UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

CONTRIBUCIONES AL ESTUDIO DE LA NO EXPANSIVIDAD DE ACCIONES DE GRUPOS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

NICOLÁS PATRICIO CORNEJO CALQUÍN

PROFESOR GUÍA:
SEBASTIÁN DONOSO FUENTES

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
RODOLFO GUTIÉRREZ ROMO
SEBASTIÁN BARBIERI LEMP

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por:
CMM ANID BASAL FB210005.

SANTIAGO DE CHILE
2023

RESUMEN DE TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS
Y MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: NICOLÁS PATRICIO CORNEJO CALQUÍN
FECHA: 2023
PROF. GUÍA: SEBASTIÁN DONOSO FUENTES

CONTRIBUCIONES AL ESTUDIO DE LA NO EXPANSIVIDAD DE ACCIONES DE GRUPOS

Boyle y Lind introdujeron el concepto de direcciones de no expansividad para acciones de $\mathbb{Z}^d$, y presentaron algunos resultados de existencia y compacidad asociados a este objeto, lo que permitió generalizar ciertos resultados que se tenían en los sistemas dinámicos clásicos (sobre $\mathbb{Z}$) y que ha tenido diversas aplicaciones en dinámica y combinatoria de palabras.

El presente trabajo busca extender el concepto de no expansividad a contextos más generales, como los grupos conexos, o grupos finitamente generados.

En una línea distinta, Bowen y Walters demostraron que la suspensión de un sistema dinámico expansivo clásico, también es expansivo en un sentido adaptado a flujos. En este trabajo se extiende la noción de suspensión a $\mathbb{Z}^d$-sistemas dinámicos y se extiende el resultado de expansividad.

Por otro lado, King probó que en sistemas dinámicos clásicos, siempre es posible encontrar puntos en órbitas distintas cuyas dinámicas permanezcan arbitrariamente cercanas para tiempos positivos. Este resultado se extiende parcialmente a $\mathbb{Z}^d$-sistemas dinámicos con la introducción del concepto de dirección de no separabilidad, que consiste en una versión más fuerte del concepto de no expansividad introducido por Boyle y Lind.

No somos criaturas de destinos.
Es el viaje el que nos da la forma.

Brandon Sanderson

Agradecimientos

En el proceso de culminación de esta tesis, quiero expresar mi profundo agradecimiento a todas las personas que han sido fundamentales en mi vida y en este arduo camino académico.

En primer lugar, a mi familia, que ha sido mi fuente constante de apoyo y amor. A mi madre, Ingrid, quien fue mi pilar fundamental en la infancia, educándome con cariño y estando siempre presente para satisfacer mis necesidades. A mis hermanos, Ignacio y Kevin, a quienes quiero mucho, y a mi padre, cuyo incansable esfuerzo y dedicación para mantener a nuestra familia económicamente han sido un ejemplo constante.

Agradezco a mis amigos, aquellos que conocí en los primeros años de la universidad, como Cris, David, Max, Vicky, Bruno, Pato y Vicho, con quienes compartí innumerables tardes de juegos de mesa y risas. También a aquellos amigos que hice en mi especialidad, como Felipe, Kira, Arie y Cynthia, quienes se convirtieron en un gran apoyo durante la pandemia, con quienes disfruté de comidas y partidas de Dead by Daylight.

Mi gratitud se extiende al CMAT, que marcó un cambio radical en mi vida y me ayudó a descubrir mi pasión por las matemáticas. Especialmente, agradezco al director, Rafael Labarca, por su cercanía y apoyo inquebrantable.

A mis profesores universitarios, en particular a Matías Godoy, quien me dio la oportunidad de ser profesor auxiliar y creyó en mí desde el principio. A mi profesor guía, cuya paciencia y disposición para ayudarme han sido invaluables. También agradezco a todos los alumnos con los que compartí mi conocimiento durante mi etapa universitaria.

Mis compañeros de coordinación, Natacha y Eterin, merecen un reconocimiento especial por su simpatía y gentileza.

Quiero expresar mi admiración y agradecimiento al autor Brandon Sanderson, cuyos libros me brindaron compañía en mis viajes solitarios a Rancagua, gracias a la recomendación de Max y Vicente.

Por último, pero no menos importante, agradezco a mi novia Marcela, quien ha sido mi compañera constante en este último año, tratándome siempre con cariño y amor. Sus almuerzos y su cariño me han brindado el apoyo necesario para completar este desafío.

Gracias a todos por ser parte de mi vida y por contribuir de manera significativa a la culminación de esta etapa académica.

Tabla de Contenido

Capítulo 1

Introducción

Un sistema dinámico es un objeto matemático que permite modelar sistemas que evolucionan en el tiempo. Por ejemplo los sistemas físicos que modelan el movimiento de una partícula, o los sistemas económicos que modelan la variación de una tasa o un costo, corresponden a ejemplos de sistemas dinámicos.

Sin embargo, la definición matemática de sistema dinámico no se limita exclusivamente a ese tipo de modelos, sino que es una noción abstracta que permite modelar cualquier situación de la vida real, tanto aquellas en las que el tiempo varía de forma discreta (como la cantidad total de peces que nacen cada año), como aquellas que presentan variaciones continuas (como las que provienen de una ecuación diferencial ordinaria). Además, el objeto matemático no se restringe a que el tiempo varíe en una dimensión como ocurre en la vida real, sino que se pueden estudiar sistemas donde el tiempo es multidimensional, o inclusive, se mueve en objetos algebraicos más abstractos.

Un concepto relevante en el estudio de los sistemas dinámicos, es la propiedad de expansividad, la cual señala que existe una constante positiva c, tal que cada par de puntos distintos (sin importar que tan cercanos sean dichos puntos), eventualmente estarán (o estuvieron) separados por una distancia mayor que c. De esta forma, los sistemas dinámicos expansivos, poseen cierta sensibilidad en sus condiciones iniciales, y con ello, se podría decir que su dinámica exhibe un comportamiento caótico.

Lamentablemente, la noción de expansividad clásica solo es compatible para sistemas dinámicos discretos, pues en los sistemas continuos, la propiedad de expansividad es demasiado restrictiva. Para resolver este problema, en 1972, Rufus Bowen y Peter Walters [3] presentaron la noción de expansividad en flujos (conocida como expansividad en el sentido de Bowen-Walters), que corresponde a una noción de expansividad que se adecúa más a los sistemas dinámicos continuos en los que el tiempo se mueve en una variable (a estos sistemas dinámicos se les conoce como flujos).

El tema no se estancó ahí, pues desde ese momento, se comenzaron a desarrollar múltiples nociones de expansividad en flujos. En 1984, se introdujo la expansividad débil [14], que como su nombre sugiere, es una propiedad más débil que la expansividad de Bowen-Walters.

También en 1984, Gura [9] introdujo la propiedad de ”separabilidad” para flujos, con el objetivo de exhibir una propiedad expansiva en horociclos. El autor demostró que todo horociclo sobre una superficie compacta de curvatura negativa es un flujo separador. Más aún, cualquier cambio de tiempo del horociclo es separador, propiedad que actualmente se conoce como flujo fuertemente separador.

En 1995, en un libro clásico del área de sistemas dinámicos, Katok y Hasselblatt [12] presentaron una noción de expansividad distinta a la propuesta por Bowen y Walters, que propone una reparametrización del tiempo en un sentido más particular. Con el tiempo, esta propiedad se conocería como KH-expansividad y se presentarían ciertas caracterizaciones de esta noción en términos de la propiedad de separación que introdujo Gura.

Más adelante, en el año 2016, una colección de múltiples nociones de expansividad en flujos sería introducida por Artigue [1], entre las que se incluyen la expansividad geométrica, expansividad cinématica, separación fuerte, separación geométrica, etc. En este trabajo el autor presenta jerarquías entre las diferentes nociones de expansividad y separabilidad presentes hasta la fecha, junto con contraejemplos para analizar las relaciones entre dichas propiedades.

Para concluir con la expansividad en flujos, en el año 2020, Minh Hien [11] presenta una fusión entre la noción de expansividad de Katok-Hasselblat, junto con la noción de expansividad cinematica introducida por Artigue, llamada KH-expansividad cinemática.

Por otro lado, en un tema muy distinto, en el año 1997, Mike Boyle y Douglas Lind presentaron su trabajo sobre subdinámicas expansivas [4] en el cual se introdujo el concepto de conjunto expansivo, que en cierto sentido consiste en una generalización de la propiedad de expansividad para cierta clase de sistemas dinámicos discretos. Con esta noción, se introdujo el concepto de dirección de no-expansividad. Este objeto, ha tomado un rol fundamental en la resolución de múltiples problemas, como lo son el estudio de autómatas celulares (ver [15]), el estudio de Joinings topológicos (ver [13]) o avances en combinatoria al estudiar la conjetura de Nivat (ver [5]).

Recientemente, en el trabajo de Donoso, Maass y Petite ([6]), se ha generalizado este objeto al estudiar la noción de horobola no expansiva en grupos discretos más generales, como se verá en el último capítulo, esto permite generalizar algunos resultados clásicos del área.

Por último, uno de los objetivos de este trabajo es generalizar la noción de expansividad en flujos, a sistemas dinámicos conexos con tiempo multidimensional, y con ello introducir una noción de conjunto expansivo para dicha clase de sistemas. Esto permitirá definir el concepto de direcciones de no expansividad en otra clase de sistemas, lo que podría servir como herramienta para otra área de estudio.

1.1. Sistemas dinámicos

En esta primera sección, se introduce la definición de sistema dinámico junto con sus principales nociones básicas, se incluirán algunas demostraciones cortas para dar más completitud.

Definición 1.1 *Un sistema dinámico topológico es una tripleta* (X, T, G)*, donde* G *es un grupo,* X *es un espacio métrico compacto y* T *es una acción de* G *sobre* X*, es decir,* $T : G \times X \to X$ *es una función continua que satisface lo siguiente*

1. $T(e_G, x) = x$, $\forall x \in X$

2. $T(g, T(h, x)) = T(gh, x)$, $\forall x \in X$, $\forall g, h \in G$

La acción T *se denomina función de fase del sistema y* X *es llamado el espacio de fase. Usualmente, se denota* $T_g(x) = T(g, x)$*, en este sentido, la acción* $T = (T_g)_{g \in G}$ *representa una familia de homeomorfimos de* X*.*

Es importante conocer cuándo es posible transferir propiedades de un sistema dinámico a otro, o bien, saber cuando dos sistemas son indistinguibles en un sentido dinámico (poseen las mismas propiedades), para ello, se introducen las nociones de factor y conjugación.

Definición 1.2 *Sean* (X, T, G)*,* (Y, S, G) *dos sistemas dinámicos topológicos y sea* $\varphi : X \to Y$ *una función continua que conmuta con las acciones* T *y* S*, es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T_g} & X \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ Y & \xrightarrow{S_g} & Y \end{array}$$

Dependiendo de las propiedades de φ*, se tendrán las siguientes nomenclaturas:*

- *Si* φ *es sobreyectivo, diremos que es un factor, y en tal caso, se dirá que* Y *es factor de* X *(o bien,* X *es una extensión de* Y*).*

- *Si* φ *es inyectiva, se dirá que es un embedding, encaje o incrustración.*

- *Si* φ *es biyectiva, se dirá que es una conjugación topológica, lo que se denota como* $X \cong_\varphi Y$

En general, cuando Y es factor de X, se pueden transferir las propiedades dinámicas de X a Y, y cuando hay una conjugación topológica, ambos sistemas poseen las mismas propiedades (son indistinguibles como sistemas dinámicos).

Es relevante conocer qué propiedades permanecen invariantes a través de conjugaciones topológicas o factores, para ello, introduciremos algunos conceptos básicos del estudio de sistemas dinámicos.

Definición 1.3 *Sea* (X, T) *un* G*-sistema dinámico.*

- *La órbita de un punto $x \in X$ es el conjunto:*

$$orb(x) = \{T_g(x) : g \in G\},$$

que corresponde a todos los puntos que visita x a través de la dinámica de T

- *Un punto $x \in X$, es un punto fijo de T, si $T_g(x) = x$ para cada $g \in G$. El conjunto de puntos fijos del sistema se denota por $Fix(X, T)$. De esta forma, si un punto $x \in X$ es fijo, entonces $orb(x) = \{x\}$*

- *Un punto $x \in X$, es un punto periodo de T, si existe $g \in G \neq \{e\}$ tal que $T_g(x) = x$. En tal caso, se dice que $g \in G$ es un periódico de x.*

- *Sea $H \leq G$ un subgrupo. Un punto $x \in X$ se dice H-periódico, si $T_h(x) = x$ para cada $h \in H$. Se denota:*

$$Fix_H(X, T) = \{x \in X : T_h(x) = x, \forall h \in H\}$$

En la literatura, los puntos fijos se suelen llamar puntos singulares del sistema. Los puntos no singulares se suelen llamar puntos regulares.

Definición 1.4 *Sea T una acción de G sobre un conjunto X, entonces:*

- *T es una acción fiel si*

$$\forall g \in G, (\forall x \in X, T_g(x) = x) \implies g = e_G$$

- *T es una acción libre si*

$$\forall g \in G, \forall x \in X, (T_g(x) = x \implies g = e_G)$$

Definición 1.5 *Un G-sistema dinámico (X, T) es minimal, si para cada $Y \subseteq X$ cerrado y T-invariante, se tiene que, $Y = X$ o $Y = \emptyset$.*

Proposición 1.6 *Si X es minimal y Y es un factor de X, entonces Y es minimal*

Demostración. Sea $\varphi : (X, T) \to (Y, S)$ un factor y $Z \subseteq Y$ un conjunto cerrado S-invariante. Se tiene que $\varphi^{-1}(Z)$ es cerrado y T-invariante, pues $\varphi^{-1}(Z) = \emptyset$ o $\varphi^{-1}(Z) = X$. Luego, $Z = \emptyset$ o $Z = Y$, pues φ es sobreyectiva. □

Corolario 1.7 *La minimalidad se preserva a través de conjugaciones topológicas.*

Proposición 1.8 *Un sistema dinámico (X, T) es minimal, si y solo si, todo punto $x \in X$ tiene órbita densa.*

Demostración. Si X es minimal, podemos considerar el conjunto $Y = \overline{orb(x)}$, que es cerrado e invariante. Como $x \in Y$, se sigue que $Y = X$. Por otro lado, sea $Y \subseteq X$ un conjunto cerrado no vacío e invariante, y sea $x \in X$. Como Y es invariante, se tiene que $orb(x) \subseteq Y$, y en consecuencia, $X = \overline{orb(x)} \subseteq Y$. □

Proposición 1.9 *Si (X,T,G) es un sistema dinámico topológico minimal, entonces para cada conjunto abierto y no vacío $U \subseteq X$, existe un conjunto finito $F \subseteq G$ tal que $X = \bigcup_{g\in F} T_{-g}U$*

Demostración. Sea $U \subseteq X$ abierto no vacío, luego se tiene que $\bigcup_{g\in G} T_{-g}U$ es un abierto T-invariante, y con ello, su complemento es un cerrado T-invariante, y como X es minimal, este debe ser vacío. En consecuencia, $\bigcup_{g\in G} T_{-g}U = X$, y como X es compacto, existe un conjunto finito $F \subseteq G$ tal que $\bigcup_{g\in F} T_{-g}U = X$ □

Corolario 1.10 *Si $(X,T,\mathbb{Z}^d)$ es un sistema dinámico topológico minimal, entonces para cada conjunto abierto y no vacío $U \subseteq X$ y para cada semiespacio $H \subseteq \mathbb{Z}^d$, existe un conjunto finito $F \subseteq H$ tal que $X = \bigcup_{g\in F} T_{-g}U$*

Demostración. Por la propiedad anterior, existe un conjunto finito $F \subseteq G$ tal que $\bigcup_{g\in F} T_{-g}U = X$, como F es finito, existe $R > 0$ tal que $F \subseteq B_R$, sea $v \in H$ tal que $\langle v, h\rangle > 0$ para cada $h \in H$, con $\|v\| > R$. Luego

$$T_vX = X = \bigcup_{g\in F} T_{v-g}U,$$

como $v - g \in H$ para cada $g \in F$, se concluye el resultado. □

1.2. Sistemas simbólicos

Los sistemas simbólicos son una clase importante de sistemas dinámicos, pues estos nos permiten visualizar y caracterizar de forma simple la mayoría de los conceptos y propiedades.

En el contexto de los sistemas simbólicos, $\mathcal{A}$ (con $|\mathcal{A}| > 1$) representa un conjunto finito (discreto) al que llamaremos alfabeto, y sus elementos se denominan símbolos o letras. Por otro lado, supondremos que G es un grupo finitamente generado (digamos, $G = \langle S\rangle$ con $|S| = k$) y numerable, como por ejemplo, $\mathbb{Z}^k$, o $\mathbb{F}_k$, el grupo libre de k generadores.

Consideramos el espacio producto $\mathcal{A}^G$ definido por:

$$\mathcal{A}^G = \{(a_g)_{g\in G} : a_g \in \mathcal{A}, \forall g \in G\},$$

que viene dotado con la métrica d dada por:

$$d(x,y) = \sum_{g\in G} \frac{1}{|2k|^{|g|_G}} \cdot \delta(x_g, y_g)$$

Donde δ es la métrica discreta y $|g|_G$ es la métrica de palabras de $g \in G$, que corresponde al menor $n \in \mathbb{N}$, para el cual existen $g_1, ..., g_n \in S$, $r_1, ..., r_n \in \{+1, -1\}$, tales que $g = g_1^{r_1} \cdots g_n^{r_n}$.

Ejemplo Es fácil notar que si $G = \mathbb{Z}^d$ (con S la base canónica), entonces $|n|_{\mathbb{Z}^d} = \|n\|_1$ para todo $n \in \mathbb{Z}^d$, pues la forma más corta para llegar a n con sumas o restas en S, es moverse por la cuadrícula. De esta forma, para $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$, se tiene:

$$d(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \frac{1}{(2d)^{\|n\|_1}} \cdot \delta(x_n, y_n)$$

En ciertas ocasiones, se suele considerar la siguiente métrica en el espacio producto:

$$\rho(x,y) = \frac{1}{2^{\min\{|g|_G : x_g \neq y_g\}}}$$

Ambas métricas son equivalentes, y generan la misma topología, que coincide con la topología prodiscreta de $\mathcal{A}^G$, además, se tiene que $\mathcal{A}^G$ es compacto, pues $\mathcal{A}$ es compacto por el Teorema de Tychonoff.

Es interesante notar que el diámetro de $\mathcal{A}^G$ queda acotado por $1 + 2k$ en la métrica d y por 1 en la métrica ρ, además, si $d(x,y) < \frac{1}{(2k)^N}$, entonces $x|_{B_N} = y|_{B_N}$, donde se denota $B_N = \{g \in G : |g|_G \leq n\}$.

En dicho espacio, definimos la acción por traslaciones (shift) $\sigma : G \times \mathcal{A}^G \to \mathcal{A}^G$ dada por:

$$\sigma_g(x) = \sigma(g,x) := (\sigma_g(x))_{h \in G} = (x_{hg})_{h \in G}$$

Se puede notar que $\sigma_g \sigma_h = \sigma_{gh}$ para cada $g, h \in G$. Además, σ_g es un homeomorfismo de $\mathcal{A}^G$ para cada $g \in G$, con inversa $(\sigma_g)^{-1} = \sigma_{g^{-1}}$, con ello se tiene la siguiente definición.

Definición 1.11 *Al sistema dinámico* $(\mathcal{A}^G, \sigma, G)$ *se le denomina* G-***full-shift*** *(sobre el alfabeto* $\mathcal{A}$*), o simplemente full-shift si no hay confusión.*

Observación El full-shift no es minimal, pues hay puntos fijos que no tienen órbita densa.

Sea $X \subseteq \mathcal{A}^G$ un conjunto cerrado y σ-invariante. Como X es cerrado y $\mathcal{A}^G$ es compacto, se tiene que X es compacto, y como X es σ-invariante, se puede restringir la acción del full-shift, $\sigma|_X : G \times X \to X$. De esta forma, $(X, \sigma|_X)$ es un sistema dinámico. Este tipo de sistemas se denomina G-**subshift**, o simplemente subshift.

1.3. Subdinámica Expansiva

La siguiente definición corresponde a la noción clásica de expansividad de homeomorfismos.

Definición 1.12 *Un sistema dinámico topológico* (X, d, T, G) *es expansivo, si existe un* $\delta > 0$ *tal que para cada* $x, y \in X$ *se satisface lo siguiente*

$$d(T_g(x), T_g(y)) \leq \delta, \forall g \in G \implies x = y$$

O equivalentemente,

$$x \neq y \implies \exists g \in G, d(T_g(x), T_g(y)) > \delta.$$

La constante δ *es denominada la constante de expansividad de* (X, T)

La primera implicancia señala que aquellos puntos cuyas órbitas permanecen a distancia menor o igual que δ, son indistinguibles para la dinámica T, es decir, el sistema no distingue puntos cuya dinámica permanezca cercana. La segunda implicancia dice que aunque se tomen puntos muy cercanos, la dinámica eventualmente los separa a distancia δ, lo que se puede entender como una propiedad caótica del sistema.

Proposición 1.13 *Todo sistema simbólico es expansivo.*

Demostración. Si $x \neq y \in X$, existe un $g \in G$ tal que $x_g \neq y_g$. Luego $\sigma_g(x)_0 \neq \sigma_g(y)_0$ y por lo tanto, $d(\sigma_g(x), \sigma_g(y)) \geq 1$ $\square$

En [4], Boyle y Lind generalizaron la noción de expansividad al definir los conjuntos expansivos en $\mathbb{Z}^d$-sistemas dinámicos.

Definición 1.14 *Dado un conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^d$ y $r > 0$, se denota*

$$F^r = \{g \in \mathbb{R}^d : \|g - f\| < r, \forall f \in F\}$$

al conjunto F engrosado por r

Definición 1.15 *Dado un sistema dinámico topológico $(X, T, \mathbb{Z}^d)$ y un conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^d$, se dice que F es un conjunto expansivo para (X, T) si existen $r > 0$ y $\delta > 0$ tales que, para cada $x, y \in X$, se satisface lo siguiente:*

$$d(T_n(x), T_n(y)) < \delta, \forall n \in F^r \cap \mathbb{Z}^d \implies x = y$$

En tal caso, se dice que F tiene radio de expansividad r y constante de expansividad δ, o bien, que F es (r, δ)-expansivo.

Tomando $F = \mathbb{R}^d$, es fácil notar que la definición anterior generaliza la noción de expansividad clásica, más precisamente

Observación $(X, T, \mathbb{Z}^d)$ es expansivo si y solo si $\mathbb{R}^d$ es un conjunto expansivo.

Es relevante destacar que la expansividad se puede levantar a conjuntos más grandes, es decir

Observación Si F es expansivo y $F \subseteq E$, entonces E es expansivo.

Esta propiedad tiene ciertas consecuencias, en primer lugar, se tiene que la existencia de un conjunto expansivo implica la expansividad del espacio, pues todo conjunto es subconjunto de $\mathbb{R}^d$. Recíprocamente, si un sistema dinámico es no-expansivo, entonces todo subconjunto es no-expansivo, por lo tanto, solo es interesante estudiar existencia de conjuntos no-expansivos, en sistemas que sean expansivos.

En los sistemas simbólicos, la expansividad de conjuntos se puede caracterizar de forma simple.

Proposición 1.16 *Sea (X, σ) un $\mathbb{Z}^d$-subshift, entonces $F \subseteq \mathbb{R}^d$ es expansivo si y solo si,* *existe $t > 0$, tal que, para cada $x, y \in X$, se satisface:*

$$x_n = y_n, \forall n \in B_r(F) \cap \mathbb{Z}^d \implies x = y$$

Demostración. Sean $x \neq y$. Si F es expansivo, existe $n \in F^r$ tal que $\rho(\sigma_n x, \sigma_n y) > \delta$, como $0 < \delta < 1$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $2^{-\varepsilon} = \delta$, de esta forma se obtiene que:

$$\min\{\|k\|_1 : (\sigma_n x)_k \neq (\sigma_n y)_k\} < \varepsilon$$

Y con ello, existe un $k \in B_\varepsilon$ tal que $x_{n+k} \neq y_{n+k}$, concluyendo así que existe $m \in L^{r+\varepsilon}$ tal que $x_m \neq y_m$. Para la recíproca, basta notar que si $x_n \neq y_n$, entonces $\rho(\sigma_n x, \sigma_n y) = 1$ □

En el trabajo de Boyle y Lind, se demostró que toda dirección racional (pendiente racional) de $\mathbb{R}^2$ es una dirección de no-expansividad para cierto subshift (ver [4]). Años más tarde, Michael Hochman probaría en [10], que esto también es cierto para direcciones irracionales, concluyendo así que toda dirección del plano es una dirección de no expansividad.

Una caracterización útil de las direcciones de no expansividad es la siguiente

Proposición 1.17 *Sea $L = H_1 \cap H_2$ un subespacio de $\mathbb{R}^d$ con H_1, H_2 semiespacios. Entonces L es expansivo si y solo si H_1 y H_2 son expansivos*

Demostración. Es claro que si L es expansivo, entonces H_1 y H_2 también lo son. Para la recíproca, supongamos que L no es expansivo. Notar que podemos además suponer que $\mathbb{R}^d$ es expansivo (con constante de expansividad $c > 0$), de lo contrario no hay nada que probar. Para $\epsilon < c$, y para cada $i \in \mathbb{N}$ podemos encontrar puntos distintos $x_i, y_i \in X$ tales que $d(T_n x_i, T_n y_i) \leq \epsilon$ para todo $n \in L^i$. Cambiando los puntos (x_i, y_i) por elementos en su órbita, podemos suponer que existe $n_i \in L^{i+1} \setminus L^i$ tal que $d(T_n x_i, T_n y_i) > \epsilon$. Componiendo con T_{-n_i} podemos suponer que $d(x_i, y_i) \geq \epsilon$. Tomando una subsecuencia si es necesario, el conjunto $L^i - n_i$ está contenido en alguno de los H_j, $j = 1, 2$. En síntesis, $d(x_i, y_i) \geq \epsilon$, y $d(T_n x_i, T_n x_i) \leq \epsilon$ para todo $n \in L^i \cap H_1$. Por compacidad, podemos encontrar $x \neq y$ tal que $d(T_n x, T_n y) \leq \epsilon$ para todo $n \in H_1$. Esto implica que H_1 no es expansivo. □

Este resultado nos da la siguiente caracterización para las direcciones de no expansividad.

Corolario 1.18 *L es una dirección de no expansividad si y solo si, alguno de los semiespacios que delimitan a L es no expansivo.*

Es importante destacar que para la expansividad (o no-expansividad) de semiespacios, no es necesario considerar un radio de expansividad, más precisamente se tiene lo siguiente

Proposición 1.19 *Un semiespacio H es no-expansivo si y solo si, para cada $\delta > 0$, existen $x, y \in X$ distintos, tales que*

$$d(T_n(x), T_n(y)) < \delta, \forall n \in H \cap \mathbb{Z}^d$$

Demostración. La implicancia hacia la derecha es directa, pues $H \subseteq H^r$ para cada $r > 0$. Por otro lado, dado un $\delta > 0$ y $r > 0$, podemos considerar un $v \in \mathbb{Z}^d$ tal que $\langle v, n \rangle > 0$ para todo $n \in H$ y $\|v\|_2 > r$, de esta forma se tendrá que $n + v \in H$ para todo $n \in H^r$, es decir

$$d(T_n(T_v(x)), T_n(T_v(y)) < \delta, \forall n \in H^r \cap \mathbb{Z}^d$$

Con $T_v(x) \neq T_v(y)$ $\square$

La propiedad anterior será de especial relevancia en el último capítulo, pues revisaremos una extensión de la noción de dirección de no expansividad, a través de una generalización del concepto de semiespacio.

Para entender mejor la noción de dirección no expansiva, veamos un ejemplo clásico.

Ejemplo Sea (X, σ) el $\mathbb{Z}^2$-subshift de Ledrappier, definido por:

$$X = \{(x_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} : x(i,j) + x(i+1,j) + x(i,j+1) \equiv 0 \pmod 2\}$$

Denotando Δ al triángulo que une los puntos $0 = (0,0)$, $e_1 = (1,0)$ y $e_2 = (0,1)$, se puede notar que las tres direcciones paralelas a las caras de Δ son no-expansivas. Por ejemplo, para la recta $L = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$, los semiespacios asociados son $H_1 = \{(x,y) : y \geq 0\}$ y $H_2 = \{(x,y) : y \leq 0\}$. Luego, podemos definir $x \in X$ de la siguiente forma

$$x_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \geq 0 \\ 1 & \text{si } j < 0, i = 0 \\ 0 & \text{si } j < 0, i \neq 0, x_{i+1,j} = x_{i,j+1} \\ 1 & \text{si } j < 0, i \neq 0, x_{i+1,j} \neq x_{i,j+1} \end{cases}$$

El punto $x \in X$ se ve como sigue.

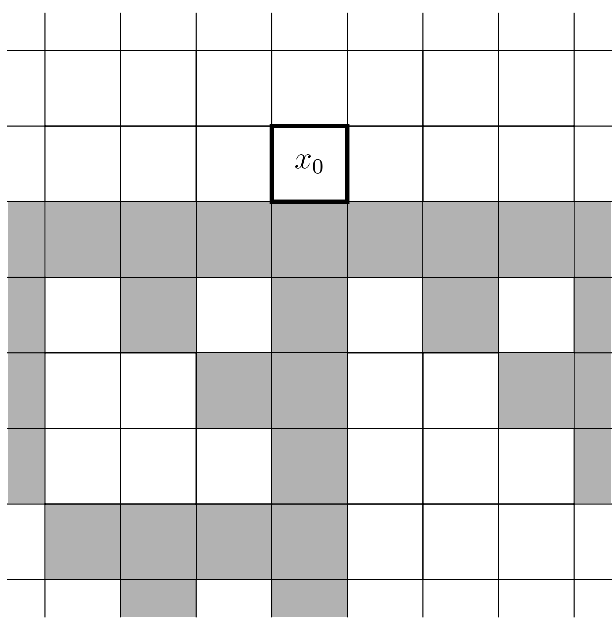


Figura 1.1: Punto $x \in X$: $x_i = 1$ en las casillas grises

Luego, basta tomar $y = T_{-e_1}x$, de forma que $x_i = y_i$ para cada $i \in H_1$, pero $x \neq y$. Para las otras dos direcciones el argumento es similar, además, se puede probar (ver [4]) que estas son las únicas direcciones de no-expansividad.

1.4. Lema de no numerabilidad

En esta breve sección, se introducen algunos elementos básicos del semigrupo de mapeos continuos, con el fin de enunciar el lema de no numerabilidad que será usado más adelante (ver más detalles en [13]).

Sea (X, d) un espacio métrico compacto y (C, d_∞) el espacio métrico completo de las funciones $f : X \to X$ continuas, con d_∞ la métrica del supremo en C, que está definida por:

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$$

Como X es compacto, todo $f \in C$ es uniformemente continuo, lo que implica que la composición $(f, g) \mapsto fg$ es un mapeo continuo de $C \times C \to C$.

Sea $H \subset C$ la subfamilia de homeomorfimos de X. En general, esta familia de funciones no es cerrada, pero se tiene el siguiente el resultado.

Proposición 1.20 *Sea $(f_n) \subseteq H$ una familia de homeomorfismos que conmutan entre sí, es decir, $f_n f_m = f_m f_n$ para cada m, n. Si $f_n \to f$, entonces $f \in H$.*

Esta propiedad es relevante, pues justamente es el caso para los homeomorfismos que vienen dados por una acción (T_g), dado que estos siempre conmutan.

Para una función $f \in C$, se define $\|f\| = d_\infty(f, I)$. Se tienen las siguientes propiedades.

Proposición 1.21 *Si $f, g \in C$ y $h \in H$, entonces:*

1. $\|f\| - \|g\| \leq \|fg\| \leq \|f\| + \|g\|$
2. $\|h^{-1}\| = \|h\|$

Dado un $T \in H$, se denota $Aut(T)$ al grupo de automorfismos de T, que consiste en aquellos $S \in H$ tales que $ST = TS$. A continuación, se enuncia el lema de no numerabilidad, este resultado fue utilizado en una de las demostraciones centrales del capítulo 3.

Teorema 1.22 ([13]) *Sea $T \in H$ y sean $(P_n) \subseteq Aut(T)$, tales que $\|P_n\| \to 0$ y $P_n \neq I$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$, el conjunto $\{S \in A(T) : \|S\| \leq \varepsilon\}$ es no numerable.*

Capítulo 2

Multiflujos

Las direcciones de no expansividad están definidas para sistemas dinámicos discretos, así que es natural preguntarse si existe un concepto análogo en el caso en que el grupo es conexo, el objetivo de este capítulo es introducir esta extensión.

En primer lugar, es fácil notar que la definición clásica de expansividad no es de utilidad en sistemas donde el grupo que actúa es conexo, pues si se supone que un sistema (X, ϕ) es expansivo en el sentido clásico, la continuidad de ϕ implicaría que existe un $\eta > 0$ tal que:

$$y \in \phi_{B_\eta}(x) \implies d(\phi_g(x), \phi_g(y)) < \delta, \forall g \in G,$$

Y con ello, la expansividad de ϕ implicaría que cada punto de X está aislado. Esto deja en evidencia que es necesario establecer una noción de expansividad menos restrictiva para sistemas conexos. Una relajación natural sería considerar la siguiente propiedad:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, d(\phi_g(x), \phi_g(y)) < \delta, \forall g \in G \implies y \in \phi_{B_\varepsilon}(x),$$

En el caso de flujos ($G = \mathbb{R}$), esta propiedad es conocida como expansividad cinemática (ver [2]), y es invariante por conjugación topológica.

Desafortunadamente, Bowen y Walters notaron que esta propiedad no es invariantes por cambios de tiempo, lo cuál provoca que existan algunos ejemplos indeseados (ver [3]). Sin embargo, en el mismo texto, se prueba que el problema se soluciona al admitir una reparametrización en el tiempo en la definición.

Definición 2.1 ([3]) *Un flujo (X, ϕ) es expansivo (en el sentido de Bowen-Walters), si ocurre lo siguiente; para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si para cada $x, y \in X$ y $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua con $s(0) = 0$, se tiene que:*

$$d(\phi_t(x), \phi_{s(t)}(y)) < \delta, \forall t \in \mathbb{R} \implies y = \phi_t(x), \text{ con } |t| < \varepsilon$$

La expansividad de Bowen-Walters fue la primera adaptación del concepto de expansividad al caso conexo, pero no fue la última, pues durante los años venideros, se introdujeron múltiples nociones que aplicaban la idea de reparametrizar el tiempo de formas distintas.

A lo largo de este capítulo, veremos brevemente las extensiones naturales de algunas de estas propiedades, al caso conexo multiparámetro. Para hacer la distinción con los flujos, les pondremos nombre.

Definición 2.2 *Un multiflujo es un G-sistema dinámico, donde $G = \mathbb{R}^d$ para algún $d \geq 1$*

2.1. C-expansividad

Motivado por la definición de Bowen y Walters para expansividad de flujos, se presenta la extensión natural al caso multiparámetro.

Definición 2.3 *Sea $C(\mathbb{R}^d)$ el conjunto de funciones continuas de $\mathbb{R}^d$ en si mismo. Se define:*

$$C = \{g \in C(\mathbb{R}^d) : g(0) = 0\}.$$

Dado $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{F} \subseteq C$, el multiflujo (X, ϕ) se dirá $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-expansivo, si existe un $\delta > 0$, tal que para cada $x, y \in X$ y $f \in \mathcal{F}$, se tiene que:

$$d(\phi_g(x), \phi_{f(t)}(y)) < \delta, \forall g \in \mathbb{R}^d \implies y \in \phi_{B_\varepsilon}(x)$$

Además, si (X, ϕ) es $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-expansivo para todo $\varepsilon > 0$, diremos que (X, ϕ) es $\mathcal{F}$-expansivo.

Observación Es fácil notar que se tienen las siguientes equivalencias:

1. La expansividad de Bowen-Walters equivale a la C-expansividad.
2. La expansividad cinemática equivale a la $\{id\}$-expansividad.
3. La expansividad clásica equivale a la $(\{id\}, 0)$-expansividad

Ejemplo 1. Los flujos de Anosov son C-expansivos (ver [7])

2. Las suspensiones de sistemas dinámicos expansivos son C-expansivos (ver [3])

La siguiente propiedad sigue directamente de la definición.

Proposición 2.4 *Si (X, ϕ) es un multiflujo $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-expansivo, se cumple que:*

1. *Si $\delta \geq \varepsilon$, entonces (X, ϕ) es $(\mathcal{F}, \delta)$-expansivo*
2. *Si $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, entonces (X, ϕ) es $(\mathcal{G}, \varepsilon)$-expansivo*

Como consecuencia se tiene la siguiente jerarquía

Corolario 2.5 *Si (X, ϕ) es C-expansivo, entonces es $\mathcal{F}$-expansivo para todo $\mathcal{F}$*

Es natural preguntarse si la recíproca del corolario anterior es cierta para alguna familia $\mathcal{F}$, es decir, ¿existe una familia $\mathcal{F} \subseteq C$ tal que la $\mathcal{F}$-expansividad equivale a la C-expansividad?. Bowen y Walters respondieron esta pregunta en el caso de flujos sin puntos fijos.

Teorema 2.6 ([3]) *Sea (X, ϕ) un flujo sin puntos fijos. Se define:*

$$K = \{f \in C : f^{-1} \in C\}$$

Entonces (X, ϕ) es C-expansivo, si y solo si es K-expansivo.

En el año 1990, M. Oka probó que la hipótesis de los puntos fijos no es necesaria, es decir:

Teorema 2.7 ([16]) *Un flujo es C-expansivo, si y solo si es K-expansivo*

Se desconoce si este resultado es cierto en el caso multiparámetro, pues la demostración se sostiene fundamentalmente del siguiente hecho:

$$K = \{f \in C : f \text{ es monótona}\}$$

Lo cual deja de tener sentido para $d > 1$.

2.2. Puntos fijos

El conjunto de puntos fijos de un flujo juega un rol importante en algunas propiedades asociadas a la expansividad. Esta sección está dedicada a introducir las nociones básicas.

Definición 2.8 *Sea (X, ϕ) un multiflujo. Un punto $x \in X$ se dirá direccionalmente fijo en la recta generada por $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, si $\phi_u(x) = x$ para todo $u = tv$ con $t \in \mathbb{R}$. En otras palabras, se tiene que $x \in Fix_{v\mathbb{R}}(X, \phi)$. Por simplicidad denotaremos a este conjunto $Fix(\phi, v)$*

Ejemplo Consideremos el biflujo ϕ en $\mathbb{R}$ definido por $\phi_{s,t}(x) = xe^{s-t}$ para todo $s, t, x \in \mathbb{R}$. Entonces $Fix(\phi) = \{0\}$ y $Fix(\phi, (1, 1)) = \mathbb{R}$

A continuación se presentan algunas propiedades básicas de los puntos fijos.

Proposición 2.9 *El conjunto $Fix(\phi, v)$ es cerrado para todo $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$*

Demostración. Sea $(x_n) \subseteq Fix(\phi, v)$ convergente a $x \in X$, como ϕ_v es continua, entonces $\phi_v x_n \to \phi_v x$. Luego como $\phi_v x_n = x_n$, se concluye que $\phi_v x = x$ por unicidad del límite. □

Proposición 2.10 *Si S genera a $\mathbb{R}^d$, entonces:*

$$Fix(\phi) = \bigcap_{u \in S} Fix(\phi, u)$$

Demostración. La inclusión hacia la derecha es directa. Recíprocamente, sea $x \in X$ en la intersección y $u \in \mathbb{R}^d$. Como S genera $\mathbb{R}^d$, existen $s_1, ..., s_k \in S$ y $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$, tales que $u = \lambda_1 s_1 + ... + \lambda_k s_k$, luego como ϕ es una acción en $\mathbb{R}^d$ sobre X, se tiene que:

$$\phi_u(x) = \phi_{\lambda_1 s_1 + ... + \lambda_k s_k}(x) = \phi_{\lambda_1 s_1} \circ \phi_{\lambda_2 s_2} \circ \cdots \circ \phi_{\lambda_k s_k}(x)$$

Como $x \in Fix(\phi, v)$ para cada $v \in S$, se verifica que $\phi_{\lambda_i s_i}(x) = x$ para todo $i \in \{1, ..., k\}$, es decir, $\phi_u(x) = x$, concluyendo así que $x \in Fix(\phi)$. □

Corolario 2.11 *$Fix(\phi)$ es cerrado*

El siguiente resultado permite caracterizar cuando el conjunto de puntos direccionalmente fijos es abierto

Proposición 2.12 *$Fix(\phi, v)$ es abierto si y solo si existe $T > 0$ tal que para cada $\lambda \in (0, T]$, existe $\xi > 0$ tal que $d(\phi_{\lambda v}(x), x) > \xi$ para cada $x \notin Fix(\phi, v)$*

Demostración. Si $Fix(\phi, v)$ es abierto, suponemos por contradicción que para cada $T > 0$, existe un $u = \lambda v$ con $\lambda \in (0, T]$, tal que para cada $\xi > 0$, existe un $x \notin Fix(\phi, v)$ que verifica $d(\phi_u(x), x) \leq \xi$. Tomando una sucesión $T_n \to 0$, tenemos que existe $u_n = \lambda_n v \to 0$ no nula. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos una sucesión $\xi_m^n > 0$ tal que $\xi_m^n \to 0$ cuando $m \to \infty$, de forma que existe $(x_m^n)_{m,n\in\mathbb{N}} \subseteq X \setminus Fix(\phi, v)$ tal que $d(\phi_{u_n} x_m^n, x_m^n) < \xi_m^n$ para cada $m, n \in \mathbb{N}$. Como X es compacto, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos asumir que $x_m^n \to x_n \in X$ cuando $m \to \infty$ y nuevamente por compacidad, asumimos que $x_n \to x \in X$, además como $X \setminus Fix(\phi, v)$ es cerrado, se tendrá que $(x_n) \subseteq X \setminus Fix(\phi, v)$. Por otro lado, como ϕ es continua, tomando límite en m se obtiene que $\phi_{u_n}(x_n) = x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para concluir veamos que $x \in Fix(\phi, v)$, sea $w = \mu v \in \mathbb{R}^d$ con $\mu \in \mathbb{R}$ y $j \in [d]$, consideremos la sucesión $(k_n) \subseteq \mathbb{Z}$ definida por $k_n = \left[\dfrac{\mu}{\lambda_n}\right]$. Es fácil notar que $k_n\lambda_n \to \mu$, y por lo tanto, $\phi_{k_n u_n} x_n \to \phi_w x = x$.

Recíprocamente, si tomamos $(x_n) \subseteq X \setminus Fix(\phi, v)$ con $x_n \to x \in X$. Como $d(\phi_{Tv} x_n, x_n) > \xi$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por continuidad obtenemos que $d(\phi_{Tv} x, x) > \xi$, luego $\phi_{Tv} x \neq x$ y por lo tanto $x \notin Fix(\phi, v)$. En conclusión $X \setminus Fix(\phi, v)$ es cerrado. □

Definición 2.13 *Dado un multiflujo (X, ϕ). Diremos que $Z \subseteq X$ es estable en $F \subseteq S^{d-1}$, si existe un $T > 0$, tal que para cada $t \in (0, T]$, existe un $\xi > 0$ tal que $d(\phi_{tv}(x), x) > \xi$ para cada $v \in F$, $x \notin Z$.*

Luego, la propiedad anterior se traduce como

Corolario 2.14 *$Fix(\phi, v)$ es abierto si y solo si es estable en la dirección $\{v\}$*

El siguiente resultado muestra que el estudio de multiflujos expansivos se puede reducir al caso sin puntos fijos

Lema 2.15 *Si (X, ϕ) es un multiflujo C-expansivo, entonces cada punto fijo de ϕ, es un punto aislado en X.*

Demostración. Sea $x \in X$ un punto fijo de ϕ, esto es, $\phi_u(x) = x$ para cada $u \in \mathbb{R}^d$. Sea $\varepsilon > 0$ dado y sea δ la constante de expansividad correspondiente. Sea $y \in B_\delta(x)$ y $s \equiv 0$, entonces:

$$d(\phi_u x, \phi_{s(u)} y) = d(x, y) < \delta, \quad \forall u \in \mathbb{R}^d.$$

Por lo tanto, $y \in \phi_{B_\varepsilon}(x)$ para todo $\varepsilon > 0$, esto es, $y = x$ □

Luego si (X, ϕ) es un multiflujo C-expansivo, entonces se puede descomponer $X = F \cup X'$ donde F es el conjunto de puntos fijos de ϕ y $\phi|_{X'}$ no posee puntos fijos.

2.3. Expansividad débil

Komuro introdujo otra noción de expansividad en flujos [14], conocida como K^*-expansividad o expansividad débil, la extensión natural en el caso multivariable es la siguiente:

Definición 2.16 *Un multiflujo (X, ϕ) se dirá K^*-expansivo (o débilmente expansivo) si satisface lo siguiente; para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para cada $g \in K$, se tiene que:*

$$d(\phi_u x, \phi_{g(u)} y) < \delta, \forall u \in \mathbb{R}^d \implies \exists v \in \mathbb{R}^d, \phi_{g(v)}(y) \in \phi_{B_\varepsilon(v)}(x)$$

Es claro que:

$$K - \text{expansividad} \implies K^* - \text{expansividad}$$

Komuro verificó que el atractor geométrico de Lorentz, definido como un límite inverso de semiflujos 2-dimensionales, es un flujo K^*-expansivo que no es K-expansivo [14], por lo que estas nociones no son equivalentes en general. Sin embargo, Oka demostró el siguiente resultado:

Teorema 2.17 *[16] Un flujo sin puntos fijos es K-expansivo, si y solo si es K^*-expansivo.*

2.4. Separabilidad

En el año 1975, Gura descubrió que el flujo dado por el horociclo sobre una superficie compacta de curvatura negativa, tenía una propiedad similar a la expansividad (ver [9]), pues se cumplía que órbitas que permanecían suficientemente cercanas, eran indistiguibles, a esta propiedad, le puso el nombre de separabilidad, y es como sigue:

Definición 2.18 *Un sistema dinámico topológico (X, T, G) se dice separador si existe $\delta > 0$, tal que para todo $x, y \in X$, se tiene que:*

$$d(\phi_g(x), \phi_g(y)) < \delta, \forall g \in G \implies \exists h \in G, y = \phi_h(x)$$

La constante δ se llama constante de separabilidad.

Observación Es claro que todo sistema dinámico expansivo es separador

Se puede notar que la recíproca no es cierta, por ejemplo, considere el siguiente sistema.

Ejemplo [11] Considere el siguiente cerrado en la compactificación de $\mathbb{R}^2$ con un punto, sea:

$$X = \{\infty\} \cup \{(p, 0) : p \in \mathbb{Z}\} \cup \{(p, \pm 1/q) : p, q \in \mathbb{Z}, |p| \leq q\}$$

Se define la siguiente función $T : X \to X$,

$$T(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = \infty \\ (p+1, 0) & \text{si } x = (p, 0) \\ (p+1, \pm 1/q) & \text{si } x = (p, \pm 1/q), p < q \\ (-q, \mp 1/q) & \text{si } x = (q, \pm 1/q) \\ (-q+1, \pm 1/q) & \text{si } x = (-q, \pm 1/q) \end{cases}$$

Se puede notar que para $\delta < 1$, los únicos $x, y \in X$ que satisfacen $d(T^n(x), T^n(y)) < \delta, \forall n \in \mathbb{Z}$ son aquellos puntos de la forma $x = (0, 1/q)$ y $y = (0, -1/q)$ para $q > 2/\delta$, pues en tal caso, ocurre que:

$$d(T^n(x), T^n(y)) = \left| \frac{1}{q} + \frac{1}{q} \right| = \frac{2}{q} < \delta, \forall n \in \mathbb{Z}$$

Luego como $T^{2q+1}(x) = y$, se concluye que X es separador, pero no expansivo, pues $x \neq y$.

Se tiene la siguiente jerarquía entre la expansividad y la separabilidad en el caso conexo.

Proposición 2.19 *Todo multiflujo K^*-expansivo es separador*

Demostración. Basta elegir cualquier $\varepsilon > 0$ y $g = id_{\mathbb{R}^d}$ en la definición de K^*-expansividad $\square$

Definición 2.20 *Diremos que $x \in Fix(\phi)$ es un punto aislado dinámicamente si existe $\delta > 0$ tal que:*

$$orb(y) \subseteq B(x, \delta) \implies y = x$$

Proposición 2.21 *Si ϕ es separador, entonces $Fix(\phi)$ es un conjunto finito de puntos aislados dinámicamente.*

Demostración. Sea $x \in Fix(\phi)$ y $y \in X$ tal que $orb(y) \subseteq B(x, \delta)$, esto es:

$$d(x, \phi_u y) < \delta, \forall u \in \mathbb{R}^d$$

Luego como ϕ es separador, se concluye que $y \in orb(x) = \{x\}$. La finitud es consecuencia de la compacidad de X. $\square$

Es posible adaptar la noción de separabilidad a un contexto continuo tal y como lo hicieron Bowen y Walters para flujos, considerando una reparametrización temporal. A continuación se muestra la extensión natural del concepto introducido por Artigue en el caso de flujos [1].

Definición 2.22 *Un multiflujo (X, ϕ) se dice C-separador si existe $\delta > 0$, tal que para cada $x, y \in X$ y $g \in C$, se tiene que:*

$$d(\phi_u(x), \phi_{g(u)}(y)) < \delta, \forall u \in \mathbb{R}^d \implies y \in orb(x)$$

2.5. Expansividad de Katok-Hasselblatt

La siguiente definición fue introducida por Katok y Hasselblatt para flujos [12], si bien esta noción considera reparametrizaciones temporales, estas se hacen de una forma particular,

Definición 2.23 *Un multiflujo (X, ϕ) se dirá KH-expansivo si existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in X$ y $g \in C$ tal que:*

$$d(\phi_u x, \phi_{g(u)} x) < \delta, \forall u \in \mathbb{R}^d$$

se satisface la implicancia:

$$d(\phi_u x, \phi_{g(u)} y) < \delta, \forall u \in \mathbb{R}^d \implies y \in orb(x)$$

Proposición 2.24 *Si ϕ es KH-expansivo, entonces $Fix(\phi)$ es abierto*

Demostración. Supongamos por contradicción que $Fix(\phi)^c$ no es cerrado. Sea $(x_n) \subseteq Fix(\phi)^c$ con $x_n \to x \in Fix(\phi)$. Sea $x_n \in B(x, \delta)$ con $x_n \neq x$ y $g \equiv 0$, notemos que:

$$d(\phi_u x, \phi_{s(u)} x) = d(x, x) = 0, \forall u \in \mathbb{R}^d$$

Mientras que

$$d(\phi_t x, \phi_{g(u)} x_n) = d(x, x_n) < \delta, \forall u \in \mathbb{R}^d$$

Lo que contradice la KH-expansividad, pues $x_n \notin orb(x) = \{x\}$ □

La expansividad de Katok-Hasselblatt es una propiedad intermedia a la C-expansividad y la separabilidad, es decir

Proposición 2.25 *Todo multiflujo C-expansivo es KH-expansivo.*

Proposición 2.26 *Todo multiflujo KH-expansivo es separador.*

Para flujos se sabe que la reciproca es cierta si asumimos que $Fix(\phi)$ es abierto [1], en el caso multi-parámetro tenemos lo siguiente

Proposición 2.27 *Sea (X, ϕ) un multiflujo separador. Si el conjunto de puntos fijos es estable en cada dirección de S^1, entonces (X, ϕ) es KH-expansivo.*

Demostración. Sea α la constante de separabilidad. Como (X, ϕ) es separador, el conjunto $Fix(\phi)$ es finito y existe $\beta > 0$ tal que $B(x, \beta) = \{x\}$ para cada $x \in Fix(\phi)$. Por la estabilidad en d, existe $\xi > 0$ para $\lambda = T$. Sea $\delta = \min\{\alpha/2, \xi, r\}$. Sean $x, y \in X$ y $g \in C$ tales que:

$$d(\phi_u x, \phi_{g(u)} x) < \delta, \forall u \in \mathbb{R}^d \tag{2.28}$$

y

$$d(\phi_u x, \phi_{g(u)} y) < \delta, \forall u \in \mathbb{R}^d \tag{2.29}$$

Por desigualdad triangular se tiene que:

$$d(\phi_{g(u)} x, \phi_{g(u)} y) < 2\delta \leq \alpha, \forall u \in \mathbb{R}^d \tag{2.30}$$

Si $x \in Fix(\phi)$, tomando $u = 0$ en (2.29) se obtiene que $y = x$, pues $\delta \leq r$. Si $x \notin Fix(\phi)$, podemos ver que $\|g(u) - u\| < T$ para cada $u \in \mathbb{R}^d$. Si este no fuera el caso, como $g \in C$, por TVI existiría un $u \in \mathbb{R}^d$ tal que $\|g(u) - u\| = T$. Luego, $g(u) = u + D$ con $\|D\| = T$, y por el lema se obtendría que $d(\phi_{g(u)}x, \phi_u x) > \xi \geq \delta$, pues $\phi_u x \notin Fix(\phi)$. Lo anterior contradice a la primera ecuación, por lo tanto, $\|g(u) - u\| < T$ para todo $u \in \mathbb{R}^d$, en consecuencia, g es sobreyectiva. Luego como ϕ es α - separador, de la ecuación (2.30) se obtiene que $y \in orb(x)$, y con ello se concluye que ϕ es KH-expansivo.

□

Capítulo 3

Expansividad y Separabilidad

Ahora que ya hay una noción más clara de lo que significa la expansividad en multiflujos, nos interesa extender la noción de direcciones de no expansividad para este tipo de sistemas, para esto definiremos lo que es un conjunto expansivo en un sentido más general al propuesto por Boyle y Lind.

3.1. Conjuntos expansivos

Definición 3.1 *Sea (X, T, G) un sistema dinámico topológico con $G \leq \mathbb{R}^d$. Sean $S \subseteq \mathbb{R}^d$, $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{F} \subseteq C$. Diremos que S es $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-expansivo si existen $r > 0$ y $\delta > 0$, tales que para cada $x, y \in X$ y $f \in \mathcal{F}$, se tiene que:*

$$d(T_g(x), T_{f(g)}(y)) < \delta, \forall g \in S^r \cap G \implies y \in \phi_{B_\varepsilon}(x)$$

r se llama el radio de expansividad de S y δ la constante de expansividad.

Definición 3.2 *Diremos que S es $\mathcal{F}$-expansivo, si es $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-expansivo para todo $\varepsilon > 0$*

Observación La $\mathcal{F}$-expansividad de (X, T, G) equivale a la $\mathcal{F}$-expansividad de $\mathbb{R}^d$.

Además, la siguiente propiedad nos dice que la definición anterior también generaliza la expansividad clásica de homeomorfismos.

Proposición 3.3 *Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ tal que $S^r = \mathbb{R}$ para algún $r > 0$. Entonces el homeomorfismo $T : X \to X$ es expansivo si y solo si el conjunto S es $\{id\}$-expansivo en el sistema (X, T).*

Demostración. Como $0 \in B_\varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$, la implicancia hacia la derecha es trivial. Por otro lado, si S es $\{id\}$-expansivo, basta elegir un $\varepsilon < 1$, de esta forma se tendrá que $y \in T_{B_\varepsilon}(x) \iff x = y$. □

En consecuencia, un homeomorfismo es expansivo, si y solo si existe un conjunto sindético $\{id\}$-expansivo.

La propiedad anterior sigue siendo cierta para acciones de $G \leq \mathbb{Z}^d$ con $d > 1$, esto se debe a que el 0 es aislado en estos espacios, más precisamente:

Proposición 3.4 *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $S^r = \mathbb{R}^d$ para algún $r > 0$. Entonces el $\mathbb{Z}^d$-sistema (X, T) es expansivo si y solo si el conjunto S es $\{id\}$-expansivo en el sistema (X, T).*

A continuación se enuncian algunas propiedades básicas de esta definición.

Proposición 3.5 *Dado (X, T) G-sistema dinámico y $\mathcal{F} \subseteq C$, se tiene que:*

1. *Si S_1 es $\mathcal{F}$-expansivo y $S_1 \subseteq S_2$, entonces S_2 es $\mathcal{F}$-expansivo.*
2. *Si existe conjunto $\mathcal{F}$-expansivo y $B \subseteq \mathbb{R}$ es acotado, entonces B es $\mathcal{F}$-expansivo.*

Demostración. 1. Basta notar que si $d(T_g(x), T_{f(g)}(y)) < \delta$ para cada $g \in S_2^r \cap G$, entonces $d(T_g(x), T_{f(g)}(y)) < \delta$ para cada $g \in S_1^r \cap G$

2. Sea r_S el radio de expansividad de S. Si B es acotado, existe un r suficientemente grande tal que $B^r \cap G \supseteq S^{r_S} \cap G$

□

También existen propiedades básicas asociadas a modificar el conjunto de reparametrizaciones $\mathcal{F}$.

Proposición 3.6 *Sea X un G-espacio dinámico.*

1. *Si S es $\mathcal{F}$-expansivo y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, entonces S es $\mathcal{G}$-expansivo.*
2. *Si S es $\mathcal{F}_i$-expansivo para cada $i \in \{1, ..., k\}$, entonces S es $\bigcup_{i=1}^k \mathcal{F}_i$-expansivo.*
3. *Si S es $\mathcal{F}|_H$-expansivo con H subgrupo de G, entonces S es $\mathcal{F}$-expansivo.*
4. *La tercera es trivial*

Demostración. 1. Si r_1 es un radio de $\mathcal{F}$-expansividad, basta tomar cualquier $r < r_1$, de esta forma todo $f \in \mathcal{G}$ estará en $\mathcal{F}$.

2. Sean $r_1, r_2, ..., r_k$ los radios de $\mathcal{F}_i$-expansividad de S, basta tomar un $r < \min\{r_1, ..., r_k\}$, de esta forma si $f \in \bigcup_{i=1}^k \mathcal{F}_i$, entonces $f \in \mathcal{F}_i$ para algún $i \in \{1, ..., k\}$

□

El siguiente resultado revela algo interesante sobre esta generalización, y es que bajo ciertas hipótesis simples, podemos asegurar que un conjunto es $\mathcal{F}$-expansivo con $\mathcal{F}$ un singleton.

Lema 3.7 *Sea (X, T) un G-sistema dinámico. Sea $H \subseteq G$ un conjunto tal que $0 \in H$, y $f \in C_0(G)$ tal que para cada $\delta > 0$, existen $x, y \in X$ que verifican:*

$$d(T_g(x), T_{f(g)}(y)) < \delta, \forall g \in H$$

Entonces para todo $g \in G$, el homeomorfismo $T_{f(g)-g}$ posee un punto fijo.

Demostración. Para cada $k \in \mathbb{N}$, existen $x_k, y_k \in X$ tales que:

$$d(T_g(x_k), T_{f(g)}(y_k)) < \frac{1}{k}, \forall g \in H$$

Por compacidad, podemos suponer sin perdida de generalidad que $x_k \to x$ y $y_k \to y$. Además, notamos que al tomar $g = 0$, se obtiene que $d(x_k, y_k) < \frac{1}{k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, y con ello se concluye $x = y$.

Fijemos un $g \in H$ y tomemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como T es una acción continua, existe un $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tal que:

$$d(T_g(x_k), T_g(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$$
$$d(T_{f(g)}(y_k), T_{f(g)}(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$$
$$\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Luego, por desigualdad triangular:

$$d(T_g(x), T_{f(g)}(x)) \leq d(T_g(x), T_g(x_k)) + d(T_g(x_k), T_{f(g)}(y_k)) + d(T_{f(g)}(y_k), T_{f(g)}(x)) < \varepsilon$$

Como ε era arbitrario, se concluye que $d(T_g(x), T_{f(g)}(x)) = 0$, y por tanto $T_{f(g)}(x) = T_g(x)$, o equivalentemente, $T_{f(g)-g}(x) = x$.

□

Teorema 3.8 *Sea (X, T) un G-sistema dinámico libre. Si S es un conjunto que contiene al 0, y $f \in C_0(G)$ es tal que $f|_S \neq id_S$, entonces S es $\{f\}$-expansivo.*

Demostración. Supongamos por contradicción que S no es $\{f\}$-expansivo, luego para cada $r > 0$, existe un $\varepsilon > 0$, tal que para todo $\delta > 0$, existen $x, y \in X$ que verifican:

$$d(T_g(x), T_{f(g)}(y)) < \delta, \forall g \in S^r \cap G \wedge y \notin \phi_{B_\varepsilon}(x)$$

Eligiendo cualquier $r > 0$, podemos aplicar el lema anterior para obtener un $z \in X$ que cumple $T_{f(g)-g}(z) = z$ para cada $g \in S$, luego como T es libre, esto implica que $f(g) = g$, lo que es una contradicción con la hipótesis de f. □

El siguiente resultado es una consecuencia directa del Teorema:

Corolario 3.9 *Todo G-sistema dinámico libre es $\{f\}$-expansivo para $f \neq id_G$*

Demostración. Basta tomar $S = \mathbb{R}^d$ en el Teorema anterior. □

A continuación se extiende la noción de no-expansividad.

Definición 3.10 *Diremos que una dirección $L \leq G$ (donde L es 1-dimensional) es de no-expansividad, si el subespacio que define a dicha dirección, es un conjunto no C-expansivo.*

Una caracterización relevante de las direcciones de expansividad es la siguiente:

Teorema 3.11 *Una dirección es $\mathcal{F}$-expansiva si y solo si los semiespacios que la delimitan son $\mathcal{F}$-expansivos.*

DEMOSTRACIÓN. Seguir el mismo procedimiento del caso $G = \mathbb{Z}^d$ $\square$

3.2. Conjuntos separadores

Como se vio previamente, la noción clásica de separabilidad consiste en una propiedad de expansividad más débil, siguiendo esta misma idea, podemos extender esta propiedad a conjuntos.

Definición 3.12 *Sea (X, T, G) un sistema dinámico topologico (con $G \leq \mathbb{R}^d$), $S \subseteq \mathbb{R}^d$ y $\mathcal{F} \subseteq C$. Diremos que S es $\mathcal{F}$-separador si existe un $r > 0$ y un $\delta > 0$, tal que para cada $x, y \in X$ y $f \in \mathcal{F}$, se tiene que:*

$$d(T_g(x), T_{f(g)}(y)) < \delta, \forall g \in S^r \cap G \implies y \in Orb(x)$$

r se denomina el radio de separabilidad y δ la constante de expansividad.

La $\mathcal{F}$-separabilidad se puede interpretar como la $(\mathcal{F}, \infty)$-expansividad (pensando que una bola de radio infinito es todo el espacio), así que es clara la siguiente jerarquía.

Observación $\mathcal{F}$-expansividad $\implies$ $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-expansividad $\implies$ $\mathcal{F}$-separabilidad

Ejemplo Considere el biflujo $\phi_{s,t}(x) = xe^{s-t}$. Es fácil ver que toda dirección es separadora, pues la exponencial es arbitrariamente grande tomando valores en una recta.

Podemos hacer un análogo con las observaciones del caso expansivo:

Observación Un sistema dinámico topológico es separador si y solo si G es $\{id\}$-separador.

Proposición 3.13 *Sea (X, T, G) un sistema dinámico topológico, $\mathcal{F} \subseteq C$, y $S_1 \subseteq S_2 \subseteq G$. Entonces si S_1 es $\mathcal{F}$-separador, S_2 también es $\mathcal{F}$-separador*

Al igual que en el caso expansivo, la propiedad anterior nos dice que si un sismema dinámico es no-separador, todos sus subespacios también serán no-separadores. Por ello, en general se asume que el espacio es separador para estudiar propiedades asociadadas a subespacios no-separadores.

También se puede caracterizar la no-separabilidad de un subespacio a través de la no-separabilidad de sus semiespacios asociados

Proposición 3.14 *Sea $\mathcal{F} \subseteq C$ compacto. Entonces L es una dirección de $\mathcal{F}$-separabilidad, si y solo si, los semiespacios que delimitan a L son $\mathcal{F}$-separadores.*

DEMOSTRACIÓN. Análogo al caso expansivo $\square$

3.3. Teorema de no-separabilidad

En 1952, S. Schwartzman demostró en [17] el siguiente resultado:

Teorema 3.15 (Schwartzman) *Si $T : X \to X$ es un homeomorfismo de un espacio métrico compacto infinito (X, d), entonces para cada $\varepsilon > 0$, existen $x, y \in X$ con $x \neq y$ tales que para cada $n \geq 0$, se tiene que $d(T^n(x), T^n(y)) \leq \varepsilon$*

Posteriormente, en el año 1990, King fortaleció este resultado al demostrar que los puntos x, y se pueden tomar en órbitas distintas, es decir

Teorema 3.16 (King) *Si $T : X \to X$ es un homeomorfismo de un espacio métrico compacto infinito (X, d), entonces para cada $\varepsilon > 0$, existen $x, y \in X$ con $x \notin Orb(y)$, tales que para cada $n \geq 0$, se tiene que $d(T^n(x), T^n(y)) \leq \varepsilon$*

Al considerar T^{-1} se tiene que ambos resultados también son válidos para tiempos negativos. Otra forma de enunciar los resultados usando las nociones de este capítulo, son las siguientes

Teorema 3.17 (Schwartzman) *Si $(X, T, \mathbb{Z})$ es un sistema dinámico, entonces los semiespacios $\mathbb{R}_+$ y $\mathbb{R}_-$ son no expansivos*

Teorema 3.18 (King) *Si $(X, T, \mathbb{Z})$ es un sistema dinámico, entonces los semiespacios $\mathbb{R}_+$ y $\mathbb{R}_-$ son no separadores*

Finalmente, en el año 1997, Boyle y Lind probaron en [4] que en todo sistema dinámico infinito $(X, T, \mathbb{Z}^d)$, siempre existen direcciones de no-expansividad, en particular, siempre hay un semiespacio no expansivo como se evidencia en el Teorema de Schwartzman para $d = 1$.

Sin embargo, no se dijo nada sobre las direcciones de no separabilidad, en esta sección, se muestran avances para esta pregunta.

El siguiente lema será de utilidad para probar el Teorema de no-separabilidad.

Lema 3.19 *Sea $(X, T, \mathbb{Z}^d)$ un sistema dinámico topológico y $a \in X$ un punto fijo. Supongamos que existen $(z_n) \subseteq X$ con $z_n \to a$, y $(k_n) \subseteq int(H)$ con H semiespacio de $\mathbb{R}^d$, tales que:*

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} d(T_{k_n}(z_n), a) > 0$$

Entonces, existe un semiespacio $H' \neq H$ tal que para cada $\delta > 0$, existe un $x \neq y$ que verifica:

$$d(T_n(x), T_n(y)) \leq \delta, \forall n \in H' \cap \mathbb{Z}^d$$

Demostración. Sea $\delta > 0$ tal que:

$$\delta < \inf_{n \in \mathbb{N}} d(T_{k_n}(z_n), a)$$

Como $z_n \to a$, podemos asumir que $d(z_n, a) < \delta$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Moviendo los k_n más cerca del cero (si es necesario), podemos asumir que:

$$d(T_l(z_n), a) \leq \delta, \forall l \in B_{|k_n|} \cap H \cap \mathbb{Z}^d$$

Sin perder generalidad, por compacidad existe $y := \lim T_{k_n}(z_n)$. Como $d(T_{k_n}(z_n), a) \geq \delta$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por continuidad de la métrica se obtiene que $d(y, a) \geq \delta$. Por otro lado, podemos verificar que (k_n) es no acotada, pues si suponemos por contradicción que existe $M > 0$ tal que $(k_n) \subseteq B_M$, por la finitud del conjunto $B_M \cap \mathbb{Z}^d$ se puede extraer una subsucesión $(k_{n(i)})$ constante, digamos $k_{n(i)} = k$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto:

$$d(y, a) = d(\lim T_{k_n}(z_n), a) = d(T_k(a), a) = 0$$

Pues a es punto fijo. Esto es una contradicción, pues $d(y, a) \geq \delta$. Luego, se tiene que (k_n) es no acotada, y por compacidad de S^{d-1}, podemos suponer que $\frac{k_n}{\|k_n\|_2} \to v$. Sea H' el semiespacio opuesto a esa dirección, dado por los u tales que $< u, v > \leq 0$. Como $\|k_n\| \to \infty$, para cada $m \in H'$, existe un n suficientemente grande tal que $m + k_n \in B_{|k_n|} \cap H \cap \mathbb{Z}^d$, en consecuencia:

$$d(T_m(y), T_m(a)) = d(T_m(y), a) = \lim d(T_{k_n+m}(z_n), a) \leq \delta$$

□

Teorema 3.20 *Sea (X, T) un $\mathbb{Z}^2$-sistema dinámico infinito tal que todo $x \in X$ es biperiódico. Entonces existe una dirección de no separabilidad.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, sea $(z_n) \to a \in X$ donde cada z_n vive en órbitas distintas de X y además $a \notin orb(z_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sean $p, q \in \mathbb{Z}$ los periodos mínimos de $a \in X$ para los homeomorfismos T_1 y T_2. Como $X \times [0, p-1] \times [0, q-1]$ es compacto, existe $\delta > 0$ tal que para cada $y \in X$ y $m \in [0, p-1] \times [0, q-1]$, se tiene que:

$$d(y, a) \leq \delta \implies d(T_m y, T_m a) \leq \varepsilon$$

Sea S la $\mathbb{Z}^2$-acción en X definida por $S_m = T_1^{pm_1} T_2^{qm_2}$. Sea H un semiplano de $\mathbb{Z}^2$, si existiese un $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$d(S_m z_n, S_m a) \leq \delta, \forall m \in H$$

Se tiene que el resultado es el deseado. Supongamos entonces que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un $k_n \in H$ tal que:

$$d(S_{k_n} z_n, S_{k_n} a) \leq \delta$$

Como a es un punto fijo de S y $z_n \to a$, entonces se tiene que existe un semiplano H' y un $y \neq a$ tal que:

$$d(S_m y, S_m a) \leq \delta, \forall m \in H$$

Es decir,

$$d(T_{(m_1 p, m_2 q)} y, S_m a) \leq \delta, \forall m \in H$$

Luego, se concluye que:

$$d(T_{(m_1 p, m_2 q)+n} y, T_{(m_1 p, m_2 q)+n} a) \leq \delta, \forall m \in H, \forall n \in [0, p-1] \times [0, q-1]$$

Haciendo que $\delta < d(T_m a, T_n a)$ para cada m, n. Se concluye lo pedido. □

A continuación se muestra que las direcciones de no-separabilidad coinciden con las de no-expansividad en sistemas minimales, lo que generaliza el Teorema de King en el caso minimal.

Teorema 3.21 *Sea $(X, T, \mathbb{Z}^d)$ un sistema dinámico topológico minimal, entonces los semiespacios expansivos y separadores coinciden.*

Demostración. Es claro que todo semiespacio expansivo es separador. Supongamos por contradicción que existe un semiespacio $H \subseteq \mathbb{R}^d$ que sea separador y no-expansivo. Por la separabilidad, existe un $\varepsilon > 0$ tal que para cada $x, y \in X$, se tiene que:

$$d(T_n(x), T_n(y)) \leq \varepsilon, \forall n \in H \cap \mathbb{Z}^d \implies o(x) = o(y)$$

Por la no-expansividad, existen $z \neq y \in X$ tales que $d(T_n(z), T_n(y)) \leq \varepsilon, \forall n \in H \cap \mathbb{Z}^d$. Por lo tanto, se tiene que $o(z) = o(y)$, es decir, $z = T_\ell(y)$ para algún $\ell \in \mathbb{Z}^d$. Sea $x \in X$ arbitrario, por minimalidad de T, existe $(N_i) \subseteq H$ con $N_i \to \infty$ tal que $T_{N_i}(y) \to x$. Por continuidad de T_l, se obtiene que $T_{N_i}(z) \to T_l(x)$, luego por la hipótesis de no expansividad, tenemos que:

$$d(T_{N_i}(z), T_{N_i}(y)) \leq \varepsilon, \forall i \in \mathbb{N}$$

Tomando límite en i y usando la continuidad de la métrica, se tiene que:

$$d(T_\ell(x), x) \leq \varepsilon$$

Como $x \in X$ es arbitrario, podemos decir que $\|T_\ell\| \leq \varepsilon$. Tomando una sucesión $(\varepsilon_n) \to 0$, se obtiene una familia de operadores $(T_{\ell(n)})$ que conmutan entre si, tales que $T_{\ell(n)} \neq I$ y $\|T_{\ell(n)}\| \to 0$. Por el lema de no numerabilidad, se tiene que el conjunto $B_\varepsilon = \{T_i : i \in \mathbb{Z}^d, \|T_i\| \leq \varepsilon\}$ es no numerable. Sea $x \in X$ fijo y $S \in B_\varepsilon$, notar que:

$$d(T_n(x), T_n(Sx)) = d(T_n(x), S(T_n(x))) \leq \|S\| \leq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{Z}^d$$

Como B_ε es no numerable, existen $S_1 \neq S_2 \in B_\varepsilon$ tales que $S_1(x) = S_1(x)$, y por tanto, $S_1(T_n(x)) = S_1(T_n(x))$ para todo $n \in \mathbb{N}$, como la órbita de x es densa, se obtiene que $S_1 = S_2$ lo que es una contradicción. □

Corolario 3.22 *En los sistemas minimales las direcciones de no-separabilidad coinciden con las de no-expansividad.*

Demostración. Si L es una dirección separadora, entonces los semiespacios que delimitan a L son separadores, y por el Teorema anterior, expansivos. En conclusión, L es una dirección expansiva. □

El corolario anterior generaliza al Teorema de Boyle-Lind en el caso minimal, pues nos permite asegurar que los puntos encontrados por las direcciones de no-expansividad, pueden tomarse en órbitas distintas.

Capítulo 4

Suspensiones

La suspensión de un sistema dinámico discreto, intenta representar una versión conexa del sistema, manteniendo ciertas propiedades. Esta noción fue introducida inicialmente para sistemas dinámicos en $\mathbb{Z}$, la primera sección pretende introducir las definiciones básicas asociadas a esta noción.

4.1. La definición clásica

Dado un sistema dinámico topológico $(X, T, \mathbb{Z})$, se define el conjunto $\tilde{X} = X \times [0,1]/\sim$, donde la relación $\sim$ se define por:

$$(x, 1) \sim (Tx, 0), \quad \forall x \in X$$

Se define el flujo $\phi : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $\tilde{X}$ por:

$$\phi_t(x, s) = (T^{[t+s]}(x), t + s - [t + s]), \quad \forall x \in X, t \in \mathbb{R}, s \in [0, 1)$$

Es decir, para $t \geq 0$, se tiene:

$$\phi_t(x, 0) = \begin{cases} (x, t) & \text{si } t < 1 \\ (Tx, t-1) & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ (T^2x, t-2) & \text{si } 2 \leq t < 3 \\ \quad \vdots & \end{cases}$$

El sistema dinámico $(\tilde{X}, \phi, \mathbb{R})$ se denomina suspensión de (X, T), y consiste en una versión conexa del sistema discreto. Esto se debe a que la acción de ϕ y la correspondencia $\sim$, permiten visualizar al flujo como un movimiento continuo entre x y Tx para cada x, además el nombre de suspensión viene del hecho de que este movimiento se puede visualizar como el ascenso sobre un segmento vertical ubicado sobre cada punto de X.

A continuación se presenta una figura que muestra la idea del párrafo anterior.

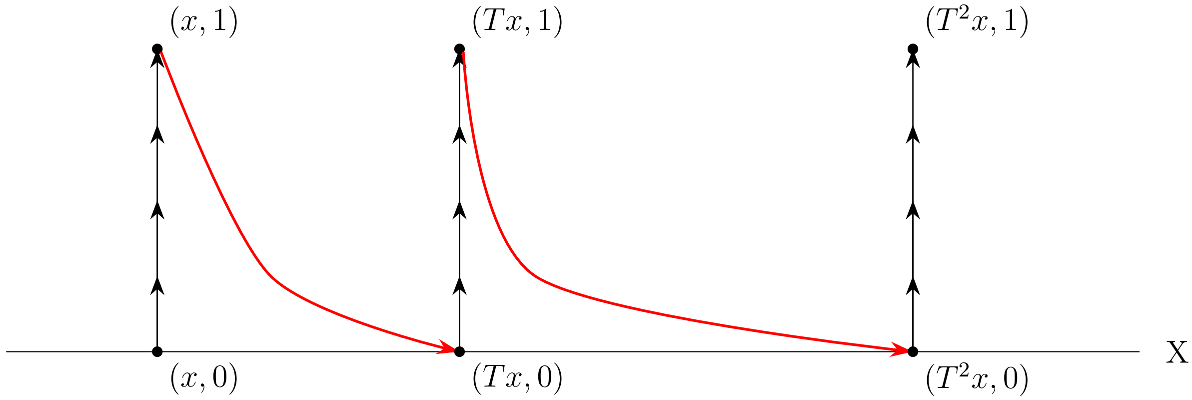


Figura 4.1: Suspensión de un sistema dinámico $(X, T, \mathbb{Z})$

Bowen y Walters definieron una métrica en $\tilde{X}$ que se ajusta a la dinámica de ϕ y permite tener el siguiente resultado:

Teorema 4.1 (X, T) *es expansivo si y solo si* $(\tilde{X}, \phi)$ *es C-expansivo*

Para definir esta distancia, introducimos el concepto de cadena. Dados $u, v \in \tilde{X}$, decimos que un conjunto finito $y_0 = u, y_1, y_2, ..., y_n = v$ es una cadena entre u y v, si cada par consecutivo y_i, y_{i+1} vive en la misma órbita (en este caso decimos que $[y_i, y_{i+1}]$ es un segmento vértical), o bien, ambos puntos poseen la misma proyección en la coordenada de $[0, 1)$ (aquí decimos que es un segmento horizontal).

El largo de un segmento vertical corresponde a la menor distancia entre ambos extremos a lo largo de la órbita, sin tener en cuenta la dirección en la que se recorre el flujo.

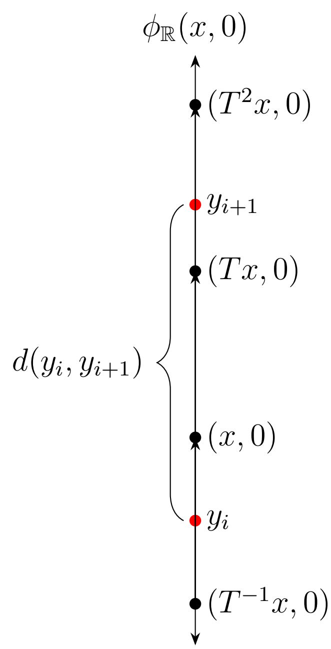


Figura 4.2: Largo de un segmento vertical $[y_i, y_{i+1}]$

El largo de un segmento horizontal a altura t viene dado por la métrica ρ_t en $X \times \{t\}$ definida por:

$$\rho_t((x,t),(y,t)) = (1-t)\rho(x,y) + t\rho(Tx,Ty)$$

Cabe destacar que $\rho_0((x,0),(y,0)) = \rho(x,y)$ y $\rho_1((x,1),(y,1)) = \rho(Tx,Ty)$, lo que es consistente con la identificación $\sim$.

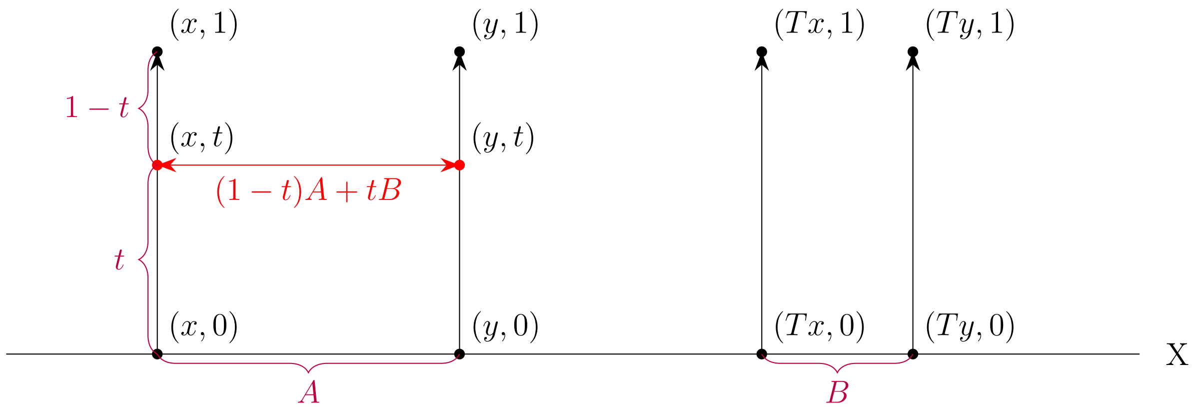


Figura 4.3: Largo de un segmento horizontal $[(x,t),(y,t)]$

Luego, se define el largo de una cadena como la suma de los largos de los segmentos que la conforman, y con ello, se define la métrica $d(u,v)$ como el ínfimo largo de todas las cadenas entre u y v.

4.2. Suspensiones multiparámetro

El objetivo de esta sección, es extender la noción de suspensión a multiflujos, manteniendo el resultado que permite transferir la expansividad.

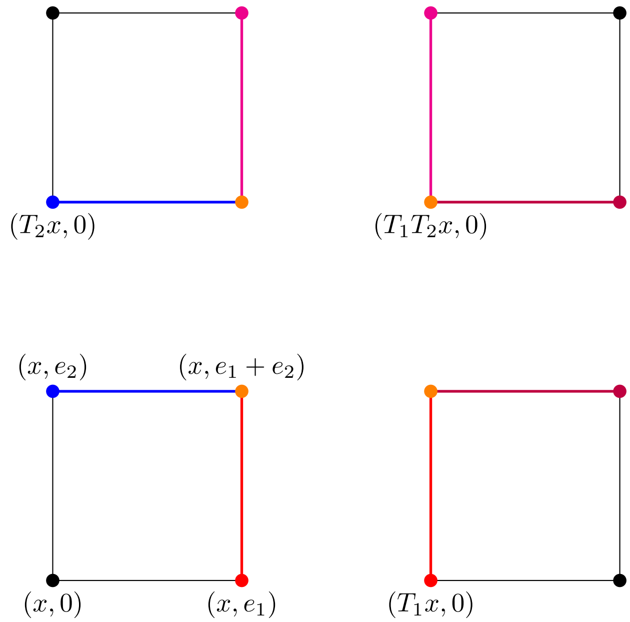
Sea $(X, T, \mathbb{Z}^d)$ un sistema dinámico topológico donde se denota $T_i = T_{e_i}$ para cada $i \in \{1, ..., d\}$. Se define el conjunto $\widetilde{X} = X \times [0,1]^d / \sim$, donde $\sim$ es la identificación definida por:

$$(x,u) \sim (\phi_{[u]}(x), u - [u]), \quad \forall u \in [0,1]^d, \|u\|_\infty = 1$$

$[u] := \sum_{i=1}^{d} [u \cdot e_i] e_i$ denota la función parte entera en $\mathbb{R}^d$.

La suspensión de un $\mathbb{Z}^d$-sistema se podría visualizar como dibujar un hipercubo unitario a partir de cada punto de X, donde el punto se encuentra en el vértice correspondiente al 0, y de esta forma, la correspondencia $\sim$, pega las caras de los hipercubos correspondientes a puntos de la misma órbita.

Por ejemplo, para un $\mathbb{Z}^2$-sistema dinámico, la órbita de un punto en $\widetilde{X}$ se ve como una cuadrícula donde se pegan los lados de los cuadrados del mismo color como aparece en la imagen:



Se define la suspensión de (X, T) como el multiflujo $(\tilde{X}, \phi, \mathbb{R}^d)$, donde ϕ está definido por:

$$\phi_u(x, v) = (T_{[u+v]}(x), u + v - [u + v]), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d$$

El objetivo a continuación es definir una métrica en $\widetilde{X}$ que sea consistente con $\sim$, extienda a la métrica del caso $d = 1$, y permita extender el teorema de expansividad.

Recordar que para cada $n \in \mathbb{Z}^d$, se tiene la métrica en X definida por:

$$\rho_n(x, y) = \rho(T_n(x), T_n(y))$$

Esto pues, cada T_n es un homeomorfismo de X. Supondremos de aquí en adelante que $diam(X) < 1$ para la métrica ρ, y con ello, para cualquier métrica ρ_n.

Para $t \in [0, 1]^d$ fijo, se define la métrica d_t en $X \times \{t\} \subset \widetilde{X}$ como sigue; dados $\tilde{x} = (x, t)$ y $\tilde{y} = (y, t)$, se tiene que:

$$d_t(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{n \in \{0,1\}^d} \left(\prod_{i=1}^{d} n_i t_i + (1 - n_i)(1 - t_i) \right) \rho_n(x, y)$$

Observación d_t consiste en una combinación convexa de las métricas ρ_n para cada vértice n del hipercubo unitario, ya que:

$$\sum_{n \in \{0,1\}^d} \left(\prod_{i=1}^{d} n_i t_i + (1 - n_i)(1 - t_i) \right) = 1, \forall d \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1]^d$$

Pues el lado izquierdo se puede interpretar como una suma de volúmenes de hipercubos que particionan a $[0, 1]^d$.

En el caso $d = 2$, la combinación convexa se visualiza como sigue:

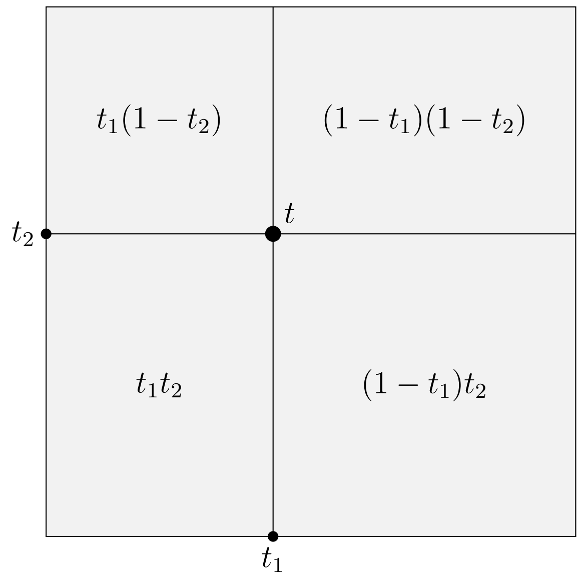


Figura 4.4: Combinación convexa de ρ_t para $d=2$

Observación En el caso $d=1$, la métrica d_t coincide con la de Bowen y Walters.

Observación Para $n \in \{0,1\}^d$ y $x, y \in X$, se tiene que $d_n((x,n),(y,n)) = \rho_n(x,y)$

Observación Si ρ' es la métrica en X definida por:

$$\rho'(x,y) = \min_{n\in\{0,1\}^d} \rho_n(x,y)$$

Se sigue de la definición que:

$$d_t(\tilde{x},\tilde{y}) \geq \rho'(x,y), \quad \forall t \in [0,1]^d$$

A continuación se introducen las definiciones que serán de importancia para definir la métrica de la suspensión.

Diremos que el par $(\tilde{x},\tilde{y}) = ((x,t),(y,s)) \in \tilde{X}^2$ es paralelo, si $t=s$, a esto lo denotaremos $(\tilde{x},\tilde{y}) \in P$. Por otro lado, diremos que el par $(\tilde{x},\tilde{y}) \in \tilde{X}^2$ es orbitable, si $\tilde{y} \in orb_\phi(\tilde{x})$, a esto lo denotaremos $(\tilde{x},\tilde{y}) \in O$.

Para un par $(\tilde{x},\tilde{y}) = ((x,t),(y,s)) \in P \cup O$, se define su largo como:

$$L(\tilde{x},\tilde{y}) = \begin{cases} d_t(\tilde{x},\tilde{y}) & \text{si } (\tilde{x},\tilde{y}) \in P \\ \|t-s\| & \text{si } (\tilde{x},\tilde{y}) \in O \setminus P \end{cases}$$

Dados $\tilde{x},\tilde{y} \in \tilde{X}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define el conjunto de cadenas finitas de largo n desde $\tilde{x}$ hasta $\tilde{y}$ como:

$$CF_n(\tilde{x},\tilde{y}) = \{(w_1,w_2,...,w_n) \in \tilde{X}^n : w_1 = \tilde{x}, w_n = \tilde{y}, (w_i,w_{i+1}) \in P \cup O, \forall i \in \{1,...,n-1\}\}$$

Teniendo esto en cuenta, se define el conjunto de cadenas finitas desde $\tilde{x}$ hasta $\tilde{y}$ como:

$$CF(\tilde{x},\tilde{y}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} CF_n(\tilde{x},\tilde{y})$$

Dada una cadena $\mathcal{C} = (w_1, ..., w_n) \in CF(\tilde{x},\tilde{y})$, se define el largo de la cadena como:

$$L(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^{n-1} L(w_i, w_{i+1})$$

Finalmente, para $\tilde{x},\tilde{y} \in \tilde{X}$ se define:

$$d(\tilde{x},\tilde{y}) = \inf\{L(\mathcal{C}) : \mathcal{C} \in CF(\tilde{x},\tilde{y})\}$$

La segunda observación implica que $d(\tilde{x},\tilde{y}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{x} = \tilde{y}$. La simetría y transitividad siguen de la simetría y transitividad de ρ_n y $\|\cdot\|_\infty$. Con ello se concluye que $(\tilde{X}, d)$ es un espacio métrico compacto y $(\tilde{X}, \phi)$ un multiflujo.

4.3. Expansividad en suspensiones

En esta sección se muestran los principales resultados de este capítulo.

Proposición 4.2 *Sea $\varepsilon \in (0,1)$, $\mathcal{F} \subseteq C$ con $\{id\} \subseteq \mathcal{F}$ y $S \subseteq \mathbb{R}^d$. Si S es $(\mathcal{F},\varepsilon)$-expansivo en $\tilde{X}$, entonces S es expansivo en X.*

Demostración. Por la hipótesis, existen $r > 0$ y $\delta > 0$ tales que:

$$d(\phi_u(\tilde{x}), \phi_{g(u)}(\tilde{y})) < \delta, \forall u \in S^r \implies \tilde{y} \in \phi_{B_\varepsilon}(\tilde{x})$$

Sea $s > 0$ tal que $S^s \supseteq [-1,2]^d$. Veamos que S es (s,δ)-expansivo en X. Sean $x, y \in X$ tales que:

$$\rho_n(x,y) < \delta, \quad \forall n \in S^s \cap \mathbb{Z}^d$$

Tomemos $\tilde{x} = (x, 0), \tilde{y} = (y, 0)$ y $g = id_{\mathbb{R}^d}$, notemos que:

$$\begin{aligned}
d(\phi_u(\tilde{x}), \phi_{g(u)}(\tilde{y})) &= d((T_{[u]}(x), u-[u]), (T_{[u]}(y), u-[u])) \\
&\leq d_{u-[u]}((T_{[u]}(x), u-[u]), (T_{[u]}(y), u-[u])) \\
&= \sum_{n\in\{0,1\}^d} \left(\prod_{i=1}^{d} n_i(u_i - [u_i]) + (1-n_i)(1-(u_i-[u_i]))\right) \rho_{n+[u]}(x,y) \\
&< \sum_{n\in\{0,1\}^d} \left(\prod_{i=1}^{d} n_i(u_i - [u_i]) + (1-n_i)(1-(u_i-[u_i]))\right) \delta \\
&= \delta
\end{aligned}$$

En la primera desigualdad se utilizó que $(\tilde{x},\tilde{y}) \in CF(\tilde{x},\tilde{y})$, en la segunda se usó la hipótesis.

Para concluir, basta notar que la C-expansividad implica que existe un $v \in \mathbb{R}^d$ con $\|v\| < \varepsilon$, tal que $\tilde{y} = \phi_v(\tilde{x})$. Como $\|v\| < 1$, se puede notar que $(y,0) = \phi_v(x,0) \iff v = 0$, por lo tanto, se obtiene que $x = y$, lo que concluye la demostración.

□

Corolario 4.3 *Toda dirección de no expansividad de X, es una dirección de no expansividad de su suspensión*

Además, considerando $S = \mathbb{R}^d$ y $\mathcal{F} = C$, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 4.4 *Si $\tilde{X}$ es C-expansivo, entonces X es expansivo*

A continuación, se presenta el resultado principal de esta sección, que corresponde a la generalización del Teorema de Bowen y Walters para multiflujos.

Teorema 4.5 *$\tilde{X}$ es C-expansivo si y solo si X es expansivo*

Demostración. Veamos la implicancia que falta. Sea δ' la constante de expansividad de X para la métrica ρ'. Sea $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta < \min\{\delta', \varepsilon, \frac{1}{4}\}$. Sean $\tilde{x} = (x, v), \tilde{y} = (y, w) \in \tilde{X}$ y $g \in C$ tales que:

$$d(\phi_u(\tilde{x}), \phi_{g(u)}(\tilde{y})) < \delta, \quad \forall u \in \mathbb{R}^d$$

Vamos a separar la demostración en dos casos:

Caso 1: v es el centro del hipercubo. Sabemos por hipótesis que:

$$d(\tilde{x}, \tilde{y}) < \delta < \frac{1}{4}$$

Sea $\mathcal{C} = (w_1, ..., w_n) \in CF(\tilde{x}, \tilde{y})$ tal que $L(\mathcal{C}) < \delta$, recordemos que:

$$L(\mathcal{C}) = \sum_{i\in[n-1]} L(w_i, w_{i+1}) = \sum_{\substack{i\in[n-1] \\ (w_i,w_{i+1})\in P}} L(w_i, w_{i+1}) + \sum_{\substack{i\in[n-1] \\ (w_i,w_{i+1})\in O\setminus P}} L(w_i, w_{i+1})$$

Como ambos términos son no negativos, y denotando $w_i = (x_i, v_i)$ para $i \in \{1, ..., n\}$, se tiene que:

$$\sum_{\substack{i\in[n-1] \\ (w_i,w_{i+1})\in P}} d_{v_i}(w_i, w_{i+1}) < \delta \qquad \wedge \qquad \sum_{\substack{i\in[n-1] \\ (w_i,w_{i+1})\in O\setminus P}} \|v_i - v_{i+1}\| < \delta$$

De la desigualdad de la derecha, se obtiene que $\|v_i - v\| < \delta < \frac{1}{4}$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$, esto implica que $x_i = x_{i+1}$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $(w_i, w_{i+1}) \in O \setminus P$. Para la otra desigualdad, notar antes que:

$$\sum_{\substack{i\in[n-1] \\ (w_i,w_{i+1})\in P}} d_{v_i}(w_i, w_{i+1}) \geq \sum_{\substack{i\in[n-1] \\ (w_i,w_{i+1})\in P}} \rho'(x_i, x_{i+1}) \geq \rho'(x_1, x_n) = \rho'(x, y)$$

Donde se usó la observación en la primera desigualdad, y desigualdad triangular en la segunda, con esto, se concluye que $\rho'(x, y) < \delta$. Ahora probaremos que:

$$\rho'_n(x, y) \leq \delta, \forall n \in \mathbb{Z}^d$$

Para $n = 0$ ya está probado. Lo veremos por inducción en $\|n\|_1$. Para $u, v \in \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, se denota:

$$\rho_{\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d}(u, v) = \inf\{\|w\| : u + w \equiv_{\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d} v\}$$

Lema 4.6 *Sean* $(x, v), (y, w) \in \tilde{X}$ *tales que*

$$d((x, v), (y, w)) < \min_{i \in \{1,\ldots,d\}} \min\{v_i, 1 - v_i\}$$

Entonces $\rho_{\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d}(v, w) < d((x, v), (y, w))$

El lema sigue directamente del mismo procedimiento que usamos antes, ahora veamos el paso clave de la demostración.

Lema 4.7 *Sean* $(x, v), (y, w) \in \tilde{X}$ *y* $g \in C$ *tales que:*

$$\sup_{u \in \mathbb{R}^d} d(\phi_u(x, v), \phi_{g(u)}(y, w)) < \min_{i \in [d]} \min\{v_i, 1 - v_i\}$$

entonces $[g(n)] = n$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}^d$*, y además, se tiene que:*

$$\rho_{\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d}(v, g(n)) < \min_{i \in [d]} \min\{v_i, 1 - v_i\}, \forall n \in \mathbb{Z}^d$$

Demostración. Lo veremos por inducción en $\|n\|_1$. Si $\|n\|_1 = 0$, entonces $n = 0$ y la propiedad es cierta porque $g \in C$. Supongamos que $[g(n)] = n$ siempre que $\|n\|_1 = k$. Sea $m \in \mathbb{Z}^d$ con $\|m\|_1 = k + 1$, como $k + 1 > 0$, existe un $j \in [d]$ tal que $\langle m, e_j\rangle \neq 0$. Sea $n = m - \frac{\langle m,e_j\rangle}{|\langle m,e_j\rangle|} e_j$, es decir, desplazarse en una unidad hacia el origen en la dirección e_j. Es claro que $\|n\|_1 = \|m\|_1 - 1 = k$, y con ello, se satisface que $[g(n)] = n$. Luego por el Lema anterior, se obtiene que:

$$\rho_{\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d}(v, w) < d((x, v), (y, w))$$

$\square$

De este último lema, se sigue que

$$\rho'_n(x, y) \leq \delta, \forall n \in \mathbb{Z}^d$$

Y como $\delta \leq \delta'$, se obtiene que $x = y$, luego como $d(\tilde{x}, \tilde{y}) < \delta$, concluimos que $\tilde{y} = \phi_u(\tilde{x})$ para algún $u \in B_\delta \subseteq B_\varepsilon$

Caso 2: Si v no es el centro del hipercubo, existe $b \in [0, 1]^d$ con $\|b\| \leq \frac{1}{2}$, tal que $\phi_b(x, v) = (x, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2})$. Denotando $\hat{x} = \phi_b(\tilde{x})$ y $\hat{y} = \phi_{g(b)}(\tilde{y})$, se tiene que

$$d(\phi_u(\hat{x}), \phi_{g(u+b)-g(b)}(\hat{y})) < \delta, \forall u \in \mathbb{R}^d$$

Como el mapeo $u \mapsto g(u + b) - g(b)$ está en C y la proyección en $[0, 1]^d$ del punto $\hat{x}$ es el centro del hipercubo, podemos aplicar el caso 1 para concluir que

$$\hat{y} = \phi_h(\hat{x}),\ h \in B_\delta$$

Es decir,

$$\tilde{y} = \phi_{h+b-g(b)}(\tilde{x})$$

Y como $\|h + b - g(b)\| = d(\tilde{x}, \tilde{y}) < \delta < \varepsilon$, se obtiene que $\tilde{y} \in \phi_{B_\varepsilon}(\tilde{x})$. Con esto, concluimos que $(\tilde{X}, \phi)$ es un multiflujo C-expansivo. □

Teorema 4.8 *$\tilde{X}$ es C-separador si y solo si X es separador*

Demostración. La demostración es análoga a la anterior.

□

Los teoremas anteriores nos permiten caracterizar aquellos multiflujos expansivos (o separadores) que provengan de la suspensión de un sistema dinámico.

Capítulo 5

Horobolas Expansivas

En el año 1981, Gromov introdujo la noción de horobola en grupos (ver [8]), lo interesante de este objeto, es que al considerar $G = \mathbb{Z}^d$ dotado de la norma euclidiana, las horobolas de G corresponden a los semi-espacios del plano.

Para extender la definición de dirección de no expansividad a un contexto más general, recordamos que la no-expansividad de un subespacio se puede caracterizar por la no-expansividad de los semiespacios que lo delimitan.

Teniendo esto en cuenta, resulta natural extender la definición de no-expansividad a horobolas, de esta forma se tendrá una generalización del concepto de dirección no expansiva. Con este objetivo, introduciremos brevemente los elementos necesarios de Geometría de grupos.

5.1. Geometría de grupos

En esta sección se introducen algunos conceptos básicos de la teoría de horobolas. Supondremos que G es un grupo topológico localmente compacto y segundo contable, o equivalentemente, G admite una métrica propia invariante por la derecha (ver [18]), más precisamente, la métrica satisface lo siguiente

1. Las bolas son compactas
2. $d(xz, yz) = d(x, y), \forall x, y, z \in G$

Por ejemplo, cada grupo numerable satisface esta propiedad al dotarse de la métrica de palabras definida por:

$$d(g, h) = \inf\{n \in \mathbb{N} : gh^{-1} = s_1 \cdots s_n, \text{ para } s_1, ..., s_n \in S \cup S^{-1}\}$$

Sea $C(G)$ el conjunto de las funciones reales continuas en G. Considere la aplicación b definida por:

$$\begin{aligned} b : G &\to C(G) \\ g &\mapsto b_g(h) = d(g, h) - d(g, 1) \end{aligned}$$

Puede notar que b_g es 1-Lipschitz y $b_g(1) = 0$. Se define el borde de G, denotado por ∂G, como:

$$\partial G = \overline{b(G)} \setminus b(G)$$

donde la adherencia se toma en la topología abierta-compacta. Recordemos que una base para esta topología está dada por las intersecciones finitas de los conjuntos de la forma:

$$V(K,U) := \{f \in C(G) : f(K) \subseteq U\} \quad \text{con } K \text{ compacto y } U \text{ abierto}$$

En este caso, como la topología de G viene inducida por una métrica, se tiene que la topología abierta-compacta equivale a la topología de la convergencia uniforme en los compactos, es decir, (f_n) converge a f si y solo si para cada compacto $K \subseteq G$, (f_n) converge uniformemente a f en K.

Toda función $j \in \partial G$ es llamada una **horofunción** de G, cuando G es no acotado, siempre existen horofunciones, pues toda horofunción j se puede escribir como el límite de cierta secuencia (b_{g_n}), para alguna sucesión $(g_n) \subseteq G$ no acotada.

Una **horobola**, es cualquier subconjunto de G de la forma

$$H = \{x \in G : j(x) < 0\} \quad \text{para algún } j \in \partial G$$

Se denota por $\mathcal{H}$ al conjunto de todas las horobolas. Por la observación anterior, se tiene que cada horobola se ve como el límite de conjuntos de la forma

$$B_n = \{g \in G : b_{g_n}(g) < 0\} = \{g \in G : d(g_n, g) < d(g_n, 0)\}$$

Es decir, toda horobola es un límite de bolas abiertas centradas en cierta secuencia $(g_n) \to \infty$ de radio $d(g_n, 0)$. Veamos algunos ejemplos para entender mejor la idea.

Ejemplo Sea $G = \mathbb{Z}^d$ dotado de la métrica inducida por la norma euclidiana. Sea $H = j^{-1}(-\infty, 0)$, donde $j = \lim b_{g_n}$ para cierto $(g_n) \subseteq \mathbb{Z}^2$. Por la compacidad de S^1, existe una dirección de acumulación $v \in S^1$ tal que $\frac{g_n}{\|g_n\|_2} \to v$ y $g_n \to \infty$ para alguna subsucesión, sin pérdida de generalidad, quitamos algunos términos para que (g_n) tenga la forma

$$g_n = v\|g_n\|_2 + \varepsilon_n$$

con $\|\varepsilon_n\|_2 \to 0$. A partir de esto, se puede verificar que la familia de bolas

$$B_n = \{g \in \mathbb{Z}^2 : \|g - g_n\|_2 < \|g_n\|_2\}$$

Converge al semiespacio $H = \{g \in \mathbb{Z}^2 : \langle v, h\rangle > 0\}$, esto se puede visualizar en la siguiente figura

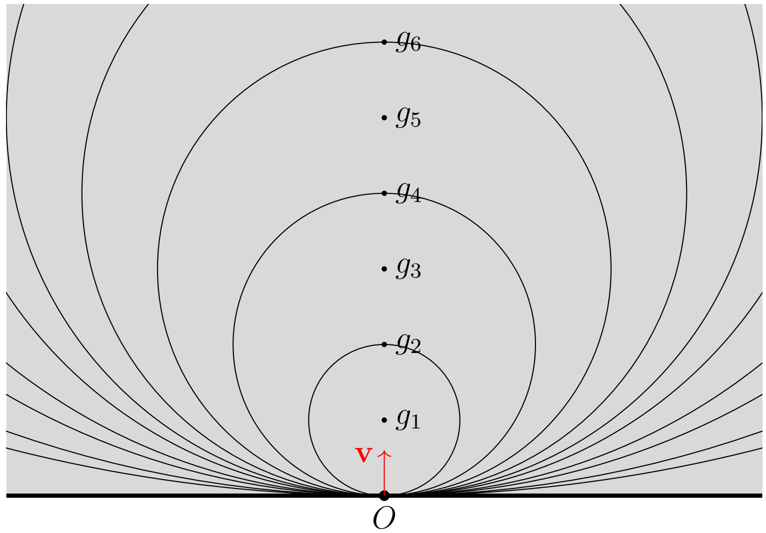


Figura 5.1: Horobola en $\mathbb{Z}^2$ para la norma ℓ_2

Ejemplo Sea $G = \mathbb{Z}^d$ dotado de la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|_1$, similar a como ocurría en el ejemplo anterior, se puede decir que toda horobola H, es el límite de bolas de la forma:

$$B_n = \{g \in \mathbb{Z}^2 : \|g - g_n\|_1 < \|g_n\|_1\}$$

Donde $g_n \to \infty$. Al igual que antes, el límite de estas horobolas puede ser un semiespacio, por ejemplo, para $g_n = (x_n, px_n)$ con $p > 0$, el límite se ve como sigue:

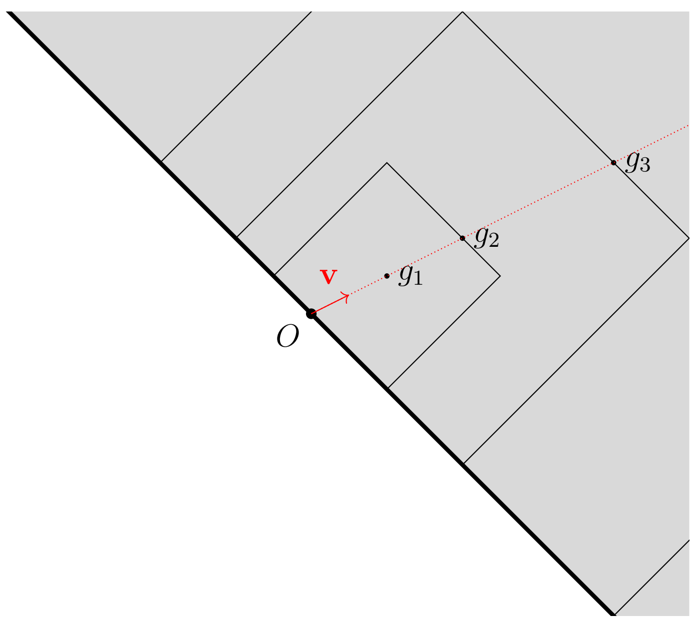


Figura 5.2: Horobola en $\mathbb{Z}^2$ para la norma ℓ_1, con $g_n = (2x_n, x_n)$

Sin embargo, para la métrica ℓ_1, no todas las horobolas son semiespacios, por ejemplo, si $\frac{g_n}{\|g_n\|_2}$ converge a algún vector unitario de la base canónica, la horobola puede tener otra forma como aparece a continuación.

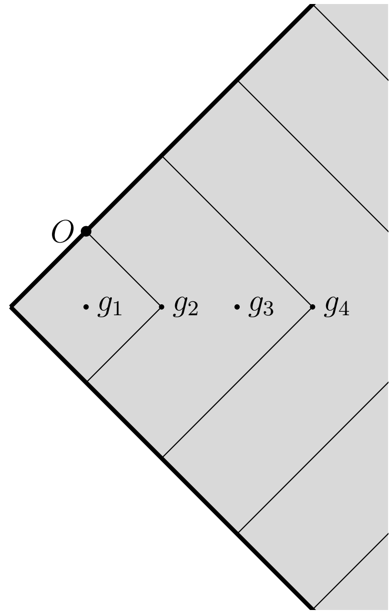


Figura 5.3: Horobola en $\mathbb{Z}^2$ para la norma ℓ_1, con $g_n = p + (x_n, 0)$

Este ejemplo deja en evidencia que el conjunto $\mathcal{H}$, depende fuertemente de la métrica utilizada.

Ejemplo Para $m \in \mathbb{N}$, se define la familia de funciones $f_m \in C(\mathbb{R}^d)$ mediante:

$$f_m(x) = -(x_1 + m) + |x_2 + m| + ... + |x_d + m|$$

y la familia de conjuntos:

$$H_m = \{x \in \mathbb{R}^d : x_1 + m > |x_2 + m| + |x_3| + ... + |x_d|\} = f_m^{-1}((-\infty, 0))$$

Podemos notar que $(H_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$, probemos esto. Sea $m \in \mathbb{N}$ y $U \subseteq C(\mathbb{Z}^d)$ un conjunto básico con $f_m \in U$, luego, existe una familia finita de conjuntos compactos $K_1, ..., K_n \subseteq \mathbb{Z}^d$ y conjuntos abiertos $U_1, ..., U_n \subseteq \mathbb{R}^d$ tales que:

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} V(K_i, U_i)$$

Definamos los conjuntos $K = K_1 \cup ... \cup K_n$ y $S = \{x \in \mathbb{Z}^d : x_1 < 0\}$, podemos distinguir dos casos, $K \subseteq S$, o bien $K \cap S^c \neq \emptyset$, veremos que en ambos casos se tiene que $f_m \in \overline{b(\mathbb{Z}^d)}$

1. Si $K \subseteq S$, entonces para cada $x \in K$ se tiene que $x_1 < 0$, luego:

$$b_{-me_2} = |x_1| + |x_2 + m| + \sum_{i=3}^{d} |x_i| - |-m| = f_m(x)$$

2. Si $K \cap S^c \neq \emptyset$, se definen $M = \max\{x_1 : x \in K\}$ y $N = Me_1 - me_2 \in \mathbb{Z}^d$. Dado $x \in K$,

se puede notar que $M > 0$ y $M \geq x_1$, y con ello:

$$b_N(x) = |x_1 - M| + |x_2 + m| + \sum_{i=3}^{d} |x_i| - (|M| + |-m|) = f_m(x)$$

En ambos casos, existe un $u \in \mathbb{Z}^d$ tal que $b_u = f$ en K, y en consecuencia, $f(K_i) \subseteq U_i$ para cada $i \in [n]$, de esta forma obtenemos que $b_u \in U$, lo que permite concluir que $f_m \in \overline{b(\mathbb{Z}^d)}$. Por lo tanto, se tiene que $f_m \notin b(\mathbb{Z}^d)$ (cada función de $b(\mathbb{Z}^d)$ tiene mínimo y f_m no). Es decir, $f_m \in \partial\mathbb{Z}^d$, y con ello $H_m \in \mathcal{H}$.

En el siguiente ejemplo, G es un grupo libre (no trivial) dotado por la métrica de palabras. Diremos que una secuencia $\mathcal{R} = (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq G$ es una cadena en G, si $g_0 = 1$, $g_1 \in S \cup S^{-1}$ y $g_{n+1} = s_n g_n$ para $s_n \in S \cup S^{-1}$ tal que $s_{n+1}^{-1} \neq s_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, donde S es el generador del grupo libre.

Ejemplo Veamos que cada cadena induce una horobola en G. Definamos la proyección sobre una cadena $\mathcal{R}$ como la función:

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{R}} : G &\to \mathcal{R} \\ g &\mapsto argmin\{d(g, g_n) : n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Sea j_R la horofunción asociada, definida por:

$$\begin{aligned} j_{\mathcal{R}} : G &\to \mathbb{Z} \\ g &\mapsto d(x, p_{\mathcal{R}}(x)) - |p_R(g)| \end{aligned}$$

Podemos ver que j_R es el límite de los b_{g_n}, y con ello es una horofunción. Para probarlo, notamos que para cada $g \in G$, existe un n suficientemente grande, tal que $p_{\mathcal{R}} = g_m$ con $m < n$, entonces $d(g_m, g_n) = |g_n| - |g_m|$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} b_n(g) &= \lim_{n\to\infty} d(g, g_n) - |g_n| \\ &= \lim_{n\to\infty} d(g, p_{\mathcal{R}}(g)) + d(p_R(g), g_n) - |g_n| \\ &= \lim_{n\to\infty} d(g, p_{\mathcal{R}}(g)) + |g_n| - p_{\mathcal{R}}(g) - |g_n| \\ &= j_{\mathcal{R}}(g) \end{aligned}$$

Es decir, cada cadena $\mathcal{R}$ define la horobola:

$$H_{\mathcal{R}} = \{g \in G : d(g, p_{\mathcal{R}}(g)) < |p_{\mathcal{R}}(g)|\}$$

5.2. Teorema de Robinson Crusoe

Recordemos que Boyle y Lind probaron que en todo $\mathbb{Z}^d$-sistema dinámico infinito, el conjunto de $(d-1)$-subespacios no expansivos es un compacto no vacío, en consecuencia, siempre existen semiespacios no expansivos.

Recientemente, S. Donoso, A. Maass y S. Petite, demostraron en [6], que este resultado se tiene en un contexto más general, donde G es cualquier grupo infinito con una métrica propia invariante por la derecha, esto surge de un resultado más general de su trabajo, que se conoce como el Teorema de Robinson Crusoe.

Teorema 5.1 (Robinson Crusoe [6]) *Sea (X,T,G) un sistema dinámico topológico y G un grupo infinito con una métrica propia invariante por la derecha. Sea $A\subset X$ un abierto, no cerrado y G-invariante. Entonces, para cada vecindad U de la frontera de A, existe una horobola $H\subseteq G$, tal que:*

$$A\cap\bigcap_{g\in H}T_g^{-1}(A)\neq\emptyset$$

El nombre de este Teorema surge de la siguiente interpretación. Si Robinson Crusoe se encuentra aislado en una isla, y su movimiento es deterministico, es decir, dado por un flujo. Entonces la isla define un abierto invariante A del espacio de fase. Con ello, el teorema asegura que existe alguna trayectoria de Robinson Crusoe que permanece en la costa (el borde de A) para cada tiempo positivo (o negativo).

La generalización del Teorema de Boyle-Lind, surge como una consecuencia de Robinson Crusoe, más precisamente el enunciado es como sigue.

Teorema 5.2 ([6]) *Sea (X,T,G) un sistema dinámico topológico y G un grupo infinito con una métrica propia invariante por la derecha. Entonces para cada $\varepsilon>0$, existe una horobola $H\subseteq G$ y puntos distintos $x,y\in X$, tales que $d(T_g(x),T_g(y))\leq\varepsilon$ para todo $g\in H$*

Al tomar $G=\mathbb{Z}^d$ dotado de la norma euclidiana, se recupera el Teorema de existencia de Boyle y Lind. Por otro lado, a partir de otro resultado del mismo texto, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 5.3 *Sea $(X,T,\mathbb{Z}^d)$ un sistema dinámico topológico infinito. Entonces, la intersección de todos los semiespacios no-expansivos es vacía.*

Este resultado implica que siempre hay más de un semiespacio noexpansivo para acciones de $\mathbb{Z}^d$. En particular, tomando $d=1$ se recupera el Teorema de Schwartzman.

5.3. Cerradura de las horobolas expansivas

Proposición 5.4 *Sea $G=(\mathbb{Z}^d,\|\cdot\|_1)$ con $d>1$. Entonces existe un sistema dinámico (X,T) tal que el conjunto de horobolas no expansivas (G,X,T) es no cerrado.*

Demostración. Sea $X=\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y $T_u=\sigma^{u_1}\sigma^{u_2}\cdots\sigma^{u_{d-1}}$ la $\mathbb{Z}^d$ acción en X, veremos que H_m es no expansivo (X,T). Sea $k\in\mathbb{N}$ y $t>0$. Tomemos $x,y\in X$ tales que

$$x_{[-t-k-2m,\infty)}=y_{[-t-k-2m,\infty)}\ \text{ y }\ x\neq y$$

Sea $i\in\mathbb{Z}$ con $|i|\leq k$ y $u\in H_m^t\cap\mathbb{Z}^d$, notemos que:

$$H_m^t=\{x\in\mathbb{Z}^d: x_1+m+t>|x_2+m|+|x_3|+...+|x_d|\}$$

Entonces $u_1+u_2+...+u_{d-1}>-2m-t$ en H_m^t, y con ello

$$T(u,x)(i)=x(i+u_1+...+u_{d-1}=y(i+u_1+...+u_{d-1})=T(u,x)(i)$$

Por lo tanto

$$d(T(u,x),T(u,y)) \leq 2^{-k}, \quad \forall u \in H_m^t \cap \mathbb{Z}^d$$

Por otro lado, el conjunto límite de la familia $(H_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es el conjunto

$$H = \{x \in \mathbb{Z}^d : x_1 > x_2 + |x_3| + ... + |x_d|\}$$

Tenemos que $H \in \mathcal{H}$ (por el mismo argumento), pero H es expansivo en (X,T). Si tomamos $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x_k \neq y_k$, si definimos $u = (|k|+k+1)e_1-(1+|k|)e_2$, se tiene que $u \in H$ y $T^u = \sigma^k$, pero $\sigma^k x = \sigma^k y$, entonces $d(T(u,x),T(u,y)) = 1$. Luego, $(H_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es una familia de horobolas no expansivas, pero el límite es una horobola expansiva, concluyendo la demostración. □

Proposición 5.5 *Sea F un grupo libre no trivial dotado de la métrica de palabras. Entonces existe un sistema dinámico (X,T) tal que el conjunto de horobolas en (F,X,T) es no cerrado.*

Demostración. Sea $p \in S$ y $q \in S^{-1}$ con $p^{-1} \neq q$ (este existe porque F no es trivial), definamos la cadena $\mathcal{R}$ mediante:

$$g_{t_n+k} = \begin{cases} p^k g_{t_n} & \text{si } n \text{ es par y } k \in [n+1] \\ q^k g_{t_n} & \text{si } n \text{ es impar y } k \in [n+1] \end{cases}$$

Donde t_n denota el n-ésimo número triangular (es decir, $2t_n = n(n+1)$). Con esto, podemos definir la familia de cadenas truncadas, denotada por $\mathcal{R}_j = (g^j)_{j\in\mathbb{N}}$, donde

$$g_n^j = \begin{cases} g_n & \text{si } n \leq j \\ p^{n-j} g_j & \text{si } n > j \end{cases}$$

Veamos que para $X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y la acción de F en X definida por $T_g = \sigma^{|g|_s}$ con $|g|_s$ el módulo con signo definido por

$$|g|_s = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{k_j} n_i^j$$

Con

$$g = s_1^{n_1^1} s_2^{n_2^1} ... s_n^{n_{k_1}^1} s_1^{n_1^2} s_2^{n_2^2} ... s_n^{n_{k_2}^2} s_1^{n_1^3} ... s_n^{n_{k_r}^r}$$

Donde $S = \{s_1, ..., s_n\}$ y $n_i^j \in \mathbb{Z}$ para $j \in [r]$ y $i \in [k_j]$. Veamos que las horobolas $H_{\mathcal{R}_j}$ no son expansivas para este sistema, pero la horobola límite H_g si lo es. Para esto, notemos que para $g \in H_{\mathcal{R}_j}$ se tiene que $d(g, p_{\mathcal{R}_j}) < |p_{\mathcal{R}_j}(g)|$, donde $p_{\mathcal{R}_j}(g) \in \mathcal{R}_j$. Si $p_{\mathcal{R}_j} = g_i$ para $i \in \mathbb{N}$, entonces $||p_{\mathcal{R}_j}(g)|_s| < n$ donde $g_i = p^k g_{t_n+k}$ o $g_i = q^k g_{t_n+k}$, si no, entonces $p_{\mathcal{R}_j} = p^{i-j} g_j$, y luego $||p_{\mathcal{R}_j}(g)|_s| < (i-j)+n$ donde $g_j = p^k g_{t_n+k}$ o $g_j = q^k g_{t_n+k}$. En cualquier caso, se tiene una cota para $||p_{\mathcal{R}_j}(g)|_s|$ (denotada por c_j) y con ello se tiene que $|g|_s < 2c_j$. Por otro lado, en $H_{\mathcal{R}_g}$, no se tiene esa cota, porque $|g|_s$ es no acotado en $\mathcal{R}_g$, por lo tanto es no expansivo. □

Definición 5.6 *Sea (X,T,G) un sistema dinámico. Diremos que $H \in \mathcal{H}$ es (δ,ϵ)-no expansivo, si existen dos puntos $x, y \in X$, tales que $d(x,y) \geq \delta$ y $d(T_g x, T_g y) \leq \epsilon$ para cada $g \in H$.*

Proposición 5.7 *Para $\delta, \epsilon > 0$, el conjunto de horobolas (δ, ϵ)-no expansivo, es cerrado.*

Demostración. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que es no vacío. Sea (H_n) una secuencia de horobolas (δ, ϵ)-no expansivas. Sea $H_n = \{j_n < 0\}$, y x_n, y_n tales que $d(x_n, y_n) \geq \delta$ y $d(T_g x_n, T_g y_n) \leq \epsilon$ para cada $g \in H_n$. Sea $j_n \to j$ y $H = \{j < 0\}$. Podemos asumir que $x_n \to x$, $y_n \to y$ y con ello $d(x, y) \geq \delta$. Para $N \in \mathbb{N}$, se toma un n_N suficientemente grande para que $H_n \cap B_N(1_G) = H \cap B_N(1_G)$ para cada $n \geq n_N$. Como $d(T_g x_n, T_g y_n) \leq \epsilon$ para todo $g \in H_n$, se obtiene que $d(T_g x, T_g y) \leq \epsilon$ para todo $g \in H \cap B_N$. Como N es arbitrario, se obtiene que $d(T_g, T_g y) \leq \epsilon$ para cada $g \in H$, concluyendo la demostración. $\square$

Notar que $H \in \mathcal{H}$ es ϵ-no expansivo si y solo si es (δ, ϵ) no-expansivo para algún $\delta > 0$. Para $G = \mathbb{Z}^d$ con la norm ℓ^2, en sistemas simbólicos, tenemos que $\delta > 0$ puede considerarse uniforme sobre todas las horobolas. Es decir, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$H \in \mathcal{H} \text{ es } \epsilon \text{ no-expansivo si y solo si } H \in \mathcal{H} \text{ es } (\delta_0, \epsilon) \text{ no-expansivo}$$

Capítulo 6

Perspectivas

Para finalizar, enunciaremos algunas de las preguntas que aún no han sido resueltas, y que pueden servir como guía para desarrollar trabajo a futuro en el área.

En el capítulo 2, se estudiaron múltiples nociones de expansividad en multiflujos, que surjen como extensiones naturales de las definiciones en el caso $G = \mathbb{R}$. Si bien, esto sirve para entender la noción de expansividad en el caso multiparámetro, no se sabe si todas las equivalencias que se tienen para flujos son ciertas, por ejemplo, se desconoce la respuesta de las siguientes preguntas.

- ¿Es cierto que la K-expansividad equivale a la C-expansividad para $d > 1$?
- Si los puntos fijos de un multiflujo debilmente expansivo son aislados, ¿Se tiene que el multiflujo es K-expansivo?

Lo complicado de estas preguntas, es que las demostraciones que se conocen para estos resultados en el caso de flujos, usan fuertemente la estructura 1-dimensional de $\mathbb{R}$, lo que genera dificultades a la hora de generalizar los argumentos que se usaron.

En el capítulo 3, se probó que el conjunto de direcciones de no-separabilidad es no vacío bajo ciertas hipótesis, además, se vio que estas coinciden con las direcciones de no-expansividad en cierto tipo de sistemas, esto genera las siguientes preguntas

- ¿Todo $\mathbb{Z}^d$-sistema dinámico posee direcciones de no-separabilidad?
- ¿Se puede decir algo sobre la regularidad de estas direcciones?, ¿son un conjunto cerrado?
- ¿Siempre coinciden con las direcciones de no-expansividad?

Algunas de estas preguntas pueden resultar ser simples de responder al estudiar buenos ejemplos, el problema es que en los ejemplos clásicos, como el subshift de Ledrappier, ambas nociones coinciden, lo que resulta desafortunado para darse una idea de la respuesta.

En el capítulo 4, se demostró que la expansividad y separabilidad de un $\mathbb{Z}^d$-sistema dinámico, se puede transferir a su suspensión, sería interesante saber si también se pueden transferir otro tipo de nociones de expansividad. Además, se obtuvo que las direcciones de no-expansividad y no-separabilidad se transfieren a su suspensión, lo que nos entrega la existencia de estas direcciones para una clase grande de multiflujos, esto genera las siguientes preguntas:

- Aquellos multiflujos que no son la suspensión de un sistema, ¿poseen direcciones de no-expansividad y no-separabilidad?

- ¿Se pueden transferir otros tipos de nociones de expansividad?, pensar en expansividad de Katok-Hasselblatt por ejemplo.

En el capítulo 5, se introdujeron las horobolas expansivas, y se vio como este objeto permite generalizar el concepto de dirección de no-expansividad. Se vio que Robinson Crusoe generaliza el resultado de existencia de direcciones no-expansivas, pero se vieron algunos ejemplos en los cuáles fallaba el resultado de cerradura de estos, por ello se tienen las siguientes preguntas

- ¿Se puede asegurar la existencia de horobolas de no-separabilidad?, ¿bajo qué condiciones?

- ¿Qué propiedades geométricas debe tener el grupo G y su métrica para asegurar la cerradura del conjunto de horobolas no-expansivas?

- Para aquellos ejemplos en los cuales fallaba la cerradura, ¿se pueden considerar acciones libres que sirvan de contraejemplo?

Sin lugar a dudas, quedan muchas preguntas por responder, el concepto de expansividad en horobolas aún es nuevo, y por ello aún hay mucho trabajo qué hacer en esta área.

Bibliografía

[1] A. Artigue. Expansive flows of surfaces. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 33(2):505–525, 2013.

[2] A. Artigue. Kinematic expansive flows. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 36(2):390–421, 2016.

[3] R. Bowen and P. Walters. Expansive one-parameter flows. *J. Differential Equations*, 12:180–193, 1972.

[4] M. Boyle and D. Lind. Expansive subdynamics. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349(1):55–102, 1997.

[5] V. Cyr and B. Kra. Nonexpansive $\mathbb{Z}^2$-subdynamics and Nivat's conjecture. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 367(9):6487–6537, 2015.

[6] S. Donoso, A. Maass, and S. Petite. A geometric framework for asymptoticity and expansivity in topological dynamics, 2023.

[7] W. Flinn. Expansive flows. *PhD thesis, Warwick University*, 1972.

[8] M. Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, volume 8 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 75–263. Springer, New York, 1987.

[9] A. A. Gura. The horocycle flow on a surface of negative curvature is separating. *Mat. Zametki*, 36(2):279–284, 1984.

[10] M. Hochman. Non-expansive directions for $\mathbb{Z}^2$ actions. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 31(1):91–112, 2011.

[11] H. M. Huynh. Katok-Hasselblatt-kinematic expansive flows. *J. Korean Math. Soc.*, 59(1):151–170, 2022.

[12] A. Katok and B. Hasselblatt. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1995.

[13] J. L. King. A map with topological minimal self-joinings in the sense of del Junco. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 10(4):745–761, 1990.

[14] M. Komuro. Expansive properties of Lorenz attractors. In *The theory of dynamical systems and its applications to nonlinear problems (Kyoto, 1984)*, pages 4–26. World Sci. Publishing, Singapore, 1984.

[15] M. Nasu. Endomorphisms of expansive systems on compact metric spaces and the pseudo-orbit tracing property. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352(10):4731–4757, 2000.

[16] M. Oka. Expansiveness of real flows. *Tsukuba J. Math.*, 14(1):1–8, 1990.

[17] S. Schwartzman. *On transformation groups.* ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1953.

Thesis (Ph.D.)–Yale University.

[18] R. A. Struble. Metrics in locally compact groups. *Compositio Math.*, 28:217–222, 1974.