-i\frac{\partial w_n(z)}{\partial z} = \beta_p w_n(z) + V_{sp}(u_n - u_{n+1}). \quad (3.23)$$

Luego de utilizar la aproximación de ondas planas y el Ansatz de ondas de Bloch obtenemos el siguiente problema de autovalores:

$$\lambda \vec{\psi} = \begin{pmatrix} \beta_s & V_s(1 + e^{-ik}) & 0 & V_{sp}(1 - e^{-ik}) \\ V_s(1 + e^{ik}) & \beta_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_p & 0 \\ V_{sp}(1 - e^{ik}) & 0 & 0 & \beta_p \end{pmatrix} \vec{\psi}. \quad (3.24)$$

Con λ el autovalor y $\vec{\psi}$ el autovector. De la ecuación anterior tenemos un autovalor λ_x trivial y su correspondiente autovector $\vec{\psi}_x$, donde hemos usado el subíndice x porque es un estado localizado

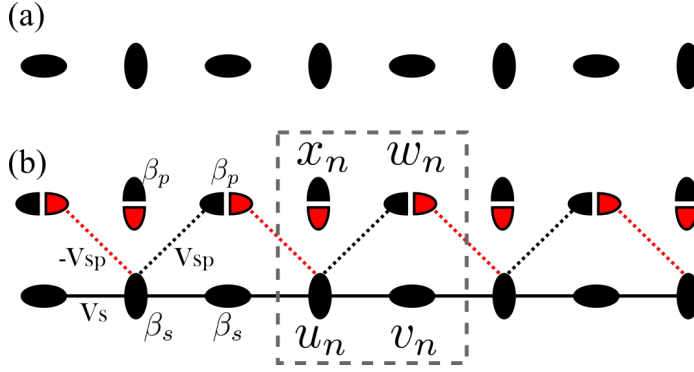


Figura 3.5: (a) Esquema de la red en la que cada sitio alberga dos modos, el modo S y el P. (b) Esquema de la red efectiva en la que el cuadrado gris segmentado muestra la n -ésima celda unitaria con 4 modos: el modo S vertical u_n , el modo S horizontal v_n , el modo P vertical x_n y el modo P horizontal w_n . La línea negra es el acoplamiento V_s , la línea punteada es el acoplamiento V_{sp} entre modos S y P, el color representa el signo, negro para positivo y rojo para negativo.

en los sitios x_n :

$$\lambda_x = \beta_p, \quad \vec{\psi}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Vemos que λ_x es independiente de k por lo que es una banda plana. Esta banda trivial es completamente plana y está relacionada con la excitación de los modos verticales p que son los modos de los sitios x_n . Estos modos producen una banda plana dado que no están acoplados con ningún otro modo.

Podemos sacar el vector $\vec{\psi}_x$ para reducir la dimensionalidad del problema y la matriz queda:

$$\lambda \vec{\psi} = \begin{pmatrix} \beta_s & V_s(1 + e^{-ik}) & V_{sp}(1 - e^{-ik}) \\ V_s(1 + e^{ik}) & \beta_s & 0 \\ V_{sp}(1 - e^{ik}) & 0 & \beta_p \end{pmatrix} \vec{\psi}. \quad (3.26)$$

Las bandas son obtenidas a través de los autovalores λ de la matriz anterior; sin embargo, el resultado no es tan sencillo de obtener puesto que es un trinomio no factorizable (trinomio primo). Para encontrar una segunda banda plana vamos a evaluar las bandas en $k = 0$ y $k = \pi$, al hacerlo obtenemos que

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}(k = 0) = \{0, \Delta\beta - 2V_s, \Delta\beta + 2V_s\}, \quad (3.27)$$

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}(k = \pi) = \left\{ \Delta\beta, \frac{1}{2} \left(\Delta\beta - \sqrt{\Delta\beta^2 + 16V_{sp}^2} \right), \frac{1}{2} \left(\Delta\beta + \sqrt{\Delta\beta^2 + 16V_{sp}^2} \right) \right\}, \quad (3.28)$$

desde esta relación vamos a exigir que

$$\lambda_2(k = 0) = \lambda_2(k = \pi), \quad (3.29)$$

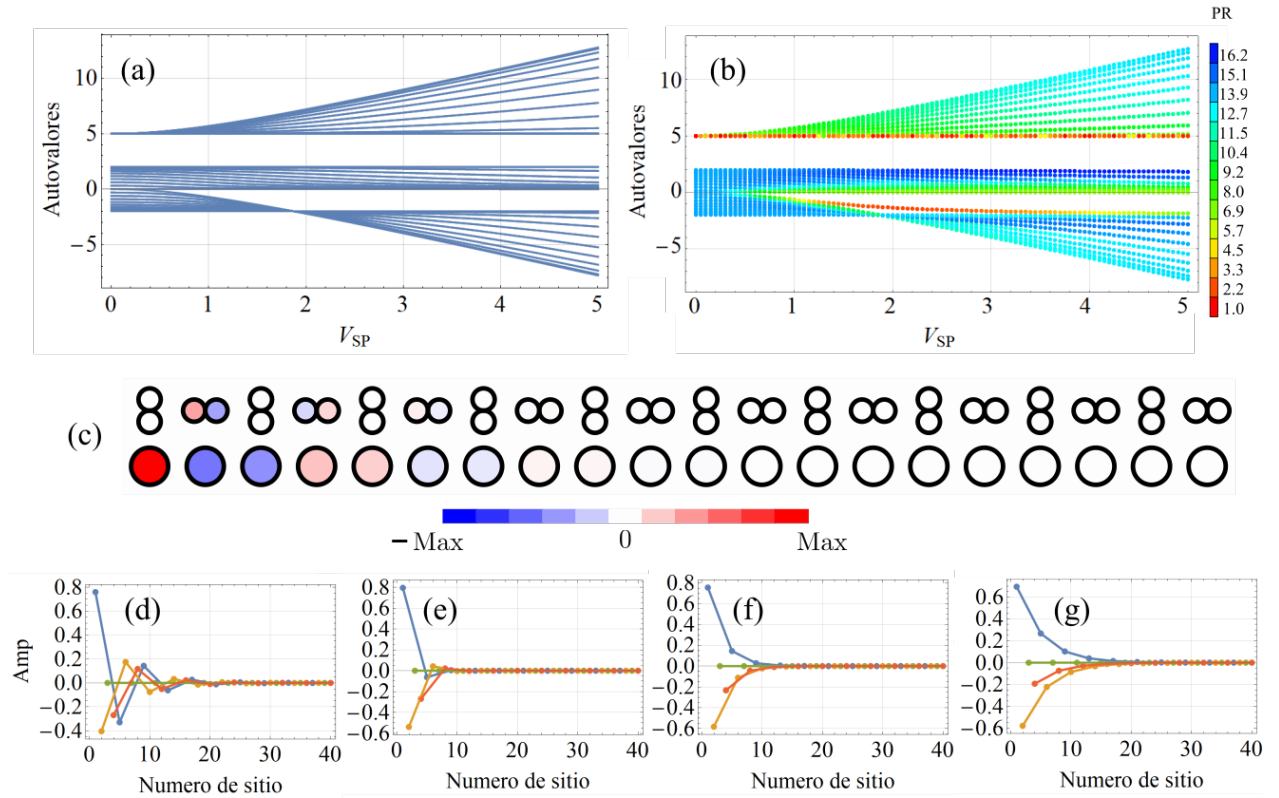


Figura 3.6: (a) Espectro teórico encontrado a partir de los autovalores de la matriz de acoplamiento de la ecuación (3.24). (b) Espectro numérico calculado a partir de una red finita de 10 celdas unitarias. Para ambos gráficos se ha usado $\beta_s = 0$, $\beta_p = 5$, $V_s = 1$. (c) Esquema del estado de borde en el que los colores muestran la amplitud en cada sitio para $V_{sp} = 1, 5$. (d) Gráfico de amplitudes con $V_{sp} = 1, 5$, los puntos azules son los sitios u_n , los naranjos son los v_n , los verdes son los x_n y los rojos son los w_n . Gráfico de amplitudes con (e) $V_{sp} = 2$, (f) $V_{sp} = 2, 5$, (g) $V_{sp} = 3$. Para todos los gráficos se ha usado $\beta_s = 0$, $\beta_p = 5$ y $V_s = 1$.

y obtenemos que esta relación se cumple si

$$V_{sp} = V_{sp}^{FB1} \equiv V_s \sqrt{1 - \frac{\Delta\beta}{2V_s}} . \quad (3.30)$$

De esta forma, si el acoplamiento V_{sp} cumple con la condición anterior entonces la segunda banda tiene el mismo valor en $k = 0$ y $k = \pi$, para determinar si esa banda es plana vamos a calcular las bandas y obtenemos que:

$$\lambda_1(V_{sp} = V_{sp}^{FB1}) = V_s + \frac{\Delta\beta}{2} - \sqrt{\frac{\Delta\beta^2}{4} + V_s^2 + 2V_s \frac{\Delta\beta}{2} \cos(k)} , \quad (3.31)$$

$$\lambda_2(V_{sp} = V_{sp}^{FB1}) = \Delta\beta - 2V_s , \quad (3.32)$$

$$\lambda_3(V_{sp} = V_{sp}^{FB1}) = V_s + \frac{\Delta\beta}{2} + \sqrt{\frac{\Delta\beta^2}{4} + V_s^2 + 2V_s \frac{\Delta\beta}{2} \cos(k)} , \quad (3.33)$$

si es que $V_s + \Delta\beta/2 > 0$, por otro lado, si $V_s + \Delta\beta/2 < 0$, entonces debemos cambiar el signo que va delante de la raíz Sin embargo, la elección de signo de las ecuaciones anteriores nos trae sin cuidado, puesto que nuestro objetivo era encontrar una condición para el acoplamiento V_{sp} que nos permita tener una banda plana y lo hemos conseguido aplanando la segunda banda con valor $\Delta\beta - 2V_s$. Por otro lado, si queremos aplanar la tercera banda entonces vamos a exigir que

$$\lambda_3(k = 0) = \lambda_3(k = \pi) , \quad (3.34)$$

y obtenemos que esta relación se cumple si

$$V_{sp} = V_{sp}^{FB2} \equiv V_s \sqrt{1 + \frac{\Delta\beta}{2V_s}} , \quad (3.35)$$

y con esta condición las bandas son

$$\lambda_1(V_{sp} = V_{sp}^{FB2}) = \frac{\Delta\beta}{2} - V_s + \sqrt{\frac{\Delta\beta^2}{4} + V_s^2 - 2V_s \frac{\Delta\beta}{2} \cos(k)} , \quad (3.36)$$

$$\lambda_2(V_{sp} = V_{sp}^{FB2}) = \frac{\Delta\beta}{2} - V_s - \sqrt{\frac{\Delta\beta^2}{4} + V_s^2 - 2V_s \frac{\Delta\beta}{2} \cos(k)} , \quad (3.37)$$

$$\lambda_3(V_{sp} = V_{sp}^{FB2}) = \Delta\beta + 2V_s . \quad (3.38)$$

Nuevamente debemos tener cuidado con los signos dependiendo de si $\Delta\beta - V_s$ es ≥ 0 . Así, hemos encontrado dos condiciones para V_{sp} que nos pueden aplanar la banda $\lambda_2(k)$ o la banda $\lambda_3(k)$.

Si consideramos un sistema poco realista en el que $\Delta\beta = 0$, entonces una de las bandas se aplanan con valor $\lambda_1 = 0$.

La Fig. 3.6.(a) muestra el espectro de autovalores en función de V_{sp} a partir de la matriz en la Ec. (3.24), utilizando $\beta_s = 0$, $\beta_p = 5$ y $V_s = 1$. La banda plana de los modos x_n está en $\lambda_x = \beta_p = 5$. Además apreciamos que la banda inferior se aplanan en la condición $V_{sp} = V_s \sqrt{1 - \Delta\beta/(2V_s)} \approx 1,87$.

3.3.2. Estados de borde

La Fig. 3.6.(b) muestra el espectro numérico calculado a partir de una red finita con 10 celdas unitarias y utilizando los mismos parámetros que los usados en la Fig. 3.6.(a). El color de cada punto corresponde al PR del autovector asociado. Los puntos rojos que aparecen en $\lambda = 5$ son los modos que están asociados a la banda plana y por lo tanto son altamente localizados, y por esta razón son rojos. Además vemos que alrededor de $V_{sp} = 1$ hay un estado que se desliga de la banda inferior y se va localizando para luego volver a entrar en la banda inferior alrededor de $V_{sp} = 5$. Al observar el autovector asociado nos damos cuenta de que es un estado de borde. La Fig. 3.6.(c) muestra un esquema del estado de borde en que el color representa la amplitud de excitación en cada sitio usando $V_s = 1$, $V_{sp} = 1,5$, $\beta_s = 0$ y $\beta_p = 5$. El esquema de colores va desde rojo para la amplitud máxima (Max), luego pasa por el blanco que es amplitud cero y va al azul que es el negativo de la amplitud máxima ($-Max$). Podemos apreciar que este modo está conformado por todos los modos a excepción del modo P vertical, esto es porque todos los modos P verticales pertenecen a la banda plana $\lambda = 5$. La Fig. 3.6.(d) muestra gráficamente el mismo estado de borde, con azul los modos u_n , naranja para los modos v_n , verde para los modos x_n y rojo para los modos w_n . Del gráfico observamos que para las curvas azul, naranja y roja, la amplitud disminuye y la fase es alternada. La Fig. 3.6.(e) muestra el estado de borde pero cambiando $V_{sp} = 2$, la forma es similar con la fase alternada pero el decaimiento es más rápido, esto produce que el estado se vuelva más localizado. La Fig 3.6.(f) muestra el estado de borde pero con $V_{sp} = 2,5$, podemos observar que la amplitud decae hacia el centro pero la estructura de fase ha cambiado completamente, ya no es alternado sino que la fase se mantiene. La Fig. 3.6.(g) muestra el estado de borde pero con $V_{sp} = 3$ y podemos observar que ahora decae más lentamente que en el caso anterior por lo que es menos localizado, y la estructura de fase es la misma que en el caso anterior. A partir de este punto si seguimos aumentando V_{sp} entonces el estado de borde lentamente se vuelve menos localizado a medida que el estado se va convirtiendo en estado de bulk de la banda inferior.

Capítulo 4

Bandas planas inducidas por interacciones intra-orbitales en redes fotónicas cuasi unidimensionales

En el capítulo anterior observamos que las interacciones inter-orbitales nos permiten tener bandas planas en sistemas unidimensionales. Este resultado nos motiva a estudiar sistemas cuasi unidimensionales en búsqueda de bandas planas para un amplio rango de parámetros. Esto quiere decir que nuestro objetivo es encontrar sistemas que sólo tengan bandas planas, y que además sean planas para cualquier valor de los acoplamientos, y no que sean planas cuando se cumpla una condición específica entre los acoplamientos. Con esta motivación vamos a estudiar dos modelos cuasi unidimensionales para los cuales las bandas planas existen para varios valores de los acoplamientos, e incluso logramos observar que todas las bandas son planas independientemente de los valores de los acoplamientos.

Ambos modelos se basan en el mismo principio, el fenómeno *Aharonov-Bohm* que es un efecto de interferencia de una onda al separarse en dos caminos y reunirse luego en un mismo punto. En esta tesis, estudiamos dos modelos en el que hemos hecho una diferencia de fase π entre las ondas de ambos brazos, lo que produce interferencia destructiva que anula la dispersión. En los dos modelos a estudiar, los sitios centrales actúan como los puntos de partida y término de cada camino. Una onda, sea cual fuese, que comience en un sitio central se separará en dos caminos a la derecha y dos caminos a la izquierda, luego cada onda viajando en un brazo experimentará interferencia destructiva en el siguiente sitio central producto de su interferencia con la onda par que va en el camino contiguo. Esta interferencia produce el fenómeno llamado enjaulamiento, puesto que la onda queda enjaulada en una región de la red y no dispersa a lo largo del arreglo.

4.1. Diamante inter orbital

En esta sección vamos a estudiar el trabajo “Controlled transport based on multiorbital Aharonov-Bohm photonic caging” [4]. En este trabajo estudiamos la red de diamante, donde que los sitios centrales son alternados entre sitios S y sitios P . Definimos sitios S a los sitios que sólo soportan modos fundamentales, y definimos sitios P a los sitios que son bimodales, sin embargo, están ajustados para que los modos de segundo orden estén sintonizados con la frecuencia de los modos

fundamentales de los sitios S adyacentes. Dado que se sintoniza el modo de segundo orden del sitio P para resonar con el modo fundamental de los sitios S adyacentes, entonces el modo fundamental del sitio P queda desintonizado de los sitios S adyacentes y, de esta forma, ese modo S en la guía bimodal es un modo no interactuante. Para sintonizar el modo P de una guía bimodal con un modo S de otra guía, se modifica el cambio en el índice de refracción, pero a medida que se sintoniza el modo P de la guía bimodal con el modo S de la guía unimodal, entonces el modo S de la guía bimodal se desintoniza del modo S de la guía unimodal [1].

En este modelo encontramos que todas las bandas son planas incluso si el sintonizado entre modos S y modos P no es perfecto y $\beta_s \neq \beta_p$. Además encontramos que las bandas son planas para cualquier valor de los acoplamientos. De esta forma, tenemos bandas planas que no necesitan un ajuste preciso en valores de acoplamiento. Por lo tanto, este sistema es completamente plano en dispersión, para cualquier valor de los parámetros, y la razón de esta fenomenología de bandas completamente planas es la interferencia que producen los modos P . Esto es porque la forma intrínseca de los modos P nos permite tener acoplamientos positivos y negativos dependiendo de su orientación. De esta manera, la inclusión de modos P nos permite crear este sistema con todas las bandas planas independiente de acoplamientos o energías de sitio. Esto produce el efecto Aharonov-Bohm, que es en esencia un fenómeno de interferencia destructiva de una onda al recorrer un camino cerrado.

4.1.1. Modelo y bandas

Consideremos el sistema propuesto en el esquema de la Fig. 4.1.(a) en el que los óvalos negros representan los sitios S y los óvalos grises representan los sitios P , que están sintonizados para resonar con los modos de los sitios S . Los modos S de los sitios P tienen una frecuencia de oscilación diferente de los modos S adyacentes por lo que no interactúan en el modelo efectivo. La Fig. 4.1.(b) es un esquema del modelo efectivo en el que representamos los acoplamientos utilizando líneas, a saber: las líneas negras representan el acoplamiento V_s entre los sitios S , y las líneas segmentadas representan el acoplamiento $\pm V_{sp}$ entre los sitios S y los sitios P con negro para acoplamientos positivos y rojo para los acoplamientos negativos.

El modelo tiene 6 modos y por lo tanto 6 bandas planas. Las bandas de este sistema son:

$$\lambda_1 = \beta_s , \quad (4.1)$$

$$\lambda_2 = \beta_s , \quad (4.2)$$

$$\lambda_3 = \beta_s + 2V_s , \quad (4.3)$$

$$\lambda_4 = \beta_s - 2V_s , \quad (4.4)$$

$$\lambda_5 = \frac{1}{2}(\beta_s + \beta_p + \sqrt{(\beta_s - \beta_p)^2 + 16V_{sp}^2}) , \quad (4.5)$$

$$\lambda_6 = \frac{1}{2}(\beta_s + \beta_p - \sqrt{(\beta_s - \beta_p)^2 + 16V_{sp}^2}) , \quad (4.6)$$

vemos que las bandas son planas independiente del valor de β_s o β_p o los acoplamientos V_s y V_{sp} . La Fig. 4.2 muestra los estados localizados de banda plana asociados a los autovalores mostrados anteriormente para: (a) λ_1 , (b) λ_2 , (c) λ_3 , (d) λ_4 , (e) λ_5 y (f) λ_6 .

Dado que todas las bandas son planas y que para cada banda plana existe un estado altamente localizado, entonces cualquier excitación será una combinación lineal de estados altamente localizados, de esta forma, cualquier excitación de la red va a permanecer localizada en una pequeña región

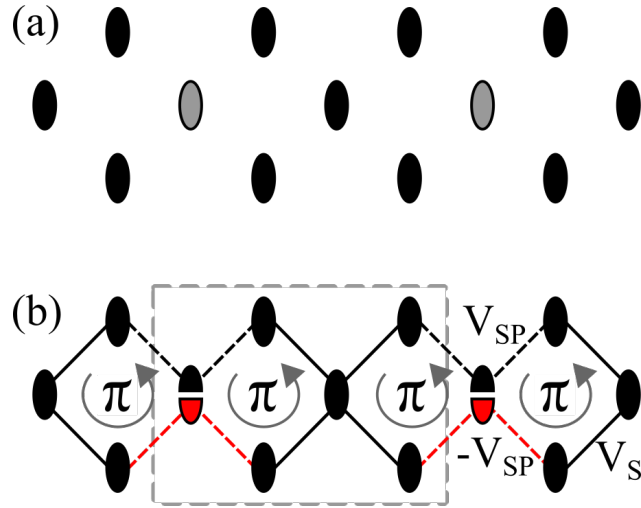


Figura 4.1: (a) El modelo propuesto en el que los óvalos negros representan los sitios S y los óvalos grises representan los sitios bimodales con modos P que están sintonizados para interactuar con los sitios S adyacentes. (b) Esquema del modelo efectivo en el que el rectángulo gris segmentado representa la n -ésima celda unitaria. La línea negra es el acoplamiento V_s y la línea segmentada representa el acoplamiento $\pm V_{sp}$ usando negro para acoplamiento positivo y rojo para acoplamiento negativo.

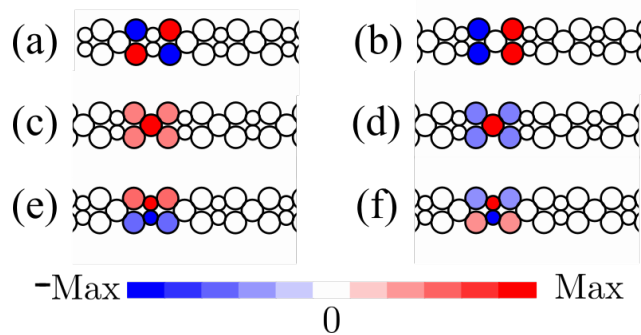


Figura 4.2: Esquemas de los estados localizados de banda plana. (a) y (b) son los estados asociados a los autoestados $\lambda_1 = \lambda_2 = \beta_s$. (c) es el estado asociado a $\lambda_3 = \beta_s + 2V_s$. (d) es el estado asociado a $\lambda_4 = \beta_s - 2V_s$. (e) es el estado asociado a λ_5 . (f) es el estado asociado a λ_6 .

del arreglo independiente de los parámetros de acoplamiento y energía de sitio, lo que hace que este arreglo sea sumamente versátil y robusto a la hora de transportar energía. Normalmente, la red de diamante sin la inclusión de modos P tiene una banda plana y dos bandas dispersivas; pero, al considerar los modos P hemos pasado a un sistema completamente localizado independiente de los acoplamientos. Este cambio en el transporte de energía se debe únicamente a la cancelación de transporte debido al cambio de signo del acoplamiento producto del modo P . La geometría y estructura de fase de los lóbulos del modo P hacen posible esta interacción negativa y positiva; en otras palabras, la localización se debe a que una onda acumula una fase π cuando viaja circularmente por una plaqueta [Fig. 4.1.(b)]. Así, concluimos que los modos P son una inclusión muy valiosa para la localización de energía en arreglos fotónicos por la cancelación de fase y en general para modificar controladamente las propiedades dinámicas de una red arbitraria.

4.2. Grafeno de bandas planas

En la sección 4.1 hemos presentado un sistema en el que la adición de modos P cambia la fenomenología desde un sistema con transporte y localización a un sistema con completa localización. En esta sección veremos el modelo de grafeno cuasi unidimensional en el que hemos añadido modos P de forma alternada. Hemos encontrado que la adición de modos P hace que todas las bandas se vuelvan planas independiente del valor de los acoplamientos y de la energía de sitio. De esta forma, podemos localizar cualquier excitación en el arreglo. Al igual que en el modelo anterior, en este modelo las bandas planas se producen por el efecto de interferencia destructiva de las ondas debido a la presencia del modo de segundo orden.

4.2.1. Modelo y bandas

La Fig. 4.3 es un esquema representativo del modelo de grafeno cuasi unidimensional con adición de modos P en ciertas guías centrales, esto es para aplanar todas las bandas y tener un sistema completamente localizado. Como se muestra en el esquema, los acoplamientos entre los modos S horizontales es V_H , el acoplamiento entre modos P horizontales V_P , los acoplamientos entre modos S diagonales es V_S , y los acoplamientos entre modos S y modos P es $\pm V_{SP}$, con el signo dependiendo de la orientación. En la Fig. 4.3 las líneas negras son para representar los acoplamientos entre modos S , las líneas segmentadas negras y rojas son para representar el acoplamiento V_{SP} y $-V_{SP}$, respectivamente, y la línea punteada es para representar el acoplamiento V_P .

Dado que la celda unitaria está compuesta de 12 modos, entonces tenemos 12 bandas en nuestro espectro. Sin embargo, debido a que tenemos el efecto de interferencia destructiva en cada celda,

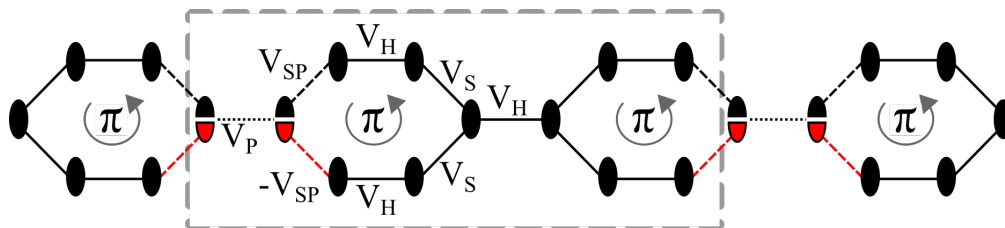


Figura 4.3: Esquema del modelo de grafeno con modos P . Las líneas representan los acoplamientos entre los modos respectivos tal como se indica en la figura y texto.

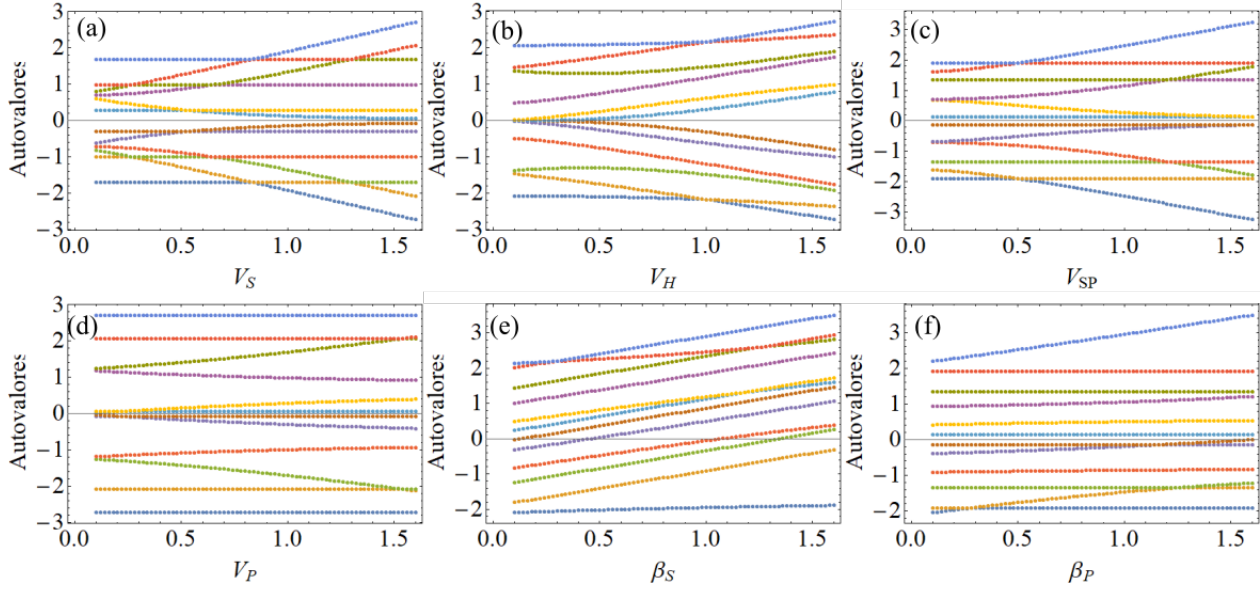


Figura 4.4: Cálculo de bandas barriendo todos los parámetros, las bandas son delgadas porque son planas. Para el cálculo de bandas se han usado parámetros nominales: $V_S = 1$, $V_P = 1,6$, $V_H = 0,7$, $V_{SP} = 0,7$, $\beta_S = 0$ y $\beta_P = 0$. (a) Autovalores en función de V_S , (b) Autovalores en función de V_H , (c) En función de V_{SP} , (d) V_P , (e) β_S , (f) β_P .

todas las bandas son planas independiente del valor de los acoplamientos V_H , V_S , V_{sp} y V_P . Para comprobar que todas las bandas sean planas escribimos la matriz de acoplamientos:

$$\begin{pmatrix}
 \beta_P & V_P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-ik}V_{SP} & -e^{-ik}V_{SP} \\
 V_P & \beta_P & V_{SP} & -V_{SP} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & V_{SP} & \beta_S & 0 & V_H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -V_{SP} & 0 & \beta_S & 0 & V_H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & V_H & 0 & \beta_S & 0 & V_S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & V_H & 0 & \beta_S & V_S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & V_S & V_S & \beta_S & V_H & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_H & \beta_S & V_S & V_S & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_S & \beta_S & 0 & V_H & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_S & 0 & \beta_S & 0 \\
 e^{ik}V_{SP} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_H & 0 & \beta_S & 0 \\
 -e^{ik}V_{SP} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_H & 0 & \beta_S
 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Para cualquier valor de acoplamientos o energía de sitio todos los autovalores son independientes de k , esto es, el sistema tiene todas sus bandas planas. En la Fig. 4.4 tenemos las bandas calculadas a partir de la diagonalización de la matriz de la Ec. (4.7), y hemos variado cada parámetro de acoplamiento y constante de propagación de manera independiente. Para hacer cada figura hemos calculado las bandas para distintos k y podemos observar de la figura que las bandas no tienen ancho, esto quiere decir que son bandas planas. De la figura podemos concluir que las bandas son planas para todos los valores de parámetros.

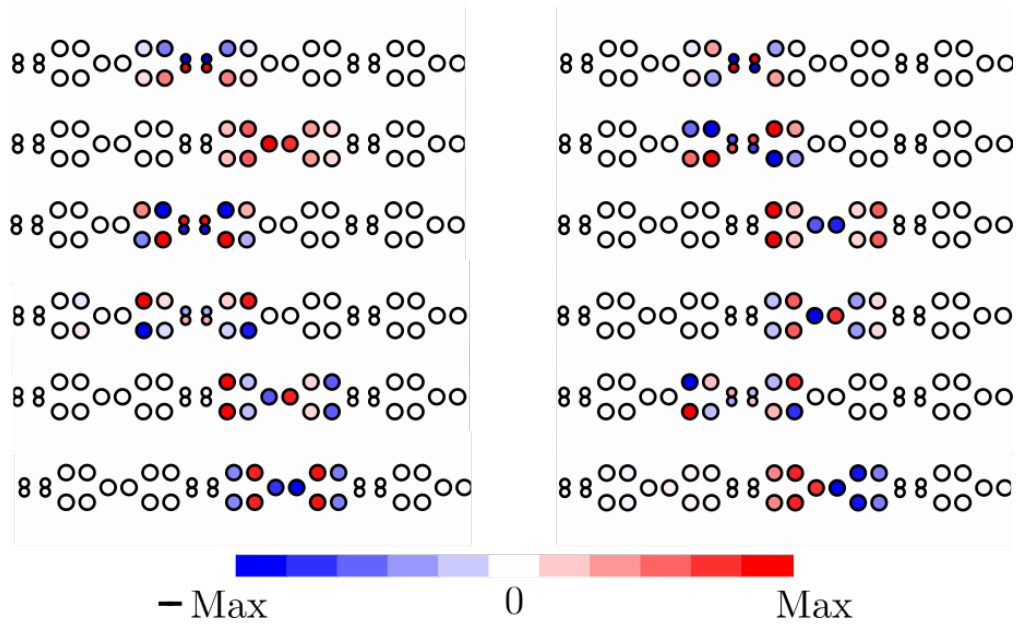


Figura 4.5: Esquema de los 12 modos de banda plana del grafeno utilizando $\beta_s = 0,9$, $\beta_p = 0$, $V_S = 1$, $V_H = 0,7$, $V_{SP} = 2$ y $V_P = 3$.

La Fig. 4.5 muestra los estados localizados de banda plana del modelo, donde se utiliza el azul para amplitud negativa y el rojo para amplitud positiva. Estos estados se han calculado numéricamente. Las amplitudes cambian en función de los acoplamientos y la energía de sitio. Y dado que este modelo tiene todas sus bandas planas, podemos utilizarlo para transportar estados en regiones localizadas de la red.

Capítulo 5

Diamante y Stub Dimerizados

5.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos la red de diamante y stub con dimerización en el acoplamiento a primer vecino. La red de stub y de diamante están compuestas de tres sitios por celda unitaria y por lo tanto ambos modelos tienen tres bandas. La dimerización es similar a la de la red SSH, y de la misma forma, encontramos que hay estados de borde localizados para ciertos valores de acoplamientos. El sistema dimerizado más simple es el SSH y se ha estudiado que en este modelo los estados de borde desaparecen cuando hay una transición topológica [7].

5.2. Diamante

Esta sección corresponde a un compilado de resultados de nuestra publicación de la red diamante dimerizado [6]. Uno de los puntos principales de esta publicación fue la transferencia de energía entre los bordes debido a los estados topológicos. Entonces en esta sección mostraremos la red de diamante junto a sus estados de borde y luego mostraremos el concepto de la transferencia.

Para el sistema de diamante mostramos que cuando no hay auto acoplamiento, el sistema está relacionado con el modelo de SSH más una banda plana, esto lo mostramos a través de una transformación que cambia la matriz de acoplamiento del diamante dimerizado al modelo de SSH más una banda plana. Al analizar la estructura de bandas observamos que las bandas del modelo de diamante son iguales a las bandas SSH más la banda plana. Además, al considerar ciertos casos de auto-acoplamiento simétrico o anti-simétrico vemos que la transformación deja de llevarnos al modelo de SSH y nos lleva al modelo de Rice-Mele. El modelo de Rice-Mele es similar al modelo de SSH, pero con energía de sitio diferente en los dos sitios de la red. De esta forma, el Hamiltoniano de Rice-Mele es el mismo Hamiltoniano de SSH pero con energía de sitio [21, 22]. Además, estudiamos la adición de desorden en el acoplamiento y encontramos que si el desorden no rompe la transformación al modelo de SSH/Rice-Mele, entonces los estados de borde son robustos ante el desorden, es decir, los estados de borde topológicos no cambian en energía. Además, calculamos analíticamente los estados de borde y encontramos su forma analítica sin desorden y con desorden. Finalmente, proponemos un operador de simetría quiral del sistema.

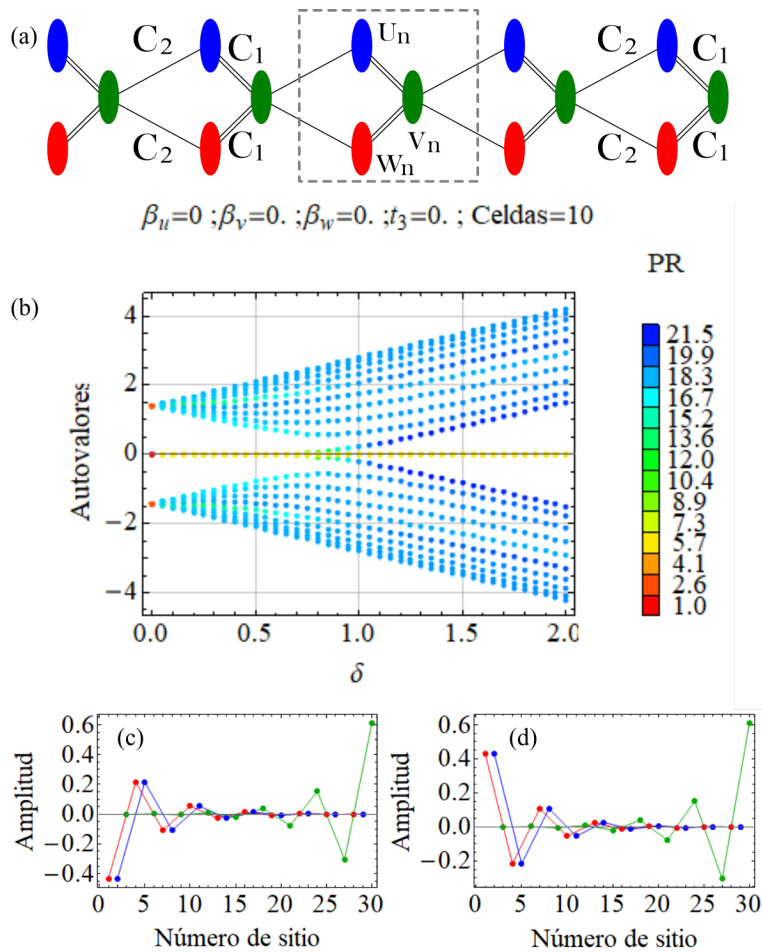


Figura 5.1: (a) Representación esquemática del modelo diamante dimerizado. El rectángulo segmentado muestra la n -ésima celda unitaria compuesta de los sitios U_n (en azul), V_n (en verde) y W_n (en rojo), y con una línea doble mostramos el acoplamiento C_1 y con una línea simple el acoplamiento C_2 . (b) El espectrograma del modelo diamante dimerizado utilizando $C_2 = 1$ y todas las energías de sitio igual a cero. El color de cada autovalor representa el grado de participación (PR) del autovector asociado. (c) Los dos estados de borde para $\delta = 0,5$, utilizando azul para los sitios U , rojo para los sitios W y verde para los sitios V acorde a los colores del esquema en (a).

5.2.1. Modelo y bandas

La Fig. 5.1.(a) muestra el modelo de diamante dimerizado en el que hay tres sitios por celda unitaria: azul para los sitios U_n , verde para los sitios V_n y rojo para los sitios W_n . En esta sección consideramos acoplamientos a primeros vecinos tal como se muestran en la Fig. 5.1.(a), con la línea doble para el acoplamiento C_1 y línea simple para C_2 . La dimerización es similar a la dimerización del modelo SSH, por lo tanto, también vamos a definir un parámetro de dimerización $\delta = C_1/C_2$. Las

ecuaciones diferenciales acopladas que rigen este sistema son:

$$-i \frac{\partial U_n(z)}{\partial z} = C_1 V_n(z) + C_2 V_{n-1}(z) , \quad (5.1)$$

$$-i \frac{\partial W_n(z)}{\partial z} = C_1 V_n(z) + C_2 V_{n-1}(z) , \quad (5.2)$$

$$-i \frac{\partial V_n(z)}{\partial z} = C_1 (U_n(z) + W_n(z)) + C_2 (U_{n+1}(z) + W_{n+1}(z)) . \quad (5.3)$$

Luego utilizamos la soluciones de ondas planas: $\{U_n(z), W_n(z), V_n(z)\} = \{u_n, w_n, v_n\} e^{i\lambda z}$, y el Ansatz de ondas de Bloch: $\{u_n, w_n, v_n\} = \{u, w, v\} e^{ikn}$. Con estos Ansatz, las ecuaciones (5.1)-(5.3) cambian a:

$$\lambda u = v(C_1 + C_2 e^{-ik}) , \quad (5.4)$$

$$\lambda w = v(C_1 + C_2 e^{-ik}) , \quad (5.5)$$

$$\lambda v = (u + w)(C_1 + C_2 e^{ik}) , \quad (5.6)$$

con λ los autovalores del sistema a primeros vecinos. Escribimos matricialmente las ecuaciones anteriores::

$$\lambda \begin{pmatrix} u \\ w \\ v \end{pmatrix} = M_{\text{dd}} \begin{pmatrix} u \\ w \\ v \end{pmatrix} , \quad (5.7)$$

con

$$M_{\text{dd}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_1 + C_2 e^{-ik} \\ 0 & 0 & C_1 + C_2 e^{-ik} \\ C_1 + C_2 e^{ik} & C_1 + C_2 e^{ik} & 0 \end{pmatrix} , \quad (5.8)$$

con M_{dd} la matriz de acoplamientos. Los autovalores de esta matriz de acoplamientos son:

$$\lambda_0 = 0 , \quad (5.9)$$

$$\lambda_{\pm} = \pm \sqrt{2} \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1 C_2 \cos(k)} , \quad (5.10)$$

notamos que son tres autovalores ($\lambda_0, \lambda_+, \lambda_-$). Notamos que cuando $C_1 = C_2$ las bandas coinciden en cero cuando $k = \pi$, es decir, $\lambda_+(k = \pi) = \lambda_-(k = \pi)$.

5.2.2. Espectro

La Fig. 5.1.(b) muestra el espectro de autovalores, y el color representa el grado de participación PR . Los autovalores fueron calculados utilizando $C_2 = 1$, sin energía de sitios y 10 celdas unitarias, es decir, 30 sitios totales. El espectro tiene dos bandas dispersivas y una banda plana, tal como se calculó en las Ecs. (5.9) y (5.10). A partir del espectro no podemos decir a primera vista si hay estados de borde o no, sin embargo al contar los estados vemos que para $\delta < 1$ hay 9 estados en la banda superior, 9 en la banda inferior y 12 con energía cero. Además, dos de esos estados están altamente localizados en el borde. La Fig.5.1.(c-d) muestra los dos estados de borde para $\delta = 0,5$.

Vemos que tienen una estructura de subred, por la derecha está compuesta por los sitios V y por la izquierda está compuesta por los sitios W y U en fase. Al analizar esto, nos damos cuenta de que estas dos subredes no generan el espacio completo de soluciones, y que nos falta agregar W y U en desfase, pero los estados de esta subred son estados de la banda plana. En la siguiente subsección vamos a cambiar las energías de sitio para abrir un gap entre las bandas y entonces es claramente distinguible cuando los estados de borde se unen al bulk al cruzar la transición $\delta = 1$.

5.2.3. Energía de sitio

Vamos a considerar que tenemos energía de sitio β_U en los sitios U , energía β_W en los sitios W y energía β_V en los sitios V . Las ecuaciones que rigen este sistema son:

$$-i \frac{\partial U_n}{\partial z} = \beta_U U_n + C_1 V_n + C_2 V_{n-1} , \quad (5.11)$$

$$-i \frac{\partial W_n}{\partial z} = \beta_W W_n + C_1 V_n + C_2 V_{n-1} , \quad (5.12)$$

$$-i \frac{\partial V_n}{\partial z} = \beta_V V_n + C_1 (U_n + W_n) + C_2 (U_{n+1} + W_{n+1}) . \quad (5.13)$$

Luego utilizamos los dos Ansatz que vimos en el segundo capítulo para encontrar la matriz de acoplamientos:

$$M_\beta = \begin{pmatrix} \beta_U & 0 & C_1 + C_2 e^{-ik} \\ 0 & \beta_W & C_1 + C_2 e^{-ik} \\ C_1 + C_2 e^{ik} & C_1 + C_2 e^{ik} & \beta_V \end{pmatrix} . \quad (5.14)$$

Los autovalores serán las soluciones de un polinomio de tercer grado. Podemos encontrar soluciones exactas si consideramos que $\beta_U = \beta_W$, en otras palabras, que los sitios U tienen la misma energía de sitio que los sitios W . Con esta consideración las soluciones son:

$$\lambda_{\beta+,1} = \beta_U , \quad (5.15)$$

$$\lambda_{\beta+,\pm} = \frac{1}{2} \left(\beta_V + \beta_U \pm \sqrt{(\beta_V - \beta_U)^2 + 8(C_1^2 + C_2^2) + 16C_1 C_2 \cos(k)} \right) , \quad (5.16)$$

el subíndice $\beta+$ sirve para aclarar que estamos en el caso $\beta_W = +\beta_U$. Además de este caso, encontramos otro caso interesante cuando $\beta_V = 0$ y $\beta_U = -\beta_W$, y las bandas son:

$$\lambda_{\beta-,1} = 0 , \quad (5.17)$$

$$\lambda_{\beta-,\pm} = \pm \sqrt{\beta_U^2 + 2(C_1^2 + C_2^2) + 4C_1 C_2 \cos(k)} , \quad (5.18)$$

el subíndice $\beta-$ es para aclarar que $\beta_W = -\beta_U$. Esta condición produce un gap entre las bandas que nos permite observar a primera vista la existencia de los estados de borde como mostramos en la Fig. 5.2 en donde hay una banda plana en $\lambda = 0$ y los estados de borde aparecen para $C_1 < 1$. La Fig. 5.2 muestra el espectro de autovalores calculados para la red que se muestra sobre el espectro y utilizando 10 celdas unitarias, $C_2 = 1$, $\beta_V = 0$ y $\beta_U = -\beta_W = 1$. De la figura observamos que hay una banda plana y dos dispersivas como se espera de los autovalores teóricos.

$\beta_v=0 ; \beta_u=1. ; \beta_w=-1. ; C_2=1 ; t_3=0. ; \text{Celdas}=10$

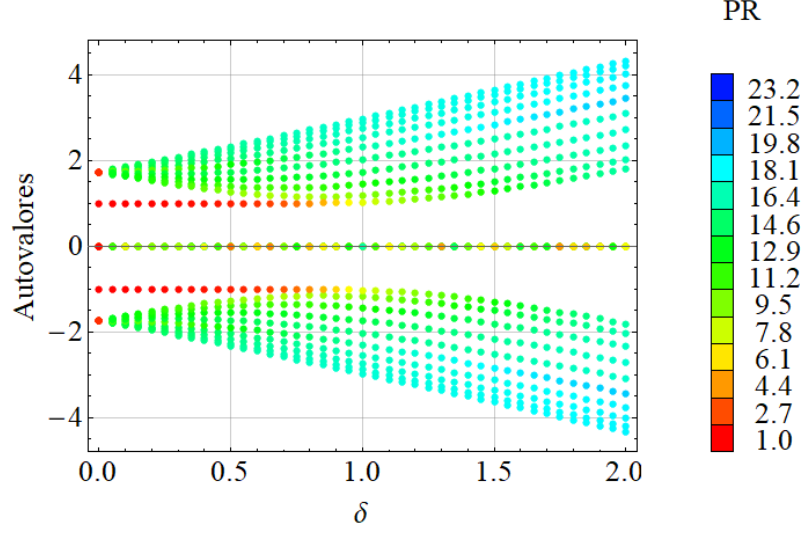


Figura 5.2: El espectro de autovalores calculado para $C_2 = 1$, $\beta_V = 0$, $\beta_U = 1$, $\beta_W = -1$ y 10 celdas unitarias, o sea, 30 sitios. El color de cada autovalor representa el grado de participación desde azul que es extendido hasta rojo que es localizado.

5.2.4. Conexión con SSH

En esta sección exploramos teóricamente la red de diamante dimerizada para encontrar una explicación a la existencia de los estados de borde. Encontramos que una transformación unitaria conecta el diamante dimerizado con el modelo de SSH más una banda plana. Además, encontramos que al considerar acoplamiento $\beta_U = \pm\beta_W$ el sistema pasa a estar relacionado con el modelo Rice-Mele. Tanto el modelo de SSH como Rice-Mele tienen estados de borde que desaparecen de la misma manera que hemos visto en los espectros anteriores del diamante dimerizado.

Para comenzar la demostración consideremos las tres ecuaciones acopladas del diamante dimerizado (5.4)-(5.6):

$$\lambda u = v(C_1 + C_2 e^{-ik}) , \quad (5.19)$$

$$\lambda w = v(C_1 + C_2 e^{-ik}) , \quad (5.20)$$

$$\lambda v = (u + w)(C_1 + C_2 e^{ik}) , \quad (5.21)$$

y ahora usamos el cambio de variable $\psi_+ = (u + w)/\sqrt{2}$ y $\psi_- = (u - w)/\sqrt{2}$. Este cambio de variable es equivalente a un cambio de base en la matriz de acoplamiento como veremos más adelante. De esta forma, al aplicar el cambio de variables, las ecuaciones se transforman en:

$$\lambda \psi_+ = \sqrt{2}v(C_1 + C_2 e^{-ik}) , \quad (5.22)$$

$$\lambda \psi_- = 0 , \quad (5.23)$$

$$\lambda v = \sqrt{2}\psi_+(C_1 + C_2 e^{ik}) , \quad (5.24)$$

y con el cambio de variable la banda plana $\lambda = 0$ es trivial de encontrar puesto que tenemos una

ecuación desacoplada. De esta forma, podemos ignorar la ecuación desacoplada puesto que no afecta las otras ecuaciones y resolver el problema estudiando las ecuaciones por separado, de esta forma pasamos de tener 3 ecuaciones diferenciales acopladas a tener dos ecuaciones diferenciales acopladas y una desacoplada. La matriz de acoplamiento de las ecuaciones acopladas anteriores es:

$$M_{\psi_+,v} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & C_1 + C_2 e^{-ik} \\ C_1 + C_2 e^{ik} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

Esta matriz de acoplamiento es la misma matriz de acoplamiento que el modelo de SSH. De esta forma, el subsistema acoplado del diamante dimerizado se convierte en el modelo de SSH. Y esta banda plana no hace ningún cambio ni ninguna adición a la fenomenología del subsistema acoplado. De esta forma, podemos concluir que dado que las ecuaciones son equivalentes por consecuencia los sistemas deben tener una fenomenología física equivalente. Por esta razón, concluimos que los estados de borde del diamante dimerizado tienen su origen en el modelo de SSH.

Para demostrar que el cambio de variable es equivalente a un cambio de base, vamos a definir primero la matriz unitaria cambio de base P de la siguiente manera:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

Notamos que $PP = I$, esto significa que $P^{-1} = P$ y, además, notamos que $P^\dagger = P$, de esta forma P es unitaria. Luego, utilizamos P sobre la matriz de acoplamiento de las ecuaciones (5.4)-(5.6), que es

$$M_{dd} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_1 + C_2 e^{-ik} \\ 0 & 0 & C_1 + C_2 e^{-ik} \\ C_1 + C_2 e^{ik} & C_1 + C_2 e^{-ik} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.27)$$

y, de esta forma, con el cambio de base la matriz anterior cambia a

$$PM_{dd}P = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 + C_2 e^{-ik} \\ 0 & C_1 + C_2 e^{ik} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

Hay un factor $\sqrt{2}$ que no consideramos importante puesto que la transición topológica del sistema está dada por la razón C_1/C_2 , y esta razón es la que determina la transición topológica en el modelo SSH.

En la matriz de la Ec. (5.28) la primera columna y la primera fila no tienen elementos, lo que es equivalente a que haya una ecuación desacoplada como se muestra en la Ec. (5.23), y la submatriz 2x2 que queda abajo a la derecha es equivalente a dos ecuaciones acopladas como se muestra en las Ecs. (5.22) y (5.24). Además si consideramos energía de sitio luego del cambio de base encontramos que el sistema está conectado con el modelo de Rice-Mele. Para probar esto consideramos $\beta_U = \beta_W \neq 0$ and $\beta_V = 0$ entonces la matriz de acoplamientos de la Ec. (5.14)

cambia a

$$M_{\beta+} = \begin{pmatrix} \beta_U & 0 & (C_1 + C_2 e^{-ik}) \\ 0 & \beta_U & (C_1 + C_2 e^{-ik}) \\ (C_1 + C_2 e^{ik}) & (C_1 + C_2 e^{ik}) & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.29)$$

el subíndice $\beta+$ es para aclarar que $\beta_W = \beta_U$. Ahora aplicamos el cambio de base P , es decir, utilizamos $\psi_{\pm} = (u \pm w)/\sqrt{2}$

$$P^{-1}M_{\beta+}P = \begin{pmatrix} \beta_U & 0 & 0 \\ 0 & \beta_U & \sqrt{2}(C_1 + C_2 e^{-ik}) \\ 0 & \sqrt{2}(C_1 + C_2 e^{ik}) & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.30)$$

Una vez más encontramos que la primera fila y la primera columna no tienen elementos no diagonales, esto quiere decir que tenemos una ecuación desacoplada de las demás lo que inmediatamente significa que tenemos una banda plana con valor $\lambda_{FB} = \beta_U$. Ahora, analizaremos el sub-sistema acoplado, por lo que consideramos la parte de la matriz que tiene los términos no-diagonales. Obtenemos la siguiente matriz de 2x2:

$$M_{\beta+, \{\psi_+, v\}} = \begin{pmatrix} \beta_U & \sqrt{2}(C_1 + C_2 e^{-ik}) \\ \sqrt{2}(C_1 + C_2 e^{ik}) & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.31)$$

luego podemos aplicar otra transformación unitaria del tipo $\{\psi_+, v\} \rightarrow \{\psi_+, v\}e^{iz\beta_U/2}$ lo que resta β_U a los elementos diagonales de la matriz anterior y de esta forma, obtenemos un modelo que es equivalente al modelo de Rice-Mele. La matriz de Rice-Mele es:

$$M_{\text{Rice-Mele}} = \begin{pmatrix} \beta & C_1 + C_2 e^{-ik} \\ C_1 + C_2 e^{ik} & -\beta \end{pmatrix}. \quad (5.32)$$

De esta forma, podemos decir que el subsistema de la red diamante dimerizado está relacionada con la red Rice-Mele. Ahora si consideramos $|\beta_W| \neq |\beta_U|$ entonces la banda plana se convierte en dispersiva y de esta forma no podemos encontrar ecuaciones desacopladas y, consecuentemente, se pierde la relación con el modelo de SSH y el modelo de Rice-Mele.

Ahora vamos a considerar el caso de la Fig. 5.2 que es $\beta_V = 0$ y $\beta_W = -\beta_U$ y la matriz de acoplamientos es

$$M_{\beta-} = \begin{pmatrix} \beta_U & 0 & C_1 + C_2 e^{-ik} \\ 0 & -\beta_U & C_1 + C_2 e^{-ik} \\ C_1 + C_2 e^{ik} & C_1 + C_2 e^{ik} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.33)$$

el subíndice $\beta-$ es para aclarar que estamos en la condición $\beta_W = -\beta_U$. Ahora usamos la siguiente

transformación

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{C_1 + C_2 e^{-ik}}{\beta_U} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{C_1 + C_2 e^{-ik}}{\beta_U} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-\beta_U}{C_1 + C_2 e^{ik}} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.34)$$

vemos que esta transformación sólo es válida si $C_1 + C_2 e^{ik} \neq 0$, aunque no es su propia inversa ni hermítica. Al aplicar esta transformación obtenemos que:

$$B^{-1} M_{\beta_-} B = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\beta}_U & C_1 + C_2 e^{-ik} \\ 0 & C_1 + C_2 e^{ik} & -\bar{\beta}_U \end{pmatrix}, \quad (5.35)$$

con $\bar{\beta}_U = \beta_U / \sqrt{2}$. En la primera columna y primera fila no tenemos elementos, de esta forma esta es una ecuación diferencial desacoplada. Por lo tanto, tenemos una banda plana con valor $\lambda = 0$, esto lo podemos comprobar fácilmente viendo la Fig. 5.2 y observamos que la banda plana está en cero. Finalmente, en la parte inferior a la derecha de la matriz anterior tenemos una submatriz 2x2 que es la matriz del modelo de Rice-Mele. Hay un factor $\sqrt{2}$ que podemos quitar con una normalización y, de esta forma, no lo consideramos importante puesto que nuevamente la transición tiene que ver con la relación entre los acoplamientos, es decir, $\delta = C_1/C_2$.

5.2.5. Desorden

En esta sección vamos a estudiar el diamante dimerizado con desorden. En los modelos de SSH y Rice-Mele la energía de los estados de borde es robusta ante desorden en los acoplamientos. En esta sección estudiaremos la red de diamante dimerizado con desorden. Vamos a considerar con el caso en el que agregamos un desorden que no rompe la simetría quiral del sistema, esto tiene además la propiedad de que no rompe la transformación con el modelo de SSH o de Rice Mele. Al imponer que el desorden mantenga esta transformación entonces la energía de los estados de borde se mantiene robusta ante este tipo de desorden.

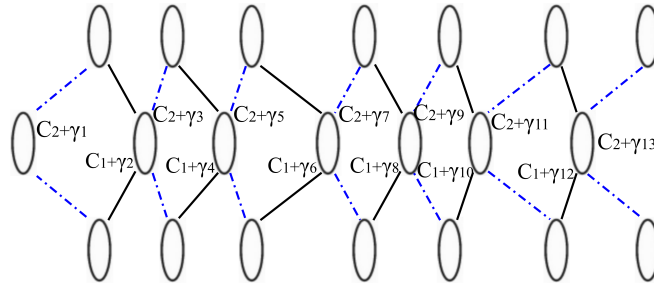


Figura 5.3: Figura esquemática que representa la red con desorden que preserva la transformación del sistema con el modelo de SSH y el de Rice-Mele. Los sitios U y W son movidos juntos para mantener el desorden simétrico.

La Fig.5.3 es un esquema que representa la red con un desorden que preserva la transformación al modelo de SSH. Este tipo de desorden se logra cuando el desorden se agrega de igual manera a

los sitios U y los sitios W como se muestra en el esquema para mantener el acoplamiento simétrico con respecto a los sitios V . Para estudiar teóricamente este sistema vamos a utilizar un vector de desorden definido cómo: $\vec{\gamma} = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots\}$ y, de esta forma, escribimos la matriz de acoplamiento de una cadena finita de la siguiente forma:

$$M_\gamma = \begin{pmatrix} \beta_V & C_2 + \gamma_1 & C_2 + \gamma_1 & 0 & 0 & \dots \\ C_2 + \gamma_1 & \beta_U & 0 & C_1 + \gamma_2 & 0 & \dots \\ C_2 + \gamma_1 & 0 & \beta_W & C_1 + \gamma_2 & 0 & \dots \\ 0 & C_1 + \gamma_2 & C_1 + \gamma_2 & \beta_V & C_2 + \gamma_3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & C_2 + \gamma_3 & \beta_U & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

A continuación demostraremos que este tipo de desorden preserva la transformación al modelo de SSH. Para comenzar la demostración vamos a escribir la matriz de transformación

$$P_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (5.37)$$

Y a continuación vamos a usarla sobre la matriz de acoplamientos con $\beta_W = \beta_U$ para cambiar de base

$$P_N^{-1} M_\gamma P_N = \begin{pmatrix} \beta_V & \sqrt{2}(C_2 + \gamma_1) & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{2}(C_2 + \gamma_1) & \beta_U & 0 & \sqrt{2}(C_1 + \gamma_2) & \dots \\ 0 & 0 & \beta_U & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2}(C_1 + \gamma_2) & 0 & \beta_V & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}(C_2 + \gamma_3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (5.38)$$

Notamos que la tercera columna y la tercera fila no tienen elementos no diagonales, e incluso cada tercera fila y cada tercera columna no tenemos elementos no diagonales, esto quiere decir, que cada tercera ecuación tenemos una ecuación que está desacoplada del resto del sistema y, de esta forma, estas ecuaciones desacopladas forman una banda plana de energía β_U . Si escribimos la transformación anterior pero evitamos escribir los términos que representan ecuaciones desacopladas, entonces

obtenemos que:

$$(P_N^{-1}M_\gamma P_N)_{\text{reducida}} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \bar{\beta}_V & C_2 + \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ C_2 + \gamma_1 & \bar{\beta}_U & C_1 + \gamma_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & C_1 + \gamma_2 & \bar{\beta}_V & C_2 + \gamma_3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & C_2 + \gamma_3 & \bar{\beta}_U & C_1 + \gamma_4 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & C_1 + \gamma_4 & \bar{\beta}_V & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (5.39)$$

con $\bar{\beta}_{\{U,V\}} = \beta_{\{U,V\}}/\sqrt{2}$. La matriz anterior es equivalente a la matriz de acoplamiento del modelo de Rice-Mele con desorden de acoplamientos. De esta forma, hemos obtenido teóricamente que este tipo de desorden preserva la transformación al modelo de Rice-Mele, e incluso si consideramos que no hay energía de sitio, es decir, los elementos diagonales son cero, entonces este desorden preserva la transformación al modelo de SSH. De esta forma, podemos concluir que los estados de borde siguen existiendo con este desorden y su energía también debe ser robusta a este tipo de desorden, además de que hay una banda plana que es robusta a este tipo de desorden. Para corroborar que la energía de los estados de borde es robusta ante este desorden simétrico y que la banda plana también lo es, calculamos el espectro con desorden. La Fig. 5.4 muestra el espectro de autovalores con desorden simétrico $0 \leq \gamma_i \leq 1$, donde también hemos cambiado la forma de los bordes para que los estados de borde aparezcan cuando $\delta > 1$, esto es con el fin de apreciar la energía de los estados de borde con mayor claridad. En el borde izquierdo anteriormente empezaba con los sitios UW y ahora empieza con el sitios V , y el borde derecho antes era de un sitio V y ahora es de sitios UW . Del espectro observamos que la energía de los estados de borde no cambia, y también observamos que la banda plana se mantiene plana con este desorden.

La Fig. 5.5 muestra el espectro de autovalores con el mismo desorden simétrico usado en el cálculo anterior pero con $\beta_U = -\beta_W = 1$. Vemos que este desorden no desordena la banda plana y tampoco cambia la energía de los estados de borde. Para el espectro hemos utilizado la red como se muestra en la parte superior de la figura y dada la forma de los bordes, los estados de borde ocurren cuando $\delta > 1$.

Ahora veamos el caso de desorden asimétrico como el que mostramos en la siguiente matriz de acoplamiento:

$$M_{\gamma,2} = \begin{pmatrix} \beta_V & C_2 + \gamma_1 & C_2 + \gamma_2 & 0 & 0 & \dots \\ C_2 + \gamma_1 & \beta_U & 0 & C_1 + \gamma_3 & 0 & \dots \\ C_2 + \gamma_2 & 0 & \beta_W & C_1 + \gamma_4 & 0 & \dots \\ 0 & C_1 + \gamma_3 & C_1 + \gamma_4 & \beta_V & C_2 + \gamma_5 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & C_2 + \gamma_5 & \beta_U & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (5.40)$$

$\beta_V=0 ; \beta_U=1 ; \beta_W=1 ; C_2=1. ; \text{Celdas}=20$

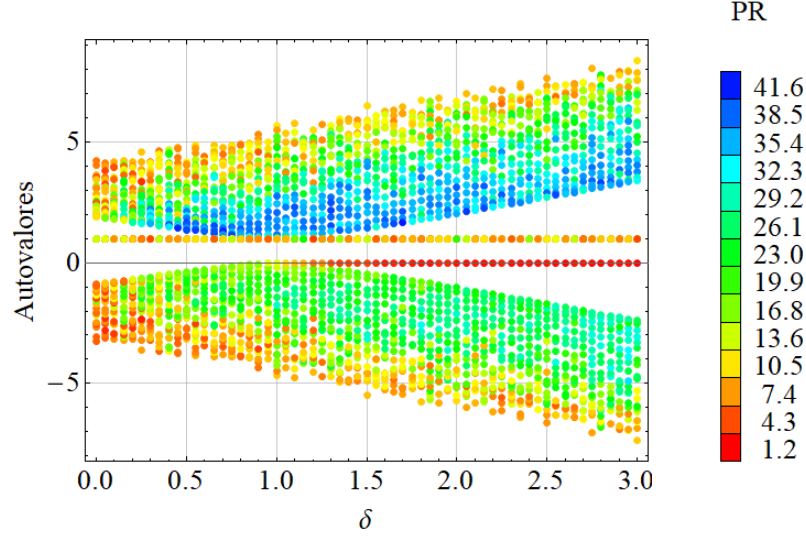


Figura 5.4: Espectrograma de autovalores calculados con $C_2 = 1$, $\beta_V = 0$, $\beta_U = 1$, $\beta_W = 1$ y 20 celdas unitarias. En este caso hemos utilizado desorden simétrico con respecto a los sitios V . Se ha cambiado la forma del borde para que los estados de borde aparezcan para $\delta > 1$ y sean mejor de observar con el desorden.

Entonces, al aplicar la transformación, obtenemos que

$$P^{-1}M_{\gamma_2}P = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \bar{\beta}_V & C_2 + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} & \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} & 0 & \dots \\ C_2 + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} & \bar{\beta}_U & 0 & C_1 + \frac{\gamma_3 + \gamma_4}{2} & \dots \\ \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} & 0 & \bar{\beta}_W & \frac{\gamma_3 - \gamma_4}{2} & \dots \\ 0 & C_1 + \frac{\gamma_3 + \gamma_4}{2} & \frac{\gamma_3 - \gamma_4}{2} & \bar{\beta}_V & \dots \\ 0 & 0 & 0 & C_2 + \frac{\gamma_5 + \gamma_6}{2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (5.41)$$

dado que en la primera fila y en la tercera columna hay un término $(\gamma_1 - \gamma_2)/2$, entonces la tercera columna y tercera fila no representa una ecuación desacoplada, de esta forma no podemos reducir la dimensionalidad de la matriz y la banda plana se vuelve dispersiva. La Fig. 5.6 muestra el espectro de autovalores con desorden asimétrico. Observamos de la figura que la banda plana ya no es plana sino dispersiva, esto es debido a la asimetría en el desorden y además encontramos que los estados de borde son robustos ante este desorden.

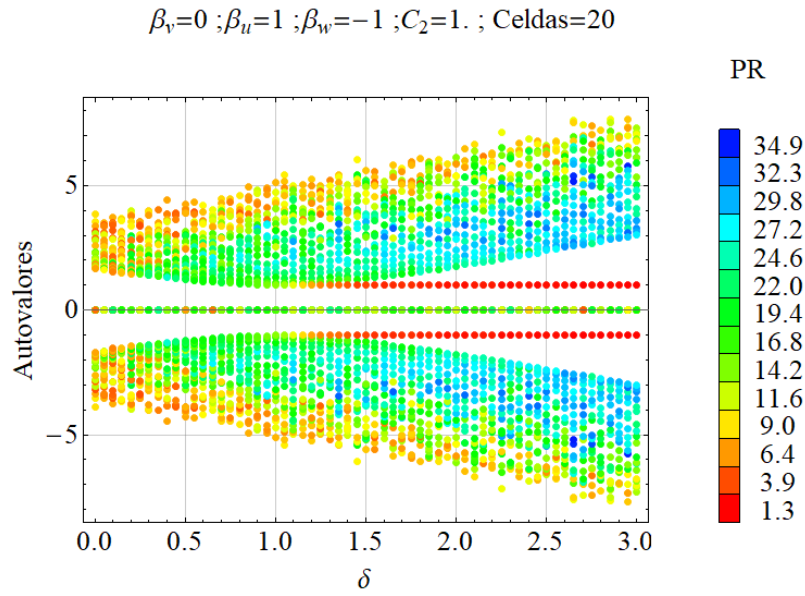


Figura 5.5: El espectrograma de autovalores calculado con $C_2 = 1$, $\beta_V = 0$, $\beta_U = -\beta_W = 1$ y 20 celdas unitarias. Además se ha usado desorden $0 \leq \gamma_i \leq 1$ simétrico con respecto a los sitios V . Se ha cambiado la forma de los bordes para que los estados de borde aparezcan para $\delta > 1$, y sea más sencillo observarlos.

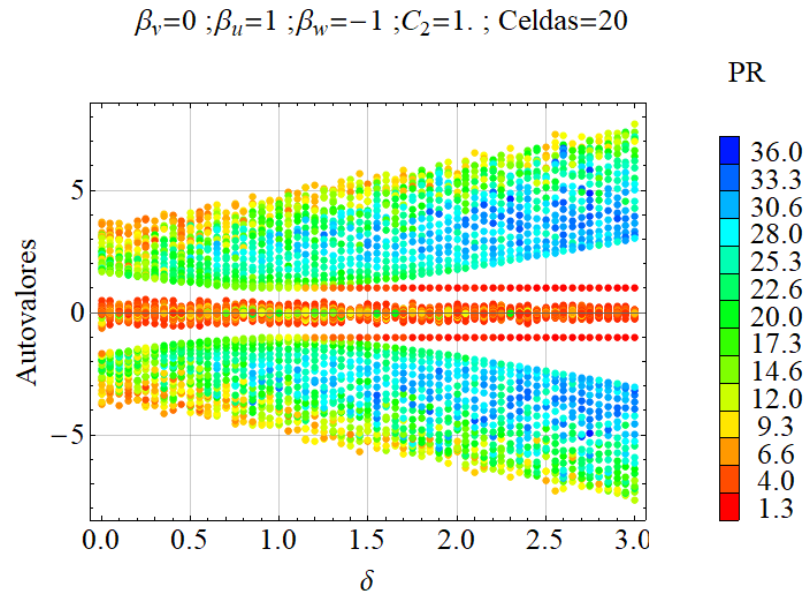


Figura 5.6: Espectrograma de autovalores calculados para $C_2 = 1$, $\beta_V = 0$, $\beta_U = 1$, $\beta_W = -1$ y 20 celdas unitarias con desorden asimétrico.

5.2.6. Simetría quiral

El Hamiltoniano en segunda cuantización del modelo diamante dimerizado sin energía de sitio está dado por:

$$H = \sum_{i=1}^N C_1 |U_i\rangle \langle V_i| + C_2 |U_i\rangle \langle V_{i-1}| + C_1 |W_i\rangle \langle V_i| + C_2 |W_i\rangle \langle V_{i-1}| + h.c. ,$$

con N la cantidad de celdas unitarias. Proponemos el siguiente operador como operador quiral:

$$\Gamma = \sum_{i=1}^N |U_i\rangle \langle U_i| + |W_i\rangle \langle W_i| - |V_i\rangle \langle V_i| . \quad (5.42)$$

Notamos que $\Gamma^\dagger = \Gamma$ y $\Gamma\Gamma = I$, es decir, $\Gamma = \Gamma^\dagger = \Gamma^{-1}$. Con

$$I = \sum_{i=1}^N |U_i\rangle \langle U_i| + |W_i\rangle \langle W_i| + |V_i\rangle \langle V_i| . \quad (5.43)$$

Ahora aplicamos el operador en el Hamiltoniano H y encontramos que

$$H\Gamma = \left(\sum_{i=1}^N C_1 |U_i\rangle \langle V_i| + C_2 |U_i\rangle \langle V_{i-1}| + C_1 |W_i\rangle \langle V_i| + C_2 |W_i\rangle \langle V_{i-1}| + h.c. \right) \Gamma \quad (5.44)$$

$$= \sum_{i=1}^N (-C_1 |U_i\rangle \langle V_i| - C_2 |U_i\rangle \langle V_{i-1}| - C_1 |W_i\rangle \langle V_i| - C_2 |W_i\rangle \langle V_{i-1}| + C_1 |V_i\rangle \langle U_i| + C_2 |V_{i-1}\rangle \langle U_i| + C_1 |V_i\rangle \langle W_i| + C_2 |V_{i-1}\rangle \langle W_i|) . \quad (5.45)$$

De esta forma,

$$\Gamma H \Gamma^\dagger = - \left(\sum_{i=1}^N C_1 |U_i\rangle \langle V_i| + C_2 |U_i\rangle \langle V_{i-1}| + C_1 |W_i\rangle \langle V_i| + C_2 |W_i\rangle \langle V_{i-1}| + h.c. \right) \quad (5.46)$$

$$= -H . \quad (5.47)$$

De esta manera $\Gamma H \Gamma^\dagger = -H$ como se espera del operador quiralidad.

Energía de sitio antisimétrica $\beta_U = -\beta_W$

Consideramos $\beta_U = -\beta_W = \beta$ y $\beta_V = 0$. En este caso el Hamiltoniano en segunda cuantización es:

$$\begin{aligned} H_- = & \sum_{i=1}^N \beta |U_i\rangle \langle U_i| - \beta |W_i\rangle \langle W_i| + \\ & + (C_1 |U_i\rangle \langle V_i| + C_2 |U_i\rangle \langle V_{i-1}| + \\ & + C_1 |W_i\rangle \langle V_i| + C_2 |W_i\rangle \langle V_{i-1}| + h.c.) , \end{aligned} \quad (5.48)$$

el subíndice $-$ es para aclarar que este Hamiltoniano corresponde al caso $\beta_W = -\beta_U$. Proponemos el operador de quiralidad:

$$\Gamma_- = \sum_{i=1}^N -|U_i\rangle\langle W_i| - |W_i\rangle\langle U_i| + |V_i\rangle\langle V_i| , \quad (5.49)$$

chequeamos que $\Gamma_-^\dagger = \Gamma_-^{-1} = \Gamma_-$. Al aplicar el operador de quiralidad en el Hamiltoniano encontramos que:

$$\begin{aligned} H_- \Gamma_- &= \sum_{i=1}^N -\beta |U_i\rangle\langle W_i| + \beta |W_i\rangle\langle U_i| + \\ &+ C_1 |U_i\rangle\langle V_i| + C_2 |U_i\rangle\langle V_{i-1}| + \\ &+ C_1 |W_i\rangle\langle V_i| + C_2 |W_i\rangle\langle V_{i-1}| + \\ &- C_1 |V_i\rangle\langle W_i| - C_2 |V_{i-1}\rangle\langle U_i| + \\ &- C_1 |V_i\rangle\langle U_i| - C_2 |V_{i-1}\rangle\langle W_i| , \end{aligned} \quad (5.50)$$

ahora aplicamos el operador quiralidad en el otro lado del Hamiltoniano y vemos que

$$\Gamma_- H_- \Gamma_- = \sum_{i=1}^N \beta |W_i\rangle\langle W_i| - \beta |U_i\rangle\langle U_i| - C_1 |W_i\rangle\langle V_i| - C_2 |W_i\rangle\langle V_{i-1}| + \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} &- C_1 |U_i\rangle\langle V_i| - C_2 |U_i\rangle\langle V_{i-1}| - C_1 |V_i\rangle\langle W_i| - C_2 |V_{i-1}\rangle\langle U_i| + \\ &- C_1 |V_i\rangle\langle U_i| - C_2 |V_{i-1}\rangle\langle W_i| \end{aligned} \quad (5.52)$$

$$= -H_- , \quad (5.53)$$

recordamos que $\Gamma_-^\dagger = \Gamma_-$ y por lo tanto $\Gamma_- H_- \Gamma_-^\dagger = -H_-$, como se espera del operador quiralidad.

5.2.7. Transferencia topológica

Los estados de borde de la red que están en la Fig.5.1.(c-d) están simultaneamente en derecha e izquierda. Además tienen otra propiedad interesante, el autovalor o autoenergía asociada a ese estado no es idénticamente cero, especialmente cuando δ es cercano a 1. En ese caso, la energía asociada es cercana a cero, pero diferente de cero. Por un lado, un estado de borde tiene una energía sumamente pequeña $\Delta\lambda$ y, por otro lado, el otro estado de borde tiene la misma energía pero negativa $-\Delta\lambda$. A medida que δ crece acercandose a 1, entonces $\Delta\lambda$ crece [6]. Si sumamos los dos estados de borde lo que obtenemos es una excitación de la subred V , por otro lado, si restamos los dos estados de borde lo que obtenemos es una excitación de W más U en fase. Por lo tanto, si mi condición inicial es la suma de los estados de borde de la forma:

$$\vec{\psi}(z=0) = \vec{\psi}_+ + \vec{\psi}_- , \quad (5.54)$$

y el vector de evolución es:

$$\vec{\psi}(z) = \vec{\psi}_+ e^{i\Delta\lambda z} + \vec{\psi}_- e^{-i\Delta\lambda z} , \quad (5.55)$$

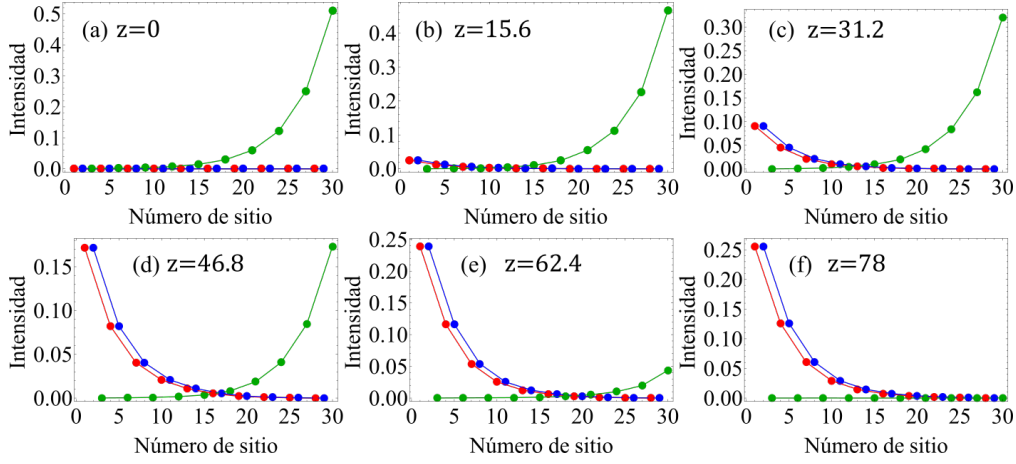


Figura 5.7: La evolución de una condición inicial tipo excitación de subred V para (a) $z = 0$, (b) $z = 15,6$, (c) $z = 31,2$, (d) $z = 46,8$, (e) $z = 62,4$ y (f) $z = \frac{\pi}{2\Delta\lambda} = 78$. La simulación fue hecha para $C_2 = 1$ y $\delta = 0,7$.

con $\vec{\psi}_{\pm}$ el estado de borde asociado a la energía $\pm\Delta\lambda$. Este vector es inicialmente $z = 0$ una excitación con la forma de un estado de borde de la subred V que matemáticamente es de la siguiente forma:

$$V_n = (-\delta)^{N-n} \quad (5.56)$$

con N la cantidad de celdas unitarias. A medida que z aumenta entonces el estado evoluciona a

$$\vec{\psi}(z = \pi/(2\Delta\lambda)) = i(\vec{\psi}_+ - \vec{\psi}_-) , \quad (5.57)$$

y esta condición es una excitación de la subred que tiene una combinación en fase de los sitios V y los sitios U . De esta forma, podemos dar como condición inicial una excitación de la subred V que es altamente localizada en el borde derecho, y luego de una distancia $z = \pi/(2\Delta\lambda)$ entonces la excitación pasa al lado izquierdo de la red excitando únicamente la subred $U + W$. En la Fig.5.7 tenemos la evolución de la transferencia de energía para $t_2 = 1$, $\delta = 0,7$ y $\Delta\lambda = 0,0204$. En la condición inicial en $z = 0$ como se muestra en la Fig.5.7.(a) se ha dado una excitación del tipo $V_n = (-\delta)^{N-n}$ pero normalizada y hemos hecho evolucionar el sistema en función de z . En las Figs.5.7.(b-f) tenemos la evolución del sistema para $z = 15,6$, $z = 31,2$, $z = 46,8$, $z = 62,4$, y $z = \frac{\pi}{2\Delta\lambda} \approx 78$. El último caso se ha escogido precisamente cuando $z = \pi/(2\Delta\lambda)$ y observamos que la excitación se ha transferido completamente a la subred $U + W$.

5.2.8. Conclusiones

De nuestros resultados concluimos que la red de diamante dimerizado tiene dos estados de borde que se desprenden de los estados de bulk cuando el parámetro de dimerización $\delta < 1$. Una aplicación interesante de los estados de borde es transmitir un estado topológico de un extremo a otro del arreglo sin pasar un paquete de ondas a través del bulk. Además de esto, hemos encontrado una transferencia unitaria que lleva el modelo de diamante dimerizado al modelo de SSH más una banda plana. También vimos cómo al aplicar desorden que no rompe la transformación a SSH mantiene invariante la energía de los estados de borde y mantiene plana la banda plana, por otro lado, si

$$\beta_v=0 ; \beta_u=1. ; \beta_w=3. ; C_2=1 ; t_3=0. ; \text{Celdas}=20$$

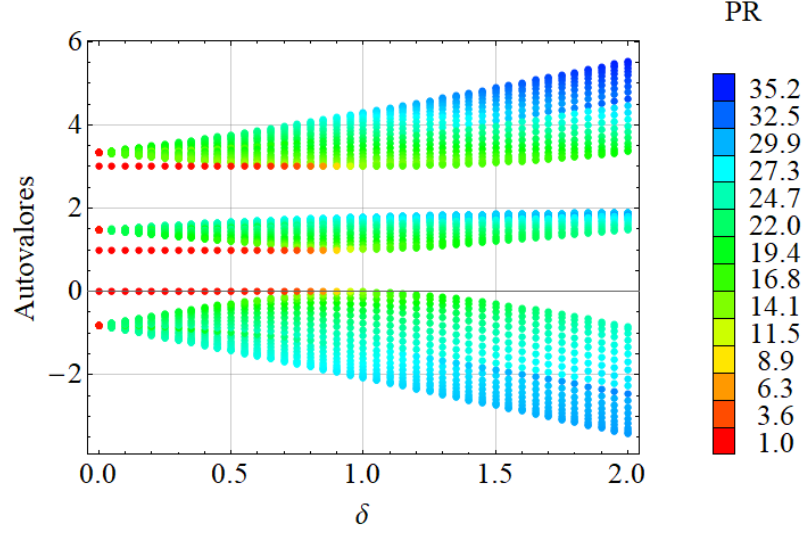


Figura 5.8: Espectrograma de diamante dimerizado en el que hemos cambiado los parámetros de constante de propagación para hacer las 3 bandas dispersivas. Observamos que hay 3 estados altamente localizados cuando $\delta < 1$

agregamos un desorden simétrico entonces la banda plana se desordena. Además vimos que los estados de borde en diamante tiene una estructura de subred que se relaciona con la transformación a SSH, puesto que en la transformación la subred V queda acoplada a la subred $U + W$ y la subred $U - W$ compone la banda plana. De este resultado, concluimos que los estados de borde del modelo de diamante dimerizado tienen su origen en la dimerización y que la banda plana no juega un rol en la existencia de estos estados de borde aunque debido a la correspondencia bulk-borde debemos tener la misma cantidad de estados de borde que el número de bandas en el sistema. Esto lo explicamos diciendo que cualquier estado de subred de la banda plana puede ser descrito por una combinación lineal de los estados de banda plana. De esta forma, si la banda plana se vuelve dispersiva entonces tenemos 3 estados de borde, y esto mantiene la correspondencia bulk-borde. La Fig. 5.8 muestra el espectro en el que hemos cambiado el valor de constante de propagación de tal forma que las 3 bandas son dispersivas, observamos del espectrograma que tenemos 3 estados que se desprenden del bulk al cruzar el punto $\delta = 1$. En este espectrograma hemos usado los bordes como fueron definidos al comienzo de la sección por lo que los estados de borde aparecen cuando $\delta < 1$.

5.3. Stub

Esta sección corresponde a un resumen de los resultados obtenidos para el trabajo [5], en el que estudiamos la red de Stub [23, 24], agregando una dimerización tipo SSH. Hemos observado que la dimerización produce dos estados de borde cuando el parámetro de dimerización $\delta < 1$. En este modelo encontramos que el espectro es simétrico con respecto a cero, y que hay dos estados de borde que se desprenden desde el bulk cuando $\delta < 1$. En esta sección también proponemos un operador como el operador de quiralidad del sistema.

5.3.1. Modelo y bandas

Consideramos el modelo de stub dimerizado cómo el que se muestra en la Fig.5.9.(a). El sistema de ecuaciones diferenciales acopladas que representa la evolución dinámica del sistema en la teoría acoplada de modos es:

$$-i\frac{\partial U_n}{\partial z} = \beta_u U_n + t_1 V_n + t_2 V_{n-1} , \quad (5.58)$$

$$-i\frac{\partial V_n}{\partial z} = \beta_v V_n + t_1 U_n + t_2 U_{n+1} + t_3 W_n , \quad (5.59)$$

$$-i\frac{\partial W_n}{\partial z} = \beta_w W_n + t_3 V_n . \quad (5.60)$$

Vamos a considerar el Ansatz de ondas estacionarias, esto es, $\{U_n(z), V_n(z), W_n(z)\} = \{u_n, v_n, w_n\}e^{i\lambda z}$, y de esta forma nos deshacemos de la dependencia de z . Las ecuaciones anteriores quedan de la siguiente forma:

$$\lambda u_n = \beta_u u_n + t_1 v_n + t_2 v_{n-1} , \quad (5.61)$$

$$\lambda v_n = \beta_v v_n + t_1 u_n + t_2 u_{n+1} , \quad (5.62)$$

$$\lambda w_n = \beta_w w_n + t_3 v_n . \quad (5.63)$$

Ahora vamos a usar el Ansatz de ondas de Bloch y las ecuaciones quedan:

$$\lambda u = v(t_1 + t_2 e^{-ik}) , \quad (5.64)$$

$$\lambda v = u(t_1 + t_2 e^{ik}) + w t_3 , \quad (5.65)$$

$$\lambda w = t_3 v . \quad (5.66)$$

Que matricialmente se puede expresar de la siguiente forma

$$\lambda \vec{\psi} = \begin{pmatrix} 0 & t_1 + t_2 e^{-ik} & 0 \\ t_1 + t_2 e^{ik} & 0 & t_3 \\ 0 & t_3 & 0 \end{pmatrix} \vec{\psi} . \quad (5.67)$$

Reconocemos que es un problema de autovalores y resolvemos utilizando el polinomio característico. Las 3 bandas son:

$$\lambda_0 = 0 , \quad (5.68)$$

$$\lambda_{\pm} = \pm \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + 2t_1 t_2 \cos(k)} . \quad (5.69)$$

Vemos que tenemos una banda plana $\lambda_0 = 0$ que es independiente de los valores de acoplamiento y tenemos otras dos bandas dispersivas separadas por un gap. La Fig.5.9.(b) muestra las bandas usando $\beta_{\{u,v,w\}} = 0$ y $t_3 = 1$. Se ha usado líneas azules para $t_2/t_1 = 0,5$, líneas negras para $t_2/t_1 = 1,0$ y líneas rojas segmentadas para $t_2/t_1 = 1,5$.

5.3.2. Espectrograma

Vamos a definir el parámetro de dimerización $\delta = t_1/t_2$. La Fig.5.9.(c) muestra el espectrograma del modelo de Stub con 10 celdas unitarias y para $t_3 = 1$. Desde el cálculo analítico de las bandas esperamos encontrar una banda plana en $\lambda = 0$, y en el espectrograma observamos los estados en cero. Además esperamos encontrar dos bandas dispersivas, que es lo que observamos en el espectrograma. Sin embargo, vemos que desde las bandas dispersivas se desprenden dos estados localizados cuando $\delta < 1$. Al recordar el modelo de SSH que vimos en el capítulo dos, en SSH los estados de borde aparecen cuando la dimerización es menor que 1, que es el mismo fenómeno que observamos en este caso.

5.3.3. Estados de borde

La Fig.5.10 muestra los estados de borde, usando puntos azules para los sitios W , verde para U y rojo para V , al igual que los colores de la Fig.5.9.(a). (a) El estado de borde cuando W_1 y V_1 están en fase. (b) El estado de borde cuando W_1 y V_1 están en desfase. Vemos que para los sitios W y V la amplitud decae hacia el bulk y además tienen una estructura alternada de signo, es decir, el signo de la amplitud va alternando. Estos estados se unen al bulk a medida que δ crece hasta 1, y se convierten en estados de bulk cuando $\delta > 1$.

5.3.4. Operador quirial

Si escribimos el Hamiltoniano en segunda cuantización que representa nuestro sistema en la aproximación de tight-binding tenemos que es:

$$\hat{H}_{\text{stub}} = \sum_i t_1 |U_i\rangle \langle V_i| + t_2 |U_i\rangle \langle V_{i-1}| + t_3 |U_i\rangle \langle W_i| + h.c. . \quad (5.70)$$

Proponemos el siguiente operador de quiralidad:

$$\Gamma_{\text{stub}} = \sum_i |V_i\rangle \langle V_i| + |W_i\rangle \langle W_i| - |U_i\rangle \langle U_i| . \quad (5.71)$$

Vemos que el operador cumple con $\Gamma_{\text{stub}}^\dagger \Gamma_{\text{stub}} = \hat{I}_{\text{stub}}$ con

$$\hat{I}_{\text{stub}} = \sum_i |V_i\rangle \langle V_i| + |W_i\rangle \langle W_i| + |U_i\rangle \langle U_i| . \quad (5.72)$$

así que $\Gamma_{\text{stub}}^{-1} = \Gamma_{\text{stub}}^\dagger = \Gamma_{\text{stub}}$, y podemos decir que el operador es hermítico. Además, cumple con que

$$\Gamma_{\text{stub}} \hat{H}_{\text{stub}} \Gamma_{\text{stub}} = -\hat{H}_{\text{stub}} \quad (5.73)$$

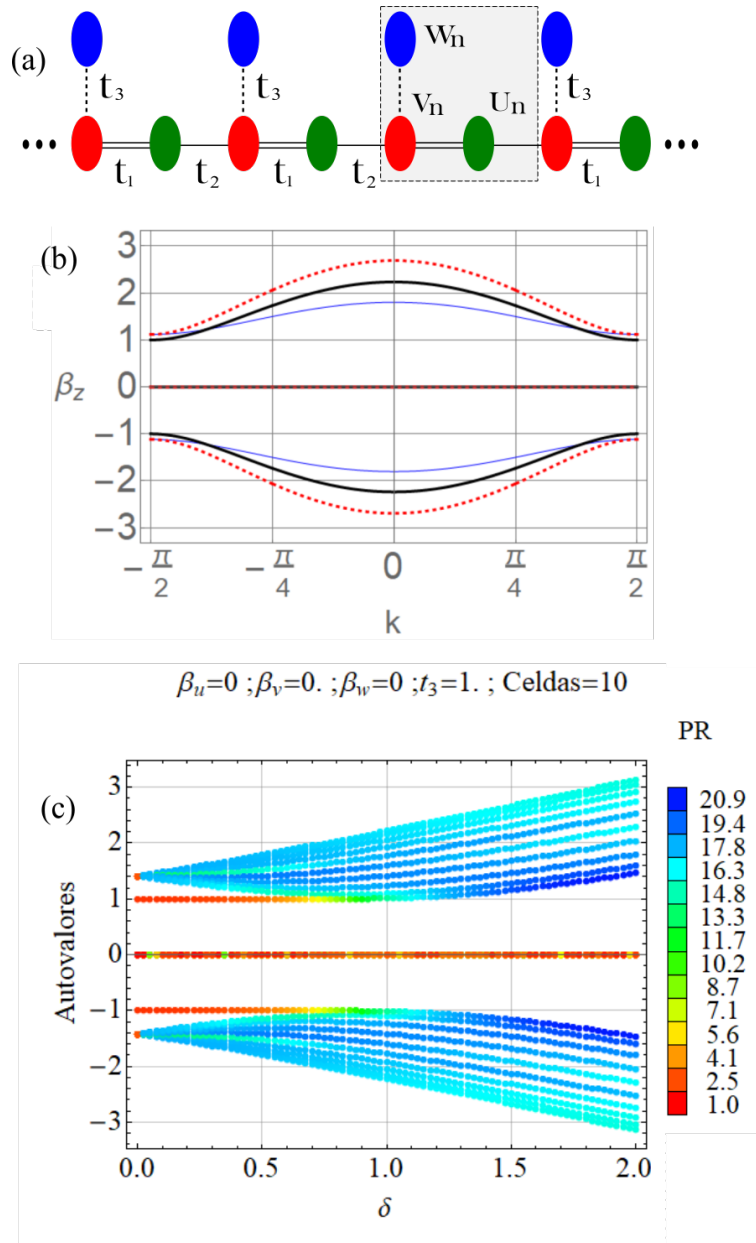


Figura 5.9: (a) Esquema del modelo con los sitios U en verde, los sitios V en rojo y los sitios W en azul. La línea doble representa el acoplamiento t_1 , la línea simple representa el acoplamiento t_2 y la línea segmentada representa el acoplamiento t_3 . (b) Usando $\beta_{\{u,v,w\}} = 0$ y $t_3 = 1$, se han graficado las tres bandas: con una líneas azules delgadas se grafica $t_2/t_1 = 0,5$, con líneas negras $t_2/t_1 = 1,0$ y las rojas segmentadas son para $t_2/t_1 = 1,5$. (c) Espectrograma para $t_3 = 1$, 10 celdas unitarias y sin considerar energía de sitio.

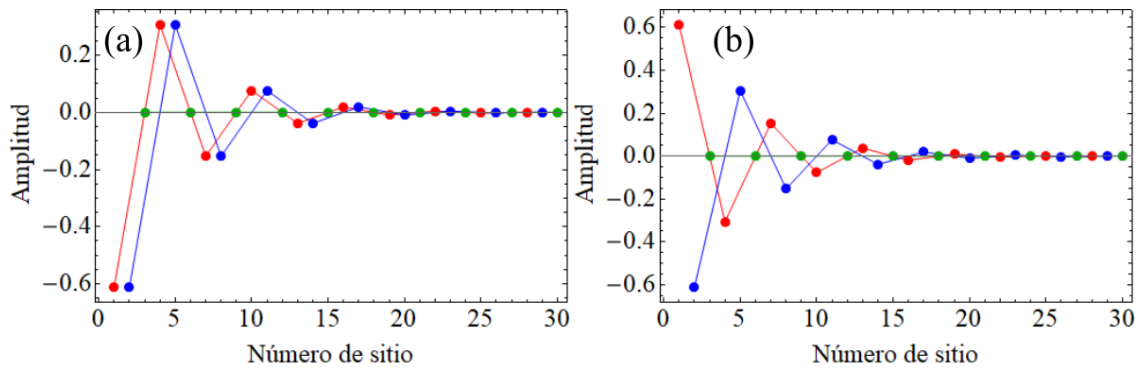


Figura 5.10: (a) El estado de borde con las amplitudes en fase. (b) El estado de borde con las amplitudes en desfase. Para ambos gráficos se ha usado $t_3 = 1$ y $\delta = 0,5$.

Capítulo 6

Red dimerizada con modos de segundo orden e interacciones intra-orbitales

El objetivo de este capítulo es combinar el estudio de dimerización de una red unidimensional en conjunto con interacciones inter-orbitales. Por lo tanto, vamos a considerar la primera red estudiada en el capítulo 3, que es la red híbrida horizontal y veremos cómo la dimerización afecta a los estados de borde y los puntos de transición en los que los estados de borde aparecen y desaparecen.

6.1. Modelo y espectrograma

Al dimerizar el sistema tenemos cuatro modos en la celda unitaria y por lo tanto tenemos cuatro bandas. La matriz de acoplamiento después de aplicar los Ansatz de ondas planas y ondas de Bloch está dada por:

$$M_{2D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_s(\delta + e^{-ik}) & C_{sp}(\delta + e^{-ik}) \\ 0 & 0 & C_{sp}(-\delta + e^{-ik}) & -C_p(\delta + e^{-ik}) \\ C_s(\delta + e^{ik}) & C_{sp}(-\delta + e^{ik}) & 0 & 0 \\ C_{sp}(\delta + e^{ik}) & -C_p(\delta + e^{ik}) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

En la matriz anterior el orden del vector de Bloch es $\vec{\psi} = (u, v, x, w)$, donde u , v , x y w son las amplitudes del vector de Bloch. La Fig. 6.1.(a) muestra un esquema de la celda unitaria de la red en la que tenemos 4 modos por celda unitaria con los nombres de cada sitio: U_n el modo fundamental que está abajo, V_n el modo de segundo orden que está arriba, X_n el modo fundamental que está arriba y W_n el modo de segundo orden que está abajo. La Fig. 6.1.(b) muestra un esquema de la red donde se muestran los acoplamientos usando azul para acoplamiento positivo y rojo para acoplamiento negativo. La Fig. 6.1.(c) muestra el espectro de autovalores para $C_s = 0,5$, $C_{sp} = 0,2$, $C_p = 1$ y $\Delta\beta = 0$, del espectro observamos que tenemos 4 estados de borde cuando $\delta < 0,5$. Luego, cuando $\delta = 0,5$ tenemos un cruce de bandas y luego tenemos sólo 2 estados de borde entre $0,5 < \delta < 1,5$. Finalmente en $\delta = 1,5$ tenemos otro cruce de bandas y para $\delta > 1,5$ no hay estados de borde. Calculamos también el espectrograma manteniendo $C_s = 0,5$ como en el caso anterior pero cambiando los demás acoplamientos $C_{sp} = 1,5$ y $C_p = 0,4$. De este nuevo espectro observamos que los puntos de cruce de bandas no cambian.

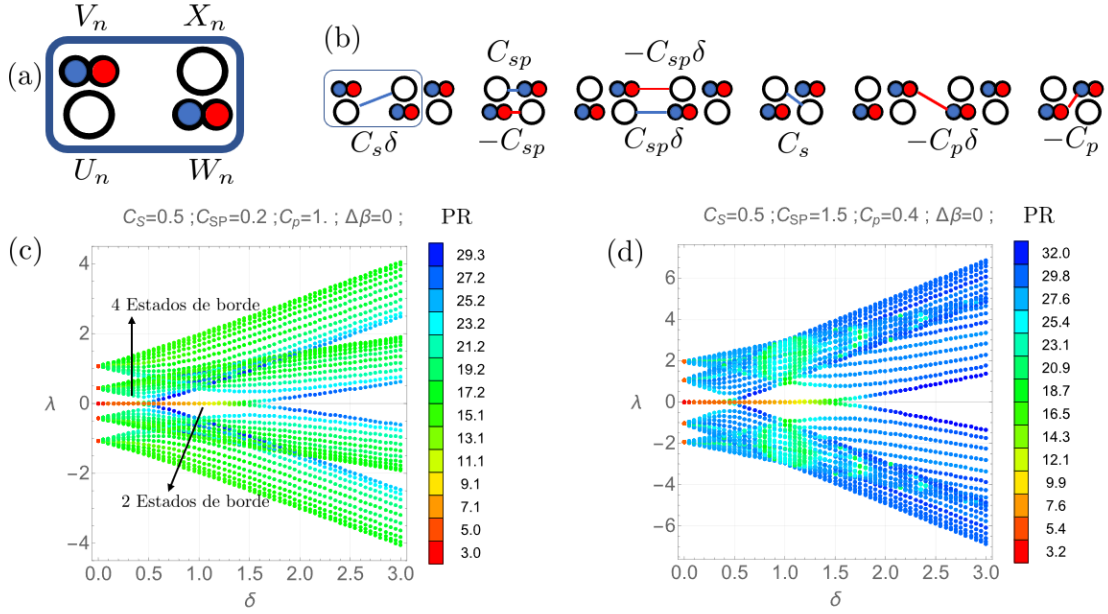


Figura 6.1: (a) Esquema de la celda unitaria con 4 modos: U_n , V_n , X_n y W_n como se muestra en la figura. (b) Esquema de la red efectiva con dimerización, el rectángulo muestra la celda unitaria con los 4 modos. Las líneas entre modos muestran los acoplamientos usando azul para acople positivo y rojo para acoplamiento negativo. (c) Espectro de autovalores en función de δ para $C_s = 0,5$, $C_{sp} = 0,2$, $C_p = 1$, y $\Delta\beta = 0$. (d) Espectro de autovalores en función de delta para $C_s = 0,5$, $C_{sp} = 1,5$, $C_p = 0,4$ y $\Delta\beta = 0$.

6.2. Estados de borde

La Fig. 6.2.(a)-(d) muestra los 4 estados de borde para $\delta = 0,2$. Vemos que están simultáneamente en los dos lados de la red y que, además, tienen una estructura de subred, es decir, por la izquierda sólo tenemos amplitud en los sitios U_n y V_n y por la derecha sólo tenemos amplitud en los sitios W_n y X_n . También vemos que los modos S y P de los estados (a) y (b) tienen la misma estructura de fase en el borde izquierdo pero en el borde derecho se diferencian por una fase π . La estructura de fase es diferente para (c) y (d). La Fig. 6.2.(e)-(f) muestra los dos estados de borde para $\delta = 1,0$, vemos que la estructura es similar a los estados de (c) y (d). La estructura de subred de la amplitud nos recuerda a los estados de borde del modelo SSH.

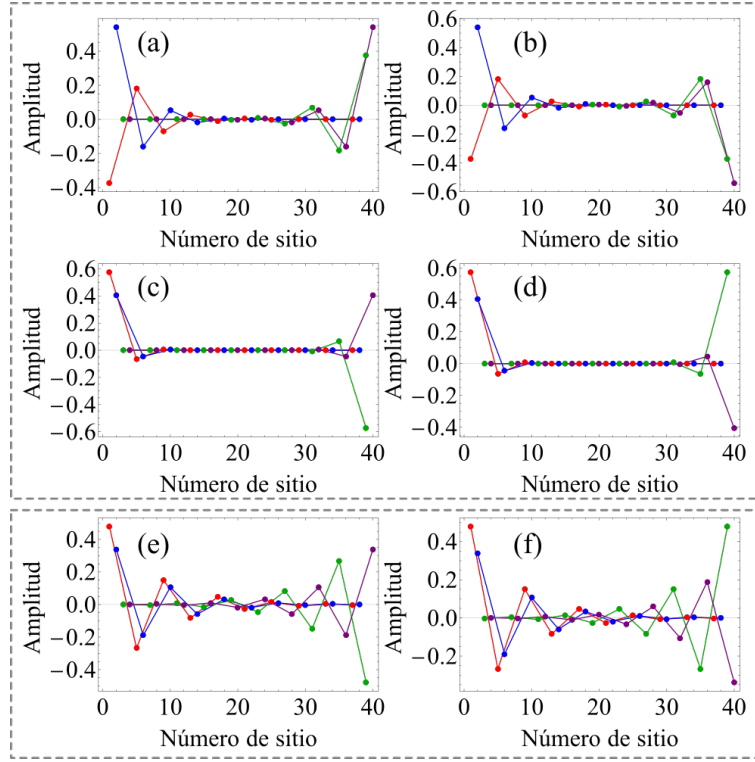


Figura 6.2: (a)-(d) La amplitud de los 4 estados de borde para $\delta = 0,2$. (e)-(f) Los dos estados de borde para $\delta = 1$. Rojo es para los modos U_n , azul para los modos V_n , verde para los sitios X_n y morado para los sitios W_n . Se ha usado $C_s = 0,5$, $C_{sp} = 0,2$, $C_p = 1$ y 10 celdas unitarias.

6.3. Desorden

La Fig. 6.3 muestra el espectro considerando desorden en los acoplamientos de la siguiente manera $C \rightarrow C + \gamma$ siendo C un acoplamiento cualquiera y γ un número aleatorio entre 0 y 0.5. Del espectro observamos que las bandas se ven afectadas por el desorden, sin embargo, los estados de borde permanecen en la misma energía y por lo tanto podemos decir que los estados de borde son robustos ante el desorden en acoplamiento.

$$C_S=0.5 ; C_{SP}=0.2 ; C_P=1. ; \Delta\beta=0 ;$$

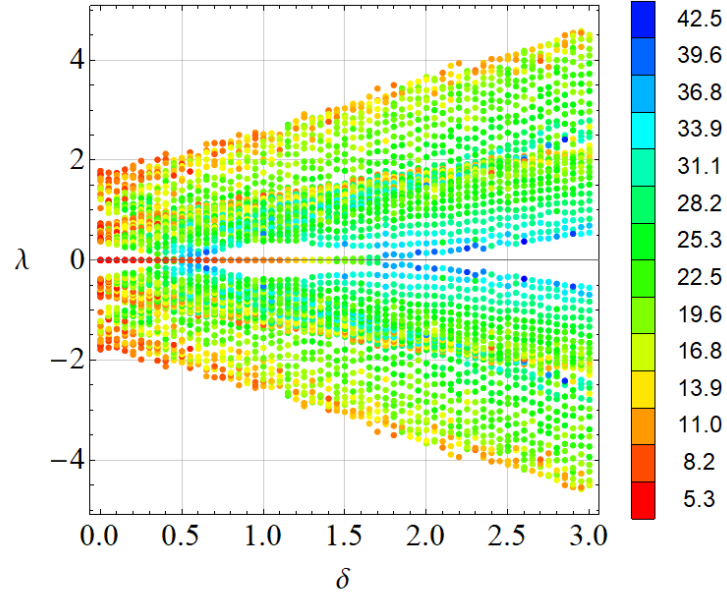


Figura 6.3: Espectro con desorden, el color de cada autovalor representa el grado de participación desde azul que es extendido hasta rojo que es localizado.

6.4. Operador de Quiralidad

Dado que el sistema tiene 4 estados de borde y dos de ellos desaparecen en un cruce de bandas, y luego, los dos estados restantes desaparecen en otro cruce de bandas. Y considerando además que los estados de borde son robustos ante el desorden de acoplamiento, entonces consideramos que el sistema debe tener algún tipo de simetría. Para encontrar esta simetría primero escribimos el Hamiltoniano en segunda cuantización:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{2D} = & \sum_n^N C_s \delta |u_n\rangle \langle x_n| + C_s |x_n\rangle \langle u_{n+1}| - C_{sp} \delta |v_n\rangle \langle x_n| + \\ & + C_{sp} |x_n\rangle \langle v_{n+1}| - C_p \delta |v_n\rangle \langle w_n| - C_p |w_n\rangle \langle v_{n+1}| + \\ & + C_{sp} \delta |u_n\rangle \langle w_n| - C_{sp} |w_n\rangle \langle u_{n+1}| + h.c. . \end{aligned} \quad (6.2)$$

Proponemos el siguiente operador de quiralidad:

$$\hat{\Gamma}_{2D} = \hat{U} - \hat{X} + \hat{V} - \hat{W} , \quad (6.3)$$

con los operadores

$$\hat{U} = \sum_i^N |u_i\rangle \langle u_i| , \quad (6.4)$$

$$\hat{X} = \sum_i^N |x_i\rangle \langle x_i| , \quad (6.5)$$

$$\hat{V} = \sum_i^N |v_i\rangle \langle v_i| , \quad (6.6)$$

$$\hat{W} = \sum_i^N |w_i\rangle \langle w_i| . \quad (6.7)$$

Verificamos inmediatamente que $\hat{\Gamma}_{2D}^\dagger = \hat{\Gamma}_{2D}$ que $\hat{\Gamma}_{2D}\hat{\Gamma}_{2D} = \hat{I}$ y, por lo tanto, $\hat{\Gamma}_{2D}^{-1} = \hat{\Gamma}_{2D}$. Al aplicar el operador propuesto por la derecha obtenemos que

$$\begin{aligned} \hat{H}_{2D}\hat{\Gamma}_{2D}^\dagger = \sum_n^N & - C_s\delta |u_n\rangle \langle x_n| + C_s |x_n\rangle \langle u_{n+1}| + C_{sp}\delta |v_n\rangle \langle x_n| + \\ & + C_{sp} |x_n\rangle \langle v_{n+1}| + C_p\delta |v_n\rangle \langle w_n| - C_p |w_n\rangle \langle v_{n+1}| + \\ & - C_{sp}\delta |u_n\rangle \langle w_n| - C_{sp} |w_n\rangle \langle u_{n+1}| + \\ & + C_s\delta |x_n\rangle \langle u_n| - C_s |u_{n+1}\rangle \langle x_n| - C_{sp}\delta |x_n\rangle \langle v_n| + \\ & - C_{sp} |v_{n+1}\rangle \langle x_n| - C_p\delta |w_n\rangle \langle v_n| + C_p |v_{n+1}\rangle \langle w_n| + \\ & + C_{sp}\delta |w_n\rangle \langle u_n| + C_{sp} |u_{n+1}\rangle \langle w_n| . \end{aligned} \quad (6.8)$$

Y, ahora, lo aplicamos por la izquierda

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{2D}\hat{H}_{2D}\hat{\Gamma}_{2D}^\dagger = \sum_n^N & - C_s\delta |u_n\rangle \langle x_n| - C_s |x_n\rangle \langle u_{n+1}| + C_{sp}\delta |v_n\rangle \langle x_n| + \\ & - C_{sp} |x_n\rangle \langle v_{n+1}| + C_p\delta |v_n\rangle \langle w_n| + C_p |w_n\rangle \langle v_{n+1}| + \\ & - C_{sp}\delta |u_n\rangle \langle w_n| + C_{sp} |w_n\rangle \langle u_{n+1}| + \\ & - C_s\delta |x_n\rangle \langle u_n| - C_s |u_{n+1}\rangle \langle x_n| + C_{sp}\delta |x_n\rangle \langle v_n| + \\ & - C_{sp} |v_{n+1}\rangle \langle x_n| + C_p\delta |w_n\rangle \langle v_n| + C_p |v_{n+1}\rangle \langle w_n| + \\ & - C_{sp}\delta |w_n\rangle \langle u_n| + C_{sp} |u_{n+1}\rangle \langle w_n| \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$= -\hat{H}_{2D} \quad (6.11)$$

que es el resultado que uno espera de un operador de quiralidad.

6.4.1. Desorden y quiralidad

Para estudiar la adición de desorden al sistema vamos escribamos el Hamiltoniano con desorden en acoplamiento:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{2D}(\vec{\epsilon}) = & \sum_n^N C_s \delta |u_n\rangle \langle x_n| + C_s |x_n\rangle \langle u_{n+1}| - C_{sp} \delta |v_n\rangle \langle x_n| + \\
& + C_{sp} |x_n\rangle \langle v_{n+1}| - C_p \delta |v_n\rangle \langle w_n| - C_p |w_n\rangle \langle v_{n+1}| + \\
& + C_{sp} \delta |u_n\rangle \langle w_n| - C_{sp} |w_n\rangle \langle u_{n+1}| + \\
& + C_s \delta |x_n\rangle \langle u_n| + C_s |u_{n+1}\rangle \langle x_n| - C_{sp} \delta |x_n\rangle \langle v_n| + \\
& + C_{sp} |v_{n+1}\rangle \langle x_n| - C_p \delta |w_n\rangle \langle v_n| - C_p |v_{n+1}\rangle \langle w_n| + \\
& + C_{sp} \delta |w_n\rangle \langle u_n| - C_{sp} |u_{n+1}\rangle \langle w_n| + \\
& + \epsilon_{8(n-1)+1} |u_n\rangle \langle x_n| + \epsilon_{8(n-1)+2} |x_n\rangle \langle u_{n+1}| - \epsilon_{8(n-1)+3} |v_n\rangle \langle x_n| + \\
& + \epsilon_{8(n-1)+4} |x_n\rangle \langle v_{n+1}| - \epsilon_{8(n-1)+5} |v_n\rangle \langle w_n| - \epsilon_{8(n-1)+6} |w_n\rangle \langle v_{n+1}| + \\
& + \epsilon_{8(n-1)+7} |u_n\rangle \langle w_n| - \epsilon_{8(n-1)+8} |w_n\rangle \langle u_{n+1}| + \\
& + \epsilon_{8(n-1)+1} |x_n\rangle \langle u_n| + \epsilon_{8(n-1)+2} |u_{n+1}\rangle \langle x_n| - \epsilon_{8(n-1)+3} |x_n\rangle \langle v_n| + \\
& + \epsilon_{8(n-1)+4} |v_{n+1}\rangle \langle x_n| - \epsilon_{8(n-1)+5} |w_n\rangle \langle v_n| - \epsilon_{8(n-1)+6} |v_{n+1}\rangle \langle w_n| + \\
& + \epsilon_{8(n-1)+7} |w_n\rangle \langle u_n| - \epsilon_{8(n-1)+8} |u_{n+1}\rangle \langle w_n| , \tag{6.13}
\end{aligned}$$

con $\vec{\epsilon} = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_{8N}\}$ el vector de desorden compuesto por números aleatorios ϵ_i . En la expresión anterior vemos que el Hamiltoniano tiene una parte de acoplamiento y otra parte de desorden, y ambas partes son muy parecidas, la única diferencia es que tenemos desorden en lugar de acoplamientos. Por lo tanto, podremos escribir el Hamiltoniano con desorden de la siguiente forma

$$\hat{H}_{2D}(\vec{\epsilon}) = \hat{H}_{2D} + (\hat{H}_{2D}(\vec{\epsilon}))_{\text{desorden}} . \tag{6.14}$$

Ya vimos que la aplicación del operador $\hat{\Gamma}_{2D}$ sobre el Hamiltoniano \hat{H}_{2D} , por lo tanto, nos falta comprobar la acción del operador $\hat{\Gamma}_{2D}$ sobre la parte de desorden del Hamiltoniano. Hacemos el algebra:

$$\hat{\Gamma}_{2D}(\hat{H}_{2D}(\vec{\epsilon}))_{\text{desorden}} \hat{\Gamma}_{2D}^\dagger = -\epsilon_{8(n-1)+1} |u_n\rangle \langle x_n| - \epsilon_{8(n-1)+2} |x_n\rangle \langle u_{n+1}| + \epsilon_{8(n-1)+3} |v_n\rangle \langle x_n| + \tag{6.15}$$

$$\begin{aligned}
& - \epsilon_{8(n-1)+4} |x_n\rangle \langle v_{n+1}| + \epsilon_{8(n-1)+5} |v_n\rangle \langle w_n| + \epsilon_{8(n-1)+6} |w_n\rangle \langle v_{n+1}| + \\
& - \epsilon_{8(n-1)+7} |u_n\rangle \langle w_n| + \epsilon_{8(n-1)+8} |w_n\rangle \langle u_{n+1}| + \\
& - \epsilon_{8(n-1)+1} |x_n\rangle \langle u_n| - \epsilon_{8(n-1)+2} |u_{n+1}\rangle \langle x_n| + \epsilon_{8(n-1)+3} |x_n\rangle \langle v_n| + \\
& - \epsilon_{8(n-1)+4} |v_{n+1}\rangle \langle x_n| + \epsilon_{8(n-1)+5} |w_n\rangle \langle v_n| + \epsilon_{8(n-1)+6} |v_{n+1}\rangle \langle w_n| + \\
& - \epsilon_{8(n-1)+7} |w_n\rangle \langle u_n| + \epsilon_{8(n-1)+8} |u_{n+1}\rangle \langle w_n| \tag{6.16}
\end{aligned}$$

$$= -(\hat{H}_{2D}(\vec{\epsilon}))_{\text{desorden}} . \tag{6.17}$$

Por lo tanto, si usamos las ecuaciones (6.16) y (6.12) en la ecuación (6.14) obtenemos que $\hat{\Gamma}_{2D} \hat{H}_{2D}(\vec{\epsilon}) \hat{\Gamma}_{2D}^\dagger = -\hat{H}_{2D}(\vec{\epsilon})$. De esta forma, el operador de quiralidad propuesto actúa de igual forma con desorden en el acoplamiento.

6.5. Conclusiones

El modelo estudiado tiene 4 modos por celda unitaria y por lo tanto tiene 4 bandas. Desde los espectro hemos observado que tenemos 2 transiciones que separan 3 regiones claramente definidas, la primera región tiene 4 estados de borde, la segunda región tiene 2 estados de borde y la tercera región no tiene estados de borde. También propusimos un operador de quiralidad para el modelo y además de eso observamos que la energía de los estados de borde es robusta ante el desorden de acoplamiento, además vemos que el operador de quiralidad propuesto mantiene sus propiedades ante el desorden. E incluso observamos una estructura alternada de amplitud similar a la de SSH. Por lo tanto, concluimos que las transiciones de este sistema son topológicas.

Capítulo 7

Conclusiones

El desarrollo de esta tesis consistió en el análisis de sistemas acoplados, en el que el estudio de bandas nos entrega información relevante para entender las propiedades de transporte y localización. La naturaleza intrínseca de los sistemas acoplados es la dispersión; por ejemplo, cuando dos osciladores son acoplados y excitamos uno de ellos, resulta natural que la excitación se mueva de un oscilador al otro generando una dispersión de energía, y si seguimos acoplando osciladores al sistema, unidimensionalmente, entonces observaremos que la energía se dispersará a lo largo de todo el sistema. Por lo tanto, uno de nuestros objetivos en esta tesis fue la de obtener sistemas acoplados unidimensionales cuyas soluciones sean completamente localizadas, de esta forma, demostrando que tenemos control sobre las propiedades de los acopladores fotónicos.

En nuestro trabajo hemos considerado guías fotónicas que pueden albergar un segundo modo, y hemos propuesto que haciendo un ajuste en la frecuencia de propagación podemos hacer resonar el segundo modo de la guía de onda (modo P) con el modo fundamental (S) de una guía adyacente. De forma similar, podemos acoplar modos fundamentales con modos de orden mayor, ya sea, de segundo o tercer orden; sin embargo, sólo hemos estudiado la adición de modos de segundo orden porque el signo negativo en el acoplamiento promueve la localización. La razón de que los modos P tengan acoplamiento negativo se debe a que estos modos tienen una estructura característica compuesta de dos lóbulos, y hay una diferencia de fase π entre ellos. Dado que el acoplamiento entre dos modos de distintas guías es la integral del producto de los modos, entonces si ponemos un modo S a la izquierda de un modo P y otro a la derecha del modo P , entonces la integral nos dará que un acoplamiento será positivo y el otro negativo, esto es por la estructura de fase del modo P . De esta forma, podemos construir arreglos acoplados que posean acoplamientos negativos. Este resultado es una herramienta útil para acoplar modos S con modos de orden superior, y así creamos una dimensión mayor de sistemas de redes acopladas, puesto que las mismas redes estudiadas anteriormente presentan propiedades fenomenológicas diferentes al añadir modos de orden superior. En el desarrollo de esta tesis hemos mostrado la eficacia de los modos P al considerarlos en redes unidimensionales. Esto es porque en sistemas unidimensionales de redes monomodales acopladas no existen bandas planas, pero al añadir los modos P hemos podido construir la *Red Híbrida Horizontal* en el que hay una banda plana para una condición específica entre los acoplamientos, e incluso ambas bandas se aplanan si la constante de propagación es igual para modos S y modos P . Dado que en el modelo hemos considerado que los modos S y P viven en la misma guía de onda, entonces la constante de propagación no puede ser igual entre estos; sin embargo, podemos construir un modelo

efectivo diferente cuya celda unitaria sea una guía inferior que albergue un modo S y una guía superior cuyo modo P esté sintonizado con el modo S de la guía inferior. De esta forma, este modo efectivo cuasi unidimensional reproduce las ecuaciones diferenciales de la red híbrida horizontal, y así, tenemos un modelo que pueda tener ambas bandas planas. Por otro lado, también estudiamos la *Red Híbrida Alternada* que es una red unidimensional en la que hemos alternado la elipticidad de las guías de onda, y de esta forma, hemos anulado los acoplamientos de los modos P verticales. La red híbrida alternada posee una banda plana independiente de los valores de acoplamiento dado que los modos P verticales quedan desacoplados del resto de la red. También encontramos que cuando se cumple una condición específica de acoplamientos, entonces otra de las bandas se aplanan. De esta forma, podemos tener en la red híbrida alternada hasta dos bandas planas. Con estos dos modelos concluimos que la inclusión de modos P en sistemas simples unidimensionales nos produce bandas planas debido al acoplamiento negativo. Consideramos que la adición de modos superiores son importantes dado que uno de los principales desafíos en física es controlar las propiedades de localización y transporte de los sistemas. Nuestro trabajo futuro implica considerar modos de tercer y cuarto orden, y añadirlos a redes ya conocidas para obtener nueva fenomenología.

En el capítulo 4 nuestro objetivo fue el de encontrar sistemas cuasi unidimensionales que tengan todas sus bandas planas sin importar el valor de los acoplamientos. Hemos propuesto el modelo de diamante con modos P y hemos encontrado que el sistema posee 6 bandas y son todas planas independiente del valor de acoplamiento. Hemos propuesto este sistema para hacer compuertas lógicas. Además de la red de diamante, hemos propuesto el modelo de grafeno cuasi unidimensional con modos P que tiene 12 bandas planas independiente de los valores de acoplamientos. De esta forma, concluimos que los modos P son una herramienta útil y poderosa para crear sistemas de bandas planas que sean planos incluso para diferentes valores de acoplamiento.

En el capítulo 5 hemos estudiado la red de diamante dimerizada y la red de stub. Ambos sistemas tienen una banda plana y dos bandas dispersivas que son simétricas. Además, ambas redes tienen estados de borde que se desprenden desde el bulk para condiciones similares de dimerización que con la red de SSH. Para la red de diamante explicamos la existencia de estos estados de borde debido a que la red está conectada al modelo SSH a través de una transformación unitaria. Para la red de diamante, hemos estudiado que incluso si agregamos desorden, los estados de borde son robustos. Además, mientras el desorden mantenga la transformación a SSH, la banda plana se mantiene plana. Dado que el modelo de SSH tiene simetría quiral, entonces deducimos que el modelo de diamante dimerizado también debe tener una simetría quiral puesto que ambos modelos están conectados por una transformación unitaria. Por lo tanto, hemos buscado y propuesto un operador como operador de quiralidad. Estos resultados nos dan un mejor entendimiento sobre los operadores quirales y la manera en que los estados de borde son robustos ante el desorden. Además, hemos estudiado teóricamente que la banda plana se mantiene plana con desorden simétrico y se desarma ante el desorden asimétrico. Hemos corroborado estos resultados al calcular el espectrograma y desde el espectro observamos que la banda plana se mantiene plana para desorden simétrico y se desordena para desorden asimétrico. Estos resultados nos dan un mejor entendimiento sobre las bandas planas y cómo el desorden actúa y/o interfiere en ellas.

En el capítulo 6 hemos estudiado un sistema dimerizado con modos S y modos P . Hemos observado que el sistema tiene 4 bandas, y para un parámetro de dimerización cercano a cero tenemos que hay 4 estados de borde. A medida que el parámetro de dimerización crece tenemos

que hay un cruce de bandas y luego tenemos solamente dos estados de borde. Luego, a medida que el parámetro de dimerización sigue aumentando, tenemos otro cruce de bandas, y luego de eso ya no hay estados de borde. Al estudiar la estructura de los estados de borde vemos que tienen una estructura alternada similar a los estados de borde del modelo SSH. Además, hemos propuesto un operador de quiralidad para el sistema. Dado que el sistema tiene un operador quiral, entonces los estados de borde deben ser robustos ante el desorden de acoplamiento, esto lo comprobamos al calcular el espectrograma del sistema con desorden en acoplamiento. Al observar el espectro es claro que la energía de los estados de borde se mantiene invariante. De esta forma, podemos concluir que la energía de los estados de borde es robusta ante el desorden en acoplamiento. Este resultado nos parece interesante puesto que tenemos dos puntos de cruce de bandas en los que aparecen/desaparecen los estados de borde, junto a un operador quiral y además que los estados de borde son robustos ante el desorden. De esto, podemos concluir que hay una topología subyacente en el modelo SP dimerizado.

Capítulo 8

Bibliografía

- [1] Diego Guzmán-Silva, Gabriel Cáceres-Aravena, and Rodrigo A. Vicencio. Experimental observation of interorbital coupling. *Physical Review Letters*, 127, 8 2021.
- [2] G. Cáceres-Aravena, L. E.F.Foa Torres, and R. A. Vicencio. Topological and flat-band states induced by hybridized linear interactions in one-dimensional photonic lattices. *Physical Review A*, 102, 8 2020.
- [3] Gabriel Cáceres-Aravena and Rodrigo A. Vicencio. Perfect localization on flat-band binary one-dimensional photonic lattices. *Physical Review A*, 100, 7 2019.
- [4] Gabriel Cáceres-Aravena, Diego Guzmán-Silva, Ignacio Salinas, and Rodrigo A. Vicencio. Controlled transport based on multiorbital aharonov-bohm photonic caging. *Phys. Rev. Lett.*, 128:256602, Jun 2022.
- [5] Gabriel Cáceres-Aravena, Bastián Real, Diego Guzmán-Silva, Alberto Amo, Luis E. F. Foa Torres, and Rodrigo A. Vicencio. Experimental observation of edge states in ssh-stub photonic lattices. *Phys. Rev. Res.*, 4:013185, Mar 2022.
- [6] Gabriel Cáceres-Aravena, Bastián Real, Diego Guzmán-Silva, Paloma Vildoso, Ignacio Salinas, Alberto Amo, Tomoki Ozawa, and Rodrigo A. Vicencio. Spectral edge-to-edge topological state transfer in diamond photonic lattices, 2023.
- [7] János K. Asbóth, L. Oroszlány, and András Pályi. *A Short Course on Topological Insulators*. Springer International Publishing, 2016.
- [8] W. P. Su, J. R. Schrieffer, and A. J. Heeger. Solitons in polyacetylene. *Phys. Rev. Lett.*, 42:1698–1701, Jun 1979.
- [9] Demetrios N Christodoulides, Falk Lederer, and Yaron Silberberg. Discretizing light behaviour in linear and nonlinear waveguide lattices. *Nature*, 424:817–823, 2003.
- [10] Falk Lederer, George I. Stegeman, Demetri N. Christodoulides, Gaetano Assanto, Moti Segev, and Yaron Silberberg. Discrete solitons in optics. *Physics Reports*, 463:1–126, 7 2008.
- [11] D. Mandelik, H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti, and J. S. Aitchison. Band-gap structure of waveguide arrays and excitation of floquet-bloch solitons. *Phys. Rev. Lett.*, 90:053902, Feb 2003.

- [12] A.W. Snyder and J. Love. *Optical Waveguide Theory*. Science paperbacks. Springer US, 1983.
- [13] S. Rojas-Rojas, L. Morales-Inostroza, U. Naether, G. B. Xavier, S. Nolte, A. Szameit, R. A. Vicencio, G. Lima, and A. Delgado. Analytical model for polarization-dependent light propagation in waveguide arrays and applications. *Phys. Rev. A*, 90:063823, Dec 2014.
- [14] Sergej Flach and Andrey V. Gorbach. Discrete breathers — advances in theory and applications. *Physics Reports*, 467(1):1–116, 2008.
- [15] David K Campbell, Sergej Flach, Yuri S Kivshar, et al. Localizing energy through nonlinearity and discreteness. *Physics Today*, 57(1):43–49, 2004.
- [16] Rodrigo A. Vicencio, Camilo Cantillano, Luis Morales-Inostroza, Bastián Real, Cristian Mejía-Cortés, Steffen Weimann, Alexander Szameit, and Mario I. Molina. Observation of localized states in lieb photonic lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 114:245503, Jun 2015.
- [17] Rodrigo A. Vicencio Poblete. Photonic flat band dynamics. *Advances in Physics: X*, 6(1):1878057, 2021.
- [18] P. W. Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.*, 109:1492–1505, Mar 1958.
- [19] Alexander Szameit, Dominik Blömer, Jonas Burghoff, Thomas Schreiber, Thomas Pertsch, Stefan Nolte, Andreas Tünnermann, and Falk Lederer. Discrete nonlinear localization in femtosecond laser written waveguides in fused silica. *Opt. Express*, 13(26):10552–10557, Dec 2005.
- [20] Felix Bloch. Über die quantenmechanik der elek ronen in kristallgittern. *Zeitschrift für physik*, 52:555–600, 1929.
- [21] M. J. Rice and E. J. Mele. Elementary excitations of a linearly conjugated diatomic polymer. *Phys. Rev. Lett.*, 49:1455–1459, Nov 1982.
- [22] Y.-T. Lin, D. M. Kennes, M. Pletyukhov, C. S. Weber, H. Schoeller, and V. Meden. Interacting rice-mele model: Bulk and boundaries. *Phys. Rev. B*, 102:085122, Aug 2020.
- [23] F. Baboux, L. Ge, T. Jacqmin, M. Biondi, E. Galopin, A. Lemaître, L. Le Gratiet, I. Sagnes, S. Schmidt, H. E. Türeci, A. Amo, and J. Bloch. Bosonic condensation and disorder-induced localization in a flat band. *Phys. Rev. Lett.*, 116:066402, Feb 2016.
- [24] Bastián Real, Camilo Cantillano, Dany López-González, Alexander Szameit, Masashi Aono, Makoto Naruse, Song-Ju Kim, Kai Wang, and Rodrigo A Vicencio. Flat-band light dynamics in stub photonic lattices. *Scientific Reports*, 7:15085, 2017.

Capítulo 9

Anexo

9.1. Portadas de artículos publicados durante este Magíster

Perfect localization on flat-band binary one-dimensional photonic lattices

Gabriel Cáceres-Aravena and Rodrigo A. Vicencio

Departamento de Física and Millennium Institute for Research in Optics (MIRO), Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Santiago, Chile

(Received 1 March 2019; published 2 July 2019)

We can generate the conditions for observing flat bands on initially trivial lattices by, for example, exciting a given system simultaneously with different orthogonal states. In this work, we demonstrate that a one-dimensional binary lattice supports always a trivial flat band, which is formed by isolated single-site vertical dipolar states. These flat-band modes correspond to the highest localized modes for any discrete system, without the need of any additional mechanism like, e.g., disorder or nonlinearity. By fulfilling a specific relation between lattice parameters, an extra flat band can be excited as well, with modes composed by fundamental and dipolar states that occupy only three lattice sites. Additionally, by inspecting the lattice edges, we are able to construct analytical Shockley surface modes, which can be compact or present staggered or unstaggered tails. We believe that our proposed model could be a good candidate for observing transport and localization phenomena on a simple one-dimensional linear photonic lattice.

DOI: [10.1103/PhysRevA.100.013803](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.100.013803)**I. INTRODUCTION**



The propagation of waves in periodical systems are the natural framework to explore transport and localization phenomena in diverse fields of physics [1–3]. For example, the first experimental observation of Anderson-like localization in disordered linear systems [4] was made in 2007, in two-dimensional (2D) induced photonic lattices [5] and, subsequently, in fabricated one-dimensional (1D) waveguide arrays [6]. More recently, an important theoretical and experimental interest on flat-band (FB) systems has emerged [7–13], showing interesting localization and transport properties on linear lattices. The current experimental techniques allow direct and indirect excitation of flat-band phenomena [14–25], which is associated with destructive interference on specific lattice geometries. Specifically, a Lieb photonic lattice was chosen to demonstrate, for the first time in any physical system, the existence of FB localized states [14,15]. A FB lattice geometry allows a precise cancellation of amplitudes outside the FB mode area, which effectively cancels the transport of energy across the system. Flat-band systems possess a linear spectrum where at least one band is completely flat or thin compared to the next energy gap. This implies the need to have a system with a unit cell composed of at least two sites and, therefore, at least two bands [8,26]. In this sense, the existence of flat bands in simple one-dimensional systems is generally thought to be physically impossible. However, quasi-1D systems (i.e., systems possessing a one-dimensional extension plus some ramifications away from the main axis) naturally present unit cells composed of more than one site, becoming good candidates for this kind of phenomenology [18–20,25,27]. In general, light propagating in FB lattices will experience zero or very low diffraction, when exciting some specific sites at the unit cell, as has been shown experimentally [18,28].

A very interesting feature of flat-band systems is the possibility to construct highly localized eigenmodes by means of a

destructive linear combination of extended linear wave functions [7,29]. These FB states are spatially compact, occupy only few lattice sites, and rapidly decay to a completely zero tail as soon as a destructive interference condition is fulfilled [8]. This is a very remarkable property because FB lattices naturally generate localized structures in a linear regime, with a localization length of the order of a single unit cell. Moreover, as these linear localized modes possess all the same frequency, they are completely degenerate and any linear combination of them will also be a stable propagating solution. This can be used to achieve a nondiffractive transmission of optically codified information [14,16,17,20,21,29,30].

Almost all studies on photonic lattices have considered single-mode excitation only. This has been reinforced due to the experimental complexity in the excitation of higher-order modes on a given lattice system, which has found a partial solution only by the implementation of a selective p -band population in cold-atom systems [31,32] and micropillar arrays [33]. But, optical waveguides can also host higher order modes, depending on the specific experimental parameters used to perform the experiment (waveguide arrays are typically fabricated considering single-mode waveguides at a given wavelength; however, by reducing this parameter higher-order modes can be excited as well). Their excitation could promote richer dynamics and new interesting phenomena, as has been suggested for cold atoms loaded in optical potentials [34–37]. However, a precise excitation of dipolar states became possible very recently in optical waveguide lattices by using an image generator setup based on spatial light modulators [21,38]. There, a well-defined contrast between the transport of fundamental and dipolar states was shown clearly. The possibility to experimentally excite and control higher band excitations, in optical lattice systems, creates a venue in which the study of remarkable properties of correlated systems—such as superfluidity,

Topological and flat-band states induced by hybridized linear interactions in one-dimensional photonic lattices

G. Cáceres-Aravena ¹, L. E. F. Foa Torres ² and R. A. Vicencio¹

¹*Departamento de Física and MIRO, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Santiago 8370448, Chile*

²*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Santiago 8370448, Chile*



(Received 9 June 2020; accepted 14 July 2020; published 4 August 2020)

We report on a study of a one-dimensional linear photonic lattice hosting, simultaneously, fundamental and dipolar modes at every site. We show how, thanks to the coupling between different orbital modes, this minimal model exhibits rich transport and topological properties. By varying the detuning coefficient we find a regime where bands become flatter (with reduced transport) and a second regime, where both bands connect at a gap-closing transition (with enhanced transport). We detect an asymmetric transport due to the asymmetric intermode coupling and a linear energy exchange mechanism between modes. Further analysis shows that the bands have a topological transition with a nontrivial Zak phase which leads to the appearance of edge states in a finite system. Finally, for zero detuning, we found a symmetric condition for coupling constants, where the linear spectrum becomes completely flat, with states fully localized in space occupying only two lattice sites.

DOI: [10.1103/PhysRevA.102.023505](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.102.023505)

I. INTRODUCTION

During the last 25 years, the study of light propagation in periodic media, which mimics solid-state physics systems, has successfully shown several fundamental phenomena with potential applications [1–3]. This research area has not been limited to waveguide arrays, expanding also to cold atoms [4], ferromagnetic lattices [5], microcavity coupled systems [6], and phononic lattices [7], among others. Photonic lattices, in particular, have attracted enormous attention due to their flexibility to fabricate one-dimensional (1D) and two-dimensional coupled systems [8], where several predictions from condensed matter, including Anderson localization [9], topological insulation [10], and flat-band (FB) phenomena [11,12], have found a privileged testing ground.

Most of the studies in photonic lattices consider the simplest excitation of a lattice, i.e., the fundamental s wavefunction dynamics. However, recent advances in photonics allow the excitation of higher orbital states either by using spatial light modulator devices [13,14] or by selecting the associated energy of a given spectrum [15]. Thanks to this progress one can now also investigate the interaction between s and p states [16], where a wealth of new phenomena have been predicted [17–21]. For example, the isolated excitation of p states on a graphene lattice could generate the appearance of flat-band phenomena due to a perfect cancellation of transport when correctly choosing the dipole orientation on a given ring [22,23]. By assuming hybridized linear interactions, we recently found that a twisted 1D lattice presents flat-band phenomena as well as edge, compact, and exponential states [24]. It is thus interesting to explore the interplay between the lattice configuration and the interaction between different orbitals. Depending on their parity and symmetry, the degree of freedom due to additional orbitals could induce nontrivial coupling and, therefore, nontrivial band phenomenology with nonstandard transport and localization properties.

Another research front merging and synergizing with the mentioned studies is that of topological insulators [25–27]. Topological photonics [28,29] is an emerging field seeking to exploit photonic lattices not only to realize and probe topological states, but also to realize truly new effects unknown in their parent communities (i.e., condensed matter and photonics). In this context one may also seek to generate nontrivial topological states from the coupling between higher-order states, as we will show later in this paper.

From a more applied point of view, it has been shown that FB lattices are special candidates for using waveguide arrays as key elements for optical communications [30–36], while the use of orthogonal states could help to improve spatial multiplexing techniques [37]. For example, FB localization occurs at the linear level and without requiring any change in the lattice geometry. This allows the combination between different compact states which forms a completely coherent pattern, which propagates stably along the propagation coordinate and for any level of power. In general, FB lattices are formed by systems possessing at least two bands [3,38], which have a special geometric configuration that makes possible the occurrence of destructive interference effects. This amplitude annihilation exactly cancels the transport across the lattice, generating FB linear states which are perfectly compact with a zero tail.

In this paper, we present the simplest possible 1D lattice model for which the coupling between s and p states allows the excitation of interesting properties in terms of transport, localization, energy exchange, topology, and flat-band phenomena. Our findings include (i) a tunable transition from quasiflat bands (with reduced transport) to one with more dispersive bands with enhanced transport; (ii) the observation of asymmetric transport produced by asymmetric intermode coupling and a linear energy exchange mechanism between modes; (iii) a topological transition appearing at a gap closing

Experimental Observation of Interorbital Coupling

Diego Guzmán-Silva[✉], Gabriel Cáceres-Aravena, and Rodrigo A. Vicencio

Departamento de Física and Millenium Institute for Research in Optics-MIRO,

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, 8370448 Santiago, Chile



(Received 4 March 2021; accepted 15 July 2021; published 6 August 2021)

Interorbital coupling refers to the possibility of exciting orbital states by otherwise orthogonal non-interacting modes, a forbidden process in photonic lattices due to intrinsic propagation constant detuning. In this Letter, using a femtosecond (fs) laser writing technique, we experimentally demonstrate that fundamental and excited orbital states can couple each other when located at different spatial positions. We perform a full characterization of an asymmetric double-well-like potential and implement a scan method to effectively map the dynamics along the propagation coordinate. Our fundamental observation also constitutes a direct solution for a spatial mode converter device, which could be located in any position inside a photonic glass chip. By taking advantage of the phase structure of higher-order photonic modes and the effective negative coupling generated, we propose a trimer configuration as a phase beam splitter, which could be of great relevance for multiplexing and interference-based photonic concatenated operations.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.127.066601

The way in which atoms assemble and interact with each other determines their potential to form molecules and matter [1]. These interactions are characterized by different atom states called orbitals. In order to understand and explore otherwise occulted properties, diverse areas of research have proposed the creation of artificial atoms in different physical contexts [2–9]. This includes numerical and experimental research suggesting new materials and the possibility of observing new exotic interactions as solutions for transport and localization of energy, key scientific goals in science. However, although theoretical researchers have assumed the basic and fundamental concept of interorbital interactions as obvious and trivial [10,11], no systematic experimental evidence is found in literature. In this Letter, we demonstrate, both numerically and experimentally, that orthogonal orbital states, located at different 2D photonic atoms, couple each other by an evanescent interaction. We show that symmetric *S*-like wave functions could couple to *P*-like orbitals and also to higher-order states. We use a femtosecond (fs) laser technique [12] to fabricate elliptical 2D waveguides having different propagation constants, which are analogous to different orbital energies. We construct double-well photonic asymmetric potentials [13], such that the on site energies of orthogonal orbitals can be finely tuned and coupling between them becomes possible. Our results offer a new way of studying lattice dynamics where, historically, *S*-like orbitals have mostly been assumed. An interorbital coupling gives the opportunity of tuning the sign of hopping between atoms, increasing the available tools for researchers of different areas and, also, amplifying the possibilities to discover new phenomena [14,15].

The paraxial wave equation in optics and the Schrödinger equation in quantum mechanics have exactly the same mathematical form and, therefore, their mathematical solutions must be equivalent [2]. Theory tells us that a potential-well structure will always have a bound state [1,16], independent of its size (width and depth). However, if we want to excite and observe higher-orbital states, we must satisfy a specific condition that, for one-dimensional structures, reads as

$$8mV_o a^2 \geq h^2 \quad \text{and} \quad 8n_o \Delta n w^2 \geq \lambda^2 \quad (1)$$

for quantum mechanics and optics, respectively. Here m is the particle mass; V_o and a are the potential depth and width, respectively; and h is the Planck constant, while n_o corresponds to the bulk refractive index, Δn is the refractive index contrast, w is the waveguide width, and λ the wavelength. We notice that both relations are equivalent and depend on phenomenologically similar parameters: if the size of atoms or waveguides is larger than some lower bound, higher orbitals are allowed to exist. Specifically in optics, we notice that a larger index contrast and/or a wider waveguide facilitates the generation of a larger number of eigenstates, and waveguides could become multimode depending on the excitation wavelength [16,17].

Resonance is a key concept in physics, and many interactions can be well understood by finding conditions for matching the eigenfrequencies of a given system. Of course, complex resonance problems including different types of interactions [18] are neither trivial nor simple to be described, but the fundamental idea continues to rely on matching or tuning a set of system parameters. Similar to what happens in any physical problem having waves and

Experimental observation of edge states in SSH-Stub photonic lattices

Gabriel Cáceres-Aravena,^{1,2} Bastián Real³, Diego Guzmán-Silva,^{1,2} Alberto Amo³, Luis E. F. Foa Torres¹,
and Rodrigo A. Vicencio^{1,2}

¹Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Santiago 8370448, Chile

²Millennium Institute for Research in Optics - MIRO, Universidad de Chile, Santiago 4130691, Chile

³Univ. Lille, CNRS, UMR 8523-PhLAM-Physique des lasers Atomes et Molécules, F-59000 Lille, France



(Received 28 October 2021; accepted 28 January 2022; published 7 March 2022)

We reveal unconventional edge states in a one-dimensional Stub lattice of coupled waveguides with staggered hoppings. The edge states appear for the same values of hoppings as topological edge states in the Su-Schrieffer-Heeger model. They have different energies depending on the lattice termination and present a remarkable robustness against certain types of disorder. We evidence experimentally the phase transition at which these edge states appear, opening the door to the engineering of one-dimensional lattices with localized edge modes whose energy and location can be controlled at will.

DOI: [10.1103/PhysRevResearch.4.013185](https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.4.013185)

I. INTRODUCTION

During the last few years, there has been a surge of interest in the study of topological edge states in a plethora of systems, ranging from electronic states in materials [1] to analogs in mechanical [2] and photonic settings [3,4]. In particular, the field of topological photonics [3,4] has bloomed over the last decade. But beyond the much sought-for topological protection, a few studies [5–8] have shown that sometimes an enhanced robustness (and even antifragile behavior) can be achieved by breaking the rules and tinkering with edge states outside the topological phase. This includes, for example, edge states coexisting with a gapless bulk [5], states of metals on topological insulator systems [6], and also many Floquet systems [7,8] which are effectively gapless but which nevertheless show robust edge states.

In one dimension, topological phases require imposing a symmetry, typically chiral or sublattice symmetry, as in the case of the Su-Schrieffer-Heeger (SSH) model [9,10]. The resulting topological phase has edge states which, notwithstanding their “topological protection,” are not as strong as their two-dimensional counterpart. Furthermore, the peculiar status of chiral symmetry, which is different from usual crystalline symmetries, brings more subtleties to the one-dimensional case. Thus, one may wonder whether when going beyond the constraints of topology one could find edge states equally robust to those of the paradigmatic SSH model. Such a scheme would have the potential to provide more useful edge states for diverse applications in physics [4].

Here, we study a modified version of the SSH lattice, that we call the SSH-Stub model. We show that this model sustains edge states with unusual properties. On one hand, there is an imbalanced number of edge states at the two ends of the chain, and they have different energies: Two are located at one edge with nonzero energy, and one midgap state is present at the opposite edge. On the other hand, since the model has a net chiral charge [11] the midgap state coexists with flat-band modes. Furthermore, the edge states enjoy a robustness comparable to those found in the SSH model; therefore, our results open a path for robust edge states beyond the standard topological classification.

II. SSH-STUB MODEL

The propagation of light on a dimerized Stub photonic lattice, which is composed of sites A , B , and C as sketched in Fig. 1(a), is well described by a tight-binding-like model [12,13] as follows,

$$-i \frac{du_n}{dz} = \sum_{m \neq n} t_{n,m} u_m. \quad (1)$$

Here, u_n is the light amplitude of the fundamental mode at the n th waveguide, z the propagation direction (dynamical variable), and $t_{n,m}$ is the coupling (hopping) coefficient between sites n and m (the distance in between sites A , B , and C determines the strength of these coefficients). We identify the coupling constants t_2 and t_3 as the horizontal and vertical intracell couplings, respectively, while t_1 defines the intercell horizontal coupling. Depending on their values, the system experiences different regimes, which we characterize using the parameter $\delta \equiv t_2/t_1$. Bands are obtained using a Bloch ansatz directly in model (1), obtaining

$$\beta_z = 0, \quad \beta_z^\pm \equiv \pm \sqrt{(1 + 2\delta \cos k + \delta^2)t_1^2 + t_3^2}. \quad (2)$$

Published by the American Physical Society under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International license. Further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the published article's title, journal citation, and DOI.

Controlled Transport Based on Multiorbital Aharonov-Bohm Photonic Caging

Gabriel Cáceres-Aravena, Diego Guzmán-Silva[✉], Ignacio Salinas[✉], and Rodrigo A. Vicencio[✉]

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Chile and Millennium Institute for Research in Optics—MIRO, Universidad de Chile, Chile

 (Received 27 January 2022; accepted 3 June 2022; published 23 June 2022)

The induction of synthetic magnetic fields on lattice structures allows an effective control of their localization and transport properties. In this Letter, we generate effective π magnetic fluxes on a multiorbital diamond lattice, where first-order (S) and second-order (P) modes effectively interact. We implement a z -scan method on femtosecond-laser-written photonic lattices and experimentally observe Aharonov-Bohm caging for S and P modes, as a consequence of a band transformation and the emergence of a spectrum composed of three degenerated flat bands. As an application, we demonstrate a perfect control of the dynamics, where we translate an input excitation across the lattice in a completely linear and controlled way. Our model, based on a flat band spectrum, allows us to choose the direction of transport depending on the excitation site or input phase.

DOI: [10.1103/PhysRevLett.128.256602](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.128.256602)

Understanding the properties of transport and localization in lattice systems has been crucial for the implementation of present technologies based in electronics. Novel phenomena have been discovered where, for example, the transport can be drastically reduced and localization effects could emerge. One important example is the well-known Anderson localization [1], where all the eigenmodes collapse due to a destructive interference process associated with a random distribution of the site energies and/or lattice positions [2,3]. Another interesting and more controllable method appears with the addition of a magnetic flux on a lattice, which adds an extra phase on hopping (coupling) coefficients. For very specific values of this flux, a phenomenon of extreme localization is observed, the so-called *Aharonov-Bohm (AB) caging* [4–6]. In this case, in contrast to the Anderson localization, all the eigenmodes become degenerate and form a set of flat bands (FBs) [7]. Therefore, an input excitation is decomposed in FB compact states, the energy is caged, and the transport is abruptly reduced into a couple of unit cells. Although the use of a magnetic flux was initially thought of for electronic lattices, it is possible to map its effect to nonelectronic systems by the use of artificial gauge fields [8]. This opens the possibility to study the AB effect in other physical systems [9–15], as well as to experimentally observe it in superconducting wire networks [16] and in semiconductors tailored in an electron gas [17]. Very recently, a synthetic magnetic flux has been implemented in photonics by applying a detuning and modulation of curved waveguides [18], by the addition of auxiliary waveguides to generate an effective negative coupling [19], or by the excitation of special beams having orbital angular momentum [20].

While the AB effect allows us to trap and steer the propagation of light on a given region, other ways of

controlling the dynamics in optical lattices have been suggested as well [21]. When studying mobility properties to, for example, modify the direction of propagation of a light beam, most of the efforts have been focused on the addition of nonlinearity to the system [21–25], which also induces instabilities and resonances with linear modes. Interestingly, magnetic fluxes in non-Hermitian lattices also have the property to alter the direction of propagation, affecting both reflection and transmission, and producing unidirectional reflection, absorption, and lasing [26–31]. However, the control of localized wave packets, including a magnetic flux in Hermitian systems, has not been experimentally observed so far. A controlled flow of energy is important in general physics and also when thinking on concrete applications, such as, for example, logical operations and concatenated optical gates in photonics and integrated circuits [32,33].

In this Letter, we propose a novel form to implement a synthetic magnetic flux in lattices via the use of interorbital coupling [34] on a diamond lattice [9]. By considering the effective interaction between fundamental (S) and second-order (P) modes, a positive and negative coupling can be obtained depending on waveguide and mode orientation. This allows us to induce an effective magnetic flux $\phi = \pi$ per plaquette (a closed ring in the lattice), allowing a direct observation of AB caging. By using a femtosecond (fs) laser writing technique [35], we fabricate a multiorbital photonic lattice having a mixture of straight waveguides which support one or two modes. We observe quite clearly AB caging for S and P states. As a remarkable application, we experimentally demonstrate a novel mechanism for directional transport of linear localized excitations. We show a perfect steering of the energy across the lattice in a very compact way and suggest a concatenated photonic

Spectral edge-to-edge topological state transfer in diamond photonic lattices

Gabriel Cáceres-Aravena^{†,1,2} Bastián Real^{†,1,2} Diego Guzmán-Silva,^{1,2} Paloma Vildoso,^{1,2}
Ignacio Salinas,^{1,2} Alberto Amo,³ Tomoki Ozawa,⁴ and Rodrigo A. Vicencio^{1,2,*}

¹*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Chile*

²*Millennium Institute for Research in Optics - MIRO, Chile*

³*Univ. Lille, CNRS, UMR 8523—PhLAM—Physique des Lasers Atomes et Molécules, F-59000 Lille, France*

⁴*Advanced Institute for Materials Research (WPI-AIMR), Tohoku University, Sendai 980-8577, Japan*

(Dated: January 12, 2023)

Transfer of information between topological edge states is a robust way of spatially manipulating quantum states while preserving their coherence in lattice environments. This method is particularly efficient when the edge modes are kept within the topological gap of the lattice during the transfer. In this work we show experimentally the transfer of photonic modes between topological edge states located at opposite ends of a dimerized one-dimensional photonic lattice. We use a diamond lattice of coupled waveguides and show that the transfer is insensitive both to the presence of a high density of states in the form of a flat band at an energy close to that of the edge states, and to the presence of disorder in the hoppings. We explore dynamics in the waveguide lattice using wavelength-scan method, where different input wavelength translates into different effective waveguide length. These results open the way to the implementation of more efficient protocols based on the active driving of the hoppings.

Topological edge states are a remarkable resource to engineer photonic systems with isolated modes protected from the presence of disorder. In two-dimensional lattices, they can be used to fabricate topological edge mode lasers with distributed gain and quantized orbital momentum [1, 2], to transfer single photons around corners in elaborated photonic circuits [3, 4], and to design topological frequency combs with enhanced efficiency [5, 6]. One dimensional systems such as the Su-Schrieffer-Heeger (SSH) lattice are particularly interesting because topological edge and interface modes are hosted deep into the topological gap of the lattice. This gap protection has been shown to be beneficial to preserve the quantum state of photons in boundary modes [7, 8]. Interestingly, the presence of topological edge modes on both sides of one-dimensional lattices can be used to transfer a state from one edge of the lattice to the other with high fidelity with the advantage of being protected from certain types of disorder due to the topological nature of the system. Such edge state transfer is a promising route to store and manipulate photonic quantum states in on-chip lattice environments.

Most topological edge transfer protocols rely on the adiabatic evolution of the lattice such that an edge mode is driven into quasi-bulk modes and again into an edge mode at the other side [9–17]. While these protocols present an optimized transfer rate and fidelity, they are limited by the adiabaticity condition that requires the adiabatic passage to be slow enough to avoid the Zener coupling of the edge state information into the bulk modes [18, 19]. Furthermore, the presence of disorder in the lattice would enhance this coupling. A variation of these protocols include counter-adiabatic driving methods [20]. Recently, a different route has been proposed based on the coherent coupling of edge modes within the gap [19, 21, 22]. The great advantage of this approach

is that edge modes are kept well into the topological gap throughout the protocol, ensuring a high fidelity in reduced times. The simplest version of the coherent state transfer of topological edge states is via passive evanescent coupling of the exponential tails of edge modes at opposite sides of the finite size lattice. In this case, coherent transfer between edge modes takes place at a frequency determined by the tail overlap, which can be controlled via the size of the gap. Observation of such coherent oscillations was reported in a short SSH lattice for Rydberg atoms [23].

In this work, we demonstrate coherent edge-to-edge transfer of light in a dimerized diamond lattice of coupled waveguides employing a spectral tomographic technique. More importantly, we show experimentally that the fidelity of the transfer is robust to a number of perturbations in the system. First, we show that orthogonality of eigenmodes in our undriven protocol preserves the transfer even in the presence of a high density of states in the form of a flat band at energies close to that of the edge states. Second, we demonstrate that the transfer mechanism is robust to the presence of lattice defects thanks to the underlying chiral symmetry of the system. The experimental proof of principle we report in this work can be significantly sped up by applying a number of driven techniques based on the modulating of the hoppings in time and the use of concatenated topological lattices [19, 22, 24]. Such techniques are readily implementable in lattices of coupled waveguides.

To demonstrate the topological edge transfer we use a diamond lattice of coupled waveguides with different intracell (t_1) and intercell (t_2) hoppings, as sketched in Fig. 1(a). The lattice has three sites per unit cell, denoted as A , B and C sites. Considering a tight-binding coupled-mode approach, the evolution of the optical field at every