



**UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL**

**ASIGNACIÓN DE ÁRBITROS PARA UN CAMPEONATO DE
FÚTBOL MEDIANTE EL USO DE PROGRAMACIÓN
MATEMÁTICA**

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER
EN GESTIÓN DE OPERACIONES**

**MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL
INDUSTRIAL**

FERNANDO ESTEBAN ALARCÓN LORCA

PROFESOR GUÍA:

SR. GUILLERMO DURÁN MAGGIOLO

MIEMBROS DE LA COMISIÓN EVALUADORA:

SR. PABLO REY SOSA

SR. ANDRÉS WEINTRAUB POHORILLE

SR. MARIO GUAJARDO ANDRADES

SANTIAGO DE CHILE

MAYO 2009

“Intenta no ocupar tu vida en odiar y tener miedo”

(Stendhal, Lucien Leuwen)

AGRADECIMIENTOS

Al terminar esta importante etapa de mi vida quisiera agradecer a todas las personas que directa o indirectamente contribuyeron en mi ingreso y/o acompañaron mi paso por la universidad.

A mis padres, por siempre haberse preocupado de entregarme una educación de excelencia y apoyarme en las decisiones que tuve que tomar a lo largo de este camino.

A mis amigos que conocí en la universidad, por todos los gratos momentos que pasamos juntos. A mis amigos que conocí en el colegio y en el grupo scout, por todo lo aprendido y vivido con ellos. A todos mis amigos con los que semana a semana comparto la pasión por el fútbol, ya sea en el estadio, en una cancha o alrededor de una mesa.

A Consuelo, por darme el cariño día a día y ser mi compañera fiel este tiempo que llevamos juntos.

A mis profesores del colegio y de la universidad, por darme la confianza para superar los obstáculos que aparecieron y entregarme las armas para enfrentar de la mejor manera posible los que vendrán. A los miembros de la comisión evaluadora de la tesis, por su gran aporte en cada uno de sus comentarios.

A mis compañeros de trabajo, por hacer que el día esté lleno de aprendizajes.

A todos quienes tuvieron la disposición de escuchar y hacer posible mi proyecto de tesis. En particular a Salvador Imperatore y Harold-Mayne Nicholls.

RESUMEN

La gestión en deportes es una creciente y muy fértil área para aplicaciones de Gestión de Operaciones. Dentro de una liga deportiva existen múltiples factores económicos y logísticos que la transforman en un interesante elemento de estudio. Hasta la fecha, los investigadores de esta disciplina, conocida mundialmente como *Sports Scheduling*, se han centrado principalmente en resolver el problema de la programación de partidos o *fixtures* considerando diversas condiciones, que lo suelen convertir en un problema combinatorial de difícil solución. Estas condiciones se refieren a conseguir mayores beneficios económicos tanto para los equipos participantes como para las entidades organizadoras, mayor equidad deportiva, espectáculos más seguros y torneos más atractivos para el público, entre otros objetivos.

Entre las últimas y nuevas aplicaciones del *Sports Scheduling* se encuentra el problema conocido como TUP (*Tournament Umpire Problem*) o RAP (*Referee Assignment Problem*) que consiste en encontrar la mejor programación de los árbitros para un *fixture* ya definido, considerando diversos factores. El problema se ha estudiado y/o aplicado en Brasil, Inglaterra y EE.UU. a deportes en particular. A pesar que en el torneo de fútbol profesional de Chile existen las condiciones favorables para implementar un sistema automático de asignación de árbitros, este proceso se realiza semanalmente de forma manual, lo que lo transforma en una de las situaciones que mayor desconfianza y problemas trae a lo largo del campeonato.

En Chile, desde el año 2005 a la fecha, el Centro de Gestión de Operaciones (CGO) del Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Chile elabora el *fixture* del campeonato de fútbol, tarea encargada por la Asociación Nacional de Fútbol Profesional (ANFP), con excelentes resultados. Se espera que a partir de un futuro cercano, el CGO también elabore la asignación de los árbitros al campeonato de fútbol nacional.

Este trabajo presenta un estudio del problema de asignación de árbitros a partidos de un campeonato de fútbol. El modelamiento matemático utilizado incorpora metas de partidos por dirigir y distancias por recorrer, además de novedosas restricciones que buscan hacer la asignación lo más justa y equitativa posible para todos los actores involucrados. El caso de estudio es el campeonato de fútbol chileno de primera división (Primera A). Se obtiene una solución óptima para el modelamiento en tiempos bastante razonables y que satisface todos los requerimientos impuestos. Comparada con la asignación manual realizada para el campeonato del año 2007, las pruebas realizadas presentan una mejora en los indicadores de equidad en la asignación de árbitros y de distancias por recorrer de hasta un 99%. Para su implementación, se diseña una herramienta computacional que permite asistir el proceso de asignación. Además, se propone un modelamiento alternativo y discuten futuras extensiones.

ÍNDICE

1.	INTRODUCCIÓN	8
1.1	Programación Deportiva (Sports Scheduling)	8
1.2	El Contexto	12
1.3	Objetivos del Trabajo	14
1.4	Metodología a Utilizar	15
2.	DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA	17
2.1	Estado del Arte	17
2.2	El Problema de Asignación de Árbitros.....	19
3.	DEFINICIÓN DE LOS REQUERIMIENTOS.....	23
4.	MODELAMIENTO DEL PROBLEMA	27
4.1	Conjuntos.....	27
4.2	Parámetros	28
4.3	Variables	29
4.4	Función Objetivo	29
4.5	Restricciones	29
5.	RESOLUCIÓN DEL MODELO	33
5.1	Definición de Valores para los Parámetros del Modelo.....	33
5.1.1	Parámetros de mínima y máxima cantidad de partidos a ser asignados por árbitro y por equipo.	33
5.1.2	Parámetros de mínima y máxima cantidad total de partidos a ser asignados por árbitro.	38
5.1.3	Parámetros de categoría de árbitros y mínima categoría de árbitro requerida por partidos.	39
5.1.4	Parámetro de máxima diferencia permitida entre un árbitro y otro de la distancia promedio por partido a recorrer.	41

5.1.5	Parámetro de meta de partidos a ser asignados para dirigir por árbitro. .	44
5.2	Resolución del Modelo Matemático	45
5.3	Resultados	45
5.4	Análisis de Sensibilidad	50
6.	VALIDACIÓN DE LA SOLUCIÓN	53
6.1	Instancia Alternativa.....	53
6.2	Potenciales Restricciones Adicionales.....	53
6.2.1	Restricción de mínima y/o máxima asignaciones de árbitros a equipos jugando de local y/o de visita.	53
6.2.2	Restricción de máxima diferencia permitida entre un árbitro y otro del tiempo promedio por partido a recorrer a lo largo del campeonato.....	55
6.2.3	Restricción de máxima cantidad de partidos de mayor nivel a dirigir por árbitro.	56
6.2.4	Restricción de características de los árbitros.....	57
6.3	Modelamiento Alternativo.....	57
6.3.1	Parámetros	59
6.3.2	Variables.....	60
6.3.3	Función Objetivo	60
6.3.4	Restricciones	61
7.	IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO	65
8.	CONCLUSIONES	70
9.	BIBLIOGRAFÍA	74
10.	GLOSARIO.....	76
11.	ANEXOS.....	77
11.1	Conjuntos de la instancia Ch2007 correspondiente al campeonato de fútbol chileno del año 2007.....	77

11.2	Total de asignaciones por árbitro por equipo el año 2007.	78
11.3	Parámetros de la instancia Ch2007 correspondiente al campeonato de fútbol chileno del año 2007.	86

1. INTRODUCCIÓN

En diversos sistemas que existen en la naturaleza y los creados por el ser humano, se pueden encontrar casos en que la Investigación de Operaciones ha sido utilizada para resolver problemas concretos de administración, organización y control. Sofisticados modelos matemáticos soportan sistemas de apoyo a la toma de decisiones de una gran cantidad de empresas u organizaciones gubernamentales en el mundo. La industria naviera, la aérea o la minera, son sólo algunas de las que han aprovechado los estudios en sus respectivas materias y con ello han hecho más eficiente sus operaciones. Sin embargo, hay ciertas áreas no convencionales en donde aún hay mucho campo por explorar. Una de ellas es el deporte.

1.1 Programación Deportiva (*Sports Scheduling*)

Los deportes, y en particular el fútbol, despiertan un especial interés en el mundo entero. La gran cantidad de personas y factores involucrados en un deporte hace que su gestión requiera cada vez más de criterios racionales. La disciplina que estudia el diseño eficiente de campeonatos o ligas deportivas¹ es conocida como *Sports Scheduling*. Esta disciplina se ha transformado, en los últimos 30 años, en una importante área de investigación dentro de la Investigación de Operaciones, cuyo interés sigue aumentando.

Desde que existen las competencias deportivas, ha existido la necesidad de programar sus partidos. A primera vista parece una tarea fácil, pero cuando requerimientos adicionales se van agregando, el problema se transforma en uno de muy difícil solución. Es así como el *Sports Scheduling* nace en respuesta a las inquietudes de los diseñadores de campeonatos deportivos quienes buscan, entre otras cosas, hacer la competencia más atractiva para el público, conseguir beneficios

¹ En lo sucesivo, será referido campeonato deportivo indistintamente como campeonato, competición, liga o torneo. En el Capítulo 10 se presenta un glosario de términos específicos utilizados en esta tesis.

económicos y evitar injusticias relacionadas con el sistema de campeonato que deciden y la asignación de árbitros que realizan.

Las competiciones involucran una serie de factores económicos y logísticos que son importantes a considerar para conseguir una programación atractiva y eficiente. Las organizaciones a cargo de la organización de campeonatos poco a poco se han ido interesando en contar con herramientas que les permitan programar la estructura de ellos rápidamente considerando todos y cada uno de estos factores. El primero de ellos, y una de las principales razones de este interés, es el marketing. Las ligas deportivas profesionales son un negocio de cifras gigantes en el mundo. El año 2008 en España, por ejemplo, el Real Madrid vendió sus derechos televisivos por cerca de US\$300 millones anuales a la cadena *MediaPro*. El mismo año, en Inglaterra, los clubes que militan en la *Premier League* (la liga de fútbol inglesa) se unieron y vendieron los derechos de todos sus partidos en 208 países recibiendo más de US\$2.700 millones por un año. En EE.UU. las cadenas televisivas han pagado más de US\$400 millones anuales para transmitir los partidos de la liga de béisbol. Tales sumas de dinero se justifican por las altas tasas de retorno que se pueden obtener siendo transmisores de este tipo de espectáculos. Un factor que puede resultar clave para ayudar a alcanzar dichas sumas de dinero es una programación atractiva de los partidos del campeonato en cuestión. Ninguna cadena televisiva o de radio que haya adquirido los derechos para transmitir querrá tener sólo partidos intrascendentes en fechas estelares o partidos importantes a mitad de semana que es cuando las personas generalmente tienen menos tiempo disponible para ver o asistir a un espectáculo deportivo. Por su parte, los clubes o instituciones patrocinantes no querrán ver cómo sus inversiones en jugadores, estadio e infraestructura resultan inútiles frente a una mala programación del torneo. Los hinchas, quienes son los que en última instancia aportan dinero cancelando su entrada a los espectáculos, también son afectados por una programación poco atractiva para ellos o en la cual sientan que el sistema de campeonato u orden de partidos es injusto para su equipo.

La seguridad del espectáculo también es un factor importante a considerar para la programación. Tanto en Chile como en otros países del mundo, hechos de violencia lamentables han ocurrido en las tribunas y cercanías de estadios entre hinchas de equipos rivales, o incluso, en la misma cancha donde se juegan los partidos hasta con jugadores involucrados. Existen partidos que requieren un mayor contingente policial para evitar desmanes y así asegurar la tranquilidad del público asistente. Sin embargo, la dotación policial disponible dependerá muchas veces de otras actividades que se estén realizando el mismo día y a la misma hora, y que también necesiten supervisión policial. Por ejemplo, para el equipo de fútbol chileno Coquimbo Unido, que hace de local en la ciudad de Coquimbo, no es conveniente ejercer su localía la semana en que se celebra la tradicional Fiesta de la Pampilla en la IV Región, pues no existiría el personal de seguridad suficiente, además que seguramente sería menor la cantidad de habitantes interesados en ir a ver el partido, lo que provocaría menos asistencia y, por lo tanto, menos recaudación. También se pueden dar casos en que por un tema de seguridad sea necesario separar, ya sea por tiempo o distancia, dos o más partidos que se jueguen en la misma fecha y que sean calificados como de *alto riesgo*². Los medios de transporte de una ciudad también se pueden ver colapsados, y con ello la integridad de los pasajeros en peligro, si coincide la hora y el día de un partido con la hora en que la mayoría de los ciudadanos sale de sus trabajos rumbo a sus casas.

Otro factor sumamente importante son las distancias a recorrer en los viajes de los árbitros o equipos a lo largo del campeonato. En el caso de Chile por ejemplo, se tienen casos de distancias de más de 3.000 kilómetros entre una ciudad y otra. Esto puede llegar a ser bastante perjudicial para un equipo o comisión arbitral que deba desplazarse un largo recorrido en una fecha y, a la siguiente, otro similar, en el sentido que tendrá menos tiempo para recuperarse físicamente después del agotador viaje. Por otro lado, si un mismo árbitro (equipo) dirige (juega) dos partidos

² Se entiende por partido de *alto riesgo* aquel que tiene alta probabilidad de tener consecuencias extradeportivas debido a la gran cantidad de hinchas que asistirían a ver el partido y/o su posible inadecuado comportamiento ya sea fuera como dentro del recinto deportivo en que se desarrollará el evento.

seguidos en dos ciudades relativamente cerca, éste podría preferir esperar la fecha de su segundo partido lejos de su lugar de origen con el consiguiente ahorro económico y menor desgaste físico producto de la reducción de viajes. Además, largos viajes a lo largo del año de comisiones arbitrales significan, en el total, menor tiempo disponible para ocupar en otras actividades tales como trabajos paralelos, familia, descanso, etc.

La infraestructura y disponibilidad de los estadios o recintos deportivos donde se lleven a cabo los partidos también juegan un rol importante. Hay partidos, que por la cantidad de público que se espera o por la ubicación del estadio del equipo que hace de local, deben jugarse en otro estadio que por supuesto debe estar disponible. Los clubes deben coordinar el uso de estos recintos si es que otro club o entidad quiera hacer uso de ellos, ya sea para partidos, conciertos u otros eventos.

Dentro de una competición generalmente existen equipos que son reconocidos como más fuertes, sea por la categoría de sus jugadores, por el gran capital que posee la institución que los patrocina, por su mejor rendimiento histórico o por la cantidad de seguidores que ostenta. Hay otros que pueden estar disputando otro campeonato de forma paralela y que por lo tanto no cuentan con los jugadores suficientes para enfrentar ambos torneos de la mejor manera. Una buena programación debe ser capaz de identificar estos tipos de equipos para calendarizar sus partidos de forma adecuada. También los partidos entre equipos fuertes deben ser identificados y programados adecuadamente. Los mismos jugadores pueden llegar a ser un factor a tomar en cuenta si, por ejemplo, las fechas de los partidos del campeonato coinciden con las de una selección nacional y hay convocados en uno o más equipos.

Por su parte, los árbitros también poseen características que deben ser identificadas: su experiencia, capacidad de diálogo, fortaleza mental, debilidad frente a una atmósfera hostil, lugar de origen o residencia, etc. También su indisponibilidad si es que son citados para dirigir partidos en otras ligas nacionales o en el extranjero.

Además de las ligas profesionales de los deportes más populares del mundo, existen también miles de ligas amateurs en distintos países que también necesitan programación. Cada una de ellas se diferencia no sólo en el deporte que se practica, sino también en los días en que se juega y en el género y edad de sus participantes. Surgen así, múltiples necesidades de acuerdo a la realidad en que se desarrolle la liga que las distingue entre ellas y hace muchas veces difícil su programación.

1.2 El Contexto

En partidos deportivos, es común ver a jugadores, entrenadores o hinchas de un equipo discutir con el árbitro cuando no están de acuerdo con alguno de sus cobros. Incluso, es común escuchar a jugadores o dirigentes deportivos quejándose del desempeño del árbitro después de un partido perdido. Esto va generando una tensión entre árbitros y equipos, incluidos jugadores, entrenadores, dirigentes e hinchas, que hace de la asignación de árbitros una de las tareas que mayor desconfianza y problemas trae a lo largo del campeonato. Las comisiones de designación arbitral suelen estar conformadas por expertos que evalúan de manera subjetiva las características de partidos y árbitros, realizando asignaciones que pueden ser interpretadas por algunos involucrados como poco transparentes.

El año 2007 en Italia se vivió uno de los escándalos más grandes en la historia de la asignaciones arbitrales cuando a uno de los equipos de fútbol más populares del país, la *Juventus*, se le quitaron sus últimos dos títulos nacionales (los de las temporadas 2004-05 y 2005-06) y fue obligado a jugar en la segunda división del campeonato luego de ser acusado de fraude deportivo por controlar, mediante sobornos, las actuaciones arbitrales. Afortunadamente en Chile no se han presentado escándalos de este tipo, sin embargo en los últimos campeonatos la designación de árbitros y su desempeño durante el partido ha sido duramente criticado tanto por equipos, prensa, hinchas y jugadores, entre otros³.

³ Algunas críticas publicadas en la prensa (entre paréntesis su mes y año de publicación): <http://www.cooperativa.cl/prontus_notas/site/artic/20040123/pags/20040123151504.html> (Ene-2004).

Dentro de la Asociación Nacional de Fútbol Profesional de Chile (ANFP) se encuentran distintas comisiones encargadas de velar por el buen funcionamiento del fútbol nacional en todas sus líneas. Una de ellas es la Comisión de Árbitros, entidad conformada por ex-árbitros profesionales, que se encarga de la asignación de los árbitros que dirigirán cada uno de los partidos de una fecha. Esta tarea se realiza semana a semana de forma manual lo que la transforma en un trabajo sumamente tedioso, difícil y muchas veces poco transparente. El tiempo invertido en ejecutar la tarea puede llegar a prolongarse por más de 2 horas. Por otro lado, la ANFP debe financiar los costos operacionales relacionados con los sueldos, viajes y estadías de las comisiones arbitrales, que están directamente relacionados con la categoría y cantidad de partidos dirigidos.

A partir del año 2005 a la fecha, la ANFP encarga al Centro de Gestión de Operaciones (CGO) del Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Chile la confección del *fixture* de la primera división o Primera A del torneo nacional con el fin de tener un campeonato más atractivo para el público y más justo y rentable para los clubes y la misma ANFP. Aumentos en la asistencia de público y en ganancias para los clubes en general, demuestran el éxito del uso de tecnologías de *management*⁴ en un escenario como el fútbol nacional. El año 2007 comienza a confeccionarse también el *fixture* para el torneo nacional de segunda división o Primera B, que junto al de Primera A conforman la categoría de fútbol profesional chileno. Los buenos resultados se repitieron en esta categoría.

<http://www.cooperativa.cl/prontus_nots/site/artic/20070608/pags/20070608145858.html> (Jun-2007).

<<http://www.terra.cl/deportes/index.cfm?accion=blog&idblog=5&idpost=1023&calendario=1>> (Dic-2007).

<<http://www.mepongodepie.com/2007/12/21/el-arbitro-de-la-final-del-domingo-sera-enrique-osses/>> (Dic-2007).

<http://www.latercera.cl/contenido/82_16498_9.shtml> (May-2008).

<<http://www.emol.com/noticias/deportes/detalle/detallenoticias.asp?idnoticia=325226>> (Oct-2008).

⁴ Son conocidas como *tecnologías de management* el conjunto de conocimientos aplicados para hacer un trabajo dentro de una organización. Se convierten en herramientas, basadas en el conocimiento teórico-práctico y desarrolladas a través de propuestas probadas, que generan modelos para ejecutar los trabajos en las organizaciones con el fin de ser más productivos en el día a día de sus operaciones.

Estos antecedentes y una propuesta concreta de parte de la Universidad de Chile, contribuyeron a que la ANFP estuviera dispuesta a evaluar la posibilidad de realizar la asignación de árbitros a partidos utilizando una herramienta computacional, basada en un modelo de programación matemática.

1.3 Objetivos del Trabajo

El problema que enfrenta la Comisión de Árbitros al intentar hacer la asignación para el campeonato de forma manual no es nada de simple. Condiciones geográficas, temporales, de disponibilidad y categoría, entre otras, impiden conseguir asignaciones en plazos reducidos de tiempo y que satisfagan a todos los actores involucrados.

El objetivo principal de esta tesis es desarrollar un modelo de programación matemática que resuelva el problema de asignación de árbitros para un campeonato de fútbol, en menores tiempos que los actuales, cumpliendo todas las restricciones que hoy se intentan imponer de forma manual e incorporando otras adicionales, haciendo de la asignación un proceso más ético y equilibrado.

Los objetivos específicos de la tesis son:

- Diseñar un modelo matemático que resuelva eficientemente, en términos operacionales y de equidad deportiva, el problema de asignación de árbitros a un campeonato de futbol.
- Construir una herramienta computacional fácil de utilizar, flexible y que permita apoyar a las personas que realizan la tarea de asignación de árbitros mediante la presentación de soluciones factibles e idealmente óptimas.

1.4 Metodología a Utilizar

El uso de una herramienta computacional basada en un modelo matemático en la toma de decisiones respecto a la asignación de árbitros se presenta como una excelente oportunidad para reducir considerablemente el tiempo que actualmente ocupan los encargados de realizar esta tarea y mejorar sus resultados. Sin embargo, para conseguir los objetivos deseados es necesario contar durante todo el proceso con el completo apoyo de las personas que actualmente realizan la tarea, para interpretar y representar de la mejor manera posible cada una de las condiciones que se imponen de forma manual e incorporarlas adecuadamente al modelo matemático.

La metodología a utilizar para resolver el problema será la siguiente⁵:

- **Definición del problema.** Se describe en detalle cuál es el problema general que enfrentan los encargados de asignar árbitros a partidos de un campeonato estándar. Se investiga y luego se especifica cuáles son los actuales requerimientos de la realidad nacional para el problema de la asignación de árbitros.
- **Construcción del modelo.** Se plantea un modelo matemático con los objetivos y restricciones identificadas.
- **Resolución del modelo.** Se definen los valores de los parámetros del modelo planteado, se resuelve y luego se realiza un análisis de sensibilidad para determinar cuales son los parámetros críticos de él.
- **Validación del modelo.** Se estudia la capacidad del modelo para resolver el problema ante distintas instancias y alternativas de decisión. Se analiza la

⁵ Esta metodología es la que presenta el libro Optimización y Modelos para la Gestión de Ortiz, Varas y Vera [12].

calidad de la solución y buscan enfoques alternativos de modelamiento al problema.

- **Implementación y control del modelo.** Validado el modelo, se diseña y construye una aplicación computacional que permita resolver el modelo para distintas instancias, obtener la(s) solución(es) y que sea una herramienta de apoyo a quienes serán los encargados de decidir la asignación de árbitros.

Este trabajo de tesis presenta un modelo matemático para resolver el problema de asignación de árbitros a un campeonato de fútbol y se estructura de la siguiente manera: En el Capítulo 2 se describe el problema general de asignación de árbitros. En el Capítulo 3 se describen los requerimientos específicos del caso de estudio considerado. En el Capítulo 4 presenta la formulación matemática del problema. En el Capítulo 5 se definen los parámetros del modelo, se resuelve y se presentan sus resultados. En el Capítulo 6 se valida la solución del problema y se propone un modelamiento alternativo. En el Capítulo 7 se detalla el funcionamiento de la herramienta computacional construida para asistir el proceso de asignación utilizando el modelo propuesto. Por último, en el Capítulo 8 se presentan las conclusiones del trabajo y proveen posibles futuras direcciones de investigación.

2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

2.1 Estado del Arte

Durante los últimos 30 años, investigadores han trabajado en el área de *Sports Scheduling* aplicando especialmente técnicas de optimización combinatorial a la programación de partidos y la determinación de cuándo un equipo está clasificado o eliminado de una fase de *playoffs* [15][16]. Recién el año 2001 Kelly Easton, George Nemhauser y Mike Trick [7] definen el *Traveling Tournament Problem (TTP)* que es considerado el problema estrella en el área y que consiste básicamente en diseñar una programación de partidos o *fixture* que minimice la distancia total recorrida por los equipos considerando ciertas restricciones. De ahí en más, se ha publicado un gran número de trabajos en la literatura y hay muchos grupos trabajando activamente tanto desde el punto de vista teórico como de las aplicaciones: Celso Ribeiro (Universidad Federal Fluminense), Martin Henz (Universidad de Singapur), Tomomi Matsui (Universidad de Tokio), Edmund Burke (Universidad de Nottingham), Jaime Gil (Universidad de Barcelona) y Guillermo Durán (Universidad de Chile), entre otros.

El problema de asignación de árbitros apareció en la literatura como tal por primera vez en el año 1991, cuando M. B. Wright [18] propone un modelo simple para asignar los árbitros de la liga de cricket de Inglaterra. Varios años más tarde, el 2005, Jeffrey H. Dinitz y Douglas R. Stinson [3] publican “*On Assigning Referees to Tournament Schedules*” donde discuten el problema de asignación de árbitros a un torneo programado previamente utilizando determinados tipos de *Room Squares*⁶. El

⁶ Sea n un número impar con $n \geq 1$ y $n \neq 3, 5$. Sea S un conjunto de símbolos de tamaño $n+1$. Un Room Square de tamaño n basado en el conjunto S es un arreglo F de $n \times n$ con las siguientes propiedades:

1. Cada celda de F o está vacía o contiene un par desordenado de símbolos de S .
2. Cada símbolo $x \in S$ aparece una y sólo una vez en cada fila y una y sólo una vez en cada columna del arreglo F .
3. Cada par desordenado de símbolos aparece exactamente una vez en el arreglo F .

mismo año, Hakan Yildiz y Michael Trick [19] definieron un problema equivalente al *TTP* pero minimizando la distancia total a recorrer por los árbitros en vez de equipos y lo llamaron *Traveling Umpire Problem (TUP)*. En Julio de 2007, los investigadores brasileiros Alexandre Duarte y Celso Ribeiro Carneiro [4] le dieron otro enfoque al problema y definieron el *Referee Assignment Problem (RAP)* que se refiere a la eficiente asignación de árbitros a partidos de una liga deportiva minimizando la suma sobre todos los árbitros de la diferencia entre los partidos que se quiere que dirija y los efectivamente asignados. El mismo año, Jaime Gil y Julio Mora [9] proponen un interesante método de asignación que utiliza intervalos de confianza para representar la información considerando el grado de incertidumbre existente. En Septiembre de 2008, Mesut Yavuz, Umut H. İnan y Alpaslan Fiğlalı [11] publican "*Fair referee assignments for professional football leagues*" donde presentan y analizan un modelo que busca la justa asignación de árbitros considerando principalmente la frecuencia con que un árbitro es asignado a dirigir al mismo equipo.

Ligas de EE.UU. como la de básquetbol, fútbol y béisbol (NBA, NFL y MLB respectivamente) utilizan actualmente modelos matemáticos para la programación de sus *fixtures* [14]. En dicho país existe el grupo organizado *Sports Scheduling Group*⁷, compuesto por investigadores y especialistas del área, que se encarga de asistir a entidades deportivas en la confección de sus *fixtures*. En Sudamérica, el uso de técnicas de *Sports Scheduling* es bastante aislado. Además de la ya mencionada aplicación en el fútbol chileno para el diseño de los *fixtures*, existe un caso similar en el fútbol argentino en el año 1995 pero que no perduró en el tiempo [13] y un reciente caso el año pasado en la liga de voleibol argentina en donde se implementó un caso particular del *Traveling Tournament Problem* [1].

Si cada celda de F representa un partido entre dos de los $n+1$ equipos de un torneo, cada fila los n árbitros y cada columna las n fechas, un Room square representa una asignación de árbitros a un torneo.

⁷ <http://www.sports-scheduling.com/>

2.2 El Problema de Asignación de Árbitros

La programación de una fecha estará siempre sujeta a la disponibilidad de árbitros que a su vez también deben ser programados. El número de árbitros que dirige cada partido varía dependiendo del deporte o la división que se juegue. En deportes como el fútbol se necesita un árbitro y dos asistentes, mientras que el básquetbol requiere de dos o tres árbitros. Toda institución organizadora debería siempre velar por la transparencia de su competición y para ello intentará contar con los árbitros más aptos o capacitados para dirigir los partidos. Por su lado, los equipos preferirán siempre árbitros con quienes no se sientan perjudicados por sus cobros durante el partido. El tema aquí es sumamente delicado si se piensa que son los árbitros la máxima autoridad dentro del partido mismo y, como seres humanos, son susceptibles a cometer errores. Un mal cobro puede llegar a significar un campeonato para un equipo y con ello la alegría de muchos, pero también la tristeza o enojo de otros tantos.

Hay una serie de reglas y objetivos que se deberían tener en cuenta a la hora de asignar los árbitros a una competición. Es evidente que mientras más alta sea la división o serie, ésta requerirá árbitros de mejor nivel y/o experiencia para dirigir sus partidos. Existen restricciones de tiempo y espacio para árbitros que deban dirigir más de un partido al día en distintas localidades⁸. Especialmente en ligas amateurs o universitarias, se puede dar el caso que un árbitro sea a la vez también jugador de ésta, lo que le impediría dirigir un partido donde juegue el equipo al cual pertenece. Es justamente en este tipo de ligas donde generalmente el problema de la asignación de árbitros es más difícil pues se juega una gran cantidad de partidos un mismo día y el número de árbitros es limitado⁹. Para dar una idea de la complejidad del problema, para un campeonato de 6 equipos participantes y 4 árbitros disponibles para dirigir

⁸ Se refiere a localidad como el lugar geográfico donde se juegan partidos. Está relacionado con una ciudad.

⁹ Por ejemplo, en la liga MOSA (Monmouth & Ocean Countries Soccer Associations) de Nueva Jersey, niños y niñas de entre 8 a 18 años conforman 6 divisiones por edad y género con 6 equipos por división, totalizando 396 partidos cada domingo (<www.mosa.net>).

cada fecha, en que los equipos juegan todos contra todos en dos rondas (por lo que 3 de los 4 árbitros deben dirigir cada fecha) existen más de 63 billones de asignaciones posibles. En la Tabla N° 1 se puede apreciar el crecimiento exponencial que tiene el número de asignaciones posibles a medida que aumenta el tamaño¹⁰:

Tabla N° 1. Número de alternativas de asignación en función del número de equipos, el número de árbitros y el número de rondas que se juegan, considerando que cada partido requiere de un y sólo un árbitro.

N° de equipos	N° de árbitros	N° de ruedas	N° de configuraciones posibles
2	1	1	1
2	2	1	2
2	2	2	4
4	2	1	8
4	2	2	64
4	3	2	46.656
6	4	2	63.403.380.965.376
6	5	2	$6,05 \cdot 10^{17}$
10	6	2	$2,70 \cdot 10^{51}$
10	8	2	$7,81 \cdot 10^{68}$
21	16	2	$5,36 \cdot 10^{438}$

El *RAP* considera el problema de asignación de árbitros como el completar o llenar cada una de las llamadas posiciones referiles¹¹ de los partidos con alguno de los árbitros disponibles. Se asumen conocidos el *fixture* del campeonato, los estadios donde hará de local cada equipo y las fechas calendario de cada uno de los partidos. El enfoque es asignar árbitros a posiciones referiles vacías en vez de asignarlos a

¹⁰ Sea a el número de árbitros, e el número de equipos y r el número de ruedas, el número de configuraciones posibles, para el caso en que el número de equipos es par, queda representado por la siguiente fórmula:

$$\left\{ \binom{a}{e/2} \times \left[\binom{e}{2} \times \binom{e-1}{2} \times \binom{e-2}{2} \dots \times 1 \right] \right\}^{r \times (e-1)} .$$

Mientras, para el caso en que el número de equipos es impar, la siguiente fórmula lo representa:

$$\left\{ \binom{a}{(e-1)/2} \times \left[\binom{e-1}{2} \times \binom{e-1-1}{2} \times \binom{e-1-2}{2} \dots \times 1 \right] \right\}^{r \times e} .$$

¹¹ Se entiende por posición referil de un partido a un cupo para ser llenado por un árbitro que dirigirá dicho partido. Eventualmente, un mismo partido podría tener más de una posición referil.

partidos. Esto permite manejar la asignación en deportes que requieran diferente número de árbitros y/o en campeonatos donde se requiera diferente número de árbitros debido a la división o importancia del partido¹². Con este enfoque también es posible pre-asignar árbitros a ciertas posiciones referiles.

Sea $S = \{1, \dots, n\}$ el conjunto de posiciones referiles. Cada posición referil $j \in S$ debe ser llenada por un árbitro con un mínimo nivel de calificación q_j . Sea $R = \{1, \dots, m\}$ el conjunto de árbitros. Cada árbitro $i \in R$ tiene determinada calificación denotada por p_i , que restringe las posiciones referiles a las cuales puede ser asignado. Los árbitros eventualmente podrían declarar su indisponibilidad para dirigir ciertas fechas. Más aún, a cada árbitro $i \in R$ se le podría imponer un número M_i como el máximo número de partidos que tiene permitido dirigir y un número T_i como la meta de partidos que se espera dirija. En una misma fecha los viajes no están permitidos, es decir árbitros que tienen asignados más de un partido la misma fecha, deben ser asignados a partidos que se desarrollen en la misma localidad. Por supuesto que los árbitros que también son jugadores, tienen una restricción obvia: deben ser asignados en las mismas localidades donde juegan, pero no en sus partidos.

El *RAP* consiste en asignar árbitros a todas las posiciones referiles asociadas a partidos dentro de un intervalo de tiempo (típicamente un día o un fin de semana) minimizando la suma, sobre todos los árbitros, del valor absoluto de la diferencia entre la meta propuesta para cada árbitro y el número de posiciones efectivamente asignadas, satisfaciendo una serie de restricciones listadas a continuación:

- a. Todas las posiciones referiles deben ser llenadas para todos los partidos.
- b. Los árbitros no pueden ser asignados a dos posiciones referiles que tengan conflictos temporales ni tampoco a una posición que tenga conflicto temporal con un partido que el mismo árbitro juegue.

¹² En el fútbol, generalmente los partidos de primera división requieren de un cuarto árbitro que cumple funciones de supervisión y asistencia al árbitro principal o de reemplazo en caso de lesión.

- c. Los árbitros no pueden dirigir partidos en fechas que han declarado su indisponibilidad.
- d. Los árbitros deben poseer el mínimo nivel de calificación establecido para cada posición referil si se le quiere asignar a ella.
- e. Los árbitros no pueden dirigir más que la máxima cantidad de partidos establecida para ellos.
- f. Los árbitros no pueden dirigir en más de una localidad la misma fecha.

El *RAP* se considera una buena aproximación para el modelamiento que se busca. Sin embargo, hay algunas consideraciones propias del caso de estudio que deben ser incluidas. En el siguiente capítulo se realiza una completa definición de los requerimientos.

3. DEFINICIÓN DE LOS REQUERIMIENTOS

El modelo matemático que se busca para resolver el problema debe adaptarse completamente a la realidad chilena y ser capaz de incorporar todas las exigencias que la ANFP impone, además de sugerir otras que vayan en la misma línea.

El torneo de fútbol profesional chileno de Primera A consta de dos ruedas: Apertura y Clausura. En cada una de ellas, los equipos participantes se enfrentan primero en un sistema todos contra todos, denominada la fase regular, y luego en una fase de *playoffs*¹³. El campeonato se juega entre Febrero y Diciembre de cada año y lo conforman regularmente 20 equipos los que en su gran mayoría representan ciudades, colonias o universidades del país¹⁴. En cada fecha de la fase regular se juegan 10 partidos y cada uno de ellos debe ser dirigido por un árbitro principal y dos asistentes o guardalíneas¹⁵. Los partidos se juegan tanto los fines de semana como a mitad de semana y en la localidad que el equipo que hace de local disponga.

El total del plantel de árbitros capacitados para dirigir en Primera A como principales puede variar cada año pero es siempre cercano a los dieciséis. Entre ellos, hay algunos que tienen categoría FIFA lo que les permite dirigir en competencias internacionales cuando la Confederación Sudamericana de Fútbol (CONMEBOL) los designe. Cada fecha, el árbitro principal y sus asistentes deben viajar hasta la localidad en que se dispute el partido al que fueron asignados. Dada la geografía de nuestro país, estos viajes pueden implicar a veces miles de kilómetros y tanto ellos como la estadía deben ser reservados con la debida anticipación, lo que hace necesario contar con la programación a tiempo.

¹³ La fase de *playoffs* fue instaurada a partir del año 2002 y se ha jugado en la mayoría de los campeonatos siguientes.

¹⁴ En los últimos años, constantes cambios en el sistema de campeonato y castigos a equipos por incumplimiento en el pago a sus trabajadores, han hecho variar el número de equipos participantes.

¹⁵ En rigor, el partido también es dirigido por un cuarto árbitro. Sin embargo, dada su baja injerencia en el desarrollo de un partido, su asignación no involucra mayor relevancia.

Las condiciones consideradas para el modelamiento del problema en el contexto chileno son las siguientes:

- Restricciones básicas: Todos los partidos necesitan un y sólo un árbitro principal y dos asistentes para ser dirigidos.
- Restricciones temporales: Cada árbitro puede ser asignado como máximo una sola vez cada fecha.
- Restricciones de calificación de árbitros y nivel de partidos: Hay partidos que son considerados clásicos o de alta importancia por la expectativa que generan y que requieren ser dirigidos por árbitros de mayor experiencia o categoría. Luego, se establecen dentro de un mismo rango, números naturales que representan niveles de los partidos y categorías de los árbitros. En este rango, el número más bajo representa mejor nivel o mayor categoría, mientras que el número más alto representa peor nivel o menor categoría. El número de niveles y categorías a utilizar depende exclusivamente de la instancia que se considere. Además, dependiendo del número de partidos clasificados dentro del mejor nivel y de la frecuencia con que estén programados en una determinada cantidad consecutiva de fechas, se puede requerir que no se repitan los mismos árbitros en dos de este tipo de partidos consecutivos
- Restricciones de exigencia o disponibilidad: Un árbitro puede ser castigado e impedírsele dirigir algún partido o alguna fecha así como también se puede decidir que cierto árbitro deba dirigir determinado partido. Un árbitro también puede estar con licencia médica y por lo tanto no estar disponible para dirigir en cierta(s) fecha(s).

- Restricciones de equidad sobre los equipos: Hay un número mínimo y máximo de incidencias entre árbitro y equipos, y entre árbitros y equipos jugando de local o de visita. Además, un mismo árbitro no puede ser designado para dirigir a un mismo equipo si no ha pasado al menos una determinada cantidad de fechas desde que lo dirigió por última vez. Adicionalmente se puede considerar no asignar al mismo árbitro a partidos espejados¹⁶.
- Restricciones de equidad sobre los árbitros: Hay un número mínimo y máximo de asignaciones para un mismo árbitro durante todo el campeonato. Además, las distancias totales recorridas y el promedio de distancias recorridas por partido por los árbitros durante el campeonato deben ser similares y pueden estar acotadas. Actualmente a los árbitros se les paga por partidos dirigidos por lo que también la idea es tener predefinida una cantidad de partidos a dirigir como meta, que eventualmente podría depender de su categoría. Por último, puede existir una cantidad máxima de fechas en que los árbitros pueden permanecer sin dirigir.

Es importante mencionar que el modelo a proponer resuelve el problema de asignación tanto del árbitro principal como el de sus dos asistentes, siempre y cuando cada uno de ellos cumpla la misma función a lo largo de todo el torneo¹⁷. Otra consideración importante es que a pesar que en todas las restricciones se señala a los árbitros como una sola persona, la palabra *árbitro* también puede ser entendida como *terna arbitral* que incluye al árbitro principal y sus dos asistentes. Para este caso, el modelo a proponer también resuelve el problema siempre y cuando cada *árbitro* dirige todos sus partidos con los mismos dos asistentes quienes completan su *terna arbitral*. Esta última consideración se hace pues la ANFP pretende, en un futuro cercano, asignar *ternas arbitrales* a cada partido.

¹⁶ Se entiende por partidos espejados aquellos en que se enfrentan los mismos equipos entre sí.

¹⁷ Es decir, los conjuntos de árbitros y asistentes no se intersecten.

Por último, la asignación resultante del modelo para la fase regular del torneo, que debe estar disponible antes que éste comience, no necesariamente será la que efectivamente se llevará a cabo, ya que debe ser finalmente validada por la Comisión de Árbitros y factible en el tiempo¹⁸. El modelo matemático debe ser capaz de fijar asignaciones con el objeto de poder resolverlo en un instante posterior del tiempo, incorporando información conocida, si es que así se estima conveniente.

¹⁸ Eventualmente un árbitro podría lesionarse unos días antes de tener que dirigir o un árbitro podría ser citado a dirigir en el extranjero con pocos días de antelación justo cuando estaba asignado para dirigir un partido.

4. MODELAMIENTO DEL PROBLEMA

Incorporados los requerimientos que la Comisión de Árbitros de la ANFP intenta imponer actualmente de forma manual, se procede al modelamiento del problema. El objetivo será que todos los árbitros dirijan una meta predefinida de partidos o, en su defecto, un número de partidos de mínima diferencia a ella, cumpliendo con todas las condiciones explicitadas en el capítulo anterior. Se utiliza un modelo de programación lineal entera definido de la siguiente manera:

4.1 Conjuntos

Sean P el número de partidos que se disputarán a lo largo del campeonato, A el número de árbitros disponibles para ser asignados, E el número de equipos que disputan el campeonato y F el número de fechas en que se juegan los partidos del campeonato. Los siguientes son los conjuntos:

- $P = \{1, \dots, P\}$: conjunto de partidos cuyo índice es p .
- $A = \{1, \dots, A\}$: conjunto de árbitros cuyo índice es a .
- $E = \{1, \dots, E\}$: conjunto de equipos cuyo índice es e .
- $F = \{1, \dots, F\}$: conjunto de fechas cuyo índice es f .

Además, se definen los siguientes conjuntos dependientes de los anteriores:

- $SIFIJO(a,p)$: conjunto de pares árbitro-partido en que se le obliga al árbitro a dirigir el partido.
- $NOFIJO(a,p)$: conjunto de pares árbitro-partido en que se le impide al árbitro a dirigir el partido.
- $ESPEJOS(p,p)$: conjunto de pares de partidos espejados.
- $PN(p)$: subconjunto de partidos que requieren la máxima categoría de árbitro.

4.2 Parámetros

- C^a : categoría del árbitro a .
- N^p : mínima categoría de árbitro requerida para dirigir el partido p .

- $fechas^{p,f}$ $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si partido } p \text{ se juega en la fecha } f \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{array} \right.$

- $juega^{p,e}$ $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si equipo } e \text{ juega en el partido } p \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{array} \right.$

- $DIST^{a,p}$: distancia entre la localidad considerada como origen para el árbitro a y la localidad de realización del partido p .
- T^a : meta de partidos a ser asignados para dirigir por árbitro a .
- $MINT^a$: mínima cantidad de partidos a ser asignados para dirigir en total por árbitro a .
- $MAXT^a$: máxima cantidad de partidos a ser asignados para dirigir en total por árbitro a .
- $MINP^{a,e}$: mínima cantidad de incidencias entre árbitro a y equipo e .
- $MAXP^{a,e}$: máxima cantidad de incidencias entre árbitro a y equipo e .
- $DISTMAX$: máxima diferencia permitida entre un árbitro y otro de la distancia promedio por partido a recorrer.
- D : mínima cantidad de fechas consecutivas que deben pasar para que un mismo árbitro pueda volver a ser asignado a dirigir a un mismo equipo¹⁹.
- S^a : máxima cantidad de fechas consecutivas que pueden pasar sin que el árbitro a sea asignado a dirigir un partido.

¹⁹ Se contabiliza a partir de la última fecha en que fue asignado, es decir $D \geq 1$.

4.3 Variables

- $x_{a,p} \begin{cases} 1 & \text{si árbitro } a \text{ es asignado para dirigir el partido } p \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$
- dif_a : diferencia entre la meta predefinida de partidos a dirigir por árbitro a y la cantidad de partidos efectivamente asignados.

4.4 Función Objetivo

La función objetivo del problema establece que la suma sobre todos los árbitros de la diferencia absoluta entre su meta y el número de partidos efectivamente asignados debe ser minimizada:

$$\text{Min } z = \sum_{a=1}^A dif_a \quad (1)$$

4.5 Restricciones

- El valor de dif_a debe ser igual al valor absoluto de la diferencia entre la meta y la cantidad de partidos efectivamente asignados al árbitro a . Como el problema se modela de forma lineal y es de minimización sobre dif_a , para asegurar esto se imponen las siguientes dos restricciones:

$$dif_a \geq T^a - \sum_{p=1}^P x_{a,p} \quad \forall a \in A. \quad (2)$$

$$dif_a \geq \sum_{p=1}^P x_{a,p} - T^a \quad \forall a \in A. \quad (3)$$

- Cada partido debe ser dirigido por un y sólo un árbitro²⁰:

$$\sum_{a=1}^A x_{a,p} = 1 \quad \forall p \in P. \quad (4)$$

- Las diferencias entre un árbitro y otro de la distancia promedio por partido a recorrer está superiormente acotada²¹:

$$\frac{1}{T^a} \sum_{p=1}^P DIST^{a,p} \cdot x_{a,p} - \frac{1}{T^r} \sum_{p=1}^P DIST^{r,p} \cdot x_{r,p} \leq DISTMAX \quad \forall a, r \in A. \quad (5)$$

- Cada árbitro puede ser asignado para dirigir a lo más un partido por fecha:

$$\sum_{p=1}^P fechas^{p,f} \cdot x_{a,p} \leq 1 \quad \forall a \in A, \forall f \in F. \quad (6)$$

- La cantidad de partidos asignados a cada tupla {árbitro, equipo} debe ser mayor o igual que el mínimo permitido para dicha tupla:

$$MINP^{a,e} \leq \sum_{p=1}^P juega^{p,e} \cdot x_{a,p} \quad \forall a \in A, \forall e \in E. \quad (7)$$

- La cantidad de partidos asignados a cada tupla {árbitro, equipo} debe ser menor o igual que el máximo permitido para dicha tupla:

$$\sum_{p=1}^P juega^{p,e} \cdot x_{a,p} \leq MAXP^{a,e} \quad \forall a \in A, \forall e \in E. \quad (8)$$

²⁰ Para el caso en que se esté asignando a los árbitros asistentes de un partido, el lado derecho de esta restricción sería 2, pues cada partido debe ser dirigido por dos árbitros.

²¹ Esta ecuación considera la distancia a recorrer promedio por partido por árbitro siempre y cuando cada árbitro dirija un número de partidos igual a su meta, lo que no está asegurado a priori. Sin embargo, dado que esto es lo que la función objetivo busca, se considera una buena estimación con la que no se pierde la linealidad del problema.

- Cada árbitro debe ser asignado para dirigir una cantidad total de partidos igual o mayor que el mínimo permitido para él:

$$MINT^a \leq \sum_{p=1}^P x_{a,p} \quad \forall a \in A. \quad (9)$$

- Cada árbitro debe ser asignado para dirigir una cantidad total de partidos igual o menor que el máximo permitido para él:

$$\sum_{p=1}^P x_{a,p} \leq MAXT^a \quad \forall a \in A. \quad (10)$$

- En D fechas consecutivas, un árbitro puede ser asignado para dirigir a lo más una vez al mismo equipo:

$$\sum_{d=0}^{D-1} \sum_{p=1}^P \text{juega}^{p,e} \cdot \text{fechas}^{p,f+d} \cdot x_{a,p} \leq 1 \quad \forall a \in A, \forall f \leq |F|-D+1, \forall e \in E. \quad (11)$$

- Cada partido debe ser dirigido por un árbitro de la mínima categoría requerida:

$$x_{a,p} \cdot C^a \leq N^p \quad \forall a \in A, \forall p \in P. \quad (12)$$

- Un árbitro a no puede estar más de S^a fechas sin ser asignado para dirigir algún partido:

$$\sum_{s=0}^{S^a} \sum_{p=1}^P \text{fechas}^{p,f+s} \cdot x_{a,p} \geq 1 \quad \forall a \in A, \forall f \leq |F|-S^a. \quad (13)$$

- Un mismo árbitro de la máxima categoría no puede dirigir dos partidos exijan dicha categoría²²:

$$x_{a,p} + x_{a,p^*} \leq 1 \quad (14)$$

$\forall a \in A; \forall p, p^* \in PN$ en que p^* es el siguiente partido de mayor nivel después de p .

- Un mismo árbitro no puede ser asignado para dirigir más de un partido en que jueguen los mismos equipos (aquí se presenta la restricción que supone que dos equipos se enfrentan dos y sólo dos veces durante el campeonato):

$$x_{a,p} + x_{a,p'} \leq 1 \quad \forall a \in A, \forall (p, p') \in ESPEJOS. \quad (15)$$

- Un árbitro puede ser asignado para dirigir obligatoriamente cierto partido p :

$$x_{a,p} = 1 \quad \forall (a, p) \in SIFIJO. \quad (16)$$

- Un árbitro a puede impedírsele a ser asignado para dirigir cierto partido p :

$$x_{a,p} = 0 \quad \forall (a, p) \in NOFIJO. \quad (17)$$

- Naturaleza de las variables:

$$x_{a,p} \in \{0,1\} \quad \forall a, p. \quad (18)$$

$$dif_a \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \forall a. \quad (19)$$

²² Notar que la restricción (6) del modelo ya exige esto para los casos en que hay 2 o más partidos de nivel superior en una misma fecha.

5. RESOLUCIÓN DEL MODELO

El modelo propuesto se resolvió para asignar a los árbitros principales de un campeonato. Se utilizó como instancia base la fase regular del torneo de fútbol chileno del año 2007 que en lo sucesivo será llamada Ch2007. Esta instancia cuenta con 21 equipos (uno queda libre cada fecha), 16 árbitros y 420 partidos (42 fechas en las se juegan 10 partidos en cada una)²³. La instancia Ch2007 consta de 6.737 variables y 26.310 restricciones.

5.1 Definición de Valores para los Parámetros del Modelo

Durante esta fase se tabularon, graficaron y estudiaron las asignaciones efectivamente realizadas ese año para utilizarlas como primera referencia para los valores que luego fueron asignados a los parámetros del modelo.

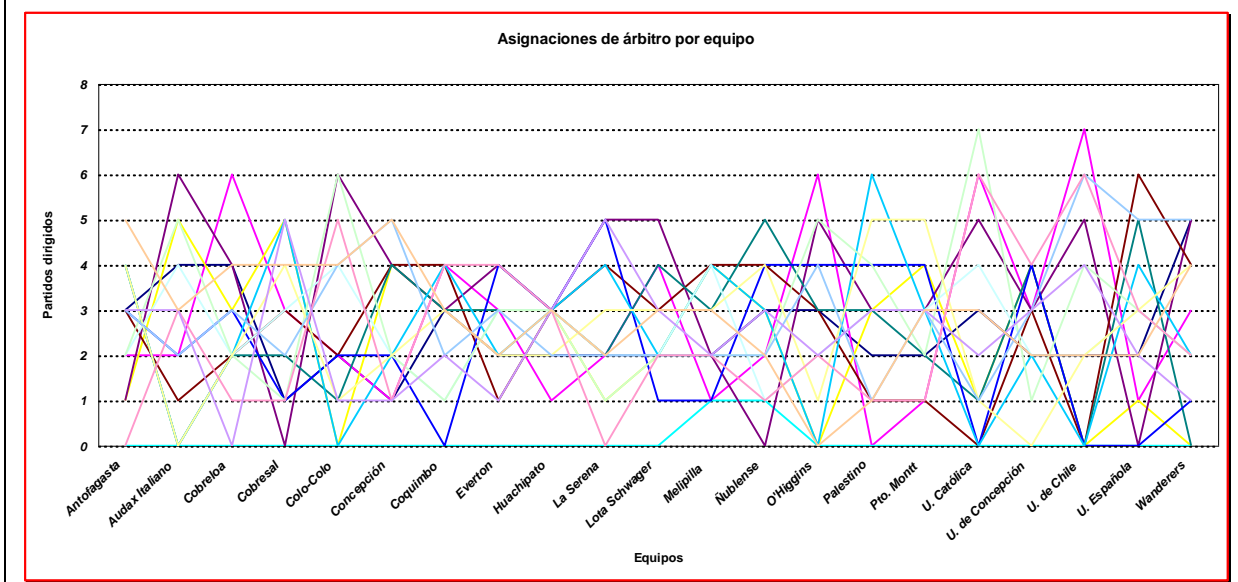
5.1.1 Parámetros de mínima y máxima cantidad de partidos a ser asignados por árbitro y por equipo.

La primera etapa consistió en estudiar las asignaciones por árbitro y por equipo. Para ello, se tabuló la información obteniéndose el Gráfico N° 1. En él, el eje x representa a cada uno de los equipos, mientras que las líneas representan a cada uno de los árbitros. El eje y da cuenta de la cantidad de partidos efectivamente dirigidos²⁴.

²³ En el Anexo 11.1 se presentan los conjuntos equipos y árbitros de la instancia Ch2007. Los partidos corresponden a todos los enfrentamientos posibles entre todos los equipos, numerados del 1 al 420 en el orden en que se juegan.

²⁴ La tabla de datos correspondiente al Gráfico N° 1 se encuentra en el Anexo 11.2.

Gráfico N° 1. Número de asignaciones por árbitro y por equipo para el año 2007.



Al observar cómo las líneas tocan el eje x en reiteradas oportunidades, se puede deducir que existe una gran cantidad de árbitros que no dirigieron nunca a algún equipo en particular. Por otro lado, al observar algunos máximos o *peaks* que alcanzan incluso el valor 7 se puede deducir que existen algunos árbitros que fueron asignados muchas veces a dirigir partidos donde jugaba un mismo equipo en particular. La idea es reducir la brecha entre el mínimo y máximo valor (0 y 7 en este caso) y que la asignación sea más uniforme, es decir evitar que muy pocos equipos alcancen los valores mínimos o máximos. Un indicador útil para medir lo equitativa de la asignación es la varianza²⁵, que en este caso toma el valor de 2,64.

Se decidió que para todos los equipos y árbitros los parámetros $MINP^{a,e}$ y $MAXP^{a,e}$ sean mayores a 0 y menores a 7 respectivamente. Además, se decidió que estos parámetros, de forma independiente, tomen idéntico valor para todos los equipos y árbitros. Antes de definir el valor para estos parámetros, se decidió el valor para el parámetro D relacionado con la mínima cantidad de fechas que deben pasar para que un árbitro pueda volver a ser asignado a dirigir a un mismo equipo. El valor

²⁵ Es importante notar que el promedio de asignaciones por árbitro por equipo es siempre de 2,5 (el número total de asignaciones, de árbitros y de equipos se mantiene constante).

para D quedó fijado en 3. También se decidió el valor para el parámetro S^a relacionado con la máxima cantidad de fechas que un árbitro a puede permanecer sin ser asignado a dirigir un partido. Este valor fue fijado en 2 para todos los árbitros.

Dependiendo de la instancia con que se ejecute el modelo, en particular del tamaño de los conjuntos A y E (árbitros y equipos respectivamente), hay valores para los parámetros $MINP^{a,e}$ y $MAXP^{a,e}$ que harían infactible (sin solución) el modelo propuesto. Por ejemplo, existe un número máximo entero límite para el parámetro $MINP^{a,e}$, independiente del resto de los parámetros. Esto se debe, por ejemplo, a que para valores superiores a este número sería imposible que se cumpla con las restricciones (4), (6) y (7) al mismo tiempo. Una cota superior para este número se calcula como el mayor entero menor o igual al número de partidos a jugar por equipo dividido por el número de árbitros, siempre y cuando se cumpla que $MINP^{a,e} = MINP^{a,e'} \quad \forall a \in A; \forall e, e' \in E$ ²⁶. La siguiente fórmula lo representa:

$$Max_{\substack{a \in A \\ e \in E}}(MINP^{a,e}) \leq \left\lfloor \frac{2 \times \frac{|P|}{|E|}}{|A|} \right\rfloor$$

Todo valor entero superior a este número para el parámetro $MINP^{a,e}$ haría el modelo infactible, independiente del valor del resto de los parámetros. Para el caso de Ch2007, el valor de $Max(MINP^{a,e})$ está acotado superiormente por:

$$Max_{\substack{a \in A \\ e \in E}}(MINP^{a,e}) \leq \left\lfloor \frac{2 \times \frac{|P|}{|E|}}{|A|} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2 \times \frac{420}{21}}{16} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2 \times 20}{16} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{40}{16} \right\rfloor = \lfloor 2,5 \rfloor = 2$$

²⁶ En rigor, el modelo está construido de manera que esto no necesariamente se cumpla, sin embargo se considera una buena regla para hacer más equitativa las asignaciones.

Análogamente, existe una cota inferior entera para el parámetro $MAXP^{a,e}$ que corresponde al menor entero mayor o igual al número de partidos a jugar por equipo dividido por el número de árbitros, siempre y cuando se cumpla que $MINP^{a,e} = MINP^{a,e'} \quad \forall a \in A; \forall e, e' \in E$, es decir:

$$\underset{\substack{a \in A \\ e \in E}}{\text{Min}}(MAXP^{a,e}) \geq \left\lceil \frac{2 \times \frac{|P|}{|E|}}{|A|} \right\rceil$$

Para el caso de Ch2007, valor de $Min(MAXP^{a,e})$ está acotado inferiormente por:

$$\underset{\substack{a \in A \\ e \in E}}{\text{Min}}(MAXP^{a,e}) \geq \left\lceil \frac{2 \times \frac{|P|}{|E|}}{|A|} \right\rceil = \left\lceil \frac{2 \times \frac{420}{21}}{16} \right\rceil = \left\lceil \frac{2 \times 20}{16} \right\rceil = \left\lceil \frac{40}{16} \right\rceil = \lceil 2,5 \rceil = 3$$

Por otro lado, asignado ya un mismo valor a los parámetros $MINP^{a,e}$ para todos los pares árbitros-equipos, que será denotado como $MINP^{a,e*}$, existe un máximo valor del parámetro $MAXP^{a,e}$ que ningún par árbitro-equipo podría alcanzar, independiente del valor del resto de los parámetros. Para calcular fácil y rápidamente una cota superior para este número máximo, se consideran dos casos:

- 1) Un mismo árbitro le dirige a un mismo equipo cada D fechas, en que D es el parámetro que aparece en la restricción (11).
- 2) Todos los árbitros le dirigen $MINP^{a,e*}$ partidos a un equipo particular, salvo por uno que le dirige todo el resto de los partidos.

Para el caso 1), la siguiente fórmula representa una cota superior:

$$\underset{\substack{a \in A \\ e \in E}}{\text{Max}}(\text{MAXP}^{a,e}) = \left\lceil \frac{2 \times \frac{|P|}{|E|}}{D} \right\rceil$$

Para el caso 2), la siguiente fórmula representa una cota superior:

$$\underset{\substack{a \in A \\ e \in E}}{\text{Max}}(\text{MAXP}^{a,e}) = 2 \times \frac{|P|}{|E|} - \text{MINP}^{a,e^*} \times (|A| - 1)$$

Así entonces, en el caso de Ch2007, el valor de $\text{Max}(\text{MAXP}^{a,e})$ está acotado por:

$$\underset{\substack{a \in A \\ e \in E}}{\text{Max}}(\text{MAXP}^{a,e}) \leq \text{Min} \left\{ \left\lceil \frac{2 \times \frac{|P|}{|E|}}{D} \right\rceil, 2 \times \frac{|P|}{|E|} - \text{MINP}^{a,e^*} \times (|A| - 1) \right\} = \text{Min} \{ 13, 40 - \text{MINP}^{a,e^*} \times 15 \}$$

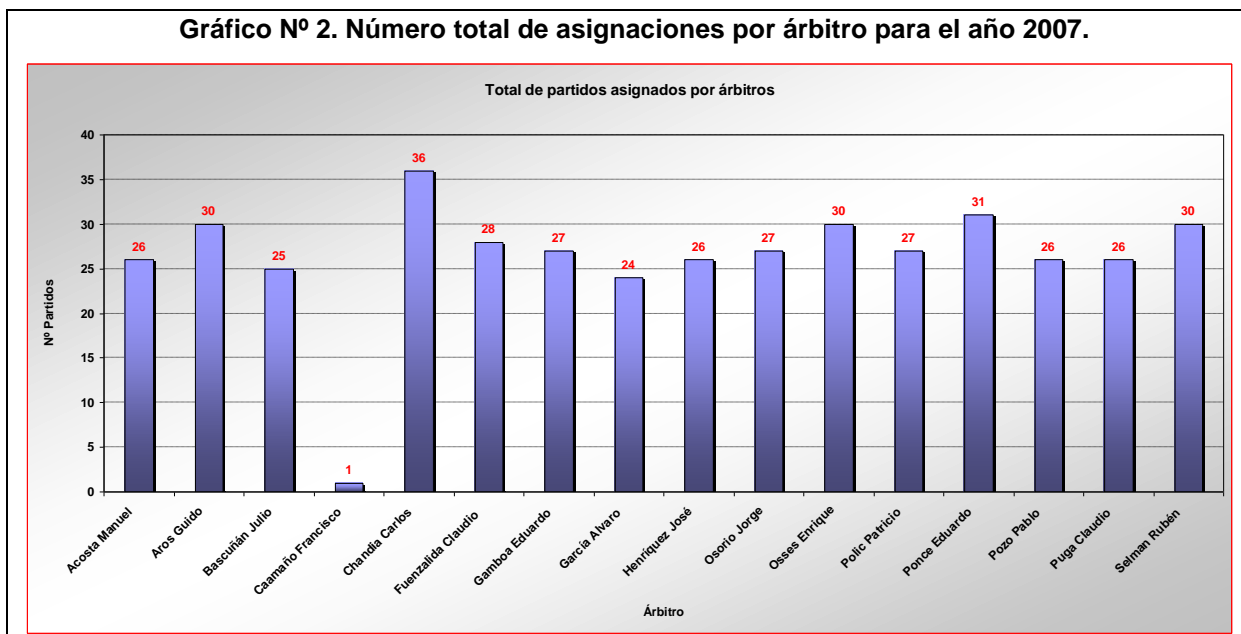
Entonces, dada la instancia Ch2007 hay dos escenarios posibles:

- Si MINP^{a,e^*} tomara el valor 1, $\text{MAXP}^{a,e}$ no debería salirse del rango [3,13].
- Si MINP^{a,e^*} tomara el valor 2, $\text{MAXP}^{a,e}$ no debería salirse del rango [3,10].

Dado el análisis anterior, se decidió fijar arbitrariamente los valores para los parámetros $\text{MINP}^{a,e}$ y $\text{MAXP}^{a,e}$ en 1 y en 4 respectivamente para todos los árbitros a y todos los equipos e . En el subcapítulo 5.4 se expone un análisis de sensibilidad de este parámetro.

5.1.2 Parámetros de mínima y máxima cantidad total de partidos a ser asignados por árbitro.

La segunda etapa consistió en estudiar el total de asignaciones por árbitro a lo largo del campeonato. Para ello, se tabuló y graficó la información del año 2007, la que se puede ver en el Gráfico N° 2.



Se puede observar que la cantidad de partidos dirigidos es relativamente pareja salvo por dos árbitros. Uno de ellos, el que sólo dirigió un partido, corresponde a un caso particular de un árbitro que se lesionó por lo que se puede despreciar²⁷. El otro caso, el máximo, es una casualidad no percatada a tiempo por la Comisión de Árbitros y que no es deseada. La diferencia entre la mínima y máxima cantidad de partidos dirigidos es de 12 lo que aparece como una alta brecha que se pretende reducir. Existe un número mínimo entero límite para el parámetro $MINT^a$, independiente del resto de los parámetros. Esto se debe, por ejemplo, a que para valores inferiores a este número sería imposible que se cumpla con la restricción (13). Una cota inferior para este número se calcula como el menor entero mayor o

²⁷ Este árbitro se lesionó de gravedad después de dirigir su primer partido y no fue considerado para ninguna de las asignaciones posteriores.

igual al número de fechas a jugarse dividido por el parámetro S^a+1 . La siguiente fórmula lo representa:

$$\text{Min}_{a \in A}(\text{MIN}^a) \geq \left\lceil \frac{|F|}{S^a + 1} \right\rceil$$

Todo valor entero superior a este número para el parámetro $\text{MINP}^{a,e}$ haría el modelo infactible, independiente del valor del resto de los parámetros. Para el caso de Ch2007, valor de $\text{Min}(\text{MINT}^a)$ está acotado inferiormente por:

$$\text{Min}_{a \in A}(\text{MIN}^a) \geq \left\lceil \frac{|F|}{S^a + 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{42}{2+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{42}{3} \right\rceil = \lceil 14 \rceil = 14$$

Una cota superior para el parámetro MAXT^a se puede calcular fácilmente considerando el caso en que un árbitro es asignado para dirigir en todas las fechas del campeonato, es decir $|F|$ veces. Para la instancia Ch2007, este valor es 42.

Dado que lo que se busca es una asignación equitativa, se buscaron valores que redujeran la brecha entre la mayor y menor cantidad de partidos asignados a los árbitros. Considerando que el promedio de partidos dirigidos por árbitros en un escenario perfectamente equilibrado es 26,25 (calculado como $|P|/|A|$), se fijaron los valores para MINT^a y MAXT^a entre 25 y 29 dependiendo de la categoría del árbitro y respetando siempre $\text{MINT}^a \leq \text{MAXT}^a \forall a$.

5.1.3 Parámetros de categoría de árbitros y mínima categoría de árbitro requerida por partidos.

La tercera etapa consistió en analizar los partidos considerados importantes por la ANFP y su asignación respectiva. Antes de realizar la asignación para el campeonato, se sabe que para la instancia Ch2007 hay 6 partidos importantes que

deben ser dirigidos por árbitros de primera categoría. En la Tabla N° 2 se presentan estos partidos y su asignación respectiva el año 2007:

ID PARTIDO	LOCAL	VISITA	ARBITRO
69	U. Católica	U. de Chile	Pozo Pablo
144	U. de Chile	Colo-Colo	Chandía Carlos
189	Colo-Colo	U. Católica	Chandía Carlos
279	U. de Chile	U. Católica	Osses Enrique
354	Colo-Colo	U. de Chile	Chandía Carlos
399	U. Católica	Colo-Colo	Pozo Pablo

Se puede constatar que los partidos denominados clásicos fueron siempre dirigidos por los mismos tres árbitros, de manera relativamente alternada. Además, se observó una gran cantidad de partidos considerados relativamente importantes que fueron dirigidos sólo por un grupo de árbitros en particular que poseen mayor calificación o categoría dentro del grupo. Con esto, se definieron tres categorías posibles para los árbitros (categoría 1, categoría 2 y categoría 3) y por lo tanto las mismas tres mínimas categorías requeridas para los partidos (que serán denominadas niveles), en que el orden es de mejor a peor para ambos casos. A los tres árbitros que se repartieron los partidos más importantes se les asignó la categoría 1, mientras que a los partidos más importantes se les asignó el nivel 1. De la misma manera, a los partidos considerados segundos en nivel de importancia se les asignó el nivel 2 mientras que a los árbitros considerados de segunda categoría se les asignó la categoría 2. De esta forma, se obliga a que los partidos de cierta importancia sean siempre dirigidos por árbitros de determinada categoría o mejor.

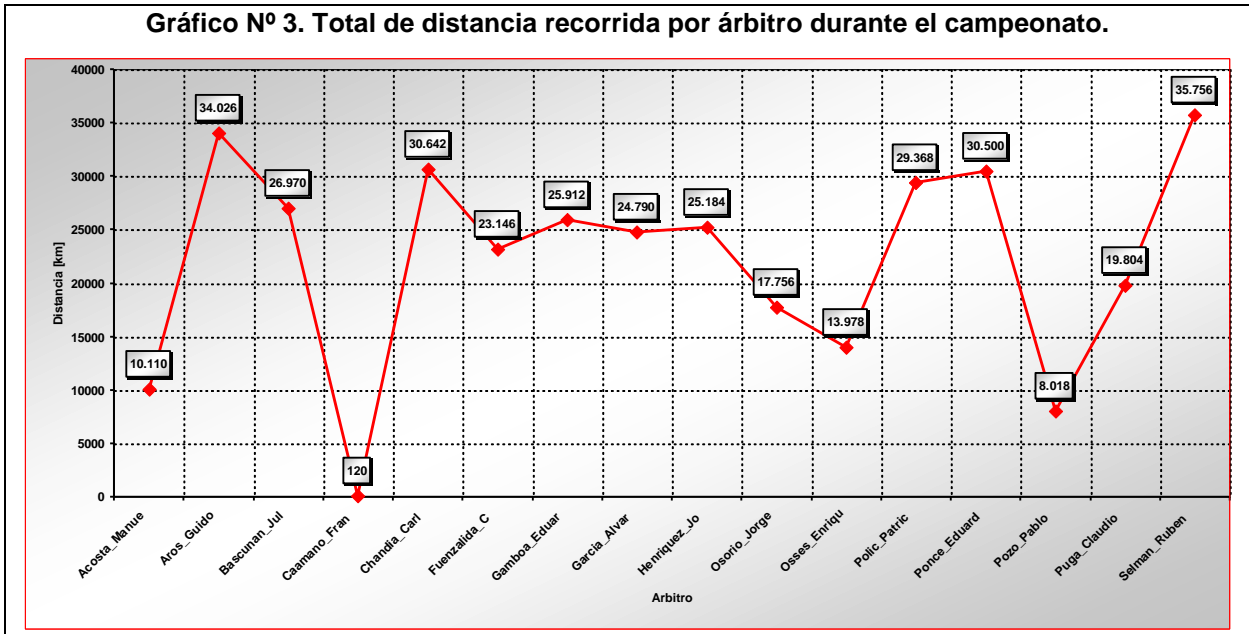
5.1.4 Parámetro de máxima diferencia permitida entre un árbitro y otro de la distancia promedio por partido a recorrer.

La cuarta etapa consistió en analizar las distancias recorridas por cada uno de los árbitros a lo largo del campeonato. Para ello, se tabularon las distancias totales recorridas considerando que cada partido requiere de dos viajes (ida y vuelta entre el lugar origen del árbitro y el lugar donde se juega el partido) de idéntica distancia (correspondiente a la geográfica). A pesar que existen distintos lugares de origen entre los árbitros, la Comisión de Árbitros requirió que el lugar a considerar como origen debe ser común para todos²⁸. La tabla y gráfico de resultado fueron los siguientes:

ARBITRO	DISTANCIA RECORRIDA [km]
Acosta Manuel	10.110
Aros Guido	34.026
Bascuñán Julio	26.970
Caamaño Francisco	120
Chandía Carlos	30.642
Fuenzalida Claudio	23.146
Gamboa Eduardo	25.912
García Álvaro	24.790
Henríquez José	25.184
Osorio Jorge	17.756
Osses Enrique	13.978
Polic Patricio	29.368
Ponce Eduardo	30.500
Pozo Pablo	8.018
Puga Claudio	19.804
Selman Rubén	35.756

²⁸ Dado que la gran mayoría de los árbitros viven en la ciudad de Santiago, ésta fue elegida como el lugar de origen para cada árbitro en cada viaje.

Gráfico N° 3. Total de distancia recorrida por árbitro durante el campeonato.



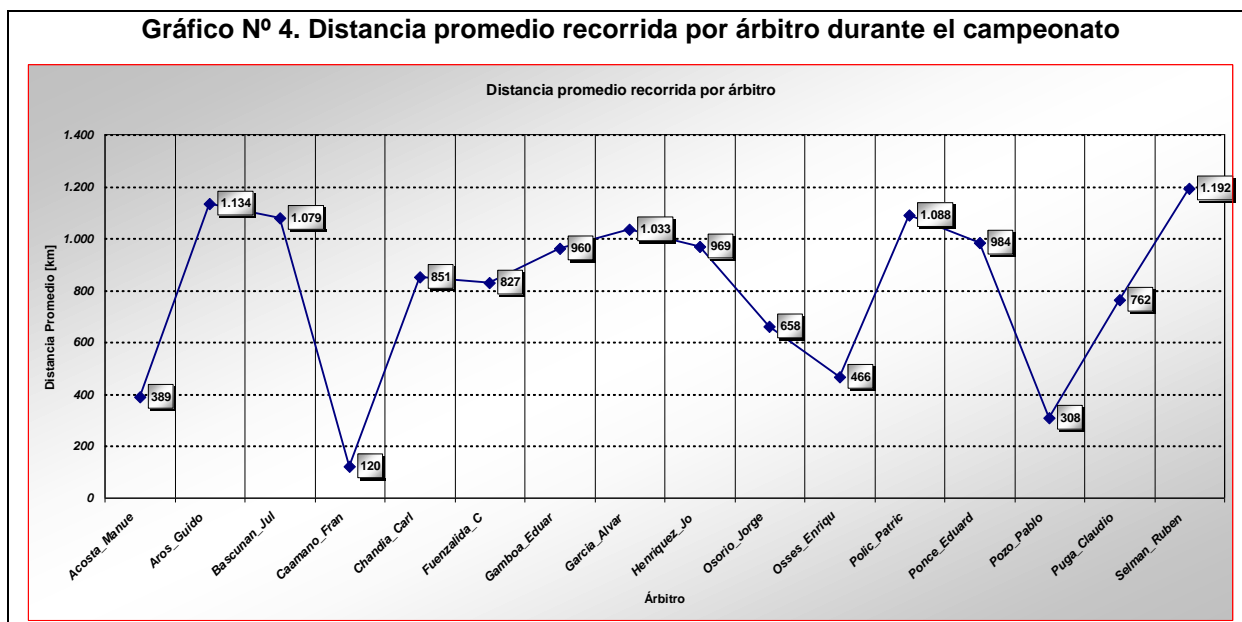
Se puede observar que el cuarto árbitro tabulado recorrió muy poca distancia pero, al ser un caso muy particular, lo podemos despreciar. Entre el resto de los árbitros se notan diferencias que alcanzan casi los 28.000 kilómetros, equivalentes al 346%. Dado que la distancia total recorrida por un árbitro en general aumenta a medida que aumenta la cantidad de partidos que éste dirige (se mantiene en el caso en que vuelve a dirigir en la misma localidad), un indicador más representativo de las distancias recorridas es el promedio de la distancia recorrida por partido para los árbitros. Se construye entonces el indicador $\frac{\text{total de distancias recorridas}}{\text{total de partidos dirigidos}}$ con el fin

de obtener un valor para el parámetro que acotará la diferencia entre un árbitro y otro de las distancias recorridas. La tabla y gráfico obtenidos para este indicador fueron los siguientes:

Tabla Nº 4. Distancia promedio recorrida por árbitro durante el campeonato.

ARBITRO	DISTANCIA RECORRIDA [km]
Acosta Manuel	389
Aros Guido	1.134
Bascuñán Julio	1.079
Caamaño Francisco	120
Chandía Carlos	851
Fuenzalida Claudio	827
Gamboa Eduardo	960
García Álvaro	1.033
Henríquez José	969
Osorio Jorge	658
Osses Enrique	466
Polic Patricio	1.088
Ponce Eduardo	984
Pozo Pablo	308
Puga Claudio	762
Selman Rubén	1.192

Gráfico Nº 4. Distancia promedio recorrida por árbitro durante el campeonato



Se puede apreciar que el patrón del Gráfico Nº 3 se repite en gran medida en el Gráfico Nº 4 y una brecha importante vuelve a existir entre el mínimo y máximo

valor, con diferencias de hasta 287%. La máxima diferencia permitida entre la distancia promedio a recorrer por árbitro se fijó en primera instancia en 500 km²⁹.

5.1.5 Parámetro de meta de partidos a ser asignados para dirigir por árbitro.

La quinta etapa consistió en definir cual sería la meta de partidos a dirigir por cada árbitro. En los primeros intentos se definieron metas al azar por árbitro, respetando los límites ya definidos de mínimas y máximas cantidades por dirigir en total. Con éstos, se obtuvieron altos valores para la función objetivo y no se conseguía ver que tan mejores resultados se podría llegar a tener por lo que se decidió imponer una condición para las metas. Dada la naturaleza de minimización del problema y que se sabe que la función objetivo nunca tomará valores negativos, el mejor valor que podría llegar a alcanzar la función objetivo es cero. En este caso, todos los árbitros serían asignados para dirigir una cantidad de partidos igual a su meta, y con ello sus pesos en la función objetivo serían cero. Sin embargo, para que se cumpla lo anterior, hay una importante condición necesaria: la suma de todas las metas definidas para los árbitros debe ser igual a la cantidad de partidos totales que se jugarán. Luego, se definieron metas que cumplieran con esta última condición de manera de considerar las mejores soluciones posibles para el problema en el espacio total de soluciones³⁰.

Todos los valores antes definidos se discutieron en una reunión con la Comisión de Árbitros de la ANFP. En el Anexo 11.3 se presenta el detalle de la instancia Ch2007 considerada.

²⁹ En el subcapítulo 5.4 se presenta un análisis de sensibilidad de este parámetro.

³⁰ Hasta este punto, suponemos que todas las restricciones del problema se satisfacen.

5.2 Resolución del Modelo Matemático

Para asistir la construcción y asignación de parámetros del modelo, se programó en el lenguaje Visual Basic una aplicación que permite definir la instancia a utilizar, ingresar los parámetros, ejecutar el modelo e importar a tablas y gráficos la solución obtenida, de manera simple y fácil³¹. El modelo matemático se programó en GAMS 22.7. Para su resolución se utilizó el software comercial Cplex 10.0 y se ocupó una máquina con un procesador Intel Core 2 de 2.66Ghz y 4Gbyte de RAM corriendo sobre Windows Server 2003. El tiempo de resolución fue de 4 minutos y 49 segundos, mientras que el valor óptimo de la función objetivo fue 0.

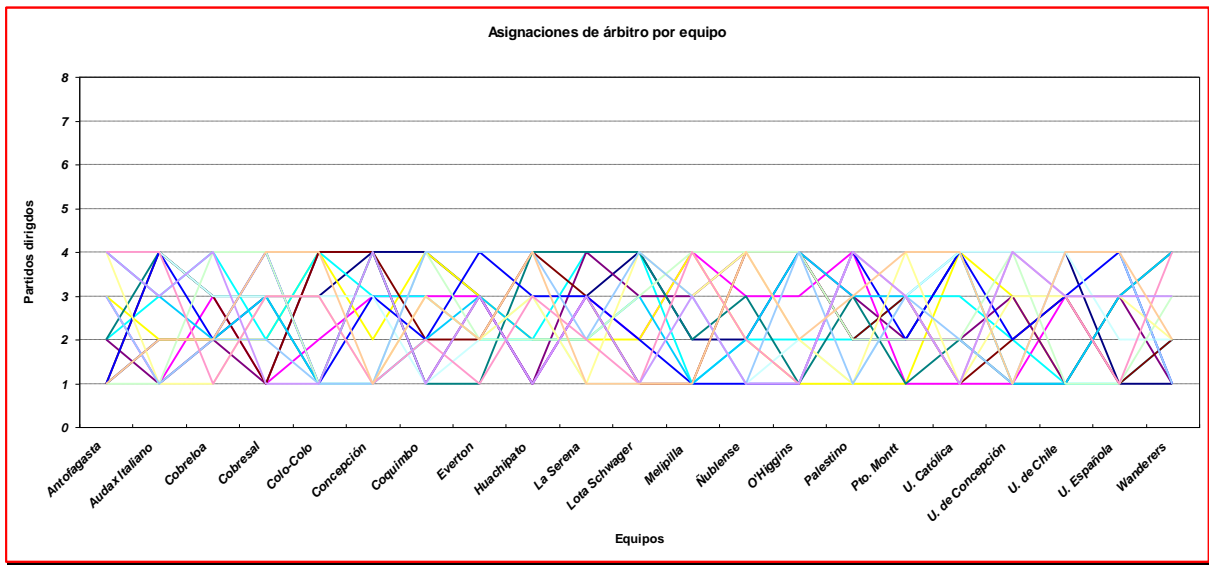
5.3 Resultados

En la última columna de la tabla N° 14 del Anexo N° 11.3 se presenta la asignación resultante. Esta asignación es óptima puesto que el valor de la función objetivo es el mínimo posible, es decir 0 (cero). Esto significa que la solución cumple con que todos los árbitros dirigen su meta de partidos que era lo que se buscaba idealmente.

La solución resuelve satisfactoriamente la restricción impuesta sobre las mínimas y máximas asignaciones por árbitro y por equipo, lo que se puede ver en el Gráfico N° 5. En él, el eje x representa a cada uno de los equipos, mientras las líneas representan a cada uno de los árbitros. El eje y da cuenta de la cantidad de partidos asignados.

³¹ En el Capítulo 7 se detalla el funcionamiento de esta aplicación.

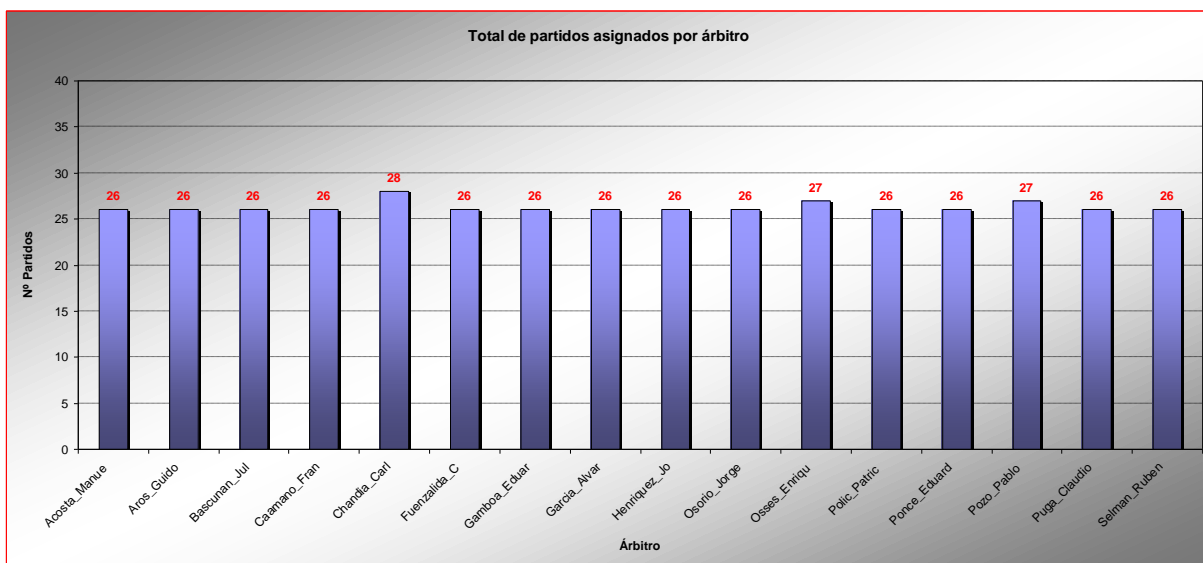
Gráfico N° 5. Resultado del número de asignaciones por árbitro y por equipo para el año 2007.



Al observar que ninguna línea toca el eje x, se confirma que todos los árbitros fueron asignados al menos una vez a cada equipo. Si se observa que ninguna línea sobrepasa el valor 5, también se confirma que todas las asignaciones alcanzan, a lo más, el valor 5 por árbitro y por equipo. El valor de la varianza se redujo en un 50% (de 2,64 a 1,32), lo que muestra lo equitativa que es esta asignación respecto a la que efectivamente se realizó el año 2007.

También se obtuvo interesantes resultados en la restricción de la cantidad total de asignaciones por árbitro a lo largo del campeonato, lo que se puede observar en el siguiente gráfico:

Gráfico N° 6. Resultado del número total de asignaciones por árbitro para el año 2007.



Se puede ver que la mínima cantidad de partidos asignados por árbitro fue 26 mientras que la máxima fue 28, es decir la diferencia se redujo a sólo dos partidos.

Respecto a la asignación de partidos denominados clásicos, el resultado también es satisfactorio. Los 6 partidos considerados del nivel más alto fueron asignados a los 3 árbitros de mayor categoría, y se observa la alternancia entre ellos. La Tabla N° 5 muestra el resultado de la asignación de partidos importantes:

Tabla N° 5. Resultado de los partidos de mayor importancia y árbitros que fueron asignados para dirigirlos.

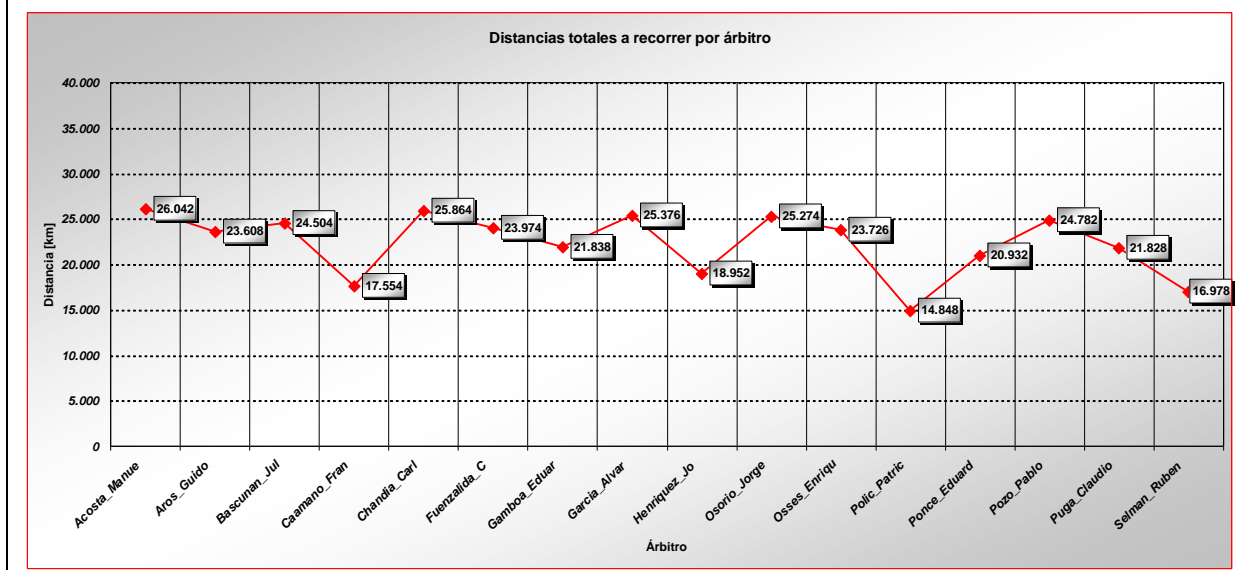
ID PARTIDO	LOCAL	VISITA	ARBITRO
69	U. Católica	U. de Chile	Chandía Carlos
144	U. de Chile	Colo-Colo	Osses Enrique
189	Colo-Colo	U. Católica	Pozo Pablo
279	U. de Chile	U. Católica	Osses Enrique
354	Colo-Colo	U. de Chile	Pozo Pablo
399	U. Católica	Colo-Colo	Chandía Carlos

En cuanto a la restricción sobre el total de distancias recorridas por árbitro a lo largo del campeonato, a continuación se presenta la tabla y gráfico que muestra los resultados obtenidos:

Tabla N° 6. Resultado del total de distancias recorridas por árbitro durante el campeonato según Ch2007.

ARBITRO	DISTANCIA RECORRIDA [km]
Acosta Manuel	26.042
Aros Guido	23.608
Bascuñán Julio	24.504
Caamaño Francisco	17.554
Chandía Carlos	25.864
Fuenzalida Claudio	23.974
Gamboa Eduardo	21.838
García Álvaro	25.376
Henríquez José	18.952
Osorio Jorge	25.274
Osses Enrique	23.726
Polic Patricio	14.848
Ponce Eduardo	20.932
Pozo Pablo	24.782
Puga Claudio	21.828
Selman Rubén	16.978

Gráfico N° 6. Resultado del total de distancias recorridas por árbitro durante el campeonato según Ch2007.



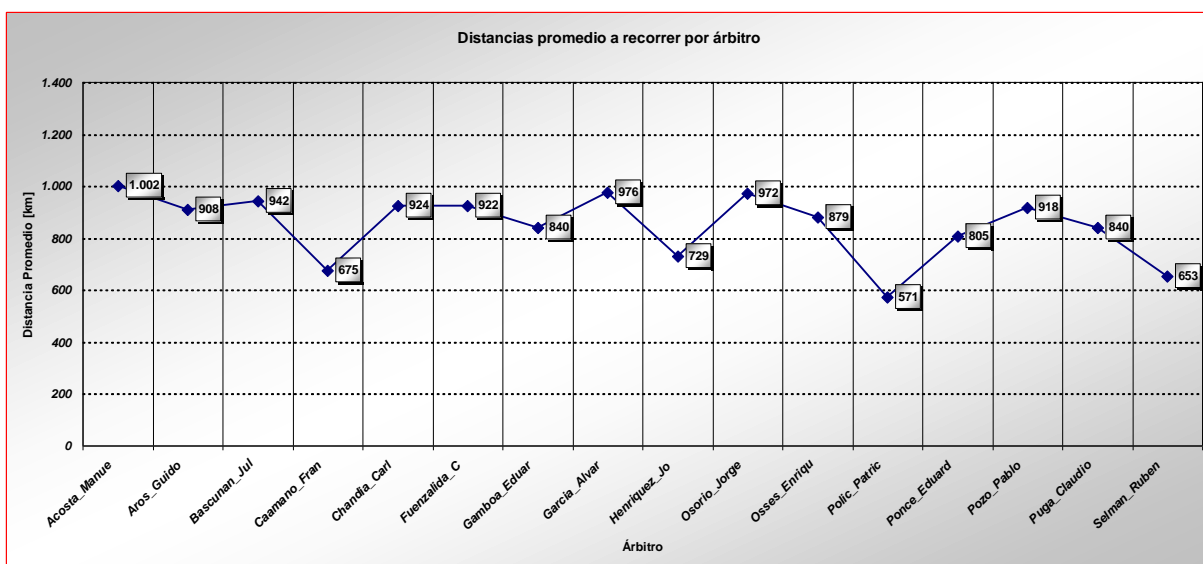
Se puede observar que la diferencia entre el árbitro que más y menos kilómetros recorre se redujo a sólo 11.194 kilómetros, equivalente al 75%.

Un gráfico más representativo es el que relaciona las distancias recorridas con el número total de asignaciones por árbitro. A continuación se presenta el resultado del indicador $\frac{\text{total de distancias recorridas}}{\text{total de partidos dirigidos}}$:

Tabla N° 7. Resultado del promedio de distancia recorrida por árbitro durante el campeonato según Ch2007.

ARBITRO	DISTANCIA PROMEDIO RECORRIDA [km]
Acosta Manuel	1.002
Aros Guido	908
Bascuñán Julio	942
Caamaño Francisco	675
Chandía Carlos	924
Fuenzalida Claudio	922
Gamboa Eduardo	840
García Álvaro	976
Henríquez José	729
Osorio Jorge	972
Osses Enrique	879
Polic Patricio	571
Ponce Eduardo	805
Pozo Pablo	918
Puga Claudio	840
Selman Rubén	653

Gráfico N° 7. Resultado del promedio de distancia recorrida por árbitro durante el campeonato según Ch2007.



Como se puede ver, la diferencia entre el árbitro que más y menos recorre por partido se redujo a sólo 431 kilómetros, equivalente al 75%.

Junto con las evidentes mejoras en términos de equidad deportiva que se han presentado, el modelo también presenta una ventaja no menor por sobre la asignación manual. Podría existir más de una solución al problema que conlleva al valor óptimo de la función objetivo. En la práctica, esto permitiría ofrecer una variedad de asignaciones posibles que cumplan con los requisitos que la ANFP impone de manera que se tenga la opción de elegir la que se prefiera.

Distintas iteraciones se siguieron realizando para calibrar definitivamente los parámetros e ir obteniendo buenos y mejores resultados en términos de tiempo de resolución, valores de la función objetivo del modelo y equidad deportiva. Todo este proceso se detalla en el siguiente subcapítulo.

5.4 Análisis de Sensibilidad

El modelo se resolvió para distintas instancias con el fin de analizar cómo cambia la calidad de la solución y determinar cuáles eran los parámetros críticos del modelo cuya variación hacía aumentar o disminuir su tiempo de resolución. Estas instancias se fueron construyendo de forma manual, modificando los parámetros dentro de rangos razonables. Hay tres importantes análisis que vale la pena destacar.

El primer análisis es sobre los parámetros $MINP^{a,e}$ y $MAXP^{a,e}$. Como fue discutido en la Sección 5.1, para ambos parámetros existen rangos dentro de los cuales el modelo es factible, por lo que se realizaron 4 pruebas variando el valor de

estos parámetros dentro de este rango³². Los resultados obtenidos se resumen en la Tabla N° 8.

N° Prueba	Valor $MINP^{a,e}$	Valor $MAXP^{a,e}$	Tiempo de Resolución	Varianza	Valor de la Función Objetivo
1	1	4	289 [seg]	1,32	0
2	2	4	489 [seg]	0,45	0
3	1	3	490 [seg]	0,48	0
4	2	3	530 [seg]	0,25	0

Como se puede ver, mientras más se estrecha la diferencia entre los valores de estos parámetros, mayor es el aumento en el tiempo de resolución y el valor de la varianza de las asignaciones se hace más pequeño. A igual diferencia entre valores de parámetros (pruebas N° 2 y N° 3), se observan comportamientos bastante similares. Para una diferencia de 1 (prueba N° 4), el tiempo de resolución presenta un pequeño aumento mientras que el valor de la varianza es el mínimo posible. Todos los tiempos de estas pruebas están dentro de lo esperable por la Comisión de Árbitros de la ANFP.

El segundo análisis es sobre el parámetro $DISTMAX$. La restricción (5), referida a la diferencia entre un árbitro y otro de la distancia promedio por partido a recorrer, parece estar siempre muy cerca de ser activa en uno de sus casos (en particular, en el que sus índices son justamente la máxima y la mínima distancia promedio a recorrer). Con el fin de equiparar al máximo posible las distancias promedio por partido a dirigir entre cada árbitro, se realizaron 5 pruebas variando el valor de este parámetro a valores inferiores al que se utilizó en la instancia Ch2007. Los resultados se resumen en la Tabla N° 9.

³² Recordemos que se consideró que estos parámetros son idénticos para todo equipo y para todo árbitro. La razón de modelar el problema permitiendo que sean distintos se debe a que eventualmente se puede requerir hacerlo.

Nº Prueba	Valor <i>DISTMAX</i>	Tiempo de Resolución	Varianza	Valor de la Función Objetivo
1	500	289 [seg]	1,32	0
2	400	314 [seg]	1,28	0
3	300	284 [seg]	1,18	0
4	200	319 [seg]	1,26	0
5	100	303 [seg]	1,27	0

Se puede observar que la disminución en el valor del parámetro *DISTMAX* no necesariamente produce un aumento en el tiempo de resolución del modelo ni una disminución en el valor de la varianza, mientras que el valor de la función objetivo sigue siendo el mismo. Esto se explica por la gran capacidad de la máquina en que se resolvió el modelo y por el método de resolución que aplica el solver comercial utilizado. Todos los tiempos están dentro de lo esperable por la Comisión de Árbitros de la ANFP.

El tercer y último análisis es sobre las restricciones (9) y (10). Ellas permiten acotar el intervalo en el que se mueve el total de asignaciones por árbitro y, al tomar valores muy cercanos a las metas, también impiden que el peso en la función objetivo (de existir un alto valor) se lo lleve uno o pocos árbitros. Al notar que en ninguna de las pruebas realizadas fueron restricciones activas (el valor de la función objetivo siempre tomó el valor cero), se optó por remover estas restricciones del modelo con el objetivo de ver si se conseguían mejores soluciones y tiempos de resolución. Sin embargo, no se observaron menores tiempos y el valor de la función objetivo se mantuvo en 0 (cero).

6. VALIDACIÓN DE LA SOLUCIÓN

6.1 Instancia Alternativa

Dentro de la etapa de validación del modelamiento del problema, una prueba realizada fue resolver otra instancia real. Se utilizó la que corresponde a la del campeonato de fútbol chileno del año 2008 (19 equipos³³ y 16 árbitros). Esta instancia cuenta con 5.489 variables y 21.672 restricciones. El modelo se resolvió en 3 minutos y 7 segundos con un valor para la función objetivo de 0 y para la varianza de asignaciones de 1,21. Esto muestra que, al igual que con Ch2007, se obtienen muy buenos indicadores en términos de equidad deportiva y tiempo de resolución. Este resultado permite confiar en la capacidad del modelo para resolver instancias similares.

6.2 Potenciales Restricciones Adicionales

Analizados los resultados del modelo, surge la inquietud de si es posible agregar restricciones adicionales siempre con el fin de conseguir asignaciones aún más equitativas para árbitros y/o equipos en tiempos razonables. Algunas de las que se podrían agregar se detallan a continuación.

6.2.1 Restricción de mínima y/o máxima asignaciones de árbitros a equipos jugando de local y/o de visita.

Podría ser deseable que un árbitro le dirija a cada equipo una cantidad de partidos en que el equipo juegue en condición de local similar a la cantidad de partidos en que el equipo juegue en condición de visita. También podría exigirse una

³³ En rigor fueron 20 equipos, pero Deportes Concepción fue impedido de jugar por no acreditar el financiamiento necesario para pagar las remuneraciones correspondientes al año 2008.

máxima cantidad posible de asignaciones entre árbitros y equipos jugando de local y/o de visita. Para incorporar esto, se deberían construir los siguientes parámetros:

- $local^{p,e} \begin{cases} 1 & \text{si equipo } e \text{ juega de local en el partido } p \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$
- $visita^{p,e} \begin{cases} 1 & \text{si equipo } e \text{ juega de visita en el partido } p \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$
- $MINPL^{a,e}$: mínima cantidad de incidencias entre árbitro a y equipo e jugando de local.
- $MAXPL^{a,e}$: máxima cantidad de incidencias entre árbitro a y equipo e jugando de local.
- $MINPV^{a,e}$: mínima cantidad de incidencias entre árbitro a y equipo e jugando de visita.
- $MAXPV^{a,e}$: máxima cantidad de incidencias entre árbitro a y equipo e jugando de visita.

Con ellos, es posible definir las siguientes 4 restricciones:

- La cantidad de partidos asignados a cada tupla {árbitro, equipo jugando de local} debe ser mayor o igual que el mínimo permitido para dicha tupla:

$$MINPL^{a,e} \leq \sum_{p=1}^P local^{p,e} \cdot x_{a,p} \quad \forall a \in A, \forall e \in E. \quad (20)$$

- La cantidad de partidos asignados a cada tupla {árbitro, equipo jugando de local} debe ser menor o igual que el máximo permitido para dicha tupla:

$$\sum_{p=1}^P local^{p,e} \cdot x_{a,p} \leq MAXPL^{a,e} \quad \forall a \in A, \forall e \in E. \quad (21)$$

- La cantidad de partidos asignados a cada tupla {árbitro, equipo jugando de visita} debe ser mayor o igual que el mínimo permitido para dicha tupla:

$$MINPV^{a,e} \leq \sum_{p=1}^P visita^{p,e} \cdot x_{a,p} \quad \forall a \in A, \forall e \in E. \quad (22)$$

- La cantidad de partidos asignados a cada tupla {árbitro, equipo jugando de visita} debe ser menor o igual que el máximo permitido para dicha tupla:

$$\sum_{p=1}^P visita^{p,e} \cdot x_{a,p} \leq MAXPV^{a,e} \quad \forall a \in A, \forall e \in E. \quad (23)$$

Las restricciones (20), (21), (22) y (23) pueden ser consideradas o no, en conjunto o de forma separada, dependiendo de lo que se requiera³⁴. De esta forma, quedaría incorporado el hecho de restringir el número mínimo y máximo de incidencias entre árbitros y equipos jugando de local y/o visita.

6.2.2 Restricción de máxima diferencia permitida entre un árbitro y otro del tiempo promedio por partido a recorrer a lo largo del campeonato.

El modelamiento presentado sólo incorpora la componente distancia en los viajes que los árbitros deben realizar. Sin embargo, hay una componente temporal a considerar que puede llegar a ser mucho más representativa del problema si lo que se quiere es también equiparar tiempos recorridos en los viajes, además de las distancias. Esta consideración puede ser bastante útil en situaciones en que existen distintas alternativas de medios de transporte (y por lo tanto distintos tiempos de viaje) para viajar entre una localidad y otra. Una forma de agregar esto al modelo es definiendo los siguientes parámetros:

³⁴ Notar que si son incorporadas, podrían dejar sin utilidad a las restricciones (7) y (8) dependiendo del valor de los parámetros $MINP^{a,e}$ y $MAXP^{a,e}$

- $TPO^{a,p}$: tiempo de viaje entre la localidad considerada como origen para el árbitro a y la localidad de realización del partido p .
- $TPOMAX$: máxima diferencia permitida entre un árbitro y otro del tiempo promedio de viaje.

Con ellos, es posible definir la siguiente restricción análoga a la restricción (5):

- Las diferencias entre un árbitro y otro del tiempo de viaje promedio por partido a recorrer está superiormente acotada:

$$\frac{1}{T^a} \sum_{p=1}^P TPO^{a,p} \cdot x_{a,p} - \frac{1}{T^r} \sum_{p=1}^P TPO^{r,p} \cdot x_{r,p} \leq TPOMAX \quad \forall a, r \in A. \quad (24)$$

Otra alternativa sería asignar un peso a cada viaje considerando la distancia y el tiempo en forma conjunta, además de otras posibles variables, y definir una restricción análoga a (5) y (24) que las reemplace.

6.2.3 Restricción de máxima cantidad de partidos de mayor nivel a dirigir por árbitro.

Especialmente en campeonatos en que los partidos considerados como importantes o de mayor nivel sean tratados con especial cuidado por las personas encargadas de la asignación, se puede requerir que exista un máximo para la cantidad de partidos de este tipo a dirigir por árbitro no se repitan los mismos árbitros en dos de este tipo de partidos consecutivos. Para incorporar esta consideración en el modelo, habría que agregar el siguiente parámetro:

- $MAXPN^a$: máxima cantidad de partidos de nivel superior que puede dirigir el árbitro a .

Y la siguiente restricción:

- Un mismo árbitro no puede dirigir más de $MAXPN^a$ partidos del mayor nivel:

$$\sum_p^{PN} x_{a,p} \leq MAXPN^a \quad \forall a \in A. \quad (25)$$

6.2.4 Restricción de características de los árbitros.

En la mayoría de los casos, a los árbitros no sólo se les clasifica en una “categoría” ni a los partidos en un “nivel”. Cada asignación requiere en general de árbitros con condiciones físicas, anímicas, de fortaleza mental, nivel de intransigencia con jugadas violentas, capacidad de diálogo, debilidad frente a una atmósfera hostil, reacción frente a jugadas polémicas, conocimientos concretos y adaptados a las circunstancias del partido, entre otras características, que son difíciles de medir. La restricción (12) podría ser replicada de manera que integre características adicionales de los árbitros y partidos que no fueron consideradas en el modelamiento original³⁵.

6.3 Modelamiento Alternativo

La resolución del modelo evidenció ciertos aspectos que merecen un análisis más detallado.

Función Objetivo: el mejor valor que se puede conseguir para la función objetivo del modelo, se consigue sin problemas. El valor óptimo cero fue alcanzado en todas las pruebas de sensibilidad que se realizaron lo que hace pensar que el cumplimiento de las metas por parte de los árbitros no es algo que dificulte la resolución del modelo matemático. Se realizaron pruebas ponderando el valor absoluto de la diferencia de cada árbitro por su respectiva categoría de manera que los árbitros de categoría más

³⁵ En [9], Gil Lafuente propone un modelamiento de asignación de árbitros que considera un conjunto de características de ellos y en el que, dado el grado de incertidumbre, la representación de la información la hace mediante intervalos de confianza.

alta tengan mayor peso en la función objetivo y sus metas sean idealmente alcanzadas con mejor prioridad que los de categoría más baja. Sin embargo, no se consiguieron mayores beneficios, por el contrario el tiempo de resolución aumentó.

Tiempo de Resolución: el tiempo de resolución del modelo es bastante razonable para los requerimientos que la ANFP exige. Sin embargo, existen ciertos factores que permitirían alterar este tiempo. Algunos de ellos son:

- **Potencia de la máquina utilizada para resolver:** El tiempo de resolución del modelo es sumamente sensible a la capacidad de la máquina en que se resuelve. Una máquina más potente lo resolverá en tiempos que pueden llegar a ser significativamente menores, mientras que una máquina menos potente lo podría hacer en tiempos considerablemente mayores. Por ejemplo, una prueba realizada en una máquina con un procesador Intel Core 2 de 1.86Ghz y 1Gbyte de RAM corriendo sobre Windows XP demoró 6 horas en entregar una solución óptima, es decir una máquina con $\frac{1}{4}$ menos en memoria RAM, hizo aumentar en más de 78 veces el tiempo de resolución.
- **Versión del software utilizado para resolver el modelo:** Una versión más reciente debería obtener soluciones en menores tiempos al aprovechar las mejoras en los métodos de resolución incorporadas por el fabricante.
- **Opciones de resolución del software:** El software utilizado permite configurar ciertas opciones de resolución que podrían reducir el tiempo de ejecución del modelo. Sin embargo, la verdadera utilidad de ellas dependerá, en la mayoría de los casos, de la instancia que se quiera resolver.
- **Fijación de variables:** Hay ciertas variables a las que se les podría fijar su valor conocidos los parámetros del modelo, pues no tienen más que un valor por tomar. Por ejemplo, gracias a la restricción (12), la variable binaria $x_{a,p}$ se podría fijar a priori en 0 (cero) para todos los partidos de mayor nivel y árbitros

que no cumplan con la categoría requerida para este tipo de partidos. De esta manera, el modelo podría reducir su tiempo de resolución al tener menos variables por fijar.

- Variación de parámetros: En general, el tiempo de resolución no es muy sensible a la variación en el valor de los parámetros del modelo, siempre y cuando se muevan dentro de rangos razonables. Por ejemplo, las pruebas en que se disminuyó el valor del parámetro *DISTMAX* no presentaron un aumento significativo.

Dado este último antecedente, se intenta un enfoque distinto de modelamiento que traspasa la función objetivo del primer modelo propuesto a una restricción y la restricción de las diferencias de distancias (restricción (5)) a la función objetivo. Este enfoque busca reducir al máximo posible la máxima diferencia entre un árbitro y otro de la distancia promedio por partido a recorrer, manteniendo las metas impuestas para ellos.

En este segundo modelamiento del problema, sólo los conjuntos se mantienen idénticos respecto al primero. El resto del modelo queda de la siguiente forma:

6.3.1 Parámetros

- C^a : categoría del árbitro a .
- N^p : mínima categoría de árbitro requerida para dirigir el partido p .
- $fechas^{p,f}$ $\begin{cases} 1 \text{ si partido } p \text{ se juega en la fecha } f \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$
- $juega^{p,e}$ $\begin{cases} 1 \text{ si equipo } e \text{ juega en el partido } p \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$
- $DIST^{a,p}$: distancia entre la localidad considerada como origen para el árbitro a y la localidad de realización del partido p .
- T^a : meta de partidos a ser asignados para dirigir por árbitro a .

- $MINP^{a,e}$: mínima cantidad de incidencias entre árbitro a y equipo e .
- $MAXP^{a,e}$: máxima cantidad de incidencias entre árbitro a y equipo e .
- D : mínima cantidad de fechas consecutivas que deben pasar para que un mismo árbitro pueda volver a ser asignado para dirigir a un mismo equipo³⁶.
- S^a : máxima cantidad de fechas consecutivas que pueden pasar sin que el árbitro a sea asignado a dirigir un partido.

6.3.2 Variables

- $x_{a,p} \begin{cases} 1 & \text{si árbitro } a \text{ es asignado para dirigir partido } p \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$
- $dist$: máxima diferencia entre un árbitro y otro de la distancia promedio por partido a recorrer.

6.3.3 Función Objetivo

La función objetivo del problema establece que la máxima diferencia entre un árbitro y otro de la distancia promedio por partido a recorrer debe ser minimizada:

$$\text{Min } z = dist \quad (26)$$

³⁶ Se contabiliza a partir de la última fecha en que fue asignado, es decir $D \geq 1$.

6.3.4 Restricciones

- El número total de partidos asignados para dirigir por árbitro debe ser igual a su meta:

$$\sum_{p=1}^P x_{a,p} = T^a \quad \forall a \in A. \quad (27)$$

- Cada partido debe ser dirigido por un y sólo un árbitro:

$$\sum_{a=1}^A x_{a,p} = 1 \quad \forall p \in P. \quad (28)$$

- Las diferencias entre un árbitro y otro de la distancia promedio por partido a recorrer está superiormente acotada por la función objetivo del problema:

$$\frac{1}{T^a} \sum_{p=1}^P DIST^{a,p} \cdot x_{a,p} - \frac{1}{T^r} \sum_{p=1}^P DIST^{r,p} \cdot x_{r,p} \leq dist \quad \forall a, r \in A. \quad (29)$$

- Cada árbitro puede ser asignado a dirigir a lo más un partido por fecha:

$$\sum_{p=1}^P fechas^{p,f} \cdot x_{a,p} \leq 1 \quad \forall a \in A, \forall f \in F. \quad (30)$$

- La cantidad de partidos asignados a cada tupla {árbitro, equipo} debe ser mayor o igual que el mínimo permitido para dicha tupla:

$$MINP^{a,e} \leq \sum_{p=1}^P juega^{p,e} \cdot x_{a,p} \quad \forall a \in A, \forall e \in E. \quad (31)$$

- La cantidad de partidos asignados a cada tupla {árbitro, equipo} debe ser menor o igual que el máximo permitido para dicha tupla:

$$\sum_{p=1}^P \text{juega}^{p,e} \cdot x_{a,p} \leq \text{MAXP}^{a,e} \quad \forall a \in A, \forall e \in E. \quad (32)$$

- En D fechas consecutivas, un árbitro puede ser asignado para dirigir a lo más una vez al mismo equipo:

$$\sum_{d=0}^{D-1} \sum_{p=1}^P \text{juega}^{p,e} \cdot \text{fechas}^{p,f+d} \cdot x_{a,p} \leq 1 \quad \forall a \in A, \forall f \leq |F|-D+1, \forall e \in E. \quad (33)$$

- Cada partido debe ser dirigido por un árbitro de la mínima categoría requerida:

$$x_{a,p} \cdot C^a \leq N^p \quad \forall a \in A, \forall p \in P. \quad (34)$$

- Un árbitro a no puede estar más de S^a fechas sin ser asignado para dirigir algún partido:

$$\sum_{s=0}^{S^a} \sum_{p=1}^P \text{fechas}^{p,f+s} \cdot x_{a,p} \geq 1 \quad \forall a \in A, \forall f \leq |F|-S^a. \quad (35)$$

- Un mismo árbitro no puede dirigir dos partidos seguidos que sean considerados de nivel superior:

$$x_{a,p} + x_{a,p^*} \leq 1 \quad (36)$$

$\forall a \in A; \forall p, p^* \in PN$ en que p^* es el siguiente partido de nivel superior después de p .

- Un mismo árbitro no puede ser asignado para dirigir más de un partido en que jueguen los mismos equipos (aquí se presenta la condición que supone que dos equipos se enfrentan dos y sólo dos veces durante el campeonato):

$$x_{a,p} + x_{a,p'} \leq 1 \quad \forall a \in A; \forall (p, p') \in \text{ESPEJOS}. \quad (37)$$

- Un árbitro a puede ser asignado para dirigir obligatoriamente cierto partido p :

$$x_{a,p} = 1 \quad \forall (a, p) \in \text{SIFIJO}. \quad (38)$$

- Un árbitro a puede impedírsele a ser asignado para dirigir cierto partido p :

$$x_{a,p} = 0 \quad \forall (a, p) \in \text{NOFIJO}. \quad (39)$$

- Naturaleza de las variables:

$$x_{a,p} \in \{0,1\} \quad \forall a, p. \quad (40)$$

$$dif_a \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \forall a. \quad (41)$$

El valor de la función objetivo de este modelamiento fue 2,1538, el de la varianza de las asignaciones fue de 1,1 y su tiempo de resolución fue mayor a las 60 horas, es decir se consigue una asignación sumamente pareja en términos de las distancias promedio a recorrer por los árbitros, y buena en términos de equidad deportiva, pero en un tiempo demasiado alto para lo que se requiere. Sin embargo, en 20 minutos se alcanza un valor de 59 para la función objetivo lo que es una muy buena solución. Luego, una forma fácil y rápida de conseguir soluciones factibles y de buena calidad para este modelamiento sería limitando el número de iteraciones y/o su tiempo de resolución.

Una técnica más elaborada que se podría utilizar para reducir el tiempo de resolución del modelo es considerar patrones de asignación para algunos o todos los árbitros. Esto es, forzar a que los árbitros sigan cierto patrón de asignaciones, que puede estar relacionada con el sector geográfico donde dirigirán (norte, centro y sur, por ejemplo). Se pueden obtener patrones a partir de una solución factible y permitir distintas combinaciones de asignación de estos patrones a los árbitros, lo que podría conducir a reducciones considerables en el tiempo de resolución e incluso a mejoras en la solución, si es que algunos de los patrones permanecen fijos para un subconjunto de árbitros.

Un tercer modelamiento del problema podría estar basado en una función objetivo que minimice costos de penalización asociados al no cumplimiento de restricciones. Para ello, habría que determinar cuáles serían las restricciones que se permitiría violar y su costo asociado en la función objetivo, de manera que sean comparables.

Así como las aquí expuestas, existen otras formas de modelamiento para enfrentar el problema, que pueden presentar distintos comportamientos frente a las instancias que intenten resolver. Seguramente, a medida que el modelo efectivamente se implemente en un campeonato, irán surgiendo nuevos requerimientos que podrían agregarse al modelamiento original. En el siguiente capítulo se presenta una herramienta computacional construida para la implementación del modelo.

7. IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO

Para asistir tanto el manejo y ejecución del modelo matemático como la presentación de sus resultados se construyó una aplicación en el lenguaje Visual Basic sobre Microsoft Excel que permite generar, asignar y cargar los parámetros del modelo, ejecutarlo y luego importar sus resultados a tablas y gráficos de fácil lectura. A continuación se detalla la estructura y utilidad de esta aplicación.

La aplicación está dividida en 4 módulos principales³⁷:

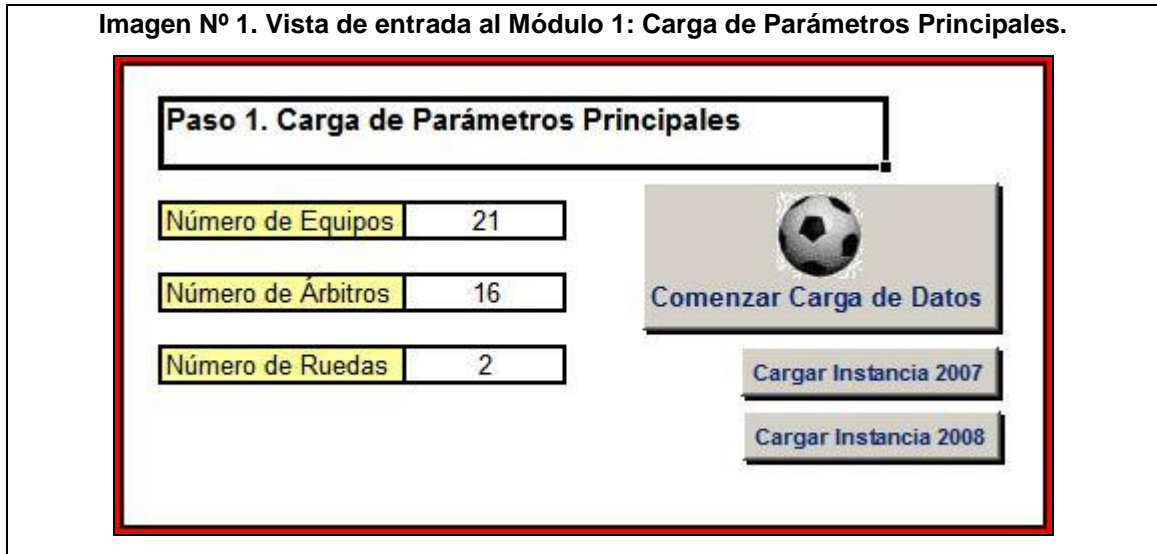
- **Carga de Parámetros Principales:** Es el primer paso de la aplicación y en él se cargan los 3 parámetros iniciales que se requieren para armar la instancia que se utilizará. Éstos son el número de equipos, el número de árbitros y el número de rondas que considerará el campeonato. Con esto, es posible generar los identificadores de los correspondientes 3 conjuntos principales del modelo (árbitros, equipos y partidos). Generados los conjuntos, se abren hojas de cálculo prediseñadas para ingresar las siguientes características o parámetros de cada uno de ellos:
 - Partidos: Equipo local, equipo visitante y nivel del partido.
 - Árbitros: Nombre, distancia al centro³⁸, categoría, meta de partidos, cantidad mínima de total de partidos a dirigir y cantidad máxima de total de partidos a dirigir.
 - Equipos: Nombre y distancia al centro.
 - Asignaciones Manuales o fijas: Identificador del partido, nombre del árbitro y asignación³⁹.

³⁷ Hay un paso previo que consiste en asignar el directorio donde se alojará la aplicación y todos los archivos que requiere para funcionar correctamente.

³⁸ Distancia entre el lugar de origen o residencia del árbitro y el lugar definido como centro geográfico para todas las ubicaciones.

³⁹ Un árbitro puede ser forzado tanto a ser como a NO ser asignado para dirigir determinado partido.

Se creó la opción de cargar automáticamente las instancias más recientes para poder comparar resultados fácil y rápidamente⁴⁰. A continuación se presenta la vista de entrada al Módulo 1.



- **Carga de Parámetros del Modelo:** Generados los conjuntos y asignados los parámetros principales, se permite darle valor a los parámetros restantes y críticos del modelo. Éstos son la mínima y máxima cantidad de partidos a dirigir por cada árbitro a cada equipo y la máxima diferencia que se permitirá entre la distancia promedio a recorrer por cada árbitro. Una vez definidos estos valores se carga la instancia completa en archivos de texto plano que servirán como parámetros de entrada para el modelo de optimización. A continuación se presenta la vista de entrada al Módulo 2.

⁴⁰ En caso que la aplicación vaya a ser utilizada para testear más de una vez una instancia, esta última se puede cargar en una hoja de cálculo auxiliar para que pueda ser cargada automáticamente en cada prueba.

Imagen N° 2. Vista de entrada al Módulo 2: Carga de Parámetros del Modelo.

Paso 2. Carga de Parámetros del Modelo	
Mínima cantidad de partidos a dirigir por árbitro a cada equipo	1
Máxima cantidad de partidos a dirigir por árbitro a cada equipo	5
Máxima diferencia permitida entre distancia recorrida promedio por árbitros	500

Cargar

- **Ejecución del Modelo Matemático:** El tercer módulo permite ejecutar el modelo matemático de optimización. Esto se realiza mediante la ejecución de un archivo de extensión .bat que llama al archivo que contiene el modelo. Todo se hace de forma asíncrona de forma que el modelo debe terminar su ejecución para que la aplicación permita ejecutar el paso siguiente. Opciones de ejecución pueden ser incluidas y/o modificadas en el archivo .bat que está alojado en el mismo directorio del modelo. En particular se puede modificar el modelo a resolver en caso que se opte por uno alternativo. También opciones de resolución del modelo propias del solver comercial utilizado pueden ser incluidas y/o modificadas en un archivo de extensión .opt alojado en el mismo directorio. A continuación se presenta la vista de entrada al Módulo 3.

Imagen N° 3. Vista de entrada al Módulo 3: Ejecución del Modelo Matemático.

Paso 3. Ejecución del Modelo Matemático
Ejecutar Modelo

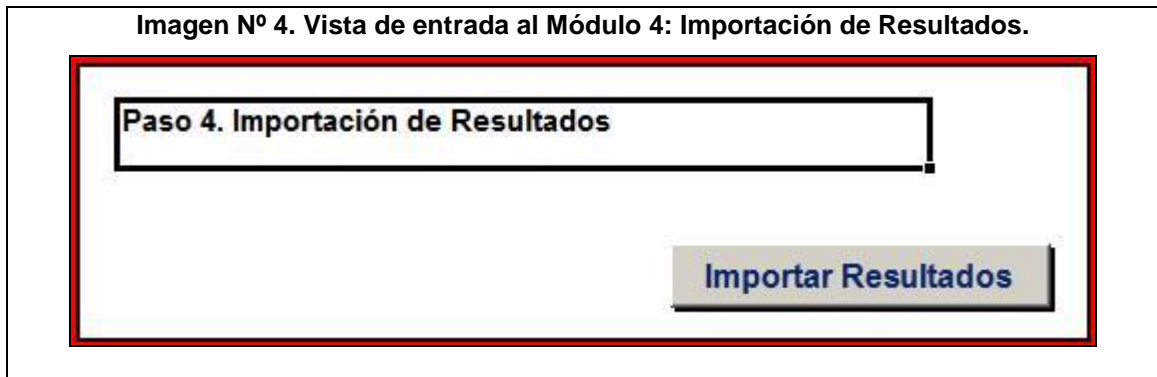
- **Importación de Resultados:** El cuarto y último módulo permite importar la solución del modelo matemático a tablas de datos que abastecen tablas y gráficos dinámicos que son desplegados en formatos de cómoda lectura y fácil interpretación. Se importan los siguientes formatos de la solución:
 - Listado completo de partidos con los equipos que juegan y el árbitro asignado.
 - Listado completo de árbitros con la distancia total que recorren y la cantidad total de partidos que dirigen.
 - Listado de partidos considerados de mayor importancia con los equipos que juegan y el árbitro asignado.

Con estos datos cargados en la aplicación, se abastecen las siguientes tablas y gráficos dinámicos:

1. Tabla y gráfico dinámico que muestran la cantidad de asignaciones por árbitro y por equipo y la varianza de estas asignaciones.
2. Tabla y gráfico dinámico que muestran los árbitros y la distancia total recorrida, junto con estadísticas.
3. Tabla y gráfico dinámico que muestran los árbitros y la cantidad total de partidos asignados, junto con estadísticas.
4. Tabla y gráfico dinámico que muestran las distancias a recorrer promedio por árbitro por partido, junto con estadísticas.

A continuación se presenta la vista de entrada al Módulo 4.

Imagen N° 4. Vista de entrada al Módulo 4: Importación de Resultados.



Además de los módulos principales, la aplicación contiene menús de ayuda para usuarios principiantes y mensajes emergentes de error en caso que se ingresen parámetros inválidos o que hagan el modelo infactible. La aplicación fue construida para poder ser ejecutada en cualquier máquina que tenga instalados los programas Microsoft Excel, GAMS y CPLEX, previa configuración de sus variables de entorno⁴¹. Esto le permite a cualquier tomador de decisiones sin mayor experiencia utilizar la herramienta como apoyo para efectuar una asignación de árbitros.

⁴¹ Conjunto de valores dinámicos de un computador que normalmente afectan el comportamiento de sus procesos.

8. CONCLUSIONES

El problema de asignación de árbitros lo enfrentan semana a semana cientos de entidades organizadoras de competiciones deportivas a lo largo del mundo. Ni la aleatoriedad ha podido dar con un mecanismo que logre entregar una solución libre de dudas por la falta de neutralidad que caracteriza al proceso. A pesar que no es un problema complejo matemáticamente, poco se ha hecho por encontrar herramientas que permitan resolverlo de forma rápida y equilibrada para todos los actores involucrados. En este trabajo, se presenta una formulación matemática del problema, se resuelve e implementa satisfactoriamente dentro del contexto del fútbol chileno.

Es importante mencionar que la asignación que entrega el modelo son las analizadas por un computador y deben ser entendidas como tal. Muchas veces los parámetros de entrada deberán ser variados para que las soluciones propuestas reflejen un comportamiento factible en la operación real. Otras veces las soluciones entregadas por el sistema serán bastante difíciles de llevar a cabo en la práctica, debido principalmente a inconvenientes de última hora como partidos suspendidos o indisponibilidad repentina de árbitros. Dado lo anterior, es que el tomador de decisiones es quien tiene la última palabra y debe usar los resultados del sistema sólo como un apoyo.

La dificultad principal del problema abordado en este trabajo radica en la correcta interpretación de las restricciones que históricamente la Comisión de Árbitros de la ANFP ha impuesto de forma manual al momento de realizar la asignación. El estudio del problema también permitió descubrir e incorporar otras restricciones que buscan hacer más justa la asignación y que ni siquiera eran tomadas en cuenta, como la de distancia promedio a recorrer por árbitro.

En términos de optimalidad, equidad deportiva y tiempo de resolución, el resultado obtenido satisface todas las exigencias impuestas y refleja la mejor

asignación de árbitros posible. El valor de la varianza en las asignaciones para el caso de estudio se redujo en un 50% y el tiempo de resolución está dentro de márgenes absolutamente razonables. Una ventaja importante del modelo es que puede obtener soluciones óptimas en tiempos bastante cortos, lo que se transforma en una potente cualidad si se requiere más de una solución óptima en plazos reducidos de tiempo, con el fin de compararlas y escoger la que finalmente más satisfaga. Además, deja obsoleta a la tediosa y difícil tarea de hacerlo manualmente.

La herramienta computacional construida para resolver el problema permite fácilmente modificar todos los valores de todos los parámetros del modelo de optimización y comparar resultados de distintas instancias, lo que le da una inmensa ventaja por sobre la resolución manual. Además, permite liberar horas-hombre de trabajo para ser dedicadas a otras labores.

Otra ventaja importante del modelo es que la solución entregada puede ser utilizada como sugerencia para la asignación completa del campeonato, así como también para una determinada cantidad de fechas a partir del momento de ejecución. La opción de imponer valores de forma manual a las variables del modelo permite resolverlo en distintos instantes del tiempo incorporando las asignaciones que efectivamente han sido realizadas, siempre y cuando el modelo siga siendo factible. El aplicar esta estrategia para resolver el problema, implica una mayor frecuencia de ejecuciones pero posiblemente un menor tiempo de resolución en cada una de ellas pues, mientras más variables se fijan, el espacio de soluciones factibles más se reduce y la solución óptima podría ser encontrada más rápidamente. Además, esta estrategia permite ir modificando en cada ejecución ciertos parámetros que eventualmente se necesite cambiar como puede ser la categoría de un árbitro o el nivel de un partido, que generalmente van variando en la medida que el campeonato avanza.

Si bien el modelo propuesto está construido para resolver la asignación de árbitros de un campeonato de fútbol tradicional, pequeñas modificaciones al

modelamiento permitirían utilizarlo para resolver otro tipo de campeonatos, ya sea de fútbol como de otras disciplinas deportivas. En efecto, el modelo se adapta sin mayores problemas a un campeonato de fútbol de eliminación directa como lo son los *playoffs* o a un campeonato de béisbol, basketball, fútbol americano u otro deporte que se desarrolle en un sistema en que juegan todos los equipos contra todos y se cuente con una determinada cantidad de árbitros para dirigir cada fecha. En este sentido, es importante destacar el hecho que el modelo también puede ser utilizado para resolver asignaciones en que no sea un solo árbitro el que dirija cada partido, sino que sean dos o más, siempre y cuando siempre sean los mismos los que arbitren juntos. Incluso, pequeñas variaciones al modelo también permitirían utilizarlo para resolver la asignación independiente de si son siempre los mismos árbitros quienes dirigen juntos. Estas características lo transforman en un modelo perfectamente extrapolable a diversos campeonatos deportivos alrededor del mundo.

Otro aspecto destacable del modelamiento es que permite incorporar más de un campeonato en la instancia a resolver. Esto es interesante para torneos de más de una división que compartan árbitros entre ellas. Por ejemplo, en el caso de Chile, se podría resolver el campeonato de Primera A y Primera B en forma conjunta, modificando los parámetros de niveles de partidos y categorías de árbitros para permitir que ciertos árbitros que a priori están destinados para dirigir partidos en Primera A, lo puedan hacer en la Primera B y viceversa.

Un tema interesante es el que tiene que ver con la localidad que es considerada como origen para los árbitros. El requerimiento hecho por la ANFP fue que todos los árbitros deben ser considerados como si partieran desde la misma localidad origen (Santiago). Sin embargo, este es un parámetro del modelo y puede cambiarse si se quisiera, por ejemplo, que un árbitro sea asignado a dirigir dos partidos muy cercanos en fecha y lejanos de la localidad origen, de manera de aprovechar el largo viaje que tendrá que hacer. Esto podría conseguirse considerando en la función objetivo del modelo las distancias o tiempos totales a recorrer por los árbitros.

Existe una serie de temas que es posible extender a partir de este trabajo. Incorporar las calificaciones de los árbitros de acuerdo a su desempeño a medida que dirigen sus partidos y así hacer más equitativa la asignación para los equipos, incorporar el tiempo promedio de viaje por árbitro (además de la distancia) y con ello hacer más equitativa la asignación para los árbitros o considerar patrones de asignación para los árbitros (norte, centro y sur, por ejemplo) para reducir el espacio de soluciones factibles y conseguir menores tiempos de resolución, son tres posibles extensiones para una futura investigación. De todas formas, los resultados obtenidos en este estudio cumplen los objetivos propuestos y superan ampliamente las expectativas iniciales de la Comisión de Árbitros y de la dirigencia de la ANFP.

Desde el punto de vista académico, se abren nuevas perspectivas en relación a este problema. La incorporación de metas y distancias recorridas en un mismo modelamiento, la inclusión de novedosas restricciones y la medición de lo equitativo de las asignaciones, son las principales contribuciones de este trabajo.

Se espera que en la medida que este trabajo sea efectivamente aplicado en el campeonato de fútbol nacional, sirva de base para otros que pudieran surgir, incluso en el ámbito internacional, y con ello sea un aporte para transformar este tipo de aplicaciones de la Gestión de Operaciones en una real contribución a las entidades organizadoras de competencias deportivas alrededor del mundo.

9. BIBLIOGRAFÍA

- [1] BONOMO F., BURZYN A., CARDEMIL A., DURÁN G. y MARENCO J. 2008. An application of the traveling tournament problem: The Argentine volleyball league. The 7th International Conference on the Practice and Theory of Automated Timetabling (PATAT).
- [2] CARDEMIL A. 2002. Desarrollo de heurísticas aplicadas a planificación de scheduling deportivos. Tesis de Licenciatura en Ciencias de la Computación. Departamento de Computación, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.
- [3] DINITZ J. H. y STINSON D. R. 2005. On assigning referees to tournament schedules. Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications, Vol. 44, pp. 22-28.
- [4] DUARTE A., RIBEIRO C. y URRUTIA S. 2007. Referee Assignment in Sport Tournaments. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 3867, pp. 158-173.
- [5] DURÁN G. 2006. Fútbol, modelos matemáticos y Sudáfrica 2010. En: Semana de la Computación de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.
- [6] DURÁN G., GUAJARDO M., MIRANDA J., SAURÉ D., SOUYRIS S., WEINTRAUB A. y WOLF R. 2007. Scheduling the Chilean Soccer League by Integer Programming. Interfaces, Vol. 37, No. 6, pp. 598-602.
- [7] EASTON K., NEMHAUSER G.L. y TRICK M. 2001. The Traveling Tournament Problem: Description and Benchmarks. Londres, Inglaterra. Springer-Verlag. Proceedings of the 7th International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming, pp. 580-584.
- [8] EVANS J. R. 1988. A microcomputer-based decision support system for scheduling umpires in the American baseball league. Interfaces, Vol. 18, No. 6, pp. 42-51.
- [9] GIL LA FUENTE J., ROJAS J. 2007. La idónea asignación arbitral con altos niveles de incertidumbre. Empresa global y mercados locales, Vol. 1, ISBN 978-84-7356-500-4, pp. 69.

- [10]NORONHA T. F., RIBEIRO C., DURÁN G., SOUYRIS S. y WEINTRAUB A. 2004. A branch-and-cut algorithm for scheduling the highly-constrained Chilean soccer tournament. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 3867, pp. 174-186.
- [11]MESUT YAVUZ, UMUT H. İNAN Y ALPASLAN FIĞLALI. 2008. Fair referee assignments for professional football leagues. Computers & Operations Research, Vol. 35, No. 9, pp. 2937-2951.
- [12]ORTIZ C., VARAS S. y VERA J. 2000. Optimización y Modelos para la Gestión. Dolmen Ediciones.
- [13]Página/12, 4 de Junio de 2006. La vera historia del fixture. [en línea] <<http://www.pagina12.com.ar/diario/deportes/8-67815-2006-06-04.html>> [consulta: Octubre 2008].
- [14]PITTSBURGH BUSSINES TIMES, 12 de Noviembre de 2004. Striking it BIG: Local firm lands Major League Baseball scheduling contract. [en línea] <<http://pittsburgh.bizjournals.com/pittsburgh/stories/2004/11/15/story7.html>> [consulta: Mayo 2008].
- [15]RIBEIRO C. y URRUTIA S. 2004. OR on the ball: Applications in sports scheduling and management. OR/MS Today, Vol. 31, pp. 50-54.
- [16]RIBEIRO C. y URRUTIA S. 2005. An application of integer programming to playoff elimination in football championships. International Transactions in Operational Research, Vol. 12, pp. 375-386.
- [17]RIBEIRO C. 2007. Problemas de optimización en programación y administración deportiva. En: VII Congreso Chileno de Investigación Operativa. Universidad de Los Lagos, Puerto Montt, Chile.
- [18]WRIGHT M. B. 1991. Scheduling English cricket umpires. Journal of the Operational Research Society, Vol. 42, No. 6, pp.447-452.
- [19]YILDIZ H. 2007. Traveling Umpire Problem. [en línea] <<http://www.andrew.cmu.edu/user/hakanyil>> [consulta: Noviembre 2007].

10. GLOSARIO

árbitro: Persona que hace la labor de juez durante el desarrollo de un partido.

comisión arbitral: Conjunto de árbitros compuestos por un árbitro principal y dos o más asistentes encargados de dirigir un partido.

fixture: Programación de partidos de un campeonato deportivo. Incluye los equipos que se enfrentan en cada partido y en el orden que lo hacen.

guardalíneas: En un partido de fútbol, dos árbitros que asisten al principal y se ubican en los costados más largos de la cancha. Su misión es determinar cuándo la pelota se sale de los márgenes permitidos, cuándo un jugador se encuentra en una posición no permitida y a veces cobra faltas que no han sido percatadas por el árbitro principal.

liga deportiva: Campeonato deportivo.

playoffs: Sistema de campeonato deportivo en que los equipos van pasando rondas de eliminación hasta llegar a dos finalistas. Muchos sistemas de campeonatos consisten en una primera fase en que los equipos se enfrentan todos contra todos y luego, sólo los que obtuvieron mejor puntaje, se enfrentan en sistema de *playoffs*.

11. ANEXOS

11.1 Conjuntos de la instancia Ch2007 correspondiente al campeonato de fútbol chileno del año 2007.

Tabla N° 10. Equipos

ID EQUIPO	NOMBRE EQUIPO
1	Antofagasta
2	Audax Italiano
3	Cobreloa
4	Cobresal
5	Colo-Colo
6	Concepción
7	Coquimbo
8	Everton
9	Huachipato
10	La Serena
11	Lota Schwager
12	Melipilla
13	Ñublense
14	O'Higgins
15	Palestino
16	Pto. Montt
17	U. Católica
18	U. de Concepción
19	U. de Chile
20	U. Española
21	Wanderers

Tabla N° 11. Árbitros

ID ARBITRO	NOMBRE ARBITRO
1	Acosta Manuel
2	Aros Guido
3	Bascuñán Julio
4	Caamaño Francisco
5	Chandía Carlos
6	Fuenzalida Claudio
7	Gamboa Eduardo
8	García Álvaro
9	Henríquez José
10	Osorio Jorge
11	Osses Enrique
12	Polic Patricio
13	Ponce Eduardo
14	Pozo Pablo
15	Puga Claudio
16	Selman Rubén

11.2 Total de asignaciones por árbitro por equipo el año 2007.

Tabla Nº 12. Total de asignaciones por árbitro por equipo el año 2007.

EQUIPO	ARBITRO	PARTIDOS
Antofagasta	Acosta Manuel	3
	Aros Guido	2
	Bascuñán Julio	1
	Caamaño Francisco	0
	Chandía Carlos	1
	Fuenzalida Claudio	3
	Gamboa Eduardo	4
	García Álvaro	3
	Henríquez José	4
	Osorio Jorge	2
	Osses Enrique	2
	Polic Patricio	4
	Ponce Eduardo	3
	Pozo Pablo	0
	Puga Claudio	3
Selman Rubén	5	
Audax Italiano	Acosta Manuel	4
	Aros Guido	2
	Bascuñán Julio	5
	Caamaño Francisco	0
	Chandía Carlos	6
	Fuenzalida Claudio	1
	Gamboa Eduardo	0
	García Álvaro	2
	Henríquez José	0
	Osorio Jorge	4
	Osses Enrique	5
	Polic Patricio	0
	Ponce Eduardo	2
	Pozo Pablo	3
	Puga Claudio	3
Selman Rubén	3	
Cobreloa	Acosta Manuel	4
	Aros Guido	6
	Bascuñán Julio	3
	Caamaño Francisco	0
	Chandía Carlos	4
	Fuenzalida Claudio	2
	Gamboa Eduardo	2
	García Álvaro	3

	Henríquez José	2
	Osorio Jorge	2
	Osses Enrique	2
	Polic Patricio	2
	Ponce Eduardo	3
	Pozo Pablo	1
	Puga Claudio	0
	Selman Rubén	4
Cobresal	Acosta Manuel	1
	Aros Guido	3
	Bascuñán Julio	5
	Caamaño Francisco	0
	Chandía Carlos	4
	Fuenzalida Claudio	3
	Gamboa Eduardo	2
	García Álvaro	1
	Henríquez José	5
	Osorio Jorge	3
	Osses Enrique	1
	Polic Patricio	4
	Ponce Eduardo	2
	Pozo Pablo	1
	Puga Claudio	5
	Selman Rubén	4
Colo-Colo	Acosta Manuel	2
	Aros Guido	2
	Bascuñán Julio	0
	Caamaño Francisco	0
	Chandía Carlos	6
	Fuenzalida Claudio	2
	Gamboa Eduardo	1
	García Álvaro	2
	Henríquez José	0
	Osorio Jorge	4
	Osses Enrique	6
	Polic Patricio	1
	Ponce Eduardo	4
	Pozo Pablo	5
	Puga Claudio	1
	Selman Rubén	4
Concepción	Acosta Manuel	1
	Aros Guido	1
	Bascuñán Julio	4
	Caamaño Francisco	0
	Chandía Carlos	4

	Fuenzalida Claudio	4
	Gamboa Eduardo	4
	García Álvaro	2
	Henríquez José	2
	Osorio Jorge	2
	Osses Enrique	2
	Polic Patricio	2
	Ponce Eduardo	5
	Pozo Pablo	1
	Puga Claudio	1
	Selman Rubén	5
Coquimbo	Acosta Manuel	3
	Aros Guido	4
	Bascuñán Julio	3
	Caamaño Francisco	0
	Chandía Carlos	3
	Fuenzalida Claudio	4
	Gamboa Eduardo	3
	García Álvaro	0
	Henríquez José	4
	Osorio Jorge	1
	Osses Enrique	1
	Polic Patricio	3
	Ponce Eduardo	2
	Pozo Pablo	4
	Puga Claudio	2
	Selman Rubén	3
Everton	Acosta Manuel	2
	Aros Guido	3
	Bascuñán Julio	3
	Caamaño Francisco	0
	Chandía Carlos	4
	Fuenzalida Claudio	1
	Gamboa Eduardo	3
	García Álvaro	4
	Henríquez José	2
	Osorio Jorge	3
	Osses Enrique	3
	Polic Patricio	2
	Ponce Eduardo	3
	Pozo Pablo	4
	Puga Claudio	1
	Selman Rubén	2
Huachipato	Acosta Manuel	2
	Aros Guido	1

	Bascuñán Julio	3
	Caamaño Francisco	0
	Chandía Carlos	3
	Fuenzalida Claudio	3
	Gamboa Eduardo	3
	García Álvaro	3
	Henríquez José	3
	Osorio Jorge	3
	Osses Enrique	3
	Polic Patricio	2
	Ponce Eduardo	2
	Pozo Pablo	3
	Puga Claudio	3
	Selman Rubén	3
La Serena	Acosta Manuel	2
	Aros Guido	2
	Bascuñán Julio	1
	Caamaño Francisco	0
	Chandía Carlos	5
	Fuenzalida Claudio	4
	Gamboa Eduardo	2
	García Álvaro	5
	Henríquez José	4
	Osorio Jorge	2
	Osses Enrique	1
	Polic Patricio	3
	Ponce Eduardo	2
	Pozo Pablo	0
	Puga Claudio	5
	Selman Rubén	2
Lota Schwager	Acosta Manuel	2
	Aros Guido	4
	Bascuñán Julio	2
	Caamaño Francisco	0
	Chandía Carlos	5
	Fuenzalida Claudio	3
	Gamboa Eduardo	4
	García Álvaro	1
	Henríquez José	2
	Osorio Jorge	2
	Osses Enrique	2
	Polic Patricio	3
	Ponce Eduardo	2
	Pozo Pablo	2
	Puga Claudio	3

	Selman Rubén	3
Melipilla	Acosta Manuel	2
	Aros Guido	1
	Bascuñán Julio	4
	Caamaño Francisco	1
	Chandía Carlos	2
	Fuenzalida Claudio	4
	Gamboa Eduardo	3
	García Álvaro	1
	Henríquez José	4
	Osorio Jorge	4
	Osses Enrique	2
	Polic Patricio	3
	Ponce Eduardo	2
	Pozo Pablo	2
	Puga Claudio	2
	Selman Rubén	3
Ñublense	Acosta Manuel	3
	Aros Guido	2
	Bascuñán Julio	3
	Caamaño Francisco	1
	Chandía Carlos	0
	Fuenzalida Claudio	4
	Gamboa Eduardo	5
	García Álvaro	4
	Henríquez José	3
	Osorio Jorge	1
	Osses Enrique	2
	Polic Patricio	4
	Ponce Eduardo	2
	Pozo Pablo	1
	Puga Claudio	3
	Selman Rubén	2
O'Higgins	Acosta Manuel	3
	Aros Guido	6
	Bascuñán Julio	0
	Caamaño Francisco	0
	Chandía Carlos	5
	Fuenzalida Claudio	3
	Gamboa Eduardo	3
	García Álvaro	4
	Henríquez José	0
	Osorio Jorge	2
	Osses Enrique	5
	Polic Patricio	1

	Ponce Eduardo	4
	Pozo Pablo	2
	Puga Claudio	2
	Selman Rubén	0
Palestino	Acosta Manuel	2
	Aros Guido	0
	Bascuñán Julio	3
	Caamaño Francisco	0
	Chandía Carlos	3
	Fuenzalida Claudio	1
	Gamboa Eduardo	3
	García Álvaro	4
	Henríquez José	6
	Osorio Jorge	3
	Osses Enrique	4
	Polic Patricio	5
	Ponce Eduardo	1
	Pozo Pablo	1
	Puga Claudio	3
	Selman Rubén	1
Pto. Montt	Acosta Manuel	2
	Aros Guido	1
	Bascuñán Julio	4
	Caamaño Francisco	0
	Chandía Carlos	3
	Fuenzalida Claudio	1
	Gamboa Eduardo	2
	García Álvaro	4
	Henríquez José	3
	Osorio Jorge	3
	Osses Enrique	2
	Polic Patricio	5
	Ponce Eduardo	3
	Pozo Pablo	1
	Puga Claudio	3
	Selman Rubén	3
U. Católica	Acosta Manuel	3
	Aros Guido	6
	Bascuñán Julio	1
	Caamaño Francisco	0
	Chandía Carlos	5
	Fuenzalida Claudio	0
	Gamboa Eduardo	1
	García Álvaro	0
	Henríquez José	0

	Osorio Jorge	4
	Osses Enrique	7
	Polic Patricio	1
	Ponce Eduardo	1
	Pozo Pablo	6
	Puga Claudio	2
	Selman Rubén	3
U. de Concepción	Acosta Manuel	2
	Aros Guido	3
	Bascuñán Julio	4
	Caamaño Francisco	0
	Chandía Carlos	3
	Fuenzalida Claudio	3
	Gamboa Eduardo	4
	García Álvaro	4
	Henríquez José	2
	Osorio Jorge	2
	Osses Enrique	1
	Polic Patricio	0
	Ponce Eduardo	3
	Pozo Pablo	4
	Puga Claudio	3
	Selman Rubén	2
U. de Chile	Acosta Manuel	2
	Aros Guido	7
	Bascuñán Julio	0
	Caamaño Francisco	0
	Chandía Carlos	5
	Fuenzalida Claudio	0
	Gamboa Eduardo	0
	García Álvaro	0
	Henríquez José	0
	Osorio Jorge	2
	Osses Enrique	4
	Polic Patricio	2
	Ponce Eduardo	6
	Pozo Pablo	6
	Puga Claudio	4
	Selman Rubén	2
U. Española	Acosta Manuel	2
	Aros Guido	1
	Bascuñán Julio	1
	Caamaño Francisco	0
	Chandía Carlos	0
	Fuenzalida Claudio	6

	Gamboa Eduardo	5
	García Álvaro	0
	Henríquez José	4
	Osorio Jorge	3
	Osses Enrique	3
	Polic Patricio	3
	Ponce Eduardo	5
	Pozo Pablo	3
	Puga Claudio	2
	Selman Rubén	2
Wanderers	Acosta Manuel	5
	Aros Guido	3
	Bascuñán Julio	0
	Caamaño Francisco	0
	Chandía Carlos	5
	Fuenzalida Claudio	4
	Gamboa Eduardo	0
	García Álvaro	1
	Henríquez José	2
	Osorio Jorge	2
	Osses Enrique	2
	Polic Patricio	4
	Ponce Eduardo	5
	Pozo Pablo	2
	Puga Claudio	1
	Selman Rubén	4

11.3 Parámetros de la instancia Ch2007 correspondiente al campeonato de fútbol chileno del año 2007.

Tabla N° 13. Parámetros de Equipos de Ch2007.

ID EQUIPO	NOMBRE EQUIPO	DISTANCIA A CENTRO
1	Antofagasta	1370
2	Audax_Italiano	0
3	Cobreloa	1560
4	Cobresal	1100
5	Colo_Colo	0
6	Concepcion	-515
7	Coquimbo	460
8	Everton	120
9	Huachipato	-530
10	La_Serena	470
11	Lota_Schwager	-538
12	Melipilla	60
13	Nublense	405
14	OHiggins	-90
15	Palestino	0
16	Pto_Montt	-1050
17	U_Catolica	0
18	U_de_Concepcion	-515
19	U_de_Chile	0
20	U_Espanola	0
21	Wanderers	119

Tabla N° 14. Parámetros de Árbitros de Ch2007.

ID ARBITRO	NOMBRE ARBITRO	DISTANCIA A CENTRO	CATEGORIA	META	MIN PARTIDOS	MAX PARTIDOS
1	Acosta_Manuel	0	3	26	25	27
2	Aros_Guido	0	2	26	25	27
3	Bascunan_Julio	0	3	26	25	27
4	Caamano_Francisco	0	3	26	25	27
5	Chandía_Carlos	0	1	28	27	29
6	Fuenzalida_Claudio	0	3	26	25	27
7	Gamboa_Eduardo	0	2	26	25	27
8	Garcia_Álvaro	0	3	26	25	27
9	Henriquez_Jose	0	3	26	25	27
10	Osorio_Jorge	0	2	26	25	27
11	Osses_Enrique	0	1	27	26	28
12	Polic_Patricio	0	2	26	25	27
13	Ponce_Eduardo	0	3	26	25	27
14	Pozo_Pablo	0	1	27	26	28
15	Puga_Claudio	0	2	26	25	27
16	Selman_Ruben	0	2	26	25	27

Tabla Nº 15. Parámetros de Partidos de Ch2007 y asignación resultante⁴².

ID PARTIDO	FECHA	LOCAL	VISITA	NIVEL	ARBITRO
1	1	Cobrelola	Antofagasta	3	Ponce_Eduard
2	1	U_de_Chile	U_de_Concepcion	3	Osorio_Jorge
3	1	Everton	OHiggins	3	Fuenzalida_C
4	1	U_Espanola	La_Serena	3	Polic_Patric
5	1	Coquimbo	Huachipato	3	Pozo_Pablo
6	1	Pto_Montt	Nublense	3	Puga_Claudio
7	1	U_Catolica	Wanderers	3	Henriquez_Jo
8	1	Melipilla	Colo_Colo	3	Caamano_Fran
9	1	Cobresal	Audax_Italiano	3	Osses_Enriqu
10	1	Lota_Schwager	Palestino	3	Chandia_Carl
11	2	Palestino	Pto_Montt	3	Fuenzalida_C
12	2	Huachipato	Cobresal	3	Acosta_Manue
13	2	Audax_Italiano	Lota_Schwager	3	Polic_Patric
14	2	U_de_Concepcion	Coquimbo	3	Chandia_Carl
15	2	Colo_Colo	Concepcion	3	Puga_Claudio
16	2	La_Serena	U_Catolica	3	Pozo_Pablo
17	2	OHiggins	Wanderers	3	Gamboa_Eduar
18	2	U_Espanola	Everton	3	Garcia_Alvar
19	2	Nublense	Melipilla	3	Osses_Enriqu
20	2	Antofagasta	U_de_Chile	3	Selman_Ruben
21	3	Cobresal	OHiggins	3	Garcia_Alvar
22	3	Concepcion	La_Serena	3	Chandia_Carl
23	3	Wanderers	Antofagasta	3	Osses_Enriqu
24	3	Melipilla	U_Espanola	3	Selman_Ruben
25	3	U_Catolica	Palestino	3	Polic_Patric
26	3	U_de_Chile	Audax_Italiano	3	Aros_Guido
27	3	Lota_Schwager	Nublense	3	Pozo_Pablo
28	3	Coquimbo	Colo_Colo	3	Bascunan_Jul
29	3	Cobrelola	Huachipato	3	Henriquez_Jo
30	3	Everton	U_de_Concepcion	3	Gamboa_Eduar
31	4	Palestino	Coquimbo	3	Selman_Ruben
32	4	Pto_Montt	U_de_Chile	3	Chandia_Carl
33	4	Colo_Colo	Cobresal	3	Henriquez_Jo
34	4	La_Serena	Cobrelola	3	Fuenzalida_C
35	4	Antofagasta	Melipilla	3	Osorio_Jorge
36	4	OHiggins	U_Espanola	3	Aros_Guido
37	4	Audax_Italiano	Everton	3	Ponce_Eduard
38	4	U_Catolica	Lota_Schwager	3	Gamboa_Eduar
39	4	Huachipato	Nublense	3	Bascunan_Jul

⁴² Notar que la columna ÁRBITRO no pertenece a los parámetros de Ch2007, sino que a la asignación resultante del modelo.

40	4	Concepcion	Wanderers	3	Caamano_Fran
41	5	U_Espanola	Audax_Italiano	3	Acosta_Manue
42	5	Huachipato	Concepcion	3	Osses_Enriqu
43	5	Melipilla	Cobresal	3	Bascunan_Jul
44	5	Nublense	Palestino	3	Gamboa_Eduar
45	5	Wanderers	Pto_Montt	3	Pozo_Pablo
46	5	Everton	U_Catolica	3	Aros_Guido
47	5	Cobreloa	OHiggins	3	Selman_Ruben
48	5	Coquimbo	Antofagasta	3	Ponce_Eduard
49	5	U_de_Concepcion	Colo_Colo	3	Fuenzalida_C
50	5	U_de_Chile	La_Serena	3	Puga_Claudio
51	6	Wanderers	Coquimbo	3	Osorio_Jorge
52	6	Nublense	U_Catolica	3	Puga_Claudio
53	6	Pto_Montt	U_de_Concepcion	3	Aros_Guido
54	6	La_Serena	OHiggins	3	Acosta_Manue
55	6	Antofagasta	Everton	3	Osses_Enriqu
56	6	Palestino	Huachipato	3	Polic_Patric
57	6	Cobresal	Cobreloa	3	Gamboa_Eduar
58	6	Colo_Colo	U_Espanola	3	Pozo_Pablo
59	6	Concepcion	U_de_Chile	3	Selman_Ruben
60	6	Lota_Schwager	Melipilla	3	Garcia_Alvar
61	7	OHiggins	Lota_Schwager	3	Gamboa_Eduar
62	7	Coquimbo	Audax_Italiano	3	Fuenzalida_C
63	7	Huachipato	Wanderers	3	Acosta_Manue
64	7	Melipilla	Concepcion	3	Aros_Guido
65	7	U_de_Concepcion	Palestino	3	Henriquez_Jo
66	7	Everton	Nublense	3	Caamano_Fran
67	7	U_Espanola	Cobresal	3	Osses_Enriqu
68	7	Cobreloa	Pto_Montt	3	Garcia_Alvar
69	7	U_Catolica	U_de_Chile	1	Chandia_Carl
70	7	Colo_Colo	Antofagasta	3	Osorio_Jorge
71	8	U_de_Chile	Cobreloa	2	Aros_Guido
72	8	Audax_Italiano	Huachipato	3	Caamano_Fran
73	8	Lota_Schwager	U_de_Concepcion	3	Puga_Claudio
74	8	Pto_Montt	U_Espanola	3	Acosta_Manue
75	8	Antofagasta	OHiggins	3	Henriquez_Jo
76	8	Cobresal	Coquimbo	3	Bascunan_Jul
77	8	Concepcion	U_Catolica	3	Ponce_Eduard
78	8	Wanderers	Melipilla	3	Gamboa_Eduar
79	8	Nublense	Colo_Colo	3	Fuenzalida_C
80	8	La_Serena	Everton	3	Polic_Patric
81	9	Audax_Italiano	Antofagasta	3	Osses_Enriqu
82	9	U_de_Concepcion	Cobresal	3	Polic_Patric
83	9	Cobreloa	Concepcion	3	Gamboa_Eduar

84	9	Coquimbo	La_Serena	2	Chandia_Carl
85	9	U_Espanola	Nublense	3	Pozo_Pablo
86	9	Colo_Colo	Lota_Schwager	3	Ponce_Eduard
87	9	Palestino	Melipilla	3	Puga_Claudio
88	9	OHiggins	U_de_Chile	3	Caamano_Fran
89	9	Everton	Wanderers	2	Selman_Ruben
90	9	Huachipato	Pto_Montt	3	Osorio_Jorge
91	10	Wanderers	Cobreloa	3	Caamano_Fran
92	10	Pto_Montt	Everton	3	Garcia_Alvar
93	10	Concepcion	OHiggins	3	Chandia_Carl
94	10	Lota_Schwager	Coquimbo	3	Fuenzalida_C
95	10	Nublense	U_de_Concepcion	3	Osorio_Jorge
96	10	U_de_Chile	Huachipato	3	Bascunan_Jul
97	10	Antofagasta	U_Espanola	3	Polic_Patric
98	10	Palestino	Audax_Italiano	3	Pozo_Pablo
99	10	Cobresal	U_Catolica	3	Puga_Claudio
100	10	La_Serena	Colo_Colo	3	Acosta_Manue
101	11	Everton	Cobresal	3	Henriquez_Jo
102	11	Cobreloa	Nublense	3	Chandia_Carl
103	11	U_de_Concepcion	Wanderers	3	Ponce_Eduard
104	11	Huachipato	La_Serena	3	Selman_Ruben
105	11	U_Espanola	Lota_Schwager	3	Osorio_Jorge
106	11	U_Catolica	Antofagasta	3	Fuenzalida_C
107	11	OHiggins	Palestino	3	Bascunan_Jul
108	11	Coquimbo	Pto_Montt	3	Aros_Guido
109	11	U_de_Chile	Melipilla	3	Garcia_Alvar
110	11	Audax_Italiano	Concepcion	3	Caamano_Fran
111	12	Lota_Schwager	Everton	3	Ponce_Eduard
112	12	Nublense	Audax_Italiano	3	Garcia_Alvar
113	12	U_Catolica	Huachipato	3	Polic_Patric
114	12	U_de_Concepcion	U_Espanola	3	Chandia_Carl
115	12	Antofagasta	Concepcion	3	Aros_Guido
116	12	Colo_Colo	Pto_Montt	3	Osorio_Jorge
117	12	Melipilla	Cobreloa	3	Puga_Claudio
118	12	Palestino	La_Serena	3	Caamano_Fran
119	12	Wanderers	U_de_Chile	3	Osses_Enriqu
120	12	Coquimbo	OHiggins	3	Gamboa_Eduar
121	13	U_Espanola	Palestino	3	Selman_Ruben
122	13	La_Serena	Melipilla	3	Acosta_Manue
123	13	Everton	Colo_Colo	3	Garcia_Alvar
124	13	Huachipato	Antofagasta	3	Pozo_Pablo
125	13	Concepcion	Cobresal	3	Fuenzalida_C
126	13	Pto_Montt	Lota_Schwager	3	Henriquez_Jo
127	13	Audax_Italiano	U_Catolica	3	Bascunan_Jul

128	13	OHiggins	U_de_Concepcion	3	Puga_Claudio
129	13	U_de_Chile	Nublense	3	Caamano_Fran
130	13	Cobrelola	Coquimbo	3	Ponce_Eduard
131	14	Melipilla	U_de_Concepcion	3	Gamboa_Eduar
132	14	U_Catolica	Cobrelola	2	Osses_Enriqu
133	14	Coquimbo	Everton	3	Chandia_Carl
134	14	Lota_Schwager	Huachipato	3	Osorio_Jorge
135	14	Antofagasta	La_Serena	3	Puga_Claudio
136	14	Palestino	U_de_Chile	3	Fuenzalida_C
137	14	Colo_Colo	OHiggins	3	Ponce_Eduard
138	14	Cobresal	Pto_Montt	3	Polic_Patric
139	14	Concepcion	U_Espanola	3	Garcia_Alvar
140	14	Wanderers	Audax_Italiano	3	Acosta_Manue
141	15	Audax_Italiano	Cobrelola	3	Henriquez_Jo
142	15	La_Serena	Wanderers	3	Fuenzalida_C
143	15	Cobresal	Lota_Schwager	3	Selman_Ruben
144	15	U_de_Chile	Colo_Colo	1	Osses_Enriqu
145	15	OHiggins	Nublense	3	Osorio_Jorge
146	15	U_Espanola	Coquimbo	3	Gamboa_Eduar
147	15	Everton	Melipilla	3	Pozo_Pablo
148	15	U_de_Concepcion	U_Catolica	3	Garcia_Alvar
149	15	Palestino	Antofagasta	3	Aros_Guido
150	15	Pto_Montt	Concepcion	3	Caamano_Fran
151	16	U_de_Chile	Coquimbo	3	Polic_Patric
152	16	Concepcion	Lota_Schwager	3	Aros_Guido
153	16	Melipilla	OHiggins	3	Chandia_Carl
154	16	Huachipato	Everton	3	Garcia_Alvar
155	16	La_Serena	Pto_Montt	3	Osses_Enriqu
156	16	Wanderers	Palestino	3	Ponce_Eduard
157	16	Audax_Italiano	U_de_Concepcion	3	Bascunan_Jul
158	16	U_Catolica	U_Espanola	3	Henriquez_Jo
159	16	Nublense	Cobresal	3	Gamboa_Eduar
160	16	Cobrelola	Colo_Colo	2	Pozo_Pablo
161	17	Lota_Schwager	U_de_Chile	3	Garcia_Alvar
162	17	Palestino	Concepcion	3	Osorio_Jorge
163	17	Cobresal	La_Serena	3	Ponce_Eduard
164	17	Coquimbo	Melipilla	3	Henriquez_Jo
165	17	OHiggins	Audax_Italiano	3	Puga_Claudio
166	17	Colo_Colo	Wanderers	3	Selman_Ruben
167	17	Pto_Montt	U_Catolica	3	Fuenzalida_C
168	17	Antofagasta	Nublense	3	Acosta_Manue
169	17	Everton	Cobrelola	3	Aros_Guido
170	17	U_de_Concepcion	Huachipato	3	Osses_Enriqu
171	18	Wanderers	Lota_Schwager	3	Henriquez_Jo

172	18	U_Catolica	OHiggins	3	Osses_Enriqu
173	18	Melipilla	Pto_Montt	3	Ponce_Eduard
174	18	Cobrelota	Palestino	3	Acosta_Manue
175	18	Nublense	Coquimbo	3	Pozo_Pablo
176	18	Concepcion	Everton	3	Puga_Claudio
177	18	Antofagasta	Cobresal	3	Osorio_Jorge
178	18	Huachipato	U_Espanola	3	Aros_Guido
179	18	La_Serena	U_de_Concepcion	3	Fuenzalida_C
180	18	Audax_Italiano	Colo_Colo	3	Caamano_Fran
181	19	Cobresal	Wanderers	3	Acosta_Manue
182	19	Nublense	Concepcion	3	Aros_Guido
183	19	Melipilla	Audax_Italiano	3	Bascunan_Jul
184	19	Lota_Schwager	La_Serena	3	Chandia_Carl
185	19	U_de_Concepcion	Cobrelota	3	Gamboa_Eduar
186	19	Everton	Palestino	3	Henriquez_Jo
187	19	U_Espanola	U_de_Chile	3	Polic_Patric
188	19	OHiggins	Huachipato	3	Caamano_Fran
189	19	Colo_Colo	U_Catolica	1	Pozo_Pablo
190	19	Pto_Montt	Antofagasta	3	Puga_Claudio
191	20	U_de_Chile	Everton	3	Osorio_Jorge
192	20	Cobrelota	Lota_Schwager	3	Polic_Patric
193	20	Palestino	Cobresal	3	Garcia_Alvar
194	20	La_Serena	Nublense	3	Puga_Claudio
195	20	Antofagasta	U_de_Concepcion	3	Aros_Guido
196	20	Pto_Montt	Audax_Italiano	3	Osses_Enriqu
197	20	Concepcion	Coquimbo	3	Selman_Ruben
198	20	Wanderers	U_Espanola	3	Bascunan_Jul
199	20	Huachipato	Colo_Colo	3	Fuenzalida_C
200	20	U_Catolica	Melipilla	3	Chandia_Carl
201	21	OHiggins	Pto_Montt	3	Selman_Ruben
202	21	Coquimbo	U_Catolica	3	Osorio_Jorge
203	21	Audax_Italiano	La_Serena	3	Aros_Guido
204	21	U_de_Concepcion	Concepcion	3	Chandia_Carl
205	21	U_Espanola	Cobrelota	3	Caamano_Fran
206	21	Melipilla	Huachipato	3	Ponce_Eduard
207	21	Nublense	Wanderers	3	Gamboa_Eduar
208	21	Colo_Colo	Palestino	3	Puga_Claudio
209	21	Cobresal	U_de_Chile	3	Pozo_Pablo
210	21	Lota_Schwager	Antofagasta	3	Henriquez_Jo
211	22	Antofagasta	Cobrelota	3	Osses_Enriqu
212	22	U_de_Concepcion	U_de_Chile	3	Bascunan_Jul
213	22	OHiggins	Everton	3	Polic_Patric
214	22	La_Serena	U_Espanola	3	Henriquez_Jo
215	22	Huachipato	Coquimbo	3	Garcia_Alvar

216	22	Nublense	Pto_Montt	3	Pozo_Pablo
217	22	Wanderers	U_Catolica	3	Ponce_Eduard
218	22	Colo_Colo	Melipilla	3	Aros_Guido
219	22	Audax_Italiano	Cobresal	3	Gamboa_Eduar
220	22	Palestino	Lota_Schwager	3	Acosta_Manue
221	23	Pto_Montt	Palestino	3	Bascunan_Jul
222	23	Cobresal	Huachipato	3	Fuenzalida_C
223	23	Lota_Schwager	Audax_Italiano	3	Chandia_Carl
224	23	Coquimbo	U_de_Concepcion	3	Osses_Enriqu
225	23	Concepcion	Colo_Colo	3	Ponce_Eduard
226	23	U_Catolica	La_Serena	3	Caamano_Fran
227	23	Wanderers	OHiggins	3	Henriquez_Jo
228	23	Everton	U_Espanola	3	Osorio_Jorge
229	23	Melipilla	Nublense	3	Selman_Ruben
230	23	U_de_Chile	Antofagasta	3	Garcia_Alvar
231	24	OHiggins	Cobresal	3	Pozo_Pablo
232	24	La_Serena	Concepcion	3	Bascunan_Jul
233	24	Antofagasta	Wanderers	3	Aros_Guido
234	24	U_Espanola	Melipilla	3	Garcia_Alvar
235	24	Palestino	U_Catolica	3	Osses_Enriqu
236	24	Audax_Italiano	U_de_Chile	3	Caamano_Fran
237	24	Nublense	Lota_Schwager	3	Osorio_Jorge
238	24	Colo_Colo	Coquimbo	3	Gamboa_Eduar
239	24	Huachipato	Cobreloa	3	Acosta_Manue
240	24	U_de_Concepcion	Everton	3	Puga_Claudio
241	25	Coquimbo	Palestino	3	Caamano_Fran
242	25	U_de_Chile	Pto_Montt	3	Henriquez_Jo
243	25	Cobresal	Colo_Colo	3	Osses_Enriqu
244	25	Cobreloa	La_Serena	3	Garcia_Alvar
245	25	Melipilla	Antofagasta	3	Bascunan_Jul
246	25	U_Espanola	OHiggins	3	Puga_Claudio
247	25	Everton	Audax_Italiano	3	Polic_Patric
248	25	Lota_Schwager	U_Catolica	3	Fuenzalida_C
249	25	Nublense	Huachipato	3	Gamboa_Eduar
250	25	Wanderers	Concepcion	3	Selman_Ruben
251	26	Audax_Italiano	U_Espanola	3	Ponce_Eduard
252	26	Concepcion	Huachipato	3	Caamano_Fran
253	26	Cobresal	Melipilla	3	Gamboa_Eduar
254	26	Palestino	Nublense	3	Polic_Patric
255	26	Pto_Montt	Wanderers	3	Osorio_Jorge
256	26	U_Catolica	Everton	3	Acosta_Manue
257	26	OHiggins	Cobreloa	3	Fuenzalida_C
258	26	Antofagasta	Coquimbo	3	Garcia_Alvar
259	26	Colo_Colo	U_de_Concepcion	3	Chandia_Carl

260	26	La_Serena	U_de_Chile	3	Aros_Guido
261	27	Coquimbo	Wanderers	3	Ponce_Eduard
262	27	U_Catolica	Nublense	3	Chandia_Carl
263	27	U_de_Concepcion	Pto_Montt	3	Caamano_Fran
264	27	OHiggins	La_Serena	3	Henriquez_Jo
265	27	Everton	Antofagasta	3	Fuenzalida_C
266	27	Huachipato	Palestino	3	Pozo_Pablo
267	27	Cobrelola	Cobresal	3	Bascunan_Jul
268	27	U_Espanola	Colo_Colo	3	Osorio_Jorge
269	27	U_de_Chile	Concepcion	3	Polic_Patric
270	27	Melipilla	Lota_Schwager	3	Acosta_Manue
271	28	Lota_Schwager	OHiggins	3	Caamano_Fran
272	28	Audax_Italiano	Coquimbo	3	Selman_Ruben
273	28	Wanderers	Huachipato	3	Polic_Patric
274	28	Concepcion	Melipilla	3	Fuenzalida_C
275	28	Palestino	U_de_Concepcion	3	Aros_Guido
276	28	Nublense	Everton	3	Puga_Claudio
277	28	Cobresal	U_Espanola	3	Acosta_Manue
278	28	Pto_Montt	Cobrelola	3	Gamboa_Eduar
279	28	U_de_Chile	U_Catolica	1	Osses_Enriqu
280	28	Antofagasta	Colo_Colo	3	Bascunan_Jul
281	29	Cobrelola	U_de_Chile	2	Osorio_Jorge
282	29	Huachipato	Audax_Italiano	3	Acosta_Manue
283	29	U_de_Concepcion	Lota_Schwager	3	Osses_Enriqu
284	29	U_Espanola	Pto_Montt	3	Pozo_Pablo
285	29	OHiggins	Antofagasta	3	Garcia_Alvar
286	29	Coquimbo	Cobresal	3	Chandia_Carl
287	29	U_Catolica	Concepcion	3	Henriquez_Jo
288	29	Melipilla	Wanderers	3	Bascunan_Jul
289	29	Colo_Colo	Nublense	3	Caamano_Fran
290	29	Everton	La_Serena	3	Selman_Ruben
291	30	Antofagasta	Audax_Italiano	3	Henriquez_Jo
292	30	Cobresal	U_de_Concepcion	3	Osorio_Jorge
293	30	Concepcion	Cobrelola	3	Acosta_Manue
294	30	La_Serena	Coquimbo	2	Gamboa_Eduar
295	30	Nublense	U_Espanola	3	Ponce_Eduard
296	30	Lota_Schwager	Colo_Colo	3	Puga_Claudio
297	30	Melipilla	Palestino	3	Selman_Ruben
298	30	U_de_Chile	OHiggins	3	Chandia_Carl
299	30	Wanderers	Everton	2	Pozo_Pablo
300	30	Pto_Montt	Huachipato	3	Bascunan_Jul
301	31	Cobrelola	Wanderers	3	Fuenzalida_C
302	31	Everton	Pto_Montt	3	Aros_Guido
303	31	OHiggins	Concepcion	3	Puga_Claudio

304	31	Coquimbo	Lota_Schwager	3	Osorio_Jorge
305	31	U_de_Concepcion	Nublense	3	Acosta_Manue
306	31	Huachipato	U_de_Chile	3	Pozo_Pablo
307	31	U_Espanola	Antofagasta	3	Selman_Ruben
308	31	Audax_Italiano	Palestino	3	Bascunan_Jul
309	31	U_Catolica	Cobresal	3	Polic_Patric
310	31	Colo_Colo	La_Serena	3	Ponce_Eduard
311	32	Cobresal	Everton	3	Chandia_Carl
312	32	Nublense	Cobreloa	3	Selman_Ruben
313	32	Wanderers	U_de_Concepcion	3	Bascunan_Jul
314	32	La_Serena	Huachipato	3	Caamano_Fran
315	32	Lota_Schwager	U_Espanola	3	Garcia_Alvar
316	32	Antofagasta	U_Catolica	3	Ponce_Eduard
317	32	Palestino	OHiggins	3	Henriquez_Jo
318	32	Pto_Montt	Coquimbo	3	Pozo_Pablo
319	32	Melipilla	U_de_Chile	3	Osses_Enriqu
320	32	Concepcion	Audax_Italiano	3	Polic_Patric
321	33	Everton	Lota_Schwager	3	Bascunan_Jul
322	33	Audax_Italiano	Nublense	3	Henriquez_Jo
323	33	Huachipato	U_Catolica	3	Gamboa_Eduar
324	33	U_Espanola	U_de_Concepcion	3	Ponce_Eduard
325	33	Concepcion	Antofagasta	3	Acosta_Manue
326	33	Pto_Montt	Colo_Colo	3	Caamano_Fran
327	33	Cobreloa	Melipilla	3	Aros_Guido
328	33	La_Serena	Palestino	3	Puga_Claudio
329	33	U_de_Chile	Wanderers	3	Selman_Ruben
330	33	OHiggins	Coquimbo	3	Garcia_Alvar
331	34	Palestino	U_Espanola	3	Aros_Guido
332	34	Melipilla	La_Serena	3	Osorio_Jorge
333	34	Colo_Colo	Everton	3	Selman_Ruben
334	34	Antofagasta	Huachipato	3	Chandia_Carl
335	34	Cobresal	Concepcion	3	Pozo_Pablo
336	34	Lota_Schwager	Pto_Montt	3	Fuenzalida_C
337	34	U_Catolica	Audax_Italiano	3	Acosta_Manue
338	34	U_de_Concepcion	OHiggins	3	Gamboa_Eduar
339	34	Nublense	U_de_Chile	3	Bascunan_Jul
340	34	Coquimbo	Cobreloa	3	Polic_Patric
341	35	U_de_Concepcion	Melipilla	3	Polic_Patric
342	35	Cobreloa	U_Catolica	2	Pozo_Pablo
343	35	Everton	Coquimbo	3	Caamano_Fran
344	35	Huachipato	Lota_Schwager	3	Garcia_Alvar
345	35	La_Serena	Antofagasta	3	Gamboa_Eduar
346	35	U_de_Chile	Palestino	3	Acosta_Manue
347	35	OHiggins	Colo_Colo	3	Osses_Enriqu

348	35	Pto_Montt	Cobresal	3	Henriquez_Jo
349	35	U_Espanola	Concepcion	3	Puga_Claudio
350	35	Audax_Italiano	Wanderers	3	Chandia_Carl
351	36	Cobrelola	Audax_Italiano	3	Aros_Guido
352	36	Wanderers	La_Serena	3	Garcia_Alvar
353	36	Lota_Schwager	Cobresal	3	Chandia_Carl
354	36	Colo_Colo	U_de_Chile	1	Pozo_Pablo
355	36	Nublense	OHiggins	3	Caamano_Fran
356	36	Coquimbo	U_Espanola	3	Fuenzalida_C
357	36	Melipilla	Everton	3	Ponce_Eduard
358	36	U_Catolica	U_de_Concepcion	3	Selman_Ruben
359	36	Antofagasta	Palestino	3	Bascunan_Jul
360	36	Concepcion	Pto_Montt	3	Osses_Enriqu
361	37	Coquimbo	U_de_Chile	3	Garcia_Alvar
362	37	Lota_Schwager	Concepcion	3	Acosta_Manue
363	37	OHiggins	Melipilla	3	Selman_Ruben
364	37	Everton	Huachipato	3	Henriquez_Jo
365	37	Pto_Montt	La_Serena	3	Bascunan_Jul
366	37	Palestino	Wanderers	3	Aros_Guido
367	37	U_de_Concepcion	Audax_Italiano	3	Pozo_Pablo
368	37	U_Espanola	U_Catolica	3	Polic_Patric
369	37	Cobresal	Nublense	3	Osorio_Jorge
370	37	Colo_Colo	Cobrelola	2	Chandia_Carl
371	38	U_de_Chile	Lota_Schwager	3	Gamboa_Eduar
372	38	Concepcion	Palestino	3	Chandia_Carl
373	38	La_Serena	Cobresal	3	Polic_Patric
374	38	Melipilla	Coquimbo	3	Puga_Claudio
375	38	Audax_Italiano	OHiggins	3	Osorio_Jorge
376	38	Wanderers	Colo_Colo	3	Bascunan_Jul
377	38	U_Catolica	Pto_Montt	3	Garcia_Alvar
378	38	Nublense	Antofagasta	3	Henriquez_Jo
379	38	Cobrelola	Everton	3	Osses_Enriqu
380	38	Huachipato	U_de_Concepcion	3	Ponce_Eduard
381	39	Lota_Schwager	Wanderers	3	Puga_Claudio
382	39	OHiggins	U_Catolica	3	Pozo_Pablo
383	39	Pto_Montt	Melipilla	3	Gamboa_Eduar
384	39	Palestino	Cobrelola	3	Selman_Ruben
385	39	Coquimbo	Nublense	3	Ponce_Eduard
386	39	Everton	Concepcion	3	Polic_Patric
387	39	Cobresal	Antofagasta	3	Caamano_Fran
388	39	U_Espanola	Huachipato	3	Osses_Enriqu
389	39	U_de_Concepcion	La_Serena	3	Aros_Guido
390	39	Colo_Colo	Audax_Italiano	3	Fuenzalida_C
391	40	Wanderers	Cobresal	3	Aros_Guido

392	40	Concepcion	Nublense	3	Fuenzalida_C
393	40	Audax_Italiano	Melipilla	3	Osses_Enriqu
394	40	La_Serena	Lota_Schwager	3	Acosta_Manue
395	40	Cobreloa	U_de_Concepcion	3	Caamano_Fran
396	40	Palestino	Everton	3	Gamboa_Eduar
397	40	U_de_Chile	U_Espanola	3	Pozo_Pablo
398	40	Huachipato	OHiggins	3	Garcia_Alvar
399	40	U_Catolica	Colo_Colo	1	Chandia_Carl
400	40	Antofagasta	Pto_Montt	3	Osorio_Jorge
401	41	Everton	U_de_Chile	3	Chandia_Carl
402	41	Lota_Schwager	Cobreloa	3	Fuenzalida_C
403	41	Cobresal	Palestino	3	Pozo_Pablo
404	41	Nublense	La_Serena	3	Selman_Ruben
405	41	U_de_Concepcion	Antofagasta	3	Bascunan_Jul
406	41	Audax_Italiano	Pto_Montt	3	Polic_Patric
407	41	Coquimbo	Concepcion	3	Acosta_Manue
408	41	U_Espanola	Wanderers	3	Henriquez_Jo
409	41	Colo_Colo	Huachipato	3	Puga_Claudio
410	41	Melipilla	U_Catolica	3	Ponce_Eduard
411	42	Pto_Montt	OHiggins	3	Chandia_Carl
412	42	U_Catolica	Coquimbo	3	Henriquez_Jo
413	42	La_Serena	Audax_Italiano	3	Fuenzalida_C
414	42	Concepcion	U_de_Concepcion	3	Osses_Enriqu
415	42	Cobreloa	U_Espanola	3	Puga_Claudio
416	42	Huachipato	Melipilla	3	Osorio_Jorge
417	42	Wanderers	Nublense	3	Acosta_Manue
418	42	Palestino	Colo_Colo	3	Polic_Patric
419	42	U_de_Chile	Cobresal	3	Ponce_Eduard
420	42	Antofagasta	Lota_Schwager	3	Selman_Ruben