



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

**ESTUDIO DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN Y EQUILIBRIO SOBRE
UNA RED DE PRODUCCIÓN ELÉCTRICA**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

MARIANO ALEJANDRO VAZQUEZ GAETE

PROFESOR GUÍA:
NICOLÁS HERNÁNDEZ SANTIBAÑEZ

PROFESOR CO-GUÍA:
ALEJANDRO JOFRÉ CÁCERES

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JORGE AMAYA ARRIAGADA
JULIO DERIDE SILVA
HECTOR RAMIREZ CABRERA

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por:
CMM ANID BASAL FB210005.

SANTIAGO DE CHILE
2023

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR
AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS
DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS
APLICADAS Y MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: MARIANO ALEJANDRO VAZQUEZ GAETE
FECHA: 2023
PROF. GUÍA: NICOLÁS HERNÁNDEZ
SANTIBAÑEZ

ESTUDIO DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN Y EQUILIBRIO SOBRE UNA RED DE PRODUCCIÓN ELÉCTRICA

Este trabajo de tesis se contextualiza en un mercado eléctrico que cuenta en una primera instancia con tres puntos de producción los cuales utilizan distintas tecnologías con sus respectivos costos y tienen la posibilidad de complementarse unos con otros pues se encuentran conectados con el fin de enviar y recibir energía eléctrica si así fuese necesario. Se estudia la segunda etapa de un sistema de subasta, en el cual un Operador de Sistema Independiente está encargado de planificar la elección de recursos y la gestión de transferencia de energía entre los nodos a costo mínimo. Para esto se define el problema de optimización correspondiente y se desarrolla un algoritmo capaz de encontrar una configuración que minimice el costo total del sistema en una versión simplificada que será la base del algoritmo principal que dará lugar a la solución del problema general. Dentro de los supuestos está la existencia de pérdidas en los envíos, pues dadas las características inherentes de la energía eléctrica es fundamental esta consideración para la precisión de esta investigación.

Para el desarrollo de este algoritmo se utiliza la idea de *los vasos de agua*, primero en una versión sin pérdidas en los envíos y posteriormente agregando este supuesto. Además, se presentan ejemplos gráficos de diversas instancias con el objetivo de proporcionar una comprensión visual adecuada. Junto a esto se entregan resultados relacionados con la optimalidad del problema analizado, dentro de los cuales se demuestra detalladamente la exactitud del algoritmo.

Posteriormente se analiza una derivación de este problema en la cual se considera la existencia de un nuevo nodo, llamado *satélite*, que está conectado sólo a uno de los otros tres nodos principales. Al igual que los demás, éste es capaz de producir y recibir energía eléctrica. De una manera similar al problema inicial, se modela esta situación y se desarrolla un algoritmo capaz de encontrar una planificación de costo mínimo.

Por último, se estudia un sistema más general con una cantidad cualquiera de satélites para los tres nodos, y al igual que los problemas anteriores se modela la situación y se desarrolla un algoritmo que encuentre una programación a costo mínimo.

En las conclusiones se introduce el problema de la intermitencia, el cual se contemplará para un trabajo futuro.

*Dedicado a mi familia
y amigos*

Agradecimientos

Este espacio lo voy a aprovechar para agradecer en primer lugar a los responsables de todo lo que soy, mi papá y mi mamá. Ma, te voy a agradecer toda la vida por haberme ayudado desde que tengo memoria en mis estudios, por retarme cuando dejaba las cosas a última hora y por nunca ponerme mala cara cuando me esforzaba y aún así me iba mal. Nunca va a salir de mi retina todas las veces que me ayudaste a estudiar, cuando me ibas a dejar al Inmaculada aunque prácticamente no veías y todas las veces que diste la cara por mi en situaciones que yo no podía. Me ayudaste siempre en todo lo pudiste y no me va a alcanzar la vida para agradecerte. Pa, cuando pienso en mi ejemplo a seguir, pienso automáticamente en vos. Siempre voy a tener en mi memoria cuando te levantabas a las 5 de la mañana, ponías la alarma en la tele de Buenos Aires y no te veía hasta las 10 de la noche, todo con tal de darme la mejor educación posible. Aún así, con lo cansado que estabas, cuando yo te decía que quería pasear agarrabas el auto y nos llevabas al Obelisco. Gracias por escucharme cada vez que te lo pido aunque te repita lo mismo una y otra vez. Mi gran logro en la vida será convertirme en un hombre como vos. Lo mas importante que ustedes dos me enseñaron es que tengo que luchar por lo que quiero, y nunca pero nunca dejar de lado mis sueños. Soy consciente de que me saqué la lotería con ustedes y cualquier persona daría lo que sea por tener unos papás como los que tengo yo.

A Emma, mi novia, por tenerme toda la paciencia del mundo en mis momentos de estrés, por apoyarme siempre que lo necesité y darme todo el cariño y amor que me da. Sé que no soy la persona mas demostrativa del mundo pero veo todo lo que hacés y el aguante que me tenés, principalmente cuando estoy estresado. Siempre que te necesito estás para mi y has sido un pilar fundamental en mis últimos años de universidad. A mi tía Toya, por haberme cuidado en mis primeros años de universidad, desde que empecé Bachillerato hasta antes de la pandemia. Gracias por esos almuerzos exquisitos y por haberme tratado como a un hijo. Realmente no tengo forma de agradecer tanto cariño incondicional que me diste. A Manuel, que me acompañó literalmente toda la carrera, desde bachi hasta el DIM. Siempre que pudiste me ayudaste, fuiste fundamental y de lo mejor en mi carrera universitaria. Nos espera una vida de más matemática juntos. A Daniela Day, que me ayudaste en mis peores momentos en la universidad, sin conocerme, y desde ahí forjamos una amistad tremenda y hermosa. Quiero que sepas que fuiste de lo mejor que me pasó en Beauchef y nunca voy a olvidar todas esas charlas y esos chismes tomando mate. A Franco, por todos esos almuerzos y risas desde el primer día de intro a la ingeniería, sos lo mas loco. A mis primeros amigos del DIM, Pedro, Gonzalo, creo que no se imaginan todo lo que me han ayudado. Les aseguro que sin ustedes dos me hubiese costado mil veces mas. A los amigos que fui conociendo en el proceso, Caro, Aldo, Javier, Jota, Benja, Leo, Fabián. Gracias por nunca negarme una ayuda y explicarme las cosas mil veces si era necesario, son lo mejor del DIM gente. A mis amigos de Rancagua y Buenos Aires, Felipe, Genesis, Daniela, Pancho, Cristian, Dory, Gianni, Nanu. Gracias por escucharme y estar para mi cuando lo necesité, ustedes fueron y serán una parte importantísima de mi. Una mención honrosa a mi abuelo Antonio, que donde sea que esté, se que está contentísimo por mi al estar terminando la carrera por la que me felicito tanto por haber quedado.

Por último y no menos importante, a Messi y la Selección Argentina, por demostrarme que ante la adversidad siempre hay que creer e ir con la frente en alto.

Tabla de Contenido

1	Introducción	1
2	Problema de transmisión eléctrica	4
2.1	Problema de tres nodos y reducción a grafo dirigido	4
2.2	Estudio del problema de tres nodos con grafo dirigido	10
2.3	Algoritmo para el caso sin pérdidas ($r = 0$)	20
2.3.1	Ejemplos	28
2.4	Algoritmo con pérdidas lineales	34
2.4.1	Ejemplos	62
3	Problema con satélites	69
3.1	Algoritmo para (P_{ext}^C)	74
3.2	Algoritmo para (P_{ext}^N)	80
3.3	Algoritmo para (P_{ext}^S)	83
3.4	Extensiones de (P_{ext})	90
4	Conclusiones y trabajo futuro	95
4.1	Minimizar el costo esperado, con la posibilidad de compra en el mercado . .	96
4.2	Chance Constraint	96
	Bibliografía	97
	Anexo	98
	Anexo A Algoritmo base	98

Índice de Tablas

2.1	Resumen de argumentos caso IV. , demostración Teorema 2.14	59
2.2	Resumen de argumentos caso V. , demostración Teorema 2.14	60
2.3	Resumen de argumentos caso VI. , demostración Teorema 2.14	60
2.4	Resumen de argumentos caso VII. , demostración Teorema 2.14	61
2.5	Resumen de argumentos caso VIII. , demostración Teorema 2.14	61

Índice de Ilustraciones

2.1	Sistema principal a resolver	5
2.2	Posibles soluciones de (P')	7
2.3	Posibles soluciones para el grafo de la izquierda de la Figura 2.2	8
2.4	Casos que no son solución de (P')	8
2.5	Sistema simplificado	10
2.6	Ejemplo de funciones de costo c_N, c_S y c_C	11
2.7	Configuración del sistema dada por x	12
2.8	Configuración buscada en demostración del Lema 2.4	12
2.9	Configuración buscada en segundo caso de demostración del Lema 2.4	13
2.10	Diagrama inicial de los vasos de agua	19
2.11	Solución gráfica ejemplo 1 caso sin pérdidas	29
2.12	Solución gráfica ejemplo 2 caso sin pérdidas	29
2.13	Solución gráfica ejemplo 3 caso sin pérdidas	30
2.14	Solución gráfica ejemplo 4 caso sin pérdidas	31
2.15	Solución gráfica ejemplo 5 caso sin pérdidas	31
2.16	Solución gráfica ejemplo 6 caso sin pérdidas	32
2.17	Solución gráfica ejemplo 7 caso sin pérdidas	33
2.18	Solución gráfica ejemplo 8 caso sin pérdidas	33
2.19	Diagrama de Observación 2.7	42
2.20	Diagrama caso $D_S \leq Q_S$, demostración Proposición 2.12	43
2.21	Diagrama caso $D_S > Q_S$, demostración Proposición 2.12	45
2.22	Variación de producciones, demostración Teorema 2.14	52
2.23	Variación flujos caso I. , demostración Teorema 2.14	53
2.24	Variación flujos caso (I.a) , demostración Teorema 2.14	53
2.25	Variación flujos caso (I.b) , demostración Teorema 2.14	54
2.26	Variación flujos caso (I.c) , demostración Teorema 2.14	54
2.27	Variación flujos caso (I.d) , demostración Teorema 2.14	55
2.28	Variación flujos caso (I.e) , demostración Teorema 2.14	56
2.29	Variación flujos caso (II.a) , demostración Teorema 2.14	56
2.30	Variación flujos caso (II.b) , demostración Teorema 2.14	57
2.31	Variación flujos caso (II.c) , demostración Teorema 2.14	57
2.32	Variación flujos caso (II.d) , demostración Teorema 2.14	58
2.33	Variación flujos caso III. , demostración Teorema 2.14	59
3.1	Sistema con satélite	69
3.2	Posibles soluciones de (P_{ext})	70
3.3	Casos que no son solución de (P_{ext})	70
3.4	Sistema del caso con 2 satélites	90
3.5	Sistema del problema (P_{Satn})	92

1. Introducción

En la actualidad, la diversificación de fuentes energéticas y la búsqueda de soluciones más sostenibles y económicas han adquirido una importancia creciente en la planificación y gestión de los sistemas energéticos. Una cuestión elemental es la búsqueda de la producción, a menor costo, de la energía necesaria para satisfacer un país o región. El presente trabajo se centra en analizar un sistema de flujo energético que se inspira en el caso chileno y está compuesto por tres nodos principales: Norte, Sur y Centro. Cada uno de éstos nodos tiene necesidades distintas (la demanda de los consumidores) y capacidades de producción específicas para producir energía. Consideraremos que la producción energética involucra distintas tecnologías, por ejemplo energía solar, carbón y gas.

El sistema empleado es uno de subastas, el cual en una primera instancia los agentes de producción (en este caso, los nodos) entregan información para la distribuir los materiales de producción, y otro donde una entidad se encarga de aplicar un programa de costo mínimo. Este trabajo se ubica principalmente en la segunda etapa.

El objetivo principal de este estudio es desarrollar un algoritmo que resuelva un problema de optimización matemática: minimizar el costo total de las producción del sistema, que sea capaz de satisfacer la demanda. Se tendrán en cuenta las diferencias en los precios de los materiales y los flujos posibles entre los nodos, así como la capacidad de producción en cada uno de ellos. La energía solar, que se considera de costo cero, juega un papel fundamental en este análisis, pues su costo nulo para la producción resalta su papel como una fuente de energía sostenible y económicamente atractiva. En contraste, las fuentes de energía como el carbón o gas, siendo más costosos, actúan como fuentes complementarias. En resumen, el enfoque de ésta investigación gira en torno al desarrollo de un algoritmo de optimización matemática. Este algoritmo se propone como una herramienta fundamental para abordar el problema de encontrar una producción eficiente y rentable, capaz de satisfacer las demandas de todos los intereses. Este estudio contribuye al campo de la investigación en sistemas energéticos al proporcionar una herramienta analítica y metodológica para la gestión y optimización de sistemas de flujo energético con múltiples fuentes y restricciones, tal como lo es un algoritmo.

La motivación principal para el desarrollo de este algoritmo es la dificultad para resolver este problema con los métodos convencionales de programación dirigidos a optimización. Tal como se observa en [7] y [9], los algoritmos utilizados para este tipo de problemas requieren un punto de partida a criterio de la persona de interés, que posteriormente se actualiza en cada paso con el fin de encontrar la solución más cercana. Esto usualmente genera dificultades pues las soluciones entregadas pueden variar dependiendo de éste punto inicial y de esta manera ser ineficientes y poco concluyentes. Es por esto que una vez modelado nuestro problema de optimización, se lo intentó resolver de ésta manera y fue fácil observar que si bien se encuentra una solución, tal como se podría esperar, depende del punto de partida y además no entrega un mínimo global. Esto es esperable acorde a la teoría pues los problemas con costos cuadráticos no suelen comportarse de manera sencilla.

Dado esto, la idea principal de éste algoritmo es que sea capaz de solucionar el problema en cuestión en una cantidad finita de pasos y sin depender del punto inicial elegido.

En la formulación se asume por simplicidad la linealidad de las pérdidas, pues para utilizar estos en forma cuadrática se requieren ajustes de parábola que no eran relevantes en este trabajo, sin embargo es posible extender este algoritmo a estas condiciones. El producto final es una serie de diez pasos de simple ejecución para cualquier herramienta computacional, lo cual es una gran ventaja pues no tiene una alta complejidad. Además utiliza un punto inicial fijo, que es el agotamiento de todo el recurso renovable.

En el futuro se abordará el desafío de la intermitencia, un fenómeno natural que puede afectar la accesibilidad de los recursos, como en el caso de la presencia de nubes que obstaculizan la radiación solar. La disponibilidad de los medios de producción deja de ser constante o uniforme, lo que agrega una dificultad al ISO, pues la producción de energía a través de fuentes como la solar puede variar de manera impredecible debido a situaciones climáticas cambiantes.

El análisis de la intermitencia en la generación de energía es un tema crucial que requiere soluciones innovadoras. Esta investigación introduce de manera amplia propuestas para abordar la variabilidad en la producción de energía.

Comparación con la literatura La estructura de red que se utiliza en esta investigación proviene del artículo *Monopolistic competition in electricity networks with resistance losses* [2]. En dicho trabajo se puede observar un análisis de un problema similar a éste, en el contexto de un mercado eléctrico que cuenta con un Operador de Sistema Independiente (ISO), aunque en [2] no se utilizan pérdidas lineales, si no cuadráticas. El artículo [2] se centra en el estudio de subastas energéticas y muestra que la existencia de pérdidas (cuadráticas) genera un mercado imperfectamente competitivo. En el presente trabajo nos enfocamos únicamente en la etapa posterior a la subasta energética, una vez que el ISO tiene conocimiento de las funciones de costo de cada uno de los productores, con el fin de generar un algoritmo que resuelva el problema de planificación.

En el artículo *Some Remarks on Line Loss and Procurement Auctions* [4] se estudia, al igual que nosotros, el problema de planificación del ISO. La principal diferencia es que en [4] se plantea el problema dual de planificación y se desarrolla un algoritmo dual, mientras que en este trabajo se aborda directamente el problema primal y un correspondiente algoritmo. Otras pequeñas diferencias incluyen las funciones de pérdida consideradas, la inclusión de una capacidad máxima de producción en cada nodo, lo que requiere determinar las condiciones bajo las cuales el problema es factible y tiene solución (ver hipótesis (\mathcal{H}) en la Sección 2.2) En este trabajo se desarrolla un algoritmo que resuelve directamente el problema primal, siendo esta la principal diferencia entre ambos. Además, este trabajo se enfoca en una estructura particular centrada en tres nodos y que se puede generalizar al caso de satélites de forma relativamente sencilla.

Las tecnologías de producción consideradas y las funciones de costo (modeladas como funciones lineales por trozos) se basan en las utilizadas en el artículo *Pollution regulation for electricity generators in a transmission network* [3]. En dicho trabajo se considera un enfoque medioambiental y se estudia el problema del ISO que busca incentivar la producción energética mediante el uso de energías limpias y sostenibles. Si bien en esta investigación no se adentra en las complejidades relacionadas con estas fuentes, como la intermitencia y su impacto en los mercados eléctricos, se puede reconocer que es un área de interés y se deja

abierta la posibilidad de explorar estas cuestiones en futuras investigaciones (ver Sección 4).

En resumen, este trabajo se cimienta en una estructura de red sólidamente establecida, derivada del artículo [2], la cual se adaptó para resolver el problema de planificación del ISO en la etapa posterior a la subasta. A diferencia del enfoque en [4], el problema trabajado en esta investigación aborda de manera directa el problema primal. Además, el enfoque en una estructura de tres nodos, generalizable a escenarios mas amplios muestra la versatilidad de ésta propuesta. El uso de las tecnologías de producción y funciones de costo, inspiradas en [3], muestran la conexión con enfoques medioambientales, dejando espacio a futuros desarrollos. Por último, otro análisis relacionado con sistemas de subasta se encuentra en la tesis de magister *Modeling and analysis of electricity auctions* [8], el cual también se encarga de desarrollar y analizar algoritmos aplicables en mercados de electricidad.

2. Problema de transmisión eléctrica

El problema general está contextualizado en un mercado eléctrico inelástico que busca satisfacer un esquema de n nodos, cada uno con capacidad de producción propia y con la opción de enviar un flujo ϕ_{ij} de un punto i a otro punto j con sus respectivas pérdidas. Se forma así un grafo conexo con aristas en $[n] \times [n]$. Los costos de producción c_i para un nodo i son funciones lineales a trozos, de manera que el costo total del sistema será $C = \sum_i c_i(q_i)$, donde q_i representa la producción del nodo i . Éste sistema esta bajo la autoridad de una central, referenciada como *ISO (Independent System Operator)*, la cual se encarga de redistribuir la producción.

2.1. Problema de tres nodos y reducción a grafo dirigido

El objetivo principal de esta investigación es encontrar la solución óptima para $n = 3$, donde los nodos serán norte, sur y centro, de manera que cada uno tiene la capacidad de producir cierto material y enviarlo a otro nodo si es necesario. Esta simplificación del problema se sustenta en que el mercado eléctrico de Chile puede representarse a grandes rasgos como uno compuesto por tres nodos principales. En la Sección 3 abordaremos el problema en el cual estos tres nodos principales pueden abastecer a nodos *satélites*, lo que permite representar, en el contexto chileno, una red mucho mas general.

Consideraremos que la producción de energía se hace mediante tres materias primas tres materias primas, una energía renovable de costo nulo, carbón y gas. Dado esto, para cada $i \in \{N, S, C\}$ se definen los siguientes parámetros y funciones de costo:

- $c_i(q_i)$: costo de producir una cantidad q_i de material en el nodo i .
- D_i : cantidad de material demandado en el nodo i
- Q_i : capacidad máxima de producción en el nodo i .
- π_i : Cantidad total de material producido en el nodo i
- ϕ_{ij} : Flujo de material desde el nodo i al nodo j .
- P_i : Cantidad total de material disponible en el nodo i , es decir $P_i = \pi_i + \sum_{k \in \{N, S, C\}} \phi_{ki}$
- r_{ij} : factor de pérdida del flujo $i \rightarrow j$. Se considerará que la pérdida producida por cada flujo está dada por $r_{ij}\phi_{ij}$ en el nodo receptor.

Se busca minimizar el costo total de producción, es decir la función

$$C(q_N, q_S, q_C) = \sum_{i \in \{N, S, C\}} c_i(q_i)$$

Se observa un problema de optimización sobre un grafo bidireccional [10] [11], tal como se ve en la Figura 2.1.

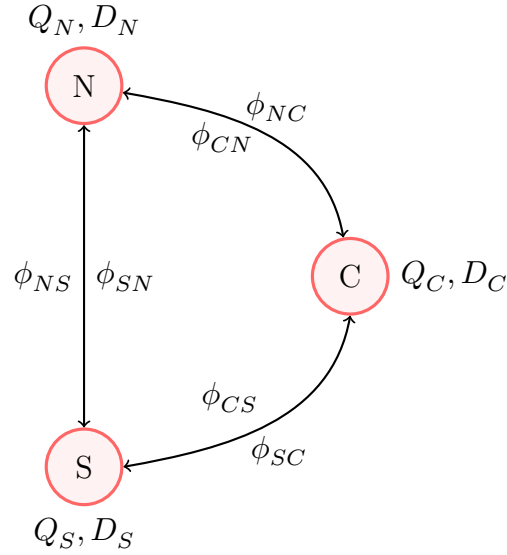


Figura 2.1: Sistema principal a resolver

Las restricciones para este problema son las siguientes:

- Satisfacer demandas:

$$D_i = q_i - \phi_{ij} - \phi_{ir} + \phi_{ji}(1 - r_{ji}) + \phi_{ri}(1 - r_{ri}) \quad i, r, j \in \{N, S, C\}, i \notin \{r, j\}, r \neq j$$

El nodo i envía y recibe flujo desde j y r . El flujo entrante está dado por $\phi_{ji}(1 - r_{ji}) + \phi_{ri}(1 - r_{ri})$, pues j y r envían ϕ_{ji} y ϕ_{ri} , respectivamente, para que i reciba $\phi_{ji}(1 - r_{ji})$ y $\phi_{ri}(1 - r_{ri})$ debido a las pérdidas. Por otro lado, el flujo saliente de i está dado por $\phi_{ij} + \phi_{ir}$. De esta manera, la cantidad total de producción disponible para i está conformada por su producción total q_i , habiéndole restado el flujo saliente y sumado el flujo entrante, considerando las pérdidas.

- Respetar capacidad de producción:

Para cada nodo $i \in \{N, S, C\}$ la producción debe ser no negativa y no puede superar el máximo de su capacidad Q_i , es decir:

$$q_i \in [0, Q_i] \quad \forall i \in \{N, S, C\}$$

- Flujos no negativos: dado que poseemos ambas variables, ϕ_{ij} y ϕ_{ji} , se considerarán sólo valores positivos o nulos, así $\phi_{ij} \geq 0, \forall i, j \in \{N, S, C\}, i \neq j$

De esta manera, el problema de optimización a resolver es el siguiente:

$$\begin{aligned}
(P') \quad & \text{mín} \quad c_N(q_N) + c_S(q_S) + c_C(q_C) \\
& \text{s.a.} \quad D_N = q_N - \phi_{NS} - \phi_{NC} + \phi_{CN}(1 - r_{CN}) + \phi_{SN}(1 - r_{SN}) \\
& \quad D_S = q_S + \phi_{NS}(1 - r_{NS}) - \phi_{SC} + \phi_{CS}(1 - r_{CS}) - \phi_{SN} \\
& \quad D_C = q_C + \phi_{NC}(1 - r_{NC}) + \phi_{SC}(1 - r_{SC}) - \phi_{CN} - \phi_{CS} \\
& \quad q_i \in [0, Q_i] \quad i \in \{N, S, C\} \\
& \quad \phi_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in \{N, S, C\} \quad i \neq j
\end{aligned}$$

Se presenta a continuación un resultado que nos ayudará a obtener la solución a este problema

Proposición 2.1. *Sea $q = (q_N, q_S, q_C, \phi_{NS}, \phi_{SN}, \phi_{NC}, \phi_{CN}, \phi_{SC}, \phi_{CS})^T$ un punto óptimo de (P') . Luego si para algún $i, j \in \{N, S, C\}$ con $i \neq j$, $\phi_{ij} > 0$, entonces $\phi_{ji} = 0$.*

Demostración. Sea $q = (q_N, q_S, q_C, \phi_{NS}, \phi_{SN}, \phi_{NC}, \phi_{CN}, \phi_{SC}, \phi_{CS})^T$ un punto factible de (P') tal que $\phi_{ij}, \phi_{ji} > 0$ para algún $i, j \in \{N, S, C\}$, $i \neq j$. La idea de la demostración es buscar otro punto \hat{q} factible para (P') que tenga un menor valor para la función objetivo de (P') . Sea $0 < \varepsilon < \min \left\{ \phi_{ij}, \frac{\phi_{ij}}{1 - r_{ij}} \right\}$. Se define entonces

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}_{ij} &= \phi_{ij} - \varepsilon \\
\hat{\phi}_{ji} &= \phi_{ji} - \varepsilon(1 - r_{ji}) \\
\hat{\phi}_{rs} &= \phi_{rs} \quad \forall r, s \in \{N, S, C\} \text{ tal que } \{r, s\} \neq \{i, j\} \\
\hat{q}_i &= q_i - \varepsilon + \varepsilon(1 - r_{ji})^2 \\
\hat{q}_j &= q_j \\
\hat{q}_r &= q_r \quad r \neq i, j
\end{aligned}$$

Notemos que ε se puede escoger de manera tal que $q_i > \varepsilon - \varepsilon(1 - r_{ji})^2$. De esta manera, \hat{q} es factible. En efecto, si $r \neq i, j$, las demandas se satisfacen

$$\begin{aligned}
\hat{q}_i - \hat{\phi}_{ij} + \hat{\phi}_{ji}(1 - r_{ji}) - \hat{\phi}_{ir} + \hat{\phi}_{ri}(1 - r_{ri}) &= D_i \\
\hat{q}_j - \hat{\phi}_{ji} + \hat{\phi}_{ij}(1 - r_{ij}) - \hat{\phi}_{jr} + \hat{\phi}_{rj}(1 - r_{rj}) &= D_j \\
\hat{q}_r - \hat{\phi}_{ri} + \hat{\phi}_{ir}(1 - r_{ir}) - \hat{\phi}_{rj} + \hat{\phi}_{jr}(1 - r_{jr}) &= D_r
\end{aligned}$$

al igual que las cotas de la producción q_i , pues observamos que $\varepsilon - \varepsilon(1 - r_{ji})^2 < q_i$, entonces $\hat{q}_i > 0$. Además

$$\begin{aligned}
\hat{q}_i &= q_i - \varepsilon + \varepsilon(1 - r_{ji})^2 \\
&= q_i - (\varepsilon - \varepsilon(1 - r_{ji})^2) < q_i \leq Q_N
\end{aligned}$$

Por último

$$\begin{aligned}
\hat{q}_j &= q_j > 0 \\
\hat{q}_r &= q_r > 0
\end{aligned}$$

Luego, como $\hat{q}_i = q_i - \underbrace{(\varepsilon - \varepsilon(1 - r_{ji})^2)}_{>0} < q_i$, $\hat{q}_j = q_j$ y $\hat{q}_r = q_r$ entonces

$$c(\hat{q}_j) + c(\hat{q}_i) + c(\hat{q}_r) < c(q_j) + c(q_i) + c(q_r)$$

□

De esta manera, con la Proposición 2.1 es posible observar que el problema presentado en la Figura 2.1 tendrá una solución dada por uno de estos dos grafos, donde en la izquierda se asume que $\phi_{NC} = 0$ y ésta variable se elimina del problema de optimización, mientras que en la derecha se hace lo mismo con ϕ_{CN} .

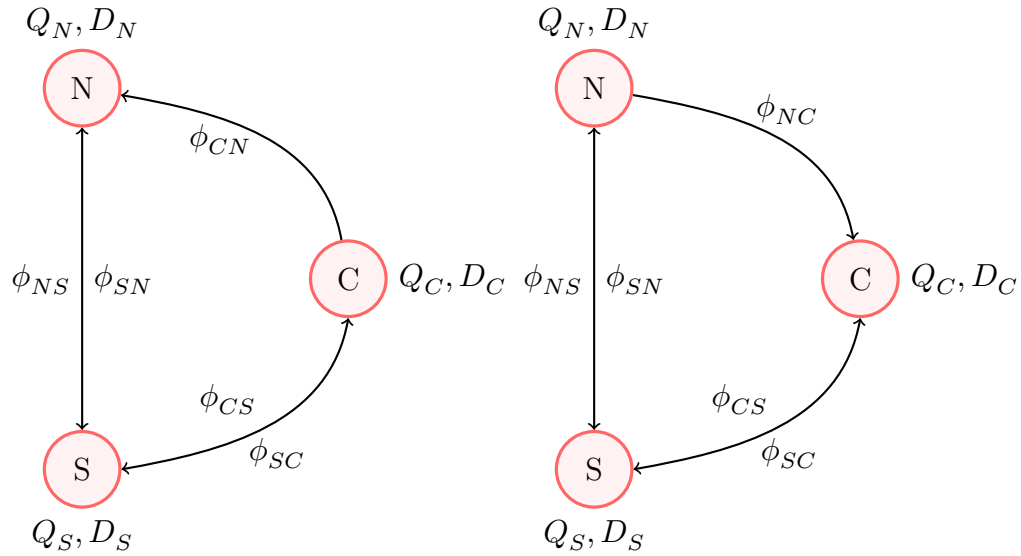


Figura 2.2: Posibles soluciones de (P')

Por lo tanto, una manera de encontrar el punto óptimo de (P') es resolver el problema de optimización dado por estas dos situaciones y elegir aquel que entregue la menor función objetivo. A su vez, se puede utilizar el mismo razonamiento para estos dos problemas: su solución estará dada con un flujo $\phi_{SC} > 0$ y $\phi_{CS} = 0$ o viceversa. Para el caso del primer grafo de la Figura 2.2 se puede resolver su correspondiente problema de optimización, encontrando la solución entre las situaciones dadas por los siguientes grafos:

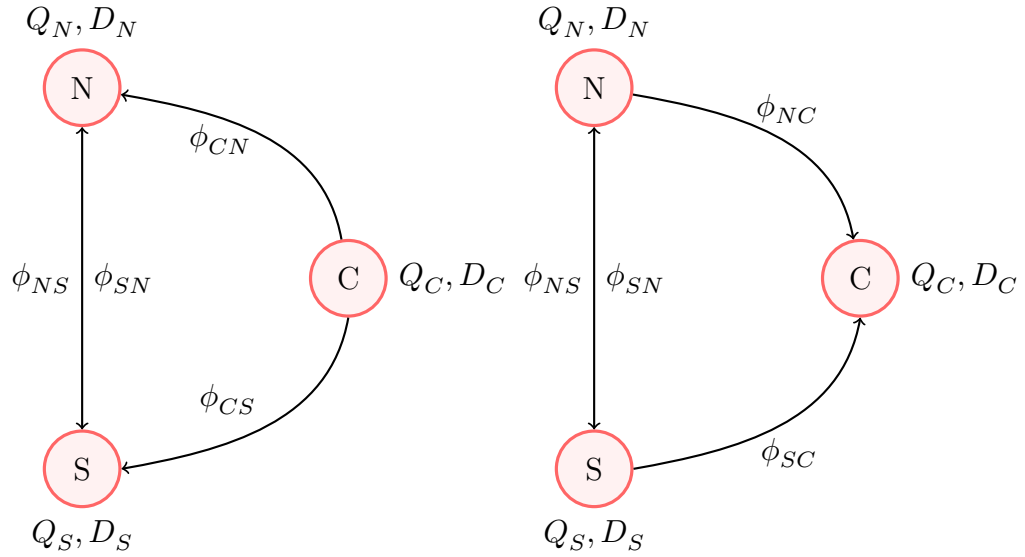


Figura 2.3: Posibles soluciones para el grafo de la izquierda de la Figura 2.2

Luego, la solución de (P') estará dada por el mínimo entre las soluciones de los problemas dados por todas las combinaciones posibles de aristas unidireccionales en un grafo completo de tres nodos. Esto es, $2^3 = 8$. Cada uno de estos se puede resolver con *ALG*, un algoritmo presentado en la Sección 2.4, permutando los roles de S , N y C en el ingreso de los datos, con la excepción de los siguientes casos

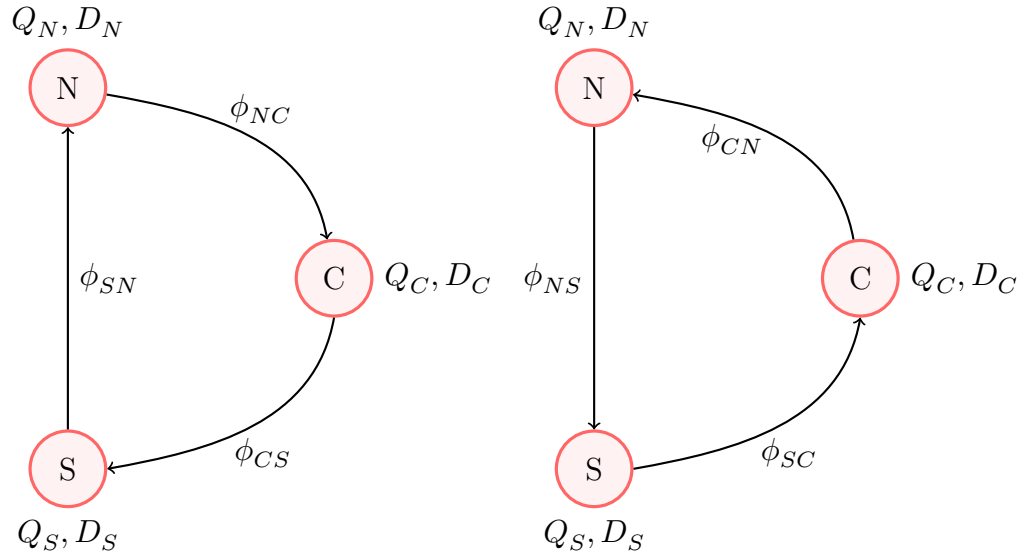


Figura 2.4: Casos que no son solución de (P')

En la siguiente proposición demostraremos que la situación que se representa a la izquierda en la Figura 2.4 no corresponde a un flujo óptimo para el problema (P') .

Proposición 2.2. *Sea $q = (q_N, q_S, q_C, \phi_{NS}, \phi_{SN}, \phi_{NC}, \phi_{CN}, \phi_{SC}, \phi_{CS})^T$ un punto factible para (P') . Si $\phi_{SN}, \phi_{NC}, \phi_{CS} > 0$ entonces q no es óptimo*

Demostración. Sea $q = (q_N, q_S, q_C, \phi_{NS}, \phi_{SN}, \phi_{NC}, \phi_{CN}, \phi_{SC}, \phi_{CS})^T$ un punto factible para (P') tal que $\phi_{SN}, \phi_{NC}, \phi_{CS} > 0$. Sea $0 < \varepsilon < \min \left\{ \phi_{CN}, \phi_{NS}, \phi_{SC}, \frac{q_C}{r_{SC}}, \frac{q_N}{r_{CN}}, \frac{q_S}{r_{NS}} \right\}$ y

$$\begin{aligned}\hat{q}_N &= q_N - r_{CN}\varepsilon, & \hat{\phi}_{NS} &= \phi_{NS} - \varepsilon \\ \hat{q}_S &= q_S - r_{NS}\varepsilon, & \hat{\phi}_{SC} &= \phi_{SC} - \varepsilon \\ \hat{q}_C &= q_C - r_{SC}\varepsilon, & \hat{\phi}_{CN} &= \phi_{CN} - \varepsilon\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\hat{q}_N + \hat{\phi}_{CN}(1 - r_{CN}) - \hat{\phi}_{NS} &= q_N - r_{CN}\varepsilon + \phi_{CN}(1 - r_{CN}) - \varepsilon(1 - r_{CN}) - \phi_{NS} + \varepsilon \\ &= q_N + \phi_{CN}(1 - r_{CN}) - \phi_{NS} \\ &= D_N \\ \hat{q}_S + \hat{\phi}_{NS}(1 - r_{NS}) - \hat{\phi}_{SC} &= q_S - r_{NS}\varepsilon + \phi_{NS}(1 - r_{NS}) - \varepsilon(1 - r_{NS}) - \phi_{SC} + \varepsilon \\ &= q_S + \phi_{NS}(1 - r_{NS}) - \phi_{SC} \\ &= D_S \\ \hat{q}_C + \hat{\phi}_{SC}(1 - r_{SC}) - \hat{\phi}_{CN} &= q_C - r_{SC}\varepsilon + \phi_{SC}(1 - r_{SC}) - \varepsilon(1 - r_{SC}) - \phi_{CN} + \varepsilon \\ &= q_C + \phi_{SC}(1 - r_{SC}) - \phi_{CN} \\ &= D_C\end{aligned}$$

Por lo tanto, como $\hat{q}_N < q_N$, $\hat{q}_S < q_S$ y $\hat{q}_C < q_C$ se tiene que

$$c(\hat{q}_N) + c(\hat{q}_S) + c(\hat{q}_C) < c(q_N) + c(q_S) + c(q_C)$$

□

Observación 2.3. *Análogamente, se puede demostrar que la situación mostrada a la derecha en la Figura 2.4 tampoco corresponde a un flujo óptimo para el problema (P') .*

Con la Proposición 2.1 y la Observación 2.3 se puede concluir que la solución de (P') estará dada por la siguiente secuencia de pasos:

Algoritmo 1 ALGen

Datos: $D_N, D_S, D_C, p_N^{\text{solar}}, p_N^{\text{carbon}}, p_N^{\text{gas}}, p_S^{\text{solar}}, p_S^{\text{carbon}}, p_S^{\text{gas}}, p_C^{\text{solar}}, p_C^{\text{carbon}}, p_C^{\text{gas}}, Q_N, Q_S, Q_C \geq 0$ y $R = (r_{NS}, r_{SN}, r_{NC}, r_{CN}, r_{NS}, r_{SN}) \in [0, 1)$

Resultado: q_N, q_S, q_C, ϕ

$S_1 \leftarrow \text{ALG}(D_N, D_S, D_C, p_N^{\text{solar}}, p_N^{\text{carbon}}, p_N^{\text{gas}}, p_S^{\text{solar}}, p_S^{\text{carbon}}, p_S^{\text{gas}}, p_C^{\text{solar}}, p_C^{\text{carbon}}, p_C^{\text{gas}}, Q_N, Q_S, Q_C, R)$

$S_2 \leftarrow \text{ALG}(D_S, D_N, D_C, p_S^{\text{solar}}, p_S^{\text{carbon}}, p_S^{\text{gas}}, p_N^{\text{solar}}, p_N^{\text{carbon}}, p_N^{\text{gas}}, p_C^{\text{solar}}, p_C^{\text{carbon}}, p_C^{\text{gas}}, Q_S, Q_N, Q_C, R)$

$S_3 \leftarrow \text{ALG}(D_N, D_C, D_S, p_N^{\text{solar}}, p_N^{\text{carbon}}, p_N^{\text{gas}}, p_C^{\text{solar}}, p_C^{\text{carbon}}, p_C^{\text{gas}}, p_S^{\text{solar}}, p_S^{\text{carbon}}, p_S^{\text{gas}}, Q_N, Q_C, Q_S, R)$

$S_4 \leftarrow \text{ALG}(D_C, D_N, D_S, p_C^{\text{solar}}, p_C^{\text{carbon}}, p_C^{\text{gas}}, p_N^{\text{solar}}, p_N^{\text{carbon}}, p_N^{\text{gas}}, p_S^{\text{solar}}, p_S^{\text{carbon}}, p_S^{\text{gas}}, Q_C, Q_N, Q_S, R)$

$S_5 \leftarrow \text{ALG}(D_C, D_S, D_N, p_C^{\text{solar}}, p_C^{\text{carbon}}, p_C^{\text{gas}}, p_S^{\text{solar}}, p_S^{\text{carbon}}, p_S^{\text{gas}}, p_N^{\text{solar}}, p_N^{\text{carbon}}, p_N^{\text{gas}}, Q_C, Q_S, Q_N, R)$

$S_6 \leftarrow \text{ALG}(D_S, D_C, D_N, p_S^{\text{solar}}, p_S^{\text{carbon}}, p_S^{\text{gas}}, p_C^{\text{solar}}, p_C^{\text{carbon}}, p_C^{\text{gas}}, p_N^{\text{solar}}, p_N^{\text{carbon}}, p_N^{\text{gas}}, Q_S, Q_C, Q_N, R)$

para cada $l \in \{1, \dots, 6\}$ **hacer**

si $V_l = \min\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6\}$ **entonces**

$q_i \leftarrow q_i^l, \forall i \in \{N, S, C\}$

$\phi_{ij} \leftarrow \phi_{ij}^l, \forall i, j \in \{N, S, C\}, i \neq j$

$V \leftarrow V_l$

fin si

fin para

El algoritmo *ALGen* resuelve las seis instancias que podrían ser solución óptima del problema (P') y elige la mejor entre éstas. Como se mencionó anteriormente, *ALG* es un algoritmo capaz de resolver el problema dado por el grafo de la Figura 2.5. Cabe notar que S corresponde al vector que contiene al valor V del problema, junto con las producciones q_i en cada nodo y los flujos ϕ_{ij} en cada arista.

Para la formulación de este algoritmo, asumiremos por simplicidad y sin pérdida de generalidad que los envíos son únicamente en los sentidos $N \rightarrow S$, $N \rightarrow C$ y $S \rightarrow C$. Esto no genera inconvenientes pues lo indicado anteriormente justifica la búsqueda de una solución para el problema de aristas unidireccionales.

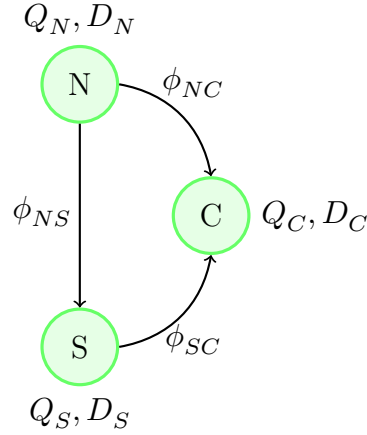


Figura 2.5: Sistema simplificado

2.2. Estudio del problema de tres nodos con grafo dirigido

Debido a los resultado de la subsección anterior, el problema de optimización simplificado que consideraremos es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 (P) \quad & \text{mín} \quad c_N(q_N) + c_S(q_S) + c_C(q_C) \\
 \text{s.a.} \quad & D_N = q_N - \phi_{NS} - \phi_{NC} \\
 & D_S = q_S + \phi_{NS} - \phi_{SC} - r_{NS}\phi_{NS} \\
 & D_C = q_C + \phi_{NC} + \phi_{SC} - r_{NC}\phi_{NC} - r_{SC}\phi_{SC} \\
 & q_i \in [0, Q_i] \quad i \in \{N, S, C\} \\
 & \phi_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in \{N, S, C\} \quad i \neq j
 \end{aligned}$$

Las funciones de costo están dadas de la siguiente manera:

$$c_i(q) = \begin{cases} 0 & \text{si } q < q_i^{solar} \\ c_i^{carbon} \cdot (q - q_i^{solar}) & \text{si } q_i^{solar} \leq q \leq q_i^{carbon} \\ c_i^{gas} \cdot (q - q_i^{carbon}) + c_i^{carbon} \cdot (q_i^{carbon} - q_i^{solar}) & \text{si } q_i^{carbon} \leq q \leq q_i^{gas} \end{cases}$$

donde q_i^{solar} , q_i^{carbon} , q_i^{gas} son las cantidades máximas de producción para el nodo i mediante energía solar, carbón y gas, respectivamente y c_i^{carbon} , c_i^{gas} son los costos de producción

mediante carbón y gas, respectivamente. La constante c_i^{solar} no se considera pues esta es nula.

Supondremos que todos los nodos tienen el mismo acceso a cada una de las tecnologías, por lo tanto $c_i^{gas} = c_j^{gas}$ y $c_i^{carbon} = c_j^{carbon}$ para todo $i, j \in \{N, S, C\}$, $i \neq j$. Además asumiremos que la producción local de gas en el nodo C es más costosa que el envío desde N y S mediante carbón, es decir

$$c_i^{carbon} \leq c_C^{gas}(1 - r) \quad i \in \{N, S\}$$

Esta desigualdad se justifica mediante el cálculo de las pérdidas en la Sección 2.4.

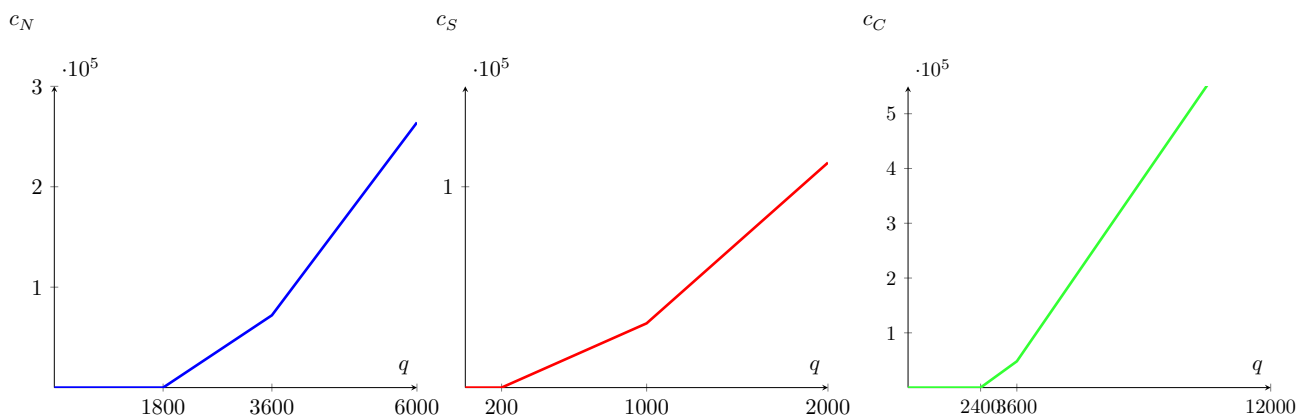


Figura 2.6: Ejemplo de funciones de costo c_N , c_S y c_C

Dada la formulación del problema (P) , para el desarrollo del algoritmo es importante notar que un resultado óptimo cumplirá que $\phi_{NC} = 0$ ó $\phi_{SC} = 0$, es decir que producir electricidad en el Norte, enviarla al Sur y posteriormente hacer un envío hacia el Centro no será la mejor opción en ningún caso. Esto se justifica en el siguiente lema:

Lema 2.4. *Sea $x = (q_N, q_S, q_C, \phi_{NS}, \phi_{NC}, \phi_{SC})^T$ un punto factible de (P) . Supongamos que $r_{SC} \geq r_{NC}$. Luego, si $\phi_{NS} > 0$ y $\phi_{SC} > 0$, entonces x no es óptimo.*

Demostración. Sea $x = (q_N, q_S, q_C, \phi_{NS}, \phi_{NC}, \phi_{SC})^T$ un punto factible de (P) tal que $\phi_{NS} > 0$ y $\phi_{SC} > 0$

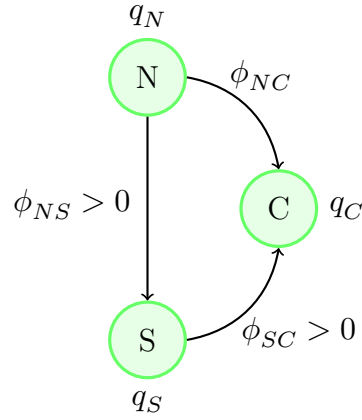


Figura 2.7: Configuración del sistema dada por x

Veamos primero el caso en el que $\phi_{SC} \geq \phi_{NS}(1 - r_{NS})$. La idea a seguir sugiere encontrar un punto \hat{x} factible a partir de x , que elimine el flujo $N \rightarrow S$, y obtener una configuración como en la figura:

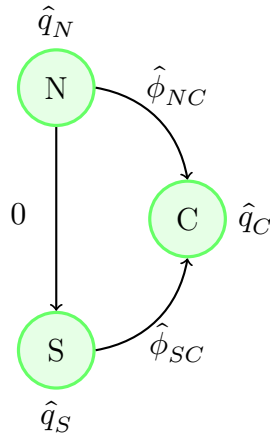


Figura 2.8: Configuración buscada en demostración del Lema 2.4

Se define entonces

$$\begin{aligned}
 \hat{\phi}_{SC} &= \phi_{SC} - \phi_{NS}(1 - r_{NS}) \\
 \hat{\phi}_{NC} &= \phi_{NC} + \phi_{NS} \\
 \hat{\phi}_{NS} &= 0 \\
 \hat{q}_N &= q_N \\
 \hat{q}_S &= q_S \\
 \hat{q}_C &= q_C - \phi_{NS}(1 - r_{NC} - (1 - r_{SC})(1 - r_{NS}))
 \end{aligned}$$

Luego, $\hat{x} = (\hat{q}_N, \hat{q}_S, \hat{q}_C, \hat{\phi}_{NS}, \hat{\phi}_{NC}, \hat{\phi}_{SC})^T$ es factible y

$$c(\hat{q}_N) + c(\hat{q}_S) + c(\hat{q}_C) < c(q_N) + c(q_S) + c(q_C)$$

En efecto, verifiquemos que es factible:

$$\begin{aligned}
\hat{q}_N - \hat{\phi}_{NC} - \hat{\phi}_{NS} &= q_N - \phi_{NC} - \phi_{NS} \\
&= D_N \\
\hat{q}_S + \hat{\phi}_{NS}(1 - r_{NS}) - \hat{\phi}_{SC} &= q_S - \phi_{SC} + \phi_{NS}(1 - r_{NS}) \\
&= D_S \\
\hat{q}_C + \hat{\phi}_{NC}(1 - r_{NC}) + \hat{\phi}_{SC}(1 - r_{SC}) &= \hat{q}_C + \phi_{NS}(1 - r_{NC}) - \phi_{NS}(1 - r_{NS})(1 - r_{SC}) + D_C - q_C \\
&= \hat{q}_C + \phi_{NS}(1 - r_{NC} - (1 - r_{SC})(1 - r_{NS})) - q_C + D_C \\
&= \hat{q}_C - \hat{q}_C + D_C \\
&= D_C
\end{aligned}$$

Notemos que $(1 - r_{NC}) > (1 - r_{SC})(1 - r_{NS})$. En efecto,

$$\begin{aligned}
r_{SC} &\geq r_{NC} \\
-r_{NC} &\geq -r_{SC} \\
1 - r_{NC} &\geq 1 - r_{SC} > (1 - r_{SC}) \underbrace{(1 - r_{NS})}_{<1}
\end{aligned}$$

Luego

$$\phi_{NS}(1 - r_{NC} - (1 - r_{SC})(1 - r_{NS})) > 0$$

y entonces $\hat{q}_C < q_C$. Con esto se tiene que

$$c(\hat{q}_C) < c(q_C), \quad c(\hat{q}_S) = c(q_S), \quad c(\hat{q}_N) = c(q_N) \implies c(\hat{q}_N) + c(\hat{q}_S) + c(\hat{q}_C) < c(q_N) + c(q_S) + c(q_C)$$

y x no es óptimo.

Supongamos ahora que $\phi_{SC} < \phi_{NS}(1 - r)$. En este caso se busca un punto \hat{x} factible a partir de x que elimine el flujo $S \rightarrow C$, tal como se representa en la figura:

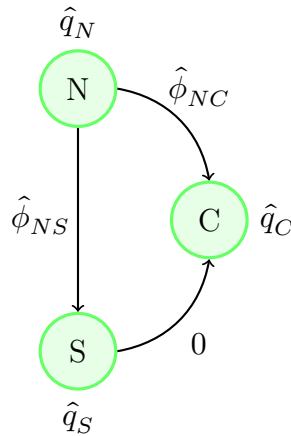


Figura 2.9: Configuración buscada en segundo caso de demostración del Lema 2.4

Para esto definimos:

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}_{SC} &= 0 \\
\hat{\phi}_{NC} &= \phi_{NC} + \phi_{SC} \\
\hat{\phi}_{NS} &= \phi_{NS} - \frac{\phi_{SC}}{1-r_{NS}} \\
\hat{q}_N &= q_N - \phi_{SC} \left(\frac{1}{1-r_{NS}} - 1 \right) \\
\hat{q}_S &= q_S \\
\hat{q}_C &= q_C - \phi_{SC}(r_{SC} - r_{NC})
\end{aligned}$$

Entonces, $\hat{x} = (\hat{q}_N, \hat{q}_S, \hat{q}_C, \hat{\phi}_{NS}, \hat{\phi}_{NC}, \hat{\phi}_{SC})^T$ es factible y

$$c(\hat{q}_N) + c(\hat{q}_S) + c(\hat{q}_C) < c(q_N) + c(q_S) + c(q_C)$$

Veamos la factibilidad:

$$\begin{aligned}
\hat{q}_N - \hat{\phi}_{NC} - \hat{\phi}_{NS} &= q_N - \phi_{SC} \left(\frac{1}{1-r_{NS}} - 1 \right) - \phi_{NC} - \phi_{SC} - \phi_{NS} + \frac{\phi_{SC}}{1-r_{NS}} \\
&= q_N - \frac{\phi_{SC}}{1-r_{NS}} + \phi_{SC} - \phi_{NC} - \phi_{SC} - \phi_{NS} + \frac{\phi_{SC}}{1-r_{NS}} \\
&= q_N - \phi_{NC} - \phi_{NS} \\
&= D_N \\
\hat{q}_S + \hat{\phi}_{NS}(1 - r_{NS}) - \hat{\phi}_{SC} &= q_S + \phi_{NS}(1 - r_{NS}) - \phi_{SC} \\
&= D_S \\
\hat{q}_C + \hat{\phi}_{NC}(1 - r_{NC}) + \hat{\phi}_{SC}(1 - r_{SC}) &= q_C - \phi_{SC}(r_{SC} - r_{NC}) + \phi_{NC}(1 - r_{NC}) + \phi_{SC}(1 - r_{NC}) \\
&= q_C - \phi_{NC}(1 - r_{NC}) + \phi_{SC}(1 - r_{SC}) \\
&= D_C
\end{aligned}$$

Luego, \hat{x} es factible y como $\hat{q}_C \leq q_C$, $\hat{q}_N < q_N$ y $\hat{q}_S = q_S$, x no es óptimo. □

En el contexto de esta investigación asumiremos que todas las resistencias son iguales, es decir que las pérdidas son dadas por el mismo factor r . De esta manera $r_{ij} = r \in [0, 1)$, $\forall i, j \in \{N, S, C\}$, $i \neq j$. Desde este punto, para una instancia con pérdida r , el resultado de *ALG* se denotará

$$ALG(D_N, D_S, D_C, p_N^{solar}, p_N^{carbon}, p_N^{gas}, p_S^{solar}, p_S^{carbon}, p_S^{gas}, p_C^{solar}, p_C^{carbon}, p_C^{gas}, Q_N, Q_S, Q_C, r)$$

En lo que sigue supondremos las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{H}) \quad & Q_N \geq D_N \\
& Q_S + (Q_N - D_N)(1 - r) \geq D_S \\
& Q_C + (Q_S - D_S)_+(1 - r) + \left(Q_N - D_N - \frac{(D_S - Q_S)_+}{1-r} \right) (1 - r) \geq D_C
\end{aligned}$$

Estos supuestos se justifican con el siguiente teorema que nos da la factibilidad de (P) .

Teorema 2.5. *Si (\mathcal{H}) se cumple, (P) tiene solución.*

Demostración. Notamos que c_i son funciones lineales a trozos por lo que pueden ser escritas de la siguiente manera [5]:

$$c_i(q_i) = \max\{a_i^{carbon} \cdot q_i + b_i^{carbon}, a_i^{gas} \cdot q_i + b_i^{gas}\}$$

donde

$$\begin{aligned} a_i^{carbon} &= c_i^{carbon} \\ b_i^{carbon} &= -c_i^{carbon} \cdot q_i^{solar} \\ a_i^{gas} &= c_i^{gas} \\ b_i^{gas} &= -c_i^{gas} \cdot q_i^{gas} + c_i^{carbon} \cdot (q_i^{carbon} - q_i^{solar}) \end{aligned}$$

De esta manera se tiene un problema equivalente:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & t_N + t_S + t_C \\ \text{s.a.} \quad & a_N^{carbon} \cdot q_N + b_N^{carbon} \leq t_N \\ & a_N^{gas} \cdot q_N + b_N^{gas} \leq t_N \\ & a_S^{carbon} \cdot q_S + b_S^{carbon} \leq t_S \\ & a_S^{gas} \cdot q_S + b_S^{gas} \leq t_S \\ & a_C^{carbon} \cdot q_C + b_C^{carbon} \leq t_C \\ & a_C^{gas} \cdot q_C + b_C^{gas} \leq t_C \\ & D_N = q_N - \phi_{NS} - \phi_{NC} \\ & D_S = q_S + \phi_{NS} - \phi_{SC} - r\phi_{NS} \\ & D_C = q_C + \phi_{NC} + \phi_{SC} - r\phi_{NC} - r\phi_{SC} \\ & q_i \in [0, Q_i] \quad i \in \{N, S, C\} \\ & \phi_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in \{N, S, C\} \quad i \neq j \end{aligned}$$

escrito en su forma matricial:

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & c^T x \\ \text{s.a.} \quad & Ax \leq b \end{aligned}$$

donde

$$q = \begin{pmatrix} q_N \\ q_S \\ q_C \\ t_N \\ t_S \\ t_C \\ \phi_{NS} \\ \phi_{NC} \\ \phi_{SC} \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_N^{carbon} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_N^{gas} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_S^{carbon} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_S^{gas} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_C^{carbon} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_C^{carbon} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-r) & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1-r) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-r) & (1-r) \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1-r) & -(1-r) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b^T = (-b_N^{carbon}, -b_N^{gas}, -b_S^{carbon}, -b_S^{gas}, -b_C^{carbon}, -b_C^{gas}, D_N, -D_N, D_S, -D_S, D_C, -D_C, Q_N, Q_S, Q_C, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Por el Teorema 3.2.1. de [1], basta con mostrar que el problema es acotado y encontrar un punto factible para concluir.

(i) El problema es acotado dado que $0 \leq c^T x, \forall x \in \{q \in \mathbb{R}^9 : Ax \leq b\}$.

(ii) Existe un punto factible. Dicho punto está dado por

$$\begin{aligned} t_i &= \max \{a_i^{carbon} q_i + b_i^{carbon}, a_i^{gas} q_i + b_i^{gas}\} \quad i = N, S, C \\ \phi_{NS} &= \frac{(D_S - Q_S)_+}{1-r} \\ \phi_{SC} &= \min \left\{ \frac{(D_C - Q_C)_+}{1-r}, (Q_S - D_S)_+ \right\} \\ \phi_{NC} &= \min \left\{ Q_N - D_N - \phi_{NS}, \frac{(D_C - Q_C - \phi_{SC}(1-r))_+}{1-r} \right\} \\ q_N &= D_N + \phi_{NS} + \phi_{NC} \\ q_S &= \min \{Q_S, D_S\} + \phi_{SC} \\ q_C &= \min \{Q_C, D_C\} \end{aligned}$$

Veamos que este punto satisface las restricciones.

- Caso 1: $Q_S \leq D_S$ y $Q_C \leq D_C$

Con esto se tiene que $q_N = D_N, q_S = D_S, q_C = D_C$ y todos los flujos son nulos, así que se satisfacen las demandas.

- Caso 2: $Q_S \leq D_S$ y $Q_C < D_C$

Así,

$$\begin{aligned}\phi_{NS} &= 0 \\ \phi_{SC} &= \min \left\{ \frac{D_C - Q_C}{1-r}, Q_S - D_S \right\} \\ \phi_{NC} &= \min \left\{ Q_N - D_N, \frac{(D_C - Q_C - \phi_{SC}(1-r))_+}{1-r} \right\}\end{aligned}$$

- Caso 2.1: $\frac{D_C - Q_C}{1-r} < Q_S - D_S$

Luego, $\phi_{SC} = \frac{D_C - Q_C}{1-r}$ y $\phi_{NC} = 0$. De esta manera, $q_S = D_S + \phi_{SC}$, $q_N = D_N$ y $q_C = Q_C$. Así,

$$\begin{aligned}q_N - \phi_{NC} - \phi_{NS} &= q_N + 0 = D_N \\ q_S + \phi_{NS}(1-r) - \phi_{SC} &= D_S \\ q_C + \phi_{NC}(1-r) + \phi_{SC}(1-r) &= Q_C + D_C - Q_C = D_C\end{aligned}$$

- Caso 2.2: $\frac{D_C - Q_C}{1-r} \geq Q_S - D_S$. De esta forma,

$$\begin{aligned}\phi_{SC} &= Q_S - D_S \\ \phi_{NC} &= \min \left\{ Q_N - D_N, \frac{D_C - Q_C - (Q_S - D_S)(1-r)}{1-r} \right\} \\ q_N &= Q_N \\ q_S &= D_S + \phi_{SC} = Q_S \\ q_C &= Q_C\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}q_N - \phi_{NS} - \phi_{NC} &= D_N \\ q_S + \phi_{NS}(1-r) - \phi_{SC} &= Q_S - Q_S + D_S = D_S \\ q_C + \phi_{NC}(1-r) + \phi_{SC}(1-r) &= D_C \quad (\text{condición 3})\end{aligned}$$

- Caso 3: $Q_S < D_S$ y $Q_C \geq D_C$. Se tiene que:

$$\begin{aligned}\phi_{SC} &= 0 \\ \phi_{NS} &= \frac{D_S - Q_S}{1-r} \\ \phi_{NC} &= 0 \\ q_N &= D_N + \frac{D_S - Q_S}{1-r} \\ q_S &= Q_S \\ q_C &= D_C\end{aligned}$$

De esta forma

$$\begin{aligned}q_N - \phi_{NC} - \phi_{NS} &= D_N \\ q_S + \phi_{NS}(1-r) - \phi_{SC} &= Q_S + D_S - Q_S = D_S \\ q_C + \phi_{NC}(1-r) + \phi_{SC}(1-r) &= q_C = D_C\end{aligned}$$

- Caso 4: $Q_S < D_S$ y $Q_C < D_C$. Así,

$$\begin{aligned}
q_N &= D_N + \frac{D_S - Q_S}{1-r} + \phi_{NC} \\
q_S &= Q_S \\
q_C &= Q_C \\
\phi_{SC} &= 0 \\
\phi_{NS} &= \frac{D_S - Q_S}{1-r} \\
\phi_{NC} &= \min \left\{ Q_N - D_N - \frac{D_S - Q_S}{1-r}, \frac{D_C - Q_C}{1-r} \right\}
\end{aligned}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned}
q_N - \phi_{NS} - \phi_{NC} &= D_N \\
q_S - \phi_{SC} + \phi_{NS}(1-r) &= Q_S + D_S - Q_S = D_S \\
q_C + \phi_{NC}(1-r) + \phi_{SC}(1-r) &= Q_C + D_C - Q_C \text{ (por tercera condición de } (\mathcal{H}))
\end{aligned}$$

Veamos ahora el caso de las restricciones de producción máxima

$$0 \leq q_C = \min\{Q_C, D_C\} \leq Q_C \implies q_N \in [Q_C, D_C]$$

Para el caso Norte y Sur se observan dos casos para cada uno

- $D_S \geq Q_S$. Entonces

$$q_S = \min\{Q_S, D_S\} + \min\{(D_C - Q_C)_+, (Q_S - D_S)_+\} = \min\{Q_S, D_S\} = Q_S$$

- $D_S < Q_S$. Entonces

$$q_S = D_S + \phi_{SC} = D_S + \min\{(D_C - Q_C)_+, Q_S - D_S\} \leq D_S + Q_S - D_S = Q_S$$

- $D_S \leq Q_S$. Luego,

$$q_N = D_N + \min\{(D_S - Q_C)_+, Q_N - D_N\} \leq D_N + Q_N - D_N = Q_N$$

- $D_S > Q_S$. Luego,

$$q_N \leq D_N + \frac{D_S - Q_S}{1-r} + Q_N - D_N - \phi_{NS} = Q_N$$

Para las restricciones que definen a las funciones a trozos, se tiene que para $i = N, S, C$

$$\begin{aligned}
t_i &= \max \{a_i^{carbon} \cdot q_i + b_i^{carbon}, a_i^{gas} \cdot q_i + b_i^{gas}\} \geq a_i^{carbon} \cdot q_i + b_i^{carbon} \\
t_i &= \max \{a_i^{carbon} \cdot q_i + b_i^{carbon}, a_i^{gas} \cdot q_i + b_i^{gas}\} \geq a_i^{gas} \cdot q_i + b_i^{gas}
\end{aligned}$$

con lo que el punto $q^T = (q_N, q_S, q_C, t_N, t_S, t_C, \phi_{NS}, \phi_{NC}, \phi_{SC})$ definido como antes, es factible.

□

La idea que se sigue para realizar el algoritmo es la de “rellenar vasos de agua”. Esto consiste en ir cubriendo las demandas con los materiales de más bajo costo, aprovechándolos al máximo en todos los nodos antes de comenzar a utilizar el siguiente material. Esta idea se ilustra en el siguiente ejemplo:

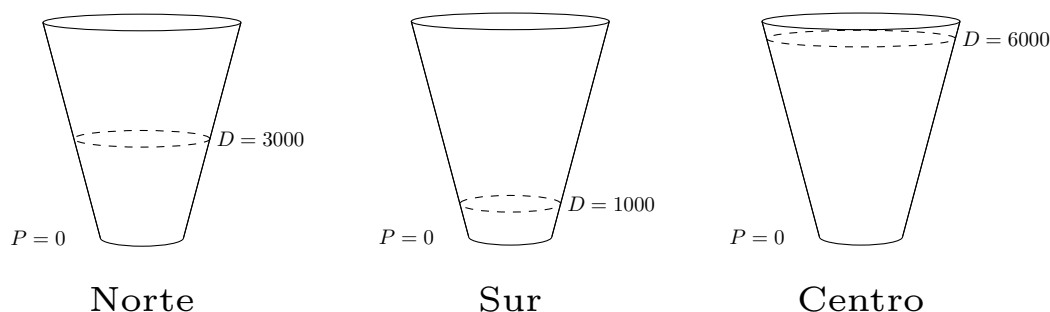
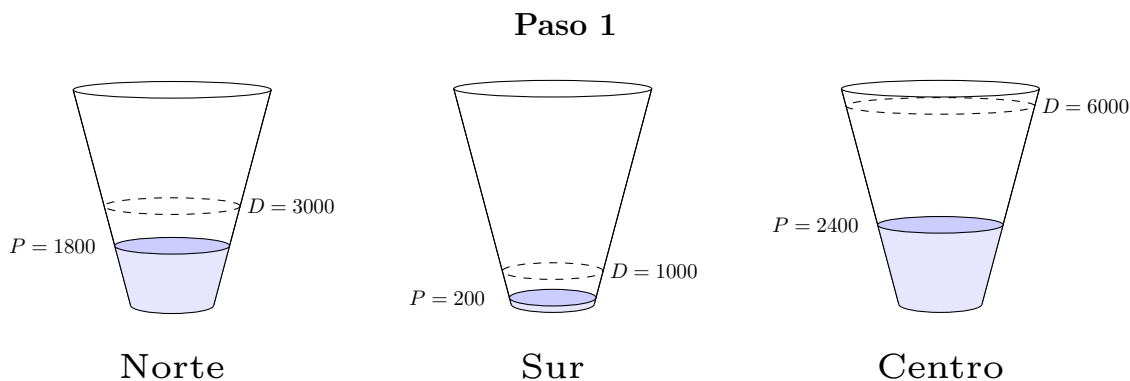


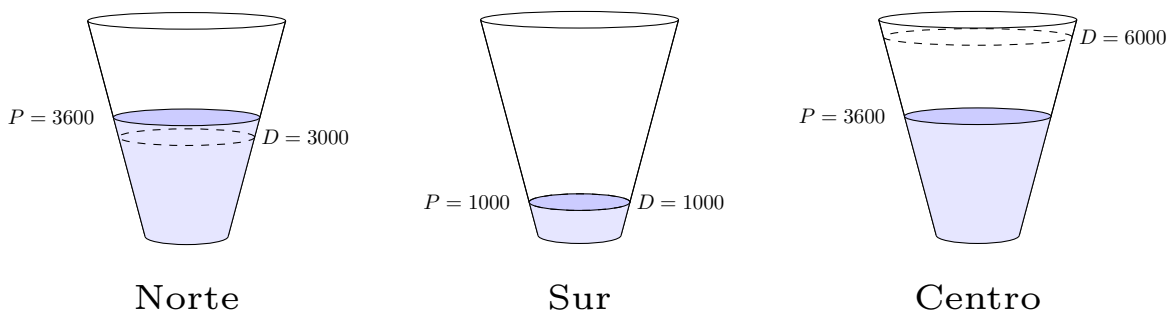
Figura 2.10: Diagrama inicial de los vasos de agua

Por ejemplo, si se tienen las demandas $D_N = 3000$, $D_S = 1000$ y $D_C = 6000$, tal como se ve en la Figura 2.10, con las funciones de costo dadas por la Figura 2.6 se puede observar en primera instancia que se utiliza al máximo la energía solar:



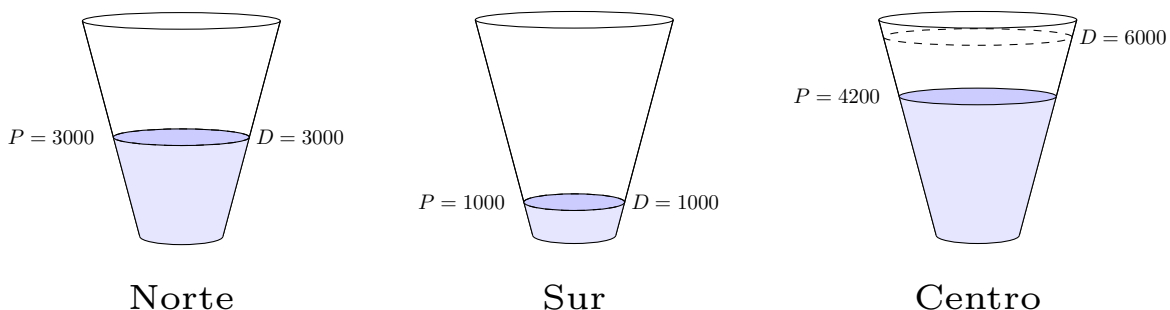
Se puede observar que se utiliza en su totalidad la energía solar, sin embargo aún falta producción para llegar a todas las demandas. Es por esto que en el Paso 2 se utiliza carbón para producir en todos los nodos.

Paso 2.1



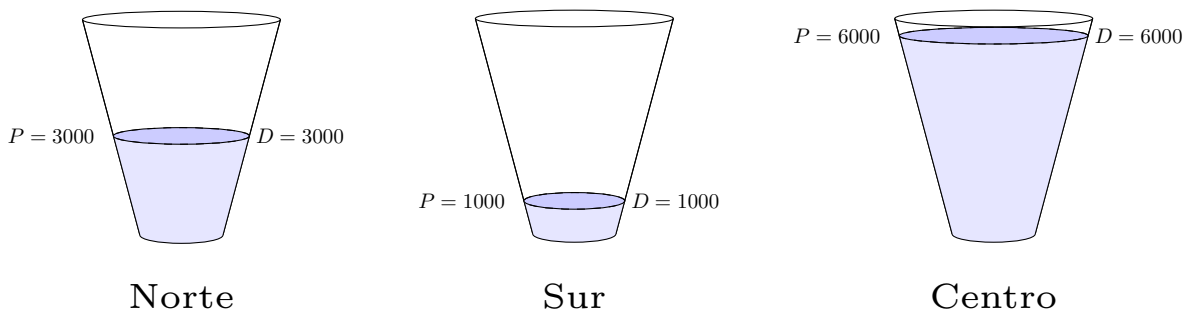
Es posible notar que sobra producción en el norte con un excedente de 600, se satisface la demanda en el sur, pero aún falta por completar la demanda del centro. Es por esto que este sobrante del norte se envía al centro (así se minimiza la producción con gas)

Paso 2.2



Por último, como para todos los nodos se agotó el carbón, se utiliza gas en el centro para terminar de satisfacer su demanda.

Paso 3



2.3. Algoritmo para el caso sin pérdidas ($r = 0$)

Para poder ejecutar el algoritmo que resuelva el problema de minimización, es necesario calcular primero las funciones de costo de cada nodo. Sea $i \in \{N, S, C\}$ y sea $p_i^{solar}, p_i^{carbon}, p_i^{gas} \in (0, 100)$ los porcentajes con respecto a Q_i correspondientes de cada método de producción, luego

$$q_i^{solar} = \frac{p_i^{solar}}{100} \cdot Q_i$$

Por otro lado, la producción correspondiente a carbón será $\frac{p_i^{carbon}}{100} \cdot Q_i$, pero dado que c_i es una función continua a trozos, se tiene que

$$q_i^{carbon} = \frac{p_i^{carbon}}{100} \cdot Q_i + q_i^{solar}$$

Por último, y de la misma manera que el caso anterior, la producción correspondiente a gas será $\frac{p_i^{gas}}{100} \cdot Q_i$ por lo que

$$q_i^{gas} = \frac{p_i^{gas}}{100} \cdot Q_i + q_i^{carbon}$$

El algoritmo propuesto sigue la idea de los “vasos de agua”, tal como se ve a continuación:

ALGORITMO:

(0) Caso crítico del Sur

Si $D_S > Q_S$

$\eta \rightarrow 1$

Si $D_S \leq Q_S$

$\eta \rightarrow 0$

(1) Se inicializan variables

$P_i = 0, \pi_i = 0$ y $\varphi_{ij} = 0$ para todo i, j

(2) Agotar energía solar en todos los nodos:

Para $i \in \{S, N, C\}$

$\pi_i \rightarrow \min\{D_i, q_i^{solar}\}$

$P_i \rightarrow \pi_i$

(3) Si se satisface demanda de S pero no de C , entonces se produce flujo hacia C mediante energía solar de S

Si $P_S \geq D_S$

Calcular envío solar disponible, $\Delta_S = q_S^{solar} - D_S$

- **3.1. Envíos que llenan nodos**

Calcular $\delta_C = D_C - P_C$

Si $P_C < D_C$ y $P_C + \Delta_S(1 - r) \geq D_C$

$$\phi_{SC} \rightarrow \phi_{SC} + \delta_C$$

$$\pi_S \rightarrow \pi_S + \delta_C$$

$$P_C \rightarrow P_C + \delta_C = D_C$$

- **3.2. Envíos que no llenan nodos**

Si $P_C < D_C$ y $P_C + \Delta_S < D_C$

$$\phi_{SC} \rightarrow \phi_{SC} + \Delta_S$$

$$\pi_S \rightarrow \pi_S + \Delta_S$$

$$P_C \rightarrow P_C + \Delta_S$$

(4) Si se satisface D_N mediante energía solar, se envía flujo hacia S y/o C si es que no satisfacen sus respectivas demandas en los pasos anteriores

Si $P_N \geq D_N$ entonces:

Calcular envío de solar disponible, $\Delta_N = q_N^{solar} - \pi_N$

- **4.0. Caso crítico Sur**

- (A) Si es suficiente para cubrir al Sur

Si $\eta = 1$, $\Delta_N \geq D_S - Q_S$:

$$\phi_{NS} \rightarrow \phi_{NS} + D_S - Q_S$$

$$P_S = P_S + D_S - Q_S$$

$$\Delta_N \rightarrow \Delta_N - D_S - Q_S$$

$$\eta \rightarrow 0$$

- (B) Si no es suficiente para cubrir al Sur

Si $\eta = 1$, $\Delta_N < D_S - Q_S$:

$$\phi_{NS} \rightarrow \phi_{NS} + \Delta_N$$

$$P_S \rightarrow P_S + \Delta_N$$

$$\Delta_N \rightarrow \Delta_N - \Delta_N = 0$$

$$\eta \rightarrow 1$$

Envíos que llenan los nodos (sólo cuando $\eta=0$)

■ **4.1. Envío al centro**

Calcular $\delta_C = D_C - P_C$

Si $P_C < D_C$, $P_C + \Delta_N \geq D_C$ y $\eta = 0$:

$\phi_{NC} \rightarrow \phi_{NC} + \delta_C$

$\pi_N \rightarrow \pi_N + \delta_C$

$P_C \rightarrow P_C + \delta_C = D_C$

$\Delta_N \rightarrow \Delta_N - \delta_C$

4.2. Envío al sur

Calcular $\delta_S = D_S - P_S$

Si $P_S < D_S$ y $P_S + \Delta_N \geq D_S$ y $\eta = 0$:

$\phi_{NS} \rightarrow \phi_{NS} + \delta_S$

$\pi_N \rightarrow \pi_N + \delta_S$

$P_S \rightarrow P_S + \delta_S = D_S$

$\Delta_N \rightarrow \Delta_N - \delta_S$

Terminar si

Terminar si

Envíos que no llenan los nodos (sólo si $\eta = 0$)

■ **4.3. Envío al centro**

Si $P_C < D_C$, $P_C + \Delta_N < D_C$ y $\eta = 0$:

$\varphi_{NC} \rightarrow \varphi_{NC} + \Delta_N$

$\pi_N \rightarrow \pi_N + \Delta_N$

$P_C \rightarrow P_C + \Delta_N$

$\Delta_N \rightarrow \Delta_N - \Delta_N = 0$

■ **4.4. Envío al sur**

Si $P_S < D_S$ y $P_S + \Delta_N < D_S$ y $\eta = 0$:

$\varphi_{NS} \rightarrow \varphi_{NS} + \Delta_N$

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \Delta_N$$

$$P_S \rightarrow P_S + \Delta_N$$

(5) Si aún no se satisface algún nodo, se utiliza carbón

■ **Centro**

Si $P_C < D_C$:

$$\pi_C \rightarrow \pi_C + \min\{q_C^{carbon} - q_C^{solar}, D_C - P_C\}$$

$$P_C \rightarrow P_C + \min\{q_C^{carbon} - q_C^{solar}, D_C - P_C\}$$

■ **Sur** Si $P_S < D_S$:

$$\pi_S \rightarrow \pi_S + \min\{q_S^{carbon} - q_S^{solar}, D_S - P_S\}$$

$$P_S \rightarrow P_S + \min\{q_S^{carbon} - q_S^{solar}, D_S - P_S\}$$

■ **Norte** Si $P_N < D_N$

$$\pi_N \rightarrow \min\{q_N^{carbon}, D_N\}$$

$$P_N \rightarrow \min\{q_N^{carbon}, D_N\}$$

(6) Si aún no se satisface D_C pero sí D_S , se envía flujo mediante carbón desde S hasta C

Si $P_S \geq D_S$

Calcular envío solar disponible, $\Delta_S = q_S^{carbon} - \pi_S$

■ **6.1. Envíos que llenan nodos**

Calcular $\delta_C = D_C - P_C$

Si $P_C < D_C$, $P_C + \Delta_S(1 - r) \geq D_C$

$$\phi_{SC} \rightarrow \phi_{SC} + \frac{\delta_C}{1-r}$$

$$\pi_S \rightarrow \pi_S + \frac{\delta_C}{1-r}$$

$$P_C \rightarrow P_C + \frac{\delta_C}{1-r} \cdot (1 - r) = D_C$$

■ **6.2. Envíos que no llenan nodos**

Si $P_C < D_C$ y $P_C + \Delta_S < D_C$

$$\phi_{SC} \rightarrow \phi_{SC} + \Delta_S$$

$$\pi_S \rightarrow \pi_S + \Delta_S$$

$$P_C \rightarrow P_C + \Delta_S$$

- (7) Si se satisface D_N mediante carbón, se envía flujo hacia S y/o C si es que no satisfacen sus respectivas demandas en los pasos anteriores

Si $P_N \geq D_N$ entonces:

Calcular envío de carbón disponible, $\Delta_N = q_N^{carbon} - \pi_N$

▪ **7.0. Caso crítico Sur**

- (A) Si es suficiente para cubrir al Sur

Si $\eta = 1$, $\Delta_N \geq D_S - Q_S - \phi_{NS}$:

$$\Delta_N \rightarrow \Delta_N - D_S - Q_S + \phi_{NS}$$

$$P_S \rightarrow P_S + D_S - Q_S - \phi_{NS}$$

$$\phi_{NS} \rightarrow \phi_{NS} + D_S - Q_S - \phi_{NS} = D_S - Q_S$$

$$\eta \rightarrow 0$$

- (B) Si no es suficiente para cubrir al Sur

Si $\eta = 1$, $\Delta_N < D_S - Q_S - \phi_{NS}$:

$$P_S \rightarrow P_S + \Delta_N$$

$$\phi_{NS} \rightarrow \phi_{NS} + \Delta_N$$

$$\Delta_N \rightarrow \Delta_N - \Delta_N = 0$$

$$\eta \rightarrow 1$$

Envíos que llenan los nodos (sólo si $\eta = 0$)

▪ **7.1. Envío al centro**

Calcular $\delta_C = D_C - P_C$

Si $P_C < D_C$, $P_C + \Delta_N \geq D_C$, y $\eta = 0$:

$$\varphi_{NC} \rightarrow \varphi_{NC} + \delta_C$$

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \delta_C$$

$$P_C \rightarrow P_C + \delta_C = D_C$$

$$\Delta_N \rightarrow \Delta_N - \delta_C$$

7.2. Envío al sur

Calcular $\delta_S = D_S - P_S$

Si $P_S < D_S$, $P_S + \Delta_N \geq D_S$ y $\eta = 0$:

$$\varphi_{NS} \rightarrow \varphi_{NS} + \delta_S$$

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \delta_S$$

$$P_S \rightarrow P_S + \delta_S = D_S$$

$$\Delta_N \rightarrow \Delta_N - \delta_S$$

Terminar si

Terminar si

Envíos que no llenan los nodos

■ **7.3. Envío al centro**

Si $P_C < D_C$, $P_C + \Delta_N < D_C$ y $\eta = 0$:

$$\varphi_{NC} \rightarrow \varphi_{NC} + \Delta_N$$

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \Delta_N$$

$$P_C \rightarrow P_C + \Delta_N$$

$$\Delta_N \rightarrow \Delta_N - \Delta_N = 0$$

■ **7.4. Envío al sur**

Si $P_S < D_S$, $P_S + \Delta_N < D_S$ y $\eta = 0$:

$$\varphi_{NS} \rightarrow \varphi_{NS} + \Delta_N$$

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \Delta_N$$

$$P_S \rightarrow P_S + \Delta_N$$

(8) Si algún nodo no se satisface aún, se utiliza gas

■ **Centro**

Si $P_C < D_C$:

$$\pi_C \rightarrow \pi_C + \min\{q_C^{gas} - q_C^{carbon}, D_C - P_C\}$$

$$P_C \rightarrow P_C + \min\{q_C^{gas} - q_C^{carbon}, D_C - P_C\}$$

■ **Sur**

Si $P_S < D_S$:

$$\pi_S \rightarrow \pi_S + \min\{q_S^{gas} - q_S^{carbon}, D_S - P_S\}$$

$$P_S \rightarrow P_S + \min\{q_S^{gas} - q_S^{carbon}, D_S - P_S\}$$

- **Norte**

Si $P_N < D_N$:

$\pi_N \rightarrow \pi_N + (D_N - P_N) = D_N$, pues hasta este punto $\pi_N = P_N$ (N aun no envía)

$P_N \rightarrow P_N + (D_N - P_N) = D_N$

(9) Si D_S se satisface pero no D_C , se envía flujo mediante gas desde S a C

Si $P_S \geq D_S$, $P_C < D_C$:

Calcular envío de gas disponible, $\Delta_S = q_S^{gas} - \pi_S$

- **9.1 Envíos que llenan nodos**

Calcular $\delta_C = D_C - P_C$

Si $P_C < D_C$ y $P_C + \Delta_S \geq D_C$

$\phi_{SC} \rightarrow \phi_{SC} + \delta_C$

$\pi_S \rightarrow \pi_S + \delta_C$

$P_C \rightarrow P_C + \delta_C = D_C$

- **9.2 Envíos que no llenan nodos**

Si $P_C < D_C$ y $P_C + \Delta_S < D_C$

$\phi_{SC} \rightarrow \phi_{SC} + \Delta_S$

$\pi_S \rightarrow \pi_S + \Delta_S$

$P_C \rightarrow P_C + \Delta_S$

(10) Si D_N se satisface pero no D_C ó D_S , se envía flujo mediante gas desde N a C y/o N a S

Si $P_N \geq D_N$

Calcular envío de gas disponible, $\Delta_N = q_N^{gas} - \pi_N$

- **10.0 Caso crítico del Sur**

Si $\eta = 1$:

$P_S \rightarrow P_S + D_S - Q_S - \phi_{NS}$

$\Delta_N \rightarrow \Delta_N - D_S - Q_S + \phi_{NS}$

$\phi_{NS} \rightarrow \phi_{NS} + D_S - Q_S - \phi_{NS} = D_S - Q_S$

$\eta = 0$

■ **10.1 Envío al centro**

Calcular $\delta_C = D_C - P_C$

Si $P_C < D_C$ y $P_C + \Delta_N(1 - r) \geq D_C$

$\phi_{NC} \rightarrow \phi_{NC} + \delta_C$

$\pi_N \rightarrow \pi_N + \delta_C$

$P_C \rightarrow P_C + \delta_C = D_C$

2.3.1. Ejemplos

Este algoritmo se utilizó en diferentes casos, variando las demandas y manteniendo fijos los siguientes parámetros

$$Q_N = 6000, Q_S = 2000, Q_C = 12000$$

y utilizando las funciones de costo:

$$c_N = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq q \leq 1800 \\ 40 \cdot (q - 1800) & \text{si } 1800 \leq q \leq 3600 \\ 80 \cdot (q - 3600) + 72000 & \text{si } 3600 \leq q \leq 6000 \end{cases}$$

$$c_S = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq q \leq 200 \\ 40 \cdot (q - 200) & \text{si } 200 \leq q \leq 1000 \\ 80 \cdot (q - 1000) + 32000 & \text{si } 1000 \leq q \leq 2000 \end{cases}$$

$$c_C = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq q \leq 2400 \\ 40 \cdot (q - 2400) & \text{si } 2400 \leq q \leq 3600 \\ 80 \cdot (q - 3600) + 48000 & \text{si } 3600 \leq q \leq 12000 \end{cases}$$

en las cuales se consideró $q_i^{carbon} = 40$, $q_i^{gas} = 80$ para todo i

1. $D_N = 1000, D_S = 1800, D_C = 4100$

- | | |
|---------------------------------------|-------------------------|
| ■ Producido en el sur: 1000 | ■ Flujo N-C: 800 |
| ■ Producido en el norte: 2600 | ■ Flujo S-C: 0 |
| ■ Producido en el centro: 3300 | ■ Flujo N-S: 800 |

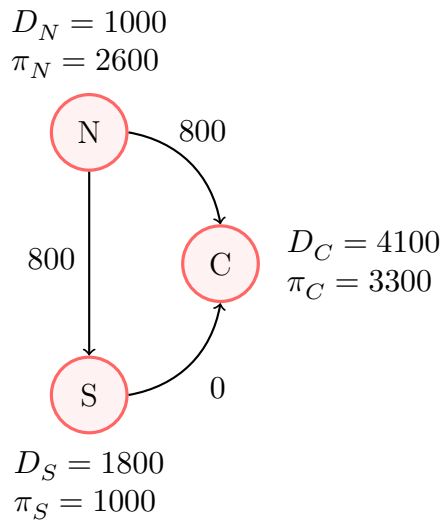


Figura 2.11: Solución gráfica ejemplo 1 caso sin pérdidas

En la Figura 2.11 se observa que todas las demandas se satisfacen y el único flujo activo es de N a C . En el centro se produce localmente una cantidad de 5400 que se complementa con el flujo de 600.

2. $D_N = 3000, D_S = 1500, D_C = 3600$

- **Producido en el sur:** 1000
- **Producido en el norte:** 3500
- **Producido en el centro:** 3600
- **Flujo N-C:** 0
- **Flujo S-C:** 0
- **Flujo N-S:** 500

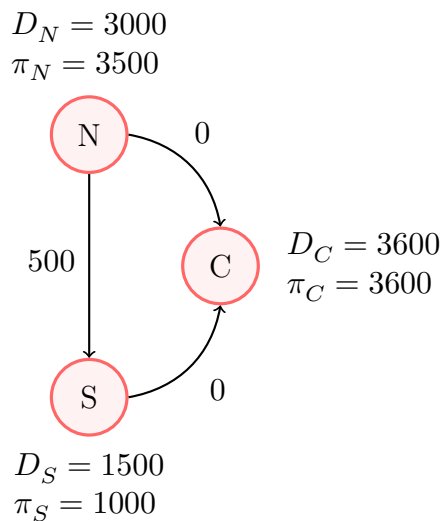


Figura 2.12: Solución gráfica ejemplo 2 caso sin pérdidas

En la Figura 2.12 se observa que todas las demandas se satisfacen con dos flujos activos:

$N - S$ y $N - C$. En el centro se produce localmente una cantidad de 5900 que se complementa con un flujo de 100 mientras que en el sur se produce localmente una cantidad de 1000 que se complementa con un flujo de 500.

3. $D_N = 1000, D_S = 1700, D_C = 4000$

- **Producido en el sur:** 1000
- **Producido en el norte:** 2500
- **Producido en el centro:** 3200
- **Flujo N-C:** 800
- **Flujo S-C:** 0
- **Flujo N-S:** 700

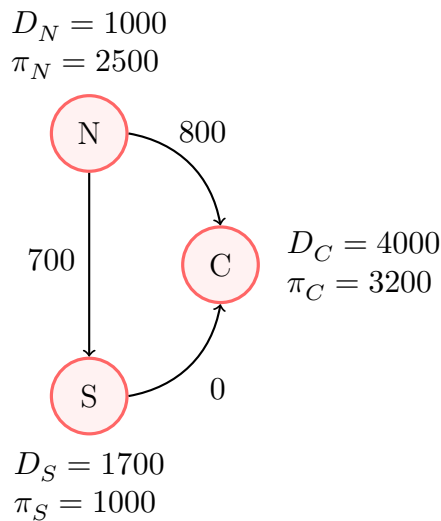


Figura 2.13: Solución gráfica ejemplo 3 caso sin pérdidas

Se observa en la Figura 2.13, de la misma manera que en el ejemplo anterior, que el sistema se satisface con dos flujos activos, $N - C$ con 400 y $N - S$ con 200.

4. $D_N = 3000, D_S = 1200, D_C = 4000$

- **Producido en el sur:** 1000
- **Producido en el norte:** 3600
- **Producido en el centro:** 3600
- **Flujo N-C:** 400
- **Flujo S-C:** 0
- **Flujo N-S:** 200

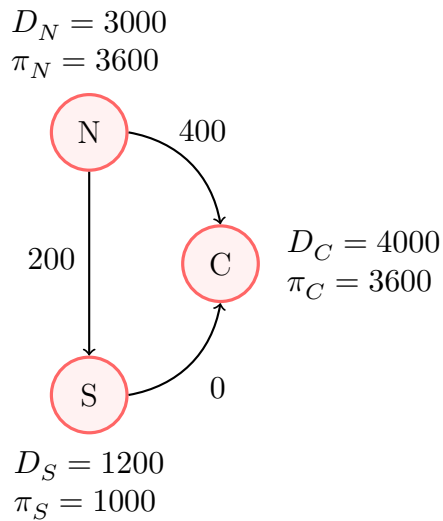


Figura 2.14: Solución gráfica ejemplo 4 caso sin pérdidas

Se puede notar en la Figura 2.14 que los flujos $N - C$ y $N - S$ complementan las producciones π_S y π_C .

5. $D_N = 3000, D_S = 800, D_C = 3600$

- **Producido en el sur:** 800
- **Producido en el norte:** 3000
- **Producido en el centro:** 3600
- **Flujo N-C:** 0
- **Flujo S-C:** 0
- **Flujo N-S:** 0

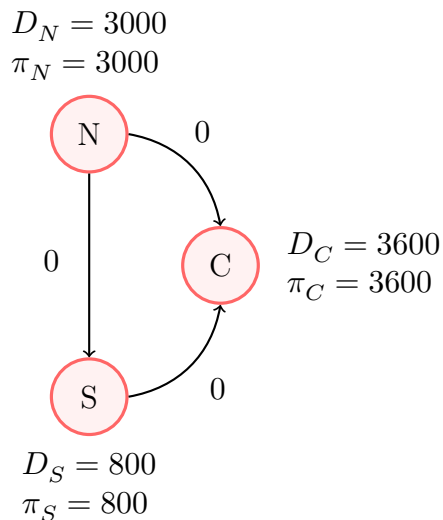


Figura 2.15: Solución gráfica ejemplo 5 caso sin pérdidas

En la Figura 2.15 se observa que, al igual que en los últimos ejemplos, dos flujos complementan las producciones. En este caso, los activos son $N - C$ y $S - C$.

6. $D_N = 3000, D_S = 500, D_C = 6000$

- **Producido en el sur: 1000**
- **Producido en el norte: 3600**
- **Producido en el centro: 4900**
- **Flujo N-C: 600**
- **Flujo S-C: 500**
- **Flujo N-S: 0**

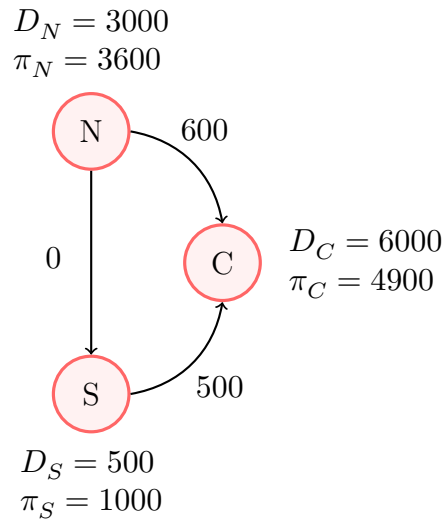


Figura 2.16: Solución gráfica ejemplo 6 caso sin pérdidas

En la Figura 2.16 se observa que las demandas se satisfacen solamente con producción local, es decir, ningún flujo está activo.

7. $D_N = 3000, D_S = 1000, D_C = 6000$

- **Producido en el sur: 1000**
- **Producido en el norte: 3600**
- **Producido en el centro: 5400**
- **Flujo N-C: 600**
- **Flujo S-C: 0**
- **Flujo N-S: 0**

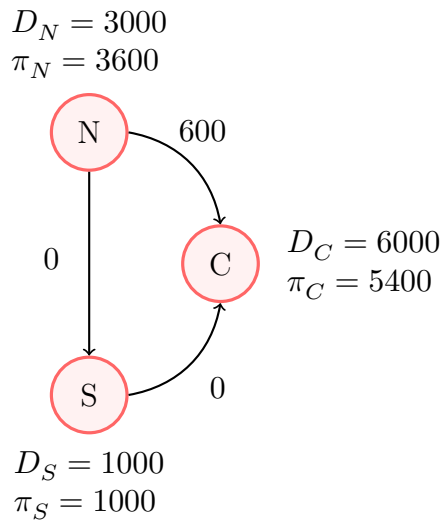


Figura 2.17: Solución gráfica ejemplo 7 caso sin pérdidas

En la Figura 2.17 se observa que sólo hay flujo de 600 desde el nodo Norte a Centro.

8. $D_N = 3000, D_S = 1500, D_C = 6000$

- **Producido en el sur:** 1000
- **Producido en el norte:** 3600
- **Producido en el centro:** 5900
- **Flujo N-C:** 100
- **Flujo S-C:** 0
- **Flujo N-S:** 500

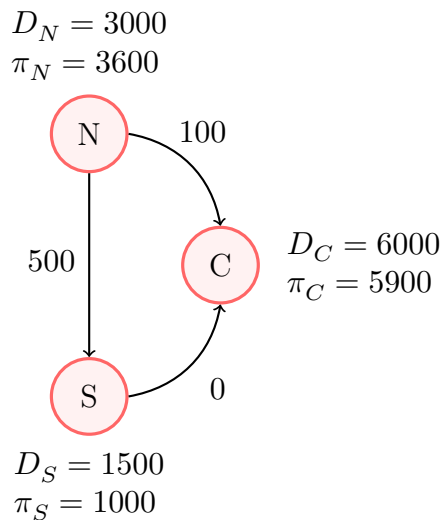


Figura 2.18: Solución gráfica ejemplo 8 caso sin pérdidas

En la Figura 2.18 se observa flujo de Norte a Sur y de Norte a Centro, satisfaciendo todas las demandas.

2.4. Algoritmo con pérdidas lineales

Algo importante a considerar es el cálculo de las pérdidas. Es decir, si un nodo i desea enviar un flujo ϕ_0 al nodo j , ¿cuanto debe enviar considerando que no llegará en su totalidad? Para el caso en que i envíe todo lo que tenga disponible, simplemente habrá una pérdida $\phi_0 \cdot r$ y la cantidad que llegará a j será $\phi_0 - \phi_0 \cdot r = \phi_0(1 - r)$. El otro caso es cuando es necesario que llegue cierta cantidad X a j . Para esto i debe enviar un extra aparte de ϕ_0 , considerando la pérdida. Planteando esto se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} X &= \phi_0 \cdot (1 - r) \\ \frac{X}{1 - r} &= \phi_0 \end{aligned}$$

es decir, la cantidad a enviar desde i a j debe ser $\frac{X}{1-r}$, considerando que se perderá $r \cdot \frac{X}{1-r}$. Hay que considerar también la posibilidad de que el Sur no pueda abastecerse por sí mismo por lo que se introduce una variable $\eta \in \{0, 1\}$, la cual representa la necesidad de hacer envío de Norte a Sur porque el nodo por sí mismo no es capaz de satisfacer su demanda. $\eta = 1$ significa que la necesidad sigue presente (hay que hacer envío $N \rightarrow S$), $\eta = 0$ representa que la situación ya se resolvió y no hay necesidad indispensable de flujo (esto no impide que mas adelante pueda volver a utilizarse el arco)

A continuación se muestra un algoritmo que considera pérdidas en los flujos:

ALG:

(0) Caso crítico del Sur

Si $D_S > Q_S$

$\eta \rightarrow 1$

Si $D_S \leq Q_S$

$\eta \rightarrow 0$

(1) Se inicializan variables

$P_i = 0, \pi_i = 0$ y $\varphi_{ij} = 0$ para todo i, j

(2) Agotar energía solar en todos los nodos:

Para $i \in \{S, N, C\}$

$\pi_i \rightarrow \min\{D_i, q_i^{solar}\}$

$P_i \rightarrow \pi_i$

(3) Si se satisface demanda de S pero no de C , entonces se produce flujo hacia C mediante energía solar de S

Si $P_S \geq D_S$

Calcular envío solar disponible, $\Delta_S = q_S^{solar} - D_S$

■ **3.1. Envíos que llenan nodos**

Calcular $\delta_C = D_C - P_C$

Si $P_C < D_C$ y $P_C + \Delta_S(1-r) \geq D_C$

$$\phi_{SC} \rightarrow \phi_{SC} + \frac{\delta_C}{1-r}$$

$$\pi_S \rightarrow \pi_S + \frac{\delta_C}{1-r}$$

$$P_C \rightarrow P_C + \frac{\delta_C}{1-r} \cdot (1-r) = D_C$$

■ **3.2. Envíos que no llenan nodos**

Si $P_C < D_C$ y $P_C + \Delta_S(1-r) < D_C$

$$\phi_{SC} \rightarrow \phi_{SC} + \Delta_S$$

$$\pi_S \rightarrow \pi_S + \Delta_S$$

$$P_C \rightarrow P_C + \Delta_S(1-r)$$

(4) Si se satisface D_N mediante energía solar, se envía flujo hacia S y/o C si es que no satisfacen sus respectivas demandas en los pasos anteriores

Si $P_N \geq D_N$ entonces:

Calcular envío de solar disponible, $\Delta_N = q_N^{solar} - \pi_N$

■ **4.0. Caso crítico Sur**

• (A) Si es suficiente para cubrir al Sur

Si $\eta = 1$, $\Delta_N \geq \frac{D_S - Q_S}{1-r}$:

$$\phi_{NS} \rightarrow \phi_{NS} + \frac{D_S - Q_S}{1-r}$$

$$P_S = P_S + D_S - Q_S$$

$$\Delta_N \rightarrow \Delta_N - \frac{D_S - Q_S}{1-r}$$

$$\eta \rightarrow 0$$

• (B) Si no es suficiente para cubrir al Sur

Si $\eta = 1$, $\Delta_N < \frac{D_S - Q_S}{1-r}$:

$$\phi_{NS} \rightarrow \phi_{NS} + \Delta_N$$

$$P_S \rightarrow P_S + \Delta_N(1-r)$$

$$\Delta_N \rightarrow \Delta_N - \Delta_N = 0$$

$$\eta \rightarrow 1$$

Envíos que llenan los nodos (sólo cuando $\eta=0$)

■ **4.1. Envío al centro**

$$\text{Calcular } \delta_C = D_C - P_C$$

Si $P_C < D_C$, $P_C + \Delta_N \cdot (1 - r) \geq D_C$ y $\eta = 0$:

$$\phi_{NC} \rightarrow \phi_{NC} + \frac{\delta_C}{1-r}$$

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \frac{\delta_C}{1-r}$$

$$P_C \rightarrow P_C + \frac{\delta_C}{1-r} \cdot (1 - r) = D_C$$

$$\Delta_N \rightarrow \Delta_N - \frac{\delta_C}{1-r}$$

4.2. Envío al sur

$$\text{Calcular } \delta_S = D_S - P_S$$

Si $P_S < D_S$ y $P_S + \Delta_N \cdot (1 - r) \geq D_S$ y $\eta = 0$:

$$\phi_{NS} \rightarrow \phi_{NS} + \frac{\delta_S}{1-r}$$

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \frac{\delta_S}{1-r}$$

$$P_S \rightarrow P_S + \frac{\delta_S}{1-r} \cdot (1 - r) = D_S$$

$$\Delta_N \rightarrow \Delta_N - \frac{\delta_S}{1-r}$$

Terminar si

Terminar si

Envíos que no llenan los nodos (sólo si $\eta = 0$)

■ **4.3. Envío al centro**

Si $P_C < D_C$, $P_C + \Delta_N(1 - r) < D_C$ y $\eta = 0$:

$$\varphi_{NC} \rightarrow \varphi_{NC} + \Delta_N$$

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \Delta_N$$

$$P_C \rightarrow P_C + \Delta_N(1 - r)$$

$$\Delta_N \rightarrow \Delta_N - \Delta_N = 0$$

■ **4.4. Envío al sur**

Si $P_S < D_S$ y $P_S + \Delta_N(1-r) < D_S$ y $\eta = 0$:

$$\varphi_{NS} \rightarrow \varphi_{NS} + \Delta_N$$

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \Delta_N$$

$$P_S \rightarrow P_S + \Delta_N(1-r)$$

(5) Si aún no se satisface algún nodo, se utiliza carbón

■ **Centro**

Si $P_C < D_C$:

$$\pi_C \rightarrow \pi_C + \min\{q_C^{carbon} - q_C^{solar}, D_C - P_C\}$$

$$P_C \rightarrow P_C + \min\{q_C^{carbon} - q_C^{solar}, D_C - P_C\}$$

■ **Sur** Si $P_S < D_S$:

$$\pi_S \rightarrow \pi_S + \min\{q_S^{carbon} - q_S^{solar}, D_S - P_S\}$$

$$P_S \rightarrow P_S + \min\{q_S^{carbon} - q_S^{solar}, D_S - P_S\}$$

■ **Norte** Si $P_N < D_N$

$$\pi_N \rightarrow \min\{q_N^{carbon}, D_N\}$$

$$P_N \rightarrow \min\{q_N^{carbon}, D_N\}$$

(6) Si aún no se satisface D_C pero sí D_S , se envía flujo mediante carbón desde S hasta C

Si $P_S \geq D_S$

Calcular envío solar disponible, $\Delta_S = q_S^{carbon} - \pi_S$

■ **6.1. Envíos que llenan nodos**

Calcular $\delta_C = D_C - P_C$

Si $P_C < D_C$, $P_C + \Delta_S(1-r) \geq D_C$

$$\phi_{SC} \rightarrow \phi_{SC} + \frac{\delta_C}{1-r}$$

$$\pi_S \rightarrow \pi_S + \frac{\delta_C}{1-r}$$

$$P_C \rightarrow P_C + \frac{\delta_C}{1-r} \cdot (1-r) = D_C$$

■ **6.2. Envíos que no llenan nodos**

Si $P_C < D_C$ y $P_C + \Delta_S(1-r) < D_C$

$$\phi_{SC} \rightarrow \phi_{SC} + \Delta_S$$

$$\pi_S \rightarrow \pi_S + \Delta_S$$

$$P_C \rightarrow P_C + \Delta_S(1-r)$$

(7) Si se satisface D_N mediante carbón, se envía flujo hacia S y/o C si es que no satisfacen sus respectivas demandas en los pasos anteriores

Si $P_N \geq D_N$ entonces:

Calcular envío de carbón disponible, $\Delta_N = q_N^{carbon} - \pi_N$

■ **7.0. Caso crítico Sur**

• (A) Si es suficiente para cubrir al Sur

$$\text{Si } \eta = 1, \Delta_N \geq \frac{D_S - Q_S}{1-r} - \phi_{NS}:$$

$$\Delta_N \rightarrow \Delta_N - \frac{D_S - Q_S}{1-r} + \phi_{NS}$$

$$P_S \rightarrow P_S + D_S - Q_S - \phi_{NS}(1-r)$$

$$\phi_{NS} \rightarrow \phi_{NS} + \frac{D_S - Q_S}{1-r} - \phi_{NS} = \frac{D_S - Q_S}{1-r}$$

$$\eta \rightarrow 0$$

• (B) Si no es suficiente para cubrir al Sur

$$\text{Si } \eta = 1, \Delta_N < \frac{D_S - Q_S}{1-r} - \phi_{NS}:$$

$$P_S \rightarrow P_S + \Delta_N(1-r)$$

$$\phi_{NS} \rightarrow \phi_{NS} + \Delta_N$$

$$\Delta_N \rightarrow \Delta_N - \Delta_N = 0$$

$$\eta \rightarrow 1$$

Envíos que llenan los nodos (sólo si $\eta = 0$)

■ **7.1. Envío al centro**

Calcular $\delta_C = D_C - P_C$

Si $P_C < D_C$, $P_C + \Delta_N \cdot (1-r) \geq D_C$ y $\eta = 0$:

$$\varphi_{NC} \rightarrow \varphi_{NC} + \frac{\delta_C}{1-r}$$

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \frac{\delta_C}{1-r}$$

$$P_C \rightarrow P_C + \frac{\delta_C}{1-r} \cdot (1-r) = D_C$$

$$\Delta_N \rightarrow \Delta_N - \frac{\delta_C}{1-r}$$

7.2. Envío al sur

Calcular $\delta_S = D_S - P_S$

Si $P_S < D_S$, $P_S + \Delta_N \cdot (1 - r) \geq D_S$ y $\eta = 0$:

$$\varphi_{NS} \rightarrow \varphi_{NS} + \frac{\delta_S}{1-r}$$

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \frac{\delta_S}{1-r}$$

$$P_S \rightarrow P_S + \frac{\delta_S}{1-r}(1-r) = D_S$$

$$\Delta_N \rightarrow \Delta_N - \frac{\delta_S}{1-r}$$

Terminar si

Terminar si

Envíos que no llenan los nodos

■ 7.3. Envío al centro

Si $P_C < D_C$, $P_C + \Delta_N(1-r) < D_C$ y $\eta = 0$:

$$\varphi_{NC} \rightarrow \varphi_{NC} + \Delta_N$$

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \Delta_N$$

$$P_C \rightarrow P_C + \Delta_N(1-r)$$

$$\Delta_N \rightarrow \Delta_N - \Delta_N = 0$$

■ 7.4. Envío al sur

Si $P_S < D_S$, $P_S + \Delta_N(1-r) < D_S$ y $\eta = 0$:

$$\varphi_{NS} \rightarrow \varphi_{NS} + \Delta_N$$

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \Delta_N$$

$$P_S \rightarrow P_S + \Delta_N(1-r)$$

(8) Si algún nodo no se satisface aún, se utiliza gas

■ Centro

Si $P_C < D_C$:

$$\pi_C \rightarrow \pi_C + \min\{q_C^{gas} - q_C^{carbon}, D_C - P_C\}$$

$$P_C \rightarrow P_C + \min\{q_C^{gas} - q_C^{carbon}, D_C - P_C\}$$

■ Sur

Si $P_S < D_S$:

$$\pi_S \rightarrow \pi_S + \min\{q_S^{gas} - q_S^{carbon}, D_S - P_S\}$$

$$P_S \rightarrow P_S + \min\{q_S^{gas} - q_S^{carbon}, D_S - P_S\}$$

■ **Norte**

Si $P_N < D_N$:

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + (D_N - P_N) = D_N, \text{ pues hasta este punto } \pi_N = P_N \text{ (} N \text{ aun no envía)}$$

$$P_N \rightarrow P_N + (D_N - P_N) = D_N$$

(9) Si D_S se satisface pero no D_C , se envía flujo mediante gas desde S a C

Si $P_S \geq D_S, P_C < D_C$:

Calcular envío de gas disponible, $\Delta_S = q_S^{gas} - \pi_S$

■ **9.1 Envíos que llenan nodos**

Calcular $\delta_C = D_C - P_C$

Si $P_C < D_C$ y $P_C + \Delta_S(1 - r) \geq D_C$

$$\phi_{SC} \rightarrow \phi_{SC} + \frac{\delta_C}{1-r}$$

$$\pi_S \rightarrow \pi_S + \frac{\delta_C}{1-r}$$

$$P_C \rightarrow P_C + \frac{\delta_C}{1-r} \cdot (1 - r) = D_C$$

■ **9.2 Envíos que no llenan nodos**

Si $P_C < D_C$ y $P_C + \Delta_S(1 - r) < D_C$

$$\phi_{SC} \rightarrow \phi_{SC} + \Delta_S$$

$$\pi_S \rightarrow \pi_S + \Delta_S$$

$$P_C \rightarrow P_C + \Delta_S(1 - r)$$

(10) Si D_N se satisface pero no D_C ó D_S , se envía flujo mediante gas desde N a C y/o N a S

Si $P_N \geq D_N$

Calcular envío de gas disponible, $\Delta_N = q_N^{gas} - \pi_N$

■ **10.0 Caso crítico del Sur**

Si $\eta = 1$:

$$P_S \rightarrow P_S + D_S - Q_S - \phi_{NS}(1 - r)$$

$$\begin{aligned}\Delta_N &\rightarrow \Delta_N - \frac{D_S - Q_S}{1-r} + \phi_{NS} \\ \phi_{NS} &\rightarrow \phi_{NS} + \frac{D_S - Q_S}{1-r} - \phi_{NS} = \frac{D_S - Q_S}{1-r} \\ \eta &= 0\end{aligned}$$

■ **10.1 Envío al centro**

$$\text{Calcular } \delta_C = D_C - P_C$$

$$\text{Si } P_C < D_C \text{ y } P_C + \Delta_N(1-r) \geq D_C$$

$$\phi_{NC} \rightarrow \phi_{NC} + \frac{\delta_C}{1-r}$$

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \frac{\delta_C}{1-r}$$

$$P_C \rightarrow P_C + \frac{\delta_C}{1-r} \cdot (1-r) = D_C$$

Es posible notar que el algoritmo correspondiente al caso sin pérdidas lineales es simplemente el caso de pérdidas con $r = 0$. Es por esto que en el Apéndice A se presenta un *Algoritmo base* que recibe las demandas D_i , los porcentajes $p_i^{solar}, p_i^{carbon}, p_i^{gas}$ y las capacidades máximas de producción Q_i y $r \in [0, 1)$, para cada nodo $i \in \{N, S, C\}$.

A continuación presentamos consecuencias directas del algoritmo que se ha escrito recién. Estos nos permitirá demostrar más adelante la factibilidad y la optimalidad del algoritmo de forma mas simplificada.

Definiremos la siguiente afirmación para $n \in \{1, \dots, 10\}$

$$\xi(n) \equiv \text{“Se utiliza el paso } n \text{ de } ALG\text{”}$$

Además, para cada variable de *ALG*, se definirá a x^n como el valor de x al finalizar el paso n -ésimo de *ALG*. De esta manera, por ejemplo, π_N^5 representará el valor de la producción en el nodo N , π_N , actualizado al Paso 5 de *ALG*.

Observación 2.6. Si $P_j^n \geq D_j$ para algún $j \in \{S, C\}$, en algún paso n , entonces $\phi_{ij}^m = \phi_{ij}^n$, $\forall m \geq n$. Es decir, el valor de todos los flujos ϕ_{ij} se mantendrá constante el resto del algoritmo una vez que el nodo j satisfaga su demanda.

Observación 2.7. Si $\eta^{4.0} = 0$, entonces *ALG* utiliza el paso 4.1 si y sólo si no utiliza el paso 4.3. Además si $\xi(4.3) \equiv V$, entonces $\xi(4.2) \equiv \xi(4.4) \equiv F$.

Lo anterior se puede ver en el siguiente diagrama

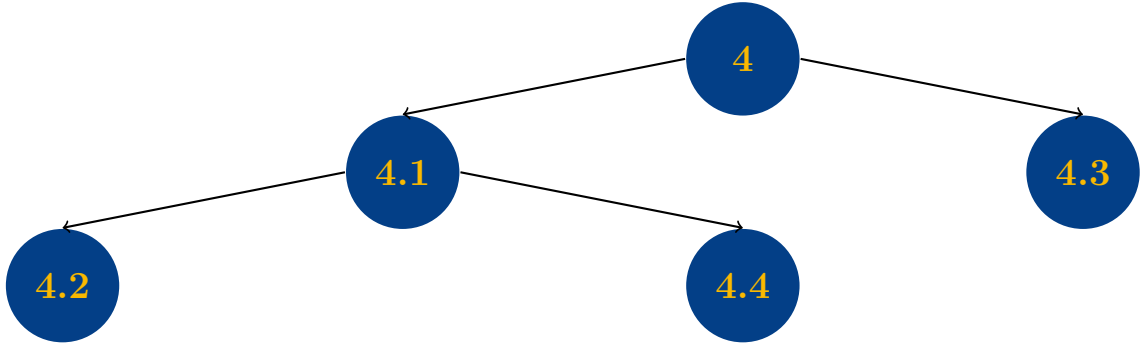


Figura 2.19: Diagrama de Observación 2.7

Observación 2.8. *La misma ramificación se cumple para el paso 7 de ALG.*

Observación 2.9. *Si en ALG se utiliza el paso 8 y hay envíos críticos pendientes para S , es decir $\xi(8) \equiv V$ y $\eta^7 = 1$, entonces $\phi_{SC}^8 = 0$ y $P_S^8 < D_S$. Luego, no se utiliza el paso 9 y en el paso 10.0 no se actualiza ϕ_{SC} por lo que es nulo hasta el final.*

Observación 2.10. *Si en ALG se utiliza el paso 8, no hay envíos críticos pendientes para S y el único flujo $N \rightarrow S$ corresponde a un envío crítico, es decir $\xi(7) \equiv V$, $\eta^7 = 0$ y $\phi_{NS}^8 = D_S - Q_S$, entonces $\Delta_S^8 = 0$ y ϕ_{SC} se mantiene constante. Además, ALG no puede utilizar el paso 9*

Observación 2.11. *Si en el paso 2 no se satisface la demanda de S , entonces no se utiliza el paso 3, es decir $P_S^2 < D_S \implies \xi(3) \equiv F$. Lo mismo sucede para los pasos 6 y 9, o sea, $P_S^{n-1} < D_S \implies \xi(n) \equiv F$ para $n \in \{6, 9\}$.*

Tenemos entonces un primer resultado que facilitará las demostraciones siguientes

Proposición 2.12. *Sea $q = (q_N, q_S, q_C, t_N, t_S, t_C, \phi_{NS}, \phi_{NC}, \phi_{SC})^T$ un punto entregado por ALG. Luego, $\phi_{NS} = 0$ ó $\phi_{SC} = 0$.*

Demostración. Distinguiremos los casos en que es crítico hacer un envío de N a S .

- Caso $D_S \leq Q_S$

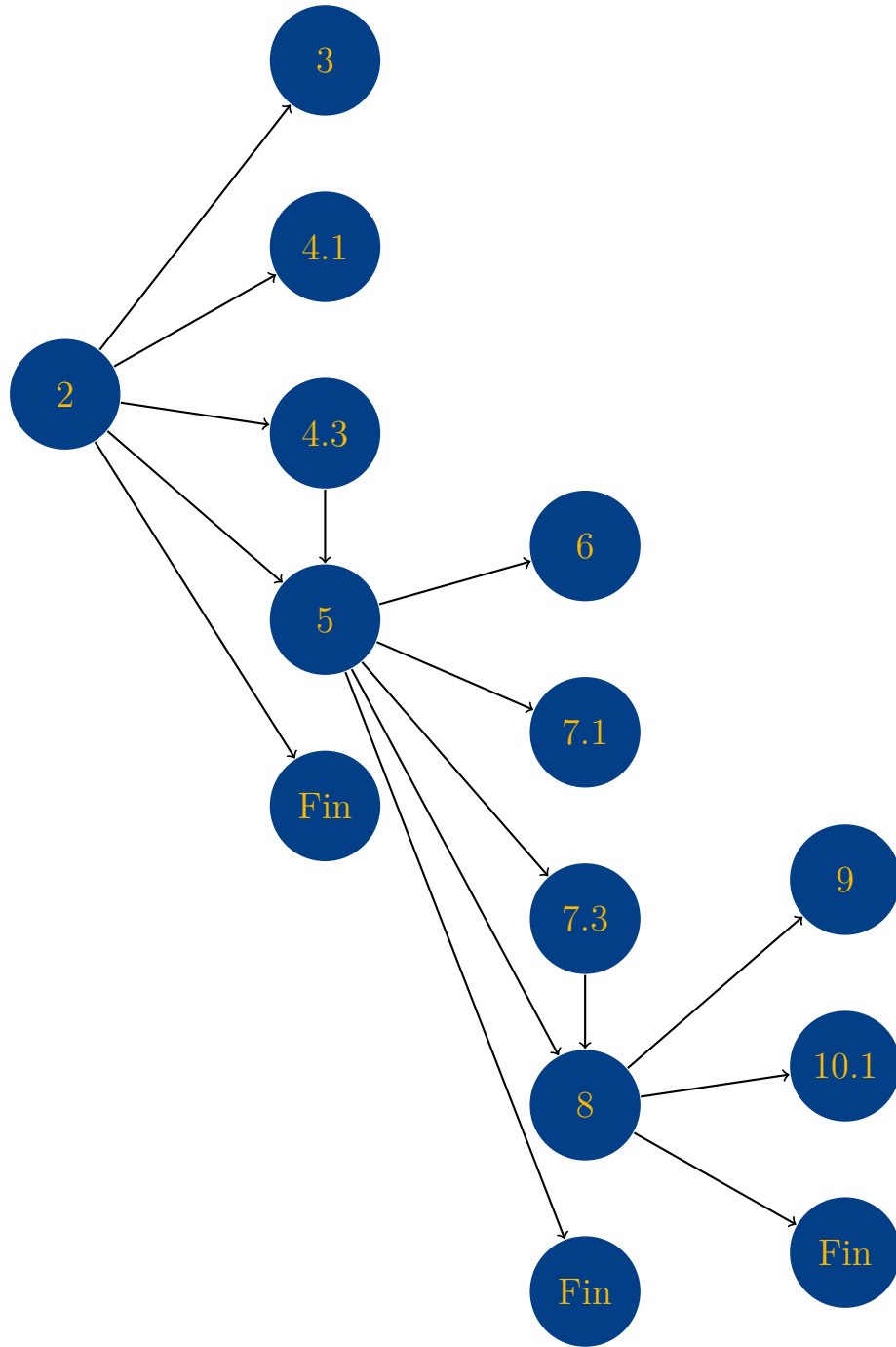


Figura 2.20: Diagrama caso $D_S \leq Q_S$, demostración Proposición 2.12

Al comenzar ALG , siempre se usa el paso 2. Si $P_N^2 = D_N$, $P_S^2 = D_S$ y $P_C^2 = D_C$ entonces ALG finaliza con todos los flujos nulos.

Contrariamente, si ALG no finaliza, como $D_S \leq Q_S$ entonces $\eta = 0$ y $\xi(4.0) \equiv F$. De

esta manera, los próximos pasos que pueden utilizarse son el 3, 4.1, 4.3 y 5.

Si $\xi(3) \equiv V$, entonces $P_S^2 = D_S$ por lo que $\phi_{SC}^3 > 0$ y $\phi_{NS}^3 = 0$, y por la Observación 2.6 el valor del flujo ϕ_{NS} se mantiene nulo hasta finalizar.

Si $\xi(4.1) \equiv V$, entonces $P_C^{4.1} = D_C$, $\phi_{NC}^{4.1} > 0$ y $\phi_{SC}^{4.1} = 0$. De la misma manera que el caso anterior, por la Observación 2.6, el valor del flujo ϕ_{SC} se mantiene nulo hasta finalizar.

Para el caso en que $\xi(4.3) \equiv V$, se tiene que $\phi_{NC}^{4.1} > 0$ y $P_C^{4.1} < D_C$ por lo que el siguiente paso es el 5. Notemos que para efectos de esta demostración la secuencia de pasos $2 \rightarrow 4.3 \rightarrow 5$ y $2 \rightarrow 5$ son equivalentes puesto que las variables de interés, ϕ_{SC} y ϕ_{NS} , no son actualizadas en el Paso 4.3. Esto se puede observar en el diagrama de la Figura 2.20.

Por último, si $\xi(5) \equiv V$ entonces los próximos pasos a utilizar son el 6, 7.1, 7.3 y 8, ó también existe la posibilidad de finalizar el algoritmo. Si este último fuese el caso, los flujos ϕ_{NS} y ϕ_{SC} son nulos pues en la secuencia $2 \rightarrow 5$ no se actualizan.

Por otro lado, si $\xi(6) \equiv V$ entonces $P_S^5 = D_S$ y $\phi_{NS}^5 = 0$, el cual se mantendrá nulo hasta finalizar. Si $\xi(7.1) \equiv V$ se tiene que $P_C^{7.1} = D_C$ y $\phi_{SC}^{7.1} = 0$ por lo tanto el valor de ϕ_{SC} se mantendrá constante.

Análogamente a la secuencia $2 \rightarrow 4.3 \rightarrow 5$, son equivalentes para efectos de esta demostración, $5 \rightarrow 7.3 \rightarrow 8$ y $5 \rightarrow 8$. Entonces si $\xi(8) \equiv V$ existe la posibilidad de finalizar *ALG* y entregar flujos nulos. Otro camino es utilizar el paso 9 lo cual implica que $P_S^8 = D_S$ y así $\phi_{NS} = 0$ hasta el final y por último, desde el paso 8 se podría utilizar el paso 10.1, en el cual solamente se actualiza el flujo ϕ_{NC} lo que finaliza con ϕ_{NS} y ϕ_{SC} nulos.

- Caso $D_S > Q_S$: se presenta el siguiente diagrama para facilitar la comprensión de la demostración

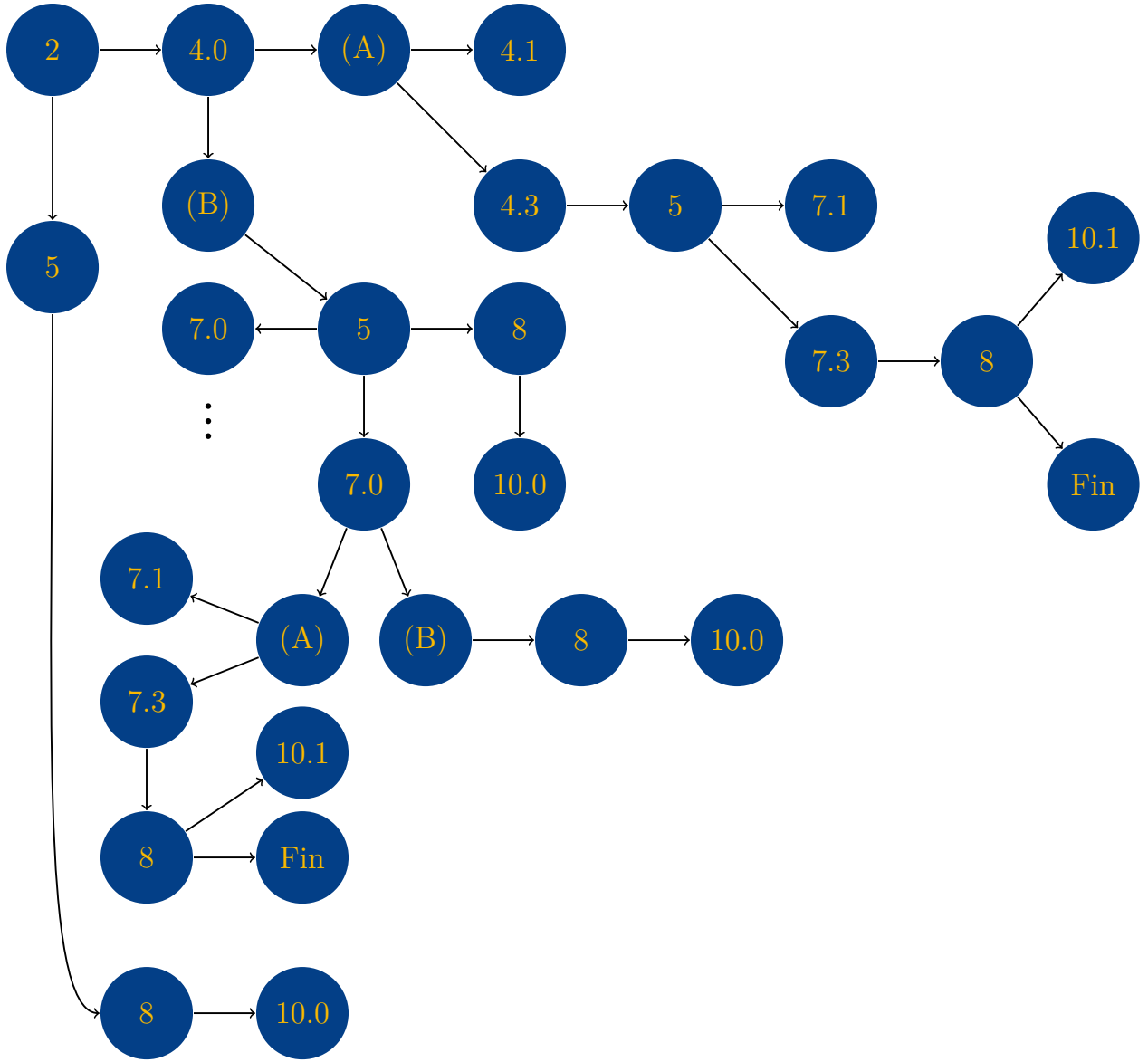


Figura 2.21: Diagrama caso $D_S > Q_S$, demostración Proposición 2.12

El algoritmo siempre utiliza el paso 2. Debido a que $D_S > Q_S$, se tiene que $D_S > q_S^{solar}$ por lo que ALG no puede finalizar en este paso. De esta manera existe la posibilidad de utilizar el paso 4.0, o bien el paso 5 con $\xi(4) \equiv F$.

Si $\xi(4.0) \equiv V$, entonces se produce una actualización del flujo ϕ_{NS} que puede eliminar o no la necesidad de un envío crítico hacia S , es decir cambiar el valor de η . Si tal es el caso, o sea $\xi(4.0(A)) \equiv V$, entonces $\eta^{4.0} = 0$ y $\phi_{NS}^{4.0} > 0$. Posterior a 4.0(A), acorde a la 2.7, es posible seguir en el paso 4.1 o 4.3. Si se utiliza 4.1 entonces se satisface C , es decir $P_C^{4.1} = D_C$, lo cual por la Observación 2.6 tiene como consecuencia que el valor de $\phi_{SC}^{4.1}$ permanezca constante el resto del algoritmo. Como el flujo ϕ_{SC} no ha sido actualizado hasta ese punto (pues $P_S^i < D_S$, con i un paso previo a 4.1), este finaliza

nulo. Por otro lado, si después de 4.0(A) no es posible satisfacer C dentro del paso 4, se utiliza 4.3, el cual finaliza con $\phi_{NC}^{4.3} > 0$ y $P_S^{4.3} < D_S$ para después continuar en el paso 5. Notemos que en este punto el nodo S no es capaz de satisfacer su demanda aún, pues

$$P_S^5 = q_S^{carbon} + D_S - Q_S < Q_S + D_S - Q_S = D_S \quad (1)$$

De esta manera, $\xi(6) \equiv F$ por la Observación 2.11, y por la Observación 2.8 hay dos caminos posibles: 7.1 y 7.3. Si $\xi(7.1) \equiv V$ entonces análogamente a 4.1 se satisface C ($P_C^{7.1} = D_C$) por lo que $\phi_{SC}^{7.1} = 0$ y el flujo ϕ_{SC} mantiene su valor nulo hasta el final de ALG . Por el contrario, si $\xi(7.3) \equiv V$ se actualiza el flujo ϕ_{NC} y $P_C^{7.3} < D_C$, y se sigue al paso 8. Notemos que el flujo ϕ_{NS} solamente se actualizó en 4.0(A), es decir $\phi_{NS}^7 = \phi_{NS}^{4.0(A)} = D_S - Q_S$ y cómo $\xi(4.0(A)) \equiv V$ entonces $\eta^7 = 0$. Por la Observación 2.10 se tiene que ϕ_{SC} es nulo al finalizar el algoritmo. Esto termina con el caso en que se utiliza el paso 4.0(A).

Volviendo a la secuencia $2 \rightarrow 4.0$, si $\xi(4.0(B)) \equiv V$ entonces $\phi_{NS}^4 > 0$, $P_S^4 < D_S$ y $\eta^4 = 1$ por lo que el próximo paso es el 5, en el cual $P_S^5 < D_S$. En efecto, como se utilizó 4.0(B) entonces $\Delta_N^{4.0} < \frac{D_S - Q_S}{1-r}$ y así

$$P_S^5 = q_S^{carbon} + \Delta_N^{4.0}(1-r) < Q_S + D_S - Q_S = D_S$$

De esta manera $\xi(6) \equiv F$ por la Observación 2.11 y entonces, posterior al paso 5, hay dos posibles caminos: utilizar el paso 8 ó 7.0. Si $\xi(8) \equiv V$, notamos que $\eta^7 = \eta^4 = 1$ y por la Observación 2.9, ϕ_{SC} se mantiene nulo hasta finalizar ALG . Por el contrario, si $\xi(7.0) \equiv V$, se elimina el envío crítico de S mediante 7.0(A) o se intenta cubrir sin éxito en 7.0(B). Si $\xi(7.0(B)) \equiv V$ entonces $\eta^7 = 1$ y el siguiente paso es el 8, lo cual por la Observación 2.9 implica que ϕ_{SC} termina nulo. Si $\xi(7.0(A)) \equiv V$, los siguientes pasos son el 7.1 y 7.3, por lo que se tiene una situación análoga a la secuencia $2 \rightarrow 4.0(A) \rightarrow 4.3 \rightarrow 5$, pues la única diferencia es que el envío crítico de S se resolvió en el paso 7.0(A) en vez del paso 4.0(A), por lo tanto los signos de los flujos son iguales a los de la secuencia mencionada. De esta manera, ϕ_{SC} permanece nulo hasta finalizar ALG . Con esto se termina el caso en que $\xi(4.0) \equiv V$.

Por último, si posterior al paso 2 se utiliza el paso 5 con $\xi(4.0) \equiv F$ entonces $P_S^5 < D_S$ por el mismo argumento de la Ecuación 1 y consecuentemente por la Observación 2.11, $\xi(6) \equiv F$. De esta manera los siguientes pasos son el 7.0 u 8. Si $\xi(8) \equiv V$ sin pasar por 7.0, notamos que $\eta^7 = \eta^0 = 1$ por lo que por la Observación 2.9, ϕ_{SC} es nulo al terminar ALG . Si por el contrario $\xi(7.0) \equiv V$, se tiene una situación análoga a la secuencia $2 \rightarrow 4.0(B) \rightarrow 5 \rightarrow 7.0$, pues en ésta solamente se tiene un paso extra que actualiza ϕ_{NS} y así la única diferencia es que el envío crítico se resuelve en un paso mas. De esta manera, la demostración es idéntica a este caso anterior y se concluye el caso en que $\xi(4.0) \equiv F$.

□

Teorema 2.13. Si (\mathcal{H}) se cumple, ALG entrega un punto factible para (P) .

Demostración. Se analizan en cada restricción las actualizaciones de las variables en cuestión en cada paso.

$$(i) D_N = q_N - \phi_{NS} - \phi_{NC}$$

- Si $D_N \leq q_N^{solar}$: en el Paso 2,

$$\pi_N^2 = D_N, \phi_{NC}^2 = \phi_{NS}^2 = 0$$

Con esto se tiene que

$$D_N = q_N - \phi_{NS} - \phi_{NC}$$

y se cumple la restricción. Las variables en cuestión pueden cambiar en los Pasos 4,7 y 10. En todos ellos, las actualizaciones son de la forma

$$\begin{array}{l} \pi_N \rightarrow \pi_N + x \quad \text{ó} \quad \pi_N \rightarrow \pi_N + x \\ \phi_{NS} \rightarrow \phi_{NS} + x \quad \quad \phi_{NC} \rightarrow \phi_{NC} + x \end{array}$$

es decir, el valor de $q_N - \phi_{NS} - \phi_{NC}$ se mantiene constante.

- Si $q_N^{solar} \leq D_N \leq q_N^{carbon}$: en el Paso 2, $\pi_N \rightarrow q_N^{solar}$ pues $D_N \geq q_N^{solar}$ y $\phi_{NC}, \phi_{NS} \rightarrow 0$. En el Paso 5, $\pi_N \rightarrow D_N$ y $\phi_{NC}, \phi_{NS} \rightarrow 0$. Tal como en el caso anterior, el valor de $D_N - \phi_{NS} - \phi_{NC} = D_N$ se mantiene constante.
- Si $q_N^{carbon} \leq D_N$: en el Paso 2, $\pi_N \rightarrow q_N^{solar}$ y $\phi_{NC}, \phi_{NS} \rightarrow 0$. En el Paso 5, $\pi_N \rightarrow q_N^{carbon}$ y $\phi_{NC}, \phi_{NS} \rightarrow 0$. En el Paso 8, $\pi_N \rightarrow D_N$ y $\phi_{NC}, \phi_{NS} \rightarrow 0$. Luego,

$$D_N - \phi_{NS} - \phi_{NC} = D_N$$

$$(ii) D_S = q_S + \phi_{NS}(1-r) - \phi_{SC}$$

- Si $D_S < q_S^{solar}$: la demanda será satisfecha en el Paso 2, pues $D_S \leq q_S^{solar} \implies \pi_S \rightarrow D_S$ y $\phi_{NS}, \phi_{SC} \rightarrow 0$. Debido a esto, la variable ϕ_{NS} nunca se actualiza por lo que conserva su valor nulo. Luego

$$q_S + \phi_{NS}(1-r) - \phi_{SC} = D_S$$

- Si $q_S^{solar} \leq D_S \leq q_S^{carbon}$:

Veamos el caso en el cual $\phi_{NS}^4 = 0$. Se tiene que $\pi_S^4 = q_S^{solar}$, y posteriormente el Paso 3 no se utiliza pues $P_S^2 = q_S^{solar} < D_S$. Como $\phi_{NS}^5 = 0$, los pasos 4.0, 4.2 y 4.4 no fueron utilizados. Por último en el Paso 5, $\pi_S^5 = D_S$ ya que $D_S \leq q_S^{carbon}$. De esta forma

$$q_S + \phi_{NS}(1-r) - \phi_{SC} = D_S$$

Por otro lado, si $\phi_{NS}^4 > 0$, esto implica que se utilizó el Paso 4.2 o 4.4. Sabemos que $\xi(4.0) \equiv F$ pues $D_S < Q_S \implies \eta^4 = 0$. Si $\xi(4.2) \equiv V$ entonces

$$\phi_{NS}^{4.2} = \frac{D_S - P_S^2}{1-r} = \frac{D_S - \pi_S}{1-r}$$

por lo tanto,

$$\pi_S + \phi_{NS}(1-r) - \phi_{SC} = D_S$$

Si $\xi(4.4) \equiv V$ entonces

$$\begin{aligned}\phi_{NS}^{4.4} &= \Delta_N^4 \\ P_S^{4.4} &= q_S^{solar} + \Delta_N^4(1-r)\end{aligned}$$

Luego,

$$D_S - P_S^{4.4} = D_S - q_S^{solar} - \Delta^4(1-r) \leq D_S - q_S^{solar} \leq q_S^{carbon} - q_S^{solar}$$

y por lo tanto,

$$\pi_S^5 = q_S^{solar} + \min\{D_S - P_S^{4.4}, q_S^{carbon} - q_S^{solar}\} = D_S - \Delta_N^4(1-r)$$

De esta manera

$$\pi_S^5 + \phi_{NS}^5(1-r) - \phi_{SC}^5 = D_S$$

- Si $q_S^{carbon} \leq D_S \leq q_S^{gas}$: Si la restricción no se satisface antes del Paso 8, entonces se tiene que

$$P_S^7 = q_S^{carbon} + \Delta_N^4(1-r)\mathbb{1}_{\xi(4.4)} + \Delta_N^7(1-r)\mathbb{1}_{\xi(7.4)} \geq q_S^{carbon}$$

$$\pi_S^7 = q_S^{carbon}$$

$$\phi_{SC}^7 = 0$$

$$\phi_{NS}^7 = \Delta_N^4\mathbb{1}_{\xi(4.4)} + \Delta_N^7\mathbb{1}_{\xi(7.4)}$$

por lo que

$$D_S - P_S^7 \leq q_S^{gas} - q_S^{carbon}$$

y luego

$$\pi_S^7 + \phi_{NS}^7(1-r) - \phi_{SC}^7 = D_S$$

- Si $q_S^{gas} < D_S$: si la restricción no se satisface antes del Paso 10, veamos el caso en el que $\eta^9 = 1$. Si esto fuese así,

$$\begin{aligned} P_S^9 &= q_S^{gas} + \Delta_N^{4.0}(1-r) + \Delta_N^{7.0}(1-r)\mathbb{1}_{\xi(7.0)} \\ \phi_{NS}^9 &= \Delta_N^{4.0}\mathbb{1}_{\xi(4.0)} + \Delta_N^{7.0}\mathbb{1}_{\xi(7.0)} \\ \pi_S^9 &= q_S^{gas} \\ \phi_{SC}^9 &= 0 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} P_S^{10.0} &= q_S^{gas} + D_S - Q_S = D_S \\ \phi_{NS}^{10.0} &= \frac{D_S - Q_S}{1-r} \\ \pi_N^{10.0} &= \pi_N^9 + \left(\frac{D_S - Q_S}{1-r} - \phi_{NS}^9 \right) \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\pi_S^{10.0} + \phi_{NS}^{10.0}(1-r) - \phi_{SC}^{10.0} = D_S$$

Cabe notar que $\pi_N^{10.0} \geq 0$ pues $\phi_{NS}^9 < \frac{D_S - Q_S}{1-r}$. Además, por (\mathcal{H}) ,

$$\pi_N^9 + \frac{D_S - Q_S}{1-r} - \phi_{NS}^9 \leq \pi_N^9 + Q_N - D_N - \phi_{NS}^9 = Q_N - (D_N + \phi_{NS}^9 - \pi_N^9) = Q_N + \phi_{NC}^9$$

Como $\eta^9 = 1$, entonces los pasos 4 y 7 sólo utilizan 4.0 y 7.0 respectivamente, por lo tanto $\phi_{NC}^9 = 0$.

Así

$$\pi_N^{10.0} \leq Q_N$$

Ahora, si $\eta^9 = 0$, entonces la restricción se satisfizo en el Paso 8.

(iii) $D_C = \pi_C + \phi_{NC}(1-r) + \phi_{SC}(1-r)$:

- Si $D_C \leq q_C^{solar}$: se tiene que en el Paso 2,

$$\begin{aligned} \pi_C &= \min\{D_C, q_C^{solar}\} = D_C \\ P_C &= \pi_C = D_C \\ \phi_{NC} &= 0 \end{aligned}$$

$$\phi_{SC} = 0$$

Luego,

$$\pi_C + \phi_{NC}(1-r) + \phi_{SC}(1-r) = D_C$$

- Si $q_C^{solar} \leq D_C \leq q_C^{carbon}$: si la restricción no se satisface hasta el Paso 5, entonces

$$\begin{aligned} P_C^4 &= q_C^{solar} + \Delta_S^{3,2}(1-r)\mathbb{1}_{\xi(3.2)} + \Delta_N^{4,3}(1-r)\mathbb{1}_{\xi(4.3)} \geq q_C^{solar} \\ \phi_{SC}^4 &= \Delta_S^{3,2}\mathbb{1}_{\xi(3.2)} \\ \phi_{NC}^4 &= \Delta_N^{4,3}\mathbb{1}_{\xi(4.3)} \\ \pi_C^4 &= q_C^{solar} \end{aligned}$$

luego $D_C - P_C^4 \leq q_C^{carbon} - q_C^{solar}$ y luego

$$\pi_C^4 = q_C^{carbon} - P_C^4$$

y así

$$\pi_C^5 + \phi_{NC}(1-r) + \phi_{SC}(1-r) = D_C$$

- Si $q_C^{carbon} \leq D_C \leq q_C^{gas}$: si la restricción no se satisface hasta el Paso 8,

$$\begin{aligned} P_C^7 &= q_C^{solar} + \Delta_S^{3,2}(1-r)\mathbb{1}_{\xi(3.2)} + \Delta_N^{4,3}(1-r)\mathbb{1}_{\xi(4.3)} + \Delta_S^{6,2}(1-r)\mathbb{1}_{\xi(6.2)} + \Delta_N^{7,3}(1-r)\mathbb{1}_{\xi(7.3)} \geq q_C^{carbon} \\ \phi_{SC}^7 &= \Delta_S^{3,2}\mathbb{1}_{\xi(3.2)} + \Delta_S^{6,2}\mathbb{1}_{\xi(6.2)} \\ \phi_{NC}^7 &= \Delta_N^{4,3}\mathbb{1}_{\xi(4.3)} + \Delta_S^{7,3}\mathbb{1}_{\xi(7.3)} \\ \pi_C^7 &= q_C^{carbon} \end{aligned}$$

luego $D_C - P_C^7 \leq q_C^{gas} - q_C^{carbon}$ y entonces

$$\pi_C^8 = q_C^{carbon} - P_C^7$$

Así

$$\pi_C^8 + \phi_{NC}(1-r) + \phi_{SC}(1-r) = D_C$$

- Si $D_C \geq q_C^{gas}$: si *ALG* no satisface la restricción hasta el Paso 10, entonces

$$\begin{aligned} P_C^9 &= q_C^{gas} + \Delta_S^{3,2}(1-r)\mathbb{1}_{\xi(3.2)} + \Delta_N^{4,3}(1-r)\mathbb{1}_{\xi(4.3)} + \Delta_S^{6,2}(1-r)\mathbb{1}_{\xi(6.2)} + \Delta_N^{7,3}(1-r)\mathbb{1}_{\xi(7.3)} + \Delta_N^{9,2}(1-r)\mathbb{1}_{\xi(9.2)} \geq q_C^{gas} \\ \phi_{SC}^9 &= \Delta_S^{3,2}\mathbb{1}_{\xi(3.2)} + \Delta_S^{6,2}\mathbb{1}_{\xi(6.2)} + \Delta_N^{9,2}\mathbb{1}_{\xi(9.2)} \\ \phi_{NC}^9 &= \Delta_N^{4,3}\mathbb{1}_{\xi(4.3)} + \Delta_S^{7,3}\mathbb{1}_{\xi(7.3)} \end{aligned}$$

$$\pi_C^9 = q_C^{g^a s}$$

luego,

$$\begin{aligned}\phi_{NC}^{10.1} &= \Delta_N^{4.3} \mathbb{1}_{\xi(4.3)} + \Delta_S^{7.3} \mathbb{1}_{\xi(7.3)} + \frac{D_C - P_C^9}{1-r} \\ \phi_{SC}^{10.1} &= \phi_{SC}^9 \\ P_C^9 &= q_C^{g^a s}\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\pi_C^8 + \phi_{NC}(1-r) + \phi_{SC}(1-r) = D_C$$

Para terminar, notamos que $\pi_N \leq Q_N$, es decir que la producción local de N no sobrepasa su capacidad máxima Q_N . En efecto, en el Paso 10.1 ya se satisfacen las restricciones de S y N . Por lo tanto

$$D_N = \pi_N^9 + \phi_{NS}^9 - \phi_{NC}^9$$

Luego supongamos que $Q_S \geq D_S$, entonces:

$$\begin{aligned}\frac{D_C - P_C^9}{1-r} + \pi_N^9 &= \frac{D_C - \pi_C^9}{1-r} - \phi_{NC}^9 - \phi_{SC}^9 + \pi_N^9 \\ &= \frac{D_C - Q_C}{1-r} - \phi_{NC}^9 - \phi_{SC}^9 + \pi_N^9 \\ &\leq (Q_S - D_S) + Q_N - \phi_{NC}^9 - \phi_{SC}^9 + \phi_{NS}^9 + \phi_{NC}^9 \\ &= (Q_S - D_S) + Q_N - \phi_{SC}^9 + \phi_{NS}^9\end{aligned}$$

Si $\phi_{SC}^9 > 0 \implies \phi_{NS}^9 = 0$ por Proposición 2.2 y $\phi_{SC}^9 = Q_S - D_S$.

por lo tanto

$$\frac{D_C - P_C^9}{1-r} + \pi_N^9 \leq Q_N$$

Si $\phi_{NS}^9 > 0 \implies \phi_{SC}^9 = 0$. Como C todavía no se satisface en el Paso 9, entonces $P_C^9 < D_C^9$ y se utiliza el Paso 9, por ende $Q_S - D_S = 0$.

Por otro lado, si $Q_S < D_S$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{D_C - P_C^9}{1-r} + \pi_N^9 &= \frac{D_C - \pi_C^9}{1-r} - \phi_{NC}^9 - \overbrace{\phi_{SC}^9}^{=0(Q_S < D_S)} + \pi_N^9 \\ &\leq (Q_N - D_N) - \frac{D_S - Q_S}{1-r} - \phi_{NC}^9 + \pi_N^9 \\ &= Q_N - \frac{D_S - Q_S}{1-r} - (D_N - \pi_N^9 + \phi_{NC}^9) \\ &= Q_N - \left(\frac{D_S - Q_S}{1-r} - \phi_{NS}^9 \right)\end{aligned}$$

Tenemos que $D_S > Q_S$, entonces $\phi_{NS}^9 \leq \frac{D_S - Q_S}{1-r}$, por lo tanto

$$\frac{D_S - Q_S}{1 - r} - \phi_{NS}^9 \geq 0$$

De esta forma

$$\frac{D_C - P_C^9}{1 - r} + \pi_N^9 \leq Q_N$$

□

Teorema 2.14. *Si (\mathcal{H}) se cumple, ALG entrega un punto óptimo para (P) .*

Demostración. Supongamos que existe un punto $q^* = (q_N^*, q_S^*, q_C^*, \phi_{NS}^*, \phi_{NC}^*, \phi_{SC}^*)$ que factible para (P) y tal que $c_N(q_N^*) + c_S(q_S^*) + c_C(q_C^*) < c_N(q_N^{al}) + c_S(q_S^{al}) + c_C(q_C^{al})$, donde $q^{al} = (q_N^{al}, q_S^{al}, q_C^{al}, t_N^{al}, t_S^{al}, t_C^{al}, \phi_{NS}^{al}, \phi_{NC}^{al}, \phi_{SC}^{al})$ es un punto entregado por ALG.

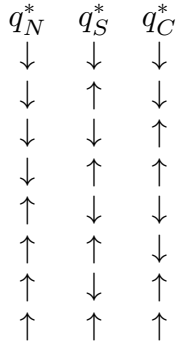


Figura 2.22: Variación de producciones, demostración Teorema 2.14

Esto significa que existe $i \in \{N, S, C\}$ tal que $q_i^* < q_i^{al}$:

- I. Si $q_S^* < q_S^{al}$, $q_N^* < q_N^{al}$, $q_C^* < q_C^{al}$: se tiene $q_N^* = q_N^{al} - \varepsilon_N$, $q_S^* = q_S^{al} - \varepsilon_S$ y $q_C^* = q_C^{al} - \varepsilon_C$, donde $\varepsilon_N, \varepsilon_S, \varepsilon_C > 0$. Recordemos que estos son puntos factibles, luego:

$$\begin{aligned} D_N &= q_N^* - \phi_{NS}^* - \phi_{NC}^* \\ D_S &= q_S^* - \phi_{SC}^* + \phi_{NS}^*(1 - r) \\ D_C &= q_C^* + \phi_{SC}^*(1 - r) + \phi_{NC}^*(1 - r) \end{aligned}$$

Notamos que los flujos pueden variar de acuerdo a la Figura 2.23

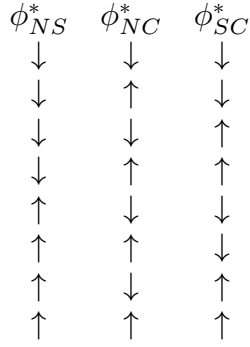


Figura 2.23: Variación flujos caso **I.**, demostración Teorema 2.14

(a) Si $\phi_{NC}^* < \phi_{NC}^{al}$ y $\phi_{SC}^* < \phi_{SC}^{al}$, entonces

$$\phi_{NC}^* = \phi_{NC}^{al} - \varepsilon_{NC}$$

$$\phi_{SC}^* = \phi_{SC}^{al} - \varepsilon_{SC}$$

con $\varepsilon_{NC}, \varepsilon_{SC} > 0$.

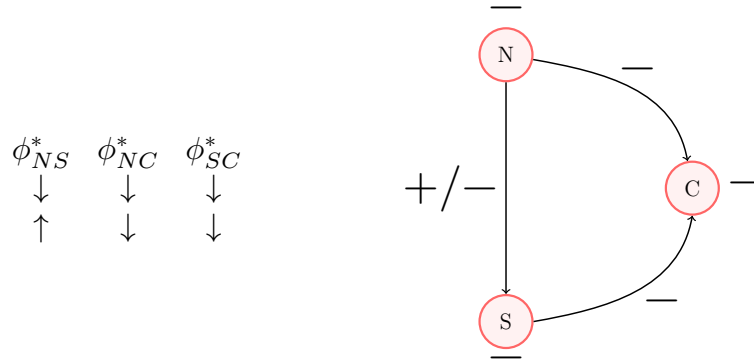


Figura 2.24: Variación flujos caso **(I.a)**, demostración Teorema 2.14

Luego, por la factibilidad de q^*

$$\begin{aligned} D_C &= q_C^* + \phi_{NC}^*(1-r) + \phi_{SC}^*(1-r) \\ D_C &= q_C^{al} - \varepsilon_C + \phi_{NC}^{al}(1-r) + \varepsilon_{NC}(1-r) + \phi_{SC}^{al}(1-r) + \varepsilon_{SC}(1-r) \\ 0 &= -\varepsilon_C - \varepsilon_{NC}(1-r) - \varepsilon_{SC}(1-r) \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción por la positividad de $\varepsilon_{NC}, \varepsilon_{SC}$ y ε_C

(b) Si $\phi_{NS}^* \geq \phi_{NS}^{al}$ y $\phi_{NC}^* \geq \phi_{NC}^{al}$, entonces

$$\phi_{NS}^* = \phi_{NS}^{al} + \varepsilon_{NS}$$

$$\phi_{NC}^* = \phi_{NC}^{al} + \varepsilon_{NC}$$

con $\varepsilon_{NS} \geq 0$ y $\varepsilon_{NC} \geq 0$.

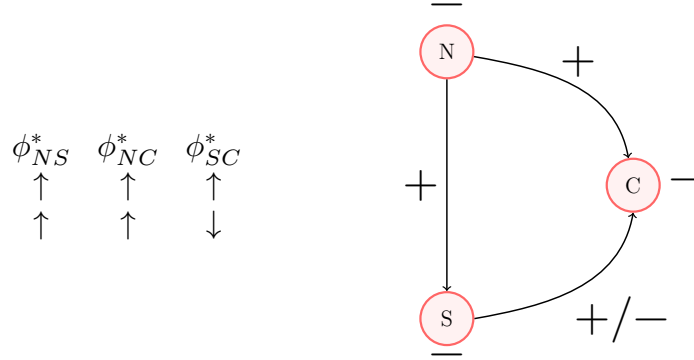


Figura 2.25: Variación flujos caso **(I.b)**, demostración Teorema 2.14

Luego, por la factibilidad de q^* ,

$$\begin{aligned} D_N &= q_N^* - \phi_{NC}^*(1-r) - \phi_{NS}^*(1-r) \\ D_N &= q_N^{al} - \varepsilon_N - \phi_{NC}^{al}(1-r) - \varepsilon_{NC}(1-r) - \phi_{NS}^{al}(1-r) - \varepsilon_{NS}(1-r) \\ 0 &= -\varepsilon_N - \varepsilon_{NC}(1-r) - \varepsilon_{NS}(1-r) \\ \varepsilon_N &= -\varepsilon_{NC}(1-r) - \varepsilon_{NS}(1-r) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción pues $\varepsilon_N > 0$.

(c) El caso $\phi_{NS}^* \geq \phi_{NS}^{al}$, $\phi_{NC}^* < \phi_{NC}^{al}$, $\phi_{SC}^* \geq \phi_{SC}^{al}$ es infactible.

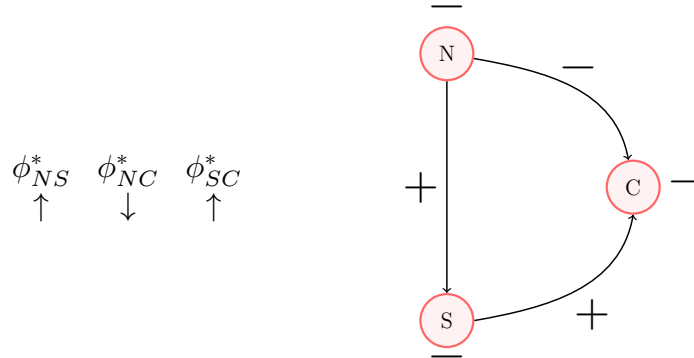


Figura 2.26: Variación flujos caso **(I.c)**, demostración Teorema 2.14

En efecto, si es que fuera factible:

$$\begin{aligned}
-\varepsilon_{NS} + \varepsilon_{NC} &= \varepsilon_N \\
-\varepsilon_{SC} + \varepsilon_{NS}(1-r) &= \varepsilon_S \\
\varepsilon_{SC}(1-r) - \varepsilon_{NC}(1-r) &= \varepsilon_C
\end{aligned}$$

con $\varepsilon_{NS}, \varepsilon_{SC} \geq 0$ y $\varepsilon_{NC} > 0$.

De aquí se tiene que $\varepsilon_{SC}(1-r) = \varepsilon_C + \varepsilon_{NC}(1-r) > \varepsilon_{NC}(1-r) \implies \varepsilon_{SC} > \varepsilon_{NC}$. Por otro lado, $\varepsilon_{NC} = \varepsilon_N + \varepsilon_{NS} > \varepsilon_{NS}$. Además, $\varepsilon_{NS}(1-r) = \varepsilon_S + \varepsilon_{SC} \implies \varepsilon_{NS} = \frac{\varepsilon_S}{1-r} + \frac{\varepsilon_{SC}}{1-r} > \frac{\varepsilon_{SC}}{1-r}$. Finalmente,

$$\varepsilon_{SC} > \varepsilon_{NC} > \varepsilon_{NS} > \frac{\varepsilon_{SC}}{1-r} \implies \varepsilon_{SC} > \frac{\varepsilon_{SC}}{1-r}$$

lo cual es una contradicción pues $r \in [0, 1)$.

(d) Si $\phi_{NS}^* < \phi_{NS}^{al}$ y $\phi_{SC}^* < \phi_{SC}^{al}$

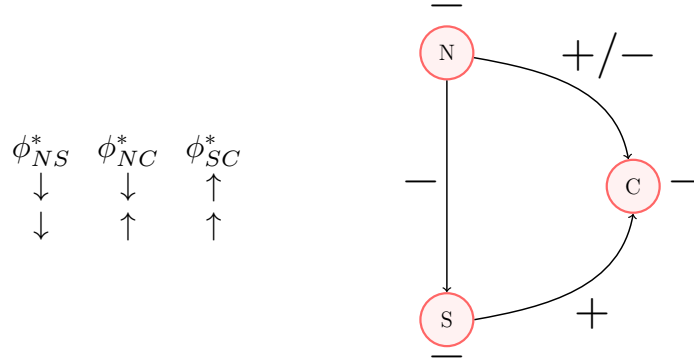


Figura 2.27: Variación flujos caso (I.d), demostración Teorema 2.14

Se tiene que

$$\begin{aligned}
\phi_{NS}^* &= \phi_{NS}^{al} - \varepsilon_{NS} \\
\phi_{SC}^* &= \phi_{SC}^{al} + \varepsilon_{SC}
\end{aligned}$$

con $\varepsilon_{NS} > 0$ y $\varepsilon_{SC} \geq 0$.

Entonces,

$$\begin{aligned}
D_S &= q_S^* + \phi_{NS}^*(1-r) - \phi_{SC}^* \\
D_S &= q_S^{al} - \varepsilon_S + \phi_{NS}^{al}(1-r) - \varepsilon_{NS}(1-r) - \phi_{SC}^{al} - \varepsilon_{SC} \\
0 &= -\varepsilon_S - \varepsilon_{NS}(1-r) - \varepsilon_{SC} \\
\varepsilon_S &= -\varepsilon_{NS}(1-r) - \varepsilon_{SC} \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

lo cual contradice la positividad de ε_S .

- (e) El caso $\phi_{NS}^* = \phi_{NS}^{al} - \varepsilon_{NS}$, $\phi_{NC}^* = \phi_{NC}^{al} + \varepsilon_{NC}$ y $\phi_{SC}^* = \phi_{SC}^{al} - \varepsilon_{SC}$ no puede existir ya que por la Proposición 2.2, $\phi_{NS}^{al} = 0$ ó $\phi_{SC}^{al} = 0$ por lo que $\phi_{NS}^* < 0$ o $\phi_{SC}^* < 0$ y de esta manera el punto no es factible.

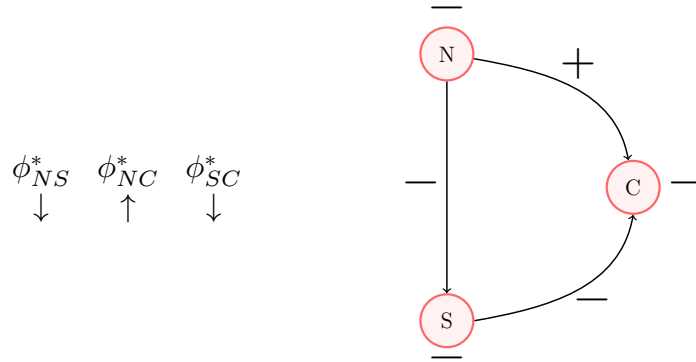


Figura 2.28: Variación flujos caso (I.e), demostración Teorema 2.14

- II. Si $q_N^* < q_N^{al}$, $q_S^* < q_S^{al}$ y $q_C^* \geq q_C^{al}$. Luego,

$$q_N^* = q_N^{al} - \varepsilon_N$$

$$q_S^* = q_S^{al} - \varepsilon_S$$

$$q_C^* = q_C^* - \varepsilon_C$$

con $\varepsilon_N, \varepsilon_S > 0$ y $\varepsilon_C \geq 0$.

- (a) Si $\phi_{NS}^* > \phi_{NS}^{al}$ y $\phi_{NC}^* > \phi_{NC}^{al}$, entonces q^* no es factible por el mismo argumento que (I.b)

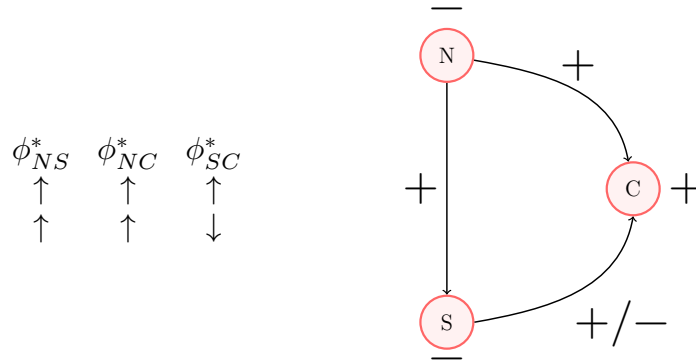


Figura 2.29: Variación flujos caso (II.a), demostración Teorema 2.14

- (b) Si $\phi_{NS}^* < \phi_{NS}^{al}$ y $\phi_{SC}^* > \phi_{SC}^{al}$, la restricción del Sur produce infactibilidad, de la misma manera que en (I.d).

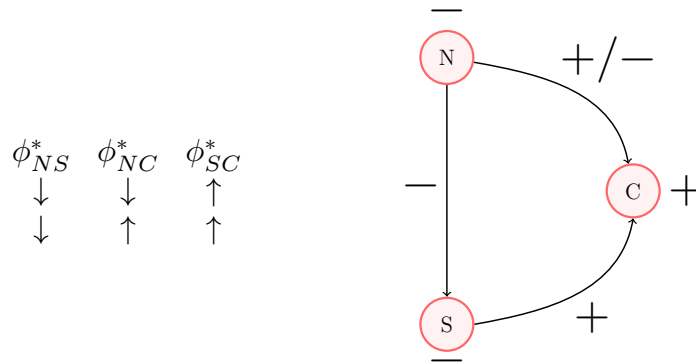


Figura 2.30: Variación flujos caso **(II.b)**, demostración Teorema 2.14

- (c) Los casos en los cuales $\phi_{NS}^* < \phi_{NS}^{al}$ y $\phi_{SC}^* < \phi_{SC}^{al}$ son infactibles por la Proposición 2.2.

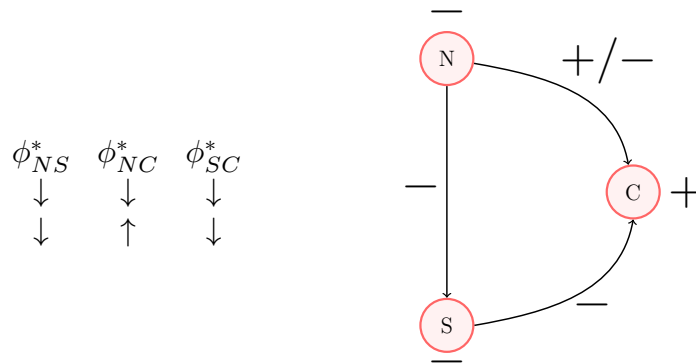


Figura 2.31: Variación flujos caso **(II.c)**, demostración Teorema 2.14

- (d) Si $\phi_{NS}^* \geq \phi_{NS}^{al}$ y $\phi_{NC}^* < \phi_{NC}^{al}$, entonces

$$\begin{aligned}\phi_{NS}^* &= \phi_{NS}^{al} + \varepsilon_{NS} \\ \phi_{NC}^* &= \phi_{NC}^{al} - \varepsilon_{NC}\end{aligned}$$

con $\varepsilon_{NC} > 0, \varepsilon_{NS} \geq 0$

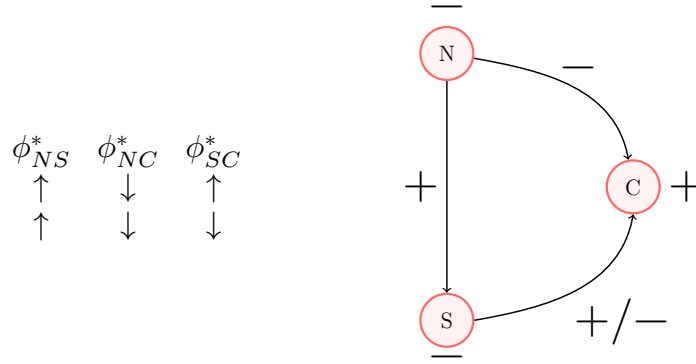


Figura 2.32: Variación flujos caso (II.d), demostración Teorema 2.14

Si $\phi_{SC}^* \geq \phi_{SC}^{al}$, entonces

$$\phi_{SC}^* = \phi_{SC}^{al} + \varepsilon_{SC}$$

con $\varepsilon_{SC} \geq 0$. Luego,

$$0 = -\varepsilon_S + \varepsilon_{NS}(1-r) - \varepsilon_{SC}$$

Por la Proposición 2.2, para que q^* sea óptimo debe cumplirse que $\phi_{NS}^* = 0$ ó $\phi_{SC}^* = 0$. Cualquiera de los dos casos implica que $\varepsilon_{NS} = 0$ ó $\varepsilon_{SC} = 0$, respectivamente (esto es debido a la positividad de ϕ_{NS}^{al} y ϕ_{SC}^{al}). Si $\phi_{NS}^* = 0$ entonces

$$\begin{aligned} 0 &= -\varepsilon_S - \varepsilon_{SC} \\ \varepsilon_S &= -\varepsilon_{SC} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

lo cual contradice que $\varepsilon_S > 0$. Por otro lado, si $\phi_{SC}^* = 0$, entonces

$$\varepsilon_S = \varepsilon_{NS}(1-r) \implies \frac{\varepsilon_S}{1-r} = \varepsilon_{NS}$$

Lo cual implica que q^* , a diferencia de q^{al} , produce y envía $\frac{\varepsilon_S}{1-r}$ desde N en lugar de producir ε_S en S . Esto contradice la optimalidad pues $\frac{\varepsilon_S}{1-r} \leq \varepsilon_S$ y ALG utiliza los recursos de manera simultánea, por lo que q^* tiene mayor costo al tener que generar mayor producción con el mismo recurso.

Finalmente, si $\phi_{SC}^* < \phi_{SC}^{al}$ entonces $\phi_{NS} = 0$ (sino q^* no es óptimo). En este caso, mediante el mismo argumento del caso anterior, se tiene que ALG utiliza los recursos simultáneamente por lo que si C produce ε_C en lugar de ser producido y enviado desde S , entonces C utiliza recursos más costosos a la hora de generar ε_C en comparación a la solución entregada por ALG .

III. Si $q_N^* < q_N^{al}$, $q_S^* \geq q_S^{al}$ y $q_C^* < q_C^{al}$: en la Figura 2.33 se observan los casos pendientes

$$\begin{array}{ccc}
 \phi_{NS}^* & \phi_{NC}^* & \phi_{SC}^* \\
 \uparrow & \downarrow & \uparrow \\
 \uparrow & \downarrow & \downarrow \\
 \downarrow & \downarrow & \uparrow
 \end{array}$$

Figura 2.33: Variación flujos caso **III.**, demostración Teorema 2.14

pues el resto utiliza argumentos anteriores. Para el caso $\phi_{NS}^* \geq \phi_{NS}^{al}$, $\phi_{NC}^* < \phi_{NC}^{al}$ y $\phi_{SC}^* \geq \phi_{SC}^{al}$, se tiene que $\phi_{NS}^* = 0$, pues de no ser así se produce una infactibilidad en la demanda de S . Luego, q^* genera menos producción local en C , la cual es contrapuesta con un envío de S . Tal como se mencionó anteriormente, debido a las pérdidas, si ε_C es la cantidad no producida en C entonces se produce $\frac{\varepsilon_C}{1-\tau}$ en S para ser enviado en el flujo $S \rightarrow C$. Esto no es óptimo pues ALG utiliza los recursos simultáneamente y así la producción en mayor medida de S genera un mayor costo.

En el caso $\phi_{NS}^* \geq \phi_{NS}^{al}$, $\phi_{NC}^* < \phi_{NC}^{al}$ y $\phi_{SC}^* < \phi_{SC}^{al}$ se tiene que $\phi_{SC}^* = 0$ (de forma contraria, q^* no es óptimo) y por un argumento idéntico al caso anterior, q^* no es óptimo.

Por último, si $\phi_{NS}^* < \phi_{NS}^{al}$, $\phi_{NC}^* < \phi_{NC}^{al}$ y $\phi_{SC}^* \geq \phi_{SC}^{al}$ se tiene que $\phi_{SC}^* = 0$ y se produce una infactibilidad en la demanda de C .

IV. Si $q_N^* \geq q_N^{al}$, $q_S^* < q_S^{al}$ y $q_C^* < q_C^{al}$: se repiten argumentos de casos anteriores. La Tabla 2.1 muestra un resumen de aquello.

ϕ_{NS}^*	ϕ_{NC}^*	ϕ_{SC}^*	argumento
↓	↓	↓	infactibilidad
↓	↑	↓	infactibilidad
↓	↓	↑	(I.d)
↓	↑	↑	(I.d)
↑	↓	↓	(II.d)
↑	↑	↓	(II.d)
↑	↓	↑	(II.d)
↑	↑	↑	(II.d)

Tabla 2.1: Resumen de argumentos caso **IV.**, demostración Teorema 2.14

V. Si $q_N^* < q_N^{al}$, $q_S^* \geq q_S^{al}$, $q_C^* \geq q_C^{al}$: Tal como se ve en la Tabla 2.2, el único caso pendiente es cuando $\phi_{NS}^* < \phi_{NS}^{al}$, $\phi_{NC}^* < \phi_{NC}^{al}$ y $\phi_{SC}^* \geq \phi_{SC}^{al}$

ϕ_{NS}^*	ϕ_{NC}^*	ϕ_{SC}^*	argumento
↓	↓	↓	infactibilidad
↓	↑	↓	infactibilidad
↓	↓	↑	
↓	↑	↑	infactibilidad
↑	↓	↓	infactibilidad
↑	↑	↓	(I.b)
↑	↓	↑	(II.d)
↑	↑	↑	(I.b)

Tabla 2.2: Resumen de argumentos caso **V.**, demostración Teorema 2.14

Notemos que para que q^* sea factible entonces $\phi_{SC}^* = 0$. De esta manera se tiene que en q^* , S tiene mayor producción local y menor flujo desde N . Esto no es óptimo, pues ALG genera flujo $N \rightarrow S$ mediante un recurso cuando a S no le alcanzó localmente con dicho recurso antes de pasar al siguiente mas costoso. Producir más y recibir menos en este caso implica mayor costo, pues S utiliza un material más costoso para obtener la misma cantidad de producción.

VI. Si $q_N^* \geq q_N^{al}, q_S^* \geq q_S^{al}, q_C^* < q_C^{al}$: En la Tabla 2.3 se ven los casos pendientes

ϕ_{NS}^*	ϕ_{NC}^*	ϕ_{SC}^*	argumento
↓	↓	↓	infactibilidad
↓	↑	↓	infactibilidad
↓	↓	↑	V.
↓	↑	↑	V.
↑	↓	↓	infactibilidad
↑	↑	↓	
↑	↓	↑	
↑	↑	↑	

Tabla 2.3: Resumen de argumentos caso **VI.**, demostración Teorema 2.14

En los tres casos pendientes C produce menos localmente y recibe mas flujo desde N y/ó S . Esto contradice la optimalidad por un argumento ya repetido: si en ALG , C produce localmente mediante cierto recurso, N y S envían flujo producido a través del mismo. Si se reduce la producción local de C y se prefiere un envío desde otro nodo, por las pérdidas la producción será mayor con los mismos recursos y por ende, el costo.

VII. Si $q_N^* \geq q_N^{al}, q_S^* < q_S^{al}, q_C^* \geq q_C^{al}$: en la Tabla 2.4 se puede observar que todos los casos se pueden argumentar con puntos anteriores.

ϕ_{NS}^*	ϕ_{NC}^*	ϕ_{SC}^*	argumento
↓	↓	↓	infactibilidad
↓	↑	↓	infactibilidad
↓	↓	↑	(I.b)
↓	↑	↑	infactibilidad
↑	↓	↓	infactibilidad
↑	↑	↓	(I.d)
↑	↓	↑	(I.d)
↑	↑	↑	infactibilidad

Tabla 2.4: Resumen de argumentos caso **VII.**, demostración Teorema 2.14

VIII. Si $q_N^* \geq q_N^{al}, q_S^* \geq q_S^{al}, q_C^* \geq q_C^{al}$: todos los casos se argumentan con puntos anteriores.

ϕ_{NS}^*	ϕ_{NC}^*	ϕ_{SC}^*	argumento
↓	↓	↓	infactibilidad
↓	↑	↓	infactibilidad
↓	↓	↑	infactibilidad
↓	↑	↑	infactibilidad ó V.
↑	↓	↓	infactibilidad
↑	↑	↓	infactibilidad
↑	↓	↑	infactibilidad
↑	↑	↑	infactibilidad

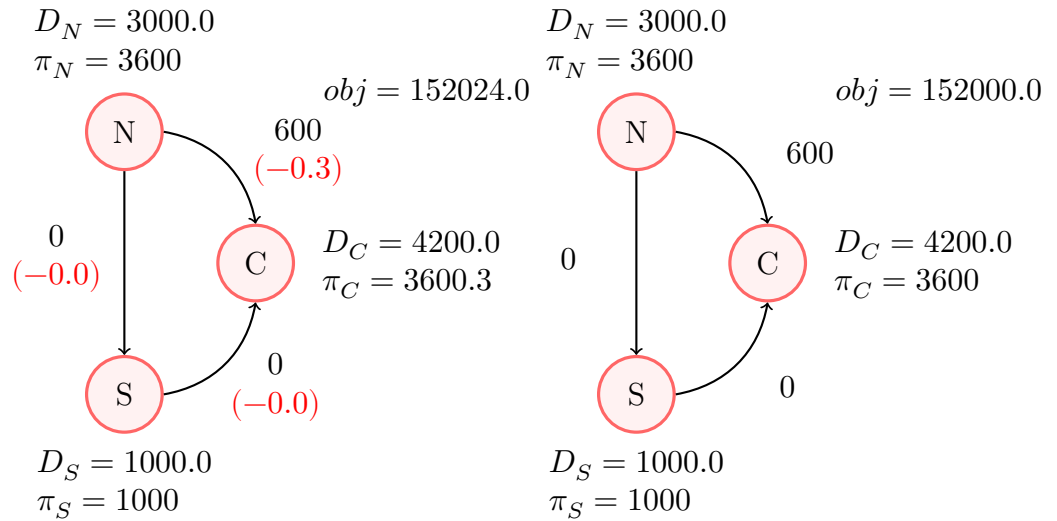
Tabla 2.5: Resumen de argumentos caso **VIII.**, demostración Teorema 2.14

□

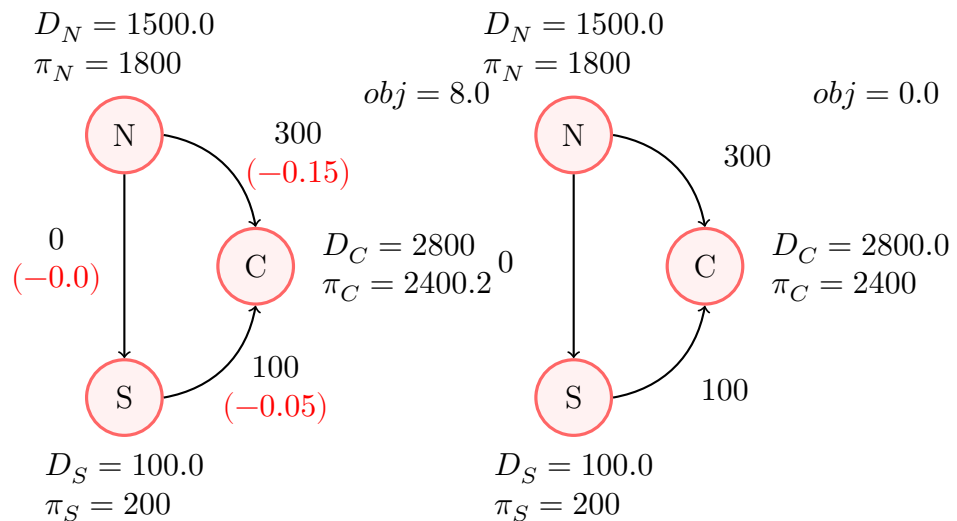
2.4.1. Ejemplos

A continuación se presentan ejemplos de instancias con pérdidas lineales, y sin ellas.

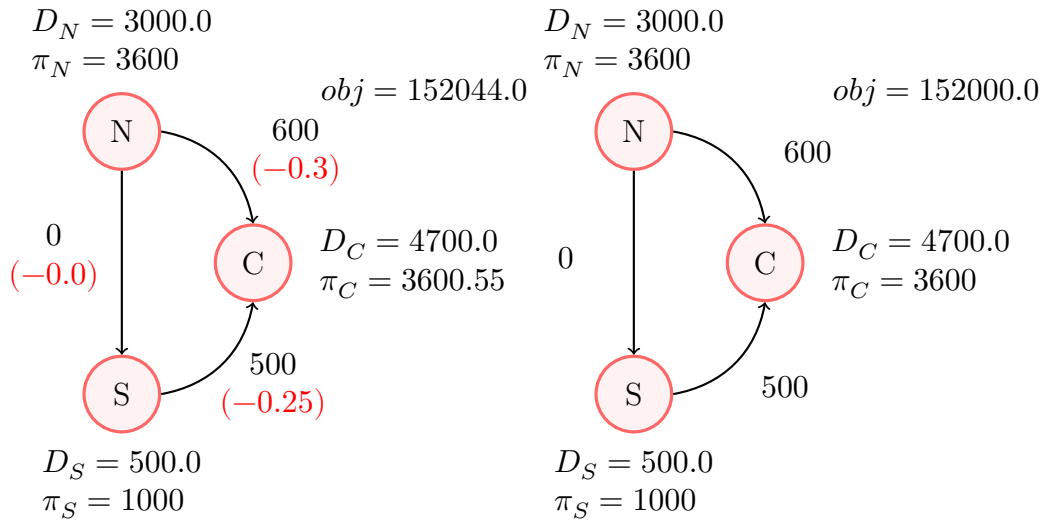
Envío $N \rightarrow C$ mediante carbón



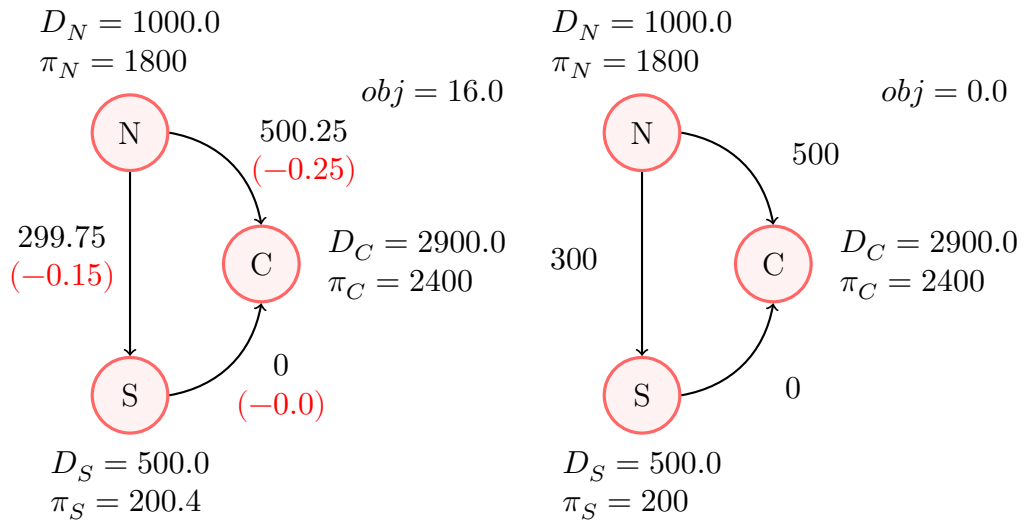
Doble envío $N \rightarrow C$ y $S \rightarrow C$ mediante energía solar



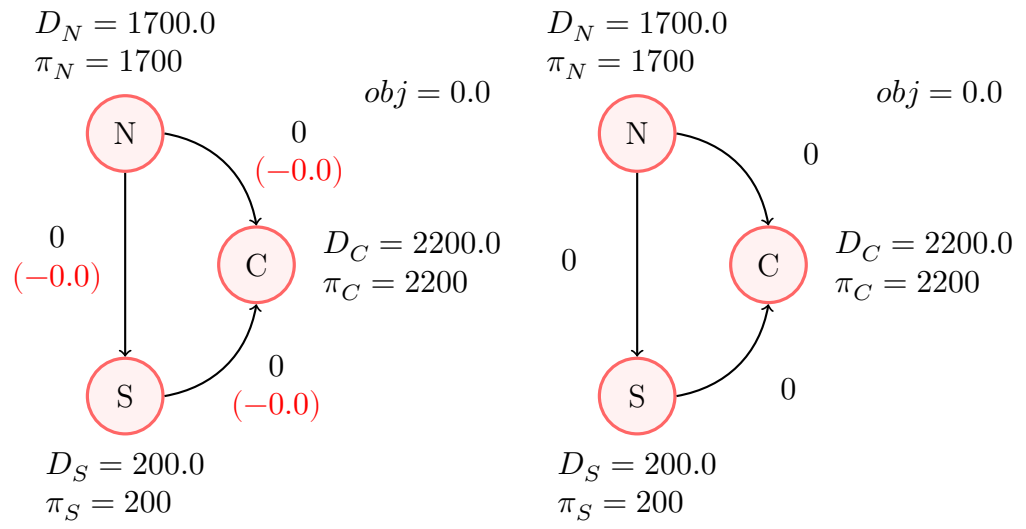
Doble envío $N \rightarrow C$ y $S \rightarrow C$ mediante carbón



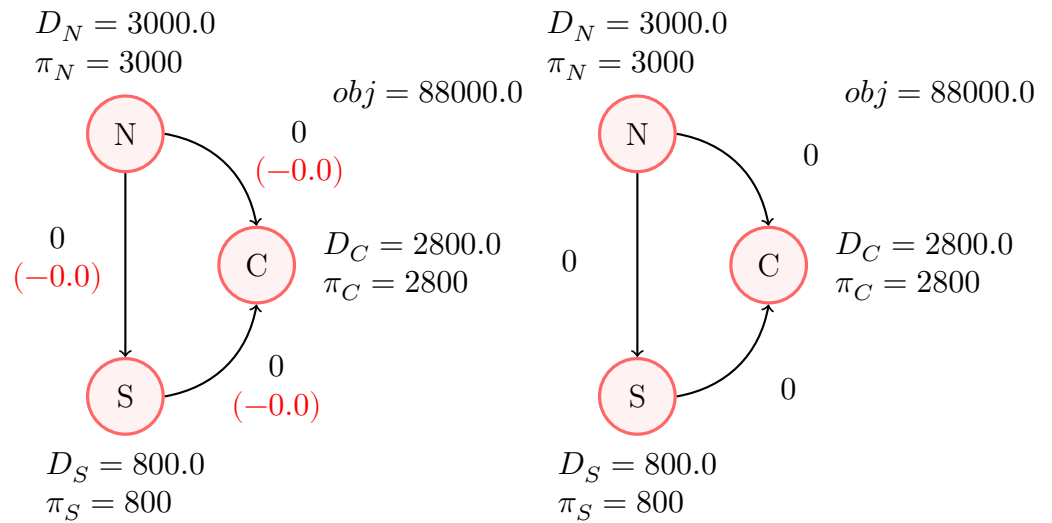
Doble envío $N \rightarrow C$ y $N \rightarrow S$ mediante energía solar



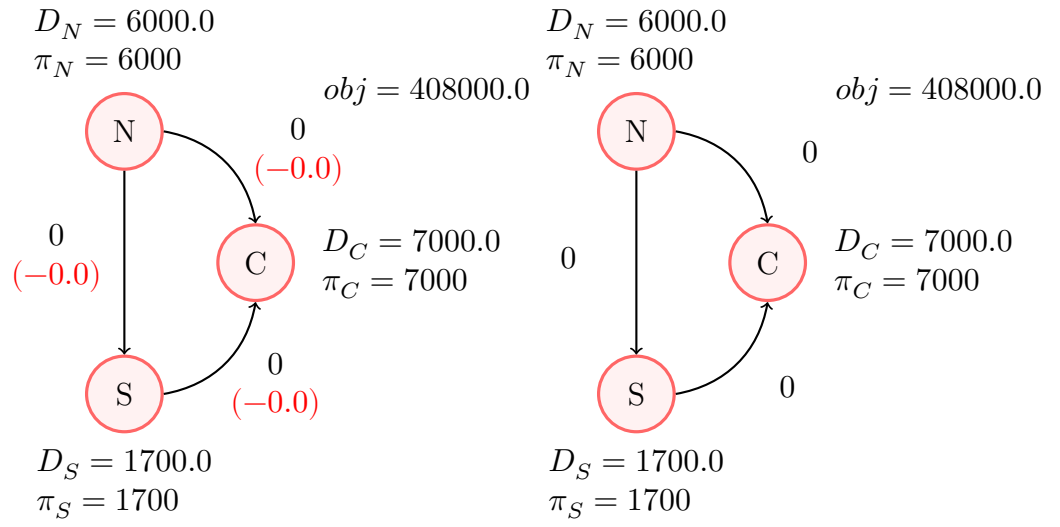
Sin flujo con uso de energía solar



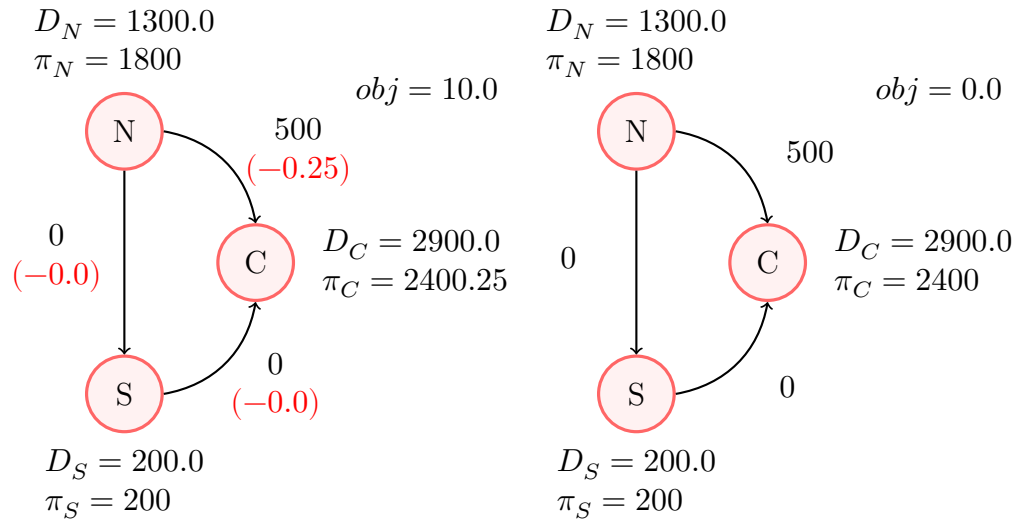
Sin flujo con uso de carbón



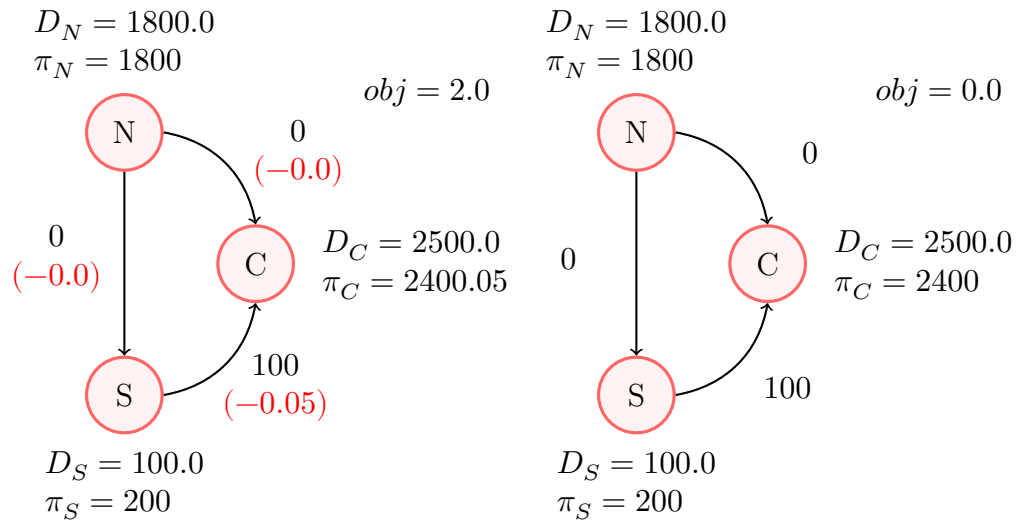
Sin flujo con uso de gas



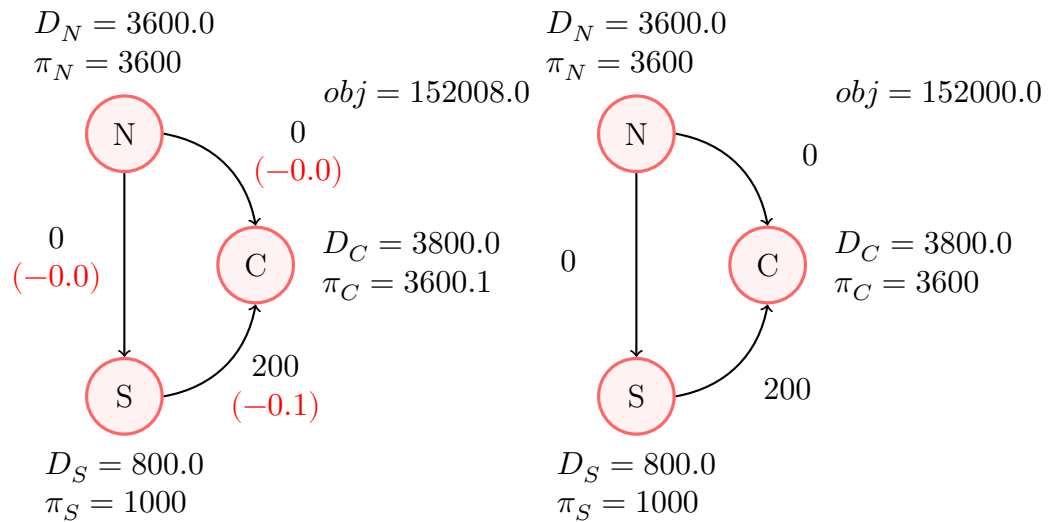
Flujo $N \rightarrow C$ mediante energía solar



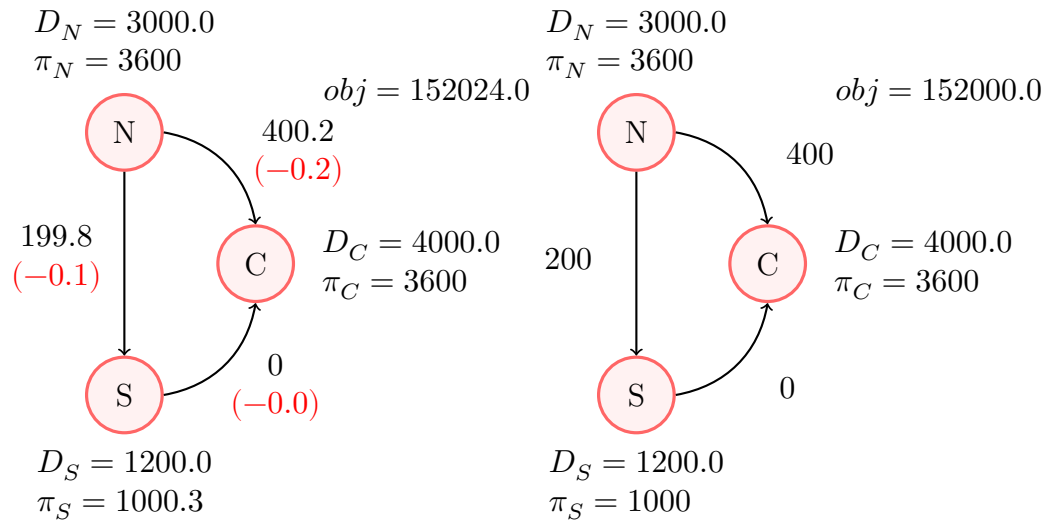
Flujo $S \rightarrow C$ mediante energía solar



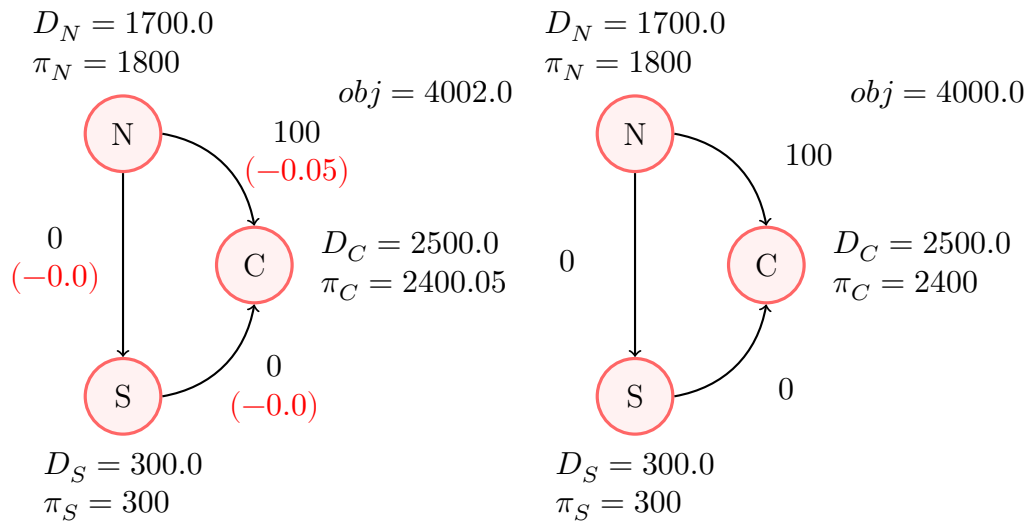
Flujo $S \rightarrow C$ mediante carbón



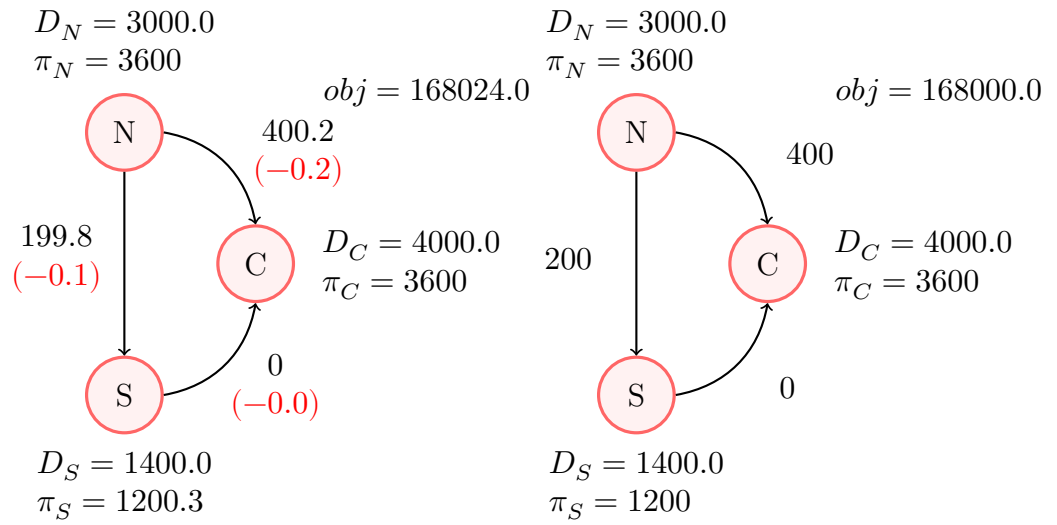
Flujo $N \rightarrow C$ y $N \rightarrow S$ mediante carbón



Flujo $N \rightarrow C$ ó $N \rightarrow S$ mediante energía solar



Flujo $N \rightarrow C$ ó $N \rightarrow S$ mediante energía carbón



3. Problema con satélites

La solución de (P) será una herramienta fundamental en la búsqueda de generalidad en el problema de la Figura 2.1. Un paso intermedio a esto es agregar satélites a los centros principales de cada región, es decir nodos que están únicamente conectados a uno y sólo uno de estos centros de distribución. Un paso intermedio a esto es agregar un satélite únicamente a C . En la Figura 3.1 se puede observar una representación gráfica de esta situación.

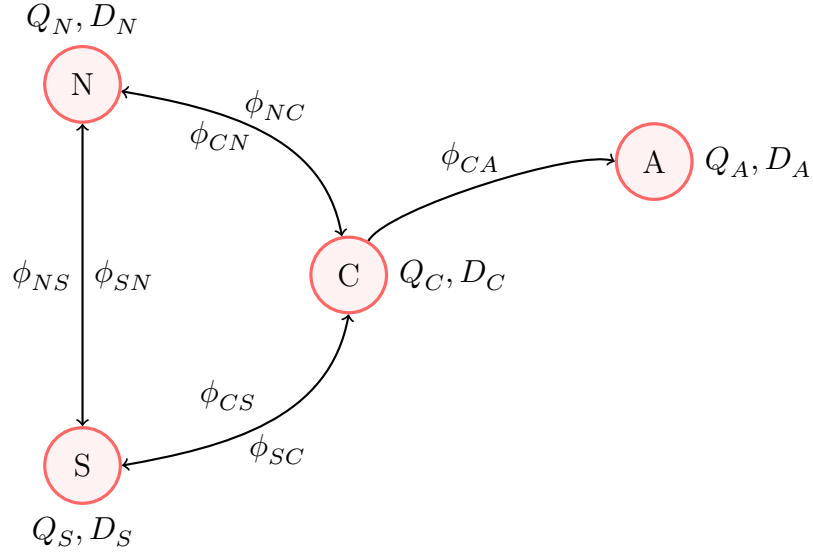


Figura 3.1: Sistema con satélite

El nuevo nodo A cuenta al igual que el resto con una función de costo c_A , demanda D_A y capacidad máxima de producción Q_A . La función c_A se define de la misma manera que c_i , $i \in \{N, S, C\}$. Por otro lado, existirá un flujo $C \rightarrow A$ denotado ϕ_{CA} . De esta manera el nuevo sistema funciona de manera similar al anterior pero con el objetivo de satisfacer también la demanda de A , tanto con producción local como externa.

Así, el sistema queda modelado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 (P_{ext}) \quad & \min \quad c_N(q_N) + c_S(q_S) + c_C(q_C) + c_A(q_A) \\
 \text{s.a.} \quad & D_N = q_N - \phi_{NS} - \phi_{NC} + (1-r)\phi_{SN} + (1-r)\phi_{CN} \\
 & D_S = q_S - \phi_{SC} - \phi_{SN} + (1-r)\phi_{NS} + (1-r)\phi_{CS} \\
 & D_C = q_C - \phi_{CA} - \phi_{CS} - \phi_{CN} + (1-r)\phi_{NS} + (1-r)\phi_{NC} \\
 & D_A = q_A + \phi_{CA}(1-r) \\
 & q_i \in [0, Q_i] \quad i \in \{N, S, C, A\} \\
 & \phi_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in \{N, S, C, A\} \quad i \neq j
 \end{aligned}$$

Al igual que el problema (P) , en lo que sigue se supondrán las siguientes condiciones

$$(\mathcal{H}_A) \begin{cases} (i) & N - C - S \text{ satisfacen } (\mathcal{H})^1 \\ (ii) & \text{Existe una solución de } ALGen \text{ que cumple:} \\ & D_A \leq Q_A + (Q_C - q_C^{gen})(1-r) + (Q_N - q_N^{gen})(1-r)^2 + (Q_S - q_S^{gen})(1-r)^2 \end{cases}$$

Notemos que por la Proposición 2.2, al resolver (P_{ext}) es posible encontrarse 8 tipos de soluciones, tal como se muestra en la Figura 3.2.

1

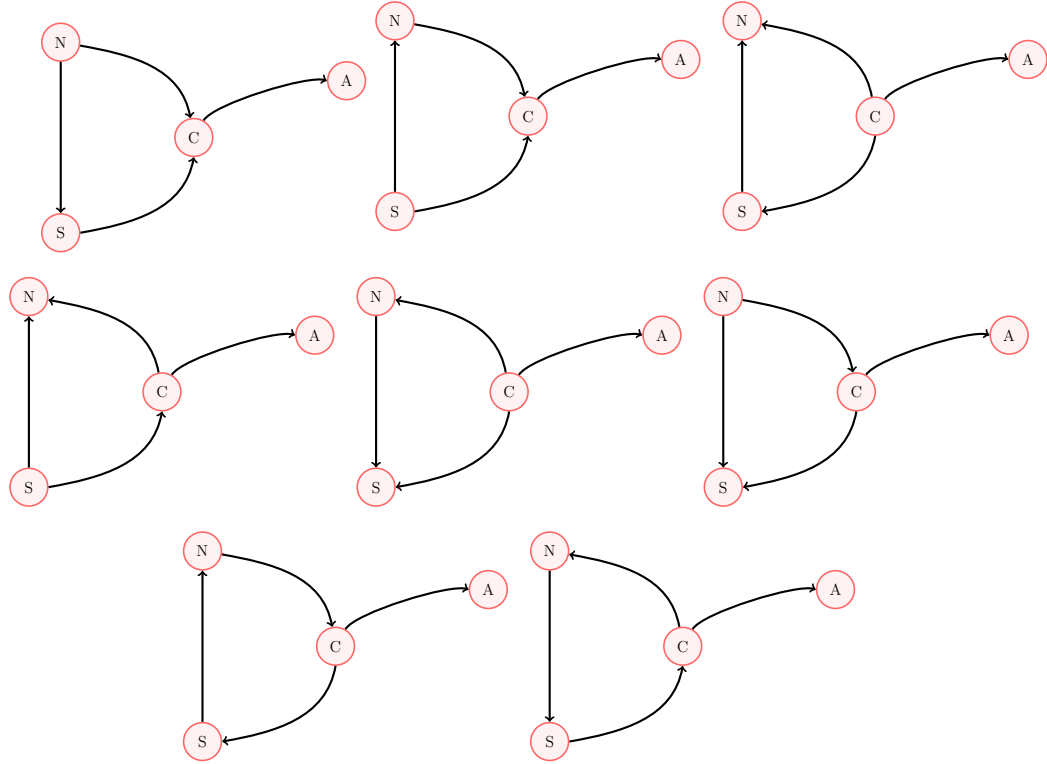


Figura 3.2: Posibles soluciones de (P_{ext})

De las cuales por un argumento similar a la Proposición 2.1, se descartan los sistemas de la Figura 3.3. La siguiente proposición demuestra este resultado.

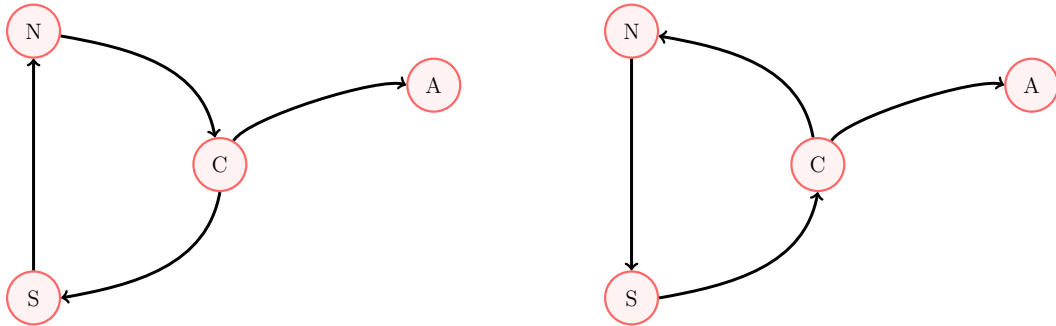


Figura 3.3: Casos que no son solución de (P_{ext})

Proposición 3.1. *Sea $q = (q_N, q_S, q_C, q_A, \phi_{NS}, \phi_{SN}, \phi_{NC}, \phi_{CN}, \phi_{SC}, \phi_{CS}, \phi_{CA})^T$ un punto factible para (P_{ext}) . Si $\phi_{SN}, \phi_{NC}, \phi_{CS} > 0$ entonces q no es óptimo.*

¹Intercambiando los roles de N , S y C si es necesario

Demostración. Sea $q = (q_N, q_S, q_C, q_A, \phi_{NS}, \phi_{SN}, \phi_{NC}, \phi_{CN}, \phi_{SC}, \phi_{CS}, \phi_{CA})^T$ un punto factible para (P') tal que $\phi_{SN}, \phi_{NC}, \phi_{CS} > 0$. Sea $0 < \varepsilon < \min \left\{ \phi_{CN}, \phi_{NS}, \phi_{SC}, \frac{q_C}{r_{SC}}, \frac{q_N}{r_{CN}}, \frac{q_S}{r_{NS}} \right\}$ y

$$\begin{aligned} \hat{q}_N &= q_N - r_{CN}\varepsilon & \hat{\phi}_{NS} &= \phi_{NS} - \varepsilon \\ \hat{q}_S &= q_S - r_{NS}\varepsilon & \hat{\phi}_{SC} &= \phi_{SC} - \varepsilon \\ \hat{q}_C &= q_C - r_{SC}\varepsilon & \hat{\phi}_{CN} &= \phi_{CN} - \varepsilon \\ \hat{q}_A &= q_A & \hat{\phi}_{CA} &= \phi_{CA} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \hat{q}_N + \hat{\phi}_{CN}(1 - r_{CN}) - \hat{\phi}_{NS} &= q_N - r_{CN}\varepsilon + \phi_{CN}(1 - r_{CN}) - \varepsilon(1 - r_{CN}) - \phi_{NS} + \varepsilon \\ &= q_N + \phi_{CN}(1 - r_{CN}) - \phi_{NS} \\ &= D_N \\ \hat{q}_S + \hat{\phi}_{NS}(1 - r_{NS}) - \hat{\phi}_{SC} &= q_S - r_{NS}\varepsilon + \phi_{NS}(1 - r_{NS}) - \varepsilon(1 - r_{NS}) - \phi_{SC} + \varepsilon \\ &= q_S + \phi_{NS}(1 - r_{NS}) - \phi_{SC} \\ &= D_S \\ \hat{q}_C + \hat{\phi}_{SC}(1 - r_{SC}) - \hat{\phi}_{CN} - \hat{\phi}_{CA} &= q_C - r_{SC}\varepsilon + \phi_{SC}(1 - r_{SC}) - \varepsilon(1 - r_{SC}) - \phi_{CN} + \varepsilon - \phi_{CA} \\ &= q_C + \phi_{SC}(1 - r_{SC}) - \phi_{CN} - \phi_{CA} \\ &= D_C \\ \hat{q}_A + \hat{\phi}_{CA}(1 - r_{CA}) &= q_A + \phi_{CA}(1 - r_{CA}) \\ &= D_A \end{aligned}$$

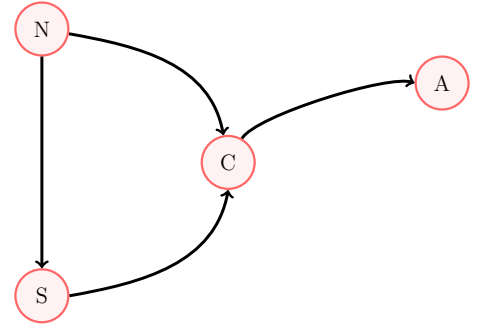
Por lo tanto, como $\hat{q}_A = q_A$, $\hat{q}_N < q_N$, $\hat{q}_S < q_S$ y $\hat{q}_C < q_C$ se tiene que

$$c_A(\hat{q}_A) + c_N(\hat{q}_N) + c_S(\hat{q}_S) + c_C(\hat{q}_C) < c_A(q_A) + c_N(q_N) + c_S(q_S) + c_C(q_C)$$

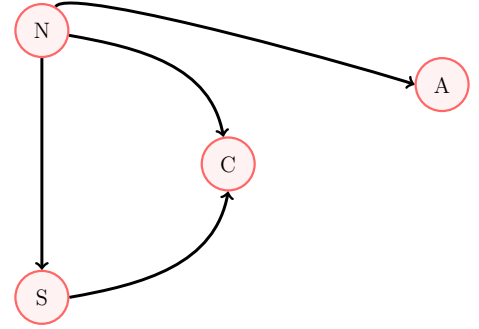
□

Dado esto, se puede observar que resolver (P_{ext}) equivale a calcular el mínimo entre las soluciones de estos tres problemas:

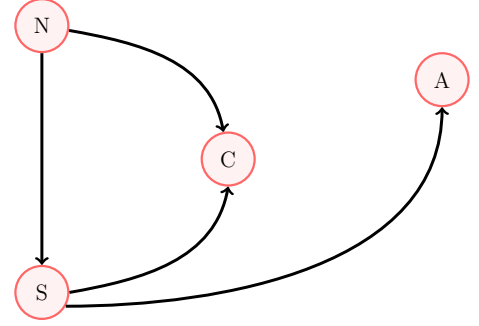
$$\begin{aligned}
(P_{ext}^C) \quad & \text{mín} && c_N(q_N) + c_S(q_S) + c_C(q_C) + c_A(q_A) \\
& \text{s.a.} && D_N = q_N - \phi_{NS} - \phi_{NC} \\
& && D_S = q_S - \phi_{SC} + (1-r)\phi_{NS} \\
& && D_C = q_C - \phi_{CA} + (1-r)\phi_{NS} + (1-r)\phi_{NC} \\
& && D_A = q_A + \phi_{CA}(1-r) \\
& && q_i \in [0, Q_i] \quad i \in \{N, S, C, A\} \\
& && \phi_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in \{N, S, C, A\} \quad i \neq j
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
(P_{ext}^N) \quad & \text{mín} && c_N(q_N) + c_S(q_S) + c_C(q_C) + c_A(q_A) \\
& \text{s.a.} && D_N = q_N - \phi_{NS} - \phi_{NC} - \phi_{NA} \\
& && D_S = q_S - \phi_{SC} + (1-r)\phi_{NS} \\
& && D_C = q_C - \phi_{CA} + (1-r)\phi_{NS} + (1-r)\phi_{NC} \\
& && D_A = q_A + \phi_{NA}(1-r) \\
& && q_i \in [0, Q_i] \quad i \in \{N, S, C, A\} \\
& && \phi_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in \{N, S, C, A\} \quad i \neq j
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
(P_{ext}^S) \quad & \text{mín} && c_N(q_N) + c_S(q_S) + c_C(q_C) + c_A(q_A) \\
& \text{s.a.} && D_N = q_N - \phi_{NS} - \phi_{NC} \\
& && D_S = q_S - \phi_{SC} - \phi_{SA} + (1-r)\phi_{NS} \\
& && D_C = q_C - \phi_{CA} + (1-r)\phi_{NS} + (1-r)\phi_{NC} \\
& && D_A = q_A + \phi_{SA}(1-r) \\
& && q_i \in [0, Q_i] \quad i \in \{N, S, C, A\} \\
& && \phi_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in \{N, S, C, A\} \quad i \neq j
\end{aligned}$$



De esta manera, si definimos a $ALGextN$, $ALGextS$ y $ALGextC$ como algoritmos que resuelven los problemas (P_{ext}^N) , (P_{ext}^S) y (P_{ext}^C) , respectivamente, entonces la solución de (P_{ext}) estará dada por la siguiente secuencia de pasos:

Algoritmo 2 $ALGext$

Datos:

$$D = (D_N, D_S, D_C, D_A)$$

$$p_N = (p_N^{solar}, p_N^{carbon}, p_N^{gas}) \in [0, 100]^3$$

$$p_S = (p_S^{solar}, p_S^{carbon}, p_S^{gas}) \in [0, 100]^3$$

$$p_C = (p_C^{solar}, p_C^{carbon}, p_C^{gas}) \in [0, 100]^3$$

$$p_A = (p_A^{solar}, p_A^{carbon}, p_A^{gas}) \in [0, 100]^3$$

$$Q = (Q_N, Q_S, Q_C, Q_A) \geq 0$$

$$R = (r_{NS}, r_{SN}, r_{NC}, r_{CN}, r_{NS}, r_{SN}, r_{SC}, r_{CS}, r_{CA}) \in [0, 1]^8$$

Resultado: q_N, q_S, q_C, q_A, ϕ

$$S_1 \leftarrow ALGextC(D, p_N, p_S, p_C, p_A, Q, R)$$

$$D \rightarrow (D_S, D_N, D_C, D_A)$$

$$Q \rightarrow (Q_S, Q_N, Q_C, Q_A)$$

$$R \rightarrow (r_{SN}, r_{NS}, r_{SC}, r_{CS}, r_{SN}, r_{NS}, r_{NC}, r_{CN}, r_{CA})$$

$$S_2 \leftarrow ALGextC(D, p_S, p_N, p_C, p_A, Q, R)$$

$$D \rightarrow (D_C, D_S, D_N, D_A)$$

$$Q \rightarrow (Q_C, Q_S, Q_N, Q_A)$$

$$R \rightarrow (r_{CS}, r_{SC}, r_{CN}, r_{NC}, r_{CS}, r_{SC}, r_{SN}, r_{NS}, r_{CA})$$

$$S_3 \leftarrow ALGextN(D, p_C, p_S, p_N, p_A, Q, R)$$

$$D \rightarrow (D_C, D_N, D_S, D_A)$$

$$Q \rightarrow (Q_C, Q_N, Q_S, Q_A)$$

$$R \rightarrow (r_{CN}, r_{NC}, r_{CS}, r_{SC}, r_{CN}, r_{NC}, r_{NS}, r_{SN}, r_{CA})$$

$$S_4 \leftarrow ALGextN(D, p_C, p_N, p_S, p_A, Q, R)$$

$$D \rightarrow (D_N, D_C, D_S, D_A)$$

$$Q \rightarrow (Q_N, Q_C, Q_S, Q_A)$$

$$R \rightarrow (r_{NC}, r_{CN}, r_{NS}, r_{SN}, r_{NC}, r_{CN}, r_{CS}, r_{SC}, r_{CA})$$

$$S_5 \leftarrow ALGextS(D, p_N, p_C, p_S, p_A, Q, R)$$

$$D \rightarrow (D_S, D_C, D_N, D_A)$$

$$Q \rightarrow (Q_S, Q_C, Q_N, Q_A)$$

$$R \rightarrow (r_{SC}, r_{CS}, r_{SN}, r_{NS}, r_{SC}, r_{CS}, r_{CN}, r_{NC}, r_{CA})$$

$$S_6 \leftarrow ALGextS(D, p_S, p_C, p_N, p_A, Q, R)$$

para cada $l \in \{1, \dots, 6\}$ **hacer**

si $V_l = \min\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6\}$ **entonces**

$$\quad \quad q_i \leftarrow q_i^l, \forall i \in \{N, S, C, A\}$$

$$\quad \quad \phi_{ij} \leftarrow \phi_{ij}^l, \forall i, j \in \{N, S, C, A\}, i \neq j$$

$$\quad \quad V \leftarrow V_l$$

fin si

fin para

Lo que hace paso a paso el algoritmo $ALGext$ para encontrar la solución de (P_{ext}) es resolver

cada uno de los problemas mostrados en la Figura 3.2. Para esto, se deben permutar los roles de N, S y C en $ALGextN$, $ALGextS$ y $ALGextC$.

3.1. Algoritmo para (P_{ext}^C)

Siguiendo la idea de los vasos de agua utilizada para $ALGen$, se formula el siguiente algoritmo:

$ALGextC$

(1) Ejecutar algoritmo de para 3 nodos

$$S \rightarrow ALGen(D_N, D_S, D_C, p_N^{solar}, p_N^{carbon}, p_N^{gas}, p_S^{solar}, p_S^{carbon}, p_S^{gas}, p_C^{solar}, p_C^{carbon}, p_C^{gas}, Q_N, Q_S, Q_C, r)$$

$$\phi_{ij} \rightarrow \phi_{ij}^S \quad \forall i, j \in \{N, S, C\}, i \neq j$$

$$\phi_{CA} \rightarrow 0$$

$$\pi_i \rightarrow q_i^S \quad \forall i \in \{N, S, C\}$$

$$\pi_A \rightarrow 0$$

$$P_i \rightarrow D_i \quad \forall i \in \{N, S, C\}$$

$$P_A \rightarrow 0$$

(2) Utilización de energía renovable

$$\pi_A \rightarrow \min\{D_A, q_A^{solar}\}$$

$$P_A \rightarrow \min\{D_A, q_A^{solar}\}$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

(C) Envío desde C

Si $\pi_C < q_C^{solar}$ y $\delta_A > 0$:

$$\Delta_C \rightarrow q_C^{solar} - \pi_C$$

(A) Envíos que llenan nodos

Si $\Delta_C(1-r) \geq \delta_A$:

$$\pi_C \rightarrow \pi_C + \frac{\delta_A}{1-r}$$

$$\phi_{CA} \rightarrow \phi_{CA} + \frac{\delta_A}{1-r}$$

$$P_A \rightarrow P_A + \frac{\delta_A}{1-r}(1-r) = D_A$$

$$\delta_A \rightarrow 0$$

(B) Envíos que no llenan nodos

Si $\delta_A > 0$ y $\Delta_C(1-r) < \delta_A$:

$$\pi_C \rightarrow \pi_C + \Delta_C$$

$$\phi_{CA} \rightarrow \phi_{CA} + \Delta_C$$

$$P_A \rightarrow P_A + \Delta_C(1-r)$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

(N) Envío desde N

Si $\pi_N < q_N^{solar}$ y $\delta_A > 0$:

$$\Delta_N \rightarrow q_N^{solar} - \pi_N$$

(A) Envíos que llenan nodos

Si $\Delta_N(1-r)^2 \geq \delta_A$:

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \frac{\delta_A}{(1-r)^2}$$

$$\phi_{NC} \rightarrow \phi_{NC} + \frac{\delta_A}{(1-r)^2}$$

$$\phi_{CA} \rightarrow \phi_{CA} + \frac{\delta_A}{1-r}$$

$$P_A \rightarrow P_A + \frac{\delta_A}{1-r}(1-r) = D_A$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A = 0$$

(B) Envíos que no llenan nodos

Si $\Delta_N(1-r)^2 < \delta_A$ y $\delta_A > 0$:

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \Delta_N$$

$$\phi_{NC} \rightarrow \phi_{NC} + \Delta_N$$

$$\phi_{CA} \rightarrow \phi_{CA} + \Delta_N(1-r)$$

$$P_A \rightarrow P_A + \Delta_N(1-r)^2$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

(S) Envío desde S

Si $\pi_S < q_S^{solar}$ y $\delta_A > 0$:

$$\Delta_S \rightarrow q_S^{solar} - \pi_S$$

(A) Envíos que llenan nodos

Si $\Delta_S(1-r)^2 \geq \delta_A$:

$$\pi_S \rightarrow \pi_S + \frac{\delta_A}{(1-r)^2}$$

$$\phi_{SC} \rightarrow \phi_{SC} + \frac{\delta_A}{(1-r)^2}$$

$$\phi_{CA} \rightarrow \phi_{CA} + \frac{\delta_A}{1-r}$$

$$P_A \rightarrow P_A + \frac{\delta_A}{1-r}(1-r) = D_A$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A = 0$$

(B) Envíos que no llenan nodos

Si $\Delta_S(1-r)^2 < \delta_A$ y $\delta_A > 0$:

$$\pi_S \rightarrow \pi_S + \Delta_S$$

$$\phi_{SC} \rightarrow \phi_{SC} + \Delta_S$$

$$\phi_{CA} \rightarrow \phi_{CA} + \Delta_S(1-r)$$

$$P_A \rightarrow P_A + \Delta_S(1-r)^2$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

(3) Utilización de carbon

$$\pi_A \rightarrow \pi_A + \min\{D_A - P_A, q_A^{carbon} - P_A\}$$

$$P_A \rightarrow P_A + \min\{D_A - P_A, q_A^{carbon} - P_A\}$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

(C) Envío desde C

Si $\pi_C < q_C^{carbon}$, $\delta_A > 0$:

$$\Delta_C \rightarrow q_C^{carbon} - \pi_C$$

(A) Envíos que llenan nodos

Si $\Delta_C(1-r) \geq \delta_A$:

$$\pi_C \rightarrow \pi_C + \frac{\delta_A}{1-r}$$

$$\phi_{CA} \rightarrow \phi_{CA} + \frac{\delta_A}{1-r}$$

$$P_A \rightarrow P_A + \frac{\delta_A}{1-r}(1-r) = D_A$$

$$\delta_A \rightarrow 0$$

(B) Envíos que no llenan nodos

$$\text{Si } \delta_A > 0, \Delta_C(1-r) < \delta_A:$$

$$\pi_C \rightarrow \pi_C + \Delta_C$$

$$\phi_{CA} \rightarrow \phi_{CA} + \Delta_C$$

$$P_A \rightarrow P_A + \Delta_C(1-r)$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

(N) Envío desde N

$$\text{Si } \pi_N < q_N^{carbon}, \delta_A > 0:$$

$$\Delta_N \rightarrow q_N^{carbon} - \pi_N$$

(A) Envíos que llenan nodos

$$\text{Si } \Delta_N(1-r)^2 \geq \delta_A:$$

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \frac{\delta_A}{(1-r)^2}$$

$$\phi_{NC} \rightarrow \phi_{NC} + \frac{\delta_A}{(1-r)^2}$$

$$\phi_{CA} \rightarrow \phi_{CA} + \frac{\delta_A}{1-r}$$

$$P_A \rightarrow P_A + \frac{\delta_A}{1-r}(1-r) = D_A$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A = 0$$

(B) Envíos que no llenan nodos

$$\text{Si } \Delta_N(1-r)^2 < \delta_A, \delta_A > 0:$$

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \Delta_N$$

$$\phi_{NC} \rightarrow \phi_{NC} + \Delta_N$$

$$\phi_{CA} \rightarrow \phi_{CA} + \Delta_N(1-r)$$

$$P_A \rightarrow P_A + \Delta_N(1-r)^2$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

(S) Envío desde S

$$\text{Si } \pi_S < q_S^{carbon} \text{ y } \delta_A > 0:$$

$$\Delta_S \rightarrow q_S^{carbon} - \pi_S$$

(A) Envíos que llenan nodos

$$\text{Si } \Delta_S(1-r)^2 \geq \delta_A:$$

$$\pi_S \rightarrow \pi_S + \frac{\delta_A}{(1-r)^2}$$

$$\phi_{SC} \rightarrow \phi_{SC} + \frac{\delta_A}{(1-r)^2}$$

$$\phi_{CA} \rightarrow \phi_{CA} + \frac{\delta_A}{1-r}$$

$$P_A \rightarrow P_A + \frac{\delta_A}{1-r}(1-r) = D_A$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A = 0$$

(B) Envíos que no llenan nodos

$$\text{Si } \Delta_S(1-r)^2 < \delta_A, \delta_A > 0:$$

$$\pi_S \rightarrow \pi_S + \Delta_S$$

$$\phi_{SC} \rightarrow \phi_{SC} + \Delta_S$$

$$\phi_{CA} \rightarrow \phi_{CA} + \Delta_S(1-r)$$

$$P_A \rightarrow P_A + \Delta_S(1-r)^2$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

(4) Utilización de gas

$$\pi_A \rightarrow \pi_A + \min\{D_A - P_A, q_A^{gas} - P_A\}$$

$$P_A \rightarrow P_A + \min\{D_A - P_A, q_A^{gas} - P_A\}$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

(C) Envío desde C

$$\text{Si } \pi_C < q_C^{gas} \text{ y } \delta_A > 0:$$

$$\Delta_C \rightarrow q_C^{gas} - \pi_C$$

(A) Envíos que llenan nodos

$$\text{Si } \Delta_C(1-r) \geq \delta_A:$$

$$\pi_C \rightarrow \pi_C + \frac{\delta_A}{1-r}$$

$$\phi_{CA} \rightarrow \phi_{CA} + \frac{\delta_A}{1-r}$$

$$P_A \rightarrow P_A + \frac{\delta_A}{1-r}(1-r) = D_A$$

$$\delta_A \rightarrow 0$$

(B) Envíos que no llenan nodos

Si $\delta_A > 0$ y $\Delta_C(1-r) < \delta_A$:

$$\pi_C \rightarrow \pi_C + \Delta_C$$

$$\phi_{CA} \rightarrow \phi_{CA} + \Delta_C$$

$$P_A \rightarrow P_A + \Delta_C(1-r)$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

(N) Envío desde N

Si $\pi_N < q_N^{gas}$, $\delta_A > 0$:

$$\Delta_N \rightarrow q_N^{gas} - \pi_N$$

(A) Envíos que llenan nodos

Si $\Delta_N(1-r)^2 \geq \delta_A$:

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \frac{\delta_A}{(1-r)^2}$$

$$\phi_{NC} \rightarrow \phi_{NC} + \frac{\delta_A}{(1-r)^2}$$

$$\phi_{CA} \rightarrow \phi_{CA} + \frac{\delta_A}{1-r}$$

$$P_A \rightarrow P_A + \frac{\delta_A}{1-r}(1-r) = D_A$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A = 0$$

(B) Envíos que no llenan nodos

Si $\Delta_N(1-r)^2 < \delta_A$, $\delta_A > 0$:

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \Delta_N$$

$$\phi_{NC} \rightarrow \phi_{NC} + \Delta_N$$

$$\phi_{CA} \rightarrow \phi_{CA} + \Delta_N(1-r)$$

$$P_A \rightarrow P_A + \Delta_N(1-r)^2$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

(S) Envío desde S

Si $\pi_S < q_S^{gas}$ y $\delta_A > 0$:

$$\Delta_S \rightarrow q_S^{gas} - \pi_S$$

(A) Envíos que llenan nodos

Si $\Delta_S(1-r)^2 \geq \delta_A$:

$$\pi_S \rightarrow \pi_S + \frac{\delta_A}{(1-r)^2}$$

$$\phi_{SC} \rightarrow \phi_{SC} + \frac{\delta_A}{(1-r)^2}$$

$$\phi_{CA} \rightarrow \phi_{CA} + \frac{\delta_A}{1-r}$$

$$P_A \rightarrow P_A + \frac{\delta_A}{1-r}(1-r) = D_A$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A = 0$$

(B) Envíos que no llenan nodos

Si $\Delta_S(1-r)^2 < \delta_A$ y $\delta_A > 0$:

$$\pi_S \rightarrow \pi_S + \Delta_S$$

$$\phi_{SC} \rightarrow \phi_{SC} + \Delta_S$$

$$\phi_{CA} \rightarrow \phi_{CA} + \Delta_S(1-r)$$

$$P_A \rightarrow P_A + \Delta_S(1-r)^2$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

3.2. Algoritmo para (P_{ext}^N)

ALGextN

(1) Ejecutar algoritmo de para 3 nodos

$$S \rightarrow ALGen(D_N, D_S, D_C, p_N^{solar}, p_N^{carbon}, p_N^{gas}, p_S^{solar}, p_S^{carbon}, p_S^{gas}, p_C^{solar}, p_C^{carbon}, p_C^{gas}, Q_N, Q_S, Q_C, r)$$

$$\phi_{ij} \rightarrow \phi_{ij}^S \forall i, j \in \{N, S, C\}, i \neq j$$

$$\phi_{NA} \rightarrow 0$$

$$\pi_i \rightarrow q_i^S \forall i \in \{N, S, C\}$$

$$\pi_A \rightarrow 0$$

$$P_i \rightarrow D_i \forall i \in \{N, S, C\}$$

$$P_A \rightarrow 0$$

(2) Utilización de energía renovable

$$\pi_A \rightarrow \min\{D_A, q_A^{solar}\}$$

$$P_A \rightarrow \min\{D_A, q_A^{solar}\}$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

(N) Envío desde N

Si $\pi_N < q_N^{solar}$ y $\delta_A > 0$:

$$\Delta_N \rightarrow q_N^{solar} - \pi_N$$

(A) Envíos que llenan nodos

Si $\Delta_N(1-r) \geq \delta_A$:

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \frac{\delta_A}{1-r}$$

$$\phi_{NA} \rightarrow \phi_{NA} + \frac{\delta_A}{1-r}$$

$$P_A \rightarrow P_A + \frac{\delta_A}{1-r}(1-r) = D_A$$

$$\delta_A \rightarrow 0$$

(B) Envíos que no llenan nodos

Si $\delta_A > 0$ y $\Delta_N(1-r) < \delta_A$:

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \Delta_N$$

$$\phi_{NA} \rightarrow \phi_{NA} + \Delta_N$$

$$P_A \rightarrow P_A + \Delta_N(1-r)$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

(3) Utilización de carbon

$$\pi_A \rightarrow \pi_A + \min\{D_A - P_A, q_A^{carbon} - P_A\}$$

$$P_A \rightarrow P_A + \min\{D_A - P_A, q_A^{carbon} - P_A\}$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

(N) Envío desde N

Si $\pi_N < q_N^{carbon}$, $\delta_A > 0$:

$$\Delta_N \rightarrow q_N^{carbon} - \pi_N$$

(A) Envíos que llenan nodos

Si $\Delta_N(1-r) \geq \delta_A$:

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \frac{\delta_A}{1-r}$$

$$\phi_{NA} \rightarrow \phi_{NA} + \frac{\delta_A}{1-r}$$

$$P_A \rightarrow P_A + \frac{\delta_A}{1-r}(1-r) = D_A$$

$$\delta_A \rightarrow 0$$

(B) Envíos que no llenan nodos

$$\text{Si } \delta_A > 0, \Delta_N(1-r) < \delta_A:$$

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \Delta_N$$

$$\phi_{NA} \rightarrow \phi_{NA} + \Delta_N$$

$$P_A \rightarrow P_A + \Delta_N(1-r)$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

(4) Utilización de gas

$$\pi_A \rightarrow \pi_A + \text{mín}\{D_A - P_A, q_A^{gas} - P_A\}$$

$$P_A \rightarrow P_A + \text{mín}\{D_A - P_A, q_A^{gas} - P_A\}$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

(N) Envío desde N

$$\text{Si } \pi_N < q_N^{gas} \text{ y } \delta_A > 0:$$

$$\Delta_N \rightarrow q_N^{gas} - \pi_N$$

(A) Envíos que llenan nodos

$$\text{Si } \Delta_N(1-r) \geq \delta_A:$$

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \frac{\delta_A}{1-r}$$

$$\phi_{NA} \rightarrow \phi_{NA} + \frac{\delta_A}{1-r}$$

$$P_A \rightarrow P_A + \frac{\delta_A}{1-r}(1-r) = D_A$$

$$\delta_A \rightarrow 0$$

(B) Envíos que no llenan nodos

$$\text{Si } \delta_A > 0 \text{ y } \Delta_N(1-r) < \delta_A:$$

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \Delta_N$$

$$\phi_{NA} \rightarrow \phi_{NA} + \Delta_N$$

$$P_A \rightarrow P_A + \Delta_N(1-r)$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

3.3. Algoritmo para (P_{ext}^S)

ALGextS:

(1) Ejecutar algoritmo de para 3 nodos

$$S \rightarrow ALGen(D_N, D_S, D_C, p_N^{solar}, p_N^{carbon}, p_N^{gas}, p_S^{solar}, p_S^{carbon}, p_S^{gas}, p_C^{solar}, p_C^{carbon}, p_C^{gas}, Q_N, Q_S, Q_C, r)$$

$$\phi_{ij} \rightarrow \phi_{ij}^S \quad \forall i, j \in \{N, S, C\}, i \neq j$$

$$\phi_{SA} \rightarrow 0$$

$$\pi_i \rightarrow q_i^S \quad \forall i \in \{N, S, C\}$$

$$\pi_A \rightarrow 0$$

$$P_i \rightarrow D_i \quad \forall i \in \{N, S, C\}$$

$$P_A \rightarrow 0$$

(2) Utilización de energía renovable

$$\pi_A \rightarrow \min\{D_A, q_A^{solar}\}$$

$$P_A \rightarrow \min\{D_A, q_A^{solar}\}$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

(N) Envío desde S

Si $\pi_S < q_S^{solar}$ y $\delta_A > 0$:

$$\Delta_S \rightarrow q_S^{solar} - \pi_S$$

(A) Envíos que llenan nodos

Si $\Delta_S(1-r) \geq \delta_A$:

$$\pi_S \rightarrow \pi_S + \frac{\delta_A}{1-r}$$

$$\phi_{SA} \rightarrow \phi_{SA} + \frac{\delta_A}{1-r}$$

$$P_A \rightarrow P_A + \frac{\delta_A}{1-r}(1-r) = D_A$$

$$\delta_A \rightarrow 0$$

(B) Envíos que no llenan nodos

Si $\delta_A > 0$ y $\Delta_S(1-r) < \delta_A$:

$$\pi_S \rightarrow \pi_S + \Delta_S$$

$$\phi_{SA} \rightarrow \phi_{SA} + \Delta_N$$

$$P_A \rightarrow P_A + \Delta_S(1 - r)$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

(3) Utilización de carbon

$$\pi_A \rightarrow \pi_A + \min\{D_A - P_A, q_A^{carbon} - P_A\}$$

$$P_A \rightarrow P_A + \min\{D_A - P_A, q_A^{carbon} - P_A\}$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

(S) Envío desde S

Si $\pi_S < q_S^{carbon}$, $\delta_A > 0$:

$$\Delta_S \rightarrow q_S^{carbon} - \pi_S$$

(A) Envíos que llenan nodos

Si $\Delta_S(1 - r) \geq \delta_A$:

$$\pi_S \rightarrow \pi_S + \frac{\delta_A}{1-r}$$

$$\phi_{SA} \rightarrow \phi_{SA} + \frac{\delta_A}{1-r}$$

$$P_A \rightarrow P_A + \frac{\delta_A}{1-r}(1 - r) = D_A$$

$$\delta_A \rightarrow 0$$

(B) Envíos que no llenan nodos

Si $\delta_A > 0$, $\Delta_S(1 - r) < \delta_A$:

$$\pi_S \rightarrow \pi_S + \Delta_S$$

$$\phi_{SA} \rightarrow \phi_{SA} + \Delta_S$$

$$P_A \rightarrow P_A + \Delta_S(1 - r)$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

(N) Envío desde N

Si $\pi_N < q_N^{solar}$ y $\delta_A > 0$:

$$\Delta_N \rightarrow q_N^{solar} - \pi_N$$

(A) Envíos que llenan nodos

Si $\Delta_N(1 - r)^2 \geq \delta_A$:

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \frac{\delta_A}{(1-r)^2}$$

$$\phi_{NS} \rightarrow \phi_{NS} + \frac{\delta_A}{(1-r)^2}$$

$$\phi_{SA} \rightarrow \phi_{SA} + \frac{\delta_A}{1-r}$$

$$P_A \rightarrow P_A + \frac{\delta_A}{1-r}(1-r) = D_A$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A = 0$$

(B) Envíos que no llenan nodos

Si $\Delta_N(1-r)^2 < \delta_A$ y $\delta_A > 0$:

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \Delta_N$$

$$\phi_{NS} \rightarrow \phi_{NS} + \Delta_N$$

$$\phi_{SA} \rightarrow \phi_{SA} + \Delta_N(1-r)$$

$$P_A \rightarrow P_A + \Delta_N(1-r)^2$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

(4) Utilización de gas

$$\pi_A \rightarrow \pi_A + \min\{D_A - P_A, q_A^{gas} - P_A\}$$

$$P_A \rightarrow P_A + \min\{D_A - P_A, q_A^{gas} - P_A\}$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

(S) Envío desde S

Si $\pi_S < q_S^{gas}$ y $\delta_A > 0$:

$$\Delta_S \rightarrow q_S^{gas} - \pi_S$$

(A) Envíos que llenan nodos

Si $\Delta_S(1-r) \geq \delta_A$:

$$\pi_S \rightarrow \pi_S + \frac{\delta_A}{1-r}$$

$$\phi_{SA} \rightarrow \phi_{SA} + \frac{\delta_A}{1-r}$$

$$P_A \rightarrow P_A + \frac{\delta_A}{1-r}(1-r) = D_A$$

$$\delta_A \rightarrow 0$$

(B) Envíos que no llenan nodos

Si $\delta_A > 0$ y $\Delta_S(1-r) < \delta_A$:

$$\pi_S \rightarrow \pi_S + \Delta_S$$

$$\phi_{SA} \rightarrow \phi_{SA} + \Delta_S$$

$$P_A \rightarrow P_A + \Delta_S(1-r)$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

(N) Envío desde N

Si $\pi_N < q_N^{gas}$, $\delta_A > 0$:

$$\Delta_N \rightarrow q_N^{gas} - \pi_N$$

(A) Envíos que llenan nodos

Si $\Delta_N(1-r)^2 \geq \delta_A$:

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \frac{\delta_A}{(1-r)^2}$$

$$\phi_{NS} \rightarrow \phi_{NS} + \frac{\delta_A}{(1-r)^2}$$

$$\phi_{SA} \rightarrow \phi_{SA} + \frac{\delta_A}{1-r}$$

$$P_A \rightarrow P_A + \frac{\delta_A}{1-r}(1-r) = D_A$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A = 0$$

(B) Envíos que no llenan nodos

Si $\Delta_N(1-r)^2 < \delta_A$, $\delta_A > 0$:

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \Delta_N$$

$$\phi_{NS} \rightarrow \phi_{NS} + \Delta_N$$

$$\phi_{SA} \rightarrow \phi_{SA} + \Delta_N(1-r)$$

$$P_A \rightarrow P_A + \Delta_N(1-r)^2$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

Dado que $ALGextN$, $ALGextS$ y $ALGextC$ son algoritmos con pasos similares, se define el siguiente algoritmo para tener una definición compacta y fácil de aplicar.

Algoritmo 3 *ALGSat*

Datos:

$$D = (D_N, D_S, D_C, D_A) \in \mathbb{R}^3, C = (c^N, c^S, c^C, c^A), r \in (0, 1]$$

$$\Pi = (\pi_N, \pi_S, \pi_C, \pi_A)$$

$$\Phi = (\phi_{NS}, \phi_{SN}, \phi_{NC}, \phi_{CN}, \phi_{SC}, \phi_{CS}, \phi_{NA}, \phi_{SA}, \phi_{CA}), P = (P_N, P_S, P_C, P_A)$$

$$q^j = (q_N^j, q_S^j, q_C^j, q_A^j)$$

Resultado: q, ϕ

$$\pi_A \rightarrow \min\{D_A - P_A, q_A^j - P_A\}$$

$$P_A \rightarrow \min\{D_A - P_A, q_A^j - P_A\}$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

si $\pi_C < q_C^j$ y $\delta_A > 0$ **entonces**

$$\Delta_C \rightarrow q_C^j - \pi_C$$

si $\Delta_C(1-r) \geq \delta_A$ **entonces**

$$\pi_C \rightarrow \pi_C + \frac{\delta_A}{1-r}$$

$$\phi_{CA} \rightarrow \phi_{CA} + \frac{\delta_A}{1-r}$$

$$P_A \rightarrow P_A + \frac{\delta_A}{1-r}(1-r)$$

$$\delta_A \rightarrow 0$$

fin si

si $\delta_A > 0$ y $\Delta_C(1-r) < \delta_A$ **entonces**

$$\pi_C \rightarrow \pi_C + \Delta_C$$

$$\phi_{CA} \rightarrow \phi_{CA} + \Delta_C$$

$$P_A \rightarrow P_A + \Delta_C(1-r)$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

fin si

fin si

si $\pi_N < q_N^j$ y $\delta_A > 0$ **entonces**

$$\Delta_N \rightarrow q_N^j - \pi_N$$

si $\Delta_N(1-r)^2 \geq \delta_A$ **entonces**

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \frac{\delta_A}{(1-r)^2}$$

$$\phi_{NC} \rightarrow \phi_{NC} + \frac{\delta_A}{(1-r)^2}$$

$$\phi_{CA} \rightarrow \phi_{CA} + \frac{\delta_A}{1-r}$$

$$P_A \rightarrow P_A + \frac{\delta_A}{1-r}(1-r)$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

fin si

si $\Delta_N(1-r)^2 < \delta_A$ y $\delta_A > 0$ **entonces**

$$\pi_N \rightarrow \pi_N + \Delta_N$$

$$\phi_{NC} \rightarrow \phi_{NC} + \Delta_N$$

$$\phi_{CA} \rightarrow \phi_{CA} + \Delta_N(1-r)$$

$$P_A \rightarrow \Delta_N(1-r)^2$$

$$\delta_A \rightarrow D_A - P_A$$

fin si

fin si

```

si  $\pi_S < q_S^j$  y  $\delta_A > 0$  entonces
   $\Delta_S \rightarrow q_S^j - \pi_S$ 
  si  $\Delta_S(1-r)^2 \geq \delta_A$  entonces
     $\pi_S \rightarrow \pi_S + \frac{\delta_A}{(1-r)^2}$ 
     $\phi_{SC} \rightarrow \phi_{SC} + \frac{\delta_A}{(1-r)^2}$ 
     $\phi_{CA} \rightarrow \phi_{CA} + \frac{\delta_A}{1-r}$ 
     $P_A \rightarrow P_A + \frac{\delta_A}{1-r}(1-r)$ 
     $\delta_A \rightarrow D_A - P_A$ 
  fin si
  si  $\Delta_S(1-r)^2 < \delta_A$  y  $\delta_A > 0$  entonces
     $\pi_S \rightarrow \pi_S + \Delta_S$ 
     $\phi_{SC} \rightarrow \phi_{SC} + \Delta_S$ 
     $\phi_{CA} \rightarrow \phi_{CA} + \Delta_N(1-r)$ 
     $P_A \rightarrow \Delta_S(1-r)^2$ 
     $\delta_A \rightarrow D_A - P_A$ 
  fin si
fin si

```

De ésta manera, *ALGextN*, *ALGextS* y *ALGextC* quedan definidos de la siguiente manera:

Algoritmo 4 *ALGextC*

Datos: $D = (D_N, D_S, D_C, D_A) \in \mathbb{R}^3$, $r \in (0, 1]$

$\Pi = (\pi_N, \pi_S, \pi_C, \pi_A)$

Resultado: q, ϕ

$S \rightarrow ALGen(D_N, D_S, D_C, p_N^{solar}, p_N^{carbon}, p_N^{gas}, p_S^{solar}, p_S^{carbon}, p_S^{gas}, p_C^{solar}, p_C^{carbon}, p_C^{gas}, Q_N, Q_S, Q_C, r)$

$\phi_{ij} \rightarrow \phi_{ij}^S$

$\forall i, j \in \{N, S, C\}, i \neq j$

$\phi_{CA} \rightarrow 0$

$\pi_i \rightarrow q_i^S \forall i \in \{N, S, C\}$

$\pi_A \rightarrow 0$

$P_i \rightarrow D_i \forall i \in \{N, S, C\}$

$P_A \rightarrow 0$

para $j \in [solar, carbon, gas]$ **hacer**

$\Pi \rightarrow (\pi_N^S, Q_S, Q_C, \pi_A^S)$

$P = (P_N^S, P_S^S, P_C^S, P_A^S)$

$\Phi \rightarrow (\phi_{NS}^S, \phi_{SN}^S, \phi_{NC}^S, \phi_{CN}^S, \phi_{SC}^S, \phi_{CS}^S, \phi_{NA}^S, \phi_{SA}^S, \phi_{CA}^S)$

$q = (q_N^j, q_S^j, q_C^j, q_A^j)$

$S \rightarrow ALGSat(D, \Pi, \Phi, q)$

fin para

Algoritmo 5 *ALGextN*

Datos: $D = (D_N, D_S, D_C, D_A) \in \mathbb{R}^3$, $r \in (0, 1]$

$\Pi = (\pi_N, \pi_S, \pi_C, \pi_A)$

Resultado: q, ϕ

$S \rightarrow ALGen(D_N, D_S, D_C, p_N^{solar}, p_N^{carbon}, p_N^{gas}, p_S^{solar}, p_S^{carbon}, p_S^{gas}, p_C^{solar}, p_C^{carbon}, p_C^{gas}, Q_N, Q_S, Q_C, r)$

$\phi_{ij} \rightarrow \phi_{ij}^S$

$\forall i, j \in \{N, S, C\}, i \neq j$

$\phi_{CA} \rightarrow 0$

$\pi_i \rightarrow q_i^S \forall i \in \{N, S, C\}$

$\pi_A \rightarrow 0$

$P_i \rightarrow D_i \forall i \in \{N, S, C\}$

$P_A \rightarrow 0$

para $j \in [solar, carbon, gas]$ **hacer**

$\Pi \rightarrow (\pi_N^S, \pi_S^S, \pi_C^S, \pi_A^S)$

$P = (P_N^S, P_S^S, P_C^S, P_A^S)$

$\Phi \rightarrow (\phi_{NS}^S, \phi_{SN}^S, \phi_{NC}^S, \phi_{CN}^S, \phi_{SC}^S, \phi_{CS}^S, \phi_{NA}^S, \phi_{SA}^S, \phi_{CA}^S)$

$q = (q_N^j, q_S^j, q_C^j, q_A^j)$

$S \rightarrow ALGSat(D, \Pi, \Phi, q)$

fin para

Algoritmo 6 *ALGextS*

Datos: $D = (D_N, D_S, D_C, D_A) \in \mathbb{R}^3$, $r \in (0, 1]$

$\Pi = (\pi_N, \pi_S, \pi_C, \pi_A)$

Resultado: q, ϕ

$S \rightarrow ALGen(D_N, D_S, D_C, p_N^{solar}, p_N^{carbon}, p_N^{gas}, p_S^{solar}, p_S^{carbon}, p_S^{gas}, p_C^{solar}, p_C^{carbon}, p_C^{gas}, Q_N, Q_S, Q_C, r)$

$\phi_{ij} \rightarrow \phi_{ij}^S$

$\forall i, j \in \{N, S, C\}, i \neq j$

$\phi_{CA} \rightarrow 0$

$\pi_i \rightarrow q_i^S \forall i \in \{N, S, C\}$

$\pi_A \rightarrow 0$

$P_i \rightarrow D_i \forall i \in \{N, S, C\}$

$P_A \rightarrow 0$

para $j \in [solar, carbon, gas]$ **hacer**

$\Pi \rightarrow (Q_N, \pi_S^S, Q_C, \pi_A^S)$

$P = (P_N^S, P_S^S, P_C^S, P_A^S)$

$\Phi \rightarrow (\phi_{NS}^S, \phi_{SN}^S, \phi_{NC}^S, \phi_{CN}^S, \phi_{SC}^S, \phi_{CS}^S, \phi_{NA}^S, \phi_{SA}^S, \phi_{CA}^S)$

$q = (q_N^j, q_S^j, q_C^j, q_A^j)$

$S \rightarrow ALGSat(D, \Pi, \Phi, q)$

fin para

Observación 3.2. *ALGextN*, *ALGextS* y *ALGextC* entregan puntos óptimos para (P_{ext}^N) , (P_{ext}^S) y (P_{ext}^C) , respectivamente. La demostración es análoga al Teorema 2.14, con la misma argumentación del Teorema 3.3, siguiendo la idea de los vasos de agua.

3.4. Extensiones de (P_{ext})

Nos enfocamos ahora en un grafo con más de un *satélite*, tal como se ve en la Figura 3.4.

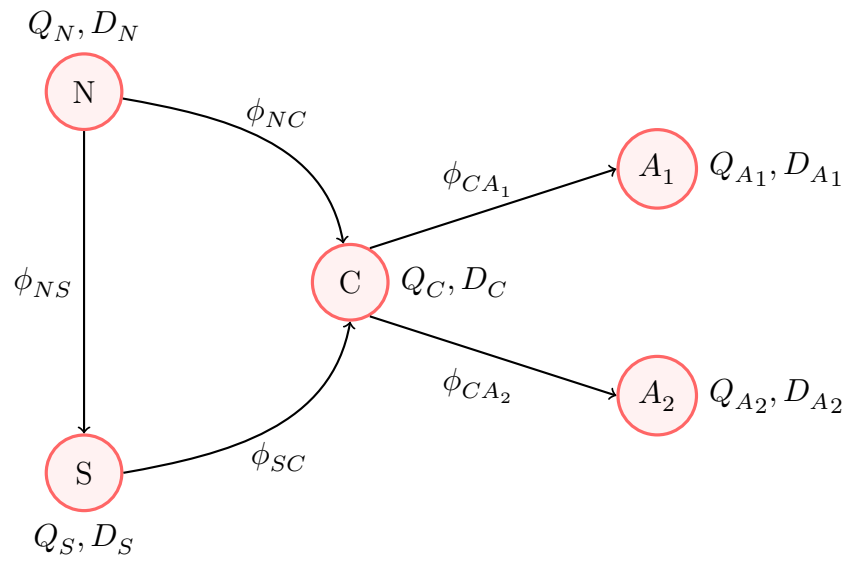


Figura 3.4: Sistema del caso con 2 satélites

Se propone el siguiente algoritmo para resolver el problema de optimización asociado:

Algoritmo 7 ALGSat2

Datos:

$$D = (D_N, D_S, D_C, D_{A_1}, D_{A_2})$$

$$p_N = (p_N^{solar}, p_N^{carbon}, p_N^{gas}) \in [0, 100]^3$$

$$p_S = (p_S^{solar}, p_S^{carbon}, p_S^{gas}) \in [0, 100]^3$$

$$p_C = (p_C^{solar}, p_C^{carbon}, p_C^{gas}) \in [0, 100]^3$$

$$p_{A_1} = (p_{A_1}^{solar}, p_{A_1}^{carbon}, p_{A_1}^{gas}) \in [0, 100]^3$$

$$p_{A_2} = (p_{A_2}^{solar}, p_{A_2}^{carbon}, p_{A_2}^{gas}) \in [0, 100]^3$$

$$Q = (Q_N, Q_S, Q_C, Q_{A_1}, Q_{A_2}) \geq 0$$

$$R = (r_{NS}, r_{SN}, r_{NC}, r_{CN}, r_{NS}, r_{SN}, r_{SC}, r_{CS}, r_{CA_1}, r_{CA_2}) \in [0, 1]^8$$

Resultado: $q_N, q_S, q_C, q_{A_1}, q_{A_2}, \phi$

$$S \rightarrow ALGen(D_N, D_S, D_C, p_N^{solar}, p_N^{carbon}, p_N^{gas}, p_S^{solar}, p_S^{carbon}, p_S^{gas}, p_C^{solar}, p_C^{carbon}, p_C^{gas}, Q_N, Q_S, Q_C, r)$$

$$\phi_{ij} \rightarrow \phi_{ij}^S$$

$$\forall i, j \in \{N, S, C\}, i \neq j$$

$$\phi_{CA_1} \rightarrow 0$$

$$\phi_{CA_2} \rightarrow 0$$

$$\pi_i \rightarrow q_i^S \forall i \in \{N, S, C\}$$

$$\pi_{A_1} \rightarrow 0$$

$$\pi_{A_2} \rightarrow 0$$

$$P_i \rightarrow D_i \forall i \in \{N, S, C\}$$

$$P_A \rightarrow 0$$

para $j \in [solar, carbon, gas]$ **hacer**

$$\Pi \rightarrow (\pi_N^S, \pi_S^S, \pi_C^S, \pi_{A_1}^S)$$

$$P = (P_N^S, P_S^S, P_C^S, P_{A_1}^S)$$

$$\Phi \rightarrow (\phi_{NS}^S, \phi_{SN}^S, \phi_{NC}^S, \phi_{CN}^S, \phi_{SC}^S, \phi_{CS}^S, \phi_{NA_1}^S, \phi_{SA_1}^S, \phi_{CA_1}^S)$$

$$q = (q_N^j, q_S^j, q_C^j, q_{A_1}^j)$$

$$S \rightarrow ALGSat(D, \Pi, \Phi, q)$$

fin para**para** $j \in [solar, carbon, gas]$ **hacer**

$$\Pi \rightarrow (\pi_N^S, \pi_S^S, \pi_C^S, \pi_{A_2}^S)$$

$$P = (P_N^S, P_S^S, P_C^S, P_{A_2}^S)$$

$$\Phi \rightarrow (\phi_{NS}^S, \phi_{SN}^S, \phi_{NC}^S, \phi_{CN}^S, \phi_{SC}^S, \phi_{CS}^S, \phi_{NA_2}^S, \phi_{SA_2}^S, \phi_{CA_2}^S)$$

$$q = (q_N^j, q_S^j, q_C^j, q_{A_2}^j)$$

$$S \rightarrow ALGSat(D, \Pi, \Phi, q)$$

fin para

Luego, para una cantidad cualquiera de satelites, tal como se ve en la Figura 3.5, se formula el problema de optimización (P_{Satn})

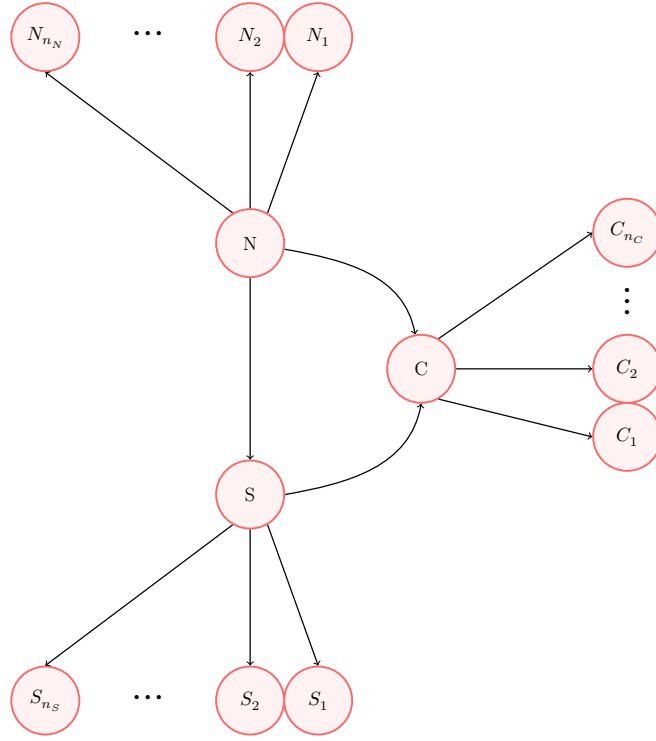


Figura 3.5: Sistema del problema (P_{Satn})

$$\begin{aligned}
 (P_{Satn}) \quad \text{mín} \quad & c_N(q_N) + c_S(q_S) + c_C(q_C) + \sum_{i=1}^{n_N} c_{N_i}(q_{N_i}) + \sum_{i=1}^{n_C} c_{C_i}(q_{C_i}) + \sum_{i=1}^{n_S} c_{S_i}(q_{S_i}) \\
 \text{s.a.} \quad & D_N = q_N - \phi_{NS} - \phi_{NC} + \phi_{CN}(1 - r_{CN}) + \phi_{SN}(1 - r_{SN}) - \sum_{i=1}^{n_N} \phi_{NN_i} \\
 & D_S = q_S + \phi_{NS}(1 - r_{NS}) - \phi_{SC} + \phi_{CS}(1 - r_{CS}) - \phi_{SN} - \sum_{i=1}^{n_S} \phi_{SS_i} \\
 & D_C = q_C + \phi_{NC}(1 - r_{NC}) + \phi_{SC}(1 - r_{SC}) - \phi_{CN} - \phi_{CS} - \sum_{i=1}^{n_C} \phi_{CC_i} \\
 & N_i = q_{N_i} + \phi_{NN_i}(1 - r) \quad \forall i \in \{1, \dots, n_N\} \\
 & S_i = q_{S_i} + \phi_{SS_i}(1 - r) \quad \forall i \in \{1, \dots, n_S\} \\
 & C_i = q_{C_i} + \phi_{CC_i}(1 - r) \quad \forall i \in \{1, \dots, n_C\} \\
 & q_i \in [0, Q_i] \quad \forall i \in \{N, S, C, N_1, \dots, N_{n_N}, S_1, \dots, S_{n_S}, C_1, \dots, C_{n_C}\} \\
 & \phi_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in \{N, S, C, N_1, \dots, N_{n_N}, S_1, \dots, S_{n_S}, C_1, \dots, C_{n_C}\} \quad i \neq j
 \end{aligned}$$

Algoritmo 8 *ALGSatn*

Datos:

$$p_N = (p_N^{solar}, p_N^{carbon}, p_N^{gas}) \in [0, 100]^3$$

$$p_S = (p_S^{solar}, p_S^{carbon}, p_S^{gas}) \in [0, 100]^3$$

$$p_C = (p_C^{solar}, p_C^{carbon}, p_C^{gas}) \in [0, 100]^3$$

$$\left\{ (p_{C_i}^{solar}, p_{C_i}^{carbon}, p_{C_i}^{gas}) \right\}_{i=1}^{n_C}, \left\{ (p_{S_i}^{solar}, p_{S_i}^{carbon}, p_{S_i}^{gas}) \right\}_{i=1}^{n_S}, \left\{ (p_{N_i}^{solar}, p_{N_i}^{carbon}, p_{N_i}^{gas}) \right\}_{i=1}^{n_N}$$

$$Q = (Q_N, Q_S, Q_C, Q_{N_1}, \dots, Q_{N_{n_N}}, Q_{S_1}, \dots, Q_{S_{n_S}}, Q_{C_1}, \dots, Q_{C_{n_C}}) \geq 0$$

$$D = (D_N, D_S, D_C, D_{N_1}, \dots, D_{N_{n_N}}, D_{S_1}, \dots, D_{S_{n_S}}, D_{C_1}, \dots, D_{C_{n_C}}) \geq 0 \quad r \in [0, 1)$$

Resultado: $q_N, q_S, q_C, q_{A_1}, q_{A_2}, \phi$

$$S \rightarrow ALGen(D_N, D_S, D_C, p_N^{solar}, p_N^{carbon}, p_N^{gas}, p_S^{solar}, p_S^{carbon}, p_S^{gas}, p_C^{solar}, p_C^{carbon}, p_C^{gas}, Q_N, Q_S, Q_C, r)$$

$$\phi_{ij} \rightarrow \phi_{ij}^S$$

$$\forall i, j \in \{N, S, C\}, i \neq j$$

para $n \in \{n_N, n_S, n_C\}$ **hacer****para** $i \in \{1, \dots, n\}$ **hacer**

$$\phi_{CC_i} \rightarrow 0$$

$$\pi_{C_i} \rightarrow 0$$

$$P_{C_i} \rightarrow 0$$

$$\phi_{NN_i} \rightarrow 0$$

$$\pi_{N_i} \rightarrow 0$$

$$P_{N_i} \rightarrow 0$$

$$\phi_{SS_i} \rightarrow 0$$

$$\pi_{S_i} \rightarrow 0$$

$$P_{S_i} \rightarrow 0$$

fin para**fin para**

$$\pi_i \rightarrow q_i^S \quad \forall i \in \{N, S, C\}$$

$$P_i \rightarrow D_i \quad \forall i \in \{N, S, C\}$$

para $i \in \{1, \dots, n_N\}$ **hacer****para** $j \in [solar, carbon, gas]$ **hacer**

$$\Pi \rightarrow (\pi_N^S, \pi_S^S, \pi_C^S, \pi_{N_i}^S)$$

$$P \rightarrow (P_N^S, P_S^S, P_C^S, P_{C_i}^S)$$

$$\Phi \rightarrow (\phi_{NS}^S, \phi_{SN}^S, \phi_{NC}^S, \phi_{CN}^S, \phi_{SC}^S, \phi_{CS}^S, \phi_{NN_i}^S)$$

$$q = (q_N^j, q_S^j, q_C^j)$$

$$S \rightarrow ALGSat(D, \Pi, \Phi, q)$$

fin para**fin para**

```

para  $i \in \{1, \dots, n_S\}$  hacer
  para  $j \in [solar, carbon, gas]$  hacer
     $\Pi \rightarrow (\pi_S^S, \pi_C^S, \pi_N^S, \pi_{S_i}^S)$ 
     $P = (P_S^S, P_C^S, P_N^S, P_{S_i}^S)$ 
     $\Phi \rightarrow (\phi_{NC}^S, \phi_{CN}^S, \phi_{NS}^S, \phi_{SN}^S, \phi_{CS}^S, \phi_{SC}^S, \phi_{SS_i}^S)$ 
     $q = (q_N^j, q_C^j, q_S^j)$ 
     $S \rightarrow ALGSat(D, \Pi, \Phi, q)$ 
  fin para
fin para
para  $i \in \{1, \dots, n_C\}$  hacer
  para  $j \in [solar, carbon, gas]$  hacer
     $\Pi \rightarrow (\pi_C^S, \pi_S^S, \pi_N^S, \pi_{C_i}^S)$ 
     $P = (P_C^S, P_S^S, P_N^S, P_{C_i}^S)$ 
     $\Phi \rightarrow (\phi_{CS}^S, \phi_{SC}^S, \phi_{CN}^S, \phi_{NC}^S, \phi_{SN}^S, \phi_{NS}^S, \phi_{CC_i}^S)$ 
     $q = (q_N^j, q_S^j, q_C^j)$ 
     $S \rightarrow ALGSat(D, \Pi, \Phi, q)$ 
  fin para
fin para

```

El siguiente resultado logra justificar la optimalidad del punto entregado por *ALGSatn*.

Teorema 3.3. *Sea q un punto entregado por *ALGSatn*. Luego q es un punto óptimo para (P_{Satn})*

Demostración. La factibilidad de q se argumenta mediante la factibilidad del punto entregado por *ALGen* y posteriormente *ALGSat* tiene actualizaciones de la forma

$$\begin{array}{l}
 q_i \rightarrow q_i + X \\
 \phi_{ij_i} \rightarrow \phi_{ij_i} + X
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{l}
 q_i \rightarrow q_i + Y \\
 \phi_{ki} \rightarrow \phi_{ki} + Y \\
 \phi_{ij_i} \rightarrow \phi_{ij_i} + Y(1 - r)
 \end{array}
 \quad \text{y} \quad
 q_{j_i} \rightarrow q_{j_i} + Z$$

Las cuales mantienen las restricciones activas.

Respecto a la optimalidad, para el caso de un satélite se demuestra de manera análoga al Teorema 2.14, pues la existencia de un nuevo nodo conectado únicamente a uno de los tres principales mantiene válidos los argumentos dados en este resultado. Debido a que *ALGSatn* aplica *ALGSat* para cada satélite, se tiene inductivamente que el punto entregado es óptimo. \square

4. Conclusiones y trabajo futuro

Conclusiones Durante el desarrollo de ésta investigación se llevó a cabo un análisis de un sistema eléctrico basado en el caso chileno y representado por un grafo dirigido de tres nodos, los cuales cuentan con sus respectivas demandas, funciones de costo y capacidades de producción mediante tres principales fuentes de energía. Para encontrar la solución de éste problema se lo simplificó al caso dirigido de tres nodos y se desarrolló un algoritmo capaz de encontrar el punto óptimo de esta simplificación. Éste algoritmo se desarrolló utilizando la idea de los *vasos de agua*, que consiste en utilizar cada recurso en su máxima capacidad antes de pasar al siguiente mas costoso. Una vez hecho esto se realizó un otro algoritmo capaz de resolver el mismo problema pero con *satélites* conectados a cada uno de los tres nodos principales. A través de éste trabajo de lograron varios objetivos que han dado a luz a diferentes aspectos de la planificación de sistemas eléctricos.

Se pudo comprender de manera más profunda la interacción entre los nodos principales y sus satélites, lo cual arrojó varios patrones en cuanto a la distribución de recursos. Esto se traduce en conocimientos fundamentales sobre la eficiencia en el contexto de la producción de energía eléctrica.

Se contempla la incorporación en un futuro de un enfoque medioambiental en el desarrollo de ésta investigación. La creciente conciencia sobre la importancia de preservar el entorno da lugar a un cambio de visión en la forma que se abordan los problemas relacionados con energía y tecnología. Surge entonces la necesidad de considerar junto a la eficiencia energética, el impacto que estas generan.

Al momento de analizar sistemas que involucran recursos para generar algún tipo de bien siempre es necesario tener en consideración la escasez de estos los materiales de producción y de qué manera puede replantearse un problema debido a esto. Un ejemplo de esto son las consecuencias del cambio climático, pues diversos recursos de producción de energía eléctrica son contaminantes (el gas, por ejemplo) por lo que es posible que las instituciones gubernamentales establezcan restricciones para su uso. Otra situación que ocurre con regularidad es la no disponibilidad de energía renovable en la medida deseada. La poca disponibilidad de luz solar es claro ejemplo. A este fenómeno se lo denomina *intermitencia*. Es por esto que es importante re abordar el problema frente a estas nuevas condiciones. A continuación se presentan dos planteamientos nuevos basados en el problema original que buscan solucionar el desafío de la intermitencia

4.1. Minimizar el costo esperado, con la posibilidad de compra en el mercado

Una de las formas de replantear el problema es minimizar el *costo esperado*, junto a las diferencias entre el valor de las restricciones esperado.

$$\begin{aligned}
 (P_{\mathbb{E}}) \quad & \min_{(\vec{q}, \vec{\phi})} \mathbb{E} \left[\begin{array}{l} c_N(q_N) + c_S(q_S) + c_C(q_C) \\ +p \cdot (D_N - q_N + \phi_{NS} + \phi_{NC}) \\ +p \cdot (D_S - q_S + \phi_{SC} - \phi_{NS}(1-r)) \\ +p \cdot (D_C - q_C - \phi_{NC}(1-r) - \phi_{SC}(1-r)) \end{array} \right] \\
 \text{s.a.} \quad & q_i \in [0, Q_i] \quad i \in \{N, S, C\} \\
 & \phi_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in \{N, S, C\} \quad i \neq j
 \end{aligned}$$

4.2. Chance Constraint

En este planteamiento se definen tolerancias β_N, β_S y β_C , las cuales establecen las probabilidades mínimas de falla correspondiente a cada restricción del problema original.

$$\begin{aligned}
 (P_{\beta}) \quad & \min \mathbb{E}(c_N(\omega, q_N) + c_S(\omega, q_S) + c_C(\omega, q_C)) \\
 \text{s.a.} \quad & \mathbb{P}(D_N \leq q_N - \phi_{NS} - \phi_{NC}) \geq \beta_N \\
 & \mathbb{P}(D_S \leq q_S + \phi_{NS} - \phi_{SC} - r_{NS}\phi_{NS}) \geq \beta_S \\
 & \mathbb{P}(D_C \leq q_C + \phi_{NC} + \phi_{SC} - r_{NC}\phi_{NC} - r_{SC}\phi_{SC}) \geq \beta_C \\
 & q_i(\omega) \in [0, Q_i(\omega)] \quad i \in \{N, S, C\} \\
 & \phi_{ij}(\omega) \geq 0 \quad \forall i, j \in \{N, S, C\} \quad i \neq j
 \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] Amaya, J. Optimización para estudiantes de Ingeniería, versión 20 de marzo de 2019.
- [2] Escobar, J.F. and Jofré, A., 2010. Monopolistic competition in electricity networks with resistance losses. *Economic theory*, 44, pp.101-121.
- [3] Hernández-Santibáñez, N., Jofré, A. and Possamai, D., 2023. Pollution Regulation for Electricity Generators in a Transmission Network. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 61(2), pp.788-819.
- [4] Heymann, B. and Jofré, A., 2019. Optimal auctions for networked markets with externalities. arXiv preprint arXiv:1907.10080.
- [5] Stephen Boyd., 2004. *Convex Optimization*. Cambridge University Press New York, NY, USA,
- [6] Bazaraa, M.S., J.J. Jarvis, H.D. Sherali., 2010. *Linear programming and network flows*. Wiley and Sons.
- [7] Bazaraa, M.S., H.D. Sherali, C.M. Shetty., 2006. *Nonlinear programming: theory and algorithms*. Wiley and Sons.
- [8] Esteban, D., 2019. Modeling and analysis of electricity auctions [Tesis de magister, Universidad de Chile]. <https://repositorio.uchile.cl/handle/2250/174945>
- [9] J. Nocedal, S. Wright., 2006. *Numerical optimization (Second edition)*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, New York.
- [10] Diestel, R., 2017. *Graph Theory*. GTM 173. Springer.
- [11] West, D., 2002. *Introduction to graph Theory*, Addison-Wesley.

Anexo A Algoritmo base

Consideramos un algoritmo base, que llamaremos *ALG*.

Algoritmo 9 *ALG*

Datos: $D_N, D_S, D_C, p_N^{solar}, p_N^{gas}, p_S^{carbon}, p_S^{gas}, p_C^{solar}, p_C^{carbon}, p_C^{gas}, Q_N, Q_S, Q_C \geq 0, r \in [0, 1)$

Resultado: $q_i, \phi_{ij}, V \geq 0, i, j \in \{N, S, C\}, i \neq j$

```

1:  $q_i^{solar} = \frac{p_i^{solar}}{100} \cdot Q_i$ 
2:  $q_i^{carbon} = \frac{p_i^{carbon}}{100} \cdot Q_i + q_i^{solar}$ 
3:  $q_i^{gas} = \frac{p_i^{gas}}{100} \cdot Q_i + q_i^{carbon}$ 
4:  $P_i \leftarrow 0 \quad \forall i \in \{N, S, C\}$ 
5:  $\pi_i \leftarrow 0 \quad \forall i \in \{N, S, C\}$ 
6:  $\phi_{ij} \leftarrow 0 \quad \forall i, j \in \{N, S, C\}, i \neq j$ 
7:  $\pi_i \leftarrow \min\{D_i, q_i^{solar}\} \quad \forall i \in \{N, S, C\}$ 
8:  $P_i \leftarrow \pi_i \quad \forall i \in \{N, S, C\}$ 
9: si  $P_S \geq D_S$  entonces
10:    $\Delta_S \leftarrow q_S^{solar} - D_S$ 
11:    $\delta_C \leftarrow D_C - P_C$ 
12:   si  $P_C < D_C$  y  $P_C + \Delta_S(1 - r) \geq D_C$  entonces
13:      $\varphi_{SC} \leftarrow \varphi_{SC} + \frac{\delta_S}{1-r}$ 
14:      $\pi_S \leftarrow \pi_S + \frac{\delta_S}{1-r}$ 
15:      $P_C \leftarrow P_C + \frac{\delta_S}{1-r}(1 - r) = D_C$ 
16:   fin si
17:   si  $P_C < D_C$  y  $P_C - \Delta_S(1 - r) < D_C$  entonces
18:      $\phi_{SC} \leftarrow \phi_{SC} + \Delta_S$ 
19:      $\pi_S \leftarrow \pi_S + \Delta_S$ 
20:      $P_C \leftarrow P_C + \Delta_S(1 - r)$ 
21:   fin si
22: fin si
23: si  $P_N \geq D_N$  entonces
24:    $\Delta_N \leftarrow q_N^{solar} - \pi_N$ 
25:    $\delta_C \leftarrow D_C - P_C$ 
26:   si  $P_C < D_C, P_C + \Delta_N(1 - r) \geq D_C$  y  $(Q_N - \pi_N - \frac{\delta_C}{1-r})(1 - r) \geq D_S$  entonces
27:      $\varphi_{NC} \leftarrow \varphi_{NC} + \frac{\delta_C}{1-r}$ 
28:      $\pi_N \leftarrow \pi_N + \frac{\delta_C}{1-r}$ 
29:      $P_C \leftarrow P_C + \frac{\delta_C}{1-r} \cdot (1 - r) = D_C$ 
30:      $\Delta_N \leftarrow \Delta_N - \frac{\delta_C}{1-r}$ 
31:   fin si
32:    $\delta_S \leftarrow D_S - P_S$ 
33:   si  $P_S < D_S$  y  $P_S + \Delta_N(1 - r) \geq D_S$  entonces
34:      $\varphi_{NS} \leftarrow \varphi_{NS} + \frac{\delta_S}{1-r}$ 
35:      $\pi_N \leftarrow \pi_N + \frac{\delta_S}{1-r}$ 
36:      $P_S \leftarrow P_S + \frac{\delta_S}{1-r}(1 - r) = D_S$ 

```

```

37: |    $\Delta_N \leftarrow \Delta_N - \frac{\delta_S}{1-r}$ 
38: fin si
39: si  $P_C < D_C, P_C + \Delta_N(1-r) < D_C$  y  $Q_S + (Q_N - \pi_N - \Delta_N)(1-r) \geq D_S$  entonces
40: |    $\varphi_{NC} \leftarrow \varphi_{NC} + \Delta_N$ 
41: |    $\pi_N \leftarrow \pi_N + \Delta_N$ 
42: |    $P_C \leftarrow P_C + \Delta_N(1-r)$ 
43: |    $\Delta_N \rightarrow \Delta_N - \Delta_N = 0$ 
44: fin si
45: si  $P_S < D_S$  y  $P_S + \Delta_N(1-r) < D_S$  entonces
46: |    $\varphi_{NS} \leftarrow \varphi_{NS} + \Delta_N$ 
47: |    $\pi_N \leftarrow \pi_N + \Delta_N$ 
48: |    $P_S \leftarrow P_S + \Delta_N(1-r)$ 
49: fin si
50: fin si
51: si  $P_S < D_S$  entonces
52: |    $\pi_S \leftarrow \pi_S + \min\{q_S^{carbon} - q_S^{solar}, D_S - P_S\}$ 
53: |    $P_S \leftarrow P_S + \min\{q_S^{carbon} - q_S^{solar}, D_S - P_S\}$ 
54: fin si
55: si  $P_N < D_N$  entonces
56: |    $\pi_N \leftarrow \min\{q_N^{carbon}, D_N\}$ 
57: |    $P_N \leftarrow \min\{q_N^{carbon}, D_N\}$ 
58: fin si
59: si  $P_C < D_C$  entonces
60: |    $\pi_C \leftarrow \pi_C + \min\{q_C^{carbon} - q_C^{solar}, D_C - P_C\}$ 
61: |    $P_C \leftarrow P_C + \min\{q_C^{carbon} - q_C^{solar}, D_C - P_C\}$ 
62: fin si
63: si  $P_S \geq D_C$  entonces
64: |    $\Delta_S = q_S^{carbon} - \pi_S$ 
65: |    $\delta_C = D_C - P_C$ 
66: |   si  $P_C < D_C$  y  $P_C + \Delta_S(1-r) \geq D_C$  entonces
67: |   |    $\phi_{SC} \leftarrow \phi_{SC} + \frac{\delta_C}{1-r}$ 
68: |   |    $\pi_S \leftarrow \pi_S + \frac{\delta_C}{1-r}$ 
69: |   |    $P_C \leftarrow P_C + \frac{\delta_C}{1-r}(1-r) = D_C$ 
70: |   fin si
71: |   si  $P_C < D_C$  y  $P_C + \Delta_S(1-r) < D_C$  entonces
72: |   |    $\phi_{SC} \leftarrow \phi_{SC} + \Delta_S$ 
73: |   |    $\pi_S \leftarrow \pi_S + \Delta_S$ 
74: |   |    $P_C \leftarrow P_C + \Delta_S(1-r)$ 
75: |   fin si
76: fin si
77: si  $P_N \geq D_N$  entonces
78: |    $\Delta_N = q_N^{carbon} - \pi_N$ 
79: |    $\delta_C = D_C - P_C$ 
80: |   si  $P_C < D_C, P_C + \Delta_N(1-r) \geq D_C$  y  $(Q_S - \pi_N - \frac{\delta_C}{1-r})(1-r) \geq D_S$  entonces
81: |   |    $\phi_{NC} \leftarrow \frac{\delta_C}{1-r}$ 

```

```

82: | |  $\pi_N \leftarrow \pi_N + \frac{\delta_C}{1-r}$ 
83: | |  $P_C \leftarrow P_C + \frac{\delta_C}{1-r}(1-r) = D_C$ 
84: | |  $\Delta_N \leftarrow \Delta_N - \frac{\delta_C}{1-r}$ 
85: | fin si
86: | si  $P_S < D_S, P_C + \Delta_N(1-r) \geq D_C$  entonces
87: | |  $\phi_{NS} \leftarrow \frac{\delta_S}{1-r}$ 
88: | |  $\pi_N \leftarrow \pi_N + \frac{\delta_S}{1-r}$ 
89: | |  $P_S \leftarrow P_C + \frac{\delta_S}{1-r}(1-r) = D_C$ 
90: | |  $\Delta_N \leftarrow \Delta_N - \frac{\delta_S}{1-r}$ 
91: | fin si
92: | si  $P_C < D_C, P_C + \Delta_N(1-r) < D_C$  y  $Q_S + (Q_N - \pi_N - \Delta_N)(1-r) \geq D_S$  entonces
93: | |  $\phi_{NC} \leftarrow \phi_{NC} + \Delta_N$ 
94: | |  $\pi_N \leftarrow \pi_N + \Delta_N$ 
95: | |  $P_C \leftarrow P_C + \Delta_N(1-r)$ 
96: | |  $\Delta_N \leftarrow \Delta_N - \Delta_N = 0$ 
97: | fin si
98: | si  $P_S < D_S$  y  $P_C + \Delta_N(1-r) < D_C$  entonces
99: | |  $\phi_{NS} \leftarrow \phi_{NS} + \Delta_N$ 
100: | |  $\pi_N \leftarrow \pi_N + \Delta_N$ 
101: | |  $P_S \leftarrow P_S + \Delta_N(1-r)$ 
102: | fin si
103: fin si
104: si  $P_C < D_C$  entonces
105: | |  $\pi_C \leftarrow \pi_C + \min \{q_C^{solar} - q_C^{carbon}, D_C - P_C\}$ 
106: | |  $P_C \leftarrow P_C + \min \{q_C^{solar} - q_C^{carbon}, D_C - P_C\}$ 
107: fin si
108: si  $P_S < D_S$  entonces
109: | |  $\pi_S \leftarrow \pi_S + \min \{q_S^{solar} - q_S^{carbon}, D_S - P_S\}$ 
110: | |  $P_S \leftarrow P_S + \min \{q_S^{solar} - q_S^{carbon}, D_S - P_S\}$ 
111: fin si
112: si  $P_N < D_N$  entonces
113: | |  $\pi_N \leftarrow \pi_N + (D_N - P_N)$ 
114: | |  $P_N \leftarrow P_N + (D_N - P_N) = D_N$ 
115: fin si
116: si  $P_S \geq D_S$  y  $P_C < D_C$  entonces
117: | |  $\Delta_S \leftarrow q_S^{gas} - \pi_S$ 
118: | | si  $P_C < D_C$  y  $P_C + \Delta_S(1-r) \geq D_C$  entonces
119: | | |  $\delta_C \leftarrow D_C - P_C$ 
120: | | |  $\phi_{SC} \leftarrow \phi_{SC} + \frac{\delta_C}{1-r}$ 
121: | | |  $\pi_S \leftarrow \pi_S + \frac{\delta_C}{1-r}$ 
122: | | |  $P_C \leftarrow P_C + \frac{\delta_C}{1-r}(1-r) = D_C$ 
123: | | fin si
124: | | si  $P_C < D_C$  y  $P_C + \Delta_S(1-r) < D_C$  entonces
125: | | |  $\delta_C \leftarrow D_C - P_C$ 

```

```

126: |   |  $\phi_{SC} \leftarrow \phi_{SC} + \Delta_S$ 
127: |   |  $\pi_S \leftarrow \pi_S + \Delta_S$ 
128: |   |  $P_C \leftarrow P_C + \Delta_S(1 - r)$ 
129: |   | fin si
130: | fin si
131: | si  $P_N \geq D_N$  y  $P_C < D_C$  entonces
132: |   |  $\Delta_N = q_N^{gas} - \pi_N$ 
133: |   | si  $P_C + \Delta_N(1 - r) \geq D_C$  entonces
134: |   |   |  $\delta_C \leftarrow D_C - P_C$ 
135: |   |   |  $\phi_{NC} \leftarrow \phi_{NC} + \frac{\delta_C}{1-r}$ 
136: |   |   |  $\pi_N \leftarrow \pi_N + \frac{\delta_C}{1-r}$ 
137: |   |   |  $P_C \leftarrow P_C + \frac{\delta_C}{1-r}(1 - r) = D_C$ 
138: |   |   | fin si
139: |   |   | si  $P_C + \Delta_N(1 - r) < D_C$  entonces
140: |   |   |   |  $\phi_{NC} \leftarrow \phi_{NC} + \Delta_N$ 
141: |   |   |   |  $\pi_N \leftarrow \pi_N + \Delta_N$ 
142: |   |   |   |  $P_C \leftarrow P_C + \Delta_N(1 - r)$ 
143: |   |   |   | fin si
144: |   |   | fin si
145: |   | si  $P_N \geq D_N$  y  $P_S < D_S$  entonces
146: |   |   |  $\Delta_N = q_N^{gas} - \pi_N$ 
147: |   |   | si  $P_S + \Delta_N(1 - r) \geq D_S$  entonces
148: |   |   |   |  $\delta_S \leftarrow D_S - P_S$ 
149: |   |   |   |  $\phi_{NS} \leftarrow \phi_{NS} + \frac{\delta_S}{1-r}$ 
150: |   |   |   |  $\pi_N \leftarrow \pi_N + \frac{\delta_S}{1-r}$ 
151: |   |   |   |  $P_S \leftarrow P_S + \frac{\delta_S}{1-r}(1 - r) = D_S$ 
152: |   |   |   | fin si
153: |   |   |   | si  $P_S + \Delta_N(1 - r) < D_S$  entonces
154: |   |   |   |   |  $\phi_{NS} \leftarrow \phi_{NS} + \Delta_N$ 
155: |   |   |   |   |  $\pi_N \leftarrow \pi_N + \Delta_N$ 
156: |   |   |   |   |  $P_S \leftarrow P_C + \Delta_N(1 - r)$ 
157: |   |   |   |   | fin si
158: |   |   |   | fin si

```
