



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL

DESARROLLO DE UN MODELO ESTOCÁSTICO DE
PLANIFICACIÓN MINERA UTILIZANDO ESCENARIOS
PROBABILISTICOS DEL PRECIO DEL COBRE

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER
EN GESTIÓN DE OPERACIONES

MEMORIA PARA OPTAR AL TITULO DE INGENIERO CIVIL
INDUSTRIAL

LUIS FELIPE CARVALLO LÖHR

PROFESOR GUÍA:
ANDRÉS WEINTRAUB POHORILLE

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
PATRICIO HERNANDEZ GONZALEZ
FERNANDO ORDOÑEZ PIZARRO
RAUL GOUET BAÑAREZ

SANTIAGO DE CHILE
OCTUBRE, 2009

INDICE

INDICE	1	
<u>1</u>	<u>INTRODUCCIÓN</u>	<u>43</u>
<u>2</u>	<u>OBJETIVOS</u>	<u>65</u>
2.1	OBJETIVO GENERAL	<u>65</u>
2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	<u>65</u>
<u>3</u>	<u>METODOLOGÍA</u>	<u>76</u>
3.1	DEFINICIÓN DEL PROBLEMA	<u>76</u>
3.2	DESARROLLO DEL MODELO	<u>76</u>
3.3	RESULTADOS Y ANÁLISIS DEL MODELO	<u>87</u>
<u>4</u>	<u>MARCO TEORICO</u>	<u>98</u>
4.1	ANTECEDENTES Y CONCEPTOS BÁSICOS	<u>98</u>
<u>5</u>	<u>DEFINICIÓN DEL PROBLEMA: LA PLANIFICACIÓN</u>	<u>1413</u>
5.1	EXTRACCIÓN EN UNA MINA SUBTERRÁNEA	<u>1514</u>
5.2	LA INCERTEZA EN EL PRECIO	<u>1746</u>
<u>6</u>	<u>DESARROLLO DEL MODELO</u>	<u>1918</u>
6.1	SUPUESTOS Y LÍMITES DEL PROBLEMA.	<u>1918</u>
6.2	FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA	<u>2120</u>
6.2.1	ÍNDICES O ELEMENTOS BÁSICOS DEL PROBLEMA:	<u>2120</u>
6.2.2	PARÁMETROS:	<u>2322</u>
6.2.3	VARIABLES:	<u>2524</u>
6.2.4	PREPROCESAMIENTO	<u>2625</u>
6.2.5	RESTRICCIONES:	<u>2726</u>
6.2.6	FUNCIÓN OBJETIVO	<u>2928</u>

7	<u>DESCRIPCIÓN DE LOS ENFOQUES DE SOLUCIÓN</u>	<u>3231</u>
7.1	ENFOQUE ESTOCÁSTICO	<u>3231</u>
7.2	ENFOQUES DETERMINÍSTICOS ESTÁTICOS	<u>3635</u>
7.2.1	EL ESCENARIO PROMEDIO	<u>3635</u>
7.2.2	EL PEOR ESCENARIO	<u>3736</u>
7.3	ENFOQUES DETERMINÍSTICOS DINÁMICOS.	<u>3837</u>
7.3.1	CASO PROMEDIO (WAIT AND SEE)	<u>3837</u>
7.3.2	PEOR CASO (WS_WC)	<u>4039</u>
7.4	ENFOQUE ALGORÍTMICO: ESQUEMA BASADO EN ALGORITMO DEL VOLUMEN	<u>4140</u>
8	<u>RESULTADOS Y ANÁLISIS DEL MODELO</u>	<u>4645</u>
8.1	MODELACIÓN	<u>4645</u>
8.2	SITUACIÓN BASE	<u>5150</u>
8.3	SITUACIÓN CON INGRESO MÍNIMO	<u>5352</u>
9	<u>CONCLUSIONES</u>	<u>6160</u>
10	<u>TRABAJOS FUTUROS</u>	<u>6463</u>
	<u>BIBLIOGRAFIA</u>	<u>6564</u>
	<u>ANEXO</u>	<u>6968</u>
1.	MODELO ESTOCÁSTICO CON REPRESENTACIÓN DE VARIABLES DIVIDIDAS.	<u>6968</u>
A.	VARIABLES:	<u>6968</u>
B.	RESTRICCIONES:	<u>7069</u>
C.	FUNCIÓN OBJETIVO	<u>7274</u>
2.	CÓDIGO EN GAMS DEL ALGORITMO DEL VOLUMEN.	<u>7473</u>

1 INTRODUCCIÓN

El cobre es un elemento muy importante en la vida del ser humano ya que posee un gran número de usos, que van desde la generación y transporte de electricidad, el diseño de tuberías de agua y gas, usos en la construcción de edificios hasta la confección de elementos industriales y de consumo.

Desde ese punto de vista, este mineral se vuelve un producto altamente demandado. Sin embargo, desde el punto de vista de la oferta, esto que a primera vista parece una clara ventaja, obliga a una compleja planificación de los recursos de cada uno de los yacimientos, pues una dificultad que presenta el trabajo en minería es que la extracción está determinada por una secuencia, de abajo hacia arriba en el caso subterráneo, en que la forma de extracción y la cantidad extraída del presente condicionaran fuertemente el futuro.

La planificación minera consiste en tratar de determinar, tan finamente como se pueda, cuánto extraer de un recurso no renovable en un determinado período de tiempo con el fin de maximizar las utilidades presentes y futuras, por la vía de extraer la cantidad de mineral que se acerque o ajuste más a la cantidad demandada y que provenga de los bloques de mineral que permitan mantener esta flexibilidad en el futuro. Extraer en demasía implica quedar con stocks que se venderán a un precio desconocido y probablemente menor al esperado, que no se puede manipular y, además, asumiendo anticipadamente los costos. Extraer una cantidad insuficiente representa la pérdida inmediata de negocios.

Por otro lado, una vez determinada la cantidad a producir, se requiere coordinar una serie de etapas intermedias que consisten en transformar la roca extraída en productos vendibles, en cada una de las cuales se requieren servicios de transporte, mantención de los equipos y costos de explotación.

En este trabajo se analizarán diferentes enfoques de resolución para un problema de planificación minera simplificado, con incertidumbre en el precio del cobre. En ellos se utilizarán escenarios probabilísticos para representar la incertidumbre, los que se construirán en base a la historia, y modelos determinísticos o estocásticos según corresponda. De este modo, se podrá determinar cómo son afectadas las utilidades y qué enfoque es el más apropiado.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivo General

Desarrollar un modelo estocástico para la planificación de la producción de largo plazo en una minera, basado en escenarios probabilísticos que permitan incluir la incertidumbre en el precio futuro del cobre.

2.2 Objetivos Específicos

- Desarrollar un grupo de escenarios que permitan representar adecuadamente la incertidumbre del precio.
- Realizar las adaptaciones necesarias a un modelo de planificación previo, aplicado a la mina de “El Teniente” y realizado por Ximena Schultz[5], para la inclusión de la incertidumbre en el precio del cobre.
- Resolver el problema de planificación mediante diferentes enfoques determinísticos y comparar sus desempeños, en valor, tiempo de resolución y flexibilidad de la secuencia de extracción, con respecto al enfoque estocástico.
- Analizar el uso de un enfoque basado en el Algoritmo del Volumen para este tipo de problemas.
- Analizar si la modelación original, realizada en el modelo de Ximena Schultz[5], maneja adecuadamente la extracción de bloques que requieren ampliar los túneles, pues en las minas subterráneas serán necesarios para alcanzar el mineral. Para ello, se utilizarán modelaciones alternativas que denominaremos configuraciones.

3 METODOLOGÍA

El problema de planificación minera que se estudia en esta tesis consiste en determinar las decisiones óptimas para maximizar las utilidades condicionadas a un grupo de restricciones. Este tipo de problemas se enmarca en la rama matemática conocida como investigación de operaciones, la cual posee un marco metodológico bien definido y que se compone de las siguientes etapas: definición del problema, desarrollo del modelo, resultados del modelo y principales conclusiones.

3.1 Definición del problema

La primera actividad es el estudio del sistema relevante y el desarrollo de un resumen bien definido del problema que se va a analizar.

Esta tarea requiere identificar, comprender y describir el problema en forma integral, es decir, determinar las etapas y variables existentes, sus interrelaciones, las limitaciones o restricciones existentes, definir los objetivos deseados y finalmente determinar posibles cursos de acción.

3.2 Desarrollo del modelo

Una vez definido el problema, la siguiente etapa consiste en construir un modelo representativo de la realidad y que permita evaluar eficientemente las alternativas de solución, para ello el modelador deberá realizar los supuestos y simplificaciones que considere necesarias para hacer manejable el problema.

Es importante destacar que la construcción del modelo requiere primero definir las variables en función de las cuales será establecido. Luego, se procede a determinar matemáticamente cada una de las dos partes que constituyen un modelo:

1. La medida de efectividad o función objetivo que corresponde al índice que permite conocer el nivel de logro de los objetivos.
2. Las restricciones del problema que son un conjunto de igualdades o desigualdades que constituyen las barreras y obstáculos para la consecución del objetivo.

Particularmente en este caso, se comenzará sobre la base de un modelo determinístico para la mina subterránea del Teniente, desarrollado por Ximena Schultz[5], el cual se modificará según las necesidades, siendo una de las principales la incorporación de la incertidumbre en el precio mediante un grupo de escenarios.

3.3 Resultados y análisis del modelo

Una vez desarrollado el modelo se debe determinar las soluciones, de modo de utilizarlas para el análisis de la eficiencia y efectividad del sistema dentro del marco de referencia que fijan los objetivos y las restricciones del problema.

En esta etapa, principalmente en modelos grandes, se presentan problemas de tiempo de ejecución o de capacidad computacional, lo que obliga al desarrollo de metodologías alternativas, de tipo heurísticas, para su resolución.

En nuestro caso jugarán un rol esencial los resultados que se obtengan en los distintos escenarios y la cercanía entre los enfoques determinístico y estocástico.

4 MARCO TEORICO

4.1 Antecedentes y conceptos básicos

Al planificar cualquier tarea se requieren una serie de datos o parámetros para modelar correctamente la realidad, pero habitualmente éstos no se conocen con certeza, sino que solo existe un grado de acercamiento al comportamiento futuro de ellos y por lo tanto necesitamos realizar una serie de suposiciones o aproximaciones para poder resolver el problema.

En este sentido, la modelación recibe el título de determinística cuando los parámetros utilizados son considerados conocidos, y estocástica cuando existe al menos uno que es incierto.

Un concepto fuertemente ligado a los modelos estocásticos es el referente a escenario, el cual se define de la siguiente forma:

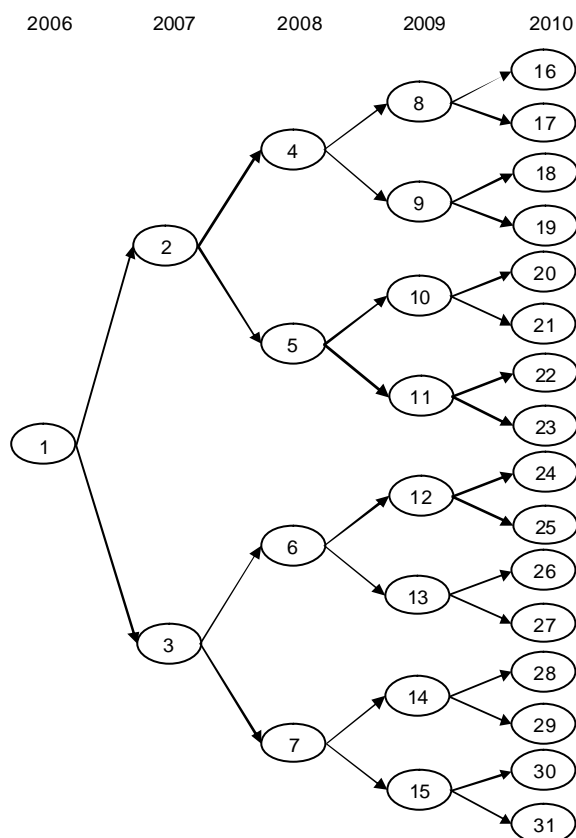
- Un *escenario* corresponde al grupo de valores de los parámetros requeridos para resolver en forma determinística el problema a lo largo del horizonte de planificación.

Es importante notar que las decisiones se toman en forma secuencial en el tiempo y por lo tanto es común que escenarios distintos presenten tramos temporales con valores iguales, esto se denomina principio de no anticipación y es definido por Rockafellar y Wets [1] de la siguiente manera:

- El *principio de no anticipación* establece que si los parámetros de diferentes escenarios son idénticos hasta un período determinado t , sobre la base de la información disponible hasta ese período, entonces las decisiones hasta ese período son idénticas.

De este modo, si combinamos ambas definiciones se presentan los denominados árboles de escenarios, donde cada nodo representa un instante en el tiempo donde se puede tomar una decisión y existen algunos que agrupan varios escenarios cuando se presenta el principio de no anticipación. A continuación se presenta la estructura del árbol del problema que describiremos más adelante.

Figura 1: Ubicación de los nodos en cada período.



El modelo estocástico que desarrollaremos se basa en el enfoque de análisis de escenarios [2], [3], que requiere construir, como su nombre lo dice, un grupo de escenarios diferentes, con el fin de representar adecuadamente la incertidumbre, y buscar una solución que satisfaga de la mejor forma todos los escenarios.

En este sentido, la bondad de la solución en los casos estocásticos será determinada vía el valor esperado y requiere las probabilidades de ocurrencia de cada escenario, de modo de direccionar en forma correcta la predicción.

Lo anterior puede ser modelado mediante dos posibles representaciones: compacta y con variables divididas.

- La *representación compacta o basada en nodos*, consiste en utilizar el concepto de árbol de escenarios al momento de modelar el problema, con el fin de agrupar los escenarios en un nodo cuando estos enfrenten el principio de no anticipación. Lo anterior, deriva en que los pares período-escenario son reemplazados por nodos, que incluyen en forma implícita el principio de no anticipación, y con ello se reduce el número de índices necesarios para la modelación.
- La *representación de variables divididas o basada en escenarios*, como su nombre lo dice, se basa en el concepto de escenario y, por lo tanto, al momento de identificar una variable necesitamos explicitar el escenario evaluado e incluir el principio de no anticipación como una restricción del problema. Lo anterior, resulta extremadamente útil cuando se utilizan esquemas de solución que requieren la restricción de no anticipación o el valor de su respectiva variable dual. Por ejemplo en la literatura es muy común el uso de metodologías de descomposición como Bender[22], generación de columnas[23], relajación Lagrangeana[4] [21], PrimalDual, descomposición cruzada[24] y descomposición anidada entre otras.

En esta tesis utilizaremos ambas, pues la representación compacta se utilizará para resolver el problema estocástico de programación entera-mixta y de variables divididas para el algoritmo del volumen, que corresponde a un algoritmo derivado de la relajación lagrangeana y que por lo mismo requiere el uso explícito del principio de no anticipación.

La programación dinámica[28], otra técnica comúnmente utilizada, se analizará en forma indirecta mediante el uso de prioridad en el branching, pues un redondeo de variables desde el último período hacia primero debería aprovechar de mejor forma la restricción correspondiente a la secuencia de extracción, es decir, identificar infactibilidades con mayor prontitud, y por lo tanto se pueden descartar ciertas ramas con mayor velocidad, lo que lleva a alcanzar la solución más rápido.

Por otro lado, ciertas metodologías que utilizan agrupaciones de escenarios, por ejemplo Branch and Fix Coordinado[17], fueron descartadas, pues presentaban dificultades para cumplir las restricciones de no anticipación y de secuenciamiento.

Es importante mencionar que en la actualidad la industria minera ha centrado sus trabajos en la optimización de la secuencia de extracción en el denominado Ultimate Pit Limit (UPL), mediante el desarrollo de metodologías que ayuden a descartar con rapidez las secuencias inadecuadas y con ello simplifiquen el problema original.

Los papers han presentado:

1. Metodologías de descomposición: las cuales mediante el uso inteligente de la estructura, que habitualmente se traduce en la relajación u omisión de restricciones o variables, transforman un problema de gran tamaño en varios de menor tamaño y fácil resolución [27]. Las más conocidas son: Bender[22], generación de columnas[23], PrimalDual, descomposición cruzada[24], descomposición anidada, relajación Lagrangeana [4] [21] y sus derivados como el algoritmo del Volumen[14] entre otras.
2. Métodos de Cluster: técnicas que reducen el tamaño del problema mediante la agrupación de variables. Un ejemplo en este sentido es la Tesis de Ximena Schultz[5].
3. Programación Dinámica: Metodología que busca reducir el tiempo de ejecución mediante la separación en etapas y resolución secuencial desde el final al inicio de estas. Ejemplo: Sasoeni [28].

4. Diversos métodos manuales, heurística o metaheurísticos.
5. Diversas técnicas para el diseño de cortes.
6. Modelos en Programación Lineal, Programación estocástica[10] [11] [12] [27] y El uso de teoría de Grafos.
7. Trabajos con los algoritmos del Cono flotante (Floating Cone) y Lerchs-Grossman.

Este trabajo analizará la flexibilidad de las secuencias de extracción frente a escenarios cambiantes y de que modo algunas estrategias de resolución pueden presentar problemas. Esto es relativamente novedoso, pues los estudios encontrados que vinculan el precio y la minería se enfocan en el desarrollo de seguros financieros u opciones reales para cubrir el estado de resultados frente a la volatilidad [20] [30] o simplemente buscan mejorar la estimación del precio [31].

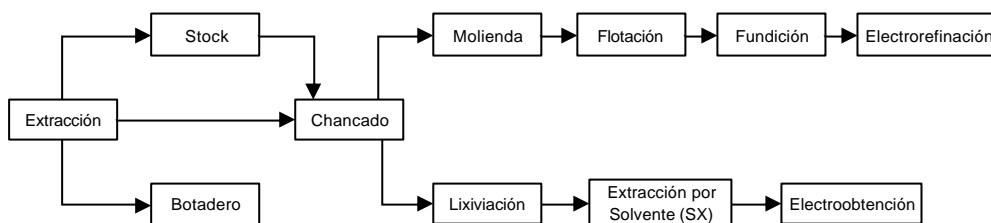
De hecho lo más cercano a este trabajo corresponde al desarrollo de softwares comerciales basados en Excel que utilizando métodos de simulación[32] y suponiendo homogeneidad en los parámetros desarrollan precarios sistemas de sensibilización de utilidades.

En resumen, se espera que este trabajo permita identificar las ventajas de evaluar la secuencia de extracción mediante el uso directo de técnicas estocásticas.

5 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA: LA PLANIFICACIÓN

La planificación minera consta de una serie de procesos necesarios para transformar la roca extraída en un producto vendible internacionalmente, estos procesos se presentan en el siguiente esquema.

Figura 2: Esquema resumido de relaciones entre procesos.



Durante la presente tesis se optó por analizar una mina subterránea, particularmente la mina de El Teniente, pues se cuenta con un modelo previo desarrollado por Ximena Schultz [5], en el cual están determinados los parámetros más importantes como son los costos de extracción. Es importante destacar, que si bien este modelo provee gran parte de la información requerida, se presentan algunos inconvenientes que obligan a reducir el tamaño del problema, modificar algunos elementos e incluir nuevas restricciones.

La modelación utilizada simplifica el proceso minero a la extracción y el procesamiento, donde en la extracción se agrupan los bloques en cluster de extracción y se decide cuáles se utilizan, mientras que en el procesamiento se determina el costo asociado a realizar las diversas transformaciones al flujo de mineral extraído para transformarlo en cobre vendible.

A continuación se describe con mayor detalle el proceso de extracción para una mina subterránea [6] [7], pues será el principal foco en esta tesis, y el problema de la incertidumbre en el precio.

5.1 Extracción en una Mina Subterránea

Una mina subterránea consiste, como su nombre lo dice, en una serie de galerías, rampas, túneles y piques bajo tierra que se construyen a través de explosiones sucesivas de la roca siguiendo una forma previamente determinada, los cuales se pueden dividir en sectores y subsectores. El Teniente presenta 10 sectores que aumentan a 18 si se consideran los subsectores, aunque en nuestro caso utilizaremos solo 3 de ellos.

La extracción, etapa inicial del proceso minero, consiste en extraer las rocas del yacimiento que contienen una porción mineralizada con cobre. Lo anterior se basa en estudios geológicos que permiten determinar las características físicas, químicas y mineralógicas del material a extraer, lo que permite identificar 2 tipos de zonas: sulfuros y óxidos.

Estas zonas permiten definir puntos de extracción, que serán los elementos básicos de nuestro modelo, existiendo de entre 70 a 2500 por cada subsector, con una superficie que varía entre 250m² y 400m² y una altura que oscila entre 549m y 959m.

La extracción de estos puntos se realiza desde abajo hacia arriba, utilizando lo más posible la fuerza de gravedad para producir la fragmentación y el desplazamiento del mineral. Es importante destacar que los altos costos en la construcción de la mina obligan a concentrar la explotación en zonas de alta ley. Además, este tipo de minas se utilizan cuando el material superficial posee una baja ley y un espesor tal que su extracción se torna antieconómica pues, en caso contrario, podría extraerse a rajo abierto (otro sistema de extracción) [16], [29].

Existe una variedad de métodos de explotación subterránea siendo el más utilizado, en la extracción de grandes yacimientos, el conocido como “hundimiento por bloques” o “Block Caving”, que consiste en provocar el desprendimiento de una porción del macizo rocoso del resto de la masa que lo rodea. Para ello y mediante el uso de explosivos, se socava la base de una columna de roca mineralizada, de manera que el resto de la columna se fragmente paulatinamente hacia arriba y se desplome hacia los puntos de extracción especialmente ubicados para captar la casi totalidad del material quebrado de la columna.

Otro método utilizado corresponde al “hundimiento por paneles”, que se diferencia del método anterior por producir el desplome en forma secuencial.

Ambos casos están condicionados a restricciones, principalmente de alturas, que permiten la estabilidad del túnel y condicionan la secuencia de extracción de los puntos de cada sector. A continuación se describen en forma resumida:

- a) Altura de Corte: corresponde a la máxima altura recomendable para realizar la extracción.
- b) Altura de Extracción: corresponde a la máxima diferencia de alturas entre puntos cercanos de extracción.
- c) Altura de Piso: corresponde al estado inicial de un punto de extracción, pues la roca pudo ser explotada antes del primer período de planificación.
- d) Velocidad de Extracción: corresponde a la máxima cantidad de material a extraer en un determinado período, esta se expresa en metros de altura por día.

Finalizada la extracción del material, éste puede ser enviado a diferentes ubicaciones dentro de la mina como son: las estaciones de vaciado, el chancado primario o las zonas de transporte (ferrocarriles), para continuar su proceso de producción y posterior venta en el exterior.

5.2 La incerteza en el precio

Al momento de realizar la planificación minera uno de los principales problemas que enfrentamos es el precio del producto final, pues existen múltiples factores que afectan la demanda y oferta de este producto, lo que deriva en un precio futuro incierto y dificulta la tarea del planificador al desconocer si realmente se alcanzarán las utilidades deseadas.

El área que planifica la extracción óptima utiliza como base un precio determinado por el nivel estratégico de la empresa minera, que es sensibilizado para determinar la robustez de la solución. Además la extracción óptima es monitoreada cada 3 meses, de modo de realizar las modificaciones si son necesarias.

Durante esta tesis nos enfocaremos en el problema de planificación en la mina de cobre de “El Teniente”, considerando un horizonte de 5 años (2006 al 2010) e incertidumbre en el precio del cobre.

Para estudiar la incerteza se construyen 16 escenarios posibles, pues se considera que este es un número suficientemente grande para evaluar el impacto de los diferentes precios y lo suficientemente pequeño como para obtener soluciones computacionales en un tiempo razonable (menos de 1hr.).

Para fabricar dichos escenarios se utiliza la información disponible en: “Anuario de estadísticas del cobre y otros minerales, 1987 - 2006” [8] e “Historical Statistics for Mineral and Material Commodities in the United States”¹ [9], con ellas se determinan los aumentos y reducciones anuales, medidos porcentualmente, y luego se cruzan con el dato del precio inicial, obtenido de la tesis de Ximena

¹ Las estadísticas aquí presente se utilizaron para extender la serie de COCHILCO, pues la información disponible era muy similar a la de COCHILCO, aunque para un periodo mayor. La versión web en: <http://minerals.usgs.gov/ds/2005/140/#ref> (Consulta 8 de Mayo)

Schultz[5], desarrollando así escenarios de precios relativamente reales². De este modo, obtenemos las siguientes series de precios.

Figura 3: Escenarios de precios en US/TON

Escenario	Periodos				
	2006	2007	2008	2009	2010
1	2567,11	3465,61	4678,57	6316,07	8526,69
2	2567,11	3465,61	4678,57	6316,07	4105,44
3	2567,11	3465,61	4678,57	3041,07	4105,44
4	2567,11	3465,61	4678,57	3041,07	1976,69
5	2567,11	3465,61	2252,64	3041,07	4105,44
6	2567,11	3465,61	2252,64	3041,07	1976,69
7	2567,11	3465,61	2252,64	1464,22	1976,69
8	2567,11	3465,61	2252,64	1464,22	951,74
9	2567,11	1668,62	2252,64	3041,07	4105,44
10	2567,11	1668,62	2252,64	3041,07	1976,69
11	2567,11	1668,62	2252,64	1464,22	1976,69
12	2567,11	1668,62	2252,64	1464,22	951,74
13	2567,11	1668,62	1084,61	1464,22	1976,69
14	2567,11	1668,62	1084,61	1464,22	951,74
15	2567,11	1668,62	1084,61	704,99	951,74
16	2567,11	1668,62	1084,61	704,99	458,25

Figura 4: Escenarios de precios en US/LB

Escenario	Periodos				
	2006	2007	2008	2009	2010
1	1,15	1,55	2,09	2,82	3,81
2	1,15	1,55	2,09	2,82	1,83
3	1,15	1,55	2,09	1,36	1,83
4	1,15	1,55	2,09	1,36	0,88
5	1,15	1,55	1,01	1,36	1,83
6	1,15	1,55	1,01	1,36	0,88
7	1,15	1,55	1,01	0,65	0,88
8	1,15	1,55	1,01	0,65	0,42
9	1,15	0,74	1,01	1,36	1,83
10	1,15	0,74	1,01	1,36	0,88
11	1,15	0,74	1,01	0,65	0,88
12	1,15	0,74	1,01	0,65	0,42
13	1,15	0,74	0,48	0,65	0,88
14	1,15	0,74	0,48	0,65	0,42
15	1,15	0,74	0,48	0,31	0,42
16	1,15	0,74	0,48	0,31	0,20

² En la construcción de los precios se analizaron los cambios porcentuales históricos y luego en base a ello se realizaron escenarios extremos, de modo que ciertos escenarios pueden diferir con la realidad actual.

6 DESARROLLO DEL MODELO

6.1 *Supuestos y límites del problema.*

El problema de planificación minero de El Teniente será modelado utilizando la programación entera estocástica [10] [11] [12] o determinística y considera los siguientes supuestos y límites:

- La planificación considera 5 períodos, que corresponden a los años entre el 2006 y el 2010.
- El precio del cobre se considera incierto y se modela en base a 16 escenarios con igual probabilidad de ocurrencia o equiprobables. En el caso de utilizar la representación compacta y considerando el hecho de que la planificación consta de 5 períodos, estos escenarios derivarán en un árbol de 31 nodos.
- La mina estudiada considera solo 3 sectores, forzando a escoger entre extraer el de mayor tamaño y los otros. Lo anterior se realiza para identificar si los diferentes enfoques pueden derivar en extracciones considerablemente diferentes.
- Los sectores se dividen en clusters de extracción, que corresponden a la unidad de básica de extracción del modelo y se determinan a partir de la agrupación de puntos de extracción desarrollada en la tesis de Ximena Schultz [5]. Es importante mencionar que las restricciones de estabilidad del túnel fuerzan a definir una secuencia de extracción de estos clusters.

- Los clusters de extracción tienen asociado un tiempo de extracción y un tonelaje de mineral, cobre y molibdeno extraído, aunque por restricciones de estabilidad se limitará la velocidad de extracción de toneladas. Además, la variación de la velocidad de extracción será penalizada mediante un costo adicional.
- Los clusters del primer nivel tendrán un tratamiento especial, pues se agrega un área de extracción para dimensionar el costo de construir el túnel necesario para poder extraer estos clusters.
- En el modelo original de Ximena Schultz[5], el área se acota inferior y superiormente, pero en esta tesis se analizará si el uso de área y sus respectivas cotas es lo más prudente. Para ello se desarrollarán 3 modelos: con área y cotas, solo con área y reemplazando el uso de área por un costo fijo de construcción o ampliación del túnel en cada sector.

A continuación se describe en forma matemática la modelación del problema.

6.2 Formulación matemática del problema

El modelo matemático consta de una serie de elementos que difieren ligeramente dependiendo de si la modelación es compacta, de variables divididas o determinística.

A continuación me centraré en el enfoque estocástico, el cual utiliza representación compacta, para explicar los diferentes elementos que componen el modelo. Es importante mencionar que los otros enfoques presentan una modelación muy similar a ésta y solo se presentan diferencias en cuanto al manejo de los escenarios o nodos. En el anexo 1 se presenta la modelación utilizando representación de variables divididas, pues ella será necesaria mas adelante.

6.2.1 Índices o Elementos Básicos del problema:

- t : Indica un período en el horizonte de planificación y toma valores enteros entre 2006 y 2010.
- n : Indica un nodo del árbol de escenarios y toma valores enteros entre 1 y 31 cuando se evalúan los 16 escenarios.
- w : Indica un escenario y toma valores entre 1 y 16, pues 16 son los escenarios evaluados.
- a : Indica un determinado sector perteneciente al conjunto de posibles sectores que pueden ser explotados y toma valores según el nombre de cada sector, es decir: "Fw", "ES" y "NN".
- k : Indica un determinado cluster de mineral perteneciente al conjunto de todos lo posibles clusters que pueden extraerse y toma valores entre 1 y 2640.

- $AK(a,k)$: Conjunto de pares ordenados que relaciona los clusters k con los sectores a . Este conjunto se creó dado que los sectores no tienen la misma cantidad de clusters y por lo tanto busca limitar el número de clusters en cada sector. De este modo los clusters quedarán limitados de la siguiente manera: “ES” entre 1 y 2100, “Fw” entre 1 y 664 y “NN” entre 1 y 2640. Más adelante, y con el fin de simplificar la notación, se utilizará $AK(a)$ para referirse al grupo de clusters pertenecientes a un determinado sector a .
- $TN(t,n)$: Conjunto de pares ordenados que relaciona los períodos con los nodos. Su operación es similar a la anterior y da cuenta en qué período se encuentra cada nodo. Los nodos se distribuirán de la siguiente manera: período 2006 nodo 1, período 2007 nodos 2 y 3, período 2008 nodos entre 4 y 7, período 2009 nodos entre 8 y 15, período final 2010 nodos mayores a 15. El subconjunto $TN(t)$ se utilizará para referirse al grupo de nodos existentes en un periodo fijo t y $TN(n)$ para referirse al grupo de periodos que se asocian a un determinado nodo n .
- $WN(w,n)$: Conjunto de pares ordenados que relaciona los escenarios con los nodos. Dicha relación se describe en la siguiente tabla. Al igual que en el caso anterior, $WN(w)$ se referirá al grupo de nodos asociados a un determinado escenario w y $WN(n)$ al grupo de escenarios relacionados a un nodo n .

Figura 5: Relación Escenario Nodo

Escenario	Nodos				
1	1	2	4	8	16
2	1	2	4	8	17
3	1	2	4	9	18
4	1	2	4	9	19
5	1	2	5	10	20
6	1	2	5	10	21
7	1	2	5	11	22
8	1	2	5	11	23
9	1	3	6	12	24
10	1	3	6	12	25
11	1	3	6	13	26
12	1	3	6	13	27
13	1	3	7	14	28
14	1	3	7	14	29
15	1	3	7	15	30
16	1	3	7	15	31

- $Pred(k)$: Conjunto de clusters que preceden al cluster k y que son adyacentes a este.
- $Pred_node(n)$: Conjunto de nodos que preceden al nodo n . Ejemplo el predecesor del nodo 3 es el nodo 1 y por lo tanto $pred_node(3)=1$.
- $G_Area(a,k)$: Conjunto de pares ordenados que identifica qué bloques k , pertenecientes al sector a , son del primer nivel de la mina y por lo tanto requieren de un tratamiento especial para la construcción del túnel de extracción.
- $Simul(a,k,j)$: Conjunto de tríos ordenados que identifica qué bloques k y j pertenecientes al sector a , se deben extraer en forma simultánea. Este conjunto principalmente busca corregir errores en la clusterización.

Es importante destacar que la utilización de clusters de mineral busca reducir el número de variables, de modo de permitir que el problema se resuelva en un tiempo razonable.

6.2.2 Parámetros:

Asociados al Costo:

$d(t)$	Factor de descuento en el período t .
$PrCu(t)$	Precio del cobre en el período t .
$PrMo(t)$	Precio del molibdeno en el período t .
$CostMine(a,t)$	Costo de extraer una tonelada en el sector a durante el período t .
$CostArea(a,t)$	Costo de utilizar una unidad de área en el sector a durante el período t .
$CostInc(a,t)$	Costo asociado a aumentar la extracción del sector a .
$CostDec(a,t)$	Costo asociado a reducir la extracción del sector a .
$CostProcB(t)$	Costo de procesar una tonelada en la máquina B durante el período t .
$CostProcC(t)$	Costo de procesar una tonelada en la máquina C durante el período t .

Asociados al Tiempo:

Time(t)	Días disponibles en el período t.
delta(a,t)	Días de violación que se permiten para el período t en el sector a.
c_time(a,k)	Días necesarios para extraer el cluster k que pertenece al sector a.
c_pretime(a,k)	Días necesarios para extraer los clusters que preceden al bloque k y que pertenecen al sector a. Si bien este parámetro se puede considerar una función de c_time, se calculará en forma externa para utilizarlo en la etapa de preprocesamiento.

Asociados a la Incertidumbre:

Prob(w)	Probabilidad de ocurrencia del escenario w.
---------	---

Asociados al Tonelaje:

c_tons(a,k)	Toneladas asociadas al cluster k que pertenece al sector a.
tons_init(a)	Toneladas por día extraídas en un período previo al inicial para el sector a.
TonMax	Máxima cantidad de toneladas por día que se pueden extraer.
CapB(t)	Máxima cantidad de toneladas por día que pueden ser procesadas por la máquina B.

Asociados al Área:

El concepto de área se utiliza para dimensionar el costo necesario para construir o ampliar el túnel, de modo de poder alcanzar el cluster que se desea extraer. En el modelo original y primera modelación de esta tesis, se utilizan cotas para condicionar el tamaño de la ampliación del túnel.

$c_area(a,k)$	Área asociada al cluster k perteneciente al sector a .
$AreaMin(a)$	Mínima área que debe ser utilizada en el sector a .
$AreaMax(a)$	Máxima área que debe ser utilizada en el sector a .

Asociados a la Ley:

$c_cu(a,k)$	Porcentaje de cobre existente en el cluster k que pertenece al sector a .
$c_mo(a,k)$	Porcentaje de molibdeno existente en el cluster k que pertenece al sector a .

6.2.3 Variables:

Binarias

$$Z(a, k, n) = \begin{cases} 1 & \text{si se extrae el cluster } k \text{ del sector } a \text{ en el nodo } n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$X(a) = \begin{cases} 1 & \text{si se extrae el sector } a \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Positivas

$Cu(a,n)$	Toneladas de cobre extraídas del sector a en el nodo n.
$Mo(a,n)$	Toneladas de molibdeno extraídas del sector a en el nodo n.
$Ton(a,n)$	Toneladas por día extraídas del sector a en el nodo n.
$Area(a,n)$	Área asociada al sector a en el nodo n.
$TonInc(a,n)$	Aumento de las toneladas por día extraídas del sector a en el nodo n.
$TonDec(a,n)$	Reducción de las toneladas por día extraídas del sector a en el nodo n.
$TonB(n)$	Toneladas por día procesadas en la máquina B en el nodo n.
$TonC(n)$	Toneladas por día procesadas en la máquina C en el nodo n.

6.2.4 Preprocesamiento

Basándose en la secuencia de extracción de los clusters y en el tiempo que se requiere para extraer cada uno, se realiza un preprocesamiento que fija en cero las variables asociadas a clusters que no se alcanzan en el tiempo existente.

Condiciones de Preprocesamiento

$$Z(a,k,n) = 0 \quad \text{Si } c_time(a,k) > time(t) + delta(a,t) \quad \forall (t,n) \in TN(t,n)$$

$$Z(a,k,n) = 0 \quad \text{Si } c_ptime(a,k) > \sum_{u \leq t} time(u) \quad \forall (t,n) \in TN(t,n)$$

Este preprocesamiento se realizará mediante archivos auxiliares denominados en forma genérica como "FIXTIME".

6.2.5 Restricciones:

(1) *Toneladas de Cobre, Molibdeno y área asociada al sector a en el nodo n*

$$Cu(a, n) = \sum_{k \in AK(a)} (Z(a, k, n) * c_tons(a, k) * c_cu(a, k))$$

$$Mo(a, n) = \sum_{k \in AK(a)} (Z(a, k, n) * c_tons(a, k) * c_mo(a, k))$$

$$Area(a, n) = \sum_{k \in AK(a)} (Z(a, k, n) * c_area(a, k))$$

(2) *Toneladas por día asociadas al sector a en el nodo n*

$$Time(t)_{t \in TN(n)} * Ton(a, n) = \sum_{k \in AK(a)} (Z(a, k, n) * c_tons(a, k))$$

(3) *Aumento y Reducción de las toneladas extraídas por día asociadas al sector a en el nodo n*

$$TonInc(a, n) = \begin{cases} ton(a, n) - ton(a, u)_{u \in Pred_Node(n)} & \text{si } n \notin TN(1, n) \\ ton(a, n) - tons_init(a) * X(a) & \text{si } n \in TN(1, n) \end{cases}$$

$$TonDec(a, n) = \begin{cases} -ton(a, n) + ton(a, u)_{u \in Pred_Node(n)} & \text{si } n \notin TN(1, n) \\ -ton(a, n) + tons_init(a) * X(a) & \text{si } n \in TN(1, n) \end{cases}$$

(4) *Máxima y mínima área a utilizaren el sector a*

$$\sum_{n \in WN(w)} Area(a, n) \leq AreaMax(a) \quad \forall a, w$$

$$\sum_{n \in WN(w)} Area(a, n) \geq AreaMin(a) * X(a) \quad \forall a, w$$

(5) *Un cluster solo puede ser extraído una vez en el horizonte.*

$$\sum_{n \in WN(w)} Z(a, k, n) \leq 1 \quad \forall a, k, w$$

(6) *Los bloques deben extraer siguiendo una secuencia : los bloques js deben extraerse antes del bloque*

$$\sum_{h \leq n, h \in WN(w, h), n \in WN(w, n)} Z(a, k, h) \leq \sum_{h \leq n, h \in WN(w, h), n \in WN(w, n)} Z(a, j, h) \quad \forall a, k, n, w \quad j \in Pred(k)$$

(7) Máximo tonelaje diario a extraer en el sector a

$$\text{Ton}('ES', n) \leq \text{TonMax} \quad \forall n$$

$$\text{Ton}('Fw', n) + \text{Ton}('NN', n) \leq \text{TonMax} \quad \forall n$$

(8) Conservación de Flujo en el procesamiento de las máquinas

$$\text{TonB}(n) + \text{TonC}(n) = \sum_a \text{Ton}(a, n) \quad \forall n$$

(9) Relación de variables y condición de extraer los sectores Fw y NN o ES

$$\sum_{n \in WN(w)} \sum_k Z(a, k, n) \leq 2640 * X(a) \quad \forall a, w$$

$$X('ES') + \frac{X('Fw') + X('NN')}{2} \leq 1$$

(10) Simultáneos

$$Z(a, k, n) = Z(a, j, n) \quad \forall n, (a, k, j) \in \text{Simul}(a, k, j)$$

(11) Capacidad de procesamiento de la máquina B

$$\text{TonB}(n) \leq \text{CapB}(t)_{t \in TN(n)} \quad \forall n$$

6.2.6 Función Objetivo

Función Objetivo del modelo

$$\sum_w FO(w) * Prob(w)$$

$FO(w)$: Dependerá de la configuración utilizada (Ver más adelante)

Es importante notar que tras realizar el FIXTIME se determinó que la restricción de mínima área no se lograba satisfacer por lo que se optó por analizar 2 tipos de configuraciones:

1. La configuración basada en área, que consiste en asignar un área y un costo a ella para los bloques del primer nivel, pues estos bloques requieren de la construcción del túnel y por lo tanto requieren de un costo adicional. En este sentido, se nos presentan 2 sub-configuraciones:
 - a. La configuración de área que fuerza a extraer todos los bloques del primer nivel de un determinado sector.
 - b. La configuración de área que permite que el modelo decida que bloques del primer nivel extrae.

2. La configuración basada en sector, que consiste en tratar la construcción del túnel como una inversión aparte y que se paga íntegra en el primer período. El costo del túnel corresponderá al costo área de extraer todos los bloques factibles del primer nivel para un determinado sector.

A continuación se presentan las utilidades para ambos esquemas:

1. Configuraciones basadas en Costo Área

Función Objetivo del Escenario w

$$FO(w) = \text{Max} \left(\sum_{n \in WN(w)} p(n) \right)$$

Utilidades, Ingresos y Costos

$$p(n) = d(n) * (Ing(n) - Cost(n))$$

$$Ing(n) = \sum_a (Cu(a,n) * PrCu(n) + Mo(a,n) * PrMo(t)_{t \in TN(n)})$$

$$Cost(n) = Cost_Extrac(n) + Cost_Tunel(n) + Cost_DeltaExtrac(n) + Cost_Proc(n)$$

$$Cost_Extrac(n) = \sum_a (CostMine(a,t)_{t \in TN(n)} * time(t)_{t \in TN(n)} * ton(a,n))$$

$$Cost_Tunel(n) = \sum_a (CostArea(a,t)_{t \in TN(n)} * Area(a,n))$$

$$Cost_DeltaExtrac(n) = Cost_DeltaInc(n) + Cost_DeltaDec(n)$$

$$Cost_DeltaInc(n) = \sum_a (CostInc(a,t)_{t \in TN(n)} * time(t)_{t \in TN(n)} * TonInc(a,n))$$

$$Cost_DeltaDec(n) = \sum_a (CostDec(a,t)_{t \in TN(n)} * time(t)_{t \in TN(n)} * TonDec(a,n))$$

$$Cost_Proc(n) = Cost_B(n) + Cost_C(n)$$

$$Cost_B(n) = CostProcB(t)_{t \in TN(n)} * time(t)_{t \in TN(n)} * TonB(n)$$

$$Cost_C(n) = CostProcC(t)_{t \in TN(n)} * time(t)_{t \in TN(n)} * TonC(n)$$

2. Configuraciones basadas en Costo Sector

Función Objetivo del Escenario w

$$FO(w) = \text{Max} \left(\sum_{n \in WN(n)} p(n) - \text{Cost_Tunel} \right)$$

$$\text{Cost_Tunel} = d(2006) * \sum_a \text{Cost_sector}(a) * X(a)$$

Utilidades , Ingresos y Costos

$$p(n) = d(t) * (\text{Ing}(n) - \text{Cost}(n))$$

$$\text{Ing}(n) = \sum_a (\text{Cu}(a, n) * \text{Pr Cu}(n) + \text{Mo}(a, n) * \text{Pr Mo}(t)_{t \in TN(n)})$$

$$\text{Cost}(n) = \text{Cost_Extrac}(n) + \text{Cost_DeltaExtrac}(n) + \text{Cost_Proc}(n)$$

$$\text{Cost_Extrac}(n) = \sum_a (\text{CostMine}(a, t)_{t \in TN(n)} * \text{time}(t)_{t \in TN(n)} * \text{ton}(a, n))$$

$$\text{Cost_DeltaExtrac}(n) = \text{Cost_DeltaInc}(n) + \text{Cost_DeltaDec}(n)$$

$$\text{Cost_DeltaInc}(n) = \sum_a (\text{CostInc}(a, t)_{t \in TN(n)} * \text{time}(t)_{t \in TN(n)} * \text{TonInc}(a, n))$$

$$\text{Cost_DeltaDec}(n) = \sum_a (\text{CostDec}(a, t)_{t \in TN(n)} * \text{time}(t)_{t \in TN(n)} * \text{TonDec}(a, n))$$

$$\text{Cost_Proc}(n) = \text{Cost_B}(n) + \text{Cost_C}(n)$$

$$\text{Cost_B}(n) = \text{Cost ProcB}(t)_{t \in TN(n)} * \text{time}(t)_{t \in TN(n)} * \text{TonB}(n)$$

$$\text{Cost_C}(n) = \text{Cost ProcC}(t)_{t \in TN(n)} * \text{time}(t)_{t \in TN(n)} * \text{TonC}(n)$$

Es importante mencionar que ciertos parámetros fue necesario actualizarlos, por ejemplo el costo de la libra de cobre presentaba valores muy bajos y por lo tanto se optó por amplificarlo por 8 para llevarlo a un valor más real como es 80 centavos por libra.

7 DESCRIPCIÓN DE LOS ENFOQUES DE SOLUCIÓN

Para enfrentar el problema de planificación minera estocástico se optó por utilizar varios enfoques de solución, de modo de analizar el desempeño de cada uno y finalmente determinar cual o cuales son los más propicios de utilizar.

A continuación, se describen en forma conceptual cada uno de los tipos enfoques utilizados.

7.1 Enfoque Estocástico

El enfoque estocástico corresponde al marco que permite modelar los problemas de optimización que posean algún nivel de incertidumbre. Considerando que los problemas deterministas de la optimización se formulan con parámetros sabidos, los problemas del mundo real incluyen casi siempre algún parámetro desconocido.

Este tipo de problemas, y dependiendo del nivel de acercamiento que se posea al parámetro incierto, se pueden abordar mediante la llamada optimización robusta o programación estocástica.

Nosotros utilizaremos este último enfoque, pues en él se aprovecha el hecho de que las distribuciones de probabilidad que gobiernan los datos son sabidas o pueden ser estimadas. La meta aquí es encontrar una cierta política que sea factible para todos los casos posibles y maximice la expectativa de una cierta función de objetivo, compuesta por un grupo de variables de decisiones.

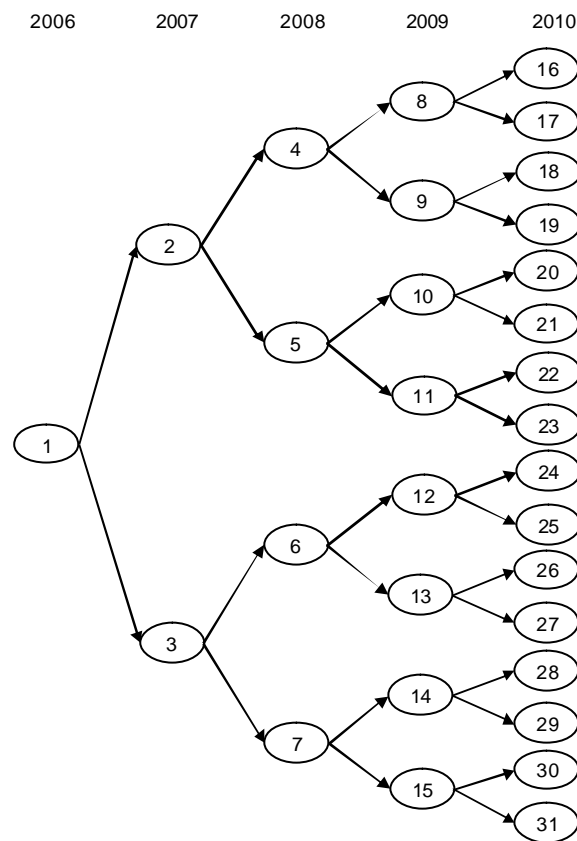
Nuestro problema consiste en analizar la incertidumbre mediante el uso de 16 escenarios que se distribuyen equiprobablemente, que son modelados mediante el uso de la representación compacta y que buscan maximizar las utilidades sujeto principalmente a las variables de decisión que determinan los bloques a extraer. La decisión de la representación se justifica en el número de variables necesarias que se utilizan para modelar la situación (Ver Figura 6).

Figura 6: Tamaño del modelo estocástico en cada representación

Modelo Estocástico		
	Compacta	Var.Divididas
Variables	246.143	635.203
<i>Binarias</i>	245.523	633.603
<i>Continuas</i>	620	1.600
Restricciones	255.279	258.170

Esta modelación utilizará el árbol de escenarios presente en la Figura 7, donde cada rama desde la raíz hasta uno de los nodos terminales representa un posible escenario y los nodos compartidos corresponden a los escenarios que presentan el principio de no anticipación. De este modo, esta estructura asegura, en forma implícita, que una vez que una decisión es tomada no puede ser modificada posteriormente.

Figura 7: Árbol de escenarios del enfoque estocástico.



La importancia de reducir el número de variables en este tipo de modelación, se debe a nuestro modelo es entero binario y suele resolverse mediante metodologías de branching, lo que configura un problema altamente complejo, pues requiere enumerar todas las posibles soluciones, y por lo tanto el problema se vuelve mas complejo entre más combinaciones tenga que explorar.

Si bien existen metodologías que mejoran el funcionamiento de un branching convencional, reduciendo las combinaciones mediante cortes o prioridades, es recomendable manejar un número reducido de variables binarias, y en este sentido, la representación compacta permite un crecimiento más apropiado del problema.

De esta forma el problema consistirá en determinar la extracción óptima sujeta a la incertidumbre en el precio mediante la maximización de la esperanza de la función objetivo, para ello se optimizaran los nodos correspondientes a cada par período-escenario.

Modelo Estocástico con representación compacta³

$$MAX \left(\sum_w \sum_n Prob_w * (P_{n \in WN_w} - C_{k, n \in WN_w}) * c_{tons_k} * X_{k, n \in WN_w} \right)$$

s.a

$$(R1) \quad A * X \leq b$$

con:

$A * X \leq b =$ *Corresponde al grupo de restricciones sin la no - anticipatividad*

$WN_w =$ *Conjunto de Nodos asociados al escenario w*

$Prob_w =$ *Probabilidad del escenario w*

$P_n =$ *Precio en el nodo n*

$C_{k,n} =$ *Costo del cluster k en el nodo n medido en US/Ton*

$c_{tons_k} =$ *toneladas asociadas al cluster k*

$X_{k,n} =$ *Variable binaria de extracción del cluster k en el nodo n*

El enfoque estocástico tiene la ventaja de proveer toda la información existente al modelo y la desventaja de ser de gran tamaño, lo que deriva en importantes tiempos computacionales.

³ Mayor detalles en el Capítulo 6.2: Formulación matemática del problema

7.2 Enfoques determinísticos estáticos

Los enfoques determinísticos estáticos corresponden a modelos que analizan solo un escenario, y en el cual las decisiones tomadas en el período inicial no pueden ser modificadas durante el horizonte de planificación. Al evaluar solo un escenario el tamaño del problema es considerablemente menor al caso anterior.

Figura 8: Tamaño del modelo estocástico v/s determinístico

Tamaño del modelo	Estocastico		Deterministico
	Compacto	Var.Divididas	
Variables	246.143	635.203	39.703
Binarias	245.523	633.603	39.603
Continuas	620	1.600	100
Restricciones	255.279	258.170	18.620

En estos enfoques es de suma importancia determinar cual es el mejor escenario a evaluar. A continuación revisaremos 2 posibles escenarios:

7.2.1 El Escenario Promedio

Este enfoque presume que el escenario promedio es el más representativo de la realidad y por lo tanto sugiere que al resolver el modelo determinístico con este escenario el planificador debería estar cubierto frente a los diferentes escenarios.

En este sentido, se determina la extracción óptima del modelo del escenario promedio (Ver Modelo Determinístico Promedio) y luego, tras convertir los períodos en nodos, se fija esta solución en un modelo estocástico, de modo de obtener la utilidad esperada y corroborar la factibilidad de la solución en cada escenario.

Modelo Determinístico Promedio

$$MAX \left(\sum_w \sum_t (P_{AV,t} - C_{k,t}) * c_{tons_k} * X_{k,t} \right)$$

s.a

$$(R1) \quad A * X \leq b$$

con:

$A * X \leq b$ = *Corresponde al grupo de restricciones sin la no - anticipatividad*

$P_{AV,t}$ = *Precio promedio del periodo t*

$C_{k,t}$ = *Costo del cluster k en el periodo t medido en US/Ton*

c_{tons_k} = *toneladas asociadas al cluster k*

$X_{k,t}$ = *Variable binaria de extracción del cluster k en el periodo t*

Este enfoque tiene la ventaja de obtener resultados en forma rápida, pero al trabajar con promedios se pierde información y por lo tanto certeza.

7.2.2 El Peor Escenario

Este enfoque utiliza el escenario que presenta los peores valores en el dato incierto, por ejemplo en nuestro corresponde a utilizar el escenario con los precios más bajos.

La resolución de este enfoque se realiza en forma similar a la anterior, pero utiliza el peor caso en vez del caso promedio, lo cual presenta la ventaja de asegurar la factibilidad la solución y obtener resultados en forma rápida al igual que en el caso promedio. Por otra parte, la principal desventaja corresponde que al trabajar con el peor caso se pierde muchísima información y por lo tanto los resultados suelen ser muy pobres.

7.3 Enfoques determinísticos dinámicos.

Los enfoques determinísticos dinámicos o también denominados “esperar y ver”, corresponden a modelos que, utilizando un determinado criterio, analizan un escenario, el cual se resuelve en forma gradual y sucesiva actualizando en cada período los valores del caso evaluado y con ello sus respectivas decisiones. Por ejemplo en nuestro caso, en el segundo período se actualizan los valores de los precios según la situación que ocurrió y se actualizan las decisiones desde ese período hasta el final del horizonte, pero no las referentes al primer período.

Este enfoque de solución permite representar el poder de reacción que tiene el tomador de decisiones frente al posible comportamiento de los datos inciertos.

A continuación analizaremos los mismos escenarios anteriores del caso estático, pero desde un punto de vista dinámico.

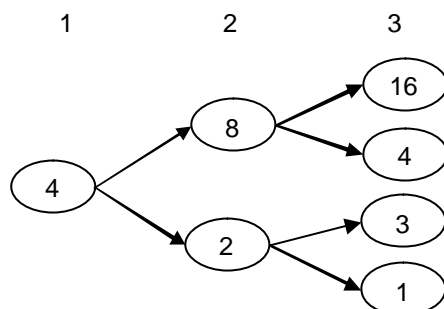
7.3.1 Caso promedio (Wait and See)

Este enfoque corresponde al caso más comúnmente utilizado y por lo tanto cuando hablamos de “esperar y ver” o Wait and See, en general nos referimos a este caso.

Como su nombre lo dice, este enfoque consiste en utilizar el enfoque del caso promedio para determinar las decisiones en cada período, pero al ser dinámico este valor promedio se actualiza en cada período y con ello sus respectivas variables de decisión. Esto permite que a medida que se avanza, la incertidumbre se reduzca y, por lo tanto, en el período final se utilice directamente la situación real.

Por ejemplo: Supongamos un problema de 3 períodos en que los precios están dados por el siguiente esquema:

Figura 9: Ejemplo de Esquema de precios



El enfoque Wait and See determina la planificación en el período 1 utilizando el precio promedio de los todos los escenarios, pues todos son factibles en este período, por lo tanto el precio promedio a utilizar es 4 para el primer período, 5 (El promedio entre 8 y 2) para el segundo período y 6 (El promedio entre 16,4, 3 y 1) para el período final.

Luego en el período 2, si se dio el evento de alza (precio 8) el precio promedio se actualizara a 4, 8 y 10 (El promedio entre 16 y 4), es decir se marginan los escenarios asociados al evento de baja (precio 2).

Al contrario, si en el período 2 se dio la baja, el precio promedio será 4, 2 y 2 (El promedio entre 3 y 1), marginando los escenarios que tienen el precio 8 en el segundo período.

Finalmente en el último período, se utiliza el precio del escenario que se dio, es decir si el precio en el período 2 fue 8 y en el período 3 subió, el escenario evaluado será 4, 8 y 16 que corresponde justamente al que ocurrió.

Es importante notar, que las decisiones del primer período no pueden ser modificadas en el período 2 y 3 y las del segundo período no pueden alterarse en el período final, por lo tanto cada vez que se actualice deberán ser fijadas las decisiones de períodos anteriores.

Este enfoque tiene la ventaja de ir incorporando información a medida que se obtiene y resolver subproblemas en forma rápida, pero al trabajar con promedios, pese a la actualización, se pierde información y por lo tanto se corre el riesgo de tomar una decisión equivocada en un período que no pueda ser corregida en el siguiente. Además la necesidad de moverse a través de los períodos y escenarios puede generar un número significativo de subproblemas, lo que implica que el ahorro en tiempo sea cuestionable.

7.3.2 Peor caso (WS_WC)

Este enfoque opera en forma similar al caso anterior, pero el criterio a utilizar corresponde al peor caso. A diferencia del caso anterior, este enfoque no es muy utilizado y por lo tanto para referirnos a él utilizaremos la sigla WS_WC, es decir wait and see with worst case.

Para revisar su funcionamiento supongamos que enfrentamos el mismo problema de la Figura 8, entonces durante el primer período el problema se resuelve utilizando el escenario más desfavorable, es decir: 4, 2 y 1. Luego en el período 2, se fijan las decisiones del período 1 y se revisa que situación se dio, si fue el alza, entonces se actualiza el peor caso por: 4, 8 y 4, en caso contrario no se mantiene el precio. Finalmente se fijan las decisiones de los períodos 1 y 2 y se evalúan las decisiones según el escenario que ocurrió.

7.4 Enfoque Algorítmico: Esquema basado en Algoritmo del Volumen

Como se describió en el enfoque estocástico, resolver el modelo estocástico presenta gran dificultad, debido principalmente a que requiere el uso de metodologías de branching y, por lo tanto, la enumeración de variables a ramificar deriva en una gran utilización de recursos computacionales y tiempo de ejecución.

En este sentido, el Algoritmo del Volumen [14], que corresponde a una modificación a la metodología de Relajación Lagrangeana [4], busca aprovechar que los modelos determinísticos, que resuelven solo un escenario, son extremadamente rápidos y fáciles de resolver.

El *método de relajación lagrangeana* es una de las técnicas más extendidas en optimización discreta y se utiliza cuando existen restricciones que complican la solución del problema, es decir si la resolución del problema es más sencilla sin alguna restricción.

Esta técnica se basa en la dualización del problema cuya resolución proporciona una aproximación del valor óptimo del problema original mejor que su relajación lineal.

De este modo, si consideramos el siguiente problema (PI):

$$MAX \left(\sum_w \sum_t Prob_w * (P_{t,w} - C_{k,t,w}) * c_{tons_k} * X_{k,t,w} \right)$$

s.a

$$(R1) \quad A * X \leq b$$

$$(R2) \quad X_{k,t,w} - X_{k,t,w+1} = 0$$

con:

$A * X \leq b =$ *Corresponde al grupo de restricciones sin la no - anticipatividad*

$X_{k,t,w} - X_{k,t,w+1} = 0 =$ *Corresponde al grupo de restricciones de no anticipatividad*

$Prob_w =$ *Probabilidad del escenario w*

$P_{t,w} =$ *Precio del escenario w en el periodo t*

$C_{k,t,w} =$ *Costo del cluster k en el periodo t para el escenario w medido en US/Ton*

$c_{tons_k} =$ *toneladas asociadas al cluster k*

$X_{k,t,w} =$ *Variable binaria de extracción del cluster k en el periodo t para el escenario w*

Este algoritmo relajará el grupo de restricciones de no anticipación, de modo de independizar los escenarios, de modo de transformar el problema (PI) en un problema relajado (RL), que puede separarse en varios subproblemas (SP) de menor tamaño, tantos como escenarios existen, y que son de fácil resolución. De este modo, para realizar este algoritmo necesitamos utilizar la modelación estocástica con una representación de variables divididas (Anexo 1)

Luego, basándonos en los conceptos de dualidad, la función objetivo será penalizada de acuerdo al nivel de incumplimiento de la restricción de no anticipación y los denominados “ponderadores de Lagrange”.

Por lo tanto el problema que relaja la restricción de no anticipación (R2) y luego la utiliza para penalizar la función objetivo mediante los ponderadores de Lagrange (I) será nuestro modelo relajado y se denomina modelo de relajación Lagrangeana (RL):

Modelo de Relajación Lagrangeana(RL)

$$L(I^k) = MAX \left(\sum_w \sum_t \text{Prob}_w * (P_{t,w} - C_{k,t,w}) * c_{\text{tons}_k} * X_{k,t,w} + I_{t,w} * (X_{k,t,w} - X_{k,t,w+1}) \right)$$

s.a

$$A * X = b$$

El valor de los ponderadores de Lagrange se determinará siguiendo la metodología iterativa del algoritmo del volumen, aunque al comenzar ellos corresponderán al valor de las variables duales de las restricciones de no anticipatividad para el modelo estocástico continuo.

De este modo, y gracias a que la función objetivo del modelo relajado (RL) permite separar los escenarios y que los ponderadores de Lagrange se determinan previo a la resolución del problema, el nuevo problema se puede separar en 16 subproblemas $L_w(I^k)$ de fácil solución.

Subproblema (SP)

$$L_w(I^k) = MAX \sum_t (\text{Prob}_w * (P_{t,w} - C_{k,t,w}) * c_{\text{tons}_k} + I_{t,w} - I_{t,w-1}) * X_{k,t,w}$$

s.a

$$A * X_w \leq b$$

Entonces el problema central de este algoritmo corresponde a la actualización de los ponderadores Lagrangeanos en cada iteración, es decir si consideramos i como el número de iteraciones $I_{t,w}^i$ se actualizara de la siguiente manera:

$$\bar{Y}^i = \mathbf{g} * (X_{t,w}^i - X_{t,w+1}^i) + (1 - \mathbf{g}) * \bar{Y}^{i-1} \quad \mathbf{g} = 0.5$$

$$\mathbf{m}_{t,w}^i = \begin{cases} I_{t,w}^i & \text{si } L(I^i) < \bar{L}(\bar{I}^i) \\ \mathbf{m}_{t,w}^{i-1} & \dots \dots \dots \end{cases}$$

$$I_{t,w}^{i+1} = \mathbf{m}_{t,w}^i + \mathbf{b}^i * \bar{Y}^i$$

$$\mathbf{b}^i = \mathbf{a} * \frac{\bar{L}(\bar{I}^i) - SF}{\|X_{t,w}^i - X_{t,w+1}^i\|^2} \quad \mathbf{a} = 2$$

con:

$\bar{L}(I^i)$ = La mejor solución Lagrangena hasta i

SF = La mejor solución factible

\bar{Y}^i = Valor histórico del incumplimiento hasta la iteración i

$$\bar{Y}^1 = (X_{t,w}^1 - X_{t,w+1}^1)$$

$$m_{t,w}^1 = I_{t,w}^1$$

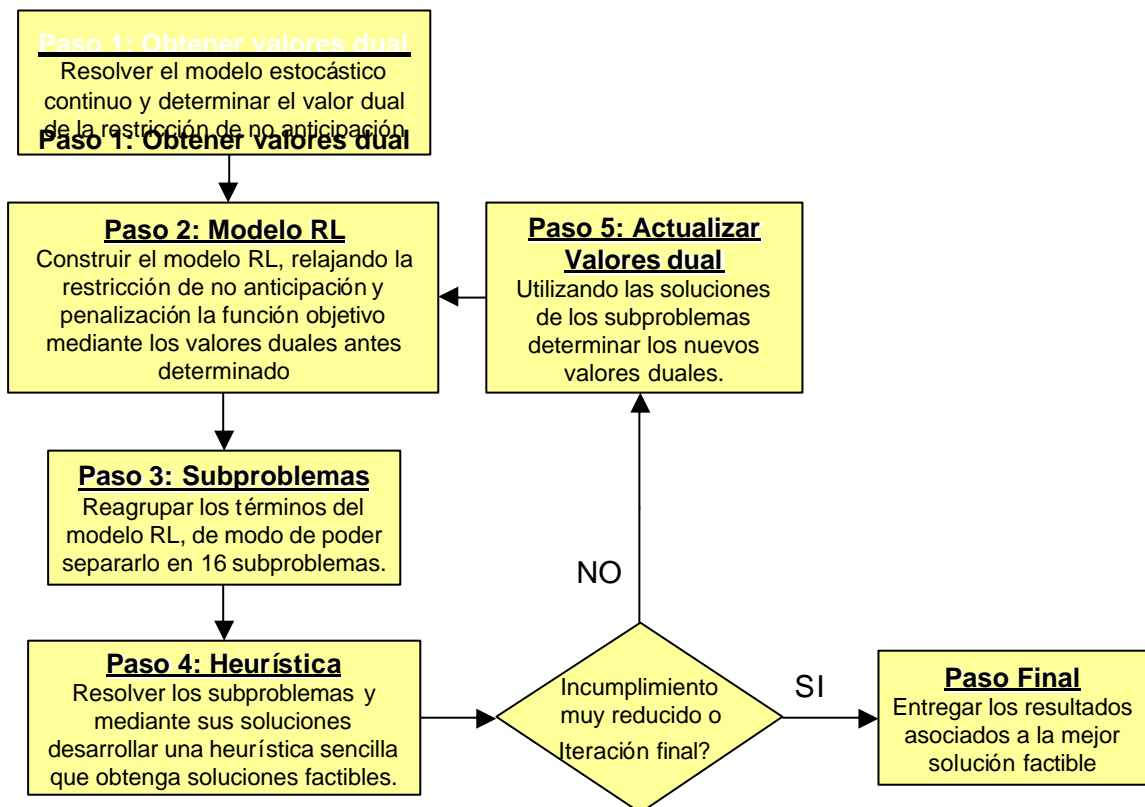
Es importante notar que el resultado del modelo de relajación Lagrangeana $L(I^i)$ es una cota superior del modelo inicial (PI) y por lo tanto a medida que va reduciendo su valor se irá acercando al óptimo del problema inicial. Por otro lado, SF es una cota inferior del modelo, pues es una solución factible no óptima y por lo tanto mejora a medida que va creciendo.

Para obtener soluciones factibles en forma rápida se utilizará el criterio de peor caso para determinar los valores de las variables de decisión para los primeros 4 períodos, dejando solo que el último período se determine mediante un modelo estocástico. Esta heurística es extremadamente sencilla y solo busca alcanzar soluciones factibles en forma rápida, por lo tanto se podrían presentar deficiencias en el valor de la función objetivo.

De este modo en cada iteración se obtendrá una solución factible SF^k , la cual se compara contra la mejor existente hasta la iteración k para determinar la variable SF. Además en cada iteración se medirá el error cuadrático medio del incumplimiento de la restricción de no anticipación, pues si este error es muy bajo (0.00001) se detendrá el algoritmo por considerar que prácticamente no existe incumplimiento.

El algoritmo anterior se resume en el siguiente esquema y su código en GAMS se presenta en el Anexo 2.

Figura 10: Esquema resumen del funcionamiento del Volume Algorithm.



8 RESULTADOS Y ANÁLISIS DEL MODELO

La implantación de modelos matemáticos en la planificación minera es aún algo incipiente y más allá si pensamos en modelos con características estocásticas, es por ello que analizaremos como este enfoque presenta mejores desempeños que otros determinísticos que recién están implementándose en la realidad.

Para ello el análisis será separado en las siguientes etapas: modelación, situación Base y situación con ingreso.

8.1 Modelación

Durante la construcción del modelo se pudo apreciar el significativo el impacto que tiene el preprocesamiento, pues si analizamos solo el número de variables de extracción para un solo escenario podemos observar que se presenta una reducción sobre el 50% en todos los subsectores estudiados.

Figura 11: Tabla del número de variables de extracción.

	ES	Fw	NN
Originales	10500	3320	13200
Post-Preproc.	2761	1610	2239
Reduccion %	73.70%	51.51%	83.04%

Es importante mencionar que en el caso estocástico esta reducción puede ser aun más significativa, pues si revisamos las Figuras 12 observamos que en la columna "Período Crit", que representa el número variables que se tornó cero en ese período, los valores más significativos se aprecian en el primer año. Esta reducción si la revisamos a nivel porcentual (Ver columna % Crit) se mueve en torno al 50% de las variables eliminadas mediante el preprocesamiento.

Figuras 12: Tablas del detalle de preprocesamiento.

ES	<i>Originales</i>	<i>Post-Preproc.</i>			
		<i>Periodo crit.</i>	<i>% Crit</i>	<i>Reduccion</i>	<i>Reduccion %</i>
2006	2100	388	56,31%	388	18,48%
2007	2100	116	16,84%	504	24,00%
2008	2100	55	7,98%	559	26,62%
2009	2100	62	9,00%	621	29,57%
2010	2100	68	9,87%	689	32,81%

Fw	<i>Originales</i>	<i>Post-Preproc.</i>			
		<i>Periodo crit.</i>	<i>% Crit</i>	<i>Reduccion</i>	<i>Reduccion %</i>
2006	664	186	44,82%	186	28,01%
2007	664	103	24,82%	289	43,52%
2008	664	54	13,01%	343	51,66%
2009	664	34	8,19%	377	56,78%
2010	664	38	9,16%	415	62,50%

NN	<i>Originales</i>	<i>Post-Preproc.</i>			
		<i>Periodo crit.</i>	<i>% Crit</i>	<i>Reduccion</i>	<i>Reduccion %</i>
2006	2640	299	52,00%	299	11,33%
2007	2640	108	18,78%	407	15,42%
2008	2640	58	10,09%	465	17,61%
2009	2640	28	4,87%	493	18,67%
2010	2640	82	14,26%	575	21,78%

Además la reducción total del número de variables (Ver Columna Reducción) es bastante significativa en todos los sectores, superando el 50% de las variables en la mina de menor tamaño (Ver Columna Reducción %).

Pese a la reducción anterior, y debido a las complicaciones que presenta el branching de este tipo de problemas, se analizó el uso de prioridad siguiendo la lógica de programación dinámica[28], es decir tornando las variables en valores enteros desde el último período hacia el primero, pues de esta forma se deberían identificar las infactibilidades y alcanzar la solución con mayor prontitud.

A continuación se presentan los resultados de esa prueba:

Figura 13: Tiempos de CPU con y sin prioridad para el modelo estocástico.

Modelo Estocástico		Configuraciones		
		1a	1b	2
Con prioridad	Valor (\$)	352.662.558	354.096.148	352.668.987
	Tiempo (mm:ss)	23:20	25:24	38:13
Sin prioridad	Valor (\$)	352.662.556	354.096.148	352.666.132
	Tiempo (mm:ss)	20:59	25:24	35:37
Diferencia	Valor (\$)	-2	-1	-2.855
	Tiempo (mm:ss)	02:21	00:00	02:36

De este modo, se encontró que el uso de prioridad presenta resultados prácticamente iguales a los sin prioridad y por lo tanto no entrega un real aporte. Cabe destacar que problemas de mayor tamaño podrían llevar a favorecer más claramente el uso o no uso de la prioridad, de modo que esta metodología debería ser reevaluada en esos casos.

Finalmente, y debido a que la restricción de mínima área impuesta en el modelo de Ximena Schultz[5] no se satisface tras la actualización de los parámetros, se optó por analizar si el uso de área era la mejor forma de modelar el problema y por lo tanto se optó por revisar las siguientes configuraciones:

1. Mantener el enfoque de área, mediante dos subconfiguraciones
 - a. Reemplazando la cota mínima por el máximo de bloques del primer nivel factibles a extraer.
 - b. Eliminando la cota mínima
2. Modificar el enfoque de área por un enfoque de sector, el cual trata la construcción del túnel como un costo fijo al utilizar un sector.

A continuación se presenta n tres tablas resumen con las utilidades de diferentes enfoques para estas configuraciones, exceptuando el enfoque WS_WC y el algoritmo del volumen que serán revisados más adelante. Para hacer comparables las funciones objetivos se optó por fijar la solución de cada enfoque en un modelo estocástico, de modo de ver los desempeños en cada escenario y a nivel esperado.

Figura 14: Resumen de utilidades para la configuración 1a (M\$)

Comparación de Escenarios	Utilidades						
	Estocastico	Promedio	%	W&S	%	Worst Case	%
1	1.005.690	967.753	3,77%	957.909	4,75%	223.354	77,79%
2	733.381	719.470	1,90%	706.939	3,61%	222.020	69,73%
3	599.617	582.943	2,78%	584.914	2,45%	220.693	63,19%
4	478.243	463.399	3,10%	471.899	1,33%	220.051	53,99%
5	479.245	457.214	4,60%	471.169	1,69%	217.213	54,68%
6	349.374	337.671	3,35%	356.617	-2,07%	216.570	38,01%
7	294.412	271.935	7,63%	301.112	-2,28%	215.932	26,66%
8	278.258	214.377	22,96%	285.101	-2,46%	215.622	22,51%
9	418.895	349.938	16,46%	371.195	11,39%	134.380	67,92%
10	243.624	230.394	5,43%	238.030	2,30%	133.738	45,10%
11	156.193	164.659	-5,42%	167.804	-7,43%	133.099	14,79%
12	136.513	107.101	21,54%	151.145	-10,72%	132.790	2,73%
13	136.702	104.123	23,83%	140.393	-2,70%	131.424	3,86%
14	111.476	46.565	58,23%	117.269	-5,20%	131.114	-17,62%
15	110.656	14.915	86,52%	118.987	-7,53%	130.807	-18,21%
16	110.322	-12.798	111,60%	118.354	-7,28%	130.658	-18,43%
Valor Esperado	352.663	313.729	11,04%	347.427	1,48%	175.592	50,21%
Desv. Estandar	257.787	271.345	-	242.085	-	44.818	-

Figura 15: Resumen de utilidades para la configuración 1b (M\$)

Comparación de Escenarios	Utilidades						
	Estocastico	Promedio	%	W&S	%	Worst Case	%
1	1.005.717	964.793	4,07%	957.709	4,77%	218.631	78,26%
2	733.343	717.912	2,10%	706.739	3,63%	218.631	70,19%
3	600.268	581.997	3,04%	585.068	2,53%	218.631	63,58%
4	479.202	463.128	3,35%	472.233	1,45%	218.631	54,38%
5	482.194	456.730	5,28%	471.305	2,26%	216.103	55,18%
6	350.943	337.861	3,73%	356.972	-1,72%	216.103	38,42%
7	298.133	272.421	8,62%	302.296	-1,40%	216.103	27,51%
8	282.841	215.188	23,92%	286.792	-1,40%	216.103	23,60%
9	421.222	349.612	17,00%	372.884	11,48%	135.113	67,92%
10	246.546	230.744	6,41%	238.681	3,19%	135.113	45,20%
11	155.294	165.303	-6,45%	169.475	-9,13%	135.113	13,00%
12	135.778	108.070	20,41%	153.454	-13,02%	135.113	0,49%
13	137.100	104.990	23,42%	144.068	-5,08%	133.896	2,34%
14	112.319	47.757	57,48%	122.575	-9,13%	133.896	-19,21%
15	112.319	16.248	85,53%	124.396	-10,75%	133.896	-19,21%
16	112.319	-11.309	-	124.396	-10,75%	133.896	-19,21%
Valor Esperado	354.096	313.840	11,37%	349.315	1,35%	175.936	50,31%
Desv. Estandar	257.557	270.178	-	240.535	-	42.802	-

Figura 16: Resumen de utilidades para la configuración 2 (M\$)

Comparación de Escenarios	Utilidades						
	Estocastico	Promedio	%	W&S	%	Worst Case	%
1	1.007.319	968.280	3,88%	956.770	5,02%	221.479	78,01%
2	734.882	720.886	1,90%	706.679	3,84%	221.479	69,86%
3	603.558	585.587	2,98%	587.038	2,74%	221.479	63,30%
4	481.829	466.472	3,19%	474.523	1,52%	221.479	54,03%
5	484.497	460.635	4,93%	474.947	1,97%	218.951	54,81%
6	354.211	341.520	3,58%	361.288	-2,00%	218.951	38,19%
7	300.510	276.376	8,03%	306.972	-2,15%	218.951	27,14%
8	284.921	219.024	23,13%	291.302	-2,24%	218.951	23,15%
9	423.977	353.569	16,61%	374.686	11,63%	137.015	67,68%
10	247.709	234.454	5,35%	241.852	2,36%	137.015	44,69%
11	160.385	169.310	-5,56%	172.125	-7,32%	137.015	14,57%
12	140.862	111.958	20,52%	155.995	-10,74%	137.015	2,73%
13	141.863	109.148	23,06%	146.324	-3,14%	135.798	4,28%
14	116.241	51.796	55,44%	124.614	-7,20%	135.798	-16,82%
15	116.241	20.430	82,42%	126.736	-9,03%	135.798	-16,82%
16	116.241	-7.184	-	126.736	-9,03%	135.798	-16,82%
Valor Esperado	357.203	317.641	11,08%	351.787	1,52%	178.311	50,08%
Desv. Estandar	256.738	269.918	-	239.670	-	43.291	-

De este modo, se observa que a nivel esperado (Fila Valor Esperado) las soluciones presentan diferencias a nivel de enfoque y configuración utilizada, de modo que el tomador de decisión podría optar al enfoque de acuerdo a la modelación que realice del túnel.

De hecho si se analizan los motivos de las diferencias, se puede deducir lo siguiente:

- La configuración 1a, que es la más similar a la desarrollada por Ximena Schultz, se presenta como la modelación más rígida, pues al condicionar mediante cotas el área a extraer, se fuerza la extracción de algunos clusters del primer nivel y por lo tanto se condiciona la secuencia de extracción.
- La configuración 1b, que corresponde al uso de área sin cotas, nos demuestra que el enfoque de área es difícil de implementar en la realidad, pues si revisamos las áreas que se extraen en cada escenario notamos que se presentan diferencias significativas (Ver Figura 17) y por lo tanto el tomador de decisión enfrentará el dilema de construir o no construir el túnel.

Figura 17: Tabla de áreas extraídas en las configuraciones 1a y 1b

Comparación de Escenarios	Modelo estocastico		
	conf.1a	conf.1b	Dif. %
1	12.913,00	12.913,00	0,00%
2	12.913,00	12.913,00	0,00%
3	12.913,00	12.913,00	0,00%
4	12.913,00	10.829,00	16,14%
5	12.913,00	12.913,00	0,00%
6	12.913,00	10.829,00	16,14%
7	12.913,00	5.630,00	56,40%
8	12.913,00	4.755,00	63,18%
9	12.913,00	12.913,00	0,00%
10	12.913,00	10.829,00	16,14%
11	12.913,00	4.590,00	64,45%
12	12.913,00	2.027,00	84,30%
13	12.913,00	4.590,00	64,45%
14	12.913,00	0,00	100,00%
15	12.913,00	0,00	100,00%
16	12.913,00	0,00	100,00%
PROMEDIO	12.913,00	7.415,25	42,58%

Lo anterior, sugiere que la construcción del túnel debe analizarse en forma separada a la extracción del mineral, como lo hace la configuración 2. Además si se analiza el tipo de decisión, se aprecia que la decisión de la construcción de túnel corresponde a un nivel estratégico, mientras que la forma de extraer corresponde a un nivel operacional y por lo tanto se refuerza la idea de tratar en forma separada la extracción de la construcción del túnel.

8.2 Situación Base

Una vez escogido el modelo se observa claramente que la modelación estocástica presenta los resultados a nivel esperado más significativos (Ver Fila Promedio de la Figura 16), aunque a nivel de escenario se presentan casos mejores en otros enfoques, lo cual parece razonable si entendemos el origen de cada enfoque.

La principal desventaja que presenta la modelación estocástica es el tiempo de resolución requerido, de hecho si revisamos la Figura 18 se pueden apreciar las grandes diferencias que se presentaron en esta tesis.

Figura 18: Tabla de Tiempos (mm:ss)

Tiempos	Configuraciones		
	1a	1b	2
Estocastico	23:20	25:24	38:13
Promedio	00:13	00:26	00:14
W&S	03:24	06:54	03:35
Worst Case	00:06	00:06	00:05

En este sentido, una excelente alternativa resulta el enfoque Wait & See, pues en nuestro caso presenta diferencias a nivel esperado menor del 2% con respecto al enfoque estocástico y tiempos de resolución significativamente menor. Lo anterior, podría ser más significativo en problemas de mayor tamaño, y en situaciones donde el cambio de enfoque lleva consigo un cambio en la elección de los sectores a extraer, lo cual no ocurrió en nuestro problema.

Al revisar los valores del enfoque promedio, notamos la gran ventaja que presenta el uso de modelos dinámicos y como el actualizar en cada período las decisiones permite adaptarse a los múltiples escenarios presentando diferencias tan significativas como las que se presentan en el primer escenario de la Figura 16.

Por lo mismo, el uso de modelos estocásticos se presenta como una gran opción para la planificación minera y podría ayudar a evitar eventos desagradables como los que se presentan en los peores escenarios, de hecho si comparamos la reacción de los enfoques, observamos que la capacidad de reacción o adaptación difiere significativamente entre cada enfoque (Ver Figura 19), siendo el estocástico y Wait and See los que detienen las pérdidas con mayor prontitud.

Figura 19: Utilidades del peor caso⁴ (Miles de dólares M\$)

Peor Escenario	Estocastico	W&S	Promedio	Worst Case
1	127.335	139.379	139.379	153.076
2	-5.600	-4.537	-2.513	-8.111
3	-5.494	-7.937	-26.531	-8.999
4	0	-169	-45.021	-169
5	0	0	-72.497	0
TOTAL	116.241	126.736	-7.184	135.798

Aunque en este aspecto se debe ser cuidadoso, pues por ejemplo el enfoque del peor caso presenta los mejores resultados si da el peor escenario, pero sus resultados son muy malos si da el mejor escenario (Ver Figura 19).

Figura 20: Utilidades del mejor caso⁴ (Miles de dólares M\$)

Mejor Escenario	Estocastico	W&S	Promedio	Worst Case
1	127.335	139.379	139.379	153.076
2	143.318	138.389	104.553	73.826
3	152.933	138.937	158.583	-5.254
4	175.047	161.741	186.788	-169
5	408.685	378.324	378.978	0
TOTAL	1.007.319	956.770	968.280	221.479

⁴ Estas utilidades corresponden a la configuración 2 y no consideran el costo de la construcción del túnel.

De hecho como se observa en la Figura 20, nuevamente es el escenario estocástico el que reacciona de mejor forma, mientras que el Wait and See ni siquiera alcanza a la situación promedio, pues sus mejores rendimientos se concentran en los escenarios más cercanos al promedio, particularmente los que están ligeramente a la baja, como por ejemplo el escenario 12.

Figura 21: Utilidades del escenario 12⁵ (Miles de dólares M\$)

Escenario 12	Estocastico	W&S	Promedio	Worst Case
1	127.335	139.379	139.379	153.076
2	-5.600	-4.537	-2.513	-8.111
3	22.760	31.871	33.631	-7.782
4	935	-6.926	-13.655	-169
5	-4.569	-3.792	-44.883	0
TOTAL	140.862	155.995	111.958	137.015

Finalmente es importante destacar que el enfoque promedio presenta un desempeño general significativamente superior al del enfoque peor caso (Ver Fila Promedio de la Figura 16) y por lo tanto se sugiere evaluar utilizar este último solo si presenta fallas el primero, como por ejemplo en el caso que veremos a continuación.

8.3 Situación con ingreso mínimo

La situación base analizada anteriormente, presenta la deficiencia de solo vincular los escenarios mediante la restricción de no anticipación y por lo tanto resulta ser muy tolerante a diferencias en la toma de decisiones, de modo que se optó por incorporar una restricción de ingreso mínimo por período para analizar si las reacciones vistas en el capítulo anterior son extensibles a problemas de mayor complejidad.

⁵ Estas utilidades corresponden a la configuración 2 y no consideran el costo de la construcción del túnel.

La restricción de ingreso mínimo construida será por período y por lo tanto no considera los factores de descuento correspondiente , quedando de la siguiente manera :

Restricción de Ingreso Mínimo

Ingreso_Min

$$Ing(n) - Cost(n) \geq I_{\min} \quad \forall n$$

El valor del ingreso mínimo (I_{\min}), se determinó obteniendo el valor del peor ingreso obtenido en el escenario del peor caso, y luego se ajustó mediante constante. Debido a que el ingreso mínimo resulto negativo, se optó por exigir como mínimo la mitad de estas pérdidas, pues una mayor exigencia deriva en la no extracción del mineral y por lo tanto no se puede evaluar el problema.

Al incorporar esta restricción, el primer problema que se presenta es que las decisiones derivadas de enfoques promedios, tanto estático o dinámico, no son capaces de satisfacer esta restricción, pues el error en una decisión se arrastra hasta llevar a que al menos en un escenario no se alcance el ingreso mínimo deseado. De hecho, en este caso el Wait and See resulta perjudicial, pues lleva a que la infactibilidad se alcance antes.

Es aquí, donde resulta interesante analizar el enfoque dinámico del peor caso y el algoritmo del volumen, pues ambos enfoques aseguran entregar una solución factible y, gracias al secuenciamiento del primero (Ver Capitulo 7.3.2) y tratamiento iterativo del segundo (Ver Capitulo 7.4), estas soluciones deberían ser mejores que la de un enfoque del peor caso estándar

De este modo, al aplicar estos algoritmos se obtienen los siguientes resultados (Ver Figura 22 y 23).

Figura 22: Tabla comparativa del algoritmo del volumen y el enfoque estocástico.

	Algoritmo del Volumen		Estocástico		%
	Tiempo (hh:mm:ss)	Valor (\$)	Tiempo (hh:mm:ss)	Valor (\$)	
conf1	2:20:00	232.338.963	00:18:41	349.684.520	33,56%
conf2	1:52:03	300.429.962	00:14:18	353.411.292	14,99%
conf3	1:37:37	294.718.936	00:10:55	352.135.341	16,31%

Figura 23: Tabla comparativa del WS_WC y el enfoque estocástico.

	WS_WC		Estocástico		%
	Tiempo (hh:mm:ss)	Valor (\$)	Tiempo (hh:mm:ss)	Valor (\$)	
conf1	00:02:06	342.062.459	00:18:41	349.684.520	2,18%
conf2	00:01:51	343.826.206	00:14:18	353.411.292	2,71%
conf3	00:01:43	342.307.065	00:10:55	352.135.341	2,79%

Como se aprecia, el enfoque dinámico del peor caso presenta un mejor desempeño, tanto a nivel de resultado como tiempo de resolución, que el algoritmo del volumen. Lo anterior se debe a:

- El algoritmo del volumen requiere una heurística complementaria para determinar las soluciones factibles en cada iteración, y la utilizada es extremadamente básica, por lo tanto puede ser muy deficiente para este problema.
- La heurística complementaria presenta características más bien estáticas, lo cual dificulta su capacidad para ajustarse correctamente a los escenarios y lleva a que las mejoras entre iteración sean muy marginales, derivando en que la mejor solución se obtenga prácticamente al iniciar el algoritmo (Ver Figura 24). Esto nuevamente refuerza la tesis de que la heurística complementaria puede ser deficiente para este modelo, pues para alcanzar la solución se necesita de un número no menor de iteraciones y por lo tanto es posible que para alcanzar el óptimo se necesiten de más y con ello se aumente significativamente el tiempo de resolución.

Figura 24: Tabla de iteraciones del Algoritmo del Volumen. (\$)

Algoritmo del Volumen		
# Iteración	Solución Factible Iter. K	Mejor Solución Factible
1	272.026.607	272.026.607
2	283.831.138	283.831.138
3	289.400.545	289.400.545
4	274.353.114	289.400.545
5	290.462.252	290.462.252
6	275.404.327	290.462.252
7	290.884.116	290.884.116
8	294.718.936	294.718.936
9	290.905.112	294.718.936
10	293.659.543	294.718.936
11	290.903.578	294.718.936
12	293.565.997	294.718.936
13	291.007.626	294.718.936
14	293.984.026	294.718.936
15	290.284.083	294.718.936
16	293.918.850	294.718.936
17	290.798.644	294.718.936
18	294.275.255	294.718.936
19	290.704.810	294.718.936
20	294.535.534	294.718.936

- El algoritmo del volumen es una metodología iterativa, por lo tanto depende fuertemente del número de iteraciones que se utilice. En nuestro caso se utilizaron 20 iteraciones, lo cual implica un importante costo en tiempo de resolución, pues en cada iteración se deben correr 16 subproblemas.
- El problema estudiado tiene al precio como elemento incierto y por lo tanto al exigir un ingreso mínimo principalmente se condiciona al peor caso, pues los otros escenarios al presentar escenarios de precios más favorables automáticamente presentan utilidades mayores al ingreso mínimo.

Finalmente llama la atención, que nuevamente la metodología dinámica presente resultados bastante favorables, con un resultado a nivel esperado que solo presenta un 3% de error con respecto al estocástico y a nivel de escenario los resultados en general no superan el 15% de error (Ver Figura 25).

Figura 25: Tabla comparativa Estocástico v/s WS_WC⁶ (\$).

Escenario	Estocastico	WS WC	%
1	1.009.805.199	910.420.159	9,84%
2	737.740.493	665.986.879	9,73%
3	607.906.530	588.139.884	3,25%
4	486.164.715	477.309.030	1,82%
5	493.051.301	481.245.401	2,39%
6	358.539.990	367.012.429	-2,36%
7	305.254.214	328.334.203	-7,56%
8	289.638.180	314.980.312	-8,75%
9	428.051.805	362.603.088	15,29%
10	248.604.907	245.920.658	1,08%
11	152.068.858	165.221.994	-8,65%
12	131.858.583	150.993.457	-14,51%
13	134.165.956	139.803.520	-4,20%
14	108.422.521	118.430.584	-9,23%
15	107.717.517	116.527.124	-8,18%
16	107.717.517	116.527.124	-8,18%
Costo Tunel	4.533.926	4.533.926	0,00%
Valor Esperado	352.135.342	342.307.065	2,79%
Desv.Estandar	260.984.540	230.571.975	11,65%

Esto es destacable, pues si comparamos la metodología peor caso estática v/s dinámica se presentan diferencias bastante significativas, sobretodo cuando los precios son extremadamente positivos (Ver Figura 26) y por lo tanto se demuestra la importancia de poder reaccionar a medida que se cuenta con mayor información.

⁶ Las utilidades por escenario no incluyen el costo del túnel.

Figura 26: Tabla comparativa Peor Caso Estático v/s Dinámico⁷ (\$).

Escenario	Dinámico	Estático	%
1	910.420.159	217.935.091	76,06%
2	665.986.879	217.935.091	67,28%
3	588.139.884	217.935.091	62,95%
4	477.309.030	217.935.091	54,34%
5	481.245.401	190.234.254	60,47%
6	367.012.429	190.234.254	48,17%
7	328.334.203	190.234.254	42,06%
8	314.980.312	190.234.254	39,60%
9	362.603.088	129.779.617	64,21%
10	245.920.658	129.779.617	47,23%
11	165.221.994	129.779.617	21,45%
12	150.993.457	129.779.617	14,05%
13	139.803.520	116.442.176	16,71%
14	118.430.584	116.442.176	1,68%
15	116.527.124	116.442.176	0,07%
16	116.527.124	116.442.176	0,07%
Costo Tunel	4.533.926	4.533.926	0,00%
Valor Esperado	342.307.065	159.063.859	53,53%
Desv.Estandar	230.571.975	43.295.463	81,22%

En resumen, se aprecia que los resultados derivados de enfoques estocásticos y dinámicos son una excelente solución para enfrentar problemas con incertidumbre, aunque se debe ser muy cuidadoso de escoger sabiamente el tipo de enfoque a utilizar, pues el primero corre el riesgo de presentar largos tiempos computaciones, mientras que el segundo podría presentar infactibilidades.

Además observando las desviaciones estándares notamos que el enfoque estocástico presenta la mayor dispersión y el peor caso la menor. Lo anterior, tiene relación con la capacidad de adaptación que cada enfoque posee, pues el primero es capaz de aumentar o reducir el volumen de extracción de acuerdo al precio que se presente, mientras que el segundo mantendrá la misma extracción independiente del escenario que ocurra. Esto también se puede apreciar si observamos la forma de extracción en cada escenario, a modo de ejemplo se presenta la extracción de un segmento del sector Fw para el mejor caso.

⁷ La pequeña diferencia en el peor escenario se debe a que para resolver el problema dinámico se utilizó una modelación ligeramente diferente, el cual derivó en que la solución del branching fuese ligeramente distinto.

Figura 27: Extracción del mejor caso en el enfoque estocástico.

-1	23	77	145	146	146	219	219	219	219	219	284	284	284	284	646	646	646	646	646
-1	-1	78	147	147	147	148	285	285	339	382	382	407	407	407	407	456	456	647	647
-1	-1	78	147	147	147	148	285	339	339	339	382	407	407	407	407	456	456	647	647
-1	-1	78	147	147	147	148	285	339	382	382	382	407	407	407	407	456	647	647	647
-1	24	79	149	149	147	148	285	339	339	339	382	407	407	456	456	456	456	647	647
-1	24	79	149	149	147	148	285	285	339	339	382	407	407	407	407	456	619	456	647
-1	24	79	149	149	149	148	285	285	339	382	382	407	407	407	456	456	619	456	647
-1	26	25	25	80	80	80	80	222	222	220	220	408	408	408	583	583	619	619	647
-1	26	81	82	150	150	221	221	222	222	220	220	408	408	408	583	583	619	647	647
-1	26	81	82	150	221	221	221	222	222	222	220	408	408	408	583	619	647	647	647
-1	27	81	82	151	151	221	221	222	222	220	220	408	408	500	583	619	647	647	647

Figura 28: Extracción del mejor caso en el enfoque WS_WC.

-1	23	77	145	146	146	219	219	219	219	219	284	284	284	284	646	646	646	646	646
-1	-1	78	147	147	147	148	285	285	339	382	382	407	407	407	407	456	456	647	647
-1	-1	78	147	147	147	148	285	339	339	339	382	407	407	407	407	456	456	647	647
-1	-1	78	147	147	147	148	285	339	382	382	382	407	407	407	407	456	647	647	647
-1	24	79	149	149	147	148	285	339	339	339	382	407	407	456	456	456	456	647	647
-1	24	79	149	149	147	148	285	285	339	339	382	407	407	407	407	456	619	456	647
-1	24	79	149	149	149	148	285	285	339	382	382	407	407	407	407	456	619	456	647
-1	26	25	25	80	80	80	80	222	222	220	220	408	408	408	583	583	619	619	647
-1	26	81	82	150	150	221	221	222	222	220	220	408	408	408	583	583	619	647	647
-1	26	81	82	150	221	221	221	222	222	222	220	408	408	408	583	619	647	647	647
-1	27	81	82	151	151	221	221	222	222	220	220	408	408	500	583	619	647	647	647

Figura 29: Extracción del mejor caso en el enfoque Peor Caso.

-1	23	77	145	146	146	219	219	219	219	219	284	284	284	284	646	646	646	646	646
-1	-1	78	147	147	147	148	285	285	339	382	382	407	407	407	407	456	456	647	647
-1	-1	78	147	147	147	148	285	339	339	339	382	407	407	407	407	456	456	647	647
-1	-1	78	147	147	147	148	285	339	382	382	382	407	407	407	407	456	647	647	647
-1	24	79	149	149	147	148	285	339	339	339	382	407	407	456	456	456	456	647	647
-1	24	79	149	149	147	148	285	285	339	339	382	407	407	407	407	456	619	456	647
-1	24	79	149	149	149	148	285	285	339	382	382	407	407	407	407	456	619	456	647
-1	26	25	25	80	80	80	80	222	222	220	220	408	408	408	583	583	619	619	647
-1	26	81	82	150	150	221	221	222	222	220	220	408	408	408	583	583	619	647	647
-1	26	81	82	150	221	221	221	222	222	222	220	408	408	408	583	619	647	647	647
-1	27	81	82	151	151	221	221	222	222	220	220	408	408	500	583	619	647	647	647

Simbología

	Bloques que se extraen en el periodo 2006
	Bloques que se extraen en el periodo 2007
	Bloques que se extraen en el periodo 2008
	Bloques que se extraen en el periodo 2009
	Bloques que se extraen en el periodo 2010

Al observar las figuras anteriores notamos que el enfoque estocástico y WS_WC extraen los mismos bloques, pero el primero tiene la ventaja de dilatar la extracción de los bloques, lo cual es sumamente rentable si consideramos que en el mejor escenario los precios son crecientes en el tiempo.

Por otro lado, el enfoque del peor caso se limita extremadamente al ajustarse a las necesidades del peor caso y por lo tanto extrae muchísimo menos del óptimo que se esperarían en los mejores escenarios.

Además si observamos el comportamiento del enfoque estocástico y WS_WC en el peor caso, notamos que si bien sus resultados en este escenario pueden ser peores que el obtenido en el enfoque del peor caso, el cual es construido para optimizar este escenario, las diferencias no llegan a ser tan significativas como para compensar las ventajas observadas en el mejor caso.

Figura 30: Extracción del peor caso en el enfoque estocástico.

-1	23	77	145	146	146	219	219	219	219	219	284	284	284	284	646	646	646	646	646
-1	-1	78	147	147	147	148	285	285	339	382	382	407	407	407	407	456	456	647	647
-1	-1	78	147	147	147	148	285	339	339	339	382	407	407	407	407	456	456	647	647
-1	-1	78	147	147	147	148	285	339	382	382	382	407	407	407	407	456	647	647	647
-1	24	79	149	149	147	148	285	339	339	339	382	407	407	407	456	456	456	647	647
-1	24	79	149	149	147	148	285	285	339	339	382	407	407	407	407	456	619	456	647
-1	24	79	149	149	149	148	285	285	339	382	382	407	407	407	456	456	619	456	647
-1	26	25	25	80	80	80	80	222	222	222	220	220	408	408	408	583	583	619	647
-1	26	81	82	150	150	221	221	222	222	222	220	220	408	408	408	583	583	619	647
-1	26	81	82	150	221	221	221	222	222	222	220	220	408	408	408	583	619	647	647
-1	27	81	82	151	151	221	221	222	222	222	220	220	408	408	500	583	619	647	647

Figura 31: Extracción del peor caso en el enfoque WS_WC.

-1	23	77	145	146	146	219	219	219	219	219	284	284	284	284	646	646	646	646	646
-1	-1	78	147	147	147	148	285	285	339	382	382	407	407	407	407	456	456	647	647
-1	-1	78	147	147	147	148	285	339	339	339	382	407	407	407	407	456	456	647	647
-1	-1	78	147	147	147	148	285	339	382	382	382	407	407	407	407	456	647	647	647
-1	24	79	149	149	147	148	285	339	339	339	382	407	407	407	456	456	456	647	647
-1	24	79	149	149	147	148	285	285	339	339	382	407	407	407	407	456	619	456	647
-1	24	79	149	149	149	148	285	285	339	382	382	407	407	407	456	456	619	456	647
-1	26	25	25	80	80	80	80	222	222	222	220	220	408	408	408	583	583	619	647
-1	26	81	82	150	150	221	221	222	222	222	220	220	408	408	408	583	583	619	647
-1	26	81	82	150	221	221	221	222	222	222	220	220	408	408	408	583	619	647	647
-1	27	81	82	151	151	221	221	222	222	222	220	220	408	408	500	583	619	647	647

9 CONCLUSIONES

El problema de planificación minera presenta una serie de dificultades, que se presentan desde la modelación del problema hasta la toma de decisiones final. Además la planificación en sí, presenta una serie de etapas que comienzan desde la extracción hasta la venta del producto, pero debido a que la extracción condiciona las demás etapas consideramos que es la principal decisión a tomar y por lo tanto requiere de un análisis extremadamente minucioso.

Si nos enfocamos en los resultados que se obtuvieron durante esta tesis, podemos concluir lo siguiente:

1. La modelación que vincula la extracción y el diseño de túneles no parece la forma más adecuada de enfrentar este tipo de problemas, pues este tipo de decisiones tienen distinto nivel de importancia. La primera corresponde al día a día, es decir es de carácter operacional, mientras que la segunda condiciona la extracción por varios años, es decir corresponde a una decisión Táctico Estratégica.

Además si se utiliza una modelación de este tipo para un problema con incertidumbre, se puede presentar, como nos ocurrió en esta tesis, el dilema de obtener decisiones distintas para la construcción del túnel en cada escenario y por lo tanto no obtener una real respuesta al problema.

2. El preprocesamiento, en este tipo de problemas, juega un rol esencial, pues gracias a esto se logra reducir significativamente el número de variables y por lo tanto el número de combinaciones que se requiere ramificar para volver el valor de la variable entera es muchísimo menor, lo que permite que los tiempos de resolución se reduzcan significativamente.

3. Los enfoques de solución de características determinísticas y estáticas presentan resultados bastante pobres al ser comparados con enfoques dinámicos o directamente estocásticos, pues presenta serias deficiencias para ajustarse a los escenarios y por lo tanto no son capaces de detener eventuales pérdidas, lo cual deriva en escenarios más negativos de lo que podrían ser. En este sentido, se sugiere que no se utilicen estos enfoques en este tipo de problema pues, por ejemplo en nuestro caso, los modelos estáticos presentaron rendimiento bajo el 50% de los dinámicos.
4. Los enfoques promedios presentan mejores resultados que los enfoques peor caso, pero, a diferencia de estos últimos, corren el riesgo de ser infactibles, sobre todo si existen restricciones que ligan las decisiones de cada escenario. De modo que no debería descartarse a priori ninguno de los enfoques.
5. El enfoque estocástico es claramente la metodología más apropiada para enfrentar los problemas con incertidumbre, pues si bien presenta tiempos de resolución mayores a los otros enfoques, a nivel numérico y de factibilidad de la solución presenta los mejores desempeños. En este sentido, es importante que el tomador de decisión considere el tamaño del problema para analizar si utiliza un enfoque estocástico o un enfoque heurístico o algorítmico.
6. Los enfoques dinámicos se presentan como una excelente alternativa para problemas de gran tamaño, aunque se debe ser extremadamente cuidadoso con el criterio que se utilizará, pues como se mencionó anteriormente el criterio de resolución podría presentar problemas de infactibilidad en algunos con restricciones que ligan los escenarios. Lo anterior se puede manejar incorporando estos enfoques dentro de algoritmos que no perjudiquen significativamente el tiempo y que ayuden a asegurar factibilidad.

7. El enfoque algorítmico, Algoritmo del volumen, no presentó los resultados deseados, lo anterior se debe principalmente a que la heurística complementada era extremadamente básica. De hecho, nos demostró que si bien las heurísticas estáticas mejoran cuando se incorporan en este tipo de algoritmo, no es lo suficiente como para alcanzar los resultados obtenidos por enfoques de características dinámicas o estocásticas, y por lo tanto se recomienda que este tipo de enfoque utilice heurísticas de características dinámicas que permitan un mayor flexibilidad con respecto a los escenarios.

En resumen, la modelación estocástica presentan los mejores resultados como para realizar un correcto análisis de riesgo frente a los diferentes precios u otro factor incierto y con ello entrega a la empresa que la utilice una importante ventaja competitiva, pues con ello pueden desarrollar estrategias óptimas para reaccionar frente a los diferentes escenarios de precios, de modo de asegurar que sus utilidades no bajen de un cierto nivel y con ello proteger la supervivencia de la empresa.

Un aspecto interesante de mencionar es el hecho que si bien las empresas en la actualidad utilizan un enfoque determinístico dinámico, el cual presenta un margen de error aceptable con respecto al estocástico, la determinación del precio a utilizar es realizada en un área independiente a la de planificación y por lo tanto se corre el riesgo de obtener soluciones infactibles en modelos que exijan condiciones tales como la del ingreso mínimo. Un ejemplo claro de esto fue el enfoque dinámico con precio promedio o Wait & See (W&S), el cual presentó serias deficiencias de factibilidad cuando se le exigió cumplir con una restricción de ingreso mínimo. De modo, que la empresa deberá tener bien definidas las responsabilidades y las instancias de arbitraje interdepartamental ante este tipo de conflicto o considerar el uso directo de modelos estocásticos en el área de planificación.

10 TRABAJOS FUTUROS

Al finalizar este trabajo se debe mencionar que existen aún bastantes temas que analizar respecto a los modelos estocásticos aplicados a la minería, de modo que algunas extensiones interesantes en esta materia podrían ser:

- Revisar la validez de las heurísticas W&S y WS_WC en problemas mineros con distribuciones de probabilidad no equiprobable y minas de mayor tamaño.
- Analizar el uso de algoritmos con heurísticas complementarias de carácter dinámico, como por ejemplo un algoritmo del volumen que utiliza WS_WC como generador de soluciones factibles.
- Estudiar el enfoque de optimización robusta y ver si presenta ventajas con respecto a los estudiados.
- Estudiar otros enfoques algorítmicos como, por ejemplo, el Algoritmo progresivo de Hedging.
- Incorporación de otras etapas del proceso minero en la modelación.
- Estudio de la incertidumbre en otros parámetros como son la demanda, la factibilidad del uso de máquinas, etc.

De este modo, las empresas podrían contar con una o varias herramientas de apoyo a la toma de decisiones que le ayudarían a enfrentar de forma más informada y mejor los futuros riesgos que depara una realidad incierta.

BIBLIOGRAFIA

- [1] R.T.ROCKAFELLAR y R.J.-B. WETS. "Scenario and Policy aggregation in optimization under uncertainty". Mathematics of Operations Research. 1991
- [2] A.ALONSO-AYUSO, L.F.ESCUDERO, A.GARÍN, M.T. ORTUÑO y G.PÉREZ. "An approach for strategic supply chain planning based on stochastic 01 programming". Journal of Global Optimization.2003.
- [3] R.J.-B. WETS. "The aggregation principle in scenario analysis and stochastic". In: Wallace, S.W.(Ed.), Algorithms and model formulations in Mathematical Programming. Springer, Berlin, 1989.
- [4] M.GUIGNARD, "Lagrangean Decomposition and Lagrangean Substitution for Stochastic Integer Programming" OPIMDept., Wharton School, University of Pennsylvania, Philadelphia, USA, 2003.
- [5] WEINTRAUB, ANDRES; PEREIRA, MARIANELA; SCHULTZ, XIMENA. 2007."A priori and a posteriori Aggregation Procedures to Reduce Model Size in MIP Mine planning models". Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile
- [6] CODELCO EDUCA, www.codelco.cl (consulta 29 de octubre 2007)
- [7] CAROCA VALLEJOS, SERGIO ENRIQUE. 2006. "Planificación de actividades y asignación de recursos en una obra de minería subterránea: aplicación faenas El Peñón". Tesis de Ingeniería Civil, Universidad de Chile.

- [8] COCHILCO, "Anuario de estadísticas del cobre y otros minerales, 1987 - 2006", versión web en: <http://www.cochilco.cl/desarrollo/estudios/anuario-pdf-final.pdf> (Consulta 8 de Mayo 2008)
- [9] "Historical Statistics for Mineral and Material Commodities in the United States", La versión web en: <http://minerals.usgs.gov/ds/2005/140/#ref> (Consulta 8 de Mayo 2008)
- [10] J.R. BIRGE y F.V.LOUVEAUX. "Introduction to Stochastic Programming". 1997.
- [11] P.KALL Y S.W.WALLACE. "Stochastic Programming". John Wiley. 1994.
- [12] R.SCHULTZ. "Stochastic Programming with integer variables". Mathematical Programming. 2003.
- [13] J.L.HIGLE y S.SEN. "Stochastic Decomposition". Kluwer Academic Publishers. 1996.
- [14] F. BARAHONA y R. ANBIL. "The volume algorithm: producing primal solutions with a subgradient method". Mathematical Programming. 2000
- [15] CORTES; ORDÓÑEZ; SOUYRIS; WEINTRAUB. 2005. "A robust optimization approach to dispatching technicians under stochastic service times". Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile.
- [16] GOIC FIGUEROA, MARCEL GUSTAVO. 2003. "Formulación e implementación de un modelo de programación matemática para la planificación de largo plazo en minería a cielo abierto". Tesis de Ingeniería Civil Industrial y Magíster en Gestión de Operaciones, Universidad de Chile

- [17] HERNÁNDEZ GONZÁLEZ, SERGIO PATRICIO ALEJANDRO. 2005. "Aplicación de programación estocástica a un problema de localización de cárceles". Tesis de Ingeniería Civil Industrial y Magíster en Gestión de Operaciones, Universidad de Chile
- [18] HUNEEUS LAGOS, FELIPE ANTONIO. 2004. "Generación de escenarios de planificación minera" ". Tesis de Ingeniería Civil en Minas, Universidad de Chile.
- [19] SAN MARTÍN REYES, JUAN FRANCISCO. 2004. "Incorporación de riesgo en la planificación minera". Tesis de Ingeniería Civil en Minas, Universidad de Chile.
- [20] SAURÉ VALENZUELA, DENIS ROLAND. 2003. "Enfoque de opciones reales para la optimización de los planes mineros de largo plazo". Tesis de Ingeniería Civil Industrial y Magíster en Gestión de Operaciones, Universidad de Chile .
- [21] MARSHALL L. FISHER. 2004. "The Lagrangian Relaxation Method for Solving Integer Programming Problems". Management Science Vol.50.
- [22] SHARON DEMONSABERT, PAUL THORNTON. "Benders decomposition model for sewer rehabilitation planning for infiltration and inflow planning". Water Environment Research, Volume 69, Number 2.
- [23] OGUZ, OSMAN. 2002. "Generalized Column Generation for Linear Programming" Management Science Vol. 48.
- [24] HOLMBERG, KAJ. 1994. "Cross decomposition applied to integer programming problems: duality gaps and convexification in parts". Operations Research Vol. 42.

- [25] MULVEY, JOHN y M. RUSZCZYNSKI, ANDRZEJ. 1995. "A new scenario decomposition method for large-scale stochastic optimization". Operations Research Vol. 43.
- [26] HOBBS, BENJAMIN F. y JI, YUANDONG. 1997. "Stochastic programming-based bounding of expected production costs for multiarea electric power systems" Operations Research Vol. 47.
- [27] RAMOS, ANDRÉS y CERISOLA, SANTIAGO. 2008. "Optimización estocástica". http://www.doi.icaei.upcomillas.es/intro_simio.htm
- [28] SASIENI, MAURICE. 1960. "Dynamic Programming and Inventory Problems". Operational Research Vol. 11.
- [29] HOCHBAUM, DORIT S. Y CHEN, ANNA.2000."Performance Analysis and Best Implementations of Old and New Algorithms for the Open-Pit Mining Problem". Operations Research, Vol. 48
- [30] Samis, Michael E&Y. "Valuing and Assessing Risk of Sub-Economic Resources at a Pit Gold Mine using Advanced Valuation Methods". Workshop on operations research in mining(ORM) 2008
- [31] Foix, Cristian y Weber, Richard. "Pronóstico del precio del cobre mediante redes neuronales", Revista Ingeniería de Sistemas Volumen XXI, 2007
- [32] Coloma, Eduardo. Maptek. "Variabilidad en Planes de producción usando simulación condicional y SAR". Workshop on operations research in mining(ORM) 2008

ANEXO

1. Modelo Estocástico con representación de Variables Divididas.

a. Variables:

Variable Binaria

$$Z(a, k, t, w) \begin{cases} 1 & \text{si se extrae el cluster } k \text{ del sector } a \text{ en el periodo } t \text{ en el escenario } w \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$X(a) \begin{cases} 1 & \text{si se extrae el sector } a \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Variable positiva

$Cu(a, t, w)$	Toneladas de Cobre extraídas del sector a durante el período t en el escenario w
$Mo(a, t, w)$	Toneladas de Molibdeno extraídas del sector a durante el período t en el escenario w
$Ton(a, t, w)$	Toneladas por día extraídas del sector a durante el período t en el escenario w
$Area(a, t, w)$	Área asociada al sector a durante el período t en el escenario w
$TonInc(a, t, w)$	Aumento de las toneladas por día extraídas del sector a durante el período t en el escenario w
$TonDec(a, t, w)$	Reducción de las toneladas por día extraídas del sector a durante el período t en el escenario w

TonB(t,w)	Toneladas por días procesadas en la maquina B durante el período t en el escenario w
TonC(t,w)	Toneladas por días procesadas en la maquina C durante el período t en el escenario w

b. Restricciones:

(1) Toneladas de Cobre, Molibdeno y area asociada al sector a en el periodo t y escenario w

$$Cu(a,t,w) = \sum_{k \in AK} (Z(a,k,t,w) * c_tons(a,k) * c_cu(a,k))$$

$$Mo(a,t,w) = \sum_{k \in AK} (Z(a,k,t,w) * c_tons(a,k) * c_mo(a,k))$$

$$Area(a,t,w) = \sum_{k \in AK} (Z(a,k,t,w) * c_area(a,k))$$

(2) Toneladas por días asociada al sector a en el periodo t y escenario w

$$Time(t)_{t \in TN} * Ton(a,t,w) = \sum_{k \in AK} (Z(a,k,t,w) * c_tons(a,k))$$

(3) **Aumento y Reducción de las toneladas extraídas por días asociadas al sector a en el período t y escenario w**

$$TonInc(a, t, w) = \begin{cases} ton(a, t, w) - ton(a, t-1, w) \\ ton(a, t, w) - tons_init(a) * x(a) \end{cases} \quad \text{si } t = 2006$$

$$TonDec(a, n) = \begin{cases} -ton(a, t, w) + ton(a, t-1, w) \\ -ton(a, t, w) + tons_init(a) * x(a) \end{cases} \quad \text{si } t = 2006$$

(4) **Máxima y mínima area a utilizar en el sector a**

$$\sum_t Area(a, t, w) \leq AreaMax(a) \quad \forall a, w$$

$$\sum_t Area(a, t, w) \geq AreaMin(a) * X(a) \quad \forall a, w$$

(5) **Un cluster solo puede ser extraído una vez en el horizonte.**

$$\sum_t Z(a, k, t, w) \leq 1 \quad \forall a, k, w$$

(6) **Un cluster solo puede ser extraído una vez en cada escenario.**

$$\sum_{u \leq t} Z(a, k, u, w) \leq \sum_{u \leq t} Z(a, j, u, w) \quad \forall a, k, t, w \quad j \in Pred(k)$$

(7) **Máximo tonelaje diario a extraer en el sector a**

$$Ton('ES', t, w) \leq TonMax \quad \forall t, w$$

$$Ton('Fw', t, w) + Ton('NN', t, w) \leq TonMax \quad \forall t, w$$

(8) **Conservación de Flujo en el procesamiento de las maquinas**

$$TonB(t, w) + TonC(t, w) = \sum_a Ton(a, t, w) \quad \forall t, w$$

(9) Relación de variables y condición de extraer los sectores Fw y NN o ES

$$\sum_t \sum_k Z(a, k, t, w) \leq 2640 * X(a) \quad \forall a, w$$

$$X('ES') + \frac{X('Fw') + X('NN')}{2} \leq 1$$

(10) Simultaneos

$$Z(a, k, t, w) = Z(a, j, t, w) \quad \forall a, k, t, w \quad j \in Simul(a, k, j)$$

(11) Capacidad de procesamiento de la máquina B

$$TonB(t, w) \leq CapB(t) \quad \forall t, w$$

(12) Restricción de No anticipación

$$Z(a, k, t, w) = Z(a, k, t, w+1) \quad \forall a, k \quad t \leq 2009 \quad w \in TW(t)$$

Donde TW(t) corresponde al conjunto de escenarios pertenecientes a un determinado período.

c. Función Objetivo

Función Objetivo del modelo

$$\sum_w FO(w) * Prob(w)$$

Utilidades para cada configuración:

Configuraciones basadas en Costo Área

Función Objetivo del Escenario w

$$FO(w) = \text{Max}(\sum_t \mathbf{p}(t, w))$$

Utilidades , Ingresos y Costos

$$\mathbf{p}(t, w) = \mathbf{d}(t) * (\text{Ing}(t, w) - \text{Cost}(t, w))$$

$$\text{Ing}(t, w) = \sum_a (\text{Cu}(a, t, w) * \text{Pr Cu}(t, w) + \text{Mo}(a, t, w) * \text{Pr Mo}(t))$$

$$\text{Cost}(t, w) = \sum_a (\text{CostMine}(a, t) * \text{time}(t) * \text{ton}(a, t, w) + \text{CostArea}(a, t) * \text{Area}(a, t, w)) +$$

$$\sum_a (\text{CostInc}(a, t) * \text{time}(t) * \text{TonInc}(a, t, w) + \text{CostDec}(a, t) * \text{time}(t) * \text{TonDec}(a, t, w)) +$$

$$\text{Cost ProcB}(t) * \text{time}(t) * \text{TonB}(t, w) + \text{Cost ProcC}(t) * \text{time}(t) * \text{TonC}(t, w)$$

Configuraciones basadas en Costo Sector

Función Objetivo del Escenario w

$$FO(w) = \text{Max}(\sum_t \mathbf{p}(t, w) - \mathbf{d}(2006) * \sum_a \text{Cost}_{\text{sector}}(a) * X(a))$$

Utilidades , Ingresos y Costos

$$\mathbf{p}(t, w) = \mathbf{d}(t) * (\text{Ing}(t, w) - \text{Cost}(t, w))$$

$$\text{Ing}(t, w) = \sum_a (\text{Cu}(a, t, w) * \text{Pr Cu}(t, w) + \text{Mo}(a, t, w) * \text{Pr Mo}(t))$$

$$\text{Cost}(t, w) = \sum_a (\text{CostMine}(a, t) * \text{time}(t) * \text{ton}(a, t, w)) + \sum_a (\text{CostInc}(a, t) * \text{time}(t) * \text{TonInc}(a, t, w)) +$$

$$\text{CostDec}(a, t) * \text{time}(t) * \text{TonDec}(a, t, w) + \text{Cost ProcB}(t) * \text{time}(t) * \text{TonB}(t, w) +$$

$$\text{Cost ProcC}(t) * \text{time}(t) * \text{TonC}(t, w)$$

2. Código en GAMS del Algoritmo del Volumen.

*-----

* Sets

*-----

Sets

t planning periods

w scenarios

a sectors

k cluster indices within each sector

tw(t,w)

ak(a,k) clusters (sector-cluser index pairs)

pred(a,k,k) precedence relations

simul(a,k,k) ;

alias(k,j);

alias(t,u);

*-----

* Parameters

*-----

Parameters

time(t)	available time in each period
c_tons(a,k)	total tons in each cluster
c_cu(a,k)	percentage of cu in each cluster
c_mo(a,k)	percentage of mo in each cluster
tons_init(a)	tons per day of rock mined in pre-initial period
tons_max	maximum tons per day
tons_min(a,t)	minimum tons per day
tons_max_up(a,t)	maximum increase of tons per day
tons_max_dn(a,t)	maximum decrease of tons per day
cap_f(t)	maximum tons per day of all sectors in tons per day
cap_b(t)	maximum tons per day for processing stream b
discount_factor(t)	
price_cu(t,w)	
price_mo(t)	
cost_mining(a,t)	
cost_increase(a,t)	
cost_decrease(a,t)	
cost_processing_b(t)	
cost_processing_c(t)	
cost_sector(a)	
Prob(w)	
z_best_feas(a,k,t,w)	best z feasible solution
cu_best(a,t,w)	best cu feasible solution
mo_best(a,t,w)	best mo feasible solution
cost_best(t,w)	best cost feasible solution
tons_best(a,t,w)	best tons feasible solution

```

    tons_inc_best(a,t,w)  best tons_inc feasible solution
    tons_dec_best(a,t,w)  best tons_dec feasible solution
    z_aux(a,k,t,w)
;

*-----
* Data initialization
*-----

set dummy_for_odering /1*3000/;
set t /2006, 2007, 2008, 2009, 2010/;
set w /1*16/;
set k /1*2640/;
set a /
$include C:\Users\Felipi\Desktop\Tesis 08-04-2009\Parametros_ESNNFw\sectors.dat
/;

set tw /
    2006.(1*15),
    2007.(1*7,9*15),
    2008.(1*3,5*7,9*11,13*15),
    2009.(1,3,5,7,9,11,13,15)
/;

set ak /
    ES.(1*2100),
    Fw.(1*664),
    NN.(1*2640)
/;

****Aqui viene la carga de datos, pero para el informe sera eliminada****

```

*-----

* Variables

*-----

Free variables

obj objective # value of the objective function
fo(w)
util(t,w) utility

Binary variables

z(a,k,t,w) cluster # 1 iff cluster is extracted in time period t
x(a)

Positive variables

tons(a,t,w) tonnage # tons/day of rock in period t in sector a
tons_inc(a,t,w) tonnage_up # increase of tons/day in period t in sector a
tons_dec(a,t,w) tonnage_dn # decrease of tons/day in period t in sector a
tons_fb(t,w) flow_b # tons/day sent to processing b in period t
tons_fc(t,w) flow_c # tons/day sent to processing c in period t
cu(a,t,w) copper # total tons of Cu in period t in sector a
mo(a,t,w) molybdenum # total tons of Mo in period t in sector a
revenue(t,w) revenues # undiscounted revenues from cu and mo
cost(t,w) costs # undiscounted costs per year
SZ(a,t,w)

;

*-----

* Variables fijas

*-----

\$include 'C:\Users\Felipi\Desktop\Tesis
 2009\FIX_TIME\Fix_T_ESNNFw_VarDivid_16.txt';

08-04-

*-----

* Equation declarations

*-----

Equations

def_objective define objective function
def_fo(w)
def_util(t,w)
Min_util(t,w)
def_revenues(t,w) define revenues
def_costs(t,w) define costs
def_cu(a,t,w) define total tons of Cu in each sector in each period
def_mo(a,t,w) define total tons of Mo in each sector in each period
def_tons(a,t,w) define total tons of rock in each sector in each period
def_tons_inc(a,t,w) define increment of total tons of rock in each sector in each
 period
def_tons_dec(a,t,w) define decrement of total tons of rock in each sector in each
 period
gub_cluster(a,k,w) each cluster at most once
prec_order(a,k,j,t,w) ordering of clusters
tons_ub1(t,w) upper bounds on tonnages
tons_ub2(t,w) upper bounds on tonnages
tons_lb(a,t,w) lower bounds on tonnages
tons_inc_ub(a,t,w) upper bounds on increment of tonnages
tons_dec_ub(a,t,w) upper bounds on decrement of tonnages
flow_processing(t,w) flow conservation for processing stream
RelVar(a,w)
NoAllSector
capacity_b(t,w) total capacity for processing stream b
simultaneos(a,k,j,t,w)
rest_SZ(a,t,w)
ScenarioPeriod(a,k,t,w)

;

```

*-----
* Equation definitions
*-----
*      WC_Value=sum((a,t,w),discount_factor(t)*prob(w)*(cu.l(a,t,'16')*price_cu(t,w)+
      mo.l(a,t,'16')*price_mo(t))-sum(t,discount_factor(t)*cost.l(t,'16'))-
      sum((a,k,t,w)$ak(a,k) and ord(t)<5),Alpha(a,k,t,w)*z.l(a,k,t,'16'));

def_objective..
      obj =e= sum(w, prob(w)*fo(w));

def_fo(w)..
      fo(w)=e=sum(t, util(t,w))-discount_factor('2006')*sum(a,cost_sector(a) * x(a));

def_util(t,w)..
      util(t,w) =e= discount_factor(t)*(revenue(t,w)-cost(t,w));

Min_util(t,w)..
      util(t,w) =g= discount_factor(t)*(-13531661.72)*0.5;

def_revenues(t,w)..
      revenue(t,w) =e= sum( a,cu(a,t,w)*price_cu(t,w)+ mo(a,t,w)*price_mo(t));

def_costs(t,w)..
      cost(t,w) =e= sum( a, 8*cost_mining(a,t)*time(t) * tons(a,t,w)
      + 8*cost_increase(a,t)*time(t) * tons_inc(a,t,w)
      + 8*cost_decrease(a,t)*time(t) * tons_dec(a,t,w))
      + 8*cost_processing_b(t)*time(t) * tons_fb(t,w)
      + 8*cost_processing_c(t)*time(t) * tons_fc(t,w);

def_cu(a,t,w)..
      cu(a,t,w) =e= sum( k $ak(a,k), z(a,k,t,w)*c_tons(a,k)*c_cu(a,k)*0.01);

```

def_mo(a,t,w)..

mo(a,t,w) = sum(k \$ak(a,k), z(a,k,t,w)*c_tons(a,k)*c_mo(a,k)*0.01);

def_tons(a,t,w)..

time(t) * tons(a,t,w) = sum(k\$ak(a,k), z(a,k,t,w)*c_tons(a,k));

def_tons_inc(a,t,w)..

tons_inc(a,t,w) = tons(a,t,w) - tons(a,t-1,w)\$ (ord(t)>1) - tons_init(a)\$ (ord(t)=1)*x(a);

def_tons_dec(a,t,w)..

tons_dec(a,t,w) = tons(a,t,w) - tons(a,t-1,w)\$ (ord(t)>1) + tons_init(a)\$ (ord(t)=1)*x(a);

gub_cluster(ak,w)..

sum(t,z(ak,t,w)) = 1;

prec_order(a,k,j,t,w) = pred(a,k,j)..

sum(u \$ (ord(u) le ord(t)), z(a,k,u,w)) = sum(u \$ (ord(u) le ord(t)), z(a,j,u,w));

tons_ub1(t,w)..

tons('ES',t,w) = 2*tons_max;

tons_ub2(t,w)..

tons('Fw',t,w)+tons('NN',t,w) = 2*tons_max;

tons_lb(a,t,w)..

tons(a,t,w) = tons_min(a,t);

tons_inc_ub(a,t,w)..

tons_inc(a,t,w) = tons_max_up(a,t);

tons_dec_ub(a,t,w)..

$$\text{tons_dec}(a,t,w) = \text{tons_max_dn}(a,t);$$

flow_processing(t,w)..

$$\text{tons_fb}(t,w) + \text{tons_fc}(t,w) = \text{sum}(a, \text{tons}(a,t,w));$$

RelVar(a,w)..

$$\text{sum}((k,t), z(a,k,t,w)) = 2640 * x(a);$$

NoAllSector..

$$x('ES') + 0.5 * x('Fw') + 0.5 * x('NN') = 1;$$

capacity_b(t,w)..

$$\text{tons_fb}(t,w) = 1.67 * \text{cap_b}(t);$$

simultaneos(a,k,j,t,w) \$simul(a,k,j)..

$$z(a,k,t,w) = z(a,j,t,w);$$

rest_SZ(a,t,w)..

$$\text{SZ}(a,t,w) = \text{sum}(k, \text{zak}(a,k), z(a,k,t,w));$$

ScenarioPeriod(ak,t,w)\$(ord(t)<5 and tw(t,w))..

$$z(ak,t,w) - z(ak,t,w+1) = 0;$$

*-----

* Model definition

*-----

Model mining /

def_objective

def_fo

def_util

Min_util

def_revenues

def_costs

def_cu

def_mo

def_tons

def_tons_inc

def_tons_dec

flow_processing

gub_cluster

prec_order

tons_ub1

tons_ub2

RelVar

NoAllSector

capacity_b

simultaneos

rest_SZ

ScenarioPeriod

/;

```

*-----
* Solve model
*-----

option decimals = 8;
option iterlim = 1000000000; # set limit for iterations
option reslim = 1000000000; # set limit for time
option optca = 0; # set absolute optimality tolerance = 0
mining.optcr = 0; # set relative optimality tolerance = 0%

Solve mining using rMIP maximizing obj;
abort$(mining.modelstat <> 1) "stop, model mining not solved to optimality";

****Aqui se generan los reportes, pero no se considera para el informe****

*-----
* Build Alpha
*-----

parameters
    Lamda(a,k,t,w)
    Lamda_Hist(a,k,t,w)
    Alpha(a,k,t,w) # dual value
    Dif(a,k,t,w)
    Dif_Hist(a,k,t,w)
;
loop((a,k,t,w)$ (ak(a,k) and tw(t,w) and ord(t)<5),
    Lamda(a,k,t,w)=ScenarioPeriod.m(a,k,t,w);
    Lamda_Hist(a,k,t,w)=ScenarioPeriod.m(a,k,t,w);
);

```

```

loop((a,k,t,w)$ak(a,k) and ord(t)<5),
  Alpha(a,k,t,w)=Lamda(a,k,t,w)$tw(t,w)-Lamda(a,k,t,w-1)$ord(w)>1 and tw(t,w-
  1))+0
);

*-----
* Report Alpha
*-----

file Alfa_E1 /C:\Users\Felip\\Desktop\Tesis 08-04-2009\Volume_Alg\Conf.3 - Sector (solo
  tunel fact)\Output_VA\Alfas.txt;
put Alfa_E1;
Alfa_E1.nw=20;
put 'Resultados de la Funcion Objetivo de cada escenario';
loop((a,k,t,w)$ak(a,k) and ord(t)<5), put a.tl:4,put @10, put k.tl:4,put @20,put t.tl:4,put
  @30, put w.tl:4,put @40, put Alpha(a,k,t,w) /);

*-----
* Variable
*-----

Free variables
  obj_LR      objective    # value of the objective function with Lamda<0
  obj_LR_sA   objective    # value of the objective function with Lamda=0

Binary variables
  y(a,w)
;

```

*-----

* Sets LR

*-----

Sets

wd(w)

alias (w,ww);

*-----

* Update Equation

*-----

Equations

def_obj_LR define objective function

def_obj_LR_sA define objective function

def_fo_LR(w)

def_util_LR(t,w)

Min_util_LR(t,w)

def_revenues_LR(t,w) define revenues

def_costs_LR(t,w) define costs

def_cu_LR(a,t,w) define total tons of Cu in each sector in each period

def_mo_LR(a,t,w) define total tons of Mo in each sector in each period

def_tons_LR(a,t,w) define total tons of rock in each sector in each period

def_tons_inc_LR(a,t,w) define increment of total tons of rock in each sector in
each period

def_tons_dec_LR(a,t,w) define decrement of total tons of rock in each sector in
each period

gub_cluster_LR(a,k,w) each cluster at most once

prec_order_LR(a,k,j,t,w) ordering of clusters

tons_ub1_LR(t,w) upper bounds on tonnages

tons_ub2_LR(t,w) upper bounds on tonnages

tons_inc_ub_LR(a,t,w) upper bounds on increment of tonnages

```

tons_dec_ub_LR(a,t,w)    upper bounds on decrement of tonnages
flow_processing_LR(t,w)  flow conservation for processing stream
RelVar_LR(a,w)
NoAllSector_LR(w)
capacity_b_LR(t,w)      total capacity for processing stream b
simultaneos_LR(a,k,j,t,w)
rest_SZ_LR(a,t,w)
;

*-----
* Equation definitions
*-----

def_obj_LR..
    obj_LR    =e=    sum(wd,prob(wd)*fo(wd))-sum((a,k,t,wd)$ak(a,k)    and
                ord(t)<5),Alpha(a,k,t,wd)*z(a,k,t,wd));

def_obj_LR_sA..
    obj_LR_sA =e= sum(wd,prob(wd)*fo(wd));

def_fo_LR(wd)..
    fo(wd)=e=sum(t, util(t,wd)) -discount_factor('2006')*sum(a,cost_sector(a)*y(a,wd));

def_util_LR(t,wd)..
    util(t,wd) =e= discount_factor(t)*(revenue(t,wd)-cost(t,wd));

Min_util_LR(t,wd)..
    util(t,wd) =g= discount_factor(t)*(-13531661.72)*0.5;

def_revenues_LR(t,wd)..
    revenue(t,wd) =e= sum( a,cu(a,t,wd)*price_cu(t,wd)+ mo(a,t,wd)*price_mo(t));

```

def_costs_LR(t,wd)..

$$\begin{aligned} \text{cost}(t,wd) = & \text{sum}(a, 8*\text{cost_mining}(a,t)*\text{time}(t) * \text{tons}(a,t,wd) \\ & + 8*\text{cost_increase}(a,t)*\text{time}(t) * \text{tons_inc}(a,t,wd) \\ & + 8*\text{cost_decrease}(a,t)*\text{time}(t) * \text{tons_dec}(a,t,wd)) \\ & + 8*\text{cost_processing_b}(t)*\text{time}(t) * \text{tons_fb}(t,wd) \\ & + 8*\text{cost_processing_c}(t)*\text{time}(t) * \text{tons_fc}(t,wd); \end{aligned}$$

def_cu_LR(a,t,wd)..

$$\text{cu}(a,t,wd) = \text{sum}(k \$ak(a,k), z(a,k,t,wd)*c_tons(a,k)*c_cu(a,k)*0.01);$$

def_mo_LR(a,t,wd)..

$$\text{mo}(a,t,wd) = \text{sum}(k \$ak(a,k), z(a,k,t,wd)*c_tons(a,k)*c_mo(a,k)*0.01);$$

def_tons_LR(a,t,wd)..

$$\text{time}(t) * \text{tons}(a,t,wd) = \text{sum}(k\$ak(a,k), z(a,k,t,wd)*c_tons(a,k));$$

def_tons_inc_LR(a,t,wd)..

$$\begin{aligned} \text{tons_inc}(a,t,wd) = & \text{g} = \text{tons}(a,t,wd) - \text{tons}(a,t-1,wd) \$(\text{ord}(t)>1) - \\ & \text{tons_init}(a) \$(\text{ord}(t)=1) * y(a,wd); \end{aligned}$$

def_tons_dec_LR(a,t,wd)..

$$\begin{aligned} \text{tons_dec}(a,t,wd) = & \text{g} = \text{tons}(a,t,wd) + \text{tons}(a,t-1,wd) \$(\text{ord}(t)>1) + \\ & \text{tons_init}(a) \$(\text{ord}(t)=1) * y(a,wd); \end{aligned}$$

gub_cluster_LR(ak,wd)..

$$\text{sum}(t,z(ak,t,wd)) = 1;$$

prec_order_LR(a,k,j,t,wd) \$pred(a,k,j)..

$$\text{sum}(u \$(\text{ord}(u) \leq \text{ord}(t)), z(a,k,u,wd)) = \text{sum}(u \$(\text{ord}(u) \leq \text{ord}(t)), z(a,j,u,wd));$$

tons_ub1_LR(t,wd)..

$$\text{tons('ES',t,wd)} = 2 * \text{tons_max};$$

tons_ub2_LR(t,wd)..

$$\text{tons('Fw',t,wd)} + \text{tons('NN',t,wd)} = 2 * \text{tons_max};$$

tons_inc_ub_LR(a,t,wd)..

$$\text{tons_inc}(a,t,wd) = \text{tons_max_up}(a,t);$$

tons_dec_ub_LR(a,t,wd)..

$$\text{tons_dec}(a,t,wd) = \text{tons_max_dn}(a,t);$$

flow_processing_LR(t,wd)..

$$\text{tons_fb}(t,wd) + \text{tons_fc}(t,wd) = \text{sum}(a, \text{tons}(a,t,wd));$$

RelVar_LR(a,wd)..

$$\text{sum}((k,t), z(a,k,t,wd)) = 2640 * y(a,wd);$$

NoAllSector_LR(wd)..

$$y('ES',wd) + 0.5 * y('Fw',wd) + 0.5 * y('NN',wd) = 1;$$

capacity_b_LR(t,wd)..

$$\text{tons_fb}(t,wd) = 1.67 * \text{cap_b}(t);$$

simultaneos_LR(a,k,j,t,wd) \$simul(a,k,j)..

$$z(a,k,t,wd) = z(a,j,t,wd);$$

rest_SZ_LR(a,t,wd)..

$$\text{SZ}(a,t,wd) = \text{sum}(k, \text{zak}(a,k), z(a,k,t,wd));$$

*-----

* Model de finition

*-----

Model Lagrange_Relax /

def_obj_LR

def_fo_LR

def_util_LR

Min_util_LR

def_revenues_LR

def_costs_LR

def_cu_LR

def_mo_LR

def_tons_LR

def_tons_inc_LR

def_tons_dec_LR

flow_processing_LR

gub_cluster_LR

prec_order_LR

tons_ub1_LR

tons_ub2_LR

RelVar_LR

NoAllSector_LR

capacity_b_LR

simultaneos_LR

rest_SZ_LR

/;

Model Determ /

def_obj_LR_sA

def_fo_LR

def_util_LR

Min_util_LR

def_revenues_LR

def_costs_LR

def_cu_LR

def_mo_LR

def_tons_LR

def_tons_inc_LR

def_tons_dec_LR

flow_processing_LR

gub_cluster_LR

prec_order_LR

tons_ub1_LR

tons_ub2_LR

RelVar_LR

NoAllSector_LR

capacity_b_LR

simultaneos_LR

rest_SZ_LR

/;

scalars

zlr

WC_Value

zlbest best upper bound

zl_feas current feasible value

zl_feas_WC for the worst case /0/

zl_best_feas best feasible value /0/

tol

Norm

GAP

Beta

Salida

iter_best

count_iter;

*-----

* LP Solution and the first LR Solution

*-----

zlbest=obj.l;

scalar LP_time;

LP_time=mining.resusd;

*-----

*Volume Alg. and Lazy Heuristic(Worst Case)

*-----

tol=1e-5;

Salida=0;

Norm=1;

iter_best=0;

count_iter=0;

zl_feas=0;

Lagrange_Relax.optcr=0.005;

Lagrange_Relax.prioropt=1;

z.prior(ak,t,w)= 10-ord(t);

file out /C:\Users\Felipi\Desktop\Tesis 08-04-2009\Volume_Alg\Conf.3 - Sector (solo
tunel fact)\Output_VA\Times.txt/;

put out ;

out.nw=20;

put "LP Model - Value and Total Time"/;

put "LP value =",zlbest, " CPU time = ",LP_time //;

set iter /1*20/;

scalar LR_time;

loop (iter\$(Salida=0),

 zlr = 0;

 wd(w) = no;

 LR_time=0;

 put "ITERATION ",iter.tl/;

```

*-----
* 16th LR Subproblem
*-----

wd('16') = yes;
solve Lagrange_Relax using MIP maximizing obj_LR;
abort$((Lagrange_Relax.modelstat <> 1) and (Lagrange_Relax.modelstat <> 8)) "no
integer solution found for Lagrange_Relax";
zlr = zlr + Lagrange_Relax.object;
LR_time=LR_time+Lagrange_Relax.resusd;
wd('16') = no;
z_aux(ak,t,'16')=z.l(ak,t,"16");

*-----
* lazy heuristic_modified on 26 Jan 09_not last period
*-----

z.fx(ak,t,w)$ (ord(t)<5) = z.l(ak,t,"16");
mining.optcr = 0.005; mining.reslim=1000000000;
mining.optfile = 1;
Solve mining using MIP maximizing obj;
if(((mining.modelstat =1) or (mining.modelstat = 8)),
    zl_feas=obj.l;
    put /"lazy heuristic_modified - Value and Total Time"/;
    put "      current feasible solution value = ",zl_feas,", CPU time =
",mining.resusd:7:2/;
    if ((zl_best_feas < zl_feas), zl_best_feas = zl_feas;
        z_best_feas(ak,t,w) = z.l(ak,t,w);
        cu_best(a,t,w)=cu.l(a,t,w);
        mo_best(a,t,w)=mo.l(a,t,w);
        cost_best(t,w)=cost.l(t,w);
        tons_best(a,t,w)=tons.l(a,t,w);
        tons_inc_best(a,t,w)=tons_inc.l(a,t,w);

```

```

        tons_dec_best(a,t,w)=tons_dec.l(a,t,w);
        put "    new best feasible solution value = ",zl_best_feas/;
    ); # end if ((zl_best_feas < zl_feas)
); # end if ((mining.modelstat)
abort$(zl_best_feas>zlbst) "error lazy, F.obj inconsistente";

```

```
*-----
```

```
*Free Variables and refix
```

```
*-----
```

```

z.lo(a,k,t,w) = 0;
z.up(a,k,t,w) = 1;
z.l(ak,t,'16')=z_aux(ak,t,'16');

```

```
$offlisting
```

```
$include          'C:\Users\Felip\i\Desktop\Tesis
                  2009\FIX_TIME\Fix_T_ESNNFw_VarDivid_16.txt';
```

```
08-04-
```

```
$onlisting
```

```
*-----
```

```
* Lagrange Problems, except the 16th
```

```
*-----
```

```

put "Lagrange Relaxation Subproblems - Times"/;
put "Iter:",iter.tl," Scenario:16 ", " Time:", Lagrange_Relax.resusd/;

```

```
* LR Subproblems
```

```

loop(ww$(ord(ww)<16),
    wd(ww) = yes;
    solve Lagrange_Relax using MIP maximizing obj_LR;
    abort$((Lagrange_Relax.modelstat <> 1) and (Lagrange_Relax.modelstat <> 8))
    "no integer solution found for Lagrange_Relax";

```

```

    put "Iter:",iter.tl," Scenario:",ww.tl, " Time:", Lagrange_Relax.resusd/;
    zlr = zlr + Lagrange_Relax.objest;
    LR_time=LR_time+Lagrange_Relax.resusd;
    wd(ww) = no
); # end loop ww
put "Lagrange Relaxation Iteration - Value and Total Time"/;
put "LR value =",zlr, "      CPU time =",LR_time /;
count_iter=count_iter+1;

if((Norm<tol),
    if(zlr<zlbest,
        zlbest=zlr;
    );
    put "The Best LR value =",zlbest //;
    Salida=1;
Else
    loop((a,k,t,w),
        Dif(a,k,t,w)=z.l(a,k,t,w)-z.l(a,k,t,w+1);
        if(ord(iter)=1,
            Dif_Hist(a,k,t,w)=Dif(a,k,t,w);
        else
            Dif_Hist(a,k,t,w)=0.5*Dif(a,k,t,w)+0.5*Dif_Hist(a,k,t,w);
        );
    );

Norm=sum((a,k,t,w),sqr(Dif(a,k,t,w)));
if(zlr<zlbest,
    zlbest=zlr;
    iter_best=count_iter;
    GAP=zlbest-zl_best_feas;
    put "GAP = ", GAP/;

```

```

Beta=2*GAP/Norm;
loop((a,k,t,w),
    Lamda_Hist(a,k,t,w)=Lamda(a,k,t,w);
    Lamda(a,k,t,w)=Lamda(a,k,t,w)+Beta*Dif_Hist(a,k,t,w);
);
else
GAP=zlbest- zl_best_feas;
put "GAP = ", GAP/;
Beta=2*GAP/Norm;
loop((a,k,t,w),
    Lamda(a,k,t,w)=Lamda_Hist(a,k,t,w)+Beta*Dif_Hist(a,k,t,w);
);
); # end if zlr < zlbest
put "The Best LR value =",zlbest //;
loop((a,k,t,w)$ (ak(a,k) and ord(t)<5),
    Alpha(a,k,t,w)=Lamda(a,k,t,w)$ (tw(t,w))-Lamda(a,k,t,w-1)$ (ord(w)>1
and
tw(t,w-1))+0
);
); # end if norm < tol

); # end loop iter

put "SUMMARY:"/;
put "The Best LR value      =",zlbest /;
put "The Best LR Iteration  =",iter_best /;
put "The Best WC and Lazy_Heuristic value = ",zl_best_feas /;
GAP=100*(zlbest-zl_best_feas)/zl_best_feas;
put "Final GAP = ", gap:8:3//;
put "¿STOP CRIT.? YES(1)/NO(0)  = ",Salida /;

```

****Luego de esto viene el reporte final, también se elimina del informe****