



**UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA CIVIL**

**“REDUCCIÓN DE LA RESPUESTA ESTRUCTURAL POR
MEDIO DEL USO DE DISIPADORES DE MASA SINTONIZADA
Y DISIPADORES DE COLUMNA LÍQUIDA SINTONIZADA”**

**TESIS PARA OPTAR AL DE GRADO DE MAGISTER EN
CIENCIAS DE LA INGENIERIA, MENCIÓN INGENIERIA
SÍSMICA**

LUIS ALEJANDRO ROZAS TORRES

**PROFESOR GUÍA:
RUBÉN BOROSCHEK KRAUSKOPF**

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
ALDO TAMBURRINO TAVANTZIS
TOMAS GUENDELMAN BEDRACK
ALFONSO LARRAIN VIAL**

**SANTIAGO DE CHILE
SEPTIEMBRE DE 2009**

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL GRADO
DE MAGISTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,
MENCION INGENIERÍA SÍSMICA.
POR: LUIS ALEJANDRO ROZAS TORRES
FECHA EXAMEN DE GRADO: 7 Octubre 2009
PROF. GUÍA: RUBÉN BOROSCHEK K.

“Reducción de la Respuesta Estructural por Medio del Uso de Disipadores de Masa Sintonizada y Disipadores de Columna Líquida Sintonizada”

La gran actividad sísmica que se presenta en el territorio nacional, junto con el crecimiento de la construcción, y el cada vez mayor costo del terreno en ciudades importantes, han tenido como resultado un incremento en la edificación en altura. Esta clase de estructuras, que poseen como denominador común un bajo amortiguamiento y gran flexibilidad, presentan problemas asociados con vibraciones molestas las cuales pueden ocasionar no solo problemas a sus ocupantes sino que también a su contenido y elementos no estructurales.

Como respuesta a esta clase de problemas, diversos dispositivos de protección sísmica se han propuesto como solución. En particular, los disipadores de masa sintonizada y los disipadores de columna líquida sintonizada, han cobrado en años recientes gran interés por parte de los investigadores demostrando ser a su vez ser una herramienta eficaz para el control de vibraciones. En la presente investigación se estudia el comportamiento de una estructura con esta clase de dispositivos.

En una primera etapa, mediante análisis teóricos al sistema estructura disipador, se caracteriza la a respuesta del sistema para acciones sísmicas idealizadas. Primeramente se supone que la acción sísmica es de tipo determinística monofrecuencial. Posteriormente la misma se asume como aleatoria tipo ruido blanco, y finalmente como ruido blanco filtrado. Para cada una de estas acciones sísmicas idealizadas se proponen expresiones para determinar los parámetros óptimos de diseño, con objeto de minimizar el desplazamiento de la estructura a controlar. Las expresiones de los parámetros óptimos de diseño se presentan en función de la razón de masas entre el dispositivo y la estructura controlada, la razón de amortiguamiento crítico de la estructura controlada, y en el caso del disipador de columna líquida del factor de forma del dispositivo.

Para verificar la efectividad de los parámetros óptimos de diseño y procedimientos de diseño propuestos en la investigación, se construye un disipador de masa sintonizada y un disipador de columna líquida sintonizada para controlar la respuesta de una estructura de seis grados de libertad sujeta a la acción de diez registros sísmicos aplicados en su base mediante la mesa de vibrar del Departamento de Ingeniería Civil de la Universidad de Chile.

Los resultados de los análisis muestran una reducción promedio de los máximos desplazamientos del modelo de un 30%, registrándose además notorias disminuciones de variables tales como la intensidad de Arias y el RMS de las aceleraciones medidas en cada uno de los niveles del modelo. Asimismo los resultados indican un mejor comportamiento de los dispositivos para los registros Chilenos los que poseen una duración de movimiento fuerte mayor.

Finalmente se puede concluir que los disipadores sintonizados son dispositivos de reducción de vibraciones eficaces. Especialmente indicados en aquellos casos en que se desea controlar la respuesta de una estructura sujeta a la acción de vibraciones ambientales, que puedan ocasionar molestias a los usuarios, su instalación es en general sencilla y no involucra grandes modificaciones a la estructura.

Agradecimientos

Se agradece el apoyo del Departamento de Ingeniería Civil de la Universidad de Chile. Al Ingeniero Pedro Soto del Laboratorio Experimental de Estructuras, quien me apoyó con su experiencia en el manejo de la mesa de vibrar, y al Proyecto Fondecyt N° 1070319, sin el cual no hubiera sido posible la materialización de los modelos utilizados en esta investigación.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Motivación y Objetivos	10
1.2. Metodología	10
2. Disipador de Masa Sintonizada	12
2.1. Introducción	12
2.1.1. Antecedentes históricos y uso actual de los DMS.	14
2.2. Parámetros óptimos de diseño para aceleración basal monofrecuencial. Caso 1: Estructura primaria no amortiguada, DMSL no amortiguado	22
2.3. Parámetros óptimos de diseño para aceleración basal monofrecuencial. Caso 2: Estructura primaria no amortiguada, DMSL amortiguado . . .	26
2.3.1. Procedimiento de diseño del DMSL	42
2.4. Parámetros óptimos de diseño para aceleración basal monofrecuencial. Caso 3 Estructura primaria amortiguada, DMSL amortiguado	43
2.5. Parámetros óptimos de diseño, aceleración basal aleatoria tipo ruido blanco.	52
2.6. Parámetros óptimos de diseño, aceleración basal aleatoria tipo ruido blanco filtrado.	65
2.7. DMSL para sistemas de varios grados de libertad	72
3. Disipador de Columna líquida Sintonizada	78
3.1. Introducción	78
3.1.1. Antecedentes históricos y uso actual de los DCLS	79
3.2. Parámetros óptimos de diseño para aceleración basal monofrecuencial. Caso 1: Estructura primaria no amortiguada	83

3.3. Parámetros óptimos de diseño para aceleración basal monofrecuencial. Caso 2: Estructura primaria amortiguada	101
3.4. Parámetros óptimos de diseño, aceleración basal aleatoria tipo ruido blanco. Caso 1: Estructura primaria no amortiguada.	122
3.5. Parámetros óptimos de diseño, aceleración basal aleatoria tipo ruido blanco. Caso 2: Estructura primaria amortiguada.	128
3.6. Parámetros óptimos de diseño, aceleración basal aleatoria tipo ruido blanco filtrado	148
3.7. DCLS para sistemas de varios grados de libertad	158
4. Parámetros lineales equivalentes para el DCLS.	166
4.1. Pérdidas producidas por el paso del flujo a través del angostamiento .	166
4.2. Amortiguamiento lineal equivalente del DCLS, movimiento de base monofrecuencial.	173
4.3. Amortiguamiento lineal equivalente del DCLS, movimiento de base aleatorio.	178
5. Diseño de Disipadores sintonizados	184
5.1. Introducción	184
5.1.1. Descripción de la estructura a controlar	184
5.1.2. Determinación teórica de las parámetros modales de la estructura	187
5.2. Determinación experimental de los parámetros modales de la estructura	192
5.3. Diseño de disipadores sintonizados	202
5.3.1. <i>Diseño de disipador de masa sintonizado</i>	202
5.3.2. <i>Diseño de disipador de columna líquida sintonizada</i>	207
6. Resultados de los Análisis Experimentales	218
7. Conclusiones	259
A. Ecuaciones de movimiento estructura-DMSL.	262
A.1. Estructura primaria no amortiguada, DMSL amortiguado	262
A.2. Estructura primaria amortiguada, DMSL amortiguado	270

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	III
B. Ecuaciones de movimiento estructura-DCLS.	276
C. Rigidez equivalente de las cámaras de aire.	286

Índice de figuras

1.1. Distribución de pérdidas económicas en edificios de oficinas, hoteles y hospitales, durante los últimos eventos sísmicos (E. Miranda)	2
1.2. Ejemplos de utilización de dispositivos de protección sísmica en puentes. La figura de arriba muestra un aislador sísmico de goma con núcleo de plomo usado como apoyo para la superestructura. En la figura central se muestra un aislador de base tipo péndulo de fricción utilizado con el mismo objetivo. En la figura de abajo en tanto, se aprecia un amortiguador fluido dispuesto entre la cepa y la superestructura del puente, con el objeto de controlar los desplazamientos de los tramos, [45].	5
1.3. Disipadores activos y algunos ejemplos de su uso. En la figura de arriba se muestra el edificio de investigación de nuevas tecnologías en Kajima, Japón. Esta estructura posee sistemas de rigidez variable dispuestos como arrostros en V invertida. Se aprecia también un detalle del dispositivo de rigidez variable, [43]. En la figura de abajo en tanto, se muestra el edificio Parque Araucano en Santiago, Chile. La implementación de dos disipadores de masa semi-activos, mostrados en rojo en el esquema, tiene como función principal controlar los máximos desplazamientos y reducir los efectos de torsión en la estructura.	8

1.4. Probablemente uno de los primeros usos de los disipadores pasivos de energía. Los antiguos constructores griegos, alrededor del 400 AC, reconocieron la importancia de la resistencia lateral en sus famosos templos incorporando dovelas de plomo entre las piezas de mármol que componen las columnas. Durante fuertes terremotos, estos discos de mármol pueden deslizarse horizontalmente y aún sostener las cargas gravitacionales. La fricción entre las piezas metálicas, y la deformación de la pieza de plomo central, proveen un mecanismo adicional de disipación de energía (National Geographic 1992). Un ejemplo más moderno del uso de disipadores pasivos lo constituye la rehabilitación del hotel Woodland, en Woodland California. Esta estructura de 4 pisos, construida el año 1928, fue rehabilitada utilizando 16 amortiguadores viscosos en el primer nivel, dispuestos en arrostamientos tipo “chevron” o V invertida, [45]. 9

2.1. Representación esquemática de los DMS tipo péndulo utilizados en el edificio Shinjuku. El período fundamental de vibración del dispositivo puede ser ajustado como se muestra para sintonizarlo con el período de vibrar del edificio. 15

2.2. Edificio Taipei 101 en Taipei, Taiwán. Esta colosal estructura posee un DMS tipo péndulo que controla la respuesta del edificio frente a fuertes vientos, [42]. 17

2.3. Vista del DMS utilizado en el edificio Citicorp. Se puede apreciar el gran bloque de concreto de 400ton, el cual descansa sobre un sistema de cojinetes que permiten que el mismo se desplace hasta 1,4m para controlar la respuesta de la estructura frente al viento. 18

2.4. Edificio John Hancock en Chicago EE.UU. Análisis realizados posteriormente a su construcción indicaron que el edificio carecía de suficientes arrostamientos como para garantizar la comodidad de los ocupantes durante fuertes vientos. Se decidió por tanto incorporar dos DMS en el piso 58 para controlar la respuesta de la estructura. 19

2.5. Chimenea de acero con un DMS anular tipo péndulo en Hannover Alemania. A la derecha se muestra un esquema del dispositivo instalado, [44]. 20

2.6. Torres del puente Akashi-Kaikyo. Arriba a la derecha se muestran los DMS a instalar, abajo a la derecha su ubicación dentro de las torres, [43].	21
2.7. Estructura primaria y DMSL no amortiguados. La estructura primaria se encuentra sometida a la acción de dos perturbaciones externas monofrecuenciales. Una de ellas corresponde a una fuerza aplicada al sistema primario, en tanto que la segunda corresponde a un movimiento de la base.	23
2.8. Estructura primaria no amortiguada, DMSL amortiguado.	27
2.9. Variación de H_2 con respecto a la razón de frecuencias ρ	30
2.10. El amortiguamiento óptimo del DMSL se obtiene como el promedio de los amortiguamientos críticos del dispositivo, que hacen que la curva de amplificación dinámica, H_2 , posea pendiente cero en los puntos P y Q respectivamente.	33
2.11. Variación de H_2 con respecto a la razón de frecuencias ρ , para $f _{OPT}$	34
2.12. Variación de $f _{OPT}$ con respecto a la razón de frecuencias μ	35
2.13. Variación de $\rho_{P,Q} _{OPT}$ con respecto a la razón de frecuencias μ	36
2.14. Variación de $\xi_d _{OPT}$ con respecto a la razón de frecuencias μ	36
2.15. Variación de $\text{máx}\{H_2 _{OPT}\}$ con respecto a la razón de frecuencias μ	37
2.16. Variación de $H_4 _{OPT} / \text{máx}\{H_2 _{OPT}\}$ con respecto a la razón de frecuencias μ	37
2.17. Variación de $H_4 _{OPT}$ con respecto a la razón de frecuencias μ	38
2.18. Variación de H_2 con respecto a la razón de frecuencias ρ , para $f _{OPT}$ y distintos valores de ξ_d	38
2.19. Variación de H_4 con respecto a la razón de frecuencias ρ , para $f _{OPT}$ y distintos valores de ξ_d	39
2.20. Variación del amortiguamiento equivalente con la razón de masas, para condiciones óptimas de diseño	40
2.21. Comparación entre los factores de amplificación dinámica determinados mediante el procedimiento establecido por la ecuación 2.61 (curva continua roja), y aquel obtenido mediante el procedimiento descrito en este capítulo (curva punteada azul)	41
2.22. Sistema primario y DMSL ambos amortiguados.	44
2.23. H_6 v/s ρ , para $f = 0.7$, $\mu = 0.1$, $\xi_p = 0.01$ y distintos valores de ξ_d	46

2.24. H_6 v/s ρ , para $f _{OPT}$, $\mu = 0.1$, $\xi_p = 0.01$ y distintos valores de ξ_d	46
2.25. Variación de $f _{OPT}$ con respecto a la razón de masas μ	49
2.26. Variación de $\xi_d _{OPT}$ con respecto a la razón de masas μ	50
2.27. Máximo valor que alcanza el factor de amplificación dinámica H_6 para condiciones óptimas de diseño.	50
2.28. Máximo valor que alcanza el factor de amplificación dinámica H_8 para condiciones óptimas de diseño.	51
2.29. Ejemplos de funciones de densidad espectral que pueden ser adecuadamente representadas como ruido blanco.	53
2.30. Valor medio cuadrático normalizado, en función de f y ξ_d , para $\mu = 0.03$ y $\xi_p = 0.03$. En este caso los valores óptimos de diseño para el dispositivo corresponden a: $f _{OPT} = 0.9493$ y $\xi_d _{OPT} = 8.57\%$	57
2.31. $f _{OPT}$ v/s μ para distintos valores de ξ_p	60
2.32. $\xi_d _{OPT}$ v/s μ para distintos valores de ξ_p	60
2.33. $\bar{E} \{u_p^2\} _{OPT}$ v/s μ para distintos valores de ξ_p	61
2.34. Diferencia entre los valores obtenidos mediante los análisis numéricos, para el óptimo de la razón de frecuencias, y aquellos obtenidos por medio de la expresión 2.102. Se muestra asimismo la variación de cada uno de los términos ϕ con respecto a $\sqrt{\mu}$	63
2.35. Diferencia entre los valores determinados de los análisis numéricos para el óptimo de la razón de amortiguamiento crítico del dispositivo, y aquellos determinados asumiendo que la estructura primaria no posee amortiguamiento.	64
2.36. Errores obtenidos entre los valores determinados mediante los análisis numéricos, y aquellos que se obtiene por medio de las expresiones propuestas.	64
2.37. Esperanza cuadrática normalizada, para $\mu = 0.01$, $\xi_p = 1\%$ y $\xi_s = 5\%$	69
2.38. N_{ξ_d} v/s ρ_s , para distintos ξ_p y para $\xi_s = 0.1$. Las flechas indican la dirección creciente para la razón de masas $\mu = 0.5\%$, 1% , 2% , 5% y 10%	70
2.39. N_{ξ_d} v/s ρ_s , para distintos ξ_p y para $\xi_s = 0.1$. Las flechas indican la dirección creciente para la razón de masas $\mu = 0.5\%$, 1% , 2% , 5% y 10%	71
2.40. Sistema primario de varios grados de libertad junto con un DMSL.	72

3.1. Edificio One Wall Centre. Esta estructura ubicada en Vancouver, Canadá, posee un disipador de columna líquida sintonizada ubicada en su cima. La incorporación del dispositivo supuso un ahorro de 2 millones de dólares con respecto a otros sistemas de reducción de vibraciones, [42].	81
3.2. Edificio Comcast Center, Philadelphia. Esta estructura, actualmente en construcción, contará con el disipador de columna líquida sintonizada más grande del mundo. El dispositivo, de 1300 [ton] de agua, se ubicará en la cima de la estructura y tendrá como función reducir la respuesta de la estructura frente a la acción del viento, [42].	82
3.3. Representación esquemática de una estructura de un grado de libertad más un disipador de columna líquida sintonizada.	84
3.4. Factor de amplificación dinámica H_9 . Cuando la estructura primaria no posee amortiguamiento todas las curvas, para distintos valores del amortiguamiento crítico del DCLS, pasan por dos puntos fijos P y Q	90
3.5. Variación de $f _{OPT}$ con respecto a $\hat{\mu}$, para distintos valores de α	92
3.6. Variación de $\xi_d _{OPT}$ con respecto a $\hat{\mu}$, para distintos valores de α	94
3.7. Variación de $\max\{H_9 _{OPT}\}$ v/s $\hat{\mu}$, para distintos valores de α	97
3.8. Variación de $\max\{H_{10} _{OPT}\}$ v/s $\hat{\mu}$, para distintos valores de α	97
3.9. Variación de v/s $\hat{\mu}$, para distintos valores de α	98
3.11. H_{10} v/s ρ , para $\hat{f} _{OPT}$ y distintos valores de ξ_d	98
3.10. H_9 v/s ρ , para $\hat{f} _{OPT}$ y distintos valores de ξ_d . En este caso el valor óptimo para el amortiguamiento crítico del DCLS vale 6.023%.	99
3.12. Variación del amortiguamiento equivalente ξ_{eq} con la razón de masas $\hat{\mu}$, para distintos valores del factor de forma α , y condiciones óptimas de diseño.	100
3.13. Factor de amplificación dinámica, H_9 v/s ρ , para distintos valores del amortiguamiento crítico del dispositivo, $f = 1$ y amortiguamiento crítico de la estructura primaria, $\hat{\xi}_p = 4\%$	101
3.14. $f _{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.3$	108
3.15. $f _{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.45$	108
3.16. $f _{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.6$	109
3.17. $f _{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.75$	109
3.18. $f _{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.9$	110

3.19. $\xi_d|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.3$ 110

3.20. $\xi_d|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.45$ 111

3.21. $\xi_d|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.6$ 111

3.22. $\xi_d|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.75$ 112

3.23. $\xi_d|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.9$ 112

3.24. $\max \{ H_9|_{OPT} \}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.3$. 113

3.25. $\max \{ H_9|_{OPT} \}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.4$. 113

3.26. $\max \{ H_9|_{OPT} \}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.6$. 114

3.27. $\max \{ H_9|_{OPT} \}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.75$ 114

3.28. $\max \{ H_9|_{OPT} \}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.9$. 115

3.29. Valores máximos que alcanza el factor de amplificación dinámica H_9 , para $\hat{\mu} = 0.1$, $\alpha = 0.6$ y $\hat{\xi}_p = 0$, cuando $\xi_d|_{OPT}$ es determinado según el criterio adoptado en la sección 3.1, y cuando se determina directamente del análisis numérico. En el primer caso el máximo alcanza 5.5656 en tanto que en el segundo caso este valor es 5.5617. Este ejemplo nos demuestra que el criterio adoptado en la sección 3.1 para determinar $\xi_d|_{OPT}$ cuando $\hat{\xi}_p = 0$ no entrega necesariamente el valor que minimiza el máximo del factor de amplificación dinámica H_9 . No obstante lo anterior el valor que se obtiene entrega con precisión suficiente el valor del óptimo correspondiente. 119

3.30. Máximos errores que se producen por medio de la utilización de las formulas propuestas, con respecto a los valores determinados del a partir del proceso de optimización numérica. 121

3.31. $f|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de α 126

3.32. $\xi_d|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de α 126

3.33. Error que se obtiene por el uso de las ecuaciones 3.88 y 3.89 con respecto a las ecuaciones 3.86 y 3.87. 127

3.34. Valor medio cuadrático normalizado, en función de f y ξ_d , para $\hat{\mu} = 0.03$, $\hat{\xi}_p = 0.03$ y $\alpha = 0.75$. En este caso los valores óptimos de diseño para el dispositivo corresponden a: $f|_{OPT} = 0.945$ y $\xi_d|_{OPT} = 7.46\%$ 129

3.35. $f|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.3$ 136

3.36. $f|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.45$ 136

3.37. $f|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.6$ 137

3.38. $f|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.75$ 137

3.39. $f|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.9$ 138

3.40. $\xi_d|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.3$ 138

3.41. $\xi_d|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.45$ 139

3.42. $\xi_d|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.6$ 139

3.43. $\xi_d|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.75$ 140

3.44. $\xi_d|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.9$ 140

3.45. $\bar{E}\{u_p^2\}|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.3$ 141

3.47. $\bar{E}\{u_p^2\}|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.6$ 141

3.46. $\bar{E}\{u_p^2\}|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.45$ 142

3.48. $\bar{E}\{u_p^2\}|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.75$ 142

3.49. $\bar{E}\{u_p^2\}|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.9$ 143

3.50. Máximos errores que se obtienen por medio del uso de las fórmulas propuestas, con respecto a los valores óptimos determinados directamente de los análisis de optimización numérica. 147

3.51. Esperanza cuadrática media normalizada para $\rho_s = 0.2$ y $\rho_s = 2$ respectivamente. En ambos casos el amortiguamiento del suelo corresponde a un 5%. 152

3.52. N_f v/s ρ_s para distintos $\hat{\xi}_p$ y para $\xi_s = 0.1$, $\alpha = 0.3$. Las flechas indican la dirección creciente para la razón de masas $\hat{\mu} = 0.5\%$, 1% , 2% , 5% y 10% 154

3.53. $N_{\xi d}$ v/s ρ_s para distintos $\hat{\xi}_p$ y para $\xi_s = 0.1$, $\alpha = 0.3$. Las flechas indican la dirección creciente para la razón de masas $\hat{\mu} = 0.5\%$, 1% , 2% , 5% y 10% 154

3.54. N_f v/s ρ_s para distintos $\hat{\xi}_p$ y para $\xi_s = 0.1$, $\alpha = 0.6$. Las flechas indican la dirección creciente para la razón de masas $\hat{\mu} = 0.5\%$, 1% , 2% , 5% y 10% 155

3.55. $N_{\xi d}$ v/s ρ_s para distintos $\hat{\xi}_p$ y para $\xi_s = 0.1$, $\alpha = 0.6$. Las flechas indican la dirección creciente para la razón de masas $\hat{\mu} = 0.5\%$, 1% , 2% , 5% y 10% 155

3.56. N_f v/s ρ_s para distintos $\hat{\xi}_p$ y para $\xi_s = 0.1$, $\alpha = 0.9$. Las flechas indican la dirección creciente para la razón de masas $\hat{\mu} = 0.5\%$, 1% , 2% , 5% y 10% 156

3.57. N_{ξ_d} v/s ρ_s para distintos $\hat{\xi}_p$ y para $\xi_s = 0.1$, $\alpha = 0.9$. Las flechas indican la dirección creciente para la razón de masas $\hat{\mu} = 0.5\%$, 1% , 2% , 5% y 10%	156
3.58. Sistema de varios gdl. con disipador de columna líquida sintonizada.	158
4.1. Cambio de velocidad y presión del flujo de líquido a través del angostamiento central.	167
4.2. Variación del coeficiente de resistencia al flujo η , en función de la razón de áreas $\bar{\psi}$	172
4.3. La constante de amortiguamiento lineal equivalente, c_d , se determina a partir de la igualación de la energía disipada por ciclo de oscilación harmónica de la fuerza no lineal, curva azul, con aquella producida por la fuerza lineal equivalente, curva roja.	174
4.4. Fuerza no lineal, curva azul, y fuerza lineal equivalente, curva roja. La fuerza lineal equivalente corresponde a una aproximación considerando sólo el primer término de la expansión en series de Fourier de la fuerza no lineal.	176
5.1. Estructura a controlar por los dispositivos. A la derecha se muestra un esquema de la misma junto con sus dimensiones principales.	185
5.2. Vista en planta y elevaciones principales de la estructura. Las dimensiones están en milímetros. Se indican asimismo los grados de libertad utilizados para el análisis posterior de la estructura.	186
5.3. Formas de vibrar y períodos para la estructura determinados en forma teórica, sin considerar los efectos de no linealidad geométrica.	189
5.4. Formas de vibrar y períodos para la estructura determinados en forma teórica, considerando los efectos de no linealidad geométrica.	191
5.5. Ubicación de los acelerómetros en la estructura a analizar, arriba. Abajo a la izquierda se muestra la ubicación del acelerómetro N ^o 8 utilizado para registrar el movimiento del DMSL. Abajo a la derecha en tanto se muestra el sensor ultrasónico utilizado para registrar el movimiento de la superficie libre de líquido del DCLS.	194
5.6. Modos de vibrar, períodos y amortiguamientos de la estructura a controlar. Los resultados que se muestran corresponden a los obtenidos mediante mediciones experimentales.	196

5.7. Disipador de masa sintonizada diseñado para controlar el primer modo de la estructura. Se pueden apreciar el carro de una masa total de 5[kg], los resortes, y el estanque de aceite ubicado entre las ruedas.	205
5.8. Estructura y disipador de masa sintonizada.	205
5.9. Diagrama de flujo, para el diseño del DMSL.	206
5.10. La intensidad del espectro de potencia del ruido blanco utilizado para diseñar el dispositivo, se determina de forma tal que el desplazamiento de la superficie libre de líquido sea menor a 10.5[cm] con un 99% de probabilidad.	211
5.11. Vista del disipador de columna líquida sintonizada diseñado para controlar la respuesta del primer modo de vibrar de la estructura.	214
5.12. Estructura y disipador de columna líquida sintonizada.	214
5.13. Diagrama de flujo para el diseño del DCLS.	215
5.14. Diagrama de flujo para el diseño del DCLS, continuación	216
5.15. Diagrama de flujo para el diseño del DCLS, continuación	217
6.1. Espectros de potencia de los registros 1 a 6, ver tabla 6.1.	220
6.2. Espectros de potencia de los registros 7 a 10, ver tabla 6.1.	221
6.3. Máximas respuestas, intensidad de Arias, y RMS para el registro 1, ver tabla 6.1	223
6.4. Máximas respuestas, intensidad de Arias, y RMS para el registro 2, ver tabla 6.1	224
6.5. Máximas respuestas, intensidad de Arias, y RMS para el registro 3, ver tabla 6.1	225
6.6. Máximas respuestas, intensidad de Arias, y RMS para el registro 4, ver tabla 6.1	226
6.7. Máximas respuestas, intensidad de Arias, y RMS para el registro 5, ver tabla 6.1	227
6.8. Máximas respuestas, intensidad de Arias, y RMS para el registro 6, ver tabla 6.1	228
6.9. Máximas respuestas, intensidad de Arias, y RMS para el registro 7, ver tabla 6.1	229
6.10. Máximas respuestas, intensidad de Arias, y RMS para el registro 8, ver tabla 6.1	230

6.11. Máximas respuestas, intensidad de Arias, y RMS para el registro 9, ver tabla 6.1	231
6.12. Máximas respuestas, intensidad de Arias, y RMS para el registro 10, ver tabla 6.1	232
6.13. Diagramas de energía registro 1, ver tabla 6.1	233
6.14. Diagramas de energía registro 2, ver tabla 6.1	233
6.15. Diagramas de energía registro 3, ver tabla 6.1	234
6.16. Diagramas de energía registro 4, ver tabla 6.1	234
6.17. Diagramas de energía registro 5, ver tabla 6.1	235
6.18. Diagramas de energía registro 6, ver tabla 6.1	235
6.19. Diagramas de energía registro 7, ver tabla 6.1	236
6.20. Diagramas de energía registro 8, ver tabla 6.1	236
6.21. Diagramas de energía registro 9, ver tabla 6.1	237
6.22. Diagramas de energía registro 10, ver tabla 6.1	237
6.23. Series de tiempo correspondientes a los ensayos tipo “pullback” reali- zados al modelo. La respuesta ha sido previamente filtrada con objeto de aislar la respuesta de cada una de las formas de vibrar de la es- tructura.	240
6.24. Velocidad de la superficie libre de líquido dentro de la zona de movi- miento fuerte del sexto nivel. Las líneas rojas corresponden a la velo- cidad por sobre la cual el flujo de líquido es turbulento.. Los registros se indican en la tabla 6.1	242
6.25. Cuociente entre los máximos desplazamientos para estructura con di- sipador, respecto de los máximos desplazamientos para estructura sin ellos, ver tabla 6.1	244
6.26. Cuociente entre las máximas velocidades para estructura con disipa- dor, respecto de las máximas velocidades para estructura sin ellos, ver tabla 6.1	244
6.27. Cuociente entre las máximas aceleraciones para estructura con disipa- dor, respecto de las máximas aceleraciones para estructura sin ellos, ver tabla 6.1	245
6.28. Cuociente entre la intensidad de Arias para estructura con disipador, respecto de la intensidad de Arias para estructura sin ellos, ver tabla 6.1	245

6.29. Cuociente entre el RMS para estructura con disipador, respecto del RMS para estructura sin ellos, ver tabla 6.1	246
6.30. Índice \bar{N} para los registros utilizados en los análisis de la estructura, ver tabla 6.1	248
6.31. Desplazamiento en el sexto nivel con DMSL, para los registros 1 y 2. Comparación entre la respuesta teórica y experimental, ver tabla 6.1 .	249
6.32. Desplazamiento en el sexto nivel con DMSL, para los registros 3 y 4. Comparación entre la respuesta teórica y experimental, ver tabla 6.1 .	250
6.33. Desplazamiento en el sexto nivel con DMSL, para los registros 5 y 6. Comparación entre la respuesta teórica y experimental, ver tabla 6.1 .	251
6.34. Desplazamiento en el sexto nivel con DMSL, para los registros 7 y 8. Comparación entre la respuesta teórica y experimental, ver tabla 6.1 .	252
6.35. Desplazamiento en el sexto nivel con DMSL, para los registros 9 y 10. Comparación entre la respuesta teórica y experimental, ver tabla 6.1 .	253
6.36. Desplazamiento en el sexto nivel con DCLSL, para los registros 1 y 2. Comparación entre la respuesta teórica y experimental, ver tabla 6.1 .	254
6.37. Desplazamiento en el sexto nivel con DCLS, para los registros 3 y 4. Comparación entre la respuesta teórica y experimental, ver tabla 6.1 .	255
6.38. Desplazamiento en el sexto nivel con DCLS, para los registros 5 y 6. Comparación entre la respuesta teórica y experimental, ver tabla 6.1 .	256
6.39. Desplazamiento en el sexto nivel con DCLS, para los registros 5 y 6. Comparación entre la respuesta teórica y experimental, ver tabla 6.1 .	257
6.40. Desplazamiento en el sexto nivel con DCLS, para los registros 7 y 8. Comparación entre la respuesta teórica y experimental, ver tabla 6.1 .	258
 B.1. Oscilador de un grado de libertad con un disipador de columna líquida instalado. Se muestran las velocidades de las partículas de líquido contenidas dentro del disipador en un instante de tiempo t cualquiera.	 277
 C.1. Variación de presión y volumen en las cámaras de aire del dispositivo.	 287
C.2. Variación del largo total de la columna de líquido en función del período de oscilación del disipador, para distintos valores de p_o/h . . .	 289

Índice de Tablas

2.1. Parámetros óptimos de diseño para el DMSL bajo excitación basal aleatoria tipo ruido blanco	59
3.1. Valores de los términos ϕ_1 y ϕ_2	95
3.2. Parametros óptimos de diseño para el DCLS bajo excitacion basal monofrecuencial, $\alpha = 0.3$	103
3.3. Parametros óptimos de diseño para el DCLS bajo excitacion basal monofrecuencial, $\alpha = 0.45$	104
3.4. Parametros óptimos de diseño para el DCLS bajo excitacion basal monofrecuencial, $\alpha = 0.6$	105
3.5. Parametros óptimos de diseño para el DCLS bajo excitacion basal monofrecuencial, $\alpha = 0.75$	106
3.6. Parametros óptimos de diseño para el DCLS bajo excitacion basal monofrecuencial, $\alpha = 0.9$	107
3.7. Valores de los términos a_1, a_2 y a_3	116
3.8. Valores de los términos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 y a_6	120
3.9. Parámetros óptimos de diseño para el DCLS bajo excitación basal aleatoria tipo ruido blanco, $\alpha = 0.3$	131
3.10. Parámetros óptimos de diseño para el DCLS bajo excitación basal aleatoria tipo ruido blanco, $\alpha = 0.45$	132
3.11. Parámetros óptimos de diseño para el DCLS bajo excitación basal aleatoria tipo ruido blanco, $\alpha = 0.6$	133
3.12. Parámetros óptimos de diseño para el DCLS bajo excitación basal aleatoria tipo ruido blanco, $\alpha = 0.75$	134
3.13. Parámetros óptimos de diseño para el DCLS bajo excitación basal aleatoria tipo ruido blanco, $\alpha = 0.9$	135

3.14. Valores de los términos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 y a_6	144
3.15. Valores de los términos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 y a_6	146
5.1. Pesos de los niveles	185
5.2. Propiedades mecánicas del aluminio estructural clase A6061 - T6 . . .	186
5.3. Constantes y características de los instrumentos utilizados en las me- diciones	193
5.4. Parámetros modales determinados a partir de las mediciones experi- mentales	197
5.5. Comparación entre las rigideces de piso determinadas a partir de los análisis teóricos, $K_{teorico}$, y aquellas determinadas a partir del análisis numérico, K_{num}	197
5.6. Comparación entre los períodos determinados de forma experimental, T_{exp} , y aquellos obtenidos a partir de las rigideces determinadas del análisis numérico, T_{num}	198
5.7. Factores de auto correlación entre los modos determinados experi- mentalmente, y aquellos obtenidos a partir de las rigideces de piso calibradas de forma numérica.	199
6.1. Registros utilizados para analizar el comportamiento de la estructura.	219
6.2. Máximas respuestas registradas en el modelo para cada uno de los registros aplicados, los registros se indican en la tabla 6.1. A: Estructura original. B: Estructura con disipador de masa sintonizada. C: Estructura con disipador de columna líquida sintonizada.	239
6.3. Duración de movimiento fuerte para el sexto nivel, y tiempo durante el cual el flujo de líquido se encuentra en régimen turbulento, los registros se indican en la tabla 6.1	243
6.4. Número de ciclos de oscilación N_c , razones de amortiguamiento crítico ξ , y periodos naturales T_n , correspondientes al primer modo de la estructura con los disipadores instalados.	247
C.1. Calores moleculares de gases diatómicos a temperatura ambiente [41]	288

Nomenclatura

- A Area de la sección transversal de las columnas del disipador de columna líquida sintonizada, página 83
- c_d Constante de amortiguamiento del disipador, en el caso del DCLS corresponde a la constante de amortiguamiento lineal equivalente, página 26
- C_{NL} Coeficiente de proporcionalidad entre la fuerza no lineal y el cuadrado de la velocidad de la superficie libre de líquido, página 173
- $[C_p]$ Matriz de amortiguamiento de la estructura primaria, página 73
- C_p Constante de amortiguamiento de la estructura primaria de un grado de libertad, página 43
- D_h Diámetro hidráulico del angostamiento central del disipador de columna líquida sintonizada, definido como 4 veces el área del orificio dividido por su perímetro, página 168
- \ddot{u}_{so} Intensidad del espectro de potencia del movimiento de suelo, supuesto como ruido blanco, página 52
- \ddot{u}_s Intensidad del espectro de potencia del ruido blanco en la roca basal, página 66
- $\bar{E}\{u_p^2\}$ Esperanza cuadrática media normalizada, página 56
- f Para el DMSL corresponde a la razón entre la frecuencia natural de vibrar del disipador y la frecuencia natural de vibrar de la estructura primaria. Para el DCLS es igual al cociente entre la frecuencia natural de vibrar del dispositivo y $\hat{\omega}_p$, página 23

- H_1 Valor absoluto del factor de amplificación dinámica entre el desplazamiento de la estructura primaria y la fuerza externa aplicada a la misma, cuando la estructura primaria posee un DMSL y no esta amortiguada, página 27
- H_2 Valor absoluto del factor de amplificación dinámica entre el desplazamiento de la estructura primaria y la aceleración de base, cuando la estructura primaria posee un DMSL y no esta amortiguada, página 27
- H_3 Valor absoluto del factor de amplificación dinámica entre el desplazamiento del disipador de masa sintonizada y la fuerza externa aplicada al sistema primario no amortiguado, página 27
- H_4 Valor absoluto del factor de amplificación dinámica entre el desplazamiento del disipador de masa sintonizada y la aceleración de base. Estructura primaria no amortiguada, página 27
- H_5 Valor absoluto del factor de amplificación dinámica entre el desplazamiento de la estructura primaria amortiguada y la fuerza externa aplicada a la misma, cuando la estructura primaria posee un DMSL, página 43
- H_6 Valor absoluto del factor de amplificación dinámica entre el desplazamiento de la estructura primaria amortiguada y la aceleración de base, cuando la estructura primaria posee un DMSL, página 43
- H_7 Valor absoluto del factor de amplificación dinámica entre el desplazamiento del disipador de masa sintonizada y la fuerza externa aplicada al sistema primario amortiguado, página 43
- H_8 Valor absoluto del factor de amplificación dinámica entre el desplazamiento del disipador de masa sintonizada y la aceleración de base. Estructura primaria amortiguada, página 43
- H_9 Valor absoluto del factor de amplificación dinámica entre el desplazamiento de la estructura primaria, con disipador de columna líquida sintonizada, y la aceleración de base, página 88
- H_{10} Valor absoluto del factor del amplificación dinámica entre el desplazamiento de la superficie libre de líquido y la aceleración de base, página 88

- H_{11} Valor absoluto del factor de amplificación dinámica entre la velocidad de la superficie libre de líquido y la aceleración de base, página 181
- $H_{u_p\ddot{u}_s}$ Función de transferencia entre el desplazamiento del sistema primario y la aceleración de base, página 54
- $H_{\ddot{u}_s\ddot{u}_R}$ Función de transferencia entre la aceleración en la roca basal y la aceleración total en la superficie de suelo, página 65
- $H_{u_d\ddot{u}_s}$ Función de transferencia entre el desplazamiento del disipador y la aceleración de suelo, página 54
- $H_{\ddot{u}_d\ddot{u}_s}$ Función de transferencia entre la velocidad de la superficie libre de líquido y la aceleración de base, página 181
- k_d Rigidez del disipador, página 22
- k_{eq} Rigidez equivalente de las cámaras de aire ubicadas en las columnas verticales del disipador de columna líquida sintonizada, página 84
- $[K_p]$ Matriz de rigidez de la estructura primaria, página 73
- K_p Rigidez del sistema primario de un grado de libertad, página 22
- L_T Longitud total del líquido dentro del disipador de columna líquida sintonizada, página 87
- m_d Masa del disipador de masa sintonizada, página 22
- m_f Masa del líquido contenido dentro del disipador de columna líquida sintonizada, página 85
- $[M_p]$ Matriz de masa de la estructura primaria, página 73
- M_p Masa del sistema primario de un grado de libertad, página 22
- M_T Masa de la estructura primaria, más la masa del líquido, más la masa de los estanques o ductos del disipador de columna líquida sintonizada, página 86
- m_u Masa de los conductos o tanques del disipador de columna líquida sintonizada, página 83

\hat{m}	Masa del líquido contenido dentro de la columna o ducto horizontal del disipador de columna líquida sintonizada, página 86
\bar{N}	Número de ciclos que se requieren para que la estructura, en estado de resonancia, alcance el 95 % de su máxima amplitud de oscilación, página 246
N_f	Razón entre el parámetro óptimo de diseño f para excitación basal tipo ruido blanco filtrado, respecto del parámetro óptimo de diseño f para excitación basal tipo ruido blanco, página 69
N_{ξ_d}	Razón entre el parámetro óptimo de diseño ξ_d para excitación basal tipo ruido blanco filtrado, respecto del parámetro óptimo de diseño ξ_d para excitación basal tipo ruido blanco, página 69
$p(t)$	Fuerza externa aplicada al sistema primario, página 22
$\{r\}$	Vector de influencia para la aceleración de base, página 73
\tilde{c}_j	Amortiguamiento del sistema de un grado de libertad equivalente para el j -ésimo modo controlado por el disipador, página 75
\tilde{k}_j	Rigidez del sistema de un grado de libertad equivalente para el j -ésimo modo controlado por el disipador, página 75
\tilde{m}_j	Masa del sistema de un grado de libertad equivalente para el j -ésimo modo controlado por el disipador, página 75
u_d	Desplazamiento del disipador, página 22
u_p	Desplazamiento de la estructura primaria, página 22
$u_s(t)$	Desplazamiento armónico de la base, página 22
V_{lim}	Velocidad por sobre la cual el flujo de líquido dentro del disipador de columna líquida sintonizada es turbulento, página 213
α	Factor de forma del disipador de columna líquida sintonizada, definido como la razón entre la longitud de la columna horizontal de líquido y la longitud total del mismo, L_T , página 87

- η Coeficiente de resistencia al flujo, página 85
- μ Para el DMSL corresponde al cuociente entre la masa del dispositivo y la masa de la estructura primaria. Para el DCLS es igual al cuociente entre la masa del líquido contenido dentro del dispositivo y la masa de la estructura primaria, página 22
- $\hat{\mu}$ Razón entre la masa del líquido contenido dentro de la columna horizontal del disipador de columna líquida sintonizada, \hat{m} , y la masa total del sistema M_T , página 87
- ν Viscosidad cinemática del fluido dentro del disipador de columna líquida sintonizada, página 168
- ψ_0 Area del angostamiento central del disipador de columna líquida sintonizada, página 166
- $\bar{\psi}$ Razón de bloqueo para el angostamiento central del disipador de columna líquida sintonizada, página 168
- ρ Razón entre la frecuencia de excitación externa y la frecuencia natural de oscilación del sistema primario. En el caso del disipador de columna líquida sintonizada la frecuencia natural del sistema primario debe ser sustituida por la frecuencia: $\hat{\omega}_p$, página 23
- ρ_f Densidad del líquido contenido dentro del disipador de columna líquida sintonizada, página 83
- ρ_s Si la estructura primaria posee un DMSL, es igual a la razón entre la frecuencia natural de vibrar de la estructura primaria y la frecuencia predominante del estrato de suelo bajo esta. Si la estructura primaria posee un DCLS, corresponde al cuociente entre $\hat{\omega}_p$ y la frecuencia predominante del estrato de suelo bajo esta, página 65
- $\sigma_{\dot{u}_d}$ Desviación estándar de la velocidad de la superficie libre de líquido, página 180
- Ω Frecuencia del movimiento de la base, caso monofrecuencial, página 23
- ω_d Frecuencia natural de vibrar del disipador, página 22

ω_p	Frecuencia natural de vibrar de la estructura primaria, página 22
$\hat{\omega}_p^2$	Frecuencia natural de vibrar de la estructura cuya rigidez corresponde a la rigidez de la estructura primaria, pero cuya masa es igual a la masa total del sistema, M_T , página 86
ξ_d	Razón de amortiguamiento crítico del disipador. En el caso del DCLS corresponde a la razón de amortiguamiento crítico lineal equivalente, página 27
ξ_p	Razón de amortiguamiento crítico de la estructura primaria, página 43
ξ_s	Razón de amortiguamiento crítico del estrato de suelo bajo la estructura primaria, página 65
$\hat{\xi}_p$	Razón de amortiguamiento crítico de la estructura cuya rigidez y amortiguamiento corresponden a la rigidez y amortiguamiento del sistema primario, pero cuya masa es equivalente a la masa total del sistema, M_T , página 87

Capítulo 1

Introducción

En las últimas décadas se ha producido un crecimiento sin precedentes de la población en las ciudades. En la actualidad más de un 50 % de la humanidad vive en áreas urbanas. Lamentablemente un porcentaje importante de estas grandes ciudades se ubican cerca de regiones de riesgo sísmico. Con pocas excepciones, los grandes terremotos ocurridos en años recientes ($M_w > 7$) han causado grandes daños en los centros urbanos, tanto en términos de pérdida de vidas humanas, como en la destrucción de propiedades e interrupción de servicios. En particular dentro de estos daños se destacan los causados a los elementos no estructurales. Estos últimos han cobrado cada vez mayor importancia, ya que no solo son responsables de cuantiosas pérdidas económicas, sino que además su pérdida, o eventual destrucción, dificulta aún más la distribución de ayuda a las zonas afectadas después de un evento sísmico.

No fue sino desde el terremoto de San Fernando, en el año 1971, que los daños relacionados con los elementos no estructurales atrajeron la atención de los investigadores. Eventos más recientes como el de Los Ángeles (Northridge, 1994), Japón (Kobe, 1995) y Turquía (Kocaeli y Düzce, 1999), pusieron de manifiesto la importancia económica que conlleva el daño o pérdida de este tipo de elementos. Solamente en el terremoto de Northridge, se estima que las pérdidas asociadas al contenido y elementos no estructurales alcanzaron los US \$ 9000 millones, alrededor del 50 % de las pérdidas totales (Kircher, 2003). Análisis estadísticos realizados en los últimos terremotos por E. Miranda, ilustran en términos relativos las pérdidas económicas de los daños estructurales, no estructurales y contenido, en edificios de oficinas, hoteles y hospitales. Claramente, los daños asociados a componentes no estructurales y al

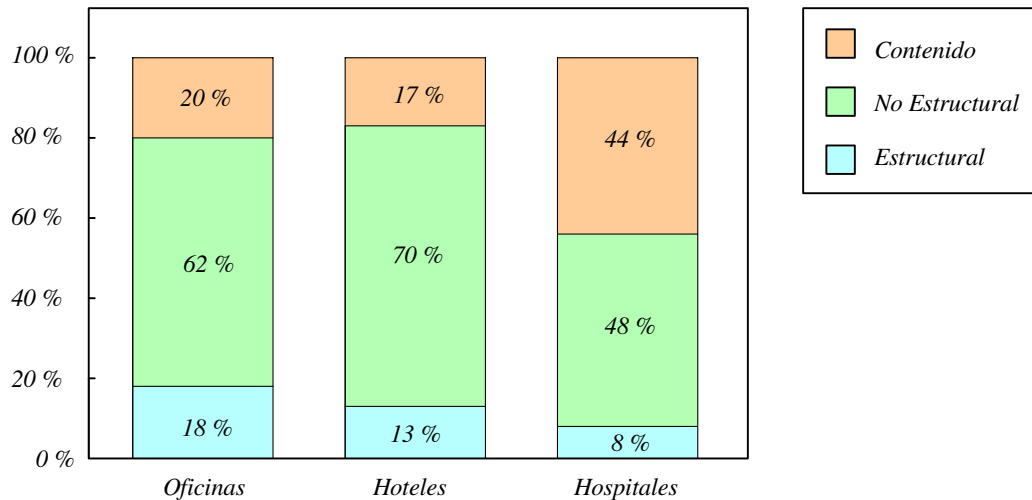


Figura 1.1: Distribución de pérdidas económicas en edificios de oficinas, hoteles y hospitales, durante los últimos eventos sísmicos (E. Miranda)

contenido del edificio resultan ser mucho mayores que las pérdidas estructurales, ver figura 1.1

En respuesta a estas nuevas exigencias de diseño, que buscan no solo asegurar la integridad de las estructuras frente a acciones externas de severa intensidad, sino que también la protección de su contenido y componentes no estructurales, se han desarrollado sistemas de control que incrementan la seguridad, y mejoran el comportamiento de las construcciones, frente a la acción de grandes sismos así como a los efectos de fuertes vientos. Si bien es cierto, la protección de las estructuras de los efectos destructivos de las catástrofes naturales no es una idea nueva (de hecho la primera patente existente de este tipo de dispositivos se remonta a principios del siglo pasado), es solo recientemente que su uso comenzó a ser masivo. Estos sistemas de control proveen protección a las estructuras y pueden ser divididos en tres grandes grupos:

- Aislacion Basal:
 1. Cojinetes elastoméricos
 2. Péndulos de fricción
 3. Gomas aislantes con y sin núcleo de plomo

4. Combinación de elastómeros y cojinetes de deslizamiento

- Disipadores Pasivos de Energía:

1. Amortiguadores metálicos
2. Amortiguadores de fricción
3. Amortiguadores viscoelásticos sólidos
4. Amortiguadores fluidos
5. Disipadores de masa sintonizada
6. Disipadores líquidos sintonizados

- Sistemas Activos y Semi-activos:

1. Sistemas activos robustos
2. Amortiguadores de masa activos
3. Sistemas de rigidez y amortiguamiento variable
4. Amortiguadores magnetoreológicos

Estos grupos difieren entre sí en la forma en que protegen a las estructuras de los movimientos sísmicos o de fuertes vientos. En primer lugar se encuentran los aisladores de base. Como su nombre lo indica, estos dispositivos se ubican en la base de la estructura y funcionan reduciendo las fuerzas transmitidas por los movimientos sísmicos sobre la misma. Esto último se logra gracias a la flexibilidad de los sistemas de aislación basal, lo que se traduce en un incremento en el período fundamental de vibrar de la estructura alejándolo del período predominante del movimiento sísmico. Como consecuencia, la nueva forma modal asociada al período fundamental de vibrar de la estructura, no involucra deformaciones internas significativas, y posee además un elevado factor de participación. Estos sistemas están indicados especialmente para ser utilizados en estructuras rígidas, cuyo período de oscilación se aproxima al período predominante del movimiento de suelo, causando de esta forma fuerzas laterales equivalentes elevadas. Como ejemplos de esta clase de dispositivos se cuentan los aisladores de base viscoelásticos de goma, y los aisladores de base tipo péndulo de fricción. Estos dispositivos han encontrado gran aceptación como sistemas de

protección sísmica en puentes. Algunos ejemplos de su utilización en esta clase de estructuras se muestran en la figura 1.2.

Si bien es cierto que dentro de las tecnologías de protección sísmica los aisladores de base constituyen los sistemas más utilizados en la actualidad, su uso en ciertos casos puede ser bastante costoso e involucrar modificaciones mayores en una construcción, más aún si ésta es una estructura existente. Asimismo, recientes investigaciones han demostrado que en el caso de los aisladores de goma, la componente vertical de determinados registros sísmicos es amplificada producto de la cercanía entre la frecuencia vertical de oscilación del dispositivo, y la frecuencia predominante en dicha componente [38].

Por otro lado, los sistemas de control de tipo semi-activo y activo, ofrecen protección a la estructura modificando sus características dinámicas mediante el uso de energía externa. La diferencia entre ambos, semi-activos y activos, radica en que los primeros requieren una menor cantidad de energía para operar, y pueden hacerlo sin ella en algunas ocasiones. La principal ventaja de estos sistemas se encuentra en su capacidad de adaptarse a súbitos cambios de las acciones externas. Para ello los dispositivos son controlados mediante un algoritmo el cual determina las fuerzas que controlan los dispositivos ya sea a partir de mediciones de las excitaciones externas, o de la respuesta estructural. De esta forma, dispositivos relativamente pequeños son capaces de reducir la vibración del sistema estructural. Algunos ejemplos de estos sistemas de control se muestran en la figura 1.3.

Dentro de los sistemas activos más utilizados se encuentran los amortiguadores de masa sintonizada activos. Estos consisten de una masa conectada a la estructura principal mediante actuadores, u otros mecanismos, los cuales controlan su oscilación, generando de esta forma fuerzas que reducen la vibración del edificio. En nuestro país, el recién construido edificio Parque Araucano constituye un ejemplo de la utilización de estas tecnologías. Provisto de dos disipadores de masa activos controlados por amortiguadores magnetoreológicos, la respuesta de la estructura es modificada reduciendo las vibraciones inducidas por el viento. Esto último se logra en parte gracias a que la viscosidad del fluido contenido dentro de estos amortiguadores, el cual contiene partículas metálicas en suspensión, puede ser alterado mediante la aplicación de una corriente eléctrica externa. Dicha corriente eléctrica es a su vez controlada por medio de un computador que analiza la respuesta de la estructura. De



Figura 1.2: Ejemplos de utilización de dispositivos de protección sísmica en puentes. La figura de arriba muestra un aislador sísmico de goma con núcleo de plomo usado como apoyo para la superestructura. En la figura central se muestra un aislador de base tipo péndulo de fricción utilizado con el mismo objetivo. En la figura de abajo en tanto, se aprecia un amortiguador fluido dispuesto entre la cepa y la superestructura del puente, con el objeto de controlar los desplazamientos de los tramos, [45].

esta forma la oscilación de la masa es optimizada con objeto reducir las vibraciones molestas para los ocupantes del edificio.

Otro ejemplo de disipadores activos son los sistemas de rigidez variable. Estos mecanismos modifican la rigidez de una estructura basado en la naturaleza de la acción sísmica a la cual esta sometida. El objetivo de estos dispositivos es el de minimizar los efectos de las potencialmente destructivas fuerzas aplicadas por los terremotos. Para ello se instalan diagonales metálicas en determinados puntos de la estructura. Estas diagonales se conectan a su vez a un dispositivo de rigidez variable el cual esta unido a la estructura (generalmente a alguna de sus vigas), formando un arrojamiento activo en V invertida. El dispositivo de rigidez variable puede trabajar de dos formas: en una de ellas funciona como una conexión completamente rígida, lo cual hace que las diagonales se vuelvan efectivas incrementando la rigidez del edificio, y en la otra el dispositivo se vuelve completamente flexible, lo que hace que las diagonales no trabajen. Mediante un monitoreo de la aceleración medida en la base de la estructura, un sistema computacional modifica las características del dispositivo de rigidez variable. De esta forma, a medida que transcurre el terremoto, la estructura continuamente varía su rigidez evitando la condición de resonancia.

No obstante las ventajas que poseen los sistemas semi-activos y activos, las cuales los han convertido en sistemas de control estructural muy atractivos, son sus mayores costos de mantención, y operación, lo que hace que su uso aún no sea masivo, concentrándose este último mayoritariamente en países como Japón.

Como alternativa a los sistemas recién descritos se encuentran los disipadores pasivos de energía. La función básica de estos dispositivos es la de absorber parte de la energía que es transmitida a la estructura por las acciones externas, tales como los sismos o el viento. A diferencia de lo que sucede con los sistemas semi-activos y activos, no requieren energía adicional para operar, lo cual supone una ventaja económica tanto desde el punto de vista de su mantención como operación. Los disipadores pasivos de energía pueden ser clasificados a su vez en dos grupos dependiendo de la forma en que la disipación de energía se lleva a cabo: disipadores pasivos directos y disipadores pasivos indirectos.

Los disipadores pasivos directos incrementan el nivel de amortiguamiento de una estructura por medio de mecanismos de disipación de energía tales como el flujo de un fluido de alta viscosidad a través de un orificio, o por la acción de esfuerzos de corte de un material viscoelástico. Otras clases de disipadores pasivos directos incluyen los

amortiguadores viscosos, amortiguadores de fricción y los disipadores metálicos. La aplicación de estos dispositivos en estructuras, particularmente para eventos sísmicos, ha encontrado gran aceptación ya que requieren de muy poco espacio y pueden ser fácilmente instalados en estructuras existentes. Ejemplos de su uso en diversas clases de edificaciones se muestran en la figura 1.4.

Los disipadores pasivos indirectos proveen de amortiguamiento adicional a una estructura a través de la incorporación de un sistema secundario capaz de disipar energía de forma pasiva, es decir sin requerir de energía adicional. El amortiguamiento en este caso es provisto a la estructura modificando su respuesta en frecuencia. Dentro de los disipadores pasivos indirectos se encuentran los disipadores de masa sintonizada y los disipadores líquidos sintonizados. En años recientes estos últimos han sido utilizados con gran éxito como sistemas de reducción de vibraciones en grandes estructuras, especialmente en edificios altos, ya sea para acciones sísmicas o aquellas provocadas por el viento. Los primeros consisten básicamente de una masa conectada a la estructura mediante elementos restitutivos (típicamente resortes) y amortiguadores. El movimiento de la estructura principal obliga a la masa a oscilar, de esta forma las fuerzas inerciales transmitidas por el dispositivo a la estructura principal reducen su movimiento. Los disipadores líquidos sintonizados en tanto, son estanques de líquido, por lo general agua, diseñados de forma tal que el movimiento de la masa de fluido contenido dentro del estanque reduzca la respuesta del edificio. La forma del estanque permite distinguir entre los disipadores de estanque líquido y los disipadores de columna líquida sintonizada. Los primeros, formados por estanques de forma rectangular, hacen uso de la amplitud del movimiento del fluido y del “oleaje” superficial para disipar energía. Los segundos en tanto, están constituidos por estanques en forma de U. Esta forma permite la oscilación de la masa de fluido, la que sumada a la resistencia al flujo de líquido, genera la disipación de energía.

Otra clase de disipadores pasivos indirectos son los disipadores de impacto. Estos sistemas, en su forma más común, están constituidos por una masa libre de deslizarse, pero la cual puede impactar en contra de un mecanismo sujeto a la estructura principal, provisto de resortes y amortiguadores. Las características de estos últimos, así como la separación existente entre ellos y la masa, conforman los parámetros que controlan el diseño de estos sistemas. Si bien es cierto su uso en grandes estructuras es aún muy limitado, han sido utilizados para controlar las vibraciones producidas



Figura 1.3: Disipadores activos y algunos ejemplos de su uso. En la figura de arriba se muestra el edificio de investigación de nuevas tecnologías en Kajima, Japón. Esta estructura posee sistemas de rigidez variable dispuestos como arrostramientos en V invertida. Se aprecia también un detalle del dispositivo de rigidez variable, [43]. En la figura de abajo en tanto, se muestra el edificio Parque Araucano en Santiago, Chile. La implementación de dos disipadores de masa semi-activos, mostrados en rojo en el esquema, tiene como función principal controlar los máximos desplazamientos y reducir los efectos de torsión en la estructura.

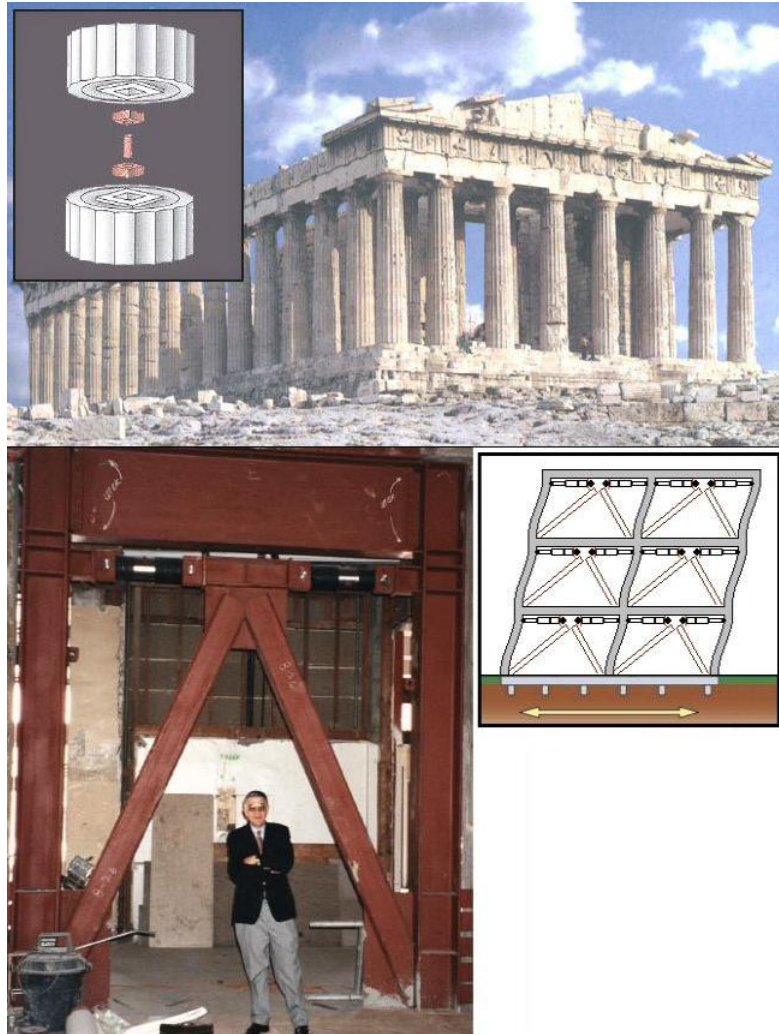


Figura 1.4: Probablemente uno de los primeros usos de los disipadores pasivos de energía. Los antiguos constructores griegos, alrededor del 400 AC, reconocieron la importancia de la resistencia lateral en sus famosos templos incorporando dovelas de plomo entre las piezas de mármol que componen las columnas. Durante fuertes terremotos, estos discos de mármol pueden deslizarse horizontalmente y aún sostener las cargas gravitacionales. La fricción entre las piezas metálicas, y la deformación de la pieza de plomo central, proveen un mecanismo adicional de disipación de energía (National Geographic 1992). Un ejemplo más moderno del uso de disipadores pasivos lo constituye la rehabilitación del hotel Woodland, en Woodland California. Esta estructura de 4 pisos, construida el año 1928, fue rehabilitada utilizando 16 amortiguadores viscosos en el primer nivel, dispuestos en arrostamientos tipo “chevron” o V invertida, [45].

en maquinarias, en aspas de turbinas, y recientemente para reducir vibraciones en luminarias en Australia y Japón.

1.1. Motivación y Objetivos

La cercanía de gran parte del territorio nacional al límite entre las placas de Nazca y Sudamericana tiene como consecuencia una gran actividad sísmica, tanto en el número de eventos registrados como en su intensidad. Por otro lado, el crecimiento de la construcción, y el cada vez mayor costo del terreno en ciudades importantes, han tenido como resultado un incremento en la edificación en altura. Esta clase de estructuras, que poseen como denominador común un bajo amortiguamiento y gran flexibilidad, presentan problemas asociados con vibraciones molestas las cuales pueden ocasionar no solo problemas a sus ocupantes sino que también a su contenido y elementos no estructurales.

Estas últimas razones han motivado un creciente interés en la ingeniería nacional por investigar la aplicabilidad de diversos sistemas de protección sísmica para estructuras flexibles. En la presente investigación se estudia el comportamiento de una estructura sujeta a acciones sísmicas, con dos tipos de disipadores pasivos de energía; disipadores de masa sintonizada y disipadores de columna líquida sintonizada. El objetivo es proponer parámetros óptimos de diseño para los dispositivos, frecuencia y razón de amortiguamiento crítico, con el fin reducir la respuesta de la estructura a controlar, más específicamente su deformación.

1.2. Metodología

La metodología adoptada para la presente investigación se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Mediante análisis teóricos al sistema estructura disipador, se caracteriza la respuesta del mismo para acciones sísmicas idealizadas. En primer lugar se supone que la acción sísmica es de tipo determinística monofrecuencial. Posteriormente la misma se asume como aleatoria tipo ruido blanco, y finalmente como ruido blanco filtrado.

2. A partir de la respuesta teórica del sistema, se determinan las características que deben poseer los dispositivos para minimizar la respuesta de la estructura principal. Específicamente en este estudio se busca minimizar el desplazamiento de la estructura principal.
3. En base a los resultados obtenidos de los análisis teóricos, se diseñan y construyen los dispositivos de protección sísmica mencionados. Estos dispositivos tendrán como objetivo controlar la respuesta de un modelo a escala de una estructura tipo edificio de corte.
4. Se llevan cabo análisis experimentales sometiendo al modelo a escala a la acción de registros sísmicos modificados aplicados en su base.
5. Los resultados experimentales son analizados con objeto de comparar la reducción de la respuesta del modelo a escala con y sin dispositivos.

Capítulo 2

Disipador de Masa Sintonizada

2.1. Introducción

El objetivo de los disipadores de masa sintonizada (DMS) es reducir la respuesta dinámica de la estructura principal en la cual se encuentran emplazados. Esto se logra determinando los parámetros óptimos de diseño del dispositivo. Para ello primeramente se debe decidir la ubicación del DMS dentro de la estructura, siendo aquella en donde se producen los máximos desplazamientos la óptima. Una vez determinada esta ubicación, el dispositivo se diseña de manera tal que su frecuencia de oscilación corresponda, o sea similar, a una de las frecuencias naturales de oscilación de la estructura principal. De esta forma, cuando la estructura principal es excitada en dicha frecuencia, o cerca de ella, el DMS entra en resonancia disipando parte de la energía suministrada mediante la fuerza inercial desarrollada por el dispositivo. Como consecuencia de lo anterior la respuesta dinámica de la estructura principal se reduce. Esto último, en el caso de edificios altos, se traduce en un incremento de la habitabilidad y seguridad de la estructura. A la fecha se han realizado numerosas mediciones de vibraciones en estructuras equipadas con estos sistemas de control estructural. Estos ensayos han demostrado que los DMS son dispositivos efectivos y confiables para ser utilizados como sistemas de control de vibraciones frente a cargas sísmicas y de viento [14, 15, 16]

Los disipadores de masa sintonizada, son dispositivos mecánicos que se componen de una o más masas que se conectan a una estructura principal mediante sistemas restitutivos y amortiguadores. Los sistemas restitutivos utilizados por estos sistemas

de control son en general de tipo elástico, en cuyo caso pueden materializarse mediante resortes lineales. Alternativamente puede utilizarse como fuerza restitutiva la gravedad, cual es el caso de los disipadores de masa sintonizada tipo péndulo. Otras formas para la fuerza restitutiva son la utilización de elementos no lineales como los materiales con memoria de forma.

La eficacia de los DMS reside por tanto en la determinación de sus parámetros óptimos de diseño, los cuales son su frecuencia natural de oscilación y amortiguamiento crítico. La determinación de dichos parámetros, para estructuras no amortiguadas sujetas a acciones externas armónicas, fue desarrollada primeramente por Den Hartog [5] junto con J.E. Brock en el año 1946. Posteriormente, Crandall y Mark [6], utilizando la teoría de vibraciones aleatorias, analizaron la respuesta de una estructura de un grado de libertad acompañada de un DSM lineal (DMSL), sometida a perturbaciones basales del tipo ruido blanco. En el año 1982 G. B. Warburton [18] determinó, para distintos tipos de excitaciones determinísticas y aleatorias, los parámetros óptimos de diseño de un DMSL instalado en una estructura primaria de un grado de libertad no amortiguada. En el año 1993, Hsiang-Chuan Tsai y Guan-Cheng Lin [17] determinaron, mediante análisis numéricos, los parámetros óptimos de diseño para el caso de estructuras amortiguadas sujetas a acciones externas monofrecuenciales. Recientemente, en el año 2006 S. V Bakre y R. S. Jangid, [19] plantearon expresiones analíticas para la obtención de parámetros óptimos de DMSL en estructuras amortiguadas sujetas a acciones externas aleatorias. No obstante lo anterior, el presente estudio propone expresiones para la obtención de parámetros óptimos de diseño, para el caso de estructuras amortiguadas sujetas a aceleraciones en su base caracterizadas como ruido blanco.

Es conocido, sin embargo, que la principal desventaja de los DMS es su sensibilidad a las fluctuaciones que pueda presentar la frecuencia natural de oscilación de la estructura principal. Estas variaciones pueden manifestarse durante fuertes sismos, en los cuales las características dinámicas de la estructura son modificadas debido a la degradación de la rigidez estructural. En estos casos la efectividad de los DMS puede verse disminuida producto de la de-sintonización de la frecuencia natural del dispositivo con respecto a la frecuencia óptima de diseño, la cual es a su vez función de la frecuencia natural de la estructura principal. Producto de lo anterior, recientemente se ha propuesto la utilización de múltiples disipadores de masa sintonizada (MDMS), con frecuencias naturales de vibrar distribuidas en determinado

rango. Estos dispositivos han sido objeto de estudio en los últimos años [21, 22, 23] vislumbrándose un incremento de su uso en el futuro.

2.1.1. Antecedentes históricos y uso actual de los DMS.

Las primeras aplicaciones de los disipadores de masa sintonizada se remontan a principios del siglo pasado (Frahm, 1909), siendo la industria naviera la primera en aprovechar sus ventajas para reducir las vibraciones producidas por los propulsores en los cascos de las embarcaciones. Desde entonces estos dispositivos han sido instalados en numerosas estructuras, desde edificios, chimeneas altas, puentes e incluso en satélites [7,8]. Ha sido sin embargo la Ingeniería civil la que en los últimos años ha incorporado estos sistemas de control estructural. En este ámbito, su uso se ha expandido principalmente entre los edificios altos y puentes como sistemas de reducción de vibraciones. Como ejemplos de su uso en edificios altos y otras estructuras se pueden mencionar los siguientes:

1. *Torre Shinjuku, Tokio*: Este edificio de 52 pisos, cuya altura alcanza los 235m, cuenta con tres disipadores de masa sintonizada tipo péndulo. Cada uno de estos dispositivos, ubicados en el piso 39, están constituidos por una gran masa de 110 ton, la cual se apoya sobre rodamientos que permiten que la misma oscile. El ángulo de inclinación es ajustado de manera tal que la masa oscile bajo el mismo período que el edificio. Al sintonizar el período de oscilación del dispositivo con el período natural del edificio, la masa imparte una fuerza inercial que contrarresta el movimiento del edificio producido por el viento o sismo. El sistema funciona de manera híbrida lo que significa que las masas de los dispositivos oscilan libremente. Solo cuando el movimiento del edificio es muy elevado, lo cual ocurre bajo severas tormentas de viento o grandes terremotos, una serie de actuadores controlan los movimientos de las masas para regular de manera óptima su desplazamiento. A pesar de que la ubicación más efectiva del sistema de control es en la cima del edificio, ya que de esta forma se logra controlar de manera mas eficiente el modo fundamental de vibrar de la estructura, restricciones arquitectónicas lo hacían impracticable. Aun así, en su actual ubicación, el sistema ha sido capaz de reducir la respuesta de la estructura frente al viento cerca de un 50 %.

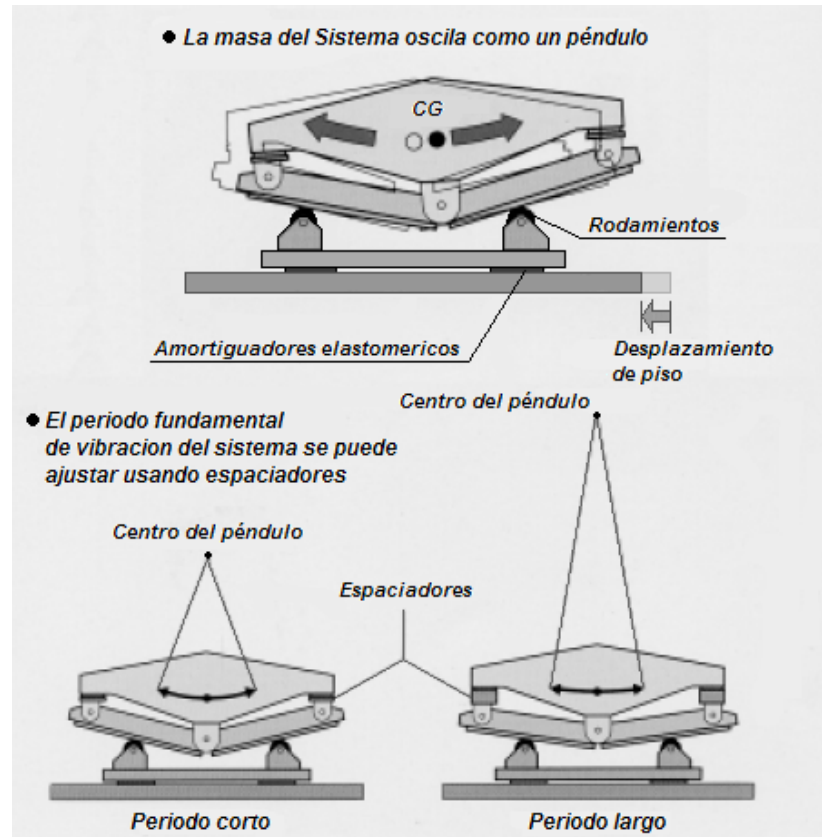


Figura 2.1: Representación esquemática de los DMS tipo péndulo utilizados en el edificio Shinjuku. El período fundamental de vibración del dispositivo puede ser ajustado como se muestra para sintonizarlo con el período de vibrar del edificio.

2. *Edificio Taipei 101, Taiwán:* Este edificio de 101 pisos y 508m de altura, cuenta con un disipador de masa tipo péndulo para controlar las vibraciones producidas por el viento. El edificio, estructurado en base a marcos de acero, posee un amortiguamiento crítico en su modo fundamental estimado en un 1 %. Este bajo amortiguamiento puede generar en los pisos altos aceleraciones consideradas como no aceptables. Para reducir estas aceleraciones se instaló un amortiguador de masa tipo péndulo ubicado entre los niveles 87 y 91. El dispositivo, diseñado por Motioneering en Canadá, consiste en una gran esfera de metal de 660 ton sostenida por cuatro grupos de cables a la estructura, creando de esta manera un péndulo equivalente al 0.26 % de la masa del edificio. Modificando la longitud libre de los cables es posible ajustar el período de vibrar del sistema para que coincida con el de la torre. De esta forma, cuando el edificio oscila,

la masa empuja a través de grandes amortiguadores en la dirección contraria. Como consecuencia de ello parte de la energía suministrada por el viento a la estructura se disipa en forma de calor en los amortiguadores.

3. *Edificio Citicorp Center, New York*: Una de las primeros edificios en utilizar estos dispositivos. Con 59 pisos y 279m de altura, cuenta con un disipador de masa sintonizada instalado en su cima. El dispositivo, compuesto por una masa de 400 ton, descansa sobre un sistema de cojinetes que le permiten desplazarse hasta 1.4m. Para controlar la respuesta de la estructura frente al viento el sistema oscila con un período variable entre 6.25s +/- 20 %, siendo 6.5s el período fundamental de vibrar del edificio. De esta manera los máximos desplazamientos experimentados por la torre son reducidos cerca de un 50 %. Esta reducción equivale a incrementar el amortiguamiento crítico de la estructura desde un 1 % original hasta un 4 %. En términos económicos, esto supuso un ahorro de 2800 ton de acero estructural que hubieran sido necesarias para cumplir con los requisitos de desplazamientos máximos alcanzados por el DMS.
4. *John Hancock Center, Chicago*: Construido el año 1969, esta estructura de 100 pisos y 344m de altura, diseñada por el ingeniero estructural Fazlur Khan, fue en su época el edificio más alto del mundo fuera de Nueva York. Actualmente ostenta el tercer lugar en altura en Chicago y el cuarto en todo Estados Unidos. Considerado como una de las estructuras más famosas del llamado expresionismo estructural, este rascacielos se caracteriza por sus arrostros exteriores, los cuales, junto con las columnas, forman parte del sistema tubular que ayuda al edificio a sostenerse durante cargas sísmicas o de viento. No obstante lo anterior, posteriores revisiones al proyecto original, desarrolladas por I.M. Pei & Partners, demostraron que el edificio no poseía suficientes arrostros laterales para asegurar el confort de los ocupantes durante la ocurrencia de vientos de moderada o severa intensidad. Se decidió por tanto incorporar dos DMS de 270ton en cada uno de los extremos del piso 58. Diseñados para trabajar en la dirección este-oeste, estos dispositivos redujeron los desplazamientos de la estructura cerca de un 50 %. Al igual que en el caso del edificio Shinjuku, estos sistemas de control son del tipo híbrido, de forma tal que bajo la ocurrencia de fuertes vientos son controlados por dispositivos auxiliares que optimizan sus desplazamientos.



Figura 2.2: Edificio Taipei 101 en Taipei, Taiwán. Esta colosal estructura posee un DMS tipo péndulo que controla la respuesta del edificio frente a fuertes vientos, [42].

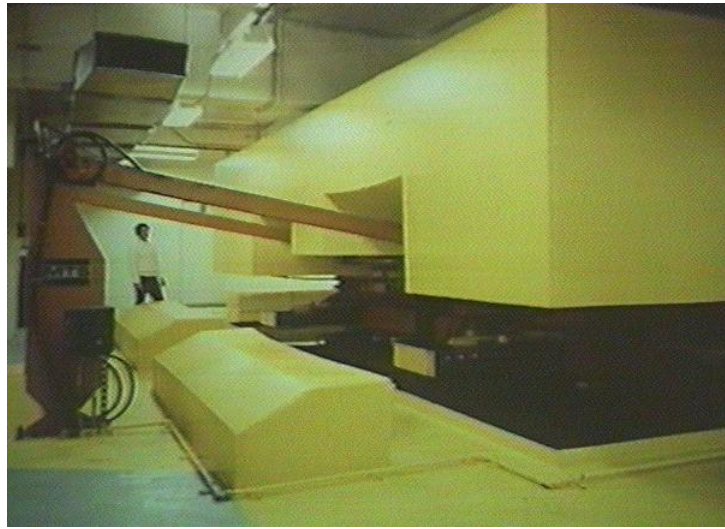


Figura 2.3: Vista del DMS utilizado en el edificio Citicorp. Se puede apreciar el gran bloque de concreto de 400ton, el cual descansa sobre un sistema de cojinetes que permiten que el mismo se desplace hasta 1,4m para controlar la respuesta de la estructura frente al viento.

5. *Chimenea alta en Hannover, Alemania:* Las chimeneas altas son estructuras que se favorecen de la tecnología de los DMS. En la actualidad numerosas de estas estructuras alrededor del mundo cuentan con este tipo de dispositivos para controlar su respuesta al viento. Las chimeneas altas, que dadas sus características, son muy esbeltas y poseen un bajo amortiguamiento estructural, son particularmente susceptibles a las vibraciones ocasionadas por el viento. Uno de los métodos más eficaces para controlar la respuesta dinámica de las chimeneas altas es el uso de los DMS anulares tipo péndulo. Estos sistemas de control se instalan por lo general en la cima de la estructura. En la figura 2.5 se muestra el dispositivo instalado en la cima de una chimenea alta ubicada en Traba, Hannover. Para ello se utilizó un gran anillo metálico suspendido desde la chimenea por cables de acero, adicionalmente se usaron tres amortiguadores para controlar el movimiento del dispositivo. En este caso los amortiguadores, además de controlar la respuesta de la chimenea, impiden que el anillo de acero golpee la estructura durante la ocurrencia de fuertes vientos.
6. *Puente Akashi-Kaikyo, Osaka Japón:* Construido en el año 1998 este puente, de 3911m de longitud, es en la actualidad el puente colgante más largo del



Figura 2.4: Edificio John Hancock en Chicago EE.UU. Análisis realizados posteriormente a su construcción indicaron que el edificio carecía de suficientes arrostramientos como para garantizar la comodidad de los ocupantes durante fuertes vientos. Se decidió por tanto incorporar dos DMS en el piso 58 para controlar la respuesta de la estructura.

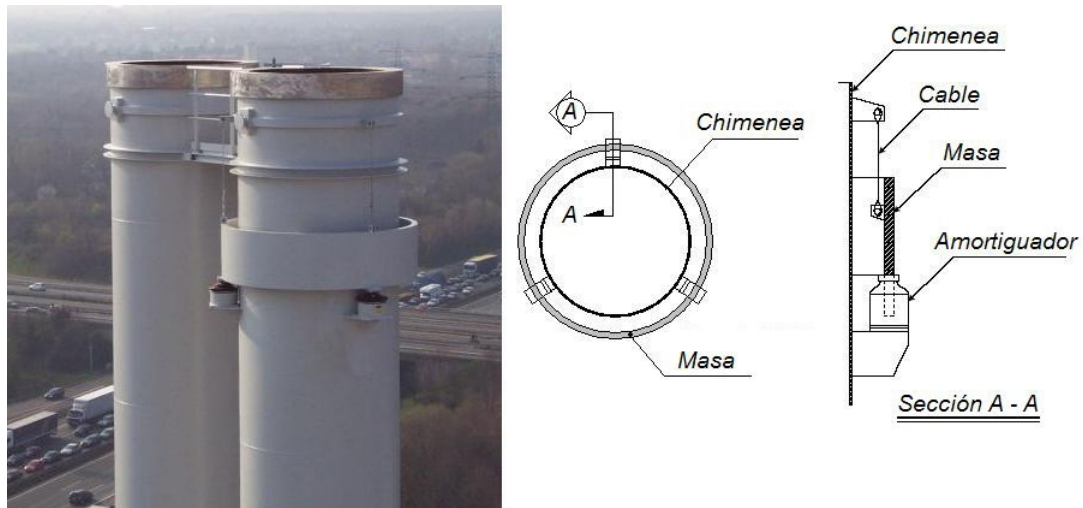


Figura 2.5: Chimenea de acero con un DMS anular tipo péndulo en Hannover Alemania. A la derecha se muestra un esquema del dispositivo instalado, [44].

mundo. Esta monumental estructura esta situada en uno de los países con mayor actividad sísmica del planeta y debe soportar además el embate de huracanes que con frecuencia ocurren en la zona. En el año 1995 el terremoto de Kobe, de intensidad 6.9 en la escala de Richter, afectó la zona convirtiendose en uno de los terremotos más destructivos en la historia de Japón. La falla de Nojima, que pasa justo entre las torres del puente, causo que las mismas se distanciaran permanentemente entre sí cerca de un metro, razón por la cual la longitud total del mismo es de 3911m y no los 3910 proyectados en un inicio. Afortunadamente solo las torres de la estructura, de 297m de altura cada una, se encontraban completas a la fecha del sismo resultando sin daños luego de la catastrofe. Lo anterior se debió en parte a la instalación de DMS en distintas ubicaciones de las torres a medida que se avanzaba en su construcción. Los dispositivos se diseñaron para limitar los desplazamientos de estas estructuras a un máximo de $1/5000$ (cerca de 6cm) de su altura total frente a cargas sísmicas y de viento.

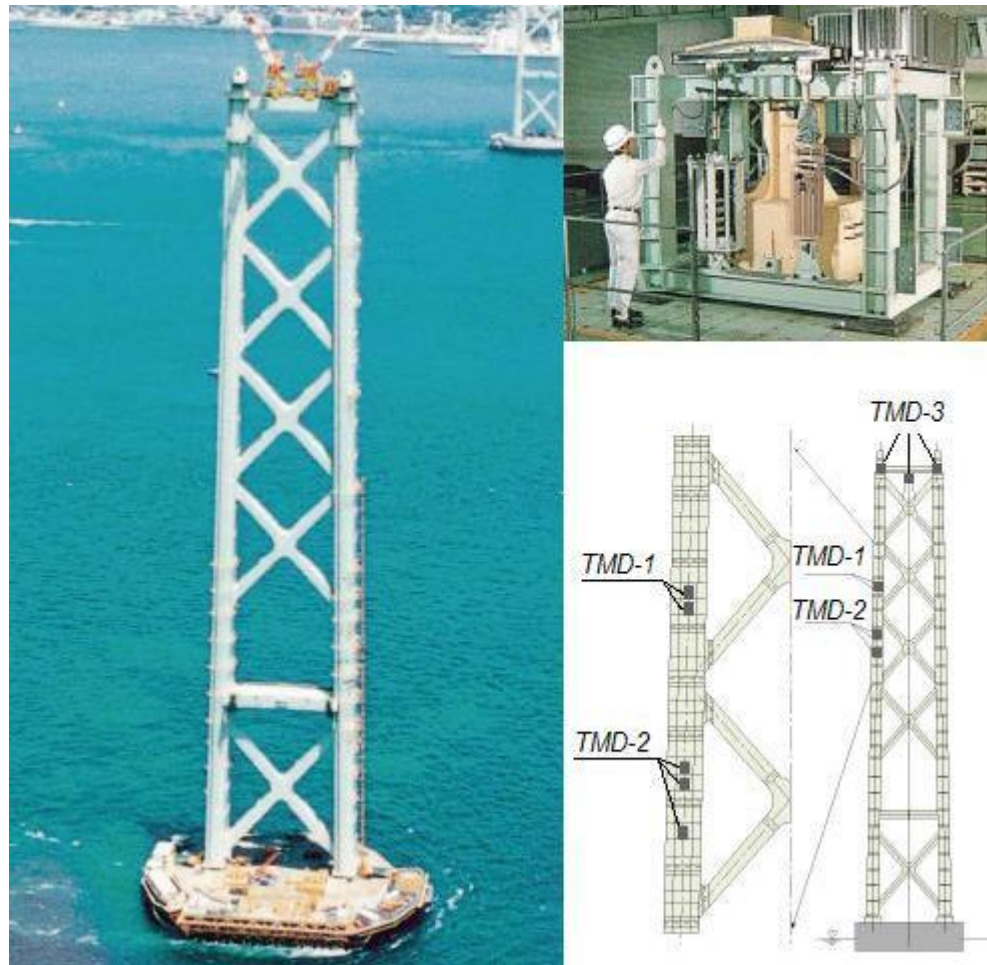


Figura 2.6: Torres del puente Akashi-Kaikyo. Arriba a la derecha se muestran los DMS a instalar, abajo a la derecha su ubicación dentro de las torres, [43].

2.2. Parámetros óptimos de diseño para aceleración basal monofrecuencial. Caso 1: Estructura primaria no amortiguada, DMSL no amortiguado

En la figura 2.7 se muestra una estructura de un grado de libertad, junto con un amortiguador de masa lineal de un grado de libertad. El sistema se encuentra sujeto a la acción de dos perturbaciones externas monofrecuenciales. Una de ellas corresponde a un desplazamiento armónico de la base $u_s(t)$, en tanto que la segunda corresponde a una fuerza armónica aplicada a la estructura primaria $p(t)$. Las ecuaciones que describen el movimiento del sistema se escriben matricialmente de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} M_p & 0 \\ 0 & m_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_p + \ddot{u}_s \\ \ddot{u}_p + \ddot{u}_s + \ddot{u}_d \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_p + k_d & -k_d \\ -k_d & k_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_p \\ u_p + u_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

En donde M_p y K_p corresponden a la masa y la rigidez del sistema primario respectivamente, en tanto que m_d y k_d representan a su vez la masa y rigidez del DMSL.

Se introducen a continuación las siguientes notaciones las cuales serán utilizadas durante el resto del presente capítulo. Frecuencia natural del DMSL:

$$\omega_d^2 = \frac{k_d}{m_d} \quad (2.2)$$

Frecuencia natural del sistema primario:

$$\omega_p^2 = \frac{K_p}{M_p} \quad (2.3)$$

Razón de masas entre el sistema primario y el DMSL:

$$\mu = \frac{m_d}{M_p} \quad (2.4)$$

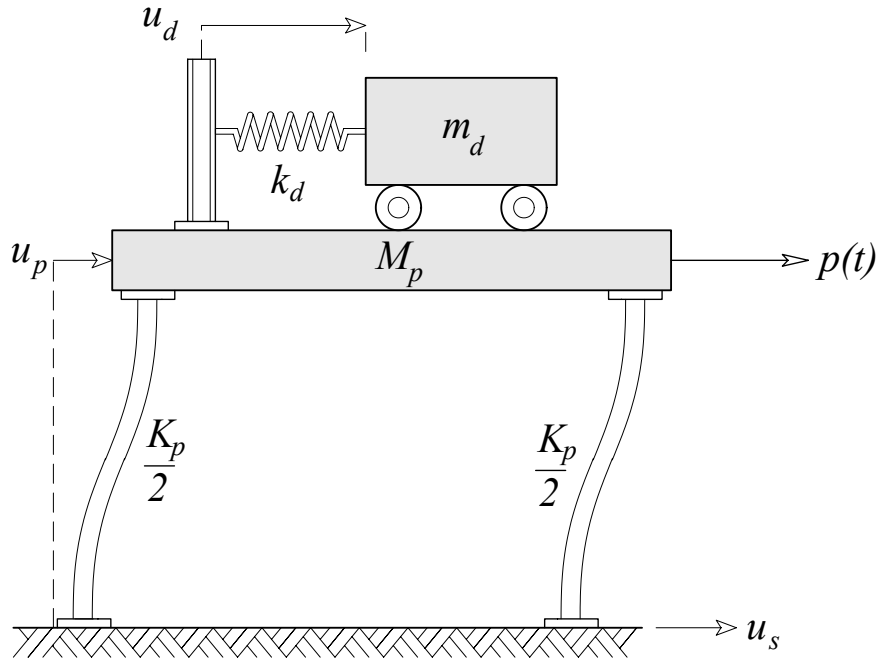


Figura 2.7: Estructura primaria y DMSL no amortiguados. La estructura primaria se encuentra sometida a la acción de dos perturbaciones externas monofrecuenciales. Una de ellas corresponde a una fuerza aplicada al sistema primario, en tanto que la segunda corresponde a un movimiento de la base.

Razón entre la frecuencia de excitación externa y la frecuencia natural del sistema primario:

$$\rho = \frac{\Omega}{\omega_p} \quad (2.5)$$

Razón entre la frecuencia natural del DMSL y la estructura primaria:

$$f = \frac{\omega_d}{\omega_p} \quad (2.6)$$

Si suponemos que el desplazamiento de suelo y la fuerza aplicada a la estructura son armónicas de la forma:

$$\ddot{u}_s(t) = \bar{\ddot{u}}_s \text{sen}(\Omega t) \quad (2.7)$$

$$p(t) = \bar{p} \operatorname{sen}(\Omega t) \quad (2.8)$$

Dado que se trata de un sistema sin amortiguamiento, la respuesta permanente de la estructura primaria y el DMSL se pueden suponer como armónicas de frecuencia Ω y desfase nulo, de esta forma podemos escribir:

$$u_p(t) = \bar{u} \operatorname{sen}(\Omega t) \Rightarrow \ddot{u}_p(t) = -\Omega^2 \bar{u}_p \operatorname{sen}(\Omega t) \quad (2.9)$$

$$u_d(t) = \bar{u}_d \operatorname{sen}(\Omega t) \Rightarrow \ddot{u}_d(t) = -\Omega^2 \bar{u}_d \operatorname{sen}(\Omega t) \quad (2.10)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de movimiento del sistema se obtiene:

$$-m_d \Omega^2 \bar{u}_p + (k_d - m_d \Omega^2) \bar{u}_d = -m_d \ddot{u}_s \quad (2.11)$$

$$(K_p - M_p \Omega^2) \bar{u}_p - k_d \bar{u}_d = -M_p \ddot{u}_s + \bar{p} \quad (2.12)$$

En donde las soluciones para \bar{u} y \bar{u}_d están dadas por:

$$\bar{u}_p = \frac{\bar{p}}{K_p} \left(\frac{f^2 - \rho^2}{D_1} \right) - \frac{M_p \ddot{u}_s}{K_p} \left(\frac{f^2 (1 + \mu) - \rho^2}{D_1} \right) \quad (2.13)$$

$$\bar{u}_d = \frac{\bar{p}}{k_d} \left(\frac{\mu \rho^2}{D_1} \right) - \frac{m_d \ddot{u}_s}{k_d} \left(\frac{\mu}{D_1} \right) \quad (2.14)$$

donde

$$D_1 = (1 - \rho^2) (f^2 - \rho^2) - \mu \rho^2 f^2 \quad (2.15)$$

Analizando la ecuación 2.13 es posible apreciar que si el valor de $f^2 (1 + \mu) - \rho^2$ se hace cero, la respuesta del sistema primario es independiente de la aceleración de suelo \ddot{u}_s . En este caso las soluciones se reducen a:

$$\bar{u}_p = \frac{\bar{p}}{K_p} \quad (2.16)$$

$$\bar{u}_d = \frac{\bar{p}}{k_d} \rho^2 + \frac{M_p \bar{\ddot{u}}_s}{k_d} \quad (2.17)$$

Esta elección hace que la máxima respuesta del sistema primario sea igual a la respuesta pseudo estática causada por la acción de la fuerza $p(t)$. En otras palabras, hemos seleccionado un DMSL tal que absorbe por completo el movimiento de suelo. De esta forma la frecuencia natural óptima del DMSL se escribe como:

$$\omega_d|_{OPT} = \frac{\Omega}{\sqrt{1 + \mu}} \quad (2.18)$$

La rigidez del DMSL debe ser por tanto:

$$k_{OPT} = \omega_d|_{OPT}^2 m_d = \frac{\Omega M_p \mu}{1 + \mu} \quad (2.19)$$

Finalmente sustituyendo la expresión para la rigidez óptima del DMSL en la ecuación 2.17, se obtiene:

$$\bar{u}_d = \frac{1 + \mu}{\mu} \left(\frac{\bar{p}}{K_p} + \frac{\bar{\ddot{u}}_s}{\Omega^2} \right) \quad (2.20)$$

Para este caso simplificado el procedimiento de diseño del dispositivo solo requiere de la determinación de su rigidez óptima. Primero se debe establecer el valor máximo del desplazamiento admisible para el DMSL, $\text{máx}\{\bar{u}_d\}$. Una vez establecida esta cantidad, a partir de la ecuación 2.20, es posible obtener el valor correspondiente para μ como sigue:

$$\mu = \frac{\bar{p} \Omega^2 + \bar{\ddot{u}}_s K_p}{K_p \Omega^2 \cdot \text{máx}\{\bar{u}_d\} - (\bar{p} \Omega^2 + \bar{\ddot{u}}_s K_p)} \quad (2.21)$$

Conocidos μ y Ω el valor óptimo para la rigidez del DMSL se determina según la ecuación 2.19.

2.3. Parámetros óptimos de diseño para aceleración basal monofrecuencial. Caso 2: Estructura primaria no amortiguada, DMSL amortiguado

En la figura 2.8 se muestra el sistema primario analizado anteriormente, pero esta vez el DMSL posee amortiguamiento. Las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema en este caso son:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_p & 0 \\ 0 & m_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_p + \ddot{u}_s \\ \ddot{u}_p + \ddot{u}_d + \ddot{u}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_d & -c_d \\ -c_d & c_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_p \\ \dot{u}_p + \dot{u}_d \end{Bmatrix} + \dots \\ \dots + \begin{bmatrix} K_p + k_d & -k_d \\ -k_d & k_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_p \\ u_p + u_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.22)$$

La incorporación de amortiguamiento en el DMSL hace que la respuesta del sistema posea un desfase relativo respecto de las acciones externas consideradas.

En este caso es conveniente expresar las excitaciones externas en forma de cantidades complejas, es decir:

$$\ddot{u}_s(t) = \bar{\bar{u}}_s e^{i\Omega t}, \quad p(t) = \bar{p} e^{i\Omega t} \quad (2.23)$$

En virtud de lo anterior, la respuesta para régimen permanente del sistema se puede expresar de la siguiente manera:

$$u_p(t) = \bar{u}_p e^{i\Omega t}, \quad u_d(t) = \bar{u}_d e^{i\Omega t} \quad (2.24)$$

En donde los términos \bar{u}_p , y \bar{u}_d son a sus vez cantidades complejas, las cuales incorporan el desfase en la respuesta del sistema. Reemplazando las expresiones anteriores en las ecuaciones de movimiento del sistema, cancelando los términos $e^{i\Omega t}$, y realizando las simplificaciones correspondientes se obtiene: (La derivación detallada de las expresiones que se muestran a continuación se incluye en el apéndice A):

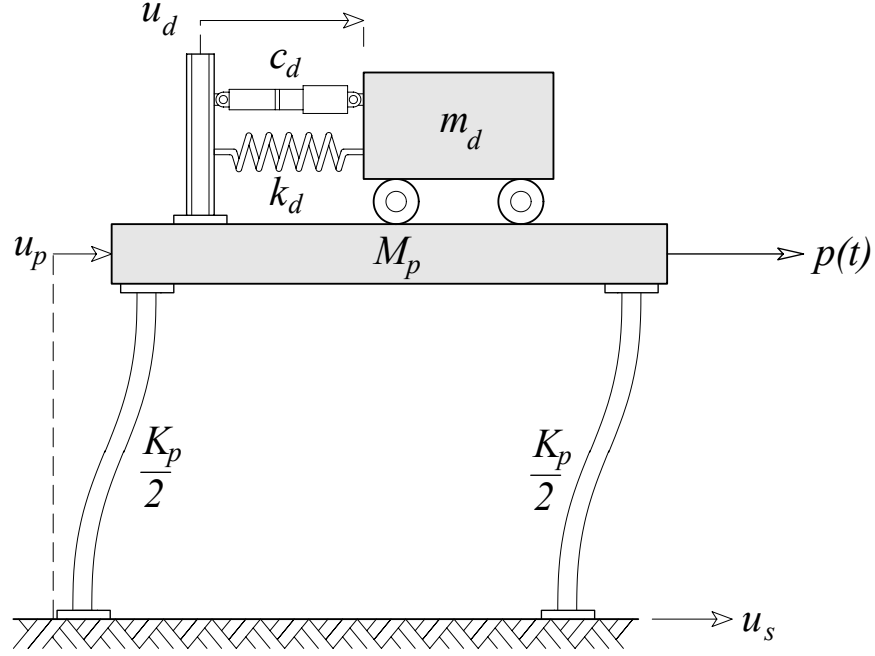


Figura 2.8: Estructura primaria no amortiguada, DMSL amortiguado.

$$\bar{u}_p = \frac{\bar{p}}{K_p} \left[\frac{f^2 - \rho^2 + i2\xi_d \rho f}{D_2} \right] - \frac{M_p \bar{u}_s}{K_p} \left[\frac{(1 + \mu) f^2 - \rho^2 + i2\xi_d \rho f (1 + \mu)}{D_2} \right] \quad (2.25)$$

$$\bar{u}_d = \frac{\bar{p}}{k_d} \left(\frac{f^2 \rho^2 \mu}{D_2} \right) - \frac{m_d \bar{u}_s}{k_d} \left(\frac{f^2}{D_2} \right) \quad (2.26)$$

Donde ξ_d es la razón de amortiguamiento crítico del dispositivo y D_2 esta dado por:

$$D_2 = (1 - \rho^2) (f^2 - \rho^2) - \mu \rho^2 f^2 + 2i\xi_d \rho f [1 - \rho^2 (1 + \mu)] \quad (2.27)$$

Convirtiendo las soluciones del sistema, dadas por las ecuaciones 2.25 y 2.26 a su forma polar obtenemos las siguientes expresiones:

$$\bar{u}_p = \frac{\bar{p}}{K_p} H_1 e^{i\delta_1} - \frac{\bar{u}_s M_p}{K_p} H_2 e^{i\delta_2} \quad (2.28)$$

$$\bar{u}_d = \frac{\bar{P}}{k_d} H_3 e^{-i\delta_3} - \frac{\bar{u}_s m_d}{k_d} H_4 e^{-i\delta_3} \quad (2.29)$$

En donde los términos H corresponden a los valores absolutos de los factores de amplificación dinámica de las respuestas pseudos estáticas, y los δ corresponden a los ángulos de fase entre la respuesta y la excitación. Dichos términos se describen a continuación:

$$H_1 = \frac{\sqrt{(f^2 - \rho^2)^2 + 4\xi_d^2 \rho^2 f^2}}{|D_2|} \quad (2.30)$$

$$H_2 = \frac{\sqrt{[(1 + \mu) f^2 - \rho^2]^2 + 4\xi_d^2 \rho^2 f^2 (1 + \mu)^2}}{|D_2|} \quad (2.31)$$

$$H_3 = \frac{f^2 \rho^2 \mu}{|D_2|} \quad (2.32)$$

$$H_4 = \frac{f^2}{|D_2|} \quad (2.33)$$

$$\delta_1 = \alpha_1 - \delta_3 \quad (2.34)$$

$$\delta_2 = \alpha_2 - \delta_3 \quad (2.35)$$

$$\tan(\delta_3) = \frac{2\xi_d \rho f [1 - \rho^2 (1 + \mu)]}{(1 - \rho^2)(f^2 - \rho^2) - \mu \rho^2 f^2} \quad (2.36)$$

$$\tan(\alpha_1) = \frac{2\xi_d \rho f}{f^2 - \rho^2} \quad (2.37)$$

$$\tan(\alpha_2) = \frac{2\xi_d \rho f (1 + \mu)}{(1 + \mu) f^2 - \rho^2} \quad (2.38)$$

Las expresiones anteriores permiten establecer el máximo valor de la respuesta dinámica del sistema primario y el DMSL. En la mayoría de las aplicaciones prácticas el valor de la razón de masas, μ , es menor que 0.05. Para estos valores el factor de amplificación dinámica para la carga externa, H_1 , y el factor de amplificación

dinámica para el movimiento de suelo, H_2 , son esencialmente iguales. A una conclusión similar se llega para los valores de los ángulos de fase entre la respuesta y la excitación. En virtud de lo anterior, los análisis que siguen, es decir la determinación de parámetros óptimos del dispositivo, se realizan para minimizar la respuesta de la estructura primaria frente al movimiento de suelo. Estos parámetros pueden ser utilizados como los óptimos para reducir la respuesta de la estructura principal frente a la carga armónica aplicada, $p(t)$, siempre y cuando la razón de masas sea baja.

En la figura 2.9 se muestra la variación del término H_2 con respecto a ρ . Las distintas curvas corresponden a valores fijos de μ y f , pero para diferentes valores de la razón de amortiguamiento crítico del DMSL. A partir del gráfico se puede establecer que para $\xi_d = 0$ se presentan dos asíntotas. A medida que el amortiguamiento crítico del dispositivo se incrementa aparecen dos máximos. Si dicho valor se incrementa aún más los máximos se combinan en uno solo ubicado aproximadamente en $\rho = 1$ para $\xi_d = 1$. El comportamiento anterior indica que existe un valor óptimo para ξ_d . Otra observación importante es que todas las curvas pasan por dos puntos P y Q . Dado que las curvas corresponden a diferentes valores de ξ_d , la ubicación de los puntos P y Q debe depender solamente de μ y f .

Prosiguiendo con el razonamiento anterior, la expresión para H_2 puede ser escrita como:

$$H_2 = \sqrt{\frac{a_1^2 + \xi_d^2 a_2^2}{a_3^2 + \xi_d^2 a_4^2}} = \left| \frac{a_2}{a_4} \right| \sqrt{\frac{a_1^2/a_2^2 + \xi_d^2}{a_3^2/a_4^2 + \xi_d^2}} \quad (2.39)$$

Para obtener el valor que adopta H_2 en los puntos P y Q , debemos hacer que la expresión anterior sea independiente de ξ_d . Esto último se obtiene igualando el numerador y el denominador del término subradical, esto es:

$$a_1^2/a_2^2 + \xi_d^2 = a_3^2/a_4^2 + \xi_d^2 \quad (2.40)$$

De esta última ecuación se desprende:

$$\left| \frac{a_1}{a_2} \right| = \left| \frac{a_3}{a_4} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{(1 + \mu) f^2 - \rho^2}{2\rho f (1 + \mu)} \right| = \left| \frac{(1 - \rho^2)(f^2 - \rho^2) - \mu f^2 \rho^2}{2\rho f [1 - \rho^2 (1 + \mu)]} \right| \quad (2.41)$$

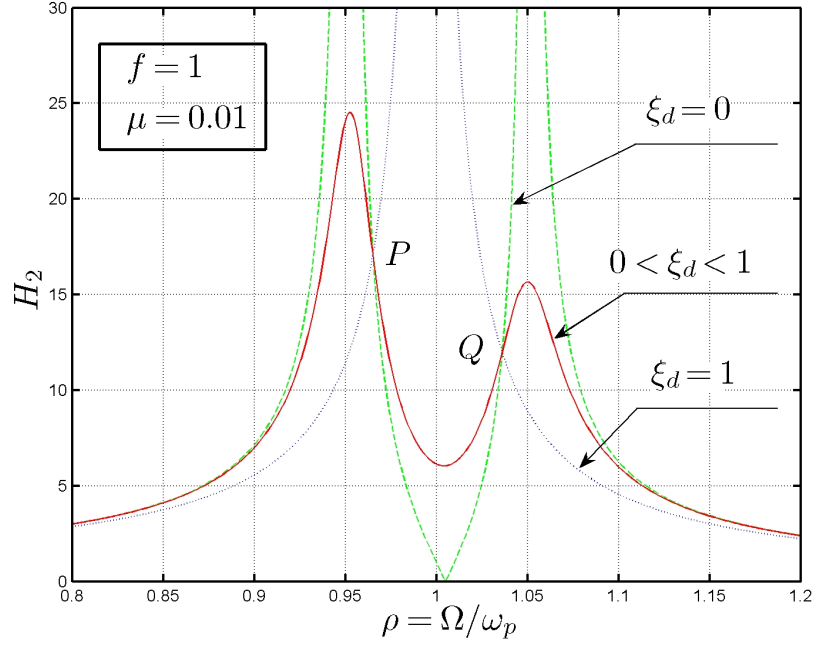


Figura 2.9: Variación de H_2 con respecto a la razón de frecuencias ρ .

De esta forma, el valor correspondiente para H_2 en los puntos P y Q se reduce a la siguiente expresión:

$$H_2|_{P,Q} = \left| \frac{a_2}{a_4} \right| = \frac{1 + \mu}{|1 - \rho_{P,Q}^2 (1 + \mu)|} \quad (2.42)$$

Luego de desarrollar y simplificar la ecuación 2.41, se obtiene una ecuación cuadrática para ρ^2 , ecuación 2.43, cuyas raíces positivas, ρ_P y ρ_Q corresponden a las razones de frecuencia que definen los puntos P y Q respectivamente.

$$\rho^4 - \left[(1 + \mu) f^2 + \frac{1 + 0.5\mu}{1 + \mu} \right] \rho^2 + f^2 = 0 \quad (2.43)$$

Para establecer las condiciones óptimas de diseño del DMSL se debe seleccionar el valor de f , de manera tal que los valores de H_2 en los puntos P y Q coincidan. En virtud de la ecuación 2.42 esto último equivale a imponer:

$$H_2|_P = H_2|_Q \Rightarrow \frac{1 + \mu}{|1 - \rho_P^2 (1 + \mu)|} = \frac{1 + \mu}{|1 - \rho_Q^2 (1 + \mu)|} \quad (2.44)$$

De la expresión anterior se puede concluir:

$$|1 - \rho_P^2 (1 + \hat{\mu})| = |1 - \rho_Q^2 (1 + \hat{\mu})| \quad (2.45)$$

Por otra parte, dado que ρ_P y ρ_Q son raíces de la ecuación 2.43 se verifica:

$$\rho_P^4 - \left[(1 + \mu) f^2 + \frac{1 + 0.5\mu}{1 + \mu} \right] \rho_P^2 = \rho_Q^4 - \left[(1 + \mu) f^2 + \frac{1 + 0.5\mu}{1 + \mu} \right] \rho_Q^2 \quad (2.46)$$

Reordenando los términos de esta última ecuación obtenemos:

$$(\rho_P^4 - \rho_Q^4) + \left[(1 + \mu) f^2 + \frac{1 + 0.5\mu}{1 + \mu} \right] (\rho_P^2 - \rho_Q^2) = 0 \quad (2.47)$$

Ahora bien, es claro que $\rho_P \neq \rho_Q$, por lo tanto podemos dividir ambos lados de la ecuación anterior por $(\rho_P^2 - \rho_Q^2)$, de donde resulta:

$$\rho_P^2 = \left[(1 + \mu) f^2 + \frac{1 + 0.5\mu}{1 + \mu} \right] - \rho_Q^2 \quad (2.48)$$

Sustituyendo de esta última ecuación el valor de ρ_P^2 en la ecuación 2.45, se obtiene la siguiente relación con la cual es posible determinar el valor óptimo de f :

$$|1 - [(1 + \mu)^2 f^2 + 1 + 0.5\mu] + (1 + \mu) \rho_Q^2| = |1 - (1 + \mu) \rho_Q^2| \quad (2.49)$$

Para que la expresión anterior sea válida se deben cumplir una de las dos condiciones siguientes:

$$(1 + \mu)^2 f^2 + (1 + 0.5\mu) = 2\rho_Q^2 (1 + \mu) \quad (2.50)$$

$$(1 + \mu)^2 f^2 + (1 + 0.5\mu) = 2 \quad (2.51)$$

De la condición 2.51 se obtenemos el valor óptimo para f , cuyo valor es:

$$f|_{OPT} = \frac{\sqrt{1 - 0.5\mu}}{1 + \mu} \quad (2.52)$$

Reemplazamos ahora el valor de $f|_{OPT}$ en la ecuación 2.43 con lo que se obtiene una ecuación de segundo grado en ρ^2 , cuyas raíces reales positivas nos entregan los valores de ρ_P y ρ_Q bajo condiciones óptimas de diseño

$$\rho_{P,Q} = \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{0.5\mu}}{1 + \mu}} \quad (2.53)$$

El máximo valor que adopta el factor de amplificación dinámica, bajo condiciones óptimas de diseño, se determina sustituyendo el valor de ρ_P o ρ_Q en la expresión 2.42, de donde se obtiene:

$$\text{máx} \{H_2|_{OPT}\} = \frac{(1 + \mu) \sqrt{2\mu}}{\mu} \quad (2.54)$$

Por último, para determinar el valor óptimo de la razón de amortiguamiento crítico del DMSL, debemos imponer que el punto P o el punto Q correspondan a los máximos del factor de amplificación dinámica. En términos matemáticos lo anterior se expresa como:

$$\left. \frac{\partial H_2}{\partial \rho} \right|_P = 0 \quad \vee \quad \left. \frac{\partial H_2}{\partial \rho} \right|_Q = 0 \quad (2.55)$$

En donde ambas derivadas están evaluadas para $f = f|_{OPT}$. Si evaluamos la derivada anterior en ρ_P obtenemos el valor para ξ_d tal que el punto P corresponde a un máximo de H_2 . Análogamente, si la evaluación se realiza con respecto a ρ_Q el valor que se obtiene para ξ_d hace que el punto Q corresponda a un máximo. El promedio de los valores de ξ_d , determinados mediante el procedimiento anterior, se toma como el óptimo para la razón de amortiguamiento crítico del dispositivo. En la figura 2.10 se describe gráficamente el procedimiento anterior.

Utilizando la notación definida en la ecuación 2.39, la derivada de H_2 con respecto a ρ puede expresarse como sigue:

$$\frac{\partial H_2}{\partial \rho} = \frac{(a_3^2 + \xi_d^2 a_4^2) (a_1^2 + \xi_d^2 a_2^2)' - (a_1^2 + \xi_d^2 a_2^2) (a_3^2 + \xi_d^2 a_4^2)'}{2\sqrt{(a_1^2 + \xi_d^2 a_2^2) (a_3^2 + \xi_d^2 a_4^2)^3}} \quad (2.56)$$

En donde la notación \bullet' se utiliza para describir la derivada con respecto a ρ . Igualando a cero el numerador de la expresión anterior se obtiene la siguiente ecuación cuadrática para ξ_d^2 .

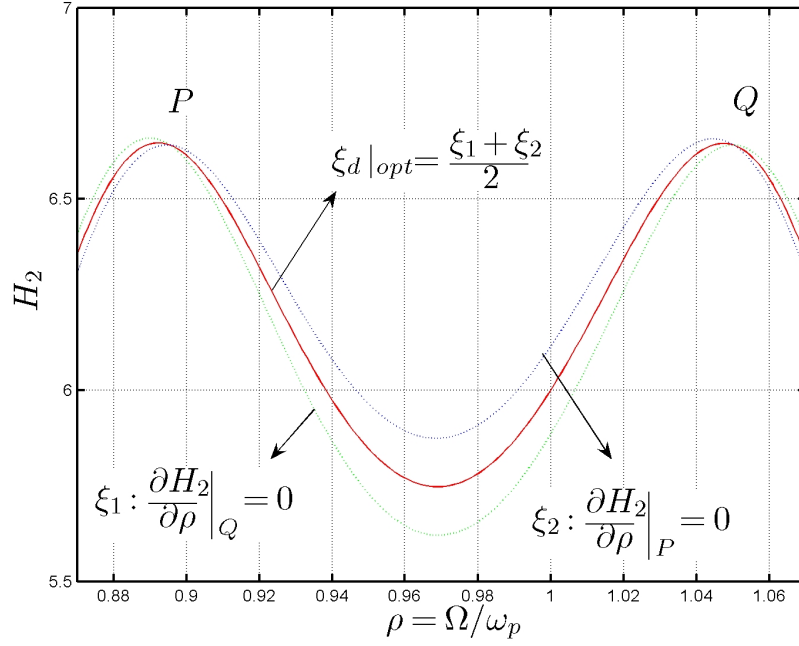


Figura 2.10: El amortiguamiento óptimo del DMSL se obtiene como el promedio de los amortiguamientos críticos del dispositivo, que hacen que la curva de amplificación dinámica, H_2 , posea pendiente cero en los puntos P y Q respectivamente.

$$\begin{aligned} \xi_d^4 [a_2^2 a_4 a_4' - a_4^2 a_2 a_2'] + \xi_d^2 [a_1^2 a_4 a_4' + a_2^2 a_3 a_3' - a_4^2 a_1 a_1' - a_3^2 a_2 a_2'] + \dots \\ \dots + [a_1^2 a_3 a_3' - a_3^2 a_1 a_1'] = 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

Como fue mencionado, el promedio de las soluciones positivas de esta última ecuación, determinadas para cada una de las condiciones establecidas en la ecuación 2.55, corresponde al óptimo de la razón de amortiguamiento crítico del DMSL, cuya expresión se muestra en la ecuación 2.58. Esta fue determinada por J.E. Brock en el año 1946, para lo cual se requirieron numerosos y extensos cálculos algebraicos. La determinación de dicha expresión no se detallara aquí. No obstante, se puede obtener más información en la referencia [5].

$$\xi_d|_{OPT} = \sqrt{\frac{\mu (3 - \sqrt{0.5\mu})}{8(1 + \mu)(1 - 0.5\mu)}} \quad (2.58)$$

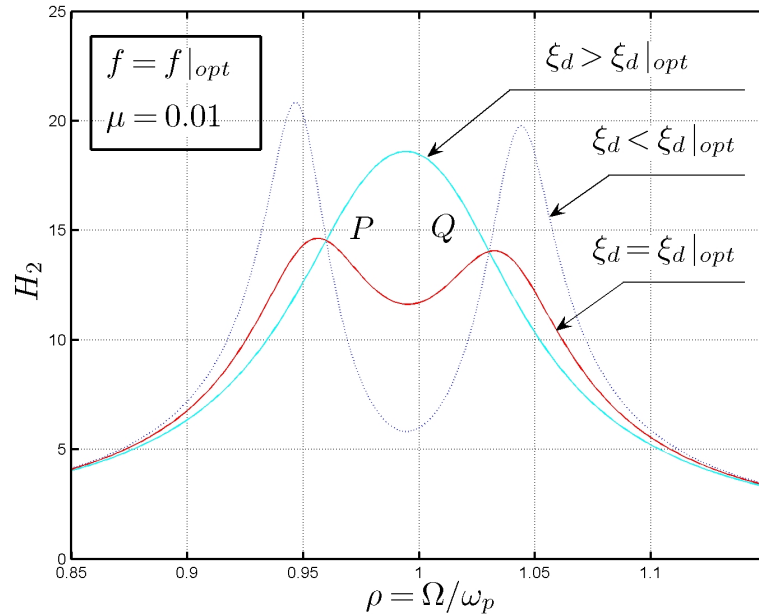


Figura 2.11: Variación de H_2 con respecto a la razón de frecuencias ρ , para $f|_{OPT}$

La curva de amplificación dinámica, H_2 , para condiciones óptimas de diseño se muestra en la figura 2.11. Junto a ella se encuentran graficadas las curvas de amplificación dinámica correspondientes a valores de ξ_d distintos del óptimo. Si la razón de amortiguamiento crítico del DMSL es menor que el óptimo, es decir $\xi_d < \xi_d|_{OPT}$, los máximos de la curva H_2 se ubican por encima de los puntos P y Q . Si el valor de la razón de amortiguamiento crítico del DMSL es mayor que el óptimo, esto es $\xi_d > \xi_d|_{OPT}$, dichos máximos se combinan en uno solo ubicado sobre y entre los puntos P y Q . El análisis anterior nos permite establecer que el dispositivo definido según los parámetros $f|_{OPT}$ y $\xi_d|_{OPT}$, produce la máxima reducción posible en el sistema primario para las frecuencias ubicadas en torno a su frecuencia natural de vibración.

En las figuras 2.12 a 2.15 se muestra la variación de los parámetros óptimos de diseño en función de la razón de masas μ . En la figura 2.16, se muestra la variación del máximo valor que adopta el factor de amplificación dinámica por efecto del movimiento de suelo para el dispositivo, H_4 , con respecto a μ para condiciones óptimas de diseño. Tener en cuenta el máximo desplazamiento del dispositivo es de suma importancia en términos prácticos, ya que se debe garantizar espacio suficiente dentro

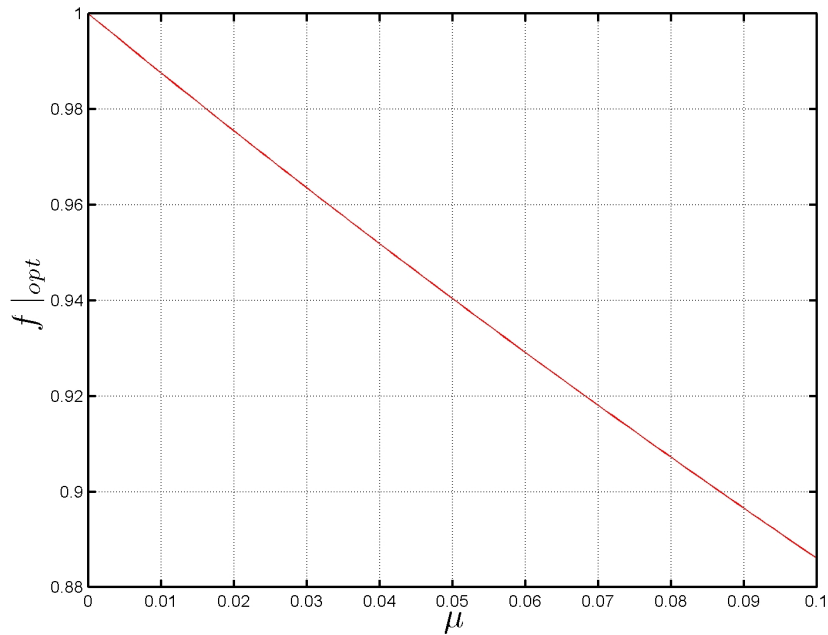


Figura 2.12: Variación de $f|_{OPT}$ con respecto a la razón de frecuencias μ

de la estructura primaria para permitir la oscilación del DMSL. Este último valor, junto con el máximo de factor de amplificación dinámica H_2 , figura 2.15, proveen el punto de partida para definir la razón de masas a utilizar. La figura 2.17 en tanto, muestra la razón entre H_2 y H_4 , en función de μ .

Finalmente, las curvas de amplificación dinámica para movimiento de suelo, correspondientes a una razón de masas $\mu = 0.01$ y parámetros óptimos de diseño, se muestran en las figuras 2.18 y 2.19. Es posible apreciar en la figura 2.18 que el efecto del DMSL es el de limitar la respuesta en frecuencia del sistema primario. Este efecto se hace evidente en el rango definido por: $0.85 < \rho < 1.15$. Fuera de este intervalo la reducción de la respuesta en el sistema primario producida por el DMSL no es significativa.

El amortiguamiento equivalente en la estructura primaria que se obtiene con la instalación del DMSL, se puede determinar a partir del factor de amplificación dinámica para una estructura de 1Gdl. bajo excitación armónica. En este caso el factor de amplificación dinámica vale:

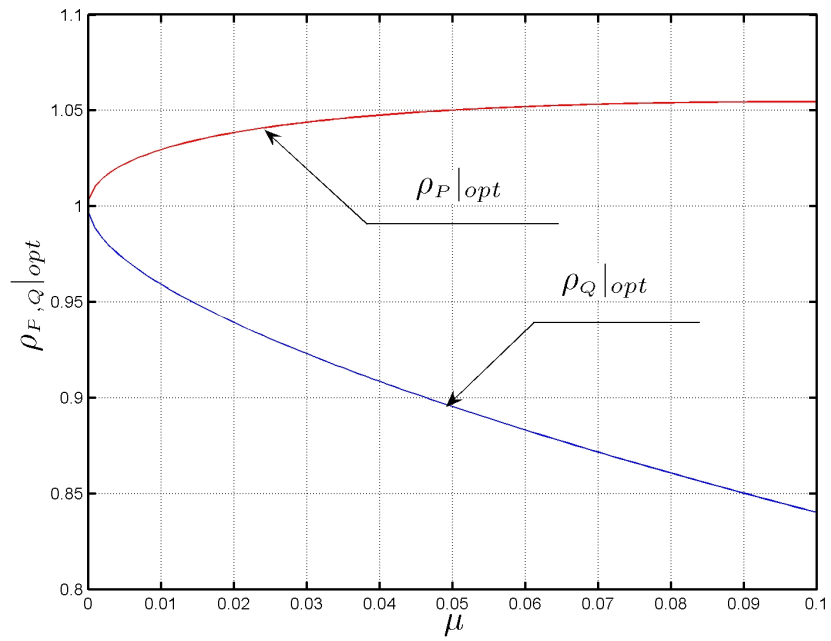


Figura 2.13: Variación de $\rho_{P,Q}|_{OPT}$ con respecto a la razón de frecuencias μ

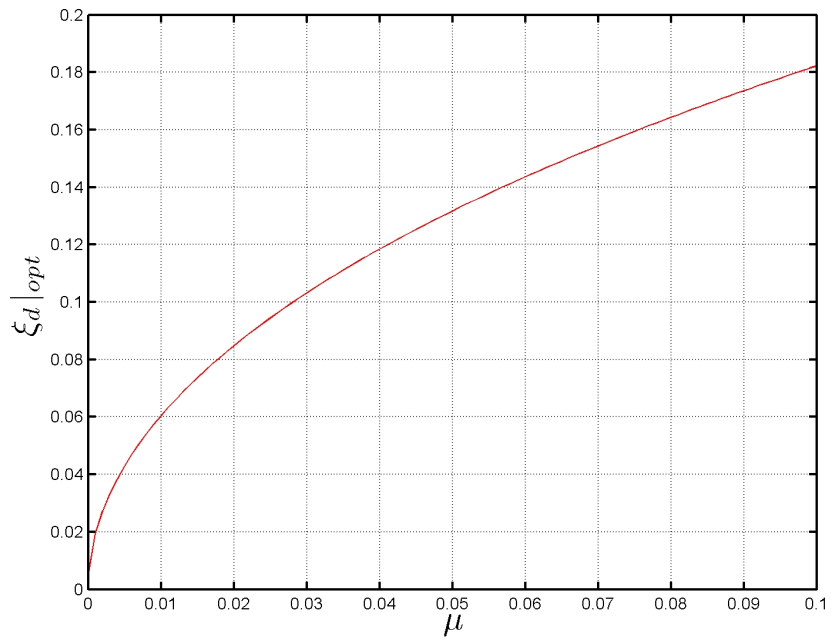


Figura 2.14: Variación de $\xi_d|_{OPT}$ con respecto a la razón de frecuencias μ

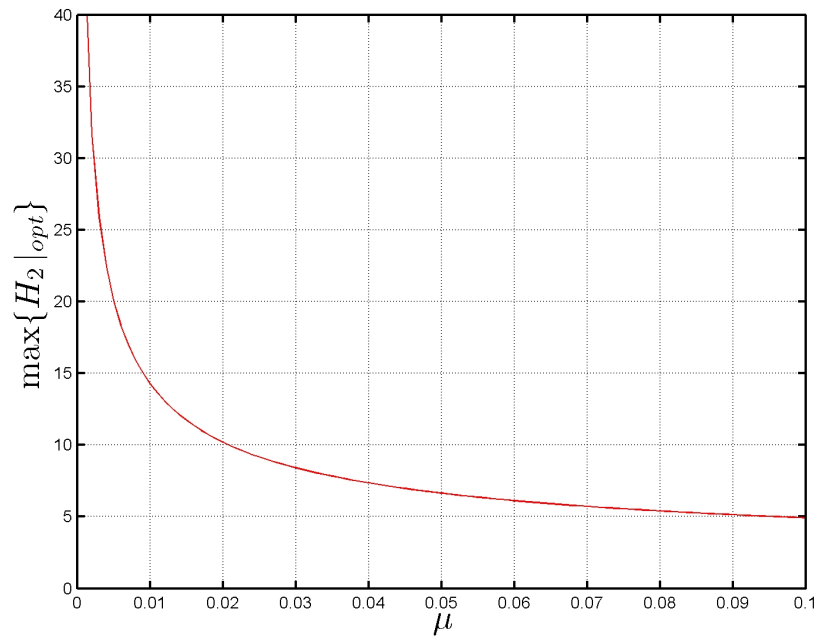


Figura 2.15: Variación de $\max\{H_2|_{OPT}\}$ con respecto a la razón de frecuencias μ

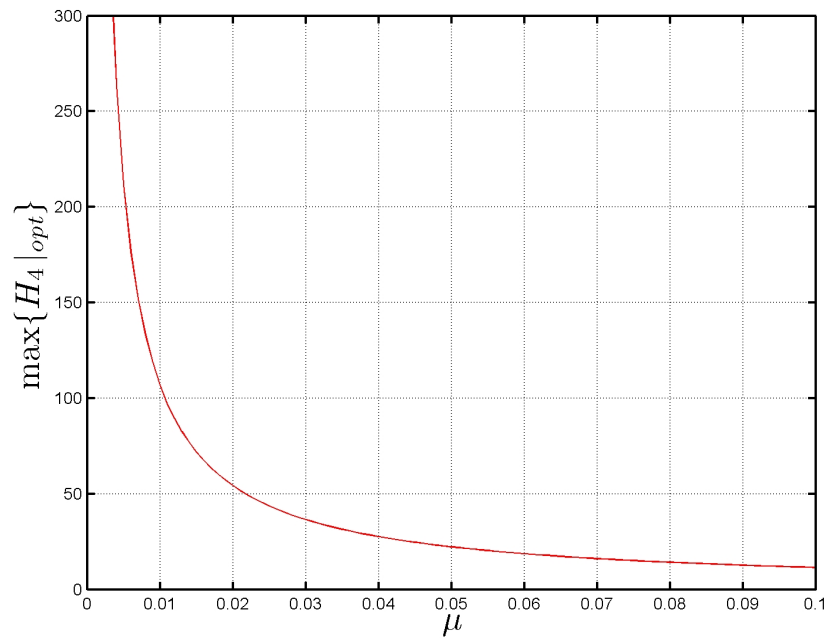


Figura 2.16: Variación de $H_4|_{OPT} / \max\{H_2|_{OPT}\}$ con respecto a la razón de frecuencias μ

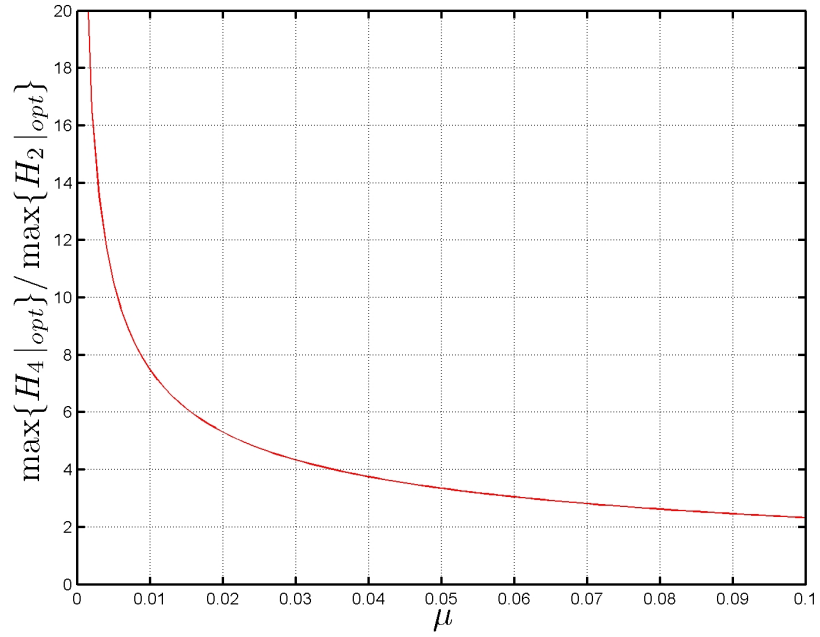


Figura 2.17: Variación de $H_4|_{OPT}$ con respecto a la razón de frecuencias μ

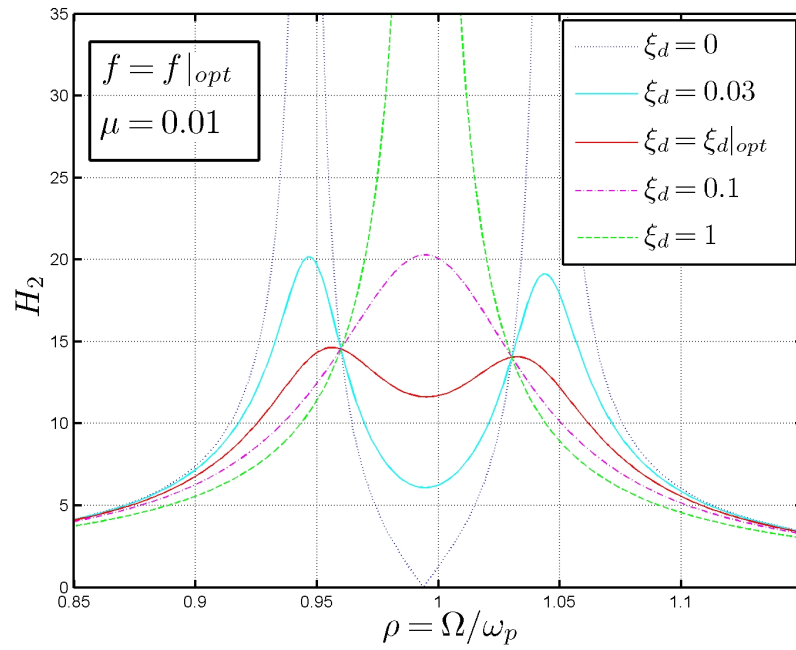


Figura 2.18: Variación de H_2 con respecto a la razón de frecuencias ρ , para $f|_{OPT}$ y distintos valores de ξ_d .

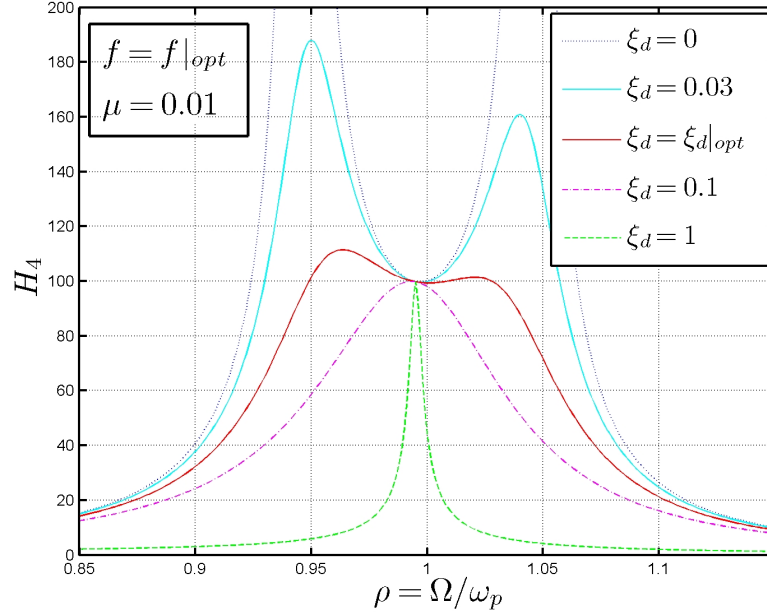


Figura 2.19: Variación de H_4 con respecto a la razón de frecuencias ρ , para $f|_{OPT}$ y distintos valores de ξ_d .

$$H = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (2.59)$$

Expresando el valor de H_2 de manera similar, es decir realizando una analogía entre el sistema estructura no amortiguada y DMSL, con una estructura de 1Gdl amortiguada, se obtiene una medida de la razón de amortiguamiento equivalente, ξ_{eq} , para el sistema primario. Para ello solo basta con despejar el valor de ξ de la ecuación anterior, de donde se obtiene

$$\xi_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2H_2} \left(H_2 - \sqrt{H_2^2 - 1} \right)} \quad (2.60)$$

Todo el procedimiento recién descrito para obtener los parámetros óptimos de diseño del DMSL fue introducido por Den Hartog [5], aunque se cree que fue Erich Hahnkamm el primero en proponerlo. Como se puede notar, la idea central detrás del proceso de optimización, consiste en minimizar el factor de amplificación dinámica en torno a la frecuencia natural de oscilación del sistema primario. Esto último tiene como objetivo generar un diseño robusto para el dispositivo. Si bien es cierto, se

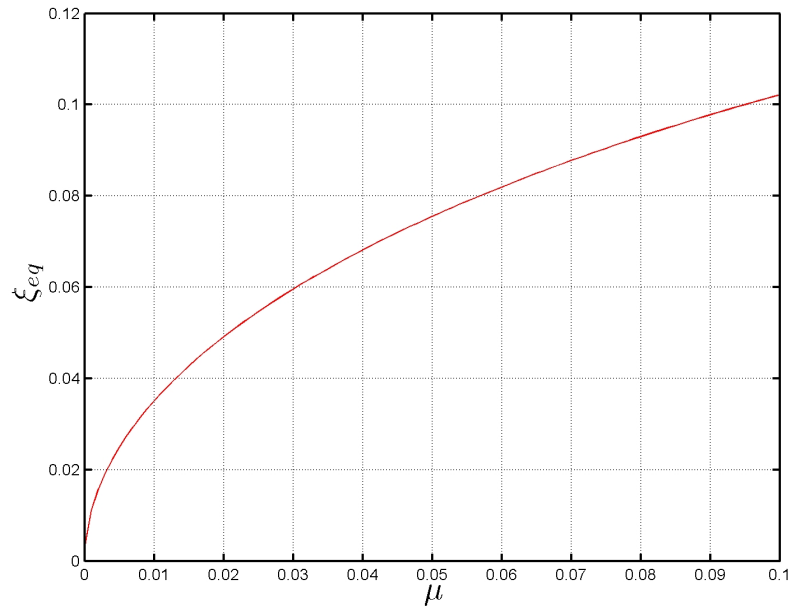


Figura 2.20: Variación del amortiguamiento equivalente con la razón de masas, para condiciones óptimas de diseño

podría argumentar que si efectivamente la frecuencia de la excitación externa es conocida, digamos $\Omega = \Omega^*$ (por ende la razón de frecuencias $\rho^* = \Omega^*/\omega_p$), solo bastaría con minimizar el factor de amplificación dinámica para dicha razón de frecuencias, es decir:

$$\min_f \left\{ \min_{\xi_d} \{H_2(\rho^*)\} \right\} \quad (2.61)$$

El esquema de optimización establecido por esta última ecuación nos asegura entonces el mínimo de la respuesta dinámica para la razón de frecuencias ρ^* . Sin embargo, en muchos casos es posible que la frecuencia de excitación externa o las propiedades dinámicas de la estructura primaria cambien. En estos casos, el esquema de optimización anterior podría traer consigo elevadas amplificaciones en la respuesta del sistema primario. Como ejemplo se muestra en la figura 2.21, donde se ha seleccionado un valor de $\rho^* = 0.93$ y $\mu = 0.01$. En este caso el esquema de optimiza-

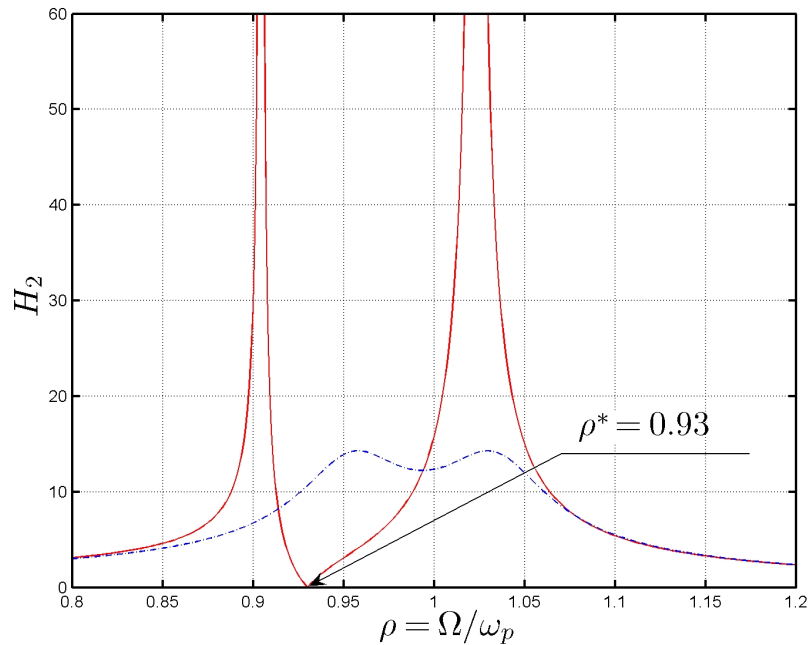


Figura 2.21: Comparación entre los factores de amplificación dinámica determinados mediante el procedimiento establecido por la ecuación 2.61 (curva continua roja), y aquel obtenido mediante el procedimiento descrito en este capítulo (curva punteada azul)

ción definido por la condición 2.61 hace que el valor de H_2 sea cero para $\rho^* = 0.93$ ¹. Como se puede apreciar en la figura, si el valor de ρ cae hasta 0.9, el valor de H_2 se incrementa más de 29 veces. Asimismo el diseño de un dispositivo de tales características se hace poco práctico. Si, como se ha mencionado, el valor de ρ cae hasta 0.9, la respuesta en desplazamiento del dispositivo es amplificada más de 780 veces. Garantizar por tanto espacio suficiente para el dispositivo en este caso es una tarea muy difícil de concretar.

¹Esto es cierto sólo desde un punto de vista teórico. La ausencia total de deformación en régimen permanente para la estructura primaria, expresada mediante la condición $H_2 = 0$, requiere que el amortiguamiento crítico del dispositivo sea cero, lo cual, como sabemos, no es posible.

2.3.1. Procedimiento de diseño del DMSL

El procedimiento de diseño del DMSL se puede resumir en los pasos mostrados a continuación:

1. Establecer los máximos desplazamientos admisibles para el sistema primario y el dispositivo. Estos datos proveen los valores para $H_2|_{OPT}$ y $H_4|_{OPT}$.
2. A partir de los valores anteriores, determinar la razón de masas μ , a partir de las figuras 2.15 y 2.16. Seleccionar el mayor valor de μ .
3. Determinar $f|_{OPT}$ por medio de la ecuación 2.52
4. $\omega_d|_{OPT} = f|_{OPT} \omega_p$
5. $k_d = m_d \omega_d^2 = \mu K_p f^2|_{OPT}$
6. Determinar el valor para $\xi_d|_{OPT}$ a partir de la ecuación 2.58 o la figura 2.14
7. $c_d = 2m_d \omega_d \xi_d|_{OPT} = 2\mu f|_{OPT} M_p \omega_p \xi_d|_{OPT}$

2.4. Parámetros óptimos de diseño para aceleración basal monofrecuencial. Caso 3 Estructura primaria amortiguada, DMSL amortiguado

En toda estructura real existe amortiguamiento. Si bien es cierto los DMSL están pensados para instalarse en estructuras con amortiguamientos mas bien bajos, tomar en cuenta el efecto del amortiguamiento en la estructura primaria es una importante consideración de diseño a la hora de determinar los parámetros óptimos para el DMSL.

En la figura 2.22 se muestra el sistema primario, provisto de un amortiguador lineal de constante C , junto con un DMSL amortiguado. Considerando al sistema excitado por la acción de la fuerza externa y el desplazamiento de suelo descritos anteriormente, es posible escribir la ecuación de movimiento del sistema se como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_p & 0 \\ 0 & m_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_p + \ddot{u}_s \\ \ddot{u}_p + \ddot{u}_d + \ddot{u}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_p + c_d & -c_d \\ -c_d & c_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_p \\ \dot{u}_p + \dot{u}_d \end{Bmatrix} + \dots \\ \dots + \begin{bmatrix} K_p + k_d & -k_d \\ -k_d & k_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_p \\ u_p + u_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Siguiendo el mismo procedimiento desarrollado para los casos anteriores, se obtienen las siguientes expresiones para \bar{u}_p y \bar{u}_d (la derivación detallada de estas expresiones se encuentra en el apéndice A):

$$\bar{u}_p = \frac{\bar{p}}{K_p} H_5 e^{i\delta_5} - \frac{\bar{\ddot{u}}_s M_p}{K_p} H_6 e^{i\delta_6} \quad (2.63)$$

$$\bar{u}_d = \frac{\bar{p}}{k_f} H_7 e^{-i\delta_7} - \frac{\bar{\ddot{u}}_s m_d}{k_d} H_8 e^{i\delta_8} \quad (2.64)$$

Nuevamente aquí, los términos H definen los factores de amplificación de las respuestas pseudos estáticas, y las cantidades δ corresponden a los ángulos de fase entre la respuesta y la excitación. Estos términos se describen a continuación:

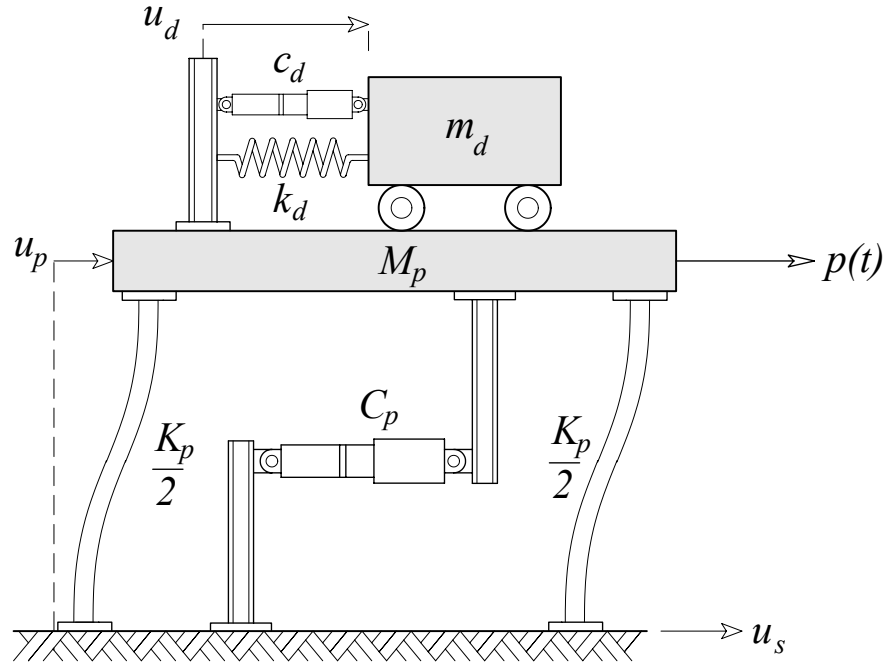


Figura 2.22: Sistema primario y DMSL ambos amortiguados.

$$H_5 = \frac{\sqrt{(f^2 - \rho^2)^2 + 4\xi_d^2 \rho^2 f^2}}{|D_3|} \quad (2.65)$$

$$H_6 = \frac{\sqrt{[(1 + \mu) f^2 - \rho^2]^2 + 4\xi_d^2 \rho^2 f^2 (1 + \mu)^2}}{|D_3|} \quad (2.66)$$

$$H_7 = \frac{f^2 \rho^2 \mu}{|D_3|} \quad (2.67)$$

$$H_8 = \frac{f^2 \sqrt{1 + 4\xi_p^2 \rho^2}}{|D_3|} \quad (2.68)$$

$$|D_3| = \left\{ [(1 - \rho^2)(f^2 - \rho^2) - f^2 \rho^2 \mu - 4\xi_p \xi_d f \rho^2]^2 + \dots \right. \\ \left. \dots + 4[\xi_p \rho (f^2 - \rho^2) + \xi_d f \rho (1 - \rho^2 (1 + \mu))]^2 \right\}^{0.5} \quad (2.69)$$

$$\delta_5 = \alpha_1 - \delta_7 \quad (2.70)$$

$$\delta_6 = \alpha_2 - \delta_7 \quad (2.71)$$

$$\delta_8 = \alpha_3 - \delta_7 \quad (2.72)$$

$$\tan \delta_7 = \frac{2\xi_p \rho (f^2 - \rho^2) + \xi_d f \rho (1 - \rho^2 (1 + \mu))}{(1 - \rho^2) (f^2 - \rho^2) - f^2 \rho^2 \mu - 4\xi_p \xi_d f \rho^2} \quad (2.73)$$

$$\tan \alpha_3 = 2\xi_p \rho \quad (2.74)$$

Los términos α_1 y α_2 están definidos según las ecuaciones 2.37 y 2.38.

En las figuras 2.23 y 2.24 se muestran dos gráficas para H_6 v/s ρ . A diferencia de lo que ocurre con el caso anteriormente analizado, las curvas de amplificación dinámica correspondientes a distintos valores de ξ_d no poseen puntos en común. Asimismo, a partir de las ecuaciones 2.66 a 2.69, es posible notar que los factores de amplificación dinámica dependen del amortiguamiento crítico del sistema primario. Para determinar en este caso los parámetros óptimos de diseño del DMSL se deben encontrar los valores de f y ξ_d , tales que minimizan el máximo valor que alcanza el factor de amplificación dinámica asociado a la respuesta que se interesa minimizar. En lo que sigue nos centramos en la determinación de los parámetros óptimos asociados a H_6 , el cual corresponde al factor de amplificación dinámica para el desplazamiento del sistema primario con respecto del movimiento de suelo. Para este caso la condición descrita anteriormente se escribe matemáticamente como sigue

$$\min_f \left\{ \min_{\xi_d} \left\{ \max_{\rho} (H_6(\rho, \xi_d, f)) \right\} \right\} \quad (2.75)$$

Esta última expresión establece un problema de optimización, el cual dada su complejidad, se resuelve de forma numérica. Los valores de f y ξ_d , que cumplen con esta condición, corresponden a los óptimos de diseño para el dispositivo. Dichos valores los denominamos como $f|_{OPT}$ y $\xi_d|_{OPT}$

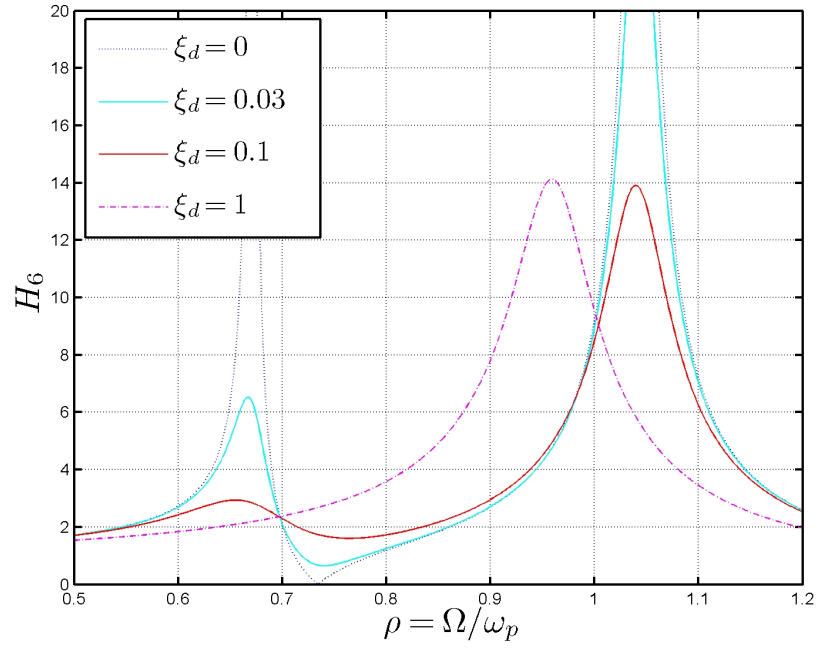


Figura 2.23: H_6 v/s ρ , para $f = 0.7$, $\mu = 0.1$, $\xi_p = 0.01$ y distintos valores de ξ_d .

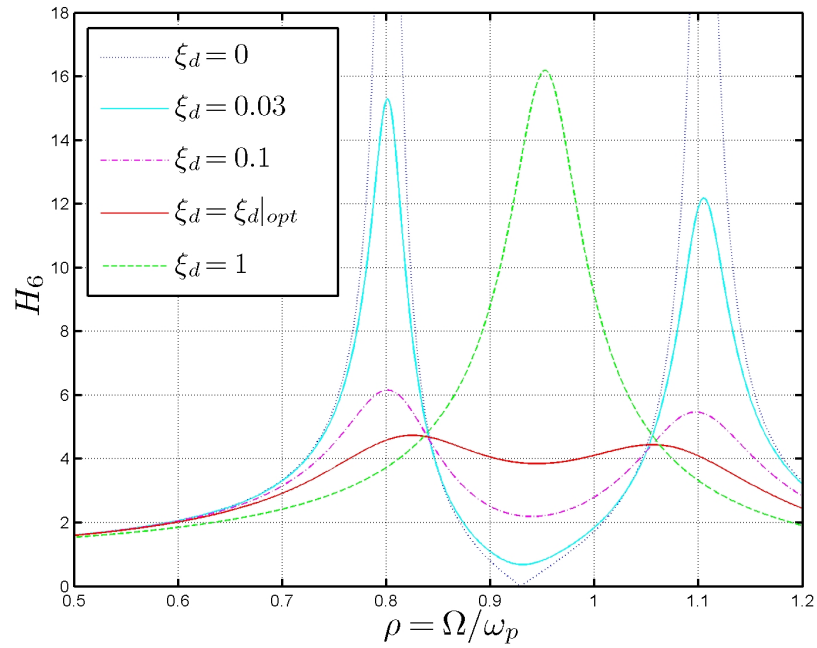


Figura 2.24: H_6 v/s ρ , para $f|_{OPT}$, $\mu = 0.1$, $\xi_p = 0.01$ y distintos valores de ξ_d .

En la figura 2.24 se muestra la curva H_6 , para $f|_{OPT}$, y distintos valores de ξ_d . Es posible notar que en la condición óptima de diseño, el máximo valor que alcanza el término H_6 es el mínimo posible para las distintas combinaciones de f y ξ_d .

Para determinar los valores óptimos de f y ξ_d , para valores dados de μ y ξ_p , se debe realizar un procedimiento numérico iterativo, en donde las curvas de amplificación dinámica se escriben como función de la razón de frecuencias ρ . Para cada una de estas curvas se obtiene el máximo valor del factor de amplificación dinámica. El menor de estos valores, para los distintos μ y ξ_p considerados, corresponde a la condición óptima de diseño. La idea es primero considerar los valores óptimos extremos, es decir aquellos que se obtienen cuando $\mu \rightarrow 0$ y $\xi_p = 0$. Estos valores óptimos se utilizan para “calibrar” la expresión numérica, obligando a que esta última entregue en dichos casos los óptimos correspondientes a $\mu \rightarrow 0$ y $\xi_p = 0$.

Como primer caso consideramos que el sistema primario posee amortiguamiento, pero que la masa del dispositivo es despreciable, es decir $\mu \rightarrow 0$. Bajo estas condiciones notamos que el valor óptimo de la frecuencia natural de oscilación del dispositivo, debe corresponder con la frecuencia de resonancia para desplazamiento o sea $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi_p^2}$, siendo ω_n la frecuencia natural de oscilación del sistema primario. Podemos entonces escribir:

$$f|_{OPT}(\mu \rightarrow 0) = \sqrt{1 - 2\xi_p^2} \quad (2.76)$$

Si ahora el sistema primario no posee amortiguamiento obtenemos la situación analizada en el apartado 2.3, en donde se demostró que el valor óptimo para la razón de frecuencias, f , debe valer:

$$f|_{OPT}(\xi = 0) = \frac{\sqrt{1 - 0.5\mu}}{1 + \mu} \quad (2.77)$$

Concluimos por tanto que la expresión para $f|_{OPT}$ debe ser de la forma:

$$f|_{OPT} = \left(\frac{\sqrt{1 - 0.5\mu}}{1 + \mu} + \sqrt{1 - 2\xi_p^2} - 1 \right) - \Delta f \quad (2.78)$$

En donde el término Δf se determina evaluando la diferencia entre los valores óptimos obtenidos mediante análisis numéricos, y aquellos entregados por el primer término de la expresión anterior.

Aplicando un razonamiento similar concluimos que la expresión para $\xi_d|_{OPT}$ debe ser de la forma:

$$\xi_d|_{OPT} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)(1-0.5\mu)}} + \Delta\xi_d \quad (2.79)$$

Donde el primer término de la expresión anterior corresponde a $\xi_d|_{OPT}(\xi_p = 0)$. Por otro lado, la diferencia entre los valores óptimos determinados de análisis numéricos, y aquellos correspondientes a $\xi_d|_{OPT}(\xi_p = 0)$, se encuentra representada por $\Delta\xi_d$.

Todo el procedimiento recién descrito fue realizado por Hsiang-Chuan Tsai y Guan-Cheng Lin [17]. Los valores que se obtuvieron para Δf y $\Delta\xi_d$ se ajustaron numéricamente considerándolos como polinomios bidimensionales en μ y ξ . A continuación se entregan las formulas obtenidas para $f|_{OPT}$ y $\xi_d|_{OPT}$:

$$\begin{aligned} f|_{OPT} = & \left(\frac{\sqrt{1-0.5\mu}}{1+\mu} + \sqrt{1-2\xi_p^2} - 1 \right) - \dots \\ & \dots - (2.375 - 1.034\sqrt{\mu} - 0.426\mu) \xi_p \sqrt{\mu} - \dots \\ & \dots - (3.370 - 16.903\sqrt{\mu} + 20.496\mu) \xi_p^2 \sqrt{\mu} \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\xi_d|_{OPT} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)(1-0.5\mu)}} + (0.151\xi - 0.170\xi^2) + (0.163\xi + 4.980\xi^2) \mu \quad (2.81)$$

En las figuras 2.25 y 2.26 se muestra la variación de los parámetros $f|_{OPT}$ y $\xi_d|_{OPT}$ con respecto a μ , para distintos valores de la razón de amortiguamiento crítico de la estructura primaria, se ha incluido además el caso correspondiente a $\xi_p = 0$. Se puede apreciar a partir de la figura 2.25, que el incremento en la razón de amortiguamiento crítico de la estructura primaria trae como consecuencia una disminución de la razón de frecuencias f para condiciones óptimas de diseño. En otras palabras, estructuras de mayor amortiguamiento requieren de dispositivos más flexibles para minimizar su respuesta. Por otra parte, el incremento en el amortiguamiento de la estructura primaria significa a su vez mayor amortiguamiento crítico para el dispositivo en condiciones óptimas de diseño, como se desprende del gráfico 2.26. Asimismo, se puede notar que para estructuras cuyo razón de amortiguamiento crítico es menor de un 1%, el error cometido al utilizar las expresiones de los parámetros óptimos

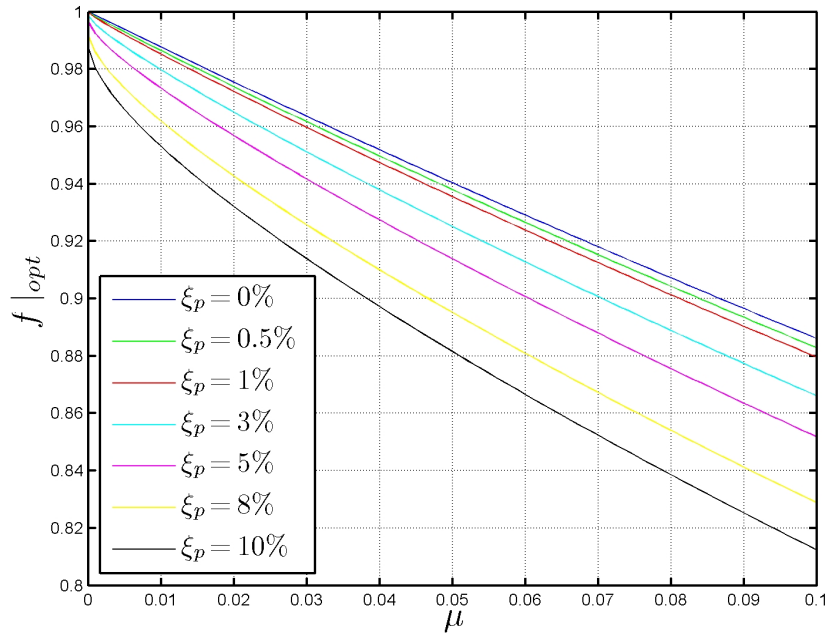


Figura 2.25: Variación de $f|_{OPT}$ con respecto a la razón de masas μ

para estructuras no amortiguadas es despreciable. Este error sin embargo, se hace cada vez mayor y es apreciable para el amortiguamiento crítico del dispositivo a medida que la razón de masas disminuye. Finalmente notamos a partir de la figura 2.27, que a medida que la razón de amortiguamiento crítico de la estructura primaria aumenta, la disminución de la máxima respuesta es cada vez menor. Esto último nos indica que en estructuras cuyo amortiguamiento es alto, digamos sobre el 5%, la reducción que se obtiene al instalar un DMSL no es considerable, y sus efectos solo se hacen notorios cuando la razón de masas μ se eleva por sobre el 10%.

A partir de este punto, el procedimiento de diseño para el DMSL se realiza de manera similar al expuesto para el caso de la estructura primaria no amortiguada.

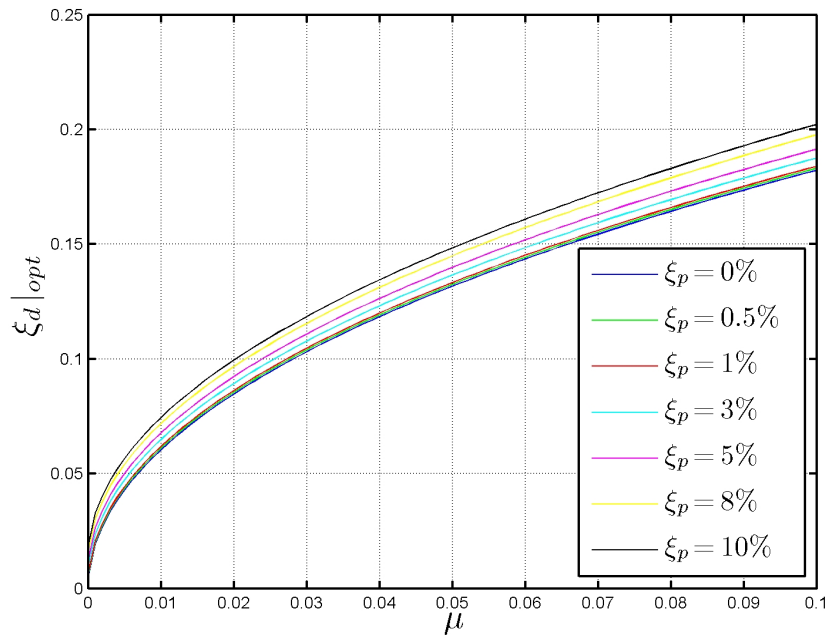


Figura 2.26: Variación de $\xi_d|_{OPT}$ con respecto a la razón de masas μ

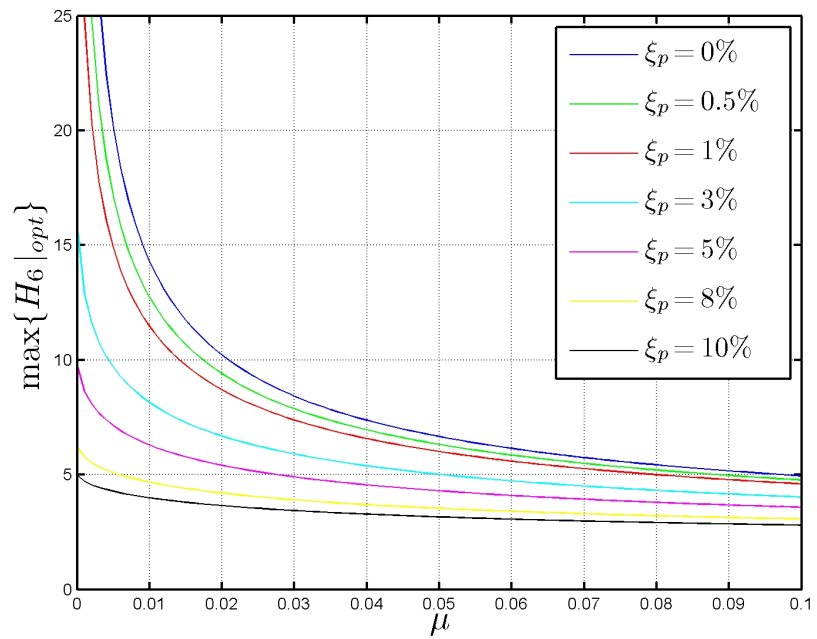


Figura 2.27: Máximo valor que alcanza el factor de amplificación dinámica H_6 para condiciones óptimas de diseño.

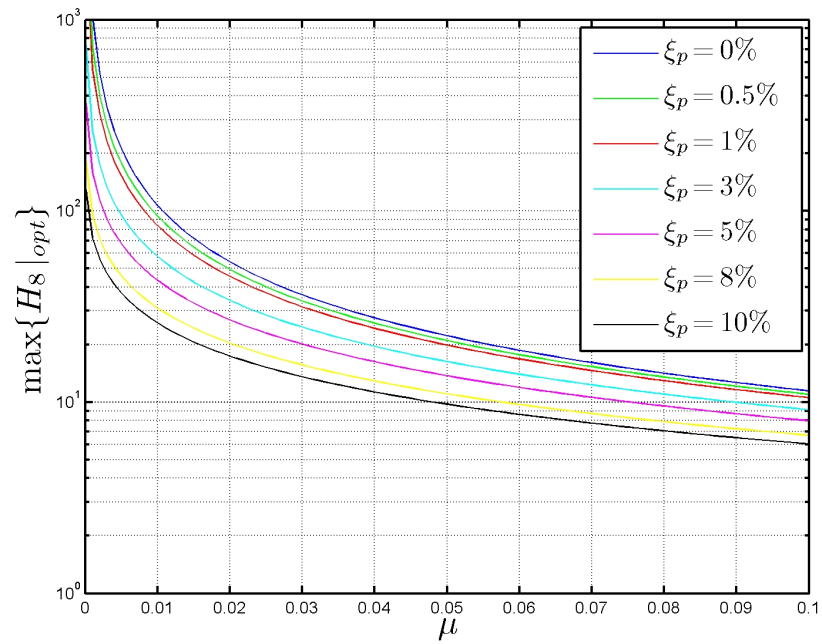


Figura 2.28: Máximo valor que alcanza el factor de amplificación dinámica H_8 para condiciones óptimas de diseño.

2.5. Parámetros óptimos de diseño, aceleración basal aleatoria tipo ruido blanco.

En las secciones precedentes, se realizaron los análisis que nos permitieron caracterizar la respuesta del sistema cuando el mismo se encuentra sujeto acciones externas determinísticas de tipo monofrecuencial. Ciertas condiciones de excitación pueden ser convenientemente representadas como movimientos oscilatorios monofrecuenciales. Tal es el caso de las excitaciones provenientes de maquinarias vibratorias. No obstante lo anterior, existe un gran número de situaciones en las cuales no es posible representar de manera explícita la acción externa que actúa sobre el sistema. Este es el caso de las acciones externas de naturaleza aleatoria. El primero de estos casos que analizaremos son los denominados procesos de banda ancha, los cuales poseen densidades espectrales de valores similares sobre una banda o rango de frecuencias. Este tipo de procesos pueden ser idealizados como ruido blanco, cuya densidad espectral es constante sobre todas las frecuencias. Si bien es cierto, el ruido blanco es físicamente irrealizable ya que supone energía infinita, este nos permite representar de manera sencilla los procesos de banda ancha.

Para estructuras de bajo amortiguamiento, el rango de aplicabilidad de la idealización de ruido blanco puede ser extendido. En estos casos, la función de transferencia posee un marcado pico, ubicado aproximadamente en la frecuencia no amortiguada de la estructura. Si la acción externa posee una función de densidad espectral que varía suavemente en el entorno de la frecuencia natural de vibrar de la estructura, entonces los valores de la misma fuera de este entorno no son importantes. Como consecuencia la idealización de ruido blanco en estos casos es aceptable. Algunas funciones de densidad espectral, las cuales pueden representarse de manera adecuada por medio de procesos tipo ruido blanco, se muestran en la figura 2.29.

Para determinar la respuesta del sistema, supondremos por tanto que la aceleración de la base esta caracterizada como un proceso aleatorio estacionario tipo ruido blanco. En este caso la función de auto correlación para la aceleración de suelo se encuentra dada por:

$$R_{\ddot{u}_s}(\tau) = \ddot{u}_{so} \cdot \delta(\tau) \quad (2.82)$$

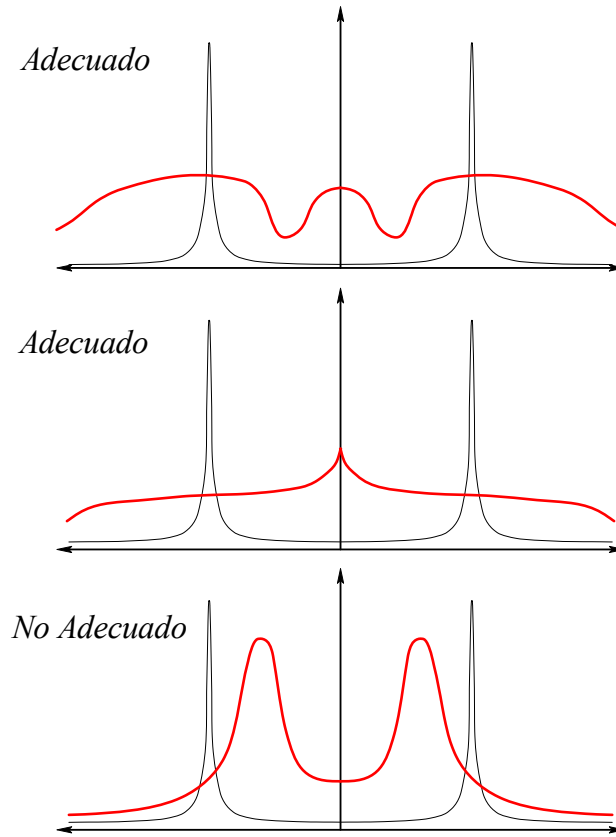


Figura 2.29: Ejemplos de funciones de densidad espectral que pueden ser adecuadamente representadas como ruido blanco.

En donde \ddot{u}_{so} es la intensidad del espectro de potencia del movimiento del suelo, y $\delta(\tau)$ corresponde a la función delta de Dirac. La densidad espectral en tanto esta dada por:

$$S_{\ddot{u}_s}(\omega) = \ddot{u}_{so} \quad (2.83)$$

La función de densidad espectral del desplazamiento del sistema primario, $S_{u_p}(\omega)$, y la función de densidad espectral del desplazamiento del DMSL, $S_{u_d}(\omega)$, se determinan a partir de la función de densidad espectral de la aceleración de suelo como sigue [6, 7]

$$S_{u_p}(\omega) = |H_{u_p \ddot{u}_s}(\omega)|^2 S_{\ddot{u}_s}(\omega) \quad (2.84)$$

$$S_{u_d}(\omega) = |H_{u_d\ddot{u}_s}(\omega)|^2 S_{\ddot{u}_s}(\omega) \quad (2.85)$$

En donde $H_{u_p\ddot{u}_s}(\omega)$ es la función de transferencia entre la aceleración de base y el desplazamiento del sistema primario, y $H_{u_d\ddot{u}_s}(\omega)$ es la función de transferencia entre la aceleración de suelo y el desplazamiento del disipador. Podemos escribir el valor cuadrático medio del desplazamiento del sistema primario, $E\{u_p^2\}$, y el valor cuadrático medio del desplazamiento del disipador, $E\{u_d^2\}$, de la siguiente forma:

$$E\{u_p^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} |H_{u_p\ddot{u}_s}(\Omega)|^2 S_{\ddot{u}_s}(\Omega) d\Omega \quad (2.86)$$

$$E\{u_d^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} |H_{u_d\ddot{u}_s}(\Omega)|^2 S_{\ddot{u}_s}(\Omega) d\Omega \quad (2.87)$$

Las funciones de transferencia contenidas en las ecuaciones anteriores pueden ser expresadas en términos de los factores de amplificación dinámica $\mathbf{H}_6(\rho)$ y $\mathbf{H}_8(\rho)^2$. Para ello solo basta con analizar las ecuaciones 2.63 y 2.64, de donde podemos establecer las siguientes igualdades:

$$H_{u_p\ddot{u}_s}(\rho) = \frac{1}{\omega_p^2} \mathbf{H}_6(\rho) \quad (2.88)$$

$$H_{u_d\ddot{u}_s}(\rho) = \frac{1}{\omega_d^2} \mathbf{H}_8(\rho) \quad (2.89)$$

Como puede notarse a partir de las expresiones anteriores, los factores de amplificación dinámica son a su vez funciones de la razón de frecuencias $\rho = \Omega/\omega_p$. Luego de sustituir las expresiones 2.88 y 2.89 dentro de las ecuaciones 2.86 y 2.87 respectivamente, y de realizar el cambio de variable correspondiente se obtiene:

$$E\{u_p^2\} = \frac{\ddot{u}_{so}}{\omega_p^3} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{H}_6(\rho)|^2 d\rho \quad (2.90)$$

²Se utilizan las siguientes notaciones a partir de este punto: $\mathbf{H}_6(\rho) = H_6(\rho) e^{i\delta_6(\rho)}$ y $\mathbf{H}_8(\rho) = H_8(\rho) e^{i\delta_8(\rho)}$

$$E \{u_d^2\} = \frac{\omega_p \ddot{u}_{so}}{\omega_d^4} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{H}_8(\rho)|^2 d\rho \quad (2.91)$$

Por último debemos evaluar las integrales que aparecen en las expresiones anteriores. Para ello expresamos cada uno de los factores de amplificación dinámica de la siguiente forma:

$$\mathbf{H}_6(\rho) = \frac{B_2 \rho^2 + iB_1 \rho + B_0}{A_4 \rho^4 + iA_3 \rho^3 + A_2 \rho^2 + iA_1 \rho + A_0} \quad (2.92)$$

$$\mathbf{H}_8(\rho) = \frac{iC_1 \rho + C_0}{A_4 \rho^4 + iA_3 \rho^3 + A_2 \rho^2 + iA_1 \rho + A_0} \quad (2.93)$$

En donde:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= f^2 \\ A_1 &= 2f(\xi_p f + \xi_d) \\ A_2 &= -(1 + f^2(1 + \mu) + 4\xi_p \xi_d f) \\ A_3 &= -2(\xi_p + \xi_d f(1 + \mu)) \\ A_4 &= 1 \\ B_0 &= f^2(1 + \mu) \\ B_1 &= 2f\xi_d(1 + \mu) \\ B_2 &= -1 \\ C_0 &= f^2 \\ C_1 &= 2f^2\xi_p \end{aligned} \right\} \quad (2.94)$$

Expresados de esta manera, se puede recurrir a tablas de integración para evaluar las integrales anteriores [6], obteniéndose lo siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{H}_6(\rho)|^2 d\rho = \frac{\pi \left[\left(\frac{B_0^2}{A_0} \right) (A_2 A_3 - A_1 A_4) - A_3 (B_1^2 + 2B_0 B_2) + A_1 B_2^2 \right]}{A_1 (A_2 A_3 - A_1 A_4) - A_0 A_3^2} \quad (2.95)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{H}_8(\rho)|^2 d\rho = \frac{\pi \left[\left(\frac{C_0^2}{A_0} \right) (A_2 A_3 - A_1 A_4) - A_3 C_1^2 \right]}{A_1 (A_2 A_3 - A_1 A_4) - A_0 A_3^2} \quad (2.96)$$

Hasta este punto hemos caracterizado la respuesta del sistema, sujeto a la acción de un movimiento de suelo, cuya aceleración se puede idealizar como un proceso aleatorio estacionario tipo ruido blanco. Nos interesa a continuación determinar los valores que deben adoptar los parámetros f y ξ_d , de manera tal de minimizar la respuesta de la estructura primaria. Para determinar los parámetros óptimos de diseño del DMSL, utilizaremos como índice el valor medio cuadrático del desplazamiento de la estructura primaria con el dispositivo instalado, normalizado con respecto a al valor cuadrático medio del desplazamiento de la estructura original, es decir:

$$\bar{E} \{u_p^2\} = \frac{E \{u_p^2\}}{E \{u_p^{*2}\}} \quad (2.97)$$

En donde $E \{u_p^{*2}\}$ representa el valor medio cuadrático del desplazamiento de la estructura sin el dispositivo instalado. Para determinar el valor de $E \{u_p^{*2}\}$ utilizamos la siguiente expresión [6]:

$$E \{u_p^{*2}\} = \int_{-\infty}^{\infty} |H_{u_p^* \ddot{u}_s}(\omega)|^2 S_{\ddot{u}_s}(\omega) d\omega \quad (2.98)$$

Donde $H_{u_p^* \ddot{u}_s}(\omega)$ es la función de transferencia desplazamiento-aceleración de base del sistema primario cuyo valor se muestra a continuación:

$$H_{u_p^* \ddot{u}_s}(\rho) = \frac{1}{\omega_p^2 [(1 - \rho^2) + 2i\xi_p \rho]} \quad (2.99)$$

En virtud de la expresión anterior, y recordando que la densidad espectral de la aceleración de base se expresa según lo indicado en la ecuación 2.83, se obtiene:

$$E \{u_p^{*2}\} = \frac{\pi \ddot{u}_{so}}{2\xi_p \omega_p^3} \quad (2.100)$$

Finalmente, el valor cuadrático medio normalizado, definido por la expresión 2.97 queda como sigue:

$$\bar{E} \{u_p^2\} = \frac{2\xi_p}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{H}_6(\rho)|^2 d\rho \quad (2.101)$$

En donde la integral anterior se determina a partir de la expresión 2.95. En la figura 2.30, se muestra a modo de ejemplo, la representación gráfica del valor

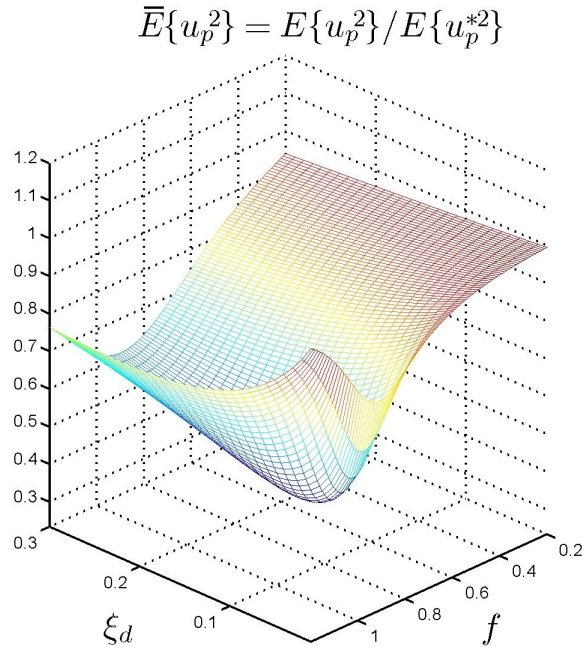


Figura 2.30: Valor medio cuadrático normalizado, en función de f y ξ_d , para $\mu = 0.03$ y $\xi_p = 0.03$. En este caso los valores óptimos de diseño para el dispositivo corresponden a: $f|_{OPT} = 0.9493$ y $\xi_d|_{OPT} = 8.57\%$.

medio cuadrático normalizado, en función de f y ξ_d , para $\mu = 0.03$ y $\xi_p = 0.03$. Se puede apreciar a partir del gráfico que existe un par de valores para f y ξ_d que minimizan el valor de $\bar{E}\{u_p^2\}$. Dichos parámetros corresponden a los óptimos de diseño del DMSL. En lo que sigue a continuación nos ocuparemos de la determinación de dichos parámetros óptimos, así como a la obtención de expresiones analíticas que nos faciliten su determinación.

Para determinar por tanto los parámetros óptimos de diseño del dispositivo, se realiza una búsqueda numérica la cual nos permite establecer los valores para f y ξ_d que minimizan el valor medio cuadrático normalizado. El procedimiento de búsqueda es similar al descrito en la sección anterior para el caso de excitación de base monofrecuencial. Este se realiza para cada valor de la razón de masas μ y razón de amortiguamiento crítico ξ_p , dentro del intervalo de interés que se desea para cada una de estas variables. En el presente estudio se seleccionan los siguientes valores para dichas variables, a saber: $0.001 \leq \mu \leq 0.1$ y $\xi_p = 0.5\%, 1\%, 3\%, 5\%, 8\%$ y 10% .

Se han escogido estos valores dado que cubren la gran mayoría de las aplicaciones prácticas.

El proceso de optimización numérica se realiza con la ayuda de un programa computacional escrito en Matlab©. Este programa determina el menor valor que alcanza $\bar{E} \{u_p^2\}$ para las variables f y ξ_d , cuando μ , ξ_p poseen valores fijos. La búsqueda de este mínimo, $\min_{f, \xi_d} \{\bar{E} \{u_p^2\}\}$, se lleva a cabo sobre los intervalos: $0.7 \leq f \leq 1$ y $0 \leq \xi_d \leq 0.25$, los cuales garantizan la ocurrencia de $\min_{f, \xi_d} \{\bar{E} \{u_p^2\}\}$. Para ello se ha utilizado la rutina “fmincon()” la cual se encuentra programada dentro de Matlab©. Esta rutina permite la determinación del mínimo de una función cuyas variables se encuentran sujetas a restricciones. Como se puede notar a partir de la figura 2.30 la función $\bar{E} \{u_p^2\}$ posee solo un mínimo global, siendo además una función suave lo que hace que el proceso de optimización converja rápidamente. Todo el proceso anterior se debe repetir para cada uno de los valores de μ y ξ_p sobre sus respectivos intervalos de variación. A continuación se resumen los resultados obtenidos en la tabla 2.1 y los gráficos 2.31 a 2.33. Se ha incluido, de manera comparativa, el caso correspondiente a cero amortiguamiento crítico de la estructura primaria en las figuras 2.31 y 2.32.

Tabla 2.1: Parámetros óptimos de diseño para el DMSL bajo excitación basal aleatoria tipo ruido blanco

$\mu \setminus \xi_p$	$f _{OPT}$						$\xi_d _{OPT}$					
	0.5%	1%	3%	5%	8%	10%	0.5%	1%	3%	5%	8%	10%
0.001	0.998	0.998	0.995	0.990	0.980	0.971	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016
0.003	0.996	0.995	0.990	0.985	0.973	0.963	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027
0.005	0.993	0.992	0.987	0.980	0.967	0.957	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035
0.01	0.986	0.985	0.979	0.970	0.956	0.944	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050
0.015	0.980	0.978	0.971	0.962	0.945	0.932	0.061	0.061	0.061	0.061	0.061	0.061
0.02	0.974	0.972	0.963	0.953	0.936	0.922	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070
0.025	0.968	0.966	0.956	0.946	0.927	0.912	0.078	0.078	0.078	0.078	0.078	0.078
0.03	0.961	0.959	0.949	0.938	0.918	0.903	0.086	0.086	0.086	0.086	0.086	0.086
0.035	0.955	0.953	0.943	0.931	0.910	0.895	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092
0.04	0.949	0.947	0.936	0.924	0.902	0.886	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099
0.045	0.944	0.941	0.929	0.916	0.894	0.878	0.104	0.104	0.104	0.104	0.104	0.104
0.05	0.938	0.935	0.923	0.910	0.887	0.870	0.110	0.110	0.110	0.110	0.110	0.110
0.055	0.932	0.929	0.917	0.903	0.879	0.862	0.115	0.115	0.115	0.115	0.115	0.115
0.06	0.926	0.923	0.910	0.896	0.872	0.855	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120
0.065	0.921	0.918	0.904	0.890	0.865	0.847	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125
0.07	0.915	0.912	0.898	0.883	0.858	0.840	0.129	0.129	0.129	0.129	0.129	0.129
0.075	0.910	0.906	0.892	0.877	0.852	0.833	0.133	0.133	0.133	0.133	0.134	0.134
0.08	0.904	0.901	0.886	0.871	0.845	0.826	0.138	0.138	0.138	0.138	0.138	0.138
0.085	0.899	0.895	0.881	0.865	0.838	0.819	0.142	0.142	0.142	0.142	0.142	0.142
0.09	0.893	0.890	0.875	0.859	0.832	0.812	0.145	0.145	0.145	0.146	0.146	0.146
0.095	0.888	0.884	0.869	0.853	0.825	0.806	0.149	0.149	0.149	0.149	0.149	0.149
0.1	0.883	0.879	0.864	0.847	0.819	0.799	0.153	0.153	0.153	0.153	0.153	0.153

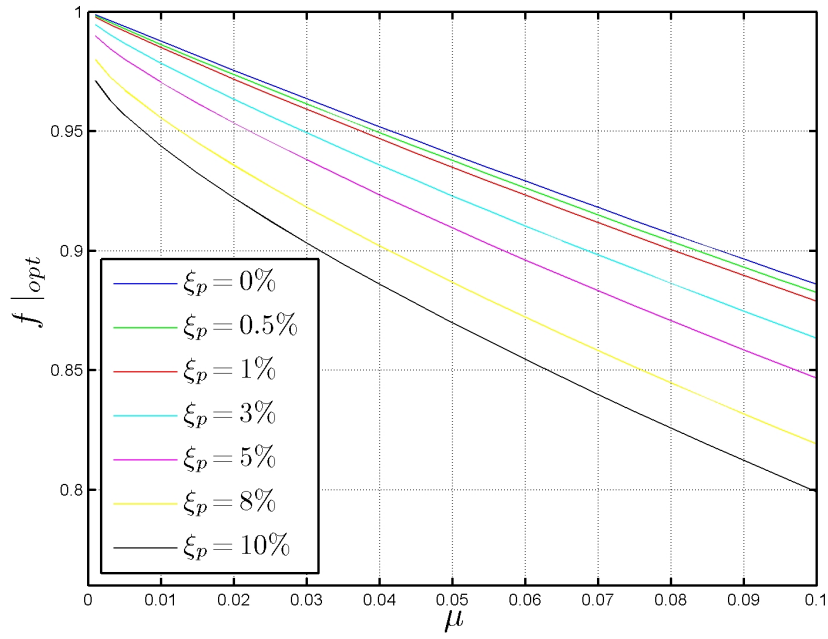


Figura 2.31: $f|_{OPT}$ v/s μ para distintos valores de ξ_p

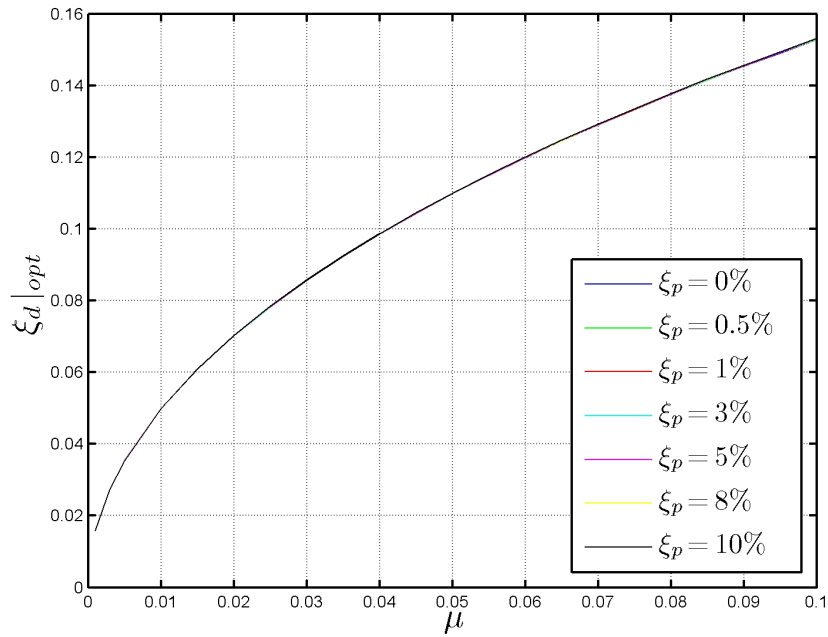


Figura 2.32: $\xi_d|_{OPT}$ v/s μ para distintos valores de ξ_p

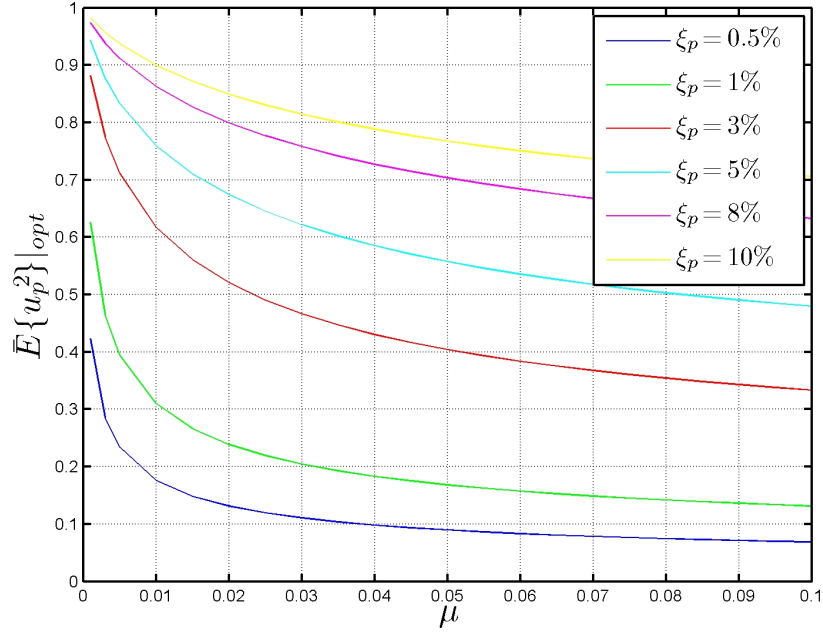


Figura 2.33: $\bar{E} \{u_p^2\}|_{OPT}$ v/s μ para distintos valores de ξ_p

Para facilitar la determinación de los parámetros óptimos de diseño se proponen expresiones analíticas en función de la razón de masas, μ , y la razón de amortiguamiento de la estructura primaria, ξ_p . Para calibrar dichas expresiones utilizamos los resultados obtenidos por G.B. Warburton [18] para estructuras no amortiguadas sujetas a una aceleración de base caracterizada como ruido blanco. Los parámetros óptimos en este caso son los que se muestran a continuación:

$$f|_{OPT}(\xi_p = 0) = \frac{\sqrt{1 - \mu/2}}{1 + \mu} \quad (2.102)$$

$$\xi_d|_{OPT}(\xi_p = 0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(1 - \mu/4)}{(1 + \mu)(1 - \mu/2)}} \quad (2.103)$$

1. Óptimo para la razón de frecuencias, $f|_{OPT}$

Los valores determinados a partir de los análisis numéricos se ajustan utilizando la siguiente expresión:

$$f|_{OPT} = f|_{OPT}(\xi_p = 0) - \Delta f|_{OPT} \quad (2.104)$$

El primer término del lado derecho de la expresión anterior corresponde al valor que adopta el óptimo de la razón de frecuencias cuando la razón de amortiguamiento crítico de la estructura primaria es cero. La diferencia entre esta última cantidad y los valores obtenidos de los análisis numéricos corresponde a $\Delta f|_{OPT}$. Nos interesa por tanto ajustar mediante polinomios la variación de $\Delta f|_{OPT}$ con respecto a μ y ξ_p . Analizando los resultados numéricos podemos notar que si el valor de la razón de masas μ se mantiene fija, entonces la variación de $\Delta f|_{OPT}$ se puede ajustar mediante un polinomio cuadrático en ξ_p . Los coeficientes de dicho polinomio pueden ser a su vez ajustados convenientemente por medio de un polinomio cuadrático en $\sqrt{\mu}$. Lo anterior nos lleva a plantear la siguiente expresión para $\Delta f|_{OPT}$:

$$\Delta f|_{OPT} = \phi_1 \xi_p^2 + \phi_2 \xi_p + \phi_3 \quad (2.105)$$

En donde los términos ϕ son polinomios cuadráticos en $\sqrt{\mu}$. Según se puede apreciar en la figura 2.34, los valores de ϕ_3 son del orden de 10^{-5} por lo cual pueden ser despreciados. Lo anterior garantiza que la formula 2.104 devuelva efectivamente el valor de $f|_{OPT}(\xi_p = 0)$ cuando la estructura primaria no posee amortiguamiento.

Una vez realizadas las regresiones indicadas anteriormente, se obtienen las siguientes expresiones para ϕ_1 y ϕ_2 :

$$\phi_1 = (-1.419\mu - 0.577\sqrt{\mu} + 1.977) \quad (2.106)$$

$$\phi_2 = (-1.468\mu + 2.712\sqrt{\mu} - 0.005) \quad (2.107)$$

Se propone pues la siguiente expresión para el óptimo de la razón de frecuencias:

$$f|_{OPT} = \frac{\sqrt{1-\mu/2}}{1+\mu} + (1.419\mu + 0.577\sqrt{\mu} - 1.977) \xi_p^2 + \dots \quad (2.108)$$

$$\dots + (1.468\mu - 2.712\sqrt{\mu} + 0.005) \xi_p$$

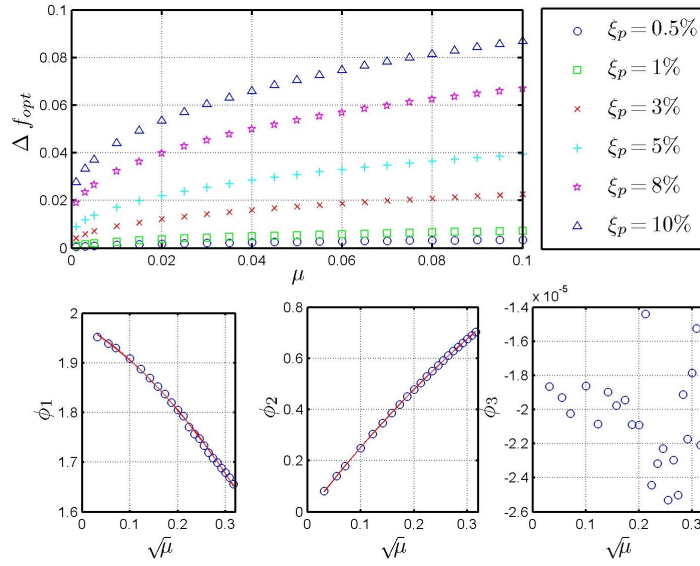


Figura 2.34: Diferencia entre los valores obtenidos mediante los análisis numéricos, para el óptimo de la razón de frecuencias, y aquellos obtenidos por medio de la expresión 2.102. Se muestra asimismo la variación de cada uno de los términos ϕ con respecto a $\sqrt{\mu}$.

2. Óptimo para la razón de amortiguamiento crítico $\xi_d|_{OPT}$

A partir de los resultados numéricos es posible notar que el valor de $\xi_d|_{OPT}$ es prácticamente independiente de la razón de amortiguamiento crítico de la estructura primaria. Esto último queda confirmado en la figura 2.35, en donde se muestra la diferencia entre los resultados numéricos y aquellos obtenidos suponiendo que el amortiguamiento de la estructura es cero, es decir utilizando la ecuación 2.103. La diferencia como se puede apreciar es del orden de 10^{-4} . Como consecuencia, el valor óptimo de la razón de amortiguamiento crítico del dispositivo se reduce simplemente a ecuación 2.103, esto es:

$$\xi_d|_{OPT} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(1 - \mu/4)}{(1 + \mu)(1 - \mu/2)}} \quad (2.109)$$

En la figura 2.36 se muestra el error entre los valores determinados mediante los análisis numéricos, y aquellos que se obtienen por medio de las expresiones propuestas. El error máximo para $f|_{OPT}$ no supera el 0.02%, en tanto que para $\xi_d|_{OPT}$ el error es siempre menor que 0.25%.

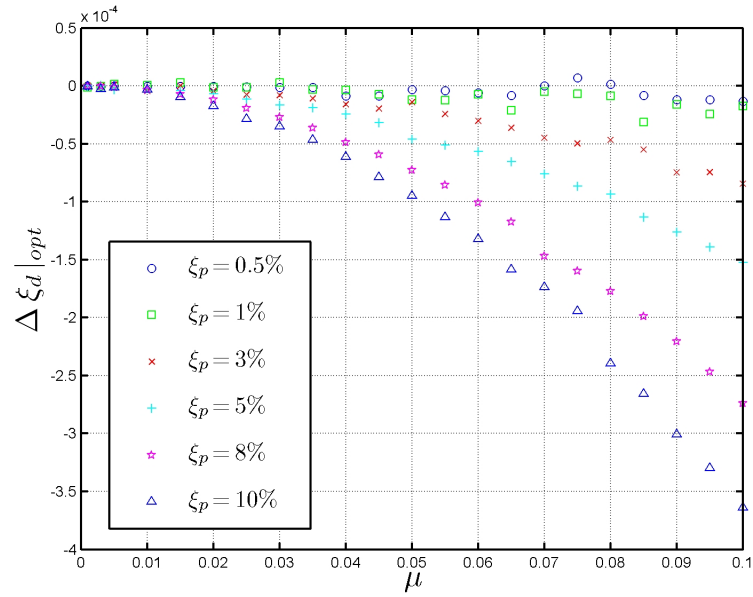


Figura 2.35: Diferencia entre los valores determinados de los análisis numéricos para el óptimo de la razón de amortiguamiento crítico del dispositivo, y aquellos determinados asumiendo que la estructura primaria no posee amortiguamiento.

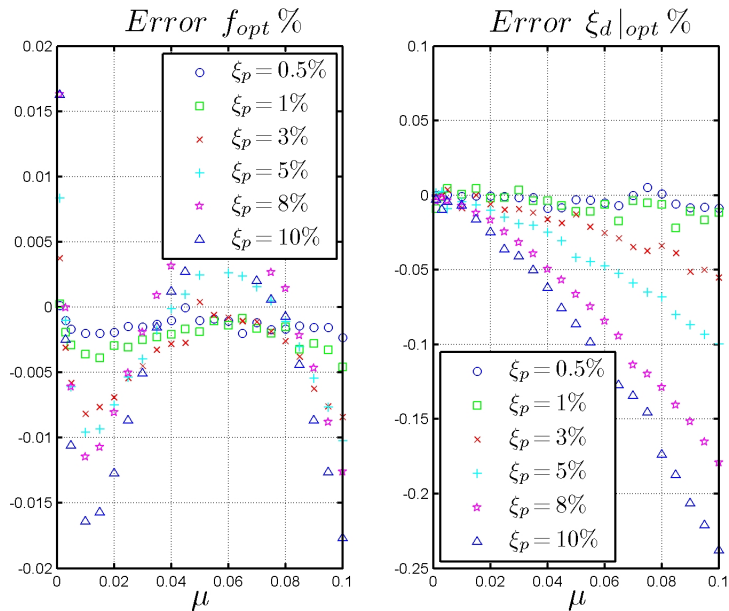


Figura 2.36: Errores obtenidos entre los valores determinados mediante los análisis numéricos, y aquellos que se obtiene por medio de las expresiones propuestas.

2.6. Parámetros óptimos de diseño, aceleración basal aleatoria tipo ruido blanco filtrado.

Los análisis desarrollados hasta este punto nos han permitido caracterizar la respuesta del sistema, así como determinar los parámetros óptimos de diseño del dispositivo, para condiciones de excitación basal tipo ruido blanco. En ciertas situaciones las acciones externas pueden ser representadas de forma adecuada mediante procesos estocásticos tipo ruido blanco filtrado. Específicamente nos interesa analizar el comportamiento del sistema cuando el mismo se encuentra ubicado sobre un estrato de suelo. Si suponemos que el suelo actúa como un oscilador de un grado de libertad, el mismo funcionará como filtro para las acciones sísmicas que provienen de la roca basal, las cuales se pueden representar a su vez como un proceso estocástico tipo ruido blanco. De esta forma la estructura en cuestión, es excitada en su base por un proceso estocástico tipo ruido blanco filtrado.

Las características del filtro están definidas por la frecuencia de vibrar ω_s , y amortiguamiento ξ_s , predominantes del estrato de suelo. La función de transferencia entre la aceleración en la roca basal, y la aceleración total en la superficie del suelo queda determinada por la siguiente expresión:

$$H_{\ddot{u}_s \ddot{u}_R}(\Omega) = \frac{1 + 2\xi_s \frac{\Omega}{\omega_s} i}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_s}\right)^2 + 2\xi_s \frac{\Omega}{\omega_s} i} \quad (2.110)$$

Podemos expresar la función de transferencia en función de la variable adimensional ρ . Para ello definimos el parámetro $\rho_s = \omega_p/\omega_s$. De esta manera la función de transferencia adopta la siguiente forma:

$$H_{\ddot{u}_s \ddot{u}_R}(\rho) = \frac{1 + 2\xi_s \rho \rho_s i}{1 - \rho^2 \rho_s^2 + 2\xi_s \rho \rho_s i} \quad (2.111)$$

Si consideramos que la aceleración en el nivel de la roca basal es del tipo ruido blanco, la función de densidad espectral de la aceleración de la superficie del suelo se obtiene como sigue:

$$S_{\ddot{u}_s}(\rho) = |H_{\ddot{u}_s \ddot{u}_R}(\rho)|^2 S_{\ddot{u}_R}(\rho) \quad (2.112)$$

Desarrollando esta expresión obtenemos:

$$S_{\ddot{u}_s}(\rho) = \ddot{u}_{Ro} \left(\frac{1 + 4\xi_s^2 \rho^2 \rho_s^2}{(1 - \rho^2 \rho_s^2)^2 + 4\xi_s^2 \rho^2 \rho_s^2} \right) \quad (2.113)$$

En donde \ddot{u}_{Ro} es la intensidad del espectro de potencia del ruido blanco en la roca basal. La expresión anterior corresponde al filtro de Kanai-Tajimi. Por otro lado, la esperanza cuadrática media del desplazamiento de la estructura primaria se escribe como:

$$E \{u_p^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} |H_{u_p \ddot{u}_s}(\rho)|^2 S_{\ddot{u}_s}(\rho) d\Omega \quad (2.114)$$

Reemplazando las ecuaciones 2.88 y 2.113 dentro de ecuación anterior, y recordando que $\Omega = \omega_p \rho$, obtenemos:

$$E \{u_p^2\} = \frac{\ddot{u}_{Ro}}{\omega_p} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Theta_1(\rho)}{\Theta_2(\rho)} \right) d\rho \quad (2.115)$$

En donde los términos $\Theta_1(\rho)$ y $\Theta_2(\rho)$, corresponden a polinomios de grado 6 y 12 en ρ respectivamente. Sus expresiones, las cuales se obtienen luego de hacer el desarrollo algebraico correspondiente, se detallan a continuación:

$$\begin{aligned} \Theta_1(\rho) = & 4\xi_s^2 \rho_s^2 \rho^6 + \{8f^2(1+\mu) [2\xi_d^2(1+\mu) - 1] \xi_s^2 \rho_s^2 + 1\} \rho^4 + \\ & 2f^2(1+\mu) [2f^2(1+\mu) \xi_s^2 \rho_s^2 + 2\xi_d^2(1+\mu) - 1] \rho^2 + (1+\mu)^2 f^4 \end{aligned} \quad (2.116)$$

$$\begin{aligned}
 \Theta_2(\rho) = & \rho_s^4 \rho^{12} + 2\rho_s^2 \left\{ \left[2(\xi_p + \xi_d f(1 + \mu))^2 - 4\xi_p \xi_d f - f^2(1 + \mu) - 1 \right] \rho_s^2 + 2\xi_s^2 - 1 \right\} \rho^{10} + \\
 & \left\{ \rho_s^4 \left[2f^2 + [1 + f^2(1 + \mu) + 4\xi_p \xi_d f]^2 - 8f(\xi_p f + \xi_d)[\xi_p + \xi_d f(1 + \mu)] \right] + \right. \\
 & 4\rho_s^2 (2\xi_s^2 - 1) \left[2(\xi_p + \xi_d f(1 + \mu))^2 - 4\xi_p \xi_d f - f^2(1 + \mu) - 1 \right] + 1 \left. \right\} \rho^8 + \\
 & 2 \left\{ f^2 \rho_s^4 \left[2(\xi_p f + \xi_d)^2 - 4\xi_p \xi_d f - f^2(1 + \mu) - 1 \right] + \rho_s^2 (2\xi_s^2 - 1) \left[2f^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. [4\xi_p \xi_d f + f^2(1 + \mu) + 1]^2 - 8f(\xi_p f + \xi_d)[\xi_p + \xi_d f(1 + \mu)] \right] + \right. \\
 & 4[\xi_p + \xi_d f(1 + \mu)]^2 - 8\xi_p \xi_d f - 2f^2(1 + \mu) - 2 \left. \right\} \rho^6 + \left\{ f^4 \rho_s^4 + 4f^2 \rho_s^2 (2\xi_s^2 - 1) \times \right. \\
 & \left. [2(\xi_p f + \xi_d)^2 - 4\xi_p \xi_d f - f^2(1 + \mu) - 1] + [1 + f^2(1 + \mu) + 4\xi_p \xi_d f]^2 - \right. \\
 & 8f(\xi_p f + \xi_d)[\xi_p + \xi_d f(1 + \mu)] \left. \right\} \rho^4 + 2f^2 \left\{ [f^2 \rho_s^2 (2\xi_s^2 - 1)] + 2(\xi_p f + \xi_d)^2 - \right. \\
 & \left. 4\xi_p \xi_d f - f^2(1 + \mu) - 1 \right\} \rho^2 - f^4
 \end{aligned} \tag{2.117}$$

Al igual que en los análisis realizados al sistema estructura primaria disipador bajo condiciones de excitaciones basal tipo ruido blanco, utilizaremos como índice para determinar los parámetros óptimos de diseño, el valor medio cuadrático del desplazamiento de la estructura primaria con el dispositivo instalado, normalizado con respecto a al valor medio cuadrático del desplazamiento de la estructura primaria. Este último valor se expresa de la siguiente forma:

$$E \{ u_p^{*2} \} = \int_{-\infty}^{\infty} |H_{u_p^* \ddot{u}_s}(\rho)|^2 S_{\ddot{u}_s}(\rho) d\Omega \tag{2.118}$$

Donde $H_{u_p^* \ddot{u}_s}(\Omega)$ es la función de transferencia entre la aceleración de base y el desplazamiento de la estructura primaria. Sustituyendo la ecuación 2.113 en la expresión anterior y realizando el cambio de variable correspondiente, obtenemos:

$$E \{ u_p^{*2} \} = \frac{\ddot{u}_{Ro}}{\omega_p^3} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Theta_3(\rho)}{\Theta_4(\rho)} \right) d\rho \tag{2.119}$$

En donde nuevamente los términos $\Theta_3(\rho)$ y $\Theta_4(\rho)$, representan polinomios en ρ esta vez de grados 2 y 8 respectivamente. Sus expresiones se detallan a continuación:

$$\Theta_3(\rho) = 1 + 4\xi_s^2 \rho_s^2 \rho^2 \tag{2.120}$$

$$\Theta(\rho) = \rho_s^4 \rho^8 + 2\rho_s^2 (2\xi_s^2 + 2\xi_p^2 \rho_s^2 - \rho_s^2 - 1) \rho^6 + (16\xi_s^2 \xi_p^2 \rho_s^2 - 8\xi_p^2 \rho_s^2 - 8\xi_s^2 \rho_s^2 + 4\rho_s^2 + \rho_s^4 + 1) \rho^4 + 2(2\xi_s^2 \rho_s^2 + 2\xi_p^2 - \rho_s^2 - 1) \rho^2 + 1 \quad (2.121)$$

La esperanza cuadrática media normalizada, correspondiente al cociente de las expresiones 2.115 y 2.119, se expresa pues de la siguiente manera:

$$\bar{E} \{u_p^2\} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Theta_1(\rho)}{\Theta_2(\rho)} \right) d\rho}{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Theta_3(\rho)}{\Theta_4(\rho)} \right) d\rho} \quad (2.122)$$

La obtención de una expresión algebraica para la esperanza cuadrática normalizada, tal como se la obtuvo para el caso de excitación basal tipo ruido blanco, es en esta oportunidad extremadamente complicada y poco practica. Como alternativa, la expresión 2.122 puede evaluarse de forma numérica. Para ello utilizamos el método recursivo de la cuadratura adaptativa de Simpson. En líneas generales, este método usa un estimado del error que se obtiene al evaluar la integral definida de una función por medio de la regla de Simpson. Si el error excede la tolerancia especificada, el algoritmo subdivide el intervalo de integración en dos y aplica el método adaptativo de Simpson a cada uno de ellos de forma recursiva. Esta técnica resulta ser más eficiente que aplicar directamente una regla compuesta de Simpson al intervalo completo, dado que requiere de menos evaluaciones de la función en lugares en donde la misma es bien aproximada por medio de una función cuadrática.

Utilizando el método recién descrito, podemos generar los gráficos que se muestran en la figura 2.37. En dicha figura se muestra el valor de la esperanza media cuadrática normalizada para dos valores de ρ_s , y para $\xi_s = 5\%$. En ambos casos se puede apreciar que existe un par de valores óptimos para f y ξ_d . En el segundo caso, el cual corresponde a un estrato de suelo 2 veces más flexible que la estructura primaria a controlar, aparece un mínimo local alrededor de $f = 0.5$. A medida que el amortiguamiento del estrato de suelo disminuye, este mínimo local pasa a ser un mínimo global de la esperanza cuadrática normalizada. En estos casos, la frecuencia óptima del dispositivo se aproxima al valor de la frecuencia de vibrar del suelo y no de la estructura primaria. No obstante lo anterior, situaciones en las que la estructura primaria posee una frecuencia de vibrar más alta que la del suelo, y este a su vez posee un bajo amortiguamiento rara vez se dan en la práctica.

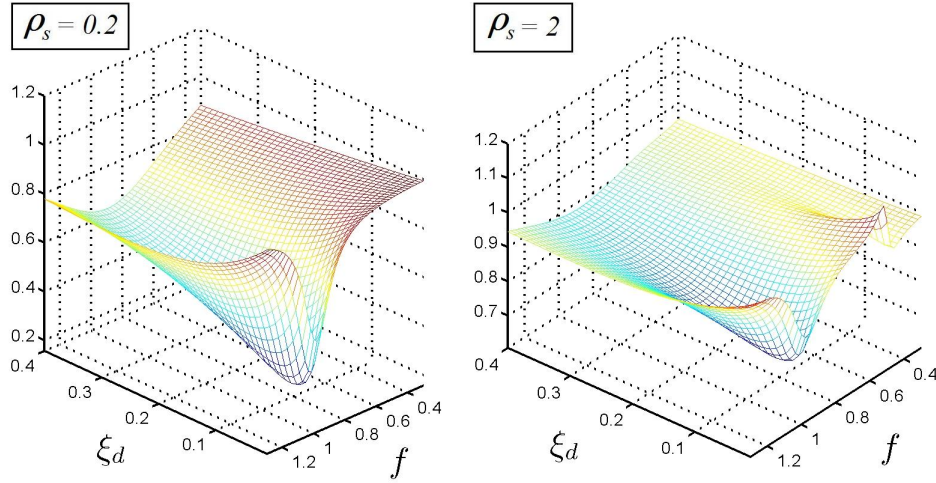


Figura 2.37: Esperanza cuadrática normalizada, para $\mu = 0.01$, $\xi_p = 1\%$ y $\xi_s = 5\%$.

La determinación de parámetros óptimos de diseño del dispositivo, para condiciones de excitación basal tipo ruido blanco filtrado dependerá pues, tanto de la frecuencia de vibrar del estrato de suelo, como de su amortiguamiento. La gran cantidad de combinaciones posibles que pueden presentarse hace que la proposición de formulas para los parámetros óptimos sea demasiado extensa y poco practica. Estudiaremos en cambio la variación de los parámetros óptimos con respecto a aquellos determinados para condiciones de excitación basal tipo ruido blanco, para un valor fijo del amortiguamiento del estrato de suelo. Si denominamos los parámetros óptimos correspondientes a excitación basal tipo ruido blanco filtrado como: $f|_{OPT}^{RBF}$ y $\xi_d|_{OPT}^{RBF}$, y los parámetros óptimos correspondientes a excitación basal tipo ruido blanco como: $f|_{OPT}^{RB}$ y $\xi_d|_{OPT}^{RB}$, podemos analizar la relación entre ambos por medio de los siguientes factores:

$$N_f = \frac{f|_{OPT}^{RBF}}{f|_{OPT}^{RB}} \quad (2.123)$$

$$N_{\xi_d} = \frac{\xi_d|_{OPT}^{RBF}}{\xi_d|_{OPT}^{RB}} \quad (2.124)$$

Estos factores se han determinado para los siguientes valores de ρ_s , a saber: 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75 y 1. Se han escogido estos valores ya que representan aquellas

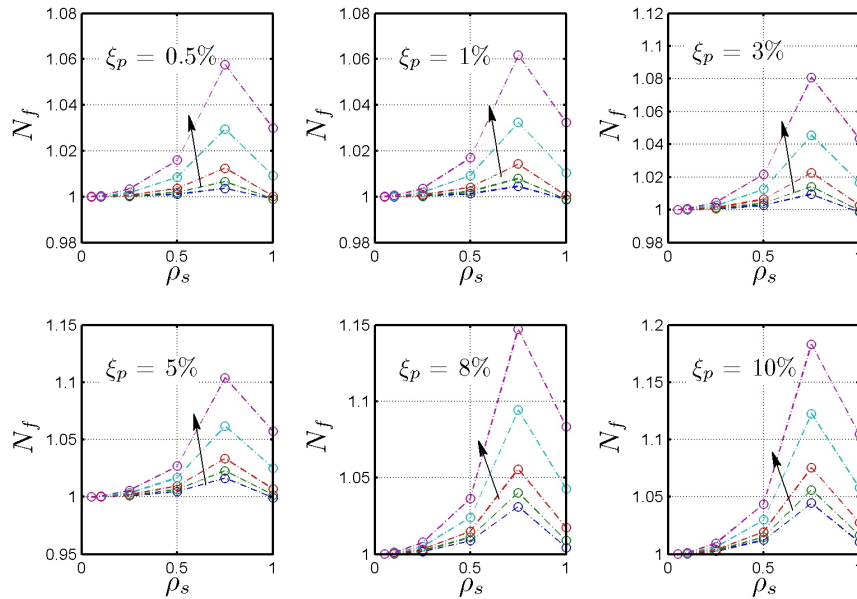


Figura 2.38: N_{ξ_d} v/s ρ_s , para distintos ξ_p y para $\xi_s = 0.1$. Las flechas indican la dirección creciente para la razón de masas $\mu = 0.5\%$, 1% , 2% , 5% y 10% .

situaciones que la estructura primaria a controlar es más flexible que el estrato de suelo sobre la cual se apoya. Por otra parte, el amortiguamiento característico del estrato de suelo utilizado en los análisis es de 10% . Asimismo, los valores de razón de masas μ son 0.5% , 1% , 2% , 5% y 10% , en tanto la razón de amortiguamiento crítico ξ_p es 0.5% , 1% , 3% , 5% , 8% y 10% . Utilizando los factores N_f y N_{ξ_d} podemos pues determinar los parámetros óptimos de diseño del dispositivo, para condiciones de excitación basal tipo ruido blanco filtrado, simplemente multiplicando dichos factores por los parámetros óptimos correspondientes a ruido blanco. Los factores N_f y N_{ξ_d} , determinados para los parámetros recién descritos, se muestran en las figuras 2.38 y 2.39.

Analizando las figuras 2.38 y 2.39, es fácil notar que la variación entre los parámetros $f|_{OPT}^{RBF}$ y $\xi_d|_{OPT}^{RBF}$, con respecto de los parámetros $f|_{OPT}^{RB}$ y $\xi_d|_{OPT}^{RB}$, se hace cada vez menor a medida que el valor de ρ_s se aproxima a cero, es decir para estructuras mucho más flexibles que el estrato de suelo en el cual se apoyan, independiente del valor de la razón de masas o del amortiguamiento de la estructura primaria. Esto último se debe al hecho de que el ruido blanco filtrado actúa como un proceso estocástico

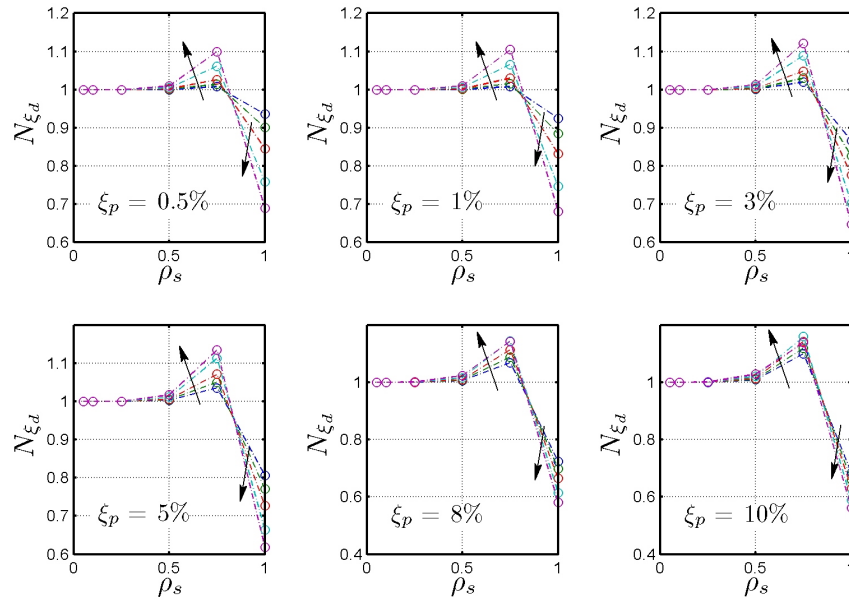


Figura 2.39: N_{ξ_d} v/s ρ_s , para distintos ξ_p y para $\xi_s = 0.1$. Las flechas indican la dirección creciente para la razón de masas $\mu = 0.5\%$, 1% , 2% , 5% y 10% .

de banda ancha, con una variación muy suave en el entorno de la frecuencia natural de vibrar de la estructura primaria. Como consecuencia el ruido blanco filtrado es en estos casos esencialmente un ruido blanco. En general, este resultado es aplicable a todos aquellos procesos que se comportan básicamente como procesos estocásticos de banda ancha en el entorno de la frecuencia natural de la estructura primaria. Por otra parte, también podemos notar que los factores N_f y N_{ξ_d} se alejan cada vez más de la unidad a medida que la razón de amortiguamiento crítico de la estructura primaria aumenta. En estos casos la función de transferencia de la estructura posee valores distribuidos sobre un mayor rango de frecuencias. Esto hace que la respuesta de la estructura se vea influenciada a su vez por un mayor rango de frecuencias de la función de densidad espectral de la excitación externa. Como consecuencia de ello, la idealización del movimiento de base como un proceso tipo ruido blanco ya no es adecuada, ya que sobre este mayor rango de frecuencias la función de densidad espectral del mismo posee una variación mas marcada.

2.7. DMSL para sistemas de varios grados de libertad

La teoría de DMSL para sistemas de 1Gdl presentada anteriormente puede ser extendida para tratar sistemas de varios grados de libertad con DMSL. En la figura 2.40 se muestra esquemáticamente un sistema de varios grados de libertad equipado con un DMSL.

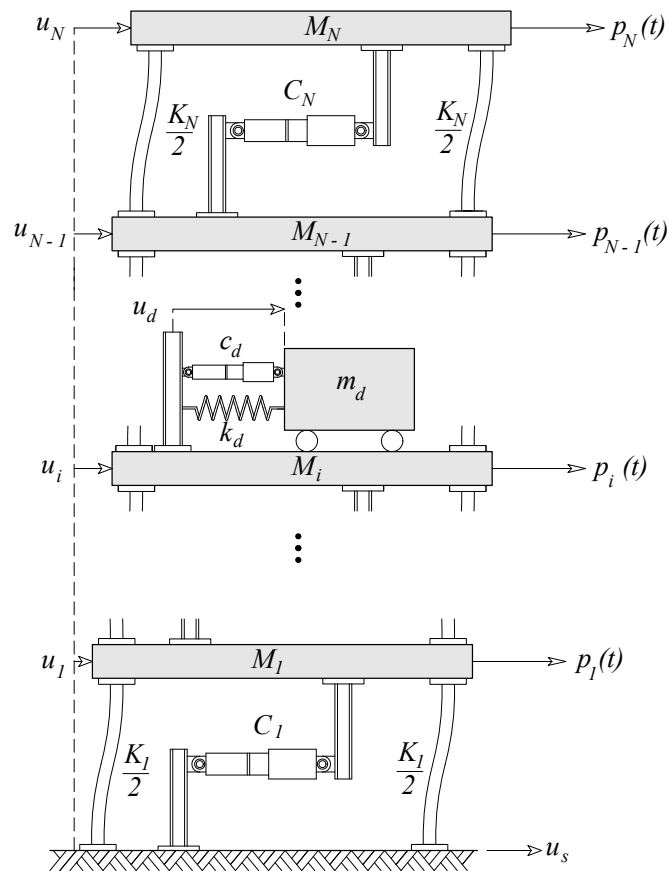


Figura 2.40: Sistema primario de varios grados de libertad junto con un DMSL.

Suponemos que el DMSL se encuentra ubicado en el i -ésimo Gdl de la estructura primaria. Asimismo, los Gdl son denominados de forma tal que el último es aquel correspondiente al desplazamiento del dispositivo. Lo anterior significa que el Gdl $N + 1$ corresponde a u_d . En base a los supuestos recién descritos, las ecuaciones de movimiento del sistema se escriben matricialmente como sigue:

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{c|c} [M_P] & \{0\} \\ \hline \{0\}^T & m_d \end{array} \right] \left\{ \frac{\{\ddot{U}_P\} + \{r\} \ddot{u}_s}{\ddot{u}_i + \ddot{u}_s + \ddot{u}_d} \right\} + \left[\begin{array}{c|c} [C'_P] & \{C_{Pd}\} \\ \hline \{C_{Pd}\}^T & c_d \end{array} \right] \left\{ \frac{\{\dot{U}_P\}}{\dot{u}_i + \dot{u}_d} \right\} + \dots \\
 & \dots + \left[\begin{array}{c|c} [K'_P] & \{K_{Pd}\} \\ \hline \{K_{Pd}\}^T & k_d \end{array} \right] \left\{ \frac{\{U_P\}}{u_i + u_d} \right\} = \left\{ \frac{\{P(t)\}}{0} \right\}
 \end{aligned} \tag{2.125}$$

Donde:

$$[C'_P] = [C_p] + L^T c_d L \tag{2.126}$$

$$\{C_{Pd}\} = -c_d L \tag{2.127}$$

$$[K'_P] = [K_p] + L^T k_d L \tag{2.128}$$

$$\{K_{Pd}\} = -k_d L \tag{2.129}$$

$$L^T = \left\langle \begin{array}{c} 1, \dots, 1^i, \dots, N \\ 0, \dots, 0 \end{array} \right\rangle_{(1 \times N)} \tag{2.130}$$

$$\{U_P\}^T = \left\langle u_1, \dots, u_N \right\rangle_{(1 \times N)} \tag{2.131}$$

$$\{P(t)\} = \left\langle p_1(t), \dots, p_N(t) \right\rangle_{(1 \times N)} \tag{2.132}$$

A su vez $[M_P]$, $[C_p]$, y $[K_p]$ corresponden a las matrices de masa, amortiguamiento, y rigidez del sistema primario respectivamente. Además $\{r\}$ es el vector de influencia para el desplazamiento de suelo, siendo $r_i = 1$. No obstante lo anterior, las restantes componentes del vector de influencia poseen valores arbitrarios. Las primeras N ecuaciones del sistema 2.125 se pueden expandir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & [M_p] \left(\{\ddot{U}_p\} + \{r\} \ddot{u}_s \right) + [[C_p] + L^T c_d L] \{\dot{U}_p\} - c_d L^T (\dot{u}_i + \dot{u}_d) + \dots \\
 & \dots + [[K_p] + L^T k_d L] \{U_p\} - k_d L^T (u_i + u_d) = \{p(t)\}
 \end{aligned} \tag{2.133}$$

Simplificando el sistema de ecuaciones anterior resulta:

$$[M_P] \left\{ \ddot{U}_P \right\} + [C_P] \left\{ \dot{U}_P \right\} + [K_P] \left\{ U_P \right\} = \left\{ p(t) \right\} - \left\{ r \right\} \ddot{u}_s [M_p] + c_d L^T \dot{u}_d + k_d L^T u_d \quad (2.134)$$

Por otra parte, la ecuación de movimiento correspondiente al DMSL queda definida por la última ecuación del sistema 2.125, es decir:

$$m_d \ddot{u}_d + c_d \dot{u}_d + k_d u_d = -m_d (\ddot{u}_i + \ddot{u}_s) \quad (2.135)$$

Para el grupo de Ecuaciones definidas por la expresión 2.134 hacemos el siguiente cambio de coordenadas:

$$\left\{ U_P \right\} = [\phi] \left\{ \mathbf{q} \right\} \quad (2.136)$$

En donde la matriz $[\phi]$ corresponde a la matriz de formas modales del sistema primario, es decir sin el dispositivo. Reemplazando la expresión anterior en la ecuación 2.134, y luego de premultiplicar $[\phi]^T$ se obtiene:

$$[M_P] \left\{ \ddot{\mathbf{q}} \right\} + [C_P] \left\{ \dot{\mathbf{q}} \right\} + [K_P] \left\{ \mathbf{q} \right\} = [\Phi]^T \left[\left(\left\{ p(t) \right\} - \left\{ r \right\} \ddot{u}_s [M_p] \right) + \left(c_d L^T \dot{u}_d + k_d L^T u_d \right) \right] \quad (2.137)$$

Donde $[M_P]$, $[C_P]$ y $[K_P]$ son las matrices modales de masa, amortiguamiento, y rigidez del sistema primario respectivamente. Asumiendo que la matriz $[C_P]$ es del tipo clásica, obtenemos un sistema de N ecuaciones desacopladas. Teniendo en cuenta lo anterior podemos escribir la j -ésima ecuación del sistema 2.137 de la siguiente forma:

$$\mathbf{m}_j \ddot{\mathbf{q}}_j + \mathbf{c}_j \dot{\mathbf{q}}_j + \mathbf{k}_j \mathbf{q}_j = \sum_{k=1}^N \phi_{k,j} (p_k(t) - M_k r_k \ddot{u}_s) + \phi_{i,j} (k_d u_d + c_d \dot{u}_d) \quad (2.138)$$

En esta última ecuación las cantidades \mathbf{m}_j , \mathbf{c}_j y \mathbf{k}_j representan la masa, amortiguamiento y rigidez modales asociados al j -ésimo modo respectivamente. En virtud

de la expresión 2.136 podemos expandir u_i como función de las coordenadas modales de la siguiente manera:

$$u_i = \sum_{k=1}^N \phi_{i,k} \mathbf{q}_k \quad (2.139)$$

A partir de este punto debemos decidir cual modo de vibrar se va a controlar con el dispositivo. Si este modo corresponde a su vez a aquel de mayor participación modal, digamos el j -ésimo modo, podemos asumir que la respuesta queda dominada por este modo. Podemos escribir por tanto:

$$u_i \approx \phi_{i,j} \mathbf{q}_j \quad (2.140)$$

Reemplazando a partir de esta última aproximación el valor de \mathbf{q}_j en la ecuación 2.138 se obtiene:

$$\tilde{\mathbf{m}}_j \ddot{u}_i + \tilde{\mathbf{c}}_j \dot{u}_i + \tilde{\mathbf{k}}_j u_i = \tilde{\mathbf{p}}_j(t) - \Gamma_j \tilde{\mathbf{m}}_j \ddot{u}_s + (k_d u_d + c_d \dot{u}_d) \quad (2.141)$$

Donde:

$$\tilde{\mathbf{m}}_j = \frac{\mathbf{m}_j}{\phi_{i,j}^2} \quad (2.142)$$

$$\tilde{\mathbf{c}}_j = \frac{\mathbf{c}_j}{\phi_{i,j}^2} \quad (2.143)$$

$$\tilde{\mathbf{k}}_j = \frac{\mathbf{k}_j}{\phi_{i,j}^2} \quad (2.144)$$

$$\tilde{\mathbf{p}}_j(t) = \frac{1}{\phi_{i,j}} \sum_{k=1}^N \phi_{k,j} p_k(t) \quad (2.145)$$

$$\Gamma_j = \frac{\phi_{i,j}}{\mathbf{m}_j} \sum_{k=1}^N \phi_{k,j} M_k r_k \quad (2.146)$$

Finalmente, podemos escribir las ecuaciones 2.141 y 2.135 de forma matricial como sigue:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{m}}_j & 0 \\ 0 & m_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i + \Gamma_j \ddot{u}_s \\ \ddot{u}_i + \ddot{u}_d + \ddot{u}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}}_j + c_d & -c_d \\ -c_d & c_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{u}_i + \dot{u}_d \end{Bmatrix} + \dots \\
& \dots + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{k}}_j + k_d & -k_d \\ -k_d & k_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_i + u_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_j(t) \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.147}$$

El sistema de ecuaciones anterior es similar al sistema definido por la ecuación 2.62, excepto por el término Γ_j . La solución, la cual se determina de manera análoga al caso anterior, solo se modifica en los términos asociados con \ddot{u}_s , es decir: H_6 , H_8 y δ_6 , δ_8 . Dichos términos se muestran a continuación:

$$H_6 = \frac{\sqrt{[(\Gamma_j + \mu) f^2 - \Gamma_j \rho^2]^2 + 4\xi_d^2 \rho^2 f^2 (\Gamma_j + \mu)^2}}{|D_3|} \tag{2.148}$$

$$H_8 = \frac{\sqrt{[1 + \rho^2 (\Gamma_j - 1)]^2 + 4\xi_p^2 \rho^2}}{|D_3|} \tag{2.149}$$

$$\tan a_2 = \frac{2\xi_d f \rho (\Gamma_j + \mu)}{f^2 (\Gamma_j + \mu) - \Gamma_j \rho^2} \tag{2.150}$$

$$\tan a_3 = \frac{2\xi_p \rho}{1 + (\Gamma_j - 1) \rho^2} \tag{2.151}$$

$$\delta_6 = a_2 - \delta_7 \tag{2.152}$$

$$\delta_8 = a_3 - \delta_7 \tag{2.153}$$

En donde el término $|D_3|$ se encuentra dado por la expresión 2.27.

Como se mencionó en el principio de este capítulo, la mejor ubicación para el DMSL corresponde a aquella en donde se producen los máximos desplazamientos. Expresado en otros términos, si deseamos reducir la respuesta de la estructura haciendo uso de la menor cantidad de masa para el dispositivo, la ubicación de este debe corresponder a aquella en donde se presentan los mayores desplazamientos. Lo

anterior puede ser expresado en términos matemáticos con ayuda de las expresiones 2.4 y 2.142, de la siguiente manera:

$$m_d = \mu \frac{\phi_j^T \cdot [M_p] \cdot \phi_j}{\phi_{i,j}^2} \quad (2.154)$$

A medida que el valor de $\phi_{i,j}$ se incrementa, el valor de la masa del dispositivo, m_d , disminuye. En este caso, si deseamos controlar la respuesta del j-ésimo modo, la ubicación óptima del DMSL corresponde a aquella con la mayor coordenada para el modo en cuestión.

Capítulo 3

Disipador de Columna líquida Sintonizada

3.1. Introducción

El éxito obtenido con el uso de los disipadores de masa sintonizada ha motivado a los investigadores a idear nuevas formas de control pasivo para estructuras flexibles. Si bien es cierto, los disipadores de masa sintonizada han demostrado ser efectivos dispositivos de control estructural, su costo de instalación y mantención los hacen poco económicos. Entre las alternativas que han cobrado mayor interés en años recientes se encuentran los estanques líquidos sintonizados. Estos dispositivos poseen el atractivo de su bajo costo y sus mínimos requerimientos de mantención. A su vez, el peso que se agrega a la estructura es prácticamente nulo, ya que el agua utilizada en estos dispositivos puede utilizarse como agua potable, o para emergencias tales como el combate de incendios. Por otra parte, debido a la ausencia de fricción mecánica, el dispositivo es efectivo incluso para vibraciones muy pequeñas.

Entre los estanques de líquido sintonizados, se encuentran los disipadores de columna líquida sintonizada (DCLS). Este dispositivo consiste básicamente de un estanque de líquido en forma de U, el cual gracias a su forma permite la oscilación de las masas de líquido dentro él. Por lo general estos dispositivos poseen un angostamiento ubicado su sección central, el cual sumado a otros efectos tales como la fricción interna del líquido en contra de las paredes del estanque, generan una

resistencia al flujo. Esta última se traduce en fuerzas de disipación de energía, las cuales son responsables del decaimiento en la oscilación de líquido.

Para lograr un diseño eficiente de estos dispositivos, se debe determinar aquel conjunto de parámetros óptimos que minimizan la respuesta de la estructura primaria a controlar. Estos parámetros son, al igual que en el caso del disipador de masa sintonizada, su ubicación dentro de la estructura primaria, su frecuencia natural de oscilación y su razón de amortiguamiento crítico. La obtención de dichos parámetros no solo trae como resultado la máxima reducción posible de la respuesta de la estructura primaria, sino que a su vez se obtiene una mejor relación costo beneficio. Hasta la fecha se han realizado diversas investigaciones con objeto de determinar los parámetros óptimos de diseño para esta clase de dispositivos. Mediante análisis numéricos, Gao et al. [24] en el año 1997, analizaron el comportamiento de una estructura de un grado de libertad (1Gdl) equipada con un disipador de columna líquida sintonizada, sujeta a acciones externas de tipo sinusoidal. Kareem A. y Yalla S. (2000) determinaron los parámetros óptimos de diseño para estructuras de 1Gdl sujetas a excitaciones de naturaleza aleatoria. Jong-Shyong Wu and Mang Hsieh (2002) [25], desarrollaron un estudio de las características dinámicas de un DCLS. Este estudio revela la acción no simétrica de las fuerzas de amortiguamiento provenientes del dispositivo hacia la estructura primaria a controlar. Más recientemente, Wu et al. (2005) [29], propusieron una guía de diseño para esta clase de dispositivos cuando la estructura primaria a controlar esta sujeta a cargas externas de tipo estocástico.

3.1.1. Antecedentes históricos y uso actual de los DCLS

Dentro de las primeras aplicaciones de los disipadores de columna líquida sintonizada se incluyen la estabilización de embarcaciones. Su uso se ha extendido en años recientes a la mitigación de oscilaciones en plataformas flotantes, y al control de estructuras civiles. En este último ámbito los edificios altos se han beneficiado en gran medida de su incorporación. En este tipo de estructuras el almacenamiento de agua es a menudo una necesidad, ya sea por razones de seguridad, cual es el caso de los estanques de almacenamiento de agua para el combate de incendios, o por motivos de abastecimiento de agua potable en los pisos superiores de la estructura. Como consecuencia de esto último, los disipadores de columna líquida sintonizada

resultan ser una alternativa de control de respuesta estructural eficaz y económica para los edificios altos. Como ejemplos de su uso en este tipo de estructuras, se pueden mencionar los siguientes:

1. *One Wall Centre, Vancouver*: El primer edificio en utilizar estos dispositivos de control estructural. Finalizado en el año 2001, esta estructura se yergue como el edificio mas alto de Vancouver con sus 150 [m] de altura. Debido a su gran esbeltez, con una razón de base versus altura de 1:7, lograr que la estructura se comportase de manera segura y confortable para sus ocupantes, frente a fuertes vientos o movimientos sísmicos, fue un gran desafío para los ingenieros a cargo del proyecto. Para reducir las vibraciones de la estructura se decidió instalar dos disipadores de columna líquida sintonizada. Ambos dispositivos, de 4 pisos de altura cada uno, y alrededor de 200 [m³] de agua, se instalaron en la cima de la estructura en el piso 48. Este sistema no sólo resolvió los problemas estructurales que originalmente presentaba la estructura, sino que supuso un ahorro estimado de 2 millones de dólares en construcción comparados con otros sistemas convencionales de amortiguamiento adicional, como los amortiguadores de masa sintonizada.

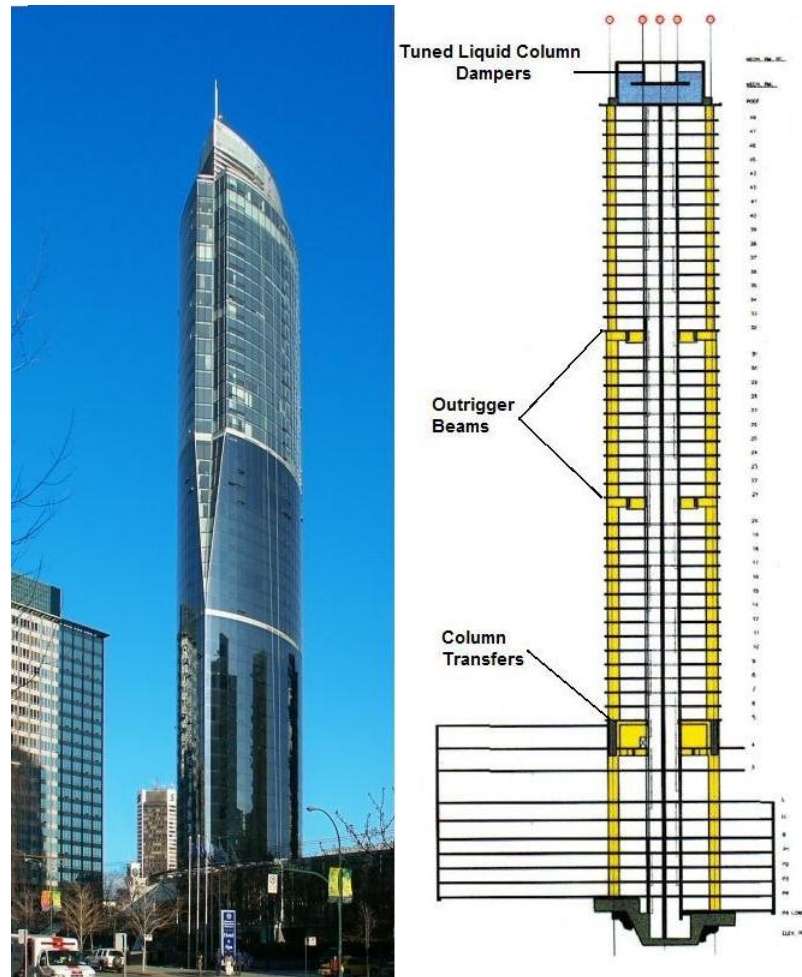


Figura 3.1: Edificio One Wall Centre. Esta estructura ubicada en Vancouver, Canadá, posee un disipador de columna líquida sintonizada ubicada en su cima. La incorporación del dispositivo supuso un ahorro de 2 millones de dólares con respecto a otros sistemas de reducción de vibraciones, [42].

2. *Comcast Center, Philadelphia*: Este edificio, actualmente en construcción, se ubica en una zona en donde la ocurrencia de vientos de mediana a severa intensidad es relativamente frecuente. Una vez finalizado, con sus 297 [m] de altura, y estructurado en base a marcos de acero, se convertirá no sólo en la estructura más alta de la ciudad de Philadelphia, sino que además se transformará en una estructura vulnerable a las acciones de fuertes vientos. Para enfrentar estas potenciales dificultades se ha decidido instalar un disipador de columna líquida sintonizada ubicado en la cima de la estructura. Este dispositivo de 1300 ton



Figura 3.2: Edificio Comcast Center, Philadelphia. Esta estructura, actualmente en construcción, contará con el disipador de columna líquida sintonizada más grande del mundo. El dispositivo, de 1300 [ton] de agua, se ubicará en la cima de la estructura y tendrá como función reducir la respuesta de la estructura frente a la acción del viento, [42].

de agua diseñado por Motioneering en Canadá, ostenta el record del dispositivo de columna líquida sintonizada más grande del mundo. Su instalación no solo supondrá un gran ahorro de dinero, sino que garantizará el confort de los ocupantes, así como la integridad de la estructura frente a la acción de fuertes vientos.

3.2. Parámetros óptimos de diseño para aceleración basal monofrecuencial. Caso 1: Estructura primaria no amortiguada

Antes de determinar los parámetros óptimos de diseño del disipador debemos primero establecer las ecuaciones de movimiento del sistema estructura primaria disipador. Para ello, consideramos el sistema mostrado en la figura 3.3, en donde se muestra una estructura de un grado de libertad equipada con un disipador de columna líquida sintonizada. El sistema se encuentra sujeto a una aceleración de base definida por $\ddot{u}_s(t)$. Las ecuaciones que describen el movimiento del sistema se pueden determinar a partir de las ecuaciones de Lagrange (En lo que sigue se describe de forma general la determinación de las ecuaciones de movimiento, para mayores detalles consultar el apéndice B):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1 \dots n \quad (3.1)$$

En donde T y V corresponden a la energía cinética y la energía potencial elástica total del sistema, q_i es la i -ésima coordenada generalizada, las cuales corresponden en nuestro caso al desplazamiento de la estructura primaria u_p , y al desplazamiento de la superficie libre de líquido u_d , Q_i es la fuerza generalizada no conservativa asociada con q_i , n es el número total de grados de libertad del sistema, es decir dos, y t es el tiempo.

Si el fluido es incompresible, y los perfiles de velocidad del líquido son uniformes sobre la sección transversal de las columnas del DCLS, entonces la energía cinética total del sistema se puede escribir como:

$$T = AH\rho_f [\dot{u}_d^2 + (\dot{u}_p + \dot{u}_s)^2] + \frac{1}{2}AL\rho_f (\dot{u}_d + \dot{u}_p + \dot{u}_s)^2 + \dots \dots + \frac{1}{2} (M_p + m_u) (\dot{u}_p + \dot{u}_s)^2 \quad (3.2)$$

Donde ρ_f es la densidad del fluido, A es el área de la sección transversal de las columnas del dispositivo, y m_u es la masa de los conductos o tanques que contienen el fluido. El primer término de la expresión anterior corresponde a la energía cinética de las columnas verticales del DCLS, el segundo término es la energía cinética de

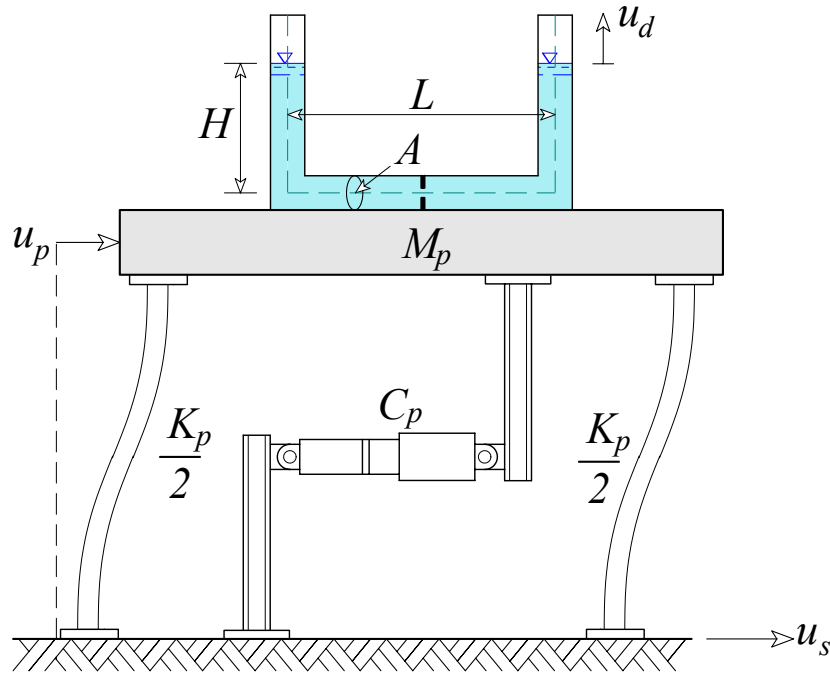


Figura 3.3: Representación esquemática de una estructura de un grado de libertad más un disipador de columna líquida sintonizada.

la columna horizontal del dispositivo, y el último término corresponde a la energía cinética de la masa del sistema primario y la masa de los conductos del DCLS.

La energía potencial del sistema, debida a perturbaciones desde su posición de equilibrio, se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$V = \frac{1}{2}K_p u_p^2 + \rho_f g A u_d^2 + k_{eq} u_d^2 \quad (3.3)$$

donde k_{eq} corresponde la rigidez equivalente de las cámaras de aire ubicadas en las columnas verticales del dispositivo. Esta rigidez es función del área A , y la altura y presión iniciales de la columna de aire. En el apéndice C se detalla la determinación de una expresión equivalente para k_{eq} .

La fuerza generalizada no conservativa asociada al DCLS proviene de las pérdidas producidas por la oscilación del fluido a través del dispositivo. Esta fuerza puede descomponerse en tres partes. La primera de ellas está asociada a las pérdidas producidas por el paso del líquido a través del angostamiento central. La segunda la constituyen las fuerzas friccionales del flujo de líquido en contra de las paredes in-

ternas del dispositivo. Finalmente las pérdidas asociadas al cambio de dirección del flujo de líquido en la transición entre las columnas verticales y la columna horizontal, forman parte de la fuerza generalizada no conservativa asociada al grado de libertad u_d . Las fuerzas generalizadas asociadas al movimiento del fluido puede expresarse como sigue:

$$Q_1 = -\frac{1}{2}\rho_f\dot{u}_d|\dot{u}_d|\eta A = c_d\dot{u}_d \quad (3.4)$$

Donde η es el coeficiente de resistencia al flujo. Este parámetro da cuenta de las pérdidas en el angostamiento, el cambio de dirección del flujo de líquido y el rozamiento. Como podemos notar, la expresión anterior es del tipo no lineal. Para fines de diseño la misma puede ser linealizada mediante el procedimiento que se describirá en el capítulo 4. Dicho procedimiento nos permite representar la fuerza Q_1 como proporcional a la velocidad de la superficie libre de líquido, siendo la constante de proporcionalidad igual a la constante de amortiguamiento lineal equivalente c_d . Por otra parte la fuerza generalizada asociada al sistema primario es:

$$Q_2 = \frac{1}{2}\rho_f\dot{u}_d|\dot{u}_d|\eta A - C_p\dot{u}_p = c_d\dot{u}_d - C_p\dot{u}_p \quad (3.5)$$

El primer término de la expresión anterior corresponde a la fuerza horizontal que produce el flujo de líquido al oscilar dentro del DCLS. Esta fuerza, que se aplica al angostamiento y a las paredes internas de la columna horizontal, se transfiere a su vez a la masa del sistema primario, ya que el dispositivo y la masa están unidos entre sí.

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación 3.1, y luego de realizar las operaciones y simplificaciones correspondientes, se obtienen las ecuaciones de movimiento del sistema:

$$\left. \begin{aligned} \rho_f A (2H + L) \ddot{u}_d + c_d \dot{u}_d + 2(\rho_f g A + k_{eq}) u_d &= -AL\rho_f (\ddot{u}_p + \ddot{u}_s) \\ [M_p + m_u + A\rho_f (2AH + L)] \ddot{u}_p + C_p \dot{u}_p + K_p u_p &= \\ = [M_p + m_u + A\rho_f (2AH + L)] \ddot{u}_s - AL\rho_f \ddot{u}_d + c_d \dot{u}_d & \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Definimos a continuación los siguientes términos los cuales serán utilizados en el resto del presente capítulo. Masa del líquido contenido dentro de las columnas del DCLS:

$$m_f = \rho_f A(2H + L) \quad (3.7)$$

Masa total del sistema, que comprende la masa del sistema primario, masa del líquido contenido dentro del dispositivo, y la masa de los conductos o tanques que contienen el fluido:

$$M_T = M_p + m_f + m_u \quad (3.8)$$

Masa del líquido contenido dentro de la columna horizontal del DCLS:

$$\hat{m} = AL\rho_f \quad (3.9)$$

Rigidez equivalente del DCLS:

$$k_d = 2(\rho_f g A + k_{eq}) \quad (3.10)$$

En virtud de las definiciones antes descritas, las ecuaciones 3.6 pueden ser reescritas de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} m_f \ddot{u}_d + c_d \dot{u}_d + k_d u_d &= -\hat{m}(\ddot{u}_p + \ddot{u}_s) \\ M_T \ddot{u}_p + C_p \dot{u}_p + K_p u_p &= -M_T \ddot{u}_s - \hat{m} \ddot{u}_d + c_d \dot{u}_d \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

El sistema de ecuaciones anteriores nos permiten describir el movimiento del sistema analizado, sin embargo éstas se encuentran expresadas en términos de las características del sistema en particular. Para generalizar los análisis se definen los siguientes parámetros adimensionales.

Razón entre la masa del líquido contenido dentro de las columnas del DCLS, y la masa del sistema primario:

$$\mu = \frac{m_f}{M_p} \quad (3.12)$$

Frecuencia natural de vibrar de la estructura cuya rigidez corresponde a la rigidez del sistema primario, y cuya masa corresponde a la masa total del sistema:

$$\hat{\omega}_p^2 = \frac{K_p}{M_T} \quad (3.13)$$

Frecuencia natural de oscilación del DCLS:

$$\omega_d^2 = \frac{k_d}{m_f} = \frac{2g}{L_T} + \frac{2k_{eq}}{\rho_f AL_T} \quad (3.14)$$

En donde $L_T = 2H + L$, corresponde a la longitud total de líquido dentro del dispositivo. Razón entre la frecuencia de excitación externa y la frecuencia natural de vibrar definida por la expresión 3.13:

$$\rho = \frac{\Omega}{\hat{\omega}_p} \quad (3.15)$$

Razón entre la frecuencia natural de vibrar del DCLS y la frecuencia natural de vibrar definida por la expresión 3.13:

$$f = \frac{\omega_d}{\hat{\omega}_p} \quad (3.16)$$

Razón de amortiguamiento crítico de la estructura cuya rigidez y amortiguamiento corresponden a la rigidez y amortiguamiento del sistema primario, pero cuya masa es equivalente a la masa total del sistema:

$$\hat{\xi}_p = \frac{C_p}{2M_T \hat{\omega}_p} \quad (3.17)$$

Razón de amortiguamiento crítico del dispositivo:

$$\xi_d = \frac{c_d}{2m_f \omega_d} \quad (3.18)$$

Razón entre la masa del líquido contenido dentro de la columna horizontal y la masa total del sistema:

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{m}}{M_T} \quad (3.19)$$

Factor de forma del DCLS definido como la razón entre la longitud de la columna horizontal de líquido y la longitud total del mismo:

$$\alpha = \frac{L}{2H + L} = \frac{\hat{m}}{m_f} \quad (3.20)$$

Para determinar las soluciones de las ecuaciones de movimiento, supondremos que la aceleración de suelo es armónica de la forma:

$$\ddot{u}_s = \bar{u}_s e^{i\Omega t} \quad (3.21)$$

Por consiguiente, la respuesta permanente de la estructura primaria y el DCLS se pueden expresar de la siguiente manera:

$$u_p = \bar{u}_p e^{i\Omega t}, \quad u_d = \bar{u}_d e^{i\Omega t} \quad (3.22)$$

Reemplazando las expresiones anteriores en las ecuaciones de movimiento del sistema, y luego de realizar las simplificaciones correspondientes, se obtienen las expresiones para la amplitud de oscilación del sistema primario y el disipador (Los detalles de estos cálculos se muestran en el apéndice B):

$$\bar{u}_p = \frac{M_T}{K_p} \frac{[(\rho^2 (1 - \alpha \hat{\mu}) - f^2) - 2i\rho f \xi_d (1 + \hat{\mu})] \bar{u}_s}{D_4} \quad (3.23)$$

$$\bar{u}_d = \frac{m_f \bar{u}_s}{k_d} \left(\frac{-\alpha f^2 - 2i\alpha f^2 \rho \hat{\xi}_p}{D_4} \right) \quad (3.24)$$

Donde D_4 está definido por:

$$D_4 = \left[(1 - \rho^2) (f^2 - \rho^2) - 4\hat{\xi}_p \xi_d f \rho^2 - \rho^4 \alpha \hat{\mu} \right] + \dots \quad (3.25)$$

$$\dots + 2i \left[\hat{\xi}_p \rho (f^2 - \rho^2) + \xi_d f \rho [1 - \rho^2 (1 + \hat{\mu})] \right]$$

Transformando las expresiones 3.23 y 3.24 a su forma polar se obtiene:

$$\bar{u}_p = \frac{M_T \bar{u}_s}{K_p} H_9 e^{i\delta_9} \quad (3.26)$$

$$\bar{u}_d = \frac{m_f \bar{u}_s}{k_d} H_{10} e^{i\delta_{10}} \quad (3.27)$$

En donde H_9 corresponde al factor de amplificación dinámica, aceleración de suelo desplazamiento estructura primaria, en tanto que H_{10} representa el factor de amplificación dinámica aceleración de suelo, desplazamiento de la superficie libre de líquido. Dichos términos se muestran a continuación:

$$H_9 = \frac{\sqrt{[\rho^2 (1 - \alpha\hat{\mu}) - f^2]^2 + 4\rho^2 f^2 \xi_d^2 (1 + \hat{\mu})^2}}{|D_4|} \quad (3.28)$$

$$H_{10} = \frac{\alpha f^2 \sqrt{1 + 4\rho^2 \hat{\xi}_p^2}}{|D_4|} \quad (3.29)$$

Para determinar los parámetros óptimos de diseño del DCLS, cuando la estructura primaria no posee amortiguamiento, seguimos una estrategia similar a la adoptada en el caso del disipador de masa sintonizada. Los parámetros óptimos de diseño del DCLS se obtienen por tanto minimizando el máximo valor que el factor de amplificación dinámica, H_9 , alcanza para distintos valores de f y ξ_d . En la figura 3.4 se muestra la variación del término H_9 con respecto ρ , para diferentes valores del amortiguamiento crítico del DCLS, pero para un valor fijo de f . Al igual que en el caso del DMSL, cuando la estructura primaria no posee amortiguamiento, todas las curvas pasan por dos puntos fijos P y Q . Para encontrar por tanto los parámetros óptimos de diseño, podemos hacer uso de esta propiedad obligando a que la curva tenga sus máximos ubicados precisamente en dichos puntos. De esta forma se minimiza el máximo valor del factor de amplificación dinámica. Dado que los puntos P y Q son independientes del amortiguamiento crítico del DCLS, también lo será el factor de amplificación dinámica en ellos. En virtud de las expresiones 3.25 y 3.28, y recordando que $\xi_p = 0$, podemos escribir:

$$H_9 = \sqrt{\frac{a_1^2 + \xi_d^2 a_2^2}{a_3^2 + \xi_d^2 a_4^2}} = \left| \frac{a_2}{a_4} \right| \sqrt{\frac{(a_1/a_2)^2 + \xi_d^2}{(a_3/a_4)^2 + \xi_d^2}} \quad (3.30)$$

En donde los términos "a" contenidos en la expresión anterior se obtienen por analogía de las ecuaciones 3.25 y 3.28. Si deseamos obtener el valor que adopta el factor de amplificación dinámica en los puntos P y Q , debemos hacer que la expresión 3.30 sea independiente de ξ_d . Esto último se obtiene igualando el numerador y el denominador del término subradical, esto es:

$$(a_1/a_2)^2 + \xi_d^2 = (a_3/a_4)^2 + \xi_d^2 \quad (3.31)$$

Desde donde es directo concluir que:

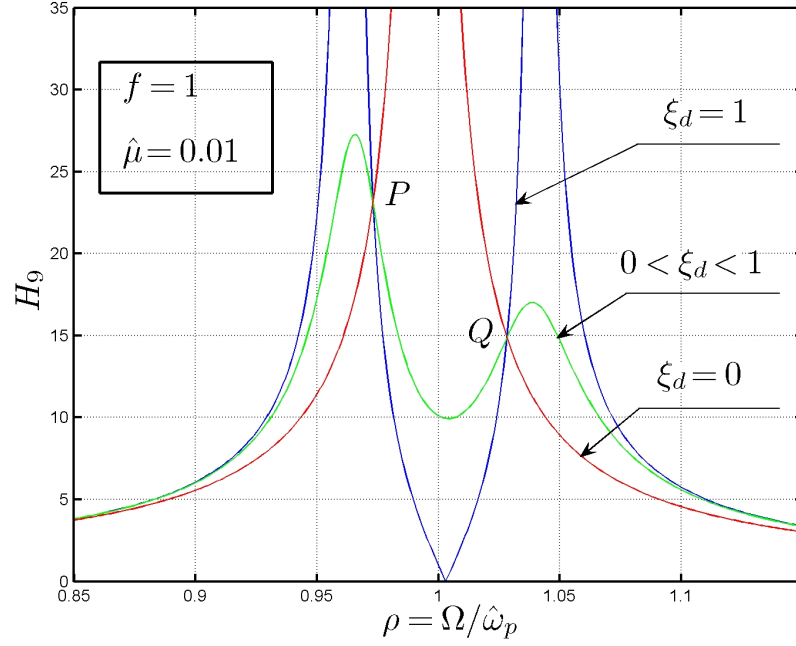


Figura 3.4: Factor de amplificación dinámica H_9 . Cuando la estructura primaria no posee amortiguamiento todas las curvas, para distintos valores del amortiguamiento crítico del DCLS, pasan por dos puntos fijos P y Q .

$$\left| \frac{a_1}{a_2} \right| = \left| \frac{a_3}{a_4} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{\rho^2 (1 - \alpha \hat{\mu}) - f^2}{2\rho f (1 + \hat{\mu})} \right| = \left| \frac{(1 - \rho^2)(f^2 - \rho^2) - \rho^4 \alpha \hat{\mu}}{2\rho f [1 - \rho^2 (1 + \hat{\mu})]} \right| \quad (3.32)$$

De esta forma, el valor correspondiente para H_9 en los puntos P y Q se reduce a la siguiente expresión:

$$H_9|_{P,Q} = \left| \frac{a_2}{a_4} \right| = \left| \frac{1 + \hat{\mu}}{1 - \rho_{P,Q}^2 (1 + \hat{\mu})} \right| \quad (3.33)$$

Luego de simplificar la ecuación 3.32, se obtiene una ecuación de segundo grado en ρ^2 , ecuación 3.34, cuyas raíces positivas ρ_P y ρ_Q corresponden a las razones de frecuencia que definen a los puntos P y Q respectivamente.

$$\rho^4 - \frac{1}{2} \left[\frac{2f^2 (1 + \hat{\mu}) + 2 + \hat{\mu} - \alpha \hat{\mu}}{(1 + \hat{\mu})(1 - \alpha \hat{\mu})} \right] \rho^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{2 + \hat{\mu}}{(1 + \hat{\mu})(1 - \alpha \hat{\mu})} \right] f^2 = 0 \quad (3.34)$$

La condición óptima de diseño establece que los valores que el factor de amplificación dinámica H_9 alcanza en los puntos P y Q deben ser iguales. En virtud de la ecuación 3.33, esta última condición es equivalente a:

$$H_9|_P = H_9|_Q \Rightarrow \frac{1 + \hat{\mu}}{|1 - \rho_P^2(1 + \hat{\mu})|} = \frac{1 + \hat{\mu}}{|1 - \rho_Q^2(1 + \hat{\mu})|} \quad (3.35)$$

Lo que a su vez tiene como resultado:

$$|1 - \rho_P^2(1 + \hat{\mu})| = |1 - \rho_Q^2(1 + \hat{\mu})| \quad (3.36)$$

Por otro lado, dado que ρ_P y ρ_Q son raíces de la ecuación 3.34, debe cumplirse:

$$\rho_P^4 - \frac{1}{2} \left[\frac{2f^2(1 + \hat{\mu}) + 2 + \hat{\mu} - \alpha\hat{\mu}}{(1 + \hat{\mu})(1 - \alpha\hat{\mu})} \right] \rho_P^2 = \rho_Q^4 - \frac{1}{2} \left[\frac{2f^2(1 + \hat{\mu}) + 2 + \hat{\mu} - \alpha\hat{\mu}}{(1 + \hat{\mu})(1 - \alpha\hat{\mu})} \right] \rho_Q^2 \quad (3.37)$$

Reordenando los términos de esta última ecuación obtenemos:

$$(\rho_P^4 - \rho_Q^4) - \frac{1}{2} (\rho_P^2 - \rho_Q^2) \cdot \left[\frac{2f^2(1 + \hat{\mu}) + 2 + \hat{\mu} - \alpha\hat{\mu}}{(1 + \hat{\mu})(1 - \alpha\hat{\mu})} \right] = 0 \quad (3.38)$$

Ahora bien, es claro que $\rho_P \neq \rho_Q$, por lo tanto podemos dividir ambos lados de la ecuación anterior por $(\rho_P^2 - \rho_Q^2)$, de donde resulta:

$$\rho_P^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{2f^2(1 + \hat{\mu}) + 2 + \hat{\mu} - \alpha\hat{\mu}}{(1 + \hat{\mu})(1 - \alpha\hat{\mu})} \right] - \rho_Q^2 \quad (3.39)$$

Sustituyendo de esta última ecuación el valor de ρ_P^2 en la ecuación 3.35, se obtiene la siguiente relación con la cual es posible determinar el valor óptimo de f :

$$\left| 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{2f^2(1 + \hat{\mu}) + 2 + \hat{\mu} - \alpha\hat{\mu}}{1 - \alpha\hat{\mu}} \right] + \rho_Q^2(1 + \hat{\mu}) \right| = |1 - \rho_Q^2(1 + \hat{\mu})| \quad (3.40)$$

Para que la expresión anterior sea válida se deben cumplir una de las dos condiciones siguientes:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{2f^2(1 + \hat{\mu}) + 2 + \hat{\mu} - \alpha\hat{\mu}}{1 - \alpha\hat{\mu}} \right] = -2\rho_Q^2(1 + \hat{\mu}) \quad (3.41)$$

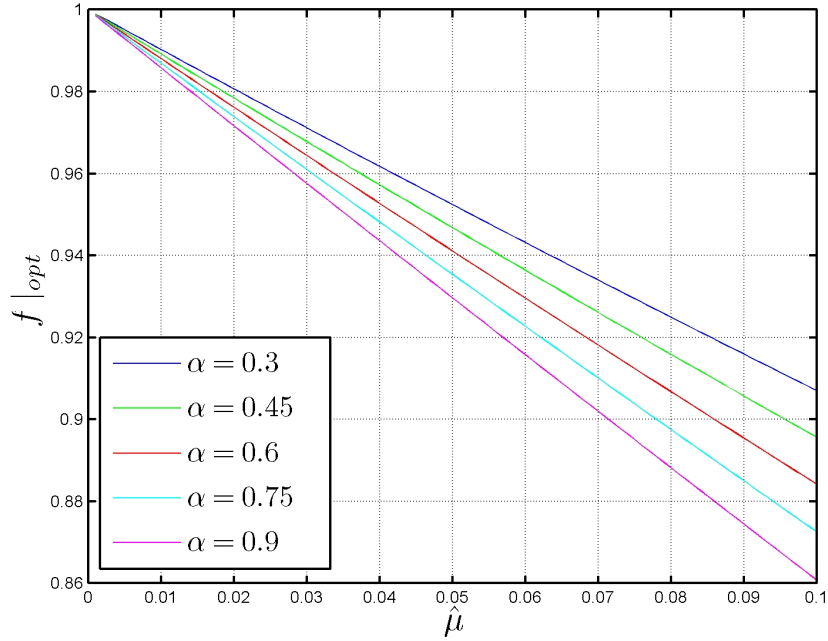


Figura 3.5: Variación de $f|_{OPT}$ con respecto a $\hat{\mu}$, para distintos valores de α .

$$\frac{1}{2} \left[\frac{2f^2(1 + \hat{\mu}) + 2 + \hat{\mu} - \alpha\hat{\mu}}{1 - \alpha\hat{\mu}} \right] = 2 \quad (3.42)$$

De la condición 3.42 podemos determinar el valor para el óptimo de la razón de frecuencias f :

$$f|_{OPT} = \sqrt{\frac{2 - \hat{\mu} - 3\alpha\hat{\mu}}{2(1 + \hat{\mu})}} \quad (3.43)$$

Los valores de $f|_{OPT}$ se muestran gráficamente en la figura 3.5 para distintos valores del factor de forma. Reemplazando ahora el valor de $f|_{OPT}$ en la ecuación 3.34 se obtienen las expresiones para ρ_P y ρ_Q , las cuales están dadas por la siguiente expresión:

$$\rho_{P,Q} = \sqrt{\frac{1}{1 + \hat{\mu}} \mp \frac{1}{2(1 + \hat{\mu})} \sqrt{\frac{3\hat{\mu}^2\alpha + \hat{\mu}^2 + 2\alpha\hat{\mu}}{1 - \alpha\hat{\mu}}}} \quad (3.44)$$

Para determinar el máximo valor que adopta el factor de amplificación dinámica cuando $f = f|_{OPT}$ se deben reemplazar las expresiones 3.43 y 3.44 en la expresión 3.33, de donde obtenemos:

$$\text{máx} \{H_9|_{OPT}\} = 2(1 + \hat{\mu}) \sqrt{\frac{1 - \alpha\hat{\mu}}{3\hat{\mu}^2\alpha + \hat{\mu}^2 + 2\alpha\hat{\mu}}} \quad (3.45)$$

Finalmente, para determinar el valor óptimo de diseño correspondiente al amortiguamiento crítico del DCLS, debemos hacer que los máximos del factor de amplificación dinámica se ubiquen en el punto P o en el punto Q . En términos matemáticos lo anterior se expresa como:

$$\left. \frac{\partial H_9}{\partial \rho} \right|_P = 0 \quad \vee \quad \left. \frac{\partial H_9}{\partial \rho} \right|_Q = 0 \quad (3.46)$$

Utilizando la notación descrita en la expresión 3.30 podemos escribir la derivada de H_9 con respecto a ρ como sigue:

$$\frac{\partial H_9}{\partial \rho} = \frac{(a_3^2 + \xi_d^2 a_4^2) (a_1^2 + \xi_d^2 a_2^2)' - (a_1^2 + \xi_d^2 a_2^2) (a_3^2 + \xi_d^2 a_4^2)'}{2\sqrt{(a_1^2 + \xi_d^2 a_2^2) \cdot (a_3^2 + \xi_d^2 a_4^2)^3}} \quad (3.47)$$

En donde la notación \bullet' se utiliza para describir la derivada con respecto a ρ . Igualando a cero el numerador de la expresión anterior y luego de reordenar términos se obtiene:

$$\begin{aligned} \xi_d^4 [a_2^2 a_4 a_4' - a_4^2 a_2 a_2'] + \xi_d^2 [a_1^2 a_4 a_4' + a_2^2 a_3 a_3' - a_4^2 a_1 a_1' - a_3^2 a_2 a_2'] + \dots \\ \dots + [a_1^2 a_3 a_3' - a_3^2 a_1 a_1'] = 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Para determinar por tanto el valor óptimo del amortiguamiento crítico del DCLS se debe resolver la ecuación anterior evaluada en ρ_P o ρ_Q y $f|_{OPT}$. Si la ecuación anterior es evaluada en ρ_P , se obtiene el valor de ξ_d tal que $H_9'|_P = 0$. Análogamente si la evaluación se realiza respecto de ρ_Q , el valor que se obtiene para ξ_d es tal que $H_9'|_Q = 0$. El promedio de estos valores se toma como el óptimo para ξ_d . La complejidad de la expresión 3.48 hace poco practica la determinación de una expresión analítica para ξ_d . No obstante lo anterior, es posible encontrar una expresión alge-

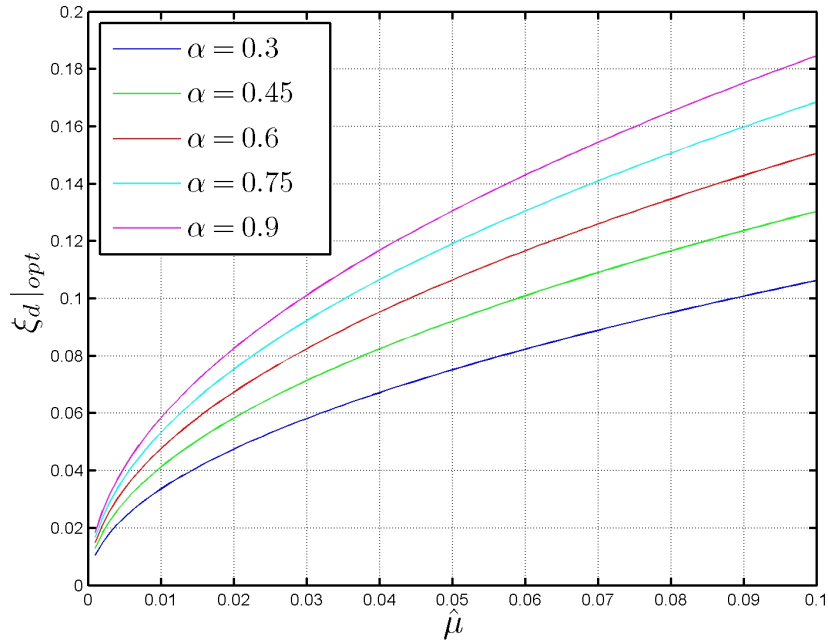


Figura 3.6: Variación de $\xi_d|_{OPT}$ con respecto a $\hat{\mu}$, para distintos valores de α .

braica en función de $\hat{\mu}$ y α mediante análisis numéricos. El procedimiento utilizado para obtener dicha expresión se describe a continuación.

En la figura 3.6 se encuentran graficados los valores óptimos del amortiguamiento crítico del DCLS, determinados como se mencionó anteriormente, para diferentes valores de α y $\hat{\mu}$. Los valores adoptados para estas variables son: $0.3 \leq \alpha \leq 0.9$ y $0.001 \leq \hat{\mu} \leq 0.1$. Luego de analizar la variación de $\xi_d|_{OPT}$ con respecto a $\hat{\mu}$, para valores fijos de α fijos, podemos establecer la siguiente relación:

$$(\xi_d|_{OPT})^2 = \phi_1 \hat{\mu} + \phi_2 \quad (3.49)$$

En donde ϕ_1 y ϕ_2 son a su vez polinomios en α . La expresión anterior nos indica que el cuadrado de la razón óptima del amortiguamiento crítico del dispositivo, puede ser convenientemente ajustada de forma lineal en $\hat{\mu}$. En la tabla 3.1 se muestran los resultados de la interpolación para los términos ϕ_1 y ϕ_2 . Examinando los valores resultantes para ϕ_1 notamos que estos pueden ser ajustados de forma lineal respecto de α . Asimismo, los valores de ϕ_2 se mantienen siempre por debajo de $2 \cdot 10^{-4}$ por

Tabla 3.1: Valores de los términos ϕ_1 y ϕ_2

	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.45$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 0.9$
ϕ_1	0.1169	0.1725	0.2292	0.2874	0.3461
ϕ_2	-0.0001	-0.0001	-0.0001	-0.0001	-0.0002

lo cual pueden ser despreciados. El procedimiento numérico de interpolación entrega por tanto los siguientes resultados:

$$\xi_d|_{OPT} = \sqrt{(0.3821\alpha + 0.001)} \hat{\mu} \quad (3.50)$$

Podemos transformar las cantidades numéricas contenidas en la expresión anterior a su forma fraccionaria, y aproximarlas convenientemente para obtener la siguiente expresión:

$$\xi_d|_{OPT} = \frac{1}{5} \sqrt{\left(\frac{19\alpha + 0.05}{2}\right)} \hat{\mu} \quad (3.51)$$

Esta última ecuación ajusta con error no superior al 0.54 %, los valores obtenidos mediante el procedimiento numérico requerido para resolver la ecuación 3.48. La ecuación 3.51 nos entrega pues, el valor de la razón óptima de amortiguamiento crítico del dispositivo, con una precisión razonable.

En la figura 3.7 se muestra la variación del término máx $\{H_9|_{OPT}\}$, en tanto que la figura 3.8 muestra la variación del término máx $\{H_{10}|_{OPT}\}$, correspondiente al máximo valor del factor de amplificación dinámica para el DCLS, en función de $\hat{\mu}$. Como puede apreciarse, este último es prácticamente independiente del factor de forma del dispositivo. Por otra parte en la figura 3.9 se muestra la razón entre los máximos valores alcanzados por los factores H_{10} y H_9 , para condiciones óptimas de diseño en función de $\hat{\mu}$. Notamos de esta última figura, que a medida que α se incrementa, el máximo desplazamiento de la superficie libre de líquido, expresado por medio de máx $\{H_{10}|_{OPT}\}$, se hace cada vez mayor con respecto del máximo desplazamiento de la estructura primaria. Esto último nos permite concluir que mayores valores del factor de forma producen a su vez mayores reducciones en el desplazamiento de la estructura primaria. Al igual que con el disipador de masa sintonizada, los máximos

valores del factor de amplificación dinámica H_9 y H_{10} proveen el punto de partida para determinar el valor de la razón de masas μ a utilizar.

Los factores de amplificación dinámica H_9 y H_{10} , correspondientes a una razón de masas, $\hat{\mu} = 0.01$, factor de forma $\alpha = 0.6$ y $f = f|_{OPT}$, se muestran en las figuras 3.10 y 3.11. Es posible apreciar que el efecto del DCLS es el de limitar la respuesta en frecuencia del sistema primario, para el rango de razones de frecuencias definido por: $0.9 < \rho < 1.1$. Fuera de este intervalo, la reducción de la respuesta del sistema primario producido por el DCLS no es significativa.

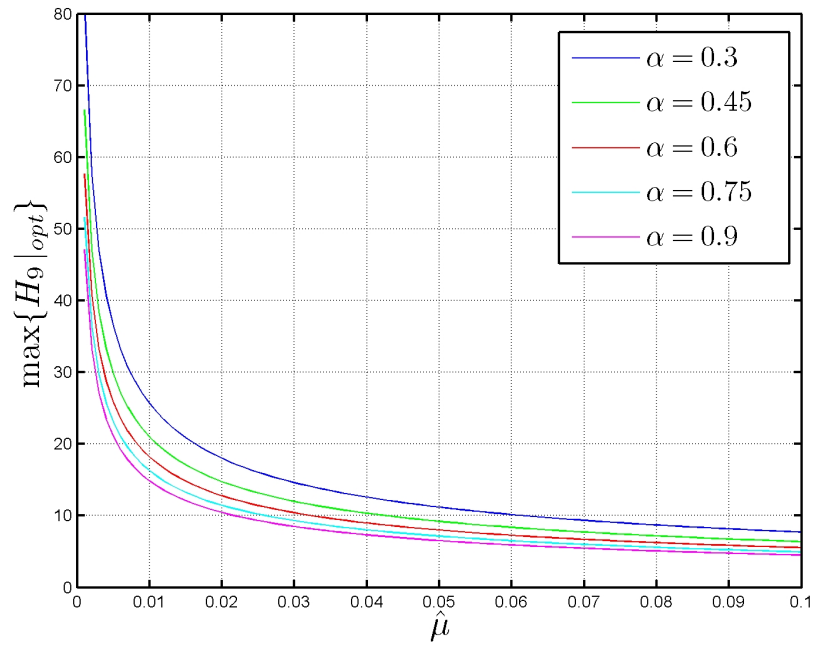


Figura 3.7: Variación de $\max\{H_9|_{OPT}\}$ v/s $\hat{\mu}$, para distintos valores de α .

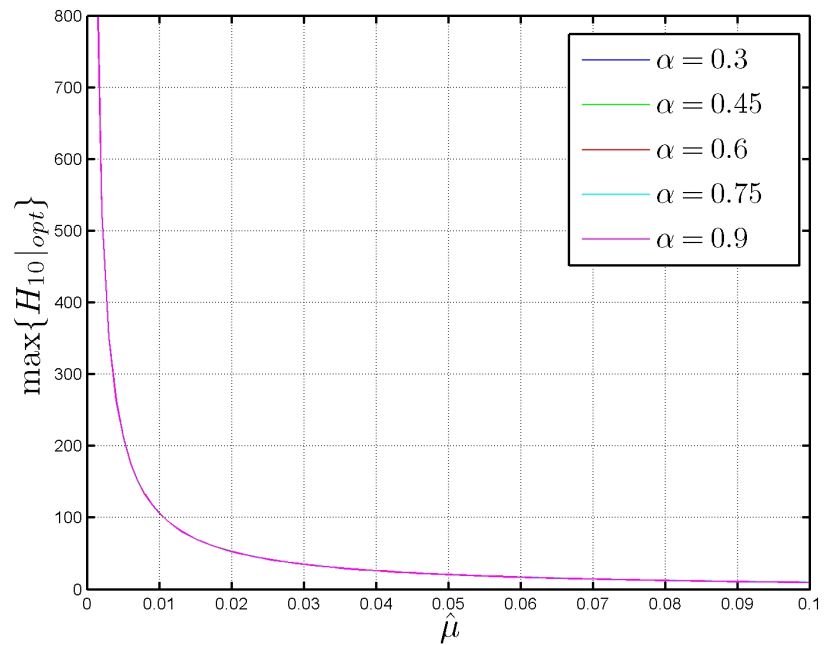


Figura 3.8: Variación de $\max\{H_{10}|_{OPT}\}$ v/s $\hat{\mu}$, para distintos valores de α .

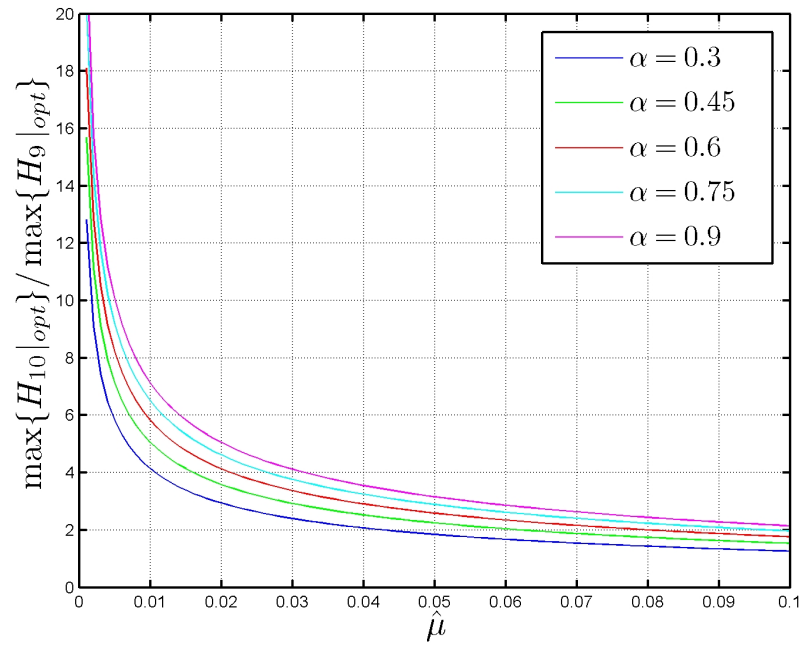


Figura 3.9: Variación de $v/s \hat{\mu}$, para distintos valores de α .

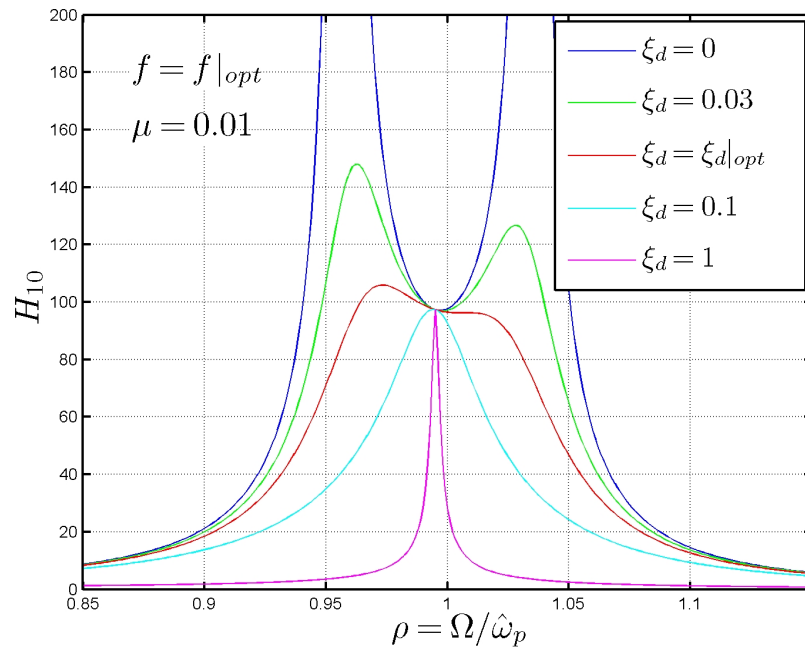


Figura 3.11: H_{10} v/s ρ , para $f|_{OPT}$ y distintos valores de ξ_d .

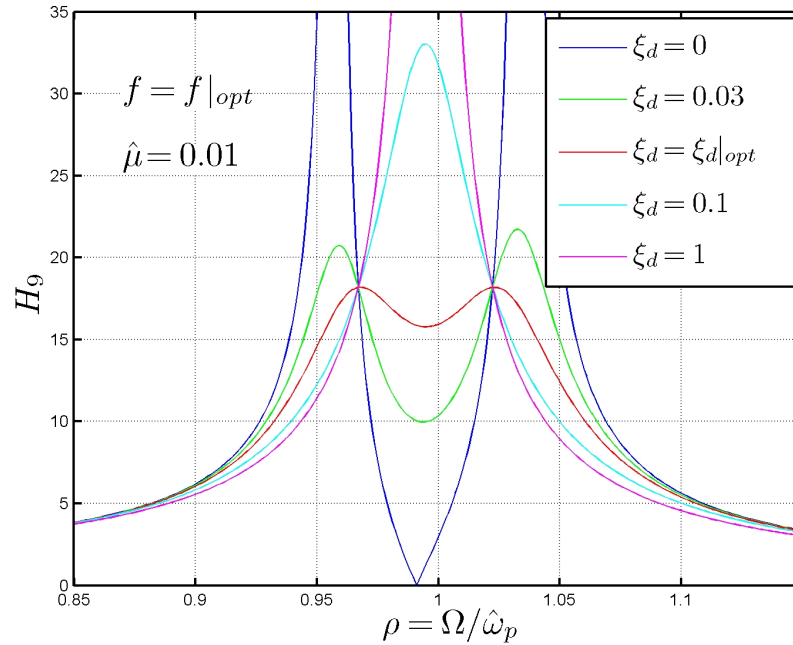


Figura 3.10: H_9 v/s ρ , para $f|_{OPT}$ y distintos valores de ξ_d . En este caso el valor óptimo para el amortiguamiento crítico del DCLS vale 6.023 %.

Finalmente, podemos estimar el amortiguamiento equivalente que se obtiene al instalar el DCLS en la estructura primaria, a partir del máximo valor que alcanza el factor de amplificación dinámica, para una estructura amortiguada de 1Gdl sujeta a una excitación armónica, es decir:

$$H = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (3.52)$$

Si expresamos la ecuación anterior en función del factor de amplificación dinámica H_9 podemos encontrar el valor para el amortiguamiento equivalente en la estructura primaria, ξ_{eq} como sigue:

$$\xi_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{H_9^2}} \right)} \quad (3.53)$$

En la figura 3.12 se muestra la variación del amortiguamiento equivalente, en función de la razón de masas $\hat{\mu}$, y el factor de forma α , para condiciones óptimas

de diseño del dispositivo. Del gráfico se puede concluir que a medida que el valor de α se incrementa, el amortiguamiento equivalente en la estructura primaria también crece. Lo anterior es confirmado en la figura 3.7, en donde se puede apreciar que a medida que α aumenta el máximo valor del factor de amplificación dinámica H_9 disminuye. Esta última conclusión es un factor importante a considerar en el diseño del dispositivo, debiéndose preferir, siempre que sea posible, aquella configuración con el mayor valor para el factor de forma.

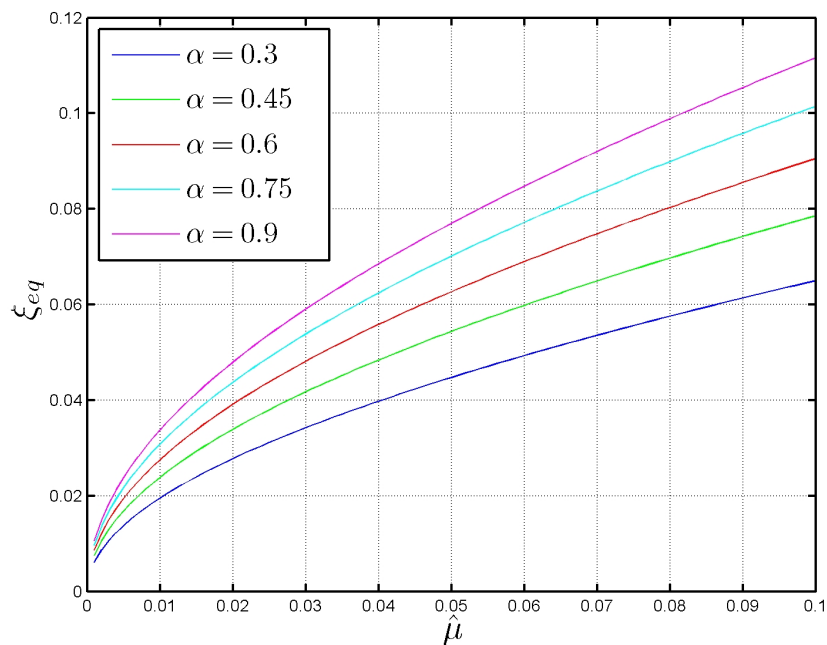


Figura 3.12: Variación del amortiguamiento equivalente ξ_{eq} con la razón de masas $\hat{\mu}_t$, para distintos valores del factor de forma α , y condiciones óptimas de diseño.

3.3. Parámetros óptimos de diseño para aceleración basal monofrecuencial. Caso 2: Estructura primaria amortiguada

Como se ha mencionado anteriormente, el criterio adoptado para la determinación de los parámetros óptimos de diseño del dispositivo, es el de minimizar el máximo valor que alcanza el factor de amplificación dinámica H_9 . A diferencia del caso anteriormente analizado, en el cual todas las curvas de amplificación dinámica poseen dos puntos en común, cuando la estructura primaria posee amortiguamiento dicha situación no se verifica, como es posible apreciar en la figura siguiente.

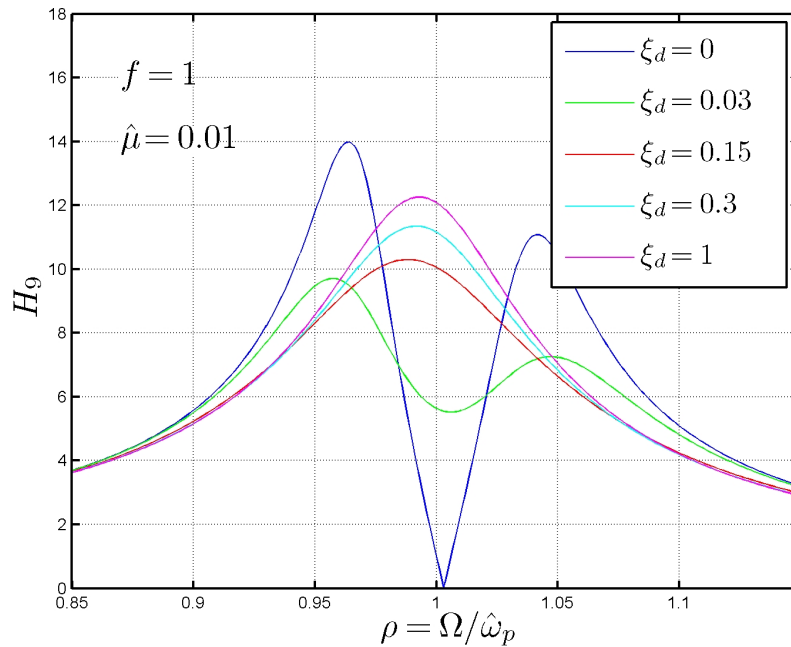


Figura 3.13: Factor de amplificación dinámica, H_9 v/s ρ , para distintos valores del amortiguamiento crítico del dispositivo, $f = 1$ y amortiguamiento crítico de la estructura primaria, $\hat{\xi}_p = 4\%$.

Para determinar por tanto los parámetros óptimos de diseño, se debe realizar una búsqueda numérica que nos permita establecer los valores para f y ξ_d que minimizan el máximo valor que alcanza el factor H_9 . El procedimiento de búsqueda se realiza para cada valor de la razón de masas $\hat{\mu}$, amortiguamiento crítico $\hat{\xi}_p$ y el factor de

forma α , dentro del intervalo de interés que se desea para cada una de estas variables. En nuestro caso se seleccionan los siguientes valores: $0.001 \leq \hat{\mu} \leq 0.1$, $0.005 \leq \hat{\xi}_p \leq 0.1$ y $0.3 \leq \alpha \leq 0.9$, los cuales cubren la gran mayoría de las aplicaciones prácticas.

El proceso de optimización numérica descrito anteriormente se realiza con la ayuda de un programa computacional desarrollado en Matlab©. En una primera etapa este programa permite la determinación del máximo valor que adopta el factor de amplificación dinámica H_9 , por sobre la variable ρ , para un conjunto fijo de valores de las variables $\hat{\mu}$, $\hat{\xi}_p$, α , f y ξ_d . Para ello el programa busca el máximo valor de H_9 , $\max_{\rho} \{H_9\}$, sobre el intervalo definido por: $0.7 \leq \rho \leq 1.1$. Se ha escogido este intervalo ya que garantiza que dentro del mismo siempre se ubique el máximo valor para H_9 , cualesquiera sean los valores adoptados por las variables $\hat{\mu}$, $\hat{\xi}_p$, α , dentro de los límites definidos en el párrafo anterior. El paso siguiente consiste en determinar el menor valor que alcanza $\max_{\rho} \{H_9\}$ para las variables f y ξ_d , cuando $\hat{\mu}$, $\hat{\xi}_p$, α poseen valores fijos. En este caso la búsqueda de este mínimo, se lleva a cabo sobre los intervalos: $0.7 \leq f \leq 1$ y $0 \leq \xi_d \leq 0.25$. Todo el proceso antes descrito se debe repetir para cada uno de los valores de $\hat{\mu}$, $\hat{\xi}_p$, α sobre sus respectivos intervalos de variación. A continuación se resumen los resultados obtenidos en las tablas y gráficos siguientes. Se ha incorporado en las figuras, de manera comparativa, el caso correspondiente a $\hat{\xi}_p = 0$.

Tabla 3.2: Parámetros óptimos de diseño para el DCLS bajo excitacion basal monofrecuencial, $\alpha = 0.3$

$\hat{\mu} \setminus \hat{\xi}_p$	$f _{OPT}$					$\xi_d _{OPT}$					$\max\{H_9\} _{OPT}$						
	0,5 %	1 %	3 %	5 %	10 %	0,5 %	1 %	3 %	5 %	10 %	0,5 %	1 %	3 %	5 %	8 %	10 %	
0.001	0.999	0.998	0.996	0.993	0.987	0.982	0.011	0.012	0.014	0.015	0.018	0.018	32.874	14.564	9.269	6.012	4.868
0.003	0.997	0.996	0.993	0.989	0.981	0.975	0.019	0.020	0.022	0.024	0.027	0.027	33.255	13.050	8.696	5.779	4.722
0.005	0.994	0.994	0.990	0.986	0.977	0.970	0.025	0.025	0.028	0.030	0.034	0.034	27.587	12.142	8.369	5.618	4.619
0.01	0.989	0.988	0.983	0.978	0.968	0.960	0.035	0.035	0.038	0.040	0.045	0.045	20.969	10.731	7.653	5.331	4.432
0.015	0.984	0.983	0.977	0.971	0.959	0.951	0.042	0.043	0.046	0.048	0.051	0.053	17.683	9.834	7.253	5.122	4.292
0.02	0.979	0.978	0.971	0.964	0.952	0.942	0.049	0.050	0.053	0.055	0.060	0.060	15.604	9.177	6.853	4.953	4.177
0.025	0.974	0.973	0.966	0.958	0.944	0.934	0.055	0.056	0.059	0.061	0.067	0.067	14.130	8.661	6.574	4.812	4.079
0.03	0.969	0.968	0.960	0.952	0.937	0.927	0.060	0.061	0.064	0.067	0.070	0.072	13.010	8.239	6.333	4.688	3.994
0.035	0.965	0.963	0.955	0.946	0.930	0.919	0.066	0.066	0.069	0.072	0.076	0.078	12.120	7.882	6.127	4.579	3.917
0.04	0.960	0.958	0.949	0.940	0.924	0.912	0.070	0.071	0.074	0.077	0.080	0.083	11.390	7.574	5.944	4.481	3.847
0.045	0.955	0.953	0.944	0.934	0.917	0.905	0.075	0.076	0.079	0.082	0.085	0.087	10.776	7.304	5.782	4.392	3.783
0.05	0.950	0.948	0.938	0.928	0.911	0.898	0.079	0.080	0.083	0.086	0.090	0.092	10.250	7.065	5.671	4.310	3.724
0.055	0.945	0.943	0.933	0.922	0.905	0.892	0.083	0.084	0.087	0.090	0.094	0.096	9.793	6.849	5.569	4.234	3.669
0.06	0.940	0.938	0.928	0.917	0.898	0.885	0.087	0.088	0.091	0.094	0.098	0.100	9.390	6.654	5.377	4.164	3.617
0.065	0.936	0.933	0.923	0.911	0.892	0.879	0.091	0.092	0.095	0.098	0.102	0.104	9.033	6.476	5.262	4.098	3.569
0.07	0.931	0.928	0.918	0.906	0.886	0.872	0.095	0.096	0.099	0.102	0.106	0.108	8.710	6.313	5.156	4.036	3.523
0.075	0.926	0.924	0.912	0.900	0.880	0.866	0.098	0.099	0.102	0.105	0.109	0.112	8.419	6.162	5.053	3.977	3.480
0.08	0.922	0.919	0.907	0.895	0.875	0.860	0.102	0.103	0.106	0.109	0.113	0.116	8.155	6.022	4.965	3.922	3.439
0.085	0.917	0.914	0.902	0.890	0.869	0.854	0.105	0.106	0.109	0.113	0.117	0.119	7.912	5.892	4.872	3.870	3.400
0.09	0.912	0.909	0.897	0.884	0.863	0.848	0.109	0.110	0.113	0.116	0.120	0.123	7.689	5.770	4.749	3.820	3.362
0.095	0.908	0.905	0.892	0.879	0.857	0.842	0.112	0.113	0.116	0.119	0.124	0.126	7.483	5.656	4.749	3.773	3.327
0.1	0.903	0.900	0.887	0.874	0.852	0.836	0.115	0.116	0.120	0.123	0.127	0.129	7.292	5.548	4.645	3.727	3.292

Tabla 3.3: Parámetros óptimos de diseño para el DCLS bajo excitación basal monofrecuencial, $\alpha = 0.45$

$\hat{\mu} \setminus \hat{\xi}_p$	$f _{OPT}$					$\xi_d _{OPT}$					$\max\{H_9\} _{OPT}$						
	0,5 %	1 %	3 %	5 %	10 %	0,5 %	1 %	3 %	5 %	10 %	0,5 %	1 %	3 %	5 %	8 %	10 %	
0.001	0.999	0.998	0.996	0.993	0.986	0.981	0.014	0.014	0.017	0.018	0.020	0.021	30.244	14.075	9.106	5.941	4.824
0.003	0.996	0.996	0.992	0.988	0.980	0.974	0.023	0.024	0.027	0.028	0.031	0.032	22.822	12.341	8.306	5.653	4.642
0.005	0.994	0.993	0.989	0.984	0.975	0.968	0.030	0.031	0.033	0.035	0.038	0.040	19.486	11.343	7.942	5.459	4.516
0.01	0.988	0.987	0.982	0.976	0.965	0.957	0.042	0.043	0.046	0.048	0.051	0.053	17.742	9.846	7.200	5.121	4.290
0.015	0.983	0.981	0.975	0.968	0.956	0.946	0.052	0.052	0.055	0.058	0.060	0.063	14.887	13.160	6.719	4.881	4.126
0.02	0.977	0.975	0.969	0.961	0.947	0.937	0.060	0.060	0.063	0.066	0.069	0.071	13.098	11.747	6.300	4.691	3.994
0.025	0.971	0.970	0.962	0.954	0.939	0.928	0.067	0.067	0.070	0.073	0.076	0.079	11.838	10.726	6.019	4.534	3.882
0.03	0.966	0.964	0.956	0.947	0.931	0.920	0.073	0.074	0.077	0.080	0.083	0.085	10.885	9.940	5.800	4.398	3.785
0.035	0.961	0.958	0.950	0.940	0.924	0.912	0.079	0.080	0.083	0.086	0.089	0.091	10.131	9.309	5.589	4.280	3.699
0.04	0.955	0.953	0.944	0.934	0.916	0.904	0.085	0.086	0.089	0.091	0.095	0.097	9.514	8.787	5.461	4.174	3.622
0.045	0.950	0.947	0.938	0.927	0.909	0.896	0.090	0.091	0.094	0.097	0.100	0.103	8.997	8.345	5.239	4.079	3.552
0.05	0.944	0.942	0.932	0.921	0.902	0.889	0.095	0.096	0.099	0.102	0.106	0.108	8.554	7.964	5.051	3.992	3.487
0.055	0.939	0.936	0.926	0.914	0.895	0.881	0.100	0.101	0.104	0.107	0.111	0.113	8.170	7.631	4.954	3.912	3.428
0.06	0.934	0.931	0.920	0.908	0.888	0.874	0.104	0.105	0.109	0.111	0.116	0.118	7.833	7.336	4.856	3.838	3.372
0.065	0.928	0.926	0.914	0.902	0.882	0.867	0.109	0.110	0.113	0.116	0.120	0.122	7.533	7.073	4.774	3.769	3.320
0.07	0.923	0.920	0.909	0.896	0.875	0.860	0.113	0.114	0.117	0.120	0.124	0.127	7.264	6.836	4.694	3.705	3.271
0.075	0.918	0.915	0.903	0.890	0.868	0.853	0.117	0.118	0.121	0.124	0.129	0.131	7.021	6.621	4.624	3.645	3.225
0.08	0.913	0.910	0.897	0.884	0.861	0.846	0.122	0.122	0.126	0.129	0.133	0.135	6.800	6.425	4.551	3.595	3.182
0.085	0.907	0.904	0.892	0.878	0.855	0.839	0.125	0.126	0.130	0.133	0.137	0.139	6.598	6.244	4.484	3.534	3.141
0.09	0.902	0.899	0.886	0.872	0.849	0.832	0.129	0.130	0.133	0.137	0.141	0.144	6.412	6.078	4.424	3.484	3.101
0.095	0.897	0.894	0.880	0.866	0.843	0.826	0.133	0.134	0.137	0.140	0.145	0.147	6.240	5.924	4.377	3.435	3.064
0.1	0.892	0.889	0.875	0.860	0.836	0.819	0.137	0.138	0.141	0.144	0.149	0.151	6.081	5.780	4.320	3.389	3.028

Tabla 3.4: Parámetros óptimos de diseño para el DCLS bajo excitacion basal monofrecuencial, $\alpha = 0.6$

$\hat{\mu} \setminus \hat{\xi}_p$	$f _{OPT}$					$\xi_d _{OPT}$					$\max\{H_9\} _{OPT}$							
	0,5 %	1 %	3 %	5 %	10 %	0,5 %	1 %	3 %	5 %	10 %	0,5 %	1 %	3 %	5 %	8 %	10 %		
0.001	0.998	0.998	0.996	0.992	0.986	0.980	0.016	0.017	0.019	0.020	0.022	0.024	38.193	28.316	13.678	8.959	5.880	4.786
0.003	0.996	0.995	0.992	0.987	0.979	0.972	0.027	0.028	0.030	0.032	0.035	0.036	25.764	20.926	11.792	8.146	5.549	4.574
0.005	0.993	0.992	0.988	0.983	0.974	0.966	0.035	0.035	0.038	0.040	0.043	0.045	21.027	17.709	10.739	7.653	5.329	4.429
0.01	0.987	0.986	0.980	0.974	0.962	0.954	0.048	0.049	0.052	0.054	0.058	0.060	15.696	13.785	9.198	6.863	4.952	4.174
0.015	0.981	0.979	0.973	0.965	0.952	0.942	0.059	0.060	0.063	0.065	0.069	0.071	13.126	11.768	8.273	6.353	4.690	3.992
0.02	0.975	0.973	0.966	0.957	0.943	0.932	0.068	0.069	0.072	0.075	0.078	0.080	11.525	10.468	7.619	5.953	4.485	3.847
0.025	0.969	0.967	0.959	0.950	0.934	0.923	0.077	0.077	0.080	0.083	0.087	0.089	10.401	9.534	7.120	5.660	4.317	3.725
0.03	0.962	0.960	0.952	0.942	0.926	0.913	0.084	0.085	0.088	0.090	0.094	0.097	9.554	8.819	6.719	5.409	4.174	3.621
0.035	0.956	0.954	0.945	0.935	0.917	0.904	0.091	0.092	0.095	0.097	0.101	0.104	8.885	8.247	6.386	5.165	4.050	3.529
0.04	0.950	0.948	0.938	0.927	0.909	0.896	0.097	0.098	0.101	0.104	0.108	0.110	8.338	7.775	6.103	5.009	3.939	3.446
0.045	0.944	0.942	0.932	0.920	0.901	0.887	0.103	0.104	0.107	0.110	0.114	0.116	7.880	7.376	5.857	4.845	3.840	3.372
0.05	0.939	0.936	0.925	0.913	0.893	0.879	0.109	0.110	0.113	0.116	0.120	0.122	7.489	7.033	5.642	4.650	3.750	3.304
0.055	0.933	0.930	0.919	0.906	0.886	0.871	0.114	0.115	0.118	0.121	0.125	0.128	7.150	6.734	5.450	4.507	3.668	3.241
0.06	0.927	0.924	0.912	0.899	0.878	0.863	0.119	0.120	0.123	0.126	0.131	0.133	6.852	6.470	5.277	4.417	3.592	3.183
0.065	0.921	0.918	0.906	0.892	0.871	0.855	0.125	0.126	0.129	0.131	0.136	0.139	6.588	6.234	5.121	4.307	3.522	3.128
0.07	0.915	0.912	0.899	0.886	0.863	0.847	0.129	0.130	0.133	0.136	0.141	0.144	6.351	6.021	4.978	4.205	3.456	3.078
0.075	0.909	0.906	0.893	0.879	0.856	0.839	0.134	0.135	0.138	0.140	0.146	0.148	6.137	5.829	4.847	4.143	3.395	3.030
0.08	0.903	0.900	0.887	0.872	0.849	0.832	0.139	0.140	0.143	0.146	0.150	0.153	5.942	5.653	4.726	4.054	3.337	2.985
0.085	0.898	0.894	0.881	0.866	0.842	0.824	0.143	0.144	0.147	0.150	0.155	0.158	5.764	5.492	4.614	3.992	3.283	2.942
0.09	0.892	0.889	0.874	0.859	0.834	0.817	0.148	0.148	0.152	0.155	0.159	0.162	5.600	5.343	4.510	3.884	3.232	2.901
0.095	0.886	0.883	0.868	0.853	0.827	0.809	0.152	0.153	0.156	0.159	0.164	0.167	5.449	5.206	4.412	3.824	3.183	2.863
0.1	0.880	0.877	0.862	0.846	0.820	0.802	0.156	0.157	0.160	0.163	0.168	0.171	5.309	5.078	4.321	3.756	3.137	2.826

Tabla 3.5: Parámetros óptimos de diseño para el DCLS bajo excitación basal monofrecuencial, $\alpha = 0.75$

$\hat{\mu} \setminus \hat{\xi}_p$	$f _{OPT}$					$\xi_d _{OPT}$					$\max\{H_9\} _{OPT}$							
	0,5 %	1 %	3 %	5 %	10 %	0,5 %	1 %	3 %	5 %	10 %	0,5 %	1 %	3 %	5 %	8 %	10 %		
0.001	0.998	0.998	0.995	0.992	0.985	0.979	0.018	0.018	0.021	0.022	0.024	0.026	35.447	26.803	13.342	8.845	5.826	4.751
0.003	0.995	0.995	0.991	0.986	0.978	0.971	0.030	0.031	0.033	0.035	0.039	0.040	23.613	19.495	11.343	7.921	5.457	4.514
0.005	0.993	0.992	0.987	0.982	0.972	0.964	0.038	0.039	0.042	0.044	0.047	0.049	19.182	16.388	10.253	7.412	5.216	4.353
0.01	0.986	0.984	0.979	0.972	0.960	0.951	0.054	0.055	0.058	0.060	0.063	0.066	14.244	12.655	8.690	6.549	4.810	4.075
0.015	0.979	0.977	0.971	0.963	0.949	0.939	0.066	0.067	0.070	0.072	0.076	0.078	11.882	10.759	7.767	6.053	4.531	3.878
0.02	0.972	0.970	0.963	0.954	0.939	0.928	0.076	0.077	0.080	0.083	0.086	0.089	10.416	9.546	7.123	5.673	4.316	3.723
0.025	0.966	0.964	0.955	0.945	0.929	0.917	0.085	0.086	0.089	0.092	0.096	0.098	9.389	8.678	6.635	5.353	4.140	3.595
0.03	0.959	0.957	0.947	0.937	0.920	0.907	0.093	0.094	0.097	0.100	0.104	0.107	8.617	8.015	6.245	5.101	3.991	3.484
0.035	0.952	0.950	0.940	0.929	0.911	0.897	0.101	0.102	0.105	0.108	0.112	0.114	8.007	7.486	5.922	4.886	3.863	3.388
0.04	0.946	0.943	0.933	0.921	0.902	0.888	0.108	0.109	0.112	0.115	0.119	0.122	7.510	7.050	5.649	4.701	3.749	3.302
0.045	0.939	0.937	0.926	0.913	0.893	0.879	0.115	0.116	0.119	0.122	0.126	0.128	7.094	6.683	5.413	4.539	3.647	3.224
0.05	0.933	0.930	0.918	0.906	0.885	0.870	0.121	0.122	0.125	0.128	0.132	0.135	6.739	6.367	5.206	4.391	3.555	3.153
0.055	0.926	0.923	0.911	0.898	0.876	0.861	0.127	0.128	0.131	0.134	0.138	0.141	6.431	6.092	5.022	4.263	3.472	3.088
0.06	0.920	0.917	0.904	0.890	0.868	0.852	0.133	0.134	0.137	0.140	0.144	0.147	6.160	5.849	4.857	4.145	3.395	3.028
0.065	0.913	0.910	0.897	0.883	0.860	0.843	0.139	0.139	0.143	0.146	0.150	0.153	5.920	5.632	4.708	4.038	3.323	2.972
0.07	0.907	0.904	0.890	0.876	0.852	0.834	0.144	0.145	0.148	0.151	0.156	0.159	5.705	5.437	4.572	3.949	3.257	2.920
0.075	0.900	0.897	0.883	0.868	0.844	0.826	0.149	0.150	0.153	0.156	0.161	0.164	5.511	5.261	4.447	3.847	3.195	2.871
0.08	0.894	0.891	0.876	0.861	0.836	0.818	0.154	0.155	0.158	0.162	0.166	0.170	5.334	5.100	4.333	3.762	3.138	2.826
0.085	0.888	0.884	0.869	0.854	0.828	0.809	0.159	0.160	0.163	0.167	0.171	0.175	5.172	4.952	4.226	3.682	3.083	2.781
0.09	0.881	0.878	0.863	0.846	0.820	0.801	0.164	0.165	0.168	0.172	0.176	0.180	5.024	4.816	4.128	3.604	3.032	2.740
0.095	0.875	0.871	0.856	0.839	0.812	0.793	0.169	0.170	0.173	0.176	0.181	0.185	4.887	4.690	4.035	3.527	2.983	2.700
0.1	0.869	0.865	0.849	0.832	0.804	0.785	0.173	0.174	0.178	0.181	0.186	0.190	4.759	4.573	3.949	3.471	2.936	2.663

Tabla 3.6: Parámetros óptimos de diseño para el DCLS bajo excitación basal monofrecuencial, $\alpha = 0.9$

$\hat{\mu} \setminus \hat{\xi}_p$	$f _{OPT}$										$\xi_d _{OPT}$										$\max\{H_9\} _{OPT}$				
	0,5 %	1 %	3 %	5 %	8 %	10 %	0,5 %	1 %	3 %	5 %	8 %	10 %	0,5 %	1 %	3 %	5 %	8 %	10 %							
0.001	0.998	0.998	0.995	0.992	0.985	0.979	0.019	0.020	0.022	0.024	0.027	0.028	33.280	25.563	13.049	8.664	5.777	4.720							
0.003	0.995	0.994	0.990	0.986	0.977	0.970	0.033	0.033	0.036	0.038	0.041	0.043	21.953	18.356	10.962	7.750	5.376	4.460							
0.005	0.992	0.991	0.986	0.981	0.971	0.963	0.042	0.043	0.045	0.048	0.051	0.053	17.770	15.350	9.847	7.294	5.117	4.286							
0.01	0.985	0.983	0.977	0.970	0.957	0.948	0.059	0.060	0.063	0.065	0.069	0.071	13.142	11.779	8.274	6.349	4.687	3.989							
0.015	0.977	0.976	0.968	0.960	0.946	0.935	0.072	0.073	0.076	0.079	0.083	0.085	10.940	9.982	7.358	5.859	4.394	3.780							
0.02	0.970	0.968	0.960	0.951	0.935	0.923	0.083	0.084	0.087	0.090	0.094	0.096	9.578	8.837	6.724	5.470	4.171	3.617							
0.025	0.963	0.961	0.951	0.941	0.924	0.912	0.093	0.094	0.097	0.100	0.104	0.106	8.625	8.021	6.246	5.100	3.990	3.482							
0.03	0.955	0.953	0.943	0.932	0.914	0.901	0.102	0.103	0.106	0.109	0.113	0.116	7.909	7.399	5.866	4.840	3.837	3.368							
0.035	0.948	0.946	0.935	0.924	0.904	0.890	0.110	0.111	0.114	0.117	0.122	0.124	7.345	6.904	5.553	4.634	3.705	3.267							
0.04	0.941	0.938	0.927	0.915	0.895	0.880	0.118	0.119	0.122	0.125	0.129	0.132	6.885	6.496	5.288	4.459	3.589	3.179							
0.045	0.934	0.931	0.919	0.907	0.885	0.870	0.125	0.126	0.129	0.132	0.137	0.140	6.500	6.153	5.060	4.289	3.486	3.099							
0.05	0.927	0.924	0.912	0.898	0.876	0.860	0.132	0.133	0.136	0.139	0.144	0.147	6.172	5.858	4.861	4.110	3.393	3.026							
0.055	0.920	0.917	0.904	0.890	0.867	0.850	0.139	0.140	0.143	0.146	0.151	0.154	5.887	5.601	4.684	4.000	3.308	2.959							
0.06	0.913	0.909	0.896	0.882	0.858	0.841	0.145	0.146	0.149	0.153	0.157	0.160	5.637	5.375	4.525	3.920	3.231	2.898							
0.065	0.906	0.902	0.888	0.873	0.849	0.831	0.151	0.153	0.156	0.159	0.163	0.167	5.415	5.173	4.382	3.796	3.159	2.841							
0.07	0.899	0.895	0.881	0.865	0.840	0.822	0.157	0.158	0.161	0.165	0.170	0.173	5.216	4.991	4.252	3.689	3.092	2.787							
0.075	0.892	0.888	0.873	0.857	0.831	0.813	0.163	0.164	0.167	0.171	0.175	0.179	5.036	4.826	4.132	3.609	3.030	2.737							
0.08	0.885	0.881	0.866	0.849	0.823	0.804	0.168	0.168	0.173	0.176	0.181	0.185	4.873	4.677	4.022	3.525	2.972	2.690							
0.085	0.878	0.874	0.858	0.841	0.814	0.795	0.174	0.175	0.178	0.182	0.187	0.190	4.723	4.539	3.921	3.440	2.917	2.646							
0.09	0.871	0.867	0.851	0.833	0.806	0.786	0.179	0.180	0.184	0.187	0.192	0.196	4.586	4.412	3.826	3.370	2.866	2.604							
0.095	0.864	0.860	0.843	0.826	0.797	0.777	0.184	0.185	0.189	0.192	0.198	0.201	4.459	4.294	3.738	3.306	2.817	2.564							
0.1	0.857	0.853	0.836	0.818	0.788	0.768	0.189	0.190	0.194	0.197	0.203	0.207	4.341	4.185	3.655	3.242	2.771	2.526							

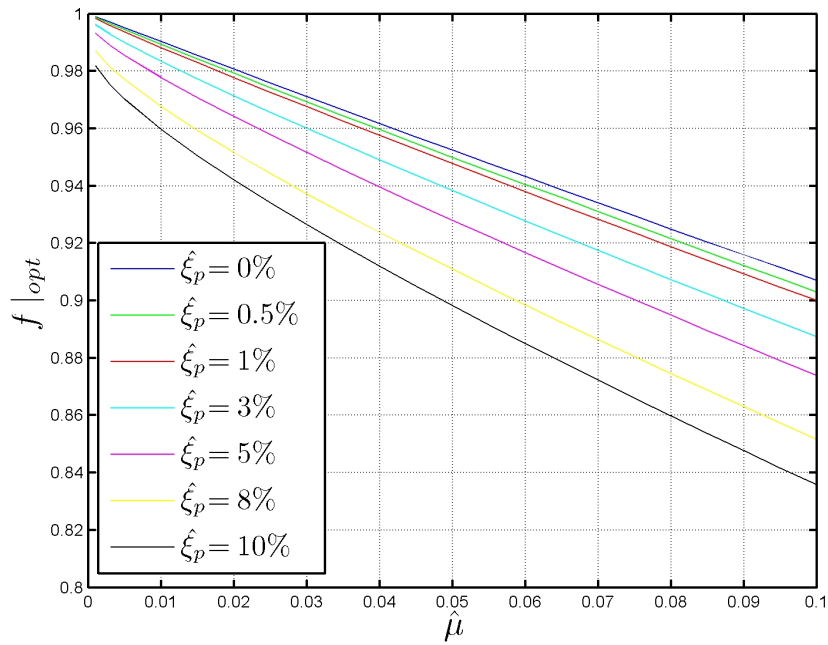


Figura 3.14: $f|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.3$

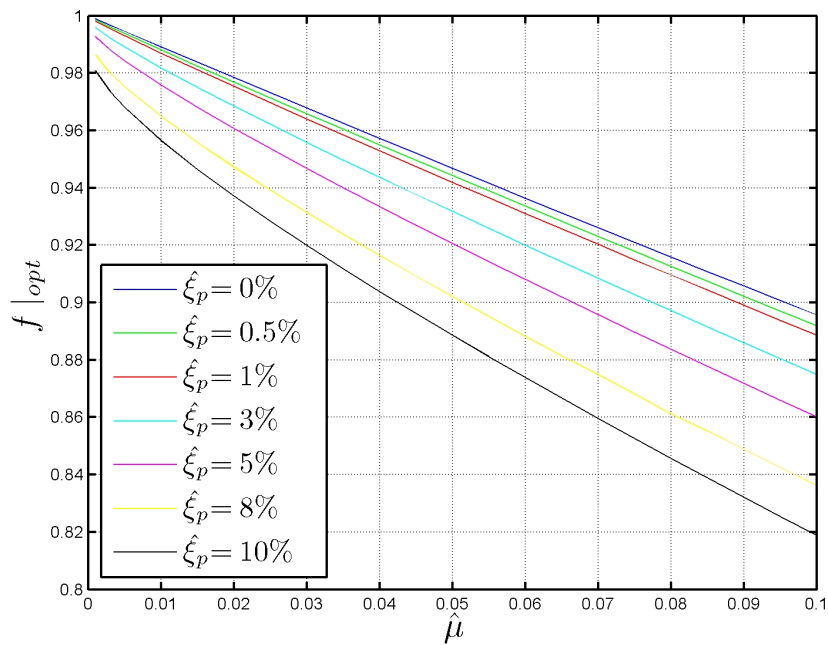


Figura 3.15: $f|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.45$

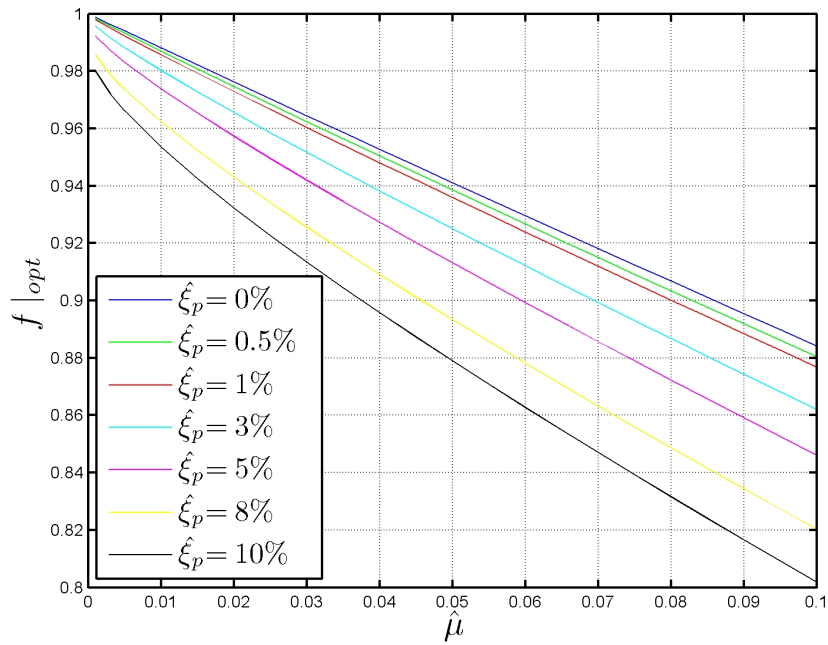


Figura 3.16: $f|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.6$

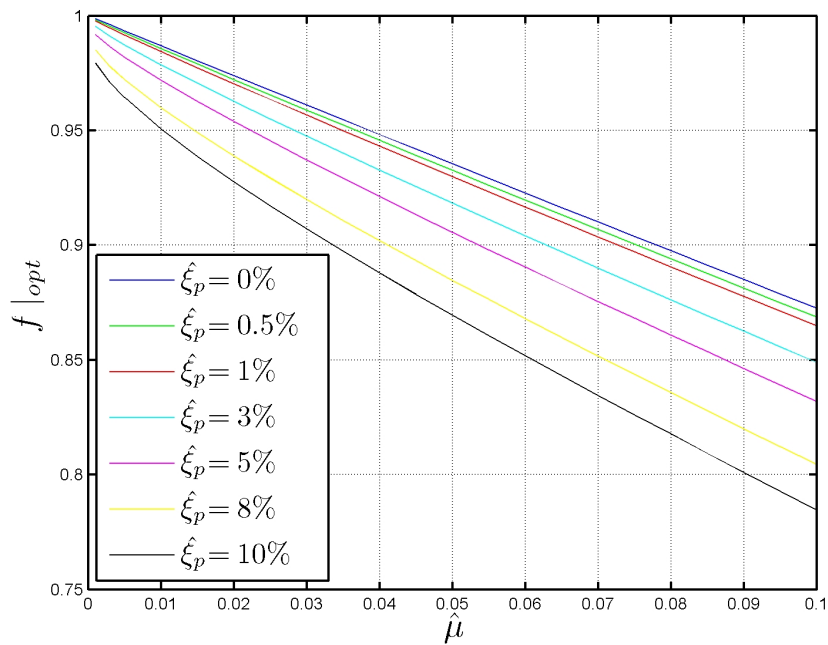


Figura 3.17: $f|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.75$

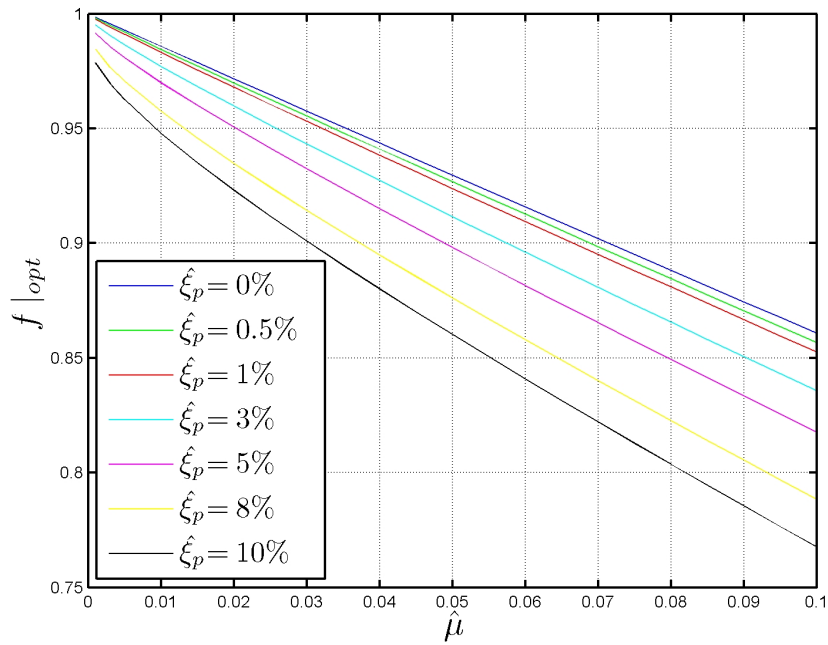


Figura 3.18: $f|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.9$

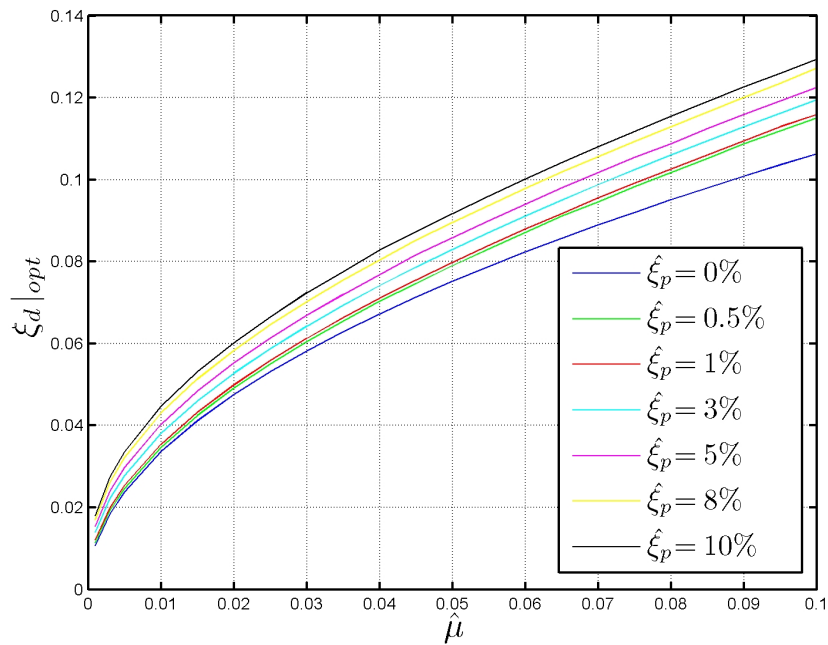


Figura 3.19: $\xi_d|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.3$

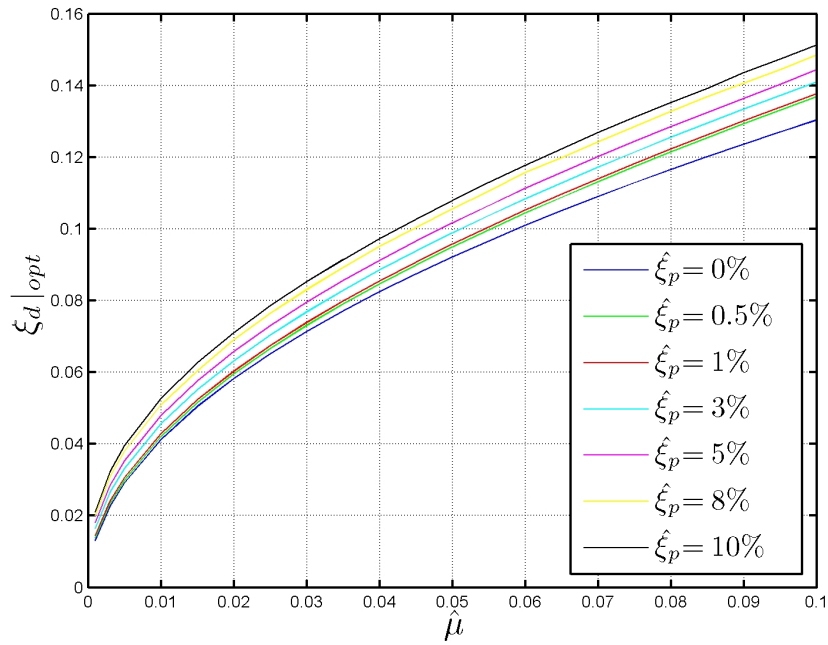


Figura 3.20: $\xi_d|_{OPT}$ em função de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.45$

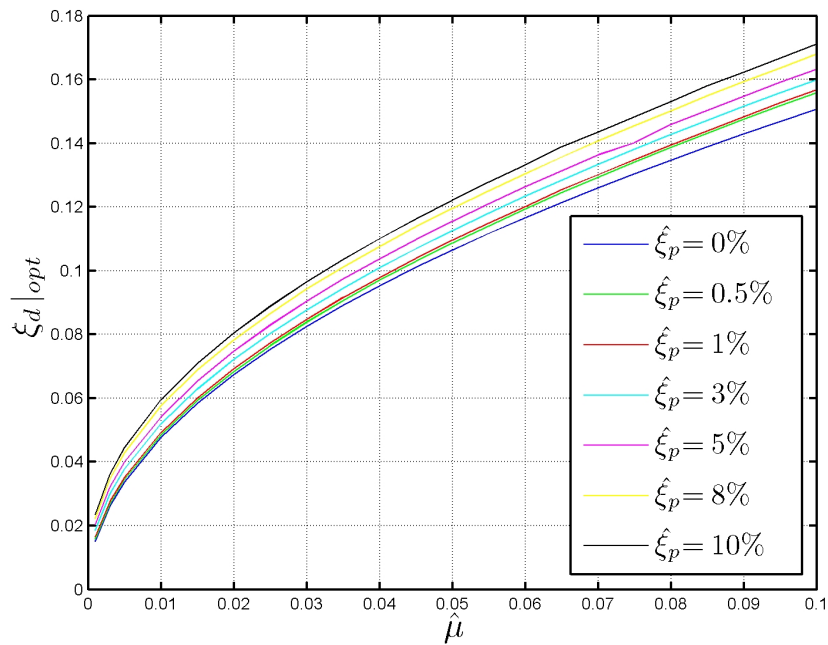


Figura 3.21: $\xi_d|_{OPT}$ em função de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.6$

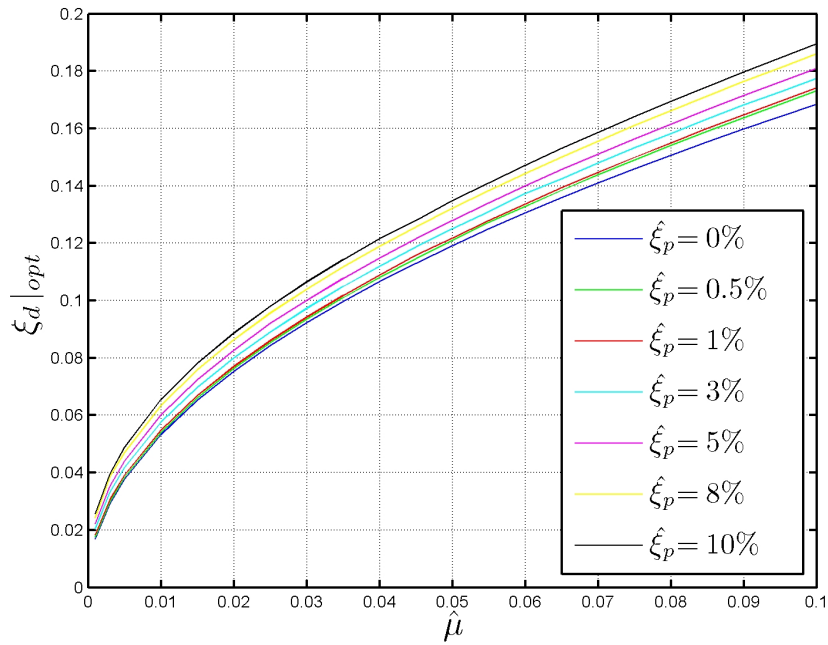


Figura 3.22: $\xi_d|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.75$

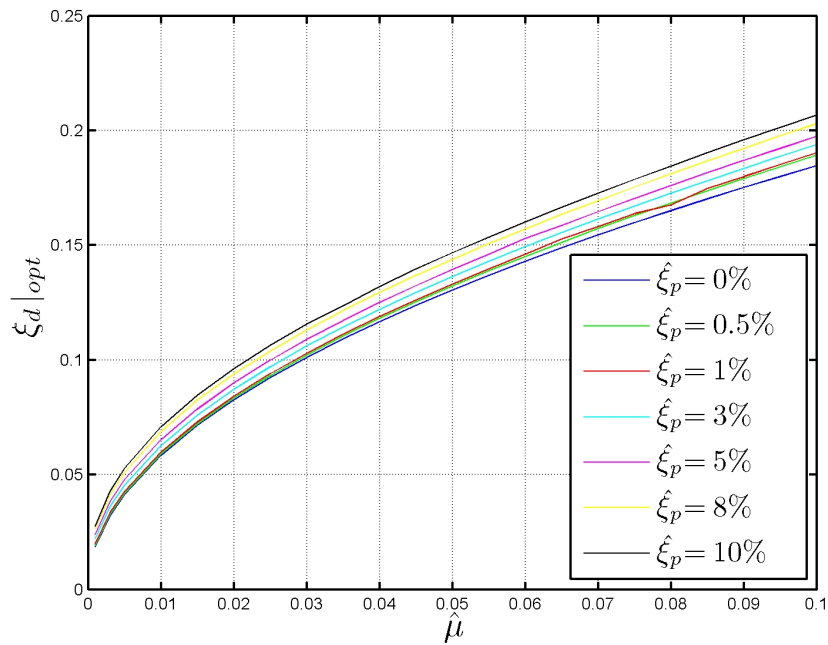


Figura 3.23: $\xi_d|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.9$

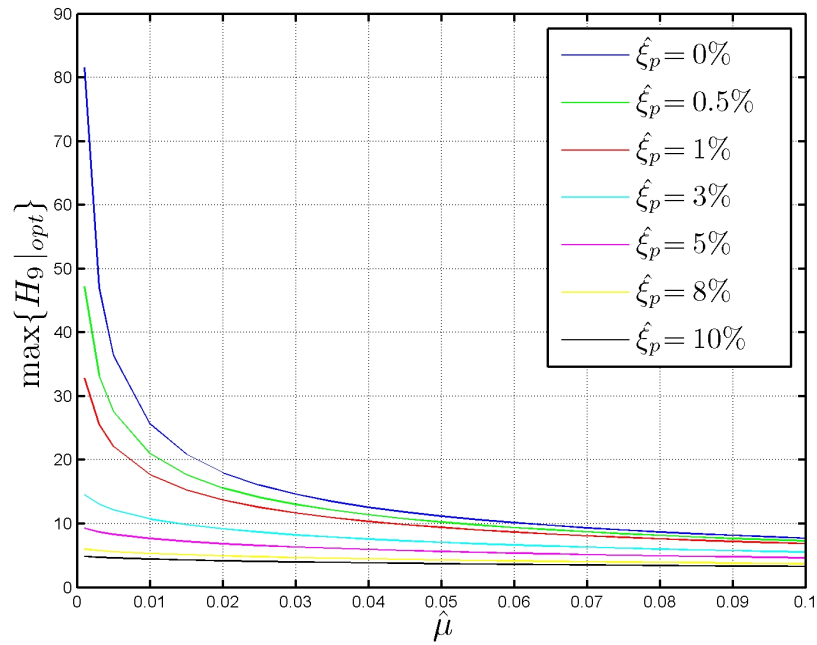


Figura 3.24: $\max\{H_9|_{OPT}\}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.3$

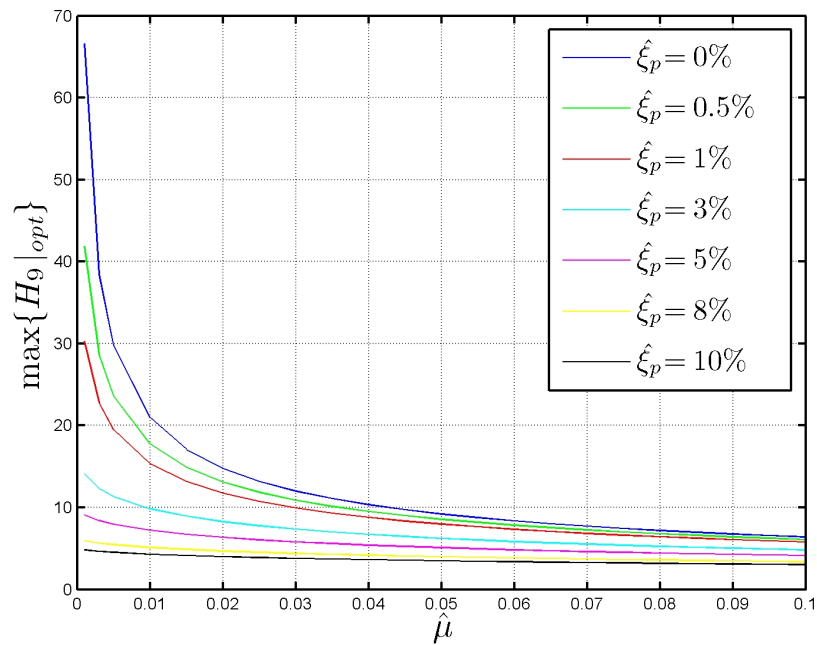


Figura 3.25: $\max\{H_9|_{OPT}\}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.4$

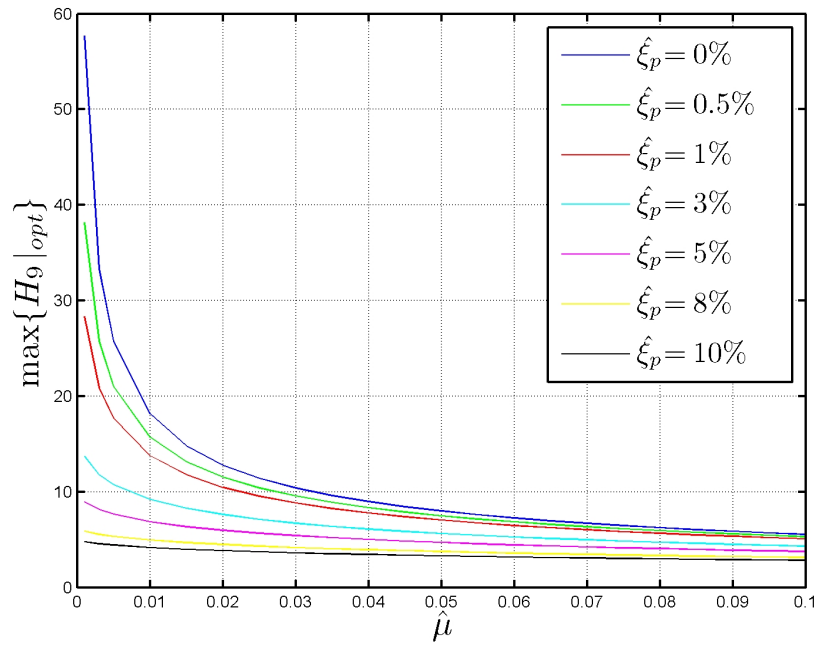


Figura 3.26: $\max\{H_9|_{OPT}\}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.6$

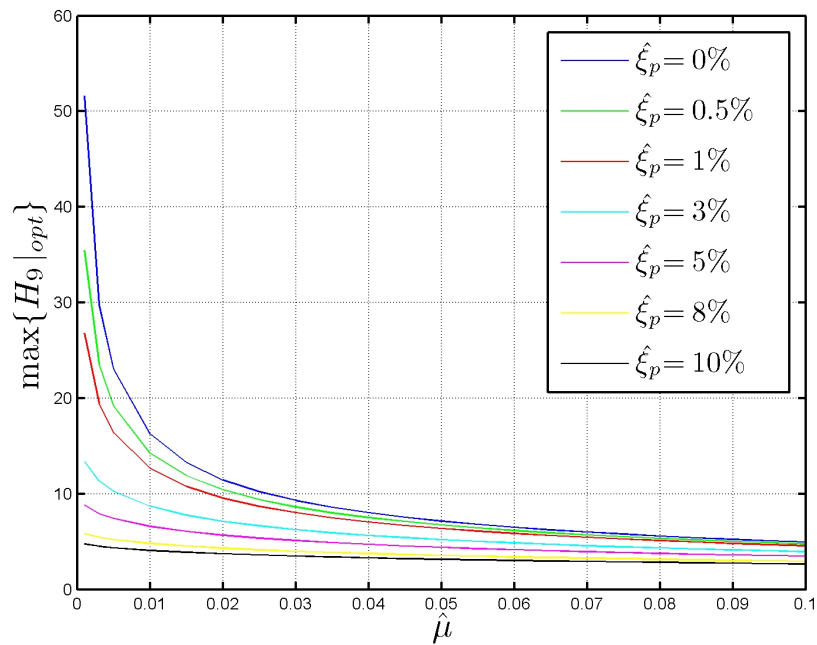


Figura 3.27: $\max\{H_9|_{OPT}\}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.75$

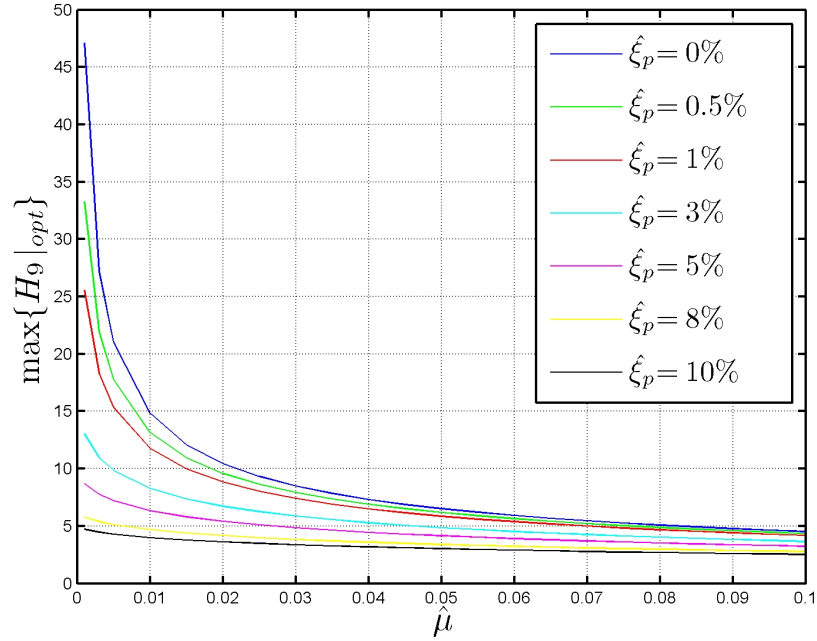


Figura 3.28: $\max\{H_9|_{OPT}\}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha=0.9$

Para facilitar el diseño del dispositivo, se proponen expresiones analíticas para los parámetros óptimos, $f|_{OPT}$ y $\xi_d|_{OPT}$, mostrados en las tablas y figuras anteriores. El procedimiento para obtener dichas expresiones se describe a continuación.

1. Óptimo para la razón de frecuencias, $f|_{OPT}$

La expresión propuesta es del tipo:

$$f|_{OPT}(\hat{\mu}, \hat{\xi}_p, \alpha) = f|_{OPT}^I(\hat{\mu}, \hat{\xi}_p, \alpha) - \Delta f(\hat{\mu}, \hat{\xi}_p, \alpha) \quad (3.54)$$

Donde

$$f|_{OPT}^I(\hat{\mu}, \hat{\xi}_p, \alpha) = \sqrt{\frac{2 - \hat{\mu} - 3\alpha\hat{\mu}}{2(1 + \hat{\mu})}} + \sqrt{1 - 2\hat{\xi}_p^2} - 1 \quad (3.55)$$

El primer término de la expresión anterior corresponde al valor que adopta $f|_{OPT}$ cuando $\hat{\xi}_p = 0$. Por otra parte, el segundo término representa el valor de $f|_{OPT}$ cuando $\hat{\mu} \rightarrow 0$. En este último caso, el valor óptimo para la frecuencia natural de oscilación del DCLS, debe ser igual a la frecuencia de resonancia para deformación

Tabla 3.7: Valores de los términos a_1 , a_2 y a_3

	Δf				
	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.45$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 0.9$
a_1	3.7017	4.513	5.3712	6.2293	7.1384
a_2	0.0013	-0.0105	-0.0206	-0.0265	-0.0337
a_3	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003

de la estructura primaria, más la masa de las columnas del dispositivo m_u , esto es $\omega_d = \hat{\omega}_p \sqrt{1 - 2\hat{\xi}_p^2}$, o bien $f|_{OPT} = \sqrt{1 - 2\hat{\xi}_p^2}$.

Para que la expresión 3.54 nos entregue efectivamente los valores recién descritos, cuando $\hat{\xi}_p = 0$ y $\hat{\mu} \rightarrow 0$, se hace necesario que:

$$\left. \begin{aligned} \Delta f(\hat{\mu}, 0, \alpha) &= 0 \\ \Delta f(0, \hat{\xi}_p, \alpha) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

De esta forma $f|_{OPT}^I$ sirve para calibrar los valores extremos de $f|_{OPT}$, y hacerlos coincidir con aquellos determinados a partir de los análisis teóricos cuando $\hat{\xi}_p = 0$ y $\hat{\mu} = 0$. La diferencia entre $f|_{OPT}^I$, y los valores óptimos obtenidos a partir de los análisis numéricos para $f|_{OPT}$, Δf , se ajusta mediante curvas. Para Δf se propone la siguiente expresión

$$\Delta f(\hat{\mu}, \hat{\xi}_p) = \sqrt{(a_1 \hat{\xi}_p^2 + a_2 \hat{\xi}_p + a_3)} \hat{\mu} \quad (3.57)$$

En donde los términos a_1 , a_2 y a_3 se ajustan numéricamente para cada uno de los valores de α analizados. La ecuación 3.57 nos indica que la variación del cuadrado de Δf es proporcional a $\hat{\mu}$. Esto último nos permite cumplir la segunda de las condiciones definidas en la expresión 3.56. Posteriormente ajustamos el coeficiente que acompaña a $\hat{\mu}$, mediante un polinomio de segundo grado en $\hat{\xi}_p$. En este caso advertimos, según se puede notar de la tabla 3.7, que los valores correspondientes a a_3 son muy pequeños por lo que pueden ser despreciados. De esta manera es posible cumplir con la segunda condición definida por la expresión 3.56. El procedimiento anterior se repite para cada uno de los valores de α bajo análisis. La tabla 3.7 resume los resultados que se obtienen para los términos a_1 , a_2 y a_3 :

Podemos advertir de la tabla 3.7 que los términos a_1 varían de forma lineal con α , en tanto los coeficientes a_2 pueden ajustarse cuadráticamente en función del mismo parámetro. Dichos ajustes se resumen en las siguientes expresiones:

$$a_1 = 5.726\alpha + 1.955 \quad (3.58)$$

$$a_2 = 0.043\alpha^2 - 0.108\alpha - 0.03 \quad (3.59)$$

Finalmente la expresión para Δf , en la cual hemos despreciado el aporte del término a_3 , queda como sigue:

$$\Delta f = \sqrt{\left[(5.726\alpha + 1.955) \hat{\xi}_p + (0.043\alpha^2 - 0.108\alpha - 0.03) \right] \hat{\xi}_p \hat{\mu}} \quad (3.60)$$

Combinando las ecuaciones 3.54 y 3.60, obtenemos el valor de la razón óptima de frecuencias del dispositivo, para un conjunto dado de parámetros α , $\hat{\mu}$ y $\hat{\xi}_p$. El máximo error que resulta de aplicar estas ecuaciones para determinar el valor de $f|_{OPT}$, con respecto a aquellos determinados directamente del análisis numérico, no supera el 0.4%, según puede apreciarse en la figura 3.30, por lo que la formula propuesta se considera satisfactoria.

2. Óptimo para la razón de amortiguamiento crítico del dispositivo, $\xi_d|_{OPT}$

Para evaluar el valor óptimo de la razón de amortiguamiento crítico del dispositivo se propone la siguiente expresión:

$$\xi_d|_{OPT}(\hat{\mu}, \hat{\xi}_p, \alpha) = \xi_d^I|_{OPT}(\hat{\mu}, \alpha) + \Delta\xi_d(\hat{\mu}, \hat{\xi}_p, \alpha) \quad (3.61)$$

En donde $\xi_d^I|_{OPT}$ representa el valor óptimo para la razón de amortiguamiento crítico del dispositivo cuando la estructura primaria no posee amortiguamiento, y cuyo valor esta definido por la ecuación 3.51. La diferencia entre este valor y los obtenidos a través del análisis numérico, es decir $\Delta\xi_d$, se calibra mediante un ajuste de curvas de la siguiente manera:

$$\Delta\xi_d = a\hat{\mu} + b\sqrt{\hat{\mu}} + c \quad (3.62)$$

Donde los términos a y b se ajustan linealmente con respecto a $\hat{\xi}_p$, en tanto que el término c se ajusta de manera cuadrática respecto de $\hat{\xi}_p$. Como veremos más adelante,

la expresión 3.61 no devuelve el valor de $\xi_d^I|_{OPT}$ determinado como el óptimo para la razón de amortiguamiento crítico del dispositivo cuando $\hat{\xi}_p = 0$. La razón por la cual se produce esta diferencia se encuentra en el criterio adoptado para determinar $\xi_d|_{OPT}$, cuando la estructura primaria no posee amortiguamiento. El valor de $\xi_d|_{OPT}$ se determina en este caso como el valor promedio de los amortiguamientos críticos del dispositivo que hacen que la curva de amplificación dinámica H_9 posea pendiente cero en los puntos P y Q respectivamente, ver sección 3.1. Si bien es cierto, el criterio adoptado nos permite determinar de manera sencilla el valor para $\xi_d|_{OPT}$, cuando $\hat{\xi}_p = 0$, junto con entregar valores suficientemente precisos para $\xi_d|_{OPT}$, no es del todo correcto desde el punto de vista de minimizar el máximo valor que alcanza el factor de amplificación dinámica H_9 . Como ejemplo se presenta en la figura 3.29 el caso correspondiente al siguiente grupo de parámetros, a saber: $\hat{\mu} = 0.1$, $\alpha = 0.6$ y $\hat{\xi}_p = 0$.

En la figura 3.29 puede notarse que el máximo valor del factor de amplificación dinámica H_9 , determinado a partir de la ecuación 3.45, es ligeramente mayor al obtenido directamente del proceso de optimización numérica. Ciertamente, desde un punto de vista práctico estas diferencias son despreciables, pudiendo utilizarse las expresiones para los valores óptimos de diseño determinados en la sección 3.1 cuando $\hat{\xi}_p = 0$, sin que ello tenga como resultado errores importantes en el diseño del dispositivo. En lo que sigue no obligaremos a que la expresión 3.61 devuelva los valores obtenidos a partir de la ecuación 3.51 cuando $\hat{\xi}_p = 0$, con objeto de evitar errores de interpolación numérica. La expresión resultante tendrá por tanto importancia en el diseño cuando el amortiguamiento de la estructura primaria sea importante, digamos sobre el 1%. Para valores menores el uso de la ecuación 3.51 puede considerarse adecuado.

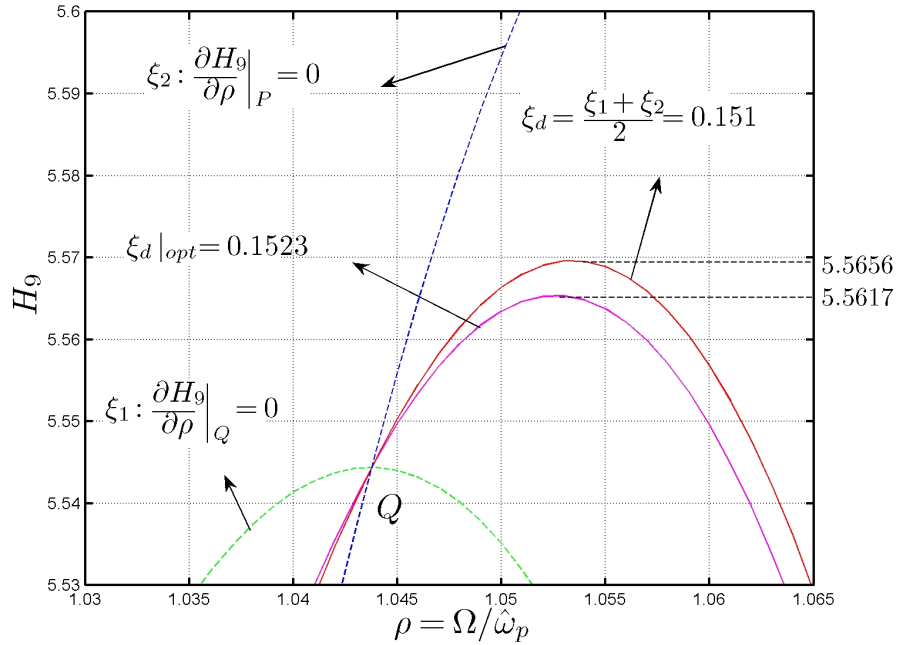


Figura 3.29: Valores máximos que alcanza el factor de amplificación dinámica H_9 , para $\hat{\mu} = 0.1$, $\alpha = 0.6$ y $\hat{\xi}_p = 0$, cuando $\xi_d|_{OPT}$ es determinado según el criterio adoptado en la sección 3.1, y cuando se determina directamente del análisis numérico. En el primer caso el máximo alcanza 5.5656 en tanto que en el segundo caso este valor es 5.5617. Este ejemplo nos demuestra que el criterio adoptado en la sección 3.1 para determinar $\xi_d|_{OPT}$ cuando $\hat{\xi}_p = 0$ no entrega necesariamente el valor que minimiza el máximo del factor de amplificación dinámica H_9 . No obstante lo anterior el valor que se obtiene entrega con precisión suficiente el valor del óptimo correspondiente.

Para mantener controlado el error de la formula 3.61, se ha decidido pues incorporar los términos que son independientes de $\hat{\xi}_p$. En virtud de lo anterior la expresión para $\Delta\xi_d$ se escribe como sigue:

$$\Delta\xi_d = (a_1\hat{\xi}_p + a_2)\hat{\mu} + (a_3\hat{\xi}_p + a_4)\sqrt{\hat{\mu}} + a_5\hat{\xi}_p^2 + a_6\hat{\xi}_p \quad (3.63)$$

Los resultados de los análisis numéricos aplicados al ajuste de curvas arrojan los siguientes valores, los cuales se resumen en la tabla 3.8.

Los valores numéricos de los parámetros mostrados en la tabla 3.8, pueden ser nuevamente ajustados, esta vez respecto del factor de forma del dispositivo, α . Para ello se consideran interpolaciones lineales para cada uno de estos términos. Si bien es cierto, se pueden considerar ajustes más complejos, el ajuste lineal entrega en este

Tabla 3.8: Valores de los términos a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 y a_6

	$\Delta\xi_d$				
	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.45$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 0.9$
a_1	-0.7976	-0.7738	-0.7004	-0.4994	-0.331
a_2	0.1284	0.0975	0.0829	0.0758	0.0792
a_3	0.5459	0.517	0.4989	0.4441	0.4182
a_4	-0.0188	-0.0167	-0.0161	-0.0158	-0.018
a_5	-0.3774	-0.4006	-0.3907	-0.3973	-0.3828
a_6	0.0931	0.1036	0.1082	0.1159	0.1185

caso resultados suficientemente precisos. Dichos ajustes se resumen en las siguientes ecuaciones:

$$a_1 = 0.805\alpha - 1.103 \quad (3.64)$$

$$a_2 = -0.08\alpha + 0.141 \quad (3.65)$$

$$a_3 = -0.219\alpha + 0.616 \quad (3.66)$$

$$a_4 = 0.002\alpha - 0.018 \quad (3.67)$$

$$a_5 = -0.005\alpha - 0.387 \quad (3.68)$$

$$a_6 = 0.042\alpha + 0.083 \quad (3.69)$$

Combinando el conjunto de expresiones anteriores, con las ecuaciones 3.61 y 3.62, se obtiene el valor de la razón óptima de amortiguamiento crítico del dispositivo. El procedimiento para determinar $\xi_d|_{OPT}$ puede considerarse bastante engorroso, sin embargo para un gran número de casos, en los que se tienen amortiguamientos bajo 1 %, puede utilizarse la fórmula 3.51 para determinar con una precisión razonable el valor del amortiguamiento óptimo del dispositivo.

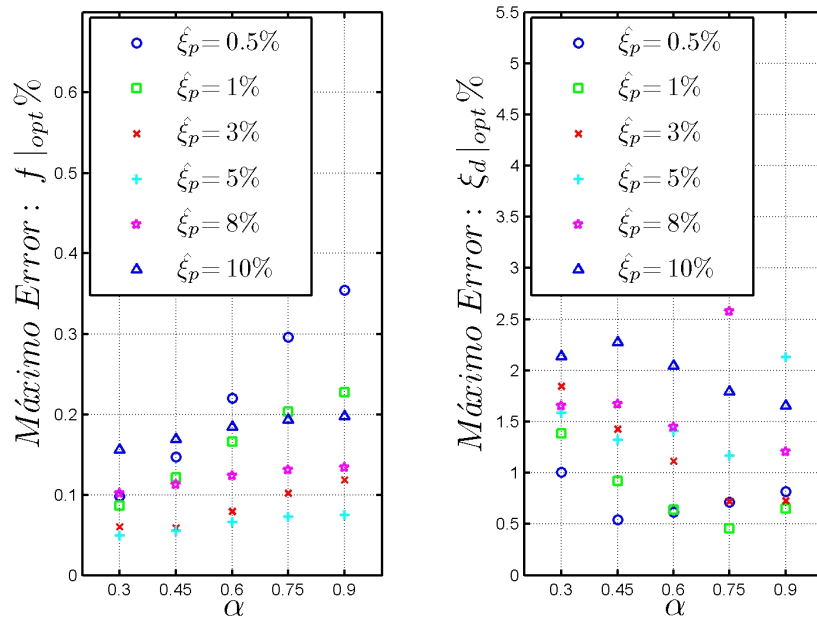


Figura 3.30: Máximos errores que se producen por medio de la utilización de las formulas propuestas, con respecto a los valores determinados del a partir del proceso de optimización numérica.

Finalmente, en la figura 3.30 se muestra el error de las fórmulas propuestas para los parámetros óptimos del dispositivo. En el caso del amortiguamiento del DCLS, este error alcanza como máximo un 2.6 %, valor que se produce cuando el amortiguamiento óptimo es muy pequeño, esto es cuando la razón de masas está por debajo del 0.2%. En este caso una pequeña diferencia en su estimación se traduce en mayores errores. No obstante lo anterior, para la gran mayoría de los casos el error se mantiene por debajo del 1.5 %.

3.4. Parámetros óptimos de diseño, aceleración basal aleatoria tipo ruido blanco. Caso 1: Estructura primaria no amortiguada.

En las secciones precedentes, se realizaron los análisis que nos permitieron caracterizar la respuesta del sistema cuando la aceleración de base se encuentra definida como un movimiento oscilatorio monofrecuencial. Ciertas condiciones de excitación pueden ser convenientemente representadas como movimientos oscilatorios monofrecuenciales. Dentro de estas se encuentran las excitaciones provenientes de maquinarias vibratorias. No obstante lo anterior, existe un gran número de situaciones en las cuales no es posible representar de manera explícita las acciones externas que actúan sobre una estructura. Este es el caso de las excitaciones externas de naturaleza aleatoria.

Tal y como fue mencionado en el capítulo anterior, los procesos estocásticos tipo ruido blanco constituyen el más simple de los procesos aleatorios. Si bien es cierto, el ruido blanco es físicamente irrealizable ya que supone energía infinita, este nos permite representar de manera sencilla los procesos estocásticos de banda ancha, es decir aquellos procesos que poseen funciones de densidad espectral cuyos valores se mantienen aproximadamente constantes sobre una banda o rango de frecuencias. Asimismo, cuando la estructura posee un bajo amortiguamiento, el rango de aplicabilidad de esta idealización puede ser extendido. En estos casos, la respuesta de la estructura solo se ve influenciada por aquellos valores de la función de densidad espectral de la acción externa, que se encuentran aproximadamente en torno a su frecuencia natural de vibrar. Ejemplos de casos en los cuales la representación tipo ruido blanco es adecuada se muestran en la figura 2.29

Para determinar la respuesta del sistema supondremos que la aceleración de la base esta caracterizada como un proceso aleatorio estacionario tipo ruido blanco. En este caso la función de densidad espectral de la aceleración de suelo se encuentra dada por:

$$S_{\ddot{u}_s}(\omega) = \ddot{u}_{so} \quad (3.70)$$

En donde \ddot{u}_{so} es la intensidad del espectro de potencia del movimiento de suelo. La función de densidad espectral del desplazamiento del sistema primario, $S_{u_p}(\omega)$, y

la función de densidad espectral del desplazamiento de la superficie libre de líquido, $S_{u_d}(\omega)$, se determinan a partir de la función de densidad espectral de la aceleración de suelo como sigue [6]:

$$S_{u_p}(\omega) = |H_{u_p\ddot{u}_s}(\omega)|^2 S_{\ddot{u}_s}(\omega) \quad (3.71)$$

$$S_{u_d}(\omega) = |H_{u_d\ddot{u}_s}(\omega)|^2 S_{\ddot{u}_s}(\omega) \quad (3.72)$$

En donde $H_{u_p\ddot{u}_s}(\omega)$ es la función de transferencia entre la aceleración de base y el desplazamiento del sistema primario, y $H_{u_d\ddot{u}_s}(\omega)$ es la función de transferencia entre la aceleración de base y el desplazamiento de la superficie libre de líquido. Finalmente podemos escribir el valor cuadrático medio del desplazamiento del sistema primario, $E\{u_p^2\}$, y el valor cuadrático medio del desplazamiento de la superficie libre de líquido, $E\{u_d^2\}$, de la siguiente forma:

$$E\{u_p^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} |H_{u_p\ddot{u}_s}(\Omega)|^2 S_{\ddot{u}_s}(\Omega) d\Omega \quad (3.73)$$

$$E\{u_d^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} |H_{u_d\ddot{u}_s}(\Omega)|^2 S_{\ddot{u}_s}(\Omega) d\Omega \quad (3.74)$$

A partir de las ecuaciones 3.26 y 3.27 podemos escribir las funciones de transferencia como sigue¹:

$$H_{u_p\ddot{u}_s}(\rho) = \frac{1}{\hat{\omega}_p^2} \mathbf{H}_9(\rho) \quad (3.75)$$

$$H_{u_d\ddot{u}_s}(\rho) = \frac{1}{\omega_d^2} \mathbf{H}_{10}(\rho) \quad (3.76)$$

Las expresiones anteriores relacionan las funciones de transferencia con los factores de amplificación dinámica, los cuales son a su vez funciones de la razón de frecuencias $\rho = \Omega/\hat{\omega}_p$. Luego de sustituir las expresiones 3.75 y 3.76 en las expresiones 3.73 y 3.74 respectivamente, y de realizar el cambio de variable correspondiente se obtiene:

¹ Se utilizan las siguientes notaciones a partir de este punto: $\mathbf{H}_9(\rho) = H_9(\rho) e^{i\delta_9(\rho)}$ y $\mathbf{H}_{10}(\rho) = H_{10}(\rho) e^{i\delta_{10}(\rho)}$

$$E \{u_p^2\} = \frac{\ddot{u}_{so}}{\hat{\omega}_p^3} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{H}_9(\rho)|^2 d\rho \quad (3.77)$$

$$E \{u_d^2\} = \frac{\hat{\omega}_p \ddot{u}_{so}}{\omega_d^4} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{H}_{10}(\rho)|^2 d\rho \quad (3.78)$$

A continuación se deben evaluar las integrales que aparecen en las expresiones anteriores. Para ello expresamos los factores de amplificación dinámica de la siguiente forma:

$$\mathbf{H}_9(\rho) = \frac{B_2\rho^2 + iB_1\rho + B_0}{A_4\rho^4 + iA_3\rho^3 + A_2\rho^2 + iA_1\rho + A_0} \quad (3.79)$$

$$\mathbf{H}_{10}(\rho) = \frac{iC_1\rho + C_0}{A_4\rho^4 + iA_3\rho^3 + A_2\rho^2 + iA_1\rho + A_0} \quad (3.80)$$

En donde:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= f^2 \\ A_1 &= 2f \left(\hat{\xi}_p f + \xi_d \right) \\ A_2 &= - \left(1 + f^2 + 4\hat{\xi}_p \xi_d f \right) \\ A_3 &= -2 \left[\hat{\xi}_p + \xi_d f (1 + \hat{\mu}) \right] \\ A_4 &= 1 - \hat{\mu} \alpha \\ B_0 &= -f^2 \\ B_1 &= -2f \xi_d (1 + \hat{\mu}) \\ B_2 &= 1 - \hat{\mu} \alpha \\ C_0 &= \alpha f^2 \\ C_1 &= -2\alpha f^2 \hat{\xi}_p \end{aligned} \right\} \quad (3.81)$$

Expresados de esta manera, se puede recurrir a tablas de integración para evaluar las integrales anteriores [6] obteniéndose lo siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{H}_9(\rho)|^2 d\rho = \frac{\pi \left[\left(\frac{B_0^2}{A_0} \right) (A_2 A_3 - A_1 A_4) - A_3 (B_1^2 + 2B_0 B_2) + A_1 B_2^2 \right]}{A_1 (A_2 A_3 - A_1 A_4) - A_0 A_3^2} \quad (3.82)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{H}_{10}(\rho)|^2 d\rho = \frac{\pi \left[\left(\frac{C_0^2}{A_0} \right) (A_2 A_3 - A_1 A_4) - A_3 C_1^2 \right]}{A_1 (A_2 A_3 - A_1 A_4) - A_0 A_3^2} \quad (3.83)$$

Para determinar los parámetros óptimos de diseño del DCLS, cuando la estructura primaria no posee amortiguamiento, debemos determinar los valores de f y ξ_d tales que minimizan la esperanza cuadrática media del desplazamiento de la estructura primaria, ecuación 3.77. Esto último se puede expresar en términos matemáticos como sigue:

$$\frac{\partial E \{u_p^2\}}{\partial f} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial E \{u_p^2\}}{\partial \xi_d} = 0 \quad (3.84)$$

Cuando $\xi_p = 0$, la expresión para $E \{u_p^2\}$ se obtiene luego de evaluar la ecuación 3.82, bajo la condición de cero amortiguamiento para la estructura primaria. Luego de reemplazar las expresiones correspondientes se obtiene:

$$E \{u_p^2\} = \frac{\pi \ddot{u}_{so}}{\hat{\omega}_p^3} \cdot \frac{(\hat{\mu}\alpha - 1) [(\hat{\mu}\alpha - 1) + f^2 (3 + 2\hat{\mu})] + f^2 (1 + \hat{\mu}) [1 + f^2 + 4\xi_d^2 (1 + \hat{\mu}^2)]}{\xi_d f \hat{\mu} (f^2 (1 + \hat{\mu}) - 1 - \alpha)} \quad (3.85)$$

A continuación, debemos derivar la expresión anterior con respecto a f y ξ_d y hacer los resultados iguales a cero, es decir aplicar la condición 3.84. El procedimiento anterior nos lleva a un sistema de dos ecuaciones, cuyas soluciones, que se obtienen luego de extensos cálculos algebraicos, corresponden a los parámetros óptimos de diseño del dispositivo. Dichos parámetros se detallan a continuación:

$$f|_{OPT} = \sqrt{\frac{2\hat{\mu}\alpha [\hat{\mu} (1 - \alpha (2 - \hat{\mu})) + 1 - \frac{3}{2}\alpha] + 2\alpha - \hat{\mu}}{(1 + \hat{\mu}) [2\hat{\mu}\alpha (\hat{\mu} + \frac{3}{2}) + 2\alpha - \hat{\mu}]}} \quad (3.86)$$

$$\xi_d|_{OPT} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha^2 \hat{\mu} [4\hat{\mu}^2 \alpha (\alpha (\hat{\mu} + 2) - 1) + 6\hat{\mu}\alpha (\frac{5}{6}\alpha - 1) + \hat{\mu} - 4\alpha]}{[2\hat{\mu}\alpha (\hat{\mu} + \frac{3}{2}) + 2\alpha - \hat{\mu}] [2\hat{\mu}^2 \alpha (\alpha (\hat{\mu} + 2) - 1) + 2\hat{\mu}\alpha (\frac{3}{2}\alpha - 1) - 2\alpha + \hat{\mu}]}} \quad (3.87)$$

Los parámetros óptimos de diseño del dispositivo, definidos por las ecuaciones anteriores, se muestran de forma gráfica en las figuras 3.31 y 3.32

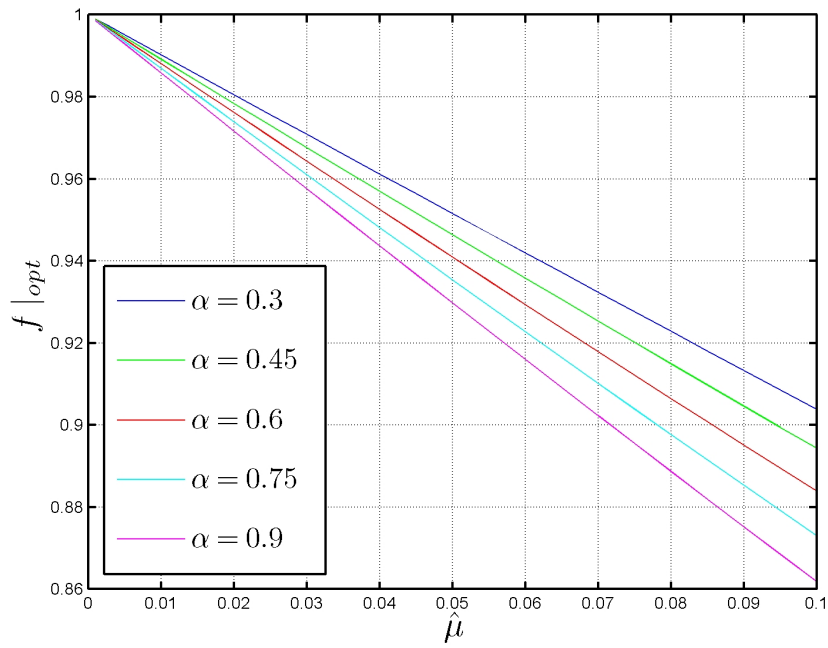


Figura 3.31: $f|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de α

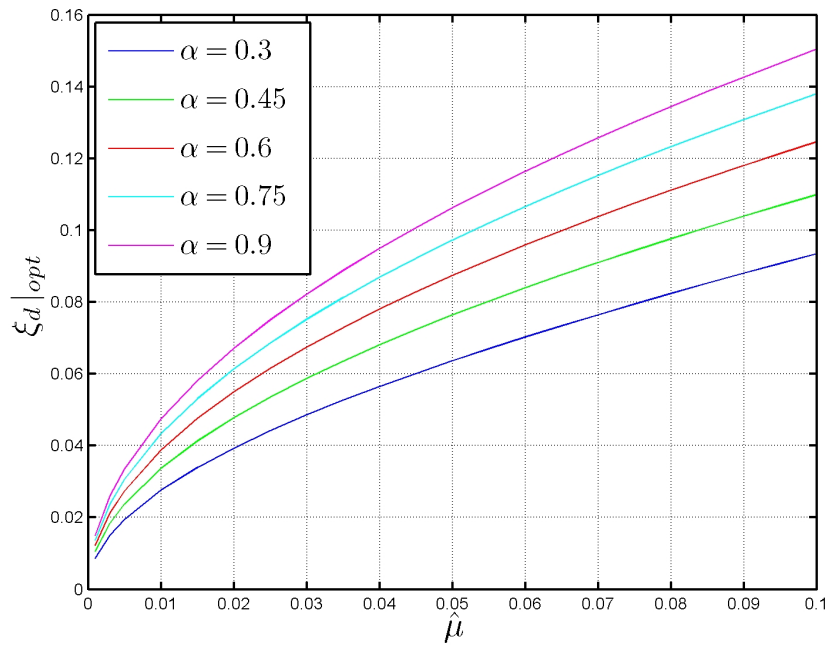


Figura 3.32: $\xi_d|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de α

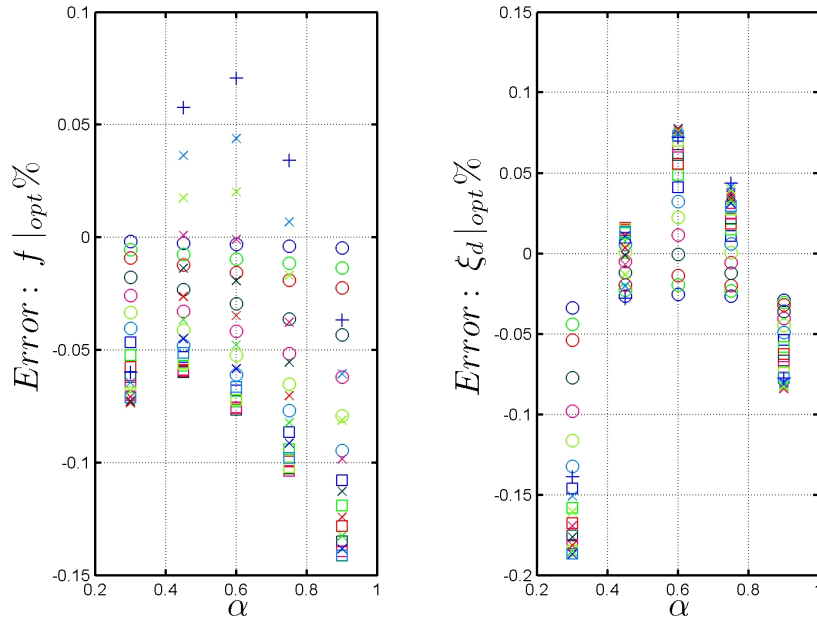


Figura 3.33: Error que se obtiene por el uso de las ecuaciones 3.88 y 3.89 con respecto a las ecuaciones 3.86 y 3.87.

Podemos advertir a partir de las figuras 3.31 y 3.32, que la variación de $f|_{OPT}$, para valores de $\hat{\mu} < 0.1$, es básicamente lineal. Por otra parte, después de estudiar la variación de $\xi_d|_{OPT}$, notamos que $(\xi_d|_{OPT})^2$ sigue una tendencia cuadrática en $\hat{\mu}$. Es posible pues, proponer expresiones alternativas al uso de las ecuaciones 3.86 y 3.87. Dichas expresiones, que se obtienen realizando los ajustes numéricos recién descritos, para valores de $\hat{\mu} < 0.1$ y para valores del factor de forma α comprendidos entre 0.3 y 0.9, se muestran a continuación:

$$f|_{OPT} = - (0.704\alpha + 0.745) \hat{\mu} + 1 \quad (3.88)$$

$$\xi_d|_{OPT} = \sqrt{(0.226\alpha^2 - 0.455\alpha + 0.242) \hat{\mu}^2 + 0.25\alpha\hat{\mu}} \quad (3.89)$$

El error que se obtiene por medio del uso de las expresiones anteriores, con respecto a las ecuaciones 3.86 y 3.87 se muestra gráficamente en la figura 3.33. En ella advertimos que el máximo error para $f|_{OPT}$ no supera el 0.15%, en tanto que para $\xi_d|_{OPT}$ este siempre es menor que 0.2%.

3.5. Parámetros óptimos de diseño, aceleración basal aleatoria tipo ruido blanco. Caso 2: Estructura primaria amortiguada.

Utilizaremos en este caso como índice para determinar los parámetros óptimos, el valor medio cuadrático del desplazamiento de la estructura primaria con el dispositivo instalado, normalizado con respecto a al valor medio cuadrático del desplazamiento de la estructura original más la masa equivalente del dispositivo, esto es:

$$\bar{E} \{u_p^2\} = \frac{E \{u_p^2\}}{E \{u_p^{*2}\}} \quad (3.90)$$

En donde $E \{u_p^{*2}\}$ representa el valor medio cuadrático del desplazamiento de la estructura sin el dispositivo instalado, pero más la masa equivalente de éste. Para determinar el valor de $E \{u_p^{*2}\}$ utilizamos la siguiente expresión [6]:

$$E \{u_p^{*2}\} = \int_{-\infty}^{\infty} |H_{u_p^* \ddot{u}_s}(\Omega)|^2 S_{\ddot{u}_s}(\Omega) d\Omega \quad (3.91)$$

Donde $H_{u_p^* \ddot{u}_s}(\Omega)$ es la función de transferencia de transferencia aceleración de base desplazamiento, del oscilador de un grado de libertad cuya rigidez es igual a la rigidez del sistema primario, pero cuya masa equivale a la masa total del sistema, M_T , y cuya razón de amortiguamiento crítico se encuentra definida por la ecuación 3.17. En virtud de lo anterior, y recordando que la densidad espectral de la aceleración de base se expresa según lo indicado en la ecuación 3.70, se obtiene:

$$E \{u_p^{*2}\} = \frac{\pi \ddot{u}_{so}}{2 \hat{\xi}_p \hat{\omega}_p^3} \quad (3.92)$$

Finalmente, el valor cuadrático medio normalizado, definido por la expresión 3.90 queda como sigue:

$$\bar{E} \{u_p^2\} = \frac{2 \hat{\xi}_p}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_g(\rho)| d\rho \quad (3.93)$$

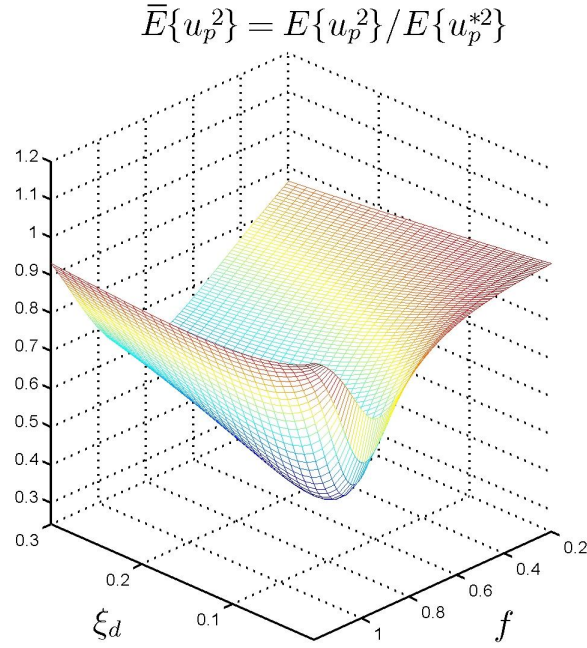


Figura 3.34: Valor medio cuadrático normalizado, en función de f y ξ_d , para $\hat{\mu} = 0.03$, $\hat{\xi}_p = 0.03$ y $\alpha = 0.75$. En este caso los valores óptimos de diseño para el dispositivo corresponden a: $f|_{OPT} = 0.945$ y $\xi_d|_{OPT} = 7.46\%$.

En donde la integral anterior se determina a partir de la expresión 3.83. En la figura 3.34 se muestra, a modo de ejemplo, la representación gráfica del valor medio cuadrático normalizado, en función de f y ξ_d , para un conjunto fijo de parámetros $\hat{\mu}$, $\hat{\xi}_p$ y α . Se puede apreciar a partir del gráfico que existe un par de valores para f y ξ_d que minimizan el valor de $\bar{E}\{u_p^2\}$. Los parámetros óptimos de diseño del DCLS son aquellos que minimizan el valor cuadrático medio normalizado.

Para determinar por tanto los parámetros óptimos de diseño del dispositivo, se realiza una búsqueda numérica que nos permite establecer los valores para f y ξ_d que minimizan el valor medio cuadrático normalizado. El procedimiento de búsqueda es similar al desarrollado en la sección anterior para el caso de excitación de base monofrecuencial. Este se realiza para cada valor de la razón de masas $\hat{\mu}$, razón de amortiguamiento crítico $\hat{\xi}_p$ y el factor de forma α , dentro del intervalo de interés que se desea para cada una de estas variables. Nuevamente se seleccionan los siguientes

valores: $0.001 \leq \hat{\mu} \leq 0.1$, $\hat{\xi}_p = 0.5\%$, 1% , 3% , 5% , 8% y 10% y $\alpha = 0.3, 0.45, 0.6, 0.75$ y 0.9 , los cuales cubren la gran mayoría de las aplicaciones prácticas.

El proceso de optimización numérica descrito anteriormente se realiza con la ayuda de un programa computacional escrito en Matlab©. Este determina el menor valor que alcanza $\bar{E} \{u_p^2\}$ para las variables f y ξ_d , cuando $\hat{\mu}$, $\hat{\xi}_p$, α poseen valores fijos. La búsqueda de este mínimo, $\min_{f, \xi_d} \{\bar{E} \{u_p^2\}\}$, se lleva a cabo sobre los intervalos: $0.7 \leq f \leq 1$ y $0 \leq \xi_d \leq 0.25$, los cuales garantizan la ocurrencia de $\min_{f, \xi_d} \{\bar{E} \{u_p^2\}\}$. Como se puede notar a partir de la figura 3.34 la función $\bar{E} \{u_p^2\}$ posee solo un mínimo global, siendo además una función suave lo que hace que el proceso de optimización converja rápidamente. Todo el proceso antes descrito se debe repetir para cada uno de los valores de $\hat{\mu}$, $\hat{\xi}_p$, α sobre sus respectivos intervalos de variación. A continuación se resumen los resultados obtenidos en las tablas y gráficos siguientes. Se ha incluido, de manera comparativa, el caso de cero amortiguamiento de la estructura primaria, en las figuras correspondientes a $f|_{OPT}$ y $\xi_d|_{OPT}$:

Tabla 3.9: Parámetros óptimos de diseño para el DCLS bajo excitación basal aleatoria tipo ruido blanco, $\alpha = 0.3$

$\hat{\mu} \setminus \hat{\xi}_p$	$f _{OPT}$					$\xi_d _{OPT}$					$\overline{E}\{u_p^2\} _{OPT}$					
	0,5 %	1 %	3 %	5 %	10 %	0,5 %	1 %	3 %	5 %	10 %	0,5 %	1 %	3 %	5 %	8 %	10 %
0.001	0.999	0.998	0.995	0.991	0.981	0.972	0.009	0.009	0.009	0.009	0.008	0.598	0.785	0.950	0.978	0.993
0.003	0.996	0.996	0.992	0.986	0.975	0.965	0.015	0.015	0.015	0.014	0.014	0.437	0.640	0.889	0.946	0.983
0.005	0.994	0.993	0.989	0.982	0.970	0.960	0.019	0.019	0.019	0.018	0.018	0.368	0.565	0.846	0.922	0.973
0.01	0.989	0.988	0.982	0.974	0.960	0.948	0.028	0.028	0.028	0.027	0.026	0.284	0.463	0.772	0.874	0.953
0.015	0.984	0.982	0.975	0.967	0.951	0.939	0.034	0.034	0.034	0.033	0.032	0.242	0.405	0.720	0.838	0.911
0.02	0.979	0.977	0.969	0.960	0.943	0.930	0.039	0.039	0.039	0.038	0.037	0.214	0.367	0.681	0.808	0.892
0.025	0.974	0.972	0.963	0.953	0.935	0.922	0.044	0.044	0.044	0.042	0.041	0.195	0.338	0.649	0.783	0.875
0.03	0.969	0.967	0.957	0.947	0.928	0.914	0.049	0.049	0.048	0.047	0.046	0.180	0.316	0.622	0.761	0.859
0.035	0.964	0.962	0.952	0.940	0.921	0.906	0.053	0.053	0.052	0.051	0.049	0.168	0.298	0.599	0.741	0.845
0.04	0.959	0.957	0.946	0.934	0.914	0.898	0.057	0.057	0.056	0.054	0.053	0.159	0.282	0.579	0.724	0.832
0.045	0.954	0.951	0.940	0.928	0.907	0.891	0.060	0.060	0.060	0.058	0.056	0.150	0.269	0.561	0.708	0.820
0.05	0.949	0.946	0.935	0.922	0.900	0.884	0.064	0.064	0.063	0.061	0.059	0.143	0.258	0.545	0.693	0.808
0.055	0.944	0.941	0.929	0.916	0.894	0.877	0.067	0.067	0.067	0.064	0.063	0.137	0.248	0.531	0.680	0.797
0.06	0.939	0.936	0.924	0.910	0.887	0.870	0.070	0.070	0.070	0.067	0.066	0.132	0.239	0.518	0.667	0.787
0.065	0.934	0.931	0.918	0.904	0.881	0.863	0.073	0.073	0.073	0.070	0.068	0.127	0.231	0.506	0.655	0.778
0.07	0.929	0.926	0.913	0.898	0.874	0.857	0.077	0.077	0.076	0.073	0.071	0.123	0.224	0.494	0.644	0.769
0.075	0.924	0.921	0.908	0.893	0.868	0.850	0.080	0.080	0.079	0.076	0.074	0.119	0.217	0.484	0.634	0.760
0.08	0.919	0.916	0.902	0.887	0.862	0.844	0.082	0.082	0.082	0.079	0.077	0.115	0.211	0.474	0.624	0.752
0.085	0.915	0.911	0.897	0.881	0.856	0.837	0.085	0.085	0.085	0.081	0.079	0.112	0.206	0.465	0.615	0.744
0.09	0.910	0.906	0.891	0.876	0.850	0.831	0.088	0.088	0.088	0.084	0.082	0.109	0.201	0.456	0.606	0.736
0.095	0.905	0.901	0.886	0.870	0.844	0.825	0.091	0.091	0.090	0.087	0.084	0.106	0.196	0.448	0.598	0.729
0.1	0.900	0.896	0.881	0.864	0.838	0.819	0.094	0.094	0.093	0.089	0.087	0.103	0.191	0.441	0.590	0.722

Tabla 3.10: Parámetros óptimos de diseño para el DCLS bajo excitación basal aleatoria tipo ruido blanco, $\alpha = 0.45$

$\hat{\mu} \setminus \hat{\xi}_p$	$f _{OPT}$					$\xi_d _{OPT}$					$\overline{E}\{u_p^2\} _{OPT}$					
	0,5 %	1 %	3 %	5 %	10 %	0,5 %	1 %	3 %	5 %	10 %	0,5 %	1 %	3 %	5 %	8 %	10 %
0.001	0.999	0.998	0.995	0.990	0.980	0.972	0.011	0.011	0.011	0.011	0.010	0.735	0.932	0.969	0.986	0.991
0.003	0.996	0.995	0.991	0.985	0.974	0.964	0.018	0.018	0.018	0.018	0.018	0.382	0.855	0.927	0.964	0.975
0.005	0.994	0.993	0.988	0.981	0.968	0.958	0.024	0.024	0.024	0.023	0.023	0.318	0.804	0.896	0.947	0.962
0.01	0.988	0.987	0.980	0.972	0.958	0.946	0.034	0.034	0.033	0.033	0.032	0.242	0.406	0.720	0.837	0.911
0.015	0.982	0.981	0.973	0.964	0.948	0.935	0.041	0.041	0.041	0.040	0.039	0.205	0.664	0.795	0.882	0.912
0.02	0.977	0.975	0.966	0.957	0.939	0.926	0.048	0.048	0.047	0.046	0.045	0.181	0.317	0.623	0.761	0.858
0.025	0.971	0.969	0.960	0.949	0.931	0.917	0.054	0.054	0.053	0.052	0.051	0.164	0.290	0.590	0.732	0.837
0.03	0.966	0.963	0.954	0.942	0.923	0.908	0.059	0.059	0.058	0.057	0.056	0.151	0.270	0.562	0.708	0.819
0.035	0.960	0.958	0.947	0.935	0.915	0.899	0.064	0.064	0.063	0.061	0.060	0.141	0.254	0.539	0.686	0.802
0.04	0.955	0.952	0.941	0.929	0.907	0.891	0.068	0.068	0.067	0.065	0.064	0.133	0.240	0.519	0.667	0.787
0.045	0.949	0.946	0.935	0.922	0.900	0.883	0.072	0.072	0.071	0.070	0.068	0.126	0.229	0.501	0.650	0.772
0.05	0.944	0.941	0.929	0.915	0.893	0.876	0.076	0.076	0.075	0.073	0.072	0.120	0.219	0.485	0.634	0.759
0.055	0.938	0.935	0.923	0.909	0.885	0.868	0.080	0.080	0.079	0.077	0.076	0.114	0.210	0.471	0.620	0.747
0.06	0.933	0.930	0.917	0.902	0.878	0.861	0.084	0.084	0.083	0.082	0.079	0.110	0.202	0.458	0.607	0.736
0.065	0.927	0.924	0.911	0.896	0.871	0.853	0.088	0.087	0.086	0.084	0.082	0.106	0.195	0.446	0.595	0.725
0.07	0.922	0.919	0.905	0.890	0.865	0.846	0.091	0.091	0.089	0.087	0.085	0.102	0.189	0.435	0.584	0.715
0.075	0.917	0.913	0.899	0.884	0.858	0.839	0.094	0.094	0.092	0.090	0.088	0.099	0.183	0.425	0.573	0.705
0.08	0.911	0.908	0.893	0.878	0.851	0.832	0.098	0.097	0.096	0.093	0.091	0.096	0.178	0.416	0.563	0.696
0.085	0.906	0.903	0.888	0.871	0.845	0.825	0.101	0.101	0.099	0.096	0.094	0.093	0.173	0.407	0.553	0.687
0.09	0.901	0.897	0.882	0.865	0.838	0.818	0.104	0.104	0.102	0.099	0.097	0.090	0.169	0.399	0.545	0.679
0.095	0.896	0.892	0.876	0.859	0.832	0.812	0.107	0.107	0.106	0.102	0.100	0.088	0.165	0.392	0.536	0.671
0.1	0.890	0.886	0.871	0.853	0.825	0.805	0.110	0.110	0.109	0.107	0.102	0.086	0.161	0.384	0.528	0.663

Tabla 3.11: Parámetros óptimos de diseño para el DCLS bajo excitación basal aleatoria tipo ruido blanco, $\alpha = 0.6$

$\hat{\mu} \setminus \hat{\xi}_p$	$f _{OPT}$					$\xi_d _{OPT}$					$\overline{E}\{u_p^2\} _{OPT}$					
	0,5 %	1 %	3 %	5 %	10 %	0,5 %	1 %	3 %	5 %	10 %	0,5 %	1 %	3 %	5 %	8 %	10 %
0.001	0.998	0.998	0.995	0.990	0.980	0.971	0.012	0.012	0.012	0.012	0.012	0.012	0.697	0.916	0.961	0.988
0.003	0.996	0.995	0.990	0.984	0.973	0.963	0.021	0.021	0.021	0.021	0.021	0.021	0.538	0.828	0.910	0.968
0.005	0.993	0.992	0.987	0.980	0.967	0.956	0.027	0.027	0.027	0.027	0.026	0.026	0.285	0.463	0.874	0.952
0.01	0.987	0.985	0.979	0.970	0.955	0.943	0.039	0.039	0.038	0.038	0.037	0.037	0.215	0.367	0.807	0.919
0.015	0.981	0.979	0.971	0.962	0.945	0.932	0.048	0.048	0.047	0.046	0.046	0.046	0.181	0.317	0.760	0.892
0.02	0.974	0.972	0.964	0.953	0.935	0.921	0.055	0.055	0.054	0.053	0.053	0.053	0.159	0.283	0.723	0.870
0.025	0.968	0.966	0.956	0.945	0.926	0.911	0.062	0.061	0.061	0.060	0.059	0.059	0.144	0.259	0.693	0.850
0.03	0.962	0.960	0.949	0.938	0.917	0.902	0.067	0.067	0.066	0.065	0.064	0.064	0.133	0.241	0.667	0.832
0.035	0.956	0.954	0.943	0.930	0.909	0.892	0.073	0.073	0.072	0.071	0.069	0.069	0.124	0.226	0.644	0.815
0.04	0.950	0.947	0.936	0.923	0.900	0.884	0.078	0.078	0.077	0.075	0.074	0.074	0.116	0.213	0.624	0.800
0.045	0.944	0.941	0.929	0.915	0.892	0.875	0.083	0.083	0.082	0.081	0.080	0.079	0.110	0.203	0.607	0.787
0.05	0.938	0.935	0.922	0.908	0.884	0.867	0.087	0.087	0.086	0.084	0.083	0.083	0.105	0.193	0.591	0.774
0.055	0.932	0.929	0.916	0.901	0.876	0.858	0.092	0.092	0.091	0.088	0.087	0.087	0.100	0.186	0.576	0.762
0.06	0.926	0.923	0.909	0.894	0.869	0.850	0.096	0.096	0.095	0.092	0.091	0.091	0.096	0.178	0.562	0.750
0.065	0.920	0.917	0.903	0.887	0.861	0.842	0.100	0.100	0.099	0.096	0.095	0.095	0.092	0.172	0.550	0.740
0.07	0.914	0.911	0.896	0.880	0.854	0.834	0.104	0.104	0.103	0.102	0.100	0.098	0.089	0.166	0.538	0.730
0.075	0.908	0.905	0.890	0.874	0.846	0.827	0.107	0.107	0.106	0.105	0.103	0.101	0.086	0.161	0.528	0.720
0.08	0.903	0.899	0.884	0.867	0.839	0.819	0.111	0.111	0.110	0.109	0.107	0.105	0.083	0.157	0.518	0.711
0.085	0.897	0.893	0.877	0.860	0.832	0.811	0.115	0.114	0.113	0.112	0.110	0.108	0.081	0.152	0.508	0.702
0.09	0.891	0.887	0.871	0.854	0.825	0.804	0.118	0.118	0.117	0.115	0.113	0.111	0.079	0.148	0.499	0.693
0.095	0.885	0.881	0.865	0.847	0.818	0.796	0.121	0.121	0.120	0.119	0.116	0.114	0.077	0.144	0.491	0.685
0.1	0.879	0.875	0.859	0.840	0.811	0.789	0.125	0.124	0.123	0.122	0.119	0.117	0.075	0.141	0.483	0.678

Tabla 3.12: Parámetros óptimos de diseño para el DCLS bajo excitación basal aleatoria tipo ruido blanco, $\alpha = 0.75$

$\hat{\mu} \setminus \hat{\xi}_p$	$f _{OPT}$										$\xi_d _{OPT}$										$\overline{E}\{u_p^2\} _{OPT}$									
	0,5%	1%	3%	5%	8%	10%	0,5%	1%	3%	5%	8%	10%	0,5%	1%	3%	5%	8%	10%	0,5%	1%	3%	5%	8%	10%						
0.001	0.998	0.998	0.994	0.989	0.979	0.970	0.014	0.014	0.014	0.014	0.013	0.014	0.014	0.014	0.013	0.463	0.666	0.901	0.953	0.978	0.985									
0.003	0.995	0.994	0.990	0.984	0.971	0.961	0.024	0.024	0.024	0.024	0.023	0.024	0.024	0.023	0.023	0.318	0.505	0.804	0.895	0.946	0.962									
0.005	0.992	0.991	0.986	0.979	0.965	0.955	0.031	0.031	0.031	0.030	0.030	0.031	0.030	0.030	0.030	0.261	0.431	0.744	0.854	0.921	0.943									
0.01	0.986	0.984	0.977	0.968	0.953	0.940	0.043	0.043	0.043	0.043	0.042	0.043	0.043	0.042	0.042	0.196	0.339	0.649	0.782	0.873	0.905									
0.015	0.979	0.977	0.969	0.959	0.941	0.928	0.053	0.053	0.053	0.052	0.051	0.053	0.052	0.051	0.051	0.164	0.291	0.589	0.731	0.836	0.875									
0.02	0.972	0.970	0.961	0.950	0.931	0.916	0.061	0.061	0.061	0.061	0.060	0.061	0.060	0.059	0.059	0.144	0.259	0.546	0.692	0.806	0.849									
0.025	0.965	0.963	0.953	0.941	0.921	0.906	0.069	0.069	0.068	0.068	0.067	0.069	0.067	0.066	0.066	0.130	0.237	0.512	0.660	0.780	0.827									
0.03	0.959	0.956	0.945	0.933	0.912	0.895	0.075	0.075	0.075	0.074	0.073	0.075	0.073	0.072	0.072	0.120	0.219	0.485	0.634	0.758	0.807									
0.035	0.952	0.949	0.938	0.925	0.902	0.886	0.081	0.081	0.081	0.080	0.079	0.081	0.079	0.078	0.078	0.111	0.205	0.462	0.610	0.737	0.789									
0.04	0.945	0.943	0.930	0.917	0.893	0.876	0.087	0.087	0.086	0.086	0.084	0.087	0.084	0.083	0.083	0.105	0.194	0.442	0.590	0.719	0.773									
0.045	0.939	0.936	0.923	0.909	0.884	0.866	0.092	0.092	0.091	0.091	0.089	0.092	0.089	0.088	0.088	0.099	0.184	0.425	0.572	0.703	0.758									
0.05	0.932	0.929	0.916	0.901	0.876	0.857	0.097	0.097	0.096	0.096	0.094	0.097	0.094	0.093	0.093	0.094	0.175	0.410	0.556	0.688	0.744									
0.055	0.926	0.923	0.909	0.893	0.867	0.848	0.102	0.102	0.101	0.100	0.099	0.102	0.099	0.097	0.097	0.090	0.168	0.397	0.541	0.674	0.731									
0.06	0.919	0.916	0.901	0.885	0.859	0.839	0.107	0.106	0.106	0.105	0.103	0.107	0.103	0.102	0.102	0.086	0.161	0.384	0.527	0.661	0.719									
0.065	0.913	0.909	0.894	0.878	0.851	0.831	0.111	0.111	0.110	0.109	0.107	0.111	0.107	0.106	0.106	0.083	0.156	0.373	0.515	0.648	0.707									
0.07	0.906	0.903	0.887	0.870	0.843	0.822	0.115	0.115	0.114	0.113	0.111	0.115	0.111	0.110	0.110	0.080	0.150	0.363	0.503	0.637	0.696									
0.075	0.900	0.896	0.880	0.863	0.834	0.814	0.119	0.119	0.118	0.117	0.115	0.119	0.115	0.113	0.113	0.077	0.145	0.354	0.492	0.626	0.686									
0.08	0.894	0.890	0.873	0.856	0.826	0.805	0.123	0.123	0.122	0.121	0.119	0.123	0.119	0.117	0.117	0.075	0.141	0.345	0.482	0.616	0.676									
0.085	0.887	0.883	0.867	0.848	0.819	0.797	0.127	0.127	0.126	0.125	0.122	0.127	0.122	0.121	0.121	0.072	0.137	0.337	0.472	0.606	0.667									
0.09	0.881	0.877	0.860	0.841	0.811	0.789	0.131	0.131	0.129	0.128	0.126	0.131	0.126	0.124	0.124	0.070	0.133	0.329	0.464	0.597	0.658									
0.095	0.875	0.870	0.853	0.834	0.803	0.781	0.134	0.134	0.133	0.132	0.129	0.134	0.129	0.127	0.127	0.068	0.130	0.322	0.455	0.588	0.649									
0.1	0.868	0.864	0.846	0.827	0.795	0.773	0.138	0.138	0.137	0.135	0.133	0.138	0.133	0.131	0.131	0.067	0.127	0.316	0.447	0.580	0.641									

Tabla 3.13: Parámetros óptimos de diseño para el DCLS bajo excitación basal aleatoria tipo ruido blanco, $\alpha = 0.9$

$\hat{\mu} \setminus \hat{\xi}_p$	$f _{OPT}$					$\xi_d _{OPT}$					$\overline{E}\{u_p^2\} _{OPT}$					
	0,5 %	1 %	3 %	5 %	10 %	0,5 %	1 %	3 %	5 %	10 %	0,5 %	1 %	3 %	5 %	8 %	10 %
0.001	0.998	0.998	0.994	0.989	0.979	0.970	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015	0.437	0.640	0.888	0.946	0.982
0.003	0.995	0.994	0.989	0.983	0.970	0.960	0.026	0.026	0.026	0.026	0.025	0.296	0.478	0.784	0.882	0.956
0.005	0.992	0.991	0.985	0.978	0.964	0.953	0.034	0.034	0.033	0.033	0.033	0.242	0.406	0.720	0.837	0.934
0.01	0.984	0.983	0.975	0.967	0.950	0.938	0.047	0.047	0.047	0.046	0.046	0.181	0.317	0.622	0.760	0.892
0.015	0.977	0.975	0.966	0.956	0.938	0.924	0.058	0.058	0.058	0.057	0.056	0.151	0.270	0.562	0.707	0.858
0.02	0.970	0.967	0.958	0.947	0.927	0.912	0.067	0.067	0.066	0.066	0.065	0.133	0.241	0.518	0.666	0.830
0.025	0.962	0.960	0.949	0.937	0.916	0.900	0.075	0.075	0.074	0.073	0.072	0.120	0.219	0.485	0.633	0.806
0.03	0.955	0.952	0.941	0.928	0.906	0.889	0.082	0.082	0.081	0.080	0.079	0.110	0.203	0.458	0.606	0.785
0.035	0.948	0.945	0.933	0.919	0.896	0.879	0.089	0.089	0.088	0.086	0.085	0.102	0.189	0.435	0.582	0.766
0.04	0.941	0.938	0.925	0.911	0.886	0.868	0.095	0.095	0.094	0.092	0.091	0.096	0.179	0.416	0.561	0.748
0.045	0.934	0.930	0.917	0.902	0.877	0.858	0.101	0.101	0.100	0.099	0.097	0.091	0.169	0.399	0.543	0.732
0.05	0.927	0.923	0.909	0.893	0.867	0.848	0.106	0.106	0.105	0.103	0.102	0.086	0.161	0.384	0.527	0.718
0.055	0.919	0.916	0.901	0.885	0.858	0.838	0.111	0.111	0.110	0.108	0.107	0.082	0.154	0.371	0.512	0.704
0.06	0.912	0.909	0.894	0.877	0.849	0.829	0.116	0.116	0.114	0.113	0.111	0.079	0.148	0.359	0.498	0.691
0.065	0.905	0.902	0.886	0.869	0.840	0.819	0.121	0.121	0.119	0.117	0.116	0.076	0.143	0.348	0.485	0.679
0.07	0.898	0.894	0.878	0.860	0.831	0.810	0.126	0.125	0.124	0.122	0.120	0.073	0.138	0.338	0.474	0.667
0.075	0.891	0.887	0.871	0.852	0.822	0.801	0.130	0.130	0.129	0.128	0.124	0.070	0.133	0.329	0.463	0.656
0.08	0.884	0.880	0.863	0.844	0.814	0.791	0.134	0.134	0.133	0.130	0.128	0.068	0.129	0.320	0.453	0.646
0.085	0.877	0.873	0.856	0.836	0.805	0.782	0.138	0.138	0.137	0.136	0.132	0.066	0.125	0.313	0.443	0.636
0.09	0.870	0.866	0.848	0.829	0.797	0.774	0.143	0.142	0.141	0.140	0.136	0.064	0.122	0.305	0.434	0.627
0.095	0.864	0.859	0.841	0.821	0.788	0.765	0.146	0.146	0.144	0.141	0.140	0.062	0.119	0.298	0.426	0.618
0.1	0.857	0.852	0.833	0.813	0.780	0.756	0.150	0.150	0.149	0.147	0.143	0.061	0.116	0.292	0.418	0.609

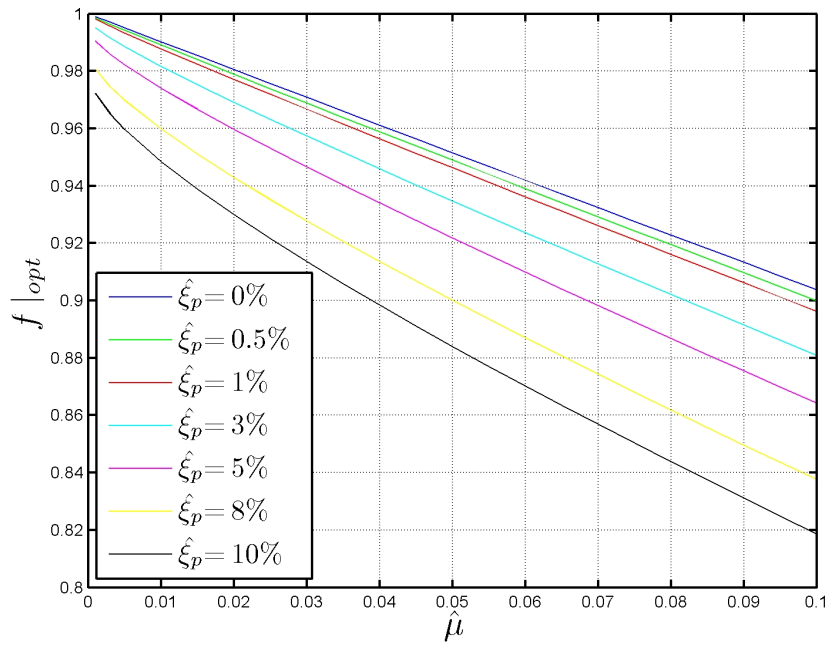


Figura 3.35: $f|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.3$

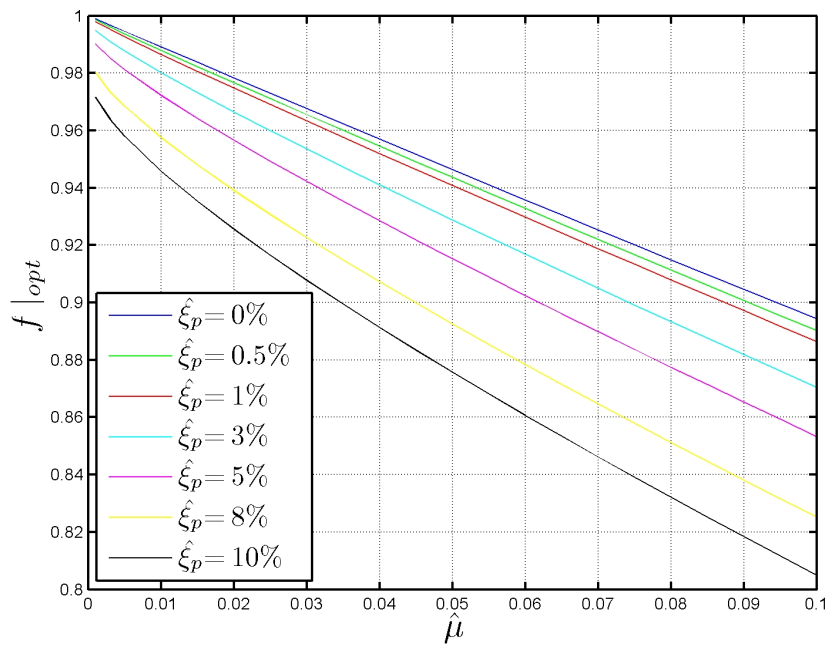


Figura 3.36: $f|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.45$

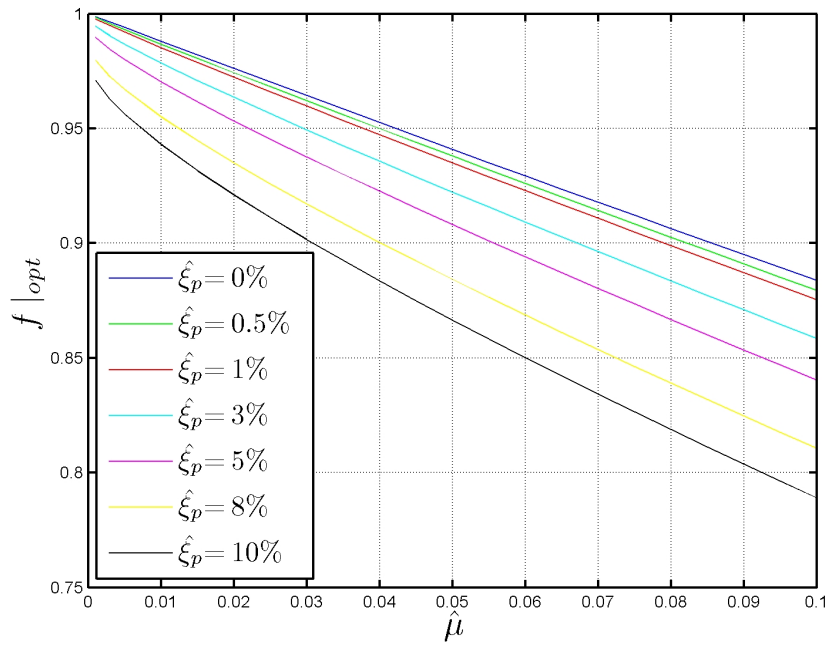


Figura 3.37: $f|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.6$

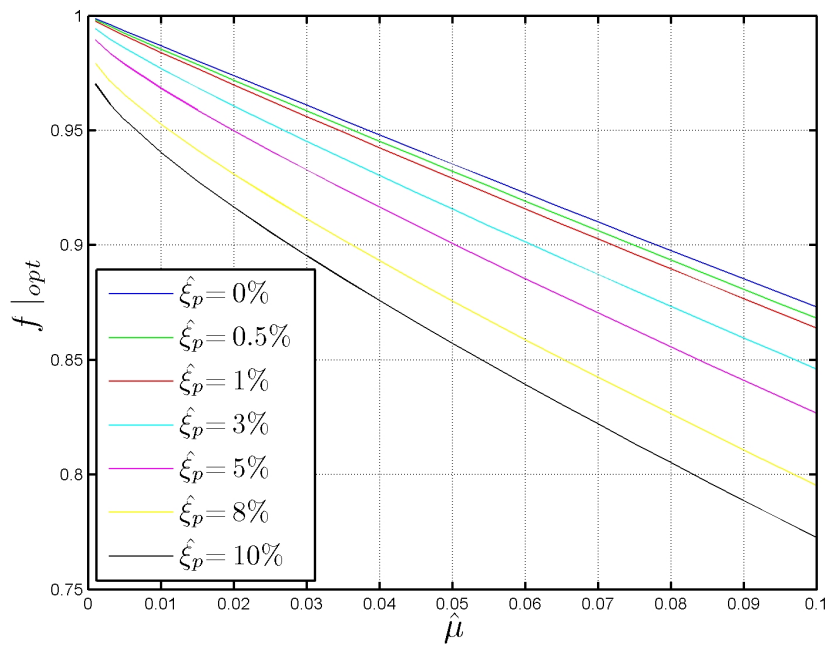


Figura 3.38: $f|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.75$

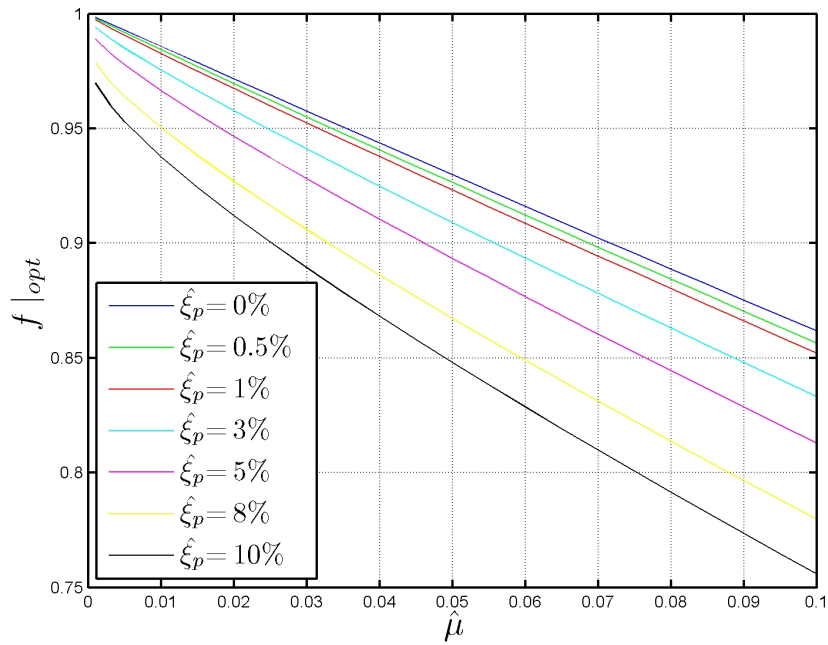


Figura 3.39: $f|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.9$

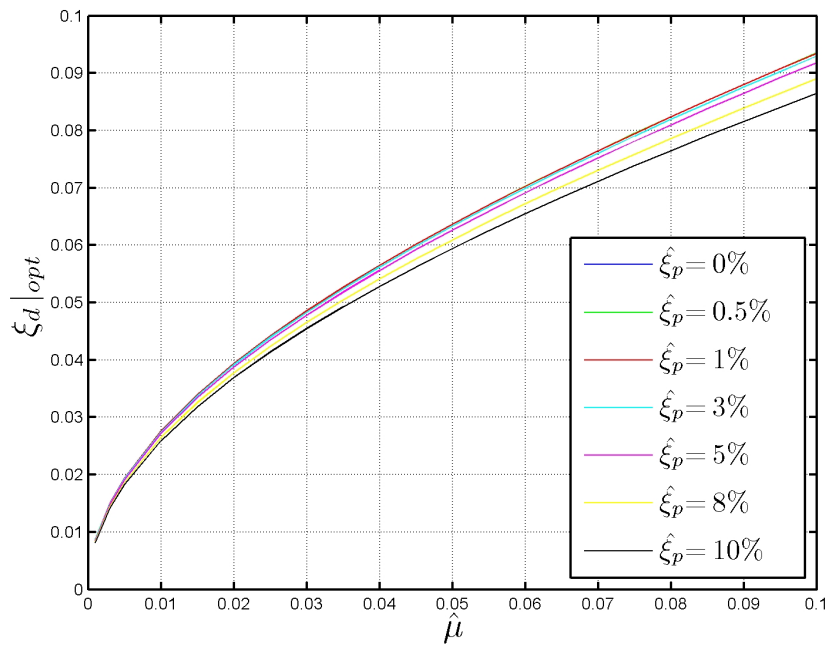


Figura 3.40: $\xi_d|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.3$

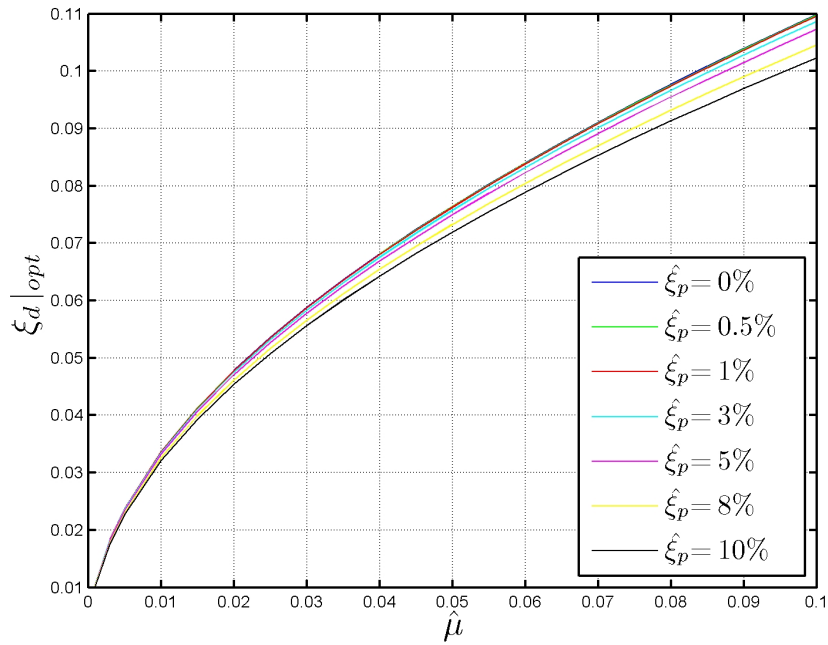


Figura 3.41: $\xi_d|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.45$

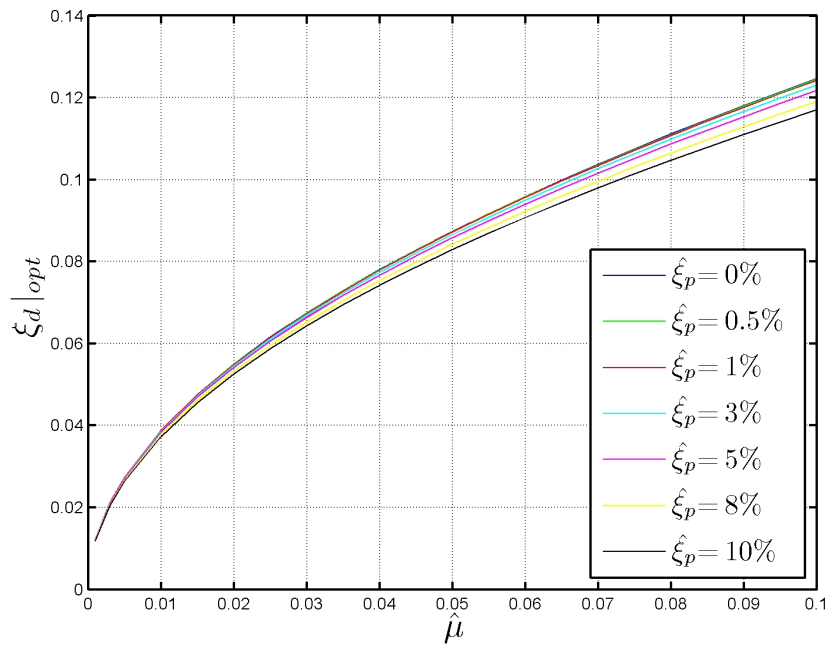


Figura 3.42: $\xi_d|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.6$

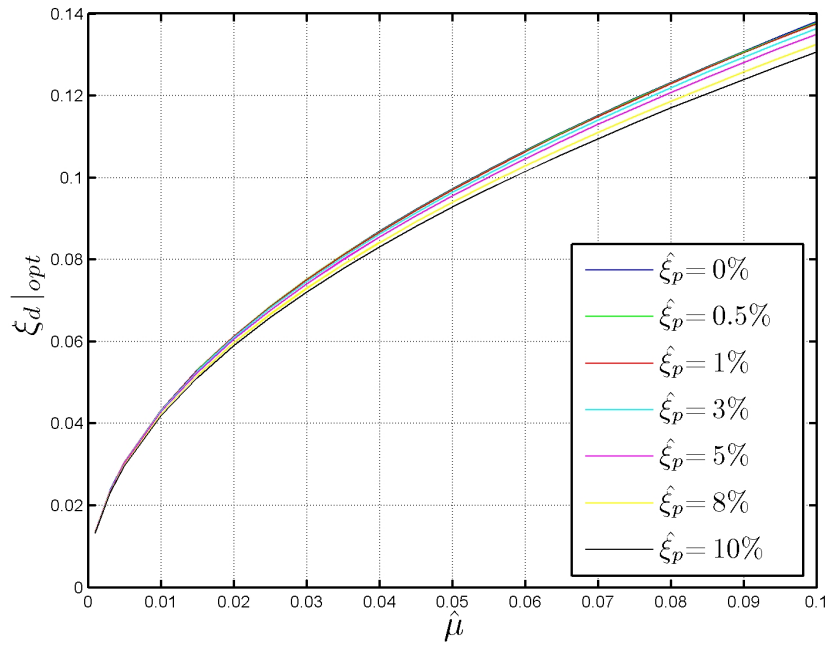


Figura 3.43: $\xi_d|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.75$

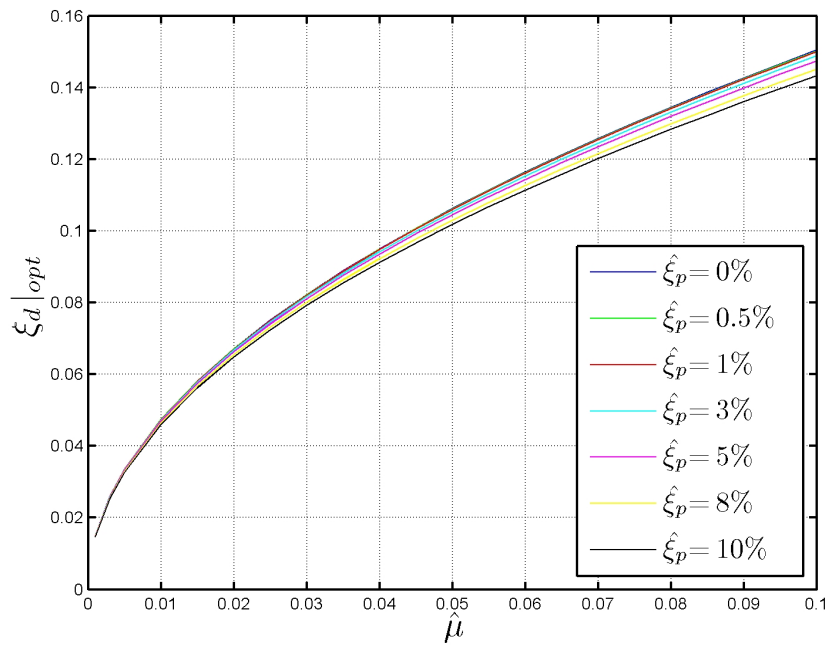


Figura 3.44: $\xi_d|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.9$

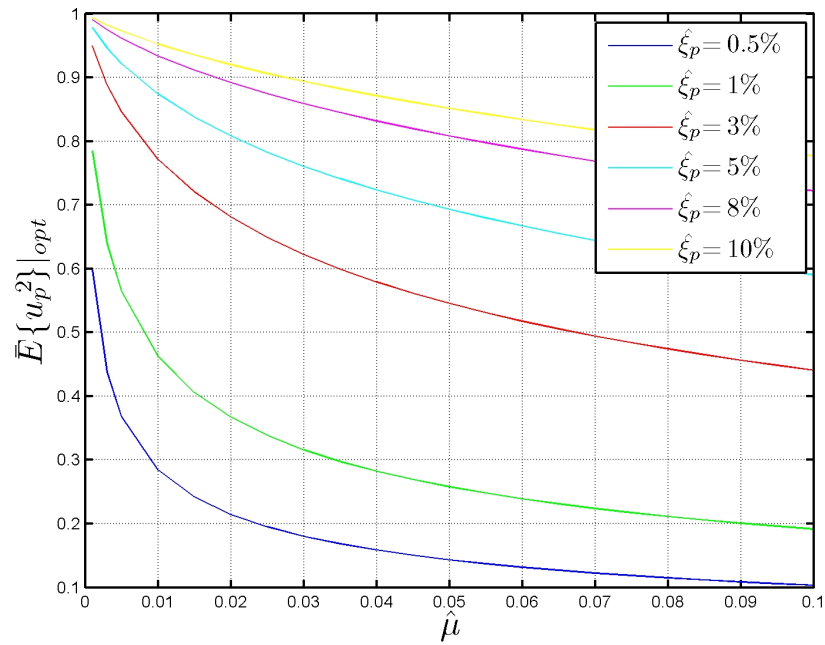


Figura 3.45: $\bar{E}\{u_p^2\}|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.3$

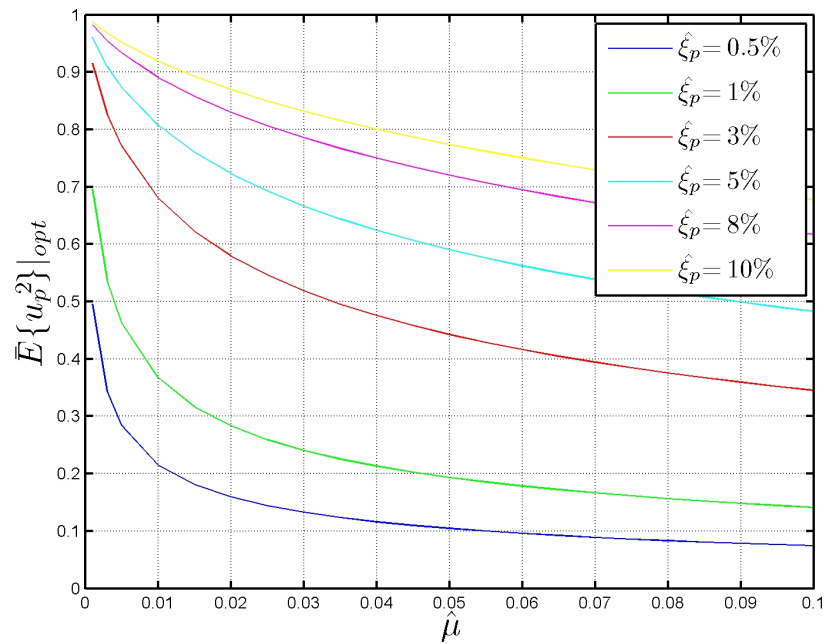


Figura 3.47: $\bar{E}\{u_p^2\}|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.6$

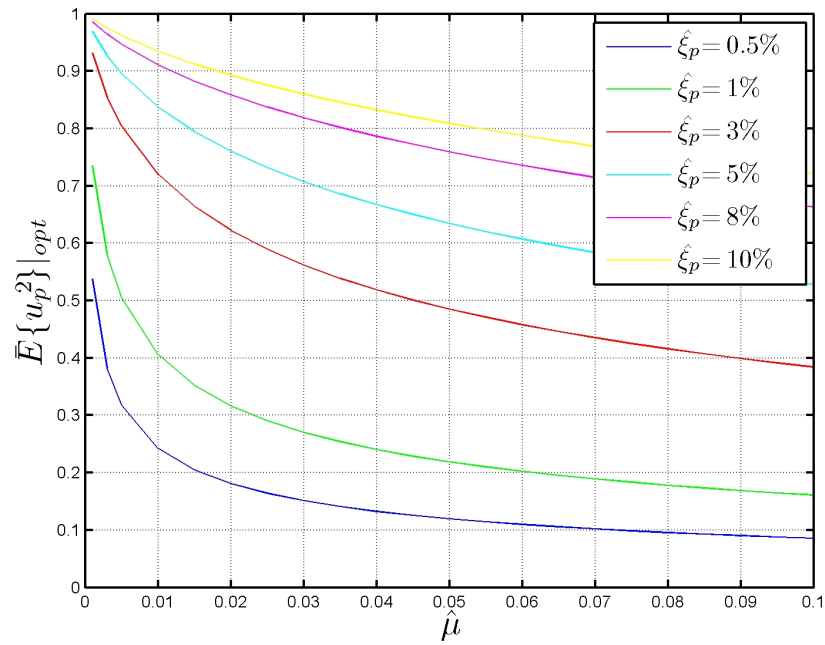


Figura 3.46: $\bar{E}\{u_p^2\}|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.45$

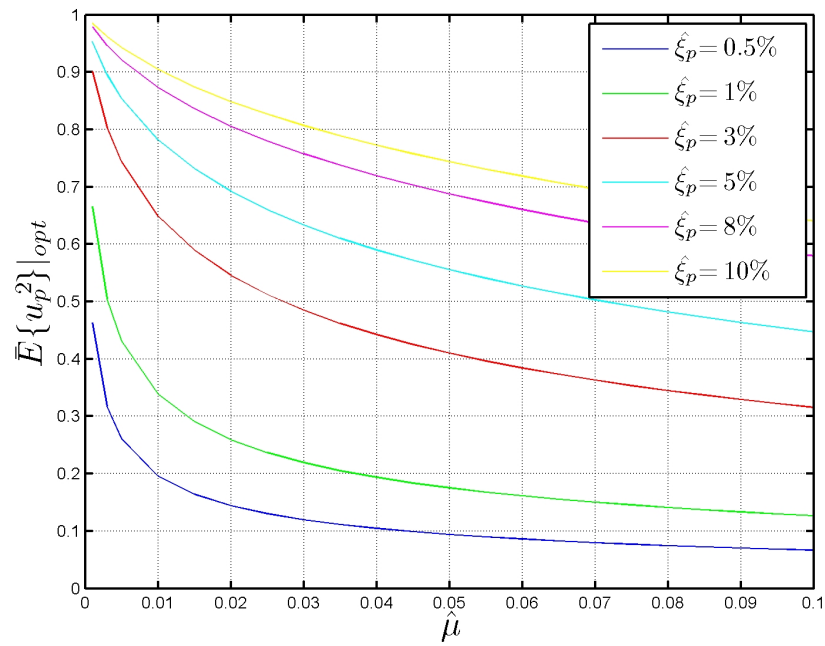


Figura 3.48: $\bar{E}\{u_p^2\}|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.75$

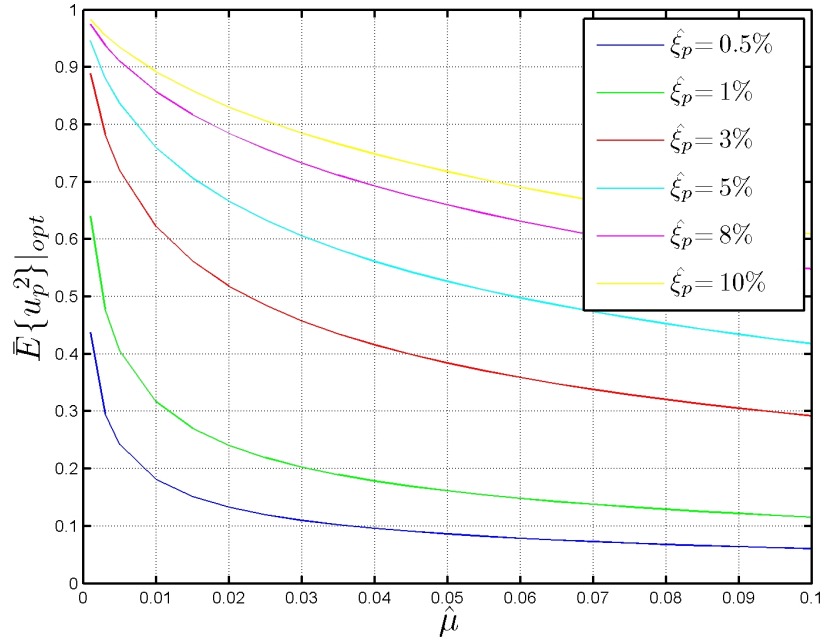


Figura 3.49: $\bar{E}\{u_p^2\}|_{OPT}$ en función de $\hat{\mu}$ para distintos valores de $\hat{\xi}_p$, y $\alpha = 0.9$

Al igual que en el caso de excitación basal monofrecuencial, se proponen expresiones analíticas para los parámetros óptimos determinados anteriormente. Dichas expresiones, junto con su determinación, se presentan a continuación:

1. Óptimo para la razón de frecuencias, $f|_{OPT}$

Para ajustar los valores obtenidos a partir del análisis numérico, utilizaremos la siguiente expresión:

$$f|_{OPT}(\hat{\mu}, \hat{\xi}_p, \alpha) = f|_{OPT}(\hat{\mu}, \alpha) - \Delta f(\hat{\mu}, \hat{\xi}_p, \alpha) \quad (3.94)$$

En donde $f|_{OPT}(\hat{\mu}, \alpha)$ corresponde al valor que adopta la razón óptima de frecuencias, cuando la estructura primaria no posee amortiguamiento, y cuyo valor se obtiene a partir de la ecuación 3.86 o 3.88. La diferencia entre este último término, y los valores determinados directamente del procedimiento de optimización numérica, se representa mediante $\Delta f(\hat{\mu}, \hat{\xi}_p, \alpha)$. Es este último término el que ajustaremos numéricamente en función de los parámetros $\hat{\mu}$, $\hat{\xi}_p$ y α . Después de analizar la va-

Tabla 3.14: Valores de los términos a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 y a_6

	Δf				
	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.45$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 0.9$
a_1	-2.3296	-1.4258	-1.0506	-0.8194	-0.6645
a_2	2.2726	2.3034	2.4322	2.5816	2.737
a_3	2.0993	2.0384	2.0139	1.9938	1.9805
a_4	0.0049	0.0141	0.0163	0.0174	0.0173
a_5	-0.3774	-0.4006	-0.3907	-0.3973	-0.3828
a_6	0.0931	0.1036	0.1082	0.1159	0.1185

riación de Δf con respecto a las variables descritas, podemos establecer la siguiente relación entre ellas:

$$\Delta f = \left(a_1 \hat{\xi}_p^2 + a_2 \hat{\xi}_p \right) \sqrt{\hat{\mu}} + a_3 \hat{\xi}_p^2 + a_4 \hat{\xi}_p \quad (3.95)$$

La expresión anterior nos indica que Δf puede ser ajustado de forma lineal en $\sqrt{\hat{\mu}}$. A su vez, los términos de este último ajuste siguen una tendencia cuadrática en $\hat{\xi}_p$, en donde los coeficientes libres son muy pequeños por lo cual pueden ser despreciados. Este último resultado significa que para $\hat{\xi}_p = 0$, se recupera la ecuación 3.86, o su equivalente simplificado 3.88, determinadas ambas bajo esta condición. El procedimiento de ajuste numérico recién descrito se repite para cada valor de α bajo análisis. La siguiente tabla resume los resultados obtenidos para los términos a_1 , a_2 , a_3 y a_4 .

Para valores de α distintos a los analizados, los términos a_1 , a_2 , a_3 y a_4 , pueden ajustarse nuevamente de forma cuadrática en α . Las expresiones resultantes se detallan a continuación:

$$a_1 = -5.212\alpha^2 + 8.878\alpha - 4.474 \quad (3.96)$$

$$a_2 = 0.857\alpha^2 - 0.223\alpha + 2.252 \quad (3.97)$$

$$a_3 = 0.317\alpha^2 - 0.568\alpha + 2.238 \quad (3.98)$$

$$a_4 = -0.063\alpha^2 + 0.094\alpha - 0.017 \quad (3.99)$$

Combinando el conjunto de expresiones anteriores con las ecuaciones 3.94 y 3.95 se obtiene el valor de la razón óptima de frecuencias. El máximo error obtenido por medio de estas expresiones, con respecto a los valores determinados directamente del análisis numérico, se muestra de manera gráfica en la figura 3.50 en donde se puede apreciar que este error no supera el 0.15 %, por lo que las expresiones anteriores se consideran satisfactorias.

2. Óptimo para la razón de amortiguamiento crítico $\xi_d|_{OPT}$

Siguiendo un procedimiento similar al adoptado para determinar una expresión para $f|_{OPT}$, los valores de $\xi_d|_{OPT}$, obtenidos a partir del análisis numérico, se interpolan mediante la siguiente la siguiente expresión:

$$\xi_d|_{OPT}(\hat{\mu}, \hat{\xi}_p, \alpha) = \xi_d|_{OPT}(\hat{\mu}, \alpha) + \Delta\xi_d(\hat{\mu}, \hat{\xi}_p, \alpha) \quad (3.100)$$

En donde, al igual que en el caso anterior, $\xi_d|_{OPT}(\hat{\mu}, \alpha)$ representa el valor óptimo del amortiguamiento, cuando la estructura primaria es no amortiguada, y $\Delta\xi_d(\hat{\mu}, \hat{\xi}_p, \alpha)$ corresponde a la diferencia entre los valores óptimos para estructura primaria amortiguada y estructura primaria no amortiguada. Dicha diferencia puede ser ajustada en función de las variables $\hat{\mu}$, $\hat{\xi}_p$ y α como sigue:

$$\Delta\xi_d = (a_1\hat{\xi}_p^2 + a_2\hat{\xi}_p) \hat{\mu} + (a_3\hat{\xi}_p^2 + a_4\hat{\xi}_p) \sqrt{\hat{\mu}} \quad (3.101)$$

De la expresión anterior, se desprende que la variación de $\Delta\xi_d$ es cuadrática con respecto a $\sqrt{\hat{\mu}}$. A su vez, los términos de este ajuste también siguen una tendencia cuadrática con respecto a $\hat{\xi}_p$. En ambos casos los coeficientes libres de dichos ajustes son muy pequeños por lo que pueden ser despreciados. La tabla siguiente resume los valores determinados por medio del análisis numérico para a_1 , a_2 , a_3 y a_4 .

Para valores de α distintos a los analizados, los términos a_1 , a_2 , a_3 y a_4 pueden ser nuevamente ajustados mediante polinomios de segundo grado en α . Las expresiones que resultan en este caso, se muestran a continuación.

$$a_1 = -19.983\alpha^2 + 31.733\alpha - 11.406 \quad (3.102)$$

Tabla 3.15: Valores de los términos a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 y a_6

	$\Delta\xi_d$				
	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.45$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 0.9$
a_1	-3.9163	-0.6531	0.2765	0.8532	1.1456
a_2	0.0588	-0.3581	-0.4421	-0.4765	-0.4565
a_3	-1.0309	-1.2471	-1.1804	-1.1498	-1.1098
a_4	-0.0054	0.023	0.0097	0.0013	-0.0139
a_5	-0.3774	-0.4006	-0.3907	-0.3973	-0.3828
a_6	0.0931	0.1036	0.1082	0.1159	0.1185

$$a_2 = 2.932\alpha^2 - 4.284\alpha + 1.048 \quad (3.103)$$

$$a_3 = 1.512\alpha^2 - 1.855\alpha - 0.643 \quad (3.104)$$

$$a_4 = -0.261\alpha^2 + 0.287\alpha - 0.064 \quad (3.105)$$

En la figura 3.50, se muestra el máximo error obtenido por medio del uso de las expresiones anteriores, para determinar el valor óptimo de la razón de amortiguamiento crítico del dispositivo. En este caso, el máximo no supera el 2%, valor que se produce para razones de masa $\hat{\mu}$ menores que 0.2%. Bajo estas condiciones, el valor óptimo del amortiguamiento es muy pequeño, por lo que una pequeña diferencia en su interpolación se traduce en mayores errores. No obstante lo anterior, para la gran mayoría de los casos, dicho error se mantiene por debajo del 0.5%.

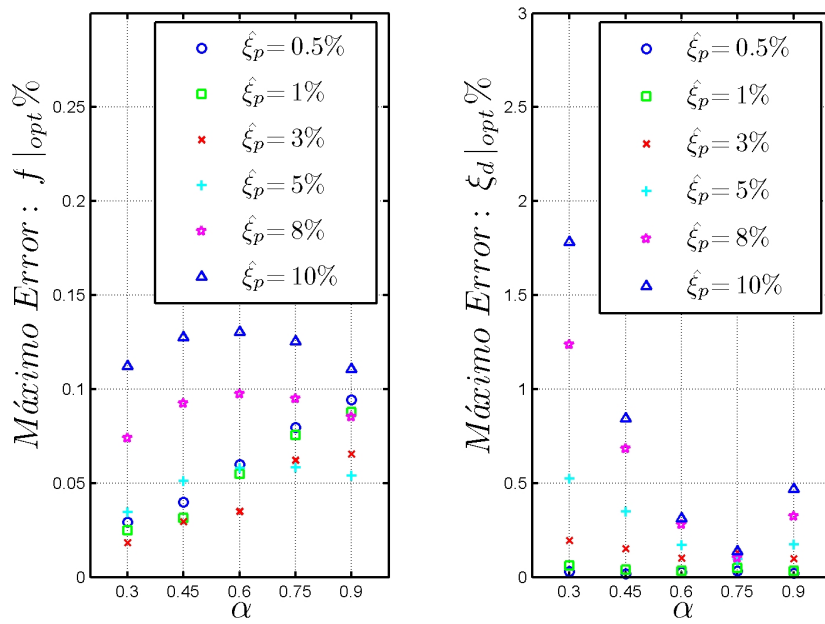


Figura 3.50: Máximos errores que se obtienen por medio del uso de las fórmulas propuestas, con respecto a los valores óptimos determinados directamente de los análisis de optimización numérica.

3.6. Parámetros óptimos de diseño, aceleración basal aleatoria tipo ruido blanco filtrado

Hasta este punto hemos investigado la respuesta del sistema estructura primaria disipador, sujeta en su base a la acción de procesos estocásticos tipo ruido blanco. En ciertas situaciones las acciones externas pueden ser representadas de forma adecuada mediante procesos estocásticos tipo ruido blanco filtrado. Específicamente nos interesa analizar el comportamiento del sistema cuando el mismo se encuentra ubicado sobre un estrato de suelo. Si suponemos que el suelo actúa como un oscilador de un grado de libertad, el mismo funcionará como filtro para las acciones sísmicas que provienen de la roca basal, las cuales pueden representarse a su vez como un proceso estocástico tipo ruido blanco. De esta forma la estructura en cuestión, es excitada en su base por un proceso estocástico tipo ruido blanco filtrado.

Tal como se expuso en el capítulo anterior, las características del filtro están definidas por la frecuencia de vibrar ω_s , y amortiguamiento ξ_s , predominantes del estrato de suelo. La función de transferencia entre la aceleración en la roca basal, y la aceleración total en la superficie del suelo queda determinada por la siguiente expresión:

$$H_{\ddot{u}_s \ddot{u}_R}(\Omega) = \frac{1 + 2\xi_s \frac{\Omega}{\omega_s} i}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_s}\right)^2 + 2\xi_s \frac{\Omega}{\omega_s} i} \quad (3.106)$$

Podemos expresar la función de transferencia en función de la variable adimensional ρ . Para ello definimos el parámetro $\rho_s = \hat{\omega}_p / \omega_s$. De esta manera la función de transferencia adopta la siguiente forma:

$$H_{\ddot{u}_s \ddot{u}_R}(\rho) = \frac{1 + 2\xi_s \rho \rho_s i}{1 - \rho^2 \rho_s^2 + 2\xi_s \rho \rho_s i} \quad (3.107)$$

Si consideramos que la aceleración en el nivel de la roca basal es del tipo ruido blanco, la función de densidad espectral de la aceleración de la superficie del suelo se obtiene como sigue:

$$S_{\ddot{u}_s}(\rho) = |H_{\ddot{u}_s \ddot{u}_R}(\rho)|^2 S_{\ddot{u}_R}(\rho) \quad (3.108)$$

Desarrollando esta expresión obtenemos:

$$S_{\ddot{u}_s}(\rho) = \ddot{u}_{Ro} \left(\frac{1 + 4\xi_s^2 \rho^2 \rho_s^2}{(1 - \rho^2 \rho_s^2)^2 + 4\xi_s^2 \rho^2 \rho_s^2} \right) \quad (3.109)$$

En donde \ddot{u}_{Ro} es la intensidad del espectro de potencia del ruido blanco en la roca basal. La expresión anterior corresponde al filtro de Kanai-Tajimi. Por otro lado, la esperanza cuadrática media del desplazamiento de la estructura primaria se escribe como:

$$E \{u_p^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} |H_{u_p \ddot{u}_s}(\rho)|^2 S_{\ddot{u}_s}(\rho) d\Omega \quad (3.110)$$

Reemplazando las ecuaciones 3.75 y 3.109 dentro de ecuación anterior, y recordando que $\Omega = \hat{\omega}_p \rho$, obtenemos:

$$E \{u_p^2\} = \frac{\ddot{u}_{Ro}}{\hat{\omega}_p} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Theta_1(\rho)}{\Theta_2(\rho)} \right) d\rho \quad (3.111)$$

En donde los términos $\Theta_1(\rho)$ y $\Theta_2(\rho)$, corresponden a polinomios de grado 6 y 12 en ρ respectivamente. Sus expresiones, las cuales se obtienen luego de hacer el desarrollo algebraico correspondiente, se detallan a continuación

$$\begin{aligned} \Theta_1(\rho) = & 4\xi_s^2 \rho_s^2 (1 - \alpha\hat{\mu})^2 \rho^6 + \left[(1 - \alpha\hat{\mu})^2 + 8\xi_s^2 \rho_s^2 f^2 (\alpha\hat{\mu} - 1 + 2\xi_d^2 (\hat{\mu} + 1)^2) \right] \rho^4 + \\ & 2f^2 \left[\alpha\hat{\mu} - 1 + 2\xi_d^2 (\hat{\mu} + 1)^2 + 2\xi_s^2 \rho_s^2 f^2 \right] \rho^2 + f^4 \end{aligned} \quad (3.112)$$

$$\begin{aligned}
\Theta_2(\rho) = & \rho_s^4 (\alpha\hat{\mu} - 1)^2 \rho^{12} + \left\{ 2\rho_s^2 (2\xi_s^2 - 1) (\alpha\hat{\mu} - 1)^2 + \rho_s^4 \left[2(\alpha\hat{\mu} - 1) (f^2 + 1) + \right. \right. \\
& \left. \left. 4\xi_d^2 f^2 (1 + \hat{\mu})^2 + 8\hat{\xi}_p \xi_d f \hat{\mu} (1 + \alpha) + 4\hat{\xi}_p^2 \right] \right\} \rho^{10} + \left\{ (\alpha\hat{\mu} - 1)^2 + 2\rho_s^2 (2\xi_s^2 - 1) \times \right. \\
& \left. \left[2(\alpha\hat{\mu} - 1) (f^2 + 1) + 4\xi_d^2 f^2 (1 + \hat{\mu})^2 + 8\hat{\xi}_p \xi_d f \hat{\mu} (1 + \alpha) + 4\hat{\xi}_p^2 \right] + \right. \\
& \left. \rho_s^4 \left[8\hat{\xi}_p^2 f^2 (2\xi_d^2 - 1) + (f^2 + 1)^2 + 2f^2 (1 - \alpha\hat{\mu}) - 8\xi_d f^2 \left[\xi_d (1 + \hat{\mu}) + \hat{\xi}_p f \hat{\mu} \right] \right] \right\} \rho^8 + \\
& \left\{ 4\xi_d^2 f^2 (1 + \hat{\mu})^2 + 8\hat{\xi}_p \xi_d f \hat{\mu} (1 + \alpha) + 4\hat{\xi}_p^2 + 2(\alpha\hat{\mu} - 1) (f^2 + 1) + 2\rho_s^2 (2\xi_s^2 - 1) \times \right. \\
& \left. \left[8\hat{\xi}_p^2 f^2 (2\xi_d^2 - 1) + (f^2 - 1)^2 + 2f^2 (1 - \alpha\hat{\mu}) - 8\xi_d f^2 \left[\xi_d (1 + \hat{\mu}) + \hat{\xi}_p f \hat{\mu} \right] \right] + \right. \\
& \left. 2\rho_s^2 f^2 \left(2\hat{\xi}_p^2 f^2 + 2\xi_d^2 - f^2 - 1 \right) \right\} \rho^6 + \left\{ 8\hat{\xi}_p^2 f^2 (2\xi_d^2 - 1) + (f^2 - 1)^2 + 2f^2 (1 - \alpha\hat{\mu}) - \right. \\
& \left. 8\xi_d f^2 \left[\xi_d (1 + \hat{\mu}) + \hat{\xi}_p f \hat{\mu} \right] + 4\rho_s^2 f^2 (2\xi_s^2 - 1) \left(2\hat{\xi}_p^2 f^2 + 2\xi_d^2 - f^2 - 1 \right) + \rho_s^4 f^4 \right\} \rho^4 + \\
& \left[2f^2 \left(2\hat{\xi}_p^2 f^2 + 2\xi_d^2 - f^2 - 1 \right) + 2\rho_s^2 (2\xi_s^2 - 1) f^4 \right] \rho^2 + f^4
\end{aligned} \tag{3.113}$$

Al igual que en los análisis realizados al sistema estructura primaria disipador bajo condiciones de excitaciones basal tipo ruido blanco, utilizaremos como índice para determinar los parámetros óptimos de diseño, el valor medio cuadrático del desplazamiento de la estructura primaria con el dispositivo instalado, normalizado con respecto a al valor medio cuadrático del desplazamiento de la estructura original más la masa equivalente del dispositivo. Este último valor se expresa de la siguiente forma:

$$E \{ u_p^{*2} \} = \int_{-\infty}^{\infty} |H_{u_p^* \ddot{u}_s}(\rho)|^2 S_{\ddot{u}_s}(\rho) d\Omega \tag{3.114}$$

Donde $H_{u_p^* \ddot{u}_s}(\Omega)$ es la función de transferencia entre la aceleración de base, y el desplazamiento del oscilador de un grado de libertad cuya rigidez es igual a la rigidez del sistema primario, pero cuya masa equivale a la masa total del sistema, M_T , y cuya razón de amortiguamiento crítico se encuentra definida por la ecuación 3.17. Sustituyendo la ecuación 3.109 en la expresión anterior y realizando el cambio de variable correspondiente, obtenemos:

$$E \{ u_p^{*2} \} = \frac{\ddot{u}_{Ro}}{\hat{\omega}_p^3} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Theta_3(\rho)}{\Theta_4(\rho)} \right) d\rho \tag{3.115}$$

En donde nuevamente los términos $\Theta_3(\rho)$ y $\Theta_4(\rho)$ representan polinomios en, ρ esta vez de grados 2 y 8 respectivamente. Sus expresiones se detallan a continuación:

$$\Theta_3(\rho) = 1 + 4\xi_s^2 \rho_s^2 \rho^2 \quad (3.116)$$

$$\begin{aligned} \Theta(\rho) = & \rho_s^4 \rho^8 + 2\rho_s^2 \left(2\xi_s^2 + 2\hat{\xi}_p^2 \rho_s^2 - \rho_s^2 - 1 \right) \rho^6 + \left(16\xi_s^2 \hat{\xi}_p^2 \rho_s^2 - 8\hat{\xi}_p^2 \rho_s^2 - \right. \\ & \left. 8\xi_s^2 \rho_s^2 + 4\rho_s^2 + \rho_s^4 + 1 \right) \rho^4 + 2 \left(2\xi_s^2 \rho_s^2 + 2\hat{\xi}_p^2 - \rho_s^2 - 1 \right) \rho^2 + 1 \end{aligned} \quad (3.117)$$

La esperanza cuadrática media normalizada, correspondiente al cociente de las expresiones 3.111 y 3.115, se expresa pues de la siguiente manera:

$$\bar{E} \{ u_p^2 \} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Theta_1(\rho)}{\Theta_2(\rho)} \right) d\rho}{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Theta_3(\rho)}{\Theta_4(\rho)} \right) d\rho} \quad (3.118)$$

La obtención de una expresión algebraica para la esperanza cuadrática normalizada, tal como se la obtuvo para el caso de excitación basal tipo ruido blanco, es en esta oportunidad extremadamente complicada y poco práctica. Como alternativa, la expresión 3.118, puede evaluarse de forma numérica. Para ello utilizamos el método recursivo de la cuadratura adaptativa de Simpson. En líneas generales, este método usa un estimado del error que se obtiene al evaluar la integral definida de una función por medio de la regla de Simpson. Si el error excede la tolerancia especificada, el algoritmo subdivide el intervalo de integración en dos y aplica el método adaptativo de Simpson a cada uno de ellos de forma recursiva. Esta técnica resulta ser más eficiente que aplicar directamente una regla compuesta de Simpson al intervalo completo, dado que requiere de menos evaluaciones de la función en lugares en donde la misma es bien aproximada por medio de una función cuadrática.

Utilizando el método recién descrito, podemos generar los gráficos que se muestran en la figura 3.51. En dicha figura se muestra el valor de la esperanza media cuadrática normalizada para dos valores de ρ_s , y para $\xi_s = 5\%$. En ambos casos se puede apreciar que existe un par de valores óptimos para f y ξ_d . En el segundo caso, el cual corresponde a un estrato de suelo 2 veces más flexible que la estructura primaria a controlar, aparece un mínimo local alrededor de $f = 0.5$. A medida que el amortiguamiento del estrato de suelo disminuye, este mínimo local pasa a ser un mínimo global de la esperanza cuadrática normalizada. En estos casos, la frecuencia óptima del dispositivo se aproxima al valor de la frecuencia de vibrar del suelo y no

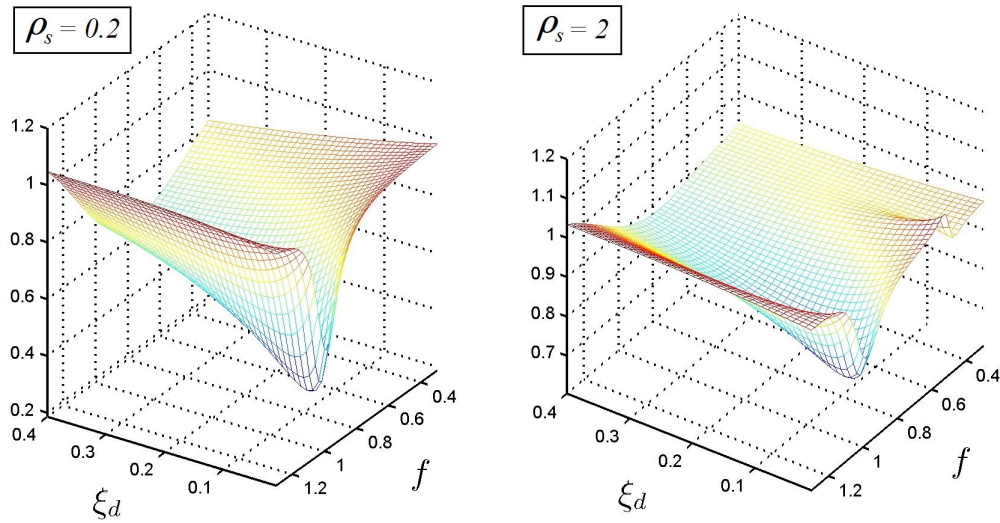


Figura 3.51: Esperanza cuadrática media normalizada para $\rho_s = 0.2$ y $\rho_s = 2$ respectivamente. En ambos casos el amortiguamiento del suelo corresponde a un 5%.

de la estructura primaria. Sin embargo, situaciones en las que la estructura primaria posee una frecuencia de vibrar más alta que la del suelo, y esté a su vez posee un bajo amortiguamiento rara vez se dan en la práctica.

La determinación de parámetros óptimos de diseño del dispositivo, para condiciones de excitación basal tipo ruido blanco filtrado dependerá pues, tanto de la frecuencia de vibrar del estrato de suelo, como de su amortiguamiento. La gran cantidad de combinaciones posibles que pueden presentarse hace que la proposición de fórmulas para los parámetros óptimos sea demasiado extensa y poco práctica. Estudiaremos en cambio la variación de los parámetros óptimos con respecto a aquellos determinados para condiciones de excitación basal tipo ruido blanco, para un valor fijo del amortiguamiento del estrato de suelo. Si denominamos los parámetros óptimos correspondientes a excitación basal tipo ruido blanco filtrado como: $f|_{OPT}^{RBF}$ y $\xi_d|_{OPT}^{RBF}$, y los parámetros óptimos correspondientes a excitación basal tipo ruido blanco como: $f|_{OPT}^{RB}$ y $\xi_d|_{OPT}^{RB}$, podemos analizar la relación entre ambos por medio de los siguientes factores

$$N_f = \frac{f|_{OPT}^{RBF}}{f|_{OPT}^{RB}} \quad (3.119)$$

$$N_{\xi d} = \frac{\xi_d|_{OPT}^{RBF}}{\xi_d|_{OPT}^{RB}} \quad (3.120)$$

Estos factores se han determinado para los siguientes valores de ρ_s , a saber: 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75 y 1. Se han escogido estos valores ya que representan aquellas situaciones que la estructura primaria a controlar es más flexible que el estrato de suelo sobre la cual se apoya. Por otra parte, el amortiguamiento característico del estrato de suelo utilizado en los análisis es de 10 %. Asimismo, los valores de razón de masas $\hat{\mu}$ son 0.5 %, 1 %, 2 %, 5 % y 10 %, en tanto la razón de amortiguamiento crítico $\hat{\xi}_p$ es 0.5 %, 1 %, 3 %, 5 %, 8 % y 10 %, y el factor de forma α : 0.3, 0.6 y 0.9. Utilizando los factores N_f y $N_{\xi d}$ podemos pues determinar los parámetros óptimos de diseño del dispositivo, para condiciones de excitación basal tipo ruido blanco filtrado, simplemente multiplicando dichos factores por los parámetros óptimos correspondientes a ruido blanco. Los factores N_f y $N_{\xi d}$, determinados para los parámetros recién descritos, se muestran en las siguientes figuras.

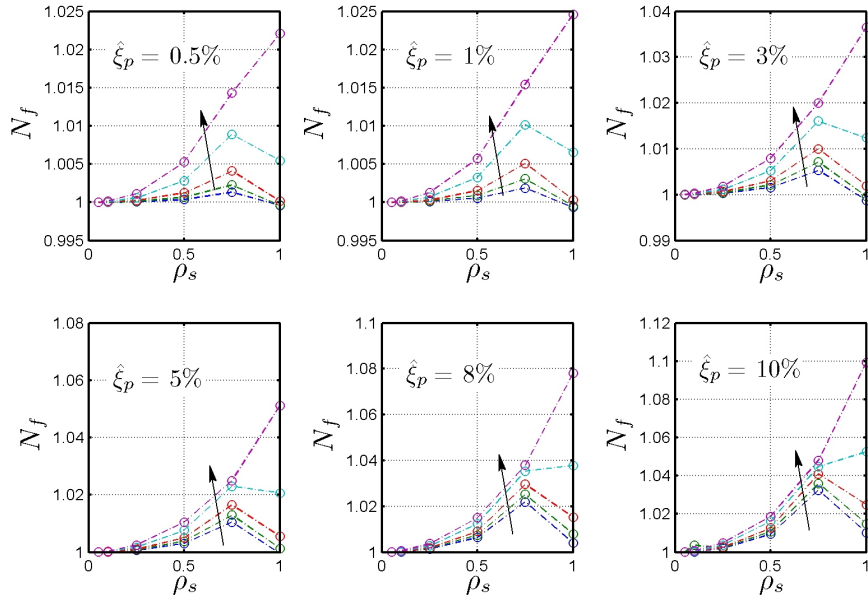


Figura 3.52: N_f v/s ρ_s para distintos $\hat{\xi}_p$ y para $\xi_s = 0.1$, $\alpha = 0.3$. Las flechas indican la dirección creciente para la razón de masas $\hat{\mu} = 0.5\%$, 1% , 2% , 5% y 10% .

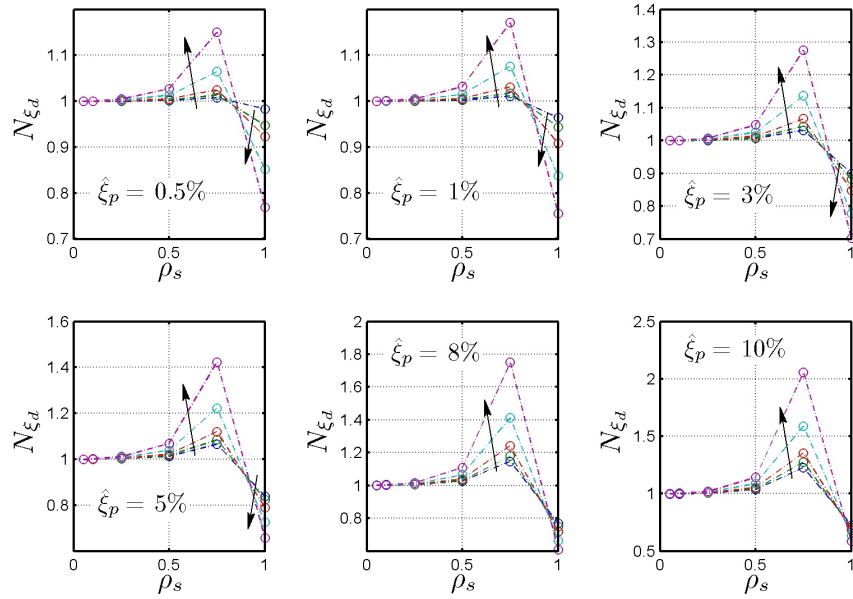


Figura 3.53: N_{ξ_d} v/s ρ_s para distintos $\hat{\xi}_p$ y para $\xi_s = 0.1$, $\alpha = 0.3$. Las flechas indican la dirección creciente para la razón de masas $\hat{\mu} = 0.5\%$, 1% , 2% , 5% y 10% .

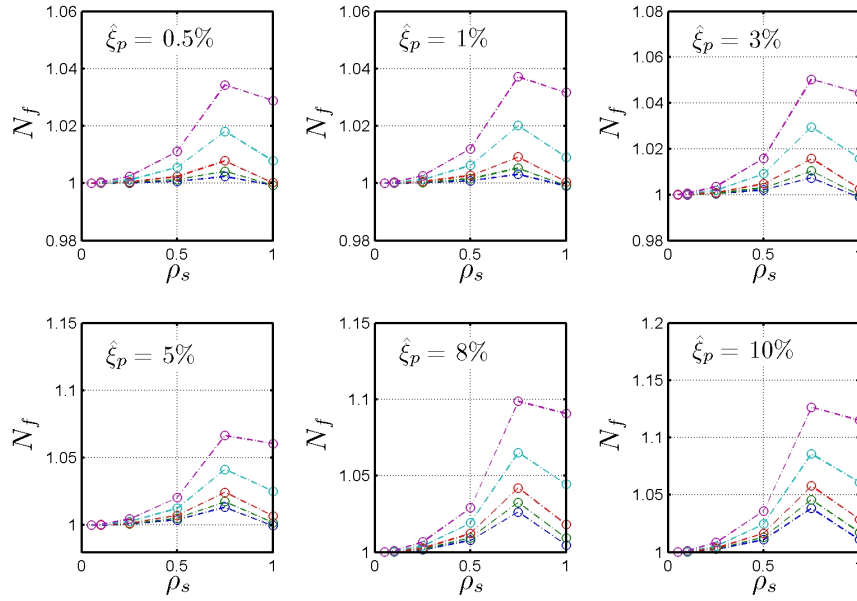


Figura 3.54: N_f v/s ρ_s para distintos $\hat{\xi}_p$ y para $\xi_s = 0.1$, $\alpha = 0.6$. Las flechas indican la dirección creciente para la razón de masas $\hat{\mu} = 0.5\%$, 1% , 2% , 5% y 10% .

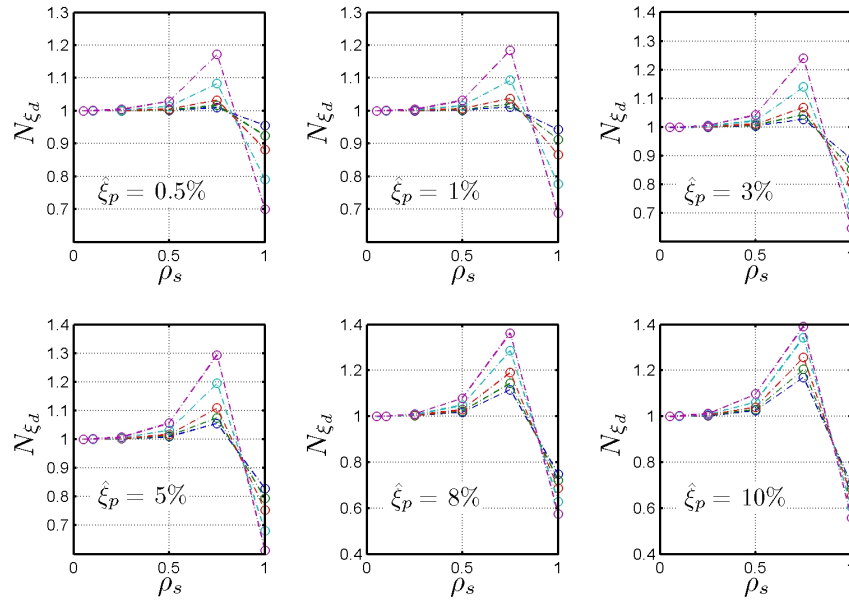


Figura 3.55: N_{ξ_d} v/s ρ_s para distintos $\hat{\xi}_p$ y para $\xi_s = 0.1$, $\alpha = 0.6$. Las flechas indican la dirección creciente para la razón de masas $\hat{\mu} = 0.5\%$, 1% , 2% , 5% y 10% .

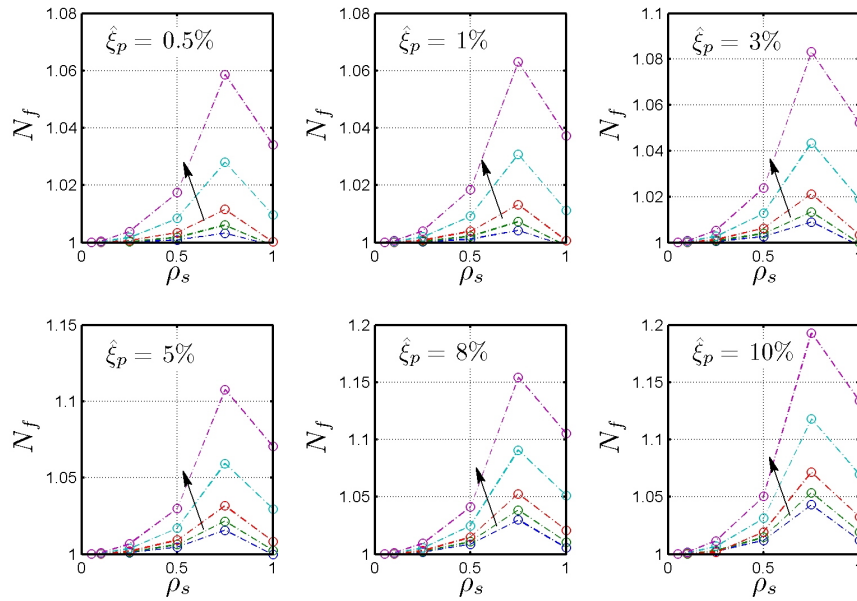


Figura 3.56: N_f v/s ρ_s para distintos $\hat{\xi}_p$ y para $\xi_s = 0.1$, $\alpha = 0.9$. Las flechas indican la dirección creciente para la razón de masas $\hat{\mu} = 0.5\%$, 1% , 2% , 5% y 10% .

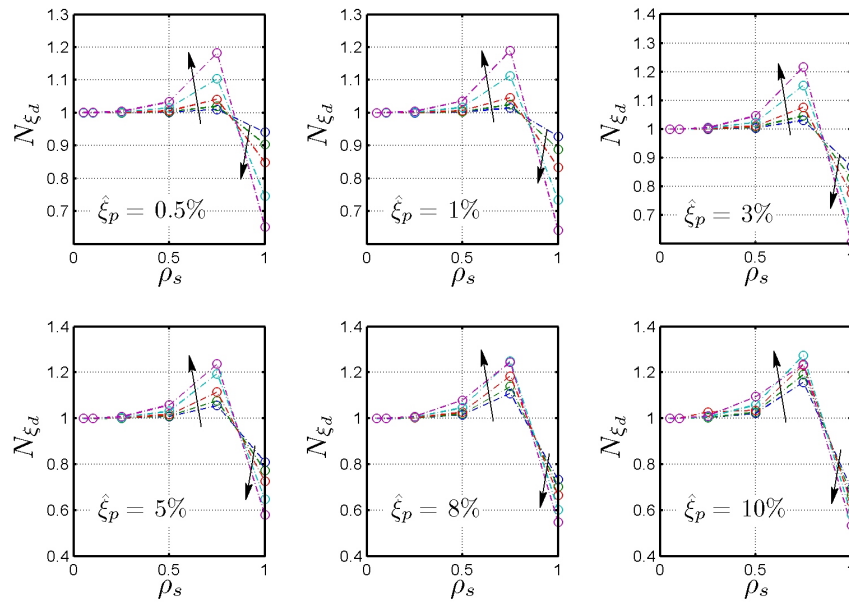


Figura 3.57: N_{ξ_d} v/s ρ_s para distintos $\hat{\xi}_p$ y para $\xi_s = 0.1$, $\alpha = 0.9$. Las flechas indican la dirección creciente para la razón de masas $\hat{\mu} = 0.5\%$, 1% , 2% , 5% y 10% .

Analizando las figuras 3.52 a 3.57, es fácil notar que cuando el valor de ρ_s se aproxima a cero, la variación de los parámetros $f|_{OPT}^{RBF}$ y $\xi_d|_{OPT}^{RBF}$, con respecto de los parámetros $f|_{OPT}^{RB}$ y $\xi_d|_{OPT}^{RB}$, es muy pequeña. Esto último independiente del valor de la razón de masas o del amortiguamiento de la estructura primaria. En estos casos la función de densidad espectral del ruido blanco filtrado actúa como un proceso estocástico de banda ancha, con una variación muy suave en el entorno de la frecuencia natural de vibrar de la estructura primaria. Como consecuencia el ruido blanco filtrado actúa esencialmente como un ruido blanco. En general, este resultado es aplicable a todos aquellos procesos que se comportan básicamente como procesos estocásticos de banda ancha en el entorno de la frecuencia natural de la estructura primaria. Por otra parte, se puede concluir que a medida que el amortiguamiento crítico de la estructura primaria se incrementa, los valores de N_f y N_{ξ_d} se alejan cada vez más de la unidad. Lo anterior era de esperarse, ya que en estos casos la función de transferencia de la estructura posee valores distribuidos sobre un mayor rango de frecuencias. Esto hace que la respuesta de la estructura se vea influenciada a su vez por un mayor rango de frecuencias de la función de densidad espectral de la excitación externa. Como consecuencia de ello, la idealización del movimiento de base como un proceso tipo ruido blanco ya no es adecuada, ya que sobre este mayor rango de frecuencias la función de densidad espectral del mismo posee una variación más marcada.

3.7. DCLS para sistemas de varios grados de libertad

La teoría de DCLS para sistemas de 1Gdl presentada anteriormente puede ser extendida para tratar sistemas de varios grados de libertad con DCLS. En la figura siguiente se muestra esquemáticamente un sistema de varios grados de libertad equipado con un DCLS.

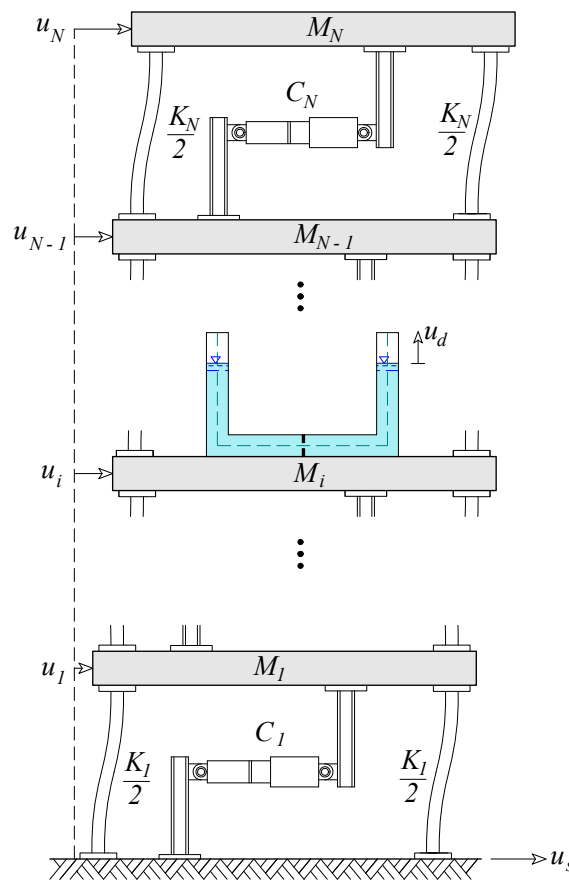


Figura 3.58: Sistema de varios gdl. con disipador de columna líquida sintonizada.

Para encontrar las ecuaciones de movimiento del sistema se puede utilizar la ecuación de Lagrange. En este caso debemos escribir $N + 1$ ecuaciones de movimiento, siendo N el total de grados de libertad de la estructura primaria. Para ello consideramos que el dispositivo se instala en el i -ésimo grado de libertad, y además el

desplazamiento de la superficie libre de líquido queda descrito por el $N + 1$ ésimo grado de libertad. Las expresiones para la energía cinética, T , la energía potencial elástica, V , y las fuerzas generalizadas, Q_j , $j = 1 \dots N + 1$, se determinan como sigue:

$$T = \frac{1}{2} \left(\left\{ \dot{U}_p \right\} + \{r\} \dot{u}_s \right)^T [M_p] \left(\left\{ U_p \right\} + \{r\} \dot{u}_s \right) + \frac{1}{2} m_u (\dot{u}_i + \dot{u}_s)^2 + \dots \quad (3.121)$$

$$\dots + AH\rho_f [\dot{u}_d^2 + (\dot{u}_i + \dot{u}_s)^2] + \frac{1}{2} AL\rho_f (\dot{u}_d + \dot{u}_i + \dot{u}_s)^2$$

$$V = \frac{1}{2} \{U_p\}^T [K_p] \{U_p\} + \rho_f g A u_d^2 + k_{eq} u_d^2 \quad (3.122)$$

$$\left. \begin{aligned} Q &= -[C_p] \left\{ \dot{U}_p \right\} + c_d \dot{u}_i L & (j = 1 \dots N) \\ Q_{N+1} &= -c_d u_d \end{aligned} \right\} \quad (3.123)$$

$$L^T = \left\langle \underset{(1 \times N)}{0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0} \right\rangle \quad (3.124)$$

En donde $[M_p]$, $[C_p]$ y $[K_p]$ corresponden a las matrices de masa amortiguamiento y rigidez del sistema primario respectivamente, a su vez el movimiento de la estructura está descrito mediante el vector de grados de libertad $\{U_p\}$. Además, $\{r\}$ es el vector de influencia para el desplazamiento de suelo, siendo $r_i = 1$. Procedemos a continuación a determinar las derivadas de la energía cinética y potencial elástica. Para la energía cinética y $\forall j \neq i \wedge N + 1$, se tiene:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_j} = \frac{1}{2} \{\delta_{kj}\}^T [M_p] \left(\left\{ \dot{U}_p \right\} + \{r\} \dot{u}_s \right) + \frac{1}{2} \left(\left\{ \dot{U}_p \right\} + \{r\} \dot{u}_s \right) [M_p] \{\delta_{kj}\}^T \quad (3.125)$$

En donde $\{\delta_{kj}\}$ es el vector delta de Kronecker, cuyo k -ésimo elemento vale 1 si $k = j$, y cero en otro caso. La expresión anterior puede reescribirse como sigue:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_j} = \frac{1}{2} \{\delta_{kj}\}^T [M_p] \left(\left\{ \dot{U}_p \right\} + \{r\} \dot{u}_s \right) + \frac{1}{2} \left[\{\delta_{kj}\}^T [M_p] \left(\left\{ \dot{U}_p \right\} + \{r\} \dot{u}_s \right) \right]^T \quad (3.126)$$

Recordando que para matrices simétricas se cumple que: $A + A^T = 2A$, podemos concluir:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_j} = \{\delta_{kj}\}^T [M_p] \left(\{\dot{U}_p\} + \{r\} \dot{u}_s \right) = \langle M_p \rangle_j \left(\{\dot{U}_p\} + \{r\} \dot{u}_s \right) \quad (3.127)$$

En donde $\langle M_p \rangle_j$ representa la j -ésima fila de la matriz de masa del sistema primario. Si consideramos que el sistema se representa mediante masas concentradas, lo cual significa que la matriz de masa es diagonal, se tiene:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_j} = m_j \dot{u}_j + r_j m_j \dot{u}_s \quad (3.128)$$

Evaluando ahora la derivada para $j = i$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} = \langle M_p \rangle_i \left(\{\dot{U}_p\} + \{r\} \dot{u}_s \right) + m_u (\dot{u}_i + \dot{u}_s) + \dots \\ \dots + 2AH\rho_f (\dot{u}_i + \dot{u}_s) + AL\rho_f (\dot{u}_d + \dot{u}_i + \dot{u}_s) \end{aligned} \quad (3.129)$$

La expresión anterior puede simplificarse recordando que la matriz de masa es diagonal. Además supondremos que la i -ésima componente del vector de influencia es igual a 1. De esta forma tenemos:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} = (m_i + m_f + m_u) \dot{u}_i + (m_i + m_f + m_u) \dot{u}_s + \hat{m} \dot{u}_d \quad (3.130)$$

Por último evaluamos la derivada de la energía cinética para $j = N + 1$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_d} = m_f \dot{u}_d + \hat{m} (\dot{u}_i + \dot{u}_s) \quad (3.131)$$

Procedemos a continuación a derivar con respecto al tiempo las expresiones 3.128, 3.130 y 3.131, con lo que obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_j} \right) &= m_j \ddot{u}_j + m_j r_j \ddot{u}_s & (\forall j \neq i \wedge N + 1) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \right) &= (m_i + m_f + m_u) \ddot{u}_i + (m_i + m_f + m_u) \ddot{u}_s + \hat{m} \ddot{u}_d \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_d} \right) &= m_f \ddot{u}_d + \hat{m} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_s) \end{aligned} \right\} \quad (3.132)$$

El grupo de ecuaciones definidos mediante la expresión anterior puede ser escrito de forma compacta, utilizando notación matricial, como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{U}} \right\} = & \left[\begin{array}{c|c} [\bar{M}_p] & \{M_{Pd}\} \\ \hline \{M_{Pd}\}^T & m_f \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{\ddot{U}_p\} \\ \ddot{u}_d \end{array} \right\} + \dots \\ & \dots + \left[\begin{array}{c|c} [\bar{M}_p] & \{M_{Pd}\} \\ \hline \{M_{Pd}\}^T & m_f \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{r\} \\ 0 \end{array} \right\} \ddot{u}_s \end{aligned} \quad (3.133)$$

En donde se definen los siguientes términos:

$$[\bar{M}_P] = [M_p] + L^T (m_f + m_u) L \quad (3.134)$$

$$\{M_{Pd}\} = \hat{m}L \quad (3.135)$$

$$\{U\}^T = \left\langle \{U_p\}^T \mid u_d \right\rangle \quad (3.136)$$

El vector L define por tanto la ubicación del dispositivo dentro de la estructura. Por otro lado, la derivada de la energía potencial elástica con respecto a los desplazamientos de los grados de libertad se expresa de la siguiente forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial u_j} &= \{\delta_{kj}\}^T [K_p] \{U_p\} = \langle K_p \rangle_j \{U_p\} & j = 1 \dots N \\ \frac{\partial V}{\partial u_d} &= 2(\rho_f g A + k_{eq}) u_d = k_d u_d \end{aligned} \right\} \quad (3.137)$$

En donde se utiliza la notación $\langle K_p \rangle_j$ para describir la j -ésima fila de la matriz de rigidez el sistema primario. Podemos nuevamente escribir la derivada de la energía potencial elástica de forma matricial como sigue:

$$\left\{ \frac{\partial V}{\partial U} \right\} = \left[\begin{array}{c|c} [K_p] & \{0\} \\ \hline \{0\}^T & k_d \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{U_p\} \\ u_d \end{array} \right\} \quad (3.138)$$

Asimismo escribimos de forma matricial las fuerzas no conservativas mediante la siguiente expresión:

$$\{Q\} = - \left[\begin{array}{c|c} [C_P] & \{C_{Pd}\} \\ \hline \{0\} & c_d \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{\dot{U}_p\} \\ \dot{u}_d \end{array} \right\} \quad (3.139)$$

Donde

$$\{C_{Pd}\} = -c_d L \quad (3.140)$$

Finalmente, reemplazamos las expresiones 3.133, 3.138 y 3.139 en el sistema de ecuaciones de movimiento de Lagrange, a saber:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{U}} \right\} - \left\{ \frac{\partial T}{\partial U} \right\} + \left\{ \frac{\partial V}{\partial U} \right\} = \{Q\} \quad (3.141)$$

Con lo que obtenemos el sistema de ecuaciones de movimiento del sistema primario más del disipador:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c|c} [\bar{M}_P] & \{M_{Pd}\} \\ \hline \{M_{Pd}\}^T & m_f \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{\ddot{U}_p\} \\ \ddot{u}_d \end{array} \right\} + \left[\begin{array}{c|c} [C_P] & \{C_{Pd}\} \\ \hline \{0\} & c_d \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{\dot{U}_p\} \\ \dot{u}_d \end{array} \right\} + \dots \\ & \dots + \left[\begin{array}{c|c} [K_p] & \{0\} \\ \hline \{0\}^T & k_d \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{U_p\} \\ u_d \end{array} \right\} = - \left[\begin{array}{c|c} [\bar{M}_P] & \{M_{Pd}\} \\ \hline \{M_{Pd}\}^T & m_f \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{r\} \\ 0 \end{array} \right\} \ddot{u}_s \end{aligned} \quad (3.142)$$

Reordenando la ecuación 3.142, podemos escribir las N primeras ecuaciones del sistema como sigue:

$$\begin{aligned} [M_p] \left\{ \ddot{U}_p \right\} + [C_p] \left\{ \dot{U}_p \right\} + [K_p] \{U_p\} &= - [M_p] \{r\} \ddot{u}_s - \dots \\ &\dots - [(m_f + m_u) (\ddot{u}_i + \ddot{u}_s) - c_d \dot{u}_d + \hat{m} \ddot{u}_d] L \end{aligned} \quad (3.143)$$

Por otra parte, la última ecuación, la cual describe el movimiento del líquido dentro del DCLS, adopta la siguiente forma:

$$m_f \ddot{u}_d + c_d \dot{u}_d + k_d u_d = -\hat{m} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_s) \quad (3.144)$$

Para el grupo de N ecuaciones definidas por la expresión 3.143 hacemos el siguiente cambio de coordenadas:

$$\{U_P\} = [\Phi] \{\mathbf{q}\} \quad (3.145)$$

En donde la matriz $[\Phi]$ corresponde a la matriz de formas modales del sistema primario, es decir sin el dispositivo instalado. Reemplazando la expresión anterior en la ecuación 3.143, y luego de premultiplicar $[\Phi]^T$ se obtiene:

$$[\mathbf{M}_P] \{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}_P] \{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}_P] \{\mathbf{q}\} = -[\Phi]^T [M_P] \{r\} \{\ddot{u}_s\} - \dots \quad (3.146)$$

$$\dots - [\Phi]^T [(m_f + m_u) (\ddot{u}_i + \ddot{u}_s) - c_d \dot{u}_d + \hat{m} \ddot{u}_d] L$$

Donde $[\mathbf{M}_P]$, $[\mathbf{C}_P]$ y $[\mathbf{K}_P]$ corresponden a las matrices modales de masa, amortiguamiento, y rigidez del sistema primario respectivamente. Considerando que la matriz $[C_P]$ es del tipo clásica, obtenemos un sistema de N ecuaciones desacopladas. Teniendo en cuenta lo anterior, podemos escribir la j -ésima ecuación del sistema 3.146 de la siguiente forma:

$$\mathbf{m}_j \ddot{\mathbf{q}}_j + \mathbf{c}_j \dot{\mathbf{q}}_j + \mathbf{k}_j \mathbf{q}_j = - \sum_{k=1}^N \phi_{k,j} M_k \ddot{u}_s - \phi_{i,j} [(m_f + m_u) (\ddot{u}_i + \ddot{u}_s) - c_d \dot{u}_d + \hat{m} \ddot{u}_d] \quad (3.147)$$

Utilizando la expresión 3.145 podemos expandir u_N como función de las coordenadas modales de la siguiente manera:

$$u_i = \sum_{k=1}^N \phi_{i,k} \mathbf{q}_k \quad (3.148)$$

La expresión anterior nos indica que la respuesta del grado de libertad u_i puede descomponerse en función de las respuestas modales. Si suponemos que el j -ésimo modo es aquel con mayor participación en la respuesta, podemos aproximar la respuesta de u_i de la siguiente manera:

$$u_i \approx \phi_{i,j} \mathbf{q}_j \quad (3.149)$$

Reemplazando la aproximación anterior en la ecuación 3.147 se obtiene:

$$(\tilde{\mathbf{m}}_j + m_f + m_u) \ddot{u}_i + \tilde{\mathbf{c}}_j \dot{u}_i + \tilde{\mathbf{k}}_j u_i = - (\mathbf{\Gamma}_j \tilde{\mathbf{m}}_j + m_f + m_u) \ddot{u}_s + c_d \dot{u}_d - \hat{m} \ddot{u}_d \quad (3.150)$$

Donde:

$$\tilde{\mathbf{m}}_j = \frac{\mathbf{m}_j}{\phi_{i,j}^2} \quad (3.151)$$

$$\tilde{\mathbf{c}}_j = \frac{\mathbf{c}_j}{\phi_{i,j}^2} \quad (3.152)$$

$$\tilde{\mathbf{k}}_j = \frac{\mathbf{k}_j}{\phi_{i,j}^2} \quad (3.153)$$

$$\mathbf{\Gamma}_j = \frac{\phi_{i,j}}{\mathbf{m}_j} \sum_{k=1}^N \phi_{k,j} M_k \quad (3.154)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación 3.150 puede ser escrito de la forma:

$$(\mathbf{\Gamma}_j \tilde{\mathbf{m}}_j + m_f + m_u) \ddot{u}_s = \beta_j (\tilde{\mathbf{m}}_j + m_f + m_u) \ddot{u}_s \quad (3.155)$$

Donde:

$$\beta_j = 1 + \frac{\tilde{\mathbf{m}}_j (\mathbf{\Gamma}_j - 1) (\alpha - \hat{\mu})}{\alpha (\tilde{\mathbf{m}}_j + m_u)} \quad (3.156)$$

Finalmente es posible escribir las ecuaciones 3.144 y 3.150 como se muestra a continuación:

$$\left. \begin{aligned} m_f \ddot{u}_d + c_d \dot{u}_d + k_d u_d &= -\hat{m} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_s) \\ (\tilde{\mathbf{m}}_j + m_f + m_u) \ddot{u}_i + \tilde{\mathbf{c}}_j \dot{u}_i + \tilde{\mathbf{k}}_j u_i &= -\beta_j (\tilde{\mathbf{m}}_j + m_f + m_u) \ddot{u}_s + c_d \dot{u}_d - \hat{m} \ddot{u}_d \end{aligned} \right\} \quad (3.157)$$

Comparando el sistema de ecuaciones anteriores con el sistema 3.11, obtenido para el caso en que la estructura primaria posee solo un grado de libertad, podemos notar que las mismas difieren sólo en el término β_j . La determinación de los factores de amplificación dinámica es análoga a aquella descrita en el apéndice B, en donde sólo se modifican los términos que acompañan a \ddot{u}_s . Los resultados se muestran en las siguientes ecuaciones:

$$H_9 = \frac{\sqrt{[\rho^2 (\beta_j - \alpha \hat{\mu}) - \beta_j f^2]^2 + 4\rho^2 f^2 \xi_d^2 (\beta_j + \hat{\mu})^2}}{|D_4|} \quad (3.158)$$

$$H_{10} = \frac{\alpha f^2 \sqrt{[\rho^2 (1 - \beta_j) - 1]^2 + 4\rho^2 \hat{\xi}_p^2}}{|D_4|} \quad (3.159)$$

Tal como fue demostrado para el disipador de masa sintonizada, la mejor ubicación para el DCLS corresponde a aquella en donde se producen los máximos desplazamientos. Expresado en otros términos, si se desea reducir la respuesta de la estructura haciendo uso de la menor cantidad de masa de líquido dentro del dispositivo, la ubicación de este debe corresponder a aquella en donde se presentan los mayores desplazamientos. Esto último puede expresarse en términos matemáticos con ayuda de las expresiones 3.12 y 3.151, de la siguiente manera:

$$m_f = \mu \frac{\phi_j^T \cdot [M_p] \cdot \phi_j}{\phi_{i,j}^2} \quad (3.160)$$

A medida que el valor de $\phi_{i,j}$ se incrementa, el valor de la masa de líquido dentro del dispositivo, m_f , disminuye. En este caso, si deseamos controlar la respuesta del j -ésimo modo, la ubicación óptima del DCLS corresponde a aquella con la mayor coordenada para el modo en cuestión.

Capítulo 4

Parámetros lineales equivalentes para el DCLS.

Según se mencionó en el capítulo anterior, los análisis realizados al sistema estructura primaria-DCLS fueron desarrollados en base al supuesto de que la fuerza disipativa, proveniente de las pérdidas asociadas al paso del fluido dentro las columnas del dispositivo, puede ser representada de manera lineal equivalente. El procedimiento mediante el cual se determina dicha fuerza lineal equivalente, se describe a continuación.

4.1. Pérdidas producidas por el paso del flujo a través del angostamiento

Antes de proceder con la determinación de los parámetros lineales equivalentes del dispositivo, estableceremos primeramente la expresión para la fuerza producida en el angostamiento en función de la velocidad del flujo de líquido a través de éste. Para ello considérese la figura siguiente.

En la figura 4.1 se muestra de forma esquemática el paso del líquido a través del angostamiento central del disipador. Cuando el flujo de líquido pasa por el angostamiento, las trayectorias del mismo se distorsionan. Producto de la inercia de las partículas de fluido, la sección transversal del flujo alcanza su máxima reducción más allá del angostamiento, sección denominada “vena contracta” con una sección efectiva de flujo igual a ψ_c . Las pérdidas se deben básicamente a la desaceleración

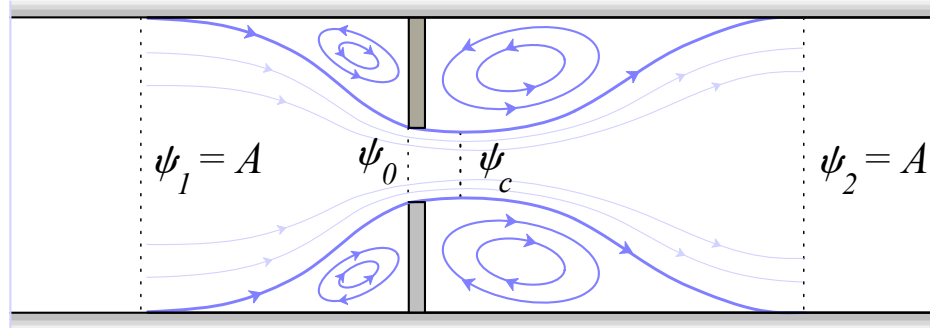


Figura 4.1: Cambio de velocidad y presión del flujo de líquido a través del angostamiento central.

del flujo, que ocurre entre la sección de vena contracta y cuando el flujo efectivo vuelve a ocupar toda la sección del ducto, de área $\psi_2 = A$. Si escribimos la ecuación de Bernoulli, entre las secciones 1 y 2, la pérdida de energía producida por el angostamiento central Λ , se expresa matemáticamente como sigue:

$$\frac{p_1}{\rho_f g} + \frac{\alpha V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho_f g} + \frac{\alpha V_2^2}{2g} + \Lambda \quad (4.1)$$

En donde p_1 , p_2 y V_1 , V_2 son respectivamente las presiones y velocidades medias en las secciones 1 y 2, y α es un factor de corrección para la energía cinética que toma en cuenta la variación del perfil de velocidades a lo largo de la sección transversal, siendo igual a 2 para un flujo laminar en una tubería circular, y 1.04 a 1.11 para flujo turbulento. Considerando la ecuación de continuidad, podemos establecer entre las secciones 1 y 2:

$$Q = V_1 \cdot A = V_2 \cdot A \Rightarrow V_1 = V_2 = V \quad (4.2)$$

Resultando que la pérdida de energía está dada por:

$$\Lambda = \frac{p_1 - p_2}{\rho_f g} \quad (4.3)$$

Es frecuente expresar la pérdida como una proporción de $\frac{V^2}{2g}$, a través de un coeficiente de pérdida singular η , es decir:

$$\Lambda = \eta \frac{V^2}{2g} \quad (4.4)$$

De este modo resulta:

$$\eta = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho_f V^2} \quad (4.5)$$

Siendo Δp la caída de presión en el segmento 1-2, es decir $p_1 - p_2$. El coeficiente de pérdida singular puede ser interpretado pues, como el cociente entre la energía total perdida sobre el segmento 1-2, con respecto a la energía cinética en la sección 1. Podemos a continuación obtener la fuerza opuesta al flujo de líquido por el angostamiento central, aplicando el teorema de cantidad de movimiento entre las secciones 1 y 2, esto es:

$$F = A(p_1 - p_2) = \frac{1}{2}\rho_f \eta A V^2 \quad (4.6)$$

El coeficiente η depende de la razón de áreas, también denominada razón de bloqueo $\bar{\psi} = 1 - \frac{\psi_0}{A}$, espesor y biselado de la placa orificio, y el régimen del flujo. Esto último se cuantifica mediante el número de Reynolds, definido como $Re = \frac{V_0 D_h}{\nu}$, donde V_0 es la velocidad media del líquido en el angostamiento, D_h el diámetro hidráulico, definido como 4 veces el área del orificio dividido por su perímetro y ν la viscosidad cinemática del fluido.

Los regímenes de flujo pueden ser laminar ($Re \lesssim 2000$), turbulento ($Re \gtrsim 3500$), o transición laminar - turbulento. En general, para con números de Reynolds grandes, el coeficiente η es independiente de los efectos viscosos y depende sólo de la geometría. Para flujos laminares, con valores de Re bajos (inferiores a 10), η es inversamente proporcional a Re . De este modo, la fuerza F (ecuación 4.6), tiene dos comportamientos extremos: $F \propto V^2$ para flujos turbulentos y $F \propto V$ para flujos laminares con Re bajo. Es posible encontrar muchas expresiones para η , en términos de la geometría del ducto y orificio y del Re (por ejemplo, Idelchilk (1966) [10], Blewins [11], etc.). Siguiendo a Hooper es posible utilizar una relación del tipo siguiente, válida para todo los regímenes de flujo:

$$\eta = \frac{a}{Re} + \eta_\infty \quad (4.7)$$

donde η_∞ es el valor del coeficiente de pérdida para flujo turbulento y depende de la razón entre las áreas de la vena contracta y el ducto:

$$\eta_\infty = \left(1 - \frac{\psi_c}{\psi_2}\right)^2 \quad (4.8)$$

El área de la vena contracta se liga área del orificio mediante un coeficiente de contracción, $c_c : \psi_c = c_c \psi_o$. Usualmente, a y η_∞ se determinan experimentalmente para considerar efectos difíciles de incorporar analíticamente, tales como forma del orificio, terminaciones del biselado, etc. En general, los valores de a son del orden $10^2 - 10^3$ y η_∞ está en el rango 0.5 - 1.

La relación 4.7 propuesta por Hooper es generalizable a cualquier tipo de singularidad, en particular codos (en este caso, los valores de a y η_∞ son menores que los asociados a un orificio).

Finalmente, es interesante notar que la fuerza debido a la fricción del líquido con las paredes del ducto, F_f también se comporta como $F_f \propto V^2$ para régimen turbulento y $F_f \propto V$ para régimen laminar, siendo V la velocidad en el ducto. La fuerza friccional está dada por:

$$F_f = \tau \chi L_T \quad (4.9)$$

donde τ es el esfuerzo de corte actuando sobre las paredes, χ es el perímetro interior del ducto y L_T la longitud total de la columna líquida. El esfuerzo de corte se relaciona con la velocidad media del flujo en el ducto mediante la relación:

$$\tau = \frac{1}{8} \rho_f f V^2 \quad (4.10)$$

donde f es el factor de fricción, el que puede ser determinado, por ejemplo, a partir de la relación de Colebrook y White [13] para flujos turbulentos, dada por:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{Re \sqrt{f}} + \frac{\epsilon}{3.7 D_h} \right) \quad (4.11)$$

En la ecuación 4.11, ϵ es el tamaño de la aspereza de la pared. Es posible determinar dos casos extremos de esta ecuación: uno es cuando ϵ es lo suficientemente grande como para no permitir la presencia de una subcapa viscosa en la pared, teniéndose una pared hidrodinámicamente rugosa, y el otro caso es cuando las aspereza es tan

CAPÍTULO 4. PARÁMETROS LINEALES EQUIVALENTES PARA EL DCLS.170

pequeña que queda inmersa dentro de la subcapa viscosa, dando origen a una pared lisa. El caso intermedio se denomina pared en transición lisa-rugosa.

Para una pared hidrodinámicamente rugosa, la ecuación 4.11 se reduce a:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D_h} \right) \quad (4.12)$$

y para una pared hidrodinámicamente lisa:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{Re\sqrt{f}} \right) \quad (4.13)$$

Una aproximación experimental de la ecuación 4.13 es la determinada por Blasius, válida para $Re < 10^5$:

$$f = \frac{0.3164}{Re^{0.25}} \quad (4.14)$$

Podemos ver que para el flujo turbulento en un ducto de pared hidrodinámicamente rugosa, el factor de fricción sólo depende de características geométricas (dimensiones del ducto y de la aspereza) y no de la velocidad, por lo que la fuerza debido a la fricción es proporcional a la velocidad media al cuadrado, $F_f \propto V^2$. Para flujo turbulento en pared hidrodinámicamente lisa, de la ecuación 4.14 resulta como $F_f \propto V^{1.75}$.

Para flujos laminares, el factor de fricción está dado por (White (1991), [13])

$$f = \frac{c}{Re} \quad (4.15)$$

donde c es un valor numérico que depende de la geometría. Para un ducto de sección circular, $c = 16$ y para uno de sección cuadrada $c \approx 14$. De este modo, resulta que la fuerza debido a la fricción del líquido con las paredes del ducto depende linealmente de la velocidad, $F_f \propto V$.

Por lo tanto, independientemente del mecanismo que origina las fuerzas del fluido, ya sean singularidades o debido a fricción, se cumple que la fuerza total debido al fluido, $F_T = F + F_f$, donde F representa la resultante de las fuerzas actuando sobre todas las singularidades, tiene dos comportamientos extremos:

Para régimen turbulento:

$$F_T = \frac{1}{2} \rho_f \eta_{Turb} A V^2 \quad (4.16)$$

CAPÍTULO 4. PARÁMETROS LINEALES EQUIVALENTES PARA EL DCLS.171

Para régimen laminar, con bajos números de Reynolds:

$$F_T = \frac{1}{2}\rho_f\eta_{Lam}AV \quad (4.17)$$

donde η_{Turb} y η_{Lam} son funciones de las características geométricas, dimensiones del ducto y singularidades.

Entre ambos comportamientos extremos, la fuerza total está dada por:

$$F_T = \frac{1}{2}\rho_f\tilde{\eta}AV^2 \quad (4.18)$$

donde $\tilde{\eta}$ es una función que depende tanto de las características geométricas y dimensiones del ducto como del número de Reynolds, y por lo tanto de la velocidad.

En la gran mayoría de los casos, el líquido utilizado en los disipadores de columna líquida sintonizada es agua, cuya viscosidad cinemática, a 25°C, es de $8.94 \times 10^{-7} [m^2/seg]$. Este valor tiene como consecuencia que durante gran parte de la oscilación el régimen de flujo sea de tipo turbulento. Tal como se verá en el siguiente capítulo, en el cual se diseñará un dispositivo de este tipo, la velocidad por sobre la cual el régimen de flujo es turbulento es muy baja, aproximadamente $4 [cm/seg]$. Es por esto último que supondremos que en la práctica el régimen de flujo es siempre turbulento, lo que significa que la fuerza opuesta por el angostamiento central, la fricción y los codos, es proporcional al cuadrado de la velocidad de la superficie libre de líquido. En consecuencia, el coeficiente de pérdida puede expresarse como sigue:

$$\eta = \left[\left(\frac{a}{Re} + \eta_\infty \right) + 2 \left(\frac{a_c}{Re} + \eta_c \right) + f \frac{L_T}{D_h} \right] = \eta(\bar{\psi}) \quad (4.19)$$

El primer término de la expresión anterior representa la pérdida producida por el angostamiento central, el segundo término corresponde a la pérdida producida en los codos, y el tercer término corresponde a las pérdidas friccionales, siendo L_T la longitud total de líquido, y D_h el diámetro hidráulico de la sección transversal del disipador. Toda la expresión 4.19 es función sólo de $\bar{\psi}$ en régimen turbulento. La estimación teórica de los parámetros requeridos para evaluar la ecuación 4.19 es muy complicada, como alternativa pueden usarse expresiones calibradas mediante análisis experimentales. Para ello utilizaremos los resultados obtenidos por J.-C. Wu et al. [29], quienes determinaron la relación entre el coeficiente de pérdidas η , con respecto a $\bar{\psi}$, para disipadores de columna líquida sintonizada. Para ello se

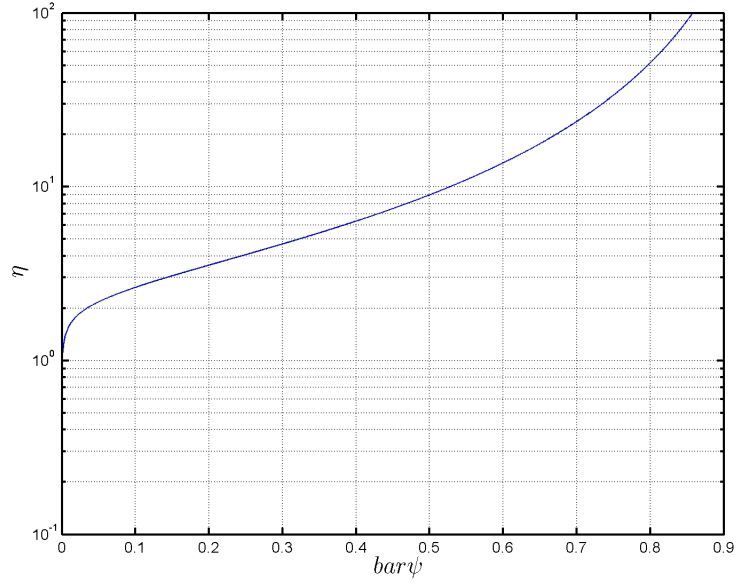


Figura 4.2: Variación del coeficiente de resistencia al flujo η , en función de la razón de áreas $\bar{\psi}$

investigaron diferentes configuraciones de DCLS construidos en acrílico, sujetos a la acción de movimientos armónicos y aleatorios tipo ruido blanco. Los resultados indicaron, como era de esperarse, que la influencia de la fricción sobre el factor de pérdidas es comparativamente baja en relación a las perdidas causadas por los codos, y a su vez a las producidas por el angostamiento central. La relación entre el factor de pérdidas, y la razón de bloqueo $\bar{\psi}$, se expresan por tanto como se muestra en la ecuación 4.20. En la figura 4.2 se muestra de forma gráfica la variación entre ambos:

$$\eta = \frac{\left(-0.6\bar{\psi} + 2.1\bar{\psi}^{0.1}\right)^{1.6}}{(1 - \bar{\psi})^2} \quad (4.20)$$

4.2. Amortiguamiento lineal equivalente del DCLS, movimiento de base monofrecuencial.

Según fue expuesto en la sección anterior, la fuerza producida por el paso del fluido a través del angostamiento central del dispositivo depende del cuadrado de la velocidad del flujo de líquido. Para establecer los parámetros óptimos de diseño del dispositivo debemos expresar dicha fuerza en términos lineales. Esto último equivale a encontrar la constante de amortiguamiento lineal equivalente, es decir la constante c_d , que nos permita representar esta fuerza como $F = c_d \dot{u}_d$. El procedimiento necesario para encontrar la constante de amortiguamiento equivalente fue propuesto por Jacobsen en el año 1930 [9]. El criterio de equivalencia de Jacobsen, consiste en igualar la energía disipada por ciclo de oscilación de la fuerza no lineal producida en el dispositivo, con la energía disipada por la fuerza lineal equivalente bajo el mismo desplazamiento armónico. Esto es, imponemos un desplazamiento armónico a la superficie libre de líquido de la forma:

$$u_d(t) = \varphi \text{sen}(\Omega t) \quad (4.21)$$

Derivando la ecuación anterior con respecto al tiempo, y sustituyéndola en la expresión 4.16, correspondiente a la fuerza no lineal para régimen turbulento, obtenemos:

$$F_{NL}(t) = \begin{cases} C_{NL} \Omega^2 \varphi^2 \cos^2(\Omega t) & \dot{u}_d \geq 0 \\ -C_{NL} \Omega^2 \varphi^2 \cos^2(\Omega t) & \dot{u}_d < 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

Donde C_{NL} es el coeficiente de proporcionalidad entre la fuerza no lineal y el cuadrado de la velocidad de la superficie libre de líquido, es decir $C_{NL} = \frac{1}{2} \rho_f \eta_{Turb} A$. Utilizando identidades trigonométricas apropiadas, la expresión anterior puede ser escrita en términos del desplazamiento de la superficie libre de líquido, u_d , como sigue:

$$F_{NL}(u_d) = \begin{cases} C_{NL} \Omega^2 \varphi^2 - C \Omega^2 u_d^2 & \dot{u}_d \geq 0 \\ -C_{NL} \Omega^2 \varphi^2 + C \Omega^2 u_d^2 & \dot{u}_d < 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

Este último resultado nos permite representar de manera gráfica la variación entre la fuerza no lineal y el desplazamiento de la superficie libre de líquido. Esta

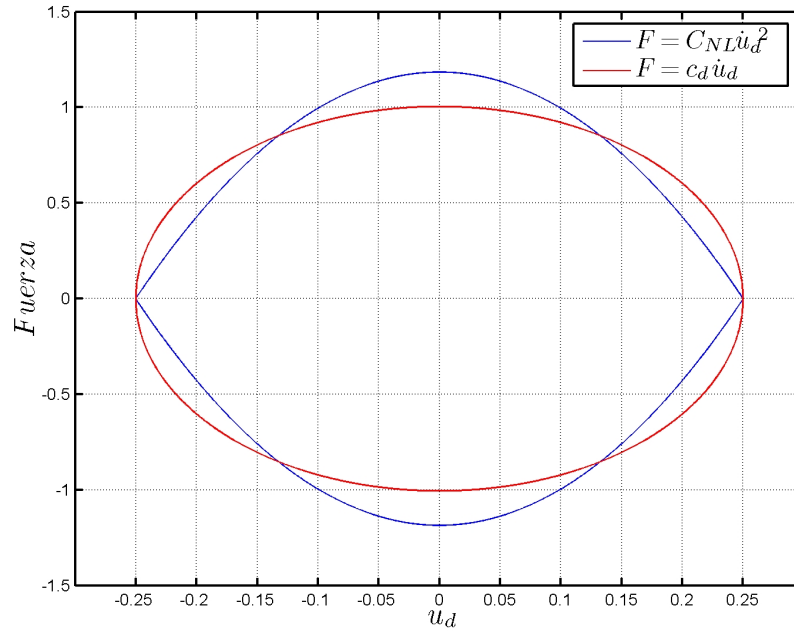


Figura 4.3: La constante de amortiguamiento lineal equivalente, c_d , se determina a partir de la igualación de la energía disipada por ciclo de oscilación armónica de la fuerza no lineal, curva azul, con aquella producida por la fuerza lineal equivalente, curva roja.

representación se muestra mediante la curva azul de la figura 4.3, en donde se ha dibujado asimismo un ciclo carga deformación correspondiente a la fuerza lineal equivalente mediante la elipse roja.

Examinando la figura anterior, podemos establecer que para representar adecuadamente la fuerza no lineal, por medio de una fuerza lineal equivalente, debemos seleccionar la constante c_d , de forma tal que las energías disipadas en un ciclo de oscilación sean equivalentes. Geométricamente esto último equivale a imponer que las áreas encerradas tanto por el ciclo no lineal como por el ciclo lineal sean iguales.

La energía disipada por la fuerza lineal equivalente en un ciclo de oscilación, se determina evaluando la siguiente integral:

$$E_{eq} = \oint c_d \dot{u}_d du_d = c_d \Omega \varphi \int_0^{2\pi/\Omega} \cos^2(\Omega t) dt = c_d \pi \Omega \varphi^2 \quad (4.24)$$

CAPÍTULO 4. PARÁMETROS LINEALES EQUIVALENTES PARA EL DCLS.175

Por otro lado, la energía disipada por la fuerza no lineal en un ciclo de oscilación armónica, se obtiene como sigue:

$$E_{NL} = \oint C_{NL} \dot{u}_d |\dot{u}_d| du_d = C_{NL} \Omega^3 \varphi^3 \int_0^{2\pi/\Omega} |\cos(\Omega t)| \cos^2(\Omega t) dt \quad (4.25)$$

Podemos reescribir esta última integral de la siguiente forma

$$E_{NL} = 4C_{NL} \Omega^3 \varphi^3 \int_0^{\pi/2\Omega} \cos^3(\Omega t) dt \quad (4.26)$$

Resolviendo la integral anterior obtenemos:

$$E_{NL} = \frac{8}{3} C_{NL} \Omega^2 \varphi^3 \quad (4.27)$$

Igualando las expresiones 4.24 y 4.27, es decir igualando las energías E_{eq} y E_{NL} , y resolviendo a su vez para c_d se obtiene:

$$c_d = \left(\frac{8}{3\pi} \right) C_{NL} \Omega \varphi \quad (4.28)$$

En consecuencia, la fuerza lineal equivalente se escribe como:

$$F_{eq} = \left(\frac{8}{3\pi} \right) C_{NL} \Omega \varphi \dot{u}_d \quad (4.29)$$

Lo que es equivalente a:

$$F_{eq}(t) = \left(\frac{8}{3\pi} \right) C_{NL} \Omega^2 \varphi^2 \cos(\Omega t) \quad (4.30)$$

Esta última expresión corresponde al primer término de la expansión en series de cosenos de Fourier de la fuerza no lineal. Como consecuencia, el criterio de igualación de energías por ciclo de oscilación bajo condiciones de vibración armónica, es comparable a aproximar en el dominio del tiempo la fuerza no lineal por medio del primer término de su serie de Fourier. En la figura 4.4, se ilustra la fuerza no lineal en el tiempo, y su equivalente lineal. Según puede apreciarse, la aproximación lineal equivalente resulta ser en este caso una buena aproximación de la fuerza no lineal.

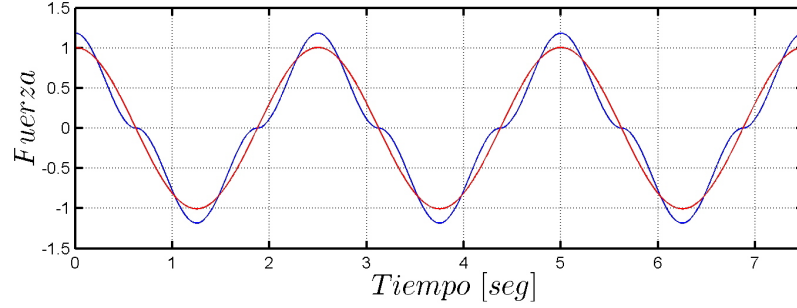


Figura 4.4: Fuerza no lineal, curva azul, y fuerza lineal equivalente, curva roja. La fuerza lineal equivalente corresponde a una aproximación considerando sólo el primer término de la expansión en series de Fourier de la fuerza no lineal.

Volviendo con la ecuación 4.28 podemos sustituir el valor de C_{NL} , en términos de los parámetros η , ρ_f y A , utilizando la expresión 4.16, de donde obtenemos:

$$c_d = \left(\frac{4}{3\pi} \right) \rho_f \eta A \Omega \varphi \quad (4.31)$$

La determinación de la constante de amortiguamiento equivalente, involucra pues el conocimiento de la amplitud del desplazamiento de la superficie libre de líquido φ , y su frecuencia Ω . Si consideramos que estos parámetros corresponden a la amplitud y frecuencia de la respuesta permanente de la superficie libre de líquido, obtenidos en el capítulo 3 en base al supuesto del comportamiento lineal del dispositivo, la expresión anterior puede ser reescrita, a partir de la ecuación 3.27, de la siguiente forma:

$$c_d = \frac{4}{3\pi} \left(\frac{m_f \ddot{u}_s}{k_d} \right) H_{10} \rho_f \eta A \Omega \quad (4.32)$$

Dado que queremos reproducir el comportamiento óptimo del dispositivo, la expresión anterior debe ser evaluada bajo condiciones óptimas de diseño. Esto último equivale a escribir:

$$c_d|_{OPT} = 2m_f \omega_d|_{OPT} \xi_d|_{OPT} = \frac{4}{3\pi} \left(\frac{m_f \ddot{u}_s}{k_d|_{OPT}} \right) H_{10}|_{OPT} \rho_f \eta A \Omega \quad (4.33)$$

CAPÍTULO 4. PARÁMETROS LINEALES EQUIVALENTES PARA EL DCLS.177

En donde los términos ξ_d , k_d y H_{10} se determinan para las condiciones óptimas de diseño del dispositivo. A partir de la ecuación 4.33 podemos obtener el valor para la pérdida η , de tal forma que se tengan los parámetros óptimos de diseño determinados en el capítulo 3, es decir:

$$\eta|_{OPT} = \frac{3\pi m_f \omega_d|_{OPT}^3 \xi_d|_{OPT}}{2\bar{u}_s H_{10}|_{OPT} \rho_f A \Omega} \quad (4.34)$$

Finalmente, para obtener la razón de bloqueo $\bar{\psi}$, sólo basta con reemplazar el valor de la pérdida obtenido a partir de la ecuación anterior, dentro de la ecuación 4.20 y resolver para $\bar{\psi}$.

4.3. Amortiguamiento lineal equivalente del DCLS, movimiento de base aleatorio.

La manera más directa para determinar las propiedades lineales equivalentes del dispositivo, cuando éste se encuentra sujeto a acciones de naturaleza aleatoria, es la utilización del método de linealización estadística (también conocido como método linealización equivalente o linealización estocástica). Este método, originado independientemente por Kasakov, Booton y Caughey, ha sido ampliamente utilizado y aplicado a gran número de sistemas [31, 32, 33, 34, 35]. En este método, la ecuación de movimiento no lineal original del sistema, es reemplazada por una ecuación lineal equivalente de movimiento la cual posee solución conocida. La diferencia entre las respuestas de estos dos sistemas es a su vez un proceso estocástico. Para que el sistema lineal equivalente sea una representación adecuada del sistema no lineal original, se debe exigir que la diferencia entre ambos sea pequeña bajo algún criterio estadístico. Hasta la fecha se han propuesto diversos criterios de minimización, sin embargo en la práctica el más utilizado es la minimización de la media cuadrática de la diferencia entre ambos.

En el caso que nos interesa la no linealidad proviene del amortiguamiento del dispositivo. Podemos escribir la ecuación de movimiento no lineal del DCLS bajo la acción de una carga externa aleatoria $F(t)$ ¹, de la siguiente forma:

$$m_f \ddot{u}_d + C_{NL}(u_d, \dot{u}_d) \dot{u}_d + k_d u_d = F(t) \quad (4.35)$$

En donde u_d representa el desplazamiento de la superficie libre de líquido, y $C_{NL}(u_d, \dot{u}_d)$ representa en términos generales la fuerza disipativa, como función del desplazamiento u_d y la velocidad \dot{u}_d . La ecuación de movimiento del sistema lineal equivalente se escribe como:

$$m_f \ddot{u}_d + c_d \dot{u}_d + k_d u_d = F(t) \quad (4.36)$$

La diferencia u error entre la fuerza disipativa no lineal y su equivalente lineal se escribe como:

¹Dado que el dispositivo se mueve junto con la estructura la fuerza externa se expresa como $F(t) = -\hat{m}(\ddot{u}_p + \ddot{u}_s)$, según se obtiene a partir de la derivación detallada en el apéndice B

$$\varepsilon = C_{NL}(u_d, \dot{u}_d) \dot{u}_d - c_d \dot{u}_d \quad (4.37)$$

La esperanza media cuadrática del error está dada por:

$$E\{\varepsilon^2\} = E\{C_{NL}(u_d, \dot{u}_d)^2 \dot{u}_d^2\} - 2c_d E\{C_{NL}(u_d, \dot{u}_d)^2\} + c_d^2 E\{\dot{u}_d^2\} \quad (4.38)$$

La expresión anterior es un polinomio de segundo orden en c_d . El valor mínimo para $E\{\varepsilon^2\}$ se alcanza cuando c_d vale:

$$c_d = \frac{E\{C_{NL}(u_d, \dot{u}_d) \dot{u}_d^2\}}{E\{\dot{u}_d^2\}} \quad (4.39)$$

De esta última ecuación notamos que para poder determinar el valor de c_d es necesario conocer la función de densidad de probabilidad del sistema no lineal. En general esta función de densidad de probabilidad es desconocida y es supuesta, en la mayoría de los casos, idéntica a la función de densidad de probabilidad del sistema lineal equivalente [34, 31]. Si adicionalmente la excitación externa está caracterizada como un proceso Gaussiano, la función de densidad de probabilidad de la respuesta del sistema lineal equivalente será a su vez un proceso Gaussiano. Los supuestos descritos anteriormente conforman el denominado método de linealización estocástica Gaussiana. Este método entrega en general resultados bastante precisos cuando el sistema posee no linealidades débiles. En sistemas con fuertes no linealidades se han propuesto diversos métodos para evaluar la función de densidad de probabilidad. Beaman y Hedrick [31] en el año 1981 propusieron un método de linealización estocástica Gaussiana mejorado por medio de la utilización de la expansión en series Gram-Charlier, de la función de densidad de probabilidad desconocida hasta cuatro términos. Los coeficientes de la expansión en series, son entonces determinados de manera aproximada mediante la solución de un sistema de ecuaciones no lineales, cuyas incógnitas corresponden a los cuatro primeros momentos de la función de densidad de probabilidad buscada. Otros métodos, como los propuestos por Pradlwarter [31], involucran la determinación de la función de densidad de probabilidad desconocida, mediante el uso de la ecuación de Fokker-Planck-Kolmogorov y la linealización estocástica no Gaussiana.

Volviendo a la ecuación 4.39 y reescribiéndola para el caso particular en análisis resulta

$$c_d = \frac{E \{C_{NL} |\dot{u}_d| \dot{u}_d^2\}}{E \{\dot{u}_d^2\}} = \frac{E \{C_{NL} |\dot{u}_d| \dot{u}_d^2\}}{\sigma_{\dot{u}_d}^2} \quad (4.40)$$

En donde $\sigma_{\dot{u}_d}$ es la desviación estándar de la velocidad de la superficie libre de líquido. Si consideramos que la respuesta del sistema no lineal es del tipo Gaussiana de promedio cero, podemos evaluar el numerador de la expresión anterior de la siguiente forma:

$$E \{C_{NL} |\dot{u}_d| \dot{u}_d^2\} = C_{NL} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{u}_d| \dot{u}_d^2 \left(\frac{1}{\sigma_{\dot{u}_d} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\dot{u}_d^2}{2\sigma_{\dot{u}_d}^2}} \right) d\dot{u}_d = 2C_{NL} \int_0^{\infty} \dot{u}_d^3 \left(\frac{1}{\sigma_{\dot{u}_d} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\dot{u}_d^2}{2\sigma_{\dot{u}_d}^2}} \right) d\dot{u}_d \quad (4.41)$$

Esta última integral puede ser evaluada utilizando tablas de integración. Simplificando y reemplazando en la ecuación 4.40 se obtiene:

$$c_d = \frac{4\sigma_{\dot{u}_d} C_{NL}}{\sqrt{2\pi}} \quad (4.42)$$

Como fue demostrado a principios de este capítulo, el término C_{NL} puede escribirse en función de la densidad del fluido y el área de la sección transversal del DLCS, considerando que el régimen del flujo es turbulento, como sigue:

$$C_{NL} = \frac{1}{2} \rho_f A \eta \quad (4.43)$$

Combinando las ecuaciones 4.42 y 4.43 tenemos la expresión para la constante de amortiguamiento lineal equivalente:

$$c_d = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \rho_f A \eta \sigma_{\dot{u}_d} \quad (4.44)$$

A partir de este punto podemos proceder de manera inversa, es decir imponemos la condición establecida por la ecuación 4.44 para el coeficiente de pérdidas, η , de manera tal que el dispositivo real se comporte como su equivalente lineal y se reproduzcan las condiciones óptimas de diseño. Matemáticamente esto último se expresa como sigue:

$$c_d = 2m_f \omega_d|_{OPT} \xi_d|_{OPT} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \rho_f A \eta \sigma_{\dot{u}_d}|_{OPT} \quad (4.45)$$

Despejando de esta última ecuación el valor de η obtenemos:

$$\eta|_{OPT} = \sqrt{2\pi} \frac{m_f \omega_d|_{OPT} \xi_d|_{OPT}}{\rho_f A \sigma_{\dot{u}_d}|_{OPT}} \quad (4.46)$$

En esta última ecuación todos los términos son conocidos a excepción de $\sigma_{\dot{u}_d}$. Para determinar su valor debemos conocer la función de transferencia entre la aceleración aplicada en la base de la estructura primaria, y la velocidad de la superficie libre de líquido. En el apéndice B, se muestra el detalle de los cálculos necesarios para obtener el factor de amplificación dinámica entre la aceleración de suelo y la superficie libre de líquido, dado por la ecuación B.51. La función de transferencia se relaciona con el factor de amplificación dinámica como sigue²:

$$H_{\dot{u}_d \ddot{u}_s}(\rho) = \frac{1}{\omega_d} \mathbf{H}_{11}(\rho) \quad (4.47)$$

Si suponemos que la aceleración de base es un proceso estocástico tipo ruido blanco caracterizado por una función de densidad de probabilidad Gaussiana normal, podemos asumir que la respuesta de la velocidad de la superficie libre de líquido es a su vez Gaussiana normal. De esta forma la esperanza media cuadrática de la velocidad de líquido corresponde al cuadrado de su desviación estándar, es decir:

$$\sigma_{\dot{u}_d}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |H_{\dot{u}_d \ddot{u}_s}(\Omega)|^2 S_{\ddot{u}_s}(\Omega) d\Omega \quad (4.48)$$

Reemplazando en esta última ecuación el valor de $H_{\dot{u}_d \ddot{u}_s}(\rho)$ y realizando el cambio de variable $\Omega = \hat{\omega}_p \rho$, obtenemos:

$$\sigma_{\dot{u}_d}^2 = \frac{\hat{\omega}_p \ddot{u}_{so}}{\omega_d^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{H}_{11}(\rho)|^2 d\rho \quad (4.49)$$

La integral contenida en esta última ecuación puede ser evaluada con la ayuda de tablas de integración [6]. Para ello escribimos el factor de amplificación dinámica $\mathbf{H}_{11}(\rho)$ como sigue:

² Utilizamos aquí la siguiente notación: $\mathbf{H}_{11}(\rho) = H_{11}(\rho) e^{i\delta_{11}(\rho)}$

$$\mathbf{H}_{11}(\rho) = \frac{iD_1\rho + D_2\rho^2}{A_4\rho^4 + iA_3\rho^3 + A_2\rho^2 + iA_1\rho + A_0} \quad (4.50)$$

En donde:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= f^2 \\ A_1 &= 2f \left(\hat{\xi}_p f + \xi_d \right) \\ A_2 &= - \left(1 + f^2 + 4\hat{\xi}_p \xi_d f \right) \\ A_3 &= -2 \left[\hat{\xi}_p + \xi_d f (1 + \hat{\mu}) \right] \\ A_4 &= 1 - \hat{\mu} \alpha \\ D_1 &= -\alpha f \\ D_2 &= 2\alpha f \hat{\xi}_p \end{aligned} \right\} \quad (4.51)$$

Expresada de esta manera, la integral se determina como sigue:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{H}_{11}(\rho)|^2 d\rho = \frac{\pi (A_1 D_2^2 - A_3 D_1^2)}{A_1 (A_2 A_3 - A_1 A_4) - A_0 A_3^2} \quad (4.52)$$

Dado que deseamos conocer el valor de la desviación estándar de la velocidad de la superficie libre de líquido, en condiciones óptimas de diseño, todos los términos anteriores deben ser evaluados a su vez para las condiciones óptimas de diseño.

Por otra parte, si la aceleración basal es un proceso estocástico tipo ruido blanco filtrado caracterizado por una función de densidad de probabilidad Gaussiana, cual es el caso analizado en la sección 3.6, el cuadrado de su desviación estándar de la velocidad de la superficie libre de líquido se expresa de la siguiente forma:

$$\sigma_{\dot{u}_d}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |H_{\dot{u}_d \ddot{u}_s}(\Omega)|^2 |H_{\ddot{u}_s \ddot{u}_R}(\Omega)|^2 S_{\ddot{u}_R} d\Omega \quad (4.53)$$

En donde $S_{\ddot{u}_R}$ corresponde al espectro de potencia en la roca basal, y $H_{\ddot{u}_s \ddot{u}_R}(\Omega)$ es la función de transferencia entre la aceleración en la roca basal y la aceleración total en la superficie del suelo, ecuación 3.106. Si asumimos que el espectro de potencia en la roca basal es del tipo ruido blanco Gaussiano de intensidad \ddot{u}_{Ro} , la expresión anterior se reduce a:

$$\sigma_{\dot{u}_d}^2 = \frac{\hat{\omega}_p \ddot{u}_{Ro}}{\omega_d^2} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{11}(\rho)|^2 |H_{\ddot{u}_s \ddot{u}_R}(\rho)|^2 d\rho \quad (4.54)$$

Donde $H_{\ddot{u}_s \ddot{u}_R}(\rho)$ se determina por medio de la expresión 3.107. Evaluando numéricamente la integral anterior podemos determinar la desviación estándar de la velocidad de la superficie libre de líquido, cuando la aceleración basal es un proceso estocástico tipo ruido blanco filtrado.

Una vez que se ha determinado la desviación estándar de la velocidad de la superficie libre de líquido, ya sea por medio de la expresión 4.49 o de la expresión 4.54, es posible determinar el valor de $\eta|_{OPT}$ a partir de la ecuación 4.46. Por medio de este último se puede determinar el valor de $\bar{\psi}$ mediante la ecuación 4.20.

Capítulo 5

Diseño de Disipadores sintonizados

5.1. Introducción

Para ejemplificar el uso de las formulas y procedimientos de diseño descritos en los capítulos 2, 3 y 4, se desarrolla a continuación de manera detallada el diseño de disipadores de masa y columna líquida sintonizada. Los dispositivos serán diseñados para controlar el primer modo de vibrar de una estructura de seis grados de libertad. Dicha estructura será a su vez sometida a una serie de ensayos, con objeto de verificar la reducción de la respuesta obtenida con los dispositivos. La descripción de estos ensayos, y los resultados obtenidos, se pueden consultar en el capítulo 6.

5.1.1. Descripción de la estructura a controlar

La estructura a controlar se compone de seis niveles formados por perfiles rectangulares de acero, cuya sección transversal es 50mm x 30mm x 3mm. Estos niveles se soportan a su vez en cuatro columnas de aluminio estructural de 50mm x 3mm. Adicionalmente se disponen de dos planchas de acero de 425mm x 250mm y 3mm de espesor sobre los niveles.



Figura 5.1: Estructura a controlar por los dispositivos. A la derecha se muestra un esquema de la misma junto con sus dimensiones principales.

En la tabla 5.1 se detalla el peso de cada uno de los niveles, junto con el peso total de estructura. En las figura 5.1 y 5.2 en tanto, se muestra la estructura en cuestión junto con sus dimensiones principales.

Tabla 5.1: Pesos de los niveles

<i>Nivel</i>	<i>Peso [kgf]</i>
1	26.05
2	26.22
3	26.94
4	26.11
5	26.06
6	26.40
<i>Total</i>	157.79

Las propiedades mecánicas del aluminio estructural utilizado para las columnas se muestran en la siguiente tabla (los valores son referenciales y corresponden a los entregados por Indalum):

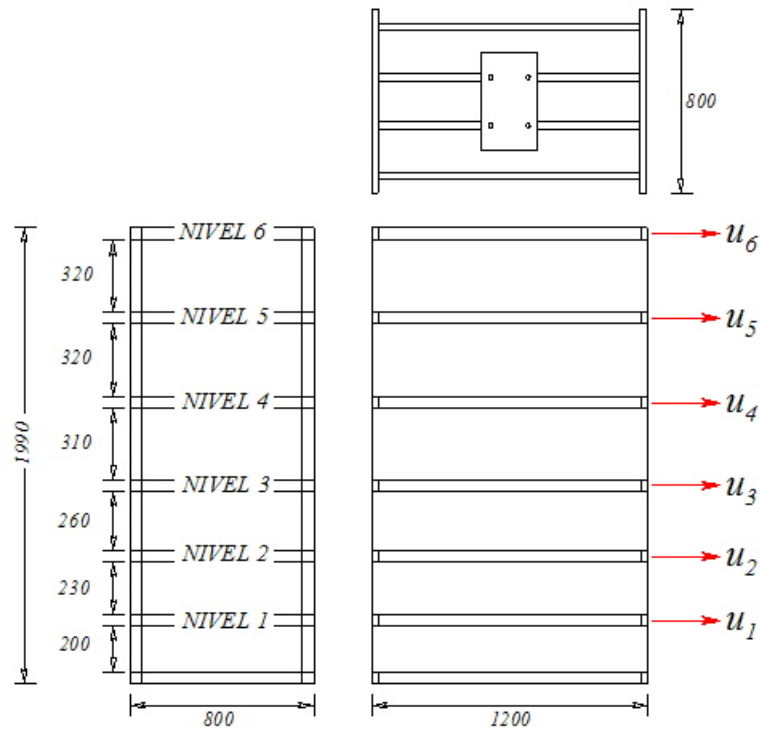


Figura 5.2: Vista en planta y elevaciones principales de la estructura. Las dimensiones están en milímetros. Se indican asimismo los grados de libertad utilizados para el análisis posterior de la estructura.

Tabla 5.2: Propiedades mecánicas del aluminio estructural clase A6061 - T6

<i>Propiedad</i>	<i>Unidad</i>	<i>Valor</i>
Densidad a 20 ^o C, ρ	[kg/m^3]	2700
Coefficiente de dilatación, δ	[$mm/mm\ C$]	24×10^{-6}
Modulo de elasticidad, E	[GPa]	70
Tensión de rotura, σ_{ult}	[kgf/cm^2]	2680
Tensión de fluencia, σ_y	[kgf/cm^2]	2460

5.1.2. Determinación teórica de los parámetros modales de la estructura

Antes de realizar el análisis modal de la estructura debemos definir los grados de libertad que describen el movimiento de la misma. Utilizamos en este caso seis grados de libertad, cada uno de los cuales determina el desplazamiento horizontal de los niveles de la estructura. Dichos grados de libertad se indican en la figura. 5.2, y se denominan desde abajo hacia arriba, siendo el primero de ellos aquel que describe el movimiento del primer nivel, en tanto que el último describe el movimiento del sexto nivel. El siguiente paso consiste en establecer las matrices de masa y rigidez. La matriz de rigidez puede ser escrita a partir del módulo elástico del aluminio utilizado para las columnas del modelo, junto con las dimensiones de las mismas. Para ello consideramos que las columnas están restringidas al giro pero posibilitadas de desplazamiento lateral en cada nivel. Esto último significa suponer un sistema en el cual los niveles son infinitamente rígidos. Por otra parte, para determinar la matriz de masa, consideramos un modelo de masas concentradas en cada uno de los niveles de la estructura. La masa de los niveles ha sido determinada directamente por medio de mediciones, los resultados de estas se resumen en la tabla 5.1. Las matrices de masa y rigidez de la estructura, determinadas en base a los procedimientos y supuestos recién descritos se presentan a continuación:

$$[M_p] = \begin{bmatrix} 26.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 26.22 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 26.94 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 26.11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 26.06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26.4 \end{bmatrix} [kg] \quad (5.1)$$

$$[K_p] = \begin{bmatrix} 79570.7 & -31564.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -31564.7 & 53415.4 & -21850.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -21850.7 & 34742.1 & -12891.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12891.4 & 24611.6 & -11720.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11720.2 & 23440.4 & -11720.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -11720.2 & 11720.2 \end{bmatrix} \left[\frac{N}{m} \right] \quad (5.2)$$

Una vez establecidas las matrices de masa y rigidez podemos determinar las características dinámicas inherentes de la estructura, en la forma de las frecuencias naturales de vibración y modos de vibrar. Si bien es cierto también es necesario conocer el amortiguamiento de la estructura, resulta poco práctica y adecuada su determinación de forma teórica. Los mecanismos de disipación de energía en una estructura se deben a efectos combinados de un número de mecanismos tales como la fricción en uniones, la disipación local de energía de los distintos materiales que componen la estructura, entre otros. Es por ello que el amortiguamiento será determinado mediante análisis experimentales realizados a la estructura. Dichos análisis se describen en la siguiente sección. Volviendo a las matrices de masa y rigidez, podemos ahora resolver el problema de valores y vectores propios de la matriz $[M_p]^{-1} [K_p]$, para encontrar los períodos y formas modales de la estructura. La determinación de las formas modales es de gran importancia, ya que éstas forman una base con la cual es posible representar cualquier estado de deformación de la estructura como una combinación lineal de los modos de vibrar. En la siguiente figura se resumen las formas y períodos de vibrar de la estructura determinados de forma teórica.

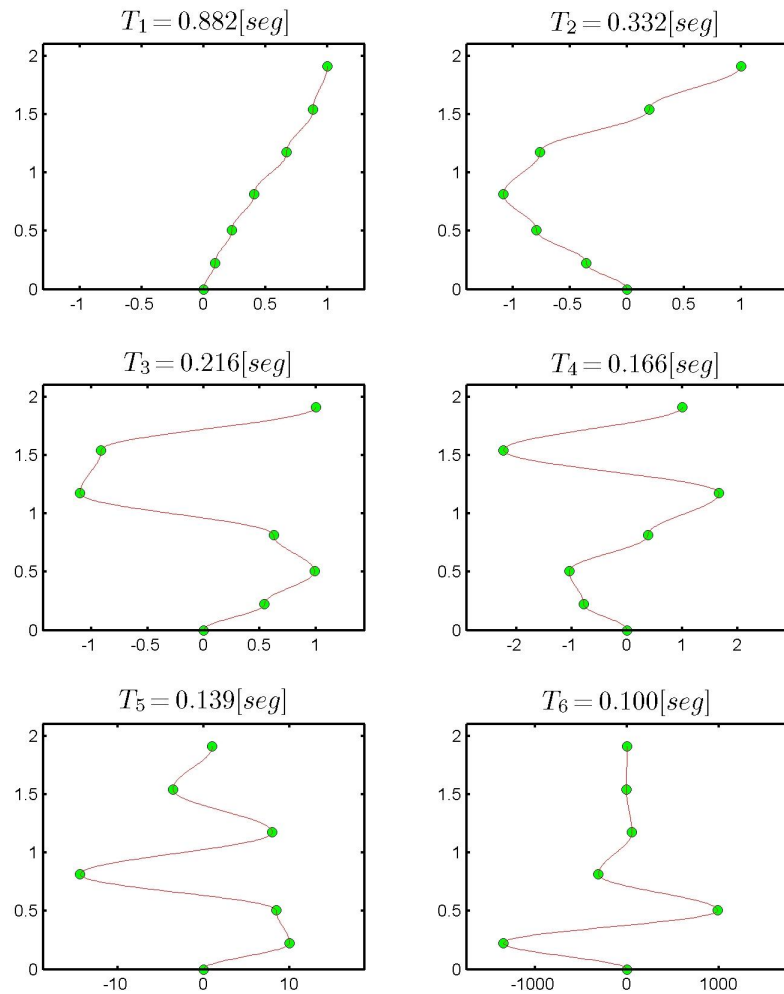


Figura 5.3: Formas de vibrar y períodos para la estructura determinados en forma teórica, sin considerar los efectos de no linealidad geométrica.

Las propiedades modales determinadas a partir del análisis recién descrito, pueden refinarse si consideramos los efectos que producen las cargas axiales aplicadas a las columnas de la estructura. Esto último se conoce como el efecto de rigidez geométrica, que provoca que elementos cargados axialmente a compresión vean reducida su rigidez frente a cargas transversales. Para incorporar en el análisis dicho efecto, construimos la matriz de rigidez geométrica, $[K_G]$, reemplazando los momentos volcantes aplicados sobre cada nivel de la estructura, producidos a su vez por los desplazamientos laterales, por medio de fuerzas horizontales equivalentes [36]. En términos generales, la matriz de rigidez geométrica se escribe como:

$$[K_G] = \begin{bmatrix} \frac{W_1}{h_1} + \frac{W_2}{h_2} & -\frac{W_2}{h_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{W_2}{h_2} & \frac{W_2}{h_2} + \frac{W_3}{h_3} & -\frac{W_3}{h_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{W_3}{h_3} & \frac{W_{31}}{h_3} + \frac{W_4}{h_4} & -\frac{W_4}{h_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{W_4}{h_4} & \frac{W_4}{h_4} + \frac{W_5}{h_5} & -\frac{W_5}{h_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{W_5}{h_5} & \frac{W_5}{h_5} + \frac{W_6}{h_6} & -\frac{W_6}{h_6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{W_6}{h_6} & \frac{W_6}{h_6} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

En donde W_i corresponde al peso total de los niveles ubicados desde el i -ésimo nivel hasta el último, en tanto que h_i es la altura entre el nivel i y el nivel $i - 1$. Reemplazando los valores correspondientes en la expresión 5.3 obtenemos:

$$[K_G] = \begin{bmatrix} 13353.8 & -5617 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5617 & 9596.8 & -3979.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3979.8 & 6465.5 & -2485.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2485.7 & 4093.4 & -1607.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1607.7 & 2416.9 & -809.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -809.1 & 809.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

La matriz de rigidez efectiva de la estructura es igual a la diferencia entre la matriz de rigidez $[K_p]$, y la matriz de rigidez geométrica $[K_G]$, es decir:

$$[K_{ef}] = [K_p] - [K_G] \quad (5.5)$$

Podemos determinar ahora los modos y períodos de vibrar de la estructura considerando los efectos de no linealidad geométrica. Para ello resolvemos el problema de valores y vectores propios de la matriz $[M_p]^{-1} [K_{ef}]$, con lo que se obtienen los resultados que se muestran en la siguiente figura:

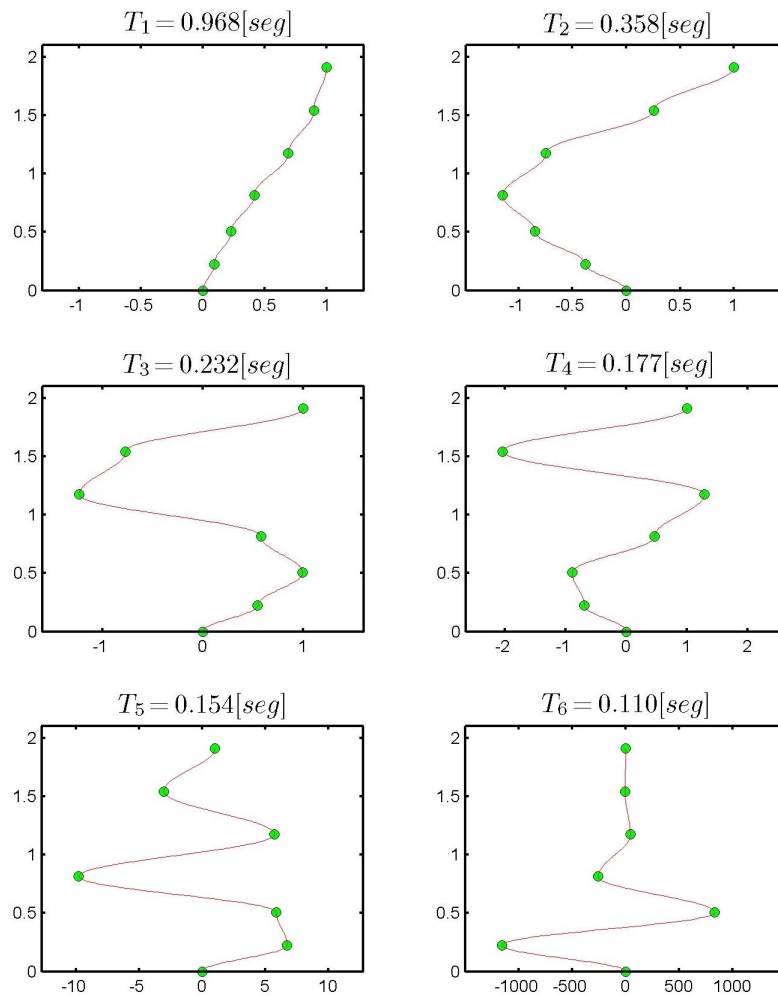


Figura 5.4: Formas de vibrar y períodos para la estructura determinados en forma teórica, considerando los efectos de no linealidad geométrica.

Los resultados mostrados en la figura 5.4 nos indican, como ya se había mencionado, que la estructura resulta ser más flexible si se incorporan en el análisis los efectos de las cargas axiales en las columnas. Por otro lado las formas de vibrar se mantienen prácticamente invariantes según puede comprobarse analizando las figuras 5.3 y 5.4.

5.2. Determinación experimental de los parámetros modales de la estructura

Si bien es cierto, es posible estimar de forma teórica las características dinámicas de la estructura, estas últimas presentan diferencias con respecto a las medidas experimentalmente. Determinar pues de forma experimental dichas propiedades nos permitirá caracterizar de forma más correcta su comportamiento, así como entregarnos parámetros más precisos para el diseño posterior de los dispositivos.

La determinación experimental de los parámetros modales de la estructura será realizada en el dominio del tiempo, en base a dos métodos de identificación. El primero de ellos, conocido como el método de Ibrahim [40], utiliza como entrada excitaciones externas impulsivas tipo “pullback”. Este método permite obtener estimaciones de las características dinámicas de una estructura de múltiples grados de libertad, en términos de sus formas modales, ya sea normales o complejas, y polos con los cuales se obtienen las frecuencias naturales de vibrar y amortiguamientos. El segundo método utilizado corresponde al método SSI (Stochastic SubSpace Identification) [40]. Mediante el uso de este método de identificación es posible encontrar los parámetros modales de una estructura utilizando como acción externa excitaciones de tipo ambiental.

La determinación de parámetros modales mediante el método de Ibrahim se lleva a cabo por medio de la aplicación de desplazamientos iniciales a los niveles de la estructura, y permitiendo luego que la misma oscile libremente. Se realizan varios ensayos con el objeto de capturar de la mejor forma posible los distintos modos de vibrar de la estructura. Para ello se han tomado como base las formas modales determinadas a partir de los análisis teóricos. De esta forma, los ensayos se realizan asignando desplazamiento iniciales a los niveles, de manera tal que la configuración deformada de la estructura se asemeje a los modos que se buscan. Este último procedimiento asegura una mayor precisión y facilidad en la obtención de los parámetros modales de la estructura. Por otra parte, para determinar los parámetros modales en base al método SSI, la estructura ha sido sometida a la acción de señales tipo ruido blanco filtrado, de 0[Hz] a 20 [Hz], aplicadas en su base. Para realizar estos ensayos, la estructura ha sido montada sobre la mesa de vibrar del Departamento de Ingeniería Civil de la Universidad de Chile. Esta mesa posee la capacidad de reproducir

Tabla 5.3: Constantes y características de los instrumentos utilizados en las mediciones

<i>Instrumento</i>	<i>Modelo y número de serie</i>	<i>Constante</i>
Acelerómetro 1, Nivel 1	Kistler 8310A2, 2002309	1.003[V/g]
Acelerómetro 2, Nivel 2	Kistler 8310A2, 2002310	0.993[V/g]
Acelerómetro 3, Nivel 3	Kistler 8310A2, 2002311	0.986[V/g]
Acelerómetro 4, Nivel 4	Kistler 8310A2, 2003776	0.995[V/g]
Acelerómetro 5, Nivel 5	Kistler 8310A2, 2003777	0.994[V/g]
Acelerómetro 6, Nivel 6	Kistler 8310A2, 2003778	0.984[V/g]
Acelerómetro 7, Base Mesa	Kistler 8310A2, 2003779	0.987[V/g]
Acelerómetro 8, DMSL	Kistler 8310A2, 2003780	0.989[V/g]
Sensor ultrasónico, DCLS	Kistler 89340-A2	5.493[cm/V]

movimientos en seis grados de libertad, gracias a la acción de seis servoactuadores electromecánicos.

En ambas situaciones el sistema de monitoreo de datos consiste de siete acelerómetros, instalados en cada uno de los niveles de la estructura y en su base, como se muestra en la figura 5.5. Este sistema de sensores registra la historia de aceleración de cada sensor en forma paralela (tiempo común) y las almacena, en forma digital, para su posterior procesamiento. Adicionalmente se dispone de un acelerómetro ubicado en el disipador de masa sintonizada, para registrar su historia de aceleración. Para registrar el desplazamiento de la superficie libre de líquido del disipador de columna líquida sintonizada, se dispone de un sensor ultrasónico el cual permite registrar el desplazamiento de la superficie de líquido mediante un haz de ultrasonido. En todas las mediciones se ha utilizado un tiempo de muestreo de 0.005 segundos (200 muestras por segundo):

Los instrumentos utilizados entregan lecturas en voltaje. En la tabla 5.3 se muestran las constantes que convierten dichas lecturas a las dimensiones apropiadas, así como las características, modelo y tipo, de cada uno de los acelerómetros, y sensores ultrasónicos, usados en las mediciones:

Los resultados obtenidos por medio de los métodos de identificación utilizados se resumen figura 5.6 y en la tabla 5.4. Los detalles de los cálculos y procedimientos requeridos para la identificación de las propiedades modales de la estructura, por

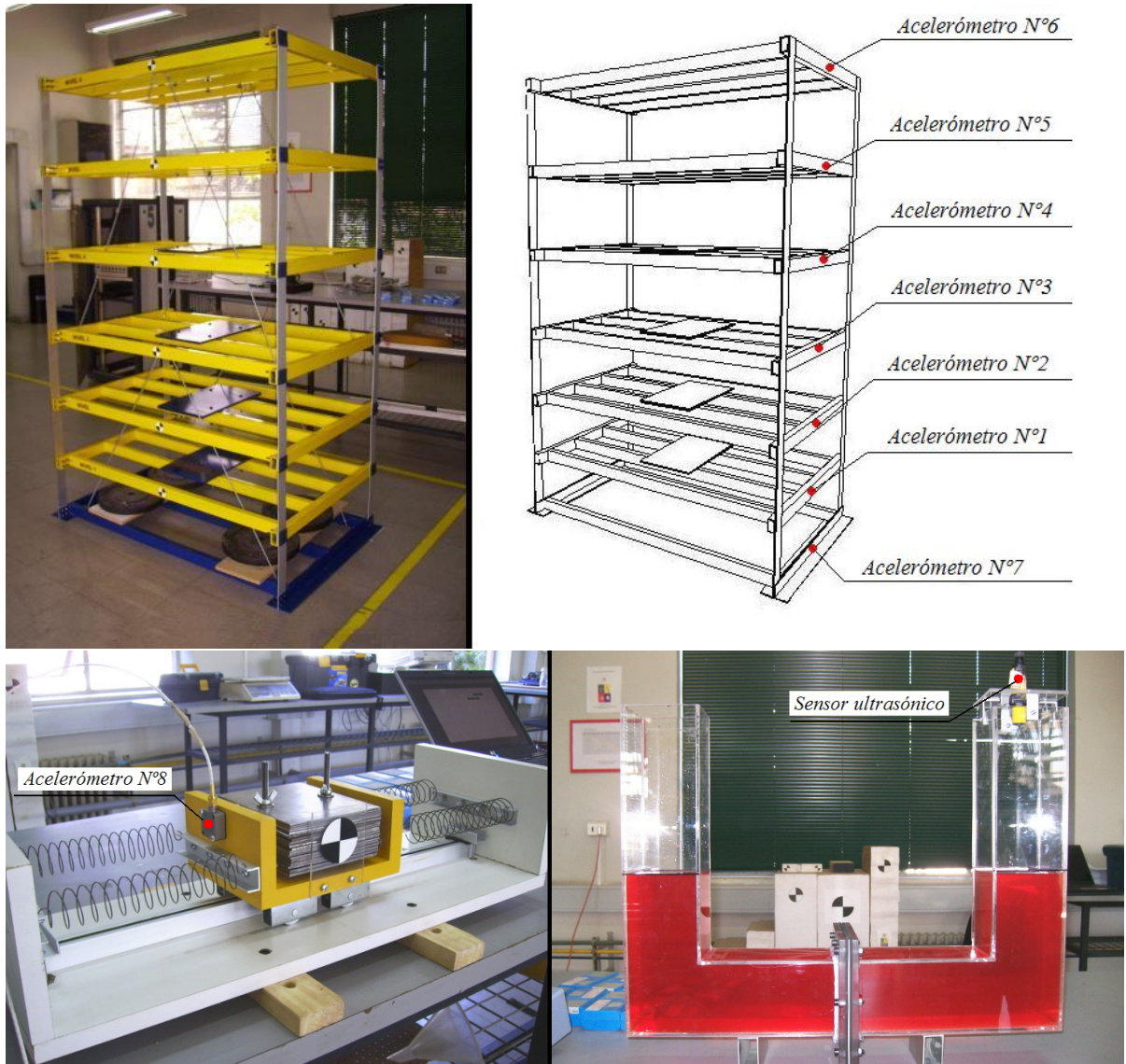


Figura 5.5: Ubicación de los acelerómetros en la estructura a analizar, arriba. Abajo a la izquierda se muestra la ubicación del acelerómetro N°8 utilizado para registrar el movimiento del DMSL. Abajo a la derecha en tanto se muestra el sensor ultrasónico utilizado para registrar el movimiento de la superficie libre de líquido del DCLS.

medio de los métodos descritos, se pueden consultar en el trabajo de título de Tomás Núñez [39].

Comparando las figuras 5.3 y 5.4 con la figura 5.6, podemos notar que los períodos de vibrar determinados de forma teórica difieren de los obtenidos experimentalmente, siendo estos últimos mayores. Lo anterior significa que la estructura real es más flexible de lo que los análisis teóricos indican.

El siguiente paso en la determinación de las características de la estructura consiste en obtener las rigideces equivalentes de piso, tales que produzcan los períodos y formas modales determinados a partir de los análisis experimentales. Para ello utilizamos un procedimiento de búsqueda numérica para las rigideces de piso, de manera tal de minimizar el error entre los períodos determinados experimentalmente, y aquellos determinados a partir de las rigideces calculadas. Este procedimiento, que se efectúa de forma iterativa, comienza suponiendo que las rigideces de piso corresponden a las determinadas de los análisis teóricos considerando los efectos de no linealidad geométrica. En cada paso de la iteración se calcula el error definido como el valor absoluto de la diferencia entre la suma de los períodos determinados de forma experimental, tabla 5.4, y la suma de los períodos determinados a partir de las rigideces entregadas por el procedimiento de búsqueda numérica. La búsqueda continúa hasta que dicho error es menor que 10^{-5} . Los resultados del procedimiento numérico se resumen en la tabla 5.5.

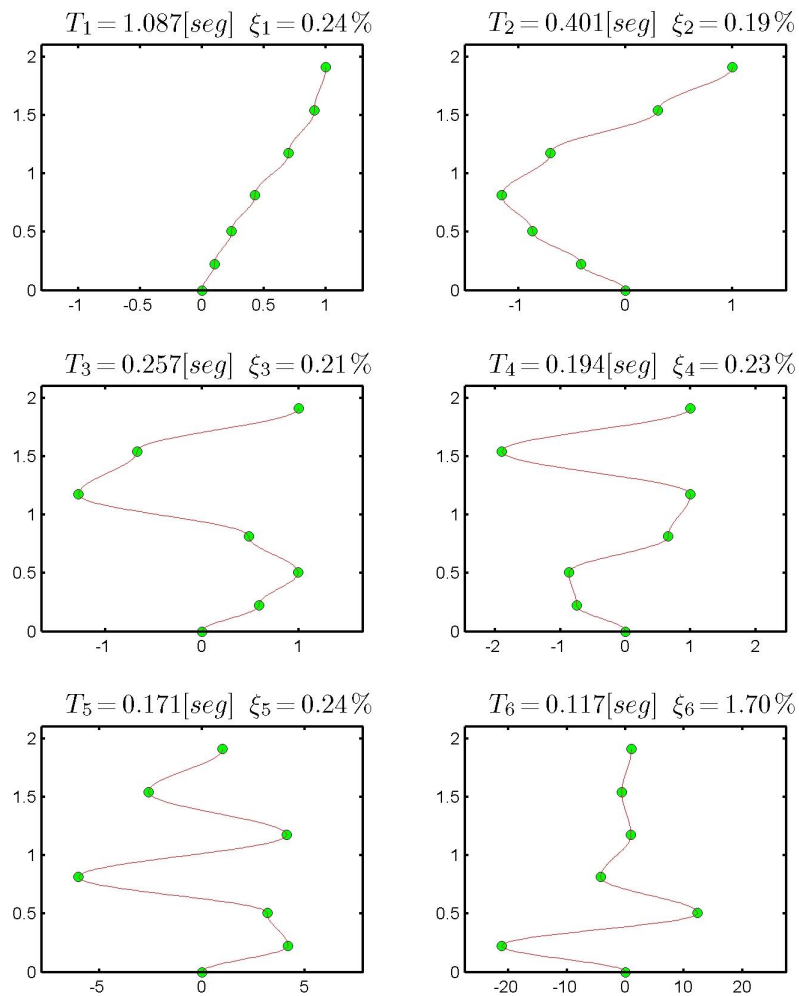


Figura 5.6: Modos de vibrar, períodos y amortiguamientos de la estructura a controlar. Los resultados que se muestran corresponden a los obtenidos mediante mediciones experimentales.

La matriz de rigidez de la estructura puede ser ahora formada a partir de las rigideces calibradas numéricamente, indicadas en la tabla 5.5. La matriz resultante se muestra a continuación:

Tabla 5.4: Parámetros modales determinados a partir de las mediciones experimentales

<i>Modo</i>	<i>T</i> [seg]	ξ_p %
1	1.087	0.24
2	0.401	0.19
3	0.257	0.21
4	0.194	0.23
5	0.171	0.24
6	0.117	1.7

Tabla 5.5: Comparación entre las rigideces de piso determinadas a partir de los análisis teóricos, $K_{teorico}$, y aquellas determinadas a partir del análisis numérico, K_{num}

<i>Nivel</i>	$K_{teorico}$ [N/m]	K_{num} [N/m]	$K_{num}/K_{teorico}$ %
1	40269	32122	79.8
2	25948	24788	95.5
3	17870	15725	88.0
4	10405	7537	72.4
5	10112	6633	65.6
6	10911	10867	99.6

Tabla 5.6: Comparación entre los períodos determinados de forma experimental, T_{exp} , y aquellos obtenidos a partir de las rigideces determinadas del análisis numérico, T_{num}

<i>Modo</i>	T_{exp} [seg]	T_{num} seg	Δ %
1	1.087	1.087	0.000
2	0.401	0.401	0.001
3	0.257	0.257	0.001
4	0.194	0.194	0.001
5	0.171	0.170	0.005
6	0.117	0.116	0.008

$$[K_p] = \begin{bmatrix} 56910 & -24788 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -24788 & 40513 & -15725 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15725 & 23262 & -7537 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7537 & 14170 & -6633 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6633 & 17500 & -10867 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10867 & 10867 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Los resultados mostrados en la tabla 5.5 ponen de manifiesto las diferencias entre las rigideces determinadas de forma teórica, y aquellas ajustadas numéricamente. Estas diferencias se presentan fundamentalmente por la suposición de un sistema de niveles infinitamente rígidos en la modelación teórica de la estructura. En la realidad siempre existe una rotación en las uniones de las columnas con los niveles, lo cual se traduce en un sistema más flexible. En la tabla 5.6 se comparan los períodos de vibrar de la estructura determinados de forma experimental, con aquellos obtenidos a partir de las rigideces determinadas del análisis numérico. Como se puede apreciar los resultados son prácticamente iguales.

Por otra parte, se debe verificar además que las formas modales sean similares a las obtenidas experimentalmente. Para ello utilizamos el método de auto correlación modal [39, 40], el cual nos indica la concordancia entre los modos determinados experimentalmente, y aquellos obtenidos a partir de las rigideces de piso determinadas

Tabla 5.7: Factores de auto correlación entre los modos determinados experimentalmente, y aquellos obtenidos a partir de las rigideces de piso calibradas de forma numérica.

<i>Modo</i>	<i>Factor de Auto correlación</i> %
1	99.8
2	99.0
3	96.4
4	92.7
5	93.9
6	98.0

del análisis numérico. En la tabla 5.7 se resumen los resultados determinados por medio del método de auto correlación modal.

Analizando las tablas 5.6 y 5.7, podemos concluir que las rigideces de piso calibradas numéricamente resultan ser satisfactorias en términos de proveer valores confiables para representar tanto los períodos como formas modales de la estructura. La matriz de formas modales que resulta a partir de las rigideces calibradas numéricamente se presenta a continuación. Esta matriz ha sido normalizada de forma tal que las masas modales sean unitarias, y será utilizada a continuación para el diseño de los disipadores sintonizados.

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0.011 & -0.041 & 0.053 & -0.031 & 0.099 & -0.152 \\ 0.025 & -0.083 & 0.089 & -0.037 & 0.085 & 0.119 \\ 0.045 & -0.116 & 0.056 & 0.018 & -0.130 & -0.034 \\ 0.083 & -0.083 & -0.132 & 0.064 & 0.054 & 0.004 \\ 0.114 & 0.035 & -0.034 & -0.149 & -0.027 & -0.001 \\ 0.124 & 0.086 & -0.075 & 0.096 & 0.012 & 1 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

La matriz de rigidez modal se obtiene de la matriz de rigidez de la estructura formada a partir de las rigideces calibradas numéricamente, ecuación 5.6. Realizando el producto $[\Phi]^T [K_p] [\Phi]$ obtenemos:

$$[\mathbf{K}_P] = \begin{bmatrix} 33.42 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 245.13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 599.28 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1050.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1363.13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2927.78 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

La matriz de amortiguamiento modal puede ser determinada directamente a partir de los amortiguamientos modales medidos experimentalmente, cuyos valores se muestran tanto en la figura 5.6 como en la tabla 5.4. Si asumimos que el amortiguamiento de la estructura es de tipo clásico, la matriz de amortiguamiento modal resulta ser una matriz diagonal, la cual se escribe en este caso como sigue:

$$[\mathbf{C}_P] = \begin{bmatrix} 0.028 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.059 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.103 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.149 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.177 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.84 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \cdot s \\ m \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Es posible escribir la matriz de amortiguamiento en las coordenadas físicas definidas por la figura 5.2, mediante la aplicación del método de Penzien-Wilson [3], de la siguiente forma:

$$[C_p] = [M_p] [\Phi] [\mathbf{M}_P]^{-1} \cdot [\mathbf{C}_P] \cdot [\mathbf{M}_P]^{-1} [\Phi]^T [M_p] \quad (5.10)$$

Donde $[\mathbf{M}_P]$ es la matriz de masa modal de la estructura. Dado que hemos normalizado la matriz de formas modales de manera tal que la matriz de masa modal sea igual a la identidad, la expresión anterior puede ser reescrita como:

$$[C_p] = [M_p] [\Phi] \cdot [\mathbf{C}_P] \cdot [\Phi]^T [M_p] \quad (5.11)$$

De esta última ecuación se desprende:

$$[C_p] = \begin{bmatrix} 30.29 & -20.99 & 5.443 & -0.687 & 0.074 & -0.015 \\ -20.99 & 19.649 & -5.918 & 0.438 & -0.072 & 0.006 \\ 5.443 & -5.918 & 4.62 & -0.996 & -0.034 & -0.017 \\ -0.687 & 0.438 & -0.996 & 2.431 & -0.774 & -0.087 \\ 0.074 & -0.072 & -0.034 & -0.774 & 2.714 & -1.295 \\ -0.015 & 0.006 & -0.017 & -0.087 & -1.295 & 1.986 \end{bmatrix} \left[\frac{N \cdot s}{m} \right] \quad (5.12)$$

5.3. Diseño de disipadores sintonizados

En la sección anterior determinamos las propiedades dinámicas de la estructura en base a los análisis experimentales realizados a ésta. Asimismo, se calibraron las rigideces de piso de forma tal de que las mismas, junto con las masas de los niveles, reproduzcan los períodos y formas de vibrar encontrados mediante los ensayos experimentales. A partir de estos datos podemos diseñar los dispositivos para controlar el movimiento de la estructura.

5.3.1. *Diseño de disipador de masa sintonizado*

Para diseñar el amortiguador de masa sintonizada primero debemos decidir cual será el modo controlado por el mismo. Esto determinará su ubicación dentro de la estructura, la cual debe corresponder, como fue comentado en el capítulo 2, aquella en donde se produzca el máximo desplazamiento modal. Posteriormente seleccionamos la masa del dispositivo, lo que definirá la razón de masas entre el dispositivo y la estructura.

En el caso analizado el modo a controlar corresponde al primer modo, lo que implica que el dispositivo se ubicará en el sexto nivel. Por otra parte la masa del mismo es de 5 [kg], la cual corresponde a un 3.17 % de la masa total de la estructura original. Estamos en condiciones pues de diseñar el dispositivo, para ello determinamos primeramente los parámetros que definen al sistema de un grado de libertad equivalente para el modo controlado, por medio de las expresiones 2.142 a 2.146.

Masa del sistema de un grado de libertad equivalente para modo controlado, ecuación 2.142:

$$\tilde{\mathbf{m}}_1 = \frac{\mathbf{m}_1}{\phi_{6,1}^2} = \frac{1 [kg]}{0,124^2} = 64.8 [kg] \quad (5.13)$$

Amortiguamiento del sistema de un grado de libertad equivalente para modo controlado, ecuación 2.143

$$\tilde{\mathbf{c}}_1 = \frac{\mathbf{c}_1}{\phi_{6,1}^2} = \frac{0.028 [N \cdot s/m]}{0.124^2} = 1.8 [N \cdot s/m] \quad (5.14)$$

Rigidez del sistema de un grado de libertad equivalente para modo controlado, ecuación 2.144:

$$\tilde{\mathbf{k}}_1 = \frac{\mathbf{k}_1}{\phi_{6,1}^2} = \frac{33.42 [N/m]}{0.124^2} = 2165 [N/m] \quad (5.15)$$

Factor Γ para modo controlado, ecuación 2.146:

$$\Gamma_1 = \frac{\phi_{6,1}}{\mathbf{m}_1} \sum_{k=1}^6 \phi_{k,j} M_k r_k = 1.31 \quad (5.16)$$

Razón de masas μ , correspondiente al cociente entre la masa del dispositivo, y la masa del sistema de un grado de libertad equivalente para el modo controlado:

$$\mu = \frac{m_d}{\tilde{\mathbf{m}}_1} = 0.0772 (7.72 \%) \quad (5.17)$$

Diseñamos el dispositivo considerando que la aceleración de base aplicada a la estructura a controlar se puede representar como un proceso estocástico tipo ruido blanco. Utilizando la ecuación 2.108, y recordando que la razón de amortiguamiento crítico para el primer modo es 0.24 %, ver tabla 5.4, obtenemos:

$$f|_{OPT} = 0.91 \quad (5.18)$$

Dado que el amortiguamiento del primer modo es muy bajo, el uso de la expresión 2.102, para estructuras no amortiguadas, entrega en este caso un valor para $f|_{OPT}$ que no difiere en mas del 0.5 % de aquel obtenido a partir de la expresión 2.108. Determinamos a continuación la razón de amortiguamiento crítico óptima del dispositivo a partir de la ecuación 2.109:

$$\xi_d|_{OPT} = 13.52 \% \quad (5.19)$$

La frecuencia de oscilación óptima para el dispositivo corresponde pues a:

$$\omega_d|_{OPT} = f|_{OPT} \omega_p = 0.91 \cdot 5.781 \left[\frac{rad}{seg} \right] = 5.3 \left[\frac{rad}{seg} \right] \quad (5.20)$$

En base a las características determinadas para el dispositivo, se ha construido el disipador mostrado en las figuras 5.7 y 5.8. El dispositivo construido consiste de una masa de 5 [kg], la cual puede desplazarse horizontalmente sobre rodamientos. La fuerza restitutiva elástica se materializa mediante 4 resortes. A su vez, se ha dispuesto de un estanque de aceite ubicado entre las ruedas que hace que el amor-

tiguamiento del dispositivo se encuentre en torno al 4.5% a 5%. Si bien es cierto, éste no corresponde al amortiguamiento óptimo determinado anteriormente, es suficiente como para controlar el desplazamiento del mismo y reducir notablemente la respuesta de la estructura según se verá en el capítulo 6.

Para verificar que el período del dispositivo construido corresponda con el óptimo de diseño, se han realizado ensayos tipo “pullback” para determinar sus características. Dado que el período óptimo depende de la masa del dispositivo, el procedimiento de ajuste de propiedades se basa en ensayo y error. El objetivo consiste en converger hacia un par de valores para la masa del dispositivo, y su rigidez, de manera tal que se obtenga el período óptimo de diseño. Para facilitar este procedimiento, es posible modificar la masa del carro agregando o quitando placas de acero sobre él. Por otra parte, la cantidad de resortes y su rigidez se mantienen constantes. Luego de seguir este procedimiento se converge al valor para la masa mencionado en los cálculos previos, es decir 5 [kg].

En la página 206 se resume el procedimiento de diseño para el disipador de masa sintonizada

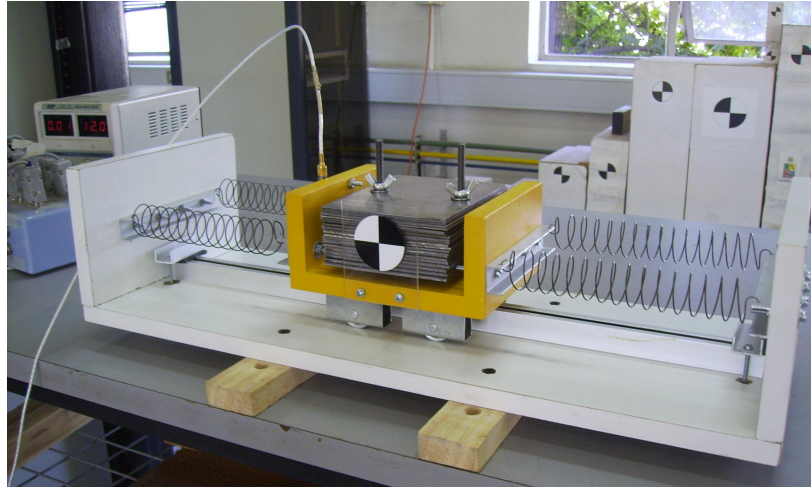


Figura 5.7: Disipador de masa sintonizada diseñado para controlar el primer modo de la estructura. Se pueden apreciar el carro de una masa total de 5[kg], los resortes, y el estanque de aceite ubicado entre las ruedas.



Figura 5.8: Estructura y disipador de masa sintonizada.

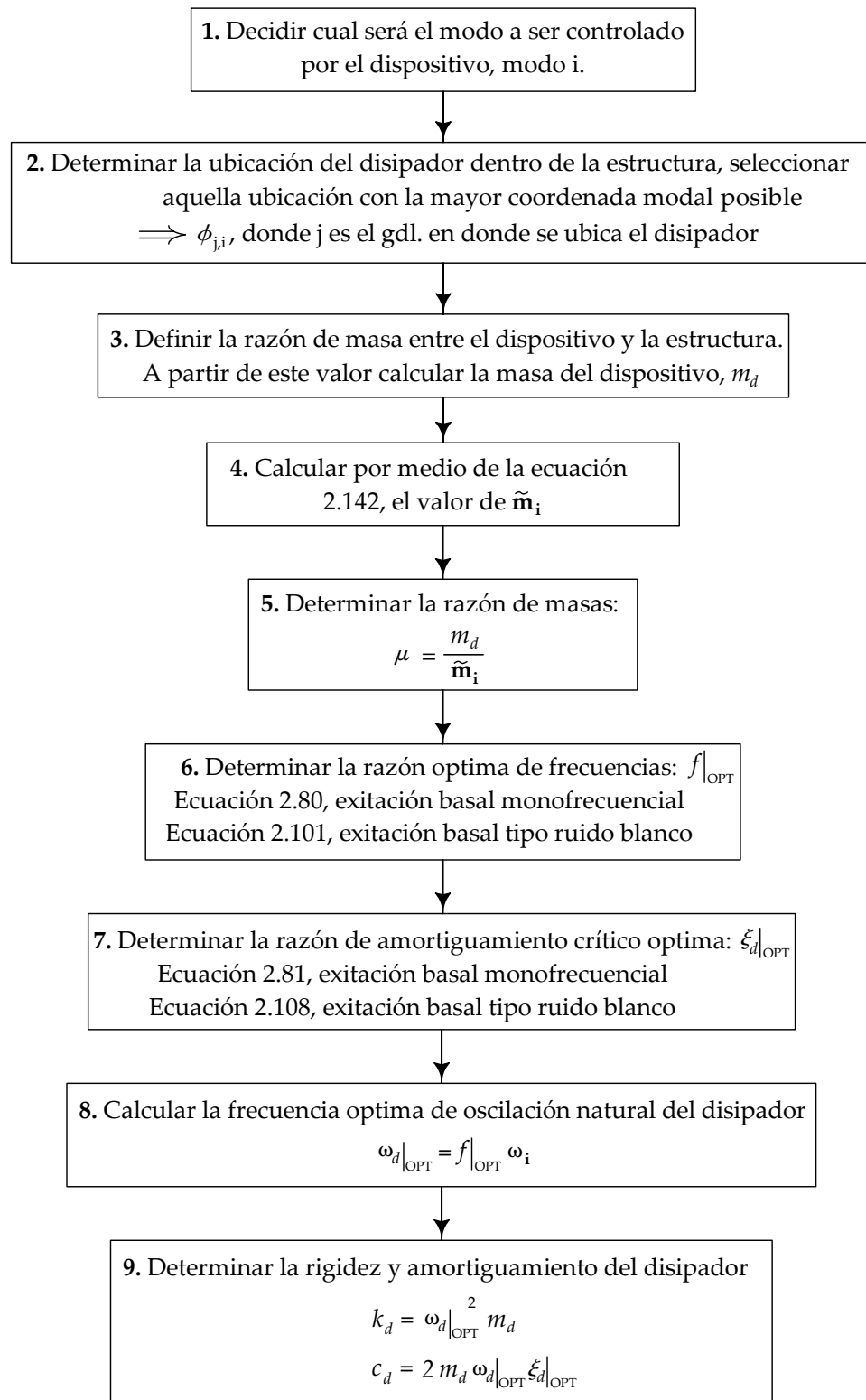


Figura 5.9: Diagrama de flujo, para el diseño del DMSL.

5.3.2. *Diseño de disipador de columna líquida sintonizada*

Al igual que el disipador de masa sintonizada, el diseño del disipador de columna líquida se hará para controlar el primer modo de la estructura primaria. Esto último significa que el dispositivo se instalará en el sexto nivel, lugar en donde ocurren los máximos desplazamientos para el modo controlado. A su vez, para poder realizar posteriores análisis comparativos, la masa de líquido será de 5 [kg] igual a la masa del disipador de masa sintonizada. Debemos además decidir cuál será el factor de forma del dispositivo. Según se discutió en el capítulo 3, es deseable que este factor se aproxime lo más posible a la unidad. Existen sin embargo restricciones que no siempre hacen posible verificar dicha condición. En el caso analizado, el factor de forma queda controlado por el máximo desplazamiento de la superficie libre de líquido. Usaremos para este diseño un valor del factor de forma α igual a 0.6.

En base a los supuestos descritos, la masa, amortiguamiento, y rigidez equivalente para el modo controlado, no varían con respecto a las determinadas para el amortiguador de masa. Los valores para estos parámetros están dados por las ecuaciones 5.13 a 5.15.

Determinamos a continuación la masa total del sistema la cual corresponde a la masa del sistema de un grado de libertad equivalente, más la masa del líquido contenido por el dispositivo, y la masa de las columnas del mismo.

$$M_T = \tilde{\mathbf{m}}_1 + m_f + m_u = 64.8 [kg] + 5 [kg] + 2.7 [kg] = 72.5 [kg] \quad (5.21)$$

En esta última ecuación la masa de las columnas del dispositivo ha sido estimada en base a la longitud y dimensiones finales del disipador. Esto último se realiza mediante un procedimiento iterativo. Primero se supone un valor para la masa m_u , y luego se determinan las dimensiones del disipador. Con las dimensiones del disipador se puede luego verificar que la masa de las columnas del dispositivo no difiera demasiado de la inicialmente supuesta. Este procedimiento iterativo es de rápida convergencia ya que la masa m_u es en general muy pequeña en comparación al resto de la estructura. Para el presente diseño sólo se requirió de dos iteraciones.

La masa del líquido contenido dentro de la columna horizontal del dispositivo se determina como:

$$\hat{m} = \alpha m_f = 0.6 \cdot 5 \text{ [kg]} = 3 \text{ [kg]} \quad (5.22)$$

La razón entre la masa de líquido contenida en la columna horizontal del dispositivo, y la masa total del sistema vale:

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{m}}{M_T} = 0.0414 \text{ (4.14 \%)} \quad (5.23)$$

Debemos determinar a continuación la frecuencia natural de vibrar, y la razón de amortiguamiento crítico definidas por las ecuaciones 3.13 y 3.17.

$$\hat{\omega}_p = \sqrt{\frac{\tilde{\mathbf{k}}_1}{M_T}} = 5.47 \left[\frac{rad}{seg} \right] \quad (5.24)$$

$$\hat{\xi}_p = \frac{\tilde{\mathbf{c}}_1}{2M_T\hat{\omega}_p} = 2.3 \cdot 10^{-3} \text{ (0.23 \%)} \quad (5.25)$$

Nuevamente realizamos el diseño del disipador suponiendo que la excitación de base se puede modelar como un proceso estocástico estacionario tipo ruido blanco. Determinamos primeramente la razón óptima de frecuencias, y la razón óptima de amortiguamiento crítico, por medio de las expresiones 3.86 y 3.87, o sus equivalentes simplificadas 3.88 y 3.89, para estructuras no amortiguadas. Los valores resultantes se muestran a continuación:

$$f|_{OPT} = 0.95 \quad (5.26)$$

$$\xi_d|_{OPT} = 0.0794 \text{ (7.94 \%)} \quad (5.27)$$

Dado que el amortiguamiento de la estructura primaria a controlar es muy bajo, el uso de las expresiones que corrigen los valores anteriores, por el efecto del amortiguamiento de la estructura es despreciable.

La frecuencia óptima de diseño del dispositivo se determina como sigue:

$$\omega_d|_{OPT} = f|_{OPT} \hat{\omega}_p = 0.95 \cdot 5.47 \left[\frac{rad}{seg} \right] = 5.19 \left[\frac{rad}{seg} \right] \quad (5.28)$$

A partir de la frecuencia óptima de diseño, podemos determinar la longitud total de líquido a partir de la ecuación 3.14. Ya que las columnas verticales del dispositivo se encuentran abiertas, es decir $k_{eq} = 0$, dicha expresión se reduce a:

$$L_T = \frac{2g}{\omega_d|_{OPT}^2} = 72.79 \text{ [cm]} \quad (5.29)$$

Cabe destacar en este punto la importancia de que la estructura primaria posea un período no menor a 1 [seg]. De no ser así la frecuencia óptima del dispositivo sería muy elevada. Si se analiza la ecuación anterior, es fácil notar que la longitud total de líquido varía de forma inversa al cuadrado de la frecuencia óptima del dispositivo. Si dicha frecuencia se eleva demasiado, el resultado es un dispositivo demasiado pequeño, y por ende impracticable.

La longitud total de líquido, junto con la masa del mismo, nos permiten determinar el área de la sección transversal del dispositivo como sigue:

$$A = \frac{m_f}{L_T \rho_f} = \frac{5 \text{ [kg]}}{72.79 \text{ [cm]} \cdot 997 \text{ [kg/m}^3\text{]}} = 68.9 \text{ [cm}^2\text{]} \quad (5.30)$$

En el cálculo anterior se asume que el líquido en cuestión es agua, cuya masa específica corresponde a $997 \text{ [kg/m}^3\text{]}$. A su vez, supondremos que la sección transversal es cuadrada. Esto último implica que la arista de dicho cuadrado debe ser de 83 [mm] . Estamos pues en condiciones de definir las dimensiones del dispositivo. La longitud de la columna horizontal de líquido se determina simplemente como αL_T , lo que equivale a 43.67 [cm] , las columnas verticales de líquido por tanto miden: $0.5(72.79 \text{ [cm]} - 43.67 \text{ [cm]}) = 14.56 \text{ [cm]}$.

Finalmente sólo nos falta por determinar el área del angostamiento central. Para ello primero debemos calcular la desviación estándar de la velocidad de la superficie libre de líquido, por medio de la ecuación 4.49. Evaluamos los términos A y D , para la condición óptima de diseño, con los cuales podemos determinar el valor de la integral del cuadrado del valor absoluto de la función de transferencia \mathbf{H}_{11}

$$A_0 = f|_{OPT}^2 = 0.903 \quad (5.31)$$

$$A_1 = 2 f|_{OPT} \left(\hat{\xi}_p f|_{OPT} + \xi_d|_{OPT} \right) = 0.155 \quad (5.32)$$

$$A_2 = - \left(1 + f|_{OPT}^2 + 4\hat{\xi}_p \xi_d|_{OPT} f|_{OPT} \right) = -1.903 \quad (5.33)$$

$$A_3 = -2 \left[\hat{\xi}_p + \xi_d|_{OPT} f|_{OPT} (1 + \hat{\mu}) \right] = -0.162 \quad (5.34)$$

$$A_4 = 1 - \hat{\mu}\alpha = 0.975 \quad (5.35)$$

$$D_1 = -\alpha f|_{OPT} = -0.57 \quad (5.36)$$

$$D_2 = 2\alpha f|_{OPT} \hat{\xi}_p = 0.003 \quad (5.37)$$

Reemplazando los términos A y D calculados anteriormente, dentro de la ecuación 4.52, obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{H}_{11}(\rho)|^2 d\rho = 244.714 \quad (5.38)$$

Para determinar la desviación estándar de la velocidad de la superficie libre de líquido debemos a su vez conocer la intensidad del espectro de potencia del ruido blanco en base al cual diseñamos el dispositivo. Esta magnitud debe ser establecida previamente en base a una caracterización de los registros de aceleraciones a los cuales será sometida la estructura. En nuestro caso los registros que serán utilizados para analizar el comportamiento del modelo, los que se describen en la tabla 6.1, han sido previamente escalados con objeto de garantizar que tanto las deformaciones de la estructura, como los desplazamientos de los disipadores, no sean excesivos pudiendo comprometer en primer caso la integridad del modelo. Es por ello que supondremos que los registros se pueden representar como un ruido blanco cuya intensidad es tal que nos entregue con al menos un 99% de probabilidad un desplazamiento de la superficie libre de líquido no mayor a 10.5 [cm]. Este desplazamiento corresponde al límite para el cual la superficie libre de líquido alcanza el nivel de la columna horizontal del dispositivo, según se puede apreciar en la figura 5.10. .

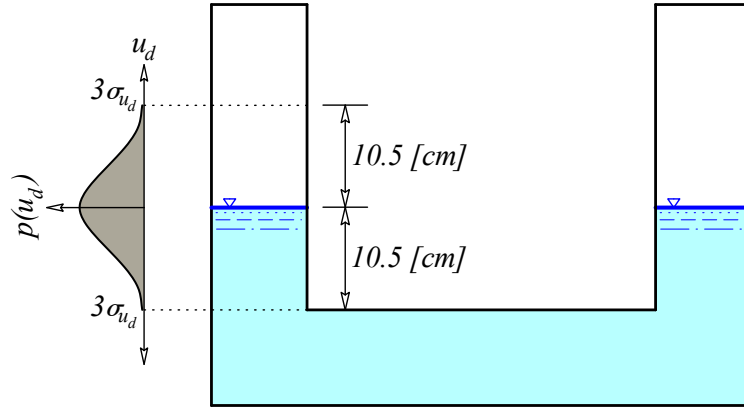


Figura 5.10: La intensidad del espectro de potencia del ruido blanco utilizado para diseñar el dispositivo, se determina de forma tal que el desplazamiento de la superficie libre de líquido sea menor a 10.5[cm] con un 99% de probabilidad.

Dado que supusimos que el desplazamiento de la superficie libre de líquido, u_d , posee una función de densidad de probabilidad Gaussiana normal, podemos establecer:

$$\mathcal{P}(|u_d| \leq 3\sigma_{u_d}) = 99\% \quad (5.39)$$

La expresión anterior nos indica que la probabilidad de que u_d se encuentre a tres desviaciones estándar de la media, la cual es cero, corresponde a un 99%. Podemos establecer por tanto que la desviación estándar del desplazamiento de la superficie libre de líquido debe corresponder a 3.5 [cm]. A partir de este punto es posible determinar la intensidad del espectro de potencia del ruido blanco por medio de la ecuación 3.78. Despejando el valor de \ddot{u}_{so} de dicha ecuación obtenemos:

$$\ddot{u}_{so} = \frac{\omega_d |_{OPT}^4 \sigma_{u_d}^2}{\hat{\omega}_p \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{H}_{10}(\rho)|^2 d\rho} \quad (5.40)$$

Sólo nos falta por determinar el valor de la integral del cuadrado del valor absoluto de la función de transferencia \mathbf{H}_{10} . Para ello utilizamos la ecuación 3.83, en donde los términos C se determinan a continuación

$$C_1 = \alpha |f|_{OPT}^2 = 0.541 \quad (5.41)$$

$$C_2 = -2\alpha f|_{OPT}^2 \hat{\xi}_p = 0.002 \quad (5.42)$$

Reemplazando estos términos, junto con las cantidades "A" calculadas en las ecuaciones 5.31 a 5.37, dentro de la expresión 3.83 se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{H}_{10}(\rho)| d\rho = 236.876 \quad (5.43)$$

El valor de la intensidad del espectro de potencia del ruido blanco equivalente es por tanto:

$$\ddot{u}_{so} = 6.87 \left[\frac{cm^2}{seg^3} \right] \quad (5.44)$$

Establecido el valor para \ddot{u}_{so} , podemos ahora determinar la desviación estándar de la velocidad de la superficie libre de líquido. Para ello sólo basta con reemplazar en la ecuación 4.50 los términos correspondientes, con lo que se obtiene el siguiente resultado.

$$\sigma_{\dot{u}_d}|_{OPT} = 18.47 \left[\frac{cm}{seg} \right] \quad (5.45)$$

A continuación determinamos el valor de la pérdida η , para condiciones óptimas de diseño, mediante la ecuación 4.46:

$$\eta|_{OPT} = 4.07 \quad (5.46)$$

Finalmente, reemplazando el valor de la pérdida recién determinada, dentro de la ecuación 4.20, y resolviendo para $\bar{\psi}$ obtenemos:

$$\bar{\psi} = 0.25 \quad (5.47)$$

Este último resultado nos indica que el área del orificio central debe corresponder a un 75% del área de la sección transversal del disipador. Dado que la sección transversal es un cuadrado cuya arista es 83 [mm], el orificio central será a su vez un cuadrado pero de 72 [mm] de lado.

Conocidas las dimensiones del orificio central, podemos determinar la velocidad mínima a partir de la cual el régimen de flujo de líquido dentro del dispositivo es

de tipo turbulento. Esto último nos permite garantizar que la fuerza opuesta por el angostamiento central es proporcional al cuadrado de la velocidad de la superficie libre de líquido. Utilizando la definición para el número de Reynolds e imponiendo la condición $Re \geq 3500$, para régimen turbulento obtenemos:

$$V_{lim} = 3500 \cdot \frac{8.94 \cdot 10^{-7}}{0.072 [m]} = 4.3 \left[\frac{cm}{seg} \right] \quad (5.48)$$

Es decir que para velocidades de la superficie libre de líquido superiores a 4.3 [cm/seg], el régimen de flujo es de tipo turbulento. Esta velocidad es muy baja, y según se verá en el siguiente capítulo, es superada la gran parte del tiempo durante la realización de los ensayos experimentales. Podemos estimar de manera teórica la probabilidad de que la velocidad de la superficie libre de líquido exceda la cantidad V_{lim} , esto es:

$$\mathcal{P}(|\dot{u}_d| > V_{lim}) = 1 - \int_{-V_{lim}}^{V_{lim}} \frac{1}{\sigma_{\dot{u}_d} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\dot{u}_d^2}{2\sigma_{\dot{u}_d}^2}} d\dot{u}_d \quad (5.49)$$

Evaluando la integral contenida en la expresión anterior obtenemos que la probabilidad de excedencia de la velocidad límite es de 81.6 %.

En las páginas 215 a 217 se resumen los pasos necesarios para realizar el diseño del disipador de columna líquida sintonizada.

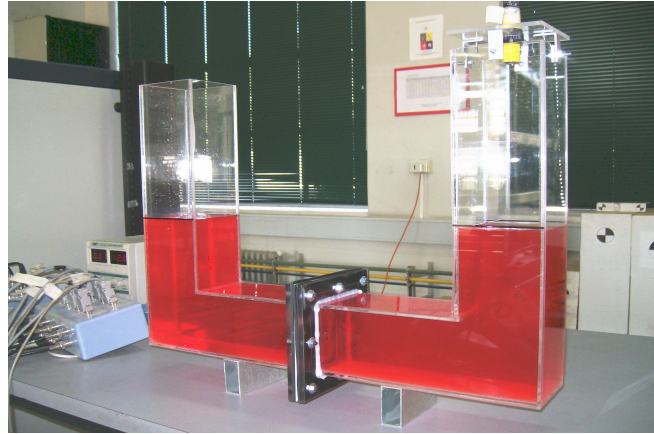


Figura 5.11: Vista del disipador de columna líquida sintonizada diseñado para controlar la respuesta del primer modo de vibrar de la estructura.



Figura 5.12: Estructura y disipador de columna líquida sintonizada.

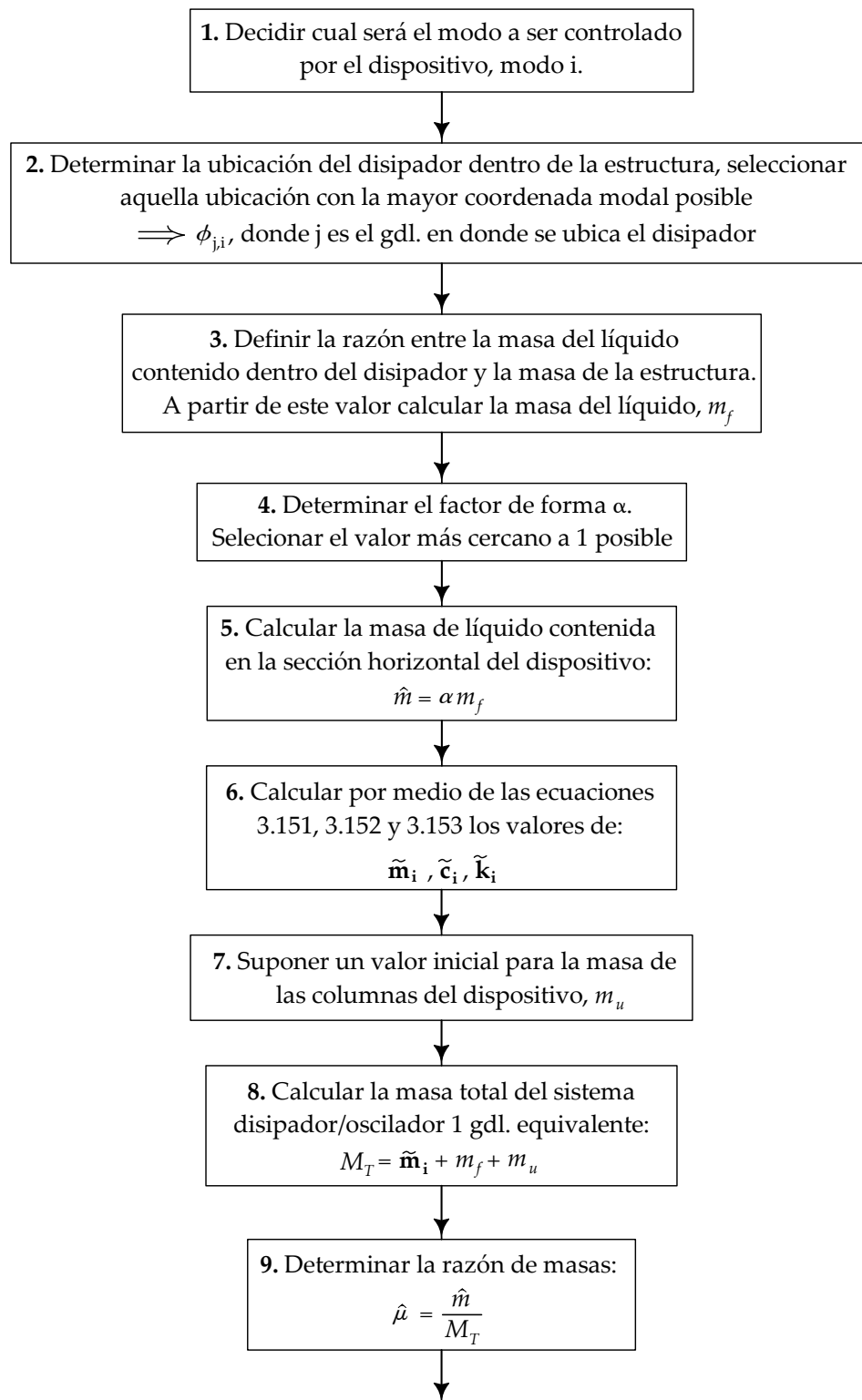


Figura 5.13: Diagrama de flujo para el diseño del DCLS.

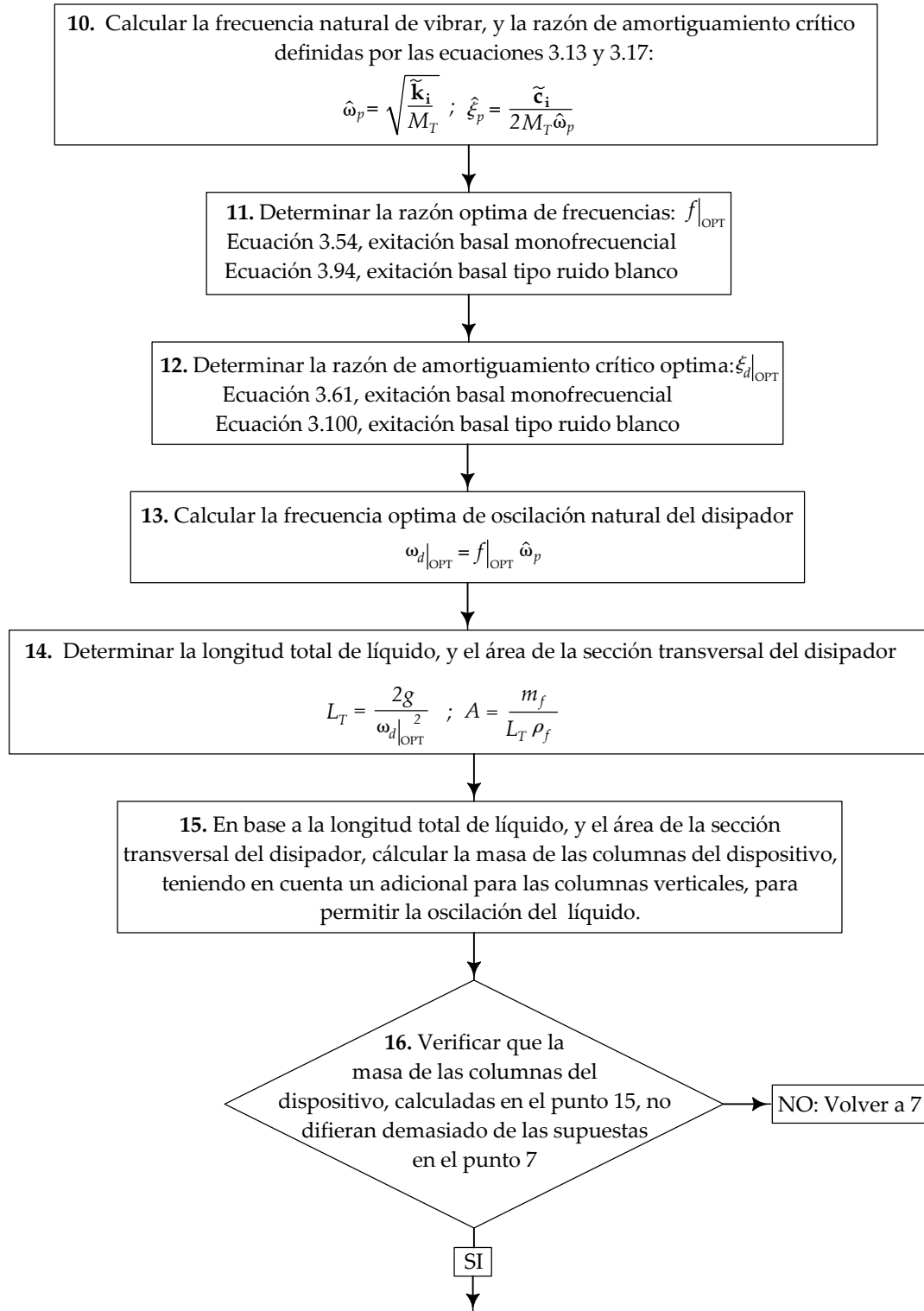


Figura 5.14: Diagrama de flujo para el diseño del DCLS, continuación

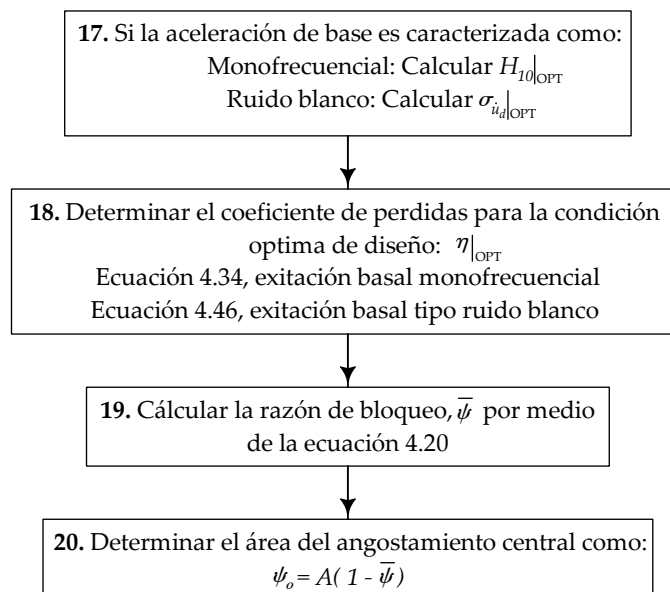


Figura 5.15: Diagrama de flujo para el diseño del DCLS, continuación

Capítulo 6

Resultados de los Análisis Experimentales

Con objeto de verificar la reducción de la respuesta estructural que se obtiene por medio de la utilización de los disipadores, el modelo descrito en el capítulo anterior es sometido a la acción de los registros sísmicos modificados indicados en la tabla 6.1. Los registros son aplicados en la base del modelo con la ayuda de la mesa de vibrar del Departamento de Ingeniería Civil de la Universidad de Chile. La respuesta de la estructura se registra por medio de acelerómetros ubicados en cada uno de los niveles de la misma. Dichos sensores registran el movimiento de la estructura hasta 2min después de acabado el registro sísmico. Esto último permite cuantificar la reducción de la respuesta de la estructura en términos del decaimiento de su oscilación. La ubicación y características de los sensores utilizados, se pueden consultar en la figura 5.5 y en la tabla 5.3.

Los espectros de potencia de los registros reproducidos por la mesa de vibrar, se determinan a partir de la aceleración medida por el sensor ubicado en la base de la mesa, acelerómetro 7. En las figuras 6.1 y 6.2 se muestran los espectros de potencia de cada uno de los registros descritos en la tabla 6.1. Los resultados se han sido previamente filtrados hasta los 20[Hz].

Para realizar posteriores análisis comparativos, se evaluará la respuesta del modelo para las siguientes configuraciones:

1. Modelo original sin modificaciones adicionales
2. Modelo con disipadores

Tabla 6.1: Registros utilizados para analizar el comportamiento de la estructura.

<i>Registro</i>	<i>Identificación</i>	<i>Escala</i>
1	CHILE 1985, LLOLLEO 100 - up	0.15
2	CHILE 1985, MELIPILLA EW - up	0.15
3	CHILE 1985, VENTANAS N00E - up;	0.1
4	CHILE 1985, CHILLAN VIEJO N80E - up;	0.45
5	CHILE 1985, VALPARAISO (UTFSM) S20E - up;	0.6
6	CHILE 1985, ZAPALLAR N90E - up;	0.5
7	KERN COUNTY 1952, TAFT S69E - up	0.58
8	LOMA PRIETA 1989, GILROY #3 - GILROY SEWAGE PLANT 000 - up;	0.28
9	LOMA PRIETA 1989, YERBA BUENA ISLAND 000 - up;	1
10	NORTHRIDGE 1994, ARLETA - NORDHOFF AVE FIRE STATION 360 - up;	0.25

En el segundo caso se utilizarán los disipadores sintonizados diseñados en el capítulo anterior, esto es, disipador de masa sintonizada y disipador de columna líquida sintonizada.

Para cada uno de los registros utilizados, se determina la variación de la respuesta obtenida con la instalación del disipador. Para ello se evalúan los siguientes parámetros:

1. Máximos desplazamientos, velocidades y aceleraciones de cada uno de los niveles del modelo.
2. Energías cinéticas y potenciales elásticas acumuladas en el tiempo.
3. Duración de movimiento fuerte.
4. Intensidad de Arias y Root Mean Square (RMS).
5. Estimación del amortiguamiento lineal equivalente, para modo controlado, por el dispositivo.

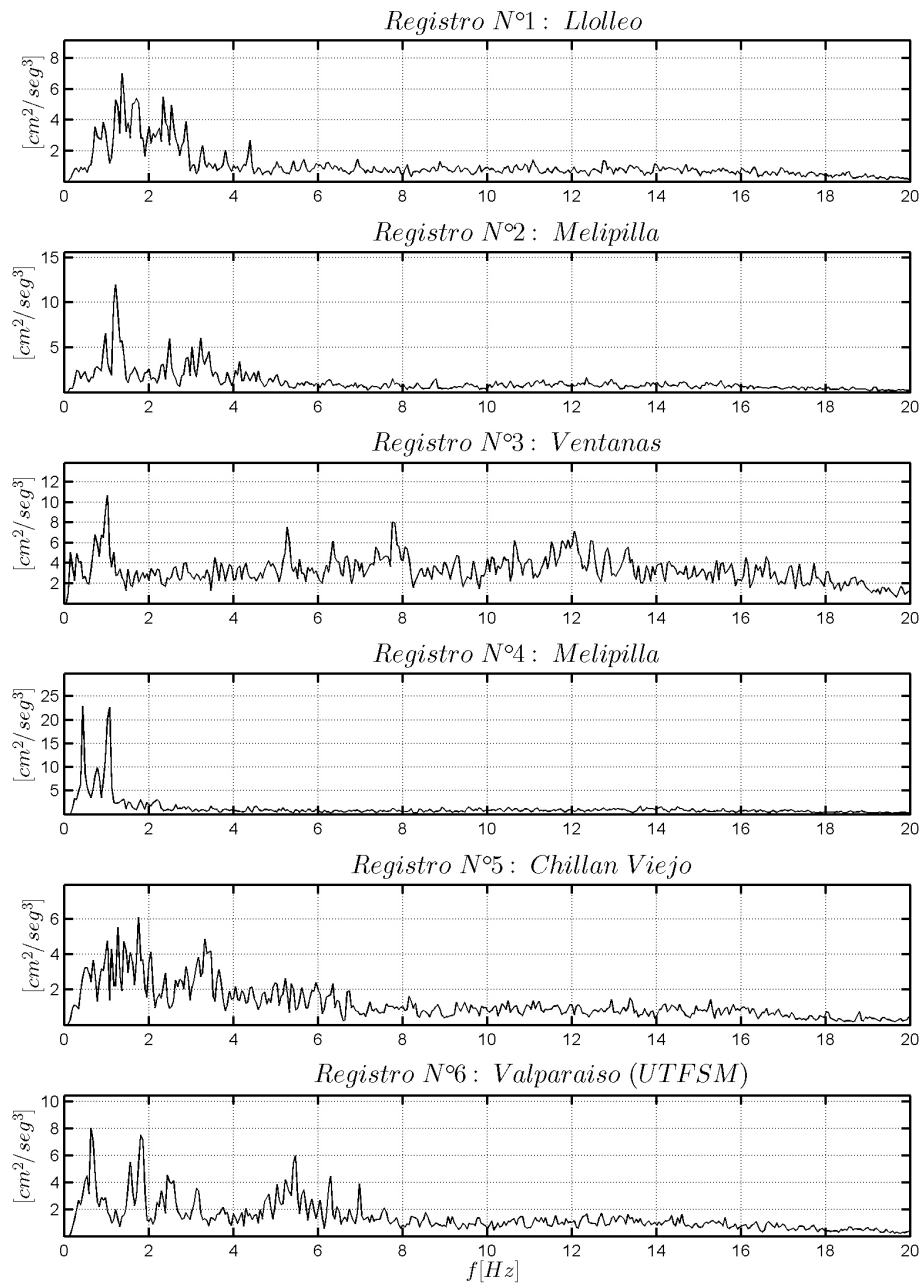


Figura 6.1: Espectros de potencia de los registros 1 a 6, ver tabla 6.1.

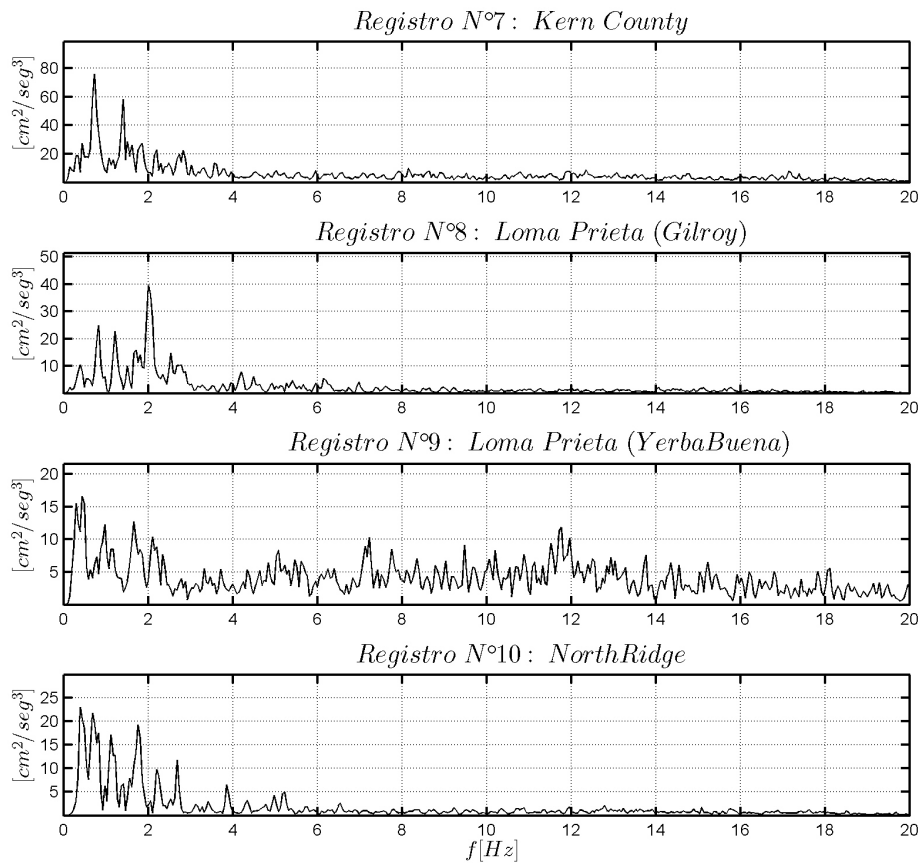


Figura 6.2: Espectros de potencia de los registros 7 a 10, ver tabla 6.1.

Para obtener la duración de movimiento fuerte se utilizará el criterio de Trifunac y Brady [37]. Este criterio establece que la duración de movimiento fuerte, para un registro de aceleraciones, se encuentra determinando el intervalo de tiempo durante el cual se concentra entre el 5% y el 95% del aporte a la integral del cuadrado de las aceleraciones del registro en cuestión ($\int a^2 dt$). Utilizaremos a su vez la duración de movimiento fuerte para obtener el RMS.

La estimación del amortiguamiento lineal equivalente para el modo controlado, producido por la instalación de los dispositivos, se lleva a cabo mediante el método MIMO (Multiple Input, Multiple Output). El procedimiento consiste en minimizar la diferencia entre el cuadrado de las aceleraciones medidas por los sensores, con respecto al cuadrado de aquellas determinados por medio de un modelo lineal equivalente supuesto de la estructura. Este modelo supuesto es equivalente al modelo de la estructura descrito en el capítulo anterior, tanto en las masas, establecidas en la tabla 5.1, y las rigideces de piso, establecidas en la tabla 5.5. La única diferencia radica en que los amortiguamientos modales son desconocidos, y corresponden a las variables a ajustar por el método.

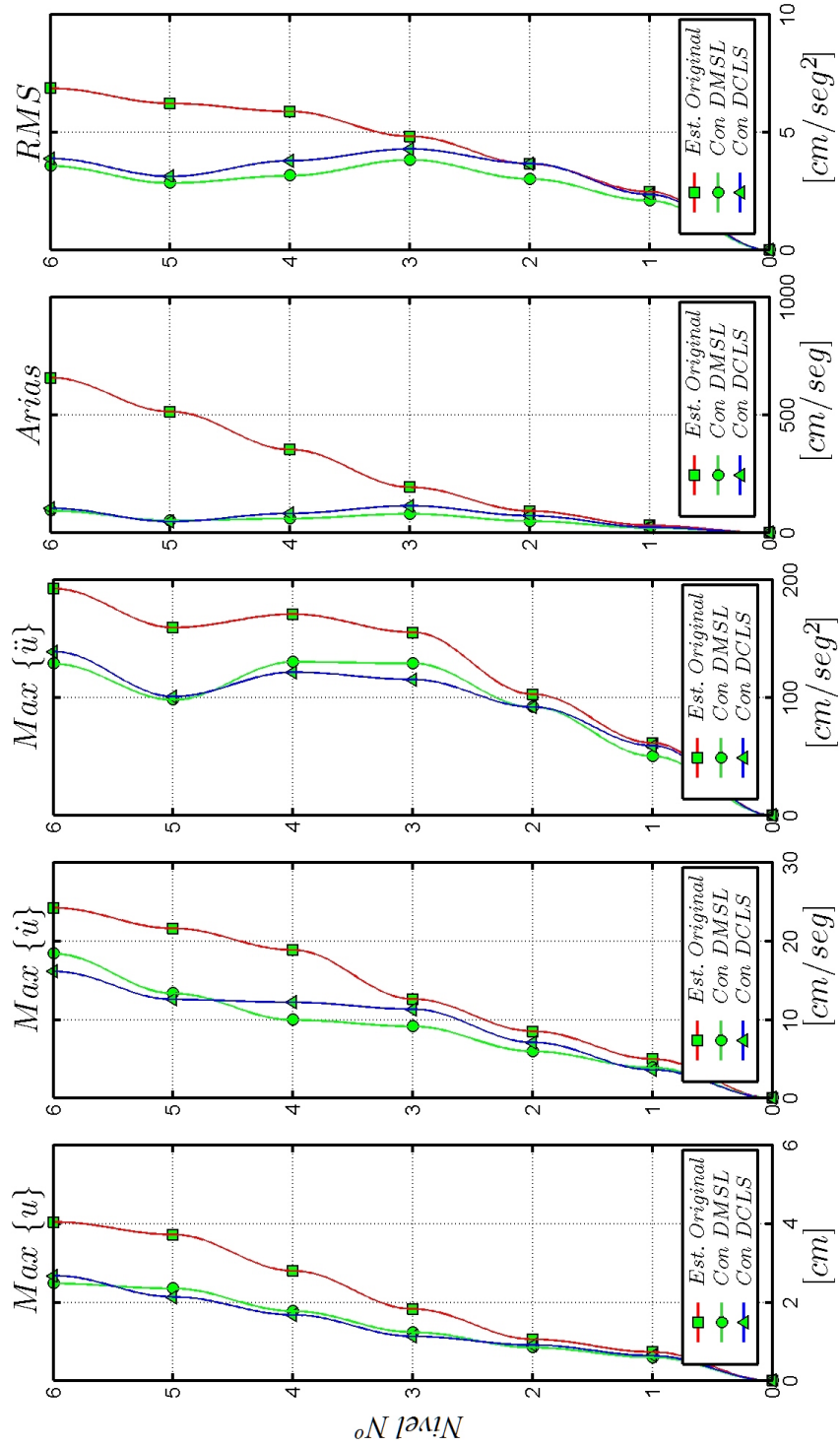


Figura 6.3: Máximas respuestas, intensidad de Arias, y RMS para el registro 1, ver tabla 6.1

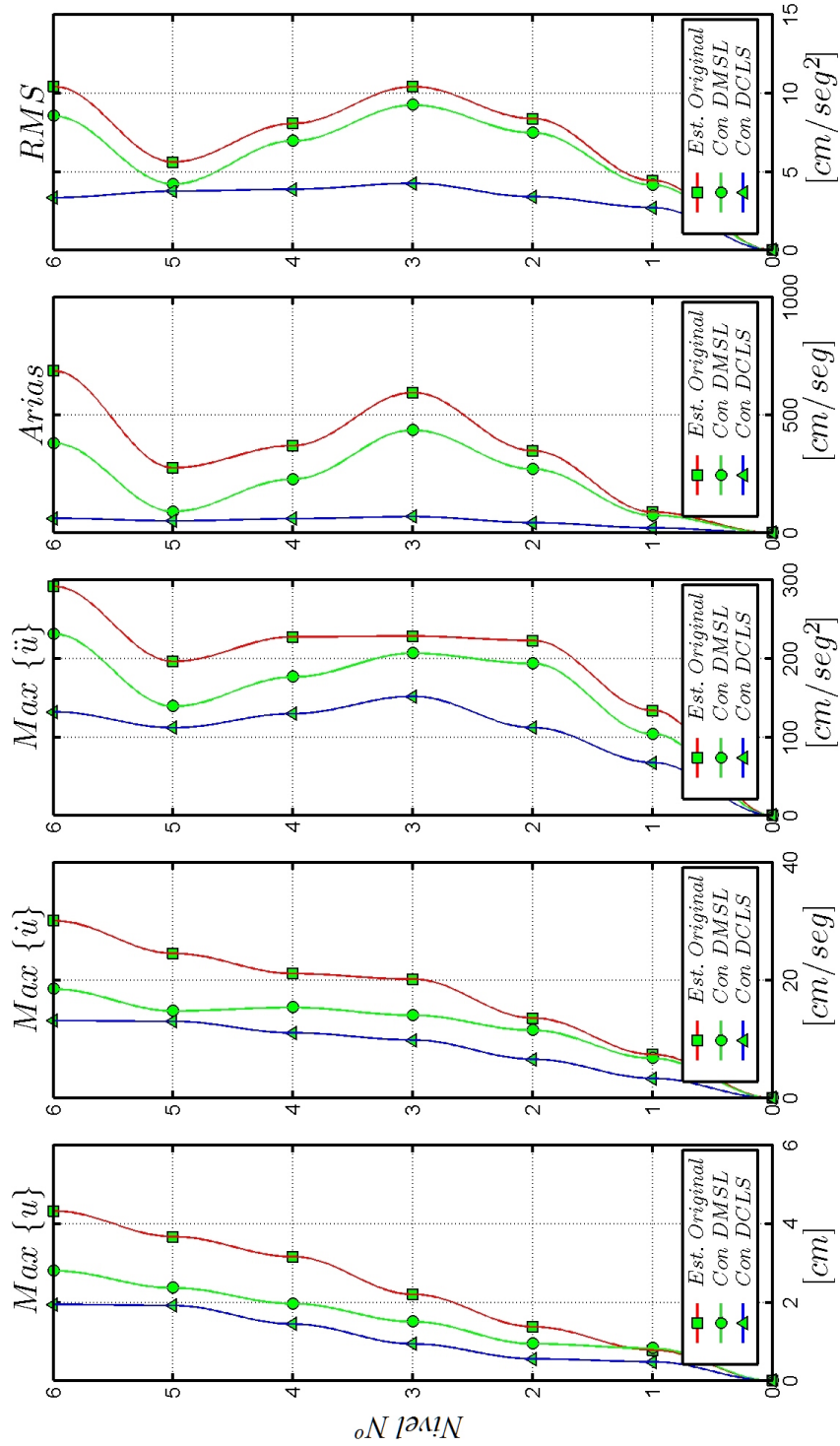


Figura 6.4: Máximas respuestas, intensidad de Arias, y RMS para el registro 2, ver tabla 6.1

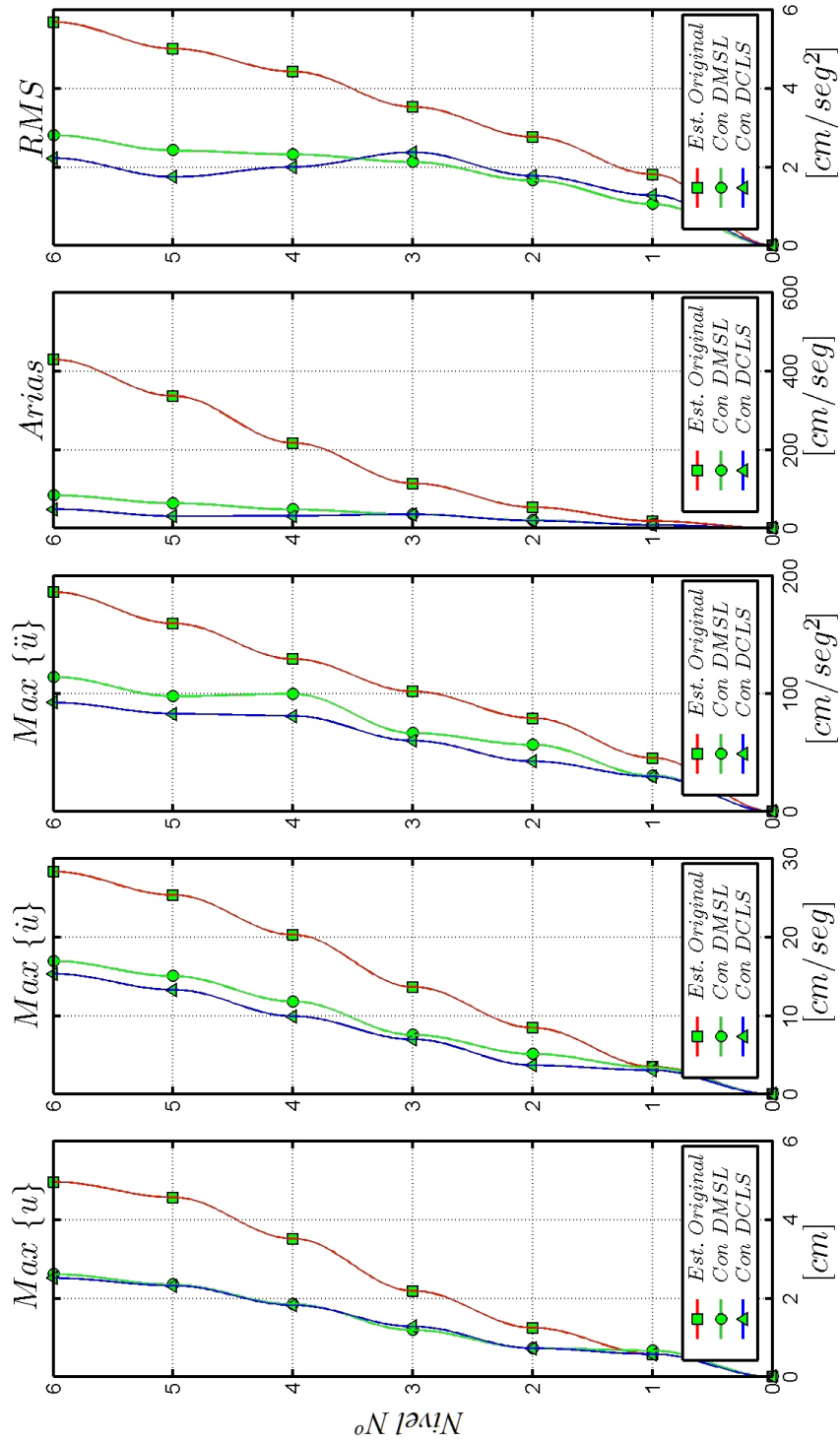


Figura 6.5: Máximas respuestas, intensidad de Arias, y RMS para el registro 3, ver tabla 6.1

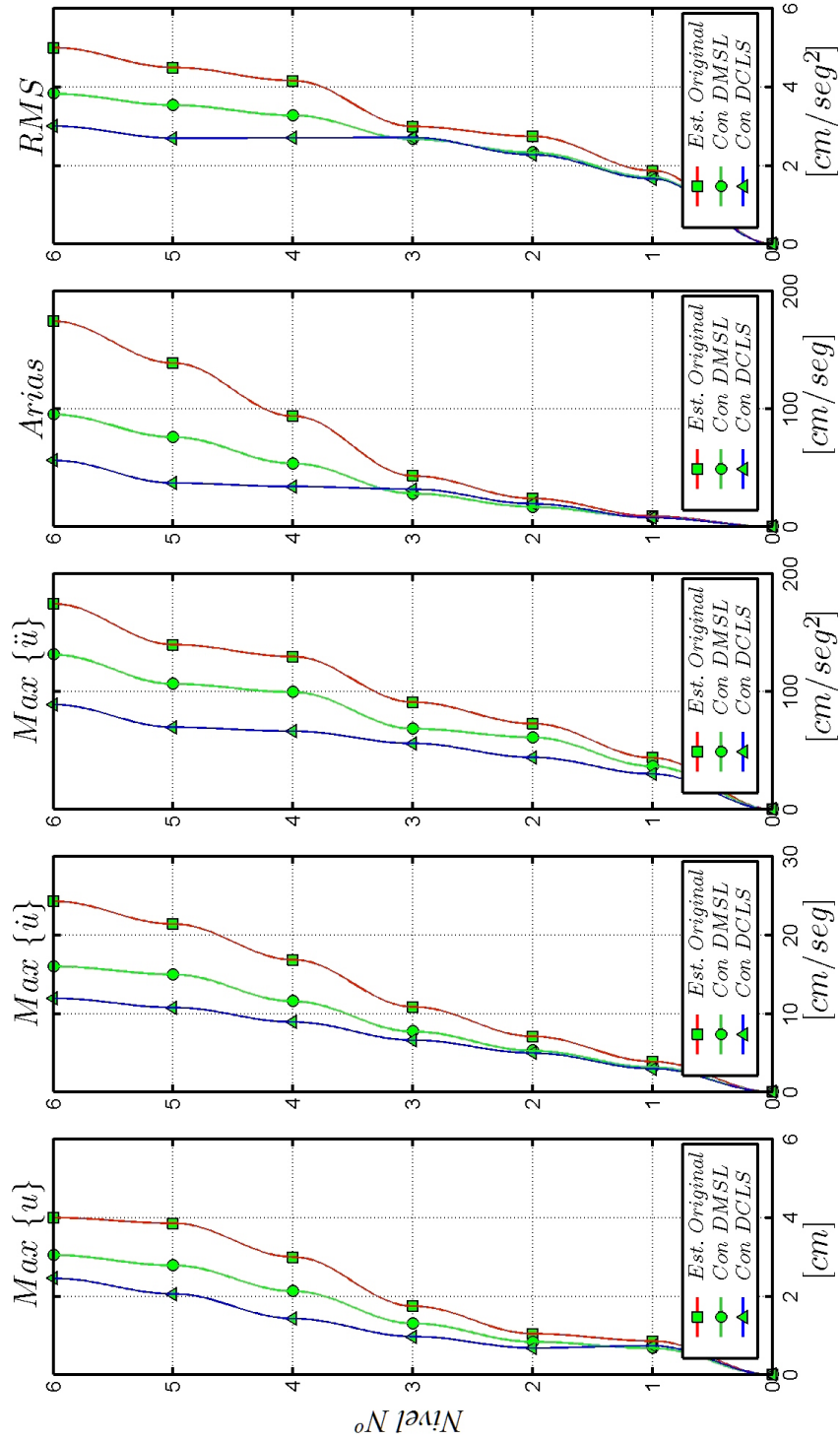


Figura 6.6: Máximas respuestas, intensidad de Arias, y RMS para el registro 4, ver tabla 6.1

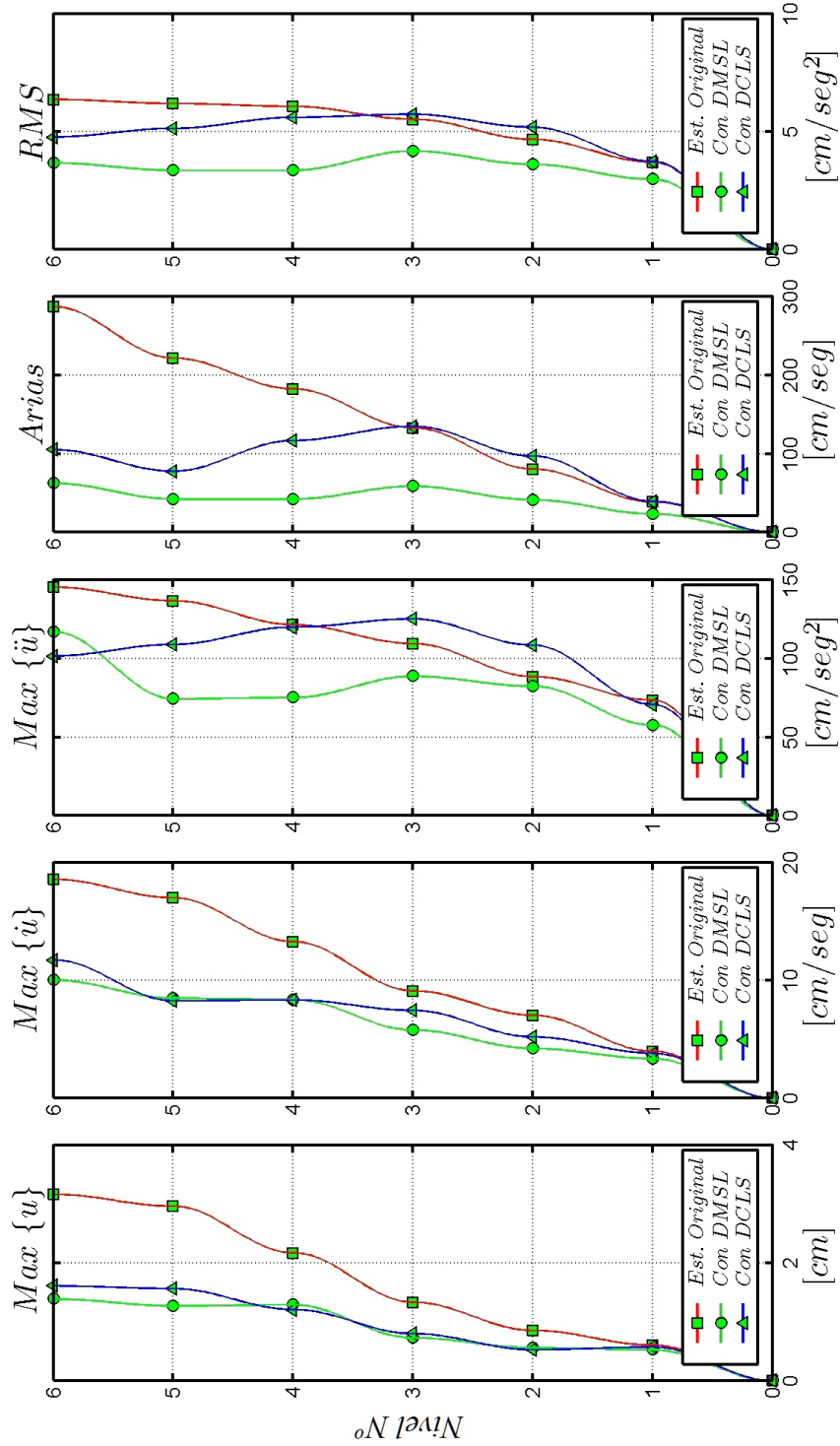


Figura 6.7: Máximas respuestas, intensidad de Arias, y RMS para el registro 5, ver tabla 6.1

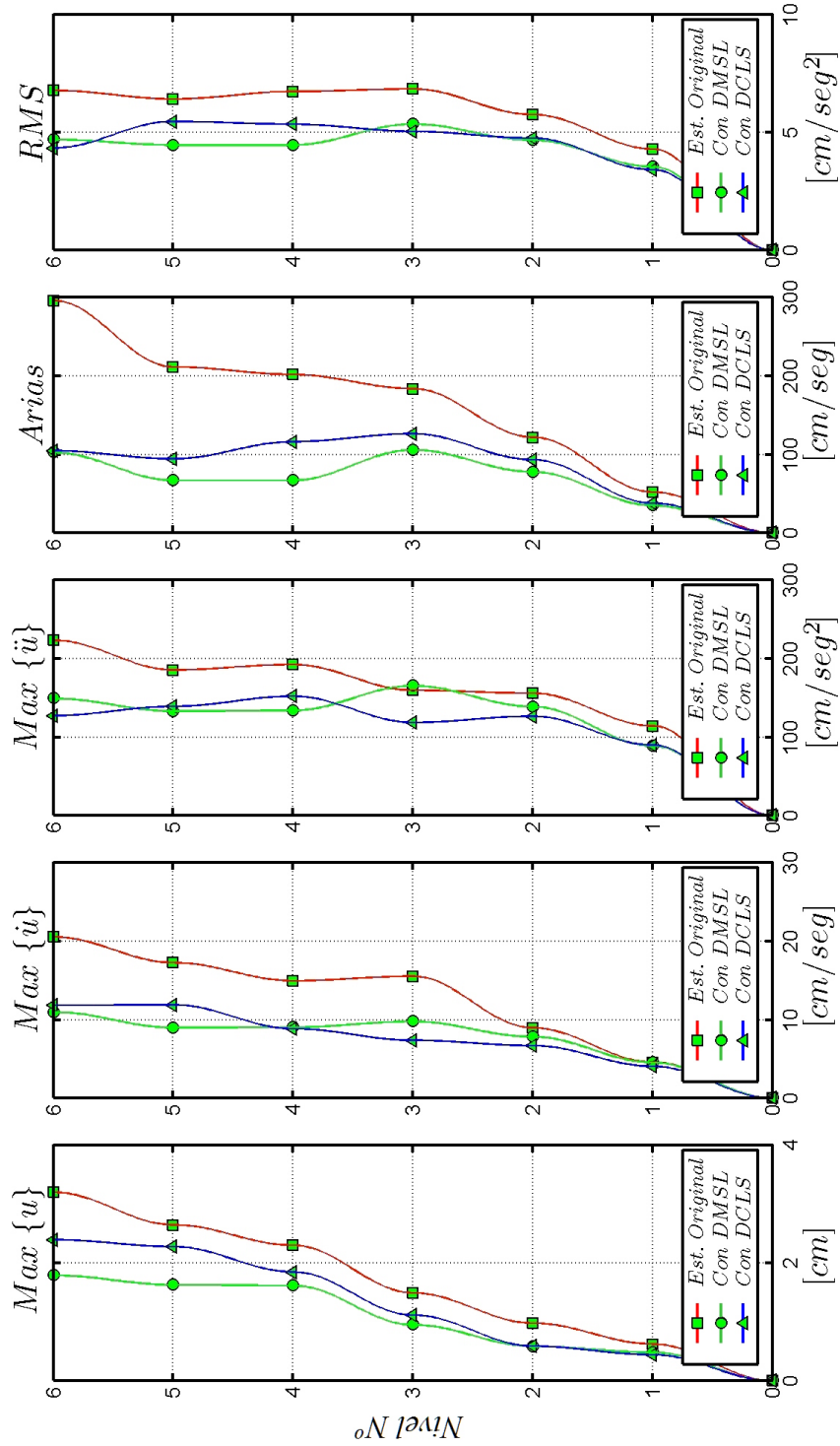


Figura 6.8: Máximas respuestas, intensidad de Arias, y RMS para el registro 6, ver tabla 6.1

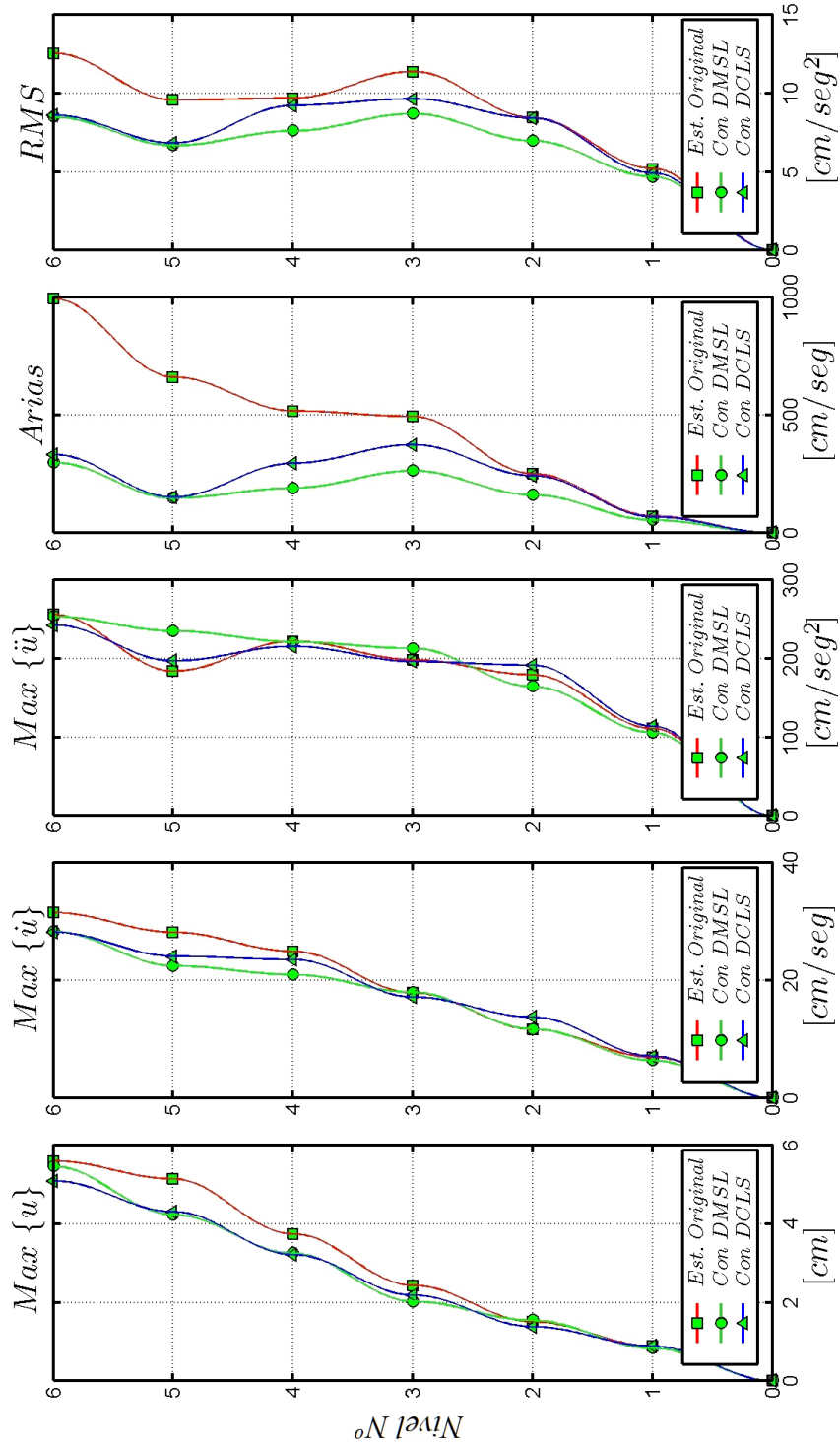


Figura 6.9: Máximas respuestas, intensidad de Arias, y RMS para el registro 7, ver tabla 6.1

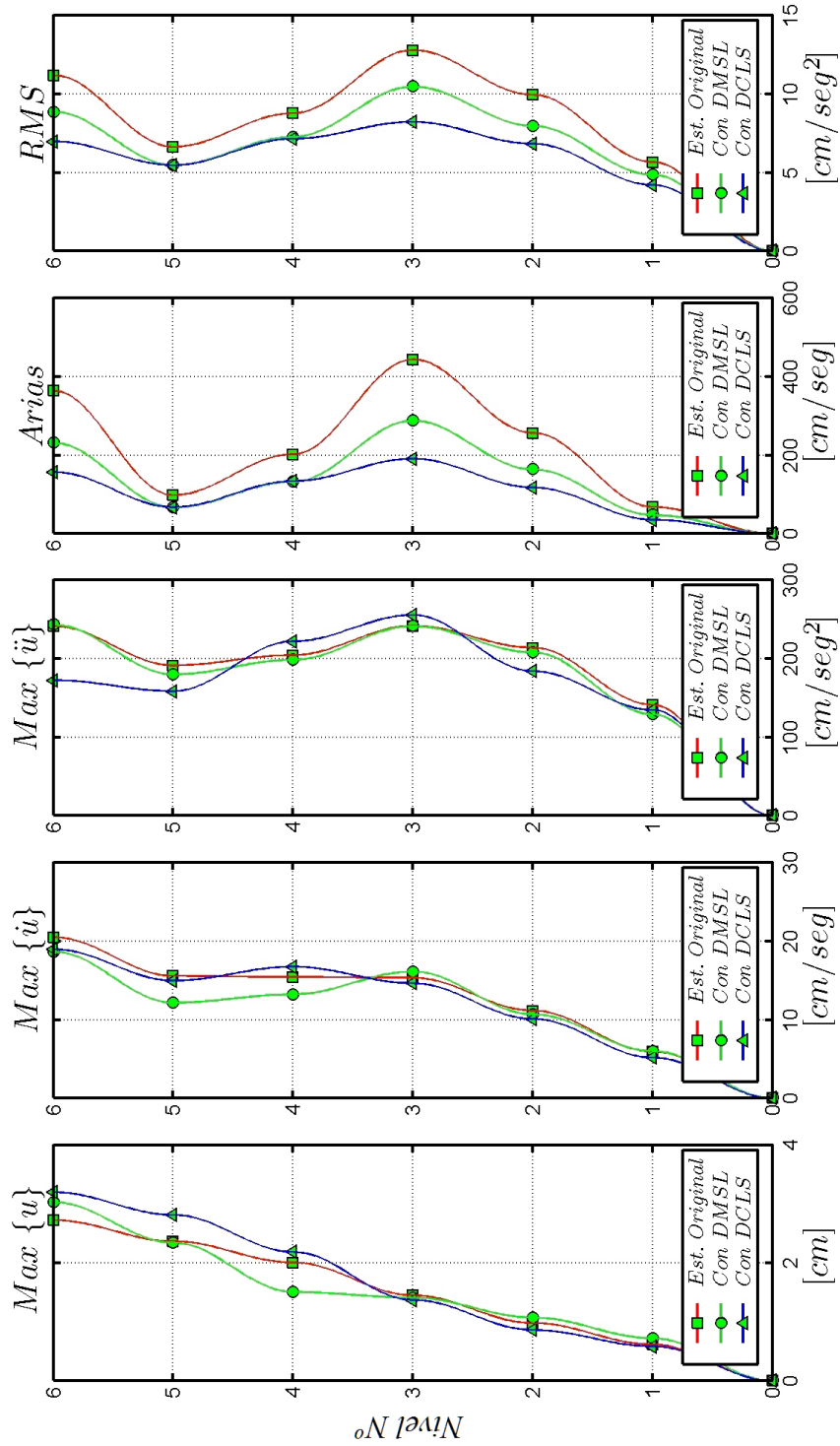


Figura 6.10: Máximas respuestas, intensidad de Arias, y RMS para el registro 8, ver tabla 6.1

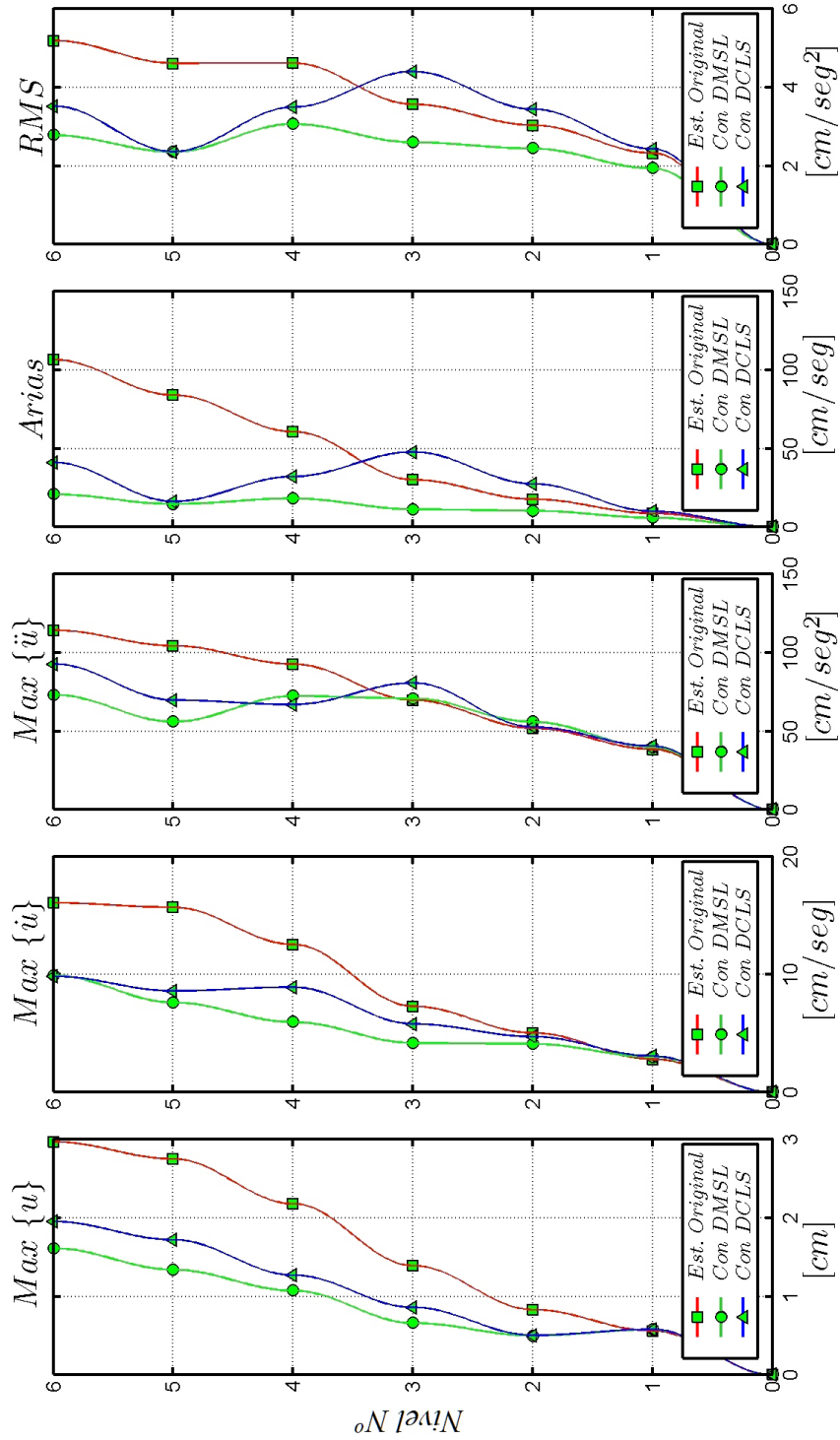


Figura 6.11: Máximas respuestas, intensidad de Arias, y RMS para el registro 9, ver tabla 6.1

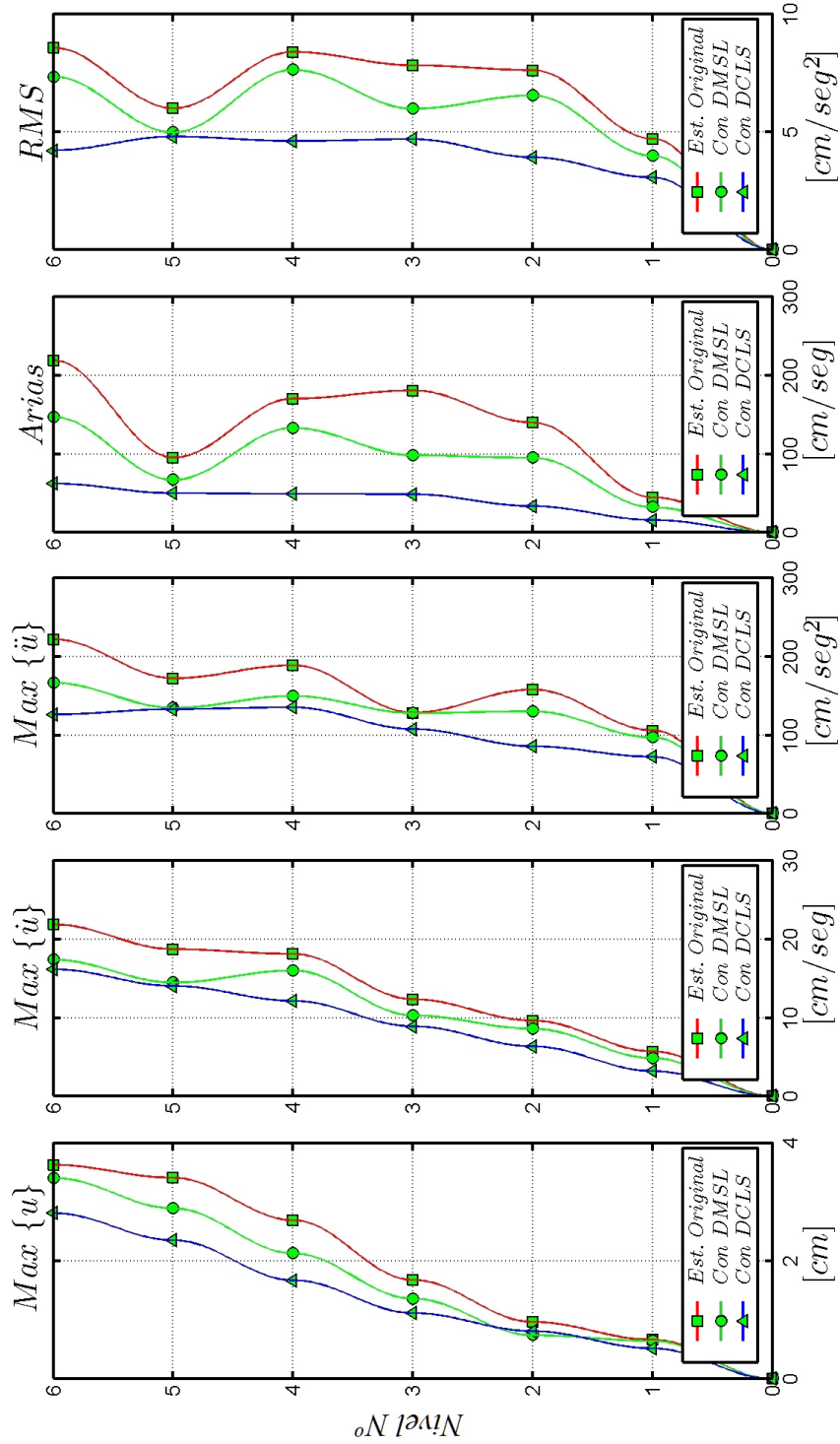


Figura 6.12: Máximas respuestas, intensidad de Arias, y RMS para el registro 10, ver tabla 6.1

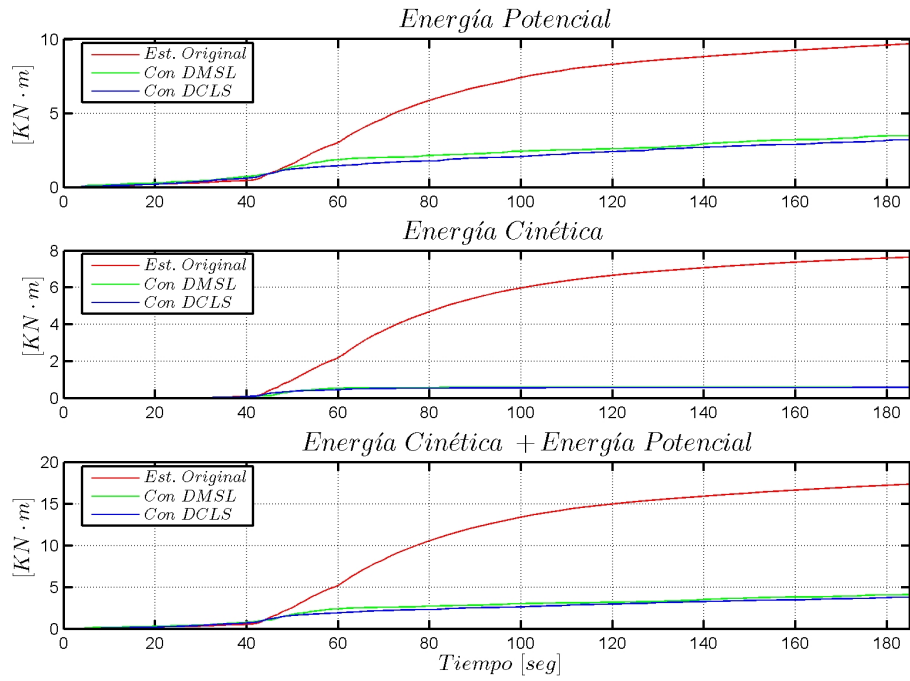


Figura 6.13: Diagramas de energía registro 1, ver tabla 6.1

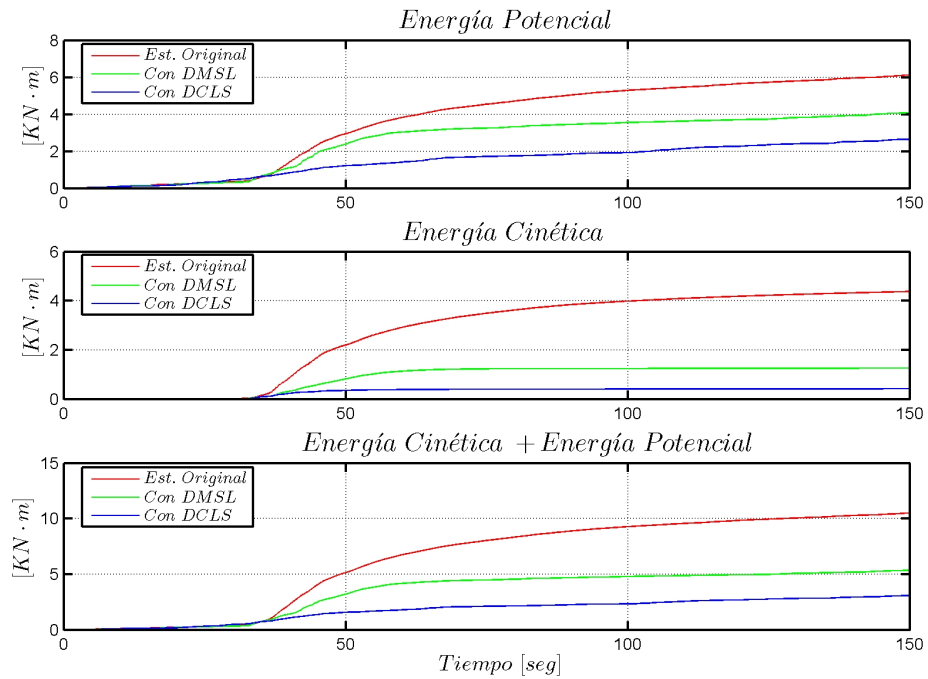


Figura 6.14: Diagramas de energía registro 2, ver tabla 6.1

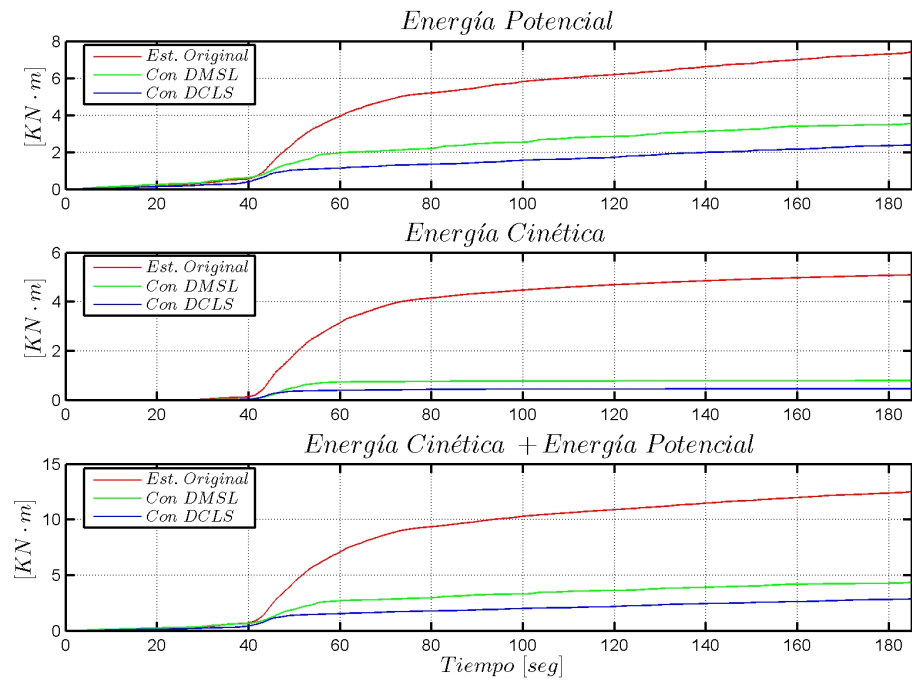


Figura 6.15: Diagramas de energía registro 3, ver tabla 6.1

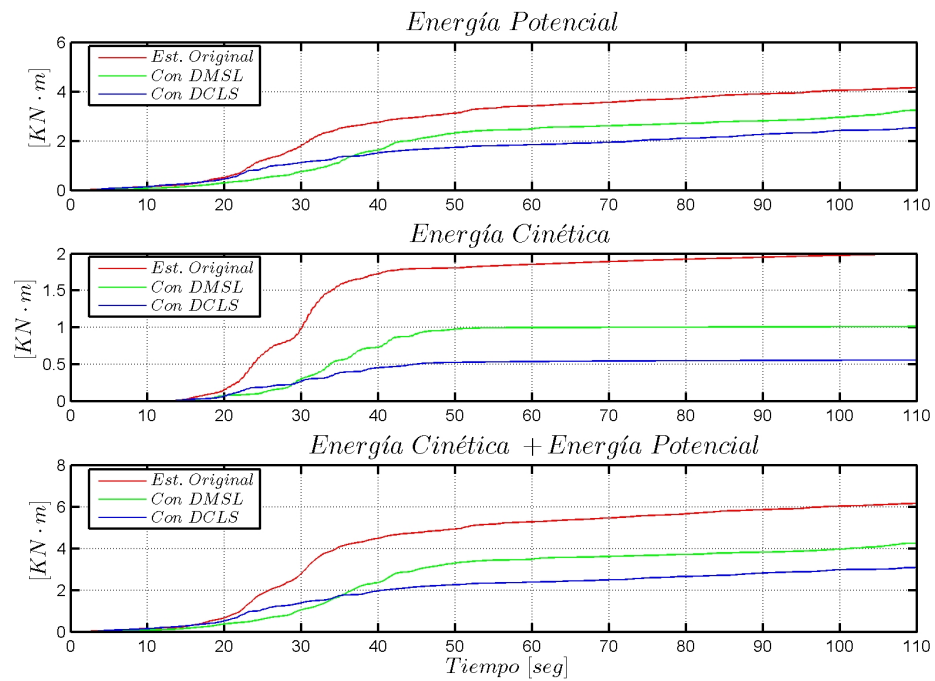


Figura 6.16: Diagramas de energía registro 4, ver tabla 6.1

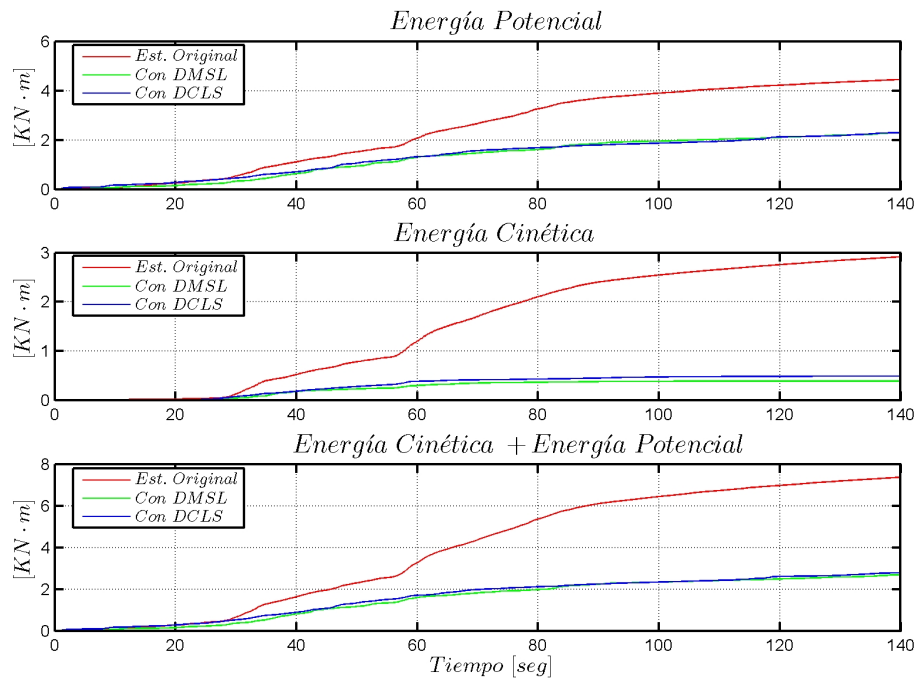


Figura 6.17: Diagramas de energía registro 5, ver tabla 6.1

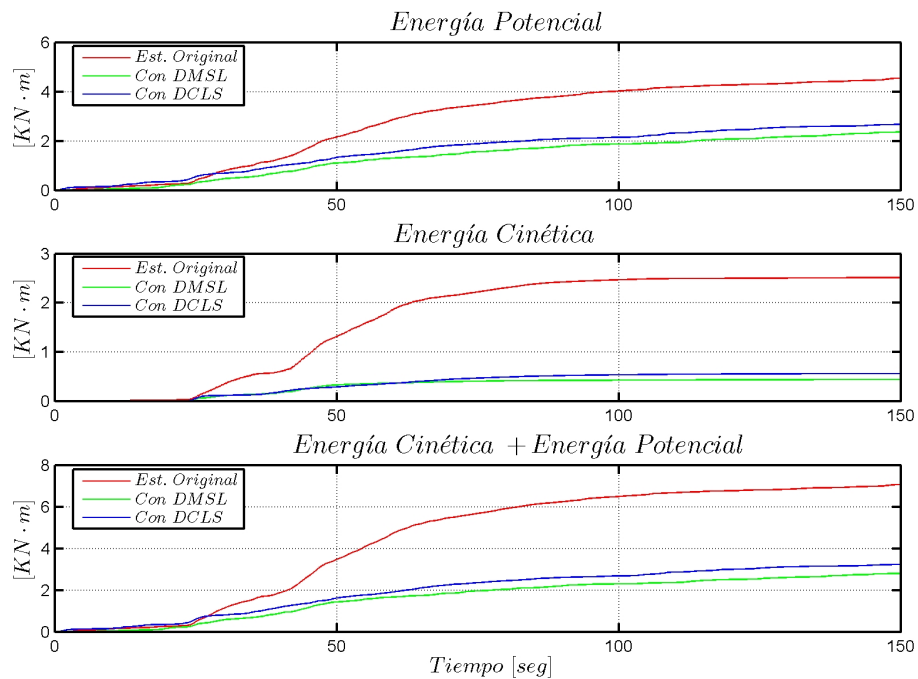


Figura 6.18: Diagramas de energía registro 6, ver tabla 6.1

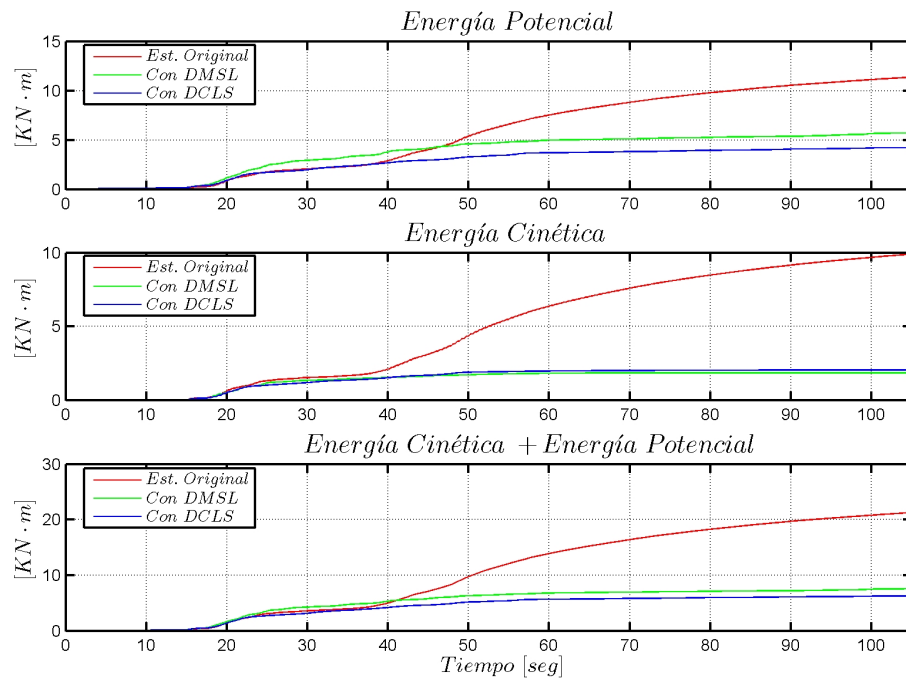


Figura 6.19: Diagramas de energía registro 7, ver tabla 6.1

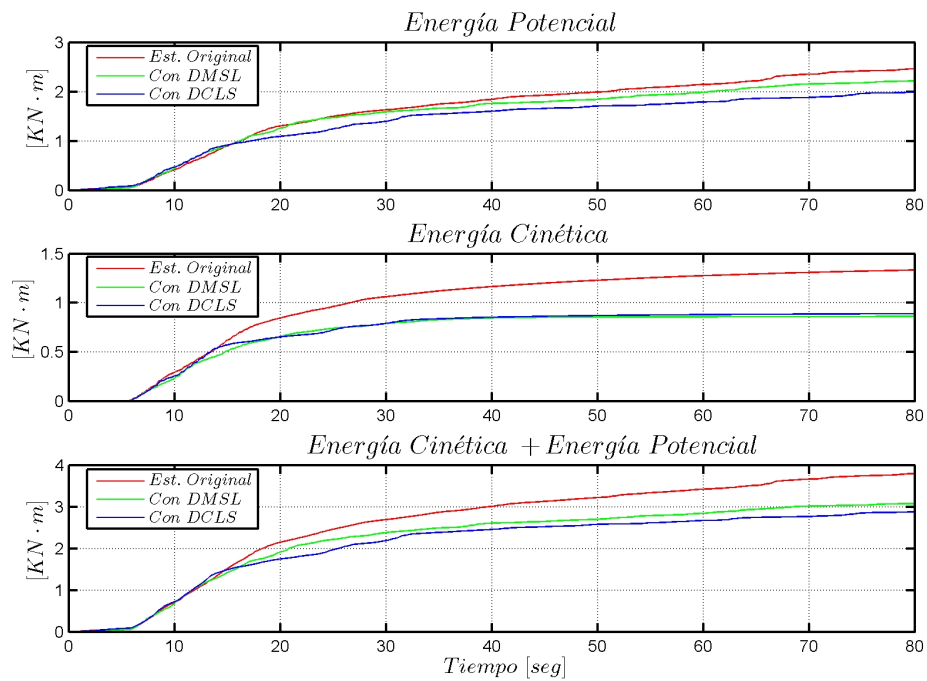


Figura 6.20: Diagramas de energía registro 8, ver tabla 6.1

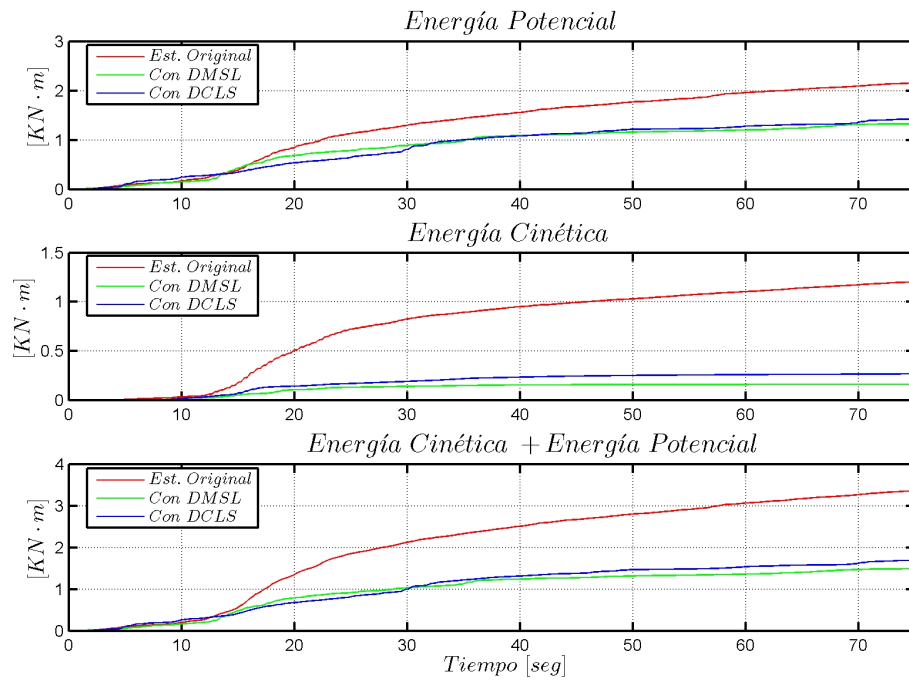


Figura 6.21: Diagramas de energía registro 9, ver tabla 6.1

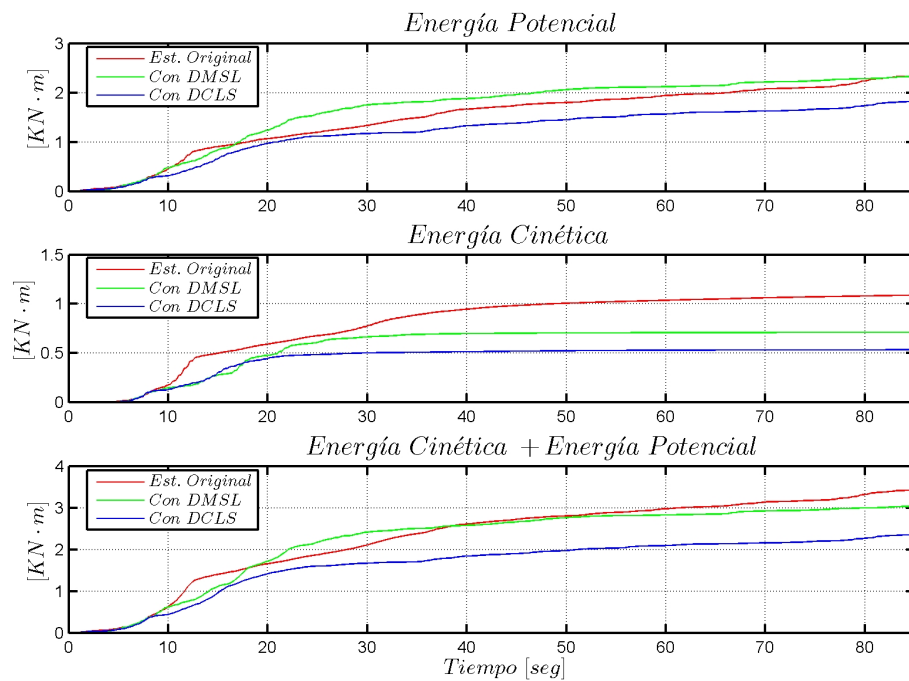


Figura 6.22: Diagramas de energía registro 10, ver tabla 6.1

En la tabla 6.2 queda de manifiesto la variabilidad de los amortiguamientos equivalentes determinados para cada uno de los registros analizados. Como fue mencionado, estos valores fueron obtenidos mediante un ajuste numérico que minimiza la diferencia cuadrática entre las aceleraciones medidas experimentalmente y aquellas calculadas a partir del modelo supuesto. Como alternativa, podemos estimar el amortiguamiento equivalente para el primer y segundo modo, por medio de ensayos tipo “pullback”. Para ello se ha aplicado una deformación inicial al modelo, el cual es luego dejado vibrar libremente. Analizando el decaimiento de la oscilación podemos pues estimar el amortiguamiento del mismo. En la figura 6.23 se muestran los resultados obtenidos de estos ensayos.

Como puede apreciarse, el amortiguamiento se incrementa significativamente en el primer modo, lo que concuerda con el objetivo buscado en el diseño de los dispositivos. A su vez notamos que el período de vibrar del primer modo aumenta con el DCLS instalado, alcanzando a $1.133[seg]$. Esto era de esperarse ya que hemos agregado masa al último nivel de la estructura, lo que se traduce en un incremento de su período. Asimismo los subsistemas DCLS y estructura principal no se encuentran elásticamente acoplados, según puede notarse al analizar la ecuación de movimiento 3.157. Por otro lado, el período de vibrar del primer modo de la estructura original disminuye con el DMSL instalado llegando a $0.995[seg]$. En este caso la instalación del dispositivo corresponde básicamente a agregar un nivel adicional a la estructura. Esto significa que el primer modo de la estructura original pasa a ser ahora el segundo modo de la estructura con el DMSL. El primer modo corresponde ahora al modo asociado al desplazamiento del dispositivo cuyo período es de $1.28[seg]$. Si deseamos por tanto comparar el amortiguamiento equivalente del primer modo de la estructura original, debemos analizar el amortiguamiento del segundo modo de la estructura con DMSL. Este modo posee un período ligeramente menor que el original, lo cual se puede apreciar en la figura 6.23. Para el segundo y tercer modo en tanto, la variación del amortiguamiento equivalente es despreciable.

Volviendo ahora al disipador de columna líquida sintonizada, analizamos la velocidad de la superficie libre de líquido, con el fin de establecer si el flujo se encuentra en su mayor parte del tiempo en régimen turbulento. Esto último nos permite validar la hipótesis supuesta para el comportamiento de flujo, según la cual la fuerza opuesta por el angostamiento central, y efectos tales como la fricción y el cambio de dirección del flujo en los codos, es proporcional al cuadrado de la velocidad. Para ello

Tabla 6.2: Máximas respuestas registradas en el modelo para cada uno de los registros aplicados, los registros se indican en la tabla 6.1.

- A: Estructura original.
- B: Estructura con disipador de masa sintonizada.
- C: Estructura con disipador de columna líquida sintonizada.

	Registro 1			Registro 2			Registro 3			Registro 4			Registro 5		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
$\sum \text{máx} \{\ddot{u}\} [m/seg^2]$	4.412	2.684	2.308	5	3.28	2.565	5.487	3.337	2.848	4.595	3.252	2.841	3.507	1.7	3.507
$\sum \text{máx} \{\dot{u}\} [m/seg]$	0.773	0.424	0.425	0.774	0.448	0.38	0.945	0.557	0.476	0.793	0.543	0.39	0.568	0.3	0.568
$\sum \text{máx} \{u\} [m]$	0.14	0.093	0.088	0.151	0.093	0.069	0.184	0.103	0.093	0.151	0.111	0.083	0.107	0.0	0.107
<i>Duracion [seg]</i>	109.36	63.418	74.805	88.886	50.734	57.575	102.64	43.873	64.619	58.454	37.383	42.541	92.013	67.3	92.013
$\sum \text{Arias} [cm/seg]$	1484.9	91.051	62.912	660.4	87.99	62.462	989.08	173.66	77.05	395.67	206.61	90.775	594.62	64.9	594.62
$\sum \text{RMS} [cm/seg^2]$	19.148	4.941	3.968	14.347	5.573	4.448	15.609	6.945	4.318	12.992	9.75	6.122	13.544	4.8	13.544
$\xi_{eq\%}$	0.24	2.7	6.1	0.24	2.4	4.9	0.24	1.7	5.9	0.24	2.2	5.4	0.24	3.	0.24

	Registro 1			Registro 2			Registro 3			Registro 4			Registro 5		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
$\sum \text{máx} \{\ddot{u}\} [m/seg^2]$	3.987	1.764	1.944	5.989	4.664	3.647	2.423	2.236	2.357	2.972	1.481	1.678	3.479	3.0	3.479
$\sum \text{máx} \{\dot{u}\} [m/seg]$	0.539	0.3	0.368	1.019	0.84	0.762	0.389	0.4	0.473	0.532	0.284	0.378	0.624	0.5	0.624
$\sum \text{máx} \{u\} [m]$	0.102	0.071	0.087	0.191	0.174	0.156	0.1	0.098	0.102	0.11	0.068	0.095	0.129	0.1	0.129
<i>Duracion [seg]</i>	67.511	81.181	81.843	75.104	41.223	41.767	55.248	36.527	33.705	53.95	34.756	41.592	54.203	32.2	54.203
$\sum \text{Arias} [cm/seg]$	439.21	47.227	51.478	1815.8	229.68	210.29	97.93	58.031	83.87	231.99	27.8	31.484	142.21	93.8	142.21
$\sum \text{RMS} [cm/seg^2]$	11.62	4.012	3.994	27.825	9.871	9.469	12.069	4.434	4.47	7.688	5.821	6.744	8.85	7.3	8.85
$\xi_{eq\%}$	0.24	4.7	5.1	0.24	4.9	6.7	0.24	3.6	3.4	0.24	5	4.6	0.24	2.	0.24

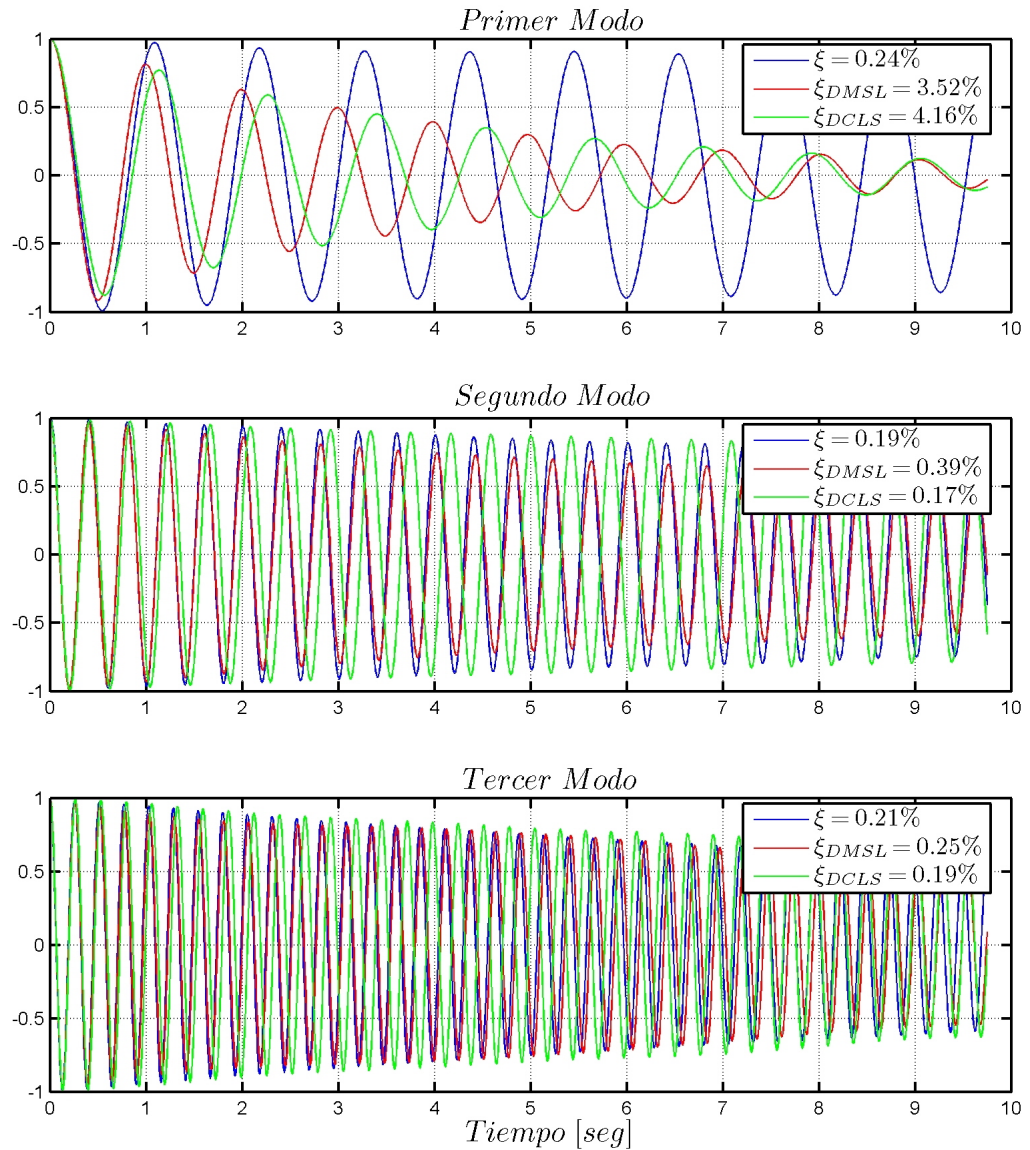


Figura 6.23: Series de tiempo correspondientes a los ensayos tipo “pullback” realizados al modelo. La respuesta ha sido previamente filtrada con objeto de aislar la respuesta de cada una de las formas de vibrar de la estructura.

el desplazamiento de la superficie libre de líquido ha sido registrado por medio de un sonómetro, instrumento que permite medir distancias a través de un haz de ultrasonido. Registrando cada 0.005 [seg] obtenemos la serie de tiempo correspondiente a la superficie libre de líquido. Considerando la fase de movimiento fuerte para el sexto nivel (nivel en donde se ubica el dissipador) definimos el parámetro \bar{T} , con el cual determinamos, en términos relativos, el tiempo durante el cual el régimen de flujo es turbulento.

$$\bar{T} = \frac{t_{turb}}{T_f} \quad (6.1)$$

En donde T_f corresponde a la duración de movimiento fuerte para el sexto nivel, y t_{turb} es el tiempo durante el cual el valor absoluto de la velocidad de la superficie libre de líquido es superior a $V_{\text{lím}}$ (ecuación 5.48), es decir 4.3 [cm/s]. En la figura 6.24, se muestran las series de tiempo correspondientes a la velocidad de la superficie libre de líquido dentro de la zona de movimiento fuerte del sexto nivel.

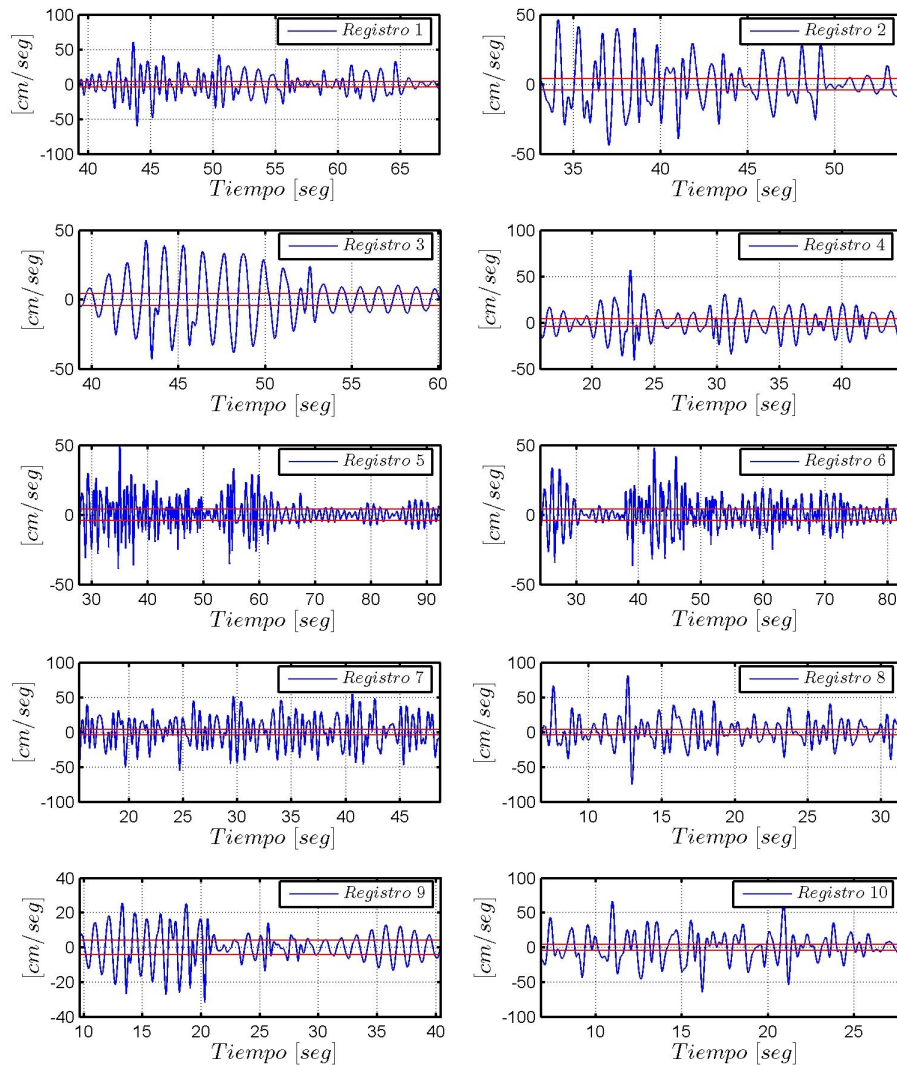


Figura 6.24: Velocidad de la superficie libre de líquido dentro de la zona de movimiento fuerte del sexto nivel. Las líneas rojas corresponden a la velocidad por sobre la cual el flujo de líquido es turbulento.. Los registros se indican en la tabla 6.1

En la tabla siguiente se presentan los valores de \overline{T} para cada uno de los registros analizados:

Tabla 6.3: Duración de movimiento fuerte para el sexto nivel, y tiempo durante el cual el flujo de líquido se encuentra en régimen turbulento, los registros se indican en la tabla 6.1

<i>Registro</i>	T_f [seg]	t_{turb} [seg]	\bar{T} %
1	28.82	21.47	74.5
2	20.80	15.41	74.1
3	20.86	16.88	80.9
4	28.83	22.55	78.2
5	64.79	36.09	55.7
6	58.07	35.48	61.1
7	33.23	28.58	86
8	24.67	20.00	81.1
9	30.81	18.52	60.1
10	20.91	16.90	80.8

En las figuras 6.25 a 6.29, se comparan en términos relativos las máximas respuestas del modelo con y sin disipadores. Las notaciones utilizadas son:

1. $\sum \max \{r\}$: Sumatoria sobre todos los niveles, del máximo valor de la respuesta r , para la estructura original.
2. $\sum \max \{r\}_D$: Sumatoria sobre todos los niveles, del máximo valor de la respuesta r , para la estructura con disipador.
3. $\sum Arias$: Sumatoria sobre todos los niveles, de la intensidad de Arias, para la estructura original.
4. $\sum Arias_D$: Sumatoria sobre todos los niveles, de la intensidad de Arias, para la estructura con disipador.
5. $\sum RMS$: Sumatoria sobre todos los niveles, del RMS, para la estructura original.
6. $\sum RMS_D$: Sumatoria sobre todos los niveles, del RMS, para la estructura con disipador.

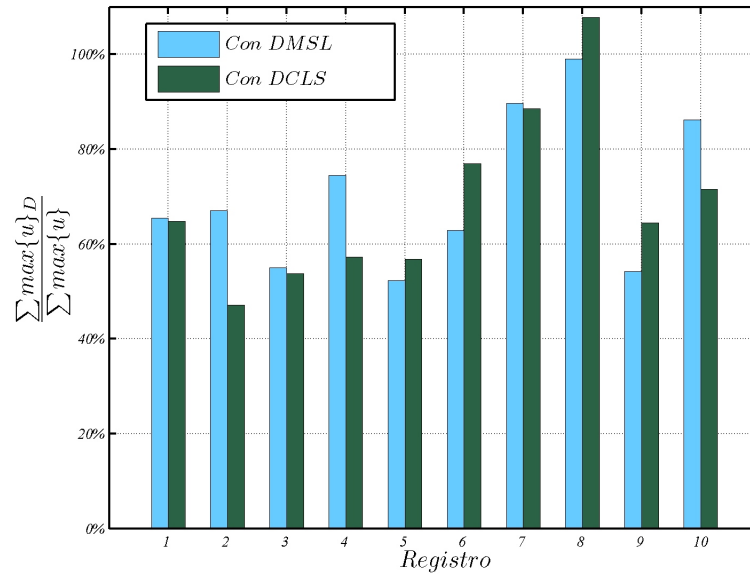


Figura 6.25: Cuociente entre los máximos desplazamientos para estructura con disipador, respecto de los máximos desplazamientos para estructura sin ellos, ver tabla 6.1

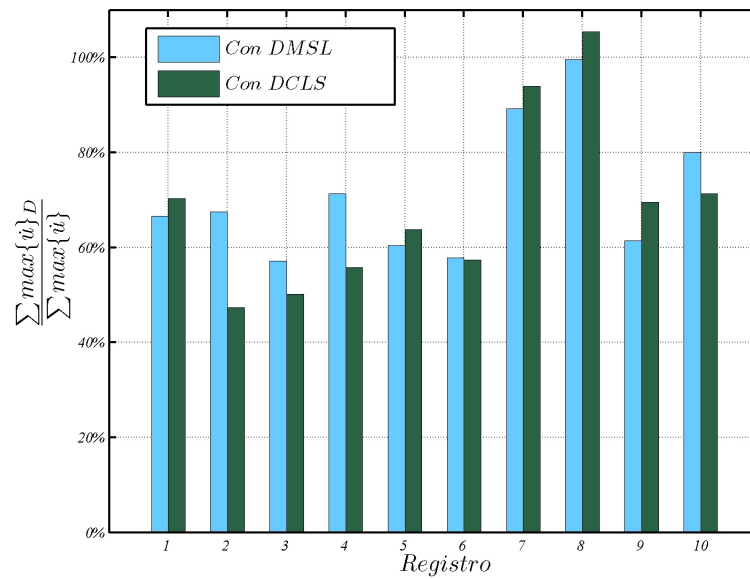


Figura 6.26: Cuociente entre las máximas velocidades para estructura con disipador, respecto de las máximas velocidades para estructura sin ellos, ver tabla 6.1

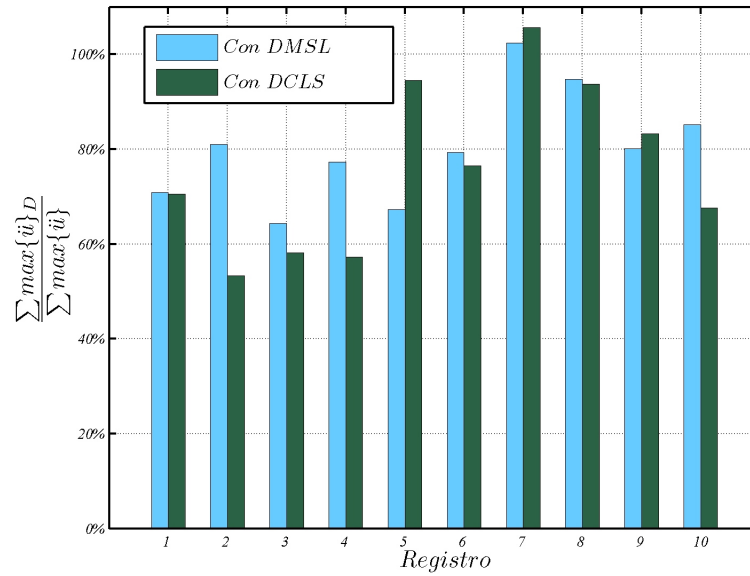


Figura 6.27: Cuociente entre las máximas aceleraciones para estructura con disipador, respecto de las máximas aceleraciones para estructura sin ellos, ver tabla 6.1

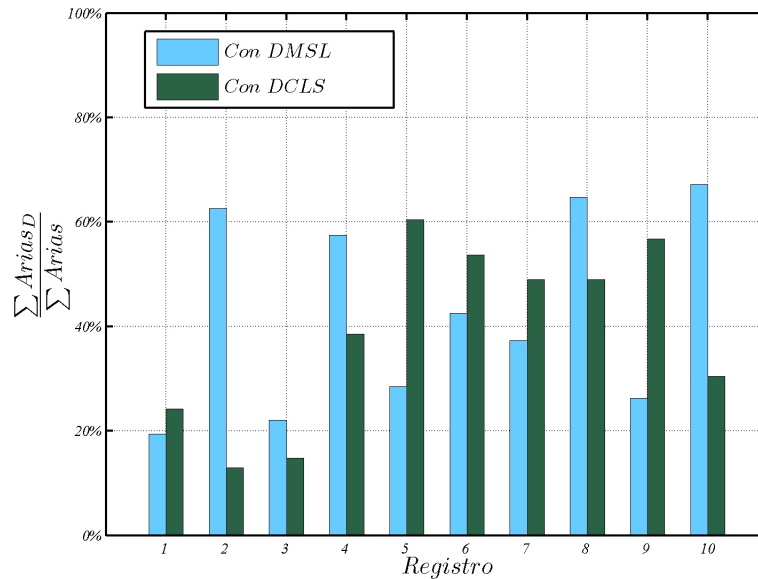


Figura 6.28: Cuociente entre la intensidad de Arias para estructura con disipador, respecto de la intensidad de Arias para estructura sin ellos, ver tabla 6.1

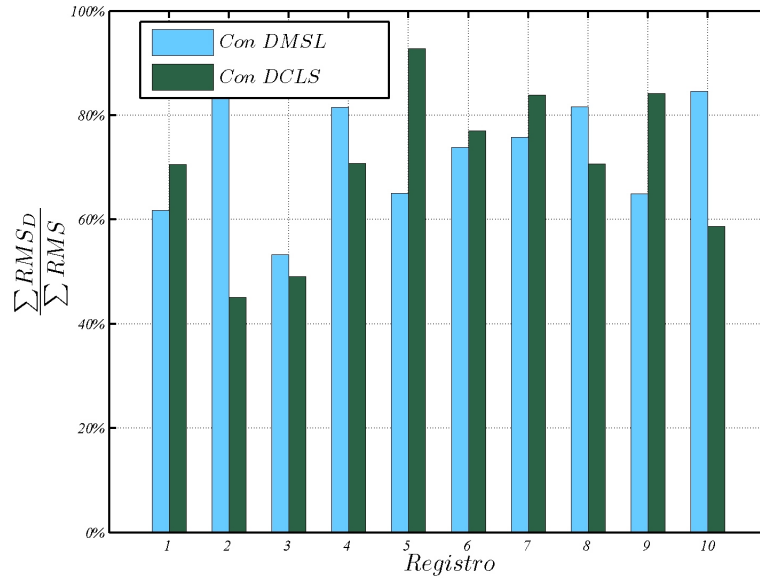


Figura 6.29: Cuociente entre el RMS para estructura con disipador, respecto del RMS para estructura sin ellos, ver tabla 6.1

De las figuras 6.25 a 6.29, se puede apreciar que las reducciones en las respuestas tienden a ser mayores para los registros 1 a 6. Por el contrario para los registros 7 a 10 dichas reducciones no resultan ser tan marcadas. Dentro de la condiciones más importantes que deben cumplirse para que los disipadores sintonizados surtan efecto, está la capacidad para que los mismos alcancen su estado de resonancia. En registros cuya duración de movimiento fuerte es demasiado pequeña, no existe tiempo suficiente para que los dispositivos alcancen dicha condición.

Procederemos por tanto a caracterizar los registros aplicados en la base del modelo, por medio de un índice \bar{N} definido como sigue:

$$\bar{N} = \frac{N_c T_n}{\Delta T_s} \tag{6.2}$$

En donde N_c es el numero de ciclos de oscilación que se requieren para que la estructura, en estado de resonancia, alcance un 95% de la máxima amplitud de oscilación, T_n es el período de oscilación natural de la estructura, y ΔT_s es la duración de movimiento fuerte, registrado a nivel de la mesa vibratoria, para un determinado registro.

Tabla 6.4: Número de ciclos de oscilación N_c , razones de amortiguamiento crítico ξ , y periodos naturales T_n , correspondientes al primer modo de la estructura con los disipadores instalados.

	T_n [seg]	ξ %	N_c
Con DMSL	1.28	3.52	13.55
Con DCLS	1.133	4.16	11.46

Para un oscilador de un grado de libertad en estado de resonancia, la razón entre la amplitud de oscilación después de transcurridos j ciclos, u_j , con respecto a la máxima amplitud de oscilación en estado de resonancia, u_o , puede ser escrita como[3]:

$$\frac{|u_j|}{u_o} = 1 - e^{-2\pi\xi j} \tag{6.3}$$

En donde ξ es la razón de amortiguamiento crítico del oscilador. Podemos determinar por medio de la expresión anterior el numero de ciclos necesarios para que la amplitud alcance el 95 % de la máxima amplitud de resonancia, con lo que obtenemos que $\xi N_c = 0.477$. Aplicando este último resultado al primer modo de la estructura con los dispositivos instalados, podemos construir la siguiente tabla.

Regresando con la ecuación 6.2, encontramos que a medida que el valor de \bar{N} disminuye, mayor es la duración de movimiento fuerte de la aceleración de base con respecto al tiempo que la estructura requiere para alcanzar el 95 % de la máxima amplitud en su estado de resonancia. Esto último nos indica que el dispositivo posee un mayor tiempo para alcanzar el estado de resonancia, lo que se traduce en un mejor desempeño del mismo. Por el contrario, a medida que el valor de \bar{N} se incrementa, el tiempo que la estructura requiere para alcanzar el 95 % de la máxima amplitud en su estado de resonancia, es menor en relación a la duración de movimiento fuerte del registro aplicado en la base. Como consecuencia el dispositivo no dispone de tiempo suficiente para entrar en estado de resonancia, reduciendo su efectividad.

En la figura 6.30 se muestra el valor del índice \bar{N} para los distintos registros utilizados en los análisis. Comparando dichos resultados con las figuras 6.25 a 6.29,

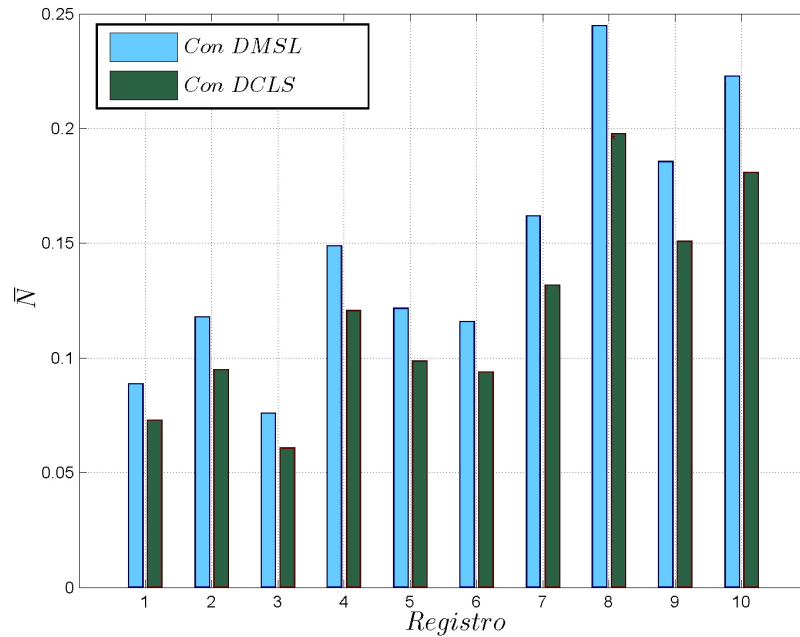


Figura 6.30: Índice \bar{N} para los registros utilizados en los análisis de la estructura, ver tabla 6.1

podemos apreciar que existe una buena concordancia entre los valores de \bar{N} y la efectividad de los disipadores.

Finalmente, en las figuras 6.31 a 6.40, se presentan las series de tiempo registradas experimentalmente y la estimación teórica del desplazamiento del sexto nivel. La estimación teórica de la respuesta se obtiene a partir de los modelos analíticos desarrollados en los apartados 2.7 y 3.7, para disipador de masa sintonizada y disipador de columna líquida sintonizada, junto con las rigideces y amortiguamientos estimados experimentalmente para la estructura a controlar. En ambos casos la respuesta se ha determinado en base a la formulación espacio estado, mediante la cual es posible analizar sistemas no clásicamente amortiguados. Se puede apreciar que la correspondencia entre la respuesta medida, y la simulada, es bastante cercana.

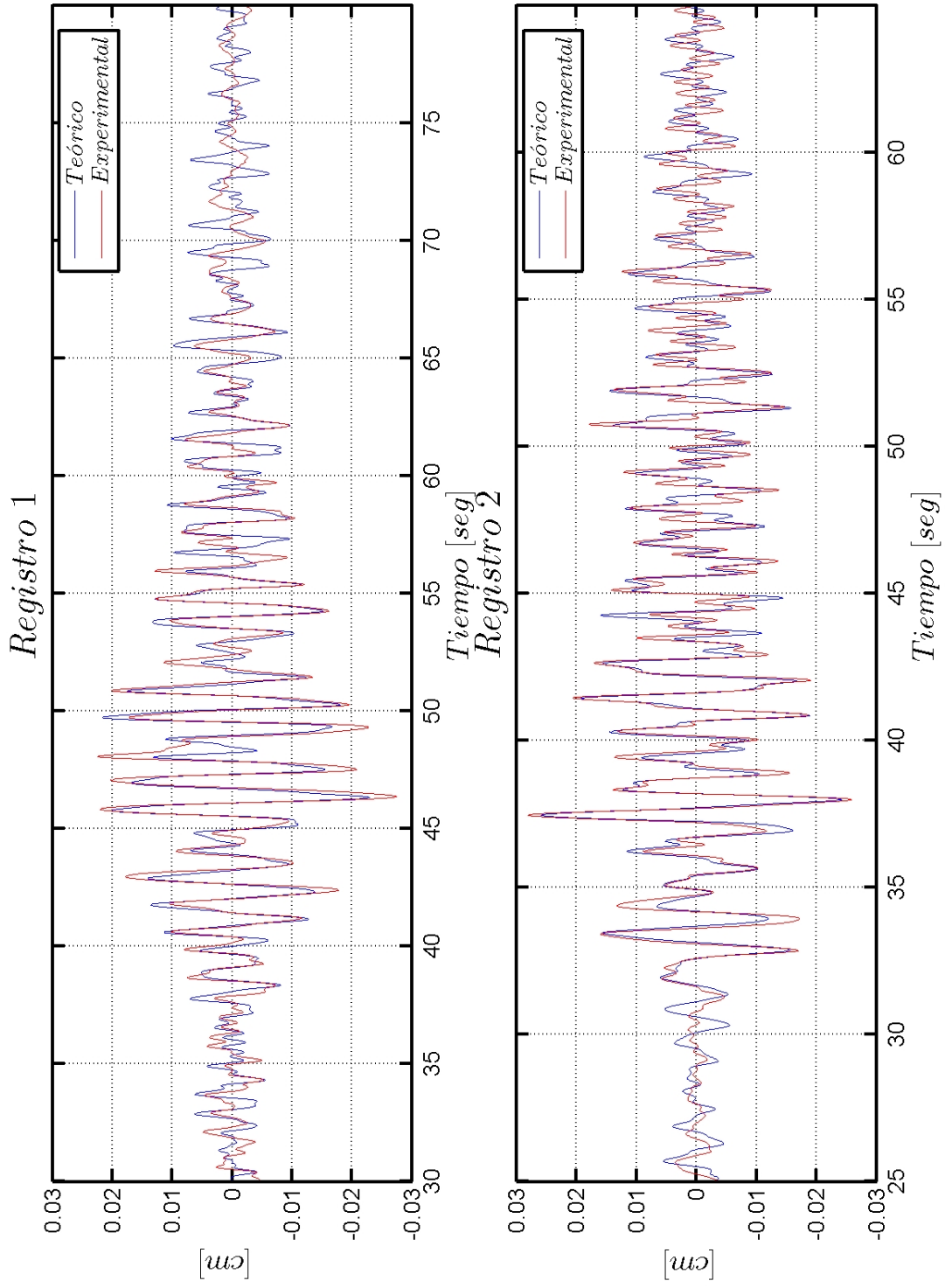


Figura 6.31: Desplazamiento en el sexto nivel con DMSL, para los registros 1 y 2. Comparación entre la respuesta teórica y experimental, ver tabla 6.1

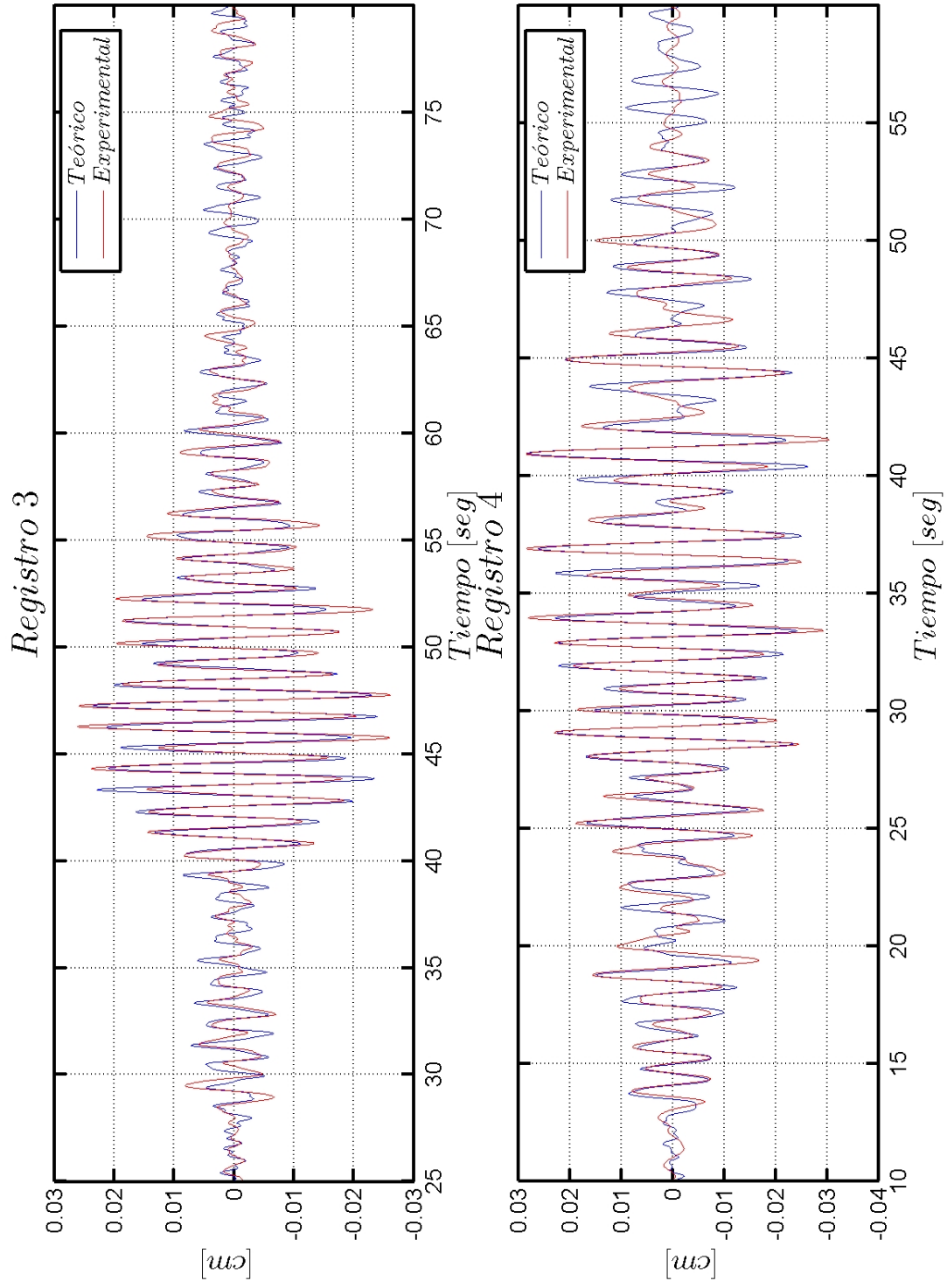


Figura 6.32: Desplazamiento en el sexto nivel con DMSL, para los registros 3 y 4. Comparación entre la respuesta teórica y experimental, ver tabla 6.1

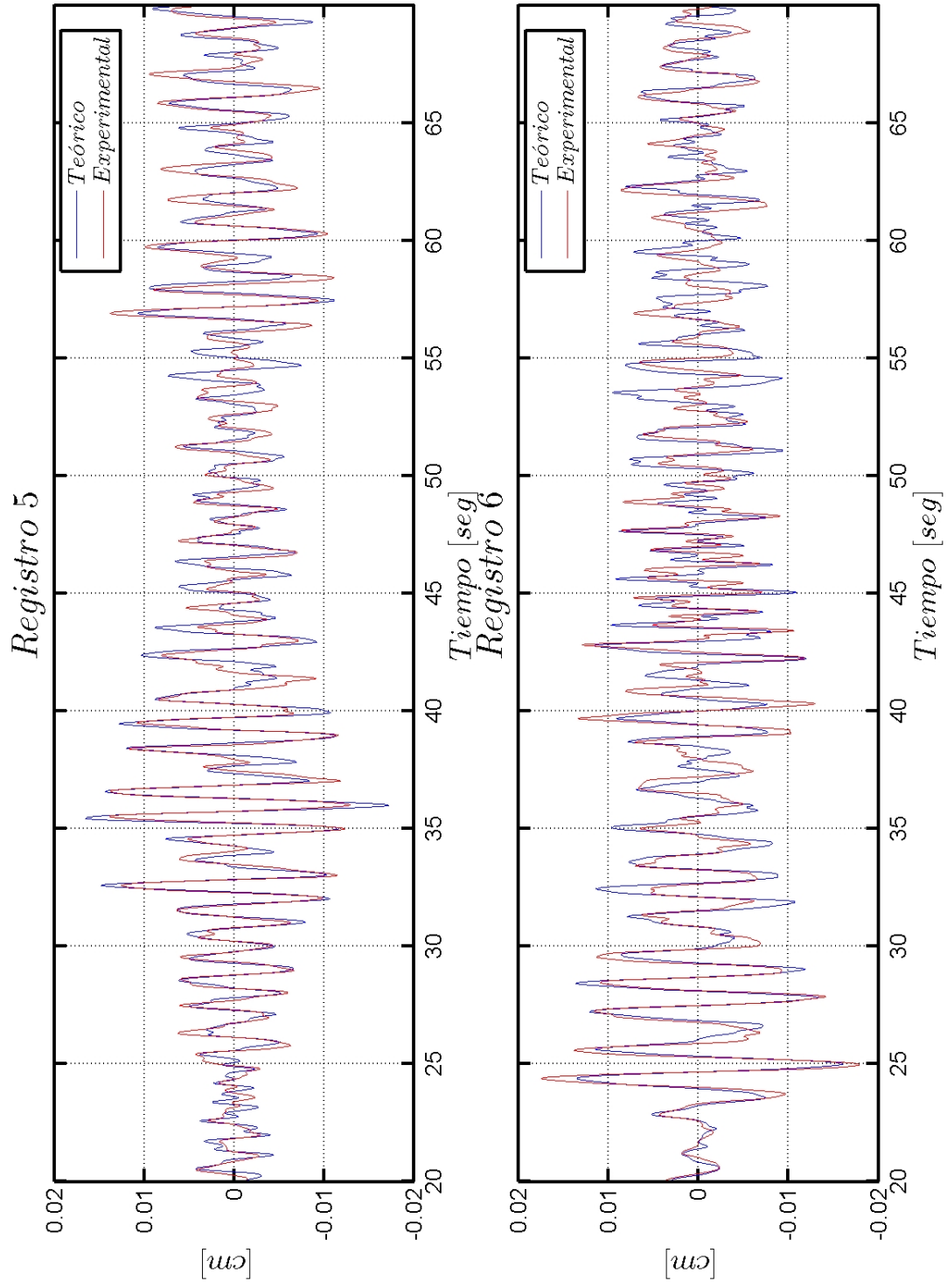


Figura 6.33: Desplazamiento en el sexto nivel con DMSL, para los registros 5 y 6. Comparación entre la respuesta teórica y experimental, ver tabla 6.1

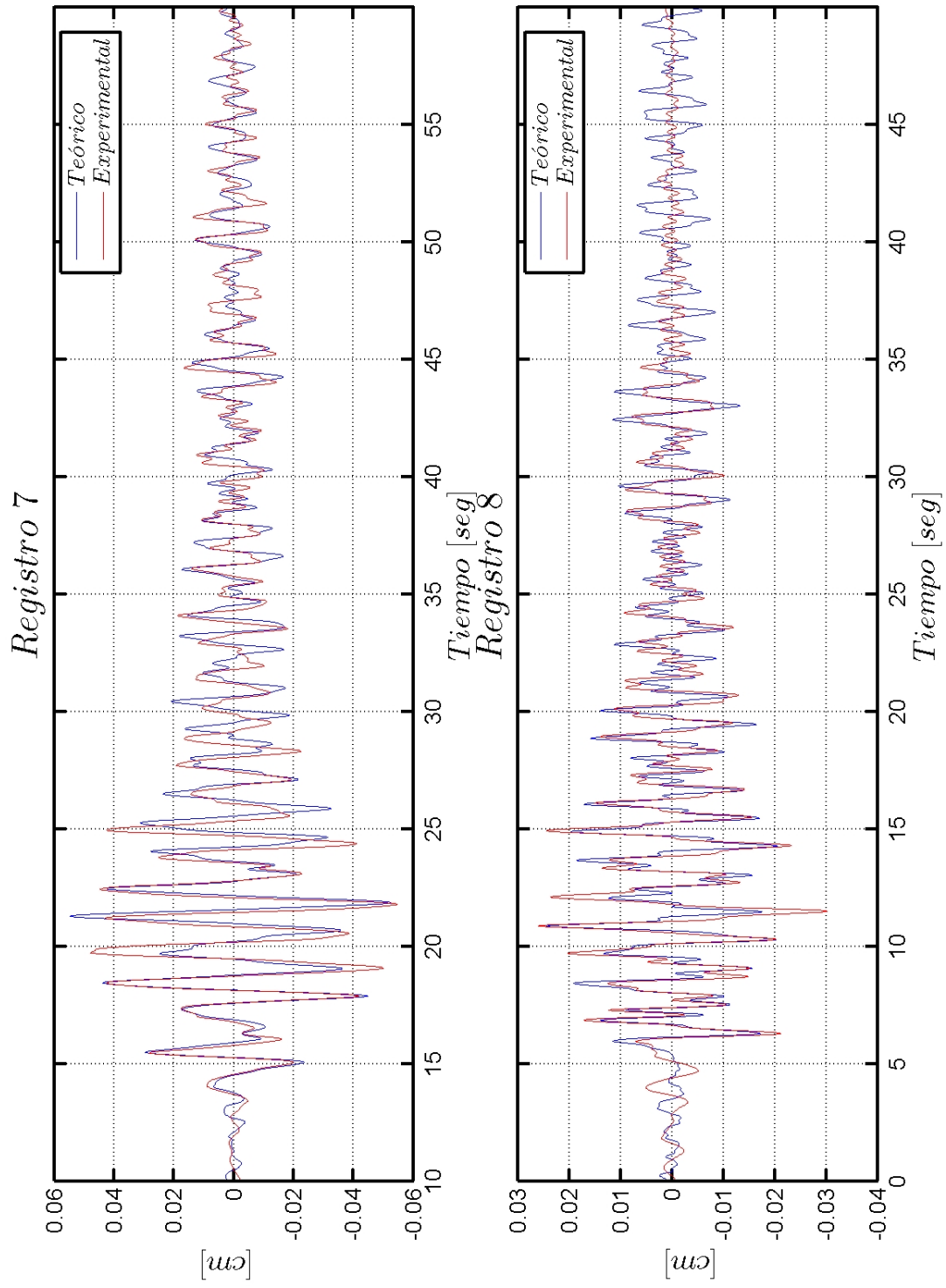


Figura 6.34: Desplazamiento en el sexto nivel con DMSL, para los registros 7 y 8. Comparación entre la respuesta teórica y experimental, ver tabla 6.1

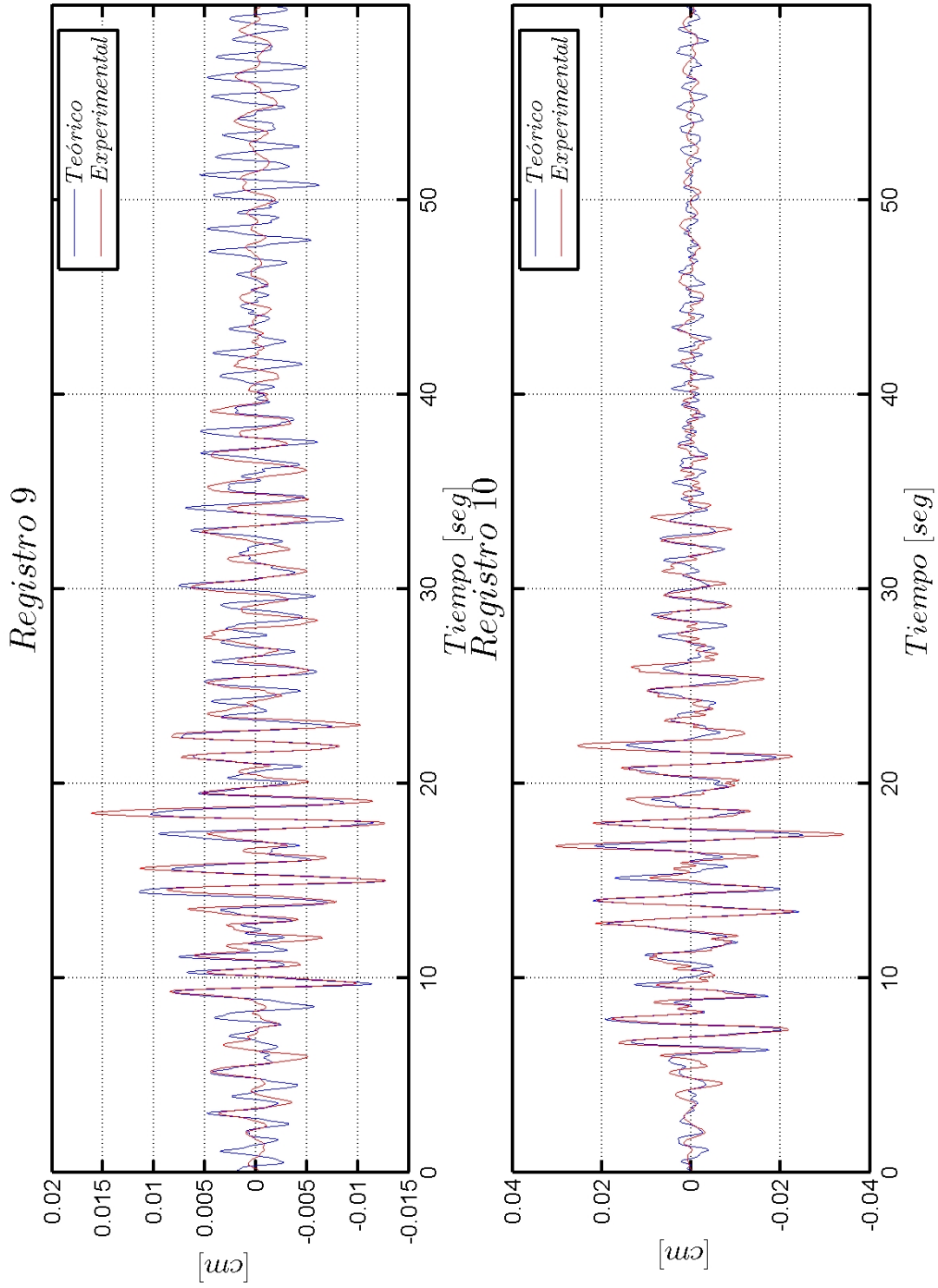


Figura 6.35: Desplazamiento en el sexto nivel con DMSL, para los registros 9 y 10. Comparación entre la respuesta teórica y experimental, ver tabla 6.1

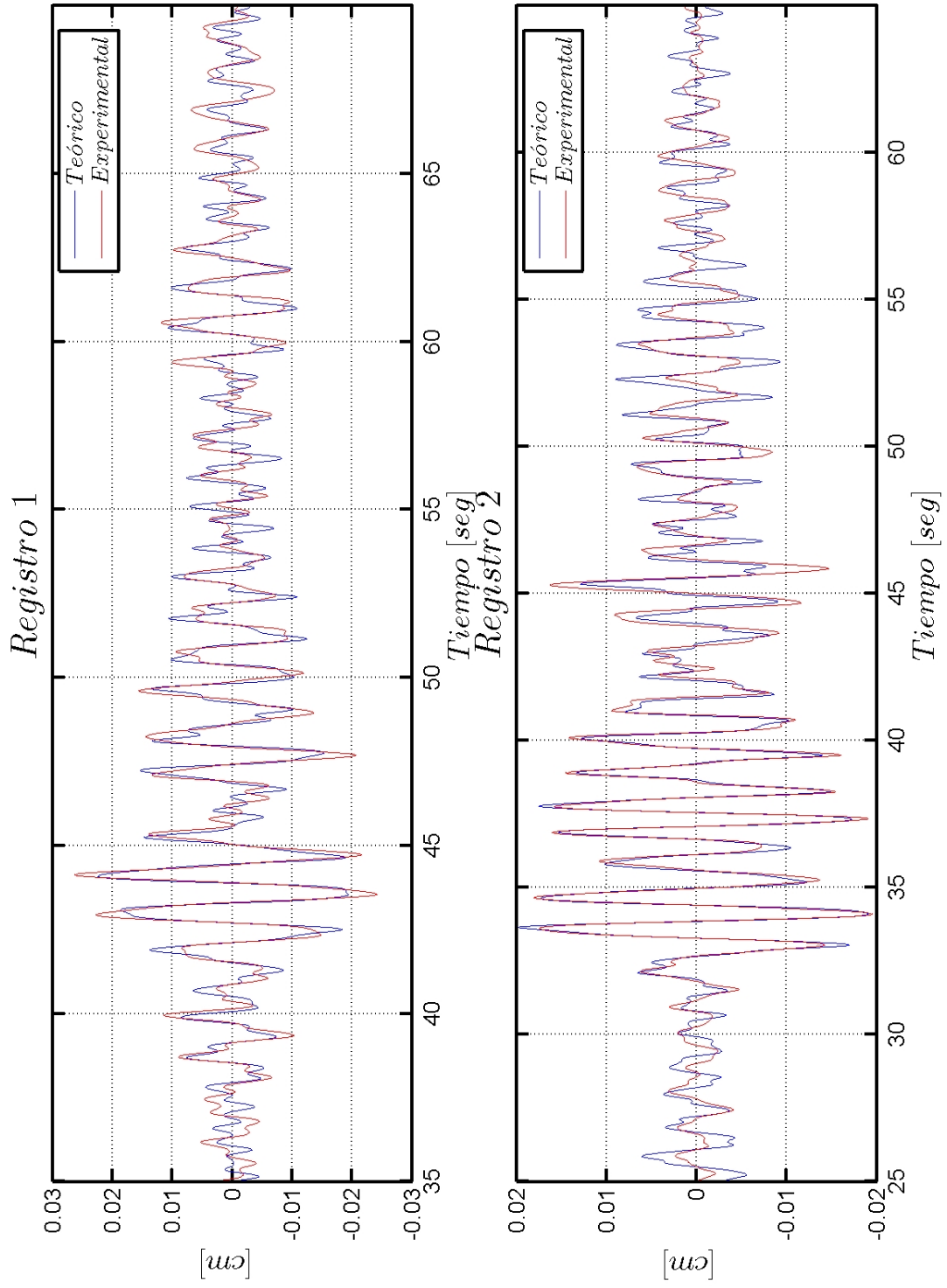


Figura 6.36: Desplazamiento en el sexto nivel con DCLSL, para los registros 1 y 2. Comparación entre la respuesta teórica y experimental, ver tabla 6.1

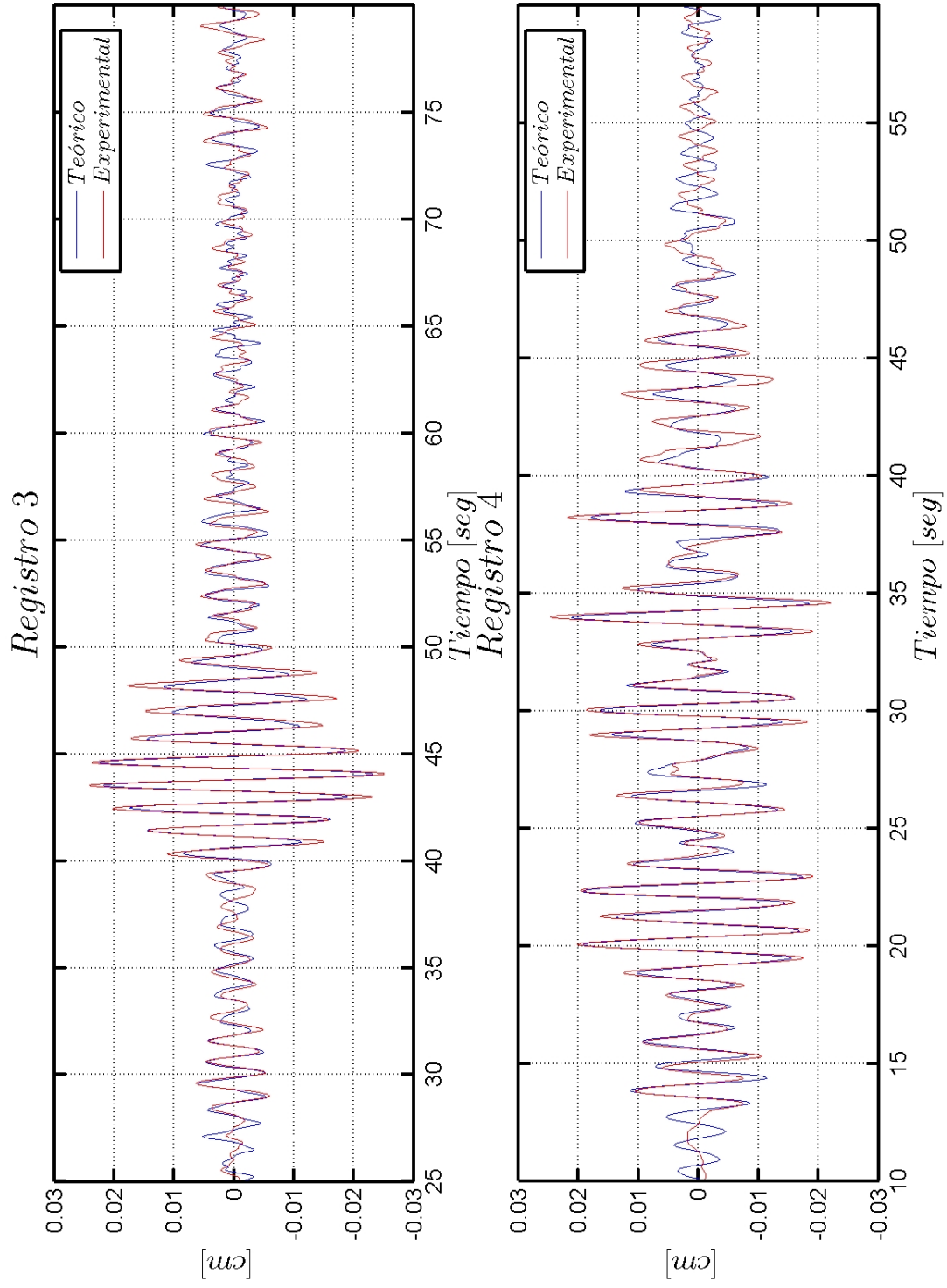


Figura 6.37: Desplazamiento en el sexto nivel con DCLS, para los registros 3 y 4. Comparación entre la respuesta teórica y experimental, ver tabla 6.1

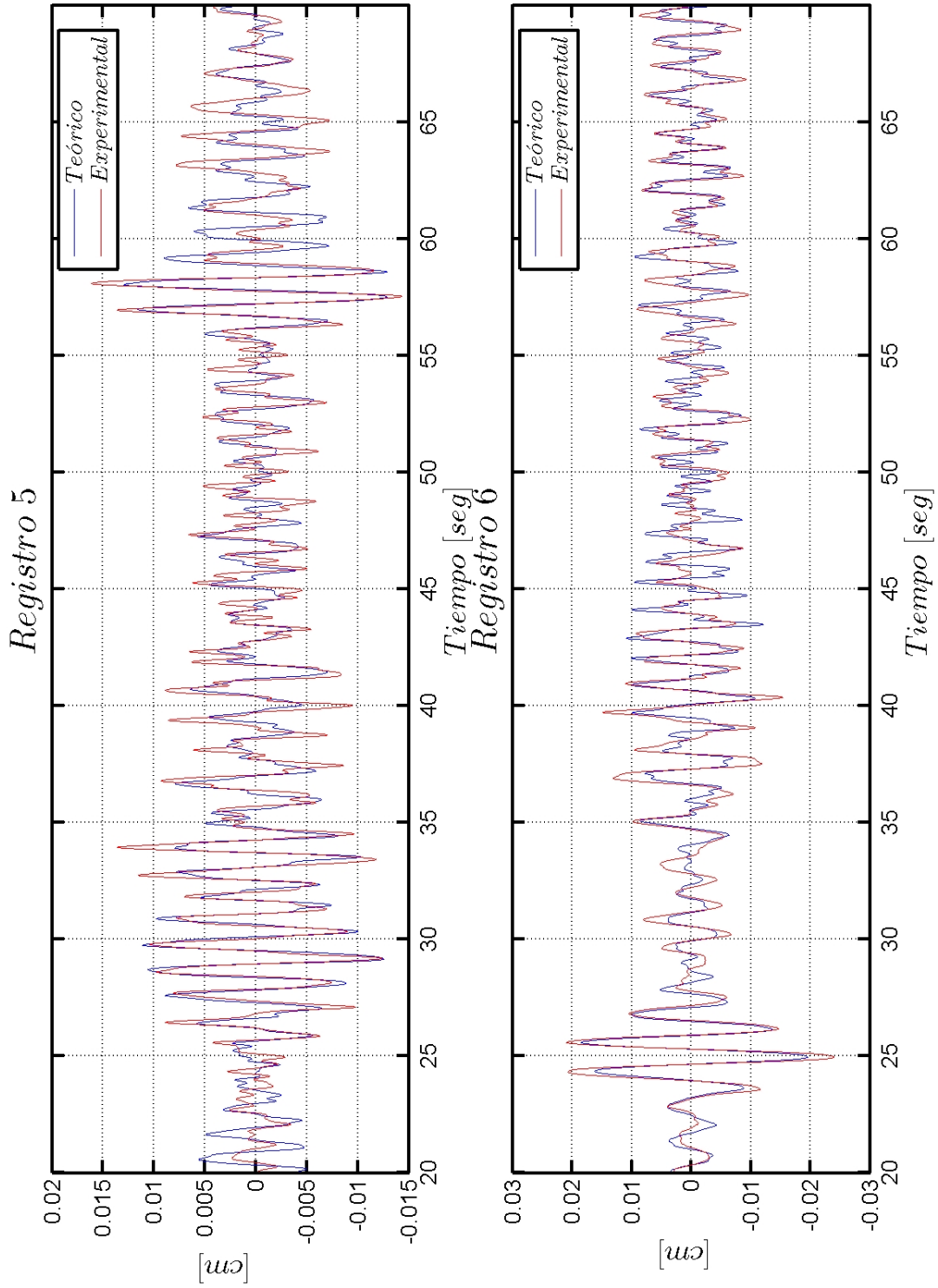


Figura 6.38: Desplazamiento en el sexto nivel con DCLS, para los registros 5 y 6. Comparación entre la respuesta teórica y experimental, ver tabla 6.1

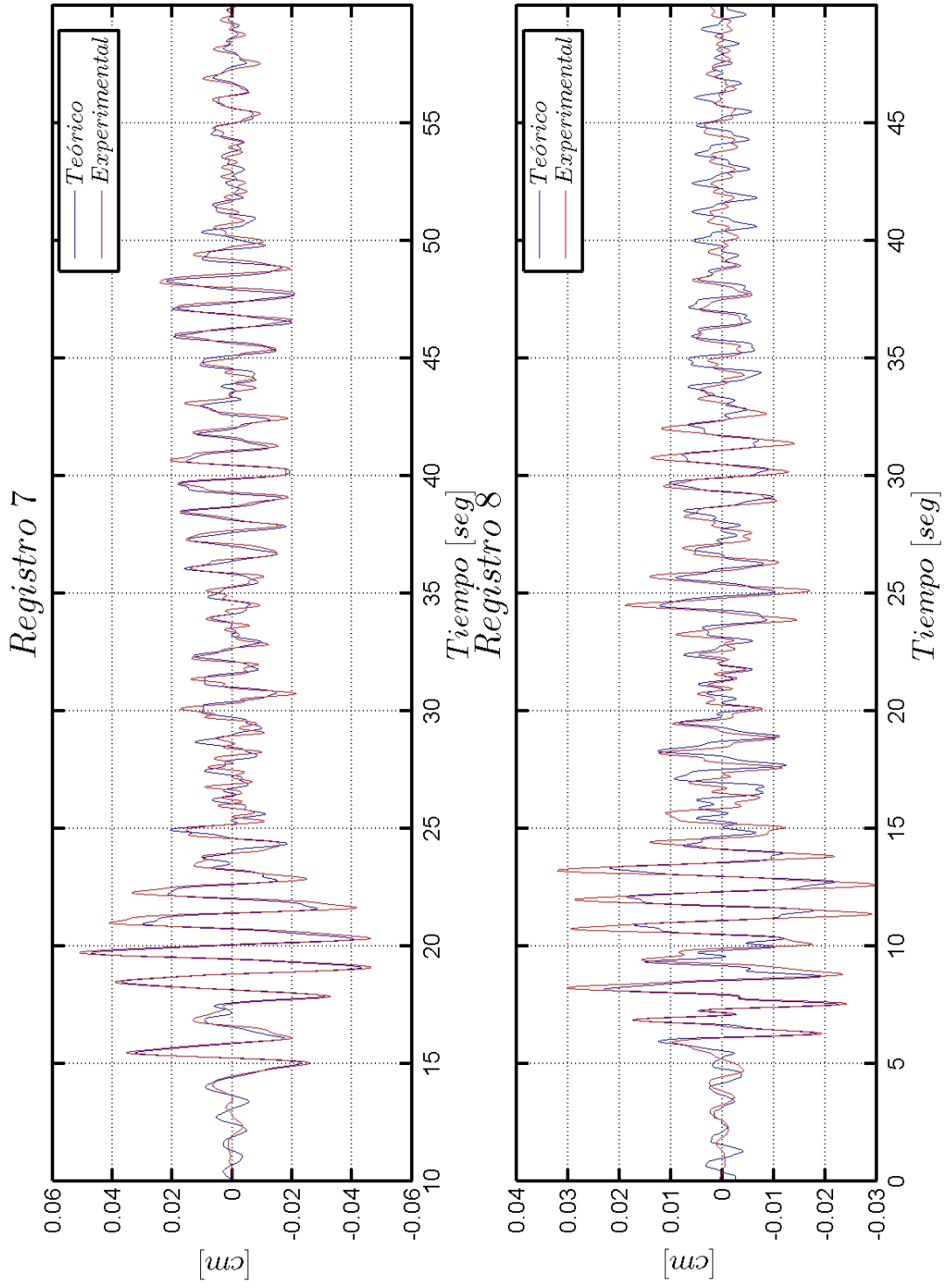


Figura 6.39: Desplazamiento en el sexto nivel con DCLS, para los registros 5 y 6. Comparación entre la respuesta teórica y experimental, ver tabla 6.1

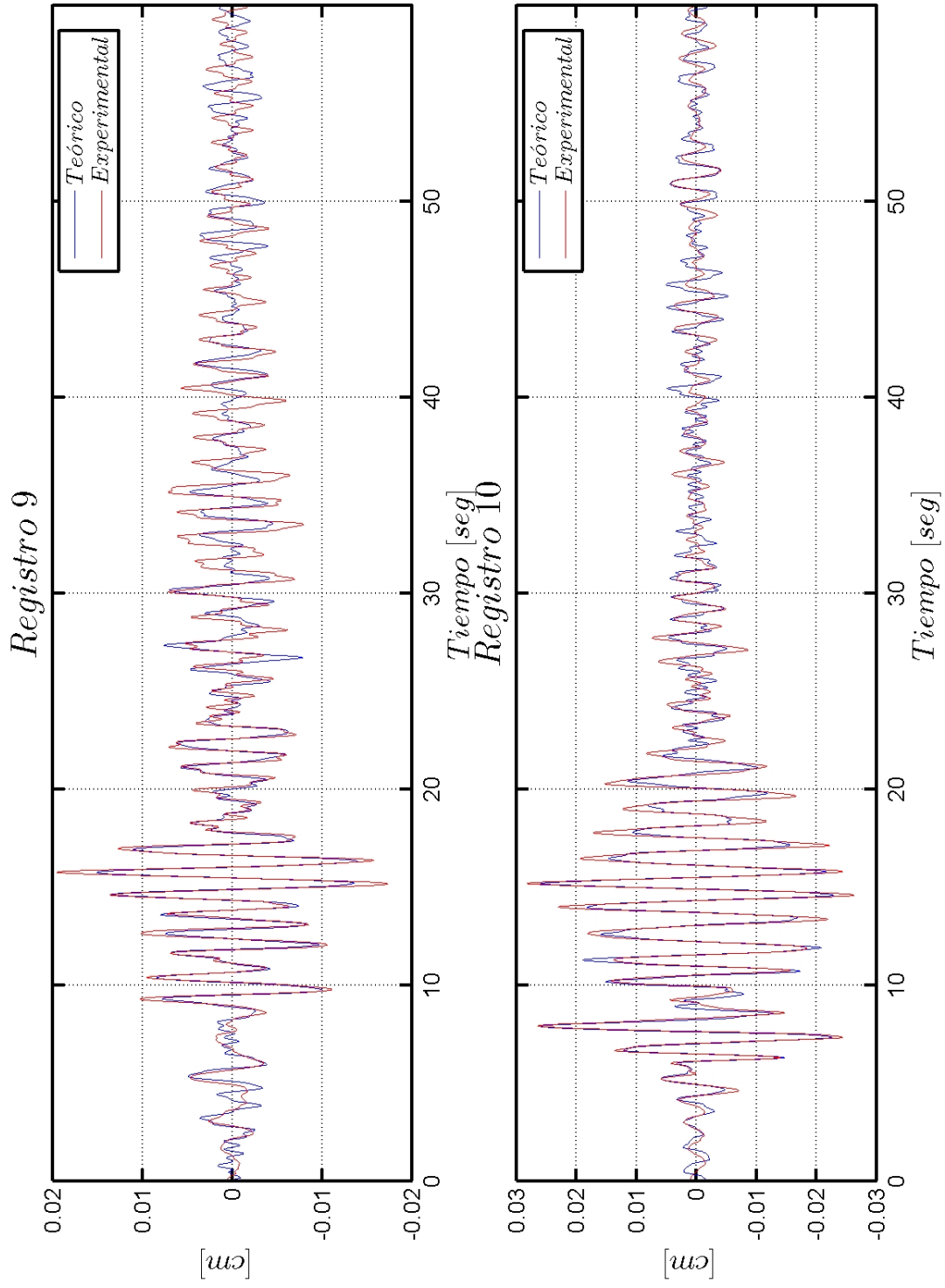


Figura 6.40: Desplazamiento en el sexto nivel con DCLS, para los registros 7 y 8. Comparación entre la respuesta teórica y experimental, ver tabla 6.1

Capítulo 7

Conclusiones

Los principales resultados que se desprenden a partir de los análisis experimentales se pueden resumir en los siguientes puntos.

1. Las máximas deformaciones desarrolladas en la estructura, con excepción del registro 8 (Loma Prieta 1989, estación Gilroy), se reducen cuando ésta se encuentra equipada con los disipadores de energía, ver figura 6.25. Si consideramos la suma de los máximos desplazamiento de todos los niveles, en términos medios, la reducción alcanza un 29.4 % para el disipador de masa sintonizada, y 31.1 % con disipador de columna líquida sintonizada.
2. Las aceleraciones, para todos los registros a excepción del registro 7 (Kern County 1952), son menores con los dispositivos instalados que sin ellos, tal como puede apreciarse en la figura 6.27. Considerando la suma de las máximas aceleraciones en todos los niveles, en términos medios, las reducciones son: 19.7 % con disipador de masa sintonizada, y 24 % con disipador de columna líquida sintonizada.
3. A excepción del registro 8 (Loma Prieta 1989, estación Gilroy) las máximas velocidades disminuyen con la instalación de los dispositivos, ver figura 6.26. Nuevamente, considerando la suma de las máximas velocidades en todos los niveles, las reducciones son: 28.9 % con disipador de masa sintonizada, y 31.5 % con disipador de columna líquida sintonizada.
4. Tanto la Intensidad de Arias, como el RMS, presentan notorias reducciones cuando los disipadores se encuentran instalados, figuras 6.28 y 6.29. En térmi-

nos medios, el valor de la intensidad de Arias se reduce en 57.2 % con disipador de masa sintonizada, en tanto dicha reducción alcanza un 61 % con disipador de columna líquida sintonizada. Por otro lado, para el RMS, las reducciones son: 27.2 % con disipador de masa sintonizada, y 29.7 % con disipador de columna líquida sintonizada.

Es también interesante destacar que la eficacia de los dispositivos depende de las características de la aceleración de base aplicada al modelo. En términos de la reducción de los máximos desplazamientos, figura 6.25, notamos que para los registros 7, 8 y 10 (ver tabla 6.1), las reducciones son menores, y en el caso del registro 8 prácticamente nulas. En estos casos, la menor duración de movimiento fuerte hace que los dispositivos no logren alcanzar del todo la condición de resonancia necesaria para que los mismos disipen energía. Por el contrario los registros 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 9, presentan duraciones de movimiento fuerte mayores, las cuales permiten que los dispositivos alcancen su condición de resonancia, y por ende se incrementa su efectividad. Si comparamos estos resultados con la figura 6.30, encontramos que en general para los registros 7, 8 y 10 el valor del índice \bar{N} es mayor en comparación con los registros 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 9. Esto último concuerda con la efectividad de los dispositivos obtenida a partir de los ensayos experimentales.

Por otro lado, analizando las figuras 6.25 a 6.29, puede apreciarse que en general el comportamiento del disipador de columna líquida sintonizada es superior al disipador de masa sintonizada. Debe tenerse en cuenta en primer lugar que el disipador de masa sintonizada construido para reducir la respuesta del modelo no posee la razón de amortiguamiento crítico óptima determinada en el capítulo 5, esto es 13.52 %. Esto último se debe, tal como fue comentado, a la dificultad de producir físicamente una razón amortiguamiento crítico tan elevada, alcanzándose en la práctica solo de un 4.5 a 5 % de amortiguamiento crítico. Por otra parte, el disipador de columna líquida sintonizada al carecer de mecanismos internos causantes de fricción, se vuelve efectivo a una menor intensidad de vibración. El disipador de masa sintonizada en tanto, debe vencer primero la fricción estática para comenzar a oscilar. En otras palabras, cuando el disipador de columna líquida sintonizada esta oscilando, el disipador de masa sintonizada aún actúa como una masa solidaria a la estructura. Esto último le da un mayor tiempo al disipador de columna líquida para entrar en resonancia, y por ende disipar energía.

Finalmente podemos destacar la eficacia de los dispositivos como sistemas de control de vibraciones. Con la excepción de los registros de características impulsivas, los parámetros óptimos de diseño propuestos en la presente investigación, para disminuir el desplazamiento de la estructura a controlar, determinan las características óptimas de diseño de los disipadores, y por ende garantizan una reducción de los máximos desplazamientos en la estructura.

Apéndice A

Ecuaciones de movimiento estructura-DMSL.

Se presentan a continuación la derivación detallada de las expresiones contenidas dentro del capítulo N^o2.

A.1. Estructura primaria no amortiguada, DMSL amortiguado

Analizando la figura 2.8, podemos escribir matricialmente las ecuaciones de movimiento del sistema como sigue:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & m_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_p + \ddot{u}_s \\ \ddot{u}_p + \ddot{u}_d + \ddot{u}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_d & -c_d \\ -c_d & c_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_p \\ \dot{u}_p + \dot{u}_d \end{Bmatrix} + \dots \\ \dots + \begin{bmatrix} K + k_d & -k_d \\ -k_d & k_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_p \\ u_p + u_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Expandiendo el sistema anterior obtenemos las siguientes ecuaciones

$$M\ddot{u}_p + Ku_p - k_d u_d - c_d \dot{u}_d = -M\ddot{u}_s + p \quad (\text{A.2})$$

$$m_d \ddot{u}_d + c_d \dot{u}_d + k_d u_d + m_d \ddot{u}_p = -m_d \ddot{u}_s \quad (\text{A.3})$$

Si consideramos que las acciones externas son monofrecuenciales de la forma:

$$\ddot{u}_s(t) = \bar{u}_s e^{i\Omega t}, \quad p(t) = \bar{p} e^{i\Omega t} \quad (\text{A.4})$$

Podemos suponer que la respuesta del sistema se escribe de la siguiente manera

$$u_p(t) = \bar{u}_p e^{i\Omega t}, \quad u_d(t) = \bar{u}_d e^{i\Omega t} \quad (\text{A.5})$$

En donde los términos \bar{u}_p y \bar{u}_d son a su vez números complejos que representan la amplitud de oscilación permanente del sistema y su desfase relativo a las acciones externas. En virtud de la expresión A.5 las expresiones para la primera y segunda derivada de la respuesta del sistema se escriben como sigue:

$$\dot{u}_p(t) = i\Omega \bar{u}_p e^{i\Omega t}, \quad \ddot{u}_p(t) = -\Omega^2 \bar{u}_p e^{i\Omega t} \quad (\text{A.6})$$

$$\dot{u}_d(t) = i\Omega \bar{u}_d e^{i\Omega t}, \quad \ddot{u}_d(t) = -\Omega^2 \bar{u}_d e^{i\Omega t} \quad (\text{A.7})$$

Reemplazando las expresiones A.4, A.5, A.6 y A.7 dentro de las ecuaciones de movimiento del sistema dadas por A.2 y A.3 se obtiene:

$$-M\Omega^2 \bar{u}_p e^{i\Omega t} + K \bar{u}_p e^{i\Omega t} - c_d i\Omega \bar{u}_d e^{i\Omega t} - k_d \bar{u}_d e^{i\Omega t} = -M \bar{u}_s e^{i\Omega t} + \bar{p} e^{i\Omega t} \quad (\text{A.8})$$

$$-m_d \Omega^2 \bar{u}_d e^{i\Omega t} + c_d i\Omega \bar{u}_d e^{i\Omega t} - k_d \bar{u}_d e^{i\Omega t} - m_d \Omega^2 \bar{u}_p e^{i\Omega t} = -m_d \bar{u}_s e^{i\Omega t} \quad (\text{A.9})$$

Simplificando los términos $e^{i\Omega t}$ y reordenado

$$-(i\Omega c_d + k_d) \bar{u}_d + (K - M\Omega^2) \bar{u}_p = -M \bar{u}_s + \bar{p} \quad (\text{A.10})$$

$$\bar{u}_d (i\Omega c_d + k_d - m_d \Omega^2) - m_d \Omega^2 \bar{u}_p = -m_d \bar{u}_s \quad (\text{A.11})$$

Despejando de la ecuación A.10 el valor para \bar{u}_d obtenemos

$$\bar{u}_d = \frac{-(p - M\bar{\ddot{u}}_s) + (K - M\Omega^2)\bar{u}_p}{k_d + i\Omega c_d} \quad (\text{A.12})$$

Reemplazando el valor anterior en la ecuación A.11, resulta la siguiente ecuación para \bar{u}_p :

$$\begin{aligned} \bar{u}_p \left[\left(\frac{K - M\Omega^2}{k_d + i\Omega c_d} \right) (i\Omega c_d + k_d - m_d\Omega^2) - m_d\Omega^2 \right] = \\ = (\bar{p} - M\bar{\ddot{u}}_s) \left(\frac{i\Omega c_d + k_d - m_d\Omega^2}{k_d + i\Omega c_d} \right) - m_d\bar{\ddot{u}}_s \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

La que podemos escribir de forma simplificada como:

$$\bar{u}_p \cdot \phi_{\mathcal{A}} = \phi_{\mathcal{B}} \quad (\text{A.14})$$

Donde:

$$\phi_{\mathcal{A}} = (K - M\Omega^2) (i\Omega c_d + k_d - m_d\Omega^2) - m_d\Omega^2 (k_d + i\Omega c_d) \quad (\text{A.15})$$

$$\phi_{\mathcal{B}} = (\bar{p} - M\bar{\ddot{u}}_s) (i\Omega c_d + k_d - m_d\Omega^2) - m_d\bar{\ddot{u}}_s (k_d + i\Omega c_d) \quad (\text{A.16})$$

El término $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ se puede expandir como sigue:

$$\begin{aligned} \phi_{\mathcal{A}} = (Kk_d - m_d\Omega^2 K - Mk_d\Omega^2 + Mm_d\Omega^4 - m_dk_d\Omega^2) + \dots \\ \dots + i(\Omega c_d K - M\Omega^3 c_d - m_d\Omega^3 c_d) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Podemos reescribir la parte real de la expresión anterior de la siguiente manera:

$$\text{Re}(\phi_{\mathcal{A}}) = \frac{K^2 m_d}{M} \left(\frac{k_d M}{K m_d} - \frac{M\Omega^2}{K^2} - \frac{k_d \Omega^2 M^2}{m_d K^2} + \frac{\Omega^4 M^2}{K^2} - \frac{k_d \Omega^2 M}{K^2} \right) \quad (\text{A.18})$$

Lo que es igual a:

$$\text{Re}(\phi_{\mathcal{A}}) = K^2 \frac{m_d}{M} \left(\frac{\omega_d^2}{\omega_p^2} - \frac{\Omega^2}{\omega_p^2} - \frac{\omega_d^2 \Omega^2}{\omega_p^4} + \frac{\Omega^4}{\omega_p^4} - \frac{m_d \Omega^4 \omega_d^2}{M \omega_p^4} \right) \quad (\text{A.19})$$

Utilizando los términos adimensionales definidos en el capítulo 2 obtenemos:

$$Re(\phi_{\mathcal{A}}) = K^2 \mu (f^2 - \rho^2 - f^2 \rho^2 + \rho^4 - \mu \rho^2 f^2) \quad (\text{A.20})$$

Agrupando términos resulta:

$$Re(\phi_{\mathcal{A}}) = K^2 \mu (f^2 - \rho^2 - f^2 \rho^2 + \rho^4 - \mu \rho^2 f^2) \quad (\text{A.21})$$

Procediendo de manera semejante con la parte imaginaria de $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$, primero escribimos:

$$Im(\phi_{\mathcal{A}}) = K^2 \frac{m_d}{M} \left(\frac{\Omega c_d M K - M^2 \Omega^3 c_d - m_d M \Omega^3 c_d}{m_d K^2} \right) \quad (\text{A.22})$$

Reordenando términos

$$Im(\phi_{\mathcal{A}}) = K^2 \frac{m_d}{M} \left[\frac{c_d \Omega M}{m_d K} \left(\frac{K - \Omega^2 M - \Omega^2 m_d}{K} \right) \right] \quad (\text{A.23})$$

Lo cual es equivalente a:

$$Im(\phi_{\mathcal{A}}) = K^2 \frac{m_d}{M} \left[\frac{c_d}{m_d \omega_d} \frac{\Omega \omega_d}{\omega_p^2} \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_p^2} \left(1 + \frac{m_d}{M} \right) \right) \right] \quad (\text{A.24})$$

Expresando la ecuación anterior en función de los adimensionales definidos en el capítulo 2 se obtiene:

$$Im(\phi_{\mathcal{A}}) = K^2 \mu [2\xi_d f \rho (1 - \rho^2 (1 + \mu))] \quad (\text{A.25})$$

Combinando las expresiones A.21 y A.25 obtenemos:

$$\phi_{\mathcal{A}} = K^2 \mu \{ (1 - \rho^2) (f^2 - \rho^2) - \mu \rho^2 f^2 + 2i\xi_d f \rho [1 - \rho^2 (1 + \mu)] \} \quad (\text{A.26})$$

Expandimos ahora el término $\phi_{\mathcal{B}}$, definido por la ecuación A.16, de donde resulta:

$$\phi_{\mathcal{B}} = \bar{p} \cdot (k_d - m_d \Omega^2 + i\Omega c_d) + \bar{u}_s \cdot [M m_d \Omega^2 - k_d (M + m_d) - i\Omega c_d (M + m_d)] \quad (\text{A.27})$$

O bien:

$$\phi_B = \bar{p}K \frac{m_d}{M} \left(\frac{k_d M}{m_d K} - \frac{\Omega^2 M}{K} + i \frac{\Omega c_d M}{m_d K} \right) - \dots \quad (\text{A.28})$$

$$\dots - \bar{u}_s K m_d \left(\frac{k_d}{K} \left(\frac{M}{m_d} + 1 \right) + \frac{\Omega c_d m_d}{KM} \left(\frac{M}{m_d} + 1 \right) - \frac{M \Omega^2}{K} \right)$$

Haciendo uso de los términos adimensionales se obtiene:

$$\phi_B = \bar{p} M K (f^2 - \rho^2 + 2i\rho f \xi_d) - \bar{u}_s K m_f [(1 + \mu) f^2 - \rho^2 + 2i\rho f \xi_d (1 + \mu)] \quad (\text{A.29})$$

Finalmente podemos escribir, en virtud de las expresiones A.26, A.29 y A.14, el valor para \bar{u}_p como sigue:

$$\bar{u}_p = \frac{\bar{p}}{K D_2} (f^2 - \rho^2 + 2i\rho f \xi_d) - \frac{M \bar{u}_s}{K D_2} [(1 + \mu) f^2 - \rho^2 + 2i\rho f \xi_d (1 + \mu)] \quad (\text{A.30})$$

Donde

$$D_2 = (1 - \rho^2) (f^2 - \rho^2) - \mu \rho^2 f^2 + 2i \xi_d f \rho [1 - \rho^2 (1 + \mu)] \quad (\text{A.31})$$

Debemos determinar continuación el valor de \bar{u}_d . El camino más sencillo para ello resulta de sustituir la expresión para \bar{u}_p , obtenida a partir de la ecuación A.12, dentro de la ecuación A.11, de donde obtenemos la siguiente ecuación para \bar{u}_d :

$$\bar{u}_d \cdot \phi_A = \phi_C \quad (\text{A.32})$$

En donde ϕ_A esta definido por la ecuación A.15 y ϕ_C vale:

$$\phi_C = m_d \Omega^2 \bar{p} - m_d K \bar{u}_s \quad (\text{A.33})$$

El cual puede ser escrito utilizando los términos adimensionales como sigue:

$$\phi_C = K \mu \rho^2 \bar{p} - K m_d \bar{u}_s \quad (\text{A.34})$$

Utilizando la expresión para el término ϕ_A , dada por la ecuación A.26, podemos obtener el valor de \bar{u}_d , a partir de la expresión A.32 como se muestra a continuación:

$$\bar{u}_d = \frac{\rho^2}{KD_2}\bar{p} - \frac{M}{KD_2}\bar{\ddot{u}}_s \quad (\text{A.35})$$

Escribiendo las ecuaciones A.30 y A.35 en su forma polar obtenemos:

$$\bar{u}_p = \frac{\bar{p}}{K}H_1e^{i\delta_1} - \frac{M\bar{\ddot{u}}_s}{K}H_2e^{i\delta_2} \quad (\text{A.36})$$

$$\bar{u}_d = \frac{\bar{p}}{K}H_3e^{-i\delta_3} - \frac{M\bar{\ddot{u}}_s}{K}H_4e^{-i\delta_3} \quad (\text{A.37})$$

En las expresiones anteriores los términos H representan los factores de amplificación dinámica del sistema, en tanto que los términos δ corresponden a los desfases entre la respuesta del sistema y las acciones externas. Podemos identificar los factores de amplificación dinámica con ayuda de la siguiente identidad:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{1}{c^2 + d^2} [ac + bd + i(bc - ad)] \quad (\text{A.38})$$

Podemos por tanto concluir que:

$$\left| \frac{a + bi}{c + di} \right| = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}} \quad (\text{A.39})$$

Utilizando la expresión anterior encontramos las expresiones para H_1 , H_2 , H_3 y H_4 , como sigue:

$$H_1 = \frac{\sqrt{(f^2 - \rho^2)^2 + 4\rho^2 f^2 \xi_d^2}}{|D_2|} \quad (\text{A.40})$$

$$H_2 = \frac{\sqrt{[(1 + \mu) f^2 - \rho^2]^2 + 4\rho^2 f^2 \xi_d^2 (1 + \mu)^2}}{|D_2|} \quad (\text{A.41})$$

$$H_3 = \frac{\rho^2}{|D_2|} \quad (\text{A.42})$$

$$H_4 = \frac{1}{|D_2|} \quad (\text{A.43})$$

Por otra parte, podemos determinamos los desfases de las respuestas, examinando el lado derecho de la expresión A.38, de donde se desprende que:

$$\arg\left(\frac{a+bi}{c+di}\right) = tg^{-1}\left(\frac{bc-ad}{ac+bd}\right) \quad (\text{A.44})$$

Identificando los términos correspondientes resulta:

$$\delta_1 = tg^{-1}\left\{\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right\} \quad (\text{A.45})$$

$$\delta_2 = tg^{-1}\left\{\frac{\varphi_3}{\varphi_4}\right\} \quad (\text{A.46})$$

$$\delta_3 = tg^{-1}\left\{\frac{2\xi_d \rho f [1 - \rho^2 (1 + \mu)]}{(1 - \rho^2)(f^2 - \rho^2) - \mu \rho^2 f^2}\right\} \quad (\text{A.47})$$

Donde

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & 2\xi_d \rho f [(1 - \rho^2)(f^2 - \rho^2) - \mu \rho^2 f^2] - \dots \\ & \dots - (f^2 - \rho^2) [(1 - \rho^2)(f^2 - \rho^2) - \mu \rho^2 f^2] + 4\xi_d^2 \rho^2 f^2 [1 - \rho^2 (1 + \mu)] \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & (f^2 - \rho^2) [(1 - \rho^2)(f^2 - \rho^2) - \mu \rho^2 f^2] + \dots \\ & \dots + 4\xi_d^2 \rho^2 f^2 [1 - \rho^2 (1 + \mu)] \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

$$\begin{aligned} \varphi_3 = & 2\xi_d \rho f (1 + \mu) [(1 - \rho^2)(f^2 - \rho^2) - \mu \rho^2 f^2] - \dots \\ & \dots - 2\xi_d \rho f ((1 + \mu) f^2 - \rho^2) [1 - \rho^2 (1 + \mu)] \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

$$\begin{aligned} \varphi_4 = & [(1 + \mu) f^2 - \rho^2] [(1 - \rho^2)(f^2 - \rho^2) - \mu \rho^2 f^2] + \dots \\ & \dots + 4\xi_d^2 \rho^2 f^2 (1 + \mu) [1 - \rho^2 (1 + \mu)] \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Las expresiones anteriores pueden ser simplificadas con ayuda de la siguiente identidad trigonométrica:

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg(\alpha) - tg(\beta)}{1 + tg(\alpha) \cdot tg(\beta)} \quad (\text{A.52})$$

En base a esta última expresión podemos escribir de forma mas compacta los desfases, como se muestra en las siguientes expresiones:

$$\delta_1 = \alpha_1 - \delta_3 \quad (\text{A.53})$$

$$\delta_2 = \alpha_2 - \delta_3 \quad (\text{A.54})$$

$$\tan(\alpha_1) = \frac{2\xi_d \rho f}{f^2 - \rho^2} \quad (\text{A.55})$$

$$\tan(\alpha_2) = \frac{2\xi_d \rho f (1 + \mu)}{(1 + \mu) f^2 - \rho^2} \quad (\text{A.56})$$

A.2. Estructura primaria amortiguada, DMSL amortiguado

A partir de la figura 2.22 podemos establecer en forma matricial las ecuaciones de movimiento del sistema como sigue:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & m_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_p + \ddot{u}_s \\ \ddot{u}_p + \ddot{u}_d + \ddot{u}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C + c_d & -c_d \\ -c_d & c_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_p \\ \dot{u}_p + \dot{u}_d \end{Bmatrix} + \dots \\ \dots + \begin{bmatrix} K + k_d & -k_d \\ -k_d & k_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_p \\ u_p + u_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

Desarrollando el sistema anterior obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$M\ddot{u}_p + C\dot{u}_p - c_d\dot{u}_d + Ku_p - k_d u_d = p - M\ddot{u}_s \quad (\text{A.58})$$

$$m_d\ddot{u}_d + M\ddot{u}_p + c_d\dot{u}_d + k_d u_d = -m_d\ddot{u}_s \quad (\text{A.59})$$

Si consideramos que las acciones externas son monofrecuenciales de la forma:

$$\ddot{u}_s(t) = \bar{u}_s e^{i\Omega t}, \quad p(t) = \bar{p} e^{i\Omega t} \quad (\text{A.60})$$

Podemos suponer que la respuesta del sistema, en régimen permanente, se escribe de la siguiente manera

$$u_p(t) = \bar{u} e^{i\Omega t}, \quad u_d(t) = \bar{u}_d e^{i\Omega t} \quad (\text{A.61})$$

En donde la primera y segunda derivada de las respuestas se expresan según las ecuaciones A.6 y A.7. Reemplazando dichas expresiones en las ecuaciones A.58 y A.59, y luego de simplificar el término $e^{i\Omega t}$ resulta:

$$-M\Omega^2 \bar{u}_p + i\Omega C \bar{u}_p - i\Omega c_d \bar{u}_d + K \bar{u}_p - k_d \bar{u}_d = p - M\bar{\ddot{u}}_s \quad (\text{A.62})$$

$$-m_d \Omega^2 \bar{u}_d - m_d \Omega^2 \bar{u}_p + i\Omega c_d \bar{u}_d + k_d \bar{u}_d = -m_d \bar{\ddot{u}}_s \quad (\text{A.63})$$

A partir de la ecuación A.62 despejamos el valor de \bar{u}_d de donde obtenemos:

$$\bar{u}_d = \frac{1}{k_d + i\Omega c_d} [(K + i\Omega C - M\Omega^2) \bar{u}_p + (M\bar{u}_s - \bar{p})] \quad (\text{A.64})$$

Reemplazando la expresión anterior en la ecuación A.63, y luego de simplificar y agrupar términos se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{u}_p [(k_d + i\Omega c_d - m_d\Omega^2) (K + i\Omega C - M\Omega^2) - m_d\Omega^2 (k_d + i\Omega c_d)] = \\ = (\bar{p} - M\bar{u}_s) (k_d + i\Omega c_d - m_d\Omega^2) - m_d\bar{u}_s (k_d + i\Omega c_d) \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

Esta última ecuación puede escribirse abreviadamente como:

$$\bar{u} \cdot \phi_{\mathcal{D}} = \phi_{\mathcal{E}} \quad (\text{A.66})$$

El término que acompaña a \bar{u}_p , es decir $\phi_{\mathcal{D}}$, puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} \phi_{\mathcal{D}} = (Kk_d - M\Omega^2 k_d - \Omega^2 C c_d - m_d\Omega^2 K + Mm_d\Omega^4 - m_d k_d \Omega^2) + \dots \\ \dots + i(\Omega C k_d + \Omega c_d K - M\Omega^3 c_d - m_d\Omega^3 C - m_d\Omega^3 c_d) \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

Seguimos ahora un procedimiento similar al desarrollado en el apartado anterior con los términos ϕ_A y ϕ_B . Analizando la parte real de $\phi_{\mathcal{D}}$, podemos escribir:

$$\begin{aligned} Re(\phi_{\mathcal{D}}) = K^2 \frac{m_d}{M} \left(\frac{k_d M}{m_d K} - \frac{M^2 \Omega^2 k_d}{m_d K^2} - \frac{4M^2 \Omega^2 \xi_p \xi_d \omega \omega_d}{K^2} - \dots \right. \\ \left. \dots - \frac{\Omega^2 M}{K} + \frac{\Omega^4 M^2}{K^2} - \frac{\Omega^2 k_d M}{K^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

La cual puede ser escrita como:

$$Re(\phi_{\mathcal{D}}) = K^2 \mu \left(\frac{\omega_d^2}{\omega_p^2} - \frac{\Omega^2 \omega_d^2}{\omega_p^4} - \frac{\Omega^2}{\omega_p^2} + \frac{\Omega^4}{\omega_p^4} - \frac{\Omega^2 \omega_d^2 \mu}{\omega_p^4} - 4\xi_p \xi_d \frac{\omega_d \Omega^2}{\omega_p \omega_p^2} \right) \quad (\text{A.69})$$

En términos adimensionales la expresión anterior queda como:

$$Re(\phi_{\mathcal{D}}) = K^2 \mu (f^2 - \rho^2 f^2 - \rho^2 + \rho^4 - \rho^2 f^2 \mu - 4\xi_p \xi_d f \rho^2) \quad (\text{A.70})$$

O bien

$$Re(\phi_{\mathcal{D}}) = K^2 \mu [(1 - \rho^2)(f^2 + \rho^2) - \rho^2 f^2 \mu - 4\xi_p \xi_d f \rho^2] \quad (\text{A.71})$$

Análogamente podemos escribir la parte imaginaria de $\phi_{\mathcal{D}}$ como sigue:

$$Im(\phi_{\mathcal{D}}) = K^2 \frac{m_d}{M} \left(\frac{2M^2 \omega \Omega k_d \xi_p}{K^2 m_d} + \frac{2M \omega_d \Omega \xi_d}{K} - \frac{2M^2 \omega_d \Omega^3 \xi_d}{K^2} - \dots \right. \\ \left. \dots - \frac{2M^2 \omega \Omega^3 \xi_p}{K^2} - \frac{2M m_d \omega_d \Omega^3 \xi_d}{K^2} \right) \quad (\text{A.72})$$

Lo cual es equivalente a:

$$Im(\phi_{\mathcal{D}}) = K^2 \mu \left(\frac{2\xi_p \omega_d^2 \Omega}{\omega_p^3} + \frac{2\xi_d \omega_d \Omega}{\omega_p^2} - \frac{2\xi_d \omega_d \Omega^3}{\omega_p^4} - \frac{2\xi_p \Omega^3}{\omega_p^3} - \frac{2\xi_d \mu \omega_d \Omega^3}{\omega_p^4} \right) \quad (\text{A.73})$$

Escribiendo la expresión anterior en términos adimensionales resulta

$$Im(\phi_{\mathcal{D}}) = K^2 \mu (2\xi_p f^2 \rho + 2\xi_d f \rho - 2\xi_d f \rho^3 - 2\xi_p \rho^3 - 2\xi_d \mu f \rho^3) \quad (\text{A.74})$$

O bien:

$$Im(\phi_{\mathcal{D}}) = K^2 \mu [2\xi_p \rho (f^2 - \rho^2) + 2\xi_d f \rho [1 - \rho^2 (1 + \mu)]] \quad (\text{A.75})$$

Combinando las expresiones A.71 y A.75 se obtiene:

$$\phi_{\mathcal{D}} = K^2 \mu [(1 - \rho^2)(f^2 + \rho^2) - \rho^2 f^2 \mu - 4\xi \xi_d f \rho^2 + \dots \\ \dots + 2i\rho [\xi (f^2 - \rho^2) + \xi_d f [1 - \rho^2 (1 + \mu)]]] \quad (\text{A.76})$$

Procedemos a continuación a reordenar el lado derecho de la ecuación A.65 de donde obtenemos:

$$\phi_{\mathcal{E}} = \bar{p} [k_d - m_d \Omega^2 + i\Omega c_d] + \dots \\ \dots + \bar{u}_s [M m_d \Omega^2 - M k_d - m_d k_d - i(M\Omega c_d + m_d \Omega c_d)] \quad (\text{A.77})$$

O bien:

$$\phi_{\mathcal{E}} = K \frac{m_d}{M} \left(\frac{M\Omega^2}{K} - \frac{Mk_d}{Km_d} - \frac{k_d M m_d}{m_d K M} \right) \bar{p} - Km_d \left(\frac{2\omega_d \xi_d \Omega}{\omega_p^2} + \frac{2\mu \omega_d \xi_d \Omega}{\omega_p^2} \right) \bar{\ddot{u}}_s \quad (\text{A.78})$$

Utilizando los términos adimensionales resulta:

$$\phi_{\mathcal{E}} = \bar{p} K \mu (f^2 - \rho^2 + 2if\rho\xi_d) - \bar{\ddot{u}}_s K m_d [(1 + \mu) f^2 - \rho^2 + 2if\rho\xi_d (1 + \mu)] \quad (\text{A.79})$$

Finalmente podemos escribir, en virtud de las expresiones A.76, A.79 y A.66, el valor para \bar{u}_p como sigue:

$$\bar{u}_p = \frac{\bar{p}}{KD_3} (f^2 - \rho^2 + 2i\rho f \xi_d) - \frac{M \bar{\ddot{u}}_s}{KD_3} [(1 + \mu) f^2 - \rho^2 + 2i\rho f \xi_d (1 + \mu)] \quad (\text{A.80})$$

Donde:

$$D_3 = [(1 - \rho^2)(f^2 + \rho^2) - \rho^2 f^2 \mu - 4\xi \xi_d f \rho^2 + \dots \\ \dots + 2i\rho [\xi(f^2 - \rho^2) + \xi_d f [1 - \rho^2(1 + \mu)]] \quad (\text{A.81})$$

Para determinar el valor de \bar{u}_d , sustituimos el valor de \bar{u}_p , determinado a partir de la ecuación A.80, dentro de la ecuación A.64, de donde obtenemos la siguiente ecuación para \bar{u}_d :

$$\bar{u}_d \cdot \phi_{\mathcal{D}} = \phi_{\mathcal{F}} \quad (\text{A.82})$$

En donde $\phi_{\mathcal{D}}$ esta definido por la ecuación A.76 y $\phi_{\mathcal{F}}$ vale:

$$\phi_{\mathcal{F}} = m_d \Omega^2 \bar{p} - m_d (K + i\Omega C) \bar{\ddot{u}}_s \quad (\text{A.83})$$

El cual puede ser escrito utilizando los términos adimensionales como sigue:

$$\phi_{\mathcal{F}} = K \mu \rho^2 \bar{p} - Km_d (1 + 2i\rho \xi_p) \bar{\ddot{u}}_s \quad (\text{A.84})$$

Utilizando la expresión para $\phi_{\mathcal{D}}$, dada por la ecuación A.76, podemos obtener el valor de \bar{u}_d , mediante la expresión A.63 como se muestra a continuación:

$$\bar{u}_d = \frac{\rho^2}{KD_3}\bar{p} - \frac{M(1+2i\rho\xi_p)}{KD_3}\bar{u}_s \quad (\text{A.85})$$

Escribiendo las ecuaciones A.80 y A.85 en su forma polar tenemos:

$$\bar{u}_p = \frac{\bar{p}}{K}H_5e^{i\delta_5} - \frac{M\bar{u}_s}{K}H_6e^{i\delta_5} \quad (\text{A.86})$$

$$\bar{u}_d = \frac{\bar{p}}{K}H_7e^{-i\delta_7} - \frac{M\bar{u}_s}{K}H_8e^{i\delta_8} \quad (\text{A.87})$$

En donde los términos H representan los factores de amplificación dinámica del sistema respecto de las acciones externas. Expresamos dichos términos con ayuda de la identidad A.39 como sigue:

$$H_5 = \frac{\sqrt{(f^2 - \rho^2)^2 + 4\rho^2 f^2 \xi_d^2}}{|D_3|} \quad (\text{A.88})$$

$$H_6 = \frac{\sqrt{[(1 + \mu) f^2 - \rho^2]^2 + 4\rho^2 f^2 \xi_d^2 (1 + \mu)^2}}{|D_3|} \quad (\text{A.89})$$

$$H_7 = \frac{\rho^2}{|D_3|} \quad (\text{A.90})$$

$$H_8 = \left| \frac{1 + 2i\rho\xi}{D_3} \right| = \frac{\sqrt{1 + 4\rho^2 \xi^2}}{|D_3|} \quad (\text{A.91})$$

Asimismo podemos expresar los desfases relativos entre la respuesta del sistema y las acciones externas, mediante el uso de las identidades A.44 y A.52, donde resulta:

$$\delta_5 = \alpha_1 - \delta_7 \quad (\text{A.92})$$

$$\delta_6 = \alpha_2 - \delta_7 \quad (\text{A.93})$$

$$\delta_8 = \alpha_3 - \delta_7 \quad (\text{A.94})$$

$$\tan \delta_7 = \frac{2\xi\rho(f^2 - \rho^2) + \xi_d f \rho(1 - \rho^2(1 + \mu))}{(1 - \rho^2)(f^2 - \rho^2) - f^2 \rho^2 \mu - 4\xi\xi_d f \rho^2} \quad (\text{A.95})$$

$$\tan \alpha_3 = 2\xi\rho \quad (\text{A.96})$$

Apéndice B

Ecuaciones de movimiento estructura-DCLS.

En el presente anexo se muestra la derivación detallada de las ecuaciones de movimiento del sistema analizado en el capítulo 3.

Como se menciona en el capítulo 3, el planteamiento de las ecuaciones de movimiento de la estructura con el disipador de columna líquida instalado se realiza utilizando la dinámica lagrangiana. Para ello debemos encontrar las expresiones de la energía cinética del sistema, T , la energía potencial, U , y las fuerzas no conservativas aplicadas en el sistema en cualquier instante de tiempo t . La figura B.1 muestra el sistema de un grado de libertad analizado en el capítulo 3.

Para simplificar el análisis vamos a dividir el sistema en dos partes. El primero de ellos corresponde al disipador de columna líquida sintonizada (DCLS), descrito por la coordenada generalizada u_d , en tanto que el segundo lo constituye el sistema de un grado de libertad original, o sistema primario, descrito a su vez por la coordenada u_p . Comenzamos pues con la determinación de la energía cinética desarrollada en el DCLS para cualquier instante de tiempo t . En la figura B.1 se muestran las velocidades de las partículas de líquido contenidas dentro de cada una de las columnas del disipador. Para la columna 1:

$$v_1 = \sqrt{\dot{u}_d^2 + (\dot{u}_p + \dot{u}_s)^2} \quad (\text{B.1})$$

Columna 2:

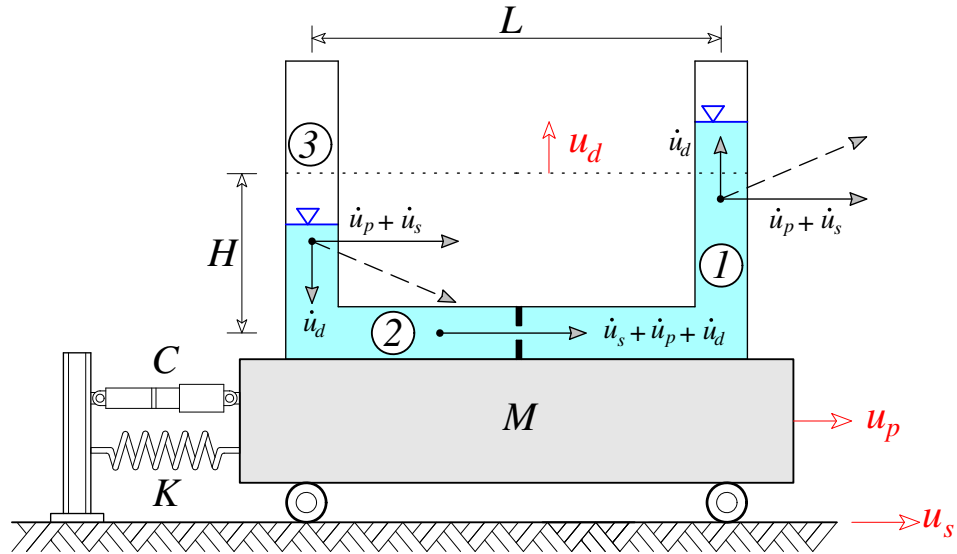


Figura B.1: Oscilador de un grado de libertad con un disipador de columna líquida instalado. Se muestran las velocidades de las partículas de líquido contenidas dentro del disipador en un instante de tiempo t cualquiera.

$$v_2 = (\dot{u}_s + \dot{u}_p + \dot{u}_d) \quad (\text{B.2})$$

Columna 3:

$$v_3 = \sqrt{\dot{u}_d^2 + (\dot{u}_p + \dot{u}_s)^2} \quad (\text{B.3})$$

Conocidas las velocidades con las que se mueven las partículas de fluido dentro del disipador podemos escribir la energía cinética para el mismo como:

$$T_{DCLS} = \frac{1}{2}A\rho_f (H + u_d) [\dot{u}_d^2 + (\dot{u}_s + \dot{u}_p)^2] + \frac{1}{2}A\rho_f L (\dot{u}_s + \dot{u}_p + \dot{u}_d)^2 + \dots \quad (\text{B.4})$$

$$\dots + \frac{1}{2}A\rho_f (H - u_d) [\dot{u}_d^2 + (\dot{u}_s + \dot{u}_p)^2] + \frac{1}{2}m_u (\dot{u}_s + \dot{u}_p)^2$$

Donde m_u es la masa de las columnas del dispositivo. La energía cinética correspondiente al sistema primario se escribe simplemente como sigue:

$$T_{SP} = \frac{1}{2}M (\dot{u}_s + \dot{u}_p)^2 \quad (\text{B.5})$$

Finalmente la energía cinética total del sistema se obtiene como la suma de las energías cinéticas desarrolladas en los subsistemas indicados. Sumando las expresiones B.4 y B.5 resulta.

$$T = A\rho_f H [\dot{u}_d^2 + (\dot{u}_s + \dot{u}_p)^2] + \dots \quad (\text{B.6})$$

$$\dots + \frac{1}{2}A\rho_f L (\dot{u}_s + \dot{u}_p + \dot{u}_d)^2 + \frac{1}{2}(M + m_u) (\dot{u}_s + \dot{u}_p)^2$$

Pasamos ahora a determinar la energía potencial del sistema. La energía potencial del líquido contenido dentro del disipador puede escribirse como:

$$V_{DCLS} = A\rho_f g (2u_d) u_d - 2 \cdot A\rho_f g (u_d) \left(\frac{u_d}{2}\right) + k_{eq} u_d^2 \quad (\text{B.7})$$

El primer término de la expresión anterior corresponde a la energía potencial del líquido, medida desde la superficie libre de fluido mas baja de las dos columnas verticales. Dado que el nivel de cero energía potencial debe corresponder a la posición de equilibrio estático del sistema, que en el caso del fluido está indicada por la línea punteada de la figura B.1, se debe corregir el primer término de la expresión anterior. Para ello restamos del primer término la energía potencial del líquido en su posición de equilibrio medida desde el nivel indicado anteriormente, esto es el segundo término de la ecuación 30. Adicionalmente si las columnas verticales del disipador se encuentran tapadas, el aire contenido dentro de estas se puede modelar como dos resortes de rigidez equivalente¹. La energía potencial elástica acumulada por estos resortes está representada por el tercer término de la expresión anterior.

Por otra parte la energía potencial del sistema primario corresponde a la energía potencial elástica acumulada en las columnas de la estructura, representadas en este caso por el resorte de constante K . Sumando la energía potencial de ambos subsistemas se obtiene:

$$V = u_d^2 (A\rho_f g + k_{eq}) + \frac{1}{2} K u_p^2 \quad (\text{B.8})$$

Nos falta determinar las expresiones para las fuerzas no conservativas aplicadas al sistema. Para el disipador estas fuerzas se expresan como:

¹Los detalles de la modelacion de las columnas de aire como resortes equivalentes se entregan en el apéndice C

$$Q_{TLCD} = -\frac{1}{2}\rho_f\eta A |\dot{u}_d| \dot{u}_d = -c_d\dot{u}_d \quad (\text{B.9})$$

Como se comento en el capítulo 3, la expresión anterior nos entrega la fuerza disipativa provocada por el paso del fluido a través de las columnas del dispositivo. El término η cuantifica las pérdidas ocurridas por la fricción del líquido con las paredes internas del dispositivo, el cambio de dirección del mismo en los codos, y el angostamiento central. La fuerza disipativa es por tanto no lineal ya que depende del cuadrado de la velocidad del líquido. Para fines de diseño la podemos escribir de manera equivalente lineal utilizando el término c_d , el cual puede determinarse mediante los procedimientos descritos en el capítulo 4. Para el sistema primario las fuerzas no conservativas se expresan como:

$$Q_{SP} = \frac{1}{2}\rho_f\eta A |\dot{u}_d| \dot{u}_d - C\dot{u}_p = c_d\dot{u}_d - C\dot{u}_p \quad (\text{B.10})$$

El primer término de la expresión anterior corresponde a las fuerzas disipativas transmitidas desde el dispositivo al sistema primario. Una fracción menor de estas fuerzas disipativas no son horizontales (tales como las fuerzas provocadas por la fricción del líquido con las paredes verticales del dispositivo) por lo tanto, en estricto rigor, el primer término de la ecuación anterior debe ser ligeramente menor a $c_d\dot{u}_d$. La incorporación de la diferencia entre la fuerza disipativa total, y aquella transmitida horizontalmente a la estructura primaria, en la ecuación B.10 complica innecesariamente el análisis. Es por ello que en el presente estudio tal diferencia no se considera, ya que en su mayoría las fuerzas disipativas en el dispositivo son causadas por el angostamiento central. El segundo término en tanto, representa la fuerza no conservativa producida por el amortiguador de constante C en el sistema primario.

Estamos en condiciones de escribir las ecuaciones de movimiento del sistema, utilizando la ecuación de Lagrange mostrada a continuación:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1 \dots n \quad (\text{B.11})$$

Debemos por tanto determinar las derivadas de la energía cinética y potencial del sistema con respecto a las coordenadas generalizadas utilizadas para describirlo. Dichas derivadas se muestran a continuación:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_d} &= A\rho_f L_T \dot{u}_d + AL\rho_f (\dot{u}_p + \dot{u}_s) \\
 \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_p} &= (M + m_u + A\rho_f L_T) (\dot{u}_s + \dot{u}_p) + AL\rho_f \dot{u}_d \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_d} \right) &= A\rho_f (2H + L) \ddot{u}_d + AL\rho_f (\ddot{u}_p + \ddot{u}_s) \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_p} \right) &= (M + m_u + A\rho_f L_T) (\ddot{u}_s + \ddot{u}_p) + AL\rho_f \ddot{u}_d \\
 \frac{\partial V}{\partial u_d} &= 2(\rho_f g A + k_{eq}) u_d \\
 \frac{\partial V}{\partial u_p} &= K u_p
 \end{aligned} \right\} \quad (B.12)$$

En donde $L_T = 2H + L$ corresponde al largo total de líquido en las columnas del disipador. Reemplazando las derivadas indicadas en la expresión anterior, y las fuerzas no conservativas descritas en las ecuaciones B.9 y B.10 obtenemos las siguientes ecuaciones de movimiento del sistema:

$$\rho_f A (2H + L) \ddot{u}_d + c_d \dot{u}_d + 2(\rho_f g A + k_{eq}) u_d = -AL\rho_f (\ddot{u}_p + \ddot{u}_s) \quad (B.13)$$

$$\begin{aligned}
 [M + m_u + A\rho_f (2AH + L)] \ddot{u}_p + C\dot{u}_p + K u_p &= \\
 = [M + m_u + A\rho_f (2AH + L)] \ddot{u}_s - AL\rho_f \ddot{u}_d + c_d \dot{u}_d &
 \end{aligned} \quad (B.14)$$

Utilizando las notaciones descritas en el capítulo 3 podemos reescribir las ecuaciones anteriores como sigue:

$$m_f \ddot{u}_d + c_d \dot{u}_d + k_d u_d = -\hat{m} (\ddot{u}_p + \ddot{u}_s) \quad (B.15)$$

$$M_T \ddot{u}_p + C\dot{u}_p + K u_p = -M_T \ddot{u}_s - \hat{m} \ddot{u}_d + c_d \dot{u}_d \quad (B.16)$$

Si consideramos que el movimiento de base puede ser representado de la forma:

$$\ddot{u}_s(t) = \bar{u}_s e^{i\Omega t} \quad (B.17)$$

Podemos suponer que la respuesta en régimen permanente del sistema se escribe de la siguiente manera

$$u_p(t) = \bar{u}_p e^{i\Omega t}, \quad u_d(t) = \bar{u}_d e^{i\Omega t} \quad (B.18)$$

En donde los términos \bar{u}_p y \bar{u}_d son a su vez números complejos que representan la amplitud de oscilación permanente del sistema y su desfase relativo al movimiento de suelo. La primera y segunda derivada de la respuesta del sistema se escriben como sigue:

$$\dot{u}_p(t) = i\Omega\bar{u}_p e^{i\Omega t}, \quad \ddot{u}_p(t) = -\Omega^2\bar{u}_p e^{i\Omega t} \quad (\text{B.19})$$

$$\dot{u}_d(t) = i\Omega\bar{u}_d e^{i\Omega t}, \quad \ddot{u}_d(t) = -\Omega^2\bar{u}_d e^{i\Omega t} \quad (\text{B.20})$$

Reemplazando las expresiones B.17, B.18, B.19 y B.20 dentro de las ecuaciones de movimiento del sistema dadas por B.15 y B.16 se obtiene:

$$-\Omega^2 m_f \bar{u}_d + i\Omega c_d \bar{u}_d + k_d \bar{u}_d = -\hat{m} (-\Omega^2 \bar{u}_p + \bar{\ddot{u}}_s) \quad (\text{B.21})$$

$$-\Omega^2 M_T \bar{u}_p + i\Omega C \bar{u}_p + K \bar{u}_p = -M_T \bar{\ddot{u}}_s + i\Omega c_d \bar{u}_d + \hat{m} \Omega^2 \bar{u}_d \quad (\text{B.22})$$

Despejando de la ecuación B.21 el valor para \bar{u}_d obtenemos

$$\bar{u}_d = \frac{1}{\hat{m}\Omega^2 + i\Omega c_d} [(K + i\Omega C - \Omega^2 M_T) \bar{u}_p + M_T \bar{\ddot{u}}_s] \quad (\text{B.23})$$

Reemplazando el valor anterior en la ecuación B.22 resulta la siguiente ecuación para \bar{u}_p :

$$\bar{u}_p \cdot \phi_{\mathcal{G}} = \phi_{\mathcal{H}} \quad (\text{B.24})$$

Donde:

$$\phi_{\mathcal{G}} = (K - M_T \Omega^2 + i\Omega C) \cdot (i\Omega c_d + k_d - m_f \Omega^2) - \hat{m} \Omega^2 \cdot (\hat{m} \Omega^2 + i\Omega c_d) \quad (\text{B.25})$$

$$\phi_{\mathcal{H}} = [(M_T m_f \Omega^2 - \hat{m}^2 \Omega^2 - M_T k_d) - i(M_T \Omega c_d + \hat{m} \Omega c_d)] \cdot \bar{\ddot{u}}_s \quad (\text{B.26})$$

Reordenando el término $\phi_{\mathcal{G}}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \phi_{\mathcal{G}} = & (Kk_d - m_f\Omega^2K - \Omega^2Cc_d - \Omega^2M_Tk_d + \Omega^4M_Tm_f - \hat{m}^2\Omega^4) + \dots \\ & \dots + i(\Omega c_d K + \Omega Ck_d - \Omega^3m_fC - \Omega^3c_dM_T - \hat{m}\Omega^3c_d) \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Podemos escribir la parte real del término $\phi_{\mathcal{G}}$ del siguiente modo:

$$\begin{aligned} Re(\phi_{\mathcal{G}}) = & K^2 \frac{m_f}{M_T} \left(\frac{k_d M_T}{K m_f} - \frac{\Omega^2 M_T}{K} - \frac{4M_T^2 \Omega^2 \hat{\xi}_p \xi_d \hat{\omega}_p \omega_d}{K^2} - \dots \right. \\ & \left. \dots - \frac{M_T^2 \Omega^2 k_d}{K^2 m_f} + \frac{\Omega^4 M_T^2}{K^2} - \frac{\hat{m}^2 \Omega^4 M_T^2}{K^2 M_T m_f} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Utilizando los términos adimensionales definidos en el capítulo 3 se tiene

$$Re(\phi_{\mathcal{G}}) = K^2 \bar{\mu} \left(\frac{\omega_d^2}{\hat{\omega}_p^2} - \frac{\Omega^2}{\hat{\omega}_p^2} - 4\hat{\xi}_p \xi_d \frac{\Omega^2 \omega_d}{\hat{\omega}_p^2 \hat{\omega}_p} - \frac{\Omega^2 \omega_d^2}{\hat{\omega}_p^4} + \frac{\Omega^4}{\hat{\omega}_p^4} - \frac{\Omega^4 \hat{\mu} \alpha}{\hat{\omega}_p^4} \right) \quad (\text{B.29})$$

Lo cual es equivalente a:

$$Re(\phi_{\mathcal{G}}) = K^2 \bar{\mu} (f^2 - \rho^2 - \rho^2 f^2 + \rho^4 - 4\hat{\xi}_p \xi_d \rho^2 f - \rho^4 \hat{\mu} \alpha) \quad (\text{B.30})$$

O bien

$$Re(\phi_{\mathcal{G}}) = K^2 \bar{\mu} \left[(1 - \rho^2) (f^2 - \rho^2) - 4\hat{\xi}_p \xi_d \rho^2 f - \rho^4 \hat{\mu} \alpha \right] \quad (\text{B.31})$$

Procedemos de manera semejante con la parte imaginaria del término A

$$\begin{aligned} Im(\phi_{\mathcal{G}}) = & K^2 \frac{m_f}{M_T} \left(\frac{2\omega_d \xi_d M_T \Omega}{K} + \frac{2\hat{\omega}_p M_T^2 \xi_p k_d \Omega}{K^2 m_f} - \frac{2M_T^2 \hat{\omega}_p \hat{\xi}_p \Omega^3}{K^2} - \dots \right. \\ & \left. \dots - \frac{2\omega_d M_T^2 \xi_d \Omega^3}{K^2} - \frac{2\omega_d \xi_d \hat{m} \Omega^3 M_T^2}{K^2 M_T} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

En términos adimensionales la expresión anterior queda como:

$$Im(\phi_{\mathcal{G}}) = K^2 \bar{\mu} \left(2\rho f \xi_d + 2f^2 \rho \hat{\xi}_p - 2\rho^3 \hat{\xi}_p - 2f \rho^3 \xi_d - 2f \rho^3 \xi_d \hat{\mu} \right) \quad (\text{B.33})$$

Agrupando términos semejantes resulta

$$Im(\phi_{\mathcal{G}}) = K^2 \bar{\mu} \left(2\hat{\xi}_p \rho (f^2 - \rho^2) + 2\xi_d f \rho [1 - \rho^2 (1 + \hat{\mu})] \right) \quad (\text{B.34})$$

Procediendo de forma similar, podemos escribir el término $\phi_{\mathcal{H}}$ de la siguiente manera:

$$\phi_{\mathcal{H}} = K m_f \left[\left(\frac{M_T \Omega^2}{K} - \frac{\hat{m}^2 \Omega^2 M_T}{K m_f M_T} - \frac{k_d M_T}{m_f K} \right) - \dots \right. \\ \left. \dots - i \left(\frac{2\omega_d \xi_d M_T \Omega}{K} + \frac{2\omega_d \xi_d \hat{m} \Omega M_T}{K M_T} \right) \right] \quad (\text{B.35})$$

Expresando la última ecuación en términos adimensionales resulta:

$$\phi_{\mathcal{H}} = K m_f \left[(\rho^2 - \rho^2 \hat{\mu} \alpha - f^2) - 2i \rho f \xi_d (1 + \hat{\mu}) \right] \quad (\text{B.36})$$

Finalmente, combinando las expresiones B.31, B.34 y B.35, podemos determinar el valor de \bar{u}_p como sigue:

$$\bar{u}_p = \frac{M_T \bar{\ddot{u}}_s}{K D_4} \left[\rho^2 (1 - \hat{\mu} \alpha) - f^2 - 2i \rho f \xi_d (1 + \hat{\mu}) \right] \quad (\text{B.37})$$

Donde

$$D_4 = (1 - \rho^2) (f^2 - \rho^2) - 4\hat{\xi}_p \xi_d \rho^2 f - \hat{\mu} \rho^4 \alpha + \dots \\ \dots + 2i \left[\hat{\xi}_p \rho (f^2 - \rho^2) + \xi_d f \rho (1 - \rho^2 (1 + \hat{\mu})) \right] \quad (\text{B.38})$$

Nos falta por determinar la expresión del desplazamiento en régimen permanente de la superficie de líquido, \bar{u}_d . Para ello despejamos de la ecuación B.21 el valor de \bar{u}_p , es decir:

$$\bar{u}_p = \frac{1}{\hat{m} \Omega^2} \left[(k_d + i \Omega c_d - m_f \Omega^2) \bar{u}_d + \hat{m} \bar{\ddot{u}}_s \right] \quad (\text{B.39})$$

Reemplazando la expresión anterior en la ecuación B.22 obtenemos la siguiente ecuación para \bar{u}_d :

$$\bar{u}_d \cdot \phi_{\mathcal{G}} = \phi_{\mathcal{I}} \quad (\text{B.40})$$

Donde $\phi_{\mathcal{G}}$ esta determinado por las ecuaciones B.31 y B.34, en tanto que $\phi_{\mathcal{I}}$ se escribe de la siguiente forma:

$$\phi_{\mathcal{I}} = -\hat{m} (K + i\Omega C) \bar{\bar{u}}_s \quad (\text{B.41})$$

El término anterior se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\phi_{\mathcal{I}} = \frac{-m_f^2 K^2}{k_d M_T} \left(\alpha f^2 + 2i f^2 \alpha \rho \hat{\xi}_p \right) \quad (\text{B.42})$$

Sustituyendo los términos correspondientes en la ecuación B.40 resulta:

$$\bar{u}_d = \frac{m_f \bar{\bar{u}}_s}{k_d} \left(\frac{-\alpha f^2 - 2i \alpha f^2 \rho \hat{\xi}_p}{D_4} \right) \quad (\text{B.43})$$

Escribiendo las ecuaciones B.37 y B.43 en su forma polar obtenemos:

$$\bar{u}_p = \frac{M_T \bar{\bar{u}}_s}{K} H_9 e^{i\delta_7} \quad (\text{B.44})$$

$$\bar{u}_d = \frac{m_f \bar{\bar{u}}_s}{k_d} H_{10} e^{i\delta_8} \quad (\text{B.45})$$

Utilizando la identidad A.39 encontramos las expresiones para H_9 y H_{10} , como sigue:

$$H_9 = \frac{\sqrt{[\rho^2 (1 - \hat{\mu}\alpha) - f^2]^2 + 4\rho^2 f^2 \xi_d^2 (1 + \hat{\mu})^2}}{|D_4|} \quad (\text{B.46})$$

$$H_{10} = \frac{\alpha f^2 \sqrt{1 + 4\rho^2 \hat{\xi}_p^2}}{|D_4|} \quad (\text{B.47})$$

Hemos determinado hasta este punto los factores de amplificación dinámica asociados a los desplazamientos de los grados de libertad que describen el movimiento del sistema. Nos interesa también conocer la respuesta de la velocidad de la superficie libre de líquido respecto de la aceleración de base. Para ello sustituimos el valor de \bar{u}_d obtenido en la ecuación B.43 dentro de la ecuación B.20, desde donde resulta:

$$\dot{u}_d = i\Omega \bar{u}_d e^{i\Omega t} = i\Omega \frac{m_f \bar{\bar{u}}_s}{k_d} \left(\frac{-\alpha f^2 - 2i \alpha f^2 \rho \hat{\xi}_p}{D_4} \right) e^{i\Omega t} \quad (\text{B.48})$$

Simplificando obtenemos:

$$\dot{u}_d = \frac{\rho}{f} \frac{m_f \ddot{u}_s}{\sqrt{k_d m_f}} \left(\frac{-\alpha f^2 i + 2\alpha f^2 \rho \hat{\xi}_p}{D_4} \right) e^{i\Omega t} \quad (\text{B.49})$$

La expresión anterior puede ser escrita en su forma polar de la siguiente manera

$$\dot{u}_d = \frac{m_f \ddot{u}_s}{\sqrt{k_d m_f}} H_{11} e^{i\delta_9} e^{i\Omega t} \quad (\text{B.50})$$

Finalmente el factor de amplificación dinámica velocidad superficie de líquido respecto de la aceleración de base se escribe como:

$$H_{11} = \left| \frac{\rho}{f} \left(\frac{-\alpha f^2 i + 2\alpha f^2 \rho \hat{\xi}_p}{D_4} \right) \right| = \frac{\alpha \rho \sqrt{1 + 4\rho^2 \xi_p^2}}{|D_4|} \quad (\text{B.51})$$

Apéndice C

Rigidez equivalente de las cámaras de aire.

El uso de disipadores de columna líquida sintonizada, en estructuras de períodos bajos, está a menudo limitado por la frecuencia óptima de diseño del dispositivo. La relación entre la frecuencia de oscilación de la masa de líquido en un DCLS, v/s la longitud total de este dentro del dispositivo, L_T , se puede expresar como se indica en la ecuación 3.14. Si las cámaras de aire se encuentran abiertas, es decir $k_{eq} = 0$, y la frecuencia óptima de diseño es elevada, $\omega_d|_{OPT}$, la longitud total resultante de líquido es muy pequeña, haciendo del dispositivo una alternativa poco adecuada desde un punto de vista práctico.

Esta última situación puede ser resuelta si se cierran las columnas verticales del disipador. Esto hace que las cámaras de aire encerradas actúen como elementos elásticos equivalentes. De esta forma se puede construir un dispositivo de mayores dimensiones, pero cuya frecuencia de oscilación sea menor.

Si p_o y V_o son la presión y volumen de las cámaras de aire dentro del disipador en la posición de equilibrio estático, y p_i y V_i son la presión y el volumen de las cámaras de aire en cualquier posición de la superficie libre de líquido, según se indica en la figura C.1, podemos escribir, asumiendo que el proceso de compresión u expansión de las cámaras de aire es adiabática reversible [41], la siguiente relación:

$$p_o V_o^{\frac{R+c_v}{c_v}} = p_i V_i^{\frac{R+c_v}{c_v}} \quad (C.1)$$

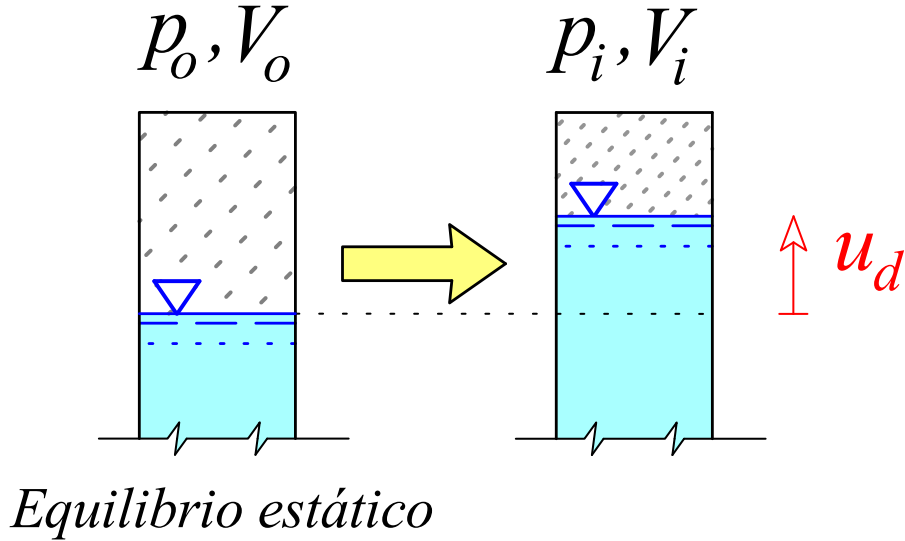


Figura C.1: Variación de presión y volumen en las cámaras de aire del dispositivo.

En donde R corresponde a la constante universal de los gases, cuyo valor es $8.315 \times 10^9 \left[\frac{J}{Kg \cdot mol \cdot grado} \right]$, y c_v es el calor específico a volumen constante. La ecuación C.1, puede escribirse de una manera más simplificada si tenemos en cuenta el hecho que para un gas ideal $c_p - c_v = R$, en donde c_p es el calor específico del gas a presión constante. Definimos una magnitud γ por la ecuación:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \tag{C.2}$$

Entonces para un gas ideal en transformación adiabática reversible resulta

$$p_o V_o^\gamma = p_i V_i^\gamma \tag{C.3}$$

Los valores de γ , c_v y c_p para distintos gases diatómicos se pueden obtener de la tabla C.1

Tabla C.1: Calores moleculares de gases diatómicos a temperatura ambiente [41]

<i>Gas</i>	γ	c_p/R	c_v/R	$(c_p - c_v)/R$
H ₂	1.410	3.42	2.438	0.9995
O ₂	1.401	3.52	2.504	1.004
N ₂	1.404	3.50	2.448	1.005
CO	1.404	3.50	2.448	1.005
NO	1.400	3.52	2.512	1.005

Volviendo a la ecuación C.3, cuando la superficie libre de líquido se ha desplazado la cantidad u_d , podemos escribir:

$$p_o V_o^\gamma = p_i (V_o - Au_d)^\gamma = p_i V_o^\gamma \left(1 - \frac{Au_d}{V_o}\right)^\gamma \quad (\text{C.4})$$

Siendo A el área de la sección transversal de las columnas del disipador. Recordando que $V_o = Ah$, obtenemos la siguiente relación:

$$p_i = p_o \left(1 - \frac{u_d}{h}\right)^{-\gamma} \quad (\text{C.5})$$

La variación de presión en las cámaras de aire, $\Delta p = p_i - p_o$, se expresa por tanto como:

$$\Delta p = p_o \left[\left(1 - \frac{u_d}{h}\right)^{-\gamma} - 1 \right] \quad (\text{C.6})$$

Realizando una aproximación en series de Taylor en torno a $u_d = 0$ obtenemos:

$$\Delta p = \frac{p_o \gamma}{h} u_d \quad (\text{C.7})$$

La fuerza opuesta por cada una de las cámaras de aire es:

$$F = \Delta p \cdot A = \frac{p_o \gamma A}{h} u_d \quad (\text{C.8})$$

De donde se desprende que la rigidez equivalente vale:

$$k_{eq} = \frac{p_o \gamma A}{h} \quad (\text{C.9})$$

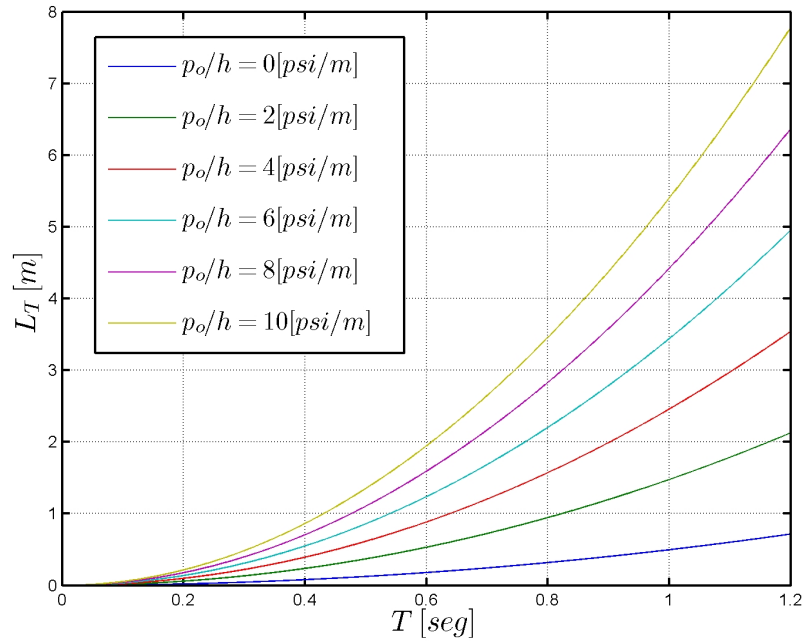


Figura C.2: Variación del largo total de la columna de líquido en función del período de oscilación del disipador, para distintos valores de p_o/h .

A partir de la rigidez equivalente podemos reescribir la ecuación 3.14, utilizando la expresión para k_{eq} , como sigue:

$$\omega_d^2 = \frac{2}{L_T} \left(g + \frac{p_o \gamma}{h \rho_f} \right) \quad (\text{C.10})$$

Para diseñar por tanto un disipador de columna líquida sintonizada, para controlar una estructura de período bajo, podemos considerar como solución el cierre de las columnas verticales. Es importante hacer notar que la expresión para k_{eq} fue determinada sobre la base de una linealización en torno a $u_d = 0$. Se debe por tanto seleccionar el valor de h de forma tal que $\left| \frac{u_d}{h} \right|$ sea pequeño, digamos no mayor que 0.25.

Finalmente, en la figura C.2, se muestra la variación del largo total de la columna de líquido en función del período de oscilación del disipador, para distintos valores de p_o/h . Se ha considerado que el líquido es agua, es decir $\rho_f = 997 \text{ [kg/m}^3\text{]}$, y $\gamma = 1.4$.

Bibliografía

- [1] Connor J.J. (2000), “Introduction to Structural Motion Control”, Massachusetts Institute of Technology.
- [2] Meirotoitch L. (1967), “Analytical methods in vibrations”, Macmillan Publishing Co.
- [3] Clough, R.W. y Penzien J. (1993). “Dynamics of Structures”, McGraw-Hill.
- [4] Anil K. Chopra. (1996), “Dynamic of Structures”, Prentice Hall.
- [5] Den Hartog J.P. (1956). “Mechanical Vibrations”, McGraw-Hill.
- [6] Crandall H. y Mark D. (1963). “Random vibration in mechanical systems”, Academic Press.
- [7] Bendat S. y Piersol G. (2000). “Random Data: Analysis & Measurement Procedures”, John Wiley & Sons Inc.
- [8] Lin Y. K. (1976). “Probabilistic Theory of Structural Dynamics”, Robert E. Krieger Publishing Company Malabar, Florida.
- [9] Ruzicka J.E. (1971). “Influence of Damping in Vibration Isolation”, The Shock and Vibration Information Center, United States Department of Defense.
- [10] Idelchik, I.E. (1994). “Handbook of Hydraulic Resistance”, Research Institute for Gas Purification, Moscow, Russia.
- [11] Blevins, R.D. (1984). “Applied Fluid Dynamics Handbook”, Van Nostrand Reinhold Co., New York.

- [12] Hooper, W.B. (1992). "Fittings, Number and Types, in the Piping Design Handbook", J.J. McKetta, Marcel Dekker, New York.
- [13] White, F.M. (1991). "Viscous Fluid Flow", McGraw-Hill, New York.
- [14] Kareem A., Kijewski T., Tamura Y. "Mitigation of motions of Tall Buildings with Specific Examples of Recent Applications".
- [15] A.P. Wang, R.F. Fung y S.C. Huang (2001), "Dynamic Analysis of a Tall Building with a Tuned Mass Damper Device Subjected to Earthquake Excitations", Journal of Sound and vibration, pp. 123-136.
- [16] Chi-Chang Lin, Jin-Min Ueng, Teng-Ching Huang (1994), "Seismic response reduction of irregular buildings using passive tuned mass dampers", Engineering Structures 22, pp. 513-524.
- [17] Hsiang-Chuan Tsai, Guan-Cheng Lin (1993), "Optimum tuned-mass dampers for minimizing steady-state response of support-excited and damped systems", Earthquake Engineering and Structural Dynamics 22, pp. 957-973.
- [18] Warburton G.B. (1982), "Optimum absorber parameters for various combinations of response reductions parameters", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 10, pp. 381-401.
- [19] Bakre. S.V y Jangid R.S. (2007), "Optimum parameters of tuned mass damper for damped main system", Structural Control and Health monitoring, pp. 448-470.
- [20] T.T. Soong, B.F. Spencer Jr. (2002), "Supplemental energy dissipation: state of the art and state of the practice", Engineering Structures 24, pp. 243-259.
- [21] Kareem. A., Kline S. (1995), "Performance of Multiple Mass Dampers under Random Loading", Journal of Structural engineering, ASCE, Vol.121, N^o2, pp. 348-361.
- [22] Jer-Fu Wang, Chi-Chang Lin (2005), "Seismic performance of multiple tuned mass dampers for soil-irregular building interaction systems", Journal of Solids and Structures 42, pp. 5536-5554.

- [23] Chunxiang Lia, Weilian Qu (2006), “Optimum properties of multiple tuned mass dampers for reduction of translational and torsional response of structures subject to ground acceleration”, *Engineering Structures* 28, pp. 472-494.
- [24] H. Gao, K.C.S. Kwok (1997), “Optimization of tuned liquid column dampers”, *Engineering Structures* Vol 19 N^o6, pp. 476-486.
- [25] Jong-Shyong Wu, Mang Hsieh (2002), “Study on the dynamic characteristic of a U-type tuned liquid damper”, *Ocean Engineering* 29, pp. 689-709.
- [26] Fahim Sadek, Bijan Mohraz, H. S. Lew (1996), “Single and multiple tuned liquid column dampers for seismic applications”, NISTIR 5920.
- [27] Alexandros A. Taflanidis, Demos C. Angelides, George C. Manos (2005), “Optimal design and performance of liquid column mass dampers for rotational vibration control of structures under white noise excitation”, *Engineering Structures* 27, pp. 524-534.
- [28] T. Balendra, C. M. Wang, G. Rakesh (1999), “Effectiveness of TLCD on various structural systems”, *Engineering Structures* 21, pp. 291-305.
- [29] Jong-Cheng Wua, Ming-Hsiang Shihb, Yuh-Yi Lina, Ying-Chang Shenc (2005), “Design guidelines for tuned liquid column damper for structures responding to wind”, *Engineering Structures* 27, pp. 1893-1905.
- [30] Swaroop K., Kareem A. (2000), “Optimum Absorber Parameters for Tuned Liquid Column Dampers”, *Journal of Structural Engineering*, pp. 906-915.
- [31] Ricciardi G. (2007), “A non-Gaussian stochastic linearization method”, *Probabilistic Engineering Mechanics* 22, pp 1-11.
- [32] Kasakov IE. (1956), “Approximate probabilistic analysis of the accuracy of operation of essentially nonlinear systems”, *Automat Remote Control URSS* Vol. 17:423-450.
- [33] Kasakov IE (1965), “Statistical analysis of systems with multi-dimensional nonlinearities”, *Automat Remote Control URSS* Vol. 26:458-464.

- [34] Rüdinger F. (2002), “Modelling and Estimation of Damping in Non-linear Random Vibration”, Technical University of Denmark.
- [35] Pradlwarter HJ. (1991), “Non-Gaussian linearization - An efficient tool to analyze nonlinear MDOF systems”, *J. Nuclear engineering* Vol. 128, pp.175-192.
- [36] E.L. Wilson, M. EERI y A. Habibullah (1987), “Static and Dynamic Analysis of Multi-Story buildings, Including P-Delta Effects”, *Earthquake Spectra* Vol. 3 Número 2, pp. 289-298.
- [37] Trifunac, M. D. y Brady, A. G. (1975), “A Study of the Duration of Strong Earthquake Ground Motion,” *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 65, pp. 581-626.
- [38] Moroni M.O., Boroschek R., Sarrazin M. (2003), “Dynamic Characteristic of a Long Span Seismic Isolated Bridge”, *Engineering Structures* 25, pp. 1479-1490.
- [39] Núñez T. (2008), “Variación Debido a Cambios de Masa y Rigidez de las Propiedades Dinámicas de una Estructura en Proceso Constructivo”, Memoria de Título, Universidad de Chile.
- [40] Hernandez F. (2008), “Análisis de Métodos de Identificación de Variación de Propiedades Dinámicas”, Memoria de Título, Universidad de Chile.
- [41] Sears F.W. (1969), “Introducción a la Termodinámica, Teoría Cinética de los Gases y Mecánica Estadística”, Editorial Reverté.
- [42] MOTIONEERING. [en línea], <<http://www.motioneering.ca>>, [consulta: 2008].
- [43] KAJIMA CORPORATION. [en línea], <<http://www.kajima.co.jp>>, [consulta: 2008].
- [44] GERBER VIBRATION CONTROL SYSTEMS. [en línea], <<http://www.gerb.com>>, [consulta: 2007].
- [45] TAYLOR DEVICES. [en línea], <<http://www.taylordevices.com>>, [consulta: 2007].