



**UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL**

**ANÁLISIS MODAL PARA EL ESTUDIO DE RESONANCIA DE ONDAS INTERNAS
EXCITADAS POR EL VIENTO EN EL LAGO VILLARRICA**

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA, MENCIÓN RECURSOS Y MEDIO AMBIENTE HÍDRICO**

MEMORIA PARA OPTAR AL TITULO DE INGENIERO CIVIL

CARLOS DAVID ROZAS ROJAS

**PROFESOR GUÍA:
YARKO NIÑO CAMPOS**

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
ALBERTO DE LA FUENTE STRANGER
RODRIGO CIENFUEGOS CARRASCO**

**SANTIAGO DE CHILE
MARZO 2011**

RESUMEN DE LA TESIS
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL Y MAG. CS.
ING. MENC. REC. Y MED. AMB. HIDR.
POR: CARLOS ROZAS ROJAS
FECHA: 25/03/2011
PROF. GUÍA: SR. YARKO NIÑO CAMPOS

ANÁLISIS MODAL PARA EL ESTUDIO DE RESONANCIA DE ONDAS INTERNAS EXCITADAS POR EL VIENTO EN EL LAGO VILLARRICA

El lago Villarrica se encuentra en la Región de la Araucanía, Chile. Posee una profundidad media de 120 [m] y una longitud principal de 23 [km]. El lago es monomítico, con una marcada estratificación térmica en la temporada de verano. Durante los últimos años, el lago ha pasado de un estado oligotrófico a uno mesotrófico, por lo que es necesario desarrollar herramientas para conocer mejor la calidad de sus aguas y su hidrodinámica. Ésta está determinada por la estratificación en el periodo de verano, la rotación terrestre y el viento que sopla diariamente sobre la superficie. Cuando la estratificación está presente, el viento genera ondas en la interfaz de densidad, llamadas ondas internas. Cuando el periodo del viento calza con el periodo de alguna de las ondas internas presentes en el lago se produce el fenómeno de resonancia, el cual hace crecer las amplitudes de las ondas, favoreciendo los procesos de mezcla horizontal y vertical. Así, el objetivo principal de esta tesis es caracterizar la evolución de las ondas gravitacionales internas del lago Villarrica y determinar la resonancia entre las frecuencias principales del viento y alguna de estas ondas internas, las cuales corresponden a los modos normales de oscilación del lago.

Con este fin se realizaron campañas de terreno para medir la evolución temporal de la estructura térmica del lago y los modos fueron obtenidos mediante un análisis modal, el cual consiste en resolver el problema de valores y vectores propios generalizado que surge al plantear y discretizar las ecuaciones que rigen el sistema sin viento forzante, suponiendo que la respuesta está formada por una parte espacial y otra temporal, desacopladas entre sí. Este modelo teórico/numérico fue programado en Matlab®, obteniéndose la estructura espacial y el período asociado a cada onda. A partir de esta información, se realizaron simulaciones numéricas de la dinámica de la termoclina y se ajustaron los datos simulados a los observados mediante la calibración de coeficientes de disipación de energía, los cuales producen decaimiento de las ondas internas y un retraso en su frecuencia angular. Además, el fenómeno de resonancia fue estudiado a nivel teórico y experimental, mediante la realización de experiencias de laboratorio en la Universidad de Dundee, Escocia, las cuales confirman la existencia de resonancia en un sistema estratificado forzado periódicamente y validan el análisis teórico realizado.

Los resultados del trabajo realizado indican que la dinámica de las ondas internas en el lago está dominada por la onda Kelvin fundamental, de período cercano a las 24 [hrs], la cual se encuentra en un estado resonante con el viento que sopla diariamente. En la práctica, esta interacción resonante estaría controlada por la fricción con el fondo y las paredes del lago, y explicaría las amplitudes de las oscilaciones observadas en terreno, las cuales son grandes en comparación a la baja intensidad de viento registrada. Además, los resultados muestran la presencia de ondas internas de período comprendido entre 5 y 7 [hrs], las cuales estarían siendo excitadas por interacciones no lineales entre ondas de menor frecuencia. Se concluye que el análisis modal es una herramienta útil como primera descripción de la hidrodinámica de un lago.

Agradecimientos

Al finalizar este camino llamado Universidad, no puedo dejar de mirar atrás y sentirme profundamente querido y agradecido por todas las personas que, directa e indirectamente, han sido determinantes en mi formación como persona y como ingeniero, y que han puesto su grano de arena para permitirme alcanzar otro gran logro en mi vida. Agradecer:

A la Asociación de Canalistas del Maipo por otorgarme los recursos para terminar mis estudios de pregrado y de postgrado; y al Departamento de Postgrado y Postítulo de la Universidad de Chile, quienes apoyaron mi visita a la Universidad de Dundee, Escocia, a través del programa de Ayudas para estancias cortas de investigación, para la realización de los experimentos presentados en esta tesis.

A todos los que fueron fundamentales en este trabajo de tesis: en primer lugar, a Yarko, Beto y Hugo, a quienes admiro profundamente. Gracias por el apoyo, los consejos, el tiempo que dedicaron a esta tesis y todo lo que aprendí de ustedes. Yarko y Tati, gracias por su ejemplo de vida.

A Peter Davies, profesor que me recibió en Escocia y se preocupó hasta del más mínimo detalle durante mi estadía en la Universidad de Dundee. Gracias por todo el apoyo en una de mis mejores experiencias de vida.

A la DGA y a la Capitanía de Puerto del lago Villarrica, Armada de Chile, por todo el apoyo logístico brindado durante la campaña de terreno; a Víctor Durán, por su invaluable ayuda e interés en nuestro proyecto de investigación; a Kenji Shimizu, por sus consejos para la etapa de optimización del análisis modal; al Lalo, por su amistad y ayuda para las figuras en ArcGIS; a Rodrigo, por su interés en este trabajo; al Pato, Vivi, Jessica, Mónica, Paty y Roberto por toda la pequeña gran ayuda brindada en todos estos años.

A la Ale, quien me acompañó gran parte de esta tesis apoyándome con mucho cariño y amor.

A la profesora Ximena Vargas, por su orientación y motivación para entrar al programa de Magíster, y al Cheja, por darme la posibilidad de descubrir en la docencia un área que me hace tremendamente feliz. Gracias por todos los buenos momentos, tu amistad y la confianza depositada.

A los muchos amigos que me ha regalado la vida, y que hacen que cada día tenga un sabor especial: al Carlos, Pablo y Nico; Luciano, Mani, Chiki, Oscar, Vicente y todos los que pasaron por Somoscomunidad; al Morenito y a Rodolfo; Alcohólicicos, con especial acento en la Mate, Pancho y Lucho; Estaban, Campeón, Bastián y toda la banda de plan común; profesores horacianos y connotados hidraulicistas; al cuerpo docente topográfico en todas sus versiones durante los 4 años que participé de él; a la rockera oficina 323: Felipe, Pancho, Pollo, Natalia y Álvaro; civiles, gente de Beaucheff, amigos jurisconsultos de Pío Nono y amigos del colegio. Disculpen si se me escapa alguno, pero lamentablemente no caben todos.

Finalmente, a mi familia: Juan Carlos, Elizabeth, Felipe, Pablo, Dani, Martina y Rosario, por su amor, apoyo incondicional y por ser los principales artífices de lo que soy como persona.

A mi abuela Rosario, por todo su amor...

A Yarko, por mostrarnos el camino...

Índice de Contenidos

1.	Capítulo 1: Introducción.....	1
1.1.	Motivación.....	1
1.2.	Objetivos.....	3
1.2.1.	Objetivo general.....	3
1.2.2.	Objetivos específicos.....	3
1.3.	Metodología.....	3
1.4.	Organización del informe.....	5
2.	Capítulo 2: Revisión Bibliográfica.....	6
2.1.	Termo-hidrodinámica de lagos.....	6
2.1.1.	Estratificación térmica de lagos.....	6
2.1.2.	Efecto del viento sobre lagos estratificados.....	7
2.1.3.	<i>Upwelling</i> (Surgencia).....	8
2.1.4.	Modelo en 3 capas.....	10
2.1.5.	Efecto de la rotación terrestre en las ondas internas.....	11
2.1.6.	Transferencia de energía y escalas asociadas.....	15
2.1.7.	Resonancia.....	16
2.2.	Estudio Teórico/Numérico.....	17
2.2.1.	Descripción teórica del problema.....	17
2.2.2.	Ecuaciones.....	18
2.2.3.	Respuesta forzada: amplitudes modales.....	20
2.2.4.	Evolución de las amplitudes modales en el tiempo.....	21
2.2.5.	Análisis modal con disipación lineal.....	22
3.	Capítulo 3: Solución Numérica.....	25
3.1.	Discretización espacial.....	25
3.2.	Variación de f en la dirección Norte - Sur.....	26
3.3.	Formación de las matrices \mathbf{K} y \mathbf{M}	26
3.4.	Cálculo de las amplitudes modales.....	31
4.	Capítulo 4: Estudio de Terreno.....	32
4.1.	Descripción del lago Villarrica.....	32
4.1.1.	Morfología.....	32
4.1.2.	Descripción de la hoya hidrográfica.....	33
4.1.3.	Climatología y meteorología.....	34
4.1.4.	Régimen de vientos.....	35
4.1.5.	Estructura térmica del lago.....	36

4.2.	Objetivos y metodología de la campaña de terreno	37
4.2.1.	Estación meteorológica	37
4.2.2.	Cadenas de termistores	38
4.2.3.	Medición con CTD	39
4.2.4.	Otros equipos	40
4.3.	Resultados de terreno	40
4.3.1.	Estación meteorológica	40
4.3.2.	Cadenas de termistores	40
4.3.3.	CTD	43
5.	Capítulo 5: Análisis de Datos de Terreno y Simulaciones Numéricas	45
5.1.	Preparación de datos para análisis modal	45
5.1.1.	Esfuerzo de corte del viento	45
5.1.2.	Obtención de perfiles verticales de densidad	45
5.2.	Definición de la termoclina	48
5.3.	Parametrización del efecto del viento	51
5.4.	Análisis espectral de las oscilaciones de la termoclina	54
5.5.	Aplicación del análisis modal	56
5.5.1.	Cálculo de modos normales de oscilación para el lago Villarrica	56
5.5.2.	Modelación de la evolución temporal de las ondas internas de gran escala, de período sub-diario del lago Villarrica	64
5.5.2.1.	Simulaciones numéricas con amplitud inicial nula	64
5.5.2.2.	Ajuste de la amplitud inicial y escala de disipación de cada modo	69
5.6.	Análisis de resonancia	76
5.6.1.	Componentes principales del viento	76
5.6.2.	Solución teórica de la ecuación para las amplitudes modales	77
5.6.2.1.	Viento constante sin disipación	77
5.6.2.2.	Viento constante con disipación	78
5.6.2.3.	Viento periódico sin disipación	79
5.6.2.4.	Viento periódico con disipación	80
5.6.3.	Análisis experimental	82
5.6.3.1.	Instalación experimental y adquisición de datos	82
5.6.3.2.	Set de experimentos	84
5.6.3.3.	Resultados experimentales	85
6.	Capítulo 6: Discusión y Conclusiones	90
6.1.	Discusión	90
6.2.	Conclusiones	93

Referencias	94
Anexos	98
A. Mediciones con CTD.....	98
B. Algoritmo para el análisis modal.....	111
B.1. Generar mallas horizontales.....	111
B.2. Generar batimetría en los nodos η	112
B.3. Calcular factor de Coriolis en los nodos de velocidad \mathbf{u} y \mathbf{v}	112
B.4. Armar matrices \mathbf{K} y \mathbf{M}	113
B.5. Resolver problema de valores y vectores propios generalizado	113
C. Evolución temporal de los modos normales de oscilación para el mes de marzo.....	113

Índice de Figuras

Figura 2.1: Esquema perfiles verticales de densidad ρ y frecuencia boyante N para un lago estratificado en 2 capas. La línea punteada muestra las densidades promedio para cada capa.....	7
Figura 2.2: Movimiento causado por efecto del viento: A) viento moderado, B) y C) <i>Upwelling</i> por vientos más intensos. Las flechas indican el sentido e intensidad del flujo. (Fuente: Mortimer, 1952).....	9
Figura 2.3: Esquema de distintos tipos de seiches: A) Seiche superficial modo 1 horizontal, B) Seiche interno modo 1 vertical modo 1 horizontal, C) Seiche interno modo 1 vertical modo 2 horizontal y D) Seiche interno modo 2 vertical modo 1 horizontal. (Fuente: Adaptado de Münnich et al., 1992).....	11
Figura 2.4: Onda Kelvin a lo largo de una costa recta en el Hemisferio Norte (Fuente: Hodges et al., 2000).....	12
Figura 2.5: Onda Poincaré progresiva: A) modo 1 vertical y B) modo 2 vertical. El sentido de rotación de las partículas corresponde al Hemisferio Norte (anticiclónico). (Fuente: Hodges et al., 2000).....	14
Figura 2.6: Definición de variables contenidas en el vector de estado.....	18
Figura 3.1: Esquema malla alternada (Fuente: Adaptado de Shimizu et al., 2007).....	25
Figura 3.2: Esquema discretización diferencias finitas para las derivadas espaciales.....	28
Figura 3.3: Esquema discretización término de Coriolis.....	29
Figura 3.4: Esquema estructura matriz \mathbf{K}	30
Figura 4.1: Ubicación del lago (Fuente: Meruane, 2005).....	32
Figura 4.2: Batimetría del lago (Fuente: Meruane, 2005).....	33
Figura 4.3: Hoya hidrográfica del lago (Fuente: Elaboración propia con datos SIG CONAMA).....	34
Figura 4.4: Diagrama climático de Pucón (Fuente: DGA, 2010).....	35
Figura 4.5: Estructura térmica del lago Villarrica período 1978-1979 (Fuente: Datos originales de Campos et al., 1983, gráfico tomado de Meruane, 2005).....	36
Figura 4.6: Estructura térmica del lago para el mes de febrero 2004 (Fuente: Meruane, 2005).....	37
Figura 4.7: Ubicación cadenas de termistores, estación meteorológica y puntos de muestreo con CTD. (Fuente: Elaboración propia con datos SIG CONAMA).....	39
Figura 4.8: A) Temperatura atmosférica. B) Humedad relativa. C) Radiación neta incidente. D y E) Dirección y magnitud del viento para el período de medición.....	41
Figura 4.9: A y B) Dirección y magnitud del viento. C y D) Perfiles de temperatura registrados en TC1 y TC2 para febrero 2009.....	42
Figura 4.10: A y B) Dirección y magnitud del viento. C y D) Perfiles de temperatura registrados en TC1 y TC2 para marzo 2009.....	42

Figura 4.11: A) y B) Dirección y magnitud del viento. C) Perfiles de temperatura registrados en TC2 para abril 2009.....	43
Figura 4.12: Perfiles de bajada y subida CTD 4, 23-02-2009	44
Figura 5.1: A) y B) Dirección y magnitud del viento a 10 [m] sobre la superficie. C) y D) Perfiles verticales de densidad en TC1 y TC2 para febrero 2009.	47
Figura 5.2: A) y B) Dirección y magnitud del viento a 10 [m] sobre la superficie. C) y D) Perfiles verticales de densidad en TC1 y TC2 para marzo 2009.....	47
Figura 5.3: A) y B) Dirección y magnitud del viento a 10 [m] sobre la superficie. C) y D) Perfiles verticales de frecuencia boyante N en TC1 y TC2 para febrero 2009.	48
Figura 5.4: A) y B) Dirección y magnitud del viento a 10 [m] sobre la superficie. C) y D) Perfiles verticales de frecuencia boyante N en TC1 y TC2 para marzo 2009.....	49
Figura 5.5: A) y B) Dirección y magnitud del viento a 10 [m] sobre la superficie. C) y D) Isotermas registradas en TC1 y TC2 para febrero 2009. La línea negra corresponde a la termoclina.....	50
Figura 5.6: A) y B) Dirección y magnitud del viento a 10 [m] sobre la superficie. C) y D) Isotermas registradas en TC1 y TC2 para marzo 2009. La línea negra corresponde a la termoclina.....	50
Figura 5.7: A) y B) Perfiles verticales promedio de densidad y frecuencia boyante para TC1 y TC2, febrero 2009. C) y D) Perfiles verticales promedio de densidad y frecuencia boyante para TC1 y TC2, marzo 2009. La línea negra corresponde a la densidad promedio de ambas capas y las líneas punteadas corresponden a las profundidades de la termoclina.....	51
Figura 5.8: A) Números de Wedderburn 2D para el lago Villarrica, B) y C) Desplazamientos de la termoclina en TC1 y TC2 estimados a partir de W_{2D} , para febrero 2009. La línea segmentada indica la condición de <i>upwelling</i> $W = 0.5$	52
Figura 5.9: A) Números de Wedderburn 2D para el lago Villarrica, B) y C) Desplazamientos de la termoclina en TC1 y TC2 estimados a partir de W_{2D} , para marzo 2009. La línea segmentada indica la condición de <i>upwelling</i> $W = 0.5$ y los recuadros grises, el viento Puelche de baja intensidad.....	53
Figura 5.10: Razón entre el tiempo de empinamiento de la onda y el período de la onda interna fundamental para A) febrero 2009 y B) marzo 2009.	53
Figura 5.11: Densidad espectral de potencia de: A) TC1 febrero 2009 y B) TC2, febrero 2009. La línea roja marca el factor de Coriolis calculado para el lago, y la línea verde, la frecuencia boyante promedio para ambas cadenas.	55
Figura 5.12: Densidad espectral de potencia de: A) TC1 marzo 2009 y B) TC2, marzo 2009. La línea roja marca el factor de Coriolis calculado para el lago, y la línea verde, la frecuencia boyante promedio para ambas cadenas.	55
Figura 5.13: A) Dominio horizontal de solución para la capa superficial (blanco) y profunda (gris). B) y C) Detalle de la malla horizontal dentro del recuadro azul A para las capas 1 y 2, respectivamente. D) Vista en elevación del eje B-B'. E) Detalle del corte transversal dentro del recuadro azul C.....	57

Figura 5.14: Primeros 9 modos normales de período sub-diario para el lago Villarrica, para febrero 2009. En cada panel se indica el período de la onda. La escala de colores corresponde a la elevación normalizada de la termoclina.	58
Figura 5.15: Primeros 9 modos normales de período sub-diario para el lago Villarrica, para marzo 2009. En cada panel se indica el período de la onda. La escala de colores corresponde a la elevación normalizada de la termoclina.	58
Figura 5.16: Evolución temporal de los modos normales A), B) y C) de período sub-diario para el lago Villarrica, para febrero 2009. Cada columna corresponde a la evolución de un modo, considerando las fracciones del período mostradas en cada fila. La escala de colores corresponde a la elevación normalizada de la termoclina.....	61
Figura 5.17: Evolución temporal de los modos normales D), E) y F) de período sub-diario para el lago Villarrica, para febrero 2009. Cada columna corresponde a la evolución de un modo, considerando las fracciones del período mostradas en cada fila. La escala de colores corresponde a la elevación normalizada de la termoclina.....	62
Figura 5.18: Evolución temporal de los modos normales G), H) e I) de período sub-diario para el lago Villarrica, para febrero 2009. Cada columna corresponde a la evolución de un modo, considerando las fracciones del período mostradas en cada fila. La escala de colores corresponde a la elevación normalizada de la termoclina.....	63
Figura 5.19: A) Dirección (puntos negros) y magnitud (línea azul) del esfuerzo de corte del viento sobre la superficie del lago. B) y C) Desplazamientos observados y simulados de la termoclina con respecto a la posición de equilibrio para TC1 y TC2, febrero 2009, considerando amplitud inicial nula.	65
Figura 5.20: A) Dirección (puntos negros) y magnitud (línea azul) del esfuerzo de corte del viento sobre la superficie del lago. B) y C) Desplazamientos observados y simulados de la termoclina con respecto a la posición de equilibrio para TC1 y TC2, marzo 2009, considerando amplitud inicial nula.	65
Figura 5.21: A) Dirección (puntos negros) y magnitud (línea azul) del esfuerzo de corte del viento sobre la superficie del lago. B) Evolución de las energías modales. C) Evolución del trabajo del viento sobre cada modo. D) Evolución de las energías modales descontando K1 y E) Evolución del trabajo del viento sobre cada modo descontando K1 para febrero 2009, considerando amplitud inicial nula.....	67
Figura 5.22: A) Dirección (puntos negros) y magnitud (línea azul) del esfuerzo de corte del viento sobre la superficie del lago. B) Evolución de las energías modales. C) Evolución del trabajo del viento sobre cada modo. D) Evolución de las energías modales descontando K1 y E) Evolución del trabajo del viento sobre cada modo descontando K1 para marzo 2009, considerando amplitud inicial nula.....	68
Figura 5.23: A) Dirección (puntos negros) y magnitud (línea azul) del esfuerzo de corte del viento sobre la superficie del lago. B) y C) Desplazamientos de la termoclina con respecto a la posición de equilibrio para TC1 y TC2, febrero 2009, considerando parámetros optimizados. ...	71
Figura 5.24: A) Dirección (puntos negros) y magnitud (línea azul) del esfuerzo de corte del viento sobre la superficie del lago. B) y C) Desplazamientos de la termoclina con respecto a la posición de equilibrio para TC1 y TC2, marzo 2009, considerando parámetros optimizados.....	71

Figura 5.25: Evolución de las energías modales ajustadas (columna izquierda). Evolución del trabajo del viento sobre cada modo ajustado (columna derecha), para febrero 2009. Cada fila corresponde a uno de los modos ajustados (modos 1, 3, 6, 7, 8, 9, 10 y 12, respectivamente, como se indica en la Tabla 5.3).....	72
Figura 5.26: Evolución de las energías modales ajustadas (columna izquierda). Evolución del trabajo del viento sobre cada modo ajustado (columna derecha), para marzo 2009. Cada fila corresponde a uno de los modos ajustados (modos 1, 3, 7 y 8, respectivamente, como se indica en la Tabla 5.4).....	73
Figura 5.27: Energías modales promedio normalizadas por la energía modal total para A) febrero y B) marzo 2009.....	75
Figura 5.28: Densidad espectral de potencia de las fluctuaciones de intensidad de viento con respecto al valor medio, para los períodos estudiados y para toda la estadística disponible.....	76
Figura 5.29: A) Desplazamientos normalizados de la termoclina y B) energía modal adimensional para un viento constante sin disipación.....	78
Figura 5.30: A) Desplazamientos adimensionales de la termoclina y B) energía modal adimensional para un viento constante con disipación.....	79
Figura 5.31: Serie de tiempo del desplazamiento normalizado de la termoclina en TC1 (columna izquierda), energía adimensional de la onda Kelvin (columna derecha), calculadas para $\omega^{(r)}$ asociados a $T^{(r)} = 19.81$ [hrs], 20.44 [hrs], 21.73 [hrs] y 23.30 [hrs] (primera, segunda, tercera y cuarta fila, respectivamente), considerando viento periódico sin disipación.....	80
Figura 5.32: Serie de tiempo del desplazamiento normalizado de la termoclina en TC1 (columna izquierda), energía adimensional de la onda Kelvin (columna derecha), calculadas para $\omega^{(r)}$ asociados a $T^{(r)} = 19.81$ [hrs], 20.44 [hrs], 21.73 [hrs] y 23.30 [hrs] (primera, segunda, tercera y cuarta fila, respectivamente), considerando viento periódico con disipación.....	81
Figura 5.33: Esquema instalación experimental (Fuente: Rizk, 2010).....	83
Figura 5.34: Esquema en planta ubicación conductivímetros.....	84
Figura 5.35: Perfil vertical promedio de densidad para el experimento 2.....	85
Figura 5.36: Factores $\tilde{C}^{(r)}$ de los primeros 10 modos para las 5 estratificaciones y rotación ambiente consideradas en los experimentos.....	86
Figura 5.37: Densidad espectral de potencia promedio de los 4 conductivímetros en función de la frecuencia adimensionalizada por la frecuencia forzante para todos los experimentos.....	87
Figura 5.38: Oscilaciones de la interfaz de densidad con respecto al nivel medio para el sensor 1, para los experimentos A) 1 ($T_f/T_K = 0.8$), B) 2 ($T_f/T_K = 0.9$) y C) 3 ($T_f/T_K = 1.0$). En los 3 casos se tiene que $W = 156$ y $Ke^{-1} = 0.47$	88
Figura 5.39: Oscilaciones de la interfaz de densidad con respecto al nivel medio para el sensor 1, para los experimentos A) 3 ($Ke^{-1} = 0.47$), B) 5 ($Ke^{-1} = 0.41$) y C) 7 ($Ke^{-1} = 0.30$). En los 3 casos se tiene que $W = 156$ y $T_f/T_K = 1.0$	89
Figura 5.40: Oscilaciones de la interfaz de densidad con respecto al nivel medio para el sensor 1, para los experimentos A) 7 ($c_i = 0.09$ [m s ⁻¹]), B) 8 ($c_i = 0.08$ [m s ⁻¹]) y C) 9 ($c_i = 0.07$ [m s ⁻¹]). En los 3 casos se tiene que $Ke^{-1} = 0.30$ y $T_f/T_K = 1.0$	89

Figura A.1: Perfiles de bajada CTD 2, 26-01-2009.....	98
Figura A.2: Perfiles de subida CTD 2, 26-01-2009.....	98
Figura A.3: Perfiles de bajada CTD 3, 26-01-2009.....	99
Figura A.4: Perfiles de subida CTD 3, 26-01-2009.....	99
Figura A.5: Perfiles de bajada CTD 4, 26-01-2009.....	99
Figura A.6: Perfiles de subida CTD 4, 26-01-2009.....	100
Figura A.7: Perfiles de bajada CTD 3, 27-01-2009.....	100
Figura A.8: Perfiles de subida CTD 3, 27-01-2009.....	100
Figura A.9: Perfiles de bajada CTD 4, 27-01-2009.....	101
Figura A.10: Perfiles de subida CTD 4, 27-01-2009.....	101
Figura A.11: Perfiles de bajada CTD 2, 29-01-2009.....	101
Figura A.12: Perfiles de subida CTD 2, 29-01-2009.....	102
Figura A.13: Perfiles de bajada CTD 3, 29-01-2009.....	102
Figura A.14: Perfiles de subida CTD 3, 29-01-2009.....	102
Figura A.15: Perfiles de bajada CTD 4, 29-01-2009.....	103
Figura A.16: Perfiles de subida CTD 4, 29-01-2009.....	103
Figura A.17: Perfiles de bajada CTD 1, 06-02-2009.....	103
Figura A.18: Perfiles de subida CTD 1, 06-02-2009.....	104
Figura A.19: Perfiles de bajada CTD 1, 11-02-2009.....	104
Figura A.20: Perfiles de subida CTD 1, 11-02-2009.....	104
Figura A.21: Perfiles de bajada CTD 2, 11-02-2009.....	105
Figura A.22: Perfiles de subida CTD 2, 11-02-2009.....	105
Figura A.23: Perfiles de bajada CTD 3, 11-02-2009.....	105
Figura A.24: Perfiles de subida CTD 3, 11-02-2009.....	106
Figura A.25: Perfiles de bajada CTD 4, 11-02-2009.....	106
Figura A.26: Perfiles de subida CTD 4, 11-02-2009.....	106
Figura A.27: Perfiles de bajada CTD 2, 17-02-2009.....	107
Figura A.28: Perfiles de bajada CTD 3, 17-02-2009.....	107
Figura A.29: Perfiles de subida CTD 3, 17-02-2009.....	107
Figura A.30: Perfiles de bajada CTD 4, 17-02-2009.....	108
Figura A.31: Perfiles de subida CTD 4, 17-02-2009.....	108
Figura A.32: Perfiles de bajada CTD 1, 23-02-2009.....	108
Figura A.33: Perfiles de subida CTD 1, 23-02-2009.....	109
Figura A.34: Perfiles de bajada CTD 2, 23-02-2009.....	109
Figura A.35: Perfiles de subida CTD 2, 23-02-2009.....	109
Figura A.36: Perfiles de bajada CTD 3, 23-02-2009.....	110

Figura A.37: Perfiles de subida CTD 3, 23-02-2009.....	110
Figura A.38: Perfiles de bajada CTD 4, 23-02-2009.....	110
Figura A.39: Perfiles de subida CTD 4, 23-02-2009.....	111
Figura C.1: Evolución temporal de los modos normales A), B) y C) de período sub-diario para el lago Villarrica, para marzo 2009. Cada columna corresponde a la evolución de un modo, considerando las fracciones del período mostradas en cada fila. La escala de colores corresponde a la elevación normalizada de la termoclina.....	114
Figura C.2: Evolución temporal de los modos normales D), E) y F) de período sub-diario para el lago Villarrica, para marzo 2009. Cada columna corresponde a la evolución de un modo, considerando las fracciones del período mostradas en cada fila. La escala de colores corresponde a la elevación normalizada de la termoclina.....	115
Figura C.3: Evolución temporal de los modos normales G), H) e I) de período sub-diario para el lago Villarrica, para marzo 2009. Cada columna corresponde a la evolución de un modo, considerando las fracciones del período mostradas en cada fila. La escala de colores corresponde a la elevación normalizada de la termoclina.....	116

Índice de Tablas

Tabla 4.1: Parámetros morfométricos lago Villarrica	33
Tabla 4.2: Componentes estación meteorológica.....	38
Tabla 4.3: Coordenadas cadenas de termistores, puntos de muestreo con CTD y estación meteorológica	40
Tabla 4.4: Mediciones con CTD y datos registrados en CTD1 y CTD2.....	43
Tabla 4.5: Mediciones con CTD y datos registrados en CTD3 y CTD4.....	44
Tabla 5.1: Diferencias de densidad.....	49
Tabla 5.2: Clasificación de las primeras 9 ondas de gran escala para el lago Villarrica.....	60
Tabla 5.3: Modos ajustados y parámetros obtenidos de la optimización para febrero 2009.....	73
Tabla 5.4: Modos ajustados y parámetros obtenidos de la optimización para marzo 2009	74
Tabla 5.5: Parámetros set de experimentos realizados	84

1. Capítulo 1: Introducción

1.1. Motivación

El lago Villarrica se ubica en la Región de la Araucanía, con coordenadas 39° 15' S, 72° 05' W y corresponde al cuerpo de agua más grande de los llamados “Lagos Araucanos”. Tiene una superficie de 176 [km²], una profundidad máxima de 167 [m] y una profundidad media de 120 [m]. El lago posee una forma elipsoidal, con una extensión de 23.05 [km] en la dirección Este-Oeste y 11.2 [km] en la dirección Norte-Sur (Campos et al., 1983).

El valle donde se encuentra el lago Villarrica tiene una orientación Este-Oeste y está rodeado por cordones montañosos altos y bien definidos, abiertos hacia a la depresión intermedia. Esto genera que los vientos provenientes del océano (cuadrante W) se encaucen en la misma dirección del valle. En general, estos vientos de baja intensidad son los predominantes, sin embargo, dadas ciertas configuraciones sinópticas, se producen vientos con marcada dirección Este, conocidos en la zona como viento Puelche (palabra de origen mapuche que significa “del Este”). Estos vientos se caracterizan además por ser de alta intensidad, cálidos y secos (Meruane, 2005).

De acuerdo al trabajo realizado por Meruane (2005), el lago Villarrica presenta una fuerte estratificación en los meses de verano, producto del aumento de la radiación solar, con una marcada termoclina cercana a los 20 [m] de profundidad. La estratificación, sumada al efecto del viento que sopla diariamente sobre el lago, con una dirección preferencialmente del Oeste, y la rotación terrestre, determinan la hidrodinámica de este cuerpo de agua durante la temporada estival. Dadas las dimensiones del lago Villarrica, el efecto de Coriolis cobra importancia al modificar las ondas superficiales e internas que se generan por efecto del viento. En efecto, Meruane (2005) calculó un número de Burger para el lago Villarrica igual a 0.22. Este parámetro adimensional indica que los efectos de la rotación son importantes en la hidrodinámica del lago cuando es menor a la unidad.

Este lago tiene una gran importancia para la región pues es el principal eje generador del turismo, cumpliendo un rol fundamental en el desarrollo de las comunas de Curarrehue, Pucón y Villarrica. Además, actúa como control de crecidas en el invierno y como hábitat para el desarrollo de la biodiversidad en la zona. Lamentablemente, durante los últimos años, cambios en el uso de suelo en las zonas aledañas al lago, el aumento de la población y del turismo han producido que el lago haya pasado de un estado oligotrófico a uno mesotrófico, e incluso eutrófico en algunas zonas (Meruane, 2005, Meruane et al., 2005).

Ante el deterioro que ha experimentado el lago Villarrica, es de suma urgencia desarrollar herramientas que permitan conocer mejor la hidrodinámica del lago y la calidad de sus aguas. Esto incluye la generación de modelos adecuados a las condiciones particulares del lago Villarrica, con capacidad predictiva y que apunten a proteger y manejar la calidad de las aguas del lago. Por esto, una caracterización de la hidrodinámica del lago, que es el principal aporte de este trabajo, acoplada con modelos biogeoquímicos, es fundamental para entender los procesos de interacción entre los diferentes componentes de los ecosistemas acuáticos.

Los resultados de un estudio de terreno y las simulaciones numéricas realizadas por Meruane (2005) muestran que el lago Villarrica puede ser modelado como un sistema compuesto por dos capas, separadas por una interfaz de densidad. En esta interfaz se producen oscilaciones generadas por forzantes externos, por ejemplo el viento, y afectadas por la rotación terrestre, las

cuales pueden ser ondas Kelvin o Poincaré (Antenucci & Imberger, 2001). La estructura espacial y el período asociado a cada tipo de onda pueden ser determinados mediante un análisis modal, el cual consiste en resolver el problema de valores y vectores propios generalizado que surge al plantear y discretizar las ecuaciones que rigen el sistema sin forzante externo, suponiendo que la respuesta está formada por una parte espacial y otra temporal, desacopladas entre sí (Shimizu et al., 2007). Las soluciones de este problema son llamadas modos normales o naturales de oscilación, y corresponden a las oscilaciones que se generan en el sistema cuando éste se deja oscilar libremente a partir de una perturbación inicial. En el caso de un lago estratificado en dos capas, las ecuaciones que rigen el sistema son las ecuaciones promediadas de Reynolds, con efecto de Coriolis, promediadas en la vertical para cada capa. Este sistema de ecuaciones permite obtener una amplia gama de ondas que incluyen oscilaciones de la superficie libre, ondas internas, modos geostróficos y ondas batimétricas (Shimizu et al., 2007). El foco de esta tesis está puesto en las ondas gravitacionales internas que son las que inducen la mayor circulación del cuerpo de agua y son fácilmente medibles en terreno mediante perfiles verticales de temperatura, entre las cuales se incluyen las ondas Kelvin y ondas Poincaré. Cada una de estas ondas, de distinta longitud y período, corresponde a un modo de oscilación del sistema estratificado.

A partir del análisis modal se obtiene que por cada modo, la interacción entre el viento y las ondas internas en un lago estratificado puede ser analizada como un oscilador armónico forzado. De esta manera, el viento intercambia energía con el lago, sacando a la termoclina de su posición de equilibrio y generando ondas internas. Como el viento sopla con una cierta frecuencia sobre el lago según la periodicidad de las condiciones meteorológicas de la zona de interés, puede producirse el fenómeno de resonancia, el cual ocurre cuando alguna de las componentes principales del viento se acerca a la frecuencia de alguno de los modos normales del sistema (Münnich et al., 1992, Wake et al., 2007). Esto es posible en el lago Villarrica dada la periodicidad diaria del viento, y que la frecuencia de oscilación de la onda Kelvin fundamental es cercana a 24 [hrs] (Meruane, 2005). Antenucci & Imberger (2003) estudiaron la evolución temporal de las frecuencias naturales del Lago Kinneret, identificando una interacción resonante entre el viento y la onda Kelvin modo 1 vertical modo 1 azimutal, ambos con períodos cercanos a las 24 [hrs]. Según esos autores, cuando la frecuencia natural de la onda Kelvin fundamental se acerca a la frecuencia forzante, la amplitud y la energía de la onda aumentan considerablemente, en comparación con las de otras ondas cuya frecuencia natural se aleja de la frecuencia forzante.

El presente trabajo de tesis, enmarcado en el proyecto FONDECYT n°1080617, busca contribuir al conocimiento de las ondas internas presentes en el lago Villarrica y su interacción resonante con el viento, mediante campañas de terreno, simulaciones numéricas y experiencias de laboratorio. Además, esta caracterización hidrodinámica puede ser un valioso aporte en el estudio de procesos de mezcla y transporte de masa, y en la elaboración de normativas de control y manejo de cuerpos de agua, como por ejemplo, la elaboración de normas secundarias de calidad para los lagos de la IX Región, que se están desarrollando actualmente en nuestro país, por parte de la CONAMA.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

El objetivo principal del presente trabajo es caracterizar la evolución de las ondas gravitacionales internas del lago Villarrica, dada la estratificación observada, la rotación terrestre y el viento que sopla sobre él. Como esta variable meteorológica es el principal forzante del sistema, se busca determinar si existe resonancia entre las frecuencias principales del viento y algunos de los modos normales de oscilación del lago, obtenidos mediante un análisis modal, suponiendo una estratificación de dos capas.

1.2.2. Objetivos específicos

- Planificar y ejecutar una campaña de terreno para:
 - Medir la evolución temporal de la estructura térmica de la columna de agua, en distintos puntos del lago, para caracterizar la estratificación del sistema durante la temporada estival.
 - Obtener información meteorológica que sea representativa de la zona de estudio, sobre todo dirección y magnitud de viento.
- Implementar un modelo numérico que permita obtener los modos normales de oscilación de un lago estratificado en dos capas afectado por la rotación de la Tierra, considerando la forma y la batimetría propias del cuerpo de agua en estudio.
- Identificar las ondas internas de gran escala (baja frecuencia), que pueden existir en el lago Villarrica, dada una cierta estratificación. Estas ondas pueden ser de tipo Kelvin o Poincaré.
- Caracterizar y analizar la evolución de los modos dominantes observados en las series de tiempo de la termoclina, y su interacción con los forzantes periódicos.
- Estudiar a nivel experimental el fenómeno de resonancia gatillado por el acople entre el período de las ondas internas dominantes y los periodos principales del viento, para un sistema estratificado en dos capas y afectado por la rotación terrestre.

1.3. Metodología

Para el cumplimiento de los objetivos mencionados, se desarrolló la siguiente metodología:

1. Campaña de terreno

Se realizaron campañas de terreno durante los meses de enero y abril 2009, en las que se contempló la instalación de una estación meteorológica en la zona aledaña al lago, y de cadenas de termistores, que permitieron obtener series de tiempo de temperatura en el lago, durante la temporada de verano y otoño, para distintas profundidades; además del monitoreo de los equipos instalados.

2. Implementación del modelo numérico para el análisis modal

En una segunda etapa, se implementó el método numérico asociado al análisis modal propuesto por Shimizu et al. (2007) y aplicado por de la Fuente et al. (2008), el cual fue programado computacionalmente en Matlab®.

Este análisis permite simular la respuesta de un sistema de dos capas forzado por el viento y la rotación terrestre, para lo cual es necesario plantear las ecuaciones linealizadas de continuidad y momentum para cada una de las capas, considerando la morfología del lago. y suponer soluciones periódicas para el problema que no considera forzamiento del viento sobre el sistema. De esta forma, se obtiene un problema de valores propios generalizado donde cada vector propio corresponde a la estructura espacial de un modo, mientras que la frecuencia de oscilación de cada modo está dada por el respectivo valor propio. Luego, la respuesta forzada puede expresarse como una combinación lineal de los modos normales de oscilación encontrados en el problema sin forzante, donde las amplitudes dependen del tiempo y de la interacción del esfuerzo de corte del viento con las velocidades de la capa superficial.

3. Simulaciones numéricas

A partir de los resultados del análisis modal, se identificaron las ondas internas de gran escala (baja frecuencia), que pueden existir en el lago Villarrica, dada la estratificación medida en la campaña de terreno. Considerando los modos identificados, se realizaron simulaciones numéricas de los desplazamientos de la termoclina con respecto a la posición de equilibrio, los cuales fueron comparados con los datos registrados en terreno para verificar su validez. A partir de esta comparación, se ajustaron los datos simulados a los datos observados mediante la calibración de coeficientes de disipación de energía, los cuales producen el decaimiento de las ondas internas y un retraso en su frecuencia angular.

Posteriormente, los resultados de las simulaciones numéricas fueron contrastados con soluciones teóricas de la ecuación para las amplitudes modales para distintos forzantes idealizados, con el fin de estudiar la interacción resonante entre las frecuencias principales del viento y los modos normales de oscilación del lago.

4. Análisis experimental

Se realizó una visita de investigación al Departamento de Ingeniería Civil de la Universidad de Dundee, Escocia, bajo la supervisión del profesor Peter Davies y financiada por el programa de Ayudas para Estadías Cortas de Investigación del Departamento de Postgrado y Postítulo, Vicerrectoría de Asuntos Académicos, de la Universidad de Chile. La visita tuvo una duración de dos meses y en ella se diseñaron y ejecutaron una serie de experiencias para estudiar en el laboratorio la evolución temporal de las ondas internas gravitacionales de la instalación experimental y el fenómeno de resonancia generado por el acople entre el período de las ondas internas dominantes y los periodos principales del viento, para un sistema estratificado en dos capas y afectado por la rotación terrestre, en función de los distintos parámetros adimensionales que gobiernan el fenómeno.

Para determinar los modos normales de oscilación de la instalación experimental, se aplicó el modelo teórico/numérico desarrollado en el presente trabajo de tesis.

5. Análisis de resultados

Finalmente, se analizaron los resultados y alcances del análisis modal, poniendo énfasis en la caracterización de la respuesta forzada de la termoclina y la condición resonante en la que se

encontraría la onda Kelvin fundamental. Se analizaron y discutieron también los resultados experimentales obtenidos de las experiencias realizadas en la Universidad de Dundee, Escocia. Además, se discutió la factibilidad de aplicar un modelo lineal de dos estratos para el estudio de la hidrodinámica del lago Villarrica.

1.4. Organización del informe

En el Capítulo 2 se presenta una revisión bibliográfica sobre los fenómenos más importantes que gobiernan la hidrodinámica de lagos y la base teórica que sustenta el análisis modal.

El detalle de la solución numérica implementada se presenta en el Capítulo 3, mostrando las discretizaciones consideradas para el dominio espacial, el factor de Coriolis y las ecuaciones a resolver en el análisis.

El Capítulo 4 contiene la descripción de la zona de estudio, y se describe la campaña de terreno realizada, presentando los datos obtenidos en terreno y los equipos utilizados en la toma de datos.

El análisis de los datos de terreno, los parámetros de entrada para el análisis modal, los modos normales de oscilación obtenidos y el análisis experimental son presentados en el Capítulo 5. Éste contiene las simulaciones numéricas realizadas para condiciones iniciales nulas en el cálculo de las amplitudes modales. Se presenta también el proceso de optimización realizado para ajustar los datos simulados a los observados, calibrando amplitudes iniciales y coeficientes de disipación de energía para los modos dominantes en la respuesta forzada. En segundo lugar, se calcula la solución teórica de la ecuación para las amplitudes modales considerando forzantes constantes y periódicos, sin y con disipación de energía, para determinar la existencia de resonancia entre las ondas internas y las componentes principales del viento. Finalmente, se presenta el trabajo experimental realizado en la Universidad de Dundee, indicando los experimentos realizados y los principales resultados obtenidos.

Finalmente, el Capítulo 6 contiene las conclusiones y alcances del presente trabajo.

2. Capítulo 2: Revisión Bibliográfica

2.1. Termo-hidrodinámica de lagos

La termo-hidrodinámica de lagos da cuenta de los procesos de transporte de calor, energía, masa y momentum en el cuerpo de agua. Estos procesos físicos determinan la estructura térmica del lago, las corrientes y la turbulencia dentro de él, y están regidos por el intercambio de calor con la atmósfera, el viento, los afluentes, efluentes, efectos boyantes, y según el tamaño del cuerpo de agua, que determina si la dinámica está modificada por el efecto de Coriolis.

La termo-hidrodinámica está determinada por pequeñas diferencias de densidad a lo largo de la columna de agua, producidas por gradientes de temperatura (generados por el intercambio de calor con la atmósfera), de concentración (debido a la presencia de sustancias disueltas o suspendidas), o una combinación de ambos (Niño & Tamburrino, 2004a).

En términos generales, la radiación solar incidente sobre el lago calienta el agua superficial, generando un gradiente de temperatura en la vertical, que se traduce en una redistribución vertical del fluido, donde las aguas más calientes y livianas se ubican sobre las más pesadas y frías. Esta estratificación genera una disminución de la energía potencial, que impide el intercambio de masa y momentum entre las capas superficiales y las más profundas. Por otro lado, el viento actuante sobre el lago, las descargas afluentes y efluentes aportan energía cinética que tiende a producir la mezcla total o parcial de la columna de agua. La respuesta hidrodinámica frente a estos forzantes corresponde a una amplia gama de fenómenos físicos, que abarcan un variado rango de escalas espaciales y temporales (Imberger & Hamblin, 1982, Wüest & Lorke 2003). A continuación se hace una revisión de algunos de los procesos más importantes en la hidrodinámica de lagos.

2.1.1. Estratificación térmica de lagos

Los lagos estratificados por temperatura pueden modelarse como un sistema en 3 capas: una capa superficial menos densa llamada epilimnion, bien mezclada por la acción del viento; una capa profunda llamada hipolimnion, de aguas más frías y densas, y una capa intermedia llamada metalimnion, que corresponde a un estrato de transición entre el epilimnion y el hipolimnion, y se caracteriza por presentar fuertes gradientes de densidad. Cuando la diferencia de densidad entre los estratos superficial y profundo es muy marcada, el metalimnion puede suponerse como una interfaz de densidad que recibe el nombre de termoclina (ver Figura 2.1). Debido a los altos gradientes de densidad en esta zona, la termoclina actúa como una barrera que impide el intercambio de calor, energía, masa y momentum entre las capas superficial y profunda.

Cuando la estratificación es estable, es decir, el agua más liviana se ubica sobre el fluido más pesado, se genera un movimiento oscilatorio de parcelas de fluido debido a la interacción de la gravedad con los efectos boyantes. La frecuencia de este movimiento se conoce como frecuencia boyante o de Brünt-Väisälä, y está definida como:

$$N = \sqrt{-\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z}} \quad (2.1)$$

donde g es la aceleración de gravedad, ρ_0 es una densidad de referencia, $\partial\rho/\partial z$ es el gradiente vertical de densidad, y z es un eje vertical definido desde el fondo del lago hacia la superficie. Se infiere que la frecuencia boyante será máxima en la zona de máximos gradientes de densidad. Por otro lado, cuando la estratificación se vuelve inestable, se producen eventos de mezcla convectiva, donde agua más pesada desciende por gravedad, generando plumas que son capaces de erosionar la termoclina (Imberger & Patterson, 1990).

Una forma de caracterizar la estratificación de un cuerpo de agua, y los procesos de mezcla, corresponde al número de Richardson:

$$Ri = \frac{g' h_1}{u_*^2} \quad (2.2)$$

donde $g' = g \Delta\rho/\rho_0$ es la gravedad reducida, $\Delta\rho$ es la diferencia de densidad entre capas, h_1 es el espesor del epilimnion y u_* es la velocidad de corte que ejerce el viento sobre la superficie del lago. En términos físicos, este parámetro adimensional representa la razón entre la energía necesaria para producir la mezcla de la columna de agua y la energía cinética disponible para producir dicha mezcla.

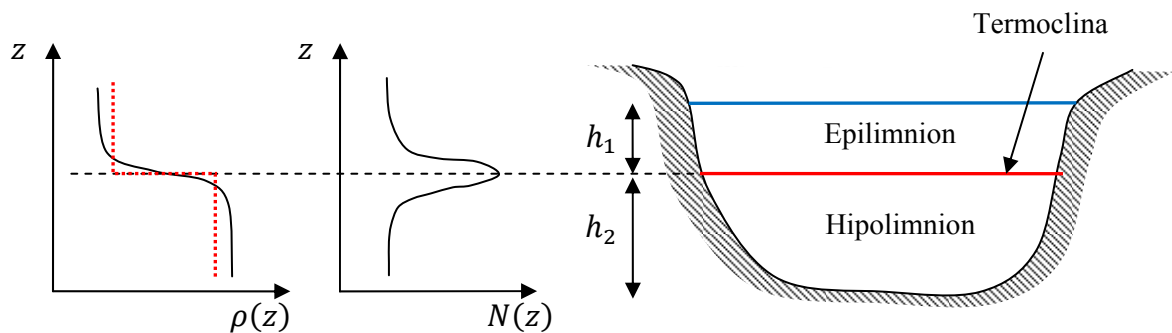


Figura 2.1: Esquema perfiles verticales de densidad ρ y frecuencia boyante N para un lago estratificado en 2 capas. La línea punteada muestra las densidades promedio para cada capa.

2.1.2. Efecto del viento sobre lagos estratificados

En ausencia de descargas afluentes o efluentes importantes, el viento es la fuente más importante de momentum y energía cinética turbulenta (Imberger, 1998). Suponiendo que el viento actúa a lo largo de la dirección principal de un lago estratificado en dos capas, el esfuerzo de corte sobre la superficie induce un movimiento de las aguas en la dirección del viento, peraltando la superficie libre (*set-up*). En respuesta a la capa superficial, la capa profunda se moviliza en sentido contrario al viento, lo que genera una inclinación de la interfaz de densidad con pendiente contraria a la superficie libre, es decir, la termoclina se levanta en el extremo de viento arriba. Cuando el viento cesa, la superficie libre y la termoclina vuelven a su posición de equilibrio, dando origen a un movimiento oscilatorio conocido como seiche superficial e interno, respectivamente. Los seiches corresponden a ondas estacionarias producidas por un ajuste barotrópico en el caso de las ondas superficiales, y por un ajuste baroclínico en el caso de las ondas internas (Münnich et al., 1992). El período de este movimiento está dado por la onda

interna más grande que cabe en el lago (Mortimer, 1952):

$$T_i = \frac{2L}{c_i} \quad (2.3)$$

donde L es la longitud principal del lago y c_i es la celeridad de las ondas internas, definida como:

$$c_i = \sqrt{g' \frac{h_1 h_2}{H}} \quad (2.4)$$

donde $g' = g \Delta\rho/\rho_0$ es la gravedad reducida, h_1 es el espesor del epilimnion, h_2 es el espesor del hipolimnion y $H = h_1 + h_2$ es el espesor total del cuerpo de agua.

Cuando el viento comienza a soplar sobre el lago, la superficie libre y la interfaz de densidad comienzan a inclinarse (de la forma descrita anteriormente) desde la posición de equilibrio, hasta que las fuerzas boyantes se equilibran con el gradiente de presión generado por el *set-up* de la superficie libre, lo cual ocurre en un tiempo $T_i/4$. Después, la termoclina vuelve a su posición de equilibrio y se peralta nuevamente, repitiéndose el ciclo hasta el cese del viento. La relación de aspecto entre la amplitud de las ondas superficiales e internas es del orden de 1/1000 (Mortimer, 1952, Niño & Tamburrino, 2004b), por lo que las segundas son de mayor interés en el estudio de la hidrodinámica de lagos, dado que involucran mayores volúmenes de agua.

En esta respuesta forzada se ha despreciado la mezcla entre ambas capas. En caso de ser considerada, la respuesta es mucho más compleja y depende de las características de la estratificación (número de Richardson), la geometría del lago, la duración e intensidad del viento (Spigel & Imberger, 1980).

2.1.3. *Upwelling* (Surgencia)

El efecto del viento en la inclinación de la termoclina puede ser parametrizado usando el número de Wedderburn (Imberger & Thompson, 1980, Imberger & Hamblin, 1982):

$$W = \frac{Ri h_1}{L} \quad (2.5)$$

Cuando $0.5 < W < 1$, la inclinación de la interfaz de densidad es tal que el agua metalimnética, generalmente de peor calidad que la superficial, alcanza la superficie. En términos numéricos, la elevación de la termoclina tiende a h_1 cuando W tiende a 0.5, mientras que para números de Wedderburn muy grandes (vientos de muy baja intensidad) la elevación de la termoclina tiende a cero. A medida que la intensidad del viento aumenta, puede producirse un afloramiento de agua desde el hipolimnion (ver Figura 2.2). Este fenómeno es conocido como *upwelling* (surgencia).

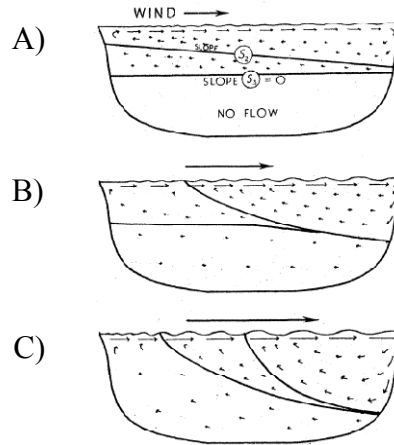


Figura 2.2: Movimiento causado por efecto del viento: A) viento moderado, B) y C) *Upwelling* por vientos más intensos. Las flechas indican el sentido e intensidad del flujo. (Fuente: Mortimer, 1952)

El cálculo del número de Wedderburn supone pequeñas amplitudes de las oscilaciones de la termoclina, por lo que el espesor de las capas superficial y profunda permanecen constantes. Sin embargo, para $W < 3$ este supuesto deja de ser válido y los efectos de las amplitudes de las oscilaciones de la termoclina deben ser considerados en el balance de fuerzas, lo que da origen a un análisis no lineal, el cual entrega como resultado que la condición de *upwelling* se alcanza para $W = 8/9$, valor mayor a la condición $W = 0.5$ predicha por el análisis lineal (Shintani et al., 2010).

Shintani et al. (2010) amplían la definición del número de Wedderburn, considerando la batimetría y la forma irregular de los cuerpos de agua. Alineando el eje x con la dirección del viento y considerando las ecuaciones linealizadas de Navier-Stokes en régimen permanente para un lago con fondo plano y paredes verticales, estratificado en 2 capas, el número de Wedderburn 2D puede escribirse como:

$$W_{2D} = \frac{g' h_1^2}{u_*^2 (2x_g)} \quad (2.6)$$

donde x_g es la distancia entre el centro de gravedad de la superficie del lago y el extremo de “viento arriba” a lo largo del eje x . Este parámetro se calcula como:

$$x_g = \frac{1}{A_0} \int_0^L x B(x) dx \quad (2.7)$$

donde $B(x)$ es el ancho del lago a lo largo del eje x y L es la longitud del fetch en la dirección del viento. Para el caso no lineal ($W < 3$), la condición de *upwelling* en función del número de Wedderburn 2D está dada por:

$$W_{2D} = \frac{2}{L} I^2 \quad (2.8)$$

donde el parámetro I corresponde a:

$$I = \frac{1}{A_0} \int_0^L B(x) \sqrt{x} dx \quad (2.9)$$

Es importante considerar la forma del lago para la estimación de la ocurrencia de *upwelling*, pues éste es mayor en las zonas más angostas de los cuerpos de agua, producto de la conservación del volumen (Shintani et al., 2010).

Otra forma de parametrizar el efecto del viento en la inclinación de la termoclina corresponde al número de Lago, propuesto por Imberger & Patterson (1990):

$$L_N = \frac{g S_t (1 - z_T/z_m)}{\rho_0 u_*^2 A_0^{3/2} (1 - z_g/z_m)} \quad (2.10)$$

donde A_0 es el área superficial del lago, z_T , z_g y z_m corresponden a la altura de la termoclina, centro de gravedad y centro de volumen, respectivamente, medidos desde el fondo del lago hacia arriba, y S_t es el parámetro de estabilidad de Schmidt:

$$S_t = \int_0^{z_m} (z - z_g) A(z) \rho(z) dz \quad (2.11)$$

donde $A(z)$ y $\rho(z)$ corresponden a la distribución vertical de área y densidad, respectivamente, medidos desde el fondo del lago hacia arriba según la coordenada z , definida en la misma dirección.

2.1.4. Modelo en 3 capas

Monismith (1985) estudió la respuesta de un sistema estratificado en 3 capas, identificando dos modos: una respuesta modo 1 consiste en la inclinación de las interfaces superior e inferior, producto del fuerte viento forzante; y una respuesta modo 2, que corresponde a la inclinación de la interfaz superior, mientras la interfaz inferior permanece horizontal, por lo que este tipo de respuesta concentra el esfuerzo de corte y la turbulencia en la capa superficial. En términos adimensionales, el modo 1 ocurre cuando $W < 1$ y $L_N < 1$, mientras que el modo 2 se obtiene para $W < 1$ y $L_N > 1$ (Münnich et al., 1992, Niño et al., 2003).

La representación de la estratificación puede mejorarse agregando más capas al modelo. Por cada capa extra, existe un modo de respuesta adicional, es decir, una nueva interfaz donde pueden desarrollarse ondas internas (Monismith, 1985, Münnich et al., 1992).

Münnich et al. (1992) aportan una nueva definición de los modos de respuesta de un lago estratificado en tres capas. El modo 0 vertical (V0) está asociado a ondas superficiales, en las cuales la columna de agua se mueve como si el lago no estuviera estratificado. El modo 1 vertical (V1) corresponde a un seiche interno donde el espesor del metalimnion se mantiene constante, semejante a una estratificación en 2 capas, mientras el modo 2 vertical (V2) corresponde a ondas

internas producidas en las interfaces superior e inferior del metalimnion, alterando el espesor de este estrato intermedio (Monismith, 1985).

Dado que los seiches son ondas estacionarias, los modos horizontales están definidos por el número de nodos que presenta la onda. Así, el modo 1 horizontal (H1) corresponde a una onda estacionaria, de longitud de onda $2L$, con un solo nodo ubicado en el centro del lago. Los modos de orden superior presentan más nodos, equiespaciados a lo largo del cuerpo de agua. Luego, las ondas internas pueden caracterizarse según el modo vertical y horizontal al cual correspondan, como se muestra en la Figura 2.3.

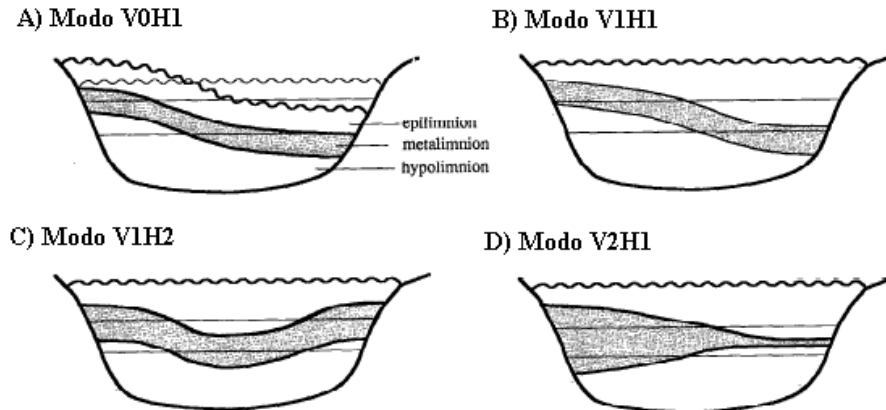


Figura 2.3: Esquema de distintos tipos de seiches: A) Seiche superficial modo 1 horizontal, B) Seiche interno modo 1 vertical modo 1 horizontal, C) Seiche interno modo 1 vertical modo 2 horizontal y D) Seiche interno modo 2 vertical modo 1 horizontal. (Fuente: Adaptado de Münnich et al., 1992).

2.1.5. Efecto de la rotación terrestre en las ondas internas

Como se ha mencionado, uno de los efectos del viento sobre los cuerpos de agua estratificados es la generación de oscilaciones superficiales e internas, conocidas como seiches. Producto de la rotación terrestre, estas ondas pueden verse afectadas por la fuerza de Coriolis, la cual desvía sus trayectorias en sentido horario para el caso del Hemisferio Norte y en sentido anti-horario en el Hemisferio Sur. Si bien todos los objetos sobre la superficie terrestre están sujetos a esta fuerza ficticia, sus efectos sólo son notorios en fenómenos de gran escala, como la circulación general de la atmósfera y las corrientes oceánicas, por ejemplo.

Para determinar si el efecto de Coriolis será importante en un cuerpo de agua se utiliza el número de Burger, definido como el cociente entre el radio de deformación interna de Rossby y la longitud principal del lago (Antenucci & Imberger, 2001):

$$S = \frac{R_0}{L} \quad (2.12)$$

donde L es la extensión principal del cuerpo de agua y R_0 es el radio de deformación interna de Rossby, definido como:

$$R_0 = \frac{c_i}{|f|} \quad (2.13)$$

donde c_i es la celeridad de las ondas internas y f es el parámetro de Coriolis:

$$f = 2 \Omega \sin(\phi) \quad (2.14)$$

donde $\Omega = 7.27 \cdot 10^{-5}$ [rad s⁻¹] corresponde a la frecuencia angular de la Tierra (conocida también como frecuencia inercial) y ϕ es la latitud del lugar de interés. En términos físicos, el número de Burger puede interpretarse como la razón entre la advección y el efecto de Coriolis.

Se dice que el efecto de la rotación terrestre es importante cuando $S < 1$. De acuerdo a Antenucci & Imberger (2001), los lagos ubicados entre los 30° y 60° de latitud se ven afectados por el efecto de Coriolis si su extensión horizontal es mayor a 5 [km].

Producto de la rotación de la Tierra, las ondas internas que se generan en el sistema como respuesta al efecto del viento pueden ser ondas Poincaré y ondas Kelvin. Otros tipos de fenómenos inducidos por la rotación son las ondas topográficas, las ondas Rossby planetarias y los giros geostróficos. La rotación terrestre también induce el desarrollo de la capa de Ekman en los cuerpos de agua, pero el estudio de este fenómeno escapa a los objetivos del presente trabajo. A continuación se describen los distintos tipos de ondas internas mencionadas anteriormente:

- Las ondas Kelvin corresponden a ondas sinusoidales que viajan por el contorno del lago, por lo que son conocidas como ondas “atrapadas” en los bordes del cuerpo de agua. En el Hemisferio Norte, el sentido de propagación de las ondas Kelvin es tal que el borde siempre se encuentra al lado derecho, mientras que en el Hemisferio Sur se encuentra al lado izquierdo (Cushman-Roisin, 1994, Stocker & Imberger, 2003), como se muestra en la Figura 2.4. Esto es equivalente a decir que el sentido de rotación de las ondas Kelvin es ciclónico. La máxima amplitud de estas ondas se presenta en el borde y decae exponencialmente hacia el interior del lago, dentro de una distancia definida por el radio de deformación interna R_0 . Este decaimiento está determinado por un balance entre la fuerza de Coriolis y la gravitacional, lo que impide el flujo en la dirección normal al borde.

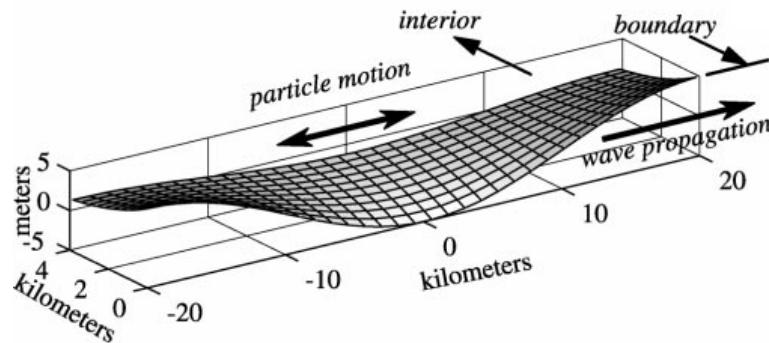


Figura 2.4: Onda Kelvin a lo largo de una costa recta en el Hemisferio Norte (Fuente: Hodges et al., 2000)

- Las ondas Poincaré estacionarias pueden ser visualizadas como la superposición de dos ondas sinusoidales progresivas de igual frecuencia, amplitud y número de onda, pero con direcciones de propagación que forman el mismo ángulo con los ejes principales del lago (Mortimer, 1974). La rotación no afecta la forma de las ondas, pero genera que las trayectorias de las partículas sean elípticas, determinadas por el parámetro f/ω , donde ω es la frecuencia de la onda (ver Figura 2.5).

La celeridad de las ondas Poincaré está afectada por la rotación terrestre, según la siguiente relación de dispersión, válida cuando el flujo no está confinado por condiciones de borde:

$$c_{i*}^2 = \frac{c_i^2}{1 - \left(\frac{f}{\omega}\right)^2} \quad (2.15)$$

donde c_i es la celeridad de las ondas internas no afectadas por la rotación. A medida que la frecuencia de una onda Poincaré se acerca a la frecuencia inercial, las trayectorias de las partículas son cada vez más parecidas a un círculo y la celeridad de la onda tiende a infinito. Como esto no puede ocurrir, la frecuencia de las ondas Poincaré debe ser siempre mayor a la frecuencia inercial (ondas súper-inerciales). Esto no ocurre con las ondas Kelvin, las cuales pueden ser súper o sub-inerciales ya que su celeridad no se ve afectada por la rotación, siendo igual a la celeridad de las ondas internas según la ec (2.4) (Gill, 1982).

Las ondas Poincaré progresivas no están influenciadas por los bordes del cuerpo de agua y tienen una estructura celular, donde la superficie asciende y desciende de manera estacionaria. Las velocidades rotan en sentido horario en el Hemisferio Norte (anti-horario en el Hemisferio Sur), alcanzan su máximo valor en el centro y son nulas en los bordes de cada célula (Gómez-Giraldo et al., 2006). En presencia de condiciones de borde, éstas se satisfacen mediante la superposición de ondas Poincaré progresivas para dar origen a ondas estacionarias, donde las células adyacentes tienen sus velocidades orientadas en sentido contrario (Gill, 1982, Antenucci et al., 2000).

- Las ondas topográficas y las ondas Rossby son movimientos oscilatorios sub-inerciales, de muy baja frecuencia, producidos por un ajuste entre la rotación terrestre y la batimetría variable del lago, en el caso de las primeras, y por la variación del parámetro de Coriolis f en el sentido meridional, en el caso de las segundas. Ambas ondas deben su existencia a la conservación de vorticidad potencial, la cual se define como (Cushman-Roisin, 1994):

$$q = \frac{f + \zeta}{h} \quad (2.16)$$

donde f es la frecuencia inercial, $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ es la vorticidad relativa del fluido y h es la altura de la columna de agua. En el caso de lagos, la frecuencia inercial domina sobre la vorticidad relativa y la vorticidad potencial puede escribirse como $q = f/h$ (Csanady, 1982).

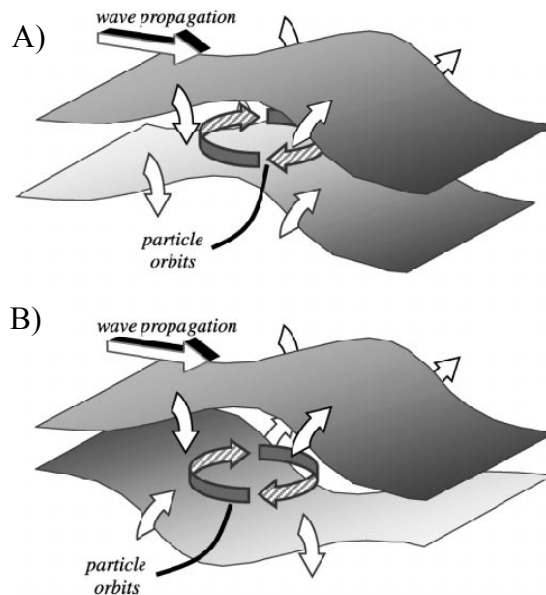


Figura 2.5: Onda Poincaré progresiva: A) modo 1 vertical y B) modo 2 vertical. El sentido de rotación de las partículas corresponde al Hemisferio Norte (anticiclónico). (Fuente: Hodges et al., 2000)

En el caso de las ondas topográficas, la batimetría variable genera gradientes de vorticidad potencial con valores mayores en las zonas más someras (por ende, menores en las zonas más profundas), por lo que las parcelas de fluido deben modificar su vorticidad relativa para compensar los gradientes batimétricos (Csanady, 1975, Cushman-Roisin, 1994, Antenucci et al., 2000).

La variación del parámetro de Coriolis en el sentido meridional (Norte-Sur) también genera gradientes de vorticidad potencial en dicha dirección, pues f aumenta hacia los polos. Al igual que el caso anterior, se produce un cambio en la vorticidad relativa que da origen a las ondas Rossby (Cushman-Roisin, 1994).

- Los giros geostróficos, como su nombre lo indica, corresponden a corrientes circulares geostróficas en la capa superficial, en estado casi-permanente (Endoh, 1986), cuyo período es del orden de los años (Shimizu et al., 2007). La energía potencial de los giros es cercana a cero, lo que indica que no producen desplazamientos verticales de la superficie libre, sólo la termoclina adquiere forma abovedada, con baja amplitud, producto de la presión geostrófica.

Los mecanismos más importantes que dan origen a los giros geostróficos son dos: corrientes generadas por diferencias de temperatura (Akitomo, 2004), y corrientes generadas por efecto del viento (Endoh, 1986), específicamente, por el rotor del esfuerzo de corte del viento. Si éste es no nulo, se excitan los giros, los cuales deben su sentido de rotación al sentido del rotor. Por esta razón, es muy importante la distribución espacial del viento sobre el lago. En ambos casos la batimetría juega un papel fundamental (Shimizu et al., 2007).

2.1.6. Transferencia de energía y escalas asociadas

Como se ha mencionado, el viento es la principal fuente de momentum y energía cinética turbulenta en los lagos. Parte de esta energía es utilizada en la generación de ondas internas de longitud de onda comparable con el tamaño del lago (y por ende, de baja frecuencia), y el resto es usado en la generación de ondas superficiales, de longitud de onda corta, las cuales al romper producen turbulencia en la capa superficial (Wüest & Lorke, 2003). Estas ondas aumentan la rugosidad de la superficie libre, mejorando la transferencia de momentum entre el viento y el cuerpo de agua.

La energía contenida en las ondas internas de gran escala (comparables con el tamaño del lago, descritas en los párrafos anteriores) es transferida a ondas de menor escala (menor longitud de onda y mayor frecuencia) y/o escalas turbulentas mediante variados mecanismos (Saggio & Imberger, 1998). Uno de los más importantes corresponde a los fenómenos no lineales que experimentan las ondas. La teoría lineal asume pequeñas amplitudes, sin embargo, datos de terreno y experimentos de laboratorio han demostrado que la amplitud de las ondas internas es lo suficientemente grande para que los efectos no lineales se vuelvan importantes (Horn et al., 2001). A medida que la pendiente de la onda (definida como la razón entre la amplitud y la longitud de onda) aumenta, la onda se transforma en un frente, el cual finalmente rompe. Los experimentos de Horn et al. (2001) y Boegman et al. (2005b), para el caso sin rotación, y de Ulloa (2011), para el caso con rotación, han demostrado que las ondas internas de gran escala degeneran en frentes no lineales, dando origen a ondas tipo solitones.

Para estudiar el comportamiento de las ondas internas en un cuerpo de agua donde la rotación es importante, de la Fuente et al. (2008) realizaron simulaciones numéricas considerando términos no lineales y no hidrostáticos en las ecuaciones para un sistema dividido en dos capas. Sus resultados indican que las ondas Kelvin tienden a transferir su energía hacia los sub-modos azimutales, los cuales degeneran en un frente, debido a la aceleración no lineal, la cual es contrarrestada por las fuerzas de presión no hidrostáticas produciendo dispersión de las ondas. Cuando ambos efectos se encuentran en equilibrio, se producen ondas tipo solitones. En el caso de las ondas Poincaré, la rotación impide la formación de frentes.

Una forma de verificar la presencia de fenómenos no lineales corresponde a la razón entre la escala de tiempo de empujamiento de la onda y el período de la onda interna fundamental (Horn et al., 2001, de la Fuente et al., 2008), definida como:

$$\frac{T_s}{T_i} = \frac{1}{3\eta_0} \frac{h_1 h_2}{h_2 - h_1} \quad (2.17)$$

donde T_s es el tiempo de empujamiento de la onda, T_i es el período de la onda interna fundamental y η_0 es la amplitud inicial de la onda, cuando el sistema es excitado a partir de una condición forzada inicial. Cuando esta razón es mayor a 1, no se observan efectos no lineales.

La interacción de las ondas con la batimetría es una importante fuente de disipación de energía. Cerca del fondo, se produce una zona de turbulencia llamada capa límite béntica, la cual debe su origen al rompimiento de ondas internas en las paredes del lago, en el caso del metalimnion, y al esfuerzo de corte sobre el fondo, en el caso del hipolimnion, producto de las corrientes generadas por las ondas internas de gran escala (Imberger, 1998). Las ondas tipo solitones son una

importante fuente de turbulencia para la capa límite béntica, pues rompen en esta zona producto del efecto de la reducción de profundidad que experimentan en las riberas del lago (Boegman et al., 2003). Las ondas incidentes sobre las riberas también pueden reflejarse, disipando parte de su energía. Cuando la onda incidente tiene un ángulo de incidencia crítico con respecto a la pendiente de fondo, se produce una onda reflejada de mayor energía, que viaja paralela al fondo hasta que rompe (Wüest & Lorke, 2003).

La importancia de los procesos de pequeña escala es que producen la mezcla de estratos de distinta densidad, lo que tiende a destruir la estratificación y generar un aumento de la energía potencial del lago.

2.1.7. Resonancia

La interacción entre el viento y las ondas internas en un lago puede ser analizada como un oscilador armónico forzado. El viento aporta energía al sistema (en este caso, el lago), sacando a la termoclina de su posición de equilibrio y generando ondas internas. En ausencia de viento, las ondas internas seguirán presentes en el sistema al menos mientras los mecanismos de disipación, como la fricción con las paredes y el fondo del lago, por ejemplo, se encarguen de disipar su energía. Sin embargo, el viento sopla con una cierta frecuencia sobre los lagos según la periodicidad de las condiciones meteorológicas de la zona de interés, convirtiendo el problema en una oscilación forzada. Cuando la frecuencia del forzante (en este caso el viento) se acerca a la frecuencia de alguno de los modos normales del sistema, se produce el fenómeno de resonancia, que se traduce en un aumento de la amplitud de la respuesta del sistema. En ausencia de disipación, la amplitud crecerá en cada ciclo, debido a la acumulación de energía. En caso contrario, el problema puede abordarse como un oscilador armónico amortiguado.

En el caso de lagos, la resonancia actúa aumentando la amplitud de las ondas internas que cumplen con la relación $\omega_f/\omega_i \rightarrow 1$, donde ω_f es la frecuencia forzante y ω_i es la frecuencia de la onda excitada. Esto trae como consecuencia la posibilidad de que, por resonancia, se exciten modos que en condiciones normales no aparecerían en la respuesta del lago (Münnich et al., 1992). En el caso sin rotación, la resonancia puede excitar los armónicos de la frecuencia fundamental, como muestra el trabajo de Wake et al. (2007).

Antenucci & Imberger (2003) estudiaron la evolución temporal de las frecuencias naturales del Lago Kinneret en función del número de Burger, identificando una interacción resonante entre el viento y la onda Kelvin modo 1 vertical modo 1 azimutal, ambos con períodos cercanos a las 24 [hrs]. Según los autores, cuando la frecuencia natural de la onda Kelvin se acerca a la frecuencia forzante, la amplitud y la energía de la onda aumentan considerablemente, en comparación con los períodos en que la frecuencia natural se aleja de la frecuencia forzante.

En términos prácticos, la amplitud de las ondas no puede crecer indiscriminadamente: llega un momento en que los efectos no lineales se hacen importantes y se produce una transferencia de parte de la energía total hacia ondas internas no lineales, de menor longitud de onda y alta frecuencia, mientras que el resto de la energía es disipada por fricción.

2.2. Estudio Teórico/Numérico

El análisis modal desarrollado en este trabajo fue propuesto por Shimizu et al. (2007). Éste permite simular la respuesta de un sistema de dos capas frente al viento, suponiendo que dicha respuesta está compuesta de una estructura espacial y otra temporal. Al plantear las ecuaciones de continuidad y momentum para cada una de las capas, sin considerar forzamiento externo del sistema, se obtiene un problema de valores propios generalizado. Los vectores propios corresponden a la estructura espacial y las frecuencias de oscilación de cada modo están dadas por los valores propios. Luego, la respuesta forzada puede expresarse como una combinación lineal de los modos normales de oscilación encontrados en el problema sin forzante, donde las amplitudes dependen del tiempo y de la interacción del esfuerzo de corte del viento con las velocidades de la capa superficial.

A continuación se presentan las ecuaciones y la base teórica del análisis.

2.2.1. Descripción teórica del problema

Se tiene un cuerpo de agua estratificado en dos capas de densidad homogénea, separadas por una interfaz de densidad. Suponiendo que el espesor de las capas permanece constante (no existe mezcla entre las capas), se plantean las ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes promediadas según Reynolds para cada estrato, considerando el efecto de la rotación terrestre:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial y} + \frac{\partial w_k}{\partial z} = 0 \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_k}{\partial x} + v_k \frac{\partial u_k}{\partial y} + w_k \frac{\partial u_k}{\partial z} - f v_k \\ = -\frac{1}{\rho_k} \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \right)_k + \frac{1}{\rho_k} \left[\frac{\partial \tau_{xxk}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yxk}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zxk}}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_k}{\partial t} + u_k \frac{\partial v_k}{\partial x} + v_k \frac{\partial v_k}{\partial y} + w_k \frac{\partial v_k}{\partial z} + f u_k \\ = -\frac{1}{\rho_k} \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial y} \right)_k + \frac{1}{\rho_k} \left[\frac{\partial \tau_{xyk}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yyk}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zyk}}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial w_k}{\partial t} + u_k \frac{\partial w_k}{\partial x} + v_k \frac{\partial w_k}{\partial y} + w_k \frac{\partial w_k}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_k} \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} \right)_k + \frac{1}{\rho_k} \left[\frac{\partial \tau_{xz k}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz k}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz k}}{\partial z} \right] \quad (2.21)$$

donde el subíndice $k = 1$ corresponde a la capa superficial y $k = 2$, a la capa profunda; u_k, v_k, w_k denotan las componentes de la velocidad en las direcciones x, y, z , respectivamente; ρ_k es la densidad de la capa k , \hat{p}_k es la presión motriz en la capa k , τ_{ii_k} son los esfuerzos normales y τ_{ij_k} son los esfuerzos tangenciales sobre la capa k , con $i, j = x, y, z$.

Considerando que la longitud de las ondas es mucho mayor que la profundidad del cuerpo de agua, es posible despreciar las aceleraciones verticales y es válido asumir presión hidrostática (Mortimer, 1952). El análisis es de tipo lineal, por lo que se desprecian los términos advectivos no lineales. En el problema se considera sólo el esfuerzo tangencial del viento sobre la superficie

libre, por lo que se desprecian los esfuerzos interfaciales y de fricción con el fondo del lago. No existen esfuerzos normales sobre ninguna de las capas.

2.2.2. Ecuaciones

El análisis modal, desarrollado por Shimizu et al. (2007), considera la teoría lineal de ondas de pequeña amplitud (ecuaciones de aguas someras), la aproximación de Boussinesq, presión hidrostática en la vertical, fluido incompresible y que no hay mezcla entre capas. Multiplicando la ecuación de continuidad para la primera capa por la aceleración de gravedad, la misma ecuación para la segunda capa por la gravedad reducida, y las ecuaciones de momentum por el espesor de la capa respectiva, las ecuaciones anteriores pueden escribirse de manera matricial como:

$$\mathbf{M} \partial_t \xi(\vec{x}, t) = i \mathbf{K} \xi(\vec{x}, t) + \mathbf{f}(\vec{x}, t) \quad (2.22)$$

donde:

$$\xi(\vec{x}, t) = (\eta_1 \quad \eta_2 \quad \bar{v}_1 \quad \bar{v}_2)^T \quad (2.23)$$

es el vector de estado que contiene los desplazamientos verticales de la superficie libre, de la interfaz de densidad y las velocidades promedio en cada capa, respectivamente. La definición de estas variables se muestra en la Figura 2.6. El forzante externo se define como:

$$\mathbf{f}(\vec{x}, t) = (0 \quad 0 \quad \bar{\tau}_s \quad 0)^T \quad (2.24)$$

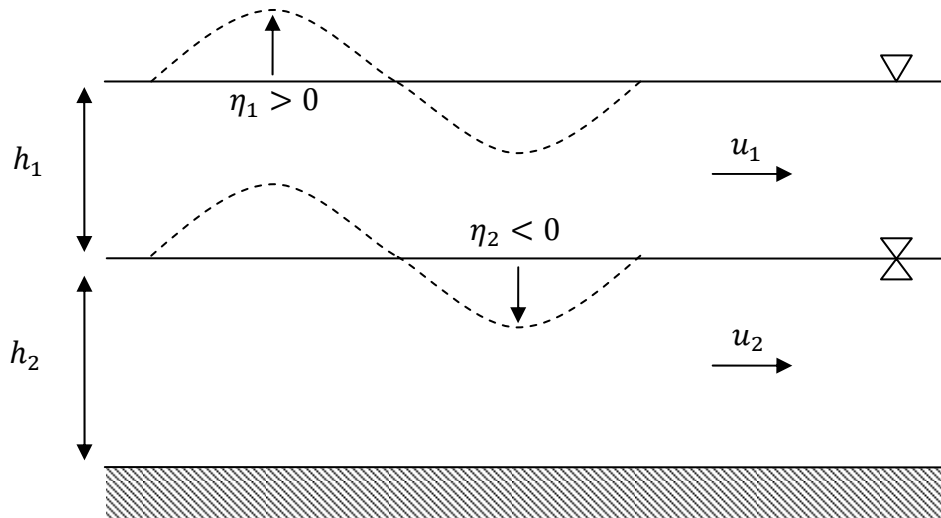


Figura 2.6: Definición de variables contenidas en el vector de estado

La matriz \mathbf{K} corresponde al operador lineal de aguas someras:

$$\mathbf{K}(\vec{x}) = i \rho_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_1 g \nabla \cdot h_1 & \varepsilon_1 g \nabla \cdot h_2 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 g \nabla \cdot h_2 \\ h_1 \nabla \varepsilon_1 g & 0 & 2\bar{\Omega} \times h_1 & 0 \\ h_2 \nabla \varepsilon_1 g & h_2 \nabla \varepsilon_2 g & 0 & 2\bar{\Omega} \times h_2 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Mientras que \mathbf{M} es una matriz de ponderación:

$$\mathbf{M}(\vec{x}) = \rho_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_1 g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_2 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

En las ecuaciones anteriores, t es el tiempo, $\vec{x} = (x, y)^T$ representan las coordenadas espaciales horizontales, $k = (1, 2)$ es el índice de la capa, η_k es el desplazamiento vertical de la superficie libre o de la interfaz de densidad respecto de su posición de equilibrio, $\vec{v}_k = (u_k, v_k)^T$ son las velocidades promediadas en la vertical, h_k es el espesor de la capa, $\bar{\Omega} = (0 \ 0 \ f/2)^T$ es la velocidad angular producto de la rotación terrestre, donde f es el parámetro de Coriolis; $\vec{\tau}_s = (\tau_{sx}, \tau_{sy})^T$ es el esfuerzo de corte del viento sobre la superficie libre, ρ_k es la densidad, $\varepsilon_1 = \rho_1/\rho_0$ es la densidad adimensional de la primera capa, $\varepsilon_2 = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_0$ es la diferencia de densidad adimensional entre capas, donde ρ_0 es una densidad de referencia; $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria, ∂_t es la derivada temporal y $\nabla = (\partial_x, \partial_y)^T$ es el operador gradiente espacial. Los subíndices 1 y 2 hacen referencia a la capa superficial y profunda, respectivamente, mientras que el superíndice T corresponde al vector traspuesto.

La condición de borde del problema es que no puede existir flujo a través de las paredes laterales de cada capa (Shimizu et al., 2007), es decir:

$$\{(h_k \vec{v}_k) \cdot \vec{n}_k\}_{pared} = 0 \quad (2.27)$$

donde \vec{n}_k es el vector normal a la pared de la capa k .

Para encontrar las oscilaciones libres del sistema (sin forzante externo), se supone que las soluciones de la ec (2.22) están compuestas de una parte espacial y otra temporal, periódica, de la forma:

$$\xi(\vec{x}, t) = \tilde{\xi}(\vec{x}) e^{i\omega t} \quad (2.28)$$

donde ω corresponde a la frecuencia natural de oscilación y $\tilde{\xi}(\vec{x})$ es la estructura espacial de la solución. Esto da origen a un problema de valores y vectores propios generalizado:

$$\omega \mathbf{M} \tilde{\xi} = \mathbf{K} \tilde{\xi} \quad (2.29)$$

Los valores propios corresponden a las frecuencias naturales de oscilación de cada uno de los modos o soluciones, mientras que la parte espacial está definida por el vector propio asociado a cada valor propio. Luego, se tiene un conjunto de soluciones de la forma:

$$\xi(\vec{x}, t) = \tilde{\xi}^{(r)}(\vec{x})e^{i\omega^{(r)}t} \quad (2.30)$$

donde la estructura espacial del modo r se define como:

$$\tilde{\xi}^{(r)} = \left(\tilde{\eta}_1^{(r)} \quad \tilde{\eta}_2^{(r)} \quad \vec{v}_1^{(r)} \quad \vec{v}_2^{(r)} \right)^T \quad (2.31)$$

y $\omega^{(r)}$ es la frecuencia del modo r . Para cada modo, existe una solución conjugada, cuya distribución espacial corresponde al complejo conjugado de $\tilde{\xi}^{(r)}$ y su frecuencia de oscilación es $-\omega^{(r)}$.

La tilde (\sim) sobre los vectores propios indica que éstos han sido normalizados usando el factor $\tilde{e}^{(r)}$, definido como el doble de la energía del modo r :

$$\tilde{e}^{(r)} = \rho_0 \left(\langle \tilde{\eta}_1^{(r)}, \varepsilon_1 g \tilde{\eta}_1^{(r)} \rangle + \langle \tilde{\eta}_2^{(r)}, \varepsilon_2 g \tilde{\eta}_2^{(r)} \rangle + \langle \vec{v}_1^{(r)}, h_1 \vec{v}_1^{(r)} \rangle + \langle \vec{v}_2^{(r)}, h_2 \vec{v}_2^{(r)} \rangle \right) \quad (2.32)$$

En la expresión anterior, el operador \langle , \rangle corresponde a un producto punto definido como:

$$\langle \xi, \xi' \rangle = \int \xi^H \cdot \xi' dA \quad (2.33)$$

donde ξ y ξ' son dos modos distintos, el superíndice H indica transpuesto conjugado y la integral se resuelve sobre todo el dominio espacial.

Los modos normales de oscilación obtenidos de la solución de la ec (2.29) incluyen los distintos tipos de ondas presentadas en la Sección 2.1.5, es decir, ondas internas gravitacionales (Kelvin y Poincaré), ondas topográficas, ondas Rossby y giros geostroficos.

2.2.3. Respuesta forzada: amplitudes modales

Una vez que se han obtenido los modos normales de oscilación, la respuesta forzada del sistema puede ser expresada como una combinación lineal de todas las soluciones de la ec (2.29):

$$\xi(\vec{x}, t) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \tilde{\xi}^{(r)}(\vec{x})\tilde{a}^{(r)}(t) \quad (2.34)$$

Donde $\tilde{a}^{(r)}(t)$ corresponde a la amplitud del modo r y su valor depende exclusivamente del tiempo. Para que los modos sean efectivamente una base ortogonal y sea aplicable la ec (2.34), se debe cumplir que la matriz \mathbf{K} sea Hermítica según el producto punto definido en la ec (2.33) (Shimizu et al., 2007), es decir:

$$\langle \xi', \mathbf{K} \xi \rangle = \langle \mathbf{K} \xi', \xi \rangle \quad (2.35)$$

Las amplitudes modales se pueden calcular según Proudman (1928):

$$\tilde{\alpha}^{(r)}(t) = \tilde{e}^{(r)-1} \langle \tilde{\xi}^{(r)}(\vec{x}), \mathbf{M} \xi(\vec{x}, t) \rangle \quad (2.36)$$

Dado que las amplitudes modales son complejas, también pueden ser expresadas en términos de su módulo $|\tilde{\alpha}^{(r)}|$ y su ángulo de fase $\theta^{(r)}$, calculado como:

$$\theta^{(r)} = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}(\tilde{\alpha}^{(r)}(t))}{\text{Re}(\tilde{\alpha}^{(r)}(t))} \right) \quad (2.37)$$

La energía total del sistema $E(t)$ puede expresarse en términos de las energías modales:

$$E(t) = \frac{1}{2} \langle \xi, \mathbf{M} \xi \rangle = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} E^{(r)}(t) \quad (2.38)$$

donde la energía del modo r se calcula como:

$$E^{(r)}(t) = \frac{1}{2} \tilde{e}^{(r)} |\tilde{\alpha}^{(r)}(t)|^2 \quad (2.39)$$

2.2.4. Evolución de las amplitudes modales en el tiempo

Tomando la ec (2.34), reemplazándola en la ec (2.22), haciendo el producto punto con $\tilde{\xi}^{(r)}$ y gracias a la ortogonalidad de los modos, se obtiene una expresión para calcular la evolución de las amplitudes modales en el tiempo:

$$\tilde{e}^{(r)} \partial_t \tilde{\alpha}^{(r)}(t) = i \omega^{(r)} \tilde{e}^{(r)} \tilde{\alpha}^{(r)}(t) + \tilde{f}^{(r)}(t) \quad (2.40)$$

donde $\tilde{f}^{(r)}(t)$ es el forzante modal, que cuantifica la interacción del viento con la velocidad, promediada en la vertical, de la capa superficial. El forzante modal se define como:

$$\tilde{f}^{(r)}(t) = \langle \tilde{\xi}^{(r)}(\vec{x}), \mathbf{f}(\vec{x}, t) \rangle = \langle \tilde{v}_1^{(r)}(\vec{x}), \tilde{\tau}_s(\vec{x}, t) \rangle \quad (2.41)$$

Dado que el forzante modal sólo depende del tiempo, y $\omega^{(r)}$ junto a $\tilde{e}^{(r)}$ son constantes, la expresión (2.40) es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden que puede ser fácilmente resuelta.

Una vez obtenida la evolución temporal de las amplitudes modales, es posible obtener dicha evolución para las energías y fases modales, y para la energía total del sistema. Escribiendo las amplitudes como $\tilde{a}^{(r)}(t) = |\tilde{a}^{(r)}|e^{i\theta^{(r)}}$, reemplazando en la ec (2.40), multiplicando por $|\tilde{a}^{(r)}|e^{-i\theta^{(r)}}$, tomando parte real e imaginaria, y dividiendo la parte imaginaria por $2E^{(r)}(t)$, se obtienen las ecuaciones que rigen el cambio temporal de las energías y fases modales:

$$\partial_t E^{(r)}(t) = \text{Re} \left(\dot{W}^{(r)}(t) \right) \quad (2.42)$$

$$\partial_t \theta^{(r)}(t) = \omega^{(r)} + \frac{\text{Im} \left(\dot{W}^{(r)}(t) \right)}{2E^{(r)}(t)} \quad (2.43)$$

Donde $\dot{W}^{(r)}(t)$ es la tasa compleja de trabajo realizado por el viento al interactuar con el modo r :

$$\dot{W}^{(r)}(t) = \tilde{a}^{(r)*}(t) \tilde{f}^{(r)}(t) = \langle \vec{v}_1^{(r)}(\vec{x}), \vec{\tau}_s(\vec{x}, t) \rangle \quad (2.44)$$

Es importante señalar que $\vec{v}_1^{(r)}$ es una variable compleja, cuya parte real representa el campo de velocidad de la capa superficial en un cierto instante de tiempo, y la parte compleja, lo mismo para un cuarto del período después de dicho instante (Shimizu et al., 2007). Si $\vec{v}_1^{(r)}$ y $\vec{\tau}_s$ son paralelas en todo el dominio espacial y tienen la misma dirección, $\dot{W}^{(r)}$ es real y el viento excita el modo r . Cuando ambas variables son paralelas, pero en sentidos opuestos, el viento cancela la acción de ese modo. Por otro lado, si $\vec{v}_1^{(r)}$ y $\vec{\tau}_s$ son ortogonales en todo el dominio espacial, $\dot{W}^{(r)}$ es imaginario y el viento acelera la evolución de la fase, si $\vec{\tau}_s$ y la parte imaginaria de $\vec{v}_1^{(r)}$ son paralelas, con la misma dirección. Si las variables mencionadas tienen direcciones opuestas, el viento tiende a desacelerar la fase del modo con el que está interactuando.

2.2.5. Análisis modal con disipación lineal

Shimizu & Imberger (2008) extendieron el análisis modal propuesto por Shimizu et al. (2007), considerando un sistema estratificado en 3 capas y un factor lineal de disipación de energía. En términos matriciales, las ecuaciones de continuidad multiplicadas por la gravedad reducida y las ecuaciones de momentum multiplicadas por el espesor de las capas se escriben como:

$$\mathbf{M} \partial_t \xi(\vec{x}, t) = i (\mathbf{K} + \mathbf{C}) \xi(\vec{x}, t) + \mathbf{f}(\vec{x}, t) \quad (2.45)$$

donde:

$$\xi(\vec{x}, t) = (\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3 \quad \vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3)^T \quad (2.46)$$

es el vector de estado que contiene los desplazamientos verticales de la superficie libre, las interfaces de densidad y las velocidades promedio en cada capa, respectivamente. El forzante

externo se define de manera análoga al problema en dos capas y la matriz \mathbf{K} corresponde al operador lineal de aguas someras para el sistema en 3 capas:

$$\mathbf{K}(\vec{x}) = i \rho_0 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \varepsilon_1 g \nabla \cdot h_1 & \varepsilon_1 g \nabla \cdot h_2 & \varepsilon_1 g \nabla \cdot h_3 \\ h_1 \nabla \varepsilon_1 g & 0 & 0 & 2\bar{\Omega} \times h_1 & 0 & 0 \\ h_2 \nabla \varepsilon_1 g & h_2 \nabla \varepsilon_2 g & 0 & 0 & 2\bar{\Omega} \times h_2 & 0 \\ h_3 \nabla \varepsilon_1 g & h_3 \nabla \varepsilon_2 g & h_3 \nabla \varepsilon_3 g & 0 & 0 & 2\bar{\Omega} \times h_3 \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

donde $\mathbf{0}$ denota la matriz nula. \mathbf{M} es una matriz de ponderación:

$$\mathbf{M}(\vec{x}) = \rho_0 \text{diag}(\varepsilon_1 g \quad \varepsilon_2 g \quad \varepsilon_3 g \quad h_1 \quad h_2 \quad h_3) \quad (2.48)$$

donde *diag* denota una matriz diagonal cuyos elementos son los contenidos en el argumento. Finalmente, \mathbf{C} es el operador de disipación lineal:

$$\mathbf{C}(\vec{x}) = i \rho_0 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_b \end{matrix} \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

donde c_b es el coeficiente lineal de fricción con el fondo. Suponiendo soluciones compuestas por una parte espacial y otra temporal, periódica, de la forma:

$$\xi(\vec{x}, t) = \tilde{\xi}(\vec{x}) e^{i(\omega + i\gamma)t} \quad (2.50)$$

donde γ es una tasa de decaimiento (con las mismas unidades de ω), y considerando el problema sin forzante externo, la ec (2.45) se convierte en un problema de valores y vectores propios:

$$(\omega + i\gamma)\mathbf{M}\tilde{\xi} = (\mathbf{K} + \mathbf{C})\tilde{\xi} \quad (2.51)$$

Las soluciones de esta ecuación consisten en sets compuestos por una frecuencia angular $\omega^{(r)}$ (real), una tasa de decaimiento $\gamma^{(r)}$ (real positivo) y una estructura espacial modal derecha $\tilde{\xi}^{R(r)}$. Al igual que en el problema en dos capas, las soluciones de la ec (2.45) vienen en pares conjugados (Shimizu & Imberger, 2008). Por otro lado, se debe considerar el problema adjunto que surge de la ec (2.45):

$$(\omega + i\gamma)\mathbf{M}\tilde{\xi} = (\mathbf{K} + \mathbf{C})^H \xi \quad (2.52)$$

donde el superíndice H denota la matriz traspuesta conjugada. Las soluciones de esta ecuación nuevamente consisten en sets compuestos por una frecuencia angular $\omega^{(r)}$ (real), una tasa de decaimiento $\gamma^{(r)}$ (real positivo) y una estructura espacial modal izquierda $\tilde{\xi}^{L(r)}$. Luego, la respuesta forzada puede ser escrita como una combinación lineal de los modos derechos o izquierdos, donde los coeficientes corresponden a las amplitudes modales derechas o izquierdas, respectivamente (Shimizu & Imberger, 2008). Éstas se calculan resolviendo la siguiente ecuación diferencial:

$$\tilde{e}^{R(r)} \partial_t \tilde{a}^{R(r)}(t) = (i \omega^{(r)} - \gamma^{(r)}) \tilde{e}^{R(r)} \tilde{a}^{R(r)}(t) + \tilde{f}^{R(r)}(t) \quad (2.53)$$

donde $\tilde{f}^{R(r)}(t)$ es el forzante modal derecho y se define como:

$$\tilde{f}^{R(r)}(t) = \langle \tilde{\xi}^{L(r)}(\vec{x}), \mathbf{f}(\vec{x}, t) \rangle = \langle \tilde{v}_1^{L(r)}(\vec{x}), \tilde{\tau}_s(\vec{x}, t) \rangle \quad (2.54)$$

y $\tilde{v}_1^{L(r)}$ es la velocidad modal promediada en la vertical de la primera capa, inducida por el modo izquierdo r . Análogamente, cuando la disipación es baja, las ecs (2.53) y (2.54) pueden ser utilizadas para calcular las amplitudes modales izquierdas (Shimizu & Imberger, 2008).

A priori, no se conocen los coeficientes de disipación lineal, por lo que es necesario hacer supuestos para su calibración y posterior validación. Considerando que la disipación por fricción es pequeña, los modos pueden ser obtenidos del problema sin disipación, y luego encontrar las tasas de disipación a partir de un proceso de optimización, en el cual se busque el mejor ajuste entre los desplazamientos simulados y observados de las termoclinas. En este problema, las amplitudes modales iniciales y las tasas de disipación son los parámetros a optimizar (Shimizu & Imberger, 2008).

3. Capítulo 3: Solución Numérica

De acuerdo al análisis presentado en la Sección 2.2, para encontrar los modos normales de oscilación del sistema se resuelve la ec (2.29) de manera numérica, considerando la batimetría y el contorno irregular del cuerpo lacustre.

3.1. Discretización espacial

Se tienen dos grillas horizontales, una para la superficie libre y otra para la interfaz de densidad, de espaciamiento Δx en el eje x , y Δy en el eje y . En el centro de cada elemento se define el desplazamiento vertical η y las velocidades u y v se definen en las caras este-oeste y norte-sur, respectivamente. Este tipo de grilla se conoce como malla Arakawa-C o alternada y se muestra en la Figura 3.1. Ambas mallas deben tener el mismo espaciamiento, para que el cálculo de las variables sea coherente.

La discretización del dominio espacial considera la batimetría y el contorno irregular del lago. El espesor de la capa superficial está dado por la profundidad media de la termoclina. La profundidad de cada elemento, para la capa inferior, corresponde al valor de la batimetría en el nodo η y la profundidad para los nodos u está dada por el mínimo entre los nodos η adyacentes en la dirección x . La misma definición se aplica para la profundidad de los nodos v .

Las zonas costeras de la capa superficial, que no alcanzan a estar en contacto con la termoclina, también son consideradas en el análisis. Para los elementos de la malla que calzan en esta categoría, se impone que el flujo vertical por el fondo es nulo y se consideran los flujos horizontales con los elementos adyacentes.

El contorno de la capa profunda está definido por el veril asociado al espesor de la capa superficial. Bajo esta línea, se supone que las riberas de cada celda son completamente verticales, por lo que los flujos normales a esta superficie son nulos. La cota de fondo de cada celda corresponde a la batimetría asociada al nodo η .

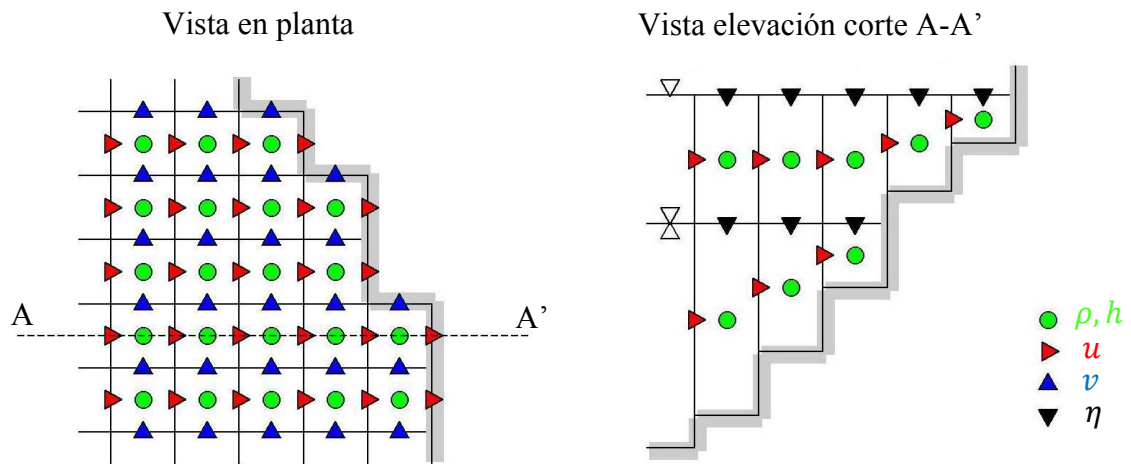


Figura 3.1: Esquema malla alternada
(Fuente: Adaptado de Shimizu et al., 2007)

3.2. Variación de f en la dirección Norte - Sur

La inclusión en el cálculo de la variación del parámetro de Coriolis en la dirección Norte-Sur depende del tamaño del lago a analizar, sin embargo, se considera de igual forma para evitar que las soluciones numéricas de los giros geostroficados sean degeneradas (Shimizu et al., 2007). Escribiendo la latitud como $\phi = \phi_0 + d\phi$, donde ϕ_0 es una latitud de referencia y $d\phi$ es una variación pequeña de la latitud a partir del valor referencial, el factor de Coriolis queda:

$$f(\phi) = 2\Omega \sin(\phi_0 + d\phi) \quad (3.1)$$

Donde $d\phi$ es un arco de circunferencia definido como y/R , con y la coordenada Norte medida desde ϕ_0 y R el radio medio de la Tierra. Considerando que $d\phi$ es pequeño, el parámetro de Coriolis puede expandirse en serie de Taylor en función de la coordenada Norte:

$$f(y) = 2\Omega \sin(\phi_0) + \frac{2\Omega \cos(\phi_0)}{R} y \quad (3.2)$$

El primer término es el factor f asociado a ϕ_0 , denominado f_0 , y el factor que acompaña a y en el segundo término es conocido como el parámetro β , y da cuenta de la variación de f en la dirección Norte-Sur (Cushman-Roisin, 1994). Por esta razón, se habla de *plano- f* cuando el parámetro de Coriolis se supone constante en el dominio horizontal, y de *plano- β* cuando varía en la dirección Norte-Sur.

3.3. Formación de las matrices K y M

En primer lugar, la ec (2.29) da origen a un conjunto de 6 ecuaciones:

$$\omega \varepsilon_1 g \tilde{\eta}_1 = i \varepsilon_1 g h_1 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} + i \varepsilon_1 g h_1 \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial y} + i \varepsilon_1 g h_2 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x} + i \varepsilon_1 g h_2 \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} \quad (3.3)$$

$$\omega \varepsilon_2 g \tilde{\eta}_2 = i \varepsilon_2 g h_2 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x} + i \varepsilon_2 g h_2 \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} \quad (3.4)$$

$$\omega h_1 \tilde{u}_1 = i \varepsilon_1 g h_1 \frac{\partial \tilde{\eta}_1}{\partial x} - i f h_1 \tilde{v}_1 \quad (3.5)$$

$$\omega h_1 \tilde{v}_1 = i \varepsilon_1 g h_1 \frac{\partial \tilde{\eta}_1}{\partial y} + i f h_1 \tilde{u}_1 \quad (3.6)$$

$$\omega h_2 \tilde{u}_2 = i \varepsilon_1 g h_2 \frac{\partial \tilde{\eta}_1}{\partial x} + i \varepsilon_2 g h_2 \frac{\partial \tilde{\eta}_2}{\partial x} - i f h_2 \tilde{v}_2 \quad (3.7)$$

$$\omega h_2 \tilde{v}_2 = i \varepsilon_1 g h_2 \frac{\partial \tilde{\eta}_1}{\partial y} + i \varepsilon_2 g h_2 \frac{\partial \tilde{\eta}_2}{\partial y} + i f h_2 \tilde{u}_2 \quad (3.8)$$

Las dos primeras ecuaciones están asociadas a los nodos $\tilde{\eta}$, mientras que las restantes corresponden a los nodos de las velocidades. A partir de las mallas alternadas para ambas capas, se tiene un número $N_{\tilde{\eta}_k}$ de nodos $\tilde{\eta}_k$, $N_{\tilde{u}_k}$ nodos \tilde{u}_k y $N_{\tilde{v}_k}$ nodos \tilde{v}_k , con k el índice de capa. El total de nodos, denominado N , depende del espaciamiento de las mallas y corresponde a la suma de los seis valores N_i (3 por cada capa). Con esta definición, las matrices \mathbf{K} y \mathbf{M} tienen dimensiones de $N \times N$, e incluyen en una primera etapa los nodos donde se imponen las condiciones de borde. El vector de estado tiene N elementos: primero van los nodos $\tilde{\eta}_1$, luego los nodos $\tilde{\eta}_2$, \tilde{u}_1 , \tilde{v}_1 , \tilde{u}_2 y \tilde{v}_2 , respectivamente.

Para el ensamble de las matrices, las derivadas espaciales se resuelven considerando un esquema de diferencias finitas, considerando los nodos adyacentes en la dirección correspondiente. Para los elementos $\tilde{\eta}$ se tiene:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \approx \frac{\Delta \tilde{u}}{\Delta x} = \frac{\tilde{u}_e - \tilde{u}_w}{\Delta x} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \approx \frac{\Delta \tilde{v}}{\Delta y} = \frac{\tilde{v}_n - \tilde{v}_s}{\Delta y} \quad (3.10)$$

donde los subíndices e, w, n, s se refieren a las caras este, oeste, norte y sur del elemento $\tilde{\eta}$, respectivamente. Para las velocidades, se cumple que:

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} \approx \frac{\Delta \tilde{\eta}}{\Delta x} = \frac{\tilde{\eta}_E - \tilde{\eta}_W}{\Delta x} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} \approx \frac{\Delta \tilde{\eta}}{\Delta y} = \frac{\tilde{\eta}_N - \tilde{\eta}_S}{\Delta y} \quad (3.12)$$

donde los subíndices E, W, N, S se refieren a los elementos $\tilde{\eta}$ adyacentes en las direcciones Este, Oeste, Norte y Sur, respectivamente. Estas definiciones se muestran esquemáticamente en la Figura 3.2. Incorporando estas definiciones en las ecs (3.3) a (3.8), se obtiene el set de ecuaciones que permite armar las matrices \mathbf{K} y \mathbf{M} :

$$\begin{aligned} \omega \varepsilon_1 g \tilde{\eta}_1 = & \frac{i \varepsilon_1 g}{\Delta x} (h_1 \tilde{u}_{1e} - h_1 \tilde{u}_{1w} + h_2 \tilde{u}_{2e} - h_2 \tilde{u}_{2w}) \\ & + \frac{i \varepsilon_1 g}{\Delta y} (h_1 \tilde{v}_{1n} - h_1 \tilde{v}_{1s} + h_2 \tilde{v}_{2n} - h_2 \tilde{v}_{2s}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\omega \varepsilon_2 g \tilde{\eta}_2 = \frac{i \varepsilon_2 g}{\Delta x} (h_2 \tilde{u}_{2e} - h_2 \tilde{u}_{2w}) + \frac{i \varepsilon_2 g}{\Delta y} (h_2 \tilde{v}_{2n} - h_2 \tilde{v}_{2s}) \quad (3.14)$$

$$\omega h_1 \tilde{u}_1 = \frac{i \varepsilon_1 g h_1}{\Delta x} (\tilde{\eta}_{1E} - \tilde{\eta}_{1W}) - i f h_1 \square \tilde{v}_1 \quad (3.15)$$

$$\omega h_1 \tilde{v}_1 = \frac{i\varepsilon_1 g h_1}{\Delta y} (\tilde{\eta}_{1N} - \tilde{\eta}_{1S}) + i f h_1 \square \tilde{u}_1 \quad (3.16)$$

$$\omega h_2 \tilde{u}_2 = \frac{i\varepsilon_1 g h_2}{\Delta x} (\tilde{\eta}_{1E} - \tilde{\eta}_{1W}) + \frac{i\varepsilon_2 g h_2}{\Delta x} (\tilde{\eta}_{2E} - \tilde{\eta}_{2W}) - i f h_2 \square \tilde{v}_2 \quad (3.17)$$

$$\omega h_2 \tilde{v}_2 = \frac{i\varepsilon_1 g h_2}{\Delta y} (\tilde{\eta}_{1N} - \tilde{\eta}_{1S}) + \frac{i\varepsilon_2 g h_2}{\Delta y} (\tilde{\eta}_{2N} - \tilde{\eta}_{2S}) + i f h_2 \square \tilde{u}_2 \quad (3.18)$$

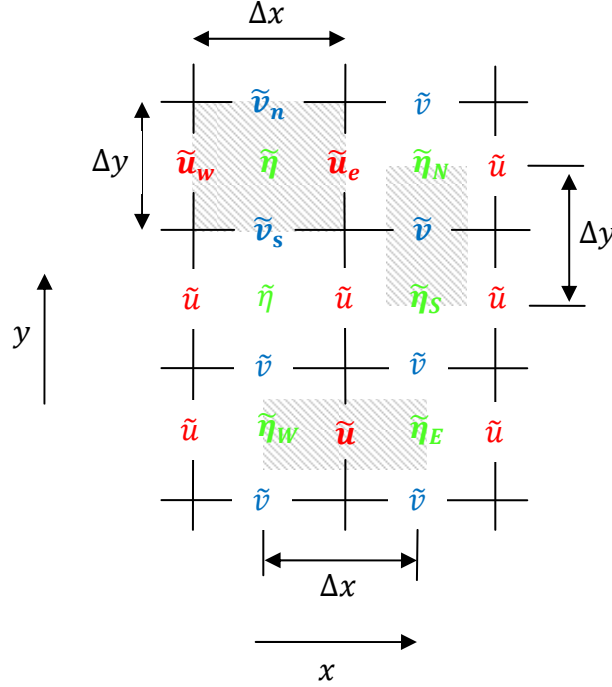


Figura 3.2: Esquema discretización diferencias finitas para las derivadas espaciales

El término de Coriolis en el balance de fuerzas se discretiza usando una forma modificada de la expresión propuesta por Platzman (1972). Para que la matriz \mathbf{K} sea Hermitiana, se considera un promedio ponderado de los nodos v adyacentes al nodo u (ver Figura 3.3), y viceversa, donde el peso de cada variable está relacionado con la vorticidad potencial f/h (Platzman, 1972). Se define el operador \square como:

$$\square \tilde{v} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2} \frac{h_i}{f_0} \left(\frac{f_0}{h_0} + \frac{f_i}{h_i} \right) \tilde{v}_i \quad (3.19)$$

$$\square \tilde{u} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2} \frac{h_i}{f_0} \left(\frac{f_0}{h_0} + \frac{f_i}{h_i} \right) \tilde{u}_i \quad (3.20)$$

donde el subíndice 0 hace referencia al valor asociado al nodo central. Éste corresponde al nodo de velocidad del lado izquierdo de cada ecuación.

	$N_{\tilde{\eta}_1}$	$N_{\tilde{\eta}_2}$	$N_{\tilde{u}_1}$	$N_{\tilde{v}_1}$	$N_{\tilde{u}_2}$	$N_{\tilde{v}_2}$
$N_{\tilde{\eta}_1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{K}_{\tilde{\eta}_1-\tilde{u}_1}$	$\mathbf{K}_{\tilde{\eta}_1-\tilde{v}_1}$	$\mathbf{K}_{\tilde{\eta}_1-\tilde{u}_2}$	$\mathbf{K}_{\tilde{\eta}_1-\tilde{v}_2}$
$N_{\tilde{\eta}_2}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{K}_{\tilde{\eta}_2-\tilde{u}_2}$	$\mathbf{K}_{\tilde{\eta}_2-\tilde{v}_2}$
$N_{\tilde{u}_1}$	$\mathbf{K}_{\tilde{u}_1-\tilde{\eta}_1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{K}_{\tilde{u}_1-\tilde{v}_1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$N_{\tilde{v}_1}$	$\mathbf{K}_{\tilde{v}_1-\tilde{\eta}_1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{K}_{\tilde{v}_1-\tilde{u}_1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$N_{\tilde{u}_2}$	$\mathbf{K}_{\tilde{u}_2-\tilde{\eta}_1}$	$\mathbf{K}_{\tilde{u}_2-\tilde{\eta}_2}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{K}_{\tilde{u}_2-\tilde{v}_2}$
$N_{\tilde{v}_2}$	$\mathbf{K}_{\tilde{v}_2-\tilde{\eta}_1}$	$\mathbf{K}_{\tilde{v}_2-\tilde{\eta}_2}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{K}_{\tilde{v}_2-\tilde{u}_2}$	$\mathbf{0}$

Figura 3.4: Esquema estructura matriz \mathbf{K}

Siguiendo esta discretización para el operador \mathbf{K} se asegura que la matriz sea Hermitiana, lo cual es fundamental para asegurar la ortogonalidad de los modos en el espacio discretizado. En términos numéricos, esta condición equivale a que todos los valores propios del problema sean reales. Si llegasen a tener parte imaginaria, eso sería indicativo de que existe un problema con la discretización y/o el armado de la matriz \mathbf{K} . Bajo esta definición, se cumple que $\mathbf{K}_{i-j} = \mathbf{K}_{j-i}^H$, para todas las variables, donde el superíndice H denota la matriz traspuesta conjugada.

La condición de borde definida por la ec (2.27) se incorpora en el cálculo numérico imponiendo que los nodos de velocidad ubicados sobre el contorno son nulos, lo que se traduce en quitar las filas y columnas asociadas a dichos nodos del vector de estado $\tilde{\xi}$ y de las matrices \mathbf{K} y \mathbf{M} . Se reduce, por lo tanto, el tamaño de estos arreglos.

Una vez impuestas las condiciones de borde, se resuelve la ec (2.29). En un problema de valores propios generalizado, los vectores propios son normalizados considerando la matriz de ponderación \mathbf{M} , por lo que hay verificar que la norma de los vectores solución sea unitaria antes de aplicar el factor de normalización $\tilde{e}^{(r)}$, el cual es una variable real.

3.4. Cálculo de las amplitudes modales

La ecuación diferencial para las amplitudes modales se resuelve numéricamente usando un esquema tipo Crank-Nicholson: para una EDO del tipo $\partial_t u = F(u, x, t, \partial_x u, \partial_{xx} u)$, la forma discretizada de la ecuación es:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(F_i^{n+1}(u, x, t, \partial_x u, \partial_{xx} u) + F_i^n(u, x, t, \partial_x u, \partial_{xx} u) \right) \quad (3.21)$$

donde Δt es el paso de tiempo, el superíndice n indica el instante de tiempo en el que se evalúa la función y el subíndice i , la posición en el espacio. Dado que las amplitudes modales no dependen de la coordenada espacial, la solución numérica de la ec (3.21) está definida por:

$$\tilde{a}^{(r)n+1} = \left[\tilde{a}^{(r)n} + \frac{\Delta t}{2} \left(i \omega^{(r)} \tilde{a}^{(r)n} + \frac{\tilde{f}^{(r)n+1}}{\tilde{e}^{(r)}} + \frac{\tilde{f}^{(r)n}}{\tilde{e}^{(r)}} \right) \right] \left(1 - \frac{1}{2} i \omega^{(r)} \Delta t \right)^{-1} \quad (3.22)$$

donde $\tilde{f}^{(r)}$ es el forzante modal asociado al modo r . El método es incondicionalmente estable, por lo que no hay restricciones en la elección del paso de tiempo Δt . La condición inicial debe ser conocida para determinar la evolución de las amplitudes modales en el tiempo.

4. Capítulo 4: Estudio de Terreno

4.1. Descripción del lago Villarrica

El lago Villarrica se encuentra en la IX Región de la Araucanía, a los pies del volcán que da nombre al lago, con una elevación del espejo de agua de 230 [m.s.n.m], como se muestra en la Figura 4.1.

Este lago fue generado por los glaciares que ocuparon la zona durante la última glaciación. El desplazamiento de los glaciares en dirección Este a Oeste habría modificado la geografía local, tapando la zona de evacuación de la cuenca con una morrena frontal. Al término de la glaciación, el agua quedó ocupando la depresión remodelada por el hielo glaciar, dando origen al lago (UACH, 2007).

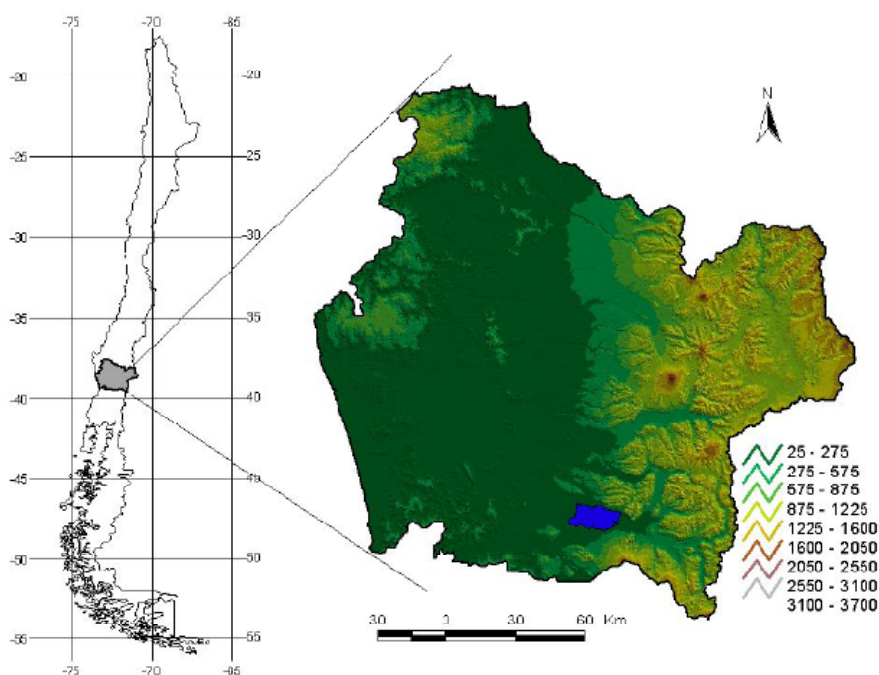


Figura 4.1: Ubicación del lago
(Fuente: Meruane, 2005)

4.1.1. Morfología

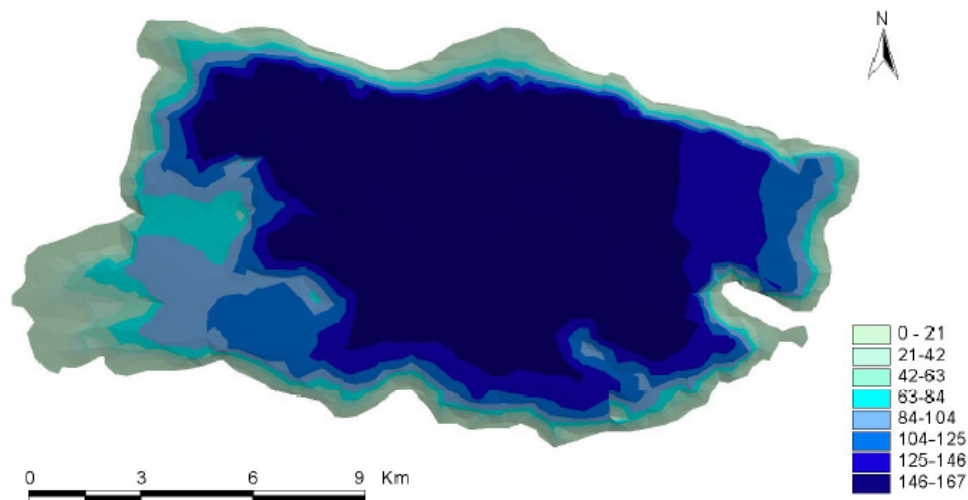
El lago posee una forma elipsoidal, con un ancho máximo (dirección N-S) de 11.2 [km] y una longitud máxima (dirección E-W) de 23.05 [km]. Posee una superficie de 176 [km²] y un volumen de 21 [km³]. Según la clasificación de Hutchinson (1957) es un lago tipo 28c, subrectangular levemente elongado con una cuenca muy regular (Meruane, 2005). Las riberas presentan una fuerte pendiente, donde las zonas someras (hasta 30 [m] de profundidad) alcanzan apenas el 10.8% de la superficie (Campos et al., 1983).

La batimetría da cuenta de un lago profundo, con una profundidad media de 120 [m] y una profundidad máxima de 167 [m] (ver Figura 4.2). El único accidente geográfico del lago corresponde a la isla Aillaquillén. Esta isla es un peñón rocoso ubicado sobre una meseta sublacustre, a 4 [km] de la costa Oeste del lago, y tiene una superficie de 0.005 [km²].

Tabla 4.1: Parámetros morfométricos lago Villarrica

Parámetro	Valor	Unidad
Latitud	39°18' S	-
Longitud	72°05' W	-
Altura	230	m.s.n.m
Largo máximo	23.05	km
Ancho máximo	11.20	km
Ancho medio	7.63	km
Línea de costa	71.2	km
Área superficial	175.87	km ²
Profundidad máxima	167	m
Profundidad media	120	m
Volumen	20.987	km ³

Fuente: Adaptado de Campos et al., 1983



**Figura 4.2: Batimetría del lago
(Fuente: Meruane, 2005)**

4.1.2. Descripción de la hoya hidrográfica

El lago Villarrica pertenece a la hoya hidrográfica del río Toltén, siendo el lago más importante de esta cuenca. La subcuenca tributaria al lago abarca una superficie de 2880 [km²] (Steffen, 1995). El principal afluente del lago Villarrica es el río Trancura, y su principal efluente es el río Toltén. Además, el lago recibe diversos aportes de cursos de agua de breve recorrido que se generan en la falda NW del volcán Villarrica.

El río Trancura, conocido también como río Pucón o Minetué, constituye cerca del 90% de los aportes de agua que recibe el lago Villarrica. Tiene una longitud de 78 [km], desde su nacimiento en la Cordillera de los Andes hasta su desembocadura en el lago. Sus tributarios más importantes son los ríos Maichín y Liucura, el cual recibe los aportes del río Carrilcufú, que es el emisario del lago Caburgua (ver Figura 4.3).

la precipitación acumulada media mensual pueden observarse en el diagrama climático (ver Figura 4.4) confeccionado con información de la estación meteorológica de Pucón (39° 17' 00'' S, 71° 55' 00'' W, 230 [m.s.n.m.]), perteneciente a la DGA, para el período 1987–2009.

La influencia mediterránea a nivel local es producida por el aislamiento que generan los cordones montañosos de la Cordillera de la Costa y por los cerros que cortan el valle central a la altura de Loncoche.

Las precipitaciones son producidas por frecuentes sistemas frontales que cruzan la zona, los que a su vez producen abundante nubosidad y poca cantidad de días despejados.

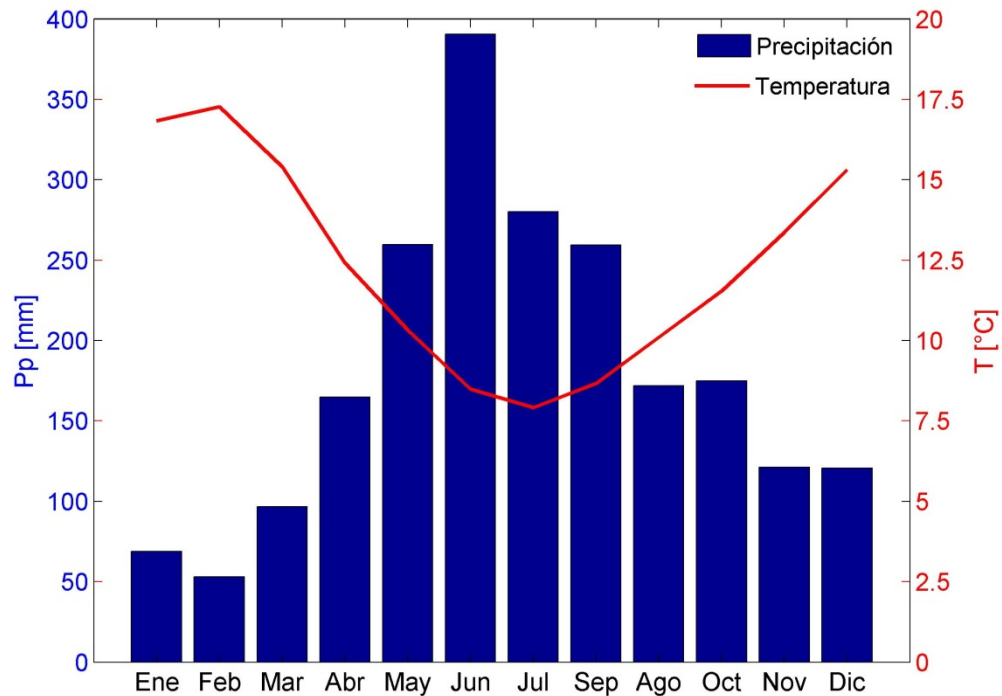


Figura 4.4: Diagrama climático de Pucón
(Fuente: DGA, 2010)

4.1.4. Régimen de vientos

El valle donde se encuentra el lago Villarrica tiene una orientación E-W y está rodeado por cordones montañosos altos y bien definidos, abiertos hacia a la depresión intermedia. Esto genera que los vientos provenientes del océano (cuadrante W) se encaucen en la misma dirección del valle.

Los vientos dominantes en la zona tienen una clara componente W, asociada de la presencia del cinturón de los oestes de latitudes medias. Éste se refuerza en verano producto del calentamiento diferencial entre el continente y el océano y la presencia de la cordillera de los Andes. Durante el verano, los vientos dominantes vienen del W y SW, mientras que en el invierno las direcciones dominantes son NW y N. En general, los vientos son de baja intensidad, concentrándose las altas velocidades durante la tarde (Meruane, 2005). Sin embargo, dadas ciertas configuraciones sinópticas, se producen en la zona vientos con marcada dirección Este, conocidos en la zona

como viento Puelche (palabra de origen mapuche que significa “del Este”). Estos vientos se caracterizan además por ser de alta intensidad, cálidos y secos.

Dentro de las distintas configuraciones sinópticas que favorecen la ocurrencia de los eventos de viento Puelche, se destacan dos: la más típica es la presencia de un centro migratorio de alta presión al otro lado de la cordillera de los Andes, que favorece el flujo del Este. La segunda configuración corresponde al paso de un eje de baja presión, conocido como vaguada (Meruane, 2005).

4.1.5. Estructura térmica del lago

De acuerdo a los registros históricos de temperatura del lago, durante el invierno el cuerpo de agua permanece a temperatura constante, cercana a los 10 °C. Producto del aumento de la radiación solar incidente durante la primavera, el lago comienza gradualmente a aumentar su temperatura, generando una capa superficial cálida (hasta 22.5 °C) que permanece durante todo el verano. Con la llegada del otoño, el lago rápidamente alcanza su temperatura invernal producto del enfriamiento de la capa superficial y los procesos de mezcla generados por los vientos dominantes en la zona (ver Figura 4.5). Debido a este fenómeno, el lago ha sido clasificado como monomítico templado (Campos, 1983).

El lago presenta una fuerte estratificación en los meses de verano, con una marcada termoclina cercana a los 20 [m] de profundidad durante el período de estratificación. Los registros históricos dan cuenta de esta estructura térmica, resultados que son confirmados por las simulaciones numéricas y las mediciones en terreno realizadas por Meruane (2005) durante el verano del 2004 (ver Figura 4.6).

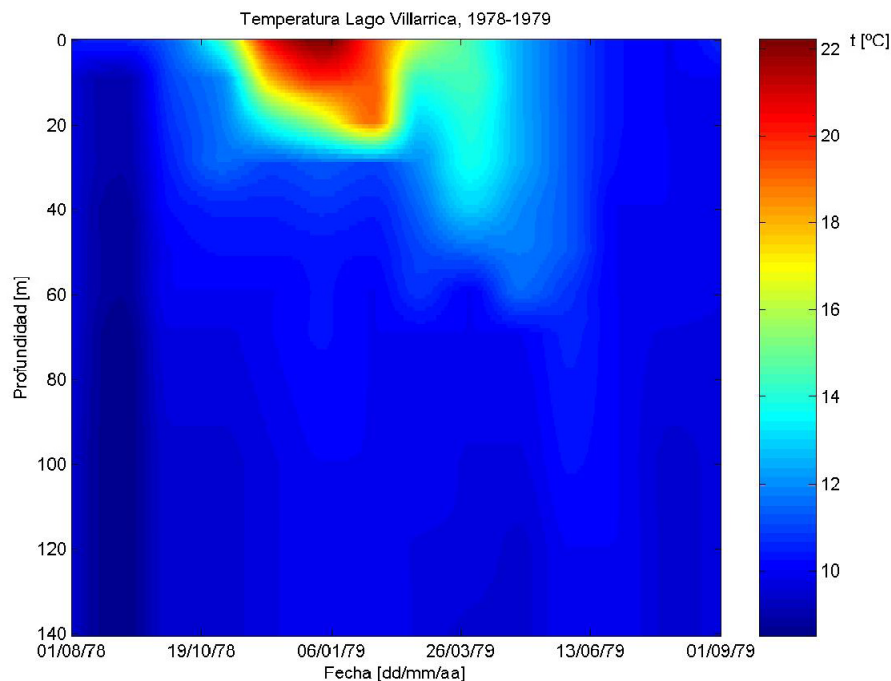
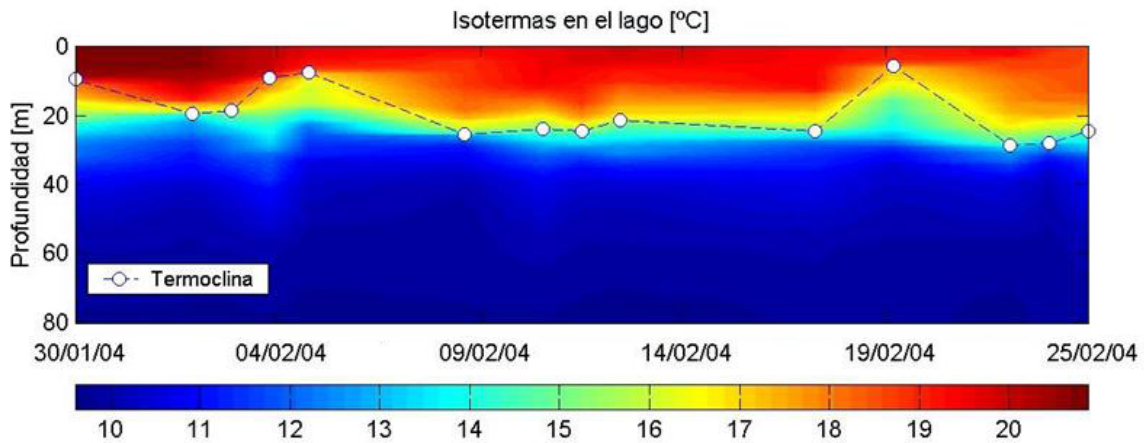


Figura 4.5: Estructura térmica del lago Villarrica período 1978-1979
(Fuente: Datos originales de Campos et al., 1983, gráfico tomado de Meruane, 2005)



**Figura 4.6: Estructura térmica del lago para el mes de febrero 2004
(Fuente: Meruane, 2005)**

4.2. Objetivos y metodología de la campaña de terreno

La campaña de terreno se realizó durante los meses de enero y febrero de 2009, y los objetivos del trabajo fueron:

- Monitoreo de variables atmosféricas en la zona de estudio.
- Obtención de series de tiempo de temperatura en el lago, para distintas profundidades.
- Medición de parámetros físico-químicos de calidad de aguas del lago Villarrica.

Para el cumplimiento de los objetivos mencionados, el trabajo en terreno se dividió en 3 áreas: montaje de una estación meteorológica, instalación de cadenas de termistores en el lago y medición periódica de parámetros físico-químicos de calidad de aguas con un CTD. La ubicación de la estación meteorológica, las cadenas de termistores y los puntos de medición con CTD se presentan en la Tabla 4.3 y en la Figura 4.7.

Durante los meses de marzo y abril, se realizaron visitas cortas para el monitoreo de la estación meteorológica y de las cadenas de termistores.

4.2.1. Estación meteorológica

Se instaló una estación meteorológica en el Aeródromo de Pucón ($39^{\circ} 17' S$, $71^{\circ} 55' W$), en las dependencias donde la Dirección General de Aguas mantiene sus equipos de medición de variables meteorológicas. El aeródromo se encuentra ubicado a unos 5 [km] de la ciudad de Pucón, en dirección Sur-Este, tal como se muestra en la Figura 4.7.

La estación meteorológica cuenta con sensores de temperatura atmosférica, dirección e intensidad de viento, radiación solar incidente, humedad relativa, presión atmosférica y precipitación, los cuales fueron programados para una frecuencia de muestreo de 10 minutos. Para las primeras 4 variables, se registró el promedio del valor en el intervalo de medición; para las 2 siguientes, el valor en el instante de medición, y para la última, el valor total acumulado. Todos los datos quedan almacenados en la memoria del Datalogger de la estación meteorológica.

Los equipos y sensores de la estación meteorológica se especifican en la Tabla 4.2, indicando marca y modelo.

Tabla 4.2: Componentes estación meteorológica

Equipo	Marca	Modelo
Datalogger CR1000	Campbell Scientific	CR1000
Fuente de 12V	Phoenix	KB1275
Panel Solar de 10W	BP solar	SX10M
Caja protectora 12"x14"	Campbell Scientific	-
Programa PC400	Campbell Scientific	PC400
Sensores	Marca	Modelo
Temperatura y humedad	Vaisala	HMP-L11
Radiación solar global	Li-Cor	LI200X-L34
Nivel	Li-Cor	LI203
Soporte metálico	Li-Cor	CM225
Barómetro	Vaisala	PTB110
Anemómetro	Wind Sentry	03002-L34
Pluviómetro	Texas Electronics	TE525MM-L25

Las mediciones comenzaron el día 21 de enero de 2009, y la estación seguirá instalada hasta la finalización del proyecto FONDECYT. Durante la estadía de los investigadores, se realizaron monitoreos cada 15 días para verificar el estado de la estación y el correcto funcionamiento de todos sus sensores.

4.2.2. Cadenas de termistores

Se instalaron tres cadenas de termistores en el lago, durante los meses de febrero, marzo y abril de 2009. Cada cadena está compuesta por 17 HOBO loggers, modelo Water Temp Pro v2 Data Logger, con capacidad para almacenar hasta 42000 datos, una cuerda de nylon de 8 [mm] de diámetro, una boya para su identificación en superficie y un muerto de hormigón para mantenerla fija en la ubicación deseada. Los sensores fueron ubicados cada 2 [m] en la zona de la termoclina y mayor espaciamiento en el hipolimnion, hasta una profundidad de 80 [m]. El espaciamiento de los termistores fue definido para representar de buena forma los perfiles de temperatura medidos en el verano de 2004 (Meruane, 2005). Como se muestra en la Figura 4.7, una cadena (TC1) fue instalada en las cercanías de la costa oriente, frente a la playa de Pucón, la segunda (TC2) se instaló en el centro del lago y la tercera (TC3) se instaló frente a las costas de la ciudad de Villarrica. Para el mes de febrero, se obtuvieron perfiles verticales de temperatura cada 30 [s], mientras que para los meses de marzo y abril la frecuencia de medición fue de 1/60 [Hz]. Lamentablemente, el equipo investigador sufrió el robo de TC3 a pocos días de instalada la cadena. Ésta fue recuperada y reinstalada, pero la longitud de la cadena fue calculada erróneamente y la boya quedó bajo la superficie, siendo poco factible su rescate hasta la fecha.

La instalación y monitoreo de las cadenas de termistores se realizó semanalmente durante la campaña de terreno, gracias a la cooperación de la Capitanía de Puerto de la Armada de Chile. La extracción de datos desde cada termistor hacia el computador debe hacerse con un lector especial (Waterproof Shuttle Data Transporter), el cual debe ser conectado directamente al sensor.

4.2.3. Medición con CTD

Se escogieron 4 puntos de muestreo en el lago para realizar mediciones de distintos parámetros físico-químicos del agua, con una sonda CTD marca Hydrolab modelo MS5, equipada con los siguientes sensores: temperatura, conductividad eléctrica, profundidad 0 - 200 [m], oxígeno disuelto, Clorofila A y pH. Todos los sensores son marca Hydrolab. El equipo fue programado para registrar datos de los distintos parámetros a intervalos de 5 [s]. En cada punto de muestreo, se registraron valores mientras el CTD era sumergido y levantado nuevamente hacia la superficie.

La sonda cuenta con una celda de protección de los sensores con distintos pesos para su inmersión en el lago, un cable de conexión y un adaptador SDI-12 y RS-232 para descargar los datos registrados al computador.

Los sensores fueron calibrados de acuerdo a las indicaciones del fabricante, en el laboratorio de calidad de aguas del Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile.

En cada muestreo, se registró la hora de medición, transparencia del lago con un disco Secchi, y la temperatura atmosférica, dirección y magnitud del viento con un termómetro/anemómetro portátil.

Durante la campaña en terreno, se realizó una medición semanal de los parámetros mencionados. No fue posible realizar un mayor número de muestreos por diversos problemas, tales como falta de disponibilidad de la lancha de la Armada de Chile, problemas técnicos en la operación del CTD, entre otros.

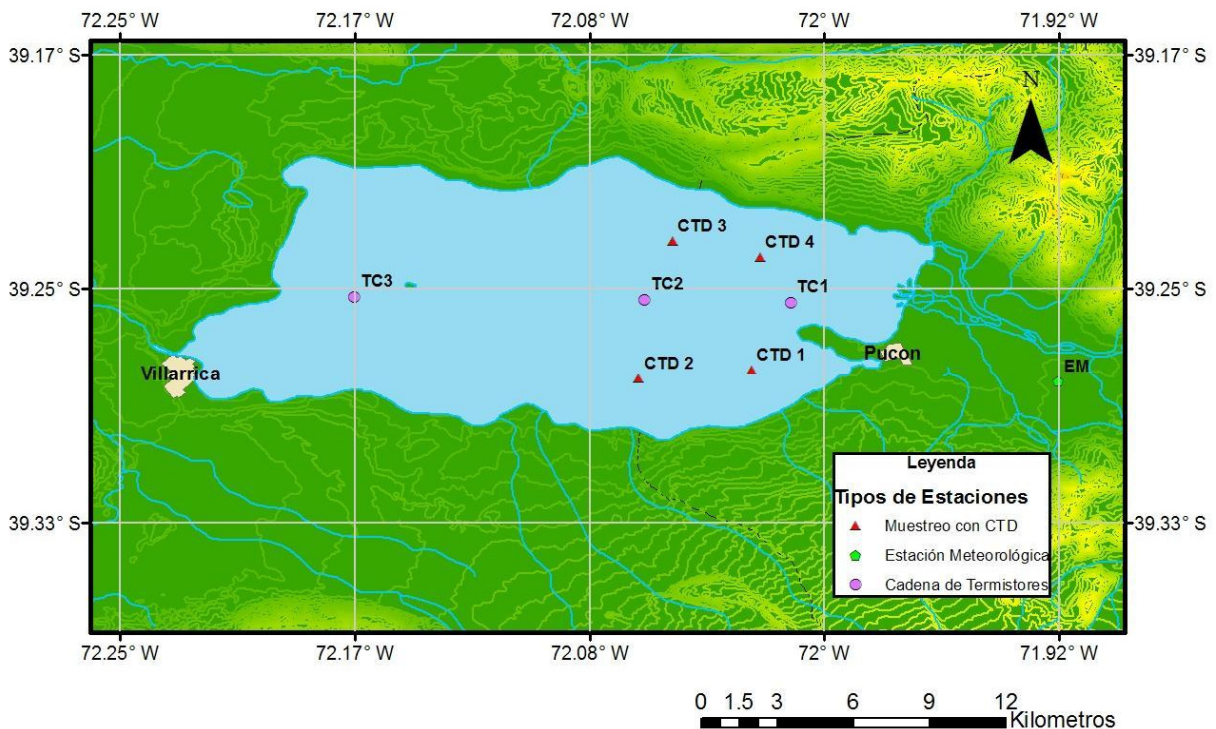


Figura 4.7: Ubicación cadenas de termistores, estación meteorológica y puntos de muestreo con CTD. (Fuente: Elaboración propia con datos SIG CONAMA)

Tabla 4.3: Coordenadas cadenas de termistores, puntos de muestreo con CTD y estación meteorológica

Punto	Latitud S	Longitud W	Profundidad local [m]
TC1	39° 15' 19"	72° 00' 43"	140
TC2	39° 15' 16"	72° 03' 49"	155
TC3	39° 15' 10"	72° 10' 00"	72
CTD 1	39° 16' 44"	72° 01' 34"	150
CTD 2	39° 16' 56"	72° 03' 56"	150
CTD 3	39° 13' 57"	72° 03' 13"	153
CTD 4	39° 14' 19"	72° 01' 21"	146
EM	39° 17' 00"	71° 55' 00"	-

4.2.4. Otros equipos

En el trabajo en terreno, fueron utilizados dos GPS marca Garmin, un notebook marca DELL modelo Inspiron 1420, un disco Secchi y un anemómetro/termómetro marca Veto.

4.3. Resultados de terreno

4.3.1. Estación meteorológica

En la Figura 4.8 se presentan los datos registrados para las variables meteorológicas medidas, desde el 22 de enero (día 22) hasta el 20 de abril (día 110). De los gráficos, se descarta la ocurrencia de eventos de viento Puelche en la zona de estudio para el período considerado, pues no se observan vientos de alta intensidad provenientes desde el Este, acompañados de altas temperaturas atmosféricas y baja humedad relativa. El día 68 se tiene un evento que podría ser catalogado como Puelche, pero presenta baja intensidad de viento, por lo que se descarta considerarlo como tal para efectos de análisis.

El anemómetro fue instalado a 3.6 [m] desde el nivel del suelo. Este dato es importante para calcular el esfuerzo de corte que ejerce el viento sobre la superficie del lago.

4.3.2. Cadenas de termistores

Se obtuvieron 2 series de tiempo para la cadena 1 (TC1): la primera va desde el 07 de febrero hasta el 20 de febrero, y la segunda, desde el 26 de febrero hasta el 21 de marzo. Para la cadena 2 (TC2) se tienen 3 series de tiempo: desde el 07 de febrero hasta el 20 de febrero, desde el 24 de febrero hasta el 21 de marzo, y desde el 21 de marzo hasta el 20 de abril. No se cuenta con la serie de tiempo de TC1 para el mes de abril, pues el equipo investigador sufrió el robo de dicha cadena de termistores.

En las Figuras 4.9, 4.10 y 4.11 se presentan los perfiles verticales de temperatura medidos en el lago por ambas cadenas de termistores, para los meses de febrero, marzo y abril, respectivamente. Los días se enumeran de manera correlativa, partiendo desde el 01 de enero de 2009 (día 1).

Durante los dos primeros meses se observa una marcada estratificación termal, con bastante acción en la zona de la termoclina, donde predominan las oscilaciones de escala diaria. En el mes de abril, se observa un enfriamiento de la capa superficial, producido por la disminución de la

radiación solar incidente debido al fin de la estación de verano y los procesos de mezcla generados por el viento.

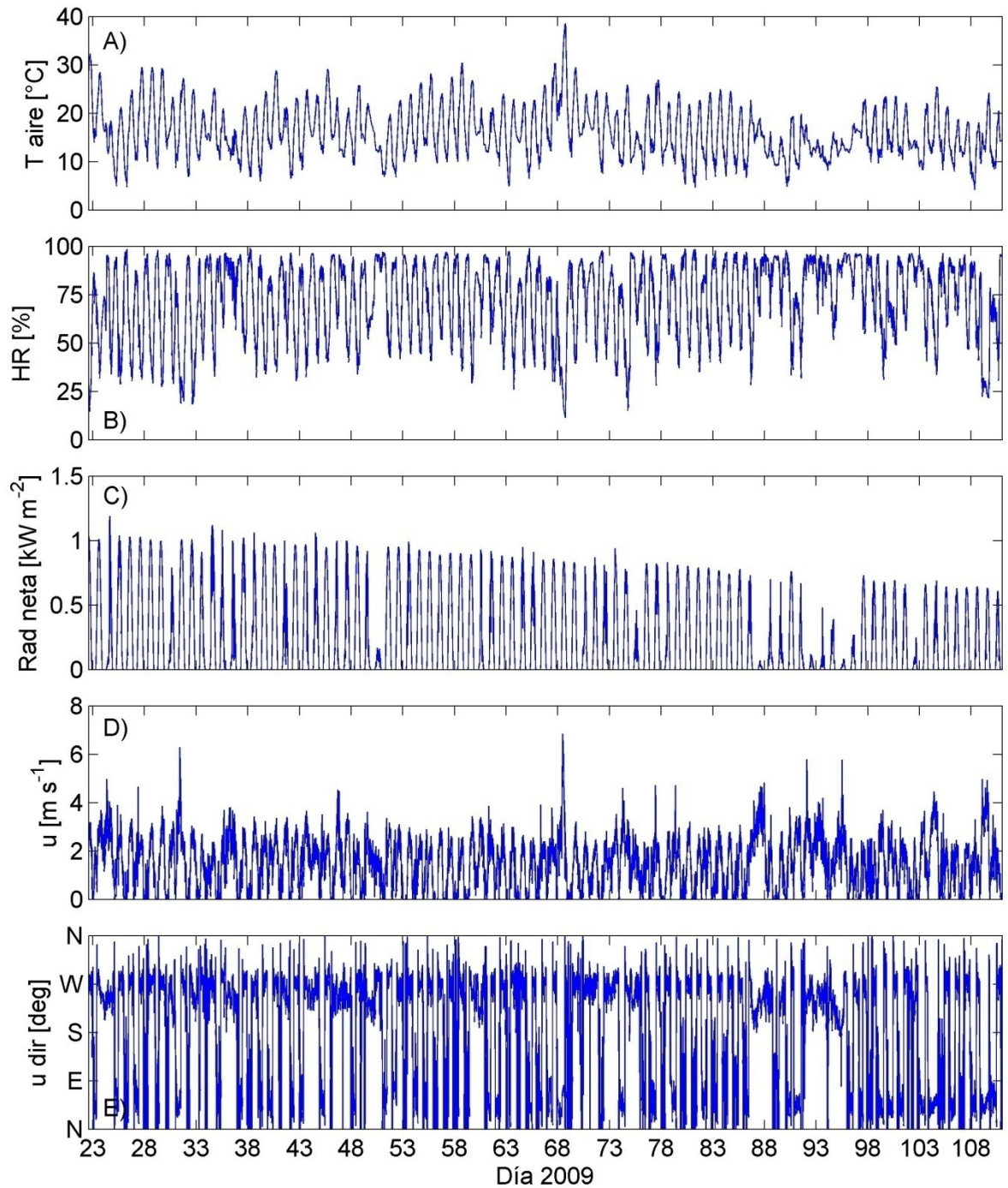


Figura 4.8: A) Temperatura atmosférica. B) Humedad relativa. C) Radiación neta incidente. D y E) Dirección y magnitud del viento para el período de medición.

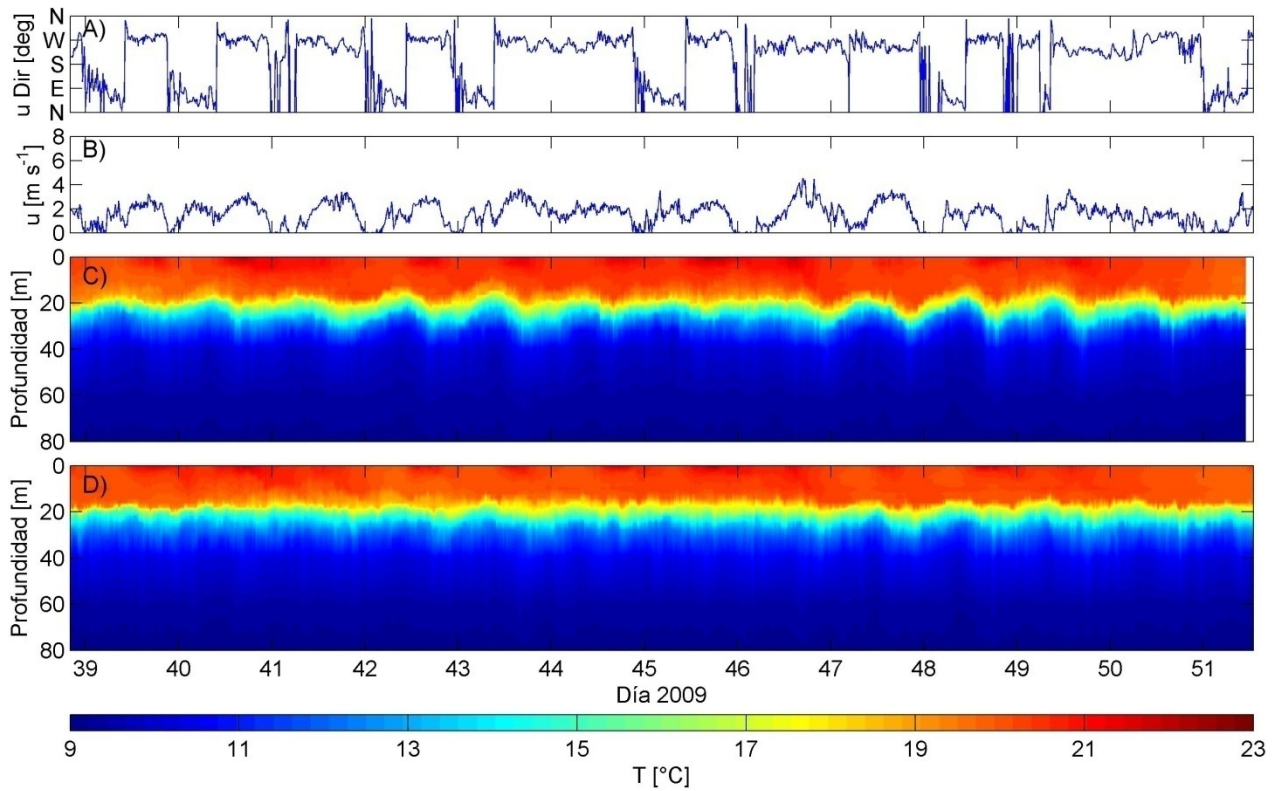


Figura 4.9: A y B) Dirección y magnitud del viento. C y D) Perfiles de temperatura registrados en TC1 y TC2 para febrero 2009.

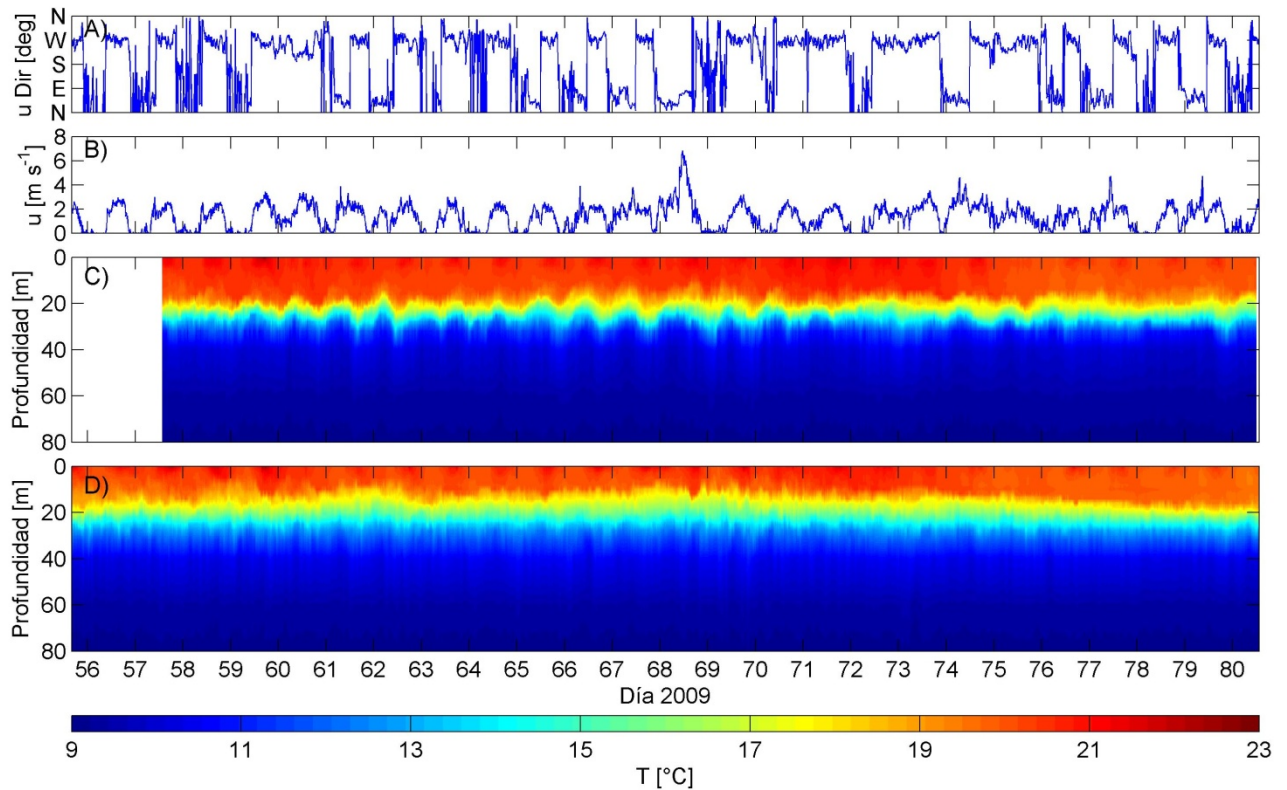


Figura 4.10: A y B) Dirección y magnitud del viento. C y D) Perfiles de temperatura registrados en TC1 y TC2 para marzo 2009.

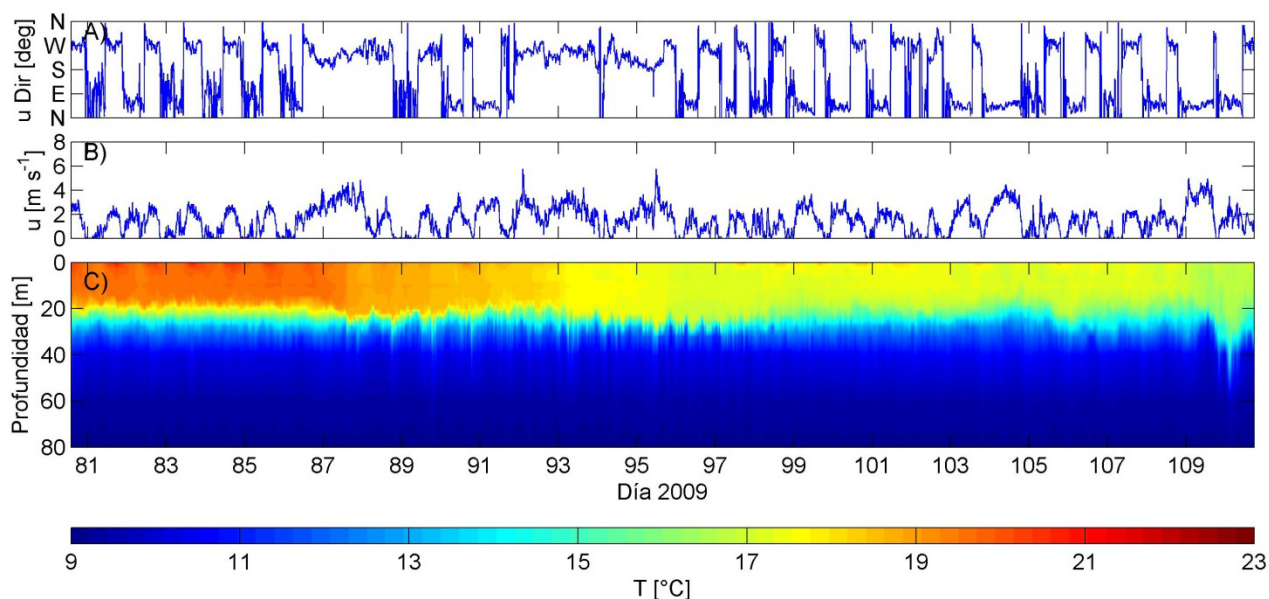


Figura 4.11: A) y B) Dirección y magnitud del viento. C) Perfiles de temperatura registrados en TC2 para abril 2009.

4.3.3. CTD

Durante la campaña de terreno, se realizaron 7 jornadas de medición. Por diversos motivos técnicos, no fue posible medir en los 4 puntos de muestreo durante todas las jornadas. En la Tabla 4.4 se presenta la temperatura atmosférica, velocidad del viento, dirección del viento y transparencia de la columna de agua medida con un disco Secchi (DS), registradas durante las mediciones realizadas en el lago. A modo de ejemplo, la Figura 4.12 muestra los perfiles verticales de temperatura, oxígeno disuelto, clorofila A, pH y conductividad eléctrica, medidos con el CTD en el punto 4, tanto de subida como de bajada, para el día 23 de febrero de 2009. Todos los perfiles medidos se encuentran en los anexos de este trabajo.

Los perfiles verticales de temperatura medidos con el CTD son coherentes con aquellos registrados por las cadenas de termistores, por lo que se asumen válidos. Los valores de conductividad eléctrica presentan poca oscilación y son consistentes con mediciones anteriores realizadas en el lago (Campos, 1983, Campos, 1984). Los perfiles verticales de pH, oxígeno disuelto y clorofila A presentan comportamientos que merecen ser analizados en profundidad, sin embargo, dicho estudio escapa a los objetivos de este trabajo.

Tabla 4.4: Mediciones con CTD y datos registrados en CTD1 y CTD2

Medición		CTD1			CTD2		
Nº	Fecha	T [°C]	u [m s ⁻¹]	DS [m]	T [°C]	u [m s ⁻¹]	DS [m]
1	26-01-2009	27.3	3.0	6.0	25.7	4.2	4.0
2	27-01-2009	-	-	-	30.6	1.5	6.7
3	29-01-2009	-	-	-	28.5	5.5	9.0
4	06-02-2009	23.5	4.0	-	-	-	-
5	11-02-2009	20.5	1.5	8.0	20.5	2.8	7.0
6	17-02-2009	-	-	8.0	24.0	1.5	7.0
7	23-02-2009	29.0	0.7	7.5	27.0	1.5	8.0

Tabla 4.5: Mediciones con CTD y datos registrados en CTD3 y CTD4

Medición		CTD3			CTD4		
Nº	Fecha	T [°C]	u [m s ⁻¹]	DS [m]	T [°C]	u [m s ⁻¹]	DS [m]
1	26-01-2009	29.6	3.5	5.3	-	-	8.0
2	27-01-2009	28.1	4.0	7.0	26.0	1.1	7.0
3	29-01-2009	29.0	3.5	6.5	26.0	4.0	5.4
4	06-02-2009	-	-	-	-	-	-
5	11-02-2009	18.5	1.1	10.0	20.0	0.3	7.0
6	17-02-2009	27.0	0.1	8.0	20.0	0.5	8.0
7	23-02-2009	24.3	1.0	9.0	20.5	3.5	7.2

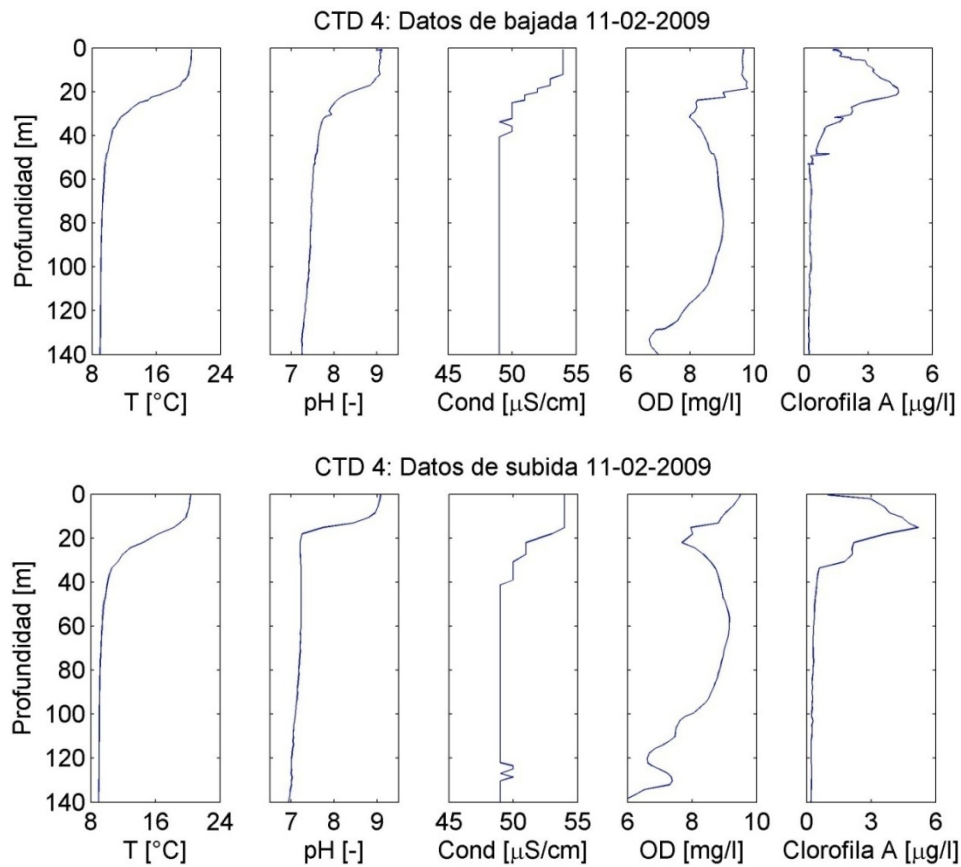


Figura 4.12: Perfiles de bajada y subida CTD 4, 23-02-2009

5. Capítulo 5: Análisis de Datos de Terreno y Simulaciones Numéricas

5.1. Preparación de datos para análisis modal

5.1.1. Esfuerzo de corte del viento

El esfuerzo de corte del viento sobre la superficie del lago se calculó como:

$$\tau_s = C_D \rho_a u_{10}^2 \quad (5.1)$$

donde C_D es el coeficiente de arrastre del viento, $\rho_a = 1.2 \text{ [kg m}^{-3}\text{]}$ es la densidad del aire y u_{10} es la velocidad del viento a 10 [m] de altura. Esta variable se calculó suponiendo que la distribución vertical del viento sigue una ley logarítmica del tipo (Meruane, 2005):

$$u_{10} = u_{sup} \frac{\ln(10) - \ln(0.000115)}{\ln(z_{sup}) - \ln(0.000115)} \quad (5.2)$$

donde u_{sup} es la velocidad del viento medida a una altura z_{sup} , medida desde el suelo ($z_{sup} = 3.6 \text{ [m]}$, ver Sección 4.3.1). Las series de tiempo de u_{10} para los períodos de medición se muestran en las Figuras 5.1 y 5.2.

El coeficiente de arrastre del viento, C_D , fue estimado usando las siguientes relaciones (Wüest & Lorke, 2003):

$$C_D = 0.0044u_{10}^{-1.15} \quad 0 \text{ [m s}^{-1}\text{]} < u_{10} < 3 \text{ [m s}^{-1}\text{]} \quad (5.3)$$

$$C_D = \left(\kappa^{-1} \ln \left(\frac{10u_{10}\sqrt{C_D}}{\nu_a} \right) + 5.7 \right)^{-2} \quad 3 \text{ [m s}^{-1}\text{]} < u_{10} < 5 \text{ [m s}^{-1}\text{]} \quad (5.4)$$

$$C_D = \left(\kappa^{-1} \ln \left(\frac{10g}{C_D u_{10}^2} \right) + 11.3 \right)^{-2} \quad u_{10} > 5 \text{ [m s}^{-1}\text{]} \quad (5.5)$$

donde $\kappa = 0.41$ es la constante de Von Karman y $\nu_a = 0.15 \cdot 10^{-4} \text{ [m}^2 \text{ s}^{-1}\text{]}$ es la viscosidad cinemática del aire. El 10 en las ecs (5.4) y (5.5) tiene unidades de [m].

5.1.2. Obtención de perfiles verticales de densidad

Para caracterizar la estratificación del lago Villarrica durante el verano, se obtuvieron los perfiles verticales de densidad a partir de los registros de temperatura de TC1 y TC2. A partir de esta etapa del trabajo, no se consideró la serie de tiempo de abril para TC2, por pertenecer al período en que el lago comienza a homogeneizar su temperatura.

El cálculo de la densidad se realizó con la ecuación de estado propuesta por la UNESCO (1981), que considera el efecto de la presión:

$$\rho(T, S, P) = \frac{\rho(T, S, 0)}{\left(1 - \frac{P}{K(T, S, P)}\right)} \quad (5.6)$$

donde ρ es la densidad (en [kg m⁻³]), T es la temperatura (en [°C]), S es la salinidad (en [psu]), P es la presión (en [atm]) y K es el módulo de compresibilidad del agua (en [atm]). Dado que la salinidad en el lago es muy baja (0.3 [psu]) (Meruane, 2005), se puede despreciar en el cálculo y la densidad sin influencia de la presión se estima como:

$$\rho(T, S, 0) = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3 + a_4 T^4 + a_5 T^5 \quad (5.7)$$

donde los términos a_i son constantes: $a_0 = 999.8425$, $a_1 = 6.794 \cdot 10^{-2}$, $a_2 = -9.095 \cdot 10^{-3}$, $a_3 = 1.002 \cdot 10^{-4}$, $a_4 = -1.120 \cdot 10^{-6}$ y $a_5 = 6.536 \cdot 10^{-9}$.

La presión se considera hidrostática y absoluta (en [atm]):

$$P = \frac{\rho(T, S, P) g z}{101325} + 1 \quad (5.8)$$

donde g es la aceleración de gravedad, z es un eje vertical definido positivo hacia abajo desde la superficie libre, 1 [atm] es la presión atmosférica y 101325 es el factor de conversión de [Pa] a [atm]. El módulo de compresibilidad del agua se calcula como:

$$K(T, S, P) = E + F P + G P^2 \quad (5.9)$$

donde E , F y G son polinomios dependientes de la temperatura del agua:

$$E = 19\,652.21 + 148\,421 T - 2.327 T^2 + 1.360 \cdot 10^{-2} T^3 + -5.155 \cdot 10^{-5} T^4 \quad (5.10)$$

$$F = 3.240 + 1.437 \cdot 10^{-3} T + 1.161 \cdot 10^{-4} T^2 + -5.779 \cdot 10^{-7} T^3 \quad (5.11)$$

$$G = 8.510 \cdot 10^{-5} - 6.123 \cdot 10^{-6} T + 5.279 \cdot 10^{-8} T^2 \quad (5.12)$$

En primer lugar, se interpolaron linealmente los perfiles verticales de temperatura cada 0.5 [m], de manera de obtener perfiles de densidad sin efecto de la presión, utilizando la ec (5.7). Luego, con estos perfiles y las ecs (5.8) y (5.9) se estimaron perfiles verticales de P y K , respectivamente. Usando estos parámetros y la ec (5.6), se calcularon los perfiles de densidad corregidos por efecto de la presión. Estos perfiles fueron utilizados para recalcular la presión hidrostática y el módulo de compresibilidad, lo que dio origen a un proceso iterativo que finalizó cuando se alcanzó la convergencia de los valores para la distribución de densidad en la vertical. Los resultados se muestran en las Figuras 5.1 y 5.2.

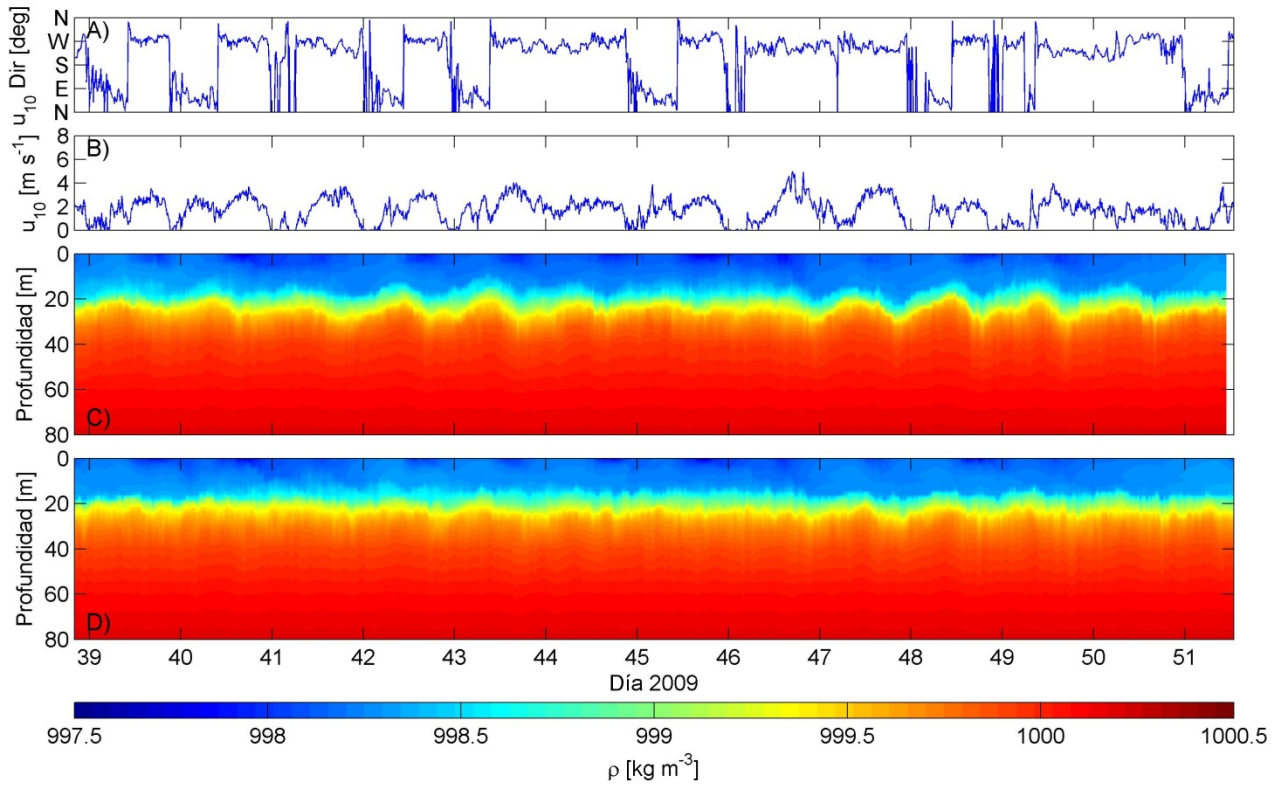


Figura 5.1: A) y B) Dirección y magnitud del viento a 10 [m] sobre la superficie. C) y D) Perfiles verticales de densidad en TC1 y TC2 para febrero 2009.

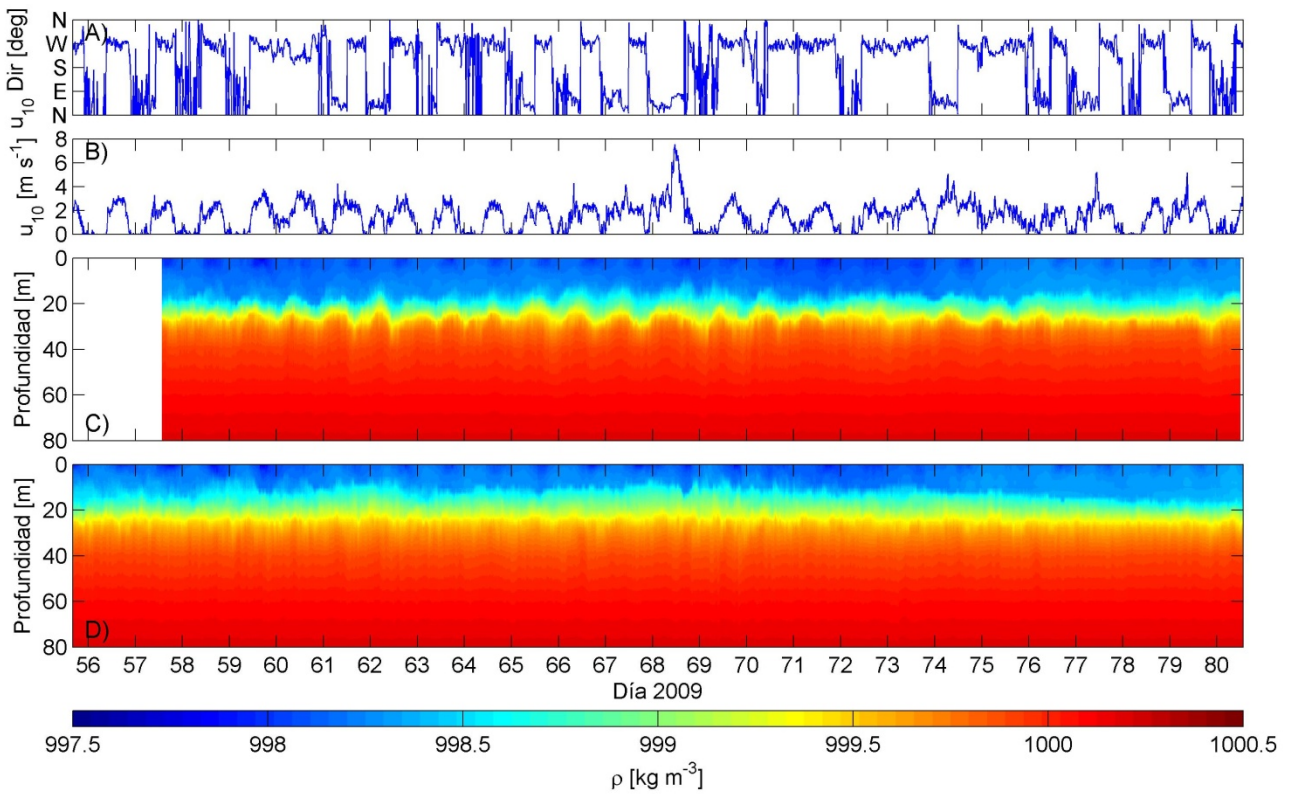


Figura 5.2: A) y B) Dirección y magnitud del viento a 10 [m] sobre la superficie. C) y D) Perfiles verticales de densidad en TC1 y TC2 para marzo 2009.

5.2. Definición de la termoclina

En las Figuras 5.1 y 5.2, se observa que la estructura de densidad del lago puede modelarse como un sistema estratificado en dos capas, separadas por una interfaz de densidad. Para definir la termoclina, se calcularon perfiles de frecuencia boyante usando la ec (2.1), con un esquema de diferencias centradas para el gradiente de densidad, los cuales se muestran en las Figuras 5.3 y 5.4. En estas Figuras se observa que los máximos de las frecuencias boyantes se ubican en una zona cercana a los 20 [m] de profundidad, lo cual coincide con las mediciones de terreno y los resultados de las simulaciones numéricas realizadas por Meruane (2005).

El comportamiento de las frecuencias boyantes da cuenta de la presencia de un metalimnion cercano a los 20 [m] de profundidad (ver Figura 5.7). Por otro lado, las isotermas del lago, presentadas en las Figuras 5.5 y 5.6, muestran que la respuesta vertical del lago es modo V1, por lo que puede suponerse apropiada una modelación en dos capas definiendo una interfaz de densidad que sea representativa.

Dado que los máximos de las frecuencias boyantes se encuentran en una zona de un par de metros de espesor, identificada como el metalimnion, es difícil definir una serie de tiempo para la interfaz de densidad a partir de la definición tradicional y que además sea representativa de toda la columna de agua (ver Figura 5.7). Para solucionar este problema, se calculó el perfil vertical promedio de frecuencia boyante para ambos períodos de medición y se identificó la profundidad a la cual se produce la máxima frecuencia. Luego, la termoclina se encuentra a dicha profundidad

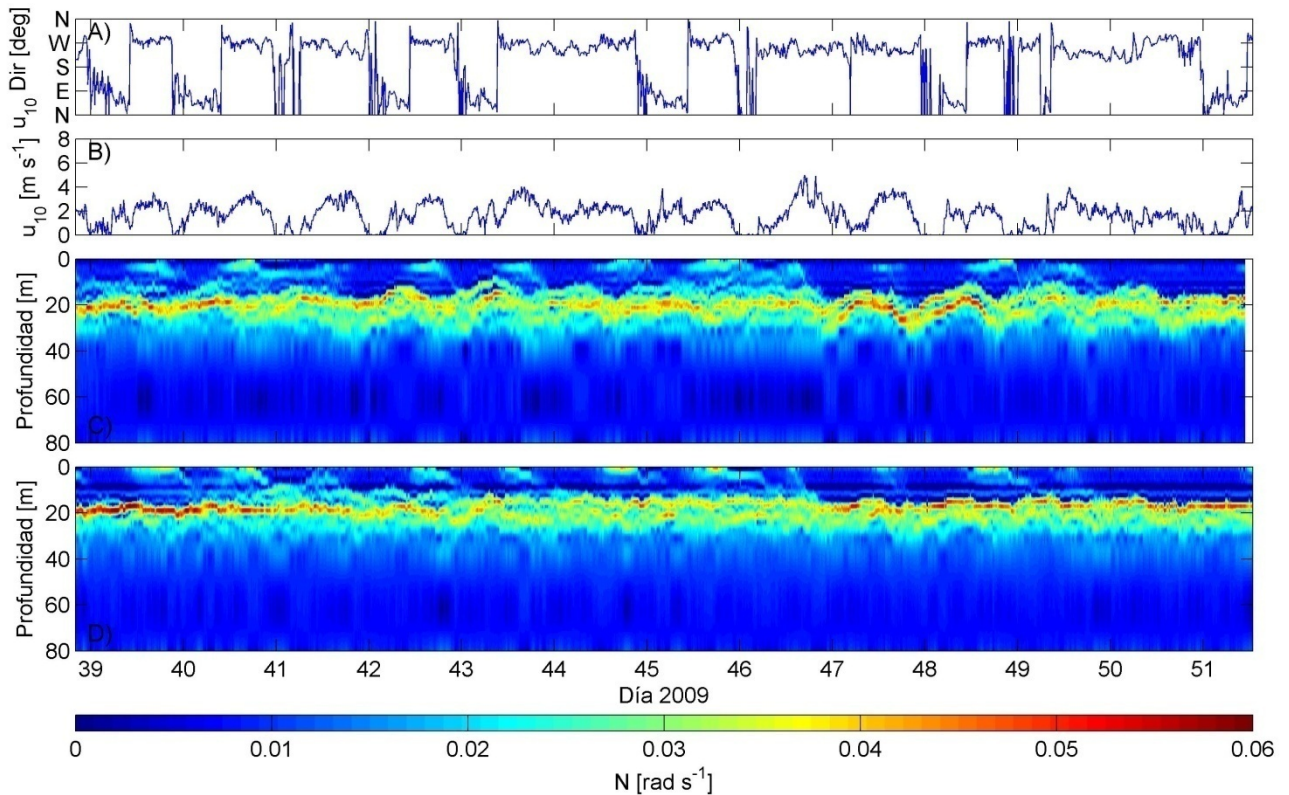


Figura 5.3: A) y B) Dirección y magnitud del viento a 10 [m] sobre la superficie. C) y D) Perfiles verticales de frecuencia boyante N en TC1 y TC2 para febrero 2009.

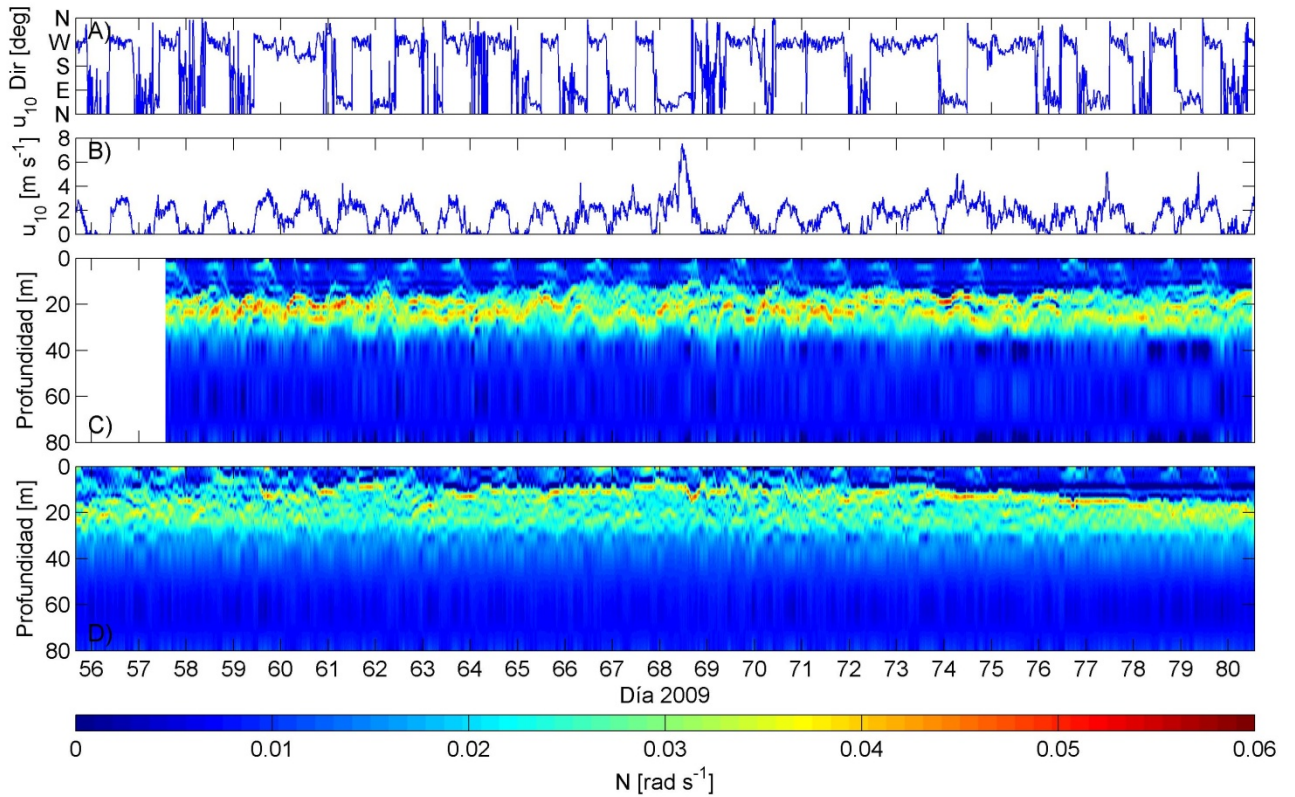


Figura 5.4: A) y B) Dirección y magnitud del viento a 10 [m] sobre la superficie. C) y D) Perfiles verticales de frecuencia boyante N en TC1 y TC2 para marzo 2009.

y define el espesor de las capas superficial y profunda. Como se observa en la Figura 5.7, la termoclina se encuentra a 18.5 [m] de profundidad para las mediciones de febrero, mientras que para las mediciones de marzo está a 22.5 [m].

La serie de tiempo de la termoclina, para cada una de las cadenas de termistores, se definió como la isoterma que en promedio pasa por la profundidad asociada a las máximas frecuencias boyantes, para cada uno de los períodos de medición.

A partir de esta definición, se obtuvieron las densidades promedio para las capas superficial y profunda, para los dos períodos en estudio. Los resultados para ambas cadenas de termistores se muestran en la Tabla 5.1, donde el subíndice 1 corresponde a la capa superficial y el 2, a la capa profunda.

Tabla 5.1: Diferencias de densidad

Parámetro [kg m ⁻³]	Febrero 2009			Marzo 2009		
	TC1	TC2	Promedio	TC1	TC2	Promedio
ρ_1	998.347	998.397	998.372	998.426	998.625	998.525
ρ_2	999.899	999.904	999.902	999.952	999.953	999.953
$\Delta\rho$	1.552	1.508	1.530	1.526	1.328	1.427

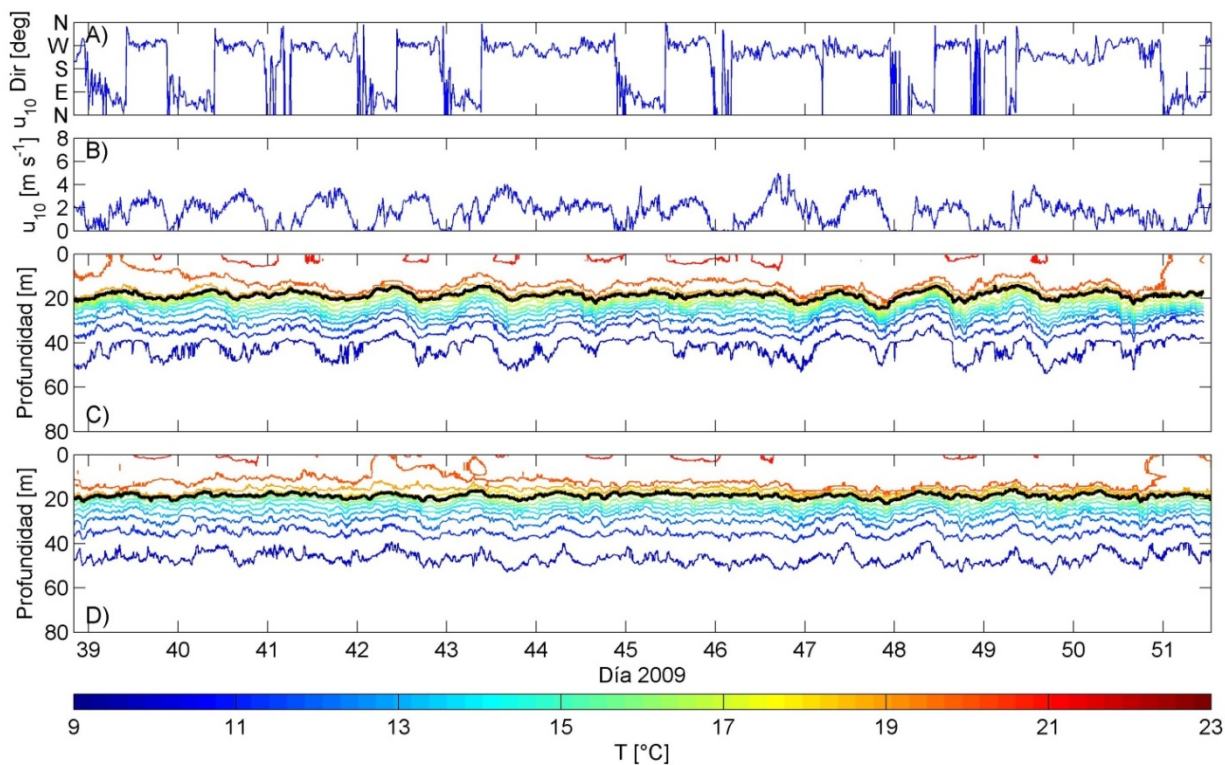


Figura 5.5: A) y B) Dirección y magnitud del viento a 10 [m] sobre la superficie. C) y D) Isotermas registradas en TC1 y TC2 para febrero 2009. La línea negra corresponde a la termoclina.

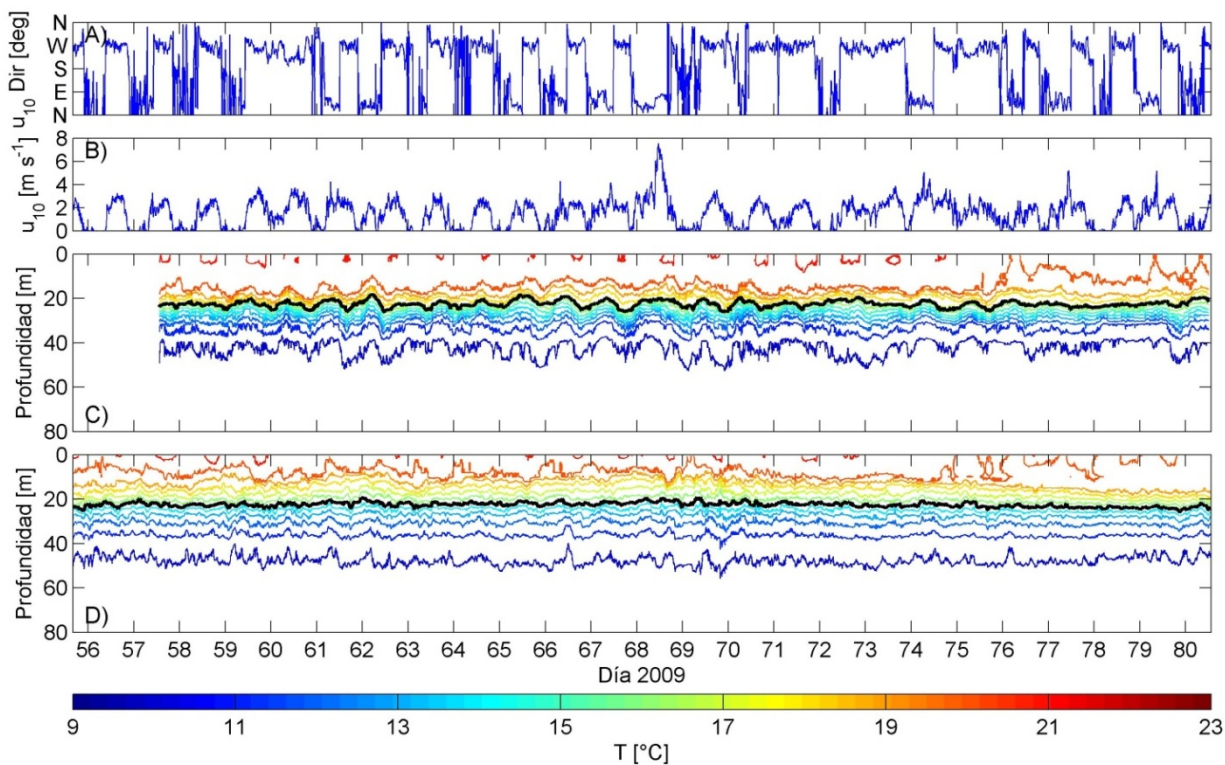


Figura 5.6: A) y B) Dirección y magnitud del viento a 10 [m] sobre la superficie. C) y D) Isotermas registradas en TC1 y TC2 para marzo 2009. La línea negra corresponde a la termoclina.

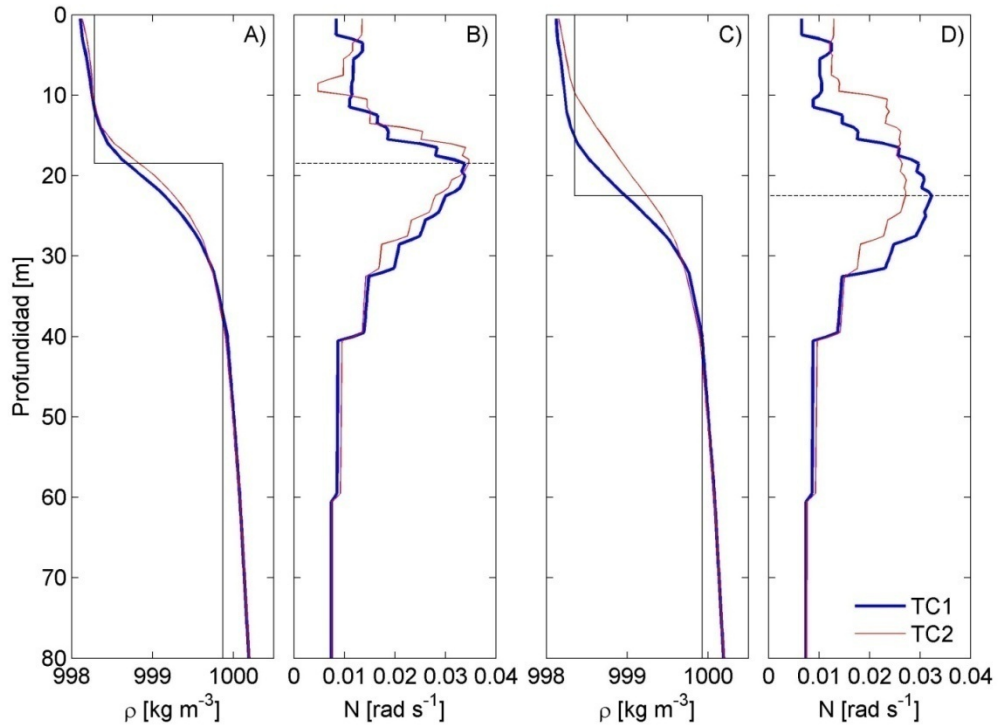


Figura 5.7: A) y B) Perfiles verticales promedio de densidad y frecuencia boyante para TC1 y TC2, febrero 2009. C) y D) Perfiles verticales promedio de densidad y frecuencia boyante para TC1 y TC2, marzo 2009. La línea negra corresponde a la densidad promedio de ambas capas y las líneas punteadas corresponden a las profundidades de la termoclina.

5.3. Parametrización del efecto del viento

El viento representa el principal aporte de momentum a la dinámica de los cuerpos de agua, induciendo corrientes en la capa superficial y energizando las ondas internas (Imberger, 1998). Para tener una idea de la escala de longitud de la inclinación de la termoclina luego de la acción del viento, se calculó el número de Wedderburn 2D para el caso lineal, definido por la ec (2.6) (Shintani et al., 2010). Para el cálculo, se modeló el lago Villarrica considerando su contorno y paredes verticales, con una profundidad constante e igual a la profundidad media del lago, $\bar{h}=120$ [m]. El efecto del viento se incluyó calculando la velocidad de corte a partir de la serie de tiempo de esfuerzos de corte obtenida mediante la ec (5.1) y la densidad de la capa superficial. Luego, la elevación de la termoclina en cualquier punto está dada por:

$$\eta_2(\vec{x}) = \frac{h_1}{2W_{2D}} \frac{d(\vec{x})}{x_g} \quad (5.13)$$

donde $d(\vec{x})$ es la distancia entre el centro de gravedad de la superficie del lago y el punto donde se desea estimar la elevación de la termoclina.

En las Figuras 5.8 y 5.9 se muestran los números de Wedderburn 2D calculados, los desplazamientos esperados de la termoclina en TC1 y TC2, obtenidos de suponer una inclinación lineal de la interfaz de densidad, cuya pendiente está definida por los valores de W_{2D} de acuerdo a la ec (5.13), y los desplazamientos observados de la termoclina en TC1 y TC2, filtrados entre 5

[hrs] y 3 [días] (ver Sección 5.5.2). Este análisis preliminar indica que la intensidad del viento no es lo suficientemente grande para generar *upwelling*, es más, no alcanza a explicar las oscilaciones observadas de la termoclina. Luego, es posible plantear que estos desplazamientos deben su existencia a interacciones resonantes entre las componentes principales del viento y algunos modos normales de oscilación del lago, pues debe existir alguna fuente adicional de energía que explique las amplitudes observadas en terreno.

El día 68 se tiene un bajo W_{2D} y desplazamientos importantes de la termoclina, producto del viento Puelche de baja intensidad (recuadro gris en la Figura 5.9). Este resultado da pie para pensar en la hipótesis planteada por Meruane (2005), sobre la importancia de los eventos de viento Puelche en la generación de *upwelling*.

Como se aprecia en las Figuras 5.8 y 5.9, se cumple siempre que $W_{2D} > 3$ para ambos períodos, por lo que es válido aplicar el análisis lineal.

Para verificar la presencia de fenómenos no lineales, en la Figura 5.10 se presentan series de tiempo para la razón entre la escala de tiempo de empinamiento de la onda y el período de la onda interna fundamental, T_s/T_i , calculadas a partir de la ec (2.17), donde η_0 corresponde al valor absoluto de los desplazamientos medidos en TC1 para febrero y marzo, $h_1 = 20$ [m] y $h_2 = 100$ [m]. En esta Figura se observa claramente que la razón entre las escalas de tiempo siempre es mayor a 1, por lo que no deberían observarse fenómenos no lineales. En términos promedio, se desprende que los efectos no lineales deberían aparecer después de 40 veces el período de la onda fundamental, llegando hasta 3 veces el período de la onda fundamental al analizar los mínimos observados en los gráficos. De las Figuras 5.8 y 5.9, se tiene que la dinámica de las ondas internas en el lago Villarrica está fuertemente dominada por el viento,

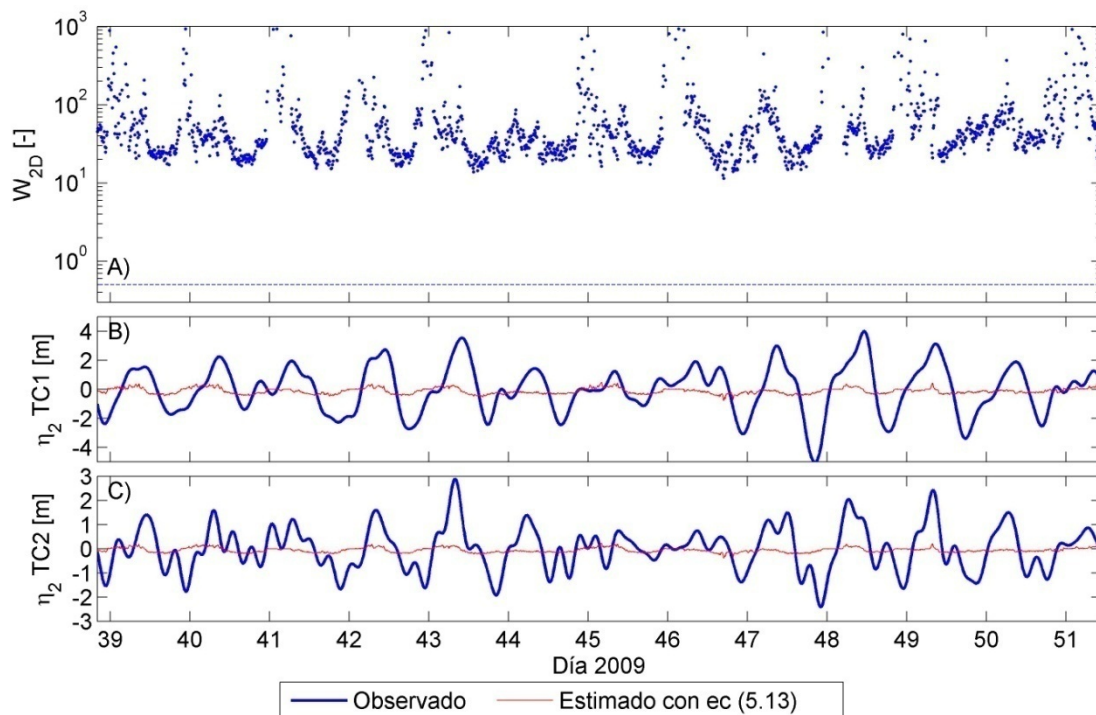


Figura 5.8: A) Números de Wedderburn 2D para el lago Villarrica, B) y C) Desplazamientos de la termoclina en TC1 y TC2 estimados a partir de W_{2D} , para febrero 2009. La línea segmentada indica la condición de *upwelling* $W = 0.5$.

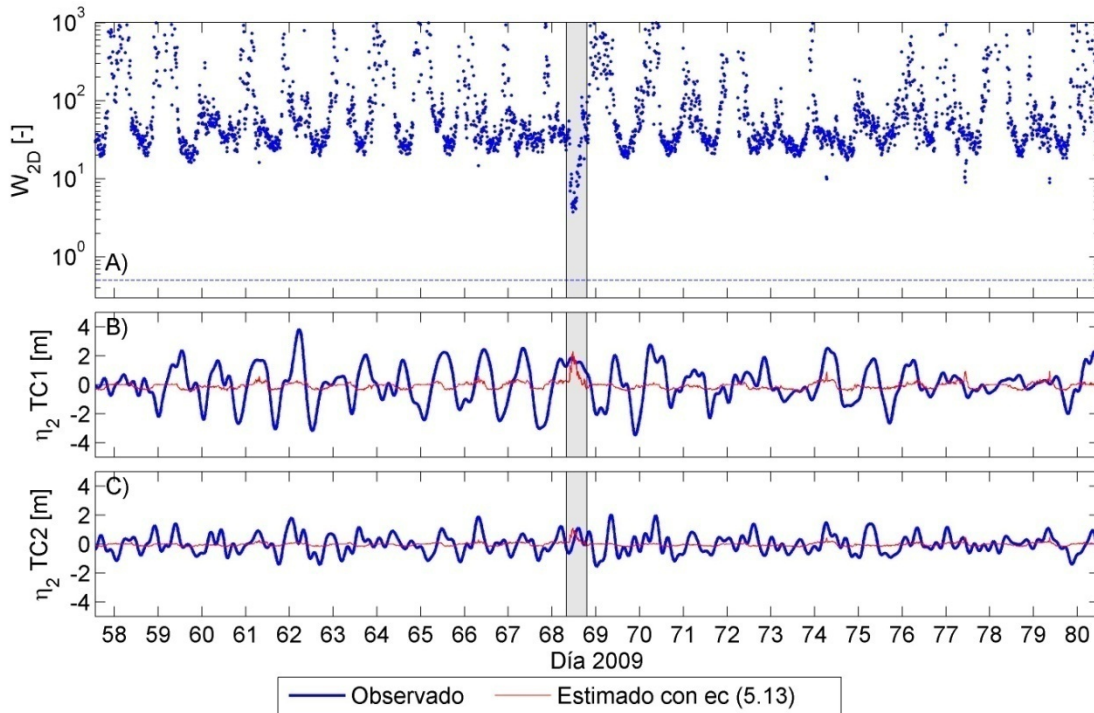


Figura 5.9: A) Números de Wedderburn 2D para el lago Villarica, B) y C) Desplazamientos de la termoclina en TC1 y TC2 estimados a partir de W_{2D} , para marzo 2009. La línea segmentada indica la condición de *upwelling* $W = 0.5$ y los recuadros grises, el viento Puelche de baja intensidad.

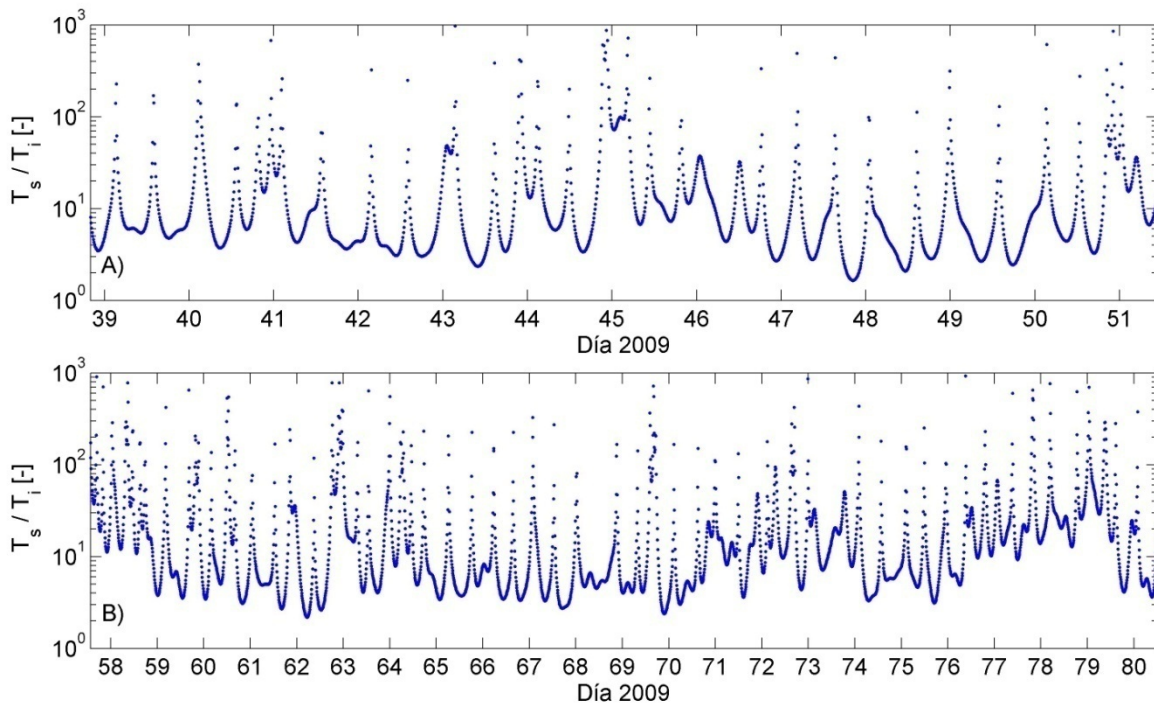


Figura 5.10: Razón entre el tiempo de empinamiento de la onda y el período de la onda interna fundamental para A) febrero 2009 y B) marzo 2009.

el cual tiene una marcada componente diaria. Además, se observa que las oscilaciones de la interfaz de densidad tienen un período dominante cercano a las 24 [hrs], por lo que los efectos no lineales no alcanzarían a observarse pues el viento forzante periódico domina sobre la evolución libre no lineal de la onda (a partir de una condición forzada inicial), según las escalas de tiempo involucradas.

5.4. Análisis espectral de las oscilaciones de la termoclina

Para estudiar las oscilaciones de la interfaz de densidad, se calculó la Energía Potencial Disponible (APE, por sus siglas en inglés) (Gill, 1982), a partir de las series de tiempo para la termoclina y los resultados de la Tabla 5.1:

$$APE(t) = \frac{1}{2} \Delta\rho g \eta_2^2 \quad (5.14)$$

Donde η_2 corresponde a la desviación de la elevación de la termoclina con respecto a la posición de equilibrio, $\Delta\rho$ es la diferencia de densidad entre la capa superficial y la profunda, y g es la aceleración de gravedad. La APE corresponde a la energía potencial disponible para convertirse en energía cinética, y eventualmente producir la mezcla de la columna de agua.

Para determinar las frecuencias dominantes en el sistema, se realizó un análisis espectral de la APE. En las Figuras 5.11 y 5.12 se presenta la densidad espectral de potencia de la APE para TC1 y TC2, para ambos períodos de medición, en las cuales se observa la amplia gama de oscilaciones presentes en la termoclina, las cuales van desde ondas internas de bajo período (frecuencias menores a $3.5 \cdot 10^{-4}$ [Hz], equivalente a períodos mayores a 5 [hrs]), pasando por ondas de mayor frecuencia (entre $3.5 \cdot 10^{-4}$ [Hz] y la frecuencia boyante promedio N_{prom}) hasta escalas turbulentas (frecuencias mayores a N_{prom}) (Saggio & Imberger, 1998).

En las Figuras 5.11 y 5.12 se aprecia que las oscilaciones de período mayor a las 5 [hrs] son las más energéticas, y podrían estar asociadas a ondas internas de baja frecuencia, cuyas escalas de longitud son del orden del tamaño del lago. Específicamente, las oscilaciones cercanas a las 24, 18 y 12 [hrs] son las más energéticas. Si bien hay oscilaciones de menor frecuencia que la escala diaria que presentan alta densidad espectral de potencia, la extensión de las series de tiempo no permiten caracterizarlas de forma confiable.

La frecuencia inercial del lago Villarrica tiene asociado un período $T_{f_0} = 18.97$ [hrs], por lo que inmediatamente se tiene que los peaks de energía asociados a frecuencias mayores a la inercial podrían corresponder a ondas Poincaré, mientras que los peaks de energía sub-inerciales podrían ser explicados por la presencia de ondas Kelvin en el sistema. En síntesis, las frecuencias dominantes podrían corresponder a modos normales de oscilación, los cuales son calculados mediante el análisis modal en la siguiente Sección.

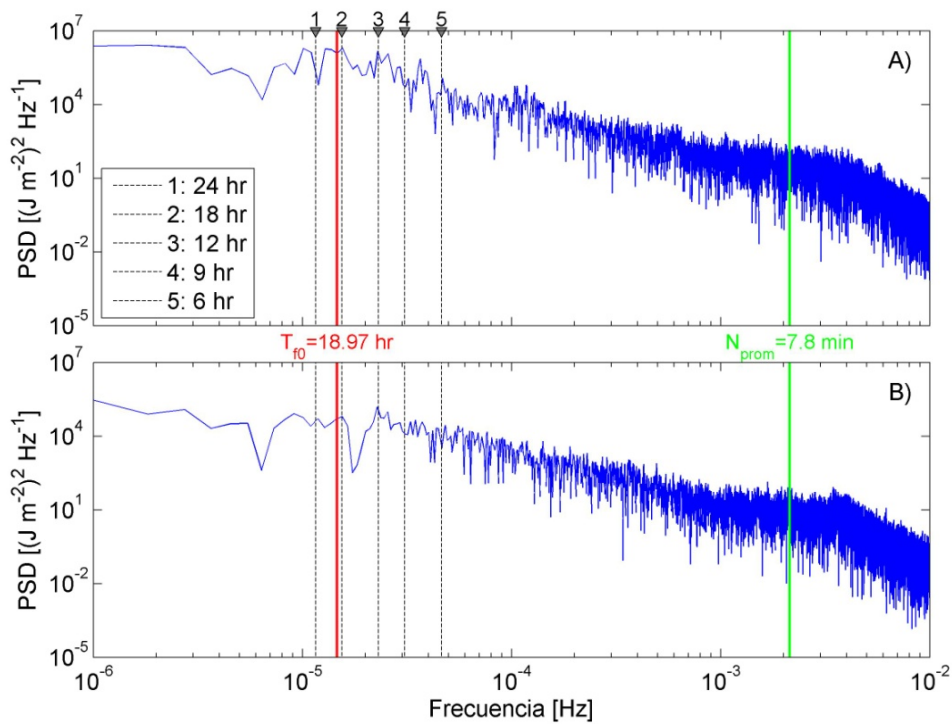


Figura 5.11: Densidad espectral de potencia de: A) TC1 febrero 2009 y B) TC2, febrero 2009. La línea roja marca el factor de Coriolis calculado para el lago, y la línea verde, la frecuencia boyante promedio para ambas cadenas.

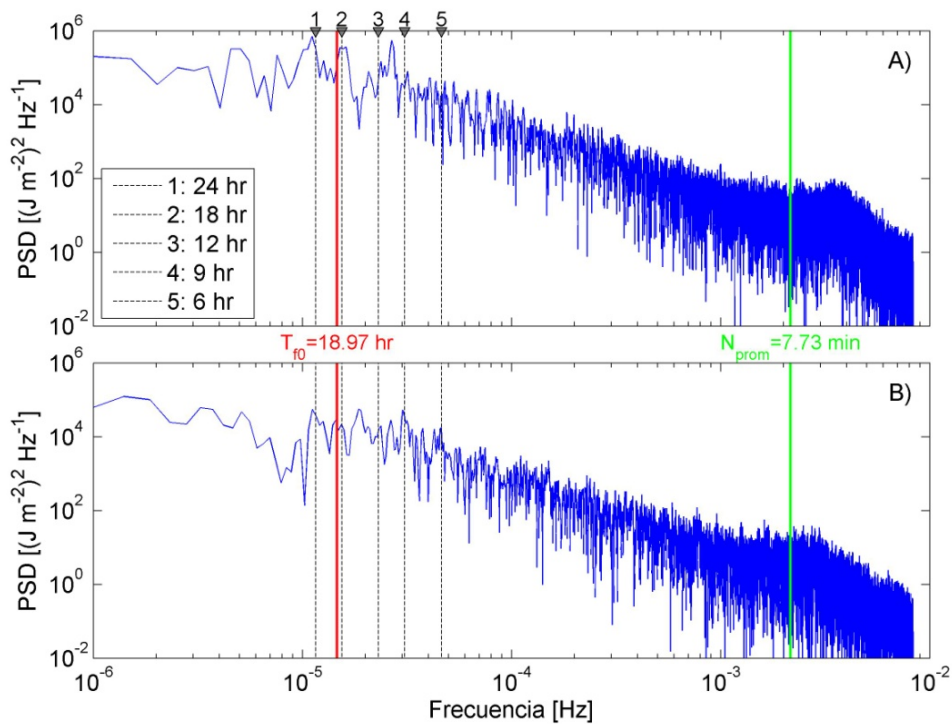


Figura 5.12: Densidad espectral de potencia de: A) TC1 marzo 2009 y B) TC2, marzo 2009. La línea roja marca el factor de Coriolis calculado para el lago, y la línea verde, la frecuencia boyante promedio para ambas cadenas.

5.5. Aplicación del análisis modal

5.5.1. Cálculo de modos normales de oscilación para el lago Villarrica

El esquema teórico/numérico presentado en los Capítulos 2 y 3, respectivamente, se implementó en Matlab®. Se confeccionaron rutinas que, a partir de la batimetría, la forma del lago y la estratificación, preparan las grillas horizontales para ambas capas, arman las matrices **K** y **M**, y resuelven el problema de valores y vectores propios generalizado, según la ec (2.29). De esta forma, se obtienen los modos normales de oscilación y sus frecuencias asociadas. El algoritmo de las rutinas mencionadas se presenta en los anexos de este informe.

Las grillas horizontales se confeccionaron cuidando de que la ubicación de las cadenas de termistores estuviera lo más cerca posible de un nodo η . El espaciamiento considerado fue $\Delta x = 400$ [m] y $\Delta y = 400$ [m]. Dada la diferencia en la ubicación de la termoclina para las mediciones de febrero y marzo, se realizó el análisis modal para cada uno de los períodos mencionados, considerando una altura de la capa superficial $h_1 = 18.5$ [m] para febrero y $h_1 = 22.5$ [m] para marzo. El espesor de la capa profunda h_2 depende del valor de la batimetría del lago en los nodos η , los cuales fueron interpolados a partir de la Carta Batimétrica 6230 del Servicio Hidrográfico y Oceanográfico de la Armada (SHOA), correspondiente al lago Villarrica. En la Figura 5.13 se muestra la discretización horizontal y vertical utilizada para el modelo.

Para caracterizar la estratificación del sistema en los períodos estudiados, se consideraron los valores de las densidades promediadas entre ambas cadenas, según la Tabla 5.1.

Para la discretización del término de Coriolis, se consideró $f_0 = -9.1995 \cdot 10^{-5}$ [rad s⁻¹], asociado a la latitud $\phi_0 = 39^\circ 15' S$, que corresponde al paralelo que pasa por el centro del lago, y un radio medio terrestre $R_T = 6\,371$ [km]. Con estos parámetros y el espaciamiento en la dirección Norte-Sur, Δy , se calculó el factor de Coriolis en cada nodo de velocidad de la malla.

En las Figuras 5.14 y 5.15 se presentan los 9 modos más importantes de período sub-diario obtenidos del cálculo anterior para febrero y marzo, respectivamente. Cada uno de estos modos corresponde a una onda interna de gran escala que puede darse en el lago Villarrica. Para cada onda, se muestran las velocidades promediadas en la vertical para la capa superficial, y la elevación de la termoclina normalizada por la elevación máxima de cada modo. A cada onda se le sumó su par conjugado (de frecuencia $-\omega^{(r)}$) para obtener variables reales (Shimizu et al., 2007).

Para identificar cada una de estas ondas internas de gran escala, en las Figuras 5.16 a 5.18 se presenta la evolución temporal de cada modo para distintas fracciones de su período, considerando un forzante externo nulo y amplitud inicial $\tilde{a}|_{t=0} = 1$, para los datos de febrero. Dado que el sistema está compuesto por dos capas, todas las ondas son modo 1 vertical, variando sólo el modo horizontal de cada una de ellas. Al comparar los modos obtenidos para febrero y marzo, se observa que los períodos de las ondas obtenidas para febrero son mayores a los períodos obtenidos para marzo; y que la estructura espacial de los modos de cada período de medición son similares, variando la intensidad de las velocidades de la primera capa y la amplitud de las crestas y valles. En los anexos de este trabajo se presenta la evolución temporal de los modos calculados para marzo.

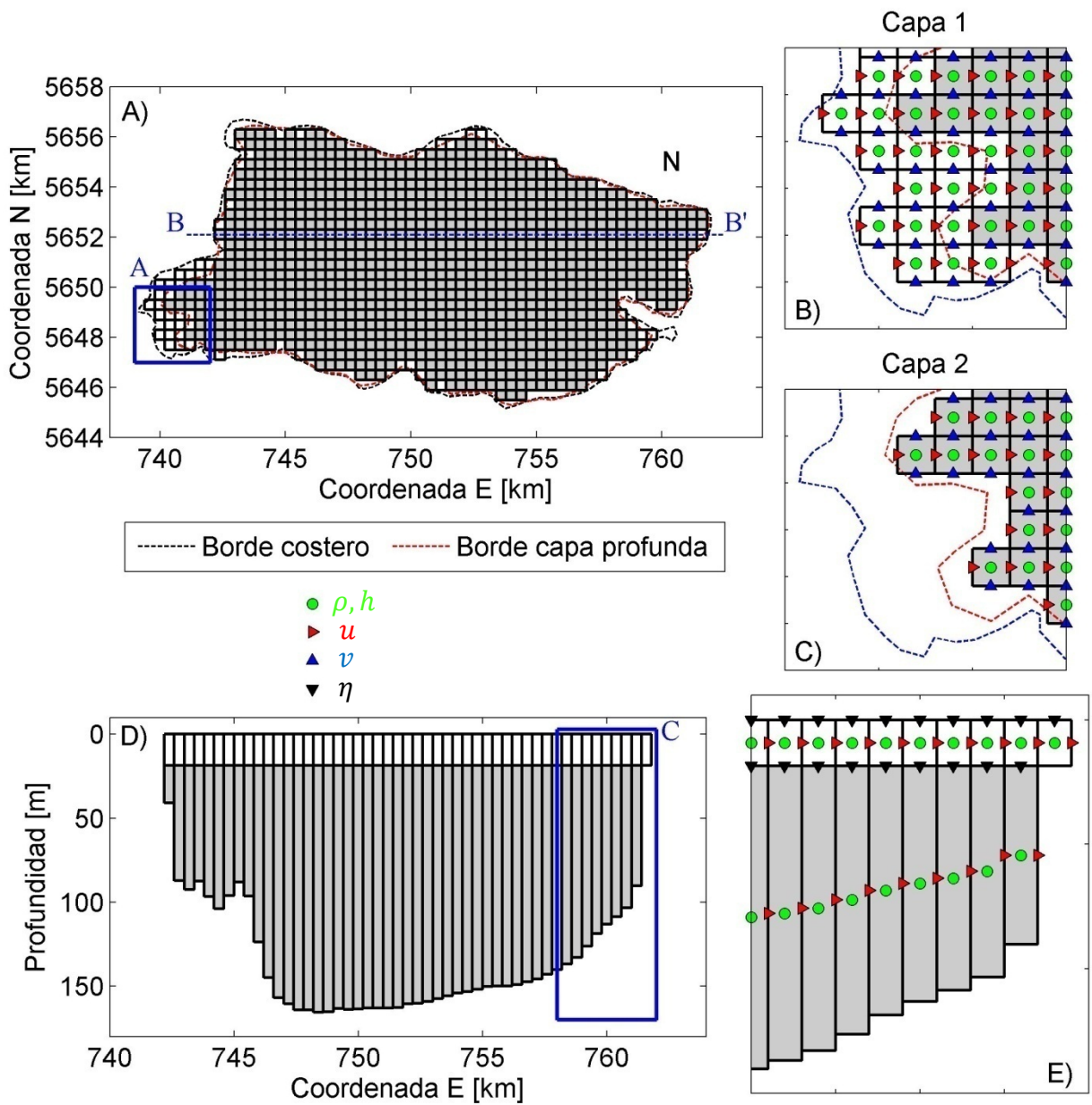


Figura 5.13: A) Dominio horizontal de solución para la capa superficial (blanco) y profunda (gris). B) y C) Detalle de la malla horizontal dentro del recuadro azul A para las capas 1 y 2, respectivamente. D) Vista en elevación del eje B-B'. E) Detalle del corte transversal dentro del recuadro azul C.

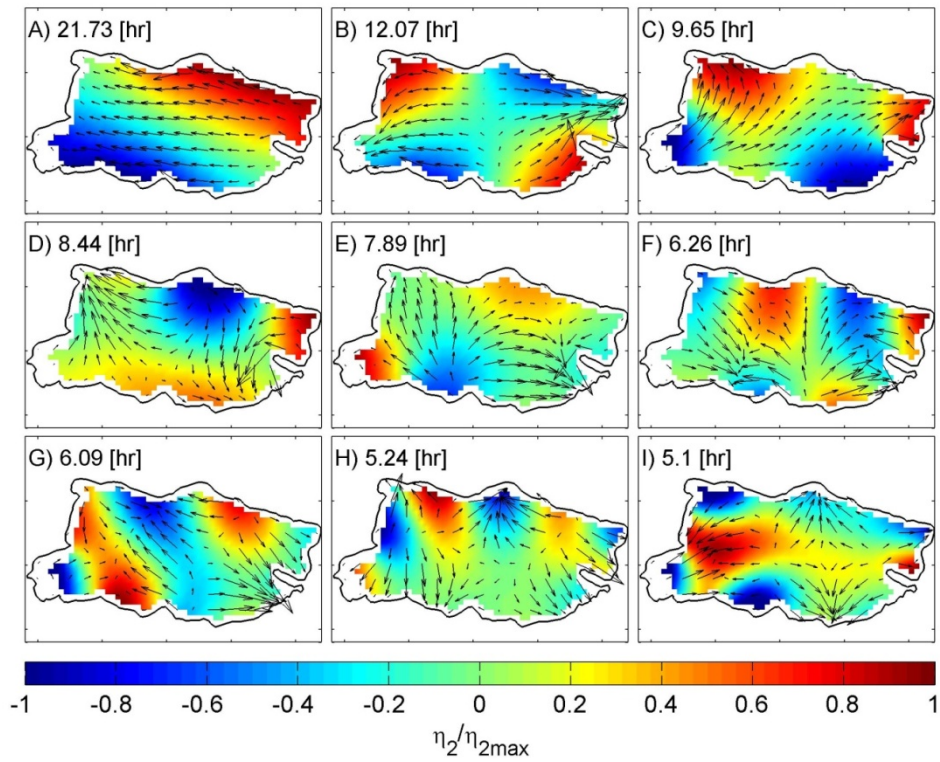


Figura 5.14: Primeros 9 modos normales de período sub-diario para el lago Villarrica, para febrero 2009. En cada panel se indica el período de la onda. La escala de colores corresponde a la elevación normalizada de la termoclina.

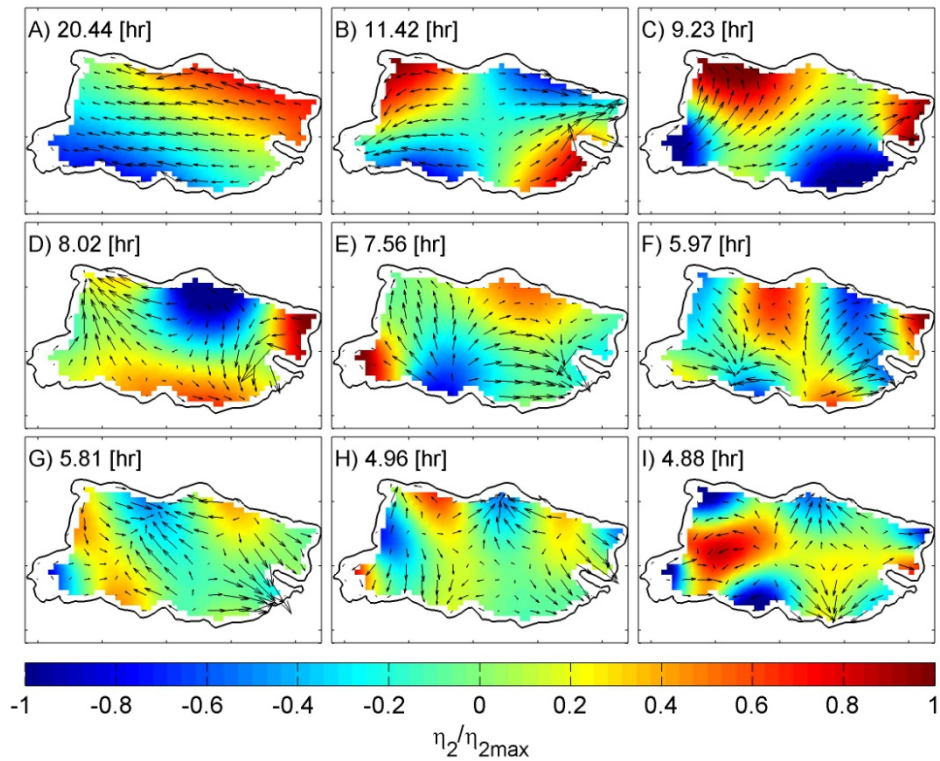


Figura 5.15: Primeros 9 modos normales de período sub-diario para el lago Villarrica, para marzo 2009. En cada panel se indica el período de la onda. La escala de colores corresponde a la elevación normalizada de la termoclina.

De la Figura 5.16A se infiere que este modo corresponde a una onda Kelvin modo 1 horizontal (K1), llamado también modo fundamental, pues se observa una rotación ciclónica (a favor de los punteros del reloj en el Hemisferio Sur) circundando el contorno del lago. Los máximos desplazamientos de la termoclina se producen en dicha zona, y las velocidades promedio en la capa superficial rotan en sentido horario, alcanzando las máximas velocidades cuando el campo de velocidad se alinea paralelo a la dirección Este-Oeste. El modo de la Figura 5.16B corresponde a una onda Kelvin modo 2 horizontal (K2), pues la interfaz de densidad tiene dos sucesiones de máximos y mínimos recorriendo el lago en sentido ciclónico, y el campo de velocidades promedio en la capa superficial presenta dos celdas que rotan en el mismo sentido mencionado.

La clasificación de ondas tipo Kelvin y Poincaré es bastante más clara para aplicaciones oceanográficas y cuerpos de agua de geometría simple, sin embargo, el contorno del lago y la batimetría alteran la estructura de los modos normales de oscilación y dificultan su clasificación en los tipos mencionados, lo cual queda de manifiesto en los paneles restantes (Gómez-Giraldo et al., 2006, Shimizu et al., 2007). En las Figura 5.16C y D se observan oscilaciones que alternan 3 valles y 3 crestas ubicadas en el contorno del lago, siendo mayor la extensión de las crestas y valles hacia el interior del lago en el caso del modo de la Figura 5.16C. El campo de velocidades promedio de la capa superficial para el modo de la Figura 5.16C presenta una gran celda de circulación con sentido de rotación anticiclónico ubicada en el centro del lago, acompañada a cada lado por dos celdas más pequeñas que mueven agua en la dirección Norte – Sur, confinadas en la costa. Por otro lado, el campo de velocidades promedio de la capa superficial del modo de la Figura 5.16D presenta dos celdas de circulación con sentido anticiclónico abarcando casi todo el lago, mientras se observa una tercera celda de circulación ciclónica confinada a la costa Sureste del lago. Luego, ambos modos son tipo Poincaré modo 3 horizontal, denominados P3.1 y P3.2, respectivamente, en este trabajo.

Una situación similar se tiene para los modos de los paneles E) y F), y G) y H). En el caso del primer par, se tienen 4 crestas alternadas por 4 valles en el contorno del lago y el campo de velocidades promedio de la capa superficial presenta celdas de circulación con rotación anticiclónica (en sentido contrario a los punteros del reloj en el Hemisferio Sur) en el interior del lago, dejando zonas en la costa norte donde aparentemente se produce un movimiento unidireccional de las aguas superficiales. En el caso del segundo par de modos, se observan 5 crestas alternadas por 5 valles, y el campo de velocidades promedio de la capa superficial alterna celdas de circulación ciclónicas y anticiclónicas en el interior del lago. Por esto, el primer par de modos corresponden a ondas tipo Poincaré modo 4 horizontal (P4.1 y P4.2, respectivamente), mientras que los modos de los paneles G) y H) son ondas tipo Poincaré modo 5 horizontal (P5.1 y P5.2, respectivamente).

En el panel I) se observa que la interfaz de densidad presenta 6 valles y 6 crestas, algunas de las cuales rotan hacia el interior del lago, lo que no puede ocurrir para ondas Kelvin. Además, el campo de velocidades promedio de la capa superficial presenta celdas de circulación ciclónicas alternadas con celdas anticiclónicas. Necesariamente, este tipo de modo corresponde a una onda tipo Poincaré modo 6 horizontal (P6.1).

De acuerdo a la teoría, las ondas tipo Poincaré son siempre súper-inerciales, condición que se cumple para todos los modos clasificados como dicho tipo de ondas.

Meruane (2005) estimó los períodos de las ondas Kelvin y Poincaré fundamentales para el lago Villarrica, usando las expresiones propuestas por Antenucci & Imberger (2001) para una cubeta elíptica de fondo plano, obteniendo períodos de 2 días y 13 hrs, respectivamente. Estos valores son superiores a los obtenidos mediante el análisis modal, y la diferencia puede explicarse por la consideración de la batimetría, forma del lago y variación del parámetro de Coriolis en la dirección Norte – Sur en el cálculo del período de las ondas.

Se ha presentado el campo de velocidad promedio de la capa superficial para cada modo, pues además de ayudar a identificar a qué tipo de onda corresponde cada modo, este campo de velocidad define si un campo de vientos dado sobre el lago es capaz de excitar dicho modo o no. De acuerdo a la ec (2.41), si se considera un campo de viento uniforme sobre toda la superficie del lago, soplando de Oeste a Este (condición típica para el lago Villarrica), la onda Kelvin fundamental (K1) debería excitarse, pues su campo de velocidades superficiales es paralelo a la dirección del viento. También podría excitarse una onda tipo Poincaré modo 3 horizontal (P3.1), cuyo campo de velocidades superficiales se alinea en la dirección Oeste-Este para tiempos cercanos a T_i . Para el resto de los modos, es difícil predecir el comportamiento de la onda frente al efecto del viento, por la presencia de celdas de rotación, las cuales aumentan a medida que aumenta el modo horizontal.

Los giros geostroáficos inducen patrones de circulación que están asociados al rotor del campo de vientos sobre el lago, y aparecen cuando dicho rotor es distinto de cero (Shimizu et al., 2007). En el presente trabajo, dado que se cuenta sólo con una estación meteorológica, se tiene un campo de vientos uniforme sobre la superficie del lago y no es posible estudiar la presencia de estos giros.

Un resumen de la clasificación de los 9 primeros modos sub-diarios se presenta en la Tabla 5.2, con la denominación utilizada para cada modo de aquí en adelante.

Tabla 5.2: Clasificación de las primeras 9 ondas de gran escala para el lago Villarrica

Panel	Período [hr]		Clasificación	Simbología
	febrero	marzo		
A)	21.73	20.44	Kelvin H1	K1
B)	12.07	11.42	Kelvin H2	K2
C)	9.65	9.23	Poincaré H3.1	P3.1
D)	8.44	8.02	Poincaré H3.2	P3.2
E)	7.89	7.56	Poincaré H4.1	P4.1
F)	6.26	5.97	Poincaré H4.2	P4.2
G)	6.09	5.81	Poincaré H5.1	P5.1
H)	5.24	4.96	Poincaré H5.2	P5.2
I)	5.10	4.88	Poincaré H6.1	P6.1

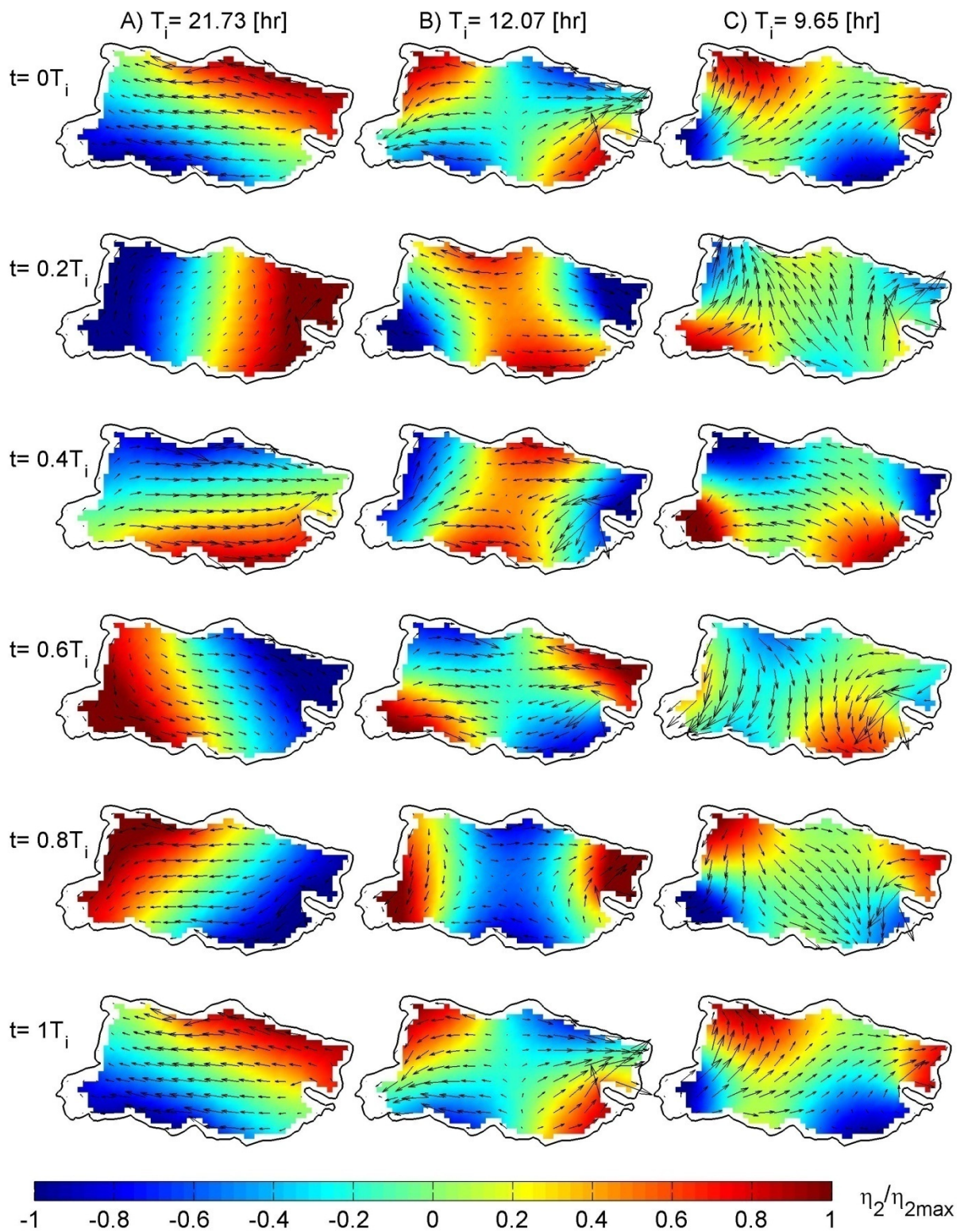


Figura 5.16: Evolución temporal de los modos normales A), B) y C) de período sub-diario para el lago Villarrica, para febrero 2009. Cada columna corresponde a la evolución de un modo, considerando las fracciones del período mostradas en cada fila. La escala de colores corresponde a la elevación normalizada de la termoclina.

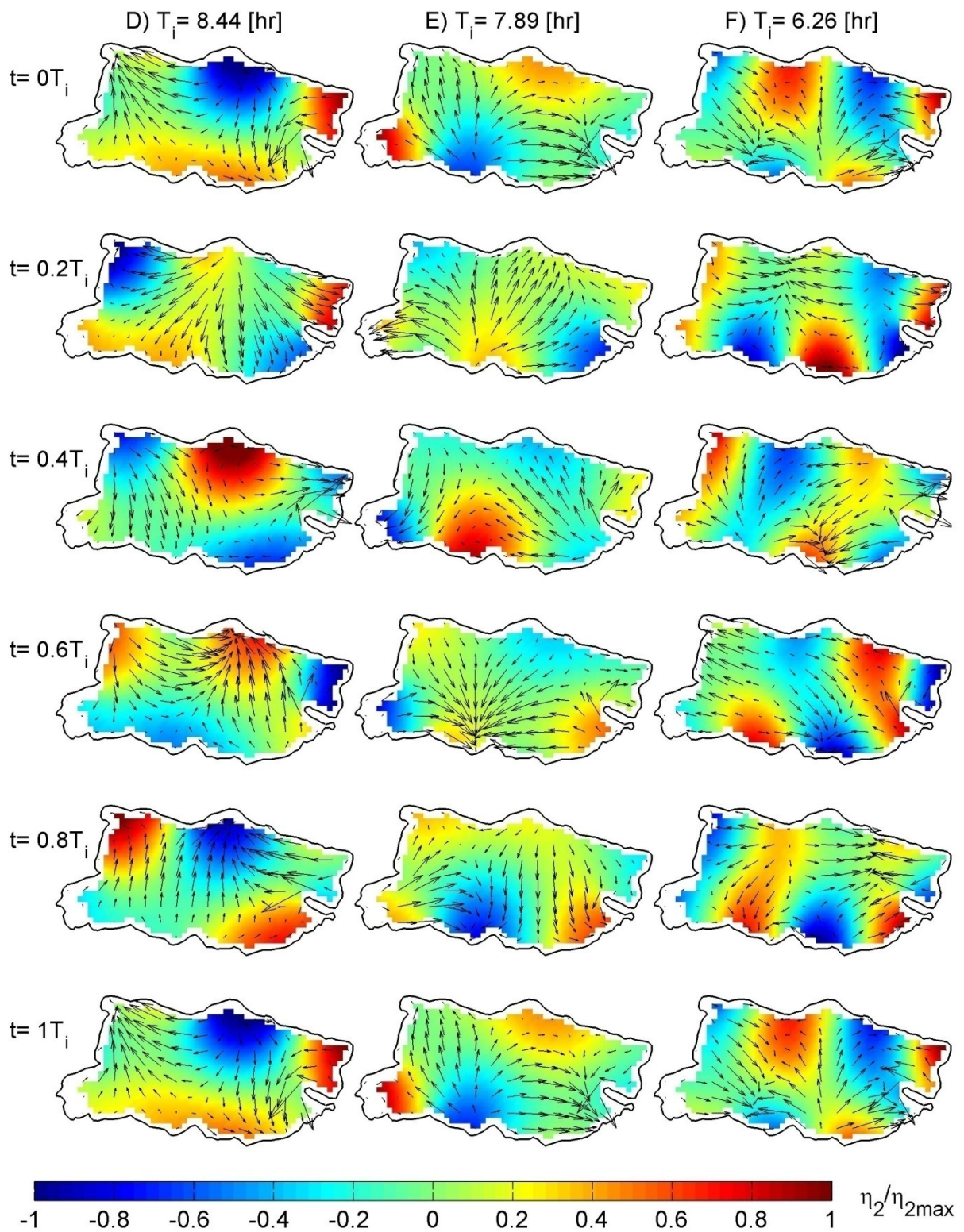


Figura 5.17: Evolución temporal de los modos normales D), E) y F) de período sub-diario para el lago Villarrica, para febrero 2009. Cada columna corresponde a la evolución de un modo, considerando las fracciones del período mostradas en cada fila. La escala de colores corresponde a la elevación normalizada de la termoclina.

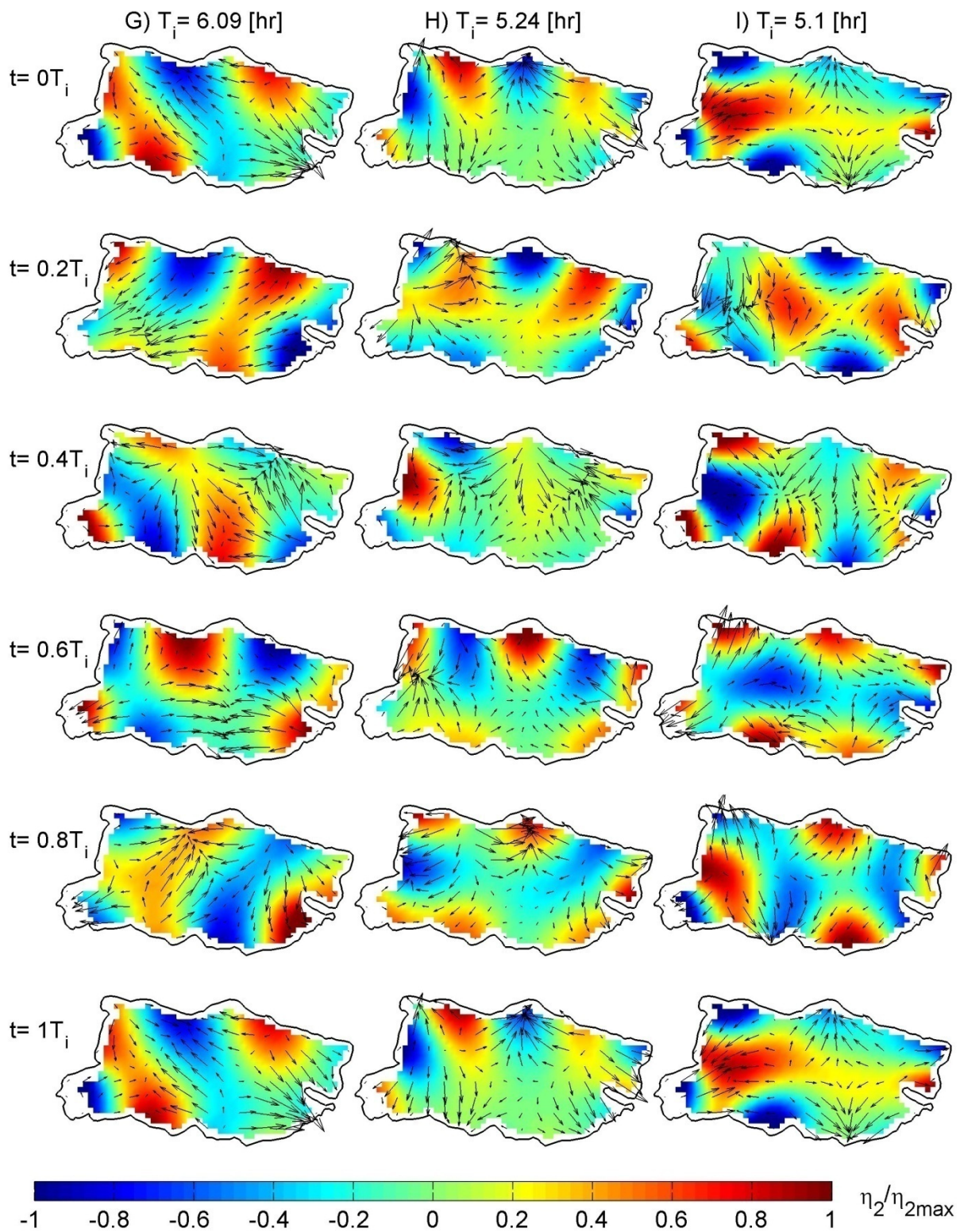


Figura 5.18: Evolución temporal de los modos normales G), H) e I) de período sub-diario para el lago Villarrica, para febrero 2009. Cada columna corresponde a la evolución de un modo, considerando las fracciones del período mostradas en cada fila. La escala de colores corresponde a la elevación normalizada de la termoclina.

5.5.2. Modelación de la evolución temporal de las ondas internas de gran escala, de período sub-diario del lago Villarrica

5.5.2.1. Simulaciones numéricas con amplitud inicial nula

Para estudiar los resultados obtenidos mediante el análisis modal y compararlos con las mediciones de terreno, se realizaron simulaciones numéricas de la respuesta de la termoclina considerando el campo de vientos registrado en la estación meteorológica, para ambos períodos estudiados (febrero y marzo 2009). Según la ec (2.30), la respuesta forzada está compuesta por la suma de todos los modos con sus pares conjugados, multiplicados por su respectiva amplitud. Agrupando por modo, se puede escribir:

$$\xi^{(r)}(\vec{x}, t) = \tilde{\xi}^{(r)}(\vec{x})\tilde{a}^{(r)}(t) + \tilde{\xi}^{(-r)}(\vec{x})\tilde{a}^{(-r)}(t) \quad (5.15)$$

donde $\tilde{\xi}^{(-r)}(\vec{x})$ y $\tilde{a}^{(-r)}(t)$ corresponden al complejo conjugado de $\tilde{\xi}^{(r)}(\vec{x})$ y $\tilde{a}^{(r)}(t)$, respectivamente. De esta forma, se obtienen variables reales para el vector de estado $\xi^{(r)}(\vec{x}, t)$.

La respuesta forzada $\xi(\vec{x}, t)$ se obtuvo considerando los 9 primeros modos de período sub-diario presentados en la Sección 5.5.1. Dado que no se están considerando todas las frecuencias que conforman la respuesta forzada observada en terreno, es necesario filtrar las series de desplazamientos observados de la termoclina con respecto a la posición de equilibrio, $\eta_{2_{obs}}(\vec{x}_j, t)$, donde \vec{x}_j con $j = 1, 2$ denota la ubicación de TC1 y TC2, respectivamente, para determinar de mejor manera la contribución de cada modo a la respuesta forzada. Para esto, se implementó un filtro pasa banda, calculando la Transformada Rápida de Fourier (FFT, por su sigla en inglés) de la señal e igualando a cero las componentes de la FFT correspondientes a las frecuencias no incluidas en el ancho de banda seleccionado. Finalmente las series temporales filtradas se obtuvieron a partir del cálculo de la inversa de la FFT resultante (García et al., 2006). Por esta razón, las series de desplazamientos observados de la termoclina con respecto a la posición de equilibrio, $\eta_{2_{obs}}(\vec{x}_j, t)$, fueron filtradas considerando una banda de frecuencias entre las 5 [hr] y las 72 [hrs] (3 días), para eliminar las oscilaciones que no pueden ser predichas a partir del análisis modal.

Para resolver la ec (3.22), se proyectó el campo de vientos en las direcciones Oeste – Este (eje x) y Sur – Norte (eje y), y se consideró una amplitud inicial nula para todos los modos. Los resultados para ambas cadenas se muestran en las Figuras 5.19 y 5.20.

En las Figuras 5.19 y 5.20 se observa un buen ajuste en términos de amplitud entre los valores observados y simulados. Sin embargo, la condición inicial nula impuesta para los modos es poco realista, pues el sistema tiene una energía inicial entregada por el viento durante los días anteriores al inicio de la medición. Se observa además un problema con las fases de las ondas, pues la serie simulada tiende a retrasarse en comparación a los datos observados. Esto sería explicado en primera instancia por la ausencia de disipación en el modelo, la cual tiende a desacelerar las ondas producto de la disipación de energía.

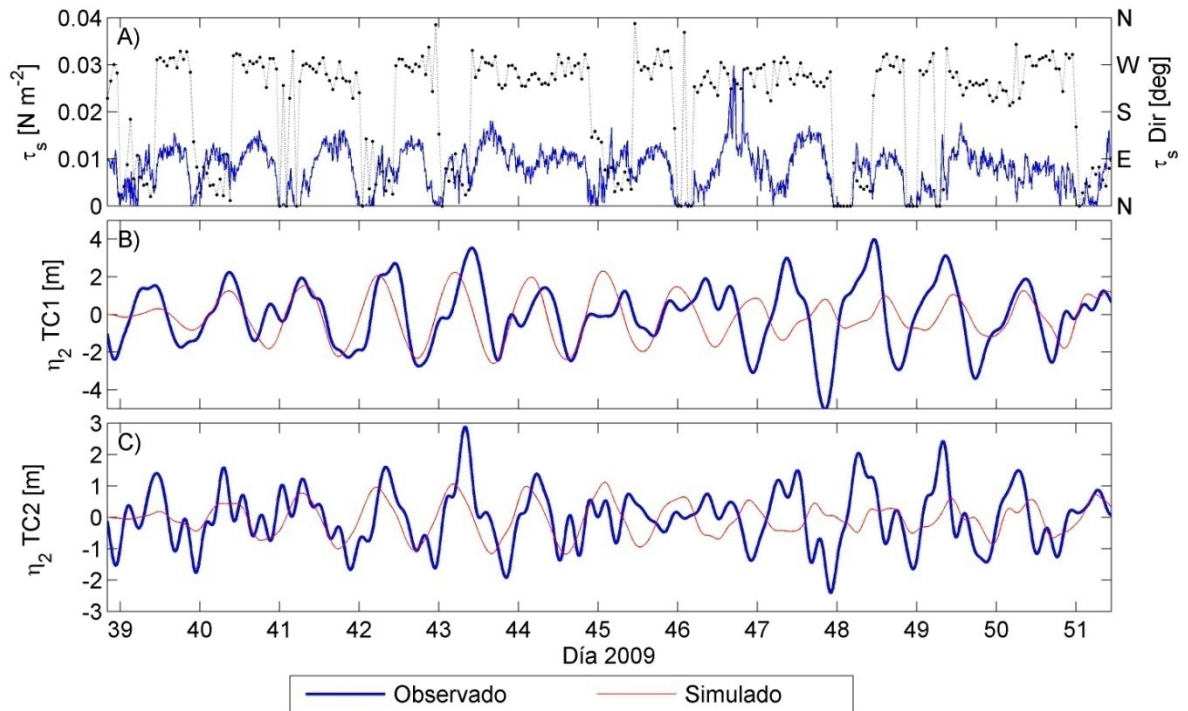


Figura 5.19: A) Dirección (puntos negros) y magnitud (línea azul) del esfuerzo de corte del viento sobre la superficie del lago. B) y C) Desplazamientos observados y simulados de la termoclina con respecto a la posición de equilibrio para TC1 y TC2, febrero 2009, considerando amplitud inicial nula.

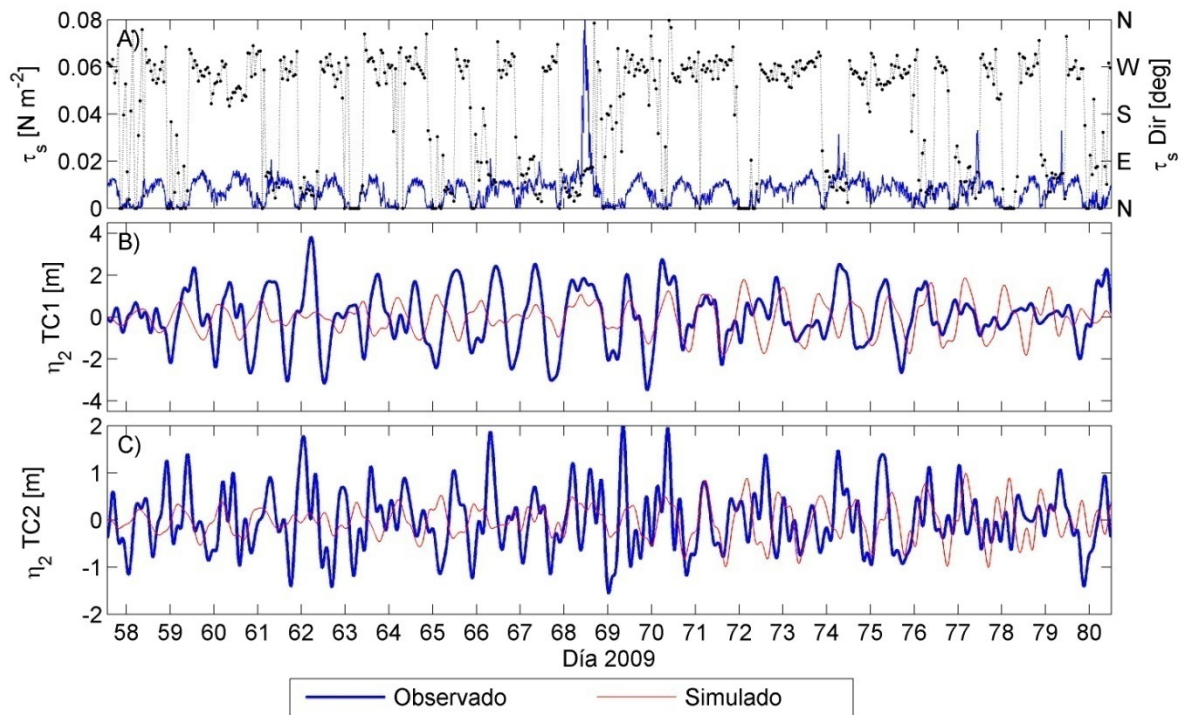


Figura 5.20: A) Dirección (puntos negros) y magnitud (línea azul) del esfuerzo de corte del viento sobre la superficie del lago. B) y C) Desplazamientos observados y simulados de la termoclina con respecto a la posición de equilibrio para TC1 y TC2, marzo 2009, considerando amplitud inicial nula.

Para estudiar la evolución de los modos, se grafican las energías modales y el trabajo acumulado realizado por el viento sobre cada modo en las Figuras 5.21 y 5.22. Existen dos conclusiones inmediatas a partir de estos resultados: la primera es que la onda Kelvin fundamental (K1) concentra la mayor cantidad de energía aportada por el viento. La segunda, es que las energías modales son iguales al trabajo realizado por el viento sobre cada modo, lo cual es completamente esperable dado el carácter no disipativo de las ecuaciones consideradas. Dado que no hay pérdidas de energía, los descensos de las energías modales están explicados por el trabajo negativo que realiza el viento cuando su dirección es contraria a la dirección del campo de velocidades superficiales de cada modo.

Tanto para febrero como para marzo se tiene que la energía de la onda Kelvin fundamental es mayor al resto de los modos considerados. Se observa que la evolución temporal de la energía de esta onda está modulada por el viento, lo que es un indicio de una interacción resonante entre el forzante y la onda K1, como se verá más adelante.

El resto de los modos se lleva una fracción menor de la energía aportada por el viento, destacándose las ondas tipo Poincaré P3.1, P3.2 y P4.1. Durante febrero, la energía de estas ondas se mantiene baja, pero aumenta a partir del día 46 producto de la alta intensidad de viento durante dicha fecha, en comparación a los días anteriores. Un fenómeno similar se observa durante el mes de marzo, donde las energías modales se mantienen bajas, y luego aumentan notoriamente producto del Puelche de baja intensidad registrado el día 68. Es necesario notar que este Puelche de baja intensidad tiende a reorientar las ondas, lo que se aprecia en el descenso brusco que experimentan las energías modales producto del cambio de fase, y luego se produce un aumento en la excitación de los modos, sobretodo de las ondas K1 y P3.1, y en menor medida P3.2 y P4.1. Además, se observa la aparición de modos que no se veían excitados para vientos de baja intensidad, como las ondas P4.2 y P5.1.

En los datos observados en TC2, para ambos períodos, se observa una oscilación de período cercano a las 6 [hrs], y que no sería una respuesta forzada por el viento, pues los modos con períodos del orden tienen baja energía. Estas oscilaciones estarían siendo generadas por la interacción no lineal entre modos, como explica de la Fuente et al. (2008). Según estos autores, cuando una onda tipo Kelvin se encuentra en fase con una onda tipo Poincaré, se produce la excitación de modos de mayor frecuencia producto de efectos no lineales. Estas oscilaciones se ubican preferentemente en el centro de la cubeta, y la frecuencia característica de estas ondas está dada por la suma de las frecuencias de las ondas Kelvin y Poincaré, es decir, $\omega_{KP} = \omega_K + \omega_P$. Considerando las frecuencias obtenidas del análisis modal para K1 y P3.1, se tiene que la interacción no lineal excita ondas de período $T_{KP} = 6.68$ [hrs] en febrero y $T_{KP} = 6.36$ [hrs] en marzo, que a priori estarían calzando con los datos observados de terreno.

En ambos períodos se observa que la onda Kelvin modo 2 (K2) no sería excitada por el viento, probablemente porque el campo de velocidad superficial de este modo no es compatible con el campo de vientos que sopla sobre el lago (ver Figura 5.16B).

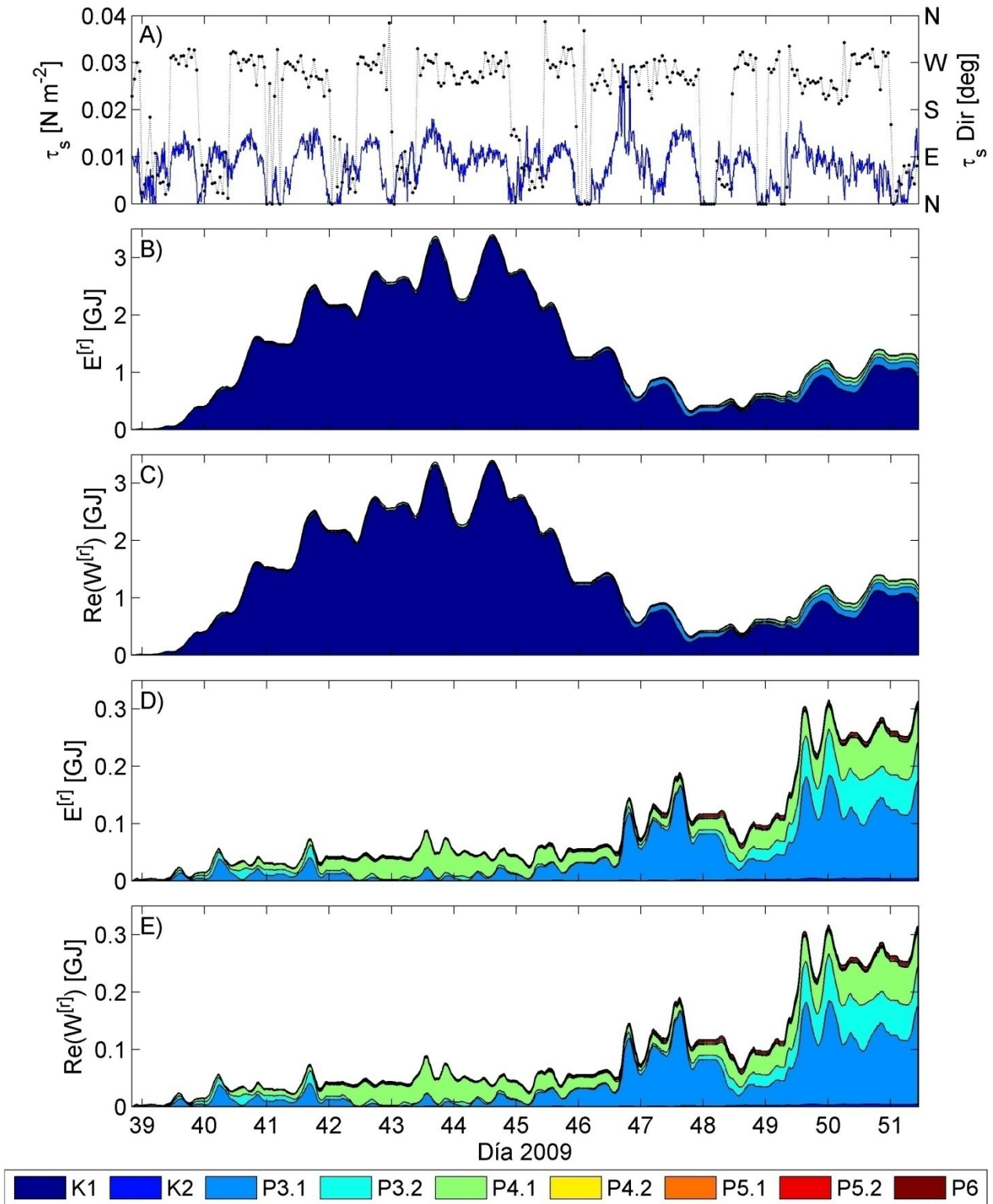


Figura 5.21: A) Dirección (puntos negros) y magnitud (línea azul) del esfuerzo de corte del viento sobre la superficie del lago. B) Evolución de las energías modales. C) Evolución del trabajo del viento sobre cada modo. D) Evolución de las energías modales descontando K1 y E) Evolución del trabajo del viento sobre cada modo descontando K1 para febrero 2009, considerando amplitud inicial nula.

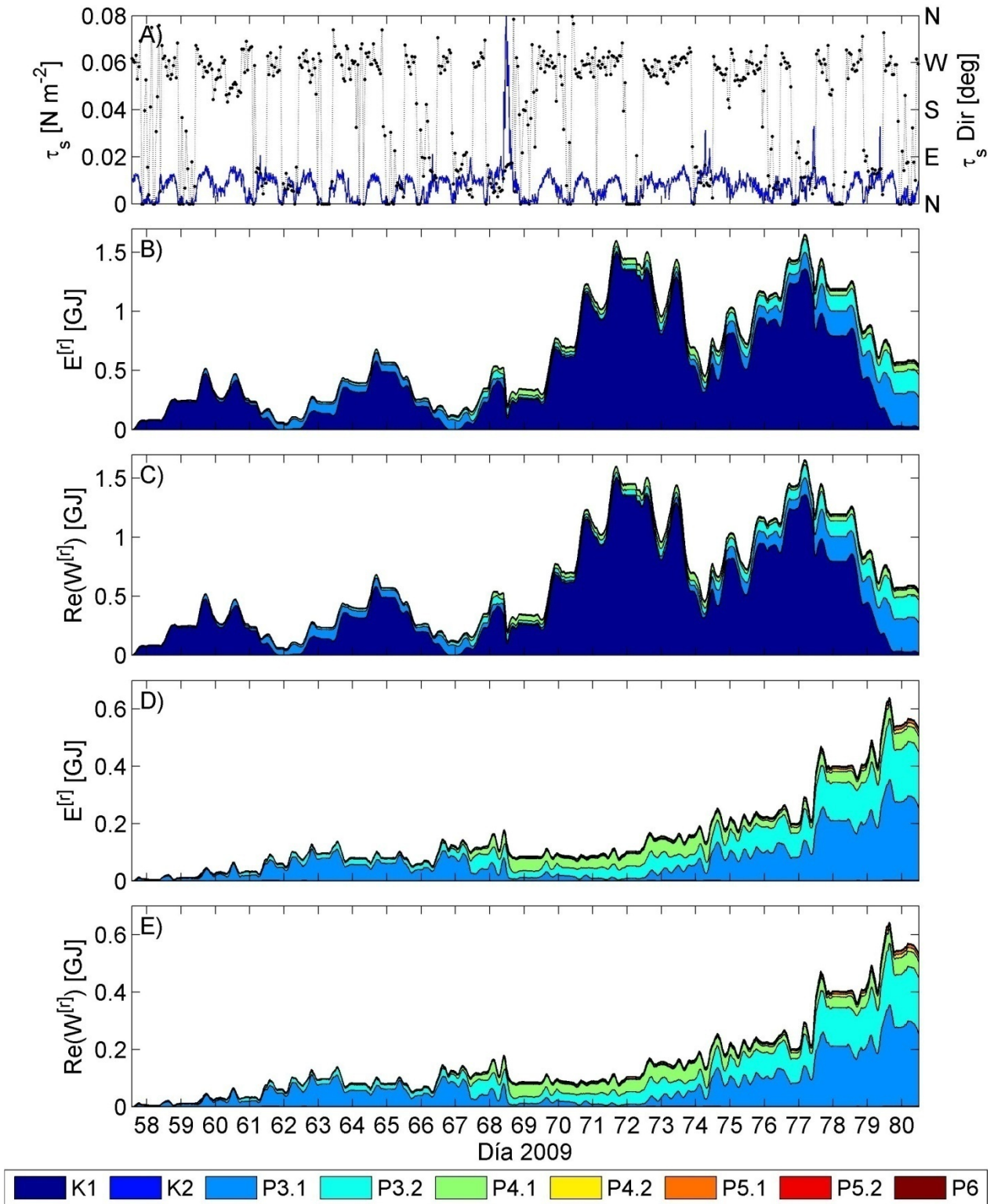


Figura 5.22: A) Dirección (puntos negros) y magnitud (línea azul) del esfuerzo de corte del viento sobre la superficie del lago. B) Evolución de las energías modales. C) Evolución del trabajo del viento sobre cada modo. D) Evolución de las energías modales descontando K1 y E) Evolución del trabajo del viento sobre cada modo descontando K1 para marzo 2009, considerando amplitud inicial nula.

5.5.2.2. Ajuste de la amplitud inicial y escala de disipación de cada modo

Para estudiar el problema de fase que presentan los valores simulados con respecto a los observados, y de esta forma caracterizar de mejor forma la evolución temporal de las ondas internas, se incluyó un factor asociado a la disipación de energía en la solución de la ec (2.28):

$$\xi(\vec{x}, t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}^{(r)}(\vec{x}) \exp(i\omega^{(r)}t) \exp(-(\gamma^{(r)} + i\delta^{(r)})t) \quad (5.16)$$

donde $\gamma^{(r)}$ es un coeficiente real positivo que da cuenta del decaimiento del modo r y $\delta^{(r)}$ es la disminución de la frecuencia modal producto de la disipación de energía. Shimizu & Imberger (2008) indican que existen distintos tipos de mecanismos de disipación de energía: transferencia a ondas de mayor frecuencia producto del empujamiento no lineal de las ondas de gran escala, esfuerzos de corte localizados que derivan en mezcla, fricción con el fondo y riberas del lago, efectos de la reducción de la profundidad y rompimiento de ondas internas, interacción no lineal entre ondas gravitacionales y topográficas, entre otros. Suponiendo que las tasas de disipación son pequeñas en relación a las frecuencias modales, entonces es posible calcularlas a partir de un ajuste entre los desplazamientos observados y simulados de la interfaz de densidad (Shimizu & Imberger, 2008). Además, dado este supuesto, es posible considerar los modos obtenidos de las ecuaciones sin disipación (ec (2.29)) para el ajuste pues no se requiere elegir a priori ningún mecanismo específico de disipación de energía para las simulaciones numéricas.

De acuerdo al desarrollo presentado en la Sección 3.4, se obtuvo la ecuación que rige la evolución de las amplitudes modales en el tiempo, considerando el decaimiento de las ondas y la disminución de las frecuencias modales:

$$\tilde{e}^{(r)} \partial_t \tilde{a}^{(r)}(t) = (i \hat{\omega}^{(r)} - \gamma^{(r)}) \tilde{e}^{(r)} \tilde{a}^{(r)}(t) + \tilde{f}^{(r)}(t) \quad (5.17)$$

donde $\hat{\omega}^{(r)} = \omega^{(r)} - \delta^{(r)}$ es la frecuencia modal afectada por la disipación de energía. Resolviendo esta ecuación con un esquema numérico del tipo Crank-Nicholson (ver Sección 3.4), se obtiene una expresión para la evolución temporal de las amplitudes modales.

Para simular la respuesta forzada del sistema considerando la disipación de energía, falta conocer las amplitudes modales iniciales, $\tilde{a}_0^{(r)}$, las tasas de decaimiento modal $\gamma^{(r)}$ y las frecuencias modales modificadas por la disipación, $\hat{\omega}^{(r)}$. Estos parámetros se estimaron siguiendo la metodología propuesta por Shimizu & Imberger (2008), la cual propone ajustar los desplazamientos simulados de la termoclina a los valores observados mediante un proceso de optimización, en el cual se minimiza el error cuadrático medio entre los valores observados y simulados de la interfaz de densidad:

$$\overline{\varepsilon^2(\tilde{a}_0^{(r)}, \gamma^{(r)}, \hat{\omega}^{(r)})} = \sum_j \sum_t \left(\eta_{2_{obs}}(\tilde{x}_j, t) - \sum_{r=1}^M \eta_{2_{sim}}^{(r)}(\tilde{x}_j, t) \right)^2 \quad (5.18)$$

donde $\eta_{2_{obs}}(\vec{x}_j, t)$ son los valores observados de la serie de tiempo de la termoclina en el punto de coordenadas \vec{x}_j , $\eta_{2_{sim}}^{(r)}(\vec{x}_j, t)$ son los valores simulados para el modo r en el punto \vec{x}_j , usando la serie de tiempo de las amplitudes modales calculadas a partir de la ec (3.22). La suma sobre el tiempo indica que el error cuadrático medio puede calcularse para cualquier ventana temporal de las series, y la suma sobre j significa que la optimización puede incorporar las mediciones en los puntos disponibles.

Para considerar la evolución temporal de cada modo en la optimización, se calcularon las series de tiempo de los desplazamientos de la termoclina en TC1 y TC2 considerando la serie de tiempo del viento forzante en el cálculo de las amplitudes modales, y se calculó el error cuadrático medio incluyendo ambas cadenas. Como las amplitudes dependen de las incógnitas $Re(\tilde{a}_0^{(r)})$, $Im(\tilde{a}_0^{(r)})$, $\gamma^{(r)}$ y $\hat{\omega}^{(r)}$, éstas fueron consideradas como las variables de optimización, sujetas a las siguientes restricciones:

- $E_0^{(r)} > 0$
- $\gamma_l < \gamma^{(r)} < \gamma_u$
- $\omega_l < \hat{\omega}^{(r)} < \omega_u$

La primera restricción corresponde a que las energías iniciales deben ser siempre positivas. La segunda restricción indica que la tasa de decaimiento modal debe estar asociada a una escala razonable de tiempo en comparación a la escala de tiempo de las frecuencias modales. Shimizu & Imberger (2008) estimaron una tasa de decaimiento para el lago Kinneret del orden de 1 a 3 [días]. Dada la falta de antecedentes para el lago Villarrica, se realizó la optimización considerando $\gamma_l = 9.09 \cdot 10^{-7}$ [rad s⁻¹] ($T_l = 2\pi\gamma_l^{-1} = 80$ [días]) y $\gamma_u = 7.27 \cdot 10^{-5}$ [rad s⁻¹] ($T_u = 2\pi\gamma_u^{-1} = 1$ [día]) para explorar el espacio de soluciones. Finalmente, la tercera restricción da cuenta del efecto de la disipación de energía en las frecuencias modales. A priori, éstas deberían ser siempre menores a las frecuencias modales sin disipación, pues en caso contrario la fricción estaría acelerando las ondas internas, lo que carece de sentido físico. Sin embargo, se permite que las frecuencias se encuentren en un rango mayor a las frecuencias modales en la optimización, para explorar el efecto de la disipación de energía en las frecuencias de las ondas y verificar si las frecuencias modales dan cuenta de las oscilaciones observadas en las series de tiempo de la termoclina. Los límites inferior y superior para las frecuencias optimizadas, ω_l y ω_u respectivamente, fueron escogidos de manera tal que los períodos optimizados se encuentren en un intervalo de $\pm 50\% T^{(r)}$.

Como se mencionó en la Sección 5.5.2.1, en las series de tiempo observadas existen oscilaciones de período cercano a las 6 [hrs], las cuales estarían siendo excitadas por efectos no lineales. Para estudiar su presencia en la respuesta forzada y su interacción con el viento, se incluyeron modos de período comprendido entre 4.5 [hrs] y 7 [hrs] en el ajuste.

La minimización se realizó con la función *fmincon* del paquete de optimización de Matlab®. Los modos considerados y los parámetros obtenidos para las simulaciones de febrero y marzo se presentan en las Tablas 5.3 y 5.4, considerando las series de tiempo completas para la optimización. En las Figuras 5.23 y 5.24, se presentan las simulaciones de la evolución temporal de la interfaz de densidad en TC1 y TC2 para febrero y marzo 2009, realizadas con los parámetros optimizados, mientras que las Figuras 5.25 y 5.26 contienen la evolución de las

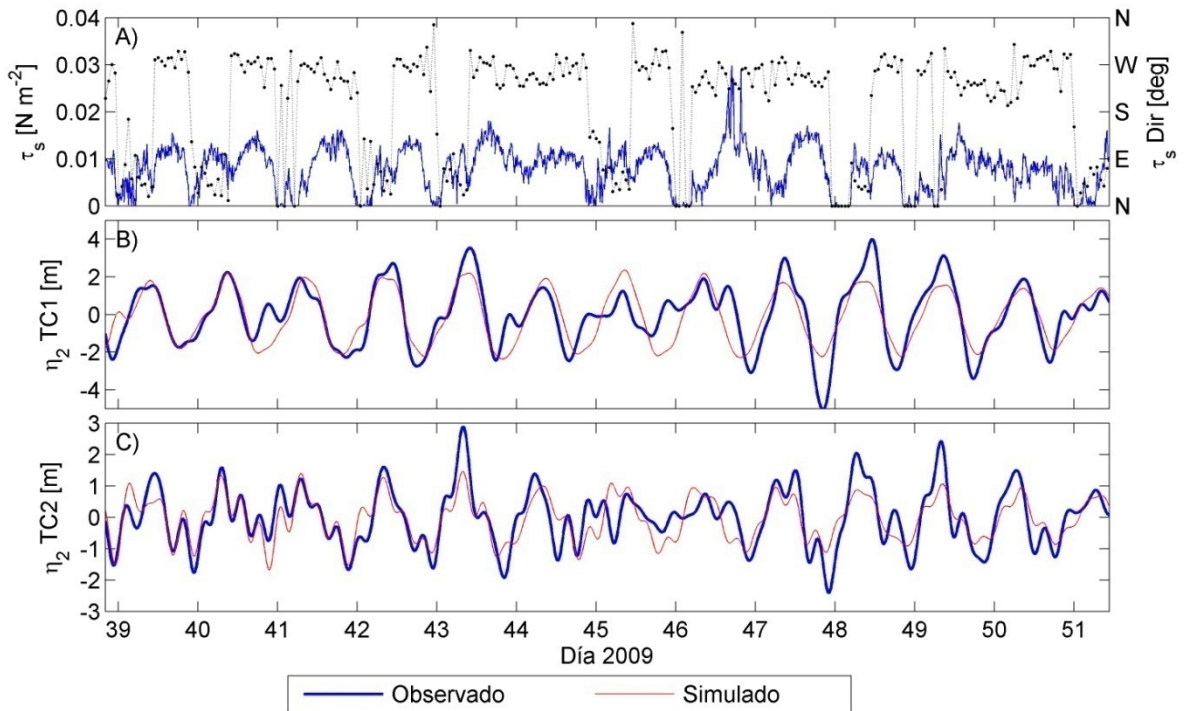


Figura 5.23: A) Dirección (puntos negros) y magnitud (línea azul) del esfuerzo de corte del viento sobre la superficie del lago. B) y C) Desplazamientos de la termoclina con respecto a la posición de equilibrio para TC1 y TC2, febrero 2009, considerando parámetros optimizados.

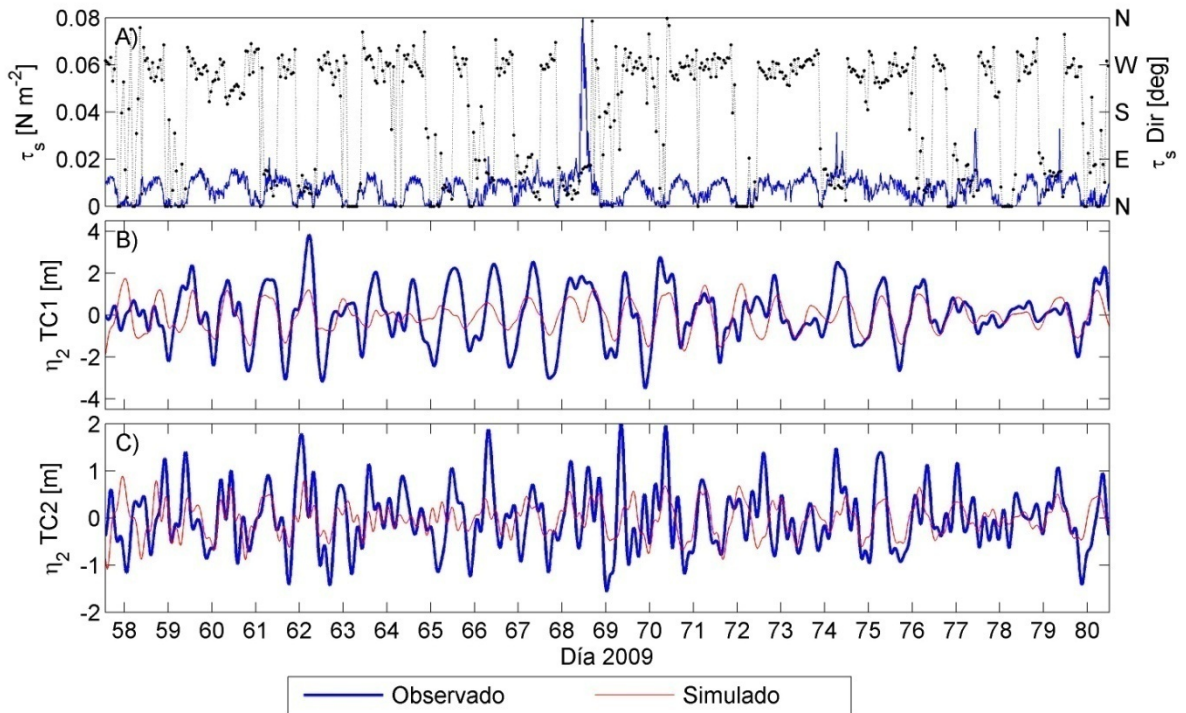


Figura 5.24: A) Dirección (puntos negros) y magnitud (línea azul) del esfuerzo de corte del viento sobre la superficie del lago. B) y C) Desplazamientos de la termoclina con respecto a la posición de equilibrio para TC1 y TC2, marzo 2009, considerando parámetros optimizados.

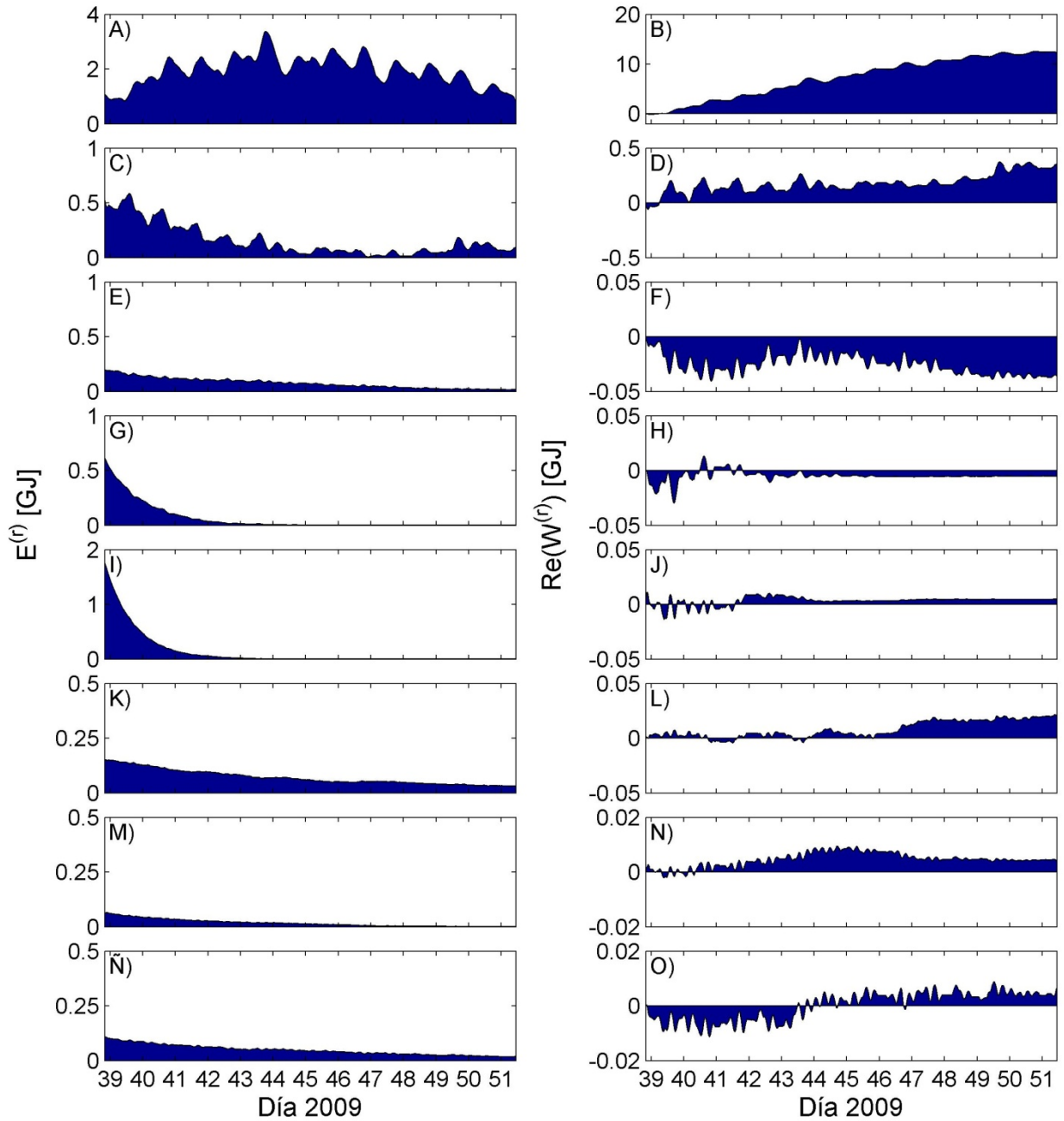


Figura 5.25: Evolución de las energías modales ajustadas (columna izquierda). Evolución del trabajo del viento sobre cada modo ajustado (columna derecha), para febrero 2009. Cada fila corresponde a uno de los modos ajustados (modos 1, 3, 6, 7, 8, 9, 10 y 12, respectivamente, como se indica en la Tabla 5.3).

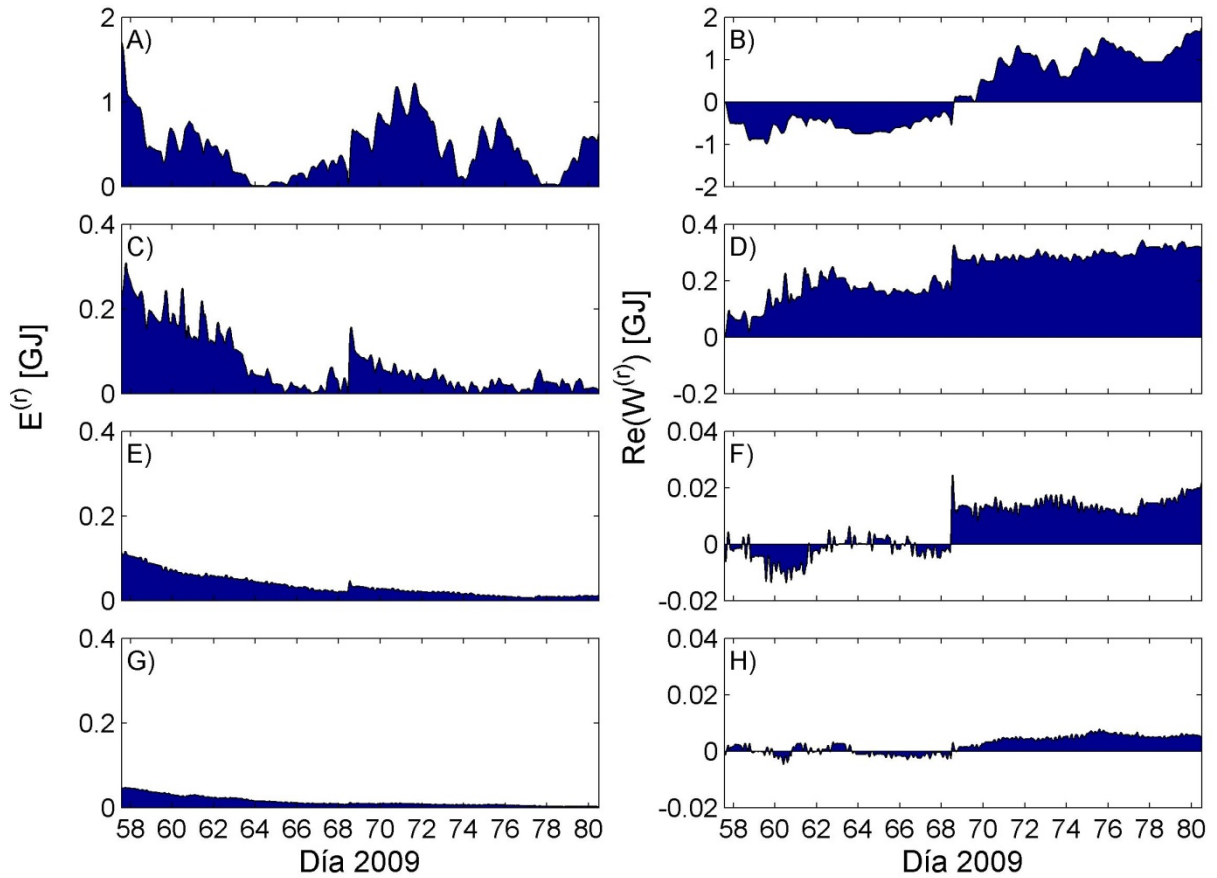


Figura 5.26: Evolución de las energías modales ajustadas (columna izquierda). Evolución del trabajo del viento sobre cada modo ajustado (columna derecha), para marzo 2009. Cada fila corresponde a uno de los modos ajustados (modos 1, 3, 7 y 8, respectivamente, como se indica en la Tabla 5.4).

Tabla 5.3: Modos ajustados y parámetros obtenidos de la optimización para febrero 2009

Modo	Panel	Clasificación	$Re(\tilde{\alpha}_0^{(r)})$	$Im(\tilde{\alpha}_0^{(r)})$	$2\pi\gamma^{(r)-1}$	$2\pi\hat{\omega}^{(r)-1}$	$2\pi\omega^{(r)-1}$	Diferencia
			[-]	[-]	[días]	[hrs]	[hrs]	
1	A)	K1	-1.12	-15.89	24.33	23.37	21.73	7.56
3	C)	P3.1	-1.32	-9.96	30.58	11.90	9.65	23.32
6	F)	P4.2	-0.46	-6.38	—	7.67	6.26	22.50
7	G)	P5.1	2.87	10.64	14.42	8.81	6.09	44.70
8	H)	P5.2	2.30	18.87	10.98	6.05	5.24	15.43
9	I)	P6.1	5.00	-2.30	—	5.72	5.10	12.19
10	-	P6.2	-2.20	2.75	40.60	5.57	4.86	14.55
12	-	P6.3	0.19	-4.65	—	6.24	4.53	37.66

Tabla 5.4: Modos ajustados y parámetros obtenidos de la optimización para marzo 2009

Modo	Panel	Clasificación	$Re(\tilde{\alpha}_0^{(r)})$	$Im(\tilde{\alpha}_0^{(r)})$	$2\pi\gamma^{(r)-1}$	$2\pi\hat{\omega}^{(r)-1}$	$2\pi\omega^{(r)-1}$	Diferencia
			[-]	[-]	[días]	[hrs]	[hrs]	[%]
1	A)	K1	-0.91	-20.68	45.07	19.81	20.44	3.06
3	C)	P3.1	4.89	4.88	36.40	9.09	9.23	1.51
7	G)	P4.2	4.50	2.08	–	5.80	7.56	23.22
8	H)	P5.1	2.59	1.88	–	5.03	5.97	15.81

energías modales y del trabajo realizado por el viento sobre cada modo ajustado. Es importante señalar que los resultados entregados por la optimización dependen fuertemente de la cantidad de modos considerados en el análisis, por lo que los resultados presentados corresponden al mejor ajuste encontrado.

Del ajuste realizado se observa que efectivamente existen ondas de período entre 5 y 7 [hrs] presentes en las series de tiempo medidas en terreno, las cuales son más notorias en TC2 y no estarían siendo excitadas por el viento, como se concluye a partir de las simulaciones realizadas para amplitud inicial nula y de la evolución temporal de las energías modales. Para simular estas ondas, lo que hace el ajuste es asignar una amplitud inicial distinta de cero y luego estimar una tasa de decaimiento lo suficientemente baja para que las ondas estén presentes en toda la simulación. Por ejemplo, la suma de las frecuencias de las ondas K1 y P3.1 del mes de febrero tiene un período asociado $T_{KP} = 7.89$ [hrs], que estaría explicando la excitación del modo 6 con un período optimizado de $T^{(6)} = 7.67$ [hrs].

Otro aspecto importante es que para ambos períodos, la optimización entrega tasas de disipación de 80 [días] (indicados con un guión en las Tablas 5.3 y 5.4) para algunos modos, lo que parece poco razonable, considerando que este valor es el límite inferior impuesto para los $\gamma^{(r)}$ en el ajuste. La explicación de estos resultados estaría en que el análisis modal implementado sólo considera el viento como forzante de los modos, entonces el modelo no puede capturar la dinámica no lineal entre ondas y trata de generar esta interacción como modos excitados numéricamente, los cuales estarían en una especie de equilibrio forzado, pues sus tasas de disipación serían muy bajas. Esto se observa claramente en las Figuras 5.25 y 5.26, donde los modos de período entre 5 y 7 [hrs] tienen una energía inicial, producto de la excitación numérica, la cual decae en el tiempo a una baja tasa.

Al comparar los valores de las Tablas 5.3 y 5.4, se infiere que la disipación de energía se hace más importante a medida que el período de las ondas se acerca al período forzante. En el mes de febrero se aprecia que la modulación del viento sobre la onda Kelvin (K1) tiene una frecuencia mucho menor a la observada en la simulación para marzo. Además, el balance entre el input de momentum de parte del viento y la disipación de energía para la onda K1 es mucho más notoria en febrero, pues la tasa de disipación es casi la mitad que la tasa estimada para el período de marzo.

En el ajuste queda de manifiesto nuevamente que la onda Kelvin K1 es la que contiene la mayor cantidad de energía entregada por el viento. En la Figura 5.27 se presentan las energías modales promedio normalizadas por la energía total (equivalente a la suma de las energías modales para cada instante de tiempo), en formato de gráfico de cajones, donde las líneas centrales corresponden a la mediana del conjunto de datos, los límites inferior y superior de cada cajón

corresponden a los percentiles 25% y 75%, respectivamente, y las líneas punteadas muestran los mínimos y máximos de cada serie de tiempo. Como se observa en esta Figura, la onda Kelvin K1 concentra cerca del 90% de la energía total de la respuesta forzada de la termoclina en febrero, y cerca del 83% en marzo, mientras que cada uno de los modos restantes, por sí solo, no alcanzan a representar el 10% de la energía total. Estos pseudo-espectros muestran una gran variabilidad, debido a que la energía de la onda Kelvin en ciertos instantes es baja, producto de la modulación que ejerce el viento, mientras que los otros modos se disipan lentamente y están presentes en todo el tiempo de simulación, por lo que presentan energías mayores a la de la Kelvin. Aun así, es posible afirmar que la dinámica del lago está caracterizada fuertemente por la onda Kelvin, y su mayor energía en comparación al resto de los modos estaría explicada por la orientación del campo de vientos sobre el lago, la distribución de velocidades promedio en la capa superficial para la onda K1 y la existencia de resonancia con el viento.

En síntesis, las simulaciones numéricas considerando amplitud inicial nula sin disipación de energía y las realizadas con los parámetros ajustados a las series de tiempo observadas, dan cuenta de la existencia de resonancia entre el viento diario y la onda Kelvin, la cual sería mucho más importante en febrero. En la siguiente Sección se analiza con mayor profundidad este fenómeno.

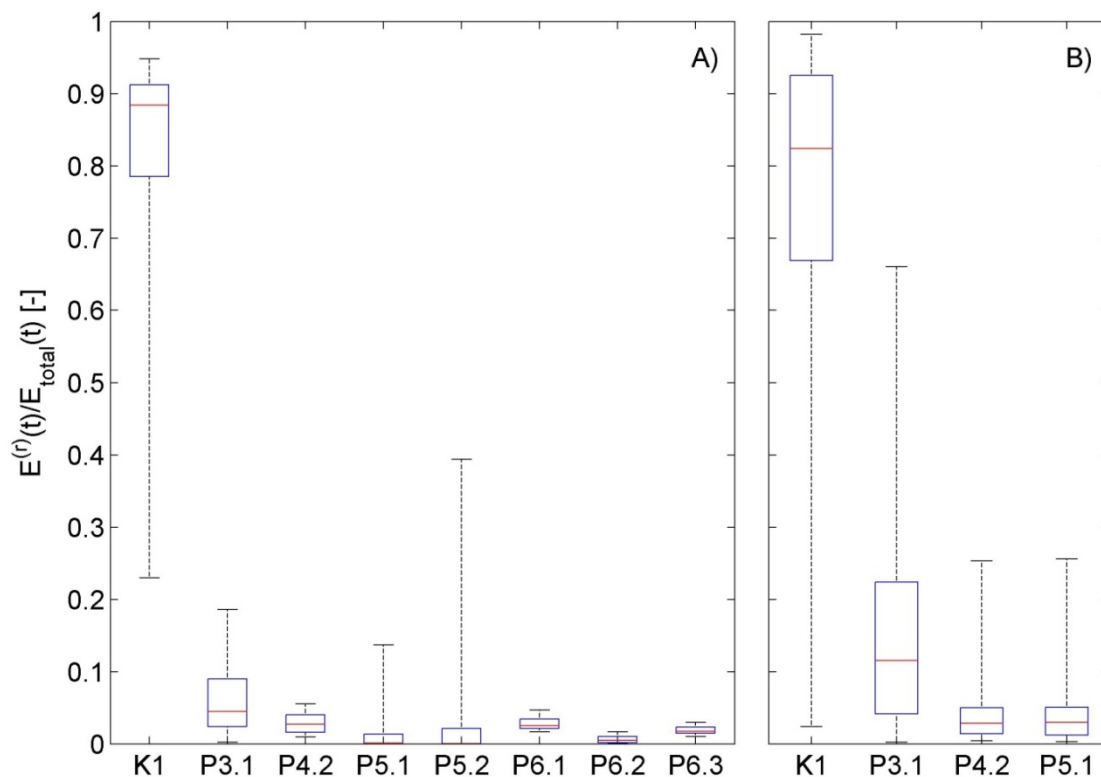


Figura 5.27: Energías modales promedio normalizadas por la energía modal total para A) febrero y B) marzo 2009.

5.6. Análisis de resonancia

Para estudiar la interacción resonante entre el viento y la onda Kelvin fundamental en el lago Villarrica, se plantearon tres análisis:

1. Cálculo de la densidad espectral de potencia de la serie de tiempo del viento, para determinar las frecuencias dominantes.
2. Solución teórica de la ecuación para las amplitudes modales, considerando forzantes idealizados. Se analizaron 4 casos: viento constante y viento periódico, sin y con disipación de energía.
3. Experiencias de laboratorio para estudiar el fenómeno de resonancia entre la onda Kelvin fundamental de la instalación experimental y un forzante periódico.

5.6.1. Componentes principales del viento

En la Figura 5.28 se presenta la densidad espectral de potencia calculada para las series de tiempo de intensidad de viento, para los períodos simulados (febrero y marzo) y para toda la estadística de intensidad de viento disponible. En los tres espectros presentados se ha descontado la media de las series de tiempo para obtener la energía asociada a las fluctuaciones de velocidad. Como se presumía de las Figuras 5.3 y 5.4, el viento tiene una marcada componente de 24 [hrs], seguida de una oscilación de período 12 [hrs]. Existe también una marcada oscilación semanal (168 [hrs]), la cual es más notoria en la serie completa debido a su extensión.

La razón entre la frecuencia de la onda Kelvin (K1) y la periodicidad del viento es 0.90 para la simulación de febrero y 0.85 para la de marzo. Con estos valores, es posible que exista resonancia de acuerdo a los resultados de Wake et al. (2007), quienes observaron este fenómeno para razones de frecuencias cercanas a 0.93 en el caso sin rotación.

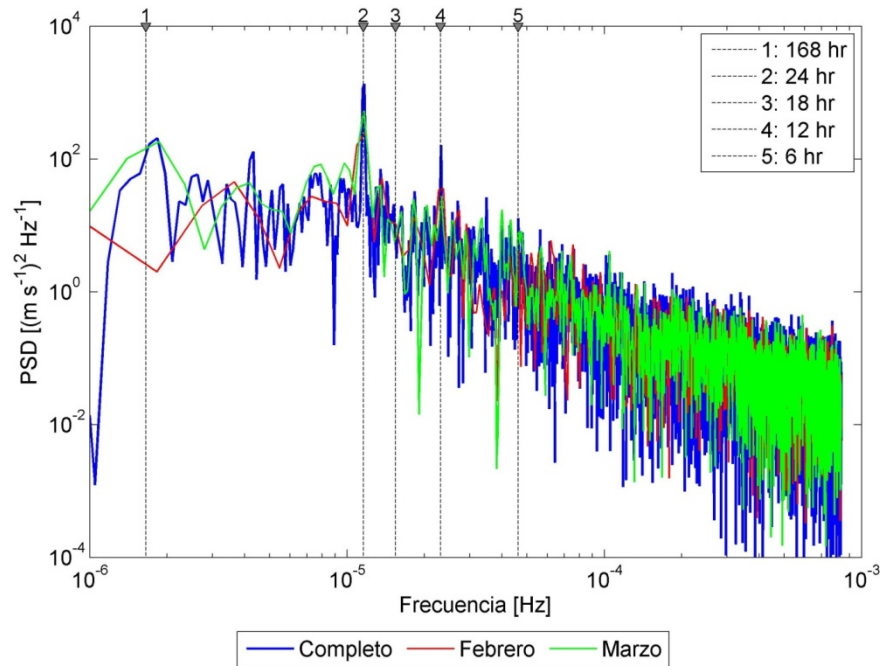


Figura 5.28: Densidad espectral de potencia de las fluctuaciones de intensidad de viento con respecto al valor medio, para los períodos estudiados y para toda la estadística disponible.

5.6.2. Solución teórica de la ecuación para las amplitudes modales

La ecuación para las amplitudes modales sería fácilmente integrable si no fuera por el carácter aleatorio que presenta el forzante externo, en este caso el viento. Para explorar las soluciones de esta ecuación, el forzante puede modelarse como un viento constante o como un viento periódico de frecuencia conocida.

Cabe recordar que las ecuaciones para las amplitudes modales sin y con disipación, y para las energías modales son, respectivamente:

$$\tilde{e}^{(r)} \partial_t \tilde{a}^{(r)}(t) = i \omega^{(r)} \tilde{e}^{(r)} \tilde{a}^{(r)}(t) + \tilde{f}^{(r)}(t) \quad (5.19)$$

$$\tilde{e}^{(r)} \partial_t \tilde{a}^{(r)}(t) = (i \hat{\omega}^{(r)} - \gamma^{(r)}) \tilde{e}^{(r)} \tilde{a}^{(r)}(t) + \tilde{f}^{(r)}(t) \quad (5.20)$$

$$E^{(r)}(t) = \frac{1}{2} \tilde{e}^{(r)} |\tilde{a}^{(r)}(t)|^2 \quad (5.21)$$

A continuación se analiza cada uno de los casos propuestos, en los cuales se han resuelto las ecuaciones diferenciales utilizando la transformada de Laplace. Por simplicidad, en todos los casos se ha considerado $\tilde{a}_0^{(r)} = 0$.

5.6.2.1. Viento constante sin disipación

En este caso el viento genera un esfuerzo de corte constante sobre la superficie en la dirección Este - Oeste, el cual puede escribirse como $\vec{\tau}_s = \tau_0$, constante, y que depende de la intensidad del viento. El forzante modal queda definido entonces como:

$$\tilde{f}^{(r)}(t) = \langle \tilde{v}_1^{(r)}(\vec{x}), \vec{\tau}_s(\vec{x}, t) \rangle = \langle \tilde{v}_1^{(r)}(\vec{x}), \tau_0 \rangle \quad (5.22)$$

Luego, la evolución de las amplitudes modales en el tiempo está definida por la siguiente expresión:

$$\tilde{a}^{(r)}(t) = i \tilde{C}^{(r)} [1 - e^{i\omega^{(r)}t}] \quad (5.23)$$

donde $\tilde{C}^{(r)} = \frac{\tilde{f}^{(r)}}{\tilde{e}^{(r)}\omega^{(r)}} = \frac{\langle \tilde{v}_1^{(r)}(\vec{x}), \tau_0 \rangle}{\tilde{e}^{(r)}\omega^{(r)}}$ es un valor adimensional, en este caso constante, que depende de la intensidad de viento. Las energías modales se obtienen de la ec (5.21):

$$E^{(r)}(t) = \tilde{e}^{(r)} |\tilde{C}^{(r)}|^2 (1 - \cos(\omega^{(r)}t)) \quad (5.24)$$

Como interesa estudiar el comportamiento de la energía en el tiempo, se normalizó la energía modal por $\tilde{e}^{(r)}|\tilde{C}^{(r)}|^2$ para obtener una energía adimensional $E^{(r)*}(t)$:

$$E^{(r)*}(t) = 1 - \cos(\omega^{(r)}t) \quad (5.25)$$

A partir de la ec (2.34) se calcularon los desplazamientos normalizados de la interfaz de densidad en TC1, donde a cada modo se le ha sumado su complejo conjugado para obtener variables reales:

$$\eta_2^{(r)*} = \frac{\eta_2^{(r)}}{|\tilde{C}^{(r)}|} \quad (5.26)$$

En la Figura 5.29 se muestran los desplazamientos normalizados y la energía adimensional, considerando la frecuencia angular de la onda K1 para el mes de febrero. Se observa claramente que el efecto de un viento constante es producir una inclinación de la interfaz de densidad, sobre la cual se producen las oscilaciones de la onda Kelvin (las oscilaciones dejan de producirse en torno a cero, sino que ahora el nivel medio se ubica más abajo producto de la inclinación de la termoclina). Por otro lado, la energía presenta ciclos marcados por la frecuencia modal de K1.

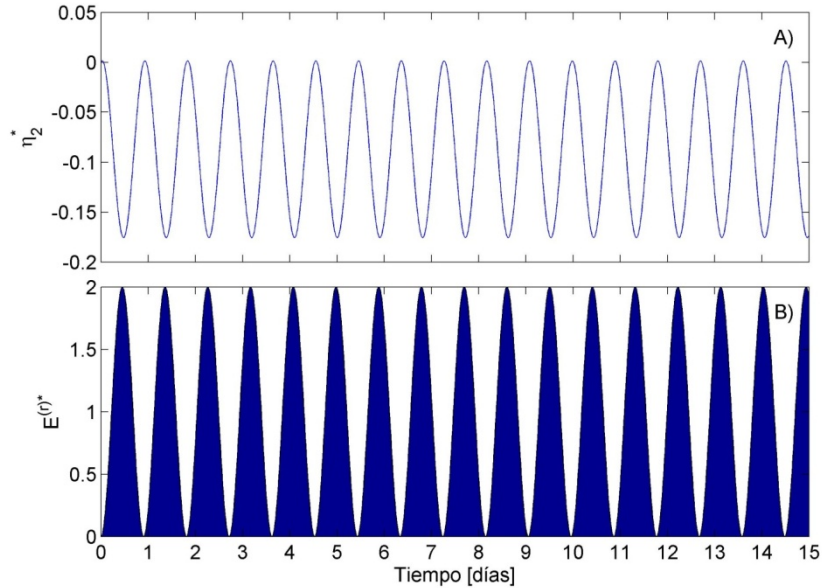


Figura 5.29: A) Desplazamientos normalizados de la termoclina y B) energía modal adimensional para un viento constante sin disipación.

5.6.2.2. Viento constante con disipación

En este caso, la evolución temporal de las amplitudes modales está descrita por:

$$\tilde{a}^{(r)}(t) = \frac{i\tilde{C}^{(r)}\omega^{(r)}}{\omega^{(r)} + i\gamma^{(r)}} \left[1 - e^{(i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)})t} \right] \quad (5.27)$$

Mientras que las energías modales adimensionales están definidas por:

$$E^{(r)*}(t) = \frac{1}{2} \frac{\omega^{(r)2}}{\omega^{(r)2} + \gamma^{(r)2}} \left(1 - e^{(i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)})t}\right) \left(1 - e^{-(i\omega^{(r)} + \gamma^{(r)})t}\right) \quad (5.28)$$

Es importante recordar que las energías modales adimensionales son valores reales, pero se presentan en notación compleja sólo para evitar expresiones demasiado largas. En la Figura 5.30 se presentan los desplazamientos normalizados de la interfaz de densidad en TC1 y la energía adimensional de la onda K1, considerando la frecuencia angular del mes de febrero y una tasa de decaimiento $\gamma^{(r)} = 3 \cdot 10^{-6}$ [rad s⁻¹] ($T_\gamma = 24.3$ [días]). Se observa claramente que las amplitudes, tanto de los desplazamientos como de la energía, decaen hasta que el sistema alcanza un estado de equilibrio excitado, el cual es distinto de cero por el aporte continuo de momentum por parte del viento constante, el cual es controlado por los mecanismos de disipación de energía.

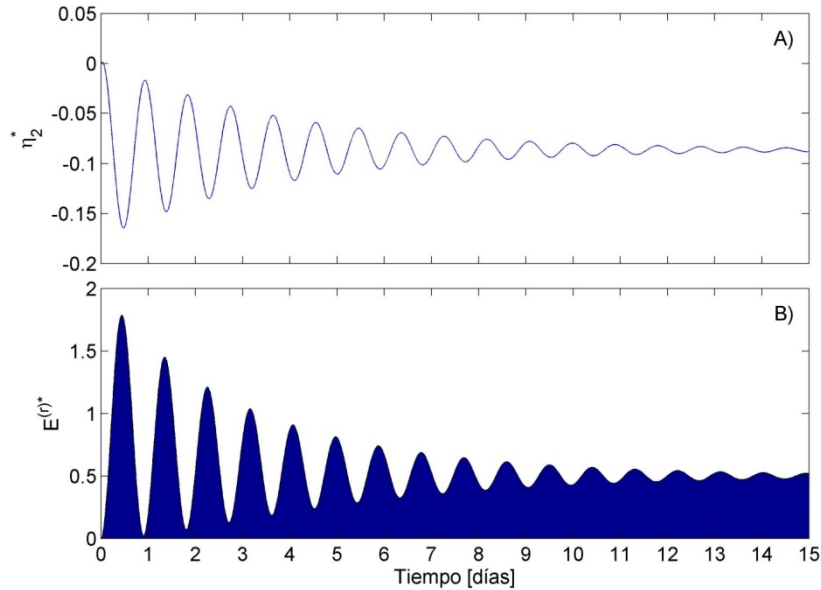


Figura 5.30: A) Desplazamientos adimensionales de la termoclina y B) energía modal adimensional para un viento constante con disipación.

5.6.2.3. Viento periódico sin disipación

Considerando un viento sinusoidal sobre la superficie del lago que actúa en la dirección Este – Oeste, el esfuerzo de corte puede escribirse de la forma $\vec{\tau}_s = \tau_0 \sin(\omega_f t)$, donde τ_0 es la amplitud y ω_f es la frecuencia del forzante. Aplicando el mismo procedimiento descrito para los casos anteriores, las amplitudes modales están dadas por:

$$\tilde{a}^{(r)}(t) = \tilde{C}^{(r)} \omega^{(r)} \left[\frac{\omega_f e^{i\omega^{(r)}t}}{\omega_f^2 - \omega^{(r)2}} - \frac{e^{i\omega_f t}}{2(\omega_f - \omega^{(r)})} - \frac{e^{-i\omega_f t}}{2(\omega_f + \omega^{(r)})} \right] \quad (5.29)$$

Resultado a partir del cual se obtiene la energía modal adimensional usando la ec (5.21), la cual no se presenta por motivos de espacio, pero está definida por el módulo de las amplitudes modales. En la Figura 5.31 se presentan los desplazamientos adimensionales de la termoclina en

TC1 y la energía modal adimensional para la onda Kelvin K1, para distintas frecuencias modales y ω_f equivalente a $T_f = 2\pi\omega_f^{-1} = 24$ [hrs]. Se observa claramente que a medida que la frecuencia modal se acerca a la frecuencia forzante, las amplitudes de las variables graficadas crecen desproporcionadamente y aparece una modulación de frecuencia característica $\omega_f - \omega^{(r)}$.

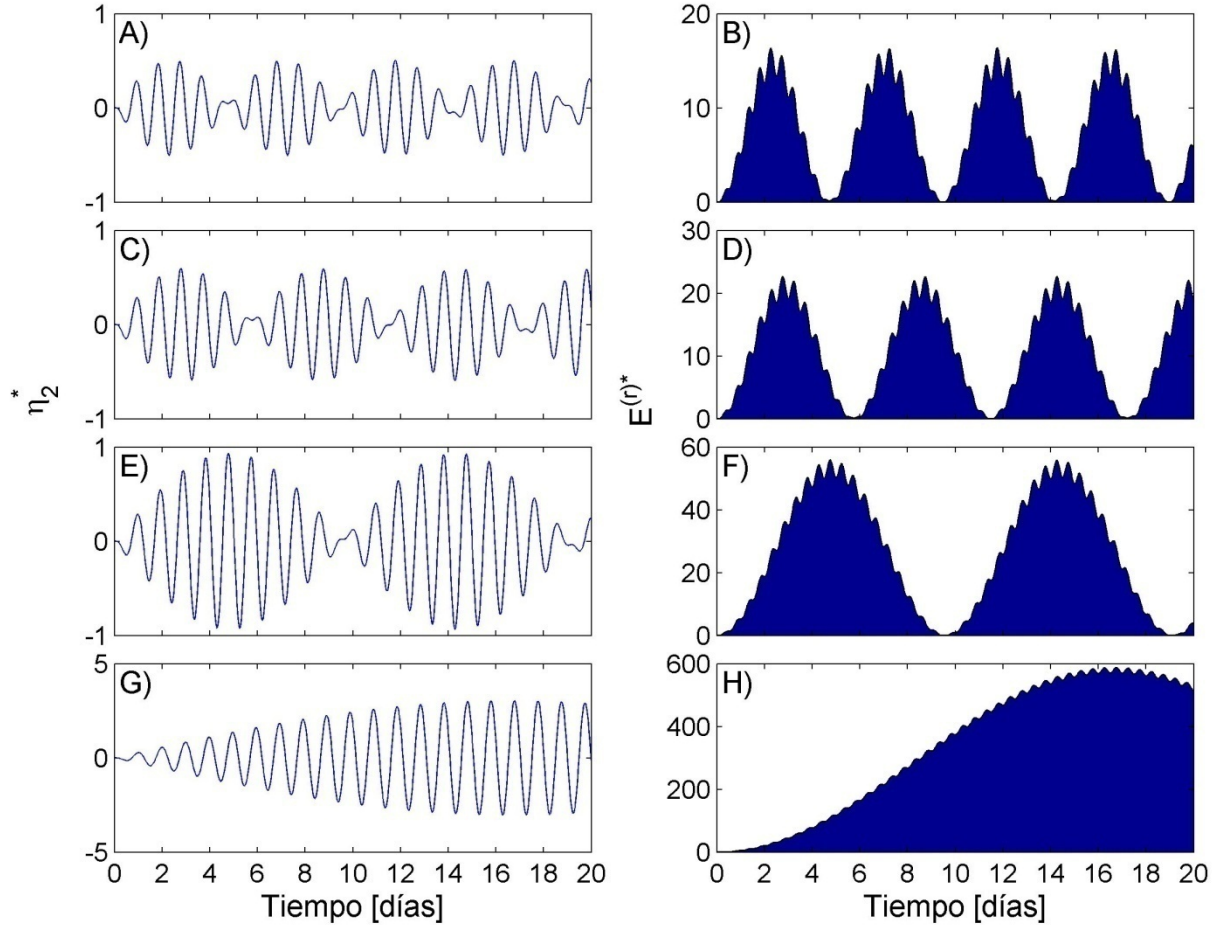


Figura 5.31: Serie de tiempo del desplazamiento normalizado de la termoclina en TC1 (columna izquierda), energía adimensional de la onda Kelvin (columna derecha), calculadas para $\omega^{(r)}$ asociados a $T^{(r)} = 19.81$ [hrs], 20.44 [hrs], 21.73 [hrs] y 23.30 [hrs] (primera, segunda, tercera y cuarta fila, respectivamente), considerando viento periódico sin disipación.

5.6.2.4. Viento periódico con disipación

En este caso, la evolución temporal de las amplitudes modales se calcula como:

$$\tilde{a}^{(r)}(t) = \tilde{c}^{(r)} \omega^{(r)} \left[\frac{\omega_f e^{(i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)})t}}{\omega_f^2 - \omega^{(r)2} - 2i\omega^{(r)}\gamma^{(r)} + \gamma^{(r)2}} - \frac{e^{i\omega_f t}}{2(\omega_f - \omega^{(r)} - i\gamma^{(r)})} - \frac{e^{-i\omega_f t}}{2(\omega_f + \omega^{(r)} + i\gamma^{(r)})} \right] \quad (5.30)$$

Las energías modales se obtienen de la ec (5.21) (no se presentan por razones de espacio). Los desplazamientos adimensionales de la termoclina en TC1 y la energía modal adimensional para la onda Kelvin K1 se muestran en la Figura 5.32, para las mismas frecuencias modales y ω_f del caso anterior, considerando una tasa de decaimiento $\gamma^{(r)} = 3 \cdot 10^{-6}$ [rad s⁻¹] ($T_\gamma = 24.3$ [días]). De los gráficos, se confirma que la disipación de energía es la encargada de mantener en equilibrio al sistema, impidiendo el crecimiento desmedido de las amplitudes. Se alcanza a observar la modulación del viento sobre las amplitudes, aunque ésta desaparece una vez que se alcanza el equilibrio. De acá se desprende que mientras mayor sea la tasa de decaimiento, menor es el tiempo en que se alcanza el estado de equilibrio excitado.

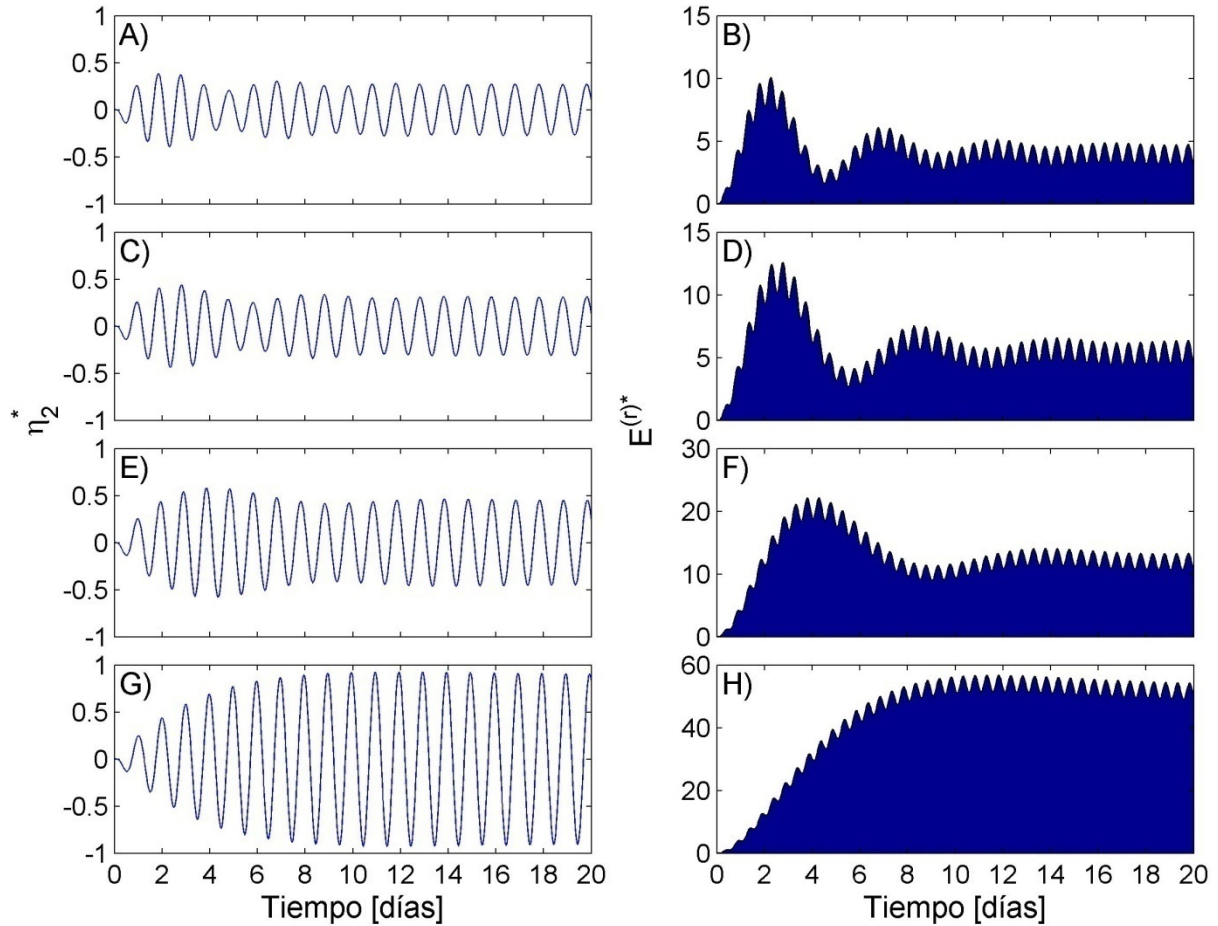


Figura 5.32: Serie de tiempo del desplazamiento normalizado de la termoclina en TC1 (columna izquierda), energía adimensional de la onda Kelvin (columna derecha), calculadas para $\omega^{(r)}$ asociados a $T^{(r)} = 19.81$ [hrs], 20.44 [hrs], 21.73 [hrs] y 23.30 [hrs] (primera, segunda, tercera y cuarta fila, respectivamente), considerando viento periódico con disipación.

5.6.3. Análisis experimental

Para analizar a nivel experimental el fenómeno de resonancia gatillado por el acople entre el período de la onda Kelvin fundamental y el período principal del viento, para un sistema estratificado en dos capas y afectado por la rotación terrestre, se desarrollaron una serie de experimentos en el laboratorio del Departamento de Ingeniería Civil de la Universidad de Dundee, Escocia. Los objetivos principales de la visita fueron: 1) aplicar el modelo teórico/numérico desarrollado en este trabajo de tesis para determinar los modos normales de oscilación de la instalación experimental y 2) considerando la teoría de análisis dimensional, diseñar y ejecutar un set de experimentos para estudiar la dinámica de ondas internas y su interacción resonante con un forzante periódico.

De acuerdo a la teoría de análisis dimensional, para el correcto diseño de los experimentos, se calcularon los números adimensionales que rigen la dinámica de las ondas internas en el lago Villarrica, los cuales son: la razón de aspecto, el número de Burger y el número de Wedderburn.

La razón de aspecto se define como h_1/H , donde h_1 es el espesor de la capa superficial y H es la altura total de agua, y tiene directa incidencia en la celeridad de las ondas internas, según la ec (2.4). Además, cuando este parámetro es distinto de 0.5, las ondas internas están afectadas por efectos no lineales (Horn et al., 2001, de la Fuente et al., 2008).

El número de Burger (ec (2.12)), llamado también número de Kelvin inverso, se define como:

$$Ke^{-1} = \frac{R_{rad}}{B} \quad (5.31)$$

donde R_{rad} es el radio de deformación interna de Rossby y B es la dimensión lateral del cuerpo de agua.

El efecto del viento se parametriza mediante el número de Wedderburn, definido según la ec (2.5). De acuerdo a los datos observados en el lago Villarrica, los experimentos se realizaron con altos números de Wedderburn, para simular las bajas velocidades del viento registradas en terreno y minimizar la mezcla dentro del sistema.

5.6.3.1. Instalación experimental y adquisición de datos

La instalación experimental utilizada consiste en un estanque de Perspex transparente, abierto en su base, de 1.84 [m] de largo, 0.364 [m] de ancho y 0.293 [m] de alto, contenido en un estanque más grande de 2.14 [m] de largo, 0.470 [m] de ancho y 0.293 [m] de alto (ver Figura 5.33). Una cinta sin fin pasa por la base del estanque para simular el efecto del viento, la cual es operada mediante un motor y un variador de frecuencia ubicados en el extremo de “viento abajo” del estanque. La operación de la cinta genera turbulencia en ambos extremos del estanque, específicamente en las cercanías de los rodillos que sujetan la cinta, la cual induce mezcla de las capas y la formación de un jet vertical en el extremo de “viento abajo” del estanque, asociados sólo a la instalación experimental. Para atenuar este efecto indeseado se colocan esponjas en ambos extremos, por lo que el volumen útil dentro del estanque se reduce a $L/H = 5$. Todo este sistema va montado sobre una mesa rotatoria, controlada mediante un variador de frecuencia ubicado en una de las paredes del laboratorio, para simular la rotación terrestre (Rizk, 2010).

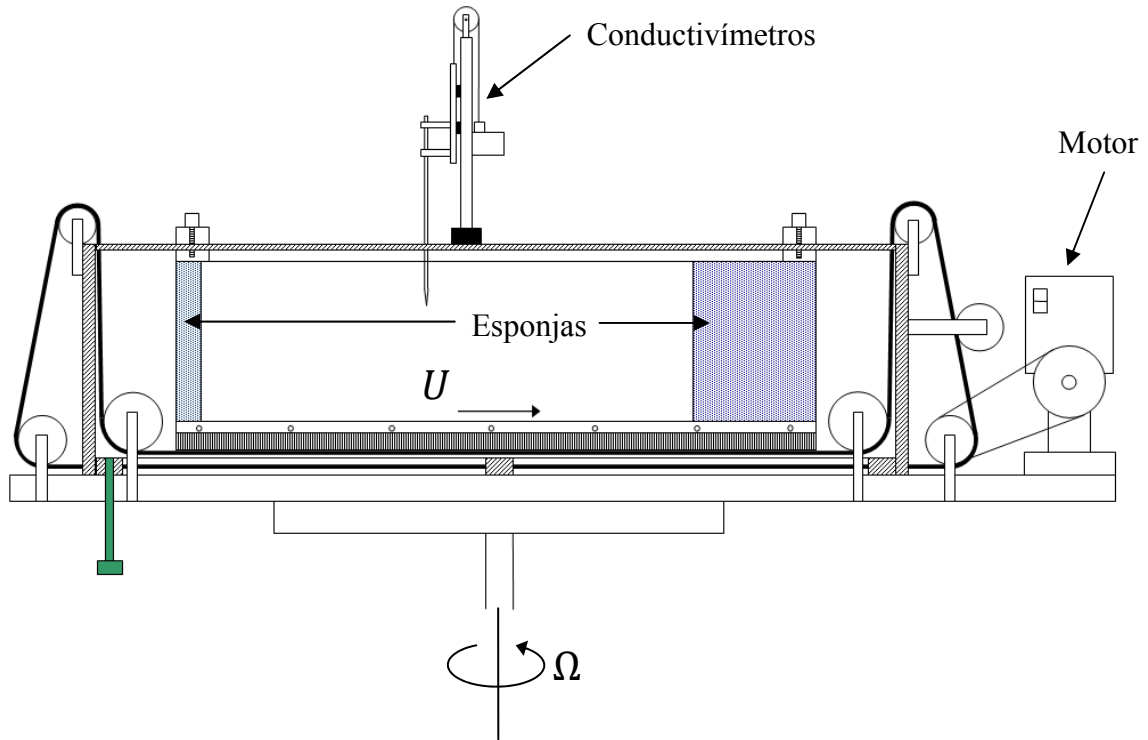


Figura 5.33: Esquema instalación experimental
(Fuente: Rizk, 2010)

La estratificación en dos capas dentro del estanque se logró agregando agua potable hasta alcanzar el espesor del epilimnion, y luego añadiendo agua salada lentamente mediante una válvula dispuesta en el fondo del estanque. En todos los experimentos se respetó la razón de aspecto del lago Villarrica, igual a 0.15.

Para relacionar la velocidad de la cinta con la velocidad de corte ejercida por ésta sobre el flujo, se utilizó la relación obtenida por Niño et al. (2003):

$$\frac{U}{u^*} = 20 \quad (5.32)$$

donde U es la velocidad de la cinta y u^* es la velocidad de corte ejercida por ésta.

Para capturar la dinámica de las ondas internas se instalaron 4 conductivímetros en la sección transversal: a (1) 1.1 [cm], (2) 4.4 [cm], (3) 7.6 [cm] y (4) 11.0 [cm], respectivamente, medidos desde el borde del estanque. La sección de medición se ubicó a 77 [cm] del extremo de “viento arriba” y 4.5 [cm] del fondo, correspondiente al espesor de la capa profunda en todos los experimentos. Los datos de conductividad fueron tomados durante 30 [min] a una tasa de 15 [Hz] en todos los experimentos.

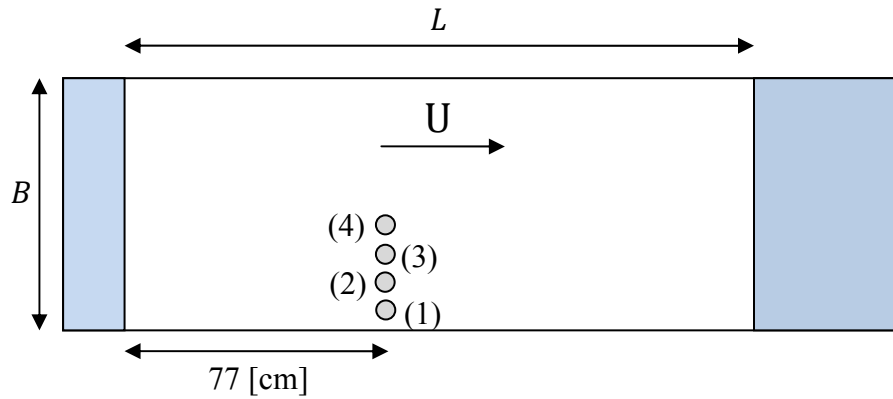


Figura 5.34: Esquema en planta ubicación conductivímetros

5.6.3.2. Set de experimentos

En una primera etapa de la visita a la Universidad de Dundee, se procedió a la calibración de los sensores de conductividad y de la velocidad de la cinta transportadora en función de la frecuencia del motor. Luego se desarrollaron una serie de experimentos sin rotación, para verificar el correcto funcionamiento de los sensores y la adquisición de datos, y para evaluar la mezcla dentro del estanque considerando distintas velocidades de la cinta. En base a la información obtenida, se procedió al diseño y ejecución de 10 experimentos, cuyos parámetros se presentan en la Tabla 5.5, donde T_K corresponde al período de la onda Kelvin fundamental. En todos los experimentos, el sistema fue forzado mediante una onda cuadrada de período T_f , donde la cinta se accionaba durante $T_f/2$ a baja velocidad, constante, para obtener un número de Wedderburn alto y de esta forma, minimizar la mezcla dentro del sistema; y se apagaba durante $T_f/2$.

En el diseño de los experimentos, se consideraron los siguientes criterios para estudiar la influencia de distintos parámetros en el fenómeno de resonancia:

- Variación de la frecuencia forzante (experimentos 1, 2 y 3; 4 y 6; 5 y 7 de la Tabla 5.5), acercándola al período de la onda Kelvin fundamental, para estudiar la interacción resonante entre el forzante y esta onda, dejando el resto de los parámetros fijos. Cada conjunto de experimentos corresponde a distintos números de Kelvin inverso.

Tabla 5.5: Parámetros set de experimentos realizados

Experimento	h_1 [m]	h_2 [m]	ρ_1 [kg m ⁻³]	ρ_2 [kg m ⁻³]	W	Ke^{-1}	T_K [s]	T_f/T_K
1	0.248	0.045	999	1020	156.40	0.47	33.87	0.8
2	0.248	0.045	999	1020	156.40	0.47	33.87	0.9
3	0.248	0.045	999	1020	156.40	0.47	33.87	1.0
4	0.248	0.045	999	1020	156.40	0.40	34.04	0.9
5	0.248	0.045	999	1020	156.40	0.41	34.04	1.0
6	0.248	0.045	999	1020	156.40	0.30	34.42	0.9
7	0.248	0.045	999	1020	156.40	0.30	34.42	1.0
8	0.248	0.045	999	1016	160.24	0.30	38.23	1.0
9	0.248	0.045	999	1012	160.05	0.30	43.61	1.0
10	0.248	0.045	999	1012	160.05	0.30	43.61	0.7

- Variación de la velocidad angular de la mesa rotatoria (experimentos 2, 4 y 6; 3, 5 y 7 de la Tabla 5.5), para estudiar el efecto de la rotación ambiente. Cada conjunto de experimentos se realizó para distintos periodos forzantes, cercanos a la condición resonante.
- Variación de la estratificación (experimentos 7, 8 y 9 de la Tabla 5.5), para determinar la existencia de resonancia para ondas Kelvin de distintos periodos, los cuales están definidos por la diferencia de densidad entre capas.
- Variación de la estratificación y el período forzante (experimentos 9 y 10 de la Tabla 5.5), para verificar la existencia de resonancia variando ambos parámetros, en comparación a los sets de experimentos descritos anteriormente.

5.6.3.3. Resultados experimentales

Una de las principales diferencias entre la instalación experimental y la situación observada en el lago Villarrica corresponde a la radiación solar, responsable de la estratificación térmica del lago. En el laboratorio, el perfil vertical de densidad es logrado mediante la adición de sal a la capa profunda, y la mezcla inducida por la acción de la cinta es irreversible, mientras que la radiación solar es un forzante periódico que actúa día a día sobre el lago. A modo de ejemplo, en la Figura 5.35 se presenta el perfil vertical promedio de densidad en la zona de la pycnoclina para el experimento 2, el cual se obtuvo a partir de los perfiles medidos con los 4 sensores antes y después de la acción de la cinta. Las barras muestran la variabilidad de los perfiles medidos por los sensores. Los perfiles verticales promedio de densidad fueron utilizados para transformar las mediciones de densidad a elevación de la interfaz para cada uno de los experimentos.

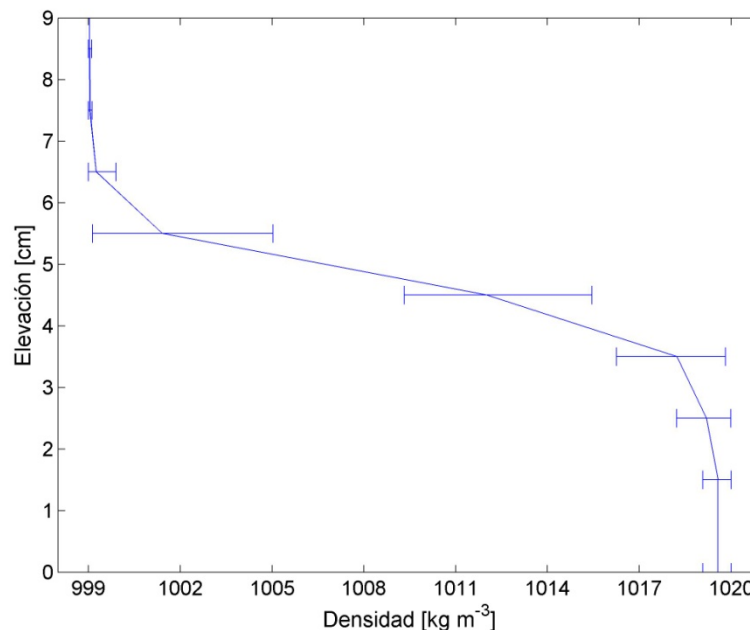


Figura 5.35: Perfil vertical promedio de densidad para el experimento 2

Para verificar que en los experimentos se estaba excitando la onda Kelvin fundamental, se calculó el módulo de los factores $\tilde{C}^{(r)}$ para los primeros 10 modos de las 5 estratificaciones y rotación ambiente consideradas en los experimentos, los cuales se muestran en la Figura 5.36, en función

de las frecuencias modales adimensionalizadas por la frecuencia de la onda Kelvin fundamental. Se aprecia que en todos los experimentos el factor $\tilde{C}^{(1)}$ (asociado al modo 1), correspondiente a la onda Kelvin fundamental, es uno de los más altos en comparación al resto de los modos de mayor frecuencia, por lo que efectivamente la acción de la cinta energiza la onda que interesa estudiar. Los modos de frecuencia modal adimensional 4.8 y 5.3 corresponden a ondas tipo Poincaré, cuyas celdas de velocidad se alinean con la dirección de la cinta, siendo más evidente esta alineación en el caso del experimento 8.

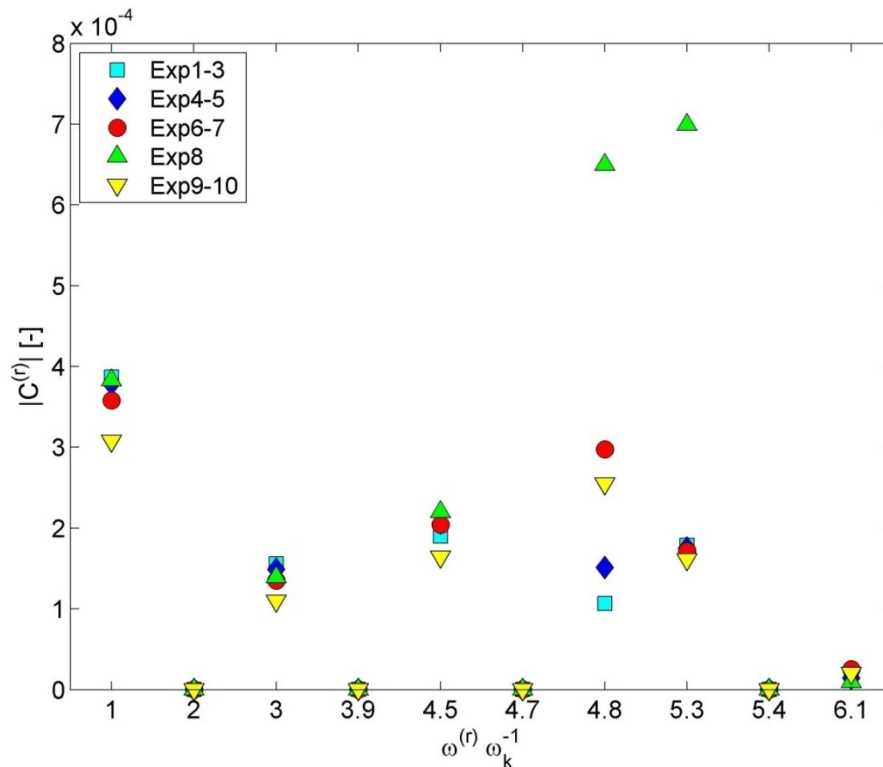


Figura 5.36: Factores $\tilde{C}^{(r)}$ de los primeros 10 modos para las 5 estratificaciones y rotación ambiente consideradas en los experimentos.

Teóricamente, las amplitudes de las oscilaciones de la interfaz de densidad están dadas por la ec (5.30), correspondiente al caso de forzante periódico con disipación. Al analizar el comportamiento de las amplitudes para tiempos grandes, se tiene que el primer y el tercer término dentro del paréntesis tienden a cero, por lo que se tiene que las oscilaciones están dominadas por el término que contiene la frecuencia forzante. Esto se ve confirmado al observar la Figura 5.37, donde se presenta la densidad espectral de potencia promedio de los 4 conductivímetros en función de la frecuencia adimensionalizada por la frecuencia forzante, para todos los experimentos. Se tiene que todos los espectros presentan un marcado peak en torno a 1, asociado a la frecuencia forzante, lo que confirmaría el resultado predicho por la expresión teórica.

Para estudiar la dinámica de la onda Kelvin en los experimentos, las series de tiempo obtenidas para cada conductivímetro fueron filtradas considerando una banda de 10 [s] (García et al., 2006), centrada en el período de la onda Kelvin, obtenido mediante el análisis modal. Esta banda fue escogida en función de los peaks de energía observados en los espectros presentados en la Figura 5.37. Al comparar los resultados obtenidos para todos los sensores en los experimentos 1, 2 y 3 se

observa que la amplitud de las oscilaciones de la interfaz de densidad aumenta a medida que el período forzante se acerca a la frecuencia de la onda Kelvin fundamental, para una misma velocidad angular e intensidad del forzante, lo que estaría corroborando la existencia de resonancia dentro del sistema (ver Figura 5.38). Además, se observa que las amplitudes no crecen desproporcionadamente, pues la fricción rápidamente actúa disipando la energía aportada por la cinta. Se infiere que el sistema tiende a un estado de pseudo-equilibrio forzado, como se observa en la Figura 5.32, pues la mezcla, a pesar de ser poca dada la baja velocidad de la cinta, tiende a cambiar el período de la onda Kelvin mientras el período forzante permanece constante, por lo que la intensidad de la resonancia dentro del sistema varía.

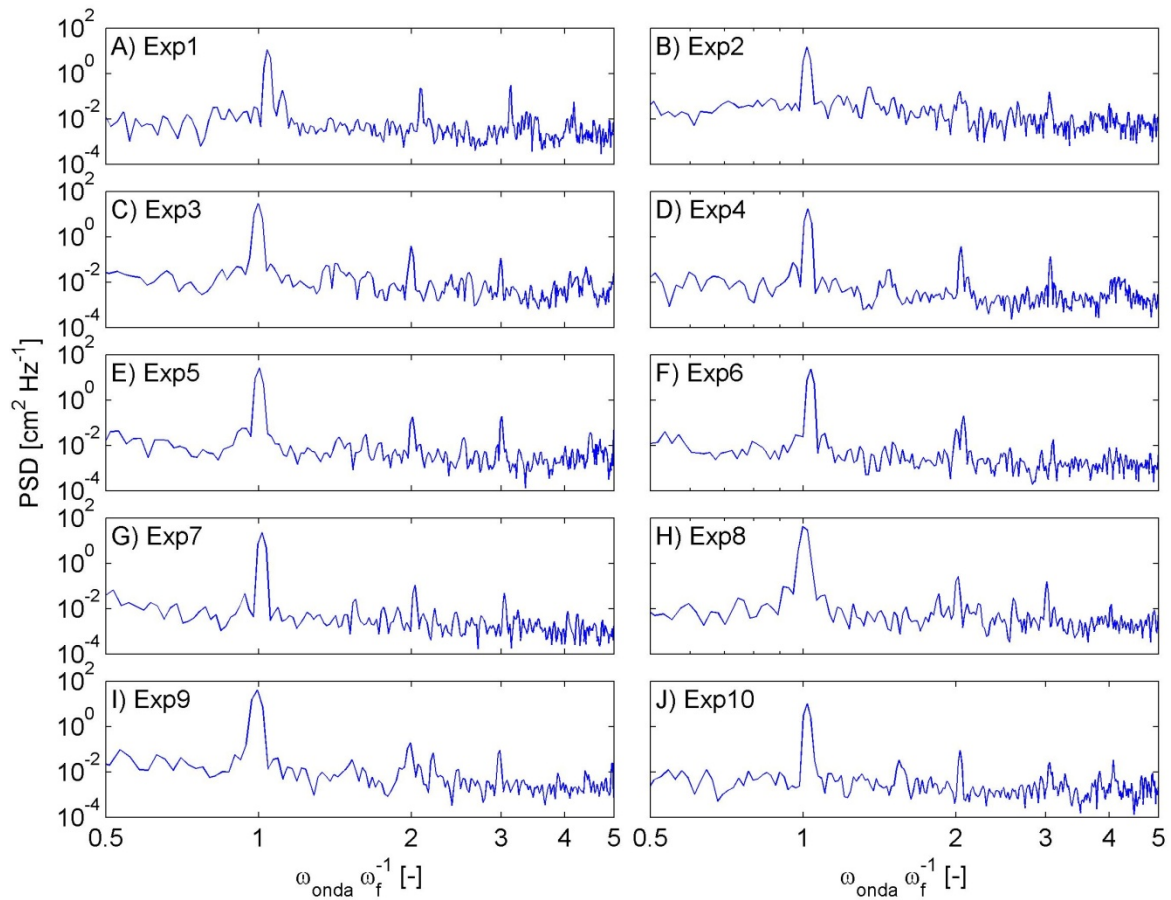


Figura 5.37: Densidad espectral de potencia promedio de los 4 conductivímetros en función de la frecuencia adimensionalizada por la frecuencia forzante para todos los experimentos.

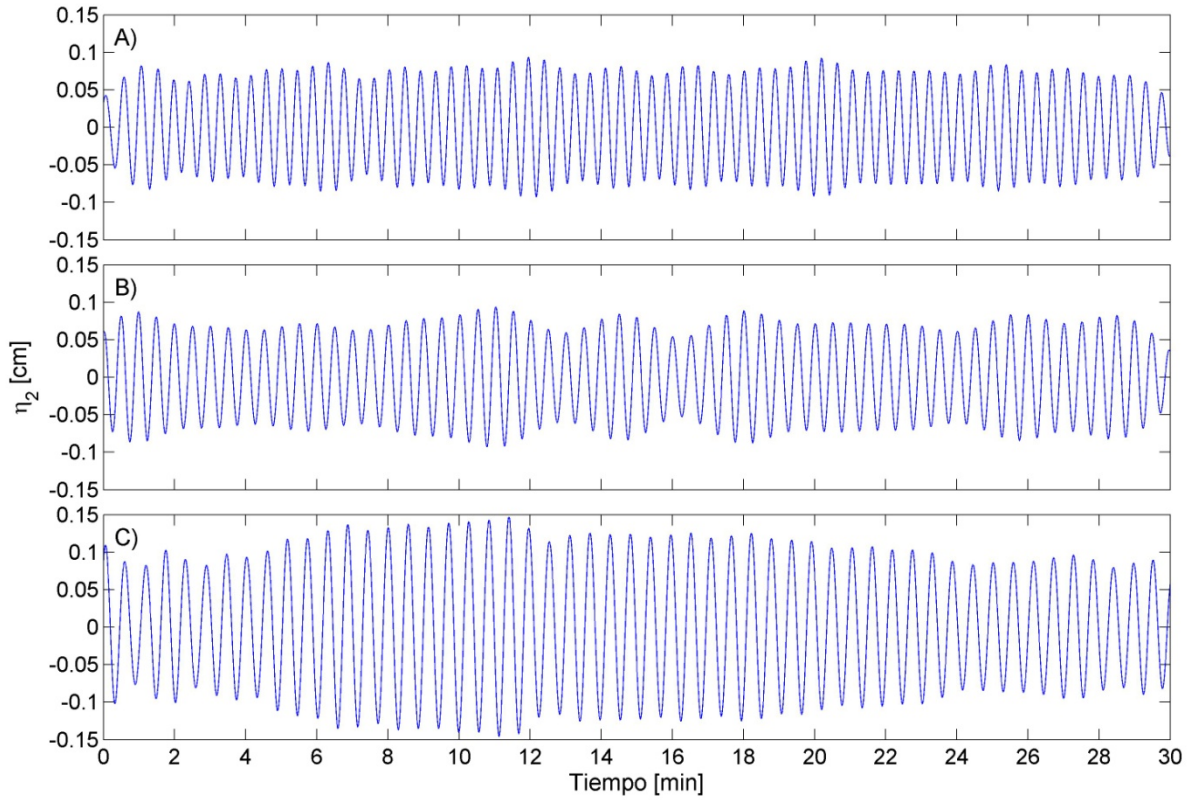


Figura 5.38: Oscilaciones de la interfaz de densidad con respecto al nivel medio para el sensor 1, para los experimentos A) 1 ($T_f/T_K=0.8$), B) 2 ($T_f/T_K=0.9$) y C) 3 ($T_f/T_K=1.0$). En los 3 casos se tiene que $W=156$ y $Ke^{-1}=0.47$.

De acuerdo a la Figura 5.39, la variación de la velocidad angular no tendría una mayor influencia cuando se alcanza el estado resonante ($T_f/T_K = 1$), por lo que el fenómeno de resonancia estaría determinado exclusivamente por la relación entre el período forzante y el de la onda Kelvin, el cual está determinado por la estratificación. Como queda de manifiesto en la Figura 5.40, la estratificación define el período de la onda Kelvin y cuando ésta es más débil, las amplitudes alcanzadas son mayores que las observadas en sistemas con diferencias de densidad mayores entre capas. A partir de la definición del número de Wedderburn, los desplazamientos de la interfaz de densidad pueden ser escritos como (de la Fuente et al., 2008):

$$\eta_0 = \frac{u_*^2 L}{2g'h_1} \quad (5.33)$$

Luego, para el mismo forzante, diferencias menores de densidad se traducen en mayores desplazamientos de la interfaz de densidad pues la gravedad reducida disminuye.

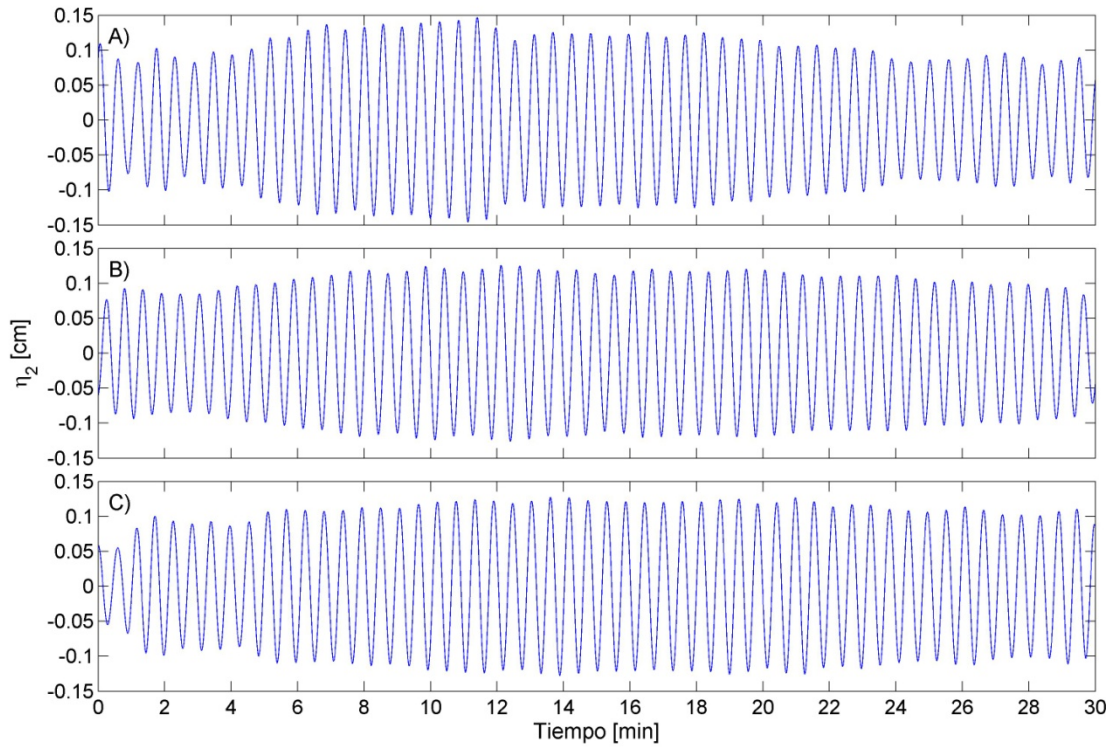


Figura 5.39: Oscilaciones de la interfaz de densidad con respecto al nivel medio para el sensor 1, para los experimentos A) 3 ($Ke^{-1}=0.47$), B) 5 ($Ke^{-1}=0.41$) y C) 7 ($Ke^{-1}=0.30$). En los 3 casos se tiene que $W=156$ y $T_f/T_K=1.0$.

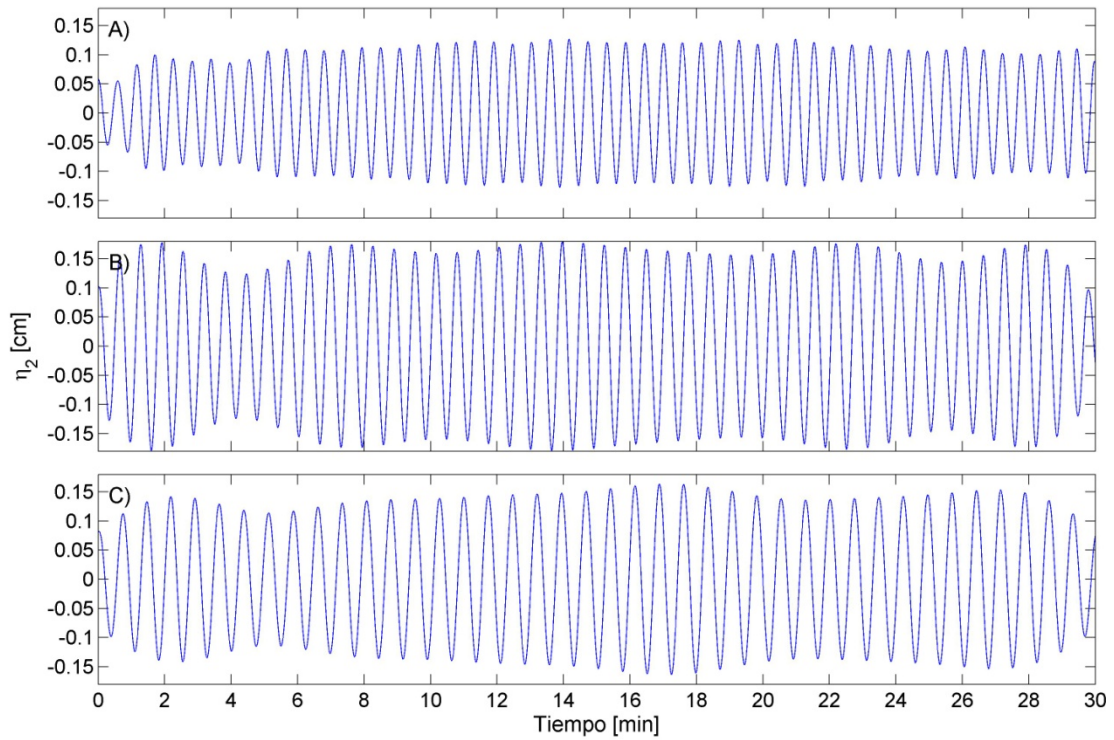


Figura 5.40: Oscilaciones de la interfaz de densidad con respecto al nivel medio para el sensor 1, para los experimentos A) 7 ($c_i=0.09$ [m s⁻¹]), B) 8 ($c_i=0.08$ [m s⁻¹]) y C) 9 ($c_i=0.07$ [m s⁻¹]). En los 3 casos se tiene que $Ke^{-1}=0.30$ y $T_f/T_K=1.0$.

6. Capítulo 6: Discusión y Conclusiones

6.1. Discusión

Gracias a los datos recopilados en terreno, se ha caracterizado de buena manera la estructura térmica del lago Villarrica para el verano 2009 y se ha obtenido información meteorológica de la zona, valiosa para estudiar la hidrodinámica de este cuerpo de agua. A partir de esta información, se ha realizado una modelación numérica del sistema suponiendo una estratificación en dos capas y considerando la rotación terrestre, el campo de vientos sobre la superficie del lago y la morfología del cuerpo de agua. Los resultados del análisis modal aplicado permiten explicar gran parte de la dinámica de ondas internas de gran escala observadas en los datos de terreno, sin embargo, junto con señalar las ventajas del análisis realizado es importante identificar las posibles fuentes de error y los alcances de los resultados obtenidos.

En primer lugar, el trabajo en terreno es fundamental para el desarrollo de este tipo de trabajo. Las mediciones realizadas con las cadenas de termistores no deberían aportar mayor fuente de error, a menos que sean manipuladas por terceros durante el período de medición, lo que podría ocurrir dada la cantidad de turistas que visitan el lago durante el verano, aunque los datos arrojarían este tipo de intervención. Un problema mayor corresponde al riesgo de robo de los equipos de medición, situación sufrida durante la campaña de terreno con dos de las cadenas de termistores. Además, estas condiciones adversas claramente dificultan la instalación de estaciones meteorológicas en el mismo lago, o en zonas lo más cercanas posibles. Sería ideal contar con varias estaciones dispuestas en distintos puntos de la zona de estudio para caracterizar de mejor forma el campo de vientos actuante sobre el lago; no obstante, las mediciones realizadas con una sola estación son una buena fuente de información, como lo reporta este estudio y el de Meruane (2005).

La mayor fuente de incertidumbre en la modelación realizada corresponde a la definición de la termoclina, pues todo el análisis realizado depende cómo se defina el sistema en dos capas. Como queda de manifiesto al comparar los resultados de febrero y marzo, los valores considerados para la capa superficial y las densidades de cada estrato determinan las frecuencias y las amplitudes de la estructura espacial de cada uno de los modos obtenidos. Además, la serie de tiempo definida para los desplazamientos de la termoclina, con respecto a la posición de equilibrio, determina la validez de la respuesta forzada simulada mediante la superposición lineal de un cierto número de modos, ya sea para condiciones iniciales nulas o para parámetros optimizados. Esto se comprueba al comparar los resultados obtenidos para febrero y marzo: mientras el primer período de simulación muestra un buen ajuste y permite realizar una buena interpretación del comportamiento de las ondas internas en el lago, los datos simulados para el segundo período no muestran tan buen ajuste y merecen ser analizados en mayor profundidad, con herramientas que incorporen otros fenómenos asociados a las ondas internas de gran escala, como efectos no lineales y no hidrostáticos.

Es importante considerar que a partir de la información de dos puntos de medición, se supone una condición homogénea en la horizontal para todo el lago, lo cual podría no ser tan cierto, como se observa al comparar los perfiles de densidad promedio de TC1 y TC2 para marzo (ver Figura 5.7). Dado que la ventana de medición para marzo es extensa (cercana a los 24 días de medición), pueden existir cambios en la estratificación que debiliten el supuesto de dos capas de densidad constante.

A pesar de que los datos de marzo no presentan tan buen ajuste, es importante consignar que los resultados obtenidos para ambos períodos permiten explicar gran parte de la dinámica de las ondas internas de gran escala presentes en el lago Villarrica, sobre todo los estados iniciales de excitación de las ondas, debido al carácter lineal y no disipativo de las ecuaciones consideradas (Shimizu et al., 2007.)

Al comparar la evolución de las energías modales calculadas considerando condición inicial nula y parámetros optimizados, con las energías modales obtenidas analíticamente, queda de manifiesto la existencia de una interacción resonante entre el viento y la onda Kelvin fundamental, la cual queda bien caracterizada pues TC1 se encuentra dentro del radio de deformación interna y permite capturar las amplitudes de la onda. Además, el período de esta onda se encuentra aislado en el espectro, es decir, no hay modos con frecuencias similares, por lo que su identificación es más fácil. Situación similar ocurre al comparar los desplazamientos observados y simulados de la interfaz de densidad, donde la modulación del viento sobre los desplazamientos simulados es más notoria en el caso sin disipación y amplitud inicial nula.

El análisis modal aplicado entrega resultados satisfactorios, considerando que está basado en un esquema lineal, sin disipación ni mezcla entre capas. Los modos obtenidos fueron utilizados para estudiar la disipación de energía en el sistema, la cual es necesaria para controlar el crecimiento desproporcionado de las amplitudes cuando el sistema entra en resonancia, como se ha determinado en este estudio. El proceso de optimización implementado entrega un buen ajuste para el mes de febrero, con una tasa de decaimiento de la onda Kelvin K1 de 24.33 [días] y un período de 23.37 [hrs], lo cual coincide con los resultados esperados en el sentido de que la disipación de energía tiende a disminuir la frecuencia angular de los modos producto de la fricción. Dado que la diferencia porcentual entre la frecuencia ajustada y la modal es baja, el resultado es aceptable. El ajuste de la onda Kelvin para marzo no es tan bueno y su estudio puede dar origen a nuevos trabajos, pues el período es de 19.81 [hrs], menor al estimado mediante el análisis modal (20.44 [hrs]). Este resultado es contrario al esperable, y la causa puede estar asociada a cambios en la estratificación producto de la longitud de la ventana de simulación, o a otros fenómenos no incluidos en el análisis modal, como se ha señalado en los párrafos anteriores.

Como se desprende de las Tablas 5.3 y 5.4, la optimización entrega frecuencias angulares y tasas de disipación para el resto de los modos que pueden ser analizadas en profundidad en futuros trabajos, por ejemplo, dividiendo las series de tiempo disponibles en ventanas temporales más chicas. En los datos observados se aprecian ondas importantes de período entre 5 y 7 [hrs], las cuales estarían siendo excitadas por interacciones no lineales entre ondas de menor frecuencia (de la Fuente et al., 2008), específicamente las ondas K1 y P3.1, y no por efecto del viento, el cual tendría poca interacción con estos modos, como se observa en las Figuras 5.25 y 5.26. Como el modelo no puede hacerse cargo de este fenómeno, trata de simularlo asignando una alta energía inicial a los modos de frecuencias dentro del intervalo mencionado, y una baja tasa de disipación para que estén presentes en toda la simulación. También se observa la aparición de modos con tasas de disipación mayores, los cuales estarían siendo excitados numéricamente sólo para reproducir las oscilaciones de los primeros días de simulación. Estas ondas serían el nexo para la transferencia de energía entre las ondas internas de gran escala, como la onda tipo Kelvin K1, y ondas de menor escala de longitud y mayor frecuencia.

Es importante señalar que a partir de las tasas de disipación y las frecuencias angulares estimadas en este trabajo, pueden desarrollarse nuevas investigaciones que busquen validar los resultados

obtenidos y así, dar una mejor explicación a los desplazamientos observados de la termoclina. Para esto, es necesario incorporar términos no lineales a las ecuaciones de momentum resueltas en el análisis modal, con el fin de estudiar la interacción no lineal entre modos de baja frecuencia, la cual produce la excitación de modos de mayor frecuencia, los cuales son claramente observables en las series de tiempo registradas en terreno. En este sentido, lo que está haciendo el proceso de optimización es agrupar en un sólo coeficiente los mecanismos de disipación de energía y los procesos no lineales y no hidrostáticos que no pueden ser representados por el análisis modal implementado (Shimizu & Imberger, 2008).

La estimación de las tasas de disipación puede ser mejorada agregando directamente mecanismos de disipación de energía a las ecuaciones del análisis modal. Por ejemplo, la fricción de fondo puede ser caracterizada mediante el ajuste de coeficientes de fricción de fondo, los cuales dependen del campo de velocidades en el hipolimnion (Shimizu & Imberger, 2008). Otros mecanismos de disipación de energía corresponden a la interacción de las corrientes inducidas por las ondas internas con la capa de Ekman y la capa límite béntica (Shimizu & Imberger, 2009), las cuales han sido modeladas y aplicadas a lagos, como lo muestra el trabajo de Shimizu & Imberger (2010). La gran limitación de este tipo de modelación es que necesita conocer a priori parámetros como el espesor de la capa límite béntica, o calibrar a partir de mediciones en terreno los coeficientes de fricción de fondo, los que presentan una importante variabilidad espacial (Shimizu & Imberger, 2008). Además, las ondas topográficas y los giros geostroficados también generan corrientes que pueden afectar en la disipación de energía por fricción, y dado el bajo período de estas ondas, es necesario contar con extensas mediciones para su identificación.

Otra alternativa para caracterizar de mejor forma la dinámica de ondas internas observada en los datos de terreno sería extender el modelo aplicado a uno de 3 capas. De este análisis, podrían aparecer más modos que aporten a explicar las oscilaciones observadas de las isotermas, o bien confirmar la conveniencia de trabajar con un modelo en dos capas para el lago Villarrica. Nuevamente, habría que ser cuidadoso en la elección de las interfaces de densidad que definirían el metalimnion, para minimizar los errores en las simulaciones.

En las experiencias de laboratorio se observa que la interacción resonante entre el forzante periódico y la onda Kelvin produce un aumento de las amplitudes de las oscilaciones de la interfaz de densidad, para la misma intensidad del esfuerzo de corte ejercido sobre la superficie. Se aprecia también que la disipación de energía impide el crecimiento desproporcionado de las amplitudes, confirmando la hipótesis de que un sistema estratificado puede verse afectado por la resonancia al aplicarse un forzante periódico.

Además, los resultados experimentales validan el análisis teórico realizado para el cálculo de las amplitudes modales, como se muestra en los espectros de la Figura 5.37, al observarse un marcado peak en torno a la frecuencia forzante. De acuerdo a la ec (5.30), este comportamiento es esperable para tiempos grandes, pues el término asociado a la frecuencia forzante es el único que sobrevive, mientras el resto de los términos tiende a cero.

El foco de esta tesis ha estado puesto en las oscilaciones que generan las ondas internas de gran escala en el lago, y la interacción del campo de velocidad de la capa superficial con el viento uniforme sobre el lago. Si se desea mejorar la caracterización del campo de velocidades, es necesario recurrir a modelos 3D, que permiten modelar la distribución de velocidades en la vertical.

6.2. Conclusiones

Se ha realizado un análisis modal para estudiar la presencia de ondas internas de gran escala en el lago Villarrica. A partir de datos de terreno y los resultados numéricos del análisis modal, se han identificado los modos normales de oscilación del lago, los cuales están determinados por la morfología, la estratificación de la columna de agua y el efecto de Coriolis.

De los resultados del análisis aplicado, se tiene que la hidrodinámica del lago Villarrica está gobernada mayormente por la resonancia existente entre el viento de periodicidad diaria y la onda tipo Kelvin fundamental. Esta interacción estaría controlada en la práctica por la disipación de energía por fricción con el fondo y riberas del lago, y explicaría las amplitudes de las oscilaciones observadas en terreno, las cuales superan notoriamente los desplazamientos esperados sólo por efecto del viento, el cual es de baja intensidad la mayor parte del tiempo. Además, los resultados muestran la presencia de oscilaciones en la termoclina de período comprendido entre 5 y 7 [hrs], las cuales estarían siendo excitadas por interacciones no lineales entre ondas de menor frecuencia, como la onda tipo Kelvin K1 y la tipo Poincaré P3.1.

Los resultados experimentales, a su vez, confirman la existencia de una interacción resonante entre la onda Kelvin fundamental y el forzante periódico, la cual es controlada por la disipación por fricción dentro del sistema, y validan el análisis teórico realizado para el cálculo de las amplitudes modales.

A la luz de los resultados obtenidos, se concluye que el análisis modal es una herramienta útil como primera descripción de la hidrodinámica de un lago. Si se conoce la estratificación y el viento actuante sobre la superficie, este análisis puede ser extendido a cualquier cuerpo cerrado de agua, lo que constituye un aporte para el estudio de otros lagos de nuestro país.

Referencias

- Akitomo, K., Kurogi, M. & Kumagai, M. 2004. Numerical study of a thermally induced gyre system in Lake Biwa. *Limnol.* 5: 103–114.
- Antenucci, J. P., Imberger, J. & Saggio, A. 2000. Seasonal evolution of the basin-scale internal wave field in a large stratified lake. *Limnol. Oceanogr.*, 45: 1621 – 1638.
- Antenucci, J. P. & Imberger, J. 2001. Energetics of long internal gravity waves in large lakes. *Limnol. Oceanogr.*, 46: 1760–1773.
- Antenucci, J.P. & Imberger, J. 2003. The seasonal evolution of wind/internal wave resonance in Lake Kinneret. *Limnol. Oceanogr.*, 48: 2055 – 2061.
- Boegman, L., Imberger, J., Ivey, G. N. & Antenucci, J. P. 2003. High-frequency internal waves in large stratified lakes. *Limnol. Oceanogr.* 48: 895 – 919.
- Boegman, L., Ivey, G. N. & Imberger, J. 2005a. The degeneration of internal waves in lakes with sloping topography. *Limnol. Oceanogr.* 50: 1620 – 1637.
- Boegman, L., Ivey, G. N. & Imberger, J. 2005b. The energetics of large-scale internal wave degeneration in lakes. *J. Fluid Mech.* 531: 159 – 180.
- Boegman, L. & Ivey, G. N. The dynamics of internal wave resonance in periodically forced lakes. Enviado a *J. Fluid Mech.* en 2009.
- Campos, H., Steffen, W., Román, C., Zúñiga, L., & Agüero, G. 1983. Limnological studies in Lake Villarrica: Morphometric, physical, chemical, planktonical factors and primary productivity. *Arch. Hydrobiologie*, 4, 371–406.
- Campos, H. 1984. Limnological study of araucanian lakes (Chile). Instituto de Zoología, Facultad de Ciencias, Universidad Austral de Chile.
- Campos, H., Steffen, W., & Arenas, J. 1984. Antecedentes de los lagos Villarrica, Riñihue, Ranco y Llanquihue. Instituto de Zoología, Facultad de Ciencias, Universidad Austral de Chile.
- Campos, H. 1994. Evaluación de la carga de Fósforo y Nitrógeno en el lago Villarrica. Ministerio de Obras Públicas, Dirección General de Aguas, Universidad Austral de Chile, Instituto de Zoología.
- Csanady, G. T. 1975. Hydrodynamics of large lakes. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 7: 357-386.
- Csanady, G. T. 1982. On the structure of transient upwelling fronts. *J. Phys. Oceanogr.*, 12: 84-96.
- Cushman-Roisin, B. 1994. Introduction to Geophysical Fluid Dynamics. Prentice Hall.

- de la Fuente, A., Shimizu, K., Imberger, J. & Niño, Y. 2008. The evolution of internal waves in a rotating, stratified, circular basin and the influence of weakly nonlinear and nonhydrostatic accelerations. *Limnol. Oceanogr.* 53(6): 2738 – 2748.
- DGA. 2004. Diagnóstico y clasificación de los cursos y cuerpos de agua según objetivos de calidad: Cuenca del Río Toltén. Ministerio de Obras Públicas, Dirección General de Aguas.
- DGA. 2010. Banco Nacional de Aguas. Dirección General de Aguas. MOP.
- Endoh, S. 1986. Diagnostic study on the vertical circulation and the maintenance mechanism of the cyclonic gyre in Lake Biwa. *J. Geophys. Res.*, 91: 869 – 876.
- García, C. M., Jackson, P., & García, M. 2006. Confidence intervals in the determination of turbulence parameters. *Experiment in Fluids*, 40: 514 – 522.
- Gill, A. E. 1982. *Atmosphere-ocean dynamics*. Academic Press.
- Gómez-Giraldo, A., Imberger, J. & Antenucci, J.P. 2006. Spatial structure of the dominant basin-scale internal waves in Lake Kinneret. *Limnol. Oceanogr.* 51: 229 – 246.
- Hodges, B. R., Imberger, J., Saggio, A. & Winters, K. B. 2000. Modeling basin-scale internal waves in a stratified lake. *Limnol. Oceanogr.*, 45: 1603 – 1620.
- Horn, D., Imberger, J. & Ivey, G. N. 2001. The degradation of long-scale interfacial gravity waves in lakes. *J. Fluid. Mech.* 434: 181 – 207.
- Imberger, J. & Hamblin, P. F. 1982. Dynamics of lakes, reservoirs and cooling ponds. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 14: 153–87
- Imberger, J. & Patterson, J. 1990. Physical Limnology. *Advances in Applied Mechanics*, 27: 303–475.
- Imberger, J. 1998. Flux paths in a stratified lake: A review, p. 1–17. In J. Imberger [ed]. *Physical Processes in Lakes and Oceans, Coastal and Estuarine Studies*, Vol. 54, American Geophysical Union.
- Meruane, C. 2005. El efecto del viento Puelche sobre la hidrodinámica y calidad de aguas del lago Villarrica. Memoria para optar el título de Ingeniero Civil. Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile.
- Meruane, C., Niño, Y., and Garreaud, R. 2005. Simulation of phytoplankton response to strong wind events in Lake Villarrica, Chile. *Proceedings of the XXXI IAHR Congress*. Seoul, Korea.
- Monismith, S. G. 1985. Wind-forces motion in stratified lakes and their effect on mixed-layer shear. *Limnol. Oceanogr.*, 30(4): 771–783.
- Mortimer, C. H. 1952. Water movements in lakes during summer stratification: evidence from the distribution of temperature in Windermere. *Philos. Trans. R. Soc. London*, B236: 355–404.

- Mortimer, C. H. 1974. Lake hydrodynamics. *Mitt. Int. Ver., Limnol.*, 20: 124-197.
- Münnich, M., Wüest, A. & Imboden, D. M. 1992. Observations of the second vertical mode of the internal seiche in an alpine lake. *Limnol. Oceanogr.*, 37: 1705–1719.
- Niño, Y., Caballero, R. & Reyes, L. 2003. Mixing and interface dynamics in a two-layer stratified fluid due to surface shear stress. *J. Hydr. Res.*, 41(6): 609–621.
- Niño, Y. & Tamburrino, A. 2004a. Stratification and mixing in lakes and reservoirs. *Curso de Hidrodinámica Ambiental. Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile.*
- Niño, Y. & Tamburrino, A. 2004b. Response of a stratified water body to wind. Surface set-up and interfacial displacement. *Curso de Hidrodinámica Ambiental. Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile.*
- Platzman, G. W. 1972. Two-dimensional free oscillations in natural basins. *J. Phys. Oceanogr.* 2: 117–138.
- Proudman, J. 1928. On a general expansion in the theory of the tides. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 29: 527–536.
- Rizk, W. F. 2010. The response of a contained, rotating, two-layer stratified fluid to an applied surface stress. PhD Dissertation, University of Dundee.
- Saggio, A. & Imberger, J. 1998. Internal wave weather in a stratified lake. *Limnol. Oceanogr.*, 43: 1780–1795.
- Shimizu, K., Imberger, J. & Kumagai, M. 2007. Horizontal structure and excitation of primary motions in a strongly stratified lake. *Limnol. Oceanogr.*, 52: 2641 – 2655.
- Shimizu, K. & Imberger, J. 2008. Energetics and damping of basin-scale waves in a strong stratified lake. *Limnol. Oceanogr.*, 53: 1574 – 1588.
- Shimizu, K. & Imberger, J. 2009. Damping mechanisms of internal waves in continuously stratified rotating basins. *J. Fluid Mech.*, 637: 137-172.
- Shimizu, K. & Imberger, J. 2010. Seasonal differences in the evolution of damped basin-scale waves in a shallow stratified lake. *Limnol. Oceanogr.*, 55(3): 1449 – 1462.
- Shintani, T., de la Fuente, A., Niño, Y. & Imberger, J. 2010. Generalizations of the Wedderburn number: Parameterizing upwelling in stratified lakes. *Limnol. Oceanogr.*, 55(3): 1377 – 1389.
- Spigel, R. H. & J. Imberger. 1980. The classification of mixed-layer dynamics in lakes of small to medium size. *J. Phys. Oceanogr.*, 10: 1104–1121.
- Steffen, W. 1995. Caracterización hidrodinámica preliminar del lago Villarrica. Ministerio de Obras Públicas, Dirección General de Aguas, Universidad Austral de Chile, Instituto de Zoología.

Stocker, R. & Imberger, J. 2003. Energy partitioning and horizontal dispersion in a stratified rotating lake. *J. Phys. Oceanogr.*, 33: 512–529.

UACH. 2007. Diagnóstico de la calidad de las aguas del lago Villarrica. Primer informe parcial. Universidad Austral de Chile, Facultad de Ciencias.

UNESCO. 1981. Tenth report of the joint panel on oceanographic tables and standards. Technical papers in Marine Science. N° 36.

Ulloa, H. 2011. Estudio experimental de la respuesta de ondas internas gravitacionales afectadas por la rotación terrestre en un flujo estratificado. Memoria para optar el título de Ingeniero Civil. Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile.

Wake, G. W., Hopfinger, E. J. & Ivey, G. N. 2007. Experimental study on resonantly forced interfacial waves in a stratified circular cylindrical basin. *J. Fluid. Mech.*, 582: 203 – 222.

Wüest, A. & Lorke, A. 2003. Small-scale hydrodynamics in lakes. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 35: 373 – 412.

Anexos

A. Mediciones con CTD

A continuación se presentan los perfiles verticales medidos en los 4 puntos de muestreo durante la campaña de terreno, ordenados por fecha.

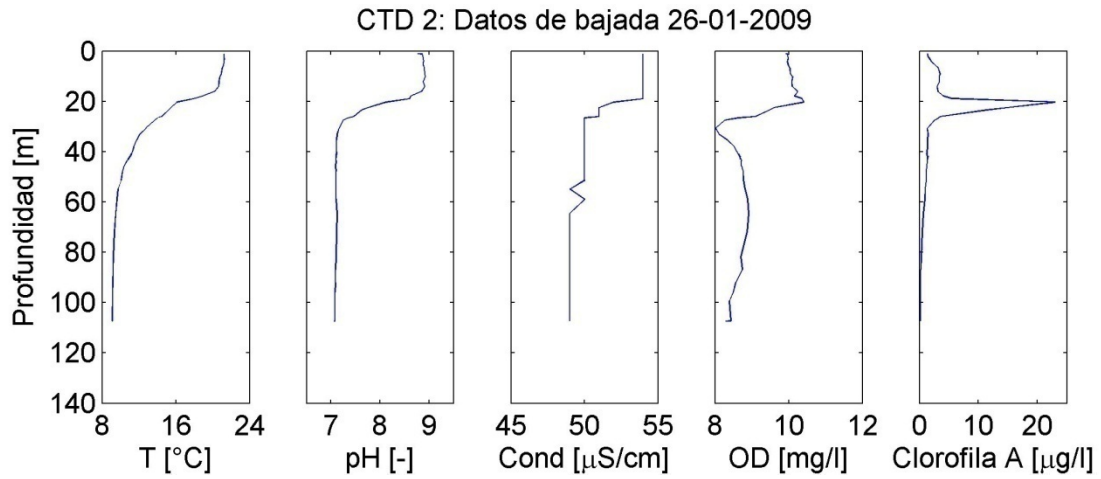


Figura A.1: Perfiles de bajada CTD 2, 26-01-2009

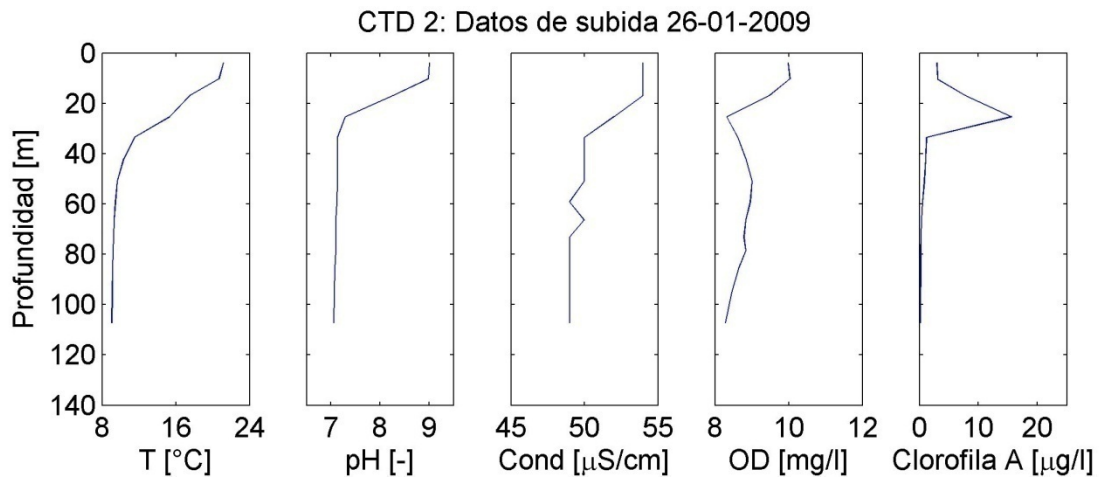


Figura A.2: Perfiles de subida CTD 2, 26-01-2009

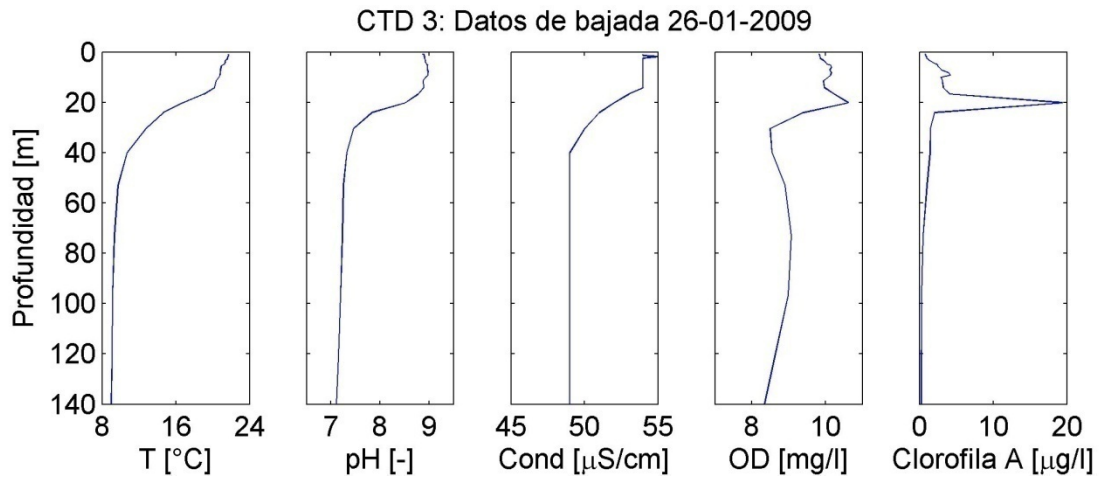


Figura A.3: Perfiles de bajada CTD 3, 26-01-2009

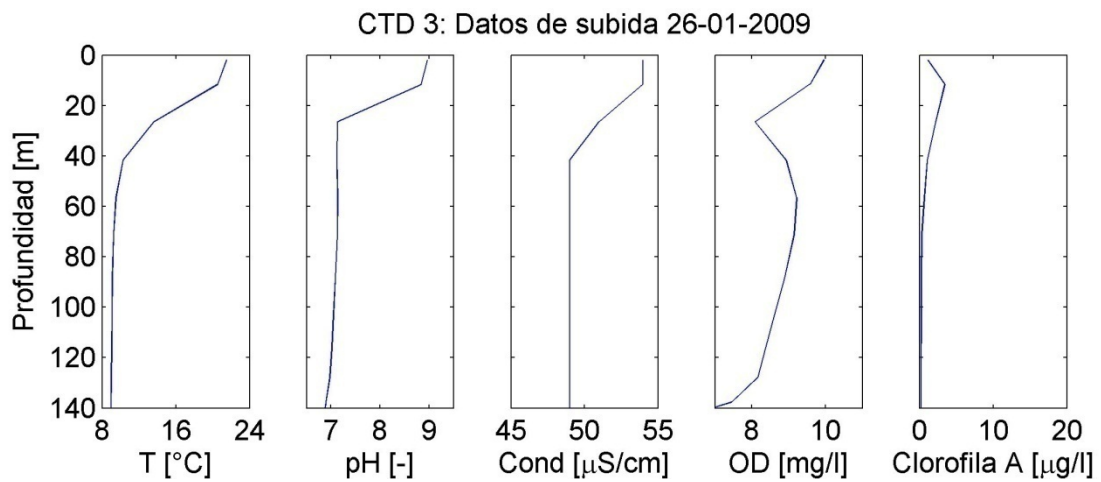


Figura A.4: Perfiles de subida CTD 3, 26-01-2009

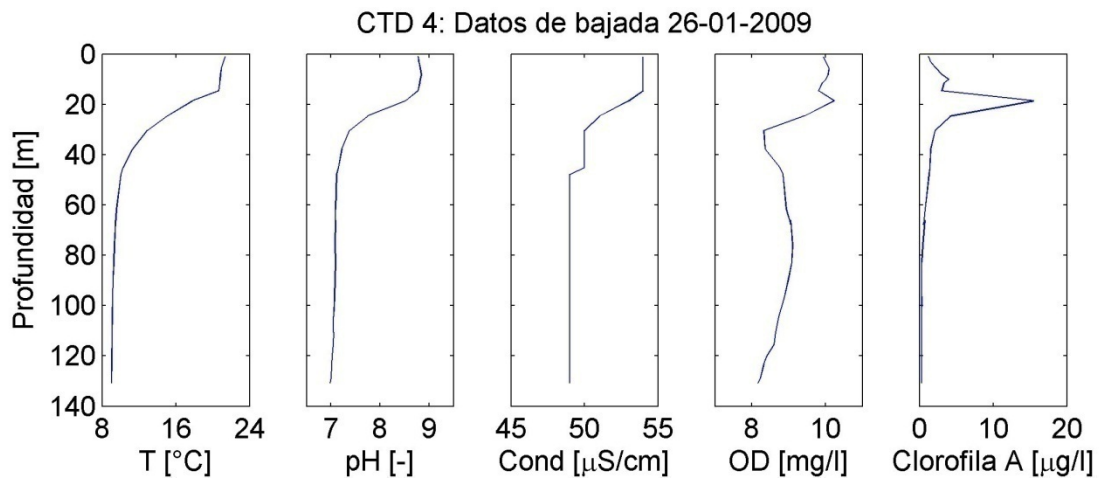


Figura A.5: Perfiles de bajada CTD 4, 26-01-2009

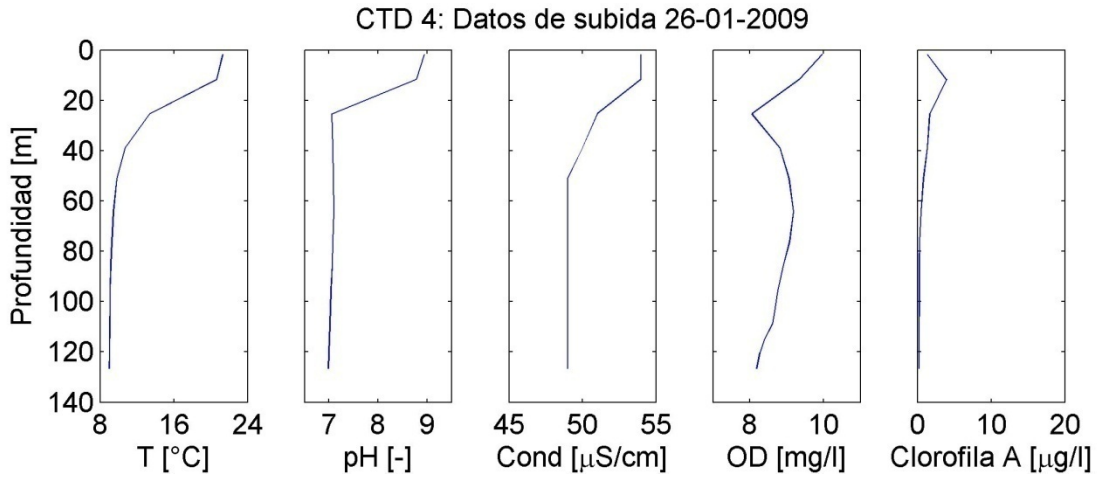


Figura A.6: Perfiles de subida CTD 4, 26-01-2009

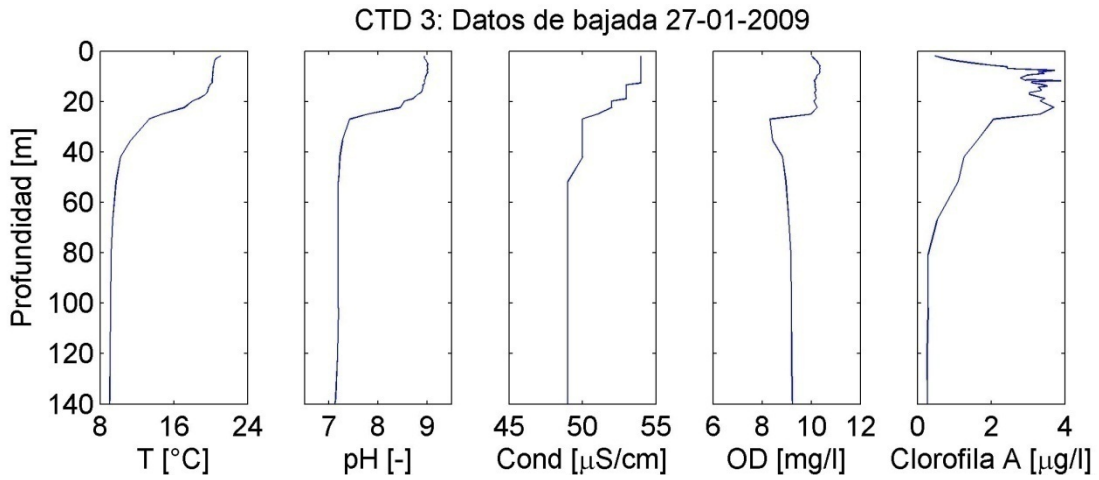


Figura A.7: Perfiles de bajada CTD 3, 27-01-2009

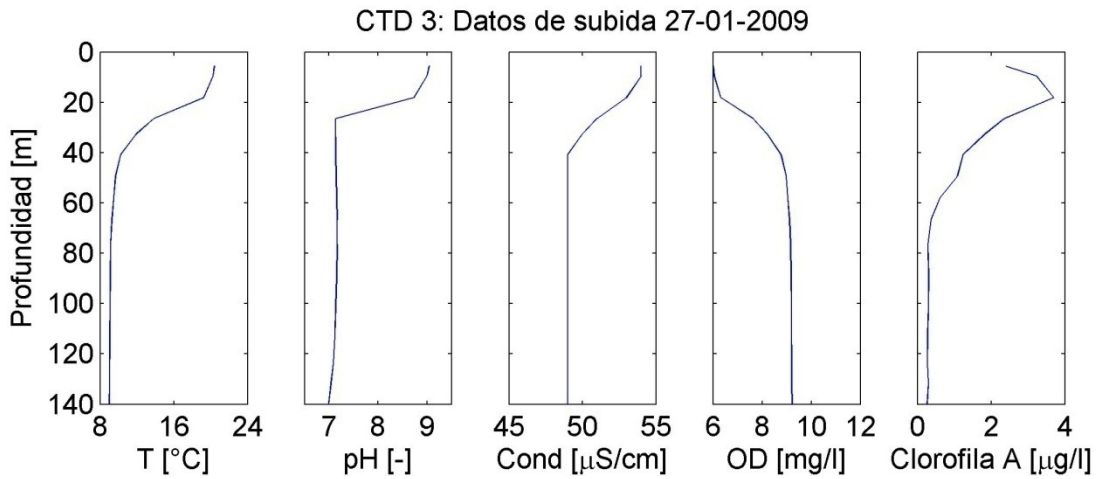


Figura A.8: Perfiles de subida CTD 3, 27-01-2009

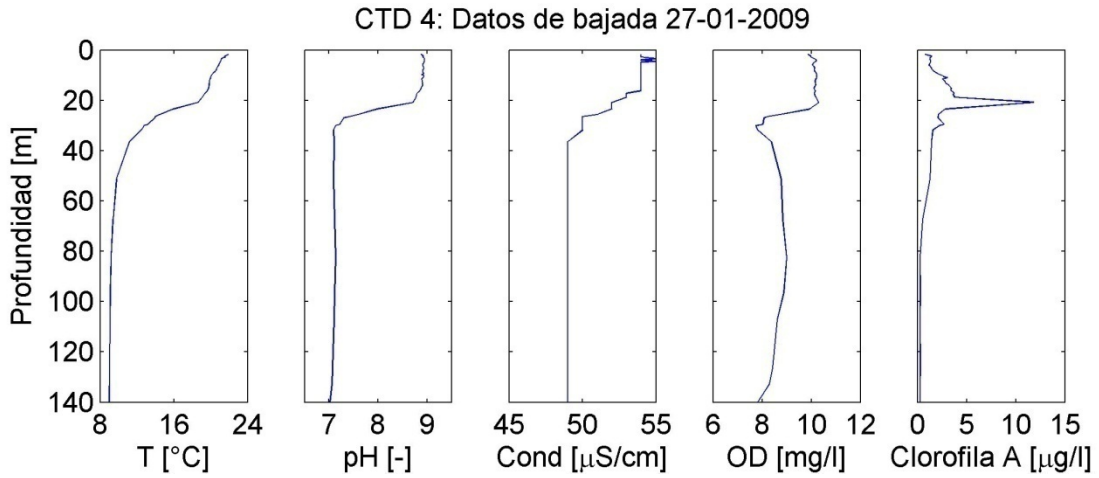


Figura A.9: Perfiles de bajada CTD 4, 27-01-2009

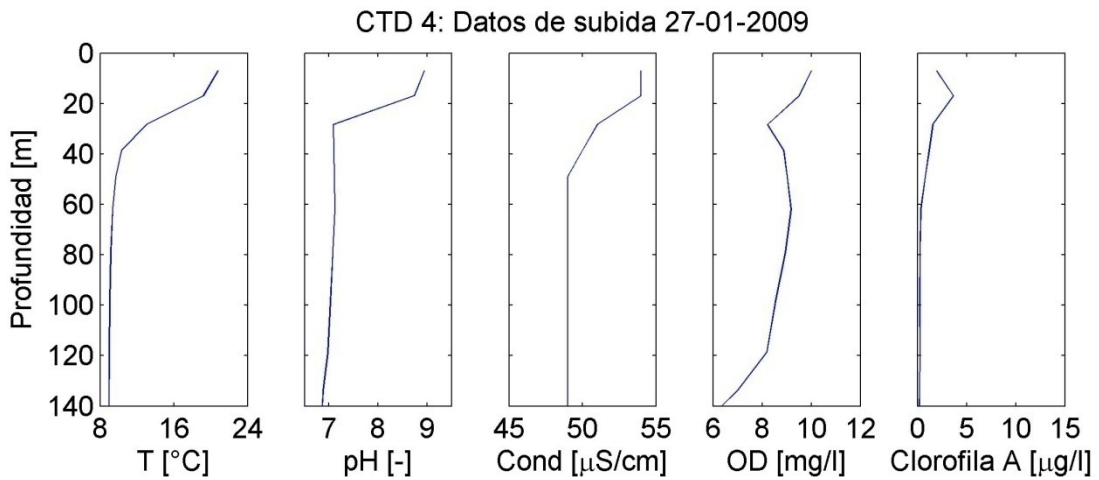


Figura A.10: Perfiles de subida CTD 4, 27-01-2009

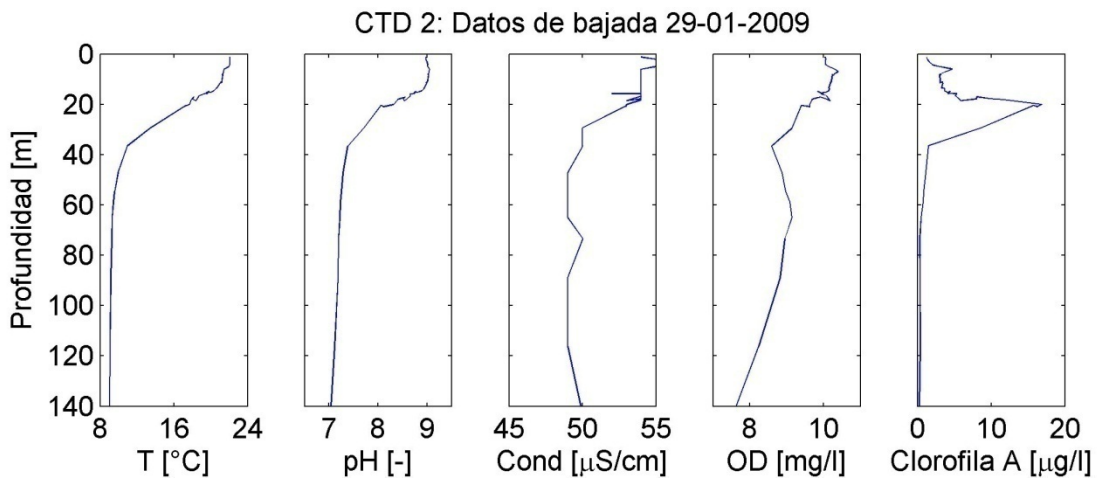


Figura A.11: Perfiles de bajada CTD 2, 29-01-2009

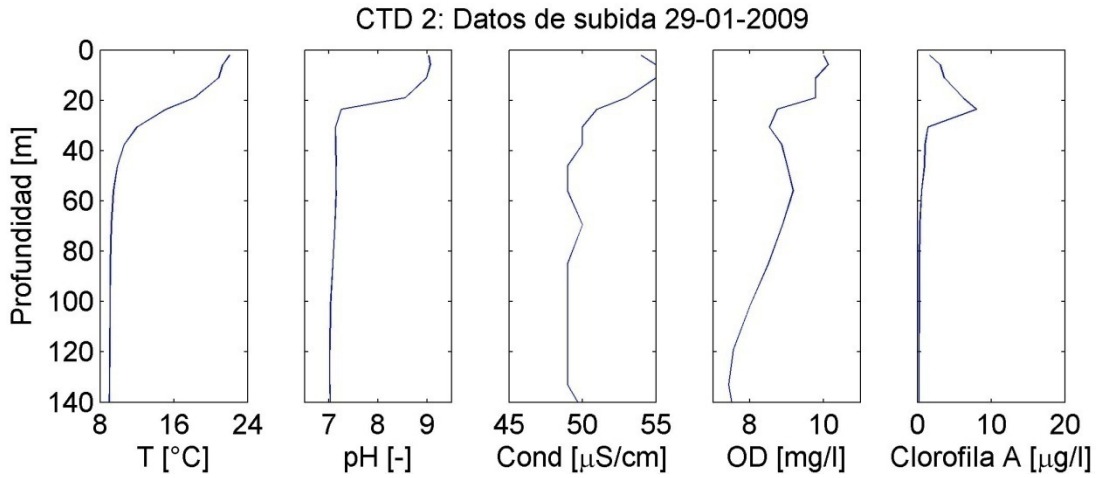


Figura A.12: Perfiles de subida CTD 2, 29-01-2009

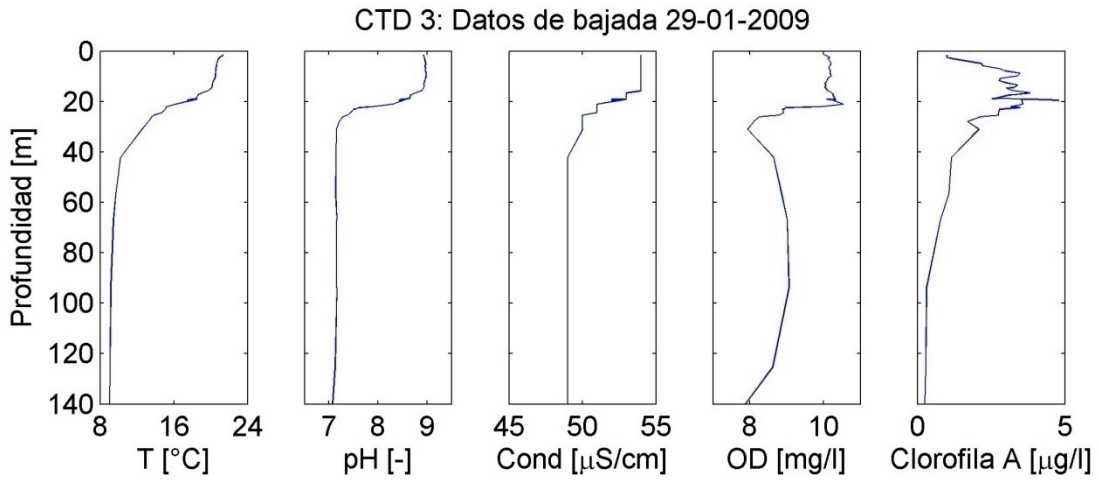


Figura A.13: Perfiles de bajada CTD 3, 29-01-2009

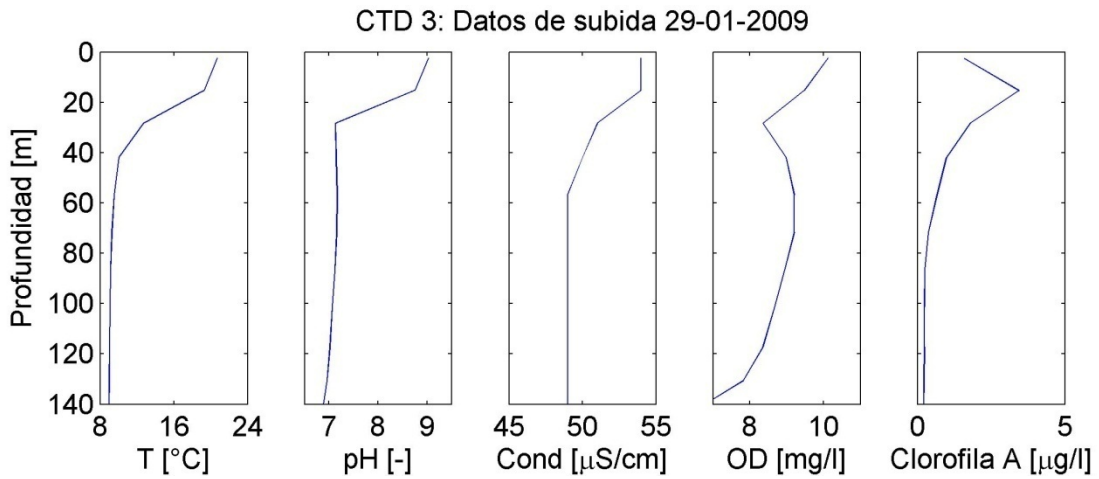


Figura A.14: Perfiles de subida CTD 3, 29-01-2009

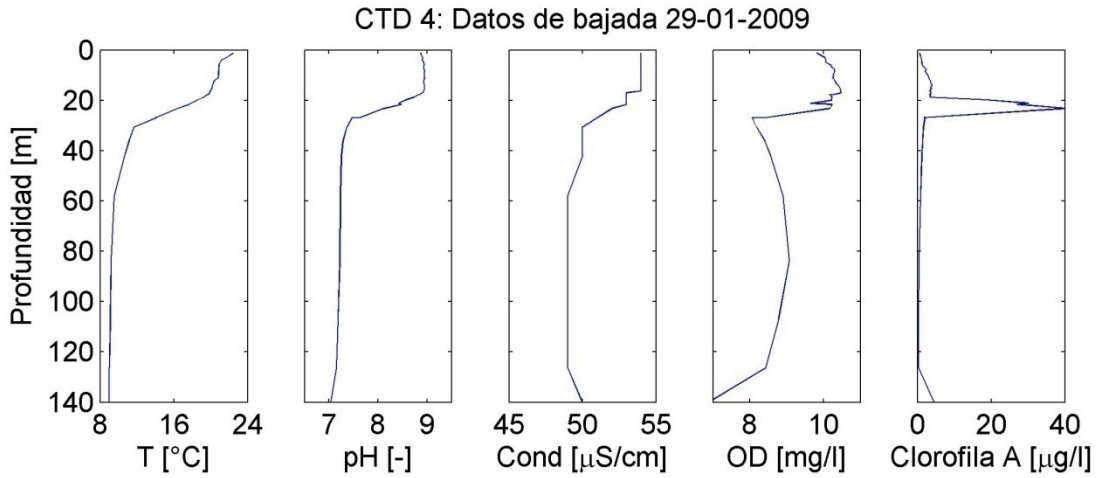


Figura A.15: Perfiles de bajada CTD 4, 29-01-2009

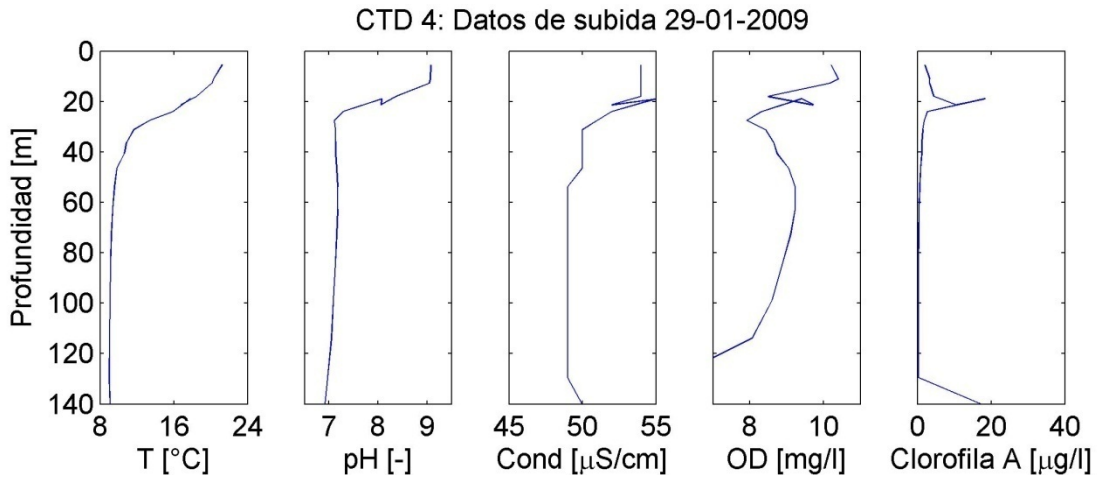


Figura A.16: Perfiles de subida CTD 4, 29-01-2009

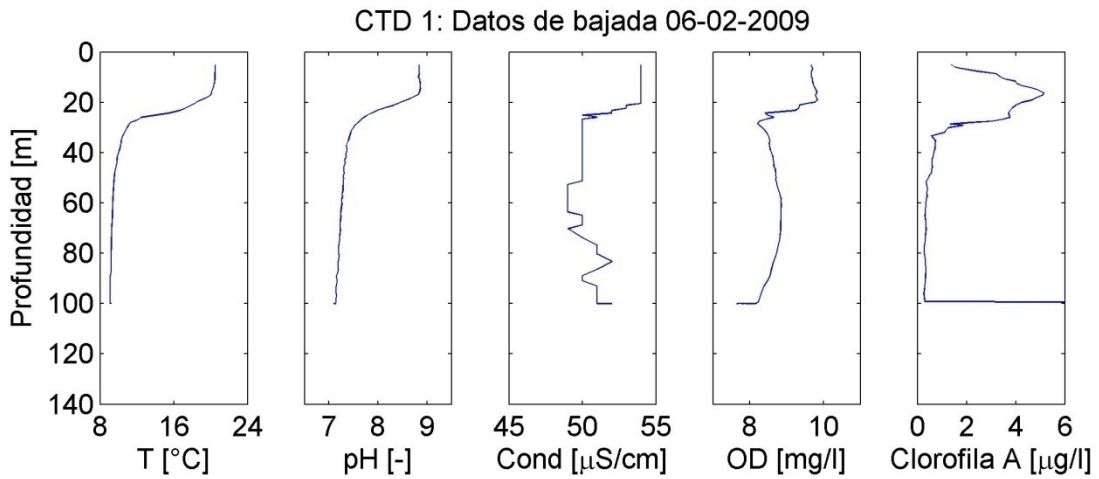


Figura A.17: Perfiles de bajada CTD 1, 06-02-2009

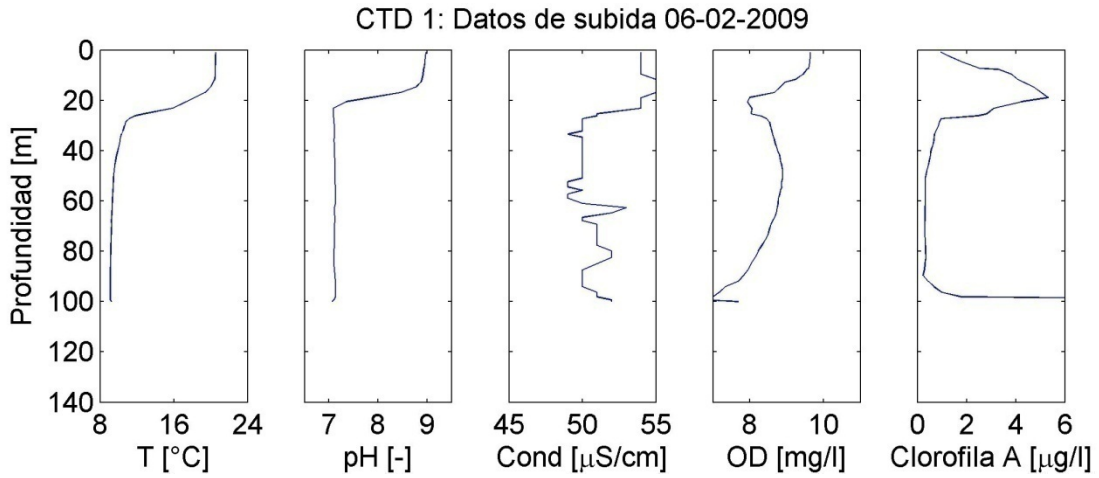


Figura A.18: Perfiles de subida CTD 1, 06-02-2009

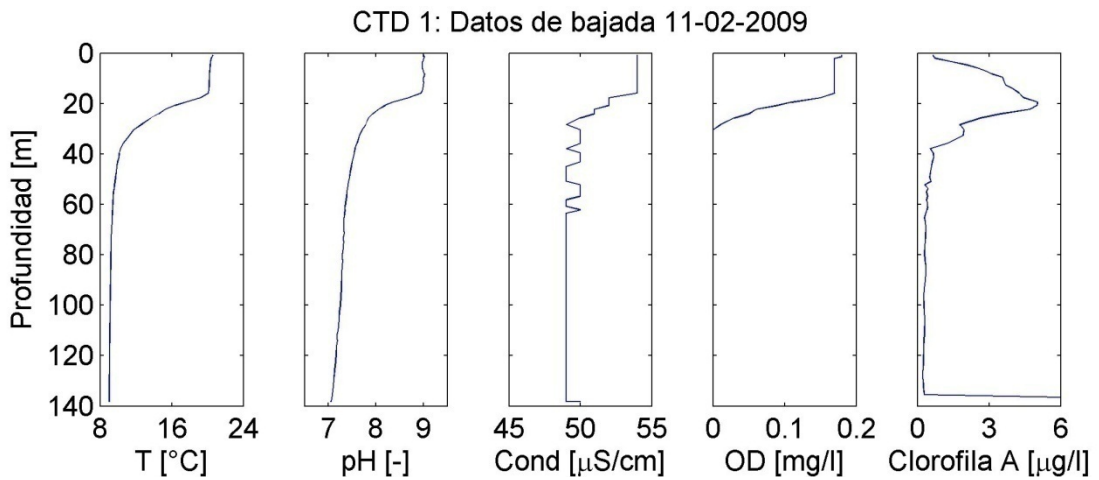


Figura A.19: Perfiles de bajada CTD 1, 11-02-2009

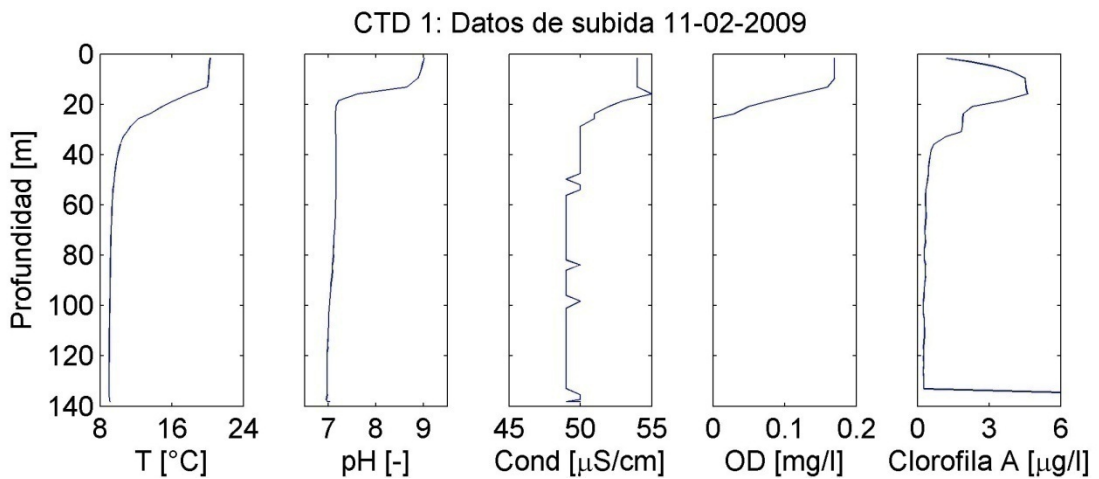


Figura A.20: Perfiles de subida CTD 1, 11-02-2009

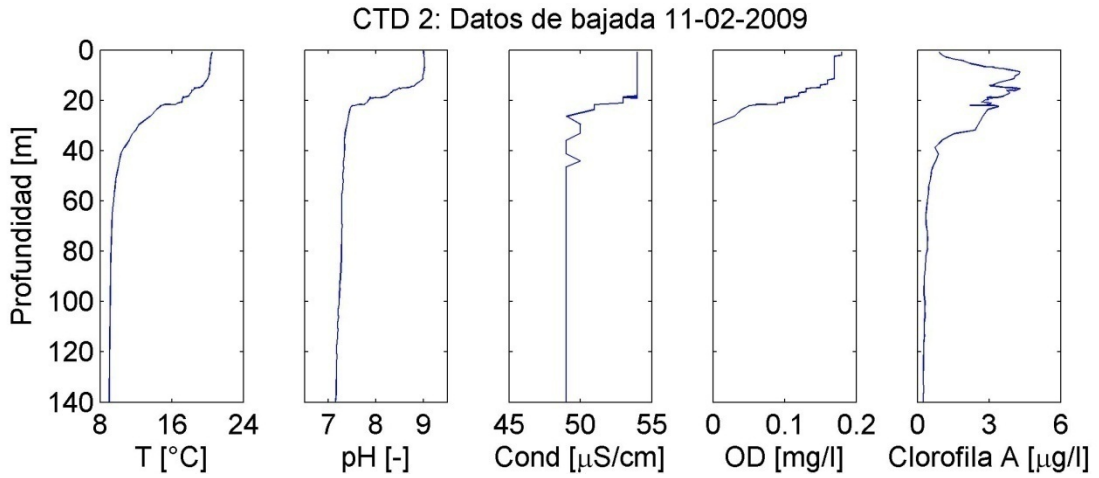


Figura A.21: Perfiles de bajada CTD 2, 11-02-2009

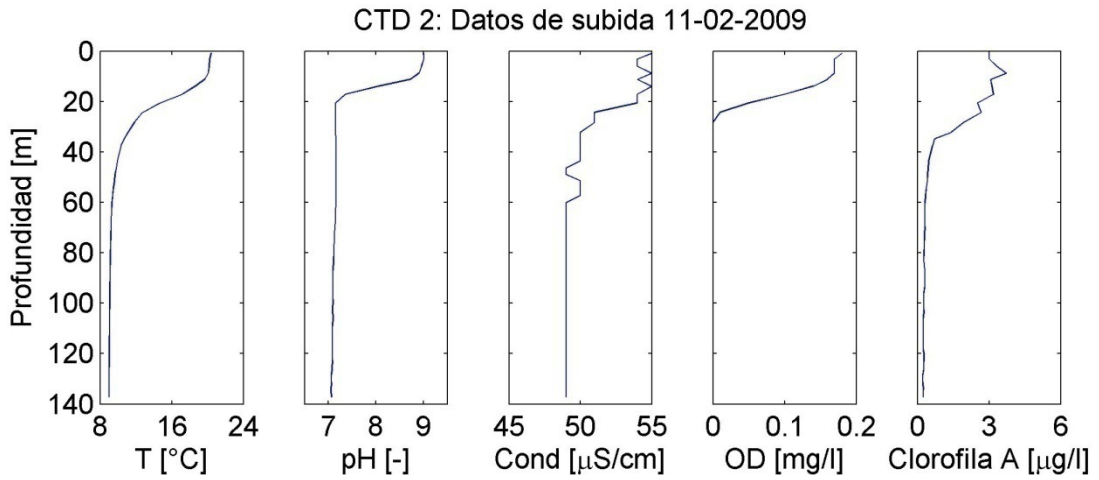


Figura A.22: Perfiles de subida CTD 2, 11-02-2009

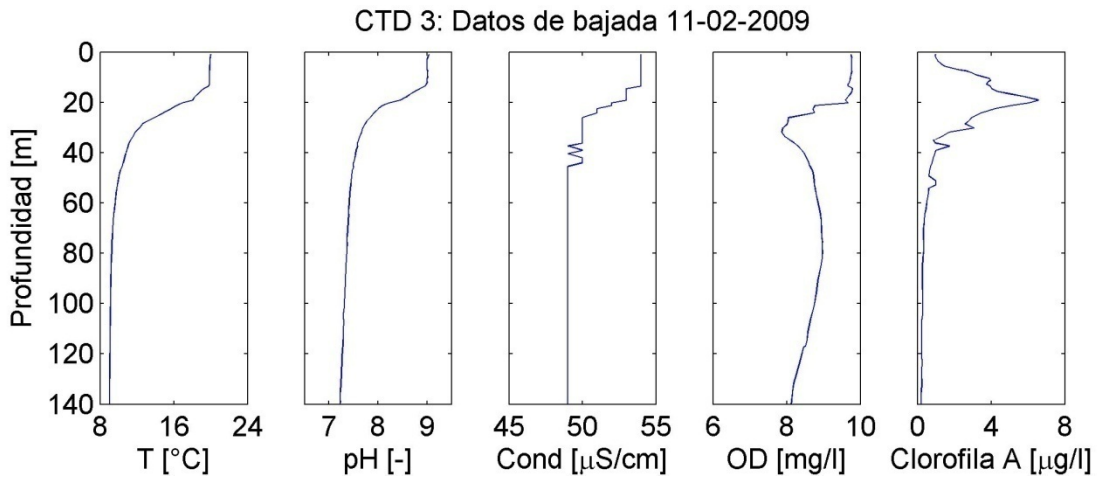


Figura A.23: Perfiles de bajada CTD 3, 11-02-2009

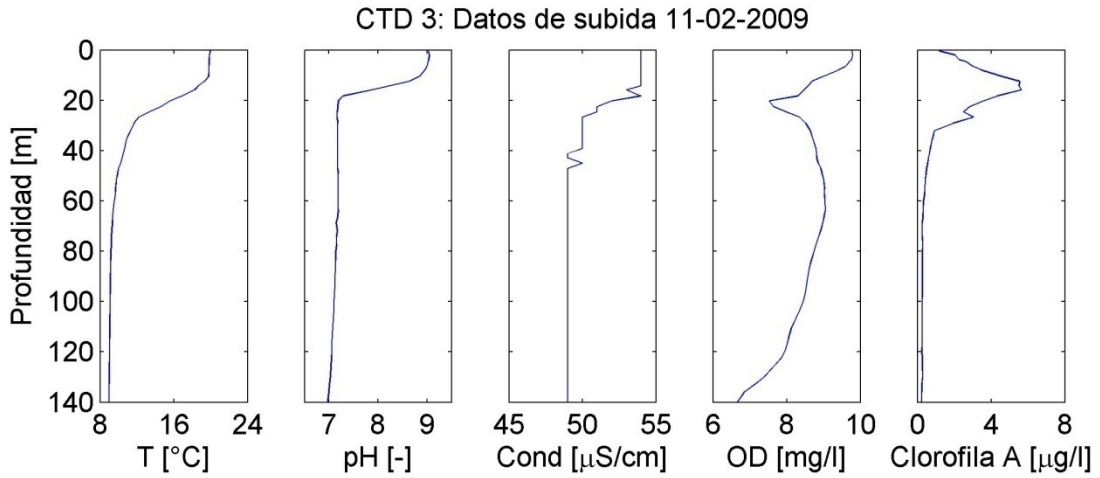


Figura A.24: Perfiles de subida CTD 3, 11-02-2009

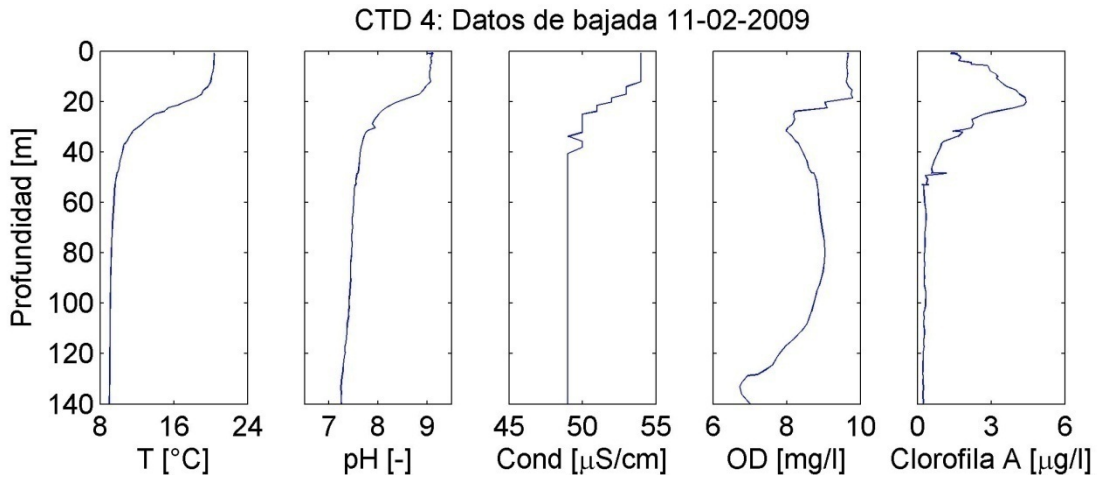


Figura A.25: Perfiles de bajada CTD 4, 11-02-2009

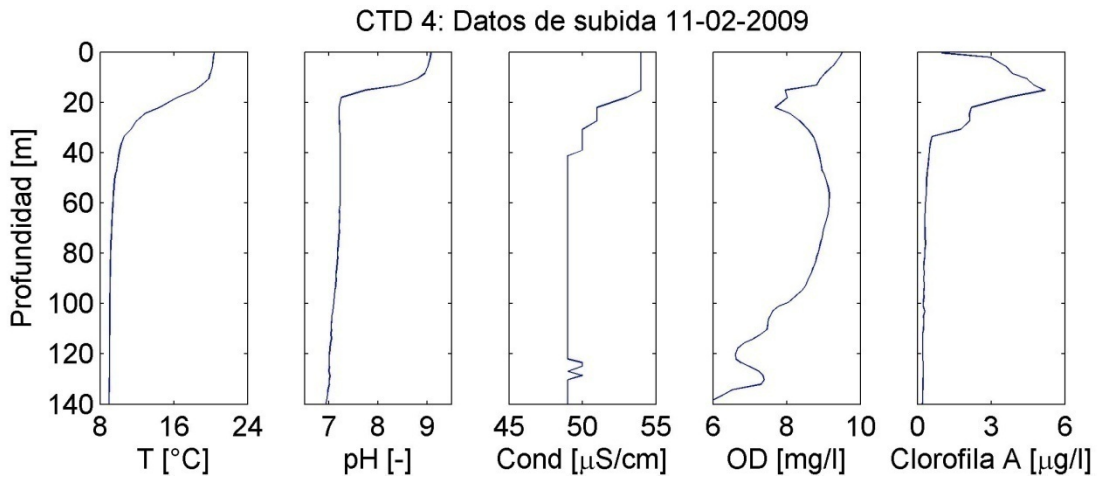


Figura A.26: Perfiles de subida CTD 4, 11-02-2009

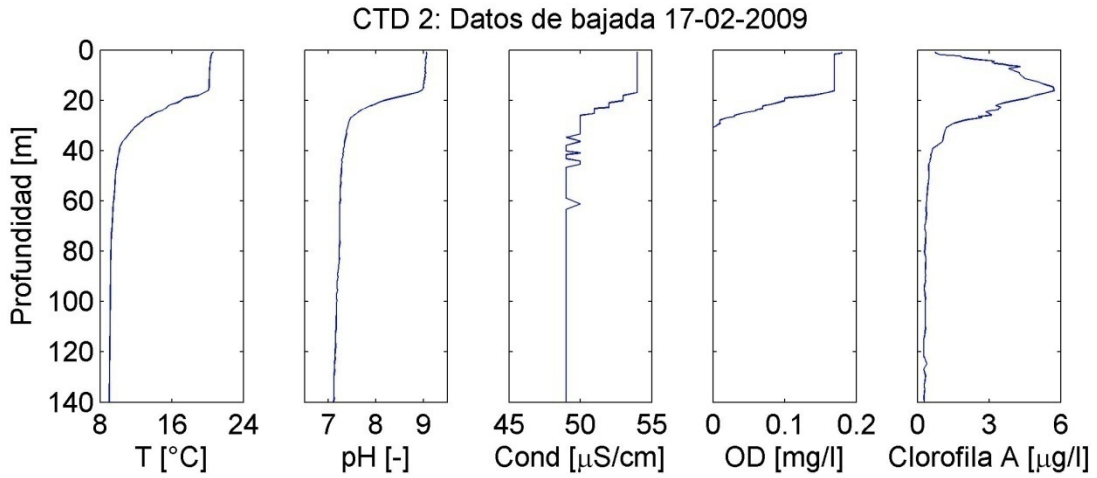


Figura A.27: Perfiles de bajada CTD 2, 17-02-2009

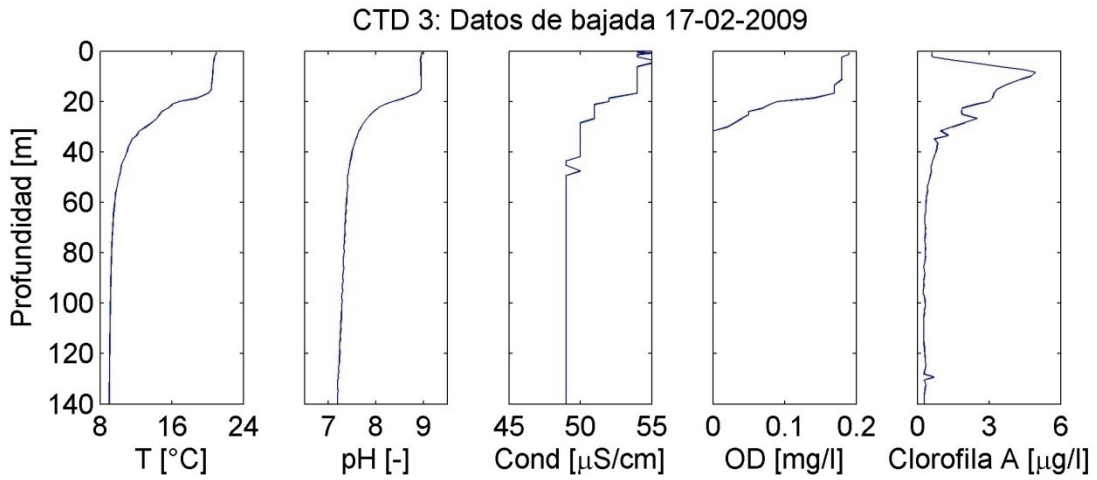


Figura A.28: Perfiles de bajada CTD 3, 17-02-2009

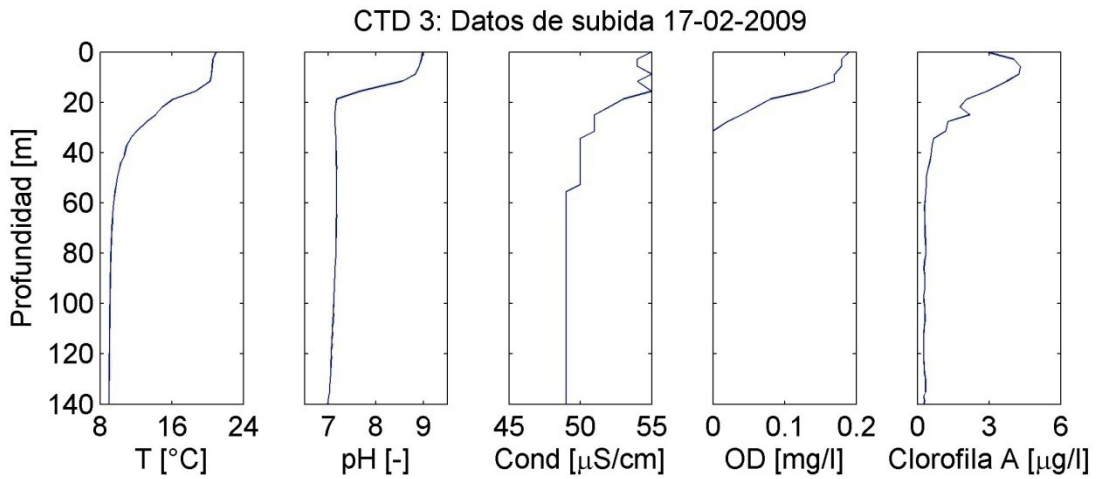


Figura A.29: Perfiles de subida CTD 3, 17-02-2009

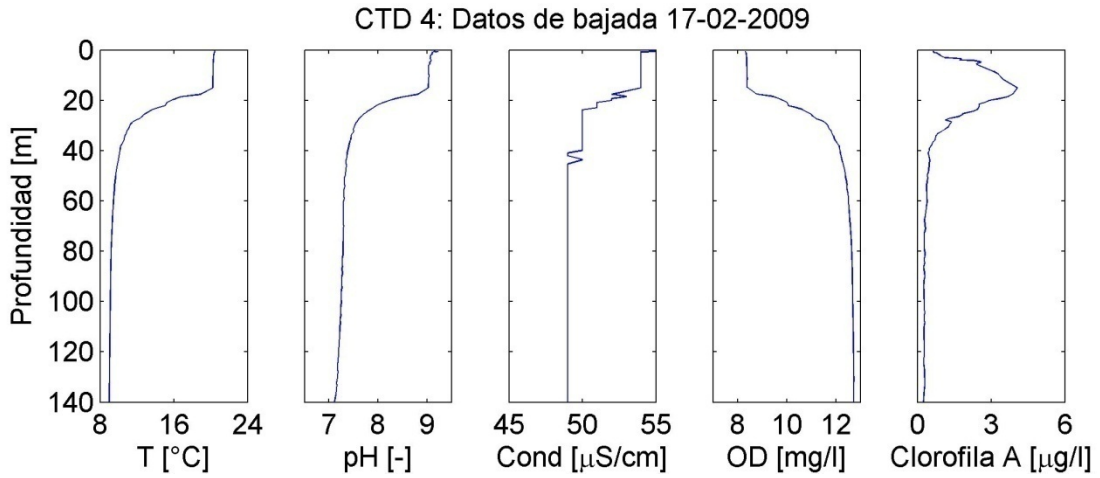


Figura A.30: Perfiles de bajada CTD 4, 17-02-2009

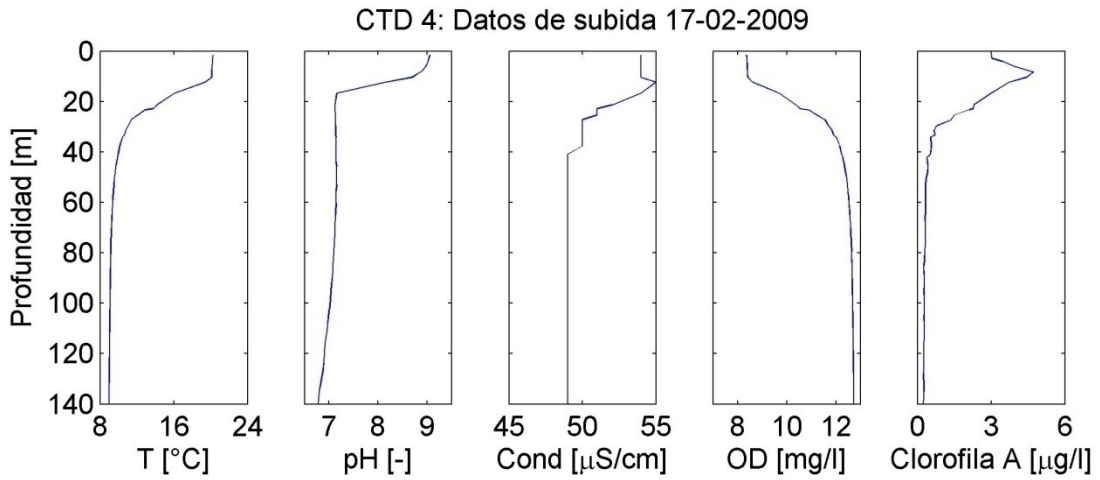


Figura A.31: Perfiles de subida CTD 4, 17-02-2009

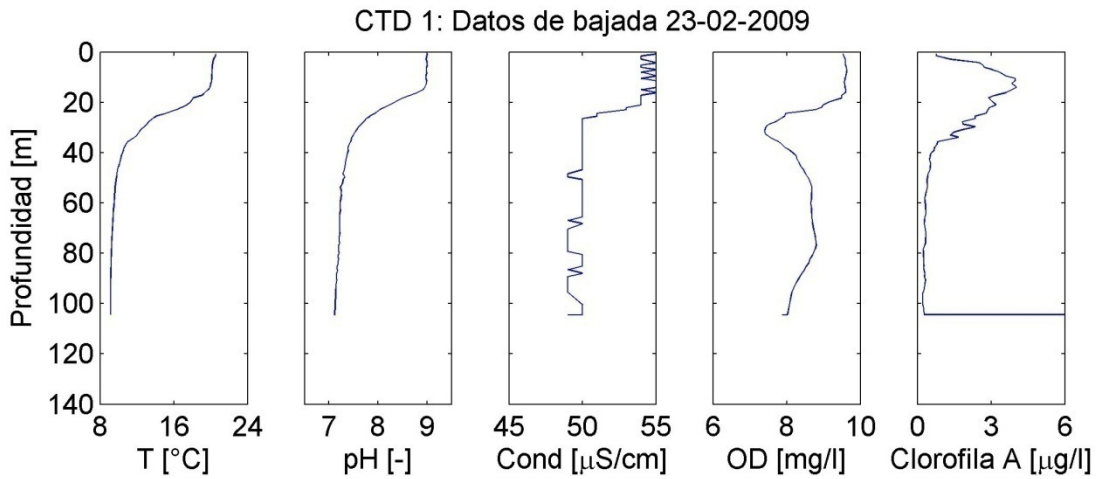


Figura A.32: Perfiles de bajada CTD 1, 23-02-2009

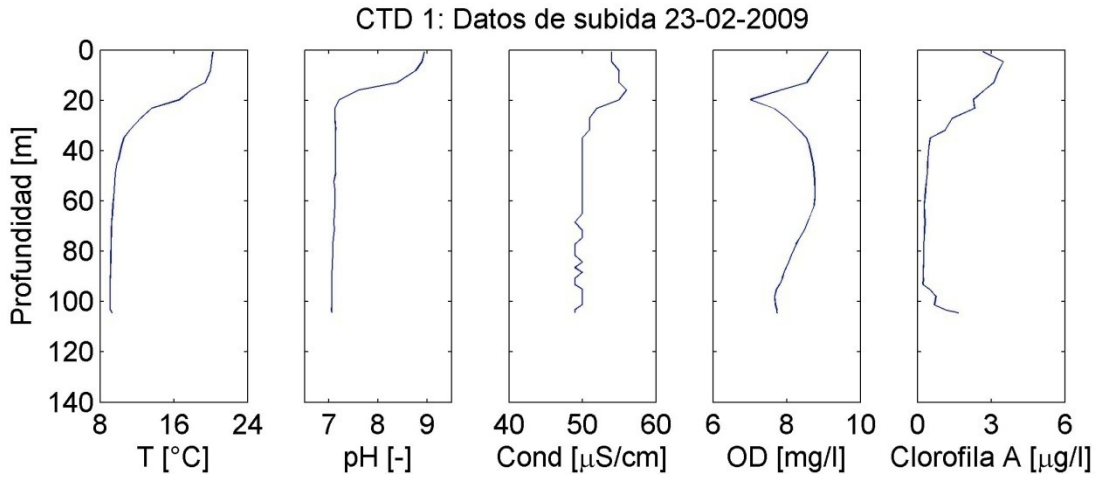


Figura A.33: Perfiles de subida CTD 1, 23-02-2009

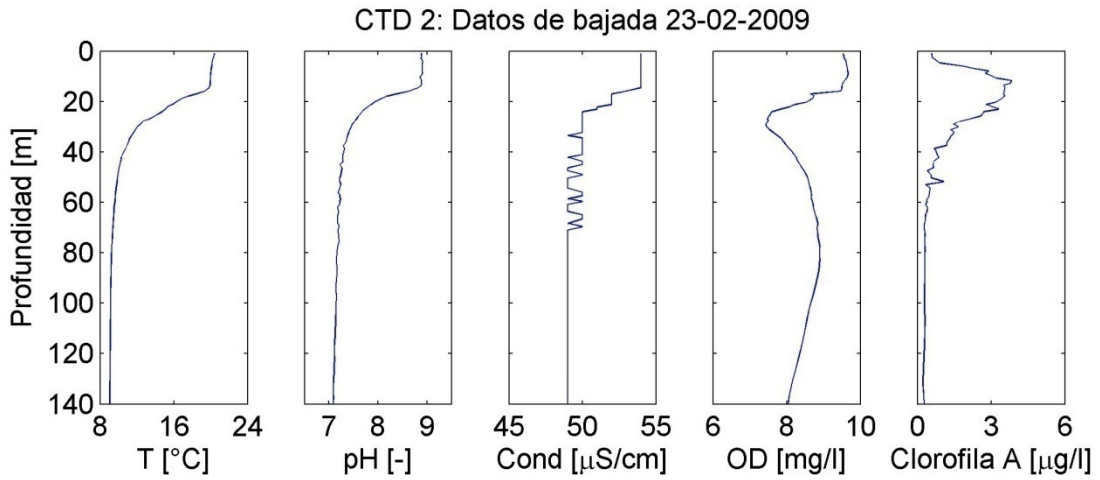


Figura A.34: Perfiles de bajada CTD 2, 23-02-2009

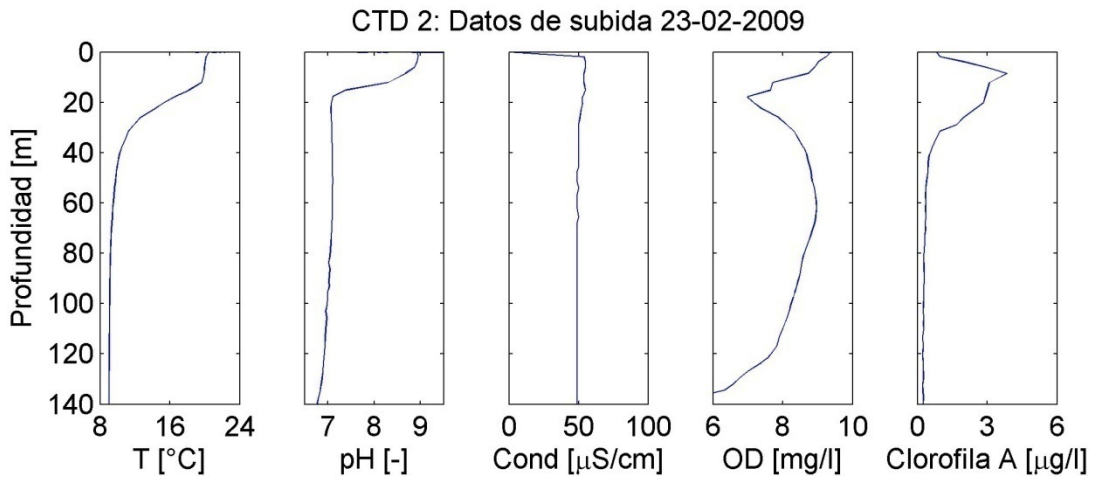


Figura A.35: Perfiles de subida CTD 2, 23-02-2009

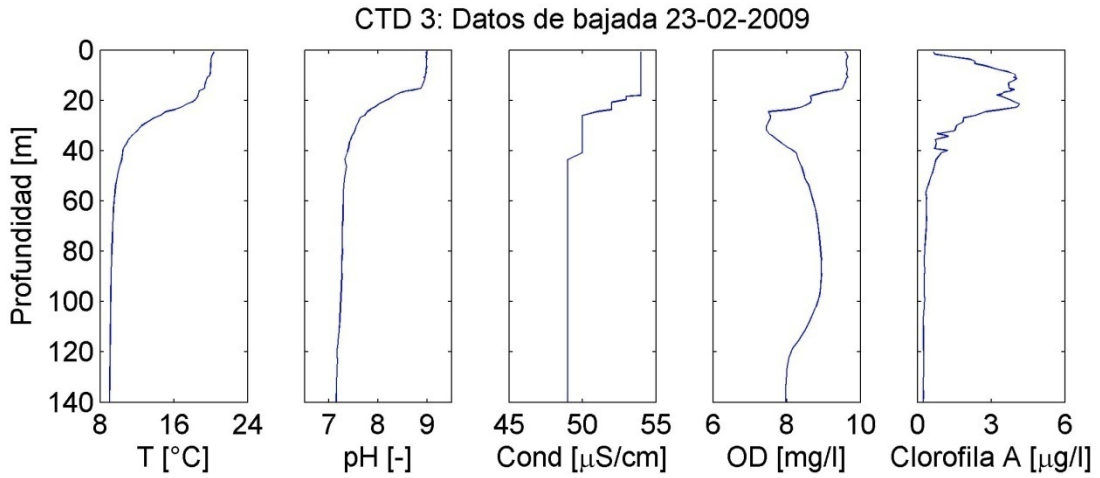


Figura A.36: Perfiles de bajada CTD 3, 23-02-2009

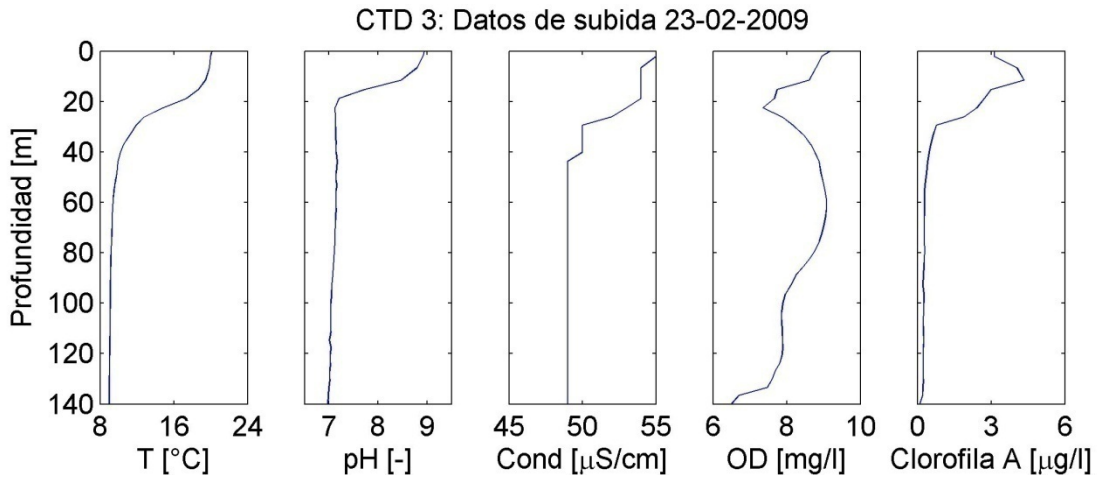


Figura A.37: Perfiles de subida CTD 3, 23-02-2009

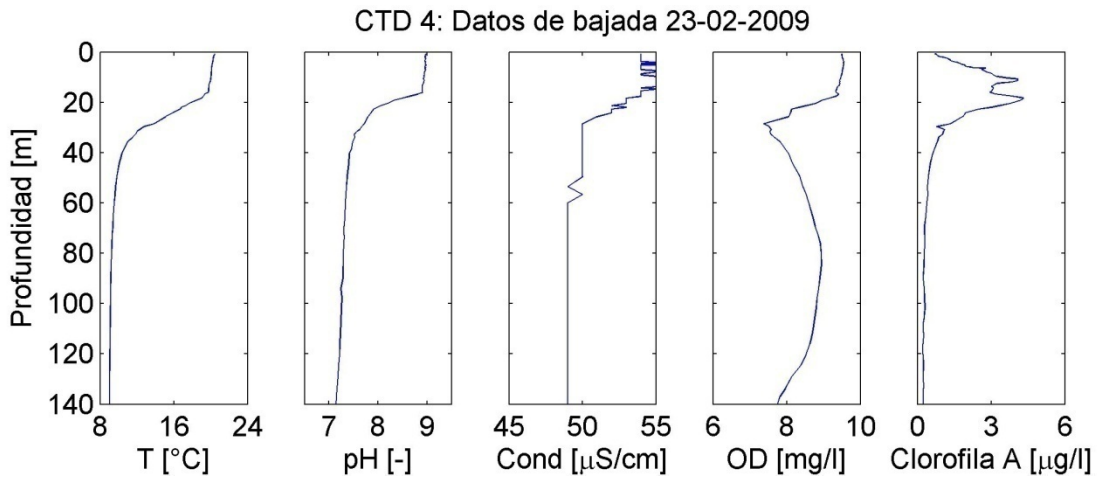


Figura A.38: Perfiles de bajada CTD 4, 23-02-2009

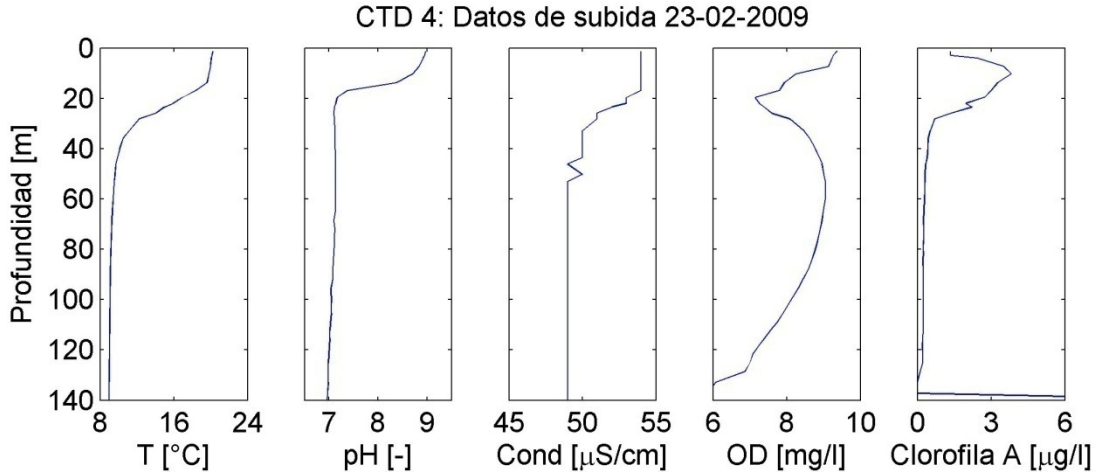


Figura A.39: Perfiles de subida CTD 4, 23-02-2009

B. Algoritmo para el análisis modal

A continuación se presenta el algoritmo implementado en cada una de las rutinas confeccionadas para la aplicación del análisis modal al lago Villarrica.

B.1. Generar mallas horizontales

- Para formar las grillas horizontales, de elementos de $\Delta x \times \Delta y$, para ambas capas, se definen 3 matrices con las coordenadas planimétricas: una de $n_\eta \times m_\eta$ para los nodos $\tilde{\eta}$, otra de $n_u \times m_u$ para los nodos \tilde{u} y la última de $n_v \times m_v$ para los nodos \tilde{v} . La idea es que el contorno de la superficie del lago quede contenido en estas matrices con coordenadas planimétricas.
- Con las coordenadas del borde del lago, se crean 3 matrices con valores lógicos: 1 si el nodo está dentro del lago, 0 si está afuera, para los nodos $\tilde{\eta}$, \tilde{u} y \tilde{v} de la capa superficial.
- Con la batimetría del lago, se interpola el veril que define el borde de la interfaz de densidad, y se crean 3 matrices con valores lógicos: 1 si el nodo está dentro del contorno de la termoclina, 0 si está afuera, para los nodos $\tilde{\eta}$, \tilde{u} y \tilde{v} de la capa profunda.
- Se eliminan los nodos $\tilde{\eta}_1$ y $\tilde{\eta}_2$ que no tengan nodos de velocidad en sus caras Norte, Sur, Oeste o Este dentro de los contornos respectivos.
- Se eliminan los nodos $\tilde{\eta}_1$ que estén aislados.
- Se eliminan los nodos $\tilde{\eta}_2$ que no tengan nodos $\tilde{\eta}_1$ sobre ellos.
- Se generan 3 matrices donde se enumeran los nodos $\tilde{\eta}$, \tilde{u} y \tilde{v} para ambas capas, en algún orden específico, por ejemplo: de Este a Oeste y luego de Sur a Norte.
- Se generan 6 matrices de “identificación”. Cada fila está asociada a un nodo en particular, y en las columnas se colocan los números de los nodos adyacentes, es decir, para los nodos $\tilde{\eta}_1$ se tienen 8 columnas: 4 para los nodos de velocidad adyacentes de la primera capa (\tilde{u}_{1_e} , \tilde{u}_{1_w} , \tilde{v}_{1_n} y \tilde{v}_{1_s}) y 4 para los nodos de velocidad de la capa profunda (\tilde{u}_{2_e} , \tilde{u}_{2_w} , \tilde{v}_{2_n} y \tilde{v}_{2_s}). Para los nodos $\tilde{\eta}_2$, se tienen 4 columnas, asociadas a la numeración de los nodos de velocidad adyacentes de la capa profunda. Para los nodos \tilde{u}_1 , se tienen 6 columnas: las dos primeras asociadas a los nodos $\tilde{\eta}_{1_e}$ y $\tilde{\eta}_{1_w}$, y las 4 últimas, a la numeración de los nodos \tilde{v}_1 que rodean al nodo \tilde{u}_1 , para aplicar la discretización del

término de Coriolis. Para los nodos \tilde{u}_2 se contemplan 8 columnas: las dos primeras asociadas a la numeración de los nodos $\tilde{\eta}_{1E}$ y $\tilde{\eta}_{1W}$, las dos siguientes asociadas a los nodos $\tilde{\eta}_{2E}$ y $\tilde{\eta}_{2W}$, y las 4 últimas corresponden a los nodos de velocidad \tilde{v}_2 que rodean al nodo \tilde{u}_2 , para aplicar la discretización del factor de Coriolis. Un esquema similar se utiliza en la formación de las matrices de “identificación” para los nodos \tilde{v}_1 y \tilde{v}_2 , respectivamente.

- La ventaja de estas matrices de “identificación” es que permiten discretizar cualquier cuerpo de agua estratificado en dos capas, independiente de su forma y batimetría.
- Identificación de las condiciones de borde: usando las matrices de “identificación” y las matrices lógicas descritas anteriormente, se crean 4 vectores que indican cuáles son los nodos \tilde{u} y \tilde{v} que corresponden a una condición de borde, es decir, a una condición de flujo nulo, para ambas capas.
- Imposición de las condiciones de borde: se generan nuevas matrices de “identificación”, en las cuales se eliminan todos los nodos \tilde{u} y \tilde{v} que corresponden a una condición de borde de flujo nulo, de manera de no incluirlos en la formación de las matrices **K** y **M**.

B.2. Generar batimetría en los nodos $\tilde{\eta}$

- A partir de la batimetría, se interpolan los valores de la profundidad del lago en los nodos $\tilde{\eta}$, generando una matriz H de $n_{\eta} \times m_{\eta}$. Se les asigna una profundidad nula a los nodos $\tilde{\eta}$ que están fuera del contorno del lago.
- Se genera una matriz H_1 asociada a la batimetría de la capa superficial. Si la profundidad en un nodo es mayor al espesor de la capa superficial h_1 , se impone el valor h_1 . En caso contrario, se mantiene el valor de la batimetría.
- Se genera una matriz H_2 asociada a la batimetría de la profunda, restando el espesor de la capa superficial a la batimetría del lago.
- Se generan 6 matrices de “profundidad”: para los nodos $\tilde{\eta}_1$ dentro del lago se tiene una matriz de 2 columnas donde las filas corresponden a los nodos, la primera y la segunda columna almacenan los espesores de la capa superficial y profunda en dicho nodo, respectivamente. Para los nodos $\tilde{\eta}_2$, \tilde{u}_1 , \tilde{v}_1 , \tilde{u}_2 y \tilde{v}_2 dentro de la capa respectiva, se generan vectores columnas con el espesor de la capa a la que pertenecen. Para los nodos de velocidad de ambas capas, la profundidad se define como la mínima entre los dos nodos $\tilde{\eta}$ adyacentes. En el caso de los nodos de velocidad ubicados en el borde, la profundidad está dada por el valor en el nodo $\tilde{\eta}$ que está dentro del contorno.
- Imposición de las condiciones de borde: se generan nuevas matrices de “profundidad”, en las cuales se eliminan todos los nodos \tilde{u} y \tilde{v} que corresponden a una condición de borde de flujo nulo, de manera de no incluirlos en la formación de las matrices **K** y **M**.

B.3. Calcular factor de Coriolis en los nodos de velocidad \tilde{u} y \tilde{v}

- A partir de las matrices de “identificación” y de las de “profundidad”, se generan 4 vectores columna (asociados a \tilde{u}_1 , \tilde{v}_1 , \tilde{u}_2 y \tilde{v}_2 , respectivamente) donde se almacena el valor del parámetro de Coriolis de acuerdo la discretización propuesta en las ecs (3.19) y (3.20).
- Se generan 4 nuevos vectores columnas, en los cuales se eliminan todos los nodos \tilde{u} y \tilde{v} que corresponden a una condición de borde de flujo nulo, de manera de no incluirlos en la formación de las matrices **K** y **M**.

B.4. Armar matrices \mathbf{K} y \mathbf{M}

- Según la cantidad de filas de las matrices de “identificación” con nodos de condición de borde, se definen las dimensiones de las matrices \mathbf{K} y \mathbf{M} . Además, se definen los índices asociados al primer nodo $\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \tilde{u}_1, \tilde{v}_1, \tilde{u}_2$ y \tilde{v}_2 , respectivamente, para la ubicación de las variables dentro de las matrices.
- En caso de usar Matlab, es conveniente inicializar las matrices como tipo *sparse*, las cuales están llenas de ceros, pero no gastan memoria en el computador.
- De acuerdo al procedimiento explicado en la Sección 3.3, se arman la matrices \mathbf{K} y \mathbf{M} . Los elementos de estas matrices corresponden a los términos que acompañan a los valores nodales en las ecuaciones (3.13) a (3.18). Estos términos se calculan usando las matrices de “identificación” y de “profundidad”, y se colocan en la posición del nodo correspondiente dentro de la matrices \mathbf{K} y \mathbf{M} .
- Durante el armado de la matriz \mathbf{K} , se colocan los términos asociados a las ecuaciones para $\tilde{\eta}_1$ y $\tilde{\eta}_2$, y luego se eliminan las filas asociadas a las condiciones de borde de flujo nulo. A continuación se almacenan los términos asociados a las ecuaciones para las velocidades $\tilde{u}_1, \tilde{v}_1, \tilde{u}_2$ y \tilde{v}_2 , y finalmente se eliminan las columnas correspondientes a las condiciones de borde de flujo nulo.
- Para el armado de la matriz \mathbf{M} , es conveniente utilizar directamente las matrices de “identificación” y de “profundidad” donde ya se han eliminado los nodos correspondientes a las condiciones de borde de flujo nulo.

B.5. Resolver problema de valores y vectores propios generalizado

- Se resuelve el problema de valores y vectores propios generalizado, usando algún algoritmo apropiado. Se debe verificar que la parte imaginaria de los valores propios sea cero, para asegurar que la matriz \mathbf{K} sea Hermitiana.
- Se verifica que los vectores propios sean de norma unitaria y luego se normalizan usando el factor de normalización $\tilde{e}^{(r)}$.
- Dado que las variables de interés están contenidas en el vector de estado $\tilde{\xi}$, es conveniente crear 6 matrices a partir de las matrices con valores lógicos definidas en la generación de las grillas horizontales, en las cuales se almacenen los valores nodales de las variables $\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \tilde{u}_1, \tilde{v}_1, \tilde{u}_2$ y \tilde{v}_2 . De esta forma, es más fácil la visualización de la estructura espacial de los modos normales de oscilación y posterior cálculo de la respuesta forzada del sistema.

C. Evolución temporal de los modos normales de oscilación para el mes de marzo

En las Figuras C.1 a C.3 se presenta la evolución temporal de cada modo para distintas fracciones de su período, considerando un forzante externo nulo y amplitud inicial $\tilde{a}|_{t=0} = 1$, para los datos de marzo.

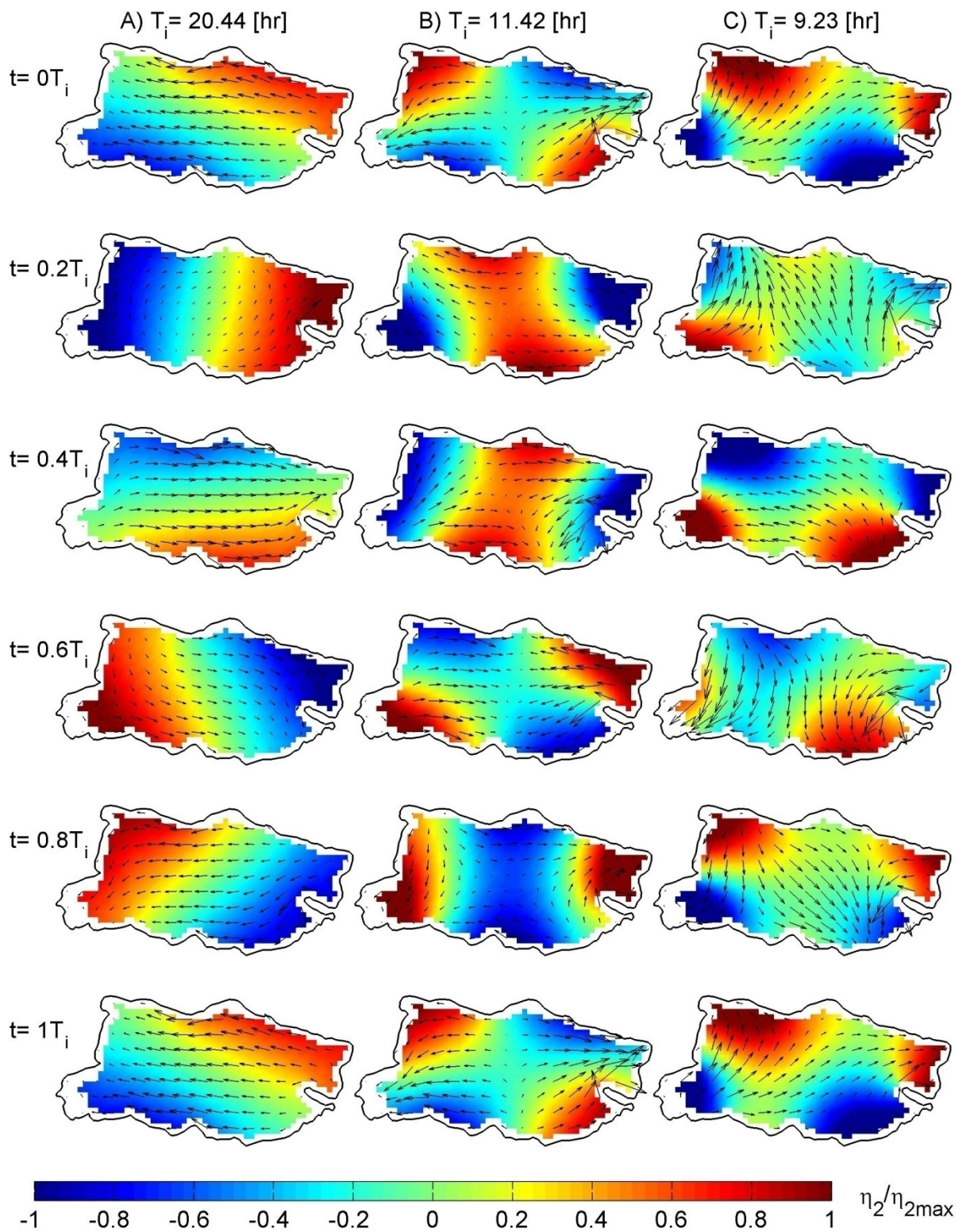


Figura C.1: Evolución temporal de los modos normales A), B) y C) de período sub-diario para el lago Villarrica, para marzo 2009. Cada columna corresponde a la evolución de un modo, considerando las fracciones del período mostradas en cada fila. La escala de colores corresponde a la elevación normalizada de la termoclina.

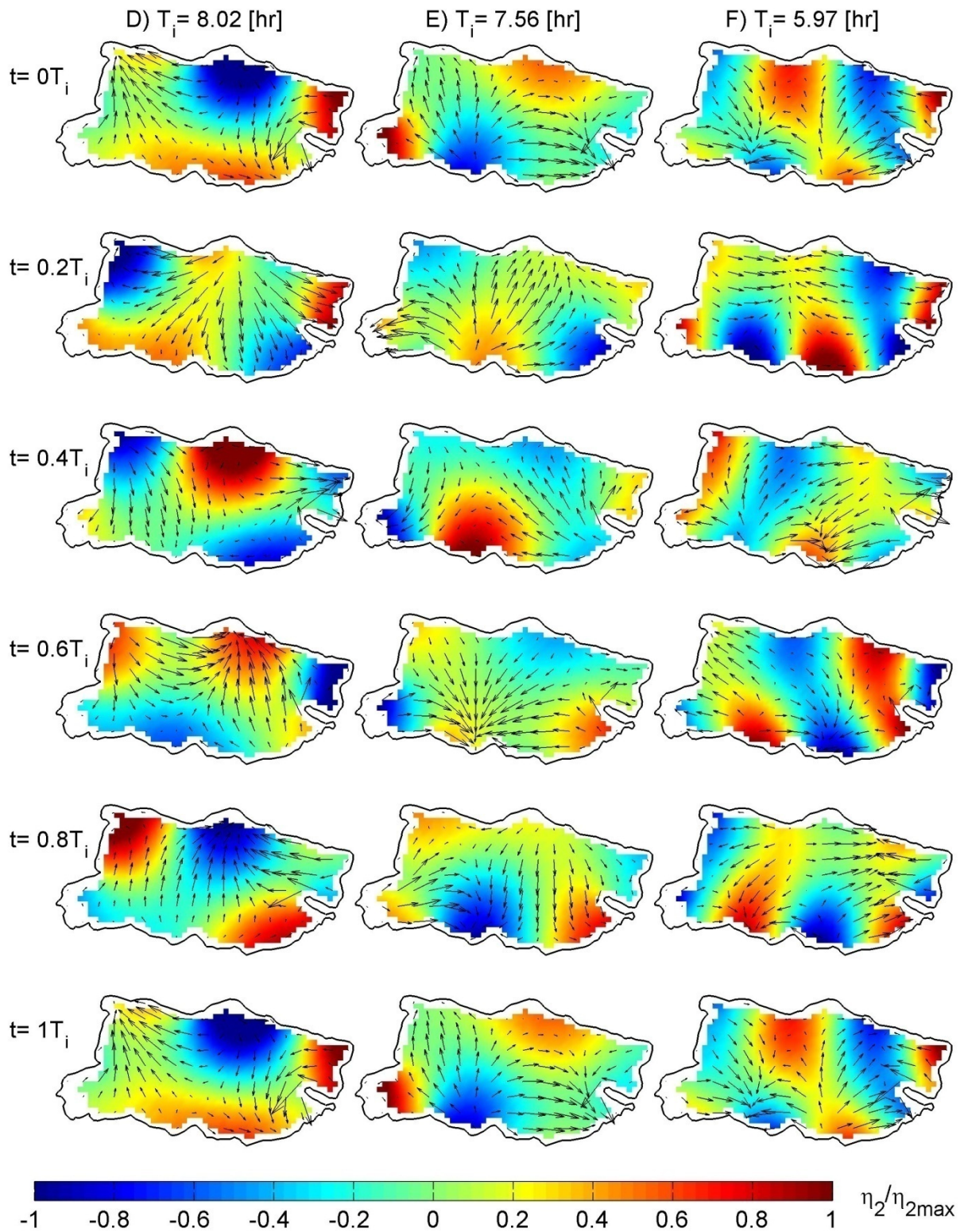


Figura C.2: Evolución temporal de los modos normales D), E) y F) de período sub-diario para el lago Villarrica, para marzo 2009. Cada columna corresponde a la evolución de un modo, considerando las fracciones del período mostradas en cada fila. La escala de colores corresponde a la elevación normalizada de la termoclina.

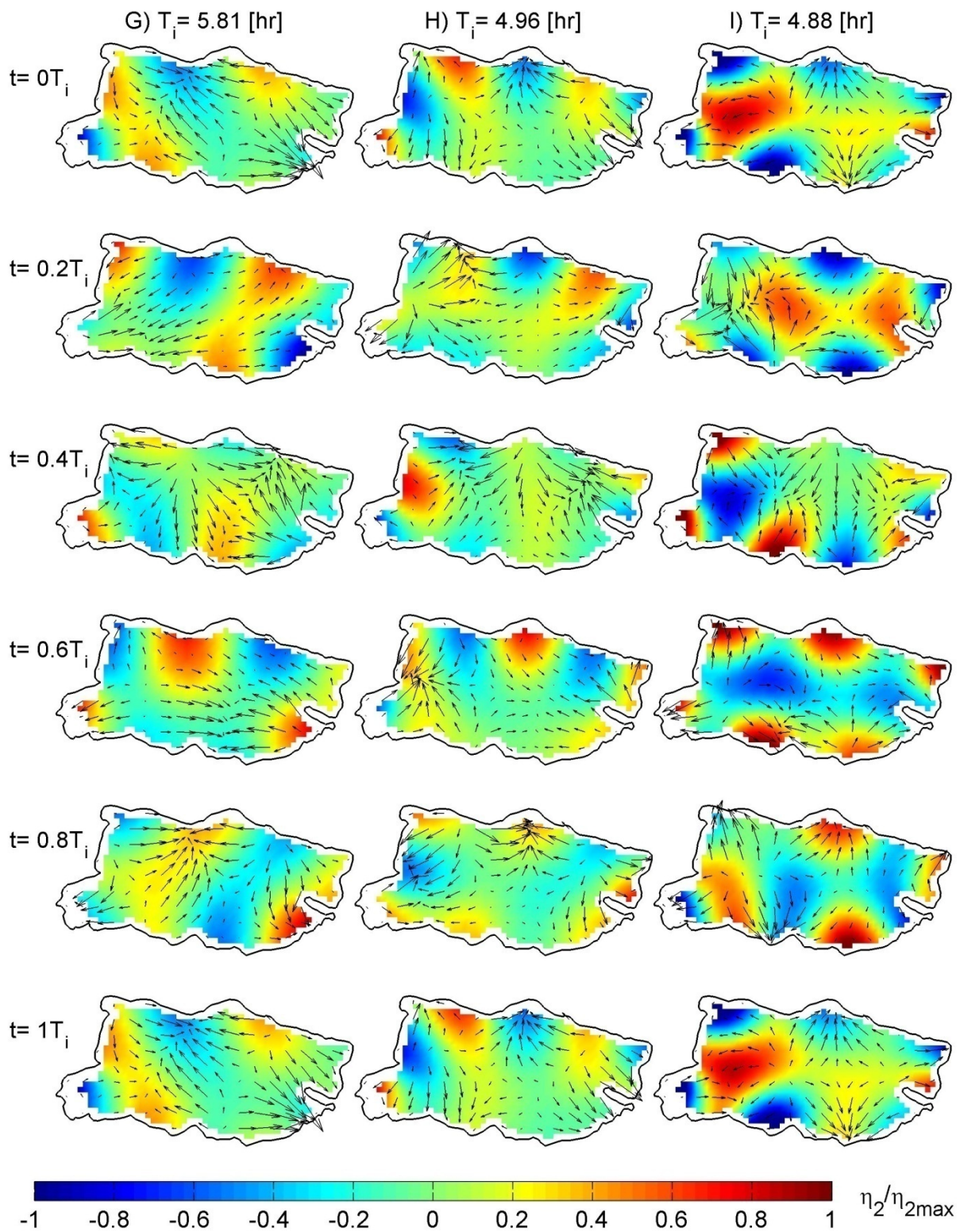


Figura C.3: Evolución temporal de los modos normales G), H) e I) de período sub-diario para el lago Villarrica, para marzo 2009. Cada columna corresponde a la evolución de un modo, considerando las fracciones del período mostradas en cada fila. La escala de colores corresponde a la elevación normalizada de la termoclina.