



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

# Metodología de Diseño de Robots Semi-Pasivos

Tesis Para Optar al Grado de Doctor en Ingeniería Eléctrica

Paul Albert Vallejos Sánchez

Profesor Guía:  
Javier Ruiz del Solar San Martín

Miembros de la Comisión:  
Martin Adams  
Aldo Cipriano Zamorano  
Doris Sáez Hueichapan  
Daniel Sbárbaro Hofer

Santiago, Chile  
Marzo 2011

*A mi amada esposa y a mi adorada hija Antonia*

RESUMEN DE LA TESIS  
PARA OPTAR AL GRADO DE  
DOCTOR EN INGENIERÍA ELÉCTRICA  
POR: PAUL VALLEJOS SÁNCHEZ.  
FECHA: MARZO DE 2011  
PROF. GUÍA: SR. JAVIER RUIZ DEL SOLAR

## METODOLOGÍA DE DISEÑO DE ROBOTS SEMI-PASIVOS

El diseño, la construcción y el control de robots antropomórficos móviles es un desafío aún no resuelto en el ámbito de la robótica móvil. Los robots más avanzados en la actualidad no son capaces de caminar en dos pies de una forma comparable a los seres humanos: tienen problemas al caminar en superficies irregulares, gastan una gran cantidad de energía para desplazarse, caminan de una forma poco natural desde el punto de vista humano, no pueden correr, saltar, ni mucho menos, hacer algún tipo de acrobacia.

Existe un compromiso entre la eficiencia energética y la versatilidad de los robots móviles que aún no ha sido resuelto. Clasificando los robots pasivos según su nivel de actuación se obtienen dos grupos de robots: los robots pasivos, que son eficientes energéticamente, pero muy poco versátiles, y los robots activos, que son versátiles, pero muy ineficientes energéticamente. La existencia de estas dos clases de robots con características complementarias dependiendo del enfoque utilizado en su diseño, plantea el desafío de encontrar una solución intermedia que combine las características positivas de ambos enfoques.

Este trabajo de tesis propone el diseño de un robot semi-pasivo, consistente en un robot activo, que al momento de ser diseñado, considera las condiciones sobre sus parámetros que permiten la existencia de un ciclo de caminata pasiva. Para lograr el diseño y construcción de este robot semi-pasivo se propone una nueva clase de articulaciones de rigidez variable basadas en el principio de torcer cuerdas para obtener un desplazamiento lineal, simple en su construcción y que permite que la dinámica intrínseca del robot fluya naturalmente. La articulación propuesta es construida y validada, obteniendo buenos resultados según lo esperado para su aplicación en un robot bípedo semi-pasivo.

También se propone una nueva metodología que permite encontrar las condiciones sobre los parámetros de un modelo arbitrario de robot de dinámica pasiva que permiten la existencia de un ciclo de caminata pasivo. Esta metodología implementa un proceso de búsqueda que permite encontrar subespacios estables en el espacio de parámetros (regiones con combinaciones de parámetros que producen ciclos de caminata estables) simulando la dinámica del robot para diferentes combinaciones de parámetros. Después de que se seleccionan aleatoriamente las condiciones iniciales, la dinámica del robot se modela paso a paso, verificando la existencia de ciclos de caminata en la sección de Poincaré. La metodología incluye la definición de un algoritmo de búsqueda para explorar el espacio de parámetros, un método para la partición del espacio en hiper-cubos y su manejo eficiente usando las estructuras de datos apropiadas, y el uso de las denominadas funciones de valor que cuantifican la factibilidad de los parámetros resultantes. La metodología es independiente del robot (puede ser usada con cualquier modelo de caminata de dinámica pasiva, sin importar su complejidad), y es robusta (los subespacios estables incorporan un indicador del margen de estabilidad que se encarga de las diferencias entre el modelo del robot y su realización física). Esta metodología es validada en el diseño de un robot semi-pasivo, el que en simulaciones mediante un software externo presenta un ciclo de caminata de dinámica pasiva según lo predicho por los resultados de la aplicación de la metodología.

# Agradecimientos

---

Esta tesis ha requerido un gigantesco trabajo y no hubiese sido posible sin la ayuda de una infinidad de personas, se requeriría otra tesis completa para mencionarlos a todos.

Agradezco a todos quienes participaron de forma activa o pasiva en este titánico trabajo, agradezco a aquellos que aún sin saberlo colaboraron en este trabajo sirviendo de inspiración, generando discusiones, ideas o incluso ayudando a distraerme.

De forma especial le agradezco a mi esposa y a mi hija quienes me han ayudado en todo aspecto posible.

A mi profesor guía Javier Ruiz del Solar, por guiarme, corregirme y mantenerme en el camino durante esta tesis.

A Pablo Guerrero y Rodrigo Palma, por las eternas conversaciones, discusiones y ayudas que me prestaron en las teorías detrás de mi tesis.

A Isao Parra y Rodrigo Asenjo, por su interminable ayuda en los aspectos prácticos, tanto eléctricos como mecánicos del robot.

A Francisco Swett, por su ayuda en la construcción de piezas mecánicas, en el ensamblaje del robot y en la realización de pruebas.

A Jorge Morales, por todo su trabajo de diseño en las piezas mecánicas del robot.

A Fabian Serradell, por su ayuda diseñando y construyendo piezas mecánicas del robot con la máquina CNC.

A Juan Acuña, por su ayuda construyendo piezas mecánicas del robot.

A Felipe Smith por su ayuda construyendo los PCB de los controladores.

A Giuseppe Lavarello por su ayuda en la programación de los microcontroladores.

A Joan Llobet por su ayuda en la implementación del control de equilibrio lateral y del control de la caminata.

Finalmente, agradezco por el financiamiento a CONICYT a través de las becas de doctorado y de ayuda a la realización de tesis doctoral, a MECESUP a través del Proyecto FSM 0601, al Centro Avanzado de Tecnología para la Minería (Proyecto CONICYT FBO09) y a FONDECYT a través del proyecto 1090250.

# Tabla de contenidos

---

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	2
1.1.1. Fundamentación general . . . . .	2
1.1.2. Definición del problema a abordar . . . . .	3
1.2. Objetivos . . . . .	3
1.3. Hipótesis . . . . .	3
1.4. Metodología . . . . .	3
1.5. Aportes del trabajo de tesis . . . . .	4
1.6. Estructura de la tesis . . . . .	4
<b>2. Revisión bibliográfica</b>	<b>5</b>
2.1. Robots bípedos actuales . . . . .	6
2.2. Robots bípedos activos . . . . .	6
2.3. Robots bípedos pasivos . . . . .	7
2.3.1. Metodología de diseño . . . . .	8
2.4. Integración de enfoques pasivo y activo . . . . .	9
2.5. Actuadores de rigidez variable . . . . .	10
2.6. Discusión . . . . .	11
<b>3. Modelos básicos de robots pasivos</b>	<b>12</b>
3.1. Definiciones básicas . . . . .	13
3.1.1. Sistemas de referencia . . . . .	13
3.1.2. Variables . . . . .	13
3.2. Modelo 2D sin rodillas . . . . .	16
3.2.1. Estado . . . . .	17
3.2.2. Definiciones . . . . .	17
3.2.3. Parámetros . . . . .	17
3.2.4. Cinemática directa . . . . .	18
3.2.5. Modelo de transición . . . . .	19

3.2.6.	Modelo de impacto . . . . .	19
3.2.7.	Modelo completo . . . . .	21
3.2.8.	Solución de la caminata . . . . .	22
3.3.	Modelo 2D con rodillas . . . . .	26
3.3.1.	Estado . . . . .	28
3.3.2.	Definiciones . . . . .	28
3.3.3.	Parámetros . . . . .	31
3.3.4.	Cinemática directa . . . . .	31
3.3.5.	Modelos de transición . . . . .	34
3.3.6.	Modelos de impacto . . . . .	35
3.3.7.	Simulación numérica . . . . .	37
3.4.	Discusión . . . . .	38
<b>4.</b>	<b>Metodología propuesta de diseño</b>	<b>39</b>
4.1.	Estabilidad de un conjunto de parámetros . . . . .	40
4.1.1.	Cálculo del mapa de Poincaré . . . . .	40
4.1.2.	Discretización del mapa de Poincaré . . . . .	41
4.1.3.	Estabilidad global de un conjunto de parámetros . . . . .	42
4.2.	Análisis del espacio de parámetros . . . . .	43
4.2.1.	Objetivo . . . . .	43
4.2.2.	Representación de la estabilidad de los parámetros . . . . .	43
4.2.3.	Partición del espacio de parámetros . . . . .	43
4.2.4.	Función de utilidad para el diseño . . . . .	45
4.2.5.	Búsqueda de condiciones sobre los parámetros . . . . .	45
4.3.	Resultados . . . . .	49
4.3.1.	Simplificaciones del espacio de parámetros . . . . .	49
4.3.2.	Función de utilidad de cada parámetro . . . . .	51
4.3.3.	Evaluación de los mapas de Poincaré . . . . .	56
4.3.4.	Búsqueda de las condiciones sobre los parámetros . . . . .	56
4.4.	Discusión . . . . .	63
<b>5.</b>	<b>Articulación de rigidez variable</b>	<b>64</b>
5.1.	Motivación . . . . .	65
5.2.	Modelo de torsión de las cuerdas . . . . .	66
5.2.1.	Definiciones . . . . .	66
5.2.2.	Modelo de las cuerdas . . . . .	67
5.3.	Articulación de prueba . . . . .	71
5.4.	Extensor . . . . .	72

5.4.1.	Definiciones . . . . .	72
5.4.2.	Ecuaciones fundamentales del actuador . . . . .	73
5.4.3.	Comportamiento estático . . . . .	75
5.4.4.	Comportamiento dinámico . . . . .	80
5.5.	Flexor . . . . .	84
5.6.	Articulación completa . . . . .	85
5.6.1.	Resultados numéricos . . . . .	85
5.6.2.	Sistema de control . . . . .	96
5.6.3.	Resultados con la articulación de prueba construida . . . . .	100
5.7.	Discusión . . . . .	115
<b>6.</b>	<b>Diseño y construcción de robot real</b>	<b>120</b>
6.1.	Sistema de actuación . . . . .	121
6.2.	Sistema sensorial . . . . .	121
6.3.	Uso de la metodología propuesta . . . . .	122
6.3.1.	Condiciones esenciales para el diseño . . . . .	122
6.3.2.	Diseño preliminar del robot real . . . . .	123
6.3.3.	Mapas de Poincaré del robot diseñado . . . . .	123
6.3.4.	Análisis del ciclo de caminata . . . . .	125
6.4.	Diseño mecánico del robot real . . . . .	128
6.5.	Construcción mecánica . . . . .	131
6.6.	Electrónica . . . . .	131
6.7.	Control de la caminata . . . . .	134
6.8.	Control de equilibrio . . . . .	137
6.9.	Consumo energético . . . . .	137
6.10.	Discusión . . . . .	138
<b>7.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>139</b>
7.1.	Articulación de rigidez variable . . . . .	140
7.2.	Metodología de diseño . . . . .	140
7.3.	Diseño y construcción de robot real . . . . .	140
7.4.	Aportes del trabajo de tesis . . . . .	141
7.5.	Trabajo futuro . . . . .	141
<b>A.</b>	<b>Tarjetas electrónicas del sistema de control</b>	<b>151</b>
<b>B.</b>	<b>Ecuaciones complejas</b>	<b>155</b>
B.1.	Modelos de robots pasivos . . . . .	156

B.1.1. Modelo 2D sin rodillas . . . . .	156
B.1.2. Modelo 2D con rodillas . . . . .	156
B.2. Actuador de rigidez variable . . . . .	194

# Lista de figuras

---

3.1. Modelo de robot pasivo 2D sin rodillas . . . . .	16
3.2. Impacto del modelo 2D sin rodillas . . . . .	20
3.3. Aproximación de primer orden de $\theta(t)$ . . . . .	24
3.4. Ángulos de la solución algebraica aproximada del modelo 2D sin rodillas . . . . .	25
3.5. Velocidades angulares de la solución algebraica aproximada del modelo 2D sin rodillas . . . . .	25
3.6. Comparación entre la solución numérica y la solución algebraica aproximada del ángulo $\theta$ utilizando el modelo 2D sin rodillas . . . . .	26
3.7. Comparación entre la solución numérica y la solución algebraica aproximada del ángulo $\phi$ utilizando el modelo 2D sin rodillas . . . . .	26
3.8. Modelo de robot pasivo 2D con rodillas . . . . .	27
3.9. Etapas de la caminata del modelo 2D con rodillas . . . . .	28
3.10. Centros de masas en el modelo de robot pasivo 2D con rodillas . . . . .	30
4.1. Ejemplo de mapa de Poincaré . . . . .	42
4.2. Interpretación del parámetro $RMP$ . . . . .	50
4.3. Función de utilidad del parámetro AVN . . . . .	51
4.4. Función de utilidad del parámetro PMT . . . . .	52
4.5. Función de utilidad del parámetro RMP . . . . .	52
4.6. Función de utilidad del parámetro CMhProm . . . . .	53
4.7. Función de utilidad del parámetro CMhDif . . . . .	53
4.8. Función de utilidad del parámetro LargoSSP . . . . .	54
4.9. Función de utilidad del parámetro CMxSIP . . . . .	54
4.10. Función de utilidad del parámetro CMxSSP . . . . .	55
4.11. Función de utilidad del parámetro InerciaSIP . . . . .	55
4.12. Función de utilidad del parámetro InerciaSSP . . . . .	56
4.13. Validación del algoritmo de búsqueda de subespacios estables . . . . .	58
4.14. Evolución de las curvas ROC . . . . .	60
4.15. Curva ROC final . . . . .	61

4.16. Mejor curva ROC . . . . .	61
4.17. ROC AUC . . . . .	62
4.18. Zoom ROC AUC . . . . .	62
5.1. Ejemplo de cuerdas enrolladas . . . . .	65
5.2. Modelo de torsión de las cuerdas . . . . .	66
5.3. Largo longitudinal de las zonas de la cuerda . . . . .	70
5.4. Cuerda torcida en función de las vueltas del motor . . . . .	71
5.5. Articulación de prueba . . . . .	72
5.6. Cuerda en la rodilla en función de las vueltas del motor . . . . .	74
5.7. Ángulo de la articulación en función de las vueltas del motor . . . . .	75
5.8. Seudo razón de reducción en función de las vueltas del motor . . . . .	76
5.9. Torque gravitacional en función de las vueltas del motor . . . . .	76
5.10. Torques en el actuador en función de las vueltas del motor . . . . .	77
5.11. Torques en el actuador en función del ángulo de la articulación . . . . .	78
5.12. Torque acelerante en función de las vueltas del motor . . . . .	78
5.13. Tensión de la cuerda con el actuador detenido . . . . .	79
5.14. Tensión máxima de la cuerda . . . . .	80
5.15. Movimiento de la articulación . . . . .	81
5.16. Tensión de la cuerda de la articulación . . . . .	81
5.17. Velocidad del motor . . . . .	82
5.18. Torque del motor . . . . .	83
5.19. Potencia ejercida por el motor . . . . .	83
5.20. Ángulo de la articulación en función de las vueltas del motor flexor . . . . .	84
5.21. Resultados numéricos para el caso tenso extremo . . . . .	87
5.22. Resultados numéricos para el caso pararse tenso . . . . .	89
5.23. Resultados numéricos para el caso pararse rápido . . . . .	91
5.24. Resultados numéricos para el caso pararse lento . . . . .	94
5.25. Resultados numéricos para el caso tenso . . . . .	95
5.26. Resultados numéricos para el caso acuclillarse . . . . .	97
5.27. Diagrama bloques del controlador de la articulación . . . . .	98
5.28. Diagrama bloques del controlador de posición . . . . .	98
5.29. Diagrama bloques del controlador antagónico . . . . .	99
5.30. Diagrama bloques del controlador de torque . . . . .	99
5.31. Respuestas utilizadas en el método de Ziegler-Nichols . . . . .	101
5.32. Respuesta del control de posición con entrada pulsante . . . . .	102
5.33. Respuesta del control de torque antagónico con entrada pulsante . . . . .	102
5.34. Comportamiento del actuador flexor con entrada pulsante . . . . .	103

5.35. Comportamiento del actuador extensor con entrada pulsante . . . . .	104
5.36. Mediciones de los sensores con entrada pulsante . . . . .	105
5.37. Respuesta del control de posición con entrada sinusoidal de 0,1Hz . . . . .	106
5.38. Respuesta del control antagonico con entrada sinusoidal de 0,1Hz . . . . .	107
5.39. Comportamiento del flexor con entrada sinusoidal de 0,1Hz . . . . .	108
5.40. Comportamiento del extensor con entrada sinusoidal de 0,1Hz . . . . .	109
5.41. Mediciones de los sensores con entrada sinusoidal de 0,1Hz . . . . .	110
5.42. Respuesta del control de posición con entrada sinusoidal de 0,25Hz . . . . .	110
5.43. Respuesta del control antagonico con entrada sinusoidal de 0,25Hz . . . . .	111
5.44. Comportamiento del flexor con entrada sinusoidal de 0,25Hz . . . . .	112
5.45. Comportamiento del extensor con entrada sinusoidal de 0,25Hz . . . . .	113
5.46. Mediciones de los sensores con entrada sinusoidal de 0,25Hz . . . . .	114
5.47. Respuesta del control de posición con entrada sinusoidal de 0,5Hz . . . . .	114
5.48. Respuesta del control antagonico con entrada sinusoidal de 0,5Hz . . . . .	115
5.49. Comportamiento del flexor con entrada sinusoidal de 0,5Hz . . . . .	116
5.50. Comportamiento del extensor con entrada sinusoidal de 0,5Hz . . . . .	117
5.51. Mediciones de los sensores con entrada sinusoidal de 0,5Hz . . . . .	118
6.1. Mapa de Poincaré con las evaluaciones agrupadas . . . . .	124
6.2. Mapa de Poincaré por número de pasos . . . . .	124
6.3. Puntos estables del mapa de Poincaré . . . . .	125
6.4. Simulación sobre el mapa de Poincaré . . . . .	126
6.5. Seis primeros pasos de la simulación . . . . .	126
6.6. Espacio de fase del robot durante la simulación . . . . .	127
6.7. Energía del robot semi-pasivo simulado . . . . .	127
6.8. Velocidad horizontal del robot en la simulación . . . . .	128
6.9. Modelo mecánico y robot real . . . . .	129
6.10. Caminata exhibida por el modelo mecánico . . . . .	129
6.11. Espacio de fase del diseño mecánico . . . . .	130
6.12. Velocidad horizontal del diseño mecánico . . . . .	130
6.13. Pie construído y su modelo mecánico . . . . .	131
6.14. Segmento inferior de la pierna construído y su modelo mecánico . . . . .	132
6.15. Segmento superior de la pierna construído y su modelo mecánico . . . . .	132
6.16. Tronco construído y su modelo mecánico . . . . .	133
6.17. Diagrama de electrónica . . . . .	135
A.1. Circuito lector de sensores . . . . .	152
A.2. Circuito de potencia de los motores . . . . .	153

A.3. Circuito controlador de la articulación . . . . . 154

# Lista de tablas

---

5.1. Comportamiento dinámico del actuador de prueba . . . . .	82
5.2. Condiciones iniciales articulación completa . . . . .	86
5.3. Resultados articulación caso tenso extremo . . . . .	88
5.4. Resultados articulación caso pararse tenso . . . . .	90
5.5. Resultados articulación caso pararse rápido . . . . .	92
5.6. Resultados articulación caso pararse lento . . . . .	93
5.7. Resultados articulación caso tenso . . . . .	93
5.8. Resultados articulación caso acuclillarse . . . . .	96
6.1. Condiciones para deducir las claves del diseño . . . . .	122

---

# Capítulo 1

## Introducción

---

### Contenidos

---

<b>1.1. Antecedentes</b> . . . . .	<b>2</b>
1.1.1. Fundamentación general . . . . .	2
1.1.2. Definición del problema a abordar . . . . .	3
<b>1.2. Objetivos</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>1.3. Hipótesis</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>1.4. Metodología</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>1.5. Aportes del trabajo de tesis</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>1.6. Estructura de la tesis</b> . . . . .	<b>4</b>

---

# 1.1. Antecedentes

## 1.1.1. Fundamentación general

El diseño, la construcción y el control de robots antropomórficos móviles es un desafío aún no resuelto en el ámbito de la robótica móvil. Los robots más avanzados en la actualidad no son capaces de caminar en dos pies de una forma comparable a los seres humanos: tienen problemas al caminar en superficies irregulares, gastan una gran cantidad de energía para desplazarse, caminan de una forma poco natural desde el punto de vista humano, no pueden correr, saltar, ni mucho menos, hacer algún tipo de acrobacia [15].

Este trabajo de tesis plantea la generación de una metodología de diseño de robots bípedos que conciba robots que puedan caminar de una forma natural y eficiente, y con la potencialidad de correr, saltar y desplazarse por terrenos irregulares. La metodología que se generará será validada empíricamente con la construcción de un robot bípedo que cumpla con los requisitos mencionados anteriormente.

Los robots bípedos más exitosos a nivel mundial han sido diseñados y controlados para ser completamente actuados, es decir, tener motores que controlen todas las articulaciones y para ser estables de forma cuasi-estática<sup>a</sup> [51, 69, 103], lo que permite que sea fácil desarrollarles una caminata estable, pero ésta les provee escasa agilidad y capacidad de movimiento, y trae como efecto secundario una gran ineficiencia energética, ya que el sistema de control debe ejercer fuerza contra la gravedad, y de esta forma, oponerse a la dinámica intrínseca del robot [15].

Por otra parte, existe otra clase de robots menos conocidos que han sido desarrollados en forma paralela denominados robots pasivos [53–55]. Estos robots deben su denominación a que no poseen motores y prácticamente no requieren suministro de energía para funcionar. Estos robots son diseñados considerando su dinámica interna y su relación con la fuerza de gravedad [15]. La construcción de un robot pasivo se basa en que el diseño del robot genere una dinámica interna que use la gravedad en su favor, haciendo que el robot camine naturalmente, obteniendo gran parte de la energía utilizada para su desplazamiento de la fuerza de gravedad [54]. Los robots pasivos puros no poseen ningún tipo de actuación. Entonces, se definen los robots semi-pasivos como aquellos robots pasivos que poseen motores que asisten sus movimientos [14, 87]. En estos robots, la cantidad de energía que entregan los motores a la dinámica del robot es mínima. Los robots pasivos son extremadamente eficientes energéticamente, con un nivel de eficiencia más cercano al de los seres humanos que al de los robots activos [49]. Sin embargo, la ausencia de motores trae como consecuencia la inexistencia de cualquier tipo de control, lo que redundaría en que el robot sólo puede avanzar hacia delante, sin poder detenerse ni modificar su trayectoria o velocidad. Por lo mismo, este tipo de robots no es apto para realizar tareas más complejas, como caminar en terrenos irregulares [15].

---

<sup>a</sup>Un robot con estabilidad cuasi-estática es aquel que necesita de motores para permanecer de pie y en que los movimientos del robot son restringidos de forma que la proyección del centro de masa del robot se mantiene siempre dentro de su polígono de soporte.

### 1.1.2. Definición del problema a abordar

La existencia de dos enfoques, activo y pasivo, que poseen características complementarias para enfrentar la caminata de un robot bípedo, plantea el desafío de encontrar una solución intermedia que combine las características positivas de ambos enfoques. Este desafío no ha sido enfrentado aún por los investigadores de forma explícita: los investigadores que han considerado el modelo dinámico del robot al generar la estrategia de control de un robot activo [10, 11, 70, 71, 94] son lo más cercano existente a un enfoque que, utilizando los puntos de vista tanto activo como pasivo, potencie sus características positivas, complementado las de ambas perspectivas.

El problema que se aborda en el trabajo de tesis es el de complementar los enfoques activo y pasivo utilizando el modelo dinámico del robot no sólo en la estrategia de control de un robot activo, sino además en el diseño mecánico del robot. En otras palabras, se desea generar una metodología que permita diseñar una dinámica para el robot activo tal que el sistema de control no tenga que luchar permanentemente contra ésta, sino que su función sea la de generar cambios de trayectoria y mejorar la robustez de la caminata ante irregularidades del terreno.

## 1.2. Objetivos

El objetivo general de esta tesis es generar una metodología de diseño para un robot bípedo que permita la generación de robots eficientes energéticamente.

Se propone que el diseño esté orientado a simplificar la tarea del sistema de control desde el punto de vista energético. Para lograr esto se propone analizar un modelo de robot bípedo pasivo y buscar las restricciones de diseño que permiten la existencia de una caminata pasiva estable, luego utilizar estas restricciones para la construcción de un robot activo. Finalmente se propone generar un sistema de control que utilice los motores para inyectar al sistema la energía que el robot pasivo normalmente extraería de la gravedad.

## 1.3. Hipótesis

La hipótesis de este trabajo consiste en que si se crea un robot activo que tenga una dinámica intrínseca con un ciclo de caminata pasiva estable, el robot tendrá una eficiencia energética mayor que el de un robot activo tradicional.

## 1.4. Metodología

Se propone la siguiente metodología para la generación de un robot activo que posea una dinámica intrínseca con un ciclo de caminata pasiva estable:

1. Analizar el modelo de un robot pasivo, buscando las restricciones de diseño que generan ciclos de caminata estables.
2. Diseñar y construir un robot que cumpla con las restricciones de diseño obtenidas del análisis del modelo de robot pasivo y que adicionalmente posea motores en todas las articulaciones,

permitiendo que el sistema de control pueda inyectar la energía que normalmente se extraería de la gravedad a través de un plano inclinado.

3. Diseñar y construir articulaciones de rigidez variable que permitan que la dinámica intrínseca del robot se exprese adecuadamente.
4. Diseñar el sistema de control considerando la dinámica intrínseca previamente obtenida del sistema pasivo.

Este nuevo enfoque permitirá generar un robot activo con todas las características positivas típicas un robot activo tradicional (puede estar quieto de forma estable, tiene la potencialidad de caminar en terrenos irregulares, de subir y bajar escaleras, etc.), pero con un estilo de caminata más natural y con una eficiencia energética mucho mayor.

## 1.5. Aportes del trabajo de tesis

Se propone una metodología para encontrar las condiciones sobre los parámetros de un modelo arbitrario de caminatas de dinámica pasiva [89]. En la literatura no existe ninguna metodología que permita encontrar las condiciones sobre los parámetros de un modelo arbitrario. Los resultados de la aplicación de esta metodología son promisorios, logrando el diseño de un robot semi-pasivo que en simulaciones presenta un ciclo de caminata estable.

Se presenta un nuevo tipo de articulación de rigidez variable basada en el principio de torcer cuerdas para generar un desplazamiento lineal. La mecánica involucrada en estas articulaciones es bastante simple y el resultado es aplicable en los sistemas de actuación de robots bípedos. Dentro de las ventajas de estas articulaciones propuestas se destacan la flexibilidad para poner los motores en cualquier ubicación, permitiendo acomodar los centros de masa en el caso de requerirlo, facilidad para controlar la rigidez y permitir la fluidez de la dinámica intrínseca del robot, pocas pérdidas energéticas por roce.

Se diseña un robot bípedo semi-pasivo que en las simulaciones presenta un ciclo de caminata de dinámica pasiva. Actualmente el robot está en la etapa final de construcción y validación.

## 1.6. Estructura de la tesis

La tesis está estructurada de la siguiente forma: El capítulo 2 presenta una revisión bibliográfica de robots bípedos pasivos y activos, de intentos de integración de enfoques y de actuadores de rigidez variable. El capítulo 3 muestra los modelos de robots pasivos utilizados. El capítulo 4 propone una metodología para encontrar las condiciones sobre los parámetros del robot que permiten la existencia de un ciclo de caminata estable. El capítulo 5 introduce un nuevo tipo de actuador de rigidez variable basado en torcer cuerdas. El capítulo 6 muestra el proceso de diseño y construcción de un robot real semi-pasivo, utilizando la metodología propuesta en el capítulo 4 y los actuadores presentados en el capítulo 5. Finalmente, el capítulo 7 presenta conclusiones, discusiones y el trabajo futuro.

# Revisión bibliográfica

---

## Contenidos

---

2.1. Robots bípedos actuales . . . . .	6
2.2. Robots bípedos activos . . . . .	6
2.3. Robots bípedos pasivos . . . . .	7
2.3.1. Metodología de diseño . . . . .	8
2.4. Integración de enfoques pasivo y activo . . . . .	9
2.5. Actuadores de rigidez variable . . . . .	10
2.6. Discusión . . . . .	11

---

### 2.1. Robots bípedos actuales

Los robots bípedos pueden ser agrupados de acuerdo a su nivel de actuación en robots activos o robots pasivos. Los desarrollos en ambos tipos de robots han conseguido importantes logros [84, 93].

Los robots bípedos más sofisticados en la actualidad son robots activos y basan su control de estabilidad en mantener el ZMP (Zero Moment Point) dentro del polígono de soporte, utilizando para esto un complicado control de trayectorias.

Se destacan dentro de los robots bípedos actuales el robot WABIAN (Waseda BiPedal Humanoid) [51, 103] desarrollado por la universidad Waseda, el robot JOHNNIE [69] desarrollado por la universidad de Múnich, el robot ASIMO [8, 9, 76] desarrollado por Honda, y el robot QRIO desarrollado por Sony.

En los robots tanto activos como pasivos muchas veces se utilizan simuladores para probar el diseño del robot y los algoritmos de control de estabilidad utilizados antes de realizarlos en la realidad [20, 24, 32, 44, 72, 91]. Esto disminuye el tiempo de desarrollo y produce mejores resultados.

En el último tiempo se han realizado varios trabajos comparando los distintos enfoques, obteniendo como resultado la conclusión de que cada enfoque tiene ventajas y desventajas, dejando entrever que una mezcla de enfoques podría obtener mejores resultados [91, 101].

### 2.2. Robots bípedos activos

Estos robots aseguran su estabilidad utilizando un complejo sistema de actuación, el que normalmente está compuesto de servomotores y que utiliza comúnmente el ZMP como indicador de estabilidad. Sin embargo, la definición del ZMP es ambigua y se han propuesto nuevos indicadores con una definición más rigurosa [30, 77].

Los indicadores de estabilidad utilizados en los robots activos son explicados en [22], donde se muestra el FRI (Foot Rotation Indicator) como el indicador de estabilidad por excelencia. El FRI se define como el punto en la superficie de contacto pie-piso dentro o fuera de la superficie convexa de soporte en la cual el momento resultante de la fuerza/torque aplicado al pie es normal a la superficie [22]. Los robots activos tradicionales, en los que se realiza control de trayectoria en las articulaciones para generar un equilibrio cuasi-estático, basan su estabilidad en mantener su FRI dentro de su polígono de soporte [28].

El criterio de mantener el FRI dentro del polígono de soporte del robot, genera reglas sobre las trayectorias permitidas en un robot activo, pero no limita todos los grados de libertad del robot, por lo que generalmente la caminata de un robot activo se determina completamente mediante un proceso de optimización numérica sujeta a las reglas dadas por el equilibrio cuasi-estático [28].

En el control de robots activos, también se ha utilizado el control del ZMP [22, 88] en conjunto con un modelo de péndulo invertido, de forma tal que al controlar el ZMP permite la generación de patrones de caminata que son capaces de subir escaleras [39].

El control de trayectoria en las articulaciones para controlar el ZMP se basa en generar trayectorias para todas las articulaciones que mantienen en todo instante el ZMP dentro del polígono de soporte, estas trayectorias son construidas cinemáticamente y para transformarlas en dinámicamente estables se disminuye su velocidad [44]. Otros robots generan funciones parametrizables

que aseguran la estabilidad y luego utilizan un generador de trayectorias online que cambia los parámetros de acuerdo a las necesidades de la aplicación [7, 88].

El control de trayectoria de las articulaciones se realiza con controladores PID en cada articulación, los que reciben como referencia la trayectoria deseada y utilizan encoders para medir la posición real y calcular el error de posición. Existen autores que califican este tipo de control como de lazo abierto pues no se utiliza una retroalimentación que considere el sistema completo, sino que las retroalimentaciones son solo locales [50].

El robot HRP-2 es un robot activo que usando el principio de mantener el ZMP dentro del polígono de soporte es capaz de caminar por terrenos irregulares de forma exitosa [41–43]. El robot HRP-3 es uno de sus sucesores [2], y es incluso capaz de correr utilizando la técnica de estabilización del ZMP [40].

Algunos robots utilizan el modelo de un péndulo invertido como modelo del robot para generar una ley de control que genere una caminata estable [18, 80, 85].

## 2.3. Robots bípedos pasivos

Los robots bípedos pasivos surgen de estudiar la importancia del sistema de control y de los actuadores en un caminante, en particular en el ser humano, donde el sistema de control es el sistema nervioso y los actuadores son el sistema muscular. Para intentar responder esta pregunta, se propuso que el sistema dinámico de un robot bípedo es estable y capaz de caminar incluso en la ausencia de sistemas de control, y que la función del sistema de control es modificar levemente el comportamiento del sistema [54]. En una primera instancia se demostró que un sistema bípedo plano sin rodillas podía ser diseñado para ser estable [54], luego se generó un modelo de un sistema bípedo plano con rodillas, el que también resultó ser estable con ciertos parámetros [55].

El estudio de los robots pasivos ha estado fuertemente ligado al estudio biológico de la caminata humana, llegándose a decir que la caminata humana tiene una fuerte componente pasiva [54]. Y no sólo se ha estudiado la forma de caminar de los robots pasivos, sino que incluso se han encontrado modelos planos de robots pasivos en los que el correr es una condición estable [53].

El concepto detrás de las caminatas de dinámica pasiva fue introducido por McGeer cerca de 1990 [52–58]. En su trascendental trabajo, McGeer analizó el comportamiento cíclico de sistemas mecánicos puramente pasivos que son capaces de desplazarse en un plano inclinado. El comportamiento cíclico resulta del balance entre las pérdidas energéticas debidas a los impactos y el aumento de energía debido a la pendiente (energía potencial gravitacional se transforma en energía cinética) [38].

La investigación en robots bípedos pasivos ha aumentado mucho desde el trabajo precursor de McGeer [13–15, 20, 23, 24, 29, 32, 45, 67, 72, 87, 96].

Debido a la complejidad de los modelos de caminatas pasivas, algunos de los análisis han sido realizados usando modelos linealizados [24].

En muchos de los trabajos con robots pasivos se muestra la eficiencia energética como un factor fundamental, y se dice que es este factor el que determina la forma de caminar, en la que se escogen los parámetros que minimizan el gasto energético [46, 47, 49], determinando inclusive la velocidad a la cual se cambia el caminar por correr [75].

La estabilidad de los robots pasivos ha sido estudiada mediante modelos linealizados [54, 55], modelos no lineales [24] y mediante simulaciones [20, 72].

Los límites de desempeño de los robots bípedos pasivos han sido estudiados para determinar que distribución de masa y diseño de robot en general es capaz de obtener una mayor eficiencia y velocidad [21].

El estudio de robots pasivos también fue posteriormente expandido a modelos tridimensionales, expandiendo los resultados del modelo de rueda sin borde y del modelo de pies puntuales, que previamente fueron restringidos a un plano, a un espacio tridimensional [13, 15]. La estabilidad tridimensional ha sido resuelta mediante oscilaciones laterales pasivas [45, 102], con estabilización lateral independiente utilizando actuadores [72], o con la dinámica cero híbrida en los robots pasivos actuados [5].

Los diversos robots pasivos creados han sido analizados en detalle en simulaciones antes de su construcción. Este análisis detallado en simulaciones ha dado lugar a algunas tesis de doctorado [20, 72], donde se aprecian las diferencias entre los distintos modelos postulados en la literatura y se aprecia que no todos los modelos tridimensionales pueden generar caminatas estables [20].

Dada la dificultad de encontrar modelos tridimensionales que sean estables en las simulaciones, algunos investigadores han utilizado sus modelos planos de robots bípedos pasivos estables y los han llevado directamente a la realidad. A través de un proceso de prueba y error han llegado a configuraciones estables en la realidad [15].

Algunos robots pasivos han sido actuados mínimamente para generar robots bípedos que son capaces de caminar en terrenos sin pendientes [14, 87], dando lugar a robots eficientes, pero aún con problemas al caminar en terrenos irregulares y con dificultades al girar.

Muchos de los análisis de caminatas de dinámica pasiva realizan un análisis de estabilidad orbital estudiando la linealización de su mapa de Poincaré [65, 78], sin embargo, en el último tiempo se han realizado estudios que analizan la estabilidad local de la órbita en su camino entre las intersecciones con la sección de Poincaré [65]. Este análisis se enfoca en estimar la inestabilidad generada por perturbaciones perpendiculares a la órbita, y su mayor utilidad es en el momento de generar un sistema de control para los robots semi-pasivos, ya que permitiría generar un sistema de control que gaste energía sólo para compensar perturbaciones que generarían inestabilidades y no en aquellas que son intrínsecamente estables.

Algunas de las características principales de los robots pasivos son la eficiencia energética, simplicidad mecánica y apariencia natural de sus caminatas [98]. Estas características son el resultado del hecho de que en las caminatas de dinámica pasiva el robot utiliza su dinámica natural en vez de tratar de restringirla continuamente.

### 2.3.1. Metodología de diseño de robots pasivos

Los modelos de robots pasivos no triviales incluyen pies, rodillas, tronco, dentro de otras partes. Adicionalmente, para aumentar la posibilidad de que un robot real se comporte similar a su modelo, es necesario incrementar la complejidad del modelo, incluyendo más características físicas del robot. Esto lleva rápidamente a la imposibilidad de determinar las condiciones sobre los parámetros del robot<sup>a</sup> requeridos para la existencia de un ciclo de caminata estable. Aunque algunas características físicas han sido asociadas a la existencia de un ciclo de caminata pasiva [96], el autor no tiene conocimiento de ninguna metodología para encontrar las condiciones sobre los

---

<sup>a</sup>Los parámetros que definen las características del robot, como las masas, largos y momentos de inercia de las diferentes componentes del robot.

parámetros para un modelo pasivo arbitrario. Usualmente, los diseñadores de robot pasivos siguen un proceso de diseño de prueba y error, el cual típicamente usa conocimiento cualitativo sobre los modelos de caminatas pasivas (sacado de la literatura), y en el cual la existencia de un ciclo de caminata estable para el modelo de robot pasivo es verificado usando un análisis de estabilidad empírico.

## 2.4. Integración de enfoques pasivo y activo

Aunque actualmente la mejor forma de hacer robots bípedo eficientes energéticamente es el uso de los conceptos de los robots pasivos [47, 82], todavía hay un compromiso entre eficiencia y versatilidad [48]. La fusión de la eficiencia y la versatilidad es aún un gran desafío, y la existencia de un premio para un robot con estas dos cualidades lo prueba [59].

Además del desarrollo de modelos pasivos más complejos, que incluyen tronco, pies y rodillas, los investigadores han propuesto robots semi-pasivos, para obtener un cierto grado de control sobre los robots y evitar la necesidad de utilizar planos inclinados [14, 29, 68, 87, 97, 98]. En los robots semi-pasivos la energía es inyectada por actuadores en vez de la gravedad, lo que les permite caminar sin la necesidad de una pendiente, contribuyendo adicionalmente a la versatilidad y a la estabilidad de los ciclos pasivos [23, 67, 99]. Adicionalmente, inspirados en las ideas de caminatas de dinámica pasiva, hay robots activos que usan su dinámica intrínseca como una referencia para su sistema de control. Esto permite el uso de actuadores pequeños, simples y baratos [104–107]. Resultando robots que son capaces de llevar a cabo movimientos complejos, como jugar fútbol [110].

Los robots semi-pasivos comparten las principales características de los robots pasivos, la eficiencia energética, simplicidad mecánica y apariencia natural de sus caminatas [98].

Existen algunos robots activos que han recogido el modelo de péndulo invertido para la pierna de soporte [33, 34]. Incluso, algunos utilizan el modelo de péndulo de dos segmentos para la pierna que se balancea utilizado normalmente en los robots pasivos [11, 70, 71, 94]. Estos robots activos mueven en ciertos momentos su FRI fuera del polígono de soporte, para lograr una mejor naturalidad al caminar.

Uno de los intentos de integración de los enfoques pasivo y activo es el diseño y construcción del robot RABBIT [11]. En el diseño de su caminata se consideró que un paso estaba compuesto de tres etapas: etapa subactuada, etapa completamente actuada y una etapa instantánea de doble soporte. En la etapa subactuada el robot está constantemente cayendo y mantiene su FRI estrictamente delante del pie de soporte (fuera del polígono de soporte). En la etapa completamente actuada, el robot se mantiene en equilibrio cuasi-estático, manteniendo su FRI dentro del polígono de soporte, el que corresponde al pie de soporte. La etapa instantánea de doble soporte corresponde a un instante de tiempo en el cual se realiza el cambio de pie de soporte, momento en el cual aparecen fuerzas y torques impulsivos.

Los modelos obtenidos para las fases subactuada y la completamente actuada son modelos no lineales a los que se les calcula la dinámica cero [37] y se les define una cierta ley de control, en tanto que la etapa de doble soporte se puede definir como un mapa de transición de estado [108]. Todas estas etapas pueden ser compuestas y su resultado define un mapa de Poincaré [78], al que se le mide la estabilidad mediante el análisis de los valores propios de su linealización [35]. La estabilidad del mapa de Poincaré determina reglas para los parámetros de la ley de control.

La metodología utilizada en el desarrollo de RABBIT (mencionada anteriormente), utiliza el trabajo presentado en [16], donde se muestra cómo lidiar con la estabilización de orbitales de sistemas subactuados. El funcionamiento de RABBIT se basa en encontrar orbitales estables, es decir, movimientos periódicos de sus articulaciones, la forma de encontrar las leyes de control que generan estos orbitales estables se encuentra en el trabajo presentado en [16].

El análisis de estabilidad es llevado a cabo normalmente usando mapas de Poincaré, con el impacto del pie como la sección de Poincaré [25–27, 60–63, 94, 95]. Bajo este paradigma, el análisis de estabilidad es llevado a cabo discretizando la sección de Poincaré usando una grilla regular. El criterio para la existencia de un ciclo de caminata es buscar los puntos en la sección de Poincaré que son mapeados en si mismos, o que después de algunas iteraciones son finalmente mapeados en si mismos. Esta metodología tiene un gran problema: tiende a tener aliasing, siendo muy sensible al paso de discretización (el tamaño de la grilla). Condiciones estables e inestables pueden ser mezcladas en el mismo punto de la grilla por culpa de la discretización seleccionada. Por lo tanto, puede suceder que algunas condiciones iniciales que provocan una caída después de algunos pasos, se mapeen suficientemente cerca para ser consideradas como pertenecientes al mismo punto de la grilla, y por lo tanto, parte de una caminata estable.

## 2.5. Actuadores de rigidez variable

Los actuadores de rigidez variable son aquellos actuadores que además de controlar la posición o torque ejercido en el sentido de movimiento, controlan su rigidez, es decir, cuanta resistencia ejercen en contra de las fuerzas externas [73, 92]. Los actuadores de rigidez variable surgen principalmente como una solución al contacto entre robots y humanos de forma segura para los humanos [1, 3, 12, 31]. Sin embargo, otras aplicaciones también han necesitado poder controlar la resistencia que ejerce una articulación no sólo a los humanos, sino también a la gravedad. En particular, al actuar un robot bípedo pasivo, el uso de actuadores de rigidez variable aparece casi como una necesidad [83].

En el contexto de la interacción robot-humano, se desarrolló un brazo robótico con control de rigidez [3]. Sus articulaciones son casi rígida, pero además del controlador de posición, tiene un controlador que mide el torque y varía su resistencia a las fuerzas externas activamente utilizando sólo un motor. Este controlador lo que hace es generar una inercia del rotor del motor artificial que es menor que la del rotor real. Ellos encontraron que el enfoque de activamente controlar la resistencia a las fuerzas externas activamente no era suficiente, por lo que le introducen un mecanismo elástico en serie consistente en resortes, presentando un mecanismo cuasi-antagónico, en el que un motor controla la posición y otro motor controla la rigidez a través de resortes en serie.

Los actuadores de rigidez variable por excelencia utilizan dos motores en una configuración antagónica, en que se utilizan ambos motores para ejercer movimiento, cada uno de ellos conectado mecánicamente con la articulación a través de un mecanismo elástico [19, 31, 73].

Con el objetivo de generar robots que caminen y corran de una forma robusta y eficiente energéticamente también se han incorporado los actuadores de rigidez variable a robots bípedos [36].

Otras aplicaciones de los actuadores de rigidez variable son las prótesis activas [6, 79] y las máquinas de rehabilitación [90, 109].

En los actuadores de rigidez variable existe una motivación biológica, la que también introduce el uso de tendones en este tipo de actuación [31, 86].

La mayoría de los actuadores de rigidez variable utilizan mecanismos neumáticos, hidráulicos, cuerdas que son enrolladas por motores de corriente continua y resortes o elásticos en serie con la articulación, sin embargo, existe una aplicación en que se utiliza un actuador lineal basado en torcer cuerdas para realizar movimientos microscópicos [81]. Este actuador se basa en el principio arcaico de torcer cuerdas para generar un acortamiento de éstas, a pesar de que este principio no ha sido utilizado nunca en robótica, es interesante por su simplicidad y por no necesitar mecanismos complejos.

## 2.6. Discusión

Se han realizado estudios sobre los distintos modelos y estrategias de control utilizados [35], mostrando las ventajas y desventajas de los distintos enfoques, y resaltando la ausencia de marcos de trabajo teóricos suficientemente generales que permitan derivar controladores estables que tomen en cuenta la dinámica de los robots. En este contexto, se hace necesario generar metodologías de diseño que sean aplicables a los nuevos modelos más genéricos y realistas que surjan en el futuro.

En el siguiente capítulo se muestran los modelos de robots de dinámica pasiva que se utilizarán en la metodología de diseño de robots pasivos que luego se propondrá en el capítulo 4.

# Modelos básicos de robots pasivos

---

## Contenidos

---

<b>3.1. Definiciones básicas</b>	<b>13</b>
3.1.1. Sistemas de referencia	13
3.1.2. Variables	13
<b>3.2. Modelo 2D sin rodillas</b>	<b>16</b>
3.2.1. Estado	17
3.2.2. Definiciones	17
3.2.3. Parámetros	17
3.2.4. Cinemática directa	18
3.2.5. Modelo de transición	19
3.2.6. Modelo de impacto	19
3.2.7. Modelo completo	21
3.2.8. Solución de la caminata	22
<b>3.3. Modelo 2D con rodillas</b>	<b>26</b>
3.3.1. Estado	28
3.3.2. Definiciones	28
3.3.3. Parámetros	31
3.3.4. Cinemática directa	31
3.3.5. Modelos de transición	34
3.3.6. Modelos de impacto	35
3.3.7. Simulación numérica	37
<b>3.4. Discusión</b>	<b>38</b>

---

## **3.1. Definiciones básicas**

### **3.1.1. Sistemas de referencia**

#### **Sistema de coordenadas**

Se utiliza el sistema de coordenadas global en cartesianas ubicado en el pie de soporte orientado con el eje  $x$  hacia adelante y el eje  $y$  hacia arriba.

#### **Puntos relevantes**

$PB$ : Pie que se balancea.

$PS$ : Pie de soporte.

$T$ : Tronco.

### **3.1.2. Variables**

#### **Propiedades físicas**

$g$ : Gravedad.

$\alpha$ : Ángulo del plano inclinado.

#### **Dimensiones físicas del robot**

$M_{tronco}$ : Masa del tronco.

$M_{pie}$ : Masa del pie.

$M_{SSP}$ : Masa del segmento superior de la pierna.

$M_{SIP}$ : Masa del segmento inferior de la pierna.

$I_{SIP}$ : Momento de inercia del segmento inferior de la pierna.

$I_{SSP}$ : Momento de inercia del segmento superior de la pierna.

$L$ : Largo de la pierna completa.

$L_{SIP}$ : Largo del segmento inferior de la pierna.

$L_{SSP}$ : Largo del segmento superior de la pierna.

#### Posiciones de los segmentos del robot

Su notación está compuesta de tres partes: el encabezado *pos*, el objeto cuya posición está siendo definida, y con respecto a que punto. Por ejemplo,  $\overrightarrow{posTroncoPS}$  es la posición del tronco con respecto al pie de soporte.

$\overrightarrow{posPieBalPS}$ : Posición del pie de balanceo con respecto al pie de soporte. Es un vector de dos dimensiones en coordenadas cartesianas.

$\overrightarrow{posPieBalT}$ : Posición del pie de balanceo con respecto al tronco. Es un vector de dos dimensiones en coordenadas cartesianas.

$\overrightarrow{posTroncoPB}$ : Posición del tronco con respecto al pie de balanceo. Es un vector de dos dimensiones en coordenadas cartesianas.

$\overrightarrow{posTroncoPS}$ : Posición del tronco con respecto al pie de soporte. Es un vector de dos dimensiones en coordenadas cartesianas.

$\overrightarrow{posRodSopPS}$ : Posición de la rodilla de la pierna de soporte con respecto al pie de soporte. Es un vector de dos dimensiones en coordenadas cartesianas.

$\overrightarrow{posRodBalPS}$ : Posición de la rodilla de la pierna de balanceo con respecto al pie de soporte. Es un vector de dos dimensiones en coordenadas cartesianas.

$\overrightarrow{posSIPBalPS}$ : Posición del centro de masa del segmento inferior de la pierna de balanceo con respecto al pie de soporte. Es un vector de dos dimensiones en coordenadas cartesianas.

$\overrightarrow{posSIPSopPS}$ : Posición del centro de masa del segmento inferior de la pierna de soporte con respecto al pie de soporte. Es un vector de dos dimensiones en coordenadas cartesianas.

$\overrightarrow{posSSPBalPS}$ : Posición del centro de masa del segmento superior de la pierna de balanceo con respecto al pie de soporte. Es un vector de dos dimensiones en coordenadas cartesianas.

$\overrightarrow{posSSPSopPS}$ : Posición del centro de masa del segmento superior de la pierna de soporte con respecto al pie de soporte. Es un vector de dos dimensiones en coordenadas cartesianas.

#### Velocidades de los segmentos del robot

Su notación está compuesta de dos partes: el encabezado (*vel* para las velocidades de desplazamiento y  $\omega$  para las velocidades angulares), y el objeto cuya velocidad está siendo definida. Por ejemplo,  $\overrightarrow{velTronco}$  es la velocidad del tronco.

$\overrightarrow{velPieBal}$ : Velocidad del pie de balanceo. Es un vector de dos dimensiones en coordenadas cartesianas.

$\overrightarrow{velTronco}$ : Velocidad del tronco. Es un vector de dos dimensiones en coordenadas cartesianas.

$\overrightarrow{velSIPBal}$ : Velocidad del segmento inferior de la pierna de balanceo. Es un vector de dos dimensiones en coordenadas cartesianas.

### 3.1. Modelos básicos de robots pasivos: Definiciones básicas.

---

$\overrightarrow{velSIPsop}$ : Velocidad del segmento inferior de la pierna de soporte. Es un vector de dos dimensiones en coordenadas cartesianas.

$\overrightarrow{velSSPBal}$ : Velocidad del segmento superior de la pierna de balanceo. Es un vector de dos dimensiones en coordenadas cartesianas.

$\overrightarrow{velSSPSop}$ : Velocidad del segmento superior de la pierna de soporte. Es un vector de dos dimensiones en coordenadas cartesianas.

$\omega_{SIPBal}$ : Velocidad angular del segmento inferior de la pierna de balanceo.

$\omega_{SIPsop}$ : Velocidad angular del segmento inferior de la pierna de soporte.

$\omega_{SSPBal}$ : Velocidad angular del segmento superior de la pierna de balanceo.

$\omega_{SSPSop}$ : Velocidad angular del segmento superior de la pierna de soporte.

$\omega_{Tronco}$ : Velocidad angular del tronco.

#### Momentos de inercia del robot

Su notación está compuesta de tres partes: el encabezado  $M$ , el objeto cuyo momento está siendo definido, y con respecto a que punto. Por ejemplo,  $M_{robotPS}$  es el momento de inercia del robot con respecto al pie de soporte.

$M_{robotPS}$ : Momento de inercia del robot completo con respecto al pie de soporte.

$M_{robotPB}$ : Momento de inercia del robot completo con respecto al pie de balanceo.

$M_{sopT}$ : Momento de inercia de la pierna de soporte con respecto al tronco.

$M_{balT}$ : Momento de inercia de la pierna de balanceo con respecto al tronco.

#### Otras variables de interés

$\theta$ : Ángulo del segmento inferior de la pierna de soporte con respecto a la vertical (ver secciones 3.2.1 y 3.3.1).

$\phi$ : Ángulo de separación entre los segmentos superiores de la piernas (ver secciones 3.2.1 y 3.3.1).

$\gamma$ : Ángulo de la rodilla de la pierna de balanceo (ver secciones 3.2.1 y 3.3.1).

$q$ : Vector con todos los ángulos del modelo del robot ( $\theta$ ,  $\phi$ , y  $\gamma$ , según corresponda) (ver secciones 3.2.1 y 3.3.1).

$Q$ : Vector compuesto por los ángulos y las velocidades angulares del modelo (ver secciones 3.2.1 y 3.3.1).

$V$ : Energía potencial.

### 3.2. Modelos básicos de robots pasivos: Modelo 2D sin rodillas.

$K$ : Energía cinética.

$Lg$ : Lagrangiano.

$\tau$ : Período de un paso.

### 3.2. Modelo 2D sin rodillas

El modelo 2D sin rodillas es modelo de robot propuesto inicialmente por McGeer [52], en el cual todos los trabajos posteriores se han inspirado. Este modelo tiene una versión más simple llamada modelo “*Más Simple*” en [20] que es de mucha utilidad, pues se pueden encontrar las caminatas pasivas de forma analítica. Este modelo consiste en un robot bípedo sin rodillas, con una gran masa puntual en la cadera y masas puntuales pequeñas en los pies. El modelo 2D sin rodillas considera el límite cuando las masas de los pies tienden a cero, por lo que en este análisis se considerarán dos variantes del modelo 2D sin rodillas, una con masa en los pies para la obtención de las ecuaciones del modelo y una sin masa en los pies para la obtención de una solución algebraica. En la figura 3.1 se aprecia el modelo 2D sin rodillas.

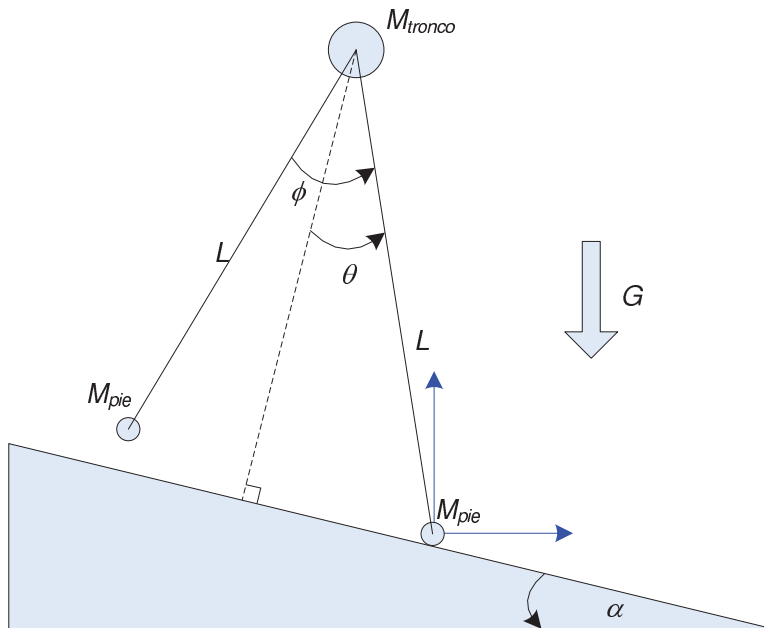


Figura 3.1: Modelo de robot pasivo 2D sin rodillas.

La caminata se puede modelar como la unión de dos etapas: una etapa de transición en que una pierna está apoyada en la superficie mientras la otra se balancea suavemente hacia adelante y una etapa instantánea de impacto, en que la pierna que se balanceaba golpea inelásticamente el piso y cambia de rol con la pierna que soportaba el cuerpo. Se define un paso como una etapa de transición seguida por una etapa instantánea de impacto.

### 3.2.1. Estado

El estado del modelo 2D sin rodillas está definido por el ángulo  $\theta$  de la pierna de soporte con respecto al piso, por el ángulo  $\phi$  entre la pierna de soporte y la de balanceo y por sus velocidades angulares  $\dot{\theta}$  y  $\dot{\phi}$ . El vector de estado está definido por:

$$q = \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix}. \quad (3.1a)$$

$$Q = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}. \quad (3.1b)$$

### 3.2.2. Definiciones

El objetivo del análisis de este modelo es que el robot camine en un plano, por lo tanto, es conveniente separar la energía potencial en dos campos de potencial, uno vertical que corresponda a la gravedad real y otro horizontal que posteriormente será realizado por el sistema de control y generará el desplazamiento propiamente tal. Teniendo esto en consideración, se define la gravedad según:

$$G = \frac{g}{\text{Cos}(\alpha)}. \quad (3.2)$$

Con  $\alpha$  definido como el ángulo de la superficie de apoyo, la que posee una pendiente  $Avn$  definida de acuerdo:

$$Avn = \text{Tan}(\alpha). \quad (3.3)$$

Definiendo Porcentaje de masa en el tronco  $M_t$  de acuerdo con:

$$M_{tronco} = M_t \cdot M. \quad (3.4)$$

Donde  $M$  corresponde a la masa total del robot. Se puede observar fácilmente que la masa del pie está determinada por:

$$M_{pie} = \frac{1 - M_t}{2} \cdot M. \quad (3.5)$$

Y definiendo finalmente la frecuencia del péndulo equivalente  $\omega$  según:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (3.6)$$

Donde  $g$  es la aceleración de gravedad y  $L$  es el largo de la pierna.

### 3.2.3. Parámetros

Los parámetros de este modelo se definen como:

1. Frecuencia del péndulo equivalente  $\omega$ .

2. Pendiente  $Avn$ .
3. Masa total  $M$ .
4. Porcentaje de masa en el tronco  $M_t$ .

#### 3.2.4. Cinemática directa

La posición del tronco en coordenadas cartesianas con respecto al pie de soporte está dada por:

$$\overrightarrow{posTroncoPS} = \begin{pmatrix} -L \cdot \sin(\theta) \\ L \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Y utilizando los parámetros definidos se obtiene:

$$\overrightarrow{posTroncoPS} = \begin{pmatrix} -\frac{g \cdot \sin(\theta)}{\omega^2} \\ \frac{g \cdot \cos(\theta)}{\omega^2} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

La posición del pie de balanceo con respecto al tronco está dada por:

$$\overrightarrow{posPieBalT} = \begin{pmatrix} -L \cdot \sin(\phi - \theta) \\ -L \cdot \cos(\phi - \theta) \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Y utilizando los parámetros definidos se obtiene:

$$\overrightarrow{posPieBalT} = \begin{pmatrix} \frac{g \cdot \sin(\theta - \phi)}{\omega^2} \\ -\frac{g \cdot \cos(\theta - \phi)}{\omega^2} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Por lo tanto, la posición del pie de balanceo con respecto al pie de soporte está dada por:

$$\overrightarrow{posPieBalPS} = \begin{pmatrix} -\frac{g \cdot \sin(\theta)}{\omega^2} + \frac{g \cdot \sin(\theta - \phi)}{\omega^2} \\ \frac{g \cdot \cos(\theta)}{\omega^2} - \frac{g \cdot \cos(\theta - \phi)}{\omega^2} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

También es importante conocer la posición del tronco con respecto al pie de balanceo, la que está dada por:

$$\overrightarrow{posTroncoPB} = -\overrightarrow{posPieBalT}. \quad (3.12)$$

Reemplazando la ecuación (3.10) en la ecuación (3.12) se obtiene:

$$\overrightarrow{posTroncoPB} = \begin{pmatrix} -\frac{g \cdot \sin(\theta - \phi)}{\omega^2} \\ \frac{g \cdot \cos(\theta - \phi)}{\omega^2} \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Luego, derivando la ecuación (3.8) se obtiene la velocidad del tronco, dada por:

$$\overrightarrow{velTronco} = \begin{pmatrix} -\frac{g \cdot \cos(\theta) \cdot \dot{\theta}}{\omega^2} \\ -\frac{g \cdot \sin(\theta) \cdot \dot{\theta}}{\omega^2} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Derivando la ecuación (3.11) se obtiene la velocidad del pie de balanceo con respecto al tronco, dada por:

$$\overrightarrow{velPieBal} = \begin{pmatrix} -\frac{g \cdot \text{Cos}(\theta) \cdot \dot{\theta}}{\omega^2} + \frac{g \cdot \text{Cos}(\theta - \phi) \cdot (\dot{\theta} - \dot{\phi})}{\omega^2} \\ -\frac{g \cdot \text{Sin}(\theta) \cdot \dot{\theta}}{\omega^2} + \frac{g \cdot \text{Sin}(\theta - \phi) \cdot (\dot{\theta} - \dot{\phi})}{\omega^2} \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

### 3.2.5. Modelo de transición

El modelo de transición de un paso se obtiene mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange. La energía potencial  $V$  está definida por:

$$V = M_{tronco} \cdot g \cdot \overrightarrow{posTroncoPS}^T \cdot \begin{pmatrix} -Avn \\ 1 \end{pmatrix} + M_{pie} \cdot g \cdot \overrightarrow{posPieBalPS}^T \cdot \begin{pmatrix} -Avn \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

La energía cinética  $K$  está definida por:

$$K = \frac{M_{tronco} \cdot \overrightarrow{velTronco}^T \cdot \overrightarrow{velTronco}}{2} + \frac{M_{pie} \cdot \overrightarrow{velPieBal}^T \cdot \overrightarrow{velPieBal}}{2}. \quad (3.17)$$

El lagrangiano  $Lg$  se calcula con la ecuación:

$$Lg = K - V. \quad (3.18)$$

Entonces, según el método de Euler-Lagrange, las ecuaciones de movimiento quedan determinadas por:

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Lg}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial Lg}{\partial \theta}. \quad (3.19a)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Lg}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial Lg}{\partial \phi}. \quad (3.19b)$$

De las ecuaciones (3.19) se pueden despejar las aceleraciones angulares como una función de las velocidades y posiciones angulares, estas expresiones se aprecian en las ecuaciones (B.1).

Es fácil ver que las ecuaciones (B.1) no dependen de la masa total del robot  $M$ , del largo de la pierna  $L$ , ni de la aceleración de gravedad  $g$ . Sólo dependen indirectamente del largo de la pierna y de la aceleración de gravedad a través del parámetro de escala  $\omega$ .

Se debe notar que el modelo de transición usado no considera el roce en el robot, por lo que al momento de diseñar un robot real se debe disminuir el roce al máximo.

### 3.2.6. Modelo de impacto

En el momento del impacto ocurre un cambio de coordenadas del vector de estado, el que se puede apreciar en la figura 3.2.

De la figura 3.2 se desprende fácilmente que la coordenada  $\phi^+$  después del impacto está dada por la ecuación:

### 3.2. Modelos básicos de robots pasivos: Modelo 2D sin rodillas.

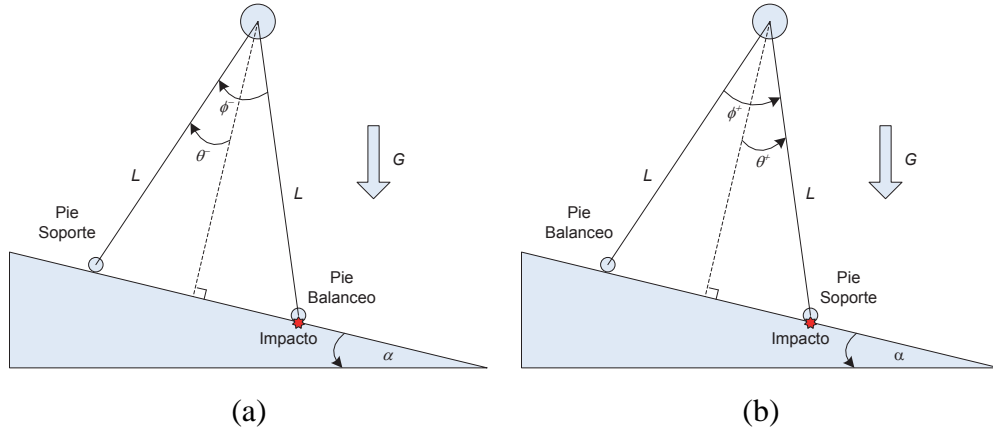


Figura 3.2: Cambio de coordenadas en el impacto para el modelo 2D sin rodillas. (a) Estado antes del impacto. (b) Estado después del impacto.

$$\phi^+ = -\phi^- . \quad (3.20)$$

Y que la coordenada  $\theta^+$  después del impacto está dada por la ecuación:

$$\theta^+ = \theta^- - \phi^- . \quad (3.21)$$

Adicionalmente, en el momento del impacto aparece una fuerza impulsiva en el punto de contacto. Dado que el impacto es considerado como una colisión perfectamente inelástica, entonces se conserva el momentum de todo el robot en torno al punto de impacto y de la pierna que no impacta con respecto al tronco.

El momentum de todo el robot en torno al punto de impacto justo antes del impacto está dado por la ecuación (3.22), donde sólo aparece el tronco porque antes del impacto el pie de soporte tiene velocidad cero y el pie de balanceo se encuentra justo en el punto de colisión.

$$M_{robotPB}(q^-, \dot{q}^-) = M_{tronco} \cdot \overrightarrow{posTroncoPB}(q^-) \times \overrightarrow{velTronco}(q^-, \dot{q}^-) . \quad (3.22)$$

El momentum de todo el robot en torno al punto de impacto justo después del impacto está dado por la ecuación (3.23), donde no aparece el pie de soporte por tener velocidad cero.

$$\begin{aligned} M_{robotPS}(q^+, \dot{q}^+) &= M_{tronco} \cdot \overrightarrow{posTroncoPS}(q^+) \times \overrightarrow{velTronco}(q^+, \dot{q}^+) \\ &\quad + M_{pie} \cdot \overrightarrow{posPieBalPS}(q^+) \times \overrightarrow{velPieBal}(q^+, \dot{q}^+) . \end{aligned} \quad (3.23)$$

El momentum de la pierna de soporte con respecto al tronco justo antes del impacto  $M_{sopT}(q^-, \dot{q}^-)$  es cero pues la pierna de soporte tiene velocidad cero.

El momentum de la pierna de balanceo con respecto al tronco justo después del impacto está dado por:

$$M_{balT}(q^+, \dot{q}^+) = M_{pie} \cdot \overrightarrow{posPieBalT}(q^+) \times \overrightarrow{velPieBal}(q^+, \dot{q}^+) . \quad (3.24)$$

### 3.2. Modelos básicos de robots pasivos: Modelo 2D sin rodillas.

---

Luego, la conservación del momentum angular de todo el robot con respecto al punto de impacto está dada por:

$$M_{robotPB}(q^-, \dot{q}^-) = M_{robotPS}(q^+, \dot{q}^+). \quad (3.25)$$

La conservación del momentum de la pierna que no impacta con respecto al tronco está dada por:

$$0 = M_{balT}(q^+, \dot{q}^+). \quad (3.26)$$

Utilizando las restricciones de las ecuaciones (3.20) y (3.21) en las ecuaciones (3.25) y (3.26) se pueden despejar las velocidades angulares inmediatamente después del impacto, obteniendo  $\dot{\theta}^+$  de acuerdo a la ecuación:

$$\dot{\theta}^+ = \frac{4 \cdot M_t \cdot \text{Cos}(\phi^-) \cdot \theta^-}{1 + 3 \cdot M_t + (M_t - 1) \cdot \text{Cos}(2 \cdot \phi^-)}. \quad (3.27)$$

Y  $\dot{\phi}^+$  de acuerdo a la ecuación:

$$\dot{\phi}^+ = 2 \cdot \text{Sin}(\theta^+)^2 \cdot \dot{\theta}^+. \quad (3.28)$$

Como se puede apreciar en la figura 3.2, en el momento del impacto existe una relación geométrica entre las componentes del vector de estado, que está dada por la restricción de tener piernas iguales y estar con ambos pies en el piso. Esta relación es la ecuación:

$$\phi = 2 \cdot \theta. \quad (3.29)$$

Si se considera como comienzo de un paso el momento justo después de un impacto, la restricción de la ecuación (3.29) en conjunto con la ecuación (3.28) hacen que las condiciones iniciales queden determinadas sólo por  $\theta$  y  $\dot{\theta}$ .

#### 3.2.7. Modelo completo

Considerando que el impacto sigue a la transición, entonces se debe cumplir:

$$\theta(\tau) = \theta^-. \quad (3.30a)$$

$$\phi(\tau) = \phi^-. \quad (3.30b)$$

$$\dot{\theta}(\tau) = \dot{\theta}^-. \quad (3.30c)$$

$$\dot{\phi}(\tau) = \dot{\phi}^-. \quad (3.30d)$$

Donde  $\tau$  corresponde al período del paso.

Y como después de un impacto vuelve a haber una etapa de transición, entonces se cumple:

$$\theta(0) = \theta^+. \quad (3.31a)$$

### 3.2. Modelos básicos de robots pasivos: Modelo 2D sin rodillas.

$$\phi(0) = \phi^+. \quad (3.31b)$$

$$\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}^+. \quad (3.31c)$$

$$\dot{\phi}(0) = \dot{\phi}^+. \quad (3.31d)$$

Reemplazando la ecuación (3.20) en la ecuación (3.31b), se obtiene:

$$\phi(0) = -\phi^-. \quad (3.32)$$

Reemplazando la ecuación (3.30b) en la ecuación (3.32), se obtiene:

$$\phi(0) = -\phi(\tau). \quad (3.33)$$

#### 3.2.8. Solución de la caminata

Para el caso del modelo 2D sin rodillas sin masa en los pies, la ecuación (3.19a) se expresa según:

$$2 \cdot \omega^2 \cdot (Avn \cdot \cos(\theta) - \sin(\theta)) + 2 \cdot \ddot{\theta} = 0. \quad (3.34)$$

Y la ecuación (3.19b) se expresa según:

$$\omega^2 \cdot (Avn \cdot \cos(\theta - \phi) - \sin(\theta - \phi)) + (\cos(\phi) - 1) \cdot \ddot{\theta} + \ddot{\phi} = \sin(\phi) \cdot \dot{\theta}^2. \quad (3.35)$$

Linealizando la ecuación (3.34) en torno a cero se obtiene:

$$\ddot{\theta} - \omega^2 \cdot \theta + Avn \cdot \omega^2 \approx 0. \quad (3.36)$$

La ecuación (3.37) muestra la solución de la ecuación (3.36), donde  $\theta_0$  es el ángulo  $\theta$  inicial,  $\dot{\theta}_0$  es la velocidad angular  $\dot{\theta}$  inicial y  $t$  es el tiempo transcurrido.

$$\theta(t) \approx Avn + (\theta_0 - Avn) \cdot \cosh(\omega \cdot t) + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega} \cdot \sinh(\omega \cdot t). \quad (3.37)$$

Utilizando las ecuaciones de transición (3.37), restricción de doble soporte (3.29), cambio de coordenadas en el impacto (3.20) y (3.21), y condiciones entre etapas (3.30a), (3.30b), (3.31a) y (3.31b) se obtiene la ecuación (3.38) que determina el período de un paso  $\tau$ .

$$\tau \approx \frac{\text{Log} \left( \sqrt{\frac{\dot{\theta}_0^2 + 4 \cdot Avn \cdot \theta_0 \cdot \omega^2}{(\dot{\theta}_0 + (\theta_0 - Avn) \cdot \omega)^2}} - \frac{(Avn + \theta_0) \cdot \omega}{\dot{\theta}_0 + (\theta_0 - Avn) \cdot \omega} \right)}{\omega}. \quad (3.38)$$

Es fácil ver que para evitar que el robot caiga se debe cumplir la restricción:

$$0 < Avn < \theta_0. \quad (3.39)$$

### 3.2. Modelos básicos de robots pasivos: Modelo 2D sin rodillas.

También es evidente la restricción de la ecuación (3.40), la que se basa en tener suficiente energía inicial para llegar al siguiente paso.

$$\dot{\theta}_0 < (Avn - \theta_0) \cdot \omega. \quad (3.40)$$

La velocidad angular  $\dot{\theta}$  durante la transición se obtiene derivando la ecuación (3.37), resultando:

$$\dot{\theta}(t) \approx (\theta_0 - Avn) \cdot \omega \cdot \text{Sinh}(\omega \cdot t) + \dot{\theta}_0 \cdot \text{Cosh}(\omega \cdot t). \quad (3.41)$$

Utilizando la ecuación de evolución de la velocidad angular  $\dot{\theta}$  durante la transición (3.41), la ecuación del período de un paso  $\tau$  (3.38), y las ecuaciones de impacto (3.27) y (3.30c) se obtiene:

$$\dot{\theta}_0 \approx -\sqrt{\dot{\theta}_0^2 + 4 \cdot Avn \cdot \theta_0 \cdot \omega^2} \cdot \text{Cos}(2 \cdot \theta_0). \quad (3.42)$$

Resolviendo la ecuación (3.42) se obtiene la solución para la velocidad angular inicial  $\dot{\theta}_0$ :

$$\dot{\theta}_0 \cong -2 \cdot \sqrt{Avn \cdot \theta_0} \cdot \omega \cdot |\text{Cot}(2 \cdot \theta_0)|. \quad (3.43)$$

Reemplazando las ecuación (3.28) en la ecuación (3.31d) se obtiene:

$$\dot{\phi}_0 = 2 \cdot \text{Sin}(\theta^+)^2 \cdot \dot{\theta}^+. \quad (3.44)$$

Reemplazando luego las ecuaciones (3.31a) y (3.31c) en la ecuación (3.44) se obtiene:

$$\dot{\phi}_0 = 2 \cdot \text{Sin}(\theta_0)^2 \cdot \dot{\theta}_0. \quad (3.45)$$

Linealizando  $\theta(t)$  dado por la ecuación de transición (3.37) se obtiene  $\theta_L(t)$ :

$$\theta(t) \approx \theta_L(t) = \theta_0 + \frac{2 \cdot t \cdot \theta_0}{\tau}. \quad (3.46)$$

En la figura 3.3 se aprecia la aproximación de primer orden de  $\theta(t)$ .

Considerando que los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  son pequeños, entonces se pueden realizar las aproximaciones:

$$\text{Cos}(\theta - \phi) \approx 1. \quad (3.47)$$

$$\text{Sin}(\theta - \phi) \approx \theta - \phi. \quad (3.48)$$

$$\text{Cos}(\phi) \approx 1. \quad (3.49)$$

$$\text{Sin}(\phi) \approx \phi. \quad (3.50)$$

Realizando las aproximaciones (3.47), (3.48), (3.49) y (3.50) sobre la ecuación (3.35) se obtiene la ecuación:

$$\omega^2 \cdot (Avn - \theta + \phi) + \ddot{\phi} = \phi \cdot \dot{\theta}^2. \quad (3.51)$$

### 3.2. Modelos básicos de robots pasivos: Modelo 2D sin rodillas.

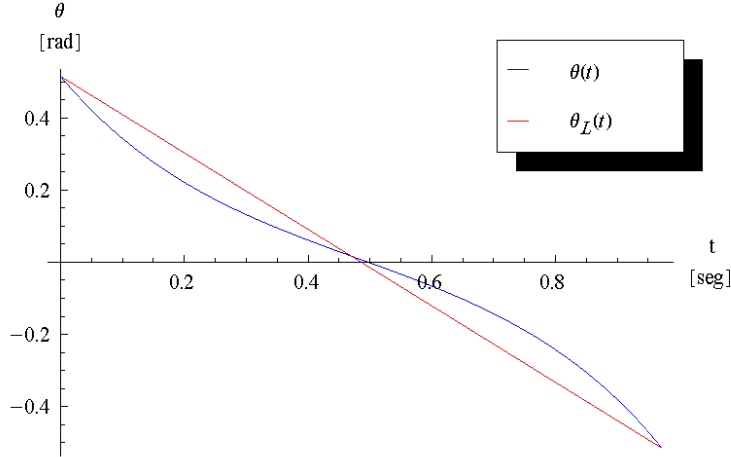


Figura 3.3: Aproximación de primer orden de  $\theta(t)$ . En azul la función no lineal  $\theta(t)$ . En Rojo  $\theta_L(t)$ , la aproximación de primer orden de  $\theta(t)$ .

Y si consideramos en la ecuación (3.51) la linealización (3.46) se obtiene la ecuación:

$$\omega^2 \cdot \left( Avn + \theta_0 \cdot \left( \frac{2 \cdot t}{\tau} - 1 \right) + \phi \right) + \ddot{\phi} = \frac{4 \cdot \theta_0^2 \cdot \phi}{\tau^2}. \quad (3.52)$$

La ecuación (3.52) puede ser resuelta algebraicamente. Su solución, en conjunto con las ecuaciones (3.43), (3.45), (3.38), y (3.33) permiten obtener una expresión para  $\theta_0$ , la que depende únicamente de los parámetros del modelo.

En conclusión, se han obtenido todas las ecuaciones, que a partir de los parámetros permiten encontrar las condiciones iniciales que generarán un ciclo estable. La existencia de un ciclo estable está determinada por la existencia real de estas condiciones iniciales. A continuación se muestran las cuatro condiciones de existencia:

$$0 < Avn < \theta_0. \quad (3.53a)$$

$$\omega > 0. \quad (3.53b)$$

$$\dot{\theta}_0 < (Avn - \theta_0) \cdot \omega. \quad (3.53c)$$

$$\dot{\theta}_0 \geq \frac{(Avn + \phi^{4 \cdot \theta_0} (Avn - \theta_0) - \theta_0 - 2\phi^{2 \cdot \theta_0} (Avn + \theta_0)) \cdot \omega}{-1 + \phi^{4 \cdot \theta_0}}. \quad (3.53d)$$

En la figura 3.4 se muestra la evolución de los ángulos según las ecuaciones descritas anteriormente para dos pasos.

En la figura 3.5 se muestra la evolución de las velocidades angulares según las ecuaciones descritas anteriormente para dos pasos.

### 3.2. Modelos básicos de robots pasivos: Modelo 2D sin rodillas.

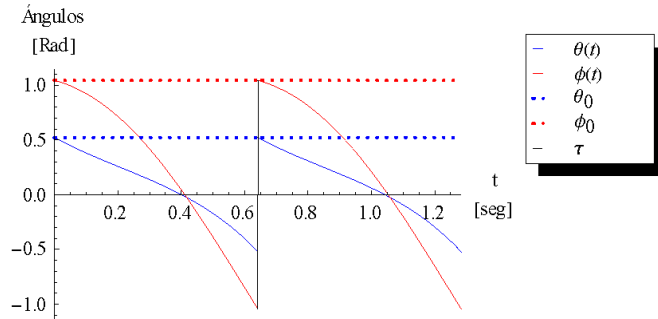


Figura 3.4: Ángulos de la solución algebraica aproximada del modelo 2D sin rodillas.

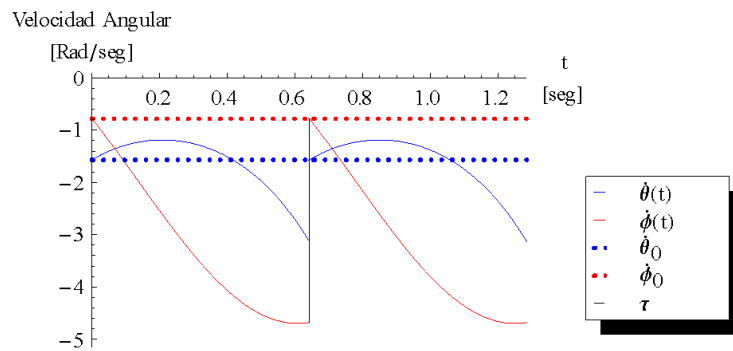


Figura 3.5: Velocidades angulares de la solución algebraica aproximada del modelo 2D sin rodillas.

### 3.3. Modelos básicos de robots pasivos: Modelo 2D con rodillas.

Para verificar las soluciones encontradas se contrastan con una solución encontrada numéricamente utilizando la función *NDSolve* del software *Mathematica*. En la figura 3.6 se aprecia la comparación entre la solución numérica y la solución algebraica aproximada del ángulo  $\theta$ .

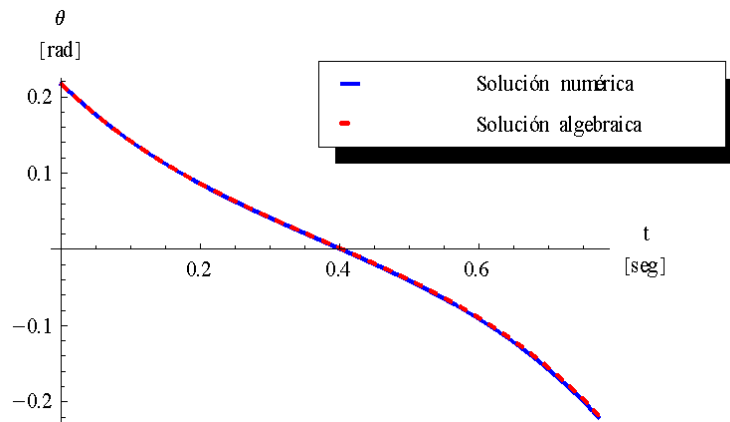


Figura 3.6: Comparación entre la solución numérica y la solución algebraica aproximada del ángulo  $\theta$  utilizando el modelo 2D sin rodillas.

En la figura 3.7 se aprecia la comparación de las velocidades angulares de la solución numérica y de la solución algebraica aproximada.

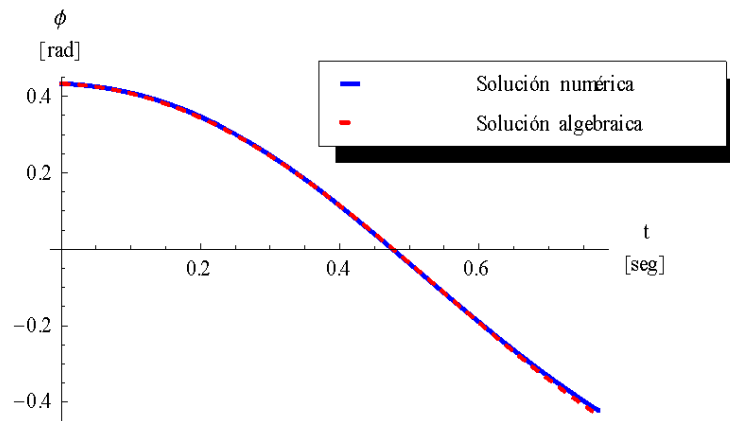


Figura 3.7: Comparación entre la solución numérica y la solución algebraica aproximada del ángulo  $\phi$  utilizando el modelo 2D sin rodillas.

### 3.3. Modelo 2D con rodillas

El modelo 2D con rodillas es el modelo más complejo que se analizará. Este modelo consiste en un robot bípedo con rodillas, sin pies, con masa en la cadera, en los segmentos superiores de las

### 3.3. Modelos básicos de robots pasivos: Modelo 2D con rodillas.

piernas y en los segmentos inferiores de las piernas. El modelo considera los momentos de inercia de la cadera y de ambos segmentos de las piernas, aunque en el análisis que se realizará posteriormente se despreciará el momento de inercia de la cadera. En la figura 3.8 se aprecia el modelo 2D con rodillas.

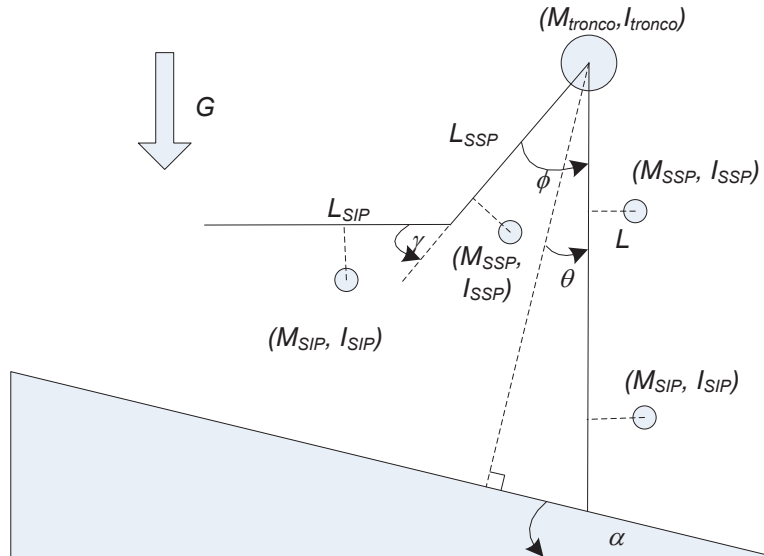


Figura 3.8: Modelo de robot pasivo 2D con rodillas.

Como se aprecia en figura 3.9, la caminata se puede modelar como la unión de cuatro etapas:

1. Una etapa de transición con la rodilla libre, en que una pierna está apoyada en la superficie mientras la otra se balancea suavemente hacia adelante permitiendo el movimiento de la rodilla.
2. Una etapa instantánea de impacto en la rodilla, en que la pierna que se balanceaba se estira completamente provocando una colisión inelástica en la rodilla, en este momento la rodilla se trava.
3. Una etapa de transición con la rodilla bloqueada, en que una pierna está apoyada en la superficie mientras la otra se balancea suavemente hacia adelante sin permitir el movimiento de ninguna rodilla.
4. Una etapa instantánea de impacto con el piso, en que la pierna que se balanceaba golpea inelásticamente el piso y cambia de rol con la pierna que soportaba el cuerpo. Instantáneamente después del impacto se libera la rodilla.

### 3.3. Modelos básicos de robots pasivos: Modelo 2D con rodillas.

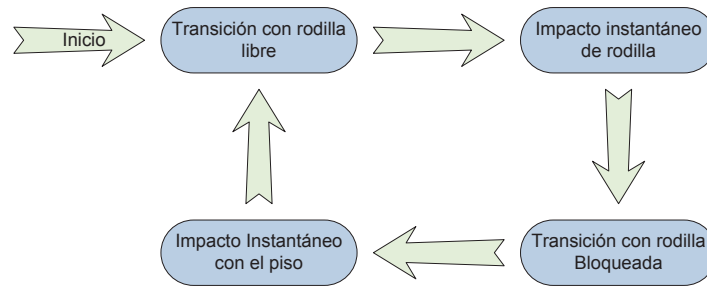


Figura 3.9: Esquema de las etapas de la caminata según el modelo 2D con rodillas.

#### 3.3.1. Estado

El estado del modelo 2D con rodillas está definido por el ángulo  $\theta$  de la pierna de soporte con respecto al piso, por el ángulo  $\phi$  entre la pierna de soporte y la de balanceo, por el ángulo  $\gamma$  de la rodilla de la pierna que se balancea y por sus velocidades angulares  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$  y  $\dot{\gamma}$ . El vector de estado está definido por:

$$q = \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \\ \gamma \end{pmatrix}. \quad (3.54a)$$

$$Q = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}. \quad (3.54b)$$

#### 3.3.2. Definiciones

Con el propósito de simplificar las ecuaciones resultantes, se realizan definiciones similares a las del modelo 2D sin rodillas. Se define la gravedad según la ecuación (3.2), la pendiente de acuerdo a la ecuación (3.3), y la frecuencia del péndulo equivalente  $\omega$  según la ecuación (3.6).

Se define el superíndice  $Rod_-$  para indicar el instante justo antes del impacto de rodilla.

Se define el superíndice  $Rod_+$  para indicar el instante justo después del impacto de rodilla.

Se define el superíndice  $Piso_-$  para indicar el instante justo antes del impacto con el piso.

Se define el superíndice  $Piso_+$  para indicar el instante justo después del impacto con el piso.

#### Masas normalizadas.

Se definen las masas normalizadas, definiendo en primer lugar el porcentaje de masa en el tronco  $M_t$  de acuerdo con la ecuación (3.4). Luego se define el porcentaje de masa en el segmento superior de la pierna  $M_m$  de acuerdo con:

$$M_{SSP} = M_m \cdot M. \quad (3.55)$$

Se define también el porcentaje de masa en el segmento inferior de la pierna  $M_c$  de acuerdo con:

### 3.3. Modelos básicos de robots pasivos: Modelo 2D con rodillas.

$$M_{SIP} = M_c \cdot M. \quad (3.56)$$

Se puede observar fácilmente que existe la siguiente relación entre las masas normalizadas:

$$M_t + 2 \cdot (M_m + M_c) = 1. \quad (3.57)$$

Se define el vector de masas  $\overrightarrow{masa}$  según:

$$\overrightarrow{masa} = \begin{pmatrix} M_{SIP} \\ M_{SSP} \\ M_{tronco} \\ M_{SSP} \\ M_{SIP} \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

#### Largos normalizados.

Se definen los largos normalizados definiendo en primer lugar el largo del segmento superior de la pierna normalizado el  $L_m$  de acuerdo con:

$$L_{SSP} = L_m \cdot L. \quad (3.59)$$

Luego se define el largo del segmento inferior de la pierna normalizado el  $L_c$  de acuerdo con:

$$L_{SIP} = L_c \cdot L. \quad (3.60)$$

Se puede ver fácilmente que existe una relación entre los largos normalizados determinada por:

$$L_m + L_c = 1. \quad (3.61)$$

Estableciendo que la posición del centro de masa del segmento superior de la pierna con respecto a la cadera está dada por el vector  $\overrightarrow{CM_{SSP}}$ , se define la posición del centro de masa del segmento superior de la pierna normalizada  $\overrightarrow{CM_m}$  de acuerdo con:

$$\overrightarrow{CM_{SSP}} = \overrightarrow{CM_m} \cdot L = \begin{pmatrix} CM_{x_m} \\ CM_{y_m} \end{pmatrix} \cdot L. \quad (3.62)$$

Estableciendo que la posición del centro de masa del segmento inferior de la pierna con respecto a la rodilla está dada por el vector  $\overrightarrow{CM_{SIP}}$ , se define la posición del centro de masa del segmento inferior de la pierna normalizada  $\overrightarrow{CM_c}$  de acuerdo con:

$$\overrightarrow{CM_{SIP}} = \overrightarrow{CM_c} \cdot L = \begin{pmatrix} CM_{x_c} \\ CM_{y_c} \end{pmatrix} \cdot L. \quad (3.63)$$

En la figura 3.10 se muestran las posiciones de los centros de masas de cada uno de los segmentos de las piernas.

Se define la altura promedio de los centros de masa  $\overline{CM_y}$  de acuerdo con:

$$\overline{CM_y} = \frac{CM_{y_m} + CM_{y_c}}{2}. \quad (3.64)$$

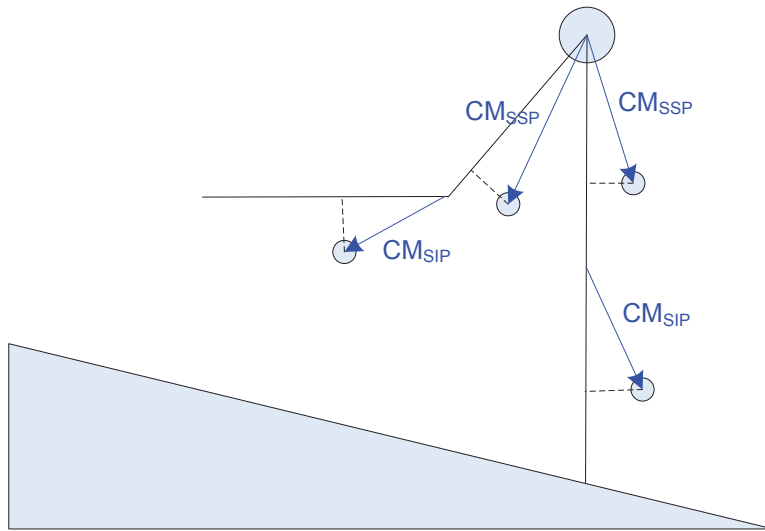


Figura 3.10: Definición de las posiciones de los centros de masas de las piernas en el modelo de robot pasivo 2D con rodillas.

Se define la diferencia de altura de los centros de masa  $CMdif_y$  de acuerdo con:

$$CMdif_y = \frac{CM_{y_m} - CM_{y_c}}{2}. \quad (3.65)$$

### Inercias normalizadas.

Se definen las inercias normalizadas definiendo en primer lugar el momento de inercia del segmento superior de la pierna normalizado  $I_m$  de acuerdo con:

$$I_{SSP} = I_m \cdot M \cdot L^2. \quad (3.66)$$

Se define también el momento de inercia del segmento inferior de la pierna normalizado  $I_c$  de acuerdo con:

$$I_{SIP} = I_c \cdot M \cdot L^2. \quad (3.67)$$

Se define el vector de inercias  $\overrightarrow{inerciaVector}$  según:

$$\overrightarrow{inerciaVector} = \begin{pmatrix} I_{SIP} \\ I_{SSP} \\ I_{tronco} \\ I_{SSP} \\ I_{SIP} \end{pmatrix}. \quad (3.68)$$

#### 3.3.3. Parámetros

Los parámetros de este modelo se definen como:

1. Frecuencia del péndulo equivalente  $\omega$ .
2. Pendiente  $Avn$ .
3. Masa total  $M$ .
4. Porcentaje de masa en el tronco  $M_t$ .
5. Porcentaje de masa en el segmento inferior de la pierna  $M_c$ .
6. Porcentaje de masa en el segmento superior de la pierna  $M_m$ .
7. Posición del centro de masa del segmento inferior de la pierna  $\overrightarrow{CM_{SIP}}$ .
8. Posición del centro de masa del segmento superior de la pierna  $\overrightarrow{CM_{SSP}}$ .
9. Largo del segmento inferior de la pierna  $L_{SIP}$ .
10. Largo del segmento superior de la pierna  $L_{SSP}$ .
11. Inercia del segmento inferior de la pierna  $I_{SIP}$ .
12. Inercia del segmento superior de la pierna  $I_{SSP}$ .

#### 3.3.4. Cinemática directa

Se calcula la cinemática directa utilizando la matriz de rotación definida para un ángulo arbitrario  $\alpha$  de la siguiente forma:

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \text{Cos}(\alpha) & -\text{Sin}(\alpha) \\ \text{Sin}(\alpha) & \text{Cos}(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (3.69)$$

La metodología utilizada para calcular la cinemática directa es definir sistemas de coordenadas intermedios en cada articulación e ir incrementalmente rotando y desplazando los sistemas de coordenadas uno por uno para definir la posición de cada segmento y cada articulación del robot.

La posición de la rodilla de la pierna de soporte con respecto al pie de soporte está definida por una rotación en el ángulo del segmento inferior de la pierna de soporte  $\theta$  y una traslación en el largo del segmento inferior de la pierna de soporte  $L_{SIP}$ . Formalmente, la posición de la rodilla de la pierna de soporte con respecto al pie de soporte es:

$$\overrightarrow{posRodSopPS}(\theta) = R\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cdot \begin{pmatrix} L_{SIP} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.70)$$

La posición del tronco con respecto al pie de soporte está dada por:

$$\overrightarrow{posTroncoPS}(\theta) = \overrightarrow{posRodSopPS}(\theta) + R\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cdot \begin{pmatrix} L_{SSP} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.71)$$

### 3.3. Modelos básicos de robots pasivos: Modelo 2D con rodillas.

La velocidad del tronco se obtiene derivando la expresión anterior, obteniendo:

$$\overrightarrow{velTronco}(t) = \frac{d}{dt} \left( \overrightarrow{posTroncoPS}(\theta(t)) \right). \quad (3.72)$$

La posición de la rodilla de la pierna que se balancea con respecto al pie de soporte es:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{posRodBalPS}(\theta, \phi) &= \overrightarrow{posTroncoPS}(\theta) \\ &+ R \left( \frac{3 \cdot \pi}{2} + \theta - \phi \right) \cdot \begin{pmatrix} L_{SSP} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

De la misma forma, la posición del pie de la pierna que se balancea con respecto al pie de soporte queda expresada según:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{posPieBalPS}(\theta, \phi, \gamma) &= \overrightarrow{posRodBalPS}(\theta, \phi) \\ &+ R \left( \frac{3 \cdot \pi}{2} + \theta - \phi - \gamma \right) \cdot \begin{pmatrix} L_{SIP} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

La posición del centro de masa del segmento inferior de la pierna de soporte con respecto al pie de soporte está dada por:

$$\overrightarrow{posSIPsopPS}(\theta) = \overrightarrow{posRodSopPS}(\theta) + R(\pi + \theta) \cdot \overrightarrow{CM_{SIP}}. \quad (3.75)$$

La velocidad del segmento inferior de la pierna de soporte se obtiene derivando la expresión anterior, es decir:

$$\overrightarrow{velSIPsop}(t) = \frac{d}{dt} \left( \overrightarrow{posSIPsopPS}(\theta(t)) \right). \quad (3.76)$$

La posición del centro de masa del segmento superior de la pierna de soporte con respecto al pie de soporte se calcula según:

$$\overrightarrow{posSSPSopPS}(\theta) = \overrightarrow{posTroncoPS}(\theta) + R(\pi + \theta) \cdot \overrightarrow{CM_{SSP}}. \quad (3.77)$$

Derivando esta expresión se obtiene la velocidad del segmento superior de la pierna de soporte:

$$\overrightarrow{velSSPSop}(t) = \frac{d}{dt} \left( \overrightarrow{posSSPSopPS}(\theta(t)) \right). \quad (3.78)$$

La posición del centro de masa del segmento superior de la pierna de balanceo con respecto al pie de soporte es el resultado de la expresión:

$$\overrightarrow{posSSPBalPS}(\theta, \phi) = \overrightarrow{posTroncoPS}(\theta) + R(\pi + \theta - \phi) \cdot \overrightarrow{CM_{SSP}}. \quad (3.79)$$

Entonces, la velocidad del segmento superior de la pierna de balanceo resulta:

$$\overrightarrow{velSSPBal}(t) = \frac{d}{dt} \left( \overrightarrow{posSSPBalPS}(\theta(t), \phi(t)) \right). \quad (3.80)$$

### 3.3. Modelos básicos de robots pasivos: Modelo 2D con rodillas.

La posición del centro de masa del segmento inferior de la pierna de balanceo con respecto al pie de soporte es:

$$\overrightarrow{posSIPBalPS}(\theta, \phi, \gamma) = \overrightarrow{posRodBalPS}(\theta, \phi) + R(\pi + \theta - \phi - \gamma) \cdot \overrightarrow{CM_{SIP}}. \quad (3.81)$$

La velocidad del segmento inferior de la pierna de balanceo está dada por:

$$\overrightarrow{velSIPBal}(t) = \frac{d}{dt} \left( \overrightarrow{posSIPBalPS}(\theta(t), \phi(t), \gamma(t)) \right). \quad (3.82)$$

La velocidad angular del segmento inferior de la pierna de soporte es:

$$\omega_{SIP\text{Sop}}(t) = \frac{d}{dt}(\theta(t)). \quad (3.83)$$

La velocidad angular del segmento superior de la pierna de soporte está dada por:

$$\omega_{SSP\text{Sop}}(t) = \frac{d}{dt}(\theta(t)). \quad (3.84)$$

Se asume que el sistema de control mantendrá el tronco recto, por lo que la velocidad angular del tronco es:

$$\omega_{Tronco}(t) = 0. \quad (3.85)$$

La velocidad angular del segmento superior de la pierna de balanceo se expresa:

$$\omega_{SSP\text{Bal}}(t) = \frac{d}{dt}(\theta(t) - \phi(t)). \quad (3.86)$$

La velocidad angular del segmento inferior de la pierna de balanceo está dada por:

$$\omega_{SIP\text{Bal}}(t) = \frac{d}{dt}(\theta(t) - \phi(t) - \gamma(t)). \quad (3.87)$$

Se define el vector con las velocidades angulares de los centros de masa  $\overrightarrow{\omega_{Vector}}(t)$  de acuerdo con la ecuación:

$$\overrightarrow{\omega_{Vector}}(t) = \begin{pmatrix} \omega_{SIP\text{Sop}}(t) \\ \omega_{SSP\text{Sop}}(t) \\ \omega_{Tronco}(t) \\ \omega_{SSP\text{Bal}}(t) \\ \omega_{SIP\text{Bal}}(t) \end{pmatrix}. \quad (3.88)$$

Se define el vector con las alturas de los centros de masa  $\overrightarrow{CMh_{Vector}}(t)$  de acuerdo con la ecuación:

$$\overrightarrow{CMh_{Vector}}(t) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{posSIP\text{Sop}PS}(\theta(t))^T \\ \overrightarrow{posSSP\text{Sop}PS}(\theta(t))^T \\ \overrightarrow{posTroncoPS}(\theta(t))^T \\ \overrightarrow{posSSP\text{Bal}PS}(\theta(t), \phi(t))^T \\ \overrightarrow{posSIP\text{Bal}PS}(\theta(t), \phi(t), \gamma(t))^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.89)$$

### 3.3. Modelos básicos de robots pasivos: Modelo 2D con rodillas.

De forma analógica, se define el vector con los desplazamientos en el eje  $x$  de los centros de masa  $CMxVector(t)$  de acuerdo con la ecuación:

$$\overrightarrow{CMxVector}(t) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{posSIPsopPS}(\theta(t))^T \\ \overrightarrow{posSSPSopPS}(\theta(t))^T \\ \overrightarrow{posTroncoPS}(\theta(t))^T \\ \overrightarrow{posSSPBalPS}(\theta(t), \phi(t))^T \\ \overrightarrow{posSIPBalPS}(\theta(t), \phi(t), \gamma(t))^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.90)$$

### 3.3.5. Modelos de transición

#### Modelo de transición con rodilla libre.

El modelo de transición de un paso se obtiene mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange.

La energía potencial  $V$  está definida por la ecuación:

$$V = g \cdot \overrightarrow{masa}^T \cdot \left( \overrightarrow{CMhVector}(t) - Avn \cdot \overrightarrow{CMxVector}(t) \right). \quad (3.91)$$

La energía cinética  $K$  está definida por la ecuación:

$$K = 0,5 \cdot \overrightarrow{masa}^T \cdot \begin{pmatrix} \overrightarrow{velSIPsop}(t)^T \cdot \overrightarrow{velSIPsop}(t) \\ \overrightarrow{velSSPSop}(t)^T \cdot \overrightarrow{velSSPSop}(t) \\ \overrightarrow{velTronco}(t)^T \cdot \overrightarrow{velTronco}(t) \\ \overrightarrow{velSSPBal}(t)^T \cdot \overrightarrow{velSSPBal}(t) \\ \overrightarrow{velSIPBal}(t)^T \cdot \overrightarrow{velSIPBal}(t) \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \overrightarrow{inerciaVector}^T \cdot \begin{pmatrix} \omega_{SIPsop}(t)^2 \\ \omega_{SSPSop}(t)^2 \\ \omega_{Tronco}(t)^2 \\ \omega_{SSPBal}(t)^2 \\ \omega_{SIPBal}(t)^2 \end{pmatrix}. \quad (3.92)$$

El lagrangiano se calcula con la ecuación (3.18).

Las ecuaciones de movimiento quedan determinadas por las ecuaciones (3.19), junto con la siguiente ecuación:

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Lg}{\partial \dot{\gamma}} \right) - \frac{\partial Lg}{\partial \gamma}. \quad (3.93)$$

Las ecuaciones de movimiento calculadas pueden ser manipuladas para obtener de ellas las aceleraciones angulares  $\ddot{\theta}$ ,  $\ddot{\phi}$ , y  $\ddot{\gamma}$  en función de las velocidades y posiciones angulares, expresiones que se aprecian en las ecuaciones (B.4). Observando estas expresiones, se puede observar que las ecuaciones obtenidas no dependen de la masa total del robot  $M$ , del largo de la pierna  $L$ , ni de la

### 3.3. Modelos básicos de robots pasivos: Modelo 2D con rodillas.

aceleración de gravedad  $g$ . Sólo dependen indirectamente del largo de la pierna y de la aceleración de gravedad a través del parámetro de escala  $\omega$ .

Se debe notar que al igual que en el caso del modelo de robot pasivo sin rodillas, en este caso el modelo de transición usado no considera el roce en el robot, por lo que al momento de diseñar un robot real se debe disminuir el roce al máximo.

#### Modelo de transición con rodilla bloqueada.

El modelo de transición con rodilla bloqueada corresponde a un caso particular del modelo de transición con rodilla libre. Por lo que se utilizan las ecuaciones (B.4), reemplazando en ellas  $\dot{\gamma}(t)$  y  $\ddot{\gamma}(t)$  por cero.

### 3.3.6. Modelos de impacto

#### Modelo de impacto con el piso

En el momento del impacto con el piso, la rodilla está bloqueada y se libera justo después del impacto, por lo que en el impacto sólo influyen los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ , y sus respectivas velocidades. Es claro que se deben cumplir las ecuaciones (3.20), (3.21), (3.29), y las siguientes ecuaciones:

$$\dot{\gamma}^{Piso+} = 0. \quad (3.94a)$$

$$\ddot{\gamma}^{Piso+} = 0. \quad (3.94b)$$

Al igual que en el caso del modelo “*Más Simple*”, en el momento del impacto aparece una fuerza impulsiva en el punto de contacto. Dado que el impacto es considerado una colisión perfectamente inelástica, entonces se conserva el momentum de todo el robot en torno al punto de impacto y de la pierna que no impacta con respecto al tronco.

Luego, el momento de inercia del robot completo con respecto al pie de soporte está dado por:

$$M_{robotPS}(q, \dot{q}) = \overrightarrow{inerciaVector}^T \cdot \overrightarrow{\omega Vector} + \overrightarrow{masa} \cdot \begin{pmatrix} \overrightarrow{posSIPsopPS} \times \overrightarrow{velSIPsop} \\ \overrightarrow{posSSPSopPS} \times \overrightarrow{velSSPSop} \\ \overrightarrow{posTroncoPS} \times \overrightarrow{velTronco} \\ \overrightarrow{posSSPBalPS} \times \overrightarrow{velSSPBal} \\ \overrightarrow{posSIPBalPS} \times \overrightarrow{velSIPBal} \end{pmatrix}. \quad (3.95)$$

El momento de inercia del robot completo con respecto al pie de balanceo está dado por:

$$\begin{aligned}
 M_{robotPB}(q, \dot{q}) &= \overrightarrow{inerciaVector}^T \cdot \overrightarrow{\omega Vector} \\
 &+ \overrightarrow{masa} \cdot \begin{pmatrix} \left( \overrightarrow{posSIPsopPS} - \overrightarrow{posPieBalPS} \right) \times \overrightarrow{velSIPsop} \\ \left( \overrightarrow{posSSPSopPS} - \overrightarrow{posPieBalPS} \right) \times \overrightarrow{velSSPSop} \\ \left( \overrightarrow{posTroncoPS} - \overrightarrow{posPieBalPS} \right) \times \overrightarrow{velTronco} \\ \left( \overrightarrow{posSSPBalPS} - \overrightarrow{posPieBalPS} \right) \times \overrightarrow{velSSPBal} \\ \left( \overrightarrow{posSIPBalPS} - \overrightarrow{posPieBalPS} \right) \times \overrightarrow{velSIPBal} \end{pmatrix}. \quad (3.96)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la conservación del momentum de todo el robot en torno al punto de impacto queda expresada de acuerdo a la ecuación:

$$M_{robotPS}(q^{Piso+}, \dot{q}^{Piso+}) = M_{robotPB}(q^{Piso-}, \dot{q}^{Piso-}). \quad (3.97)$$

Luego, el momento de inercia de la pierna de soporte con respecto al tronco está dado por la ecuación:

$$\begin{aligned}
 M_{sopT}(q, \dot{q}) &= \overrightarrow{inerciaVector}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{\omega Vector} \\
 &+ \overrightarrow{masa} \cdot \begin{pmatrix} \left( \overrightarrow{posSIPsopPS} - \overrightarrow{posTroncoPS} \right) \times \overrightarrow{velSIPsop} \\ \left( \overrightarrow{posSSPSopPS} - \overrightarrow{posTroncoPS} \right) \times \overrightarrow{velSSPSop} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.98)
 \end{aligned}$$

El momento de inercia de la pierna de balanceo con respecto al tronco está dado por la ecuación:

$$\begin{aligned}
 M_{balT}(q, \dot{q}) &= \overrightarrow{inerciaVector}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{\omega Vector} \\
 &+ \overrightarrow{masa} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \left( \overrightarrow{posSSPBalPS} - \overrightarrow{posTroncoPS} \right) \times \overrightarrow{velSSPBal} \\ \left( \overrightarrow{posSIPBalPS} - \overrightarrow{posTroncoPS} \right) \times \overrightarrow{velSIPBal} \end{pmatrix}. \quad (3.99)
 \end{aligned}$$

### 3.3. Modelos básicos de robots pasivos: Modelo 2D con rodillas.

---

Por lo tanto, la conservación del momentum de la pierna que no golpea en torno al tronco queda expresada de acuerdo a la ecuación:

$$MbalT(q^{Piso+}, \dot{q}^{Piso+}) = MsopT(q^{Piso-}, \dot{q}^{Piso-}). \quad (3.100)$$

De las ecuaciones (3.19), (3.29), (3.99), y (3.100) se puede obtener  $\dot{\theta}^{Piso+}$  y  $\dot{\phi}^{Piso+}$  como función de  $\dot{\theta}^{Piso-}$ ,  $\dot{\phi}^{Piso-}$  y  $\theta^{Piso-}$ , expresiones que se muestran en las ecuaciones (B.7).

#### Modelo de impacto de rodilla

En el instante del impacto de la rodilla se produce una fuerza impulsiva en ésta, la que es modelada como una colisión perfectamente inelástica. Ésta corresponde a una colisión interna en el sistema completo y a una colisión interna en el sistema de la pierna que se balancea, por lo que se conservan el momentum del robot completo con respecto al pie de soporte y el momentum de la pierna que se balancea con respecto al tronco.

La conservación del momentum del robot completo en torno al pie de soporte queda expresada de acuerdo a la ecuación:

$$MrobotPS(q^{Rod+}, \dot{q}^{Rod+}) = MrobotPS(q^{Rod-}, \dot{q}^{Rod-}). \quad (3.101)$$

La conservación del momentum de la pierna que se balancea en torno al tronco queda expresada de acuerdo a la ecuación:

$$MbalT(q^{Rod+}, \dot{q}^{Rod+}) = MbalT(q^{Rod-}, \dot{q}^{Rod-}). \quad (3.102)$$

Como la colisión es perfectamente inelástica, la rodilla debe permanecer extendida después de la colisión, es decir, se debe cumplir:

$$\dot{\gamma}^{Rod+} = 0. \quad (3.103)$$

$$\dot{\gamma}^{Rod+} = 0. \quad (3.104)$$

Además, la colisión genera una discontinuidad en las velocidades angulares, pero no en las posiciones angulares, lo que se expresa en la ecuación:

$$q^{Rod+} = q^{Rod-}. \quad (3.105)$$

De las ecuaciones (3.101), (3.102), (3.103), (3.104), y (3.105) se puede obtener  $\dot{\theta}^{Rod+}$  y  $\dot{\phi}^{Rod+}$  como función de  $\dot{\theta}^{Rod-}$ ,  $\dot{\phi}^{Rod-}$  y  $\phi^{Rod-}$ , expresiones que se muestran en las ecuaciones (B.9).

#### 3.3.7. Simulación numérica

Encontrar una solución algebraica a este modelo es muy difícil si no imposible, por lo que para analizarlo se utilizarán simulaciones numéricas. Para esto se elige un paso de simulación suficientemente pequeño y se iteran los modelos de transición calculando para cada instante de tiempo las aceleraciones angulares  $\ddot{\theta}$ ,  $\ddot{\phi}$ , y  $\ddot{\gamma}$  en función de las velocidades y posiciones angulares del instante anterior. Luego, se calculan las nuevas velocidades y posiciones angulares utilizando

### 3.4. Modelos básicos de robots pasivos: Discusión.

---

un modelo cinemático de orden 2 (aceleración constante en ese intervalo de tiempo). En paralelo se verifican todo el tiempo las condiciones de impacto de rodilla ( $\gamma = 0$ ) y las condiciones de impacto con el piso ( $\phi = 2 \cdot \theta$ ). Si se detecta una colisión con el piso mientras se tiene la rodilla libre, entonces se considera una caída del robot. Por otra parte, si se da un paso hacia atrás, entonces la caminata se considera infactible. Cuando se detecta una colisión en el momento esperado, se utiliza el modelo de la colisión respectiva para calcular las nuevas posiciones y velocidades angulares y se comienza con la próxima etapa de transición.

### 3.4. Discusión

Se han analizado dos modelos de robots pasivos, uno muy simple sin rodillas y uno más complejo con rodillas centros de masa e inercia en los segmentos de las piernas y tronco. Los principales supuestos de estos modelos son las colisiones perfectamente inelásticas, y la ausencia de roce. Estos dos modelos serán utilizados en la metodología de diseño de robots pasiva que se propondrá en el siguiente capítulo.

# Metodología de diseño de robots pasivos

---

## Contenidos

---

<b>4.1. Estabilidad de un conjunto de parámetros</b>	<b>40</b>
4.1.1. Cálculo del mapa de Poincaré	40
4.1.2. Discretización del mapa de Poincaré	41
4.1.3. Estabilidad global de un conjunto de parámetros	42
<b>4.2. Análisis del espacio de parámetros</b>	<b>43</b>
4.2.1. Objetivo	43
4.2.2. Representación de la estabilidad de los parámetros	43
4.2.3. Partición del espacio de parámetros	43
4.2.4. Función de utilidad para el diseño	45
4.2.5. Búsqueda de condiciones sobre los parámetros	45
<b>4.3. Resultados</b>	<b>49</b>
4.3.1. Simplificaciones del espacio de parámetros	49
4.3.2. Función de utilidad de cada parámetro	51
4.3.3. Evaluación de los mapas de Poincaré	56
4.3.4. Búsqueda de las condiciones sobre los parámetros	56
<b>4.4. Discusión</b>	<b>63</b>

---

El objetivo de este capítulo es presentar una metodología de selección de parámetros de diseño de un robot pasivo, que establezca condiciones necesarias para que el robot exhiba un ciclo de caminata pasiva estable. La metodología que se presenta es general a cualquier modelo de caminata pasiva. Actualmente, en la literatura no existe ninguna metodología que pueda ser aplicada a un modelo general. Solamente se han encontrado ciertas condiciones generales obtenidas empíricamente o generalizadas desde modelos más simples.

Para facilitar la interpretación de estas condiciones y su utilización en el diseño y construcción de un robot real, en la sección 4.2.3 se utilizan rectángulos multidimensionales en el espacio de los parámetros. De esta forma, las condiciones sobre cada parámetros son independientes de las condiciones sobre los demás parámetros. Estos rectángulos multidimensionales se denominan subespacios de parámetros y en la sección 4.2.4 se les calcula una función de utilidad para el diseño que considera su tamaño, así como que tan factible y fácil es la construcción de un robot real con estos conjuntos de parámetros.

Una exigencia sobre los subespacios de parámetros resultantes es que posean ciclos de caminata estables, para esto, en la sección 4.2.3 se les define un indicador de estabilidad, el que se calcula realizando un análisis discreto tomando muestras de conjuntos de parámetros aleatoriamente dentro del subespacio. Cada una de estas muestras consiste en un conjunto de parámetros que define una configuración del modelo.

Para calcular la estabilidad de un determinado subespacio es necesario analizar la estabilidad de cada conjunto de parámetros muestreado. Este análisis se muestra en la sección 4.1 y se lleva a cabo mediante la evaluación de su mapa de Poincaré<sup>a</sup> discreto.

## 4.1. Análisis de estabilidad de un conjunto de parámetros

Para analizar la existencia de un ciclo de caminata pasiva para un determinado conjunto de parámetros se utilizan mapas de Poincaré.

Los mapas de Poincaré son una herramienta muy poderosa para analizar el flujo en la vecindad de las soluciones periódicas de sistemas dinámicos [78]. Dado un sistema dinámico con un espacio de fase de dimensión  $n$ , se define la sección de Poincaré como una hiper-superficie de dimensión  $n - 1$  elegido para intersecar las trayectorias del sistema dinámico [74]. El mapa de Poincaré es el mapeo de los puntos de la sección de Poincaré en una vecindad del ciclo límite con la primera intersección de su órbita con la sección de Poincaré [74, 78].

### 4.1.1. Cálculo del mapa de Poincaré

Para evaluar un conjunto de parámetros se calcula su mapa de Poincaré utilizando el impacto del pie con el piso como la sección de Poincaré. Este mapa de Poincaré corresponde al mapeo entre las condiciones iniciales de un paso (momento justo después de un impacto con el piso) y las condiciones iniciales del paso siguiente. Por lo que si unas condiciones iniciales (un punto del mapa) se evalúan y las condiciones iniciales del siguiente paso (que corresponde al estado final del

---

<sup>a</sup>Un mapa de Poincaré se define como la intersección entre las órbitas de interés con la sección de Poincaré. Se puede generar usando los puntos de la sección de Poincaré como las condiciones iniciales de las órbitas y observar el primer punto de la sección de Poincaré que intersecan las órbitas. Una sección de Poincaré es un subespacio de una dimensión menos que el sistema dinámico.

paso) son las mismas, es decir, el punto se mapea sobre sí mismo, entonces corresponde a un punto de equilibrio. Existe un conjunto de puntos del mapa de Poincaré que no tienen un mapeo porque el robot cae antes de completar el paso, a estos puntos se les denomina infactibles. La trayectoria generada siguiendo el mapeo de un punto al siguiente y así sucesivamente se denomina órbita, la que puede ser cerrada cuando la órbita comienza a repetir las evaluaciones o abierta cuando no repite el camino. Cabe mencionar que un punto de equilibrio es una órbita cerrada de longitud 1.

Dada la complejidad de los modelos, para cada punto del mapa de Poincaré, su mapeo será calculado simulando la dinámica del paso. Debido a que este proceso es numérico, los errores de aproximación hacen que los puntos de equilibrio no se mapeen exactamente sobre sí mismos. Adicionalmente, no sólo son de interés los puntos de equilibrio, sino que también las órbitas cerradas. Es por esto que el criterio para decir que un punto pertenece a una órbita cerrada no puede ser el que vuelva exactamente al punto de donde partió.

#### 4.1.2. Discretización propuesta del mapa de Poincaré

La discretización usada en el análisis de caminatas pasivas usualmente es una grilla regular en toda la sección de Poincaré, lo que produce aliasing<sup>b</sup>.

En este trabajo se utiliza una discretización para el mapa de Poincaré que supera este problema. Dado un conjunto de parámetros para un robot pasivo, la discretización propuesta consiste en aleatoriamente elegir condiciones iniciales, luego simular la dinámica del robot usando el modelo pasivo. Si el robot se cae antes de completar el paso (cualquier parte que no sea el pie toca el piso o el pie de balanceo toca el piso con la rodilla flectada), entonces la condición inicial usada es clasificada como una condición inicial de caminata infactible para este conjunto de parámetros. Por el contrario, si el paso es completado exitosamente, entonces se modela el impacto con el piso y se comienza una nueva simulación usando el resultado del modelo de colisión del pie con el piso como condición inicial. Este proceso se repite hasta que el robot cae o completa una cierta cantidad de pasos exitosamente. Si una condición inicial genera al menos un paso, pero finalmente el robot cae, entonces es clasificada como inestable. Por otro lado, si el robot nunca cae, entonces se considera a todas las muestras involucradas como estables. La elección aleatoria de condiciones iniciales se repite hasta que se cumple algún criterio.

Considerando esto, se simulan los pasos y la órbita calculada se clasifica de la siguiente forma:

**Ciclo de caminata estable.** Órbitas que contienen al menos  $max\_n\_pasos$  puntos sin que ninguno de los puntos sea infactible. Dado que el robot da al menos  $max\_n\_pasos$  pasos se considera que es una órbita cerrada.

**Ciclo de caminata infactible.** Órbitas que contienen sólo un punto, el que es infactible.

**Ciclo de caminata inestable.** Órbitas abiertas que contienen más de un punto y que terminan en un punto infactible antes del paso  $max\_n\_pasos$ .

En estricto rigor podrían existir órbitas abiertas de más de  $max\_n\_pasos$  puntos, pero para efectos de la simulación y considerando que estas órbitas podrían ser estabilizadas con algún sistema de control, se consideran órbitas cerradas.

---

<sup>b</sup>El aliasing es el efecto que causa que señales continuas distintas se tornen indistinguibles cuando se les muestrea digitalmente. En el caso de los mapas de Poincaré, cuando se utiliza una discretización mediante una grilla regular, distintos ciclos de caminata se vuelven indistinguibles, efecto que corresponde al aliasing.

## 4.2. Metodología propuesta de diseño: Estabilidad de un conjunto de parámetros.

El criterio de finalización de evaluación de los mapas de Poincaré es que la resolución de muestreo este por sobre un umbral  $max\_res\_Poincare$ , es decir:

$$\frac{n_{puntos}}{(max_i - min_i)} > \prod_{i=1}^{n_{estado}} max\_res\_Poincare. \quad (4.1)$$

Donde  $n_{puntos}$  es el número de puntos del mapa de Poincaré que se evaluaron;  $min_i$  y  $max_i$  son el valor mínimo y máximo evaluado en la dimensión  $i$  del vector de condiciones iniciales respectivamente; y  $n_{estado}$  es la dimensionalidad del estado, por lo tanto, la dimensionalidad del vector de condiciones iniciales.

En la figura 4.1 se muestra un ejemplo de mapa de Poincaré, se pueden distinguir los ciclos de caminata estable, los ciclos de caminata inestables y los ciclos de caminata infactibles. En este caso de ejemplo, el vector de condiciones iniciales tiene dos dimensiones.

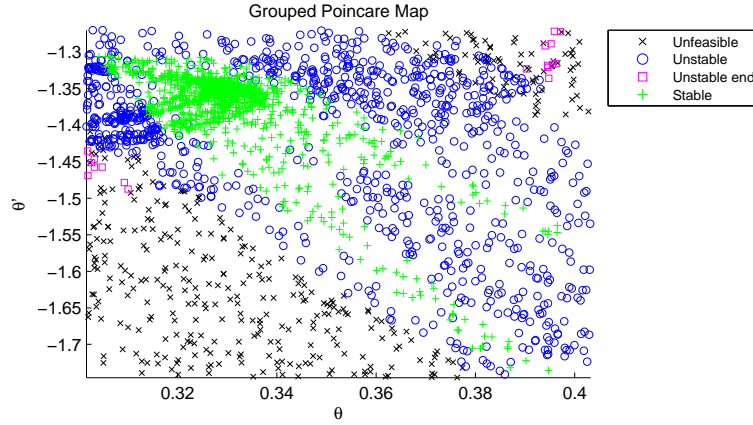


Figura 4.1: Ejemplo de mapa de Poincaré con las evaluaciones agrupadas en ciclos de caminata estable, ciclos de caminata inestables, y condiciones iniciales infactibles.

### 4.1.3. Estabilidad global de un conjunto de parámetros

Para cuantificar la estabilidad global de un conjunto de parámetros se usa el área cubierta en el mapa de Poincaré por los ciclos de caminata estable. Esta área se denomina “área estable global” y se estima su tamaño usando la relación entre los puntos aleatorios que generaron ciclos de caminata estable y el total de puntos aleatorios. Entonces, usando el resultado del análisis del mapa de Poincaré, se define una medida de estabilidad global como:

$$estabilidad\_global = \frac{n_{estable}}{n_{puntos}} \times \prod_{i=1}^{n_{estado}} (max_i - min_i). \quad (4.2)$$

Donde  $n_{estable}$  es el número de puntos evaluados del mapa de Poincaré que resultaron en un ciclo de caminata estable.

## 4.2. Análisis propuesto del espacio de parámetros

### 4.2.1. Objetivo del análisis del espacio de parámetros

Para construir un robot activo que tenga una dinámica intrínseca que facilite el caminar es necesario analizar el espacio de parámetros para encontrar las condiciones que permiten la aparición de ciclos de caminata estable en el mapa de Poincaré descrito anteriormente.

### 4.2.2. Representación discreta de la distribución de la estabilidad de los conjuntos de parámetros en el espacio de parámetros

Incluso considerando sólo el caso 2D, el espacio de parámetros tiene muchas dimensiones. Por lo que buscar las regiones que tienen dinámicas intrínsecas que facilitan la caminata es muy difícil si se intenta solucionar de forma analítica.

Se desea conocer la función cuyo dominio es el espacio de parámetros y cuyo recorrido es el tamaño del área estable global. Esta función es estimada numéricamente usando un método de muestreo aleatorio que probabilísticamente aumenta la resolución de muestreo en las zonas de interés, es decir, los parámetros con la mayor área estable global y la frontera de los parámetros útiles para el diseño del robot.

El método de estimación se basa en los algoritmos de Montecarlo, utiliza muestras discretas de la función llamadas partículas, las que iterativamente son evaluadas para mejorar la estimación de la función. Asumiendo que el método ya está inicializado y tiene un conjunto de  $n$  partículas evaluadas, se elige la  $n + 1$  partícula aleatoriamente utilizando el algoritmo de Montecarlo. La probabilidad de selección es una función que le da más peso a los parámetros que dadas las  $n$  partículas ya evaluadas debería ser de más interés (mayor estabilidad, probabilidad de pertenecer a la frontera de estabilidad, mayor función de utilidad o algún otro criterio).

### 4.2.3. Partición del espacio de parámetros

Desde el punto de vista de la construcción del robot, la frontera de los parámetros útiles para el diseño del robot es mucho más importante que el punto de máxima estabilidad global, debido a que, si bien el punto de máxima estabilidad global define el conjunto de parámetros más deseable, la frontera establece los límites del diseño y dado que un sistema de control ayudará a la estabilidad del robot, es mejor elegir un conjunto de parámetros que esté lejos de la frontera a uno que esté cerca del máximo.

La frontera generada es muy compleja y difícil de visualizar dada su elevada cantidad de dimensiones, por lo que se necesita una representación más simple que permita una fácil interpretación al momento de diseñar el robot real. Es por esto que se elige buscar un rectángulo multidimensional en el espacio de los parámetros que esté inscrito dentro de la frontera de los parámetros útiles para el diseño del robot.

Definiendo el espacio de parámetros como un rectángulo  $n_{param} - dimensional$ , se puede partir el espacio de parámetros en muchos subespacios, dividiendo el espacio en una dimensión a la vez.

Una vez que uno de los subespacios de parámetros es elegido, el resultado no sólo es un conjunto de parámetros estable, sino un completo rango de valores para cada parámetros. Esto permite

definir un margen de estabilidad para el diseño y construcción de un robot real, porque entonces los parámetros reales no necesitan tener algún valor exacto, sino sólo necesitan estar en el rango definido por el subespacio de parámetros resultante. El margen de estabilidad corresponde al valor de utilidad para el diseño de un subespacio de parámetros que será definido en la sección 4.2.4, y puede ser considerado como un indicador que puede ser usado para elegir cual subespacio de parámetros utilizar.

### Estabilidad de un subespacio de parámetros

Usando la medida de estabilidad global para un conjunto de parámetros definida por la ecuación (4.2) en la sección 4.1.3, se define un valor de estabilidad para un subespacio de parámetros como:

$$valor\_estabilidad\_subespacio^s = \sum_{p=1}^{n_{eval}^s} estabilidad\_global_p^s. \quad (4.3)$$

Donde  $n_{eval}^s$  es el número de muestras evaluadas en el subespacio de parámetros  $s$ , y la estabilidad global del conjunto de parámetros correspondiente a la muestra  $p$  del subespacio de parámetros  $s$  es  $estabilidad\_global_p^s$ .

### Representando rectángulos multidimensionales mediante *kd-tree*

Dada la enorme cantidad de rectángulos multidimensionales posibles, la búsqueda del más útil se complejiza demasiado. Un algoritmo de búsqueda del máximo exacto necesitaría demasiado tiempo de evaluación, por esto se realiza una búsqueda aproximada que a la vez es computacionalmente eficiente.

La partición del espacio de parámetros dividiendo el espacio en una dimensión a la vez permite el uso de una variación de la estructura de datos de árboles *kd-tree*<sup>c</sup> para la representación de la partición del espacio.

Considerando lo siguiente:

1. Cada punto del espacio de parámetros corresponde a un conjunto de parámetros distinto que puede ser clasificado estable o inestable.
2. Un rectángulo multidimensional en el espacio de los parámetros inscrito dentro de la frontera de los parámetros útiles para el diseño del robot tiene en cada una de sus fronteras al menos un punto inestable y contiene dentro muchos puntos estables.

Se utiliza un árbol, en que cada nodo corresponde a un punto inestable que divide en dos ramas al espacio de parámetro mediante un hiper-plano y en que cada hoja corresponde a un conjunto de puntos estables o inestables. De esta forma, una rama puede contener un nodo inestable o una hoja que corresponde a un conjunto de puntos estables o inestables.

---

<sup>c</sup>Un *kd-tree* es un árbol binario en el cual cada nodo es un punto  $k$ -dimensional. Cada nodo que no es hoja puede ser visto como un hiperplano que divide el espacio en dos partes llamadas subespacios. Los puntos a la izquierda de este hiperplano son representados por el sub-árbol izquierdo de ese nodo y los puntos a la derecha del hiperplano son representados por el sub-árbol derecho. La dirección del hiperplano es elegida de la siguiente forma: cada nodo en el árbol se asocia con la dimensión  $n = MOD(p, k)$ , con el hiperplano perpendicular al eje de esa dimensión. Donde,  $p$  es la profundidad del nodo en el árbol y  $MOD(p, k)$  es la operación módulo (el resto de la división entre  $p$  y  $k$ ).

Cada nodo divide el espacio en una única dimensión, cuya elección es muy importante pues define los rectángulos multidimensionales que se generan (una distinta elección de dimensión generará rectángulos multidimensionales completamente distintos). A diferencia de los *kd-tree* tradicionales, en la implementación utilizada cada nodo puede dividir en una dimensión distinta independiente de su ubicación en el árbol.

### 4.2.4. Función de utilidad para el diseño

Existen muchos rectángulos multidimensionales posibles, por lo que es necesario tener una medición de su utilidad para poder compararlos. La medición más natural es el hiper-volumen. Sin embargo, las dimensiones no están en las mismas unidades, ni tampoco existe una relación evidente entre ellas. Además, un robot con un conjunto de parámetros que genera un ciclo de caminata estable global no necesariamente es fácil de construir. Porque, por ejemplo, puede ser difícil tener el centro de masa de las piernas en el pie o en la cadera, o puede necesitar un largo de piernas que no deja espacio para los mecanismos necesarios.

Es por esto que se define una función de utilidad desde el punto de vista del diseño, el que para un cierto rango de cada dimensión entrega un valor de utilidad. Esta función de utilidad para el diseño representa la factibilidad y facilidad de construir un robot con cada parámetros. De esta forma se define la utilidad de un rectángulo multidimensional como la multiplicación de la utilidad de cada uno de sus lados, definiendo una especie de hiper-volumen de utilidad. Para darle la misma importancia a cada parámetro, las funciones de utilidad para el diseño se eligen de forma tal que su integral sobre todo su dominio sea uno.

Definiendo la función de utilidad como  $u_i(x)$ , donde  $x$  corresponde al valor que toma el parámetro  $i$ , entonces la utilidad del intervalo  $(Min_i, Max_i)$  del parámetro  $i$  corresponde a:

$$\int_{Min_i}^{Max_i} u_i(x) dx. \quad (4.4)$$

Por lo tanto, la utilidad de un rectángulo multidimensional queda definida por:

$$valor\_utilidad = \prod_{i=1}^{n_{param}} \int_{Min_i}^{Max_i} u_i(x) dx. \quad (4.5)$$

Donde,  $n_{param}$  es el número de parámetros del modelo.

### 4.2.5. Algoritmos de búsqueda de condiciones sobre los parámetros

En este trabajo de tesis se implementaron y probaron dos algoritmos de búsqueda de subespacios de parámetros. El primero se basa en buscar el subespacio de parámetros más estable y eligiendo el método de división de subespacios de manera tal que los subespacios de parámetros encontrados tengan una probabilidad alta de ser útiles para el diseño. El segundo algoritmo se basa en buscar el subespacio de parámetros con la mayor función de utilidad posible, exigiéndole sólo que tenga una estabilidad por sobre un umbral. Este algoritmo genera las divisiones de los subespacios intentando minimizar la cantidad de divisiones. Por la naturaleza del problema y de los *kd-tree*, en ambos casos, el algoritmo es de orden  $O(2^n)$  con respecto a la cantidad de parámetros que influyen en la existencia del ciclo de caminata.

### Algoritmo de búsqueda de subespacios de parámetros estables

El objetivo de este análisis del espacio de parámetros es encontrar el conjunto de parámetros más estable<sup>d</sup> y la frontera del conjunto de parámetros útiles para el diseño del robot [89].

Para efectos prácticos, los parámetros de diseño del robot necesitan tener una estabilidad global mínima, por lo que a un conjunto de parámetros se le exige un tamaño de área estable global sobre un umbral para ser considerado como útil para el diseño del robot.

Para encontrar los subespacios de parámetros que contienen sólo conjuntos de parámetros que exhiben un ciclo de caminata pasiva se utiliza el siguiente algoritmo [89]:

**Generación de un subespacio candidato inicial.** Los límites del subespacio candidato inicial están definidos como la región más pequeña del espacio de parámetros<sup>e</sup> que contiene solo conjuntos de parámetros con una función de utilidad para el diseño no cero. Entonces, el subespacio candidato inicial es poblado usando conjuntos de parámetros obtenidos perturbando con ruido gaussiano conjuntos de parámetros estables obtenidos algebraicamente con un modelo más simple. Por ejemplo, el modelo “Simplest Model” [20] puede ser utilizado con este propósito. Hacer esto hasta que se haya encontrado una mínima cantidad de evaluaciones estables.

**Fase de búsqueda.** Mientras exista al menos un subespacio candidato con un valor de utilidad para el diseño sobre un umbral iterar los siguientes pasos:

1. Seleccionar un subespacio candidato al azar, usando como criterio de selección el producto entre el valor de utilidad para el diseño del subespacio y el valor máximo entre el valor de estabilidad y un valor mínimo de estabilidad predefinido.
2. Aleatoriamente elegir un conjunto de parámetros dentro del subespacio candidato seleccionado, y calcular su valor de estabilidad global. Si este valor está sobre un cierto umbral, entonces el conjunto de parámetros es declarado como estable, continuar al paso 3. De otra forma, el subespacio se divide en dos subespacios. La división del espacio se realiza en el parámetro (perteneciente al conjunto de parámetros inestable) que genera el subespacio de parámetros con el mayor valor de utilidad para el diseño. Ir al paso 1.
3. Si el subespacio candidato tiene un valor de estabilidad sobre un determinado umbral, entonces es declarado como un subespacio estable, i.e. un subespacio con un alto valor de utilidad para el diseño que contiene solo parámetros con su estabilidad global sobre un umbral dado. El subespacio se almacena en una lista de subespacios de parámetros estables.

La lista de subespacios de parámetros estables contiene sólo los subespacios de parámetros declarados como completamente estables. De hecho, aunque el *kd-tree* puede tener algunos subespacios de parámetros con algunas evaluaciones estables (pero no suficientes para declarar al subespacio como completamente estable), estos subespacios de parámetros tienen un bajo valor de utilidad para el diseño (la condición para terminar es que el *kd-tree* no tenga subespacios de parámetros con

---

<sup>d</sup>Se define el conjunto de parámetros más estable como aquel con la mayor área estable global.

<sup>e</sup>La dimensionalidad del espacio de parámetros es 11 en el caso del robot que será analizado (ver sección 4.3.1).

un valor de utilidad para el diseño sobre un determinado umbral). Por lo tanto, estos subespacios de parámetros candidatos a ser estables no son de interés, y no es relevante si es que están o no en la lista de subespacios de parámetros estables.

Es importante notar que como un resultado de la aplicación de este algoritmo todos los conjuntos de parámetros con una estabilidad global cero no tienen ciclo de caminata pasiva, y están localizados en alguna frontera de dos subespacios de parámetros. También, todos los conjuntos de parámetros con un gran valor de utilidad para el diseño tienen una gran probabilidad de ser elegidos, como una consecuencia, tienen una gran probabilidad de ser divididos (en el caso de subespacios inestables) o de ser clasificados como estable (en el caso de subespacios estables).

### Algoritmo de búsqueda de subespacios de parámetros útiles para el diseño

El objetivo de este análisis del espacio de parámetros es encontrar el conjunto de parámetros estable (con una estabilidad global sobre un cierto umbral) con el mayor valor de diseño posible. En este caso se favorece la toma de muestras en torno a la frontera, pues se asume que el principal objetivo es el estimar bien la posición de ésta. Para esto se utiliza el siguiente algoritmo:

**Generación de un subespacio candidato inicial.** Los límites del subespacio candidato inicial están definidos como la región más pequeña del espacio de parámetros<sup>f</sup> que contiene solo conjuntos de parámetros con una función de utilidad para el diseño no cero. Entonces, el subespacio candidato inicial es poblado usando conjuntos de parámetros obtenidos perturbando con ruido gaussiano conjuntos de parámetros estables obtenidos algebraicamente con un modelo más simple. Por ejemplo, el modelo “Simplest Model” [20] puede ser utilizado con este propósito. Hacer esto hasta que se haya encontrado una mínima cantidad de evaluaciones estables.

**Fase de búsqueda.** Ejecutar al menos una vez y mientras los conjuntos de entrenamiento (ver definición de conjuntos de entrenamiento en los pasos 6 y 7) tengan errores de clasificación:

1. Generar un conjunto de validación estable y con alto valor de utilidad para el diseño  $Val\_interes$  con  $n\_validacion$  conjuntos de parámetros, ejecutando  $n\_validacion$  veces:
  - a) Seleccionar aleatoriamente un subespacio  $s$ , usando como criterio de selección su valor de estabilidad  $valor\_estabilidad\_subespacio^s$  multiplicado por su valor de utilidad para el diseño  $valor\_utilidad^s$ .
  - b) Dentro de este subespacio seleccionar al azar un conjunto de parámetros  $p$ .
  - c) Calcular la estabilidad global  $estabilidad\_global_p^s$  del conjunto de parámetros seleccionado.
2. Generar un conjunto de validación estable  $Val\_estable$  con  $n\_validacion$  conjuntos de parámetros, ejecutando  $n\_validacion$  veces:
  - a) Seleccionar aleatoriamente un subespacio  $s$  con valor de estabilidad igual a cero ( $valor\_estabilidad\_subespacio^s = 0$ ), usando como criterio de selección su valor de estabilidad  $valor\_estabilidad\_subespacio^s$ .
  - b) Dentro de este subespacio seleccionar al azar un conjunto de parámetros  $p$ .

---

<sup>f</sup>La dimensionalidad del espacio de parámetros es 11 en el caso del robot que será analizado (ver sección 4.3.1).

### 4.3. Metodología propuesta de diseño: Análisis del espacio de parámetros.

---

- c) Calcular la estabilidad global  $estabilidad\_global_p^s$  del conjunto de parámetros seleccionado.
3. Generar un conjunto de validación con alto valor de utilidad para el diseño  $Val\_diseno$  con  $n\_validacion$  conjuntos de parámetros, ejecutando  $n\_validacion$  veces:
  - a) Seleccionar aleatoriamente un subespacio  $s$  con valor de estabilidad mayor que cero ( $valor\_estabilidad\_subespacio^s > 0$ ), usando como criterio de selección su valor de estabilidad  $valor\_estabilidad\_subespacio^s$ .
  - b) Dentro de este subespacio seleccionar al azar un conjunto de parámetros  $p$ .
  - c) Calcular la estabilidad global  $estabilidad\_global_p^s$  del conjunto de parámetros seleccionado.
4. Utilizar los tres conjuntos de validación ( $Val\_interes$ ,  $Val\_estable$ , y  $Val\_diseno$ ) para evaluar el desempeño del sistema en esta etapa del entrenamiento.
5. Agregar al  $kd-tree$  los tres conjuntos de validación ( $Val\_interes$ ,  $Val\_estable$ , y  $Val\_diseno$ ) en las hojas que corresponda, sin generar ninguna división de los subespacios.
6. Generar un conjunto de entrenamiento de la frontera de estabilidad  $Ent\_frontera$  con  $n\_entrenamiento$  conjuntos de parámetros, ejecutando  $n\_entrenamiento$  veces:
  - a) Seleccionar aleatoriamente un subespacio  $s$ , usando como criterio de selección el producto de su cantidad de evaluaciones estables, su cantidad de evaluaciones inestables y su valor de utilidad para el diseño  $valor\_utilidad^s$ .
  - b) Dentro de este subespacio seleccionar al azar un conjunto de parámetros  $p$ .
  - c) Calcular la estabilidad global  $estabilidad\_global_p^s$  del conjunto de parámetros seleccionado.
7. Generar un conjunto de entrenamiento de exploración de estables  $Ent\_estable$  con  $n\_entrenamiento$  conjuntos de parámetros, ejecutando  $n\_entrenamiento$  veces:
  - a) Seleccionar aleatoriamente un subespacio  $s$ , usando como criterio de selección el producto de su valor de utilidad para el diseño  $valor\_utilidad^s$  con la razón entre su cantidad de evaluaciones estables más uno y su cantidad de evaluaciones inestables más uno.
  - b) Dentro de este subespacio seleccionar al azar un conjunto de parámetros  $p$ .
  - c) Calcular la estabilidad global  $estabilidad\_global_p^s$  del conjunto de parámetros seleccionado.
8. Agregar al  $kd-tree$  los dos conjuntos de entrenamiento ( $Ent\_frontera$  y  $Ent\_estable$ ) en las hojas que corresponda, sin generar ninguna división de los subespacios.
9. Dividir todas las hojas del árbol que contengan una mezcla de evaluaciones estables e inestables utilizando como división la coordenada de la evaluación inestable que mejor divida el espacio, logrando de esta forma que cada hoja mixta se transforme en un conjunto de hojas con sólo un tipo de evaluaciones utilizando la mínima cantidad de cortes.

Ambos algoritmos de búsqueda de condiciones sobre los parámetros propuestos han sido implementados y contrastados. En la siguiente sección se muestran los parámetros utilizados, así como sus resultados.

## 4.3. Resultados

A pesar de que la metodología propuesta puede ser aplicada a cualquier modelo de caminata pasiva, esta es validada utilizando un modelo de caminata pasiva específica.

Asumiendo que la estabilización lateral puede ser realizada usando un controlador independiente, se usa un modelo bi-dimensional en el plano sagital<sup>g</sup>. El objetivo de la metodología es construir un robot real, el que tendrá motores, controladores, y baterías. Todos estos componentes se distribuirán entre las piernas y el tronco. Por lo tanto, el modelo necesita considerar un tronco con masa, dos piernas idénticas con segmentos superiores e inferiores de largos distintos, modelados por una masa y un momento de inercia. Los pies son modelados como puntuales y sin masa.

Para tener versatilidad, el robot activo necesitará ejercer torque con los pies sobre el piso. Como una consecuencia, se usarán pies no puntuales livianos. Aunque el torque en los pies puede ser utilizado para estabilizar el ciclo de caminata pasiva [99], ellos no son necesarios para su existencia y siempre existe la posibilidad de dejar el tobillo de soporte apagado (se usarán actuadores de rigidez variable). A pesar del hecho de que el modelo considera pies puntuales, la masa de los pies será considerada como parte del segmento inferior de la pierna.

Específicamente, el modelo utilizado para la validación de la metodología es el modelo mostrado en la sección 3.3.

### 4.3.1. Simplificaciones del espacio de parámetros

El espacio de parámetros se redefine para obtener una mayor simplicidad de cálculo. En primer lugar, el largo de la pierna se elimina del espacio de parámetros porque no se buscará un largo que genere estabilidad o caminata, sino que se definirá para establecer el tamaño del robot. Luego se realiza una transformación que genera los siguientes parámetros:

**AVN.** Pendiente.

**PMT.** Porcentaje de masa en el tronco, definido previamente como  $M_t$ .

**RMP.** Arco tangente de la relación entre la masa del segmento superior de la pierna y la masa del segmento inferior de la pierna. Como no es intuitivo entender la función del parámetro  $RMP$ , la figura 4.2 muestra la función cuyo dominio es el parámetro  $RMP$  y cuyo recorrido es la relación entre las masas del segmento superior de la pierna y del segmento inferior de la pierna.

**CMhProm.** Promedio entre la distancia entre la cadera y el centro de masa del segmento superior de la pierna y la distancia entre la rodilla y el centro de masa del segmento inferior de la pierna normalizado por el largo total de la pierna. Definido previamente como  $\overline{CM}_y$ .

**CMhDif.** Diferencia entre la distancia entre la cadera y el centro de masa del segmento superior de la pierna y la distancia entre la rodilla y el centro de masa del segmento inferior de la pierna normalizado por el largo de la pierna. Definido previamente como  $CMdif_y$ .

---

<sup>g</sup>El plano sagital es aquel plano perpendicular al suelo y que divide al cuerpo en mitades izquierda y derecha.

### 4.3. Metodología propuesta de diseño: Resultados.

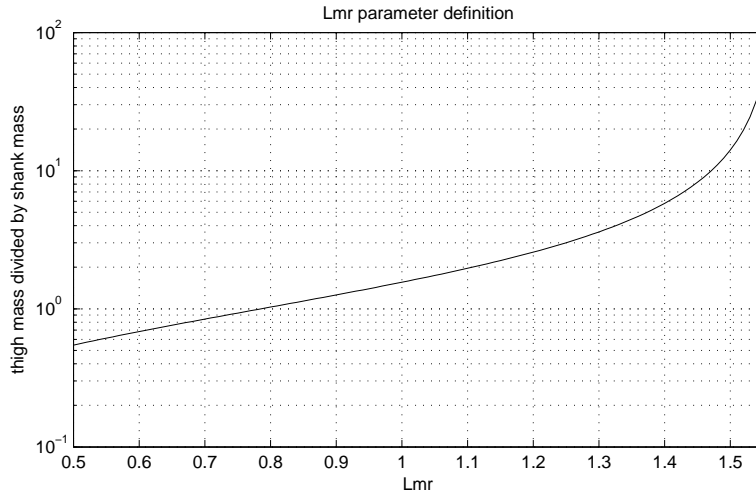


Figura 4.2: Función del parámetro  $RMP$  a la relación entre las masas del segmento superior de la pierna y del segmento inferior de la pierna.

**LargoSSP.** Largo del segmento superior de la pierna normalizado por el largo total de la pierna, definido previamente como  $L_m$ .

**CMxSIP.** Desplazamiento hacia adelante del centro de masa del segmento inferior de la pierna normalizado por el largo total de la pierna, definido previamente como  $CMx_c$ .

**CMxSSP.** Desplazamiento hacia adelante del centro de masa del segmento superior de la pierna normalizado por el largo total de la pierna, definido previamente como  $CMx_m$ .

**InerciaSIP.** Momento de inercia del segmento inferior de la pierna normalizado por el producto entre la masa del robot y el cuadrado del largo total de la pierna, definido previamente como  $I_c$ .

**InerciaSSP.** Momento de inercia del segmento superior de la pierna normalizado por el producto entre la masa del robot y el cuadrado del largo total de la pierna, definido previamente como  $I_m$ .

Al definir estos parámetros, como se puede deducir de las ecuaciones (B.7) y (B.9), se logra eliminar la masa del robot de las ecuaciones de dinámica excepto en la magnitud de las fuerzas. Por lo que la existencia, estabilidad y forma de la caminata no depende de la masa del robot. Adicionalmente, el largo de la pierna aparece solo en conjunto con la gravedad en una variable auxiliar que define una pseudo-frecuencia, con lo que se puede concluir que se puede generar una caminata correspondiente a un largo distinto de pierna si es que se le introduce o se le disminuye la gravedad al robot, lo que si bien, en estricto rigor es físicamente imposible, se puede emular inyectando energía a través de los actuadores de la misma forma en que se emula la pendiente.

#### 4.3.2. Función de utilidad de cada parámetro

La función de utilidad de cada parámetro se define en conjunto con un diseñador industrial a cargo del diseño del robot real. El criterio utilizado es cualitativo e intenta representar cuán fácil es realizar cada parámetro.

Las funciones de utilidad se definen como se muestra a continuación:

**AVN.** Corresponde a la pendiente utilizada. Se estima que pendiente cero no es factible y que una pendiente superior a  $15^\circ$  no es deseable pues implicaría un alto consumo energético. Cualquier pendiente dentro del rango es igualmente factible desde el punto de vista del diseño. Se representa por un pulso entre 0,01 y 0,3, el que se muestra en la figura 4.3.

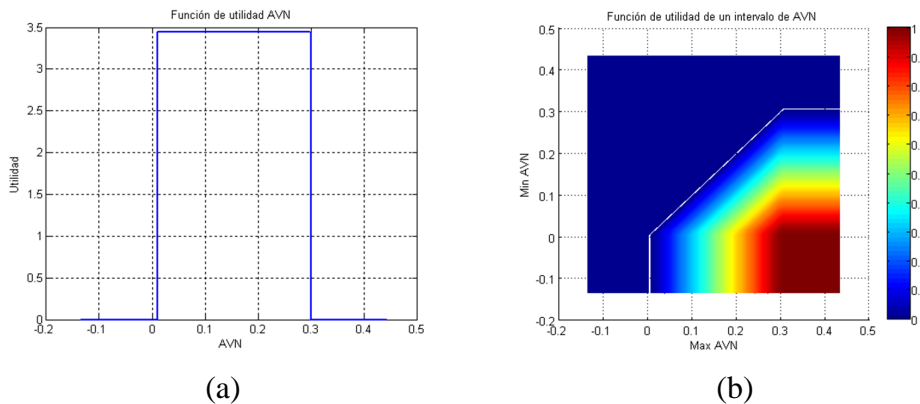


Figura 4.3: Función de utilidad del parámetro AVN. (a) Función de utilidad para cada valor del parámetro. (b) Función de utilidad para un intervalo del parámetro, definida según la ecuación (4.4).

**PMT.** Se estima que menos de un 40% de masa en el tronco es muy difícil de construir, sobre todo si en el futuro se planea agregarle brazos y cabeza al robot. Más de un 70% de masa en el tronco también es difícil de implementar pues las piernas necesitan tener la masa de los motores y de su estructura. El porcentaje de masa en el tronco es fácil de corregir, pues se pueden agregar masas, por lo que se representa por un pulso entre 0,4 y 0,7. Se muestra en la figura 4.4.

**RMP.** Dado que el segmento superior de la pierna tendrá los motores de la rodilla y del pie, es natural pensar que es más fácil que sea más pesado que el segmento inferior de la pierna más el pie. Se estima que un segmento superior de la pierna con masa de menos de 1,5 veces la masa del segmento inferior de la pierna es imposible de realizar, sin embargo, también se estima que entre mayor la diferencia, mayor la dificultad de construcción, siendo imposible tener una relación entre las masas de más de 6 veces. Por esto, la función de utilidad del parámetros RMP corresponde a una función diente de sierra con el valor máximo en atan(1,5) y cero en atan(6). Se muestra en la figura 4.5.

**CMhProm.** Tanto el segmento inferior como el superior de la pierna tienen la mayor densidad de masa cerca de su parte superior, por lo que se estima que la posición ideal para la posición del

### 4.3. Metodología propuesta de diseño: Resultados.

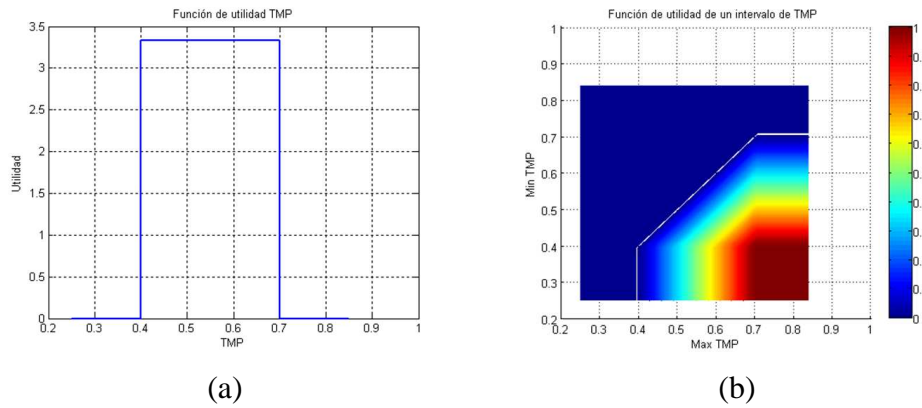


Figura 4.4: Función de utilidad del parámetro PMT. (a) Función de utilidad para cada valor del parámetro. (b) Función de utilidad para un intervalo del parámetro, definida según la ecuación (4.4).

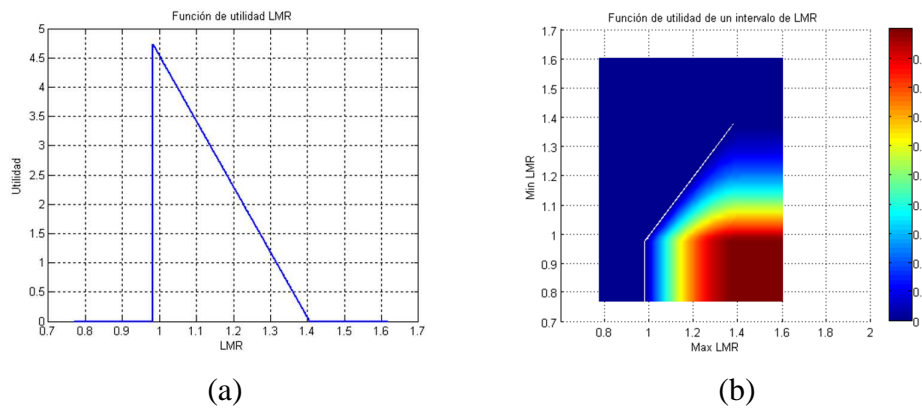


Figura 4.5: Función de utilidad del parámetro RMP. (a) Función de utilidad para cada valor del parámetro. (b) Función de utilidad para un intervalo del parámetro, definida según la ecuación (4.4).

### 4.3. Metodología propuesta de diseño: Resultados.

centro de masa es cerca de 0,16 veces el largo de la pierna. Tener un centro de masa alejado de este punto complica el diseño, siendo imposible tener toda la masa en el extremo superior del segmento, ni más abajo que 0,3 veces el largo de la pierna. Teniendo esto en cuenta, se define la función de utilidad del parámetro CMhProm como a una función triangular definida entre 0 y 0,3, con valor máximo en 0,16. Se muestra en la figura 4.6.

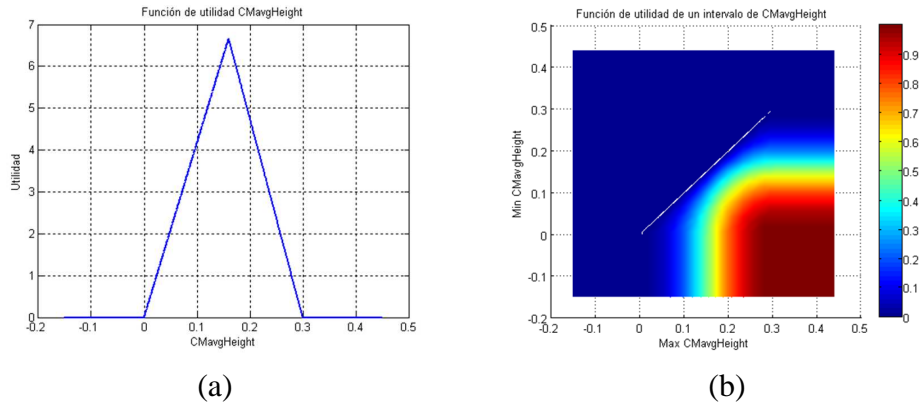


Figura 4.6: Función de utilidad del parámetro CMhProm. (a) Función de utilidad para cada valor del parámetro. (b) Función de utilidad para un intervalo del parámetro, definida según la ecuación (4.4).

**CMhDif.** Dado que en el modelo utilizado el segmento inferior incluye al pie, para facilitar el diseño se desea que su centro de masa esté más abajo que el del segmento superior. Se estima que la diferencia ideal es 0.13 veces el largo de la pierna. Por lo tanto, la función de utilidad del parámetro CMhDif se define como una función triangular definida entre -0,25 y 0, con valor máximo en -0,13. Se muestra en la figura 4.7.

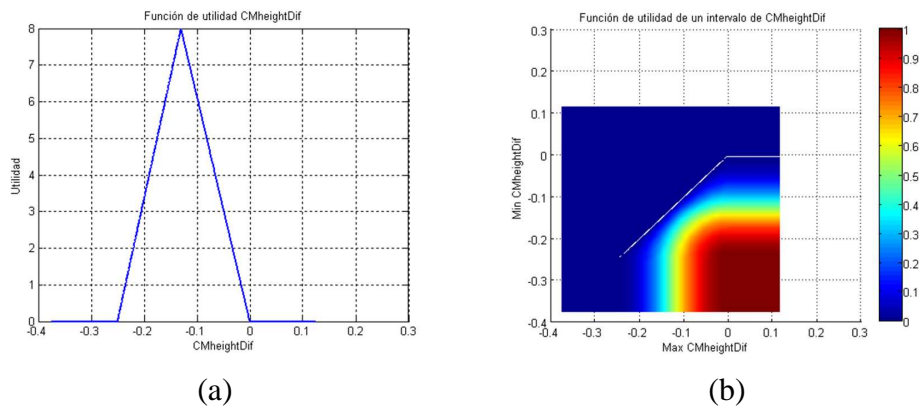


Figura 4.7: Función de utilidad del parámetro CMhDif. (a) Función de utilidad para cada valor del parámetro. (b) Función de utilidad para un intervalo del parámetro, definida según la ecuación (4.4).

### 4.3. Metodología propuesta de diseño: Resultados.

**LargoSSP.** Es más fácil construir un robot con ambos segmentos de la pierna iguales, y de acuerdo con la opinión del diseñador industrial es además más atractivo visualmente. Se estima que una asimetría de más de un 10% del largo de la pierna es inaceptable. Entonces, se define la función de utilidad del parámetro LargoSSP como a una función triangular definida entre 0,4 y 0,6, con valor máximo en 0,5. Se muestra en la figura 4.8.

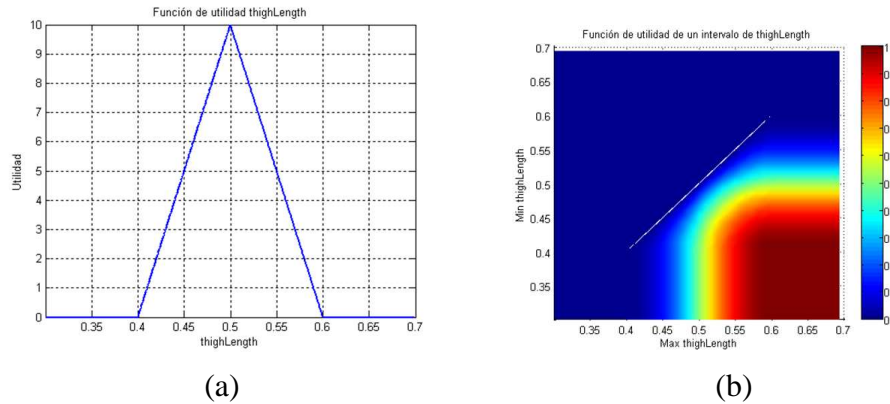


Figura 4.8: Función de utilidad del parámetro LargoSSP. (a) Función de utilidad para cada valor del parámetro. (b) Función de utilidad para un intervalo del parámetro, definida según la ecuación (4.4).

**CMxSIP.** Por la simetría intrínseca del segmento inferior de la pierna, se estima más fácil concebir un centro de masa en torno al eje del segmento, declarándose inaceptable una diferencia de más de un 5% del largo de la pierna. Por lo tanto, la función de utilidad del parámetro CMxSIP corresponde a una función triangular definida entre -0,05 y 0,05, con valor máximo en 0. Se muestra en la figura 4.9.

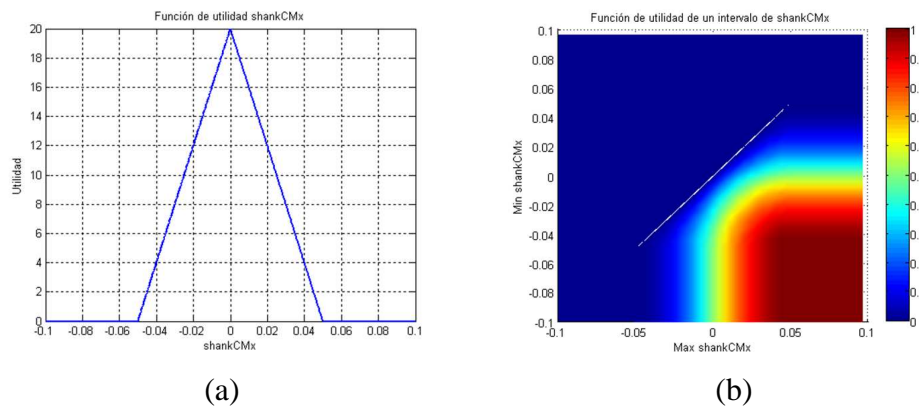


Figura 4.9: Función de utilidad del parámetro CMxSIP. (a) Función de utilidad para cada valor del parámetro. (b) Función de utilidad para un intervalo del parámetro, definida según la ecuación (4.4).

### 4.3. Metodología propuesta de diseño: Resultados.

**CM<sub>x</sub>SSP.** Por la simetría intrínseca del segmento superior de la pierna, se estima más fácil concebir un centro de masa en torno al eje del segmento, declarándose inaceptable una diferencia de más de un 5% del largo de la pierna. Por lo tanto, la función de utilidad del parámetro CM<sub>x</sub>SSP corresponde a una función triangular definida entre -0,05 y 0,05, con valor máximo en 0. Se muestra en la figura 4.10.

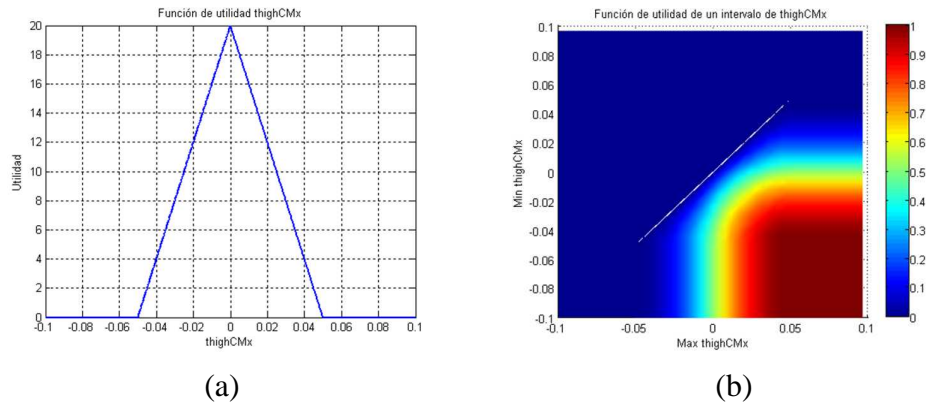


Figura 4.10: Función de utilidad del parámetro CM<sub>x</sub>SSP. (a) Función de utilidad para cada valor del parámetro. (b) Función de utilidad para un intervalo del parámetro, definida según la ecuación (4.4).

**InerciaSIP.** Los momentos de inercia son los parámetros más difíciles al momento de estimar su facilidad de diseño. Para estimar la utilidad de este parámetro se diseñó un segmento inferior de la pierna preliminar en un software de diseño mecánico, luego se midió su inercia y se estimó empíricamente la variación máxima aceptable, obteniéndose una función triangular definida entre 0,001 y 0,01, con valor máximo en 0,003. Se muestra en la figura 4.11.

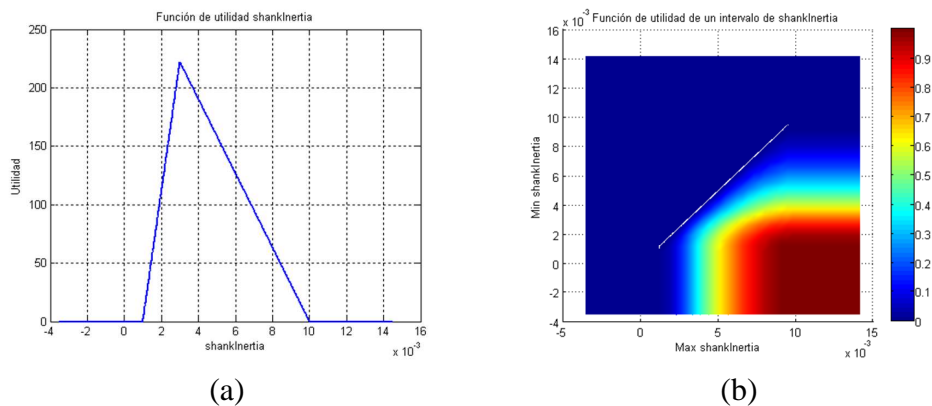


Figura 4.11: Función de utilidad del parámetro InerciaSIP. (a) Función de utilidad para cada valor del parámetro. (b) Función de utilidad para un intervalo del parámetro, definida según la ecuación (4.4).

### 4.3. Metodología propuesta de diseño: Resultados.

**InerciaSSP.** De forma análoga al parámetro Inercia SIP, para estimar la utilidad de este parámetro se diseñó un segmento superior de la pierna preliminar en un software de diseño mecánico, luego se midió su inercia y se estimó empíricamente la variación máxima aceptable, obteniéndose una función triangular definida entre 0,001 y 0,01, con valor máximo en 0,0043. Se muestra en la figura 4.12.

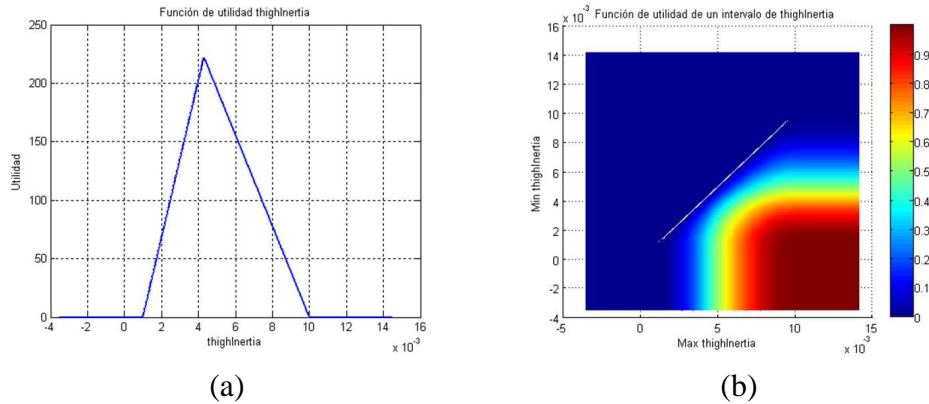


Figura 4.12: Función de utilidad del parámetro InerciaSSP. (a) Función de utilidad para cada valor del parámetro. (b) Función de utilidad para un intervalo del parámetro, definida según la ecuación (4.4).

#### 4.3.3. Evaluación de los mapas de Poincaré

Para discernir entre los ciclos estables e inestables de caminata, se define la cantidad de pasos máxima para declarar una órbita como un ciclo de caminar estable  $max\_n\_pasos = 10$ . La selección de los puntos del mapa de Poincaré que serán evaluados es aleatoria y se lleva a cabo de la siguiente forma:

Se evalúan 1024 puntos generados aleatoriamente. Este proceso se repite 5 veces o hasta que se encuentran 5 ciclos de caminata pasiva estables, lo que ocurra primero. Luego, se reduce el espacio de búsqueda para que incluya sólo las órbitas cerradas encontradas. Este nuevo espacio de búsqueda se incrementa en un 10% en cada dirección. Luego se realizan búsquedas sucesivas de 1024 partículas hasta que la resolución de los puntos supere un umbral. Las evaluaciones son simulaciones de la dinámica del modelo de robot pasivo con rodillas utilizado (ver sección 3.3) que son programadas con CUDA<sup>®</sup> y ejecutadas en una tarjeta de video con 1024 núcleos, lo que permite una muy rápida evaluación de 1024 simulaciones en paralelo (aproximadamente 200ms).

#### 4.3.4. Búsqueda de las condiciones sobre los parámetros

El resultado de la aplicación de cualquiera de los algoritmos de búsqueda de condiciones sobre los parámetros es un conjunto muy grande con todos los subespacios de parámetros estables, donde cada uno de estos subespacios corresponde a un conjunto de condiciones sobre los parámetros que por sí solas son suficientes para la existencia de un ciclo de caminata pasiva estable. Esto significa que si se diseña un robot dentro de cualquiera de estos subespacios, se puede garantizar la

existencia de un ciclo de caminata estable dentro del margen de error del sistema, el que depende de los indicadores utilizados y como se verá al analizar las curvas ROC a continuación en esta misma sección, puede fácilmente ser menor al 1 %.

#### **Algoritmo de búsqueda de subespacios de parámetros estables**

Dado el hecho de que el algoritmo de búsqueda de subespacios de parámetros útiles para el diseño encuentra los subespacios de parámetros estables a través de un proceso de muestreo (ver sección 4.2.5), es importante evaluar muchos conjuntos de parámetros para obtener el subespacio de parámetros estable usando la metodología propuesta con el modelo de caminata pasiva propuesto en la sección 3.3. Se evaluaron 3.407.519 conjuntos de parámetros durante la aplicación de la metodología propuesta. 2.605.233 de los cuales fueron clasificados como conjuntos de parámetros estables y 802.286 como conjuntos de parámetros inestables. Se encontró un total de 2.940 subespacios de parámetros que tenían sólo conjuntos de parámetros estables y que tenían una función de valor para el diseño suficientemente grande. Como se estableció en la sección 4.2.5, los conjuntos de parámetros estables tienen más posibilidades de ser evaluados porque el algoritmo les da una probabilidad de selección mayor a subespacios más estables y a aquellos que tienen una función de valor de diseño mayor. Con el objetivo de evaluar el desempeño de la metodología propuesta, el proceso de encontrar los subespacios de parámetros será denominado entrenamiento, imitando a un clasificador estadístico. El resultado de la metodología propuesta se puede interpretar como un clasificador de conjuntos de parámetros en dos clases: (I) estable (con un ciclo de caminata pasiva), y (II) inestable (sin un ciclo de caminata pasiva).

Es importante notar que como la esencia de las caminatas de dinámica pasiva se puede observar en el modelo “más simple” [96], entonces la generalización de sus resultados al modelo utilizado por la metodología propuesta tiene una gran probabilidad de ser estable. Por lo tanto, en la generación de un subespacio de parámetros candidato inicial del algoritmo de búsqueda de subespacios de parámetros (ver sección 4.2.5), se utilizan las soluciones algebraicas del modelo “más simple”, perturbadas con ruido gaussiano como las condiciones iniciales de las primeras simulaciones, para acelerar la convergencia del sistema.

Para validar la metodología propuesta, se evalúan 30.000 conjuntos de parámetros. Para esto, se seleccionan 300 subespacios de forma aleatoria, en cada uno de los cuales se seleccionan 100 conjuntos de parámetros (se estima que 100 conjuntos de parámetros elegidos aleatoriamente deberían ser representativos de un subespacio y que a su vez, evaluar 300 subespacios seleccionados es suficiente para extrapolar el desempeño del sistema). Se evalúa cada conjunto de parámetros, calculando su estabilidad. Este proceso se denomina etapa de validación (en el sentido de un clasificador estadístico).

Se analiza el desempeño del sistema propuesto, observando la relación entre el número de evaluaciones estables de los subespacios de conjuntos de parámetros en la etapa de entrenamiento, y el porcentaje de evaluaciones estables en la etapa de validación. La figura 4.13 muestra esta relación, como era esperado, se observa una alta correlación entre la estabilidad en el entrenamiento y en la validación. Esto significa que hay una alta probabilidad de que un conjunto de parámetros contenido en uno de los subespacios de parámetros estables encontrado usando la metodología sea estable. Esta validación es importante porque como se mencionó anteriormente, los subespacios de parámetros son generados usando un proceso de muestreo.

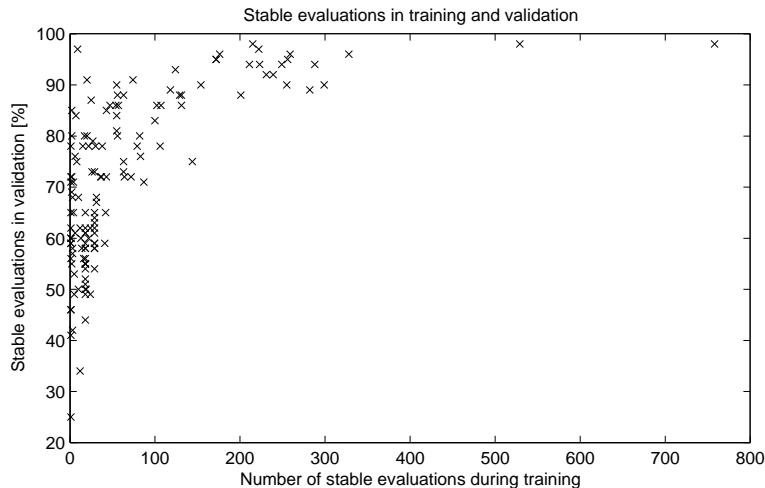


Figura 4.13: Resultados de la validación de la clasificación de los subespacios de parámetros utilizando como entrenamiento el algoritmo de búsqueda de subespacios estables.

#### Algoritmo de búsqueda de subespacios de parámetros útiles para el diseño

Al momento de aplicar el algoritmo de búsqueda de subespacios de parámetros útiles para el diseño presentado en la sección 4.2.5, se utilizan conjuntos de 100 evaluaciones para la validación ( $n_{validacion} = 100$ ) y conjuntos de 1.000 evaluaciones para el entrenamiento ( $n_{entrenamiento} = 1,000$ ). Al igual que en el caso del algoritmo anterior, se estima que 100 evaluaciones seleccionadas con un cierto criterio son suficientes para verificar el desempeño del sistema. Sin embargo, al momento de entrenar un cierto aspecto, es deseable que sea un conjunto mucho mayor que el de validación, de manera que exista una diferencia apreciable entre las validaciones, por esto se elige utilizar conjuntos de entrenamiento de tamaño 1.000.

Dada que en el algoritmo propuesto se ejecutan las validaciones periódicamente a medida que se entrena y a que cada subespacio de conjuntos de parámetros tiene distintos indicadores, se puede ver el sistema resultante como un clasificador que para cada conjunto de parámetros discierne entre si es o no estable dependiendo de las características del subespacio de conjuntos de parámetros al que pertenece en el árbol *kd-tree*. Toda la información que se almacena periódicamente a medida que se entrena permite evaluar el desempeño como una función de la cantidad de evaluaciones usadas en el entrenamiento. Este análisis permite evaluar cuantas iteraciones son necesarias y suficientes para entrenar el sistema.

Al analizar el sistema como si fuera un clasificador, es imperativo evaluar sus curvas ROC<sup>h</sup> [17]. Para el análisis de las curvas ROC, se define la tasa de verdaderos positivos (*TPR*) como el número de conjuntos de parámetros correctamente evaluados como estables dividido por el número de conjuntos de parámetros estables usados en la validación, mientras que la tasa de falsos

<sup>h</sup>Una curva ROC (del inglés *Receiver Operating Characteristics*) es una técnica para visualizar, organizar y seleccionar clasificadores basado en su desempeño. Las curvas ROC han sido muy usadas en la teoría de detección de señales para representar el compromiso entre la tasa de aciertos y la tasa de falsas alarmas de los clasificadores. En la práctica, una curva ROC de un clasificador tiene en un eje la tasa de clasificaciones correctas y en el otro eje la tasa de falsos positivos, cada punto del gráfico se obtiene cambiando un parámetros del clasificador.

### 4.3. Metodología propuesta de diseño: Resultados.

---

positivos ( $FPR$ ) se define como el número de conjuntos de parámetros inestables incorrectamente clasificados como estables dividido por el número de conjuntos de parámetros inestables usados en la validación.

Cada subespacio de conjuntos de parámetros  $s$  tiene 5 indicadores de estabilidad y que pueden ser usados para clasificar los subespacios como estables o inestables: (I) Valor de estabilidad  $valor\_estabilidad\_subespacio^s$ , (II) Cantidad de evaluaciones estables, (III) Densidad de estabilidad definida como el valor de estabilidad dividido por el valor de utilidad para el diseño  $\frac{valor\_estabilidad\_subespacio^s}{valor\_utilidad^s}$ , (IV) Densidad de las evaluaciones estables definida como la cantidad de evaluaciones estables dividida por el valor de utilidad para el diseño  $\frac{n\_estable^s}{valor\_utilidad^s}$ , y (V) El inverso del valor de utilidad para el diseño  $\frac{1}{valor\_utilidad^s}$ .

Dada la naturaleza del algoritmo propuesto, se puede evaluar el desempeño del sistema a medida que éste se entrena. Para comparar estos desempeños, se deben observar sus curvas ROC generadas con los distintos indicadores disponibles. La evolución de las curvas ROC a medida que se realiza el entrenamiento se puede observar en la figura 4.14, donde se contrastan los resultados obtenidos utilizando los distintos indicadores: la figura 4.14a utiliza el valor de estabilidad, la figura 4.14b utiliza la cantidad de evaluaciones estables, la figura 4.14c utiliza la densidad de estabilidad, la figura 4.14d utiliza la densidad de las evaluaciones estables, y la figura 4.14e utiliza el inverso del valor de utilidad para el diseño.

Al observar la figura 4.14, se puede ver que en todos los casos, el sistema presenta un buen desempeño en una temprana etapa del entrenamiento. Además se aprecia que todos los indicadores presentan un desempeño similar salvo el inverso del valor de utilidad para el diseño, indicador que presenta un desempeño levemente inferior.

Con el objetivo de poder contrastar mejor el desempeño de los distintos indicadores y adicionalmente, analizar el comportamiento del sistema después de finalizado el entrenamiento, la figura 4.15 muestra la curva ROC resultante después del entrenamiento completo del sistema.

Analizando las curvas ROC de los distintos indicadores al finalizar el entrenamiento (figura 4.15), se visualiza una diferencia en el desempeño del sistema: los indicadores Valor de estabilidad y Evaluaciones estables presentan un mejor desempeño que los indicadores Densidad de estabilidad y Densidad de estables, los que a su vez tienen un mejor desempeño que el indicador Valor de utilidad.

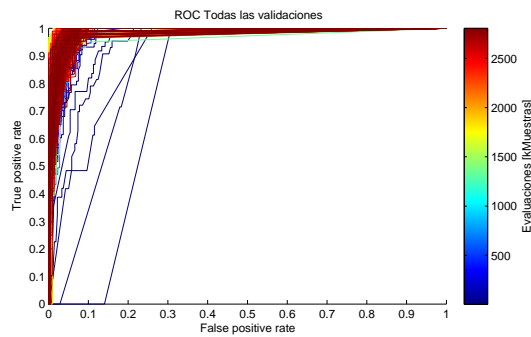
La figura 4.16 muestra la curva ROC con el mejor desempeño del sistema para determinar si el rendimiento del sistema en el mejor de los momentos del entrenamiento tiene el mismo comportamiento que al finalizar éste.

Comparando la figura 4.16 con la figura 4.15, se aprecia que el sistema al finalizar el entrenamiento está un poco sobre-entrenado, pero sin disminuir demasiado su desempeño. También se pueden sacar las mismas conclusiones sobre los indicadores, es decir, los indicadores Valor de estabilidad y Evaluaciones estables presentan un mejor desempeño que los indicadores Densidad de estabilidad y Densidad de estables, los que a su vez tienen un mejor desempeño que el indicador Valor de utilidad.

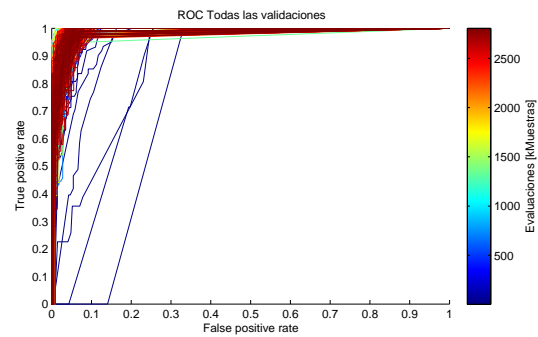
Finalmente, para comparar los desempeños de una forma más cuantitativa, se utiliza el área bajo la curva ( $AUC$ ) ROC, que indica el desempeño del clasificador, mientras mayor sea el área bajo la curva ROC, mejor el desempeño de un clasificador. La figura 4.17 muestra la evolución del área bajo la curva ( $AUC$ ) ROC a medida que se entrena el sistema para los distintos indicadores.

La figura 4.17 muestra claramente que el Valor de utilidad es el peor de los indicadores y que

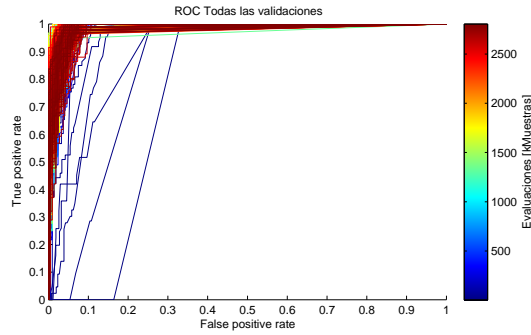
### 4.3. Metodología propuesta de diseño: Resultados.



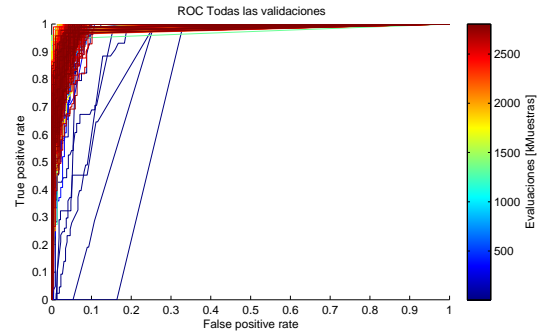
(a) Valor de estabilidad del subespacio como umbral de clasificación.



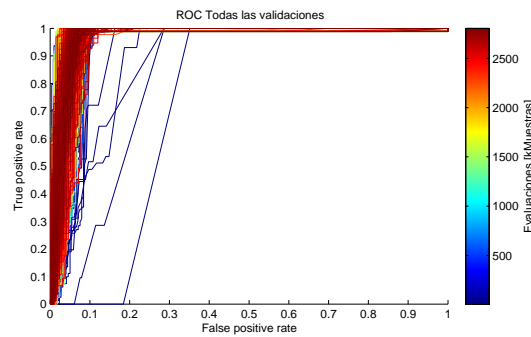
(b) Número de evaluaciones estables en el subespacio como umbral de clasificación.



(c) Densidad de la estabilidad en el subespacio como umbral de clasificación.



(d) Densidad de las evaluaciones estables en el subespacio como umbral de clasificación.



(e) Inverso del valor de utilidad para el diseño del subespacio como umbral de clasificación.

Figura 4.14: Evolución de las curvas ROC utilizando distintos indicadores como umbral de clasificación.

### 4.3. Metodología propuesta de diseño: Resultados.

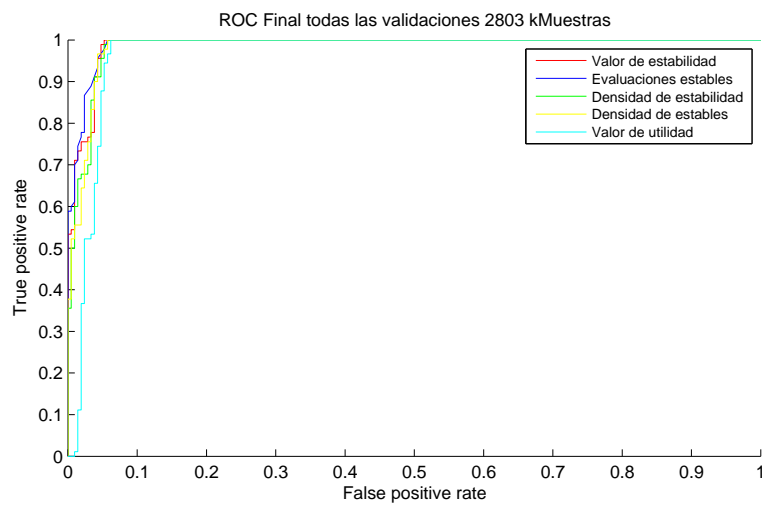


Figura 4.15: Curva ROC después de todo el entrenamiento utilizando diversos indicadores como umbral.

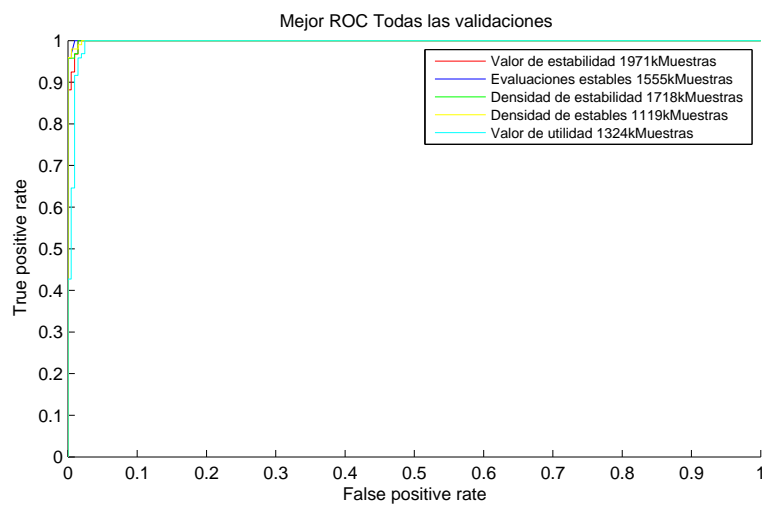


Figura 4.16: Mejor curva ROC, utilizando distintos indicadores como umbral.

### 4.3. Metodología propuesta de diseño: Resultados.

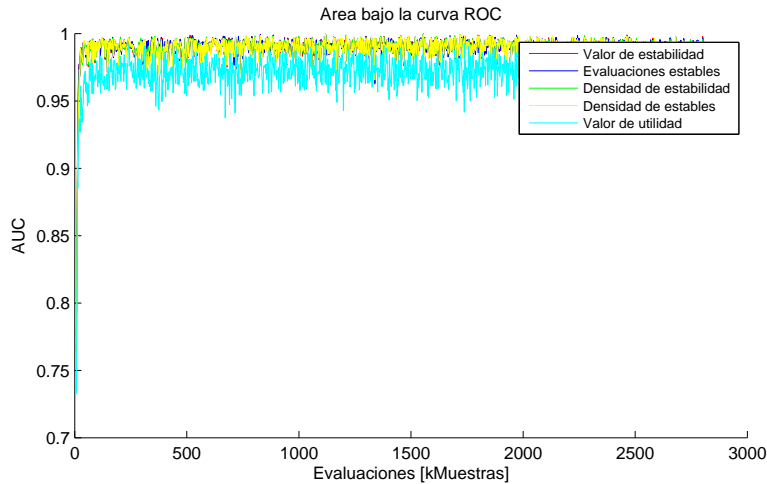


Figura 4.17: Evolución del área bajo la curva ROC, utilizando distintos indicadores como umbral.

el sistema alcanza su rendimiento de régimen permanente antes de las 100.000 evaluaciones. Para analizar el detalle de lo que ocurre antes de este nivel de entrenamiento, la figura 4.18 muestra un zoom a las primeras 100.000 evaluaciones en el entrenamiento de la evolución del área bajo la curva (AUC) ROC.

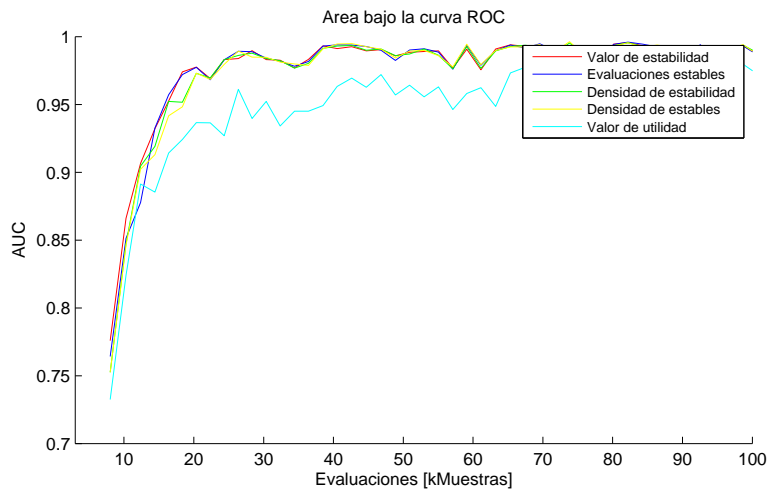


Figura 4.18: Zoom a las primeras evaluaciones del área bajo la curva ROC, utilizando distintos indicadores como umbral.

La figura 4.18 confirma las diferencias de desempeño observadas previamente entre los distintos indicadores y reafirma que el sistema alcanza su régimen permanente antes de la iteración 50.000, no necesitando más entrenamiento que eso. Es destacable que el rendimiento no empeora pese a que el sistema fue muy sobre-entrenado.

Analizando cuidadosamente los resultados presentados utilizando los cinco indicadores de estabilidad como umbral del clasificador se puede apreciar que no existe una gran diferencia entre

ellos. Sin embargo, de todas maneras se pueden ordenar de acuerdo a su desempeño, obteniendo el mejor desempeño el uso del valor de estabilidad y de la cantidad de evaluaciones estables, luego el uso de la densidad del valor de estabilidad y de la densidad de las evaluaciones estables, en último lugar queda el uso del inverso del valor de utilidad para el diseño.

También es importante el notar que el sistema entrenó y alcanzó su máximo aprendizaje con 50.000 evaluaciones, el resto de las evaluaciones no aportan a la mejora del desempeño del sistema. El sistema realiza aproximadamente 1 evaluación por segundo en el computador en que fue implementado, tardando aproximadamente 14 horas y 16 minutos en realizar estas primeras 50.000 evaluaciones.

## 4.4. Discusión

Se ha propuesto una nueva metodología para encontrar las condiciones sobre los parámetros que permiten la existencia de un ciclo de caminata estable en un robot pasivo [89]. Esta metodología puede ser utilizada con cualquier modelo de caminata pasiva sin importar su complejidad, supera los problemas de *aliasing* generados por el uso de una discretización uniforme en los mapas de Poincaré, logrando como resultado de su aplicación en el proceso de diseño un conjunto de reglas que si los parámetros del robot siguen, éste exhibirá un ciclo de caminata pasiva. Este conjunto de reglas resultante se presenta como un subespacio de parámetros con un indicador del margen de estabilidad (también llamado valor de utilidad para el diseño), el que permite elegir entre distintos subespacios de parámetros resultantes.

Dado el modelo de robot pasivo usado, para poder diseñar y construir un robot semi-pasivo que utilice esta metodología, se necesita un tipo de articulación de bajo roce y que idealmente sea de rigidez variable. En el siguiente capítulo se propone un nuevo tipo de articulación de rigidez variable para ser usada en la construcción del robot semi-pasivo.

# Diseño de articulaciones de rigidez variable

---

## Contenidos

---

<b>5.1. Motivación</b> . . . . .	<b>65</b>
<b>5.2. Modelo de torsión de las cuerdas</b> . . . . .	<b>66</b>
5.2.1. Definiciones . . . . .	66
5.2.2. Modelo de las cuerdas . . . . .	67
<b>5.3. Articulación de prueba</b> . . . . .	<b>71</b>
<b>5.4. Extensor</b> . . . . .	<b>72</b>
5.4.1. Definiciones . . . . .	72
5.4.2. Ecuaciones fundamentales del actuador . . . . .	73
5.4.3. Comportamiento estático . . . . .	75
5.4.4. Comportamiento dinámico . . . . .	80
<b>5.5. Flexor</b> . . . . .	<b>84</b>
<b>5.6. Articulación completa</b> . . . . .	<b>85</b>
5.6.1. Resultados numéricos . . . . .	85
5.6.2. Sistema de control . . . . .	96
5.6.3. Resultados con la articulación de prueba construida . . . . .	100
<b>5.7. Discusión</b> . . . . .	<b>115</b>

---

## 5.2. Articulación de rigidez variable: Motivación.

---

Utilizar el modelo pasivo impone la necesidad de permitirle a la dinámica intrínseca del robot fluir. Pero para permitir esta dinámica no se pueden utilizar los servomotores típicamente utilizados en los robots activos. En este trabajo se propone una articulación de rigidez variable que permite que el movimiento de las extremidades sea gobernado por su dinámica intrínseca, que sea moldeado suavemente por el sistema de control o bien que sea fuertemente controlado inhibiendo la dinámica intrínseca. La articulación de rigidez variable propuesta está compuesta por dos actuadores antagonistas, conectados de forma tal que la resta de las fuerzas realizadas por ellos genera un torque en la articulación y su suma genera rigidez.

### 5.1. Motivación

El sistema de actuación requerido para el robot semi-pasivo necesita permitir que la dinámica intrínseca del robot fluya libremente mientras el robot camina, pero debe ser capaz de ejercer el torque suficiente para realizar otras tareas como levantarse desde el piso. Para esto se requiere de un actuador de rigidez variable. Además, para facilitar la tarea de satisfacer las condiciones sobre los parámetros del modelo que permiten la existencia de un ciclo de caminata de dinámica pasiva, se necesita un sistema de actuación que permita ubicar los motores lejos de la articulación, permitiendo corregir la ubicación de los centros de masas de los segmentos.

Dado que la caminata requiere poca energía (sólo la energía entregada por una pequeña pendiente), el caminar no es la condición que más exigirá a los actuadores, sino la acción de levantarse desde el piso. Por lo que es deseable que el actuador seleccionado ejerza un torque de forma no lineal con respecto al ángulo de la articulación, ejerciendo un torque muy alto cuando la articulación está flectada.

La articulación se diseña basándose en las articulaciones humanas. Se decide tener dos actuadores dispuestos en una configuración antagonista, que actúan mediante tendones, los que son tensados para generar un torque y una determinada rigidez.

Inspirado en el antiguo principio de torcer dos cuerdas para generar un desplazamiento lineal, cada uno de los actuadores de la articulación propuesta es un sistema compuesto por un motor que tuerce dos cuerdas, las que a medida que se enrollan generan un desplazamiento lineal. En la figura 5.1 se muestra como dos cuerdas de 5mm de espesor y 200mm de largo generan largos distintos dependiendo de la cantidad de vueltas, en este caso se muestran con 3 y con 10 vueltas.

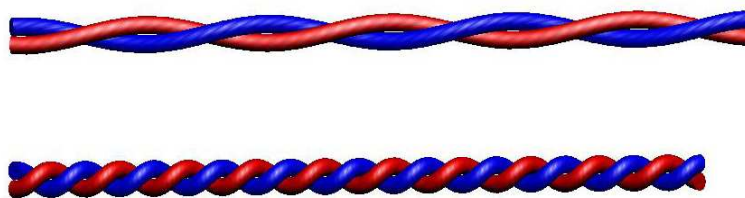


Figura 5.1: Ejemplo de cuerdas enrolladas. Arriba se muestran dos cuerdas de 5mm de espesor y 200mm de largo enrolladas 3 vueltas. Abajo se muestran las mismas cuerdas enrolladas 10 vueltas.

## 5.2. Modelo de torsión de las cuerdas

La torsión de las cuerdas se modela considerando tres zonas, las zonas externas son una línea recta entre el soporte y la zona interna, la que corresponde a torsión pura. Además se considera en el modelo sólo una de las cuerdas pues se asume que la otra tiene un comportamiento simétrico. En la figura 5.2 se muestra la cuerda a analizar y las zonas del modelo.

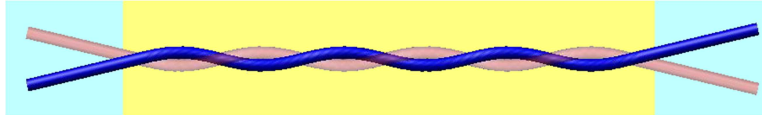


Figura 5.2: Modelo de torsión de las cuerdas. Solo se considera la cuerda azul en el análisis. La zona celeste corresponde a un modelo lineal. La zona amarilla corresponde a un modelo de torsión pura.

### 5.2.1. Definiciones

Para construir el modelo de torsión de las cuerdas se utilizan las siguientes definiciones:

**Zona 1:** Zona lineal contigua al motor.

**Zona 2:** Zona de torsión pura.

**Zona 3:** Zona lineal contigua al destorcedor.

$r_1$ : Distancia entre las cuerdas en el motor.

$r_2$ : Distancia entre las cuerdas en el destorcedor.

$q$ : Diámetro de la espiral formada por la cuerda.

$s_1$ : Largo longitudinal de la zona lineal contigua al motor.

$s_2$ : Largo longitudinal de la zona de torsión pura.

$s_3$ : Largo longitudinal de la zona lineal contigua al destorcedor.

$s$ : Distancia entre el motor y el destorcedor.

$l_{real}$ : Cantidad de cuerda entre el motor y el destorcedor.

$x_i$ : Coordenada horizontal de la cuerda, perpendicular a la dirección del tendón en algún punto de la zona  $i$ .

$y_i$ : Coordenada vertical de la cuerda, perpendicular a la dirección del tendón en algún punto de la zona  $i$ .

## 5.2. Articulación de rigidez variable: Modelo de torsión de las cuerdas.

---

$z_i$ : Coordenada horizontal de la cuerda, en la misma dirección del tendón en algún punto de la zona  $i$ .

$\theta_i$ : Ángulo de torsión de la cuerda en algún punto de la zona  $i$ .

### 5.2.2. Modelo de las cuerdas

La función que describe la zona lineal contigua al motor se modela de acuerdo a las ecuaciones que se muestran a continuación, donde  $a_1$  y  $a_2$  son parámetros del modelo.

$$x_1(z) = a_1 \cdot \frac{z}{s_1} + r_1. \quad (5.1a)$$

$$y_1(z) = a_2 \cdot \frac{z}{s_1}. \quad (5.1b)$$

La función que describe la zona de torsión pura se modela de acuerdo a las ecuaciones siguientes, donde  $b_1$  y  $b_2$  son parámetros del modelo.

$$\theta_2(z) = b_1 \cdot \frac{z - s_1}{s_2} + b_2. \quad (5.2a)$$

$$x_2(z) = \frac{q}{2} \cdot \text{Cos}(\theta_2(z)). \quad (5.2b)$$

$$y_2(z) = \frac{q}{2} \cdot \text{Sin}(\theta_2(z)). \quad (5.2c)$$

La función que describe la zona lineal contigua al destorcedor se modela de acuerdo a las ecuaciones siguientes, donde  $c_1$  y  $c_2$  son parámetros del modelo.

$$x_3(z) = c_1 \cdot \frac{z - s_1 - s_2}{s_3} + x_2(s_1 + s_2). \quad (5.3a)$$

$$y_3(z) = c_2 \cdot \frac{z - s_1 - s_2}{s_3} + y_2(s_1 + s_2). \quad (5.3b)$$

En el punto en que se juntan dos modelos, las funciones de ambos modelos deben tener el mismo valor y la misma derivada. Utilizando esto en el punto en que se une la zona lineal contigua al motor y la zona de torsión pura se pueden determinar los parámetros  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  y  $b_2$  de acuerdo a las ecuaciones:

$$a_1 = \frac{q^2}{4 \cdot r_1} - r_1. \quad (5.4a)$$

$$a_2 = \frac{q}{4} \cdot \sqrt{4 - \frac{q^2}{r_1^2}}. \quad (5.4b)$$

$$b_1 = \frac{\sqrt{4 \cdot r_1^2 - q^2} \cdot s_2}{q \cdot s_1}. \quad (5.5a)$$

## 5.2. Articulación de rigidez variable: Modelo de torsión de las cuerdas.

---

$$b_2 = \text{ArcSec} \left( \frac{2 \cdot r_1}{q} \right). \quad (5.5b)$$

Reemplazando los parámetros  $a_1$  y  $a_2$  calculados según las ecuaciones (5.4) en las ecuaciones (5.1) se obtiene:

$$x_1(z) = r_1 + \frac{\left( \frac{q^2}{4 \cdot r_1} - r_1 \right) \cdot z}{s_1}. \quad (5.6a)$$

$$y_1(z) = \frac{q \sqrt{4 - \frac{q^2}{r_1^2}} \cdot z}{4s_1}. \quad (5.6b)$$

Reemplazando los parámetros  $b_1$  y  $b_2$  calculados según las ecuaciones (5.5) en la ecuación (5.2a) se obtiene:

$$\theta_2(z) = \frac{\sqrt{4 \cdot r_1^2 - q^2} \cdot (z - s_1)}{q \cdot s_1} + \text{ArcSec} \left( \frac{2 \cdot r_1}{q} \right). \quad (5.7)$$

Reemplazando la expresión para  $\theta_2(z)$  de la ecuación (5.7) en las ecuaciones (5.2) se obtiene:

$$x_2(z) = \frac{q \cdot \text{Cos} \left( \frac{\sqrt{4 \cdot r_1^2 - q^2} \cdot (z - s_1)}{q \cdot s_1} + \text{ArcSec} \left( \frac{2 \cdot r_1}{q} \right) \right)}{2}. \quad (5.8a)$$

$$y_2(z) = \frac{q \cdot \text{Sin} \left( \frac{\sqrt{4 \cdot r_1^2 - q^2} \cdot (z - s_1)}{q \cdot s_1} + \text{ArcSec} \left( \frac{2 \cdot r_1}{q} \right) \right)}{2}. \quad (5.8b)$$

La igualdad de las funciones de los modelos de la zona de torsión pura y de la zona lineal contigua al destorcedor en el punto de unión está garantizada por la definición del modelo de la zona lineal, sin embargo, la igualdad de sus derivadas se utiliza para determinar los parámetros  $c_1$  y  $c_2$  de acuerdo a las ecuaciones:

$$c_1 = - \frac{\sqrt{4 \cdot r_1^2 - q^2} \cdot s_3 \cdot \text{Sin} \left( \frac{\sqrt{4 \cdot r_1^2 - q^2} \cdot s_2}{q \cdot s_1} + \text{ArcSec} \left( \frac{2 \cdot r_1}{q} \right) \right)}{2 \cdot s_1}. \quad (5.9a)$$

$$c_2 = \frac{\sqrt{4 \cdot r_1^2 - q^2} \cdot s_3 \cdot \text{Cos} \left( \frac{\sqrt{4 \cdot r_1^2 - q^2} \cdot s_2}{q \cdot s_1} + \text{ArcSec} \left( \frac{2 \cdot r_1}{q} \right) \right)}{2 \cdot s_1}. \quad (5.9b)$$

Reemplazando los parámetros  $c_1$  y  $c_2$  calculados según las ecuaciones (5.9) y las expresión para  $x_2(z)$  y  $y_2(z)$  de las ecuaciones (5.8) en las ecuaciones (5.3) se obtiene:

## 5.2. Articulación de rigidez variable: Modelo de torsión de las cuerdas.

$$x_3(z) = -\frac{\sqrt{4 \cdot r_1^2 - q^2} \cdot \text{Sin} \left( \frac{\sqrt{4 \cdot r_1^2 - q^2} \cdot s_2}{q \cdot s_1} + \text{ArcSec} \left( \frac{2 \cdot r_1}{q} \right) \right) \cdot (z - s_1 - s_2)}{2 \cdot s_1} + \frac{q \cdot \text{Cos} \left( \frac{\sqrt{4 \cdot r_1^2 - q^2} \cdot (s_2)}{q \cdot s_1} + \text{ArcSec} \left( \frac{2 \cdot r_1}{q} \right) \right)}{2}. \quad (5.10a)$$

$$y_3(z) = \frac{\sqrt{4 \cdot r_1^2 - q^2} \cdot \text{Cos} \left( \frac{\sqrt{4 \cdot r_1^2 - q^2} \cdot s_2}{q \cdot s_1} + \text{ArcSec} \left( \frac{2 \cdot r_1}{q} \right) \right) \cdot (z - s_1 - s_2)}{2 \cdot s_1} + \frac{q \cdot \text{Sin} \left( \frac{\sqrt{4 \cdot r_1^2 - q^2} \cdot (s_2)}{q \cdot s_1} + \text{ArcSec} \left( \frac{2 \cdot r_1}{q} \right) \right)}{2}. \quad (5.10b)$$

En el punto en que la cuerda se une con el destorcedor, la cuerda sigue una circunferencia de radio  $r_2$ . La siguiente ecuación muestra la restricción de radio:

$$x_3(s_1 + s_2 + s_3)^2 + y_3(s_1 + s_2 + s_3)^2 = r_2^2. \quad (5.11)$$

Reemplazando la función que describe la zona lineal contigua al destorcedor obtenida en las ecuaciones (5.10) en la ecuación (5.11) se obtiene la ecuación:

$$(4 \cdot r_1^2 - q^2) \cdot s_3^2 = (4 \cdot r_2^2 - q^2) \cdot s_1^2. \quad (5.12)$$

Además, dado que  $\theta_2(z)$  corresponde al ángulo de torsión en algún punto en la zona de torsión pura, entonces si el motor ha girado  $\theta(t)$  radianes, la cuerda debe estar enrollada  $\theta_2(s_1 + s_2)$  más lo que se tuerce en la zona lineal contigua al destorcedor, lo que se refleja en la ecuación:

$$\theta_2(s_1 + s_2) + \text{Atan} \left( \frac{y_3(s_1 + s_2 + s_3) - y_3(s_1 + s_2)}{x_3(s_1 + s_2 + s_3) - x_3(s_1 + s_2)} \right) = \theta(t). \quad (5.13)$$

Reemplazando la expresión para  $\theta_2(z)$  de la ecuación (5.7) y la función que describe la zona lineal contigua al destorcedor obtenida en las ecuaciones (5.10) en la ecuación (5.13) y simplificando se obtiene la ecuación:

$$\frac{\pi}{2} + \frac{2 \cdot \sqrt{4 \cdot r_1^2 - q^2} \cdot s_2}{q \cdot s_1} - 2 \cdot \text{ArcCsc} \left( \frac{2 \cdot r_1}{q} \right) = \theta(t). \quad (5.14)$$

También, la distancia entre el motor y el destorcedor es  $s$ , lo que se muestra en la ecuación:

$$s = s_1 + s_2 + s_3. \quad (5.15)$$

Resolviendo las ecuaciones (5.12), (5.14) y (5.15), se obtienen las expresiones para las distancias longitudinales de las tres zonas:

## 5.2. Articulación de rigidez variable: Modelo de torsión de las cuerdas.

$$s_1 = \frac{4 \cdot \sqrt{4 \cdot r_1^2 - q^2} \cdot s}{\pi \cdot q + 4 \cdot \left( \sqrt{4 \cdot r_1^2 - q^2} + \sqrt{4 \cdot r_2^2 - q^2} \right) + 2 \cdot q \cdot \theta(t) - 4 \cdot q \cdot \text{ArcSec} \left( \frac{2 \cdot r_1}{q} \right)}. \quad (5.16a)$$

$$s_2 = \frac{q \cdot s \cdot \left( \pi + 2 \cdot \theta(t) - 4 \cdot \text{ArcSec} \left( \frac{2 \cdot r_1}{q} \right) \right)}{\pi \cdot q + 4 \cdot \left( \sqrt{4 \cdot r_1^2 - q^2} + \sqrt{4 \cdot r_2^2 - q^2} \right) + 2 \cdot q \cdot \theta(t) - 4 \cdot q \cdot \text{ArcSec} \left( \frac{2 \cdot r_1}{q} \right)}. \quad (5.16b)$$

$$s_3 = \frac{4 \cdot \sqrt{4 \cdot r_2^2 - q^2} \cdot s}{\pi \cdot q + 4 \cdot \left( \sqrt{4 \cdot r_1^2 - q^2} + \sqrt{4 \cdot r_2^2 - q^2} \right) + 2 \cdot q \cdot \theta(t) - 4 \cdot q \cdot \text{ArcSec} \left( \frac{2 \cdot r_1}{q} \right)}. \quad (5.16c)$$

En la figura 5.3 se muestran los largos longitudinales de las zonas de la cuerda en función de la cantidad de vueltas del motor utilizando los valores numéricos de la articulación de prueba (en la sección 5.3 se muestra la articulación de prueba y los valores de sus parámetros).

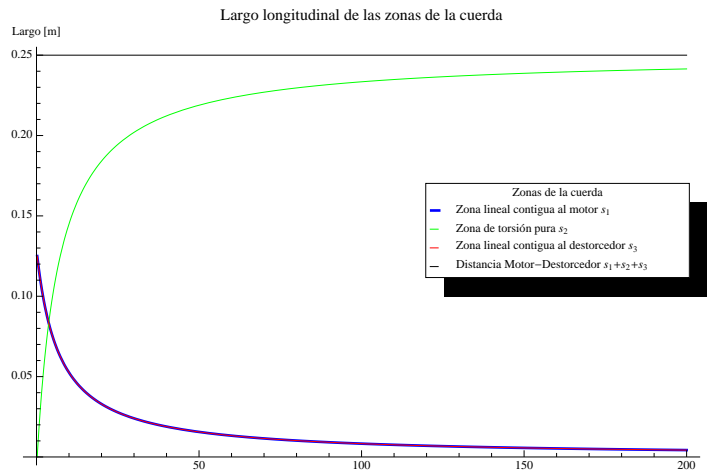


Figura 5.3: Largo longitudinal de las zonas de la cuerda.

La cantidad de cuerda entre el motor y el destorcedor está definida por la integral de línea de las funciones del modelo de las cuerdas, la que se aprecia en la ecuación:

$$l_{real} = \int_0^{s_1} \sqrt{\dot{x}_1(z)^2 + \dot{y}_1(z)^2 + 1^2} dz + \int_{s_1}^{s_1+s_2} \sqrt{\dot{x}_2(z)^2 + \dot{y}_2(z)^2 + 1^2} dz + \int_{s_1+s_2}^{s_1+s_2+s_3} \sqrt{\dot{x}_3(z)^2 + \dot{y}_3(z)^2 + 1^2} dz. \quad (5.17)$$

Resolviendo la ecuación (5.17) y utilizando las definiciones de las ecuaciones (5.1), (5.2), y (5.3) se obtiene:

### 5.3. Articulación de rigidez variable: Articulación de prueba.

$$l_{real} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + s_1^2} + \frac{\sqrt{b_1^2 \cdot q^2 + 4 \cdot s_2^2}}{2} + \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + s_3^2}. \quad (5.18)$$

Revisando las definiciones de las ecuaciones (5.4), (5.5), (5.9), y (5.16) se puede apreciar que  $l_{real}$  es una función de los parámetros  $q$ ,  $r_1$ , y  $r_2$  y del ángulo de torsión del motor  $\theta(t)$ . En la figura 5.4 se muestra la cantidad de cuerda entre el motor y el destorcedor en función de la cantidad de vueltas del motor utilizando los valores numéricos de la articulación de prueba. Es evidente que la cantidad de vueltas del motor  $n$  está relacionada ángulo de torsión del motor  $\theta$  de acuerdo con la ecuación:

$$\theta = 2 \cdot \pi \cdot n. \quad (5.19)$$

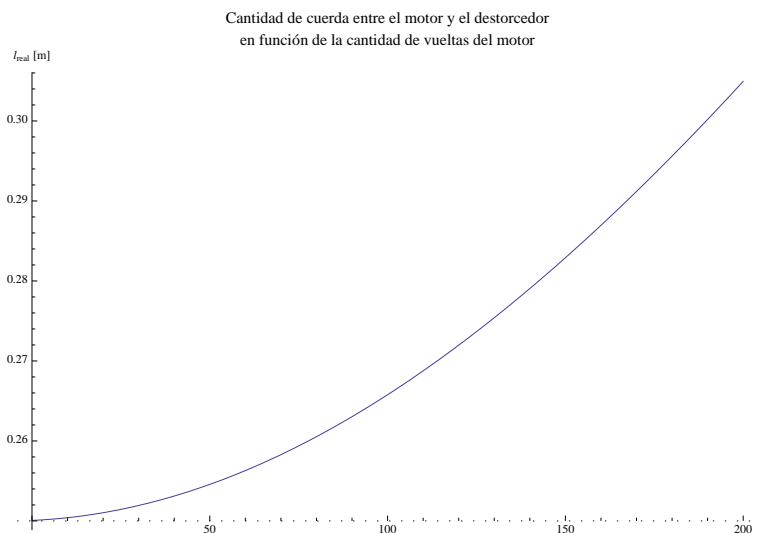


Figura 5.4: Cantidad de cuerda entre el motor y el destorcedor en función de la cantidad de vueltas del motor.

### 5.3. Articulación de prueba

La articulación de prueba corresponde a un prototipo de una rodilla, ya que se estima que es esta articulación la que necesita ejercer más torque en el caso de un robot bípedo. Dadas las condiciones necesarias para la existencia de un ciclo de caminata pasiva, se debe generar una pierna lo más liviana posible, en que el segmento superior pese mucho más que el segmento inferior, por lo que se decide ubicar los motores de la rodilla en el segmento superior de la pierna, cerca de la cadera.

Para obtener una articulación lo más liviana posible, se decide utilizar plástico technil para la mayor parte de las piezas y duraluminio para aquellas que necesitan una mayor resistencia.

Se utilizan motores *brushless DC* debido a su baja masa, alto torque y relativamente baja velocidad nominal. Este tipo de motores en estricto rigor es trifásico, por lo que necesitan de un inversor de potencia para alimentarlos. Sin embargo, los motores seleccionados poseen sensores

## 5.4. Articulación de rigidez variable: Extensor.

de efecto hall para determinar la posición del rotor y de esta forma el inversor no necesita ser nada más que una tabla. En esta configuración, lo que se controla es el torque realizado por el motor manipulando el ciclo de PWM con el que se alimentan los motores.

En la figura 5.5 se aprecia la articulación de prueba diseñada, los dos actuadores antagonistas se denominan Extensor y Flexor de acuerdo a su función.

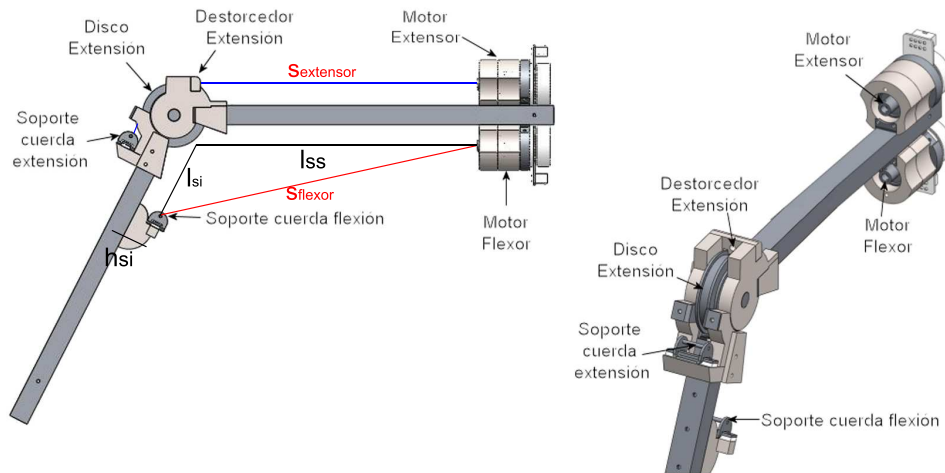


Figura 5.5: Articulación de prueba.

Para todas las pruebas y gráficos se utiliza un tendón compuesto de cuatro cuerdas de 0.38mm de diámetro, de lo cual es fácil ver que el diámetro de la espiral es  $q = 0,38 \cdot \sqrt{2}mm$ . La articulación tiene una distancia entre el motor y el destorcedor de  $s = 0,25m$ . El soporte de la cuerda en el motor tiene un diámetro de  $r_1 = 3mm$ . El destorcedor tiene un diámetro de  $r_2 = 3mm$ . El radio del disco de la articulación es de  $u = 35mm$ . La posición más contraída de la articulación es  $\alpha_{ini} = 65^\circ$  (ver definición de  $u$  y  $\alpha_{ini}$  en la sección 5.4.1).

## 5.4. Extensor

### 5.4.1. Definiciones

Para expresar las ecuaciones que definen el comportamiento del extensor se utilizan las siguientes definiciones:

$l_0$ : Largo de la cuerda.

$u$ : Radio del disco de la articulación.

$l_{est}$ : Distancia entre el motor y el soporte final de la cuerda cuando la articulación está estirada.

$l_{efectivo}$ : Cantidad de cuerda en el disco de la articulación.

$l_{ss}$ : Largo del segmento superior de la articulación.

## 5.4. Articulación de rigidez variable: Extensor.

---

$l_{si}$ : Largo del segmento inferior de la articulación.

$h_{si}$ : Distancia entre el soporte del tendón flexor y el segmento inferior de la articulación.

$\alpha$ : Ángulo de flexión de la articulación.

$\alpha_{ini}$ : Posición más contraída de la articulación.

$\theta_{ini}$ : Posición angular del motor, cuando la articulación está en su posición más contraída  $\alpha_{ini}$ .

$m_{art}$ : Masa de la articulación.

$distCM$ : Distancia entre el eje de la articulación y el centro de masa del brazo.

$angCM$ : Ángulo entre el brazo de la articulación y el centro de masa del brazo.

$m_{carga}$ : Masa de la carga en el extremo del brazo.

$l_{art}$ : Largo del brazo de la articulación.

$\tau_g$ : Torque producido por las fuerzas gravitacionales sobre la articulación.

$\tau_w$ : Torque ejercido por el motor sobre la articulación.

$F$ : Fuerza ejercida por el tendón sobre la articulación.

$\tau_m$ : Torque que realiza el motor.

$torqueBloq$ : Torque de motor bloqueado.

$speedTorqueConst$ : Constante de velocidad-torque del motor.

$I_{rotor}$ : Momento de inercia del rotor del motor .

$\omega_{nominal}$ : velocidad angular nominal del motor.

### 5.4.2. Ecuaciones fundamentales del actuador

La cantidad de cuerda en el disco de la articulación está dada por la ecuación:

$$l_{efectivo} = l_0 - l_{real} - (l_{est} - s) . \quad (5.20)$$

En la figura 5.6 se muestra la cantidad de cuerda en el disco de la articulación en función de la cantidad de vueltas del motor utilizando los valores numéricos de la articulación de prueba.

Es fácil ver que se debe cumplir la condición geométrica:

$$l_{efectivo}(t) = u \cdot (\pi - \alpha(t)) . \quad (5.21)$$

El torque gravitacional está definido según la ecuación:

#### 5.4. Articulación de rigidez variable: Extensor.

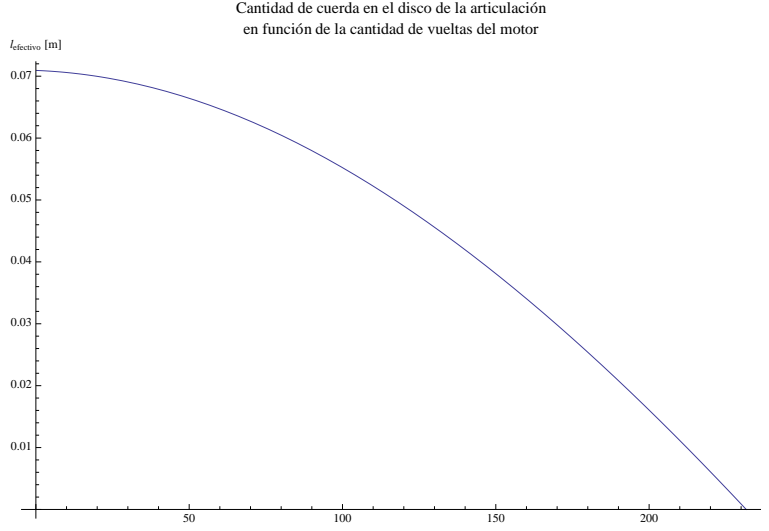


Figura 5.6: Cantidad de cuerda en el disco de la articulación en función de la cantidad de vueltas del motor.

$$\begin{aligned} \tau_g(t) = & m_{carga} \cdot g \cdot l_{art} \cdot \text{Cos} \left( \frac{\alpha(t)}{2} \right) \\ & + m_{art} \cdot g \cdot distCM \cdot \text{Cos} \left( \frac{\alpha(t)}{2} + angCM \right). \end{aligned} \quad (5.22)$$

El torque ejercido por el motor sobre la articulación está definido según la ecuación:

$$\tau_w(t) = F(t) \cdot u. \quad (5.23)$$

También se debe cumplir la relación dinámica:

$$\ddot{\alpha}(t) \cdot (m_{art} \cdot distCM^2 + m_{carga} \cdot l_{art}^2) = (\tau_w(t) - \tau_g(t)). \quad (5.24)$$

Además, se debe cumplir la restricción de transmisión de potencia que se muestra a continuación:

$$\tau_m(t) \cdot \dot{\theta}(t) = \tau_w(t) \cdot \dot{\alpha}(t). \quad (5.25)$$

Se puede calcular una pseudo razón de reducción *RazonReduccion* de acuerdo con la ecuación:

$$RazonReduccion = \frac{\dot{\theta}(t)}{\dot{\alpha}(t)}. \quad (5.26)$$

El torque ejercido por el motor se modela como una función de la velocidad del motor según la ecuación:

$$\tau_m(\dot{\theta}(t)) = \frac{torqueBloq}{\omega_{nominal}} \cdot (\omega_{nominal} - \dot{\theta}(t)) - I_{rotor} \cdot \ddot{\theta}. \quad (5.27)$$

## 5.4. Articulación de rigidez variable: Extensor.

Donde,  $torqueBloq$  corresponde al torque máximo que puede ejercer el motor, que corresponde al torque ejercido con el rotor bloqueado.

### 5.4.3. Comportamiento estático

Utilizando la ecuación geométrica (5.21) se obtiene la ecuación (B.11)<sup>a</sup>, que corresponde al ángulo de la articulación como una función de la cantidad de vueltas del motor. Esta expresión se observa en la figura 5.7 utilizando los parámetros de la articulación de prueba.

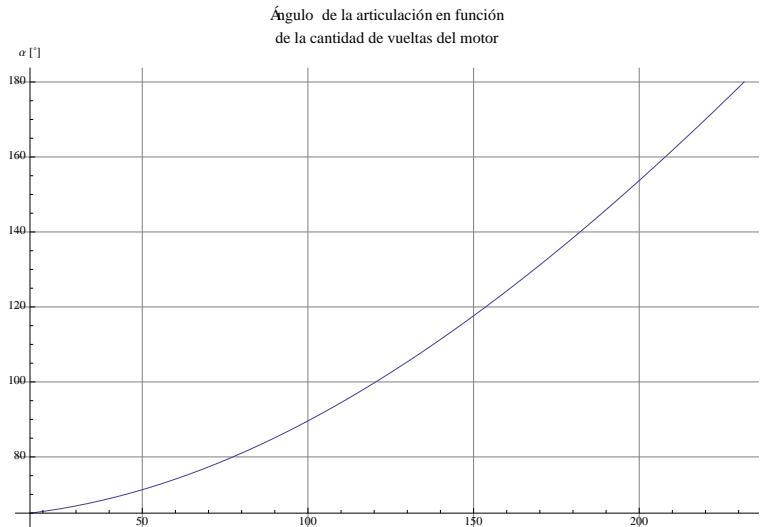


Figura 5.7: Ángulo de la articulación en función de la cantidad de vueltas del motor.

Reemplazando la ecuación (B.11) en la ecuación (5.26) y tomando el límite cuando  $\dot{\theta}(t) \rightarrow 0$  se obtiene la expresión para la pseudo razón de reducción como una función de la cantidad de vueltas del motor, la que se muestra en la ecuación (B.15). En la figura 5.8 se muestra esta función utilizando los parámetros de la articulación de prueba.

Reemplazando la ecuación (B.11) en la ecuación (5.22) se puede obtener el torque gravitacional que genera una carga sobre la articulación como una función de la cantidad de vueltas del motor, lo cual se muestra en la ecuación (B.13). En la figura 5.9 se aprecia esta función para distintas cargas en la articulación de prueba.

Además, de las ecuaciones (5.25) y (5.26) se puede obtener la ecuación:

$$\tau_w(t) = RazonReduccion(t) \cdot \tau_m(t). \quad (5.28)$$

Reemplazando la definición de la pseudo razón de reducción de la ecuación (B.15) en la ecuación (5.28) se obtiene la ecuación (B.17), en que se observa el torque ejercido por la articulación como una función del giro del motor y de la variable  $\tau_m(t)$  corresponde al torque ejercido por el motor. En la figura 5.10 se observa el torque ejercido por la articulación de prueba en función de la cantidad de vueltas del motor (usando la relación  $\theta = 2 \cdot \pi \cdot n$ ) para el caso en que el motor ejerce el torque nominal, y para el caso en que ejerce el torque máximo en conjunto con los torques de

<sup>a</sup>Las ecuaciones numeradas (B.i) están expresadas en el anexo B en la página 155.

## 5.4. Articulación de rigidez variable: Extensor.

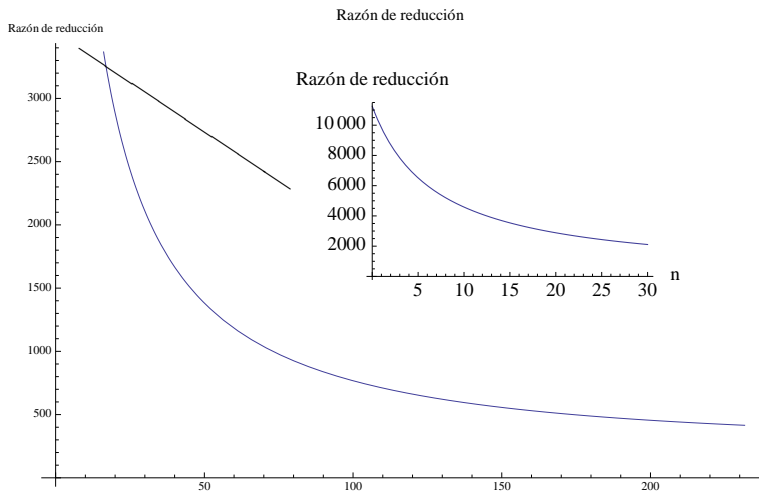


Figura 5.8: Seudo razón de reducción en función de la cantidad de vueltas del motor.

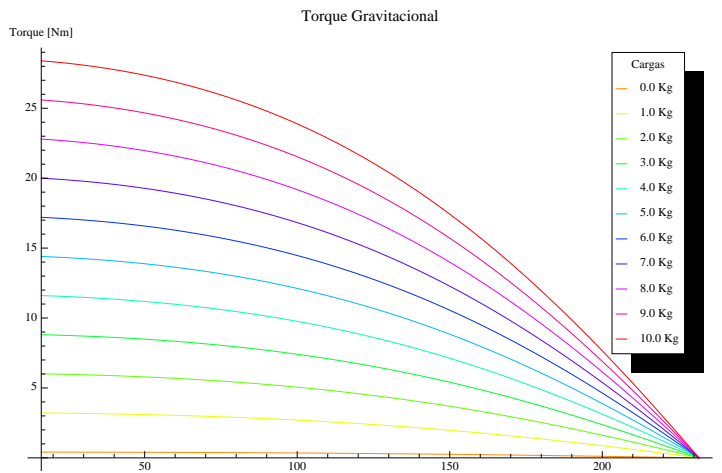


Figura 5.9: Torque gravitacional que generan diversas cargas sobre la articulación como una función de la cantidad de vueltas del motor.

#### 5.4. Articulación de rigidez variable: Extensor.

las cargas de prueba. Se ve que el actuador es capaz de generar mucho más torque del necesario para levantar las cargas de prueba.

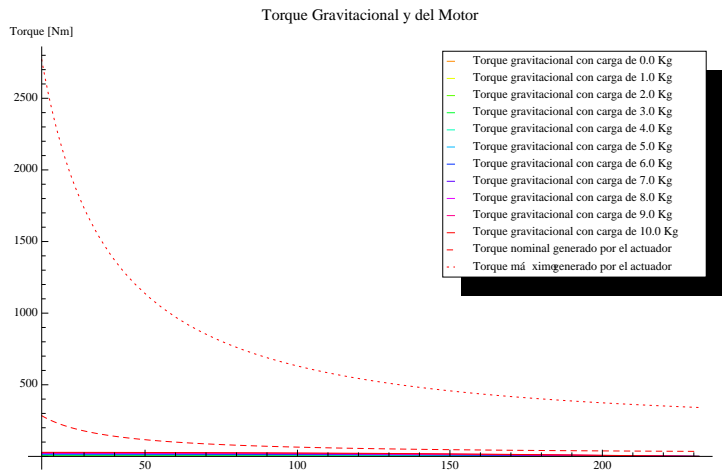


Figura 5.10: Torques nominal y máximo generados por el actuador contrastados con el torque gravitacional que generan diversas cargas sobre la articulación como una función de la cantidad de vueltas del motor.

La figura 5.11 muestra las mismas funciones que la figura 5.10, pero como función del ángulo de la articulación.

Restando el torque gravitacional calculado según la ecuación (B.13) del torque generado por el actuador calculado según la ecuación (B.17) se puede obtener el torque que genera aceleración. La figura 5.12 muestra el torque nominal y máximo que genera aceleración a varias cargas.

Reemplazando el torque ejercido por la articulación, definido según la ecuación (5.23), y el torque gravitacional, definido según la ecuación (5.22) en la ecuación (5.24) se obtiene la expresión que relaciona la posición y aceleración angular de la articulación con la tensión de la cuerda:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}(t) \cdot (m_{art} \cdot distCM^2 + m_{carga} \cdot l_{art}^2) = F(t) \cdot u \\ - m_{art} \cdot g \cdot distCM \cdot \cos\left(\frac{\alpha(t)}{2} + angCM\right) \\ - m_{carga} \cdot g \cdot l_{art} \cdot \cos\left(\frac{\alpha(t)}{2}\right). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Asumiendo el caso estático en que no existe aceleración, se despeja la tensión de la cuerda como una función del ángulo de la articulación:

$$F(t) = \frac{g}{u} \cdot \left( m_{carga} \cdot l_{art} \cdot \cos\left(\frac{\alpha(t)}{2}\right) + m_{art} \cdot distCM \cdot \cos\left(\frac{\alpha(t)}{2} + angCM\right) \right). \quad (5.30)$$

La ecuación (5.30) se muestra en la figura 5.13 para distintas cargas en el caso de la articulación de prueba.

## 5.4. Articulación de rigidez variable: Extensor.

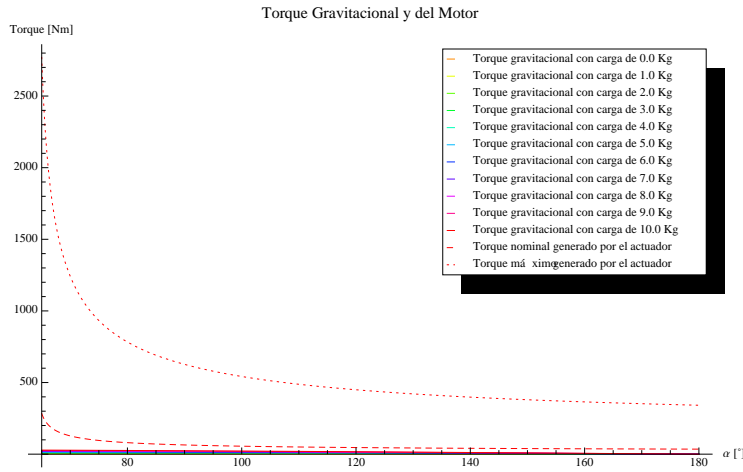


Figura 5.11: Torques nominal y máximo generados por el actuador contrastados con el torque gravital que generan diversas cargas sobre la articulación como una función del ángulo de la articulación.

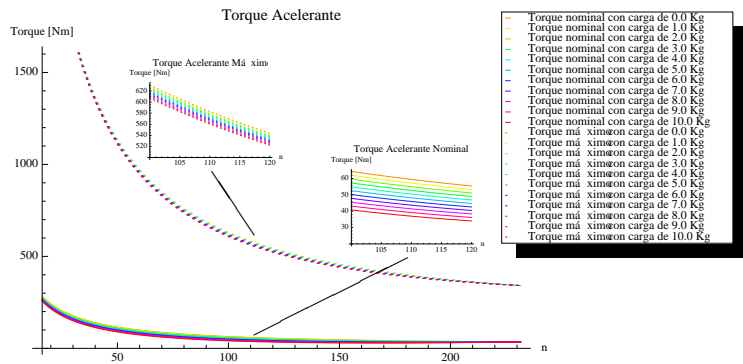


Figura 5.12: Torques nominales y máximos que generan aceleración a diversas cargas como una función de la cantidad de vueltas del motor.

## 5.4. Articulación de rigidez variable: Extensor.

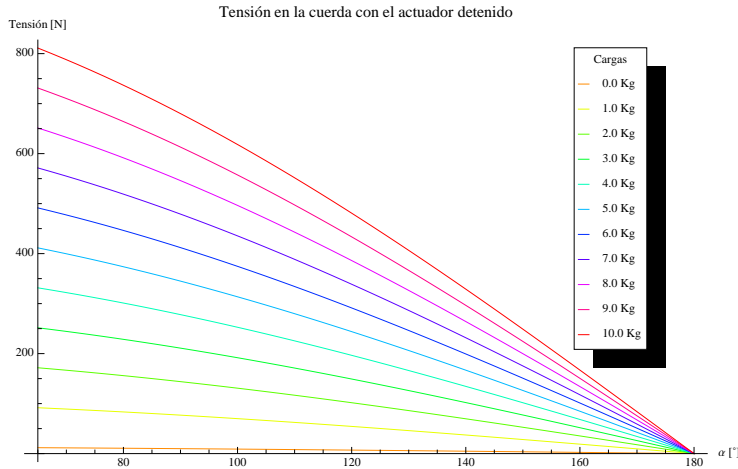


Figura 5.13: Tensión de la cuerda con el actuador detenido para diversas cargas como una función del ángulo de la articulación.

### Límites del actuador

De la ecuación (B.11) que define el ángulo de la articulación como una función de la cantidad de vueltas del motor se puede obtener la cantidad de vueltas que debe girar el motor para que la articulación esté completamente estirada. En el caso de la articulación de prueba es 231,664 vueltas. De la misma forma se puede obtener la cantidad de vueltas que debe estar girado el motor de la articulación de prueba para que en la posición más contraída de la articulación la cuerda esté tensa, la que es 16,1073 vueltas.

Observando la figura 5.8, se puede apreciar que la pseudo razón de reducción es máxima cuando el motor no ha girado, por lo tanto, reemplazando la ecuación (B.15) que define la pseudo razón de reducción, la ecuación (5.23) que define el torque ejercido por la articulación, y utilizando el torque máximo del motor en la ecuación (5.28), se obtiene la ecuación (B.18) que muestra la tensión de la cuerda dado un cierto giro del motor. Reemplazando el torque ejercido por el motor  $\tau_m(t)$  por el torque máximo *torqueBloq* se obtiene la tensión máxima en la cuerda como una función del giro del motor, esta función se aprecia en la figura 5.14 para el caso de la articulación de prueba.

Se debe notar que la cuerda tiene un máximo de vueltas que puede torcerse, la que está dada por la solución a la ecuación:

$$\frac{\theta}{\pi} \cdot q = s. \quad (5.31)$$

La máxima cantidad de vueltas que se puede torcer la cuerda de la articulación de prueba, calculada solucionando la ecuación (5.31), es 232,601 vueltas. Utilizando esta cantidad de vueltas y la relación entre la cantidad de vueltas del motor y el ángulo de la articulación (B.11), se obtiene el ángulo máximo en el que se puede estirar la articulación de prueba, el que es 180,813°. Es decir, la articulación se puede estirar completamente.

## 5.4. Articulación de rigidez variable: Extensor.

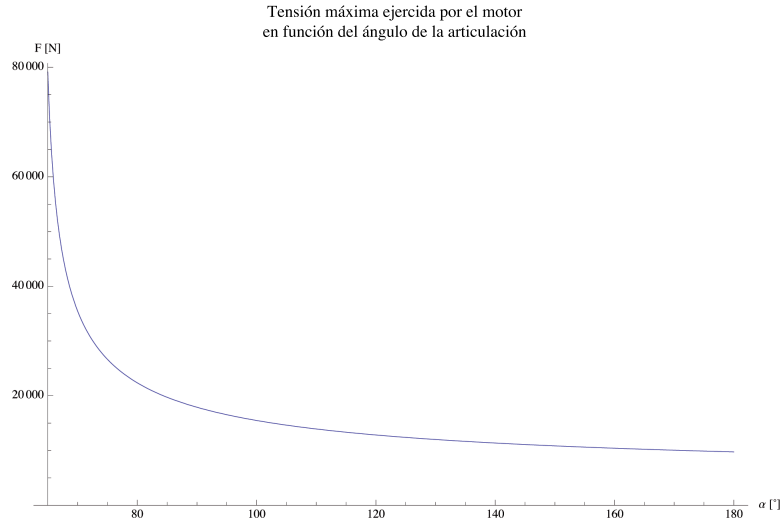


Figura 5.14: Tensión máxima de la cuerda en función del ángulo de la articulación.

### 5.4.4. Comportamiento dinámico

Reemplazando  $\tau_m(t)$  por la definición de la ecuación (5.27) en la ecuación que define la tensión de la cuerda (B.18) se obtiene la ecuación (B.19), que muestra la tensión de la cuerda como una función del ángulo de giro del motor que considera el modelo del motor.

Derivando la expresión para el ángulo de la articulación en función del giro del motor, dada por la ecuación (B.11), se obtiene la expresión para la velocidad angular de la articulación de la ecuación (B.20).

De la misma forma, derivando la expresión para la velocidad angular de la articulación en función del giro del motor dada por la ecuación (B.20) se obtiene la expresión para la aceleración angular de la articulación de la ecuación (B.21).

Reemplazando las expresiones obtenidas para la tensión de la cuerda (B.19), para el ángulo de la articulación (B.11), para la velocidad angular de la articulación (B.20) y para la aceleración angular de la articulación (B.21) en la ecuación (5.29) con la relación dinámica de la articulación, se obtiene una ecuación diferencial para la función del giro del motor  $\theta(t)$ . Utilizando los valores de la articulación de prueba, esta ecuación diferencial es resuelta numéricamente mediante el uso de la función *NDSolve* del software *Mathematica* [100] usando como condiciones iniciales que la articulación está detenida con ángulo  $65^\circ$ . La figura 5.15 muestra la función para el movimiento de la articulación  $\alpha(t)$  utilizando la relación entre el ángulo de la articulación y el giro del motor de la ecuación (B.11) y la solución para el giro del motor  $\theta(t)$  obtenida numéricamente para la articulación de prueba con distintas carga. Utilizando este resultado, se calcula el tiempo en que la articulación está completamente extendida ( $\alpha(t) = \pi$ ) para diversas cargas, obteniéndose los resultados de la tabla 5.1.

Reemplazando el resultado numérico para la función del giro del motor  $\theta(t)$  en la expresión obtenida para la tensión de la cuerda (B.19), se obtiene la solución numérica para la función de la tensión de la cuerda en el tiempo. En la figura 5.16 se muestra esta solución para diferentes cargas en al articulación de prueba.

## 5.4. Articulación de rigidez variable: Extensor.

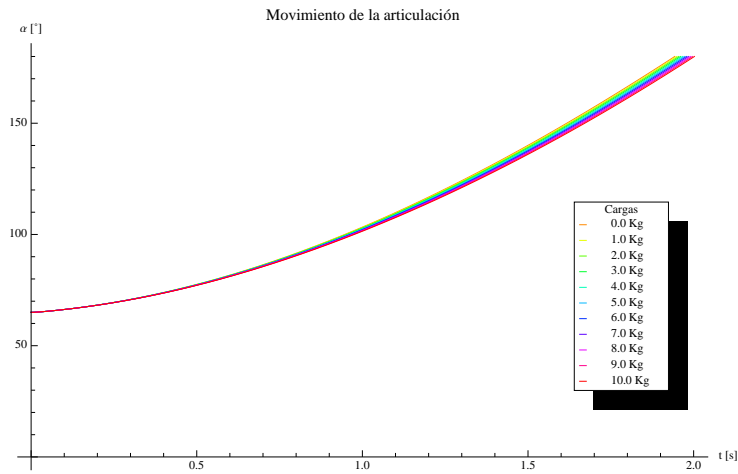


Figura 5.15: Ángulo de la articulación de prueba en función del tiempo resuelto numéricamente.

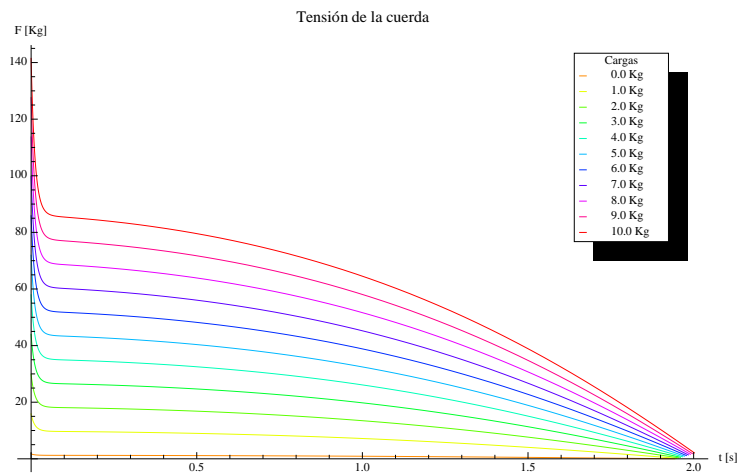


Figura 5.16: Tensión de la cuerda en la articulación de prueba en función del tiempo resuelto numéricamente.

#### 5.4. Articulación de rigidez variable: Extensor.

En la figura 5.16 se aprecia que cuando se utiliza el resultado dinámico, como se esperaba, también se obtiene la tensión máxima para el motor sin girar. Evaluando la tensión con el giro del motor en cero ( $\theta(0) = 0$ ) se obtienen la tensión máxima de la cuerda para el caso dinámico con diferentes cargas, la que se aprecia en la tabla 5.1.

Tabla 5.1: Comportamiento dinámico del actuador de prueba.

Carga [Kg]	Tensión Máxima [N]	Tiempo de Extensión [s]
0,0	1,72984	1,94295
1,0	15,7786	1,94872
2,0	29,8153	1,95452
3,0	43,8311	1,96035
4,0	57,826	1,96623
5,0	71,8001	1,97215
6,0	85,7534	1,97811
7,0	99,6859	1,98411
8,0	113,598	1,99014
9,0	127,489	1,99622
10,0	141,359	2,00235

Derivando la función del giro del motor  $\theta(t)$  obtenida numéricamente, se obtiene la velocidad angular del motor, la que se muestra en la figura 5.17 para varias cargas de prueba.

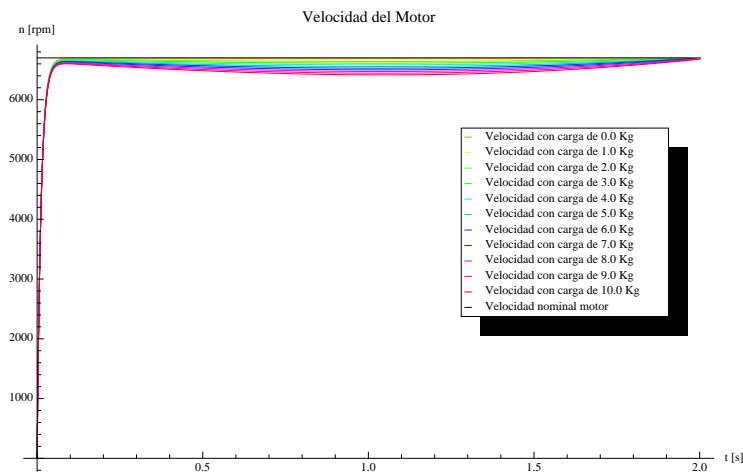


Figura 5.17: Velocidad angular del motor de la articulación de prueba en función del tiempo re-suelto numéricamente para diversas cargas.

Así mismo, reemplazando la solución numérica para la velocidad angular del motor en la ecuación (5.27) que muestra el modelo del motor, se puede obtener el torque ejercido por el motor en

## 5.5. Articulación de rigidez variable: Extensor.

el tiempo. La figura 5.18 muestra la solución obtenida numéricamente para el torque ejercido por el motor contrastada con los torques nominal y máximo del motor.

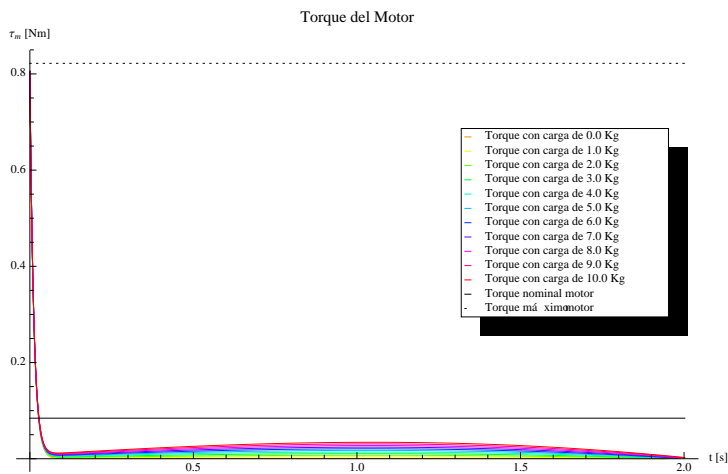


Figura 5.18: Torque ejercido por el motor de la articulación de prueba en función del tiempo resuelto numéricamente para diversas cargas.

Multiplicando el torque ejercido por el motor por su velocidad angular se obtiene la potencia mecánica ejercida por el motor de la articulación de prueba, la que se muestra en conjunto con la potencia nominal del motor en la figura 5.19 para diversas cargas de prueba.

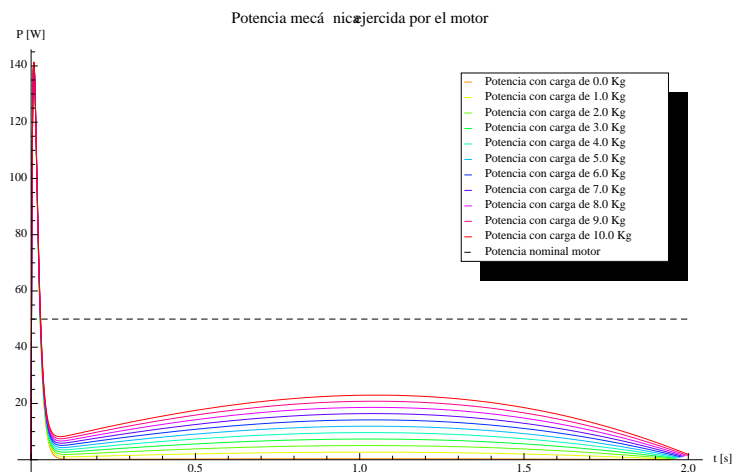


Figura 5.19: Potencia mecánica ejercida por el motor de la articulación de prueba en función del tiempo resuelto numéricamente para diversas cargas.

## 5.5. Flexor

El flexor corresponde al mecanismo motor-cuerda que se encarga de flectar la articulación. En la figura 5.5 se aprecia el motor y el soporte de la cuerda del flexor, la cuerda va entre el motor y este soporte. En esta sección se utilizan las mismas definiciones que en el caso del extensor (ver sección 5.4).

La cuerda del motor flexor sigue con el modelo mostrado en la sección 5.2, pero con la diferencia de que no existe destorcedor, por lo tanto, la variable de interés que determina el largo de la cuerda entre el motor y el soporte de la cuerda es  $s$ .

Manipulando las ecuaciones (5.11), (5.14), (5.17), y (5.15) se obtiene una expresión para el largo del tendón  $s$ , la que se aprecia en la ecuación (B.23).

Inspeccionando la figura 5.5, es fácil ver que la relación geométrica entre el largo del tendón  $s$  y el ángulo de la articulación  $\alpha$  está dada por:

$$s^2 = l_{ss}^2 + l_{si}^2 + h_{si}^2 - 2 \cdot l_{ss} \cdot \sqrt{l_{si}^2 + h_{si}^2} \cdot \cos \left( \alpha(t) - \text{ArcTan} \left( \frac{h_{si}}{l_{si}} \right) \right). \quad (5.32)$$

Reemplazando la expresión para el largo del tendón  $s$ , que se aprecia en la ecuación (B.23), en la ecuación (5.32) con la relación geométrica entre el largo del tendón y el ángulo de la articulación se obtiene la expresión (B.24).

De la expresión B.24 se puede despejar el ángulo de la articulación como una función del giro del motor flexor, esta expresión se aprecia en la ecuación B.25. La figura 5.20 muestra esta relación para el caso de la articulación de prueba.

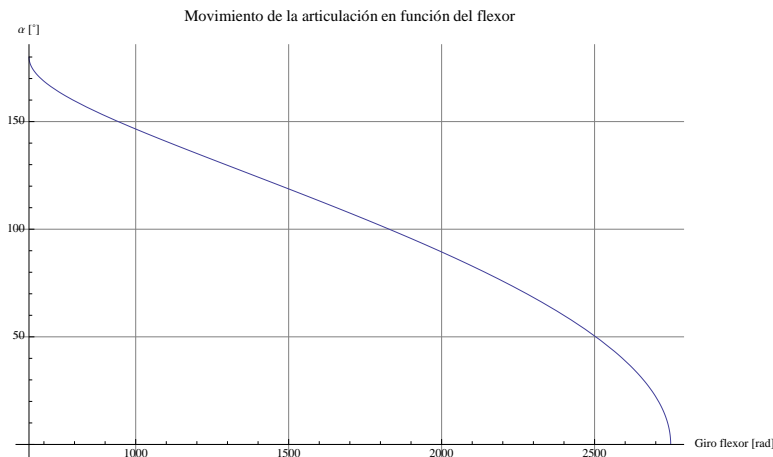


Figura 5.20: Ángulo de la articulación en función de la cantidad de vueltas del motor flexor.

En el caso del flexor, el torque se hace en el sentido inverso al movimiento de la articulación (un torque positivo genera aceleración negativa en la articulación), por lo tanto, la conservación de potencia en este caso está dada por:

$$\tau_m(t) \cdot \dot{\theta}(t) = -\tau_w(t) \cdot \dot{\alpha}(t). \quad (5.33)$$

## 5.6. Articulación completa

Se debe cumplir la relación dinámica:

$$\ddot{\alpha}(t) \cdot (m_{art} \cdot distCM^2 + m_{carga} \cdot l_{art}^2) = (\tau_{w_{ext}}(t) - \tau_{w_{fle}}(t) - \tau_g(t)). \quad (5.34)$$

Como se mencionó en la sección 5.3, la variable manipulada en los motores es el ciclo de PWM con el que se alimentan, por esto es fundamental modelar el efecto de distintos ciclos PWM en el controlador.

Para considerar un cierto ciclo PWM del controlador de la articulación, los torque ejercidos por los motores están dados por las expresiones:

$$\tau_{m_{ext}}(\dot{\theta}(t)) = PWM_{ext} \cdot \frac{torqueBloq}{\omega_{nominal}} \cdot (\omega_{nominal} - \dot{\theta}_{ext}(t)) - I_{rotor} \cdot \ddot{\theta}. \quad (5.35a)$$

$$\tau_{m_{fle}}(\dot{\theta}(t)) = PWM_{fle} \cdot \frac{torqueBloq}{\omega_{nominal}} \cdot (\omega_{nominal} - \dot{\theta}_{fle}(t)) - I_{rotor} \cdot \ddot{\theta}. \quad (5.35b)$$

### 5.6.1. Resultados numéricos

Las ecuaciones que determinan el comportamiento tanto del flexor como del extensor son demasiado complejas como para ser resueltas algebraicamente, es por esto que las constantes de la relación entre el ángulo de la articulación y el giro del motor extensor, ecuación (B.11), la relación entre el ángulo de la articulación y el giro del motor flexor, ecuación (B.24), la transmisión de potencia del extensor, ecuación (5.25), la transmisión de potencia del flexor, ecuación (5.33), la relación dinámica de la articulación completa, ecuación (5.34), y el modelo del torque de los motores, ecuaciones (5.35), son reemplazadas por los valores de la articulación de prueba y son resueltas numéricamente mediante la función *NDSolve* del software *Mathematica* [100]. Por simplicidad en la simulación y para evaluar el efecto de distintas combinaciones de torque realizados por los motores antagonistas, los resultados numéricos obtenidos son presentados para varias combinaciones de valores de PWM para el motor flexor y el motor extensor. Es interesante evaluar la posición de equilibrio que alcanza la articulación o el tiempo que tarda en alcanzar la flexión o extensión completa para cada una de las combinaciones probadas.

Se realizan 6 casos de estudio: (I) Tenso extremo, (II) Pararse tenso, (III) Pararse rápido, (IV) Pararse lento, (V) Tenso y (VI) Acucillarce. A continuación se describe cada uno de los casos de estudio:

**Tenso extremo:** Corresponde al caso en que ambos motores tiran al máximo, es cuando los tendones ejercen más fuerza. Esta condición se simula con un ciclo de PWM en el motor extensor de 100% y un ciclo de PWM en el motor flexor de 100%.

**Pararse tenso:** Corresponde al caso en que el motor extensor tira al máximo, mientras el flexor tira de forma moderada. Se espera que el robot se logre parar, pero con una elevada tensión en los tendones. Esta condición se simula con un ciclo de PWM en el motor extensor de 100% y un ciclo de PWM en el motor flexor de 50%.

## 5.6. Articulación de rigidez variable: Articulación completa.

**Pararse rápido:** Corresponde al caso en que el motor extensor tira al máximo, mientras el flexor tira al mínimo necesario para que el tendón este estirado. Se espera que el robot se logre parar rápidamente. Esta condición se simula con un ciclo de PWM en el motor extensor de 100% y un ciclo de PWM en el motor flexor de 5%.

**Pararse lento:** Corresponde al caso en que el motor extensor tira de forma moderada, mientras el flexor tira al mínimo necesario para que el tendón este estirado. Se espera que el robot se logre parar lentamente. Esta condición se simula con un ciclo de PWM en el motor extensor de 50% y un ciclo de PWM en el motor flexor de 5%.

**Tenso:** Corresponde al caso en que ambos motores tiran de forma moderada. Esta condición se simula con un ciclo de PWM en el motor extensor de 50% y un ciclo de PWM en el motor flexor de 50%.

**Acuclillarse:** Corresponde al caso en que el motor extensor tira al mínimo necesario para que el tendón este estirado, mientras el flexor tira de forma moderada. Se espera que el robot se logre agachar rápidamente, pues este movimiento cuenta con ayuda de la fuerza de gravedad. Esta condición se simula con un ciclo de PWM en el motor extensor de 5% y un ciclo de PWM en el motor flexor de 50%.

En la tabla 5.2 se muestran las condiciones iniciales utilizadas para obtener los resultados numéricos para cada combinación de PWM probada.

Tabla 5.2: Condiciones iniciales utilizadas al calcular las soluciones numéricas de la articulación de prueba completa para diversos valores de PWM.

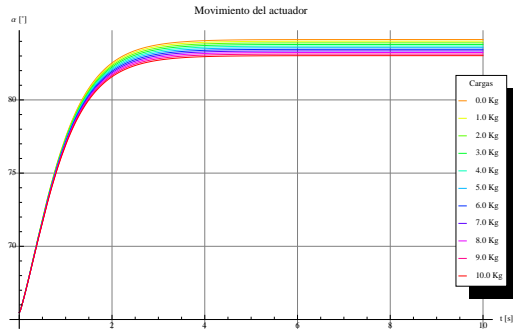
Caso de Estudio	PWM <sub>ext</sub> [%]	PWM <sub>fle</sub> [%]	Ángulo Articulación $\alpha$ [°]	n° vueltas extensor [vueltas]	n° vueltas flexor [vueltas]
Tenso extremo	100	100	65,4871	20,2883	371,636
Pararse tenso	100	50	65,4871	20,2883	371,636
Pararse rápido	100	5	65,4871	20,2883	371,636
Pararse lento	50	5	65,4871	20,2883	371,636
Tenso	50	50	65,4871	20,2883	371,636
Acuclillarse	5	50	176,032	227,06	104,637

### Resultados numéricos para el caso tenso extremo

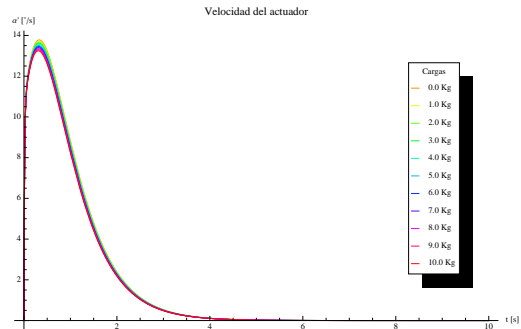
Al analizar la solución numérica para el caso tenso extremo, se aprecia que la articulación llega a un equilibrio en torno a los 86°. La tabla 5.3 muestra el ángulo al que llega la articulación, y la cantidad de vueltas que tiene cada motor al llegar al equilibrio. Además, la figura 5.21 muestra el comportamiento de la articulación en el tiempo para este caso.

Como se esperaba, se puede observar en la figura 5.21a como la articulación alcanza una posición de equilibrio, en que el torque ejercido por el extensor es igual a la suma de los torques

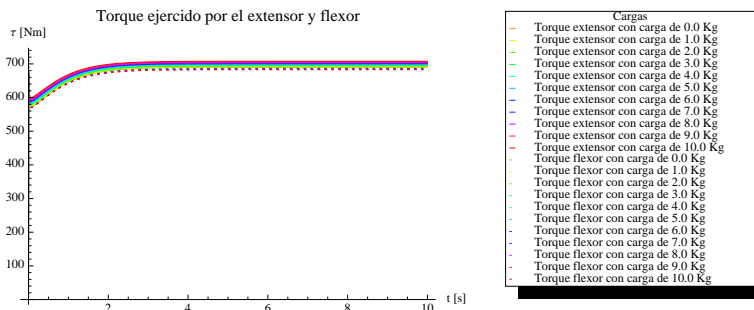
## 5.6. Articulación de rigidez variable: Articulación completa.



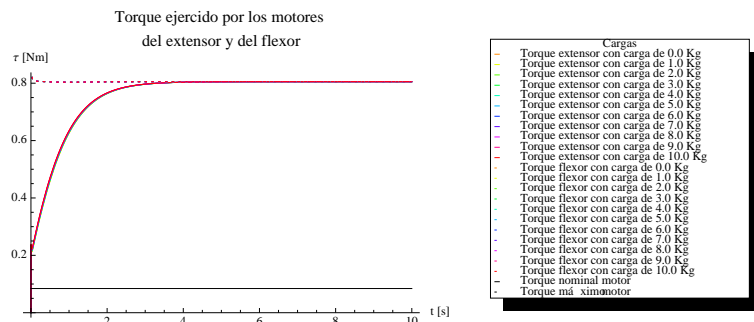
(a) Ángulo de la articulación en función del tiempo.



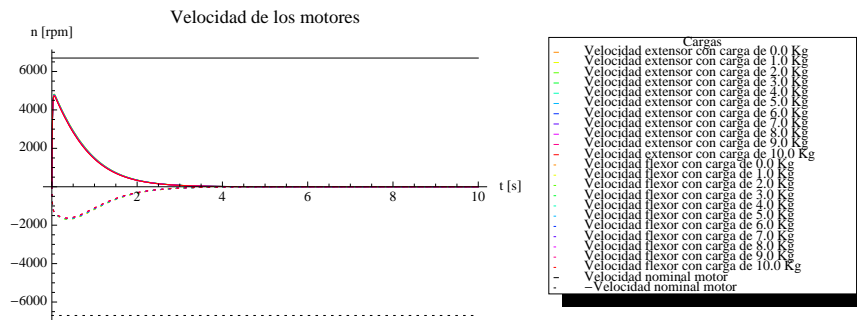
(b) Velocidad angular de la articulación en función del tiempo.



(c) Torques ejercidos por los actuadores en la articulación.



(d) Torque de los motores ejercido en sus ejes.



(e) Velocidad de los motores.

Figura 5.21: Resultados numéricos para diversas cargas para el caso tenso extremo.

## 5.6. Articulación de rigidez variable: Articulación completa.

Tabla 5.3: Resultados numéricos en el instante final del movimiento de la articulación de prueba completa para el caso tenso extremo

Carga [Kg]	tiempo [s]	Ángulo Articulación $\alpha$ [°]	n° vueltas extensor [vueltas]	n° vueltas flexor [vueltas]
0	10	84,1235	87,6957	331,243
1	10	84,011	87,4276	331,511
2	10	83,899	87,1602	331,777
3	10	83,7876	86,8933	332,041
4	10	83,6767	86,6271	332,304
5	10	83,5663	86,3614	332,565
6	10	83,4565	86,0964	332,825
7	10	83,3473	85,832	333,083
8	10	83,2385	85,5683	333,34
9	10	83,1304	85,3052	333,595
10	10	83,0227	85,0427	333,848

ejercidos por el flexor y por la gravedad. Esta condición de equilibrio se alcanza alrededor de 4 segundos después de iniciado el experimento. En la figura 5.21e se observa como el extensor alcanza casi la velocidad nominal en un corto tiempo (menor a 100ms) y luego se frena. Esto se explica porque los actuadores tienen una reducción casi infinita al estar el tendón estirado, ejerciendo un torque casi infinito, por lo que le es muy fácil acelerar, pero rápidamente esta reducción baja, y el torque ejercido se compensa con el torque ejercido por su antagonista.

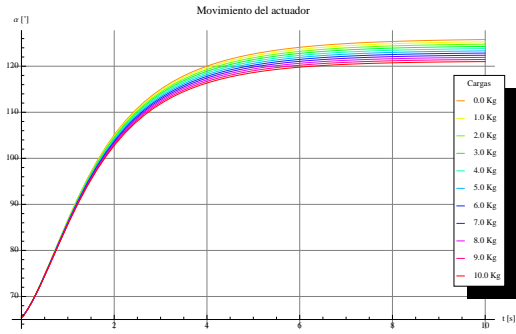
También se aprecia que los torques en los motores (figura 5.21d) y los ejercidos en la articulación (figura 5.21c) son enormes. Esta configuración es la que genera la máxima rigidez, pero no es recomendable durante tiempos largos pues las fuerzas y torques presentes en la articulación son demasiado grandes.

### Resultados numéricos para el caso pararse tenso

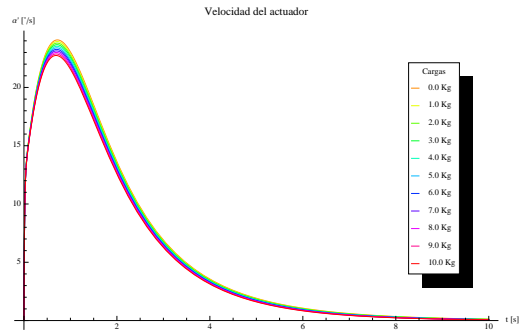
Al analizar la solución numérica para el caso pararse tenso, se aprecia que la articulación llega a un equilibrio en torno a los  $160^\circ$ . La tabla 5.4 muestra el ángulo al que llega la articulación y la cantidad de vueltas que tiene cada motor al llegar al equilibrio. Además, la figura 5.22 muestra el comportamiento de la articulación en el tiempo para este caso.

En este caso, se puede observar que la articulación no logra extenderse completamente (figura 5.22a), por lo tanto, el robot no se pararía con esta configuración, alcanzando una posición de equilibrio, en que el torque ejercido por el extensor es igual a la suma de los torques ejercidos por el flexor y por la gravedad. Esta condición de equilibrio se alcanza alrededor de 8 segundos después de iniciado el experimento. En la figura 5.22e se observa como el extensor alcanza casi la velocidad nominal en un corto tiempo (menor a 100ms) y luego se frena lentamente. Esto se explica porque los actuadores tienen una reducción casi infinita al estar el tendón estirado, ejerciendo un torque casi infinito, por lo que le es muy fácil acelerar, pero esta reducción baja, y el torque ejercido se

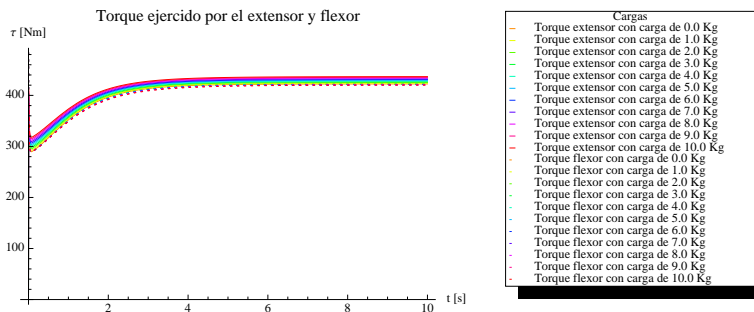
## 5.6. Articulación de rigidez variable: Articulación completa.



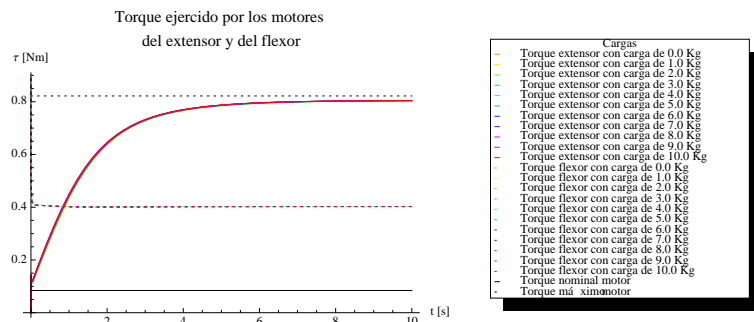
(a) Ángulo de la articulación en función del tiempo.



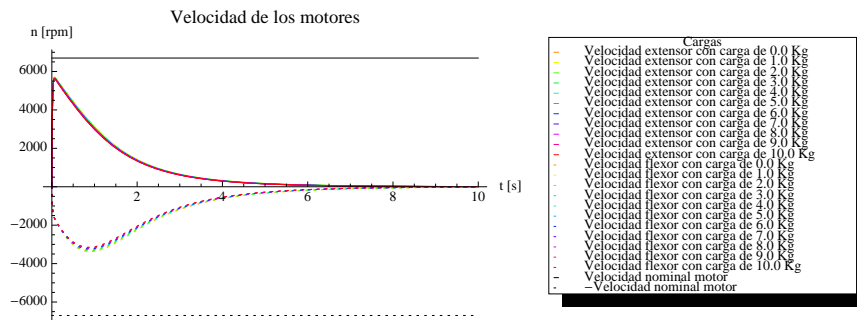
(b) Velocidad angular de la articulación en función del tiempo.



(c) Torques ejercidos por los actuadores en la articulación.



(d) Torque de los motores ejercido en sus ejes.



(e) Velocidad de los motores.

Figura 5.22: Resultados numéricos para diversas cargas para el caso pararse tenso.

## 5.6. Articulación de rigidez variable: Articulación completa.

Tabla 5.4: Resultados numéricos en el instante final del movimiento de la articulación de prueba completa para el caso pararse tenso.

Carga [Kg]	tiempo [s]	Ángulo Articulación $\alpha$ [°]	n° vueltas extensor [vueltas]	n° vueltas flexor [vueltas]
0	10	125,794	162,255	218,216
1	10	125,289	161,516	219,687
2	10	124,79	160,785	221,139
3	10	124,298	160,061	222,572
4	10	123,812	159,343	223,987
5	10	123,331	158,631	225,384
6	10	122,856	157,925	226,765
7	10	122,386	157,225	228,131
8	10	121,921	156,529	229,481
9	10	121,461	155,838	230,817
10	10	121,005	155,152	232,139

compensa con el torque ejercido por su antagonista.

También se aprecia en las figuras 5.22d y 5.22c que aunque los torques en los motores y los ejercidos en la articulación son menores que en el caso tenso extremo, siguen siendo muy grandes. Esta configuración también genera bastante rigidez, pero en otra posición de equilibrio.

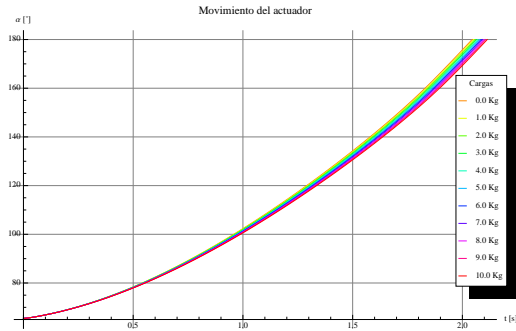
### Resultados numéricos para el caso pararse rápido

Al analizar la solución numérica para el caso pararse rápido, se aprecia que la articulación se estira completamente sin alcanzar un equilibrio. La tabla 5.5 muestra la cantidad de vueltas que tiene cada motor al estirar la articulación, así como el tiempo que tarda este proceso. Además, la figura 5.23 muestra el comportamiento de la articulación en el tiempo para este caso.

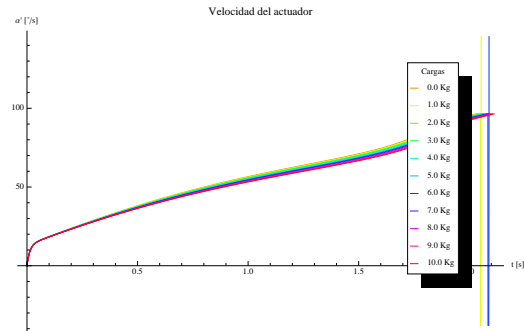
Como se esperaba, en la figura 5.23a se puede observar como la articulación se estira completamente en un corto período de tiempo (alrededor de 2 segundos después de iniciado el experimento). Se observa como el extensor alcanza casi la velocidad nominal en un corto tiempo (menor a 100ms) y luego la mantiene durante todo el experimento (figura 5.23e). Esto se explica porque los actuadores tienen una reducción casi infinita al estar el tendón estirado, ejerciendo un torque casi infinito, por lo que le es muy fácil acelerar. El hecho de que la velocidad no baje implica que la reducción del actuador es muy alta pues la limitante es la velocidad del motor y no su torque. De forma que si el tendón tuviese más reducción la articulación se extendería antes.

También, en las figuras 5.23d y 5.23c se aprecia que los torques en los motores y los ejercidos en la articulación son muy bajos. Esta configuración es la que genera poca rigidez, pero una buena velocidad de movimiento en la articulación (figura 5.23b).

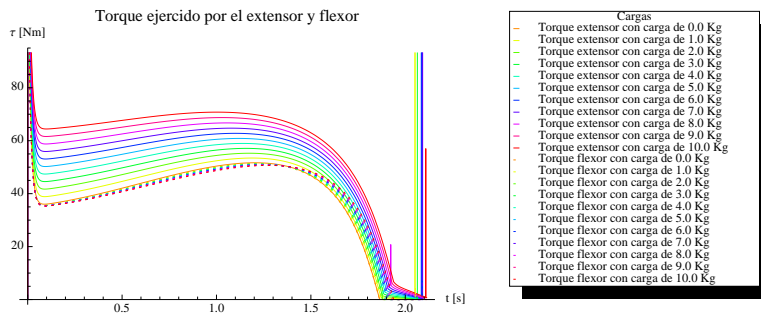
## 5.6. Articulación de rigidez variable: Articulación completa.



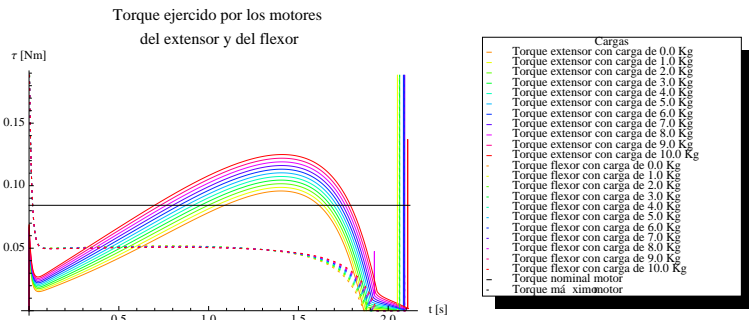
(a) Ángulo de la articulación en función del tiempo.



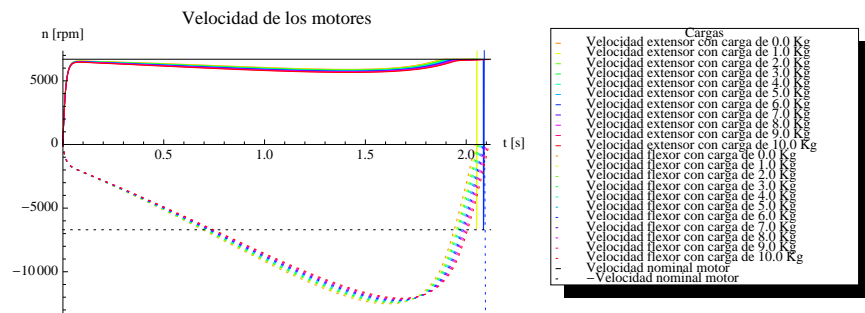
(b) Velocidad angular de la articulación en función del tiempo.



(c) Torques ejercidos por los actuadores en la articulación.



(d) Torque de los motores ejercido en sus ejes.



(e) Velocidad de los motores.

Figura 5.23: Resultados numéricos para diversas cargas para el caso pararse rápido.

## 5.6. Articulación de rigidez variable: Articulación completa.

Tabla 5.5: Resultados numéricos en el instante final del movimiento de la articulación de prueba completa para el caso pararse rápido.

Carga [Kg]	tiempo [s]	Ángulo Articulación $\alpha$ [°]	n° vueltas extensor [vueltas]	n° vueltas flexor [vueltas]
0	2,04423	180	231,659	103,637
1	2,05436	180	231,664	103,637
2	2,05761	180	231,659	103,637
3	2,06438	180	231,659	103,637
4	2,07119	180	231,659	103,637
5	2,07805	180	231,659	103,637
6	2,12095	180	231,664	103,637
7	2,09193	180	231,659	103,637
8	2,09894	180	231,659	103,637
9	2,10601	180	231,659	103,637
10	2,11313	180	231,659	103,637

### Resultados numéricos para el caso pararse lento

Al analizar la solución numérica para el caso pararse lento, se aprecia que la articulación se estira completamente sin alcanzar un equilibrio. La tabla 5.6 muestra la cantidad de vueltas que tiene cada motor al estirar la articulación, así como el tiempo que tarda este proceso. Además, la figura 5.24 muestra el comportamiento de la articulación en el tiempo para este caso.

A pesar de ser bastante más bajo el ciclo de PWM que en el caso pararse rápido, el resultado es bastante similar en todo aspecto. Esto se explica porque, como se mencionó anteriormente, la reducción del actuador es muy alta, por lo que la limitante es la velocidad del motor y no su torque.

### Resultados numéricos para el caso tenso

Al analizar la solución numérica para el caso tenso, se aprecia que la articulación llega a un equilibrio en torno a los 85°. La tabla 5.7 muestra el ángulo al que llega la articulación, y la cantidad de vueltas que tiene cada motor al llegar al equilibrio. Además, la figura 5.25 muestra el comportamiento de la articulación en el tiempo para este caso.

Como se esperaba, en la figura 5.25a se puede observar como la articulación alcanza una posición de equilibrio, en que el torque ejercido por el extensor es igual a la suma de los torques ejercidos por el flexor y por la gravedad. Esta condición de equilibrio se alcanza alrededor de 4 segundos después de iniciado el experimento. En la figura 5.25e se observa como el extensor alcanza casi la velocidad nominal en un corto tiempo (menor a 100ms) y luego se frena. Esto se explica porque los actuadores tienen una reducción casi infinita al estar el tendón estirado, ejerciendo un torque casi infinito, por lo que le es muy fácil acelerar, pero rápidamente esta reducción baja, y el torque ejercido se compensa con el torque ejercido por su antagonista.

Esta configuración se comporta bastante parecido al caso tenso extremo (figura 5.21), pero

## 5.6. Articulación de rigidez variable: Articulación completa.

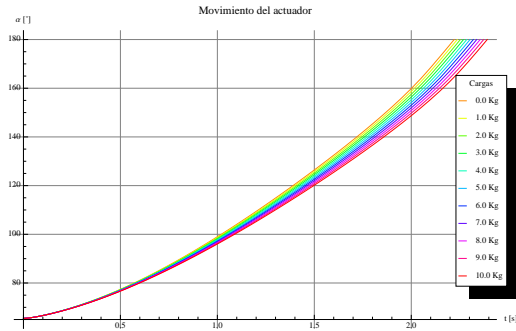
Tabla 5.6: Resultados numéricos en el instante final del movimiento de la articulación de prueba completa para el caso pararse lento.

Carga [Kg]	tiempo [s]	Ángulo Articulación $\alpha$ [°]	nº vueltas extensor [vueltas]	nº vueltas flexor [vueltas]
0	2,22119	180	231,659	103,637
1	2,23703	180	231,659	103,637
2	2,25311	180	231,659	103,637
3	2,26945	180	231,659	103,637
4	2,28605	180	231,659	103,637
5	2,30293	180	231,659	103,637
6	2,32008	180	231,659	103,637
7	2,33751	180	231,659	103,637
8	2,35523	180	231,659	103,637
9	2,37325	180	231,659	103,637
10	2,39163	180	231,664	103,637

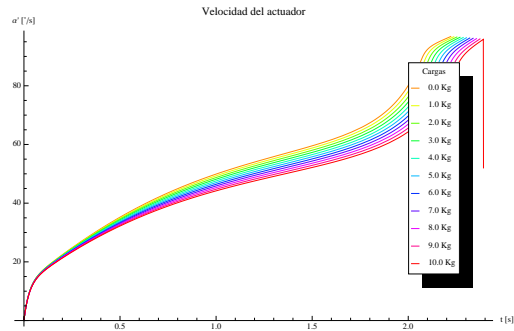
Tabla 5.7: Resultados numéricos en el instante final del movimiento de la articulación de prueba completa para el caso tenso.

Carga [Kg]	tiempo [s]	Ángulo Articulación $\alpha$ [°]	nº vueltas extensor [vueltas]	nº vueltas flexor [vueltas]
0	10	84,1069	87,6561	331,283
1	10	83,8825	87,1207	331,816
2	10	83,6604	86,5878	332,343
3	10	83,4404	86,0573	332,863
4	10	83,2225	85,5294	333,377
5	10	83,0069	85,004	333,886
6	10	82,7934	84,4812	334,388
7	10	82,5821	83,961	334,884
8	10	82,373	83,4434	335,374
9	10	82,166	82,9286	335,858
10	10	81,9612	82,4165	336,336

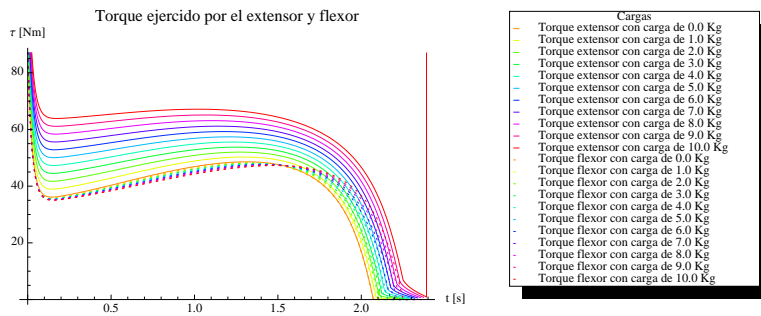
## 5.6. Articulación de rigidez variable: Articulación completa.



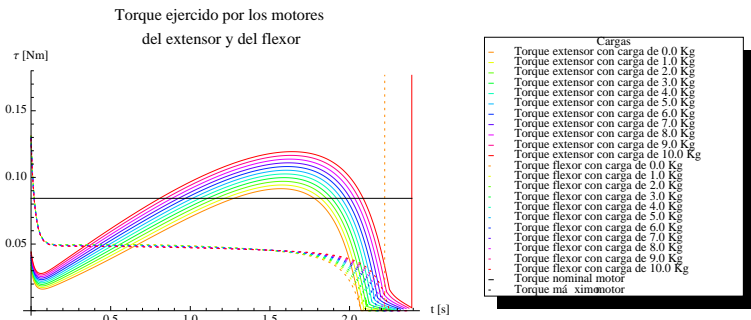
(a) Ángulo de la articulación en función del tiempo.



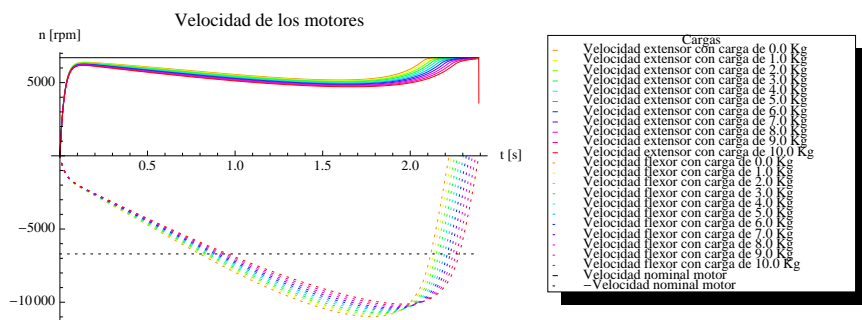
(b) Velocidad angular de la articulación en función del tiempo.



(c) Torques ejercidos por los actuadores en la articulación.



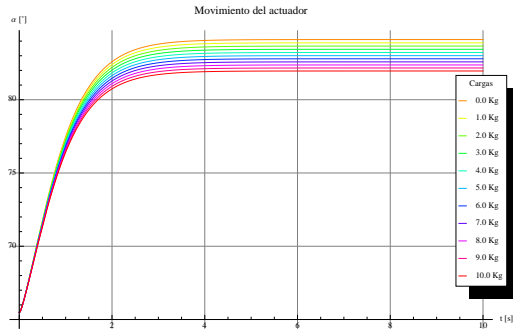
(d) Torque de los motores ejercido en sus ejes.



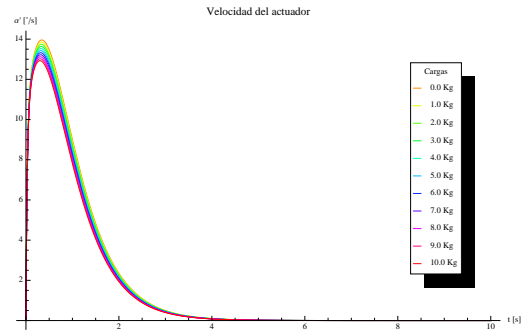
(e) Velocidad de los motores.

Figura 5.24: Resultados numéricos para diversas cargas para el caso pararse lento.

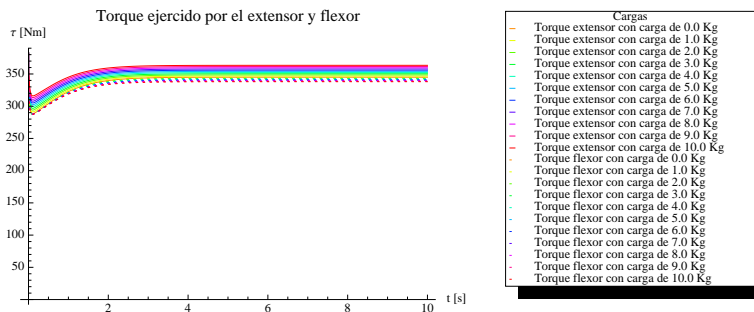
## 5.6. Articulación de rigidez variable: Articulación completa.



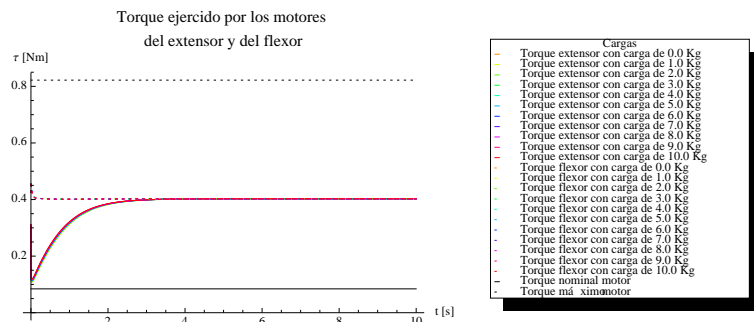
(a) Ángulo de la articulación en función del tiempo.



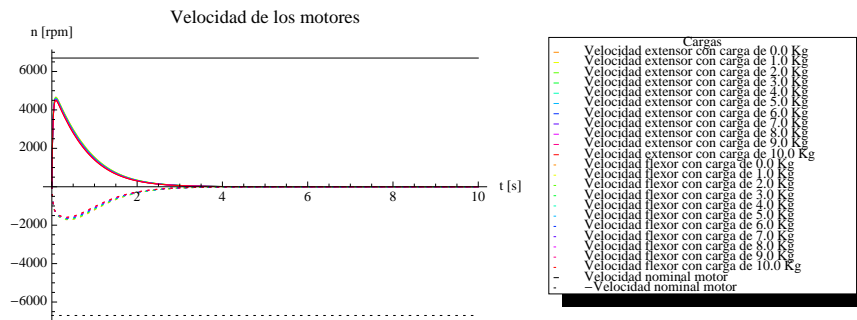
(b) Velocidad angular de la articulación en función del tiempo.



(c) Torques ejercidos por los actuadores en la articulación.



(d) Torque de los motores ejercido en sus ejes.



(e) Velocidad de los motores.

Figura 5.25: Resultados numéricos para diversas cargas para el caso tenso.

## 5.6. Articulación de rigidez variable: Articulación completa.

con torques mucho menores (figura 5.25c), generando una menor rigidez, pero siendo mucho más recomendable desde el punto de vista de la seguridad de la articulación.

### Resultados numéricos para el caso acucillarse

Al analizar la solución numérica para el caso acucillarse, se aprecia que la articulación se contrae completamente, es decir, el ángulo de la articulación llega a  $66^\circ$ , pues no se puede contraer más. La tabla 5.8 muestra la cantidad de vueltas que tiene cada motor al flexar la articulación, así como el tiempo que tarda este proceso. Además, la figura 5.26 muestra el comportamiento de la articulación en el tiempo para este caso.

Tabla 5.8: Resultados numéricos en el instante final del movimiento de la articulación de prueba completa para el caso acucillarse.

Carga [Kg]	tiempo [s]	Ángulo Articulación $\alpha$ [ $^\circ$ ]	n <sup>o</sup> vueltas extensor [vueltas]	n <sup>o</sup> vueltas flexor [vueltas]
0	2,69321	66	24,0911	370,636
1	2,68197	66	24,0911	370,636
2	2,67088	66	24,0911	370,636
3	2,65994	66	24,0911	370,636
4	2,64913	66	24,0911	370,636
5	2,63846	66	24,0911	370,636
6	2,62793	66	24,0911	370,636
7	2,61753	66	24,0911	370,636
8	2,60726	66	24,0911	370,636
9	2,59712	66	24,0911	370,636
10	2,5871	66	24,0911	370,636

El comportamiento de la articulación en este caso vuelve a mostrar que la reducción de la articulación es muy alta, pues en la figura 5.26e también se aprecia que el motor flexor llega a la velocidad nominal, manteniéndola durante todo el experimento.

Los experimentos realizados numéricamente resultaron exitosos y mostraron sólo un inconveniente: la reducción de los tendones es muy alta. Sin embargo, esto es muy fácil de corregir aumentando el diámetro de los tendones, pues si la cuerda que se tuerce es más gruesa, entonces genera un mayor desplazamiento lineal, traduciéndose esto en una menor reducción.

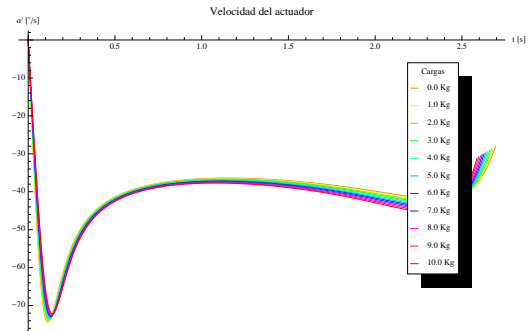
### 5.6.2. Sistema de control

El sistema de control diseñado e implementado para la articulación propuesta es el control típicamente utilizado en los servo-motores [64], pero con algunas modificaciones para manipular los tendones antagonicos y poder controlar posición o torque a elección del usuario. La figura 5.27 muestra el sistema de control implementado, en donde se diferencian el control de posición, el control de torque antagonico y el control de torque de cada motor. El detalle del bloque de control

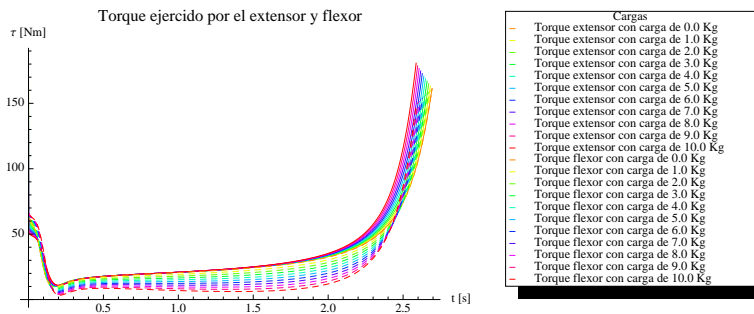
## 5.6. Articulación de rigidez variable: Articulación completa.



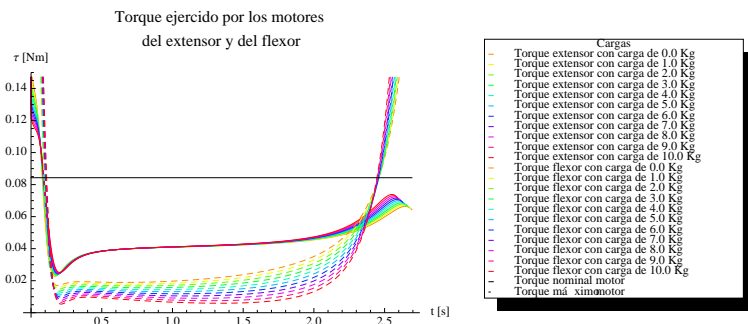
(a) Ángulo de la articulación en función del tiempo.



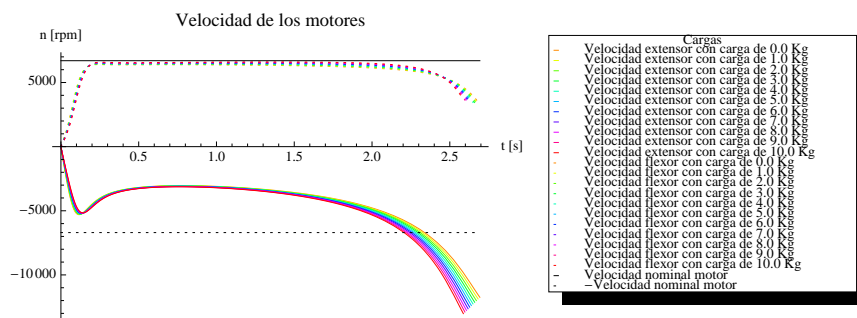
(b) Velocidad angular de la articulación en función del tiempo.



(c) Torques ejercidos por los actuadores en la articulación.



(d) Torque de los motores ejercido en sus ejes.



(e) Velocidad de los motores.

Figura 5.26: Resultados numéricos para diversas cargas para el caso acucillarse.

## 5.6. Articulación de rigidez variable: Articulación completa.

de posición se aprecia en las figura 5.28. Luego, en la figura 5.29 se presenta el bloque de control de torque antagónico de la articulación. Finalmente, el bloque de control de torque de un motor se muestra en la figura 5.30, se debe mencionar que cada uno de los dos motores antagónicos de la articulación utiliza una instancia distinta de este controlador.

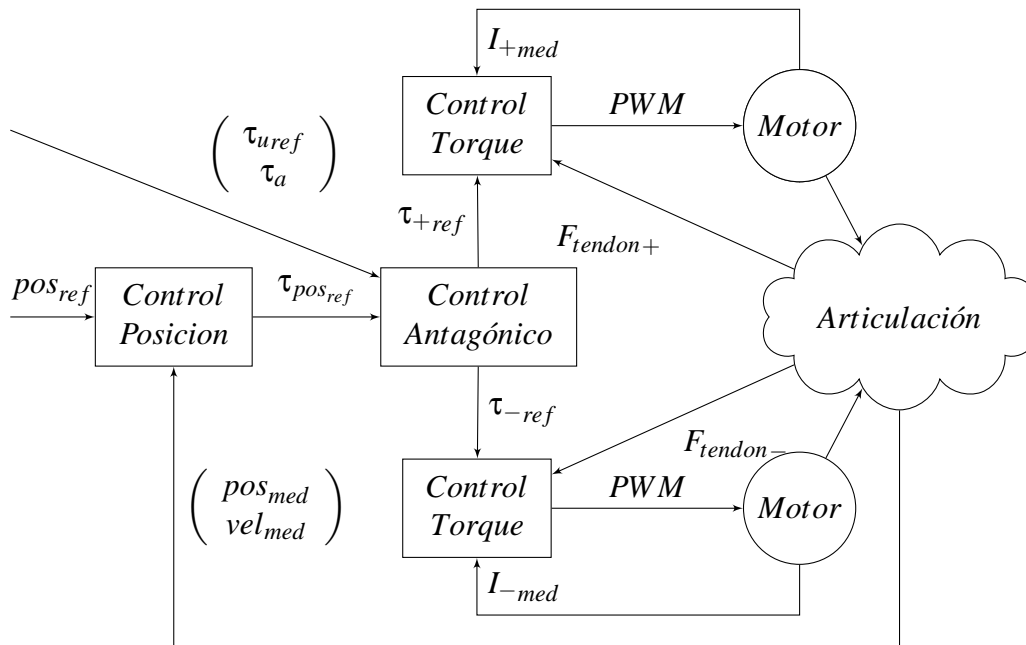


Figura 5.27: Diagrama bloques del sistema de control de la articulación.

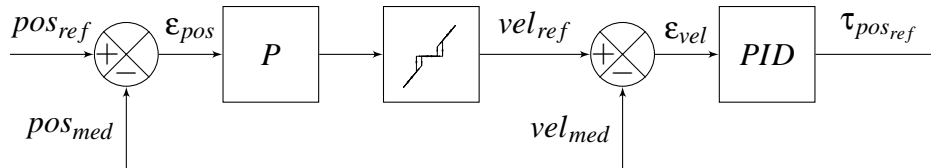


Figura 5.28: Diagrama bloques del sistema de control de posición.

Para controlar el antagonismo se define un torque antagónico  $\tau_a$ , que corresponde al mínimo torque ejercido por un tendón. Este es un indicador de cuánto luchan entre sí y por lo tanto, es una medida de la rigidez del actuador. Considerando esto, el torque que deben ejercer los tendones es:

$$T_+ = \begin{cases} \tau_{ref} - \tau_a & \tau_{ref} \geq 0 \\ \tau_a & \tau_{ref} < 0 \end{cases} \quad (5.36a)$$

$$T_- = \begin{cases} \tau_a & \tau_{ref} \geq 0 \\ \tau_{ref} - \tau_a & \tau_{ref} < 0 \end{cases} \quad (5.36b)$$

## 5.6. Articulación de rigidez variable: Articulación completa.

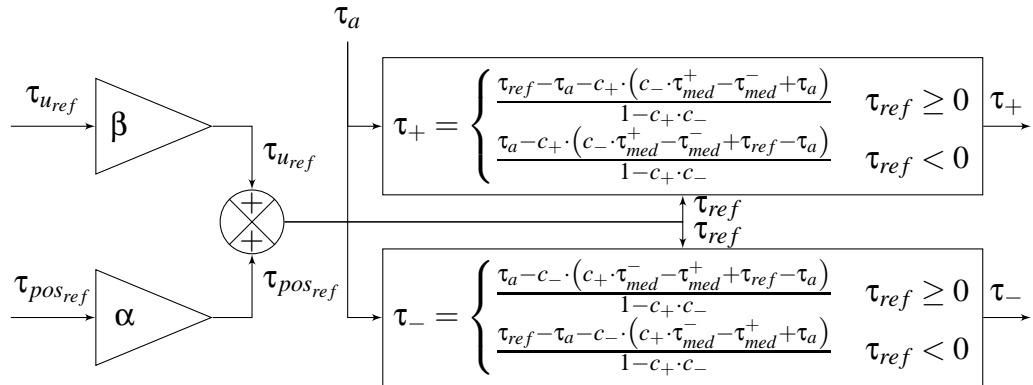


Figura 5.29: Diagrama bloques del sistema de control del torque antagonico.

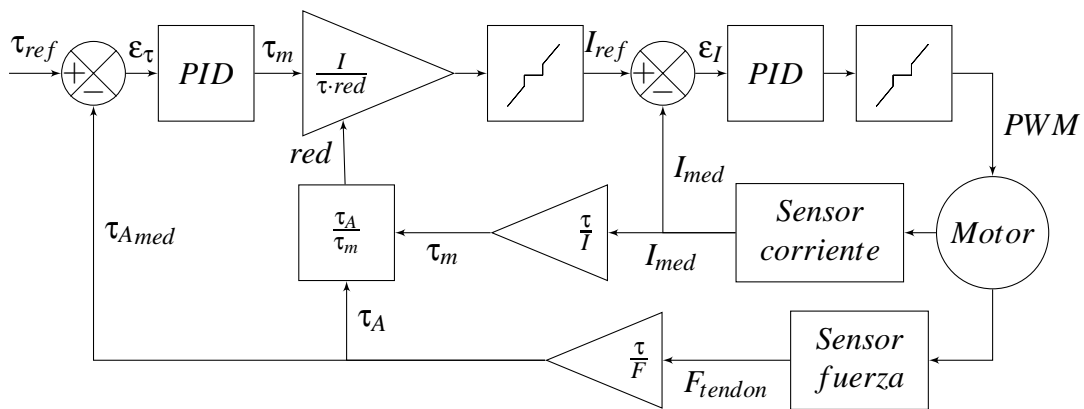


Figura 5.30: Diagrama bloques del sistema de control del torque de un motor.

## 5.6. Articulación de rigidez variable: Articulación completa.

Además, ambos tendones están ligados a través de la articulación, haciendo que la acción de un tendón afecte al otro tendón. Este fenómeno es considerado y compensado con una constante  $c_+$  para el tendón positivo y  $c_-$  para el tendón negativo, según la expresión:

$$\tau_+ = T_+ - c_+ \cdot (\tau_- - \tau_{med}^-) . \quad (5.37a)$$

$$\tau_- = T_- - c_- \cdot (\tau_+ - \tau_{med}^+) . \quad (5.37b)$$

Donde,  $\tau_{med}^+$  y  $\tau_{med}^-$  son los torques medidos en los tendones positivo y negativo respectivamente.

Resolviendo la expresión (5.37) se obtiene la siguiente ley de compensación de torque:

$$\tau_+ = \frac{T_+ - c_+ \cdot (c_- \cdot \tau_{med}^+ - \tau_{med}^- + T_-)}{1 - c_+ \cdot c_-} . \quad (5.38a)$$

$$\tau_- = \frac{T_- - c_- \cdot (c_+ \cdot \tau_{med}^- - \tau_{med}^+ + T_+)}{1 - c_+ \cdot c_-} . \quad (5.38b)$$

Reemplazando la ecuación (5.36) en la ecuación (5.38) se obtiene la expresión para el control de torque antagónico que se muestra a continuación:

$$\tau_+ = \begin{cases} \frac{\tau_{ref} - \tau_a - c_+ \cdot (c_- \cdot \tau_{med}^+ - \tau_{med}^- + \tau_a)}{1 - c_+ \cdot c_-} & \tau_{ref} \geq 0 \\ \frac{\tau_a - c_+ \cdot (c_- \cdot \tau_{med}^+ - \tau_{med}^- + \tau_{ref} - \tau_a)}{1 - c_+ \cdot c_-} & \tau_{ref} < 0 \end{cases} . \quad (5.39a)$$

$$\tau_- = \begin{cases} \frac{\tau_a - c_- \cdot (c_+ \cdot \tau_{med}^- - \tau_{med}^+ + \tau_{ref} - \tau_a)}{1 - c_+ \cdot c_-} & \tau_{ref} \geq 0 \\ \frac{\tau_{ref} - \tau_a - c_- \cdot (c_+ \cdot \tau_{med}^- - \tau_{med}^+ + \tau_a)}{1 - c_+ \cdot c_-} & \tau_{ref} < 0 \end{cases} . \quad (5.39b)$$

Para controlar torque o posición, se le agrega un sumador ponderado en la etapa de control del torque antagónico de la articulación, en este sumador entran el torque necesario por el controlador de posición para llegar a la posición de referencia y el torque que se desea alcanzar. Entonces el usuario puede elegir que controlar mediante los ponderadores  $\alpha$  y  $\beta$ . Por simplicidad, en la primera implementación se utilizan estos valores normalizados ( $\alpha + \beta = 1$ ) y además binarios, es decir, sólo pueden ser 1 ó 0.

Todos los controladores PID presentes en el control de la articulación son sintonizados utilizando el método de Ziegler-Nichols de lazo cerrado [66]. En la figura 5.31 se muestran las respuestas de los controladores en lazo cerrado con ganancia puramente proporcional igual a la ganancia crítica utilizada en el método de Ziegler-Nichols.

### 5.6.3. Resultados con la articulación de prueba construida

Para verificar el comportamiento del actuador de rigidez variable propuesto, se realizaron experimentos utilizando la articulación de prueba construida que se muestra en la figura 5.5. Se probó la respuesta de la articulación ante distintas funciones como referencia de posición. En primer lugar se prueba con trenes de pulsos en la entrada para obtener la respuesta al escalón del sistema de control, de esta forma observar la convergencia del sistema, estimar cuanto tarda en alcanzar la referencia y analizar su comportamiento oscilatorio. Luego se analiza la respuesta del sistema frente

## 5.6. Articulación de rigidez variable: Articulación completa.

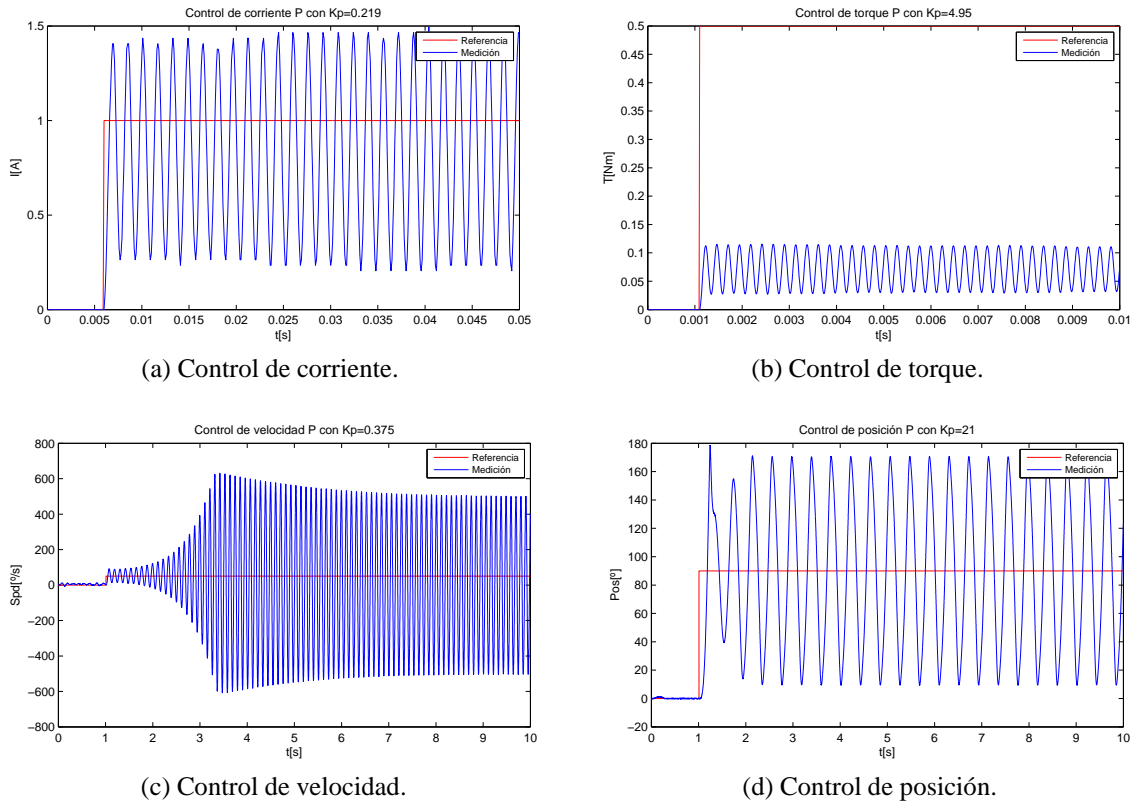


Figura 5.31: Respuestas utilizadas en el método de Ziegler-Nichols para los controladores en lazo cerrado con ganancia puramente proporcional igual a la ganancia crítica.

a sinusoides de distintas frecuencias en su entrada para observar el comportamiento de la articulación ante cambios suaves de referencia y analizar que frecuencias son realizables por el sistema de control, estimando una cierta frecuencia de corte del sistema de control.

### Tren de pulsos como referencia de posición

Se analiza el comportamiento de la articulación construida cuando la referencia de posición es un tren de pulsos de ancho 10 segundos aproximadamente y que varían la posición entre  $20^\circ$  y  $90^\circ$ .

La figura 5.32 muestra el comportamiento del sistema de control de posición. Se muestran las referencias y mediciones de la posición y velocidad angular de la articulación, así como la referencia de torque obtenida como salida del bloque de control de posición.

La figura 5.33 muestra el comportamiento del sistema de control de torque antagonico. Se muestra la referencia de torque en la articulación, que es la entrada de este bloque, las referencias de torque para el flexor y el extensor obtenidas como salida del bloque, así como las mediciones de los torque en el flexor y en el extensor.

Las figuras 5.34 y 5.35 muestran los comportamientos del actuador flexor y del actuador extensor respectivamente. En cada gráfico se aprecian las referencias y mediciones de posición y velocidad de la articulación, la referencia y la medición del torque ejercido por el actuador en la articulación, la referencia y la medición de la corriente en el motor, y la salida con el ciclo de PWM

## 5.6. Articulación de rigidez variable: Articulación completa.

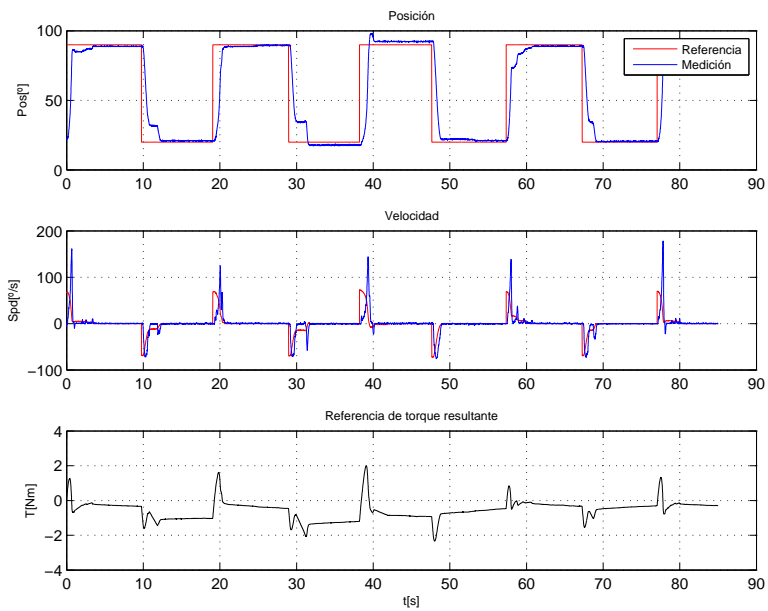


Figura 5.32: Respuesta del control de posición de la articulación cuando la referencia de posición es un tren de pulsos.

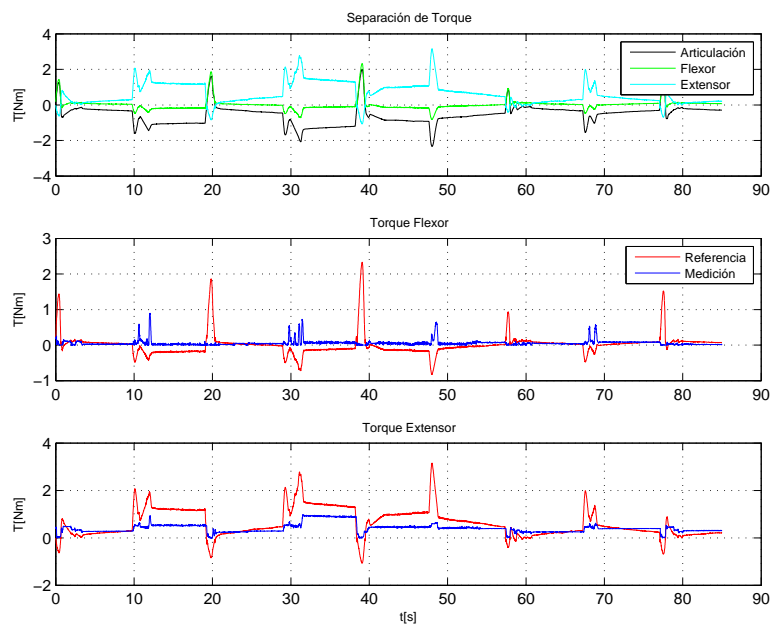


Figura 5.33: Respuesta del control de torque antagonico de la articulación cuando la referencia posición es un tren de pulsos.

## 5.6. Articulación de rigidez variable: Articulación completa.

para el motor.

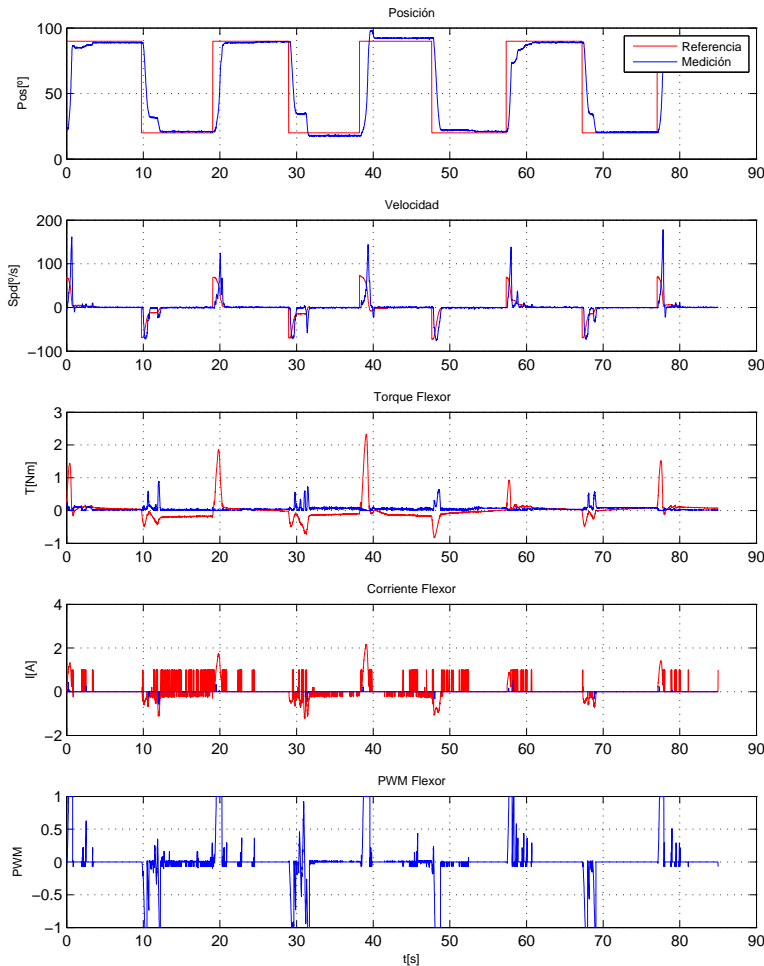


Figura 5.34: Comportamiento del actuador flexor de la articulación cuando la referencia posición es un tren de pulsos.

Finalmente, para facilitar la visualización del comportamiento del actuador, la figura 5.36 muestra las mediciones de todos los sensores involucrados en el sistema de control de la articulación, es decir, posición y velocidad de la articulación, torque ejercido por cada actuador en la articulación y corriente a través de cada motor.

Se aprecia una buena respuesta de la articulación a los cambios de referencia de posición pulsantes. Se observan como los tendones colaboran acelerando y frenando la articulación y manteniendo una tensión mínima en los tendones. El sistema de control tarda entre 1seg y 2seg en cambiar la referencia 70°. Se observa que la velocidad de la articulación es un poco baja, pero que los motores están ejerciendo un torque mucho menor que el nominal. El comportamiento del sistema de control esta de acuerdo con lo esperado, pues corresponde a un sistema amortiguado con pequeñas oscilaciones y que posee un tiempo de respuesta lento, pero que se podría mejorar agrandando los tendones.

## 5.6. Articulación de rigidez variable: Articulación completa.

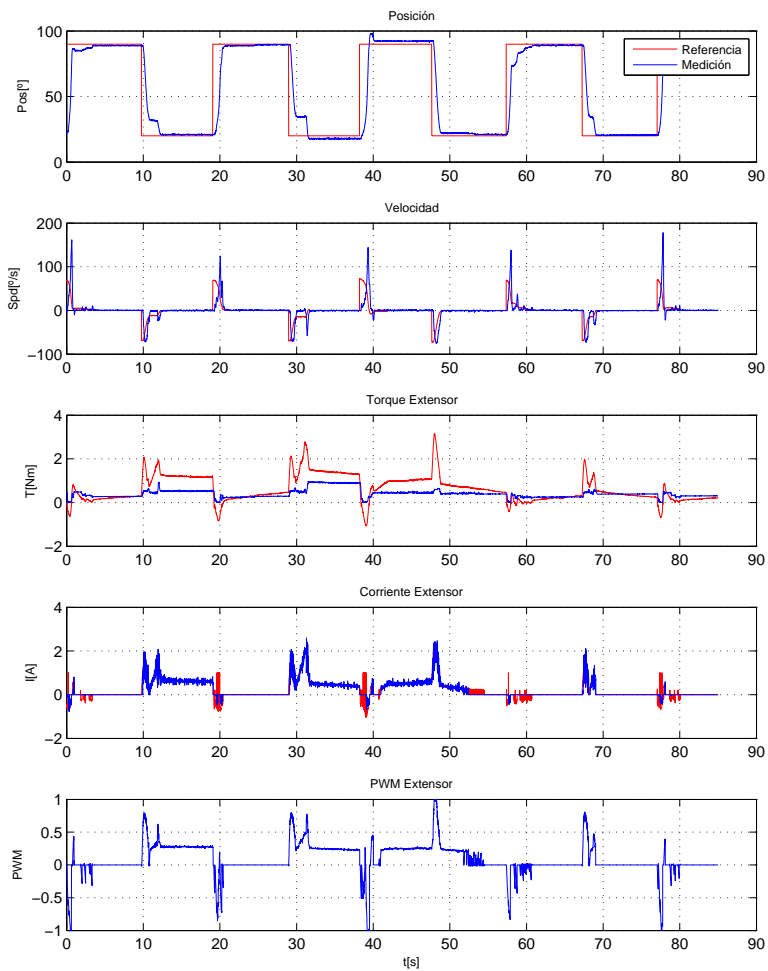


Figura 5.35: Comportamiento del actuador extensor de la articulación cuando la referencia posición es un tren de pulsos.

## 5.6. Articulación de rigidez variable: Articulación completa.

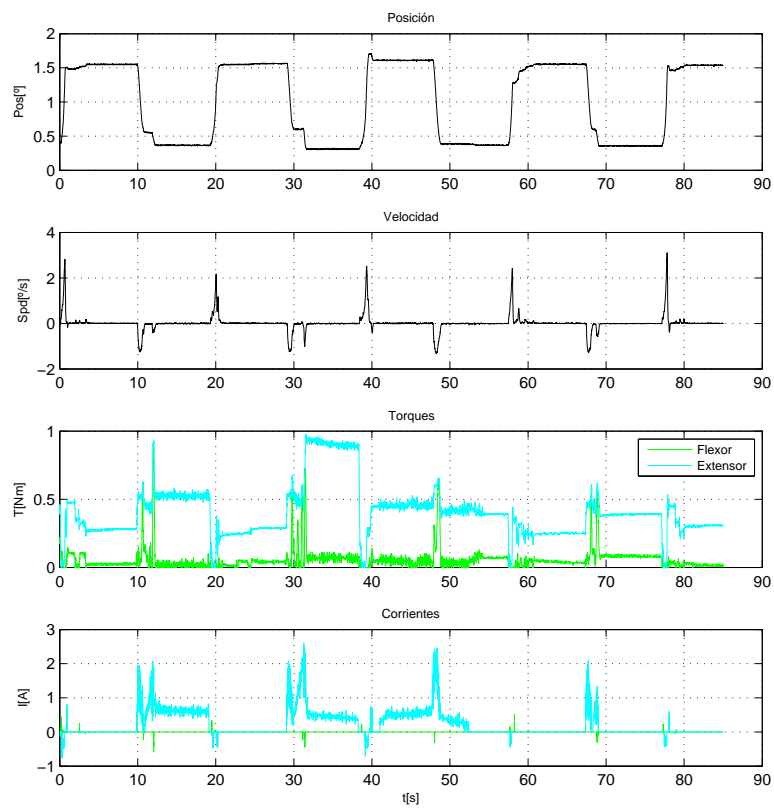


Figura 5.36: Mediciones de los sensores de la articulación cuando la referencia posición es un tren de pulsos.

## 5.6. Articulación de rigidez variable: Articulación completa.

### Sinusoide de 0,1[Hz] como referencia de posición

Se analiza el comportamiento de la articulación construida cuando la referencia de posición es una senoide de 0,1[Hz] de frecuencia aproximadamente y que varía la posición entre  $20^\circ$  y  $90^\circ$ .

La figura 5.37 muestra el comportamiento del sistema de control de posición. Se muestran las referencias y mediciones de la posición y velocidad angular de la articulación, así como la referencia de torque obtenida como salida del bloque de control de posición.

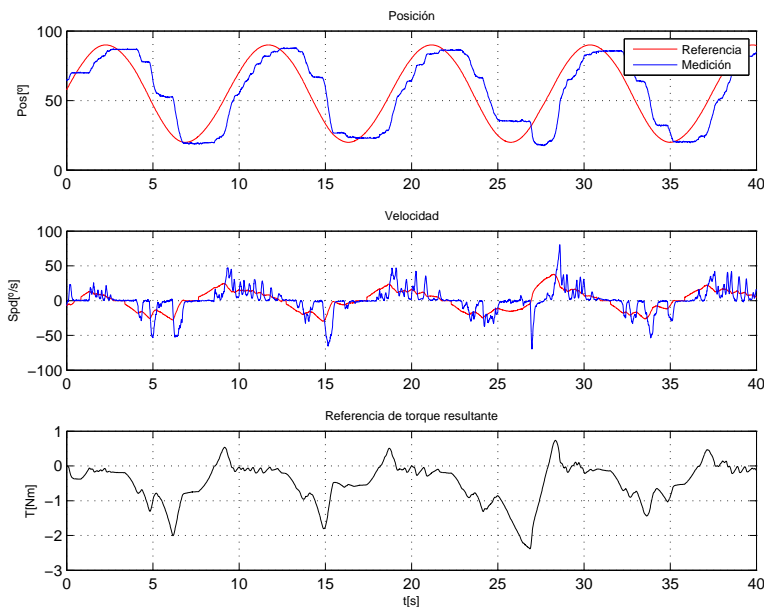


Figura 5.37: Respuesta del control de posición de la articulación cuando la referencia posición es una senoide de 0,1[Hz].

La figura 5.38 muestra el comportamiento del sistema de control de torque antagónico. Se muestra la referencia de torque en la articulación, que es la entrada de este bloque, las referencias de torque para el flexor y el extensor obtenidas como salida del bloque, así como las mediciones de los torque en el flexor y en el extensor.

Las figuras 5.39 y 5.40 muestran los comportamientos del actuador flexor y del actuador extensor respectivamente. En cada gráfico se aprecian las referencias y mediciones de posición y velocidad de la articulación, la referencia y la medición del torque ejercido por el actuador en la articulación, la referencia y la medición de la corriente en el motor, y la salida con el ciclo de PWM para el motor.

Finalmente, para facilitar la visualización del comportamiento del actuador, la figura 5.41 muestra las mediciones de todos los sensores involucrados en el sistema de control de la articulación, es decir, posición y velocidad de la articulación, torque ejercido por cada actuador en la articulación y corriente a través de cada motor.

Se aprecia una buena respuesta de la articulación a los cambios de referencia de posición sinusoidales lentos. Se puede distinguir un pequeño retardo y algo de ruido al seguir la referencia. En este caso, existe un poco de comportamiento oscilatorio, pero que no afecta el desempeño del sistema.

## 5.6. Articulación de rigidez variable: Articulación completa.

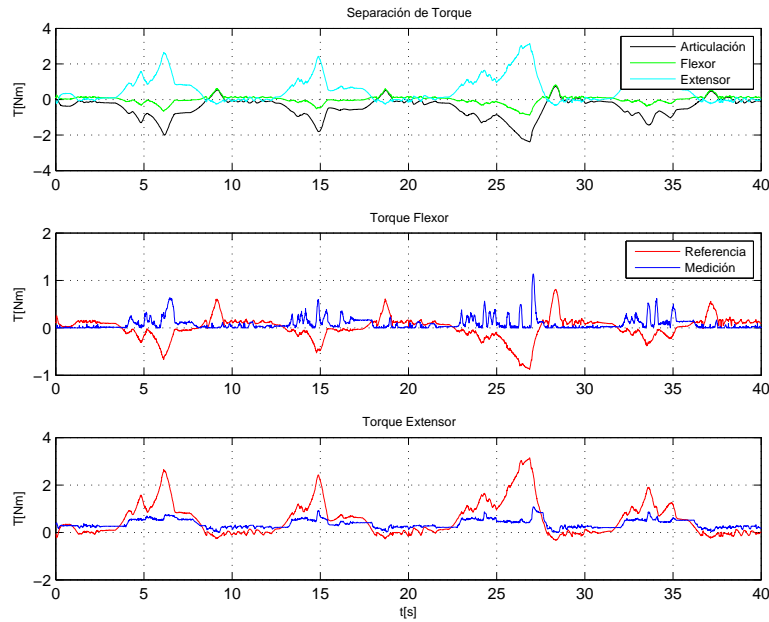


Figura 5.38: Respuesta del control de torque antagonico de la articulacion cuando la referencia posición es una senoide de 0,1[Hz].

Se puede ver que el sistema de control se encarga de extender la articulacion, pero que ésta se flexiona básicamente por gravedad. Este comportamiento es deseable en el caso del ciclo de caminata pasiva, pero no en otros casos. Esta característica puede ser mejorada aumentando el grosor de los tendones y por lo tanto disminuyendo la razón de reducción de los actuadores.

El comportamiento general de la articulacion ante esta frecuencia es bueno, los torques se mantienen bajos y la articulacion sigue bien la referencia.

### Sinusoide de 0,25[Hz] como referencia de posición

Se analiza el comportamiento de la articulacion construida cuando la referencia de posición es una senoide de 0,25[Hz] de frecuencia aproximadamente y que varía la posición entre 20° y 90°.

La figura 5.42 muestra el comportamiento del sistema de control de posición. Se muestran las referencias y mediciones de la posición y velocidad angular de la articulacion, así como la referencia de torque obtenida como salida del bloque de control de posición.

La figura 5.43 muestra el comportamiento del sistema de control de torque antagonico. Se muestra la referencia de torque en la articulacion, que es la entrada de este bloque, las referencias de torque para el flexor y el extensor obtenidas como salida del bloque, así como las mediciones de los torque en el flexor y en el extensor.

Las figuras 5.44 y 5.45 muestran los comportamientos del actuador flexor y del actuador extensor respectivamente. En cada gráfico se aprecian las referencias y mediciones de posición y velocidad de la articulacion, la referencia y la medición del torque ejercido por el actuador en la articulacion, la referencia y la medición de la corriente en el motor, y la salida con el ciclo de PWM para el motor.

Además, para facilitar la visualización del comportamiento del actuador, la figura 5.46 muestra

## 5.6. Articulación de rigidez variable: Articulación completa.

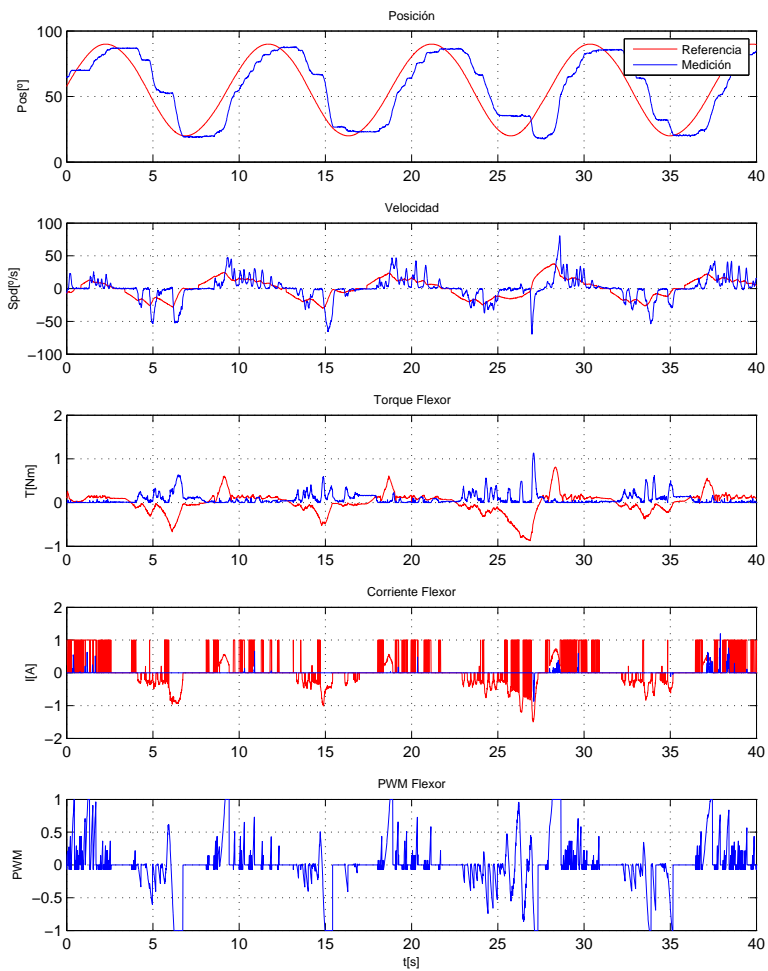


Figura 5.39: Comportamiento del actuador flexor de la articulación cuando la referencia posición es una senoide de  $0,1$ [Hz].

## 5.6. Articulación de rigidez variable: Articulación completa.

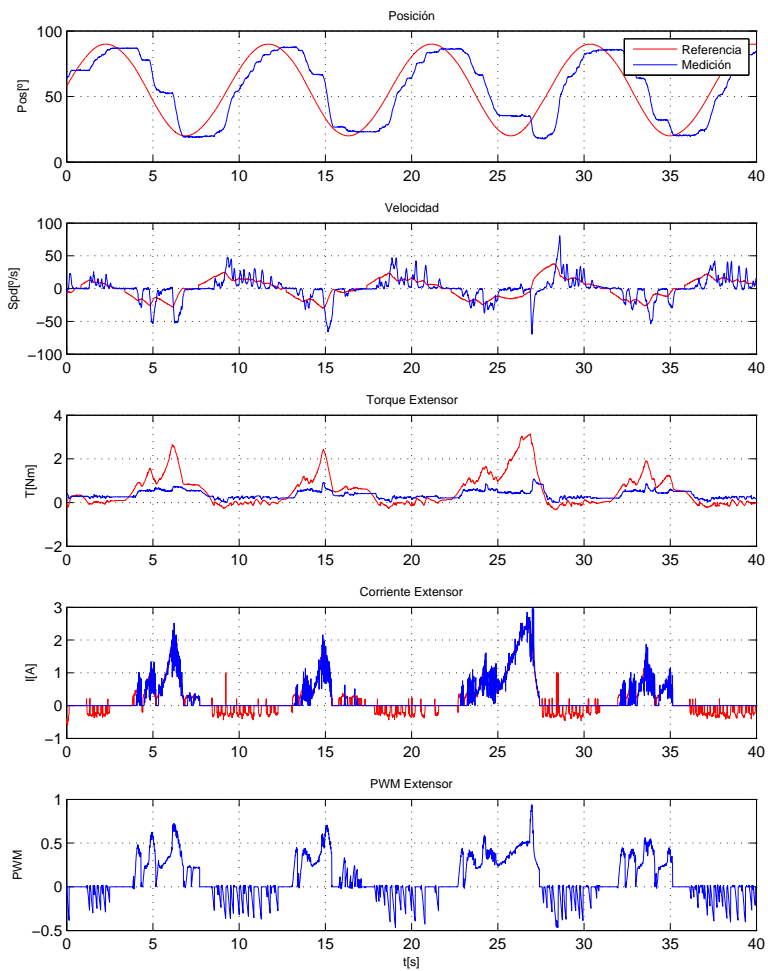


Figura 5.40: Comportamiento del actuador extensor de la articulación cuando la referencia posición es una senoide de 0,1[Hz].

## 5.6. Articulación de rigidez variable: Articulación completa.

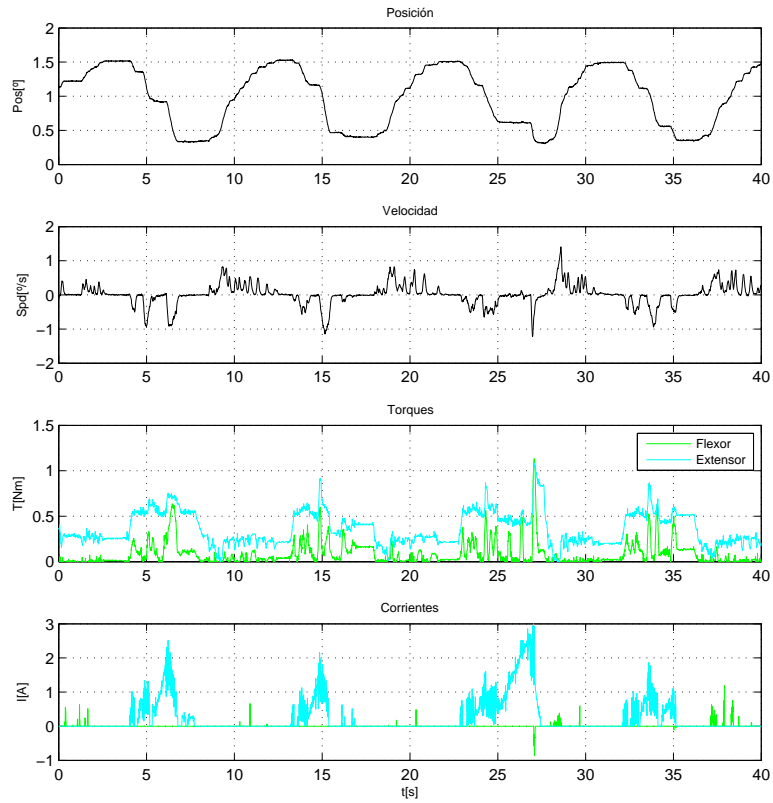


Figura 5.41: Mediciones de los sensores de la articulación cuando la referencia posición es una senoide de 0,1[Hz].

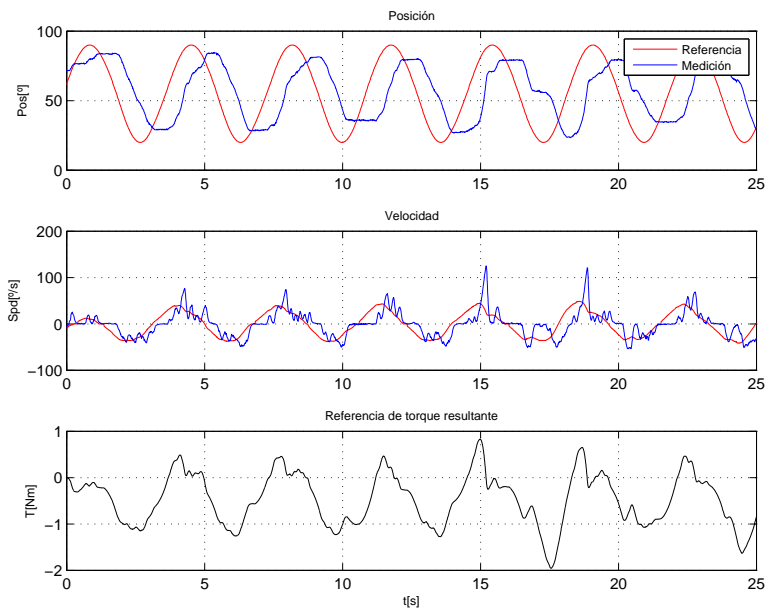


Figura 5.42: Respuesta del control de posición de la articulación cuando la referencia posición es una senoide de 0,25[Hz].

## 5.6. Articulación de rigidez variable: Articulación completa.

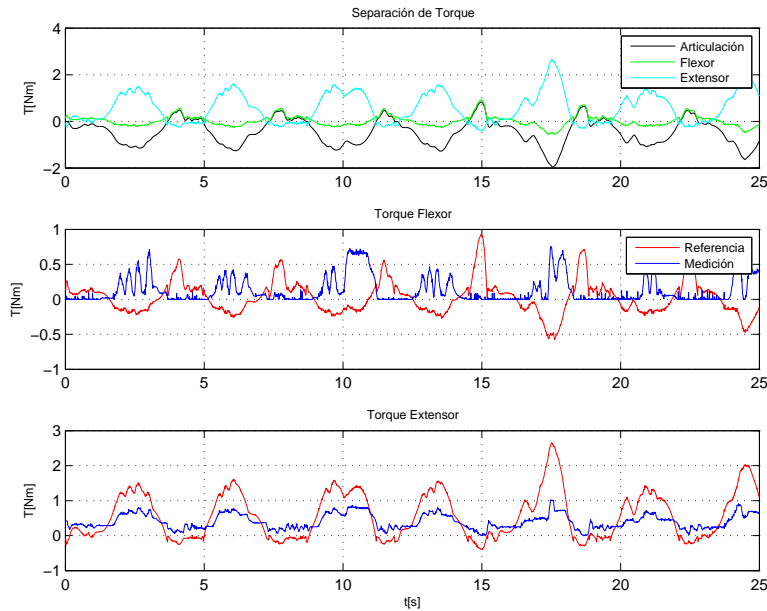


Figura 5.43: Respuesta del control de torque antagónico de la articulación cuando la referencia posición es una senoide de 0,25[Hz].

las mediciones de todos los sensores involucrados en el sistema de control de la articulación, es decir, posición y velocidad de la articulación, torque ejercido por cada actuador en la articulación y corriente a través de cada motor.

Se aprecia una buena respuesta de la articulación a los cambios de referencia de posición sinusoidales de velocidad moderada. Se puede distinguir un retardo moderado en la respuesta y una disminución en su amplitud.

El comportamiento general de la articulación frente a esta señal es parecido al caso de la senoide de 0,25Hz, pero con menos ruido y con el comportamiento esperado al acercarse a la frecuencia de corte de un filtro pasa bajos, es decir, aparición de un retardo y disminución de la amplitud de la respuesta.

### Sinusoide de 0,5[Hz] como referencia de posición

Se analiza el comportamiento de la articulación construida cuando la referencia de posición es una senoide de 0,5[Hz] de frecuencia aproximadamente y que varía la posición entre  $20^\circ$  y  $90^\circ$ .

La figura 5.47 muestra el comportamiento del sistema de control de posición. Se muestran las referencias y mediciones de la posición y velocidad angular de la articulación, así como la referencia de torque obtenida como salida del bloque de control de posición.

La figura 5.48 muestra el comportamiento del sistema de control de torque antagónico. Se muestra la referencia de torque en la articulación, que es la entrada de este bloque, las referencias de torque para el flexor y el extensor obtenidas como salida del bloque, así como las mediciones de los torque en el flexor y en el extensor.

Las figuras 5.49 y 5.50 muestran los comportamientos del actuador flexor y del actuador extensor respectivamente. En cada gráfico se aprecian las referencias y mediciones de posición y

## 5.6. Articulación de rigidez variable: Articulación completa.

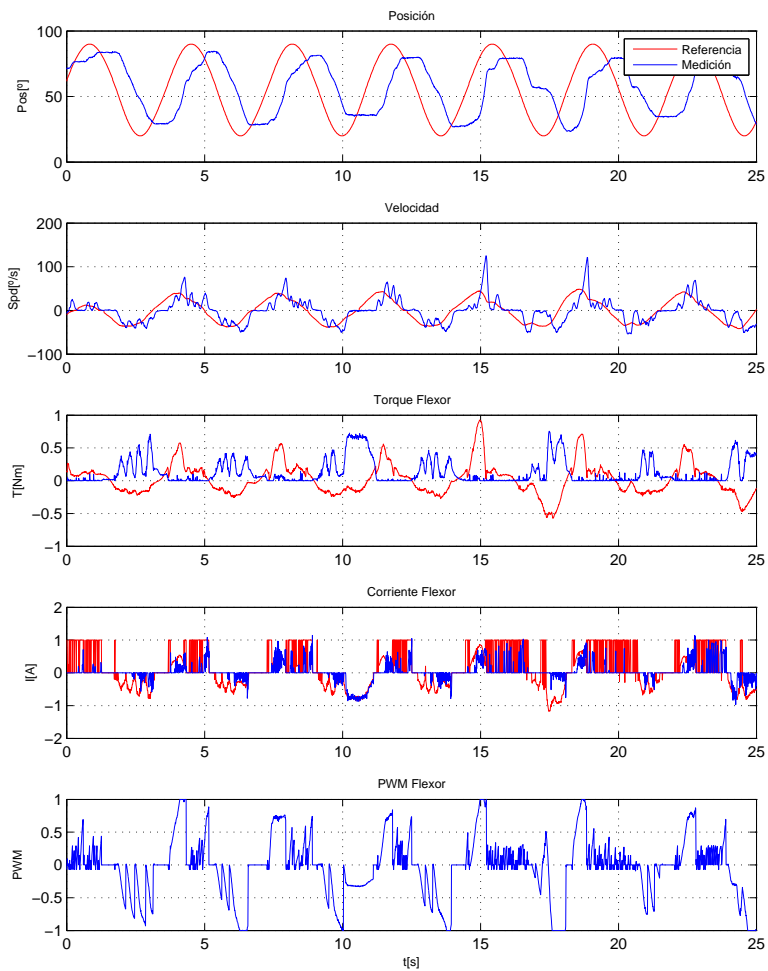


Figura 5.44: Comportamiento del actuador flexor de la articulación cuando la referencia posición es una senoide de 0,25[Hz].

## 5.6. Articulación de rigidez variable: Articulación completa.

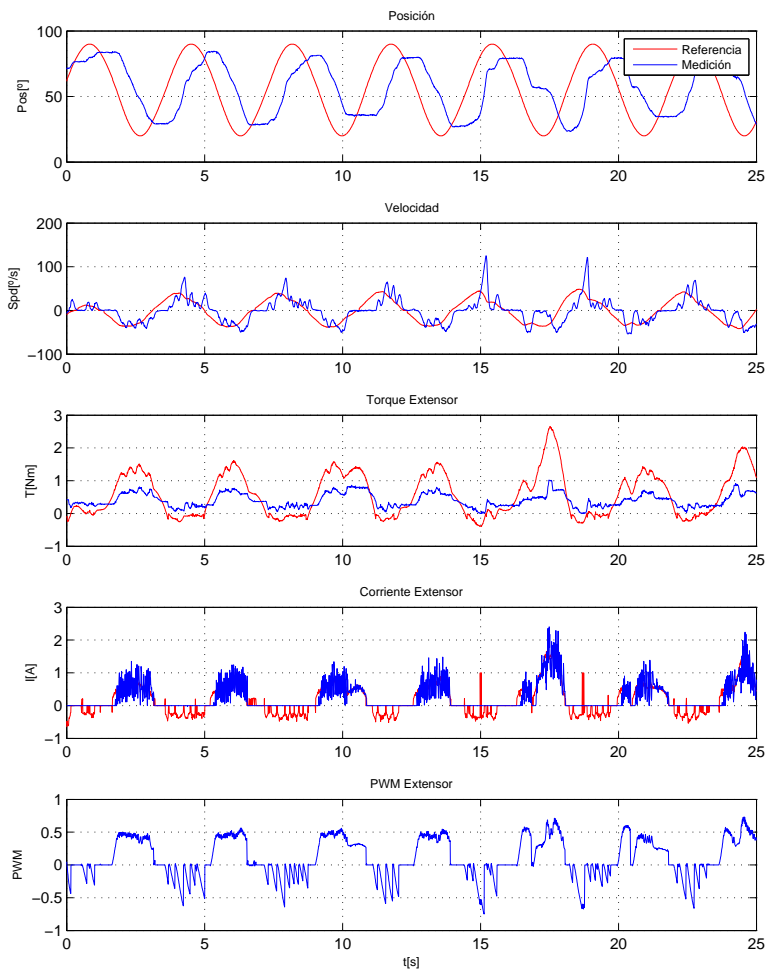


Figura 5.45: Comportamiento del actuador extensor de la articulación cuando la referencia posición es una senoide de 0,25[Hz].

## 5.6. Articulación de rigidez variable: Articulación completa.

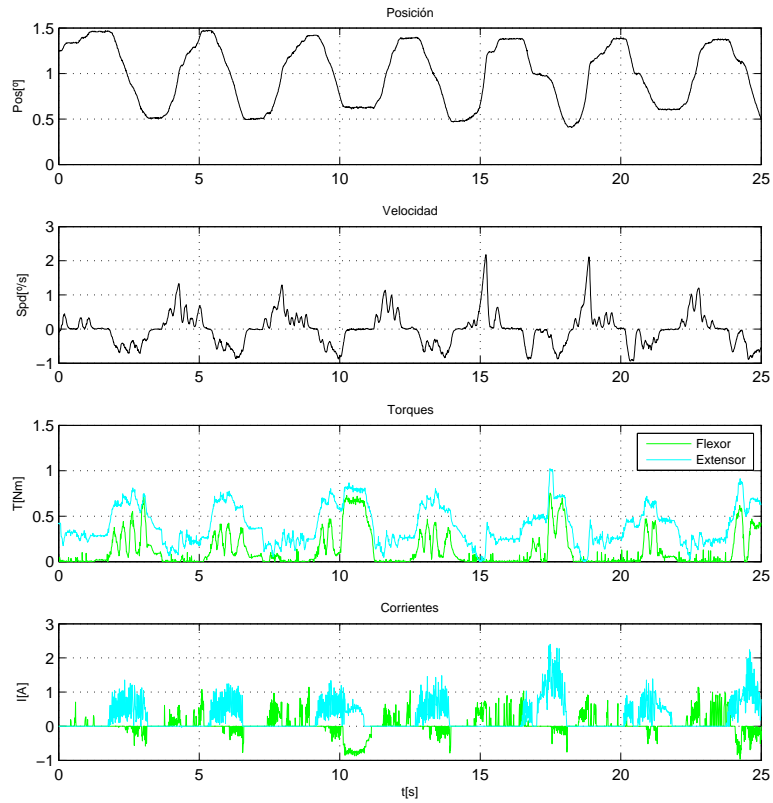


Figura 5.46: Mediciones de los sensores de la articulación cuando la referencia posición es una senoide de 0,25[Hz].

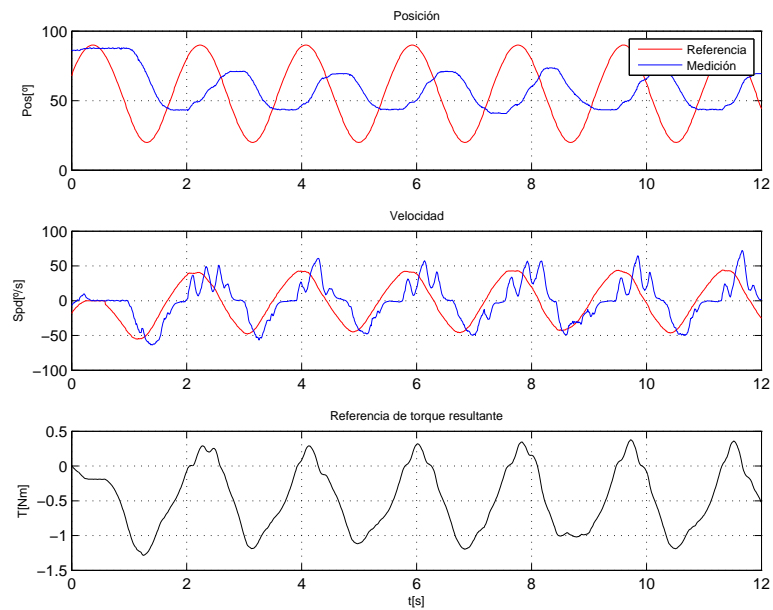


Figura 5.47: Respuesta del control de posición de la articulación cuando la referencia posición es una senoide de 0,5[Hz].

## 5.7. Articulación de rigidez variable: Discusión.

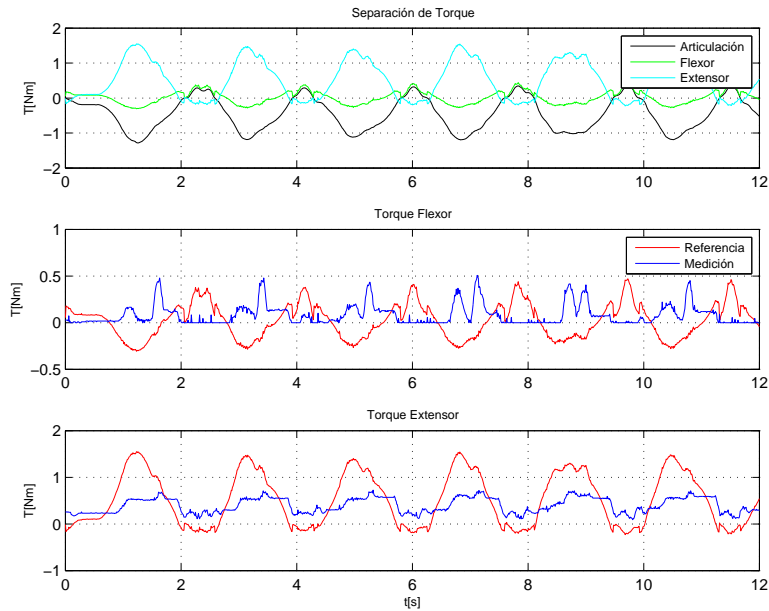


Figura 5.48: Respuesta del control de torque antagonico de la articulacion cuando la referencia posición es una senoide de 0,5[Hz].

velocidad de la articulacion, la referencia y la medicion del torque ejercido por el actuador en la articulacion, la referencia y la medicion de la corriente en el motor, y la salida con el ciclo de PWM para el motor.

Finalmente, para facilitar la visualizacion del comportamiento del actuador, la figura 5.51 muestra las mediciones de todos los sensores involucrados en el sistema de control de la articulacion, es decir, posición y velocidad de la articulacion, torque ejercido por cada actuador en la articulacion y corriente a través de cada motor.

Se aprecia una mala respuesta de la articulacion a los cambios de referencia de posición sinusoidales de alta frecuencia. Se puede distinguir un retardo grande en la respuesta y una igualmente grande disminucion en su amplitud. La respuesta de la articulacion está cerca de su frecuencia límite y su desfase es casi de medio ciclo. Se puede decir que esta es la frecuencia de corte del sistema de control visto como filtro pasa bajos.

## 5.7. Discusión

Se propone una articulacion de rigidez variable, cuyas características la hacen ideal para su utilizacion en un robot semi-pasivo. Tiene bajo peso, se pueden mover los motores sin dificultad para cumplir con las condiciones sobre la distribucion de masas necesarias para el diseño, su comportamiento es no lineal, con mucho torque cuando la articulacion está flectada, que es precisamente cuando más torque se necesita ejercer en el caso de un robot semi-pasivo.

Es necesario aumentar la frecuencia de corte de la articulacion, pues es recomendable que la respuesta de la articulacion debería ser más rápida. Para esto se debe disminuir la tasa de reduccion de los tendones, aumentando el diámetro de las cuerdas o agregando más cuerdas en los tendones.

## 5.7. Articulación de rigidez variable: Discusión.

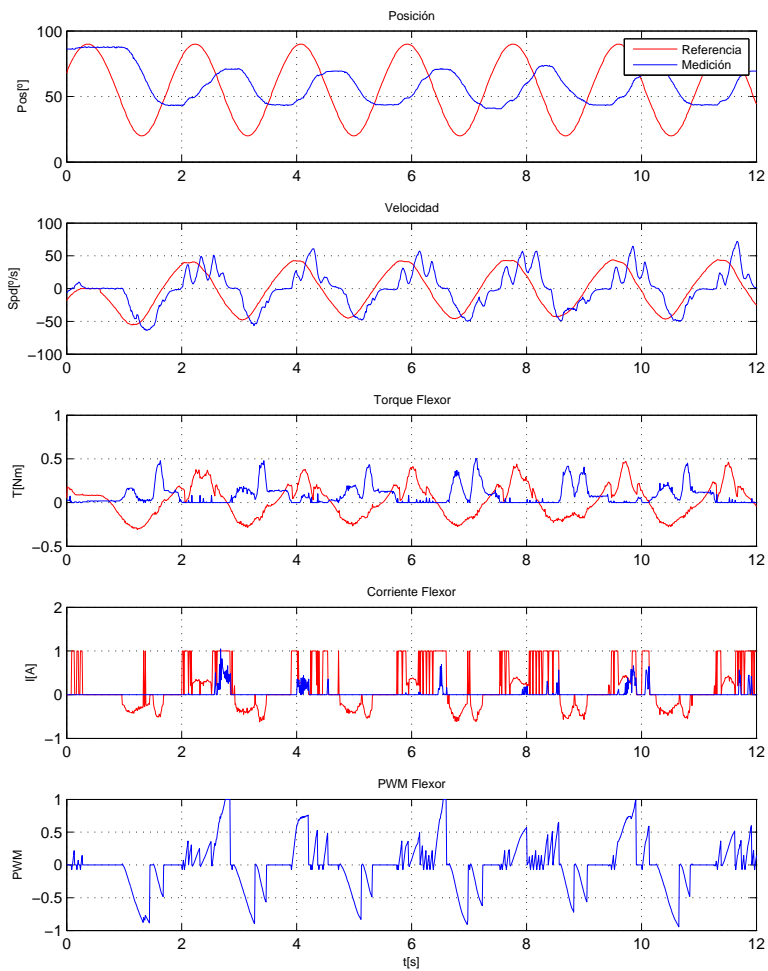


Figura 5.49: Comportamiento del actuador flexor de la articulación cuando la referencia posición es una senoide de 0,5[Hz].

## 5.7. Articulación de rigidez variable: Discusión.

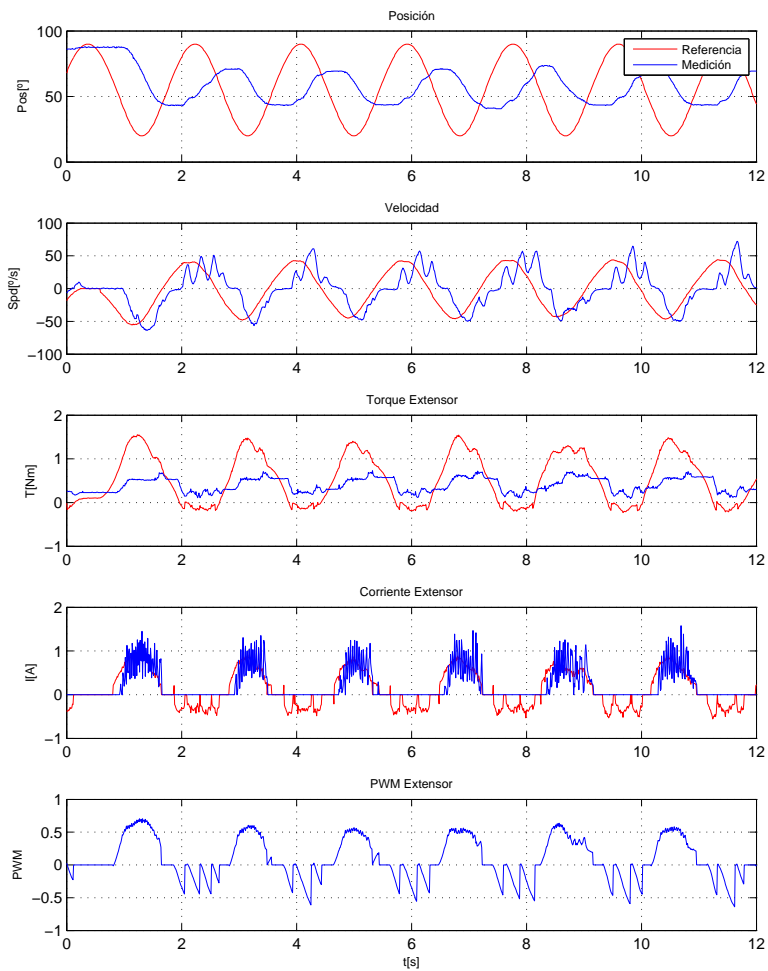


Figura 5.50: Comportamiento del actuador extensor de la articulación cuando la referencia posición es una senoide de 0,5[Hz].

## 5.7. Articulación de rigidez variable: Discusión.

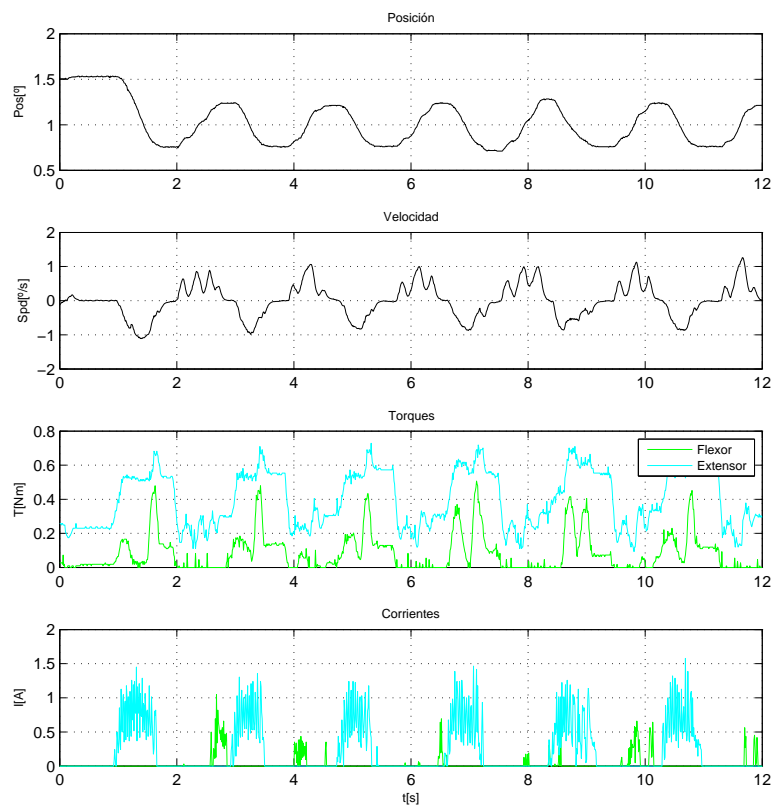


Figura 5.51: Mediciones de los sensores de la articulación cuando la referencia posición es una senoide de 0,5[Hz].

## **5.7. Articulación de rigidez variable: Discusión.**

---

El desempeño del sistema de control de la articulación es acorde con lo esperado, pero debe ser probado nuevamente a frecuencias mayores cuando se solucione la disminución de la tasa de reducción de los tendones, pues posiblemente necesite una nueva sintonización.

Todas las pruebas se realizaron con 4 cuerdas en los tendones, las que soportaron perfectamente bien la torsión y la tensión. Se estima que 8 cuerdas deberían aumentar la frecuencia de corte lo suficiente para permitir que el actuador funcione en optimas condiciones en un robot semi-pasivo.

La articulación propuesta en este capítulo, en conjunto con la metodología propuesta en el capítulo 4 serán utilizadas en el siguiente capítulo en el proceso de diseño y construcción de un robot semi-pasivo.

# Diseño y construcción de robot bípedo actuado utilizando su modelo pasivo

---

## Contenidos

---

<b>6.1. Sistema de actuación . . . . .</b>	<b>121</b>
<b>6.2. Sistema sensorial . . . . .</b>	<b>121</b>
<b>6.3. Uso de la metodología propuesta . . . . .</b>	<b>122</b>
6.3.1. Condiciones esenciales para el diseño . . . . .	122
6.3.2. Diseño preliminar del robot real . . . . .	123
6.3.3. Mapas de Poincaré del robot diseñado . . . . .	123
6.3.4. Análisis del ciclo de caminata . . . . .	125
<b>6.4. Diseño mecánico del robot real . . . . .</b>	<b>128</b>
<b>6.5. Construcción mecánica . . . . .</b>	<b>131</b>
<b>6.6. Electrónica . . . . .</b>	<b>131</b>
<b>6.7. Control de la caminata . . . . .</b>	<b>134</b>
<b>6.8. Control de equilibrio . . . . .</b>	<b>137</b>
<b>6.9. Consumo energético . . . . .</b>	<b>137</b>
<b>6.10. Discusión . . . . .</b>	<b>138</b>

---

El robot diseñado y construido es un robot activo que posee un ciclo de caminata pasiva, es decir, es un robot semi-pasivo. Al momento de diseñarlo se utilizan los resultados de la metodología propuesta para obtener las condiciones sobre los parámetros que permiten la aparición de un ciclo de caminata pasiva. Por el hecho de ser un robot semi-pasivo, necesita un sistema de actuación y un sistema sensorial para poder controlar los torque ejercidos en cada articulación así como sus posiciones.

Para la realización del robot es necesario el diseño, la fabricación y el ensamblaje de todas las piezas mecánicas con una buena precisión. También es muy importante considerar el diseño, fabricación y programación de toda la electrónica necesaria por los sistemas sensorial, de actuación y de control.

## 6.1. Sistema de actuación

Dado que se espera utilizar el ciclo pasivo inherente al robot diseñado, se elige utilizar actuadores de rigidez variable. Para esto se optó por utilizar el actuador propuesto en el capítulo 5, el que además de ser un actuador de rigidez variable, permite ubicar los motores lejos de la articulación, lo cual permite corregir la ubicación de los centros de masas de los segmentos. El actuador seleccionado también ejerce un torque de forma no lineal con respecto al ángulo de la articulación, ejerciendo un torque muy alto cuando el tendón está completamente estirado, pero ejerciendo un torque bajo cuando el tendón está contraído. Esta forma del torque es muy favorable, pues la condición que más torque requiere es levantar al robot del piso, específicamente cuando se necesita acelerar las articulaciones (con los tendones extendidos). Por el contrario, cuando el tendón está contraído ya no se debe hacer torque pues lo normal es detener la articulación en esta condición.

## 6.2. Sistema sensorial

Debido a la elección de los actuadores a utilizar y de su sistema de control, se necesita medir la tensión de los tendones, la corriente de los motores, y la posición y velocidad de las articulaciones. Además, para facilitar el control de la estabilización lateral, se utilizan sensores de presión en los pies y un acelerómetro y un giróscopo en el tronco.

La corriente de los motores se mide electrónicamente en la misma tarjeta que controla la potencia de cada motor. El acelerómetro y el giróscopo son medidos directamente en la tarjeta electrónica que controla la caminata a un alto nivel. Todo el resto de los sensores son agrupados por una tarjeta encargada de los sensores en una articulación. La posición angular de la articulación se mide con un encoder resistivo en cada grado de libertad, éste es analógicamente derivado para tener una estimación de la velocidad angular. Para medir la presión en los pies o la tensión de las cuerdas se seleccionan los sensores de fuerza “*flexiforce*”, los que se ubican en la base del pie y en el soporte de cada tendón.

## 6.3. Utilización de los resultados de la metodología propuesta en el diseño de un robot bípedo semi-pasivo real

### 6.3.1. Condiciones esenciales para el diseño

En una primera etapa del diseño del robot real basado en el modelo de caminata bípeda pasiva, se seleccionan algunos subespacios de parámetros estables, usando su margen de estabilidad (definido como igual al valor de diseño) como parámetro de selección. Entonces, se analizan las condiciones sobre los parámetros de estos subespacios y se deducen las siguientes condiciones claves para el diseño grueso del robot: (I) Más de la mitad de la masa debe estar en el tronco, (II) La masa en el segmento superior de la pierna debe ser entre 3 y 4 veces la masa en el segmento inferior de la pierna, y (III) Los segmentos superiores e inferiores de las piernas deben tener sus centros de masa alrededor del medio del segmento. Sólo tres parámetros fueron utilizados para extraer estas condiciones: *PMT*, *RMP*, y *CMhProm* (estos parámetros fueron definidos en la sección 4.3.1). Las condiciones sobre estos tres parámetros, en quince subespacios seleccionados se muestran en la tabla 6.1. Es importante mencionar que estos resultados son concordantes con los resultados obtenidos previamente en la literatura con otros modelos de caminatas pasivas [32].

Tabla 6.1: Condiciones sobre los tres parámetros usados para deducir las claves del diseño grueso en quince subespacios seleccionados (ver figura 4.2 para la interpretación del parámetro *RMP*).

	<i>PMT</i>		<i>RMP</i>		<i>CMhProm</i>		Estabi- lidad	Eval. estables	Valor diseño
	min	max	min	max	min	max			
	0.47	0.70	1.25	1.28	0.25	0.46	0.33	18	1151.40
	0.44	0.50	1.08	1.10	0.17	0.40	0.39	29	688.48
	0.57	0.71	1.25	1.27	0.22	0.47	2.01	222	59.09
	0.56	0.60	1.27	1.38	0.26	0.42	2.03	65	29.74
	0.62	0.62	1.32	1.35	0.26	0.26	2.24	131	0.24
	0.37	0.55	1.28	1.31	0.22	0.43	2.27	155	0.19
	0.41	0.46	1.25	1.30	0.19	0.30	2.19	243	0.17
	0.56	0.59	1.33	1.37	0.27	0.27	1.92	114	0.16
	0.57	0.59	1.22	1.25	0.23	0.48	1.30	249	0.15
	0.61	0.69	1.15	1.25	0.28	0.41	0.27	56	0.15
	0.57	0.66	1.33	1.33	0.17	0.26	2.20	277	0.13
	0.54	0.54	1.27	1.37	0.29	0.42	1.01	79	0.12
	0.43	0.64	1.26	1.29	0.21	0.29	0.39	33	0.11
	0.48	0.63	1.08	1.08	0.24	0.41	1.11	56	0.09
	0.55	0.65	1.27	1.34	0.27	0.30	0.34	30	0.09
Prom.	0.52	0.61	1.24	1.29	0.24	0.37	1.33	117	128.69
Min.	0.37	0.46	1.08	1.08	0.17	0.26	0.27	18	0.09
Max.	0.62	0.71	1.33	1.38	0.29	0.48	2.27	277	1151.40

#### 6.3.2. Diseño preliminar del robot real

Después de obtenidas las condiciones esenciales para la existencia de un ciclo de caminata de dinámica pasiva, se lleva a cabo el diseño del robot semi-pasivo que para asegurar la existencia de un ciclo de caminata pasivo cumplirá dichas condiciones. Considerando esto, se utilizan rodamientos en todas las articulaciones y se seleccionan los actuadores propuestos en el capítulo 5. Debido a las condiciones de las masas se decidió poner los motores de las articulaciones de la cadera en el tronco y los motores de las articulaciones de las rodillas y tobillos en la parte alta de los segmentos superiores de las piernas.

Una vez que una primera versión del diseño estuvo lista, se analizan sus parámetros físicos resultantes para verificar si pertenecen a uno de los subespacios estables. Dado el hecho de que el proceso de construir un robot semi-pasivo involucra muchos aspectos, como la ubicación de los motores, la elección de los materiales usados, la forma de las partes, la ubicación de las articulaciones, entre otras; hacer que el robot cumpla las condiciones sobre los parámetros es muy difícil. Consecuentemente, los parámetros de la primera versión del diseño no pertenecieron a ningún subespacio estable. Pero debido al margen de estabilidad, la búsqueda de subespacios estables cerca del conjunto de parámetros del robot real es simple. En este sentido, se busca un subespacio estable en el cual el robot cumpla todas excepto una o dos condiciones. Esto genera más de 1.000 posibles subespacios estables. De ellos, se seleccionan sólo aquellos subespacios con un valor de estabilidad sobre un cierto umbral, obteniendo cerca de 20 alternativas. Finalmente, se selecciona la condición más simple de cumplir mediante cambios menores, esto fue agregar masa al segmento superior de la pierna cerca de la rodilla. Entonces el diseño mecánico del robot real cumple todas las condiciones de un subespacio estable encontrado utilizando la metodología. A continuación, se analiza el comportamiento de su ciclo de caminata pasiva.

#### 6.3.3. Análisis del robot diseñado mediante mapas de Poincaré

El mapa de Poincaré generado utilizando el modelo de la sección 3.3 con los parámetros corregidos para el robot real es muy útil para el análisis del ciclo de caminata pasiva. Las evaluaciones del mapa de Poincaré pueden ser agrupadas de acuerdo a su estabilidad en ciclos de caminata estable, ciclos de caminata inestable, y condiciones iniciales infactibles. La figura 6.1 muestra el mapa de Poincaré agrupado, donde el área de ciclos de caminata estable se puede reconocer fácilmente. Es importante notar que debido a la selección del impacto de piso como la sección de Poincaré, ésta queda determinada sólo por algunas componentes del vector de estado. El impacto de piso ocurre con ambas rodillas bloqueadas. Por lo tanto, tanto el ángulo de la rodilla  $\gamma$ , como su derivada  $\dot{\gamma}$  son iguales a cero. Además, durante el impacto de piso, ambos pies están en el piso, por lo tanto, el ángulo entre las piernas  $\phi$  es el doble del ángulo del pie de soporte con respecto a la normal al piso  $\theta$ . Como una consecuencia, en el modelo utilizado, la sección de Poincaré queda completamente definida por la posición angular  $\theta$ , y las velocidades angulares  $\dot{\theta}$  y  $\dot{\phi}$ . La dependencia de la sección de Poincaré de  $\dot{\phi}$  está dada por el efecto del momento de inercia de la pierna de balanceo con respecto al punto de impacto. Entonces, asumiendo que el momento de inercia de la pierna de balanceo es despreciable con respecto a la suma de los momentos de inercia del tronco y de la pierna de soporte, el resultado del modelo “más simple” [20] puede ser aplicado, agregándose la restricción:

### 6.3. Diseño y construcción de robot real: Uso de la metodología propuesta.

$$\dot{\phi} = 2 \cdot \text{Sin}(\theta)^2 \cdot \dot{\theta}. \quad (6.1)$$

Se define entonces la sección de Poincaré como el espacio bi-dimensional que cumple todas las restricciones del impacto de piso mostradas en el párrafo anterior, incluyendo la restricción de la ecuación 6.1. Consecuentemente, la sección de Poincaré queda definida por  $\theta$  y  $\dot{\theta}$ .

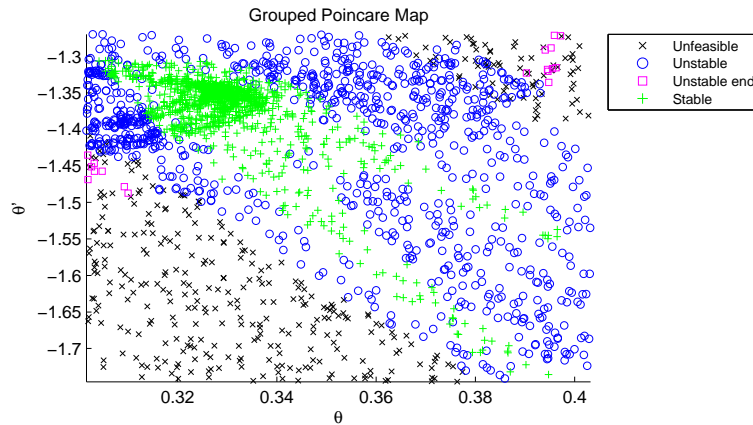


Figura 6.1: Mapa de Poincaré con las evaluaciones agrupadas en ciclos de caminata estable, ciclos de caminata inestables, y condiciones iniciales infactibles.

Las áreas con ciclos de caminata estables, inestables e infactibles se pueden distinguir claramente en el mapa de Poincaré agrupado. Sin embargo, para ver las diferencias dentro de una región, en la figura 6.2 se muestra un mapa de Poincaré con el número de pasos exitosos de cada evaluación como la intensidad de cada punto, donde se puede apreciar la distribución de estabilidad en el mapa de Poincaré.

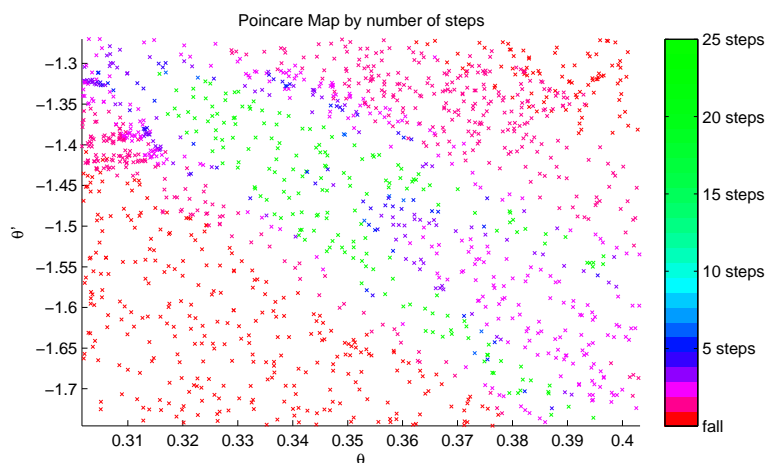


Figura 6.2: Mapa de Poincaré. El número de pasos de cada evaluación se muestra en escala de grises.

### 6.3. Diseño y construcción de robot real: Uso de la metodología propuesta.

También, un enfoque similar se puede usar para analizar el área de ciclos de caminata estables. Como se detienen las simulaciones después de un determinado número de pasos exitosos, cada ciclo de caminata estable tiene un largo fijo. La figura 6.3 presenta un mapa de Poincaré con sólo el área de ciclos de caminata estables, usando la posición de cada punto en el ciclo como su intensidad. Este gráfico ilustra la existencia de un punto de acumulación y la forma en la que se converge a éste.

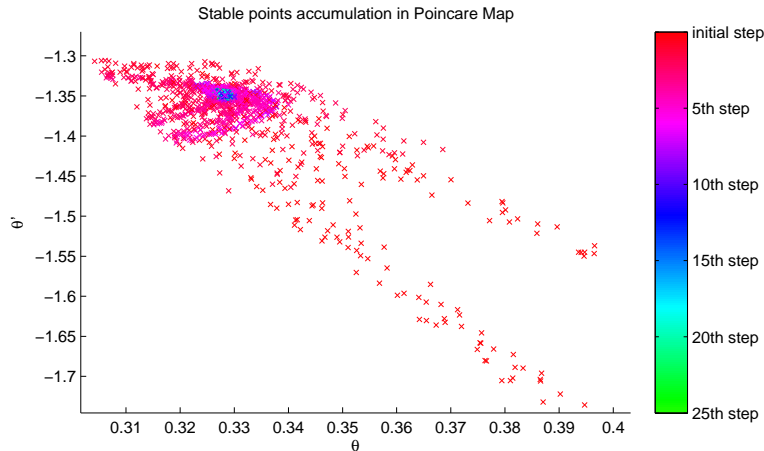


Figura 6.3: Puntos del mapa de Poincaré que pertenecen a alguna evaluación estable. La escala de grises muestra la posición del punto en la evaluación.

#### 6.3.4. Análisis de ciclo de caminata seleccionado para el robot diseñado

Una vez que el punto de acumulación estable ha sido identificado, se pueden seleccionar las condiciones iniciales apropiadas para el robot. Finalmente, se simulan estas condiciones iniciales y se analiza en detalle el comportamiento de su ciclo de caminata. La figura 6.4 muestra las condiciones iniciales de todos los pasos dados en el mapa de Poincaré, en conjunto con su trayectoria. Se puede ver que el ciclo de caminata parte cerca del ciclo estable y converge rápidamente al punto de acumulación, desarrollando una caminata pasiva estable. La figura 6.5 muestra los primeros 6 pasos del ciclo de caminata obtenido. Se observa una caminata muy natural.

Una inspección del espacio de fase (figura 6.6) del robot simulado permite entender el comportamiento del ciclo de caminata. Los impactos de piso y rodilla se pueden apreciar como discontinuidades en las velocidades. Se puede interpretar el robot descendiendo la pendiente como si estuviese en un terreno llano sometido a un campo de potencial horizontal, es decir, como un sistema compuesto por energía cinética y energía potencial virtual vertical perdiendo energía cinética en cada impacto, pero ganando energía de una energía potencial virtual horizontal. Cuando el sistema está en un ciclo de caminata pasivo, las pérdidas de energía cinética en cada impacto deben ser iguales a la energía adquirida de la energía potencial virtual horizontal. La figura 6.7 muestra un gráfico con la energía potencial virtual vertical y la energía cinética. Todos los gráficos del espacio de fase y de la energía son recorridos en el sentido horario por el modelo de caminata pasiva. Las discontinuidades en la velocidad angular o en la energía cinética en estos gráficos significan

### 6.3. Diseño y construcción de robot real: Uso de la metodología propuesta.

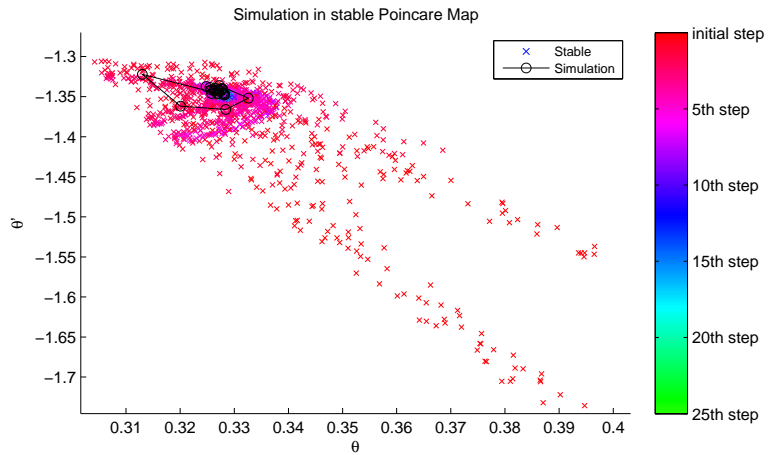


Figura 6.4: Simulación del ciclo de caminata seleccionado en el mapa de Poincaré. En el fondo se muestran los puntos pertenecientes a alguna evaluación estable. La escala de grises representa la posición del punto en la evaluación.

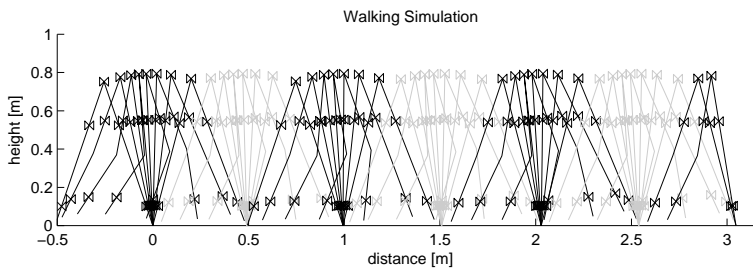


Figura 6.5: Seis primeros pasos de la simulación.

#### 6.4. Diseño y construcción de robot real: Uso de la metodología propuesta.

impactos de piso o de rodilla. En el gráfico de energía (figura 6.7), la discontinuidad más grande es el impacto de piso, el que provoca una gran pérdida de energía cinética. Es seguido por la etapa de balanceo con la rodilla libre, en la cual la energía va aumentando debido a la energía potencial virtual horizontal no graficada. A continuación, hay una pequeña discontinuidad que muestra el impacto de rodilla que genera una pérdida menor de energía cinética. Finalmente, está la etapa de balanceo con la rodilla bloqueada, también con un incremento de la energía total debido a la energía potencial virtual horizontal no graficada. Este gráfico muestra claramente una órbita que en el corto plazo varía la energía total, pero que a largo plazo la mantiene constante, debido a que las pérdidas de energía cinética por los impactos son compensadas por la energía inyectada al sistema a través de la energía potencial virtual horizontal.

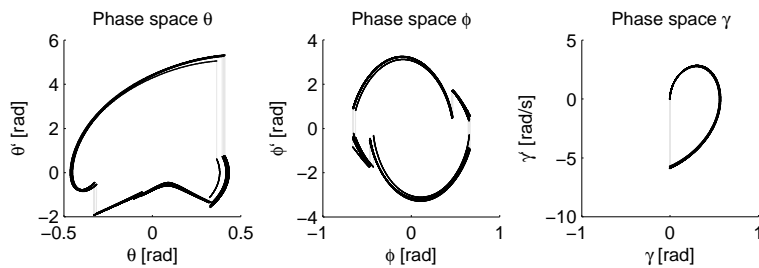


Figura 6.6: Espacio de fase del robot durante la simulación.

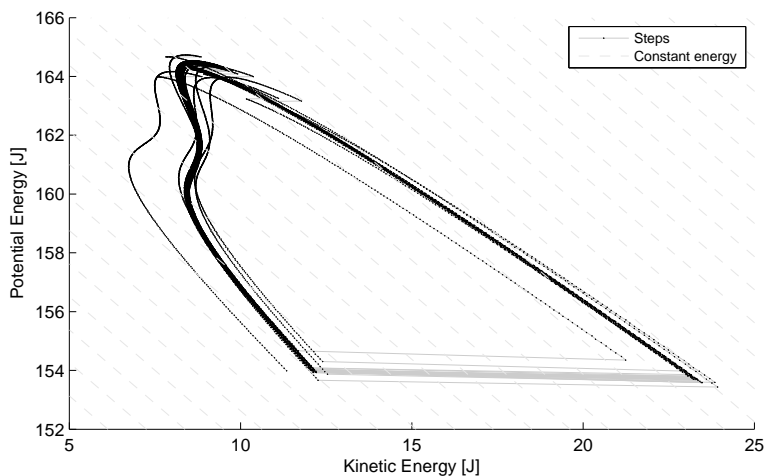


Figura 6.7: Energía potencial virtual vertical y energía cinética del robot durante la simulación.

Otra característica importante de un ciclo de caminata es la velocidad de desplazamiento, la que se puede observar en la figura 6.8. La velocidad de desplazamiento es importante para las aplicaciones robóticas y debería depender de la pendiente [54]. Esta característica será comparada con los resultados en las simulaciones del diseño mecánico.

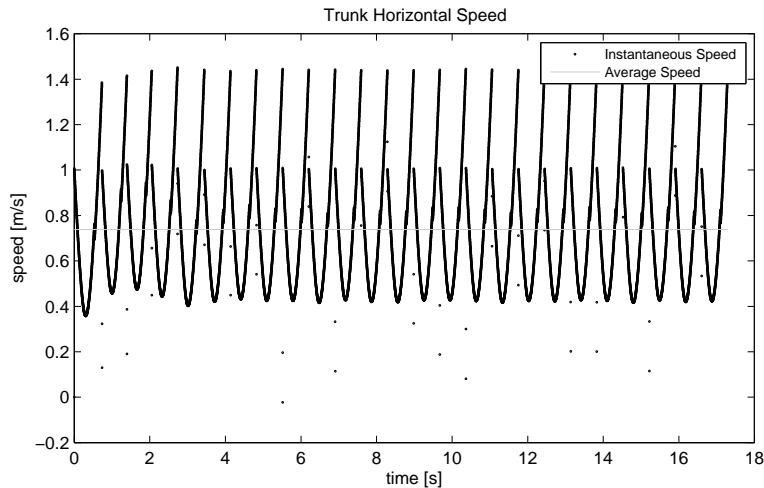


Figura 6.8: Velocidad horizontal del tronco del robot durante la simulación.

## 6.4. Diseño mecánico del robot bípedo semi-pasivo real

El diseño mecánico del robot real, cuyos parámetros cumplen las condiciones impuestas por el subespacio de parámetros obtenido usando la metodología propuesta es llevado a cabo usando Solidworks<sup>®</sup>. Este software tiene un motor de simulaciones 3D realista, el que es utilizado para validar el diseño mecánico del robot real y de esta forma validar la metodología propuesta y el modelo pasivo utilizado. La figura 6.9a muestra el diseño mecánico del robot real con el conjunto de parámetros obtenido utilizando la metodología propuesta, y la figura 6.9b muestra el robot real construido en base al diseño mecánico, se puede notar que el diseño mecánico tiene pies antropomórficos, mientras que el modelo utilizado en la metodología propuesta tiene pies puntuales. Los pies del diseño mecánico son livianos, haciendo que el torque necesario para mantener el pie de balanceo paralelo al piso sea despreciable. Además, el actuador del pie de soporte puede ser apagado, utilizado para compensar la ausencia de pendiente, o incluso utilizado para aumentar la estabilidad del ciclo de caminata pasiva. En conclusión, ni el pie de balanceo, ni el de soporte afectan la existencia o desempeño del ciclo de caminata pasiva. Por el contrario, los pies son necesarios para la estabilización lateral independiente y para compensar la ausencia de pendiente en el piso plano.

Observando el mapa de Poincaré para el conjunto de parámetros del robot real, se establecen las condiciones iniciales del ciclo de caminata estable. Las simulaciones iniciales desarrolladas en el simulador mecánico de Solidworks<sup>®</sup> no mostraron un ciclo de caminata estable. Sin embargo, después de una pequeña variación de la pendiente, el modelo mecánico del robot exhibió un ciclo de caminata estable. Este ciclo de caminata es muy similar al ciclo de caminata obtenido en las simulaciones previas con el modelo utilizado en la metodología propuesta. La caminata se ve muy natural y estable. La figura 6.10 muestra los primeros cinco pasos de la caminata exhibida en la simulación del modelo mecánico

El espacio de fase del diseño mecánico del robot real simulado en el simulador mecánico se muestra en la figura 6.11. También, la figura 6.12 muestra la velocidad horizontal del tronco. Estos

#### 6.4. Diseño y construcción de robot real: Diseño mecánico del robot real.

---



(a) Modelo mecánico del robot con el conjunto de parámetros obtenido usando la metodología propuesta.



(b) Robot real construido usando el diseño mecánico.

Figura 6.9: Modelo mecánico del robot con el conjunto de parámetros obtenido usando la metodología propuesta y robot real construido usando el diseño mecánico.

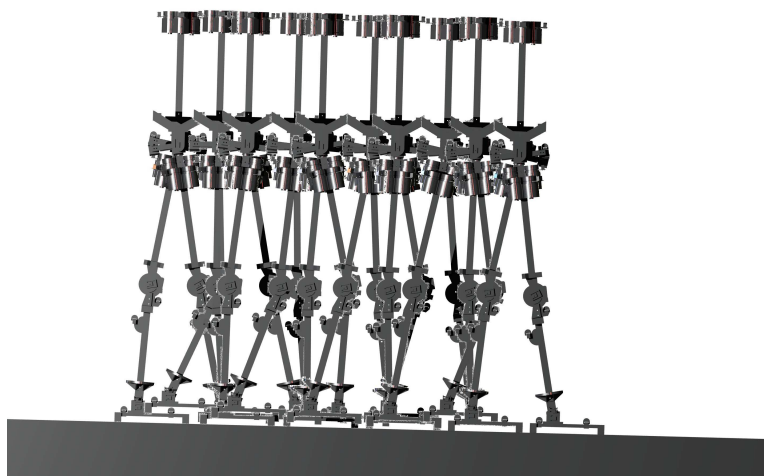


Figura 6.10: Primeros cinco pasos de la caminata exhibida en la simulación del modelo mecánico utilizando Solidworks®.

## 6.4. Diseño y construcción de robot real: Diseño mecánico del robot real.

gráficos revelan que el robot parte no demasiado cerca de la órbita estable, pero converge en pocos pasos al ciclo de caminata pasiva.

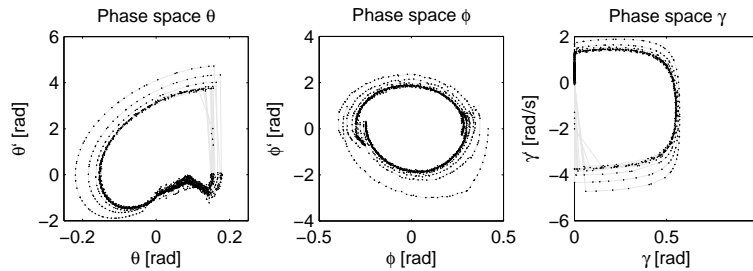


Figura 6.11: Espacio de fase del diseño mecánico del robot real.

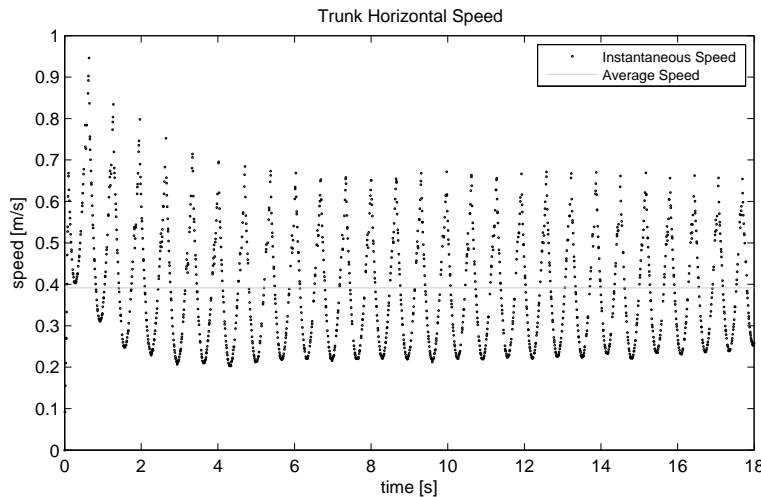


Figura 6.12: Velocidad horizontal del diseño mecánico del robot real.

Las similitudes entre los espacios de fase de la simulación del modelo usando en la metodología propuesta y del diseño mecánico del robot real son evidentes. Hay algunas pequeñas diferencias en su forma y una gran diferencia en la amplitud del paso. Esto se explica por la diferencia en la pendiente: La simulación del modelo usando en la metodología propuesta tiene una pendiente de  $4,85^\circ$ , mientras que la simulación del diseño mecánico del robot real tiene una pendiente de  $1,7^\circ$ . No fue posible simular ambos con la misma pendiente. Probablemente debido a las pérdidas en los impactos: las simulaciones del modelo usando en la metodología propuesta consideran colisiones instantáneas e inelásticas, mientras que el simulador mecánico Solidworks<sup>®</sup> considera colisiones elásticas con algo de deformación. Esto hace que las pérdidas energéticas sean mucho mayores en las simulaciones del modelo usando en la metodología propuesta, necesitando una pendiente mayor. Es conocido que una pendiente mayor genera una amplitud de paso mayor en el ciclo de caminata pasiva [54]. Como una consecuencia, las simulaciones del modelo usando en la metodología propuesta exhiben una amplitud de paso mayor que las simulaciones del diseño mecánico del robot real.

## 6.6. Diseño y construcción de robot real: Construcción mecánica.

---

En su trabajo, McGeer predijo que el período de un paso depende sólo de la gravedad y del largo de la pierna [54]. Consecuentemente, a pesar de la gran diferencia de pendiente entre las simulaciones del modelo usando en la metodología propuesta y las simulaciones del diseño mecánico del robot real, el período del paso difiere sólo en aproximadamente un 5%. Esto, en conjunto con la diferencia en la amplitud del paso mencionada en el párrafo previo, explican el porqué la velocidad horizontal del tronco en las simulaciones del modelo usando en la metodología propuesta es casi el doble que en las simulaciones del diseño mecánico del robot real.

## 6.5. Construcción mecánica

Para la construcción del robot real, se decidió utilizar duraluminio y plástico “*technyl*” por su resistencia mecánica, resistencia al desgaste, rigidez, tenacidad y bajo peso. Las piezas son en su gran mayoría producidas mediante fresado en una máquina de control numérico por computadora (CNC), permitiendo su fabricación directamente desde su modelo en Solidworks®. La máquina CNC disponible tiene 3 ejes, haciendo necesario el subdividir muchas de las piezas para hacer factible su construcción.

Aunque la figura 6.9 muestra el robot construido y su modelo mecánico, en ella no se aprecia el detalle de las piezas, por lo que en la figura 6.13 se detalla el pie construido y su modelo, la figura 6.14 exhibe el segmento inferior de la pierna construido y su modelo mecánico, en la figura 6.15 se ve el segmento superior de la pierna construido y su modelo mecánico, y finalmente, el tronco construido y su modelo se observan en la figura 6.16.

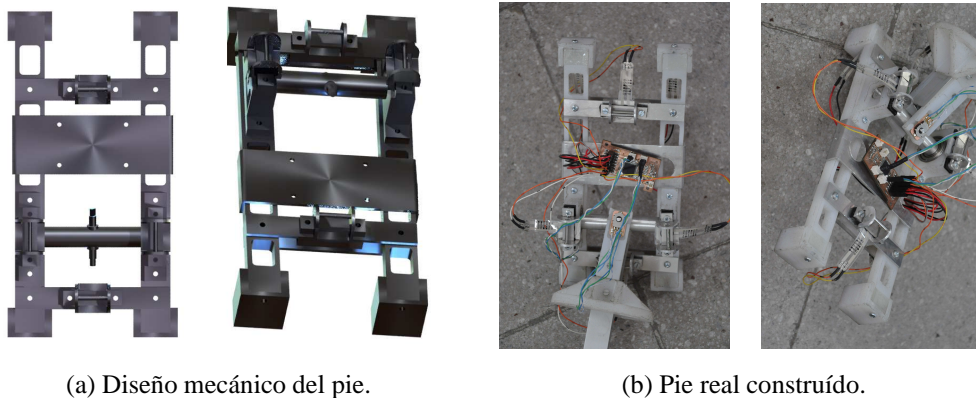


Figura 6.13: Diseño mecánico del pie en conjunto con su modelo mecánico.

## 6.6. Electrónica

La electrónica del sistema de control se divide en cuatro tarjetas de acuerdo a su funcionalidad:

**Lector de sensores.** Se encarga de la adquisición de los datos de los sensores, su filtrado, digitalización y transmisión.

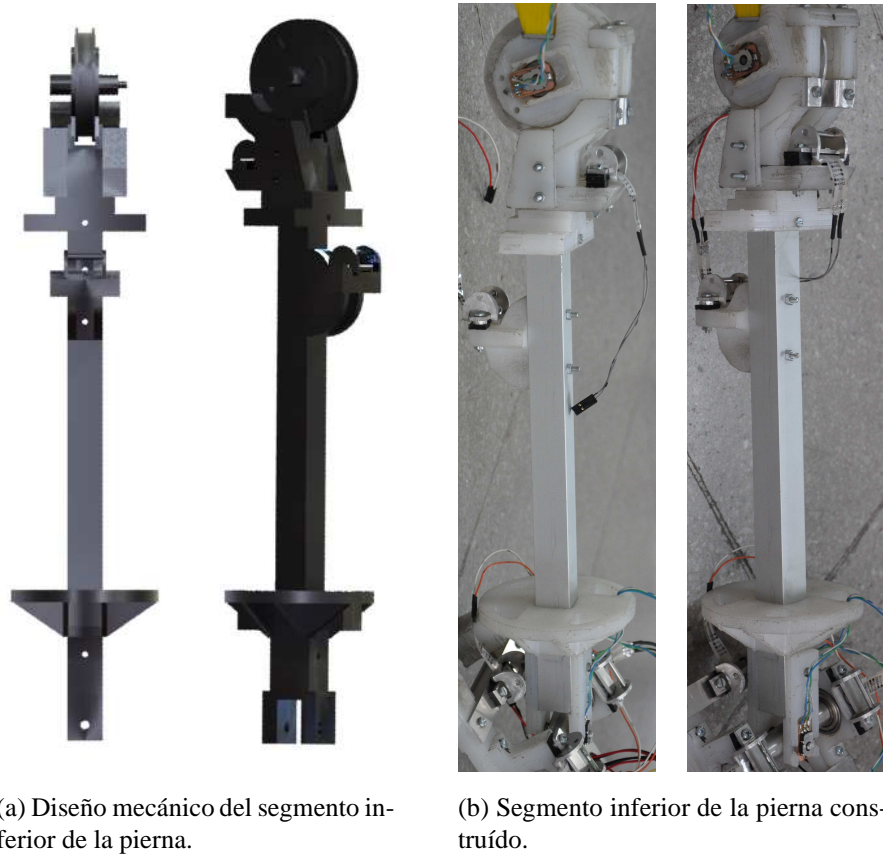


Figura 6.14: Diseño mecánico del segmento inferior de la pierna construido en conjunto con su modelo mecánico.

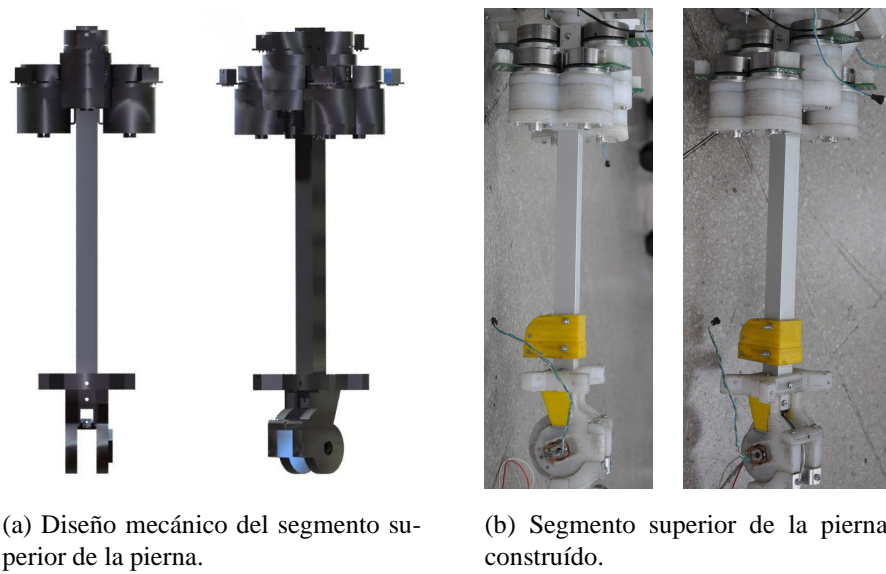
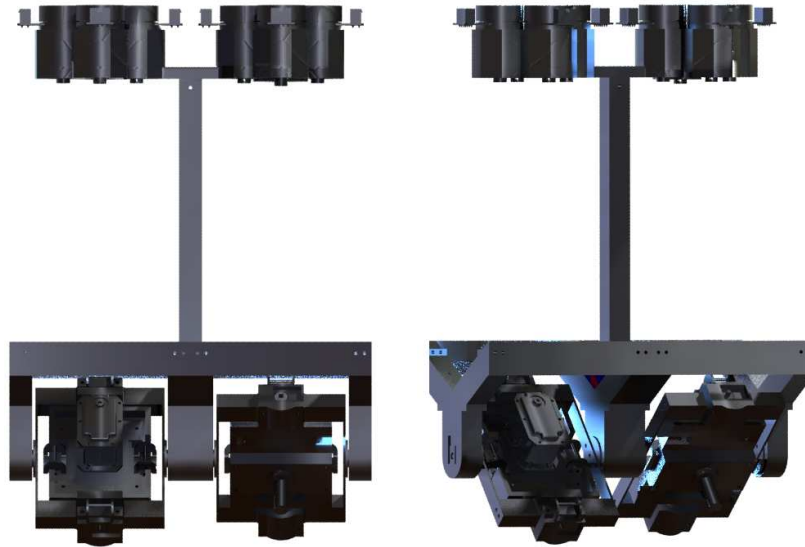
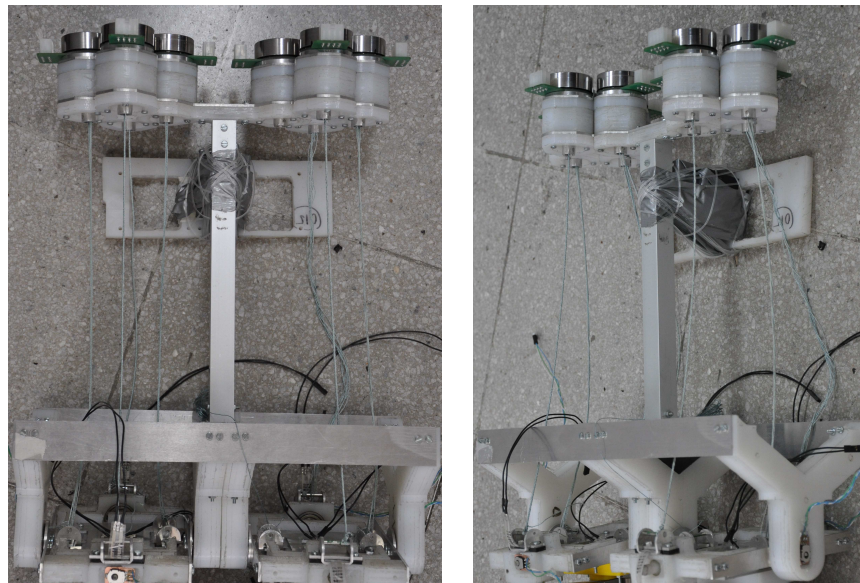


Figura 6.15: Diseño mecánico del segmento superior de la pierna construido en conjunto con su modelo mecánico.



(a) Diseño mecánico del tronco.



(b) Tronco construído.

Figura 6.16: Tronco construído en conjunto con su modelo mecánico.

**Potencia de motores.** Corresponde a la tarjeta encargada de darle la alimentación a los motores, controla los dos motores de una articulación independientemente. Para cada uno de los motores recibe una señal de PWM y un sentido de giro, con esta información alimenta al motor “*brushless DC*” y retorna una señal de corriente y la salida de dos de los sensores de efecto hall para estimar la velocidad del motor.

**Control de la articulación.** Es la tarjeta que se encarga de todo el ciclo de control de la articulación, es decir, el control de posición, de torque antagonico y de torque del motor. Esta tarjeta se comunica con la tarjeta lectora de sensores a través de un bus RS232 y de forma analógica con la tarjeta de potencia de motores.

**Control de caminata.** Esta tarjeta se encarga de generar las referencias de posición y torque para cada una de las tarjetas de control de la articulación y enviárselas mediante un bus RS485. Esta tarjeta fue diseñada y construida con anterioridad a este proyecto en el Laboratorio de Robótica de la Universidad de Chile.

La figura 6.17 muestra el diagrama de conexiones de la electrónica del sistema de control.

En el anexo A, la figura A.1 muestra el diseño del esquemático y del circuito impreso del módulo lector de sensores. Luego, la figura A.2 muestra el diseño del esquemático y del circuito impreso del módulo de potencia de los motores. Finalmente, la figura A.3 muestra el diseño del esquemático y del circuito impreso del módulo de control de la articulación.

## 6.7. Control de la caminata

El sistema de control de la caminata es el sistema que reemplaza la energía que debería proporcionar la pendiente y que además le puede agregar estabilidad al ciclo de caminata pasiva.

Como se mencionó en el capítulo 3, la energía potencial está compuesta por dos energías potenciales virtuales, una horizontal  $V_h$  y la otra vertical  $V_v$ . Por lo tanto, si se quiere reemplazar la pendiente por un sistema de control, este debe ejercer todas las componentes que genera la energía potencial virtual horizontal  $V_h$ . Se debe recordar que las expresiones que rigen el movimiento en el modelo original con pendiente son:

$$V_v = g \cdot \overrightarrow{masa}^T \cdot \overrightarrow{CMhVector}(t). \quad (6.2a)$$

$$V_h = -Avn \cdot g \cdot \overrightarrow{masa}^T \cdot \overrightarrow{CMxVector}(t). \quad (6.2b)$$

$$V = V_v + V_h. \quad (6.2c)$$

$$Lg = K - V. \quad (6.2d)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Lg}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial Lg}{\partial q}. \quad (6.2e)$$

Donde se utilizan las definiciones de las secciones 3.1, 3.2.2 y 3.3.4.

Por otro lado, en el caso del modelo sin pendiente y con una señal de control, las ecuaciones que rigen el movimiento son:

$$Lg^* = K - V_v. \quad (6.3a)$$

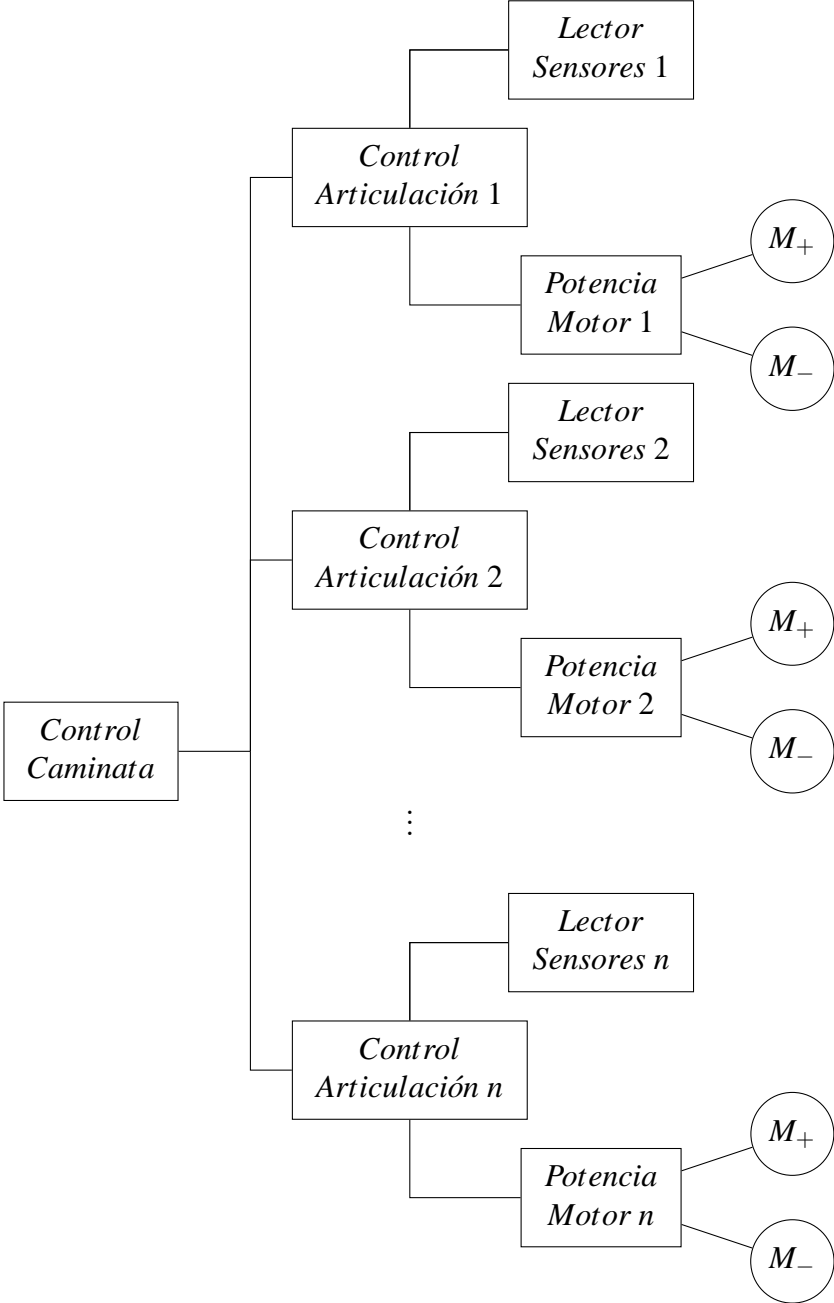


Figura 6.17: Diagrama de la electrónica del sistema de control del robot.

$$B \cdot \vec{u} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Lg^*}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial Lg^*}{\partial q}. \quad (6.3b)$$

Donde,  $Lg^*$  es el lagrangiano en el caso del modelo sin pendiente y con una señal de control,  $\vec{u}$  es el vector de torques ejercidos por el sistema de control y  $B$  es la matriz que pasa del espacio de los actuadores (cada dimensión es un actuador que ejerce torque) al espacio del modelo (cada dimensión es un grado de libertad del modelo).

Como se espera que las ecuaciones (6.2e) y (6.3b) sean las mismas, basta con igualar las ecuaciones y despejar las señales de control, luego de la ecuación (6.2) se obtiene:

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (K - V)}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial (K - V)}{\partial q} \quad (6.4a)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (K - V_v - V_h)}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial (K - V_v - V_h)}{\partial q} \quad (6.4b)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (K - V_v)}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial V_h}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial (K - V_v)}{\partial q} + \frac{\partial V_h}{\partial q} \quad (6.4c)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (K - V_v)}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V_h}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial (K - V_v)}{\partial q} + \frac{\partial V_h}{\partial q} \quad (6.4d)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (K - V_v)}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial (K - V_v)}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V_h}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial V_h}{\partial q}. \quad (6.4e)$$

Luego, reemplazando la ecuación (6.3a) en la ecuación (6.4e) se obtiene la expresión:

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Lg^*}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial Lg^*}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V_h}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial V_h}{\partial q}. \quad (6.5)$$

Reemplazando la ecuación (6.3b) en la ecuación (6.5) se obtiene la expresión:

$$0 = B \cdot \vec{u} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V_h}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial V_h}{\partial q}. \quad (6.6)$$

Finalmente, la ley de control se obtiene manipulando la ecuación (6.6), resultando la siguiente expresión:

$$B \cdot \vec{u} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V_h}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial V_h}{\partial q}. \quad (6.7)$$

Esta ley de control es el reemplazo de la pendiente, pero no agrega estabilidad al sistema. Para agregarle estabilidad se deberían analizar los valores propios del mapa de Poincaré linealizado para generar señales de control que incrementen la estabilidad local de los ciclos de caminata, así como también se debe estudiar la estabilidad orbital del ciclo, para aumentar la robustez de las órbitas ante perturbaciones ortogonales a las mismas. Estas dos componentes estabilizadoras más una que deberían además agrandar la zona de estabilidad global del mapa de Poincaré son trabajo futuro propuesto para su desarrollo una vez que el robot semi-pasivo esté completamente funcional.

## 6.8. Control de equilibrio

Para controlar el equilibrio lateral, se utiliza un enfoque heurístico, en el que se mueve el centro de masa en el eje lateral, describiendo una senoide en función del ángulo de la pierna de soporte, la que está directamente relacionada con la etapa del paso en que se está (ver la sección 6.3.4, y especialmente la figura 6.6).

El sistema de control de equilibrio fue implementado en simulaciones y en un robot Hajime HR-18 por un ayudante de investigación. El sistema de control de equilibrio tuvo que ser ajustado para esta plataforma y funcionó de forma aceptable. Sin embargo, los resultados obtenidos no son extrapolables al robot semi-pasivo debido a que la distribución de masa del robot Hajime HR-18 es muy distinta que la del robot semi-pasivo construido. Se estima que el sistema de control de equilibrio debería presentar un mayor desempeño en el robot semi-pasivo construido, pues fue diseñado para este robot.

Actualmente, el robot semi-pasivo está construido, y se está terminando el diseño mecánico de la unión entre los motores y las cuerdas. Por lo mismo, la validación del sistema de control de equilibrio en el robot semi-pasivo, así como la formulación de un sistema de control de equilibrio teóricamente más riguroso queda como trabajo futuro.

## 6.9. Consumo energético

La energía requerida por el robot semi-pasivo para caminar está dada por la diferencia de energía potencial horizontal virtual, la que se expresa según:

$$\Delta V_h = g \cdot M \cdot Avn \cdot \Delta displ. \quad (6.8)$$

Según la definición para el costo de específico de transporte [4]:

$$c_{et} = \frac{\text{Energía}}{\text{Peso} \cdot \text{Desplazamiento}}. \quad (6.9)$$

Luego, para el caso del robot construido el costo específico de transporte está dado por:

$$c_{et} = Avn. \quad (6.10)$$

Es decir, con la pendiente estimada, el costo de transporte sería:

$$c_{et} = \text{Tan}(4, 85^\circ) = 0,0849. \quad (6.11)$$

Pero, este valor obtenido debe ser compensado por las pérdidas no consideradas, ponderándolo por  $4 \cdot \text{Cos}(\alpha)$  [4], obteniéndose:

$$c_{et} = 0,0849 \cdot 4 \cdot \text{Cos}(\alpha) = 0,3384. \quad (6.12)$$

Este valor para el costo de transporte es comparable con el costo de transporte estimado para los humanos de 0,2 [14], y es mucho menor que el costo de transporte de un robot bípedo activo como el robot Asimo con un costo de transporte estimado de 3,2 [14].

## **6.10. Discusión**

Se ha diseñado y construido un robot semi-pasivo, que al menos en simulaciones, presenta un ciclo de caminata pasiva estable. Su diseño se basa en un conjunto de reglas obtenidas mediante la metodología de diseño propuesta en este trabajo y utiliza un nuevo tipo de actuadores de rigidez variable que ha mostrado un buen desempeño y cuya única limitante hasta ahora es una tasa de reducción muy elevada que es muy fácil de corregir incrementando el diámetro de los tendones. El sistema de control de la articulación funciona perfectamente, faltando sólo por evaluar el desempeño de los sistemas de control de caminata y de equilibrio, cuyas pruebas definitivas se realizarán como trabajo futuro cuando el robot esté completamente funcional.

---

# Capítulo 7

## Conclusiones

---

### Contenidos

---

7.1. Articulación de rigidez variable . . . . .	140
7.2. Metodología de diseño . . . . .	140
7.3. Diseño y construcción de robot real . . . . .	140
7.4. Aportes del trabajo de tesis . . . . .	141
7.5. Trabajo futuro . . . . .	141

---

### 7.1. Diseño de articulaciones de rigidez variable

Se ha diseñado y construido un nuevo tipo de articulación de rigidez variable, utilizando el antiguo principio de torcer cuerdas para generar tracción. La articulación propuesta es completamente original, sin que existan antecedentes del uso de este tipo de actuación en robots.

Los resultados obtenidos con los actuadores propuestos, así como sus curvas teóricas de torque y velocidad son muy buenos y adecuados a la aplicación final de este trabajo: un robot bípedo que sólo necesita una gran fuerza para ponerse de pie desde la posición en cuclillas, ya que para caminar no se necesita mucho torque en las articulaciones debido al uso de un ciclo de caminata pasivo.

El sistema de control propuesto para la articulación de rigidez variable permite su uso como un servomotor estándar o bien, utilizando control del torque aplicado.

### 7.2. Metodología de diseño de robots pasivos

Se ha propuesto una nueva metodología para encontrar las condiciones sobre los parámetros que permiten la existencia de un ciclo de caminata estable en un robot pasivo [89]. Esta metodología puede ser utilizada con cualquier modelo de caminata pasiva sin importar su complejidad, supera los problemas de *aliasing* generados por el uso de una discretización uniforme en los mapas de Poincaré, logrando como resultado de su aplicación en el proceso de diseño un conjunto de reglas que si los parámetros del robot siguen, éste exhibirá un ciclo de caminata pasiva. Este conjunto de reglas resultante se presenta como un subespacio de parámetros con un indicador del margen de estabilidad (también llamado valor de utilidad para el diseño), el que permite elegir entre distintos subespacios de parámetros resultantes.

En la literatura no existe ninguna otra metodología que pueda ser utilizada en un modelo de caminata pasiva arbitrario para encontrar las condiciones sobre los parámetros necesarias para la existencia de un ciclo de caminata pasiva.

La metodología propuesta se utilizó exitosamente en el proceso de diseño de un robot bípedo semi-pasivo. Permitió encontrar las condiciones sobre los parámetros necesarias para la existencia de un ciclo de caminata pasiva. Estos resultados fueron exhaustivamente validados utilizando simulaciones computacionales del modelo utilizado. Además, los parámetros resultantes fueron validados en un simulador mecánico externo con un modelo de robot mucho más complejo.

### 7.3. Diseño y construcción de robot bípedo actuado utilizando su modelo pasivo

Las condiciones sobre los parámetros encontradas permitieron diseñar y construir fácilmente un robot que, al menos en las simulaciones mecánicas del diseño, exhibe un ciclo de caminata pasiva. Aunque el modelo simulado y la simulación del diseño mecánico exhiben ciclos de caminata pasiva con conjuntos de parámetros ligeramente diferentes (aparentemente por las diferencias entre el modelo utilizado en la metodología propuesta y el modelo utilizado por el software de

simulación mecánica), un pequeño incremento de la pendiente corrigió la diferencia, conduciendo a la aparición del ciclo de caminata pasiva predicho.

## 7.4. Aportes del trabajo de tesis

Se ha propuesto una metodología para encontrar las condiciones sobre los parámetros de un modelo arbitrario de caminatas de dinámica pasiva [89]. En la literatura no existe ninguna metodología que permita encontrar las condiciones sobre los parámetros de un modelo arbitrario. Los resultados de la aplicación de esta metodología permiten el diseño de un robot semi-pasivo que en simulaciones presenta un ciclo de caminata estable.

Se ha presentado un nuevo tipo de articulación de rigidez variable basada en el principio de torcer cuerdas para generar un desplazamiento lineal. La mecánica involucrada en estas articulaciones es bastante simple y el resultado es aplicable en los sistemas de actuación de robots bípedos. Dentro de las ventajas de estas articulaciones propuestas se destacan la flexibilidad para poner los motores en cualquier ubicación, permitiendo acomodar los centros de masa en el caso de requerirlo, facilidad para controlar la rigidez y permitir la fluidez de la dinámica intrínseca del robot, pocas pérdidas energéticas por roce.

Se ha diseñado un robot bípedo semi-pasivo que en las simulaciones presenta un ciclo de caminata de dinámica pasiva, y con ello una eficiencia energética cercana a la de los humanos, mucho mayor que la de los robots bípedos activos tradicionales. Actualmente el robot está en la etapa final de su construcción.

## 7.5. Trabajo futuro

Actualmente, el robot semi-pasivo diseñado utilizando los resultados de la aplicación de la metodología propuesta en el capítulo 4 está construido (ver figura 6.9). El robot semi-pasivo construido utiliza las articulaciones propuestas en el capítulo 5. Sin embargo, aún posee problemas con el mecanismo que une los motores con sus respectivas cuerdas. La solución de este problema, así como el hacer completamente funcional al robot es trabajo futuro.

En el futuro, cuando el robot semi-pasivo esté completamente funcional, se verificará el comportamiento del sistema de control de estabilidad lateral en el sistema para el que fue diseñado, se verificará la forma de la caminata semi-pasiva en la realidad, poniendo especial atención en su eficiencia energética y en su naturalidad.

Finalmente, también es trabajo futuro diseñar y construirle brazos y cabeza al robot semi-pasivo, así como darle más habilidades, como poder girar, subir o bajar escaleras, correr, saltar, etc. Este trabajo será realizado en el Laboratorio de Robótica de la Universidad de Chile en los próximos años.

# Bibliografía

---

- [1] AHMED, M., AND KALAYKOV, I. Semi-active compliant robot enabling collision safety for human robot interaction. In *Mechatronics and Automation (ICMA), 2010 International Conference on* (2010), pp. 1932–1937.
- [2] AKACHI, K., KANEKO, K., KANEHIRA, N., OTA, S., MIYAMORI, G., HIRATA, M., KAJITA, S., AND KANEHIRO, F. Development of humanoid robot hrp-3p. In *Proceedings of the 5th IEEE International Conference on Humanoid Robots* (December 2005), pp. 50–55.
- [3] ALBU-SCHAFFER, A., EIBERGER, O., GREBENSTEIN, M., HADDADIN, S., OTT, C., WIMBOCK, T., WOLF, S., AND HIRZINGER, G. Soft robotics. *IEEE Robotics and Automation Magazine* 15, 3 (September 2008), 20–30.
- [4] ALEXANDER, R. M. Walking made simple. *Science* 308, 5718 (2005), 58–59.
- [5] AMES, A., AND GREGG, R. Stably extending two-dimensional bipedal walking to three dimensions. In *American Control Conference* (2007), pp. 2848–2854.
- [6] AU, S., AND HERR, H. Powered ankle-foot prosthesis. *IEEE Robotics and Automation Magazine* 15, 3 (September 2008), 52–59.
- [7] BEHNKE, S. Online trajectory generation for omnidirectional biped walking. In *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation* (2006), pp. 1597–1603.
- [8] CHESTNUTT, J., LAU, M., CHEUNG, G., KUFFNER, J., HODGINS, J., AND KANADE, T. Footstep planning for the honda asimo humanoid. In *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation* (apr. 2005), pp. 629–634.
- [9] CHESTNUTT, J., MICHEL, P., KUFFNER, J., AND KANADE, T. Locomotion among dynamic obstacles for the honda asimo. In *Proceedings of the 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems* (October 2007), pp. 2572–2573.
- [10] CHOI, J. H., AND GRIZZLE, J. W. Feedback control of an underactuated planar bipedal robot with impulsive foot action. *Robotica* 23, 5 (September 2005), 567–580.
- [11] CHOI, J. H., AND GRIZZLE, J. W. Planar bipedal walking with anthropomorphic foot action. Tech. rep., Control Systems Laboratory, Electrical Engineering and Computer Science Department, University of Michigan, November 2005.

- [12] CHOI, T.-Y., LEE, J.-W., PARK, K.-T., AND LEE, J.-J. Position and compliance control of a manipulator with pneumatic muscles for enhanced safety. In *Industrial Electronics (ISIE), 2010 IEEE International Symposium on* (2010), pp. 3565–3570.
- [13] COLEMAN, M. J. *A Stability Study of a Three-Dimensional Passive-Dynamic Model of Human Gait*. PhD thesis, Cornell University, February 1998.
- [14] COLLINS, S., RUINA, A., TEDRAKE, R., AND WISSE, M. Efficient Bipedal Robots Based on Passive-Dynamic Walkers. *Science* 307, 5712 (February 2005), 1082–1085.
- [15] COLLINS, S. H., WISSE, M., AND RUINA, A. A three-dimensional passive-dynamic walking robot with two legs and knees. *The International Journal of Robotics Research* 20, 7 (July 2001), 607–615.
- [16] DE WIT, C. C., ESPIAU, B., AND URREA, C. Orbital stabilization of underactuated mechanical systems. In *Proceedings of the 15th IFAC World Congress, 2002* (2002), L. Basañez and J. A. de la Puente, Eds., vol. 15.
- [17] FAWCETT, T. An introduction to roc analysis. *Pattern Recognition Letters* 27, 8 (2006), 861–874.
- [18] FENG, S., AND SUN, Z. Biped robot walking using three-mass linear inverted pendulum model. In *Intelligent Robotics and Applications*, C. Xiong, H. Liu, Y. Huang, and Y. Xiong, Eds., vol. 5314 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer Berlin / Heidelberg, 2008, pp. 371–380.
- [19] FILIPPINI, R., SEN, S., AND BICCHI, A. Toward soft robots you can depend on. *IEEE Robotics and Automation Magazine* 15, 3 (September 2008), 31–41.
- [20] GARCIA, M. *Stability, Scaling, And Chaos In Passive-Dynamic Gait Models*. Ph.d. thesis, Sibley School of Mechanical and Aerospace Engineering, Cornell University, 1999.
- [21] GARCIA, M., CHATTERJEE, A., AND RUINA, A. Efficiency, speed, and scaling of 2d passive dynamic walking. *Dynamics and Stability of Systems* 15, 2 (2000), 75–99.
- [22] GOSWAMI, A. Postural stability of biped robots and the foot rotation indicator (fri) point. *The International Journal of Robotics Research* 18, 6 (1999), 523–533.
- [23] GOSWAMI, A., ESPIAU, B., AND KERAMANE, A. Limit cycles and their stability in a passive bipedal gait. In *Proceedings of the IEEE 1996 International Conference on Robotics and Automation* (Minneapolis, USA pp. 246–251.
- [24] GOSWAMI, A., THUILOT, B., AND ESPIAU, B. Compass-like biped robot part i: Stability and bifurcation of passive gaits. Research Report RR-2996, INRIA: Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, October 1996.
- [25] GRIZZLE, J., ABBA, G., AND PLESTAN, F. Asymptotically stable walking for biped robots: analysis via systems with impulse effects. *IEEE Transactions on Automatic Control* 46, 1 (January 2001), 51–64.

- [26] GRIZZLE, J., ABBA, G., AND PLESTAN, F. Correction to 'asymptotically stable walking for biped robots: Analysis via systems with impulse effects'. *IEEE Transactions on Automatic Control* 46, 3 (March 2001), 513–513.
- [27] GRIZZLE, J., PLESTAN, F., AND ABBA, G. Poincare's method for systems with impulse effects: application to mechanical biped locomotion. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control* (1999), vol. 4, pp. 3869–3876.
- [28] HARDT, M., AND VON STRYK, O. The role of motion dynamics in the design, control and stability of bipedal and quadrupedal robots. In *RoboCup 2002: Robot Soccer World Cup VI*, G. A. Kaminka, P. U. Lima, and R. Rojas, Eds., vol. 2752 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer Berlin / Heidelberg, 2003, pp. 206–223. 10.1007/978-3-540-45135-8-16.
- [29] HARUNA, M., OGINO, M., HOSODA, K., AND ASADA, M. Yet another humanoid walking - passive dynamic walking with torso under simple control. In *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems* (2001), vol. 1, pp. 259–264.
- [30] HIRUKAWA, H., HATTORI, S., HARADA, K., KAJITA, S., KANEKO, K., KANEHIRO, F., FUJIWARA, K., AND MORISAWA, M. A universal stability criterion of the foot contact of legged robots - adios zmp. In *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation* (2006), pp. 1976–1983.
- [31] HONDA, Y., MIYAZAKI, F., AND NISHIKAWA, A. Control of pneumatic five-fingered robot hand using antagonistic muscle ratio and antagonistic muscle activity. In *Biomedical Robotics and Biomechatronics (BioRob), 2010 3rd IEEE RAS and EMBS International Conference on* (2010), pp. 337–342.
- [32] HSU CHEN, V. Passive dynamic walking with knees: A point foot model. Master thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Science, Massachusetts Institute of Technology, 2007.
- [33] HURMUZLU, Y. Dynamics of bipedal gait part i: Objective functions and the contact event of a planar five-link biped. *Journal of Applied Mechanics* 60 (1998), 331–336.
- [34] HURMUZLU, Y. Dynamics of bipedal gait part ii: Stability analysis of a planar five-link biped. *Journal of Applied Mechanics* 60 (1998), 337–343.
- [35] HURMUZLU, Y., GÉNOT, F., AND BROGLIATO, B. Modeling, stability and control of biped robots—a general framework. *Automatica* 40, 10 (2004), 1647 – 1664.
- [36] HURST, J., AND RIZZI, A. Series compliance for an efficient running gait. *IEEE Robotics and Automation Magazine* 15, 3 (September 2008), 42–51.
- [37] ISIDORI, A. *Nonlinear Control Systems*, 3rd ed. Communications and Control Engineering. Springer, 1995.
- [38] KAJITA, S., AND ESPIAU, B. *Springer Handbook of Robotics*, 1 ed. Springer, June 2008, ch. 16, pp. 361–389.

- [39] KAJITA, S., KANEHIRO, F., KANEKO, K., FUJIWARA, K., HARADA, K., YOKOI, K., AND HIRUKAWA, H. Biped walking pattern generation by using preview control of zero-moment point. In *Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation* (2003), vol. 2, pp. 1620–1626.
- [40] KAJITA, S., NAGASAKI, T., KANEKO, K., AND HIRUKAWA, H. Zmp-based biped running control. *IEEE Robotics and Automation Magazine* 14, 2 (June 2007), 63–72.
- [41] KANEHIRA, N., KAWASAKI, T., OHTA, S., ISMUMI, T., KAWADA, T., KANEHIRO, F., KAJITA, S., AND KANEKO, K. Design and experiments of advanced leg module (hrp-2l) for humanoid robot (hrp-2) development. In *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems* (2002), vol. 3, pp. 2455–2460.
- [42] KANEKO, K., KAJITA, S., KANEHIRO, F., YOKOI, K., FUJIWARA, K., HIRUKAWA, H., KAWASAKI, T., HIRATA, M., AND ISOZUMI, T. Design of advanced leg module for humanoid robotics project of meti. In *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation* (2002), vol. 1, pp. 38–45.
- [43] KANEKO, K., KANEHIRO, F., KAJITA, S., YOKOYAMA, K., AKACHI, K., KAWASAKI, T., OTA, S., AND ISOZUMI, T. Design of prototype humanoid robotics platform for hrp. In *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems* (2002), vol. 3, pp. 2431–2436.
- [44] KUFFNER, JR., J. J., KAGAMI, S., NISHIWAKI, K., INABA, M., AND INOUE, H. Dynamically-stable motion planning for humanoid robots. *Auton. Robots* 12, 1 (2002), 105–118.
- [45] KUO, A. D. Stabilization of lateral motion in passive dynamic walking. *International Journal of Robotics Research* 18, 9 (1999), 917–930.
- [46] KUO, A. D. A simple model of bipedal walking predicts the preferred speed-step length relationship. *Journal of Biomechanical Engineering* 123 (July 2001), 264–269.
- [47] KUO, A. D. Energetics of actively powered locomotion using the simplest walking model. *Journal of Biomechanical Engineering* 124, 1 (February 2002), 113–120.
- [48] KUO, A. D. Choosing your steps carefully. *IEEE Robotics and Automation Magazine* 14, 2 (June 2007), 18–29.
- [49] KUO, A. D., DONELAN, J. M., AND RUINA, A. Energetic consequences of walking like an inverted pendulum: Step-to-step transitions. *Exercise and Sport Sciences Reviews* 33, 2 (2005), 88–97.
- [50] LASZLO, J., VAN DE PANNE, M., AND FIUME, E. Limit cycle control and its application to the animation of balancing and walking. In *Proceedings of the 23rd annual conference on Computer graphics and interactive techniques* (New York, NY, USA, 1996), ACM, pp. 155–162.

- [51] LIM, H., SETIAWAN, S. A., AND TAKANISHI, A. Balance and impedance control for biped humanoid robot locomotion. In *Proceedings of the 2001 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems* (2001), vol. 1, pp. 494–499.
- [52] MCGEER, T. Passive dynamic walking. Tech. Rep. CSS-ISS TR 88-02, Simon Fraser University, Burnaby, British Columbia, Canada, 1988.
- [53] MCGEER, T. Passive bipedal running. In *Proceedings of the Royal Society of London* (May 1990), vol. 240 of *Series B, Biological Sciences*, pp. 107–134.
- [54] MCGEER, T. Passive dynamic walking. *International Journal of Robotics Research* 9, 2 (1990), 62–82.
- [55] MCGEER, T. Passive walking with knees. In *Proceedings of the 1990 IEEE International Conference on Robotics and Automation* (December 1990), vol. 3, pp. 1640–1645.
- [56] MCGEER, T. *Principles of Walking and Running*, vol. 11 of *Advances in Comparative and Environmental Physiology*. Springer-Verlag, 1992, ch. 4.
- [57] MCGEER, T. Dynamics and control of bipedal locomotion. *Journal of Theoretical Biology* 163 (August 1993), 277–314.
- [58] MCGEER, T. Passive dynamic biped catalogue, 1991. In *Proceedings of the 2nd International Symposium on Experimental Robotics II* (London, UK, 1993), Springer-Verlag, pp. 465–490.
- [59] MCGEER, T. Dynamic walking robots and the w prize. *IEEE Robotics and Automation Magazine* 14, 2 (June 2007), 13–15.
- [60] MORIMOTO, J., AND ATKESON, C. Learning biped locomotion. *IEEE Robotics and Automation Magazine* 14, 2 (June 2007), 41–51.
- [61] MORRIS, B., AND GRIZZLE, J. A restricted poincaré map for determining exponentially stable periodic orbits in systems with impulse effects: Application to bipedal robots. In *44th IEEE Conference on Decision and Control and 2005 European Control Conference. CDC-ECC '05* (December 2005), pp. 4199–4206.
- [62] MORRIS, B., AND GRIZZLE, J. Hybrid invariance in bipedal robots with series compliant actuators. In *45th IEEE Conference on Decision and Control* (December 2006), pp. 4793–4800.
- [63] MORRIS, B., AND GRIZZLE, J. Hybrid invariant manifolds in systems with impulse effects with application to periodic locomotion in bipedal robots. *IEEE Transactions on Automatic Control* 54, 8 (August 2009), 1751–1764.
- [64] NAKAMURA, M., GOTO, S., AND KYURA, N. *Mechatronic servo system control*, vol. 300 of *Lecture Notes in Control and Information Science*. Springer, 2004.

- [65] NORRIS, J. A., MARSH, A. P., GRANATA, K. P., AND ROSS, S. D. Revisiting the stability of 2d passive biped walking: Local behavior. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 237, 23 (2008), 3038 – 3045.
- [66] OGATA, K. *Modern control engineering*, 5th ed. Prentice Hall, August 2009.
- [67] OHTA, H., YAMAKITA, M., AND FURUTA, K. From passive to active dynamic walking. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control* (1999), vol. 4, pp. 3883–3885.
- [68] PAUL, C., YOKOI, H., AND MATSUSHITA, K. Design and control of humanoid robot locomotion with passive legs and upper body actuation. In *Proceedings of the International Symposium on Robotics* (Paris, France, 2003).
- [69] PFEIFFER, F., LOFFLER, K., AND GIENGER, M. The concept of jogging johnnie. In *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation* (2002), vol. 3, pp. 3129–3135.
- [70] PLESTAN, F., GRIZZLE, J., WESTERVELT, E., AND ABBA, G. Stable walking of a 7-dof biped robot. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 19, 4 (August 2003), 653–668.
- [71] PLESTAN, F., GRIZZLE, J. W., WESTERVELT, E. R., AND ABBA, G. Controlled periodic motion in a nonlinear system with impulse effects: Walking of a biped robot. In *Proceedings of the 2001 IFAC NOLCOS'01* (Saint-Petersburg, Russia, July 2001), pp. 429–434.
- [72] PRATT, J. *Exploiting Inherent Robustness and Natural Dynamics in the Control of Bipedal Walking Robots*. Ph.d. thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Science, Massachusetts Institute of Technology, 2000.
- [73] RADKHAH, K., KUROWSKI, S., LENS, T., AND VON STRYK, O. Compliant robot actuation by feedforward controlled emulated spring stiffness. In *Simulation, Modeling, and Programming for Autonomous Robots*, N. Ando, S. Balakirsky, T. Hemker, M. Reggiani, and O. von Stryk, Eds., vol. 6472 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer Berlin / Heidelberg, 2010, pp. 497–508. 10.1007/978-3-642-17319-6-45.
- [74] RASBAND, S. N. *Chaotic dynamics of nonlinear systems*. Wiley, New York, 1990.
- [75] RUINA, A., BERTRAM, J. E., AND SRINIVASAN, M. A collisional model of the energetic cost of support work qualitatively explains leg sequencing in walking and galloping, pseudo-elastic leg behavior in running and the walk-to-run transition. *Journal of Theoretical Biology* 237, 2 (November 2005), 170–192.
- [76] SAKAGAMI, Y., WATANABE, R., AOYAMA, C., MATSUNAGA, S., HIGAKI, N., AND FUJIMURA, K. The intelligent asimo: system overview and integration. In *Proceedings of the 2002 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems* (2002), vol. 3, pp. 2478–2483.

- [77] SARDAIN, P., AND BESSONNET, G. Forces acting on a biped robot. center of pressure-zero moment point. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans* 34, 5 (September 2004), 630–637.
- [78] SASTRY, S. *Nonlinear Systems - Analysis, Stability and Control*, vol. 10 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer, 1999.
- [79] SAWICKI, G., AND FERRIS, D. A pneumatically powered knee-ankle-foot orthosis (kafo) with myoelectric activation and inhibition. *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation* 6 (2009), 1–16. 10.1186/1743-0003-6-23.
- [80] SHIBUYA, M., SATO, T., AND OHNISHI, K. Trajectory generation of biped robots using linear pendulum mode with virtual supporting point. In *Proceedings of the 10th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control* (Trento, March 2008), pp. 284–289.
- [81] SHOHAM, M. Twisting wire actuator. *Journal of Mechanical Design* 127 (2005), 441–445.
- [82] SPONG, M., HOLM, J., AND LEE, D. Passivity-based control of bipedal locomotion. *IEEE Robotics and Automation Magazine* 14, 2 (June 2007), 30–40.
- [83] STRAMIGIOLI, S., VALAVANIS, K. P., VANDERBORGHT, B., SUGAR, T., AND LEFEBER, D. Adaptable compliance - design, control, and applications of robotic stiffness actuators. *IEEE Robotics and Automation Magazine* 15, 3 (September 2008).
- [84] STRAMIGIOLI, S., VALAVANIS, K. P., WESTERVELT, E. R., AND DE WIT, C. C. Walking and running biped robots. *IEEE Robotics and Automation Magazine* 14, 2 (June 2007).
- [85] SUGIHARA, T., NAKAMURA, Y., AND INOUE, H. Real-time humanoid motion generation through zmp manipulation based on inverted pendulum control. In *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation* (2002), vol. 2, pp. 1404–1409.
- [86] SULZER, J., PESHKIN, M., AND PATTON, J. Pulling your strings. *IEEE Robotics and Automation Magazine* 15, 3 (September 2008), 70–78.
- [87] TEDRAKE, R. Actuating a simple 3d passive dynamic walker. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation* (2004), pp. 4656–4661.
- [88] TLALOLINI, D., Aoustin, Y., AND CHEVALLEREAU, C. Design of a walking cyclic gait with single support phases and impacts for the locomotor system of a thirteen-link 3d biped using the parametric optimization. *Multibody System Dynamics* 23 (2010), 33–56. 10.1007/s11044-009-9175-1.
- [89] VALLEJOS, P., DEL SOLAR, J. R., AND SWETT, F. A new methodology for the design of passive biped robots: Determining conditions on the robot’s parameters for the existence of stable walking cycles. *Journal of Intelligent and Robotic Systems* (2011), 1–21. 10.1007/s10846-010-9524-6.
- [90] VALLERY, H., VENEMAN, J., VAN ASSELDONK, E., EKKELENKAMP, R., BUSS, M., AND VAN DER KOOIJ, H. Compliant actuation of rehabilitation robots. *IEEE Robotics and Automation Magazine* 15, 3 (September 2008), 60–69.

- [91] VAN ZUTVEN, P., KOSTIĆ, D., AND NIJMEIJER, H. On the stability of bipedal walking. In *Simulation, Modeling, and Programming for Autonomous Robots*, N. Ando, S. Balakirsky, T. Hemker, M. Reggiani, and O. von Stryk, Eds., vol. 6472 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer Berlin / Heidelberg, 2010, pp. 521–532. 10.1007/978-3-642-17319-6-47.
- [92] VANDERBORGHT, B., SUGAR, T., AND LEFEBER, D. Adaptable compliance or variable stiffness for robotic applications [from the guest editors]. *IEEE Robotics and Automation Magazine* 15, 3 (September 2008), 8–9.
- [93] WESTERVELT, E., AND CANUDAS-DE WIT, C. Walking and running biped robots [from the guest editors]. *IEEE Robotics and Automation Magazine* 14, 2 (June 2007), 6–7.
- [94] WESTERVELT, E., GRIZZLE, J., AND KODITSCHKEK, D. Hybrid zero dynamics of planar biped walkers. *IEEE Transactions on Automatic Control* 48, 1 (January 2003), 42–56.
- [95] WESTERVELT, E. R., GRIZZLE, J. W., CHEVALLEREAU, C., CHOI, J. H., AND MORRIS, B. *Feedback Control of Dynamic Bipedal Robot Locomotion*. CRC Press, Boca Raton, Florida, June 2007.
- [96] WISSE, M. *Essentials of dynamic walking - Analysis and design of two-legged robots*. Ph.d. thesis, Faculty of Mechanical Engineering, Technische Universiteit Delft, 2004.
- [97] WISSE, M. Three additions to passive dynamic walking; actuation, an upper body, and 3d stability. In *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Humanoid Robots* (2004), vol. 1, pp. 113–132.
- [98] WISSE, M., FELIKSDAL, G., VAN FRANKKENHUYZEN, J., AND MOYER, B. Passive-based walking robot. *IEEE Robotics and Automation Magazine* 14, 2 (June 2007), 52–62.
- [99] WISSE, M., HOBBELEN, D., ROTTEVEEL, R., ANDERSON, S., AND ZEGLIN, G. Ankle springs instead of arc-shaped feet for passive dynamic walkers. In *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Humanoid Robots* (2006), pp. 110–116.
- [100] WOLFRAM RESEARCH, I. Wolfram mathematica. <http://www.wolfram.com/mathematica/>, December 2010.
- [101] XIANG, Y., ARORA, J., AND ABDEL-MALEK, K. Physics-based modeling and simulation of human walking: a review of optimization-based and other approaches. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 42 (2010), 1–23. 10.1007/s00158-010-0496-8.
- [102] XUN, G., YANTAO, T., AND DEJUN, L. On three-dimensional model of biped walking robot. In *Control Conference (CCC), 2010 29th Chinese* (2010), pp. 1339–1345.
- [103] YAMAGUCHI, J., SOGA, E., INOUE, S., AND TAKANISHI, A. Development of a bipedal humanoid robot-control method of whole body cooperative dynamic biped walking. In *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation* (1999), vol. 1, pp. 368–374.

- [104] YAMASAKI, F., ENDO, K., ASADA, M., AND KITANO, H. A control method for humanoid biped walking with limited torque. In *RoboCup 2001: Robot Soccer World Cup V* (London, UK, 2002), Springer-Verlag, pp. 60–70.
- [105] YAMASAKI, F., ENDO, K., ASADA, M., AND KITANO, H. An energy-efficient walking for a low-cost humanoid robot pino. *AI magazine* 23, 1 (2002), 60–61.
- [106] YAMASAKI, F., ENDO, K., KITANO, H., AND ASADA, M. Acquisition of humanoid walking motion using genetic algorithm-considering characteristics of servo modules. In *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation* (2002), vol. 3, pp. 3123–3128.
- [107] YAMASAKI, F., HOSODA, K., AND ASADA, M. An energy consumption based control for humanoid walking. In *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems* (2002), vol. 3, pp. 2473–2477.
- [108] YANG, T., WESTERVELT, E., SERRANI, A., AND SCHMIEDELER, J. A framework for the control of stable aperiodic walking in underactuated planar bipeds. *Autonomous Robots* 27 (2009), 277–290. 10.1007/s10514-009-9126-y.
- [109] ZHANG, Q., XING, X., AND GUO, H. Control method for lower -limb rehabilitation robot joint flexibility. In *Computer Science and Information Technology (ICCSIT), 2010 3rd IEEE International Conference on* (2010), vol. 8, pp. 618–621.
- [110] ZHAO, M., ZHANG, J., DONG, H., LIU, Y., LI, L., AND SU, X. Humanoid robot gait generation based on limit cycle stability. In *RoboCup 2008: Robot Soccer World Cup XII* (Berlin, Heidelberg, 2009), Springer-Verlag, pp. 403–413.

---

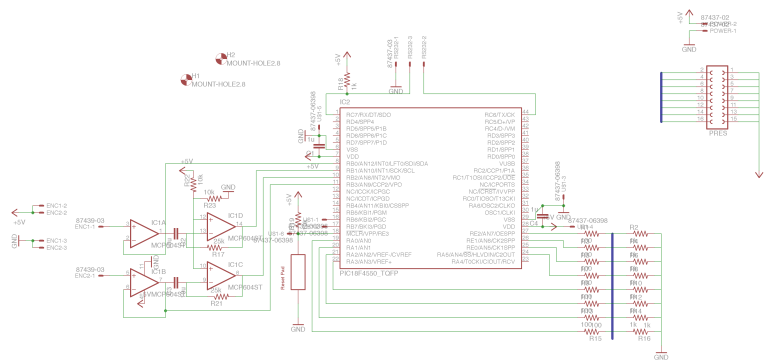
Apéndice A

# **Tarjetas electrónicas del sistema de control**

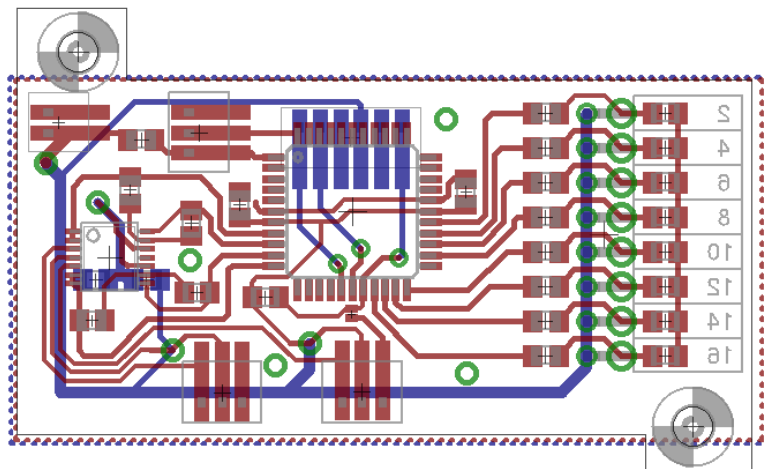
---

## A. Tarjetas electrónicas del sistema de control

La figura A.1 muestra el diseño del esquemático y del circuito impreso del módulo lector de sensores.



(a) Esquemático del lector de sensores.



(b) Tarjeta impresa del lector de sensores.

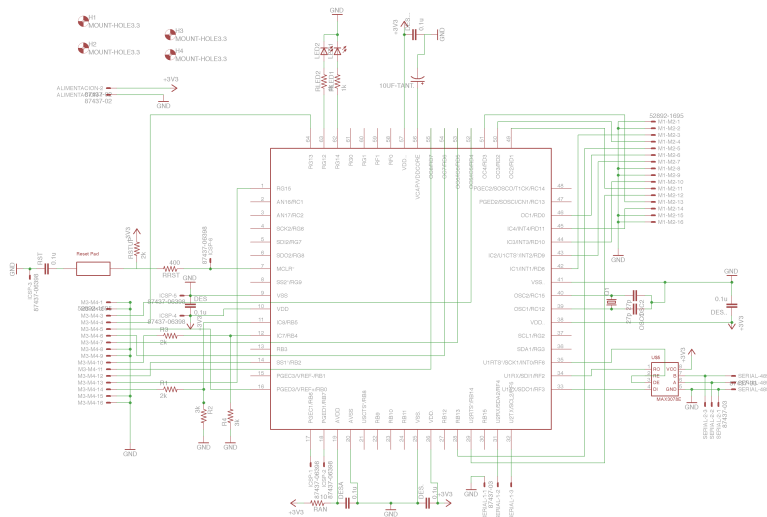
Figura A.1: Esquemático y tarjeta impresa del lector de sensores.

La figura A.2 muestra el diseño del esquemático y del circuito impreso del módulo de potencia de los motores.

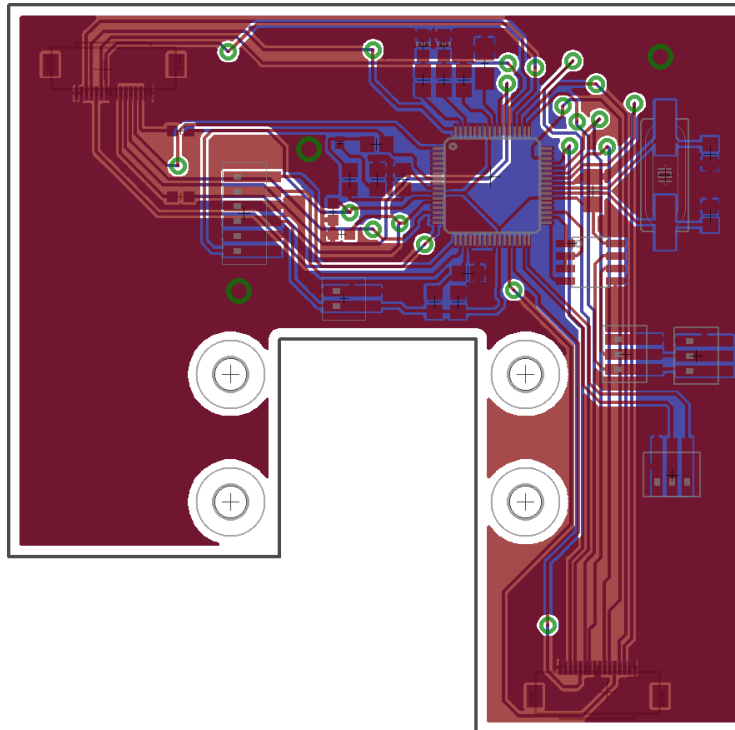
La figura A.3 muestra el diseño del esquemático y del circuito impreso del módulo de control de la articulación.



## A. Tarjetas electrónicas del sistema de control



(a) Esquemático del controlador de la articulación.



(b) Tarjeta impresa del controlador de la articulación.

Figura A.3: Esquemático y tarjeta impresa del controlador de la articulación.

---

Apéndice B

# Ecuaciones complejas

---

## Contenidos

---

<b>B.1. Modelos de robots pasivos . . . . .</b>	<b>156</b>
B.1.1. Modelo 2D sin rodillas . . . . .	156
B.1.2. Modelo 2D con rodillas . . . . .	156
<b>B.2. Actuator de rigidez variable . . . . .</b>	<b>194</b>

---

## B.1. Modelos de robots pasivos

### B.1.1. Modelo 2D sin rodillas

A continuación se muestran las expresiones resultantes para la etapa de transición del modelo 2D sin rodillas:

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{aux_3 + aux_4 + aux_5 + aux_7}{aux_{10}}. \quad (B.1a)$$

$$\ddot{\phi}(t) = \ddot{\theta}(t) - \frac{-aux_8 + aux_9}{aux_{10}}. \quad (B.1b)$$

Donde se utilizan las definiciones de las secciones 3.1 y 3.2.2 y las siguientes definiciones:

$$aux_1 = Avn \cdot \text{Cos}(\theta(t)) - \text{Sin}(\theta(t)) \quad (B.2a)$$

$$aux_2 = \text{Cos}(\theta(t)) + Avn \cdot \text{Sin}(\theta(t)) \quad (B.2b)$$

$$aux_3 = \omega^2 \cdot \text{Cos}(2 \cdot \phi(t)) \cdot aux_1 \cdot (-1 + M_t) \quad (B.2c)$$

$$aux_4 = \omega^2 \cdot aux_1 \cdot (1 + 3 \cdot M_t) \quad (B.2d)$$

$$aux_5 = \text{Sin}(2 \cdot \phi(t)) \cdot (-1 + M_t) \cdot (\omega^2 \cdot aux_2 - \dot{\theta}(t)^2) \quad (B.2e)$$

$$aux_6 = \dot{\theta}(t) - \dot{\phi}(t) \quad (B.2f)$$

$$aux_7 = 2 \cdot \text{Sin}(\phi(t)) \cdot (-1 + M_t) \cdot aux_6^2 \quad (B.2g)$$

$$aux_8 = \text{Sin}(2 \cdot \phi(t)) \cdot (-1 + M_t) \cdot aux_6^2 \quad (B.2h)$$

$$aux_9 = 2 \cdot \text{Sin}(\phi(t)) \cdot (M_t + 1) \cdot (\omega^2 \cdot aux_2 - \dot{\theta}(t)^2) \quad (B.2i)$$

$$aux_{10} = 2 \cdot \text{Sin}(\phi(t))^2 + (3 + \text{Cos}(2 \cdot \phi(t))) \cdot M_t. \quad (B.2j)$$

### B.1.2. Modelo 2D con rodillas

Con el objetivo de simplificar las expresiones resultantes para las aceleraciones angulares en la etapa de transición del modelo 2D con rodillas, se definen las siguientes variables que sólo dependen de parámetros:

$$auxDef_0^1 = CMx_c^2 \cdot M_c \quad (B.3a1)$$

$$auxDef_1^1 = CMy_c^2 \cdot M_c \quad (B.3a2)$$

$$auxDef_2^1 = M_c \cdot L_m^2 + CMx_m^2 \cdot M_m + CMy_m^2 \cdot M_m \quad (B.3a3)$$

$$auxDef_3^1 = I_c + I_m \quad (B.3a4)$$

$$auxDef_4^1 = CMy_c \cdot M_c \quad (B.3a5)$$

$$auxDef_5^1 = CMx_c \cdot M_c \quad (B.3a6)$$

$$auxDef_6^1 = L_c \cdot M_c \quad (B.3a7)$$

$$auxDef_7^1 = CMy_m \cdot M_m \quad (B.3a8)$$

$$auxDef_8^1 = CMx_m \cdot M_m \quad (B.3a9)$$

$$auxDef_9^1 = L_m \cdot M_m \cdot \quad (B.3a10)$$

$$auxDef_{10}^1 = M_c \cdot L_m \quad (B.3a11)$$

$$auxDef_{11}^1 = L_c \cdot M_m \quad (B.3a12)$$

$$auxDef_{12}^1 = L_c \cdot M_t \quad (B.3a13)$$

$$auxDef_{13}^1 = L_m \cdot M_t \quad (B.3a14)$$

$$auxDef_{14}^1 = CMy_c + L_m \quad (B.3a15)$$

$$auxDef_{15}^1 = CMx_m^2 + CMy_m^2 \quad (B.3a16)$$

$$auxDef_{16}^1 = L_c + L_m \quad (B.3a17)$$

$$auxDef_{17}^1 = M_c + M_m \quad (B.3a18)$$

$$auxDef_{18}^1 = Avn \cdot CMx_m \quad (B.3a19)$$

$$auxDef_{19}^1 = Avn \cdot CMx_c \cdot \quad (B.3a20)$$

$$auxDef_{20}^1 = M_c + 2 \cdot M_m + M_t \quad (B.3a21)$$

$$auxDef_{21}^1 = L_c 2 \cdot M_m \quad (B.3a22)$$

$$auxDef_{22}^1 = L_m^2 \cdot M_m \quad (B.3a23)$$

$$auxDef_{23}^1 = CMx_c^2 + CMy_c^2 \quad (B.3a24)$$

$$auxDef_{24}^1 = M_c \cdot L_m^2 \quad (B.3a25)$$

$$auxDef_{25}^1 = CMy_c \cdot L_m \quad (B.3a26)$$

$$auxDef_{26}^1 = CMx_c \cdot L_m \quad (B.3a27)$$

$$auxDef_{27}^1 = M_c \cdot M_c \quad (B.3a28)$$

$$auxDef_{28}^1 = Avn \cdot CMy_c \quad (B.3a29)$$

$$auxDef_{29}^1 = CMx_c \cdot CMy_c \cdot \quad (B.3a30)$$

## B. Ecuaciones complejas

---

$$auxDef_{30}^1 = CMx_c - CMy_c \quad (B.3a31)$$

$$auxDef_{31}^1 = CMx_c + CMy_c \quad (B.3a32)$$

$$auxDef_{32}^1 = 2 \cdot M_c \quad (B.3a33)$$

$$auxDef_{33}^1 = 2 \cdot I_m \quad (B.3a34)$$

$$auxDef_{34}^1 = CMy_c \cdot L_c \quad (B.3a35)$$

$$auxDef_{35}^1 = L_c \cdot L_m \quad (B.3a36)$$

$$auxDef_{36}^1 = L_c^2 + L_m^2 \quad (B.3a37)$$

$$auxDef_{37}^1 = L_c \cdot CMy_m \quad (B.3a38)$$

$$auxDef_{38}^1 = CMy_m \cdot L_m \quad (B.3a39)$$

$$auxDef_0^2 = auxDef_{23}^1 \cdot M_c \quad (B.3b1)$$

$$auxDef_1^2 = auxDef_{15}^1 \cdot M_m \quad (B.3b2)$$

$$auxDef_2^2 = auxDef_{27}^1 \cdot L_m^2 \quad (B.3b3)$$

$$auxDef_3^2 = auxDef_0^1 + auxDef_1^1 \quad (B.3b4)$$

$$auxDef_4^2 = auxDef_{16}^1 \cdot CMx_c \quad (B.3b5)$$

$$auxDef_5^2 = auxDef_{16}^1 \cdot CMy_c \quad (B.3b6)$$

$$auxDef_6^2 = auxDef_{14}^1 \cdot auxDef_{14}^1 \quad (B.3b7)$$

$$auxDef_7^2 = auxDef_5^1 + auxDef_8^1 \quad (B.3b8)$$

$$auxDef_8^2 = auxDef_{14}^1 \cdot M_c \quad (B.3b9)$$

$$auxDef_9^2 = auxDef_{14}^1 + auxDef_{19}^1 \quad (B.3b10)$$

$$auxDef_{10}^2 = auxDef_{18}^1 + CMy_m \quad (B.3b11)$$

$$auxDef_{11}^2 = 2 \cdot auxDef_{11}^1 \quad (B.3b12)$$

$$auxDef_{12}^2 = 2 \cdot auxDef_6^1 \quad (B.3b13)$$

$$auxDef_{13}^2 = 2 \cdot auxDef_9^1 \quad (B.3b14)$$

$$auxDef_{14}^2 = auxDef_5^1 \cdot Avn \quad (B.3b15)$$

$$auxDef_{15}^2 = auxDef_8^1 \cdot Avn \quad (B.3b16)$$

$$auxDef_{16}^2 = auxDef_{16}^1 \cdot M_t \quad (B.3b17)$$

$$auxDef_{17}^2 = auxDef_4^1 + auxDef_7^1 \quad (B.3b18)$$

$$auxDef_{18}^2 = 2 \cdot auxDef_{17}^1 \quad (B.3b19)$$

$$auxDef_{19}^2 = auxDef_{20}^1 \cdot L_m \quad (B.3b20)$$

$$auxDef_{20}^2 = auxDef_7^1 \cdot Avn \quad (B.3b21)$$

$$auxDef_{21}^2 = auxDef_{16}^1 \cdot auxDef_{16}^1 \quad (B.3b22)$$

$$auxDef_{22}^2 = 2 \cdot auxDef_{21}^1 \quad (B.3b23)$$

$$auxDef_{23}^2 = 2 \cdot auxDef_{22}^1 \quad (B.3b24)$$

$$auxDef_{24}^2 = 2 \cdot auxDef_4^1 \quad (B.3b25)$$

$$auxDef_{25}^2 = 2 \cdot auxDef_7^1 \quad (B.3b26)$$

$$auxDef_{26}^2 = auxDef_{32}^1 \cdot L_c2 \quad (B.3b27)$$

$$auxDef_{27}^2 = 4 \cdot auxDef_9^1 \quad (B.3b28)$$

$$auxDef_{28}^2 = auxDef_2^1 + auxDef_3^1 \quad (B.3b29)$$

$$auxDef_{29}^2 = auxDef_{24}^1 + I_m \cdot \quad (B.3b30)$$

$$auxDef_{30}^2 = -auxDef_{28}^1 + CMx_c \quad (B.3b31)$$

$$auxDef_{31}^2 = auxDef_4^1 \cdot Avn \quad (B.3b32)$$

$$auxDef_{32}^2 = auxDef_{10}^1 \cdot Avn \quad (B.3b33)$$

$$auxDef_{33}^2 = auxDef_{19}^1 + CMy_c \quad (B.3b34)$$

$$auxDef_{34}^2 = auxDef_{10}^1 + auxDef_7^1 \quad (B.3b35)$$

$$auxDef_{35}^2 = auxDef_4^1 \cdot L_m \quad (B.3b36)$$

$$auxDef_{36}^2 = auxDef_5^1 \cdot L_m \quad (B.3b37)$$

$$auxDef_{37}^2 = auxDef_{27}^1 \cdot L_m \quad (B.3b38)$$

$$auxDef_{38}^2 = auxDef_{30}^1 \cdot auxDef_{31}^1 \quad (B.3b39)$$

$$auxDef_{39}^2 = 2 \cdot auxDef_{29}^1 \cdot \quad (B.3b40)$$

$$auxDef_{40}^2 = 2 \cdot auxDef_{16}^1 \quad (B.3b41)$$

$$auxDef_{41}^2 = 2 \cdot auxDef_{10}^1 \quad (B.3b42)$$

$$auxDef_{42}^2 = 2 \cdot auxDef_{35}^1 \quad (B.3b43)$$

$$auxDef_{43}^2 = auxDef_{15}^1 + auxDef_{36}^1 \quad (B.3b44)$$

$$auxDef_{44}^2 = auxDef_{37}^1 + auxDef_{38}^1 \quad (B.3b45)$$

$$auxDef_{45}^2 = auxDef_{23}^1 - auxDef_{34}^1 \quad (B.3b46)$$

$$auxDef_{46}^2 = auxDef_{35}^1 + auxDef_{36}^1 \quad (B.3b47)$$

$$auxDef_{47}^2 = auxDef_{24}^1 + auxDef_{33}^1 \cdot \quad (B.3b48)$$

$$auxDef_0^3 = auxDef_6^2 + CMx_c^2 \quad (B.3c1)$$

$$auxDef_1^3 = auxDef_7^1 + auxDef_8^2 \quad (B.3c2)$$

$$auxDef_2^3 = auxDef_3^1 + auxDef_1^2 \quad (B.3c3)$$

$$auxDef_3^3 = auxDef_{10}^1 + auxDef_{11}^2 \quad (B.3c4)$$

$$auxDef_4^3 = auxDef_{12}^2 + auxDef_{13}^2 \quad (B.3c5)$$

$$auxDef_5^3 = auxDef_{14}^2 + auxDef_{15}^2 \quad (B.3c6)$$

$$auxDef_6^3 = -auxDef_{16}^2 + auxDef_{17}^2 \quad (B.3c7)$$

$$auxDef_7^3 = auxDef_9^2 \cdot M_c \quad (B.3c8)$$

$$auxDef_8^3 = auxDef_{10}^2 \cdot M_m \quad (B.3c9)$$

$$auxDef_9^3 = -auxDef_{17}^2 + auxDef_{19}^2. \quad (B.3c10)$$

$$auxDef_{10}^3 = auxDef_{18}^2 + M_t \quad (B.3c11)$$

$$auxDef_{11}^3 = auxDef_{20}^2 - auxDef_7^2 \quad (B.3c12)$$

$$auxDef_{12}^3 = auxDef_8^2 \cdot Avn \quad (B.3c13)$$

$$auxDef_{13}^3 = auxDef_{22}^2 + auxDef_{23}^2 \quad (B.3c14)$$

$$auxDef_{14}^3 = auxDef_{26}^2 + auxDef_{28}^2 \quad (B.3c15)$$

$$auxDef_{15}^3 = auxDef_{24}^2 \cdot L_c \quad (B.3c16)$$

$$auxDef_{16}^3 = auxDef_{25}^2 \cdot L_c \quad (B.3c17)$$

$$auxDef_{17}^3 = auxDef_{27}^2 \cdot L_c \quad (B.3c18)$$

$$auxDef_{18}^3 = auxDef_{12}^2 \cdot L_m \quad (B.3c19)$$

$$auxDef_{19}^3 = auxDef_{25}^2 \cdot L_m. \quad (B.3c20)$$

$$auxDef_{20}^3 = auxDef_{21}^2 \cdot M_t \quad (B.3c21)$$

$$auxDef_{21}^3 = auxDef_0^2 + I_c \quad (B.3c22)$$

$$auxDef_{22}^3 = auxDef_1^2 + auxDef_{29}^2 \quad (B.3c23)$$

$$auxDef_{23}^3 = auxDef_3^2 + I_c \quad (B.3c24)$$

$$auxDef_{24}^3 = auxDef_{20}^2 + auxDef_{32}^2 \quad (B.3c25)$$

$$auxDef_{25}^3 = auxDef_{30}^2 \cdot M_c \quad (B.3c26)$$

$$auxDef_{26}^3 = auxDef_{33}^2 \cdot M_c \quad (B.3c27)$$

$$auxDef_{27}^3 = auxDef_{15}^2 + auxDef_{34}^2 \quad (B.3c28)$$

$$auxDef_{28}^3 = 2 \cdot auxDef_2^2 \quad (B.3c29)$$

$$auxDef_{29}^3 = auxDef_{10}^1 + auxDef_{25}^2. \quad (B.3c30)$$

$$auxDef_{30}^3 = auxDef_{34}^2 \cdot I_c \quad (B.3c31)$$

$$auxDef_{31}^3 = 2 \cdot auxDef_1^2 \quad (B.3c32)$$

$$auxDef_{32}^3 = auxDef_{42}^2 + auxDef_{43}^2 \quad (B.3c33)$$

$$auxDef_{33}^3 = auxDef_{45}^2 + auxDef_{46}^2. \quad (B.3c34)$$

$$auxDef_0^4 = auxDef_0^3 \cdot M_c \quad (B.3d1)$$

$$auxDef_1^4 = auxDef_1^3 \cdot Avn \quad (B.3d2)$$

$$auxDef_2^4 = auxDef_3^3 + auxDef_4^3 \quad (B.3d3)$$

$$auxDef_3^4 = auxDef_5^3 + auxDef_6^3 \quad (B.3d4)$$

$$auxDef_4^4 = auxDef_3^2 + auxDef_{13}^3 \quad (B.3d5)$$

$$auxDef_5^4 = auxDef_{15}^3 + auxDef_{16}^3 \quad (B.3d6)$$

$$auxDef_6^4 = auxDef_{17}^3 + auxDef_{18}^3 \quad (B.3d7)$$

$$auxDef_7^4 = -auxDef_{19}^3 + auxDef_{20}^3 \quad (B.3d8)$$

$$auxDef_8^4 = auxDef_{11}^3 + auxDef_{12}^3 \quad (B.3d9)$$

$$auxDef_9^4 = auxDef_{10}^3 \cdot L_c. \quad (B.3d10)$$

$$auxDef_{10}^4 = auxDef_7^3 + auxDef_8^3 \quad (B.3d11)$$

$$auxDef_{11}^4 = auxDef_{21}^3 \cdot auxDef_{22}^3 \quad (B.3d12)$$

$$auxDef_{12}^4 = -auxDef_8^1 + auxDef_{24}^3 \quad (B.3d13)$$

$$auxDef_{13}^4 = auxDef_8^1 \cdot auxDef_{21}^3 \quad (B.3d14)$$

$$auxDef_{14}^4 = auxDef_0^2 \cdot auxDef_{29}^3 \quad (B.3d15)$$

$$auxDef_{15}^4 = 2 \cdot auxDef_{30}^3 \quad (B.3d16)$$

$$auxDef_{16}^4 = auxDef_{22}^3 \cdot I_c \quad (B.3d17)$$

$$auxDef_{17}^4 = -auxDef_{44}^2 + auxDef_{32}^3 \quad (B.3d18)$$

$$auxDef_{18}^4 = auxDef_{33}^3 \cdot M_c \quad (B.3d19)$$

$$auxDef_{19}^4 = auxDef_{47}^2 + auxDef_{31}^3 \quad (B.3d20)$$

$$auxDef_{20}^4 = \frac{M_c}{auxDef_{21}^3}. \quad (B.3d21)$$

$$auxDef_0^5 = auxDef_2^3 + auxDef_0^4 \quad (B.3e1)$$

$$auxDef_1^5 = auxDef_{14}^3 + auxDef_4^4 \quad (B.3e2)$$

$$auxDef_2^5 = auxDef_6^4 + auxDef_7^4 \quad (B.3e3)$$

$$auxDef_3^5 = auxDef_7^2 - auxDef_1^4 \quad (B.3e4)$$

$$auxDef_4^5 = auxDef_9^3 + auxDef_9^4 \quad (B.3e5)$$

$$auxDef_5^5 = -auxDef_2^4 + auxDef_3^4 \quad (B.3e6)$$

$$auxDef_6^5 = auxDef_{14}^4 + auxDef_{15}^4 \quad (B.3e7)$$

$$auxDef_7^5 = 2 \cdot auxDef_{13}^4 \quad (B.3e8)$$

$$auxDef_8^5 = auxDef_{17}^4 \cdot M_m \quad (B.3e9)$$

$$auxDef_9^5 = auxDef_3^1 + auxDef_{18}^4 \quad (B.3e10)$$

$$auxDef_{10}^5 = 2 \cdot auxDef_{16}^4 \quad (B.3e11)$$

$$auxDef_{11}^5 = auxDef_0^2 \cdot auxDef_{19}^4. \quad (B.3e12)$$

$$auxDef_0^6 = auxDef_1^5 + auxDef_2^5 \quad (B.3f1)$$

$$auxDef_1^6 = auxDef_4^5 \cdot Avn \quad (B.3f2)$$

$$auxDef_2^6 = 2 \cdot auxDef_8^5 \quad (B.3f3)$$

$$auxDef_3^6 = 2 \cdot auxDef_9^5 \quad (B.3f4)$$

$$auxDef_4^6 = auxDef_{10}^5 + auxDef_{11}^5. \quad (B.3f5)$$

$$auxDef_0^7 = -auxDef_5^4 + auxDef_0^6 \quad (B.3g1)$$

$$auxDef_1^7 = auxDef_7^2 + auxDef_1^6 \quad (B.3g2)$$

$$auxDef_2^7 = auxDef_{20}^3 + auxDef_2^6. \quad (B.3g3)$$

$$auxDef_0^8 = auxDef_0^5 \cdot auxDef_0^7 \quad (B.3h1)$$

$$auxDef_1^8 = auxDef_3^6 + auxDef_2^7. \quad (B.3h2)$$

Donde se utilizan las definiciones de las secciones 3.1, 3.2.2 y 3.3.2.

Luego, las expresiones resultantes para las aceleraciones angulares en la etapa de transición del modelo 2D con rodillas son:

$$\ddot{\theta}(t) = -auxF_0^{13}(t). \quad (B.4a)$$

## B. Ecuaciones complejas

---

$$\ddot{\phi}(t) = auxF_0^{15}(t). \quad (B.4b)$$

$$\ddot{\gamma}(t) = -auxF_1^{14}(t) - auxF_0^{15}(t) \cdot auxF_3^5(t) + auxF_2^7(t). \quad (B.4c)$$

Donde, además de las variables dependientes exclusivamente de los parámetros (B.3), se utilizan las siguientes definiciones de variables auxiliares dependientes de las posiciones y velocidades angulares y de los parámetros:

$$auxF_0^1(t) = -\dot{\phi}(t) + \dot{\theta}(t) \quad (B.5a1)$$

$$auxF_1^1(t) = 2 \cdot \dot{\theta}(t) \quad (B.5a2)$$

$$auxF_2^1(t) = 2 \cdot \dot{\phi}(t) \quad (B.5a3)$$

$$auxF_3^1(t) = auxDef_{16}^1 \cdot \dot{\phi}(t) \quad (B.5a4)$$

$$auxF_4^1(t) = auxDef_{10}^1 \cdot \dot{\gamma}(t) \quad (B.5a5)$$

$$auxF_5^1(t) = auxDef_{32}^1 \cdot \dot{\gamma}(t) \quad (B.5a6)$$

$$auxF_6^1(t) = M_c \cdot \dot{\gamma}(t)^2 \quad (B.5a7)$$

$$auxF_7^1(t) = auxDef_1^7 \cdot \text{Cos}(\theta(t)) \quad (B.5a8)$$

$$auxF_8^1(t) = auxDef_4^1 \cdot \text{Sin}(\theta(t)) \quad (B.5a9)$$

$$auxF_9^1(t) = auxDef_7^1 \cdot \text{Sin}(\theta(t)). \quad (B.5a10)$$

$$auxF_{10}^1(t) = auxDef_{10}^1 \cdot \text{Sin}(\theta(t)) \quad (B.5a11)$$

$$auxF_{11}^1(t) = auxDef_{12}^1 \cdot \text{Sin}(\theta(t)) \quad (B.5a12)$$

$$auxF_{12}^1(t) = auxDef_{13}^1 \cdot \text{Sin}(\theta(t)) \quad (B.5a13)$$

$$auxF_{13}^1(t) = auxDef_{11}^2 \cdot \text{Sin}(\theta(t)) \quad (B.5a14)$$

$$auxF_{14}^1(t) = auxDef_{12}^2 \cdot \text{Sin}(\theta(t)) \quad (B.5a15)$$

$$auxF_{15}^1(t) = auxDef_{13}^2 \cdot \text{Sin}(\theta(t)) \quad (B.5a16)$$

$$auxF_{16}^1(t) = auxDef_{14}^2 \cdot \text{Sin}(\theta(t)) \quad (B.5a17)$$

$$auxF_{17}^1(t) = auxDef_{15}^2 \cdot \text{Sin}(\theta(t)) \quad (B.5a18)$$

$$auxF_{18}^1(t) = auxDef_8^1 \cdot \text{Cos}(\phi(t)) \quad (B.5a19)$$

$$auxF_{19}^1(t) = auxDef_{16}^1 \cdot \text{Cos}(\phi(t)). \quad (B.5a20)$$

$$auxF_{20}^1(t) = auxDef_{40}^2 \cdot \text{Cos}(\phi(t)) \quad (\text{B.5a21})$$

$$auxF_{21}^1(t) = \text{Sin}(\phi(t)) \cdot \dot{\theta}(t)^2 \quad (\text{B.5a22})$$

$$auxF_{22}^1(t) = auxDef_{16}^1 \cdot \text{Sin}(\phi(t)) \quad (\text{B.5a23})$$

$$auxF_{23}^1(t) = auxDef_{34}^2 \cdot \text{Sin}(\phi(t)) \quad (\text{B.5a24})$$

$$auxF_{24}^1(t) = auxDef_{40}^2 \cdot \text{Sin}(\phi(t)) \quad (\text{B.5a25})$$

$$auxF_{25}^1(t) = \text{Cos}(\gamma(t)) \cdot CM_{y_c} \quad (\text{B.5a26})$$

$$auxF_{26}^1(t) = \text{Cos}(\gamma(t)) \cdot CM_{x_c} \quad (\text{B.5a27})$$

$$auxF_{27}^1(t) = auxDef_4^1 \cdot \text{Cos}(\gamma(t)) \quad (\text{B.5a28})$$

$$auxF_{28}^1(t) = auxDef_5^1 \cdot \text{Cos}(\gamma(t)) \quad (\text{B.5a29})$$

$$auxF_{29}^1(t) = auxDef_{25}^1 \cdot \text{Cos}(\gamma(t)). \quad (\text{B.5a30})$$

$$auxF_{30}^1(t) = auxDef_{26}^1 \cdot \text{Cos}(\gamma(t)) \quad (\text{B.5a31})$$

$$auxF_{31}^1(t) = auxDef_{35}^2 \cdot \text{Cos}(\gamma(t)) \quad (\text{B.5a32})$$

$$auxF_{32}^1(t) = CM_{x_c} \cdot \text{Sin}(\gamma(t)) \quad (\text{B.5a33})$$

$$auxF_{33}^1(t) = CM_{y_c} \cdot \text{Sin}(\gamma(t)) \quad (\text{B.5a34})$$

$$auxF_{34}^1(t) = auxDef_4^1 \cdot \text{Sin}(\gamma(t)) \quad (\text{B.5a35})$$

$$auxF_{35}^1(t) = auxDef_5^1 \cdot \text{Sin}(\gamma(t)) \quad (\text{B.5a36})$$

$$auxF_{36}^1(t) = auxDef_{25}^1 \cdot \text{Sin}(\gamma(t)) \quad (\text{B.5a37})$$

$$auxF_{37}^1(t) = auxDef_{26}^1 \cdot \text{Sin}(\gamma(t)) \quad (\text{B.5a38})$$

$$auxF_{38}^1(t) = auxDef_{36}^2 \cdot \text{Sin}(\gamma(t)) \quad (\text{B.5a39})$$

$$auxF_{39}^1(t) = auxDef_{38}^2 \cdot \text{Cos}(2 \cdot \gamma(t)). \quad (\text{B.5a40})$$

$$auxF_{40}^1(t) = auxDef_{39}^2 \cdot \text{Cos}(2 \cdot \gamma(t)) \quad (\text{B.5a41})$$

$$auxF_{41}^1(t) = auxDef_{38}^2 \cdot \text{Sin}(2 \cdot \gamma(t)) \quad (\text{B.5a42})$$

$$auxF_{42}^1(t) = auxDef_{39}^2 \cdot \text{Sin}(2 \cdot \gamma(t)) \quad (\text{B.5a43})$$

$$auxF_{43}^1(t) = auxDef_{12}^4 \cdot \text{Cos}(\phi(t) - \theta(t)) \quad (\text{B.5a44})$$

$$auxF_{44}^1(t) = auxDef_7^1 \cdot \text{Sin}(\phi(t) - \theta(t)) \quad (\text{B.5a45})$$

$$auxF_{45}^1(t) = auxDef_{10}^1 \cdot \text{Sin}(\phi(t) - \theta(t)) \quad (\text{B.5a46})$$

$$auxF_{46}^1(t) = auxDef_{15}^2 \cdot \text{Sin}(\phi(t) - \theta(t)) \quad (\text{B.5a47})$$

$$auxF_{47}^1(t) = auxDef_{27}^3 \cdot \text{Sin}(\phi(t) - \theta(t)) \quad (\text{B.5a48})$$

$$auxF_{48}^1(t) = auxDef_5^1 \cdot \text{Cos}(\gamma(t) + \phi(t)) \quad (\text{B.5a49})$$

$$auxF_{49}^1(t) = auxDef_4^2 \cdot \text{Cos}(\gamma(t) + \phi(t)). \quad (\text{B.5a50})$$

$$auxF_{50}^1(t) = auxDef_5^2 \cdot \text{Cos}(\gamma(t) + \phi(t)) \quad (\text{B.5a51})$$

$$auxF_{51}^1(t) = auxDef_4^1 \cdot \text{Sin}(\gamma(t) + \phi(t)) \quad (\text{B.5a52})$$

$$auxF_{52}^1(t) = auxDef_4^2 \cdot \text{Sin}(\gamma(t) + \phi(t)) \quad (\text{B.5a53})$$

$$auxF_{53}^1(t) = auxDef_5^2 \cdot \text{Sin}(\gamma(t) + \phi(t)) \quad (\text{B.5a54})$$

$$auxF_{54}^1(t) = auxDef_5^1 \cdot \text{Cos}(\gamma(t) + \phi(t) - \theta(t)) \quad (\text{B.5a55})$$

$$auxF_{55}^1(t) = auxDef_{30}^2 \cdot \text{Cos}(\gamma(t) + \phi(t) - \theta(t)) \quad (\text{B.5a56})$$

$$auxF_{56}^1(t) = auxDef_{31}^2 \cdot \text{Cos}(\gamma(t) + \phi(t) - \theta(t)) \quad (\text{B.5a57})$$

$$auxF_{57}^1(t) = auxDef_{25}^3 \cdot \text{Cos}(\gamma(t) + \phi(t) - \theta(t)) \quad (\text{B.5a58})$$

$$auxF_{58}^1(t) = auxDef_{33}^2 \cdot \text{Sin}(\gamma(t) + \phi(t) - \theta(t)) \quad (\text{B.5a59})$$

$$auxF_{59}^1(t) = auxDef_{26}^3 \cdot \text{Sin}(\gamma(t) + \phi(t) - \theta(t)). \quad (\text{B.5a60})$$

$$auxF_0^2(t) = auxF_1^1(t) - \dot{\phi}(t) \quad (B.5b1)$$

$$auxF_1^2(t) = auxF_{19}^1(t) \cdot \dot{\theta}(t)^2 \quad (B.5b2)$$

$$auxF_2^2(t) = -auxF_1^1(t) + auxF_2^1(t) \quad (B.5b3)$$

$$auxF_3^2(t) = auxF_{25}^1(t) + auxF_{32}^1(t) \quad (B.5b4)$$

$$auxF_4^2(t) = auxF_{40}^1(t) + auxF_{41}^1(t) \quad (B.5b5)$$

$$auxF_5^2(t) = auxF_{39}^1(t) - auxF_{42}^1(t) \quad (B.5b6)$$

$$auxF_6^2(t) = auxDef_{16}^1 \cdot auxF_{21}^1(t) \quad (B.5b7)$$

$$auxF_7^2(t) = auxF_{26}^1(t) - auxF_{33}^1(t) \quad (B.5b8)$$

$$auxF_8^2(t) = auxF_{55}^1(t) - auxF_{58}^1(t) \quad (B.5b9)$$

$$auxF_9^2(t) = auxF_0^1(t) \cdot auxF_0^1(t) \quad (B.5b10)$$

$$auxF_{10}^2(t) = auxF_0^1(t) \cdot auxF_5^1(t) \quad (B.5b11)$$

$$auxF_{11}^2(t) = auxF_{31}^1(t) + auxF_{38}^1(t) \quad (B.5b12)$$

$$auxF_{12}^2(t) = auxF_{28}^1(t) - auxF_{34}^1(t) \quad (B.5b13)$$

$$auxF_{13}^2(t) = auxF_{27}^1(t) + auxF_{35}^1(t) \quad (B.5b14)$$

$$auxF_{14}^2(t) = auxF_{43}^1(t) + auxF_{59}^1(t) \quad (B.5b15)$$

$$auxF_{15}^2(t) = auxF_{47}^1(t) - auxF_{57}^1(t) \quad (B.5b16)$$

$$auxF_{16}^2(t) = auxF_{36}^1(t) + auxF_{49}^1(t) \quad (B.5b17)$$

$$auxF_{17}^2(t) = auxF_{30}^1(t) + auxF_{53}^1(t) \quad (B.5b18)$$

$$auxF_{18}^2(t) = auxF_{18}^1(t) + auxF_{48}^1(t) \quad (B.5b19)$$

$$auxF_{19}^2(t) = auxF_{23}^1(t) + auxF_{51}^1(t) \quad (B.5b20)$$

$$auxF_{20}^2(t) = auxF_{29}^1(t) + auxF_{37}^1(t) \quad (B.5b21)$$

$$auxF_{21}^2(t) = auxF_{50}^1(t) + auxF_{52}^1(t) \quad (B.5b22)$$

$$auxF_{22}^2(t) = auxF_{10}^1(t) + auxF_{11}^1(t) \quad (B.5b23)$$

$$auxF_{23}^2(t) = auxF_{12}^1(t) + auxF_{13}^1(t) \quad (B.5b24)$$

$$auxF_{24}^2(t) = auxF_{14}^1(t) + auxF_{15}^1(t) \quad (B.5b25)$$

$$auxF_{25}^2(t) = auxF_{16}^1(t) + auxF_{17}^1(t) \quad (B.5b26)$$

$$auxF_{26}^2(t) = auxF_{44}^1(t) + auxF_{45}^1(t) \quad (B.5b27)$$

$$auxF_{27}^2(t) = auxF_{46}^1(t) + auxF_{56}^1(t) \quad (B.5b28)$$

$$auxF_{28}^2(t) = auxF_{54}^1(t) + auxF_7^1(t) \quad (B.5b29)$$

$$auxF_{29}^2(t) = auxF_8^1(t) + auxF_9^1(t) . \quad (B.5b30)$$

$$auxF_0^3(t) = auxF_2^2(t) + \dot{\gamma}(t) \quad (B.5c1)$$

$$auxF_1^3(t) = auxF_3^2(t) \cdot auxF_3^2(t) \quad (B.5c2)$$

$$auxF_2^3(t) = auxDef_{37}^2 \cdot auxF_4^2(t) \quad (B.5c3)$$

$$auxF_3^3(t) = auxDef_{37}^2 \cdot auxF_5^2(t) \quad (B.5c4)$$

$$auxF_4^3(t) = auxF_3^2(t) \cdot auxF_6^2(t) \quad (B.5c5)$$

$$auxF_5^3(t) = auxF_1^2(t) \cdot auxF_7^2(t) \quad (B.5c6)$$

$$auxF_6^3(t) = auxF_8^2(t) \cdot \omega^2 \quad (B.5c7)$$

$$auxF_7^3(t) = auxDef_2^2 \cdot auxF_5^2(t) \quad (B.5c8)$$

$$auxF_8^3(t) = auxDef_{41}^2 \cdot auxF_3^2(t) \quad (B.5c9)$$

$$auxF_9^3(t) = auxDef_{10}^1 \cdot auxF_3^2(t) \quad (B.5c10)$$

$$auxF_{10}^3(t) = auxF_7^2(t) \cdot auxF_9^2(t) \quad (B.5c11)$$

$$auxF_{11}^3(t) = auxDef_{21}^3 + auxF_{11}^2(t) \quad (B.5c12)$$

$$auxF_{12}^3(t) = auxDef_8^1 + auxF_{12}^2(t) \quad (B.5c13)$$

$$auxF_{13}^3(t) = auxDef_{34}^2 + auxF_{13}^2(t) \quad (B.5c14)$$

$$auxF_{14}^3(t) = auxF_4^1(t) \cdot auxF_7^2(t) \quad (B.5c15)$$

$$auxF_{15}^3(t) = auxF_{14}^2(t) + auxF_{15}^2(t) \quad (B.5c16)$$

$$auxF_{16}^3(t) = auxF_{16}^2(t) - auxF_{17}^2(t) \quad (B.5c17)$$

$$auxF_{17}^3(t) = -auxF_{18}^2(t) + auxF_{19}^2(t) \quad (B.5c18)$$

$$auxF_{18}^3(t) = auxF_{20}^2(t) - auxF_{21}^2(t) \quad (B.5c19)$$

$$auxF_{19}^3(t) = auxF_{14}^2(t) + auxF_{22}^2(t) \quad (B.5c20)$$

$$auxF_{20}^3(t) = auxF_{23}^2(t) + auxF_{24}^2(t) \quad (B.5c21)$$

$$auxF_{21}^3(t) = auxF_{26}^2(t) + auxF_{27}^2(t) \quad (B.5c22)$$

$$auxF_{22}^3(t) = auxF_{28}^2(t) + auxF_{29}^2(t) \quad (B.5c23)$$

$$auxF_{23}^3(t) = auxF_3^1(t) \cdot auxF_0^2(t) . \quad (B.5c24)$$

$$auxF_0^4(t) = auxDef_{28}^3 \cdot auxF_1^3(t) \quad (B.5d1)$$

$$auxF_1^4(t) = auxDef_6^5 + auxF_3^3(t) \quad (B.5d2)$$

$$auxF_2^4(t) = -auxDef_7^5 + auxF_2^3(t) \quad (B.5d3)$$

$$auxF_3^4(t) = auxDef_2^2 \cdot auxF_1^3(t) \quad (B.5d4)$$

$$auxF_4^4(t) = auxDef_{23}^3 + auxF_9^3(t) \quad (B.5d5)$$

$$auxF_5^4(t) = auxF_{10}^3(t) \cdot L_m \quad (B.5d6)$$

$$auxF_6^4(t) = auxF_4^3(t) - auxF_5^3(t) \quad (B.5d7)$$

$$auxF_7^4(t) = auxF_1^2(t) \cdot auxF_{12}^3(t) \quad (B.5d8)$$

$$auxF_8^4(t) = auxF_6^2(t) \cdot auxF_{13}^3(t) \quad (B.5d9)$$

$$auxF_9^4(t) = auxF_0^3(t) \cdot auxF_{14}^3(t) \quad (B.5d10)$$

$$auxF_{10}^4(t) = auxF_{15}^3(t) \cdot \omega^2 \quad (B.5d11)$$

$$auxF_{11}^4(t) = auxF_6^1(t) \cdot auxF_{16}^3(t) \quad (B.5d12)$$

$$auxF_{12}^4(t) = auxF_{10}^2(t) \cdot auxF_{16}^3(t) \quad (B.5d13)$$

$$auxF_{13}^4(t) = auxF_{18}^3(t) \cdot M_c \quad (B.5d14)$$

$$auxF_{14}^4(t) = auxF_{24}^1(t) \cdot auxF_{12}^3(t) \quad (B.5d15)$$

$$auxF_{15}^4(t) = auxF_{20}^1(t) \cdot auxF_{13}^3(t) \quad (B.5d16)$$

$$auxF_{16}^4(t) = auxF_{19}^3(t) + auxF_{20}^3(t) \quad (B.5d17)$$

$$auxF_{17}^4(t) = -auxF_{21}^3(t) + auxF_{22}^3(t) \quad (B.5d18)$$

$$auxF_{18}^4(t) = auxF_{17}^3(t) \cdot auxF_{23}^3(t) \quad (B.5d19)$$

$$auxF_{19}^4(t) = auxDef_4^6 + auxF_7^3(t) \quad (B.5d20)$$

$$auxF_{20}^4(t) = auxDef_1^8 + auxF_8^3(t) . \quad (B.5d21)$$

$$auxF_0^5(t) = auxF_{19}^1(t) \cdot auxF_1^4(t) \quad (B.5e1)$$

$$auxF_1^5(t) = auxF_{22}^1(t) \cdot auxF_2^4(t) \quad (B.5e2)$$

$$auxF_2^5(t) = -auxDef_{11}^4 + auxF_3^4(t) \quad (B.5e3)$$

$$auxF_3^5(t) = \frac{auxF_4^4(t)}{auxDef_{23}^3} \quad (B.5e4)$$

$$auxF_4^5(t) = auxF_6^3(t) + auxF_5^4(t) \quad (B.5e5)$$

$$auxF_5^5(t) = auxDef_{21}^3 + auxF_{13}^4(t) \quad (B.5e6)$$

$$auxF_6^5(t) = auxDef_{23}^3 + auxF_{13}^4(t) \quad (B.5e7)$$

$$auxF_7^5(t) = -auxF_{16}^4(t) + auxF_{17}^4(t) \quad (B.5e8)$$

$$auxF_8^5(t) = auxF_{11}^4(t) - auxF_{12}^4(t) \quad (B.5e9)$$

$$auxF_9^5(t) = auxF_7^4(t) - auxF_8^4(t) \quad (B.5e10)$$

$$auxF_{10}^5(t) = auxF_{10}^4(t) + auxF_9^4(t) \quad (B.5e11)$$

$$auxF_{11}^5(t) = auxF_{14}^4(t) + auxF_{15}^4(t) . \quad (B.5e12)$$

$$auxF_0^6(t) = auxF_6^4(t) + auxF_4^5(t) \quad (B.5f1)$$

$$auxF_1^6(t) = -auxF_0^5(t) + auxF_1^5(t) \quad (B.5f2)$$

$$auxF_2^6(t) = auxF_5^5(t) \cdot auxF_5^5(t) \quad (B.5f3)$$

$$auxF_3^6(t) = auxF_{25}^2(t) + auxF_7^5(t) \quad (B.5f4)$$

$$auxF_4^6(t) = auxF_{10}^5(t) + auxF_9^5(t) \quad (B.5f5)$$

$$auxF_5^6(t) = auxF_{18}^4(t) + auxF_8^5(t) \quad (B.5f6)$$

$$auxF_6^6(t) = -auxF_{20}^4(t) + auxF_{11}^5(t) \quad (B.5f7)$$

$$auxF_7^6(t) = \frac{auxF_5^5(t)}{auxDef_{23}^3} . \quad (B.5f8)$$

$$auxF_0^7(t) = auxF_0^6(t) \cdot M_c \quad (B.5g1)$$

$$auxF_1^7(t) = -auxF_0^4(t) + auxF_1^6(t) \quad (B.5g2)$$

$$auxF_2^7(t) = auxDef_{20}^4 \cdot auxF_0^6(t) \quad (B.5g3)$$

$$auxF_3^7(t) = auxF_3^6(t) \cdot \omega^2 \quad (B.5g4)$$

$$auxF_4^7(t) = auxF_{19}^4(t) + auxF_1^6(t) \quad (B.5g5)$$

$$auxF_5^7(t) = auxDef_{23}^3 \cdot auxF_4^6(t) \quad (B.5g6)$$

$$auxF_6^7(t) = auxDef_{21}^3 \cdot auxF_6^6(t) . \quad (B.5g7)$$

$$auxF_0^8(t) = auxF_{11}^3(t) \cdot auxF_0^7(t) \quad (B.5h1)$$

$$auxF_1^8(t) = \frac{auxF_1^7(t)}{2} \quad (B.5h2)$$

$$auxF_2^8(t) = auxF_6^5(t) \cdot auxF_0^7(t) \quad (B.5h3)$$

$$auxF_3^8(t) = auxF_4^7(t) \cdot auxF_4^7(t) \quad (B.5h4)$$

$$auxF_4^8(t) = auxF_5^6(t) + auxF_3^7(t) \quad (B.5h5)$$

$$auxF_5^8(t) = auxF_2^6(t) + auxF_6^7(t) . \quad (B.5h6)$$

$$auxF_0^9(t) = auxDef_{11}^4 + auxF_1^8(t) \quad (B.5i1)$$

$$auxF_1^9(t) = \frac{auxF_3^8(t)}{4} \quad (B.5i2)$$

$$auxF_2^9(t) = auxF_5^7(t) + auxF_0^8(t) \quad (B.5i3)$$

$$auxF_3^9(t) = auxDef_{23}^3 \cdot auxF_4^8(t) \quad (B.5i4)$$

$$auxF_4^9(t) = auxF_2^5(t) \cdot auxF_5^8(t) . \quad (B.5i5)$$

$$auxF_0^{10}(t) = auxF_0^9(t) \cdot auxF_2^9(t) \quad (B.5j1)$$

$$auxF_1^{10}(t) = \frac{auxF_2^9(t)}{auxF_2^5(t)} \quad (B.5j2)$$

$$auxF_2^{10}(t) = auxF_2^8(t) - auxF_3^9(t) \quad (B.5j3)$$

$$auxF_3^{10}(t) = -auxF_1^9(t) + auxF_4^9(t) \quad (B.5j4)$$

$$auxF_4^{10}(t) = \frac{auxF_0^9(t)}{auxF_2^5(t)} . \quad (B.5j5)$$

$$auxF_0^{11}(t) = auxF_2^{10}(t) \cdot auxF_2^5(t) . \quad (B.5k1)$$

$$auxF_0^{12}(t) = auxF_0^{10}(t) + auxF_0^{11}(t) . \quad (B.5l1)$$

$$auxF_0^{13}(t) = \frac{auxF_0^{12}(t)}{auxF_3^{10}(t)} . \quad (B.5m1)$$

$$auxF_0^{14}(t) = auxF_4^{10}(t) \cdot auxF_0^{13}(t) \quad (B.5n1)$$

$$auxF_1^{14}(t) = auxF_0^{13}(t) \cdot auxF_7^6(t) . \quad (B.5n2)$$

$$auxF_0^{15}(t) = auxF_1^{10}(t) + auxF_0^{14}(t) . \quad (B.5ñ1)$$

Con el objetivo de presentar las expresiones para las velocidades angulares post-impacto de una forma compacta, se definen las siguientes variables auxiliares que sólo dependen de los parámetros del modelo con rodillas y utilizan las definiciones anteriores de las ecuaciones (B.3):

$$auxDefImp_0^1 = 2 \cdot CMx_c^2 \quad (B.6a1)$$

$$auxDefImp_1^1 = 2 \cdot CMy_c^2 \quad (B.6a2)$$

$$auxDefImp_2^1 = g^2 \cdot M \quad (B.6a3)$$

$$auxDefImp_3^1 = L_c^2 \cdot M_c \quad (B.6a4)$$

$$auxDefImp_4^1 = CMx_m^2 \cdot M_m \quad (B.6a5)$$

$$auxDefImp_5^1 = CMy_m^2 \cdot M_m \quad (B.6a6)$$

$$auxDefImp_6^1 = L_c^2 \cdot M_m \quad (B.6a7)$$

$$auxDefImp_7^1 = L_m^2 \cdot M_m \quad (B.6a8)$$

$$auxDefImp_8^1 = 2 \cdot M_m \quad (B.6a9)$$

$$auxDefImp_9^1 = 2 \cdot I_c . \quad (B.6a10)$$

$$auxDefImp_{10}^1 = 3 \cdot L_c \quad (B.6a11)$$

$$auxDefImp_{11}^1 = 3 \cdot L_m \quad (B.6a12)$$

$$auxDefImp_{12}^1 = 4 \cdot L_c \quad (B.6a13)$$

$$auxDefImp_{13}^1 = 4 \cdot L_m \quad (B.6a14)$$

$$auxDefImp_{14}^1 = 3 \cdot CMy_c \quad (B.6a15)$$

$$auxDefImp_{15}^1 = 2 \cdot L_m \quad (B.6a16)$$

$$auxDefImp_{16}^1 = 8 \cdot L_c \quad (B.6a17)$$

$$auxDefImp_{17}^1 = auxDef_7^1 \cdot L_m \quad (B.6a18)$$

$$auxDefImp_{18}^1 = auxDef_{23}^1 + L_m^2 \quad (B.6a19)$$

$$auxDefImp_{19}^1 = 2 \cdot auxDef_0^1 . \quad (B.6a20)$$

$$auxDefImp_{20}^1 = 2 \cdot auxDef_1^1 \quad (B.6a21)$$

$$auxDefImp_{21}^1 = auxDef_6^1 \cdot L_m \quad (B.6a22)$$

$$auxDefImp_{22}^1 = 4 \cdot auxDef_0^1 \quad (B.6a23)$$

$$auxDefImp_{23}^1 = 4 \cdot auxDef_1^1 \quad (B.6a24)$$

$$auxDefImp_{24}^1 = 2 \cdot auxDef_{24}^1 \quad (B.6a25)$$

$$auxDefImp_{25}^1 = 4 \cdot auxDef_4^1 \quad (B.6a26)$$

$$auxDefImp_{26}^1 = 4 \cdot auxDef_7^1 \quad (B.6a27)$$

$$auxDefImp_{27}^1 = auxDef_{34}^2 \cdot L_c \quad (B.6a28)$$

$$auxDefImp_{28}^1 = auxDef_{10}^1 + auxDef_{17}^2 \quad (B.6a29)$$

$$auxDefImp_{29}^1 = auxDef_{13}^2 \cdot L_c \quad (B.6a30)$$

$$auxDefImp_{30}^1 = 3 \cdot auxDef_{35}^2 \quad (B.6a31)$$

$$auxDefImp_{31}^1 = 4 \cdot auxDef_{35}^2 \quad (B.6a32)$$

$$auxDefImp_{32}^1 = auxDef_{40}^2 \cdot auxDef_7^2 \quad (B.6a33)$$

$$auxDefImp_{33}^1 = 3 \cdot auxDef_{25}^1 \quad (B.6a34)$$

$$auxDefImp_{34}^1 = auxDef_{16}^1 \cdot auxDef_7^2 \quad (B.6a35)$$

$$auxDefImp_{35}^1 = 3 \cdot auxDef_{24}^1 \quad (B.6a36)$$

$$auxDefImp_{36}^1 = 3 \cdot auxDef_5^1 \quad (B.6a37)$$

$$auxDefImp_{37}^1 = 4 \cdot auxDef_{21}^1 \quad (B.6a38)$$

$$auxDefImp_{38}^1 = 4 \cdot auxDef_{22}^1 \quad (B.6a39)$$

$$auxDefImp_{39}^1 = 4 \cdot auxDef_{24}^1 \quad (B.6a40)$$

$$auxDefImp_{40}^1 = auxDef_3^1 + auxDef_{31}^3 \quad (B.6a41)$$

$$auxDefImp_{41}^1 = -auxDef_{34}^1 + L_m^2 \quad (B.6a42)$$

$$auxDefImp_{42}^1 = auxDef_{32}^1 + M_m \quad (B.6a43)$$

$$auxDefImp_{43}^1 = auxDef_{13}^1 + auxDef_{13}^2 \quad (B.6a44)$$

$$auxDefImp_{44}^1 = CM_{y_c} - L_c \quad (B.6a45)$$

$$auxDefImp_{45}^1 = CM_{y_m} - L_m \quad (B.6a46)$$

$$auxDefImp_{46}^1 = auxDef_3^1 + auxDef_{35}^2 \quad (B.6a47)$$

$$auxDefImp_{47}^1 = auxDef_{24}^2 \cdot L_m \quad (B.6a48)$$

$$auxDefImp_{48}^1 = -auxDef_{24}^2 - auxDef_{25}^2 \quad (B.6a49)$$

$$auxDefImp_{49}^1 = auxDef_4^1 \cdot L_c \quad (B.6a50)$$

$$auxDefImp_{50}^1 = auxDef_7^1 \cdot L_c \quad (B.6a51)$$

$$auxDefImp_{51}^1 = auxDef_{14}^1 \cdot CM_{y_c} \quad (B.6a52)$$

$$auxDefImp_0^2 = \frac{auxDefImp_2^1}{\omega^4} \quad (B.6b1)$$

$$auxDefImp_1^2 = auxDef_{32}^1 \cdot auxDefImp_{18}^1 \quad (B.6b2)$$

$$auxDefImp_2^2 = auxDef_4^1 \cdot auxDefImp_{10}^1 \quad (B.6b3)$$

$$auxDefImp_3^2 = auxDef_7^1 \cdot auxDefImp_{10}^1 \quad (B.6b4)$$

$$auxDefImp_4^2 = auxDef_7^1 \cdot auxDefImp_{11}^1 \quad (B.6b5)$$

$$auxDefImp_5^2 = 2 \cdot auxDefImp_4^1 \quad (B.6b6)$$

$$auxDefImp_6^2 = 2 \cdot auxDefImp_5^1 \quad (B.6b7)$$

$$auxDefImp_7^2 = auxDef_4^1 \cdot auxDefImp_{12}^1 \quad (B.6b8)$$

$$auxDefImp_8^2 = auxDef_7^1 \cdot auxDefImp_{12}^1 \quad (B.6b9)$$

$$auxDefImp_9^2 = auxDef_7^1 \cdot auxDefImp_{13}^1. \quad (B.6b10)$$

$$auxDefImp_{10}^2 = 4 \cdot auxDefImp_4^1 \quad (B.6b11)$$

$$auxDefImp_{11}^2 = 4 \cdot auxDefImp_5^1 \quad (B.6b12)$$

$$auxDefImp_{12}^2 = auxDef_{16}^1 \cdot auxDefImp_{28}^1 \quad (B.6b13)$$

$$auxDefImp_{13}^2 = auxDefImp_{14}^1 + auxDefImp_{15}^1 \quad (B.6b14)$$

$$auxDefImp_{14}^2 = auxDef_6^1 \cdot auxDefImp_{13}^1 \quad (B.6b15)$$

$$auxDefImp_{15}^2 = auxDef_{12}^1 \cdot auxDefImp_{15}^1 \quad (B.6b16)$$

$$auxDefImp_{16}^2 = auxDef_9^1 \cdot auxDefImp_{16}^1 \quad (B.6b17)$$

$$auxDefImp_{17}^2 = 4 \cdot auxDefImp_3^1 \quad (B.6b18)$$

$$auxDefImp_{18}^2 = auxDefImp_0^1 + auxDefImp_1^1 \quad (B.6b19)$$

$$auxDefImp_{19}^2 = auxDefImp_{33}^1 + L_m^2. \quad (B.6b20)$$

$$auxDefImp_{20}^2 = auxDefImp_{17}^1 + auxDefImp_{27}^1 \quad (B.6b21)$$

$$auxDefImp_{21}^2 = auxDefImp_{30}^1 + auxDefImp_{40}^1 \quad (B.6b22)$$

$$auxDefImp_{22}^2 = auxDefImp_{42}^1 + auxDefImp_8^1 \quad (B.6b23)$$

$$auxDefImp_{23}^2 = auxDefImp_{25}^1 + auxDefImp_{26}^1 \quad (B.6b24)$$

$$auxDefImp_{24}^2 = -auxDef_{41}^2 + auxDefImp_{43}^1 \quad (B.6b25)$$

$$auxDefImp_{25}^2 = -auxDefImp_{27}^1 + auxDefImp_{46}^1 \quad (B.6b26)$$

$$auxDefImp_{26}^2 = auxDefImp_{44}^1 \cdot CM_{y_c} \quad (B.6b27)$$

$$auxDefImp_{27}^2 = auxDefImp_{45}^1 \cdot CM_{y_m} \quad (B.6b28)$$

$$auxDefImp_{28}^2 = auxDefImp_{18}^1 \cdot M_c \quad (B.6b29)$$

$$auxDefImp_{29}^2 = auxDef_2^3 + auxDefImp_{47}^1. \quad (B.6b30)$$

## B. Ecuaciones complejas

$$auxDefImp_{30}^2 = auxDefImp_{43}^1 + auxDefImp_{48}^1 \quad (B.6b31)$$

$$auxDefImp_{31}^2 = auxDef_3^2 - auxDefImp_{17}^1 \quad (B.6b32)$$

$$auxDefImp_{32}^2 = -auxDefImp_{21}^1 + auxDefImp_4^1 \quad (B.6b33)$$

$$auxDefImp_{33}^2 = auxDefImp_{46}^1 - auxDefImp_{49}^1 \quad (B.6b34)$$

$$auxDefImp_{34}^2 = auxDefImp_5^1 - auxDefImp_{50}^1 \quad (B.6b35)$$

$$auxDefImp_{35}^2 = auxDef_{40}^2 \cdot auxDefImp_{28}^1 \quad (B.6b36)$$

$$auxDefImp_{36}^2 = auxDefImp_{51}^1 + CMx_c^2. \quad (B.6b37)$$

$$auxDefImp_0^3 = auxDef_{16}^1 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c1)$$

$$auxDefImp_1^3 = 4 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c2)$$

$$auxDefImp_2^3 = auxDef_{33}^1 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c3)$$

$$auxDefImp_3^3 = auxDefImp_{22}^1 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c4)$$

$$auxDefImp_4^3 = auxDefImp_{23}^1 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c5)$$

$$auxDefImp_5^3 = auxDefImp_{29}^1 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c6)$$

$$auxDefImp_6^3 = auxDefImp_6^1 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c7)$$

$$auxDefImp_7^3 = auxDefImp_7^1 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c8)$$

$$auxDefImp_8^3 = auxDefImp_9^1 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c9)$$

$$auxDefImp_9^3 = auxDefImp_0^2 \cdot auxDefImp_{10}^2. \quad (B.6c10)$$

$$auxDefImp_{10}^3 = auxDefImp_0^2 \cdot auxDefImp_{11}^2 \quad (B.6c11)$$

$$auxDefImp_{11}^3 = auxDefImp_0^2 \cdot auxDefImp_7^2 \quad (B.6c12)$$

$$auxDefImp_{12}^3 = auxDefImp_0^2 \cdot auxDefImp_8^2 \quad (B.6c13)$$

$$auxDefImp_{13}^3 = auxDefImp_0^2 \cdot auxDefImp_9^2 \quad (B.6c14)$$

$$auxDefImp_{14}^3 = auxDefImp_{31}^1 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c15)$$

$$auxDefImp_{15}^3 = auxDef_{21}^1 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c16)$$

$$auxDefImp_{16}^3 = auxDef_{22}^1 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c17)$$

$$auxDefImp_{17}^3 = auxDef_{18}^3 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c18)$$

$$auxDefImp_{18}^3 = auxDefImp_{19}^1 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c19)$$

$$auxDefImp_{19}^3 = auxDefImp_{20}^1 \cdot auxDefImp_0^2. \quad (B.6c20)$$

$$auxDefImp_{20}^3 = auxDefImp_{33}^1 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c21)$$

$$auxDefImp_{21}^3 = auxDefImp_0^2 \cdot auxDefImp_5^2 \quad (B.6c22)$$

$$auxDefImp_{22}^3 = auxDefImp_0^2 \cdot auxDefImp_6^2 \quad (B.6c23)$$

$$auxDefImp_{23}^3 = auxDefImp_0^2 \cdot I_c \quad (B.6c24)$$

$$auxDefImp_{24}^3 = auxDefImp_0^2 \cdot I_m \quad (B.6c25)$$

$$auxDefImp_{25}^3 = auxDefImp_0^2 \cdot auxDefImp_{12}^2 \quad (B.6c26)$$

$$auxDefImp_{26}^3 = auxDefImp_{34}^1 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c27)$$

$$auxDefImp_{27}^3 = auxDefImp_{13}^2 \cdot M_c \quad (B.6c28)$$

$$auxDefImp_{28}^3 = auxDefImp_{37}^1 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c29)$$

$$auxDefImp_{29}^3 = auxDefImp_{38}^1 \cdot auxDefImp_0^2. \quad (B.6c30)$$

$$auxDefImp_{30}^3 = auxDefImp_{39}^1 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c31)$$

$$auxDefImp_{31}^3 = auxDefImp_0^2 \cdot auxDefImp_{14}^2 \quad (B.6c32)$$

$$auxDefImp_{32}^3 = auxDefImp_0^2 \cdot auxDefImp_{15}^2 \quad (B.6c33)$$

$$auxDefImp_{33}^3 = auxDefImp_0^2 \cdot auxDefImp_{16}^2 \quad (B.6c34)$$

$$auxDefImp_{34}^3 = auxDefImp_0^2 \cdot auxDefImp_{17}^2 \quad (B.6c35)$$

$$auxDefImp_{35}^3 = auxDefImp_{35}^1 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c36)$$

$$auxDefImp_{36}^3 = auxDefImp_{31}^1 + auxDefImp_1^2 \quad (B.6c37)$$

$$auxDefImp_{37}^3 = auxDefImp_{41}^1 + auxDefImp_{18}^2 \quad (B.6c38)$$

$$auxDefImp_{38}^3 = auxDefImp_{18}^2 + auxDefImp_{19}^2 \quad (B.6c39)$$

$$auxDefImp_{39}^3 = -auxDefImp_{20}^2 + auxDefImp_{21}^2. \quad (B.6c40)$$

$$auxDefImp_{40}^3 = auxDefImp_{22}^2 \cdot L_c \quad (B.6c41)$$

$$auxDefImp_{41}^3 = -auxDefImp_{23}^2 + auxDefImp_{24}^2 \quad (B.6c42)$$

$$auxDefImp_{42}^3 = auxDefImp_{26}^2 + CMx_c^2 \quad (B.6c43)$$

$$auxDefImp_{43}^3 = auxDefImp_{27}^2 + CMx_m^2 \quad (B.6c44)$$

$$auxDefImp_{44}^3 = auxDefImp_{28}^2 + auxDefImp_{29}^2 \quad (B.6c45)$$

$$auxDefImp_{45}^3 = auxDefImp_{31}^2 + auxDefImp_{32}^2 \quad (B.6c46)$$

$$auxDefImp_{46}^3 = auxDefImp_{33}^2 + auxDefImp_{34}^2 \quad (B.6c47)$$

$$auxDefImp_{47}^3 = -auxDef_{22}^2 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c48)$$

$$auxDefImp_{48}^3 = -auxDef_{23}^2 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c49)$$

$$auxDefImp_{49}^3 = -auxDef_{26}^2 \cdot auxDefImp_0^2. \quad (B.6c50)$$

$$auxDefImp_{50}^3 = auxDef_{15}^3 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c51)$$

$$auxDefImp_{51}^3 = auxDef_{16}^3 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c52)$$

$$auxDefImp_{52}^3 = -auxDef_{17}^3 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c53)$$

$$auxDefImp_{53}^3 = auxDef_{19}^3 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c54)$$

$$auxDefImp_{54}^3 = -auxDefImp_{24}^1 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c55)$$

$$auxDefImp_{55}^3 = -auxDefImp_{47}^1 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c56)$$

$$auxDefImp_{56}^3 = auxDefImp_0^2 \cdot auxDefImp_{35}^2 \quad (B.6c57)$$

$$auxDefImp_{57}^3 = auxDefImp_{32}^1 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c58)$$

$$auxDefImp_{58}^3 = auxDef_0^1 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c59)$$

$$auxDefImp_{59}^3 = auxDef_1^1 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c60)$$

$$auxDefImp_{60}^3 = auxDef_{24}^1 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c61)$$

$$auxDefImp_{61}^3 = auxDefImp_4^1 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c62)$$

$$auxDefImp_{62}^3 = auxDefImp_5^1 \cdot auxDefImp_0^2 \quad (B.6c63)$$

$$auxDefImp_{63}^3 = auxDefImp_{36}^2 \cdot M_c. \quad (B.6c64)$$

$$auxDefImp_0^4 = auxDefImp_{26}^1 \cdot auxDefImp_0^3 \quad (B.6d1)$$

$$auxDefImp_1^4 = auxDef_7^2 \cdot auxDefImp_0^3 \quad (B.6d2)$$

$$auxDefImp_2^4 = auxDef_{21}^1 \cdot auxDefImp_1^3 \quad (B.6d3)$$

$$auxDefImp_3^4 = auxDef_{22}^1 \cdot auxDefImp_1^3 \quad (B.6d4)$$

$$auxDefImp_4^4 = auxDef_{24}^1 \cdot auxDefImp_1^3 \quad (B.6d5)$$

$$auxDefImp_5^4 = auxDefImp_3^1 \cdot auxDefImp_1^3 \quad (B.6d6)$$

$$auxDefImp_6^4 = auxDefImp_4^1 \cdot auxDefImp_1^3 \quad (B.6d7)$$

$$auxDefImp_7^4 = auxDefImp_5^1 \cdot auxDefImp_1^3 \quad (B.6d8)$$

$$auxDefImp_8^4 = auxDefImp_{28}^1 \cdot auxDefImp_0^3 \quad (B.6d9)$$

$$auxDefImp_9^4 = auxDefImp_{12}^2 \cdot auxDefImp_1^3. \quad (B.6d10)$$

$$auxDefImp_{10}^4 = auxDefImp_{34}^1 \cdot auxDefImp_1^3 \quad (B.6d11)$$

$$auxDefImp_{11}^4 = 3 \cdot auxDefImp_{25}^3 \quad (B.6d12)$$

$$auxDefImp_{12}^4 = 3 \cdot auxDefImp_{26}^3 \quad (B.6d13)$$

$$auxDefImp_{13}^4 = auxDefImp_{40}^1 + auxDefImp_{36}^3 \quad (B.6d14)$$

$$auxDefImp_{14}^4 = auxDefImp_{37}^3 \cdot M_c \quad (B.6d15)$$

$$auxDefImp_{15}^4 = auxDefImp_{38}^3 \cdot M_c \quad (B.6d16)$$

$$auxDefImp_{16}^4 = auxDefImp_2^3 + auxDefImp_3^3 \quad (B.6d17)$$

$$auxDefImp_{17}^4 = auxDefImp_4^3 + auxDefImp_6^3 \quad (B.6d18)$$

$$auxDefImp_{18}^4 = auxDefImp_7^3 + auxDefImp_8^3 \quad (B.6d19)$$

$$auxDefImp_{19}^4 = auxDefImp_{10}^3 + auxDefImp_9^3 \cdot \quad (B.6d20)$$

$$auxDefImp_{20}^4 = auxDefImp_{11}^3 + auxDefImp_{12}^3 \quad (B.6d21)$$

$$auxDefImp_{21}^4 = auxDefImp_{13}^3 - auxDefImp_{14}^3 \quad (B.6d22)$$

$$auxDefImp_{22}^4 = auxDefImp_{28}^3 + auxDefImp_{29}^3 \quad (B.6d23)$$

$$auxDefImp_{23}^4 = auxDefImp_{30}^3 + auxDefImp_{31}^3 \quad (B.6d24)$$

$$auxDefImp_{24}^4 = auxDefImp_{32}^3 + auxDefImp_{33}^3 \quad (B.6d25)$$

$$auxDefImp_{25}^4 = auxDefImp_{40}^3 + auxDefImp_{41}^3 \quad (B.6d26)$$

$$auxDefImp_{26}^4 = auxDefImp_{14}^3 + auxDefImp_{15}^3 \quad (B.6d27)$$

$$auxDefImp_{27}^4 = auxDefImp_{16}^3 + auxDefImp_{17}^3 \quad (B.6d28)$$

$$auxDefImp_{28}^4 = auxDefImp_{18}^3 + auxDefImp_{19}^3 \quad (B.6d29)$$

$$auxDefImp_{29}^4 = auxDefImp_{20}^3 + auxDefImp_{21}^3 \cdot \quad (B.6d30)$$

$$auxDefImp_{30}^4 = auxDefImp_{22}^3 + auxDefImp_{23}^3 \quad (B.6d31)$$

$$auxDefImp_{31}^4 = auxDefImp_{24}^3 + auxDefImp_{35}^3 \quad (B.6d32)$$

$$auxDefImp_{32}^4 = auxDefImp_{42}^3 \cdot M_c \quad (B.6d33)$$

$$auxDefImp_{33}^4 = auxDefImp_{43}^3 \cdot M_m \quad (B.6d34)$$

$$auxDefImp_{34}^4 = -auxDefImp_0^2 \cdot auxDefImp_{44}^3 \quad (B.6d35)$$

$$auxDefImp_{35}^4 = auxDefImp_{30}^3 + auxDefImp_{40}^3 \quad (B.6d36)$$

$$auxDefImp_{36}^4 = auxDefImp_{45}^3 + auxDefImp_{46}^3 \quad (B.6d37)$$

$$auxDefImp_{37}^4 = auxDefImp_{17}^3 + auxDefImp_2^3 \quad (B.6d38)$$

$$auxDefImp_{38}^4 = auxDefImp_{21}^3 + auxDefImp_{22}^3 \quad (B.6d39)$$

$$auxDefImp_{39}^4 = -auxDefImp_{32}^3 + auxDefImp_{47}^3 \cdot \quad (B.6d40)$$

## B. Ecuaciones complejas

---

$$auxDefImp_{40}^4 = auxDefImp_{48}^3 + auxDefImp_{49}^3 \quad (B.6d41)$$

$$auxDefImp_{41}^4 = auxDefImp_{50}^3 + auxDefImp_{51}^3 \quad (B.6d42)$$

$$auxDefImp_{42}^4 = auxDefImp_{52}^3 + auxDefImp_{53}^3 \quad (B.6d43)$$

$$auxDefImp_{43}^4 = auxDefImp_{54}^3 + auxDefImp_{55}^3 \quad (B.6d44)$$

$$auxDefImp_{44}^4 = auxDefImp_{23}^3 + auxDefImp_{24}^3 \quad (B.6d45)$$

$$auxDefImp_{45}^4 = -auxDefImp_{55}^3 + auxDefImp_{58}^3 \quad (B.6d46)$$

$$auxDefImp_{46}^4 = auxDefImp_{59}^3 + auxDefImp_{60}^3 \quad (B.6d47)$$

$$auxDefImp_{47}^4 = auxDefImp_{61}^3 + auxDefImp_{62}^3 \quad (B.6d48)$$

$$auxDefImp_{48}^4 = auxDefImp_{63}^3 + I_c. \quad (B.6d49)$$

$$auxDefImp_0^5 = 4 \cdot auxDefImp_0^4 \quad (B.6e1)$$

$$auxDefImp_1^5 = 4 \cdot auxDefImp_1^4 \quad (B.6e2)$$

$$auxDefImp_2^5 = 4 \cdot auxDefImp_8^4 \quad (B.6e3)$$

$$auxDefImp_3^5 = 3 \cdot auxDefImp_1^4 \quad (B.6e4)$$

$$auxDefImp_4^5 = 3 \cdot auxDefImp_8^4 \quad (B.6e5)$$

$$auxDefImp_5^5 = auxDefImp_0^2 \cdot auxDefImp_{13}^4 \quad (B.6e6)$$

$$auxDefImp_6^5 = auxDefImp_{15}^4 + I_c \quad (B.6e7)$$

$$auxDefImp_7^5 = auxDefImp_{39}^3 + auxDefImp_{14}^4 \quad (B.6e8)$$

$$auxDefImp_8^5 = auxDefImp_{34}^3 + auxDefImp_{16}^4 \quad (B.6e9)$$

$$auxDefImp_9^5 = auxDefImp_{17}^4 + auxDefImp_{18}^4. \quad (B.6e10)$$

$$auxDefImp_{10}^5 = -auxDefImp_{19}^4 + auxDefImp_{20}^4 \quad (B.6e11)$$

$$auxDefImp_{11}^5 = auxDefImp_{21}^4 - auxDefImp_{22}^4 \quad (B.6e12)$$

$$auxDefImp_{12}^5 = auxDefImp_{23}^4 + auxDefImp_{24}^4 \quad (B.6e13)$$

$$auxDefImp_{13}^5 = auxDef_{16}^1 \cdot auxDefImp_{25}^4 \quad (B.6e14)$$

$$auxDefImp_{14}^5 = auxDefImp_{26}^4 + auxDefImp_{27}^4 \quad (B.6e15)$$

$$auxDefImp_{15}^5 = auxDefImp_{28}^4 + auxDefImp_{29}^4 \quad (B.6e16)$$

$$auxDefImp_{16}^5 = auxDefImp_{30}^4 + auxDefImp_{31}^4 \quad (B.6e17)$$

$$auxDefImp_{17}^5 = auxDefImp_{32}^4 + auxDefImp_{33}^4 \quad (B.6e18)$$

$$auxDefImp_{18}^5 = -auxDef_{16}^1 \cdot auxDefImp_{35}^4 \quad (B.6e19)$$

$$auxDefImp_{19}^5 = auxDefImp_6^3 + auxDefImp_{18}^4 \quad (B.6e20)$$

$$auxDefImp_{20}^5 = auxDefImp_{28}^4 + auxDefImp_{37}^4 \quad (B.6e21)$$

$$auxDefImp_{21}^5 = -auxDefImp_{38}^4 + auxDefImp_{39}^4 \quad (B.6e22)$$

$$auxDefImp_{22}^5 = auxDefImp_{40}^4 + auxDefImp_{41}^4 \quad (B.6e23)$$

$$auxDefImp_{23}^5 = auxDefImp_{42}^4 + auxDefImp_{43}^4 \quad (B.6e24)$$

$$auxDefImp_{24}^5 = auxDefImp_{44}^4 + auxDefImp_{45}^4 \quad (B.6e25)$$

$$auxDefImp_{25}^5 = auxDefImp_{46}^4 + auxDefImp_{47}^4 \cdot \quad (B.6e26)$$

$$auxDefImp_0^6 = auxDefImp_0^2 \cdot auxDefImp_7^5 \quad (B.6f1)$$

$$auxDefImp_1^6 = auxDefImp_{10}^5 + auxDefImp_{11}^5 \quad (B.6f2)$$

$$auxDefImp_2^6 = auxDefImp_8^5 + auxDefImp_9^5 \quad (B.6f3)$$

$$auxDefImp_3^6 = auxDefImp_3^3 + auxDefImp_{14}^5 \quad (B.6f4)$$

$$auxDefImp_4^6 = auxDefImp_{15}^5 + auxDefImp_{16}^5 \quad (B.6f5)$$

$$auxDefImp_5^6 = auxDefImp_{25}^5 + auxDefImp_{17}^5 \quad (B.6f6)$$

$$auxDefImp_6^6 = auxDefImp_{19}^5 + auxDefImp_{20}^5 \quad (B.6f7)$$

$$auxDefImp_7^6 = auxDefImp_{21}^5 + auxDefImp_{22}^5 \quad (B.6f8)$$

$$auxDefImp_8^6 = auxDefImp_{24}^5 + auxDefImp_{25}^5 \cdot \quad (B.6f9)$$

$$auxDefImp_0^7 = auxDefImp_1^6 - auxDefImp_2^6 \quad (B.6g1)$$

$$auxDefImp_1^7 = auxDefImp_3^6 + auxDefImp_4^6 \quad (B.6g2)$$

$$auxDefImp_2^7 = auxDefImp_0^2 \cdot auxDefImp_5^6 \quad (B.6g3)$$

$$auxDefImp_3^7 = -auxDefImp_6^6 + auxDefImp_7^6 \cdot \quad (B.6g4)$$

## B. Ecuaciones complejas

$$auxDefImp_0^8 = -auxDefImp_{12}^5 + auxDefImp_0^7 \quad (B.6h1)$$

$$auxDefImp_1^8 = auxDefImp_{23}^5 + auxDefImp_3^7. \quad (B.6h2)$$

Luego, resolviendo las ecuaciones (3.19), (3.29), (3.99), y (3.100), se pueden obtener las expresiones para  $\dot{\theta}^{Piso+}$  y  $\dot{\phi}^{Piso+}$  que se muestran a continuación:

$$\dot{\theta}^{Piso+} = \frac{-auxGI_{42}^1(Q^{Piso-}) + \frac{auxDefImp_{34}^4 \cdot auxGI_1^6(Q^{Piso-})}{auxGI_{10}^4(Q^{Piso-}) + auxGI_{11}^4(Q^{Piso-})}}{auxGI_{12}^3(Q^{Piso-})}. \quad (B.7a)$$

$$\dot{\phi}^{Piso+} = \frac{auxGI_1^6(Q^{Piso-})}{auxGI_{10}^4(Q^{Piso-}) + auxGI_{11}^4(Q^{Piso-})}. \quad (B.7b)$$

Donde se utilizan las variables auxiliares que dependen de sólo los parámetros definidas en las ecuaciones (B.3) y (B.6) y las variables auxiliares que dependen del estado antes de la colisión definidas a continuación:

$$auxGI_0^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_0^6 \cdot \dot{\theta}^{Piso-} \quad (B.8a1)$$

$$auxGI_1^1(Q^{Piso-}) = auxDef_{33}^1 \cdot \dot{\theta}^{Piso-} \quad (B.8a2)$$

$$auxGI_2^1(Q^{Piso-}) = auxDef_{22}^2 \cdot \dot{\theta}^{Piso-} \quad (B.8a3)$$

$$auxGI_3^1(Q^{Piso-}) = auxDef_{23}^2 \cdot \dot{\theta}^{Piso-} \quad (B.8a4)$$

$$auxGI_4^1(Q^{Piso-}) = auxDef_{26}^2 \cdot \dot{\theta}^{Piso-} \quad (B.8a5)$$

$$auxGI_5^1(Q^{Piso-}) = auxDef_{17}^3 \cdot \dot{\theta}^{Piso-} \quad (B.8a6)$$

$$auxGI_6^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_{22}^1 \cdot \dot{\theta}^{Piso-} \quad (B.8a7)$$

$$auxGI_7^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_{23}^1 \cdot \dot{\theta}^{Piso-} \quad (B.8a8)$$

$$auxGI_8^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_{24}^1 \cdot \dot{\theta}^{Piso-} \quad (B.8a9)$$

$$auxGI_9^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_{31}^1 \cdot \dot{\theta}^{Piso-}. \quad (B.8a10)$$

$$auxGI_{10}^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_9^1 \cdot \dot{\theta}^{Piso-} \quad (B.8a11)$$

$$auxGI_{11}^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_{10}^2 \cdot \dot{\theta}^{Piso-} \quad (B.8a12)$$

$$auxGI_{12}^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_{11}^2 \cdot \dot{\theta}^{Piso-} \quad (B.8a13)$$

$$auxGI_{13}^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_7^2 \cdot \dot{\theta}^{Piso-} \quad (B.8a14)$$

$$auxGI_{14}^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_8^2 \cdot \dot{\theta}^{Piso-} \quad (B.8a15)$$

$$auxGI_{15}^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_9^2 \cdot \dot{\theta}^{Piso-} \quad (B.8a16)$$

$$auxGI_{16}^1(Q^{Piso-}) = auxDef_{21}^1 \cdot \dot{\phi}^{Piso-} \quad (B.8a17)$$

$$auxGI_{17}^1(Q^{Piso-}) = auxDef_{22}^1 \cdot \dot{\phi}^{Piso-} \quad (B.8a18)$$

$$auxGI_{18}^1(Q^{Piso-}) = auxDef_{35}^2 \cdot \dot{\phi}^{Piso-} \quad (B.8a19)$$

$$auxGI_{19}^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_{19}^1 \cdot \dot{\phi}^{Piso-}. \quad (B.8a20)$$

$$auxGI_{20}^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_{20}^1 \cdot \dot{\phi}^{Piso-} \quad (B.8a21)$$

$$auxGI_{21}^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_{21}^1 \cdot \dot{\phi}^{Piso-} \quad (B.8a22)$$

$$auxGI_{22}^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_{29}^1 \cdot \dot{\phi}^{Piso-} \quad (B.8a23)$$

$$auxGI_{23}^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_3^1 \cdot \dot{\phi}^{Piso-} \quad (B.8a24)$$

$$auxGI_{24}^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_2^2 \cdot \dot{\phi}^{Piso-} \quad (B.8a25)$$

$$auxGI_{25}^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_3^2 \cdot \dot{\phi}^{Piso-} \quad (B.8a26)$$

$$auxGI_{26}^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_4^2 \cdot \dot{\phi}^{Piso-} \quad (B.8a27)$$

$$auxGI_{27}^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_5^2 \cdot \dot{\phi}^{Piso-} \quad (B.8a28)$$

$$auxGI_{28}^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_6^2 \cdot \dot{\phi}^{Piso-} \quad (B.8a29)$$

$$auxGI_{29}^1(Q^{Piso-}) = I_c \cdot \dot{\phi}^{Piso-} . \quad (B.8a30)$$

$$auxGI_{30}^1(Q^{Piso-}) = I_m \cdot \dot{\phi}^{Piso-} \quad (B.8a31)$$

$$auxGI_{31}^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_{25}^3 \cdot \text{Cos}(\phi^{Piso-}) \quad (B.8a32)$$

$$auxGI_{32}^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_9^4 \cdot \text{Cos}(\phi^{Piso-}) \quad (B.8a33)$$

$$auxGI_{33}^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_{11}^4 \cdot \text{Cos}(\phi^{Piso-}) \quad (B.8a34)$$

$$auxGI_{34}^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_{26}^3 \cdot \text{Sin}(\phi^{Piso-}) \quad (B.8a35)$$

$$auxGI_{35}^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_{10}^4 \cdot \text{Sin}(\phi^{Piso-}) \quad (B.8a36)$$

$$auxGI_{36}^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_{12}^4 \cdot \text{Sin}(\phi^{Piso-}) \quad (B.8a37)$$

$$auxGI_{37}^1(Q^{Piso-}) = \text{Cos}(\phi^{Piso-}) \cdot \dot{\theta}^{Piso-} \quad (B.8a38)$$

$$auxGI_{38}^1(Q^{Piso-}) = \text{Sin}(\phi^{Piso-}) \cdot \dot{\theta}^{Piso-} \quad (B.8a39)$$

$$auxGI_{39}^1(Q^{Piso-}) = \dot{\phi}^{Piso-} - 2 \cdot \dot{\theta}^{Piso-} \quad (B.8a40)$$

$$auxGI_{40}^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_{56}^3 \cdot \text{Cos}(\phi^{Piso-}) \quad (B.8a41)$$

$$auxGI_{41}^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_{57}^3 \cdot \text{Sin}(\phi^{Piso-}) \quad (B.8a42)$$

$$auxGI_{42}^1(Q^{Piso-}) = auxDefImp_2^7 \cdot \dot{\theta}^{Piso-} . \quad (B.8a43)$$

$$auxGI_0^2(Q^{Piso-}) = auxDefImp_{13}^5 \cdot auxGI_{37}^1(Q^{Piso-}) \quad (B.8b1)$$

$$auxGI_1^2(Q^{Piso-}) = auxDefImp_{32}^1 \cdot auxGI_{38}^1(Q^{Piso-}) \quad (B.8b2)$$

$$auxGI_2^2(Q^{Piso-}) = auxGI_{31}^1(Q^{Piso-}) - auxGI_{34}^1(Q^{Piso-}) \quad (B.8b3)$$

$$auxGI_3^2(Q^{Piso-}) = auxGI_{32}^1(Q^{Piso-}) - auxGI_{35}^1(Q^{Piso-}) \quad (B.8b4)$$

$$auxGI_4^2(Q^{Piso-}) = -auxGI_{33}^1(Q^{Piso-}) + auxGI_{36}^1(Q^{Piso-}) \quad (B.8b5)$$

$$auxGI_5^2(Q^{Piso-}) = auxGI_1^1(Q^{Piso-}) + auxGI_2^1(Q^{Piso-}) \quad (B.8b6)$$

$$auxGI_6^2(Q^{Piso-}) = auxGI_3^1(Q^{Piso-}) + auxGI_4^1(Q^{Piso-}) \quad (B.8b7)$$

$$auxGI_7^2(Q^{Piso-}) = auxGI_5^1(Q^{Piso-}) + auxGI_6^1(Q^{Piso-}) \quad (B.8b8)$$

$$auxGI_8^2(Q^{Piso-}) = auxGI_7^1(Q^{Piso-}) + auxGI_8^1(Q^{Piso-}) \quad (B.8b9)$$

$$auxGI_9^2(Q^{Piso-}) = auxGI_{10}^1(Q^{Piso-}) + auxGI_9^1(Q^{Piso-}). \quad (B.8b10)$$

$$auxGI_{10}^2(Q^{Piso-}) = auxGI_{11}^1(Q^{Piso-}) + auxGI_{12}^1(Q^{Piso-}) \quad (B.8b11)$$

$$auxGI_{11}^2(Q^{Piso-}) = auxGI_{13}^1(Q^{Piso-}) + auxGI_{14}^1(Q^{Piso-}) \quad (B.8b12)$$

$$auxGI_{12}^2(Q^{Piso-}) = auxGI_{15}^1(Q^{Piso-}) + auxGI_{16}^1(Q^{Piso-}) \quad (B.8b13)$$

$$auxGI_{13}^2(Q^{Piso-}) = auxGI_{17}^1(Q^{Piso-}) + auxGI_{18}^1(Q^{Piso-}) \quad (B.8b14)$$

$$auxGI_{14}^2(Q^{Piso-}) = auxGI_{19}^1(Q^{Piso-}) + auxGI_{20}^1(Q^{Piso-}) \quad (B.8b15)$$

$$auxGI_{15}^2(Q^{Piso-}) = -auxGI_{21}^1(Q^{Piso-}) + auxGI_{22}^1(Q^{Piso-}) \quad (B.8b16)$$

$$auxGI_{16}^2(Q^{Piso-}) = auxGI_{23}^1(Q^{Piso-}) - auxGI_{24}^1(Q^{Piso-}) \quad (B.8b17)$$

$$auxGI_{17}^2(Q^{Piso-}) = -auxGI_{25}^1(Q^{Piso-}) - auxGI_{26}^1(Q^{Piso-}) \quad (B.8b18)$$

$$auxGI_{18}^2(Q^{Piso-}) = auxGI_{27}^1(Q^{Piso-}) + auxGI_{28}^1(Q^{Piso-}) \quad (B.8b19)$$

$$auxGI_{19}^2(Q^{Piso-}) = auxGI_{29}^1(Q^{Piso-}) + auxGI_{30}^1(Q^{Piso-}) \quad (B.8b20)$$

$$auxGI_{20}^2(Q^{Piso-}) = auxGI_{40}^1(Q^{Piso-}) - auxGI_{41}^1(Q^{Piso-}) \quad (B.8b21)$$

$$auxGI_{21}^2(Q^{Piso-}) = auxDefImp_{18}^5 \cdot auxGI_{37}^1(Q^{Piso-}) \quad (B.8b22)$$

$$auxGI_{22}^2(Q^{Piso-}) = auxDefImp_{36}^4 \cdot auxGI_{39}^1(Q^{Piso-}). \quad (B.8b23)$$

$$auxGI_0^3(Q^{Piso-}) = -auxDefImp_5^5 + auxGI_2^2(Q^{Piso-}) \quad (B.8c1)$$

$$auxGI_1^3(Q^{Piso-}) = auxDefImp_0^8 + auxGI_3^2(Q^{Piso-}) \quad (B.8c2)$$

$$auxGI_2^3(Q^{Piso-}) = auxDefImp_1^7 + auxGI_4^2(Q^{Piso-}) \quad (B.8c3)$$

$$auxGI_3^3(Q^{Piso-}) = auxGI_0^2(Q^{Piso-}) + auxGI_1^2(Q^{Piso-}) \quad (B.8c4)$$

$$auxGI_4^3(Q^{Piso-}) = -auxGI_{10}^2(Q^{Piso-}) + auxGI_{11}^2(Q^{Piso-}) \quad (B.8c5)$$

$$auxGI_5^3(Q^{Piso-}) = auxGI_{12}^2(Q^{Piso-}) + auxGI_{13}^2(Q^{Piso-}) \quad (B.8c6)$$

$$auxGI_6^3(Q^{Piso-}) = auxGI_{14}^2(Q^{Piso-}) + auxGI_{15}^2(Q^{Piso-}) \quad (B.8c7)$$

$$auxGI_7^3(Q^{Piso-}) = auxGI_{16}^2(Q^{Piso-}) + auxGI_{17}^2(Q^{Piso-}) \quad (B.8c8)$$

$$auxGI_8^3(Q^{Piso-}) = auxGI_{18}^2(Q^{Piso-}) + auxGI_{19}^2(Q^{Piso-}) \quad (B.8c9)$$

$$auxGI_9^3(Q^{Piso-}) = auxGI_5^2(Q^{Piso-}) + auxGI_6^2(Q^{Piso-}). \quad (B.8c10)$$

$$auxGI_{10}^3(Q^{Piso-}) = auxGI_7^2(Q^{Piso-}) + auxGI_8^2(Q^{Piso-}) \quad (B.8c11)$$

$$auxGI_{11}^3(Q^{Piso-}) = auxDefImp_1^8 + auxGI_{20}^2(Q^{Piso-}) \quad (B.8c12)$$

$$auxGI_{12}^3(Q^{Piso-}) = auxDefImp_{34}^4 + auxGI_2^2(Q^{Piso-}) \quad (B.8c13)$$

$$auxGI_{13}^3(Q^{Piso-}) = auxGI_{21}^2(Q^{Piso-}) + auxGI_{22}^2(Q^{Piso-}) \quad (B.8c14)$$

$$auxGI_{14}^3(Q^{Piso-}) = auxDefImp_8^6 - auxGI_2^2(Q^{Piso-}). \quad (B.8c15)$$

$$auxGI_0^4(Q^{Piso-}) = auxGI_0^1(Q^{Piso-}) \cdot auxGI_1^3(Q^{Piso-}) \quad (B.8d1)$$

$$auxGI_1^4(Q^{Piso-}) = auxDefImp_5^5 \cdot auxGI_1^3(Q^{Piso-}) \quad (B.8d2)$$

$$auxGI_2^4(Q^{Piso-}) = auxGI_0^3(Q^{Piso-}) \cdot auxGI_2^3(Q^{Piso-}) \quad (B.8d3)$$

$$auxGI_3^4(Q^{Piso-}) = auxGI_9^2(Q^{Piso-}) + auxGI_3^3(Q^{Piso-}) \quad (B.8d4)$$

$$auxGI_4^4(Q^{Piso-}) = auxGI_4^3(Q^{Piso-}) + auxGI_5^3(Q^{Piso-}) \quad (B.8d5)$$

$$auxGI_5^4(Q^{Piso-}) = auxGI_6^3(Q^{Piso-}) + auxGI_7^3(Q^{Piso-}) \quad (B.8d6)$$

$$auxGI_6^4(Q^{Piso-}) = auxGI_8^3(Q^{Piso-}) - auxGI_9^3(Q^{Piso-}) \quad (B.8d7)$$

$$auxGI_7^4(Q^{Piso-}) = auxDefImp_0^2 \cdot auxGI_0^3(Q^{Piso-}) \quad (B.8d8)$$

$$auxGI_8^4(Q^{Piso-}) = auxGI_{42}^1(Q^{Piso-}) \cdot auxGI_{11}^3(Q^{Piso-}) \quad (B.8d9)$$

$$auxGI_9^4(Q^{Piso-}) = auxGI_{12}^3(Q^{Piso-}) \cdot auxGI_{13}^3(Q^{Piso-}) \quad (B.8d10)$$

$$auxGI_{10}^4(Q^{Piso-}) = auxDefImp_{34}^4 \cdot auxGI_{11}^3(Q^{Piso-}) \quad (B.8d11)$$

$$auxGI_{11}^4(Q^{Piso-}) = auxGI_{12}^3(Q^{Piso-}) \cdot auxGI_{14}^3(Q^{Piso-}). \quad (B.8d12)$$

$$auxGI_0^5(Q^{Piso-}) = -auxGI_1^4(Q^{Piso-}) + auxGI_2^4(Q^{Piso-}) \quad (B.8e1)$$

$$auxGI_1^5(Q^{Piso-}) = auxGI_{10}^3(Q^{Piso-}) + auxGI_3^4(Q^{Piso-}) \quad (B.8e2)$$

$$auxGI_2^5(Q^{Piso-}) = auxGI_4^4(Q^{Piso-}) + auxGI_5^4(Q^{Piso-}) \quad (B.8e3)$$

$$auxGI_3^5(Q^{Piso-}) = auxDefImp_0^2 \cdot auxGI_9^4(Q^{Piso-}). \quad (B.8e4)$$

$$auxGI_0^6(Q^{Piso-}) = auxGI_6^4(Q^{Piso-}) - auxGI_1^5(Q^{Piso-}) \quad (B.8f1)$$

$$auxGI_1^6(Q^{Piso-}) = auxGI_8^4(Q^{Piso-}) + auxGI_3^5(Q^{Piso-}). \quad (B.8f2)$$

$$auxGI_0^7(Q^{Piso-}) = auxGI_2^5(Q^{Piso-}) + auxGI_0^6(Q^{Piso-}). \quad (B.8g1)$$

$$auxGI_0^8(Q^{Piso-}) = auxGI_7^4(Q^{Piso-}) \cdot auxGI_0^7(Q^{Piso-}). \quad (B.8h1)$$

$$auxGI_0^9(Q^{Piso-}) = auxGI_0^4(Q^{Piso-}) + auxGI_0^8(Q^{Piso-}). \quad (B.8i1)$$

$$auxGI_0^{10}(Q^{Piso-}) = frac{auxGI_0^9(Q^{Piso-})}{auxGI_0^5(Q^{Piso-})}. \quad (B.8j1)$$

De la misma forma, resolviendo las ecuaciones (3.101), (3.102), (3.103), (3.104), y (3.105), se pueden obtener las expresiones para  $\dot{\theta}^{Rod+}$  y  $\dot{\phi}^{Rod+}$  que se muestran a continuación:

$$\dot{\theta}^{Rod+} = \frac{auxKI_{10}^5(Q^{Rod-}) - \frac{auxDefImp_{34}^4 \cdot auxKI_1^8(Q^{Rod-})}{auxKI_{20}^4(Q^{Rod-}) + auxKI_{21}^4(Q^{Rod-})}}{auxKI_{29}^3(Q^{Rod-})}. \quad (B.9a)$$

$$\dot{\phi}^{Rod+} = -\frac{auxKI_1^8(Q^{Rod-})}{auxKI_{20}^4(Q^{Rod-}) + auxKI_{21}^4(Q^{Rod-})}. \quad (B.9b)$$

Donde se utilizan las variables auxiliares que dependen de sólo los parámetros definidas en las ecuaciones (B.3) y (B.6) y las variables auxiliares que dependen del estado antes de la colisión definidas a continuación:

$$auxKI_0^1(Q^{Rod-}) = 4 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a1)$$

$$auxKI_1^1(Q^{Rod-}) = auxDef_{33}^1 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a2)$$

$$auxKI_2^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{22}^1 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a3)$$

$$auxKI_3^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{23}^1 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a4)$$

$$auxKI_4^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{31}^1 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a5)$$

$$auxKI_5^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{37}^1 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a6)$$

$$auxKI_6^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{38}^1 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a7)$$

$$auxKI_7^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{39}^1 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a8)$$

$$auxKI_8^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_6^1 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a9)$$

$$auxKI_9^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_7^1 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} . \quad (B.10a10)$$

$$auxKI_{10}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_9^1 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a11)$$

$$auxKI_{11}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{10}^2 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a12)$$

$$auxKI_{12}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{11}^2 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a13)$$

$$auxKI_{13}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{14}^2 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a14)$$

$$auxKI_{14}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{15}^2 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a15)$$

$$auxKI_{15}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{16}^2 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a16)$$

$$auxKI_{16}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{17}^2 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a17)$$

$$auxKI_{17}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_7^2 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a18)$$

$$auxKI_{18}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_8^2 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a19)$$

$$auxKI_{19}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_9^2 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} . \quad (B.10a20)$$

$$auxKI_{20}^1(Q^{Rod-}) = 3 \cdot \dot{\phi}^{Rod-} \quad (B.10a21)$$

$$auxKI_{21}^1(Q^{Rod-}) = auxDef_{21}^1 \cdot \dot{\phi}^{Rod-} \quad (B.10a22)$$

$$auxKI_{22}^1(Q^{Rod-}) = auxDef_{22}^1 \cdot \dot{\phi}^{Rod-} \quad (B.10a23)$$

$$auxKI_{23}^1(Q^{Rod-}) = auxDef_{18}^3 \cdot \dot{\phi}^{Rod-} \quad (B.10a24)$$

$$auxKI_{24}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{19}^1 \cdot \dot{\phi}^{Rod-} \quad (B.10a25)$$

$$auxKI_{25}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{20}^1 \cdot \dot{\phi}^{Rod-} \quad (B.10a26)$$

$$auxKI_{26}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{29}^1 \cdot \dot{\phi}^{Rod-} \quad (B.10a27)$$

$$auxKI_{27}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_3^1 \cdot \dot{\phi}^{Rod-} \quad (B.10a28)$$

$$auxKI_{28}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{31}^1 \cdot \dot{\phi}^{Rod-} \quad (B.10a29)$$

$$auxKI_{29}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{35}^1 \cdot \dot{\phi}^{Rod-} . \quad (B.10a30)$$

$$auxKI_{30}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_5^2 \cdot \dot{\phi}^{Rod-} \quad (B.10a31)$$

$$auxKI_{31}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_6^2 \cdot \dot{\phi}^{Rod-} \quad (B.10a32)$$

$$auxKI_{32}^1(Q^{Rod-}) = I_c \cdot \dot{\phi}^{Rod-} \quad (B.10a33)$$

$$auxKI_{33}^1(Q^{Rod-}) = I_m \cdot \dot{\phi}^{Rod-} \quad (B.10a34)$$

$$auxKI_{34}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_6^5 \cdot \dot{\gamma}^{Rod-} \quad (B.10a35)$$

$$auxKI_{35}^1(Q^{Rod-}) = auxDef_{18}^3 \cdot \dot{\gamma}^{Rod-} \quad (B.10a36)$$

$$auxKI_{36}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{19}^1 \cdot \dot{\gamma}^{Rod-} \quad (B.10a37)$$

$$auxKI_{37}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{20}^1 \cdot \dot{\gamma}^{Rod-} \quad (B.10a38)$$

$$auxKI_{38}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{24}^1 \cdot \dot{\gamma}^{Rod-} \quad (B.10a39)$$

$$auxKI_{39}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_3^1 \cdot \dot{\gamma}^{Rod-} . \quad (B.10a40)$$

## B. Ecuaciones complejas

$$auxKI_{40}^1 \left( Q^{Rod-} \right) = auxDefImp_{30}^1 \cdot \dot{\gamma}^{Rod-} \quad (B.10a41)$$

$$auxKI_{41}^1 \left( Q^{Rod-} \right) = I_c \cdot \dot{\gamma}^{Rod-} \quad (B.10a42)$$

$$auxKI_{42}^1 \left( Q^{Rod-} \right) = auxDefImp_{36}^1 \cdot \dot{\gamma}^{Rod-} \quad (B.10a43)$$

$$auxKI_{43}^1 \left( Q^{Rod-} \right) = auxDefImp_{27}^3 \cdot \dot{\gamma}^{Rod-} \quad (B.10a44)$$

$$auxKI_{44}^1 \left( Q^{Rod-} \right) = -\dot{\phi}^{Rod-} + \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a45)$$

$$auxKI_{45}^1 \left( Q^{Rod-} \right) = auxDef_{16}^1 \cdot \text{Cos} \left( \phi^{Rod-} \right) \quad (B.10a46)$$

$$auxKI_{46}^1 \left( Q^{Rod-} \right) = auxDefImp_{25}^3 \cdot \text{Cos} \left( \phi^{Rod-} \right) \quad (B.10a47)$$

$$auxKI_{47}^1 \left( Q^{Rod-} \right) = auxDefImp_9^4 \cdot \text{Cos} \left( \phi^{Rod-} \right) \quad (B.10a48)$$

$$auxKI_{48}^1 \left( Q^{Rod-} \right) = auxDefImp_{11}^4 \cdot \text{Cos} \left( \phi^{Rod-} \right) \quad (B.10a49)$$

$$auxKI_{49}^1 \left( Q^{Rod-} \right) = auxDef_{16}^1 \cdot \text{Sin} \left( \phi^{Rod-} \right). \quad (B.10a50)$$

$$auxKI_{50}^1 \left( Q^{Rod-} \right) = auxDefImp_{26}^3 \cdot \text{Sin} \left( \phi^{Rod-} \right) \quad (B.10a51)$$

$$auxKI_{51}^1 \left( Q^{Rod-} \right) = auxDefImp_{10}^4 \cdot \text{Sin} \left( \phi^{Rod-} \right) \quad (B.10a52)$$

$$auxKI_{52}^1 \left( Q^{Rod-} \right) = auxDefImp_{12}^4 \cdot \text{Sin} \left( \phi^{Rod-} \right) \quad (B.10a53)$$

$$auxKI_{53}^1 \left( Q^{Rod-} \right) = \text{Cos} \left( \phi^{Rod-} \right) \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a54)$$

$$auxKI_{54}^1 \left( Q^{Rod-} \right) = \text{Sin} \left( \phi^{Rod-} \right) \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a55)$$

$$auxKI_{55}^1 \left( Q^{Rod-} \right) = auxDefImp_{56}^3 \cdot \text{Cos} \left( \phi^{Rod-} \right) \quad (B.10a56)$$

$$auxKI_{56}^1 \left( Q^{Rod-} \right) = auxDefImp_{57}^3 \cdot \text{Sin} \left( \phi^{Rod-} \right) \quad (B.10a57)$$

$$auxKI_{57}^1 \left( Q^{Rod-} \right) = auxDefImp_{48}^4 \cdot \dot{\gamma}^{Rod-} \quad (B.10a58)$$

$$auxKI_{58}^1 \left( Q^{Rod-} \right) = auxDef_0^1 \cdot \dot{\gamma}^{Rod-} \quad (B.10a59)$$

$$auxKI_{59}^1 \left( Q^{Rod-} \right) = auxDef_1^1 \cdot \dot{\gamma}^{Rod-}. \quad (B.10a60)$$

$$auxKI_{60}^1(Q^{Rod-}) = auxDef_{35}^2 \cdot \dot{\gamma}^{Rod-} \quad (B.10a61)$$

$$auxKI_{61}^1(Q^{Rod-}) = auxDef_0^1 \cdot \dot{\phi}^{Rod-} \quad (B.10a62)$$

$$auxKI_{62}^1(Q^{Rod-}) = auxDef_1^1 \cdot \dot{\phi}^{Rod-} \quad (B.10a63)$$

$$auxKI_{63}^1(Q^{Rod-}) = auxDef_{24}^1 \cdot \dot{\phi}^{Rod-} \quad (B.10a64)$$

$$auxKI_{64}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_4^1 \cdot \dot{\phi}^{Rod-} \quad (B.10a65)$$

$$auxKI_{65}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{47}^1 \cdot \dot{\phi}^{Rod-} \quad (B.10a66)$$

$$auxKI_{66}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_5^1 \cdot \dot{\phi}^{Rod-} \quad (B.10a67)$$

$$auxKI_{67}^1(Q^{Rod-}) = \dot{\phi}^{Rod-} - 2 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a68)$$

$$auxKI_{68}^1(Q^{Rod-}) = auxDef_4^1 \cdot \dot{\gamma}^{Rod-} \quad (B.10a69)$$

$$auxKI_{69}^1(Q^{Rod-}) = auxDef_5^1 \cdot \dot{\gamma}^{Rod-} \quad (B.10a70)$$

$$auxKI_{70}^1(Q^{Rod-}) = auxDef_{22}^2 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a71)$$

$$auxKI_{71}^1(Q^{Rod-}) = auxDef_{23}^2 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a72)$$

$$auxKI_{72}^1(Q^{Rod-}) = auxDef_{26}^2 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a73)$$

$$auxKI_{73}^1(Q^{Rod-}) = auxDef_{15}^3 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a74)$$

$$auxKI_{74}^1(Q^{Rod-}) = auxDef_{16}^3 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a75)$$

$$auxKI_{75}^1(Q^{Rod-}) = auxDef_{17}^3 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a76)$$

$$auxKI_{76}^1(Q^{Rod-}) = auxDef_{18}^3 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a77)$$

$$auxKI_{77}^1(Q^{Rod-}) = auxDef_{19}^3 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a78)$$

$$auxKI_{78}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{19}^1 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a79)$$

$$auxKI_{79}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{20}^1 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a80)$$

$$auxKI_{80}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{24}^1 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a81)$$

$$auxKI_{81}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{47}^1 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a82)$$

$$auxKI_{82}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_5^2 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a83)$$

$$auxKI_{83}^1(Q^{Rod-}) = auxDefImp_6^2 \cdot \dot{\theta}^{Rod-} \quad (B.10a84)$$

$$auxKI_0^2(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{13}^4 \cdot auxKI_{44}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b1)$$

$$auxKI_1^2(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{12}^2 \cdot auxKI_{53}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b2)$$

$$auxKI_2^2(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{34}^1 \cdot auxKI_{54}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b3)$$

$$auxKI_3^2(Q^{Rod-}) = -auxKI_0^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{20}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b4)$$

$$auxKI_4^2(Q^{Rod-}) = auxKI_{46}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{50}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b5)$$

$$auxKI_5^2(Q^{Rod-}) = auxKI_{47}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{51}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b6)$$

$$auxKI_6^2(Q^{Rod-}) = auxKI_{48}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{52}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b7)$$

$$auxKI_7^2(Q^{Rod-}) = auxKI_1^1(Q^{Rod-}) + auxKI_2^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b8)$$

$$auxKI_8^2(Q^{Rod-}) = auxKI_3^1(Q^{Rod-}) + auxKI_4^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b9)$$

$$auxKI_9^2(Q^{Rod-}) = auxKI_5^1(Q^{Rod-}) + auxKI_6^1(Q^{Rod-}). \quad (B.10b10)$$

$$auxKI_{10}^2(Q^{Rod-}) = auxKI_7^1(Q^{Rod-}) + auxKI_8^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b11)$$

$$auxKI_{11}^2(Q^{Rod-}) = auxKI_{10}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_9^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b12)$$

$$auxKI_{12}^2(Q^{Rod-}) = auxKI_{11}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{12}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b13)$$

$$auxKI_{13}^2(Q^{Rod-}) = auxKI_{13}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{14}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b14)$$

$$auxKI_{14}^2(Q^{Rod-}) = auxKI_{15}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{16}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b15)$$

$$auxKI_{15}^2(Q^{Rod-}) = auxKI_{17}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{18}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b16)$$

$$auxKI_{16}^2(Q^{Rod-}) = auxKI_{19}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{21}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b17)$$

$$auxKI_{17}^2(Q^{Rod-}) = auxKI_{22}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{23}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b18)$$

$$auxKI_{18}^2(Q^{Rod-}) = auxKI_{24}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{25}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b19)$$

$$auxKI_{19}^2(Q^{Rod-}) = auxKI_{26}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{27}^1(Q^{Rod-}). \quad (B.10b20)$$

## B. Ecuaciones complejas

$$auxKI_{20}^2(Q^{Rod-}) = auxKI_{28}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{29}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b21)$$

$$auxKI_{21}^2(Q^{Rod-}) = auxKI_{30}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{31}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b22)$$

$$auxKI_{22}^2(Q^{Rod-}) = auxKI_{32}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{33}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b23)$$

$$auxKI_{23}^2(Q^{Rod-}) = auxKI_{35}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{36}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b24)$$

$$auxKI_{24}^2(Q^{Rod-}) = auxKI_{37}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{38}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b25)$$

$$auxKI_{25}^2(Q^{Rod-}) = auxKI_{39}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{40}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b26)$$

$$auxKI_{26}^2(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{44}^3 \cdot auxKI_{44}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b27)$$

$$auxKI_{27}^2(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{28}^1 \cdot auxKI_{67}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b28)$$

$$auxKI_{28}^2(Q^{Rod-}) = auxDef_7^2 \cdot auxKI_{67}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b29)$$

$$auxKI_{29}^2(Q^{Rod-}) = auxKI_1^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{14}^1(Q^{Rod-}). \quad (B.10b30)$$

$$auxKI_{30}^2(Q^{Rod-}) = auxKI_{41}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{66}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b31)$$

$$auxKI_{31}^2(Q^{Rod-}) = auxKI_{58}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{59}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b32)$$

$$auxKI_{32}^2(Q^{Rod-}) = auxKI_{60}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{61}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b33)$$

$$auxKI_{33}^2(Q^{Rod-}) = auxKI_{62}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{63}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b34)$$

$$auxKI_{34}^2(Q^{Rod-}) = auxKI_{64}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{65}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b35)$$

$$auxKI_{35}^2(Q^{Rod-}) = auxKI_{70}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{71}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b36)$$

$$auxKI_{36}^2(Q^{Rod-}) = -auxKI_{72}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{73}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b37)$$

$$auxKI_{37}^2(Q^{Rod-}) = auxKI_{74}^1(Q^{Rod-}) - auxKI_{75}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b38)$$

$$auxKI_{38}^2(Q^{Rod-}) = -auxKI_{76}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{77}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b39)$$

$$auxKI_{39}^2(Q^{Rod-}) = auxKI_{78}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{79}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b40)$$

$$auxKI_{40}^2(Q^{Rod-}) = auxKI_{80}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{81}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b41)$$

$$auxKI_{41}^2(Q^{Rod-}) = auxKI_{82}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{83}^1(Q^{Rod-}) \quad (B.10b42)$$

$$auxKI_{42}^2(Q^{Rod-}) = auxKI_{55}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{56}^1(Q^{Rod-}). \quad (B.10b43)$$

$$auxKI_0^3(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{28}^1 \cdot auxKI_3^2(Q^{Rod-}) \quad (B.10c1)$$

$$auxKI_1^3(Q^{Rod-}) = auxDef_7^2 \cdot auxKI_3^2(Q^{Rod-}) \quad (B.10c2)$$

$$auxKI_2^3(Q^{Rod-}) = auxKI_{34}^1(Q^{Rod-}) - auxKI_0^2(Q^{Rod-}) \quad (B.10c3)$$

$$auxKI_3^3(Q^{Rod-}) = auxKI_1^2(Q^{Rod-}) + auxKI_2^2(Q^{Rod-}) \quad (B.10c4)$$

$$auxKI_4^3(Q^{Rod-}) = -auxDefImp_5^5 + auxKI_4^2(Q^{Rod-}) \quad (B.10c5)$$

$$auxKI_5^3(Q^{Rod-}) = auxDefImp_0^8 + auxKI_5^2(Q^{Rod-}) \quad (B.10c6)$$

$$auxKI_6^3(Q^{Rod-}) = auxDefImp_1^7 - auxKI_6^2(Q^{Rod-}) \quad (B.10c7)$$

$$auxKI_7^3(Q^{Rod-}) = auxKI_7^2(Q^{Rod-}) + auxKI_8^2(Q^{Rod-}) \quad (B.10c8)$$

$$auxKI_8^3(Q^{Rod-}) = auxKI_{10}^2(Q^{Rod-}) + auxKI_9^2(Q^{Rod-}) \quad (B.10c9)$$

$$auxKI_9^3(Q^{Rod-}) = auxKI_{11}^2(Q^{Rod-}) + auxKI_{12}^2(Q^{Rod-}). \quad (B.10c10)$$

$$auxKI_{10}^3(Q^{Rod-}) = auxKI_{13}^2(Q^{Rod-}) + auxKI_{14}^2(Q^{Rod-}) \quad (B.10c11)$$

$$auxKI_{11}^3(Q^{Rod-}) = auxKI_{15}^2(Q^{Rod-}) + auxKI_{16}^2(Q^{Rod-}) \quad (B.10c12)$$

$$auxKI_{12}^3(Q^{Rod-}) = auxKI_{17}^2(Q^{Rod-}) + auxKI_{18}^2(Q^{Rod-}) \quad (B.10c13)$$

$$auxKI_{13}^3(Q^{Rod-}) = auxKI_{19}^2(Q^{Rod-}) + auxKI_{20}^2(Q^{Rod-}) \quad (B.10c14)$$

$$auxKI_{14}^3(Q^{Rod-}) = auxKI_{21}^2(Q^{Rod-}) + auxKI_{22}^2(Q^{Rod-}) \quad (B.10c15)$$

$$auxKI_{15}^3(Q^{Rod-}) = auxKI_{23}^2(Q^{Rod-}) + auxKI_{24}^2(Q^{Rod-}) \quad (B.10c16)$$

$$auxKI_{16}^3(Q^{Rod-}) = auxKI_{41}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{25}^2(Q^{Rod-}) \quad (B.10c17)$$

$$auxKI_{17}^3(Q^{Rod-}) = auxKI_{57}^1(Q^{Rod-}) - auxKI_{26}^2(Q^{Rod-}) \quad (B.10c18)$$

$$auxKI_{18}^3(Q^{Rod-}) = auxKI_{68}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{27}^2(Q^{Rod-}) \quad (B.10c19)$$

$$auxKI_{19}^3(Q^{Rod-}) = auxKI_{69}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{28}^2(Q^{Rod-}). \quad (B.10c20)$$

## B. Ecuaciones complejas

$$auxKI_{20}^3(Q^{Rod-}) = auxKI_8^1(Q^{Rod-}) + auxKI_{11}^2(Q^{Rod-}) \quad (B.10c21)$$

$$auxKI_{21}^3(Q^{Rod-}) = auxKI_{22}^2(Q^{Rod-}) - auxKI_{29}^2(Q^{Rod-}) \quad (B.10c22)$$

$$auxKI_{22}^3(Q^{Rod-}) = auxKI_{30}^2(Q^{Rod-}) + auxKI_{31}^2(Q^{Rod-}) \quad (B.10c23)$$

$$auxKI_{23}^3(Q^{Rod-}) = auxKI_{32}^2(Q^{Rod-}) + auxKI_{33}^2(Q^{Rod-}) \quad (B.10c24)$$

$$auxKI_{24}^3(Q^{Rod-}) = auxKI_{34}^2(Q^{Rod-}) - auxKI_{35}^2(Q^{Rod-}) \quad (B.10c25)$$

$$auxKI_{25}^3(Q^{Rod-}) = auxKI_{36}^2(Q^{Rod-}) + auxKI_{37}^2(Q^{Rod-}) \quad (B.10c26)$$

$$auxKI_{26}^3(Q^{Rod-}) = auxKI_{38}^2(Q^{Rod-}) - auxKI_{39}^2(Q^{Rod-}) \quad (B.10c27)$$

$$auxKI_{27}^3(Q^{Rod-}) = auxKI_{40}^2(Q^{Rod-}) + auxKI_{41}^2(Q^{Rod-}) \quad (B.10c28)$$

$$auxKI_{28}^3(Q^{Rod-}) = auxDefImp_1^8 + auxKI_{42}^2(Q^{Rod-}) \quad (B.10c29)$$

$$auxKI_{29}^3(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{34}^4 + auxKI_4^2(Q^{Rod-}) \quad (B.10c30)$$

$$auxKI_{30}^3(Q^{Rod-}) = auxDefImp_8^6 - auxKI_4^2(Q^{Rod-}). \quad (B.10c31)$$

$$auxKI_0^4(Q^{Rod-}) = auxKI_{43}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_0^3(Q^{Rod-}) \quad (B.10d1)$$

$$auxKI_1^4(Q^{Rod-}) = auxKI_{42}^1(Q^{Rod-}) + auxKI_1^3(Q^{Rod-}) \quad (B.10d2)$$

$$auxKI_2^4(Q^{Rod-}) = auxKI_2^3(Q^{Rod-}) + auxKI_3^3(Q^{Rod-}) \quad (B.10d3)$$

$$auxKI_3^4(Q^{Rod-}) = auxDefImp_0^2 \cdot auxKI_4^3(Q^{Rod-}) \quad (B.10d4)$$

$$auxKI_4^4(Q^{Rod-}) = auxDefImp_5^5 \cdot auxKI_5^3(Q^{Rod-}) \quad (B.10d5)$$

$$auxKI_5^4(Q^{Rod-}) = auxKI_4^3(Q^{Rod-}) \cdot auxKI_6^3(Q^{Rod-}) \quad (B.10d6)$$

$$auxKI_6^4(Q^{Rod-}) = auxKI_7^3(Q^{Rod-}) + auxKI_8^3(Q^{Rod-}) \quad (B.10d7)$$

$$auxKI_7^4(Q^{Rod-}) = auxKI_{10}^3(Q^{Rod-}) + auxKI_9^3(Q^{Rod-}) \quad (B.10d8)$$

$$auxKI_8^4(Q^{Rod-}) = auxKI_{11}^3(Q^{Rod-}) + auxKI_{12}^3(Q^{Rod-}) \quad (B.10d9)$$

$$auxKI_9^4(Q^{Rod-}) = auxKI_{13}^3(Q^{Rod-}) + auxKI_{14}^3(Q^{Rod-}). \quad (B.10d10)$$

## B. Ecuaciones complejas

$$auxKI_{10}^4(Q^{Rod-}) = auxKI_{15}^3(Q^{Rod-}) + auxKI_{16}^3(Q^{Rod-}) \quad (B.10d11)$$

$$auxKI_{11}^4(Q^{Rod-}) = auxKI_{45}^1(Q^{Rod-}) \cdot auxKI_{18}^3(Q^{Rod-}) \quad (B.10d12)$$

$$auxKI_{12}^4(Q^{Rod-}) = auxKI_{49}^1(Q^{Rod-}) \cdot auxKI_{19}^3(Q^{Rod-}) \quad (B.10d13)$$

$$auxKI_{13}^4(Q^{Rod-}) = auxDefImp_0^2 \cdot auxKI_{28}^3(Q^{Rod-}) \quad (B.10d14)$$

$$auxKI_{14}^4(Q^{Rod-}) = auxKI_{17}^3(Q^{Rod-}) + auxKI_3^3(Q^{Rod-}) \quad (B.10d15)$$

$$auxKI_{15}^4(Q^{Rod-}) = -auxKI_{20}^3(Q^{Rod-}) + auxKI_{21}^3(Q^{Rod-}) \quad (B.10d16)$$

$$auxKI_{16}^4(Q^{Rod-}) = auxKI_{22}^3(Q^{Rod-}) + auxKI_{23}^3(Q^{Rod-}) \quad (B.10d17)$$

$$auxKI_{17}^4(Q^{Rod-}) = auxKI_{24}^3(Q^{Rod-}) + auxKI_{25}^3(Q^{Rod-}) \quad (B.10d18)$$

$$auxKI_{18}^4(Q^{Rod-}) = auxKI_{26}^3(Q^{Rod-}) - auxKI_{27}^3(Q^{Rod-}) \quad (B.10d19)$$

$$auxKI_{19}^4(Q^{Rod-}) = auxDefImp_0^2 \cdot auxKI_{29}^3(Q^{Rod-}) \quad (B.10d20)$$

$$auxKI_{20}^4(Q^{Rod-}) = auxDefImp_{34}^4 \cdot auxKI_{28}^3(Q^{Rod-}) \quad (B.10d21)$$

$$auxKI_{21}^4(Q^{Rod-}) = auxKI_{29}^3(Q^{Rod-}) \cdot auxKI_{30}^3(Q^{Rod-}). \quad (B.10d22)$$

$$auxKI_0^5(Q^{Rod-}) = auxKI_{45}^1(Q^{Rod-}) \cdot auxKI_0^4(Q^{Rod-}) \quad (B.10e1)$$

$$auxKI_1^5(Q^{Rod-}) = auxKI_{49}^1(Q^{Rod-}) \cdot auxKI_1^4(Q^{Rod-}) \quad (B.10e2)$$

$$auxKI_2^5(Q^{Rod-}) = auxDefImp_0^2 \cdot auxKI_2^4(Q^{Rod-}) \quad (B.10e3)$$

$$auxKI_3^5(Q^{Rod-}) = -auxKI_4^4(Q^{Rod-}) + auxKI_5^4(Q^{Rod-}) \quad (B.10e4)$$

$$auxKI_4^5(Q^{Rod-}) = auxKI_6^4(Q^{Rod-}) + auxKI_7^4(Q^{Rod-}) \quad (B.10e5)$$

$$auxKI_5^5(Q^{Rod-}) = auxKI_8^4(Q^{Rod-}) + auxKI_9^4(Q^{Rod-}) \quad (B.10e6)$$

$$auxKI_6^5(Q^{Rod-}) = auxKI_{11}^4(Q^{Rod-}) + auxKI_{12}^4(Q^{Rod-}) \quad (B.10e7)$$

$$auxKI_7^5(Q^{Rod-}) = auxKI_{15}^4(Q^{Rod-}) + auxKI_{16}^4(Q^{Rod-}) \quad (B.10e8)$$

$$auxKI_8^5(Q^{Rod-}) = auxKI_{17}^4(Q^{Rod-}) + auxKI_{18}^4(Q^{Rod-}) \quad (B.10e9)$$

$$auxKI_9^5(Q^{Rod-}) = auxKI_{13}^4(Q^{Rod-}) \cdot auxKI_{14}^4(Q^{Rod-}) \quad (B.10e10)$$

$$auxKI_{10}^5(Q^{Rod-}) = auxDefImp_0^2 \cdot auxKI_{14}^4(Q^{Rod-}). \quad (B.10e11)$$

$$auxKI_0^6(Q^{Rod-}) = auxKI_5^3(Q^{Rod-}) \cdot auxKI_2^5(Q^{Rod-}) \quad (B.10f1)$$

$$auxKI_1^6(Q^{Rod-}) = auxKI_0^5(Q^{Rod-}) + auxKI_1^5(Q^{Rod-}) \quad (B.10f2)$$

$$auxKI_2^6(Q^{Rod-}) = auxKI_{10}^4(Q^{Rod-}) - auxKI_4^5(Q^{Rod-}) \quad (B.10f3)$$

$$auxKI_3^6(Q^{Rod-}) = -auxKI_6^5(Q^{Rod-}) + auxKI_7^5(Q^{Rod-}) + auxKI_8^5(Q^{Rod-}). \quad (B.10f4)$$

$$auxKI_0^7(Q^{Rod-}) = auxKI_5^5(Q^{Rod-}) - auxKI_1^6(Q^{Rod-}) \quad (B.10g1)$$

$$auxKI_1^7(Q^{Rod-}) = auxKI_{19}^4(Q^{Rod-}) \cdot auxKI_3^6(Q^{Rod-}). \quad (B.10g2)$$

$$auxKI_0^8(Q^{Rod-}) = auxKI_2^6(Q^{Rod-}) + auxKI_0^7(Q^{Rod-}) \quad (B.10h1)$$

$$auxKI_1^8(Q^{Rod-}) = auxKI_9^5(Q^{Rod-}) - auxKI_1^7(Q^{Rod-}). \quad (B.10h2)$$

$$auxKI_0^9(Q^{Rod-}) = auxKI_3^4(Q^{Rod-}) \cdot auxKI_0^8(Q^{Rod-}). \quad (B.10i1)$$

$$auxKI_0^{10}(Q^{Rod-}) = auxKI_0^6(Q^{Rod-}) - auxKI_0^9(Q^{Rod-}). \quad (B.10j1)$$

$$auxKI_0^{11}(Q^{Rod-}) = \frac{auxKI_0^{10}(Q^{Rod-})}{auxKI_3^5(Q^{Rod-})}. \quad (B.10k1)$$

## B.2. Actuador de rigidez variable

En esta sección se utilizan las definiciones de las secciones 5.2.1 y 5.4.1.

A continuación se muestra la expresión del ángulo de la articulación como una función de la cantidad de vueltas del motor:

$$\alpha(t) = \frac{var_8 + \sqrt{var_6 + var_7 + \frac{q}{2} \cdot (var_4 - var_5)}}{u}. \quad (B.11)$$

Donde se utilizan las definiciones que se muestran a continuación:

$$d_1 = \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2} \quad (\text{B.12a})$$

$$d_2 = \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2} \quad (\text{B.12b})$$

$$\text{var}_1 = \frac{\pi}{2} + \theta(t) \quad (\text{B.12c})$$

$$\text{var}_2 = \text{ArcSec}\left(\frac{2 \cdot r_1}{q}\right) \quad (\text{B.12d})$$

$$\text{var}_3 = d_1 + d_2 \quad (\text{B.12e})$$

$$\text{var}_4 = \text{var}_1 \cdot \left(\text{var}_3 + \left(\frac{q}{2}\right) \cdot \left(\text{var}_2 + \frac{\text{var}_1}{4}\right)\right) \quad (\text{B.12f})$$

$$\text{var}_5 = 2 \cdot \text{var}_3 \cdot \text{var}_2 + \left(\frac{q}{2}\right) \cdot (\text{var}_2^2 + 2) \quad (\text{B.12g})$$

$$\text{var}_6 = r_1^2 + r_2^2 + s^2 \quad (\text{B.12h})$$

$$\text{var}_7 = d_1 \cdot d_2 \quad (\text{B.12i})$$

$$\text{var}_8 = l_{est} - l_0 - s + \pi \cdot u. \quad (\text{B.12j})$$

A continuación se muestra la expresión de la tensión de la cuerda como una función de la cantidad de vueltas del motor:

$$\tau_g(t) = \text{var}_9 \cdot g \cdot \text{Cos}\left(\frac{\text{var}_8 + \sqrt{\text{var}_6 + \text{var}_7 + \frac{q}{2} \cdot (\text{var}_4 - \text{var}_5)}}{2 \cdot u}\right). \quad (\text{B.13})$$

Donde se utilizan las definiciones de las ecuaciones (B.12) y la definición que se muestra a continuación:

$$\text{var}_9 = m_{load} \cdot l_{art} + m_{art} \cdot \text{distCM}. \quad (\text{B.14})$$

La pseudo razón de reducción de la articulación como una función del giro del motor  $\theta(t)$  se muestra a continuación:

$$\text{RazonReduccion} = \frac{4 \cdot u \cdot \sqrt{\text{var}_{14}}}{\frac{q}{2} \cdot (\text{var}_3 - 2 \cdot \frac{q}{2} \cdot \text{var}_2 + \frac{q}{2} \cdot \text{var}_1)}. \quad (\text{B.15})$$

Donde, además de las definiciones de las ecuaciones (B.12) se utilizan las definiciones:

$$var_{10} = \text{ArcCsc} \left( \frac{2 \cdot r_1}{q} \right) \quad (\text{B.16a})$$

$$var_{11} = var_6 + 2 \cdot d_1 \cdot d_2 \quad (\text{B.16b})$$

$$var_{12} = 2 \cdot var_3 + \frac{q}{2} \cdot (var_{10} + \theta(t)) \quad (\text{B.16c})$$

$$var_{13} = \frac{q}{2} \cdot (var_3 \cdot var_1 - var_2 \cdot var_{12}) \quad (\text{B.16d})$$

$$var_{14} = var_{11} + var_{13} + \left( \frac{q}{2} \right)^2 \cdot \left( \left( \frac{var_1}{2} \right)^2 - 2 \right). \quad (\text{B.16e})$$

El torque generado por la articulación como función del giro del motor y del torque ejercido por el motor está dado por:

$$\tau_w(t) = \frac{4 \cdot u \cdot \sqrt{var_{14}}}{\frac{q}{2} \cdot (var_3 - 2 \cdot \frac{q}{2} \cdot var_2 + \frac{q}{2} \cdot var_1)} \cdot \tau_m(t). \quad (\text{B.17})$$

Donde se utilizan las definiciones de las ecuaciones (B.12) y (B.16).

La tensión en la cuerda como función del giro del motor y del torque ejercido por el motor está dado por:

$$F(t) = \frac{4 \cdot \sqrt{var_{14}}}{\frac{q}{2} \cdot (var_3 - 2 \cdot \frac{q}{2} \cdot var_2 + \frac{q}{2} \cdot var_1)} \cdot \tau_m(t). \quad (\text{B.18})$$

Donde se utilizan las definiciones de las ecuaciones (B.12) y (B.16).

La tensión en la cuerda como función del giro del motor y del torque ejercido por el motor considerando el modelo del motor está dado por:

$$F(t) = \frac{4 \cdot \sqrt{var_{14}} \cdot \left( \frac{\text{torqueBloq}}{\omega_{nominal}} \cdot (\omega_{nominal} - \dot{\theta}(t)) - I_{rotor} \cdot \ddot{\theta}(t) \right)}{\frac{q}{2} \cdot (var_3 - 2 \cdot \frac{q}{2} \cdot var_2 + \frac{q}{2} \cdot var_1)}. \quad (\text{B.19})$$

Donde se utilizan las definiciones de las ecuaciones (B.12) y (B.16).

A continuación se muestra la expresión de la velocidad angular de la articulación como una función de la cantidad de vueltas del motor y de su velocidad angular:

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{\frac{q}{2} \cdot (2 \cdot var_3 + \frac{q}{2} \cdot (var_1 - 2 \cdot var_2)) \cdot \dot{\theta}(t)}{4 \cdot u \cdot \sqrt{(var_6 + var_7) + \frac{q}{2} \cdot (var_4 - var_5)}}. \quad (\text{B.20})$$

Donde se utilizan las definiciones de las ecuaciones (B.12).

A continuación se muestra la expresión de la aceleración angular de la articulación como una función de la cantidad de vueltas del motor, de su velocidad angular y de su aceleración angular:

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{\frac{q}{2} \cdot \left( -\frac{q}{2} \cdot (var_{15}^2 - 4 \cdot var_{16}) \cdot \dot{\theta}(t)^2 + 4 \cdot var_{15} \cdot var_{16} \cdot \ddot{\theta}(t) \right)}{16 \cdot u \cdot \sqrt{var_{16}^3}}. \quad (\text{B.21})$$

Donde, además de las definiciones de las ecuaciones (B.12), se utilizan las siguientes definiciones:

$$var_{15} = 2 \cdot var_3 + \frac{q}{2} \cdot (var_1 - 2 \cdot var_2) \quad (\text{B.22a})$$

$$var_{16} = (var_6 + var_7) + \frac{q}{2} \cdot (var_4 - var_5) . \quad (\text{B.22b})$$

A continuación se muestra la expresión para el largo del tendón del flexor:

$$s = \sqrt{l_{real}^2 - \frac{var_{15}^2}{4}} . \quad (\text{B.23})$$

La relación geométrica entre el largo del tendón flexor y el ángulo de la articulación está dada por la expresión:

$$l_{real}^2 - \frac{var_{15}^2}{4} = l_{ss}^2 + l_{si}^2 + h_{si}^2 - 2 \cdot l_{ss} \cdot \sqrt{l_{si}^2 + h_{si}^2} \cdot \text{Cos} \left( \alpha(t) - \text{ArcTan} \left( \frac{h_{si}}{l_{si}} \right) \right) . \quad (\text{B.24})$$

El ángulo de la articulación como una función del giro del motor flexor se aprecia en la ecuación:

$$\alpha(t) = \text{ArcCos} \left( \frac{l_{ss}^2 + l_{si}^2 + h_{si}^2 - l_{real}^2 + \frac{var_{15}^2}{4}}{2 \cdot l_{ss} \cdot \sqrt{l_{si}^2 + h_{si}^2}} \right) + \text{ArcTan} \left( \frac{h_{si}}{l_{si}} \right) . \quad (\text{B.25})$$

