



**UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL**

**DESARROLLO E IMPLEMENTACION DE CORTES EN EL PROBLEMA DE
KNAPSACK CON PRECEDENCIAS PARA MEJORAR EL RENDIMIENTO EN
LA OBTENCION DE SOLUCIONES ENTERAS**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN GESTION
DE OPERACIONES

ADRIAN EDUARDO DIAZ MUÑOZ

SANTIAGO DE CHILE

2011



**UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL**

**DESARROLLO E IMPLEMENTACION DE CORTES EN EL PROBLEMA DE
KNAPSACK CON PRECEDENCIAS PARA MEJORAR EL RENDIMIENTO EN
LA OBTENCION DE SOLUCIONES ENTERAS**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN GESTION
DE OPERACIONES

ADRIAN EDUARDO DIAZ MUÑOZ

PROFESOR GUIA:
SR. DANIEL ESPINOZA GONZALEZ

MIEMBROS DE LA COMISIÓN EVALUADORA
SR. ANDRES WEINTRAUB POHORILLE
SR. RAFAEL EPSTEIN NUMHAUSER
SR. GUILLERMO ALFREDO DURAN

SANTIAGO DE CHILE
JUNIO 2011

DEDICATORIA

*A mi familia
y en especial a mi madre
y a mi hermana
que me apoyaron
incondicionalmente.*

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer al Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Chile por haberme entregado una educación de excelencia y por haberme permitido desarrollar mis capacidades para enfrentar mis desafíos profesionales y por entregar su sello de calidad para la visión de la ingeniería civil.

Quiero agradecer a los profesores de mi comisión evaluadora por su predisposición a entender el espíritu de esta tesis.

Quiero agradecer a todo el personal administrativo que permitió que se llevaran a cabo todos los procesos de apoyo a mi desarrollo en la Universidad, en especial a Julie por su paciencia y buena disposición.

Índice general

1. Prólogo	1
2. Introducción	4
2.1. Revisión Bibliografía	7
2.1.1. Determinación del Open Pit	7
2.1.2. Técnicas de Preprocesamiento	10
2.1.3. Secuencia Óptima de Producción	10
2.2. Objetivos	11
2.2.1. Objetivo General	11
2.2.2. Objetivo Específicos	11
2.3. Metodología de Trabajo	12
2.4. Secuenciamiento en un Yacimiento a Cielo Abierto	13
3. Reseña del Problema de Separación	16
3.1. Introducción	16
3.2. Separación de Covers	16
3.3. Fase I de un Corte: Obtención de un Cover Violado	19
3.4. Fase II de un Corte: Lifting sobre un Cover Violado	20
4. Lifting Exacto sobre una Formulación <i>PCKP</i>	25
4.1. Introducción	25
4.2. Conjuntos y Grafos	26
4.3. Cover Inducido Minimal (<i>CIM</i>)	30
4.4. Shrinking sobre un Grafo Dirigido	31
4.5. Validez de la Metodología de Lifting	33

4.5.1.	Pseudocódigo del Lifting	33
4.5.2.	Validez del Lifting	34
4.6.	Orden Óptimo para Aplicar el Lifting	40
4.7.	Heurísticas para la Obtención de Desigualdades de Tipo <i>CIM</i>	41
4.7.1.	Heurística <i>H1</i>	42
4.7.2.	Heurística <i>H2</i>	43
4.7.3.	Heurística <i>H3</i>	44
4.7.4.	Heurística <i>H4</i>	48
5.	Lifting Aproximado sobre una Formulación <i>PCKP</i>	54
5.1.	Introducción	54
5.2.	Descripción del Sequence Independent Lifting (<i>SIL</i>)	55
5.2.1.	Relación del <i>SIL</i> y la Función Superaditiva	57
5.3.	Función Aproximada de Lifting $g(z)$	60
5.4.	Relajación de un <i>PCKP</i> a un <i>KP</i>	63
5.5.	Heurística de Relajación y Lifting	66
5.5.1.	Maximización de la Función $g(z)$	67
5.5.2.	Etapa I de la Relajación: Maximización de la Integral de $g(z)$	70
5.5.3.	Etapa II de la Relajación: Lifting sobre Nuevos Parámetros Agregados	71
5.6.	Comentarios sobre la Heurística de Relajación	73
6.	Experimentación y Análisis	75
6.1.	Introducción	75
6.2.	Descripción de los Modelo de Yacimientos Simulados y Reales	75
6.2.1.	Modelo de Yacimiento Simulado	76
6.2.2.	Modelo de Yacimiento Real	78
6.3.	Cortes y Ensamble con CPLEX	78
6.4.	Benchmarking de las Configuraciones de Cortes	80
6.5.	Mejor Configuración de α_1 y α_2 sobre la Heurística <i>H3</i>	83
6.6.	Análisis Preliminar de los Cortes	85
6.6.1.	Resumen de ρ_1 y ρ_2 Respecto de <i>H1</i> , <i>H2</i> , <i>H3</i> y <i>H4</i>	91
6.7.	Análisis Final con los Mejores Cortes	93
6.7.1.	Comentarios sobre los Mejores Perfiles de Desempeño de ρ_1 y ρ_2	99

7. Conclusiones y Discusión	102
7.1. Conclusiones	102
7.2. Discusión	104
8. Bibliografía	108
A. Código de la Librería	112
A.1. Funciones que Generan CIM	112
A.2. Funciones de Lifting	113
A.3. Funciones de Cortes	114

Índice de cuadros

4.1.	Primera serie de definiciones de conjuntos.	27
4.2.	Segunda serie de definiciones de conjuntos.	28
4.3.	Tercera serie de definiciones de conjuntos.	29
4.4.	Ejemplo del Lema 4.5.1	36
5.1.	Boceto de la Relajación del <i>PCKP</i> a un <i>KP</i>	64
5.2.	Tabla resumen de los subconjuntos A_i	69
5.3.	Tabla resumen de los coeficientes agregados $\bar{a}_i = W(A_i)$	69
6.1.	Tabla resumen para la evaluación del perfil de desempeño del índice ρ_1	81
6.2.	Tabla resumen para la evaluación del perfil de desempeño del índice ρ_2	82
6.3.	Listado de cortes para la obtención de los mejores parámetros α_1 y α_2 en la heurística <i>H3</i>	84
6.4.	Tipo y cantidad de instancias usadas en las secciones 6.6	87
6.5.	Tabla del resultado preliminar del desempeño de ρ_1	91
6.6.	Tabla del resultado preliminar del incremento del desempeño de ρ_1	92
6.7.	Tabla del resultado preliminar del desempeño de ρ_2	92
6.8.	Tabla del resultado preliminar del incremento de desempeño de ρ_2	92
6.9.	Tabla resumen de segmentación respecto de factores de carga.	93
6.10.	Tabla resumen final del desempeño del índice ρ_1	99
6.11.	Tabla resumen final del desempeño del índice ρ_2	99
6.12.	Tabla resumen final del incremento del desempeño del índice ρ_1	100
6.13.	Tabla resumen final del incremento del desempeño del índice ρ_2	100
7.1.	Clasificación de las mejores configuraciones de cortes.	104
A.1.	Encabezado de la función <code>MMgenerar_IC_Minimal_Heuristica_I</code>	112

A.2.	Encabezado de la función MMgenerar_IC_Minimal_Heuristica_II.	112
A.3.	Encabezado de la función MMgenerar_IC_Minimal_Heuristica_III.	113
A.4.	Encabezado de la función MMgenerar_IC_Minimal_Heuristica_IV.	113
A.5.	Encabezado de la función MMPKICut.	113
A.6.	Encabezado de la función MMrelajación_PKP_Heurística_C.	114
A.7.	Encabezado de la función MMICut.	114
A.8.	Encabezado de la función MMSILCut.	115

Índice de figuras

2.1. Boceto 2D de un Yacimiento a Cielo Abierto	5
2.2. Se muestra el conjunto de predecesores S_i de la unidad i	14
4.1. Se muestra un ejemplo del grafo dirigido que representa al $PCKP$	27
4.2. Conjuntos que inducen el nodo 2 y el subconjunto C_a	28
4.3. Conjuntos que inducen el nodo 13 y el subconjunto C_b	29
4.4. Contracción sobre un grafo dirigido y la obtención de los coeficientes de lifting.	32
4.5. Boceto generalizado del $PCKP$ para la heurística $H3$	44
4.6. Esquema generalizado del $PCKP$ para la heurística $H4$	50
5.1. Representación de la función de lifting $g(z)$	63
5.2. Versiones de la función $g(z)$ con los parámetros agregados de la tabla 5.3	70
6.1. Ejemplo de una instancia del modelo 4.1.	76
6.2. Diversos esquemas de precedencias según la ubicación del cubo pequeño \mathbf{J}	77
6.3. Diagrama de la formación de un corte y la verificación de su validez.	79
6.4. Gráfico 1D de la mejor configuración de α_1 y α_2 para $H3$ respecto de ρ_1 y ρ_2	85
6.5. Gráfico 1D del desempeño preliminar de ρ_1 con $H1$ para el CIM y el lifting: Z , KS y KSZ	87
6.6. Gráfico 1D del desempeño preliminar de ρ_1 con $H2$ para el CIM y el lifting: Z , KS y KSZ	88
6.7. Gráfico 1D del desempeño preliminar de ρ_1 con $H3$ para el CIM y el lifting: Z , KS y KSZ	88
6.8. Gráfico 1D del desempeño preliminar de ρ_1 con $H4$ para el CIM y el lifting: Z , KS y KSZ	89
6.9. Gráfico 1D del desempeño preliminar de ρ_2 con $H1$ para el CIM y el lifting: Z , KS y KSZ	89

6.10. Gráfico 1D del desempeño preliminar de ρ_2 con $H2$ para el CIM y el lifting: Z , KS y KSZ	90
6.11. Gráfico 1D del desempeño preliminar de ρ_2 con $H3$ para el CIM y el lifting: Z , KS y KSZ	90
6.12. Gráfico 1D del desempeño preliminar de ρ_2 con $H4$ para el CIM y el lifting: Z , KS y KSZ	91
6.13. Gráfico 1D final del desempeño de ρ_1 con las mejores configuraciones de corte y con todas las instancias.	94
6.14. Gráfico 1D del desempeño de ρ_1 con las mejores configuraciones de corte sobre las instancias en s_1 (tabla 6.9).	94
6.15. Gráfico 1D del desempeño de ρ_1 con las mejores configuraciones de corte sobre las instancias en s_2 (tabla 6.9).	95
6.16. Gráfico 1D del desempeño de ρ_1 con las mejores configuraciones de corte sobre las instancias en s_3 (tabla 6.9).	95
6.17. Gráfico 1D del desempeño de ρ_1 con las mejores configuraciones de corte sobre las instancias en s_4 (tabla 6.9).	96
6.18. Gráfico 1D final del desempeño de ρ_2 con las mejores configuraciones de corte sobre todas las instancias.	96
6.19. Gráfico 1D final del desempeño de ρ_2 con las mejores configuraciones de corte sobre las instancias en s_1 (tabla 6.9).	97
6.20. Gráfico 1D final del desempeño de ρ_2 con las mejores configuraciones de corte sobre las instancias en s_2 (tabla 6.9).	97
6.21. Gráfico 1D final del desempeño de ρ_2 con las mejores configuraciones de corte sobre las instancias en s_3 (tabla 6.9).	98
6.22. Gráfico 1D final del desempeño de ρ_2 con las mejores configuraciones de corte sobre las instancias en s_4 (tabla 6.9).	98

RESUMEN

La industria minera del cobre forma un pilar fundamental en la economía de Chile, la que representa el 13 % del PIB; y que abastece el 30 % a nivel mundial. Esta industria utiliza generalmente dos metodologías de explotación sobre los yacimientos: minería a cielo abierto y subterránea. Ambas exhiben una gran complejidad en sus operaciones, lo que incide en la planificación y gestión en el mediano y largo plazo. En esta tesis se trata el problema de la planificación y gestión relativo a la programación y extracción con secuenciamiento sobre un yacimiento que será explotado por una minería a cielo abierto. El modelo del secuenciamiento, se describe por: restricciones de capacidad de explotación (knapsacks); restricciones de precedencias, que inducen los segmentos de material que se deben extraer para alcanzar el depósito; y la naturaleza binaria de las variables de decisión que determinan: cuándo y cuál segmento de material se debe o no se debe explotar. La solución de este problema tiene como objetivo maximizar el valor presente neto del yacimiento. Sin embargo, obtener esta solución para los yacimientos reales es complejo, ya que el modelo de estos depósitos, exhiben una gran cantidad de restricciones y variables de decisión. Luego, para obtener una buena solución, se relaja la integralidad de las variables, y se mejora sucesivamente el problema relajado en base a desigualdades válidas fortalecidas (cortes). Así, al contar con una mejor descripción del problema, se obtiene una solución más cercana a la solución entera óptima, con la cual se puede computar un valor presente neto aproximado del yacimiento.

La metodología que se utilizó para refinar el modelo relajado se basó en la teoría de separación que fue introducida por Gomory [15] en 1969. Esta teoría permite inferir desigualdades válidas que satisfacen las condiciones de integralidad del problema de optimización entera, pero que son inadmisibles para la solución relajada. Cuando estas desigualdades se agregan al problema relajado de forma sucesiva, para luego computar, también de manera sucesiva, el nuevo problema de optimización; se obtiene, cada vez, una nueva solución que se aproxima más a la solución entera óptima.

En esta tesis se implementaron dos procedimientos para inferir los cortes. El primero, consiste en inferir una colección de desigualdades, en función de una técnica que considera de manera explícita el secuenciamiento del problema de optimización; y el segundo, determina una colección de cortes a partir del proceso constructivo de transformar un modelo con secuenciamiento a un modelo sin secuenciamiento. Cada procedimiento se aplicó de forma independiente y simultánea sobre un conjunto cuantioso de instancias de yacimientos simulados. Sobre esta colección se computaron dos métricas de calidad. La primera, estima la aproximación del modelo relajado mejorado respecto del modelo original; y la segunda, estima el cierre promedio del gap entre las soluciones emitidas por ambos modelos. Ambas métricas se representan en gráficos 1D (o perfiles de desempeño), para evaluar y analizar el valor promedio del rendimiento; y el comportamiento general que tuvo cada configuración de corte. Este tipo de cómputo(s) permitió inferir cuál(les) configuración(es) de corte(s) exhibió(eron) mejor(es) desempeño(s).

Los cortes desarrollados en esta tesis se pueden aplicar a los modelos de yacimientos reales en base a la siguiente heurística: primero, se fortalece el modelo relajado con la mejor configuración de corte inferida, para determinar cual es la secuencia óptima de extracción de los segmentos de material que se deben explotar, y en base a esta solución, inferir la mejor secuencia temporal de cuando cada segmento se puede explotar. En base a los resultados de yacimientos simulados y respecto de la mejor configuración de corte; se computó que el cierre promedio del gap alcanzó el 53.84 (%); y la aproximación promedio del modelo relajado mejorado respecto del original alcanzó el 99.26 (%). Estos valores son concernientes a la primera etapa de la heurística propuesta.

Capítulo 1

Prólogo

En esta tesis se busca una mejora de la descripción poliedral relajada de un problema de optimización entera asociado a la explotación y producción con secuenciamiento de un yacimiento minero a cielo abierto. Con una mejor descripción poliedral del problema relajado se puede inferir una solución que es más cercana a la solución entera óptima. La manera que se utilizó para mejorar la formulación, se fundamenta en la teoría de separación. Esta teoría permite inferir desigualdades válidas fortalecidas a partir del conjunto de restricciones del problema, las que una vez adicionadas a éste, restringen aún más la formulación original del problema, y que cuando se recomputa el nuevo problema restringido la nueva solución que se emite es mejor que la anterior y presenta mejores propiedades de integralidad, es decir, que cada variable se encuentra más próxima del valor entero que debería asumir en relación a la solución entera óptima.

El capítulo 2 introduce las motivaciones de esta tesis, relacionada con la máxima utilidad neta que se puede obtener de un yacimiento a cielo abierto. Se destaca que el modelo matemático de optimización de extracción y producción con secuenciamiento, corresponde a un subproblema de un problema de optimización general de producción en un yacimiento minero. Se sigue con una exposición temática de la bibliografía, que da cuenta de las distintas soluciones que se han propuesto para resolver este problema. Se prosigue con una descripción de los objetivos generales y específicos que se pretenden cumplir en esta tesis. Se continúa con un resumen de la metodología de trabajo que se usó en esta tesis para resolver el problema y se finaliza este capítulo, con una versión y descripción formal del problema de optimización entera que modela la extracción y producción con secuenciamiento de un yacimiento minero (Johnson [21] y Boland [26]; formulación 2.2) sobre la cual se trabaja con una versión simplificada de este modelo (formulación 4.1) para evaluar su mejora.

El capítulo 3 introduce una reseña general de la teoría de separación (Gomory [15]) y su extensión en la teoría de separación de covers. Esta teoría permite mejorar la formulación relajada de un problema de optimización entera a través de la aplicación

sucesiva de desigualdades válidas robustecidas (o cortes). Hecho lo anterior, se puede emitir una solución mejorada que está más cercana a la solución entera. Se exponen las dos fases en como se implementa esta teoría para la obtención de una desigualdad fortalecida. La primera fase describe la manera de inferir una desigualdad cover minimal (definición en la sección 3.3) violada para una solución relajada y admisible para una solución entera (Gu [41] y [42]), y la segunda fase consiste en robustecer la desigualdad por una metodología de lifting (Gu [41] y [42]) (definición en la sección 3.4).

El capítulo 4 describe un marco teórico que extiende el problema de separación de un cover, introducido en el capítulo 3, a un problema de optimización entera compuesto de restricciones de knapsack, restricciones de precedencia y variables de decisión binarias (Park K. y Park S. [30]). Se extiende el concepto de cover minimal dado en el capítulo 3 a cover inducido minimal (definición en la sección 4.3), dentro del contexto del modelo matemático de knapsack con precedencias. Se sigue con una descripción de una metodología exacta de lifting sobre la formulación con restricciones de knapsacks y restricciones de precedencias, la cual fortalece la desigualdad de cover inducido minimal. Se demuestra la validez de la metodología de lifting y se demuestra, también, un orden óptimo en que las variables deben ser lifteadas. Se finaliza este capítulo con el desarrollo de cuatro heurísticas que permiten determinar, para cada una de ellas, una desigualdad de cover inducido minimal.

El capítulo 5 introduce el marco teórico de una metodología aproximada de lifting denominada "Sequense Independent Lifting". Esta teoría permite inferir una función de lifting aproximada en base a un conjunto de cover minimal y la capacidad de la restricción de un knapsack (Gu [40]). Se sigue con los fundamentos teóricos para llevar a cabo la relajación sobre un modelo, que consiste en restricciones de knapsack y en restricciones de precedencias a un modelo que considera solo restricciones de knapsack, para luego aplicar esta metodología de lifting. Se finaliza con la sección que explica el proceso de construcción de la relajación en dos etapas del lifting aproximado que robustece a una desigualdad de cover inducido minimal: la primera etapa consiste en obtener una función de lifting maximizada en base a un cover inducido minimal y a una colección de parámetros agregados; y la segunda etapa consiste en la aplicación de la metodología aproximada de lifting en base a otros parámetros agregados para computar los coeficientes de lifting.

El capítulo 6 presenta un conjunto de experimentos, en donde se analiza el desempeño de la mejora sobre la formulación relajada. Una evaluación del refinamiento del modelo se obtiene al analizar distintas formas de generación de cortes que se agregan a esta formulación y su impacto en la solución y cota que se emite. La configuración

de un corte se determina entre: una heurística que genera una desigualdad válida que cumple con la definición de cover inducido minimal (definición en sección 4.3) y una metodología de lifting (capítulos 4 y 5) que la robustece. Se inicia este capítulo con la explicación de los modelos de bloques para yacimientos simulados y reales. Le sigue una sección que muestra la manera en que se implementa la teoría de separación de covers en base a: una librería de funciones programadas en lenguaje C, solver de optimización (*CPLEX* [4]) y un programa de gestión de la librería, también programado en el mismo lenguaje. A continuación se presenta una sección que introduce el benchmarking en base a la definición de dos métricas de calidad y su representación gráfica en perfiles de desempeño, los que permiten evaluar y analizar cuál(es) es(son) la(s) mejor(es) configuración(es) de corte(s) que mayor impactan en la mejora de una formulación relajada. Se concluye este capítulo con la selección y aplicación de la(s) mejor(es) configuración(es) de corte(s) sobre un conjunto de modelos de yacimientos simulados.

El capítulo 7 se inicia con la sección de conclusiones de los resultados de esta tesis, y se finaliza el capítulo con una sección de discusión de éstos.

Capítulo 2

Introducción

La industria minera del cobre constituye un bloque básico en la económica de Chile y representa el 13 % del PIB, asimismo, Chile abastece el 30 % de este material a nivel mundial. Además, este tipo de actividad sirve como fuente de inversión en la introducción de nuevas tecnologías para las operaciones de: exploración, extracción y producción, así como también, en la búsqueda de nuevos yacimientos.

En Chile se usan generalmente dos metodologías de explotación sobre los yacimientos: minería a cielo abierto y minería subterránea. Ambas metodologías presentan grandes complejidades y desafíos operacionales para la extracción y producción del mineral, lo que incide de forma directa en la planificación y gestión de mediano y largo plazo que se hace sobre éste. Se agrega a lo anterior, otro factor importante que corresponde a la viabilidad económica del yacimiento, el cual se encuentra muy condicionado a cuan cuidadoso se es en la determinación de estos dos aspectos. Cabe señalar, que la minería que se práctica hoy en día presenta otros desafíos que son concerniente a la actividad y que se refieren a: la tendencia de menores leyes de corte de los yacimientos, incrementos en los costos de las operaciones de extracción y producción; y consideraciones medio ambientales.

La determinación de una solución óptima para la planificación y gestión del yacimiento que integra las componentes antes mencionadas se vuelve difícil de obtener, sin embargo la complejidad de esta solución se ha manejado por medio de una colección de técnicas de optimización que han dado solución a las distintas componentes de la planificación y gestión (Cacceta L. y P. Hill S. [2]); y que se mencionan, como ejemplos, solo algunas de ellas: la modelación matemática del depósito y la estimación de su reserva, la formulación y solución de la secuencia óptima de extracción y producción del yacimiento, la determinación del layout óptimo de las operaciones de extracción y localización de plantas; y la combinación (blend) óptima de los insumos para producir los productos a vender (Cacceta L. y P. Hill S. [2]).

En esta tesis solo se abordará un aspecto de la planificación y gestión minera, y

que es concerniente a la programación de la extracción y la producción del yacimiento a cielo abierto, sobre el cual se pretende determinar la secuencia espacial y temporal óptima en que se deben realizar tales operaciones, con el objetivo de lograr un valor máximo del valor presente neto del yacimiento. La razón por la que se escogió este aspecto, radica en que es un problema preponderante y que afecta a todos los otros componentes de la planificación y gestión, antes y durante las operaciones de explotación y producción del yacimiento. Luego, lo importante de este problema se encuentra en como se origina y su consecuencia en la mejor planificación y gestión de la mina. La fuente de problema se encuentra en donde se emplaza el yacimiento. Así, el depósito de mineral se ubica, generalmente, a una cierta profundidad respecto de la superficie. Luego, para acceder al depósito, se debe proceder a realizar una excavación que debe respetar ciertas condiciones de la geología que lo circunda. Estas condiciones imponen restricciones de pendientes máximas sobre las paredes de la fosa que se genera al realizar las operaciones de excavación. Tales restricciones tienen la finalidad de asegurar la estabilidad de las paredes y evitar el colapso de éstas. Este tipo de restricción induce la generación de un cono invertido con raíz en el depósito. El cono invertido, a su vez, representa a todo el material estéril que se hace necesario extraer antes de acceder a la explotación del mineral de interés. La figura 2.1 muestra un boceto de un yacimiento que será explotado bajo una metodología de minería a cielo abierto.

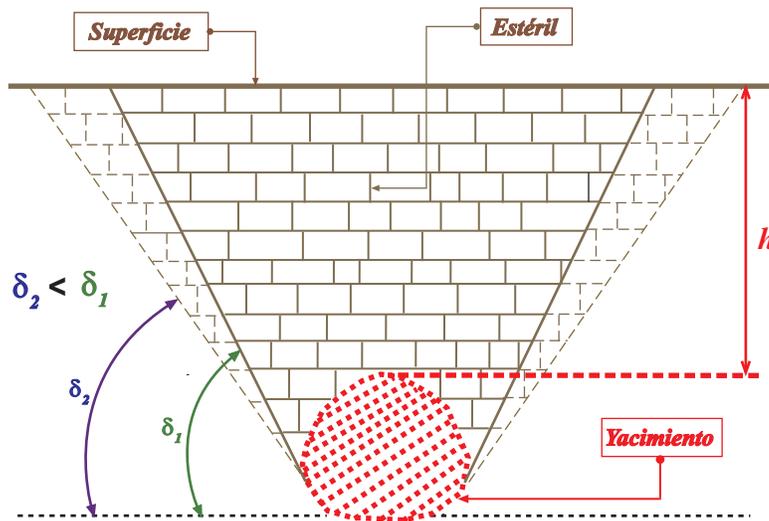


Figura 2.1: Se muestra un esquema general en 2D de un yacimiento emplazado a una cierta profundidad h . Se muestra la pendiente δ_1 de las paredes de la fosa que se hace necesario restringir para asegurar la estabilidad geológica de ésta y acceder de forma segura al depósito. Se muestra, además, la pendiente $\delta_2 < \delta_1$ como un ejemplo de cómo afecta esta restricción en la cantidad de material y secuencia que se debe seguir para lograr llegar al depósito.

La restricción de la pendiente máxima determina cual es la cantidad de material que debe ser retirado a fin de alcanzar el yacimiento. La consecuencia de lo anterior incide en la planificación respecto de la secuencia espacial y temporal óptima de los segmentos de material que se deben extraer. Se hace notar que el secuenciamiento también se encuentra condicionado a la utilidad de cada sección de material que es sacado de la mina. Con estas condiciones, todo modelo de optimización que se propone para la planificación debe considerar el elemento de secuenciamiento. Como ejemplo, en esta tesis se presenta el modelo 2.1 que sólo incorpora la utilidad de cada bloque y la precedencia (o secuencia) espacial de éstos. Se exhibe otro modelo, 4.1, que hereda las restricciones de precedencias, de la formulación anterior, pero que incorpora la restricción de capacidad. Se muestra, también, el modelo 2.2 que contiene las características de las formulaciones anteriores, pero que integra el secuenciamiento temporal sobre la explotación de cada bloque.

El aporte de esta tesis reside en resolver un subproblema de un problema de producción general de un yacimiento minero, ya que no están incorporadas las restricciones de tipo: transporte de material, ruteo, despacho de camiones, turnos etc. El subproblema modela un yacimiento compuesto por un conjunto discreto de bloques, y que solo se consideran restricciones: de capacidad de explotación del yacimiento, de precedencia espacial y precedencia temporal de cada bloque en las operaciones de extracción, y las variables de decisión binarias (en adelante *BIP*) que modelan cual bloque debe ser explotado o no. El modelo que incorpora estas restricciones se conoce como "Precedence Constrained Knapsack Problem" (en adelante *PCKP*), que representa una generalización del modelo "Knapsack Problem" (en adelante *KP*) (Van de Leesele [32]). De este modo, el *PCKP* es concerniente con el secuenciamiento de las operaciones de la extracción y producción de un yacimiento a cielo abierto.

La manera que se adopta en esta tesis para resolver el *PCKP* se basa en refinar la descripción poliedral del *PCKP* relajado; y mejorar esta formulación con la teoría de separación desarrollada por Gomory [15], la que se fundamenta en la determinación de desigualdades válidas que satisfacen las condiciones de integralidad del problema original pero que a su vez no son admisibles para la solución relajada. Cuando estas desigualdades son agregadas a la formulación original, para luego resolver el nuevo problema de optimización, la nueva solución relajada (en adelante *LP*) presenta mejores características de integralidad de las variables de decisión. Esta teoría ha sido ampliamente usada en la determinación de cortes que se infieren de una formulación *KP* con variables de decisión binarias. La teoría de separación y su extensión en la teoría de separación de covers ha sido ampliamente estudiada desde Gomory [15], analizada

computacionalmente desde Padberg [28] y generalizada por Wolsey [36], Balas [1] y Gu [40].

En esta tesis se propone un conjunto de cuatro heurísticas, en que cada una de ellas emite una desigualdad de cover inducido minimal (definición 4.3.3). Se propone, además, un conjunto de dos metodologías de lifting (capítulos 4 y 5); en que cada una de ellas robustece a la desigualdad anterior, para luego emitir un corte. Determinada todas las configuraciones posibles, se procede a evaluar cuál de ellas presenta el mejor desempeño en la mejora del modelo *PCKP* relajado.

El *PCKP* es un problema interesante en si mismo, debido a que se reconoce de forma casi natural como un subproblema en otros tipos de problemas de optimización entera. Durante el desarrollo de esta tesis se reconoció que el problema de knapsack con precedencias no solo se presenta como un subproblema en la formulación general de producción en la industria minera, sino que también se manifiesta en todos aquellos modelos en donde las restricciones de capacidad y de precedencia se encuentran vinculadas como un paquete único de restricciones. La industria de la manufactura automotriz automatizada se presenta como un ejemplo, en la cual una línea de ensamblaje debe seguir una secuencia predeterminada en el empalme de las partes en que se subdivide un vehículo, y a su vez esta línea tiene una capacidad máxima para la producción de vehículos (Van de Leesele [32]). También se reconoce este problema en la determinación óptima de una política de mantención de un grupo equipos de producción o vehículos de transporte. En donde hay un límite de presupuesto para realizar una mantención simultanea. Luego se debe programar una calendarización de mantención de los equipos, para que la industria no presente pérdidas por la no utilización de éstos (Van de Leesele [32]). También se reconoce que el *PCKP* se presenta en problemas de inversión de capital Ibarra y (Kim [18]) y en el diseño del acceso local en redes de telecomunicación (Shaw [33]).

2.1. Revisión Bibliográfica

En esta sección se aborda el problema de la revisión bibliográfica en tres subsecciones, para proveer una mejor comprensión del problema de secuenciamiento sobre un yacimiento a cielo abierto formulado como un *PCKP*.

2.1.1. Determinación del Open Pit

Uno de los problemas fundamentales de la planificación minera, consiste en determinar el pit óptimo que se alcanza cuando se extrae el volumen de material,

que provee la máxima utilidad al respetar las restricciones de pendiente de las paredes del pit. Por consiguiente, el pit óptimo de un yacimiento representa una superficie que se logra en profundidad restringido a la secuencia de explotación, a la vida útil de la mina y al precio del commodity. La determinación del pit óptimo juega un rol importante en todas las etapas de la vida útil del yacimiento, como ejemplos se mencionan: la estimación de la admisibilidad económica del yacimiento y la evaluación de cambios en las operaciones de extracción y producción sobre el depósito, frente a cambios en los precios del metal.

La primera serie de técnicas que permitieron estimar la viabilidad económica y de explotación del yacimiento, consideraron como principal restricción la mejor forma de acceder al yacimiento desde la superficie a la profundidad donde se encuentra éste.

Los métodos heurísticos¹ fueron las primeras técnicas desarrolladas para determinar la explotación y factibilidad económica del yacimiento. Una de las heurísticas que se desarrolló para analizar la evaluación, correspondió a una técnica que se basó en un cono invertido flotante. Esta heurística consiste en disponer de un bloque con utilidad positiva que hace de raíz de un cono invertido formado por todos los predecesores que son necesarios para extraer éste (ver figura 2.1). Luego se procede a una evaluación económica de la utilidad del cono invertido respecto de la ganancia de la extracción del bloque raíz y el costo de excavar el cono (Hochbaum [16]). Se sigue con la búsqueda de otro bloque raíz con utilidad positiva y se realiza la misma operación sobre este bloque. En cada estimación se debe evitar la duplicidad de la información para impedir la sobre estimación en la evaluación. Luego de calcular una serie de conos invertidos que presentan en conjunto una utilidad positiva, se procede a programar la explotación y a emitir el valor económico del yacimiento. Sin embargo esta heurística muestra dos desventajas:

1. Seleccionado un bloque raíz, no se toma en cuenta la contribución de otros conos invertidos adyacentes.
2. Se hace difícil considerar todas las combinaciones de los bloques adyacentes a un bloque raíz, que por separados pudiesen tener un valor económico negativo, pero que una vez combinados pudiesen resultar en un cono invertido con utilidad positiva.

Dentro de los autores que trabajaron con en este tipo de heurística se cuentan: Pana

¹Un método heurístico es una técnica aproximada que resuelve de manera rápida la obtención de una solución admisible a un problema, pero que en la mayoría de las veces no garantiza la obtención de una solución óptima.

[29], Gauthier [11], David [6] y Wright [39].

El siguiente conjunto de heurísticas se fundamentó en técnicas de programación dinámica, que se desarrolló después del algoritmo 2D de Lerchs y Grossmann [22]. Una heurística que se basa en programación dinámica, generalmente encuentra una mejor solución que aquella que considera un cono invertido móvil, pero ésta tiende a ser de mayor complejidad para entenderla e implementarla. La efectividad de la programación dinámica para encontrar una solución admisible radica en transformar la complejidad de la secuencia global de extracción de los bloques, en una sucesión de extracción de bloques de menor cobertura, así un problema complejo se transforma en una serie de problemas más pequeños que se resuelven de forma más simple. Este procedimiento se lleva a cabo por niveles y en etapas múltiples sobre un modelo 2D formado por bloques discretos. Dentro de los autores que han trabajado con programación dinámica se encuentran: Lerchs y Grossman [22]; Johnson y Mickel [20]; Caccetta y Gianini [3]; Frimpong y Achireko [10] y Lara [7].

A Johnson [19] y Picard [31], se les considera como los primeros investigadores que presentaron un modelo matemático de optimización entera del problema de Open Pit, el cual se formula como un conjunto discreto de nodos conectados por arcos dirigidos. Los nodos representan a los bloques y los arcos corresponden a las precedencias entre bloques. El modelo matemático de optimización entera que resultó corresponde al problema dual del problema de flujo máximo. A continuación se presenta el modelo que propuso Johnson [19]:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } z &= \sum_{j \in V} c_j x_j \\
 \text{s.t. } x_j - x_i &\geq 0 & \forall (i, j) \in A & \text{ con } i, j \in V \\
 x_j &\in \{0, 1\} & \forall j \in V
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

en que V corresponde al conjunto de índices que modelan a los bloques del yacimiento y el conjunto A representa a la colección de arcos que modelan a las precedencias entre los bloques. El coeficiente $c_j \in \mathbb{R}$ con $j \in V$ se asocia a la utilidad de extraer el bloque j .

Este tipo de formulación presenta un gran aporte en la solución de problemas reales, debido a la disminución del costo computacional para obtener una solución admisible. Esto se debe a que el conjunto de restricciones de precedencias forma una red que incrementa notablemente la eficiencia computacional en la inversión de matrices durante el proceso de obtención de una solución factible o la solución óptima. Determinada la secuencia espacial de extracción de cada bloque, se procede a determinar la secuencia temporal de cada unidad en base a los resultados anteriormente obtenidos. Este tipo

de cálculo emite buenas soluciones del valor presente de un yacimiento; y además se adapta bien a la operatividad de las faenas mineras.

Se hace notar que el resultado de una solución calculada por una heurística de cono invertido flotante es generalmente menor que la emitida por un procedimiento de programación dinámica. A su vez, la programación dinámica resuelve un valor menor que el inferido al resolver un problema de optimización entera. Este comportamiento se debe a que la heurística de cono invertido flotante y el procedimiento de programación dinámica resuelven, cada una, una solución admisible que corresponde a una cota inferior de una solución entera. En cambio, al resolver un problema de optimización entera mediante la relajación de la integralidad de las variables de decisión se computa una cota superior a la solución entera.

2.1.2. Técnicas de Preprocesamiento

El propósito del preprocesamiento consiste en determinar una metodología que permita reducir el gran volumen de variables de decisión de un modelo de bloques de un yacimiento real. La reducción de la cantidad de variables permite la disminución del costo computacional para la obtención de una solución admisible. Giannini y Caccetta [13] presentaron una metodología de preproceso que relaja el requerimiento de pendiente de la pared del pit, es decir la pared del pit tiene menos inclinación. Este preproceso es equivalente a relajar algunas restricciones de precedencia del modelo matemático de la mina, de modo tal que se obtiene una solución que contiene a la solución con el requerimiento original de pendiente del pit. La idea de la aplicación sucesiva de este procedimiento radica en que cada vez que se resuelva un pit con una pared menos inclinada, la solución que se emita permita eliminar un conjunto de bloques de forma tal que el pit se que se forme se aproxime al pit con el requerimiento de pendiente original. Otro tipo de preproceso que realizaron Giannini y Caccetta [13] se enfocó en aplicar una agregación de bloques, tal que se disminuyó el número de variables, con la consecuente disminución del costo computacional y se pudo resolver de manera eficiente la obtención de una buena solución admisible.

2.1.3. Secuencia Óptima de Producción

En la revisión bibliográfica de las subsecciones 2.1.1 2.1.2, se consideró que se disponía de una capacidad infinita de explotación y producción de la mina, y se consideró también que el yacimiento se explotaba en un periodo. Sin embargo, existe

otro modelo matemático de producción con secuenciamiento en un yacimiento a cielo abierto que fue presentado por Bolan [26] (modelo 2.2), y que describe una formulación más restringida que la presentada por Johnson [19] y Picard [31] (modelo 2.1). Formulado así el problema de Open Pit con secuenciamiento espacial y temporal, se incrementa la complejidad de obtener una solución admisible para problemas reales debido a la gran cantidad de variables de decisión que resultan del modelo del yacimiento.

Las técnicas aplicadas para obtener una solución al problema de producción con secuenciamiento son variadas y solo se mencionan algunas: heurística de relajación del scheduling en la producción (Gershon [12]); programación dinámica (Onur [27], Wang [35] y Underwood [34]), y las últimas metodologías utilizan programación entera y teoría de grafos (Martin [24], Caccetta [2] y Boland [26]).

2.2. Objetivos

2.2.1. Objetivo General

Refinar la descripción poliedral del *PCKP* relajado por medio de cortes, para emitir una solución con mejores propiedades de integralidad y evaluar el desempeño de la mejora en la descripción poliedral del modelo relajado.

2.2.2. Objetivos Específicos

1. Mejorar el cierre del gap entre una solución *LP* y la solución emitida al mejorar la formulación del *PCKP* relajado .
2. Implementación de cuatro heurísticas que permitan inferir desigualdades de cover inducido minimal en base a una solución *LP* y una formulación *PCKP*.
3. Implementación de una metodología exacta de lifting sobre una formulación *PCKP*, por medio de una técnica desarrollada por Park K. y Park S. [30].
4. Adaptación e implementación de una metodología aproximada de lifting determinada para un *KP* (Gu [40]) sobre un *PCKP*.
5. Evaluar y analizar el rendimiento de la refinación que induce una colección de configuraciones de cortes sobre un conjunto amplio de modelos *PCKPs* relajados, por medio de dos de métricas de calidad y su expresión en perfiles de desempeño.

2.3. Metodología de Trabajo

Básicamente se sigue la metodología de la línea matemática de la investigación de operaciones que se desarrolla en las siguientes etapas:

1. **Definición del Problema.** El problema consiste en evaluar el rendimiento de la mejora de la relajación a través de un refinación sucesiva del modelo *PCKP* relajado.
2. **Desarrollo del Modelo.** El modelo base de esta tesis fue propuesto por Boland [26] (formulación 2.2). Sin embargo se trabajó con una formulación simplificada (ver modelo 4.1) y fue sobre ésta donde se realizó la evaluación y el análisis del refinamiento del *PCKP* relajado.
3. **Datos de Yacimientos.** La cantidad de modelos matemáticos de yacimientos reales es limitada y no permiten realizar una evaluación confiable. Para solucionar esta limitación se generó un conjunto numeroso de instancias de yacimientos simulados, que se usaron para evaluar de manera más confiable la refinación de las formulaciones relajadas (ver sección 6.2 para su definición).
4. **Mecanismo de Mejora del *PCKP* relajado.** El mecanismo usado para evaluar la mejora de los modelos relajado, tiene como base la idea de que si una formulación se restringe al agregar una desigualdad válida, la nueva solución *LP* emitida es mejor que la solución *LP* anterior. Al utilizar este mecanismo de forma reiterada, la nueva solución *LP* se aproxima a la solución *BIP*.
5. **Implementación.** La herramienta que se utilizó para el refinamiento de las instancias relajadas consistió en desarrollar una librería y un programa maestro que gestionan la teoría de separación de covers en la generación de cortes.
6. **Evaluación de Desempeño.** La generación de información para evaluar el rendimiento de la mejora en los modelos relajados se realizó sobre un abundante conjunto de instancias. Las instancias no se construyeron con una gran cantidad de variables de decisión lo que facilitó la obtención de la solución entera óptima para cada ejemplo.
7. **Discusión y Conclusiones.** La conclusión y discusión se hizo en base a los resultados obtenidos. Mediante este ejercicio se trató de entender la(s) razón(es) del porqué una cierta configuración de corte presentó mayor impacto en el

rendimiento de la mejora de la formulación del *PCKP* relajado y porqué otra configuración no.

2.4. Secuenciamiento en un Yacimiento a Cielo Abierto

En esta tesis se expone la formulación dada por Boland [26] como una síntesis del modelo dado por Jonhson [21] y además, como una versión del modelo *PCKP* asociado a la extracción y producción de un yacimiento a cielo abierto.

La representación de un yacimiento desde un punto de vista matemático, consiste en modelar éste como un conjunto de bloques o unidades discretas que representan a segmentos independientes de material de una mina. Este tipo de discretización induce un patrón único de precedencia para cada unidad, la cual se modela como un arco dirigido que conecta un bloque con cada uno de sus predecesores y a su vez con cada uno de sus bloques sucesores. Además, esta forma de conexión representa a la continuidad física de cada porción de material en un yacimiento real. A cada unidad del modelo se le puede asociar un conjunto de atributos que consiste en: utilidad anualizada de extracción, tonelaje de mineral, tonelaje de impurezas, un subconjunto de bloques predecesor, un subconjunto de bloques sucesor etc. Todos estos atributos se usan como parámetros de entrada en el modelo descrito por Boland [26].

Se presenta a continuación la versión del *PCKP* que modela el secuenciamiento espacial y temporal de la extracción de cada bloque de un yacimiento a cielo abierto.

- Se define el conjunto de índices $N = \{0, 1, \dots, n - 1\} \subseteq \mathbb{Z}^+$ que representan a los bloques (unidades) de un yacimiento.
- Se define el conjunto de índices $T = \{0, 1, \dots, t - 1\} \subseteq \mathbb{Z}^+$ que representan a los periodos en que un bloque debe ser explotado. Un periodo puede representar: una semana, un mes, un trimestre, un semestre, un año, etc.
- Se define el conjunto de índices $A = \{1, 2, \dots, m\}$ con $m \in \mathbb{Z}^+$ que representan a los atributos de cada bloque $i \in N$. Cada atributo puede corresponder a: tonelaje de mineral, tonelaje de impurezas, etc.
- Se define la utilidad anualizada $c_i^t \in \mathbb{R}$ al extraer el bloque i durante el periodo t , con $i \in N$ y $t \in T$.
- Se define el coeficiente q_i^k , como la cantidad de atributo k que contiene el bloque i si éste es explotado, con $i \in N$ y $k \in A$. Se asume que este coeficiente es

independiente de $t \in T$.

- Se define el coeficiente $u_k^t \in \mathbb{R}^+$ que representa la capacidad disponible del recurso $k \in A$ durante el periodo $t \in T$.
- Se define S_i como el conjunto de predecesores inmediatos del bloque i , que deben ser extraídos antes de extraer el bloque i , con $i \in N$ (ver figura 2.2).

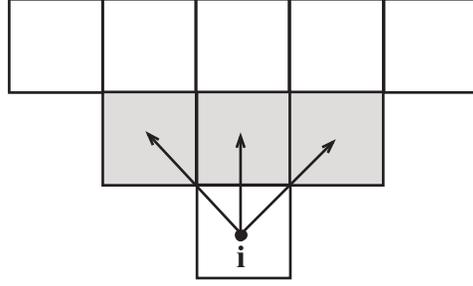


Figura 2.2: Se muestra S_i de la unidad i . Las flechas indican las unidades que preceden a bloque i de manera inmediata y que forman el conjunto S_i .

Cada variable de decisión del modelo matemático se define de la siguiente manera:

$$x_i^t = \begin{cases} 1 & \text{si bloque } i \text{ ha sido explotado en el periodo } t \text{ o antes. } \forall i \in N \text{ y } t \in T. \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

$$\max z = \sum_{t \in T} \sum_{i \in N} c_i^t \cdot (x_i^t - x_i^{t-1}) \quad (1)$$

$$s.t \sum_{i \in N} q_i^k \cdot (x_i^t - x_i^{t-1}) \leq u_k^t, \quad t \in T, k \in A \quad (2)$$

$$x_i^{t-1} \leq x_i^t, \quad t \in T, i \in N \quad (3) \quad (2.2)$$

$$x_i^t \leq x_j^t, \quad t \in T, i \in N, y \forall j \in S_i \quad (4)$$

$$x \in \{0, 1\}^{|N|} \quad t \in T, i \in N \quad (5)$$

La ecuación (1) representa a la función objetivo y busca maximizar el valor presente neto de la extracción y producción de un yacimiento a cielo abierto. La desigualdad (2) corresponde a una colección de restricciones de knapsacks que representa la utilización máxima del atributo k dada una cierta capacidad u_k^t durante el periodo t . La desigualdad (3) representa a un conjunto de restricciones de precedencia temporal que condiciona a que un bloque sea explotado sólo una vez. La desigualdad (4) corresponde

a una colección de restricciones que condicionan la precedencia espacial para extraer un bloque. Este tipo de restricción obliga a que si un bloque j precede a un bloque i , el bloque j tiene que ser explotado antes de poder acceder a explotar al bloque i durante o antes del periodo t . La relación (5) expresa la naturaleza binaria de las variables de decisión.

Para entender la complejidad que resulta al resolver este modelo se puede pensar en obtener el valor presente de un yacimiento compuesto por 100.000 bloques y que tiene una vida útil de 10 años, lo que resulta en 1.000.000 de variables de decisión por solucionar. Inferir una solución entera óptima para esta instancia o instancias similares incrementa el costo computacional y hace difícil obtener soluciones admisibles para este tipo de instancias. Sin embargo, la aplicación de la teoría de separación de covers puede facilitar la obtención de una buena solución en este tipo de problemas al aplicar cortes durante los inicios del branch and cut del modelo 2.2. Los tipos cortes que se pueden aplicar son los que se analizarán y evaluarán en esta tesis sobre una versión simplificada de la formulación 2.2 (ver modelo 4.1).

Capítulo 3

Reseña del Problema de Separación

3.1. Introducción

Este capítulo presenta una reseña de los conceptos que sustentan la teoría de separación y su derivación en la teoría de separación de covers, la que es de uso común en algoritmos de "branch-and-cut" para mejorar la descripción poliedral relajada del problemas de optimización entera con restricciones de knapsack y variables de decisión binarias.

Se debe tener presente que todas los conceptos tratados en este capítulo están determinados para una formulación KP . Estas ideas se extenderán al modelo $PCKP$, las que serán analizadas en los capítulos 4 y 5.

3.2. Separación de Covers

La teoría de separación es una metodología de optimización que iterativamente restringe el dominio de una solución admisible por medio de desigualdades lineales llamadas cortes. Este procedimiento se usa generalmente para mejorar la descripción poliedral de un problema de optimización entera. Tal procedimiento se conoce con el nombre de "Cutting Plane" y fue introducida por Gomory [15] en 1969.

La idea que propuso Gomory [15] consistió en que no se consideren los requerimientos de integralidad de las variables de decisión en un problema de optimización entera para computar una solución LP . Luego, con la LP y la descripción poliedral de la formulación se puede inferir un corte que satisface las condiciones de integralidad del problema original pero que no es factible para la solución LP . Una vez determinado este corte, se agrega a la formulación relajada y se recomputa una nueva solución LP que se acerca más a la solución entera óptima. Si se construye un nuevo corte con la nueva LP y la descripción poliedral del modelo, para luego robustecer el último problema

restringido, se obtiene otra nueva solución LP que se aproxima aún más a la solución entera óptima. Gomory ([15]) demostró que si cada nueva solución LP no corresponde a una solución entera óptima, se garantiza la existencia de una desigualdad que separa la solución entera óptima de la solución LP . Por consiguiente, si este procedimiento se aplica sucesivamente, cada nueva solución LP se aproximará más y más a la solución óptima.

La proposición 3.2.1 contiene la idea de restringir una formulación con cortes y el efecto en la nueva solución LP del problema relajado. En esta tesis no se demuestra la proposición.

Proposición 3.2.1. Sean P_1 y P_2 dos formulaciones para un mismo problema de optimización entera descrito por $z = \max \{cx : x \in \mathbb{Z}_+^n \text{ y } c \in \mathbb{R}^n\}$. Si P_1 es mejor formulación que P_2 se cumple que $P_1 \subset P_2$. Se define el siguiente conjunto $z_j^{LP} = \max \{cx : x \in P_n^j \text{ y } c, P_n^j \in \mathbb{R}^n\}$ con $j = 1, 2$, el cual corresponde al valor de la función objetivo de la relajación de cada formulación P_1 y P_2 , entonces se satisface que $z_1^{LP} \leq z_2^{LP}$ (Wolsey [37]).

Un requisito fundamental que se le exige a un corte es que contengan un alto contenido de violación, ya que se ha visto experimentalmente que cuando esta característica está presente, el robustecimiento que se hace sobre el KP relajado incrementa el refinamiento de su formulación (Gu [42]); y la nueva solución LP que se emite presenta características de integralidad cercanas a la solución entera óptima. La forma de estimar la cantidad de violación que puede alcanzar una desigualdad será visto en la sección 3.3.

Para computar la nueva solución LP se usa generalmente un algoritmo dual. Este algoritmo es particularmente útil cuando se debe reoptimizar una formulación después que una restricción ha sido agregada a ésta. Técnicamente lo que se realiza es que se reinicia el proceso de optimización desde la última solución LP , la cual ha sido transformada en una solución inadmisibles al agregar un corte. Este tipo de metodología incrementa la eficiencia computacional al aprovechar el hecho de que se reinicia el cálculo desde la última solución admisible obtenida.

La obtención de un corte constituye un tópico relevante y actual en el ámbito de la programación matemática, y forma más un arte que una ciencia. Para iniciar esta discusión, es válido preguntar la forma de obtener un corte lo más violado posible respecto de una solución LP y de la descripción poliedral del problema. En esta tesis se sigue la lógica de formación de un corte en base a lo expuesto por Gu [42] y que consiste en que dado una solución LP se busca determinar una desigualdad llamada

cover (ver su explicación en la sección 3.3) que sea lo más violada posible, la que luego se fortalece por una metodología de lifting secuencial (ver su explicación en la sección 3.4). Se hace notar que una desigualdad de cover por si sola es un corte; y se puede apreciar su efecto en la mejora en la descripción poliedral sobre un conjunto cuantioso de formulaciones relajadas (capítulo 6).

El problema de determinar una desigualdad de cover violado se puede extender para determinar una colección de desigualdades de covers inadmisibles y sobre éstos se aplica el lifting para producir un conjunto de cortes infactibles.

Sobre el lifting se pueden mencionar algunos aspectos de interés que inciden en la eficiencia del corte sobre la mejora de una formulación relajada: el primero de ellos se refiere a qué variables pueden ser lifteadas, el segundo se asocia al orden en que las variables deben ser lifteadas y el tercero trata con la forma en que se debe computar cada coeficiente de lifting. Para determinar qué variables deben ser lifteadas se ha encontrado experimentalmente (Gu [42]) que las variables que mayor aportan a la efectividad del lifting (es decir aquellas que más contribuyen a la violación del corte) son aquellas que tiene algún grado de fraccionalidad, ya que, aquellas variables que fueron fijadas en su valor entero, no realizan aporte alguno en la construcción del corte (Gu [41, 42]). El segundo aspecto se relaciona con la secuencia en que deben ser lifteadas las variables. Se ha determinado experimentalmente que dependiendo del tipo de formulación del problema, es el orden que se adopta para aplicar el lifting (Gu [42] y Park K. y Park S. [30]). En esta tesis se evalúa y analizan dos criterios que seleccionan las variables que serán lifteadas: un criterio considera el orden creciente en el grado de fraccionalidad de las variables (sección 4.6) y el otro toma en cuenta el orden decreciente del grado de fraccionalidad de las variables (subsección 5.5.3). El tercer rasgo está asociado a cómo computar cada coeficiente de lifting, para el cual se ha demostrado (Gu [42, 41, 40] y Park K. y Park S. [30]) que el monto que conviene para este coeficiente sea lo más grande posible, ya que con tal valor, se incrementa la eficiencia del corte en el sentido que aporta en la disminución del grado de fraccionalidad de la solución LP . Así, cada metodología de lifting determina el valor de este coeficiente a partir de la solución de un problema de optimización que maximiza su valor, y este problema dependerá del tipo de formulación que se quiere resolver.

A los rasgos ya discutidos, surgen otros aspecto de la determinación de cortes para deliberar, como por ejemplo: ¿Cuántos cortes calcular?, ¿En qué momento agregar los cortes a la formulación ? y dado una colección de knapsacks ¿Cómo escoger cual de ellos son los mejores para determinar una colección de cortes más efectivos? Esta última serie de preguntas no tienen una respuesta precisa y no se tiene una única manera para

resolverlas. Sin embargo, se ha visto empíricamente (Gu [42, 41, 40]) que cuando se dispone de una colección pequeña en cantidad de cortes pero con un alto contenido de violación, éstos tienden a restringir más la formulación relajado y por consecuencia se infiere una mejor solución LP que se aproxima más a la solución entera.

A continuación se exhibe la sección relacionada con la primera fase de la formación de un corte y que trata con la determinación de una desigualdad de cover violada.

3.3. Fase I de un Corte: Obtención de un Cover Violado

En esta sección se presenta la formalización de la construcción de un cover violado en base a la siguiente pregunta: ¿Dado una solución fraccionaria x^* tal que $x_j^* \in [0, 1]$ con $j \in N$, $N \subseteq \mathbb{Z}^+$. Se desea conocer si x^* viola a una o más desigualdad(es) de cover(s) o que x^* es admisible para todas las desigualdades de este tipo? La solución a esta pregunta se presenta a continuación:

Se asume que se dispone de una restricción de knapsack descrita por: $\sum_{j \in N} a_j x_j \leq b$ con $N \subseteq \mathbb{Z}^+$; $a_j, b \in \mathbb{R}^+$ y $x \in \{0, 1\}^N = \mathbb{B}^N$. Se define un conjunto P de soluciones factibles expresado por:

$$P = \left\{ x \in \{0, 1\}^N : \sum_{j \in N} a_j x_j \leq b \right\} \quad (3.1)$$

Se dice que $\phi \notin C \subseteq N$ es un cover si: $\sum_{j \in C} a_j > b$. El cover C es minimal si $\forall i \in C$ se cumple que: $\sum_{j \in C \setminus \{i\}} a_j \leq b$ (Gu [42]). La desigualdad 3.2 es válida para 3.1 y se le denomina desigualdad de cover minimal:

$$\sum_{j \in C} x_j \leq |C| - 1 \quad (3.2)$$

Gu ([42]) mostró que para inferir el monto de violación de cada cover, se debe determinar el parámetro ζ que se obtiene de una solución $x^* \in \mathbb{R}_+^N \setminus \mathbb{B}^N$ tal que se cumpla de forma simultanea: $\sum_{j \in C} a_j > b$ y $\sum_{j \in C} x_j^* > |C| - 1$. Lo anterior se obtiene al resolver el siguiente problema de optimización Gu ([37]).

$$\zeta = \min \left\{ \sum_{j \in N} (1 - x_j^*) \cdot z_j : \sum_{j \in N} a_j \cdot z_j > b \text{ y } z \in \mathbb{B}^n \right\} \quad (3.3)$$

en que z representa el vector característico de cada desigualdad. Al resolver el problema para ζ se emite la siguiente información:

1. Si $\zeta \geq 1$ la solución x^* es admisible para todo cover en P (3.1).
2. Si $\zeta < 1$ la solución x^* es no admisible para al menos un cover en P (3.1).

El monto de violación que aporta algún cover en P (3.1) está dado por la siguiente cantidad $(1 - \zeta)$. La relación 3.3 se usa como base en la búsqueda de un cover violado en el contexto de la formulación de un $PCKP$ (sección 4.7).

La determinación de algún $\zeta < 1$ para la solución x^* no garantiza que la desigualdad de cover encontrado sea el más violado. Sin embargo con el parámetro ζ se puede determinar un subconjunto de desigualdades de covers que sean violados por una solución LP . Al estimar el monto de violación de cada desigualdad se puede discernir a cual(es) cover(s) le(s) conviene aplicar el proceso de lifting.

La sección siguiente muestra la etapa final del fortalecimiento de una desigualdad de cover violado.

3.4. Fase II de un Corte: Lifting sobre un Cover Violado

En esta sección se presenta la segunda etapa del problema de separación, que consiste en extender y fortalecer la desigualdad de cover violado por medio de una metodología de lifting secuencial, sobre una colección de variables que inicialmente no pertenecen a esta desigualdad. Además, se introducen los fundamentos matemáticos para entender como opera esta metodología a partir de la desigualdad 3.2.

Técnicamente el lifting se trata de un proceso constructivo que se inicia con una desigualdad válida que pertenece a un poliedro de menor dimensión y que se finaliza con otra desigualdad válida que pertenece a un poliedro de mayor dimensión (Gu [40]).

Generalmente el lifting se aplica de manera secuencial: es decir, a cada variable se le calcula el coeficiente de lifting al resolver un problema de optimización independiente del resto del conjunto variables que ya han sido y no han sido lifteadas.

A continuación se exhibe el desarrollo que hace Gu [40], para expresar formalmente el proceso de lifting secuencial que robustece a una desigualdad de cover minimal (3.2). Para iniciar este proceso se debe disponer de una formulación entera que se describe en base al conjunto X expresado por:

$$\begin{aligned}
 X = \{ x \in \mathbb{R}_+^{|N|} : & \sum_{j \in N} a_j x_j \leq d, \\
 & \sum_{j \in C_k} w_j x_j \leq r_k, \quad k = 0, \dots, t; \\
 & x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in I \subseteq N \}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

en que se define: $\phi \notin C_k \subseteq N$ y $k = 0, \dots, t$ con $t \in \mathbb{Z}^+$ y que corresponde a una partición de $N \subseteq \mathbb{Z}^+$ tal que $C_i \cap C_j = \phi$ para todo $i, j = 0, \dots, t$ e $i \neq j$. Los parámetros a_j y $d \in \mathbb{R}^+$ con $j \in N$ tienen dimensión $m \times 1$ con $m \in \mathbb{Z}^+$. Los parámetros $w_j \in \mathbb{R}$ con $j \in N$ y $r_k \in \mathbb{R}^+$ tienen dimensión $r_k \times 1$.

El proceso de lifting se inicia con un subconjunto que cumpla la siguiente condición:

$$x_j = 0 \quad \forall j \in N \setminus C_0 \quad \text{y} \quad x_j = 1 \quad \forall j \in C_0$$

en que C_0 es un conjunto de índices que representa a las soluciones admisible X^0 descrito por:

$$\begin{aligned} X^0 = \{x \in \mathbb{R}_+^{|C_0|} : & \sum_{j \in C_0} a_j x_j \leq d, \\ & \sum_{j \in C_0} w_j x_j \leq r_0, \\ & x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in I \cap C_0; I \subseteq N\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Sea la siguiente desigualdad válida para el conjunto X^0 (3.5):

$$0 \leq \alpha_0 - \sum_{j \in C_0} \alpha_j x_j \quad (3.6)$$

Se pretende construir una desigualdad válida para X (3.4) a partir de la siguiente relación:

$$0 \leq \alpha_0 - \sum_{0 \leq k \leq t} \sum_{j \in C_k} \alpha_j x_j \quad (3.7)$$

La desigualdad 3.7 se obtiene de la desigualdad 3.6 y del proceso de lifting de las variables que pertenecen al conjunto $N \setminus C_0$. Se asume que el proceso de lifting se aplica de forma secuencial sobre la colección de subconjuntos: C_1, \dots, C_t ; y cada x_i con $i \in C_j$ se fortalece simultáneamente ($j = 1, \dots, t$). Se presenta un conjunto de soluciones admisible genérico X^i , expresado por:

$$\begin{aligned} X^i = \{x \in \mathbb{R}_+^{\sum_{0 \leq k \leq i} |C_k|} : & \sum_{0 \leq k \leq i} \sum_{j \in C_k} a_j x_j \leq d, \\ & \sum_{j \in C_k} w_j x_j \leq r_k, \quad k = 0, \dots, i, \\ & x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in I \cap (\cup_{k=0}^i C_k); I \subseteq N\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Se observa que $X^i \subseteq X$ con $i = 1, \dots, t$ y $t \in N$. Se observa, además, que $x_i =$

0 para $i \in \cup_{j=i+1}^t C_k$, luego $X^{i-1} \subseteq X^i$ y $X^t = X$.

El problema de lifting sobre el subconjunto C_i se expresa en cómo determinar los coeficientes α_j con $j \in C_i$ de la desigualdad válida :

$$0 \leq \alpha_0 - \sum_{0 \leq k < i} \sum_{j \in C_k} \alpha_j x_j \quad (3.9)$$

tal que sea válido para X^{i-1} , y que la desigualdad:

$$\sum_{j \in C_i} \alpha_j x_j \leq \alpha_0 - \sum_{0 \leq k < i} \sum_{j \in C_k} \alpha_j x_j \quad (3.10)$$

sea válida para X^i .

Para determinar el valor de α_j del lado izquierdo de 3.10 se sigue el procedimiento usado por Gu [40]. Se define un intervalo $Z = [0, d]$ con $z \in Z$, y se tiene:

$$\begin{aligned} h_i(z) = \max \quad & \sum_{j \in C_i} \alpha_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in C_i} a_j x_j = z, \\ & \sum_{j \in C_i} w_j x_j \leq r_i, \\ & x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in I \cap C_i, \quad I \subseteq N \quad \text{y} \quad x \in \mathbb{R}_+^{|C_i|} \end{aligned} \quad (3.11)$$

y sea

$$\begin{aligned} f_i(z) = \min \quad & \alpha_0 - \sum_{0 \leq k < i} \sum_{j \in C_k} \alpha_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{0 \leq k < i} \sum_{j \in C_k} \alpha_j x_j \leq d - z, \\ & \sum_{j \in C_k} w_j x_j \leq r_k, \quad k = 0, \dots, i-1, \\ & x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in I \cap (\cup_{k=0}^{i-1} C_k), \quad I \subseteq N \quad \text{y} \quad x \in \mathbb{R}_+^{\sum_{k=0}^{i-1} |C_k|} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Luego, la desigualdad 3.10 se expresa de manera simplificada por $h_i(z) \leq f_i(z)$ para todo $z \in Z$. Cuando se infiere cada $\alpha_j \in \mathbb{R}^+$ con $j \in C_i$ que logre la igualdad $h_i(z) = f_i(z)$, se dice que se dispone de a lo más de $|C_i|$ soluciones x^j con $j = 1, \dots, |C_i|$ linealmente independientes. Bajo esta condición se dice que el proceso de lifting es maximal en C_i (Balas [1], Gu [40]). Por consiguiente, se resuelve un problema de optimización independiente en cada C_i y a su vez en una secuencia $i = 1, \dots, t$.

Hasta aquí se ha visto la manera en cómo opera el lifting secuencial. A continuación,

se presenta el efecto del lifting como una expresión en forma de desigualdad válida (o corte) para fortalecer un KP (Gu [42]). Para llevar a cabo lo anterior, se considera una partición del conjunto cover minimal C en dos conjuntos disjuntos C_1 y C_2 tal que $C_1 \neq \phi$ y $C_2 = C \setminus C_1$. La desigualdad de cover minimal respecto de C_1 se expresa por: $\sum_{j \in C_1} x_j \leq |C_1| - 1$; y corresponde a una faceta¹ inducida para la envoltura convexa descrita por la intersección entre el conjunto P (3.1) y aquellas soluciones que están en C_2 , lo que se expresa de la siguiente manera:

$$P \cap \left\{ x \in \{0, 1\}^N : x_j = 0 \quad \forall j \in N \setminus C \text{ y } x_j = 1 \quad \forall j \in C_2 \right\} \quad (3.13)$$

Si se fija $x_j = 1$ para todo $j \in N \setminus C$ y además se fija $x_j = 0$ para todo $j \in C_2$ se deriva una faceta inducida para P (3.1) descrita por la siguiente expresión (Gu [42]):

$$\sum_{j \in C_1} x_j + \sum_{j \in N \setminus C} \alpha_j x_j + \sum_{j \in C_2} \gamma_j x_j \leq |C_1| - 1 + \sum_{j \in C_2} \gamma_j. \quad (3.14)$$

La desigualdad 3.14 corresponde al lifting generalizado sobre la desigualdad de cover minimal C_1 , la que se usará para robustecer a la formulación KP relajada. Los coeficientes $\alpha_j = 0$ se fijan en este valor para asegurar validez cuando $x_j = 1$; y los coeficientes $\gamma_j = 0$ se fijan en este monto cuando $x_j = 0$ ya que por si solos no garantizan la validez de 3.14. Sin embargo, el uso general que se le da a la desigualdad 3.14 es cuando $C_2 = \phi$ y $C_1 = C$, luego 3.14 adquiere la siguiente expresión (Gu [42]):

$$\sum_{j \in C} x_j + \sum_{j \in N \setminus C} \alpha_j x_j \leq |C| - 1. \quad (3.15)$$

En esta tesis, la desigualdad 3.15 exhibe dos versión diferentes para la aplicación y evaluación de la metodología de lifting. La primera versión se presenta en el capítulo 4 con la relación 4.2 y la segunda versión se muestra en el capítulo 5 con la desigualdad 5.11. La característica en común de estas dos versiones, es que ambas inician la primera fase de la construcción de un corte con la misma desigualdad de cover inducido minimal (sección 4.7). A continuación, el proceso de robustecimiento de la primera versión se basa en un procedimiento óptimo para escoger las variables que van a ser lifteadas (sección 4.6), es decir, éstas se seleccionan en un orden creciente respecto del grado de fraccionalidad. En cambio, en el lifting de la segunda versión se fundamenta en un

¹Se entiende que $\sum_{j \in N \setminus \{0\}} \alpha_j x_j \leq \alpha_0$ con α_j y $\alpha_0 \in \mathbb{R}^+$ es una faceta para P (3.1) si es válida $\forall x \in P$ y satisface en la igualdad con exactamente $d-1$ puntos $x \in P$, tal que éstos son afinamente independientes, donde d corresponde a la dimensión de P (Balas [1]).

orden decreciente respecto de la fraccionalidad para seleccionar las variables que van a ser lifteadas.

En las secciones 6.6 y 6.7 se puede observar el impacto que tienen las metodologías de lifting, sobre el rendimiento de los cortes que se aplican en la mejora de una colección numerosa de formulaciones de *PCKPs* relajados.

Capítulo 4

Lifting Exacto sobre una Formulación *PCKP*

4.1. Introducción

En este capítulo se introduce la extensión de la definición de cover y cover minimal vista en la sección 3.3, y se explica el algoritmo exacto de lifting sobre el modelo *PCKP* (Park K. y Park S. [30]). La determinación del cover inducido, cover inducido minimal y los coeficientes de lifting consideran de forma explícita la descripción poliedral del knapsack y el conjunto de restricciones de precedencia del *PCKP*. Una característica esencial de esta metodología de lifting consiste en que se propone un orden óptimo en que las variables se pueden liftear, de modo que una vez inferido un corte, éste presenta un mayor impacto que si no se hubiese seguido el orden óptimo de la selección de variables para ser lifteadas.

En este capítulo se trabaja con una versión simplificada del *PCKP* respecto de la que fue presentada en la sección 2.4 en el modelo 2.2. La reducción del modelo se motiva por el propósito de facilitar la comprensión de la nueva definición de cover y de la metodología de lifting. La simplificación se hace pensando en que la producción total de un yacimiento se realiza en un periodo, así como también la extracción de éste. Otra abreviación que se introduce en el modelo, consiste en que a cada bloque se le considera solo un atributo, lo que implica que la capacidad del knapsack y la utilidad están asociados a ese atributo que se quiere explotar. Lo anterior se establece formalmente por medio del siguiente modelo:

1. Se define un conjunto $N = \{0, 1, \dots, n - 1\} \subseteq \mathbb{Z}^+$ de índices que representa a los bloques de un yacimiento.
2. Se definen los parámetros b y $a_j \in \mathbb{R}^+$ con $j \in N$, como la capacidad del knapsack y los coeficientes técnicos asociados a cada variable de decisión.
3. Se definen los parámetros $c_j \in \mathbb{R}$ con $j \in N$, como la utilidad de extraer el bloque (o la unidad) j .

4. Se dispone de un conjunto de variables binarias de decisión $x_j \in \{0, 1\}$ con $j \in N$, tal que cada variable modela la decisión de que si el bloque j debe ser explotado ($x_j = 1$) o no, es decir ($x_j = 0$).

A partir de lo definido, cabe preguntarse en qué secuencia deben ser explotado cada unidad $j \in N$ tal que se cumpla $\sum_{j \in N} a_j x_j \leq b$ y se obtenga la máxima utilidad dada por $\sum_{j \in N} c_j x_j$ (Van de Leesel [32]). Esta pregunta quedan descrita de forma explícita en el siguiente modelo de optimización entera:

$$\begin{aligned}
 \max z &= \sum_{j \in N} c_j x_j \\
 \text{s.t.} \quad &\sum_{j \in N} a_j x_j \leq b \\
 &x_i \geq x_j, \quad \text{si } i \leq j \\
 &x_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in N
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

4.2. Conjuntos y Grafos

Esta sección provee un grupo de definiciones de la teoría de conjunto y de la teoría de grafos que serán de utilidad en las secciones posteriores.

El *PCKP* (formulación 4.1) se puede expresar como un grafo dirigido definido de la siguiente manera. Sea N un conjunto de índices como fue definido en la sección 4.1. Se define un grafo de precedencias $G = (V(G), A(G))$ del modo siguiente:

$$V(G) = N, \quad (i, j) \in A(G), \quad \Leftrightarrow \quad i \leq j \text{ e } i, j \in V(G)$$

$V(G)$ es el conjunto de nodos que representa a los bloques de un yacimiento. $A(G)$ es el conjunto de arcos o aristas que conectan a los nodos del conjunto $V(G)$. Se exige, además, que el grafo presente la propiedad de transitividad respecto de la relación de precedencia entre los nodos (Park K. y Park S. [30]).

La figura 4.1 muestra un ejemplo de un grafo dirigido que modela un yacimiento, y además facilita la comprensión de las definiciones que se dan a continuación.

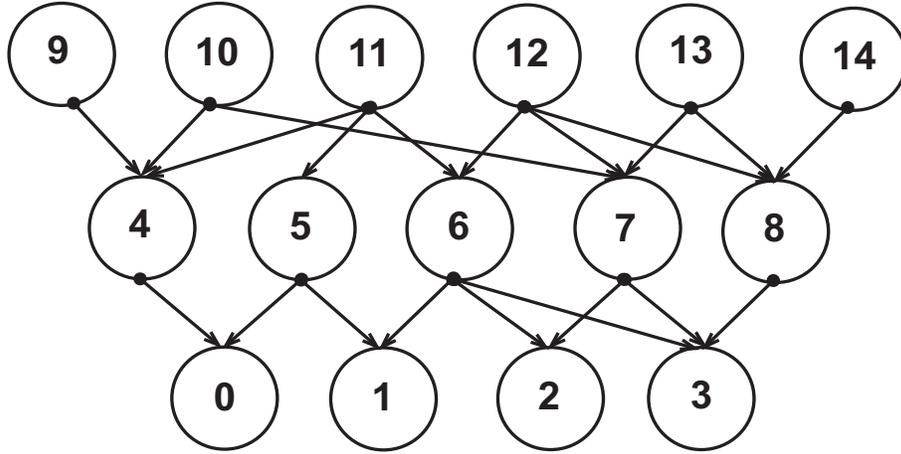


Figura 4.1: Se muestra un grafo dirigido que representa al *PCKP*. $N = \{0, \dots, 14\}$. La restricción del knapsack queda definida por $\sum_{j=0}^{14} a_j x_j \leq b$ y $a_j = 1$ con $j \in N$. La capacidad del knapsack $b = 14$. Las restricciones de precedencias se representan por los arcos dirigidos.

Sea $H = (V(H), A(H))$ un grafo dado como en la definición de G , sea un conjunto $C \subseteq V(H)$ y un nodo $i \in V(H)$. Se definen a continuación los siguientes conjuntos en el cuadro 4.1:

Primera Serie de Definiciones de Conjuntos: Predecesores y Sucesores	
$R(i) = \{j \in V(H) : (j, i) \in A(H)\}$, conjunto de predecesores de i , sin incluir i .
$R(C) = \bigcup_{i \in C} R(i)$, conjunto de predecesores de C , sin incluir C .
$T(i) = R(i) \cup i$.	, conjunto de predecesores de i incluyendo i .
	Al conjunto $T(i)$ se le denomina como invertido de raíz i .
$T(C) = R(C) \cup C$.	, conjunto de predecesores de C incluyendo C .
$S(i) = \{j \in V(H) : (i, j) \in A(H)\}$, conjunto de sucesores de i , sin incluir i .
$S(C) = \bigcup_{i \in C} S(i)$, conjunto de sucesores de C .
$S_C(i) = \{j \in C : (i, j) \in A(H)\}$, conjunto de sucesores i que inciden en C .
$U_C(i) = \{i\} \cup S_C(i)$, conjunto de sucesores de i que inciden en C y que incluye i .

Cuadro 4.1: Definiciones de: $R(i)$, $T(i)$, $S(i)$, $S_C(i)$ y $U_C(i)$ (Park K. y Park S. [30]).

A continuación se presentan otro conjunto de definiciones en el cuadro 4.2:

Segunda Serie de Definiciones de Conjuntos: Hojas y Cohojas

Se define el cardinal de $S(i)$ como $d_H^+(i) = |S(i)| \quad \forall i \in V(H)$.

Se denomina a un nodo $i \in V(H)$ como hoja del grafo H , si $d_H^+(i) = 0$.

Se denomina $L(H) \subseteq H$ como un conjunto de hojas.

Se denomina a un nodo i como cohoja de un grafo H , si $S(i) \subseteq L(H)$.

Se denomina $M(H) \subseteq H$ como el conjunto de cohojas de H .

Cuadro 4.2: Definiciones de: $d_H^+(i)$, $L(H)$ y $M(H)$ (Park K. y Park S. [30]).

Los siguientes conjuntos aclaran las definiciones dadas en los cuadros 4.1 y 4.2. Se definen dos conjuntos $C_a = \{1, 2, 3\}$, $C_b = \{5, 12, 13\}$ y $C_a, C_b \subseteq V(H)$. El conjunto predecesor de nodo $2 \in C_a$ es $R(2) = \{6, 7, 11, 12, 11, 10, 13\}$ y $T(2) = \{2, 6, 7, 11, 12, 11, 10, 13\}$. Luego, el conjunto predecesor inducido por C_a es $T(C_a) = \{1, 5, 2, 6, 7, 11, 12, 7, 11, 10, 13, 3, 8\}$. C_a cumple con la definición de conjunto hoja $d_H^+(i) = |S(i)| = 0 \quad \forall i \in C_a$, luego $L(H) = C_a$. El conjunto cohoja de H inducido por C_a es $M(H) = \{5, 6, 7, 8\}$. La figura 4.2 muestra el ejemplo presentado en función de la figura 4.1:

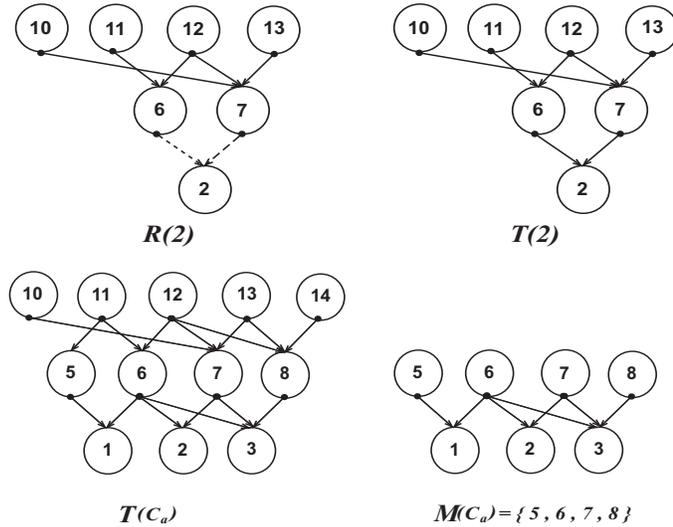


Figura 4.2: Se presentan los conjuntos que inducen el nodo 2 y el conjunto hoja C_a respecto del grafo de la figura 4.1. Las flechas con trazos segmentados en $R(2)$ significan que no hay conexión entre los nodos pero se preservan las precedencias.

El conjunto sucesor del nodo $13 \in C_b$ es $S(13) = \{7, 8, 2, 3\}$ y el conjunto sucesor inducido por C_b es $S(C_b) = \{6, 7, 8, 0, 1, 2, 3\}$. El conjunto $S_{C_a}(6) = \{1, 2, 3\}$ y $U_{C_a}(6) = \{6, 1, 2, 3\}$. El conjunto cohoja del grafo H inducido por C_b es $M(H) = \phi$. La figura 4.3 presenta el ejemplo presentado para el nodo 13 y el subconjunto C_b .

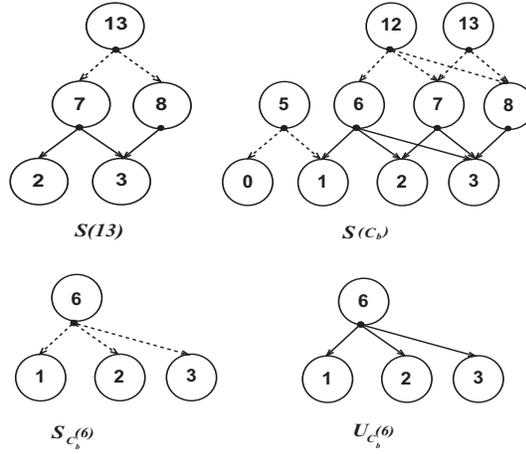


Figura 4.3: Se muestran los conjuntos inducidos por el nodo 13 y el subconjunto C_b respecto del grafo de la figura 4.1. Las flechas con trazos segmentados en: $S(13)$, $S(C_b)$ y $S_{C_b}(6)$ significan que no hay conexión entre los nodos pero se preservan las precedencias.

Sea $C \subseteq V(H)$. Se define una partición de $R(C)$ en dos conjuntos disjuntos; y un grafo dirigido inducido por C definido en el cuadro 4.3:

Tercera Serie de Definiciones de Conjuntos	
$R_2(C) = \{i \in R(C) : S_C(i) \geq 2\}$	
$R_1(C) = R(C) \setminus R_2(C)$	
$H(C) = (C \cup R_2(C), A_H(C))$, con $A_H(C)$ un subconjunto de aristas de $A(H)$.

Cuadro 4.3: Definiciones de $R_2(C)$, $R_1(C)$ y $H(C)$. (Park K. y Park S. [30]).

A continuación se introduce el concepto de incomparable para los elementos del conjunto N .

Definición 4.2.1. Dos elementos $i, j \in N$ se les llama incomparables (independientes) si no se presenta la relación de orden $i \leq j$ ni $j \leq i$, es decir i, j no se preceden ni se suceden uno al otro (Park K. y Park S. [30]).

Se provee una extensión de la definición de incomparable sobre un conjunto

Definición 4.2.2. Un conjunto $C \subseteq N$ se le llama conjunto incomparable si $\forall i, j \in C$ e $i \neq j$ se cumple la definición 4.2.1.

Dado un conjunto $C \subseteq N$, se dice que x^c es el vector característico de C si $x_j^c = 1 \forall j \in C$ y $x_j^{N \setminus C} = 0 \forall j \in N \setminus C$.

4.3. Cover Inducido Minimal (*CIM*)

Al disponer de las definiciones de conjunto y grafo descritas en la sección 4.2, se introduce la descripción y las propiedades del problema de knapsack con precedencias con los fundamentos de la teoría poliedral.

Sea $x_j \in P$ un conjunto de soluciones enteras factibles para el *PCKP* y sea $C \subseteq N$ un conjunto de incomparables, se puede definir la envoltura convexa inducida por el conjunto C sobre P de la siguiente forma:

$$P(C) = \text{conv}(\{x^D \in P : D \subseteq T(C)\})$$

en que $P(C)$ corresponde a la envoltura convexa de las soluciones admisibles de *PCKP* restringida al conjunto de variables contenidas en $T(C)$ (definición de $T(C)$ en cuadro 4.1).

Definición 4.3.1. Se define $Q(C) = \text{conv}(\{x^D \in P : D \subseteq T(C), i \in D \forall i \in R_2(C)\})$ tal que $Q(C) \subseteq P(C)$ con $x_j = 1 \forall j \in R_2(C)$ (Park K. y Park S. [30]).

Luego $Q(C)$ se deriva de $P(C)$ al establecer $x_j = 1 \forall j \in R_2(C)$ (definición de $R_2(C)$ en cuadro 4.1).

Se asume que la suma de los coeficientes a_j con $j \in T(i)$ e $i \in N$, satisface la restricción de capacidad, es decir: $\sum_{j \in T(i)} a_j \leq b$, con b definido en sección 4.1.

A continuación se presentan las definiciones de cover inducido y cover inducido minimal asociados al *PCKP*.

Definición 4.3.2. Se dispone de un conjunto $C \subseteq N$, se dice que C es un cover inducido (Park K. y Park S. [30] y en adelante *CI*) si:

1. C es un conjunto de incomparables.
2. Se cumple que $\sum_{j \in T(C)} a_j > b$.

Definición 4.3.3. Sea $C \subseteq N$, se dice que C es un cover inducido minimal (Park K. y Park S. [30] y en adelante *CIM*) si:

1. C es un cover inducido.
2. Se cumple que $\sum_{j \in T(C \setminus \{i\})} a_j \leq b$ para todo $i \in C$.

De la definición de CI y CIM se dice que la desigualdad $X(CIM) \leq |CIM| - 1$ es válida para una formulación $PCKP$, y recibe el nombre de desigualdad Cover Inducido Minimal (Park K. y Park S. [30]). Cabe destacar que la obtención de una desigualdad tipo CIM produce una desigualdad que puede restringir más el $PCKP$ relajado, o al menos igual, que si se hubiese restringido esta formulación con un cover inferido solo de la restricción de knapsack del $PCKP$ (desigualdad 3.2) (Park K. y Park S. [30]).

4.4. Shrinking sobre un Grafo Dirigido

En esta sección se introduce un procedimiento de contracción (shrinking) sobre un grafo dirigido H , el que se transforma en otro grafo dirigido pero con menor número de nodos y de arcos. Este procedimiento forma parte de la metodología exacta de lifting que Park K. y Park S. [30] desarrollaron para la obtención del coeficiente de lifting en el $PCKP$.

Sea un nodo $j \in M(H)$, se realiza una operación de contracción sobre el grafo dirigido H respecto de nodo j , si se reemplaza el conjunto $U_{L(H)}(j)$ por un nodo k , y en este nodo inciden todos los arcos que antes incidieron en $U_{L(H)}(j)$, es decir, aquellos arcos que preceden e inciden en el nodo j deben incidir, ahora, en el nuevo nodo k . Si un predecesor $l \in T(j)$ incide en uno o más nodos de $S(j)$, éste debe ser reemplazado por un arco que incida en el nodo k . Si un nodo $l \in M(H) \setminus \{j\}$ incide en uno o más nodos de $S(j)$, éste debe ser sustituido por un arco que incide en k . El nuevo grafo dirigido se denota por H_1 . Se exige que el nodo $k \in V(H_1)$ cumpla con la condición de ser una hoja, $d_{H_1}^+(j) = |S(j)| = 0$. Si se repite la misma operación de contracción sobre el grafo H_1 para obtener otro grafo contraído H_2 , se debe inferir un nuevo conjunto $M(H_1)$ y luego escoger un nuevo elemento, para así realizar la misma operación de contracción. Esta operación se puede repetir sucesivamente hasta que todo el grafo H colapse en un nodo. La descripción siguiente muestra de modo formal la relación entre un grafo dirigido H_k , y el siguiente grafo dirigido y reducido H_{k+1} :

$$\begin{aligned} V(H) \supset V(H_1) \supset V(H_2) \supset \dots \supset V(H_k) \supset V(H_{k+1}) \supset \dots \\ A(H) \supset A(H_1) \supset A(H_2) \supset \dots \supset A(H_k) \supset VA(H_{k+1}) \supset \dots \\ H \supset H_1 \supset H_2 \supset \dots \supset H_k \supset H_{k+1} \supset \dots \end{aligned}$$

A continuación se ilustra un ejemplo en donde se aplica el procedimiento de contracción al grafo dirigido de la figura 4.4. El orden en que se escogen los nodos para realizar la contracción es arbitrario.

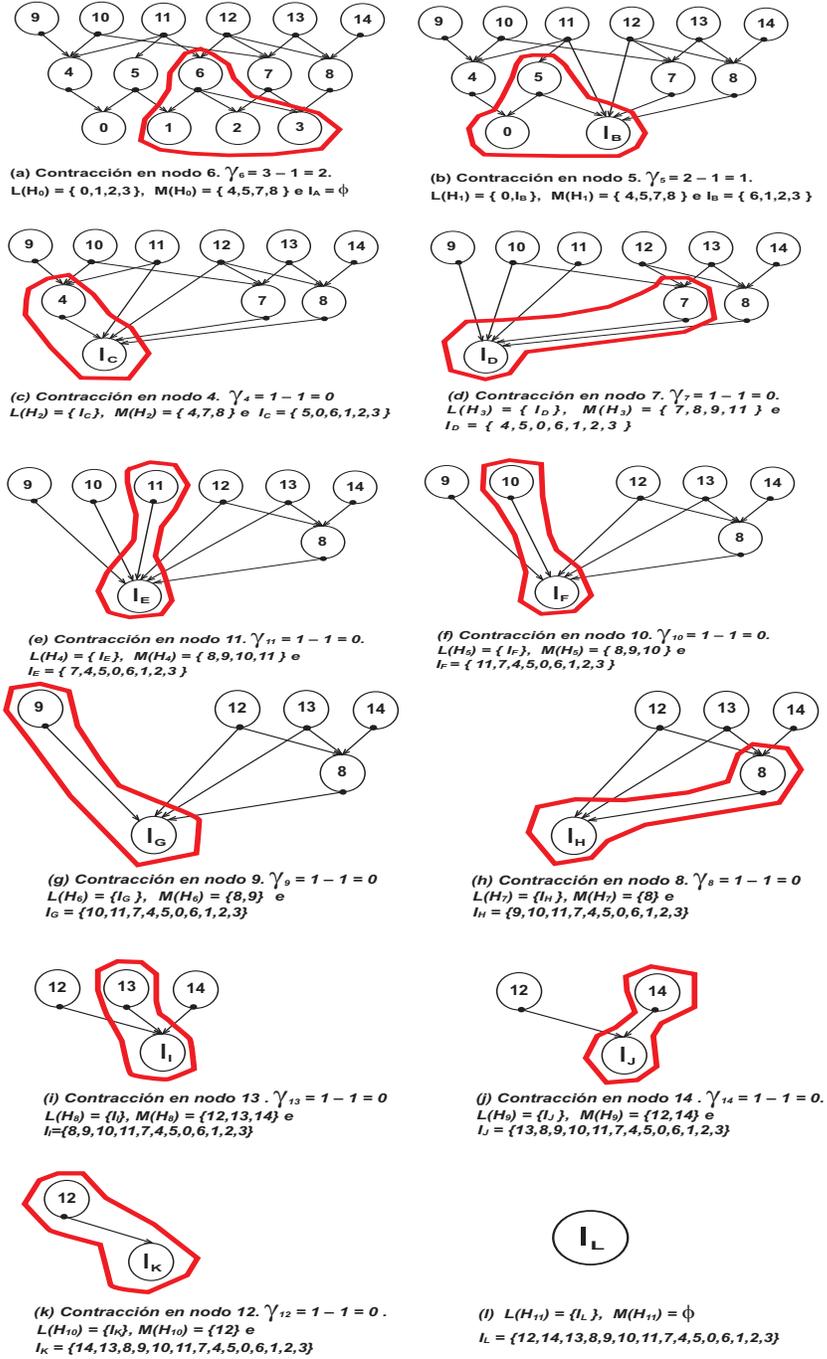


Figura 4.4: Se muestra el procedimiento de contracción sobre el grafo definido en la figura 4.1. Se escoge el siguiente orden de agregación de los nodos: 6, 5, 4, 7, 11, 10, 9, 8, 13, 14, 12. El conjunto I_m con $m = A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, L$, corresponde al conjunto que representa al nodo agregado que se produce cada vez que se aplica el shrinking sobre un nodo. Se observa en cada contracción los conjuntos hojas, cohojas y coeficientes de lifting según Park K. y Park S. [30].

Se hace notar que la contracción sobre el grafo H siempre colapsa en un nodo que tiene la propiedad de ser hoja. Esta afirmación se aplica a cualquier conjunto de hojas

que se seleccione para dar inicio a las operaciones de contracción sobre el grafo H . Por ejemplo, si se escoge como conjunto hoja $L(H) = \{4, 5, 6\}$ del grafo de la figura 4.1 y se realizan las operaciones de reducción se llega a un nodo que contiene los mismos elementos del nodo I_L de la figura 4.4.

4.5. Validez de la Metodología de Lifting

En esta sección se muestra la validez de la metodología exacta de lifting desarrollada por Park K. y Park S. [30]. La validez del lifting se inicia, al disponer de una desigualdad CIM como se describe en la sección 4.3. Se debe contar, además, con un conjunto $Q(CIM) \neq \phi$ (definición 4.3.1) en donde la desigualdad $X(CIM) \leq |CIM| - 1$ sea válida para el poliedro descrito por este conjunto.

El procedimiento de lifting se lleva a cabo en las variables que pertenecen al conjunto $R_2(CIM)$. Luego, la desigualdad que expresa el proceso de lifting para fortalecer la desigualdad de CIM está dada por.

$$\begin{aligned} \sum_{j \in CIM} x_j - \sum_{j \in R_2(CIM)} \gamma_j x_j \leq |CIM| - 1 - \sum_{j \in R_2(CIM)} \gamma_j \\ \sum_{j \in CIM} (x_j - 1) - \sum_{j \in R_2(CIM)} \gamma_j (1 - x_j) \leq -1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Antes de demostrar la validez del procedimiento de lifting, se ilustra en la subsección 4.5.1 el pseudocódigo que infiere la colección de coeficientes de lifting γ_j con $j \in R_2(CIM)$, el cual incorpora el conjunto de aplicaciones de contracción sobre un grafo dirigido $H(CIM)$ vista en la sección 4.4.

4.5.1. Pseudocódigo del Lifting

Sea un conjunto $K = \{1, 2, \dots, m\} \subseteq \mathbb{Z}^+$ de índices que representan el número de operaciones de shrinking que experimenta el grafo inducido $H(CIM)$ (Park K. y Park S. [30]).

Se inicializa la iteración del pseudocódigo con: $H_0 = H(CIM)$ y $k = 1$.

```
while  $k \in K$  {
  if  $H_k = \phi$  ( $H_k$  no dispone de arcos){
    todos los nodos de  $H_k$  son hojas.
     $M(H_k) = \phi$ ;
    se detiene la contracción.
```

```

}
else {
    se selecciona un nodo  $j \in M(H_k)$ .
    se calcula el coeficiente de lifting:  $\gamma_j = d_{H_k}^+(j) - 1$ ,
    ver su obtención en sección 4.5.2.
    se aplica la contracción sobre al grafo  $H_k$  respecto del nodo  $j$ ,
    según sección 4.4.
    se actualiza  $k = k + 1$ .
    se obtiene grafo contraído  $H_{k+1}$ .
}
}

```

Si en una iteración k se escoge una variable t (o nodo t) para ser lifteada, que no pertenece al conjunto de cohojas $M(H_k)$ se produce una solución vacía. Este procedimiento de lifting se puede implementar en un orden de magnitud de $O(|A(H)|)$ veces (Park K. y Park S. [30]).

4.5.2. Validez del Lifting

Se procede a demostrar la validez de la metodología de lifting sobre el *PCKP* (Park K. y Park S. [30]). Sea una etapa k del procedimiento de lifting descrito en la sección 4.5.1. Para calcular el valor del coeficiente de lifting γ_k , se debe resolver el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned}
 (Lfa) \quad \gamma_k = z = \quad & \max \sum_{i \in CIM} x_i - \sum_{i \in B_{k-1}} \gamma_i x_i \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in N} a_i x_i \leq b \\
 & x_i \geq x_j \quad \forall i, j \in N \text{ e } i \leq j \\
 & x_k = 0 \\
 & x_t = 1 \quad \forall t \in R_2(CIM) \setminus B_k \\
 & x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

En donde $B_{k-1} = \{1, \dots, k-1\} \subseteq R_2(CIM)$ corresponde al conjunto de variables ya lifteadas hasta la etapa k . Luego la desigualdad $\sum_{i \in CIM} x_i - \sum_{i \in B_k} \gamma_i x_i \leq |CIM| - 1 - \sum_{i \in B_k} \gamma_i$ es una restricción válida para $\gamma_k \leq |CIM| - 1 - \sum_{i \in B_{k-1}} \gamma_i - z$ (con $z = \sum_{i \in CIM} x_i - \sum_{i \in B_{k-1}} \gamma_i x_i$); y el lifting es máximo cuando se alcanza la igualdad. Por consiguiente γ_k alcanza su máximo valor.

En la formulación 4.3 se pueden realizar algunas simplificaciones sobre algunas variables: $x_i = 0 \forall i \in N \setminus T(CIM)$; $x_i = 0$ para todo $i \in S_{CIM}(k)$ debido a que $x_k = 0$, $x_i = 0 \forall i \in \{j \in R_1(CIM) : S_{CIM}(j) \subseteq S_{CIM}(k)\}$ y se pueden fijar en cero todas aquellas variables que pertenecen a $R_1(CIM)$. A partir de estas condiciones resulta la siguiente formulación simplificada:

$$\begin{aligned}
(LFb) \quad \gamma_k = z_b = \quad & \max \sum_{i \in CIM} x_i - \sum_{i \in B_{k-1}} \gamma_i x_i \\
\text{s.t} \quad & x_i \geq x_j & \forall i \in B_{k-1} \text{ y } j \in S_{CIM \cup B_{k-1}}(i) \\
& x_i = 0 & \forall i \in S_{CIM \cup B_{k-1}}(k) \\
& x_i \in \{0, 1\} & \forall i \in CIM \cup B_{k-1}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Se define la unión de los conjuntos CIM y B_{k-1} como: $CIM \cup B_{k-1} = \cup_{I \in L(H_{k-1})} I$.

El conjunto de restricciones de precedencia en la formulación 4.4 se presenta entre aquellas variables que pertenecen a los sucesores a la misma hoja en H_{k-1} . La formulación 4.4 se puede descomponer en un conjunto de subproblemas con respecto a cada nodo $I \in L(H_{k-1})$.

$$\begin{aligned}
(LFI) \quad \gamma_I = z_I = \quad & \max \sum_{i \in I \cap CIM} x_i - \sum_{i \in I \cap B_{k-1}} \gamma_i x_i \\
\text{s.t} \quad & x_i \geq x_j & \forall i \in I \cap B_{k-1} \text{ y } j \in S_I(i) \\
& x_i = 0 & \forall i \in S_I(k) \\
& x_i \in \{0, 1\} & \forall i \in I
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Si en la formulación 4.5 se omite la restricción $x_i = 0 \forall i \in S_I(k)$, z_I se convierte en la formulación del dual del problema de flujo máximo. Bajo esta condición la formulación 4.5 adquiere la siguiente descripción:

$$\begin{aligned}
(LFI') \quad z'_I = \quad & \max \sum_{i \in I \cap CIM} x_i - \sum_{i \in I \cap B_{k-1}} \gamma_i x_i \\
\text{s.t} \quad & x_i \geq x_j & \forall i \in I \cap B_{k-1} \text{ y } j \in S_I(i) \\
& x_i \in \{0, 1\} & \forall i \in I
\end{aligned} \tag{4.6}$$

De la formulación 4.6 se presenta el lema 4.5.1 que caracteriza la solución óptima de z'_I asociada a la forma de calcular cada coeficiente de lifting en concordancia a lo expresado en el pseudocódigo de la sección 4.4.

Lema 4.5.1. El valor óptimo de la función objetivo z'_I es 1 (formulación 4.6) el cual se obtiene para $x_i = 1 \quad \forall i \in I$ (Park K. y Park S. [30]).

prueba. El lema se demuestra por inducción a partir del cardinal de $|I \cap B_{k-1}|$.

Sea $|I \cap B_{k-1}| = 0$, lo cual es fácil de entender si el conjunto $I = \{i\}$ para algún $i \in CIM$. Se asume ahora que $|I \cap B_{k-1}| \leq l$. Sea $|I \cap B_{k-1}| = l$ con $l > 0$ y una variable $t \in I \cap B_{k-1}$ que corresponde al índice de la última variable lifteada en el conjunto $I \cap B_{k-1}$. Sea

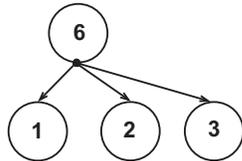
$$I \setminus \{t\} = \cup_{j=1}^r I_j \quad \text{en donde } I_j \in L(H_{t-1}) \quad \text{y} \quad r = d_{H_{t-1}}^+(t).$$

Si se descompone la formulación 4.6 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I \cap CIM} x_i - \sum_{i \in I \cap B_{k-1}} \gamma_i x_i &= \sum_{j=1}^t \left(\sum_{i \in I_j \cap CIM} x_i - \sum_{i \in I_j \cap B_{k-1}} \gamma_i x_i \right). \\ &= \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i \in I_j \cap CIM} x_i - \sum_{i \in I_j \cap B_{k-1}} \gamma_i x_i \right) + (1 - \gamma_t) \cdot x_t, \end{aligned}$$

y se define $\gamma_t = r - 1$. Ya que $|I_j \cap B_{k-1}| < l$ para todo j , $\sum_{i \in I_j \cap CIM} x_i - \sum_{i \in I_j \cap B_{k-1}} \gamma_i x_i$ puede alcanzar un valor máximo de 1 cuando $x_i = 1 \quad \forall i \in I_j$ por hipótesis de inducción. Luego el lema queda demostrado.

La relación que existe entre el cálculo de γ_t y la solución de la formulación 4.6 corresponde a resolver el problema dual de la formulación de flujo máximo, sobre el grafo constituido por la variable que va a ser lifteada y los sucesores inmediatos de ésta. El cuadro 4.4 muestra la formulación que representa al nodo 6, sus sucesores y el Lema 4.5.1. En este mismo cuadro y dentro de la parte (c) se observa que el máximo valor que se puede alcanzar es 1.



$$\begin{aligned} \max z'_I &= x_6 - \gamma_6 x_6 \\ \text{s.t.} \quad &x_1 - x_6 \leq 0 \\ &x_2 - x_6 \leq 0 \\ &x_3 - x_6 \leq 0 \\ &x_i \in \{0, 1\} \\ &i = 1, 2, 3, 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max z'_I &= 1 - \gamma_6 \\ \text{s.t.} \quad &0 \leq 1 \\ &0 \leq 1 \\ &0 \leq 1 \end{aligned}$$

(a)

(b)

(c)

Cuadro 4.4: Las partes (a) y (b) corresponden a la formulación 4.6 sobre el nodo 6 de la figura 4.1 y la aplicación del Lema 4.5.1 se muestra en la parte (c).

Se presentan, a continuación, algunas propiedades que nacen de la validez de la metodología de lifting exacta.

Proposición 4.5.2. El valor óptimo de (LFb) (formulación 4.2) es $|L(H_{k-1})| - d_{H_{k-1}}^+(k)$ (Park K. y Park S. [30]).

prueba . La prueba se hace por inducción.

1. Etapa 1 de lifting y contracción. El valor de $|L(H_0)| - d_{H_0}^+(1) = |CIM_{H_0}| - d_{H_0}^+(1)$.
2. Etapa k de lifting y contracción. El valor de $|L(H_k)| - d_{H_k}^+(k+1) = |CIM_{H_k}| - d_{H_k}^+(k+1)$.
Se realiza la suma hasta la etapa k de las sucesivas operaciones de contracción sobre el grafo H , resultando en:

$$\sum_{j=1}^k |L(H_j)| - \sum_{j=1}^k |d_{H_j}^+| = \sum_{j=1}^k |CIM_{H_j}| - \sum_{j=1}^k |d_{H_j}^+| \quad (a)$$

Se desea probar si en la etapa $k+1$ se aplica la relación $|L(H_{k+1})| - d_{H_{k+1}}^+$. De la relación anterior se expresa la suma hasta $k+1$:

$$\sum_{j=1}^{k+1} |L(H_j)| - \sum_{j=1}^{k+1} |d_{H_j}^+| = \sum_{j=1}^{k+1} |CIM_{H_j}| - \sum_{j=1}^{k+1} |d_{H_j}^+| \quad (b)$$

Si se resta la relación (b) – (a) se obtiene el siguiente resultado:

$$|L(H_{k+1})| - |d_{H_{k+1}}^+| = |CIM_{H_{k+1}}| - |d_{H_{k+1}}^+|$$

Por consiguiente, se demuestra que la proposición es cierta.

Teorema 4.5.3. El algoritmo de shrinking de la subsección 4.5.1 es válido para una desigualdad CI y produce un lifting máximo para una desigualdad CIM . (Park K. y Park S. [30]).

prueba. Para probar este teorema se asume que se dispone de un conjunto C que cumple con la definición de CIM dada en 4.3.3 . La prueba se lleva a cabo por inducción.

1. Etapa 1 de lifting y contracción. El valor óptimo de (LFb) es $|CIM| - d_{H_0}^+(1)$ (proposición 4.5.2). Lo anterior es cierto ya que $L(H_0) = |CIM|$ y $\gamma_1 = d_{H_0}^+(1) - 1$.
2. Etapa $k \geq 1$ de lifting y contracción. En la etapa $k+1$ el valor óptimo de (LFb) es $|L(H_{k-1})| - d_{H_k}^+(k+1)$. Si se expresa $|L(H_k)|$ de la siguiente forma recursiva:

$$|L(H_k)| = |L(H_{k-1})| - (d_{H_{k-1}}^+(k) - 1) = |L(H_{k-1})| - \gamma_k.$$

a) Si se aplica de forma recursiva el mismo argumento se tiene la siguiente relación:

$$|L(H_{k-1})| = |L(H_0)| - \sum_{i \in B_{k-1}} \gamma_i = |CIM| - \sum_{i \in B_{k-1}} \gamma_i.$$

b) Por lo tanto, para demostrar que en la etapa $k+1$ el valor del coeficiente de lifting esta dado por :

$$\gamma_{k+1} = d_{H_k}^+(k+1) - 1$$

se presenta el siguiente resultado:

$$\gamma_{k+1} = |CIM| - 1 - \sum_{i \in B_k} \gamma_i + |L(H_k)| + d_{H_k}^+(k+1) = d_{H_k}^+(k+1) - 1$$

Luego el teorema queda probado.

Corolario 4.5.4. En cualquier etapa k del procedimiento de lifting de la subsección 4.5.1 se cumple que $\sum_{i \in B_{k-1}} \gamma_i = |CIM| - |L(H_{k-1})|$, (Park K. y Park S. [30]).

prueba . El corolario se puede probar a partir de la proposición 4.5.2 y parte de la prueba del teorema 4.5.3:

1. De la proposición 4.5.2 se tiene la siguiente relación:

$$|L(H_{k-1})| - d_{H_{k-1}}^+(k)$$

2. Se reescribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |L(H_k)| &= |L(H_{k-1})| - \gamma_k \\ |L(H_{k-1})| &= |L(H_0)| - \sum_{i \in B_{k-1}} \gamma_i \\ |L(H_{k-1})| &= |CIM| - \sum_{i \in B_{k-1}} \gamma_i \end{aligned}$$

3. Luego se reordenan los términos y se obtiene

$$\sum_{i \in B_{k-1}} \gamma_i = |CIM| - |L(H_{k-1})|$$

De este modo el corolario queda probado.

En base a la figura 4.4 se muestra el procedimiento de lifting y los valores de los coeficientes de lifting que se obtiene en cada etapa de la contracción del grafo dirigido de la figura 4.1. Para este ejemplo el conjunto $CI = \{0, 1, 2, 3\}$ y los valores de a_j y

b están en la figura 4.1. Este conjunto cumple con el requisito de ser incomparable y con la condición de exceso de la definición 4.3.2 . Se verifica minimalidad a partir de la definición 4.3.3:

$$\begin{aligned}\sum_{j \in T(CI \setminus \{0\})} a_j &\leq 14 \\ \sum_{j \in T(CI \setminus \{1\})} a_j &\leq 14 \\ \sum_{j \in T(CI \setminus \{2\})} a_j &\leq 14 \\ \sum_{j \in T(CI \setminus \{3\})} a_j &\leq 14\end{aligned}$$

Luego CI cumple con la condición de minimalidad y forma un CIM . La desigualdad asociada al CIM toma la siguiente expresión:

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$$

A partir de esta desigualdad, se procede a aplicar el procedimiento de lifting, obteniéndose la siguiente desigualdad:

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 - 2 \cdot x_5 - 1 \cdot x_6 \leq 0$$

Se hace notar que esta metodología de lifting detiene el proceso de cálculo de los coeficientes de lifting para ciertas condiciones. Una de ellas corresponde a que en cierta etapa k del procedimiento de lifting y contracción, el grafo $H_k(T(CIM_{H_k}))$ este formado de elementos que cumplen la condición de ser hojas, en consecuencia el conjunto de cohojas $M(H(CIM_{H_k})) = \phi$, luego no hay variables para liftear. La otra condición corresponde a que el lado derecho de la función de lifting 4.2 alcance el valor cero:

$$|CIM| - 1 - \sum_{j \in R_2(CIM)} \gamma_j = 0,$$

antes que el grafo inducido $H_k(T(CIM_{H_k}))$ colapse en un sólo nodo. En la figura 4.4 se observa que en la etapa de contracción (c) se agota el lado derecho de la función de lifting 4.2 antes de alcanzar la etapa (1) en donde el grafo queda representado por un nodo.

$$\begin{aligned}|CIM| - 1 - \sum_{j \in R_2(CIM)} \gamma_j &= 4 - 1 - (\gamma_6 + \gamma_5) \\ &= 4 - 1 - (2 + 1) \\ &= 0\end{aligned}$$

Un resultado interesante que se observa en el ejemplo, es que si el lado derecho de la función de lifting 4.2 alcanza un valor nulo, la desigualdad obtenida corresponde a una faceta para $P(C)$ (Park K. y Park S. [30] y Balas E. [1]).

4.6. Orden Óptimo para Aplicar el Lifting

Hasta la sección 4.5, solo se muestra la forma en cómo calcular el coeficiente de lifting, pero no se da ninguna condición sobre cual es el mejor orden que se debe seleccionar una variable $t \in M(H_{k-1})$ que va a ser lifteada. La explicación a este problema se puede plantear con la desigualdad 4.2 reescrita de la siguiente manera:

$$\sum_{j \in CIM} x_j + \gamma_k \cdot (1 - x_k) + \sum_{j \in R_2(CIM) \setminus \{k\}} \gamma_j \cdot (1 - x_j) \leq |CIM| - 1, \quad (4.7)$$

y se dispone de una solución x^* relajada. Si se observa la expresión $\gamma_k \cdot (1 - x_k^*)$ en la desigualdad 4.7 evaluada en la solución x^* , se puede inferir que se obtiene su máximo valor cuando:

$$x_k^* = \min_{j \in R_2(CIM)} \{x_j^*\} \quad (4.8)$$

El propósito de maximizar $\gamma_k \cdot (1 - x_k^*)$ se basa en la misma idea de maximización del coeficiente de lifting visto en la sección 4.5.2. Si este procedimiento se repite para la variable x_{k+1}^* (asumiendo que ya se obtuvo el coeficiente de lifting γ_k) sobre el conjunto $R_2(CIM) \setminus \{k\}$; y si se vuelve a repetir para x_{k+2}^* sobre el conjunto $R_2(CIM) \setminus \{k, k+1\}$ y así sucesivamente; se puede proponer la siguiente heurística sobre $R_2(CIM)$ para determinar la variable que va a ser lifteada:

Se inicializa la búsqueda: $x_k^* \in R_2(CIM)$ con $k = 1, \dots, |R_2(CIM)|$, $j = 1$ y $A = \phi$.

```

While  $R_2(CIM) \neq \phi$  {
  Seleccionar  $x_k^* = \min_{i \in R_2(CIM)} \{x_i^*\}$ .
  Actualizar  $R_2(CIM)$  de la siguiente manera  $R_2(CIM) = R_2(CIM) \setminus \{k\}$ .
  Almacenar  $x_k^*$  en  $A$  con la siguiente notación  $A = A \cup \{(x_k^*)_j\}$ .
   $j = j + 1$ .
}

```

Luego, la heurística genera sobre el conjunto A el siguiente orden entre las variables que ya fueron lifteadas:

$$(x_k^*)_1 \leq (x_k^*)_2 \leq \dots \leq (x_k^*)_{|R_2(CIM)|} \quad (4.9)$$

Esta heurística nunca entra en conflicto con el procedimiento de lifting de la sección 4.4, ya que si se observa la formulación 4.1, las restricciones de precedencias fuerzan a que la solución x^* se ordene de mayor a menor valor fraccionario dependiendo de los predecesores y sucesores que tenga cada nodo en el grafo dirigido. Lo anterior se puede formalizar como un problema de programación lineal expresado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
(FL) \quad z &= \min \sum_{j \in R_2(CIM)} \gamma_j x_j^* \\
s.a \quad &\gamma \in \Gamma \quad \Gamma = 1, \dots, |R_2(CIM)|
\end{aligned} \quad (4.10)$$

Park K y Park S. [30] probaron que dado un cover inducido minimal, un conjunto $R_2(CIM)$ y una solución LP , el orden óptimo para escoger las variables que van a ser lifteadas, lo produce una solución óptima emitida por la formulación 4.10, el cual resulta en un orden idéntico al de la relación 4.9.

En las secciones 6.6 y 6.7 se puede ver en los perfiles 1D de desempeño (definición 6.4.3), el impacto que produce al fortalecer una desigualdad de CIM por medio de la metodología de lifting exacta descrita en las secciones: 4.4, 4.5.1 y 4.6; y el refinamiento generado sobre una colección cuantiosa de modelos relajados que representan a yacimientos simulados (definición de yacimiento simulado en sección 6.2).

4.7. Heurísticas para la Obtención de Desigualdades de Tipo CIM

En esta sección se desarrollan cuatro heurísticas que buscan determinar cual es la desigualdad de CIM que contiene la mayor cantidad de violación posible. La diferencia

distintiva de cada heurística se presenta en el modo de la búsqueda de las variables de decisión que van a constituir el cover inducido minimal en base a la contribución de la cantidad de violación que hacen respecto de una solución LP y de la descripción poliedral del $PCKP$. En el diseño de cada heurística se contempla desde un menor a un mayor grado de complejidad en la obtención de una desigualdad de CIM violado. No obstante a estos requisitos, no se siempre la heurística más competitiva en la selección de variables emitirá la desigualdad de CIM con mayor contenido de violación.

La determinación de una desigualdad CI para luego comprobar que es un CIM , hereda las mismas preguntas presentadas en la sección 3.2, en lo referente a la complejidad para resolver el problema de separación de covers.

4.7.1. Heurística $H1$

La heurística $H1$ se basa en la aplicación de un procedimiento denominado "coefficient independent cover generation", desarrollado Gu [42] y que permite obtener un cover violado a partir de una formulación KP (Gu [42]) y una solución LP . Esta técnica infiere un cover violado en el contexto de una formulación $PCKP$. Con el cover obtenido, se aplica una operación que seleccione aquellas variables que cumplan con el requisito de incomparabilidad (definición 4.2.2). A continuación se verifica la condición de cover inducido (definición 4.3.2) y luego se verifica y rectifica si este subconjunto cumple con la definición de cover inducido minimal (ver definición 4.3.3). Luego se emite la desigualdad de CIM .

Para entender esta heurística se presenta en el siguiente pseudocódigo:

```

Sea la siguiente información de parámetros y solución relajada.
#  $x^*$ = solución  $LP$ .
# Sean los coeficientes del knapsack  $a_j \in \mathbb{R}^+$ .
# Sea la capacidad del knapsack  $b \in \mathbb{R}^+$ .
# Sea el conjunto  $N = \{0, 1, \dots, n-1\} \subseteq \mathbb{Z}^+$  de índices de las
# variables de decisión binarias.
De la solución  $LP$  se forman los siguientes subconjuntos:
   $L = \{j \in N : x_j^* = 0\}$ ,  $U = \{j \in N : x_j^* = 1\}$  y  $F = \{j \in N : 0 < x_j^* < 1\}$ .
# Se calcula una capacidad residual
   $\bar{b} = b - \sum_{j \in U} a_j$ .
# Se organiza  $F$  en orden no creciente de fraccionalidad:
   $i_k < i_{k+1}$  con  $k = 1, \dots, |F|$  tal que  $x_{i_k}^* \geq x_{i_{k+1}}^*$ .
# Se procede a formar el conjunto cover  $C$  según definición
# vista en sección 3.3.
  Sea  $m \leq |F|$  tal que  $\sum_{1 \leq i_k < m} a_{i_k} \leq \bar{b}$  y  $\sum_{1 \leq i_k \leq m} a_{i_k} > \bar{b}$ ,
  lo que forma el siguiente conjunto cover

```

$C = U \cup \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$.
 # Se forma el conjunto de incomparables
 Sea C' la colección de incomparables tal que $C' \subseteq C$.
 Además C' cumple con la definición de cover inducido.
 $CI \leftarrow C'$
 # Se analiza la condición de minimalidad de CI .
 # Se organiza CI en orden no creciente de fraccionalidad
 $i_k < i_{k+1}$ con $k = 1, \dots, |CI| - 1$ tal que $x_{i_k}^* \geq x_{i_{k+1}}^*$.
 # Se verifica y rectifica condición de minimalidad
 # (definición 4.3.3) sobre conjunto CI .
 Si $\sum_{j \in T(CI \setminus \{i_k\})} a_j \leq b$ para todo i_k entonces $CIM \leftarrow CI$.
 Si $\sum_{j \in T(CI \setminus \{i_k\})} a_j > b$ para uno o más i_k entonces
 $CIM \leftarrow CI \setminus \cup_{k=1}^m \{i_k\}$. Con índice $k = 1, \dots, m$ y $m \leq |CI|$ que
 corresponde a las variables que no cumplen minimalidad.
 # Se emite desigualdad CIM .
 $\sum_{j \in CIM} x_j \leq |CIM| - 1$

Se hace notar que esta heurística incorpora la cantidad de violación bajo el criterio de secuencia no creciente de la fraccionalidad de x_j^* con $j \in F$ durante la construcción del conjunto cover y en la rectificación de la minimalidad del conjunto cover inducido minimal.

En las figuras 6.5 y 6.9 se puede observar la efectividad del corte formado solo por la desigualdad de CIM emitida por $H1$, para mejorar las formulaciones relajadas de un conjunto cuantioso de modelos de $PCKPs$.

4.7.2. Heurística $H2$

La heurística $H2$ también se basa en la aplicación del procedimiento "coefficient independent cover generation" (subsección 4.7.1) para generar una desigualdad cover y modificar ésta en una desigualdad cover inducido minimal. La descripción de esta heurística es prácticamente similar a la heurística $H1$, excepto que la verificación y rectificación de la minimalidad del cover inducido sigue un criterio de orden de fraccionalidad creciente.

Se muestra a continuación el pseudocódigo de $H2$. Debido a la semejanza entre la heurística $H1$ y $H2$, solo se presenta el segmento del pseudocódigo que las hace diferentes.

Se organiza CI en orden creciente de fraccionalidad
 $i_k < i_{k+1}$ con $k = 1, \dots, |CI| - 1$ tal que $x_{i_{k+1}}^* \geq x_{i_k}^*$.

```

# Se verifica y rectifica condición de minimalidad
# (definición 4.3.3) sobre conjunto  $CI$ .
Si  $\sum_{j \in T(CI \setminus \{i_k\})} a_j \leq b$  para todo  $i_k$  entonces  $CIM \leftarrow CI$ .
Si  $\sum_{j \in T(CI \setminus \{i_k\})} a_j > b$  para uno o más  $i_k$  entonces
 $CIM \leftarrow CI \setminus \cup_{k=1}^m \{i_k\}$ . Con índice  $k = 1, \dots, m$  y  $m \leq |CI|$  que
corresponde a las variables que no cumplen minimalidad.
# Se emite desigualdad  $CIM$ .

$$\sum_{j \in CIM} x_j \leq |CIM| - 1$$


```

En los gráficos 6.6 y 6.10 se exhibe el desempeño de la heurística $H2$ como corte, sobre la misma colección de instancias que se usó para para la heurística $H1$. Se destaca que en promedio, el desempeño de $H1$ es mejor que el de $H2$.

4.7.3. Heurística $H3$

La heurística $H3$ busca la formación de una desigualdad de CIM con un contenido de violación mayor que las heurísticas $H1$ y $H2$. En $H1$ y $H2$ se considera a la fraccionalidad de las variables de decisión y la secuencia en que se seleccionan estas variables para la construcción del CIM . En cambio, en la heurística $H3$ se incorporan los criterios del efecto conjunto entre la fraccionalidad de cada variable y el peso del cono invertido inducido por ésta (ver definición de peso en 5.4.3); y la cuantificación del aporte en la cantidad de violación de cada variable como factores preponderantes en la selección de las variables que van a integrar el CIM .

La figura 4.5 se presenta para facilitar la explicación de $H3$. En esta figura se muestra un esquema general de cómo se distribuye una solución LP sobre el grafo inducido por las precedencias de la formulación $PCKP$.

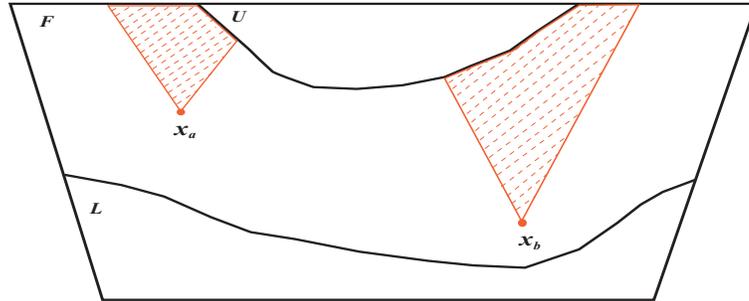


Figura 4.5: La figura muestra un grafo generalizado de las precedencias de una formulación $PCKP$. Se presenta una solución LP segmentada en tres conjuntos definidos en la heurística $H1$ (4.7.1). Se ilustran dos soluciones fraccionarias tal que: $x_a \geq x_b$ con $a, b \in F$; y sus respectivos conos invertidos tal que sus pesos se ordenan en la siguiente relación: $W(T(a)) \leq W(T(b))$ (ver definición de conjunto $T(i)$ con $i \in F$ en cuadro 4.1).

El efecto conjunto entre una variable y el peso del cono asociado a ésta se expresa por: $(x_i \cdot W(T(i)))$ con $i \in F$. Al observar el esquema del grafo dirigido de la figura 4.5, no es claro cuál es la relación de orden entre las dos variables multiplicadas por sus pesos de conos invertidos respectivos, es decir:

$$(x_a \cdot W(T(a))) \leq (x_b \cdot W(T(b))) . \quad (4.11)$$

Este comportamiento se aprovecha para seleccionar las variables que van a componer el *CIM* respecto de la manera que se hizo en las heurísticas *H1* y *H2*. Por consiguiente, *H3* resuelve de manera conjunta la siguiente función

$$f(x_i, \alpha_1, \alpha_2, \bar{b}_{residual}) = [x_i]^{\alpha_1} \cdot \left[\frac{W(T(i))}{\bar{b}_{residual}} \right]^{\alpha_2} \quad i \in F, \quad (4.12)$$

en que los parámetros α_1 y α_2 pertenecen al intervalo $[0, 1]$. Luego *H3* evalúa de forma combinada: el peso efectivo del cono invertido asociado a x_i , la capacidad residual del knapsack, los parámetros (α_1, α_2) que representan la importancia de cada componente, y el aporte a la cantidad de violación de cada variable x_i en la formación de un *CIM*; que luego de ser robustecido por alguna metodología de lifting se logre refinar la formulación relajada del *PCKP*.

Para computar el monto de violación de una variable y que trabaje con la función 4.12 se utiliza la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in D} x_i &> |D| - 1 & \phi \notin D \subseteq F \text{ y } F = \{j \in N : 0 < x_j < 1\} \\ \sum_{i \in D} x_i &> \sum_{i \in D} 1 - 1 \\ \sum_{i \in D} (x_i - 1) &> -1 \\ 0 < 1 + \sum_{i \in D} (x_i - 1) \end{aligned} \quad (4.13)$$

La desigualdad 4.13 permite seleccionar aquella variable fraccionaria que contribuya con un mayor monto de violación. Si se observa el término $\sum_{i \in D} (x_i - 1)$ conviene que cada componente $(x_i - 1)$ sea lo más pequeña posible, lo cual se puede alcanzar cuando la variable fraccionaria x_i sea cercana a uno.

El diseño de esta heurística se focalizó en los siguientes aspectos para escoger las variables que van a integrar un *CIM*:

1. Las variables seleccionadas deberán tener un grado de fraccionalidad lo más grande posible. La idea es dar mayor énfasis a la componente $(x_i - 1)$ de la desigualdad 4.13 respecto del mayor contenido de violación.

2. Se debe cuantificar el monto de violación disponible dado por $1 - \sum_{i \in D} (1 - x_i)$. Este factor da cuenta de la cantidad de violación que todavía no ha sido cubierta por alguna variable fraccionaria que puede integrar el cover inducido minimal.
3. Cada cono superior $T(i)$ con $i \in F$ se forma con variables que tienen valor fraccionario (ver figura 4.5).
4. Se debe cuantificar la capacidad residual a partir del conjunto $D \subseteq F$ (ver desigualdad 4.13), el cual es en donde se almacenan los índices de las variables de decisión que van a ser parte del *CIM*. La capacidad residual se expresa por la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \bar{b}_{residual} &= b - \sum_{j \in U} a_j & U &= \{j \in N : x_j = 1\} \\ \bar{b}_{residual} &= \bar{b}_{residual} - \sum_{i \in D} \sum_{j \in T(i)} a_j & T(n) \cap T(m) &= \phi \quad \forall n, m \in D. \end{aligned}$$

5. La variable x_i con $i \in F$ formará parte del *CIM* si $\frac{W(T(i))}{\bar{b}_{residual}} \leq 1$.
6. Durante el proceso de selección, si alguna variable x_i con $i \in F$ computa $\frac{W(T(i))}{\bar{b}_{residual}} > 1$, el proceso de búsqueda se detiene y se emite la desigualdad *CIM*.
7. Cuando se busca una variable x_i para integrar el cover inducido minimal para compararla con el peso del cono asociado a ésta, se debe normalizar su peso $W(T(i))$ respecto de la capacidad residual \bar{b} .
8. La relación que vincula los parámetros α_1 y α_2 ; y la función 4.12 para seleccionar las variables que van a integrar el *CIM*, se expresa como sigue:

$$\begin{aligned} h(\alpha_1, \alpha_2, x_i, \bar{b}_{residual}) &= \alpha_1 \cdot \log(x_i) + \alpha_2 \cdot \lg\left(\frac{W(T(i))}{\bar{b}_{residual}}\right) \\ \alpha_1 \text{ y } \alpha_2 &\in [0, 1] \end{aligned} \tag{4.14}$$

La determinación de la configuración óptima de los parámetros $(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2)$ en la función 4.14 se infiere por un proceso de sensibilización sobre ambos coeficientes. En la sección 6.5 se explica una heurística para computar la mejor configuración de estos parámetros que permiten emitir, en términos esperados, un *CIM* con un alto contenido de violación.

Se presenta a continuación un pseudocódigo de *H3* que integran los factores antes mencionados :

```
# Sea  $j = 1, \dots, N$  y  $N \subseteq \mathbb{Z}^+$ .
# Sea  $G = G(V(N), A(N))$ .
```

```

# Se forman conjuntos a partir de una solución LP.
L = {j ∈ N : x_j^* = 0}, U = {j ∈ N : x_j^* = 1} y F = {j ∈ N : 0 < x_j^* < 1}.
V_F = F, conjunto de nodos.
A_F = {(i, j) ∈ A(N) : i, j ∈ V_F}, conjunto de arcos.
G_F = G_F(V(F), A(F)), grafo dirigido inducido por F.
# Se calcula la primera corrección de la capacidad b.
b_bar_residual = b - ∑_{j ∈ U} a_j con b y a ∈ ℝ^+.
# Se forma cover C como en sección 3.3.
# sl : cantidad de violación disponible.
sl = 1, nfrac = |V_F|.
# Selección de elementos para ser ingresados en el cover.
while [( b_bar_residual > 0 ) && nfrac ] {

    early = 0
    # Selección de variables x_i^* que que va a integrar
    # el CI.
    foreach k ∈ V_F {

        if (( (1 - x_i^*) < sl ) && ( W(T(x_i^*)) > b_bar_residual ) {
            maximo = x_i^*. indmax = i. early = 1.
        }

        # Condición relajada de selección.
        h = α_1 · log[x_i^*] + α_2 · log [ W(T(x_i^*)) / b_bar_residual ].
        if ( early == 0 ) && ( maximo < h ){
            maximo = x_i^*. indmax = i.
        }

    }

    # Se actualiza U y los parámetros sl, nfrac y b_bar_residual.
    U = U ∪ T(indmax), b_bar_residual = b_bar_residual - W(T(indmax))
    nfrac = nfrac - |T(indmax)|, sl = sl - (1 - x_{indmax}^*).
    # Se actualizan los siguientes conjuntos
    V_F = V_F \ T(indmax), A_F = {(i, j) ∈ A : i, j ∈ V_F} y G_F = G_F(V_F, A_F)

} # fin ciclo while

# Se forma conjunto de incomparables
Conjunto U modificado forma un cover. Se determina
C' colección de incomparables tal que C' ⊆ U.
Conjunto C' cumple con la definición de cover inducido.
CI ← C'

# Se verifica y rectifica minimalidad de CI.
# Se emite desigualdad CIM.
∑_{j ∈ CIM} x_j ≤ |CIM| - 1

```

La heurística $H3$ es más restrictiva en la selección de cuales variables van a integrar el CIM , debido a la combinación conjunto que se exhibe en la función 4.14. Producto de este efecto combinado, no siempre ocurre que todas las variables que componen el cover inducido cuenten con un grado de fraccionalidad cercano a uno ni tampoco que el peso del cono invertido asociado a esta variable sea el más grande, ya que ambos factores dependen de los parámetros α_1 y α_2 . Del mismo modo, estos coeficientes dependen de las variables de decisión y del peso del cono invertido asociado a estas variables, para lograr un mayor incremento en el contenido de violación del CIM .

Los gráficos 6.7 y 6.11 muestran el desempeño de $H3$ como corte sobre el mismo conjunto de instancias usadas en $H1$ y $H2$. Se observó que esta heurística presentó en general mucho mejor rendimiento en la mejora de las formulaciones relajadas que lo que hicieron las heurísticas $H1$ y $H2$.

4.7.4. Heurística $H4$

A la heurística $H4$ se le pide que emita un cover inducido minimal con un contenido de violación mayor que lo que aportan las heurísticas $H1$ y $H2$. Sin embargo, al igual que en la $H3$ no siempre se obtendrá un CIM con un contenido de violación mayor que los que emiten $H1$ y $H2$.

La heurística $H4$ selecciona las variables de un modo distinto a como lo hace la heurística $H3$. $H4$ escoge aquellas variables que hacen la mayor contribución neta a la violación del CIM . La evaluación del aporte neto se lleva a cabo al computar la cantidad de violación de una variable que podría pertenece a un conjunto hoja (definición en cuadro 4.2) más el monto de violación de una variable que podría pertenece a un conjunto cohoja (definición en cuadro 4.2), es decir, se evalúa en términos esperados la contribución a la violación de cada variable x_i con $i \in F$ que podría estar en un conjunto hoja y el aporte de los predecesores inmediatos a esta variable que podrían estar en un conjunto cohoja (F definido en la desigualdad 4.13).

El sentido de cuantificación de la violación efectiva se infiere de una relación calculada de una desigualdad similar a la descripción de ζ (ecuación 3.3) pero que integra el efecto de las restricciones de precedencia del $PCKP$. De la desigualdad 4.2 se obtiene una desigualdad con las ideas antes mencionadas y que se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in D} x_i - \sum_{j \in T(D)} \delta_j x_j &\leq |D| - 1 - \sum_{j \in T(D)} \delta_j \quad \phi \notin D \subseteq F \\ \sum_{i \in D} (x_i - 1) + \sum_{j \in T(D)} \delta_j \cdot (1 - x_j) &\leq -1 \end{aligned} \quad (4.15)$$

En la desigualdad 4.15 se cambian los conjuntos D y $T(D)$ por una representación de un conjunto hojas, cohojas y la etapa k de la operación de lifting vista en la subsección 4.5.1;

$$\sum_{i \in L(H_k)} (x_i - 1) + \sum_{j \in M(H_k)} \delta_j \cdot (1 - x_j) \leq -1, \quad k = 1, \dots, n \quad (4.16)$$

Si la relación 4.16 se expresa en términos de una desigualdad inadmisibles se tiene:

$$\sum_{i \in L(H_k)} (x_i - 1) + \sum_{j \in M(H_k)} \delta_j \cdot (1 - x_j) > -1, \quad k = 1, \dots, n \quad (4.17)$$

El límite n en 4.17 corresponden a la cantidad de operaciones de contracción (sección 4.4) que se realizan cuando se aplica la metodología de lifting de Park K. y Park S. [30]. Esta expresión es la clave en la heurística H_4 para seleccionar las variables que van a integrar el CIM , ya que H_4 evalúa la inadmisibilidad neta de cada x_i con $i \in F$ con la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \nu_{ij} = (x_i - 1) + (1 - x_j) \quad & i \in L(H_k) \quad j \in M(H_k) \\ & L(H_k) \subseteq F \quad M(H_k) \subseteq F \end{aligned} \quad (4.18)$$

Se hace notar que en la expresión 4.18 no fue considerado el efecto del coeficiente de lifting δ_j de 4.17 en la selección de las variables que van contribuir en la inadmisibilidad neta del CIM . A continuación, se ilustra un ejemplo del proceso de selección de variables en base a la figura 4.6, para comprender la manera en que opera esta heurística .

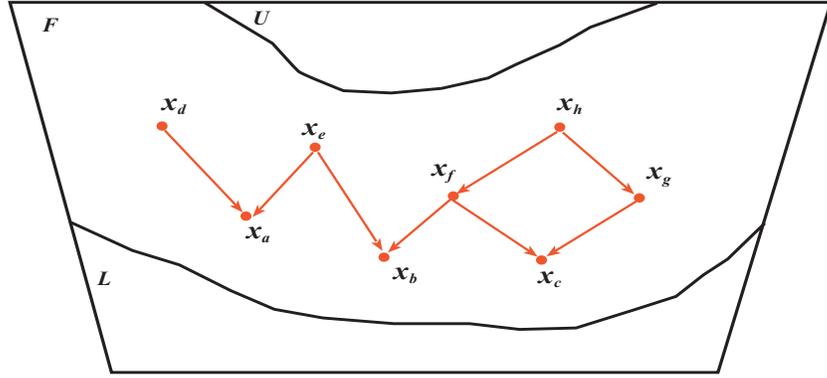


Figura 4.6: La figura muestra un esquema del grafo de precedencias que representa al *PCKP*. Se exhibe una solución *LP* segmentada en tres conjuntos: *U*, *F* y *L* definidos en la heurística *H1* (4.7.1). Se muestran 8 soluciones fraccionarias en que los subíndices: a, b, c, d, e, f, g y h pertenecen a *F*. Las flechas indican los patrones de precedencias entre las variables de decisión.

Se computan a continuación los montos de violación de cada variable respecto de la figura 4.6:

$$\begin{aligned}
 \nu_{ad} &= (x_a - 1) + (1 - x_d) & \nu_{cf} &= (x_c - 1) + (1 - x_f) & \nu_d &= (x_d - 1) \\
 \nu_{ae} &= (x_a - 1) + (1 - x_e) & \nu_{cg} &= (x_c - 1) + (1 - x_g) & \nu_e &= (x_e - 1) \\
 \nu_{be} &= (x_b - 1) + (1 - x_e) & \nu_{fh} &= (x_f - 1) + (1 - x_h) & \nu_h &= (x_h - 1) \\
 \nu_{bf} &= (x_b - 1) + (1 - x_f) & \nu_{gh} &= (x_g - 1) + (1 - x_h) & &
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Computado cada ν_{ij} se procede a escoger aquel monto $\nu_{lk} = \max \{\nu_{ij}\}$ con $i, j = a, \dots, h$. Determinado el ν_{lk} máximo se selecciona x_l para integrar el *CIM*. Además, se debe corregir el conjunto $F = F \setminus T(l)$ (definición de $T(l)$ en cuadro 4.1) para seleccionar otra variable que pueda pertenecer al *CIM*. Esta corrección induce sobre el esquema del grafo dirigido de la figura 4.6 un grafo residual. Con el grafo residual se repite el procedimiento de búsqueda hasta que no queden variables por seleccionar.

Se observa que cada término $(x_i - 1)$ con $i \in L(H_k)$ de 4.17 conviene que sea lo más pequeño posible, lo cual se puede alcanzar cuando $x_i \rightarrow 1$. Por otro parte, cada término $(1 - x_j)$ con $j \in L(H_k)$ de 4.17 conviene que sea lo más grande posible lo que se puede lograr cuando $x_j \rightarrow 0$. Sin embargo el resultado conjunto de los dos términos en (4.18) queda subordinado a la relación de precedencia que existe entre ambas variables, es decir, el máximo aporte a la violación ν_{lk} no siempre estaría determinado por los valores extremos que podría alcanzar cada componente por separado, si no que por alguna combinación intermedia entre: x_i y x_j tal que ν_{lk} se lo más grande posible.

Se presenta a continuación un pseudocódigo de la heurística H_4 :

```

# Sea  $j = 1, \dots, N$  y  $N \subseteq \mathbb{Z}^+$ .
# Sea  $G = G(V(N), A(N))$  (sección 4.2).
# Se forman los siguientes conjuntos a partir de una solución LP.
  Son los mismos conjuntos definidos que en #3:  $L, U,$ 
   $F, V_F, A_F$  y  $G_F$ .
# Se calcula la primera corrección de la capacidad  $b$ .
   $b_U = \sum_{j \in U} a_j$  con  $a_j \in \mathbb{R}^+$ .
# Se determina conjunto  $C$  de incomparables
  Sea  $x_i$  con  $i \in C$  tal que  $C$  es incomparable.
# Determinar grafo dirigido inducido por conjunto  $C$ .
   $V(C) \subseteq V_F, A(C) \subseteq A_F$  y  $G_C = (V(C), A(C))$  tal que  $G_C \subseteq G_F$ .
# Sea arreglo  $B$  inicializado con 0.0
# para todo  $i \in T(C)$  y se inicializa  $D$ 
   $B(i) = 0.0$  para todo  $i \in T(C)$  y  $D = \phi$ 
# Se inicia selección de variables  $x_i$ .
  indicevar_val = 0.0
while  $b_U \leq b$  {

  # definición de variable auxiliare
  aporte = Cota real muy chica y negativa
  #
  foreach  $i \in T(C)$  {

    #definición de variables auxiliares
    aux0 = Cota Real muy grande y positiva.
    aux2 = 0.0.
    # Determinar cono superior asociado a variable  $x_i$ .
     $A = \phi, A = T(i)$ .
    # Se analiza cada nodo que pertenece a conjunto  $A$ .
    foreach  $j \in A$  {
      if ( $j \in C$ ) {# Se evalúa el aporte a la violación de
        aux1 +=  $B(j)$ . # la variable que puede estar en CI.
        nc++.
      }elseif ( $x_j < aux0$ ){
        aux0 =  $x_j$ . # Se evalúa aporte a la violación
        inter0 = 1. # de las variables que puede ser lifteada
      }else{
        # aporte efectivo del peso del cono
        aux2 +=  $a_j$ . # superior de variable  $x_j$ 
      }
    }
  } # fin loop foreach sobre conjunto A

```

```

# Se analiza el término anticipado de la selección
# de variables para el CIM
if(( $b_U + \text{aux2}$ ) >  $b$  && ( $\text{aux3} + (x_i - 1) > -1$ )){
    if  $\text{indicevar\_val} > -x_i$  {
         $\text{indicevar} = i$ .  $\text{indicevar\_val} = -x_i$ .
        Se detiene selección de variables.
    }
}
# Se actualiza el monto del aporte a la violación
if(nc){
     $\text{aux4} = (x_i - 1) - \text{aux1}$ .
}elseif (inter0){
     $\text{aux4} = (x_i - 1) + (1 - \text{aux0})$ .
}else {
     $\text{aux4} = (x_i - 1)$ .
}
# Se almacena la variable que ingresa al CI.
if  $\text{aux4} > \text{aporte}$  {
     $\text{aporte} = \text{aux4}$ .
     $\text{indicevar} = i$ .
}
}# fin loop foreach sobre cono superior  $T(C)$ 
# Se determina  $T(\text{indicevar})$  efectivo
 $T(\text{indicevar}) = T(C) \setminus [T(C \setminus \{\text{indicevar}\})]$ 
# Se actualizan conjuntos y parámetros
 $V(C) = V(C) \setminus T(\text{indicevar})$ ,  $A(C) = \{(i, j) \in A(N) : i, j \in V(C)\}$ ,
 $G_C = G_C(V(C), A(C))$ ,  $B(\text{indicevar}) = \text{aporte}$ ,
 $D = D \cup \{\text{indicevar}\}$ ,  $b_U = b_U + \sum_{j \in T(\text{indicevar})} a_j$ ,
 $\text{aux3}+ = (x_{\text{indicevar}} - 1)$ 
}# fin loop while de capacidad
# Se forma nuevo conjunto de incomparables
Conjunto  $D \subseteq C$  entonces  $D$  es incomparable.
# Se comprueba que  $D$  cumpla definición de cover inducido.
 $\sum_{j \in T(D)} a_j > b$  luego  $CI = D$ .
# Se emite desigualdad CIM.
 $\sum_{j \in CIM} x_j \leq |CIM| - 1$ 

```

En los gráficos 6.8 y 6.12 se muestra el rendimiento de la heurística H_4 como corte en la refinación de las formulaciones relajadas usadas con las heurísticas H_1 , H_2 y H_3 .

Se observó que H_4 exhibió un rendimiento general más efectivo que las heurísticas H_1 y H_2 . Sin embargo la heurística H_4 presentó un desempeño levemente menor que la heurística H_3 .

Capítulo 5

Lifting Aproximado sobre una Formulación *PCKP*

5.1. Introducción

Este capítulo se orienta en la adaptación y extensión de una metodología aproximada de lifting desarrollada para una formulación *KP* y aplicada para un modelo *PCKP*. La primera etapa de la teoría de separación de covers, ya fue vista en el capítulo 4 y no se trata en este capítulo. Luego, se usa cualquiera de las cuatro heurísticas (*H1*, *H2*, *H3* o *H4*) de la sección 4.7, como inicio para el proceso de fortalecimiento de la desigualdad de *CIM*.

En la teoría de separación de covers, la metodología de lifting se aplica comúnmente de forma secuencial, es decir, se calcula el coeficiente de lifting de una variable, a continuación se calcula un segundo coeficiente de lifting de una segunda variable, hasta que no queden más variables para obtener sus respectivos coeficientes. Este procedimiento tiende a ser poco eficiente sobre un volumen grande de variables, ya que por cada variable que se va a liftear, se debe solucionar un problema de optimización para computar cada coeficiente (Gu [40]).

Zonghao Gu [40] desarrolló una interesante metodología de lifting denominada "Sequence Independent Lifting" (en adelante *SIL*), que consiste en resolver un solo problema de optimización para determinar todos los coeficientes de lifting sin importar el orden en que son lifteadas las variables. El problema de optimización se expresa por medio de una función aproximada de lifting, que se construye con la capacidad de un knapsack y de los coeficientes $a_i \in \mathbb{R}^+$ con $i \in C$ que integran un cover minimal C . Formalmente, la idea se expresa de la siguiente manera: se define $N = \{1, 2, \dots, n\}$ como el conjunto de índices del knapsack, con $N \subseteq \mathbb{Z}^+$. Sea $C \subseteq N$ conjunto índice de un cover. Se presenta la siguiente relación:

$$g(a_i) = \gamma_i, \quad i \in N \setminus C.$$

en que $g(a_i)$ corresponde a la función aproximada de lifting evaluada en el coeficiente a_i y γ_i corresponde al coeficiente de lifting asociado a la variable lifteada x_i con $i \in N \setminus C$.

5.2. Descripción del Sequence Independent Lifting (*SIL*)

Esta sección provee un marco teórico asociado a la relación que existe entre la metodología aproximada de lifting y el *SIL*. En base a lo visto en la sección 3.4 se estudia en este capítulo algunas propiedades que existe entre las funciones $h_i(z)$ y $f_i(z)$ (problemas de optimización 3.11 y 3.12); para así comprender mejor la correspondencia mencionada.

Definición 5.2.1. Sea una función $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ con $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}$. Se dice que f es una función superaditiva en un conjunto Z (Gu [40]) si :

- $f(z)$ es acotada para todo $z \in Z$.
- $f(z_1) + f(z_2) \leq f(z_1 + z_2)$ para todo z_1, z_2 y $z_1 + z_2 \in Z$.

Se hace notar que la descripción de un *KP* cumple con la definición de superaditividad debido a su naturaleza lineal. Esta característica se usa de forma usual en la determinación de desigualdades válidas para robustecer el modelo *KP* (Wolsey y Nemhauser,[38]).

Proposición 5.2.2. La desigualdad 3.10 es válida en X^i para todo α_j con $j \in C_i$ definidos en la sección 3.4, entonces $h_i(z) \leq f_i(z) \quad \forall z \in Z$ (Gu [40]).

Prueba : Esta proposición se demuestra al reemplazar las definiciones de $h_i(z)$ y $f_i(z)$ (formulaciones 3.11 y 3.12) en la desigualdad 3.10.

Proposición 5.2.3. La desigualdad $f_i(0) \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, t$, con índice t definido en sección 3.4 (Gu [40]).

Prueba : La prueba de esta propiedad es una consecuencia directa de la formulación 3.12. Al evaluar 0 en la función $f_i(z)$, siempre dará que es mayor que 0.

Proposición 5.2.4. Las funciones $f_i(z)$ para todo $i = 1, \dots, t$ se ordenan de forma no decreciente $\forall z \in Z$, (Gu [40]) es decir :

$$f_1(z) \geq f_2(z) \geq \dots \geq f_t(z)$$

Prueba : Se muestra esta propiedad al aplicar de forma sucesiva la definición de $f_i(z)$ (formulación 3.12).

Proposición 5.2.5. Sea x^* una solución óptima de la formulación 3.12 y sea $u_l^* = \sum_{l \leq k < i} \sum_{j \in C_k} a_j x_j^*$, entonces se cumple la siguiente relación (Gu [40]):

$$f_i(z) \geq f_l(z + u_l^*) - f_l(u_l^*) \quad \text{para } l = 1, \dots, i-1$$

Prueba : Esta relación se prueba en dos etapas:

- Se demuestra primero que $f_i(u_l^*) \geq \sum_{l \leq k < i} \sum_{j \in C_k} \alpha_j x_j^*$. La prueba se inicia a partir de la inecuación 3.12

$$\begin{aligned} 0 &\leq f_i(0) \\ &\leq \min \alpha_0 - \sum_{0 \leq k < i} \sum_{j \in C_k} \alpha_j x_j \\ \text{s.t. } &\sum_{0 \leq k < i} \sum_{j \in C_k} a_j x_j \leq b \quad z = 0 \\ &\sum_{j \in C_k} w_j x_j \leq r_k \quad k = 0, \dots, i-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \min \alpha_0 - \sum_{0 \leq k < l} \sum_{j \in C_k} \alpha_j x_j - \sum_{l \leq k < i} \sum_{j \in C_k} \alpha_j x_j^* \\ \text{s.t. } &\sum_{0 \leq k < l} \sum_{j \in C_k} a_j x_j + \sum_{l \leq k < i} \sum_{j \in C_k} a_j x_j^* \leq b \quad z = 0 \\ &\sum_{j \in C_k} w_j x_j \leq r_k \quad k = 0, \dots, i-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{l \leq k < i} \sum_{j \in C_k} \alpha_j x_j^* &\leq \min \alpha_0 - \sum_{0 \leq k < l} \sum_{j \in C_k} \alpha_j x_j \\ \text{s.t. } &\sum_{0 \leq k < l} \sum_{j \in C_k} a_j x_j + u_l^* \leq b \quad u_l^* = \sum_{l \leq k < i} \sum_{j \in C_k} a_j x_j^* \\ &\sum_{j \in C_k} w_j x_j \leq r_k \quad k = 0, \dots, i-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{l \leq k < i} \sum_{j \in C_k} \alpha_j x_j^* &\leq \min \alpha_0 - \sum_{0 \leq k < l} \sum_{j \in C_k} \alpha_j x_j \\ \text{s.t. } &\sum_{0 \leq k < i} \sum_{j \in C_k} a_j x_j \leq b - u_l^* \quad z = 0 \\ &\sum_{j \in C_k} w_j x_j \leq r_k \quad k = 0, \dots, i-1 \end{aligned}$$

luego, el lado derecho de la última desigualdad corresponde a la definición de $f_l(u_l^*)$, entonces:

$$\sum_{l \leq k < i} \sum_{j \in C_k} \alpha_j x_j^* \leq f_l(u_l^*)$$

- En la segunda etapa se realiza la prueba definitiva utilizando el resultado anterior:

$$\begin{aligned}
f_i(z) &= \min \alpha_0 - \sum_{0 \leq k < i} \sum_{j \in C_k} \alpha_j x_j \\
s.t \quad &\sum_{0 \leq k < i} \sum_{j \in C_k} a_j x_j \leq b - z \quad z = 0 \\
&\sum_{j \in C_k} w_j x_j \leq r_k \quad k = 0, \dots, i-1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_i(z) &= \min \alpha_0 - \sum_{0 \leq k < l} \sum_{j \in C_k} \alpha_j x_j - \sum_{l \leq k < i} \sum_{j \in C_k} \alpha_j x_j^* \\
s.t \quad &\sum_{0 \leq k < l} \sum_{j \in C_k} a_j x_j + \sum_{l \leq k < i} \sum_{j \in C_k} a_j x_j^* \leq b - z \\
&\sum_{j \in C_k} w_j x_j \leq r_k \quad k = 0, \dots, i-1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_i(z) &= \min \alpha_0 - \sum_{0 \leq k < l} \sum_{j \in C_k} \alpha_j x_j - \sum_{l \leq k < i} \sum_{j \in C_k} \alpha_j x_j^* \\
s.t \quad &\sum_{0 \leq k < i} \sum_{j \in C_k} a_j x_j \leq b - (z + u_l^*) \\
&\sum_{j \in C_k} w_j x_j \leq r_k \quad k = 0, \dots, i-1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_i(z) &= f_l(z + u_l^*) - \sum_{l \leq k < i} \sum_{j \in C_k} \alpha_j x_j^* \\
f_i(z) &\geq f_l(z + u_l^*) - f_l(u_l^*)
\end{aligned}$$

Por consiguiente la proposición queda probada.

5.2.1. Relación del *SIL* y la Función Superaditiva

En esta subsección se desarrolla la relación entre el concepto de *SIL* y la función superaditiva. Para entender el vínculo se proporciona la siguiente definición

Definición 5.2.6. La función de lifting $f(z)$ respecto de la desigualdad válida 3.6 para X^0 (3.5), se define como $f(z) = f_1(z) \forall z \in Z$ (Gu [40]).

Se hace notar que $f(z)$ es independiente del orden en que se seleccionan las variables que van a ser lifteadas y de la colección de restricciones asociadas a los subconjuntos C_1, \dots, C_t . La afirmación dada es válida, ya que cada vez que se realiza la maximización de $h_i(z)$ (formulación 3.11) y la minimización de $f_i(z)$ (formulación 3.12) se efectúan en etapas sucesivas e independientes para cada $i = 1, \dots, t$. Además, todas las variables $x_j, j \in C_i$ e $i = 1, \dots, t$ se asume que son lifteadas de forma simultanea. Entonces, se puede plantear que $f(z) = f_i(z)$ para todo $z \in Z$ e $i = 2, \dots, t$. Por consiguiente, durante el proceso secuencial de lifting sobre las variables que pertenecen

a cada subconjunto $C_1, C_2, \dots, C_{t-1}, C_t$; se infieren los coeficientes de lifting de manera independiente respecto del orden del conjunto $\{C_1, \dots, C_t\}$ (Gu [40]). Lo anterior se expresa en la siguiente definición.

Definición 5.2.7. Si la función $f(z) = f_i(z)$ para todo $z \in Z$, $i = 2, \dots, t$ e independiente del proceso secuencial de lifting, se dice que el proceso de lifting es independiente del orden en que se realiza (Gu [40]).

Teorema 5.2.8. Sea una función $f(z)$ superaditiva en todo Z , entonces el proceso de lifting es independiente de la secuencia en que se realiza (Gu [40]).

Prueba : Sea $z \in Z$, y sea x^* una solución de 3.12 con $u^* = \sum_{j \in C_{i-1}} a_j x_j^*$. Según lo probado en la proposición 5.2.5:

$$f_i(z) \geq f_{i-1}(z + u^*) - f_{i-1}(u^*),$$

y por la propiedad de superaditividad de la función $f(z)$:

$$f_{i-1}(z + u^*) \geq f_{i-1}(z) + f_{i-1}(u^*),$$

resulta $f_i(z) \geq f_{i-1}(z)$. Por otra parte, con la propiedad 5.2.4 se tiene : $f_{i-1}(z) \geq f_i(z)$, entonces se obtiene:

$$f_i(z) = f_{i-1}(z)$$

Luego el teorema queda demostrado.

Se observa que el beneficio de contar con una función de lifting superaditiva, radica en que se incrementa la eficiencia computacional en el cálculo de todas las variables que se van a liftear. Sin embargo, Gu ([40]) demostró que la mayoría de las funciones de lifting no responden a la propiedad de superaditividad (teorema 5.2.8), no obstante a esta desventaja este mismo autor probó que se puede utilizar la característica de selección independiente del proceso de lifting, si se tiene un conjunto de funciones de lifting superaditivas válidas. A continuación se presenta una definición de esta clase de funciones.

Definición 5.2.9. Sea $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ con $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}$. Una función superaditiva $g(z)$ se le denomina función de lifting superaditiva válida para una función $f(z)$, si $g(z) \leq f(z)$ en $z \in Z$ (Gu [40]).

A esta clase de funciones $g(z)$, se les piden que cumplan con una serie de requisitos para que pueda sustituir a la función superaditiva $f(z)$. Gu [40] mostró que los requerimientos que deben cumplir cada $g(z)$ deben ser los siguientes:

Gu [40] dio las pruebas formales de estas cuatro condiciones y no se demuestran en esta tesis. Sin embargo, estos requisitos se utilizan para una mejor comprensión de la sección siguiente en contexto del modelo *PCKP*.

5.3. Función Aproximada de Lifting $g(z)$

Esta sección presenta el desarrollo que realizó Gu [40], para determinar la función de lifting válida que facilita la obtención de los coeficientes de lifting de un *KP*.

Sea X un conjunto de soluciones admisibles para el *KP* con variables de decisión binarias. La envoltura convexa $\text{conv}(X)$ se describe de la siguiente manera:

$$X = \left\{ x \in \{0, 1\}^{|N|} : \sum_{j \in N} a_j x_j \leq b \text{ y } a_j, b \in \mathbb{R}^+ \right\} \quad (5.1)$$

La descripción de N es el mismo conjunto de índices de la sección 3.3.

Sea un conjunto $C \subseteq N$ descrito como un cover minimal (sección 3.3), el cual se vuelve a presentar como desigualdad en esta sección:

$$\sum_{j \in C} x_j \leq |C| - 1, \quad (5.2)$$

La desigualdad 5.2 es válida para el polítopo 5.1, y define una faceta para la envoltura convexa $\text{conv}(X^0)$ descrita por:

$$X^0 = \left\{ x \in \{0, 1\}^{|C|} : \sum_{j \in C} a_j x_j \leq b \text{ y } a_j, b \in \mathbb{R}^+ \right\} \quad (5.3)$$

luego, $X^0 \subseteq X$ y $\text{conv}(X^0) \subseteq \text{conv}(X)$.

Un proceso de fortalecimiento de la desigualdad 5.2 se realiza con la desigualdad 3.15, la cual se muestra otra vez en este capítulo:

$$\sum_{j \in C} x_j + \sum_{j \in N \setminus C} \alpha_j x_j \leq |C| - 1, \quad (5.4)$$

La desigualdad 5.4 se interpreta como una desigualdad que representa a un proceso de lifting secuencial que se inicia con la desigualdad 5.2 y que luego se robustece de forma sucesiva con todas aquellas variables que pertenecen al conjunto $N \setminus C$.

En base a lo visto en la sección 3.4 se expresa la desigualdad 5.4 como la función de lifting $f(z)$ que se pretende determinar. El conjunto $N \setminus C$ se puede particionar en una colección de subconjuntos disjuntos tal que: $I = \{1, \dots, t\}$, $(N \setminus C) = \cup_{i \in I} C_i$, $C_j \cap C_k = \emptyset$ para todo $j, k \in I$ y cada $C_i = \{j_i\}$ con $j \in I$; y se aplica el proceso de lifting de manera secuencial sobre las variable x_j con el siguiente orden $j = 1, \dots, t$. Luego, la desigualdad 5.4 toma la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j \in C} x_j + \sum_{j \in N \setminus C} \alpha_j x_j \leq |C| - 1 \\
& \text{s.t.} \quad \sum_{j \in N} a_j x_j \leq b \\
& \sum_{j \in C} x_j + \alpha_{j_i} x_{j_i} + \sum_{1 \leq k < i} \alpha_{j_k} x_{j_k} \leq |C| - 1 \quad i = 1, \dots, t \\
& \text{s.t.} \quad \sum_{j \in C} a_j x_j + a_{j_i} x_{j_i} + \sum_{1 \leq k < i} a_{j_k} x_{j_k} \leq b \\
& \alpha_{j_i} x_{j_i} \leq |C| - 1 - \sum_{j \in C} x_j - \sum_{1 \leq k < i} \alpha_{j_k} x_{j_k} \quad i = 1, \dots, t \\
& \text{s.t.} \quad a_{j_i} x_{j_i} + \sum_{j \in C} a_j x_j + \sum_{1 \leq k < i} a_{j_k} x_{j_k} \leq b
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Para obtener el coeficiente de lifting α_{j_i} de la desigualdad 5.5 se procede a aplicar el procedimiento de Gu [40], que consiste en inferir el máximo valor que puede alcanzar este coeficiente. Para determinar lo anterior, se define la función $h_i(z)$ para $i = 1, \dots, t$ descrita por:

$$\begin{aligned}
h_i(z) &= \max \alpha_{j_i} x_{j_i} \\
& \text{s.t.} \quad a_{j_i} x_{j_i} = z \\
& \quad x_{j_i} \in \{0, 1\}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

en que $z \in Z$ con $Z = [0, b]$; y se define la función $f_i(z)$ con $i = 1, \dots, t$ y $j \in C \cup \{j_1, \dots, j_{t-1}\}$ descrita como (Gu [40]):

$$\begin{aligned}
f_i(z) &= \min |C| - 1 - \sum_{j \in C} x_j - \sum_{1 \leq k < i} \alpha_{j_k} x_{j_k} \\
& \text{s.t.} \quad \sum_{j \in C} a_j x_j + \sum_{1 \leq k < i} a_{j_k} x_{j_k} \leq b - z \\
& \quad x_j \in \{0, 1\}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

La restricción del problema 5.6 puede tomar los siguientes valores: si $x_{j_i} = 0$, $z = 0$; y si $x_{j_i} = 1$, $z = a_{j_i}$. Por consiguiente $h_i(0) = 0$ y $h_i(a_{j_i}) = \alpha_{j_i}$. Luego, para obtener una faceta inducida a partir del cover minimal 5.2 y que sea válida para 5.1, el

coeficiente de lifting α_{j_i} debe ser igual a $f_i(a_{j_i})$, para que alcance su máximo valor, es decir $h_i(z) = f_i(z)$ (Gu [40]).

Se procede a continuación a mostrar $f(z) = f_i(z)$ con $i = 1, \dots, t$ como una función de lifting: sea $Z = [0, b]$ y la función de lifting $f(z)$ expresada como:

$$\begin{aligned} f(z) &= |C| - 1 - \sum_{j \in C} x_j \\ \text{s.t. } &\sum_{j \in C} a_j x_j \leq b - z \\ &x_j \in \{0, 1\}, j \in C \end{aligned} \quad (5.8)$$

El problema 5.8 se puede reescribir en base a la siguiente notación. Sea el conjunto cover minimal C definido como $C = \{1, 2, \dots, r\}$, para que represente el orden de los coeficientes asociado a las variables de decisión, es decir: $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_r$. Se define el exceso λ respecto de la capacidad b como $\lambda = \sum_{j \in C} a_j - b$. Se definen los siguientes parámetros incrementales como: $\mu_0 = 0$, $\mu_i = \sum_{1 \leq h \leq i} a_h$ con $i = 1, \dots, r$.

Si los coeficientes a_i son ordenados de forma no creciente, es decir: $a_i \geq a_{i+1}$ con $i = 1, \dots, r - 1$, siempre hay una solución óptima x para $f(z)$ tal que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_r$. Se tiene entonces que 5.8 toma la siguiente expresión:

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq z \leq \mu_1 - \lambda \\ h & \text{si } \mu_h - \lambda \leq z \leq \mu_{h+1} - \lambda \quad h = 1, \dots, r - 1 \end{cases} \quad (5.9)$$

La función 5.9 representa a la función 5.8 por medio de una función escalón. Sin embargo $f(z)$, así definida, no es en general una función superaditiva en todo Z (Gu [40]). Para resolver este problema, Gu [40] propuso la siguiente función de lifting superaditiva válida $g(z)$ para reemplazar a $f(z)$:

$$g(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0 \\ h & \text{si } \mu_h - \lambda < z \leq \mu_{h+1} - \lambda \quad h = 0, \dots, r - 1 \\ h - \frac{(\mu_h - \lambda + \rho_h - z)}{\rho_1} & \text{si } \mu_h - \lambda < z \leq \mu_{h+1} - \lambda + \rho_h \quad h = 1, \dots, r - 1 \end{cases} \quad (5.10)$$

con $\rho_h = \max\{0, a_{h+1} - (a_1 - \lambda)\}$ para $h = 0, \dots, r - 1$. Se muestra en la figura 5.1 un esquema general de la función de lifting válida $g(z)$, en donde se hace notar que la cantidad de tramos pendientes y tramos mesetas variará según el número de elementos del conjunto cover C , de los coeficientes a_j con $j \in C$ y de la capacidad b del knapsack.

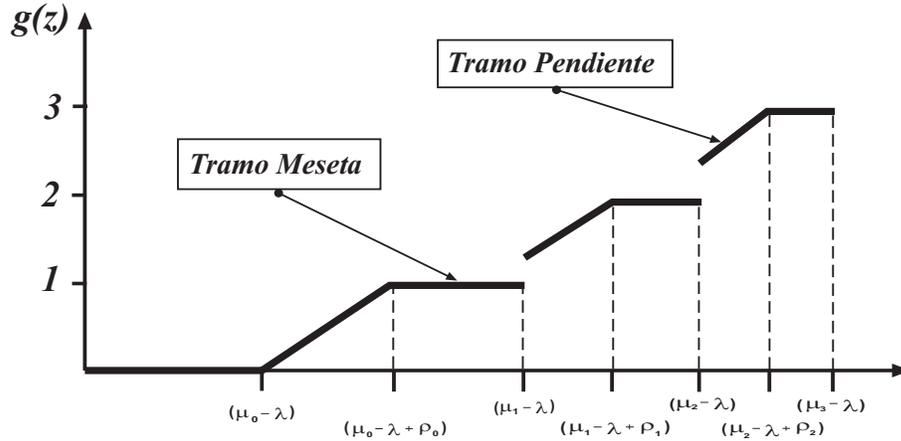


Figura 5.1: Esquema general de la forma que toma la función superaditiva válida de lifting $g(z)$ (Gu [40]).

Gu[40] demostró que $g(z)$ definida como en 5.10, cumple con todos los requisitos de ser una función de lifting superaditiva válida. El siguiente teorema contiene las ideas mencionadas.

Teorema 5.3.1. La función $g(z)$ (5.10) es una función de lifting superaditiva válida para la función $f(z)$ si $g(z)$ cumple los requisitos de dominancia y maximalidad en todo $z \in [0, b]$ (Gu [40]).

La prueba de este teorema no se presenta en esta tesis (ver prueba en Gu [40]), y solo se menciona que la función $g(z)$ es una "buena" función de lifting superaditiva válida en el sentido que cuenta con las características de dominancia y maximalidad. Luego la desigualdad 5.4 puede ser reescrita a partir de la ecuación 5.10, tomando la siguiente expresión:

$$\sum_{j \in C} x_j + \sum_{j \in N \setminus C} g(a_j) \cdot x_j \leq |C| - 1 \quad (5.11)$$

Por consiguiente, desigualdad 5.11 corresponde a una desigualdad válida para $\text{conv}(X)$ (ver ecuación 5.1). Según lo analizado por Gu [40], la desigualdad 5.11 no necesariamente define una faceta para 5.1, pero a partir de ella se pueden obtener coeficientes de lifting que no se obtendrían mediante un proceso de lifting secuencial.

5.4. Relajación del $PCKP$ a un KP

En esta sección se presentan los fundamentos para extender la característica de la función de lifting superaditiva válida $g(z)$ (5.10) sobre una descripción $PCKP$.

Sea X un conjunto de soluciones factibles para un $PCKP$ con variables de decisión binarias. La envoltura convexa $conv(X)$ se describe de la siguiente manera:

$$X = \left\{ x \in \{0, 1\}^{|N|} : \begin{array}{ll} \sum_{j \in N} a_j x_j \leq b, & a_j \text{ y } b \in \mathbb{R}^+, \\ x_i \geq x_j, & i \leq j, \\ e \text{ } i, j \in N \subseteq \mathbb{Z}^+ \end{array} \right\} \quad (5.12)$$

Plantear una función de lifting superaditiva válida para la descripción 5.12 está fuera de los objetivos de esta tesis. Como alternativa para el robustecimiento de un cover inducido minimal, se aprovecha el proceso de la construcción de la relajación del $PCKP$ a una KP para obtener los coeficientes de lifting con la desigualdad 5.11. La idea de la relajación se expresa en el cuadro 5.1:

Modelo $PCKP$ y la Relajación a una Formulación KP	
$\begin{array}{l} \max z_{PCKP} = \sum_{j \in N} c_j x_j \\ \text{s.t. } \sum_{j \in N} a_j x_j \leq b \\ x_i \geq x_j, \quad i \leq j, \quad i, j \in N \\ x \in \{0, 1\}^{ N } \\ a_j \text{ y } b \in \mathbb{R}^+ \\ c_j \in \mathbb{R} \end{array}$	$\begin{array}{l} \max z_{KP} = \sum_{j \in M} \bar{c}_j x_j \\ \text{s.t. } \sum_{j \in M} \bar{a}_j x_j \leq b \\ x \in \{0, 1\}^{ M } \\ \bar{a}_j \text{ y } b \in \mathbb{R}^+ \\ \bar{c}_j \in \mathbb{R} \end{array}$
(a): Formulación $PCKP$.	(b): Formulación KP.

Cuadro 5.1: Este cuadro muestra la idea que se busca aplicar sobre la formulación $PCKP$ para obtener una versión relajada en forma de un KP . El conjunto de índices agregados M debe cumplir con $\emptyset \subsetneq M \subseteq N$.

Para la realización de la relajación se deben plantear ciertos requisitos entre los coeficientes a_j y c_j de una formulación $PCKP$ y los coeficientes agregados \bar{a}_j y \bar{c}_j de la formulación del KP , tal que se preserve la admisibilidad de una solución entera en ambas formulaciones. En base a las definiciones y conceptos de teoría de conjuntos y grafos vistas en las secciones 4.2 y 4.3, se provee una colección de propiedades que establecen las condiciones que vinculan los parámetros originales y agregados.

El conjunto N y los parámetros a_j , c_j y b son idénticos a los que se definieron en la sección 4.1.

Definición 5.4.1. Se define un conjunto de índices de agregación M tal que $M \subseteq N$ ($|M| \leq |N|$).

La siguiente definición se asocia a un conjunto de subconjuntos propios.

Definición 5.4.2. Se define un conjunto $S_i \subseteq N$ con $i \in M$ tal que: $S_i \cap S_j = \phi$ para todo $i \neq j \in M$, y $\cup_{j \in M} S_j = N$.

La definición que se provee a continuación se relaciona con el peso de un conjunto respecto de los coeficientes a_j .

Definición 5.4.3. Se define el peso del conjunto S_i como: $W(S_i) = \sum_{j \in S_i} a_j$.

A partir de las definiciones dadas se observa que la colección de subconjunto S_i induce una partición propia sobre N , y a su vez cada subconjunto tiene su propio peso.

Se presenta una proposición que asocia el peso del subconjunto S_i con $i \in M$ y el peso del conjunto N .

Proposición 5.4.4. Sea el conjunto S_j definido en 5.4.3 se tiene entonces que $W(\cup_{j \in M} S_j) = W(N)$.

prueba: De las definiciones 5.4.2 y 5.4.3 se puede plantear que $W(\cup_{j \in M} S_j) = \sum_{j \in M} W(S_j)$, debido a que $S_i \cap S_j = \phi$ para todo $i \neq j \in M$. Luego $\sum_{j \in M} W(S_j) = \sum_{j \in M} \sum_{k \in S_j} a_k$ y como $\cup_{j \in M} S_j = N$ se tiene entonces que $\sum_{j \in M} \sum_{k \in S_j} a_k = \sum_{l \in N} a_l$. Por consiguiente $\sum_{l \in N} a_l = W(N)$.

La siguiente proposición presenta la prueba de la admisibilidad de una solución entera para las dos formulaciones del cuadro 5.1.

Proposición 5.4.5. Sea x una solución *BIP* admisible en la formulación *PCKP* (cuadro 5.1, (a)). Si se induce una partición propia en base al conjunto S_i definido en 5.4.2 sobre el grafo dirigido que representa al *PCKP*, se cumple entonces que la solución x también es admisible en la formulación *KP* (cuadro 5.1, (b)).

prueba: De la solución admisible *BIP* de una formulación *PCKP*, se pueden determinar dos subconjuntos:

$U = \{j \in N : x_j = 1\}$, con $U \subseteq N$ y $L = \{j \in N : x_j = 0\}$, con $L \subseteq N$. Se descarta el conjunto L y se utiliza el conjunto U para la prueba de la proposición.

Si se aplica una partición propia sobre el grafo dirigido $G(V(U), A(U))$ en base a la definición de $T(i)$ con $i \in U$ (definición en cuadro 4.1) por medio del siguiente pseudocódigo:

```

k = 1; M = φ
while  $j_k \in V(U)$ {

```

```

 $T_k(j_k) = \{j_k\} \cup R(j_k)$ 
 $V(U) = V(U) \setminus T_k(j_k)$ 
 $A(U) = \{(i, m) : i, m \in V(U)\}$ 
if  $V(U) \neq \phi$ 
     $M = M \cup \{j_k\}$ . k++. continue.
}else{
    stop
}
}

```

Por la construcción de $T_k(j_k)$, se cumple que $T_k(j_k) \cap T_{k+1}(j_{k+1}) = \phi$ y $k = 1, \dots, |M| - 1$ con M conjunto de índices que representa a la raíz j_k de cada $T_k(j_k)$. Luego se cumple que $\cup_{k \in M} T_k(j_k) = U$ y por la proposición 5.2.4 se cumple que $W(\cup_{k \in M} T_k(j_k)) = W(U)$. Si a cada coeficiente relajado \bar{a}_j de la formulación 5.1 (b) se le asocia el peso del cono invertido $T_k(j_k)$ con raíz j_k , se tiene entonces que $\bar{a}_j = W(T_k(j_k)) = \sum_{l \in T_k(j_k)} a_l$. Además a cada \bar{a}_j le corresponde una componente x_j del vector solución x . Luego se forma $\bar{a}_j x_j$, $j = 1, \dots, |M|$ y $M \subseteq U$; que corresponde a cada componente de la restricción de knapsack del KP del cuadro 5.1 (b). El mismo criterio y las mismas variables de decisión se aplica en cada coeficiente agregado \bar{c}_j con la diferencia de que $\bar{c}_j = W(T_k(j_k)) = \sum_{l \in T_k(j_k)} c_l$. Debido al proceso de construcción de la partición inducida sobre el grafo G se produce una colección de subconjuntos propios, con pesos propios, coeficientes agregados y variables de decisión únicas. Por consiguiente se reproduce el modelo matemático del KP en el cuadro 5.1 (b).

De este manera la proposición queda demostrada.

Las proposiciones 5.4.4 y 5.4.5 serán de gran utilidad en la siguiente sección, ya que permitirán justificar el proceso constructivo de la relajación en la obtención de la función de lifting $g(z)$ (5.11) y la obtención de los coeficientes de lifting.

5.5. Heurística de Relajación y Lifting

Esta heurística se basa en aprovechar el proceso constructivo de la relajación de un $PCKP$ a un KP , para determinar una función de lifting superaditiva válida $g(z)$ (función 5.10); la maximización de ésta y una colección de parámetros agregados que al ser evaluados en $g(z)$ se infieren los coeficientes de lifting.

Antes de explicar la heurística de relajación se ilustra en la sección siguiente la metodología que permite maximizar la función $g(z)$.

5.5.1. Maximización de la Función $g(z)$

La finalidad de maximizar el área bajo la curva de la función $g(z)$ se motiva por la necesidad de incrementar la eficiencia en la obtención de coeficientes de lifting lo más grande posible y de mejorar, además, la eficiencia en la obtención de una mayor cantidad de coeficientes de lifting que sean distintos de cero. Para lograr lo anterior se desarrolló en esta tesis, un estudio para determinar la manera de maximizar la integral del área bajo la curva de $g(z)$ como vía para alcanzar los objetivos propuestos. Al observar $g(z)$ en la figura 5.1 y su expresión algebraica 5.10 se puede apreciar que la aplicación de la maximización tradicional no presenta un gran beneficio para cumplir los objetivos sobre $g(z)$, ya que esta función no es continua en el intervalo $[0, b]$; y $\frac{\partial g(z)}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 g(z)}{\partial^2 z}$ son distintas en los puntos $\mu_{h+1} - \lambda$ y $\mu_{h+1} - \lambda + \rho_{h+1}$ (ver figura 5.1 y expresión 5.10). En vista de esta desventaja se requirió de un nuevo enfoque en la determinación de la maximización de la integral $g(z)$ y que se fundamenta en tres aspectos:

1. Disponer de la descripción poliedral del *PCKP*.
2. Disponer de una solución *LP* del *PCKP*.
3. Disponer de una heurística que emita un *CIM*.

Luego, el problema de la maximización de la función de lifting se formula en base a la siguiente pregunta: ¿Cuál es la mejor forma de inferir una colección de parámetros agregados del grafo dirigido $G(V(CIM), A(CIM))$ que maximicen el área bajo la curva de la función de lifting superaditiva válida $g(z)$?

Para dar respuesta a esta pregunta se resolvió a través de dos etapas sucesivas, que se explican a continuación:

1. Los elementos del *CIM* servirán para formar los índices de los parámetros agregados que se van a determinar. Por ejemplo, el conjunto $CIM = \{0, 1, 2, 3\}$ (asociado a los nodos de la figura 4.4) representará a los índices de los parámetros agregados. Además, al conjunto de índices se le denotará por $I_{CIM} = \{i \in CIM\}$ con $I_{CIM} \subseteq V(CIM)$.

2. Determinado el conjunto I_{CIM} , cabe preguntarse ¿de qué manera se asignan los coeficientes a_i con $i \in T(CIM)$ para formar los coeficientes agregados \bar{a}_i ? La respuesta puede ser provista en varias etapas:

- a) Cada parámetro agregado \bar{a}_i con $i \in I_{CIM}$ se computa en función del peso del subconjunto propio $A_i \subseteq T(CIM)$ con $i \in I_{CIM}$, tal que $\bar{a}_i = W(A_i)$.
- b) El número de subconjuntos A_i es igual a $|I_{CIM}|$ y a su vez el primer elemento que se asigna a cada A_i es el coeficiente a_i con $i \in CIM$. Por ejemplo, para el conjunto de índices $CIM = \{0, 1, 2, 3\}$ se tiene que: $A_0 = \{a_0\}$, $A_1 = \{a_1\}$, $A_2 = \{a_2\}$ y $A_3 = \{a_3\}$.
- c) Lo que queda por responder es cómo se asigna y cuál es la mejor manera de asignar cada a_i con $i \in R(CIM)$ entre los subconjuntos A_j con $j \in I_{CIM}$, para maximizar la integral de $g(z)$.

La manera de asignar cada a_i con $i \in R(CIM)$ y a su vez hacerlo de la mejor forma para maximizar el peso de cada A_j está condicionada a las precedencias del grafo $G(V(CIM), A(CIM))$. El modo general de distribuir a_i sobre algún subconjunto A_j se hace en función de la definición $S_C(i)$ (ver cuadro 4.1) que para este caso se escribe como $S_{I_{CIM}}(i) = \{j \in I_{CIM} : (i, j) \in A(CIM)\}$. Una vez asignado a_k con $k \in S_{I_{CIM}}(k)$ en algún A_j se repite el mismo proceso para el resto de los a_i con $i \in R(CIM) \setminus (\cup_{j \in I_{CIM}} A_j)$ hasta que no queden elementos para seguir distribuyendo. Sin embargo, la distribución de los elementos a_i así vista no garantiza que los coeficientes agregados que resulten sean los mejores para maximizar la integral de $g(z)$, y sólo se ha logrado respetar las precedencias del grafo inducido $G(CIM)$.

En esta tesis se encontró que una manera viable de maximizar la integral del área bajo la curva de $g(z)$ consistió en determinar un criterio que pueda producir parámetros agregados con montos semejantes entre ellos. Esta restricción adicional, durante la construcción de los A_j con $j \in I_{CIM}$, surgió de suponer que se pueden obtener parámetros agregados de igual monto en base al promedio inferido entre el cociente del peso del grafo $G(V(CIM), A(CIM))$ y el número de parámetros agregados, lo que de manera formal queda expresado por:

$$\hat{a}_i = \left(\frac{W(G(CIM))}{|I_{CIM}|} \right) = \left(\frac{\sum_{j \in T(CIM)} a_j}{|I_{CIM}|} \right) \quad i \in I_{CIM} \quad (5.13)$$

si bien esta expresión no considera las precedencias del grafo $G(V(CIM), A(CIM))$, si permite establecer una condición adicional en la distribución de a_i con $i \in R(CIM)$ sobre

cada A_j . Esta condición consiste en que durante el proceso de asignación y construcción de A_j , se trate de preservar la similitud de los montos de los pesos acumulados entre cada $W(A_j)$. Este criterio tiende a generar coeficientes agregados \bar{a}_j similares a los \hat{a}_i de la relación 5.13. Sin embargo esta tendencia no está garantizada que siempre se pueda lograr, debido a las precedencias de $G(V(CIM), A(CIM))$ y los montos de cada a_i con $i \in T(CIM)$.

Se ilustra un ejemplo de la maximización de la integral de $g(z)$ en base a la figura 4.1 y el conjunto $CIM = \{0, 1, 2, 3\}$. En el cuadro 5.2 se presentan varias versiones de A_i con $i \in I_{CIM}$. En la fila (a) se muestra el resultado del criterio de distribución propuesto que se realizó en el siguiente orden: $11 \rightarrow 14 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 12 \rightarrow 10 \rightarrow 9 \rightarrow 13 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 8$. En la misma figura, pero en la fila (b) se siguió la secuencia $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$, para luego formar $T(0)$, $T(1)$, $T(2)$ y $T(3)$. La fila (c) siguió la secuencia $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$, para luego obtener los conjuntos $T(3)$, $T(2)$, $T(1)$ y $T(0)$.

Subconjuntos Propios Asociados a cada Configuración de $g(z)$				
$g(z)$	A_0	A_1	A_2	A_3
(a)	$\{a_0, a_4, a_{10}, a_9\}$	$\{a_1, a_{11}, a_{12}, a_5\}$	$\{a_2, a_6, a_{13}\}$	$\{a_3, a_{14}, a_7, a_8\}$
(b)	$\{a_0, a_4, a_5, a_9, a_{10}, a_{11}\}$	$\{a_1, a_6, a_{12}\}$	$\{a_2, a_7, a_{13}\}$	$\{a_3, a_8, a_{14}\}$
(c)	$\{a_0, a_4, a_9\}$	$\{a_1, a_5\}$	$\{a_2\}$	$\{a_3, a_6, a_7, a_8, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}\}$

Cuadro 5.2: Se exhibe el resultado de varias formas de obtener una colección de subconjuntos propios A_i con $i \in I_{CIM}$.

El cuadro 5.3 muestra el monto de cada parámetro agregado respecto del modo que se formó en el cuadro 5.2.

Parámetros Agregados e Integral de $g(z)$					
$g(z)$	\bar{a}_0	\bar{a}_1	\bar{a}_2	\bar{a}_3	$\int_0^b g(z) dz$
(a)	4.00	4.00	3.00	4.00	20.00
(b)	6.00	3.00	3.00	3.00	15.00
(c)	3.00	2.00	1.00	9.00	7.00
(d)	3.75	3.75	3.75	3.75	22.00

Cuadro 5.3: Se muestra los parámetros agregados de las distintas versiones de $g(z)$. Se agrega la fila (d) con la formación de $g(z)$ calculada por el valor promedio de cada coeficiente agregado evaluado en 5.13.

Se observa del cuadro 5.3 que los parámetros de la filas (a) se aproximan a los parámetros de la fila (d). La figura 5.2 ilustra la forma que adquiere $g(z)$ para las distintas formaciones del cuadro 5.3.

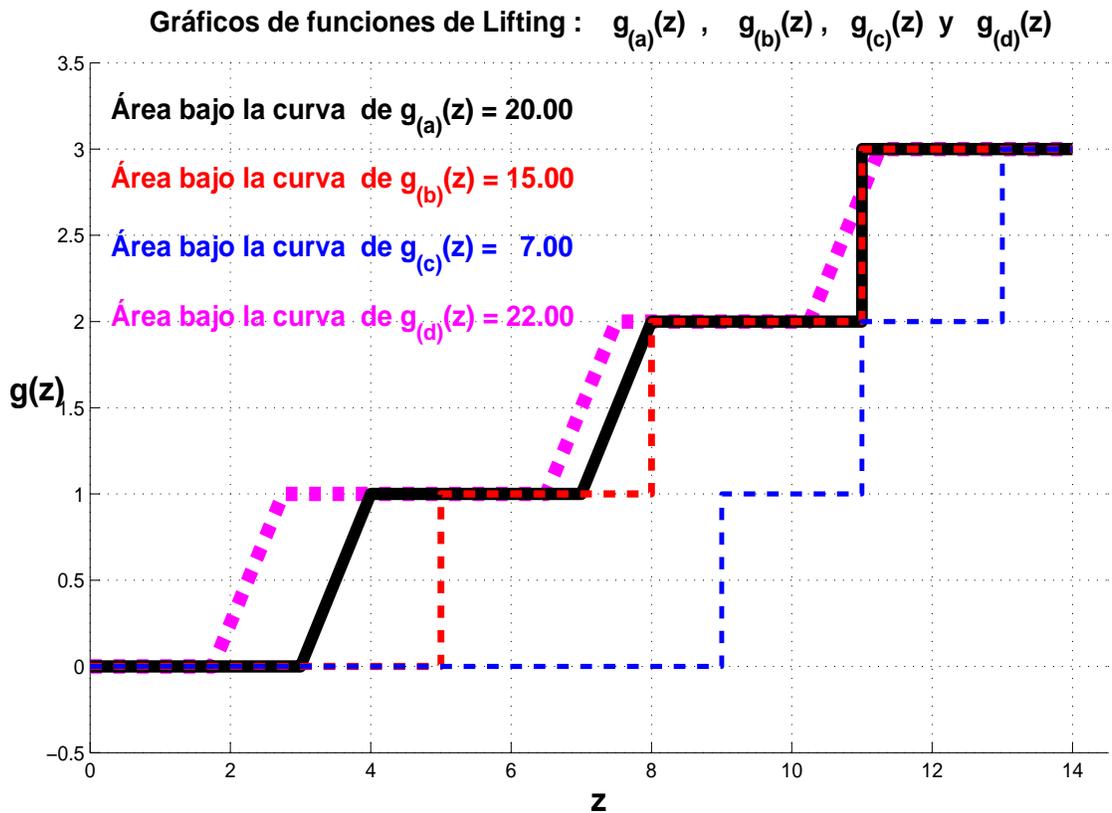


Figura 5.2: El gráfico organiza cuatro curvas superpuestas de las formaciones: (a), (b), (c) y (d) del cuadro 5.3. Además se muestra el monto del área bajo la curva de cada configuración de $g(z)$ calculada en el cuadro 5.3.

Se observa que el monto del área bajo la curva de $g_{(a)}(z)$ tiende a parecerse al área bajo la curva de $g_{(d)}(z)$.

5.5.2. Etapa I de la Relajación: Maximización de la Integral de $g(z)$

La primera etapa de la relajación consiste en determinar una función de lifting superaditiva válida $g(z)$ y su maximización en base a lo visto en la subsección 5.5.1. La implementación de esta fase se explica en dos etapas:

1. La primera etapa consiste en que dado un conjunto CIM , inferido de una de las cuatro heurísticas de la sección 4.7 se procede a formar un grafo dirigido e inducido por CIM descrito por $G(V(CIM), A(CIM)) \subseteq G(V(N), A(N))$.
2. La segunda etapa resuelve el problema de la formación de los mejores parámetros

agregados que se usan para la maximización del área bajo la curva de $g(z)$. Esta etapa se presenta como pseudocódigo.

- a) Al igual que en la subsección 5.5.1 se inicializa cada subconjunto $A_i = \{a_i\}$ con $i \in I_{CIM}$. Se obtiene el peso inicial de cada parámetro agregado, es decir $\bar{a}_i = W(A_i)$ con $i \in I_{CIM}$. Luego se actualizan los siguientes conjuntos: $V(CIM) = V(CIM) \setminus \left(\bigcup_{i \in I_{CIM}} A_i \right)$, $A(CIM) = \{(i, j) : i, j \in V(CIM)\}$ y $G(CIM) = G(V(CIM), A(CIM))$.
- b) Todos los elementos a_i con $i \in V(CIM)$ se ordenan de forma no creciente.
- c) Se selecciona aquel elemento $a_k = \max_{i \in V(CIM)} \{a_i\}$.
- d) Se determina el conjunto $S_{I_{CIM}}(k) = \{j \in I_{CIM} : (k, j) \in A(CIM)\}$.
- e) Se distribuye a_k sobre A_i con $i \in S_{I_{CIM}}(k)$ que tenga el mínimo peso acumulado. De modo formal :
 - i. $m = \min_{n \in S_{I_{CIM}}(k)} \{W(A_n)\}$. En caso de haber subconjuntos con igual peso, la asignación se realiza sobre cualquiera de ellos.
 - ii. $A_m = A_m \cup \{a_k\}$.
- f) Se hace la actualización de los siguientes conjuntos: $V(CIM) = V(CIM) \setminus \{k\}$, $A(CIM) = \{(i, j) : i, j \in V(CIM)\}$ y $G(CIM) = G(V(CIM), A(CIM))$.
- g) Se retorna al punto de secuencia b) mientras $V(CIM) \neq \phi$ y se repiten la mismas operaciones. Cuando $V(CIM) = \phi$ se detiene el proceso de asignación.
- h) Finalizado el punto de secuencia g) se procede a emitir los subconjuntos propios A_i y los respectivos parámetros agregados $\bar{a}_i = W(A_i)$ con $i \in I_{CIM}$. Luego se determina la función de lifting superaditiva válida $g(z)$ maximizada.

A continuación se presenta la segunda fase de la relajación que permite calcular los coeficientes de lifting en base a la función $g(z)$ ya determinada.

5.5.3. Etapa II de la Relajación: Lifting sobre Nuevos Parámetros Agregados

Determinado la función de lifting válida $g(z)$ maximizada en la subsección 5.5.2, se procede a computar una nueva colección de los mejores parámetros agregados, para

los cuales se les calcula sus respectivos coeficientes de lifting. Del mismo modo que la sección 5.5.2, esta segunda fase de la relajación se explica en dos etapas:

1. En la primera etapa se computan los conjuntos residuales de nodos y arcos; y un grafo residual, los que se definen de la siguiente manera:

$$V(D) = V(N) \setminus V(T(CIM)), A(D) = \{(i, j) : i, j \in V(D)\}$$

y $G(D) = G(V(D), A(D))$. El grafo residual $G(D) \subseteq G(N)$.

2. Luego se implementa la segunda etapa que resuelve la obtención de un nuevo conjunto de los mejores parámetros agregados. En esta etapas se explica por medio del siguiente pseudocódigo.

- a) Se ordena la solución x_i^* con $i \in V(D)$ en una secuencia no creciente.
- b) Se selecciona aquella variable de decisión $x_k^* = \max_{i \in V(D)} \{x_i^*\}$.
- c) Se determina el cono superior $T(k)$ asociado a la variable x_k^* , para luego calcular su peso $W(T(k))$. A este peso se le asigna la notación de parámetro agregado transitorio como: $\bar{a}_{transitorio} = W(T(k))$.
- d) Se evalúa $\bar{a}_{transitorio}$ en $g(z)$ para emitir un coeficiente agregado de lifting transitorio definido por $\gamma_{transitorio} = g(\bar{a}_{transitorio})$. A continuación se determina a que tramo pertenece $\bar{a}_{transitorio}$ en el dominio que define $g(z)$ (ver descripción 5.10) sobre el intervalo $[0, b]$. La obtención de estos dos parámetros transitorios tiene por finalidad analizar si $\bar{a}_{transitorio}$ pertenece a algún tramo meseta o a algún tramo pendiente de $g(z)$ (figura 5.1). Si $\bar{a}_{transitorio}$ se encuentra en algún tramo meseta se presenta la posibilidad sacar algunos coeficientes a_i con $i \in T(k)$, tal que se obtiene el mismo $\gamma_{transitorio} = g(W(T_{descargado}(k)))$. Esta operación se lleva a cabo hasta cuando $\gamma_{transitorio} = g(W(T_{descargado}(k)))$ ingrese al primera tramo pendiente que encuentre. Luego el último $T_{descargado}(k)$ se considera para evaluar el coeficiente de lifting agregado. Por otro lado, si la primera evaluación de $\gamma_{transitorio} = g(\bar{a}_{transitorio})$ da que pertenece a un tramo pendiente, no se realiza ninguna descarga sobre $T(k)$ y se emite el coeficiente de lifting asociado a este subconjunto. Las ideas anteriores se exhiben en el siguiente pseudocódigo:

- i. Si $\gamma_{transitorio} = g(\bar{a}_{transitorio})$ es evaluado en cualquier tramo pendiente del dominio de $g(z)$ se emite como coeficiente de lifting agregado asociado a la variable de decisión x_k^* , y se procede a rectificar los siguientes conjuntos:

- Se emite el coeficiente de lifting $\gamma_k = g(\bar{a}_{transitorio})$.
 - $V(D) = V(D) \setminus T(k)$, $A(D) = \{(i, j) : i, j \in V(D)\}$ y $G(D) = G(V(D), A(D))$.
 - Se reinician los cálculos desde el punto de secuencia 2.a).
- ii. Si $\gamma_{transitorio} = g(\bar{a}_{transitorio})$ es evaluado en cualquier tramo meseta del dominio de $g(z)$, se descarga $T(k)$ en base a los siguientes criterios: Se ordenan los elementos a_l con $l \in T(k)$ en secuencia decreciente:

$$n \leq m, \quad a_{l_n} \geq a_{l_m} \quad \forall n, m \in T(k), \quad p = |T(k)|$$

$$a_{l_1} \geq a_{l_2} \geq \dots \geq a_{l_p}$$

luego se realiza la verificación y rectificación sobre $T(k)$:

```

q = 1;
while q ≤ p {
    T(k) = T(k) \ {alq}.
    z = ātransitorio = W(T(k)).
    if μh - λ < z ≤ μh+1 - λ { # tramo meseta
        q++. Se continúa descarga de T(k).
    }
    if μh - λ < z ≤ μh+1 - λ + ρh {#tramo pendiente
        Se detiene descarga de T(k) y
        se emite γk = g(T(k)).
    }
}
Se procede a modificar los siguientes conjuntos:
· V(D) = V(D) \ T(k), A(D) = {(i, j) : i, j ∈ V(D)} y G(D) = G(V(D), A(D)).
· Se reinician los cálculos desde el punto de
  secuencia 2.a).

```

e) Finalizado los sucesivos cálculos desde el punto de secuencia 2.a) al punto de secuencia 2.d), se procede a emitir la colección de coeficientes de lifting agregados asociados a sus respectivas variables de decisión.

3. Una vez terminado los cálculos de la segunda fase del proceso de relajación se genera el corte para agregarlo al *PCKP* relajado.

5.6. Comentarios sobre la Heurística de Relajación

La primera etapa de la heurística de relajación presenta varias características interesantes. Las condiciones de orden y asignación de los puntos de secuencia 2b) y 2e)

(subsección 5.5.2) del pseudocódigo permiten que se incremente la posibilidad de que los parámetros agregados que se formen tengan un valor semejante entre ellos. El punto de secuencia 2d) (subsección 5.5.2) garantiza que se respeten las precedencias del grafo $G(CIM)$ durante el proceso de distribución de los elementos a_i sobre algún A_j .

La segunda etapa de la heurística de relajación exhibe varias características para destacar. Al observar el punto de secuencia 2.b) (subsección 5.5.3), cada vez que se selecciona una variable para ser lifteada se escoge aquella que presenta el mayor valor posible, lo que implica un mayor aporte en el monto de violación del corte que se emite. El punto de secuencia 2.d) (subsección 5.5.3) aprovecha la posibilidad de descargar $T(k)$ cuando el parámetro agregado asociado a éste se encuentra en algún tramo meseta de $g(z)$. El efecto de poder descargar $T(k)$, aumenta la posibilidad de que el monto del siguiente parámetro agregado a inferir sea igual o mayor al último que se determinó, y por ende el coeficiente de lifting sea también igual o mayor que el último que se computó.

En las secciones 6.6 y 6.7 se puede observar en los gráficos 1D de rendimiento (ver definición 6.4.3), el desempeño que realiza esta metodología de lifting al robustecer una desigualdad CIM y su impacto en la mejora de las formulaciones relajadas sobre un grupo numeroso de ejemplos que representan a yacimientos simulados (definición de yacimiento simulado en sección 6.2).

Capítulo 6

Experimentación y Análisis

6.1. Introducción

En este capítulo se lleva a cabo una serie de experimentos relacionados con mejorar la relajación del *PCKP* al aplicar una cierta configuración de corte y evaluar el rendimiento de la refinación en la integralidad de las soluciones emitidas. El procedimiento que se utilizó para evaluar el rendimiento consistió en un benchmarking sobre dos métricas de calidad que miden: la aproximación del *PCKP* relajado al *PCKP* original y el cierre del gap entre una solución *LP* original y la nueva solución *LP* que resulta de mejorar la formulación relajada de un *PCKP*. A su vez estas métricas tienen su expresión gráfica en perfiles de desempeño 1D (Moore E. [25]). Estos perfiles permiten caracterizar, evaluar y determinar el comportamiento general de cual configuración de corte favorece más en la refinación del *PCKP* relajado para que emita la mejor solución que se aproxime a la solución entera.

Para evaluar las métricas de calidad se debe disponer de los siguientes datos: una solución *LP*, una nueva solución *LP*, una solución *BIP* y qué configuración de corte se aplicó. Esta información se recava en función de un conjunto cuantioso y único de instancias. Evaluada cada métrica de calidad se procede a su despliegue sobre un gráfico 1D para iniciar el análisis cuantitativo y cualitativo de la eficiencia de los cortes usados.

Se hace notar que la cantidad de variables de cada instancia permitió obtener la solución entera óptima de cada una de ellas.

6.2. Descripción de los Modelos de Yacimientos Simulados y Reales

En esta sección se describe un modelo de yacimiento simulado y la forma que se obtienen los parámetros de utilidad de la función objetivo c_j , de la restricción del

knapsack a_j , la capacidad del knapsack b y el conjunto de restricciones de precedencias de un modelo $PCKP$ representado por la formulación 4.1.

6.2.1. Modelo de Yacimientos Simulado

La forma de construir este tipo de instancia se basa en suponer que el yacimiento se modela como un cubo tridimensional con sus tres dimensiones de igual tamaño. Este cubo se subdivide en un número entero de cubos más pequeños. Cada cubo pequeño representa a una porción aislada del yacimiento. La figura 6.1 muestra la forma que se modela un yacimiento simulado:

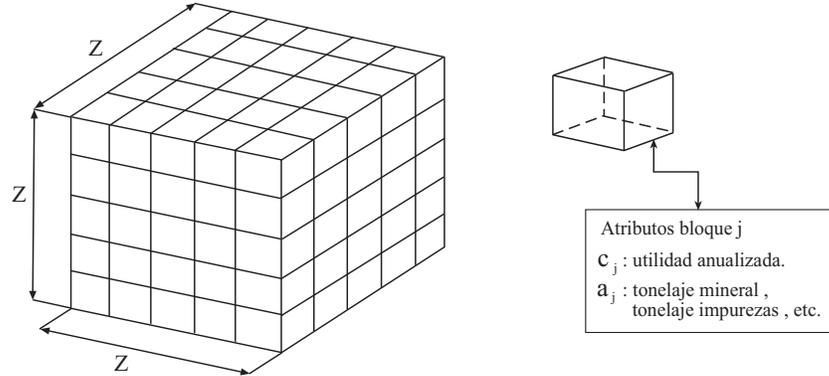


Figura 6.1: Modelo de un yacimiento simulado. Los parámetros c_j , a_j y b son los mismos de la formulación 4.1. En este ejemplo $z = 5$, luego $n = z^3 = 125$. De este modo $j = 1, \dots, 125$.

De la figura 6.1 se puede hacer una descripción formal del modelo. Cada bloque representa a una porción del yacimiento que se pretende explotar. A su vez, esta porción se modela como una variable binaria $x_j = \{0, 1\}$ con $j = 1, 2, \dots, n$ y n representa el número de bloques en que se discretiza el cubo ($n = z^3$). La variable binaria representa la acción de explotar la porción del yacimiento ($x_j = 1$) o de no explotar tal porción ($x_j = 0$). En esta tesis se determinan 14 tipos de minas simuladas con $z \in A$, $A = \{3, 4, \dots, 14\}$ y $A \subseteq \mathbb{Z}^+$. Para cada $z \in A$ se calculan los parámetros de la función objetivo, de la restricción knapsack y la capacidad de éste. Cada parámetro se considera una variable aleatoria que se computa de una función de distribución de probabilidades que depende del número de semilla que se usó para emitir el valor (EGlib [9]). En esta tesis se escoge el número de semilla s , tal que $s \in S$, $S = \{0, 1, 2, \dots, 39, 40\}$ y $S \subseteq \mathbb{Z}^+$.

El conjunto de restricciones de precedencia del $PCKP$ se modela en base a una colección de bloques predecesores y sucesores inmediatos según la posición que se encuentra el cubo pequeño dentro del cubo. La figura 6.2 presenta un esquema general

de las precedencias de un bloque j dentro del modelo matemático de un yacimiento ideal.

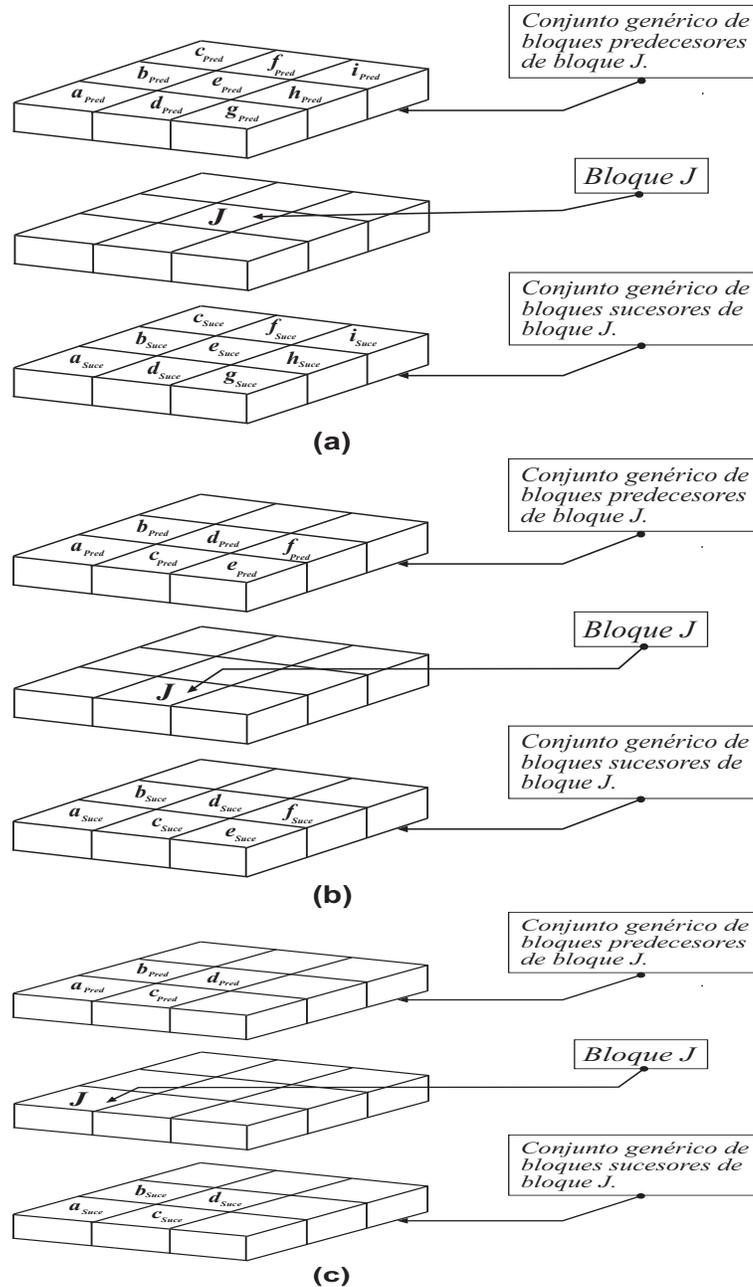


Figura 6.2: Representación de una colección de predecesores y sucesores de un cubo pequeño de la figura 6.1. El esquema (a) presenta el patrón de predecesores y sucesores del cubo pequeño que se encuentra al interior del cubo. El esquema (b) presenta el patrón de predecesores y sucesores del cubo pequeño que se encuentra en una cara del cubo. El esquema (c) presenta el patrón de predecesores y sucesores del cubo pequeño que se encuentra en una esquina del cubo. El subíndice **Pred** significa Predecesor y el subíndice **Suce** significa Sucesor.

6.2.2. Modelo Yacimiento Real

La descripción de las instancias que representan a los yacimientos reales siguen las mismas características expuestas para el modelo matemático descrito por Boland N. [26] y resumido en la sección 2.4.

6.3. Cortes y Ensamble con CPLEX

En esta sección se presenta un esquema de la forma de generar un corte a partir de una solución LP emitida por $CPLEX$ [4] y de la descripción poliedral del problema $PCKP$ relajado. La presentación se hace en base a un diagrama de flujo, que muestra las etapas necesarios para producir un corte e introducirlo en la formulación del $PCKP$ almacenado en $CPLEX$.

La figura 6.3 muestra un diagrama de flujo de producción de cortes y su interacción con el solver $CPLEX$ [4]:

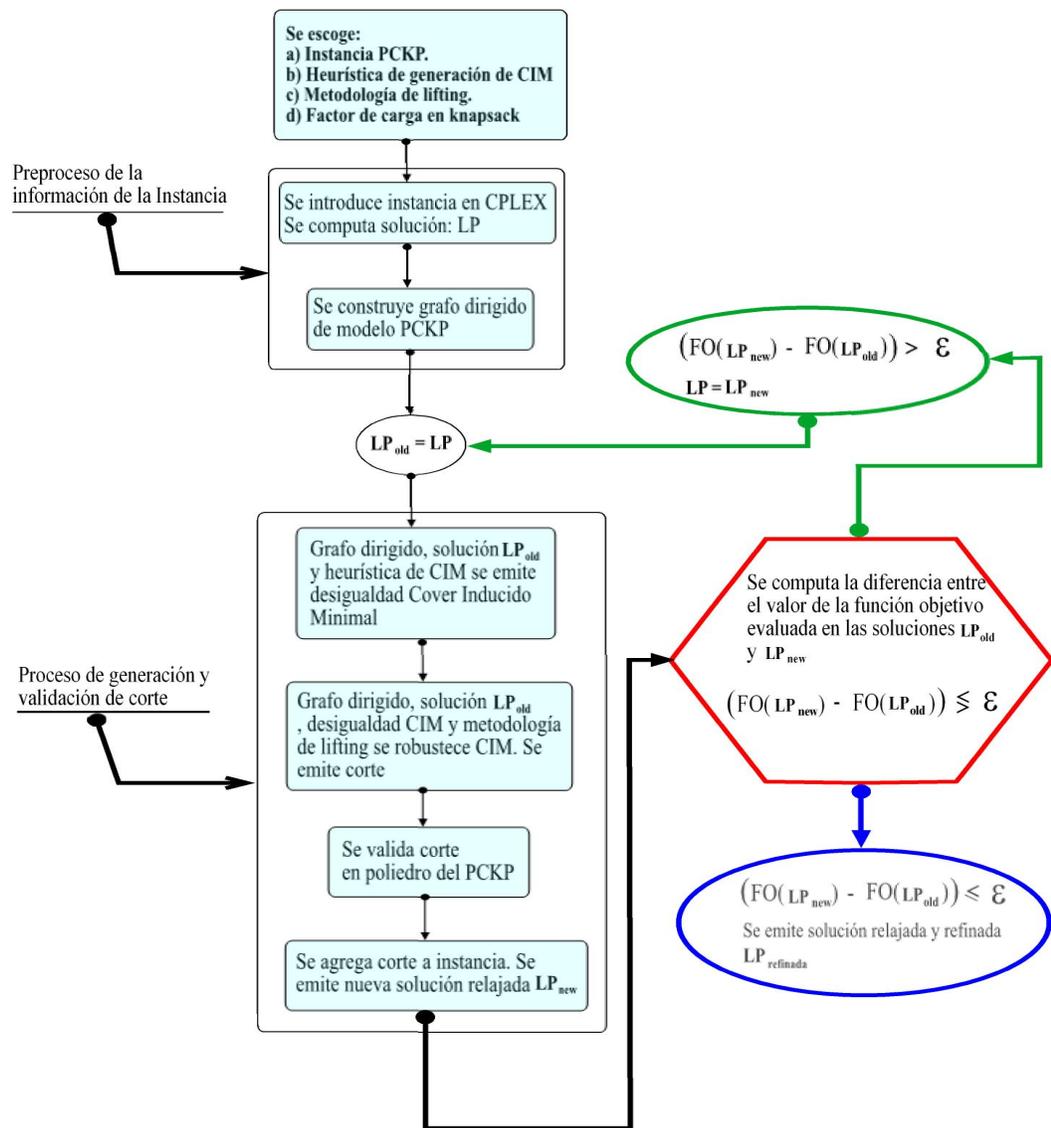


Figura 6.3: Diagrama de flujo de producción de cortes y el ensamble con el solver CPLEX. Se exhibe las etapas de verificación de validez del corte y su evaluación en la mejora de la descripción de la relajación del *PCKP*.

Si se observa el diagrama de flujo de la figura 6.3, siempre el corte que fortalece al modelo *PCKP* relajado se agrega en la raíz del problema y no desde la última iteración que refinó al *PCKP* relajado. Como en esta tesis se trabaja en la evaluación del rendimiento de la relajación del *PCKP*, el efecto es el mismo.

6.4. Benchmarking de la Configuraciones de Cortes

Esta sección introduce la definición de dos métricas (índices) de calidad y su expresión en perfiles de desempeño.

Definición 6.4.1. Índice de Resolución ρ_1 . El índice ρ_1 se determina del cociente entre el valor de la función objetivo del modelo 4.1 evaluado en una solución *BIP*, respecto del valor de la función objetivo evaluado en la nueva solución *LP* emitida al mejorar la relajación del *PCKP* por alguna configuración de corte.

Formalmente ρ_1 se expresa de la siguiente manera:

- Se define el conjunto de índices que representa a una colección de cortes definido por el siguiente conjunto: $conf(k) = \{(CIM + ML)_k$ y $k \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}\}$. En este conjunto *ML* significan Metodología de Lifting.

$$\rho_1^k = \frac{Z_{BIP}}{Z_{LP+C}^k} \quad k \in conf \quad (6.1)$$

- El símbolo Z_{BIP} significa: Valor de la Función Objetivo evaluado en una solución *BIP*.
- El símbolo Z_{LP+C}^k significa: Valor de la Función Objetivo evaluada en una nueva solución *LP*, producto de la refinación de la relajación del *PCKP* por alguna configuración de Cortes $k \in conf$.

La tabla 6.1 muestra un esquema general de como se infiere la información del índice ρ_1 para todas las instancias y que después serán desplegadas sobre un gráfico 1D de desempeño (definición 6.4.3).

Formación de Combinaciones <i>CIM+ML</i> para el Índice ρ_1				
Instancias	conf(1)	conf(2)	conf(n)
instancia ₁	$(\rho_1^{conf(1)})_{instancia_1}$	$(\rho_1^{conf(2)})_{instancia_1}$	$(\rho_1^{conf(n)})_{instancia_1}$
instancia ₂	$(\rho_1^{conf(1)})_{instancia_2}$	$(\rho_1^{conf(2)})_{instancia_2}$	$(\rho_1^{conf(n)})_{instancia_2}$
⋮	⋮	⋮	⋮
instancia _j	$(\rho_1^{conf(1)})_{instancia_j}$	$(\rho_1^{conf(2)})_{instancia_j}$	$(\rho_1^{conf(n)})_{instancia_j}$
⋮	⋮	⋮	⋮
instancia _m	$(\rho_1^{conf(1)})_{instancia_m}$	$(\rho_1^{conf(2)})_{instancia_m}$	$(\rho_1^{conf(n)})_{instancia_m}$
Área	$A_{conf(1)}^{\rho_1}$	$A_{conf(2)}^{\rho_1}$	$A_{conf(n)}^{\rho_1}$

Cuadro 6.1: Tabla resumen de la evaluación de índice ρ_1 respecto de cada instancia y de cada configuración de corte para la construcción del perfil de desempeño (definición 6.4.3). El valor del área bajo la curva de un perfil de desempeño se simboliza por $A_{conf(k)}^{\rho_1} = \sum_{j=1}^m (\rho_1^{conf(k)})_{instancia_j}$ y $k = 1, \dots, n$.

El significado de ρ_1 se entiende del valor límite que puede tomar este índice. Cuando $\rho_1 \rightarrow 1$ quiere decir que la refinación del *PCKP* relajado logró aproximarse a la formulación del *PCKP* original, y la nueva solución *LP* es igual a la solución entera. En caso contrario, si $\rho_1 < 1$ la refinación sobre el *PCKP* relajado alcanzó solo a aproximarse a la formulación del *PCKP* original, y de forma semejante lo hace la nueva solución *LP*.

La última fila de la tabla 6.1 corresponde al área bajo la curva de cada perfil de desempeño (definición 6.4.3) sobre un mismo grupo de instancias. La configuración que presenta el mayor valor de la integral de la curva se interpreta como aquella que produce, en términos esperados, el mejor refinamiento del *PCKP* relajado. Además, el valor del área bajo la curva se pueden ordenar de forma creciente y en función de este orden se pueden computar y comparar los incrementos de área, para así inferir por cuanto una configuración de corte es mejor que la otra.

Definición 6.4.2. Índice de Gap ρ_2 . El índice ρ_2 se determina entre el cociente de la diferencia del valor de la función objetivo del modelo 4.1 evaluado en la nueva solución *LP* emitida al mejorar la formulación relajada por alguna configuración de corte y la solución *LP* original, respecto de la diferencia del valor de la función objetivo evaluada en una solución *LP* original y la solución *BIP*.

A continuación se presenta la expresión del índice ρ_2 :

- Se usa el mismo conjunto *conf* definido 6.4.1.

$$\rho_2^k = \frac{Z_{LP+C}^k - Z_{LP}}{Z_{BIP} - Z_{LP}} \quad k \in \text{conf} \quad (6.2)$$

- El símbolo Z_{BIP} significa: Valor de la Función Objetivo evaluado en una solución BIP .
- El símbolo Z_{LP+C}^k significa: Valor de la Función Objetivo evaluada en una nueva solución LP , producto de la refinación de la relajación del $PCKP$ por alguna configuración de Corte $k \in \text{conf}$.
- El símbolo Z_{LP} significa: Valor de la Función Objetivo evaluado en una solución LP original.

La tabla 6.2 muestra un esquema general de como se calcula la información del índice ρ_2 para todas las instancias.

Formación de Combinaciones $CIM+ML$ para el Índice ρ_2				
Instancias	conf(1)	conf(2)	conf(n)
instancia ₁	$(\rho_2^{\text{conf}(1)})_{\text{instancia}_1}$	$(\rho_2^{\text{conf}(2)})_{\text{instancia}_1}$	$(\rho_2^{\text{conf}(n)})_{\text{instancia}_1}$
instancia ₂	$(\rho_2^{\text{conf}(1)})_{\text{instancia}_2}$	$(\rho_2^{\text{conf}(2)})_{\text{instancia}_2}$	$(\rho_2^{\text{conf}(n)})_{\text{instancia}_2}$
⋮	⋮	⋮	⋮
instancia _j	$(\rho_2^{\text{conf}(1)})_{\text{instancia}_j}$	$(\rho_2^{\text{conf}(2)})_{\text{instancia}_j}$	$(\rho_2^{\text{conf}(n)})_{\text{instancia}_j}$
⋮	⋮	⋮	⋮
instancia _m	$(\rho_2^{\text{conf}(1)})_{\text{instancia}_m}$	$(\rho_2^{\text{conf}(2)})_{\text{instancia}_m}$	$(\rho_2^{\text{conf}(n)})_{\text{instancia}_m}$
Área	$A_{\text{conf}(1)}^{\rho_2}$	$A_{\text{conf}(2)}^{\rho_2}$	$A_{\text{conf}(n)}^{\rho_2}$

Cuadro 6.2: Tabla resumen de la evaluación de índice ρ_2 respecto de cada instancia y de cada configuración de corte para la construcción del perfil de desempeño. El valor del área bajo la curva de un perfil de desempeño se simboliza por $A_{\text{conf}(k)}^{\rho_2} = \sum_{j=1}^m (\rho_2^{\text{conf}(k)})_{\text{instancia}_j}$ y $k = 1, \dots, n$.

El significado del índice ρ_2 se entiende del valor límite que puede alcanzar. Cuando $\rho_2 \rightarrow 1$ la brecha entre la nueva solución LP y la solución LP original es la misma que la brecha entre la solución BIP y la solución LP original, lo que se interpreta que la configuración de corte usada sobre el $PCKP$ relajado, consigue cerrar la brecha entre la solución LP original y la solución BIP . Por otro lado si $\rho_2 \rightarrow 0$ la brecha entre la nueva solución LP y la solución LP original es nula, lo que significa que la configuración de corte aplicada no consigue mejorar la relajación del $PCKP$. Un valor intermedio de $\rho_2 \in [0, 1]$ significa que la nueva solución LP , solo cerró una fracción de la brecha que hay entre la solución LP original y la solución BIP . Por consiguiente,

a una mayor brecha entre la solución LP original y la nueva solución LP , mejor es el cierre del gap.

El valor del área bajo la curva del cuadro 6.2 se interpreta como el cierre promedio del gap ρ_2 , respecto de la aplicación de alguna configuración de corte sobre el $PCKP$ relajado. Si se ordena de forma creciente el valor del área se puede discernir cual configuración de corte muestra el mejor rendimiento.

Definición 6.4.3. Perfil de Desempeño. El perfil de desempeño se puede entender como una función de distribución acumulada de una métrica de calidad; y que sirve para evaluar y analizar, en términos esperados, su comportamiento sobre un grupo numeroso de diferentes instancias (More E.[25]).

La representación gráfica de una métrica de calidad como un perfil de desempeño, y el área bajo la curva de ésta permiten minimizar el sesgo que pueden introducir ciertas instancias en la determinación de los parámetros estadísticos estándar, es decir: un perfil de rendimiento es insensible a un grupo pequeño de instancias y a cambios marginales que pueden experimentar la mayoría de los ejemplos estudiados (More E.[25]).

6.5. Mejor Configuración de α_1 y α_2 sobre la Heurística $H3$

La heurística $H3$ depende de los parámetros α_1 y α_2 para emitir una desigualdad CIM . Sobre estos parámetros se realizó un proceso de sensibilización para estimar la mejor configuración en la obtención de una solución LP , que resulta de mejorar la formulación relajada del $PCKP$.

El análisis llevado a cabo mostró que para una gran cantidad de configuraciones de α_1 y α_2 resultó que se repitió la misma mejora sobre la relajación de una instancia. Este comportamiento se replicó en todas las instancias de este análisis. Se reconocieron 39 configuraciones en donde no se repetían las mismas mejoras en la relajación de la formulaciones. Luego se estructuró el siguiente análisis de sensibilización:

1. Se sensibilizó con $\alpha_1 = 1.00$ y α_2 variando entre 0.00 y 1.00 con un paso de 0.05; también se sensibilizó con $\alpha_2 = 1.00$ y α_1 variando entre 0.00 y 0.95 con un incremento de 0.05.
2. Se utilizaron las metodologías de lifting de los capítulos 4 y 5; y la aplicación simultánea de ambas metodologías. El cuadro 6.3 presenta los cortes usados en esta evaluación.

Configuraciones de Corte

H3CIM+MLKS

H3CIM+MLZ

H3CIM+MLKSZ

H3CIM+MLKS

H3CIM+MLZ

H3CIM+MLKSZ

Cuadro 6.3: Resumen de formación de cortes para inferir la mejor configuración de parámetros α_1 y α_2 en la heurística *H3*. Las abreviaciones *KS*, *Z* y *KSZ* se definen en la sección 6.6.

Una vez realizado todos los cálculos de sensibilización; se procedió a construir un gráfico 1D para la métrica $\rho_1 = \rho_1(\alpha_1, \alpha_2)$ (definición 6.4.1) y otro para la métrica $\rho_2 = \rho_2(\alpha_1, \alpha_2)$ (definición 6.4.2) con las siguientes características:

- En el eje horizontal se despliega α_1/α_2 con α_1 variando desde 0.00 a 1.00 con un paso de 0.05 y $\alpha_2 = 1.00$. Se extiende este eje con los valores α_1/α_2 con α_2 variando desde 0.95 a 0.05 con un paso de 0.05 y $\alpha_1 = 1.00$.
- Se computa $\rho_1 = \rho_1(\alpha_1, \alpha_2)$ para todas las configuraciones de α_1 y α_2 , para toda la colección de cortes definidas en el cuadro 6.3. Con este tipo de cálculo se emitieron varios valores de $\rho_1 = \rho_1(\alpha_1, \alpha_2)$ para un único α_1/α_2 . Luego, se calcula el promedio de todos estos valores asociado a un único α_1/α_2 . Este mismo tipo de cómputo se realizó en los 39 valores de α_1/α_2 . A continuación, se despliega en el eje vertical del gráfico 1D el valor promedio $\hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_1(\alpha_1/\alpha_2)$. La misma metodología de cálculo se aplica sobre el índice $\rho_2 = \rho_2(\alpha_1, \alpha_2)$, con lo que se obtiene $\hat{\rho}_2 = \hat{\rho}_2(\alpha_1/\alpha_2)$.

Finalizado los cálculos para $\hat{\rho}_1(\alpha_1/\alpha_2)$ y $\hat{\rho}_2(\alpha_1/\alpha_2)$, se despliega el gráfico 6.4 que organiza a los dos índices de calidad promedio.

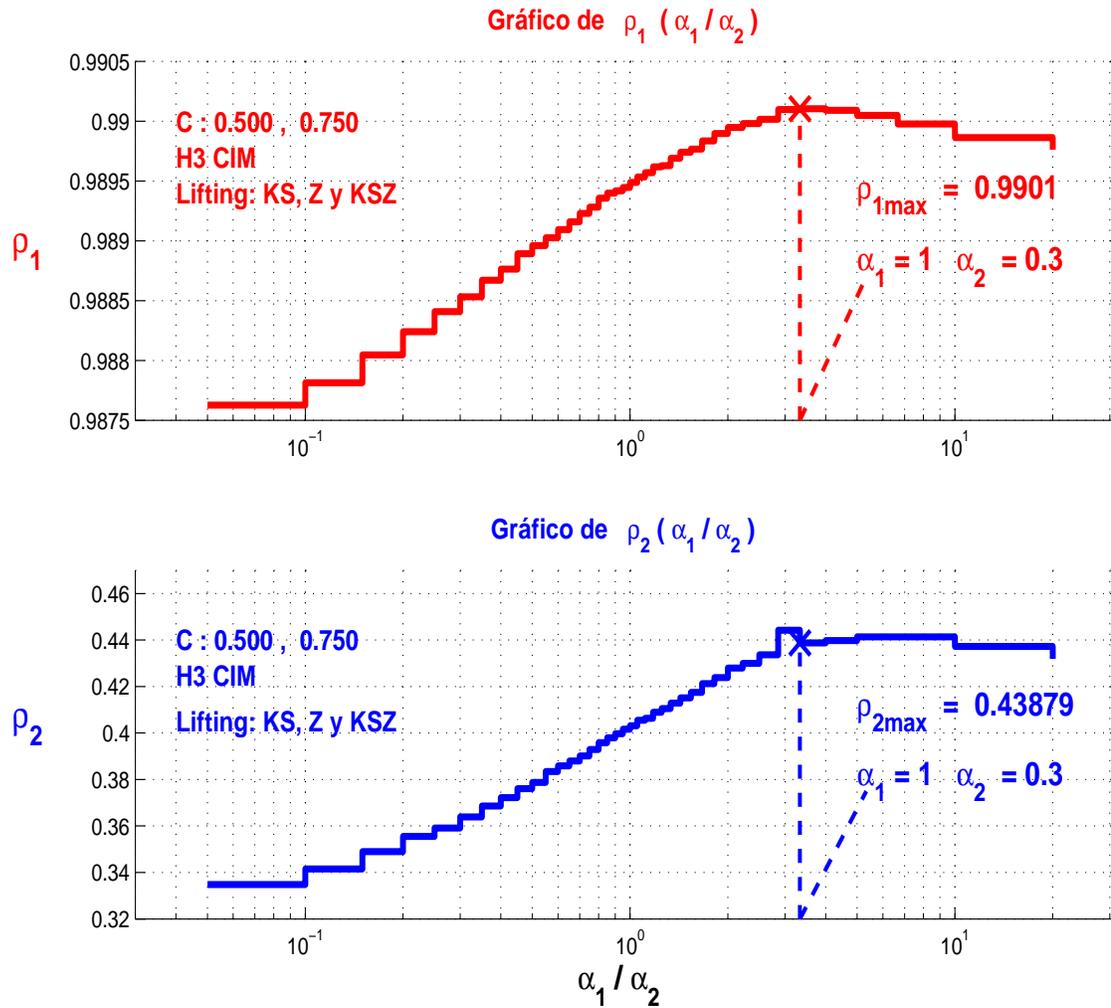


Figura 6.4: El gráfico 1D muestra las dos curvas promedios de los índices $\hat{\rho}_1 (\alpha_1/\alpha_2)$ y $\hat{\rho}_2 (\alpha_1/\alpha_2)$. El eje horizontal está en escala logarítmica para resaltar la forma de cada curva. El eje vertical está en escala normal. Se indica cual es la mejor configuración α_1 y α_2 que maximiza a cada índice.

Se observa de la figura 6.4 que la configuración que presentó los máximos en el gráfico de $\hat{\rho}_1 (\alpha_1/\alpha_2)$ y $\hat{\rho}_2 (\alpha_1/\alpha_2)$ fue la que correspondió a $\alpha_1 = 1.00$ y $\alpha_2 = 0.30$.

6.6. Análisis Preliminar de los Cortes

En esta sección se presenta un gráfico que despliega el perfil de desempeño para el índice ρ_1 y otro gráfico que despliega el perfil de desempeño para el índice ρ_2 . El gráfico ρ_1 se organiza a su vez en cuatro perfiles superpuestos. El gráfico del perfil de desempeño ρ_2 se organiza del mismo modo que el gráfico de desempeño ρ_1 . Cada perfil representa una configuración de corte que se describe a continuación:

- La heurística H_j ($j = 1, 2, 3, 4$) emite un CIM y se fortalece con la metodología exacta de lifting desarrollada por Park K. y Park S. [30] (capítulo 4). En adelante, la metodología de estos autores se le asigna la abreviación KS . Luego, la configuración de corte queda resumida por la siguiente abreviación: $H_jCIM+MLKS$. La abreviación ML significa Metodología de Lifting.
- La heurística H_j ($j = 1, 2, 3, 4$) emite un CIM y se robustece con la metodología aproximada de lifting desarrollada por Gu [40] (capítulo 5). En adelante, la metodología de este autor se le asigna la abreviación Z . Luego, la configuración de corte queda resumida por la siguiente abreviación: $H_jCIM+MLZ$. La abreviación ML significa Metodología de Lifting.
- La heurística H_j ($j = 1, 2, 3, 4$) emite un cover inducido minimal y se fortalece con la metodología de lifting desarrollada por Gu [40] y Park K. y Park S. [30]. En adelante, la metodología de estos autores se le asigna la abreviación KSZ . Luego, la configuración de corte queda resumida por la siguiente abreviación: $H_jCIM+MLKSZ$. En esta combinación se emiten dos cortes de forma simultánea y se agregan de la misma manera a la formulación del $PCKP$ relajado. La abreviación ML significa Metodología de Lifting.
- La heurística H_j ($j = 1, 2, 3, 4$) emite un cover inducido minimal CIM que no se fortalece por ninguna metodología de lifting. Así, el corte queda formado por la desigualdad tipo H_jCIM . La abreviación ML significa Metodología de Lifting.

La obtención de ρ_1 y ρ_2 se hace con un abundante número de instancias de yacimientos simulados. El grupo de instancias se componen de modelos que tienen 27 variables de decisión hasta modelos que tienen 1000 variables de decisión. A su vez, a cada modelo se le pondera por un factor de carga que multiplica solo el lado derecho de la restricción de knapsack. Un factor de carga es un coeficiente que pertenece al intervalo $]0, 1]$, y de este intervalo se calculan 20 coeficientes distanciados cada uno por un incremento de 0.05 (sin incluir el 0).

El cuadro 6.4 muestra el detalle de como esta formado cada modelo del conjunto de instancias para evaluar ρ_1 y ρ_2 .

Descripción de una Instancia Genérica		
Instancia Genérica	Variación de índice: z , s y fc	Comentario
instancia_z_s_fc	$z = 3, 4, \dots, 10$ $s = 0, 4, \dots, 40$ $fc = 0,05, 0,10, 0,15, \dots, 1,00$	índice z definido en la sección 6.2.1 índice s definido en la sección 6.2.1 fc significa factor de carga.
Se usaron 6560 instancias para evaluar los índice ρ_1 y ρ_2 ; y formar con ellos los perfiles de desempeño.		

Cuadro 6.4: Cuadro resumen del número y tipo de instancias que se usó para evaluar los índices de calidad ρ_1 y ρ_2 .

A modo de ejemplo, si un modelo de un yacimiento simulado muestra la siguiente información: *instancia_8_27_0.35*, significa que la cantidad de variables de decisión del modelo son $8^3 = 512$, se usan la semilla 27 para inferir de forma aleatoria los coeficientes c_j y a_j del modelo 4.1 y se pondera por el factor 0.35 el lado derecho del knapsack.

Se presenta a continuación una serie de cuatro gráficos que despliegan las curvas de rendimiento de la métrica de calidad ρ_1 .

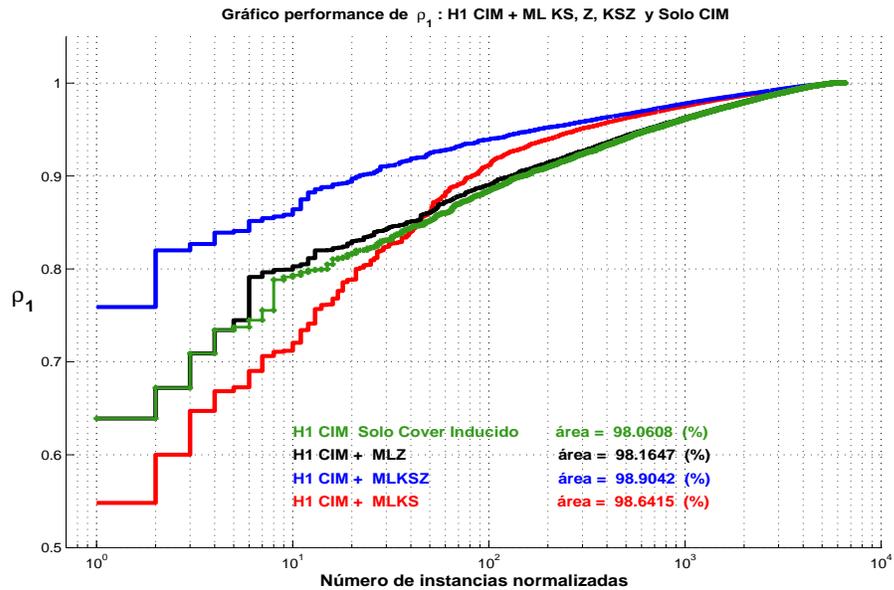


Figura 6.5: Gráfico del perfil de desempeño del índice ρ_1 . El eje horizontal está en escala logarítmica y el eje vertical está en escala normal para destacar los rasgos característicos de la curva de rendimiento. Se muestran las cuatro combinaciones de *H1* con sus respectivas metodologías de Lifting.

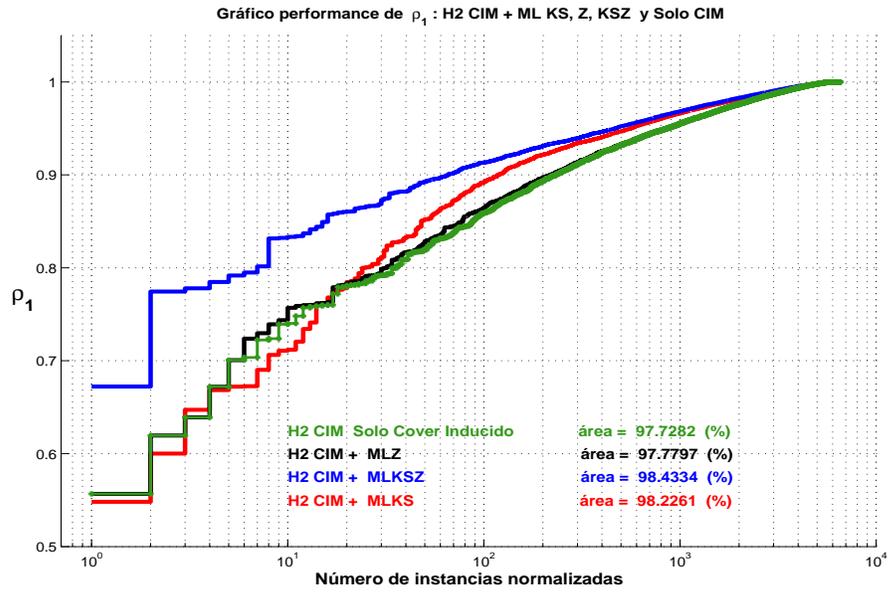


Figura 6.6: Gráfico del perfil de desempeño del índice ρ_1 . El eje horizontal está en escala logarítmica y el eje vertical está en escala normal para destacar los rasgos característicos de la curva de desempeño. Se presentan las cuatro combinaciones de $H2$ con sus respectivas metodologías de Lifting.

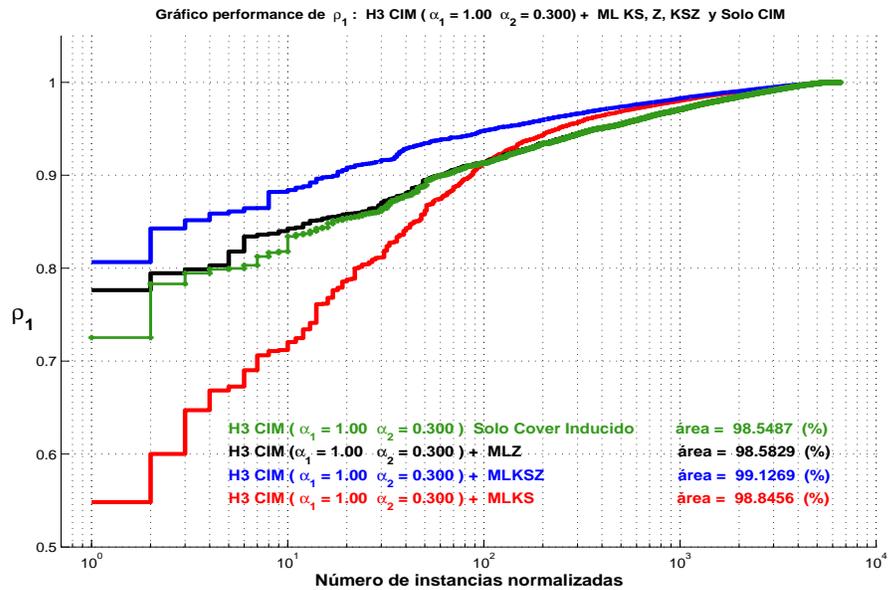


Figura 6.7: Gráfico del perfil de desempeño del índice ρ_1 . El eje horizontal está en escala logarítmica y el eje vertical está en escala normal para destacar los rasgos relevantes de los perfiles de desempeño. Se despliegan las cuatro combinaciones de $H3$ con sus respectivas metodologías de Lifting.

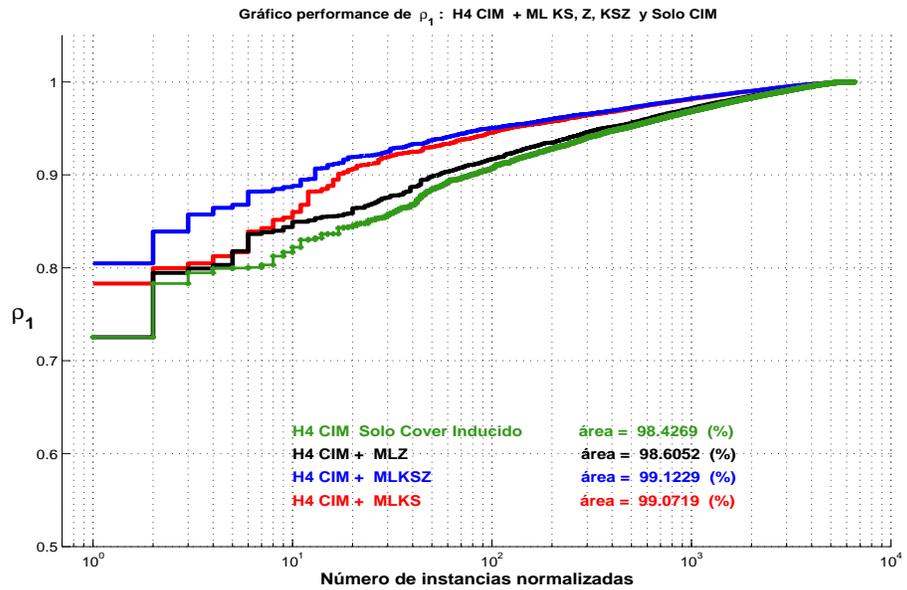


Figura 6.8: Gráfico del perfil de desempeño del índice ρ_1 . El eje horizontal está en escala logarítmica y el eje vertical está en escala normal para destacar rasgos relevantes de los perfiles de rendimiento. Se exhiben las cuatro combinaciones de $H4$ con sus respectivas metodologías de Lifting.

Se sigue con una serie de cuatro gráficos que muestran los perfiles de desempeños asociados a la métrica de calidad ρ_2 .

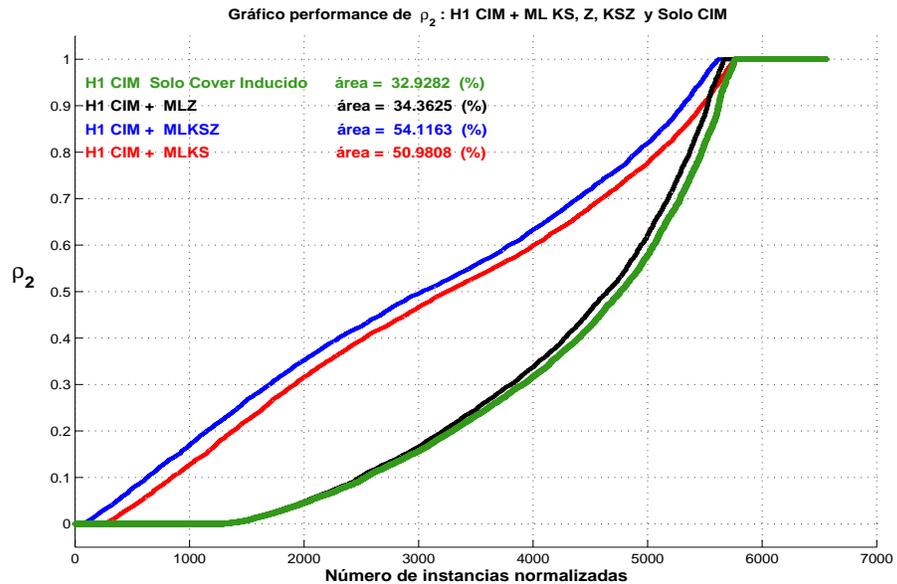


Figura 6.9: Gráfico del perfil de desempeño del índice ρ_2 . Ambos ejes están en escala normal para resaltar los rasgos característicos de la eficiencia de cada perfil. Se muestran las cuatro combinaciones de $H1$ con sus respectivas metodologías de Lifting.

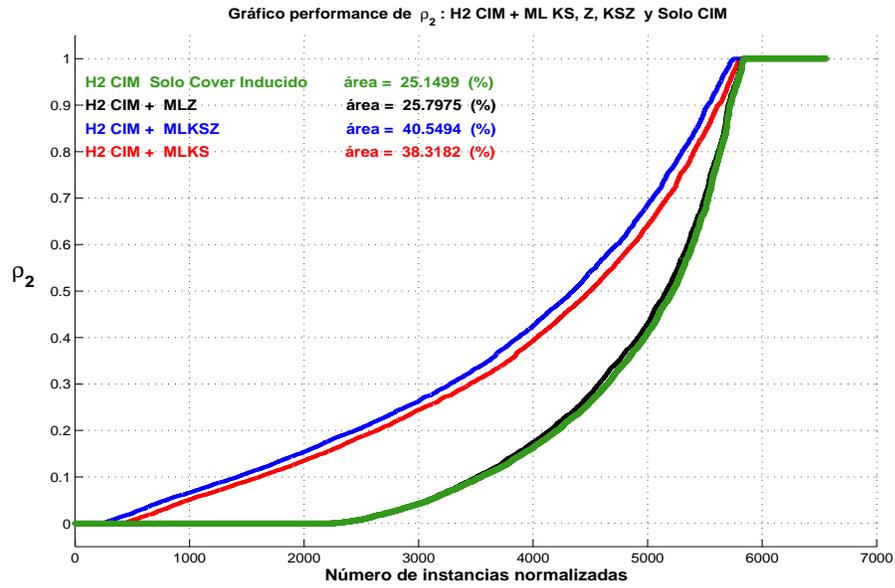


Figura 6.10: Gráfico del perfil de desempeño del índice ρ_2 . Ambos ejes están en escala normal para resaltar los rasgos relevantes de la eficiencia de las curvas. Se exhiben las cuatro combinaciones de $H2$ con sus respectivas metodologías de Lifting.

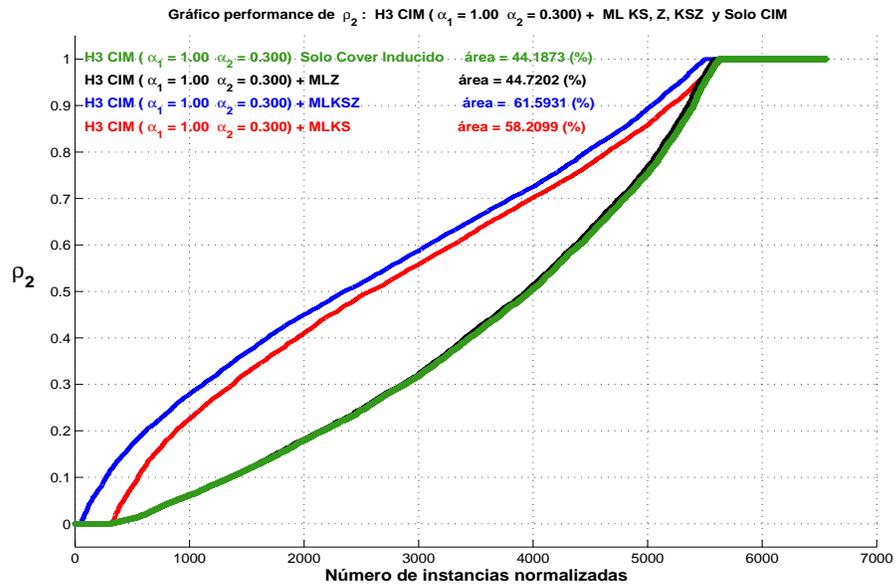


Figura 6.11: Gráfico del perfil de desempeño del índice ρ_2 . Ambos ejes están en escala normal para resaltar los rasgos característicos de los perfiles rendimiento. Se presentan las cuatro combinaciones de $H3$ con sus respectivas metodologías de Lifting.

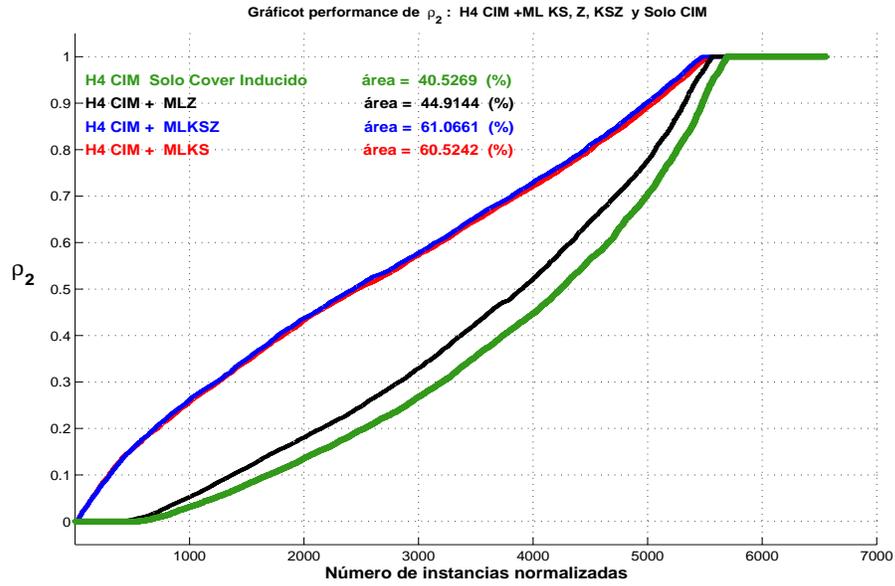


Figura 6.12: Gráfico del perfil de desempeño del índice ρ_2 . Ambos ejes están en escala normal para resaltar los rasgos característicos de los perfiles de desempeño. Se muestran las cuatro combinaciones de H_4 con sus respectivas metodologías de Lifting.

6.6.1. Resumen de ρ_1 y ρ_2 Respecto de H_1 , H_2 , H_3 y H_4

Se muestra una síntesis del área bajo la curva y de el incremento de área de lo exhibido en los gráficos de esta sección. El análisis se resume en los cuadros 6.5 y 6.6, respecto de la métrica ρ_1 .

Resumen del Área Bajo la Curva de ρ_1 para H1, H2, H3 y H4				
	H1	H2	H3	H4
	$\int_S \rho_1(z) dz$	$\int_S \rho_1(z) dz$	$\int_S \rho_1(z) dz$	$\int_S \rho_1(z) dz$
Lifting	(%)	(%)	(%)	(%)
Solo CIM	98.06	97.72	98.54	98.42
Z	98.16	97.77	98.58	98.60
KS	98.64	98.22	98.84	99.07
KSZ	98.99	98.43	99.12	99.12

Cuadro 6.5: La tabla muestra el resumen del área bajo la curva de rendimiento para ρ_1 . Se asume que la heurística H_3 fue parametrizada por la configuración óptima ($\alpha_1 = 1.00, \alpha_2 = 0.30$) ver figura 6.4. El dominio de integración S representa a las instancias usadas para evaluar y graficar la métrica de calidad.

Resumen de Diferencias de Área Bajo la Curva de ρ_1 para H1, H2, H3 y H4				
	H1	H2	H3	H4
	$\Delta \int_S \rho_1(z) dz$			
Δ Lifting	(%)	(%)	(%)	(%)
Z- CIM	0.10	0.05	0.04	0.18
KS-CIM	0.58	0.50	0.30	0.65
KSZ-CIM	0.93	0.71	0.58	0.70
KS-Z	0.48	0.45	0.26	0.47
KSZ-Z	0.83	0.66	0.54	0.52
KSZ-KS	0.35	0.21	0.28	0.05

Cuadro 6.6: La tabla muestra el resumen de las diferencias de área bajo la curva de rendimiento para ρ_1 .

Se sigue con el resumen en los cuadros 6.7 y 6.8 respecto de la métrica ρ_2 .

Resumen del Área Bajo la Curva de ρ_2 para H1, H2, H3 y H4				
	H1	H2	H3	H4
	$\int_S \rho_2(z) dz$	$\int_S \rho_2(z) dz$	$\int_S \rho_2(z) dz$	$\int_S \rho_2(z) dz$
Lifting	(%)	(%)	(%)	(%)
Solo CIM	32.92	25.14	44.18	40.52
Z	34.36	25.79	44.72	44.91
KS	50.98	38.31	58.20	61.06
KSZ	54.98	40.54	61.59	61.52

Cuadro 6.7: La tabla muestra la síntesis de la integral del área bajo la curva de desempeño para ρ_2 . Se asume que la heurística $H3$ fue parametrizada por la configuración óptima ($\alpha_1 = 1.00, \alpha_2 = 0.30$) ver figura 6.4. El dominio de integración S representa a las instancias usadas para evaluar y graficar la métrica de calidad.

Resumen Diferencias de Área Bajo la Curva de ρ_2 para H1, H2, H3 y H4				
	H1	H2	H3	H4
	$\Delta \int_S \rho_2(z) dz$			
Δ Lifting	(%)	(%)	(%)	(%)
Z- CIM	1.44	0.65	0.54	4.39
KS-CIM	18.06	13.16	14.02	20.54
KSZ-CIM	22.06	15.40	17.41	21.00
KS-Z	16.62	12.51	14.02	20.54
KSZ-Z	20.62	14.75	16.87	16.61
KSZ-KS	4.00	2.24	3.39	0.46

Cuadro 6.8: La tabla muestra el resumen de las diferencias de área bajo la curva de rendimiento para ρ_2 .

Se observa que las heurísticas $H3$ y $H4$ presentaron, en general, mejor desempeño que $H1$ y $H2$. Además el corte formado solo por $H3$ presentó un mejor rendimiento que el corte formado solo por $H4$. La metodología de lifting KS mostró mejor rendimiento que la metodología de lifting Z . Se ve que la metodología simultanea de lifting KSZ presentó mejor resultado en el desempeño del fortalecimiento de los cortes que lo que hizo KS .

6.7. Análisis Final con los Mejores Cortes

En esta sección se presenta una extensión de lo realizado hasta ahora con los mejores resultados de la sección 6.6. Se observó que para algunas configuraciones de cortes existió discrepancia para determinar cual fue la mejor. Luego, para tratar determinar si la disconformidad persiste en otro grupo de ejemplos, se incrementó la cantidad de instancias de 6560 a 9840, y además los ejemplos incluidos contienen una mayor cantidad de incógnitas que van desde los 1331 ($z^3 = 11^3$) hasta los 2774 ($z^3 = 14^3$) variables de decisión (ver definición de z en subsección 6.2.1). También se observó que las heurísticas $H3$ y $H4$ presentaron mejor competencia en el rendimiento de la mejora sobre el mismo conjunto de instancias que lo que hicieron las heurísticas $H1$ y $H2$, por lo que estas últimas no fueron incluidas en este nuevo análisis. Al examinar los gráficos de desempeño de $H3$ y $H4$ y su posterior robustecimiento por las metodologías de lifting se notó que la competencia de algunas formación de cortes no incrementaron de forma notable la eficiencia en la mejora de la relajación del $PCKP$, por consiguiente no se incluyó la combinación $H4CIM+MLZ$ ni la combinación $H3CIM(\alpha_1 = 1.00, \alpha_2 = 0.300)+MLZ$ para este nuevo análisis. Se incluye en este análisis la evaluación de la segmentación de las instancias respecto de una colección de factores de cargas que afectan a la capacidad del knapsack. La idea de la segmentación consiste en analizar el efecto del factor de carga en el desempeño de los cortes sobre el refinamiento de los modelos $PCKPs$ relajados.

El cuadro 6.9 muestra el resumen de cómo se formaron los subconjuntos para recomputar el análisis final.

Subconjuntos	Rango de Factores de Carga en Knapsack	Número de Instancias
S_1	{0,05, 0,10, 0,15, 0,20, 0,25}	2460
S_2	{0,30, 0,35, 0,40, 0,45, 0,50}	2460
S_3	{0,55, 0,60, 0,65, 0,70, 0,75}	2460
S_4	{0,80, 0,85, 0,90, 0,95, 1,00}	2460

Cuadro 6.9: Resumen de cuatro subconjuntos de datos para formar los perfiles de desempeño de las mejores configuraciones de cortes. Cada subconjunto se segmentó en función de rangos de factores.

Se presentan las curvas de desempeño de ρ_1 para el conjunto total de instancias y los cuatro subconjuntos propios segmentados según el cuadro 6.9.

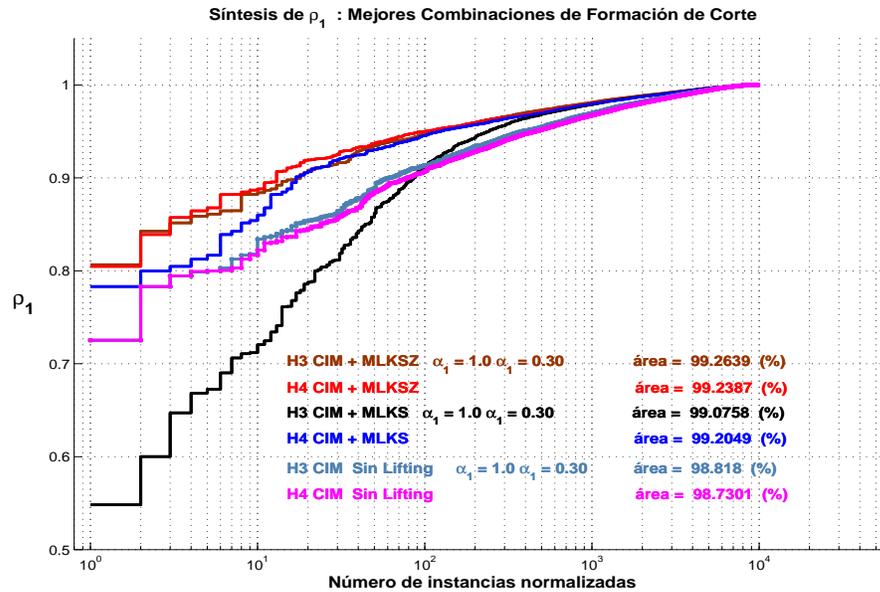


Figura 6.13: Gráfico del perfil de desempeño del índice ρ_1 . El eje x está en escala logarítmica y el eje y está en escala normal para resaltar las características de las curvas de desempeño. Se exhiben las mejores configuraciones de cortes entre $H3$, $H4$ y sus respectivas metodologías de lifing.

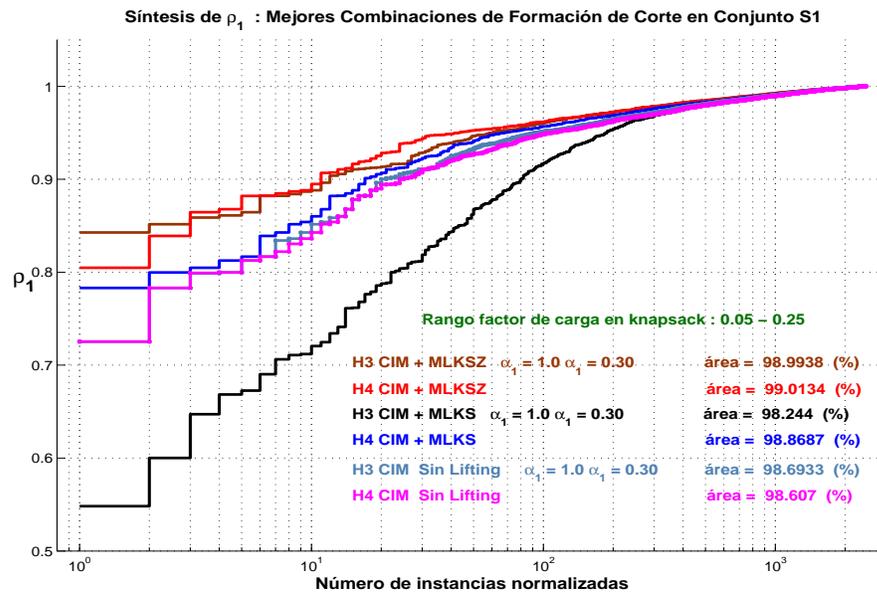


Figura 6.14: Perfil de desempeño del índice ρ_1 sobre conjunto S_1 . El eje x está en escala logarítmica y el eje y está en escala normal para destacar las características de los perfiles de rendimiento. Se exhiben las mejores configuraciones de cortes entre $H3$, $H4$ y sus respectivas metodologías de lifing.

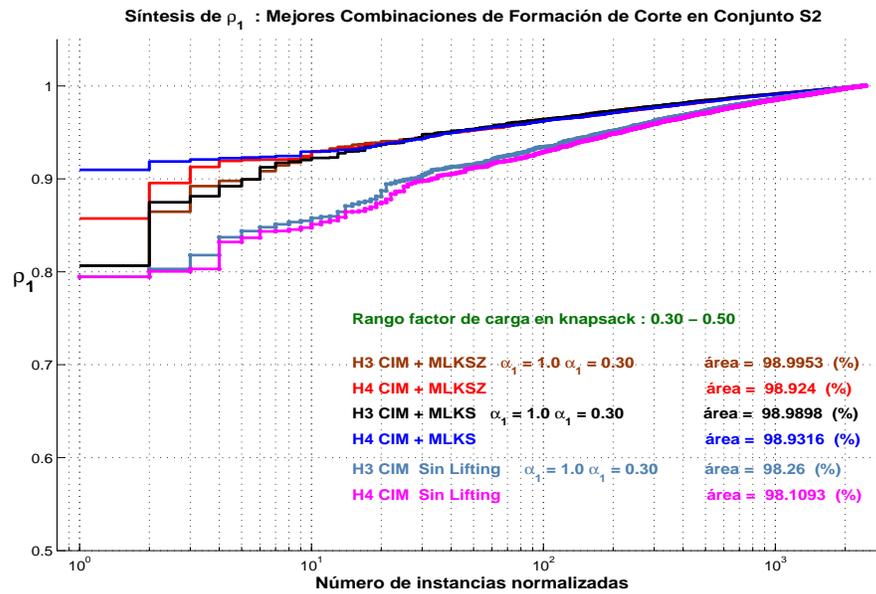


Figura 6.15: Perfil de desempeño del índice ρ_1 sobre conjunto S_2 . El eje x está en escala logarítmica y el eje y está en escala normal para destacar las características de los perfiles de rendimiento. Se grafican las mejores configuraciones de cortes entre H_3 , H_4 y sus respectivas metodologías de lifting.

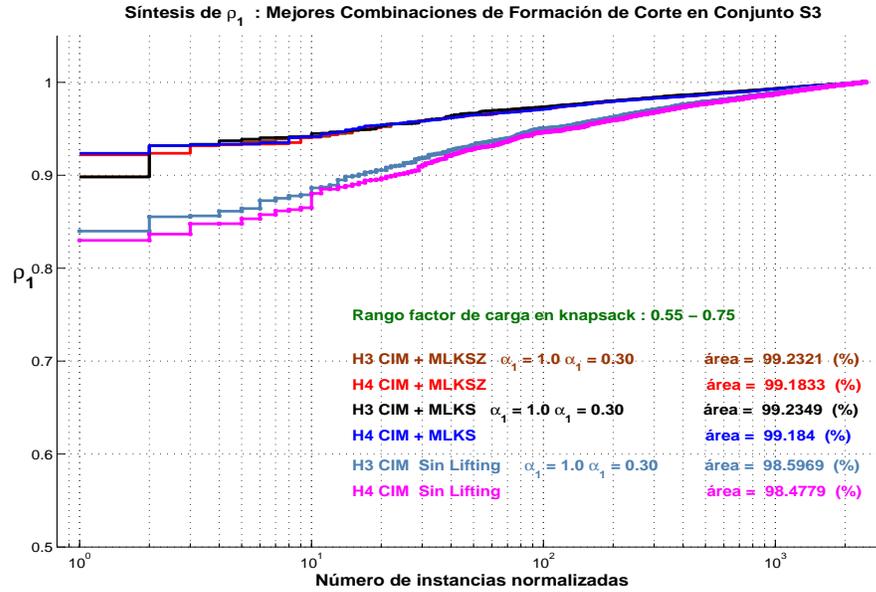


Figura 6.16: Perfil de desempeño del índice ρ_1 sobre conjunto S_3 . El eje x está en escala logarítmica y el eje y está en escala normal para resaltar los rasgos de las curvas de rendimiento. Se presentan las mejores configuraciones de cortes entre H_3 , H_4 y sus respectivas metodologías de lifting.

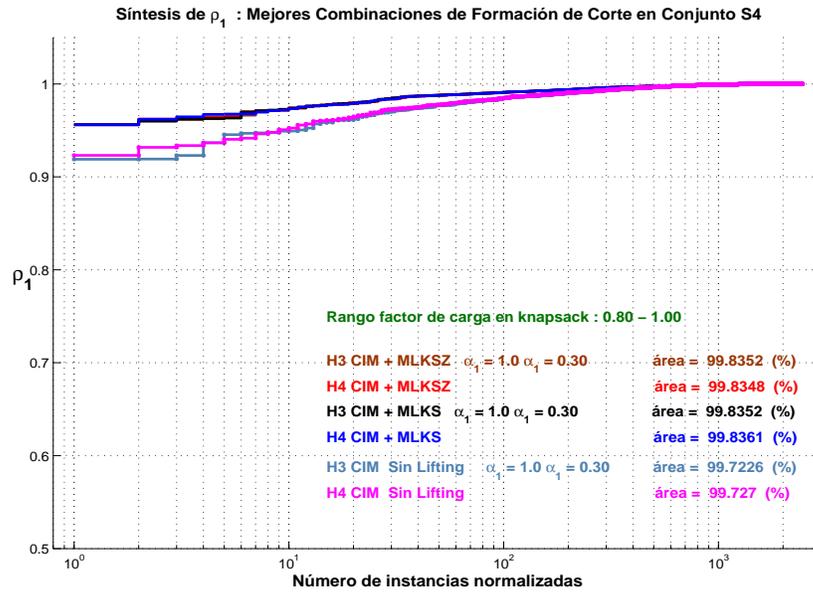


Figura 6.17: Perfil de desempeño del índice ρ_1 sobre conjunto S_4 . El eje x está en escala logarítmica y el eje y está en escala normal para destacar las características de las curvas de desempeño. Se presentan las mejores configuraciones de cortes entre $H3$, $H4$ y sus respectivas metodologías de lifting.

Se sigue con los perfiles de rendimiento de ρ_2 sobre el mismo conjunto de instancias.

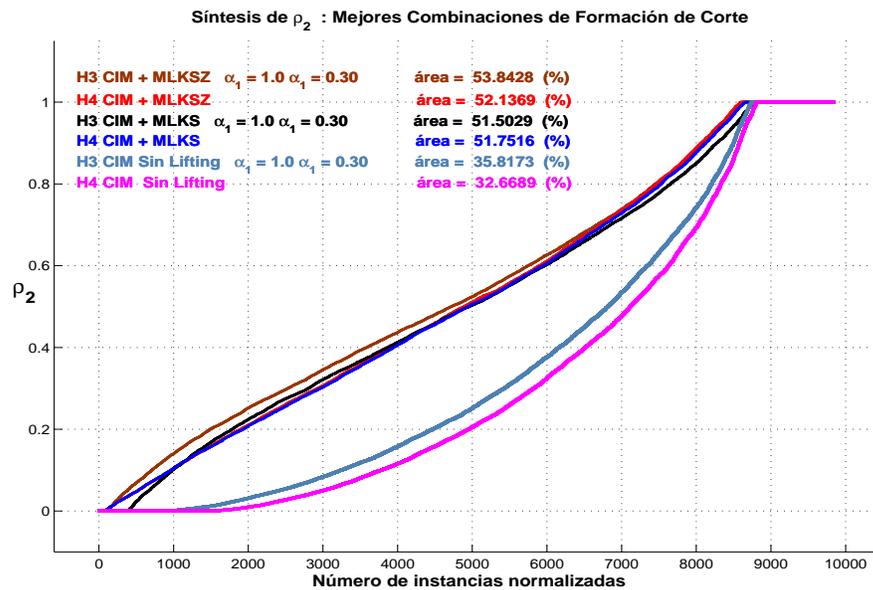


Figura 6.18: Gráfico del perfil de desempeño del índice ρ_2 . El eje horizontal y el eje vertical están en escala normal para resaltar los rasgos de las curvas de desempeño. Se exhiben las mejores configuraciones de cortes entre $H3$, $H4$ con sus respectivas metodologías de lifting.

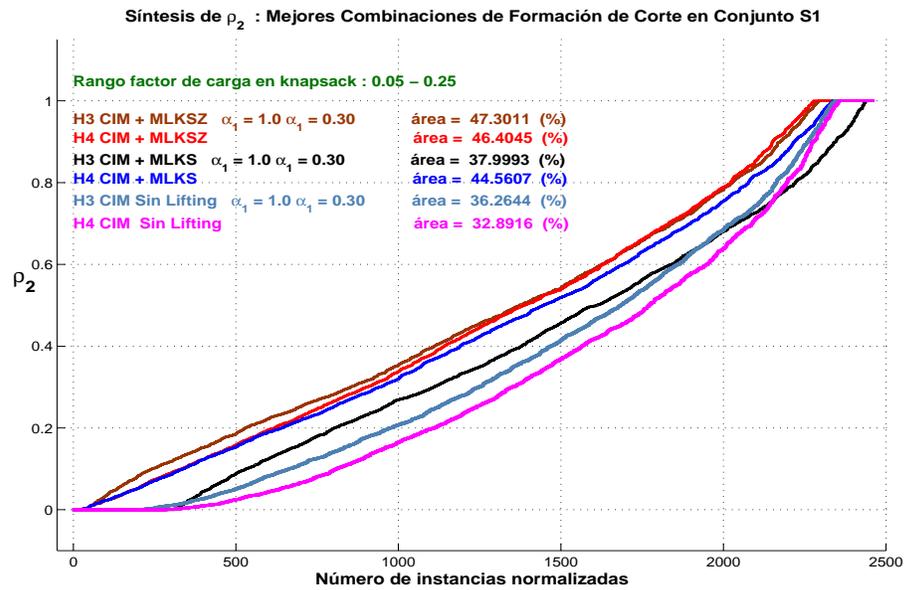


Figura 6.19: Perfiles de rendimiento del índice ρ_2 sobre conjunto S_1 . El eje horizontal y el eje vertical están en escala normal para destacar los rasgos de los perfiles de desempeño. Se exhiben las mejores configuraciones de cortes entre $H3$, $H4$ con sus respectivas metodologías de lifting.

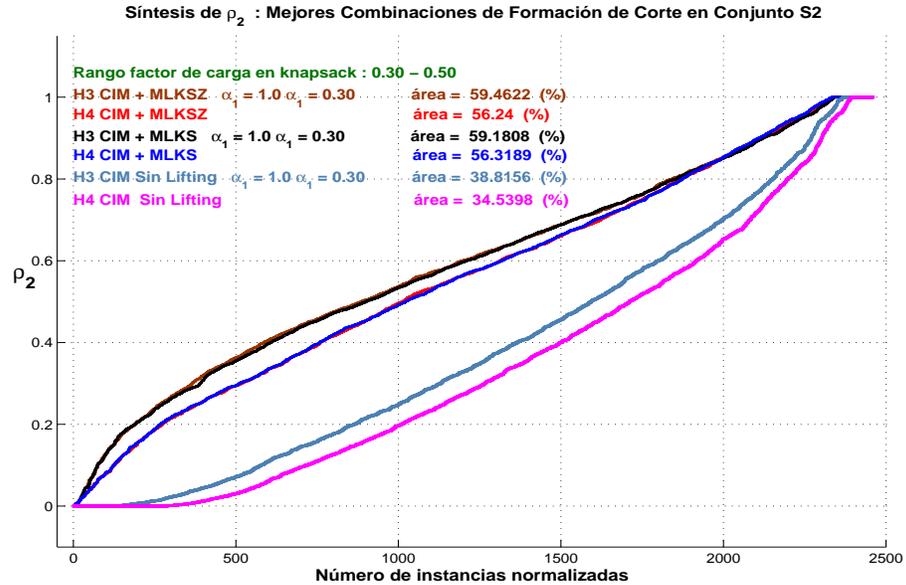


Figura 6.20: Perfil de desempeño del índice ρ_2 sobre conjunto S_2 . Ambos ejes están en escala normal para resaltar los rasgos de las curvas de desempeño. Se despliegan las mejores configuraciones de cortes entre $H3$, $H4$ y sus respectivas metodologías de lifting.

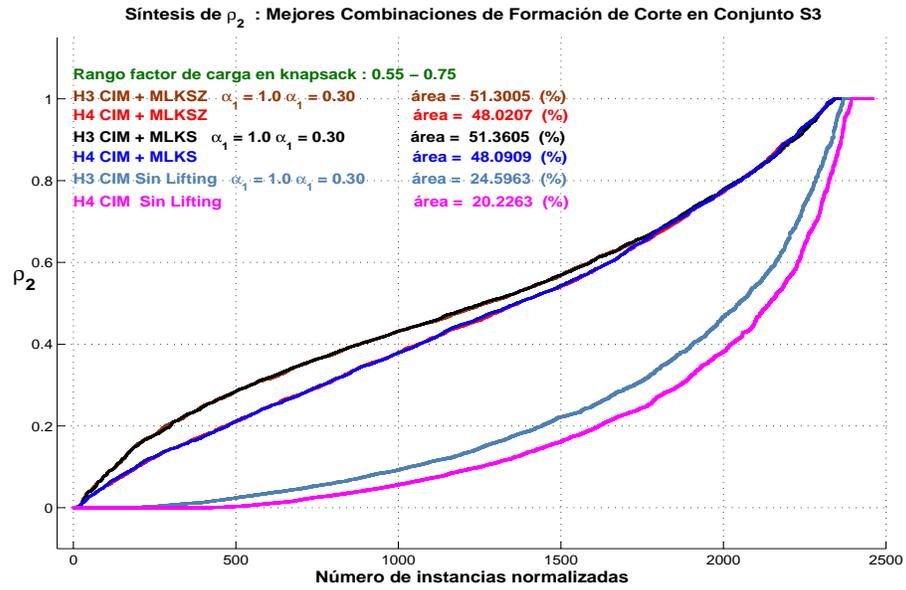


Figura 6.21: Curvas de rendimiento del índice ρ_2 sobre conjunto S_3 . Ambos ejes están en escala normal para resaltar los rasgos de la eficiencia de cada perfil de desempeño. Se exhiben las mejores configuraciones de cortes entre $H3$, $H4$ y sus respectivas metodologías de lifting.

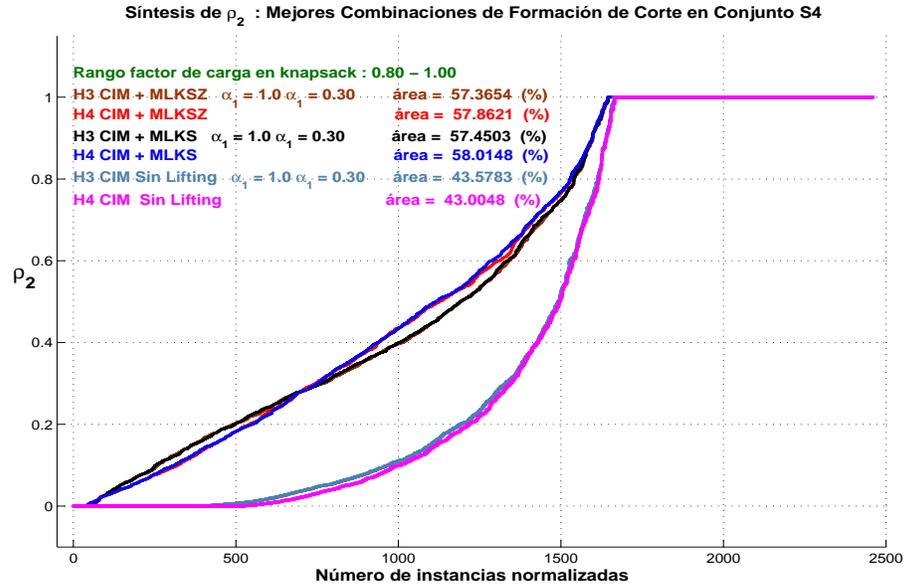


Figura 6.22: Perfiles de desempeño del índice ρ_2 sobre conjunto S_4 . Ambos ejes están en escala normal para resaltar los rasgos de cada curva de rendimiento. Se grafican las mejores configuraciones de cortes entre $H3$, $H4$ y sus respectivas metodologías de lifting.

6.7.1. Comentarios sobre los Mejores Perfiles de Desempeño de ρ_1 y ρ_2

En esta subsección se muestran tablas y se describen las características de las curvas de desempeño de las métricas de calidad ρ_1 y ρ_2 y su representación en perfiles de desempeño.

- Las siguientes tablas exhiben el resumen del área bajo la curva de las métricas de calidad ρ_1 y ρ_2 respecto de los subconjuntos S_1 , S_2 , S_3 , S_4 y la unión de estos subconjuntos.

Resumen del Área Bajo la Curva de ρ_1					
	S_1	S_2	S_3	S_4	S
Factor Carga	[0.05 – 0.25]	[0.30 – 0.50]	[0.55 – 0.75]	[0.80 – 1.00]	[0.05 – 1.00]
	$\int_{S_1} \rho_1(z) dz$	$\int_{S_2} \rho_1(z) dz$	$\int_{S_3} \rho_1(z) dz$	$\int_{S_4} \rho_1(z) dz$	$\int_S \rho_1(z) dz$
Cortes	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)
H3CIMKSZ	98.99	98.99	99.23	99.83	99.26
H4CIMKSZ	99.01	98.92	99.18	99.83	99.23
H3CIMKS	98.24	98.98	99.23	99.83	99.07
H4CIMKS	98.86	98.93	99.18	99.83	99.20
H3CIM	98.69	98.26	98.59	99.72	98.81
H4CIM	98.60	98.10	98.47	99.72	98.73

Cuadro 6.10: La tabla muestra el resumen del área bajo la curva de rendimiento para ρ_1 . La última columna exhibe el área bajo la curva del conjunto $S = \cup_{i=1}^4 S_i$. Se asume que la heurística *H3* fue parametrizada por la configuración óptima ($\alpha_1 = 1.00, \alpha_2 = 0.300$) ver figura 6.4.

Resumen del Área Bajo la Curva de ρ_2					
	S_1	S_2	S_3	S_4	S
Factor Carga	[0.05 – 0.25]	[0.30 – 0.50]	[0.55 – 0.75]	[0.80 – 1.00]	[0.05 – 1.00]
	$\int_{S_1} \rho_2(z) dz$	$\int_{S_2} \rho_2(z) dz$	$\int_{S_3} \rho_2(z) dz$	$\int_{S_4} \rho_2(z) dz$	$\int_S \rho_2(z) dz$
Cortes	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)
H3CIMKSZ	47.30	59.46	51.30	57.36	53.84
H4CIMKSZ	46.40	56.24	48.02	57.86	52.13
H3CIMKS	37.99	59.18	51.36	57.45	51.50
H4CIMKS	44.56	56.31	48.09	58.01	51.75
H3CIM	36.26	38.81	24.59	43.57	35.81
H4CIM	32.89	34.53	20.22	43.00	32.66

Cuadro 6.11: La tabla muestra el resumen del área bajo la curva de desempeño para ρ_2 . La última columna muestra la integral del área bajo de $S = \cup_{i=1}^4 S_i$. Se asume que la heurística *H3* fue parametrizada por la configuración óptima ($\alpha_1 = 1.00, \alpha_2 = 0.300$) ver figura 6.4.

- Las tablas siguientes muestran los montos de los incrementos de áreas respecto de las métricas de calidad ρ_1 y ρ_2 . Estas tablas se construyen con los valores de las tablas 6.10 y 6.11.

Resumen de Diferencias entre Áreas de Debajo de la Curva de ρ_1					
	S_1	S_2	S_3	S_4	S
Factor Carga	[0.05 – 0.25]	[0.30 – 0.50]	[0.55 – 0.75]	[0.80 – 1.00]	[0.05 – 1.00]
	$\Delta(\int_{S_1} \rho_1(z) dz)$	$\Delta(\int_{S_2} \rho_1(z) dz)$	$\Delta(\int_{S_3} \rho_1(z) dz)$	$\Delta(\int_{S_4} \rho_1(z) dz)$	$\Delta(\int_S \rho_1(z) dz)$
Cortes	$\Delta(\%)$	$\Delta(\%)$	$\Delta(\%)$	$\Delta(\%)$	$\Delta(\%)$
H4CIM - H3CIM	0.09	0.15	0.12	0.00	0.09
H4CIMKS - H4CIM	0.26	0.82	0.71	0.11	0.47
H4CIMKSZ - H4CIM	0.41	0.81	0.71	0.11	0.51
H4CIMKSZ - H4CIMKS	0.15	-0.01	0.00	0.00	0.03
H3CIMKS - H3CIM	0.45	0.73	0.64	0.11	0.26
H3CIMKSZ - H3CIM	0.30	0.74	0.64	0.11	0.45
H3CIMKSZ - H3CIMKS	0.75	0.01	0.00	0.00	0.19

Cuadro 6.12: La tablas muestra la diferencia del área bajo la curva entre las configuraciones de cortes asociada a ρ_1 descritas en el cuadro . La heurística $H3$ fue parametrizada por la configuración óptima ($\alpha_1 = 1.00, \alpha_2 = 0.300$) ver figura 6.4. La última columna muestra la integral del área bajo de $S = \cup_{i=1}^4 S_i$.

Resumen de Diferencias entre Áreas de Debajo de la Curva de ρ_2					
	S_1	S_2	S_3	S_4	S
Factor Carga	[0.05 – 0.25]	[0.30 – 0.50]	[0.55 – 0.75]	[0.80 – 1.00]	[0.05 – 1.00]
	$\Delta(\int_{S_1} \rho_2(z) dz)$	$\Delta(\int_{S_2} \rho_2(z) dz)$	$\Delta(\int_{S_3} \rho_2(z) dz)$	$\Delta(\int_{S_4} \rho_2(z) dz)$	$\Delta(\int_S \rho_2(z) dz)$
Cortes	$\Delta(\%)$	$\Delta(\%)$	$\Delta(\%)$	$\Delta(\%)$	$\Delta(\%)$
H4CIM - H3CIM	3.37	4.28	4.37	0.57	3.15
H4CIMKS - H4CIM	11.67	21.78	27.86	15.01	19.08
H4CIMKSZ - H4CIM	13.51	21.70	27.79	14.86	19.47
H4CIMKSZ - H4CIMKS	1.84	-0.07	-0.07	-0.15	0.38
H3CIMKS - H3CIM	1.73	20.37	26.76	13.87	15.69
H3CIMKSZ - H3CIM	11.04	20.65	26.70	13.79	18.03
H3CIMKSZ - H3CIMKS	9.31	0.28	-0.06	0.09	2.34

Cuadro 6.13: La tabla muestra la diferencia del área bajo la curva entre las configuraciones de cortes asociadas a ρ_2 . La heurística $H3$ fue parametrizada por la configuración óptima ($\alpha_1 = 1.00, \alpha_2 = 0.300$) ver figura 6.4. La última columna muestra la integral del área bajo de $S = \cup_{i=1}^4 S_i$.

Se observó que el corte $H3CIM(\alpha_1 = 1.00, \alpha_2 = 0.300) + MLKSZ$ fue levemente superior en el rendimiento que el corte $H4CIM + MLKSZ$ para todas las instancias. La configuración de corte $H4CIM + MLKS$ fue parecida en la eficiencia que el corte

$H3CIM(\alpha_1 = 1.00, \alpha_2 = 0.300) + MLKS$. Se vio que cuando el factor de carga fue tomado del intervalo $[0.35, 1.00]$, las configuraciones de corte $H3CIM(\alpha_1 = 1.00, \alpha_2 = 0.300) + MLKSZ$ y $H4CIM + MLKSZ$ presentaron casi el mismo rendimiento del refinamiento que los cortes $H4CIM + MLKS$ y $H3CIM(\alpha_1 = 1.00, \alpha_2 = 0.300) + MLKS$. Si embargo, cuando el factor de carga sobre el knapsack fue tomado del intervalo $[0.05, 0.25]$ se observó que hubo un menor incremento en la refinación de las formulaciones relajadas producidos por KS y KSZ .

Capítulo 7

Conclusiones y Discusión

7.1. Conclusiones

Los cortes diseñados en esta tesis se pueden utilizar de forma directa en la siguiente aplicación: si se está frente a un yacimiento real y éste presenta un gran volumen de variables de decisión que hace difícil resolver el modelo de optimización entera con secuenciamiento 2.2, se procede a aplicar el siguiente procedimiento para solucionar el problema: primero se resuelve la secuencia espacial de extracción de los bloques descrita por la formulación 4.1 con la relajación de la integralidad de las variables de decisión; para luego robustecer esta formulación con la mejor configuración de corte desarrollado en esta tesis. Así, la nueva solución relajada que se emita se puede usar para resolver, por medio de alguna heurística, la secuencia temporal de extracción y producción sobre los bloques del yacimiento. Por lo tanto, se debería obtener una valoración económica más conveniente que si no se hubiese refinado la relajación del modelo 4.1.

Las siguientes estimaciones numéricas son concernientes al refinamiento de la formulación relajada del *PCKP*. Se hace notar que los valores expuestos son el resultado de las mejores configuraciones de cortes.

1. En base a los experimentos realizados se logró un rango de entre 51.50 a 53.84 (%) de cierre promedio del gap entre la solución relajada original y la nueva solución relajada (cuadro 6.11). Este valor se obtuvo respecto de la métrica de calidad ρ_2 . También, se alcanzó un rango de entre 99.07 a 99.26 (%) de aproximación del modelo *PCKP* relajado respecto del modelo *PCKP* original (cuadro 6.10). Este rango se infirió respecto de la métrica de calidad ρ_1 .
2. Las configuraciones de cortes: $H3CIM(\alpha_1 = 1.00, \alpha_2 = 0.300)$ y $H4CIM$ lograron, en promedio, mejorar las formulaciones relajadas en un intervalo que va desde 32.66 a 35.81 (%) del cierre del gap medido respecto de la métrica de calidad ρ_2 (cuadro 6.11).

3. La metodología de lifting KS (capítulo 4) incrementó en promedio la eficiencia en un rango de entre 15.69 a 19.08 (%) respecto del cierre del gap ρ_2 . En cambio, la metodología de lifting Z (capítulo 5) aumentó la eficiencia en un rango de entre 0.54 a 4.39 (%) (cuadro 6.13).
4. La metodología simultanea de lifting KSZ (Park K. y Park S. [30] y Gu Zonghao [40]) incrementó levemente la eficiencia del lifting KS en un rango de entre 0.38 a 2.34 (%) respecto del cierre del gap ρ_2 (cuadro 6.13). A su vez, KSZ fue superior en rendimiento a Z en un intervalo que va desde 16.61 a 16.87 (%) respecto de la misma métrica de calidad (cuadro 6.8).
5. Del cuadro resume 6.13 se pudo inferir que las metodologías de lifting KS y KSZ contribuyeron en el incremento del cierre del gap ρ_2 en un rango de 20.37 a 27.86 (%), sobre las instancias que les fue modificada la capacidad del knapsack por un factor de carga que fue tomado del intervalo $[0.30, 0.75]$. Por el contrario, la eficiencia de ambas metodologías de lifting disminuyeron a un rango de 11.04 a 15.01 (%) cuando el factor de carga fue tomado del intervalo $[0.05, 0.25] \cup [0.80, 1.00]$.
6. Se observó que los perfiles de desempeño asociado a la métrica de calidad ρ_2 revelaron con nitidez la contribución promedio en el cierre del gap debido al refinamiento sobre los modelos relajados introducidos por:
 - a) Los cortes que solo fueron configurados en función de las desigualdades de CIM .
 - b) y, los cortes que resultaron del fortalecimiento de las desigualdades de CIM por medio de las metodologías de lifting desarrolladas en esta tesis.
7. La forma del perfil de desempeño, referido a la métrica de calidad ρ_2 , facilitó el reconocimiento de los rasgos en el rendimiento de los cortes sobre la mejora de las formulaciones relajadas.
8. Los perfiles de desempeño relacionados a la métrica de calidad ρ_1 ilustraron, también con claridad, el aporte de cada componente de un corte sobre el rendimiento de la mejora de las formulaciones relajadas.
9. Los perfiles de desempeño, asociados a las métricas de calidad ρ_1 y ρ_2 , revelaron que las mejores configuraciones de cortes, sobre un grupo de instancias, no fueron capaces de inferir nuevas soluciones LPs con mejores características de

integralidad que las soluciones LPs originales (ver figuras 6.13 y 6.18 en el extremo izquierdo de cada perfil). Por el contrario, sobre otra colección de instancias, si fueron competentes para obtener nuevas soluciones LPs iguales que las soluciones óptimas enteras (ver figuras 6.13 y 6.18 en el extremo derecho de cada perfil).

- En los perfiles de desempeño se observó que hay un conjunto de instancias en donde el corte formado por la desigualdad de CIM , no mejoró las formulaciones relajadas de este grupo, pero cuando se aplicó alguna metodología de lifting sobre la desigualdad de CIM , este corte si introdujo mejoras en los modelos relajados. Este comportamiento se puede observar en las figuras 6.13 y 6.18 hacia el lado izquierdo.

El cuadro 7.1 presenta la síntesis y clasificación de las configuraciones de cortes que revelaron mejor rendimiento en la mejora de los $PCKPs$ relajados, sobre un grupo numeroso de instancias.

Síntesis y Ranking de los Mejores Cortes			
Configuración de Corte	Posición	Promedio de Mejora	
		Métricas de Calidad	
		ρ_1	ρ_2
		(%)	(%)
<i>H3CIM+MLKSZ</i>	1	99.26	53.84
<i>H4CIM+MLKSZ</i>	2	99.23	52.13
<i>H4CIM+MLKS</i>	3	99.20	51.75
<i>H3CIM+MLKS</i>	4	99.07	51.50
<i>H3CIM</i>	5	98.81	35.81
<i>H4CIM</i>	6	98.73	32.66

Cuadro 7.1: La tabla presenta una clasificación de la productividad de los cortes en función del rendimiento promedio asociado a los perfiles desempeño de las métricas de calidad ρ_1 y ρ_2 . La heurística $H3$ fue parametrizada por la configuración óptima ($\alpha_1 = 1.00, \alpha_2 = 0.300$) ver figura 6.4. Los valores fueron tomados de las cuadros 6.10 y 6.11.

El corte $H3CIM(\alpha_1 = 1,00 \alpha_2 = 0,30)+MLKSZ$ exhibió los mejores resultados en lo cualitativo y cuantitativo sobre la mejora de las formulaciones relajadas. Sin embargo, el corte $H4CIM+MLKSZ$ mostró un desempeño levemente inferior que la mejor configuración.

7.2. Discusión

En base a los resultados del refinamiento que fue aplicado sobre los modelos $PCKPs$ relajados, se preve que se puede mejorar la valoración de un yacimiento real al disponer

de una solución relajada con mejores características de integralidad, inducida por los cortes que se agregan al *PCKP* relajado y que se desarrollaron en esta tesis. Por otra parte, el problema del gran volumen de variables de decisión de un yacimiento real no fue abordado en este trabajo, pero si se puede prever que el tipo de corte que se estudió, puede impactar en la disminución de la cantidad de variables por resolver al fijar sus valores durante las primeras etapas del robustecimiento del *PCKP* relajado, lo que ayuda en un mejor manejo computacional respecto del gran número de variables y el tiempo de que toma en obtener una solución.

El perfil de desempeño del corte formado por el cover inducido minimal $H3CIM(\alpha_1 = 1.00 \alpha_2 = 0.30)$ presentó en promedio mejor rendimiento que lo que hizo el corte formado por el cover inducido minimal $H4CIM$. Este resultado se podría explicar por la manera en que operó la selección de las variables que integraron el cover inducido construido con la heurística $H3CIM(\alpha_1 = 1.00 \alpha_2 = 0.30)$, el cual en promedio presentó un mayor monto de violación que las variables seleccionadas por la heurística $H4CIM$. Sin embargo, cuando ambas desigualdades fueron fortalecidas por la metodología de lifting *KS* (Park K. y Park S. [30]), el corte formado por $H4CIM+MLKS$ mostró mejor desempeño que el corte inferido por $H3CIM(\alpha_1 = 1.00 \alpha_2 = 0.30)+MLKS$. Este comportamiento se podría explicar por la manera en que ambas heurísticas formaron el cover inducido minimal, por el tipo de variables que integraron el grafo dirigido e inducido por cada *CIM* y por la metodología de lifting *KS*. La heurística $H4CIM$ computó el aporte neto esperado a la violación entre cada variable que podría pertenecer a un conjunto hoja y de la contribución de las variables predecesoras inmediatos que podría pertenecer a un conjunto cohojas. De esta manera fue incrementada la esperanza de la cantidad de variables que podrían ser lifteadas por *KS* y que en conjunto sumaron un monto mayor de violación al corte. En cambio la heurística $H3CIM(\alpha_1 = 1.00 \alpha_2 = 0.30)$ se focalizó en seleccionar las variables que integraron el *CIM* sin considerar el aporte a la violación de las variables que podrían ser lifteadas por la metodología de *KS*. Se hace notar que la metodología de lifting *KS* no garantiza que todos sus coeficientes de lifting sean mayores estrictos que cero.

A la luz de los experimentos realizados se observó que la metodología de lifting *KS* (Park K. y Park S. [30], capítulo 4) presentó mayor impacto en el robustecimiento sobre un cover inducido minimal respecto de lo que fortaleció la metodología de lifting *Z* (Gu Zonghao [40], capítulo 5). Esta diferencia de refinamiento se podría explicar en base a la siguiente posible razón: la metodología de lifting *KS* introdujo un mayor monto de violación sobre el corte que se infirió, que lo que introdujo el procedimiento de lifting *Z*, es decir, el conjunto de variables disponibles para ser lifteadas en donde

operó KS presentaría en promedio una cantidad neta mayor de aporte a la violación respecto del conjunto de variables utilizables para ser lifteadas en donde operó Z . Otra razón para que el procedimiento de lifting Z sea menos efectivo, sería que el tamaño del grafo residual fue pequeño para poder computar cada coeficiente de lifting lo más grande posible, lo que pudo incidir en la inferior calidad del corte emitido

En base a los resultados empíricos resultó que el lifting simultáneo KSZ fue levemente mejor en rendimiento de la mejora de la relajación del $PCKP$ respecto del lifting KS . El monto de la diferencia en rendimiento se podría explicar como el aporte independiente que introdujo Z en la mejora de la formulación relajada y de la contribución, también independiente, que introdujo KS sobre la misma formulación. Este comportamiento ha sido visto en otro tipo de problemas de optimización entera, como por ejemplo el Traveling Salesman Problem (TSP) tratado por Dantzing [5]. Sin embargo, por la manera que se implementó la teoría de separación de covers en esta tesis, basado en una perspectiva aproximada, no se puede asegurar siempre que el aporte conjunto de ambas metodologías de lifting operen de manera independiente, ya que cada procedimiento de fortalecimiento no considera en su totalidad la descripción poliedral del problema de optimización entera sobre cada instancia mejorada.

Se observó de los resultados experimentales, que cuando se modificó la capacidad del knapsack sobre una colección de instancias por distintos factores de carga, la eficiencia de la calidad de un corte se vio afectada sobre cada componente que constituye esta desigualdad. Una razón que podría explicar este comportamiento, se basaría en que la construcción de cada corte robustece a la formulación relajada de forma aproximada y no siempre esta mejora equivale a obtener una formulación que permita inferir una nueva solución LP igual que la solución entera óptima.

Los rasgos de cada perfil de rendimiento asociado a cada métrica de calidad, mostraron que la teoría de separación de covers implementada en esta tesis se basó en una perspectiva aproximada. Ya que la mejor configuración de corte inferida en esta tesis (ver cuadro 7.1, figura 6.13 y figura 6.18) fue competente para mejorar la formulación relajada de una colección de instancias que emiten nuevas soluciones LPs que fueron iguales a las soluciones enteras óptimas. Por el contrario, se presentó en otro grupo de instancias, que esta configuración de corte no introdujo ninguna mejora en la formulación relajada, lo que tuvo como consecuencia que las nuevas soluciones LPs no refinaron sus características de integralidad.

Una característica importante que se observó entre un perfil de desempeño de una métrica de calidad respecto de un corte formado solo por la desigualdad de cover inducido minimal; y un perfil del rendimiento, de la misma métrica de calidad, respecto

del corte que representa el lifting que se hizo sobre esta desigualdad de *CIM* se refiere a que hay un grupo de instancias en que el impacto del corte formado por la desigualdad de *CIM*, no introdujo ninguna mejora sobre las formulaciones relajadas. Sin embargo, cuando estas desigualdades fueron robustecidas por alguna metodología de lifting, si se produjo el refinamiento de los modelos. Una posible razón que se puede dar a este comportamiento, radicaría en que la heurística que produce una desigualdad de *CIM* funcionan de manera independiente respecto de la metodología que la robustece, en lo referente a cómo cada una de ellas integra los montos de violación de cada variable que va a formar un corte.

Capítulo 8

Bibliografía

- [1] Balas, E. and E. Zemel: 1978, 'Facets of the Knapsacks Polytope from Minimal Covers'. *SIAM Journal on Applied Mathematics* **34**, 119–148.
- [2] Caccetta., L., e. S. P. H.: 2003, 'An Apliccation of Branch and Cut to Open pit Mine Scheaduling'. *Journal of Global Optimization* **27**, 349–365.
- [3] Caccetta, L. and L. Giannini: 1985, 'On Bounding Technics for the Optimun Pit Limit Problem'. *Proc, Aust, Inst. Min. Metal* **291 N9**, 57–63.
- [4] CPLEX, I.: 2005, 'Versiones : V9.1.3 y V10.2.0. Licencias del Dpto. de Ingenieria Civil Industrial de la Facultad de Ciencias Fisicas y Matematicas, de la Univerisdad de Chile.'.
- [5] Dantzing, G., R. F. S. J.: 1954, 'Solution of a Large-scale Traveling Salesman Problem'. *Operations Researchs* **2**, 393–410.
- [6] David, M., D. P. e. K. S.: 1974, 'Forecasting Departure from Planning in Open Pit Design and Grade Control'. *Proc 12 APCOM* pp. 131–142.
- [7] de Lara, M.: 2007, 'Optimal Scheaduling for Open Pit Mine Extraction: A Heuristic Based Upon Gittins Index'. *CERMICS. Ecole de Points, ParisTech, France*.
- [8] E., G. M.: 1983, 'Mine Scheaduling Optimization with Mixed Integer Programing'. *Mining Engineering* **39**, 793–796.
- [9] Espinoza, D. and M. Gooycolea: 2008, 'EGlib'.
- [10] Frimpong, S. and P. Achireko: 1997, 'The MCS/MFNN algorithm for Open Pit Optimization'. *International Journal of Surface Mining, Reclamation and Enviroment* **11 N1**, 45–52.

- [11] Gauthier, F, J. and R. Gray: 1971, 'Pit Designe by Computer at Gasper Copper Mines'. *CIM Bulletin* **64 N11**, 95–102.
- [12] Gershon, M. E.: 1987, 'An Open-Pit Production Scheaduler: Algorith and Implementation'. *Mining Engineering* **39**, 793–796.
- [13] Giannini., L.M., L. C. P. K. S. C.: 1991, 'PITOPTIM: A New High Speed Network Flow Technique for Optimun Pit Design Facilitating Rapid Sensitivity Analysis'. *AusIMM Proc.* **2**, 57–62.
- [14] Goic, M.: Octubre 31, 2003, 'Formulacion E Implementacion de un Modelo de Programacion Matematico para la Planificacion de Largo Plazo en Mineria a Cielo Abierto'. *Memoria de Titulo*.
- [15] Gomory, R. E.: 1969, 'Some Polyhedral Related and Combinatorial Problems'. *Linear Algebra and Its Applications* **2**, 451–558.
- [16] Hochbaum, D. S. and A. Chen: 1999, 'Performance Analysis and Best Implementations of Old and New Algorithms for the Open-Pit Mining Problem'. *Operations Researchs* **48 N6**, 894 914.
- [17] Huttagosol, P. and R. Cameron: 1992, 'A computer Design of Ultimate Pit Limit by Using Transportation Algorithm'. *Proc 23 APCOM* pp. 443–460.
- [18] Ibarra, O. H., K. K. A.: 1978, 'Approximation Algorithms for Certain Scheaduling Problem'. *Math. Oper. Res.* **4**, 197–204.
- [19] Johnso, T.: 1968, 'Optimun Open-Pit Mine Production Scheaduling'. *PhD Dissertation, Dept. of IEOR, University of California, Berkely* pp. 1–120.
- [20] Johnson, T. and D. Mickle: 1988, 'Optimum Design and Open Pit. An Application in Uranium'. *Proc 12 APCOM, CIM Special and Decision Making in the Mineral Industry* **12**, 331–338.
- [21] Johson., T. B.: 1969, 'A Decade of Digital Computing in the Mining Industry, Chapter 4: Optimun Open Pit Mine Mine Production Scheaduling'. *AIME, New York Chapter 4*, 17–24.
- [22] Lerchs, H. and I. F. Grossmann: 1965, 'Optimun Design of Open-Pit Mines'. *Transactions, C.I.M LXVIII*, 17–24.

- [23] Mariano, J.M et Slam, J.: 1972, 'Ore Reserve Evaluation and Open Pi Planning'. *Proc, 10 APCOM SAIMM*, 130-144.
- [24] Martin., L. S.: 1999, 'Optimization Inventory Stockpiles and Mine Production: An Application of Separable and Goal Programming to Phosphate Mining Using AMPL/CPLEX'. *CIM Bulletin 92* **1030**, 61-64.
- [25] More, E. D. D. J. J.: 2002, 'Benchmarking Optimization Software with Performance Profiles'. *Math. Program. Ser A* **91**, 2001-2013.
- [26] Natasha Boland, Christopher Fricke, G. F.: June 27, 2006, 'A Strengthened Formulation For The Open Pit Mine Production Scheduling Problem'. *Mathematical Programming Society* pp. 1-12.
- [27] Onur., A. and P. Dowd.: 1993, 'Open Pit Optimization-Par 2: Production Scheduling an Inclusion of Roadways'. *Transactions of the Institute of Mining and Metallurgy Section A*, A105-A113.
- [28] Padberg, M. W.: 1973, 'On the Facial Structure of Set Packing Polyhedral'. *Mathematical Programming* **5**, 199-215.
- [29] Pana, M.: 1965, 'The Simulation Approach to Open-Pit Design'. *PROC 5 APCOM. Tucson Arizona* **2**, 1-24.
- [30] Park, K. and S. Park: September 7, 1995, 'Lifting Cover Inequalities For The Precedence-Constrained Knapsack Problem'. *Discrete Applied Mathematics* **72**, 219-241.
- [31] Picard, J.: 1976, 'Maximum Closure of a Graph and applications to Combinatorial Problems'. *Management Science* **22 N11**, 1268-1272.
- [32] R.L.M.J-van de Leesele, C. v. H. and J. van de Klundert: April 29, 1997, 'Lifting Valid Inequalities for the Precedence Constrained Knapsack Problem'. pp. 1-28.
- [33] Shaw, D. X., C. G. C. H.: 1997, 'A Depth-First Dynamic Programming Procedure for the Extended Tree Knapsack Problem in Local Access Network Design'. *Telecommunication System* **7**, 29-43.
- [34] Underwood, R. and B. Tolwinski: 1996, 'A Scheduling algorithm for Open Pit Mines'. *IMA Journal of Mathematics Applied in Business and Industry* **7**, 247-270.

- [35] Wang, Q.: 1996, ‘Long-term Open Pit Production Scheduling Through Dynamic Phase-Bench Sequencing’. *Transactions of the Institute of Mining and Metallurgy Section A* **105**, A99–A104.
- [36] Wolsey, L. A.: 1976, ‘Facets and Strong Valid Inequalities for Integer Programs:’. *Operations Researchs* **24**, 367–372.
- [37] Wolsey., L. A.: 1998, ‘Integer Programming’. *Wile-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization*.
- [38] Wolsey, L. A. and G. L. Nemhauser: 1998, ‘Integer and Combinatorial Optimization’. *Wiley, New York*.
- [39] Wriqth, E.: 1988, ‘Dinamic Programming in Open Pit Minning Sequence Planning’. *Proc 21 APCON* pp. 415–422.
- [40] Zonghao Gu, G. L. N. and M. W.P.Savelsberg: 1997b, ‘Sequence Independent Lifting in Mixed Integer Programming’. *Georgia Institute of Technology School of Industrial and Systems Engineering* pp. 1–23.
- [41] Zonghao Gu, G. L. N. and M. W.P.Savelsberg: December 1995, ‘Lifting Covers Inequalities for 0-1 Integers Programs: Complexity’. *Georgia Institute of Technology School of Industrial and Systems Engineering* pp. 1–15.
- [42] Zonghao Gu, G. L. N. and M. W.P.Savelsberg: October 1997a, ‘Lifting Covers Inequalities for 0-1 Integers Programs: Computation’. *Georgia Institute of Technology School of Industrial and Systems Engineering* pp. 1–21.

Apéndice A

Código de la Librería

En este apéndice se exhiben los encabezados de las funciones que generan las desigualdades covers inducidos minimales. Se sigue con las funciones que fortalecen las desigualdades covers inducidos minimales y se finaliza este con las funciones que integran al grupo de funciones ya mencionadas. Se hace notar que se diseñaron más funciones que gestionan todo el proceso de cálculos, gestionan memoria y que ensamblan el conjunto de funciones. Sin embargo, solo se presentan los encabezados de las funciones que implementan la teoría de separación en covers.

A.1. Funciones que Genera CIM

```
int MMgenerar_IC_Minimal_Heuristica_I ( MMinablock_t *grafo,
                                         int nnodes,
                                         const double*const x,
                                         const double*const a,
                                         const double capacidad,
                                         MMset_t *CIM
                                         )
```

Cuadro A.1: Encabezado de función que produce un *CIM*. en base a la heurística *H1* (subsección 4.7.1)

```
int MMgenerar_IC_Minimal_Heuristica_II ( MMinablock_t *grafo,
                                          int nnodes,
                                          const double*const x,
                                          const double*const a,
                                          const double capacidad,
                                          MMset_t *CIM
                                          )
```

Cuadro A.2: Encabezado de función que produce un *CIM*. en base a la heurística *H2* (subsección 4.7.2)

```

int MMgenerar_IC_Minimal_Heuristica_III (  MMinablock_t *grafo,
                                           int nnodes,
                                           const double*const x,
                                           const double*const a,
                                           const double capacidad,
                                           const double alfa1,
                                           const double alfa2,
                                           MMset_t *CIM
                                           )

```

Cuadro A.3: Encabezado de función que produce un *CIM*. en base a la heurística *H3* (subsección 4.7.3)

```

int MMgenerar_IC_Minimal_Heuristica_IV (  MMinablock_t *grafo,
                                           int nnodes,
                                           const double*const x,
                                           const double*const a,
                                           const double capacidad,
                                           MMset_t *CIM
                                           )

```

Cuadro A.4: Encabezado de función que produce un *CIM*. en base a la heurística *H4* (subsección 4.7.4)

A.2. Funciones de Lifting

```

int MMPKICut (  MMinablock_t *grafo,
                int nnodes,
                MMset_t *CIM,
                const double capacidad,
                const double*const x,
                MMset_t *Varin,
                MMset_t *Gamma,
                double *rhscut
                )

```

Cuadro A.5: Encabezado de función que ejecuta el lifting de Park., K. y Park., S (*KS*) [30] (subsección 4.5.1)

```

int MMrelajación_PKP_Heurística_C (  const MMinablock_t *constgrafo,
                                     const int nnodes,
                                     const double *const x,
                                     double const capacidad,
                                     MMset_t *CIM,
                                     MMset_t *noCIM,
                                     double *const coefr,
                                     double *const coefnic
                                     )

```

Cuadro A.6: Encabezado de función que ejecuta el lifting de Zonghao Gu (Z) [40] (sección 5.5)

A.3. Funciones de Cortes

```

int MMICut (  const int nnodes,
              const int nedges,
              const int*const edges,
              const double *x,
              const double *a,
              const double capacidad,
              int typeH,
              const double alfa1,
              const double alfa2,
              double*const cutval,
              double*const rhs
              )

```

Cuadro A.7: Encabezado de función que emite un corte formado por un cover inducido minimal (apéndice A.1) y que a continuación se fortalecen por alguna metodología de lifting (apéndice A.5)

```

int MMSILCut (  const int nnodes,
                const int nedges,
                const int*const edges,
                const double *x,
                const double *a,
                const double capacidad,
                int typeH,
                const double alfa1,
                const double alfa2,
                int typeR,
                double*const cutval,
                double*const rhs
                )

```

Cuadro A.8: Encabezado de función que emite un corte formado por un cover inducido minimal (apéndice A.1) y que a continuación se fortalecen por alguna metodología de lifting (apéndice A.6)