UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
****

ESTUDIO DE TEORIAS COHOMOLOGICAS

Tesis para optar al Grado
de Licenciado en Ciencias
con mención en Matemáticas

TUTOR: Sr. Nicolás Yus S.

TESISTA : María Francisca Yáñez V.

- 1979 -

Quisiera en primer lugar agradecer al Profesor Nicolás Yus por haberme enseñado a pensar en Matemáticas, como si de un juego se tratase; el poder imaginarme situaciones, modelos, etc y manejar estas ideas con los dedos hasta darles la forma deseada en un lengüaje riguroso.

Además, deseo agradecer a todos los Profesores del Departamento que contribuyeron a mi formación como estudiante y, posteriormente como Ayudante e Instructor.

En todos estos años tuve ocasión de participar de la amistad de numerosos amigos. Estas relaciones me enriquecieron y quisiera que de algún modo, haya podido retribuirles de igual forma. A todos, gracias.

Además, deseo especialmente agradecer a Carmen Lagos no sólo por haber mecanografiado este enredado manuscrito, sino por el cariño y amistad que desde hace mucho tiempo me brinda.

Finalmente, a mi madre, por haberme dado los medios y el apoyo necesarios durante mis estudios desde aquellos ya lejanos días del Colegio. Gracias.

A Marcelo por los severos y a veces violentos empujones que hicieron posible este trabajo.

I N D I C E.

CONTENIDO: Pág.

I N T R O D U C C I O N.

En este trabajo se estudia con detalle la teoría cohomológica de Henri Cartan.

Lo que nos motivó a ella fué intentar demostrar el isomorfismo existente entre la cohomología de de Rham y la cohomología singular en una forma distinta de como se ha tratado esta demostración en la literatura.

El trabajo se divide en dos partes. En el Primer Capítulo se definen y elaboran, a través de ejemplos, los conceptos empleados en la teoría cohomológica de H. Cartan. Esencialmente todo nuestro interés se centra en la idea de $\mathcal{C}$ -objeto simplicial, que es la piedra fundamental de la teoría. En el Segundo Capítulo se enuncian los axiomas y el Teorema central del trabajo de H. Cartan, a saber, el isomorfismo existente entre la cohomología singular y cohomología de H. Cartan. Se elaboran con todo detalle dos ejemplos que satisfacen los axiomas. En el primero el isomorfismo se obtiene de forma natural. El segundo está directamente relacionado con la motivación señalada al comienzo de esta Introducción. En este sentido, sólo fué posible demostrar el isomorfismo con la cohomología singular al comprobar el cumplimiento de los axiomas. Sin embargo, del ejemplo dos podemos concluir que la cohomología de de Rham y la cohomología de Cartan son isomorfas, simplificando en gran medida el estudio de la cohomología de de Rham

CAPITULO I:

Nos interesa definir el concepto de $\mathcal{C}$-objeto simplicial, ya que esta idea es fundamental en el desarrollo de este trabajo. Para ello necesitamos algunos preliminares.

Consideremos la categoría $[\ ]$ en que los objetos serán los conjuntos $[n]$ cuyos elementos son los números naturales desde el cero hasta n. Y los morfismos serán las aplicaciones crecientes de $[n]$ en $[m]$, n y m cualesquieras. Entre ellos consideraremos los siguientes:

Para cada $n \geqslant 0$,

$$\delta_i : [n-1] \longrightarrow [n] \text{ tal que } \delta_i(j) = \begin{cases} j, & \text{si } j < i \\ j+1 & \text{si } j \quad i \end{cases}$$

y

$$\sigma_i : [n+1] \longrightarrow [n] \text{ tal que } \sigma_i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j \quad i \\ j-1 & \text{si } j > i \end{cases}$$

donde $0 \leq i \leq n$.

Estos morfismos satisfacen las siguientes relaciones:

i) $\delta_j \delta_i = \delta_i \delta_{j-1}$ si $i < j$

ii) $$\sigma_j \delta_i = \begin{cases} \delta_i \sigma_{j-1} & \text{si } i < j \\ \text{identidad} & \text{si } i = j ,\ i = j+1 \\ \delta_{i-1} \sigma_j & \text{si } i > j+1 \end{cases} \qquad (1)$$

iii) $\sigma_j \sigma_i = \sigma_i \sigma_{j+1}$ si $i \geqslant j$

Estos morfismos son importantes ya que todo morfismo de $[\ ]$, se puede escribir como una composición de ellos.

Estamos ahora en condiciones de definir el concepto de $\mathcal{C}$-objeto simplicial.

<u>Definición 1:</u> Dada una categoría $\mathcal{C}$, un $\mathcal{C}$-objeto simplicial es un cofuntor C^* de la categoría $[\ ]$ en la categoría $\mathcal{C}$.

Más explícitamente, debido a las propiedades de los morfismos δ_i y σ_i, podemos decir que un $\mathcal{C}$-objeto simplicial es una colección C formada por objetos $\{C_n\}_{n \in N}$ de $\mathcal{C}$ y una colección de morfismos de $\mathcal{C}$ tales que verifican las siguientes relaciones: Para cada n, tenemos morfismos d_i de C_n en C_{n-1} y s_i de C_n en C_{n+1}, con $0 \leq i \leq n$, tales que:

i) $\quad d_i d_j = d_{j-1} d_i \qquad$ si $i < j$

$$\text{ii) } \quad d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i & \text{si } i < j \\ \text{identidad} & \text{si } i = j;\ i = j+1 \\ s_j d_{i-1} & \text{si } i > j+1 \end{cases} \qquad (2)$$

iii) $\quad s_i s_j = s_{j+1} s_i \qquad$ si $i \leq j$

Observemos que d_i es la imagen bajo C^* de δ_i y s_i es la imagen bajo C^* de σ_i. Con esto se puede ver fácilmente que las relaciones (2) son consecuencia de las relaciones (1).

A los morfismos d_i los llamamos morfismos de cara y a los morfismos s_i, de degeneración.

En general un $\mathcal{C}$-objeto simplicial tomará un cierto nombre particular, dependiendo éste, de que categoría se trate. Así por ejemplo, si $\mathcal{C}$ es la categoría de los conjuntos, a un $\mathcal{C}$-objeto simplicial le llamaremos conjunto simplicial. Si se trata de la categoría de los grupos abelianos, lo llamaremos grupo abeliano simplicial. De esta manera hablaremos de álgebras simpliciales, álgebras graduadas simpliciales, etc.

Un siguiente paso en el desarrollo de esta teoría consiste en definir los morfismos entre $\mathcal{C}$-objetos simpliciales.

<u>Definición 2:</u> Si C es un $\mathcal{C}$-objeto simplicial y D es un $\mathcal{C}$-objeto simplicial. Un morfismo simplicial f de C en D es una transformación natural f^* del cofuntor C^* en el cofuntor D^*. Dicho de otro modo f es una familia de morfismos $\{f_n\}_{n \geqslant 0}$ donde f_n es un morfismo de C_n en D_n, $(f^*_{[n]} = f_n)$, tal que:

i) $\quad f_n d_i = d'_i f_{n+1}$

y (3)

ii) $\quad f_{n+1} s_i = s'_i f_n$

La relación (3) la podemos escribir usando diagramas de la siguiente manera:

i)
$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] \\
C_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[d, "d_i"'] & D_{n+1} \arrow[d, "d'_i"] \\
C_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d] & D_n \arrow[d] \\
\cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

ii)
$$
\begin{tikzcd}
\cdots & \cdots \\
C_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[u] & D_{n+1} \arrow[u] \\
C_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[u, "s_i"] & D_n \arrow[u, "s'_i"'] \\
\cdots \arrow[u] & \cdots \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Estas relaciones resultan solamente del hecho que se tiene una transformación natural f^*.

Un último concepto importante en este trabajo es el de $\mathcal{C}$-objeto simplicial, simplicialmente trivial.

<u>Definición 3</u>: Un $\mathcal{C}$-objeto simplicial es simplicialmente trivial si todas las aplicaciones d_i y s_i son $\mathcal{C}$-isomorfismos.

Esto significa que para cada n 0 hay un $\mathcal{C}$-isomorfismo de C_n en C_o y por lo tanto el $\mathcal{C}$-objeto simplicial queda totalmente determinado al darse el $\mathcal{C}$-objeto C_o.

Además todo elemento c de C_n se puede escribir como la imagen de un c' en C_{n+1} bajo la aplicación d_i, siendo el mismo c' para todo i. En efecto, tomemos un c en C_n, como d_o es isomorfismo, existe un único elemento c' en C_{n+1} tal que $d_o c' = c$. Pero $d_o s_o$ es la identidad, por lo tanto:

$$c = (d_o\, s_o)(c) \quad ,$$

y esto implica que $s_o(c) = c'$, pués d_o es inyectiva. Pero además $d_1 s_o$ es la identidad, de este modo también:

$$c = (d_1 s_o)(c) \quad , \text{ y por lo tanto}$$

$$d_1(c') = c$$

El paso siguiente es considerar que $d_1 s_1$ es la identidad, de donde obtendremos que $s_1(c') = c$, y usando también que $d_2 s_1$ es la identidad se llega a que $d_2 c' = c$.

Análogamente podemos seguir y obtenemos que para todo $0 \leq i \leq n$ se tiene que $d_i(c') = c$, que era lo deseado.

Otro concepto que usaremos más adelante es el de grupos de homotopía de un $\mathcal{C}$ -objeto simplicial.

Nosotros sólo diremos cómo se calculan éstos, en el caso de un grupo abeliano simplicial, ya que sólo usaremos este concepto en este caso.

Sea $G = \{G_p\}$ un grupo abeliano simplicial.

Los grupos de homotopía $\Pi_p(G)$, $p \geq 0$, se calculan del siguiente modo:

Se provee a G de la diferencial d, igual a la suma alternada de las aplicaciones de cara d_i. Entonces $\Pi_p(G)$ es el grupo de homología de la sucesión

$$G_{p+1} \xrightarrow{d} G_p \longrightarrow G_{p-1} \quad ,$$

para $p \geq 1$, y $\Pi_0(G)$ es el conúcleo de $G_1 \xrightarrow{d} G_0$.

De este modo $\Pi_1(G)$ es abeliano.

Nos interesa saber cuando $\Pi_p(G) = 0$, para todo $p \geq 1$. En el caso que G es simplicialmente trivial tenemos que

$\Pi_0(G) = G_0$ y $\Pi_p(G) = 0$ para $p \geq 1$.

En efecto, si G es simplicialmente trivial, entonces la diferencial d de G_p en G_{p-1} será igual al homomorfismo nulo cuando p es impar y al homomorfismo d_0 si p es par, pués las aplicaciones de cara d_i en este caso son todas iguales, como vimos anteriormente.

Por lo tanto tenemos las siguientes sucesiones:

Si p es par: $G_{p+1} \xrightarrow{0} G_p \underset{\cong}{\xrightarrow{d_0}} G_{p-1}$,

Si p es impar: $G_{p+1} \underset{\cong}{\xrightarrow{d_0}} G_p \xrightarrow{0} G_{p-1}$

de modo que $\Pi_p(G) = 0$ para todo $p \geq 1$.

Cuando $p = 0$, tenemos que $\Pi_0(G)$ es el conúcleo de $d : G_1 \longrightarrow G_0$ y como $d = 0$ entonces $\Pi_0(G) = G_0$.

Existe otra forma de calcular los grupos de homotopía $\Pi_p(G)$, que nos será útil para determinar en general cuando $\Pi p(G) = 0$ para $p \geq 1$.

Esta forma es la siguiente:

Sea $G°p$ el subgrupo de G de los x en G_p tales que $d_i x = 0$ para todo $i > 0$

Para $i = 0$, sea $G_0^\circ = G_0$. Entonces d_0 envía a G°_{p+1} en G°_p . En efecto, si x está en G°_{p+1} , es decir $d_i x = 0$ para todo $i > 0$, entonces

$$d_j d_0 x = d_0 d_{j+1} x = 0 \qquad \text{para todo } j \geq 0$$

De este modo $d_0 d_0 = 0$ y esto nos permite construir los grupos de homotopía del complejo

$$\longrightarrow G^\circ_{p+1} \xrightarrow{d_0} G^\circ_p \xrightarrow{d_0} G^\circ_{p-1} \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow G^\circ_1 \xrightarrow{d_0} G_0$$

Los grupos de homotopía $\Pi_p(G)$ se identifican con los grupos de homología de este complejo (Ref.(1))

De modo que:

<u>Proposición 1</u>:- Para que $\Pi_p(G) = 0$ $(p \geqslant 1)$ es necesario y suficiente que todo x en G_p, tal que $d_i x = 0$ para todo i 0, sea de la forma $d_o y$, con y en G_{p+1} y $d_i y = 0$ para $i \geqslant 1$. Para que $\Pi_o(G_o) = 0$ es necesario y suficiente que todo x en G_o sea de la forma $d_o y$ donde y está en G_1 y $d_1 y = 0$

Esta proposición resulta del hecho que los grupos de homotopía $\Pi_p(G)$ se identifican con los grupos de cohomología del complejo dado anteriormente.

Antes de dar algunos ejemplos de $\mathcal{C}$ -objetos simpliciales nos es necesario hablar del concepto de complejo simplicial.

Un complejo simplicial visto intuitivamente es una red formada por células a las cuales llamamos "símplices" o "n-símplices" (indicando con ello su dimensión). Veamos qué es un n-símplice y cuáles son las leyes que definen esta red.

<u>Definición 4</u>: Si $w_0, \ldots, w_n$ son $n+1$ puntos independientes de R^n, (esto quiere decir que el conjunto $\{w_i - w_0\}_{i=1}^n$ es linealmente independiente), el n-símplice $\sigma = \langle w_0, w_1, \ldots, w_n \rangle$ generado por estos puntos es el conjunto de los puntos x tales que

$$x = \sum_{i=0}^{n} b_i w_i \text{ , donde } b_i \geq 0 \quad y \quad \sum_{i=0}^{n} b_i = 1$$

Llamaremos a los puntos w_i "vértices de σ", a los números b_i "coordenadas baricéntricas" de x.

A continuación daremos una descripción de un n-símplice para n menor o igual que 3.

1.- Sea w_0 un punto, entonces un 0-símplice $\langle w_0 \rangle$ es el punto w_0

2.- Sean w_0 y w_1 dos puntos independientes, (es decir $w_0 \neq w_1$) entonces un 1-símplice $\langle w_0, w_1 \rangle$ es el segmento de recta determinada por w_0 y w_1.

3.- Sean w_0, w_1, w_2 tres puntos independientes, (es decir los vectores $w_1 - w_0$ y $w_2 - w_0$ son linealmente independientes) entonces un 2-símplice $\langle w_0, w_1, w_2 \rangle$ es el triángulo que tiene por vértices los puntos w_0, w_1 y w_2.

4.- Sean w_0, w_1, w_2, w_3 cuatro puntos independientes (es decir los vectores $w_1 - w_0$, $w_2 - w_0$ y $w_3 - w_0$ son linealmente independientes) entonces un 3-símplice es la pirámide de base triangular cuyos vértices son los puntos w_0, w_1, w_2, w_3.

<u>Definición 5:</u> Un s-símplice σ' ($s \leq n$), es una "cara de dimensión s de σ" o una "s-cara de σ" si y solo si σ' está generada por un subconjunto de $s + 1$ vértices de σ.

Miremos, de los ejemplos anteriores, el ejemplo 4. Allí una:

"0-cara" será un vértice de σ
"1-cara" será un lado de la pirámide
"2-cara" será una cara de la pirámide

Podemos apreciar en estos ejemplos que las nociones de vértice y cara de un n-símplice coinciden con las usuales. Observemos además que un n-símplice tiene $n + 1$ carasde dimensión $n - 1$ y $n + 1$ caras de dimensión 0.

En la siguiente definición explicaremos como se deben pegar estas células o símplices para formar la red , la cual llamamos complejo simplicial.

<u>Definición 6:</u> Llamaremos complejo símplicial K a un conjunto de símplices $\sigma \subset R^m$, m suficientemente grande, tales que:

i) Si σ' es una cara de σ entonces σ' está en K

ii) Si σ y τ están en K entonces la intersección de ellos es vacía o es una cara común

iii) Si escribimos $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$, entonces si $p \in |K|$ existe una vecindad de p tal que intersecta un número finito de símplices de K. (La topología considerada es la inducida).

Anotaremos $K^{(n)}$ para referirnos al conjunto de los n-símplices de K.

Ejemplos de $\mathcal{C}$-objetos simpliciales:

I.- Un complejo simplicial K genera un conjunto simplicial:

Reunamos todos los n-símplices $\sigma = \langle w_o, \ldots, w_n \rangle$ que están en K y agreguemos elementos de la forma $\langle v_o, \ldots, v_n \rangle$ donde un punto v_i puede ser igual a un v_j siendo $i \neq j$ el conjunto de los puntos $\{v_i\}_{i=0}^{n}$ es el conjunto de los vértices de un símplice τ de K. (Nótese que entonces la dimensión de τ es menor o igual a n). A estos elementos los llamaremos n-símplices de - generados. Llamemos K_n al conjunto de los n-símplices de K y los n-símplices degenerados. Y definamos las siguientes aplicaciones:

$$d_i : K_n \longrightarrow K_{n-1} , \quad 0 \leq i \leq n \quad \text{tal que}$$

$$d_i \langle w_o, \ldots, w_o \rangle = \langle w_o, \ldots, \hat{w}_i, \ldots, w_n \rangle \quad \text{(donde}$$

el símbolo " $\wedge$ " significa quitar el punto indicado) y

$$s_i : K_n \longrightarrow K_{n+1} , \quad 0 \leq i \leq n \quad \text{tal que}$$

$$s_i : \langle w_o, \ldots, w_n \rangle = \langle w_o, \ldots, w_{i-1}, w_i, w_i, w_{i+1}, \ldots, w_n \rangle$$

Un paso siguiente es demostrar que las aplicaciones d_i y s_i verifican las relaciones (2).

Sólo lo haremos en un caso, pués la verificación es muy sencilla y análoga en los otros.

Sea $\langle w_0, \ldots, w_n \rangle$ en K_n y comprobemos que $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ si $i < j$,

$$d_i d_j \langle w_0, \ldots, w_n \rangle = d_i \langle w_0, \ldots, w_i, \ldots, \hat{w}_j, \ldots, w_n \rangle =$$

$$= \langle w_0, \ldots, \hat{w}_i, \ldots, \hat{w}_j, \ldots, w_n \rangle =$$

$$= d_{j-1} \langle w_0, \ldots, \hat{w}_i, \ldots, w_j, \ldots, w_n \rangle =$$

$$= d_{j-1} d_i \langle w_0, \ldots, w_n \rangle$$

De este modo el complejo simplicial K genera el conjunto simplicial $K' = \{K_n\}_{n \geq 0}$ con las aplicaciones d_i y s_i antes señaladas.

II.- Algunos conjuntos simpliciales.

1.- Denominemos por $[p]_n$ al conjunto de las aplicaciones crecientes del conjunto $[n]$ en el conjunto $[p]$. Notemos que δ_i está en $[n]_{n-1}$ y σ_i está en $[n]_{n+1}$.

Consideremos ahora la colección

$[p]^* = \{[p]_n\}_{n\geq 0}$ y las aplicaciones

$d^i : [p]_n \longrightarrow [p]_{n-1}$ tal que

$d^i(1) = 1 \circ \delta_i$

y $s^i : [p]_n \longrightarrow [p]_{n+1}$ tal que

$s^i(1) = 1 \circ \sigma_i$

con $0 \leq i \leq n$

Es fácil ver que esta colección con las aplicaciones d^i y s^i es un conjunto simplicial, ya que las aplicaciones σ_i y δ_i satisfacen las relaciones (1).

2.- Conjunto simplicial de los p-símplices euclideanos.

Definición 7: Llamaremos p-símplice euclideano al subconjunto Δ_p de $\mathbb{R}^p$ de los puntos

$x = (x_1, \ldots, x_p)$ tales que $x_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{p} x_i \leq 1$.

Si $p = 0$ entonces $\Delta_0 = \{0\}$ por definición.

Observemos que Δ_p es lo mismo que el p-símplice $\langle e_0, e_1, \ldots, e_p \rangle$ donde $\{e_i\}_{i=1}^{p}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^p$, y $e_0 = 0$.

Ya que podemos establecer una biyección entre ellos. En efecto, al punto $x = (x_1, \ldots, x_p)$ de Δ_p le asociamos $x' = (1 - \Sigma x_i, x_1, \ldots, x_p)$ de $\langle e_0, e_1, \ldots, e_p \rangle$ y al revés del punto $x = (x_0, x_1, \ldots, x_p)$ le asociamos $x' = (x_1, \ldots, x_p)$

Debido a esto vamos a anotar los puntos de Δ_p del siguiente modo:

$$x \in \Delta_p \Longleftrightarrow x = \sum_{i=0}^{p} x_i e_i \quad , \quad x_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=0}^{p} x_i = 1$$

o

$$x = (x_0, x_1, \ldots, x_p)$$

Como consecuencia de esto, tenemos que una s-cara de Δ_p será el subconjunto Δ_p^s de Δ_p caracterizado por:

$$x = (x_1, \ldots, x_p) \in \Delta_p^s \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{i) } \sum_{i=1}^{p} x_i = 1 \text{ y } x_j = 0 \text{ para} \\ \qquad p - (s+1) \text{ índices} \\ \text{ó} \\ \text{ii) } \sum_{i=1}^{p} x_i < 1 \text{ y } x_j = 0 \text{ para} \\ \qquad p - s \text{ índices} \end{cases}$$

Nos interesa darle a la colección $\Delta = \{\Delta_p\}_{p \geq 0}$ estructura de conjunto simplicial. Para ello definimos las siguientes aplicaciones

$d_i : \Delta_p \longrightarrow \Delta_{p-1}$ dada por

$d_i(x_o, x_1, \ldots, x_p) = (x_o, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, \ldots, x_p)$

donde $d_p = d_{p-1}$

y $\delta_i : \Delta_{p-1} \longrightarrow \Delta_p$ dada por

$\delta_i(x_o, x_1, \ldots, x_{p-1}) = (x_o, x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_{p-1})$

con $0 \leq i \leq p$.

Es trivial comprobar que Δ con estas aplicaciones es un conjunto simplicial.

Algunas observaciones:

Debemos observar que toda aplicación creciente de $[p]$ en $[q]$ induce una aplicación de Δ_p en Δ_q. En efecto:

Sea l una aplicación creciente de $[p]$ en $[q]$, vamos a definir una aplicación $\Delta^*(l)$ de Δ_p en Δ_q :

$\Delta^*(l)(\sum_{i=0}^{p} x_i e_i) = \sum_{i=0}^{p} x_i \, e_{l(i)}$.

Además si l es la identidad en $[n]$ entonces $\Delta^*(l)$ es la identidad en Δ_n

$\Delta^*(\delta_i) = \delta_i$ $\qquad$ $\Delta^*(\sigma_i) = d_i$ $\qquad$ y

$\Delta^*(l \circ m) = \Delta^*(l) \circ \Delta^*(m)$

III.- A toda variedad diferencial M se le puede dar estructura de conjunto simplicial.

Necesitamos primero dar a conocer el siguiente resultado:

Si M es una variedad diferencial de dimensión n; ella posee una triangulación diferenciable.

Esto significa que existe un complejo simplicial K y un homeomorfismo h de $|K|$ en M tal que la restricción de h a todo símplice σ de K es una incrustación diferencial. Es decir, para cada σ en K existe una incrustación diferencial ϕ de un abierto U, $\sigma \subset U$, tal que ϕ es una extensión de la restricción de h a σ.

Al complejo simplicial K, hemos visto le está asociado un conjunto simplicial K^* (ver ejemplo I)

Consideremos entonces el conjunto simplicial K^* y demosle forma de conjunto simplicial a la variedad M triangulada.

Las p-símplices de M serán las restricciones de h a los p-símplices de K_p.

Al conjunto de los p-símplices de M lo anotaremos por M_p y a sus elementos por h_σ.

Las aplicaciones de cara y de degeneración serán las siguientes:

$b_i : M_p \longrightarrow M_{p-1}$ tal que si h_σ está en M_p, $b_i(h_\sigma) = h_{d_{i\sigma}}$ y

$t_i : M_p \longrightarrow M_{p+1}$ tal que si h_σ está en M_p, $t_i(h_\sigma) = h_{s_{i\sigma}}$

Estas aplicaciones satisfacen las relaciones (2)
Vamos a verificar una sola de ellas pués las demás son análogas.

Sea $i < j$ y $h_\sigma \in M_p$, entonces

$$b_i b_j (h_\sigma) = b_i (h_{d_j \sigma}) = h_{d_i d_j \sigma} = h_{d_{j-1} d_i \sigma} = b_{j-1}(h_{d_i \sigma}) =$$

$$= b_{j-1} b_i (h_\sigma)$$

Entonces $\mathcal{M} = \{M_p\}_{p=0}^m$ con las aplicaciones b_i y t_i anteriormente definidas es un conjunto simplicial.

IV.- Algebras diferenciables graduadas simpliciales.

Fijemos un anillo conmutativo k con unidad (que podrá ser un cuerpo o el anillo de los enteros). Llamaremos DG-álgebra a una k-álgebra diferencial graduada $A^* = \bigoplus_{n\geq 0} A^n$ en la cual la multiplicación es asociativa y envía a $A^p \otimes_k A^q$ en A^{p+q} y la diferencial δ lleva A^n en A^{n+1} y satisface $\delta\delta = 0$ y $\delta(xy) = \delta(x)y + (-1)^p x\ \delta(y)$ si x está en A^p.

Diremos que un elemento x de A^* tiene "grado p" si x es un elemento de A^p.

Una DG-álgebra simplicial A^* será entonces una colección de DG-álgebras $\{A^*_p\}_{p\geq 0}$ en que las aplicaciones de cara y de degeneración serán morfismos de DG-álgebras.

De este modo, para cada $p \geq 0$, A^*_p será una DG-álgebra es decir $A^*_p = \bigoplus_{n\geq 0} A^n_p$ y como las aplicaciones de cara y de degeneración son morfismos de DG-álgebras se tiene que para cada $n \geq 0$ las aplicaciones $d_i^n : A_p^n \longrightarrow A^n_{p-1}$ y $s_i^n : A_p^n \longrightarrow A^n_{p+1}$, $0 \leq i \leq p$, satisfacen las relaciones (2). De esta manera para cada n, $A^n = \{A_p^n\}_{p\geq 0}$ es un conjunto simplicial, en que las aplicaciones de cara y degeneración serán los productos naturales $d_i^n \times d_i^m$ y $s_i^n \times s_i^m$, n y $m \geq 0$.

Ejemplos de DG-álgebras y DG-álgebras simpliciales que nos interesan en este trabajo.

1.- A todo espacio topológico X le podemos asociar el conjunto simplicial X de sus "símplices singulares". Es decir $X = \{X_n\}_{n\geq 0}$ donde X_n es el conjunto de las aplicaciones σ contínuas de Δ_n en X. La aplicación de cara d_i' que lleva a X_n en X_{n-1} y de degeneración s_i' de X_n en X_{n+1} son tales que si σ está en X_n entonces $d_i'(\sigma) = \sigma \circ s_i$ y $s_i'(\sigma) = \sigma \circ d_i$

Sea G un grupo abeliano y $C^n(X;G)$ el grupo de las n-cocadenas con valores en G, es decir el grupo de los homomorfismos de $C_n(X)$ en G, donde $C_n(X)$ es el grupo de las n-cadenas de X (grupo libre generado por X_n) cuyo operador de borde d, que lleva a $C_n(X)$ en $C_{n-1}(X)$ está dado extendiendo $d = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i$. Este operador induce un operador de coborde δ de $C^n(X;G)$ en $C^{n+1}(X;G)$ en la forma natural. Este operador nos define los grupos de cohomología $H^n(X;G)$. Además si G es un anillo commutativo, las fórmulas clásicas de Whitney definen sobre $C^*(X;G) = \bigoplus_{n\geq 0} C^n(X;G)$ una estructura de álgebra diferencial graduada. De donde obtenemos el álgebra de cohomología $H^*(X;G) = \bigoplus_{n\geq 0} H^n(X,G)$.

Debemos notar que por definición la homología y cohomología de X es la homología y cohomología de X.

2.- A todo conjunto simplicial X le podemos asociar una DG-álgebra.

Si $A^* = \bigoplus_{n\geq 0} A^n$ es una DG-álgebra simplicial, podemos considerar la DG-álgebra $A^*(X) = \bigoplus_{n\geq 0} A^n(X)$ en que $A^n(X)$ es el conjunto de los morfismos simpliciales del conjunto simplicial X

en el conjunto simplicial A^n . La notación que usaremos será $A^n(X) = Mor(X,A^n)$ y $A^*(X) = Mor(X,A^*)$. De este modo un morfismo f en $Mor(X,A^n)$ es una colección $\{f_p\}_{p\geq 0}$ donde f_p va de X_p en A^n_p y los f_p satisfacen la relación (3).

En seguida veremos que $A^*(X)$ es una DG-álgebra.

La multiplicación será la inducida en forma natural por la multiplicación de A^*.

(Notemos que para cada $p \geq 0$, tenemos una multiplica - ción "$*_p$" dada para la DG-álgebra A_p)

De este modo, si f y g están en $A^n(X)$ y $A^m(X)$ respectivamente, entonces el producto de f con g será un morfismo $h = \{h_p\}_{p\geq 0}$ de $A^{n+m}(X)$ tal que si $p \geq 0$ y σ está en X_p

$h_p(\sigma) = f_p(\sigma) *_p g_p(\sigma)$

Igualmente la diferencial ∂^* será la inducida por la diferencial ∂ de A^*. De este modo si f está en $A^n(X)$, $\partial^* f = \{(\partial^* f)_p\}_{p\geq 0}$ es un morfismo de $A^{n+1}(X)$; tal que si p 0 y σ es un símplice de X_p, $(\partial^* f)_p(\sigma) = \partial f_p(\sigma)$

Es claro que este operador satisface las propiedades correspondientes.

Sin embargo debemos demostrar que tanto h como $\partial^* f$ son morfismos simpliciales, es decir verifican las relaciones (3). Las demostraciones son análogas, así que sólo daremos una de ellas.

Veremos a continuación que h es un morfismo simplicial.

Sea $p \geq 0$ y σ en X_p, entonces:

$h_{p-1}(d_i\ \sigma) = f_{p-1}(d_i(\sigma)) *_{p-1} g_{p-1}(d_i(\sigma))$ pero como f y g son morfismos simpliciales, la identidad anterior es lo mismo que:

$$h_{p-1}(d_i(\sigma)) = d_i^{\,n}(f_p(\sigma)) *_{p-1} d_i^{\,m}(g_p(\sigma)) =$$

$$= (d_i^{\,n} \times d_i^{\,m})\ h_p(\sigma)$$

Del mismo modo obtenemos que h conmuta con la aplicación de degeneración.

En consecuencia h y $\partial^* f$ son morfismos simpliciales y por lo tanto $A^*(X)$ es una DG-álgebra.

El operador diferencial ∂^* define la cohomología $H^*(A^*(X)) = \bigoplus_{n \geqslant 0} H^n(A^*(X))$.

CAPITULO II:

La teoría cohomológica de Henri Cartan dice que si A^* es una DG-álgebra simplicial que satisface ciertos axiomas entonces $H^*(A^*(X))$ es isomorfa a $H^*(X,R(A))$ donde $R(A)$ es un anillo determinado por la DG-álgebra simplicial A^*.

A continuación daremos los axiomas que debe satisfacer la DG-álgebra simplicial A^* y enunciaremos el teorema de esta teoría.

Axiomas de la teoría cohomológica de Henri Cartan.

Sea A^* una DG-álgebra simplicial

<u>Axioma a</u>: Axioma homológico.

La sucesión de aplicaciones k-lineales simpliciales

$$A^\circ \xrightarrow{\delta} A' \xrightarrow{\delta} \ldots\ldots \longrightarrow A^n \xrightarrow{\delta} \ldots\ldots$$

es exacta y el núcleo $Z^\circ A$ de $A^\circ \xrightarrow{\delta} A'$, es simplicialmente trivial.

$R(A)$ será la k-álgebra $(Z^\circ A)_\circ$ que determina el objeto simplicial $Z^\circ A$

<u>Axioma b</u>: Axioma homotópico.

Los grupos de homotopía $\pi_p(A^n)$ son nulos para todo $p \geqslant 0$ y todo $n \geqslant 0$

<u>Teorema</u>: Sea A^* una DG-álgebra simplicial que satisface los axiomas a y b . Entonces se tienen los siguientes isomorfismos naturales

$$H^n(A^*(X)) = H^n(X,R(A)) \quad \text{para todo } n \geqslant 0$$

Ejemplo 1:

Hemos visto en el Capítulo I, ejemplo II-1 el conjunto simplicial $[p]^*$. Consideremos entonces la DG-algebra $C_p = \bigoplus_{n\geq 0} C^*([p]_n, \mathbb{Z})$ descrita anteriormente y anotemos

$$C^n = \{C_n([p]^*, \mathbb{Z})\}_{p\geq 0}$$

Vamos a denotar por ∂_p al operador de borde que es inducido por el operador de borde d_p de $C^*([p]^*)$.

De este modo obtenemos una DG-algebra simplicial $C^* = \{C_p\}_{p\geq 0}$ donde las aplicaciones de cara δ^i y de degeneración σ^i están dadas respectivamente por:

$$\delta^i : C_p^{\,n} \longrightarrow C_{p-1}^{\,n} \;, \quad \delta^i(f)(1) = f(\delta_i \circ 1)$$

y $$\sigma^i : C_p^{\,n} \longrightarrow C_{p+1}^{\,n} \;, \quad \sigma^i(f)(1) = f(\sigma_i \circ 1)$$

Sea, además χ un espacio topológico y asociémosle el conjunto simplicial X de sus símplices singulares.

Entonces, como vimos en página 17., asociémosle a X la DG-algebra simplicial $C^*(X)$.

Veamos que es $C^*(X)$ en este caso.

Sabemos que $C^*(X) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{Mor}\,(X, C^n)$

Sea $n \geq 0$ y demosnos un morfismo f en $C^n(X)$. Entonces $f = \{f_p\}_{p\geq 0}$, donde f_p lleva a X_p en $C_p^{\,n}$ y tal que satisface:

$$\begin{array}{ccc} X_p & \xrightarrow{f_p} & C_p^{\,n} \\ {\scriptstyle d_i'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta^i} \\ X_{p-1} & \xrightarrow[f_{p-1}]{} & C_{p-1}^{\,n} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} X_p & \xrightarrow{f_p} & C_p^{\,n} \\ {\scriptstyle s_i'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma^i} \\ X_{p+1} & \xrightarrow[f_{p+1}]{} & C_{p+1}^{\,n} \end{array}$$

Por la conmutatividad de estos diagramas obtenemos que un morfismo f de $C^n(X)$ satisface:

Para cada $p \geqslant 0$ y σ en X_p:

i) $\quad f_p(\sigma)(\delta_i \circ 1) = f_{p-1}(\sigma \circ s_i)(1)$ para todo 1 en $C_{p-1}^{\,n}$

y $\qquad$ (4)

ii) $\quad f_p(\sigma)(\sigma_i \circ 1) = f_{p+1}(\sigma \circ d_i)(1)$ para todo 1 en $C_{p+1}^{\,n}$

Vamos a demostrar que $C^*(X)$ no es otra cosa que la DG-algebra de las cocadenas de X con valores en $\mathbb{Z}$. Para ello construiremos una biyección entre $C^*(X)$ y $C^*(X, \mathbb{Z})$.

Definamos para cada $n \geqslant 0$ las siguientes aplicaciones:

$\varphi^n : \text{Mor}(X, C^n) \longrightarrow C^n(X, \mathbb{Z})$, dada por

$\varphi^n (f)(\sigma) = f_n(\sigma)(id)$ para todo σ en X_n, y

$\psi^n : C^n(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Mor}(X, C^n)$ dada por

$\psi^n(g) = \{\psi^n(g)_p\}_{p \geqslant 0}$ donde

$\psi^n(g)_p(\sigma)(1) = g(\sigma \circ \Delta^*(1))$ para todo σ en X_p y 1 en $[p]_n$

Veamos en seguida que φ^n o $\psi^n = id_{C^n(X, \mathbb{Z})}$ y ψ^n o $\varphi^n = id_{C^n(X)}$

Es fácil ver que φ^n o ψ^n es la id. en $C^n(X, \mathbb{Z})$ ya que $\Delta^*(id) = id$.

Para ver que ψ^n o $\varphi^n = id_{C^n(X)}$, recordemos que toda aplicación creciente 1 de $[p]_n$ es composición de las aplicaciones δ_i y σ_i. Por lo tanto, sólo bastará demostrar que:

$$(\psi^n \text{ o } \varphi^n)(f)_{n-1}(\sigma)(\sigma_i) = f_{n-1}(\sigma)(\sigma_i) \quad \text{para todo } \sigma \text{ en}$$

X_{n-1}, y que:

$$(\psi^n \text{ o } \varphi^n)(f)_{n+1}(\sigma)(\delta_i) = f_{n+1}(\sigma)(\delta_i) \quad \text{para todo } \sigma \text{ en}$$

X_{n+1}, ya que de este modo debido a las identidades (4)

$$(\psi^n \text{ o } \varphi^n)(f)_p(\sigma)(1) = \psi^n(\varphi^n(f))_p(\sigma)(1) =$$

$$= \varphi^n(f)(\sigma \text{ o } \Delta^*(1)) = f_n(\sigma \text{ o } \Delta^*(1))(id)$$

$$= f_p(\sigma)(1)$$

Calculemos entonces

$$(\psi^n \text{ o } \varphi^n)(f)_{n-1}(\sigma)(\sigma_i) = f_n(\sigma \text{ o } \Delta^*(\sigma_i))(id) =$$

$$= f_n(\sigma \text{ o } d_i)(id) \quad \text{y según las}$$

identidades (4).

$$f_n(\sigma \circ d_i)(id) = f_{n-1}(\sigma)(\sigma_i \circ id) = f_{n-1}(\sigma)(\sigma_i)$$

Análogamente se obtiene que:

$$(\psi^n \circ \varphi^n)(f)_{n+1}(\sigma)(\delta_i) = f_n(\sigma \circ \Lambda_i)(id) =$$

$$= f_{n+1}(\sigma)(\delta_i \circ id) = f_{n+1}(\sigma)(\delta_i)$$

Sólo nos falta demostrar que $\psi = \{\psi^n\}_{n \geq 0}$ y $\varphi = \{\varphi^n\}_{n \geq 0}$ son morfismos de cadenas, es decir que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
Mor(X,C^n) \arrow[r, "\varphi^n"] \arrow[d, "\delta"'] & C^n(X, \mathbb{Z}) \arrow[d, "\partial'"] \\
Mor(X,C^{n+1}) \arrow[r, "\varphi^{n+1}"'] & C^{n+1}(X, \mathbb{Z})
\end{tikzcd} \qquad (a)$$

y

$$\begin{tikzcd}
C^n(X, \mathbb{Z}) \arrow[r, "\psi^n"] \arrow[d, "\partial'"'] & Mor(X, C^n) \arrow[d, "\delta"] \\
C^{n+1}(X, \mathbb{Z}) \arrow[r, "\psi^{n+1}"'] & Mor(X,C^{n+1})
\end{tikzcd} \qquad (b)$$

Primero demostraremos que el diagrama (a) conmuta:

$$(\varphi^{n+1}\,\delta)(f)(\sigma) = \varphi^{n+1}(\delta f)(\sigma) = (\delta\, f)_{n+1}(\sigma)(id)$$

$$= f_{n+1}(\sigma)(d_p\ id) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f_{n+1}(\sigma)(id \circ \delta_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f_{n+1}(\sigma)(\delta_i)$$

y por otro lado:

$$(\partial'\varphi^n)(f)(\sigma) = \partial'(\varphi^n(f))(\sigma) = \varphi^n(f)(d'\sigma) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \varphi^n(f)(\sigma \circ \Delta_i) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f(\sigma \circ \Delta_i)(id) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f_{n+1}(\sigma)(\delta_i \circ id) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f_{n+1}(\sigma)(\delta_i)$$

Por lo tanto, el diagrama (a) conmuta

Veamos ahora el diagrama (b) ,

$$(\psi^{n+1}\,\partial')(g)_p(\sigma)(1) = \psi^{n+1}(\partial' g)_p(\sigma)(1) =$$

$$= (\partial' g)\ (\sigma \circ \Delta^*(1)) =$$

$$= g(d'(\sigma \circ \Delta^* 1)) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i g(\sigma \circ \Delta^* 1 \circ \Delta_i)$$

$$(\delta\, \psi^n)(g)_p(\sigma)(1) = \delta\, \psi^n(g)_p(\sigma)(1) = \psi^n(g)_p(\sigma)(d_p 1)$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i\, \psi^n(g)_p(\sigma)(1 \circ \delta_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i\, g(\sigma \circ \Delta^*(1 \circ \delta_i)) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i\, g(\sigma \circ \Delta^*(1) \circ \Delta^*(\delta_i)) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i\, g(\sigma \circ \Delta^*(1) \circ \Delta_i)$$

luego conmuta también el diagrama (b).

Por lo tanto, tenemos un isomorfismo de cocadenas entre $C^*(X)$ y $C^*(X, \mathbb{Z})$ y por lo tanto $H^*(C^*(X)) = H^*(X, \mathbb{Z})$

En seguida debemos verificar que C^* satisface los axiomas a y b. Es decir:

<u>Axioma a:</u> $C_p^{\,n-1} \xrightarrow{\partial_p} C_p^{\,n} \xrightarrow{\partial_p} C_p^{\,n+1}$ es exacta para cada $p \geqslant 0$

La exactitud de esta sucesión es un resultado conocido. (Ver ref. 2.)

Nos falta ver que el núcleo $Z^\circ C$ de $C^\circ \xrightarrow{\partial} C^1$ es simplicialmente trivial

Es fácil ver que el núcleo $Z^\circ C$ es C° y que $C^\circ p$ es lo mismo que $\mathbb{Z}$. Además las aplicaciones de cara y de degeneración son la identidad en ambos casos. Por lo tanto, C° es un objeto simplicialmente trivial y $R(C) = \mathbb{Z}$.

Axioma b:

Debemos demostrar que los grupos de homotopía $\Pi_p(C^n)$ son nulos, para todo $n \geqslant 0$.

Esto, de igual forma que en el axioma a, es un resultado conocido. (Ver ref. 2.)

EJEMPLO 2.-

Notaciones. - Si V es un espacio vectorial, por $A^k V$ denotamos al espacio vectorial de las funciones k-lineales alternadas sobre V.

- Si M es una variedad diferencial, denotamos por:

a) $T_p M$ el $\mathbb{R}$ - espacio vectorial de los vectores tangentes a M en p, donde p es un punto de M.

b) $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$ fibrado tangente de M

c) $\Lambda^k(M) = \bigcup_{p \in M} \Lambda^k{}_p(M)$ donde $\Lambda^k{}_p M = \Lambda^k(T_p M)$

- Una k-forma diferencial sobre M es una función w de M en $\Lambda^k M$ tal que:

  i) Si p está en M entonces $w(p)$ está en $\Lambda^k{}_p M$, y

  ii) Para toda k-tupla $(V_1, \ldots, V_k)$ de campos de vectores diferenciables de M , la función:

  $w(V_1, \ldots, V_k) : M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

  $w(V_1, \ldots, V_k)(p) = w(p)(V_1(p), \ldots, V_k(p))$ para todo p en M, es diferenciable.

- $\mathcal{F}(M)$ denotará el anillo de las funciones diferenciables de M en $\mathbb{R}$

- $\mathfrak{M}^k(M)$ denotará el $\mathcal{F}(M)$-módulo de las k-formas diferenciables sobre M.

La DG-álgebra diferencial de las formas diferenciables sobre M , donde M es una variedad diferencial está dada por $\mathfrak{M}(M) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathfrak{M}^k(M)$ con la siguiente multiplicación y operados diferencial

i) Multiplicación:

Si w está en $\mathfrak{M}^k(M)$ y τ en $\mathfrak{M}^l(M)$ entonces $w \wedge \tau$ es una $k + l$-forma diferencial sobre M tal que si p está en M, entonces $(w \wedge \tau)(p) = w(p) \wedge \tau(p)$

Esta multiplicación es bilineal, anticonmutativa ($w \wedge \tau = (-1)^{kl} \tau \wedge w$) y asociativa.

b) El operador diferencial está dado por la diferencial exterior d.

En seguida explicaremos que es una k-forma diferencial sobre el p-símplice euclideano.

Un vector tangente v a Δ_p en un punto x de Δ_p será un vector tangente de $\mathbb{R}^p$ en x. Es decir, si expresamos los vectores tangentes de $\mathbb{R}^p$ en x según la base $\{\frac{\partial}{\partial x_i}(x)\}^p_{i=1}$ donde $\frac{\partial}{\partial x_i}(x)$ es la derivada parcial en la dirección e_i en el punto x, tenemos que v será una $\mathbb{R}$ combinación lineal de dicha base.

Si ϕ es una función diferenciable de Δ_p en $\mathbb{R}$, esto es, si existe un abierto U de $\mathbb{R}^p$ tal que $\Delta_p \subset U$ y una función ϕ' de U en $\mathbb{R}$ diferenciable tal que extienda a ϕ, entonces

$$v(\phi) = \sum_{i=1}^{p} a_i \frac{\partial \phi'}{\partial x_i}(x)$$

De igual modo, un campo de vectores diferenciables sobre Δ_p, será una función V que a cada punto de Δ_p le asocia un vector tangente $V(x)$ de Δ_p en x. Y si ϕ es una función diferenciable de Δ_p en $\mathbb{R}$, entonces la función $V\phi$ de Δ_p en $\mathbb{R}$ definida por $V\phi(x) = V(x)(\phi)$ es diferenciable.

Se puede ver que esto es lo mismo que $V = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

donde los α_i son funciones diferenciables de A_p en $\mathbb{R}$.

Anotamos por $\{dx_i(x)\}^p_{i=1}$ a la base dual de la base $\{\frac{\partial}{\partial x_i}(x)\}^p_{i=1}$ de $T_x \mathbb{R}^n$.

Entonces $\{dx_{i_1}(x) \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(x)\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq p}$ es la base de $\Lambda^k{}_x \mathbb{R}^p$.

De este modo una k-aplicación lineal alternada de $\mathbb{R}^p$ será una $\mathbb{R}$-combinación lineal de esta base.

Entonces una k-forma diferencial sobre A_p será una función $w = \Sigma\, \alpha_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, donde $\alpha_{i_1 \dots, i_k}$ son funciones diferenciable de A_p en $\mathbb{R}$, definidas por:

$w(x) = \Sigma\, \alpha_{i_1 \dots i_k}(x)\, dx_{i_1}(x) \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(x)$ para todo x en A_p

Esto es equivalente a decir que w es una función de A_p en $\Lambda^k \mathbb{R}^p$ tal que si x está en A_p, $w(x)$ está en $\Lambda^k{}_x \mathbb{R}^p$ y si $(V_1, \dots, V_k)$ son k-campos de vectores diferenciables sobre A_p entonces la función $w(V_1, \dots, V_k)$ de A_p en $\mathbb{R}$ tal que

$w(V_1, \dots, V_k)(x) = w(x)(V_1(x), \dots, V_k(x))$, es diferenciable.

Ω^k_p designará el conjunto de las k-formas diferenciables sobre Δ_p. La multiplicación y diferencial exterior dadas para la DG-álgebra de las formas diferenciables sobre una variedad diferencial M son las mismas, ya que en el fondo se trata de $\mathbb{R}^p$.

Por lo tanto $\Omega^*_p = \bigoplus_{k \geq 0} \Omega^k_p$ es una DG-álgebra, a la cual llamaremos DG-álgebra de las formas diferenciables sobre el p-símplice euclídeano.

Las aplicaciones de cara y de degeneración, definidas anteriormente para el conjunto simplicial Δ, determinan la DG-álgebra simplicial $\Omega^* = \{\Omega^*_p\}_{p \geq 0}$.

Esto último es así porque las aplicaciones d_i y s_i son claramente diferenciables y, por lo tanto, inducen aplicaciones de DG-álgebras.

$$d_i^* : \Omega_p \longrightarrow \Omega_{p+1} \qquad \text{y}$$

$$s_i^* : \Omega_p \longrightarrow \Omega_{p-1} \qquad \text{con } 0 \leq i \leq p$$

Tomamos entonces como A^* la DG-álgebra simplicial Ω^* y como conjunto simplicial el conjunto simplicial M^* dado en el ejemplo III para una variedad diferencial M, obteniendo entonces la DG-álgebra simplicial $\Omega^*(M)$.

usando el teorema de de Rham que nos dice que la cohomología de de Rham es isomorfo a la cohomología singular y la teoría de Cartan obtenemos que la cohomología de de Rham es isomorfa a la cohomología de Cartan.

Pero, antes debemos verificar que Ω^* satisface los axiomas de esa teoría.

Veamos enseguida que Ω^* satisface los axiomas a y b

Axioma a:

$$\Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \longrightarrow \ldots\ldots \xrightarrow{d} \Omega^n \xrightarrow{d} \quad \text{es exacta}$$

Demostración:

Tenemos: $\Omega^{k-1} \xrightarrow{d} \Omega^k \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}$,

sea $p \geqslant 0$ y $\Omega^{k-1}_p \xrightarrow{d} \Omega^k_p \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}_p$

Anotemos por $Z^k_p \subset \Omega^k_p$ al núcleo de d , por $B^k_p \subset \Omega^k_p$ a la imagen de d y por H^k_p a Z^k_p / B^k_p

Como A_p es un subconjunto de R^p convexo, tenemos por el Lema de Poincaré que $H^k_p = 0$ para todo k.

Por lo tanto la sucesión anterior es exacta para todo $p \geqslant 0$.

Veamos ahora que $Z^\circ\Omega$ (núcleo de $d : \Omega^\circ \Longrightarrow \Omega'$) es un objeto simplicialmente trivial.

Tenemos que Z°_p es el conjunto de las funciones constantes de A_p en $\mathbb{R}$, conjunto que se identifica con $\mathbb{R}$. De este modo $Z^\circ_p = \mathbb{R}$ para todo $p \geqslant 0$

Las aplicaciones de cara y de degeneración del conjunto simplicial $Z^\circ\Omega$ son las restricciones de las aplicaciones de cara y de degeneración de Ω°. De esta forma:

$$s_i^* : \Omega^\circ_p \longrightarrow \Omega^\circ_{p-1} \qquad \text{y} \qquad d_i^* : \Omega^\circ_p \longrightarrow \Omega^\circ_{p+1}$$

son tales que si w está en Ω°_p,

$$s_i^* w = w \circ s_i \qquad \text{y}$$

$$d_i^* w = w \circ d_i$$

Por lo tanto, si $w = \subsetneq$, donde $\subsetneq$ es la función constante, tenemos que:

$$s_i^*(\subsetneq) = \subsetneq \circ s_i = \subsetneq$$

y $$d_i^*(\subsetneq) = \subsetneq \circ d_i = \subsetneq$$

De modo que s_i^* y d_i^* son la identidad de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, para todo $0 \leq i \leq p$. Por lo tanto son isomorfismos.

Además $H(\Omega) = Z^{\circ}{}_{o} = \mathbb{R}$

<u>Axioma b:</u> Sea $k \geqslant 0$, vamos a calcular los grupos de homotopía $\Pi_p(\Omega^k)$, $p \geqslant 0$. Para ello usaremos la Proposición 1. dada en el Capítulo I.

Sea w en $\Omega^k{}_p$ tal que $s_i{}^* w = 0$ para todo $i \geqslant 0$.

Esto significa que:

$$0 = s_i{}^*(w)(x)(v_1,\ldots,v_k) = w(s_i(x))(ds_i(x)(v_1),\ldots,ds_i(x)(v_k))$$

para todo $i \geqslant 0$, donde $x = (x_o, x_1, \ldots, x_{p-1})$ está en Δ_{p-1} y $(v_1, \ldots, v_k)$ son k-vectores tangentes de $\mathbb{R}^{p-1}$ en x.

Debemos buscar según la Proposición 1 una k+1-forma diferencial τ sobre Δ_{p+1} tal que $s_i{}^*\tau = 0$ para $i \geqslant 1$ y $s_o{}^*\tau = w$.

Sea φ una función de clase C^{∞} de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tal que es igual a 1 para x igual a cero y nula para que x cercanos a 1.

Enseguida consideramos las siguientes funciones:

$\psi : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\psi(x_o, x_1, \ldots, x_p) = \varphi(x_o)$ y

$X_p : \mathbb{R}^p$ —— $\mathbb{R}^p$ tal que

$$X_p(x_o, x_1, \ldots, x_{p-1}) = \begin{cases} \varphi(x_o)\left(\dfrac{x_o}{1-x_o}, \dfrac{x_1}{1-x_o}, \ldots, \dfrac{x_{p-1}}{1-x_o}\right) & \text{si } x_o \neq 1 \\ 0 \text{ si } x_o = 1 & \end{cases}$$

Estas funciones son de clase C^{∞}

Definamos ahora la siguiente k-forma diferencial sobre Δ_{p+1}

Sea $x = (x_o, x_1, \ldots, x_p)$ en Δ_{p+1} y $(v_1, \ldots, v_k)$ vectores tangentes, entonces:

si $x_o \neq 1$

$$\tau(x) = \phi(x)\,(d_o \circ \psi_{p+1})^*(w)(x)$$

si $x_o = 1$

$$\tau(1, 0, \ldots, 0) = 0$$

Es claro que τ es diferenciable debido a la forma de φ

Verifiquemos que $(s_i^* \tau) = 0$ para $i \geqslant 1$

Sea $x = (x_o, x_1, \ldots, x_{p-1})$ en Δ_p y $(v_1, \ldots, v_k)$ en $T_x\mathbb{R}^p$ entonces si $x_o \neq 1$,

$$(s_i^* \tau)(x)(v_1, \ldots, v_k) = \tau\,(s_i(x))(ds_i(x)(v_1), \ldots, ds_i(x)(v_k))$$

$$= \varphi(x_o)\; w\,((d_o \circ \psi_{p+1} \circ s_i)(x))(d(d_o \circ \chi_{p+1} \circ s_i)(x)(v_1), \ldots,$$
$$d(d_o \circ \chi_{p+1} \circ s_i)(x)(v_k))$$

$$= \varphi(x_o)\; w\,((d_o \circ s_i \circ \chi_p)(x))(d(d_o \circ s_i \circ \chi_p)(x)(v_1), \ldots,$$
$$d(d_o \circ s_i \circ \chi_p(x)(v_k))$$

$= \varphi(x_o)\, w\, ((s_{i-1}\, d_o \circ \chi_p)(x))\; d\, (s_{i-1}\, d_o\, \chi_p)(x)(v_1),\; \ldots,$

$d\, (s_{i-1}\, d_o\, \chi_p)(x)(v_k))$

$= \varphi(x_o)(s_{i-1}^{*}\, w)(d_o \circ \chi_p)(x))(d(d_o \circ \chi_p)(x)(v_1),\; \ldots, d((d_o \circ \chi_p)(x)(v_k))$

$= \varphi(x_o)(s_{i-1}^{*}\, w)(x')(v_1', \ldots, v_k') = 0$

Si $x_o = 1$, $(s_i^{*}\, \tau)(1,0, \ldots, 0) = \tau\,(1,0,0, \ldots, 0) = 0 \quad \forall\, i \geqslant 1$

Enseguida verifiquemos que:

$(s_o^{*}\, \tau)(x)(v_1, \ldots, v_k) = \tau\, (s_o(x))(ds_o(x)(v_1), \ldots, ds_o(x)(v_k))$

$= \varphi(0)(d_o \circ \chi_{p+1} \circ s_o)^{*}(w)(x)(v_1, \ldots, v_k) =$

$= 1 \cdot w\,(x)(v_1, \ldots, v_k)$, ya que $(d_o \circ \chi_{p+1} \circ s_o)^{*} = 1^{*}$

Por lo tanto los grupos de homotopía $\Pi_p(\Omega^k)$ son nulos para todo $p \geqslant 1$ y $k \geqslant 0$

Sea $p = 0$ y $k \geqslant 0$, tenemos que $\Omega^k{}_o = 0$ para $k \geqslant 1$, por lo tanto para $k \geqslant 1$, $\Pi_o\,(\Omega^k) = 0$

Cuando $k = 0$, consideremos $\Omega^o{}_1 \longrightarrow \Omega^o{}_o = \mathbb{R}$

Sea c en $\mathbb{R}$, y f de Δ_1 en $\mathbb{R}$ diferenciable tal que:

$f(x) = cx$

Es claro que:

$\Delta^*_1 f = f \circ \Delta_1 = 0$ ya que

$\Delta^*_0 f = f \circ \Delta_0 = c$

Si se tiene en cuenta que:

$\Delta_1(1) = (1,0)$ y $\Delta_0(1) = (0,1)$ y recordando la notación acordada, resulta que:

$\Delta_1(0) = 0$ y $\Delta_0(0) = 1$

Por lo tanto Ω^* satisface los axiomas.

Entonces, según el teorema:

$H^*(\Omega^*(M)) \cong H^*(M;\ \mathbb{R})$

R E F E R E N C I A S.

1.- Cartan, H.: Sur la theorie de Kan.
Seminaire Cartan. 1956 - 1957.

2. May, J.P.: Simplicial objects in Algebraic Topology.
Ed. Van Nostrand.

3.- Cartan, H.: Theories cohomologiques.
Inventiones Math. 35 (1976) 261 - 271