



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE GEOFÍSICA

**ESTIMACIÓN MULTI-ESCALA DE DISLOCACIÓN CUASI-ESTÁTICA:
APLICACIÓN AL TERREMOTO DE ILLAPEL (M_w 8.3) 2015**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS, MENCIÓN GEOFÍSICA

VANESSA FERNANDA CARRILLO BARRA

PROFESOR GUÍA:
FRANCISCO ORTEGA CULACIATI

PROFESOR CO-GUÍA:
JAVIER RUIZ PAREDES

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
MARCOS MORENO SWITT
ROBERTO BENAVENTE BRAVO

Este trabajo ha sido financiado por:
ANID - BECA MAGÍSTER NACIONAL / 2021 - 22211483
PROYECTO ANILLO PRECURSOR ANID ACT-192169

SANTIAGO DE CHILE
2023

**RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR
AL GRADO DE:** Magíster en Ciencias, Mención
Geofísica
POR: Vanessa Fernanda Carrillo Barra
FECHA: 2023
PROFESOR GUÍA: Francisco Ortega Culaciati

ESTIMACIÓN MULTI-ESCALA DE DISLOCACIÓN CUASI-ESTÁTICA: APLICACIÓN AL TERREMOTO DE ILLAPEL (M_w 8.3) 2015

Durante el ciclo sísmico se producen señales de deformación medibles por instrumentos geodésicos y sismológicos en la superficie de la Tierra. De especial interés son los procesos de dislocación en fallas responsables de dichas señales, cuya comprensión es clave para entender mejor los procesos físicos relacionados a la generación de grandes terremotos.

Al igual que en muchos problemas en Geofísica, la estimación de dislocación es un problema inverso mal condicionado. Éste se puede abordar desde dos enfoques extremos de inversión: Probabilista (Bayesiano) y Optimal. Dado el elevado costo computacional de la inversión Bayesiana (e.g., métodos de muestreo del tipo MCMC), se exploran mejoras en los métodos optimales de inversión de dislocación cuasi-estática, que permiten obtener soluciones rápidas y que son particularmente útiles para problemas donde se estima un gran número de parámetros, que sobrepasan las capacidades computacionales actuales que requieren los métodos de muestreo.

En este trabajo se propone una nueva metodología, que incorpora una parametrización y regularización que considera la variabilidad espacial con la que las observaciones constriñen la dislocación en el contacto sismogénico. Aquí, basada en la calidad de las observaciones y las propiedades del modelo directo, la regularización determina la complejidad con la que se puede resolver la dislocación en cada porción del contacto, estabilizando la solución del problema inverso.

Para ello, se definió una representación de la dislocación utilizando funciones base *b-splines* a múltiples escalas espaciales, donde una combinación lineal de todas ellas define una representación lineal, continua, diferenciable y multi-escala de la dislocación en la superficie del contacto o falla. La metodología propuesta estima un modelo \underline{m} (las amplitudes de las *b-splines*), tal que minimiza la cantidad de componentes no nulas de éste (estimación *sparse*), efectivamente seleccionando una cantidad mínima de funciones base para representar la dislocación y determinando la escala espacial más pequeña que representa la complejidad de ésta.

La metodología se aplicó al estudio del terremoto de Illapel (M_w 8.3) de 2015, modelando una porción del contacto de subducción entre las placas oceánica de Nazca y continental Sudamericana para determinar la distribución de deslizamiento, utilizando observaciones de desplazamiento cosísmico (y su incertidumbre) registradas por estaciones GNSS. La metodología propuesta se verificó inicialmente desarrollando pruebas con datos sintéticos, a fin de evaluar la capacidad de recuperar diversas distribuciones de dislocación ya conocidas; y luego se aplicó para la estimación de dislocación cuasi-estática del terremoto de Illapel, comparando los resultados con otros modelos del evento sísmico disponibles en la literatura.

*¿Sólo se vive una vez? ¡Falso!
Se vive todos los días, sólo mueres una vez.*

Dwight Schrute

Agradecimientos

A la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo por financiar parte de mis estudios de postgrado con la Beca de Magíster Nacional (2021 - 22211483). Así mismo, al Proyecto Anillo PRECURSOR (ACT-192169) por su apoyo durante esta investigación.

Powered@NLHPC: Esta tesis fue parcialmente apoyada por la infraestructura de supercómputo del NLHPC (ECM-02), que se utilizó para generar las Funciones de Green en el caso final de estudio.

~

Quisiera agradecer a mi familia, por su cariño y por soportar mis mañas. A mis papás porque a pesar que sé que a veces se cuestionan este camino no muy “convencional” que elegí, me han brindado su apoyo incondicional y creen en mi; en particular quiero dar las gracias a mi mamá, por sus oraciones amorosas. También quisiera mencionar a Laura, quien me acogió en su hogar para tener el ambiente perfecto para terminar de escribir esta tesis, te pasaste hermana.

A la comisión evaluadora, por la valiosa retroalimentación. En particular a Pancho, mi profesor guía, aprendí mucho bajo su tutela; agradezco la paciencia conmigo, los consejos y el apoyo no tan solo durante este trabajo de tesis, sino que también en las postulaciones que emprendí en este proceso.

A las grandes personas que conocí durante el Magíster, que con todas las risas estridentes hicieron mucho más liviana esta etapa, y a pesar de ser afuerina, me hicieron sentir como en casa. A mis compañeros de oficina Joaquín y JP, con quienes compartí casi todo el proceso, debo reconocerles que me soportaron cuando cantaba mientras programaba. A Johana, Felipe, Camilo y Matías, amigos queridos, por ser tan amorosos conmigo siempre, los aprecio mucho. En especial me gustaría agradecer a Nicole, este proceso y este tiempo en Santiago no habría sido lo excelente que fue sin ti amix, gracias por esta tan genuina y bella amistad, y por haber sido un apoyo incondicional siempre.

Gracias también a mis amigos de siempre, por sus ánimos y contención, lamento las muchas ausencias, pero saben que los quiero un montón.

Finalmente, a mi, por vencer una vez más a mi versión auto-saboteadora y por perseverar; porque accidentada, fracturada y todo... se logró :)

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
1.1. Ciclo sísmico	1
1.2. Contexto Sismotectónico de Chile	3
1.3. El terremoto de Illapel	3
1.4. Objetivos	7
1.4.1. Objetivo General	7
1.4.2. Objetivos Específicos	7
1.5. Estructura de la Tesis	8
2. Marco Teórico	9
2.1. Modelos de Dislocación en Fallas	9
2.2. Funciones base b-splines	13
2.3. Problema Inverso	16
2.3.1. Mínimos Cuadrados con Regularización L2	17
2.3.2. Mínimos Cuadrados con Regularización L1: soluciones de tipo <i>sparse</i>	18
2.3.3. Criterio de selección de modelos	21
3. Metodología	23
3.1. Representación de Dislocación mediante Funciones Base B-splines Multi-escala	23
3.2. Modelo Directo	26
3.2.1. Falla vertical de rumbo	27
3.2.2. Zona de subducción en el área afectada por el Terremoto de Illapel (Mw 8.3) 2015	28
3.3. Problema Inverso de Estimación de Dislocación Cuasi-estática	31
3.4. Propuesta de normalización de las columnas de G para la dislocación en zona de subducción	35
3.5. Desarrollando intuición: Ejemplos de ajuste a una curva y a una superficie	37
3.5.1. Ejemplo de ajuste a una curva (1D)	37
3.5.2. Ejemplo de ajuste a una superficie (2D)	44
3.6. Paquete de Inversión MUSE	52
4. Inversión de Dislocación Cuasi-Estática: Casos Sintéticos	54
4.1. Fallas Verticales de Rumbo	54
4.1.1. Observadores cada 1 km: <i>Slip Input S4</i>	57
4.1.2. Observadores cada 1 km: <i>Slip Input S0</i>	63
4.2. Contacto de Subducción	68
4.2.1. Condición de positividad	73
4.2.2. Normalización de las columnas de G	77

4.2.2.1.	Elipse 4	77
4.2.2.2.	Tablero de Ajedrez 3	83
5.	Inversión de Dislocación Cuasi-Estática: Terremoto de Illapel	91
5.1.	Observaciones	91
5.2.	Distribución de Dislocación Cosísmica del Terremoto de Illapel	92
5.2.1.	Dip-slip	93
5.2.2.	Theta-slip	96
6.	Discusiones y Conclusiones	108
6.1.	Ventajas y limitaciones del método	108
6.2.	Dislocación cuasi-estática del terremoto de Illapel	110
6.3.	Trabajo futuro	113
6.4.	Conclusiones	113
	Bibliografía	115
	Anexos	120
A.	Geometría y Funciones Base	120
B.	Resultados complementarios: Ejemplos Ilustrativos	122
B.1.	Superficies	122
C.	Resultados complementarios: Falla vertical de rumbo	124
C.1.	Observadores cada 10 km: <i>Slip Input S4</i>	125
C.2.	Observadores cada 10 km: <i>Slip Input S0</i>	128
D.	Rotación	131
E.	Resultados complementarios: Zona de Subducción	133
E.1.	Uso de B^+ para la condición de positividad	133
E.1.1.	Elipse 4	135
E.1.2.	Tablero de ajedrez 3	137
E.2.	Normalización de las columnas de G	139
E.3.	Resultados Complementarios: Cosísmico Illapel	142
F.	Modelo de Dislocación de tornillo	145

Índice de Tablas

3.1.	Funciones base <i>b-splines</i> , para el caso de falla vertical de rumbo (1D).	28
3.2.	Funciones base <i>b-splines</i> , para la geometría de la zona de Illapel	30
3.3.	Parámetros para las funciones que conforman la señal 1D.	38
3.4.	Funciones base <i>b-splines</i> , para el caso de curvas 1D	38
3.5.	Parámetros para las funciones que conforman la superficie.	45
3.6.	Funciones base <i>b-splines</i> , para el caso de superficie 2D.	46
5.1.	Soluciones de los planos nodales del tensor de momento para el terremoto de Illapel	92

Índice de Figuras

1.1.	Esquema simplificado del ciclo sísmico. Extraído de Hicks (2015).	1
1.2.	Contexto sismotectónico general de Chile y terremotos en el margen. (Panel izquierdo) Velocidades de convergencia de las placas de Nazca (66 mm/año) y Antártica (20 mm/año) con respecto a la Sudamericana, representadas por las flechas blancas proporcionales a la velocidad (Kendrick et al. (2003) y Wang et al. (2007), respectivamente). La línea con triángulos muestra la ubicación de la fosa en el margen, la orientación de dichos triángulos indica la dirección de la subducción. Las líneas gruesas negras representan el Chile <i>Rise</i> , mientras que las líneas segmentadas negras y continuas grises exhiben las principales zonas de falla y <i>ridges</i> del margen. La escala de color corresponde a la profundidad del fondo oceánico y la altitud de la topografía; el cuadro rojo indica la zona de estudio. (Panel derecho) Extensión latitudinal de rupturas de terremotos ($M_w > 7.0$) en el margen de subducción, modificado de Contreras-Reyes y Carrizo (2011); se añaden algunos eventos de profundidad intermedia (estrellas con borde negro) y los terremotos de Magallanes (estrellas grises), en color rojo se destaca la ruptura del terremoto M_w 8.3 de Illapel 2015.	4
1.3.	Algunos de los modelos cosísmicos de la distribución de deslizamiento para el terremoto de Illapel de 2015 publicados, todos dispuestos y escalados para alinear las latitudes $30^\circ - 32^\circ\text{S}$. En los títulos se añaden las citas respectivas.	6
2.1.	Ejemplo de falla vertical de rumbo sinistral en donde se produce una dislocación de amplitud 1 entre los 5 y 10 km de profundidad. El panel superior muestra con colores los desplazamientos en la dirección perpendicular a la hoja (plano x, y) y el panel inferior se indica la predicción de los desplazamientos en la superficie libre (donde se pueden hacer mediciones geodésicas).	11
2.2.	Ejemplo del contacto sismogénico en una zona de subducción, en donde se produce una dislocación que genera desplazamientos en la superficie libre, donde pueden medirse mediante estaciones GNSS y otros instrumentos geofísicos. A la izquierda, el ejemplo de la geometría del contacto en profundidad (indicada por la respectiva escala de color) y ubicación de estaciones GNSS en superficie con triángulos negros; a la derecha, desplazamientos predichos en superficie en estaciones GNSS (flechas con origen en círculos) debido a una distribución de dislocación elíptica.	12
2.3.	Esquema del sistema de referencia que se utiliza en el programa EDKS para calcular los Kernels de la base de datos de funciones de Green, los que representan desplazamientos estáticos en los receptores (cuadrados negros) inducidos por la dislocación de cada fuente puntual (círculos magenta). Extraído de Becerra (2018).	12

2.4.	Funciones base <i>b-splines</i> 1D de distinto grado; cada conjunto de <i>b-splines</i> está compuesto por 5 funciones completas en el rango de t definido entre -100 y 100.	15
2.5.	Funciones base <i>b-splines</i> 2D de distinto grado; cada conjunto está compuesto por 3 funciones completas para x e y , en el rango definido entre -100 y 100 para ambas direcciones.	15
2.6.	Demostración 2-D del uso del modelo de minimización de la norma L1 para obtener regularización tipo <i>sparse</i> . El área cuadrada sombreada muestra la región donde $\ \underline{m}\ _1 \leq c_1$, mientras que el círculo muestra la región donde $\ \underline{m}\ _2 \leq c_2$. Cualquier ecuación arbitraria en el espacio 2-D, $(\underline{G} \underline{m})_i - d_i = 0$, define una línea. El mínimo residual L2 del modelo, \underline{m}_2 , satisface la restricción, pero generalmente no será <i>sparse</i> . Sin embargo, el mínimo residual L1 del modelo, $\underline{m}_1 = [0, c_1]^T$, tenderá a ser <i>sparse</i> debido a la presencia de esquinas en el contorno L1. Extraído de Becerra (2018), Capítulo 4.	20
2.7.	Esquema del criterio de selección de modelos Curva L. En el eje x la norma de la regularización y en el eje y la norma del ajuste.	21
3.1.	En los paneles se muestran funciones base <i>b-splines</i> definidas en un dominio 1D, a lo largo de la coordenada x . En cada panel se muestran las <i>b-splines</i> cúbicas a una escala diferente, donde la número 0 incluye las funciones más extensas y la número 4 las más pequeñas.	25
3.2.	Conjunto de funciones base <i>b-spline</i> multiescala definidas en 2D, a lo largo del plano x, y . Cada panel muestra las <i>b-splines</i> cúbicas en 2D de cada escala, donde la número 0 es la que incluye funciones más grandes y la número 3 aquellas más pequeñas en extensión.	26
3.3.	Geometría del caso de una falla vertical de rumbo. El panel de la izquierda muestra la grilla que define el dominio donde se estiman las dislocaciones (con exageración vertical), los triángulos invertidos indican la distribución de estaciones en superficie, posicionadas en este caso cada 10 km; las subfallas se muestran con líneas grises, destacando en blanco sus puntos centrales, éstas están enumeradas de abajo hacia arriba. El panel derecho presenta las funciones base <i>b-splines</i> cúbicas y su extensión en profundidad para cada escala; éstas están evaluadas en los puntos centrales de las subfallas (que también se indican con los puntos rojos en el eje de profundidad del panel derecho).	27
3.4.	Malla triangularizada completa para el caso de la zona de Illapel. A la izquierda se muestra la vista en planta de ella, cada triángulo contiene un conjunto de fuentes puntuales, cuya profundidad es representada por la escala de colores. El cuadro negro muestra una vista ampliada a la distribución de las fuentes en los triángulos cercanos a la costa. La línea segmentada naranja muestra la zona regular en la que se definió originalmente el dominio de las funciones base <i>b-splines</i> en el área. A la derecha se expone la distribución de la malla de fuentes puntuales en profundidad, de acuerdo al modelo <i>Slab 2</i> del contacto de subducción en la zona de Illapel; además los triángulos invertidos negros indican la ubicación en superficie de las estaciones GNSS consideradas en este estudio.	29
3.5.	Conjunto de funciones base <i>b-splines</i> para la zona de Illapel en coordenadas proyectadas (con referencia en la coordenada $72^\circ W, 31^\circ S$). Cada panel muestra las <i>b-splines</i> cúbicas de las distintas escalas, donde la escala 0 es la que incluye las funciones más extensas espacialmente y la número 3 aquellas más finas. . .	30

3.6.	Ángulos relacionados a la parametrización de los elementos discretos de la malla triangular. Las flechas azules simbolizan las direcciones de strike (ϕ) y <i>up-dip</i> (δ) de un triángulo dado, mientras que las flechas rojas al segundo sistema coordinado formado por θ y θ_P , direccionado tal que θ sea paralelo al <i>rake</i> promedio del terremoto (λ).	34
3.7.	Comparación de las amplitudes de las columnas de la matriz $\underline{\underline{G}}$ (generalizada), a) sin normalizar y b) con la normalización propuesta ($\underline{\underline{G}}_{\text{Norm}}$), para cada una de las escalas.	36
3.8.	(Panel superior) En negro los datos sintéticos de la curva 1D y en puntos grises los respectivos datos con ruido aleatorio. (Paneles inferiores) Conjunto de funciones base para el dominio elegido; en cada cuadro se muestran las <i>b-splines</i> cúbicas de cada escala, donde la número 0 incluye las funciones más extensas y la número 4 las más reducidas en el rango.	39
3.9.	Curvas L para la resolución del problema inverso del caso de curvas 1D. Inversiones regularizadas con (a) norma L2 y (b) norma L1, ambas considerando datos sintéticos con ruido aleatorio añadido. Los números en gris indican el modelo asociado a cada punto negro en la curva. Los paneles inferiores son el <i>zoom</i> señalado con el cuadro verde de los paneles superiores. Los puntos de colores destacan los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento en cada caso.	40
3.10.	Resultados de los modelos elegidos en las inversiones de curvas 1D, regularizadas con a) norma L2 y b) norma L1. Los primeros paneles comparan los datos sintéticos con los predichos usando la contribución de todas las funciones base (curva roja) y con solo las mayores al umbral <i>NonZero</i> =0.25 (curva azul); la cantidad de funciones es detallada en el cuadro con la razón respecto al total de <i>b-splines</i> (206). Los paneles inferiores muestran las amplitudes de las <i>b-splines</i> en cada escala, en color gris aquellas con amplitud menor al umbral.	42
3.11.	Superficies 2D sintéticas, en el panel izquierdo se muestra la señal original compuesta con una exponencial extensa en el rango y dos asimétricas de distinto ancho y amplitud máxima. En el panel derecho se exhibe la misma superficie con ruido aleatorio añadido.	45
3.12.	Conjunto de funciones base 2D para la inversión de superficies, cada panel muestra las <i>b-splines</i> cúbicas en 2D de cada escala, donde la número 0 es la que incluye funciones más grandes y la número 3 aquellas más reducidas en extensión.	46
3.13.	Curvas L para la resolución del problema inverso del caso de superficies. Inversiones regularizadas con (a) norma L2 y (b) norma L1, ambas considerando datos sintéticos con ruido aleatorio añadido. Los números en gris indican el modelo asociado a cada punto negro en la curva. Los paneles inferiores son el <i>zoom</i> señalado con el cuadro verde de los paneles superiores. Los puntos de colores destacan los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento en cada caso.	48

3.14.	Resultados de los modelos seleccionados de la inversión de superficies, con una regularización con norma L2. En el primer panel se muestra la superficie con ruido aleatorio añadido. Cada columna corresponde a uno de los modelos elegidos, a distintos grados de amortiguamiento. La primera fila muestra los resultados completos, la segunda los modelos obtenidos únicamente con la contribución de las <i>b-splines</i> con amplitud sobre el umbral (<i>NonZero</i>) y en los paneles inferiores la contribución de las <i>b-splines</i> en las distintas escalas; en cada una de ellas se especifica el número de funciones no nulas (<i>NonZero</i>) del total de cada escala.	49
3.15.	Resultados de los modelos seleccionados de la inversión de superficies con una regularización con norma L1. En el primer panel se muestra la superficie con ruido aleatorio añadido. Cada columna corresponde a uno de los modelos elegidos, a distintos grados de amortiguamiento. La primera fila muestra los resultados completos, la segunda los modelos obtenidos únicamente con la contribución de las <i>b-splines</i> con amplitud sobre el umbral (<i>NonZero</i>) y en los paneles inferiores la contribución de las <i>b-splines</i> en las distintas escalas; en cada una de ellas se especifica el número de funciones no nulas (<i>NonZero</i>) del total de cada escala.	50
3.16.	Esquema de la estructura principal de MUSE.	52
3.17.	Composición del paquete MUSE en el desarrollo de esta tesis.	53
4.1.	Geometría del caso de una falla vertical, ejemplo de una dislocación unitaria en la subfalla 15, enumeradas de abajo hacia arriba. (De izquierda a derecha y arriba abajo) El primer panel muestra la grilla que define el dominio donde se estiman las dislocaciones y la distribución de estaciones en superficie (triángulos invertidos), posicionadas en este caso cada 10 km; las subfallas se muestran con líneas grises, destacando en blanco sus puntos centrales. La escala de color indica los desplazamientos al interior del semi-espacio, para una dislocación unitaria en la subfalla 15 (señalada con amarillo en el primer cuadro). Notar que los desplazamientos de mayor magnitud se concentran alrededor de dicha subfalla. El panel derecho presenta las funciones base <i>b-splines</i> cúbicas y su extensión en profundidad para cada escala; éstas están evaluadas en los puntos centrales de las subfallas (puntos rojos en el eje de profundidad). El panel inferior exhibe los desplazamientos en superficie estimados para cada posición de observación. . .	55
4.2.	Modelos de <i>slip</i> de los diversos <i>test</i> del caso de falla vertical. a) Modelos en profundidad, las barras de colores representan la amplitud en cada subfalla en el respectivo modelo, numerados del <i>S0</i> al <i>S4</i> . Los cuadros y valores en gris del lado izquierdo indican la numeración de las subfallas, desde lo más profundo a lo más superficial en <i>Z</i> . b) Desplazamientos sintéticos en superficie para cada modelo de <i>slip</i> , para la configuración de estaciones cada 1 km.	56
4.3.	Curvas L para la resolución del problema inverso del caso de una falla vertical, con un <i>slip</i> sintético dado por el modelo <i>S4</i> , para una distribución de estaciones cada 1 km. Inversiones regularizadas con (a) norma L2 y (b) norma L1, ambas considerando datos sintéticos con ruido aleatorio añadido. Los números en gris indican el modelo asociado a cada punto negro en la curva. Los paneles inferiores son el <i>zoom</i> señalado con el cuadro verde de los paneles superiores. Los puntos de colores destacan los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento en cada caso.	58

- 4.4. Resultados de la inversión del modelo de *slip* sintético *S4* (estaciones cada 1 km), con una regularización con norma L2. Cada columna corresponde a uno de los modelos seleccionados, a distintos grados de amortiguamiento. En la primera fila con barras rosadas se muestran los modelos totales, la curva negra exhibe el *slip* obtenido con las funciones mayores a *NonZero* y la curva gris el *slip* relacionado a las funciones menores al umbral. Los números de colores señalan la razón del área bajo cada curva de *slip*, con respecto del área del *slip S4* (línea segmentada azul). Los paneles de la segunda fila muestran, para cada modelo, la contribución de las funciones base en las diferentes escalas; en gris las *b-splines* con amplitud bajo el umbral. Los números en el cuadro indican la cantidad de funciones base mayores a *NonZero*, respecto del total (31). El último panel muestra la comparación de los desplazamientos en superficie, sintéticos (con y sin ruido) y los predichos de cada modelo seleccionado. 60
- 4.5. Resultados de la inversión del modelo de *slip* sintético *S4* (estaciones cada 1 km), con una regularización con norma L1. Cada columna corresponde a uno de los modelos seleccionados, a distintos grados de amortiguamiento. En la primera fila con barras rosadas se muestran los modelos totales, la curva negra exhibe el *slip* obtenido con las funciones mayores a *NonZero* y la curva gris el *slip* relacionado a las funciones menores al umbral. Los números de colores señalan la razón del área bajo cada curva de *slip*, con respecto del área del *slip S4* (línea segmentada azul). Los paneles de la segunda fila muestran, para cada modelo, la contribución de las funciones base en las diferentes escalas; en gris las *b-splines* con amplitud bajo el umbral. Los números en el cuadro indican la cantidad de funciones base mayores a *NonZero*, respecto del total (31). El último panel muestra la comparación de los desplazamientos en superficie, sintéticos (con y sin ruido) y los predichos de cada modelo seleccionado. 61
- 4.6. Curvas L para la resolución del problema inverso del caso de una falla vertical, con un *slip* sintético dado por el modelo *S0*, para una distribución de estaciones cada 1 km. Inversiones regularizadas con (a) norma L2 y (b) norma L1, ambas considerando datos sintéticos con ruido aleatorio añadido. Los números en gris indican el modelo asociado a cada punto negro en la curva. Los paneles inferiores son el *zoom* señalado con el cuadro verde de los paneles superiores. Los puntos de colores destacan los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento en cada caso. 63
- 4.7. Resultados de la inversión del modelo de *slip* sintético *S0* (estaciones cada 1 km), con una regularización con norma L2. Cada columna corresponde a uno de los modelos seleccionados, a distintos grados de amortiguamiento. En la primera fila con barras rosadas se muestran los modelos totales, la curva negra exhibe el *slip* obtenido con las funciones mayores a *NonZero* y la curva gris el *slip* relacionado a las funciones menores al umbral. Los números de colores señalan la razón del área bajo cada curva de *slip*, con respecto del área del *slip S0* (línea segmentada azul). Los paneles de la segunda fila muestran, para cada modelo, la contribución de las funciones base en las diferentes escalas; en gris las *b-splines* con amplitud bajo el umbral. Los números en el cuadro indican la cantidad de funciones base mayores a *NonZero*, respecto del total (31). El último panel muestra la comparación de los desplazamientos en superficie, sintéticos (con y sin ruido) y los predichos de cada modelo seleccionado. 65

4.8.	Resultados de la inversión del modelo de <i>slip</i> sintético S_0 (estaciones cada 1 km), con una regularización con norma L1. Cada columna corresponde a uno de los modelos seleccionados, a distintos grados de amortiguamiento. En la primera fila con barras rosadas se muestran los modelos totales, la curva negra exhibe el <i>slip</i> obtenido con las funciones mayores a <i>NonZero</i> y la curva gris el <i>slip</i> relacionado a las funciones menores al umbral. Los números de colores señalan la razón del área bajo cada curva de <i>slip</i> , con respecto del área del <i>slip</i> S_0 (línea segmentada azul). Los paneles de la segunda fila muestran, para cada modelo, la contribución de las funciones base en las diferentes escalas; en gris las <i>b-splines</i> con amplitud bajo el umbral. Los números en el cuadro indican la cantidad de funciones base mayores a <i>NonZero</i> , respecto del total (31). El último panel muestra la comparación de los desplazamientos en superficie, sintéticos (con y sin ruido) y los predichos de cada modelo seleccionado.	66
4.9.	Malla de fuentes puntuales seleccionada para el caso de la zona de Illapel, cuya profundidad es representada por la escala de colores. Los cuadrados negros muestran la posición de las estaciones GNSS – y sus nombres – considerados en este estudio. La línea segmentada naranja representa el dominio donde se definen las funciones base <i>b-splines</i> en las múltiples escalas.	69
4.10.	<i>Tests</i> sintéticos de tablero de ajedrez. La escala de grises representa el <i>slip</i> en las fuentes puntuales. En cada caso se muestran los desplazamientos sintéticos generados por cada patrón, con ruido aleatorio añadido por componente. Las flechas verdes exhiben las componentes horizontales (cada título señala el desplazamiento máximo en la componente E-W) y los círculos la componente vertical (representados por la segunda escala de color).	70
4.11.	<i>Tests</i> sintéticos con distribuciones de dislocación elipsoidales. La escala de tonos cálidos representa el <i>slip</i> en las fuentes puntuales. En cada caso se muestran los desplazamientos sintéticos generados por cada patrón, con ruido aleatorio añadido por componente. Las flechas verdes exhiben las componentes horizontales (cada título señala el desplazamiento máximo E-W) y los círculos la componente vertical (representados por la segunda escala de color). El cuadro gris en la esquina inferior derecha muestra la magnitud de momento sísmico M_w y M_0 asociado al <i>slip</i> de cada <i>test</i>	71
4.12.	a) <i>Test</i> sintético elipse 4, los datos sintéticos que se buscan ajustar están representados por las flechas verdes en la componente horizontal, y en la vertical por los círculos de este panel (a). c - d) Comparación de resultados para el modelo número 64, de la inversión del <i>test</i> sintético elipse 4, sin normalizar, utilizando (c) la matriz \underline{B} completa y (d) la matriz \underline{B}^+ para evaluar la condición de positividad en la resolución del problema inverso. En cada caso se muestra el modelo de <i>slip</i> obtenido, representado con la escala de tonos cálidos y los desplazamientos predichos (\underline{d}_{pred}), simbolizados en la componente horizontal con flechas negras y en la vertical con círculos (representados por la segunda escala de color). El panel b) muestra la diferencia de los modelos de dislocación obtenidos con \underline{B} y \underline{B}^+ , simbolizado con la escala de púrpura a verde, en unidades de centímetros.	75

4.13.	a) <i>Test</i> sintético tablero de ajedrez 3, los datos sintéticos que se buscan ajustar están representados por las flechas verdes en la componente horizontal, y en la vertical por los círculos de este panel (a). c - d) Comparación de resultados para el modelo número 82, de la inversión del <i>test</i> sintético tablero de ajedrez 3, sin normalizar, utilizando (c) la matriz \underline{B} completa y (d) la matriz \underline{B}^+ para evaluar la condición de positividad en la resolución del problema inverso. En cada caso se muestra el modelo de <i>slip</i> obtenido, representado con la escala de grises y los desplazamientos predichos (\underline{d}_{pred}), simbolizados en la componente horizontal con flechas negras y en la vertical con círculos (representados por la segunda escala de color). El panel b) muestra la diferencia de los modelos de dislocación obtenidos con \underline{B} y \underline{B}^+ , simbolizado con la escala de púrpura a verde, en unidades de centímetros.	76
4.14.	Curvas L para la resolución del problema inverso del <i>test</i> sintético elipse 4 en la geometría de Illapel. (a) Inversión L1 sin normalizar e (b) Inversión L1 considerando la normalización propuesta. Los números en gris indican el modelo asociado a cada punto negro en la curva. Los paneles inferiores son el <i>zoom</i> señalado con el cuadro verde de los paneles superiores. Los puntos de colores destacan los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento en cada caso.	77
4.15.	Inversión <i>test</i> sintético elipse 4, sin normalizar . Panel a) Modelo elipse 4, los datos sintéticos que se buscan ajustar están representados por las flechas verdes en la componente horizontal, y en la vertical por los círculos de este panel (a). b - e) Modelos de <i>slip</i> seleccionados de la inversión L1 sin normalizar, representados por las respectivas escalas de tonos cálidos. Las flechas negras muestran la componente horizontal de los desplazamientos predichos (\underline{d}_{pred}); los títulos especifican los desplazamientos horizontales máximos en la componente E-W. Los círculos representan el desplazamiento predicho en la componente vertical (segunda escala de color, igual para todas las figuras).	79
4.16.	Inversión <i>test</i> sintético elipse 4, normalizada . Panel a) Modelo elipse 4, los datos sintéticos que se buscan ajustar están representados por las flechas verdes en la componente horizontal, y en la vertical por los círculos de este panel (a). b - f) Modelos de <i>slip</i> seleccionados de la inversión L1 normalizada, representados por las respectivas escalas de tonos cálidos. Las flechas negras muestran la componente horizontal de los desplazamientos predichos (\underline{d}_{pred}); los títulos especifican los desplazamientos horizontales máximos en la componente E-W. Los círculos representan el desplazamiento predicho en la componente vertical (segunda escala de color, igual para todas las figuras).	81
4.17.	Curvas L para la resolución del problema inverso del <i>test</i> sintético tablero de ajedrez 3 en la geometría de Illapel. (a) Inversión L1 sin normalizar e (b) Inversión L1 considerando la normalización propuesta. Los números en gris indican el modelo asociado a cada punto negro en la curva. Los paneles inferiores son el <i>zoom</i> señalado con el cuadro verde de los paneles superiores. Los puntos de colores destacan los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento en cada caso.	84

4.18.	Inversión <i>test</i> sintético tablero de ajedrez 3, sin normalizar . Panel a) Modelo tablero de ajedrez 3, los datos sintéticos que se buscan ajustar están representados por las flechas verdes en la componente horizontal, y en la vertical por los círculos de este panel (a). b - e) Modelos de <i>slip</i> seleccionados de la inversión L1 sin normalizar, representados por las respectivas escalas de grises. Las flechas negras muestran la componente horizontal de los desplazamientos predichos (\underline{d}_{pred}); los títulos especifican los desplazamientos horizontales máximos en la componente E-W. Los círculos representan el desplazamiento predicho en la componente vertical (segunda escala de color, igual para todas las figuras). . .	85
4.19.	Inversión <i>test</i> sintético tablero de ajedrez 3, normalizada . Panel a) Modelo tablero de ajedrez 3, los datos sintéticos que se buscan ajustar están representados por las flechas verdes en la componente horizontal, y en la vertical por los círculos de este panel (a). b - e) Modelos de <i>slip</i> seleccionados de la inversión L1 normalizada, representados por las respectivas escalas de grises. Las flechas negras muestran la componente horizontal de los desplazamientos predichos (\underline{d}_{pred}); los títulos especifican los desplazamientos horizontales máximos en la componente E-W. Los círculos representan el desplazamiento predicho en la componente vertical (segunda escala de color, igual para todas las figuras). . .	88
5.1.	Desplazamientos cosísmicos del terremoto M_w 8.3 de Illapel de 2015, compilados por Klein et al. (2017). Las flechas moradas indican los desplazamientos horizontales, mientras que los círculos externos muestran el desplazamiento vertical (escala de azules y rojos) y los internos la desviación estándar de las mediciones de alzamiento o subsidencia (escala de grises).	92
5.2.	Curva L asociada a la inversión L1, dip-slip , sin normalizar, de los datos observados para el desplazamiento cosísmico del terremoto de Illapel. Los números en gris indican el modelo asociado a cada punto negro en la curva. El panel inferior es el <i>zoom</i> señalado con el cuadro verde del panel superior. Los puntos de colores muestran los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento. . .	94
5.3.	Inversión cosísmico del terremoto M_w 8.3 de Illapel de 2015, componente dip-slip . a) Observaciones de desplazamiento cosísmico del terremoto de Illapel (\underline{d}_{obs}), representados por las flechas púrpura en la componente horizontal, y en la vertical por los círculos de este panel (a). b - f) Modelos de <i>slip</i> obtenidos de la inversión L1, <i>dip-slip</i> , sin normalizar; representados por las respectivas escalas de tonos cálidos. Las flechas negras muestran la componente horizontal de los desplazamientos predichos (\underline{d}_{pred}); los títulos especifican los desplazamientos máximos en la componente E-W. Los círculos representan la componente vertical de los desplazamientos predichos (segunda escala de color, igual para todas las figuras).	95
5.4.	Curva L asociada a la inversión L1, theta-slip (09) , sin normalizar, de los datos observados para el desplazamiento cosísmico del terremoto de Illapel. Los números en gris indican el modelo asociado a cada punto negro en la curva. El panel inferior es el <i>zoom</i> señalado con el cuadro verde del panel superior. Los puntos de colores muestran los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento.	98

5.5.	Inversión cosísmico del terremoto M_w 8.3 de Illapel de 2015, componente <i>theta-slip</i> 09 . a) Observaciones de desplazamiento cosísmico del terremoto de Illapel (\underline{d}_{obs}), representados por las flechas púrpura en la componente horizontal, y en la vertical por los círculos de este panel (a). b - f) Modelos de <i>slip</i> obtenidos de la inversión L1 <i>theta-slip</i> (09) , sin normalizar; representados por las respectivas escalas de tonos cálidos. Las flechas negras muestran la componente horizontal de los desplazamientos predichos (\underline{d}_{pred}); los títulos especifican los desplazamientos máximos en la componente E-W. Los círculos representan la componente vertical de los desplazamientos predichos (segunda escala de color, igual para todas las figuras).	99
5.6.	Curva L asociada a la inversión L1, <i>theta-slip</i> (11) , sin normalizar, de los datos observados para el desplazamiento cosísmico del terremoto de Illapel. Los números en gris indican el modelo asociado a cada punto negro en la curva. El panel inferior es el <i>zoom</i> señalado con el cuadro verde del panel superior. Los puntos de colores muestran los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento.	101
5.7.	Inversión cosísmico del terremoto M_w 8.3 de Illapel de 2015, componente <i>theta-slip</i> 11 . a) Observaciones de desplazamiento cosísmico del terremoto de Illapel (\underline{d}_{obs}), representados por las flechas púrpura en la componente horizontal, y en la vertical por los círculos de este panel (a). b - f) Modelos de <i>slip</i> obtenidos de la inversión L1 <i>theta-slip</i> (11) , sin normalizar; representados por las respectivas escalas de tonos cálidos. Las flechas negras muestran la componente horizontal de los desplazamientos predichos (\underline{d}_{pred}); los títulos especifican los desplazamientos máximos en la componente E-W. Los círculos representan la componente vertical de los desplazamientos predichos (segunda escala de color, igual para todas las figuras).	103
5.8.	Comparación de resultados seleccionados. a) Observaciones de desplazamiento cosísmico del terremoto de Illapel (\underline{d}_{obs}), representados por las flechas púrpura en la componente horizontal, y en la vertical por los círculos de este panel (a). b - c) Modelos de <i>slip</i> elegidos de las inversiones <i>theta-slip</i> 09 y 11 , representados por la escala de tonos cálidos. Las flechas negras muestran la componente horizontal y los círculos la componente vertical de los desplazamientos predichos (\underline{d}_{pred}) obtenidos. d - e) Modelos de <i>slip</i> y las diferencias entre los desplazamientos observados y los predichos ($\underline{d}_{obs} - \underline{d}_{pred}$) en cada caso. Las flechas celeste muestran las diferencias en la componente horizontal y los círculos la correspondiente a la componente vertical (representado por la segunda escala de color). Los títulos de d) y e) exhiben las diferencias máximas en cada componente. . .	105
5.9.	(Visión en planta) Amplitud de las <i>b-splines</i> asociadas a los modelos de <i>slip</i> (a) número 50 de la inversión con <i>theta-slip</i> 09 y (b) número 64, de la inversión con <i>theta-slip</i> 11 . Cada panel muestra las funciones base <i>b-splines</i> cúbicas de las distintas escalas, donde la escala 0 es la que incluye las funciones más extensas en el espacio y la número 3 aquellas más finas.	107
6.1.	Algunos de los modelos cosísmicos de la distribución de deslizamiento para el terremoto de Illapel del 2015 publicados y su comparación con los obtenidos en este estudio.	112

A.1.	Diferencia entre las mallas en la zona de estudio, con la geometría del contacto proyectada en superficie. Los puntos azules muestran la distribución de las fuentes puntuales consideradas en la malla triangularizada hasta 55 km de profundidad en coordenadas Mercator Transversal (para la cual se calcularon las funciones de Green). Los cuadros naranjos muestran los puntos máximos y mínimos E y N que permiten circunscribir la malla en un rectángulo. Los pequeños puntos rojos muestran la nueva malla regular, utilizada para definir inicialmente las funciones base.	120
A.2.	Distribución de las estaciones de medición GNSS, recopilados por Klein et al. (2017) y situados tanto en Chile como en Argentina. La escala de color muestra la profundidad de las fuentes puntuales de la malla utilizada para el estudio en la zona de Illapel.	121
B.1.	Vista ampliada de las soluciones de los modelos seleccionados de la inversión con norma L2 (Figura 3.14). El <i>zoom</i> a las funciones base (paneles inferiores) es de -0.1 a 0.1. Se detallan los datos con ruido y las soluciones para tres parámetros de amortiguamiento.	122
B.2.	Vista ampliada de las soluciones de los modelos seleccionados de la inversión con norma L1 (Figura 3.15). El <i>zoom</i> a las funciones base (paneles inferiores) es de -0.01 a 0.01. Se detallan los datos con ruido y las soluciones para tres parámetros de amortiguamiento.	123
C.1.	Desplazamientos sintéticos en superficie dados por los modelos de <i>slip</i> de entrada, para una configuración de estaciones cada 10 km.	124
C.2.	Curvas L para la resolución del problema inverso del caso de una falla vertical, con un <i>slip</i> sintético dado por <i>S4</i> , para una distribución de estaciones cada 10 km. Inversiones regularizadas con (a) norma L2 y (b) norma L1, ambas considerando datos sintéticos con ruido aleatorio añadido. Los números en gris indican el modelo asociado a cada punto negro en la curva. Los paneles inferiores son el <i>zoom</i> señalado con el cuadro verde de los paneles superiores. Los puntos de colores destacan los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento en cada caso.	125
C.3.	Resultados de la inversión del modelo de <i>slip</i> sintético <i>S4</i> (estaciones cada 10 km), con una regularización con norma L2. Cada columna corresponde a uno de los modelos seleccionados, a distintos grados de amortiguamiento. En la primera fila con barras rosadas se muestran los modelos totales, la curva negra exhibe el <i>slip</i> obtenido con las funciones mayores a <i>NonZero</i> y la curva gris el <i>slip</i> relacionado a las funciones menores al umbral. Los números de colores señalan la razón del área bajo cada curva de <i>slip</i> , con respecto del área del <i>slip</i> <i>S4</i> (línea segmentada azul). Los paneles de la segunda fila muestran, para cada modelo, la contribución de las funciones base en las diferentes escalas; en gris las <i>b-splines</i> con amplitud bajo el umbral. Los números en el cuadro indican la cantidad de funciones base mayores a <i>NonZero</i> , respecto del total (31). El último panel muestra la comparación de los desplazamientos en superficie, sintéticos (con y sin ruido) y los predichos de cada modelo seleccionado.	126

C.4.	Resultados de la inversión del modelo de <i>slip</i> sintético $S4$ (estaciones cada 10 km), con una regularización con norma L1. Cada columna corresponde a uno de los modelos seleccionados, a distintos grados de amortiguamiento. En la primera fila con barras rosadas se muestran los modelos totales, la curva negra exhibe el <i>slip</i> obtenido con las funciones mayores a <i>NonZero</i> y la curva gris el <i>slip</i> relacionado a las funciones menores al umbral. Los números de colores señalan la razón del área bajo cada curva de <i>slip</i> , con respecto del área del <i>slip</i> $S4$ (línea segmentada azul). Los paneles de la segunda fila muestran, para cada modelo, la contribución de las funciones base en las diferentes escalas; en gris las <i>b-splines</i> con amplitud bajo el umbral. Los números en el cuadro indican la cantidad de funciones base mayores a <i>NonZero</i> , respecto del total (31). El último panel muestra la comparación de los desplazamientos en superficie, sintéticos (con y sin ruido) y los predichos de cada modelo seleccionado.	127
C.5.	Curvas L para la resolución del problema inverso del caso de una falla vertical, con un <i>slip</i> sintético dado por $S0$, para una distribución de estaciones cada 10 km. Inversiones regularizadas con (a) norma L2 y (b) norma L1, ambas considerando datos sintéticos con ruido aleatorio añadido. Los números en gris indican el modelo asociado a cada punto negro en la curva. Los paneles inferiores son el <i>zoom</i> señalado con el cuadro verde de los paneles superiores. Los puntos de colores destacan los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento en cada caso.	128
C.6.	Resultados de la inversión del modelo de <i>slip</i> sintético $S0$ (estaciones cada 10 km), con una regularización con norma L2. Cada columna corresponde a uno de los modelos seleccionados, a distintos grados de amortiguamiento. En la primera fila con barras rosadas se muestran los modelos totales, la curva negra exhibe el <i>slip</i> obtenido con las funciones mayores a <i>NonZero</i> y la curva gris el <i>slip</i> relacionado a las funciones menores al umbral. Los números de colores señalan la razón del área bajo cada curva de <i>slip</i> , con respecto del área del <i>slip</i> $S0$ (línea segmentada azul). Los paneles de la segunda fila muestran, para cada modelo, la contribución de las funciones base en las diferentes escalas; en gris las <i>b-splines</i> con amplitud bajo el umbral. Los números en el cuadro indican la cantidad de funciones base mayores a <i>NonZero</i> , respecto del total (31). El último panel muestra la comparación de los desplazamientos en superficie, sintéticos (con y sin ruido) y los predichos de cada modelo seleccionado.	129
C.7.	Resultados de la inversión del modelo de <i>slip</i> sintético $S0$ (estaciones cada 10 km), con una regularización con norma L1. Cada columna corresponde a uno de los modelos seleccionados, a distintos grados de amortiguamiento. En la primera fila con barras rosadas se muestran los modelos totales, la curva negra exhibe el <i>slip</i> obtenido con las funciones mayores a <i>NonZero</i> y la curva gris el <i>slip</i> relacionado a las funciones menores al umbral. Los números de colores señalan la razón del área bajo cada curva de <i>slip</i> , con respecto del área del <i>slip</i> $S0$ (línea segmentada azul). Los paneles de la segunda fila muestran, para cada modelo, la contribución de las funciones base en las diferentes escalas; en gris las <i>b-splines</i> con amplitud bajo el umbral. Los números en el cuadro indican la cantidad de funciones base mayores a <i>NonZero</i> , respecto del total (31). El último panel muestra la comparación de los desplazamientos en superficie, sintéticos (con y sin ruido) y los predichos de cada modelo seleccionado.	130

D.1.	Esquema de la búsqueda de la dirección de rotación en el eje (E, N). Las flechas azules representan la dirección de movimiento vista en planta para ambas soluciones de mecanismo focal, las flechas tenues muestran el rango de rotaciones definido por ambas soluciones (Tabla 5.1), mientras que la flecha morada exhibe la dirección seleccionada de este rango. Estas direcciones están referenciadas respecto al norte con el ángulo Az	131
D.2.	Direcciones del a) <i>strike</i> , b) <i>up-dip</i> , c) <i>rake</i> y d) valor del ángulo de <i>rake</i> para cada elemento discreto de la malla triangularizada.	132
E.1.	Comparación de las funciones base en coordenadas Mercator Transversal, a) evaluadas en la malla de fuentes puntuales originales y b) aquellas evaluadas en la nueva colección de puntos para conformar la matriz \underline{B}^+	134
E.2.	Curvas L para la resolución del problema inverso del <i>test</i> sintético elipse 4 en la geometría de Illapel. Inversión L1 sin normalizar, utilizando (a) la matriz \underline{B} y (b) la matriz \underline{B}^+ para evaluar la condición de positividad. Los números en gris indican el modelo asociado a cada punto negro en la curva. Los paneles inferiores son el <i>zoom</i> señalado con el cuadro verde de los paneles superiores. Los puntos de colores destacan los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento en cada caso.	135
E.3.	(Visión en planta) Comparación de la amplitud de las <i>b-splines</i> asociadas a las soluciones de la inversión del <i>test</i> sintético elipse 4, (a) utilizando la matriz \underline{B} y (b) usando la matriz \underline{B}^+ para evaluar la condición de positividad, todo esto para el modelo número 64 (i.e., α_{64}). Cada panel muestra las <i>b-splines</i> cúbicas de las distintas escalas, donde la escala 0 es la que incluye las funciones más extensas en el espacio y la número 3 aquellas más finas.	136
E.4.	Curvas L para la resolución del problema inverso del <i>test</i> sintético tablero de ajedrez 3 en la geometría de Illapel. Inversión L1 sin normalizar, utilizando (a) la matriz \underline{B} y (b) la matriz \underline{B}^+ para evaluar la condición de positividad. Los números en gris indican el modelo asociado a cada punto negro en la curva. Los paneles inferiores son el <i>zoom</i> señalado con el cuadro verde de los paneles superiores. Los puntos de colores destacan los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento en cada caso.	137
E.5.	(Visión en planta) Comparación de la amplitud de las <i>b-splines</i> asociadas a las soluciones de la inversión del <i>test</i> sintético tablero de ajedrez 3, (a) utilizando la matriz \underline{B} y (b) usando la matriz \underline{B}^+ para evaluar la condición de positividad, todo esto para el modelo número 82 (i.e., α_{82}). Cada panel muestra las <i>b-splines</i> cúbicas de las distintas escalas, donde la escala 0 es la que incluye las funciones más extensas en el espacio y la número 3 aquellas más finas.	138
E.6.	(Visión en planta) Comparación de la amplitud de las <i>b-splines</i> en la escala 0, asociadas a las soluciones de la inversión del <i>test</i> sintético elipse 4 , (a) modelo 78 de la inversión sin normalizar y (b) modelo 103 de la inversión normalizada. Zoom a la escala 0 (Referencia Figura E.7).	139
E.7.	(Visión en planta) Comparación de la amplitud de las <i>b-splines</i> asociadas a las soluciones de la inversión del <i>test</i> sintético elipse 4 , (a) modelo 78 de la inversión sin normalizar y (b) modelo 103 de la inversión normalizada. Cada panel muestra las <i>b-splines</i> cúbicas de las distintas escalas, donde la escala 0 es la que incluye las funciones más extensas en el espacio y la número 3 aquellas más finas.	140

E.8.	(Visión en planta) Comparación de la amplitud de las <i>b-splines</i> asociadas a las soluciones de la inversión del <i>test</i> sintético tablero de ajedrez 3 , (a) modelo 82 de la inversión sin normalizar y (b) modelo 101 de la inversión normalizada. Cada panel muestra las <i>b-splines</i> cúbicas de las distintas escalas, donde la escala 0 es la que incluye las funciones más extensas en el espacio y la número 3 aquellas más finas.	141
E.9.	Modelos de <i>slip</i> para algunos modelos seleccionados de la inversión utilizando como rotación el ángulo dado por el primer mecanismo focal para el terremoto de Illapel (Tabla 5.1). Estas soluciones corresponden a las mencionadas en este trabajo como <i>theta-slip 01</i>	142
E.10.	Modelos de <i>slip</i> para algunos modelos seleccionados de la inversión utilizando como rotación el ángulo dado por el segundo mecanismo focal para el terremoto de Illapel (Tabla 5.1). Estas soluciones corresponden a las mencionadas en este trabajo como <i>theta-slip 25</i>	143
E.11.	(Visión de perfil) Amplitud de las <i>b-splines</i> asociadas al modelo de <i>slip</i> número 50, de la inversión con <i>theta-slip 09</i> . Cada panel muestra las <i>b-splines</i> cúbicas de las distintas escalas, donde la escala 0 es la que incluye las funciones más extensas en el espacio y la número 3 aquellas más finas.	144
E.12.	(Visión de perfil) Amplitud de las <i>b-splines</i> asociadas al modelo de <i>slip</i> número 64, de la inversión con <i>theta-slip 11</i> . Cada panel muestra las <i>b-splines</i> cúbicas de las distintas escalas, donde la escala 0 es la que incluye las funciones más extensas en el espacio y la número 3 aquellas más finas.	144
F.1.	Diagrama de una falla <i>strike-slip</i> infinitamente larga, donde la superficie de la Tierra es el plano $x_2 = 0$. La falla yace en el plano normal a x_1 , con <i>slip</i> en la dirección x_3 . Extraído de Segall (2010).	145
F.2.	Dislocación de tornillo, con la línea de dislocación a lo largo de x_3 . El vector de <i>slip</i> \underline{s} muestra el desplazamiento de la superficie trasera con respecto a la frontal, indicando que el <i>slip</i> es lateral-izquierdo. Extraído de Segall (2010).	146
F.3.	Dipolo de dislocación, conformado por un par de dislocaciones de signo opuesto, que se encuentran en $x_2 = -d$ y $x_2 = d$, generando un <i>slip</i> uniforme en el intervalo comprendido entre ambos. Extraído de Segall (2010).	148
F.4.	Dislocación en $x_2 = -d$, y dislocación imagen en $x_2 = d$. Extraído de Segall (2010).	150

Capítulo 1

Introducción

1.1. Ciclo sísmico

El concepto de ciclo sísmico se comienza a plantear con la teoría del rebote elástico de Reid (1910), quien luego de estudiar las observaciones en superficie de la deformación provocada por el terremoto de San Francisco en 1906 (M_w 7.9), postuló que en la vecindad de las líneas de falla, la corteza se deforma lentamente de manera elástica, hasta que se fractura generando un deslizamiento permanente y abrupto entre ambos “bloques” separados por la falla. De esta manera existiría una fase donde la corteza se deforma elásticamente y se acumulan lentamente los esfuerzos a lo largo de la línea de falla y otra en donde ocurre la deformación frágil y rápida, con la liberación abrupta de dichos esfuerzos (e.g., Métois, 2022).

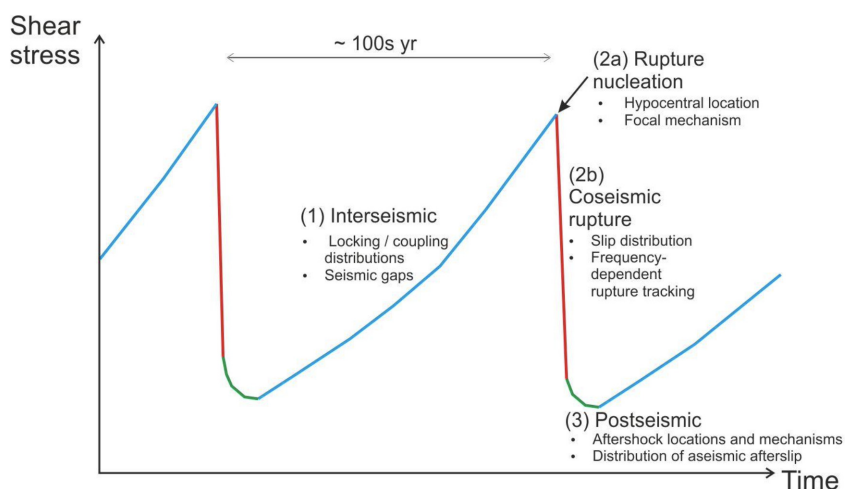


Figura 1.1: Esquema simplificado del ciclo sísmico. Extraído de Hicks (2015).

Sin embargo esta descripción varió con el tiempo, dado el avance del conocimiento (e.g., el planteamiento de la Tectónica de Placas) y el aumento en cantidad y calidad de observaciones sismológicas y geodésicas. Es así como actualmente hay tres fases principales de este ciclo (Figura 1.1), las que serán brevemente descritas a continuación, con énfasis en sus características para una zona de subducción como la de Chile.

Periodo Intersísmico:

Fase más larga del ciclo sísmico, ocurre entre grandes terremotos. Corresponde al periodo en el cual la deformación está dominada por la acumulación de esfuerzo elástico en la litósfera más somera, esto debido al acoplamiento mecánico en el contacto de placas. La placa superior se acorta y se desarrollan esfuerzos compresivos en la dirección horizontal (Govers et al., 2018).

En este periodo se acumula deformación elástica, mayormente en el antearco, lo que finalmente permite realizar una estimación medible del acoplamiento de las placas a partir de observaciones de cómo se está deformando la placa superior. El objetivo principal de estudiar esta etapa es estimar el potencial sismogénico de los futuros grandes terremotos en un área determinada (Hicks, 2015).

Periodo Cosísmico:

Es la etapa más breve, puede durar segundos en el caso de terremotos de pequeñas magnitudes a minutos en el caso de los grandes eventos. Se refiere al momento en que ocurre el terremoto y se desarrolla su ruptura.

En este periodo, la sección que estaba acoplada en el contacto sismogénico de subducción se desacopla y desliza; se relajan los esfuerzos y se libera energía en forma de ondas sísmicas, calor, y ocurre deslizamiento a lo largo del contacto. La placa superior rebota generando desplazamientos en superficie que tienden a seguir un patrón de movimiento en dirección hacia la fosa (e.g., Govers et al., 2018; Métois, 2022).

Periodo Postsísmico:

Corresponde a la etapa posterior a la ocurrencia de un terremoto. Los grandes eventos sísmicos causan una intensa deformación en el campo cercano que puede durar meses o años. Esta etapa se divide en un postsísmico temprano y uno tardío.

En el postsísmico temprano se resalta la ocurrencia de réplicas (importantes no tan sólo porque pueden ayudar a esclarecer características sismogénicas del *megathrust* o contacto de subducción, sino también pueden ayudar a develar otras fallas activas que yacen cerca de dicho contacto (Hicks, 2015)); y de *afterslip*, que corresponde a un deslizamiento lento en el contacto que ocurre después de la ruptura, el cual se ha observado en diversos eventos tanto rodeando la ruptura cosísmica como solapándola (e.g., Perfettini y Avouac, 2004; Johnson et al., 2012; Govers et al., 2018), posterior a esto, la interfaz se volvería a acoplar.

Por otra parte, se ha descrito que en el postsísmico tardío, la relajación de esfuerzos viscoelástica de partes más profundas de la litósfera y astenósfera tiene un rol preponderante, generando un rebote adicional de la placa superior que se desarrolla de manera lenta y por un período más prolongado de tiempo (e.g., Hu et al., 2004; Govers et al., 2018). Con el tiempo la señal postsísmica decae y las observaciones de desplazamiento en la superficie de la corteza se aproximan nuevamente al patrón intersísmico.

1.2. Contexto Sismotectónico de Chile

Chile está ubicado al sur del borde occidental de Sudamérica, formando parte de las zonas de subducción de las costas del océano Pacífico, posicionándolo como uno de los países con mayor actividad sísmica del mundo. Esta región presenta un gran registro histórico de terremotos, destacándose el evento sísmico más grande registrado instrumentalmente (M_w 9.6 Valdivia 1960), además de una vasta cantidad de grandes terremotos ($M_w \geq 7.5$) en los últimos 30 años. Actualmente, se cuenta con una gran cobertura de estaciones y datos geofísicos, geológicos y geodésicos, que son capaces de registrar observaciones de dichos eventos.

En el margen Chileno participan principalmente cuatro placas, Sudamericana, Nazca, Antártica y Scotia (Figura 1.2), siendo la interacción de las dos primeras (en Chile desde Arica – 18°S – al Punto Triple Chileno (CTJ)¹ – ~46°S – cerca de la Península de Taitao), un escenario ideal para estudios en sismología, dada la configuración tectónica relativamente simple, marcada por una rápida y oblicua convergencia de 66 mm/año (e.g., Kendrick et al., 2003).

La edad de la placa oceánica de Nazca varía a lo largo de la fosa Perú-Chile, aumentando de los ~0 Ma en el CTJ a un máximo de ~50 Ma alrededor de los 20°S. La profundidad del fondo oceánico también varía de norte a sur, siendo de unos 3 km en la vecindad del *Ridge* de Chile (o Chile *Rise*), haciéndose mucho más profunda hacia el norte del territorio chileno, alcanzando los 8 km cerca de los 22°S (Contreras-Reyes y Osses, 2010). La subducción del *Ridge* de Juan Fernández cerca de los 33°S separa dos dominios sedimentarios (Völker et al., 2006), al norte una fosa más profunda y con menor cantidad de sedimentos, mientras que al sur, la fosa entre los 34° - 45.5°S está fuertemente sedimentada como resultado de la descarga de ríos y la rápida denudación glacial de los Andes a estas latitudes (Contreras-Reyes y Osses, 2010).

La placa de Nazca alberga una gran cantidad de elementos batimétricos, incluyendo zonas de fractura y *hotspot tracks* (Figura 1.2), los que en su mayoría están en proceso de ser subductados (Herron et al., 1981). Dichos elementos se han relacionado con la segmentación sísmica del margen Perú-Chile (e.g., Contreras-Reyes y Carrizo, 2011), es decir, se ha discutido que podrían propiciar o delimitar espacialmente rupturas de terremotos en la zona de subducción.

1.3. El terremoto de Illapel

La región entre los 30° – 33°S en la zona Centro-Norte de Chile ha sido afectada por grandes terremotos en el contacto sismogénico de subducción. El gran terremoto de 1730 en Chile Central, del cual la porción norte de su extensa ruptura colinda con esta región; y los terremotos M 7.5 de 1880 (Lomnitz, 2004) y M_w 7.9 de 1943 (Beck et al., 1998). Además destaca la ocurrencia de un evento intraplaca de profundidad intermedia correspondiente al terremoto M_w 7.1 de Punitaqui en 1997, cuya profundidad ha sido estimada a unos 68 km (Pardo et al., 2002), y que generó gran nivel de daño en las ciudades y villas de la zona, incluso superior a los eventos de subducción antes mencionados (Fernández et al., 2019).

¹ CTJ por su nombre en inglés, *Chile Triple Junction*.

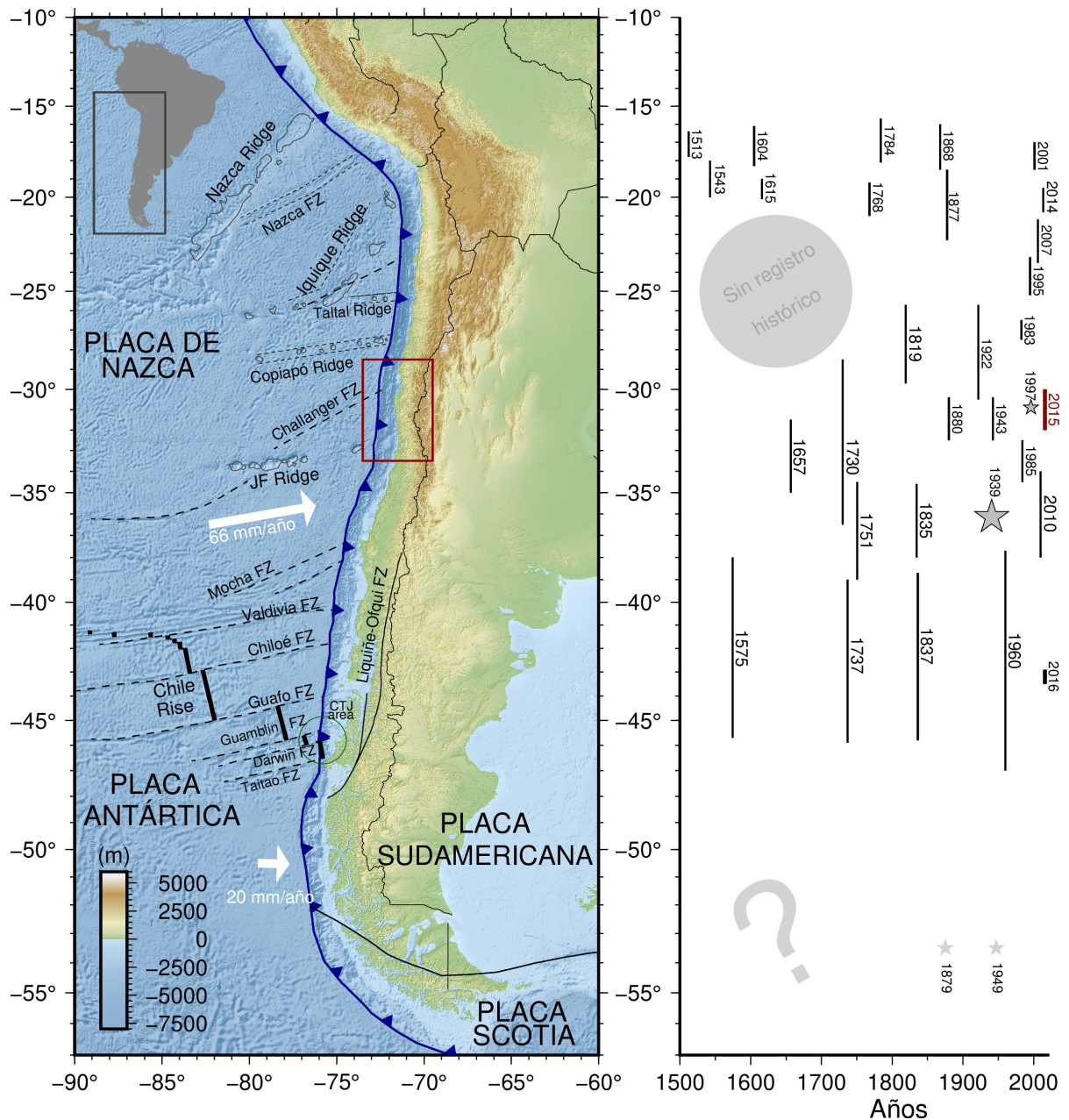


Figura 1.2: Contexto sismotectónico general de Chile y terremotos en el margen. (Panel izquierdo) Velocidades de convergencia de las placas de Nazca (66 mm/año) y Antártica (20 mm/año) con respecto a la Sudamericana, representadas por las flechas blancas proporcionales a la velocidad (Kendrick et al. (2003) y Wang et al. (2007), respectivamente). La línea con triángulos muestra la ubicación de la fosa en el margen, la orientación de dichos triángulos indica la dirección de la subducción. Las líneas gruesas negras representan el Chile *Rise*, mientras que las líneas segmentadas negras y continuas grises exhiben las principales zonas de falla y *ridges* del margen. La escala de color corresponde a la profundidad del fondo oceánico y la altitud de la topografía; el cuadro rojo indica la zona de estudio. (Panel derecho) Extensión latitudinal de rupturas de terremotos ($M_w > 7.0$) en el margen de subducción, modificado de Contreras-Reyes y Carrizo (2011); se añaden algunos eventos de profundidad intermedia (estrellas con borde negro) y los terremotos de Magallanes (estrellas grises), en color rojo se destaca la ruptura del terremoto M_w 8.3 de Illapel 2015.

Debido a la ausencia de grandes terremotos de subducción desde el evento de 1943, la zona fue considerada como una brecha sísmica (Kelleher, 1972), lo cual concordó posteriormente con las estimaciones de acoplamiento mediante observaciones GNSS, de más del 60 % (Métois et al., 2014, 2016).

El día 16 de septiembre de 2015, a las 19:54:31 hora local, ocurrió el terremoto de Illapel, frente a las costas de la Región de Coquimbo, cuya localización hipocentral del Centro Sismológico Nacional corresponde a 71.74°W y 31.64°S , a unos 37 km al SW de la localidad de Canela Baja, con una magnitud M_w 8.4 y una profundidad de 23 km (Barrientos, 2015).

El evento sísmico generó grandes desplazamientos en superficie medidos con GNSS e InSAR; con un máximo desplazamiento en la dirección E-W de poco más de 2 m medido en la costa (209.885 ± 0.239 cm hacia el W en la estación EMAT (Klein et al., 2017)). El posterior *tsunami* ha sido caracterizado en la literatura por su asimetría regional de alturas de *tsunami*, con varias mediciones de *run-up* de ~ 6 m y la máxima de ~ 10.8 m en el sector de Totoral (a los 30.37°S aproximadamente); lo que ha sido atribuido a la configuración de la batimetría de la zona (Aránguiz et al., 2015).

El SHOA² emitió la alerta de *tsunami* para Chile ocho minutos después del terremoto; tres minutos más tarde la ONEMI³ declaró una alerta preventiva de evacuación para la costa chilena completa, ordenando evacuar a cerca de 1 millón de personas en el territorio nacional (Aránguiz et al., 2015). Posteriormente, la ONEMI reportó un total de 15 personas fallecidas producto del evento (Paulik et al., 2021).

El terremoto de Illapel de 2015 es el evento de gran magnitud más reciente ocurrido en Chile Central. A nivel tectónico, ocurrió en un área compleja, cercana a la transición entre un régimen erosivo y uno acrecionario, donde se produce la colisión del *Ridge* de Juan Fernández (JFR) en el margen Chileno de subducción (Contreras-Reyes et al., 2015; Carrasco et al., 2019). La ruptura se habría desarrollado en un área de alto acoplamiento, delimitada por las zonas de bajo acoplamiento (LCZ) La Serena por el norte y San Antonio hacia el sur (Métois et al., 2016); las cuales coincidirían con dos estructuras batimétricas importantes que subductan en esta región, la Zona de Fractura de Challenger (CFZ) y el JFR (Lange et al., 2016; Ruiz et al., 2016).

Algunos trabajos han dado cuenta de una posible interacción entre el evento de Illapel y el terremoto M_w 8.8 del Maule de 2010, ya que posterior a la ocurrencia de este último se observó un cambio en las velocidades GNSS (Ruiz et al., 2016) en la que sería la posterior zona de ruptura del terremoto de Illapel; dicha variación se atribuye a la relajación viscoelástica del manto a escala regional, debido al evento M_w 8.8; señal que habría incrementado las velocidades del periodo inter-sísmico en la zona de Illapel (Klein et al., 2016; Melnick et al., 2017).

² SHOA: Servicio Hidrográfico y Oceanográfico de la Armada de Chile

³ ONEMI: Oficina Nacional de Emergencia del Ministerio del Interior, hoy SENAPRED: Servicio Nacional De Prevención y Respuesta Ante Desastres.

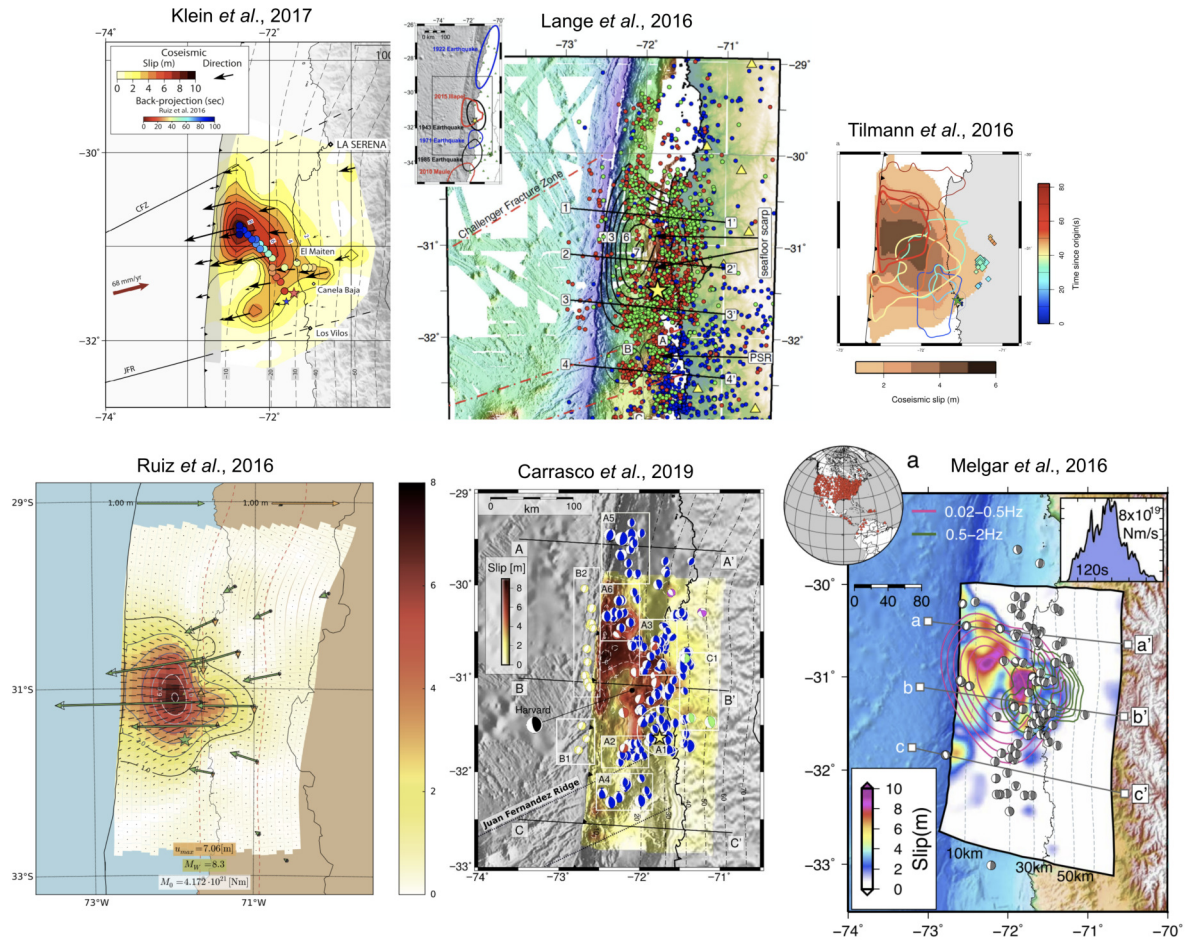


Figura 1.3: Algunos de los modelos cosísmicos de la distribución de deslizamiento para el terremoto de Illapel de 2015 publicados, todos dispuestos y escalados para alinear las latitudes $30^\circ - 32^\circ$ S. En los títulos se añaden las citas respectivas.

Varios son los modelos de dislocación cosísmica para el terremoto de Illapel ya publicados por diversos autores, los que han sido obtenidos con diversas metodologías y tipos de observaciones. Se muestran algunos de ellos en la Figura 1.3, todas las subfiguras están posicionadas y escaladas de manera tal que estén alineadas entre los $30 - 32^\circ$ S. Estos modelos concuerdan más o menos en la extensión espacial, mas no en la heterogeneidad de la dislocación en la zona.

Ruiz et al. (2016) muestran un único parche de *slip* con un máximo de 7 m y una leve extensión del patrón hacia el *down-dip*, resultado similar es obtenido por Lange et al. (2016) y Tilmann et al. (2016), este último con un *slip* máximo de 6 m. Por otro lado, modelos de la dislocación del terremoto, como los de Klein et al. (2017) que obtiene un modelo con el *peak* cerca de la fosa, pero un parche de *slip* secundario hacia el sur y un poco más profundo, también como los de Melgar et al. (2016) y Carrasco et al. (2019), que exhiben más bien una tendencia a una partición de la dislocación en dos dominios, uno hacia el *up-dip* y otro más hacia el *down-dip*, lo que explicaría de mejor forma los efectos observados *post* terremoto. Por ejemplo, la ocurrencia de varios eventos sísmicos *outer-rise*, los cuales si bien estarían relacionados a fallas pre-existentes por flexura de la placa oceánica y al levantamiento que genera el JFR en la zona, habrían sido desencadenados por la transferencia de esfuerzos por la dislocación más cerca de la fosa (Carrasco et al., 2019).

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo General

Lograr un mejor entendimiento del comportamiento mecánico de fallas durante las diferentes etapas del ciclo sísmico, a través de mejoras en la estimación de la dislocación que caracteriza dicho comportamiento. Para ello, se desarrolla una nueva metodología de parametrización y regularización de la dislocación que se desea inferir mediante el problema optimal de inversión, que permite incorporar la heterogeneidad espacial que tienen las observaciones para constreñir la dislocación, logrando obtener soluciones más robustas.

1.4.2. Objetivos Específicos

- Plantear una representación espacial multi-escala de la dislocación en fallas.
- Definir e implementar una metodología de inversión de dislocación cuasi-estática con una representación multi-escala, que en particular permita discernir la escala espacial a la que se puede resolver la dislocación en las diferentes porciones de la falla.
- Comprender las ventajas y limitaciones de la metodología desarrollada.
- Aplicar la metodología al terremoto de Illapel de 2015, para determinar la distribución espacial de la dislocación usando datos GNSS; e interpretar los resultados obtenidos.

1.5. Estructura de la Tesis

Este trabajo de tesis está dividido en seis capítulos principales, los que se describen brevemente a continuación,

- **1er capítulo:** da cuenta de un breve resumen del ciclo sísmico en zonas de subducción; describe el contexto sismotectónico y algunos antecedentes del terremoto M_w 8.3 de Illapel de 2015, el cual se configura como el caso de estudio central de la aplicación de la metodología desarrollada a lo largo de este trabajo. Además, en este capítulo se detallan los objetivos de esta investigación.
- **2do capítulo:** Marco teórico, proporciona la descripción de elementos del estado del arte en temas relacionados a esta tesis; como los modelos de dislocación en fallas, las funciones base a utilizar y el problema inverso.
- **3er capítulo:** corresponde a la metodología, con una minuciosa exposición de cómo se abordó el problema de dislocación en una falla y en el contacto de subducción; se indican los respectivos modelos teóricos y los detalles del esquema de inversión propuesto. Además, se incluye un apartado (correspondiente a la Sección 3.5) con la aplicación de la metodología propuesta a dos ejemplos ilustrativos extra, en 1D y 2D, con el fin de mostrar y comprender las propiedades del enfoque multi-escala propuesto.
- **4to capítulo:** Resultados de las pruebas sintéticas para los dos casos de dislocación cuasi-estática abordados. Se exponen los modelos obtenidos para el problema aplicado a una falla vertical de rumbo teórica y para el contacto de subducción en la zona de Illapel.
- **5to capítulo:** Resultados de la inversión de dislocación cuasi-estática para los datos del cosísmico del terremoto M_w 8.3 de Illapel 2015. Se detallan las observaciones utilizadas y se describen minuciosamente los resultados obtenidos para las dos parametrizaciones implementadas.
- **6to capítulo:** En este capítulo se presenta la discusión de los resultados obtenidos en las pruebas sintéticas y los cálculos con datos reales; se discuten también los aspectos principales de la parametrización propuesta, como sus ventajas y desventajas, junto con ideas de futuras implementaciones en el tema. Además, se incluyen las principales conclusiones del trabajo.

Finalmente, se dispone de un Apéndice que está integrado por cinco pequeños anexos, que apoyan y complementan la información de los capítulos antes descritos.

Aclaración: En este trabajo se aplicó la metodología al problema de dislocación cuasi-estática para el caso de una falla vertical de rumbo y al contacto sismogénico de subducción en la zona del terremoto de Illapel M_w 8.3 de 2015. Ambos casos se refieren a ambientes geológicos diferentes; el primero a una fractura en la corteza que define dos bloques de similar composición, y el segundo al contacto de subducción entre dos placas tectónicas distintas. Para ambos casos se hablará de que se modela una *falla* como concepto común.

Capítulo 2

Marco Teórico

Durante las distintas etapas del ciclo sísmico se producen señales de deformación medibles en la superficie de la Tierra, de especial interés son los procesos que producen estas señales bajo nuestros pies y lograr describirlos es el paso inicial para comprenderlos. Este trabajo se concentra en la dislocación cuasi-estática de la etapa cosísmica, desarrollando una metodología en donde se representa la dislocación utilizando funciones base en un enfoque multi-escala.

En este capítulo se plantean las bases teóricas en que se enmarca esta tesis; los distintos modelos de dislocación que se utilizaron, la definición de las funciones base empleadas y parte del estado del arte en cuanto a las formas de abordar el problema inverso asociado al problema de dislocación en donde se inserta este trabajo.

2.1. Modelos de Dislocación en Fallas

Cuando una superficie de falla o contacto sismogénico es sometido a esfuerzos, si éstos superan el umbral que soporta dicha interfaz, se produce un movimiento relativo entre ambos lados del contacto, el cual se denomina **dislocación**; término que se refiere más precisamente a la discontinuidad en el campo de desplazamientos de un sólido, a lo largo de la falla. Dicha dislocación causa una deformación en el medio, generando señales de deformación medibles por instrumentos geodésicos y sismológicos en la superficie terrestre.

Para el problema cuasi-estático⁴, en un medio elástico, lineal, homogéneo e isotrópico; la relación entre una dislocación en la fuente (e.g., superficie de falla o contacto interplaca de subducción) y los desplazamientos en la superficie terrestre se puede describir de forma general mediante la ecuación siguiente (que corresponde a una integral de Fredholm del primer tipo)

$$\underline{d}(\underline{\phi}) = \int_{\Omega} \underline{\mathcal{K}}(\underline{\Omega}, \underline{\phi}) \underline{m}(\underline{\Omega}) \underline{d}\Omega \quad , \quad (2.1)$$

donde $\underline{d}(\underline{\phi})$ son las observaciones en superficie, $\underline{\phi}$ las coordenadas de los puntos de observación/medición; $\underline{\Omega}$ representa las coordenadas de la fuente (superficie de falla o contacto interplaca de subducción), y $\underline{\mathcal{K}}(\underline{\Omega}, \underline{\phi})$ corresponde al Kernel, Funciones de Green, o respues-

⁴ Es decir, que el tiempo no aparece de manera explícita en las ecuaciones del problema, pues se evalúa la dislocación entre dos instantes de tiempo, como una "fotografía" del fenómeno en estudio.

ta elástica del medio, es decir, un modelo físico que permite calcular los desplazamientos en superficie debido a una dislocación unitaria en cada punto (o elemento discretizado) de la fuente.

Para abordar de manera numérica el problema planteado en (2.1) una alternativa es discretizar la fuente en elementos que ocuparán una región Ω_j y que no se solapan, de manera tal que la fuente completa se puede representar como la unión de dichos elementos discretos, de la forma $\underline{\Omega} = \bigcup_{j=1}^{N_f} \Omega_j$, con N_f el número de fuentes discretas.

Si los elementos discretos son lo suficientemente pequeños, el valor de la dislocación en cada fuente discreta $\underline{m}(\Omega_j)$ se puede aproximar a un valor constante m_j , por lo que de la integral de superficie de la expresión (2.1), se pasa a una integral sobre los elementos discretos:

$$\begin{aligned}
 \underline{d}(\phi_i) &= \sum_{j=1}^{N_f} \int_{\Omega_j} \mathcal{K}(\Omega_j, \phi_i) \underline{m}(\Omega_j) d\Omega_j \\
 \underline{d}(\phi_i) &= \sum_{j=1}^{N_f} m_j \int_{\Omega_j} \mathcal{K}(\Omega_j, \phi_i) d\Omega_j \\
 \Rightarrow d_i &= \sum_{j=1}^{N_f} m_j G_{ij} \\
 \Rightarrow \underline{d} &= \underline{G} \underline{m} \quad , \tag{2.2}
 \end{aligned}$$

con $G_{ij} = \int_{\Omega_j} \mathcal{K}(\Omega_j, \phi_i) d\Omega_j$ la respuesta en superficie en el punto de observación ϕ_i , dada por la dislocación unitaria en el elemento discreto j -ésimo (Ω_j).

Hay muchas formas de plantear el problema de dislocación en un medio elástico, dependiendo de cómo es la geometría de la fuente, qué tipo y qué tamaño de discretización se desea utilizar, el modelo de comportamiento de la fuente (cuasi-estático, cinemático, dinámico), etc. En este trabajo, el problema de dislocación cuasi-estática se aborda en dos ejemplos principales. El primero corresponde al caso teórico de una falla vertical de rumbo, siguiendo el modelo de dislocación de tornillo descrito por Segall (2010) (el que se explica en detalle en el Anexo F), que se ejemplifica en la Figura 2.1, donde se muestra la dislocación unitaria en parte de la falla de rumbo sinistral situada en $x = 0$ km, junto con los desplazamientos $u(x, y)$ que se generan en el medio y los desplazamientos predichos en superficie u_3 dados por la dislocación (curva azul).

En el segundo ejemplo, se modela la dislocación en el contacto de una zona de subducción, en particular el correspondiente al área del terremoto de Illapel, en la zona Central de Chile. En la Figura 2.2 se muestra la geometría 3D del contacto de subducción y una dislocación elíptica sintética, representativa de un terremoto, junto con las predicciones de desplazamiento en las componentes horizontales y vertical de estaciones GNSS en superficie.

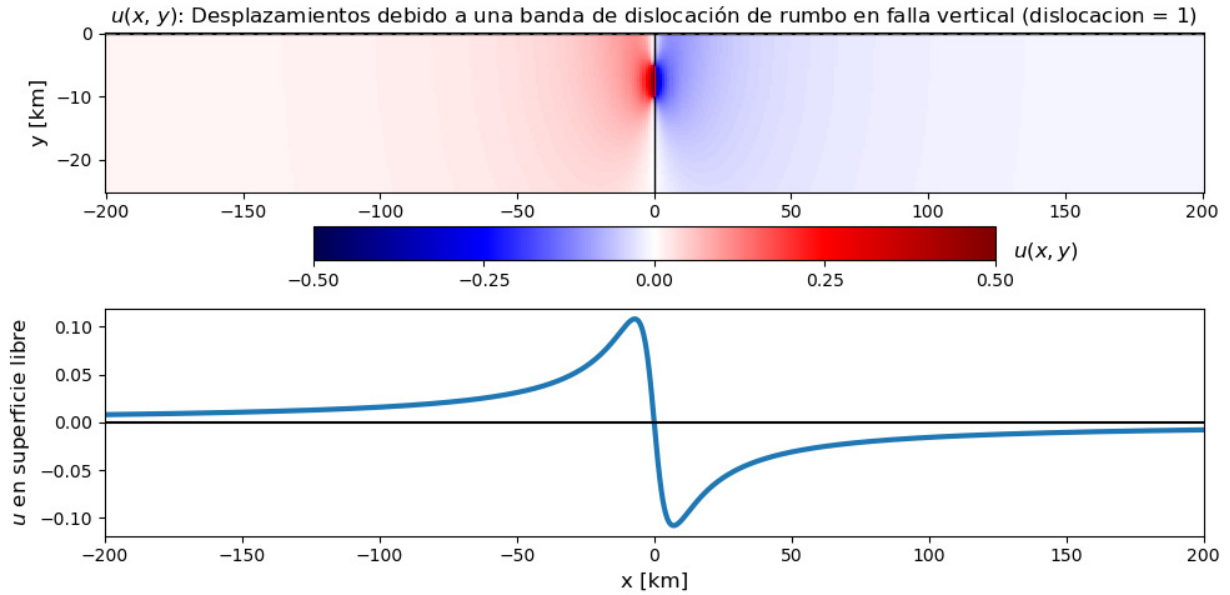
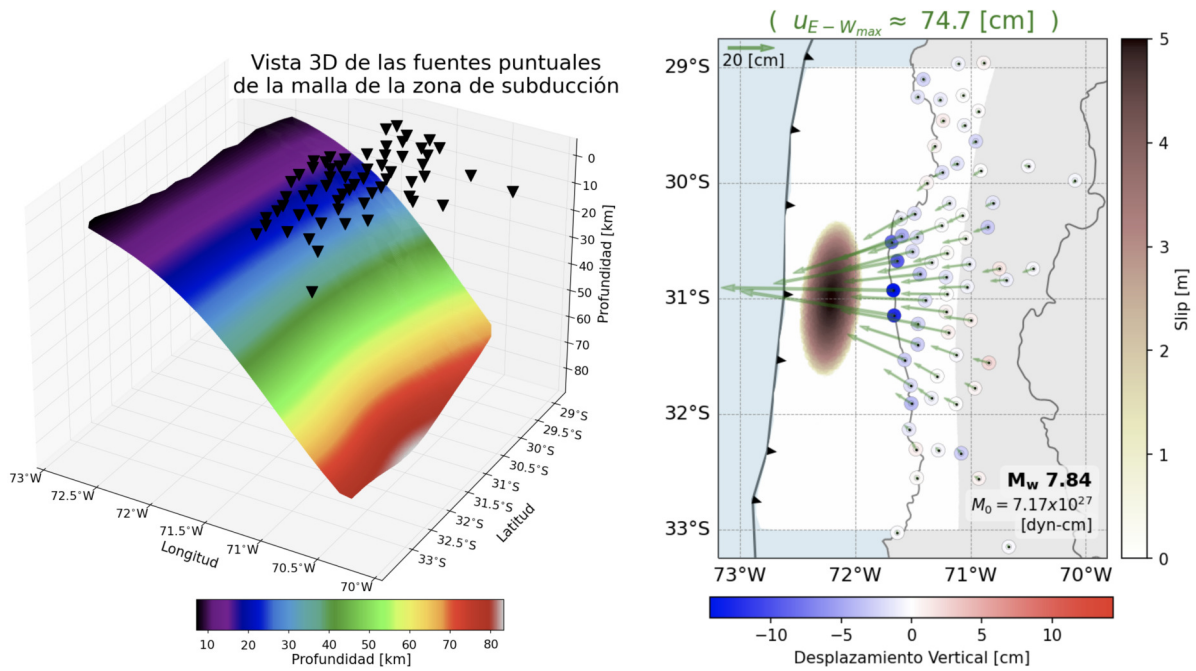


Figura 2.1: Ejemplo de falla vertical de rumbo sinistral en donde se produce una dislocación de amplitud 1 entre los 5 y 10 km de profundidad. El panel superior muestra con colores los desplazamientos en la dirección perpendicular a la hoja (plano x, y) y el panel inferior se indica la predicción de los desplazamientos en la superficie libre (donde se pueden hacer mediciones geodésicas).

Para el cálculo de las funciones de Green en este segundo caso se utiliza el programa EDKS (*Elementary Dislocation Kernel Source*; L. Rivera, comunicación personal), el cual calcula los desplazamientos estáticos en superficie para una fuente puntual embebida en un medio elástico estratificado horizontalmente (Zhu y Rivera, 2002). EDKS utiliza en primer lugar un esquema como el de la Figura 2.3, donde se definen una serie de fuentes puntuales distribuidas en profundidad y varios receptores alineados en la superficie, para los cuales se calcula una base de datos de Kernels que relacionan las dislocaciones unitarias en las fuentes dadas con los desplazamientos en superficie. Luego, se calculan los desplazamientos producidos por cada una de las 6 componentes independientes del tensor de momento, para las fuentes puntuales dadas. Para este trabajo se utilizó la estructura elástica de capas planas del medio usada por Carrasco et al. (2019).

Con dichos Kernels ya calculados, se construye la matriz \underline{G} del problema específico a abordar, para una geometría dada (ángulos de *strike*, *dip* y *rake*, según la convención de Aki y Richards (2002)) y una determinada distribución de receptores en superficie.

En la literatura hay también otros modelos para el problema de dislocación y cálculo de desplazamientos en superficie. Uno de los más utilizados corresponde al de Okada (1985); quien desarrolló un *software* basado en una recopilación de las expresiones analíticas que describen la deformación en el medio y en superficie dada por una dislocación uniforme para una fuente rectangular de ancho W y largo L en un semi-espacio elástico; esto para fallas de corte y tensionales (o una combinación de ambas).



(a) Contacto sismogénico en una zona de subducción, visto en profundidad. (b) Desplazamientos en superficie dada una dislocación en el contacto de subducción.

Figura 2.2: Ejemplo del contacto sismogénico en una zona de subducción, en donde se produce una dislocación que genera desplazamientos en la superficie libre, donde pueden medirse mediante estaciones GNSS y otros instrumentos geofísicos. A la izquierda, el ejemplo de la geometría del contacto en profundidad (indicada por la respectiva escala de color) y ubicación de estaciones GNSS en superficie con triángulos negros; a la derecha, desplazamientos predichos en superficie en estaciones GNSS (flechas con origen en círculos) debido a una distribución de dislocación elíptica.

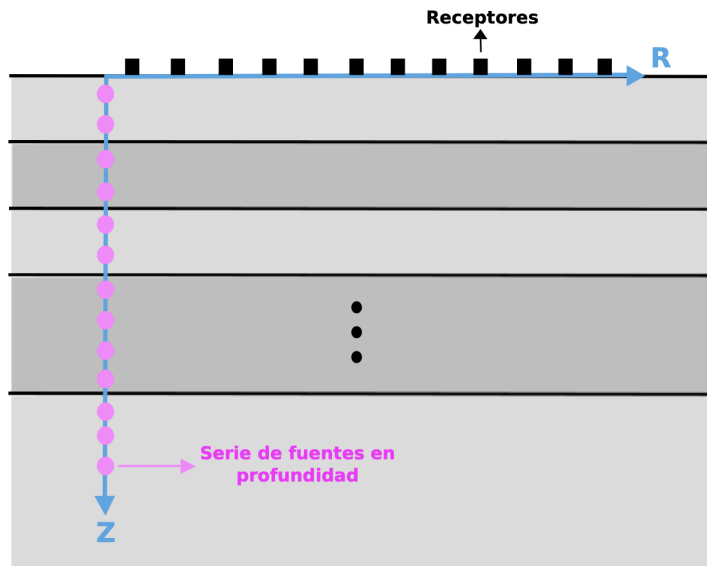


Figura 2.3: Esquema del sistema de referencia que se utiliza en el programa EDKS para calcular los Kernels de la base de datos de funciones de Green, los que representan desplazamientos estáticos en los receptores (cuadrados negros) inducidos por la dislocación de cada fuente puntual (círculos magenta). Extraído de Becerra (2018).

Una metodología con una forma distinta en la discretización es, por ejemplo, la descrita por Nikkhoo y Walter (2015), quienes utilizaron elementos triangulares para discretizar la fuente; donde toman los nodos de cada triángulo en el conjunto para promediar y obtener el centro de cada elemento, para los cuales calculan la respuesta del medio para una dislocación en la dirección paralela al rumbo de la falla (*strike*) y otra en la dirección del *dip* (e.g., Hormazábal, 2021). Otro enfoque posible sería utilizar programas como *PyLith* (Aagaard et al., 2017), que es un código de elementos finitos para hallar soluciones a las ecuaciones diferenciales en problemas de deformación en la Tierra, sean éstas formulaciones de 2D ó 3D; estáticas, cuasi-estáticas o dinámicas, con diversas reologías.

Como se mencionó anteriormente, es importante que la discretización de la falla sea lo suficientemente fina cuando se usan modelos matemáticos de dislocación que requieren que ésta sea constante en cada elementos discreto. En este trabajo, la discretización debe ser fina para poder así representar el valor de la dislocación en la fuente (e.g., falla o contacto sísmogénico) usando una combinación lineal de funciones base, mapeando bien la forma de dichas funciones. Se pueden utilizar muchos tipos de funciones para representar la dislocación en una falla, desde modelar dislocaciones que son constantes en cada elemento discretizado de una falla (e.g., Ortega-Culaciati et al., 2021, y referencias al interior), hasta funciones que varían suavemente a lo largo de la falla discretizada (e.g., Yabuki y Matsu'ura, 1992). En este trabajo se usarán funciones *b-splines*, que tienen la ventaja de describir una representación suave y continua de la dislocación a lo largo de la fuente, evitando concentraciones de esfuerzos que pueden aparecer cuando se utiliza una representación discontinua de la dislocación y que por ende pueden causar predicciones de desplazamientos espurios en la superficie de la corteza. Las funciones *b-spline* se describen en la siguiente sección.

2.2. Funciones base b-splines

En este trabajo, se utilizarán funciones *b-splines* para representar la amplitud de la dislocación en cada fuente puntual o discreta de la falla.

Una función *b-spline* de una variable real es una función polinomial definida por tramos, que se expresa con ayuda de un conjunto de funciones base *b-spline*, definida con soporte local y continua en cada intervalo, relacionado con un conjunto de puntos denominados nodos (Sherar, 2004; Lixandru et al., 2009).

Dado el conjunto de nodos t_i , cada función base $N_{i,k}(t)$, de orden k está definida sobre $k + 1$ nodos, en el rango $[t_i, t_{i+k}]$ (Sherar, 2004). Las funciones base *b-spline* satisfacen la fórmula recursiva de Cox de-Boor (de Boor, 2001), dada por :

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & , t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & , \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t) \quad , \quad k \geq 2 \quad (2.3)$$

Mediante estas funciones base, una función o curva *b-spline* de orden k puede escribirse de la forma:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n m_i N_{i,k}(t) \quad , \quad \text{en el conjunto de nodos } (t_i)_{i=1}^{n+k} \quad (2.4)$$

siendo una combinación lineal de los puntos de control, cuyos coeficientes son los m_i (Nenov, 2016).

Una propiedad importante de estas funciones base es la correspondiente a la *Partición de la Unidad*, dada por:

$$\sum_{i=1}^{n-k} N_{i,k}(t) = 1 \quad , \quad \forall t \in [t_k, t_{n-k}] \quad (2.5)$$

De esta propiedad, se infiere que en el intervalo $[t_k, t_{n-k+1}]$ las funciones $N_{i,k}(t)$ son positivas y su suma es igual a 1. Esto provee la estabilidad numérica del proceso de evaluación de una función *b-spline* en un punto dado (Lixandru et al., 2009).

En la Figura 2.4 se muestra un ejemplo de funciones base *b-splines* de distinto grado, las primeras corresponden a funciones caja, las segundas a funciones de forma triangular y las de tercer grado corresponden a curvas suaves. Todos los conjuntos sumados dan 1 por la propiedad de Partición de la Unidad.

Un conjunto de funciones base *b-splines* en dos dimensiones se define como el producto tensorial de dos conjuntos de funciones base, $N_{i,k}(x)$ y $N_{j,k}(y)$, definidas para dos variables x e y , que representan coordenadas en dos direcciones ortogonales. Luego, las funciones base *b-splines* en dos dimensiones se pueden escribir como:

$$N_{i,j,k}(x, y) = N_{i,k}(x) * N_{j,k}(y) \quad (2.6)$$

En la Figura 2.5 se puede ver un conjunto de *b-splines* 2D, de distinto grado, definidas en una región del plano (x, y) . Las *b-splines* 2D así definidas, cumplen también la propiedad de *Partición de la Unidad*. Luego, se puede plantear la función de representación (e.g., de representación de la amplitud de dislocación) como:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} m_{i,j} N_{i,j,k}(x, y) \quad (2.7)$$

donde n_x, n_y son el número de funciones base en la dirección x e y , y $m_{i,j}$ corresponde a los coeficientes de la combinación lineal.

Las funciones base antes descritas se utilizarán para modelar alguna función incógnita $s(\cdot)$ que se quiera estimar. Se llama a esa función $s(t)$ si está definida en una dimensión (en función de la variable independiente t) y $s(x, y)$ si está definida en un espacio de dos dimensiones (caracterizado por las variables x e y). Se asumirá que las coordenadas t o (x, y) están fijas, como un conjunto de coordenadas $\{t_q\}_{q=1}^Q$ para el caso 1D, o $\{(x_q, y_q)\}_{q=1}^Q$ para el caso 2D

(por ejemplo, indicando la ubicación de Q fuentes sísmicas puntuales distribuidas a lo largo de una falla). Entonces, las funciones (2.4) y (2.7) son lineales en función de los coeficientes m , por lo que sólo es necesario conocer un valor de dichos coeficientes para evaluar $s(\cdot)$ en el conjunto de coordenadas dado. Luego, la función $s(\cdot)$, evaluada en el conjunto de coordenadas antes mencionado, puede expresarse de manera matricial como:

$$\underline{s}_{Q \times 1} = \underline{B}_{Q \times M} \underline{m}_{M \times 1} \quad (2.8)$$

donde M es el número de funciones base *b-splines*, siendo $M = n$ para el caso 1D y $M = n_x * n_y$ para el caso 2D, y cada columna de la matriz \underline{B} corresponde a una función base *b-spline* (1D ó 2D) evaluada en cada uno de los puntos del conjunto de coordenadas antes referido (en las variables t o (x, y) , según corresponda).

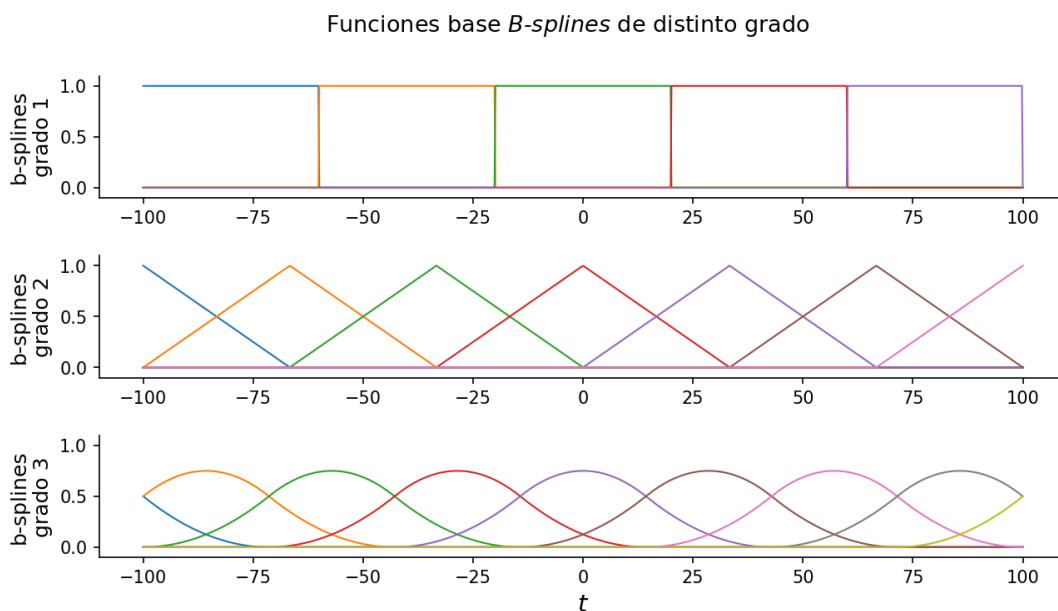


Figura 2.4: Funciones base *b-splines* 1D de distinto grado; cada conjunto de *b-splines* está compuesto por 5 funciones completas en el rango de t definido entre -100 y 100.

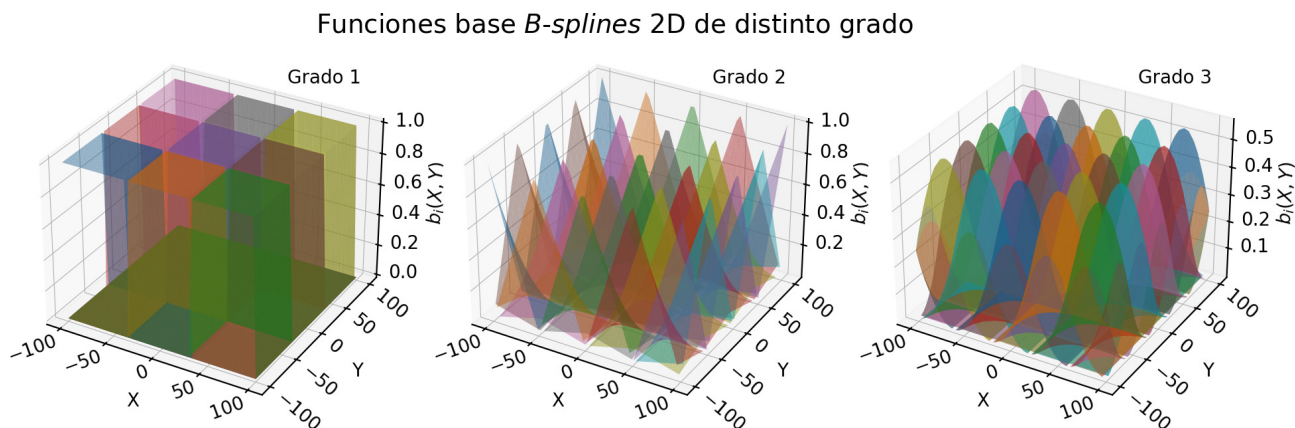


Figura 2.5: Funciones base *b-splines* 2D de distinto grado; cada conjunto está compuesto por 3 funciones completas para x e y , en el rango definido entre -100 y 100 para ambas direcciones.

En este trabajo, se utilizarán funciones *b-spline* cúbicas (de grado 3) 1D para definir una representación de la dislocación a lo largo de una falla vertical de rumbo (ver Figura 2.1), y se usarán funciones *b-splines* cúbicas 2D para definir una representación de la dislocación a lo largo del contacto de subducción (ver Figura 2.2).

2.3. Problema Inverso

Durante el ciclo sísmico se producen señales de deformación medibles por instrumentos geodésicos y sismológicos en la superficie de la Tierra. De especial interés son los procesos de dislocación en fallas responsables de dichas señales, cuya comprensión es clave para entender mejor los procesos físicos relacionados a la generación de grandes terremotos.

Como se vio en la Sección 2.1, para un medio lineal y elástico, la relación entre los parámetros \underline{m} que definen – mediante una relación lineal – la dislocación o *slip* en una falla discretizada y los desplazamientos en la superficie \underline{d} se pueden escribir de la forma

$$\underline{d} = \underline{G} \underline{m} \quad (2.9)$$

donde \underline{G} es la matriz de funciones de Green que representa la respuesta del medio, dado un *slip* unitario en cada elemento de la superficie discretizada de la falla (Segall y Harris, 1987; Ortega-Culaciati et al., 2021).

Al igual que en muchos problemas en geofísica, la estimación de dislocación es un problema inverso inherentemente mal condicionado, es decir, pequeñas perturbaciones en los datos (debido a errores observacionales o de la predicción del modelo), conducen a grandes perturbaciones en los parámetros del modelo. Este problema de estimación se puede abordar usando dos técnicas: métodos de muestreo Bayesiano y métodos de optimización (e.g., Segall y Harris, 1987).

Una ventaja importante de los métodos de muestreo Bayesiano sobre las técnicas clásicas de optimización, es la capacidad de limitarse a considerar información *a priori* que únicamente tenga justificación en la física del problema – por ejemplo, no se espera encontrar un *slip* de tipo normal para un terremoto que ocurre en el contacto de subducción – sin imponer otro comportamiento (como por ejemplo, condiciones de suavidad), más allá del impuesto por la propia parametrización del modelo (Minson et al., 2013).

Sin embargo, para evitar el sobre-ajuste de los datos (i.e., ajustar el ruido), los métodos de muestreo requieren una descripción cuidadosa de las incertidumbres tanto de las observaciones como las correspondientes a la predicción del modelo (Duputel et al., 2014). Por otra parte, los métodos de optimización utilizan alguna forma de regularización, no necesariamente basada en la física del problema, con el fin de evitar inestabilidades numéricas y el sobre-ajuste de los datos (de las observaciones y de la predicción del modelo directo). Finalmente, comparados con los métodos de optimización, los métodos de muestreo pueden ser costosos a nivel computacional, requiriendo potencialmente la evaluación de un gran conjunto de modelos directos (Duputel et al., 2014; Minson et al., 2013).

De esta forma, aunque generalmente se prefiere avanzar en las metodologías de muestreo

Bayesianas que se basan únicamente en información *a priori* que tiene que sustento en la física del problema, se sigue buscando mejoras a las metodologías de optimización (e.g., de mínimos cuadrados), que se puedan utilizar para resolver de manera rápida grandes problemas de inversión de *slip* sin utilizar grandes recursos de cómputo. Aquí, los métodos de optimización se configuran como una opción práctica cuando se requieren soluciones rápidas o cuando se abordan problemas con gran número de parámetros del modelo, que desafían la factibilidad de emplear métodos de muestreo Bayesianos (Ortega-Culaciati et al., 2021).

En este trabajo, se utiliza la técnica de mínimos cuadrados regularizados, en el cual se requiere determinar la cantidad de regularización que se va a aplicar a través de, por ejemplo, la elección del parámetro de regularización. Como el rango de valores plausibles de este parámetro define una familia de soluciones del problema inverso, se requiere determinar el valor óptimo del parámetro de regularización. En la Sección 2.3.3 se mencionan diferentes formas de escoger dicho parámetro y se indica la que se utilizará en este estudio.

A continuación, se discuten dos esquemas fundamentales de regularización del problema de mínimos cuadrados, que se diferencian en el tipo de norma utilizado para definir la regularización del problema, las normas L2 y L1.

2.3.1. Mínimos Cuadrados con Regularización L2

En este enfoque, el modelo que es solución del problema general de mínimos cuadrados (lineal), siguiendo la notación de Ortega-Culaciati et al. (2021), es,

$$\min_{\underline{\underline{m}}} \underbrace{\left(\underline{\underline{G}} \underline{\underline{m}} - \underline{\underline{d}}^{obs} \right)^\top \underline{\underline{C}}_X^{-1} \left(\underline{\underline{G}} \underline{\underline{m}} - \underline{\underline{d}}^{obs} \right)}_{\phi_E(\underline{\underline{m}})} + \underbrace{\left(\underline{\underline{H}} \underline{\underline{m}} - \underline{\underline{h}}^0 \right)^\top \underline{\underline{C}}_h^{-1} \left(\underline{\underline{H}} \underline{\underline{m}} - \underline{\underline{h}}^0 \right)}_{\phi_R(\underline{\underline{m}})} \quad (2.10)$$

La función de costo del problema general de mínimos cuadrados está compuesta por $\phi_E(\underline{\underline{m}})$ una medida de qué tan bien un modelo en particular predice las observaciones y $\phi_R(\underline{\underline{m}})$ una medida de qué tan consistente es el modelo con la información *a priori* utilizada en la regularización dada. En la ecuación 2.10, $\underline{\underline{C}}_X$ es la matriz de covarianza del ajuste y se forma como la suma de las matrices de covarianza de los datos y de la predicción del modelo teórico, $\underline{\underline{C}}_X = \underline{\underline{C}}_d + \underline{\underline{C}}_p$ (Duputel et al., 2014). A su vez, $\underline{\underline{C}}_h$ es la matriz de covarianza que modelará las incertidumbres sobre $\underline{\underline{h}}$ en el término de regularización, que define la información *a priori* del problema inverso (e.g., Tarantola, 2005; Ortega-Culaciati et al., 2021).

La ecuación 2.10 puede re-escribirse de la forma:

$$\min_{\underline{\underline{m}}} \underbrace{\left\| \underline{\underline{W}}_X \left(\underline{\underline{G}} \underline{\underline{m}} - \underline{\underline{d}}^{obs} \right) \right\|_2^2}_{\phi_E(\underline{\underline{m}})} + \underbrace{\left\| \underline{\underline{W}}_h \left(\underline{\underline{H}} \underline{\underline{m}} - \underline{\underline{h}}^0 \right) \right\|_2^2}_{\phi_R(\underline{\underline{m}})} \quad (2.11)$$

donde los pesos del ajuste y de la regularización se definen como la descomposición de Cholesky de las respectivas matrices de covarianza: $\underline{\underline{W}}_X^\top \underline{\underline{W}}_X = \underline{\underline{C}}_X^{-1}$ y $\underline{\underline{W}}_h^\top \underline{\underline{W}}_h = \underline{\underline{C}}_h^{-1}$. La solución del problema general de mínimos cuadrados (ecuación 2.10) está dada por el modelo

$$\tilde{\underline{\underline{m}}} = \left(\underline{\underline{G}}^\top \underline{\underline{C}}_X^{-1} \underline{\underline{G}} + \underline{\underline{H}}^\top \underline{\underline{C}}_h^{-1} \underline{\underline{H}} \right)^{-1} \left(\underline{\underline{G}}^\top \underline{\underline{C}}_X^{-1} \underline{\underline{d}}^{obs} + \underline{\underline{H}}^\top \underline{\underline{C}}_h^{-1} \underline{\underline{h}}^0 \right), \quad (2.12)$$

y la matriz de covarianza *a posteriori* que describe la incertidumbre (con distribución normal no-sesgada) de la solución es,

$$\tilde{\underline{\underline{C}}}_m = \left(\underbrace{\underline{\underline{G}}^\top \underline{\underline{C}}_\chi^{-1} \underline{\underline{G}}}_{\underline{\underline{P}}} + \underline{\underline{H}}^\top \underline{\underline{C}}_h^{-1} \underline{\underline{H}} \right)^{-1} = \left(\underline{\underline{P}} + \underline{\underline{H}}^\top \underline{\underline{C}}_h^{-1} \underline{\underline{H}} \right)^{-1} \quad (2.13)$$

donde $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{G}}^\top \underline{\underline{C}}_\chi^{-1} \underline{\underline{G}}$ es la matriz de precisión del problema sin regularizar.

Uno de los esquemas de regularización más comunes (basados en la norma L2) es el dado por la Regularización de Tikhonov (Tikhonov, 1963); donde la información *a priori* es que los parámetros son sesgados a un valor nulo, con $\underline{h}^0 = \underline{0}$ y el operador de regularización \underline{H} es proporcional a un operador de diferencias finitas de un orden dado; en la aproximación de orden 0, el operador $\underline{H} = \underline{I}$; en primer orden corresponde a $\underline{H} = \underline{\nabla}$ y de segundo orden a $\underline{H} = \underline{\nabla}^2$. De esta forma, el problema inverso utilizando la regularización de Tikhonov se resuelve mediante el método de mínimos cuadrados amortiguados,

$$\min_{\underline{m}} \left\| \underline{W}_\chi (\underline{G} \underline{m} - \underline{d}^{obs}) \right\|_2^2 + \varepsilon \left\| \underline{H} \underline{m} \right\|_2^2 \quad (2.14)$$

con $\varepsilon > 0$ el parámetro de regularización o amortiguamiento, que controlará el balance entre el término asociado a la física del problema (e.g., la diferencia entre las observaciones y la predicción del modelo de dislocación) y el correspondiente a la regularización.

2.3.2. Mínimos Cuadrados con Regularización L1: soluciones de tipo *sparse*

A continuación se describe el problema inverso cuando se resuelve por el método de mínimos cuadrados en donde se regulariza minimizando la norma L1 del vector de parámetros del modelo \underline{m} . En este caso, el problema optimal a resolver queda,

$$\min_{\underline{m}} \left\| \underline{W}_\chi (\underline{G} \underline{m} - \underline{d}) \right\|_2^2 + \alpha \left\| \underline{m} \right\|_1 \quad (2.15)$$

donde $\alpha > 0$ es el parámetro de regularización, y $\left\| \underline{m} \right\|_1$ es la suma de los valores absolutos de las componentes del vector de parámetros \underline{m} .

A diferencia del problema de mínimos cuadrados con regularización L2, cuando se regulariza usando la norma L1 el problema optimal no tiene solución analítica, por lo que es necesario utilizar algoritmos especializados para resolver este problema de optimización convexa. A modo de ejemplo, en el algoritmo *Iterative Reweighted Least Squares* (IRLS - e.g., Aster et al., 2013), cada iteración resuelve un problema regularizado con norma L2,

$$\min_{\underline{m}} \left\| \underline{W}_\chi (\underline{G} \underline{m} - \underline{d}) \right\|_2^2 + \alpha \left\| \underline{W} \underline{m} \right\|_2^2 \quad (2.16)$$

donde \underline{W} es una matriz de pesos diagonal que depende de la amplitud de las componentes de \underline{m} en la iteración anterior, dándole mayor importancia a los parámetros con mayor amplitud y por ende minimizando con mayor fuerza la amplitud de los parámetros con menor amplitud. Mediante este procedimiento iterativo, el algoritmo va encontrando una secuen-

cia de vectores \underline{m} que se aproxima asintóticamente a la solución del problema (2.15). Para mayores detalles del algoritmo IRLS, se refiere al lector a la Sección 7.3 de Aster et al. (2013).

Si bien el algoritmo IRLS es intuitivo y relativamente simple de implementar, puede tener problemas de estabilidad numérica o de convergencia muy lenta cuando la dimensión del vector \underline{m} es muy grande (cientos a miles de parámetros). Luego, se recomienda ocupar implementaciones existentes de métodos de optimización convexa que utilicen algoritmos más robustos y eficientes. En este trabajo, se utiliza el *software* CVXPY (Diamond y Boyd, 2016), que es un *software* que permite plantear problemas de optimización convexa de manera rápida y simple, traduciendo a la sintaxis necesaria para utilizar diversos algoritmos de optimización convexa. En particular, se usa CVXPY en conjunto con el motor de optimización convexa MOSEK ApS (2022) versión 9.3.21.

El uso de la regularización con norma L1 en el problema de mínimos cuadrados, tiene una particularidad muy interesante. Si el vector \underline{m} representa las amplitudes de un conjunto vasto y redundante de funciones base (las columnas de la matriz \underline{G}), la regularización con norma L1 del vector \underline{m} induce soluciones *sparse*, es decir el vector \underline{m} que es solución de (2.15) tiene muy pocas componentes que son diferentes de cero. Dicha propiedad es la base de este trabajo de tesis, en que se representará la dislocación en fallas con una parameterización redundante, considerando múltiples escalas espaciales de la distribución de dislocación en la falla, y se buscará la menor cantidad de funciones base que sea necesaria para representar la distribución de dislocación que se infiere.

¿Por qué las soluciones de (2.15) tienden a ser de tipo *sparse*? Como metodología se escogió un enfoque en donde se seleccione una cantidad mínima de funciones base de entre las utilizadas en la parametrización del problema, y que a su vez permita ajustar de manera óptima los modelos que se buscan. Basados en lo descrito por Becerra (2018), y a su vez por Aster et al. (2013), el problema de encontrar soluciones de tipo *sparse* se puede formular como

$$\begin{aligned} & \text{mín } \|\underline{m}\|_0 \\ \text{s.a } & \|\underline{G}\underline{m} - \underline{d}\|_2 \leq \delta \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde $\|\underline{m}\|_0$ es la cardinalidad de \underline{m} , es decir, la cantidad de parámetros no nulos, y $\delta > 0$ es una cota impuesta para el error de ajuste. Lamentablemente, ese tipo de problemas son operacionalmente difíciles de resolver y como alternativa se puede relajar éste a uno que minimice la norma L1. En la expresión (2.17) se busca minimizar la norma de \underline{m} con el objetivo de ajustar los datos con una calidad de ajuste dada por $\delta > 0$. En la Figura 2.6 se muestra el lugar geométrico de todos los modelos \underline{m} que tienen igual norma (c_2 y c_1 , según el caso), representadas por el círculo en el caso de la norma L2 y por el rombo para la norma L1.

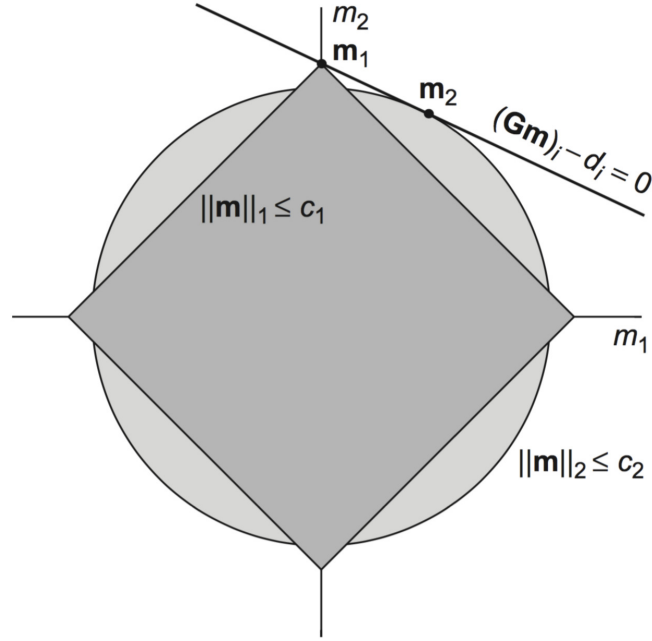


Figura 2.6: Demostración 2-D del uso del modelo de minimización de la norma L1 para obtener regularización tipo *sparse*. El área cuadrada sombreada muestra la región donde $\|\underline{m}\|_1 \leq c_1$, mientras que el círculo muestra la región donde $\|\underline{m}\|_2 \leq c_2$. Cualquier ecuación arbitraria en el espacio 2-D, $(\underline{G}\underline{m})_i - d_i = 0$, define una línea. El mínimo residual L2 del modelo, \underline{m}_2 , satisface la restricción, pero generalmente no será *sparse*. Sin embargo, el mínimo residual L1 del modelo, $\underline{m}_1 = [0, c_1]^\top$, tenderá a ser *sparse* debido a la presencia de esquinas en el contorno L1. Extraído de Becerra (2018), Capítulo 4.

Las ecuaciones del modelo $G_{ij}m_j = d_i$ son representadas por la recta, la solución del problema (2.17) es dada por la intersección de la circunferencia o el rombo con las ecuaciones del modelo. Dada la curvatura de la circunferencia que define la norma L2, dicha intersección corresponde a un punto de parámetros distintos de 0; a diferencia del caso con norma L1, donde el rombo que la define tendrá uno de los dos parámetros que componen \underline{m} nulo, a menos que las ecuaciones del problema sean paralelas a una de sus aristas.

En consecuencia, regularizar el problema de mínimos cuadrados minimizando la norma L1 de los parámetros del modelo tiende a producir soluciones *sparse* (i.e., muchas de las componentes de \underline{m} nulas); dicha tendencia a inducir este tipo de soluciones se exagera al aumentar la dimensión del problema inverso (Aster et al., 2013), en este caso, al considerar una mayor cantidad de funciones base en el problema.

2.3.3. Criterio de selección de modelos

En el enfoque optimal del problema inverso regularizado, el o los parámetros de regularización definen una familia de soluciones del problema inverso. En particular, para el problema de mínimos cuadrados regularizado planteado en las dos secciones precedentes, es necesario determinar un valor óptimo para el parámetro de regularización ε o α según se use la norma L2 o L1 en la regularización, respectivamente. Ese valor óptimo define la solución óptima o “preferida” del problema inverso.

Para determinar ε o α , existen distintos criterios que se pueden utilizar. Entre ellos está el criterio de la curva L (e.g., Hansen y O’Leary, 1993), que busca un balance entre ajustar las observaciones y cumplir con la restricción de la regularización. Además, hay criterios que buscan un balance entre qué tan bien las observaciones son explicadas por la predicción del modelo y hasta qué punto las observaciones son resueltas de manera independiente⁵; por ejemplo, el criterio de Validación Cruzada (e.g., Craven y Wahba, 1979; Wahba, 1990; Aster et al., 2013) o el *Akaike Bayesian Information Criterion* (ABIC - e.g., Akaike, 1980). Por último, hay modelos generales de selección de clases de modelos que usan criterios Bayesianos para determinar el modelo óptimo (e.g., Sambridge et al., 2006; Muto y Beck, 2008).

Por su simplicidad, en este trabajo se adoptó el criterio de la Curva L (Hansen y O’Leary, 1993), que busca un balance entre las normas del ajuste y de la regularización. Para ocupar este criterio, se define un conjunto de valores posibles para el parámetro de regularización. Para cada uno de dichos valores, se resuelve el problema inverso y se compara, en un gráfico de dos dimensiones, la norma del ajuste (eje y) y la norma (L1 ó L2) de la regularización (eje x) para cada uno de los modelos estimados (ver Figura 2.7). Dicha comparación, en el mejor de los casos muestra un patrón similar a una L, con una zona de inflexión o esquina, donde se ubica el modelo óptimo o “favorito”, el cual sopesa de manera balanceada tanto la información del ajuste, como la información *a priori* añadida en la regularización.

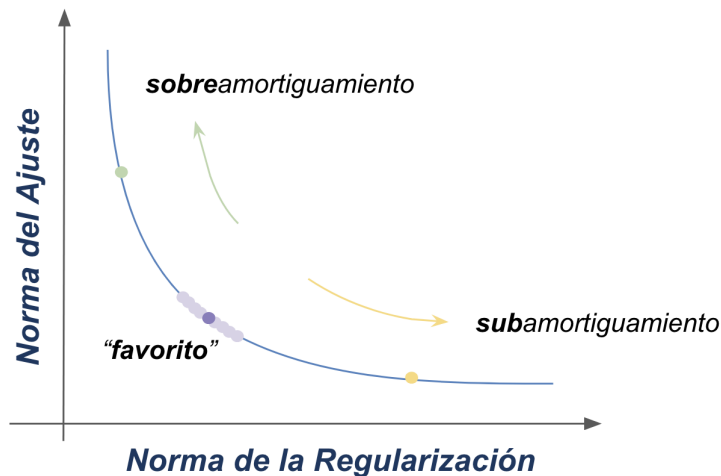


Figura 2.7: Esquema del criterio de selección de modelos Curva L. En el eje x la norma de la regularización y en el eje y la norma del ajuste.

En el esquema de curva L de la Figura 2.7, el modelo “favorito” estaría en la inflexión o

⁵ ver conceptos de *Data Resolution Matrix* y *Generalized Cross Validation* en Aster et al. (2013).

zona de máxima curvatura, y a medida que se explora la vecindad de este punto, se obtienen resultados más sub- o sobre-amortiguados (o sub- o sobre-regularizados). El primero, sub-amortiguado, da más preponderancia a la minimización de la norma del ajuste, mientras que el sobre-amortiguado, al situar más importancia a la minimización de la norma de la regularización, le da más peso (relativo al ajuste a los datos) a la información *a priori* que definen las restricciones de regularización, lo que resultaría en soluciones más regularizadas (más suaves, si se usa Regularización de Tikhonov Orden 2, o más *sparse* si se resuelve el problema con regularización basado en la norma L1).

Capítulo 3

Metodología

En este capítulo se especifican varios aspectos de la metodología desarrollada en este trabajo. Se plantea el modelo físico que relaciona desplazamientos en la superficie de la corteza con la distribución de dislocación causativa en una falla de rumbo vertical y en el contacto de subducción. Además, se define la parametrización de la dislocación (*slip*) en el marco del enfoque multi-escala propuesto en esta tesis.

Con la finalidad de entregar al lector una mejor intuición de cómo funciona la metodología propuesta – inversión de dislocación multi-escala – se estudian dos casos teóricos sencillos fuera del problema de dislocación. Con estos ejemplos, además se ilustran las ventajas y restricciones de la metodología propuesta con respecto al caso típico de inversiones usando mínimos cuadrados regularizados con norma L2.

Finalmente, se especifican todos los detalles de como se construyó la geometría, cómo se crearon los datos sintéticos y detalles de la implementación del problema inverso en los diferentes casos de estudio: estimación de la dislocación cuasi-estática en una falla vertical de rumbo teórica y en el contacto de la zona de subducción de Chile central afectado por el terremoto de Illapel (M_w 8.3) del 16 de septiembre de 2015.

3.1. Representación de Dislocación mediante Funciones Base B-splines Multi-escala

Para cada uno de los casos de estudio que se mostrarán en las secciones posteriores, se parametriza la distribución de dislocación a lo largo de la falla, utilizando un conjunto de funciones base *b-splines* en múltiples escalas espaciales, con *b-splines* de distinto tamaño en cada una de las escalas.

Para generar el conjunto de funciones base en múltiples escalas fue necesario determinar:

- El dominio sobre el cual estarán definidas.
- La cantidad de escalas a utilizar (N_E).
- La cantidad de *b-splines* completas ($N_{bs_{completas}}$) en la escala más extensa, para el rango dado en la coordenada respectiva.

En el último punto es importante destacar que el número total de b -splines $N_{bs_{totales}}$ en cada escala puede ser mayor, dependiendo el número total del grado de las b -splines, ya que se incluyen funciones incompletas en los bordes para mantener la propiedad de Partición de la Unidad en todo el dominio de las b -splines. Se tiene la expresión:

$$N_{bs_{totales}} = N_{bs_{completas}} + 2(deg - 1) \quad (3.1)$$

donde deg el grado de las b -splines, que en el caso de esta tesis fue escogido como $deg = 3$, para utilizar b -splines cúbicas. La expresión (3.1) es homologable para el caso 2D, de la forma:

$$N_{bs_{totales}} = \left[N_{bsX_{completas}} + 2(deg - 1) \right] \cdot \left[N_{bsY_{completas}} + 2(deg - 1) \right] \quad (3.2)$$

donde $N_{bsX_{completas}}$ y $N_{bsY_{completas}}$ son el número de b -splines completas en una escala determinada, definidas en las direcciones x e y , respectivamente.

Luego de construir las funciones de la primera escala con el algoritmo dado por la fórmula recursiva de Cox de-Boor descrita en la expresión (2.3), se pasa a la siguiente escala, para la cual la cantidad de funciones completas en el rango será el doble que las definidas para la escala anterior, y así sucesivamente para todas las escalas.

Entonces, para el caso 1D, se puede representar una función $f(t)$ mediante funciones base b -spline multi-escala de acuerdo a la ecuación:

$$f(t) = \sum_{e=1}^{N_E} \sum_{i=1}^{N_{bs_{totales}}^e} m_i^e N_{i,k}^e(t) \quad (3.3)$$

donde N_E es el número total de escalas de funciones b -splines a considerar, $N_{bs_{totales}}^e$ es el número total de b -splines de la escala e ; $N_{i,k}^e(t)$ es la i -ésima función base de grado k en la escala e y m_i^e es el coeficiente (desconocido) que determina la amplitud de la b -spline $N_{i,k}^e(t)$.

De forma similar, para el caso 2D, se puede representar una función $f(x, y)$ mediante funciones base b -spline multi-escala de acuerdo con la ecuación:

$$f(x, y) = \sum_{e=1}^{N_E} \sum_{i=1}^{N_{bsX_{totales}}^e} \sum_{j=1}^{N_{bsY_{totales}}^e} m_{i,j}^e N_{i,j,k}^e(x, y) \quad (3.4)$$

donde N_E es el número total de escalas a considerar, $N_{bsX_{totales}}^e$ y $N_{bsY_{totales}}^e$ son el número total de b -splines de la escala e en las direcciones x e y , $N_{i,j,k}^e(x, y)$ es la i -ésima/ j -ésima función b -spline de grado k en la escala e , y $m_{i,j}^e$ es el coeficiente (desconocido) que determina la amplitud de la b -spline $N_{i,j,k}^e(x, y)$.

Las funciones b -splines se evaluarán en puntos con coordenadas con valores conocidos y fijos. Para el trabajo desarrollado en esta tesis, dichas coordenadas representan la ubicación de fuentes sísmicas puntuales distribuidas a lo largo del contacto de placas, en donde las b -splines se utilizarán para representar la amplitud de una componente de dislocación \underline{s} en las diferentes fuentes puntuales. Se ha de notar, que para cada fuente puntual se define su orientación de acuerdo a la convención de Aki y Richards (2002), para un mecanismo focal

y el sentido y dirección de la dislocación se define por el ángulo *rake*.

De acuerdo a lo explicado en la Sección 2.2, una vez evaluadas las *b-splines* en las coordenadas de las fuentes puntuales, los valores de la dislocación en dichas coordenadas se obtienen como una combinación lineal de las funciones *b-splines*, que se puede expresar de forma matricial como:

$$\underline{s} = \underline{\underline{B}} \underline{m} \quad (3.5)$$

donde \underline{s} es el vector que en cada componente tiene el valor de la dislocación de cada fuente puntual, $\underline{\underline{B}}$ es la matriz cuyas columnas son las *b-splines* evaluadas en las coordenadas de las fuentes puntuales, y el vector \underline{m} contiene los valores de los coeficientes de cada función *b-spline*. La matriz de funciones base $\underline{\underline{B}}$ será entonces una concatenación de matrices cuyas columnas contienen las *b-splines* de las distintas escalas evaluadas en las fuentes puntuales, es decir,

$$\underline{\underline{B}} = \left[\underline{\underline{B}}^1 \quad \dots \quad \underline{\underline{B}}^{N_E} \right] \quad (3.6)$$

Por lo tanto, $\underline{\underline{B}}$ será de dimensión $N_{fp} \times N_{bs}$, es decir, la cantidad de filas es igual a N_{fp} , la cantidad fuentes puntuales donde se evalúan las funciones *b-splines*; y la cantidad de columnas es igual a N_{bs} , el número total de funciones base que resulta de sumar el número total de *b-splines* de cada escala.

En las Figuras 3.1 y 3.2 se muestran ejemplos de funciones base *b-splines* multi-escala en 1D (a lo largo de la coordenada x) y en 2D (en el plano x, y), respectivamente. De esta misma forma se definirán funciones base cuya combinación lineal se utilizará para representar la dislocación a lo largo de una falla.

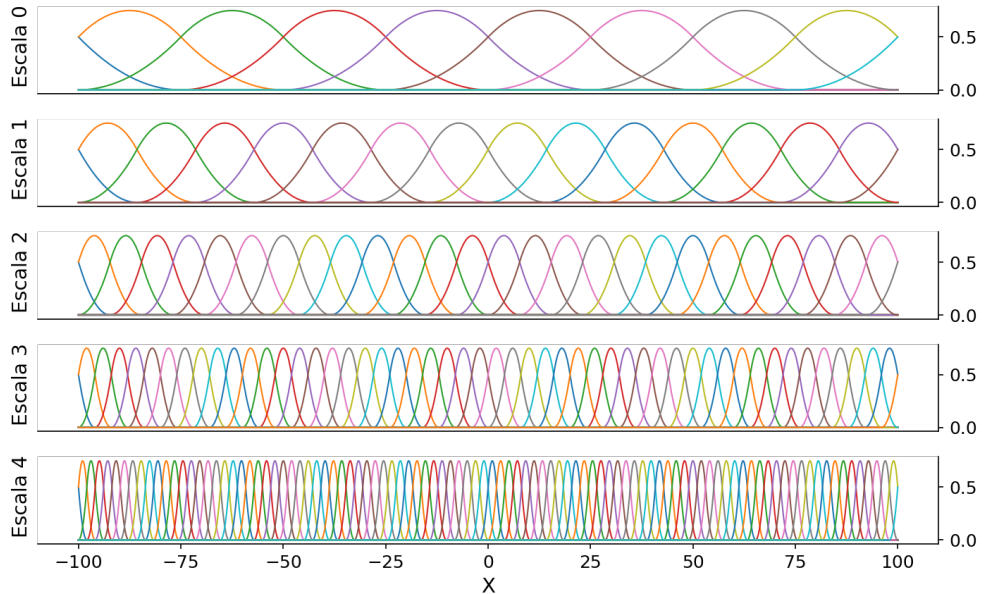


Figura 3.1: En los paneles se muestran funciones base *b-splines* definidas en un dominio 1D, a lo largo de la coordenada x . En cada panel se muestran las *b-splines* cúbicas a una escala diferente, donde la número 0 incluye las funciones más extensas y la número 4 las más pequeñas.

Funciones Base, Caso 2D

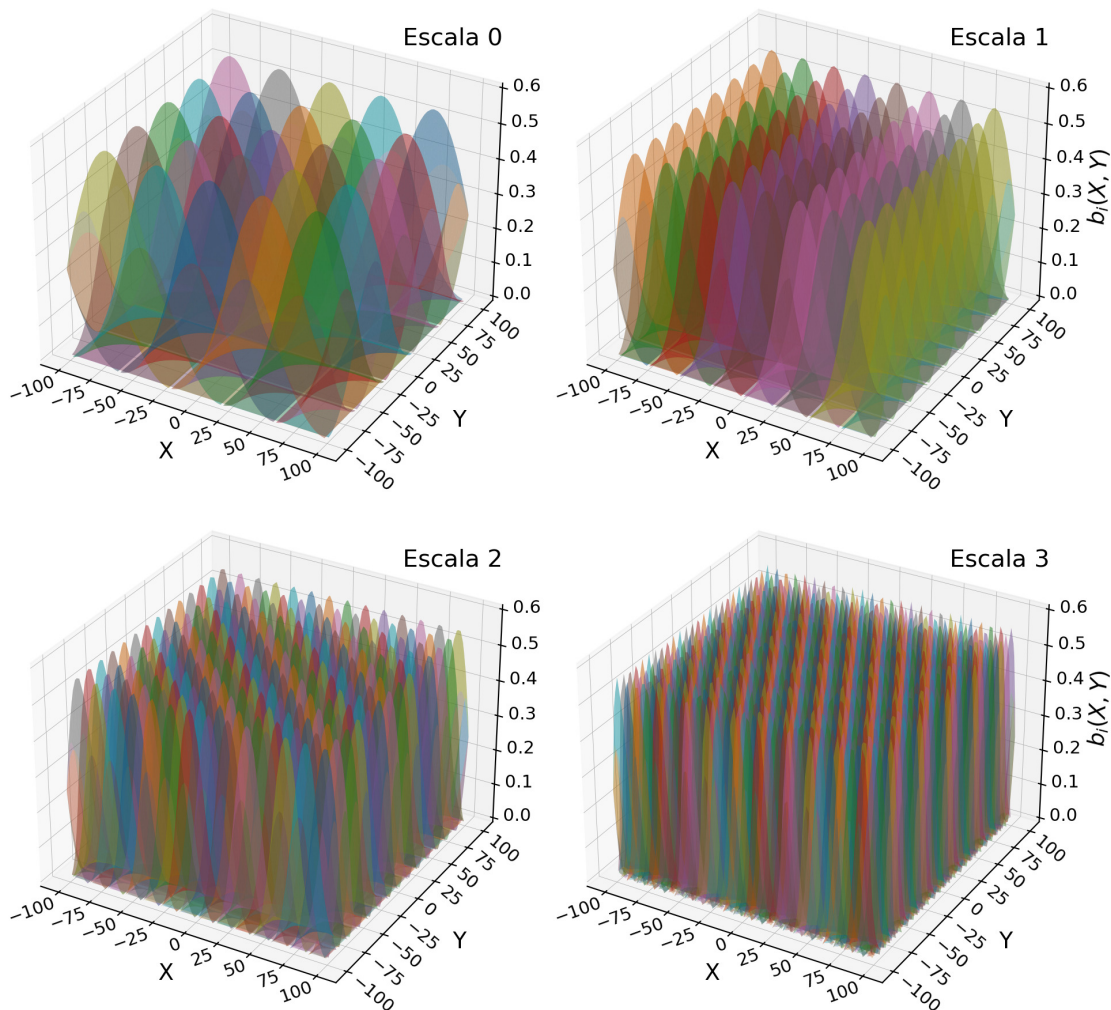


Figura 3.2: Conjunto de funciones base *b-spline* multiescala definidas en 2D, a lo largo del plano x, y . Cada panel muestra las *b-splines* cúbicas en 2D de cada escala, donde la número 0 es la que incluye funciones más grandes y la número 3 aquellas más pequeñas en extensión.

3.2. Modelo Directo

En este trabajo se aborda el problema de dislocación cuasi-estática, aplicado a dos casos principales, un caso teórico de una falla de rumbo vertical sinestral y la zona de subducción afectada por el terremoto M_w 8.3 de Illapel de 2015 en Chile Central.

Para ambos casos, se construyen las funciones de Green, \underline{G}_{slip} , que relacionan la dislocación en los elementos discretizados de las subfallas (\underline{s}), con la predicción de desplazamientos en superficie \underline{d} , como:

$$\underline{G}_{slip} \underline{s} = \underline{d} \quad (3.7)$$

Cabe recalcar que, para ambos ejemplos, en cada pequeño elemento de la discretización se asume que el *slip* es constante. A continuación se detalla lo correspondiente a cada caso de estudio.

3.2.1. Falla vertical de rumbo

Se consideró el caso teórico de una falla vertical de rumbo en 1D; esto usando el modelo de dislocación de tornillo descrito por Segall (2010) (y detallado en extenso en el Anexo F). Para ello se definió un dominio 2D, con una grilla de 400 km en la horizontal y 25 km de profundidad, con la falla dispuesta en medio de un semi-espacio, la cual se discretizó en un total de 30 subfallas de igual tamaño (Figura 3.3); las cuales se enumeran desde lo más profundo a lo más somero. En la posición $Z = 0$ km se situaron dos configuraciones de observadores, distanciados cada 1 y 10 km, respectivamente.

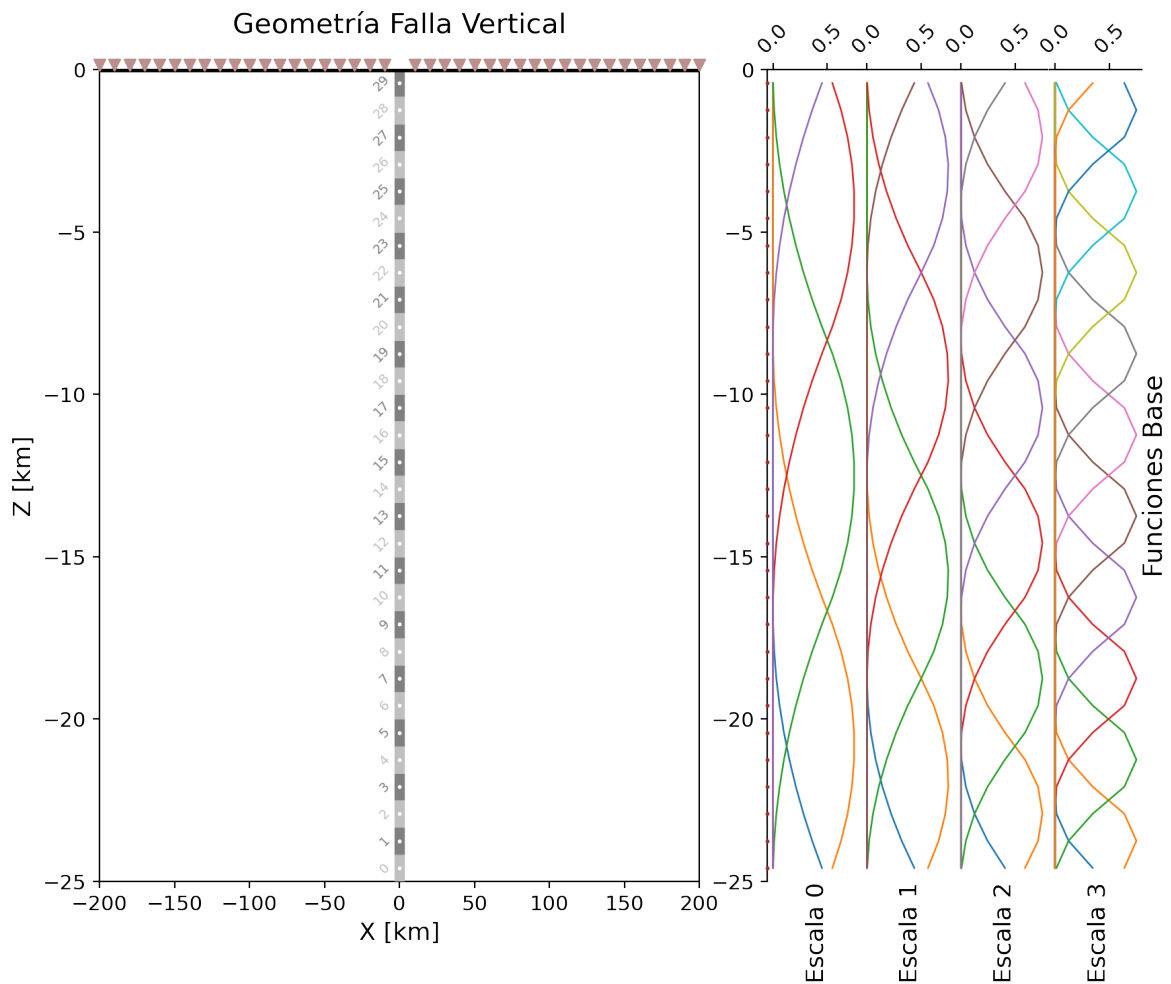


Figura 3.3: Geometría del caso de una falla vertical de rumbo. El panel de la izquierda muestra la grilla que define el dominio donde se estiman las dislocaciones (con exageración vertical), los triángulos invertidos indican la distribución de estaciones en superficie, posicionadas en este caso cada 10 km; las subfallas se muestran con líneas grises, destacando en blanco sus puntos centrales, éstas están enumeradas de abajo hacia arriba. El panel derecho presenta las funciones base *b-splines* cúbicas y su extensión en profundidad para cada escala; éstas están evaluadas en los puntos centrales de las subfallas (que también se indican con los puntos rojos en el eje de profundidad del panel derecho).

A fin de obtener los desplazamientos dados por una dislocación de tornillo, se utilizó un código que implementa dicho cálculo (expresión (F.24)), proporcionado por F. Ortega-Culaciati (comunicación personal). De esta manera, se obtuvo la respuesta del medio (grilla asociada al semi-espacio generado) y la respuesta de la línea de observadores ubicados en $Z = 0$ km, ante el *slip* unitario de cada una de las 30 subfallas de la geometría (i.e., \underline{G}_{slip}).

Para este problema, se definió una colección de funciones base *b-splines* cúbicas en profundidad, con 4 escalas, donde la más extensa incluye una función completa en el dominio (Figura 3.3, panel derecho). En total se cuenta con 31 funciones base, evaluadas en los puntos centrales de las subfallas.

De esta manera, se tiene que para el caso de inversión aplicada a la dislocación cuasi-estática en una falla vertical de rumbo, la matriz de funciones base \underline{B} es del orden $N_{sf} \times N_{fb}$, es decir, cantidad de subfallas: 30 x cantidad de funciones base: 31. La cantidad de funciones base por escala se detalla en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1: Funciones base *b-splines*, para el caso de falla vertical de rumbo (1D).

Escala	N_{bs_Z} completas	N_{bs_Z} totales
0	1	5
1	2	6
2	4	10
3	8	12
		31

3.2.2. Zona de subducción en el área afectada por el Terremoto de Illapel (Mw 8.3) 2015

Para abordar el caso de una zona de subducción, en particular para el área del terremoto M_w 8.3 de Illapel, se utilizó una malla con elementos discretos triangulares, construida para representar la geometría del *slab* en la zona, según el modelo *Slab 2* (Hayes et al., 2018). Cada elemento de la malla está compuesto por un conjunto de fuentes puntuales en las que se evaluará el *slip* posteriormente. La malla se extiende entre los 29-33°S con profundidades desde ~ 7 km hasta 80 km (Figura 3.4).

Para el problema aplicado a esta geometría se decidió realizar cálculos con datos sintéticos y con las observaciones del cosísmico del terremoto de Illapel (como se detallará en las secciones posteriores). Para ambos casos, se determinó cortar la malla hasta la profundidad de 55 km, lo que resultó en contar finalmente con un total de 194460 fuentes puntuales.

Para estos casos se cuenta con una distribución de puntos de observación en la superficie, correspondientes a instrumentos GNSS en el área (Figura 3.4), éstos corresponden a los sitios de medición descritos en Klein et al. (2017). Para mayor información ver Sección 5.1.

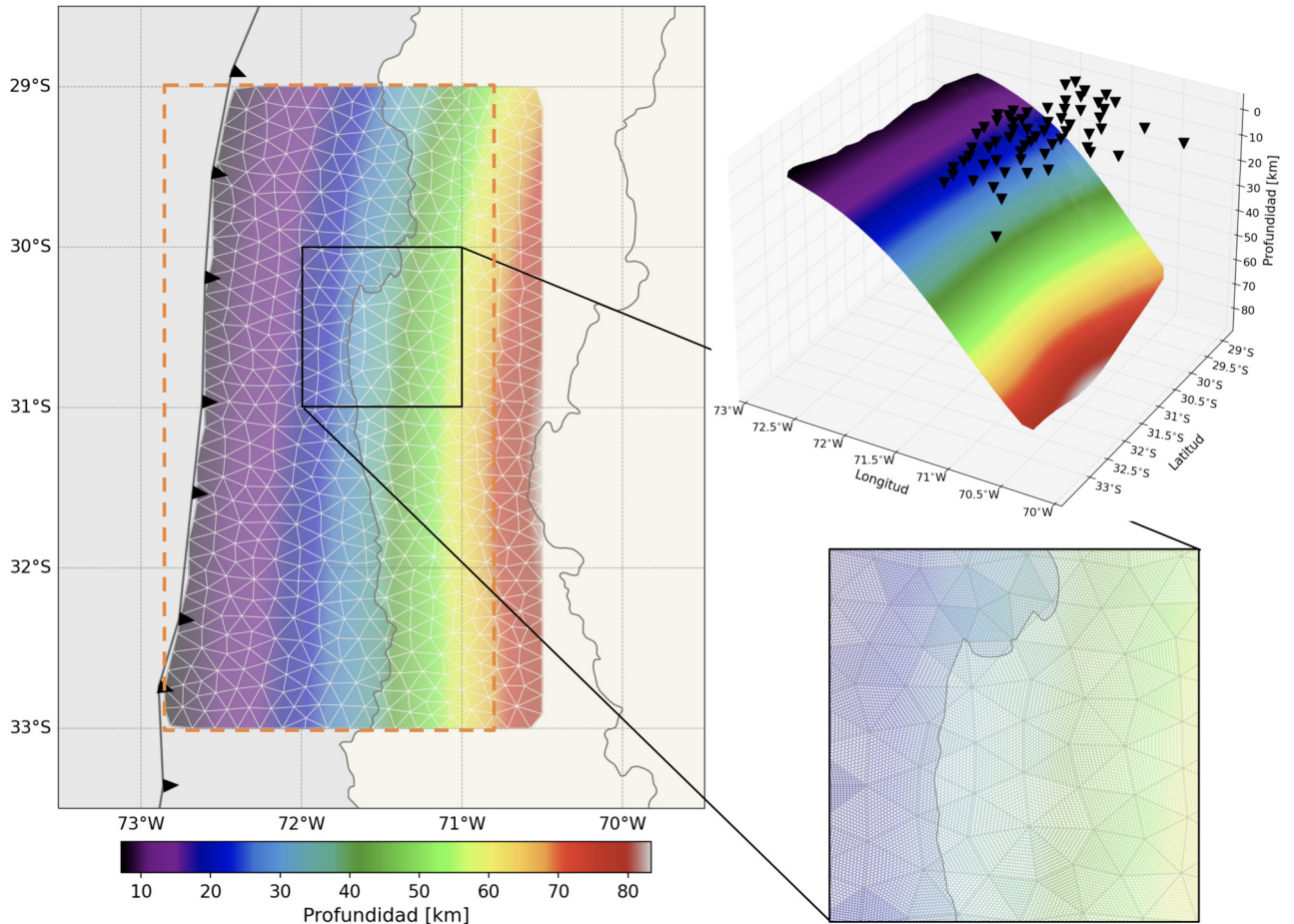


Figura 3.4: Malla triangularizada completa para el caso de la zona de Illapel. A la izquierda se muestra la vista en planta de ella, cada triángulo contiene un conjunto de fuentes puntuales, cuya profundidad es representada por la escala de colores. El cuadro negro muestra una vista ampliada a la distribución de las fuentes en los triángulos cercanos a la costa. La línea segmentada naranja muestra la zona regular en la que se definió originalmente el dominio de las funciones base *b-splines* en el área. A la derecha se expone la distribución de la malla de fuentes puntuales en profundidad, de acuerdo al modelo *Slab 2* del contacto de subducción en la zona de Illapel; además los triángulos invertidos negros indican la ubicación en superficie de las estaciones GNSS consideradas en este estudio.

Como se puede observar en la Figura 3.4, la malla de fuentes puntuales no tiene una forma regular en los bordes, pues el borde Oeste delinea la fosa y por el Este estará delimitada por la línea de contorno de 55 km de profundidad del contacto de subducción. Por esta razón, utilizando los límites máximos y mínimos de las coordenadas Este y Norte de las fuentes puntuales, se definió una zona rectangular (cuadro segmentado naranja, Figura 3.4), que incluye en su interior la grilla de fuentes puntuales (más detalle en la Figura A.1). Lo anterior se hace con el objetivo de definir las funciones base *b-splines* en un dominio regular que represente la zona de interés.

De esta manera, se definieron las funciones base para el caso de la geometría de Illapel utilizando este dominio regular, considerando un total de 4 escalas, generadas a partir de 2 y 3 *b-splines* completas en la escala más extensa, para las direcciones E y N respectivamente. El detalle de la cantidad de funciones base en cada escala se muestra en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2: Funciones base *b-splines*, para la geometría de la zona de Illapel

Escala	Funciones completas		Funciones totales		Total	Extensión aproximada	
	Nbs_E	Nbs_N	Nbs_E	Nbs_N		E [km]	N [km]
0	2	3	6	7	42	145	260
1	4	6	8	10	80	95	160
2	8	12	12	16	192	60	90
3	16	24	20	28	560	30	50
					874		

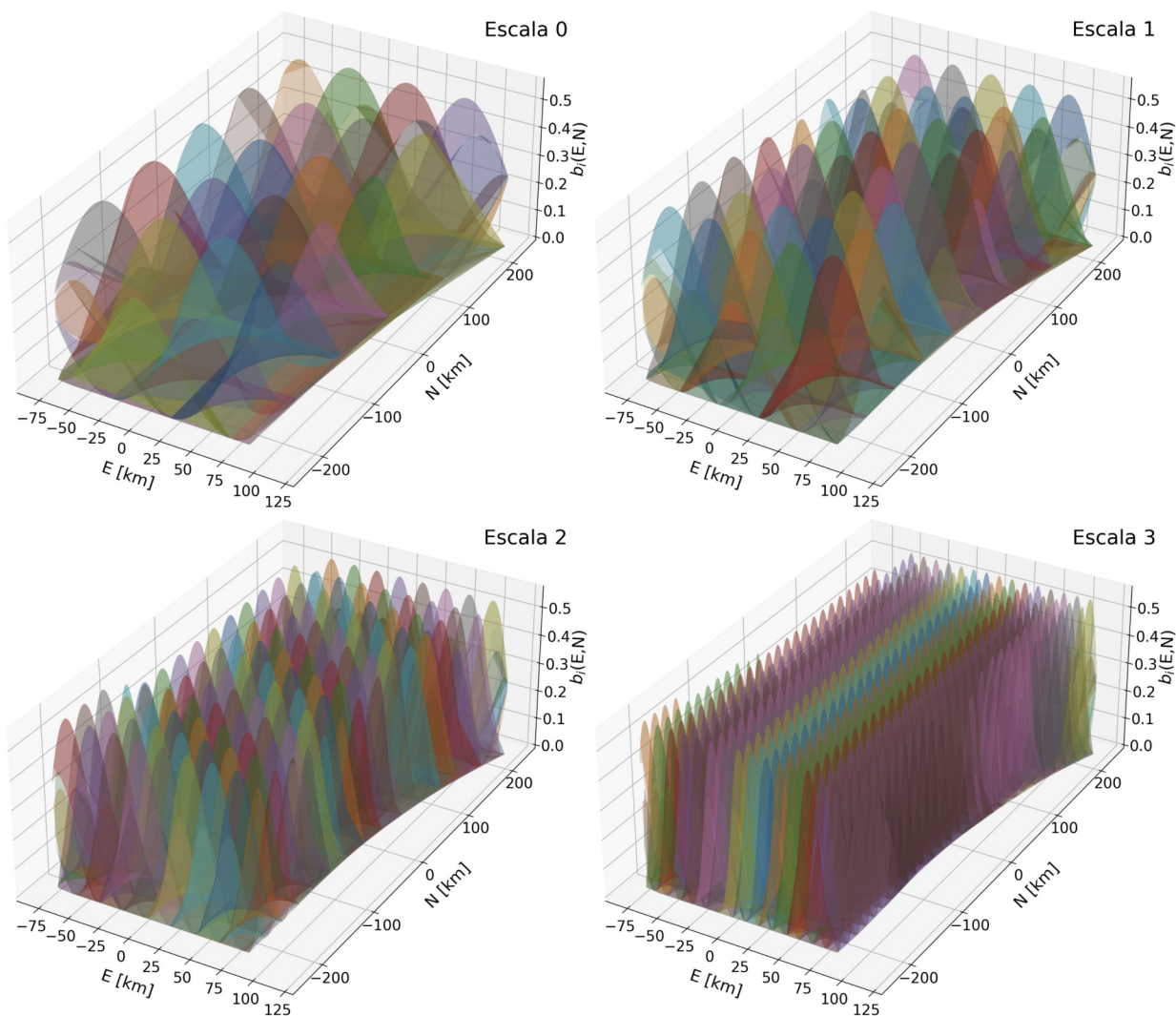


Figura 3.5: Conjunto de funciones base *b-splines* para la zona de Illapel en coordenadas proyectadas (con referencia en la coordenada 72°W , 31°S). Cada panel muestra las *b-splines* cúbicas de las distintas escalas, donde la escala 0 es la que incluye las funciones más extensas espacialmente y la número 3 aquellas más finas.

Posteriormente, la colección de *b-splines* fue evaluada en los puntos correspondientes a las 194460 fuentes puntuales de la malla detallada. De esa manera, se obtuvo una matriz de funciones base $\underline{\underline{B}}$ del orden de $N_{fp} \times N_{fb}$, es decir, 194460 x 874 (cantidad de fuentes puntuales x cantidad de funciones base). Las *b-splines* de cada escala se muestran en la Figura 3.5. La extensión espacial aproximada de una de las *b-splines* en cada escala, tanto para las direcciones Este (E) y Norte (N) se detallan en las últimas dos columnas de la Tabla 3.2.

De lo diversos modelos descritos en la Sección 2.1, el utilizado para obtener las Funciones de Green correspondientes a $\underline{\underline{G}}_{slip}$ en este caso de estudio fue *EDKS* (Zhu y Rivera, 2002), aplicándolo a las características de este problema en particular, es decir, con la malla triangularizada y la disposición de estaciones antes descritas. La estructura elástica de capas planas del medio utilizada en este trabajo es la misma utilizada en Carrasco et al. (2019).

3.3. Problema Inverso de Estimación de Dislocación Cuasi-estática

Para los problemas de dislocación cuasi-estática, se propone un planteamiento del problema inverso en donde se representa la dislocación usando las funciones base *b-splines* multi-escala descritas en la secciones anteriores. Sea \underline{s} el vector cuyas componentes corresponden a la dislocación en cada subfalla o fuente puntual, según el caso. Dada la matriz $\underline{\underline{G}}_{slip}$ de funciones de Green (ver Sección 3.2), la predicción de los desplazamientos \underline{d} en puntos de observación en la superficie de la corteza, dado \underline{s} , se puede escribir como:

$$\underline{\underline{G}}_{slip} \underline{s} = \underline{d} \quad (3.8)$$

Luego, considerando la representación de dislocación $\underline{s} = \underline{\underline{B}} \underline{m}$ usando *b-splines* multi-escala, se puede escribir:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{G}}_{slip} \underline{s} &= \underline{d} \\ \underline{\underline{G}}_{slip} \overbrace{\underline{\underline{B}} \underline{m}} &= \underline{d} \\ \underline{\underline{G}} \underline{m} &= \underline{d} \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde \underline{d} son los datos de desplazamiento en la superficie de la corteza. En la parametrización propuesta en esta tesis, \underline{s} es el producto de $\underline{\underline{B}}$ y \underline{m} , es decir, de la matriz de funciones base en múltiples escalas y el vector de parámetros del modelo, que corresponde a la amplitud de cada *b-spline* del conjunto. Finalmente, $\underline{\underline{G}}$, corresponde a la matriz de funciones de Green generalizada de nuestro problema multi-escala, formada por el producto entre la respuesta en superficie de las fuentes puntuales y la representación de la dislocación basada en la colección de funciones base *b-splines* multi-escala.

Un detalle importante de recalcar es que en el planteamiento propuesto, los parámetros del modelo en la resolución del problema inverso son las amplitudes de las funciones base *b-splines* cúbicas, no directamente la dislocación o *slip* en cada elemento discreto de la falla o contacto de subducción.

Uno de los objetivos principales de esta tesis es desarrollar el método de inversión de dislocación multi-escala, el que es basado en técnicas de estimación *sparse* (ver Sección 2.3.2). Luego, el problema inverso a resolver es,

$$\min_{\underline{m}} \left\| \underline{W}_\chi (\underline{G} \underline{m} - \underline{d}) \right\|_2^2 + \alpha \left\| \underline{m} \right\|_1 \quad (3.10)$$

donde \underline{d} es el vector de desplazamientos medidos en instrumentos GNSS en la superficie de la corteza terrestre, \underline{W}_χ es una matriz diagonal cuyos elementos son el recíproco de la desviación estándar de los datos GNSS, \underline{G} es la matriz de funciones de Green del problema de dislocación con representación multi-escala (ecuación 3.9), y $\alpha > 0$ es el parámetro de regularización.

A modo de comparación, en los casos pertinentes a lo largo del desarrollo de este trabajo, también se obtendrán soluciones del problema inverso utilizando el método de mínimos cuadrados, pero considerando la regularización que minimiza la norma L2 del vector de parámetros del modelo (amplitudes de las *b-splines*). Para lo anterior, se resuelve el problema de mínimos cuadrados (2.14), pero con regularización de Tikhonov de orden 0, que se expresa como sigue:

$$\min_{\underline{m}} \left\| \underline{W}_\chi (\underline{G} \underline{m} - \underline{d}) \right\|_2^2 + \varepsilon \left\| \underline{m} \right\|_2^2 \quad (3.11)$$

donde $\varepsilon > 0$ es el parámetro de regularización en ese problema.

En ambos casos los parámetros de regularización serán determinados usando el método de la curva L (e.g., Hansen, 1992). Como se detalló en la Sección 2.3.3, este criterio se adecuó a los casos de esta tesis, utilizando la norma L1 ó L2, según el tipo de regularización que se analiza. Para el caso de la norma del ajuste entre los datos y la predicción del modelo de dislocación, se calculó ésta de manera reducida, es decir, en su forma original (norma 2 al cuadrado), pero dividida por la cantidad de datos u observaciones. De esta forma, se tiene una medida de χ^2 reducido, expresada como $\chi_{red}^2 = \frac{\chi^2}{N_{obs}} = \frac{1}{N_{obs}} \left\| \underline{W}_\chi (\underline{G} \underline{m} - \underline{d}) \right\|_2^2$, donde N_{obs} es el número de observaciones en \underline{d} .

De esta manera, en las curvas L que se muestran a continuación, se agregó como guía, cuando fue posible, una línea donde χ^2 reducido fuera igual a 1, dado que esta medida $\left(\chi_{red}^2 = \frac{1}{N_{obs}} \sum_i \frac{(d_i^{pred} - d_i^{obs})^2}{\sigma_{d_i}^2} \right)$ al ser cercana a la unidad nos da la idea de que la diferencia entre el dato predicho y el observado es similar, en promedio, a la varianza de dichos datos; situando una referencia en el gráfico de la curva L que permite evaluar si se está o no sobreajustando los datos, evitando así explicar el ruido en el modelamiento.

En el problema de la falla vertical de rumbo, que sigue el modelo de dislocación de tornillo (detallado en el Anexo F), los desplazamientos en superficie son sólo en una componente (u_3), por lo que el número de elementos del vector \underline{d} es igual al número de filas de la matriz \underline{G} e igual al número de puntos de observación en superficie.

Para el caso de la zona de subducción hay más información, ya que se pueden modelar los desplazamientos en 3D en la superficie de la corteza terrestre. En este caso, el vector \underline{d}

(en sus versiones sintética, de valores observados y predichos), está compuesto por datos en las tres componentes: E, N, Up y fue ordenado por estación, como indica la expresión (3.12)

$$\underline{d} = \begin{pmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_2 \\ \vdots \\ \underline{d}_{Nsta} \end{pmatrix}_{Nobs \times 1}, \quad \underline{d}_1 = \begin{pmatrix} d_1^E \\ d_1^N \\ d_1^U \end{pmatrix}_{3 \times 1} \quad (3.12)$$

siendo del orden $Nobs \times 1$, con $Nobs = 3 \cdot Nsta$, $Nsta$ el número de estaciones GNSS, dado que se cuenta con datos de las tres componentes para cada una de las estaciones de la configuración para el caso de Illapel.

Normalmente, la dislocación o *slip* se parametriza en dos direcciones, una a lo largo de la dirección del *strike* (ϕ) y otra a lo largo de la dirección del *dip* (δ) de cada subfalla (ver Figura 3.6; Aki y Richards, 2002). Luego, se pueden calcular las funciones de Green considerando dislocaciones en ambas direcciones, considerando el orden indicado en las expresiones (3.13) y (3.14), ambas ordenadas también por estación; con \underline{G}_{E1}^{ds} , \underline{G}_{N1}^{ds} y \underline{G}_{U1}^{ds} vectores fila con N_{fp} componentes, una por cada fuente puntual.

$$\underline{\underline{G}}_{dip-slip} = \begin{pmatrix} \underline{G}_1^{ds} \\ \underline{G}_2^{ds} \\ \vdots \\ \underline{G}_{Nsta}^{ds} \end{pmatrix}_{Nobs \times Nfp}, \quad \underline{G}_1^{ds} = \begin{pmatrix} \underline{G}_{E1}^{ds} \\ \underline{G}_{N1}^{ds} \\ \underline{G}_{U1}^{ds} \end{pmatrix}_{3 \times Nfp} \quad (3.13)$$

$$\underline{\underline{G}}_{strike-slip} = \begin{pmatrix} \underline{G}_1^{ss} \\ \underline{G}_2^{ss} \\ \vdots \\ \underline{G}_{Nsta}^{ss} \end{pmatrix}_{Nobs \times Nfp}, \quad \underline{G}_1^{ss} = \begin{pmatrix} \underline{G}_{E1}^{ss} \\ \underline{G}_{N1}^{ss} \\ \underline{G}_{U1}^{ss} \end{pmatrix}_{3 \times Nfp} \quad (3.14)$$

Para las pruebas sintéticas en la geometría de Illapel, se considera sólo la componente de dislocación a lo largo del eje δ (Figura 3.6), que corresponde a la componente *dip-slip*, por lo que en dicho caso, las funciones de Green del problema están dadas por

$$\underline{\underline{G}}_{slip} \equiv \underline{\underline{G}}_{dip-slip} \quad (3.15)$$

que tiene $N_{obs} \times N_{fp}$ elementos, la cantidad de observaciones por el número de fuentes puntuales. En cambio, para la inversión de dislocación del terremoto de Illapel usando datos reales, se parametrizará la dislocación en una dirección θ , que corresponde a una de las direcciones ortogonales de un sistema de coordenadas rotado (θ, θ_P) en un ángulo λ con respecto al sistema local de coordenadas de la falla definido por las direcciones del strike ϕ y dip δ (Figura 3.6). El ángulo de rotación λ , se define mediante un procedimiento de prueba y error, para que la dislocación que se parameteriza sea en la dirección más representativa de la dirección de deslizamiento promedio del terremoto de Illapel. Se busca de esta manera la dirección que permita ajustar de mejor forma los desplazamientos observados para el cosísmico del terremoto M_w 8.3 de Illapel 2015, utilizando un modelo directo que solamente incorpora la dislocación en dirección θ . Se evaluará utilizar el ángulo de rotación con valores cercanos al ángulo de deslizamiento *rake* obtenido de mecanismos focales estimados para el terremoto de Illapel (más información en la Sección 5.1, Tabla 5.1).

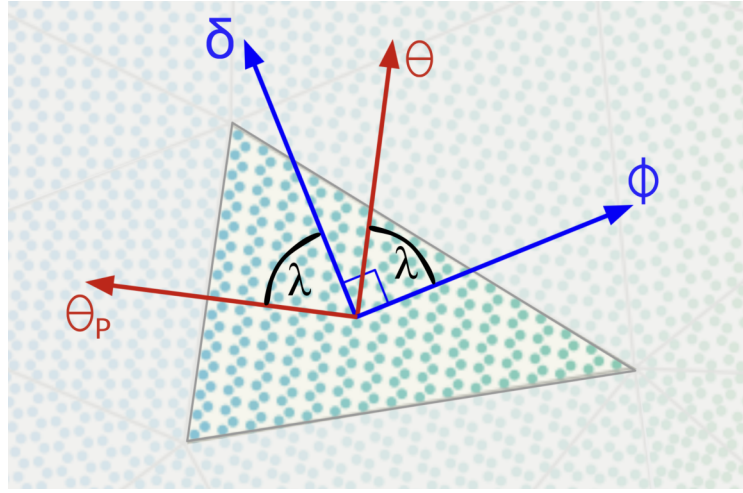


Figura 3.6: Ángulos relacionados a la parametrización de los elementos discretos de la malla triangular. Las flechas azules simbolizan las direcciones de strike (ϕ) y *up-dip* (δ) de un triángulo dado, mientras que las flechas rojas al segundo sistema coordenado formado por θ y θ_P , direccionado tal que θ sea paralelo al *rake* promedio del terremoto (λ).

En este caso, la matriz de funciones de Green vendrá dada por

$$\underline{\underline{G}}_{slip} \equiv \underline{\underline{G}}_{theta-slip} \quad (3.16)$$

Para ambas parametrizaciones del problema en una dirección del movimiento, se construye la matriz $\underline{\underline{G}}$ generalizada, utilizando las respectivas $\underline{\underline{G}}_{slip}$ y las funciones base de esta geometría, dada por $\underline{\underline{B}}_{N_{fp} \times N_{fb}}$, por lo que $\underline{\underline{G}}$ queda de la forma $\underline{\underline{G}}_{N_{obs} \times N_{fb}}$ (número de observaciones por número de funciones base).

3.4. Propuesta de normalización de las columnas de \underline{G} para la dislocación en zona de subducción

Tal como se ha descrito anteriormente, las columnas de la matriz de funciones base \underline{B} corresponden a cada una de las *b-splines* ordenadas por escala (expresión 3.6). En la parametrización propuesta para el problema de dislocación, la matriz de funciones de Green generalizada es de la forma

$$\underline{G} = \underline{G}_{slip} \underline{B} \quad (3.17)$$

De esta manera, las columnas de \underline{G} también se corresponden a las funciones base, por lo que finalmente se tiene que los desplazamientos predichos están dados por

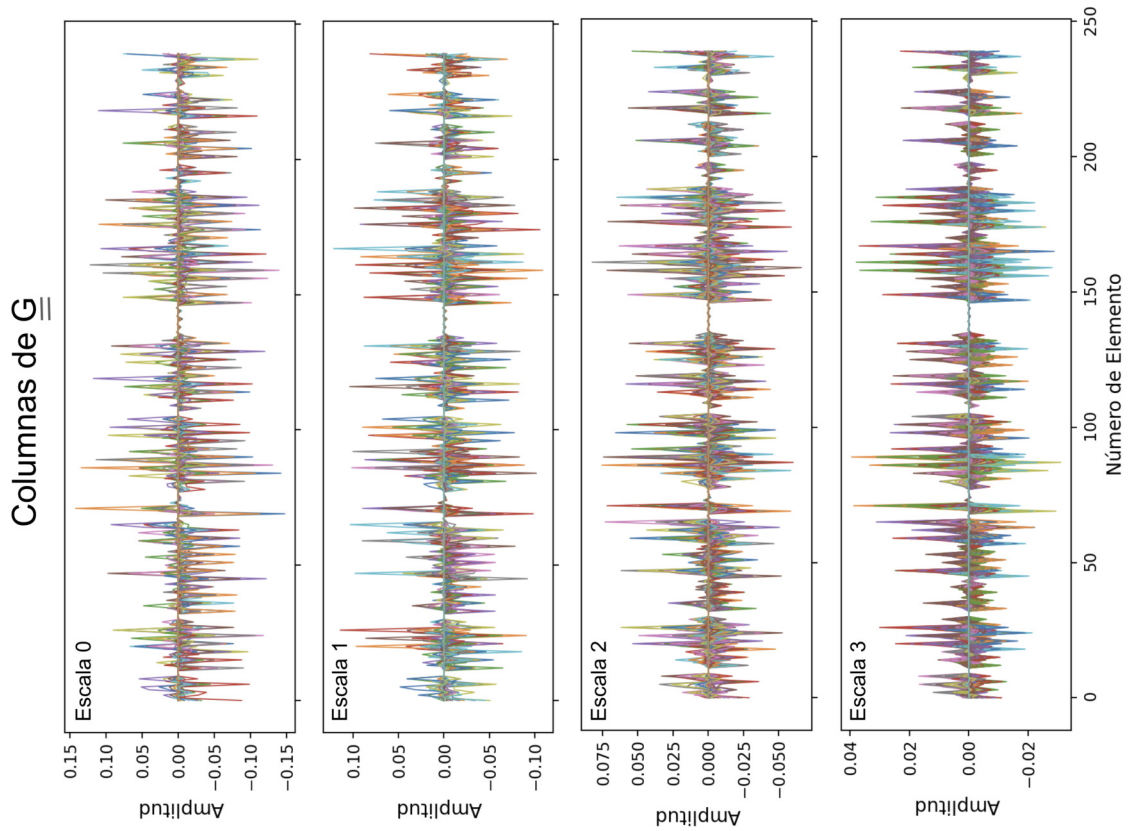
$$\begin{aligned} \underline{d}_{pred} &= \underline{G} \underline{m} \\ \underline{d}_{pred} &= \begin{bmatrix} \underline{G}^1 & \cdots & \underline{G}^{N_E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m^1 \\ \vdots \\ m^{N_E} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Donde el vector de parámetros del modelo \underline{m} está también ordenado por escalas. Dado que se tiene un conjunto de funciones base de distintos tamaños, es natural la intención de buscar una forma de normalizar estas funciones, para que su impacto en la función objetivo que se busca minimizar sea más o menos el mismo, independiente de la escala a la que pertenece la función base, de manera que la inversión *sparse* no prefiera algunas funciones base sobre otras *per se* (e.g., Riel et al., 2014).

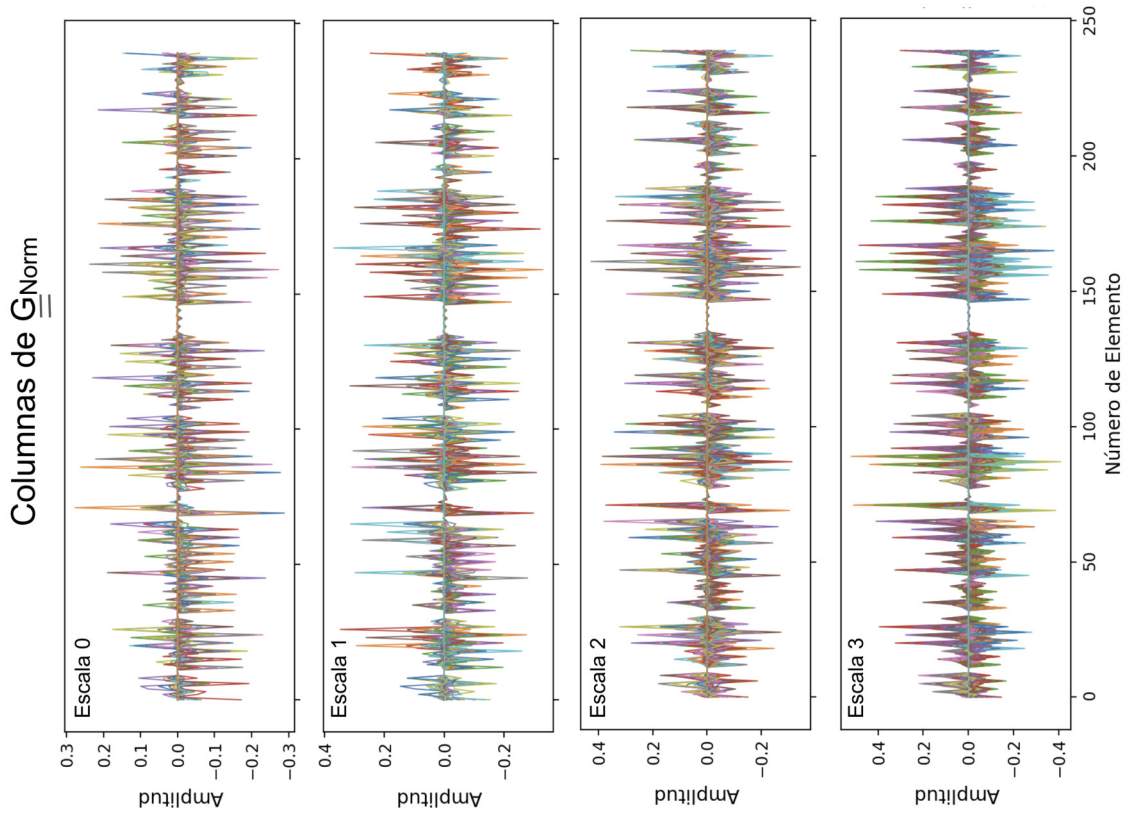
En este contexto, existen diferentes criterios para normalizar las columnas de \underline{G} (e.g., Riel et al., 2014; Köhne et al., 2023). Para la aplicación al caso de Illapel, se ideó una forma de normalizar por escalas. Se definió calcular la norma máxima de las columnas de \underline{G} relacionadas a una escala dada, y utilizar ese valor para normalizar las columnas correspondientes. Así, la matriz normalizada es como se indica en la expresión (3.19)

$$\underline{G}_{Norm} = \begin{bmatrix} \underline{G}^1 \cdot \frac{1}{\max(\|\underline{G}^1\|_2)} & \cdots & \underline{G}^{N_E} \cdot \frac{1}{\max(\|\underline{G}^{N_E}\|_2)} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

La amplitud de las columnas de la matriz \underline{G} por escala, previo y posterior a la normalización se muestran en la Figura 3.7. Se puede notar que la amplitud de las columnas de la matriz quedan de un orden muy similar con la normalización propuesta, a diferencia del estado inicial, donde, como era de esperar, la amplitud de las funciones base era diferente entre la diversas escalas, disminuyendo en las escalas más pequeñas.



(a) Amplitud de las columnas de $\underline{\underline{G}}$ en cada escala.



(b) Amplitud de las columnas de $\underline{\underline{G}}_{\text{Norm}}$ en cada escala.

Figura 3.7: Comparación de las amplitudes de las columnas de la matriz $\underline{\underline{G}}$ (generalizada), a) sin normalizar y b) con la normalización propuesta ($\underline{\underline{G}}_{\text{Norm}}$), para cada una de las escalas.

3.5. Desarrollando intuición: Ejemplos de ajuste a una curva y a una superficie

Con el objetivo de desarrollar en el lector una mejor intuición con respecto la metodología propuesta, se plantean dos casos de estudio que no tienen la complejidad inherente a la inversión de dislocación cuasi-estática, que es el mal condicionamiento del problema inverso de dislocación. En estos ejemplos, se generan señales sintéticas (\underline{d}), en dominios de una y dos dimensiones, conformadas por rasgos suaves y otros rugosos, con el fin de ajustar dichos datos sintéticos usando funciones base *b-splines* multi-escala, ilustrando las propiedades del enfoque multi-escala propuesto.

En el caso de estos ejemplos, se denota que $\underline{G}_{slip} = \underline{I}$ (la matriz identidad) en las ecuaciones (3.9), ya que las funciones base representan directamente la cantidad que se desea ajustar. Luego en dichas ecuaciones $\underline{G} \equiv \underline{B}$, y el problema directo queda de la forma

$$\underline{B} \underline{m} = \underline{d} \quad , \quad (3.20)$$

con \underline{d} los datos, en este caso los datos sintéticos que se pretenden recuperar en estos ejemplos simplificados; \underline{B} la matriz de funciones base en múltiples escalas y \underline{m} el vector de parámetros del modelo, es decir, la amplitud de las funciones base.

Notar que en estos ejemplos ilustrativos, tanto la curva como la superficie sintéticas que se ajustarán, se podrían considerar que son valores conocidos de la distribución de dislocación en los elementos discretos de una falla 1D ó 2D, y que en estos ejemplos ilustrativos, se busca ajustar esos valores con el fin de obtener una representación en base a funciones *b-splines* multi-escala de esas distribuciones de dislocación.

Dado que en los modelos resultantes, la contribución de las funciones base podría ser pequeña, en algunos casos de prueba se fijó un umbral arbitrario para remarcar aquellas funciones base cuya amplitud superara dicho valor. Dicho umbral se denominó *NonZero* y en cada caso se especificará el valor utilizado.

3.5.1. Ejemplo de ajuste a una curva (1D)

Para este ejemplo 1D, se definió un dominio de x entre valores -100 y 100, con 1000 elementos; y se generó una señal de dos funciones exponenciales (gaussianas), una ancha y otra más fina, con la expresión

$$y(x) = 2e^{-\frac{(x - x_{0_{\text{ancha}}})^2}{\sigma_{\text{ancha}}^2}} + 2e^{-\frac{(x - x_{0_{\text{fina}}})^2}{\sigma_{\text{fina}}^2}} \quad (3.21)$$

donde los respectivos x_0 corresponden a la media o valor de x donde estará centrada la gaussiana y los σ a las desviaciones estándar o anchos de estas señales.

Los parámetros utilizados para la construcción de la señal se muestran en la Tabla 3.3.

Tabla 3.3: Parámetros para las funciones que conforman la señal 1D.

Parámetro	Exponencial ancha	Exponencial fina
x_0	25	-51
σ_x	40	2

Después de obtener la curva, se construyó un segundo conjunto de datos, pero con ruido añadido (Figura 3.8, panel superior). El ruido que se agrega a los datos es una realización de una variable aleatoria que sigue una distribución normal multivariada con media nula y matriz de covarianza $\underline{\underline{C}}_d$ que describe la incertidumbre de los datos (y es de esta forma para todos los ejemplos que siguen).

Para este ejemplo se generó un conjunto de funciones base para el dominio seleccionado, conformado por 5 escalas de *b-splines* cúbicas, donde se consideró que la escala 0 (aquella con las funciones más amplias) incluyera 6 funciones completas en el rango. Dicho conjunto de funciones se muestra en los paneles inferiores de la Figura 3.8, se observa la diferencia en extensión y cantidad de *b-splines* que incluye cada una de las escalas. La cantidad de funciones por escala se desglosa en la Tabla 3.4.

De esta manera, se tiene que para el caso de inversión aplicada a curvas 1D, la matriz de funciones base $\underline{\underline{B}}$ es del orden $N_{data} \times N_{fb}$, es decir, 1000 x 206.

Para obtener los resultados, se calcularon un total de 500 inversiones, utilizando valores para los respectivos parámetros de regularización ε y α en un rango logarítmico entre 10^{-10} y 10^{10} .

Dado que la contribución de las funciones base podría ser pequeña, se fijó el umbral *NonZero* = 0.25; en los resultados que se presentan a continuación se pueden observar los \underline{d}_{pred} tanto para el conjunto completo de la solución, como para aquella sólo con las contribuciones de las *b-splines* con amplitud mayor a *NonZero*.

Ya que un aspecto importante es saber cuántas funciones base está utilizando cada modelo, se contaron las *b-splines* que superan dicho umbral y no las totales distintas de cero, porque a nivel numérico, no fue siempre factible evaluar si ciertos parámetros del modelo eran efectivamente distintos de cero.

Tabla 3.4: Funciones base *b-splines*, para el caso de curvas 1D

Escala	Nbs_X completas	Nbs_X totales
0	6	10
1	12	16
2	24	28
3	48	52
4	96	100
		206

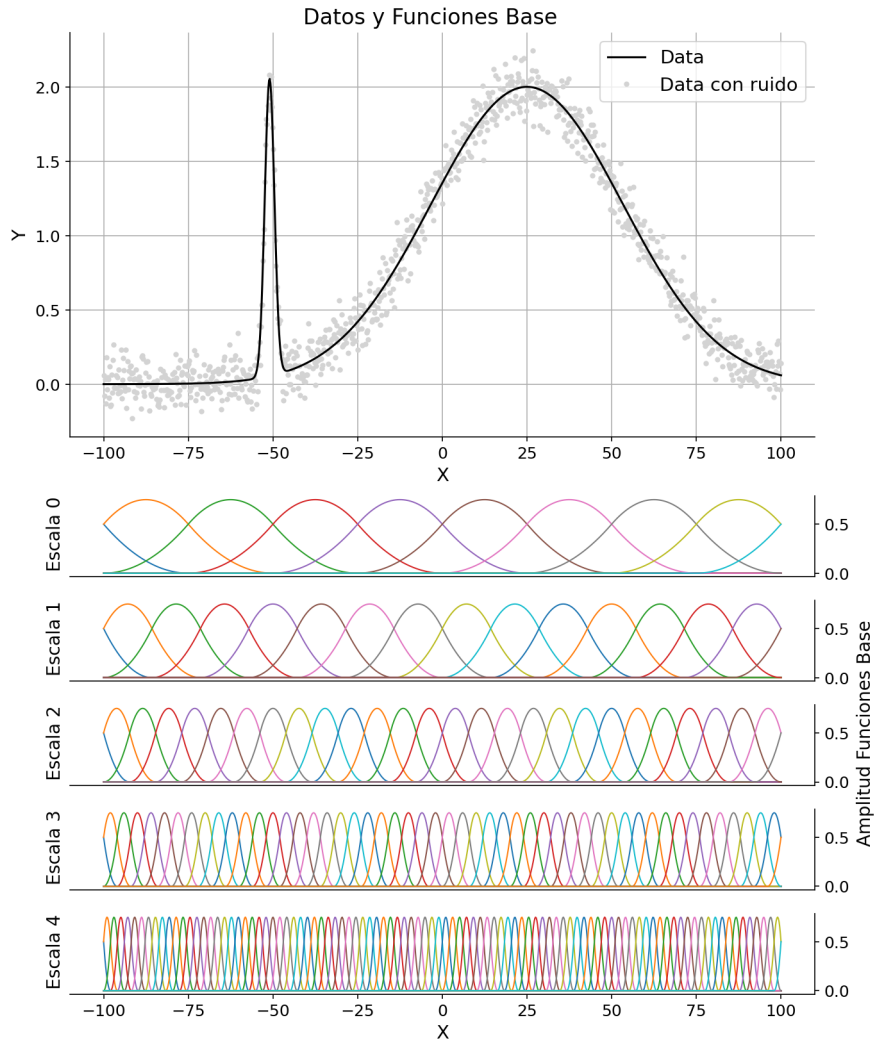
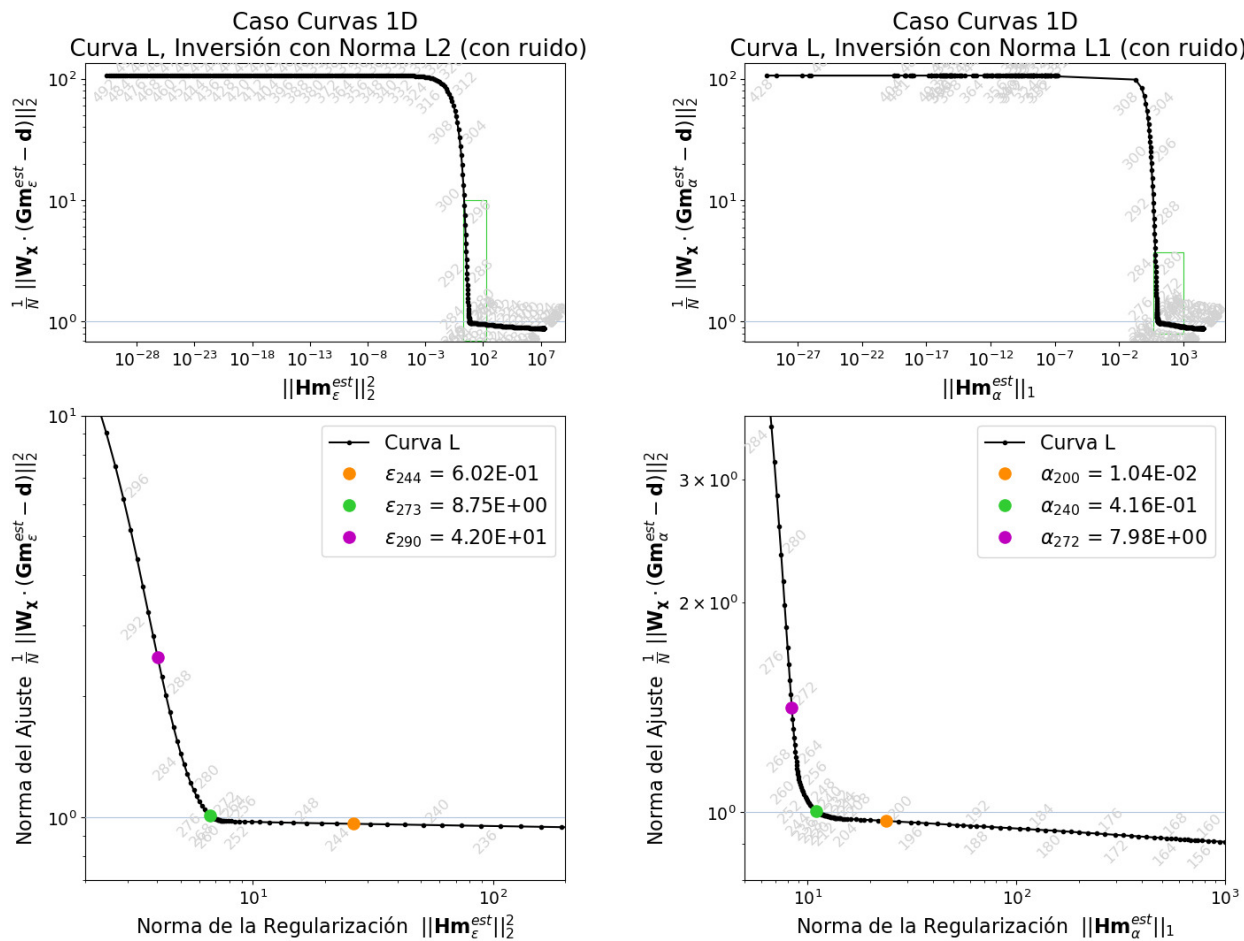


Figura 3.8: (Panel superior) En negro los datos sintéticos de la curva 1D y en puntos grises los respectivos datos con ruido aleatorio. (Paneles inferiores) Conjunto de funciones base para el dominio elegido; en cada cuadro se muestran las *b-splines* cúbicas de cada escala, donde la número 0 incluye las funciones más extensas y la número 4 las más reducidas en el rango.

A continuación se presentan los resultados de las inversiones de los datos sintéticos con ruido aleatorio añadido, utilizando las normas L2 y L1 para la regularización. En la Figura 3.9 se observan las curvas L de las dos inversiones; para los resultados que se exponen aquí y en las secciones y capítulos siguientes, este criterio será representado por un gráfico con dos paneles, el primero con una visión general de ambas normas para el grupo de parámetros completo, y el segundo enfocado en la zona de inflexión de la curva, en donde se seleccionarán modelos con distinto grado de amortiguamiento, para comparar sus características.

Para las inversiones regularizadas con ambas normas (L2 y L1), se seleccionó el modelo más cercano al valor de norma del ajuste reducida igual a 1 (señalado con la línea horizontal en los gráficos), además de un caso sobreamortiguado y otro subamortiguado, respecto del valor óptimo.

En la Figura 3.10 se muestran los modelos seleccionados en cada inversión, para ambos casos es notorio cómo cambia la solución con distintos grados de amortiguamiento, donde los modelos subamortiguados (ε_{244} y α_{200}) obtienen soluciones más “rugosas”, con más oscilaciones pequeñas alrededor de los patrones extensos, mientras que las sobreamortiguadas (ε_{290} y α_{272}) obtienen predicciones más suaves, a pesar de que por ello tengan una menor amplitud, comparado a los datos sintéticos que se intentan recuperar (curva negra y nube de puntos grises).



(a) Curva L de la inversión del caso 1D, regularizada con norma L2.

(b) Curva L de la inversión del caso 1D, regularizada con norma L1.

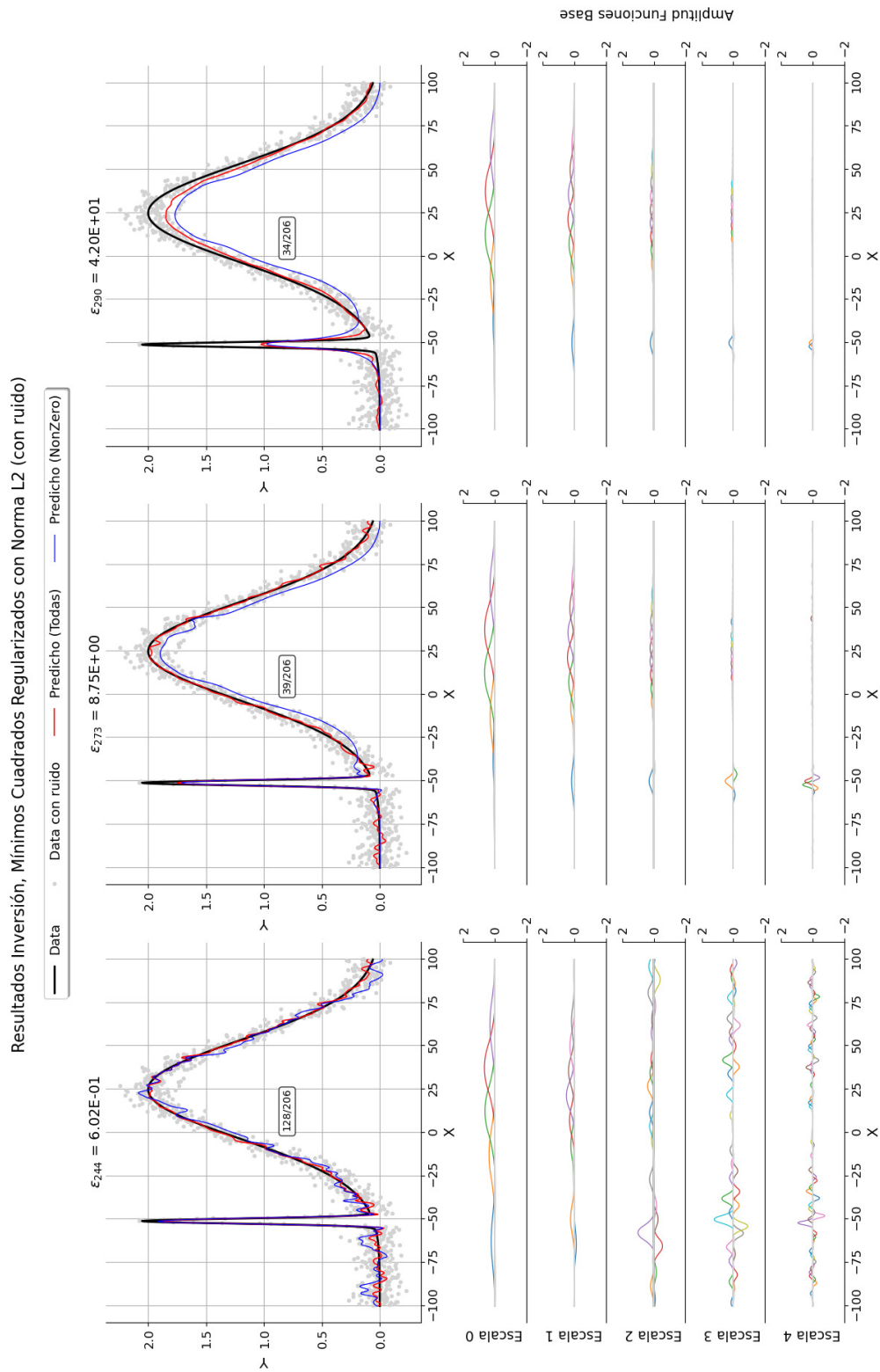
Figura 3.9: Curvas L para la resolución del problema inverso del caso de curvas 1D. Inversiones regularizadas con (a) norma L2 y (b) norma L1, ambas considerando datos sintéticos con ruido aleatorio añadido. Los números en gris indican el modelo asociado a cada punto negro en la curva. Los paneles inferiores son el *zoom* señalado con el cuadro verde de los paneles superiores. Los puntos de colores destacan los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento en cada caso.

En general, las soluciones obtenidas en la inversión con regularización con norma L1 logran una similitud mayor a los datos que se pretenden ajustar que las obtenidas con norma L2, esto comparando los tres modelos seleccionados en cada caso (subamortiguado, “favorito” y sobreamortiguado); lo anterior se observa en la Figura 3.10 b, donde las soluciones con L1 describen de mejor forma el rasgo suave y extenso de la señal, así como también el *peak* más agudo de ésta.

En cada uno de los resultados se señala la cantidad de funciones base que integran la solución, las que se contaron como la cantidad de *b-splines NonZero* (es decir, aquellas cuya amplitud supera el umbral). Esta información aparece en cada panel de resultados como la razón funciones base *NonZero*/funciones totales. De esta cifra se nota que la implementación de la inversión L1 funciona correctamente, pues recupera soluciones de tipo *sparse*, utilizando una cantidad considerablemente menor de funciones que los resultados regularizando con norma L2. Por ejemplo para ambos modelos favoritos (ε_{273} y α_{240}), la solución L2 cuenta con 39/206 funciones, mientras que la de L1 sólo con 9/206.

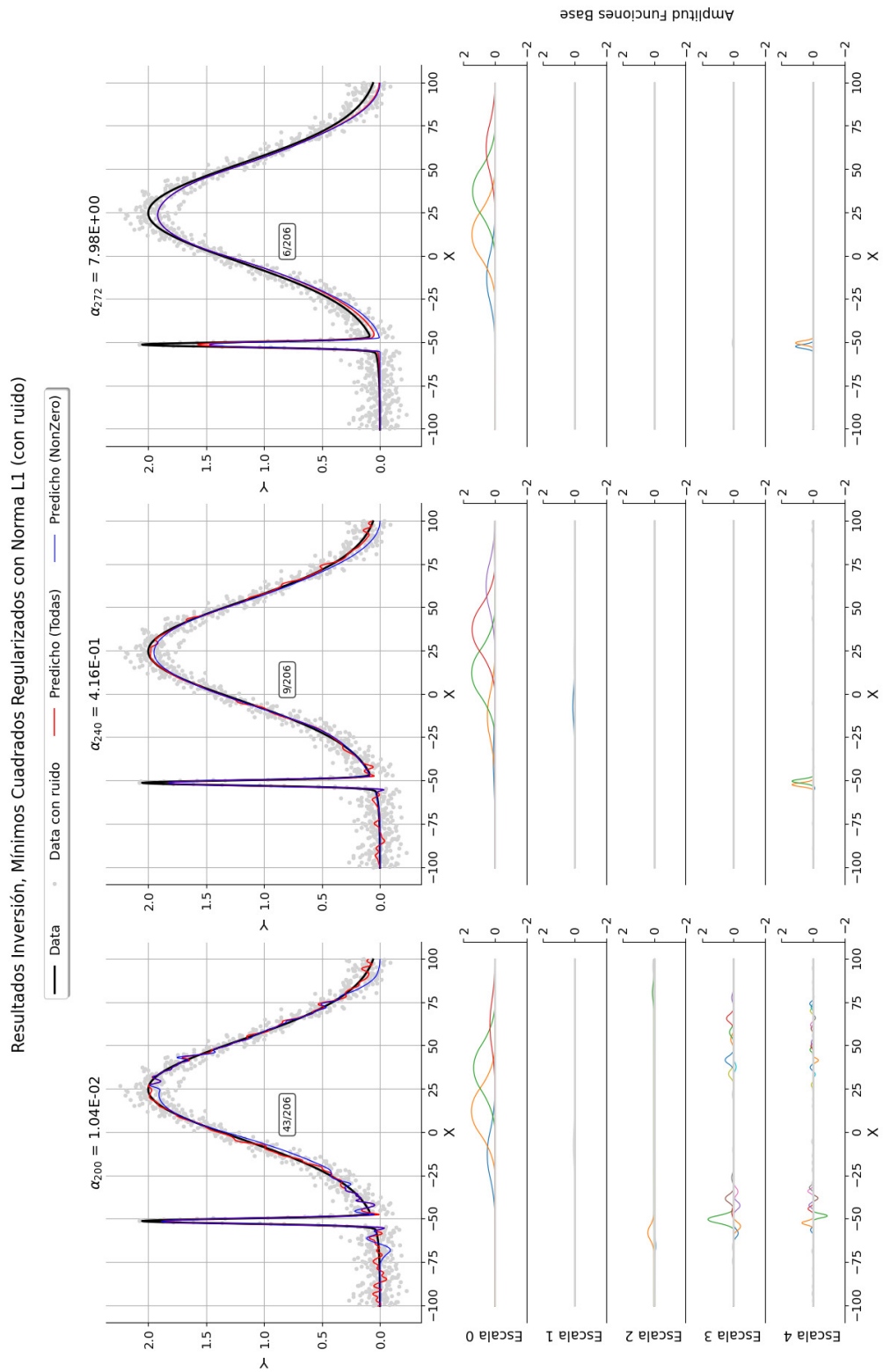
En los paneles superiores de cada resultado se muestra la comparación de los predichos con los datos a ajustar, la curva roja es el resultado total y la curva azul la predicción utilizando sólo la contribución de las *b-splines NonZero*. Es observable que en las predicciones de los resultados con L2, ambas curvas se diferencian mayormente que en el caso L1, lo que indica que en la inversión regularizada con la norma L2 las funciones base con amplitudes bajo este umbral contribuyen de manera significativa al valor de la predicción obtenida, a pesar de tener una amplitud pequeña y esto es porque esta solución tiende a usar la totalidad de la colección de funciones, aunque sea asignando una amplitud muy reducida a éstas; lo anterior puede notarse en los paneles correspondientes a las escalas 2, 3 y 4 (Figura 3.10 a), donde se advierten muchas *b-splines* pequeñas en color gris a lo largo de todo el rango, y no tan solo en los valores de x donde se sitúa el *peak* más agudo de la señal.

En ambos casos subamortiguados, los modelos están explicando el ruido de los datos sintéticos, obteniendo muchas ondulaciones en la señal predicha. En cuanto a los sobreamortiguados, para el correspondiente al caso L2 (ε_{290}), el modelo es suavizado, obteniendo una señal de menor amplitud (y aun menor para la predicción de las funciones con amplitudes superiores al valor *NonZero*), no ajustando bien el *peak* agudo en torno a $x = -50$. Para el modelo sobreamortiguado en el caso L1 (α_{272}), se tiene que la señal predicha se asemeja de buena forma al rasgo más extenso de la señal, pero no ajusta tan bien el *peak* más estrecho, donde obtiene una amplitud menor, tanto para el modelo completo como para el *NonZero* (que en esta parte del rango son casi iguales).



(a) Modelos seleccionados en la inversión L2 (subamortiguado, “favorito” y sobreamortiguado).

Figura 3.10: Resultados de los modelos elegidos en las inversiones de curvas 1D, regularizadas con a) norma L2 y b) norma L1. Los primeros paneles comparan los datos sintéticos con los predichos usando la contribución de todas las funciones base (curva roja) y con solo las mayores al umbral $NonZero=0.25$ (curva azul); la cantidad de funciones es detallada en el cuadro con la razón respecto al total de b -splines (206). Los paneles inferiores muestran las amplitudes de las b -splines en cada escala, en color gris aquellas con amplitud menor al umbral.



(b) Modelos seleccionados en la inversión L1 (subamortiguado, “favorito” y sobreamortiguado).

Figura 3.10: Resultados de los modelos elegidos en las inversiones de curvas 1D (continuación).

Otra diferencia a considerar, es cómo se construye el *peak* más fino en cada una de las inversiones. En los resultados de L1, se usan 1 ó 2 *b-splines* en las escalas 3 y 4 (ejemplo: modelos α_{240} y α_{272} , Figura 3.10, b), mientras que en el caso L2, hay funciones base en este rango a lo largo de todas las escalas (modelos ε_{273} y ε_{290} , Figura 3.10, a). Esta característica de usar gran cantidad de funciones también genera que la amplitud de éstas no sea tan alta, pues se usan muchas funciones en distintas escalas.

3.5.2. Ejemplo de ajuste a una superficie (2D)

La idea en este ejemplo es ajustar el modelo de *b-splines* multi-escalas a datos 2D con rasgos suaves y agudos. Para ello, se escogió generar datos sintéticos siguiendo una superficie que es similar a la parte superior de la cabeza del personaje de animé Pokemon “Pikachu”. Se definió en primer lugar un dominio de valores de x e y entre -100 y 100, de 100 elementos cada uno. Luego se generó una señal con distribución normal en todo el rango de valores seleccionado, con la mayor amplitud concentrada en el centro del dominio. Para valores de x e y dicha función exponencial fue definida de la forma:

$$z(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-x_0)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-y_0)^2}{\sigma_y^2}\right)}, \quad (3.22)$$

con x_0 e y_0 las respectivas medias o coordenadas donde se centra la exponencial y $\sigma_{x,y}$ las desviaciones estándar que indican los anchos de la señal en cada dirección. En tercer lugar, para construir los *peaks* agudos de la señal deseada, se sumaron dos distribuciones asimétricas de distinta amplitud, utilizando una adaptación 2D de la función de densidad de probabilidad *Normal-Skewed* sesgada con el parámetro α , que se define como,

$$f(x, y) = 2\phi(x, y) \cdot \Phi(\alpha x, \alpha y) \quad , \quad (3.23)$$

donde $\phi(x, y)$ corresponde a la función de densidad de probabilidad Normal, con expresión análoga a la ecuación 3.22. Mientras que $\Phi(x, y)$ representa la función de distribución acumulada, dada por

$$\Phi(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \phi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (3.24)$$

En nuestro caso, la señal no tendrá covarianzas entre las variables x e y , por tanto la función es independiente en cada variable y se puede utilizar el Teorema de Fubini, por lo que $\Phi(x, y)$ queda de la forma:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \phi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\ &= \left(\int_{-\infty}^x \phi(t_1, t_2) dt_1 \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^y \phi(t_1, t_2) dt_2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x - x_0}{\sqrt{2}\sigma_x} \right) \right] \cdot \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{y - y_0}{\sqrt{2}\sigma_y} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

Considerando el valor de α de la ecuación 3.23, se tiene

$$\Phi(\alpha x, \alpha y) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\alpha(x - x_0)}{\sqrt{2}\sigma_x} \right) \right] \cdot \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\alpha(y - y_0)}{\sqrt{2}\sigma_y} \right) \right] \quad (3.26)$$

Los parámetros utilizados para la construcción de cada señal se muestran en la Tabla 3.5.

Tabla 3.5: Parámetros para las funciones que conforman la superficie.

Parámetro	Exponencial principal	Función asimétrica 1	Función asimétrica 2
Amplitud	5000	2500	1000
x_0	0	-50	55
y_0	0	-50	50
σ_x	80	22	11
σ_y	70	18	8
α		10	-10

Luego de obtener la superficie 2D con la suma de las tres funciones mencionadas anteriormente, cada una modulada por la amplitud respectiva (Tabla 3.5); se generó una señal de ruido aleatoria, con la que se construyó un segundo conjunto de datos, pero con ruido añadido. Ambas superficies se muestran en la Figura 3.11.

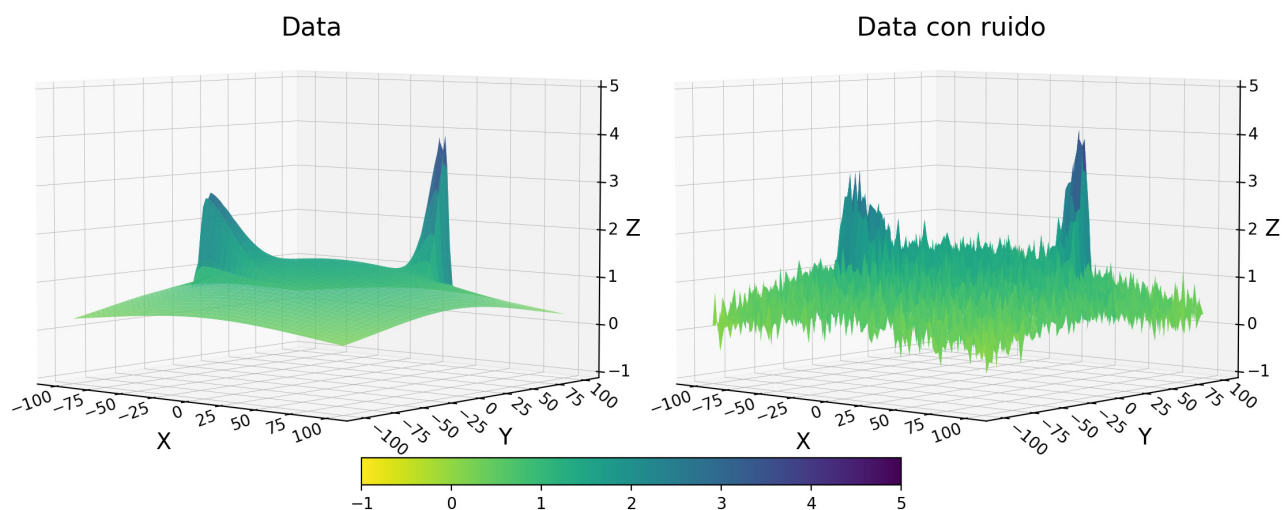


Figura 3.11: Superficies 2D sintéticas, en el panel izquierdo se muestra la señal original compuesta con una exponencial extensa en el rango y dos asimétricas de distinto ancho y amplitud máxima. En el panel derecho se exhibe la misma superficie con ruido aleatorio añadido.

Posteriormente, se generó un conjunto de funciones base para el dominio (x, y) elegido, considerando 4 escalas. Se definieron un total de 3 *b-splines* completas para x e y en la escala 0 (la de funciones más anchas); de esta manera, el conjunto completo quedó conformado por 1189 funciones base, las que se muestran en la Figura 3.12, donde es posible notar la diferencia en la extensión de las *b-splines* cúbicas según la escala. El detalle de la cantidad de funciones base se muestra en la Tabla 3.6.

Funciones Base, Caso 2D

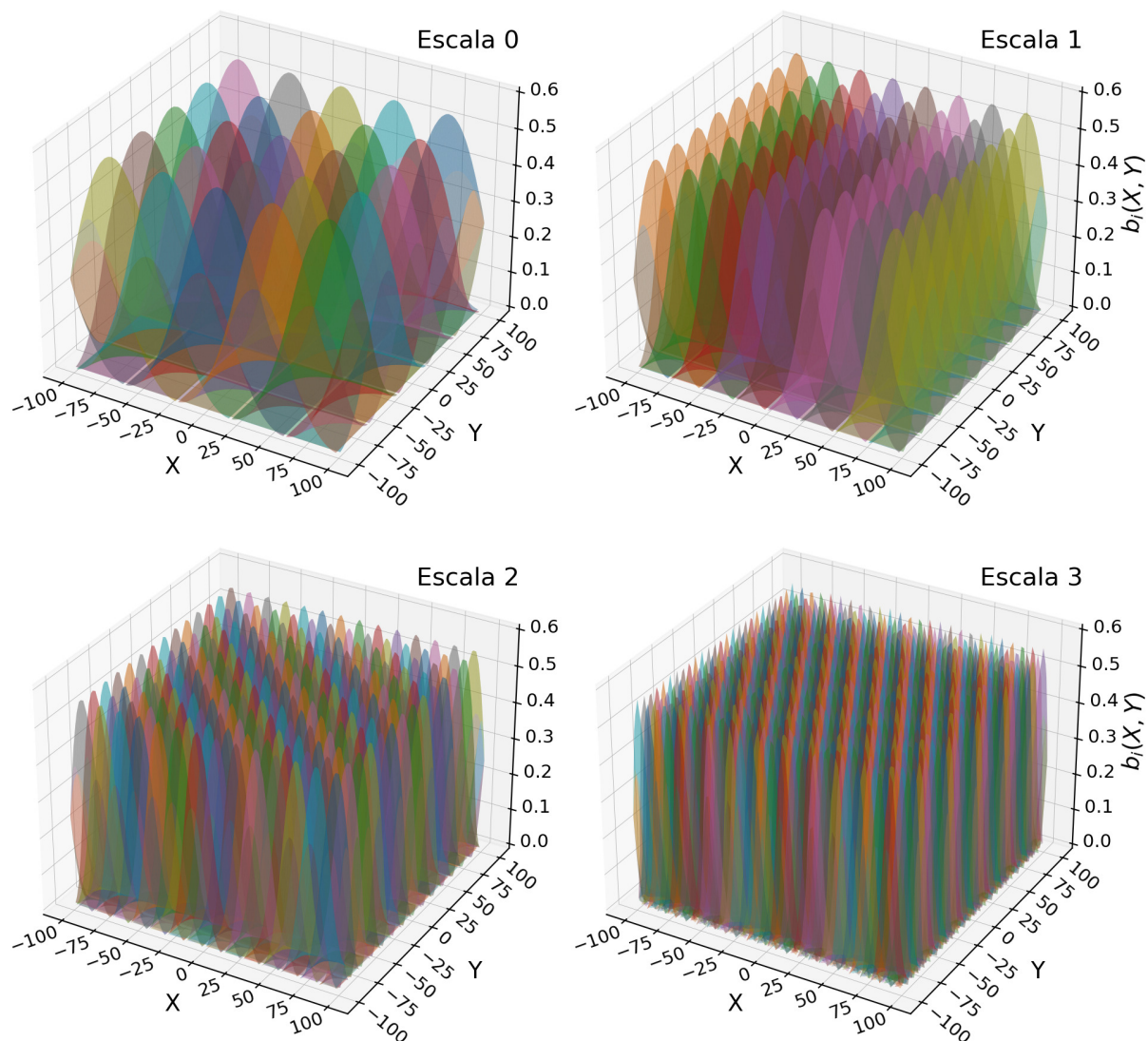


Figura 3.12: Conjunto de funciones base 2D para la inversión de superficies, cada panel muestra las *b-splines* cúbicas en 2D de cada escala, donde la número 0 es la que incluye funciones más grandes y la número 3 aquellas más reducidas en extensión.

Tabla 3.6: Funciones base *b-splines*, para el caso de superficie 2D.

Escala	Funciones completas		Funciones totales		Total
	Nbs_X	Nbs_Y	Nbs_X	Nbs_Y	
0	3	3	7	7	49
1	6	6	10	10	100
2	12	12	16	16	256
3	24	24	28	28	784
					1189

De esta manera, se tiene que para el caso de inversión aplicada a superficies, la matriz de funciones base \underline{B} es del orden $N_{data} \times N_{fb}$, es decir, 10000 x 1189.

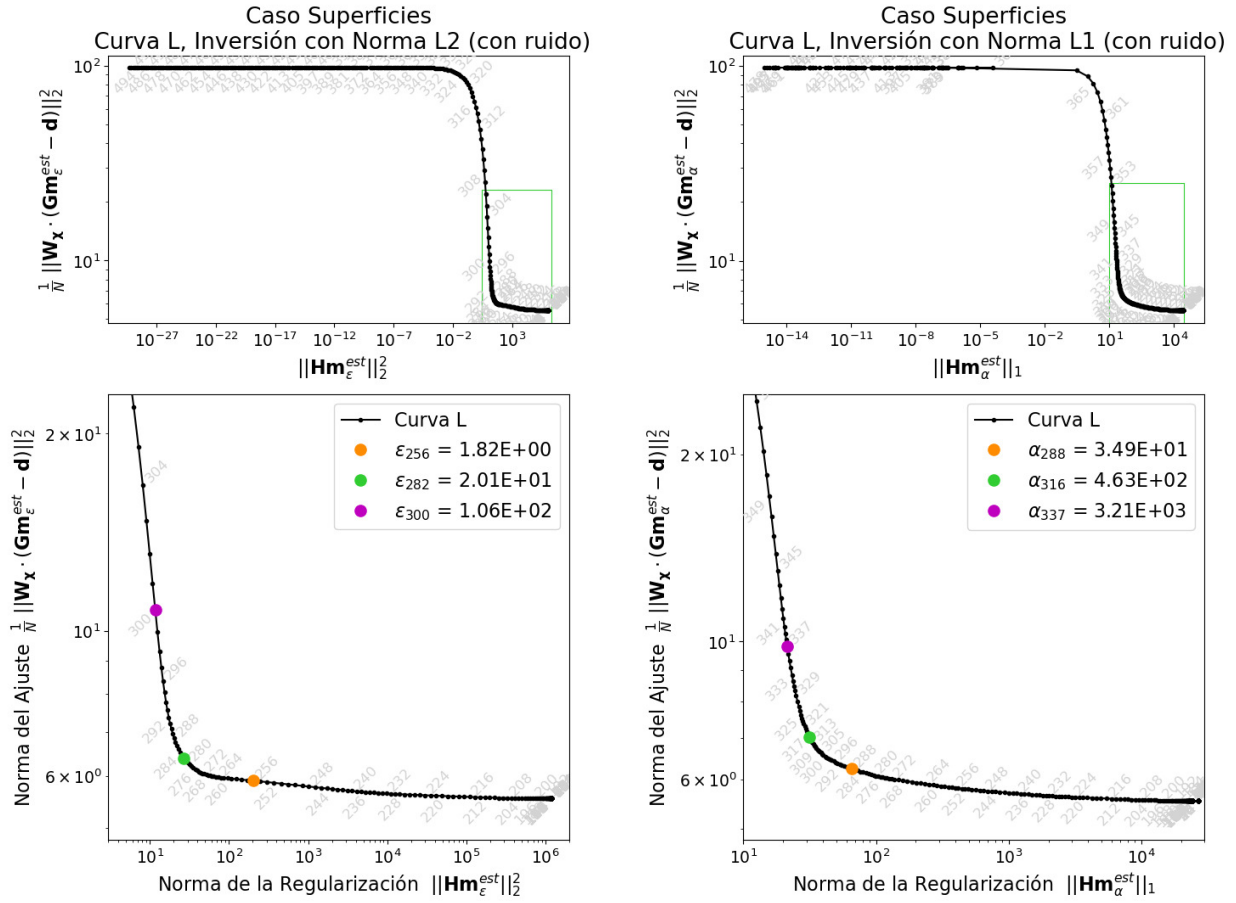
Para ajustar las superficies definidas usando las funciones base *b-splines* multi-escala, se calcularon inversiones utilizando el problema de mínimos cuadrados, comparando los resultados cuando se usa la norma L2 y L1 en la regularización. Se consideró esta vez únicamente la superficie con ruido aleatorio añadido (Figura 3.11); en cada caso se calcularon un total de 500 inversiones, utilizando valores para los respectivos parámetros de regularización ε y α en un rango logarítmico entre 10^{-10} y 10^{10} . El parámetro de regularización óptimo se escogió con el criterio de la curva L.

Al igual que el caso 1D, dado que la contribución de las funciones base podría tener una amplitud muy pequeña, se fijó un umbral arbitrario para remarcar aquellas *b-splines* cuya amplitud (parámetro del modelo) fuera mayor a dicho valor, el cual fue definido como *NonZero* = 0.1. En los resultados que se presentan a continuación se muestran los \underline{d}_{pred} para la totalidad de la solución, así como también los \underline{d}_{pred} de la solución formada sólo con las contribuciones de las *b-splines* con una amplitud mayor al umbral antes mencionado.

Tal como se realizó para el caso 1D, para las superficies también se contaron las *b-splines* no nulas (en el conjunto *NonZero*), las que en este caso, se especificarán para el modelo total y para cada escala.

A continuación, se muestran los resultados para las inversiones regularizadas con L2 y L1, de la superficie sintética con ruido aleatorio añadido. En la Figura 3.13 se observan las curvas L para las dos inversiones y los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento. En este caso la curva L no cruza el valor 1 para la norma del ajuste reducida, por lo que en ambos casos se seleccionaron valores en la zona de inflexión de la curva, sin otra referencia extra.

En las Figuras 3.14 y 3.15 se muestran los resultados para los modelos seleccionados en las inversiones regularizadas con normas L2 y L1, respectivamente. Es posible notar en ambos casos cómo varía la solución obtenida según el nivel de amortiguamiento en la regularización. Los modelos subamortiguados (ε_{256} y α_{288}) entregan soluciones con mayor amplitud en la zona de los *peaks* agudos y con características más “rugosas”, mientras que los sobreamortiguados (ε_{300} y α_{337}) como es de esperar, muestran rasgos más suavizados, lo que conduce a menores amplitudes para las señales agudas.



(a) Curva L de la inversión del caso superficies, regularizada con norma L2.

(b) Curva L de la inversión del caso superficies, regularizada con norma L1.

Figura 3.13: Curvas L para la resolución del problema inverso del caso de superficies. Inversiones regularizadas con (a) norma L2 y (b) norma L1, ambas considerando datos sintéticos con ruido aleatorio añadido. Los números en gris indican el modelo asociado a cada punto negro en la curva. Los paneles inferiores son el *zoom* señalado con el cuadro verde de los paneles superiores. Los puntos de colores destacan los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento en cada caso.

Para los modelos “favoritos” (columnas centrales de las Figuras 3.14 y 3.15) se obtienen rasgos intermedios, con una mejor definición de la amplitud de los *peaks* agudos que el caso sobreamortiguado y en general con menos ondulaciones en lo extenso de la señal que lo que muestran los subamortiguados. Comparando ambos resultados “favoritos”, el de la inversión con la norma L1 (α_{316}) se asemeja más a la superficie sintética original; en primer lugar, recupera la exponencial más extensa y suave sin presentar pequeñas oscilaciones como sucede en el resultado regularizado con norma L2 (ϵ_{282}); por otra parte, ambas orejas (*peaks* agudos en torno a los puntos $(-50, -50)$ y $(55, 50)$, respectivamente) son representadas más fielmente en la solución utilizando L1, no tan solo porque presentan distintas amplitudes en z , como fueron diseñadas, sino también porque se obtienen anchos distintos, lo que no sucede con el modelo en L2, donde ambos *peaks* presentan un aspecto más simétrico.

Resultados Inversión, Mínimos Cuadrados Regularizados con Norma L2 (con ruido)

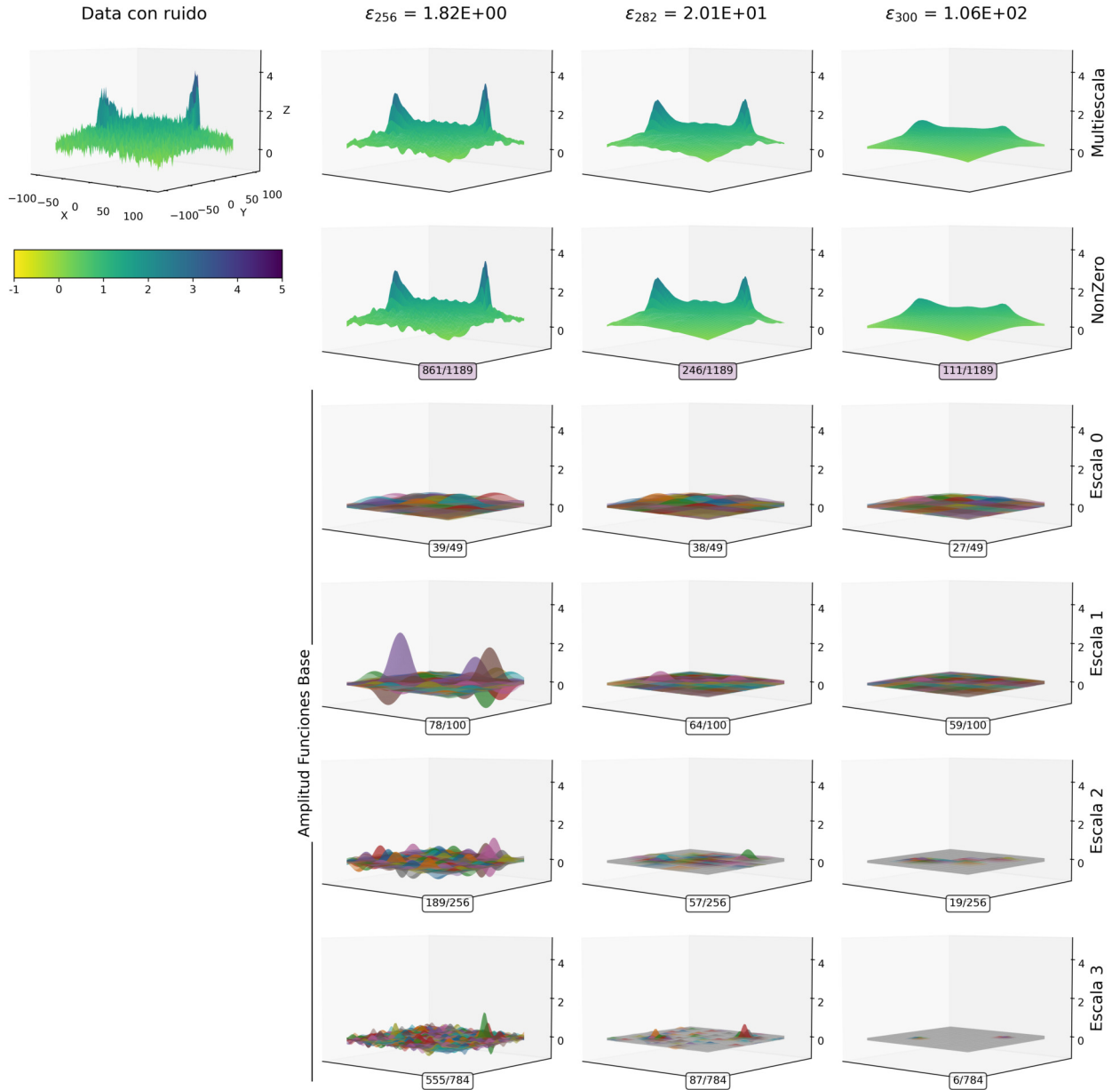


Figura 3.14: Resultados de los modelos seleccionados de la inversión de superficies, con una regularización con norma L2. En el primer panel se muestra la superficie con ruido aleatorio añadido. Cada columna corresponde a uno de los modelos elegidos, a distintos grados de amortiguamiento. La primera fila muestra los resultados completos, la segunda los modelos obtenidos únicamente con la contribución de las *b-splines* con amplitud sobre el umbral (*NonZero*) y en los paneles inferiores la contribución de las *b-splines* en las distintas escalas; en cada una de ellas se especifica el número de funciones no nulas (*NonZero*) del total de cada escala.

Resultados Inversión, Mínimos Cuadrados Regularizados con Norma L1 (con ruido)

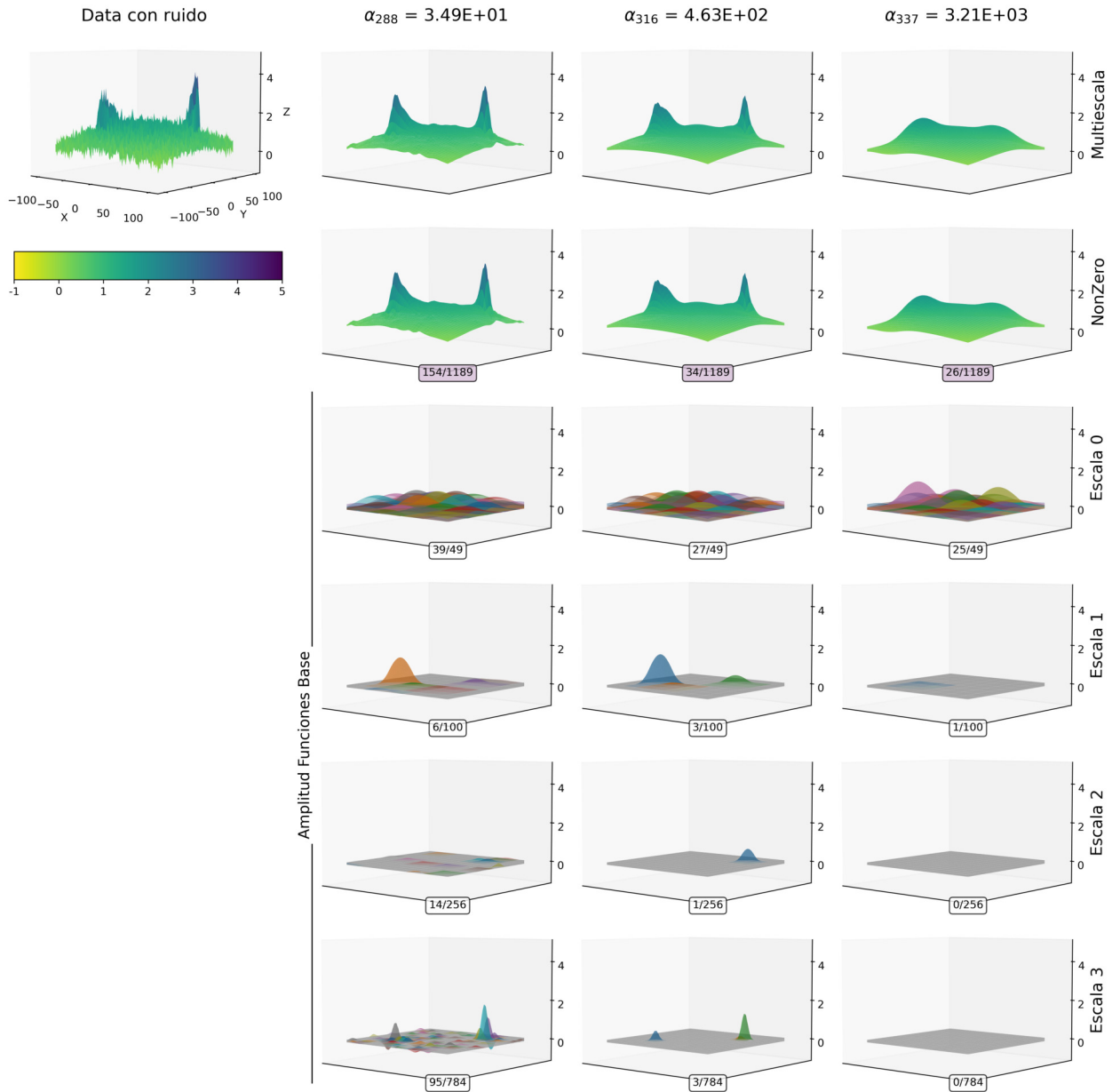


Figura 3.15: Resultados de los modelos seleccionados de la inversión de superficies con una regularización con norma L1. En el primer panel se muestra la superficie con ruido aleatorio añadido. Cada columna corresponde a uno de los modelos elegidos, a distintos grados de amortiguamiento. La primera fila muestra los resultados completos, la segunda los modelos obtenidos únicamente con la contribución de las *b-splines* con amplitud sobre el umbral (*NonZero*) y en los paneles inferiores la contribución de las *b-splines* en las distintas escalas; en cada una de ellas se especifica el número de funciones no nulas (*NonZero*) del total de cada escala.

En los resultados se especifica la cantidad de funciones bases que integran la solución (*NonZero*), con un cuadro con la razón respecto de la cantidad de funciones totales y totales por escala. De esta información es posible notar que las soluciones obtenidas de la inversión regularizada con norma L2, como es de esperar, utilizan gran cantidad de *b-splines* en to-

das las escalas. Por ejemplo, se puede comparar ambos modelos subamortiguados, en donde aquel relacionado con el parámetro ε_{256} utiliza 555 funciones en la escala 3, de un total de 784, mientras que la solución del parámetro α_{288} para la misma escala utiliza 95; lo cual indudablemente resulta en que la solución con norma L2 tiende a obtener modelos con más ondulaciones pequeñas, por su naturaleza.

La comparación anterior es sólo considerando las funciones base que superan el umbral definido como $NonZero = 0.1$; para una comparación más general y detallada se pueden observar las Figuras B.1 y B.2, donde se muestra una visión extendida de la amplitud de las *b-splines* para ambas soluciones (*zoom* entre -0.1 y 0.1 para los correspondientes a la norma L2 y de -0.01 y 0.01 para L1). Para el caso L2 es evidente el amplio número de funciones en gris, que si bien tienen una amplitud pequeña, al ser tantas efectivamente tienen una contribución no despreciable en el modelo obtenido⁶. Por otra parte, para el caso L1 también hay funciones inferiores al umbral en el cálculo, pero en una cantidad considerablemente menor y con amplitudes un orden de magnitud más pequeño que el caso L2 (la diferencia de un orden de magnitud en los *zoom* fue necesaria para poder observar estas funciones base de amplitud pequeña).

Otra diferencia es cómo cada solución construye las orejas (*peaks* agudos de la señal, en torno a los puntos (-50, -50) y (55, 50), respectivamente) de la señal sintética. En el caso de los modelos de la inversión regularizada con la norma L2 hay *b-splines* con gran amplitud en las zonas de los *peaks* agudos en todas las escalas, y también muchas funciones base mayores que el umbral en la vecindad de estos *peaks* en las escalas pequeñas (últimos paneles de las Figuras 3.14 y B.1).

Por otra parte, las soluciones con la regularización con norma L1 contienen pocas funciones base con amplitudes considerables para estas zonas, casi únicamente en las escalas más pequeñas. El modelo subamortiguado (α_{288}), que obtiene una solución más rugosa, presenta algunas excepciones en la escala 2 y 3 donde hay varias funciones de amplitud pequeña, pero en la escala 3 los grandes *peaks* son casi únicamente en la zona de las orejas. El modelo sobreamortiguado (α_{337}) es un caso especial, pues por la menor amplitud recuperada dado el gran amortiguamiento, no ajusta bien los *peaks* agudos y por tanto casi no usa *b-splines* en las últimas escalas.

Finalmente, el modelo “favorito” (α_{316}) para las escalas 1, 2 y 3 tiene amplitudes casi únicamente en las zonas relacionadas a las orejas de Pikachu, lo que demuestra que para el método de inversión es posible discernir las secciones del rango del problema donde son únicamente necesarias funciones de una determinada escala, dada la amplitud y los anchos de la señal que se busca recuperar.

⁶ Como muestra de esto, es posible observar la diferencia entre resultado total del parámetro ε_{282} (primer panel) con respecto al modelo obtenido con las funciones *NonZero* (segundo panel); éste mantiene las grandes amplitudes de los *peaks*, pero tiene menos oscilaciones que la solución completa en lo extenso de la señal.

3.6. Paquete de Inversión MUSE

El desarrollo de esta tesis desembocó en la generación y desarrollo de un paquete de inversión de acceso abierto denominado *MUSE* : *MUltiscale Sparse Estimation*, cuya estructura se muestra en la Figura 3.16

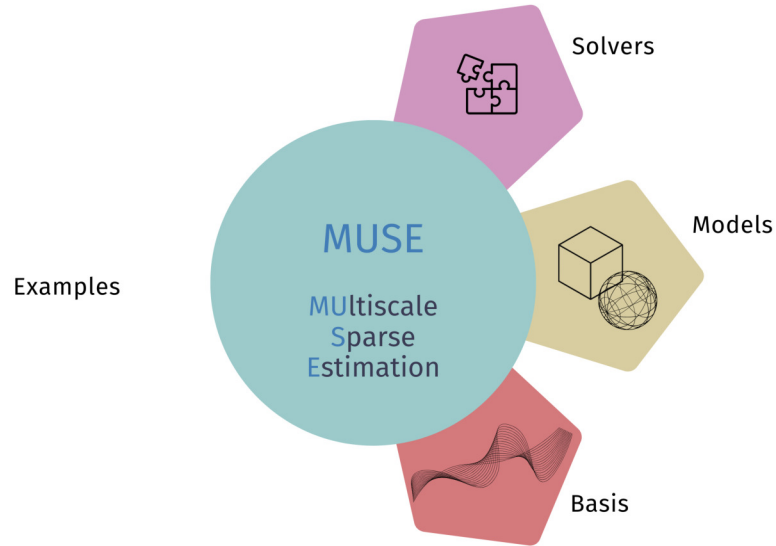


Figura 3.16: Esquema de la estructura principal de MUSE.

MUSE se compone, hasta el momento, de tres partes principales:

- **Basis**: con las funciones base definidas por clases con sus propiedades básicas y aquellas para múltiples escalas.
- **Models**: donde se encuentran los modelos físicos implementados y todas las funciones y códigos que tengan que ver con dicho ítem (e.g., ecuaciones de la falla vertical, expresiones que definen las exponenciales de las señales en 1D y 2D, etc).
- **Solvers**: donde se implementan los motores de inversión a utilizar.

El directorio principal de trabajo es *Examples* (Figura 3.16), paralelo a MUSE; en donde se trabaja usando las herramientas definidas dentro, de manera que el entorno de mayor modificación no esté dentro del paquete donde se encuentran los códigos generalizados. Para este desarrollo, el directorio de trabajo está conformado por los siguientes 4 subdirectorios:

- *curve_fit*
- *surface_fit*
- *vertical_fault*
- *Illapel_eq*

La idea fue programar modularmente el paquete *MUSE* y el entorno de trabajo, de manera que fuera posible añadir nuevas implementaciones en cada una de sus partes en el futuro; ya sea en nuevos ejemplos, como otros eventos sísmicos además del terremoto de Illapel; o implementaciones alternativas en el módulo mismo; como nuevos tipos de funciones base como alternativas a las *b-splines*. Además, durante el proceso de programación y uso se procuró un correcto orden de dependencias y comunicación entre cada parte.

El estado actual de *MUSE*, posterior al desarrollo de esta tesis, se muestra en la Figura 3.17.

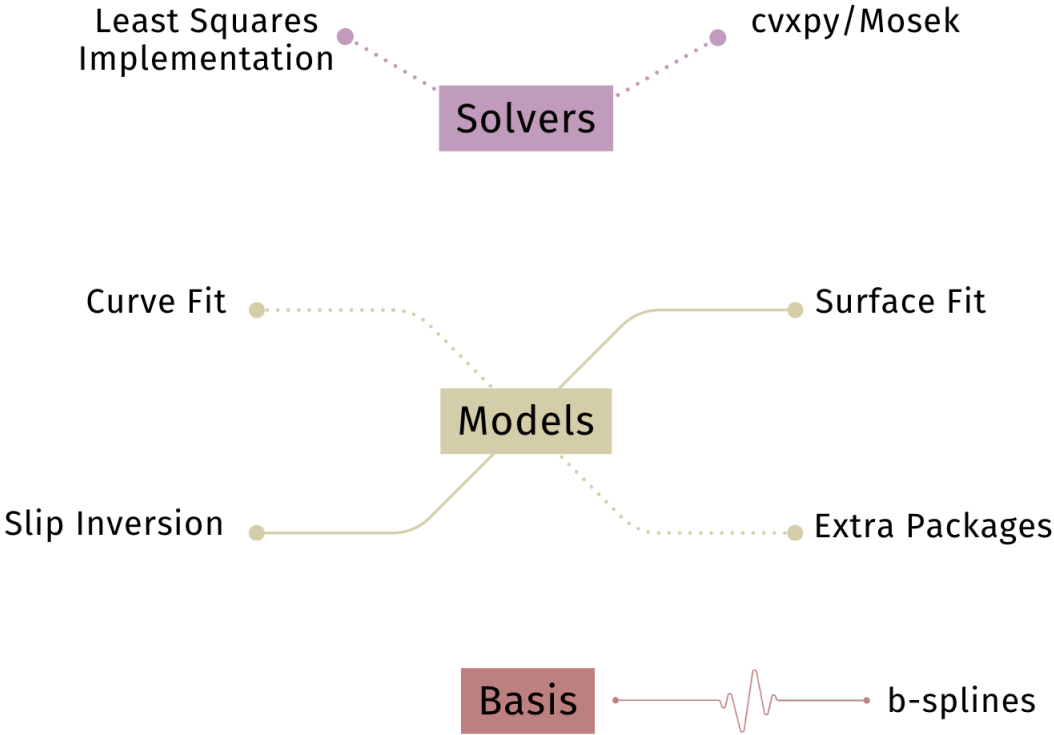


Figura 3.17: Composición del paquete MUSE en el desarrollo de esta tesis.

Capítulo 4

Inversión de Dislocación Cuasi-Estática: Casos Sintéticos

A continuación se muestran ejemplos con datos sintéticos para el problema de inversión de dislocación cuasi-estática. En primer lugar, aplicado a un caso sintético en 1D para una falla vertical teórica, utilizando el planteamiento para la deformación de tornillo, descrito por Segall (2010); y finalmente, aplicados a un caso de zona de subducción, enfocados en el área afectada por el terremoto de Illapel (M_w 8.3) de 2015.

En ambos casos, se utiliza el enfoque multi-escala propuesto; donde si bien lo que se busca es obtener es la distribución de dislocación, los parámetros del modelo \underline{m} son las amplitudes de las funciones base *b-splines* multi-escala, mediante las cuales se representa el *slip* en la falla.

4.1. Fallas Verticales de Rumbo

Como ejemplo de prueba se considera el caso teórico de una falla vertical 1D, utilizando el modelo de dislocación de tornillo descrito por Segall (2010) (ver Anexo F). Para abordar este problema se utilizó la geometría definida en la Sección 3.2.1, que dispone un semi-espacio homogéneo con una falla vertical de rumbo sinestral en el medio, dicha fuente se discretizó en un total de 30 subfallas, elementos discretos para las cuales la dislocación será uniforme (Figura 4.1). En la posición $Z = 0$ km del dominio se definieron dos configuraciones de observadores, la primera situados cada 1 km y la segunda distanciados cada 10 km; para ambas se aborda el problema de inversión.

Las matriz $\underline{\underline{G}}_{slip}$ con las funciones de Green para este modelo de dislocación fueron calculadas utilizando la expresión F.24; de esta manera, se obtuvieron los desplazamientos en la línea de puntos de observación ubicada en la superficie libre (en $Z = 0$ km), debido a una dislocación unitaria de cada una de las 30 subfallas de la geometría dada.

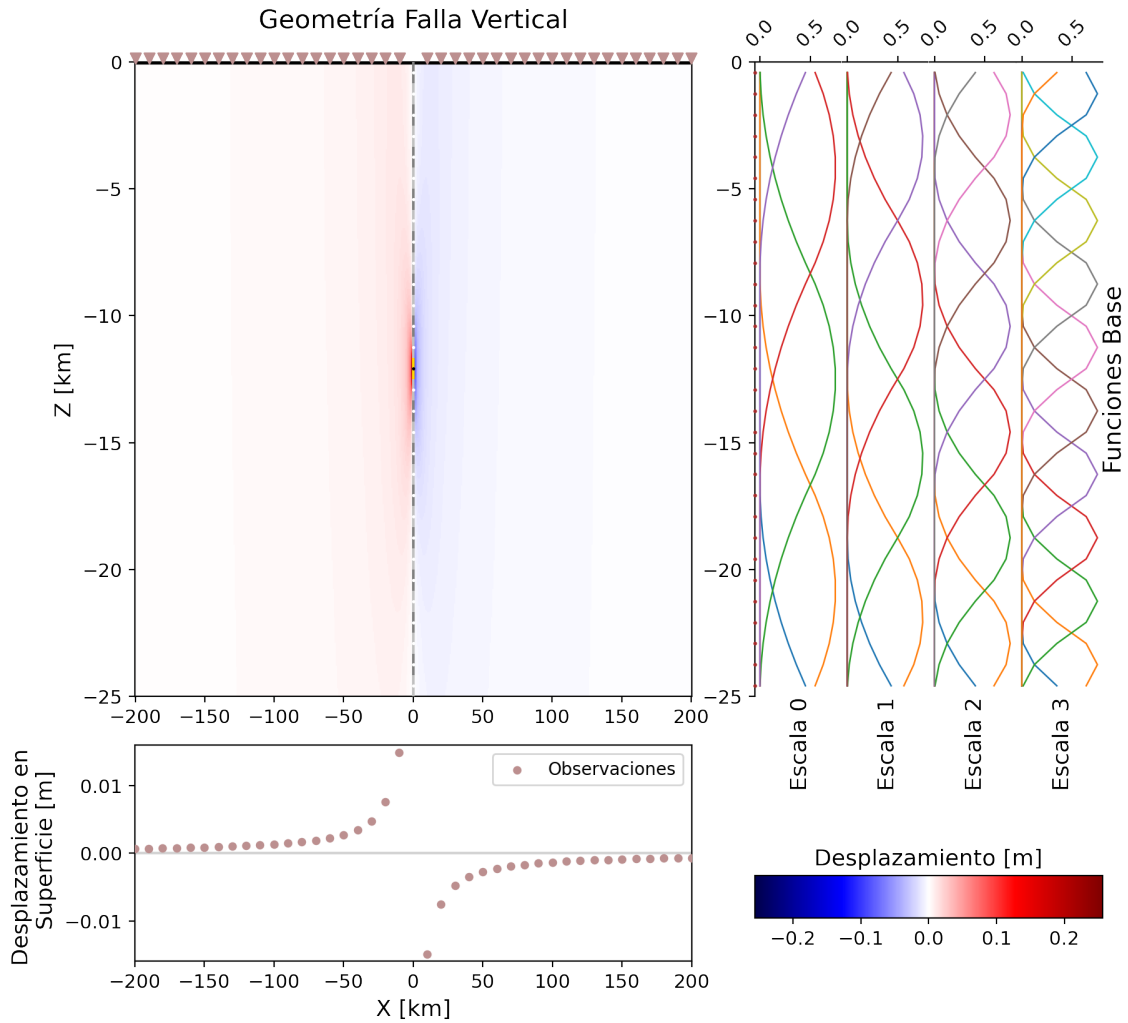
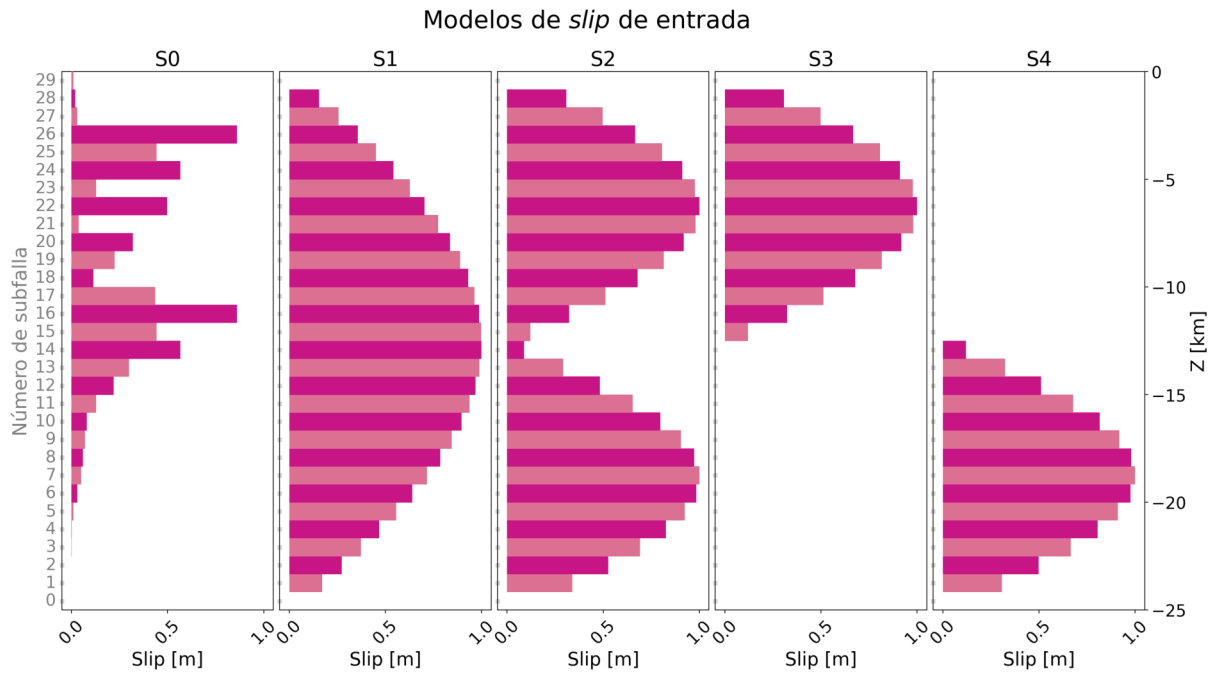
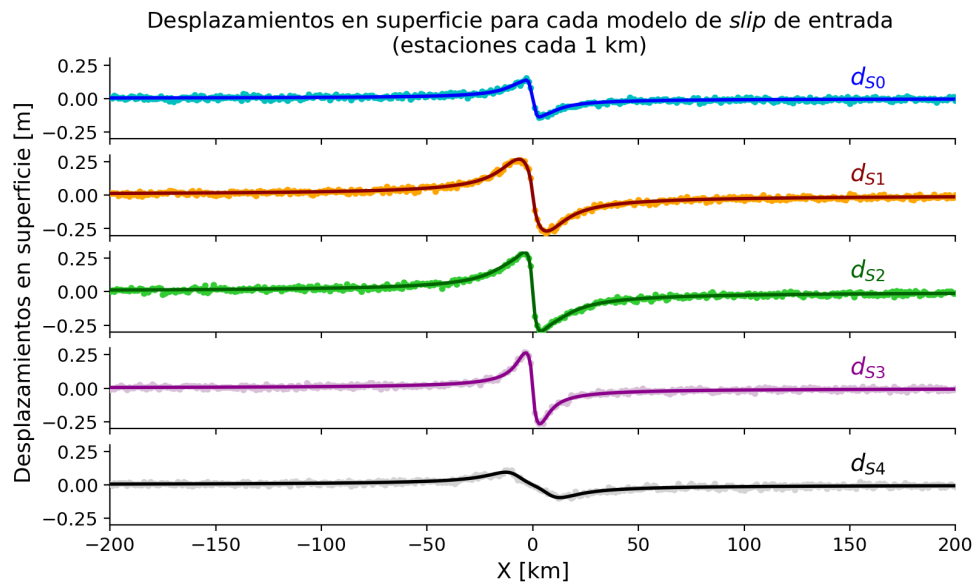


Figura 4.1: Geometría del caso de una falla vertical, ejemplo de una dislocación unitaria en la subfalla 15, enumeradas de abajo hacia arriba. (De izquierda a derecha y arriba abajo) El primer panel muestra la grilla que define el dominio donde se estiman las dislocaciones y la distribución de estaciones en superficie (triángulos invertidos), posicionadas en este caso cada 10 km; las subfallas se muestran con líneas grises, destacando en blanco sus puntos centrales. La escala de color indica los desplazamientos al interior del semi-espacio, para una dislocación unitaria en la subfalla 15 (señalada con amarillo en el primer cuadro). Notar que los desplazamientos de mayor magnitud se concentran alrededor de dicha subfalla. El panel derecho presenta las funciones base *b-splines* cúbicas y su extensión en profundidad para cada escala; éstas están evaluadas en los puntos centrales de las subfallas (puntos rojos en el eje de profundidad). El panel inferior exhibe los desplazamientos en superficie estimados para cada posición de observación.

Para este ejercicio teórico, se construyeron datos sintéticos basados en el modelo directo antes descrito. Con este fin, se calculó el campo de desplazamiento en superficie generados por 5 distribuciones sintéticas de la dislocación de rumbo a lo largo de la falla vertical. En la Figura 4.2, se muestran las 5 distribuciones de dislocación sintéticas S_0 , S_1 , S_2 , S_3 y S_4 y los desplazamientos sintéticos en superficie asociados (para una configuración de observadores situados cada 1 km, los desplazamientos sintéticos para los observadores cada 10 km se muestra en la Figura C.1).



(a) Modelos de *slip* de entrada.



(b) Desplazamientos en superficie para cada modelo, configuración de estaciones cada 1 km.

Figura 4.2: Modelos de *slip* de los diversos *test* del caso de falla vertical. a) Modelos en profundidad, las barras de colores representan la amplitud en cada subfalla en el respectivo modelo, numerados del S_0 al S_4 . Los cuadros y valores en gris del lado izquierdo indican la numeración de las subfallas, desde lo más profundo a lo más superficial en Z . b) Desplazamientos sintéticos en superficie para cada modelo de *slip*, para la configuración de estaciones cada 1 km.

Se ha de notar que el modelo S_0 es una selección de valores aleatorios, formando un conjunto de entrada rugoso a recuperar; mientras que los modelos $S_1 - S_4$ fueron construidos en base a funciones trigonométricas, presentando rasgos más suaves.

Como se mencionó en la Sección 3.2.1, para este problema se definió una colección de funciones base *b-splines* cúbicas en profundidad, con 4 escalas (las que se muestran también en la Figura 4.1). En total se cuenta con 31 funciones base, evaluadas en los puntos centrales de las subfallas, las que se usan en la inversión para recuperar las distintas configuraciones de *slip* sintéticos (Figura 4.2).

De esta manera, para el caso de inversión aplicada a la dislocación cuasi-estática en una falla vertical de rumbo, la matriz de funciones base \underline{B} es del orden $N_{sf} \times N_{fb}$, es decir, cantidad de subfallas: 30 x cantidad de funciones base: 31. El detalle de las funciones base se pormenoriza en la Tabla 3.1.

Utilizando los datos sintéticos mencionados anteriormente, se calcularon inversiones utilizando las normas L2 y L1 en la regularización. En cada caso, sólo se realizaron inversiones de los datos sintéticos con ruido aleatorio añadido, abordando diversos *test* sintéticos (Figura 4.2). Para cada prueba se calcularon un total de 500 inversiones, utilizando valores para los parámetros de regularización ε y α en un rango logarítmico entre 10^{-8} y 10^8 .

Al igual que los casos anteriores (curvas 1D y superficies, Sección 3.5), dado que la contribución de las funciones base podría ser muy pequeña, se fijó un umbral arbitrario para remarcar aquellas *b-splines* cuya amplitud (parámetro del modelo en esta parametrización) fuera mayor a dicho valor, el cual se definió como $NonZero = 5$ cm. En los resultados que se presentan a continuación se mostrarán los d_{pred} tanto para la solución completa, como para aquella sólo con la contribución de las *b-splines* con amplitud mayor a $NonZero$.

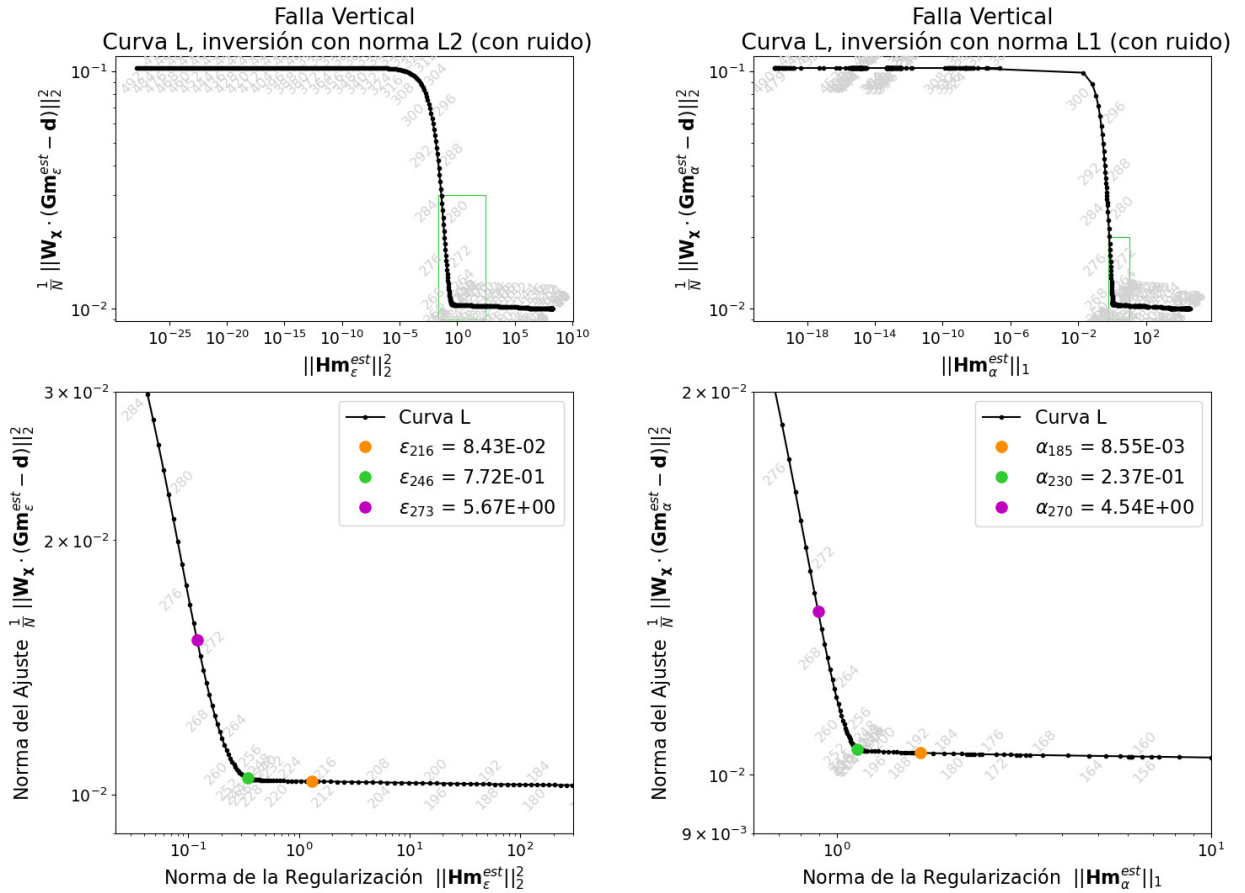
A fin de saber cuántas funciones base está utilizando cada solución, se contaron las *b-splines* que superan el umbral, las que se muestran en razón de las funciones base totales. Para cada resultado se mostrará el *slip* del modelo completo, el *slip* de las soluciones $NonZero$ y finalmente el *slip* de las funciones inferiores a este umbral, para cuantificar mejor las diferencias en la estimación. Para las estimaciones antes mencionadas también se calculó el área bajo las curvas de *slip*, a fin de tener otra manera de compararlas con respecto al modelo sintético que se busca obtener. Esto se hizo calculando el área entre cada elemento discreto, considerando el ancho de cada subfalla y el valor de *slip* asignado para cada subfalla en los modelos resultantes; dichos valores se compararon con el *slip* sintético respectivo ($S0 - S4$) mediante una razón del área bajo la curva de cada modelo, respecto del área bajo la curva del *test* sintético ($A_{inversión}/A_{sintético}$).

A continuación, se muestran los resultados para las inversiones regularizadas con normas L2 y L1 de los datos asociados a los *tests* de *slip* sintético $S4$ y $S0$, con los observadores en superficie distanciados cada 1 km. Las soluciones para estos *tests* con los observadores cada 10 km se muestran en el Anexo C.

4.1.1. Observadores cada 1 km: *Slip Input S4*

En la Figura 4.3 se muestran las curvas L de las dos inversiones (L2 y L1) para el *test* de *slip* sintético $S4$, con estaciones en superficie cada 1 km. Los puntos de colores señalan los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento. Para este ejemplo, al igual que en las superficies, las curvas no cruzan el valor 1 para la norma del ajuste, por lo que se seleccionaron parámetros en la zona de inflexión de la curva L, sin otra referencia extra.

En las Figuras 4.4 y 4.5 se muestran los resultados para los modelos seleccionados en las inversiones con regularización con normas L2 y L1 respectivamente. En cada figura se muestran los valores para el *slip* de la solución completa (barras en tonos rosados), el *slip* asociado a las *b-splines* con amplitud mayor a *NonZero* (curva negra) y aquel de las funciones menores a este valor (curva gris), todo comparado al modelo sintético *input S4* (línea segmentada azul). Los números de colores en cada panel representan la razón del área bajo la curva de cada modelo, respecto del área bajo la curva del *test* sintético ($A_{inversión}/A_{sintético}$). En los paneles inferiores se muestran, para cada solución, las amplitudes de las funciones base en las 4 escalas; graficadas en colores las mayores a *NonZero* y en gris las nulas o menores a dicho valor.



(a) Curva L de la inversión del caso de una falla vertical (*S4* - 1 km), regularizada con norma L2.

(b) Curva L de la inversión del caso de una falla vertical (*S4* - 1 km), regularizada con norma L1.

Figura 4.3: Curvas L para la resolución del problema inverso del caso de una falla vertical, con un *slip* sintético dado por el modelo *S4*, para una distribución de estaciones cada 1 km. Inversiones regularizadas con (a) norma L2 y (b) norma L1, ambas considerando datos sintéticos con ruido aleatorio añadido. Los números en gris indican el modelo asociado a cada punto negro en la curva. Los paneles inferiores son el *zoom* señalado con el cuadro verde de los paneles superiores. Los puntos de colores destacan los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento en cada caso.

En los resultados de ambas inversiones son notorias las variaciones en las soluciones para el *slip* dado los distintos parámetros de regularización elegidos y por tanto el grado de amortiguamiento que implican éstos. Los casos sobreamortiguados (ε_{273} y α_{270} , últimas columnas de las Figuras 4.4 y 4.5, respectivamente) entregan modelos de *slip* más extensos en profundidad que el *input*, y con una menor amplitud máxima (de 0.4 m y 0.55 m, respectivamente), resultados que representan aproximadamente el 80 % del área bajo la curva del *slip* S4 (0.786 y 0.819 veces el área del modelo sintético, en el orden dado), para ambos los desplazamientos predichos (triángulos verdes) subestiman un poco el desplazamiento observado en superficie. En el correspondiente a L2 (ε_{273}), parte de la solución total obtenida se debe al aporte de funciones base con amplitudes pequeñas, inferiores al valor *NonZero*, fijado para este caso en 5 cm (visible en la amplitud de la curva gris, con un área de 0.208 veces el área del sintético S4); en cambio, el *slip* correspondiente al modelo sobreamortiguado de L1 (α_{270}), está formado solamente por la contribución de las *b-splines* mayores al umbral, que son únicamente dos en la escala 0.

Por otra parte, para los modelos subamortiguados, se obtienen patrones de *slip* más complejos. El resultado para L2 (correspondiente a ε_{216} , primera columna de la Figura 4.4), constriñe de buena forma el punto donde el modelo a recuperar se vuelve cero en profundidad, pero logra esto utilizando muchas funciones base con valores de *slip* negativos, es decir, en la dirección contraria a la asumida para la falla vertical teórica, en los primeros 11 km de profundidad. Este resultado total muestra varias oscilaciones y el área bajo la curva es mayor a la del sintético que se busca recuperar (1.425 veces el original). Por otra parte, el *slip* relacionado a las funciones base de amplitud pequeña (menores a *NonZero*, indicadas con la curva gris), representan el 7 % del área del *slip input*, y son usadas en esta solución en la zona más somera para balancear la amplitud de las *b-splines* de amplitud mayor en estas profundidades (curva negra, con valores de unos -0.2 m en los primeros 4 km de profundidad).

El resultado subamortiguado para L1 (primera columna de la Figura 4.5), asociado al parámetro α_{185} , también obtiene un modelo de *slip* con una sección con valores negativos, pero describe un patrón más sencillo que su homólogo en L2, pues esta solución ocupa menos *b-splines*; lo anterior incide en que el punto donde el modelo cruza el valor de *slip* cero está desplazado al menos en 2 subfallas más hacia la superficie que lo descrito en el modelo sintético. Al igual que el caso regularizado con la norma L2, el modelo completo es mayor que el *input* sintético, pero el área bajo la curva de la solución es 1.151 veces el área bajo la curva de S4, por lo que no está tan sobre-estimado como en lo obtenido para L2.

Para ambas soluciones subamortiguadas, los desplazamientos predichos (rombos celestes en los paneles inferiores de las Figuras 4.4 y 4.5) ajustan mejor los desplazamientos sintéticos en superficie, esto en comparación a los resultados de los modelos sobreamortiguados antes descritos (triángulos verdes).

Resultados inversión S4 (1 km)
Mínimos Cuadrados Regularizados con norma L2 (con ruido)

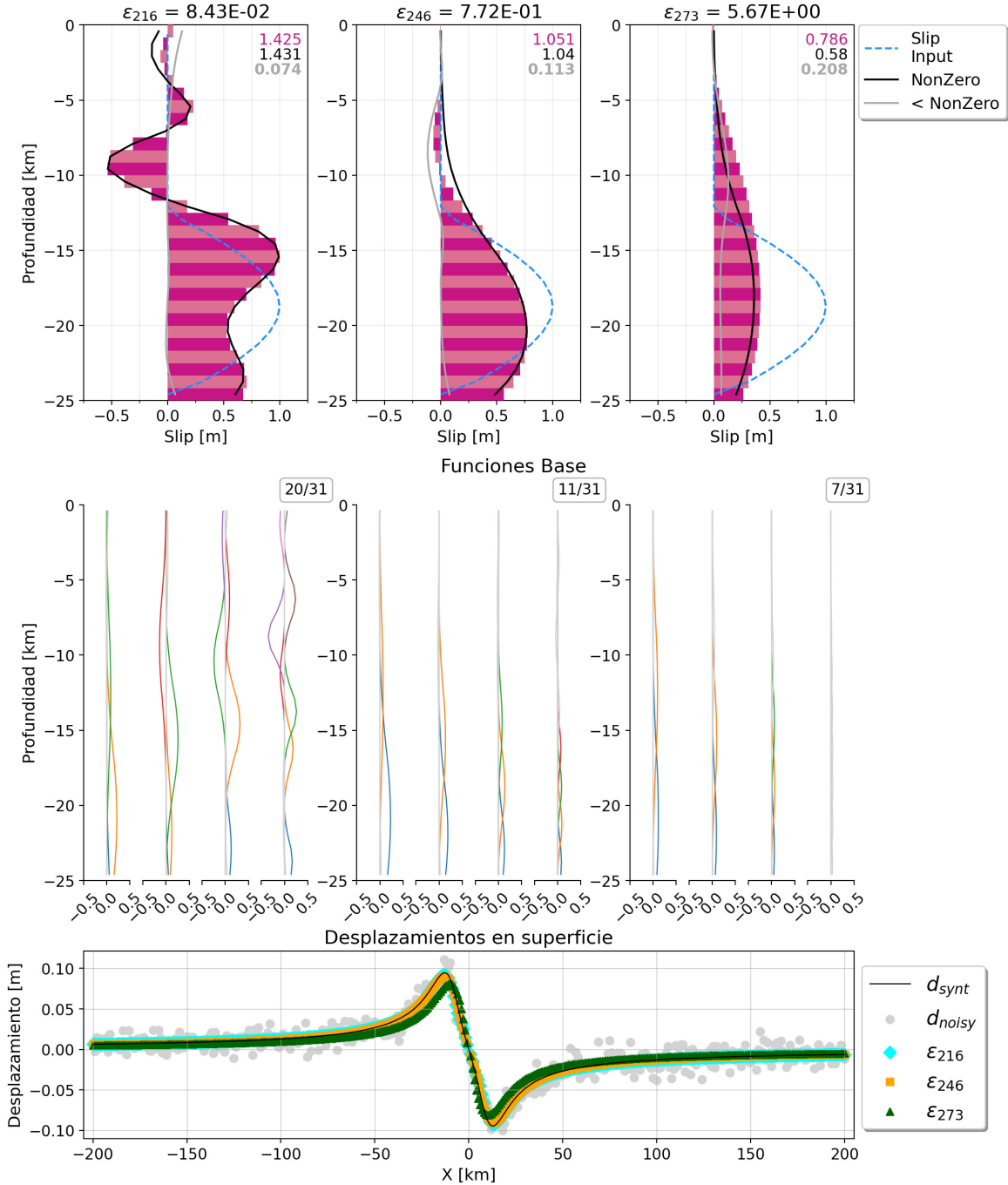


Figura 4.4: Resultados de la inversión del modelo de *slip* sintético *S4* (estaciones cada 1 km), con una regularización con norma L2. Cada columna corresponde a uno de los modelos seleccionados, a distintos grados de amortiguamiento. En la primera fila con barras rosadas se muestran los modelos totales, la curva negra exhibe el *slip* obtenido con las funciones mayores a *NonZero* y la curva gris el *slip* relacionado a las funciones menores al umbral. Los números de colores señalan la razón del área bajo cada curva de *slip*, con respecto del área del *slip* *S4* (línea segmentada azul). Los paneles de la segunda fila muestran, para cada modelo, la contribución de las funciones base en las diferentes escalas; en gris las *b-splines* con amplitud bajo el umbral. Los números en el cuadro indican la cantidad de funciones base mayores a *NonZero*, respecto del total (31). El último panel muestra la comparación de los desplazamientos en superficie, sintéticos (con y sin ruido) y los predichos de cada modelo seleccionado.

Resultados inversión S4 (1 km)
Mínimos Cuadrados Regularizados con norma L1 (con ruido)

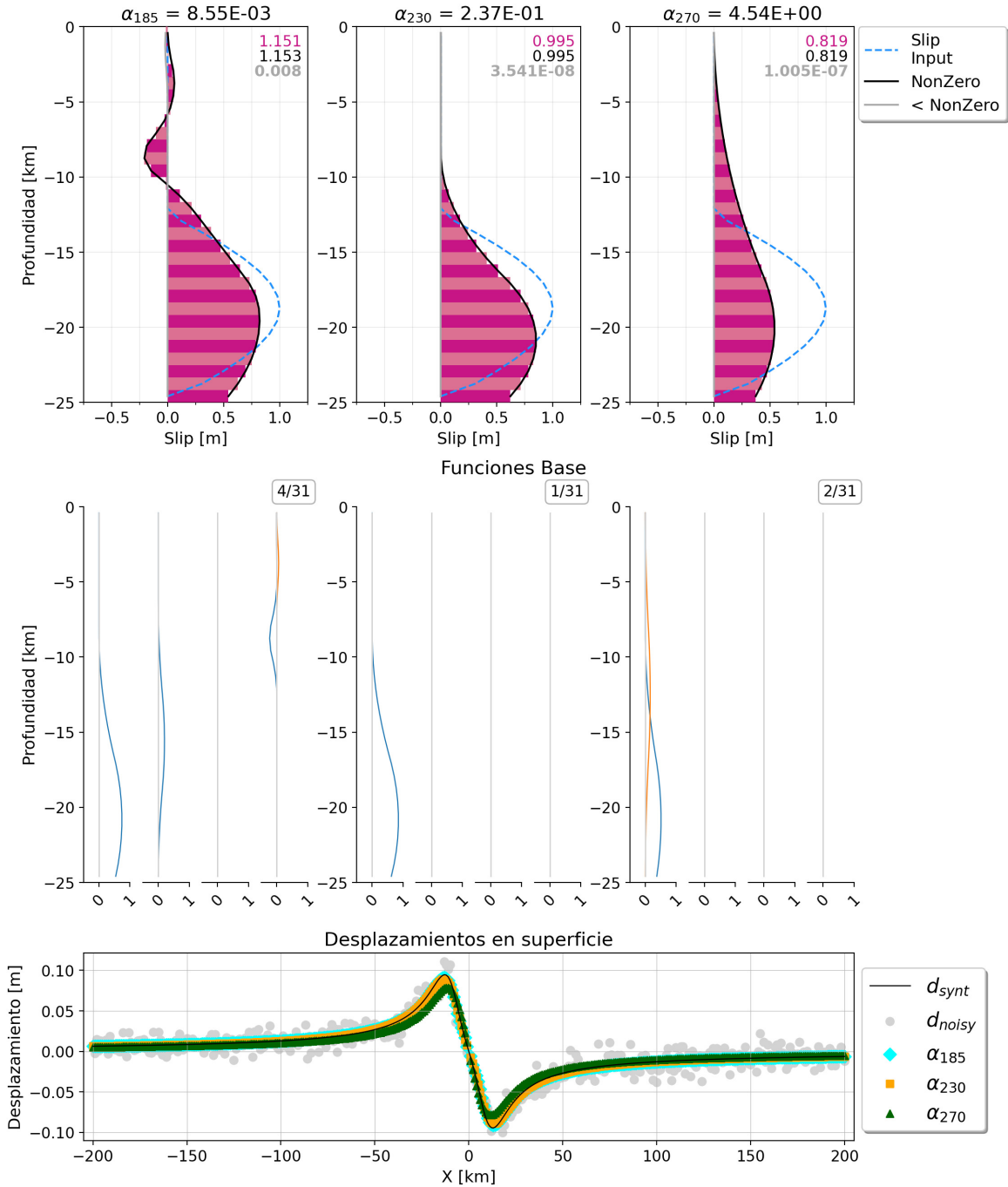


Figura 4.5: Resultados de la inversión del modelo de *slip* sintético S4 (estaciones cada 1 km), con una regularización con norma L1. Cada columna corresponde a uno de los modelos seleccionados, a distintos grados de amortiguamiento. En la primera fila con barras rosadas se muestran los modelos totales, la curva negra exhibe el *slip* obtenido con las funciones mayores a *NonZero* y la curva gris el *slip* relacionado a las funciones menores al umbral. Los números de colores señalan la razón del área bajo cada curva de *slip*, con respecto del área del *slip* S4 (línea segmentada azul). Los paneles de la segunda fila muestran, para cada modelo, la contribución de las funciones base en las diferentes escalas; en gris las *b-splines* con amplitud bajo el umbral. Los números en el cuadro indican la cantidad de funciones base mayores a *NonZero*, respecto del total (31). El último panel muestra la comparación de los desplazamientos en superficie, sintéticos (con y sin ruido) y los predichos de cada modelo seleccionado.

Respecto de los modelos “favoritos” en cada caso (asociados a los parámetros ε_{246} y α_{230}), estos muestran en general mejores resultados que los sub y sobreamortiguados de sus inversiones respectivas, tanto en la forma del *slip* que recuperan, más cercana a la del modelo sintético *S4*; como también en la comparación del área bajo la curva del modelo resultante, respecto del *input*, siendo ambas cercanas a la unidad (1.051 y 0.995, correspondientemente). En cuanto a los desplazamientos predichos (cuadros naranjos de los paneles inferiores de las Figuras 4.4 y 4.5), ambos modelos muestran ajustar bien los desplazamientos sintéticos en superficie, de mejor manera que los modelos sub y sobreamortiguados correspondientes.

El modelo favorito de la inversión L2 obtiene una solución con dos áreas de amplitud considerable, la más profunda se asemeja a la extensión del modelo *S4*, pero es un poco más larga, y tiene una amplitud máxima de ~ 0.75 m; el segundo pulso más somero tiene una amplitud más pequeña, pero de valores de *slip* negativos y es el resultado de la adición de funciones base mayores a *NonZero* con una amplitud positiva (curva negra) y la contribución de *b-splines* pequeñas, que en total representan valores negativos de ~ -0.2 m (curva gris entre los 5 y 10 km de profundidad).

Por otra parte, el modelo favorito de la inversión regularizada con norma L1 (i.e., α_{230}), también es un poco más extenso en profundidad que el modelo sintético *S4* y no llega a 0 m en los 25 km de profundidad (fin del rango); y tiene una amplitud máxima de ~ 0.8 m, pero no presenta otras oscilaciones positivas ni negativas, de hecho está compuesto por sólo una *b-spline*. Por lo anterior, de los 6 resultados expuestos, es el más similar al modelo sintético a recuperar.

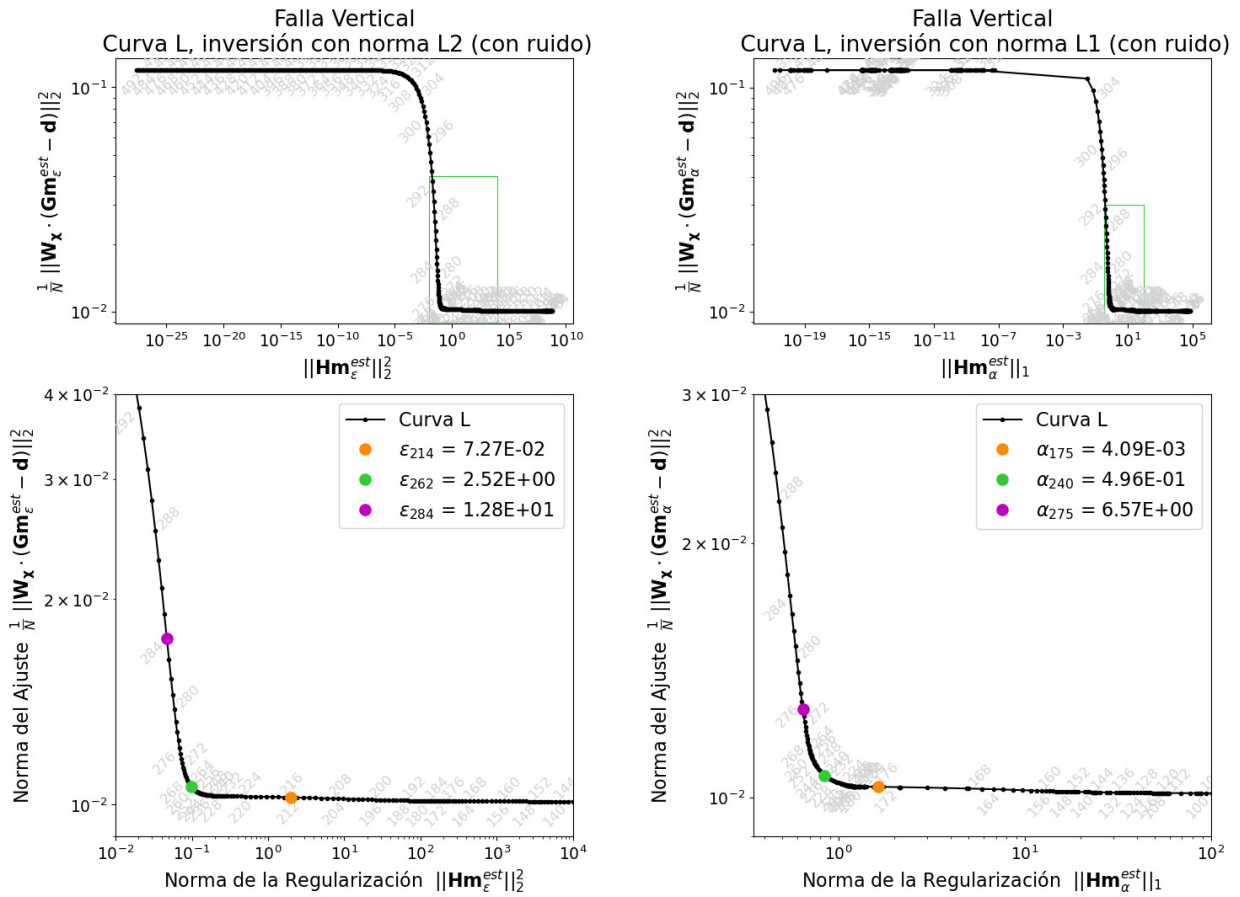
Los resultados para la inversión del mismo modelo sintético *S4*, con estaciones distribuidas cada 10 km se muestran en el Anexo C.1. Las curvas L, tanto para el caso regularizado con norma L2 como L1, lucen un poco menos suaves que las presentadas anteriormente (Figura C.2); las características de los modelos seleccionados son similares a las antes descritas en cuanto al grado de amortiguamiento, sin embargo se puede destacar que casi la totalidad de las soluciones seleccionadas tienen valores estrictamente positivos, a excepción del modelo subamortiguado de L2 (asociado al parámetro ε_{188} , primera columna de la Figura C.3), cuyo resultado tiene valores muy grandes positivos y negativos y usa muchas funciones base (30 de 31 son mayores al valor *NonZero*). En cuanto al modelo sobreamortiguado (i.e., ε_{267}), se obtiene un modelo de *slip* en extremo suavizado, con una única ondulación, que se extiende por todo el rango de profundidad, y cuyo *slip* asociado es de aproximadamente el 60 % del *slip* sintético *S4*; los desplazamientos predichos de este modelo (triángulos verdes, panel inferior Figura C.3) subestiman los desplazamientos sintéticos en superficie, en comparación con los otros dos modelos seleccionados en esta inversión, sobretodo en el rango de ~ 100 km a cada lado de la falla.

Los resultados para L1 (Figura C.4) son similares a los seleccionados en la prueba de estaciones cada 1 km, y en general los tres modelos seleccionados (asociados a los parámetros de regularización α_{184} , α_{204} y α_{230}) ajustan bastante bien los desplazamientos sintéticos en superficie (panel inferior de la figura antes mencionada), mejor que lo obtenido en la inversión regularizada con norma L2. En particular el modelo subamortiguado (α_{184} , primera columna de la Figura C.4), constriñe bien la amplitud del *peak* de *slip* de *S4*, siendo levemente mayor a 1 m, pero está desplazado más en profundidad; este modelo además muestra valores positivos

de *slip* de ~ 0.15 m en la porción más somera de la falla vertical, rasgo que no forma parte del modelo sintético que se busca recuperar; pero en su totalidad tiene un área bajo la curva muy similar a la de *S4* (1.011 veces el asociado al modelo sintético).

4.1.2. Observadores cada 1 km: *Slip Input S0*

A continuación se muestran los resultados para el modelo *S0*, con estaciones dispuestas cada 1 km en este ejemplo sintético. En la Figura 4.6 se muestran las curvas L de las dos inversiones (regularizadas con normas L2 y L1, respectivamente); los puntos de colores señalan los modelos seleccionados con distinto grado de amortiguamiento. En este caso, la curva L tampoco intersecta el valor de la norma del ajuste = 1, por lo que se escogieron modelos en la zona de inflexión de la curva L sin otra referencia.



(a) Curva L de la inversión del caso de una falla vertical (*S0* - 1 km), regularizada con norma L2.

(b) Curva L de la inversión del caso de una falla vertical (*S0* - 1 km), regularizada con norma L1.

Figura 4.6: Curvas L para la resolución del problema inverso del caso de una falla vertical, con un *slip* sintético dado por el modelo *S0*, para una distribución de estaciones cada 1 km. Inversiones regularizadas con (a) norma L2 y (b) norma L1, ambas considerando datos sintéticos con ruido aleatorio añadido. Los números en gris indican el modelo asociado a cada punto negro en la curva. Los paneles inferiores son el *zoom* señalado con el cuadro verde de los paneles superiores. Los puntos de colores destacan los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento en cada caso.

En las Figuras 4.7 y 4.8 se muestran los resultados para los modelos seleccionados en las inversiones L2 y L1, respectivamente. La simbología de los resultados es la misma que en el caso anterior.

El modelo sobreamortiguado de L2 (ε_{284} , tercera columna de la Figura 4.7) es muy suavizado, se extiende por todo el rango de profundidad y muestra una amplitud máxima de ~ 0.25 m, el área bajo la curva de este modelo es de $\sim 80\%$ del área de S_0 , pero es formado por contribuciones casi iguales de las funciones mayores a *NonZero* (curva negra) y las menores a este umbral, lo que quiere decir que usa varias *b-splines* con una amplitud menor a 5 cm (curva gris, que representa el $\sim 40\%$), para que su aporte sea significativo. Este modelo obtiene desplazamientos que en las cercanías de la falla (en el rango de ~ 30 km alrededor de ésta) subestiman el desplazamiento sintético en superficie (triángulos verdes en la Figura 4.7), siendo menor que los otros dos modelos seleccionados en esta inversión.

Para la inversión regularizada con norma L1, el modelo sobreamortiguado (α_{275}) también es bastante suavizado y extenso en profundidad, pero termina en valores cero en la parte más profunda. La amplitud máxima de esta solución no calza con ninguno de los dos máximos locales del sintético, pero en el conjunto representa aproximadamente un 90% de área bajo la curva del modelo a ajustar; este resultado se forma utilizando dos funciones base en la primera escala y no tiene un aporte de las funciones de amplitud pequeña que sea significativo numéricamente.

Las soluciones subamortiguadas en ambas inversiones muestran patrones menos planos. En el caso L2 (ε_{214} , primera columna de la Figura 4.7) presenta 4 zonas con *peaks* de *slip*, las dos primeras concuerdan bien espacialmente con los máximos del modelo sintético S_0 , sin embargo las otras dos más profundas no recuperan bien la forma del *slip* que se busca ajustar, de hecho la tercera presenta valores negativos. El modelo total representa 1.5 veces el área bajo la curva del sintético S_0 , y ocupa muchas funciones base mayores que *NonZero* (21 *b-splines* de un total de 31), y tiene una pequeña contribución de las funciones pequeñas, en los últimos kilómetros del rango de profundidad.

El modelo subamortiguado de L1 (α_{175} , primera columna de la Figura 4.8) está formado por tres zonas principales en que concentra el *slip*, las dos primeras concuerdan espacialmente con los *peaks* del modelo *input*, pero presentan amplitudes menores; de ellas la segunda está un poco más desplazada hacia arriba que lo recuperado en el caso L2. El tercer *peak* de la señal resultante está bajo los 20 km, con una amplitud de ~ 0.2 m, pero a estas profundidades el modelo sintético S_0 tiene valores de 0 m. Este modelo representa un área bajo la curva muy similar a la correspondiente al *test* sintético (razón de 1.072 y de 1.085 para el modelo *NonZero*), y se obtiene con 5 *b-splines* superiores a *NonZero*; sin embargo el aporte de una función base de pequeña amplitud genera el valor negativo para la subfalla 29 (la más somera), lo cual corresponde a la contribución de la *b-spline* más somera para la escala 3 (en gris en el panel inferior del gráfico correspondiente).

Resultados inversión S0 (1 km)
Mínimos Cuadrados Regularizados con norma L2 (con ruido)

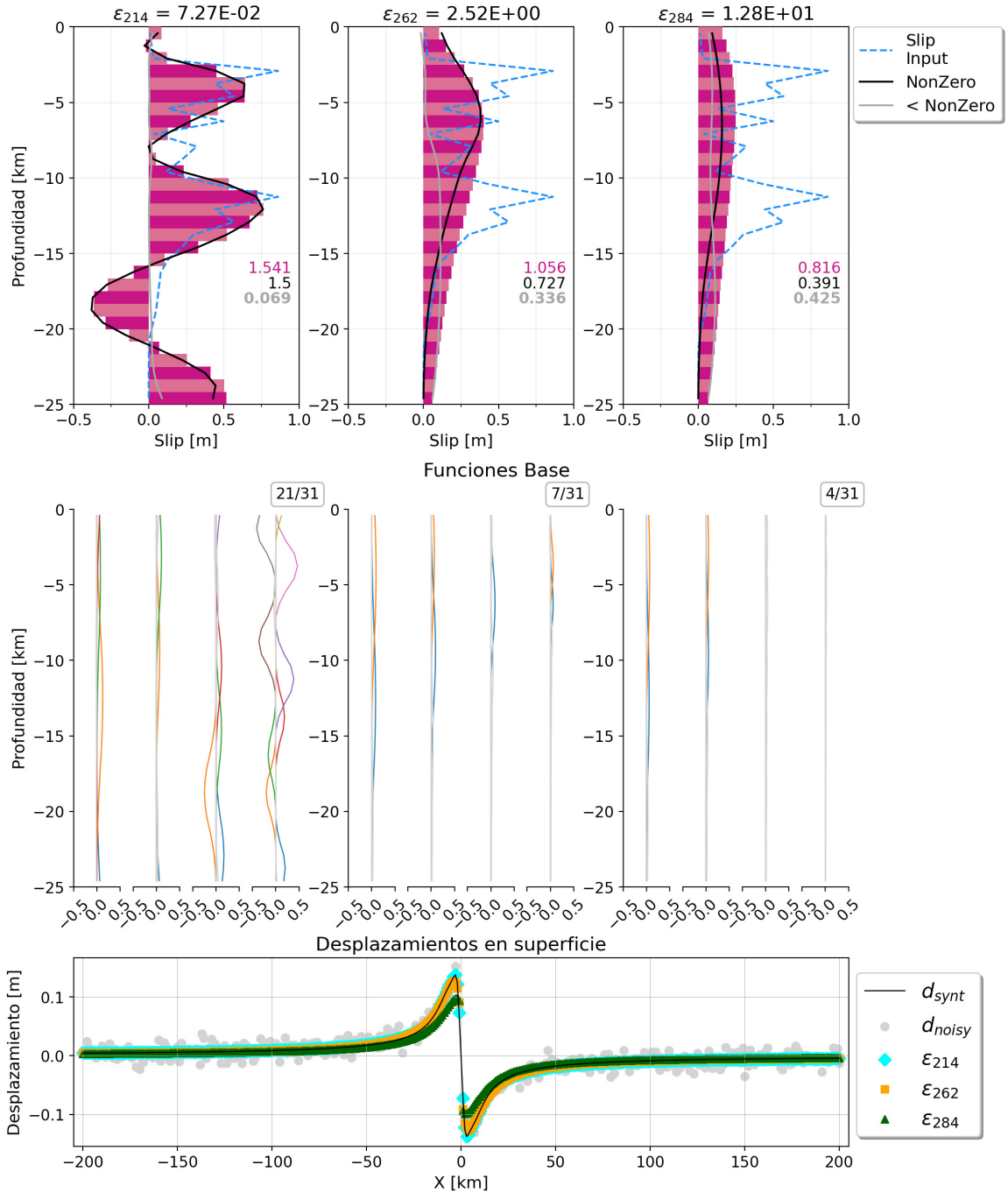


Figura 4.7: Resultados de la inversión del modelo de *slip* sintético S_0 (estaciones cada 1 km), con una regularización con norma L2. Cada columna corresponde a uno de los modelos seleccionados, a distintos grados de amortiguamiento. En la primera fila con barras rosadas se muestran los modelos totales, la curva negra exhibe el *slip* obtenido con las funciones mayores a *NonZero* y la curva gris el *slip* relacionado a las funciones menores al umbral. Los números de colores señalan la razón del área bajo cada curva de *slip*, con respecto del área del *slip* S_0 (línea segmentada azul). Los paneles de la segunda fila muestran, para cada modelo, la contribución de las funciones base en las diferentes escalas; en gris las *b-splines* con amplitud bajo el umbral. Los números en el cuadro indican la cantidad de funciones base mayores a *NonZero*, respecto del total (31). El último panel muestra la comparación de los desplazamientos en superficie, sintéticos (con y sin ruido) y los predichos de cada modelo seleccionado.

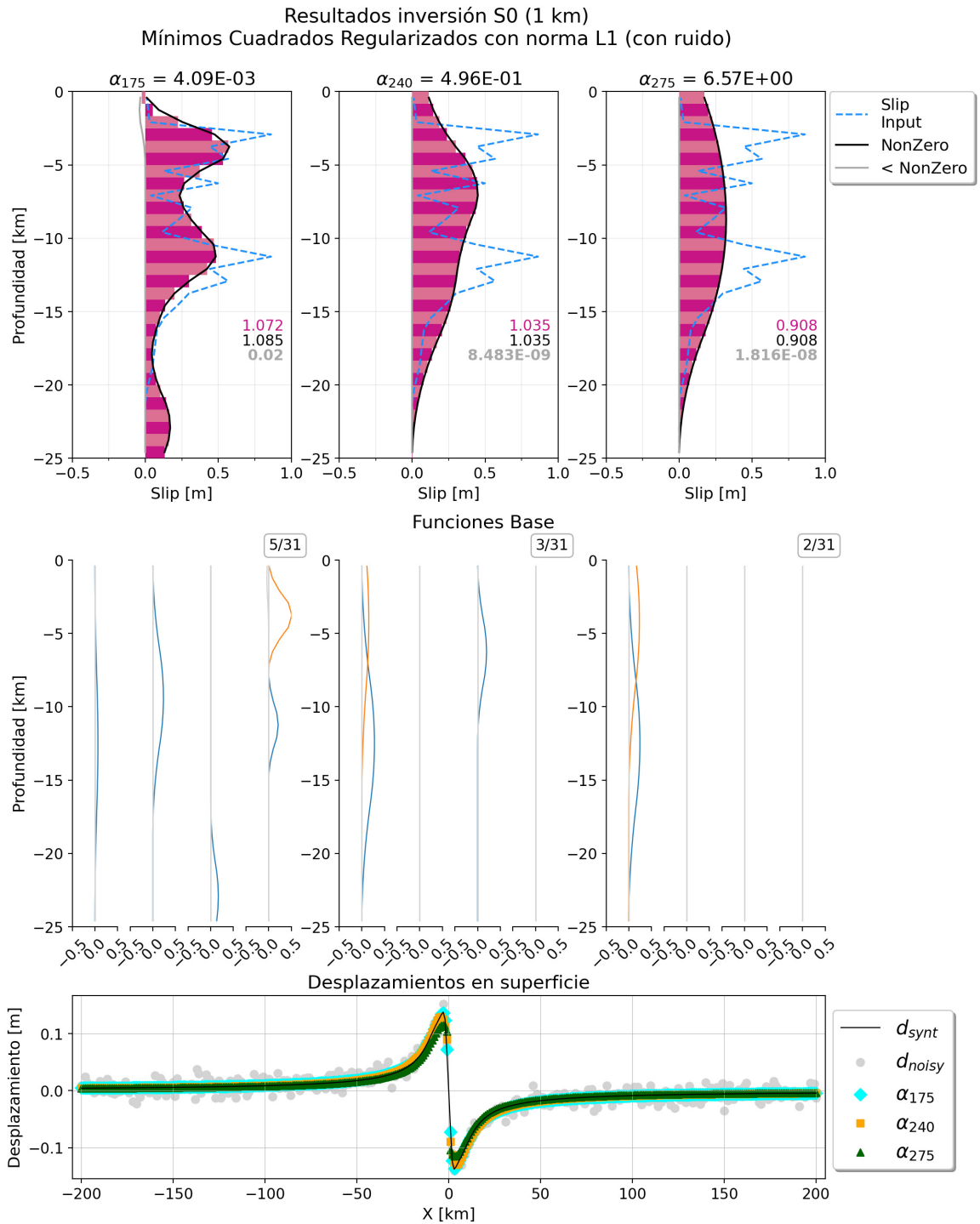


Figura 4.8: Resultados de la inversión del modelo de *slip* sintético S_0 (estaciones cada 1 km), con una regularización con norma L1. Cada columna corresponde a uno de los modelos seleccionados, a distintos grados de amortiguamiento. En la primera fila con barras rosadas se muestran los modelos totales, la curva negra exhibe el *slip* obtenido con las funciones mayores a *NonZero* y la curva gris el *slip* relacionado a las funciones menores al umbral. Los números de colores señalan la razón del área bajo cada curva de *slip*, con respecto del área del *slip* S_0 (línea segmentada azul). Los paneles de la segunda fila muestran, para cada modelo, la contribución de las funciones base en las diferentes escalas; en gris las *b-splines* con amplitud bajo el umbral. Los números en el cuadro indican la cantidad de funciones base mayores a *NonZero*, respecto del total (31). El último panel muestra la comparación de los desplazamientos en superficie, sintéticos (con y sin ruido) y los predichos de cada modelo seleccionado.

Respecto de los modelos “favoritos”, tanto para L2 como L1, ambos muestran un resultado intermedio a las características antes descritas, pero más parecido a los sobreamortiguados. El modelo ε_{262} (Figura 4.7) tiene un *peak* de ~ 0.4 m, mientras que la solución del modelo con α_{240} de entre 0.45 - 0.5 m (Figura 4.8), ambas entre los 5 y 10 km de profundidad, justo en medio de los dos grandes *peaks* de S_0 , por lo que no se logran recuperar los rasgos del sintético. En cuanto al área bajo la curva para ambas, son bastante similares y cercanas a la unidad, lo que resulta a pesar de sus bajas amplitudes (comparadas al modelo sintético), por la gran extensión en profundidad que tienen ambos modelos.

Ambas soluciones completas presentan sólo valores de *slip* positivos, la correspondiente a L1 no tiene aporte de funciones pequeñas, sólo utiliza las 3 *b-splines NonZero*, mientras que el modelo obtenido para L2 si cuenta con varias *b-splines* de pequeñas amplitudes, casi todas aportan valores de *slip* positivos en el rango de profundidad, pero en la parte más somera hay una función base de valor negativo, pero que no compensa lo suficiente la solución, en comparación con los ~ 0.15 m de amplitud que las *b-splines NonZero* alcanzan en esa profundidad (curva negra del panel central de la Figura 4.7).

Los resultados para la inversión del modelo sintético S_0 , pero para una configuración de estaciones espaciadas cada 10 km se adjunta en el Anexo C.2. Las curvas L para ambas inversiones se muestran en la Figura C.5, en donde se indican con puntos de colores los modelos seleccionados con distintos grados de amortiguamiento.

Los resultados de la inversión regularizada con norma L2 se muestran en la Figura C.6; los modelos sobreamortiguado (ε_{266}) y “favorito” (ε_{247}) obtienen modelos bastante suavizados, con valores de *slip* no nulos para todas las subfallas, y una amplitud máxima aproximada de 0.25 y 0.3 m, respectivamente. En ambos casos, los patrones de *slip* no se asemejan a la forma del modelo sintético, y si bien el conteo de funciones base (*NonZero*) indica que usan 3 y 7 de un total de 31, de forma respectiva; se puede observar tanto en los resultados del *slip* como en los cuadros de las funciones base que usan prácticamente todas las *b-splines*, sólo que algunas tienen una amplitud muy pequeña (color gris).

Por otra parte, el modelo subamortiguado para L2 (ε_{215} , primera columna de la Figura C.6), obtiene un *slip* con dos partes principales, la primera una gran amplitud con un valor máximo cercano a 0.6 m cerca del segundo máximo de S_0 ; y la segunda parte, en la zona más profunda con valores negativos de casi - 0.4 m. Todos los modelos seleccionados en esta inversión utilizan muchas funciones base, incluyendo varias de pequeña amplitud. Respecto de los desplazamientos predichos, se repiten las características observadas en las inversiones anteriores, en general los modelos seleccionados recuperan el patrón de desplazamiento sintético en superficie, pero el modelo sobreamortiguado tiende a subestimar las observaciones en las cercanías de la falla (panel inferior Figura C.6).

Para el caso L1 (Figura C.7) las soluciones no son más similares al modelo que se busca recuperar, las tres se generalizan por tener un único lóbulo y no retratar ambos *peaks* de la señal original; lo que sí están compuestas por menos *b-splines* que los modelos seleccionados en la inversión L2 y por una casi nula contribución de funciones base con amplitudes bajo el umbral *NonZero* = 5 cm, por lo que cumplen con ser modelos *sparse*, pero no recuperan los rasgos principales de la señal, a pesar de si recuperan de buena forma los desplazamientos en

superficie en los tres modelos (panel inferior de la Figura C.7).

De esta manera se tiene que si bien para $S4$ las soluciones con estaciones cada 10 km variaban un poco en calidad respecto a las obtenidas para una configuración de estaciones cada 1 km; al ser un modelo suave, los rasgos principales de las soluciones L2 y L1 se mantenían, sin embargo en un caso de un modelo rugoso como $S0$, se obtienen modelos de *slip* con valores del área bajo la curva similares al original, pero que no recuperan bien el patrón de *slip* definido en la prueba sintética.

4.2. Contacto de Subducción

Para abordar el caso de una zona de subducción, en particular para el área del terremoto M_w 8.3 de Illapel, se utilizó una malla con elementos discretos triangulares, construida para representar la geometría de la interfaz entre placas en la zona, según el modelo *Slab 2* (Hayes et al., 2018). Cada elemento de la malla está compuesto por un conjunto de fuentes puntuales en las que se evaluará el *slip*. La malla de fuentes puntuales utilizada llega hasta la profundidad de 55 km, lo que resultó en un total de 194460 fuentes puntuales (Figura 4.9).

Se puede observar en la Figura 4.9 que la distribución espacial de fuentes puntuales no tiene una forma regular, pues el borde Oeste delinea la fosa y por el Este está delimitada por la línea de contorno de 55 km de profundidad del contacto de subducción. Por esta razón, utilizando los límites máximos y mínimos de las coordenadas Este y Norte de las fuentes puntuales, se definió un dominio rectangular (rectángulo naranja de líneas segmentadas en la Figura 4.9), donde se definieron las funciones base *b-spline* multi-escala.

En el dominio descrito en el párrafo anterior, se definieron las funciones base para el caso de la geometría de subducción de Illapel, considerando un total de 4 escalas, generadas a partir de 2 y 3 *b-splines* completas en la escala más extensa, para las direcciones E y N respectivamente. El detalle de la cantidad de funciones base en cada escala se muestra en la Tabla 3.2. Se ha de notar que, para las escalas más pequeñas, el dominio local de algunas funciones base puede no coincidir con la ubicación de fuentes puntuales. En este caso, esas funciones bases no contribuyen a la predicción de desplazamientos en superficie. Dada la naturaleza de la regularización del problema inverso – se minimiza la norma del vector de parámetros del modelo – dichas funciones base se estiman con amplitud nula en la inversión de dislocación.

Posteriormente la colección de *b-splines* fue evaluada en los puntos correspondientes a las 194460 fuentes puntuales. De esa manera, se obtuvo una matriz de funciones base \underline{B} del orden de $N_{fp} \times N_{fb}$, es decir, 194460 x 874 (cantidad de fuentes puntuales x cantidad de funciones base). En la Figura 3.5 se muestran las *b-splines* de cada escala definidas en la geometría del área de Illapel.

Con la finalidad de verificar e ilustrar la metodología propuesta, se generaron diversos conjuntos de datos sintéticos, definiendo distribuciones de dislocación de tipo tablero de ajedrez y elipsoidales (Figuras 4.10 y 4.11, respectivamente) para realizar inversiones preliminares al uso de datos reales; estos *tests* tienen valores de *slip* estrictamente positivos, con máximos de 1 ó 5 m según el caso. En cada una de las figuras se pueden observar los desplazamientos sintéticos generados en superficie, los cuales se busca ajustar en la resolución del problema.

Los patrones de tablero de ajedrez son de gran utilidad para evaluar la capacidad de resolución espacial del método, para una distribución de puntos de observación dada; mientras que los *tests* elipsoidales permiten simular escenarios de distribución de *slip* “similares” a eventos sísmicos; es por ello que para estos casos se muestra la equivalencia del momento sísmico M_0 y de M_w que representa cada caso.

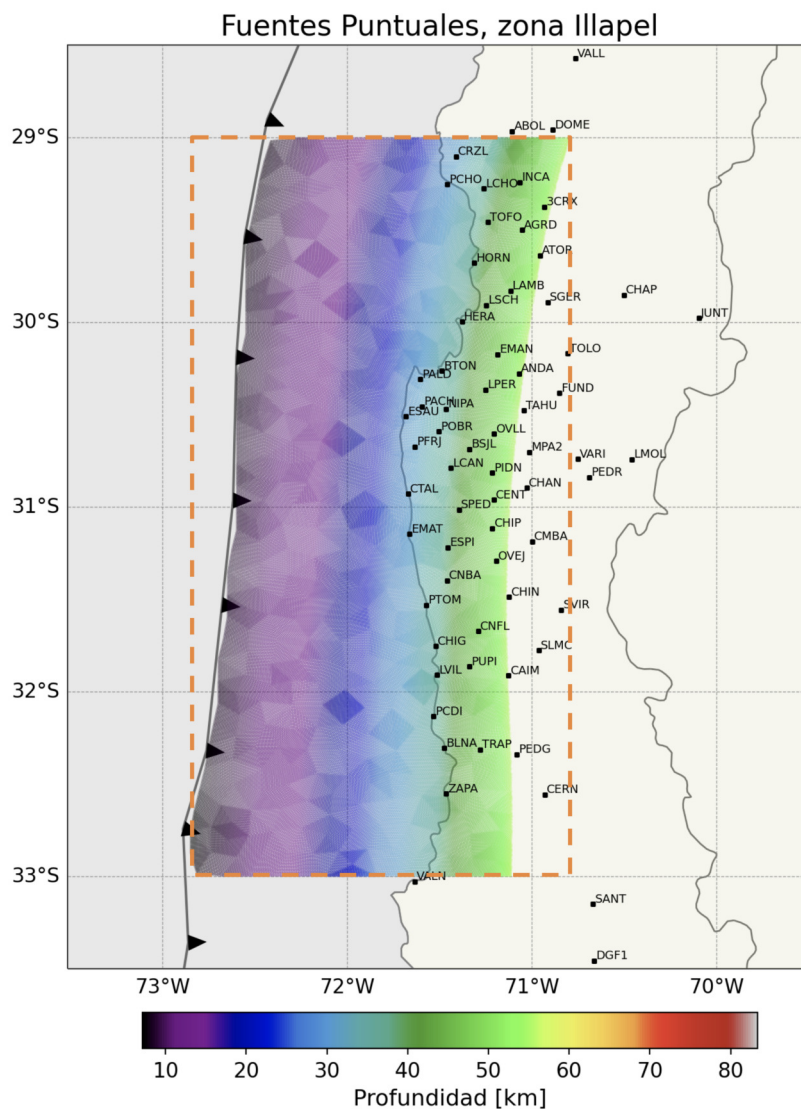
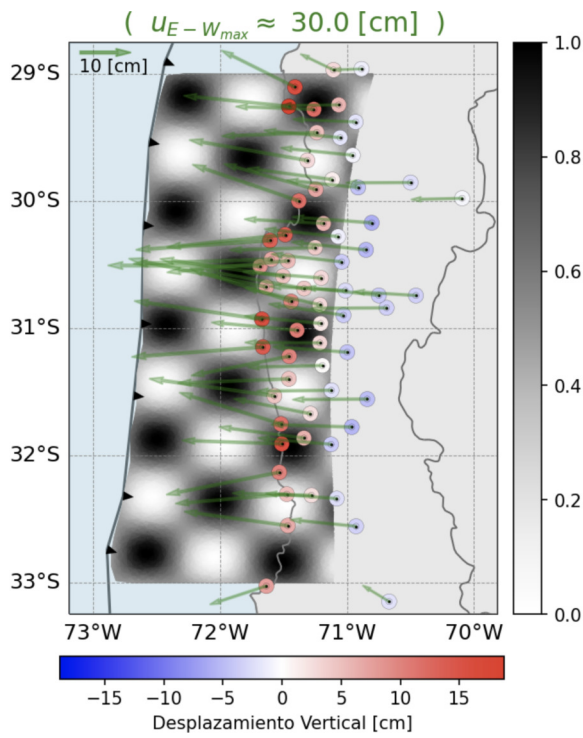
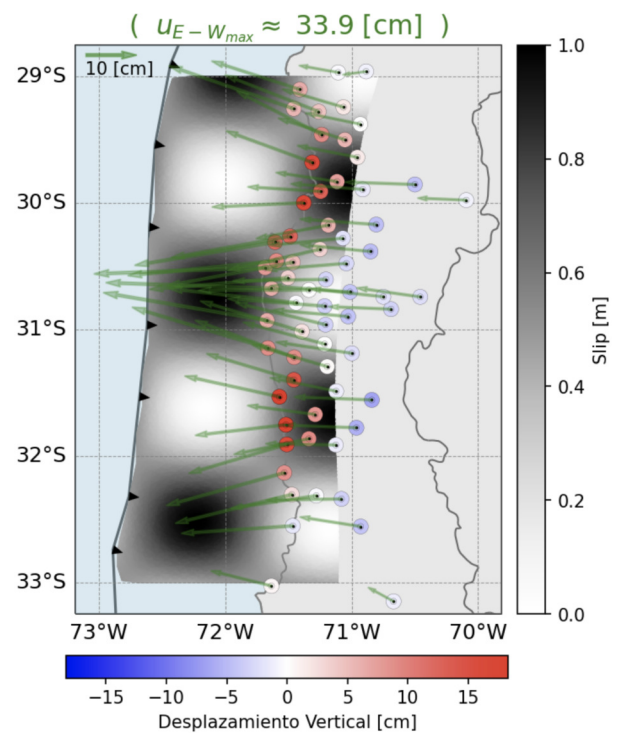


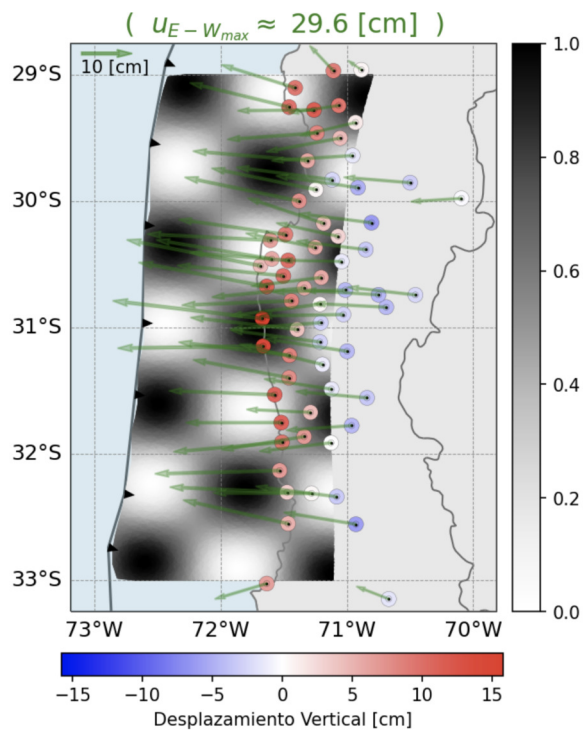
Figura 4.9: Malla de fuentes puntuales seleccionada para el caso de la zona de Illapel, cuya profundidad es representada por la escala de colores. Los cuadrados negros muestran la posición de las estaciones GNSS – y sus nombres – considerados en este estudio. La línea segmentada naranja representa el dominio donde se definen las funciones base *b-splines* en las múltiples escalas.



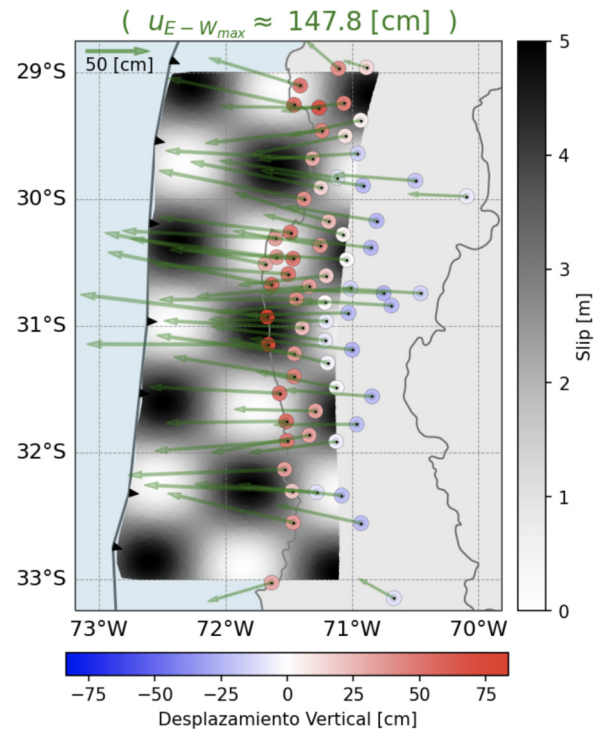
(a) *Test* tablero de ajedrez 0.



(b) *Test* tablero de ajedrez 1.



(c) *Test* tablero de ajedrez 2.



(d) *Test* tablero de ajedrez 3.

Figura 4.10: *Tests* sintéticos de tablero de ajedrez. La escala de grises representa el *slip* en las fuentes puntuales. En cada caso se muestran los desplazamientos sintéticos generados por cada patrón, con ruido aleatorio añadido por componente. Las flechas verdes exhiben las componentes horizontales (cada título señala el desplazamiento máximo en la componente E-W) y los círculos la componente vertical (representados por la segunda escala de color).

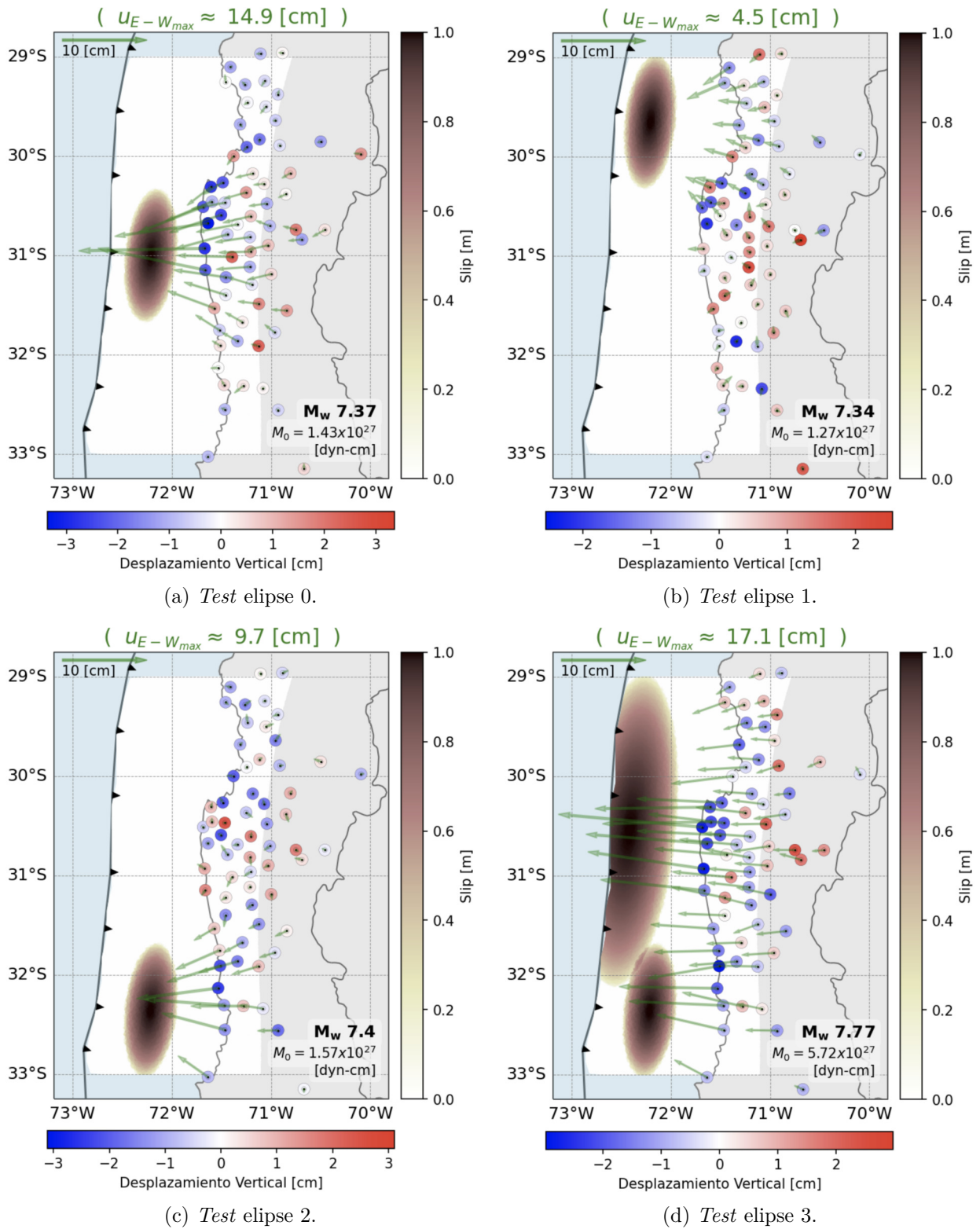


Figura 4.11: *Tests* sintéticos con distribuciones de dislocación elipsoidales. La escala de tonos cálidos representa el *slip* en las fuentes puntuales. En cada caso se muestran los desplazamientos sintéticos generados por cada patrón, con ruido aleatorio añadido por componente. Las flechas verdes exhiben las componentes horizontales (cada título señala el desplazamiento máximo E-W) y los círculos la componente vertical (representados por la segunda escala de color). El cuadro gris en la esquina inferior derecha muestra la magnitud de momento sísmico M_w y M_0 asociado al *slip* de cada *test*.

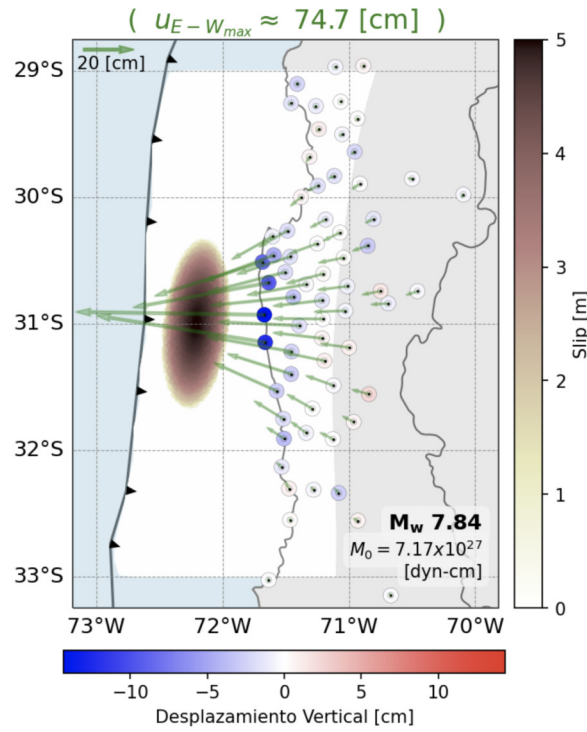


Figura 4.11: *Tests* sintéticos con distribuciones de dislocación elipsoidales (continuación).

Las funciones de Green en este caso, es decir \underline{G}_{slip} que representa la respuesta en superficie ante un deslizamiento unitario en cada porción del contacto, fueron obtenidas con el *software* EDKS (*Elementary Dislocation Kernel Source*, cortesía de L. Rivera) y para el caso de los *test* sintéticos, se usó la componente *dip-slip* del movimiento, y por tanto, de estas funciones (mayor información, referirse a la Sección 3.3). La estructura elástica de capas planas del medio utilizada en este trabajo es la misma utilizada en Carrasco et al. (2019).

Para estos casos sintéticos, se utilizan como posiciones de observación las descritas por las estaciones GNSS recopiladas por Klein et al. (2017). Para abordar una inversión con datos con ruido se generó una señal de ruido aleatorio con una semilla diferenciada por componente; por lo que se consideró un valor de 5 mm para las componentes horizontales y para la vertical 10 mm. El ruido luego se sumó a los desplazamientos sintéticos, para obtener un \underline{d}_{noisy} .

Desde este punto, se calcularon sólo inversiones con la regularización con norma L1. Para las pruebas con datos sintéticos que se detallarán a continuación, se realizaron un total de 250 inversiones por prueba, utilizando valores de α (parámetro de regularización), en un rango logarítmico entre 10^{-5} y 10^5 .

En primer lugar, se mostrarán las implementaciones de la condición de positividad y la propuesta de normalización. Para los resultados de este apartado; dada la gran cantidad de pruebas calculadas en esta investigación, de los 9 *tests* sintéticos para la geometría de Illapel, se mostrarán los resultados de dos, elipse 4 y tablero de ajedrez 3, ambos con *slip* máximo de 5 m.

4.2.1. Condición de positividad

Las amplitudes de *slip* sintético – en la dirección del *up-dip* – fueron generadas únicamente con valores positivos (tanto para los tableros de ajedrez, Figura 4.10; como para los patrones elípticos, Figura 4.11). Luego, se probó con dichos datos la inversión considerando la implementación de la condición de positividad para el *slip*. La inclusión de esta condición sirve además para representar información *a priori* física en el caso de la inversión de la distribución de dislocación en terremotos de contacto de subducción, ya que no permite dislocaciones de tipo normal, permitiendo sólo las dislocaciones de tipo inverso, en la solución del problema de inferencia.

Para implementar esta condición se debe establecer la restricción $\underline{slip} \underline{s} = \underline{B} \cdot \underline{m} \geq \underline{0}$ dentro de las rutinas de inversión. Dicha restricción, añade un número muy elevado de ecuaciones al problema optimal que es igual al número de fuentes puntuales en el contacto de subducción (194460 fuentes puntuales en la malla seleccionada). A fin de afrontar el elevado costo computacional que conlleva esta condición, se generó una matriz alterna de funciones base *b-spline* multi-escala, denominada \underline{B}^+ que, en vez de estar evaluada en todas las fuentes puntuales, está evaluada sólo en una pequeña cantidad de puntos de control definidos dentro del dominio local de cada una de las *b-splines* más pequeñas (última escala, ver Figura E.1), incluyendo 4 puntos por *b-spline* en esta última escala (por tanto se tienen un total de 80 puntos en la dirección E y 112 en la dirección N, lo que resulta en una matriz \underline{B}^+ de dimensiones 8960×874).

Lo anterior permite asegurar la condición de positividad para la dislocación estimada, ya que dicha dislocación puede ser tan compleja como lo permitan las *b-splines* más pequeñas usadas en su representación. Dicha implementación, permite además mejorar considerablemente la eficiencia computacional de la inversión con condición de positividad en el *dip-slip*, ya que sólo se añade 8960 ecuaciones de restricción al problema de inversión (en vez de 194460). Se ha de notar que la matriz \underline{B}^+ sólo se utiliza para asegurar la condición de positividad de la dislocación.

Para probar los efectos de esta implementación se calcularon las inversiones para los *tests* sintéticos elipse 4 y tablero de ajedrez 3, sin normalizar, usando las matrices \underline{B} y \underline{B}^+ para la condición de positividad, cuya comparación se presenta a continuación y en el Anexo E.1. En cada caso se muestran las respectivas curvas L (Figuras E.2 y E.4, respectivamente) y la comparación de los resultados para un modelo seleccionado y sus diferencias (Figuras 4.12 y 4.13).

Se tiene que las curvas L en ambos *test* sintéticos lucen bastante similares, la zona de inflexión de la curva (y cruce con el valor $\chi^2 = 1$ de la norma del ajuste reducida) se sitúa más o menos en los mismos valores para las normas tanto del ajuste como de la regularización; sin embargo, para los últimos modelos (aquellos con índice cercano al último parámetro, 249), el valor para la norma de la regularización es varios órdenes de magnitud menor, en el caso de las inversiones utilizando \underline{B}^+ (lado izquierdo de las curvas L, paneles superiores de las Figuras E.2 y E.4).

Como en cada inversión, se destacaron algunos modelos con distinto grado de amortiguamiento (puntos de colores en las curvas L). Para esta comparación metodológica se eligió uno de los modelos seleccionados para cotejar los resultados obtenidos en ambas pruebas (inversión utilizando $\underline{\underline{B}}$ y $\underline{\underline{B}}^+$ para la condición de positividad).

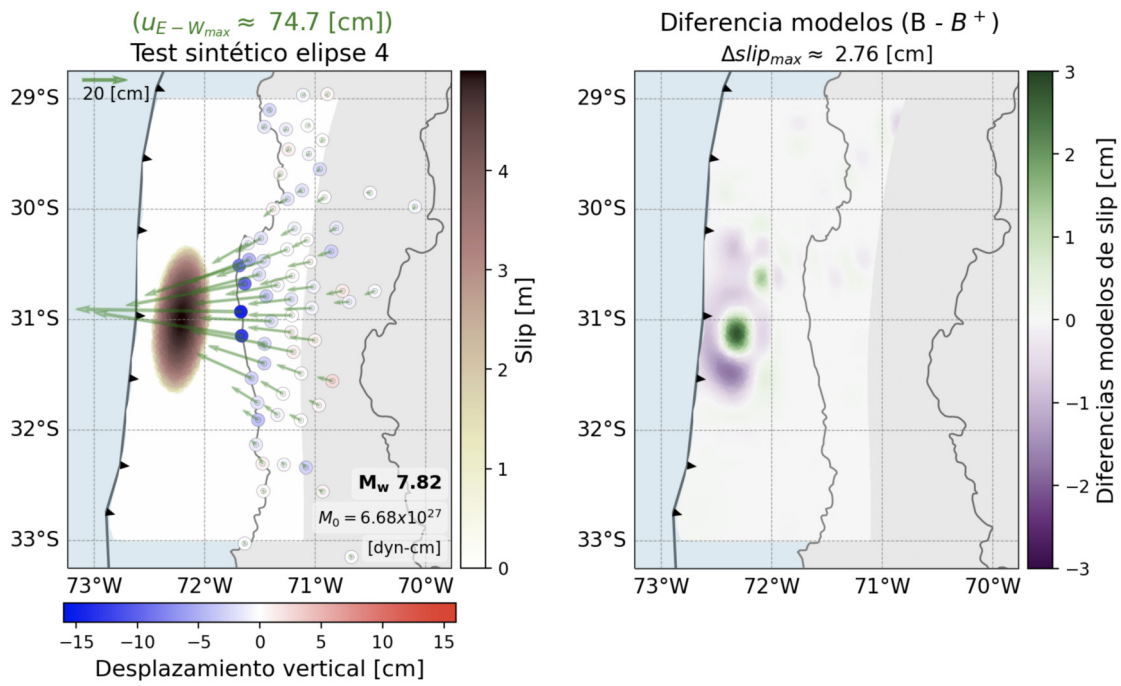
Para el *test* elipse 4 se usó el modelo 64 (asociado a un parámetro de regularización $\alpha_{64} = 3.72 \times 10^{-3}$); en la Figura 4.12, se puede ver que tanto el *slip* recuperado, como los desplazamientos en superficie lucen prácticamente iguales en ambas inversiones (paneles c y d de la Figura 4.12), en este caso el desplazamiento máximo en la componente E-W en ambas estimaciones es el mismo. La única leve diferencia, inferible por la variación en la escala de color, es que el modelo obtenido con $\underline{\underline{B}}^+$ tendría un leve valor menor que 0 m en el *slip*.

Al observar la contribución de las *b-splines* en cada escala (Figura E.3), se nota que ambas estimaciones usan las mismas funciones base, con amplitudes prácticamente iguales (al menos en la visualización del orden de magnitud que tienen, en metros). Por otra parte, en la resta de ambas estimaciones (panel b de la Figura 4.12, que muestra el modelo α_{64} obtenido con $\underline{\underline{B}}$ menos el respectivo con $\underline{\underline{B}}^+$), los valores máximos son de casi 3 cm, valor pequeño considerando que el *slip* máximo recuperado es mayor que 6 m y que el correspondiente al *test* sintético a recuperar tiene un máximo de 5 m.

Se repitió el mismo análisis para la inversión del *test* tablero de ajedrez 3, en el que se eligió el modelo 82 (asociado a un parámetro de regularización $\alpha_{82} = 1.96 \times 10^{-2}$); en general para este modelo se recupera bastante bien el patrón sintético, los modelos (con $\underline{\underline{B}}$ y $\underline{\underline{B}}^+$) muestran un patrón de *slip* y desplazamientos sintéticos casi idénticos (Figura 4.13, paneles c y d), con desplazamientos máximos en la componente E-W de igual magnitud. La contribución de amplitud de cada función base (ver comparación por escala en la Figura E.5) se ve muy similar entre ambas pruebas, se utilizan las mismas funciones base para la construcción del patrón de *slip*, con amplitudes de igual magnitud (al menos en la óptica en unidades de metros).

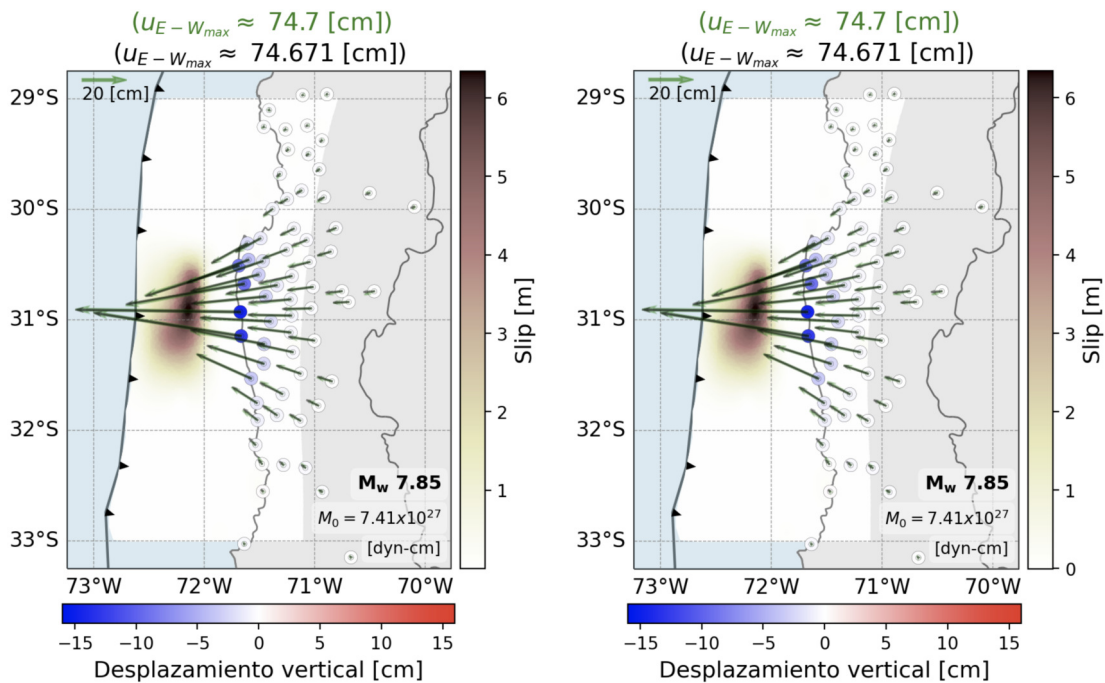
Al observar la diferencia entre ambos modelos (Figura 4.13, panel b), se puede notar que, al igual que para el *test* elipse 4, las diferencias son del orden de centímetros. En este caso el patrón espacial de la diferencia es más complejo, lo que es esperable dado que el modelo sintético a recuperar también tiene una mayor complejidad en la distribución espacial que en el caso de las elipses. Las mayores discrepancias se advierten en el extremo derecho de la malla, y son del orden de 3.4 cm. Al igual que el caso anterior, las amplitudes recuperadas y las del *test* sintético, son del orden de 5 m, por lo que la diferencia entre los modelos de *slip* de ambas pruebas es considerablemente menor.

Dado lo antes expuesto, y sumado a que el tiempo total de cálculo de las inversiones (250 inversiones por prueba, dada la cantidad de valores del parámetro de regularización), utilizando la matriz $\underline{\underline{B}}$ completa superaba la hora y media; mientras que usando $\underline{\underline{B}}^+$ era de aproximadamente siete minutos, se decidió optar por el uso de la matriz $\underline{\underline{B}}^+$ para evaluar la condición de positividad en los cálculos de inversiones de *slip*. Por lo que, los resultados presentados en lo que sigue para la geometría de Illapel, fueron calculados utilizando $\underline{\underline{B}}^+$ para evaluar la positividad.



(a) *Test* sintético elipse 4.

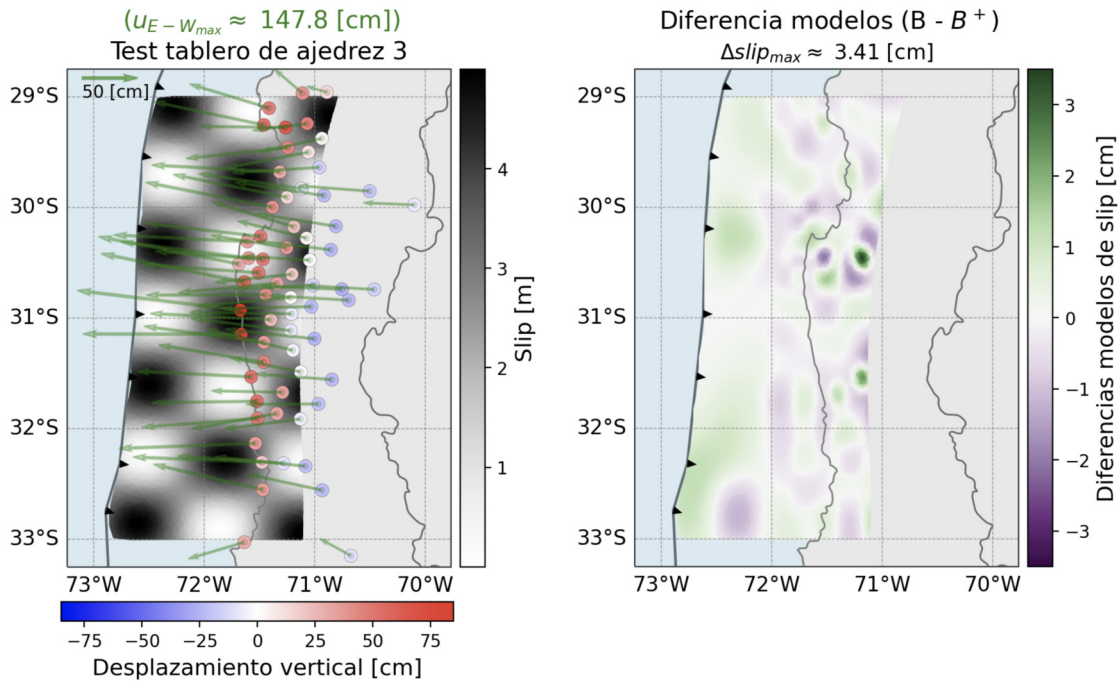
(b) Diferencias en los modelos de *slip* obtenidos, inversiones $\underline{B} - \underline{B}^+$.



(c) Modelo 64, usando \underline{B} para la condición de positividad.

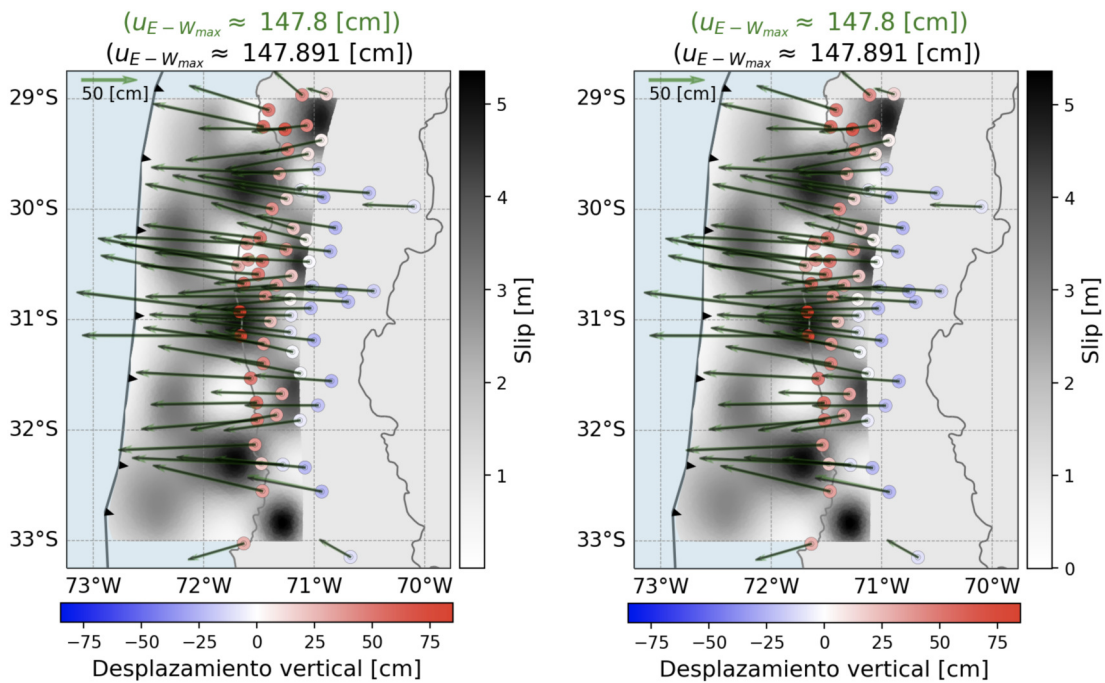
(d) Modelo 64, usando \underline{B}^+ para la condición de positividad.

Figura 4.12: a) *Test* sintético elipse 4, los datos sintéticos que se buscan ajustar están representados por las flechas verdes en la componente horizontal, y en la vertical por los círculos de este panel (a). c - d) Comparación de resultados para el modelo número 64, de la inversión del *test* sintético elipse 4, sin normalizar, utilizando (c) la matriz \underline{B} completa y (d) la matriz \underline{B}^+ para evaluar la condición de positividad en la resolución del problema inverso. En cada caso se muestra el modelo de *slip* obtenido, representado con la escala de tonos cálidos y los desplazamientos predichos (d_{pred}), simbolizados en la componente horizontal con flechas negras y en la vertical con círculos (representados por la segunda escala de color). El panel b) muestra la diferencia de los modelos de dislocación obtenidos con \underline{B} y \underline{B}^+ , simbolizado con la escala de púrpura a verde, en unidades de centímetros.



(a) *Test* sintético tablero de ajedrez 3.

(b) Diferencias en los modelos de *slip* obtenidos, inversiones $\underline{B} - \underline{B}^+$.



(c) Modelo 82, usando \underline{B} para la condición de positividad.

(d) Modelo 82, usando B^+ para la condición de positividad.

Figura 4.13: a) *Test* sintético tablero de ajedrez 3, los datos sintéticos que se buscan ajustar están representados por las flechas verdes en la componente horizontal, y en la vertical por los círculos de este panel (a). c - d) Comparación de resultados para el modelo número 82, de la inversión del *test* sintético tablero de ajedrez 3, sin normalizar, utilizando (c) la matriz \underline{B} completa y (d) la matriz \underline{B}^+ para evaluar la condición de positividad en la resolución del problema inverso. En cada caso se muestra el modelo de *slip* obtenido, representado con la escala de grises y los desplazamientos predichos (d_{pred}), simbolizados en la componente horizontal con flechas negras y en la vertical con círculos (representados por la segunda escala de color). El panel b) muestra la diferencia de los modelos de dislocación obtenidos con \underline{B} y \underline{B}^+ , simbolizado con la escala de púrpura a verde, en unidades de centímetros. 76

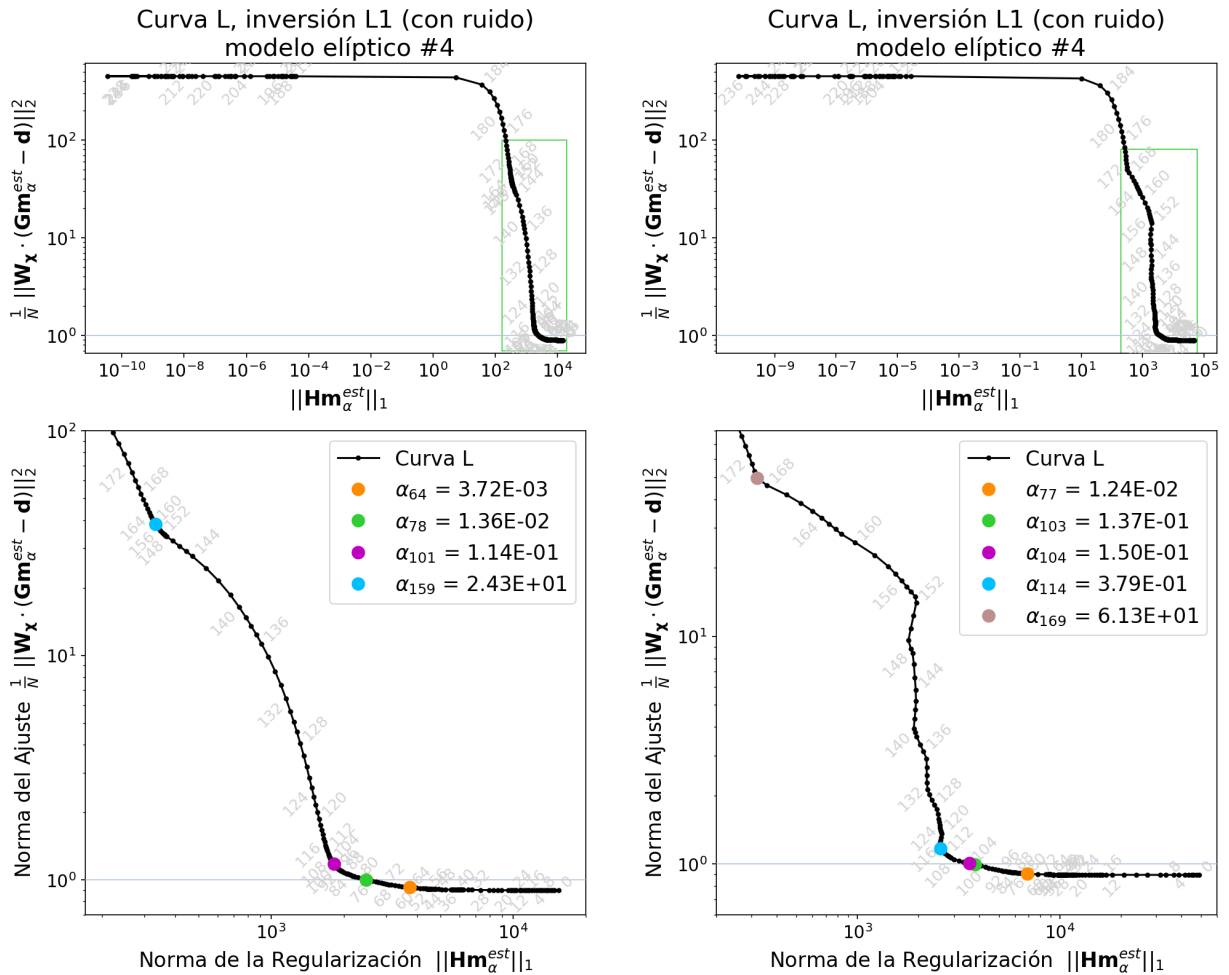
4.2.2. Normalización de las columnas de G

Tal como se explicó en la Sección 3.4, para el caso de Illapel, dado que se tiene un conjunto de *b-splines* de distinta extensión en el medio, se ideó un método para normalizar las funciones base que considerara la diferencia entre las escalas. De esta forma, se generó una versión de la matriz \underline{G} normalizada por escalas, dada por la expresión (3.19).

A continuación se muestran los resultados de las inversiones de los *test* sintéticos elipse 4 y tablero de ajedrez 3 sin normalizar y con la normalización propuesta (usando $\underline{G}_{\text{Norm}}$).

4.2.2.1. Elipse 4

En la Figura 4.14 se muestran las curvas L de las inversiones del *test* sintético elipse 4, en el panel a) sin normalizar y b) con la normalización propuesta.



(a) Curva L de la inversión del *test* elipse 4, sin normalizar.

(b) Curva L de la inversión del *test* elipse 4, normalizada.

Figura 4.14: Curvas L para la resolución del problema inverso del *test* sintético elipse 4 en la geometría de Illapel. (a) Inversión L1 sin normalizar e (b) Inversión L1 considerando la normalización propuesta. Los números en gris indican el modelo asociado a cada punto negro en la curva. Los paneles inferiores son el *zoom* señalado con el cuadro verde de los paneles superiores. Los puntos de colores destacan los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento en cada caso.

Se puede apreciar que la forma que describen las curvas no es igual; al menos para este resultado, la obtenida con la normalización presenta variaciones más agudas. En ambos casos se seleccionaron modelos con distinto nivel de amortiguamiento, señalados con los puntos de colores. En el caso normalizado, el cruce de la curva L y la línea de norma del ajuste reducida igual a 1 quedaba entre dos modelos, por lo que ambos fueron elegidos.

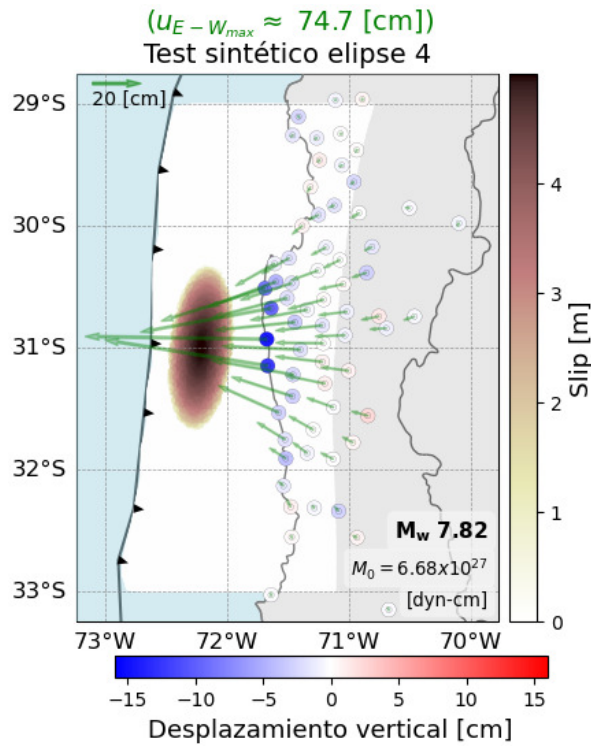
En la Figura 4.15 se presentan los resultados para los modelos seleccionados en la inversión sin normalizar y su comparación con el modelo sintético. Las figuras tienen su propia escala de color para el *slip* (es decir, son diferentes entre ellas), pero comparten la segunda escala de color para los desplazamientos en la componente vertical.

Los modelos 64, 78 y 101 logran un buen ajuste de las observaciones sintéticas, en los valores máximos de desplazamiento en la componente E-W hay diferencias del orden de milímetros (cantidades señaladas en los títulos de cada gráfico); en cuanto a los desplazamientos en la componente vertical, hay similitud en los valores para las estaciones cercanas a la línea de costa, que son las que muestran un patrón de subsidencia en los datos sintéticos y en estos resultados; sin embargo para las estaciones hacia el interior, o al norte y sur de la malla, en su mayoría se obtienen predicciones muy cercanas a cero en los tres modelos (tonos blancos en los círculos). Los valores máximos de *slip* de estos modelos rondan los 5.5 - 6.5 m, en comparación a los 5 m máximos del *test* sintético.

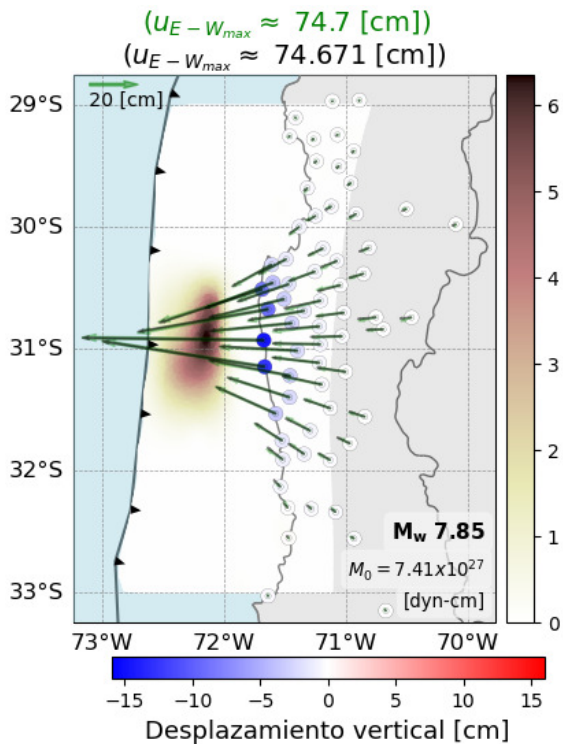
Para el parámetro 64 (i.e., α_{64}) se obtiene un modelo con una orientación muy similar al de elipse 4, pero que no es completamente simétrico (respecto del semi-eje menor de la elipse), sino que se prolonga un poco hacia el sur (Figura 4.15, b); de los seleccionados es el modelo más similar en extensión al sintético y con una magnitud M_w y un M_0 más cercanos a los correspondientes al *input* elipse 4, pero el *slip* máximo es casi 1.5 m superior al dado por el *test* sintético.

Los modelos asociados a los parámetros 78 y 101 (Figura 4.15, c y d) muestran patrones de *slip* más extendidos y con un aspecto un poco más similar a una elipse regular, no con la misma orientación que el *test* sintético (Figura 4.15, a), pero con valores máximos más cercanos a 5 m que lo obtenido con α_{64} . Los modelos asociados a estos parámetros son más extensos espacialmente, obteniendo momentos sísmicos M_0 varias unidades superiores al del sintético. Ambos patrones no son completamente concéntricos, sino que muestran una mayor extensión de *slip* distribuido hacia el lado de la fosa que hacia la costa.

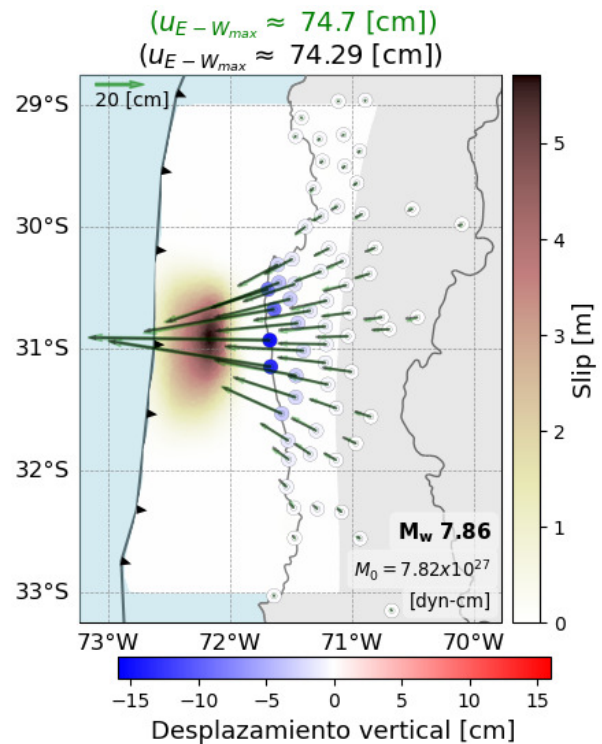
Por otra parte, el modelo 159 (Figura 4.15, e), que es el más sobreamortiguado de los elegidos; muestra un modelo de *slip* con un parche más extenso, de casi 2 grados de latitud de largo en la dirección N-S y que en el sentido del *down-dip* se extiende incluso bajo las estaciones costeras. Este modelo es más suavizado que los anteriores y penaliza en gran medida el *slip* asociado, cuyo valor máximo es menor a 2 m, obteniendo una magnitud y un momento sísmico menores al dado por el *test* sintético que se busca recuperar. Además los desplazamientos predichos en la componente horizontal son bastante menores a los sintéticos (desajuste entre las flechas negras y verdes, respectivamente), y los predichos en la vertical muestran una subsidencia más extensa hacia el interior del territorio en las estaciones entre los 30 - 32°S que lo que exhiben los datos sintéticos.



(a) Test sintético elipse 4.



(b) Modelo 64.



(c) Modelo 78.

Figura 4.15: Inversión *test* sintético elipse 4, **sin normalizar**. Panel a) Modelo elipse 4, los datos sintéticos que se buscan ajustar están representados por las flechas verdes en la componente horizontal, y en la vertical por los círculos de este panel (a). b - e) Modelos de *slip* seleccionados de la inversión L1 sin normalizar, representados por las respectivas escalas de tonos cálidos. Las flechas negras muestran la componente horizontal de los desplazamientos predichos (d_{pred}); los títulos especifican los desplazamientos horizontales máximos en la componente E-W. Los círculos representan el desplazamiento predicho en la componente vertical (segunda escala de color, igual para todas las figuras).

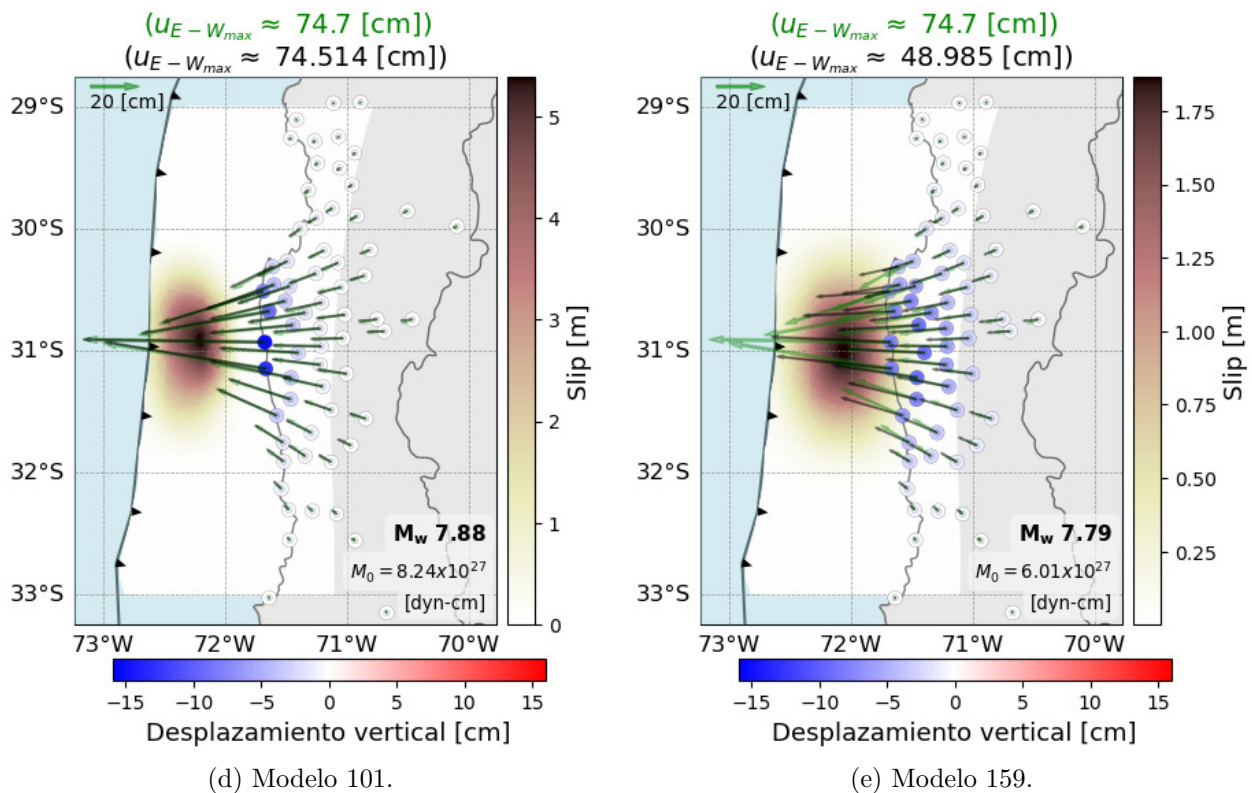


Figura 4.15: Inversión *test* sintético elipse 4, **sin normalizar** (continuación).

En la Figura 4.16 se presentan los resultados para los modelos seleccionados en la inversión normalizada (con la normalización propuesta en esta tesis), y su comparación con el modelo sintético. Las figuras, al igual que lo expuesto anteriormente, tienen su propia escala de color para el *slip*, pero comparten la segunda correspondiente a los desplazamientos en la componente vertical.

Es posible notar de la inspección de los resultados que los modelos 77, 103, 104 y 114 logran un buen ajuste de los desplazamientos sintéticos (Figura 4.16; paneles b, c, d y e, respectivamente), en general hay una buena similitud en la componente horizontal de los desplazamientos sintéticos y predichos; respecto de los desplazamientos máximos en la componente E-W, para estos modelos hay diferencias de milímetros con el máximo desplazamiento del *test* sintético. En la componente vertical se recupera el patrón de subsidencia de las estaciones más cercanas a la costa, pero al igual que en los casos expuestos anteriormente, en las estaciones hacia el interior del territorio el desplazamiento vertical es sólo cercano a 0 cm.

Para el modelo 77 (Figura 4.16, b) se obtiene un *slip* con una extensión espacial menor que el patrón sintético que se busca recuperar, siendo más reducido en la dirección E-W. Este modelo tiene dos pequeños *peaks* de *slip* un poco más hacia el *down-dip*, en los límites norte y sur del parche, además de dos lóbulos principales en torno a los 31°S; el valor máximo de *slip* para este modelo supera los 10 m, en comparación con los 5 m máximos definidos para el *test* sintético. Su estimación del momento sísmico es inferior a la del modelo elipse 4, por lo que tiene una magnitud de momento también menor.

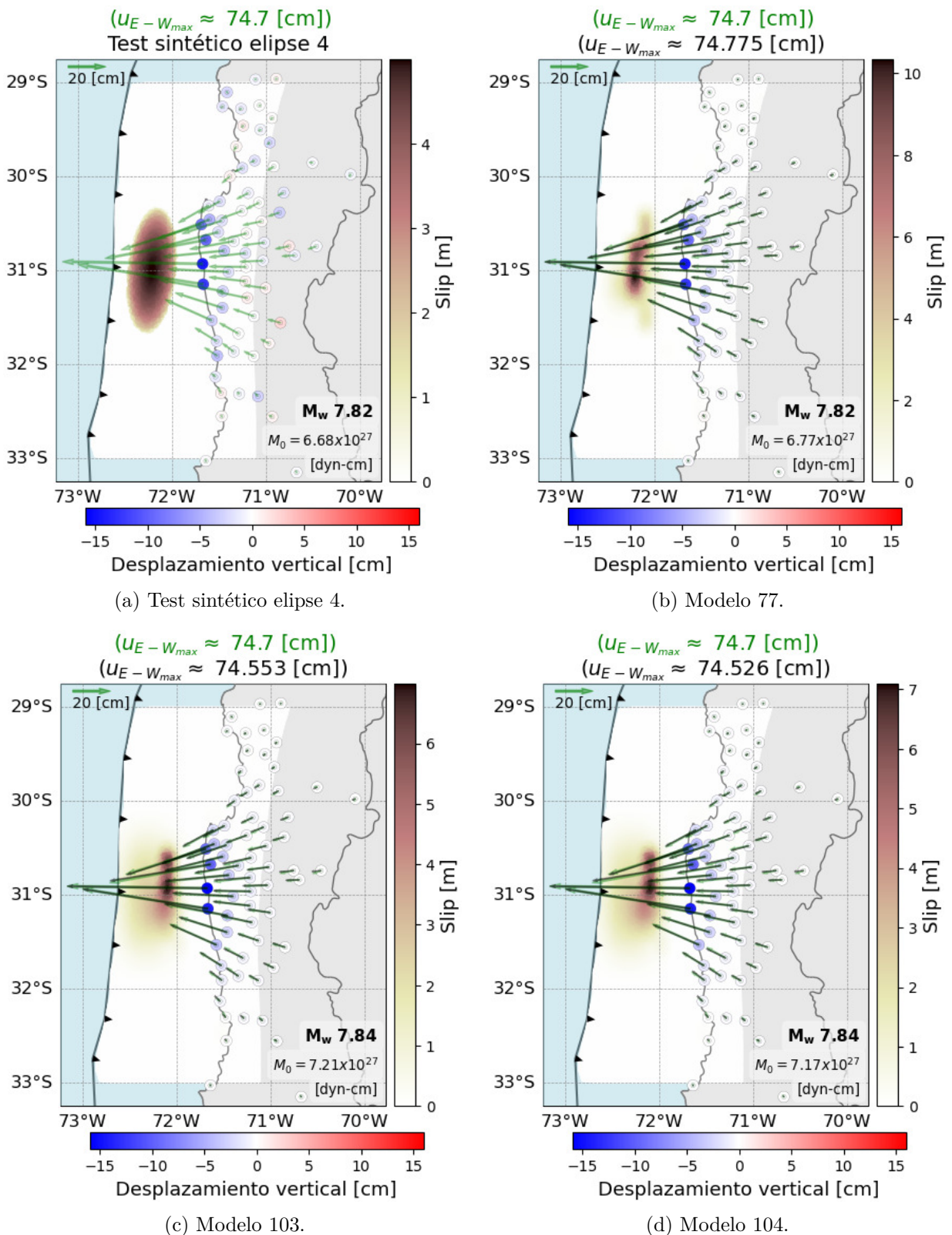


Figura 4.16: Inversión *test* sintético elipse 4, **normalizada**. Panel a) Modelo elipse 4, los datos sintéticos que se buscan ajustar están representados por las flechas verdes en la componente horizontal, y en la vertical por los círculos de este panel (a). b - f) Modelos de *slip* seleccionados de la inversión L1 normalizada, representados por las respectivas escalas de tonos cálidos. Las flechas negras muestran la componente horizontal de los desplazamientos predichos (d_{pred}); los títulos especifican los desplazamientos horizontales máximos en la componente E-W. Los círculos representan el desplazamiento predicho en la componente vertical (segunda escala de color, igual para todas las figuras).

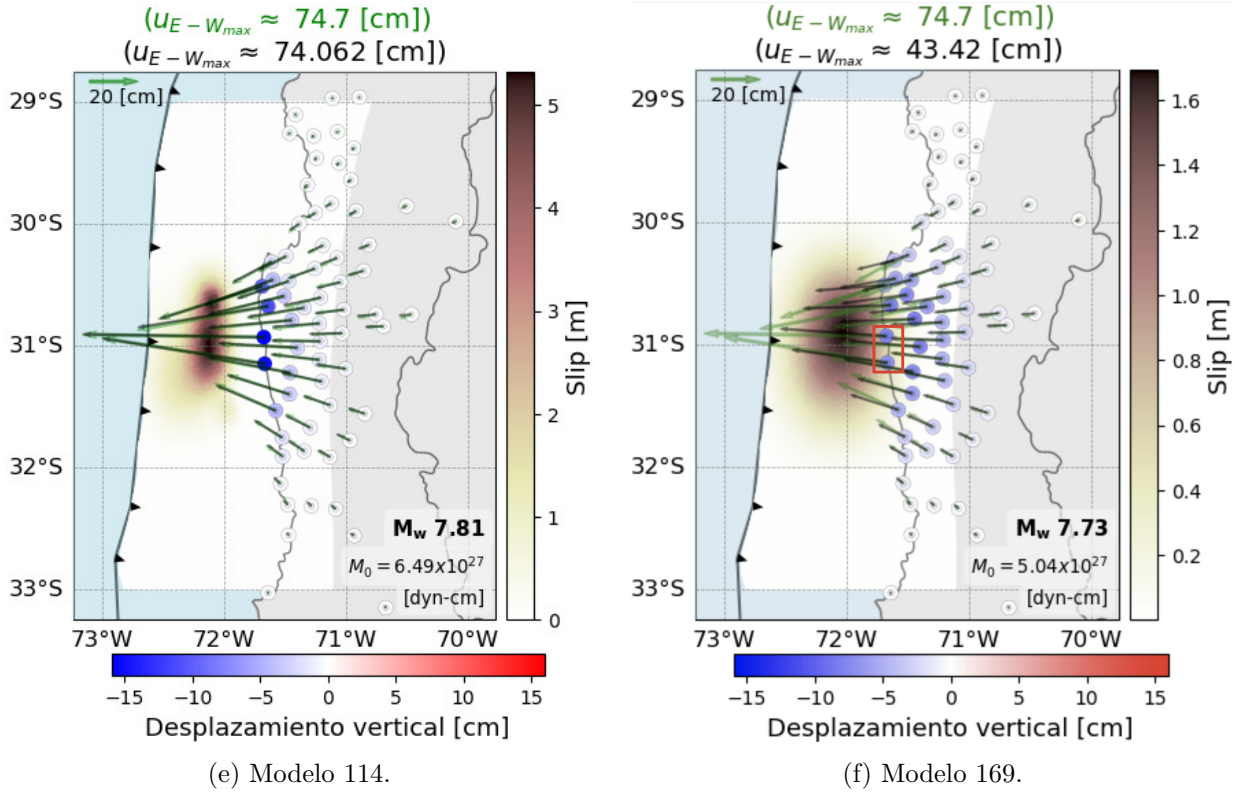


Figura 4.16: Inversión *test* sintético elipse 4, **normalizada** (continuación).

Los modelos 103 y 104 (Figura 4.16, c y d) son contiguos al punto donde la curva L cruza la línea de $\chi^2 = 1$, y están asociados a los parámetros de regularización: $\alpha_{103} = 1.37 \times 10^{-1}$ y $\alpha_{104} = 1.5 \times 10^{-1}$, por lo que sus resultados son semejantes. Ambos presentan un patrón similar, con los máximos de *slip* constreñidos entre los $\sim 72^\circ - 72.2^\circ\text{W}$ y una extensión más suave hacia la fosa, con valores de 1 ó 2 m. En cuanto al *slip* máximo, el correspondiente al modelo 103 es de casi 7 m y para el asociado al parámetro 104 el valor máximo es levemente superior a 7 m. Los valores para la magnitud M_w y el M_0 son los más cercanos para este *test*, de hecho el modelo 104 obtiene el mismo valor aproximado para el momento sísmico.

Por otra parte, el modelo 114 (asociado al parámetro α_{114} ; Figura 4.16, e), obtiene un patrón con una banda de valores máximos de *slip* un poco más grande que los modelos anteriores, pero con una distribución espacial similar (en sentido N-S) a la extensión de la elipse sintética. Este resultado también tiene una prolongación hacia la fosa, además de un pequeño lóbulo en la parte S-E del modelo. El valor máximo de *slip* es levemente superior a 5 m, similar al del sintético. El momento sísmico desde este modelo comienza a reducirse, por lo tanto también la magnitud es un poco menor a la del modelo sintético.

Por otra parte, el modelo 169 es el caso más sobreamortiguado de esta selección (Figura 4.16, f) muestra un patrón de *slip* totalmente elíptico, extendiéndose en longitud hasta bajo las estaciones más cercanas a la costa y con un semi-eje mayor orientado de N a S. El valor máximo de *slip* es de ~ 1.7 m, muy por debajo de los 5 m del modelo sintético a ajustar; se puede observar que los desplazamientos predichos no se ajustan bien con los sintéticos. Las componentes horizontales tienen una extensión reducida (desajuste entre las flechas negras y verdes), la diferencia entre los máximos en la componente E-W es de 30 cm aproximadamente, y el patrón de desplazamiento vertical resulta en subsidencia para toda la porción central

de las estaciones, no alcanzando los valores de ~ -15 cm en las dos estaciones más cercanas al parche de *slip* (destacadas con el cuadro rojo en la figura).

Comparando ambas inversiones, se tiene que en general la inversión normalizada entrega resultados más acotados en espacio y por tanto parece estar prefiriendo el uso de funciones base casi únicamente en las escalas superiores, que incluyen *b-splines* más restringidas espacialmente. A fin de comparar este efecto se graficaron las contribuciones de las funciones base de cada escala para dos de los modelos obtenidos, uno por cada inversión. Se eligieron de los modelos seleccionados aquellos que están en el punto más cercano a la norma del ajuste reducida = 1, por lo que para la inversión sin normalizar corresponde al parámetro α_{78} y para la inversión normalizada a α_{103} .

En la Figura E.7 se observa la comparación entre la contribución de las funciones base para ambas soluciones, (a) el modelo 78 de la inversión sin normalizar y (b) el modelo 103 de la inversión normalizando las columnas de \underline{G} . En primer lugar para las dos soluciones parece no haber *b-splines* en la escala 0, sin embargo ambas tienen una contribución en esta escala, pero de una amplitud muy pequeña (del orden de 10^{-5} y 10^{-7} m, respectivamente; Figura E.6), que comparado a la contribución de las otras funciones base es despreciable.

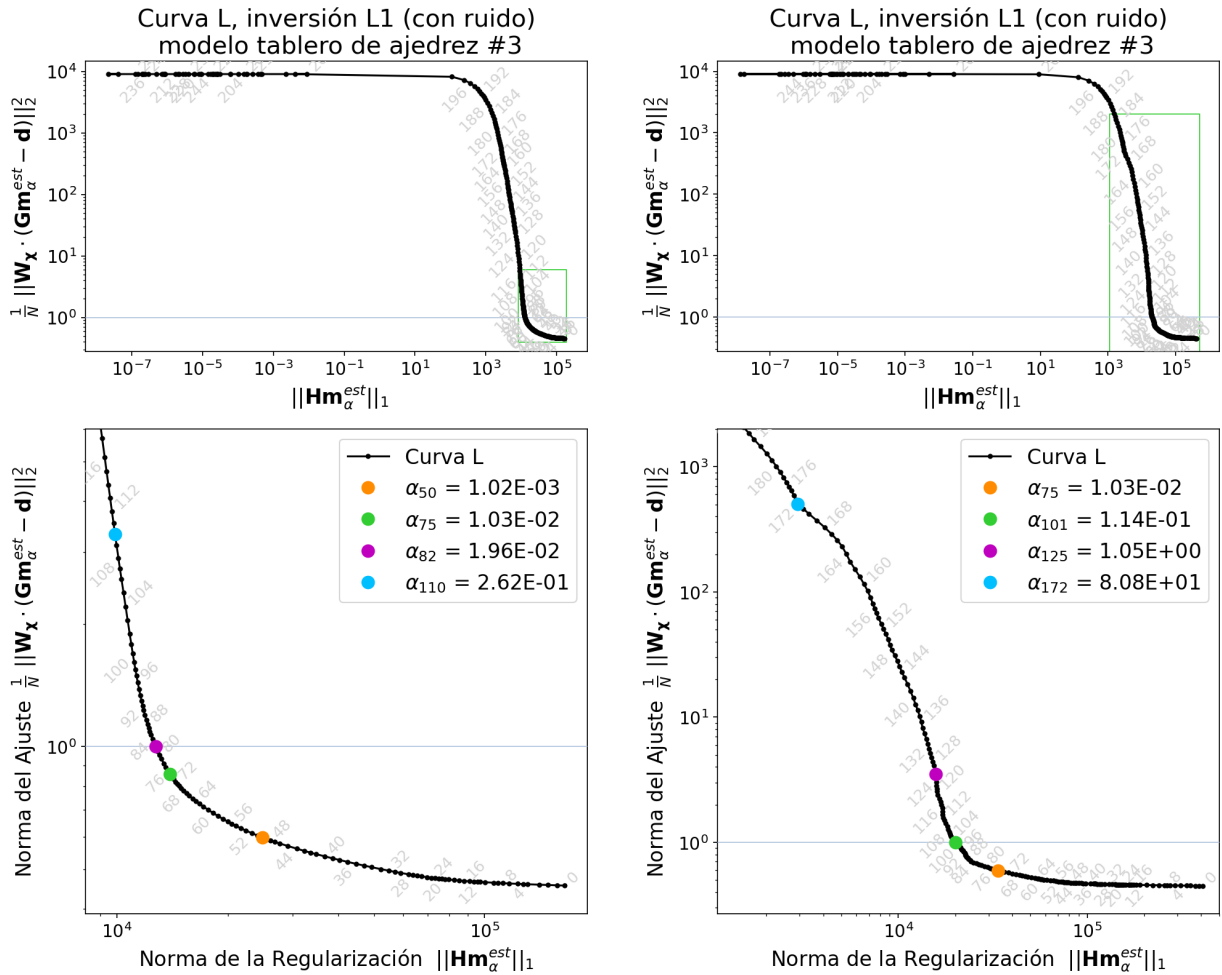
Las amplitudes en los gráficos son diferentes según el modelo, pero se observa que las mayores amplitudes del modelo 78 (sin normalizar) se encuentran en las escalas 1 y 2, y alternativamente ocupa pocas funciones en la escala 3. Distinto a lo observado en el modelo 103 (inversión normalizada), para el cual las mayores amplitudes están en la escala 3, con valores 2 m mayores que el máximo del modelo 78. Además, el modelo de la inversión normalizada, utiliza sólo unas 3 funciones en las escalas 1 y 2, con amplitudes de máximo 2 m, que son las *b-splines* responsables de este patrón “desparramado” hacia la dirección de la fosa.

4.2.2.2. Tablero de Ajedrez 3

El mismo análisis se realizó con el *test* sintético tablero de ajedrez 3. En la Figura 4.17 se muestran las curvas L de las inversiones de este *test*, a) sin normalizar y b) con la normalización propuesta. Se puede observar que ambas curvas no describen la misma forma, la correspondiente a la inversión normalizada muestra variaciones menos suaves. Para ambas se eligieron modelos con distinto nivel de amortiguamiento, los que se señalan con los puntos de colores. En ambos casos la curva L cruza la línea de norma reducida del ajuste = 1, por lo que uno de los modelos seleccionados corresponde al más cercano a la intersección.

En la Figura 4.18 se muestran los resultados para las soluciones seleccionadas en la inversión sin normalizar (asociados a los modelos y parámetros de regularización α que se indican en la Figura 4.17, a) y su comparación con el *test* sintético. Al igual que el caso del modelo elipse 4, es necesario precisar que cada subfigura tiene su propia escala de grises para el *slip* (son diferentes en amplitud entre ellas), pero la segunda escala correspondiente a los desplazamientos en la componente vertical es la misma para todas.

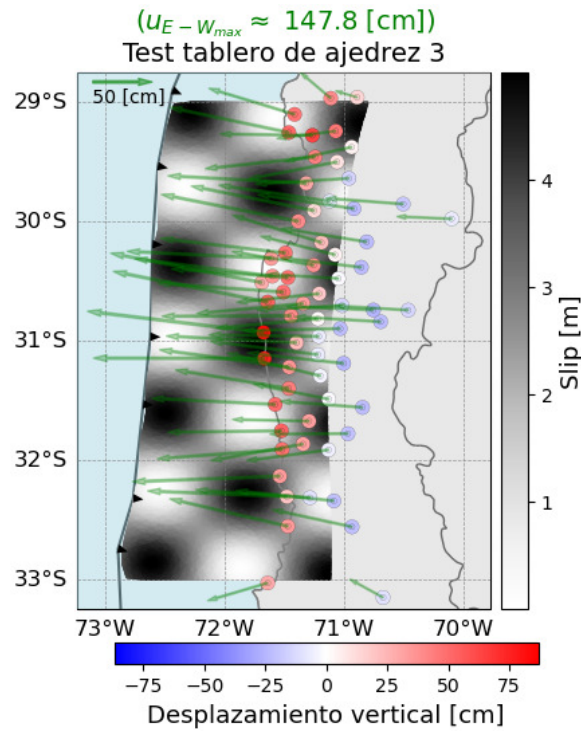
En este caso, de los modelos seleccionados, todos ajustan relativamente bien las observaciones sintéticas (Figura 4.18). En la componente horizontal se observa una buena correspondencia entre los desplazamientos sintéticos (flechas verdes) y los predichos (flechas negras), en cuanto al desplazamiento máximo en la componente E-W, las diferencias son de unos milímetros en todos los resultados; esto puede ser dado que este patrón es más complejo y tiene múltiples parches de *slip* en el espacio, siendo posible recuperar los desplazamientos sintéticos con diversas combinaciones de *slip*. Respecto de los desplazamientos en la componente vertical, todos recuperan el patrón general de las observaciones sintéticas, compuesto por una banda de alzamiento en las estaciones de la línea de costa, luego algunas estaciones con círculos más pálidos o derechamente blancos por ser cercanos a los 0 cm en el borde E de la malla y subsidencia hacia el interior del continente; la diferencia se da en las amplitudes, pero se revisa modelo a modelo a continuación.



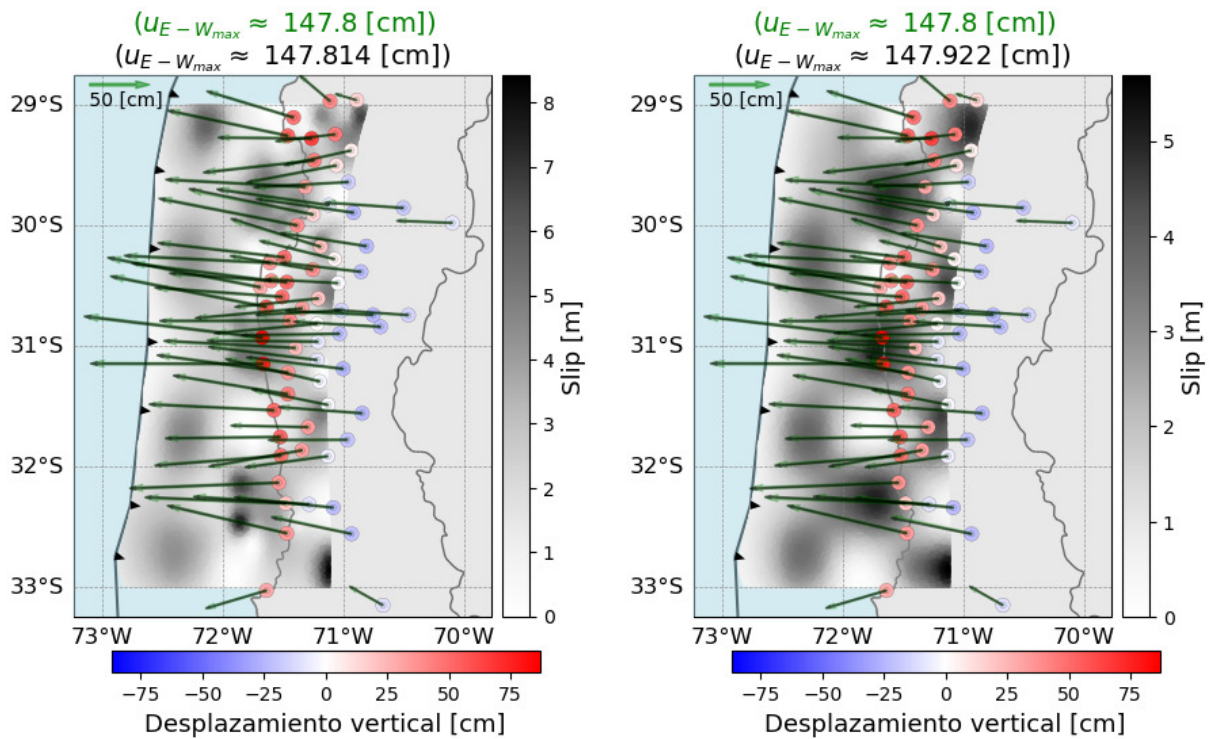
(a) Curva L de la inversión del *test* tablero de ajedrez 3, sin normalizar.

(b) Curva L de la inversión del *test* tablero de ajedrez 3, normalizada.

Figura 4.17: Curvas L para la resolución del problema inverso del *test* sintético tablero de ajedrez 3 en la geometría de Illapel. (a) Inversión L1 sin normalizar e (b) Inversión L1 considerando la normalización propuesta. Los números en gris indican el modelo asociado a cada punto negro en la curva. Los paneles inferiores son el *zoom* señalado con el cuadro verde de los paneles superiores. Los puntos de colores destacan los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento en cada caso.



(a) Test sintético tablero de ajedrez 3.



(b) Modelo 50.

(c) Modelo 75.

Figura 4.18: Inversión *test* sintético tablero de ajedrez 3, **sin normalizar**. Panel a) Modelo tablero de ajedrez 3, los datos sintéticos que se buscan ajustar están representados por las flechas verdes en la componente horizontal, y en la vertical por los círculos de este panel (a). b - e) Modelos de *slip* seleccionados de la inversión L1 sin normalizar, representados por las respectivas escalas de grises. Las flechas negras muestran la componente horizontal de los desplazamientos predichos (d_{pred}); los títulos especifican los desplazamientos horizontales máximos en la componente E-W. Los círculos representan el desplazamiento predicho en la componente vertical (segunda escala de color, igual para todas las figuras).

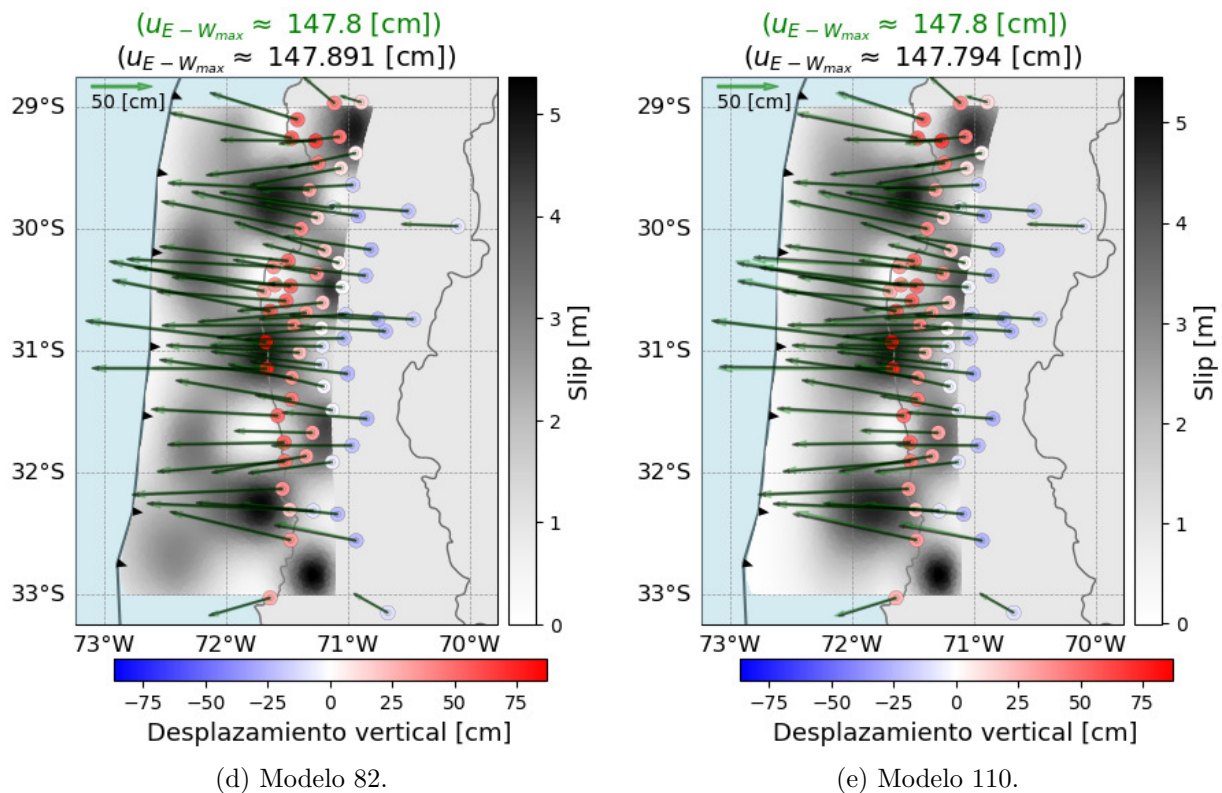


Figura 4.18: Inversión *test* sintético tablero de ajedrez 3, **sin normalizar** (continuación).

El modelo 50 (Figura 4.18, b) muestra un patrón bastante similar, a grandes rasgos, al modelo sintético, sin embargo tiene mayores valores máximos de *slip* muy concentrados, por lo que los lóbulos en general se ven más claros, esto es dado que en algunos *peaks* tiene valores de hasta poco más de 8 m, como en ambas esquinas del borde Este de la malla y algunos de las zonas negras bajo las inmediaciones de la línea de costa; por ejemplo en la que está aproximadamente en los 72°W y 32°S hay dos *peaks*, probablemente correspondientes a 2 *b-splines* con gran amplitud.

Para el parámetro 75 (Figura 4.18, c), se tiene un modelo de *slip* con un valor máximo de ~ 5.5 m; en general puede distinguirse bastante bien el patrón de tablero de ajedrez dado, más definido en la parte Este de la malla; mientras que en el Oeste, hacia la dirección de la fosa, está más suavizado, logrando máximos de *slip* más difusos en forma y con menor amplitud, de aproximadamente 3 m.

El modelo asociado a α_{82} (Figura 4.18, d) también describe un patrón similar al del modelo 75, sin embargo, tiene un *slip* máximo más cercano al del *input*, por lo que además de recuperar los rasgos del tablero de ajedrez 3, se asemeja más en sus valores. Los principales *peaks* de *slip* están en las esquinas del borde Este de la malla, y en los lóbulos bajo la línea de costa. Los resultados en la tercera hilera, la más cercana a la fosa, están más suavizados y tienen menores amplitudes, de hasta casi 4 m.

Finalmente, para el modelo 110 (Figura 4.18, e) se obtiene un patrón de *slip* suavizado, que si bien tiene valores máximos > 5 m, concentra todo el deslizamiento en los pequeños parches del límite Este de la malla y en los *peaks* centrales, que están posicionados bajo la línea de costa. Hacia la fosa hay un rasgo difuso, hasta los $\sim 31.5^\circ\text{S}$ es gris, de aproxi-

madamente 1 - 2 m de *slip* y hacia el sur tiene tonos más blancos (cerca de 0 m), estas características son esperables para el modelo más sobreamortiguado de la selección.

La Figura 4.19 reúne los resultados para los modelos seleccionados de la inversión normalizada (asociados a los parámetros de regularización α que se indican en la Figura 4.17, b) y su comparación con el modelo sintético. Aquí también cada modelo tiene su propia escala de grises para el *slip*, pero comparten la escala de azules y rojos para los desplazamientos verticales.

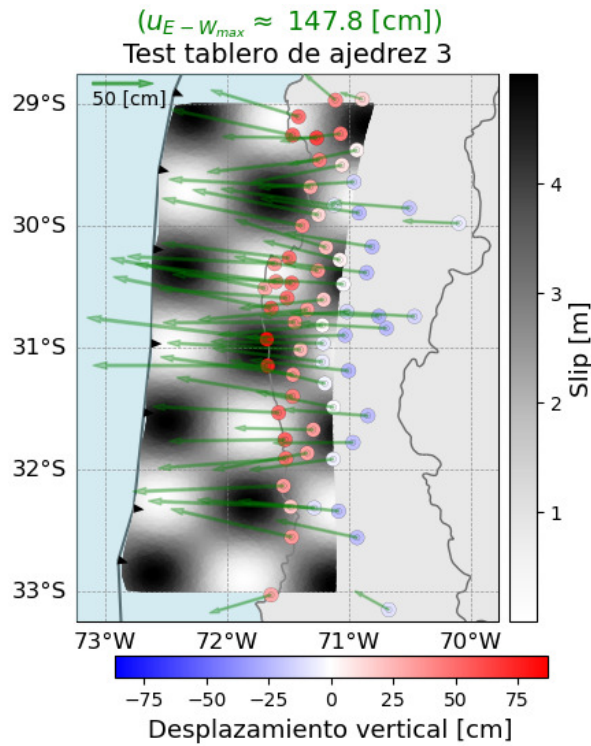
Inspeccionando los resultados, se tiene que los modelos 75, 101 y 125 logran un buen ajuste de los desplazamientos sintéticos (Figura 4.19, paneles b, c, y d); con una evidente similitud en la componente horizontal de los desplazamientos sintéticos y predichos; sobre los valores de los desplazamientos E-W máximos, entre ambos hay diferencias menores a 1 cm. Para la componente vertical de los tres modelos mencionados hay una buena correspondencia en el patrón de alzamiento y subsidencia, el cual está dividido por una zona de colores más pálidos o cercanos al blanco (0 cm) en el límite Este de la malla.

Sin embargo, en cuanto al *slip* invertido, se observa que los modelos no recuperan tan bien el patrón sintético dado. Los valores máximos para estos tres modelos (Figura 4.19, paneles b, c y d) son de entre 8 - 9 m, al menos 3 m superiores al del sintético, y si bien muestran manchas en las zonas de los cuadros en tonos grises claros (correspondientes en esas escalas a valores entre 2 y 4 m), los patrones están marcados por máximos muy localizados en espacio, como pequeños *peaks*.

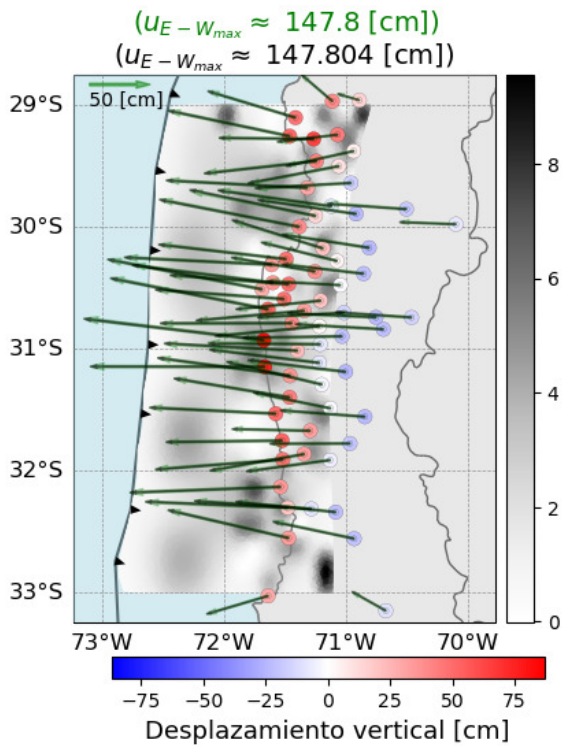
En particular, el modelo 75 (Figura 4.19, b) tiene un *slip* máximo de ~ 9 m y muestra un patrón de *slip* donde se distingue levemente el patrón que se busca recuperar, esto dado que tiene grandes amplitudes en pequeños parches a lo largo de la malla, como por ejemplo en las esquinas al Este de la malla y una en la parte superior de ésta, a los 72°W y $\sim 29^\circ\text{S}$.

El modelo asociado al parámetro α_{101} (Figura 4.19, c) tiene algunas características comunes al anterior; muestra grandes amplitudes en zonas reducidas, posible aporte de *b-splines* pequeñas, como por ejemplo el mayor *peak* en la esquina inferior derecha de la malla. En general se distinguen los patrones de parches cuadrados de *slip* bajo la costa y del borde Este de la malla. En cambio, hacia la fosa, el modelo de *slip* predicho suaviza el resultado, distinguiéndose levemente sólo un cuadro, entre los $30^\circ - 32^\circ\text{S}$.

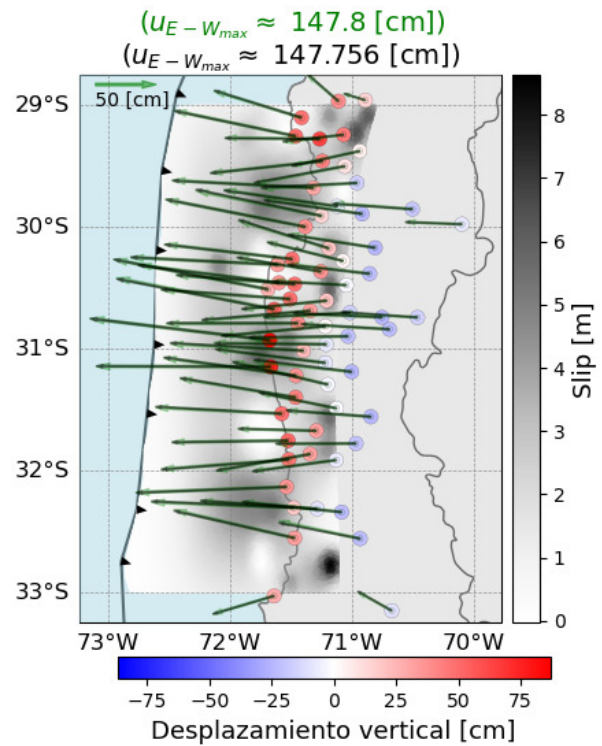
Para el parámetro 125 (Figura 4.19, d), el modelo de *slip* muestra tan sólo amplitudes de *slip* para los parches desde aproximadamente los 72°W al Este; toda la primera columna de cuadros del tablero de ajedrez no es recuperada. Se observan nuevamente *peaks* pequeños, rasgo del posible uso preponderante de *b-splines* de escalas superiores (aquellas de extensión espacial más reducida). La zona de mayor *slip* se encuentra en la esquina superior Este de la malla.



(a) *Test* sintético tablero de ajedrez 3.



(b) Modelo 75.



(c) Modelo 101.

Figura 4.19: Inversión *test* sintético tablero de ajedrez 3, **normalizada**. Panel a) Modelo tablero de ajedrez 3, los datos sintéticos que se buscan ajustar están representados por las flechas verdes en la componente horizontal, y en la vertical por los círculos de este panel (a). b - e) Modelos de *slip* seleccionados de la inversión L1 normalizada, representados por las respectivas escalas de grises. Las flechas negras muestran la componente horizontal de los desplazamientos predichos (d_{pred}); los títulos especifican los desplazamientos horizontales máximos en la componente E-W. Los círculos representan el desplazamiento predicho en la componente vertical (segunda escala de color, igual para todas las figuras).

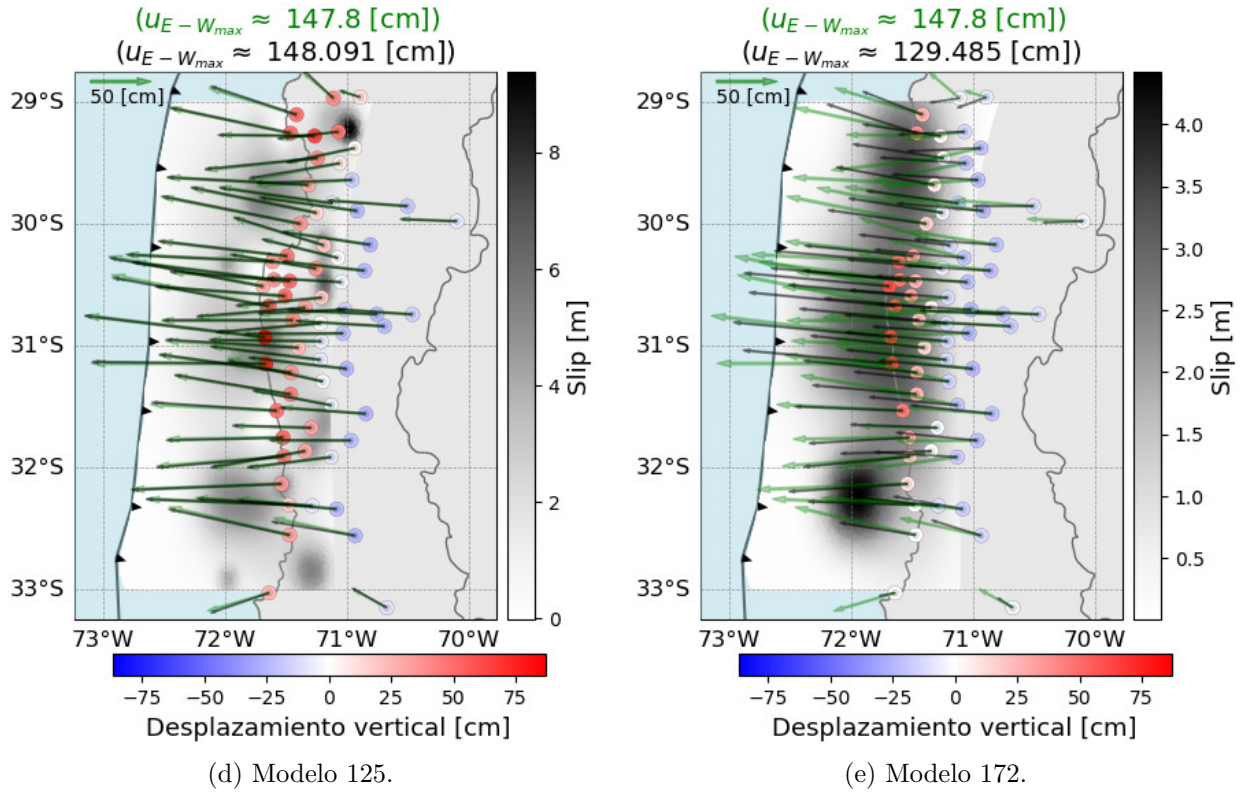


Figura 4.19: Inversión *test* sintético tablero de ajedrez 3, **normalizada** (continuación).

Finalmente, para el modelo 172 (Figura 4.19, e), se obtiene un modelo de *slip* muy suavizado, formado por sólo 3 zonas de gran amplitud, al centro de la malla. En este caso el valor máximo es de casi 4.5 m, un poco más cercano al del *test* sintético que los otros modelos, pero inferior. Respecto de los desplazamientos predichos, las componentes horizontales son bastante reducidas en comparación a los desplazamientos sintéticos. En cuanto a los desplazamientos en la vertical, hay similitudes en el patrón de alzamiento/subsidencia sólo en la parte central de la malla, hacia los extremos de ésta no se recuperan las observaciones sintéticas y se obtienen valores más cercanos a los 0 cm (círculos blancos en las esquinas Este de la malla).

Al comparar ambas inversiones, se tiene que al igual que lo descrito en la Sección 4.2.2.1 para el *test* de la elipse 4, los resultados de la inversión con la normalización propuesta entregan modelos de *slip* más compactos en el espacio, lo cual indica que la solución prefiere casi únicamente usar funciones base en las escalas superiores, las cuales son más pequeñas. Se puede comparar la contribución de las *b-splines* para dos soluciones; se eligieron los modelos más cercanos al cruce entre la curva L y el valor 1 en la norma reducida del ajuste, por tanto se contrastan los modelos asociados a los parámetros α_{82} para la inversión sin normalizar y α_{101} para la inversión normalizada.

En la Figura E.8 se muestra la comparación de las funciones base para cada modelo, (a) modelo 82 de la inversión sin normalizar y (b) modelo 103 de la inversión normalizada (para cada modelo la escala en el eje z de las figuras es distinta). Se tiene que para ambos casos hay *b-splines* en todas las escalas, pero mientras el modelo 82 utiliza más funciones en las escalas 1 y 2, y sólo algunas con pequeña amplitud en la escala 3; el modelo 101 de la inversión normalizada, usa muy pocas funciones base en las escalas 0, 1 y 2, en cambio, usa más de 20 *b-splines* en la escala 3, con una amplitud máxima de ~ 6 m (último panel de la Figura E.8, b).

Estos resultados concuerdan con lo observado en la Sección 4.2.2.1, lo que muestra que la normalización propuesta presentaría una tendencia a preferir las escalas más pequeñas, incluso ante rasgos no tan reducidos espacialmente. Esto se aborda posteriormente en la discusión (Capítulo 6), pero por los motivos antes expuestos, los resultados que prosiguen corresponden a inversiones en donde no se ha normalizado la matriz \underline{G} .

Capítulo 5

Inversión de Dislocación Cuasi-Estática: Terremoto de Illapel

En este capítulo se detallan las observaciones utilizadas para este problema, junto con los resultados para la metodología propuesta en este trabajo. En particular, se detalla lo referente a la inversión de dislocación cuasi-estática del terremoto de Illapel (M_w 8.3) de 2015 en Chile Central, constreñida por desplazamientos co-sísmicos registrados por estaciones GNSS en la zona afectada por el terremoto.

5.1. Observaciones

Para abordar el problema de inversión de dislocación cuasi-estática del terremoto de Illapel, se utilizaron las mediciones de desplazamiento cosísmico compiladas por Klein et al. (2017), para un total de 80 estaciones (combinación de estaciones de registro continuo y de campaña). Los desplazamientos cosísmicos en las componentes horizontal y vertical se muestran en la Figura 5.1, con una medición máxima en la componente E-W de poco más de 2 m (209.885 ± 0.239 cm hacia el oeste en la estación EMAT).

Las inversiones con datos reales para la geometría de Illapel se realizaron en primer lugar seleccionando la componente *dip-slip* de las funciones de Green (componente que también se utilizó para los *tests* sintéticos); luego, siguiendo en la línea de realizar inversiones en solo una componente del deslizamiento en el contacto, se reparametrizó el *slip*, en una rotación del sistema coordenado local original a uno en función de θ y θ_P (Figura 3.6).

A fin de ajustar una dirección representativa para el deslizamiento, se utilizaron dos soluciones de mecanismos focales del terremoto de Illapel (publicadas por USGS y Global CMT), las que se indican en la Tabla 5.1; en particular los ángulos de *rake* (λ) del plano 1 de ambas. Se evaluaron los resultados de ambos casos y se decidió explorar un valor intermedio entre ellos, por lo que se definió un rango de 25 posibles rotaciones entre los valores del *rake* de las soluciones de la tabla (Figura D.1), las que se probaron mediante búsqueda binaria, comparando la desviación generalizada de los desplazamientos predichos con respecto de los observados para el cosísmico de Illapel. De este criterio, se seleccionaron finalmente dos realizaciones, θ_9 y θ_{11} . Más información en la Sección 5.2.2 y Anexo D.

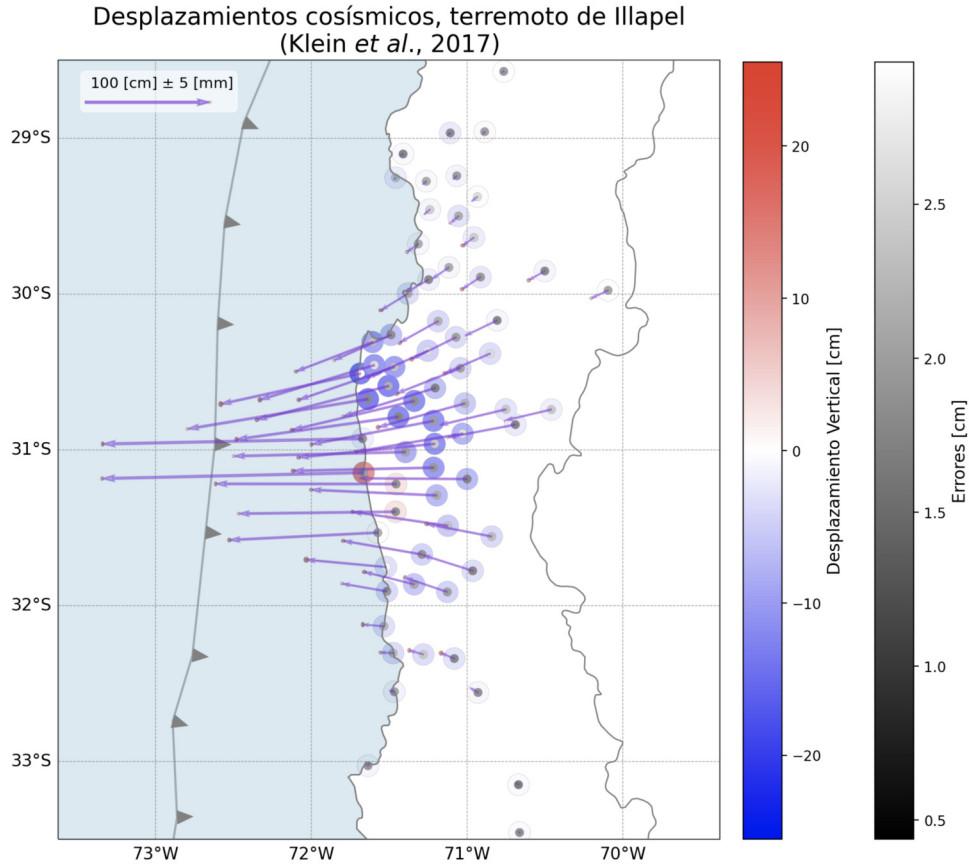


Figura 5.1: Desplazamientos cosísmicos del terremoto M_w 8.3 de Illapel de 2015, compilados por Klein et al. (2017). Las flechas moradas indican los desplazamientos horizontales, mientras que los círculos externos muestran el desplazamiento vertical (escala de azules y rojos) y los internos la desviación estándar de las mediciones de alzamiento o subsidencia (escala de grises).

Tabla 5.1: Soluciones de los planos nodales del tensor de momento para el terremoto de Illapel

Mecanismo	Magnitud	M_0 [dyn-cm]	Plano 1			Plano 2		
			ϕ	δ	λ	ϕ	δ	λ
	8.27 M_{ww}	3.191×10^{28}	353	19	83	180	71	92
	8.24 M_{wc}	2.856×10^{28}	5	22	106	169	69	84

5.2. Distribución de Dislocación Cosísmica del Terremoto de Illapel

Se abordó el problema de dislocación cuasi-estática, aplicado a las observaciones del cosísmico del terremoto M_w 8.3 de Illapel de 2015; para lo cual se utilizaron los datos recopilados por Klein et al. (2017), de un total de 80 estaciones (continuas y de campaña, ver la distri-

bución completa en la Figura A.2). Para el planteamiento del problema, se utilizó en primer lugar la componente *dip-slip* del movimiento (y por tanto, de las Funciones de Green); posteriormente se probó con la componente *theta-slip*, realizando pruebas con distintos ángulos de rotación (Sección 5.1).

Las inversiones para ambos casos (*dip-slip* y *theta-slip*) se calcularon con la parametrización del *slip* propuesta en esta tesis, utilizando la norma L1 para la regularización. Dados los resultados obtenidos en las Secciones 4.2.1 y 4.2.2, los cálculos para el cosísmico de Illapel se realizaron sin usar la normalización propuesta para las columnas de \underline{G} y utilizando la matriz \underline{B}^+ para evaluar la condición de positividad. Para cada una de las pruebas se calcularon un total de 250 inversiones, utilizando valores del parámetro de regularización α en un rango logarítmico de 10^{-3} y 10^3 .

A continuación, se muestran los resultados para las componentes *dip-slip* y *theta-slip*.

5.2.1. Dip-slip

En la Figura 5.2 se muestra la curva L de la inversión de los datos cosísmicos de Illapel, utilizando la componente *dip-slip* del movimiento. En este caso, la curva no cruza el punto de norma del ajuste reducida = 1, por lo que la elección de los modelos se realizó según la forma de la curva, sin otra referencia; cuidando además de elegir varios modelos a fin de explorar lo mejor posible los efectos del amortiguamiento en estos resultados.

En la Figura 5.3 se presentan los resultados de los modelos seleccionados en esta inversión, los datos predichos asociados y su comparación con los datos observados (panel a de la figura, las estaciones que muestran alzamiento en la parte central de la zona de estudio se encuentran destacadas con una curva verde). Las figuras de los modelos tienen su propia escala de color para el *slip*, pero todas comparten la segunda escala (de azules y rojos) para los desplazamientos verticales.

En general para todos los parámetros seleccionados se obtienen modelos de *slip* constreñidos en la zona de los 30° - 32°S, con valores positivos para el *slip*, cuyos máximos están entre los 7 - 7.5 m.

Para el parámetro 133 (Figura 5.3, b) se obtiene un modelo con un gran parche de *slip* centrado a los 72°W, 31°S y un pequeño lóbulo a los 71.5°W, con una amplitud de ~ 4 m. Los desplazamientos predichos en la horizontal alcanzan magnitudes similares a los observados, el valor máximo en la componente E-W se diferencia en 2 cm entre observado y predicho; pero la dirección de las flechas se ve desviada hacia el norte (discrepancia entre la orientación de las flechas púrpura y negras). Respecto de la componente vertical, el patrón de subsidencia obtenido en la zona central del mapa es más extenso que el que muestran los datos observados (Figura 5.3, a) y exhibe un patrón de alzamiento en las estaciones al norte de la malla que no se aprecia en las observaciones; sin embargo en este modelo se recupera la mayor observación de alzamiento que muestran los datos, la cual corresponde a una estación en la costa, justo al sur de los 31°S (estación más al norte de las tres destacadas por la curva verde en el panel a).

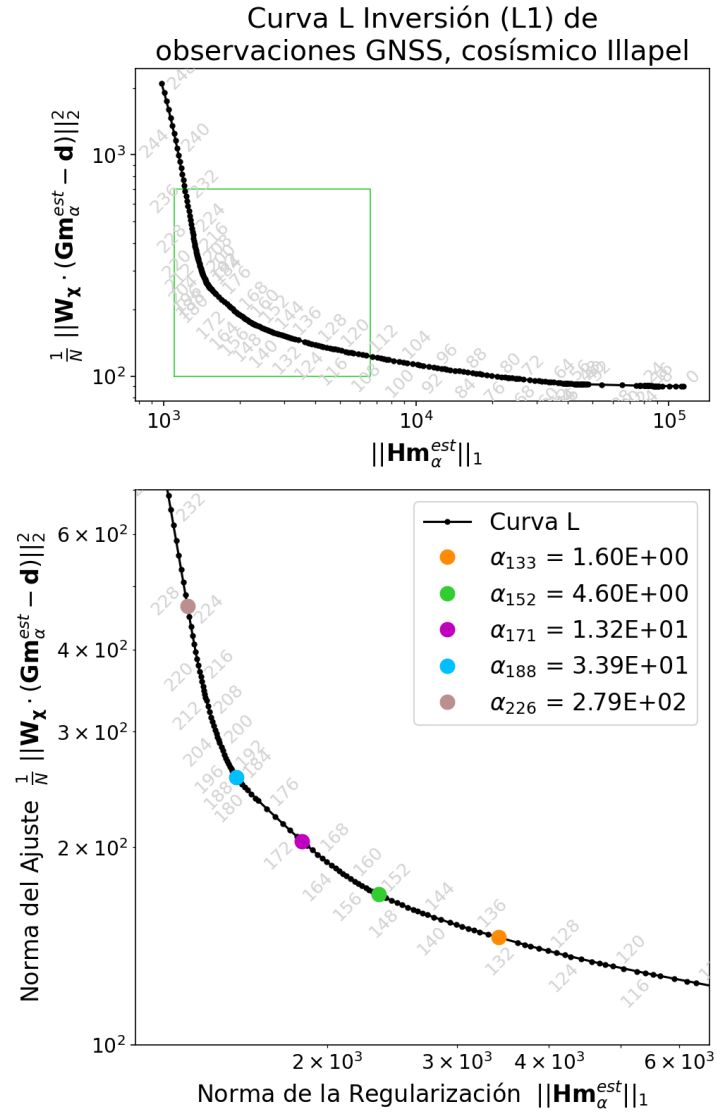


Figura 5.2: Curva L asociada a la inversión L1, *dip-slip*, sin normalizar, de los datos observados para el desplazamiento cosísmico del terremoto de Illapel. Los números en gris indican el modelo asociado a cada punto negro en la curva. El panel inferior es el *zoom* señalado con el cuadro verde del panel superior. Los puntos de colores muestran los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento.

El modelo 152 (Figura 5.3, c) obtiene un patrón similar al anterior, sólo que el lóbulo secundario no está tan separado del principal. En cuanto a los desplazamientos predichos, éstos en la horizontal también están rotados hacia el norte, y el valor máximo de la componente E-W difiere en aproximadamente 1 cm del máximo de las observaciones. Para la componente vertical, también obtiene un patrón de alzamiento en la zona norte de la malla, y para la estación al sur de los $31^\circ S$ recupera un valor positivo, pero menor al observado (d_{obs}) y sólo en esa estación, no en las dos contiguas (estaciones remarcadas con la curva verde en el mapa).

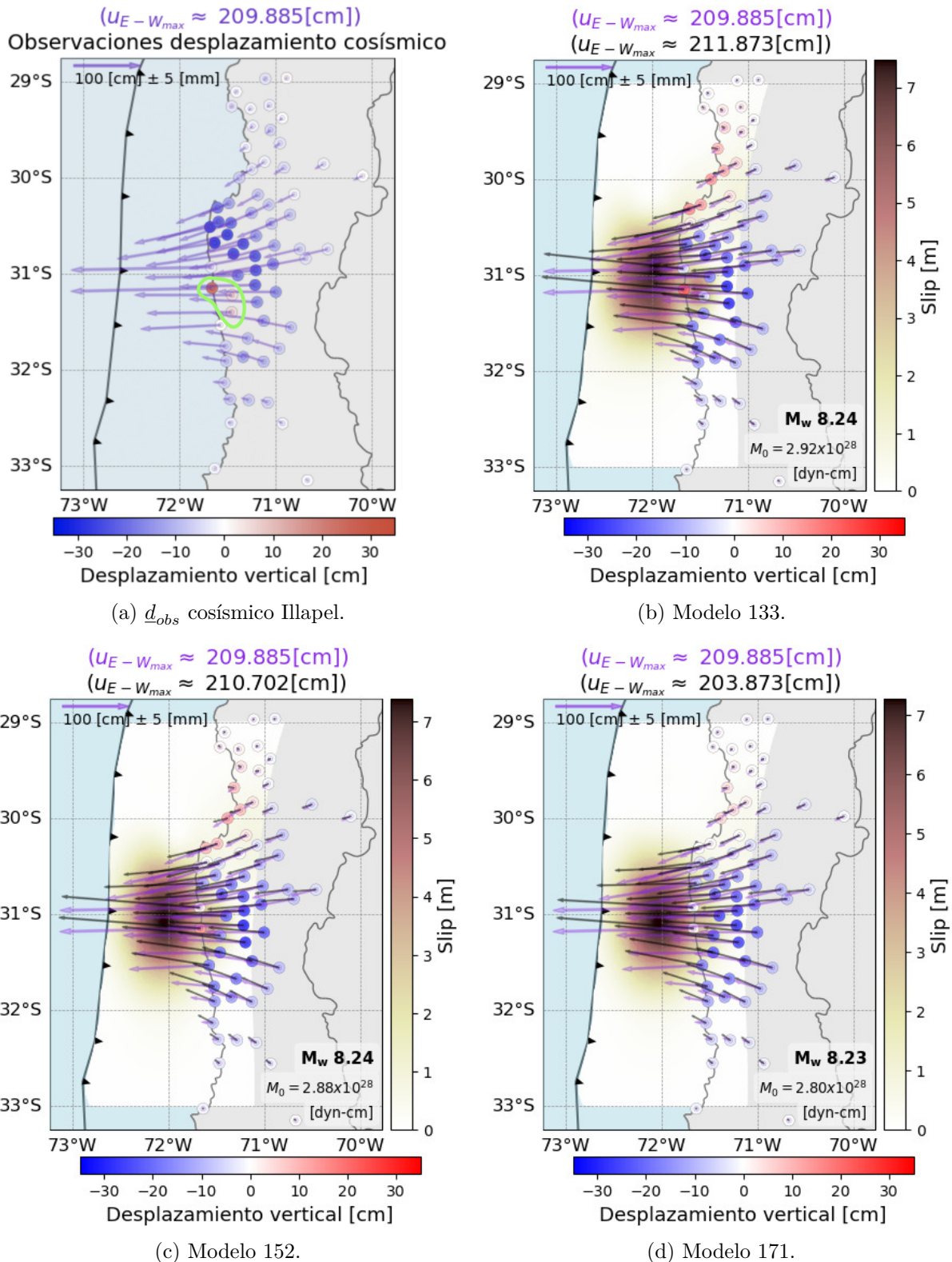


Figura 5.3: Inversión cosísmico del terremoto M_w 8.3 de Illapel de 2015, componente *dip-slip*. a) Observaciones de desplazamiento cosísmico del terremoto de Illapel (d_{obs}), representados por las flechas púrpura en la componente horizontal, y en la vertical por los círculos de este panel (a). b - f) Modelos de *slip* obtenidos de la inversión L1, *dip-slip*, sin normalizar; representados por las respectivas escalas de tonos cálidos. Las flechas negras muestran la componente horizontal de los desplazamientos predichos (d_{pred}); los títulos especifican los desplazamientos máximos en la componente E-W. Los círculos representan la componente vertical de los desplazamientos predichos (segunda escala de color, igual para todas las figuras).

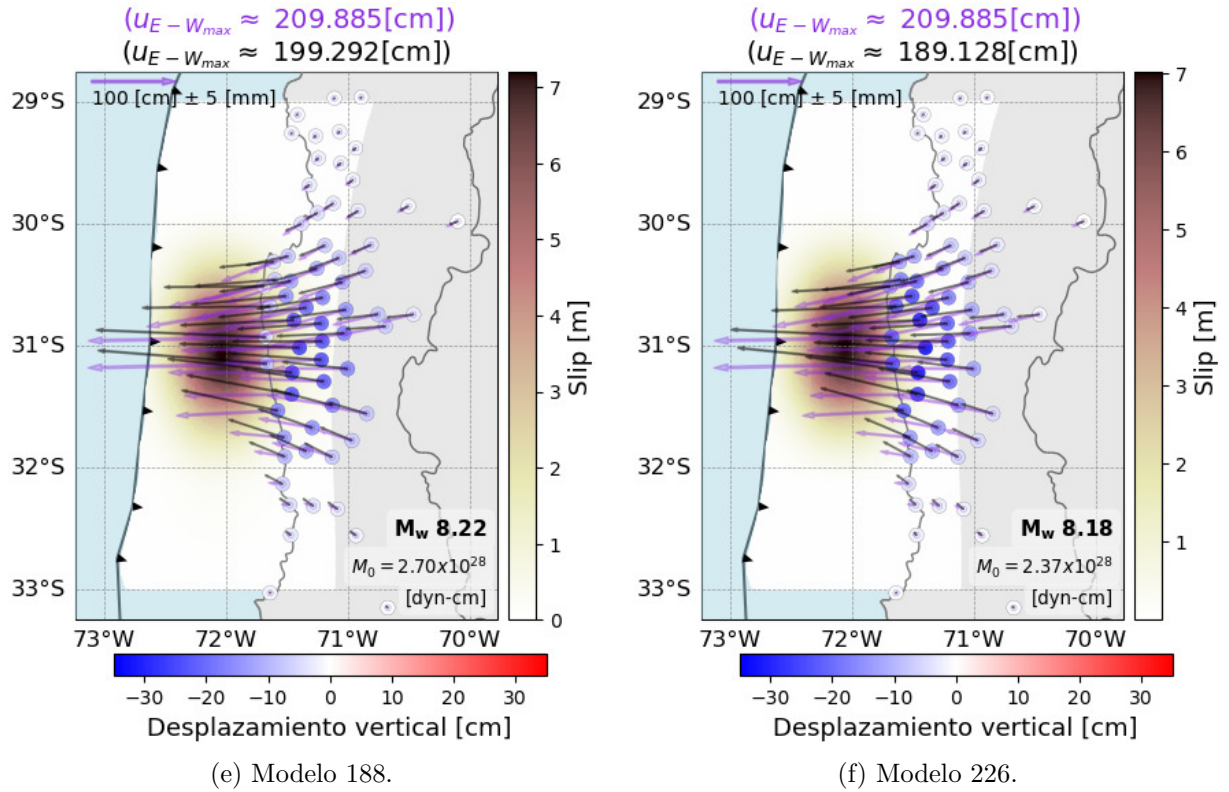


Figura 5.3: Inversión cosísmico del terremoto M_w 8.3 de Illapel de 2015, componente *dip-slip* (continuación).

Para los modelos asociados a los parámetros α_{171} , α_{188} y α_{226} (Figura 5.3, paneles d, e y f) los patrones de *slip* son casi todos elípticos, con valores máximos en torno a los 7 m. En estos tres, las flechas correspondientes a las predicciones en la componente horizontal siguen estando desviadas hacia el norte, pero en estos modelos la amplitud de éstos comienza a disminuir, lo que se ejemplifica de buena manera en los máximos desplazamientos en la componente E-W, donde para estas soluciones se tienen diferencias de 6, 10 y 20 cm con las observaciones, respectivamente. Para estos modelos, el patrón de desplazamientos en la vertical es compuesto casi en su totalidad por subsidencia, lo que no concuerda del todo con las observaciones del cosísmico del terremoto en esta componente (Figura 5.3, a).

Si bien en general hay resultados que a nivel macro parecen ajustar el patrón de desplazamiento en la vertical, o se acercan a los valores máximos de desplazamiento en la horizontal, las flechas de esta componente se muestran desviadas sistemáticamente en la inversión, no importa el nivel de amortiguamiento del modelo seleccionado. Como el problema para este ejemplo fue parametrizado con una dirección de dislocación a lo largo de la dirección *up-dip*, se probó un cambio de coordenadas que incluyera una rotación de acuerdo al ángulo *rake* de soluciones de mecanismo focal del evento de Illapel, esto se detalla en la Sección 5.2.2.

5.2.2. Theta-slip

Dadas las discrepancias entre la dirección de los desplazamientos predichos y observados, para los modelos de la inversión *dip-slip* se consideró probar una nueva dirección de deslizamiento que fuera más representativa del terremoto, de esta forma se definió un rango de ángulos a partir de dos soluciones de mecanismo focal publicadas para el evento (Tabla 5.1).

De esta manera, se utilizaron las funciones de Green para una dislocación en la dirección rotada θ en cada elemento discreto de la malla (para mayor detalle, referirse a la sección 3.3), de acuerdo a las dos soluciones para el mecanismo de la fuente. En la Figura E.9 se muestran algunos resultados de modelos seleccionados para la primera rotación (relacionada a la estimación de M_{ww} 8.27) y su comparación con las observaciones cosísmicas; puede observarse que los desplazamientos predichos (d_{pred} , flechas negras) están sistemáticamente rotados hacia el norte en mayor o menor medida en todos los modelos. Por otra parte, se tiene que para la rotación relacionada a la estimación de M_{wc} 8.24 (Figura E.10), los desplazamientos predichos (flechas negras) están también rotados sistemáticamente, pero hacia el sur.

Por esta razón, ya que ambas inversiones muestran sesgos hacia distintas direcciones (norte y sur) es que se generaron funciones de Green para dislocaciones en la dirección θ , considerando un total de 25 valores de este ángulo de rotación, de entre los mencionados en el párrafo anterior. Por tanto, la correspondiente a la solución de M_{ww} 8.27 pasó a llamarse *theta-slip* 01 y la correspondiente a M_{wc} 8.24, *theta-slip* 25. Dado que explorar todo el rango implicaba bastante tiempo de análisis, no tan solo por cada inversión, sino por la inspección de los resultados (criterio de selección de modelos, etc); se exploró el rango mediante búsqueda binaria (o búsqueda de intervalo medio), con el fin de indagar un rango más acotado de ángulos que evitara este efecto. De esta manera se seleccionaron las direcciones de dislocación asociadas a *theta-slip* 09 y *theta-slip* 11, cuyos resultados se muestran a continuación.

En la Figura 5.4 se muestra la curva L para la inversión de los datos cosísmicos de Illapel, utilizando la componente *theta-slip* de deslizamiento, con la rotación 09; en ella se señalan con puntos de colores los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento.

En la Figura 5.5 se muestran los resultados para dichos modelos seleccionados, los datos predichos asociados a cada modelo y su comparación con los datos observados. Las figuras de los modelos tienen su propia escala de color para el *slip*, pero todas comparten la segunda escala de colores (azules y rojos) que corresponde a los desplazamientos en la componente vertical. En general, de los 4 modelos seleccionados, 3 muestran un buen ajuste de la dirección de los desplazamientos observados en la horizontal, mientras que el cuarto modelo, el más sobreamortiguado, muestra cierta desviación.

El modelo 30 (Figura 5.5, b) obtiene un patrón de *slip* con diversos *peaks* a lo largo de la zona central de la malla, con un parche “circular” al lado de la fosa a los 31.5°S, con un valor máximo de 25 m. Luego, una banda alargada de varios máximos locales alrededor de los 72°W, con valores de hasta $\sim 10 - 15$ m y otros *peaks* de menor amplitud bajo la costa. Respecto de los desplazamientos predichos, en cuanto a dirección y magnitud de éstos se observa en general una buena similitud entre las componentes horizontales de las observaciones y los desplazamientos predichos; sobre el máximo en la componente E-W, la diferencia es menor a 1 mm. Relativo a la componente vertical, en general el modelo recupera el patrón de subsidencia en la parte central de la malla, con algunas diferencias en la magnitud de las predicciones respecto de las observaciones y también se recupera el alzamiento de las 3 estaciones en la costa (destacadas con la curva verde en la Figura 5.5, a), al sur de los 31°S que muestran los datos cosísmicos.

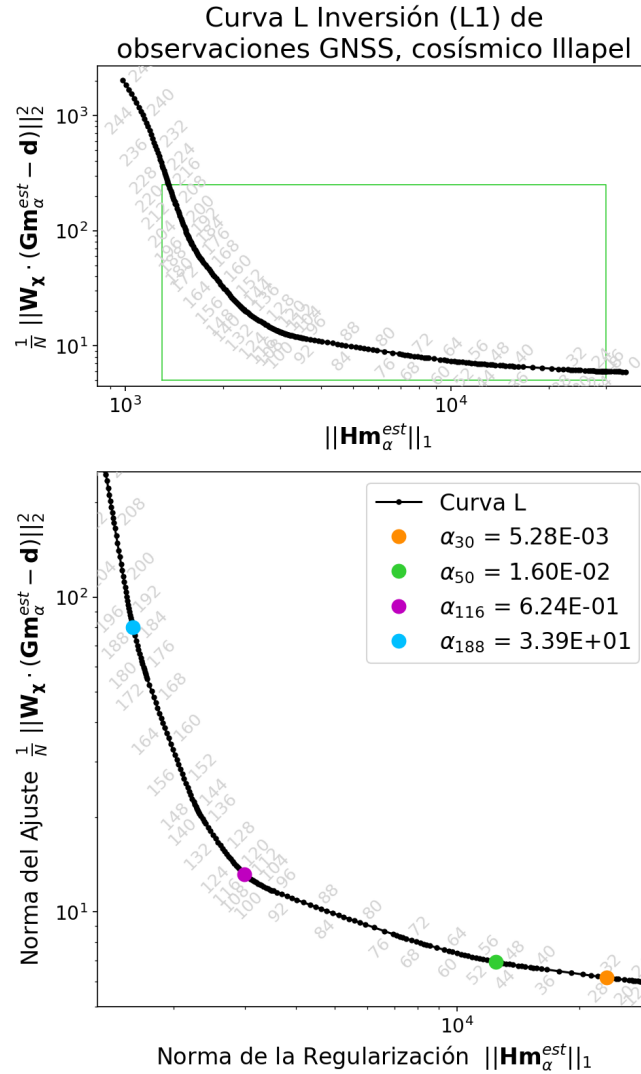
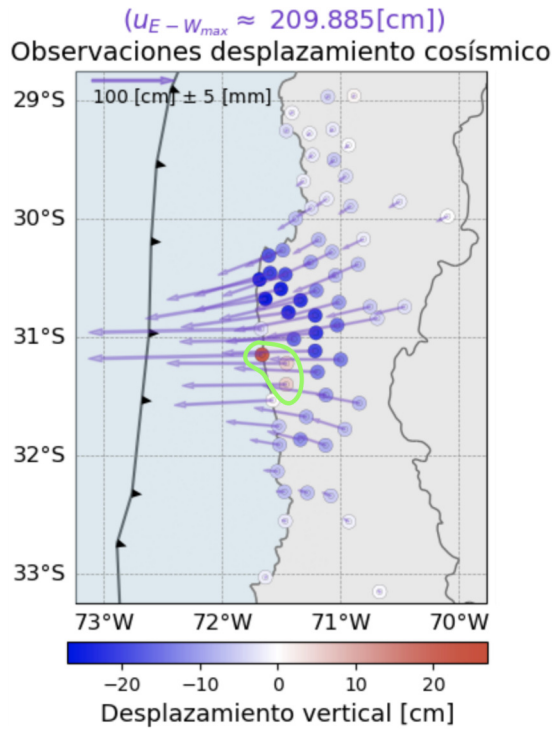
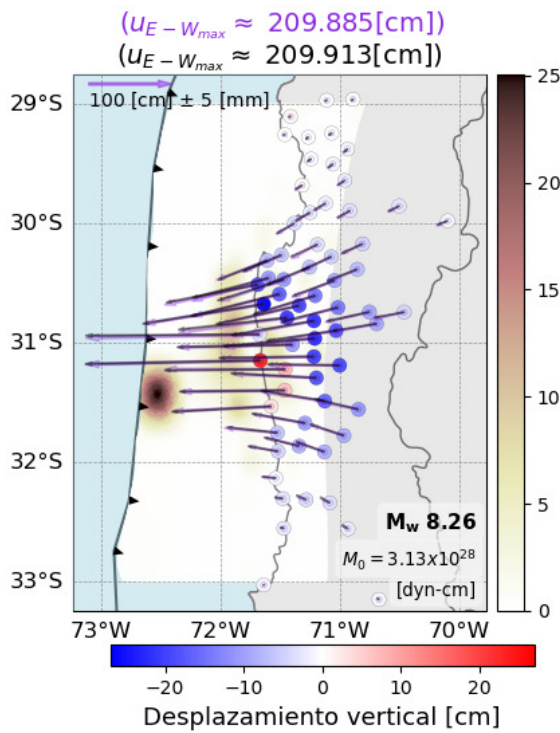


Figura 5.4: Curva L asociada a la inversión L1, *theta-slip* (09), sin normalizar, de los datos observados para el desplazamiento cosísmico del terremoto de Illapel. Los números en gris indican el modelo asociado a cada punto negro en la curva. El panel inferior es el *zoom* señalado con el cuadro verde del panel superior. Los puntos de colores muestran los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento.

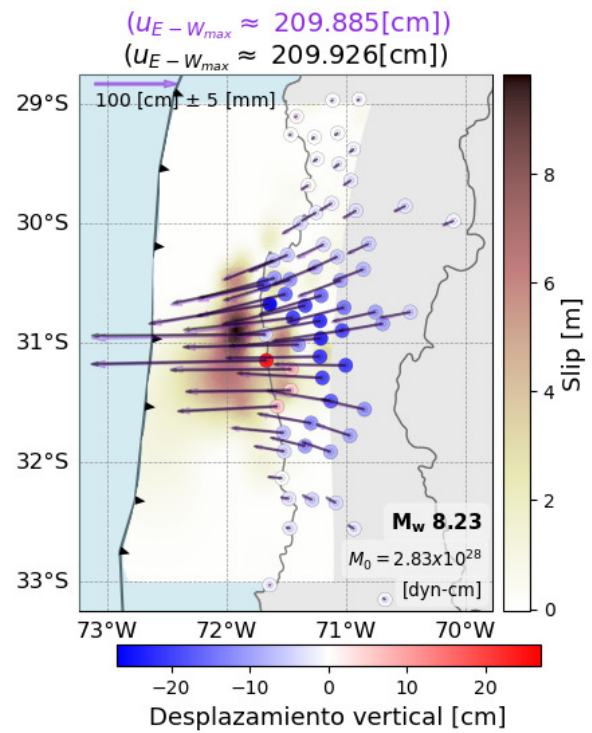
Para el parámetro 50 (Figura 5.5, c), se obtiene un modelo menos rugoso que el anterior, con un máximo para la *slip* de casi 10 m. El resultado está compuesto por dos zonas principales de *slip*, una de gran extensión en torno a los $72^\circ W$, donde se encuentra el valor máximo de *slip* y un segundo *peak* más hacia el *down-dip*, ubicado en torno a los $71.5^\circ W$, con un valor cercano a 6 m. También en este modelo, hay un patrón suave que se extiende hasta las cercanías de la fosa, con valores de *slip* de hasta 2 m. En cuanto a los desplazamientos, al igual que el modelo anterior, se observa una buena similitud entre los desplazamientos horizontales observados y predichos y la diferencia del valor máximo en la componente E-W también es de casi medio milímetro; respecto a la componente vertical, se recuperan en general tanto el patrón de subsidencia (valores azules), como el alzamiento de las tres estaciones en la costa (círculos de colores rojos al sur de los $31^\circ S$), sin embargo hay una cuarta estación costera al sur de éstas que en este resultado también muestra alzamiento de un par de centímetros, y en los datos cosísmicos la medición es cercana a 0 cm (Figura 5.5, a).



(a) d_{obs} cosísmico Illapel.



(b) Modelo 30.



(c) Modelo 50.

Figura 5.5: Inversión cosísmico del terremoto M_w 8.3 de Illapel de 2015, componente *theta-slip* 09. a) Observaciones de desplazamiento cosísmico del terremoto de Illapel (d_{obs}), representados por las flechas púrpura en la componente horizontal, y en la vertical por los círculos de este panel (a). b - f) Modelos de *slip* obtenidos de la inversión L1 *theta-slip* (09), sin normalizar; representados por las respectivas escalas de tonos cálidos. Las flechas negras muestran la componente horizontal de los desplazamientos predichos (d_{pred}); los títulos especifican los desplazamientos máximos en la componente E-W. Los círculos representan la componente vertical de los desplazamientos predichos (segunda escala de color, igual para todas las figuras).

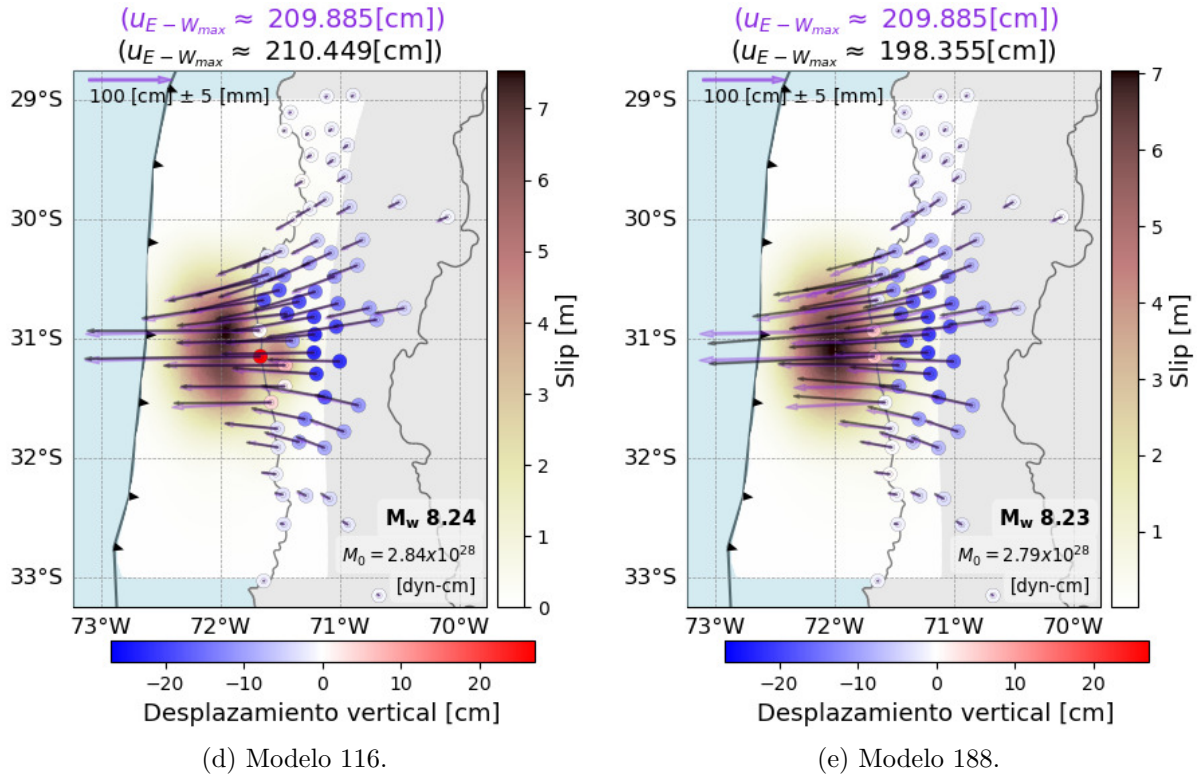


Figura 5.5: Inversión cosísmico del terremoto M_w 8.3 de Illapel de 2015, componente *theta-slip* 09 (continuación).

El modelo asociado al parámetro α_{116} (Figura 5.5, d), muestra un *slip* más suavizado que los dos anteriores, que efectivamente tiene dos zonas principales de deslizamiento, una en torno a los 72°W y la otra más hacia el *down-dip*, sin embargo dado el suavizamiento de ambas formas, parecen estar levemente separadas por una zona de menor *slip*. Si bien se observa una similitud entre las observaciones del campo de desplazamientos estático y la predicción asociada a este modelo, hay dos estaciones de gran desplazamiento horizontal levemente desviadas (correspondientes a las flechas más extensas). El valor máximo de *slip* es del orden de ~ 7.5 m, y su magnitud de momento M_w 8.24.

Finalmente para el modelo 188 (Figura 5.5, e), se obtiene un patrón de *slip* suavizado, formado por un único gran parche elipsoidal que se extiende casi por 2 grados de latitud en la dirección N-S. Para este resultado hay discrepancias entre las componentes horizontales de la predicción y las mediciones cosísmicas, no tan solo en dirección, sino que también en amplitud, con una diferencia de casi 10 cm en los valores máximos de la componente E-W. Sumado a lo anterior, se recupera una subsidencia generalizada en las estaciones de la parte central de la zona de estudio (más cercanas al parche elipsoidal del modelo de *slip*), y que no ajusta el patrón de alzamiento que describen las tres estaciones en la costa, al sur de los 31°S (aquellas destacadas con la curva verde en el panel a). Lo descrito anteriormente es esperable, pues de todos los modelos seleccionados, éste es el más sobreamortiguado.

Dado lo descrito anteriormente, es que de estas pruebas se seleccionó el modelo correspondiente al parámetro α_{50} , pues no es excesivamente rugoso con parches de aislados con grandes valores de *slip*, ni presenta excesivo suavizamiento que sacrifique el ajuste de la amplitud y dirección de los desplazamientos predichos.

A continuación se muestran los resultados para la segunda rotación seleccionada, la correspondiente a *theta-slip* 11. En la Figura 5.6 se muestra la curva L para la inversión de los datos cosísmicos del terremoto de Illapel considerando la componente *theta-slip* con esta rotación; en ella se señalan en colores los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento. En la Figura 5.7 se muestran los resultados para dichos modelos elegidos, sus desplazamientos predichos y la comparación con las observaciones del cosísmico del terremoto. Al igual que el caso anterior, cada figura tiene su propia escala para el *slip*, pero todos los paneles comparten la segunda escala de colores azules y rojos, que corresponde al desplazamiento (observado o predicho, según corresponda), en la componente vertical.

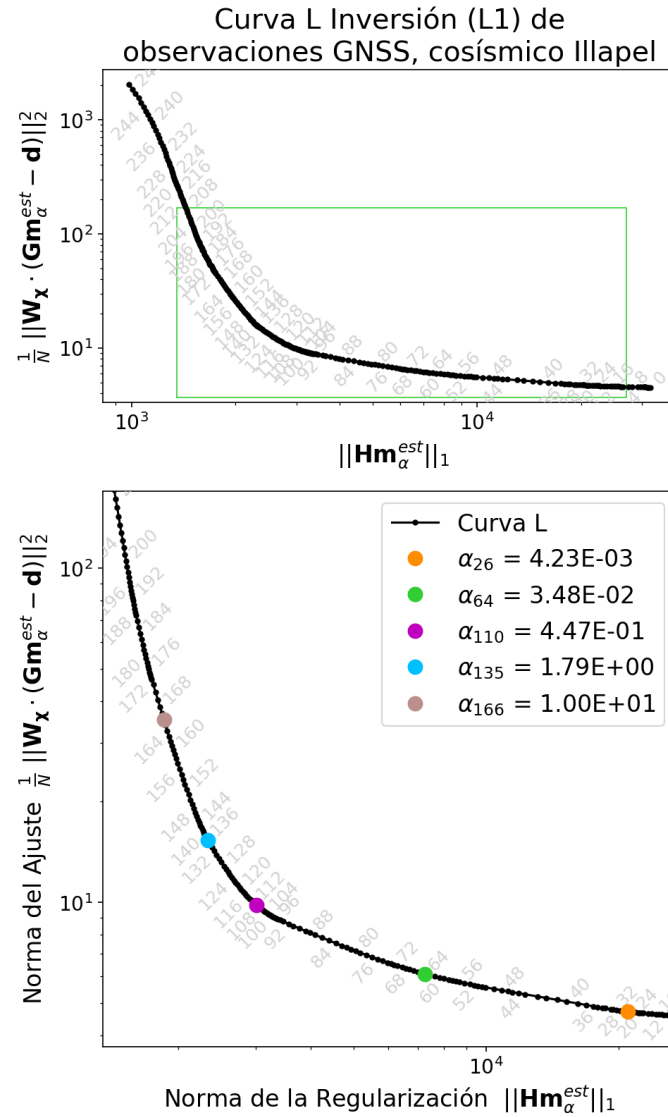


Figura 5.6: Curva L asociada a la inversión L1, *theta-slip* (11), sin normalizar, de los datos observados para el desplazamiento cosísmico del terremoto de Illapel. Los números en gris indican el modelo asociado a cada punto negro en la curva. El panel inferior es el *zoom* señalado con el cuadro verde del panel superior. Los puntos de colores muestran los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento.

El modelo 26 (Figura 5.7, b) obtiene un patrón de *slip* con dos zonas principales, la primera cerca de la fosa, que concentra el valor máximo de poco más de 20 m y la segunda zona más cerca de la costa, pasado los 72°W, la cual está dividida en varios *peaks* más pequeños distribuidos de norte a sur, junto con pequeños lóbulos bajo la costa, en general es un patrón formado por varios rasgos pequeños de gran amplitud. Sobre los desplazamientos, los observados y los predichos lucen muy similares, las componentes horizontales parecen calzar correctamente y el valor máximo en la E-W es prácticamente igual. Sobre los desplazamientos en la vertical, en general se recuperan los patrones de subsidencia y alzamiento, con diferencias de algunos centímetros en la magnitud de éstos (en estaciones donde se recupera una menor subsidencia que la observada, por ejemplo para aquellas ubicadas en la zona de Tongoy, en la costa cerca de los 30.25°S, indicadas con la flecha verde).

Para el parámetro 64 (Figura 5.7, c) se obtiene un modelo de *slip* que también tiene dos dominios, uno frente a la costa y otro más hacia el *down-dip*; el primero tiene el mayor valor para el deslizamiento, de ~ 8.5 m; el segundo se elonga en dirección N - S y tiene amplitudes de hasta 4 - 5 m. Los desplazamientos predichos se asemejan a las observaciones, en la horizontal hay una buena correspondencia en dirección y magnitud, los máximos en E-W difieren solo en una fracción de milímetro y en la componente vertical hay una semejanza general con el patrón de alzamiento/subsidencia observado, sin embargo de las estaciones en que se observa movimiento vertical positivo, la cuarta (destacada con la flecha verde en el panel c) es asignada con alzamiento y en las observaciones es más cercana a la medida de 0 cm (Figura 5.7, a).

Para el modelo asociado a α_{110} (Figura 5.7, d) también se obtienen dos dominios, pero de una forma más suavizada; el primero que tiene el máximo de poco menos de 8 m, muestra la forma de una elipse levemente elongada en la parte sur; y el segundo más hacia el *down-dip* está levemente separado del primero. Las observaciones en general también se ajustan bien tanto en las componentes horizontales como en la vertical.

Por otra parte, para el parámetro 135 (Figura 5.7, e) el suavizamiento aumenta; el patrón principal es casi elipsoidal y persiste el segundo parche de *slip* con un *peak* de unos 4 - 5 m de amplitud. Los valores máximos en la componente E-W, desde este punto, aumentan sus diferencias, para este modelo la diferencia es de poco más de 1 cm, siendo el máximo de la predicción mayor que el de las observaciones. En relación a los desplazamientos en la vertical, se recupera la generalidad de la subsidencia en la parte central de la zona de estudio, sin embargo este modelo no logra capturar bien el alzamiento en las tres estaciones costeras al sur de los 31°S.

Finalmente, para el modelo 166 (Figura 5.7, f) se obtiene un *slip* suavizado, con un valor máximo de ~ 7 m, formado por un único parche con forma de elipse, un poco más elongada en la dirección N-S que en la E-W. Se pueden observar diferencias entre los desplazamientos observados y predichos en la componente horizontal, tanto en dirección (algunas flechas más al norte y otras más al sur que las observaciones), como en magnitud, con el desplazamiento máximo en la componente E-W unos ~ 5 cm menor que lo observado. En relación a la componente vertical, este modelo, al igual que el número 135, no logra recuperar los alzamientos en la zona costera y subestima las mediciones de subsidencia en las estaciones cercanas al parche de deslizamiento. Todo lo anterior es previsible pues este es el modelo más sobreamortiguado de los seleccionados.

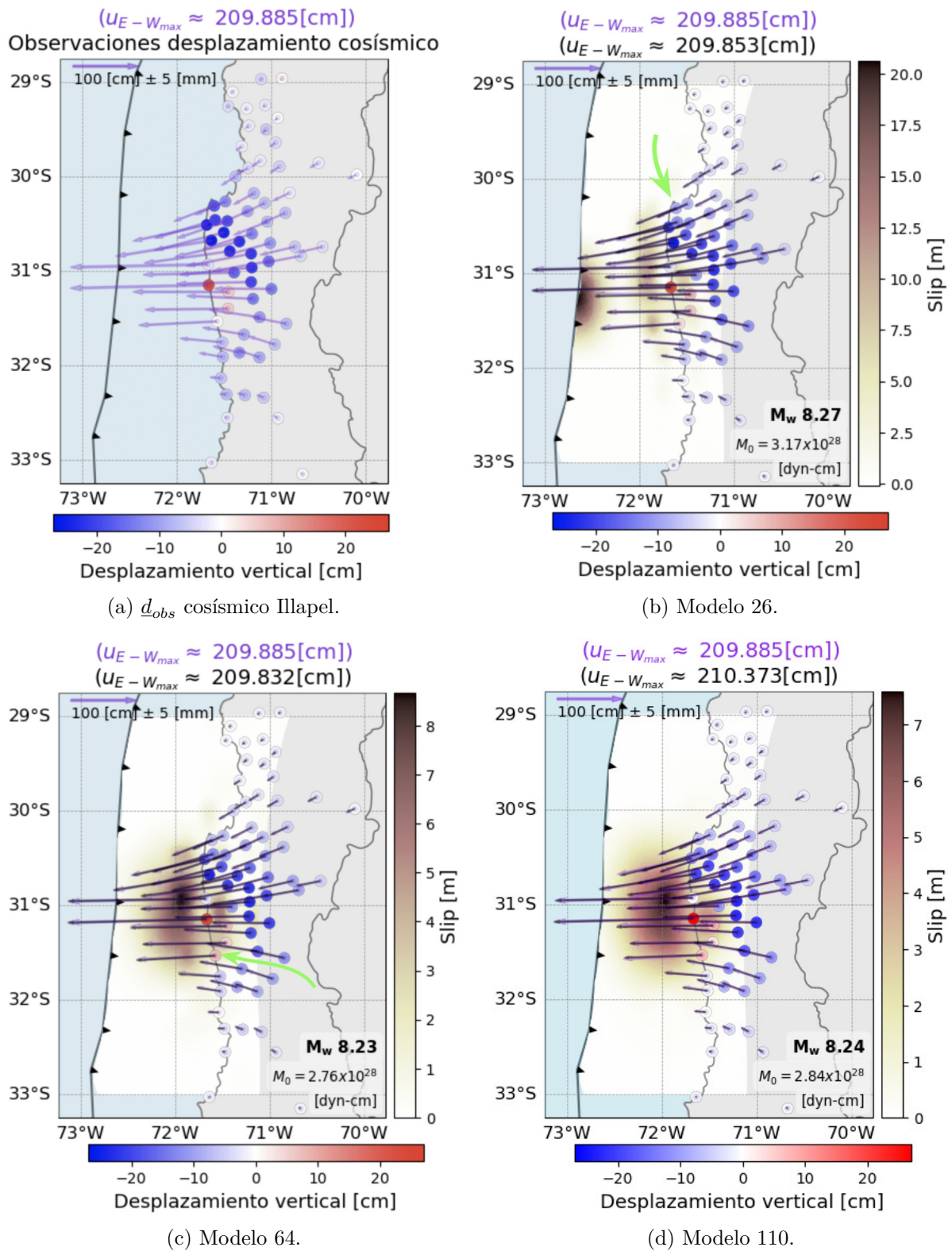


Figura 5.7: Inversión cosísmico del terremoto M_w 8.3 de Illapel de 2015, componente θ -slip 11. a) Observaciones de desplazamiento cosísmico del terremoto de Illapel (d_{obs}), representados por las flechas púrpura en la componente horizontal, y en la vertical por los círculos de este panel (a). b - f) Modelos de $slip$ obtenidos de la inversión L1 θ -slip (11), sin normalizar; representados por las respectivas escalas de tonos cálidos. Las flechas negras muestran la componente horizontal de los desplazamientos predichos (d_{pred}); los títulos especifican los desplazamientos máximos en la componente E-W. Los círculos representan la componente vertical de los desplazamientos predichos (segunda escala de color, igual para todas las figuras).

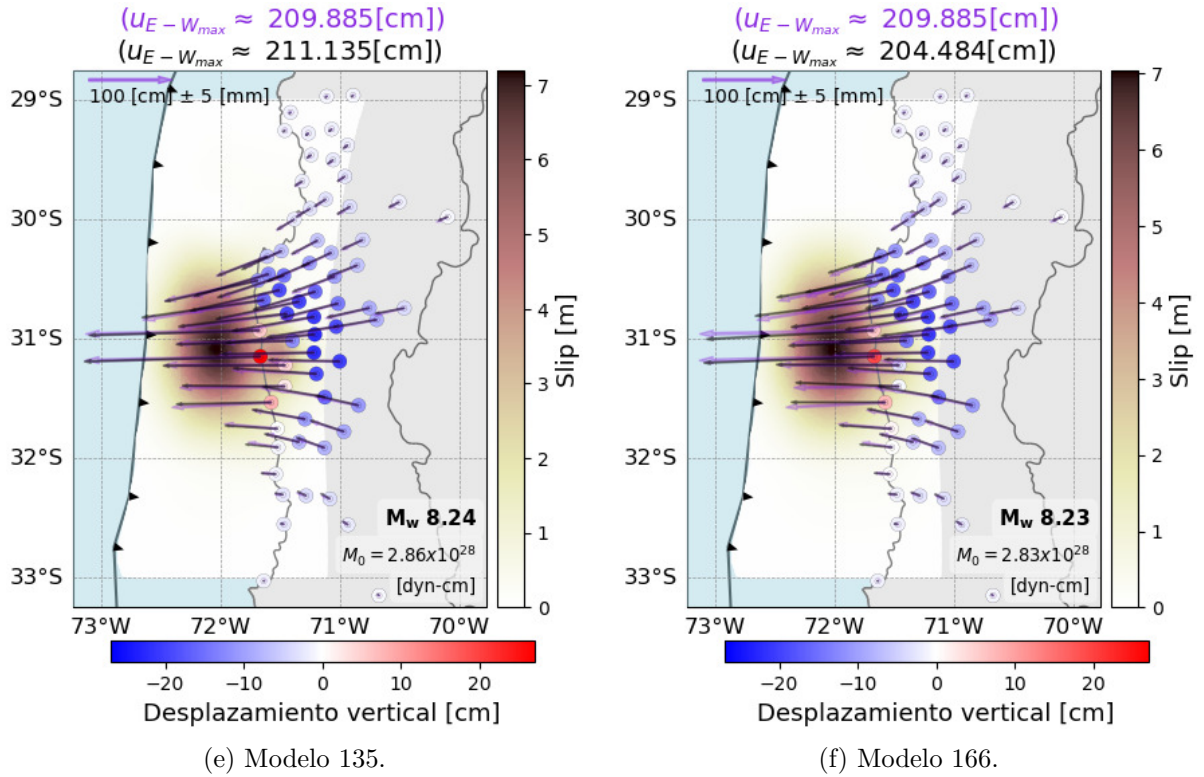
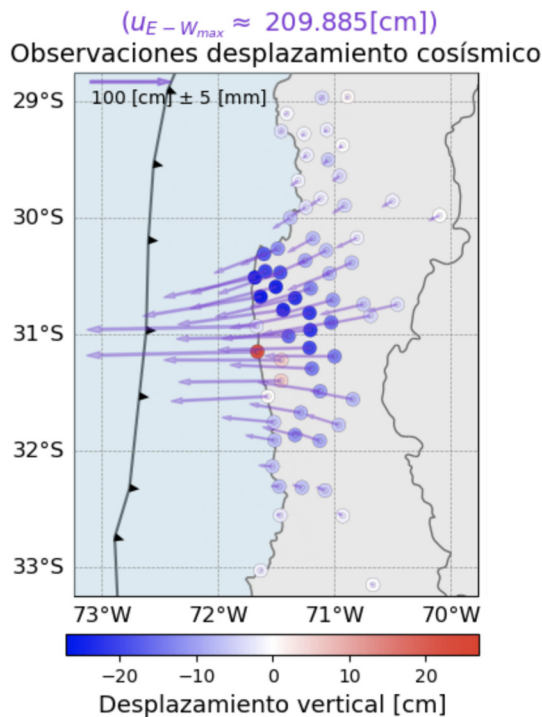


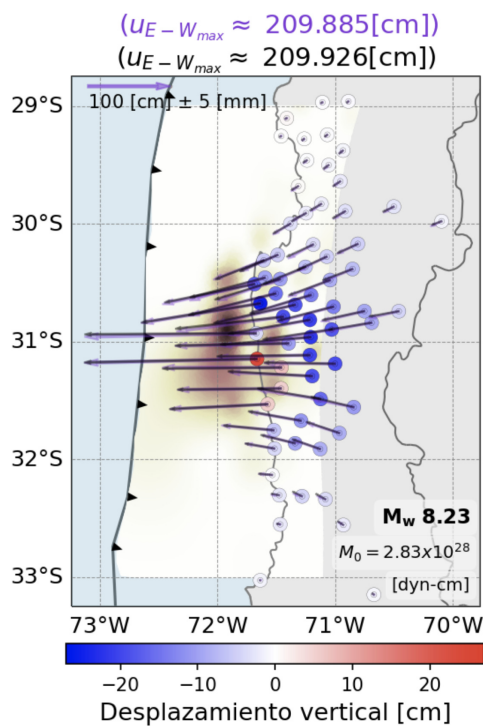
Figura 5.7: Inversión cosísmico del terremoto M_w 8.3 de Illapel de 2015, componente $theta-slip$ 11 (continuación).

De los resultados descritos anteriormente para la inversión con $theta-slip$ 11 se seleccionó el modelo 64, por las mismas razones que condujeron a la elección del modelo 50 en la inversión $theta-slip$ 09. Ambos resultados se comparan con las observaciones del cosísmico del terremoto de Illapel (Klein et al., 2017) en la Figura 5.8. En a) se muestran las observaciones; en b) y c) los modelos seleccionados y sus desplazamientos predichos, comparados con los observados; mientras que en los paneles d) y e) se detallan nuevamente los modelos de $slip$ obtenidos, pero esta vez las flechas celeste y los círculos representan las diferencias ($d_{obs} - d_{pred}$) por componente; en los títulos de estas dos sub-figuras se detallan las diferencias máximas de cada componente (E-W, N-S, Up). Cabe destacar que para la Figura 5.8, los paneles comparten la escala de color del $slip$, mientras que la escala de tonos azules y rojos para el desplazamiento vertical está diferenciada, una para los paneles a, b y c; y otra para las diferencias entre observaciones y predicciones (paneles d y e).

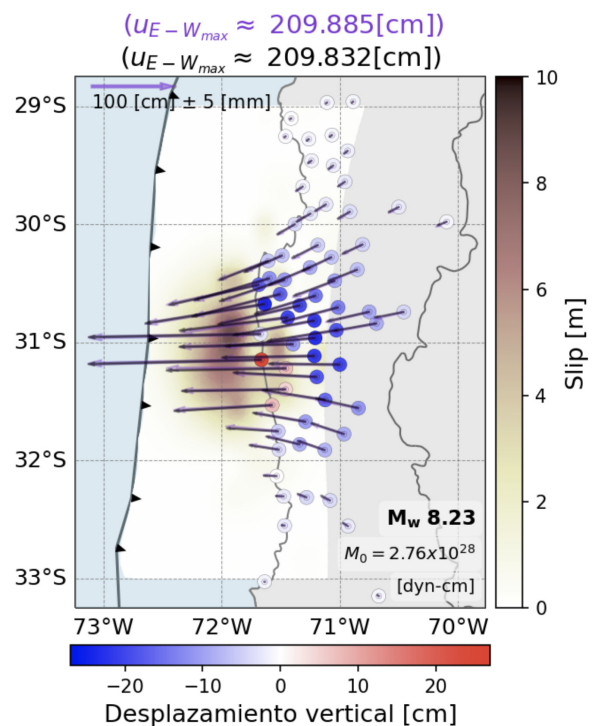
Previamente para ambos modelos se describió que los desplazamientos predichos se asemejan a los observados; para examinar esto en mayor detalle se tienen las diferencias de éstos en los paneles d) y e) de la Figura 5.8; en la horizontal, las flechas (del orden de centímetros) no tienen una dirección preferencial, lo que indicaría que se subsanó el efecto de la rotación sistemática de los desplazamientos. Para la componente horizontal, la mayor diferencia se tiene en el modelo 50 ($theta-slip$ 09) de ~ 3.8 cm en la dirección N-S y en las componentes verticales la mayor diferencia también es en este modelo con ~ -12 cm, que corresponde a la estación PALD, cerca de los $30^\circ S$, donde la predicción subestima la subsidencia observada allí (Figura 5.8, d).



(a) Observaciones cosísmicas (\underline{d}_{obs}).



(b) *Theta-slip 09*, Modelo 50.



(c) *Theta-slip 11*, Modelo 64.

Figura 5.8: Comparación de resultados seleccionados. a) Observaciones de desplazamiento cosísmico del terremoto de Illapel (\underline{d}_{obs}), representados por las flechas púrpura en la componente horizontal, y en la vertical por los círculos de este panel (a). b - c) Modelos de *slip* elegidos de las inversiones *theta-slip 09* y *11*, representados por la escala de tonos cálidos. Las flechas negras muestran la componente horizontal y los círculos la componente vertical de los desplazamientos predichos (\underline{d}_{pred}) obtenidos. d - e) Modelos de *slip* y las diferencias entre los desplazamientos observados y los predichos ($\underline{d}_{obs} - \underline{d}_{pred}$) en cada caso. Las flechas celeste muestran las diferencias en la componente horizontal y los círculos la correspondiente a la componente vertical (representado por la segunda escala de color). Los títulos de d) y e) exhiben las diferencias máximas en cada componente.

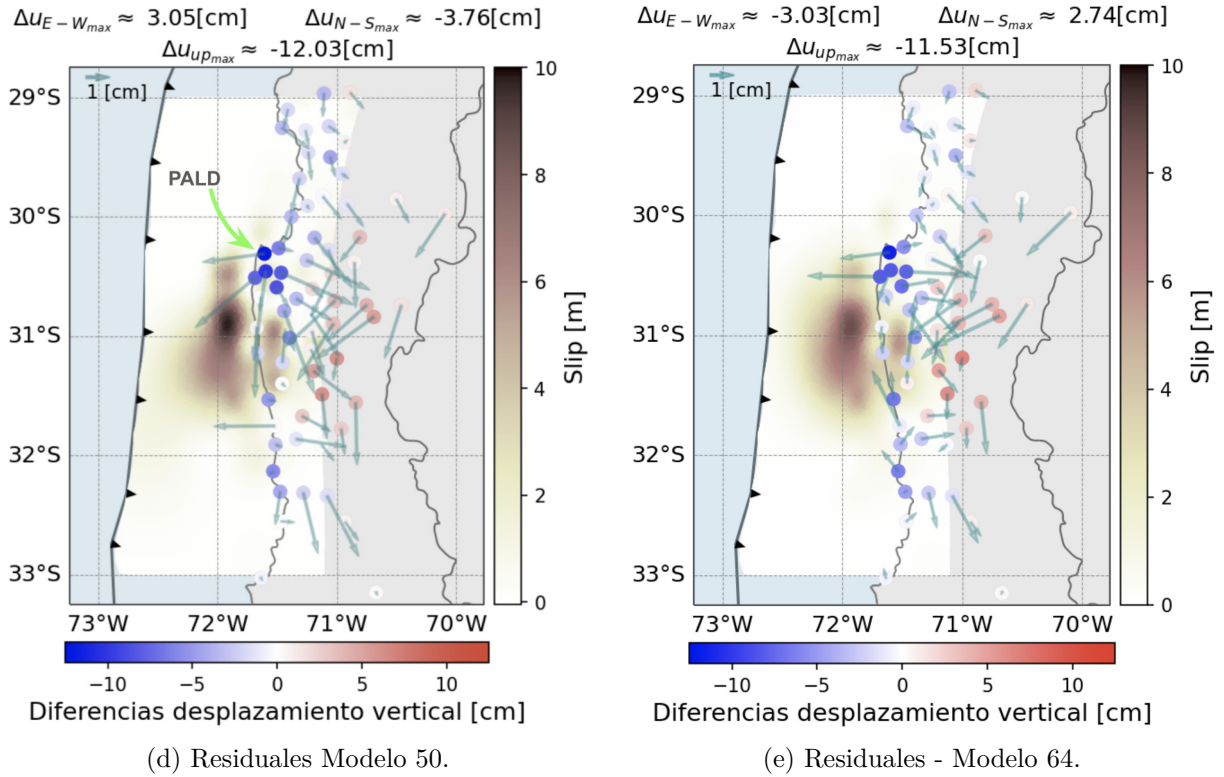
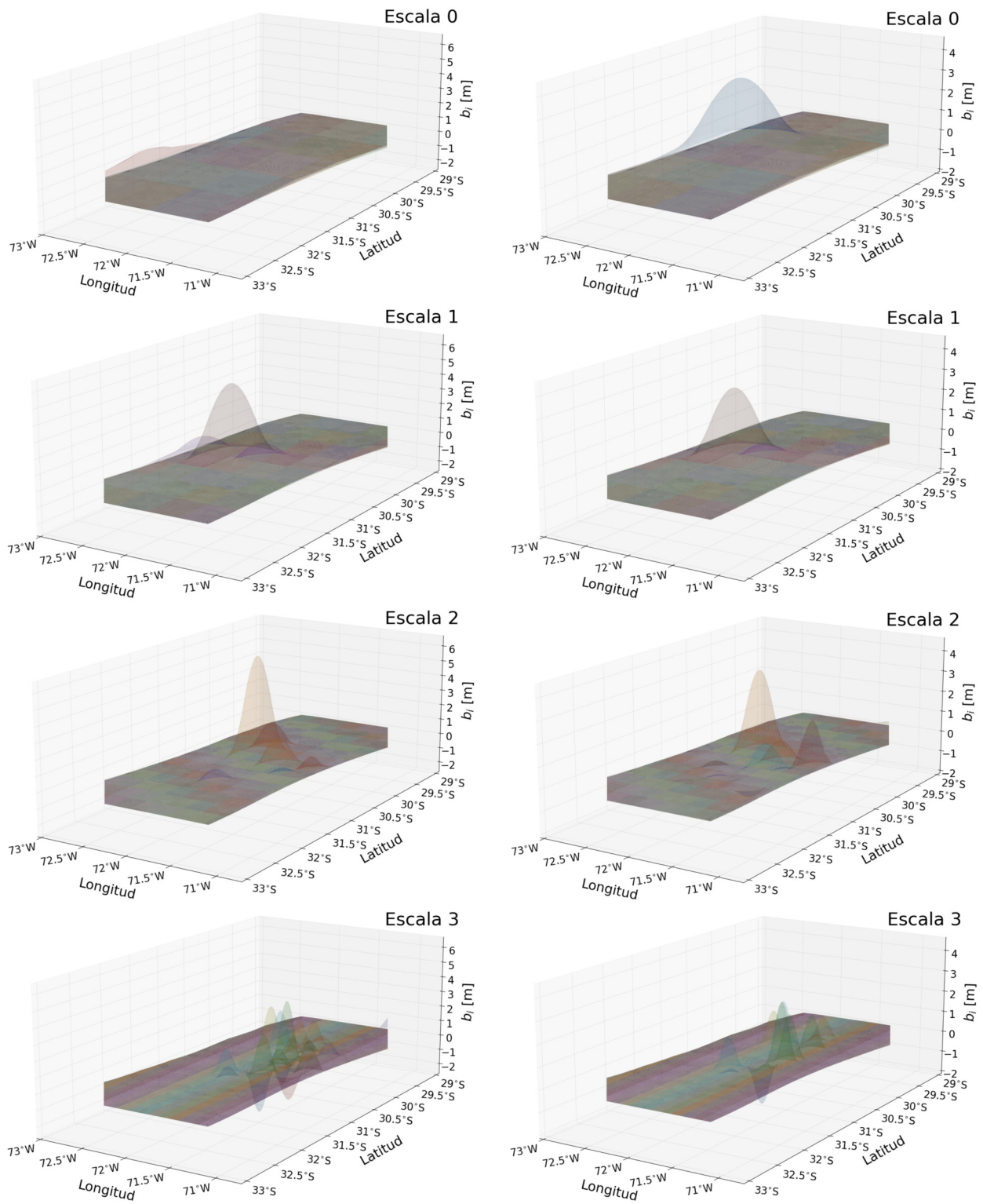


Figura 5.8: Comparación de resultados seleccionados (continuación).

Si bien los modelos seleccionados (50 y 64) tienen distintos valores de *slip* máximos (de ~ 10 m y ~ 8.5 m, respectivamente); ambos obtienen momentos sísmicos similares y terminan en una estimación de la magnitud de M_w 8.23, muy cercana a las estimaciones publicadas por el USGS para la fuente de este terremoto (Tabla 5.1).

En la Figura 5.9 se observa la contribución de las *b-splines* en cada escala; para ambos modelos hay funciones base en todas las escalas y en los dos casos hay *b-splines* con amplitudes tanto en la parte central de la malla (en torno a los 72°W), como hacia el este, lo que daría cuenta que ambas inversiones muestran 2 dominios principales en el deslizamiento. De ambos modelos, se escoge el correspondiente a *theta-slip* 11, asociado a α_{64} , dado que se acerca más al valor del desplazamiento cosísmico máximo en la componente E-W y los residuales con los datos son menores que el modelo asociado a α_{50} en la inversión *theta-slip* 09.



(a) Funciones base, modelo 50 (*theta-slip* 09).

(b) Funciones base, modelo 64 (*theta-slip* 11).

Figura 5.9: (Visión en planta) Amplitud de las *b-splines* asociadas a los modelos de *slip* (a) número 50 de la inversión con *theta-slip* 09 y (b) número 64, de la inversión con *theta-slip* 11. Cada panel muestra las funciones base *b-splines* cúbicas de las distintas escalas, donde la escala 0 es la que incluye las funciones más extensas en el espacio y la número 3 aquellas más finas.

Capítulo 6

Discusiones y Conclusiones

En el transcurso de esta investigación se construyó un esquema de inversión multi-escala que indujera soluciones *sparse*, esto mediante la creación de un conjunto de funciones base *b-splines* cúbicas y el diseño de un problema optimal, que utilizara la norma L1 para la regularización. El fin último de este trabajo fue abordar el problema inverso aplicado a la dislocación cuasi-estática del terremoto M_w 8.3 de Illapel 2015 en Chile Central, pero para el desarrollo y prueba de esta metodología se diseñaron también una serie de casos sintéticos de análisis y estudio.

En este capítulo se discutirán distintas aristas de la metodología desarrollada, sus ventajas y limitaciones; aspectos de lo obtenido en la aplicación al caso final de estudio en esta tesis; las mejoras y nuevas implementaciones que pueden desarrollarse en el futuro, además de las principales conclusiones de este trabajo.

6.1. Ventajas y limitaciones del método

Para construir el esquema de inversión propuesto y probar la metodología, se generaron tres casos sintéticos previos a la aplicación a datos reales, correspondientes a: curvas en una dimensión, superficies y el caso de dislocación cuasi-estática de una falla vertical teórica. Para todos ellos también se calcularon inversiones utilizando la norma L2 para la regularización (enfoque de Tikhonov de orden 0 usual), en el mismo rango de valores para los parámetros de regularización, con el objetivo de comparar lo obtenido.

La característica general que cruza los resultados en estos tres casos es que, con el enfoque propuesto, efectivamente se obtienen soluciones de tipo *sparse* pues, del conjunto completo de funciones base definido para cada caso y rango, se usan finalmente pocas *b-splines* para construir las amplitudes de los modelos y las demás son nulas (o numéricamente nulas). Dichos resultados, en comparación a las soluciones con el enfoque de mínimos cuadrados regularizados con norma L2, resultan en modelos que se acercan más en amplitud a los *tests* sintéticos que se buscó recuperar y que retratan de mejor manera los distintos rasgos de dichas señales, recuperándolas de buena forma incluso en casos con ruido añadido.

Para el caso de la falla vertical, se generaron varios modelos de *slip* sintéticos con señales sinusoidales y uno de valores aleatorios y por ende con un patrón rugoso. Para dicho modelo ($S0$), los resultados de amplitud del *slip* son los menos similares al modelo sintético

de entrada, debido a que es un caso extremo, más difícil de retratar. Si bien ambos modelos “favoritos” (obtenidos de las inversiones regularizadas con normas L2 y L1) recuperan un área bajo la curva del *slip* similar a la de $S0$, los patrones obtenidos no son similares al sintético en cuanto a forma, como si sucede para el modelo $S4$ y los otros *tests* suaves que se diseñaron, por ende no describen de buena manera sus rasgos principales.

En cuanto a las desventajas, el enfoque propuesto implica tiempos de cálculo superiores a los del cómputo del problema de mínimos cuadrados usual. Lo anterior no fue tan perceptible en problemas de pocos parámetros (como los casos de curvas en 1D y la falla vertical), pero en el ejemplo de las superficies, donde se definieron más de mil funciones base si comenzó a ser notorio que tardaba más tiempo. Sin embargo, dependiendo del problema se pueden tomar algunas acciones, como lo realizado para la aplicación a la zona de Illapel y la evaluación de la condición de positividad, donde se implementó una matriz de funciones base submuestreada, que disminuyó notoriamente el tiempo de cálculo, sin un perjuicio evidente en los resultados obtenidos (Sección 4.2.1).

Otro aspecto importante a considerar en el enfoque propuesto es cómo se define el conjunto de funciones base a utilizar en cada caso, no tan solo por la cantidad final de funciones base que se puede manejar y por ende la cantidad de parámetros que se pretende determinar, sino que también por el tamaño que tendrán las *b-splines*; y cómo estas decisiones se sustentan con la física del problema que se quiere abordar. En el caso teórico de la falla vertical, el rango completo de la falla (ancho sismogénico) era de 25 km, donde se definieron un total de 30 subfallas, en cuyos puntos centrales se evaluaron las funciones base. En ese caso de estudio se definieron un total de 4 escalas, enumeradas de 0 a 3, la última de ellas está compuesta por las *b-splines* más pequeñas, que tienen un ancho de ~ 7 km. Podría ser natural pensar en que podrían definirse *b-splines* aún más finas (de anchos menores) que las de esta escala, con el objetivo de recuperar patrones aún más detallados y retratar rasgos más rugosos como los que presenta el caso límite $S0$; pero es importante considerar la resolución que nos entrega contar sólo con observaciones en la superficie en un problema con una geometría como ésta, en donde lograr una resolución tan fina de lo que sucede en la falla en profundidad es poco realista, incluso en el caso teórico de estaciones equidistantes, lo cual no es muy cercano a la realidad.

Una ventaja del enfoque multi-escala propuesto, es que los resultados muestran que la metodología logra discernir en dónde son necesarias funciones de un tamaño dado y dónde no, consiguiendo una buena descripción de las características de las señales en estudio. Esto se evidenció mediante el diseño de *tests* sintéticos en una y dos dimensiones de distinto tipo y configuraciones, pero todos conformados por rasgos suaves y funciones de extensión muy reducida, pero de grandes amplitudes. Los modelos seleccionados como “favoritos” para las inversiones regularizadas con norma L1 no tan solo lograban explicar gran cantidad de los rasgos que conformaban las señales sintéticas, sino que tenían amplitudes más cercanas a ellas que lo obtenido en las inversiones regularizadas con norma L2.

Además, es posible observar a partir de las múltiples pruebas sintéticas, que la metodología propuesta seleccionaba casi exclusivamente las funciones base más finas (es decir, de las escalas superiores) en aquellos rangos del dominio donde se encontraban los *peaks* más agudos de la señal sintética. Mientras tanto, las *b-splines* más amplias se utilizaban en las

zonas donde la señal tenía patrones más extensos. De esta manera, la metodología evitaba el uso de funciones pequeñas en áreas del dominio con características extendidas, aprovechando las funciones más grandes para esos casos, logrando así soluciones lo más *sparse* posible.

6.2. Dislocación cuasi-estática del terremoto de Illapel

En cuanto a la aplicación de inferir la dislocación en el contacto interplaca de subducción en la región afectada por el terremoto de Illapel M_w 8.3 de 2015, se utilizaron los *tests* sintéticos para probar la implementación de dos aspectos principales de la metodología, estos fueron, la evaluación de la condición de positividad y la normalización de las funciones de Green propuesta a considerar en el enfoque multi-escala.

Se probó evaluar la condición de positividad sobre el *slip* en el contacto sismogénico, usando una matriz de funciones base submuestreadas, la cual se denominó \underline{B}^+ . Dicha implementación finalmente se adoptó como parte de la metodología para las pruebas y cálculos posteriores pues resultó de buena forma; es decir, los modelos de *slip* obtenidos (considerando la contribución de las cuatro escalas), fueron de valores positivos, y se recuperaron modelos muy similares a los obtenidos con la matriz de funciones base completa (ver Sección 4.2.1). Otro punto importante en la decisión fue que con esta implementación, el tiempo de cálculo disminuyó bastante, dado que utilizando la matriz \underline{B} para evaluar positividad, la inversión de un conjunto de 250 parámetros de regularización tardaba aproximadamente 1 hora y media; mientras que con la matriz \underline{B}^+ esto sólo demoraba ~ 7 minutos para el mismo conjunto de parámetros, lo que permitió calcular muchas más pruebas sintéticas y con los datos del cosísmico del evento de Illapel.

Un aspecto importante de esta parte de la metodología fue determinar una cantidad suficiente de puntos para formar la matriz submuestreada (\underline{B}^+). Previo a definir dicho número como una variable dependiente de cuántos puntos mínimos se quería tener en las *b-splines* más pequeñas, se probó con cantidades menores y el hecho de tener una matriz con tan pocos puntos resultó en conseguir modelos cuyo *slip* asociado no era estrictamente positivo, vulnerando el cumplimiento de la condición impuesta. Por lo anterior es que, de considerar implementaciones auxiliares como ésta, es necesario y recomendable testear su desempeño con varias pruebas sintéticas, a fin de verificar que efectivamente cumple con la función con la que se ha diseñado y no altera mayormente la resolución del problema inverso.

En este trabajo se impuso la condición de positividad sobre el *slip*, pero no directamente sobre las amplitudes de las funciones base *b-splines*. ¿Por qué no?, la pregunta es válida de discutir y también de abordar en una continuación de la investigación; sin embargo la motivación detrás de esa decisión en la metodología se sustenta en que la información *a priori* física (que nos motiva a imponer positividad y en el caso del contacto en una zona de subducción limitar y no permitir dislocaciones de tipo normal) es sobre el *slip* de un terremoto de subducción, no sobre los elementos de la representación multi-escala. De hecho, la combinación de las funciones base podría requerir de *b-splines* con amplitud negativa para formar patrones de dislocación positivos.

Posteriormente se probó la normalización de las columnas de la matriz $\underline{\underline{G}}$ (generalizada), de acuerdo a lo propuesto en la Sección 3.4. Finalmente se determinó no utilizar dicha propuesta y por ende no normalizar. Si bien en el estado del arte se recomienda equiparar el efecto de cada columna del *Kernel* en la minimización de la función objetivo, y es el espíritu detrás de la idea propuesta para este enfoque multi-escala; tal como fue pensada y diseñada en este trabajo, dicha metodología mostró sesgar la solución a elegir preferentemente casi sólo funciones base de las escalas más pequeñas, dándoles no tan sólo mayor amplitud, sino que usando más funciones en las últimas dos escalas (ver Sección 4.2.2), lo cual puede inducir a modelos que sobre-expliquen parte de la señal de desplazamiento medida en la red de estaciones GNSS.

Una forma de mejorar este punto sería diseñar otra forma de normalizar, que también considere el enfoque multi-escala del problema propuesto y que implique tal vez examinar otra métrica que la que se propuso para normalizar las columnas de $\underline{\underline{G}}$ en este trabajo.

Respecto de los resultados para el cosísmico del terremoto M_w 8.3 de Illapel 2015, se tiene que el problema fue parametrizado tan solo en una dirección del deslizamiento. En el caso de una zona de subducción como la Chilena, representar que el movimiento en el contacto entre las placas es únicamente en el sentido en que subducta una bajo la otra, es una aproximación muy de primer orden que puede ser válida para modelar algunos casos; pero imponer el vector de deslizamiento de un terremoto M_w 8.3 a una sola dirección de dislocación en todos los elementos discretos de la falla, como el caso de este estudio, puede ser una restricción muy fuerte. Lo anterior se evidencia en la sistemática rotación de los desplazamientos predichos en las inversiones *dip-slip* (Figura 5.3), lo cual motivó a, si bien seguir con la parametrización de una dirección, abordar las rotaciones al sistema coordenado local en los elementos discretos de la malla (θ y θ_P), obteniendo las distintas inversiones *theta-slip* (en la dirección θ del movimiento).

Luego de explorar cuál valor de rotación era el más apropiado, se seleccionaron dos modelos, correspondientes al número 50 de la inversión *theta-slip 09* y al 64 de *theta-slip 11* (Figura 5.8); de estos se puede obtener distribuciones de *slip* como una mezcla entre rasgos más locales, además de patrones más suaves en zonas donde no se debería esperar tanta resolución, como es lejos de la costa y más cerca de la fosa. Ambos modelos de *slip* tienen el máximo en torno a los 31°S, el primero con un valor máximo de casi 10 m y el segundo con un valor máximo de 7 - 8 m, resultados que concuerdan con los valores máximos obtenidos en los modelos de otros autores (Figura 6.1), y muestran dos zonas de máximas amplitudes, una más hacia el *down-dip* que la otra.

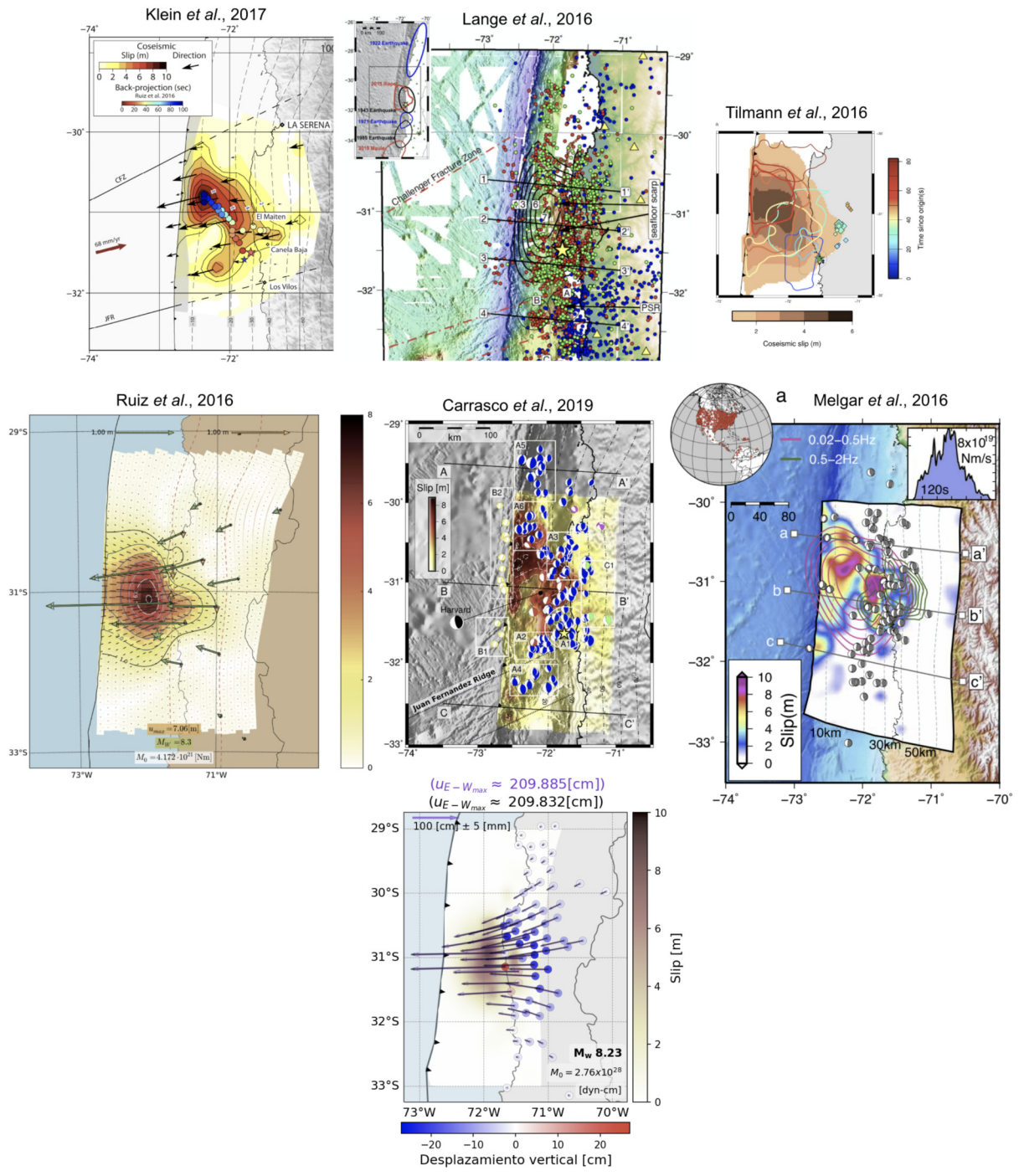


Figura 6.1: Algunos de los modelos cosísmicos de la distribución de deslizamiento para el terremoto de Illapel del 2015 publicados y su comparación con los obtenidos en este estudio.

6.3. Trabajo futuro

Este trabajo incluyó el desarrollo de un paquete de inversión multi-escala que induce soluciones *sparse*, mediante la regularización con la norma L1 aplicada sobre al vector de parámetros como tal. Dado que el desarrollo de éste fue inspirado en poder aplicarlo al caso de la dislocación cuasi-estática del terremoto de Illapel, la primera acción futura es terminar la implementación del cálculo de la matriz de covarianza $\underline{\underline{C}}_m$, que dé cuenta de las incertezas en la estimación de la amplitud de las funciones base (parámetros del modelo), aspecto que no alcanzó a estar en su versión final a la presentación de esta tesis.

Así, se pretende obtener una aproximación de $\underline{\underline{C}}_m$, relajando el problema a uno con regularización L2 (Riel et al., 2014), verificando ese método con propagación de error de Monte-Carlo (e.g., Aster et al., 2013).

En segundo lugar, poder implementar las dos componentes del movimiento en la formulación de la parametrización del *slip* y del problema inverso, así obtener la componente *strike-slip* junto con la *dip-slip* y no imponer la inversión tan sólo a una, ya sea la *dip-slip* o las rotaciones de ésta (*theta-slip*). Luego, una mejora importante para este caso sería añadir una estimación de los errores de la predicción del modelo ($\underline{\underline{C}}_p$) a la definición de la matriz de covarianza del ajuste ($\underline{\underline{C}}_x$), y de esta manera no tan sólo contar con los errores observacionales (que en el planteamiento de este problema forman parte de la definición de la matriz $\underline{\underline{C}}_d$) y poder considerar también los errores de la predicción del modelo directo debido a la incertidumbre en la estructura elástica del medio (Duputel et al., 2014).

Finalmente, una vez hechas las mejoras propuestas, se preparará un artículo científico a ser sometido a revisión de pares en una revista WoS. Como parte de dicha publicación, se adjuntará el paquete de inversión *MUSE*, que quedará disponible en una plataforma abierta como GitHub, a fin de dar posibilidad a que sea utilizado para otros problemas con enfoque multi-escala, y así poder considerar nuevas implementaciones, no tan sólo de casos nuevos y con ello nuevos modelos físicos, sino también cambios más complejos, como la implementación de otros tipos de funciones base *ad-hoc*.

6.4. Conclusiones

En este trabajo de tesis se construyó un esquema de inversión multi-escala que induce soluciones *sparse* de la dislocación en fallas, mediante la creación de un conjunto de funciones base *b-splines* cúbicas y el diseño de un problema optimal, que utiliza la norma L1 para la regularización.

El enfoque multi-escala propuesto mostró ser capaz de discernir en qué partes del rango de cada problema era necesario utilizar funciones base de un tamaño dado, dentro de la colección de funciones base de cada ejemplo, consiguiendo una buena descripción de las características de las señales que se buscaban recuperar u obtener en cada caso.

Todo parece indicar que la propuesta de normalización de las columnas de $\underline{\underline{G}}$ en este trabajo sesgó los resultados a preferir el uso de casi únicamente funciones base pequeñas (las de la/las última/s escala/s). Por tanto, quedan por explorar más formas de normalizar. Respecto de

la condición de positividad, ésta funcionó correctamente y con la generación de la matriz $\underline{\underline{B}}^+$ el tiempo de cálculo disminuyó radicalmente.

El objetivo final de este trabajo era aplicar la metodología al caso de dislocación cuasi-estática del terremoto de Illapel. En este caso se tiene que las *b-splines* se desarrollan en un dominio rectangular en superficie, retratando lo que sucede en el contacto de subducción discretizado en elementos pequeños, justo debajo, lo que implica cierta distorsión en los tamaños que efectivamente va a representar. Por tanto se podría buscar una nueva representación, buscando el sistema de coordenadas curvilíneo o por lo menos que dicho dominio sea cartesiano, pero siguiendo una mejor representación del contacto.

Respecto de los resultados para la dislocación cuasi-estática aplicada a la geometría de Illapel, esta metodología entrega resultados compuestos por contribuciones de diferentes funciones base y escalas; cuyas soluciones son de tipo *sparse*. En los resultados finales se observa que los modelos de *slip* están formados por algo así como dos dominios diferenciados en profundidad.

Hasta ahora dicha metodología se aplicó sólo con datos GNSS, pero existen otro tipo de datos útiles para constreñir rupturas de terremotos; e.g., *tsunami*, InSAR. Otra arista del trabajo a futuro es implementar la combinación de más tipos de datos, para poder constreñir de mejor manera la dislocación en el enfoque multi-escala propuesto.

Bibliografía

- Aagaard, B., Knepley, M., y Williams, C. (2017). Pylith v2. 2.1, computational infrastructure for geodynamics. *Zenodo*.
- Akaike, H. (1980). Likelihood and the Bayes procedure. *Bayesian Statistics*, 31, 143–166. doi: 10.1007/BF02888350.
- Aki, K., y Richards, P. G. (2002). *Quantitative seismology*.
- Aránguiz, R., González, G., González, J., Catalán, P. A., Cienfuegos, R., Yagi, Y., ... others (2015). The 16 september 2015 chile tsunami from the post-tsunami survey and numerical modeling perspectives. *Pure and Applied Geophysics*, 333–348.
- Aster, R. C., Borchers, B., y Thurber, C. H. (2013). *Parameter estimation and inverse problems*. Elsevier. doi: 10.1016/C2009-0-61134-X.
- Barrientos, S. (2015). Informe técnico terremoto illapel 16 septiembre 2015. *Centro Sismológico Nacional*, 56(2), 19.
- Becerra, V. (2018). *Caracterización de los procesos de deformación asociados al terremoto de pisagua (mw 8.2) 2014, mediante el uso de observaciones del sistema de posicionamiento global (gps)* [Tesis de Magíster]. (Disponible en <https://repositorio.uchile.cl/handle/2250/168617>)
- Beck, S., Barrientos, S., Kausel, E., y Reyes, M. (1998). Source characteristics of historic earthquakes along the central chile subduction askew et alzone. *Journal of South American Earth Sciences*, 11(2), 115–129.
- Carrasco, S., Ruiz, J. A., Contreras-Reyes, E., y Ortega-Culaciati, F. (2019). Shallow intra-plate seismicity related to the illapel 2015 mw 8.4 earthquake: Implications from the seismic source. *Tectonophysics*, 766, 205–218. doi: 10.1016/j.tecto.2019.06.011
- Contreras-Reyes, E., y Carrizo, D. (2011). Control of high oceanic features and subduction channel on earthquake ruptures along the chile–peru subduction zone. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 186(1-2), 49–58. doi: 10.1016/j.pepi.2011.03.002
- Contreras-Reyes, E., y Osses, A. (2010). Lithospheric flexure modelling seaward of the chile trench: implications for oceanic plate weakening in the trench outer rise region. *Geophysical Journal International*, 182(1), 97–112.
- Contreras-Reyes, E., Ruiz, J. A., Becerra, J., Kopp, H., Reichert, C., Maksymowicz, A., y Arriagada, C. (2015). Structure and tectonics of the central chilean margin (31°–33° s): Implications for subduction erosion and shallow crustal seismicity. *Geophysical Journal International*, 203(2), 776–791. doi: 10.1093/gji/ggv309
- Craven, P., y Wahba, G. (1979). Smoothing noisy data with spline functions - Estimating the correct degree of smoothing by the method of Generalized Cross-Validation.

- Numerische Mathematik*, 31(4), 377–403. doi: 10.1007/BF01404567.
- de Boor, C. (2001). *A practical guide to splines*. Springer.
- Diamond, S., y Boyd, S. (2016). CVXPY: A Python-embedded modeling language for convex optimization. *Journal of Machine Learning Research*, 17(83), 1–5.
- Duputel, Z., Agram, P. S., Simons, M., Minson, S. E., y Beck, J. L. (2014). Accounting for prediction uncertainty when inferring subsurface fault slip. *Geophysical journal international*, 197(1), 464–482. doi: 10.1093/gji/ggt517
- Fernández, J., Pastén, C., Ruiz, S., y Leyton, F. (2019). Damage assessment of the 2015 mw 8.3 illapel earthquake in the north-central chile. *Natural Hazards*, 96, 269–283.
- Govers, R., Furlong, K., Van de Wiel, L., Herman, M., y Broerse, T. (2018). The geodetic signature of the earthquake cycle at subduction zones: Model constraints on the deep processes. *Reviews of Geophysics*, 56(1), 6–49.
- Hansen, P. C. (1992). Analysis of discrete ill-posed problems by means of the l-curve. *SIAM review*, 34(4), 561–580. doi: 10.1137/1034115
- Hansen, P. C., y O’Leary, D. P. (1993). The use of the l-curve in the regularization of discrete ill-posed problems. *SIAM journal on scientific computing*, 14(6), 1487–1503. doi: 10.1137/0914086
- Hayes, G. P., Moore, G. L., Portner, D. E., Hearne, M., Flamme, H., Furtney, M., y Smoczyk, G. M. (2018). Slab2, a comprehensive subduction zone geometry model. *Science*, 362(6410), 58–61. doi: 10.1126/science.aat4723
- Herron, E. M., Cande, S. C., y Hall, B. R. (1981, 01). An active spreading center collides with a subduction zone: A geophysical survey of the Chile Margin triple junction. En *Nazca Plate: Crustal Formation and Andean Convergence*. Geological Society of America. doi: 10.1130/MEM154-p683
- Hicks, S. P. (2015). *Seismic properties and processes along the subduction plate interface: the february 2010 m w 8.8 maule, chile earthquake* (Tesis Doctoral no publicada). University of Liverpool.
- Hormazábal, J. (2021). *Evolución espacio-temporal de la deformación posterior al terremoto de illapel 2015 (mw 8.3) mediante datos gnss, insar y el método epic* [Tesis de Pregrado]. (Disponible en https://www.dgeo.udec.cl/wp-content/uploads/2021/05/Tesis_Joaquin_Hormazabal_v_final-wecompress.com.pdf)
- Hu, Y., Wang, K., He, J., Klotz, J., y Khazaradze, G. (2004). Three-dimensional viscoelastic finite element model for postseismic deformation of the great 1960 chile earthquake. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 109(B12).
- Johnson, K. M., Fukuda, J., y Segall, P. (2012). Challenging the rate-state asperity model: Afterslip following the 2011 m9 tohoku-oki, japan, earthquake. *Geophysical Research Letters*, 39(20).
- Kelleher, J. A. (1972). Rupture zones of large south american earthquakes and some predictions. *Journal of Geophysical Research*, 77(11), 2087–2103.
- Kendrick, E., Bevis, M., Smalley Jr, R., Brooks, B., Vargas, R. B., Lauria, E., y Fortes, L. P. S. (2003). The nazca–south america euler vector and its rate of change. *Journal of South American Earth Sciences*, 16(2), 125–131. doi: 10.1016/S0895-9811(03)00028-2

- Klein, E., Fleitout, L., Vigny, C., y Garaud, J.-D. (2016). Afterslip and viscoelastic relaxation model inferred from the large-scale post-seismic deformation following the 2010 m w 8.8 maule earthquake (chile). *Geophysical Journal International*, 205(3), 1455–1472. doi: 10.1093/gji/ggw086
- Klein, E., Vigny, C., Fleitout, L., Grandin, R., Jolivet, R., Rivera, E., y Métois, M. (2017). A comprehensive analysis of the illapel 2015 mw8. 3 earthquake from gps and insar data. *Earth and Planetary Science Letters*, 469, 123–134. doi: 10.1016/j.epsl.2017.04.010
- Köhne, T., Riel, B., y Simons, M. (2023). Decomposition and inference of sources through spatiotemporal analysis of network signals: The disstans python package. *Computers & Geosciences*, 170, 105247.
- Lange, D., Geersen, J., Barrientos, S., Moreno, M., Grevemeyer, I., Contreras-Reyes, E., y Kopp, H. (2016). Aftershock seismicity and tectonic setting of the 2015 september 16 m w 8.3 illapel earthquake, central chile. *Geophysical Journal International*, 206(2), 1424–1430. doi: 10.1093/gji/ggw218
- Lixandru, I., Marinescu, V., Frumusanu, G., Craciun, M. V., y Epureanu, A. (2009). B-spline reduced order models of the multidimensional fields. En *Wseas international conference. proceedings. mathematics and computers in science and engineering*.
- Lomnitz, C. (2004). Major earthquakes of chile: a historical survey, 1535-1960. *Seismological Research Letters*, 75(3), 368–378.
- Melgar, D., Fan, W., Riquelme, S., Geng, J., Liang, C., Fuentes, M., . . . Fielding, E. J. (2016). Slip segmentation and slow rupture to the trench during the 2015, mw8. 3 illapel, chile earthquake. *Geophysical Research Letters*, 43(3), 961–966.
- Melnick, D., Moreno, M., Quinteros, J., Baez, J. C., Deng, Z., Li, S., y Oncken, O. (2017). The super-interseismic phase of the megathrust earthquake cycle in chile. *Geophysical Research Letters*, 44(2), 784–791. doi: 10.1002/2016GL071845
- Métois, M., Vigny, C., y Socquet, A. (2016). Interseismic coupling, megathrust earthquakes and seismic swarms along the chilean subduction zone (38–18 s). *Pure and Applied Geophysics*, 173(5), 1431–1449. doi: 10.1007/978-3-319-57822-4_5
- Métois, M., Vigny, C., Socquet, A., Delorme, A., Morvan, S., Ortega, I., y Valderas-Bermejo, C.-M. (2014). Gps-derived interseismic coupling on the subduction and seismic hazards in the atacama region, chile. *Geophysical Journal International*, 196(2), 644–655.
- Minson, S., Simons, M., y Beck, J. (2013). Bayesian inversion for finite fault earthquake source models i—theory and algorithm. *Geophysical Journal International*, 194(3), 1701–1726. doi: 10.1093/gji/ggt180
- MOSEK ApS, . (2022). The mosek optimizer api for python 9.3.21 [Manual de software informático].
- Muto, M., y Beck, J. L. (2008). Bayesian updating and model class selection for hysteretic structural models using stochastic simulation. *Journal of Vibration and Control*, 14(1-2), 7-34. doi: 10.1177/1077546307079400.
- Métois, M. (2022). A kinematic approach to the seismic cycle. En F. Rolandone (Ed.), *The seismic cycle: From observation to modeling* (p. xv-xliii). John Wiley & Sons.
- Nenov, S. I. (2016). b-spline curves and surfaces as a minimization of quadratic operators.

- Nikkhoo, M., y Walter, T. R. (2015). Triangular dislocation: an analytical, artefact-free solution. *Geophysical Journal International*, 201(2), 1119–1141.
- Okada, Y. (1985). Surface deformation due to shear and tensile faults in a half-space. *Bulletin of the seismological society of America*, 75(4), 1135–1154.
- Ortega-Culaciati, F., Simons, M., Ruiz, J., Rivera, L., y Díaz-Salazar, N. (2021). An epic tikhonov regularization: Application to quasi-static fault slip inversion. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 126(7), e2020JB021141. doi: 10.1029/2020JB021141
- Pardo, M., Comte, D., Monfret, T., Boroschek, R., y Astroza, M. (2002). The october 15, 1997 punitaqui earthquake (mw= 7.1): a destructive event within the subducting nazca plate in central chile. *Tectonophysics*, 345(1-4), 199–210.
- Paulik, R., Williams, J. H., Horspool, N., Catalan, P. A., Mowll, R., Cortés, P., y Woods, R. (2021). The 16 september 2015 illapel earthquake and tsunami: Post-event tsunami inundation, building and infrastructure damage survey in coquimbo, chile. *Pure and Applied Geophysics*, 178(12), 4837–4851.
- Perfettini, H., y Avouac, J.-P. (2004). Postseismic relaxation driven by brittle creep: A possible mechanism to reconcile geodetic measurements and the decay rate of aftershocks, application to the chi-chi earthquake, taiwan. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 109(B2).
- Riel, B., Simons, M., Agram, P., y Zhan, Z. (2014). Detecting transient signals in geodetic time series using sparse estimation techniques. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 119(6), 5140–5160. doi: 10.1002/2014JB011077
- Ruiz, S., Klein, E., del Campo, F., Rivera, E., Poli, P., Metois, M., . . . others (2016). The seismic sequence of the 16 september 2015 mw 8.3 illapel, chile, earthquake. *Seismological Research Letters*, 87(4), 789–799. doi: 10.1785/0220150281
- Sambridge, M., Gallagher, K., Jackson, A., y Rickwood, P. (2006). Trans-dimensional inverse problems, model comparison and the evidence. *Geophysical Journal International*, 167(2), 528-542. doi: 10.1111/j.1365-246X.2006.03155.x
- Segall, P. (2010). Earthquake and volcano deformation. En *Earthquake and volcano deformation*. Princeton University Press. doi: 10.1515/9781400833856
- Segall, P., y Harris, R. (1987). Earthquake deformation cycle on the san andreas fault near parkfield, california. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 92(B10), 10511–10525. doi: 10.1029/JB092iB10p10511
- Sherar, P. (2004). *Variational based analysis and modelling using b-splines* (PhD thesis). Cranfield University. (Disponible en <https://dspace.lib.cranfield.ac.uk/bitstream/handle/1826/125/sherarphd.pdf;sequence=2>)
- Tarantola, A. (2005). *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. Society for Industrial and Applied Mathematics. doi: 10.1137/1.9780898717921.
- Tikhonov, A. N. (1963). On the solution of ill-posed problems and the method of regularization. En *Doklady akademii nauk* (Vol. 151, pp. 501–504).

- Tilmann, F., Zhang, Y., Moreno, M., Saul, J., Eckelmann, F., Palo, M., . . . others (2016). The 2015 illapel earthquake, central chile: A type case for a characteristic earthquake? *Geophysical Research Letters*, 43(2), 574–583.
- Völker, D., Wiedicke, M., Ladage, S., Gaedicke, C., Reichert, C., Rauch, K., . . . Heubeck, C. (2006). Latitudinal variation in sedimentary processes in the peru-chile trench off central chile. *The Andes: Active Subduction Orogeny*, 193–216. doi: 10.1007/978-3-540-48684-8_9
- Wahba, G. (1990). *Spline models for observational data*. Society for Industrial and Applied Mathematics. doi: 10.1137/1.9781611970128.
- Wang, K., Hu, Y., Bevis, M., Kendrick, E., Smalley Jr, R., Vargas, R. B., y Lauría, E. (2007). Crustal motion in the zone of the 1960 chile earthquake: Detangling earthquake-cycle deformation and forearc-sliver translation. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 8(10).
- Yabuki, T., y Matsu'ura, M. (1992). Geodetic data inversion using a Bayesian information criterion for spatial distribution of fault slip. *Geophys. Journ. Int.*, 109(2), 363-375. doi: 10.1111/j.1365-246X.1992.tb00102.x.
- Zhu, L., y Rivera, L. A. (2002). A note on the dynamic and static displacements from a point source in multilayered media. *Geophysical Journal International*, 148(3), 619-627. doi: 10.1046/j.1365-246X.2002.01610.x

Anexos

Anexo A. Geometría y Funciones Base

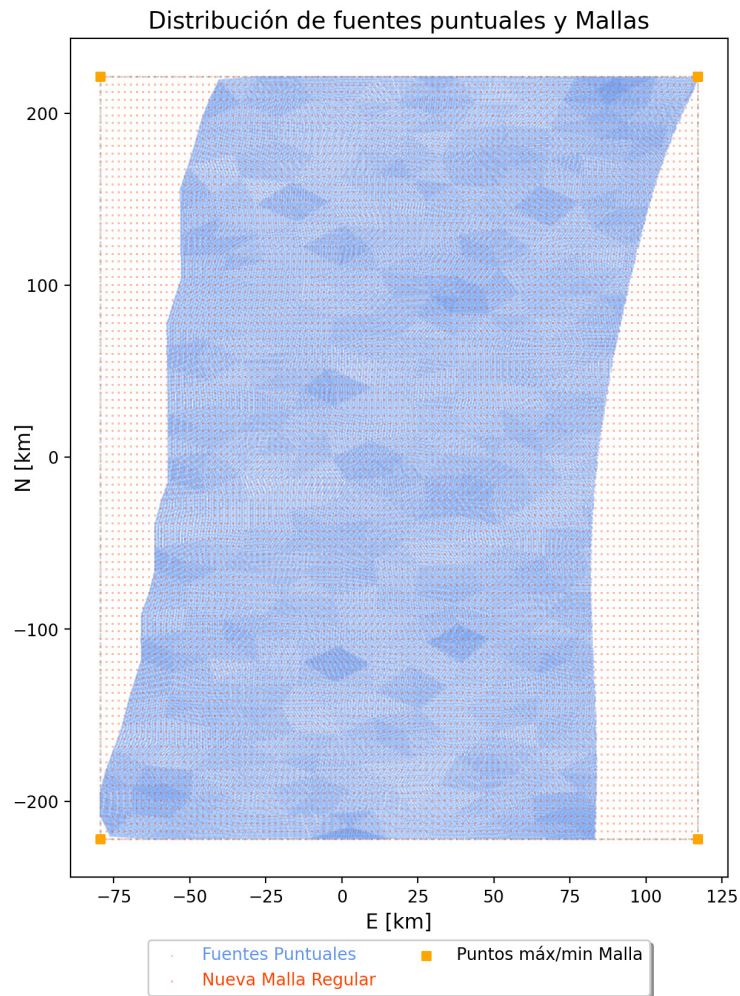


Figura A.1: Diferencia entre las mallas en la zona de estudio, con la geometría del contacto proyectada en superficie. Los puntos azules muestran la distribución de las fuentes puntuales consideradas en la malla triangularizada hasta 55 km de profundidad en coordenadas Mercator Transversal (para la cual se calcularon las funciones de Green). Los cuadros naranjos muestran los puntos máximos y mínimos E y N que permiten circunscribir la malla en un rectángulo. Los pequeños puntos rojos muestran la nueva malla regular, utilizada para definir inicialmente las funciones base.

Fuentes Puntuales y observaciones (Klein et al., 2017)
Zona Illapel

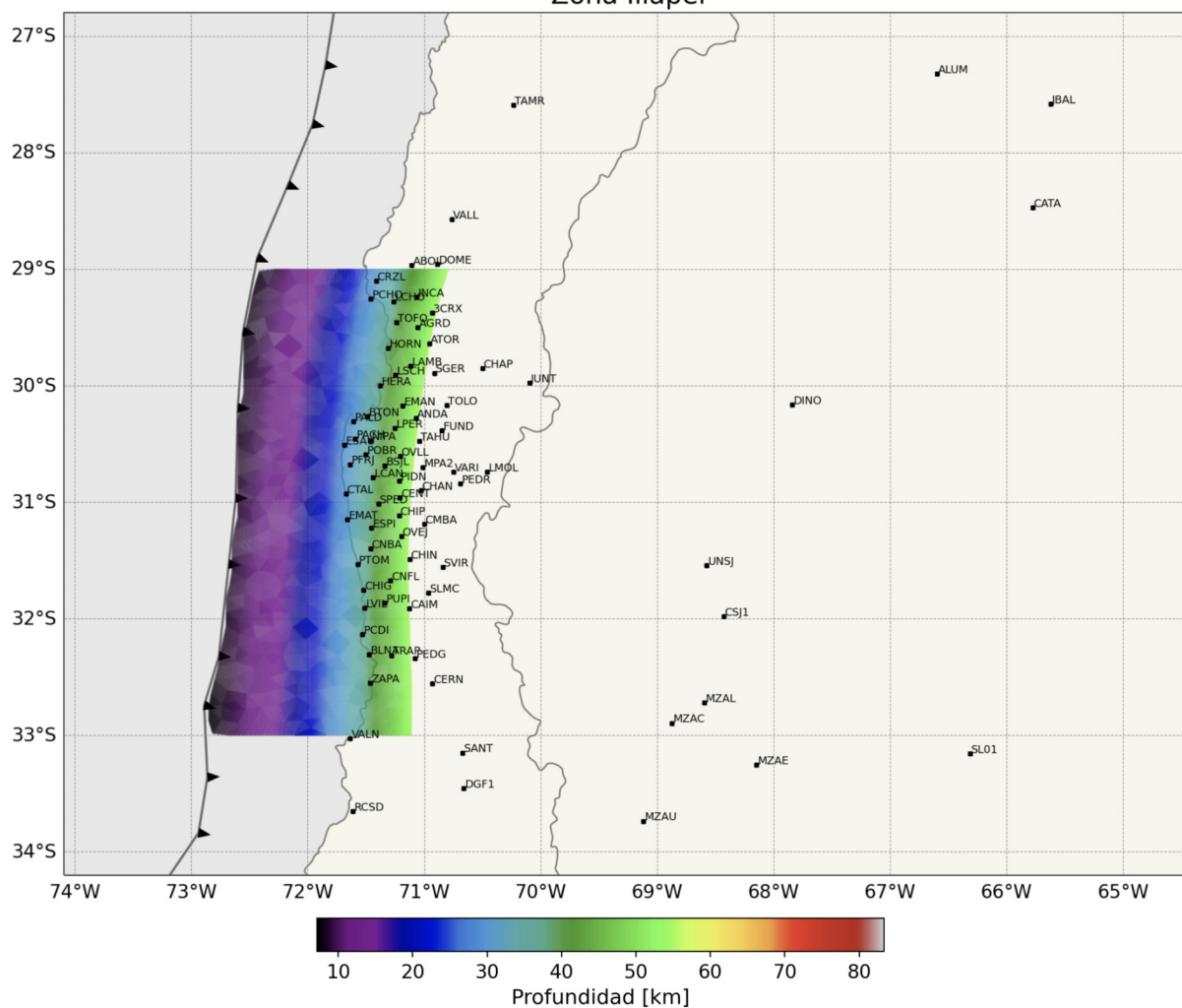


Figura A.2: Distribución de las estaciones de medición GNSS, recopilados por Klein et al. (2017) y situados tanto en Chile como en Argentina. La escala de color muestra la profundidad de las fuentes puntuales de la malla utilizada para el estudio en la zona de Illapel.

Anexo B. Resultados complementarios: Ejemplos Ilustrativos

B.1. Superficies

A continuación, se muestran las soluciones de los modelos seleccionados para distintos parámetros de regularización en las inversiones L2 y L1 (de las Figuras 3.14 y 3.15), con un *zoom* en la amplitud de las funciones base, de -0.1 a 0.1 en el caso de L2 (Figura B.1) y de -0.01 a 0.01 en el caso L1 (Figura B.2).

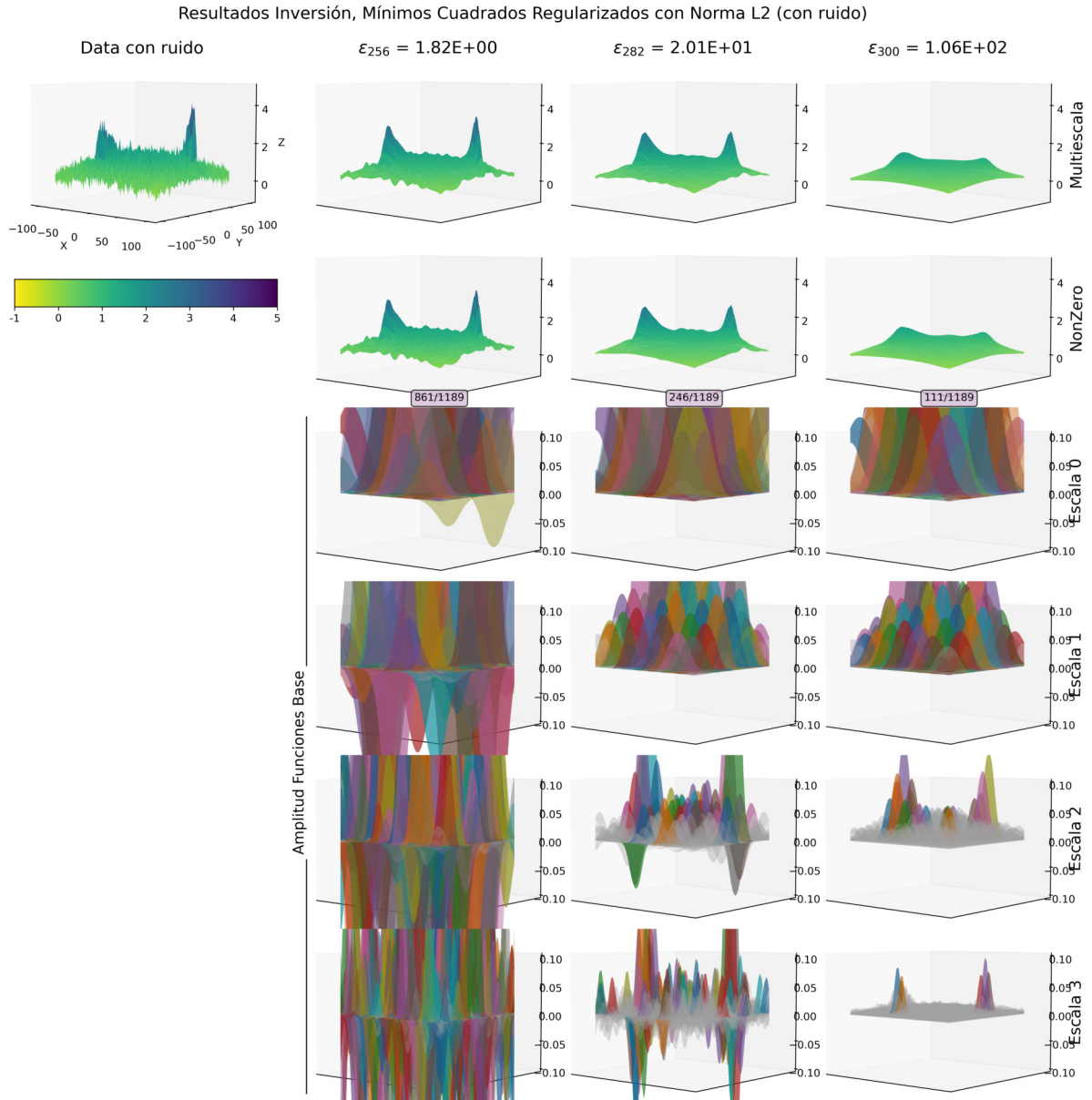


Figura B.1: Vista ampliada de las soluciones de los modelos seleccionados de la inversión con norma L2 (Figura 3.14). El *zoom* a las funciones base (paneles inferiores) es de -0.1 a 0.1. Se detallan los datos con ruido y las soluciones para tres parámetros de amortiguamiento.

Resultados Inversión, Mínimos Cuadrados Regularizados con Norma L1 (con ruido)

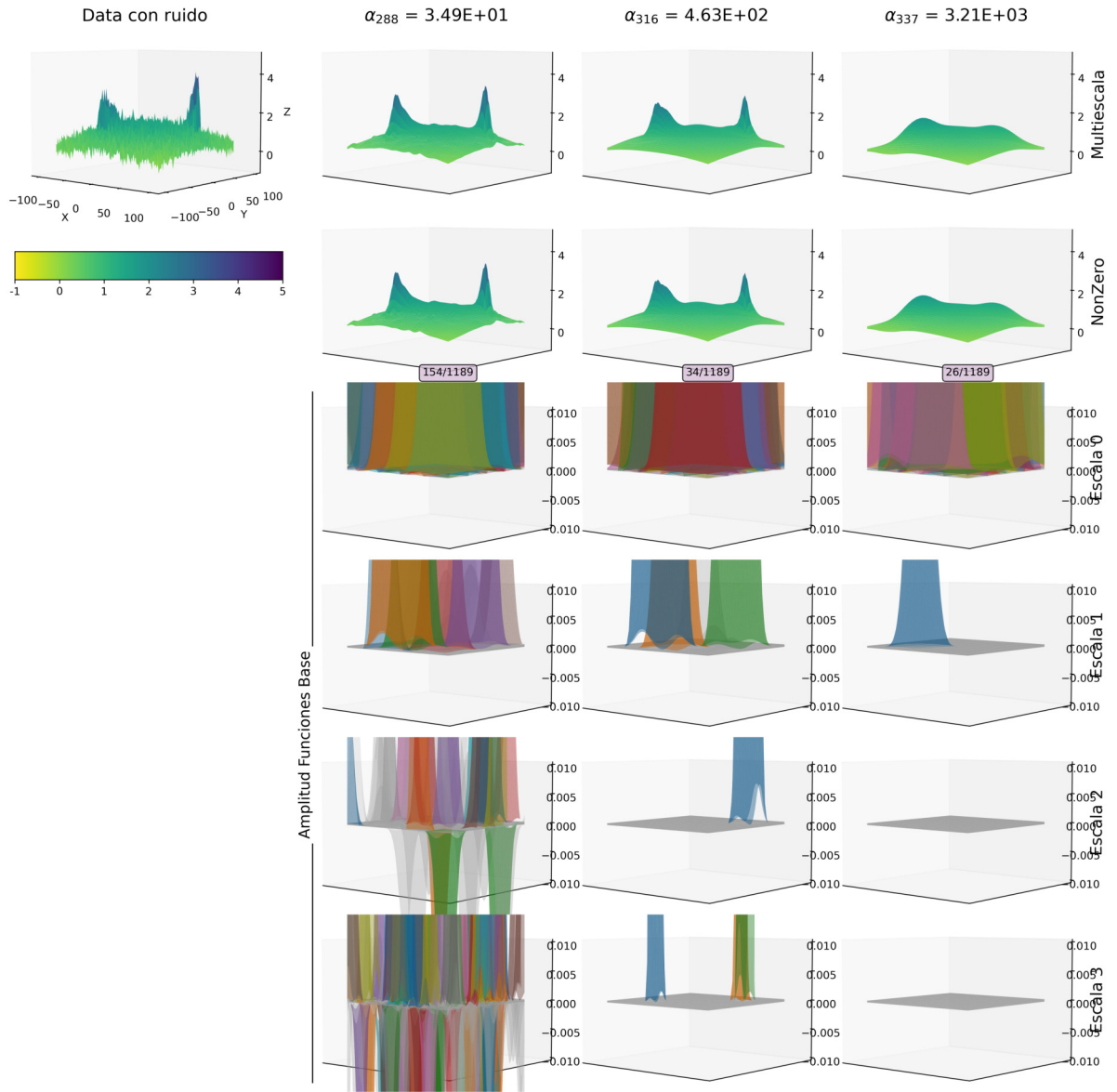


Figura B.2: Vista ampliada de las soluciones de los modelos seleccionados de la inversión con norma L1 (Figura 3.15). El *zoom* a las funciones base (paneles inferiores) es de -0.01 a 0.01. Se detallan los datos con ruido y las soluciones para tres parámetros de amortiguamiento.

Anexo C. Resultados complementarios: Falla vertical de rumbo

En esta sección se muestran los resultados de las inversiones regularizadas con normas L2 y L1 para los *tests* sintéticos $S4$ (Sección C.1) y $S0$ (Sección C.2), considerando una distribución de puntos de observación en superficie espaciados cada 10 km.

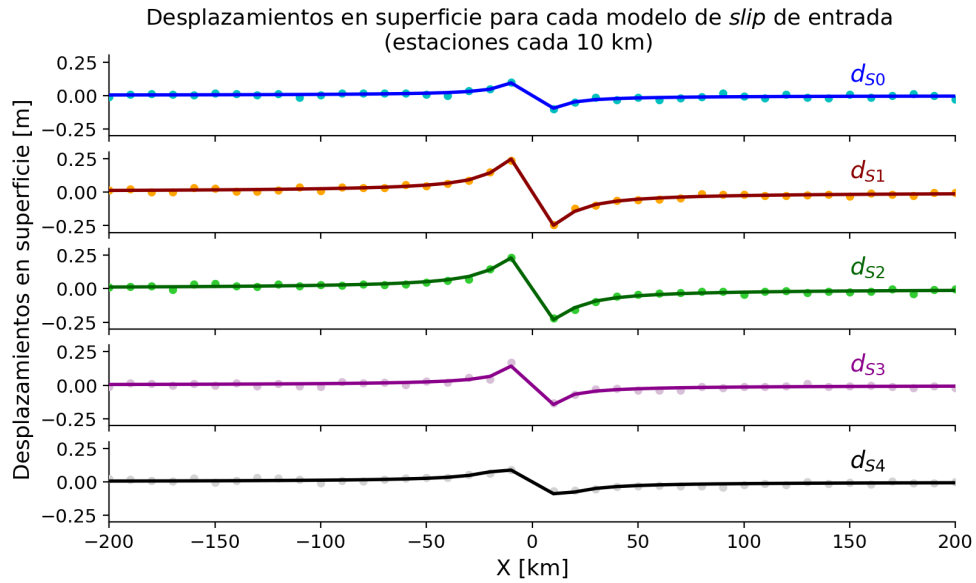
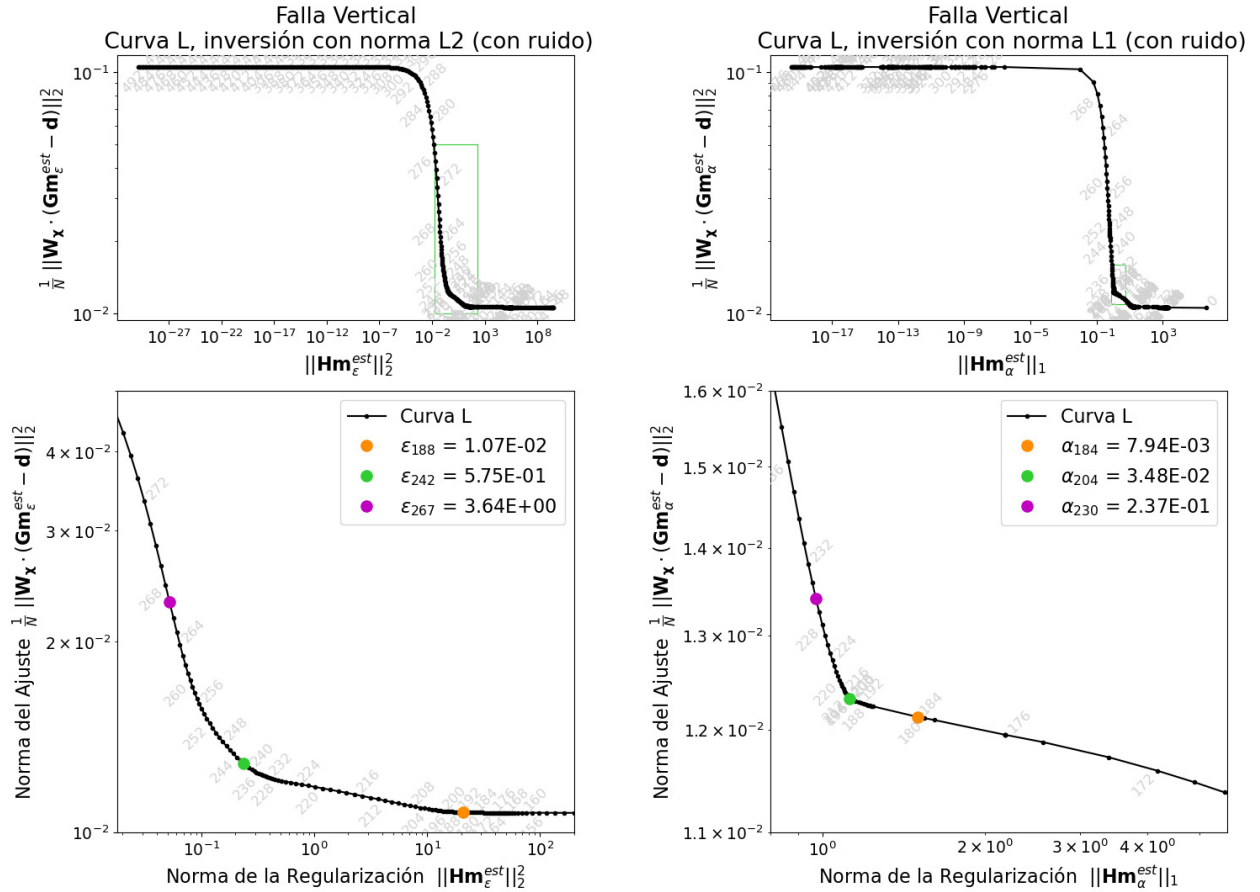


Figura C.1: Desplazamientos sintéticos en superficie dados por los modelos de *slip* de entrada, para una configuración de estaciones cada 10 km.

C.1. Observadores cada 10 km: *Slip Input S4*



(a) Curva L de la inversión del caso de una falla vertical ($S4 - 10$ km), regularizada con norma L2.

(b) Curva L de la inversión del caso de una falla vertical ($S4 - 10$ km), regularizada con norma L1.

Figura C.2: Curvas L para la resolución del problema inverso del caso de una falla vertical, con un *slip* sintético dado por $S4$, para una distribución de estaciones cada 10 km. Inversiones regularizadas con (a) norma L2 y (b) norma L1, ambas considerando datos sintéticos con ruido aleatorio añadido. Los números en gris indican el modelo asociado a cada punto negro en la curva. Los paneles inferiores son el *zoom* señalado con el cuadro verde de los paneles superiores. Los puntos de colores destacan los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento en cada caso.

Resultados inversión S4 (10 km)
Mínimos Cuadrados Regularizados con norma L2 (con ruido)

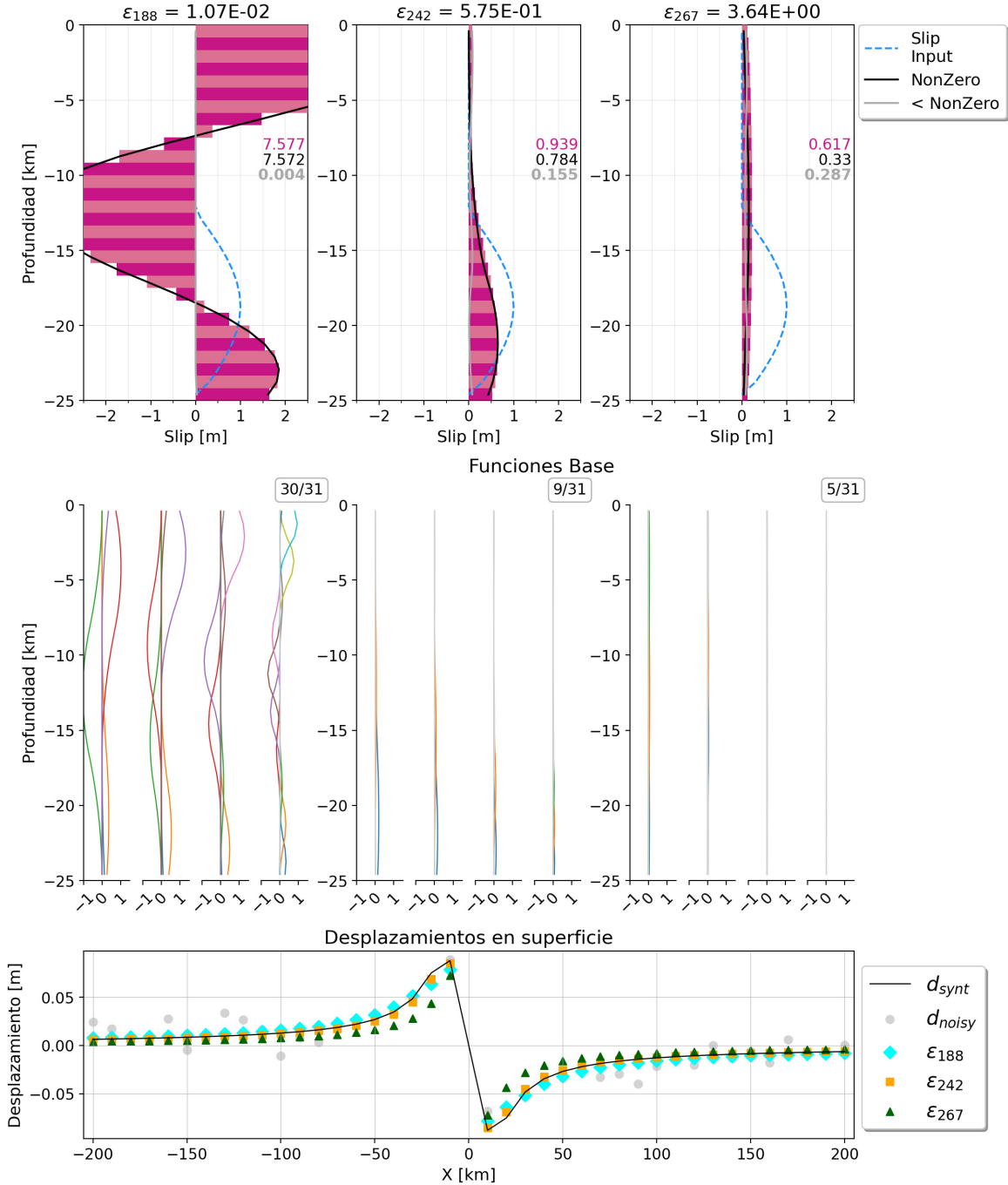


Figura C.3: Resultados de la inversión del modelo de *slip* sintético S4 (estaciones cada 10 km), con una regularización con norma L2. Cada columna corresponde a uno de los modelos seleccionados, a distintos grados de amortiguamiento. En la primera fila con barras rosadas se muestran los modelos totales, la curva negra exhibe el *slip* obtenido con las funciones mayores a *NonZero* y la curva gris el *slip* relacionado a las funciones menores al umbral. Los números de colores señalan la razón del área bajo cada curva de *slip*, con respecto del área del *slip* S4 (línea segmentada azul). Los paneles de la segunda fila muestran, para cada modelo, la contribución de las funciones base en las diferentes escalas; en gris las *b-splines* con amplitud bajo el umbral. Los números en el cuadro indican la cantidad de funciones base mayores a *NonZero*, respecto del total (31). El último panel muestra la comparación de los desplazamientos en superficie, sintéticos (con y sin ruido) y los predichos de cada modelo seleccionado.

Resultados inversión S4 (10 km)
Mínimos Cuadrados Regularizados con norma L1 (con ruido)

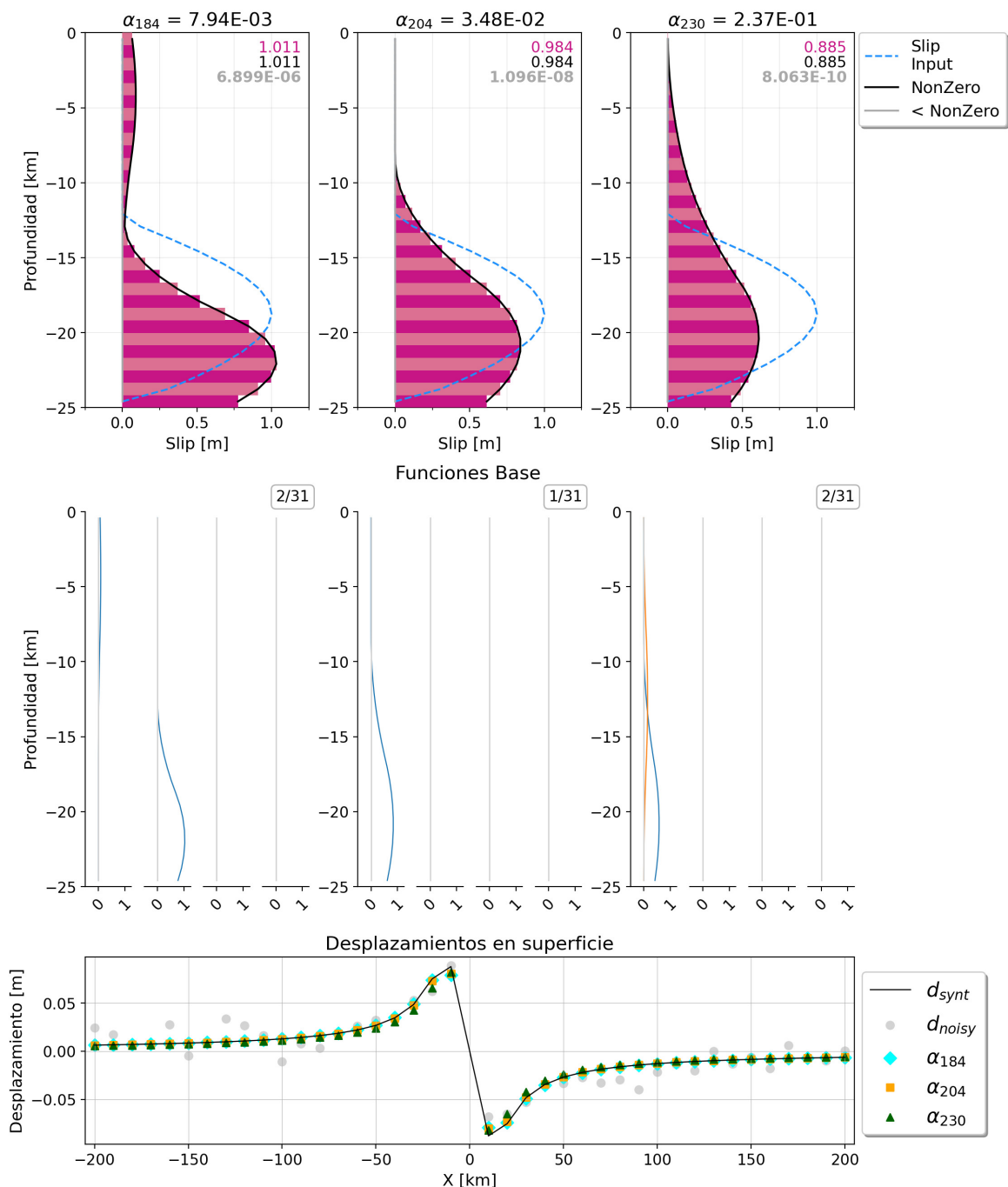
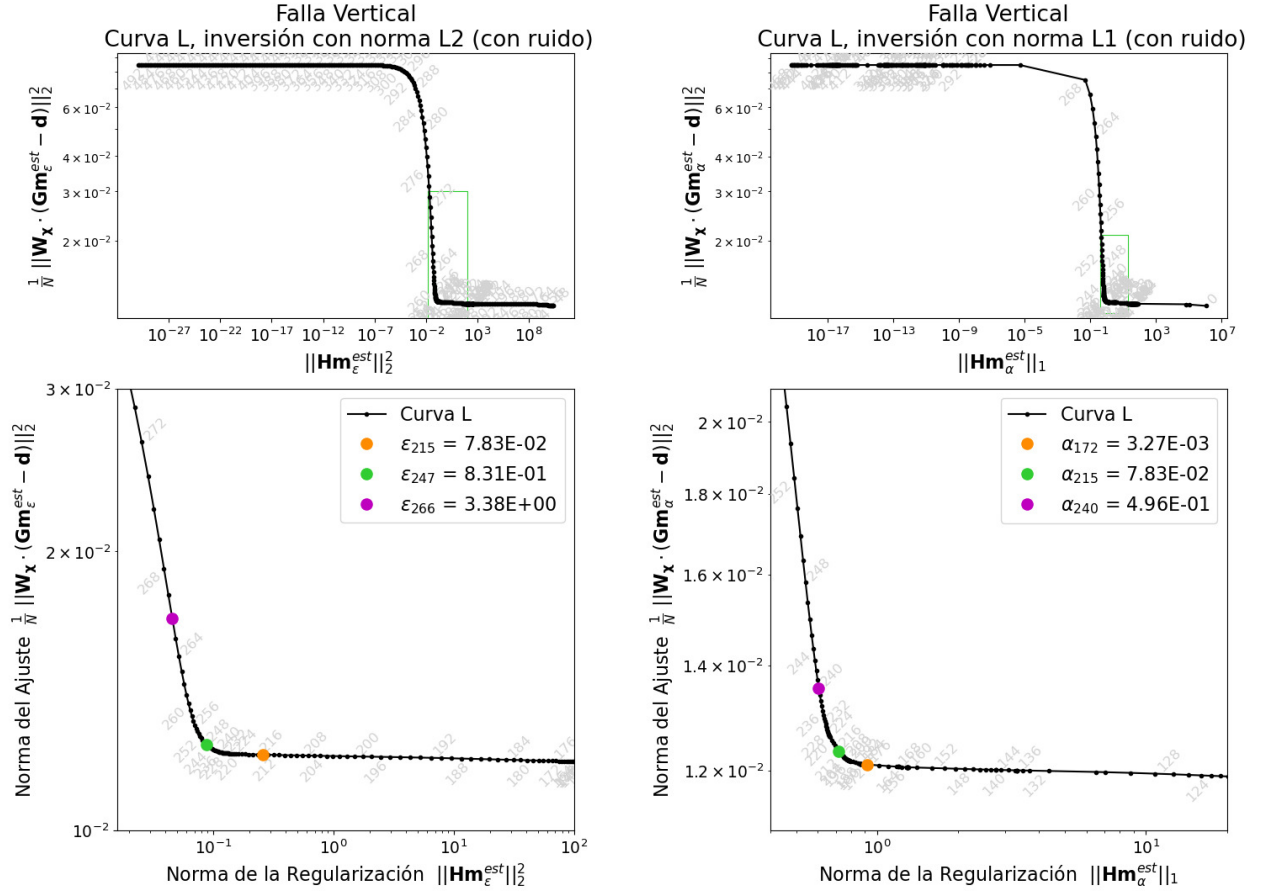


Figura C.4: Resultados de la inversión del modelo de *slip* sintético S4 (estaciones cada 10 km), con una regularización con norma L1. Cada columna corresponde a uno de los modelos seleccionados, a distintos grados de amortiguamiento. En la primera fila con barras rosadas se muestran los modelos totales, la curva negra exhibe el *slip* obtenido con las funciones mayores a *NonZero* y la curva gris el *slip* relacionado a las funciones menores al umbral. Los números de colores señalan la razón del área bajo cada curva de *slip*, con respecto del área del *slip* S4 (línea segmentada azul). Los paneles de la segunda fila muestran, para cada modelo, la contribución de las funciones base en las diferentes escalas; en gris las *b-splines* con amplitud bajo el umbral. Los números en el cuadro indican la cantidad de funciones base mayores a *NonZero*, respecto del total (31). El último panel muestra la comparación de los desplazamientos en superficie, sintéticos (con y sin ruido) y los predichos de cada modelo seleccionado.

C.2. Observadores cada 10 km: *Slip Input S0*



(a) Curva L de la inversión del caso de una falla vertical ($S0 - 10$ km), regularizada con norma L2.

(b) Curva L de la inversión del caso de una falla vertical ($S0 - 10$ km), regularizada con norma L1.

Figura C.5: Curvas L para la resolución del problema inverso del caso de una falla vertical, con un *slip* sintético dado por $S0$, para una distribución de estaciones cada 10 km. Inversiones regularizadas con (a) norma L2 y (b) norma L1, ambas considerando datos sintéticos con ruido aleatorio añadido. Los números en gris indican el modelo asociado a cada punto negro en la curva. Los paneles inferiores son el *zoom* señalado con el cuadro verde de los paneles superiores. Los puntos de colores destacan los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento en cada caso.

Resultados inversión S0 (10 km)
Mínimos Cuadrados Regularizados con norma L2 (con ruido)

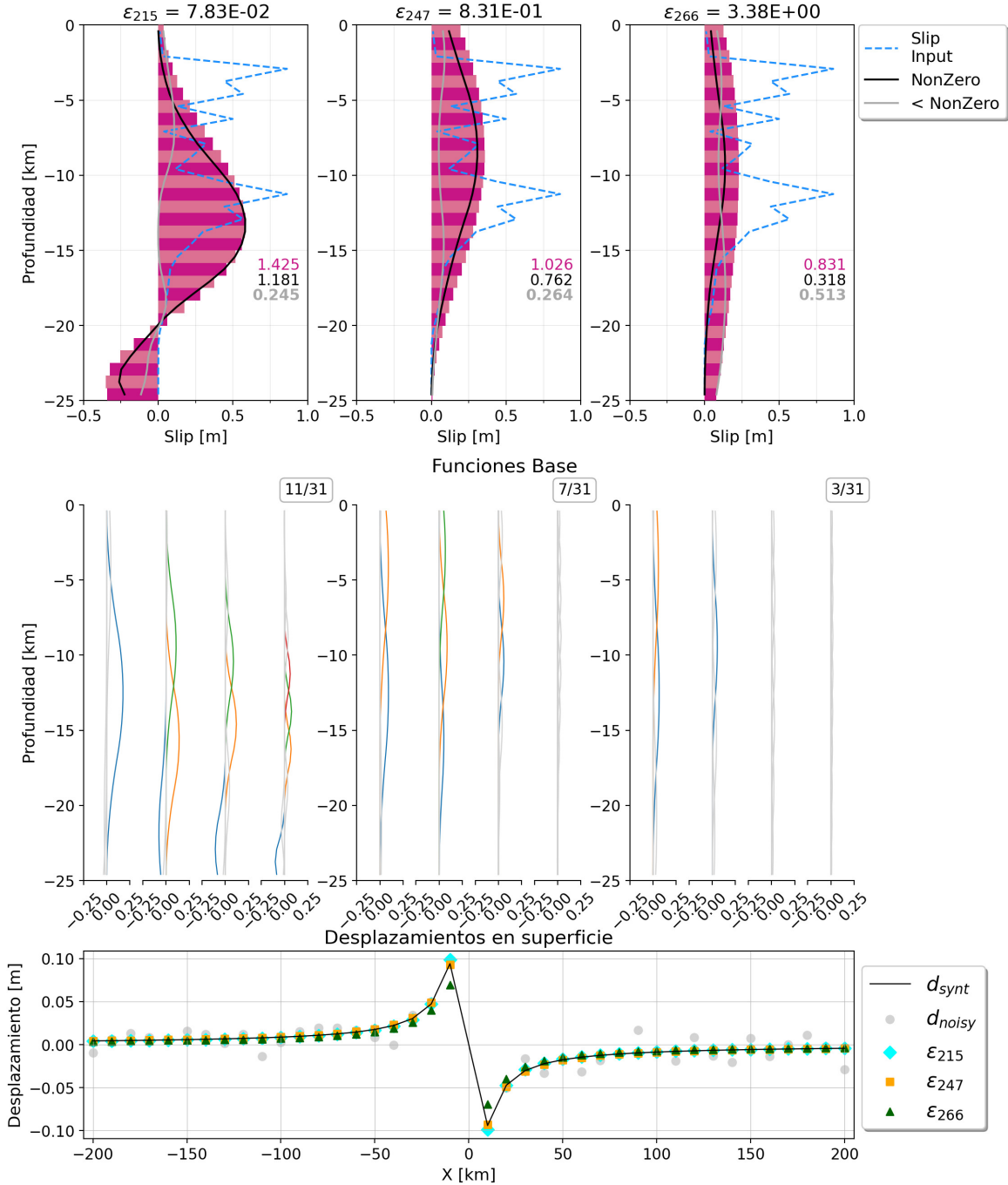


Figura C.6: Resultados de la inversión del modelo de *slip* sintético *S0* (estaciones cada 10 km), con una regularización con norma L2. Cada columna corresponde a uno de los modelos seleccionados, a distintos grados de amortiguamiento. En la primera fila con barras rosadas se muestran los modelos totales, la curva negra exhibe el *slip* obtenido con las funciones mayores a *NonZero* y la curva gris el *slip* relacionado a las funciones menores al umbral. Los números de colores señalan la razón del área bajo cada curva de *slip*, con respecto del área del *slip* *S0* (línea segmentada azul). Los paneles de la segunda fila muestran, para cada modelo, la contribución de las funciones base en las diferentes escalas; en gris las *b-splines* con amplitud bajo el umbral. Los números en el cuadro indican la cantidad de funciones base mayores a *NonZero*, respecto del total (31). El último panel muestra la comparación de los desplazamientos en superficie, sintéticos (con y sin ruido) y los predichos de cada modelo seleccionado.

Resultados inversión S0 (10 km)
Mínimos Cuadrados Regularizados con norma L1 (con ruido)

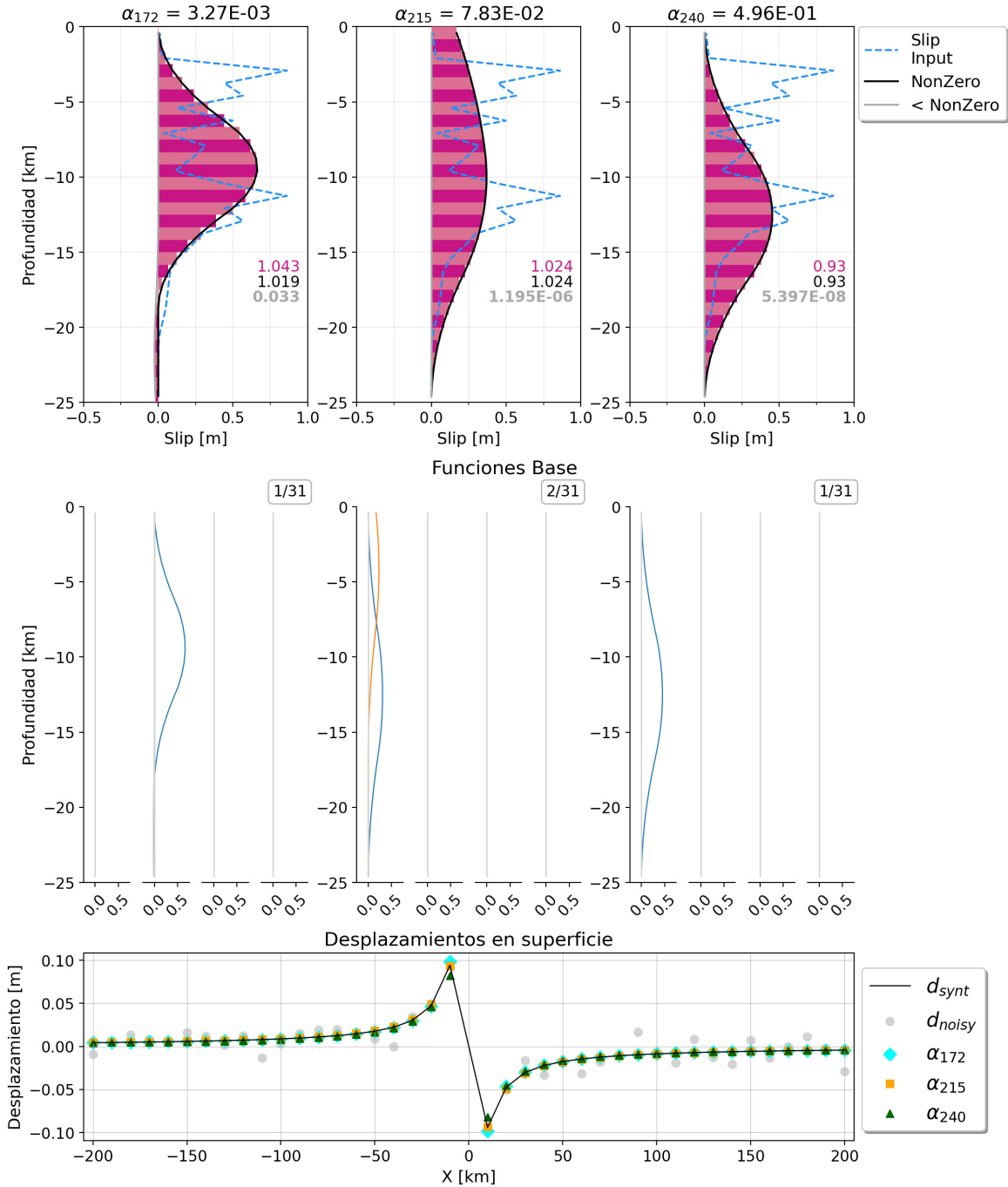


Figura C.7: Resultados de la inversión del modelo de *slip* sintético S_0 (estaciones cada 10 km), con una regularización con norma L1. Cada columna corresponde a uno de los modelos seleccionados, a distintos grados de amortiguamiento. En la primera fila con barras rosadas se muestran los modelos totales, la curva negra exhibe el *slip* obtenido con las funciones mayores a *NonZero* y la curva gris el *slip* relacionado a las funciones menores al umbral. Los números de colores señalan la razón del área bajo cada curva de *slip*, con respecto del área del *slip* S_0 (línea segmentada azul). Los paneles de la segunda fila muestran, para cada modelo, la contribución de las funciones base en las diferentes escalas; en gris las *b-splines* con amplitud bajo el umbral. Los números en el cuadro indican la cantidad de funciones base mayores a *NonZero*, respecto del total (31). El último panel muestra la comparación de los desplazamientos en superficie, sintéticos (con y sin ruido) y los predichos de cada modelo seleccionado.

Anexo D. Rotación

A continuación se muestran algunas figuras ilustrativas para ejemplificar la rotación del sistema coordinado, en las inversiones *theta-slip*. En éstas, se escoge un *rake* tal que la dirección del movimiento en cada subfalla sea paralelo, en planta, a la dirección representativa del movimiento. Para esto se utilizaron dos soluciones de mecanismo focal para el evento de Illapel, las proyecciones en superficie de este deslizamiento son representadas, esquemáticamente, por las flechas azules de la Figura D.1; entre ambas se define un rango total de 25 rotaciones, las que se indagaron mediante búsqueda binaria, y se pre-seleccionaron las rotaciones *theta-slip* 09 y 11.

El ángulo de referencia para esta dirección en planta se define como Az y es medido de manera positiva desde el N, en sentido horario.

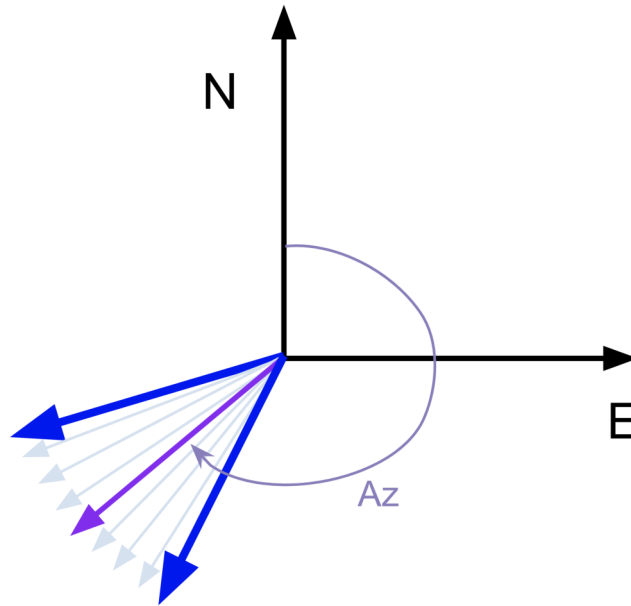


Figura D.1: Esquema de la búsqueda de la dirección de rotación en el eje (E, N). Las flechas azules representan la dirección de movimiento vista en planta para ambas soluciones de mecanismo focal, las flechas tenues muestran el rango de rotaciones definido por ambas soluciones (Tabla 5.1), mientras que la flecha morada exhibe la dirección seleccionada de este rango. Estas direcciones están referenciadas respecto al norte con el ángulo Az .

En la Figura D.2 se muestran las direcciones del a) *strike* y del b) *up-dip* en los elementos discretos triangulares de la malla. Mientras que los paneles c) y d) muestran la dirección del *rake* y el valor del ángulo *rake* representativo para la rotación seleccionada (con $Az = -94^\circ$).

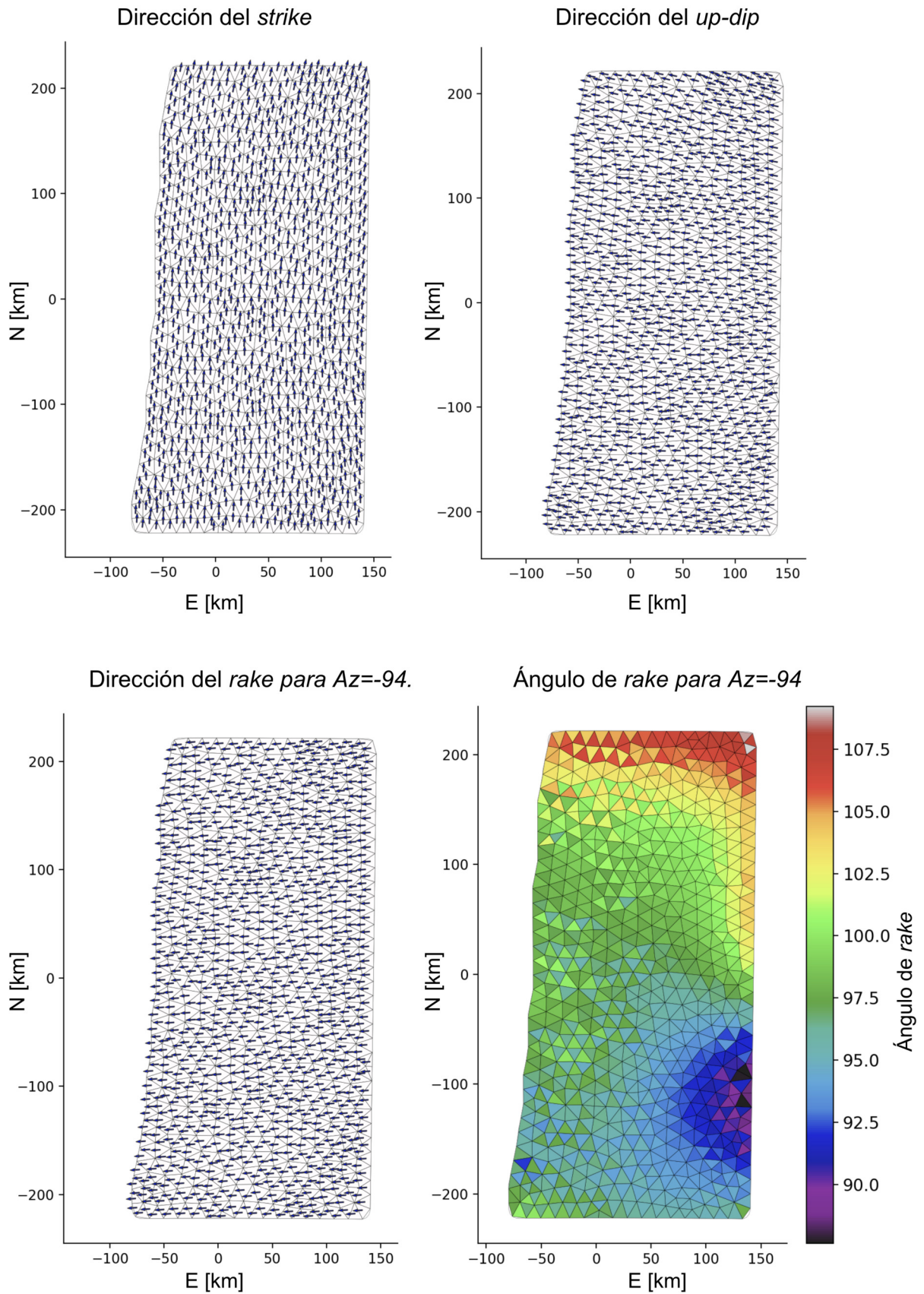
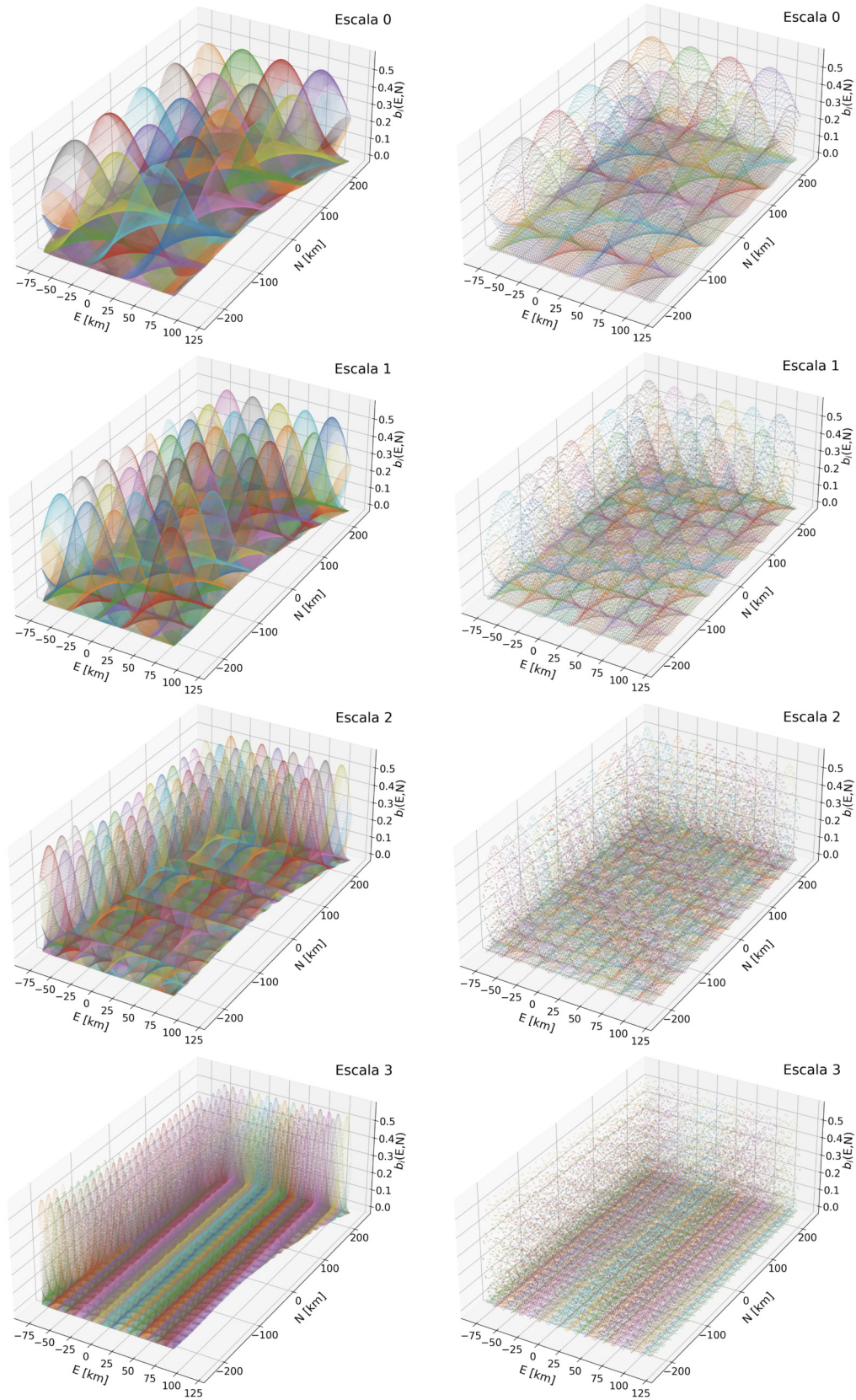


Figura D.2: Direcciones del a) *strike*, b) *up-dip*, c) *rake* y d) valor del ángulo de *rake* para cada elemento discreto de la malla triangularizada.

Anexo E. Resultados complementarios: Zona de Subducción

E.1. Uso de B^+ para la condición de positividad

A continuación se muestra todo lo referido a la evaluación de la restricción de positividad en la inversión de dislocación cuasi-estática aplicada a la geometría de la zona de Illapel. En la Figura E.1 se muestran las funciones base para \underline{B} y \underline{B}^+ , graficadas con puntos, es posible evidenciar la diferencia en el “muestreo” de cada uno de los conjuntos, sin embargo siguen siendo las mismas funciones base, con sus amplitudes, y formas, sólo que evaluadas en una cantidad más reducida de puntos.



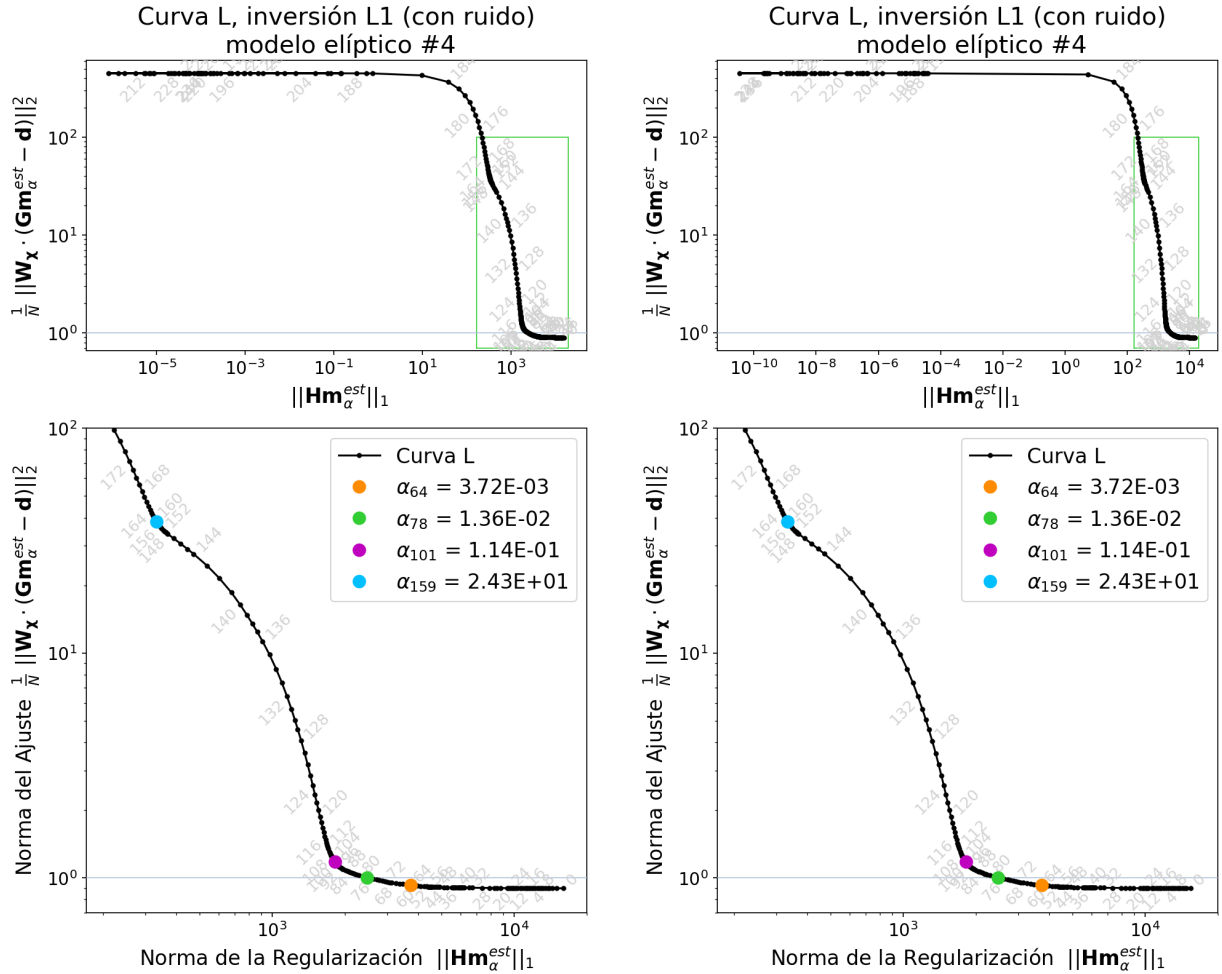
(a) Funciones base evaluadas en la malla de fuentes puntuales (\underline{B}).

(b) Funciones base evaluadas en el nuevo conjunto de puntos (submuestreada), para conformar la matriz \underline{B}^+ .

Figura E.1: Comparación de las funciones base en coordenadas Mercator Transversal, a) evaluadas en la malla de fuentes puntuales originales y b) aquellas evaluadas en la nueva colección de puntos para conformar la matriz \underline{B}^+ .

A continuación se muestran algunos resultados dentro de las pruebas de uso de la matriz $\underline{\underline{B}}^+$ como operador para evaluar la condición de positividad en las inversiones. Se compararán algunos modelos para los *test* sintéticos elipse 4 y tablero de ajedrez 3 con inversiones calculadas con la matriz original $\underline{\underline{B}}$, para ver los efectos de esta implementación en casos donde se conocen los patrones de *slip* que se deben recuperar.

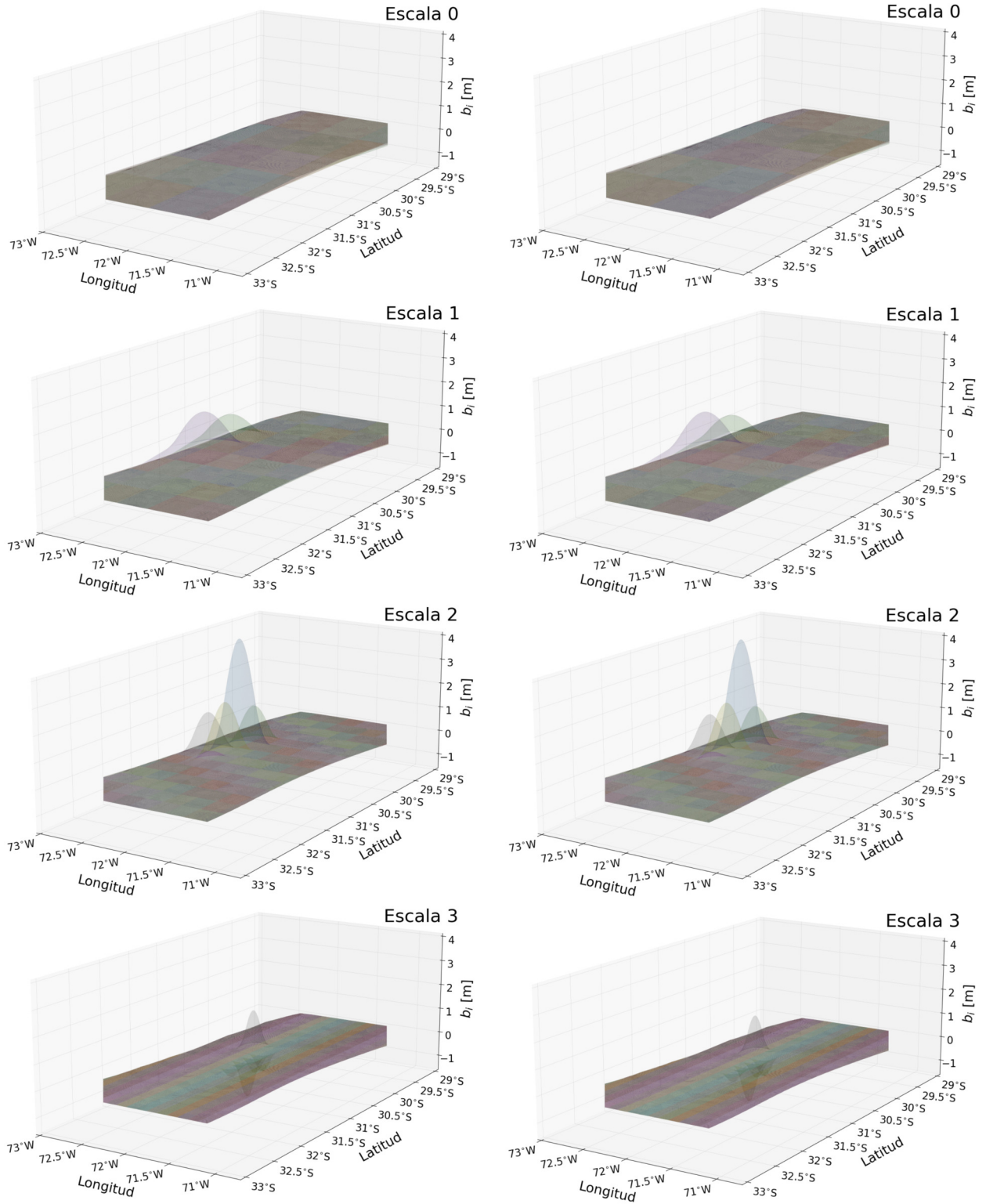
E.1.1. Elipse 4



(a) Curva L de la inversión L1 del *test* elipse 4, evaluando la condición de positividad con $\underline{\underline{B}}$.

(b) Curva L de la inversión L1 del *test* elipse 4, evaluando la condición de positividad con $\underline{\underline{B}}^+$.

Figura E.2: Curvas L para la resolución del problema inverso del *test* sintético elipse 4 en la geometría de Illapel. Inversión L1 sin normalizar, utilizando (a) la matriz $\underline{\underline{B}}$ y (b) la matriz $\underline{\underline{B}}^+$ para evaluar la condición de positividad. Los números en gris indican el modelo asociado a cada punto negro en la curva. Los paneles inferiores son el *zoom* señalado con el cuadro verde de los paneles superiores. Los puntos de colores destacan los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento en cada caso.

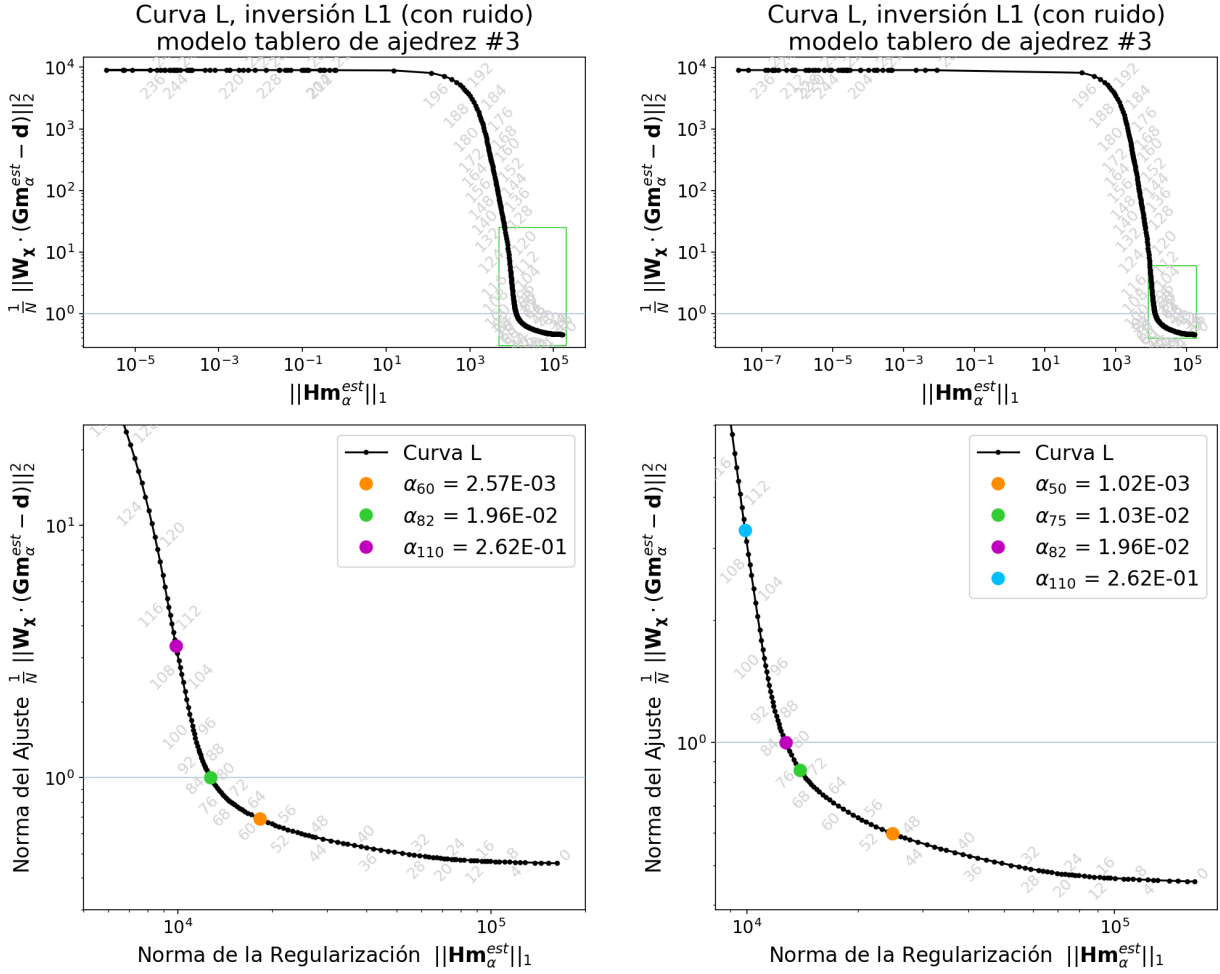


(a) Funciones base, inversión *test* sintético elipse 4, con \underline{B} para la condición de positividad.

(b) Funciones base, inversión *test* sintético elipse 4, con \underline{B}^+ para la condición de positividad.

Figura E.3: (Visión en planta) Comparación de la amplitud de las *b-splines* asociadas a las soluciones de la inversión del *test* sintético elipse 4, (a) utilizando la matriz \underline{B} y (b) usando la matriz \underline{B}^+ para evaluar la condición de positividad, todo esto para el modelo número 64 (i.e., α_{64}). Cada panel muestra las *b-splines* cúbicas de las distintas escalas, donde la escala 0 es la que incluye las funciones más extensas en el espacio y la número 3 aquellas más finas.

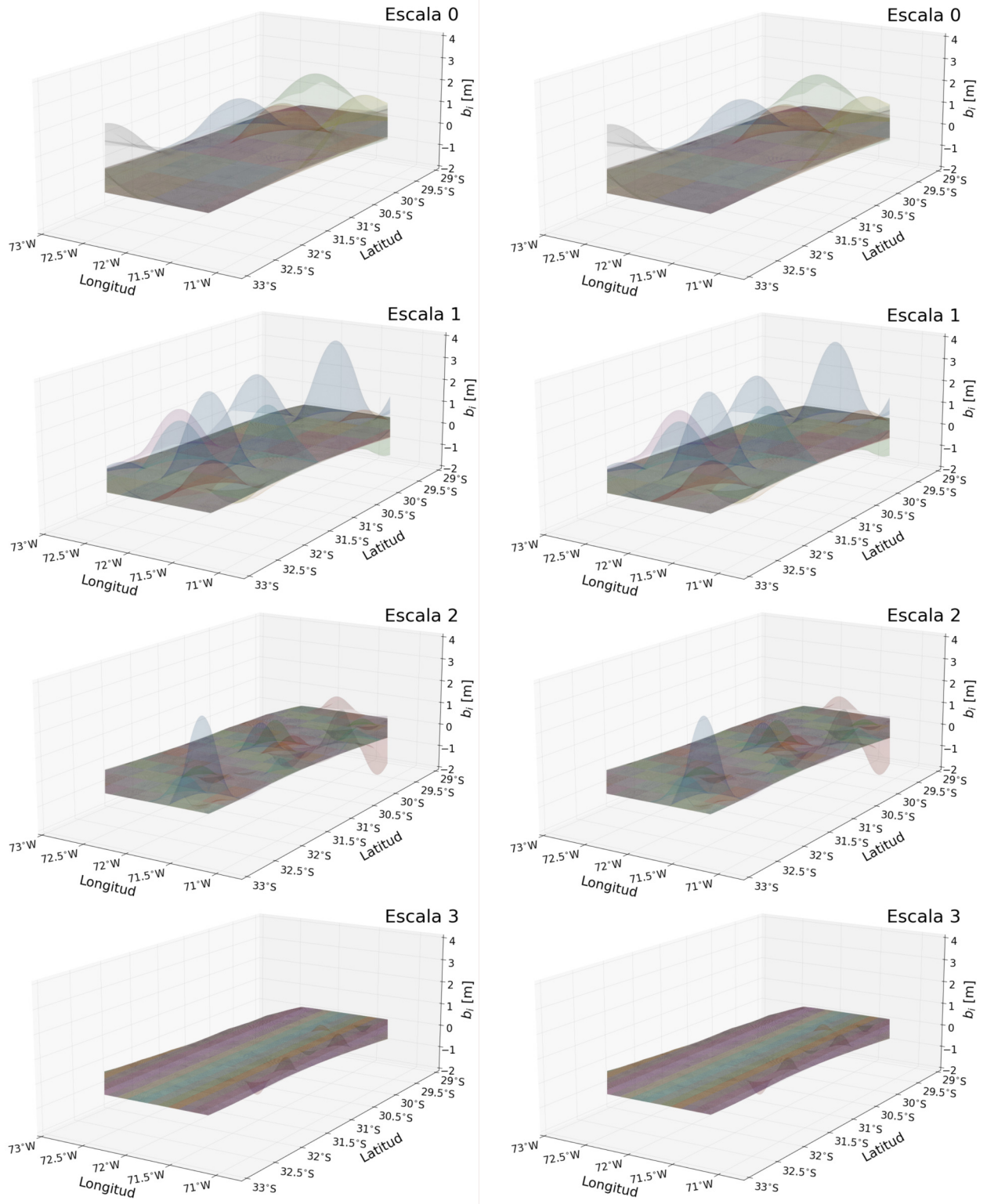
E.1.2. Tablero de ajedrez 3



(a) Curva L de la inversión L1 del *test* tablero de ajedrez 3, evaluando la condición de positividad con \underline{B} .

(b) Curva L de la inversión L1 del *test* tablero de ajedrez 3, evaluando la condición de positividad con \underline{B}^+ .

Figura E.4: Curvas L para la resolución del problema inverso del *test* sintético tablero de ajedrez 3 en la geometría de Illapel. Inversión L1 sin normalizar, utilizando (a) la matriz \underline{B} y (b) la matriz \underline{B}^+ para evaluar la condición de positividad. Los números en gris indican el modelo asociado a cada punto negro en la curva. Los paneles inferiores son el *zoom* señalado con el cuadro verde de los paneles superiores. Los puntos de colores destacan los modelos seleccionados con distinto nivel de amortiguamiento en cada caso.



(a) Funciones base, inversión *test* sintético tablero de ajedrez 3, con \underline{B} para la condición de positividad.

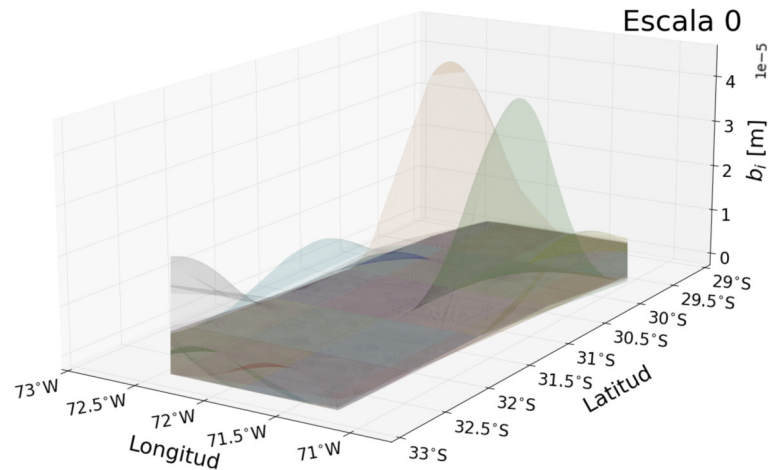
(b) Funciones base, inversión *test* sintético tablero de ajedrez 3, con \underline{B}^+ para la condición de positividad.

Figura E.5: (Visión en planta) Comparación de la amplitud de las *b-splines* asociadas a las soluciones de la inversión del *test* sintético tablero de ajedrez 3, (a) utilizando la matriz \underline{B} y (b) usando la matriz \underline{B}^+ para evaluar la condición de positividad, todo esto para el modelo número 82 (i.e., α_{82}). Cada panel muestra las *b-splines* cúbicas de las distintas escalas, donde la escala 0 es la que incluye las funciones más extensas en el espacio y la número 3 aquellas más finas.

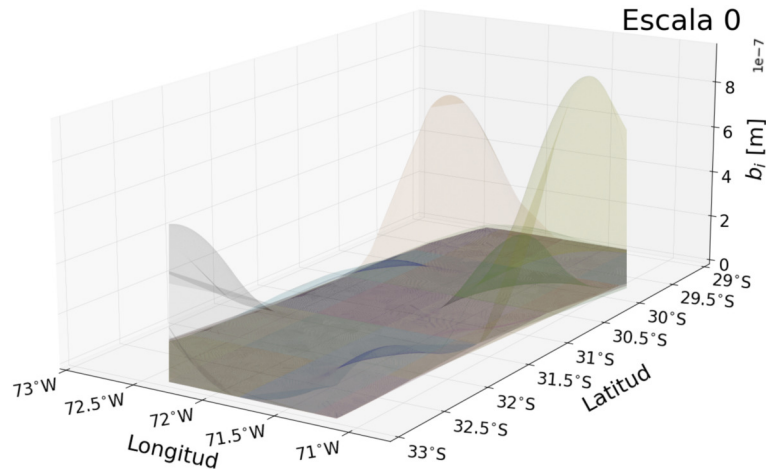
E.2. Normalización de las columnas de G

A continuación se muestran figuras con resultados complementarios a la comparación de resultados sin normalizar y utilizando la normalización propuesta (Sección 3.4).

Estas pruebas se realizaron con los *test* sintéticos elipse 4 y tablero de ajedrez 3, tal como se muestra en la Sección 4.2.2. En este apartado se presenta la contribución de las funciones base en las distintas escalas, para modelos elegidos de cada inversión, con distintos parámetros de regularización. Las Figuras E.6 y E.7 corresponden al modelo elipse 4, y la Figura E.8 al tablero de ajedrez 3.

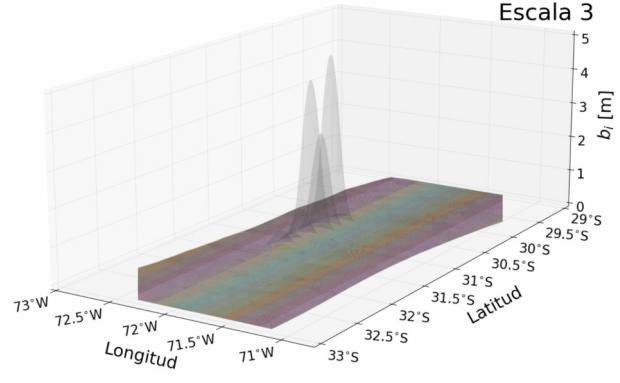
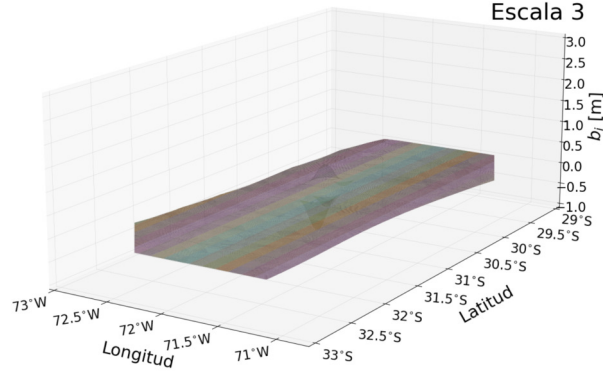
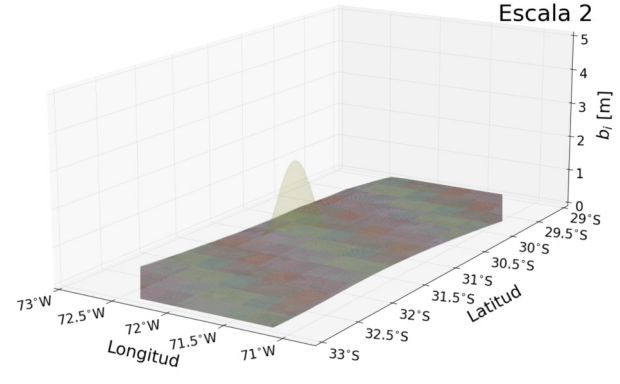
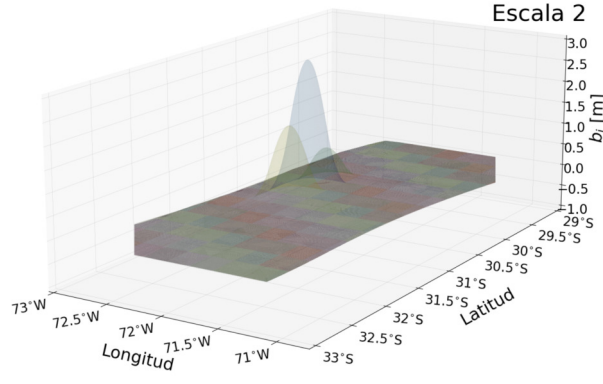
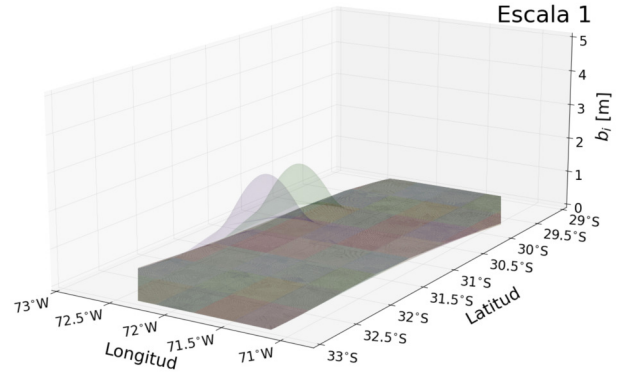
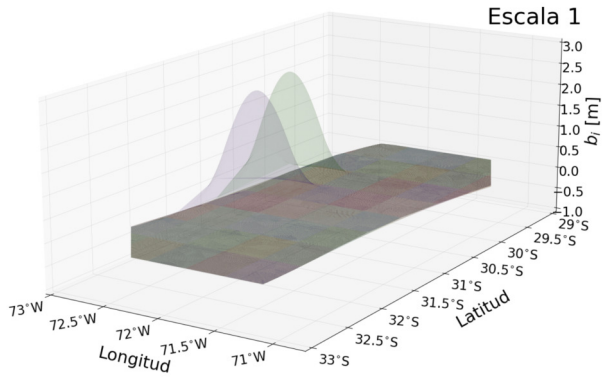
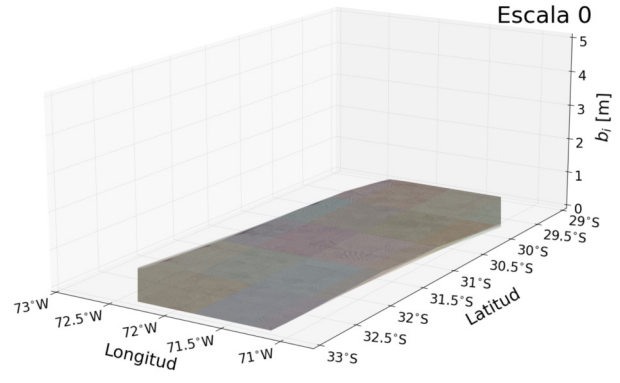
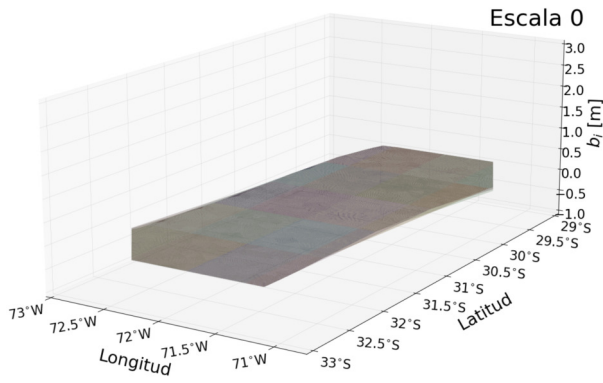


(a) Funciones base escala 0, modelo 78; inversión sin normalizar.



(b) Funciones base escala 0, modelo 103; inversión normalizada.

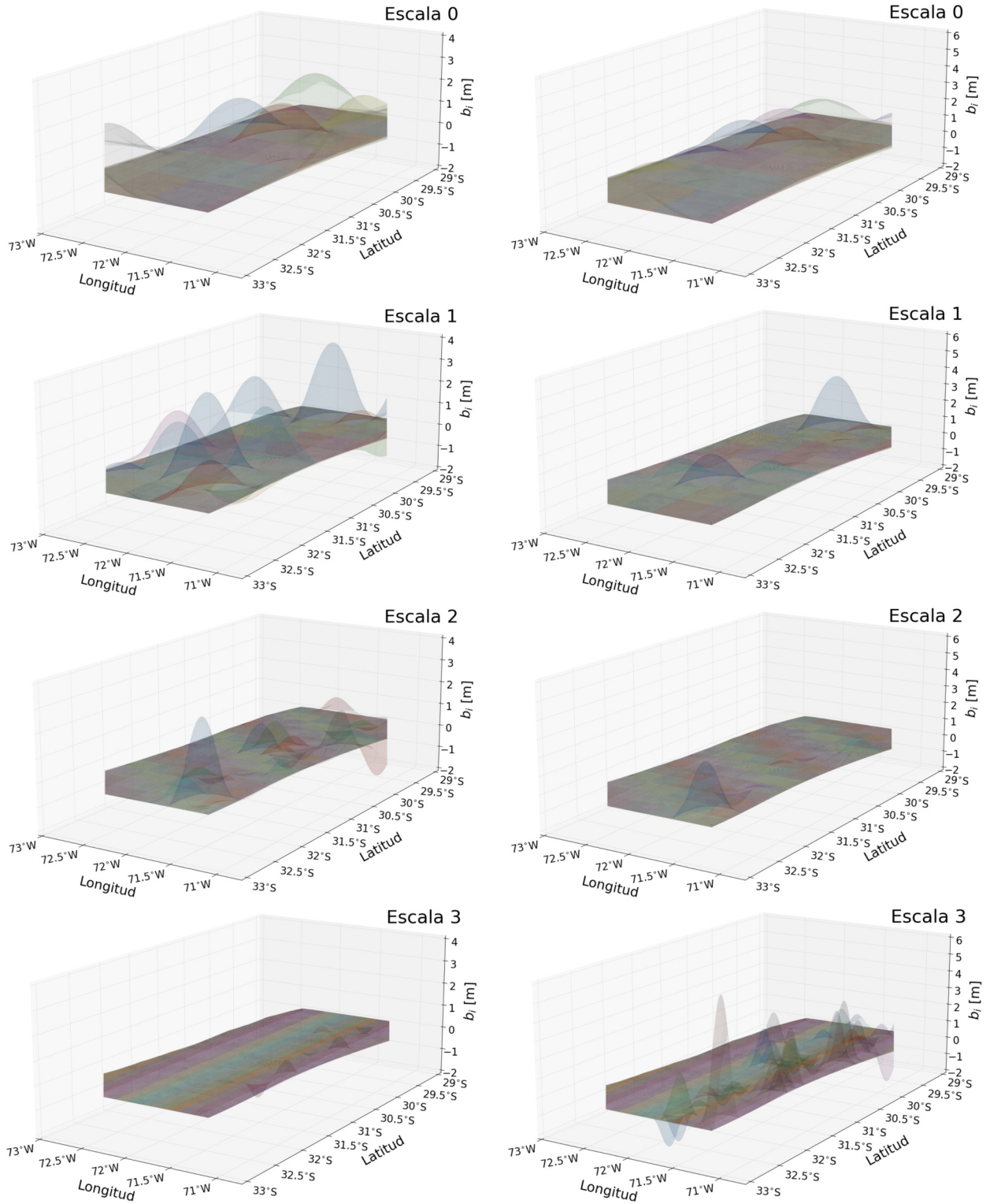
Figura E.6: (Visión en planta) Comparación de la amplitud de las b -splines en la escala 0, asociadas a las soluciones de la inversión del *test* sintético **elipse 4**, (a) modelo 78 de la inversión sin normalizar y (b) modelo 103 de la inversión normalizada. Zoom a la escala 0 (Referencia Figura E.7).



(a) Funciones base, modelo 78, inversión sin normalizar.

(b) Funciones base, modelo 103, inversión normalizada.

Figura E.7: (Visión en planta) Comparación de la amplitud de las b -splines asociadas a las soluciones de la inversión del *test* sintético **elipse 4**, (a) modelo 78 de la inversión sin normalizar y (b) modelo 103 de la inversión normalizada. Cada panel muestra las b -splines cúbicas de las distintas escalas, donde la escala 0 es la que incluye las funciones más extensas en el espacio y la número 3 aquellas más finas.



(a) Funciones base, modelo 82, inversión sin normalizar.

(b) Funciones base, modelo 101, inversión normalizada.

Figura E.8: (Visión en planta) Comparación de la amplitud de las b -splines asociadas a las soluciones de la inversión del *test* sintético **tablero de ajedrez 3**, (a) modelo 82 de la inversión sin normalizar y (b) modelo 101 de la inversión normalizada. Cada panel muestra las b -splines cúbicas de las distintas escalas, donde la escala 0 es la que incluye las funciones más extensas en el espacio y la número 3 aquellas más finas.

E.3. Resultados Complementarios: Cosísmico Illapel

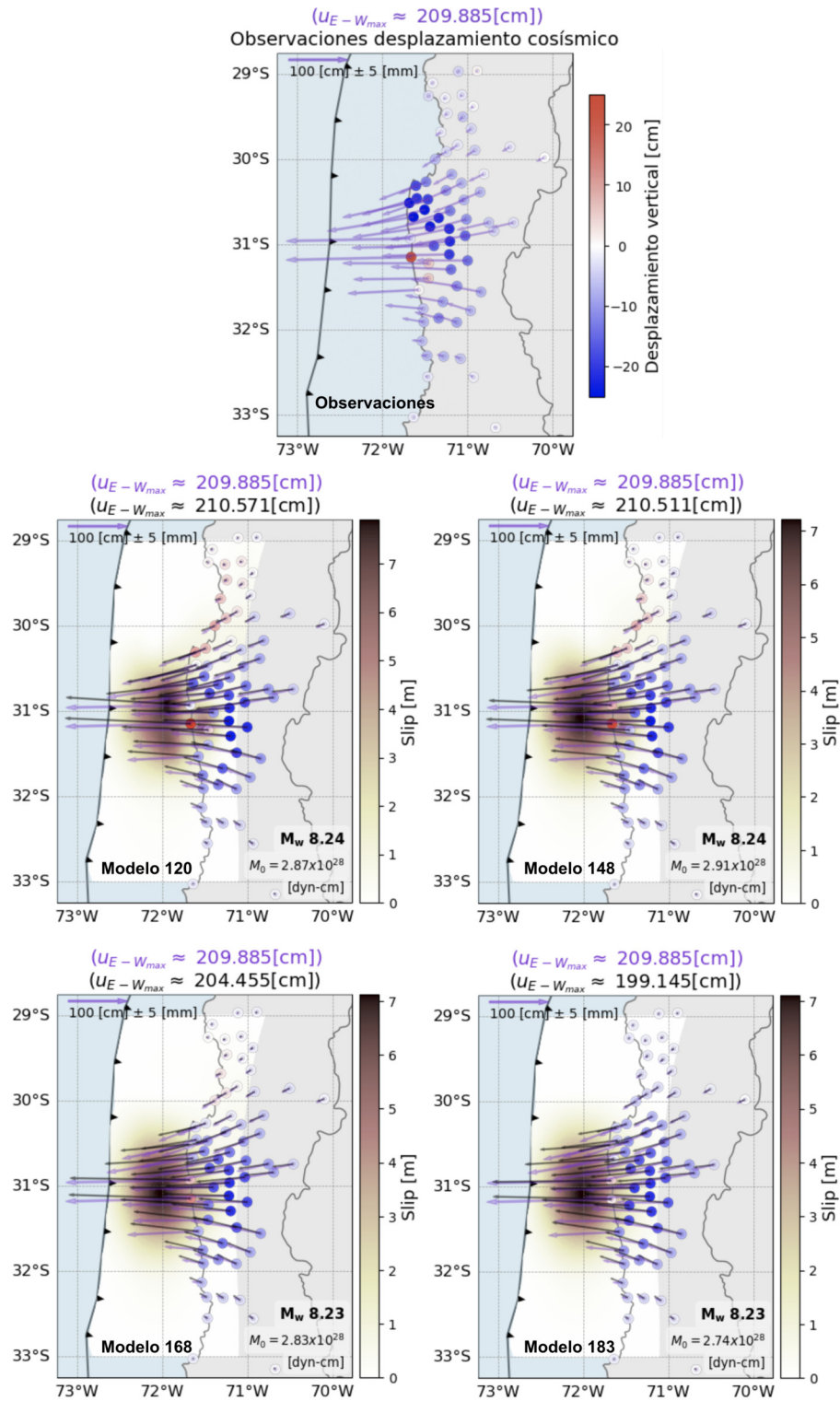


Figura E.9: Modelos de *slip* para algunos modelos seleccionados de la inversión utilizando como rotación el ángulo dado por el primer mecanismo focal para el terremoto de Illapel (Tabla 5.1). Estas soluciones corresponden a las mencionadas en este trabajo como *theta-slip* 01.

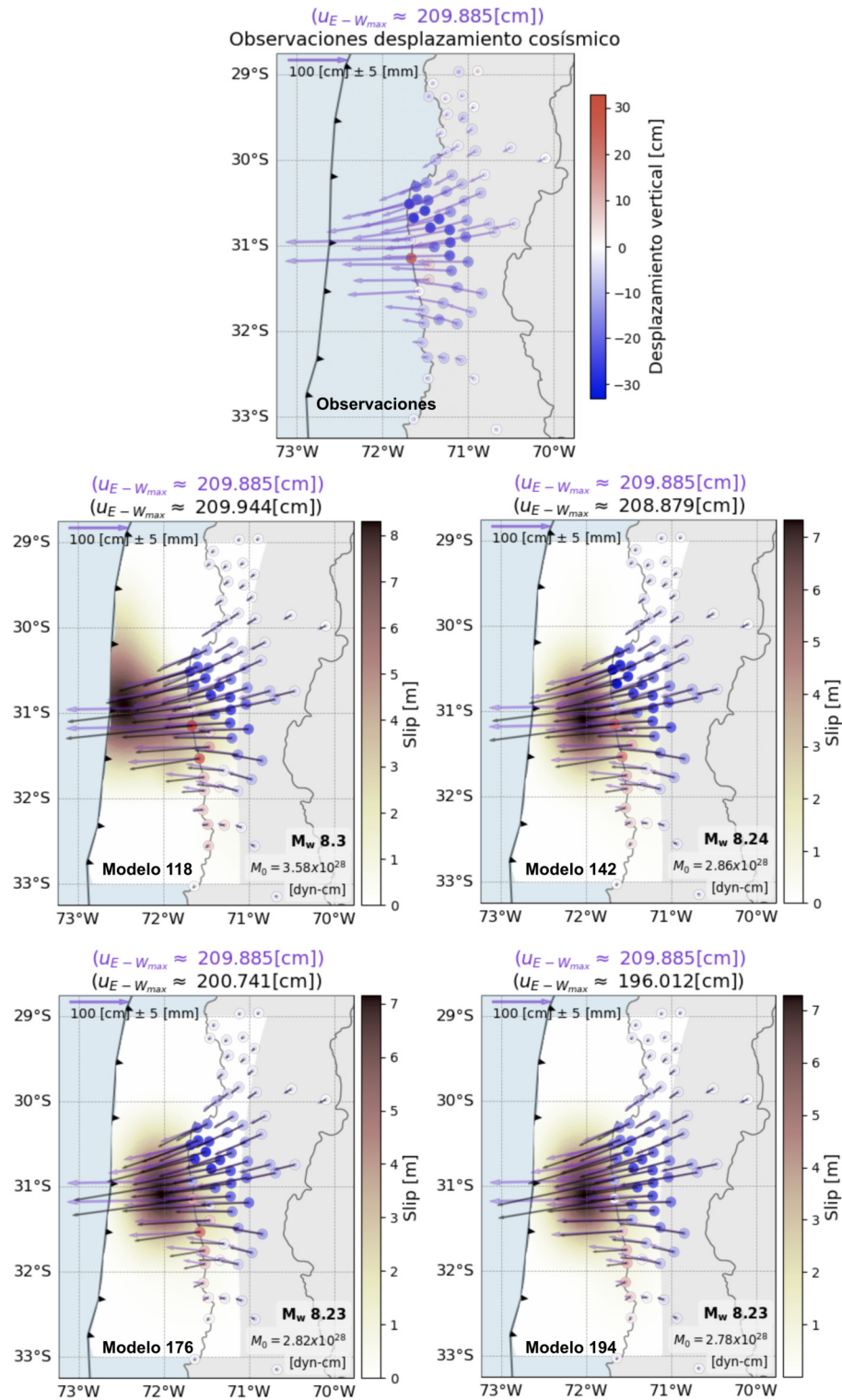


Figura E.10: Modelos de *slip* para algunos modelos seleccionados de la inversión utilizando como rotación el ángulo dado por el segundo mecanismo focal para el terremoto de Illapel (Tabla 5.1). Estas soluciones corresponden a las mencionadas en este trabajo como *theta-slip 25*.

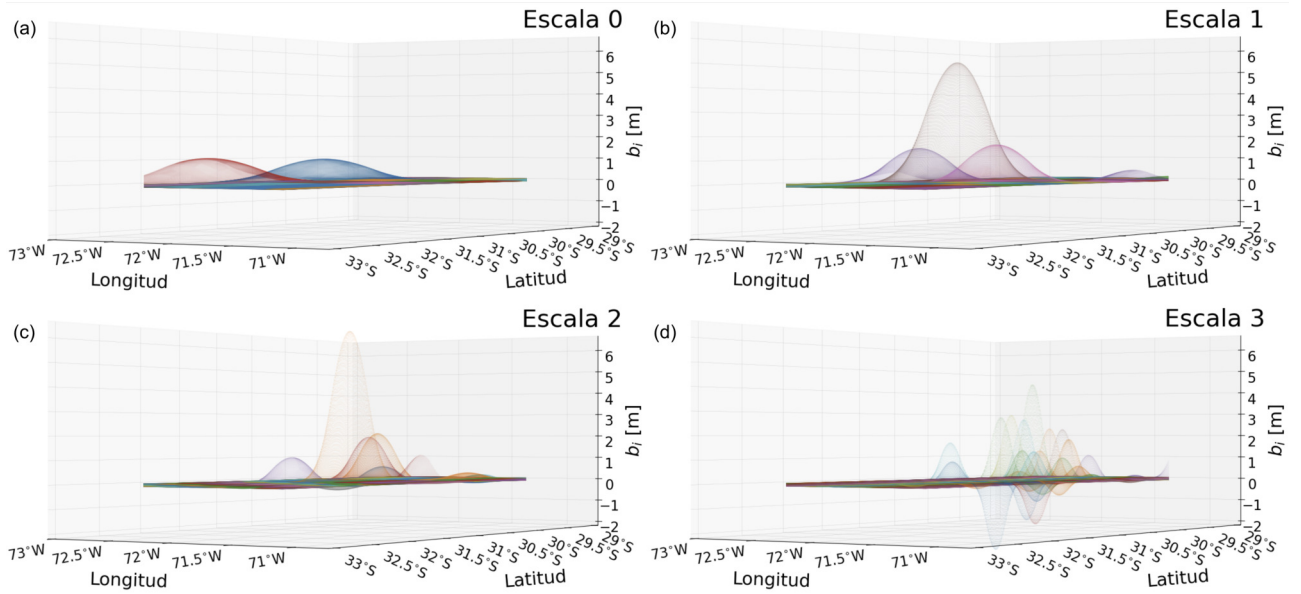


Figura E.11: (Visión de perfil) Amplitud de las b -splines asociadas al modelo de *slip* número 50, de la inversión con *theta-slip* 09. Cada panel muestra las b -splines cúbicas de las distintas escalas, donde la escala 0 es la que incluye las funciones más extensas en el espacio y la número 3 aquellas más finas.

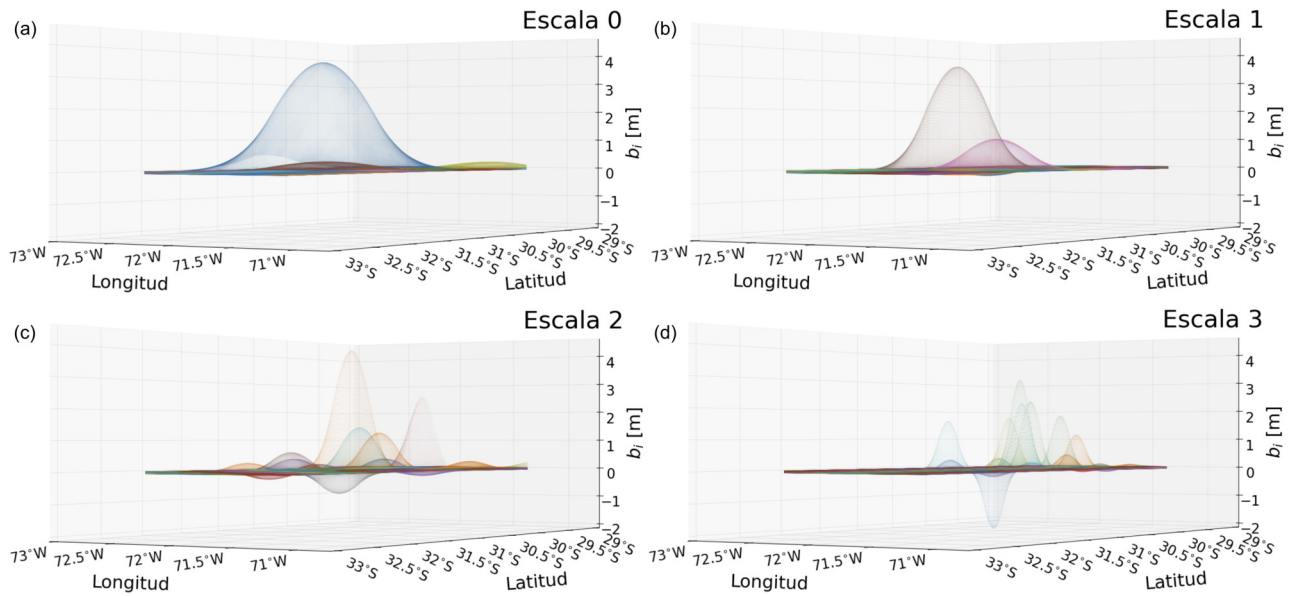


Figura E.12: (Visión de perfil) Amplitud de las b -splines asociadas al modelo de *slip* número 64, de la inversión con *theta-slip* 11. Cada panel muestra las b -splines cúbicas de las distintas escalas, donde la escala 0 es la que incluye las funciones más extensas en el espacio y la número 3 aquellas más finas.

Anexo F. Modelo de Dislocación de tornillo

A continuación se detalla el planteamiento de un tipo de modelo para fallas *strike-slip*, el cual fue utilizado como base para uno de los ejemplos sintéticos que se abordan en este trabajo, basado en lo descrito por Segall (2010).

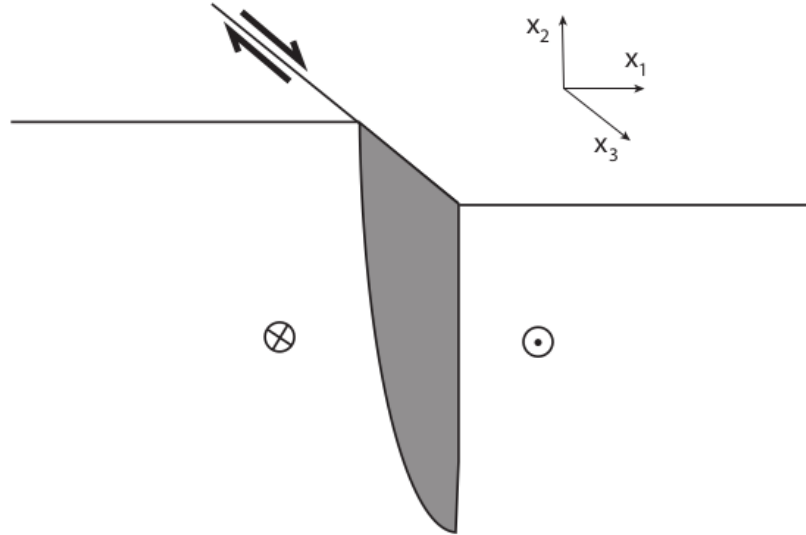


Figura F.1: Diagrama de una falla *strike-slip* infinitamente larga, donde la superficie de la Tierra es el plano $x_2 = 0$. La falla yace en el plano normal a x_1 , con *slip* en la dirección x_3 . Extraído de Segall (2010).

Se considera un semi-espacio lineal, elástico y homogéneo, en el cual hay una falla *strike-slip* infinitamente extendida en la dirección x_3 (Figura F.1). La deformación es anti-planar, es decir, el único desplazamiento no nulo es paralelo a la falla en la dirección x_3 y a su vez varía sólo en el plano perpendicular a ésta, esto es, u_3 varía sólo con x_1 y x_2 , $\underline{u}(\underline{x}) = u_3(x_1, x_2)\hat{e}_3$.

Solución para un espacio infinito

Como primera aproximación, se ignora la superficie libre, por lo que se considera una falla en un espacio infinitamente extendido. De la Figura F.1 se puede advertir que el campo de desplazamientos no es continuo en el plano x_2, x_3 ; es decir, la superficie de falla.

Una discontinuidad impuesta en los desplazamientos a lo largo de una superficie es lo que se conoce como **dislocación**.

En una geometría anti-planar como se describió anteriormente, el desplazamiento describe un movimiento helicoidal alrededor de la dislocación (Figura F.2), lo que se conoce como *screw dislocation* o dislocación de tornillo. La condición de borde de la dislocación es que la discontinuidad de desplazamiento a lo largo de la superficie de dislocación (el semi-plano de la falla $x_1 = 0, x_2 > 0$) es igual al *slip* en la falla.

$$u_3(\theta = 2\pi) - u_3(\theta = 0) = s \quad (\text{F.1})$$

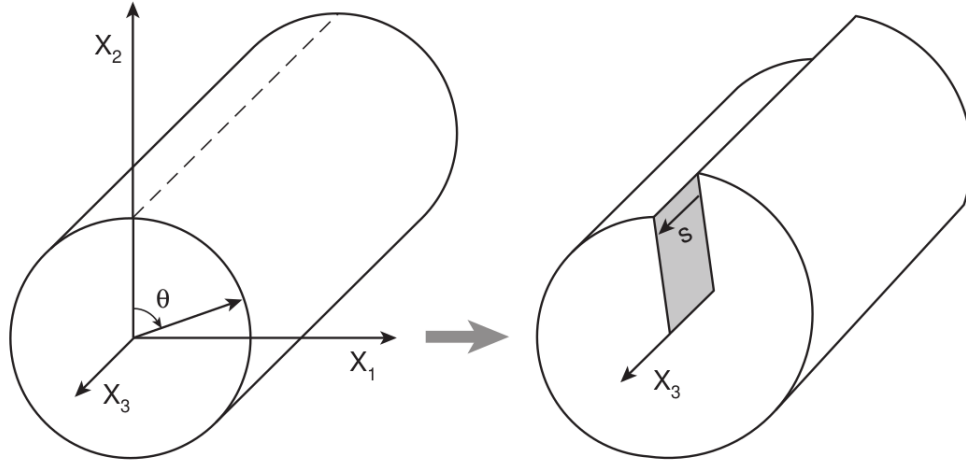


Figura F.2: Dislocación de tornillo, con la línea de dislocación a lo largo de x_3 . El vector de *slip* \underline{s} muestra el desplazamiento de la superficie trasera con respecto a la frontal, indicando que el *slip* es lateral-izquierdo. Extraído de Segall (2010).

En dicha geometría, sólo dos deformaciones son no nulas y se expresan como

$$\epsilon_{13} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \quad \epsilon_{23} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \quad (\text{F.2})$$

La Ley de Hooke para un material elástico, homogéneo e isotrópico es,

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (\text{F.3})$$

De esta forma, para el caso de la geometría anti-planar, las expresiones para los esfuerzos no nulos, que son esfuerzos de corte, son:

$$\sigma_{13} = \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \quad \sigma_{23} = \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \quad (\text{F.4})$$

Dichos esfuerzos satisfacen las ecuaciones de equilibrio, las que no considerando términos inerciales y fuerzas de cuerpo son de la forma

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{F.5})$$

Para el caso de deformación anti-planar, la ecuación F.5 queda

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} = 0 \quad (\text{F.6})$$

Reemplazando las expresiones para los esfuerzos de la ecuación F.4 se tiene,

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = \nabla^2 u_3(x_1, x_2) = 0 \quad (\text{F.7})$$

De la expresión F.7 se tiene que el campo de desplazamientos satisface la ecuación de Laplace, lo cual es un resultado general para problemas de elasticidad anti-planar. De la Figura F.2,

se puede notar que el desplazamiento incrementa con el ángulo θ excepto en la superficie de dislocación, por lo que se propone la siguiente solución

$$u_3 = \pm \frac{s\theta}{2\pi} \quad , \quad (\text{F.8})$$

con θ variando entre 0 y 2π . La solución propuesta fue construida para satisfacer la condición de borde expresada en la ecuación F.1, y se puede verificar que también cumple con las ecuaciones de equilibrio antes descritas. Eligiendo de F.8 la solución negativa (por el sentido del movimiento de la falla), se tiene la expresión para los desplazamientos en coordenadas cartesianas

$$u_3 = -\frac{s\theta}{2\pi} = -\frac{s}{2\pi} \arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \quad (\text{F.9})$$

Por tanto, las derivadas parciales del desplazamiento son de la forma:

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = -\frac{s}{2\pi} \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{s}{2\pi} \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \quad , \quad (\text{F.10})$$

expresiones que se puede ratificar, cumplen la ecuación de equilibrio. Los esfuerzos asociados son

$$\sigma_{13} = \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = -\frac{s\mu}{2\pi} \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} = -\frac{s\mu}{2\pi} \frac{\cos\theta}{r} \quad (\text{F.11})$$

$$\sigma_{23} = \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{s\mu}{2\pi} \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{s\mu}{2\pi} \frac{\sin\theta}{r} \quad (\text{F.12})$$

De las expresiones anteriores, se nota que los esfuerzos decaen a razón de $1/r$, esto es desde la línea de dislocación, la cual es la fuente de deformación, y no de la superficie de dislocación.

Luego, se puede avanzar a considerar *slip* en una porción finita en la dirección x_2 , dicha solución se obtiene utilizando el principio de superposición, sumando las soluciones de dos dislocaciones de signo opuesto, una a profundidad $x_2 = d$ y otra en $x_2 = -d$ (Figura F.3). Dado que la ecuación de Laplace es lineal, ambos campos de desplazamientos $u^{(1)}$ y $u^{(2)}$, asociados a cada componente del dipolo de dislocación, satisfacen la ecuación tanto de manera independiente, como también en la suma $\nabla^2(u^{(1)} + u^{(2)}) = 0$.

Es así como la expresión para el campo de desplazamientos queda de la forma

$$u_3 = -\frac{s}{2\pi} \left[\arctan\left(\frac{x_1}{x_2 + d}\right) - \arctan\left(\frac{x_1}{x_2 - d}\right) \right] \quad (\text{F.13})$$

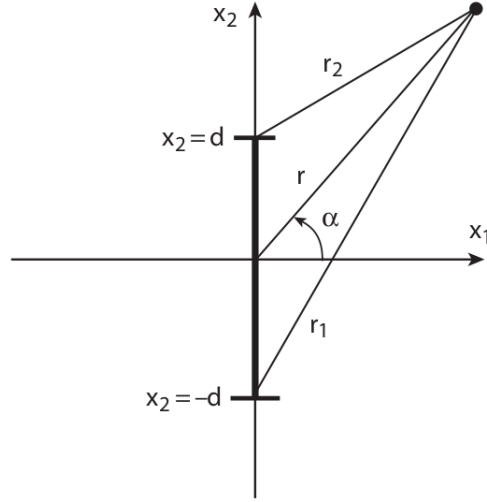


Figura F.3: Dipolo de dislocación, conformado por un par de dislocaciones de signo opuesto, que se encuentran en $x_2 = -d$ y $x_2 = d$, generando un *slip* uniforme en el intervalo comprendido entre ambos. Extraído de Segall (2010).

y el esfuerzo dado por el *slip* en el intervalo finito:

$$\sigma_{13} = -\frac{s\mu}{2\pi} \left(\frac{x_2 + d}{r_1^2} - \frac{x_2 - d}{r_2^2} \right) , \quad (\text{F.14})$$

con $r_1^2 = x_1^2 + (x_2 + d)^2$ y $r_2^2 = x_1^2 + (x_2 - d)^2$ las distancias desde la dislocación inferior y superior, respectivamente (ver Figura F.3). En el plano de falla, es decir, en $x_1 = 0$, los esfuerzos son de la forma

$$\sigma_{13}(x_1 = 0) = \frac{s\mu d}{\pi(x_2^2 - d^2)} = \frac{s\mu d}{\pi(x_2 - d)(x_2 + d)} \quad (\text{F.15})$$

Para un par de dislocaciones, es decir, un dipolo que representa el *slip* en un intervalo acotado de x_2 , los esfuerzos en campo lejano decaen más rápidamente con la distancia que para una dislocación singular. Se puede evaluar la ecuación F.11 para una dislocación en $x_2 = -d$

$$\sigma_{13} = -\frac{s\mu}{2\pi} \left[\frac{x_2 + d}{x_1^2 + (x_2 + d)^2} \right] \quad (\text{F.16})$$

Para un *slip* dado por un par de dislocaciones de signo opuesto, una en $x_2 = d$ y la segunda en $x_2 = d + \Delta d$, el estrés o esfuerzo será de la forma,

$$\sigma_{13} = -\frac{s\mu}{2\pi} \left[\frac{x_2 + d + \Delta d}{x_1^2 + (x_2 + d + \Delta d)^2} - \frac{x_2 + d}{x_1^2 + (x_2 + d)^2} \right] \quad (\text{F.17})$$

En el límite de $\Delta d \rightarrow 0$, lo que corresponde a la definición del diferencial, se puede escribir el esfuerzo como,

$$\sigma_{13} = -\frac{s\mu\Delta d}{2\pi} \frac{\partial}{\partial d} \left[\frac{x_2 + d}{x_1^2 + (x_2 + d)^2} \right] = -\frac{M_0 \cos(2\alpha)}{2\pi r^2} \quad (\text{F.18})$$

con M_0 el momento sísmico por unidad de longitud en la falla; dado por $M_0 = \mu s \Delta d$, es decir, el producto del módulo de corte, el *slip* y el área de falla por unidad de longitud en x_3 ; y con α el ángulo entre el eje x_1 y el vector que une el centro del dipolo de dislocación y el punto de observación (Figura F.3).

En resumen, los esfuerzos dada una dislocación decaen proporcionalmente a $1/r$ en dos dimensiones, y los esfuerzos debido a un dipolo de dislocación, también en dos dimensiones, decaen como $1/r^2$, mientras que $r \gg \Delta d$.

Solución para un semi-espacio

Como una aproximación razonable, no se transmiten esfuerzos entre la Tierra sólida y la atmósfera, por lo que se puede modelar la superficie como una a través de la cual las tracciones normales y de corte se “desvanecen”. Si en el problema de estudio las escalas de longitud más relevantes son pequeñas en comparación al radio terrestre, es posible ignorar la curvatura de la Tierra y modelar la superficie libre de forma planar. De esta manera, la superficie será aquella $x_2 = 0$, por lo que las ecuaciones se satisfacen para $x_2 < 0$.

En problemas de deformación anti-planar, la solución para el semi-espacio se construirá mediante el método de las imágenes. Los esfuerzos no nulos que actúan en la superficie $x_2 = 0$, debido a una dislocación en $x_2 = -d$ en un espacio completo, se expresan como:

$$\sigma_{23} = \frac{s\mu}{2\pi} \frac{x_1}{x_1^2 + (x_2 + d)^2} \quad (\text{F.19})$$

$$\sigma_{23}(x_2 = 0) = \frac{s\mu}{2\pi} \frac{x_1}{x_1^2 + d^2} \quad (\text{F.20})$$

Claramente, una dislocación simple y única no satisface la condición de borde de superficie libre, por tanto, la solución es añadir una dislocación “imagen” ficticia en $x_2 = d$, con signo opuesto y equis-distante a la superficie libre (Figura F.4). Es además necesario asegurar que la superficie de dislocación imagen está restringida a la región $x_2 > 0$, de manera que no genere discontinuidades en la Tierra ($x_2 < 0$).

El esfuerzo σ_{23} dado por la dislocación y su imagen se expresa como:

$$\sigma_{23} = \frac{s\mu}{2\pi} \left[\frac{x_1}{x_1^2 + (x_2 + d)^2} - \frac{x_1}{x_1^2 + (x_2 - d)^2} \right], \quad (\text{F.21})$$

y en la superficie $x_2 = 0$ es

$$\sigma_{23}(x_2 = 0) = \frac{s\mu}{2\pi} \left(\frac{x_1}{x_1^2 + d^2} - \frac{x_1}{x_1^2 + d^2} \right) = 0 \quad (\text{F.22})$$

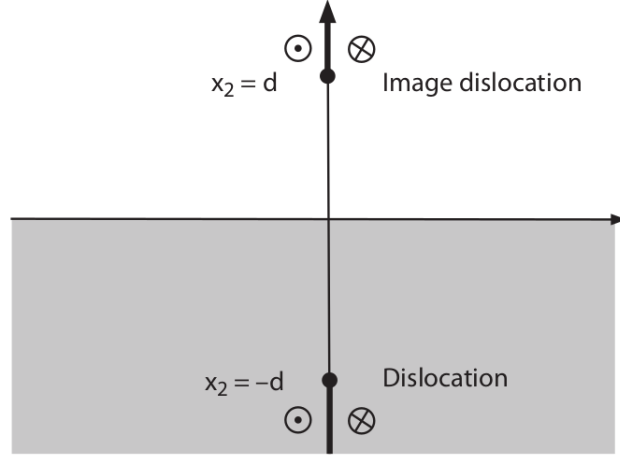


Figura F.4: Dislocación en $x_2 = -d$, y dislocación imagen en $x_2 = d$. Extraído de Segall (2010).

Es posible notar de la expresión F.22 que al sumar la contribución de la dislocación y su imagen, la condición de borde de superficie libre se satisface. Por otra parte, los desplazamientos dados por dicha dislocación y su imagen son de la forma:

$$u_3 = -\frac{s}{2\pi} \left[\arctan\left(\frac{x_1}{x_2 + d}\right) - \arctan\left(\frac{x_1}{x_2 - d}\right) \right] \quad (\text{F.23})$$

Ahora bien, a fin de construir la solución para el *slip* sobre un intervalo finito en un semi-espacio, se suman las contribuciones de dos dislocaciones y sus respectivas imágenes. Asumiendo que el *slip* es uniforme desde una profundidad d_2 a otra d_1 , donde $|d_1| > |d_2|$. Usando el principio de superposición, el campo de desplazamientos está dado por:

$$u_3 = -\frac{s}{2\pi} \left[\underbrace{\arctan\left(\frac{x_1}{x_2 + d_1}\right)}_{\text{dislocación profunda}} - \underbrace{\arctan\left(\frac{x_1}{x_2 - d_1}\right)}_{\text{imagen profunda}} - \underbrace{\arctan\left(\frac{x_1}{x_2 + d_2}\right)}_{\text{dislocación somera}} + \underbrace{\arctan\left(\frac{x_1}{x_2 - d_2}\right)}_{\text{imagen somera}} \right] \quad (\text{F.24})$$

De particular interés son los desplazamientos en la superficie libre, pues en la práctica es donde se miden y recopilan datos geofísicos, dicho campo se expresa como:

$$u_3(x_2 = 0) = -\frac{s}{\pi} \left[\arctan\left(\frac{x_1}{d_1}\right) - \arctan\left(\frac{x_1}{d_2}\right) \right] \quad (\text{F.25})$$