UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA CIVIL

MODELO OPERATIVO DE PLANIFICACIÓN ÓPTIMA DE SUBSIDIOS EN SISTEMAS URBANOS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA MENCIÓN TRANSPORTES

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

LUIS FELIPE AGUILA THEDY

PROFESOR GUÍA:
FRANCISCO MARTÍNEZ CONCHA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
ALEJANDRO JOFRÉ CÁCERES
PEDRO DONOSO SIERRA
ESTEBAN ROSSI-HANSBERG

SANTIAGO DE CHILE
OCTUBRE 2006

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA CIVIL

MODELO OPERATIVO DE PLANIFICACIÓN ÓPTIMA DE SUBSIDIOS EN SISTEMAS URBANOS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA MENCIÓN TRANSPORTES

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

LUIS FELIPE AGUILA THEDY

PROFESOR GUÍA:
FRANCISCO MARTÍNEZ CONCHA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
ALEJANDRO JOFRÉ CÁCERES
PEDRO DONOSO SIERRA
ESTEBAN ROSSI-HANSBERG

SANTIAGO DE CHILE
OCTUBRE 2006

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA CIVIL

MODELO OPERATIVO DE PLANIFICACIÓN ÓPTIMA DE SUBSIDIOS EN SISTEMAS URBANOS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA MENCIÓN TRANSPORTES

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

LUIS FELIPE AGUILA THEDY

COMISIÓN EVALUADORA	CALIFICACIONES		
	NOTA (N°)	NOTA (Letras)	FIRMA
PROFESOR GUÍA:			
Dr. FRANCISCO MARTÍNEZ C.	:...……….	…………….	……...……….
Dr. ALEJANDRO JOFRÉ C.	:...……….	…………….	……….....……
Ing. PEDRO DONOSO S.	:...……….	…………….	…………...….
Dr. ESTEBAN ROSSI-HANSBERG.	:...……….	…………….	……………...
NOTA FINAL EXAMEN DE GRADO	:...……….	…………….	………………

SANTIAGO DE CHILE
OCTUBRE 2006

DEDICATORIA

Considero que un trabajo de investigación se asemeja a un largo y extenuante viaje, en que las experiencias y aprendizajes son, ante todo, interiores.

Dedico este viaje a todos aquellos que de una u otra forma me han impulsado a llevarlo a buen puerto.

Luis Felipe Aguila Thedy

AGRADECIMIENTOS

Agradezco en primer lugar la paciencia de mis Padres, que me han soportado parasitando un tiempo más largo que el normal.

A mi polola Anita y mis amigos, que con su insistencia y bromas pesadas lograron impulsarme a terminar con esta expedición.

He aprendido la importancia de la perseverancia y las dificultades que generan la comodidad y la flojera. Agradezco por esto a Dios y a todos mis hermanos, profesores y amigos por haberme dado esta oportunidad de crecer.

Luis Felipe Aguila Thedy

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL Y AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS
DE LA INGENIERIA MENCIÓN TRANSPORTE
POR : LUIS FELIPE AGUILA THEDY
FECHA : 20/10/2006
PROF. GUÍA : FRANCISCO MARTÍNEZ C.

MODELO OPERATIVO DE PLANIFICACIÓN ÓPTIMA DE SUBSIDIOS EN SISTEMAS URBANOS.

La planificación urbana es un área muy activa en las ciudades modernas que debe lidiar con grandes complejidades que dificultan la predicción certera de los efectos de la aplicación de distintas políticas. Los planificadores actuales determinan el nivel de uso de instrumentos de planificación sin el apoyo de herramientas técnicas que iluminen la toma de decisiones. Sin embargo, avances recientes en economía urbana promueven la construcción de tales herramientas.

En Martínez y Donoso (1995) se desarrolla el Modelo de Uso de Suelos de Santiago, MUSSA, que incluye las principales características del mercado detectadas en la literatura desde el trabajo seminal de Alonso (1964). En particular, incluye el efecto de externalidades a la localización de agentes, y considera los principales instrumentos de planificación: subsidios y regulaciones. Posteriormente, en Martínez y Henríquez (2003) se desarrolla el Random Bidding and Supply Model, RB&SM, que posee las características ya mensionadas de MUSSA, y mejora su base microeconómica y las propiedades de eficiencia de los algoritmos de solución del equilibrio.

En este trabajo, se desarrolla un modelo operativo, basado en RB&SM, que dado un conjunto de regulaciones, permite obtener políticas óptimas de subsidios y precios sombra de las regulaciones. Se desarrollan dos herramientas alternativas que permiten obtener tales resultados: un modelo de subsidios óptimos (RB&SOSPM[1]) y un modelo de localización óptima (OULM[2]). El OULM se utiliza para probar que las externalidades de localización generan ineficiencias y que los subsidios óptimos cumplen el rol de corregir externalidades, regulaciones y costos de producción. El RB&SOSPM se utiliza para la generación de resultados preliminares de aplicabilidad y tendencias a partir de un prototipo, mostrando que la localización óptima tiende a la concentración de la oferta. Las predicciones teóricas y los resultados de las simulaciones son consistentes entre sí y replican conclusiones previas de la literatura, como aquellas de Fujita (1989). Ambos modelos están estrechamente relacionados y producen los mismos resultados, pero poseen distinto enfoque, complejidad y un número de variables similar. Respecto al enfoque la diferencia más relevante es que RB&SOSPM considera oferentes maximizadores de ganancia, mientras OULM no asume ningún tipo de comportamiento. Entre ambos modelos OULM es el menos complejo y es aplicable a un rango más amplio de condiciones que RB&SOSPM.

La experiencia en el uso de modelos aplicados para estimar el desarrollo urbano y el hecho que la localización residencial presenta altos niveles de segregación, hecho que permite sospechar de la existencia de externalidades a la localización, hacen que los modelos desarrollados en este trabajo tengan el potencial de aplicarse en el mediano plazo a una ciudad real, con todo el aporte que significa para la toma de decisiones técnicas en planificación urbana.

[1] Es un modelo basado completamente en RB&SM que encuentra el subsidio cuya localización de equilibrio asociada maximiza una función que agrega beneficios de consumidores y productores neta del costo por subsidios.
[2] Es un modelo basado en la teoría de remates que obtiene determinísticamente una localización que maximiza una función de beneficio. A partir de esta localización se pueden obtener subsidios que la convierten en un equilibrio para el modelo RB&SM.

TABLA DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE TABLAS, GRÁFICOS Y FIGURAS.

INDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE GRÁFICOS

ÍNDICE DE FIGURAS

I. Introducción.

1.1 Contexto.

Existe una visión común por parte de los planificadores, que indica que la aplicación de subsidios/impuestos (en adelante simplemente subsidios) y restricciones al uso de suelo o a la oferta inmobiliaria (en adelante simplemente regulaciones), son necesarias para controlar la asignación de bienes en el mercado inmobiliario. Este argumento justifica la utilización de estos instrumentos como herramientas de planificación. Los economistas, por otro lado, argumentan que el mercado inmobiliario urbano es eficiente en la mayoría de los casos, y que, por esta razón, la mejor política es aquella que evita toda intervención por parte del planificador. En efecto, como Anas, Arnott y Small, (1998), indican:

> *"En defensa del crecimiento urbano, desarrollos de baja densidad que crecientemente caracterizan las ciudades modernas, Gordon y Richardson (1986, 1996) argumentan que la estructura espacial urbana generada por las fuerzas de mercado refleja el bienestar de la gente. Los planificadores, en contraste, típicamente consideran muy poco la eficiencia o desigualdad de las estructuras predeterminadas, y realizan detallados planes de uso de suelos. Para evaluar estos puntos de vista en conflicto necesitamos explorar la economía del bienestar asociada al uso de suelo urbano".*

Para armonizar esta situación es necesario contar con estudios y herramientas técnicas de apoyo a la toma de decisiones. Sin embargo, hay pocos estudios aplicados que sustenten una u otra afirmación, y aún asumiendo que el punto de vista de los planificadores es el correcto, no hay metodologías claras y bien aceptadas para identificar una política óptima en el mercado urbano. A este respecto Cheshire y Sheppard (1997) dicen:

> *"[…] Curiosamente, una de las más evasivas formas de regulación gubernamental ha recibido mucha menor atención de parte de los economistas: la planificación del uso de suelos. Mientras las propiedades teóricas del control del uso de suelos han recibido alguna atención (Sheppard (1988), Fischel (1990); Epple, Romer and Filimon (1988); Brueckner (1990, 1995, 1996)), no existen estudios que hayan estimado el costo neto y sus consecuencias en distribución."*

En la misma línea, Martínez y Donoso (2001) comentan que:

> *"[…] Estas herramientas de planificación –regulaciones zonales y subsidios- son comúnmente aplicadas sin un análisis científico de su impacto final combinado, basado en un marco económico riguroso de equilibrio en el mercado urbano".*

Algunos estudios que intentan lidiar con este problema son: Cheshire y Sheppard, (1997), Martínez y Donoso, (2001), Martínez y Manterola, (2001) y Rossi-Hansberg (2004). Desde el punto de vista microeconómico y operativo los estudios son menos abundantes aún, y particularmente en Chile aún no se cuenta con herramientas de este tipo.

Preguntas como: ¿es el mercado inmobiliario siempre eficiente? y si no es así, ¿bajo qué condiciones lo es? o ¿es posible determinar una política de planificación óptima?; han sido respondidas para casos idealizados como ciudades con espacio homogéneo y modelos de comportamiento determinístico de los agentes, encontrando situaciones en que el mercado es ineficiente y detectando subsidios óptimos. En efecto desde Fujita (1989) y Rossi-Hansberg (2004), se puede extraer que una de estas situaciones corresponde al caso en que existen externalidades en las decisiones de alguno de los agentes participantes.

El foco central de este documento es desarrollar un método económico que permita identificar rigurosamente la combinación óptima de subsidios y restricciones al uso de suelo en una ciudad, dada una función de bienestar. Intenta dar una respuesta aplicada a las preguntas del párrafo previo para una ciudad cualquiera, en un mercado inmobiliario residencial urbano con externalidades. Evidentemente, dado del tamaño del objetivo buscado, es esta una empresa difícil, a la cuál se espera dar un aporte significativo, más no definitivo, con el presente estudio, centrándose específicamente en el desarrollo de una herramienta operativa, microeconómicamente consistente, para la definición de subsidios óptimos en el sistema urbano sujeto a un conjunto de regulaciones predefinido.

1.2 Definición del Problema.

El problema consiste en construir un modelo operativo, económicamente consistente, para una ciudad con cualquier topología y un mercado residencial urbano[3] con externalidades a la localización, que permita determinar esquemas óptimos de planificación de subsidios, considerando regulaciones predefinidas.

1.3 Objetivos.

El objetivo general es el desarrollo preliminar de una herramienta matemática operativa, para el análisis teórico y práctico de políticas de planificación en el mercado inmobiliario residencial urbano. Este modelo debe cumplir con los siguientes requisitos:

1. Debe modelar el mercado residencial urbano incluyendo las principales características que se han descubierto en la literatura acerca de él.
2. Debe ser capaz de considerar las principales herramientas de planificación: subsidios y regulaciones.
3. Debe ser operativo, es decir, que su formulación y sus resultados sean potencialmente aplicables a la planificación urbana de una ciudad real.
4. Debe permitir la obtención de subsidios óptimos, dado un conjunto de regulaciones prefijado.

Los objetivos específicos corresponden a la búsqueda de una respuesta a las siguientes preguntas en el contexto del modelo planteado:

i) ¿Es necesaria la planificación urbana usando subsidios?, ¿cuándo?

Si la respuesta anterior es afirmativa,

ii) ¿Es posible detectar políticas de subsidios óptimos?

iii) ¿Qué estructura tienen las políticas de subsidios óptimos?

iv) ¿Es mejor regular o subsidiar? ¿Cuándo?

[3] En este decumento se denomina Mercado Residencial Urbano, al mercado de oferta de bienes residenciales y localización de residentes en una ciudad.

1.4 Hipótesis.

La hipótesis inicial es que la existencia de externalidades a la localización, socioeconómicas, aglomerativas o segregativas, y constructivas, justifican la introducción de esquemas de planificación que combinen regulaciones y subsidios, siendo posible la determinación de esquemas óptimos de planificación.

Esta hipótesis se fundamenta en estudios teóricos conocidos de la Teoría del Bienestar, y algunas de sus aplicaciones en modelos urbanos a nivel teórico.

1.5 Justificación.

Si bien hay trabajos teóricos previos que sustentan nuestra hipótesis, no se tiene conocimiento de la existencia de modelos operativos que apoyen de esta forma la toma de decisiones en la planificación urbana. En particular esto es cierto para Santiago de Chile, ciudad en que se observa un alto grado de segregación socioeconómica en la localización residencial. En efecto, la Figura 1.1 muestra la localización espacial de hogares con distintos niveles de ingreso, en la que se observa una importante concentración de estratos socioeconómicos altos (ABC1) en el sector nororiente de la capital, mientras los estratos más bajos (D y E) se distribuyen principalmente en sectores periféricos del norte, poniente y sur.

Esto significa que las decisiones de planificación están siendo tomadas sin apoyo técnico cuantitativo y sobre la base de percepciones intuitivas y empíricas por parte de los planificadores, haciéndose relevante la posibilidad de entregar un aporte en esta materia.

1.6 Alcances.

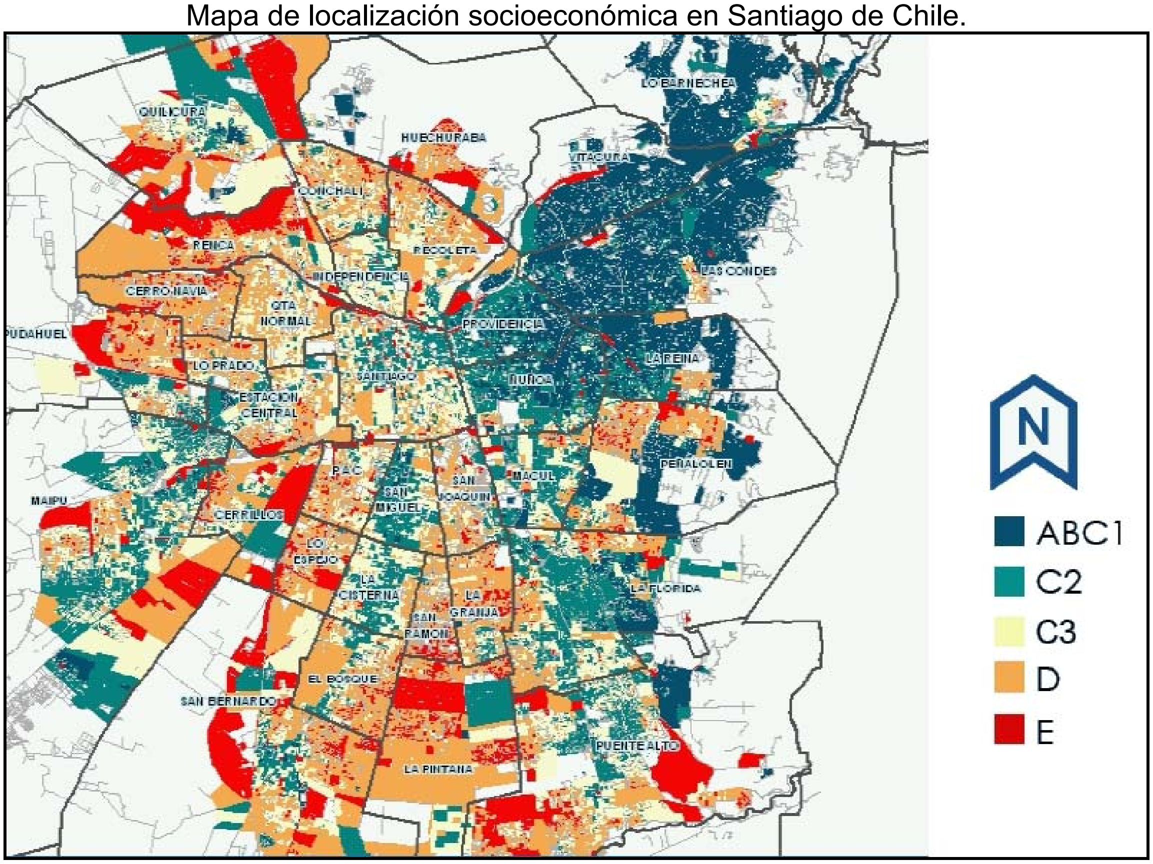
Se estudia el caso de equilibrios estáticos, siguiendo la línea de trabajos previos en la teoría del bienestar. El estudio de la dinámica es dejado para futuras investigaciones.

La investigación se centra en la definición del problema y en su formulación matemática, para la obtención de resultados teóricos consistentes con aquellos obtenidos desde la literatura. Se busca también la construcción de un prototipo aplicado a una ciudad imaginaria, que permita apoyar e iluminar tanto la validación del método como una herramienta de planificación económicamente consistente, como también el estudio del comportamiento y las características particulares del modelo mismo y sus soluciones.

Se considera únicamente el mercado residencial, para el cuál se han encontrado modelos adecuados y potencialmente aplicables en la literatura. La extensión al mercado de localización y oferta no residencial requiere más investigación, principalmente por el lado de las funciones de disposición a pagar de las firmas.

Si bien el problema general de planificación incluye regulaciones y subsidios, en este trabajo sólo se pretende dar un primer paso en él, enfrentando la decisión óptima respecto a subsidios, y dejando el problema de regulaciones para futuras investigaciones.

Figura 1.1
Mapa de localización socioeconómica en Santiago de Chile.



Fuente: Presentación estudio Adimark, mayo 2004, disponible en:
http://www.adimark.cl/medios/estudios/informe_mapa_socioeconomico_de_chile.pdf.

1.7 Contenido del Informe.

El informe ha sido diseñado para una lectura progresiva, de modo que un capítulo requiere de los contenidos de los capítulos previos para su comprensión precisa.

En el capítulo II se resumen los resultados relevantes encontrados en la literatura asociados con el presente estudio. Se presentan las principales características que distinguen al mercado urbano, junto a algunas formas de modelarlas, así como las características de algunos enfoques y modelos que permiten la construcción de la herramienta operativa buscada en este estudio. Se recogen a continuación los principales enfoques y resultados en economía del bienestar, y se consideran los principales resultados de aplicaciones de esta teoría en modelos del mercado urbano.

El capítulo III muestra la formulación general del problema de planificación óptima y el problema de planificación de subsidios óptimos. Se presentan sus componentes: función objetivo y submodelo de equilibrio que es necesario desarrollar para encontrar una solución operativa.

En el capítulo IV se presenta sintéticamente una extensión del modelo estocástico de equilibrio estático en el mercado inmobiliario urbano RB&SM[4], que permite la inclusión de subsidios, Las derivación de las fórmulas presentadas puede ser encontrada en los anexos. Además, se presentan una serie de propiedades relevantes cuyas demostraciones pueden también ser encontradas en la sección de anexos.

En el capítulo V se define una función objetivo que puede ser calculada para equilibrios resultantes de RB&SM, junto a algunas de sus propiedades. Esta función que mide el beneficio agregado de consumidores y productores, junto al equilibrio RB&SM del capítulo IV, son utilizados en el capítulo VI para definir el modelo operativo de planificación óptima de subsidios urbanos, llamado Random Bidding and Supply Optimal Subsidies Planning Model RB&SOSPM. Definido el modelo, se estudian sus soluciones y su relación con los resultados teóricos obtenidos desde la literatura, lo cuál permite dimensionar cuán consistente resulta el enfoque empleado. Se demuestran también algunas propiedades relevantes del modelo, basadas en aquellas de RB&SM presentadas en el capítulo IV.

[4] RB&SM: Random Bidding and Suplly Model, presentado en Martínez y Henríquez (2003).

Dada la gran complejidad analítica del modelo RB&SOSPM, heredada del sistema de punto fijo que resuelve el equilibrio de RB&SM, se plantea en el capítulo VII un modelo alternativo, denominado Optimal Urban Location Model OULM que permite un estudio analítico más detallado. Se demuestra que las soluciones de ambos modelos son idénticas, y, a partir de las condiciones de primer orden de OULM, se determina la estructura de los subsidios óptimos. En ciudades de gran tamaño se recomienda la utilización de OULM debido a que resulta matemática y computacionalmente más sencillo que RB&SOSPM.

Finalmente, el capítulo VIII presenta algunos resultados basados en una aplicación prototipo RB&SOSPM. Los resultados confirman las conclusiones teóricas de la literatura y capítulos previos, y muestran el efecto de las externalidades y la dispersión (introducida como herramienta de modelación), en los esquemas de planificación y la función objetivo.

Cada capítulo finaliza con una síntesis de los resultados más importantes y algunas conclusiones de lo expuesto en él. Las conclusiones finales del trabajo y su contraste con otros estudios, junto con las limitaciones encontradas y algunas propuestas para futuras investigaciones, son presentadas en el capítulo IX.

A continuación, la sección X corresponde a referencias de la literatura citada en el texto, y es seguida por la sección de Anexos que incluye la derivación de fórmulas de RB&SM (Anexo A), la demostración de propiedades de RB&SM citadas en el capítulo IV (Anexo B) y esquemas de los algoritmos de solución utilizados para el desarrollo de la aplicación prototipo (Anexo C).

II. Revisión de antecedentes.

2.1 Introducción.

Como un paso inicial para enfrentar este desafío investigativo, es necesario tener algún conocimiento acera del “estado del arte” en economía urbana y planificación. En este capítulo se presenta el resultado de esta investigación preliminar. No pretende ser exhaustivo en los distintos temas que aborda, sino suficiente para los fines del estudio, esto es: conformar un marco teórico para el desarrollo del mismo. En este contexto, se revisa literatura que en su conjunto constituye el marco general sobre el cual se construyen los modelos, y con respecto al cual se contrastan algunos resultados, tanto teóricos como producto de simulaciones prototipo.

En primer lugar se presentan investigaciones que se han convertido en un aporte al conocimiento del mercado inmobiliario residencial urbano, con énfasis en las características que, en la actualidad, se consideran como parte fundamental de su modelamiento, entre ellas: externalidades a la localización (Martínez y Donoso, 1995) y transacciones tipo remate (Alonso, 1964). Se observan también las diferentes formas de modelar este mercado, con el foco puesto en la búsqueda de modelos operativos de equilibrio estático que permitan la construcción de un modelo operativo de planificación óptima de subsidios urbanos, producto que constituye el foco central de este trabajo. De las estratégicas y modelos revisados, se escoge el modelo RB&SM como el modelo operativo utilizado en el estudio para describir el equilibrio estático en el mercado inmobiliario residencial urbano. Este modelo sobresale de los demás debido a su consistencia microeconómica, propiedades de convergencia y eficiencia de los algoritmos asociados, y a su flexibilidad de aplicación a ciudades reales, parcialmente probada en la práctica para Santiago de Chile[5].

En segundo lugar, se recogen los principales planteamientos de la teoría del bienestar, en cuanto a formulación, teoremas clásicos y los principales resultados obtenidos por esta rama de la economía, relacionados a la necesidad de utilización de subsidios y regulaciones. A continuación, se presentan aplicaciones de la teoría del bienestar en el mercado inmobiliario residencial urbano. El punto de referencia esta ubicado en el tipo de modelos que han sido

[5] El modelo RB&SM tiene una base muy similar el modelo MUSSA (Modelo de Uso de Suelos de Santiago), que es un modelo operativo de equilibrio aplicado a Santiago de Chile.

utilizados, la forma de medir el bienestar de la sociedad y la aplicabilidad práctica de los distintos modelos, junto a las principales conclusiones obtenidas.

El capítulo finaliza con una síntesis del conjunto, tomando los puntos relevantes que permitieron direccionar el resto del estudio.

2.2 Características del Mercado Residencial Urbano.

El estudio del mercado del suelo tiene ya larga data (desde Smith, 1776, hasta nuestros días) y ha llevado a comprender que es un mercado especial en muchos sentidos. Distintas visiones, traducidas en diferentes modelos, han intentado explicar la formación del valor del suelo, el precio de los bienes inmuebles, la toma de decisiones, el tipo de transacciones, las características de los agentes involucrados y la forma en que se alcanza un equilibrio. Con el pasar de los años estas visiones han ido convergiendo para determinar características que los investigadores de hoy asumen como esenciales del mercado. Por lo tanto, estas características deben formar parte integrante de cualquier modelo operativo que intente aplicarse a la realidad, principalmente cuando su objetivo es orientar en la toma de decisiones.

A continuación se presentan las características esenciales del mercado residencial urbano, la forma en que estas han sido modeladas, los modelos planteados y una teoría, conocida como BID-CHOICE, que sirve de fundamento teórico a los modelos operativos utilizados en el presente estudio.

2.2.1 Características principales.

El mercado del suelo ha generado un interés especial de parte de los investigadores, creándose una rama económica específica dedicada a su estudio, debido a que tiene la particularidad de lidiar de manera esencial con variables de tipo espacio-temporal. En el caso del mercado urbano se incluyen características particulares del comportamiento de los agentes en relación con la espacialidad y el desplazamiento necesario para realizar actividades económicas.

Los primeros acercamientos en el estudio del mercado del suelo, se hicieron en torno a la renta o valor del suelo agrícola, el cuál provendría de atributos propios como fertilidad y ubicación (Smith, 1776). Más adelante, Ricardo (1817) precisa que la tierra más fértil es utilizada en primer lugar. Agrega que la renta de la tierra más productiva se basa en sus ventajas respecto de la menos productiva, y que la tierra más cercana a los mercados (centros de transacciones de los productos de la tierra) ofrece ventajas frente a la más lejana debido a los menores costos de transporte asociados. Argumenta que como resultado de la competencia entre granjeros todas las ventajas de la tierra llegan hacia su dueño en la forma de renta.

En Von Thünen (1826) se desarrolla una teoría en la cual los diferentes usos agrícolas (productos vistos como agentes consumidores) hacen posturas (ofertas de compra) por la utilización de la tierra alrededor de un lugar de transacción. Esta tierra es asignada al mejor postor, haciéndose efectivo el traspaso pecuniario de las ventajas de la tierra al dueño, tal como indicaba Von Thünen, reconociendo de paso que el dueño de la tierra tiene comportamiento monopolista. El resultado de las observaciones previas es, por lo tanto, que la tierra es un bien diferenciable (por atributos irrepetibles en su conjunto, por ejemplo: fertilidad y ubicación) y se transa en un proceso de remate en control del propietario.

En Marshall (1890) se dan los pasos iniciales en el estudio del suelo urbano concentrándose en la localización de actividades productivas. Marshall realiza un paralelo entre la demanda de tierra agrícola y la de tierra para uso industrial, concluyendo que, respecto a la ubicación de la tierra, el proceso y la formación de la renta son análogos para ambos usos. Mas adelante, Hurd (1903) argumenta que la base de la localización residencial urbana es social y no económica, a pesar de que la tierra es adquirida por el mejor postor. Además, concluye que el valor de la tierra depende de la distancia en forma directa y no a través de la renta o la conveniencia, como se indicaba en estudios previos. Haig (1926) sigue con esta idea y argumenta que, en definitiva, la elección de localización es una compra de accesibilidad.

En Hawley (1950) se agrega la localización de otros agentes al análisis, argumentando que la decisión de localización es tomada en referencia tanto al valor de la tierra como a la localización de otros agentes, junto al tiempo y costo de transporte a los centros de actividad. Aparecen aquí los primeros aspectos de externalidad en la localización.

Finalmente, en Alonso (1964) se siembran las bases de una teoría microeconómica de localización urbana, que posteriormente derivó en una rama independiente de la economía denominada Economía Urbana. En su teoría Alonso recoge todas las características ya mencionadas y proporciona un método matemática y económicamente riguroso para el análisis del mercado en el contexto de remate. Así, a partir del problema clásico de maximización de utilidad, los agentes descritos por Alonso, determinan sus posturas y compiten en remates controlados por los dueños de las localizaciones.

Hasta aquí se ha analizado el equilibrio en localización, es decir, aquel que ocurre cuando la oferta de localizaciones es considerada como dada. Sin embargo, la extensión a modelos de equilibrio en el mercado inmobiliario residencial urbano requiere el desarrollo de modelos productivos de localización.

Como marco general, el comportamiento de los productores es modelado en economía urbana como el clásico problema de maximización de la ganancia, en que cada oferente debe decidir cuánto producir de cada tipo de opción de localización (o bien, *qué* tipo de opción) dados los costos de producción, manutención, etc. asociados a dicha producción. Asumiendo que el precio de una vivienda se obtiene según la regla del máximo postor, los distintos modelos se diferencian principalmente en la estructura de las decisiones, que van desde una única decisión de producción hasta una cadena decisiones realizadas por agentes que se especializan en tenencia de suelo, loteo y urbanización y construcción y oferta inmobiliaria. En los modelos encadenados, se observa la existencia de submercados que deben alcanzar un equilibrio interno además del equilibrio asociado a la localización de los agentes en las opciones ofrecidas. Algunos modelos planteados son los de Anas (1982), Anas y Arnott (1991), Martínez y Donoso (1995), Martínez y Roy (2004) y Martínez y Henríquez (2003).

Resumen de características del mercado urbano.

El mercado urbano puede ser modelado con las siguientes características:

a) El espacio es una componente esencial del mercado.
b) La localización es un bien diferenciable (o cuasi-único), por lo que los dueños de los bienes tienen poder monopólico y transan la localización al mejor postor en un proceso tipo remate.

c) Los consumidores ofrecen posturas por cada alternativa de localización disponible.
d) La decisión de localización depende de la ubicación y del entorno (socioeconómico, constructivo, medioambiental, etc.), por lo tanto, de la decisión de localización de otros agentes (externalidades de localización).
e) Los oferentes de localización tienen un comportamiento maximizador de la ganancia.

Las características b y c, provienen directamente de la formalización microeconómica del problema realizada por Alonso. Ellas definen un enfoque particular, denominado Enfoque BID, pero no único. Un segundo enfoque, denominado enfoque CHOICE, actualmente aplicado entre otros por McFadden, se obtiene al asumir que los precios de las localizaciones son un dato, esto es que no se resuelven endógenamente en el proceso de transacción, por lo que los agentes no ofrecen posturas sino que directamente maximizan su utilidad para tomar la decisión. Obviamente ambos enfoques están relacionados, y en ciertas condiciones son equivalentes (Jara, Jofré y Martínez, 2003) y en conjunto dan origen al Modelo BID-CHOICE (Martínez. 1992).

La siguiente sección plantea formas en que se han modelado estas características del mercado en la literatura.

2.2.2 Formas de modelar las características del mercado.

Según lo descrito en la sección previa, las principales características del mercado inmobiliario residencial urbano hacen referencia a:

- Espacio.
- Transacción.
- Comportamiento de los consumidores de localización residencial.
- Externalidades de localización.
- Comportamiento de los oferentes de localización residencial.

De estas, la primera es la única particularidad inherente a este mercado y que lo diferencia fuertemente de otros. El tipo de transacción puede hacer también diferencia, sin embargo, el estado del actual del arte en estas materias ha logrado demostrar para casos bastante generales la equivalencia de los procesos de transacción asumidos en los enfoque BID y CHOICE.

A continuación se presentan, para cada característica, distintos enfoques encontrados en la literatura.

Tratamiento del espacio.

La componente espacial ha sido tratada desde dos perspectivas: espacio continuo y espacio discretizado.

Inicialmente el espacio fue tratado de manera continua, con lo cuál se han obtenido modelos que asumen homogeneidad espacial, topología plana y simetría radial. Estos modelos nacen con el trabajo de Von Thünen (1826), cuyas conclusiones fueron integradas al contexto urbano por Alonso (1964). Posteriormente, en la misma línea es posible encontrar, entre los principales modelos de este tipo, a Solow (1973), Fujita (1989), Lucas y Rossi-Hansberg (2002).

En Herbert y Stevens (1960) se introduce una representación discreta del espacio que permite analizar casos más generales de espacio heterogéneo (modelos no radiales). En esa línea, Lowry (1964) enfatiza la interacción espacial postulando la existencia de un sector productivo básico y exportador que se localiza antes que las demás actividades, las cuáles se localizan en función de aquel. La interacción espacial entre zonas es modelada en una dinámica que no necesariamente resulta convergente. Este modelo constituye un aporte importante al tener la capacidad de analizar ciudades con cualquier topología y todo tipo de asimetrías vía zonificación e interacción entre zonas; sin embargo, no posee una base microeconómica, como la que se deriva a partir del trabajo seminal de Alonso. Entre los principales modelos de este segundo tipo se encuentran además los de Wilson (1970), Rosen (1974), McFadden (1978), Ellickson (1981), Anas (1982), Wilson y Bennet (1985), Miyamoto y Kitasume (1989), Martínez (1992), Martínez y Donoso (1995) y Martínez y Henríquez (2003).

Desde el punto de vista operativo, los modelos de espacio discretizado han sido los más considerados, pues son aplicables a cualquier ciudad. En general, los resultados más interesantes son obtenidos al aplicar incertidumbre a dichos modelos, ya sea en el contexto de la teoría de utilidad aleatoria (Domencich y McFadden, 1975) o de postura aleatoria (Ellikson, 1981).

Tratamiento de la transacción.

La transacción en este mercado está sujeta al hecho de que el bien transado (localización) es un bien diferenciable, lo que significa que no existe un proceso que permita producir dos localizaciones idénticas. Esto se debe a que la ubicación de un bien puede ser muy similar a la de otro (contiguo) pero no idéntica.

Por este motivo, Von Thünen (1826), al tratar el caso del suelo agrícola, argumenta que el proceso de transacción es un remate en dominio del dueño de la tierra, la cuál es asignada al mejor postor. Desde ahí en adelante muchos economistas consideran que éste es el mecanismo que domina el mercado. Este enfoque se conoce como enfoque BID, al que pertenecen entre otros Alonso (1964), Rosen (1974), Ellickson (1981), Martínez y Donoso (1995) y Martínez y Henríquez (2003).

Los únicos modelos que se apartan de este razonamiento son aquellos que asumen el precio de los bienes como un dato, por lo que los agentes se comportan escogiendo localizaciones a partir del clásico problema de maximización de utilidad. Este enfoque Se conoce como enfoque CHOICE, al que pertenecen entre otros McFadden (1978), Anas (1982).

Tratamiento del comportamiento del consumidor.

En Alonso (1964) se da nacimiento a una teoría microeconómica de localización residencial urbana donde los consumidores se comportan como individuos económicamente racionales. Deriva las posturas de Von Thünen para el caso urbano a partir del problema de maximización de utilidad del consumidor, invirtiendo la función de utilidad indirecta condicional, para obtener la familia de funciones de disposición a pagar del agente por localización.

El tratamiento de la componente espacial se limita a considerar la distancia a un único centro de negocios (CBD[6]), obteniendo un modelo de ciudad circular con simetría radial y topología plana, considerando por lo tanto el análisis de ciudades con espacio homogéneo. Este modelo microeconómico resulta fundamental en la investigación futura ya que por primera

[6] Por sus siglas en ingles: Central Business District

vez se determina la forma en que los consumidores toman sus decisiones y encuentran un equilibrio.

En su modelo agrega a las variables de decisión clásicas (distancia y costos de transporte) el tamaño del terreno, variable largamente olvidada en investigaciones previas. Posteriores desarrollos extienden la teoría para incluir más variables al análisis: Solow (1973), Fujita (1989), Lucas y Rossi-Hansberg (2002).

El trabajo microeconómico seminal de Alonso también es aplicado en modelos de espacio discretizado, tanto en el contexto BID (de remate) como en el CHOICE (maximización de utilidad).Otros trabajos presentados previamente que poseen esta consistencia económica son los de Rosen (1974), McFadden (1978), Ellickson (1981), Martínez (1992), Martínez y Donoso (1995) y Martínez y Henríquez (2003).

Tratamiento de las externalidades de localización.

El tratamiento de las externalidades no ha sido abordado tan ampliamente en la literatura de Economía Urbana. En general, la presencia de externalidades a la localización tiene que ver con el efecto que la decisión de localización de un agente tiene sobre la decisión de los demás.

Las principales fuentes de externalidades consideradas provienen de la valoración del entorno socioeconómico, constructivo y medio ambiental. El primero hace referencia a la localización de los consumidores, el segundo las decisiones de los productores de bienes inmuebles y la última a decisiones del planificador urbano (provisión de áreas verdes, vialidad y otros bienes públicos, niveles de contaminación y ruido, etc.).

La consideración de externalidades agrega gran complejidad al análisis, generando modelos no lineales, que en general son extremadamente difíciles de tratar en la búsqueda de soluciones analíticas. Algunos autores que han enfrentado esta problemática son Fujita (1989), Martínez y Donoso (1995), Martínez y Henríquez (2003), Rossi-Hansberg (2004) y Fujita y Thisse (2002).

Tratamiento del comportamiento de la oferta.

Como se comentó en la sección previa, el comportamiento de los productores es modelado en economía urbana como el clásico problema de maximización de la ganancia. Esto significa que el oferente decide cuánto producir de cada opción de localización de manera de maximizar su ganancia considerando los costos asociados con la producción.

Los modelos se diferencian principalmente en la estructura de las decisiones involucradas. En efecto, Anas (1982), Martínez y Donoso (1995) y Martínez y Henríquez (2003) proponen modelos de decisión en una etapa, en que los agentes oferentes desarrollan completamente el producto y deciden cuanto ofrecer a los consumidores finales. Anas y Arnott (1991) y Martínez y Roy (2004) proponen modelos de decisión en tres etapas, en que el desarrollo de los bienes pasa por diferentes agentes y submercados. En estos casos existe una cadena de decisiones y agentes que conduce a la oferta final de bienes.

Una última diferencia entre estos modelos radica en la naturaleza de los costos considerados. Mientras algunos consideran los costos de producción como hundidos, otros los consideran relevantes en las decisiones. Se pueden encontrar también costos de manutención, costos de transformación de unos bienes en otros, y efectos de economías de escala y diversidad en los costos.

Finalmente, todos estos modelos han sido desarrollados en el contexto de espacio discretizado, por lo que son factibles de operacionalizar. Incluso algunos de ellos cuentan con versiones operativas prototipo.

En la siguiente sección se analiza la existencia de modelos operativos de equilibrio.

2.2.3 Modelos operativos de equilibrio inmobiliario.

Un modelo de equilibrio inmobiliario residencial urbano debe considerar tanto demanda de bienes residenciales como oferta de los mismos. Se considera así que un mercado de este tipo se encuentra en equilibrio cuando todos los bienes inmuebles ofrecidos son utilizados y todos los demandantes se han localizado.

El camino para la construcción de modelos operativos se inicia con la integración de la incertidumbre a la investigación, a través de distintos tipos de modelos: Wilson (1970) y Wilson y Bennet (1985) utilizan modelos entrópicos; McFadden (1978) y Miyamoto y Kitasume (1989) utilizan modelos de utilidad aleatoria; Ellickson (1981), Martínez y Donoso (1995) y Martínez y Henríquez (2003) utilizan modelos de postura aleatoria (BID o remate).

Tanto los modelos de utilidad aleatoria como los de postura aleatoria han sido en general operacionalizados en modelos tipo Logit, lo cuál, bajo ciertas condiciones, los hace equivalentes a una familia de modelos entrópicos. De este modo la teoría microeconómica de Alonso ha sido extendida al estudio de ciudades con topologías variadas y modelos de espacio discretizado como el de Lowry (1964), pero microeconómicamente consistentes, resultando en modelos aplicables a la realidad como herramientas de análisis.

La introducción de incertidumbre ha sido justificada tanto por problemas de información en el mercado, como por desconocimiento de todas las variables por parte del modelador.

A partir del problema de maximización de utilidad se han derivado dos líneas en el diseño de modelos de estudio del mercado urbano: modelos tipo Choice (en la línea de McFadden de renta exógena) y modelos tipo BID (en la línea de Alonso de máxima postura y renta endógena). Martínez (1992) inicia el camino para demostrar que los resultados de ambos tipos de modelos son equivalentes bajo competencia y especulación. Genera a partir de este resultado un modelo de equilibrio para el mercado residencial urbano (oferta dada), consistente con ambos enfoques que denomina equilibrio BID-CHOICE. La demostración definitiva y más general, fue recientemente alcanzada por Jara, Jofré y Martínez (2003).

Entre los modelos de equilibrio en el mercado inmobiliario, es decir, aquellos que consideran tanto el comportamiento de los consumidores como de los productores, está el de Martínez y Donoso (1995), que en la línea BID-CHOICE toma en cuenta externalidades de localización. La oferta de bienes inmuebles es tratada a través de un modelo de series de tiempo que responde a rentas, costos y características tanto zonales como constructivas, sin un comportamiento microeconómicamente consistente en este aspecto. El estudio desemboca en el modelo MUSSA[7], que se basa en la teoría BID-CHOICE e incluye además la planificación urbana integrando al modelo la existencia de planes reguladores zonales, que

[7] Modelo de Uso de Suelos de Santiago.

restringen la oferta de bienes inmuebles al interior de la ciudad, y la existencia de incentivos económicos a la localización vía subsidios e impuestos al arriendo. El modelo resulta muy eficiente en el cálculo del equilibrio y ha sido aplicado con éxito a la ciudad de Santiago de Chile.

En Martínez y Henríquez (2003) se extiende MUSSA al caso de oferta estocástica de localizaciones, considerando un modelo de producción en una etapa, operacionalizado como un modelo de elección discreta en las alternativas a ofrecer. El nuevo modelo, llamado RB&SM[8], posee fundamento microeconómico tanto en demanda como en oferta, y es enteramente basado en una plataforma Logit Multinomial. De este modo las propiedades de convergencia y eficiencia en el cálculo del modelo MUSSA son heredades y mejor explotadas por esta nueva versión, lo que hace de él una herramienta económica robusta, parcialmente probada y factible de ser aplicada a la realidad. Las propiedades de este último modelo, ha llevado a escogerlo como representación del equilibrio del mercado dentro de este estudio. Esto significa que el modelo operativo que es construido más adelante en este informe está basado en el modelo RB&SM, cuya descripción puede ser consultada por el lector en el capítulo IV de este informe.

La siguiente sección aborda la literatura asociada a bienestar y eficiencia, con aplicaciones en el mercado urbano, y modelos de planificación óptima urbana.

2.3 Teoría del Bienestar.

Cuando se trata de decidir sobre la planificación urbana aparecen dos herramientas fundamentales comúnmente utilizadas, estas son: aplicación de incentivos económicos tales como subsidios y aplicación de restricciones al uso del suelo como son los planes reguladores. La primera de estas herramientas ha sido estudiada desde hace bastante tiempo, encontrando, por ejemplo, en distintos tipos de impuestos una forma de combatir la ineficiencia e inequidad que producen algunos tipos de externalidad en ciertos mercados (NG, Yew-Kwang, 1979 cap. 7; Varian, 1992 cap. 24). La rama de la economía que se preocupa de los problemas de eficiencia y políticas óptimas, corresponde a la economía del bienestar.

[8] Random Bidding and Supply Model

2.3.1 Resultados de eficiencia.

El término eficiencia es utilizado aquí en el siguiente sentido:

> ***Definición: Pareto eficiencia.*** (Varian 1992, pp 265)
> *Una asignación [de recursos] es eficiente en el sentido de Pareto cuando no es posible mejorar el bienestar de todos los agentes. Esto es, cuando cada uno de los agentes disfruta del mayor bienestar posible, dadas las utilidades de los demás.*

En otras palabras una asignación de recursos se dice Pareto eficiente si no existe una reasignación de los mismos recursos que aumente el bienestar (utilidad) de uno o más agentes sin empeorar el bienestar de otro

Teoremas del Bienestar

Basado en esta definición de eficiencia, la teoría del bienestar sustenta dos resultados centrales conocidos como primer y segundo teorema de bienestar. Estos teoremas se aplican a mercados perfectamente competitivos y en términos simples dicen lo siguiente:

> ***Primer Teorema de Bienestar.*** (Varian 1992, pp 381).
> *Si un par de vectores de asignaciones y precios (x,p) es un equilibrio walrasiano, entonces el vector de asignaciones x es eficiente en el sentido de Pareto.*

En otras palabras el equilibrio de una economía que es perfectamente competitiva es Pareto eficiente.

> ***Segundo Teorema de Bienestar.*** (Varian 1992, pp 382).
> *Si x>0 es una asignación eficiente en el sentido de Pareto, con preferencias convexas, continuas y monótonas, entonces x es un equilibrio walrasiano cuando las dotación iniciales son iguales a x.*

En otras palabras, cualquier asignación de recursos Pareto eficiente puede ser alcanzada, bajo competencia perfecta, a condición de redistribuir adecuadamente las dotaciones iniciales.

Es posible demostrar que cuando se considera una función de bienestar social (función a valores reales, creciente o al menos no decreciente en cada uno de sus argumentos, que considera el bienestar de todos los agentes consumidores en la economía) y la asignación de recursos se obtiene de maximizar esa función, entonces la asignación es eficiente, obteniéndose las siguientes proposiciones:

> ***Proposición 1.*** (Varian 1992, pp. 390)
> *Si un vector de asignaciones x maximiza una función social de bienestar, entonces x es eficiente en el sentido de Pareto.*

En otras palabras, Toda asignación que maximiza una función de bienestar social, es eficiente en el sentido de Pareto.

> ***Proposición 2.*** (Ver Varian 1992, pp. 391)
> *Sea x un vector de asignaciones Pareto eficiente en que x es mucho mayor que cero en todas sus componentes. Si las funciones de utilidad de los agentes son cóncavas, continuas y monótonas, entonces x maximiza la función* $\sum_i a_i u_i(x_i)$*, donde* u_i *es la utilidad del agente i, y* a_i *es el inverso de su utilidad marginal del ingreso.*

En otras palabras, toda asignación Pareto eficiente maximiza alguna función de bienestar social

De este modo determinar eficiencia en un equilibrio de mercado significa determinar una función de bienestar social y verificar que una solución maximizadora sea la asignación de recursos del equilibrio. Inversamente, el resultado de maximizar una función de beneficio social es una asignación eficiente, pero no necesariamente un equilibrio.

Una forma de realizar la reasignación de dotaciones iniciales, a la que referencia el segundo teorema de bienestar, corresponde a la aplicación directa de subsidios adecuados a los agentes en el mercado. De hecho, en condiciones normales, este tipo de subsidios es superior, en términos de bienestar, a subsidios indirectos vía precios (Varian, 1992, pp.141-142).

2.3.2 Fuentes de ineficiencia.

Como indica el primer teorema del bienestar, los equilibrios en mercados competitivos son eficientes. Pero ¿qué ocurre en mercados que no cumplen con esta condición? O bien ¿qué condiciones hacen que un mercado pierda la propiedad de eficiencia de sus equilibrios?

No existe una única condición de este tipo, pero muchas de ellas son bien conocidas en economía. Entre estas condiciones es posible encontrar las siguientes:

- Existencia de efectos de las decisiones de los agentes en los precios: monopolios, oligopolios, etc.
- Existencia de externalidades en la oferta o la demanda.
- Existencia de bienes públicos.
- Problemas de Información.
- Otras.

En términos concretos cada uno de los elementos de la lista anterior no hacen más que levantar algunos de los supuestos que subyacen al modelo de competencia perfecta. Por ejemplo, el primero de ellos levanta el supuesto de que los agentes son tomadores de precios.

2.3.3 Principales resultados para la teoría urbana.

A continuación se analizan los elementos principales detectados como fundamentales en el mercado urbano, desde el punto de vista de la eficiencia del mismo.

<u>Efecto de externalidades</u>

Por externalidad, se entiende a los efectos no pecuniarios que las decisiones de un agente producen en el bienestar de otros.

En el mercado urbano existen las llamadas externalidades de localización que corresponden al efecto que la localización de unos agentes tiene sobre la utilidad de otros. Esto se traduce a efectos sobre la disposición a pagar de los agentes, que llevan a estructuras de localización posiblemente segregadas socio económicamente, como la que se observa en Santiago de Chile. En efecto, la Figura 1.1 del capítulo anterior, muestra este hecho.

La presencia de estas externalidades puede ser una causa de ineficiencia, debido a que un agente al tomar su decisión de localización asume que los demás agentes ya han tomado la suya y de esta manera no percibe su propia injerencia en el bienestar de los demás. Así, "lograr eficiencia con externalidades significa esencialmente asegurarse de que los agentes pagan el precio correcto por sus acciones" (Varian, 1992, pp 507). Por esta razón, una alternativa es utilizar subsidios que aseguren que se alcanzan los precios correctos.

El poder Monopólico

El poder monopólico en este mercado está concentrado en los dueños de los bienes, quienes los asignan al mejor postor. Sin embargo, este comportamiento corresponde al de un monopolio perfectamente discriminante, que como tal no induce ineficiencias en el mercado (Ver Varian, 1992, pp 286-287).

Problemas de Información

Los problemas de información están relacionados con comportamientos especulativos en el remate e incertezas en la estimación de los atributos de las localizaciones. Algunos de estos efectos pueden ser modelados a través de aleatoriedad en las funciones de comportamiento de los agentes, aunque la mayoría de los modelos aplicados en economía urbana no los incluye.

Si estos problemas están presentes entonces el equilibrio resultante no será eficiente, debido a que los agentes mejor informados sacarán partido unilateral de esta ventaja (Ver Varian 1992, cap. 25).

Espacio

La existencia de la componente espacial genera la cuasi unicidad del bien transado, debido a que distancia y tiempo se relacionan inversamente a través del costo de transporte, y a que no existe un proceso productivo que genere dos localizaciones exactamente idénticas. Así surge el mecanismo de remate como aquel que dirige la asignación de bienes.

En si misma esta característica no incluye ningún tipo de ineficiencias al mercado.

2.4 Aplicaciones de la Teoría del Bienestar en Economía Urbana.

En Herbert y Stevens (1960) se da comienzo a una línea que ha estudiado el concepto de localización óptima en economía urbana. En su trabajo plantean un modelo de optimización de una función que puede ser vista como medida del beneficio social, implementando el mecanismo de fijar el nivel de utilidad de los agentes en el mercado (recordar que la disposición a pagar de Alonso se obtiene de fijar la utilidad e invertir), previo al proceso de optimización. De este modo obtiene una asignación para cada nivel de utilidad. Diversos autores han aplicado esta técnica en el contexto urbano. Por esta línea se ha llegado a formular propiedades equivalentes al primer y segundo teoremas del bienestar, para modelos urbanos específicos.

Como ejemplo de esto, Fujita (1989) utiliza la técnica de Herbert y Stevens para demostrar que existe eficiencia en el caso urbano, para una economía de transferencias inmobiliarias, sin externalidades, dedicada a la producción de un único bien dependiente de la localización. Utilizando como función de beneficio social el excedente total de la ciudad (que con ingresos fijos es equivalente a minimizar el costo social total), concluye que el equilibrio competitivo es eficiente (Primer teorema del bienestar) y que cualquier asignación eficiente de los recursos puede ser alcanzada a través de la elección de un conjunto apropiado de subsidios al ingreso de los agentes (segundo teorema del bienestar). En el mismo contexto muestra que cuando hay externalidades en la localización entonces el equilibrio ya no es eficiente, debido a que un agente al tomar su decisión de localización asume que los demás agentes ya han tomado la suya y de esta manera no percibe su propia injerencia en el bienestar de los demás, detectando, para este caso, esquemas de impuestos óptimos. Sin embargo, cuando considera la producción de tierra residencial en el mercado, concluye que si el productor considera el impuesto en su propio problema de decisión entonces se alcanza el esquema óptimo.

Argumenta además, que la labor de recolector, que subyace a tomar el subsidio como parte de su decisión, es muy impopular para los oferentes, y para evitarlo propone utilizar regulaciones en el tamaño mínimo de los lotes. Sin embargo, advierte que estas sólo benefician a los oferentes y disminuyen el bienestar de los residentes, concluyendo que el beneficio potencial de este tipo de políticas es absorbido completamente por un aumento en la renta y los residentes quedan en peores condiciones. Es interesante que una de las diferencias entre ambas consideraciones recae en el agente sobre el cual se aplica el subsidio. Si bien en todos los casos debido a la existencia de remate el subsidio afecta al consumidor, en el primer caso recae directamente sobre él y en el segundo sobre el productor, es decir, si el propietario del terreno (quién posee los derechos de propiedad) participa del mercado en términos de la decisión de transacción entonces se alcanza eficiencia. En el primer caso, sin embargo, el propietario de los bienes no participa de las decisiones de mercado, pues actúa solo a través de una regla fija: asigna los recursos al máximo postor.

Otro caso donde el mercado resulta ineficiente es mostrado por Rossi-Hansberg (2004) en el mismo contexto de Fujita. El modelo de ciudad, desarrollado inicialmente en Lucas y Rossi-Hansberg (2002), plantea la doble decisión espacial de los agentes consumidores con respecto a la localización residencial y el lugar de trabajo. Esta interacción, unida a economías de aglomeración productivas y costos de transporte, genera equilibrios no monocéntricos e ineficientes. Usando este modelo, en Rossi-Hansberg (2004) se detectan esquemas de subsidios óptimos y alternativas de regulación zonal óptima. En particular, los esquemas de subsidios corresponden a subsidios al trabajo, que el gobierno paga a las empresas por contratar más trabajadores, puesto que la fuente de ineficiencia se produce en la relación entre empresas y trabajadores. La estructura óptima de la ciudad no incluye zonas mixtas de trabajo y residencia. Respecto de la zonificación, argumenta que no es una política eficiente para combatir las externalidades, sin embargo, sí resulta útil pues permite sacar ventaja de ellas.

Como se ha visto, en general la literatura sobre el tema plantea modelos que, si bien permiten encontrar direcciones sobre las cuales se deben tomar las decisiones en planificación, no se convierten en herramientas operativas que indican “cuál es la mejor decisión” en un caso real, debido principalmente a los niveles de simplificación en el modelamiento espacial de la ciudad. Así, dentro de la exhaustiva revisión bibliográfica realizada, la pregunta sobre subsidios óptimos o el valor social de un conjunto de regulaciones, siguen abiertas en el caso urbano.

2.5 Síntesis del capítulo.

Se ha presentado brevemente alguna literatura correspondiente a economía urbana, dando especial énfasis en la microeconomía del consumidor, pues es donde han existido mayores cambios y avances en la investigación, que como consecuencia de esto, es más diversa. Se han presentado principalmente modelos Bid (de remate), pues dentro de esta categoría el modelo RB&SM ha sido detectado como el mejor candidato a representar el equilibrio, al interior del modelo operativo de planificación óptima que se persigue en este estudio.

La elección de RB&SM se debe su buen modelamiento de las características del mercado, su fundamento microeconómico, su calidad operativa, su eficiencia en el cálculo, y a su aplicabilidad a ciudades reales, parcialmente probada por la aplicación a Santiago de Chile de su predecesor MUSSA.

En el contexto de este modelo estocástico de elección discreta, muy flexible a la hora de considerar interacción espacial y externalidad entre agentes, no se conoce estudios previos que permitan responder las preguntas que animan este trabajo. Sin embargo, algunos modelos que resuelven problemas teóricos, pero no operativos, permiten una referencia para contrastar aquellos que se obtienen en este estudio (Fujita, 1989; Rossi-Hansberg, 2001). Algunos de estos estudios indican que los teoremas del bienestar se cumplen en el mercado urbano y que la presencia de externalidades genera ineficiencias. Se detecta así que las externalidades de localización corresponden a fuentes de ineficiencia, que podrían llevar a estados de segregación socioeconómica, como el observado en Santiago de Chile.

Así las principales conclusiones de este capítulo son las siguientes:

1. Fujita (1989), para el enfoque de remate (BID) en localización urbana, ha mostrado que:
    - 1.1 Las externalidades de localización son fuentes de ineficiencia en el mercado urbano.
    - 1.2 El mercado de localización residencial sin externalidades es eficiente.
    - 1.3 Bajo externalidades de localización, se pueden detectar esquemas de subsidios óptimos, que corrigen el efecto externo en los precios.
    - 1.4 Si el oferente considera el subsidio en su propio problema de decisión, se alcanza el óptimo.

2. Martínez (1992) y Jara, Jofré y Martínez (2003), han mostrado la equivalencia entre los modelos de tipo BID y CHOICE para el mercado urbano en condiciones de competencia.
3. No existen modelos operativos que permitan la detección de subsidios óptimos.
4. Santiago de Chile es una ciudad altamente segregada, lo que permite sospechar de la existencia de externalidades a la localización, por lo que un modelo operativo de planificación aplicado a tal ciudad es útil.
5. El modelo MUSSA (Martínez y Donoso, 1995) es un modelo operativo de equilibrio urbano aplicado a la ciudad de Santiago, con buenas propiedades de cálculo y manejo de externalidades de localización, pero sin rigurosidad microeconómica en el modelamiento de la oferta.
6. El modelo RB&SM (Martínez y Henríquez, 2003), sucesor de MUSSA, hereda y supera las propiedades de su antecesor, y modela la oferta desde un punto de vista microeconómico. Este modelo incluye la existencia de externalidades a la localización y regulaciones. Al ser el sucesor de MUSSA, su aplicabilidad a la ciudad de Santiago está parcialmente probada.
7. Entre los modelos posibles se escogió RB&SM como la mejor alternativa para representar el equilibrio en un modelo de planificación. Esta elección se debe ha:
    - 7.1 Su buen modelamiento de las características del mercado, incluyendo externalidades de localización.
    - 7.2 Su fundamento microeconómico.
    - 7.3 Su calidad operativa.
    - 7.4 La eficiencia en el cálculo de los algoritmos desarrollados.
    - 7.5 Su aplicabilidad a ciudades reales, parcialmente probada por la aplicación a Santiago de Chile de su predecesor MUSSA.
    - 7.6 Sus posibilidades ciertas de aplicabilidad en Santiago, ciudad aparentemente sujeta a externalidades de localización.

Los resultados de este capítulo serán utilizados más adelante para contrastar aquellos obtenidos a partir del modelo operativo de planificación óptima de subsidios urbanos, núcleo de este estudio. En el capítulo que sigue se plantea el modelo general de planificación óptima, cuya versión operativa se desarrolla constructivamente en los capítulos que le siguen, partiendo por la descripción del modelo de equilibrio RB&SM y sus propiedades.

III. Modelo General de Planificación Óptima.

3.1 Introducción.

En este capítulo se introduce la definición conceptual del problema de planificación óptima que es el punto central de este trabajo. El resto del informe se aboca a definir las componentes de versiones operativas de este modelo y encontrar sus soluciones.

Se define en primer lugar un problema general de planificación óptima OPM[9] en subsidios y regulaciones, para derivar luego al modelo que se enfrenta en el resto del documento: el problema general de planificación óptima de subsidios urbanos, denominado OSPM[10] por sus siglas en inglés.

3.2 Modelo de Planificación Óptima.

Considérese el problema que enfrenta un planificador urbano racional que debe decidir el nivel de instrumentos de intervención: subsidios y regulaciones, que debe aplicar al mercado inmobiliario dentro de una ciudad.

Matemáticamente la elección de la mejor combinación puede ser traducida a un problema de maximización de una función que represente un criterio de selección, escogiendo la mejor alternativa dentro de un conjunto razonable y que permita al mercado alcanzar un equilibrio.

Formalmente, sea $t \in \mathrm{T}$ el vector de subsidios aplicados, donde T es el conjunto de alternativas que tiene el planificador, definido exógenamente por el presupuesto o la política imperante. Sea $\rho \in \mathrm{R}$ un conjunto de regulaciones que son aplicables en el mercado, donde R son todos los conjuntos de este tipo permitidos por la legislación o política vigente. Un par (t,ρ) se denomina en lo que sigue un **par de políticas de planificación**.

[9] OUPM: Optimal Urban Planning Model.
[10] OUSPM: Optimal Urban Subsidies Planning Model.

Sea $e \in \mathrm{EQ}(t,\rho;\psi)$ el vector de variables que representan un equilibrio en el mercado inmobiliario con un comportamiento descrito por el vector de parámetros ψ, cuando se aplica el par de planificación (t,ρ). Sea $\mathrm{EQ}=\mathrm{EQ}(\mathrm{T},\mathrm{R};\psi)$ el conjunto de todos los equilibrios alcanzables vía planificación en este mercado. Se considera un estado inicial de equilibrio $e^0 \in \mathrm{EQ}(t^0,\rho^0;\psi)$ y se denomina $\mathrm{EQ}(t,\rho;\psi,e^0)$ al conjunto de equilibrios alcanzables, a partir del estado inicial e^0, al cambiar el par de planificación desde (t^0,ρ^0) a (t,ρ). Se denota además $\mathrm{EQ}^0=\mathrm{EQ}(\mathrm{T},\mathrm{R};\psi,e^0)$ al conjunto de equilibrios alcanzables desde e^0 vía planificación.

Sea, finalmente, $f(\cdot,\cdot,\cdot;\psi,e^0) : \mathrm{T}x\mathrm{R}x\mathrm{EQ}^0 \rightarrow \Re$ una función a valores reales. En estas condiciones el **problema de planificación urbana, OUPM**, es:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{(t,\rho)\in \mathrm{T}\times R} & f\left(t,\rho,e;\psi,e^0\right) \\ s.a. & e \in \mathrm{EQ}\left(t,\rho;\psi,e^0\right) \end{array} \tag{3.1}$$

La función f representa el criterio que el planificador utiliza en la toma de decisiones. Indica la voluntad política y puede ir desde criterios puramente políticos como maximizar el número de votantes para una determinada coalición, hasta puramente económicos como maximizar una función de beneficio social. Este último enfoque es el adoptado más adelante en este trabajo.

Se observa en la restricción del problema (3.1) la necesidad de un mapeo que a cada par de planificación (t,ρ) le asocie el conjunto de equilibrios alcanzables por el mercado a partir de la situación inicial en que este se encuentra.

Para definir un problema de planificación particular, hay que especificar los distintos elementos que aparecen en el modelo OUPM. Se debe definir en primer lugar los dominios de búsqueda de las variables T y R. Determinar el primero de ellos significa decidir sobre el tipo de subsidios que se estudiará (por ejemplo: monto fijo por alternativa de localización, porcentaje del valor de la vivienda, etc.) y el presupuesto destinado a la intervención del mercado. Determinar el segundo significa decidir sobre el tipo de regulaciones al uso de suelo que se aplicarán en el mercado. Por otro lado, dado ψ y e^0, también se debe definir la función de criterio $f(\cdot,\cdot,\cdot;\psi,e^0)$ y el espacio de equilibrios $\mathrm{EQ}(t,\rho;\psi,e^0)$ asociados, para cualquier par de planificación (t,ρ) dado.

El efecto de las regulaciones debe ser analizado con mucho detenimiento, debido a que, aunque son equivalentes a un costo para los oferentes, no es claro a primera vista el efecto que estas tienen en la utilidad de los consumidores o en la función de costos cuando existen externalidades o economías de escala o diversidad. Más aún, la estructura de costos de la aplicación de regulaciones por parte del planificador puede ser compleja, debido a la necesidad de modificaciones legales y de fiscalización. En este trabajo, no se estudian estas complejidades asumiendo un costo de regulación nulo o despreciable, por lo que el problema que se enfrenta en lo que sigue, es un **problema de planificación óptima de subsidios urbanos, OUSPM**, que no incluye las regulaciones como variable de optimización. Así dado un conjunto de regulaciones ρ^0 y la función a valores reales $f(\cdot,\cdot;\rho^0,\psi,e^0) : \mathrm{TxEQ}^0 \to \Re$, este problema es:

$$\begin{aligned} \max_{t \in \mathrm{T}} \quad & f\left(t, e; \rho^0, \psi, e^0\right) \\ s.a. \quad & e \in \mathrm{EQ}\left(t, \rho^0; \psi, e^0\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

La existencia de soluciones al problema de planificación (3.2) no está asegurada en el caso general; sin embargo, lo estará si TxEQ^0 es compacto y $f(\cdot,\cdot,\cdot;\psi,e^0)$ es continua. Especial atención requiere el conjunto de equilibrios EQ, que necesita la definición de un modelo de equilibrio urbano. Se deja entonces los problemas de existencia y unicidad para ser estudiados más adelante, una vez que se defina un modelo operativo detallado en capítulos posteriores.

Finalmente, para resolver los problemas (3.1) o (3.2) de manera directa es necesario calcular gran cantidad de equilibrios, por lo que la eficiencia en el cálculo de estos es crítica. Esto significa que se debe contar con un algoritmo de solución muy eficiente para el modelo de equilibrio escogido. Por esta razón, se ha optado por utilizar el modelo RB&SM, descrito en el capítulo siguiente, para la construcción de tal modelo operativo,

3.3 Síntesis del capítulo.

Este capítulo introduce el modelo general de planificación urbana que se intenta resolver en este estudio. Se formula tanto un modelo general de planificación óptima, denominado, UOPM, como la versión enfocada exclusivamente a subsidios óptimos, denominado UOSPM, que se intenta resolver en el modelo operativo que se construye a partir del capítulo siguiente.

Los dos capítulos que siguen muestran el equilibrio y la función objetivo utilizadas para operacionalizar el modelo. A continuación se definen dos modelos de solución: el primero, de gran complejidad analítica, resuelve el modelo de planificación de manera directa, y el segundo, utiliza una estrategia indirecta y permite un estudio analítico de los subsidios óptimos.

IV. Modelo de Operativo de Equilibrio.

4.1 Introducción.

En este trabajo se utiliza el modelo RB&SM[11] como modelo operativo de equilibrio en el mercado urbano. Este modelo se basa en la teoría BID-CHOICE desarrollada por Martínez (1992). El modelo considera externalidades de localización, regulaciones y es extendido aquí para la aplicación de subsidios. Su predecesor inmediato es conocido como MUSSA[12], un modelo operativo de equilibrio urbano aplicado con éxito a la ciudad de Santiago de Chile, actualmente utilizado a nivel gubernamental para estudiar los efectos de distintas políticas de transporte y de uso de suelos. A pesar de su éxito, ciertas rigideces en la predicción determinística de la oferta inmobiliaria llevaron a plantear la construcción de un nuevo modelo. Como resultado de este esfuerzo nace RB&SM, presentado en Martínez y Henríquez (2003), modelo que, además de un fundamento económico riguroso y un modelo de oferta estocástico (y, por lo tanto, más flexible), posee un algoritmo de solución con características algorítmicas únicas en cuanto a sus propiedades de convergencia, que facilita el cálculo de los numerosos equilibrios necesarios para el funcionamiento de los algoritmos directos de solución del modelo operativo de planificación óptima de subsidios planteado en el capítulo VI.

En el presente capítulo se describe brevemente el modelo operativo RB&SM extendido para el uso de subsidios[13] y algunas propiedades importantes del modelo. Estas propiedades permiten su utilización como modelo de equilibrio dentro de algoritmos de optimización, facilitan el análisis de los resultados que estos arrojan y permiten plantear el modelo alternativo de solución desarrollado en el capítulo VII.

En este capítulo se introduce notación, nomenclatura y variables asociadas al equilibrio urbano que serán utilizadas en todo el resto del informe. Por otra parte, la derivación de las fórmulas planteadas aquí, se encuentran en el Anexo A y la demostración de todas las propiedades en el Anexo B.

[11] Random Bidding and Supply Model o Modelo estocástico de posturas y ofertas.
[12] Modelo de Uso de Suelos de Santiago.
[13] La extensión de RB&SM al uso de subsidios es un desarrollado de este estudio, posterior Martínez y Henríquez (2003).

4.2 El Modelo RB&SM extendido a subsidios.

RB&SM es un modelo estocástico de equilibrio estático en el mercado inmobiliario urbano. Calcula el equilibrio asumiendo que las opciones de localización son bienes diferenciables, discretos en número y adjudicados en un mercado de remate al mejor postor. Su construcción operativa se basa en un enfoque BID discreto (Rosen,1974; Martínez, 1992) y en una plataforma Logit MultiNomial (en adelante LMN) que permiten manejar eficientemente las complejidades del mercado inmobiliario, producto de externalidades de localización y economías de escala o diversidad en la oferta. Así, RB&SM incluye las principales características del mercado descritas en el capítulo previo.

Los consumidores son hogares[14] segmentados por clusters de ingreso, con variabilidad idiosincrásica en el comportamiento al interior de cada cluster, quienes hacen posturas por opciones de localización de acuerdo a su disposición a pagar (Alonso, 1964). Los oferentes maximizan su ganancia estocástica, sujetos a regulaciones zonales, ofreciendo al mercado un conjunto de opciones inmobiliarias en la ciudad. Así, dado un par de planificación (t,R)[15], se obtiene una localización de agentes, oferta inmobiliaria, rentas y ganancias de los oferentes, correspondientes a una situación de equilibrio, es decir, sin excesos de demanda ni de oferta, relativos a (t,R).

La demanda está compuesta por una cantidad finita H de agentes consumidores, segmentados en $|H|$ clusters de ingreso con comportamiento económico homogéneo, cada uno de los cuales es identificado con el subídice h. Cada cluster tiene un ingreso I_h y una cantidad H_h de agentes, tal que $\sum_h H_h = H$. Los parámetros I_h, H_h, $|H|$ y H son determinados exógenamente al modelo y se mantienen fijos. Espacialmente la ciudad está dividida en $|Z|$ zonas identificadas por el subíndice i. Existen además $|V|$ tipos de construcciones o viviendas identificadas por el subíndice v. Por lo tanto, hay en el mercado un número finito $|Z|$ x $|V|$ de alternativas de localización (v,i) cada una de las cuales será denotada, por simplicidad, vi.

[14] Las firmas también son agentes en RB&SM, sin embargo en este trabajo sólo se considera el mercado residencial, por lo que el modelo desarrollado aquí sólo considera este mercado.
[15] En este contexto, en un par de planificación dado *t* representa subsidios de monto fijo y *R* regulaciones a la oferta bienes inmuebles.

Los demandantes (consumidores) escogen entre las alternativas maximizando su utilidad y los oferentes (dueños) construyen alternativas de localización (bienes) maximizando su ganancia, alcanzándose un equilibrio estático cuando todos los agentes se localizan y ningún bien queda desocupado.

El comportamiento del consumidor es descrito por su disposición a pagar o función de postura, definida como la inversa de la utilidad indirecta condicional en la localización (Rosen, 1974; Solow, 1973; Alonso, 1964). Siguiendo a Ellikson (1981), la variabilidad en los gustos de los consumidores es representada por funciones de postura estocásticas distribuidas independiente e idénticamente (iid) Gumbel. Adicionalmente, asumiendo una función de utilidad cuasi lineal, se deriva (ver Anexo A) la siguiente función de postura para los hogares[16]:

$$B_{hvi}(t) = b_{\mathrm{h}}\left(U_h\right) + b_{hvi}\left(z_{vi}\right) + b + t_{hvi} + \varepsilon_{hvi} \qquad (4.1)$$

donde z_{vi} es un vector que describe las características relevantes de un bien con construcción tipo v en la zona i (en adelante bien vi), incluyendo índices de accesibilidad, índices de calidad del vecindario y externalidades. U_h corresponde al nivel de utilidad obtenido por el consumidor h en equilibrio. Además, la función $b_h\left(U_h\right) = I_h - U_h / UMI_h$, donde UMI_h es la utilidad marginal del ingreso (Ver Anexo A) y la función $b_{hvi}(z_{vi})$ es la valoración en dinero del consumidor h por las características positivas de la localización vi. Finalmente, t_{hvi} es el subsidio (monto fijo en dinero) para el consumidor h en la localización vi y ε_{hvi} una variable aleatoria Gumbel.

Comentario aparte merece el término b, que al ser constante no tiene ningún efecto en la localización de equilibrio, pero determina el nivel de precios (y utilidades) en el mercado, y depende de variables exógenas al modelo, como por ejemplo, variables macroeconómicas, una valor de renta de referencia, etc.

La distribución Gumbel iid de los términos de error ε_{hvi} conduce a que la probabilidad de que un hogar del cluster h sea el mejor postor en el remate por un bien vi, es decir, la

[16] Las firmas poseen una función de postura equivalente, derivada desde su problema de maximización de la ganancia y con la misma forma. En este caso los atributos más relevante de un lugar son atractividad (de clientes), acceso (a proveedores), economías de aglomeración y cercanía de los trabajadores. En este documento, sin embargo, desarrollamos el modelo para el mercado urbano residencial, aunque, con alguna investigación extra, puede su resultados pueden ser extendidos para firmas.

probabilidad de que *h* se localice en *vi*, definida como $P_{h/vi} = P\left(B_{hvi} \geq \max_g B_{gvi}\right)$, está dada por la siguiente expresión LMN (ver Anexo A):

$$P_{h/vi} = H_h \exp\left(\mu\left[B_{hvi} - r_{vi} + \frac{\eta}{\mu}\right]\right) \tag{4.2}$$

donde r_{vi} es la renta esperada de la localización *vi*, definida como la esperanza de la máxima postura, expresada como una función logsuma de las posturas, dada por:

$$r_{vi} = \frac{1}{\mu}\ln\left[\sum_h H_h \exp\left(\mu B_{hvi}\right)\right] + \frac{\eta}{\mu} \tag{4.3}$$

donde μ es el parámetro de escala de la distribución Gumbel de posturas (inversamente proporcional a la varianza) y $\eta \approx 0.577$ es la constante de Euler.

Para la oferta de bienes se asume aquí un único oferente que produce la cantidad de opciones S_{vi} que maximiza su ganancia. La ganancia π_{vi} que obtiene en la localización *vi,* es definida como la diferencia entre la renta r_{vi} y los costos de producción c_{vi} que enfrenta. Estos costos se asumen potencialmente afectados por economías de escala y diversidad según:

$$c_{vi}(S_{\bullet\bullet}) = f_{vi} + g_{vi}\sum_{ws} \xi_{wk}\left(S_{wd}\right)^{\chi_{wj}} \qquad \forall vi \tag{4.4}$$

Adicionalmente, las ganancias son asumidas estocásticas, independientes e idénticamente distribuidas Gumbel. La probabilidad de que la ganancia en la localización *vi* sea máxima, definida como $P_{vi} = P\left(\pi_{vi} \geq \max_{wj} \pi_{wj}\right)$, está dada por la siguiente expresión LMN (ver Anexo A):

$$P_{vi} = \frac{\exp\left(\lambda \pi_{vi}\right)}{\sum_{wj} \exp\left(\lambda \pi_{wj}\right)} \tag{4.5}$$

donde λ es el parámetro de escala de la distribución Gumbel de las ganancias (no necesariamente idéntico al parámetro de escala μ de las posturas). De este modo, la cantidad de opciones *vi* ofertadas son $S_{vi}=S \cdot P_{vi}$, donde *S* es la oferta total en la ciudad. El parámetro *S* es determinado exógenamente y se mantiene fijo en el modelo. Notar que $\sum_{vi} S_{vi} = S$.

La oferta dada por (4.5) está restringida a cumplir con un conjunto de regulaciones lineales[17] en cada zona, definidas como $\sum_{v} a_{vi}^{k} S_{vi} \leq R_{i}^{k}$. Para asegurar que dichas restricciones sean satisfechas, en RB&SM se utiliza el enfoque de definir una función de ganancia restringida que incorpora los multiplicadores de lagrange γ_{i}^{k} de las restricciones. Estos multiplicadores cumplen el rol de precios en el mercado, aumentando el costo de la tierra en las distintas zonas. La ganancia restringida que se aplica a (4.5) se expresa:

$$\pi_{vi} = r_{vi} - c_{vi} - \sum_{k} \gamma_{i}^{k} \tag{4.6}$$

Debido a la linealidad de las restricciones, en cada localización se puede considerar una sola restricción $\bar{k}$ activa relevante (multiplicador distinto de cero), y se tiene que $\sum_{k} \gamma_{i}^{k} = \gamma_{i}^{\bar{k}}$.

Estos multiplicadores pueden ser obtenidos reemplazando (4.6) en la restricción activa, obteniendo:

$$\begin{aligned} \gamma_{i} &= \frac{1}{\lambda} \ln \left[\frac{S}{R_{i}^{*}} \sum_{vj} a_{vi}^{*} \exp\left(\lambda\left(r_{vi} - c_{vi} - \hat{\pi}\right)\right) \right] \\ \text{con} \quad \hat{\pi} &= \frac{1}{\lambda} \ln \left[\sum_{wz} \exp\left(\lambda\left(r_{wz} - c_{wz} - \gamma_{z}\right)\right) \right] \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde $\hat{\pi}$ es interpretado como la ganancia total esperada restringida por las regulaciones; los vectores *R** y *a** son los parámetros de la regulación activa[18]. Por supuesto, si ninguna regulación es activa en la zona *i* entonces la ecuación (4.7) no es aplicable y se cumple que el multiplicador γ_i=0.

La condición de equilibrio en este modelo es la usual en economía urbana y dice que los excesos de oferta y demanda deben ser nulos. Esto puede ser traducido a la condición de que todo agente se localice en algún lugar. En términos del modelo, es expresado por $\sum_{vi} N_{hvi} = H_{h}$ donde $N_{hvi} = S_{vi} P_{h/vi}$ es el número de agentes *h* localizados en *vi*. Esta ecuación impone una restricción a los parámetros del modelo, pues la oferta total debe ser igual a la demanda total, esto es *S*=*H*, asegurando que en equilibrio todos los bienes son utilizados. La ecuación lineal de equilibrio puede ser resuelta para el término b_h que representa la utilidad

[17] Martínez y Henríquez (2003) argumentan que este tipo de regulaciones cubren un amplio espectro de las regulaciones relevantes en el mercado inmobiliario y, por lo tanto, el modelo es muy general.
[18] En (4.7) se ha suprimido el superíndice *k* para las restricciones y sólo será utilizado nuevamente cuando sea estrictamente necesario para evitar confusiones.

en la función de postura del agente *h*, fijando los niveles de utilidad que se alcanzan en equilibrio. La ecuación resultante es:

$$b_h = -\frac{1}{\mu}\ln\left[\sum_{vi} S \cdot P_{vi} \exp\left(\mu\left(b_{hvi} + t_{hvi} - r_{vi} + \frac{\eta}{\mu}\right)\right)\right] \qquad (4.8)$$

Luego, el modelo RB&SM es descrito por dos conjuntos de funciones de probabilidad LMN (ecuaciones (4.2) y (4.5)) y dos conjuntos de funciones logsuma (ecuaciones (4.7) y (4.8)) que representan restricciones lineales. La complejidad de este sistema de ecuaciones no está solamente asociada a su aplicación a problemas grandes ($|H|$, $|V|$ o $|Z|$ grandes) sino también a su naturaleza no lineal. Esta no-linealidad proviene de la interacción de los agentes en su proceso de decisión a través de efectos de externalidades en la localización descritas por el conjunto de atributos $z_{vi}=z_{vi}(P_{\cdot/\cdot i},P_{\cdot i})$ *y de* economías de escala y diversidad en la oferta, a través de las funciones de costo $c_{vi}=c_{vi}(S_{\cdot\cdot})$. Como resultado, el modelo es especificado en un sistema de cuatro ecuaciones de punto fijo interdependientes, condicionales en subsidios y regulaciones, que se puede resumir en el siguiente esquema:

$$\begin{aligned} b_h &= f_1\left(P_{\bullet/\bullet\bullet}, P_{\bullet\bullet}, b_\bullet; t_{\bullet\bullet\bullet}\right) \\ P_{h/vi} &= f_2\left(P_{\bullet/\bullet i}, P_{\bullet i}, b_\bullet; t_{\bullet vi}\right) \\ P_{vi} &= f_3\left(P_{\bullet/\bullet\bullet}, P_{\bullet\bullet}, b_\bullet, \gamma_\bullet; t_{\bullet\bullet\bullet}\right) \\ \gamma_i &= f_4\left(P_{\bullet/\bullet i}, P_{\bullet i}, b_\bullet, \gamma_\bullet; t_{\bullet\bullet\bullet}, R_\bullet^\bullet\right) \end{aligned} \qquad \forall hvi \qquad (4.9)$$

donde la primera ecuación corresponde a (4.8), la segunda a (4.2), la tercera a (4.5) y la cuarta a (4.7). La solución del sistema anterior entrega la distribución de la localización de agentes en equilibrio, los bienes inmuebles asociados a tal equilibrio y las rentas correspondientes.

Las variables económicas, tales como utilidades, posturas, rentas y ganancias, son obtenidas como valores relativos debido a que el equilibrio es invariante para traslaciones homogéneas[19] de estas variables. Para obtener valores absolutos de estos precios se calcula una componente constante *b* de las posturas, que referencia a las rentas (utilidades, posturas y ganancias) del modelo a variables exógenas. Usualmente en economía urbana este problema se resuelve tomando como referencia una renta exógena r_{ex} (habitualmente la renta de la tierra para uso agrícola en el límite urbano), sin embargo, para mantener la

[19] Entendemos como traslación homogénea de un vector (matriz) a trasladar todas las componentes del vector (matriz) en el mismo valor, es decir, el resultante de sumar una misma constante a cada componente del vector (matriz).

continuidad de las ecuaciones que definen el equilibrio, se utiliza aquí la renta promedio. Esto es:

$$b = r_{ex} - \frac{1}{S}\sum_{vi} S_{vi} r_{vi}^{*} \qquad (4.10)$$

donde r^* es la renta definida en (4.3), eliminando la constante b de las posturas.

Notar que la solución de equilibrio definida por (4.9) entrega los multiplicadores de lagrange asociados a cada regulación, los cuales representan su respectivo precio sombra y miden el costo social (precio) de la regulación. Esta información constituye un dato valioso para evaluar económicamente cada regulación. Notar que, por definición, si no existen regulaciones se tiene $\gamma_i=0\ \forall i$.

La experiencia acumulada en simulaciones de RB&SM y aplicaciones de su predecesor MUSSA, muestran muy buenas propiedades de convergencia, basadas en la plataforma común dada por la distribución de probabilidades Gumbel. Estas propiedades son vitales para resolver el problema de planificación óptima planteado más adelante en este informe, pues su solución directa requiere el cálculo de un gran número de equilibrios. La siguiente sección muestra algunas de estas propiedades y otras propiedades.

En lo que sigue se hace referencia a un equilibrio RB&SM según la siguiente definición:

Definición 4.1: Equilibrio RB&SM.

a) Se dice que la tupla $(b_{\cdot}, P_{\cdot/\cdot\cdot}, P_{\cdot\cdot}, \gamma_{\cdot}, b\ ; t_{\cdot\cdot\cdot}, R^{\cdot}_{\cdot})$ es un equilibrio RB&SM si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

1) $b_{\cdot} \in \Re^{|h|}$

2) $P_{\cdot/\cdot\cdot} \in X^1 = \left\{x \in \Re^{hv} \,/\, x_{hv} \geq 0 \wedge \sum_h x_{hv} = 1\ \forall v\right\}$

3) $P_{\cdot\cdot} \in X^2 = \left\{x \in \Re^{vi} \,/\, x_{vi} \geq 0 \wedge \sum_{vi} x_{vi} = 1\right\}$

4) $\gamma_{\cdot} \in \Re^{|i|}$ es no negativo

5) $t_{\vdots\vdots\vdots} \in M_{|h|x|vi|}(\Re)$

6) $R^{\cdot}_{\cdot} \in \Re_{|k|x|i|}$,

7) La tupla $(b_{\cdot}, P_{\cdot/\cdot\cdot}, P_{\cdot\cdot}, \gamma_{\cdot}\ ; t_{\cdot\cdot\cdot}, R^{\cdot}_{\cdot})$ satisface el sistema de punto fijo (4.9)

8) $b \in \Re$ satisface (4.10).

b) Se dice además que la tupla $(b_{\cdot},P_{\cdot/\cdot\cdot},P_{\cdot\cdot},\gamma_{\cdot},b\ ;t_{\cdot\cdot\cdot},R^{\cdot}_{\cdot})$ es un *equilibrio RB&SM regulado* si y sólo si es un equilibrio RB&SM y además existe *i* tal que $\gamma_i>0$.

c) Análogamente, se dice que la tupla $(b_{\cdot},P_{\cdot/\cdot\cdot},P_{\cdot\cdot},\gamma_{\cdot},b\ ;t_{\cdot\cdot\cdot},R^{\cdot}_{\cdot})$ es un *equilibrio RB&SM no regulado* si y sólo si es un equilibrio RB&SM y además, para todo *i* se tiene que $\gamma_i=0$. En este último caso, por simplicidad se denota al equilibrio no regulado por $(b_{\cdot},P_{\cdot/\cdot\cdot},P_{\cdot\cdot},,b\ ;t_{\cdot\cdot\cdot})$

4.3 Propiedades del equilibrio RB&SM.

En lo que sigue se presentan algunas propiedades, principalmente para el modelo RB&SM no regulado, es decir, cuando $\gamma_i=0\ \forall i$ y (4.9) se reduce solo a las 3 primeras ecuaciones. Esta versión del modelo es la que fue aplicada al problema de planificación óptima definido en capítulos posteriores; la extensión de las propiedades al modelo regulado requiere entonces agregar (4.7) al sistema. Para no sobrecargar el texto, en esta sección solo se enuncian las propiedades, pero todas sus demostraciones se encuentran en el Anexo B[20].

Dado que RB&SM es un modelo que recibe subsidios y regulaciones como parámetros para el cálculo del equilibrio asociado, y la mayoría de las propiedades han sido demostradas sólo para el caso no regulado, se considera en lo que sigue un par de planificación $(t,\varnothing)$ fijo, es decir, sin regulaciones, a menos que se indique lo contrario.

4.3.1 Existencia de soluciones.

En lo que sigue se enuncia la existencia de soluciones para cada uno de los distintos subsistemas: de externalidad, de oferta y de equilibrio. No se logró en el lapso de este estudio extender la demostración al caso del sistema global de RB&SM, aunque en la práctica se encuentran soluciones para una amplia gama de parámetros de las soluciones.

[20] Todas las demostraciones a las propiedades aquí citadas, han sido desarrolladas en el marco de este estudio.

En Martínez y Henríquez (2003) se estudian propiedades de existencia, pero son enfocadas a funciones unidimensionales, esto es, componente a componente para cada subsistema. En lo que se sigue se extienden estas propiedades al caso de los subsistemas completos.

Propiedad 4.1: Existencia de soluciones para el punto fijo de externalidad.

Para cada i, la función f_i dada por la ecuación (4.2), tiene un punto fijo de la forma $f_i(P_{\cdot/\cdot i})= P_{\cdot/\cdot i}$.

Demostración: Ver propiedad B.1 en el Anexo B.

Propiedad 4.2. Existencia de soluciones para el punto fijo de oferta.

La función f, dada por la ecuación (4.5), tiene un punto fijo de la forma $f(P_{\cdot\cdot})= P_{\cdot\cdot}$.

Demostración: Ver propiedad B.2 en el anexo B.

Propiedad 4.3. Existencia de soluciones para el punto fijo de equilibrio.

La función f, que representa la función de equilibrio, tiene infinitos puntos fijos sobre una única línea recta, de la forma $f(b_\cdot)= b_\cdot$ si y sólo si $\sum_{vi} S_{vi} = \sum_h H_h$.

Demostración: Ver propiedades B.3, B.8 y B.9 en el Anexo B.

4.3.2 Unicidad de soluciones y convergencia del algoritmo estándar[21].

Se analizan la unicidad y la convergencia del algoritmo estándar de punto fijo, para cada uno de los puntos fijos de los distintos subsistemas. Como antes estos resultados extienden aquellos unidimensionales presentados en Martínez y Henríquez (2003).

El primer par de propiedades asegura condiciones suficientes para que se cumplan estas propiedades en los puntos fijos de externalidad y oferta.

[21] El algoritmo estándar de punto fijo, también conocido como algoritmo de picar, se define en el Teorema de punto fijo de Banach para funciones constrastantes como $x^{n+1} = f(x^n)$.

Propiedad 4.4. Unicidad y convergencia para la función de externalidad.

Sea una zona *i* fija y suponga que la componente de externalidad de la postura es lineal en $P_{\cdot/\cdot i}$. Entonces, si se cumple alguna de las condiciones siguientes, la función de varias variables f_i definida en (4.2) posee un único punto fijo y el algoritmo estándar converge a la solución cualquiera sea el punto de partida.

$$1)\quad \frac{1}{\mu} > |h| \max_{gw} \sum_{v} \left(\max_{p} \frac{\partial b_{pvi}}{\partial P_{g/wi}} - \min_{p} \frac{\partial b_{pvi}}{\partial P_{g/wi}} \right)$$

$$2)\quad \frac{1}{\mu} > \max_{v} \sum_{gw} \left(\max_{p} \frac{\partial b_{pvi}}{\partial P_{g/wi}} - \min_{p} \frac{\partial b_{pvi}}{\partial P_{g/wi}} \right)$$

Demostración: Ver propiedades B.4 y B.5 en el Anexo B.

Propiedad 4.5. Unicidad y convergencia para la función de oferta.

Si la componente de externalidad de la postura y la función de costos son ambas lineales en $P_{\cdot\cdot}$. Entones, si se cumple alguna de las condiciones siguientes, la función de varias variables *f* definida en (4.5) es contractiva en todo el dominio.

$$1)\quad \frac{1}{\lambda} > |vi| \max_{wj} \left(\max_{vi} \frac{\partial \pi_{vi}}{\partial P_{wj}} - \min_{vi} \frac{\partial \pi_{vi}}{\partial P_{wj}} \right)$$

$$2)\quad \frac{1}{\lambda} > \sum_{wj} \left(\max_{vi} \frac{\partial \pi_{vi}}{\partial P_{wj}} - \min_{vi} \frac{\partial \pi_{vi}}{\partial P_{wj}} \right)$$

Demostración: Ver propiedades B.6 y B.7 en el Anexo B.

Luego, en condiciones de dispersión suficientemente alta se asegura la convergencia de ambos puntos fijos. Sin embargo, las simulaciones realizadas muestran que en la práctica se obtiene convergencia aún en condiciones menos restrictivas, e incluso, para funciones de posturas y costos no lineales.

La siguiente propiedad muestra que el punto fijo de equilibrio nunca es único.

Propiedad 4.6: Multiplicidad de soluciones para el punto fijo de equilibrio.

Si la función *f* definida por (4.8) posee una solución de punto fijo, entonces posee infinitas soluciones todas ubicadas sobre una única línea recta

Demostración: Ver propiedades B.10 y B.11 en el Anexo B.

Si bien no se ha demostrado convergencia para este punto fijo, si se demostró para una función relacionada, que corresponde a fijar una dimensión de ella. La demostración de este caso se presenta en la propiedad B.9 del Anexo B. Es importante destacar de todas maneras que, a pesar de que no se demostró convergencia para la función en todas sus dimensiones, en las simulaciones realizadas se encontró que converge de forma muy eficiente a pesar de no ser una función contractiva (en realidad resulta no expansiva, es decir con constante de Liptschitz igual a 1).

Como se comentó previamente, la experiencia acumulada de simulaciones del sistema global permite concluir que existen soluciones pero no se tiene unicidad. En efecto, la siguiente propiedad muestra este hecho.

Propiedad 4.7: Multiplicidad de soluciones de RB&SM.

Si RB&SM posee una solución de punto fijo entonces posee infinitas soluciones sobre una recta que pasa por ella.

Demostración: Ver propiedad B.12 en el Anexo B.

La propiedad anterior, se produce debido a una transferencia entre las componentes de utilidad b_h y la constante b que define el nivel de rentas en la ciudad. Sin embargo, la suma b_h+b es idéntica sobre toda la recta a la que se hace referencia y, por lo tanto, todos las infinitas soluciones sobre la recta colapsan a una única localización de agentes. Esto no significa unicidad debido a que puede existir más de una recta con estas características.

Es importante destacar que los algoritmos más eficientes utilizados hasta ahora basan su funcionamiento en el cálculo de los puntos fijos parciales de manera secuencial. Esto asegura que las propiedades aquí presentadas son un aporte al modelo RB&SM y al cálculo de los equilibrios.

4.3.3 Propiedades asociadas a los instrumentos de planificación: subsidios y regulaciones.

En esta sección se enuncian propiedades asociadas subsidios y regulaciones. Hasta aquí se ha trabajado con un par de planificación $(t,\varnothing)$ fijo, pero las siguiente propiedades levantan este supuesto. En particular la que sigue a continuación, muestra lo que ocurre con el equilibrio para una variación particular en la matriz de subsidios.

Propiedad 4.8. Invarianza de la localización ante traslaciones homogéneas de los subsidios.

Una traslación homogéneos de los subsidios no afecta la localización de RB&SM.

Demostración: Ver propiedad B.14 en el Anexo B.

Esta propiedad esta muy relacionada con la propiedad 3.7 y es vital para este trabajo, pues, como se verá más adelante, representa una multiplicidad de soluciones del problema de planificación óptima que debe ser necesariamente resuelto en la formulación operativa.

La siguiente propiedad muestra una transferencia entre subsidios y utilidad, y dice que a través de subsidios el planificador controla la utilidad de los agentes. La propiedad es muy relevante en el problema de planificación, debido a que indica una multiplicidad de subsidios que generan la misma localización para utilidades distintas.

Propiedad 4.9. Invarianza de la localización ante transferencias entre utilidad y subsidios.

Una localización RB&SM se puede obtener para cualquier nivel de utilidad con la inclusión de subsidios adecuados.

Demostración: Ver propiedad B.15 en el Anexo B.

La propiedad siguiente muestra una relación entre las herramientas de planificación.

Propiedad 4.11: Suficiencia de los equilibrios no regulados.

Toda localización de equilibrio RB&SM regulado puede ser alcanzada vía subsidios (en este caso impuestos) con un equilibrio RB&SM no regulado.

Demostración: Ver propiedad B.13 en el Anexo B.

Evidentemente, esta propiedad y el tipo limitado de restricciones que maneja RB&SM, hacen que la utilización de subsidios sea mucho más general y flexible que la simple utilización de restricciones (que pueden o no ser activas en la solución de equilibrio). Más aún, a la luz de esta propiedad basta con utilizar subsidios para recorrer todo el espacio de equilibrios. Esto último invita a utilizar únicamente el modelo RB&SM no regulado para explorar el problema de planificación óptima, más aún dado el conocimiento acumulado sobre la dificultad en el cálculo que aporta la consideración de restricciones (aquellas que se activan en la solución). Sin embargo, se debe tener presente que subsidios y regulaciones corresponden a herramientas de planificación con diferente costo para la sociedad, tema que no se enfrenta en detalle en este estudio.

Una característica interesante de RB&SM, que será utilizada en la primera estrategia de solución del modelo de planificación en el capítulo VI, es que es posible aproximar cualquier localización (y, por lo tanto, oferta) preestablecida, a través de la inclusión de subsidios. Ciertamente, cualquier localización estrictamente positiva, es alcanzable de manera exacta por este método, mientras que las soluciones extremas sólo pueden aproximadas con un nivel de aproximación cualquiera $\varepsilon>0$ definido previamente. En efecto, la siguiente propiedad muestra el resultado.

Propiedad 4.12: Subsidios Inductores de equilibrio RB&SM

Dados $\varepsilon>0$ y niveles de utilidad b_h cualquiera, toda localización H_{hvi} factible es alcanzable a través del modelo RB&SM, con utilidades b_h y nivel de aproximación ε, con la inclusión de los subsidios $t_{hvi}+t_{vi}$ definidos por:

$$t_{hvi}=\begin{cases}\dfrac{1}{\mu}\ln\left(\dfrac{H_{hvi}}{H_h S_{vi}}\right)-B_{hvi}\left(\dfrac{H_{hvi}}{S_{vi}},S_{vi}\right)-b_h & S_{vi}>0\wedge H_{hvi}>0\\ \dfrac{1}{\mu}\ln\left(\dfrac{\varepsilon}{H_h S_{vi}}\right)-B_{hvi}\left(\dfrac{H_{hvi}}{S_{vi}},S_{vi}\right)-b_h & S_{vi}>0\wedge H_{hvi}=0\\ 0 & S_{vi}=0\end{cases}\quad \forall hvi$$

$$t_{vi}=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}\ln\left(\dfrac{S_{vi}}{H}\right)-\left[r_{vi}\left(H_{hvi},S_{vi},t_{hvi},b_h\right)-c_{vi}\left(S_{\bullet\bullet}\right)\right] & S_{vi}>0\\ \dfrac{1}{\lambda}\ln(\delta)-\left[r_{vi}\left(H_{hvi},S_{vi},t_{hvi},b_h\right)-c_{vi}\left(S_{\bullet\bullet}\right)\right] & S_{vi}=0\end{cases}\quad \forall vi$$

Demostración: Ver propiedad B.16 en Anexo B.

Esta propiedad permite implementar cualquier localización deseada en el mercado. Si se calculan los subsidios indicados en la propiedad se observa fácilmente que son posibles los siguientes resultados:

- Subsidios del tipo $t_{hvi}=t^1_{vi}$ y $t_{vi}=t^2$ $\forall hvi$, la localización buscada es solución de RB&SM sin subsidios.
- Subsidios con otra estructura, caso en el que es necesario incluir subsidios no nulos para que RB&SM alcance la localización buscada.

Esta propiedad se puede utilizar para testear la eficiencia del mercado. En efecto, si se tiene un modelo que obtiene una localización óptima y los subsidios indicados por la propiedad asociados a esta localización son del primer tipo, entonces la localización de equilibrio dada por RB&SM es eficiente.

Propiedad 4.13: Unicidad de los subsidios inductores de localización.

Dado b_h, los subsidios indicados en la propiedad 4.12 son únicos salvo traslaciones homogéneas.

Demostración: Ver propiedad B.17 en el Anexo B.

Esta propiedad entrega una idea de la forma que tienen los subsidios óptimos del problema de planificación, pues ellos tienen que corresponder a aquellos de la propiedad 4.12 para la localización óptima.

4.4 Síntesis del capítulo.

Se ha planteado con detalle la formulación del modelo de equilibrio RB&SM, que corresponde a un modelo estocástico de equilibrio estático del mercado inmobiliario urbano. El modelo describe un equilibrio parcial y es utilizado en este estudio como representante del equilibrio dentro del modelo operativo de planificación óptima descrito en el capítulo VI.

Los supuestos básicos de este modelo son los siguientes:

- El suelo urbano es un bien cuasi-único transado en un mercado del tipo remate.
- Las opciones de localización son unidades discretas definidas por la localización espacial (zona) y el tipo de edificación.
- Las localizaciones disponibles son asignadas al mejor postor.
- Las posturas son realizadas por hogares (y firmas) que compiten por opciones de localización, que incorporan una interdependencia compleja entre sus decisiones a través de las externalidades de localización.
- Los consumidores se clasifican en categorías socioeconómicamente homogéneas, cuyo comportamiento se asume homogéneo en el remate.
- Las posturas de los consumidores se asumen como variables aleatorias, considerando así la variabilidad idiosincrásica de los agentes.
- Existe un único oferente de bienes inmuebles que es maximizar de la ganancia, definida como la renta menos el costo.
- Las funciones de ganancia son variables aleatorias que incorporan la variabilidad entre oferentes.
- El equilibrio se alcanza cuando todos los consumidores se encuentran localizados en algún lugar para un corte temporal.

Se han demostrado propiedades de existencia de soluciones, condiciones suficientes de unicidad y convergencia del algoritmo estándar de punto fijo, para los subsistemas del sistema global de equilibrio RB&SM. Estas extienden aquellas estudiadas unidimensionalmente en Martínez y Henríquez (2003), al caso de los subsistemas completos. Se detecta que en condiciones de alta dispersión las soluciones tienden a ser únicas y el algoritmo estándar converge eficientemente.

Otras propiedades encontradas, como multiplicidad de soluciones del sistema global, invarianzas de la localización y suficiencia del uso de subsidios, permiten analizar los modelos operativos que siguen más adelante.

Se detectan también valores únicos, salvo traslaciones homogéneas, de subsidios que permiten generar una localización RB&SM cualquiera. Esta propiedad será utilizada más adelante para analizar y determinar la estructura de los subsidios óptimos. Además, a partir de ella se plantea un modelo alternativo de solución del modelo operativo de planificación óptima de subsidios en el capítulo VII.

En la siguiente sección se presenta una función objetivo que corresponde a una medida del beneficio agregado de productores y consumidores, que puede ser calculada para equilibrios RB&SM y permitirá construir los modelos operativos más adelante.

V. Medidas de beneficio agregado para equilibrios RB&SM.

5.1 Introducción.

Ya definido el modelo de equilibrio, es necesario definir una función objetivo del problema de planificación óptima. En este documento se considera una medida de beneficio del tipo Benthamite, que agrega ponderadamente el beneficio económico de consumidores y productores, medida que se denomina en lo que sigue beneficio agregado para diferenciarlo de la definición clásica de beneficio social que considera sólo a los consumidores.

En RB&SM, la linealidad de la utilidad en la postura (función de utilidad cuasi lineal) hace que las medidas estándar de beneficio del consumidor, variación compensatoria y equivalente ingreso, sean idénticas. Por otro lado, en RB&SM, la naturaleza linealmente estocástica de las posturas de los consumidores hace que los beneficios alcanzados por estos agentes posean esta misma naturaleza. Hanemann (1984) sugiere que un par de medidas de beneficios adecuadas para estos casos son el valor esperado y la mediana del excedente. Por simplicidad, se ha escogido aquí utilizar el valor esperado, que está dado en nuestro caso (con términos aleatorios lineales) directamente por la componente determinística de las funciones de postura.

En lo que sigue al hablar de un estado de equilibrio "*e*", se hace referencia siempre a un equilibrio RB&SM según la definición del capítulo IV. Se define una forma de medir el beneficio obtenido por los agentes debido a un cambio de estado, sin analizar las causas especificas de este cambio de estado pero asumiendo siempre que significa un cambio en los niveles de utilidad.

Se definen dos medidas de beneficio que se corresponden con las dos modelos de solución operativa de los capítulos siguientes. La primera (Beneficio Agregado Bruto) corresponde al beneficio agregado de los agentes demandantes y oferentes, y la segunda (Beneficio Agregado Neto) descuenta el costo de planificación.

5.2 Beneficio Agregado Bruto BAB.

Para un agente consumidor individual perteneciente al cluster *h*, la variación equivalente (*VE*) asociada con dos estados de equilibrio e^0 y e^1, es obtenida resolviendo la siguiente ecuación para la función de utilidad indirecta condicional en la localización, en que el cambio de utilidad está representado por un cambio en subsidios/impuestos *t,* rentas *r* y atributos de las localizaciones *z*:

$$V_{hvi}\left(P, I_h + t_{hvi}^0 - r_{vi}^0 + VE_{hvi}^{01}, z_{vi}^0\right) = V_{hvi}\left(P, I_h + t_{hvi}^1 - r_{vi}^1, z_{vi}^1\right) \tag{5.1}$$

Invirtiendo la función de la izquierda en la segunda componente e interpretando términos en el contexto de RB&SM se obtiene[22]:

$$VE_h^{01} = b_h^0 + b^0 - \left(b_h^1 + b^1\right) \forall h \tag{5.2}$$

En Martínez (2001) se deduce la ecuación anterior mostrando que es equivalente a $VE^{01} = B_h(z_{vi}^0, U_h^0) - B_h(z_{vi}^0, U_h^1)$, esto es, la disposición a pagar por el cambio en los niveles de utilidad asociados a los estados de equilibrio que se están comparando, pero manteniendo la localización y otros parámetros constantes.

Agregando estos beneficios a través de los consumidores, ponderándolos por parámetros de distribución social ω_h (exógenos), bajo el supuesto que la cantidad de agentes por cluster H_h se mantiene constante[23] y que los agentes son homogéneos al interior de cada cluster, se obtiene el siguiente beneficio total de consumidores:

$$BC^{01} = \sum_h \omega_h H_h \left[b_h^0 + b^0 - b_h^1 - b^1\right] \tag{5.3}$$

En este trabajo no se tratan costos de movilidad en localización residencial para los agentes, asumiendo un costo nulo o despreciable por este concepto. Por movilidad en localización se entiende aquí únicamente el proceso de cambio de localización entre un estado y otro, pues se asume que la movilidad asociada al sistema de transporte es una característica de las localizaciones bien representada por los datos de acceso, valorados por los agentes en su disposición a pagar. Por lo tanto, se asume simplemente que el costo monetario de

[22] En el Anexo A se presenta la derivación paso a paso.
[23] Sin este supuesto simplificatorio, es necesario considerar la movilidad de los agentes entre los distintos clusters y la migración, desde y hacia la ciudad.

movilidad en localización es despreciable frente al costo monetario total de localización en el período de análisis dentro de la ciudad. Del mismo modo, al utilizar RB&SM no se considera inercias en la movilidad en localización asociados a apegos especiales de las personas por sus localizaciones actuales, debido a que se modela la decisión "cómo si" los agentes estuviesen escogiendo localización por primera vez. El modelo se puede extender si se cuenta con información del costo percibido por cambiar de localización.

Por otro lado, interesa analizar el beneficio de los productores de alternativas de localización, debido a que su excedente mide el cambio en el valor monetario neto del suelo en la ciudad, valor que se transmite directamente a los consumidores que son los dueños reales de estos bienes.

El beneficio de los productores es medido como el cambio agregado en la ganancia, ponderado por parámetros de distribución social τ_{vij} (también exógenos):

$$BP^{01} = \sum_{vij} \tau_{vij} \left[S_{vij}^{1} \left(r_{vi}^{1} - \gamma_{i}^{1} \right) - S_{vij}^{0} \left(r_{vi}^{0} - \gamma_{i}^{0} \right) - c_{vij}^{01} \right] \qquad (5.4)$$

donde los costos c_{vij}^{01} corresponden a la variación de costos descontando el stock inmobiliario de la oferta total. Para el análisis simplemente se considera que existe un único oferente, por lo que el subídice *j* puede ser eliminado de la fórmula anterior, y se asume también que $c_{vi}^{01} = S_{vi}^{1} c_{vi}^{1} - S_{vi}^{0} c_{vi}^{0}$, suponiendo que hay renovación total del mercado. Dado este último supuesto, cuando se considere el mercado incluyendo las decisiones de los productores, se estará necesariamente frente a un análisis de largo plazo.

Sumando los beneficios de productores y consumidores se obtiene el beneficio agregado bruto (en adelante BAB):

$$BAB = -\sum_{h} \omega_{h} H_{h} \left(b_{h} + b \right) + \sum_{vi} \tau_{vi} S_{vi} \left[r_{vi}^{*} + b - c_{vi} - \gamma_{i} \right] - K^{0} \qquad (5.5)$$

con r^* y b_h obtenidos directamente desde las variables del modelo RB&SM antes de realizar la corrección a valores absolutos *b* (ver capítulo IV). La constante K^0 contiene todas las variables asociadas con el estado inicial e^0, y resultará irrelevante dentro del modelo de optimización.

Si se observa (5.5) no es difícil darse cuenta de que permite definir una medida para el beneficio del nuevo estado e^1 de manera independiente del estado inicial, que corresponde a los dos primeros términos de la ecuación. Esta propiedad proviene de la cuasi-linealidad de las funciones de utilidad, del supuesto de número total de agentes fijo y de la no consideración de stock inmobiliario. Sin embargo, es conveniente recordar que la calibración de un modelo operativo de este tipo se realiza para un corte temporal definido, es decir, con referencia a un estado que se asume de equilibrio. Esto necesariamente relaciona toda medida de beneficio, calculada a partir de (5.5), al estado inicial a través de los parámetros calibrados. Por este motivo, en un modelo operativo siempre se estará midiendo un beneficio relativo a la calibración.

También es interesante notar que la cuasi linealidad de la función de utilidad que supone RB&SM, implica que la componente b_h es lineal en la utilidad del agente (con signo negativo), luego la primera componente de (5.5) resulta una agregación ponderada de las utilidades de los agentes, tal como en la versión clásica de las funciones de Bentham.

En Fujita (1989) se considera una función similar a la (5.5). En efecto, en su trabajo plantean un modelo de optimización que, fijando el nivel de utilidad de los agentes, busca la localización que maximiza el excendente agregado de los consumidores. Individualmente este excedente es definido como la diferencia entre el ingreso y la suma del gasto asociado al consumo de bienes distintos de localización, transporte y costo de oportunidad de suelo. De esta manera, sin considerar el costo de oportunidad del suelo, y asumiendo no saciabildiad, el ingreso disponible corresponde a la renta que paga cada agente. Luego, considerando utilidades dadas y asimilando el costo de oportunidad del suelo con el costo constructivo de los inmuebles, se obtiene la misma función objetivo de (5.5).

De aquí en adelante el análisis se centra en el caso en que todos los pesos sociales ω y π son idénticos e iguales a 1, pues el interés cae en analizar la eficiencia del mercado. Sin embargo, el lector interesado podrá extender los resultados al caso general. En estas condiciones, la componente b se simplifica de (5.5) y la función toma la forma:

$$BAB = -\sum_{h} H_h b_h(t) + \sum_{vi} S_{vi}\left[r_{vi}(t) - c_{vi}(t) - \gamma_i(t)\right] \qquad (5.6)$$

donde se ha eliminado la constante K^0 y el "*" de la renta para simplificar la notación, pues ya no existe ambigüedad con respecto a la componente *b*. En efecto, dada la elección de los parámetros de distribución social, la función de beneficio agregado resultante es independiente del nivel de referencia de las rentas y utilidades, esto es, sólo importan los valores relativos de estas variables.

En (5.6) se ha agregado la dependencia que las distintas variables tienen respecto a los subsidios. Básicamente esta dependencia se induce a través de la dependencia de la postura con respecto a la política de planificación aplicada.

A partir de la propiedad 4.8 del capítulo anterior, basta trasladar homogéneamente una política de subsidios determinada para obtener la misma localización de equilibrio. Sin embargo, a la luz de (4.3) la renta se traslada en la misma cantidad. De esta manera, para maximizar (5.6) el valor del subsidios debe ser lo más alto posible generando un gasto excesivo e innecesario por parte del planificador. Por este motivo, se plantea una función de beneficio agregado neto, que incorpora el costo de planificación asociado a cada equilibrio y elimina la tendencia a que el óptimo ocurra con subsidios máximos.

Finalmente, resulta evidente que la localización que maximiza la función anterior es eficiente en el sentido de Pareto.

5.3 Beneficio Agregado Neto BAN.

Para obtener el beneficio agregado neto para la sociedad, se considera el rol del planificador y simplemente se descuenta el costo de la política de planificación correspondiente. Cómo se comentó en el capítulo III, se busca la política de subsidios óptimos para un conjunto de regulaciones fijo. En estas condiciones, despreciando costos legales y de administración, el costo monetario de aplicar una política corresponde exactamente al gasto en subsidio. Luego, restando este costo de (5.6) resulta:

$$BAN = -\sum_h H_h b_h(t) + \sum_{vi} S_{vi}(t)\left[r_{vi}(t) - c_{vi}(t) - \gamma_i(t)\right] - \sum_{hvi} H_{hvi}(t) t_{hvi} \qquad (5.7)$$

Se observa que la función *BAN* permanece invariante bajo políticas de subsidios homogéneos (es decir, del tipo $t_{hvi}=t \ \forall hvi$). Esta es una propiedad heredada de las propiedades del equilibrio RB&SM regulado, en particular de la propiedad 4.8 del capítulo anterior.

Propiedad 5.1:

La función de beneficios BAN es invariante bajo subsidios homogéneos.

Demostración:

Sea a un valor real cualquiera, t un subsidio y $e^0=(b^0_{\cdot},P^0_{\cdot/\cdot\cdot},P^0_{\cdot\cdot},\gamma^0_{\cdot},b^0\ ;t^0_{\cdots},R^{\cdot}_{\cdot})$ un equilibrio RB&SM. La propiedad B.14, dice que $(b^1_{\cdot},P^1_{\cdot/\cdot\cdot},P^1_{\cdot\cdot},\gamma^1_{\cdot},b^1-a\ ;\ t^0_{\cdots}+a,R^{\cdot}_{\cdot})$ es también un equilibrio tal que $b^0_{\cdot}= b^1_{\cdot}$, $P^0_{\cdot/\cdot\cdot}= P^1_{\cdot/\cdot\cdot},P^0_{\cdot\cdot}= P^1_{\cdot\cdot},\gamma^0_{\cdot}=\gamma^1_{\cdot}$.

Por lo tanto, $BAN(t^0_{\cdots},R^{\cdot}_{\cdot},e^0)= BAN(t^0_{\cdots}+a,R^{\cdot}_{\cdot},e^0)$ debido a que la renta es tal que $r^1_{vi}= r^0_{vi}+a$, lo que compensa de manera perfecta el cambio en el costo de los subsidios.

□

La propiedad anterior implica que el modelo de optimización que utiliza esta función no tiene una solución única, debido a que existen infinitos subsidios homogéneos (o traslaciones homogeneas del subisidio) que no modifican la localización. Por lo tanto, es conveniente incluir una restricción extra que elimine esta ambigüedad, por ejemplo, fijando exógenamente el presupuesto para subsidiar en un valor *G* recuperando a nivel operativo la función BAB. Se observa que si *G=0* todo el monto de subsidios e impuestos corresponde a una transferencia entre los agentes, sin costos ni beneficios para el planificador. Cualquier valor de *G>0* significa que el planificador inyecta recursos en el mercado, mientras cualquier valor *G<0* significa que extrae recursos del mercado.

Evidentemente *G* debe estar acotado inferiormente de forma que los impuestos sean factibles dada la restricción de ingreso, pero en el modelo RB&SM planteado en el capítulo previo la restricción de ingreso (del modelo de utilidad asociado al problema del consumidor - ver Anexo A), no ejerce ningún poder restrictivo sobre las posturas[24]. Esto significa que no existe límite endógeno a RB&SM para la extracción de recursos desde los consumidores. Luego, este límite sólo puede ser integrado en el modelo de planificación a través de cotas inferiores para los subsidios (en este caso impuestos). Por otro lado, cabe comentar, cómo

[24] Esta es una deficiencia de RB&SM que ha sido actualmente mejorada, pero no alcanzó a ser integrada en este trabajo, por lo que su integración queda para estudios futuros.

se indica en el capítulo anterior, que producto del modelo de equilibrio planteado, se realiza un estudio de estática comparativa entre equilibrios parciales, es decir, exclusivamente al interior del mercado inmobiliario, luego no se consideran los impactos en la economía completa, asociados al uso de recursos para subsidios o impuestos en el mercado inmobiliario. Así en lo que sigue se aplicará $G=0$, dado que, en primer lugar, no existen razones internas al modelo de mercado que hagan preferible la extracción o la inyección de recursos, pues con ambas alternativas se puede alcanzar el mismo beneficio agregado neto que con una transferencia pura, y en segundo lugar, que el impacto sobre la economía completa de una u otra alternativa no esta bien representado.

Además de la propiedad anterior, se tiene a partir de la propiedad 4.9 la siguiente:

Propiedad 5.2:

La función de beneficios BAN es invariante bajo transferencias entre subsidio y utilidad.

Demostración:

Basta considerar que ante estas transferencias la localización y la postura no cambian, por lo que, la renta se mantiene sin variaciones. Además, como la utilidad agregada y los subsidios agregados son lineales y tienen igual signo en BAN, cualquier transferencia de este tipo se cancela completamente.

□

Esta propiedad implica que lo que uno realmente puede obtener en planificación es un subsidio dado el nivel de utilidad que se quiere alcanzar en la ciudad. Este tipo de estrategias con utilidad prefijada es la que utiliza en sus modelos, Herbert y Stevens (1960), Fujita (1989) y Rossi-Hansberg (2004). Sin embargo, existen otras alternativas y lo relevante es considerar que esta transferencia queda indefinida dentro del modelo.

La siguiente propiedad muestra que la función BAN se maximiza al satisfacer las regulaciones al uso de suelo a través de subsidios, respecto de hacerlo hacerlo a través de los precios sombra definidos por RB&SM.

Propiedad 5.3: Suficiencia de los subsidios para maximizar el beneficio.

En un mercado regulado, la función BAN se maximiza con subsidios y precios sombra nulos.

Demostración:

Sea *e*= $\left(b_{\bullet}, P_{\bullet/\bullet\bullet}, P_{\bullet\bullet}, \gamma_{\bullet}, b; t_{\bullet\bullet\bullet}, R_{\bullet}^{\bullet}\right)$ un equilibrio RB&SM regulado. Por la propiedad 4.11, este equilibrio es exactamente el mismo, en términos de localización, que el asociado al equilibrio no regulado caracterizado por $\left(b_{\bullet}, P_{\bullet/\bullet\bullet}, P_{\bullet\bullet}, b; t_{\bullet\bullet\bullet} - \gamma_{\bullet}\right)$. La diferencia entre ambos equilibrios radica en que en el primero el precio sombra de la regulación es percibido por el oferente como un costo en la función de ganancia, y en el segundo es percibido por los agentes a través de impuestos. En virtud de (5.7), la diferencia de beneficios entre el segundo caso y el primero es $\Delta BAN = \left(\sum_{vi} S_{vi}\gamma_i\right)$ >0, expresión compuesta únicamente de términos no negativos. Por lo tanto, existe beneficio neto, en el sentido de *BAN*, de satisfacer las regulaciones aplicando subsidios respecto de la alternativa vía precios sombra. Luego, BAN se maximiza con γ_i=0 $\forall i$, esto es, transfiriendo todo el precio sombra de una regulación a subsidio.

□

La diferencia entre utilizar subsidios y precios sombra, es que en el primer caso el efecto de la regulación es percibido por los demandantes en su función de posturas, y en el segundo caso es percibido sólo por los oferentes en sus costos. La ausencia de cotas inferiores para las ganancias de los oferentes en RB&SM (que aseguran la existencia de los distintos tipos de oferta en su dedición), impide que el efecto de este costo se traspase a rentas, esto es a posturas.

Como se verá más adelante en el texto esta propiedad redunda que sea suficiente utilizar equilibrios RB&SM no regulados en la resolución del problema de planificación. Es importante notar, que la propiedad sólo se tiene para ciertos parámetros de distribución social (ω y τ en ecuación 5.5), en particular cuando estos son iguales a uno como ocurre en este caso.

Finalmente, cabe comentar que cuando sólo se consideran transferencias, esto es G=0, una localización subsidiada que maximiza la función BAN anterior resultará en óptimo de Pareto, debido a que tal localización maximiza también el BAB.

5.4 Síntesis del capítulo.

Se han definido dos funciones de beneficio, la primera de ellas, denominada BAB, corresponde al beneficio agregado bruto, construido como la agregación de el beneficios de los consumidores y el beneficio de los productores debida a un cambio de estado, en este caso provocado por cambios en la política de susidios impuestos por el planificador. La segunda, integra el gasto monetario asociado a la aplicación de las políticas de planificación, descontando de la medida previa, el valor monetario del subsidio aplicado, por lo que corresponde a una medida de beneficio agregado neto, denominada BAN. La primera función se corresponde con aquella utilizada por Fujita (1989) en su modelo de localización óptima, sin embargo, operativamente, en el modelo de planificación buscado en este trabajo, se aplicará la función BAN junto a una restricción de presupuesto.

Los supuestos considerados para construir esta función son:

1. Utilidad es lineal en la función de posturas.
2. El total de agentes por cluster y su ingreso es fijo.
3. No existen costos de movilidad en localización residencial o son despreciables.
4. No existen inercias a la movilidad en localización residencial de los agentes.
5. En aplicaciones de largo plazo, la oferta de mercado se renueva completamente entre un período y otro.
6. Los costos legales y de administración para la aplicación de subsidios son despreciables.

Las propiedades de la función de beneficios indican que es necesario restringir el presupuesto de subsidios exógenamente, debido a la invarianza de BAN a subsidios homogéneos. Este presupuesto exógeno se ha fijado en cero, representando transferencias netas entre los agentes del mercado, y permitiendo el estudio de la eficiencia del mismo.

Finalmente, se demuestra que para la función BAN es preferible alcanzar una localización vía subsidios que hacerlo vía regulaciones. Esto significa que basta el modelo RB&SM no regulado, cuyas propiedades de convergencia han sido probadas en el capítulo IV, para generar el modelo operativo de planificación óptima de subsidios urbanos OUSPM.

En los capítulos que siguen se presentan dos modelos operativos para enfrentar este problema de planificación. El primero resuelve directamente OUSPM y es muy complejo analíticamente, mientras el segundo representa una estrategia alternativa, basada en la transferencia entre subsidios y utilidades de la propiedad 5.2, que permite estudiar analíticamente la optimalidad.

VI. Modelo Operativo de Planificación Óptima.

6.1 Introducción.

En este capítulo se operacionaliza el modelo de planificación óptima planteado en el capítulo III. Para esto se utiliza como modelo de equilibrio el modelo RB&SM descrito en el capítulo IV y la función de beneficio agregado definida en el capítulo V. Esto es:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{t_{hvi}} & BAN(b_{\bullet}, P_{\bullet/\bullet\bullet}, P_{\bullet\bullet}, \gamma_{\bullet}, t_{\bullet\bullet\bullet}) \\ s.a. & (b_{\bullet}, P_{\bullet/\bullet\bullet}, P_{\bullet\bullet}, \gamma_{\bullet}, b) \in \mathrm{RB\ \&\ SM}(t, \rho) \\ & t_{hvi} \in T \quad \forall hvi \end{array} \tag{6.1}$$

El modelo busca, para un conjunto de regulaciones ρ^0 determinado, la combinación de subsidios t que permite alcanzar el máximo beneficio agregado neto BAN en el equilibrio RB&SM resultante.

Recapitulando los supuestos utilizados para esta construcción de este modelo, se tienen los siguientes:

- El planificador posee como herramientas de planificación subsidios y regulaciones y debe decidir la mejor combinación de herramientas a aplicar en el mercado. Se considera aquí únicamente el caso de selección de subsidios para un conjunto de regulaciones fijo.
- El planificador se comporta como un maximizador del beneficio agregado al decidir las políticas de subsidios que impone.
- El equilibrio de mercado queda bien descrito por el modelo RB&SM.
- El beneficio agregado se obtiene como una función de Bentham, que agrega el beneficio de consumidores y oferentes, con un criterio igualitario, y considera los costos asociados a la aplicación de la política.
- El único costo relevante en la aplicación de una política de subsidios es el costo monetario de estos.

Por lo tanto, en este capítulo se expone el modelo de planificación construido con el equilibrio RB&SM y la función de beneficios agregados netos BAN. Se derivan algunas propiedades y se ajusta el modelo según ellas, para convertirlo en un modelo operativo de planificación urbana que se ha llamado **RB&SOSPM** (Random Bidding and Supply Optimal Subsidies Planning Model). El modelo de optimización resultante es extremadamente complejo, debido a que para su solución con algoritmos estándar (por ejemplo, de máximo descenso) requiere del cálculo de aproximado de gradientes, lo que significa calcular numerosos equilibrios en el mercado inmobiliario representado por un sistema de punto fijo con muchas variables.

Se platean también las condiciones de optimalidad del RB&SOSPM, no resueltas analíticamente, y se estudian las soluciones para algunos casos particulares sencillos y de interés. En particular, se encuentra que sin externalidades y con oferta dada (corto plazo) la política que no aplica subsidio alguno, cumple las condiciones de primer orden, pero no se logra demostrar su optimalidad. Para las condiciones de optimalidad se aplican las condiciones estándar de Kuhn Tucker.

Se toma para este capítulo la definición 4.1 del equilibrio RB&SM, y las posteriores definiciones de equilibrio RB&SM regulado y no regulado. En este último caso, si la tupla $(b_{\cdot}, P_{\cdot/\cdot\cdot}, P_{\cdot\cdot}, \gamma_{\cdot}, b\ ; t_{\cdots}, R^{\cdot}_{\cdot})$ es un equilibrio RB&SM no regulado, por simplicidad se denota por $(b_{\cdot}, P_{\cdot/\cdot\cdot}, P_{\cdot\cdot},, b\ ; t_{\cdots})$ omitiendo el vector nulo γ y el conjunto vacío de regulaciones $R_{\cdot\cdot}$

6.2 Modelo Operativo RB&SOSPM.

Dado un conjunto de regulaciones $\rho^0 \in$R, el modelo busca el conjunto de subsidios $t \in$T, que induce un equilibrio definido por el modelo RB&SM, que maximiza el beneficio agregado neto *BAN* calculado según:

$$BAN = -\sum_h H_h b_h(t) + \sum_{vi} S_{vi}(t)\left[r_{vi}(t) - c_{vi}(t) - \gamma_i(t)\right] - \sum_{hvi} H_{hvi}(t) t_{hvi} \qquad (6.2)$$

que corresponde a la función de beneficio definida en la ecuación (5.7) obtenida en el capítulo anterior. En adelante, por simplicidad de notación, se omitirá la dependencia en *t* de las variables y resultados del equilibrio RB&SM, subentendiendo, a menos que se explicite lo contrario, que esta dependencia siempre existe.

Se define el espacio de subsidios T como $\mathrm{T} = \left\{ t \in M_{hxvi}(R) / t_{hvi} \in \left[a_{hvi}, b_{hvi}\right] \subset \Re \right\}$ que resulta compacto para cualquier conjunto de valores reales $a_{hvi} \leq b_{hvi}$, exógenamente determinados.

Este conjunto entrega suficiente flexibilidad para la solución de un problema real, debido a que los incentivos económicos siempre son acotados. En efecto, siempre existen restricciones de ingreso para los consumidores, de presupuesto y políticas para el planificador, que definen los máximos y mínimos para subsidiar o imponer a los distintos agentes dentro de la economía. En el extremo los impuestos no pueden superar los ingresos de los agentes y los subsidios no pueden superar el presupuesto que se disponga para este efecto.

La propiedad 5.1, indica que la función BAN es invariante para traslaciones homogéneas del subsidio, lo que implica que el modelo de optimización asociado no tiene una solución única, debido a que este tipo de subsidios no modifican el equilibrio del mercado. Por lo tanto, es conveniente incluir una restricción extra que elimine esta ambigüedad, por ejemplo, fijando exógenamente el presupuesto para subsidiar en un valor *G*. Se observa que si *G=0* todo el monto de subsidios e impuestos corresponde a una transferencia entre los agentes, sin costos ni beneficios para el planificador.

Dado ρ^0, el problema de optimización es entonces expresado como:

$$\begin{aligned} \max_{t_{hvi}} \quad & BAN(b_{\bullet}, P_{\bullet/\bullet\bullet}, P_{\bullet\bullet}, \gamma_{\bullet}, t_{\bullet\bullet\bullet}) \\ s.a. \quad & (b_{\bullet}, P_{\bullet/\bullet\bullet},, P_{\bullet\bullet}, \gamma_{\bullet}, b) \in \mathrm{RB\,\&\,SM}(t, \rho) \\ & t_{hvi} \in [a_{hvi}, b_{hvi}] \quad \forall hvi \\ & \sum_{hvi} H_{hvi} t_{hvi} = G \end{aligned} \tag{6.3}$$

donde ($b_{\cdot}, P_{\cdot/\cdot\cdot}, \gamma_{\cdot}, P_{\cdot\cdot}, b; t_{\cdot\cdot\cdot}, R^{\cdot}_{\cdot}$) es un equilibrio RB&SM regulado y $H_{hvi}=S_{vi}P_{h/vi}$ es el número total de agentes *h* localizados en *vi*, los que reciben un subsidio t_{hvi}.

Por otra parte, en RB&SM se consideran únicamente restricciones al uso de suelo de tipo lineal, de la forma, $\sum_{v} a_{vi}^{k} S_{vi} \leq R_{i}^{k} \ \forall ik$, donde a_{vi}^{k} son parámetros asociados a las características restringidas (por ejemplo, superficie). Notar que el conjunto de restricciones son satisfechas por las variables de equilibrio gracias los valores γ_i de la solución. Sin embargo, es fácil darse cuenta de la siguiente propiedad:

Propiedad 6.1:

La solución al problema (6.3) se alcanza con γ_i=0 $\forall i$.

Demostración:

Según la propiedad 5.3 del capítulo anterior, existe beneficio neto, en el sentido de *BAN*, de satisfacer las regulaciones aplicando subsidios respecto de la alternativa vía precios sombra. Luego, en el óptimo siempre se obtendrá γ_i=0 $\forall i$.

□

Así, a partir de la propiedad 5.3 se tiene que la función BAN “prefiere” transferir todo el valor de los precios sombra a subsidios. En estas condiciones resulta conveniente utilizar el modelo de equilibrio RB&SM no regulado, del cuál se han detectado interesantes propiedades de convergencia y unicidad presentadas en el capítulo IV, para lo cual se deben reubicar las regulaciones directamente en el problema de optimización, aprovechando la dependencia que las variables de equilibrio tienen en *t*. Esto permite una mayor flexibilidad en el tipo de regulaciones utilizadas, admitiendo no sólo las restricciones lineales sobre la oferta utilizadas en RB&SM sino cualquier tipo de regulación, tanto sobre oferta como sobre demanda. Así, el problema de optimización es entonces expresado como:

$$
\begin{array}{ll}
\max\limits_{t_{hvi}} & BAN(b_{\bullet}, P_{\bullet/\bullet\bullet}, P_{\bullet\bullet}, t_{\bullet\bullet\bullet}; \psi) \\
s.a. & (b_{\bullet}, P_{\bullet/\bullet\bullet}, P_{\bullet\bullet}, b) \in \mathrm{RB\ \&\ SM}\left(t; e^0, \psi\right) \\
 & \left(P_{\bullet/\bullet\bullet}, P_{\bullet\bullet}\right) \in \rho \quad \forall khvi \\
 & t_{hvi} \in \left[a_{hvi}, b_{hvi}\right] \quad \forall hvi \\
 & \sum\limits_{hvi} H_{hvi} t_{hvi} = G
\end{array}
\qquad (6.4)
$$

donde (*b.,P./..,P..,b*) es un equilibrio RB&SM no regulado. En (6.4) el segundo conjunto de restricciones representan las regulaciones al uso y oferta de suelo. En el caso más general, en cada zona *i* pueden existir *k* regulaciones desagregadas por tipo de bien *v* y agente *h*. Sin embargo, en casos reales, como en ocurre en Santiago de Chile, lo usual es que las regulaciones residenciales no discriminen entre los distintos agentes por la dificultad práctica que esto significa.

Además, en estas condiciones la función de beneficio agregado BAN se simplifica quedando:

$$BAN = -\sum_{h} H_h b_h + \sum_{vi} S_{vi}\left[r_{vi} - c_{vi}\right] - \sum_{hvi} H_{hvi} t_{hvi} \tag{6.5}$$

donde se han eliminado los precios sombra. Notar, sin embargo, que las restricciones de regulación no han sido suprimidas y afectan la solución por medio de los multiplicadores de lagrange asociados a las restricciones del problema (6.4). Estos multiplicadores representan en este nuevo problema el precio sombra (costo) de dichas restricciones.

Es fácil ver que la primera restricción en (6.4) no es una restricción estrictamente hablando, sino más bien una definición de las variables de equilibrio. En efecto, para notarlo basta considerar el caso en que el equilibrio RB&SM es único en localización (esto es, a la luz de las propiedades de unicidad del capítulo IV, con suficiente dispersión en las distribuciones de probabilidades de oferta y demanda) entonces se observa que puede ser incorporada en el cálculo de la función, obteniendo que BAN($t_{...}$,$R_{..}^{\cdot}$,e;e^0)=BAN($t_{...}$;e^0). Además, la segunda restricción es en realidad una restricción directa sobre los subsidios dado que las variables de equilibrio son definidas por estos. Luego se puede escribir el problema (6.4), para un conjunto de regulaciones ρ^0 prefijadas, en forma más sintética como sigue:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{t_{\bullet\bullet\bullet}} & BAN(t_{\bullet\bullet\bullet};\psi, e^0) \\ s.a. & t_{\bullet\bullet\bullet} \in \rho \\ & t_{hvi} \in \left[a_{hvi}, b_{hvi}\right] \quad \forall hvi \\ & \sum\limits_{hvi} H_{hvi}\left(t_{\bullet\bullet\bullet}\right) \cdot t_{hvi} = G \end{array} \tag{6.6}$$

donde el cálculo del equilibrio RB&SM no regulado queda implícito en la definición de la función objetivo *BAN* y se asume que la solución del equilibrio es única en localización.

La existencia de soluciones al problema anterior no está asegurada en principio. Sin embargo, la experiencia acumulada en simulaciones muestra la continuidad de BAN, manteniendo fijo el punto de partida en el algoritmo de equilibrio RB&SM, por lo que, en espacios acotados (como el utilizado aquí, al considerar cotas finitas para los subsidios), este máximo existe ya sea en el interior o en la frontera del conjunto.

En (6.6) se maximiza únicamente sobre subsidios, dejando el conjunto de regulaciones fijo. Como ya se mencionó, el modelo necesariamente debe considerar restricciones exógenas, pues existen algunas imposibles de relajar como aquellas que restringen la capacidad espacial de una zona *i*. Notar que una vez encontrado un equilibrio óptimo se puede decidir qué nivel de regulaciones y subsidios aplicar para imponer dicho equilibrio en el mercado, de manera de amortiguar la necesidad de subsidios o impuestos. Esta interesante materia no es tratada en este documento y se deja para futuras investigaciones.

Es importante notar que según la propiedad 4.7 aunque un equilibrio RB&SM sea único en localización, jamás se tiene unicidad en precios. Esto es importante debido a que la componente *b* de ajuste del nivel de rentas, cuya ausencia induce multiplicidad de soluciones en RB&SM, no afecta la función BAN escogida aquí, y, por lo tanto, la multiplicidad de soluciones de RB&SM se transmite al problema de optimización. Sin embargo, es posible utilizar $\hat{b}_h = b_h + b$ en el cálculo de BAN, pues este valor sí es único en RB&SM y de esta manera se escoge un único representante para el equilibrio, cuyos precios están en referencia a toda la economía.

Finalmente, en lo que sigue se considera que las restricciones en ρ^0 son de la forma $f_{hvi}^k(t_{\bullet\bullet\bullet}) \leq R_{hvi}^k$, que generaliza las restricciones lineales de RB&SM. Se puede rescribir (6.6) en su forma definitiva:

$$
\begin{aligned}
\max_t \quad & BAN(t;\psi,e^0) \\
s.a. \quad & f_{hvi}^k(t) \leq R_{hvi}^k \\
& t_{hvi} \in [a_{hvi}, b_{hvi}] \quad \forall hvi \\
& \sum_h H_h b_h(t) = K \\
& \sum_{hvi} H_{hvi} t_{hvi} = G
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

En el siguiente subcapítulo se estudian las condiciones de primer orden de (6.7) y en el subcapítulo posterior algunas predicciones teóricas para casos particulares. Se estudia entre estos casos, la política de subsidios homogéneos con la intención de corroborar resultados de eficiencia de la literatura. Con esto en mente se considera en lo que sigue un conjunto *T* que contenga la política de subsidios nulos, es decir, se asume que $t_{hvi}=0$ $\forall hvi$ pertenece a *T* y se escoge, como se indicó en el capítulo V, *G*=0.

6.3 Estudio de las Condiciones de Primer Orden.

La función de lagrange asociada a (6.7) es:

$$\begin{aligned} L(t_{\bullet\bullet\bullet}) = BAN &+ \sum_{hvi} m^1_{hvi}\left(a_{hvi} - t_{hvi}\right) + \sum_{hvi} m^2_{hvi}\left(t_{hvi} - b_{hvi}\right) + \\ &+ \sum_{khvi} m^3_{khvi}\left(f^k_{hvi}(t_{\bullet\bullet\bullet}) - R^k_{hvi}\right) + m^4\left(\sum_{hvi} H_{hvi} t_{hvi} - G\right) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Diferenciando el lagrangeano anterior respecto a cada componente t_{gwq}, y con respecto a los multiplicadores de lagrange, e igualando a cero, resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial BAN}{\partial t_{gwq}} + m^2_{gwq} - m^1_{gwq} + \sum_{khvi} m^3_{khvi} \frac{\partial f^k_{hvi}}{\partial t_{gwq}} + m^4\left(\sum_{hvi} \frac{\partial H_{hvi}}{\partial t_{gwq}} t_{hvi}\right) = 0 \quad \forall \text{gwq} \qquad (6.9\text{-a})$$

$$m^1_{gwq}\left(a_{gwq} - t_{gwq}\right) = 0 \quad \forall \text{gwq} \qquad (6.9\text{-b})$$

$$m^2_{gwq}\left(t_{gwq} - b_{gwq}\right) = 0 \quad \forall \text{gwq} \qquad (6.9\text{-c})$$

$$m^3_{kgwq}\left(f^k_{gwq}(t_{\bullet\bullet\bullet}) - R^k_{gwq}\right) = 0 \quad \forall \text{kgwq} \qquad (6.9\text{-d})$$

$$t_{gwq} \in \left\lfloor a_{gwq}, b_{gwq} \right\rfloor \quad \forall \text{gwq} \qquad (6.9\text{-e})$$

$$f^k_{gwq}(t_{\bullet\bullet\bullet}) \leq R^k_{gwq} \quad \forall \text{kgwq} \qquad (6.9\text{-f})$$

$$m^1_{gwq}, m^2_{gwq}, m^3_{kgwq} \geq 0 \quad \forall k\text{gwq} \qquad (6.9\text{-g})$$

$$\sum_{hvi} H_{hvi} t_{hvi} = G \qquad (6.9\text{-h})$$

Es fácil notar que el sistema anterior forma un sistema de (3+k)gwq+*1* ecuaciones de igualdad con igual cantidad de incógnitas, más (6+k)gwq desigualdades

La siguiente propiedad simplifica bastante la expresión de la ecuación (6.9-a).

Propiedad 6.2:

El multiplicador de la restricción (6.9-h) es nulo, esto es, m^4 =0.

Demostración:

Sea BAN_G a la función BAN restringida al conjunto de subsidios que satisfacen la restricción de presupuesto en el nivel $G\in\Re$.

Se calculará el multiplicador de lagrange de la restricción de presupuesto, definido cómo $m^4 = \left.\frac{\partial BAN_G}{\partial G}\right|_{t^*}$, donde t^* es el punto óptimo de BAN_G. Para esto, sea $\delta\in\Re$ y calculemos el punto óptimo de $BAN_{G+\delta}$.

Se observa que $t^*+\delta/H$ cumple con la restricción de presupuesto en el nivel $G+\delta$ y además, por la propiedad 4.2, es tal que $BAN_{G+\delta}(t^*+\delta/H)=BAN_G(t^*)$. Supongamos que existe t tal $BAN_{G+\delta}(t)>BAN_{G+\delta}(t^*+\delta/H)$. En ese caso se tendría que $BAN_G(t-\delta/H)>BAN_G(t^*)$ que sería una contradicción con el hecho que t^* es óptimo. Luego, todo cambio en G deja invariante la solución del problema y, por lo tanto, el valor óptimo de BAN, esto es, m^4=0.

□

En estas condiciones la ecuación (6.9-a) puede ser escrita de manera más simple cómo:

$$\frac{\partial BAN}{\partial t_{gwq}} + m^2_{gwq} - m^1_{gwq} + \sum_{khvi} m^3_{khvi}\frac{\partial f^k_{hvi}}{\partial t_{gwq}} = 0 \quad \forall \text{gwq} \qquad \text{(6.9-a)'}$$

En este punto, algunas conclusiones interesantes pueden ser obtenidas. En efecto, si un subsidio en la frontera de T que satisface todas las restricciones, esto es: o bien $t_{hvi}=a_{hvi}$ o bien $t_{hvi}=b_{hvi}$. Se tiene entonces que para cualquier valor de la primera y cuarta componente en (6.9-a)', existirán valores de los multiplicadores m^2 o m^1, según corresponda, que balancean la ecuación. Esto indica una tendencia a encontrar soluciones extremas. Por otro lado, en el caso de un punto interior a T, las condiciones serán satisfechas sólo si los signos de las derivadas de BAN y las restricciones son opuestos, esto es, para las restricciones activas el beneficio debe aumentar en el sentido de la factibilidad.

Para poder obtener algún resultado numérico a partir del sistema de primer orden es necesario calcular la derivada parcial de la función de beneficio *BAN* expuesta en (6.9-a)', para cada dimensión del subsidio. Esta derivada puede escribirse como:

$$\frac{\partial BAN}{\partial t_{gwq}} = -\sum_h H_h \frac{\partial b_h}{\partial t_{gwq}} + \sum_{vi} S \frac{\partial P_{vi}}{\partial t_{gwq}} \left[r_{vi} - c_{vi} \right] + \sum_{vi} S\, P_{vi} \left[\frac{\partial r_{vi}}{\partial t_{gwq}} - \frac{\partial c_{vi}}{\partial t_{gwq}} \right] - \sum_{hvi} \frac{\partial H_{hvi}}{\partial t_{gwq}} t_{hvi} - H_{gwq} \qquad (6.10)$$

Por lo tanto, dadas las componentes de (6.10) es necesario calcular el gradiente de la función de punto fijo global del equilibrio RB&SM. Dado que la solución de equilibrio es un punto fijo, el gradiente de esta función resulta en la solución del siguiente sistema lineal de punto fijo:

$$\frac{\partial b_h}{\partial t_{gwq}} = -\frac{1}{H_h} \left\{ \sum_{vi} H_{hvi} \left[\frac{\partial b_{hvi}}{\partial t_{gwq}} + \delta_{gwq}^{hvi} - \frac{\partial r_{vi}}{\partial t_{gwq}} \right] + \frac{1}{\mu} \sum_{vi} P_{h/vi} \frac{\partial S_{vi}}{\partial t_{gwq}} \right\} \forall hgwq \qquad (6.11\text{-a})$$

$$\frac{\partial P_{h/vi}}{\partial t_{gwq}} = \mu P_{h/vi} \left\{ \frac{\partial b_h}{\partial t_{gwq}} + \frac{\partial b_{hvi}}{\partial t_{gwq}} + \delta_{gwq}^{hvi} - \frac{\partial r_{vi}}{\partial t_{gwq}} \right\} \forall hvigwq \qquad (6.11\text{-b})$$

$$\frac{\partial P_{vi}}{\partial t_{gwq}} = \lambda S \cdot P_{vi} \left\{ \frac{\partial r_{vi}}{\partial t_{gwq}} - \frac{\partial c_{vi}}{\partial Y_{gwq}} - \sum_{sj} P_{sj} \left(\frac{\partial r_{sj}}{\partial t_{gwq}} - \frac{\partial c_{sj}}{\partial t_{gwq}} \right) \right\} \forall vigwq \qquad (6.11\text{-c})$$

donde

$$\frac{\partial r_{vi}}{\partial t_{gwq}} = \sum_h P_{h/vi} \left(\frac{\partial b_h}{\partial t_{gwq}} + \frac{\partial b_{hvi}}{\partial t_{gwq}} + \delta_{gwq}^{hvi} \right) \quad \forall vigwq \qquad (6.11\text{-d})$$

$$\frac{\partial b_{hvi}}{\partial t_{gwq}} = H \begin{bmatrix} \alpha_h \sum\limits_{p \in \Omega_h, s} \left(\frac{\partial P_{p/si}}{\partial t_{gwq}} P_{si} + P_{p/si} \frac{\partial P_{si}}{\partial t_{gwq}} \right) I_p + \\ \beta_h \sum\limits_{p \notin \Omega_h, s} \left(\frac{\partial P_{p/si}}{\partial t_{gwq}} P_{si} + P_{p/si} \frac{\partial P_{si}}{\partial t_{gwq}} \right) I_p + \eta_h \sum\limits_s \frac{\partial P_{si}}{\partial t_{gwq}} X_{si} \end{bmatrix} \forall hvigwq \qquad (6.11\text{-e})$$

$$\frac{\partial H_{hvi}}{\partial t_{gwq}} = S \left[\frac{\partial P_{vi}}{\partial t_{gwq}} P_{h/vi} + P_{vi} \frac{\partial P_{h/vi}}{\partial t_{gwq}} \right] \quad \forall hvigwq \qquad (6.11\text{-f})$$

$$\frac{\partial c_{vi}}{\partial t_{gwq}} = S \cdot g_{vi} \sum_{rj} \xi_{rj} \frac{\partial P_{rj}}{\partial t_{gwq}} \quad \forall vigwq \qquad (6.11\text{-g})$$

$$\delta_{gwq}^{hvi} = \begin{cases} 1 & h = g \wedge v = w \wedge i = q \\ 0 & \neg \end{cases} \qquad (6.11\text{-h})$$

Notar que hay un sistema de ecuaciones para cada combinación *gwq* que es independiente de las otras combinaciones. Adicionalmente, cada sistema de ecuaciones es lineal y se puede escribir un sistema lineal similar para cada una de las derivadas de orden superior.

El sistema anterior tiene la forma $x=Ax+b$ y tiene solución analítica si la matriz (I-A) es invertible, donde I es la identidad. En particular si $||A||<1$, la matriz tiene una inversa y, más aún, en ese caso el operador lineal es contractivo y, según el teorema de Banach, el algoritmo estándar converge a dicha solución cualquiera sea el punto inicial. Desafortunadamente la condición $||A||<1$ es muy exigente, entonces un método alternativo y menos costoso que invertir A puede ser considerado. En las simulaciones presentadas en el capítulo siguiente no se calcula estas derivadas directamente, sino que las derivadas de la función BAN son aproximadas por diferencias finitas.

En general la información de segundo orden es usada en algunos algoritmos de optimización cuando está disponible. Sin embargo, no se analiza aquí y puede resultar útil en una aplicación real del modelo, debido a que en ciudades grandes la cantidad de variables alcanza tal magnitud que las dimensiones del Hessiano lo hacen computacionalmente inmanejable en un cálculo de diferencias finitas.

La condición $||A||<1$ no pudo ser demostrada para el caso general, sin embargo, a pesar de la dificultad que representa resolver las condiciones de primer orden para este caso, es posible para casos especiales obtener resultados satisfactorios. La siguiente sección trata este tema.

6.4 Estudio de casos particulares.

Se consideran 4 casos particulares en cuanto al mercado:

- Oferta dada y sin externalidades.
- Oferta dada con externalidades.
- Oferta variable sin externalidades.
- Oferta variable con externalidades.

En todos los casos se analiza de manera particular la política de subsidios homogéneos (específicamente la política de subsidios nulos) con objeto de descubrir condiciones bajo las cuales el mercado resulta eficiente.

En lo que sigue se asume que las restricciones corresponden a restricciones sobre la oferta inmobiliaria, de la forma $f_{hvi}^{k}(t_{\dots}) = f_{hvi}^{k}(P_{\cdot/\cdot\cdot}(t_{\dots}), P_{\cdot\cdot}(t_{\dots}))$. Esto significa que en las condiciones de primer orden se tiene:

$$\frac{\partial f_{hvi}^{k}}{\partial t_{gwq}} = \sum_{prj} \frac{\partial f_{hvi}^{k}}{\partial P_{p/rj}} \frac{\partial P_{p/rj}}{\partial t_{gwq}} + \sum_{rj} \frac{\partial f_{hvi}^{k}}{\partial P_{rj}} \frac{\partial P_{rj}}{\partial t_{gwq}} \qquad (6.12)$$

6.4.1 Mercado con oferta dada y sin externalidades.

La literatura indica que en este caso el mercado resulta eficiente (Fujita, 1989). En esta sección se muestra este mismo resultado para el modelo RB&SOSPM.

El caso bajo estudio queda representado por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial b_{hvi}}{\partial t_{gwq}} = \frac{\partial c_{vi}}{\partial t_{gwq}} = \frac{\partial P_{vi}}{\partial t_{gwq}} = 0 \quad \forall vigwq \qquad (6.13)$$

En estas condiciones el cuarto término de la ecuación (6.9-a) es nulo gracias a la igualdad en (6.13), resultando:

$$\frac{\partial BAN}{\partial t_{gwq}} = m_{gwq}^{1} - m_{gwq}^{2} \quad \forall gwq \qquad (6.14)$$

Es claro que existen puntos en la frontera del conjunto T que permiten satisfacer (6.14). Además, sólo se puede asegurar que un punto interior satisface la ecuación cuando el gradiente de BAN en dicho punto es nulo. Afortunadamente en este caso el gradiente de BAN es calculable en forma directa. En efecto, a partir de (6.11-a), (6.10) y (6.13) se obtiene:

$$\frac{\partial BAN}{\partial t_{gwq}} = -\sum_{hvi} \frac{\partial H_{hvi}}{\partial t_{gwq}} t_{hvi} \qquad (6.15)$$

Recordando que $\sum_{vi} H_{hvi} = H_h$ y $\sum_{h} H_{hvi} = S_{vi}$ son ambas constantes en este caso, se tiene que $\sum_{vi} \frac{\partial H_{hvi}}{\partial t_{gwq}} = \frac{\partial H_h}{\partial t_{gwq}} = 0$ y $\sum_{h} \frac{\partial H_{hvi}}{\partial t_{gwq}} = \frac{\partial S_{vih}}{\partial t_{gwq}} = 0$. Luego toda política de subsidio a la oferta, es decir del tipo $t_{hvi} = t_{vi}$ $\forall h$, o a la demanda, es decir del tipo $t_{hvi} = t_h$ $\forall vi$, anula la derivada en (6.15), por lo que (6.14) es satisfecha por la solución que resulta de RB&SM. Más aún, en ambos tipos de subsidios la localización predicha por RB&SM es la misma pues mientras el subsidio a la oferta no afecta las probabilidades de localización, el subsidio a la demanda es compensado completamente por las componentes b_h. En particular, el subsidio homogéneo (nulo si G=0) satisface las condiciones de primer orden, tal como se esperaba. Esto significa, en particular que en este caso el equilibrio RB&SM no subsidiado satisface las condiciones de primer orden del problema RB&SOSPM, siendo candidato a solución óptima.

La pregunta natural que sigue a continuación es ¿cuándo este equilibrio es óptimo?, es decir, ¿en qué condiciones el equilibrio de RB&SM de localización pura maximiza el beneficio agregado BAN? La respuesta a esta interrogante requiere el cálculo de información de segundo orden para el problema, que en este caso sencillo es posible de obtener. En efecto, a partir de (6.10) y (6.13) se tiene, para este caso la siguiente matriz Hessiana para la función lagrangeana:

$$\frac{\partial^2 BAN}{\partial t_{gwq}\partial t_{abc}} = -\sum_h H_h \frac{\partial^2 b_h}{\partial t_{gwq}\partial t_{abc}} + \sum_{vi} S_{vi} \frac{\partial^2 r_{vi}}{\partial t_{gwq}\partial t_{abc}} - \sum_{hvi} \frac{\partial^2 H_{hvi}}{\partial t_{gwq}\partial t_{abc}} t_{hvi} - \frac{\partial H_{abc}}{\partial t_{gwq}} - \frac{\partial H_{gwq}}{\partial t_{abc}} \quad (6.16)$$

donde

$$\frac{\partial^2 b_h}{\partial t_{gwq}\partial t_{abc}} = -\frac{1}{H_h}\sum_{vi}\frac{\partial H_{hvi}}{\partial t_{abc}}\left[\delta_{gwq}^{hvi} - \frac{\partial r_{vi}}{\partial t_{gwq}}\right] + \frac{1}{H_h}\sum_{vi} H_{hvi}\frac{\partial^2 r_{vi}}{\partial t_{gwq}\partial t_{abc}} \quad \forall hgwqabc \quad (6.16)\text{-a)}$$

$$\frac{\partial^2 P_{h/vi}}{\partial t_{gwq}\partial t_{abc}} = \mu\frac{\partial P_{h/vi}}{\partial t_{abc}}\left\{\frac{\partial b_h}{\partial t_{gwq}} + \delta_{gwq}^{hvi} - \frac{\partial r_{vi}}{\partial t_{gwq}}\right\} + \mu P_{h/vi}\left\{\frac{\partial^2 b_h}{\partial t_{gwq}\partial t_{abc}} - \frac{\partial^2 r_{vi}}{\partial t_{gwq}\partial t_{abc}}\right\} \forall hvigwqabc \quad (6.16)\text{-b)}$$

junto con

$$\frac{\partial^2 r_{vi}}{\partial t_{gwq}\partial t_{abc}} = \sum_h \frac{\partial P_{h/vi}}{\partial t_{abc}}\left(\frac{\partial b_h}{\partial t_{gwq}} + \delta_{gwq}^{hvi}\right) + \sum_h P_{h/vi}\frac{\partial^2 b_h}{\partial t_{gwq}\partial t_{abc}} \quad \forall vigwqabc \quad (6.16)\text{-c)}$$

$$\frac{\partial H_{hvi}}{\partial t_{gwq}} = S_{vi}\frac{\partial P_{h/vi}}{\partial t_{gwq}} \quad \forall hvigwq \quad (6.16)\text{-d)}$$

$$\frac{\partial^2 H_{hvi}}{\partial t_{gwq}\partial t_{abc}} = S_{vi}\frac{\partial^2 P_{h/vi}}{\partial t_{gwq}\partial t_{abc}} \quad \forall hvigwqabc \quad (6.16)\text{-e)}$$

Reemplazando (6.16)-a) en (6.15) se obtiene:

$$\frac{\partial^2 BAN}{\partial t_{gwq}\partial t_{abc}} = -\frac{\partial H_{abc}}{\partial t_{gwq}} - \sum_{hvi}\frac{\partial^2 H_{hvi}}{\partial t_{gwq}\partial t_{abc}} t_{hvi} \quad (6.17)$$

Pero se tiene que para una política de subsidio diferenciado por oferta o por demanda, el segundo término de (6.17) se vuelve nulo. En efecto, debido a la linealidad de la derivada y a la homogeneidad del subsidio se tiene que $\sum_{hvi} \frac{\partial^2 H_{hvi}}{\partial t_{gwq} \partial t_{abc}} t = t \frac{\partial^2 H}{\partial t_{gwq} \partial t_{abc}} = 0$, resultando:

$$\frac{\partial^2 BAN}{\partial t_{gwq} \partial t_{abc}} = -\frac{\partial H_{abc}}{\partial t_{gwq}} \tag{6.18}$$

Lamentablemente, no ha sido posible hasta el momento de cierre de este trabajo, calcular explícitamente estas derivadas y menos concluir si la matriz hessiana anterior resulta definida positiva o no. Esta conclusión sólo puede ser por el momento testeada a nivel de simulaciones, tal como se hace en el capítulo siguiente.

6.4.2 Mercado con oferta dada y con externalidades.

Siguiendo el análisis del caso anterior, éste caso queda representado por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial c_{vi}}{\partial t_{gwq}} = \frac{\partial P_{vi}}{\partial t_{gwq}} = 0 \quad \forall vigwq \tag{6.19}$$

Siguiendo un análisis análogo al realizado para el caso anterior, se obtiene la misma condición de primer orden:

$$\frac{\partial BAN}{\partial t_{gwq}} = m^1_{gwq} - m^2_{gwq} \quad \forall gwq \tag{6.20}$$

Nuevamente, resulta claro que existen puntos en la frontera del conjunto T que permiten satisfacer (6.20). Además, sólo se puede asegurar que un punto interior también satisface (6.20) si el gradiente de BAN en dicho punto es nulo. En este caso, a partir de (6.11), (6.10) y (6.20), el gradiente de BAN resulta:

$$\frac{\partial BAN}{\partial t_{gwq}} = \sum_{hvi} H_{hvi} \frac{\partial b_{hvi}}{\partial t_{gwq}} - \sum_{hvi} \frac{\partial H_{hvi}}{\partial t_{gwq}} t_{hvi} \tag{6.21}$$

Luego, bajo la política de subsidios a la oferta, es decir del tipo $t_{hvi} = t_{vi} \quad \forall h$, o a la demanda, es decir del tipo $t_{hvi} = t_h \quad \forall vi$, en (6.21) sólo sobrevive el término asociado a las externalidades, resultando:

$$\frac{\partial BAN}{\partial t_{gwq}} = \sum_{hvi} H_{hvi} \frac{\partial b_{hvi}}{\partial t_{gwq}} \qquad (6.22)$$

Por lo tanto, en estos casos la solución depende de las externalidades. El subsidio óptimo es tal que, para cada componente interior al espacio factible, el monto de subsidio redistribuido producto de un cambio marginal en ella, compensa exactamente la variación marginal agregada que se produce en la externalidad.

6.4.3 Mercado con oferta variable y sin externalidades.

Siguiendo el análisis del primer caso, éste queda representado por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\frac{\partial b_{hvi}}{\partial t_{gwq}} = 0 \qquad \forall hvigwq \qquad (6.23)$$

Siguiendo un análisis análogo al realizado para el primer caso, se obtiene una condición de primer orden distinta:

$$\frac{\partial BAN}{\partial t_{gwq}} = m^1_{gwq} - m^2_{gwq} - \sum_{kvi} m^3_{kvi} \left(\sum_{prj} \frac{\partial f^k_{hvi}}{\partial P_{p/rj}} \frac{\partial P_{p/rj}}{\partial t_{gwq}} + \sum_{rj} \frac{\partial f^k_{hvi}}{\partial P_{rj}} \frac{\partial P_{rj}}{\partial t_{gwq}} \right) \quad \forall gwq \qquad (6.24)$$

Para este caso entonces la optimalidad depende directamente de las derivadas de las restricciones. El gradiente de la izquierda resulta:

$$\frac{\partial BAN}{\partial t_{gwq}} = \sum_{vi} S \frac{\partial P_{vi}}{\partial t_{gwq}} \left[r_{vi} - c_{vi} \right] - \sum_{vi} S_{vi} \frac{\partial c_{vi}}{\partial t_{gwq}} - \sum_{hvi} \frac{\partial H_{hvi}}{\partial t_{gwq}} t_{hvi} \qquad (6.25)$$

Luego, bajo la política de subsidios a la oferta, es decir del tipo $t_{hvi} = t_{vi} \quad \forall h$, o a la demanda, es decir del tipo $t_{hvi} = t_h \quad \forall vi$, en (6.25) sólo sobreviven los términos asociados a las ganancias y costos del oferente, resultando:

$$\frac{\partial BSN}{\partial t_{gwq}} = \sum_{vi} S \frac{\partial P_{vi}}{\partial t_{gwq}} \left[r_{vi} - c_{vi} \right] - \sum_{vi} S_{vi} \frac{\partial c_{vi}}{\partial t_{gwq}} \quad (6.26)$$

De esta última ecuación se desprende que el gradiente del equilibrio con este tipo de subsidios no necesariamente resulta nulo, y su valor depende de la tecnología y rentas obtenidas por el oferente en el mercado. Así, el subsidio óptimo, en cada una de sus componentes interiores al espacio definido por las cotas de subsidio, debe ser tal que el monto del beneficio producto de un cambio marginal en tal componente, compensa la ganancia agregada asociada al cambio de oferta de los distintos bienes neta del costo marginal agregado, menos el costo sombra de las regulaciones activas.

6.4.4 Mercado con oferta variable y con externalidades.

En este caso, se mezclan los efectos de los dos casos previos. Como no aporta mucho más a la discusión no se incluyen las fórmulas correspondientes aquí.

Las conclusiones que se obtienen son análogas a las anteriores, indicando que el subsidio óptimo, en cada una de sus componentes interiores, debe ser tal que el monto de subsidio redistribuido producto de un cambio marginal en ella, compensa la ganancia agregada asociada al cambio de oferta de los distintos bienes neta del costo marginal agregado, y la variación agregada de la externalidad que genera, menos el costo sombra de las regulaciones activas.

6.5 Naturaleza de los subsidios óptimos.

A partir de las propiedades 4.12 y 4.13 del capítulo IV, es posible probar la siguiente propiedad.

Propiedad 6.3: Descomposición del subsidio óptimo de RB&SOSPM.

Sea t^*_{hvi} la solución óptima de RB&SOSPM y (b^*_h, H^*_{hvi}) la componente de utilidad y la localización asociada a ella. Entonces se tiene que $t^*_{hvi}=t_{hvi}(b^*_h,H^*_{hvi})+t_{vi}(b^*_{.},H^*_{.vi})$ donde las funciones de la derecha corresponde a los subsidios inductores de la localización (b^*_h,H^*_{hvi}) indicados en la propiedad 4.12, desplazados homogéneamente para que cumplan con la restricción de presupuesto de RB&SOSPM asociada a t^*_{hvi}.

Demostración:

Sea $t_{hvi}= t_{hvi}(b^*_h,H^*_{hvi})+t_{vi}(b^*_{.},H^*_{.vi})+t$ donde t se define por $t=\frac{\sum_{hvi} H^*_{hvi}t^*_{hvi}-\sum_{hvi} H^*_{hvi}t_{hvi}}{\overline{H}}$

con $\overline{H}=\sum_{h} H^*_{hvi}$ es total exógeno de demanda. Se tiene que t_{hvi} cumple con la misma restricción de presupuesto que t^*_{hvi}. Luego, gracias a la propiedad 4.13, t_{hvi} son el único conjunto de subsidios que aplica (b^*_h,H^*_{hvi}) y satisface tal presupuesto. Por lo tanto, como t^*_{hvi} hace lo mismo se debe cumplir que $t^*_{hvi}=t_{hvi}$.

□

Luego, se tiene que los subsidios óptimos de RB&SOSPM se pueden descomponer en dos: una parte que corrige externalidades de localización y vecindario, y otra que corrige rentas y costos (ganancias). Además, a partir de la propiedad 4.9 y 5.3 se puede probar la siguiente:

Propiedad 6.4: Transferencia entre subsidios óptimos y utilidades.

Sea t^*_{hvi} la solución óptima de RB&SOSPM y (b^*_h,H^*_{hvi}) la componente de utilidad y la localización asociada a ella. Entonces $t_{hvi}=t^*_{hvi}+\lambda_h$ es solución óptima de $(b^*_h-\lambda_h,H^*_{hvi})$ donde λ_h es cualquier vector tal que t_{hvi} cumple con la restricción de presupuesto de t^*_{hvi}.

Demostración:

A partir de la propiedad 4.9 con la transferencia indicada la localización no cambia, y a partir de la propiedad 5.2 la función *BAN* tampoco. Luego, el nuevo subsidio también es óptimo. Notar finalmente que a partir de la propiedad 6.3 y 4.13, el subsidio t_{hvi} de la propiedad anterior, es el subsidio inductor de la localización $(b^*_h-\lambda_h,H^*_{hvi})$.

□

Esta propiedad indica que el problema RB&SOSPM puede ser simplificado fijando exógenamente el nivel de utilidad en el mercado. El subsidio óptimo, no está completamente definido a menos que se fije este nivel. Una alternativa es fijarlo en el valor que se alcanzaría en el mercado sin la aplicación de subsidios.

Por otro lado, si se fija la utilidad exógenamente, el modelo maximiza el beneficio de los productores, neto del costo de subsidios. Esto se debe a que la regla del máximo postor implica que las rentas contienen toda la información sobre los agentes demandantes, por lo que ellas son suficientes para plantear el problema de planificación óptima. Esto está de acuerdo con Fujita (1989) cuyo problema de óptimo social maximiza el valor agregado de la tierra (excedente en el consumo de otro bienes y servicios distintos de localización). Se debe notar, sin embargo, que las transferencias posibles están acotadas por las cotas de los subsidios.

6.6 Síntesis del capítulo.

Se ha definido un modelo operativo de planificación óptima denominado RB&SOSPM, basado en el modelo general definido en el capítulo III, con las propiedades deseadas de eficiencia en cálculo del equilibrio y se han obtenido sus condiciones de primer orden, las que por su complejidad sólo han sido estudiadas analíticamente para algunos casos particulares. Las soluciones a este problema cuando existen no tienen una estructura deducible directamente de estas condiciones, debido a su complejidad intrínseca.

Soluciones especiales como la política de subsidios homogéneos (eficiencia del equilibrio RB&SM no subsidiado) resulta ser un punto crítico para un mercado sin externalidades y oferta dada; sin embargo, no ha sido posible probar su optimalidad. La literatura en este caso indica que el mercado resulta eficiente evidencia que apunta a que efectivamente se trata de un óptimo para RB&SOSPM.

Algunas propiedades muestran que los subsidios óptimos pueden obtenerse a partir de la localización óptima, según indica la propiedad 4.12. Esto permite plantear la posibilidad de buscar la localización óptima en vez de los subsidios óptimos problema que es enfrentado en el capítulo siguiente. Este nuevo problema permite simplificar enormemente la complejidad analítica y de cálculo.

Finalmente, se observa que el valor de los subsidios sólo puede ser determinado una vez que se ha definido exógenamente la utilidad, o bien la utilidad de los agentes en la localización óptima sólo se obtiene una vez que se ha fijado el valor de los subsidios. Esta libertad permite plantear el problema con utilidades prefijadas, tal como lo aplica Fujita (1989). Una alternativa es fijar el nivel de utilidad en aquel que se alcanzaría en el mercado sin subsidios, para lo cual basta calcular el equilibrio RB&SM correspondiente, sin embargo, esta transferencia está acotada por las cotas asociadas a los subsidios, que están relacionadas con las restricciones de ingreso de los agentes, la política imperante y el presupuesto.

VII. Modelo Operativo de Localización Óptima.

7.1 Introducción.

En el capítulo anterior se presentó el modelo operativo de subsidios óptimos RB&SOSPM que resuelve de manera directa el problema de planificación óptima en subsidios, resolviendo el equilibrio RB&SM en cada evaluación de la función objetivo. Esta misma característica, que aporta gran complejidad al modelo, lo hace analíticamente difícil de tratar incluso para los casos más sencillos. Sin embargo, ciertas propiedades del modelo, la función objetivo y el equilibrio RB&SM, permiten la obtención de los subsidios óptimos por una vía alternativa.

Se plantea en este capítulo un nuevo modelo que se denomina Modelo Operativo de Localización Óptima, denominado OULM por sus siglas en inglés (Optimal Urban Location Model). Este modelo, diferencia del anterior, busca la mejor localización para la misma función de beneficios en que los subsidios corresponden a aquellos de la propiedad 4.12. Una ventaja es que permite un estudio analítico de sus condiciones de primer orden, las que se utilizan en particular para obtener la composición de los subsidios óptimos.

La función objetivo del nuevo modelo corresponde a la función BAN del modelo RB&SOSPM, reemplazando los subsidios por el valor de los subsidios inductores expresados por la propiedad 4.12, lo que por la propiedad 6.4 no produce distorsiones en la solución óptima y por 4.13 tampoco lo hace para cualquier localización inducida por tales subsidios. Por este motivo se le ha llamado de la misma forma: BAN.

A diferencia de RB&SM en el modelo OULM no se asume competencia por localización entre agentes, ni maximización de ganancia por parte de los oferentes. Antes que esto, busca directamente una localización en el sentido de BAN y sus condiciones de primer orden, muestran que en el óptimo se resuelve la externalidad y el equilibrio.

Se plantea entonces un problema de optimización del beneficio agregado neto, adecuado a la teoría BID que sustenta a RB&SM, resolviendo sus condiciones de primer orden. A partir de ellas se determina la composición de los subsidios óptimos y su relación con las externalidades, las economías en costos y las regulaciones. Posteriormente, se utiliza el modelo, como una aplicación, para evaluar la eficiencia de los equilibrios RB&SM en los distintos casos estudiados en el capítulo previo. Se obtiene el mismo resultado de Fujita (1989) para la eficiencia sin externalidades y con oferta dada. Hacia el final del capítulo, se demuestran propiedades que relacionan las soluciones de RB&SOSPM con las de OULM.

7.2 El modelo OULM.

Se considera en el resto del capítulo el problema de selección de la mejor asignación para los bienes inmuebles en el mercado, considerando oferta y demanda variable, que maximiza la siguiente función de Beneficio Agregado Neto del capítulo V (ecuación (5.6)), pero sin considerar regulaciones:

$$BAN = -\sum_{h} H_h b_h(t) + \sum_{vi} S_{vi}(t)\left[r_{vi}(t) - c_{vi}(t)\right] - \sum_{hvi} H_{hvi}(t) t_{hvi} \qquad (7.1)$$

Para construir esta función se ha supuesto un mercado de remate con funciones de posturas estocásticas Gumbel, con componente determinística $B_{hvi}=b_h(U_h)+b_{hvi}+t_{hvi}+b$, que representan el comportamiento de los consumidores tal como es modelado por RB&SM. De esta forma, la renta corresponde a la misma renta de RB&SM dada por la ecuación (4.3) del capítulo IV.

Se recurre a una formulación similar a la aplicada por Fujita (1989), cuyo objetivo es maximizar excedentes, sujeto a un conjunto de niveles de utilidad prefijados y transversales a todas las localizaciones en la ciudad para cada categoría de agentes que se localizan. Con esta formulación se elimina de las soluciones el fenómeno que Mirlees (1972) denominó "tratamiento desigual de los iguales", en que agentes de un mismo tipo alcanzan utilidades distintas cuando se localizan en diferentes lugares, contradiciendo una consecuencia fundamental de la teoría de remate en localización urbana[25]. Se define entonces niveles de utilidad prefijados, lo que en el contexto de las posturas dadas por la ecuación (4.1), significa $b_h = \bar{b}_h \ \forall h$ exógeno, debido a que el ingreso también lo es (ver Anexo A). Con esto el primer término de (7.1) resulta constante.

[25] Notar que el modelo RB&SM y por lo tanto el RB&SOSPM cumplen esta propiedad debido a la separabilidad aditiva de la componente utilidad en la postura que permite definirla en equilibrio tal que U_h es transversal para cada h.

Finalmente, se reemplaza en la ecuación anterior los subsidios inductores de localización en RB&SM, dados por la propiedad 4.12, obteniendo una formulación de *BAN* como función de localización y oferta, independiente del valor de b_h, que se llamará $BAN(H_{\bullet\bullet\bullet}, S_{\bullet\bullet})$:

$$BAN(H,S) = \sum_{hvi} H_{hvi} b_{hvi}(H_{\bullet\bullet\bullet}, S_{\bullet\bullet}) + \frac{1}{\lambda}\sum_{vi} S_{vi} \ln\left(\frac{S_{vi}}{S}\right) - \frac{1}{\mu}\sum_{hvi} H_{hvi} \ln\left(\frac{H_{hvi}}{\overline{H}_h S_{vi}}\right) \quad (7.2)$$

donde la postura indicada es la de RB&SM con subsidio nulo y sin la componente de utilidad b_h, pues el subsidio ha sido resuelto explícitamente y la utilidad ha sido prefijada. El primer término de BAN corresponde a la postura total del mercado y el segundo al costo total. Considerando que la renta es la máxima postura, estos dos términos están relacionados a la maximización de la ganancia total de los oferentes. Los dos últimos términos son de tipo entrópico y provienen del subsidio inductor de la localización en RB&SM.

Así se define el Modelo de Localización Urban Óptima, OULM(b_h), como:

$$\begin{aligned}
&\max_{H_{\bullet\bullet\bullet}, S_{\bullet\bullet}} BAN(H_{\bullet\bullet\bullet}, S_{\bullet\bullet}) \\
&s.a \\
&\quad \sum_{vi} H_{hvi} = \overline{H}_h \ \forall h \\
&\quad \sum_{h} H_{hvi} = S_{vi} \ \forall vi \\
&\quad H_{\bullet\bullet\bullet}, S_{\bullet\bullet} \in \rho \\
&\quad H_{hvi}, S_{vi} \geq \varepsilon \ \forall hvi
\end{aligned} \quad (7.3)$$

donde la primera restricción corresponde a la condición que todos los agentes se localizan, que equivale a la condición de equilibrio impuesta en RB&SM, y la segunda a que todo los bienes ofertados se utilizan. Por su parte, la tercera restricción exige que la localización cumpla con las regulaciones existentes. La última restricción exige que la localización y oferta sea mayor que un límite inferior positivo ε (en adelante nivel de aproximación), que resulta necesario para evitar problemas numéricos en la evaluación de la función de beneficio. En efecto, según se vera más adelante existe una tendencia a concentrar oferta en la solución óptima de (7.3) lo que genera problemas en el cálculo de los logaritmos en BAN para aquellas opciones en que la oferta se hace nula.

El lector notará que se ha eliminado el parámetro γ de *BAN*, encargado de ajustar las regulaciones en el modelo RB&SM. En efecto, este tipo de restricciones deben ser incluidas explícitamente en esta formulación y su efecto en la optimalidad se manifiesta a través de los multiplicadores de lagrange respectivos en las condiciones de primer orden resultantes. Las restricciones físicas de positividad en la localización y oferta, resultan innecesarias debido a que el último término de la función objetivo impide que estás variables se anulen, haciendo las veces de función de barrera. Finalmente, la última restricción corresponde a asegurar el presupuesto en subsidios, que se obtiene a partir de los subsidios inductores indicados en la propiedad 4.12.

Es posible demostrar la siguiente propiedad.

***Propiedad 7.1: Independencia de la solución de OULM*(*b_h*) respecto a *b_h*.**

La solución de OULM(b_h) es independiente del valor de b_h.

Demostración:

Debido a la función de subsidios inductores, indicada en la propiedad 4.12, la función *BAN* utilizada por OULM(b_h) no depende de este valor. Dado que ninguna restricción del problema lo incluye, se concluye la independencia.

□

Como consecuencia de la propiedad anterior se omite en lo que sigue la referencia a b_h, denominado al problema (7.3) simplemente por OULM.

Las variables de optimización en (7.3) son la localización de agentes H_{hvi} y la oferta S_{vi}. En el caso de analizar el mercado con oferta dada (corto plazo) esta condición debe ser impuesta en la segunda restricción y sólo se debe optimizar en H_{hvi}. Por otro lado, las soluciones de (7.3) dependerán de las características del mercado considerado, en particular de la existencia de externalidades a la localización o de la presencia de regulaciones más o menos estrictas.

Finalmente, al igual que en el capítulo anterior, en lo que sigue se considera que las restricciones en ρ^0 son de la forma $F_{hvi}^k(H_{\cdots}) \le R_{hvi}^k$ y $G_{hvi}^k(S_{\cdot\cdot}) \le R_{vi}^k$ que generalizan las restricciones lineales de RB&SM. Se puede rescribir (7.3) en la forma:

$$
\begin{aligned}
&\max_{H_{\bullet\bullet\bullet},S_{\bullet\bullet}} \quad BAN\left(H_{\bullet\bullet\bullet},S_{\bullet\bullet}\right)\\
&s.a\\
&\quad \sum_{vi} H_{hvi} = \overline{H}_{h} \ \forall h\\
&\quad \sum_{h} H_{hvi} = S_{vi} \ \forall vi\\
&\quad \mathrm{F}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{hvi}}\left(H_{\bullet\bullet\bullet}\right) \le R^{k}_{hvi} \ \forall khvi\\
&\quad \mathrm{G}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{vi}}\left(S_{\bullet\bullet}\right) \le R^{k}_{vi} \ \forall kvi\\
&\quad H_{hvi},S_{vi} \ge \varepsilon \ \forall hvi
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

7.3 Condiciones de primer orden del OULM.

La función lagrangeana para (7.4) resulta:

$$
\begin{aligned}
L = BAN\left(H_{\bullet\bullet\bullet},S_{\bullet\bullet}\right) &- \sum_{h} \lambda_{h}\left(\sum_{vi} H_{hvi} - \overline{H}_{h}\right) - \sum_{vi} \lambda_{vi}\left(\sum_{h} H_{hvi} - S_{vi}\right)\\
&- \sum_{khvi} m^{1}_{khvi}\left(F^{k}_{hvi}\left(H_{\bullet\bullet\bullet}\right) - R^{k}_{hvi}\right) - \sum_{kvi} m^{2}_{kvi}\left(G^{k}_{vi}\left(S_{\bullet\bullet}\right) - R^{k}_{vi}\right)\\
&- \sum_{hvi} m^{3}_{hvi}\left(H_{hvi} - \varepsilon\right) - \sum_{hvi} m^{4}_{vi}\left(S_{vi} - \varepsilon\right)
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

Diferenciando el lagrangeano anterior respecto a cada componente H_{gwq} y S_{wq}, y con respecto a los multiplicadores de lagrange, e igualando a cero, resulta el siguiente sistema de ecuaciones (7.6):

$$\frac{\partial BAN}{\partial H_{gwq}} = \lambda_{g} + \lambda_{wq} + \sum_{khvi} m^{1}_{khvi} \frac{\partial F^{k}_{hvi}\left(H_{\bullet\bullet\bullet}\right)}{\partial H_{gwq}} + m^{3}_{gwq} \tag{7.6-a}$$

$$\frac{\partial BAN}{\partial S_{wq}} = \lambda_{wq} + \sum_{kvi} m^{2}_{kvi} \frac{\partial G^{k}_{vi}\left(H_{\bullet\bullet\bullet}\right)}{\partial S_{wq}} + m^{4}_{wq} \tag{7.6-b}$$

$$\sum_{vi} H_{gvi} = \overline{H}_{g} \quad \forall g \tag{7.6-c}$$

$$\sum_{g} H_{gwq} = S_{wq} \quad \forall wq \tag{7.6-d}$$

$$F^{k}_{gwj}\left(H_{\bullet\bullet\bullet}\right) \le R^{k}_{gwj} \quad \forall kgwj \tag{7.6-e}$$

$$G^{k}_{wj}\left(S_{\bullet\bullet}\right) \le R^{k}_{wj} \quad \forall kwj \tag{7.6-f}$$

$$H_{hvi} \ge \varepsilon \quad \forall hvi \tag{7.6-g}$$

$$S_{vi} \ge \varepsilon \quad \forall vi \tag{7.6-h}$$

$$m^{1}_{kgwj}\left(F^{k}_{gwj}\left(H_{\bullet\bullet\bullet}\right)-R^{k}_{gwj}\right)=0 \quad \forall kgwj \tag{7.6-i}$$

$$m^{2}_{kwj}\left(G^{k}_{wj}\left(S_{\bullet\bullet}\right)-R^{k}_{wj}\right)=0 \quad \forall kwj \tag{7.6-j}$$

$$m^{3}_{hvi}\left(H_{hvi}-\varepsilon\right)=0 \quad \forall hvi \tag{7.6-k}$$

$$m^{4}_{vi}\left(S_{vi}-\varepsilon\right)=0 \quad \forall vi \tag{7.6-l}$$

Los multiplicadores λ_g se hacen cargo de la restricción de localización (7.6-a), mientras λ_{wq} hacen lo propio con (7.6-d). Los multiplicadores de Kuhn Tucker m^1 y m^2 se asocian respectivamente a las restricciones de desigualdad de regulaciones, en localización y oferta, y los multiplicadores m^3 y m^4 a los niveles de aproximación (cotas mínimas de localización y oferta).

Las derivadas de la función BAN, que resultan:

$$\frac{\partial BAN}{\partial H_{gwq}}=B_{gwq}\left(H_{\bullet\bullet\bullet},S_{\bullet\bullet}\right)+\sum_{hvi}H_{hvi}\frac{\partial B_{hvi}\left(H_{\bullet\bullet\bullet},S_{\bullet\bullet}\right)}{\partial H_{gwq}}-\frac{1}{\mu}\ln\left(\frac{H_{gwq}}{\overline{H}_{g}S_{wq}}\right)-\frac{1}{\mu} \quad \forall gwq \tag{7.7}$$

$$\frac{\partial BAN}{\partial S_{wq}}=\sum_{hvi}H_{hvi}\frac{\partial B_{hvi}\left(H_{\bullet\bullet\bullet},S_{\bullet\bullet}\right)}{\partial S_{wq}}-\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{S_{wq}}{\overline{H}}\right)-\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\lambda} \quad \forall wq \tag{7.8}$$

donde se ha utilizado la restricción activa (7.6-d).

Reemplazando (7.7) en (7.6-a) y despejando H_{gwq} resulta:

$$H_{gwq}=S_{wq}\overline{H}_{g}\exp\left(\mu\left(-\lambda_{g}+B_{gwq}\left(H_{\bullet\bullet\bullet},S_{\bullet\bullet}\right)+\sum_{hvi}H_{hvi}\frac{\partial B_{hvi}\left(H_{\bullet\bullet\bullet},S_{\bullet\bullet}\right)}{\partial H_{gwq}}-\sum_{khvi}m^{1}_{khvi}\frac{\partial F^{k}_{hvi}\left(H_{\bullet\bullet\bullet}\right)}{\partial H_{gwq}}-m^{3}_{gwq}-\lambda_{wq}\right)\right) \tag{7.9}$$

Sumando en g, considerando (7.6-d) y despejando λ_{wq} se obtiene:

$$\lambda_{wq}=\frac{1}{\mu}\sum_{g}\overline{H}_{g}\exp\left(\mu\left(-\lambda_{g}+B_{gwq}\left(H_{\bullet\bullet\bullet},S_{\bullet\bullet}\right)+\sum_{hvi}H_{hvi}\frac{\partial B_{hvi}\left(H_{\bullet\bullet\bullet},S_{\bullet\bullet}\right)}{\partial H_{gwq}}-\sum_{khvi}m^{1}_{khvi}\frac{\partial F^{k}_{hvi}\left(H_{\bullet\bullet\bullet}\right)}{\partial H_{gwq}}-m^{3}_{gwq}\right)\right)+\widetilde{\lambda} \tag{7.10}$$

Reemplazando (7.10) en (7.9) resulta:

$$H_{gwq}=S_{wq}\frac{\overline{H}_{g}\exp\left(\mu\left(-\lambda_{g}+B_{gwq}\left(H_{\bullet\bullet\bullet},S_{\bullet\bullet}\right)+\sum_{hvi}H_{hvi}\frac{\partial B_{hvi}\left(H_{\bullet\bullet\bullet},S_{\bullet\bullet}\right)}{\partial H_{gwq}}-\sum_{khvi}m^{1}_{khvi}\frac{\partial F^{k}_{hvi}\left(H_{\bullet\bullet\bullet}\right)}{\partial H_{gwq}}-m^{3}_{gwq}\right)\right)}{\sum_{p}\overline{H}_{p}\exp\left(\mu\left(-\lambda_{p}+B_{gwq}\left(H_{\bullet\bullet\bullet},S_{\bullet\bullet}\right)+\sum_{hvi}H_{hvi}\frac{\partial B_{hvi}\left(H_{\bullet\bullet\bullet},S_{\bullet\bullet}\right)}{\partial H_{gwq}}-\sum_{khvi}m^{1}_{khvi}\frac{\partial F^{k}_{hvi}\left(H_{\bullet\bullet\bullet}\right)}{\partial H_{pwq}}-m^{3}_{pwq}\right)\right)} \tag{7.11}$$

Para obtener los multiplicadores de lagrange λ_g basta reemplazar (7.11) en las restricciones (7.6-c), para obtener:

$$\lambda_h = \frac{1}{\mu}\ln\left[\sum_{vi} S_{vi} \frac{\exp\left(\mu\left(B_{gwq}(H_{\ldots},S_{\cdot\cdot}) + \sum_{hvi} H_{hvi}\frac{\partial B_{hvi}(H_{\ldots},S_{\cdot\cdot})}{\partial H_{gwq}} - \sum_{khvi} m^1_{khvi}\frac{\partial F^k_{hvi}(H_{\ldots})}{\partial H_{gwq}} - m^3_{gwq}\right)\right)}{\sum_p \overline{H}_p \exp\left(\mu\left(B_{pwq}(H_{\ldots},S_{\cdot\cdot}) + \sum_{hvi} H_{hvi}\frac{\partial B_{hvi}(H_{\ldots},S_{\cdot\cdot})}{\partial H_{gwq}} - \sum_{khvi} m^1_{khvi}\frac{\partial F^k_{hvi}(H_{\ldots})}{\partial H_{gwq}} - m^3_{pwq}\right)\right)}\right] \quad (7.12)$$

Definiendo el subsidio:

$$t'_{gwq} = \sum_{hvi} H_{hvi}\frac{\partial B_{hvi}(H_{\ldots},S_{\cdot\cdot})}{\partial H_{gwq}} - \sum_{khvi} m^1_{khvi}\frac{\partial F^k_{hvi}(H_{\ldots})}{\partial H_{gwq}} - m^3_{gwq} \quad (7.13)$$

se detecta que (7.10), (7.13) y (7.12) corresponden respectivamente a las funciones de rentas, punto fijo de demanda y punto fijo de equilibrio de RB&SM.

Por otro lado, reemplazando (7.8) en (7.6-b), y despejando S_{wq} se obtiene:

$$S_{wq} = \overline{H}\exp\left(\lambda\left(r_{wq} + \tilde{\lambda} + \sum_{hvi} H_{hvi}\frac{\partial B_{hvi}(H_{\ldots},S_{\cdot\cdot})}{\partial S_{wq}} - \sum_{kvi} m^2_{kvi}\frac{\partial G^k_{vi}(S_{\cdot\cdot})}{\partial H_{wq}} - m^4_{wq} - \frac{1}{\mu} - 1\right)\right) \quad (7.14)$$

pero λ_{wq} ha sido identificada en dos componentes, la primera de las cuales corresponde a la renta de RB&SM r_{wq} y la otra, identificada con una tilda, está aún indefinida. Si reemplazamos (7.14) en la identidad $\sum_{wq} S_{wq} = \overline{H}$, resulta:

$$\left(\tilde{\lambda} - \frac{1}{\mu} - 1\right) = -\frac{1}{\lambda}\ln\sum_{wq}\exp\left(\lambda\left(r_{wq} + \sum_{hvi} H_{hvi}\frac{\partial B_{hvi}(H_{\ldots},S_{\cdot\cdot})}{\partial S_{wq}} - \sum_{kvi} m^2_{kvi}\frac{\partial G^k_{vi}(S_{\cdot\cdot})}{\partial H_{wq}} - m^4_{wq}\right)\right) \quad (7.15)$$

Por lo que resulta:

$$S_{wq} = \overline{H}\frac{\exp\left(\lambda\left(r_{wq} + \sum_{hvi} H_{hvi}\frac{\partial B_{hvi}(H_{\ldots},S_{\cdot\cdot})}{\partial S_{wq}} - \sum_{kvi} m^2_{kvi}\frac{\partial G^k_{vi}(S_{\cdot\cdot})}{\partial H_{wq}} - m^4_{wq}\right)\right)}{\sum_{bz}\exp\left(\lambda\left(r_{bz} + \sum_{hvi} H_{hvi}\frac{\partial B_{hvi}(H_{\ldots},S_{\cdot\cdot})}{\partial S_{bz}} - \sum_{kvi} m^2_{kvi}\frac{\partial G^k_{vi}(S_{\cdot\cdot})}{\partial H_{bz}} - m^4_{bz}\right)\right)} \quad (7.16)$$

Esta oferta no necesariamente es satisfecha por la oferta de RB&SM salvo que exista un subsidio adecuado a la oferta. Es fácil ver que tal subsidio es el siguiente:

$$t_{vi} = c_{wq}(S_{\cdot\cdot}) + \sum_{vi} S_{vi}\frac{\partial r_{vi}(H_{\ldots},S_{\cdot\cdot})}{\partial S_{wq}} - \sum_{kvi} m^2_{kvi}\frac{\partial G^k_{vi}(S_{\cdot\cdot})}{\partial H_{wq}} - m^4_{wq} \quad (7.17)$$

Esto permite concluir que:

En el largo plazo, aún sin externalidades existe la posibilidad de ineficiencia en las soluciones de RB&SM.

Es interesante analizar este resultado, pues muestra que la naturaleza de la ineficiencia en oferta corresponde a los costos y externalidades. Más aún, aún en el caso de costos fijos y ausencia de externalidades y regulaciones, es posible que la distribución de oferta resultante del equilibrio resulte ineficiente, salvo que los costos sean homogéneos. Lo que este resultado indica es que la oferta óptima es aquella que se deduce directamente de las posturas, sin considerar el costo de los oferentes. Esto significa, que aún sin externaldades en el largo plazo pueden generarse ineficiencias.

Respecto al subsidio total, compuesto por la suma de ambas componente en (7.13) y (7.17), se concluye que:

El subsidio que induce la localización óptima de OULM corrige los precios de la externalidad en localización y oferta, las regulaciones en localización y oferta, y las diferencias en costos de producción.

A continuación se analiza si las soluciones de RB&SM cumplen con estas condiciones de primer orden, para distintas condiciones de mercado. Notar que si este es el caso, y existe λ tal que el subsidio definido por (7.13)+ (7.17) de OULM es de la forma $t_{hvi}=\lambda$, entonces RB&SM resulta eficiente puesto que el equilibrio asociado a dicho valor de subsidios es idéntico a un equilibrio no subsidiado.

7.4 Eficiencia en el modelo RB&SM.

Como se comentó previamente utilizamos en esta sección el OULM para estudiar la eficiencia en RB&SM. En particular, si RB&SM es siempre eficiente no tiene sentido preguntarse por políticas de subsidios óptimos, salvo que el planificador pondere de manera distinta a cada uno de los agentes. Este análisis no pudo ser hecho con detalle en la sección previa debido a las dificultades analíticas del problema RB&SOSPM.

Se considera entonces en lo que sigue G=0 y se estudia en primer lugar un mercado en que no existen regulaciones al uso y oferta de bienes inmuebles. Al igual que en el capítulo previo se consideran cuatro casos:

- Localización con oferta dada y sin externalidades.
- Localización con oferta dada y con externalidades.
- Localización con oferta variable y sin externalidades.
- Localización con oferta variable y con externalidades.

Se considera el mercado como de localización con oferta dada cuando la oferta es prefijada completamente. Esto corresponde a un escenario de corto plazo en que los agentes consumidores escogen localización entre las existentes, pero los oferentes no tienen oportunidad de intervenir en el mercado.

El efecto de las regulaciones se considera sin profundidad analítica hacia el final del capítulo, pues como el lector verá al avanzar en la lectura, no aporta mayor relevancia respecto de la eficiencia o ineficiencia de RB&SM y, por lo tanto, sobre el fundamento de esta sección: precisar necesidad de aplicar subsidios como herramienta para mejorar el beneficio agregado en el mercado.

7.4.1 Eficiencia con oferta dada y sin externalidades.

Considerando que no existe ningún tipo de externalidad, Fujita (1989) construye un modelo de espacio continuo que resulta eficiente. A continuación se analiza este mismo resultado para el modelo discreto RB&SM.

A partir de la definición del subsidio en (7.13), en este caso se tiene:

$$t_{gwq} = 0 \ \forall gwq \tag{7.18}$$

Como se está en un caso con oferta dada, la condición (7.17) no aplica y se concluye que H_{hvi} que cumple con las condiciones de primer orden de OULM, es un equilibrio RB&SM con oferta dada. Se tiene el siguiente teorema.

Teorema 7.2: Eficiencia de RB&SM sin efectos externos en el corto plazo.

Toda solución de RB&SM con oferta dada y sin externalidades es eficiente.

Demostración:

Sea $H_{hvi\cdot}$ la localización de equilibrio de RB&SM sin subsidios ya se sabe que cumple con las condiciones de primer orden de OULM. Se demostrará que es un máximo.

La matriz Hessiana de este problema es diagonal con elementos negativos en la diagonal. Luego, es definida negativa, por lo que H_{hvi} es un máximo estricto.

□

El teorema anterior muestra que el equilibrio RB&SM en el caso más sencillo resulta eficiente. Este resultado era el esperado, pues en esas condiciones el mercado no posee imperfecciones y, por lo tanto, no tiene sentido la aplicación de políticas de planificación.

7.4.2 Eficiencia con oferta dada y con externalidades.

Es sabido que la presencia de externalidades puede generar ineficiencia en los mercados, por lo tanto, este caso es de particular interés debido a la posibilidad cierta de aplicar una planificación óptima de subsidios.

Para analizar este caso, es necesario plantear una función de postura particular a estudiar, en que las externalidades representen la tendencias aglomerativas y segregativas en las decisiones de localización de la población según nivel socioeconómico, y, a la vez, una valoración del ambiente construido. La función de postura de RB&SM presentada en Martínez y Henríquez (2003) no cumple de buena forma con estos requisitos, debido a que en ella la segregación socioeconómica no queda bien representada al considerar el ingreso total de una zona como la variable descriptiva del nivel socioeconómico. En su reemplazo, para cada cluster de hogar *h* se divide el total de agentes localizados en dos categorías: aquellos que tienen ingreso mayor o igual que *h,* y aquellos que poseen ingreso menor que *h*, resultando la siguiente función:

$$B_{hvi} = \bar{b}_h + \alpha_h \sum_{g \in \Omega_h} H_{gi} I_g + \beta_h \sum_{g \notin \Omega_h} H_{gi} I_g + \eta_h \sum_w S_{wi} X_{wi} + \kappa_h Y_{vi} \qquad (7.19)$$

donde $\Omega_h=\{g \,/\, I_g \geq I_h\}$, y el cuarto término es constante para este caso de oferta dada. Luego, la derivada con respecto a localización resulta:

$$\frac{\partial B_{hvi}}{\partial H_{gwq}} = \delta_q^i I_g \left(\alpha_h \delta_{g\in\Omega_h} + \beta_h \delta_{g\notin\Omega_h}\right) \quad \forall w \forall v \tag{7.20}$$

donde $\delta_q^i = \begin{cases} 1 & i = q \\ 0 & i \neq q \end{cases}$, $\delta_{g\in\Omega_h} = \begin{cases} 1 & g \in \Omega_h \\ 0 & g \notin \Omega_h \end{cases}$ y $\delta_{g\notin\Omega_h} = 1 - \delta_{g\in\Omega_h}$.

Por lo tanto, el subsidio en (7.13) que en este caso resulta::

$$t_{gwq} = I_g \sum_h H_{hq} \left(\alpha_h \delta_{g\in\Omega_h} + \beta_h \delta_{g\notin\Omega_h}\right) \quad \forall gwq \tag{7.21}$$

Para que este subsidio sea constante se deben cumplir condiciones muy especiales sobre los parámetros de la función objetivo, que aún con oferta y localización homogénea pueden no cumplirse.

Para ver que la ecuación anterior no siempre es satisfecha por las soluciones de RB&SM, se presenta a continuación un ejemplo sencillos para los casos $\alpha_h > \beta_h > 0 \ \forall h$ y $\alpha_h > 0, \beta_h < 0 \ \forall h$, el primero de los cuales representa una tendencia aglomerativa en la localización y el segundo una tendencia de segregación socioeconómica.

Contraejemplo 7.1:

Para construir el siguiente ejemplo sencillo se utilizó una planilla MS Excel que calcular el equilibrio RB&SM y las condiciones de primer orden del modelo OULM asociado, bajo las condiciones que se indican en las siguientes tablas:

Tabla 7.1
Contraejemplo: Parámetros de descripción de la ciudad y el mercado.

Nº Clusters (*h*)	2
Nº zonas (*i*)	2
Nº Viviendas (*v*)	1
Nº Alternativas (*vi*)	2
Total oferta = demanda	100

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 7.2
Contraejemplo: Factores de escala de la distribución Gumbel.

Factores de escala	
Demanda (μ)	0.05
Oferta (λ)	0.05

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 7.3
Contraejemplo: Características de cada Cluster.

Cluster (h)	Nº Agentes (H_h)	Ingreso (I_h)
1	30	4
2	70	1

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 7.4
Contraejemplo: Parámetros de la función de posturas asociados a los agentes consumidores.

Cluster (h)	Parámetros de Gusto: Socio-económico (α_h)	(β_h)	Cons-tructivo (η_h)	Constantes (κ_h)
1	1.46	±1	0.85	0,5
2	0.84	-	0.16	0,3

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 7.5
Contraejemplo: Parámetros asociados a las viviendas por zona.

Alternativa de localización (vi)	Atributos constructivos (X_{vi})	Constantes (Y_{vi})
11	1.09	0,2
21	1.50	0,15

Fuente: Elaboración propia.

Utilizando oferta homogénea en ambas zonas se obtuvo el subsidio asociado para ambos tipos de externalidad, segregativo y aglomerativo. Las siguientes tablas muestran los resultados.

Tabla 7.6
Subsidio asociado a OULM con oferta dada y externalidades aglomerativas.

Tipo de Hogar	Zona: Q=1	q=2
g=1	195.760464	214.639536
g=2	43.7909977	45.0090023

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 7.7
Subsidio asociado a OULM con oferta dada y externalidades segregativas.

Tipo de Hogar	Zona: q=1	q=2
g=1	195.560221	214.839779
g=2	43.7780788	45.0219212

Fuente: Elaboración propia.

Debido a que los subsidios anteriores no son homogéneos se concluye que el equilibrio RB&SM no subsidiado no es óptimo. Luego, se tiene la conclusión anterior.

Luego se tiene que:

En el corto plazo, la presencia de externalidades hace que las soluciones de RB&SM no sean eficientes.

En las subsecciones siguientes se analiza este resultado en el contexto del largo plazo.

7.4.3 Eficiencia con oferta variable y sin externalidades.

Este problema se diferencia del caso descrito en apartados previos, en que las posturas y los costos, y por lo tanto la función BAN, dependen de la oferta descrita por las variables S_{vi}.

Como no existen externalidades de localización, desde la sección 7.4.1 la localización H_{gwq} es solución de RB&SM, por lo que en este caso sólo es necesario analizar la condición (7.17).

$$t_{wq} = c_{wq}(S_{\bullet\bullet}) \tag{7.22}$$

Esto significa que:

En el largo plazo sin externalidades las soluciones de RB&SM son eficientes sólo si los costos de producción resultan homogéneos.

7.4.4 Eficiencia con oferta variable y con externalidades.

Resulta evidente que en este caso confluyen todos los casos de ineficiencia anteriores, por lo que su desarrollo no aporta nada nuevo. Por esta razón se omite el análisis dejándo su estudio específico al lector intersado.

7.4.5 Efecto de la aplicación de regulaciones.

La localización óptima de OULM puede resultar aproximadamente extrema, es decir, nula para ciertas combinaciones *hvi*, y cabe notar que este tipo de soluciones sólo es posible en mercados no regulados o con regulaciones suficientemente laxas, en otras palabras, la existencia de regulaciones puede inducir soluciones interiores, y, por lo tanto, alcanzables por RB&SM, incluso en condiciones muy determinísticas. Como ejemplo de esto, existen restricciones físicas de espacio que restringen la provisión de oferta en una zona determinada, impidiendo que toda la oferta necesaria para satisfacer la demanda se localice en un sólo lugar.

Por lo tanto, es importante el rol de las regulaciones en el sentido que aporta una nueva fuerza segregativa, que puede o no (dependiendo de la intensidad de esta fuerza) inducir a RB&SM a equilibrios eficientes. Así, al igual que los subsidios, pueden resultar útiles como herramientas de planificación eficiente. A pesar de esta ventaja, es importante recordar que la existencia de regulaciones genera una disminución neta del beneficio agregado, debido a que las ganancias obtenidas se reducen en relación a los precios sombra asociados a ellas.

Por otro lado, conviene notar que el efecto de una regulación se representa analíticamente como un ponderador lineal en la función lagrangeana del problema, mientras que un subsidio aparece como una componente más de las posturas, dentro de la función logsuma de la renta correspondiente. En este sentido, ambos efectos tienen una participación similar (la función logsuma tiene un comportamiento muy similar al lineal). Esto significa que es posible utilizar uno u otro mecanismo para la obtención de soluciones eficientes en RB&SM, y la elección de uno u otro dependerá del efecto neto en el beneficio agregado alcanzado y de los costos asociados a su aplicación.

7.5 Relación entre el OULM y RB&SOSPM.

El objetivo de esta sección es estudiar cuál es la relación entre los resultados del modelo RB&SOSPM y aquellos subsidios obtenidos con la localización óptima del modelo OULM.

Consideramos aquí, sin pérdida de generalidad, el problema RB&SOSPM sin cotas a los subsidios, de tal forma que sea completamente compatible con el OULM planteado en este capítulo. Las propiedades que siguen son válidas también para la versión general de RB&SOSPM y el OULM que incluye las cotas a localización y oferta asociadas a aquellas a través de la ecuación de subsidios inductores de la propiedad 4.12.

Se tiene, a partir de las propiedades 4.12 y 6.1 que las funciones objetivo de ambos problemas son idénticas, lo que permite demostrar la siguiente propiedad:

Propiedad 7.2: Relación entre soluciones de RB&SOSPM y OULM.

Sea t^1_{hvi} solución de RB&SOSPM y H^1_{hvi} la localización inducida por t^1_{hvi}. Sea también H^2_{hvi} solución de OULM en idénticas condiciones para el mercado, y sea t^2_{hvi} el subsidio de la ecuación (7.13) y λ_h el multiplicador de lagrange de la restricción de equilibrio en hogares. Entonces se cumple:

1) $H^1_{hvi} = H^2_{hvi}$ implica que existe λ tal que $t^1_{hvi}= t^2_{hvi}+\lambda_h-b^1_h+\lambda$.

2) Si $t^1_{hvi}= t^2_{hvi}+\lambda_h-b^1_h+\lambda$ entonces H^2_{hvi} es un equilibrio para t^1_{hvi} y H^1_{hvi} es un equilibrio para t^2_{hvi}. Si para alguno de los dos subsidios el equilibrio es único entonces es único para el otro y $H^1_{hvi} = H^2_{hvi}$,

Demostración:

Se tiene que t^1_{hvi} es induce de H^1_{hvi}, por lo que, a partir de la propiedad 4.13 se concluye que existe λ^1 tal que $t^1_{hvi}= t^{1'}_{hvi}+t^1_{vi}+\lambda^1$, donde $t^{1'}_{hvi}$ y t^1_{vi} son los subsidios de la propiedad 4.12. Además, es fácil ver de la definición de $t^{1'}_{hvi}$ que es de la forma $t^{1'}_{hvi}= \alpha^1_{hvi}-B^{1'}_{hvi}-b^1_h$ con b^1_h la utilidad de RB&SM asociada a t^1_{hvi} y $B^{1'}_{hvi}$, la postura de RB&SM (sin utilidad b^1_h) asociada a H^1_{hvi} y subsidio nulo, y α^1_{hvi} el primer término asociado sólo a H^1_{hvi}. Análogamente, como t^2_{hvi} es el subsidio inductor de H^2_{hvi}, para niveles de utilidad λ_h, dado por la propiedad 4.12, se tiene de manera análoga que existe λ^2 tal que $t^2_{hvi}= t^{2'}_{hvi}+t^2_{vi}+\lambda^2$, donde $t^{2'}_{hvi}$ y t^2_{vi} son los subsidios de la propiedad 4.12 y $t^{2'}_{hvi}$ que es de la forma $t^{2'}_{hvi}= \alpha^2_{hvi}-B^{2'}_{hvi}-\lambda_h$.

Por lo tanto, si $H^1_{hvi} = H^2_{hvi}$, entonces $\alpha^1_{hvi}=\alpha^2_{hvi}$, $B^{1'}_{hvi}=B^2_{hvi}$ y $t^1_{vi}=t^2_{vi}$,lo que implica que $t^1_{hvi}- t^2_{hvi}= \lambda_h-b^1_h+\lambda$. En el otro sentido, sea $t^1_{hvi}= t^2_{hvi}+\lambda_h-b^1_h+\lambda$. Se tiene entonces que $b^1_h+t^1_{hvi}=\lambda_h+t^2_{hvii}+\lambda$, por lo que las funciones LMN de demanda y de oferta son idénticas para ambos equilibrios, y por lo tanto tienen las mismas soluciones. Finalmente, si el equilibrio es único para t^1 entonces debe serlo para t^2 debido a que las ecuaciones son idénticas en ambos casos, y por lo tanto se tendrá $H^1_{hvi} = H^2_{hvi}$.

□

Esta propiedad es muy importante porque asegura que si la localización es idéntica en ambos modelos, entonces el subsidio tiene la forma obtenida en (7.13), esto es, la componente de demanda del subsidio es igual a la derivada de la postura agregada respecto a la localización más el efecto de las regulaciones a la demanda. Más aún, existe un subsidio a la oferta que cumple con las condiciones de primer orden (7.16) de OULM y ese subsidio es exactamente el de la ecuación (7.17), por lo que corresponde a la diferencia entre la ganancia y la suma entre la derivada de la ganancia agregada más el efecto de las regulaciones. La siguiente propiedad muestra que en realidad existe una equivalencia entre los resultados de ambos modelos.

Propiedad 7.3: Equivalencia entre el RB&SOSPM y OULM.

Se tiene que t_{hvi} es subsidio óptimo de RB&SOSPM no acotado con localización y oferta asociada (H_{hvi},S_{vi}) y utilidad asociada b_h, si y sólo si, en idénticas condiciones del mercado, (H_{hvi},S_{vi}) es solución óptima de OULM y existe λ_h tal que $t_{hvi}+\lambda_h$ es el subsidio óptimo con $b_h-\lambda_h$ la utilidad asociada.

Demostración:

Primero se observa que por construcción dado t_{hvi} $BAN^{RB\&SOSPM}(t_{hvi})=BAN^{OULM}(H_{hvi},S_{vi})$ donde (H_{hvi},S_{vi}) es la localización y oferta RB&SM inducida por t_{hvi}. Análogamente, dado (H_{hvi},S_{vi}) positivo $BAN^{OULM}(H_{hvi},S_{vi})=BAN^{RB\&SOSPM}(t_{hvi})$, donde t_{hvi} es un subsidio inductor de (H_{hvi},S_{vi}) en RB&SM. En segundo lugar, se debe notar que el modelo RB&SOSPM considerado no tiene cotas a los subsidios, razón por la cuál es comparable al OULM aquí planteado.

Sea entonces t_{hvi} es subsidio óptimo de RB&SOSPM con localización y oferta asociadas (H_{hvi},S_{vi}) y utilidad asociada b_h. Si existiese $(H^*_{hvi},S^*_{vi})>0$ tal que $BAN^{OULM}(H^*_{hvi},S^*_{vi})> BAN^{OULM}(H_{hvi},S_{vi})$, entonces $BAN^{RB\&SOSPM}(t^*_{hvi})> BAN^{RB\&SOSPM}(t_{hvi})$, donde t^*_{hvi} es un subsidio inductor de (H^*_{hvi},S^*_{vi}) en RB&SM, lo que contradice el hecho que t_{hvi} es subsidio óptimo de RB&SOSPM. Análogamente, sea (H_{hvi},S_{vi}) es solución óptima de OULM, con utilidad λ_h. Si existiese t^*_{hvi} tal que $BAN^{RB\&SOSPM}(t^*_{hvi})> BAN^{RB\&SOSPM}(t_{hvi})$, entonces $BAN^{OULM}(H^*_{hvi},S^*_{vi})>BAN^{OULM}(H_{hvi},S_{vi})$, donde (H^*_{hvi},S^*_{vi}) es la localización y oferta inducida por t^*_{hvi} en RB&SM, lo que contradice el hecho que (H_{hvi},S_{vi}) es localización y oferta óptimas de OULM.

Finalmente, a se tiene que t_{hvi} induce (H_{hvi},S_{vi}) con utilidad b_h. Es fácil ver desde las ecuaciones del subsidio en la propiedad 4.10 que para cualquier valor λ_h se tiene que $t_{hvi}+\lambda_h$ induce (H_{hvi},S_{vi}) con utilidad $b_h-\lambda_h$. Luego, si b'_h es la utilidad asociada a la solución del OULM, dada por la ecuación (7.12), entonces tomando $\lambda_h=b'_h-b_h$ se concluye la demostración.

□

Esta propiedad es muy relevante pues indica que es posible utilizar OULM para solucionar el problema de planificación óptima, modelo que resulta mucho menos complejo que RB&SOSPM en su solución, especialmente en ciudades de gran tamaño.

Más aún, un corolario importante es que el subsidio óptimo de RB&SOSPM tiene la misma forma que el subsidio óptimo de OULM. Esto significa que:

Los subsidios óptimos del problema de planificación óptima de subsidios corrigen los precios de mercado en función de la externalidad en localización, la externalidad en producción y las regulaciones.

Esta conclusión indica que existe un trade-off entre subsidios y regulaciones, por lo que es relevante estudiar la aplicación conjunta de ambos lo que puede permitir la implementación de la localización óptima con un presupuesto menor.

7.6 Síntesis del capítulo.

Se ha mostrado en este capítulo que las soluciones de RB&SM de oferta dada y sin externalidades es eficiente, tal como indicaban algunos autores en la literatura como en Fujita (1989).

Se muestra también que las soluciones de RB&SM son ineficientes en casos más generales, incluso con oferta dada por la valoración de efectos externos en las posturas de los demandantes. En particular, la oferta variable es una importante fuente de ineficiencia debido a la hoterogenidad de costos que enfrenta la oferta.

Se demuestra que las soluciones de OULM y las RB&SM son idénticas, y a partir de las condiciones de primer orden de OULM, se obtiene que el subsidio óptimo corrige efectos marginales de externalidad, economías en la oferta, ganancias y regulaciones.

La existencia de regulaciones modifica el beneficio neto alcanzado. El uso de regulaciones o subsidios para planificar un mercado eficiente, dependerá de los costos del uso de estas herramientas y de su efecto neto en el beneficio agregado.

La gran conclusión de este capítulo es que si existen externalidades o se está analizando el largo plazo, entonces el mercado no necesariamente alcanzará un óptimo por si mismo, y el problema de planificación óptima tiene sentido. Se detecta la forma precisa del subsidio óptimo en demanda y en oferta.

Dado que el modelo OULM es algorítmicamente menos complejo que el RB&SOSPM, y no posee los problemas de convergencia que incluye al evaluar equilibrios cada vez que se calcula la función objetivo, es recomendable utilizarlo como el modelo de optimización.

VIII. Simulaciones Prototipo.

8.1 Introducción.

Las simulaciones que ha continuación se presentan están orientadas ha probar en un prototipo las conclusiones teóricas precedentes y caracterizar algunas tendencias estructurales en las soluciones. Además, la experiencia resultante del desarrollo de este estudio permite plantear interesantes hipótesis a partir de ellas. Se realizaron algunas simulaciones para explorar la forma de la función BAN y las políticas óptimas. Nuestro objetivo central en este capítulo es derivar algunas hipótesis preliminares a partir de una aplicación prototipo simple, para iluminar futuras investigaciones.

Se describen aquí los resultados obtenidos de una aplicación prototipo en la cual han sido aplicadas las mismas condiciones presentadas en los capítulos 6 y 7, para el modelo RB&SM. Las simulaciones del modelo de planificación se realizan utilizando el modelo RB&SOSPM y sólo hacia el final del capítulo se utiliza el modelo UOLM para comprobar la equivalencia entre los resultados de ambos.

En la siguiente sección se presentan características comunes de las simulaciones, y a continuación de ella se explicitan los algoritmos de solución utilizados para obtener los resultados. De la sección 8.4 a la 8.5 se presentan las distintas aplicaciones realizadas, sus resultados y las conclusiones que de ellos se han obtenido. La primera de estas secciones muestra propiedades de la función objetivo y la segunda tendencias sistemáticas de la solución optimal. La sección 8.6 incursiona en el valor de los subsidios óptimos y la equivalencia entre los modelos OULM y RB&SOSPM. Finalmente, la sección 8.7 entrega una síntesis de lo desarrollado en este capítulo.

8.2 Características generales de las simulaciones.

El modelo soporta externalidades de localización, modeladas a través de una componente en las posturas. Estas externalidades se plantean a priori de un tipo que permite describir el fenómeno de segregación socioeconómica, debido a que en Santiago de Chile este es un fenómeno particularmente marcado en la distribución espacial de residentes en la ciudad. Como se comentó en el capítulo 7 la función de postura que se utiliza en este trabajo es:

$$B_{hvi} = b_h + \alpha_h \sum_{g \in \Omega_h} I_g \left(\sum_v P_{g/vi} f_{vi} \right) + \beta_h \sum_{g \notin \Omega_h} I_g \left(\sum_v P_{g/vi} f_{vi} \right) + \eta_h \sum_w P_{wi} X_{wi} + \kappa_h Y_{vi} \quad (8.1)$$

donde Ω_h={g / $I_g \geq I_h$}. El primer término corresponde a la variable de RB&SM que representa a la utilidad en equilibrio. Los siguientes dos términos con $P_{g/vi}$ describen atributos de localización asociados con la distribución de los agentes según categoría socioeconómica. Se utiliza como atributo el ingreso de los hogares localizados en la zona. Se observa que la sumatoria de ingresos está diferenciada en dos grupos socioeconómicos valorados de manera distinta, lo que permite captar fenómenos de segregación positiva y negativa. En efecto, en esta formulación un agente puede considerar valioso el estar junto a aquellos que poseen ingreso igual o mayor que él mismo (α>0) y valorar negativamente a los más modestos (β<0). El tercer término con P_{wi}, describe las externalidades asociadas al medioambiente construido. En este caso X representa la valoración de las fachadas, arquitectura, jardines, densidad, etc. Con estos tipos de términos un gran conjunto de atributos zonales puede ser especificado con las variables del modelo. El último término contiene atributos constantes tales como índices zonales de accesibilidad, presencia de comercio o actividades productivas y otras variables asociadas a la vivienda como número de ambientes, superficie construida, etc.

El conjunto de parámetros α , β , η y κ representan el precio hedónico que el consumidor asigna a cada atributo de la zona, y pueden ser calibrados desde observaciones de localización.

Desde el punto de vista del oferente se considera únicamente el caso de costos fijos. Es decir, se considera una función de costos de la forma:

$$c_{vi}(P) = \bar{c}_{vi} \quad \forall vi \qquad (8.2)$$

En estricto rigor, se podría considerar una función lineal que asegura buenas propiedades de convergencia para el equilibrio, más aún la experiencia acumulada indica que aún en el caso de economías de escala se obtiene convergencia. A pesar de esto, para los objetivos de este estudio es suficiente la utilización de (8.2), asegurando el funcionamiento eficiente de los algoritmos de solución.

Todas las simulaciones fueron realizadas usando el paquete de optimización de MatLab. Esto habilita para aproximar las derivadas parciales de primer y segundo orden para estimar gradientes y hessianos vía diferencias finitas, aprovechando la utilización de métodos de descenso para optimizar. Esto es importante debido a la aparente dificultad existente en el cálculo de los puntos fijos de primer y segundo orden asociados al equilibrio RB&SM. Experiencias realizadas a este respecto muestran que las matrices asociadas, además de un tamaño importante, no tienen buenas propiedades que faciliten el cálculo.

Las pruebas simulan una ciudad de pequeño tamaño lo que permite asegurar la utilización de información de primer y segundo orden en la búsqueda del óptimo. En ciudades de gran tamaño, el gran número de variables hace inviable la utilización de esta información en forma aproximada estándar, por lo que se requiere de algoritmos especialmente diseñados, tema que se deja para futuras investigaciones.

Las simulaciones fueron desarrolladas para testear una ciudad prototipo definida por: tres clusters de consumidores (h), cuyo comportamiento está identificado por su nivel de ingreso, dos zonas (i) y tres tipos de vivienda (v), es decir, hay seis alternativas de localización (vi). Los parámetros de escala de la distribución Gumbel de posturas y ganancias se consideran idénticos, representando en general un nivel alto de dispersión que asegura y facilita la convergencia de los algoritmos de punto fijo, según fue demostrado en las propiedades del equilibrio en el Anexo B. La población consiste de 100 hogares y el presupuesto de subsidios (G) fue fijado en cero, representando una redistribución de recursos.

Todos los parámetros exógenos, como número de agentes, ingresos, valoración de atributos, costos de construcción se muestran en las tablas siguientes:

Tabla 8.1
Parámetros de descripción de la ciudad y el mercado.

Nº Clusters (*h*)	3
Nº zonas (*i*)	2
Nº Viviendas (*v*)	3
Nº Alternativas (*vi*)	6
Total oferta = demanda	100

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 8.2
Factores de escala de la distribución Gumbel.

Factores de escala	
Demanda (μ)	0.0005
Oferta (λ)	0.0005

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 8.3
Características de cada Cluster.

Cluster (*h*)	Nº Agentes (H_h)	Ingreso (I_h)
1	10	4
2	50	2
3	40	1

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 8.4
Parámetros de la función de disposición a pagar asociados a los agentes consumidores.

Cluster (*h*)	Parámetros de Gusto			
	Socio-económico		Construcción (η_h)	Ctes. (κ_h)
	(α_h)	(β_h)		
1	0.146	-0.1	0.0085	0,050
2	0.084	-0.2	0.0016	0,020
3	0.004	0	0.0002	0,001

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 8.5
Parámetros asociados a las viviendas por zona.

Alternativa de localización (*vi*)	Atributos constructivos (X_{vi})	Costo fijo (C_{vi})	Constantes (Y_{vi})
11	0.0110	0.049	0,020
21	0.0150	0.013	0,015
31	0.0004	0.001	0,005
12	0.0094	0.070	0,012
22	0.0022	0.023	0,009
32	0.0023	0.004	0,002

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 8.4 todos los parámetros de gusto asociados a la externalidad socioeconómica aparecen con signo opuesto unos de otros, indicando segregación socioeconómica. Si se tomaran todos los valores positivos se obtiene una situación en que todos los agentes valoran ser vecinos unos de otros, lo que combinado con el poder monopólico de los oferentes a través del remate de las propiedades, genera un comportamiento de aglomeración de los agentes.

Finalmente, cuando se analiza el caso de oferta variable, interesa estudiar el comportamiento del mercado regulado, pues es el único caso real. El mercado no regulado sólo permite aclarar tendencias y será utilizado en este único sentido en lo que sigue. La siguiente tabla muestra los parámetros utilizados para las regulaciones a nivel zonal.

Tabla 8.6
Parámetros asociados a las restricciones por zona.

Restricción - zona (ki)	**Atributos de oferta (a^k_{vi})**						Cota (R^k_{vi})
11	0.6	0.6	0.6	0	0	0	40
12	0	0	0	0.5	0.3	0.3	28

Fuente: Elaboración propia.

En las simulaciones se estudiaron características de la función objetivo y se realizaron comprobaciones de los resultados teóricos previos. Además, se analizaron soluciones al problema para situaciones no analizadas previamente de manera satisfactoria, de forma tal que los capítulos previos se complementan en cierta medida con lo expuesto en este.

Para cada análisis se realizaron 4 simulaciones, según las características impuestas al mercado en conformidad con la siguiente lista:

- Mercado con oferta dada y sin externalidades.
- Mercado con oferta dada y con externalidades.
- Mercado con oferta variable y sin externalidades.
- Mercado con oferta variable y con externalidades.

En oferta variable (largo plazo), sólo interesa analizar el caso regulado, pues como se vio en capítulos previos esta es la única condición real, debido a que existen restricciones físicas (espaciales) para la localización de actividades. Sin embargo, se presentan resultados para el caso no regulado que muestran de buena forma la tendencia natural del mercado hacia una concentración en condiciones de largo plazo, tal como fue expuesto en el capítulo VII.

8.3 Algoritmos de Solución.

Para realizar las simulaciones de RB&SOSPM se requiere de dos algoritmos de solución. El primero para calcular las variables de equilibrio RB&SM y el segundo para optimizar. En lo que sigue de esta sección se describen los algoritmos, mientras en el Anexo C el lector puede encontrar representaciones esquemáticas de los mismos.

Para el equilibrio RB&SM se utiliza el algoritmo desarrollado por Martínez y Henríquez (2003), que calcula secuencialmente la solución de cada punto fijo con un algoritmo estándar, hasta obtener convergencia a nivel global. Aunque la convergencia global no está asegurada teóricamente, la experiencia indica que se alcanza en la gran mayoría de los casos, principalmente con dispersiones altas en las distribuciones de ganancias y posturas. En el Anexo B se presentan algunas propiedades de convergencia para las distintas ecuaciones de punto fijo involucradas.

En el caso de un equilibrio regulado, en primer lugar se minimizan holguras con un algoritmo simplex (las restricciones son lineales) para determinar una solución factible.

El algoritmo de optimización utilizado corresponde a un método de tipo Quasi Newton, utilizando información aproximada de primer y segundo orden. El inverso del Hessiano es estimado iteración tras iteración por medio del cálculo del gradiente vía diferencias finitas. Se probaron distintos algoritmos como el método Davidon-Fletcher-Powell (DFP) o el método Broyden-Fletcher-Glodfarb-Shanno (BFGS), que se diferencian básicamente en la forma de aproximar la inversa del Hessiano (ver Luenberger, 1937), pero los resultados fueron en todos los casos idénticos. Esto se debe posiblemente a que la ciudad definida es pequeña, en ciudades más grandes puede ser necesario investigar en este aspecto definiendo la utilización de algoritmos ad-hoc.

Se ha desarrollado además un algoritmo de solución para el problema UOLM, del mismo tipo anterior y que sólo es utilizado para contrastar sus soluciones con las de RB&SOSPM hacia el final del capítulo.

Todas las simulaciones han sido realizadas utilizando el software MatLab en su versión 6.5 realese 13. Para la optimización se utilizó los paquetes que el mismo software ofrece, evitando la necesidad de programar esta etapa, para lo cual el algoritmo de equilibrio fue programado en este lenguaje.

8.4 Propiedades de la función de Beneficio Agregado Neto BAN.

La función objetivo planteada en este documento, considera como variables aquellas que describen el equilibrio RB&SM. Debido a la complejidad que involucra la utilización de variables que se definen a través de ecuaciones de punto fijo, no es claro a primera vista cuál es su comportamiento analítico, ni qué tipo de propiedades pueda tener. Por ejemplo, ¿cómo se comporta esta función frente a cambios en la dispersión de la distribución de probabilidades subyacente a RB&SM?, ¿cómo cambia el beneficio ante cambios en subsidios?. Estas no son preguntas simples de responder debido a esta dependencia compleja.

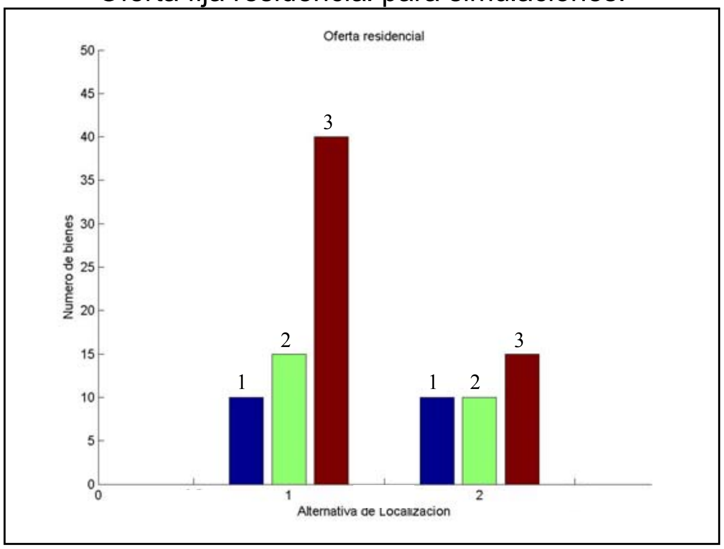
En esta sección se presenta algunos análisis que ayudan a despejar estas dudas y aportan más consistencia a la forma de resolver el problema operativo planteado.

8.4.1 Forma de la función BAN.

Para detectar la forma de la función objetivo, lo que permitiría en primer lugar escoger un algoritmo adecuado de solución, o desarrollar uno que explote propiedades especiales, se graficó uno a uno los planos compuestos por el beneficio como variable dependiente y la dirección coordenada asociada a cada componente del subsidio, dejando todas las demás fijas, como variable independiente. De esta manera se obtienen 18 gráficos que muestran bidimensionalmente la forma de la función. Se aplicó esta estrategia tomando distintos valores de la dispersión para la distribución Gumbel.

El primer conjunto de simulaciones se realizó con oferta completamente prefijada. Se fija la oferta en torno al óptimo no regulado que consiste en oferta completamente prefijada en la zona 1 vivienda 3. El Gráfico 8.1 es un gráfico de oferta que muestra la oferta prefijada utilizada. En él se grafica en barras el total de bienes ofertados para cada opción de localización. Se presentan dos grupos de 3 barras asociados a cada una de las zonas 1 o 2, según se indica en el eje horizontal. Sobre cada barra se indica el tipo de bien que representa. Así, la vivienda tipo 3 en la zona 1 corresponde a la tercera barra, de izquierda a derecha, del primer grupo.

Gráfico 8.1
Oferta fija residencial para simulaciones.

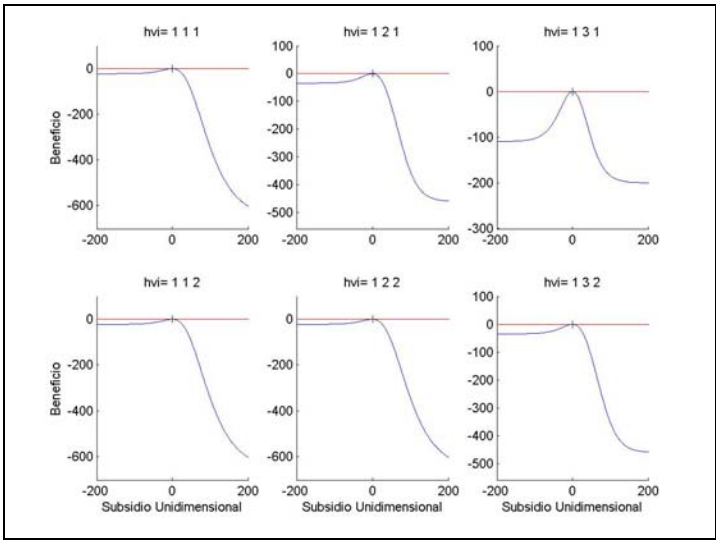


Fuente: Elaboración propia.

En los gráficos 8.2 a 8.4 se muestran las simulaciones de la función BAN para cada uno de los cluster de ingreso. En ellos la línea horizontal sobre cada curva muestra el nivel del máximo beneficio alcanzado, y la curva muestra el valor del beneficio agregado neto para cada componente unidimensional *hvi* del subsidio, indicada en la parte superior del subgráfico respectivo. En el eje horizontal se muestra el valor del subsidio que varia desde -200 unidades a +200 unidades monetarias (en adelante [UM]). Finalmente, el valor máximo que se alcanza en cada curva está marcado con signo "+".

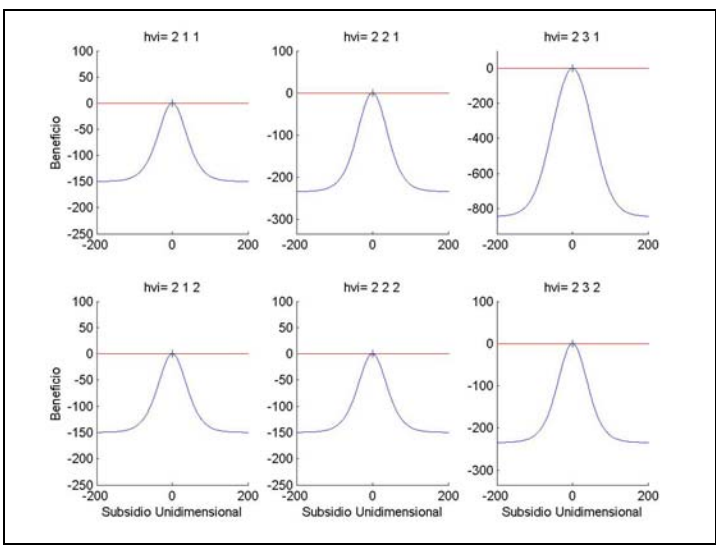
De acuerdo con las conclusiones teóricas de los capítulos previos, en este caso el equilibrio RB&SM es un óptimo, lo que se comprueba al observar que el beneficio óptimo resulta nulo (línea horizontal) y el subsidio óptimo tiene el valor cero en todos los casos. En estos casos la curva observada pasa por el óptimo global.

Gráfico 8.2
Forma de la función BAN categoría de ingreso 1 en torno al subsidio nulo
Oferta dada, sin externalidades y alta dispersión.



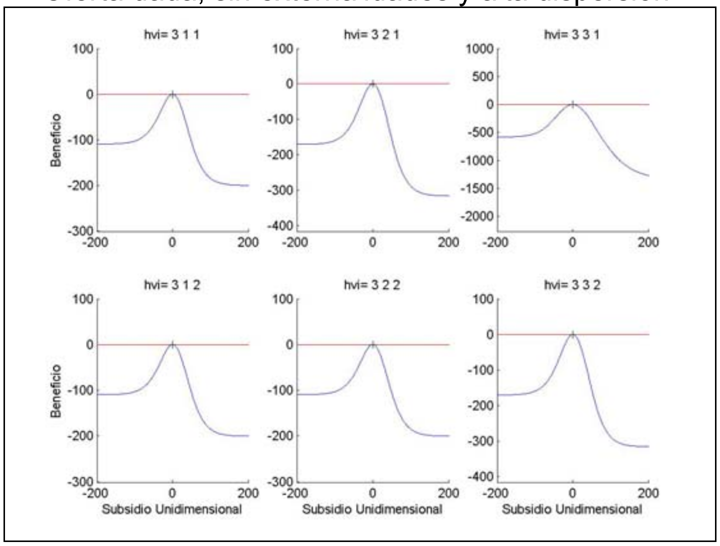
Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 8.3
Forma de la función BAN categoría de ingreso 2 en torno al subsidio nulo
Oferta dada, sin externalidades y alta dispersión.



Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 8.4
Forma de la función BAN categoría de ingreso 3 en torno al subsidio nulo
Oferta dada, sin externalidades y alta dispersión.

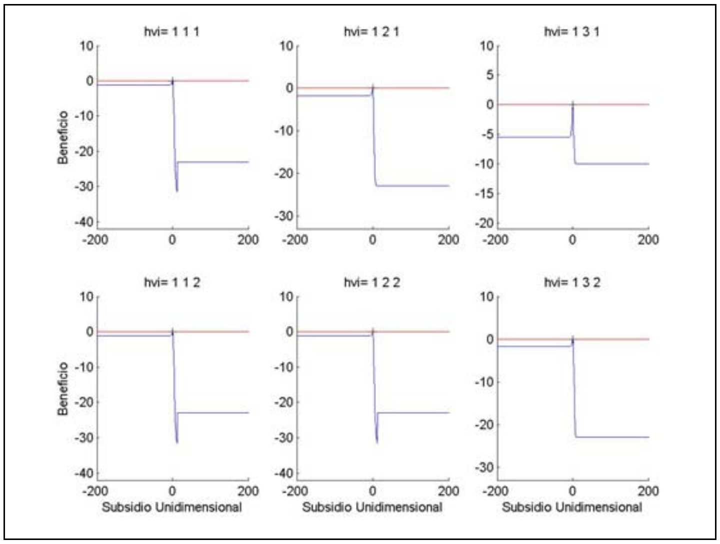


Fuente: Elaboración propia.

El factor de escala utilizado es 0.05. En el caso de los gráficos 8.2 y 8.4, asociados a las categorías de ingreso 1 y 3 (ricos y pobres, respectivamente), se observa que la aplicación de impuestos genera menos desbeneficio agregado que la aplicación de subsidios, mientras que en el gráfico 8.3, asociado a la categoría de ingreso medio, el beneficio parece ser indiferente respecto a ambas alternativas. Puede ser interesante estudiar la sensibilidad de esta observación respecto de los parámetros utilizados en estudios reales.

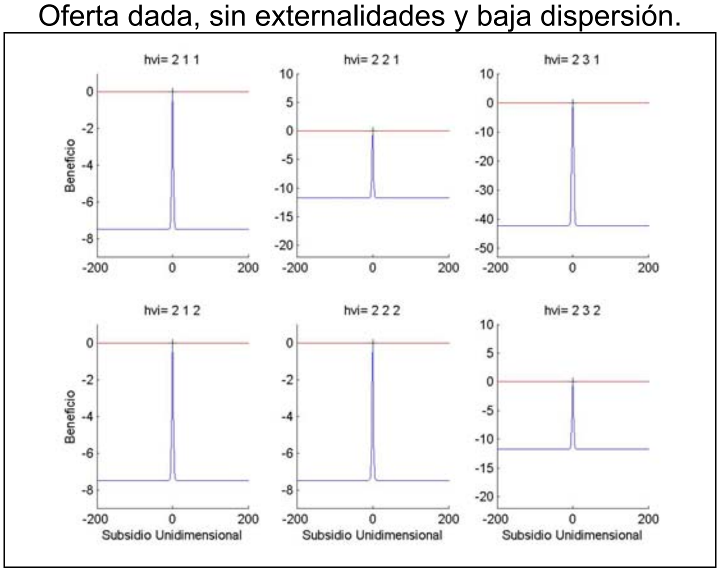
En la siguiente serie de gráficos 8.5-8.7, se muestran las mismas figuras anteriores, pero utilizando un factor de escala igual a 1 (dos órdenes de magnitud más alto que el anterior), es decir, en una situación más determinística. A pesar de esto no se obtuvieron problemas de convergencia para RB&SM, los cuales pueden aparecer a este nivel de dispersión cuando se incluyen externalidades.

Gráfico 8.5
Forma de la función BAN categoría de ingreso 1 en torno al subsidio nulo
Oferta dada, sin externalidades y baja dispersión.



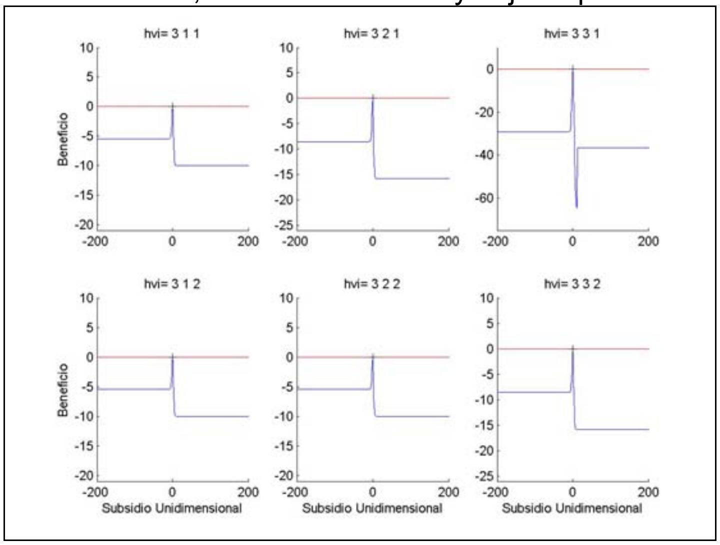
Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 8.6
Forma de la función BAN categoría de ingreso 2 en torno al subsidio nulo
Oferta dada, sin externalidades y baja dispersión.



Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 8.7
Forma de la función BAN categoría de ingreso 3 en torno al subsidio nulo
Oferta dada, sin externalidades y baja dispersión.



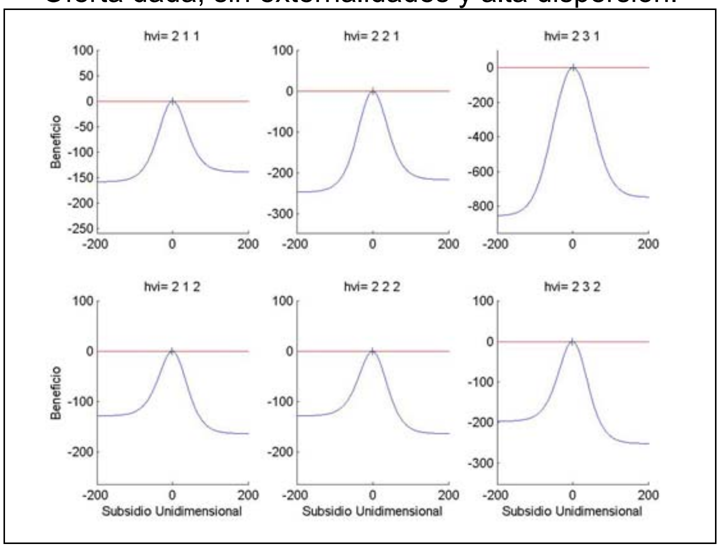
Fuente: Elaboración propia.

En los gráficos anteriores se observan dos efectos importantes. En primer lugar, la menor dispersión (en este caso es 1) genera elecciones de tipo todo o nada, lo que hace que la curva de beneficio se vuelve más aguzada entorno al óptimo unidimensional, en una tendencia que sugiere una discontinuidad en torno a este punto para casos más determinísticos aún. Lejos de este valor el beneficio tiende a ser completamente plano, respetando la tendencia entre categorías de ingreso asociada a impuestos y subsidios observada en el caso anterior. Se observa además, que la escala que alcanzan los desbeneficios disminuye ostensiblemente, desde varios cientos a decenas de unidades monetarias. Esta tendencia es esperable debido a que en este caso el equilibrio determinístico es eficiente, como se mostró en el capítulo VII.

En los subgráficos hvi$\in${111,112,122,331} de los gráficos 8.5 y 8.7 se observa una discontinuidad en la función de beneficio. En la siguiente sección se analiza un caso similar, mostrando que tal discontinuidad es sólo aparente y no está asociada a discontinuidades del equilibrio de RB&SM, sino a problemas de numéricos de convergencia en una de las variables que lo definen. Dentro de los márgenes que se ha trabajado en estas simulaciones, el beneficio siempre ha mostrado ser continuo, lo que significa que la solución de equilibrio de RB&SM varía continuamente con el equilibrio. En el contexto de este trabajo no se ha demostrado tal continuidad, pero resulta evidente cuando el equilibrio RB&SM es único debido a que todas las funciones involucradas son infinitamente diferenciables.

En el caso de incluir externalidades, el modelo RB&SM encuentra mayor dificultad de convergencia, sin embargo no se observan grandes diferencias con los resultados del caso sin externalidades. En efecto, la siguiente figura muestra el gráfico para el cluster de ingresos medios, con un factor de escala igual a 0.05, donde se aprecia que la forma de la función es muy similar al Gráfico 8.3 anterior.

Gráfico 8.8
Forma de la función BAN categoría de ingreso 3 en torno al subsidio nulo
Oferta dada, sin externalidades y alta dispersión.

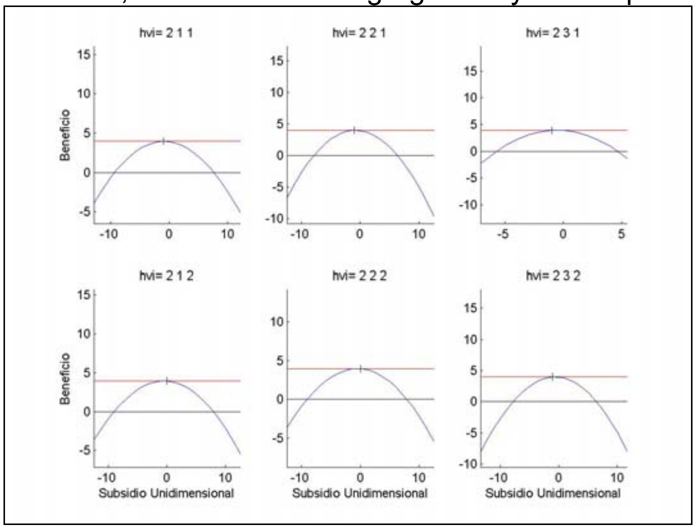


Fuente: Elaboración propia.

En este gráfico, no se observa un beneficio máximo positivo, lo que se debe principalmente, a que no se está graficando la función en torno al subsidio óptimo sino al subsidio nulo, esto es, las componentes que no se están analizando en cada gráfico se mantienen fijas en el 0.

Si se realiza el ejercicio de obtener la gráfica anterior entorno al valor óptimo del subsidio, comparado con el caso de subsidio nulo, el resultado es el gráfico 8.9 siguiente. En él, se utilizó una oferta más concentrada que en los casos anteriores, con objeto de obtener un valor de beneficio óptimo más alto. Para cada gráfica se presenta un zoom que permite ver un beneficio óptimo positivo para un subsidio distinto de cero. La línea horizontal inferior traza el valor cero, asociado al equilibrio no subsidiado y la superior el óptimo. Así, el gráfico 8.9 representa una comprobación de que la existencia de externalidades a la localización induce ineficiencias en el mercado, las que pueden ser corregidas con la utilización de subsidios adecuados. En el gráfico se útiliza un factor de escala de 0.05.

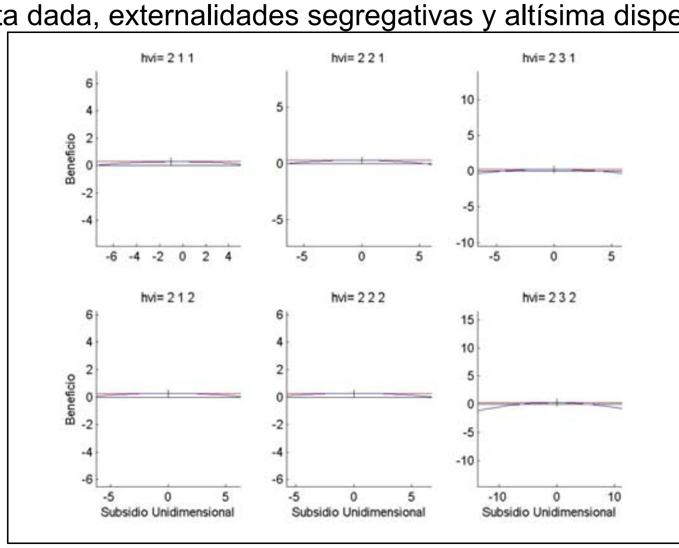
Gráfico 8.9
Forma de la función BAN categoría de ingreso 2 en torno al subsidio óptimo
Oferta dada, externalidades segregativas y alta dispersión.



Fuente: Elaboración propia.

El monto del beneficio óptimo está muy relacionado con la dispersión de las funciones de postura. En efecto, al aumentar la dispersión a un valor de 0.005, se obtiene un subsidio óptimo menor, que casi resulta imperceptible en la siguiente figura que muestra este caso. Es decir, a menor dispersión más lejano al óptimo es el equilibrio RB&SM.

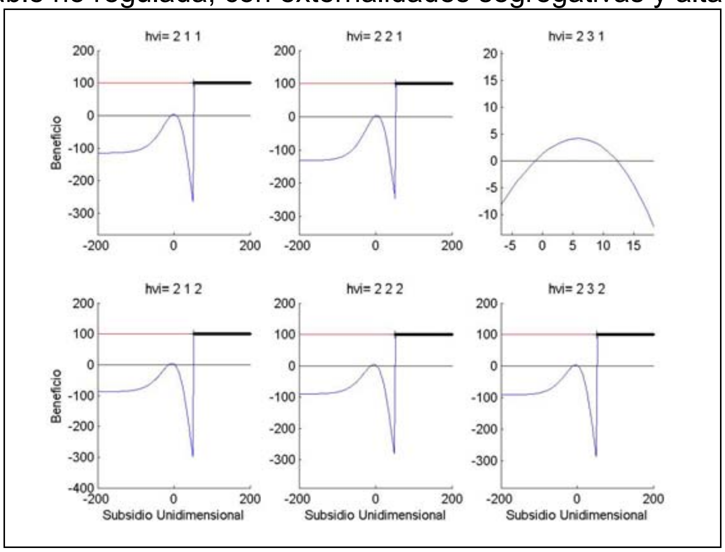
Gráfico 8.10
Forma de la función BAN categoría de ingreso 2 en torno al subsidio óptimo
Oferta dada, externalidades segregativas y altísima dispersión.



Fuente: Elaboración propia.

Finalmente, en el caso de oferta variable no regulada se observa en el gráfico 8.11 que también existen beneficios óptimos y subsidios óptimos no nulos. En efecto, la figura presenta el caso del cluster de ingresos medios para oferta variable no regulada con externalidades y factor de escala 0.05, en el cual se puede observar este fenómeno. El caso de oferta variable regulada no es de interés para el análisis de la forma de la función BAN, debido a esta se utiliza en RB&SOSPM sólo para equilibrios no regulados.

Gráfico 8.11
Forma de la función BAN categoría de ingreso 2 en trono al subsidio nulo
Oferta variable no regulada, con externalidades segregativas y alta dispersión.



Fuente: Elaboración propia.

En las simulaciones con oferta variable se detectó problemas de convergencia en el equilibrio RB&SM para valores altos de subsidios. Esto se ve reflejado en los gráficos de la figura 8.11 donde se observa un salto discontínuo de la funcipón BAN desde valores negativos a un valor de 100 UM de beneficio (valor escogido arbitrariamente para diferenciar claramente estos casos en la figura), que representa valores de subsidio en que el equilibrio RB&SM no alcanza convergencia. La mayor parte de las gráficas muestran problemas de convergencia en el equilibrio para subsidios altos, fenómeno que se acrecienta al disminuir la dispersión. Se observa además que esto ocurre para valores positivos del subsidio.

En la figura 8.11 se ha hecho zoom únicamente para la combinación hvi=231, debido a que los demás casos son muy similares. Se observa en este caso un beneficio positivo, con subsidio no nulo. En ellos el valor del subsidio óptimo es relativamente bajo (inferior a 5 unidades monetarias UM), del orden del ingreso del la categoría de ingresos medios, que corresponde a 2 UM.

Se ha mostrado únicamente gráficas para el caso de externalidades segregativas, debido a que la forma de la función no varía substancialmente en el caso aglomerativo. Las diferencias se dan para variaciones en el factor de escala y en la convergencia del equilibrio.

Como resumen de lo expuesto en esta sección, se ha encontrado evidencia preliminar de propiedades de máximo único y que se hace más aguzado mientras menos dispersión presenta el modelo. Estas características pueden ser explotadas en el desarrollo ulterior de algoritmos de solución ad-hoc. Los resultados refuerzan las conclusiones de los capítulos previos en cuanto a la eficiencia del mercado en el caso de oferta dada y ausencia de externalidades, mostrando además beneficios positivos para subsidios no nulos en casos con externalidad y con oferta variable, aunque de una magnitud relativamente pequeña.

8.4.2 Continuidad de la función BAN.

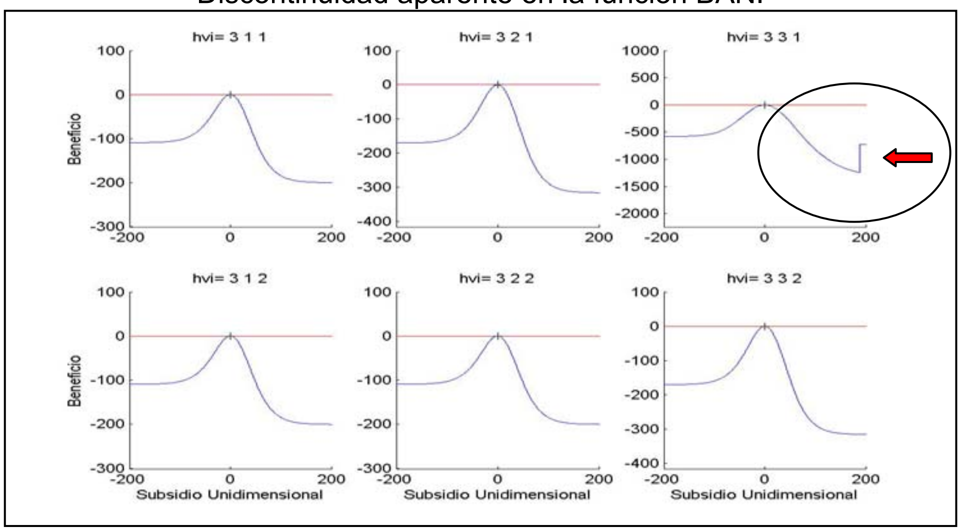
En la mayor parte de los gráficos de la sección anterior se observa continuidad. Más aún, debido a la continuidad (y diferenciabilidad) de las funciones involucradas, cuando el equilibrio RB&SM posee solución única, como ocurre para casos con alta dispersión, se debe tener la continuidad de la función de beneficio.

Por el contrario, en una situación de múltiples soluciones para el equilibrio, se puede tener una discontinuidad en el valor de la función de beneficios. Esto puede ocurrir en casos con oferta variable, debido a que como muestra Martínez y Henríquez (2003), en estos casos las soluciones que encuentran los algoritmos de solución utilizados dependen del punto de partida. Así, dado que el subsidio impone una fuerte inercia, puede generar saltos desde una solución a otra para valores altos.

Sin embargo, lo anterior no implica una discontinuidad en la función sino un problema de cálculo. En efecto, tales saltos de una solución de equilibrio a otra se deben al algoritmo de cálculo, esto es, con múltiples soluciones del equilibrio RB&SM la función de beneficios es un mapeo multivalorado (el recorrido de la función es un conjunto y no un valor único), que de todas formas es continuo. En otras palabras, las discontinuidades que pueden observarse en la función de beneficios son “eliminables” en el sentido que son provocadas por el algoritmo que calcula un equilibrio, pero siempre existe otro equilibrio que mantiene la continuidad de la función.

Otra aparente fuente de discontinuidades son los problemas de convergencia en el algoritmo utilizado. Por ejemplo, como se comentó en la sección previa en los Gráficos 8.5 y 8.7 se observan aparentes discontinuidades en la función de beneficios, cuya naturaleza es de este tipo. En efecto, la siguiente figura muestra un caso para una dispersión de 0.005.

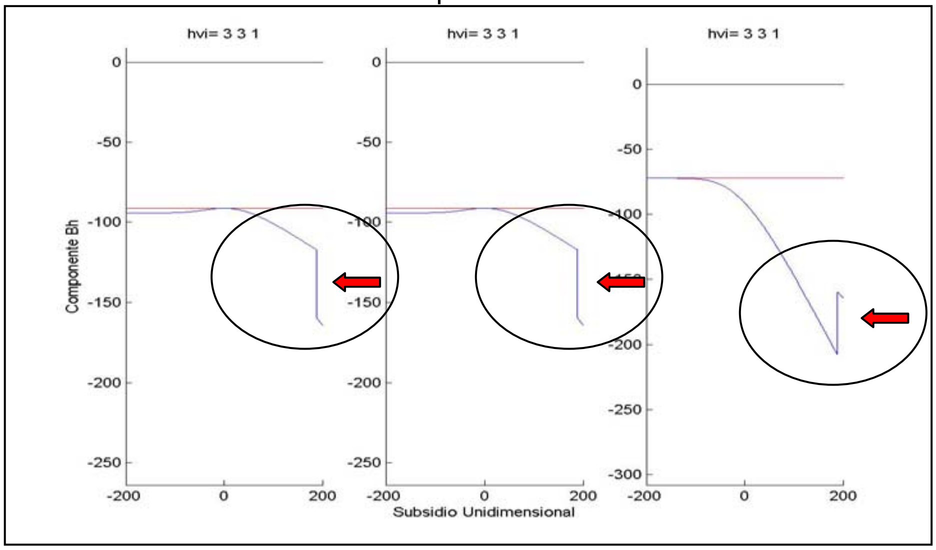
Gráfico 8.12
Discontinuidad aparente en la función BAN.



Fuente: Elaboración propia.

Como el caso analizado es con oferta completamente prefijada, sólo interesa observar las probabilidades de localización de RB&SM, y además como se trata de un caso sin externalidades, el interés está puesto en el valor de componente b_h (utilidad) en las posturas. La figura 8.13 muestra estas componentes para los 3 niveles de ingreso asociado al caso del gráfico anterior. En ella se observa que en todas las categorías se producen discontinuidades en torno al valor de subsidio +200, pero mientras en la categoría de ingreso 3 aumenta discontinuamente el valor de la función, en las categorías de ingreso 1 y 2 se produce una baja.

Gráfico 8.13
Discontinuidad aparente en la utilidad.



Fuente: Elaboración propia.

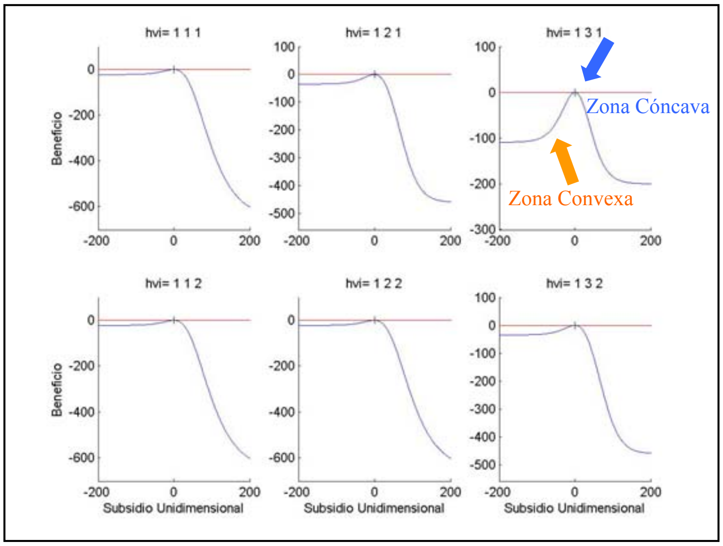
En este caso, una investigación más acuciosa revela que la discontinuidad observada se debe a no convergencia del algoritmo de punto fijo de equilibrio en las 500 iteraciones utilizadas como límite máximo, sin embargo converge en menos de 1000 y al alcanzar convergencia desaparece la discontinuidad observada.

En resumen, toda la evidencia encontrada indica que la función de beneficios es continua. Mas aún, debe resultar diferenciable en un sentido que es necesario precisar para el caso en que existen múltiples soluciones del equilibrio, y parece posible intentar una demostración de estas propiedades, tema que es dejado para futuras investigaciones.

8.4.3 No concavidad de la función BAN.

Se observan casos en que la curva no resulta cóncava, presentando sectores con forma convexa. Sin embargo, la concavidad de la función es más marcada al aumentar la dispersión. La siguiente figura muestra un ejemplo de no concavidad.

Gráfico 8.14
No concavidad de la función BAN.



Fuente: Elaboración propia.

En resumen, la función no es cóncava, por lo que no se puede concluir sobre la unicidad del óptimo, sin embargo, la siguiente sección muestra una evidencia sobre tal unicidad, aunque no es concluyente.

8.4.4 Unimodalidad de la función BAN.

Cómo se observa en los gráficos presentados, en todos los casos estudiados se obtiene un único máximo, sin importar la dirección de corte (plano euclidiano) observada ni el punto en torno al cuál se está graficando.

Si bien esto no permite concluir, si entrega una sospecha fundada sobre la unicidad de la solución óptima en subsidios para niveles de dispersión suficientemente altos (unicidad del equilibrio RB&SM). Esto tiene el potencial de permitir la construcción de algoritmos ad-hoc que exploten tal característica.

8.5 Tendencias sistemáticas del Óptimo.

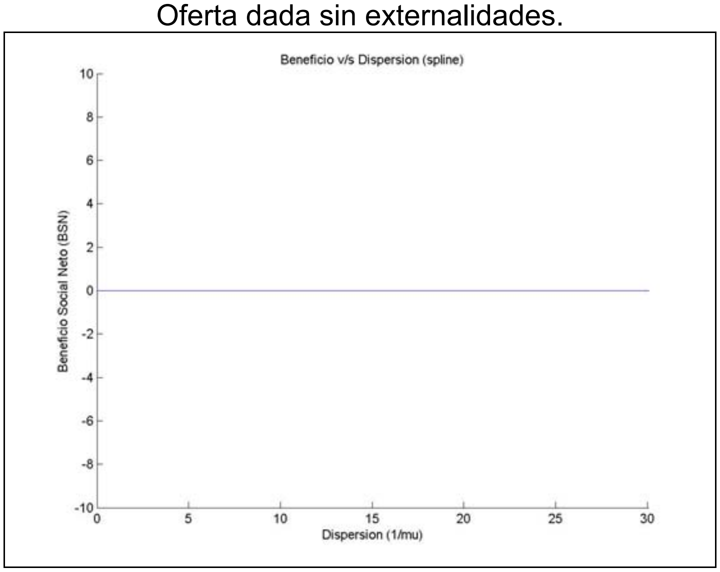
Las conclusiones teóricas más relevantes tienen que ver con la existencia de beneficios y subsidios no nulos para el mercado. Ya se ha mostrado que existen situaciones en que estos están presentes, siempre con presencia de externalidades u oferta variable.
En lo que sigue se analizan algunos otros temas apoyados por el prototipo desarrollado.

8.5.1 Efectos de la dispersión.

En esta sección se muestra el comportamiento del beneficio óptimo respecto de al parámetro de dispersión de la distribución Gumbel de probabilidades de posturas y ganancias. Debido al hecho de que para valores bajos de la dispersión se pierde convergencia, se ha extrapolado las curvas utilizando curvas splines de segundo grado para estimar el comportamiento hasta el valor de dispersión nula.

Para estudiar los casos de oferta dada se utiliza la misma oferta indicada en la sección anterior (ver figura 8.1). En el caso de oferta dada sin externalidades no se obtienen beneficios, es decir, el beneficio agregado es independiente de la dispersión. Esto es justamente lo que se esperaba pues en este caso está probado que toda solución de RB&SM es óptimo. La siguiente figura 8.15 muestra este caso.

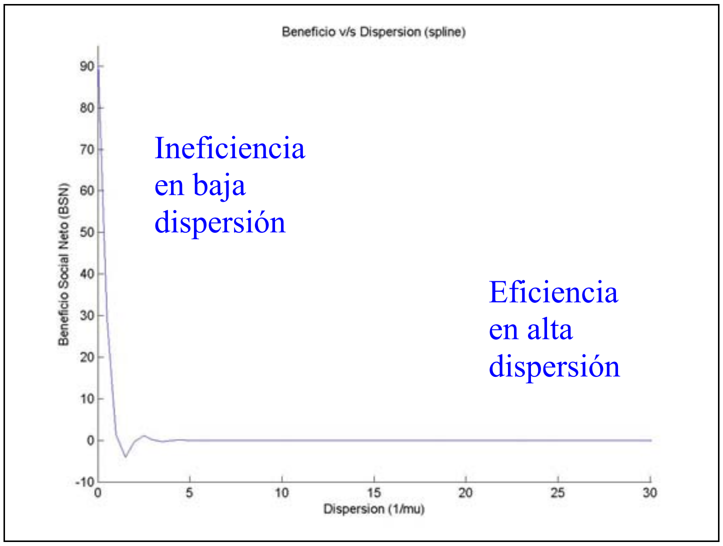
Gráfico 8.15
Variación del beneficio óptimo con la dispersión.
Oferta dada sin externalidades.



Fuente: Elaboración propia.

El gráfico que sigue muestra el resultado en los caso de oferta dada y externalidades aglomerativas y segregativas. Es importante comentar que en ambas situaciones se obtiene la misma figura para externalidades. Se observa en el gráfico 8.16 que cuando el modelo tiende al caso determinístico el óptimo difiere fuertemente del caso no subsidiado.

Gráfico 8.16
Variación del beneficio óptimo con la dispersión.
Oferta dada con externalidades.

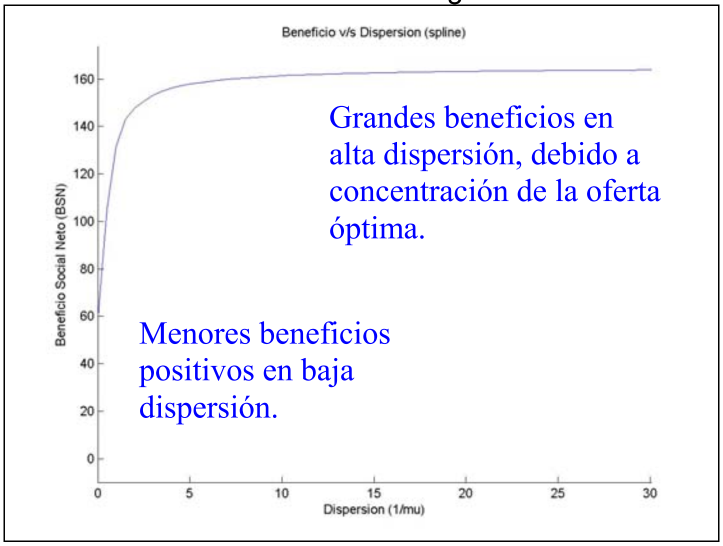


Fuente: Elaboración propia.

Se observa que con oferta prefijada, a mayor dispersión el mercado resulta más eficiente.

En el caso de oferta variable no regulada, el resultado sin externalidades y con externalidades, tanto segregativa como aglomerativa, toma, en todos los casos, la forma que indica la figura 8.17.

Gráfico 8.17
Variación del beneficio óptimo con la dispersión.
Oferta variable no regulada.



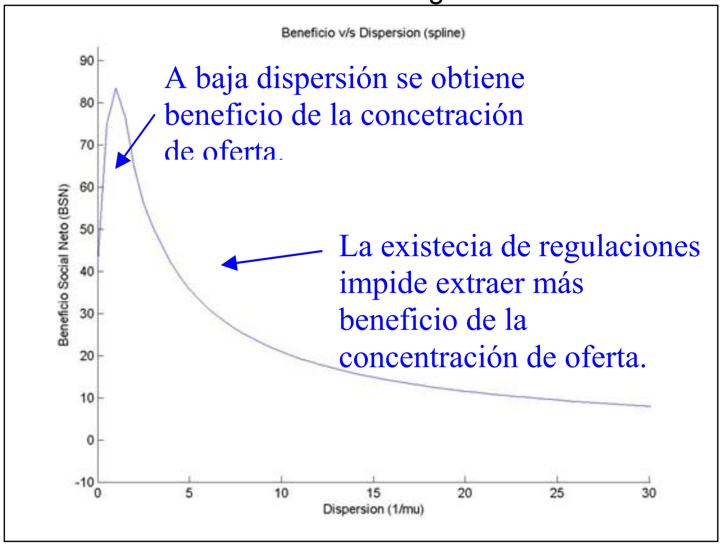
Fuente: Elaboración propia.

A partir de la propiedad 6.3 se tiene que las cotas a los subsidios corresponden también a cotas en la localización y oferta. Por esta razón, para obtener este gráfico se eliminaron las cotas superiores e inferiores del subsidio (se relajaron a -4000 y 4000 respectivamente), y se analizó separadamente los casos de concentración total, obteniendo en todos los casos un beneficio máximo para estos casos.

Se observa un efecto muy fuerte producto de la libertad en la definición de la oferta. En alta dispersión se obtienen grandes beneficios óptimos producto de una concentración de la oferta óptima debido a los subsidios óptimos, que resulta muy distinta de la oferta resultante del equilibrio para subsidio nulo, mientras en baja dispersión se tiene a un beneficio más escueto, coincidiendo con lo presentado en el Gráfico 8.17. Luego, el subsidio óptimo está contrarrestando la dispersión, induciendo beneficios obtenidos producto de la concentración resultante en la oferta.

Finalmente, en el caso de oferta variable regulada se obtiene en todos los casos la siguiente figura.

Gráfico 8.18
Variación del beneficio óptimo con la dispersión.
Oferta variable regulada.



Fuente: Elaboración propia.

La curva del gráfico 8.18 tiene una parte idéntica a 8.17 para dispersión baja, pero al aumentar la dispersión las regulaciones impiden que la oferta siga dispersándose y, por lo tanto, los subsidios pierden el efecto de concentrar ya que en parte ese efecto está logrado por la regulación. El efecto neto, es que en zonas de alta dispersión el beneficio es decreciente con ella, y en zonas de dispersión baja resulta creciente.

Como se comentó en capítulos previos, los precios sombra de las regulaciones en el equilibrio RB&SM regulado cumplen la función de subsidios negativos. Además, la formulación utilizada para RB&SOSPM es tal que los pesos sombra de las restricciones son absorbidos en subsidios negativos. El efecto neto de este hecho, es que a mayor dispersión, cuando las restricciones de regulación se vuelven más activas y los precios sombra asociados son más negativos, los subsidios óptimos se tienden a los valores de los precios sombra del equilibrio RB&SM regulado pero no subsidiado, lo que produce un aumento el aumento de eficiencia observado en la figura.

Es importante considerar con cuidado los resultados para dispersión baja debido a que son más aproximados que aquellos para dispersión alta. Muchos de los valores para baja dispersión son interpolados debido a que el algoritmo de equilibrio RB&SM no alcanza convergencia en estos casos.

Se concluye que:

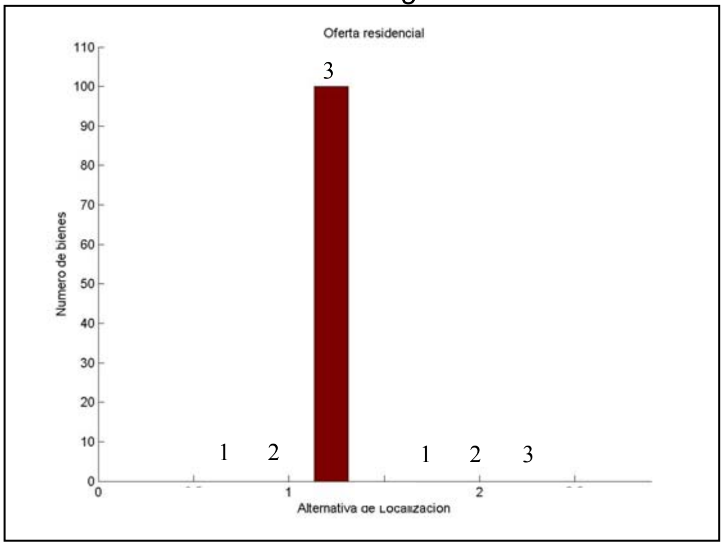
1. Con oferta dada y sin externalidades el mercado es eficiente.
2. Con oferta dada y con externalidades la eficiencia crece con la dispersión.
3. Con oferta variable la eficiencia tiende a disminuir con la dispersión, producto de la concentración resultante en el óptimo.
4. Las regulaciones imponen eficiencia al sistema, al detener la dispersión de la oferta, recuperando su comportamiento creciente para dispersiones altas.

8.5.2 Concentración de la oferta.

Como se comentó en apartados previos, se observa concentración de la oferta en la solución óptima. Según los resultados del capítulo previo esto se debe a la condición de primer orden asociada a la oferta, que indica que las ganancias deben ser iguales a la ganancia marginal corregida por regulaciones.

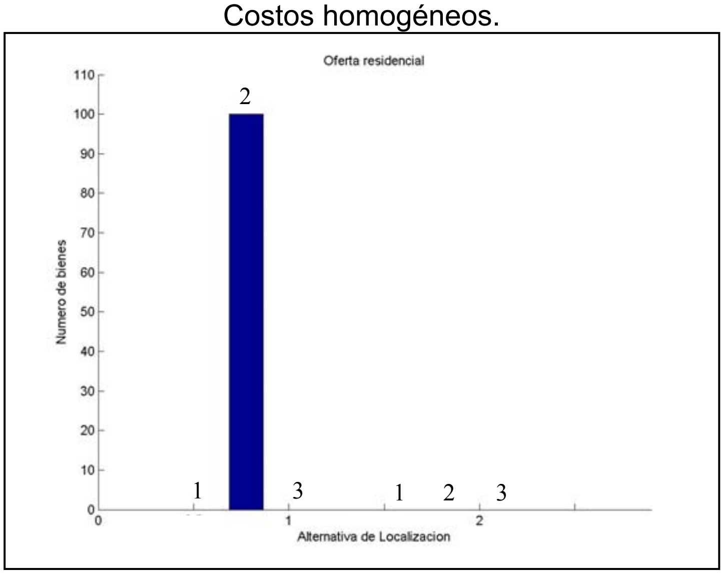
Las figuras 8.19 y 8.20 muestran la oferta óptima, para casos con oferta variable y no regulada, respectivamente con costos heterogéneos y homogéneos para las distintas alternativas de oferta. Se utiliza el caso no regulado para observa de manera clara el fenómeno. Como es natural la oferta óptima se concentra en aquel bien y zona que ofrece mayor ganancia, que en la figura 8.19 coincide con la combinación que posee menor costo y en la figura 8.20 con la opción de mayor atributo de construcciones. Los atributos de construcciones y costos heterogéneos fueron presentados al inicio de este capítulo en la Tabla 8.5.

Gráfico 8.19
Oferta óptima no regulada con externalidades.
Costos heterogéneos.



Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 8.20
Oferta óptima no regulada con externalidades.
Costos homogéneos.



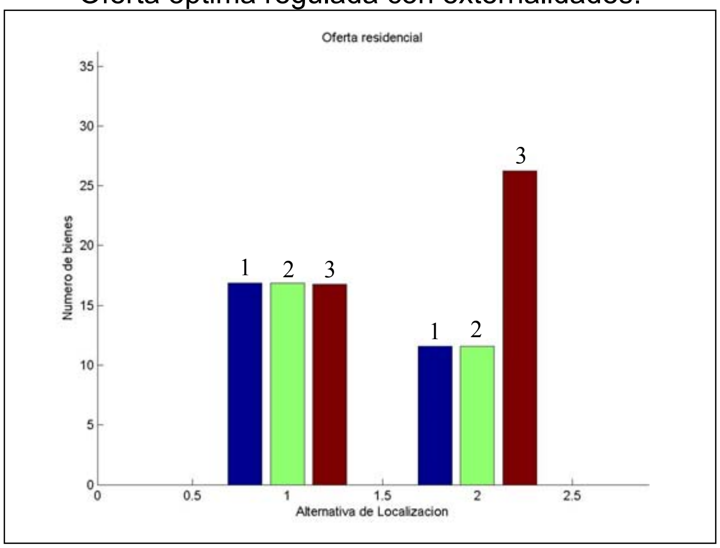
Fuente: Elaboración propia.

Para obtener estos gráficos se utilizó la misma estrategia indicada para el gráfico 8.17, esto es, relajar las cotas de los subsidios y estudiar los casos concentrados independientemente.

En la figura 8.20 se utilizó externalidades socioeconómicas y constructivas. Si sólo se admiten externalidades socioeconómicas, la aglomeración se obtiene en el bien de tipo 1 en la zona 1, debido a que este es el bien con mayor atributo constante en las posturas.

Finalmente, la siguiente figura 8.21 muestra el caso regulado, en que nuevamente no se encontró diferencia para los casos segregativos y aglomerativos. En la figura se observa que debido a la existencia de regulaciones la concentración no es total, pero se observa la tendencia. Es un caso con costo heterogéneo, en que para cada zona las ganancias concentradas máximas se dan en las opciones de vivienda tipo 3, que muestran la máxima concentración zonal.

Gráfico 8.21
Oferta óptima regulada con externalidades.



Fuente: Elaboración propia.

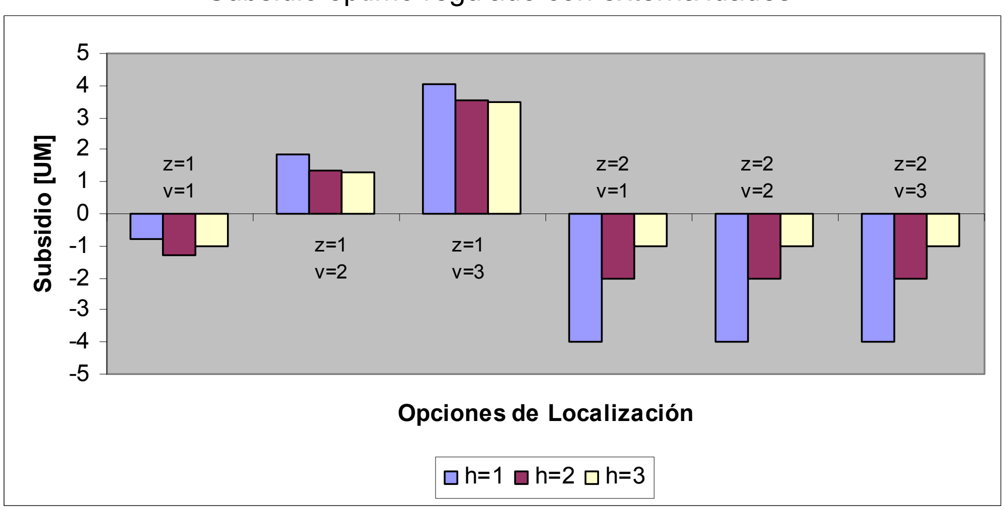
La conclusión es que la oferta óptima tiende a ser concentrada en la opción que genera máxima ganancia. Si no existen restricciones de regulación la concentración resultante es total, y si existen entonces la tendencia a la concentración se reproduce entre las alternativas disponibles.

8.5.3 Política de subsidios óptimos no trivial.

En los gráficos y comentarios previos ya se ha mostrado casos en que el óptimo es positivo y se obtiene con subsidios no nulos. Estos casos están asociados en general a mercados de largo plazo (oferta variable) o con externalidades a la localización. Uno de estos casos corresponde a oferta variable regulada con externalidades socioeconómicas segregativas, con el subsidio óptimo que se muestra en la siguiente figura 8.22. Se observa claramente la concentración de subsidios en las alternativas de vivienta v=3 en ambas zonas, lo que muestra la tendencia del modelo a concentrar en estas alternativas tal como se indicó en la sección previa.

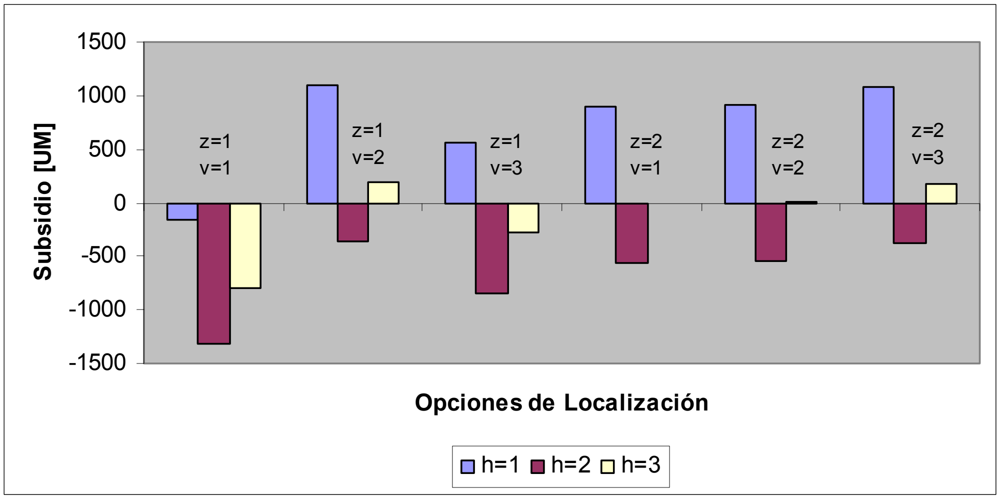
Una observación interesante es que en las otras alternativas el subsidio negativo (impuesto) alcanza el máximo valor permitido por las cotas inferiores exógenamente definidas, que en este caso corresponden al ingreso de cada categoría. Si se hace el ejercicio teórico de relajar suficientemente estas restricciones (por ejemplo, entre -4000 y 4000 UM), se obtiene un subsidio óptimo al interior del espacio factible, tal como muestra la figura 8.23, que resulta factible únicamente debido a la existencia de regulaciones. En efecto, sin estas restricciones la oferta tiende a ser completamente concentrada lo que sólo puede lograrse en los modelos Logit Multinomiales de RB&SM a través de valores infinitos para los subsidios.

Gráfico 8.22
Subsidio óptimo regulado con externalidades.



Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 8.23
Subsidio óptimo regulado con externalidades y cotas laxas.



Fuente: Elaboración propia.

En este último caso la oferta óptima, resulta casi completamente concentrada en las alternativas de vivienda 3 en ambas zonas. Es importante notar que los valores del subsidio alcanzan las magnitudes que se muestran debido a la restricción de presupuesto que exige suma cero del subsidio neto aplicado. Por esta razón, en localizaciones con muy poca cantidad de agentes localizados, el valor del subsidio debe ser muy negativo para compensar.

8.6 Subsidio Óptimo y precios sombra de las regulaciones.

En este apartado el interés está puesto en mostrar la estructura de los subsidios, utilizando para esto las propiedades que permiten detectar las componentes que definen su valor. Desde el capítulo VI se sabe que estos subsidios son los únicos, salvo traslaciones homogéneas o transferencias con la utilidad, que inducen el equilibro óptimo asociado. Además, en el capítulo VII se encontraron fórmulas que permiten calcular su valor en la localización óptima, detectando que los posibles efectos que debe contrarrestar son: externalidad socio-económica, externalidad de las construcciones, costos de la oferta y dispersión de los modelos logit.

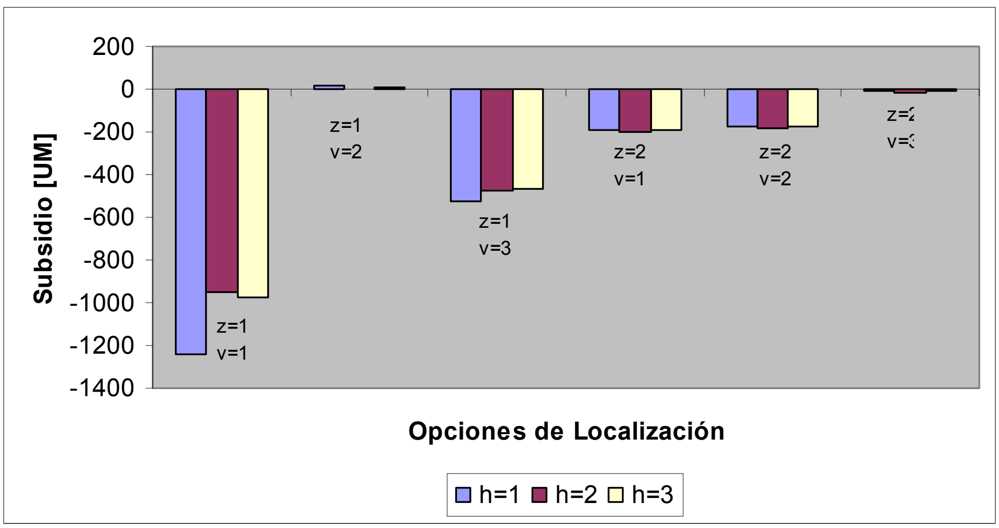
Por otro lado, en el caso de regulaciones lineales zonales a la oferta como las tratadas acá, se puede determinar fácilmente el valor de los precios sombra asociados. En casos más

complejos, es necesario recurrir al modelo OULM para describirlos.
En lo que sigue se muestran numéricamente estos resultados.

8.6.1 Subsidio óptimo como inductor de localización óptima.

Como se comentó en el capítulo IV, las propiedades del equilibrio RB&SM indican (propiedad 4.12) que es posible determinar el valor del subsidio, salvo traslaciones homogéneas o en utilidad, que asigna cierta localización en el mercado. Para comprobar esto se tomó la localización asociada a los subsidios óptimos del gráfico 8.23 y se obtuvo los subsidios asociados.

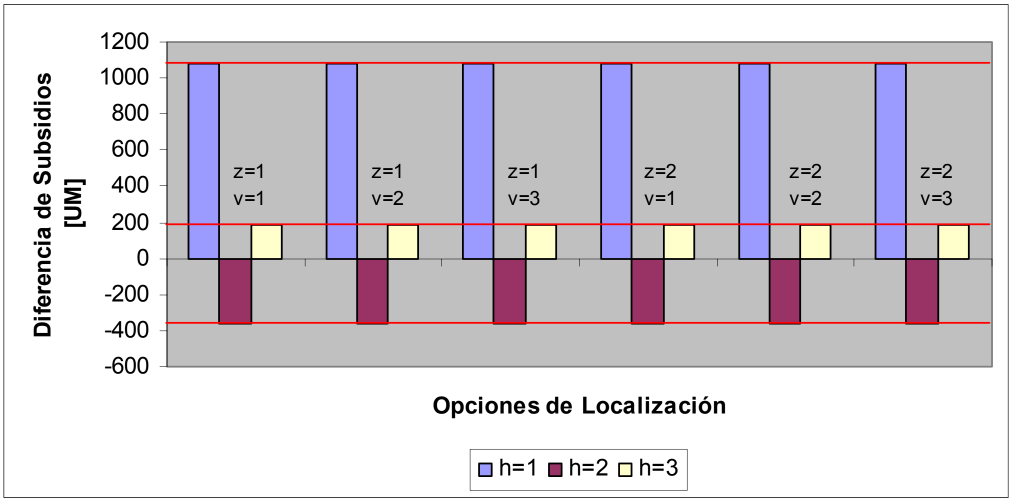
Gráfico 8.24
Subsidio inductor de localización óptima.



Fuente: Elaboración propia.

El resultado es exactamente el subsidio presentado en 8.23, salvo por una traslación t_h (en la componente de utilidad en las posturas). En efecto, la siguiente figura 8.25 muestra la diferencia entre el subsidio de los gráficos 8.23 y 8.24, que, como muestran las líneas horizontales al extremo de las barras, resulta de igual valor para cada cluster de ingreso en las distintas opciones de localización:

Gráfico 8.25
Diferencia de utilidad entre subsidio óptimo y subsidio inductor de localización óptima.



Fuente: Elaboración propia.

Esta diferencia de utilidad se debe a que para el cálculo del subsidio inductor se utilizó el valor de la componente de utilidad de las posturas b_h del equilibrio no subsidiado, y no el asociado al subsidio óptimo, sin embargo, como se mostró en la propiedad 4.13 la suma entre subsidio y utilidad resulta constante.

8.6.2 Precios sombra de las regulaciones.

A partir de ambos modelos, RB&SOSPM y OULM es posible obtener subsidios óptimos y precios sombra de las regulaciones. Sin embargo, la tendencia a la concentración de la oferta genera problemas numéricos en la optimización de OULM que limitan la capacidad de convergencia para valores pequeños de aproximación de localizaciones nulas.

En el caso de la aplicación de RB&SOSPM para los gráficos 8.23 y 8.24, se obtuvo precios sombra de las regulaciones iguales a 9.22[26] y 0 respectivamente, para las zonas 1 y 2. En el mismo el algoritmo OULM, que obtiene una localización óptima similar pero no idéntica a la de RB&SOSPM (con diferencias de 10e-03; se comprobó que la localización resultante de OULM es subóptima respecto de aquella), se obtuvo precios sombra asociados a las regulaciones que resultan: 9.75 y 0 respectivamente.

[26] Si la restricción representa m2 disponibles y las unidades monetarios son [M$], entonces las unidades de estos precios sombra son [M$/m2].

Se comprueba que ambas estrategias permiten determinar el costo sombra de las regulaciones, alcanzando el mismo valor en ambos casos. Este resultado permite evaluar las políticas regulatorias y puede ser utilizado para generar estrategias de regulación óptima.

8.7 Síntesis del capítulo.

Se ha presentado en este capítulo algunos de los resultados preliminares obtenidos de la aplicación a una ciudad prototipo, del modelo RB&SOSPM obtenido en el capítulo VI.

Los resultados reafirman las conclusiones obtenidas en capítulos anteriores y muestran casos con beneficios óptimos estrictamente positivos y subsidios óptimos no triviales. Estos subsidios compensan tanto la externalidad en las posturas como las ganancias dispares de los oferentes.

Se confirman las siguientes conclusiones previas:

1. La existencia de externalidades a la localización genera ineficiencias que pueden ser corregidas vía subsidios.
2. En el largo plazo, existen ineficiencias en el mercado aún sin externalidades a la localización.
3. La localización óptima tiende a la concentración de oferta.

Los resultados dependen fuertemente de la oferta, encontrándose los mayores beneficios para situaciones en que una alta concentración de oferta está permitida. Sin embargo, estos beneficios tienden a disminuir con la disminución de la dispersión del modelo.

En el caso de oferta restringida, se obtienen beneficios crecientes con la dispersión para dispersiones bajas y decrecientes con la dispersión para dispersiones altas. Para bajas dispersiones el beneficio sigue la tendencia del caso no regulado, mientras para altas dispersiones las regulaciones impiden que se obtengan grandes beneficios de una concentración de la localización.

Los mayores beneficios se obtienen de la concentración de oferta, la cuál está limitada en la realidad por restricciones de capacidad física.

Se comprueba la relación entre el OULM y RB&SOSPM, pero se detecta que OULM tiene problemas para manejar localizaciones concentradas en oferta. A pesar de esto, es útil investigar algoritmos especializados para este problema, pues es menos complejo que RB&SOSPM, y, a diferencia de este, permite la obtención de gradientes y hessianos analíticos, junto a la determinación de precios sombra para las regulaciones y la posibilidad de aplicación para cualquier valor de dispersión. Las características de los modelos utilizados son las siguientes:

1. RB&SOSPM es un modelo complejo con un número de variables igual a |h|*|v|*|i|. Posee problemas de cálculo para dispersiones bajas, cuándo el modelo RB&SM tiene problemas de convergencia. En general es más lento que OULM y la información de primer y segundo orden sólo puede ser aproximada. Sólo permite localización mayor que cero, pero aproxima bastante bien las localizaciones óptimas completamente concentradas.
2. OULM es menos complejo que RB&SOSPM, pero posee mayor cantidad de variables, a saber |h|*|v|*|i|+|v|*|i| variables. Puede resolverse para cualquier valor de la dispersión, pero no permite aproximar soluciones concentradas con cualquier valor de precisión, pues posee problemas numéricos en estos casos.

Respecto a la función BAN, se comprueba su continuidad y diferenciabilidad, propiedades que se van perdiendo según disminuye la dispersión.

IX. Síntesis y Conclusiones.

9.1 Síntesis.

Se ha formulado un modelo general de planificación urbana óptima OUPM (Optimal Urban Plannification Model), económicamente consistente, para una ciudad con cualquier topología y un mercado residencial urbano con externalidades a la localización, que permita determinar esquemas óptimos de planificación de subsidios y regulaciones. A partir de él se ha derivado un modelo general de planificación óptima de subsidios en el mercado residencial urbano OUSPM (Optimal Urban Subsidies Plannification Model), que permite determinar esquemas óptimos de subsidios, dado un conjunto de regulaciones predefinido. El modelo permite además determinar el precio sombra de cada una de las regulaciones.

Estos modelos generales requieren la definición previa de un modelo de equilibrio para el mercado residencial urbano, capaz de manejar las herramientas de planificación indicadas. En particular, se ha utilizado en este trabajo el modelo RB&SM (Random Bidding and Supply Model), el cual ha sido escogido debido a:

1. Su buen modelamiento de las características del mercado, incluyendo externalidades de localización.
2. Su fundamento microeconómico, tanto en demanda como en oferta.
3. Su calidad operativa.
4. La eficiencia en el cálculo de los algoritmos desarrollados.
5. Su aplicabilidad a ciudades reales, parcialmente probada por la aplicación a Santiago de Chile de su predecesor MUSSA (Modelo de Uso de Suelos de Santiago).

Este modelo es un modelo estocástico de equilibrio estático del mercado inmobiliario urbano, del cuál, sin perjuicio que se pueda extender al caso no residencial, sólo se ha considerado el submercado residencial en este trabajo. Los supuesto básicos de RB&SM son heredados por el modelo de planificación que lo utiliza como representación del equilibrio. Estos supuestos básicos son:

1. El suelo urbano es un bien cuasi-único transado en un mercado del tipo remate.
2. Las opciones de localización son unidades discretas definidas por la localización espacial (zona) y el tipo de edificación.
3. Las localizaciones disponibles son asignadas al mejor postor.
4. Las posturas son realizadas por hogares (y firmas) que compiten por opciones de localización, e incorporan una interdependencia compleja entre sus decisiones a través de las externalidades de localización.
5. Los consumidores se clasifican en categorías socioeconómicamente homogéneas, cuyo comportamiento se asume homogéneo en el remate.
6. Las posturas de los consumidores se asumen como variables aleatorias, considerando así la variabilidad idiosincrásica de los agentes.
7. Existe un único oferente de bienes inmuebles que es maximizar de la ganancia, definida como la renta menos el costo.
8. Las funciones de ganancia son variables aleatorias que incorporan la variabilidad entre oferentes.
9. El equilibrio se alcanza cuando todos los consumidores se encuentran localizados en algún lugar para un corte temporal.

Se han demostrado algunas propiedades asociadas al modelo RB&SM, respecto de existencia, unicidad, convergencia de algoritmos y otras. Los resultados más relevantes a este respecto apuntan a que:

1. Con suficiente dispersión se tienen propiedades de unicidad y convergencia de algoritmos de cálculo.
2. Existe una transformación biunívoca entre localización y oferta residencial, y políticas de subsidios urbanos.

A partir de la elección de RB&SM como modelo operativo de equilibrio, y de la construcción de una función de beneficio agregado de tipo benthamite adecuada a este modelo, se ha logrado definir un modelo operativo que se ha denominado RB&SOSPM (Random Bidding and Supply Optimal Subsidies Planning Model).

La función objetivo de RB&SOSPM se construye a partir de los siguientes supuestos:

1. Utilidad es lineal en la función de posturas.
2. El total de agentes por cluster y su ingreso es fijo.
3. No existen costos de movilidad en localización residencial o son despreciables.
4. No existen inercias a la movilidad en localización residencial de los agentes.
5. La oferta de mercado se renueva completamente entre un período y otro.
6. Los costos legales y de administración para la aplicación de subsidios son despreciables.

En este estudio se ha desarrollado una versión del modelo RB&SM que considera la aplicación de subsidios, y que corresponde a un extensión del modelo RB&SM presentado en Martínez y Henríquez (2003).

A partir de estos supuestos y de una formulación general análoga a la de RB&SM, se define una familia de funciones de beneficio agregado tipo Benthamite, construidas como la agregación ponderada del beneficio de los consumidores y el beneficio de los productores debida a un cambio de estado, en este caso provocado por cambios en la política de susidios impuestos por el planificador. La elección de los ponderadores es libre y obedece a políticas manejadas por el ente planificador. De entre esta familia, se ha escogido, ponderadores idénticos (política igualitaria), lo que permite estudiar la eficiencia del mercado (en el sentido de Pareto). Además, se descuenta el gasto monetario asociado a la aplicación de las políticas de planificación, en este caso, el valor monetario del subsidio aplicado, por lo que corresponde a una medida de beneficio agregado neto, denominada BAN. Debido a propiedades de invarianza de esta función, resulta necesario imponer una restricción de presupuesto que fije el nivel de subsidios, la cual ha sido fijada en cero, para reflejar transferencias netas dentro del mercado. Además, esta función resulta contínuamente diferenciable cuando la solución de RB&SM es única, lo que se obtiene con alta dispersión en las función de distribución de posturas y ganancias de RB&SM.

El estudio de las condiciones de primer orden de RB&SOSPM es analíticamente muy complejo, debido a la complejidad intrínseca del modelo RB&SM que resuelve el equilibrio como solución de un sistema de punto fijo. Por este motivo, solo se han estudiado analíticamente algunos casos particulares, que no permiten concluir sobre la optimalidad. En particular, soluciones especiales como la política de subsidios homogéneos (que representa eficiencia de mercado) resulta ser un punto crítico para un mercado sin externalidades y oferta dada, más no ha sido posible probar su optimalidad.

Una particularidad de los subsidios óptimos es que sólo pueden ser determinados en su valor exacto, cuando se determina exógenamente cuál es le nivel de utilidad que alcanzarán los agentes en el óptimo. Esta propiedad no es nueva pues modelos de localización óptima como Fujita (1989) y Rossi-Hansberg (2004) ya han debido aplicarla en un contexto de espacio continuo.

La dificultad analítica que presenta el modelo RB&SOSPM, si bien no invalida su utilidad práctica es muy poco deseable como característica, debido a que impide un análisis teórico detallado, que permite responder aquellas preguntas que fueron planteadas en los objetivos específicos de este estudio, a saber:

i) ¿Es necesaria la planificación urbana utilizando subsidios?, ¿cuándo?
Si la respuesta anterior es afirmativa,
ii) ¿Es posible detectar políticas de subsidios óptimos?
iii) ¿Qué estructura tienen las políticas de subsidios óptimos?
iv) ¿Es mejor regular o subsidiar? ¿Cuándo?

Ciertamente la hipótesis inicial es que la existencia de externalidades a la localización, socioeconómicas, aglomerativas o segregativas, y constructivas, justifican la introducción de esquemas de planificación que combinen regulaciones y subsidios, siendo posible la determinación de esquemas óptimos de planificación. Esta hipótesis se fundamenta en estudios teóricos conocidos de la Teoría del Bienestar, y algunas de sus aplicaciones en modelos urbanos a nivel teórico. Por otro lado, dentro de la literatura se encuentran algunas respuestas a estas interrogantes, obtenidas desde modelos de espacio continuo, no operativos. Estas están representadas en los resultados de Fujita (1989), que para el enfoque de remate (BID) en localización urbana, ha mostrado que:

1 Las externalidades de localización son fuentes de ineficiencia en el mercado urbano.
2 El mercado de localización residencial sin externalidades es eficiente.
3 Bajo externalidades de localización, se pueden detectar esquemas de subsidios óptimos, que corrigen el efecto externo en los precios.

4 Si el oferente considera el subsidio en su propio problema de decisión, se alcanza el óptimo.

A pesar de la contundencia de estos resultados, no existen modelos operativos que permitan la detección de subsidios óptimos. Además, Santiago de Chile es una ciudad altamente segregada socioeconómicamente, lo que permite sospechar de la existencia de externalidades a la localización de tipo socioeconómico, que no corresponden al tipo de externalidades utilizadas por Fujita, por lo que un modelo operativo de planificación aplicado a esta ciudad es útil en la práctica.

Por estos motivos, es muy importante probar que el modelo RB&SOSPM produce soluciones compatibles con estos resultados, objetivo que se logra al formular el modelo de localización urbana óptima OULM (optimal Urban Location Model) que es construido a partir del modelo RB&SOSPM y la transformación biunívoca entre localización y subsidios para equilibrios RB&SM.

El modelo OULM permite detectar la combinación de localización y oferta que maximiza el beneficio agregado neto, obtenido al remplazar los subsidios, por la función que los define a partir de la localización, en la función BAN de RB&SOSPM. Se demuestra que, en condiciones adecuadas, los resultados de OULM y RB&SOSPM son equivalentes en cuanto a localización y subsidios.

El modelo OULM puede ser tratado analíticamente y a partir de él se demuestra que:

1. El mercado en el corto plazo, esto es, con oferta dada, y sin externalidades es eficiente, tal como indica Fujita (1989).
2. Son fuentes de ineficiencia del mercado:
    - 1.1 Las externalidades socioeconómicas a la localización.
    - 1.2 Las externalidades en producción del entorno.
    - 1.3 La existencia de regulaciones a la oferta o la demanda.
    - 1.4 La existencia de heterogenidades en los costos de producción.
    - 1.5 Los subsidios a la demanda corrigen las externalidades de localización y las regulaciones.
    - 1.7 Los subsidios a la oferta corrigen heterogenidades en costos, externalidades en producción del entorno y regulaciones.

Por lo tanto, si existen externalidades, economías en la oferta o se está analizando el largo plazo, entonces el mercado no alcanzará un óptimo por si mismo, y el problema de planificación óptima tiene sentido.

Además, ambos modelos RB&SOSPM y OULM, permiten obtener el costo sombra de las regulaciones, medido como el precios sombra de aquellas que son activas en el óptimo. Este es idéntico en ambos casos debido a que la función objetivo y restricciones son las mismas. Además, este costo está integrado en el valor del subsidio óptimo resultante por uno u otro método y el poder aislarlo permite la potencial evaluación de distintos escenarios de políticas regulactorias.

Respecto de la aplicabilidad de cada uno de los modelos existen ventajas y desventajas, algunas de las cuales se presentan en la siguiente tabla 9.1.

Tabla 9.1

Características de los modelos RB&SOSPM y OULM.

Característica	**RB&SOSPM**	**OULM**
Aplicabilidad en baja dispersión	No Aplica. Problemas de convergencia del equilibrio RB&SM.	Aplica para cualquier nivel de dispersión finita.
Localizaciones óptimas extremas[27].	Permite aproximarlas suficientemente dentro del rango permitido a los subsidios.	Posee un límite para la aproximación de este tipo de localizaciones, pues para valores de localización cercanos a cero (<1e-06) se generan problemas numéricos en la función objetivo.
Número de variables	N° de agentes x N° de opciones de localización (≈29400 variables en MUSSA)	(N° de agentes+1) x N° de opciones de localización (≈29900 variables en MUSSA)
Velocidad de convergencia	Lento, requiere el cálculo de muchos equilibrios RB&SM	Más rápido, no requiere el cálculo de equilibrios RB&SM
Información de primer y segundo orden para algoritmos de optimización	Aproximada	Analítica

[27] Una localización extrema es aquella que posee cero agentes localizados en algunas alternativas de localización.

Finalmente, se desarrolló una aplicación prototipo del modelo RB&SOSPM, que permitió testear las propiedades y características de las soluciones óptimas y de la función de beneficios agregado neto. La aplicación utiliza un número reducido de variables (3 agentes y 6 opciones de localización, lo que completa un total de 18 variables) y un total de 100 agentes.

Los resultados confirman las conclusiones y muestran casos con beneficios óptimos estrictamente positivos y subsidios óptimos no triviales. Se confirman las siguientes conclusiones previas:

1. La existencia de externalidades a la localización genera ineficiencias que pueden ser corregidas vía subsidios.
2. En el largo plazo, existen ineficiencias en el mercado aún sin externalidades a la localización. En este último caso la ineficiencia se debe a heterogenidades en costos.
3. La localización óptima tiende a la concentración de oferta, aún cuando no se consideran costos de transporte, sino solamente por heterogenidades en los costos producción.
4. El subsidio óptimo es aquel que induce la localización óptima salvo por diferencias en el niveles de utilidad de los agentes. Esta es la propiedad que permite enlazar los modelos RB&SOSPM y OULM.

El beneficio agregado óptimo depende fuertemente de la oferta, cuando esta es variable, encontrándose los mayores beneficios para situaciones en que una alta concentración de oferta está permitida. Sin embargo, estos beneficios tienden a disminuir con la existencia de regulaciones, que restringen la oferta, o con la disminución de la dispersión del modelo. Esto último se debe a que la versión de RB&SM utilizada, enfoca la oferta como un único oferente escogiendo discretamente, por lo que en bajas dispersiones la tendencia es a la concentración, mismo resultado que indica el óptimo de manera independiente.

Respecto de la dependencia del subsidio óptimo con la dispersión se detecta que:

1. En el corto plazo:
    1.1 El beneficio aumenta con la dispersión para externalidades aglomerativas producto de que el subsidio aumenta la concentración resultante en el óptimo.
    1.2 El beneficio disminuye con la dispersión para externalidades segregativas.
2. En el largo plazo, el comportamiento no depende del tipo de externalidad y:

2.1 Si la oferta no está restringida se obtienen beneficios monótonamente crecientes, con tasa decreciente (forma logarítmica).

2.2 Si la oferta está restringida, se obtienen beneficios crecientes con la dispersión para dispersiones bajas y decrecientes con la dispersión para dispersiones altas. Para bajas dispersiones el beneficio sigue la tendencia del caso no restringido, mientras para altas dispersiones las regulaciones por si mismas logran concentración lo que reduce los beneficios de los subsidios.

Respecto a la función de beneficio agregado, se comprueba gráficamente su continuidad y diferenciabilidad, propiedades que se van perdiendo según disminuye la dispersión. Se encontró evidencia de unimodalidad de la función que pueden ser explotadas en el desarrollo de algoritmos ad-hoc.

9.2 Conclusiones.

Los logros más relevantes de este estudio son:

1. La extención del modelo RB&SM para la aplicación del estudio.
2. La demostración de propiedades de existencia, unicidad y convergencia para el modelo RB&SM.
3. La detección y demostración de existencia de subsidios inductores de localización en RB&SM junto algunas propiedades de estos..
3. La formulación del los modelos operativos de planificación óptima de subsidios urbanos, RB&SOSPM y OULM, factible de aplicar a casos reales, con particular interés donde existe evidencia de la existencia de externalidades a la localización.
4. La detección precisa de fuentes de ineficiencia en el mercado como son externalidades a la localización, heterogenidades en la oferta, y por lo tanto, la detección de la necesidad de planificación urbana.
5. La detección de la tendencia general del mercado optimizado a la densificación como un resultado de los modelos planteados.

Tanto la formulación como los resultados obtenidos son consistentes con aquellos obtenidos por Fujita (1989) con un modelo teórico de análisis. Esto entrega validez a la formulación planteada.

En terminos de aplicabilidad de las soluciones a un caso de planificación real, es necesario mencionar que los subsidios óptimos resultantes son medidos en unidades monetarias sólo cuando el factor de escala de las distribuciones Gumbel de posturas ha sido calibrado, lo cual es posible a través de observaciones de rentas. A pesar de esto, el modelo debe ser mejorado en varios aspectoas antes de una aplicación real, pues está sugeto a una serie de limitaciones provenientes de la formulación de RB&SM que en la actualidad están siendo superadas por nuevas versiones de tal modelo.

Ciertamente, el modelo no incluye todos loe efectos que los cambios en localización pueden generar en la ciudad. Un ejemplo de esto, es el sistema de transporte, el cual es considerado exógenamente a través de variables de acceso, y dado que cambios en localización inducen cambios en demanda de transporte y, por lo tanto, en el equilibrio de ese sistema, una evaluación más adecuada debe incluir tal tales efectos. Otros efectos no considerados son, por ejemplo, los efectos en consumo debido a la relocalización, puesto que una parte importante del consumo y actividades que desarrollan las personas son depeden de la localización.

Respecto a las limitaciones del estudio y los modelos se tiene que:

1. *RB&SM no integra la restricción de ingreso del consumidor, ni las restricciones de ganancias positivas de os oferentes.*

   Dentro de los modelos desarrollados aquí estas restricciones están fuertemente asociadas a las cotas mínimas para los subsidios (impuestos), por lo que pueden ser integradas, definiendo niveles de utilidad adecuados. Sin embargo, actualmente se desarrolla un estudio en que el modelo RB&SM está siendo extendido para incluirlas, por lo que pueden fácilmente ser integradas al marco desarrollado en este trabajo generando nuevas versiones de los modelos.
2. *RB&SM es un modelo de equilibrio estático.*

   Esta característica, si bien es muy utilizada en la literatura para evaluar eficiencia, puede ser una limitante a la hora de evaluar políticas de planificación y una línea interesante de desarrollo para futuras investigaciones es considerar modelos dinámicos
3. *Se considera únicamente el mercado residencial*.

   La extensión del modelo RB&SM al mercado de localización y oferta no residencial requiere más investigación, principalmente por el lado de las funciones de disposición a pagar de las firmas. Sin embargo, una vez logrado esto no se grandes modificaciones para aplicar el marco teórico desarrollado en este estudio.

4. *La aplicación prototipo utiliza métodos de optimización estandar.*

   La evidencia teórica y prototipo, muestra que los modelos RB&SOSPM tienen propiedades que pueden ser explotadas en el desarrollo de algoritmos ad-hoc, muy relevantes a la hora de aplicarlos a ciudades reales.

5. *Los modelos consideran un conjunto de regulaciones exógeno.*

   Si bien estos conjuntos regulatorios pueden tener cualquier forma, extendiendo aquellos permitidos por la formulación habitual de RB&SM, el estudio de regulaciones óptimas (en un sentido que es necesario definir) no se ha enfrentado. Sin embargo, a través de los modelos planteados es posible determinar precios sombra de las regulaciones, lo que permite estudios de evolución de escenarios regulatorios.

6. *No Consideración de migraciones hacia y desde la ciudad.*

   Esto quiere decir que no ingresan ni salen agentes demandantes de localización y no se consideran efectos de otros mercados. Para generar un modelo abierto se debe redefinir la función de beneficios agregados y estudiar la relación entre el mercado inmobiliario y otros mercados. Un ejemplo de esto último, se presenta en Rossi- Hansberg (2004) integrando el mercado de localización y el mercado laboral, detectando ineficiencias y subsidios óptimos.

El estudio no ha sido agotado en este trabajo y las siguientes líneas de investigación pueden aportar a la aplicación de este a una ciudad real:

- Mejora del modelo de equilibrio para manejo de múltiples oferentes.
- Mejora del modelo de equilibrio para manejo de restricción de ingreso y de permanencia de oferentes en el mercado.
- Desarrollo de mejores algoritmos de cálculo del equilibrio.
- Desarrollo de algoritmos ad-hoc para el cálculo del óptimo.

Otros desarrollos pueden estar asociados a:

- Consideración de emigración o movilidad en localización residencial de agentes al interior del mercado.

- Mejora en la formulación de RB&SM para consideración de firmas y mercado laboral.
- Integración de regulaciones a la decisión de planificación óptima.

Los objetivos planteados en un comienzo han sido alcanzados y superados en muchos aspectos, entre estos:

- La demostración de propiedades del equilibrio RB&SM (Anexo B).
- La justificación de la utilización de una función de postura lineal en la utilidad (Anexo A.1)
- El desarrollo del modelo OULM que permitió un estudio analítico de la eficiencia del mercado y de la estructura y rol de los subsidios óptimos.

Finalmente, es satisfactorio comprobar que este trabajo se convierte en un aporte real a la práctica de la planificación urbana, toda vez que en Santiago de Chile se están desarrollando estudios y modelos que indican un interés y facilitan la aplicación de este tipo de herramientas.

X. Referencias.

Alonso, W. (1964). **Location and Land Use**, Cambridge, Harvard University Press.

Anas, A. (1982). **Residential Location Markets and Urban Transportation**, London, Academic Press.

Anas, A. y Arnott, R.J. (1991). "Dynamic Housing Market Equilibrium with Taste Heterogeneity, Idiosyncratic Perfect Foresight, and Stock Conversions". **Journal of Housing Economics 1**, pp. 2-32.

Anas, A., Arnott, R.J. y Small, K. (1998). "Urban Spatial Structure", **Journal of Economic Literature, American Economic Association, 36(3)**, pp. 1426-1464, September**.**

Arnott, R.J. (1979). "Optimal City Size in a Spatial Economy". **Journal of Urban Economics, 6(2)**, pp. 65-89.

Brueckner, J.K. (1990). "Growth Controls and Land Values in an Open City", **Land Economics, 66(3),** pp. 237-248.

Brueckner, J.K. (1995). "Strategic Control of Growth in a System of Cities", **Journal of Public Economics, 57,** pp. 393-416.

Brueckner, J.K. (1996). "Welfare Gains from Removing Land-Use Distortions: An Analysis of Urban Change in Post-Apartheid South America", **Journal of Regional Science, 36,** pp. 91-109.

Cartan, H. (1967). **Calcul Différentiel**. Collection Methods 1967.

Cheshire, P. y Sheppard, S. (1997). "Welfare Economics of Land Use Regulation", **Research Papers in Environmental and Spatial Analysis** N° 42 (Department of Geography, London School of Economics).

Domencich, T. and McFadden, D. (1975). **Urban Travel Demand: A Behavioural Analysis**. North-Holland, Amsterdam.

Echenique, F. (2005). "A short and constructive proof of Tarski's fixed-point theorem", **International Journal of Game Theory**, **Springer, 33(2)**, pp. 215-218.

Ellickson, B. (1981) "An Alternative Test of the Hedonic Theory of Housing Markets". **Journal of Urban Economics 9**, pp. 56-79.

Epple, D., Romer, T. y Filimon, R. (1988). "Community Development with Endogenous Land Use Controls", **Journal of Public economics, 35,** pp. 133-162.

Fischel, W.A. (1990). **Do Growth Control Matter: A Review of Empirical Evidence on the Effectiveness and Efficiency of Government Lan Use Regulation**. Lincoln Institute of Land Policy, Cambridge, Massachusetts.

Fujita, M. (1989). **Urban Economic Theory, Land Use and City Size**. Cambridge University Press, Cambridge.

Fujita M. and Thisse J.F., (2002), **Economics of agglomeration: cities, indus-trial location, and regional growth**, Cambridge, Cambridge University Press

Gordon, P. y Richardson, H.W. (1996). "Beyond Polycentricity: The Dispersed Metropolis, Los Angeles, 1970-1990", **Journal of the American Planning Association, 62(3)**, pp. 289-295.

Gordon, P. y Richardson, H.W. (1986). "The Distribution of Population and Employment in a Polycentric City: The Case of Los Angeles", **Environment and Planning A, 18(2),** pp. 161-173.

Haig, R.M. (1926). "Towars an Understanding of the Metropolis", **Quarterly Journal of Economy, 40**, pp. 421-423**.**

Hanemann, W.M. (1984). "Welfare Evaluations in Contingent Valuation Experiments with Discrete Responses", **American Journal of Agricultural Economics, 66**, pp. 332-341.

Hawley, A.H. (1950). **Human Ecology**. Ronald Press, New York.

Herbert, J.D. y Stevens, B.H. (1960). "A Model of the Distribution of Residential activity in Urban Areas". **Journal of Regional Science, 2**, pp. 21-36.

Hurd, R.M. (1903). **Principles of City Land Values**. The Record and Guide, New York.

Jara, P., Jofré, A. y Martínez F.J. (2003) "Un Modelo de Uso de Suelos con Ingreso Endógeno", In **Actas del XI Congreso Chileno de Ingeniería de Transporte, R. Garrido y J.C. Muñoz, comp., Sociedad Chilena de Ingeniería de Transporte,** pp. 129-140.

Lucas, R.E. y Rossi-Hansberg, E. (2002) "On the Internal Structure of Cities", **Econometrica, 70(4)**, pp. 1445-1476.

Lowry, I.S. (1964). **A Model of Metropolis**. Rand Corporation, Santa Mónica, CA.

Luenberger, D. (1937) **Linear and Nonlinear Programming.** Rev. Ed., 2° Ed., Addison-Wesley Publishing Co., Massachussetts, 1989.

Marshall, A. (1890). **Principles of Economics: an introductory text.** 8^{th} edition, MacMillan 1930, London.

Martínez, F. J. (2001) "A Discrete Urban Economic Framework: Willingness to Pay Properties and Benefit measures". Documento de trabajo en Internet: http://www.cec.uchile.cl/~dicidet/publicaciones_martinez.html.

Martínez, F.J. (1992). "The Bid Choice Land Use Model: an integrated Economic Framework". **Environment and Planning A**, 24,pp. 871-885.

Martínez, F.J. y Donoso, P. (2001). "Modeling Land Use Planning Effects: Zone Regulations and Subsidies". In **Travel Behaviour Research, The Leading Edge**. D. Hensher (ed.), Pergamon-Elsevier, pp. 647-658

Martínez, F.J. y Donoso, P. (1995). "MUSSA Model: The Theoretical Framework" . En D. Hensher, J.Jing y T. Oum (eds.). **Modelling Transport Systems: Proceedings 7th Worl Conference on Transportation Research (WTCR), 2**, pp. 333-343.

Martínez, F.J. y Henríquez, R. (2003). "A Stochastic Land Use Equilibrium Model". **10th International Conference on Travel Behaviour Research**, Lucerne, August 2003.

Martínez, F.J. y Manterola, P. (2001). "Location Externalities in the Urban Context: Shadow Prices and Optimal Taxes/Subsidies". **World Conference on Transportation Research (WCTR)**, 22-27 de Julio, Corea.

Martínez, F.J. y Roy, J. (2004) "A Model for Residential Supply". **Annals of Regional Science, 38(3),** pp. 531-550.

McFadden, D.L. (1978). "Modelling the choice of residential location". En Karlqvist et al. (eds), **Spatial Interaction Theory and Planning Models**, North-Holland, Amsterdam, pp. 75-96.

Mirrlees, J.A. (1972). **The Optimum Town**. Swedish Journal of Economics, 74, pp 114-35.

Miyamoto, K. y Kitazume, K. (1989). "A Land Use Model based on Rnadom Utility/Rent-Bidding analysis (RURBAN)". En Y. Okamoto, H. Yamauchi (eds). Transport Policy, Management and Technology Towards 2001. **Proceedings of the 5th World Conference on Transportation Research, 1**, pp. 107-121.

Ng, Yew-Kwang (1979). **Welfare economics: introduction and development of basic concepts.** Revised edition, London: Macmillan, 1983.

Ricardo, D. (1817). **On The Principles of Political Economy and Taxation**. John Murray, 3th edition 1821, London.

Rosen, S. (1974). "Hedonic Prices and Implicit Markets: Product Differentiation in Pure Competition", **Journal of Political Economy, 82**, pp. 34-55.

Rossi-Handsberg, E., (2004). “Optimal Urban Land Use Zoning”, **Review of Economic Dynamics, 7(1)**, pp. 69-106.

Shepard, S. (1988). “The Qualitative Economics of Development Control”, **Journal of Urban Economics, 24,** pp. 310-320.

Smith, Adam. ([1776] 1991 ed.) **The Wealth of Nations.** Amherst, New York: Prometheus Books.

Solow, R.M. (1973). “On Equilibrium Models of Urban Location”. En **Essays in Modern Economics**, M. Parkin (eds), Longmans, Green, London, pp. 2-16.

Varian, H.R. (1992), **Análisis Microeconómico**, 3ª edition, Antoni Bosch Ed., Barcelona, España.

Von Thünen, J.H. (1826). **Von Thünen’s Isolated State,** tr. C.M. Wartenberg, Oxford, Pergamon, 1963).

Wilson, A.G. (1970). **Entropy in Urban and Regional Modelling**. Pion, London.

Wilson, A.G. y Bennet, R.J. (1985). **Mathematical Methods in Human Geography and Planning**, New York, Wiley.

Zeidler, E. (1986). **Nonlinear Functional Analysis and its Applications I: Fixed-Point Theorems,** Springer-Verlag, New York.

Anexo A.

Derivación de fórmulas de RB&SM.

A continuación se muestra la deducción analítica de cada una de las fórmulas presentadas en el texto, asociadas al modelo RB&SM. Se asume que el lector está familiarizado con la notación utilizada en el modelo.

Las primeras 8 secciones muestran fórmulas del modelo en si mismo y la última presenta la deducción de una medida de beneficio de consumidores a partir de él.

La primera sección es un aporte realizado en el contexto de este estudio y las siguientes toman como referencia estudios anteriores: Martínez y Henríquez (2003) para las fórmulas de RB&SM y Martínez (2001) para la medida de beneficios.

A.1 Función de postura.

Considere una función de utilidad cuasi lineal, es decir, lineal en a lo menos uno de los bienes de consumo distinto de localización. El problema de decisión determinístico que maximiza la utilidad del agente consumidor es:

$$\begin{aligned} &\max_{vi} \max_{x \in \Re, y \in A \subseteq \Re^n} \alpha + \lambda_h x + U_h(y, z_{vi}) \\ &\qquad s.a. \quad Qx + Py + r_{vi} = I_h + t_{hvi} \end{aligned} \tag{A-1}$$

donde:

- U_h es la componente no necesariamente lineal de la utilidad.
- α contiene todos los elementos constantes en la utilidad.
- x es el consumo de un bien con comportamiento lineal en la utilidad.
- y es un vector de consumos de bienes con comportamiento libre en la utilidad.
- z_{vi} es un vector de atributos de la localización vi y no depende del consumo en otros bienes.
- Q es el precio del bien x y P el vector de precios de los bienes en y.
- r_{vi} es la renta de la localización vi.
- I_h+t_{hvi} es el ingreso efectivo del agente en la localización vi, compuesto por el ingreso fijo I_h y el subsidio fijo t_{hvi}.
- λ_h corresponde al peso en la utilidad del bien lineal, con dimensiones [utiles/unidad].

Notar que se ha supuesto que la localización sólo se puede consumir de manera discreta, y más aún, en una unidad.

Debido a la linealidad de *x*, el problema interior se puede escribir como un problema irrestricto en *y*. Basta para esto despejar *x* desde la restricción de ingreso y reemplazarlo en la utilidad, obteniendo:

$$\max_{vi} \max_{y \in A \subseteq \Re^n} \alpha + \frac{\lambda_h}{Q}\left(I_h + t_{hvi} - r_{vi} - Py\right) + U_h\left(y, z_{vi}\right) \qquad \text{(A-2)}$$

Se debe notar que, en estricto rigor, este problema debería ser restringido, debido a que el consumo en x en general lo es. Sin embargo, se asume que el rango de consumo es suficientemente amplio y no genera inconvenientes reales, obteniéndose siempre una solución interior para el problema.

Para obtener la utilidad indirecta condicional en la localización se debe resolver el problema anterior en *y*, lo que resulta en:

$$\max_{vi} V_{hvi} = \alpha + \frac{\lambda_h}{Q}\left(I_h + t_{hvi} - r_{vi} - Py_{vi}{}^*\right) + U_h\left(y_{vi}{}^*, z_{vi}\right) \qquad \text{(A-3)}$$

donde y^* es un valor independiente del ingreso y observa directamente que λ_h/Q es la utilidad marginal del ingreso (UMI) para el agente h. A continuación, se fija la utilidad a un valor $V_{hvi} = \overline{U}_h$ fijo y constante a través de la ciudad (Alonso, 1964), y se despeja la precio de la localización. Luego del proceso descrito se obtiene:

$$r_{vi} = I_h - \frac{\overline{U}_h}{UMI_h} + \frac{U_h\left(y_{vi}^*, z_{vi}\right)}{UMI_h} + \frac{\alpha}{UMI_h} - Py_{vi}{}^* + t_{hvi} \qquad \text{(A-4)}$$

Finalmente, se interpreta esta función de precios como la disposición a pagar o postura B_{hvi} del agente *h* en la localización *vi*. La ecuación anterior toma la forma general:

$$B_{hvi} = b_h\left(I_h, \overline{U}_h\right) + b_{hvi}\left(z_{vi}\right) + b + t_{hvi} \qquad \text{(A-5)}$$

donde en virtud de la ecuación (D-4) se tienen las siguientes identidades:

$$b_h\left(I_h, \overline{U}_h\right) = I_h - \frac{\overline{U}_h}{UMI_h} \qquad \text{(A-6)}$$

$$b_{hvi}\left(z_{vi}\right) = \frac{U_h\left(y_{vi}^*, z_{vi}\right)}{UMI_h} - Py_{vi}^* \qquad \text{(A-7)}$$

$$b = \frac{\alpha}{UMI_h} \qquad \text{(A-8)}$$

$$UMI_h = \frac{\lambda_h}{Q} \quad \text{(A-9)}$$

Una observación importante del proceso expuesto es que el supuesto de cuasi-linealidad de la utilidad, implica que la función de disposición a pagar asociada es separable en la utilidad. Este tipo de funciones de postura separable se había propuesto previo a este trabajo, sin un fundamento microeconómicamente riguroso como el aquí presentado.

A.2 Probabilidad de localización Logit Multinomial.

Tomando en consideración que el modelador no conoce bien todas las variables que afectan la decisión de los consumidores, y que el proceso de agregación en clusters no permite un buen manejo de diferencias en gustos e ingresos al interior de un cluster, se asume que la función que representa su comportamiento (la postura en este caso) contiene un término de error aleatorio aditivo de media cero[28] y varianza conocida. Esto significa que el modelador considera que en promedio la función de comportamiento que utiliza representa bien a los consumidores. Así, considerando que este error incluye tanto variables propias del agente como de la localización, se plantea:

$$\widetilde{B}_{hvi} = B_{hvi} + \varepsilon_{hvi} \quad \text{(A-10)}$$

donde ε_{hvi} es el término de error aleatorio, B_{hvi} es la parte determinística de la postura (de la sección previa) y $\widetilde{B}_{hvi}$ la postura aleatoria.

Si se asume además que todos los efectos entre agentes y entre localizaciones han sido bien y completamente modelados en la parte determinística de la función de postura, entonces las variables aleatorias serán independientes entre sí. Por último, siguiendo a Ellickson (1981), la función de postura que mejor representa a un cluster de hogares para un proceso de remate es la máxima postura de los hogares en el cluster, luego, tras este proceso de maximización, es correcto asumir que la distribución de las variables aleatorias será una distribución de valor extremo. Todo esto justifica el supuesto de que los términos de error aleatorio ε_{hvi} estén distribuidos según una función de valor extremo, como la Gumbel IID[29] de parámetros $(0,\mu)$, es decir, mediana cero y varianza conocida igual a $(\pi^2/6\mu^2)$, donde π=3.1415...

[28] En estricto rigor, y sin predicad de generalidad, se utiliza una variable aleatoria Gumbel $(0,\mu)$, esto es de mediana 0 y media γ/μ conocida, donde γ=0.577…es la constante Euler.
[29] IID: Independientes e Idénticamente Distribuidos.

Así, la probabilidad de que un agente *h* se localice en una alternativa *vi*, es equivalente a la probabilidad de que sea el máximo postor en dicha localización, es decir, $P_{h/vi} = P\left(B_{hvi} \geq \max_{g \neq h} B_{gvi}\right)$. Notar que la distribución Gumbel es cerrada para maximización y que, por lo tanto, el máximo de la derecha distribuye Gumbel($\frac{1}{\mu}\ln\sum_{g\neq h}\overline{H}_g \exp\left(\mu B_{gvi}\right)$, μ), en que la mediana corresponde a una traslación del valor esperado de la variable aleatoria máximo. Se puede definir entonces la variable aleatoria $D_{hvi} = \max_{g \neq h} B_{gvi} - B_{hvi}$ que corresponde a una diferencia entre dos variables Gumbel, independientes y de igual varianza, por lo que distribuye Logística. Así, resulta que la probabilidad buscada se puede escribir $P_{h/vi} = P\left(D_{vi} \leq 0\right)$, lo que corresponde a la función acumulativa de la variable logística evaluada en 0. Por lo tanto, se tiene:

$$P_{h/vi} = \frac{H_h \exp\left(\mu B_{hvi}\right)}{\sum_g H_g \exp\left(\mu B_{gvi}\right)} \qquad \text{(A-11)}$$

donde H_h, definido exógenamente, es el número de agentes tipo *h* que participan de los remates.

A.3 Función de rentas.

En la teoría de remates la renta de una localización corresponde a la máxima postura. Sin embargo, en el contexto estocástico esta variable resulta una variable aleatoria. En efecto, $r_{vi} = \max_h B_{hvi}$ es una variable aleatoria Gumbel($\frac{1}{\mu}\ln\sum_h \overline{H}_h \exp\left(\mu B_{hvi}\right)$, μ), y para distintos *vi* estas variables resultan independientes y de igual varianza. Se define entonces la renta r_{vi} de una localización *vi* como el valor esperado de la variable aleatoria renta. Así resulta:

$$r_{vi} = \frac{1}{\mu}\ln\sum_g H_g \exp\left(\mu B_{gvi}\right) + \frac{\eta}{\mu} \qquad \text{(A-12)}$$

donde $\eta \approx 0{,}577\ldots$ es la constante de Euler.

A.4 Función de ganancias.

La ganancia π_{vi} del único oferente de RB&SM en cada localización corresponde directamente a la diferencia entre la renta r_{vi} que obtiene y el costo c_{vi} asociado a la localización[30], esto es, $\pi_{vi} = r_{vi} - c_{vi}$.

El costo asociado se asume con toda la flexibilidad necesaria, esto es, por ejemplo, incluyendo economías de escala o diversidad. Una función de costos posible es $c_{vi}(S_{\bullet\bullet}) = f_{vi} + g_{vi}\sum_{ws}\xi_{wk}\left(S_{wd}\right)^{\chi_{wj}}$ donde S_{wk} corresponde a la oferta en la localización *wk.* Otro costo, más indirecto, corresponde a la existencia de regulaciones impuestas por el planificador, las que restringen la ganancia de los oferentes en un valor $\gamma_i = \sum_k \gamma_i^k = \max_k\left\{\gamma_i^k\right\}$, en que el vector γ_i corresponde a los multiplicadores de lagrange de las restricciones de la oferta. Estas igualdades se explican al observar que de las *k* restricciones lineales que permite RB&SM, sólo una es activa y, por lo tanto, positiva; mientras las otras son nulas.

Así la ganancia unitaria del oferente queda descrita por:

$$\pi_{vi} = r_{vi} - c_{vi} - \gamma_i \qquad \text{(A-13)}$$

donde el término γ_i se define en el apartado siguiente.

A.5 Probabilidad de oferta Logit Multinomial.

Notar en primer lugar, que en el contexto estocástico, la función de ganancia π_{vi} definida en el apartado anterior, corresponde a una variable aleatoria, debido a que la renta r_{vi} lo es. En efecto, si los costos no son aleatorios, π_{vi} distribuye Gumbel(r_{vi}-η/μ- c_{vi}- γ_i,μ) heredando la varianza de la renta (que a su vez la hereda de las posturas). Sin embargo, para permitir mayor flexibilidad en el modelo se asume una varianza distinta, quedando las ganancias con distribución Gumbel(r_{vi}-η/μ- c_{vi}- γ_i,λ) independientes y de igual varianza entre si.

En este contexto, la probabilidad de que el único oferente produzca en el mercado una alternativa *vi*[31] corresponde a la probabilidad que la ganancia en esa alternativa sea máxima,

[30] Es importante aquí considerar que el costo se asume en la misma dimensión temporal de la renta y el ingreso. En la práctica estos valores son mensuales, por lo que el costo de construcción debe ser lleva a valor por mes.

[31] Recordar que el oferente realiza una elección discreta entre las alternativas, por lo que en un contexto determinístico ofrece una y sólo una localización.

esto es, $P_{vi}=P\left(\pi_{vi}\geq \max_{wj\neq vi}\pi_{wj}\right)$. Siguiendo el cálculo realizado en el apartado A.2, la variable aleatoria $D_{vi}=\max_{wj\neq vi}\pi_{wj}-\pi_{vi}$ corresponde a una diferencia entre dos variables Gumbel Independientes de igual varianza, por lo que distribuye Logística. Así, se puede escribir la probabilidad buscada como $P_{vi}=P(D_{vi}\leq 0)$, que corresponde a la función acumulativa de la variable logística evaluada en 0. Por lo tanto, se tiene:

$$P_{vi}=\frac{\exp(\mu\pi_{vi})}{\sum_{wj}\exp(\mu\pi_{wj})} \qquad \text{(A-14)}$$

A.6 Regulaciones lineales.

En RB&SM se utilizan regulaciones lineales sobre la oferta de bienes del tipo $\sum_{v} a_{vi}^{k} S_{vi} \leq R_{i}^{k}$, donde la oferta $S_{vi}=S\bullet P_{vi}$ con S la oferta total definida exógenamente. Reemplazando lo anterior, junto a (A-13) y (A-14) en la restricción lineal y despejando γ_i, se obtiene:

$$\gamma_i=\frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{S}{R_i^*}\sum_{vj}a_{vi}^*\exp(\lambda(r_{vi}-c_{vi}-\hat{\pi}))\right] \qquad \text{(A-15)}$$

donde $\hat{\pi}=\frac{1}{\lambda}\ln\sum_{wj}\exp(\lambda(r_{wj}-c_{wj}-\gamma_j))+\frac{\eta}{\mu}$ es la ganancia esperada del oferente.

A.7 Ecuación de equilibrio.

El equilibrio en RB&SM se define como una distribución de bienes y agentes en la ciudad tal que todos lo agentes se localizan y todos los bienes son utilizados. La segunda condición se asegura exógenamente proveyendo al modelo de un total de agentes por localizar *H* exactamente igual al total de bienes a ofertar *S.*

Así, las condiciones de equilibrio para cada tipo de agente pueden escribirse $\sum_{vi}S_{vi}P_{h/vi}=H_h$, donde los términos de la derecha representan el total de agentes de cada tipo y son exógenos al modelo. Tomando en cuenta (A-5) y (A-11) en la ecuación anterior, se puede despejar la componente $b_h(I_h,\overline{U}_h)$ del numerador de (A-11), obteniendo:

$$b_h + b = -\frac{1}{\mu}\ln\left[\sum_{vi} S_{vi}\frac{\exp(\mu(b_{hvi}+t_{hvi}))}{\sum_{g} H_g \exp(\mu B_{gvi})}\right] \tag{A-16}$$

La componente *b* debe ser calculada con información exógena al modelo, tal como se indica en el siguiente apartado.

A.8 Nivel de rentas y utilidades.

La componente constante *b* de las posturas (A-5), define el nivel de rentas y de utilidades en el modelo. Sin embargo, no es posible definirla a partir de las ecuaciones anteriores, tal como se observa en (A-16).

Para definirla se asume un valor de renta exógeno de renta en la ciudad, definido como función de variables macroeconómicas o algún otro método. Utilizando esta información se ajusta *b* para que la renta correspondiente alcance el valor conocido. Una estrategia, presentada en el texto, es fijar el valor de renta promedio en la ciudad, lo que arroja la siguiente ecuación para *b*:

$$b = r_{ex} - \frac{1}{S}\sum_{vi} S_{vi} r^{*}_{vi} \tag{A-17}$$

donde r_{ext} es el valor exógeno de la renta promedio.

A.9 Beneficio del consumidor.

Se resume el comportamiento del consumidor dado por el problema de maximización de la utilidad que extiende (A-1),

$$\max_{iv}\left\{\begin{array}{ll} \max\limits_{x_h} & U_h(x_h, z_{vi}) \\ s.a. & Px_h + r_{vi} = I_h + t_{hvi} \end{array}\right\} \tag{A-18}$$

donde x_h corresponde al consumo del individuo *h* en bienes distintos de localización, z_{vi} es el vector de atributos de la localización *vi*, *P* corresponde al precio de los bienes de consumo, r_{vi} es la renta de localización *vi*, I_h el ingreso del individuo *h*, y t_{vi} el subsidio/impuesto asociado al un *h* que se localiza en *vi*.

Resolviendo el problema de optimización interno, y reemplazando la solución en la función de utilidad, se obtiene la función de utilidad indirecta condicional en localización:

$$V_{h/vi} = V_{h/vi}\left(I_h + t_{hvi} - r_{vi}, P, z_{vi}\right) \tag{A-19}$$

Si se invierte esta ecuación en su primera componente para un nivel de utilidad dado, se obtiene la función de gasto (que corresponde al problema dual de minimización a asociado a (A-18)):

$$e_{h/vi}\left(P,z_{vi};U_{h}\right)=r_{vi}+V_{h/vi}^{-1}\left(P,z_{vi};U_{h}\right) \quad \text{(A-20)}$$

donde la utilidad es un parámetro. La función de gasto presentada es condicional en la localización debido a que so obtiene de invertir la (A-19), y representa el mínimo gasto necesario en consumo para alcanzar el nivel de utilidad U_h en la localización *vi*. La segunda componente en (A-20) corresponde a una función de gasto en todos los bienes excepto localización. Si se utiliza en (A-20) el nivel de utilidad dado por (A-19), se obtiene que el gasto asociado coincide con el ingreso más el subsidio. Siguiendo a Solow(1973), en esa ecuación se puede interpretar la renta como la máxima disposición a pagar del agente *h* en la localización *vi* :

$$DP_{hvi}=I_{h}+t_{hvi}-V_{h/vi}^{-1}\left(P,z_{vi};U_{h}\right) \quad \text{(A-21)}$$

Si se reemplaza (A-21) en (A-20) se obtiene una nueva versión de (A-20):

$$e_{h/vi}\left(P,z_{vi};U_{h}\right)=r_{vi}+I_{h}+t_{hvi}-DP_{hvi}\left(P,z_{vi};U_{h}\right) \quad \text{(A-22)}$$

donde el ingreso y el subsidio se cancelan por ser componentes lineales de la función DP.

Por otro lado, si se produce un cambio de escenario desde $E^0(z_{vi}^0,U_h^0)$ hasta $E^1(z_{vi}^1,U_h^1)$ el cambio en utilidad de los consumidores medido monetariamente puede ser determinado por medio de las variaciones equivalente (VE) y compensatoria (CP):

$$\begin{aligned}EV_{h/vi}&=e_{h/vi}\left(P,z_{vi}^{0};U_{h}^{1}\right)-e_{h/vi}\left(P,z_{vi}^{0};U_{h}^{0}\right)\\CV_{h/vi}&=e_{h/vi}\left(P,z_{vi}^{1};U_{h}^{1}\right)-e_{h/vi}\left(P,z_{vi}^{1};U_{h}^{0}\right)\end{aligned} \quad \text{(A-23)}$$

que en el contexto de (A-22) se transforman en:

$$\begin{aligned}EV_{h/vi}&=DP_{h/vi}\left(P,z_{vi}^{0};U_{h}^{0}\right)-DP_{h/vi}\left(P,z_{vi}^{0};U_{h}^{1}\right)\\CV_{h/vi}&=DP_{h/vi}\left(P,z_{vi}^{1};U_{h}^{0}\right)-DP_{h/vi}\left(P,z_{vi}^{1};U_{h}^{1}\right)\end{aligned} \quad \text{(A-24)}$$

Se observa que, si la utilidad es aditivamente separable de los atributos a la localización dentro de la función DP, como en (A-5), EV y CV coinciden, tal como muestra Martínez (2000), resultando:

$$EV_{hvi}=CV_{hvi}=b_{h}\left(I_{h}^{0};U_{h}^{0}\right)-b_{h}\left(I_{h}^{0};U_{h}^{1}\right) \quad \text{(A-25)}$$

Anexo B.

Demostración de propiedades de RB&SM.

En lo que sigue se demuestran las propiedades enunciadas en el texto asociadas al equilibrio RB&SM presentado en el capítulo IV. El Anexo está construido para ser autocontenido pero se asume que lector está familiarizado con la notación y fórmulas del modelo RB&SM, las que pueden ser consultadas en el texto y en el Anexo A de este documento.

Dado un par de planificación (t,R), compuesto por un conjunto de subsidios t y un conjunto de regulaciones R, el modelo RB&SM tiene la siguiente representación esquemática.

$$
\begin{aligned}
b_h &= f_1\left(P_{\bullet/\bullet\bullet}, P_{\bullet\bullet}, b_{\bullet}; t_{\bullet\bullet\bullet}\right) \\
P_{h/vi} &= f_2\left(P_{\bullet/\bullet i}, P_{\bullet i}, b_{\bullet}; t_{\bullet vi}\right) \\
P_{vi} &= f_3\left(P_{\bullet/\bullet\bullet}, P_{\bullet\bullet}, b_{\bullet}, \gamma_{\bullet}; t_{\bullet\bullet\bullet}\right) \\
\gamma_i &= f_4\left(P_{\bullet/\bullet i}, P_{\bullet i}, b_{\bullet}, \gamma_{\bullet}; t_{\bullet\bullet\bullet}, R^{\bullet}_{\bullet}\right)
\end{aligned}
\qquad \forall hvi \qquad \text{(B-1)}
$$

Las ecuaciones serán explicitadas más adelante según sean ocupadas. Sin embargo, el lector puede encontrarlas consultando el capítulo IV del texto principal o el Anexo A.

La siguiente definición, enunciada también en el texto principal es útil para lo que sigue:

Definición B.1: Equilibrio RB&SM.

a) Se dice que la tupla ($b_{\cdot}, P_{\cdot/\cdot\cdot}, P_{\cdot\cdot}, \gamma_{\cdot}, b$; $t_{\cdot\cdot\cdot}$, $R^{\cdot}_{\cdot}$) es un equilibrio RB&SM si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

1) $b_{\cdot} \in \Re^{|h|}$

2) $P_{\cdot/\cdot\cdot} \in X^1 = \left\{x \in \Re^{hv} / x_{hv} \geq 0 \wedge \sum_h x_{hv} = 1 \;\forall v\right\}$

3) $P_{\cdot\cdot} \in X^2 = \left\{x \in \Re^{vi} / x_{vi} \geq 0 \wedge \sum_{vi} x_{vi} = 1\right\}$

4) $\gamma_{\cdot} \in \Re^{|i|}$ es no negativo

5) $t_{\cdot\cdot\cdot} \in M_{|h|x|vi|}(\Re)$

6) $R^{\cdot}_{\cdot} \in \Re_{|k|x|i|}$,

7) La tupla ($b_{\cdot}, P_{\cdot/\cdot\cdot}, P_{\cdot\cdot}, \gamma_{\cdot}$; $t_{\cdot\cdot\cdot}$, $R^{\cdot}_{\cdot}$) satisface el sistema de punto fijo (B-1)

8) $b \in \Re$ satisface (A-17)

b) Se dice además que la tupla ($b_{\cdot}, P_{\cdot/\cdot\cdot}, P_{\cdot\cdot}, \gamma_{\cdot}, b$; $t_{\cdot\cdot\cdot}$, $R^{\cdot}_{\cdot}$) es un equilibrio RB&SM regulado si y sólo si es un equilibrio RB&SM y además existe *i* tal que $\gamma_i>0$.

c) Análogamente, se dice que la tupla $(b_{\cdot},P_{\cdot/\cdot\cdot},P_{\cdot\cdot},\gamma_{\cdot},b\ ;t_{\cdot\cdot\cdot},R^{\cdot}_{\cdot})$ es un equilibrio RB&SM no regulado si y sólo si es un equilibrio RB&SM y además para todo *i* se tiene que $\gamma_i=0$. En este último caso, por simplicidad se denota al equilibrio no regulado por $(b_{\cdot},P_{\cdot/\cdot\cdot},P_{\cdot\cdot},,b\ ;t_{\cdot\cdot\cdot})$

Como se observa de la definición anterior, RB&SM es un modelo que recibe subsidios *t* y un conjunto de regulaciones *R* como parámetros para el cálculo del equilibrio asociado. Un caso no regulado particular ocurre cuando $R=\emptyset$, esto es un caso no regulado. En lo que sigue se considera este caso, esto es, un par de planificación $(t,\emptyset)$ fijo a menos que se explicite lo contrario.

B.1 Existencia de soluciones para RB&SM.

La pregunta sobre la existencia de soluciones de un sistema de punto fijo, es una pregunta difícil de responder. Los teoremas de punto fijo de Brouwer para funciones continuas, y de Tarski para funciones monótonas, entregan condiciones suficientes para la existencia. A continuación se enuncian una versión de estos teoremas que será utilizada para demostrar las propiedades de existencia que siguen.

Teorema B. Teorema de Brouwer.

Toda función continua $f:X\rightarrow X$, definida desde un subconjunto no vacío, convexo y compacto *X* de $\Re^n$ en si mismo, tiene un punto fijo $f(x)=x$ en X.

Demostración.

Ver Zeidler (1986) pp. 51.

Teorema B.2. Teorema de Tarski.

El conjunto de puntos fijos de una función monótona creciente de un latticce completo en si mismo es no vacío.

Demostración.

Ver Echeñique (2005).

En lo que sigue se analizan uno a uno los puntos fijos de los distintos subsistemas: de demanda, de oferta y de equilibrio, para terminar con el sistema global de RB&SM.

Punto fijo de demanda.

Fijando las demás variables en un valor dado, la función de demanda se puede escribir:

$$f_{hvi}(P_{\bullet/\bullet i}) = \frac{H_h \exp\left(\mu B_{hvi}\left[P_{\bullet/\bullet i}\right]\right)}{\sum_g Hg \exp\left(\mu B_{gvi}\left[P_{\bullet/\bullet i}\right]\right)} \quad \forall hv \forall i \tag{B-2}$$

que corresponden a *i* sistemas de ecuaciones de punto fijo. Se considera uno de estos sistemas y la función vectorial f_i asociada definida f_i:X→X donde X $\subseteq \Re^{hv}$, está definido por $X = \left\{x \in \Re^{hv} / x_{hv} \geq 0 \wedge \sum_h x_{hv} = 1 \ \forall v\right\}$.

Aplicando el Teorema de Brower se tiene para cada zona *i* la siguiente propiedad:

Propiedad B.1: Existencia de soluciones para el punto fijo de demanda.

Para cada zona *i*, la función f_i de consumo en la zona tiene un punto fijo de la forma $f_i(P_{\cdot/\cdot i})$= $P_{\cdot/\cdot i}$

Demostración:

Dado que f_i es una función continua y X un conjunto no vació, convexo y compacto en $\Re^{hv}$, se cumplen la hipótesis del teorema de Brower y se tiene la propiedad.

□

Punto fijo de oferta.

Fijando las demás variables en un valor dado, la función de oferta se puede escribir:

$$f_{vi}\left(P_{\bullet\bullet}\right) = \frac{\exp\left(\lambda \pi_{vi}\left[P_{\bullet\bullet}\right]\right)}{\sum_{wj} \exp\left(\lambda \pi_{wj}\left[P_{\bullet\bullet}\right]\right)} \tag{B-3}$$

que corresponde a un sistema de ecuaciones de punto fijo. Se considera la función vectorial *f* asociada, definida por *f* :X→X donde X $\subseteq \Re^{vi}$, está definido por $X = \left\{x \in \Re^{vi} / x_{vi} \geq 0 \wedge \sum_{vi} x_{vi} = 1\right\}$.

Aplicando nuevamente el Teorema de Brower se tiene la siguiente propiedad:

Propiedad B.2: Existencia de soluciones para el punto fijo de oferta.

La función *f* de oferta tiene un punto fijo de la forma $f(P_{..}) = P_{..}$

Demostración.

Dado que *f* es una función continua y X un conjunto no vacío, convexo y compacto en $\Re^{vi}$, se cumplen la hipótesis del teorema de Brower y se tiene la propiedad.

□

Punto fijo de Equilibrio.

Fijando las demás variables en un valor dado, la función de equilibrio se puede escribir:

$$f_h(b_\bullet) = -\frac{1}{\mu}\ln\left[\sum_{vi} S \cdot P_{vi} \frac{\exp(\mu(b_{hvi} + t_{hvi}))}{\sum_g H_g \exp(\mu(b_h + b_{hvi} + t_{hvi}))}\right] \quad \forall h \qquad \text{(B-4)}$$

que corresponde un sistema de ecuaciones de punto fijo. Se considera la función vectorial *f* asociada, definida por $f:\Re^{|h|} \rightarrow \Re^{|h|}$.

Propiedad B.3: Existencia de soluciones para el punto fijo de equilibrio.

La función *f* de equilibrio, tiene un punto fijo de la forma $f(b_{.}) = b_{..}$

Demostración.

Sean $M_1 = \inf_{hvi} b_{hvi} + t_{hvi}$ y $M_2 = \sup_{hvi} b_{hvi} + t_{hvi}$ con ambos valores reales por hipótesis. Sea $\alpha \in \Re$ fijo y $k \leq |h|$ el índice de un cluster de agentes cualquiera. Se considera la función $g^{\alpha}: \Re^{|h|-1} \rightarrow \Re^{|h|-1}$ que fija la componente *h* en el valor α y asigna a $z \in \Re^{|h|-1}$ el valor $g^{\alpha}(z) = [f_h(z_1,\ldots,z_{k-1},\alpha,z_{k+1},\ldots,z_{|h|}) - (M_2 - M_1)]_{h \neq k} \in \Re^{|h|-1}$.

Se considera además $M \in \Re$ fijo, tal que $M \geq \left|\alpha - 2(M_2 - M_1) + \frac{1}{\mu}\ln\frac{H_h}{H}\right| > 0$, el intervalo cerrado $K=[-M,M]$ y el conjunto $K^{|h|-1} \subseteq \Re^{|h|-1}$. Se observa que $\alpha \in K$.

Se demuestra que la restricción de g^{α} a $K^{|h|-1}$ es tal que $g^{\alpha}: K^{|h|-1} \rightarrow K^{|h|-1}$. En efecto, se toma $z \in K^{|h|-1}$. Se tiene que $\sum_{vi} S_{vi} = H$ y

$$\frac{\exp(\mu(b_{hvi} + t_{hvi}))}{\sum_{g \neq k} H_g \exp(\mu(z_g + b_{gvi} + t_{gvi})) + H_k \exp(\mu[\alpha + b_{kvi} + t_{kvi}])} \leq \frac{\exp(\mu(M_2 - M_1 - \alpha))}{H_k},$$

por lo que $-M \leq \alpha - 2(M_2 - M_1) + \frac{1}{\mu}\ln\frac{H_k}{H} \leq g^{\alpha}_h(z) \quad \forall h \neq k \quad \forall z \in K^{|h|-1}$.

Además, dado que $M \geq \alpha$ y $\frac{\exp(\mu(b_{hvi}+t_{hvi}))}{\sum_g H_g \exp(\mu(z_g+b_{gvi}+t_{gvi}))} \geq \frac{\exp(\mu(M_1-M_2-M))}{H}$, se tiene también que $g^{\alpha}_h(z) \leq M \quad \forall h \neq k \ \forall z \in K^{|h|-1}$, por lo que $g^{\alpha}(z) \in K^{|h|-1} \ \forall z \in K^{|h|-1}$.

Se mostrará ahora que g^{α} estrictamente monótona creciente. En efecto, sea $z^1<z^2$, esto es, $z^1_i<z^2_i \ \forall i$. Debido que $\sum_{g\neq k} H_g \exp(\mu(z^1_g+b_{gvi}+t_{gvi})) < \sum_{g\neq k} H_g \exp(\mu(z^2_g+b_{gvi}+t_{gvi}))$, se tiene que $g^{\alpha}(z^1)<g^{\alpha}(z^2)$.

Luego, dado que $K^{|h|-1}$ es un lattice completo, se tiene, aplicando el Teorema de Tarski, que existe $z^* \in \Re^{|h|-1}$ tal que $g^{\alpha}(z^*)=z^*$.

Sea $x=(z^*_1+M_2-M_1,\ldots,z^*_{k-1}+M_2-M_1,\alpha,z^*_{k+1}+M_2-M_1,\ldots,z^*_{|h|}+M_2-M_1) \in \Re^{|h|}$. En lo que sigue se demostrará que x es punto fijo de f.

Se observa que $f_h(x)=g^{\alpha}_h(z^*)+M_2-M_1=z^*+M_2-M_1=x_h \ \forall h\neq k$. Luego, por construcción de la función de equilibrio (ver Anexo A), se tendrá que $\sum_{vi} S_{vi}P_{h/vi}=H_h \quad \forall h\neq k$, donde $P_{h/vi}=\frac{H_h \exp(\mu(x_h+b_{hvi}+t_{hvi}))}{\sum_g H_g \exp(\mu(x_g+b_{gvi}+t_{gvi}))}$ con $x_k=\alpha+M_2-M_1$. Como $\sum_{vi} S_{vi}=\sum_h H_h=H$ y $\sum_{g\neq k} P_{g/vi}+P_{k/vi}=1 \ \forall vi$, se tiene que $\sum_{vi} S_{vi}P_{k/vi}=H_k$, y, por lo tanto, despejando α de la igualdad anterior, se tiene que $f_k(x)=\alpha$. Luego, se cumple que $f(x)=x$.

$\square$

Punto fijo Global RB&SM.

No ha sido posible en el período de desarrollo de este trabajo, encontrar condiciones suficientes para la existencia de soluciones para la función global de punto fijo RB&SM, esquemáticamente presentada en (B-1). Sin embargo, la experiencia acumulada de simulaciones permite concluir que existen soluciones para una amplia gama de parámetros de las funciones.

B.2 Unicidad y Convergencia de algoritmos de solución.

La pregunta sobre la unicidad de soluciones de un sistema de punto fijo y la búsqueda de algoritmos convergentes a ella, es una pregunta compleja. El teorema de punto fijo de Banach para funciones contrastantes, entrega condiciones suficientes para la unicidad y entrega un algoritmo convergente para encontrar la solución, independientemente del punto de partida.

En primer lugar se enuncian los dos teoremas utilizados para demostrar las propiedades de convergencia que siguen.

Teorema B.3: Teorema de punto fijo de Banach.

Sea un operador $T : M \subseteq X \to M$ donde *M* es un conjunto cerrado y no vacío, en un espacio métrico completo (*X,d*). Si *T* es contractiva, es decir, existe 0 ≤ *k* ≤ 1 fijo, tal que $d(Tx,Ty) \leq kd(x,y)$ para todo *x,y* ∈ *M*; entonces se tiene que:

a) *Existencia y unicidad*: *T* tiene exactamente un punto fijo *x* sobre *M*.

b) *Convergencia del algoritmo estándar*: La secuencia (x_n) de sucesivas aproximaciones, definida por $x_{n+1} = Tx_n$, converge a la solución *x,* para cualquier elección del punto inicial x_0 en *M*.

c) *Error estimado*: Para todo *n = 0,1,2,...* se tiene:

- Estimación a priori del error: $d(x_n, x) \leq k^n (1-k)^{-1} d(x_0, x_1)$.
- Estimación a posteriori del error: $d(x_{n+1}, x) \leq k^n (1-k)^{-1} d(x_n, x_{n+1})$.

d) *Tasa de convergencia*: Para todo *n = 0,1,2,...* se tiene: $d(x_{n+1}, x) \leq kd(x_n, x)$.

Demostración:

Ver Zeidler (1986) pp 16-18.

□

Teorema B.4. Liptzchitzianidad de funciones continuamente diferenciables.

Toda función *f* continuamente diferenciable, definida en un abierto *A* de $\Re^n$ con valores en $\Re^m$, es Lipschitziana en toda bola abierta $B(a,r) \subset A$, con constante de Lipschitz $L = \max_{x \in B(a,r)} \|Df(x)\|$.

Demostración.

Ver CARTAN 1967 pp. 45, donde se plantea un teorema más general, del cuál este es un corolario directo.

□

En adelante al algoritmo asociado al Teorema de Banach se denomina algoritmo estándar.

Tal como en Martínez y Henríquez (2003), se presentan a continuación condiciones sobre las variables que permiten que se cumplan las hipótesis del teorema, asegurando existencia, unicidad y convergencia para el algoritmo de punto fijo asociado. En su trabajo, ellos estudian la existencia y unicidad de las soluciones unidimensionalmente, concluyendo que depende fuertemente de los parámetros de escala de las distribuciones Gumbel, esto es, del grado de aleatoriedad en las funciones de comportamiento. Esta propiedad es obviamente heredada cuando se estudia la unicidad en el caso más general de los subsistemas completos, pero las condiciones suficientes resultan ser más estrictas.

A continuación se analizan uno a uno los puntos fijos de los distintos subsistemas: de demanda, de oferta y de equilibrio.

Punto fijo de demanda.

La función de demanda corresponde a la ecuación (B-2). Utilizando los teoremas B.3 y B.4, es posible encontrar condiciones suficientes sobre la dispersión que aseguran que cada función f_i sea contractiva. Así, las condiciones del teorema de Banach se satisfacen y, por lo tanto, el algoritmo estándar de punto fijo converge a la solución única.

Propiedad B.4: Condiciones necesarias para la contractilidad del punto fijo de demanda.

Sea una zona *i* fija y una componente de externalidad de la postura lineal en $P_{\cdot/i}$. Entonces, si se cumple alguna de las condiciones siguientes, la función de varias variables f_i es contractiva en todo el dominio:

1) $\frac{1}{\mu} > |h| \max_{gw} \sum_{v} \left(\max_{p} \frac{\partial b_{pvi}}{\partial P_{g/wi}} - \min_{p} \frac{\partial b_{pvi}}{\partial P_{g/wi}} \right)$

2) $\frac{1}{\mu} > \max_{v} \sum_{gw} \left(\max_{p} \frac{\partial b_{pvi}}{\partial P_{g/wi}} - \min_{p} \frac{\partial b_{pvi}}{\partial P_{g/wi}} \right)$

Demostración.

Sea una bola abierta A=B(0,r)$\supseteq$X y la extensión de la función f_i, a f:A$\rightarrow$X. Dado que f es continuamente diferenciable, por el teorema 3 se tiene que es Lipschitziana en A con constante de Lipschitz $L = \max_{x \in A} \left\| J_f(x) \right\|$ donde J_f es el jacobiano de la función *f*. Si L<1 *f* será contractiva en A y, por lo tanto, f_i lo será en X. El jacobiano de *f* es:

$$J_f = \left[\left(\frac{\partial f_{hvi}}{\partial P_{g/wi}} \right) \right]_{hvi \text{ x } gwi}$$

donde

$$\frac{\partial f_{hvi}}{\partial P_{g/wi}} = \mu f_{hvi} \left[\frac{\partial b_{hvi}}{\partial P_{g/wi}} - \sum_p f_{pvi} \frac{\partial b_{pvi}}{\partial P_{g/wi}} \right]$$

Entonces las normas matriciales $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ para el jacobiano resultan respectivamente:

1) $\mu \cdot \max_{gw} \sum_{hv} f_{hvi} \left| \frac{\partial b_{hvi}}{\partial P_{g/wi}} - \sum_p f_{pvi} \frac{\partial b_{pvi}}{\partial P_{g/wi}} \right|$

2) $\mu \cdot \max_{hv} f_{hvi} \sum_{gw} \left| \frac{\partial b_{hvi}}{\partial P_{g/wi}} - \sum_p f_{pvi} \frac{\partial b_{pvi}}{\partial P_{g/wi}} \right|$

donde $f_{hvi} \in (0,1)\ \forall hv$ luego se tiene:

$$\left\| J_f(x) \right\| < \begin{cases} \mu \max_{gw} \sum_{hv} \left| \frac{\partial b_{hvi}}{\partial P_{g/wi}} - \sum_p f_{p/vi} \frac{\partial b_{pvi}}{\partial P_{g/wi}} \right| \\ \mu \max_{hv} \sum_{gw} \left| \frac{\partial b_{hvi}}{\partial P_{g/wi}} - \sum_p f_{p/vi} \frac{\partial b_{pvi}}{\partial P_{g/wi}} \right| \end{cases}$$

donde el lado derecho no depende de la variable, debido a que la componente de externalidad en la postura es lineal. Más aún, se puede escribir:

$$L < \begin{cases} \mu |h| \max_{gw} \sum_v \left(\max_p \frac{\partial b_{pvi}}{\partial P_{g/wi}} - \min_p \frac{\partial b_{pvi}}{\partial P_{g/wi}} \right) \\ \mu \max_v \sum_{gw} \left(\max_p \frac{\partial b_{pvi}}{\partial P_{g/wi}} - \min_p \frac{\partial b_{pvi}}{\partial P_{g/wi}} \right) \end{cases}$$

Para que *f* sea contractiva entonces es suficiente que L<1 y para ello basta que:

$$\frac{1}{\mu} > \begin{cases} |h| \max_{gw} \sum_v \left(\max_p \frac{\partial b_{pvi}}{\partial P_{g/wi}} - \min_p \frac{\partial b_{pvi}}{\partial P_{g/wi}} \right) \\ \max_v \sum_{gw} \left(\max_p \frac{\partial b_{pvi}}{\partial P_{g/wi}} - \min_p \frac{\partial b_{pvi}}{\partial P_{g/wi}} \right) \end{cases}$$

□

Propiedad B.5: Condiciones necesarias para la unicidad y convergencia del algoritmo estándar para el punto fijo de demanda.

Bajo las condiciones de la propiedad B.4, la función de demanda posee un único punto fijo y el algoritmo estándar converge a la solución cualquiera sea el punto de partida.

Demostración.

Bajo alguna de las condiciones de la propiedad B.4, se cumplen las condiciones del Teorema de Banach, por lo que se tiene la unicidad y la convergencia.

□

Luego, en condiciones de dispersión suficientemente alta se asegura la convergencia del punto fijo. Sin embargo, las simulaciones realizadas muestran que en la práctica se obtiene convergencia aún en condiciones menos restrictivas.

Punto fijo de oferta.

La función de oferta corresponde a la ecuación (B-3). Utilizando los teoremas B.3 y B.4, es posible encontrar condiciones suficientes sobre la dispersión que aseguran que la función *f* sea contractiva. Así, las condiciones del teorema de Banach se satisfacen y, por lo tanto, el algoritmo estándar de punto fijo converge a la solución única.

Propiedad B.6: Condiciones necesarias para la contractilidad del punto fijo de oferta.

Si la componente de externalidad de la postura y la función de costos son ambas lineales en $P_{..}$. Entones, si se cumple alguna de las condiciones siguientes, la función de varias variables *f* es contractiva en todo el dominio:

1) $\frac{1}{\lambda} > |vi| \max_{wj}\left(\max_{vi} \frac{\partial \pi_{vi}}{\partial P_{wj}} - \min_{vi} \frac{\partial \pi_{vi}}{\partial P_{wj}} \right)$

2) $\frac{1}{\lambda} > \sum_{wj}\left(\max_{vi} \frac{\partial \pi_{vi}}{\partial P_{wj}} - \min_{vi} \frac{\partial \pi_{vi}}{\partial P_{wj}} \right)$

Demostración.

Esta demostración sigue prácticamente igual a la anterior.

Sea una bola abierta A=B(0,r)⊇X y la extensión de la función f, a f:A→X. Dado que f es continuamente diferenciable, por el teorema 3 se tiene que es Lipschitziana en A con constante de Lipschitz $L = \max_{x \in A} \left\| J_f(x) \right\|$ donde J_f es el jacobiano de la función *f*.

Si L<1 *f* será contractiva en A y, por lo tanto, f_i lo será en X. El jacobiano de *f* es:

$$J_f = \left[\left(\frac{\partial f_{vi}}{\partial S_{wj}} \right) \right]_{vi \times wj}$$

donde

$$\frac{\partial f_{vi}}{\partial S_{wj}} = \lambda f_{vi} \left[\frac{\partial \pi_{vi}}{\partial S_{wj}} - \sum_{v'i'} f_{v'i'} \frac{\partial \pi_{v'i'}}{\partial S_{wj}} \right]$$

Entonces las normas matriciales $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ para el jacobiano resultan respectivamente:

1) $\lambda \cdot \max_{wj} \sum_{vi} f_{vi} \left| \frac{\partial \pi_{vi}}{\partial S_{wj}} - \sum_{v'i'} f_{v'i'} \frac{\partial \pi_{v'i'}}{\partial S_{wj}} \right|$

2) $\lambda \cdot \max_{vi} f_{vi} \sum_{wj} \left| \frac{\partial \pi_{vi}}{\partial S_{wj}} - \sum_{v'i'} f_{v'i'} \frac{\partial \pi_{v'i'}}{\partial S_{wj}} \right|$

donde $f_{vi} \in (0,1)$ $\forall vi$ luego se tiene:

$$\left\| J_f(x) \right\| < \begin{cases} \lambda \max_{wj} \sum_{vi} \left| \frac{\partial \pi_{vi}}{\partial S_{wj}} - \sum_{v'i'} f_{v'i'} \frac{\partial \pi_{v'i'}}{\partial S_{wj}} \right| \\ \lambda \max_{vi} \sum_{gwj} \left| \frac{\partial \pi_{vi}}{\partial S_{wj}} - \sum_{v'i'} f_{v'i'} \frac{\partial \pi_{v'i'}}{\partial S_{wj}} \right| \end{cases}$$

donde el lado derecho no depende de la variable, debido a que la componente de externalidad en la postura y el costo son lineales. Más aún, se puede escribir:

$$L < \begin{cases} \lambda |vi| \max_{wj} \left(\max_{vi} \frac{\partial \pi_{vi}}{\partial S_{wj}} - \min_{vi} \frac{\partial \pi_{vi}}{\partial S_{wj}} \right) \\ \lambda \sum_{wj} \left(\max_{vi} \frac{\partial \pi_{vi}}{\partial S_{wj}} - \min_{vi} \frac{\partial \pi_{vi}}{\partial S_{wj}} \right) \end{cases}$$

Para que *f* sea contractiva entonces es suficiente que L<1 y para ello basta que:

$$\frac{1}{\lambda} > \begin{cases} |vi| \max_{wj} \left(\max_{vi} \frac{\partial \pi_{vi}}{\partial S_{wj}} - \min_{vi} \frac{\partial \pi_{vi}}{\partial S_{wj}} \right) \\ \sum_{wj} \left(\max_{vi} \frac{\partial \pi_{vi}}{\partial S_{wj}} - \min_{vi} \frac{\partial \pi_{vi}}{\partial S_{wj}} \right) \end{cases}$$

□

Propiedad B.7: Condiciones necesarias para la unicidad y convergencia del algoritmo estándar para el punto fijo de oferta.

Bajo las condiciones de la propiedad B.6, la función de oferta posee un único punto fijo y el algoritmo estándar converge a la solución cualquiera sea el punto de partida.

Demostración.

Bajo alguna de las condiciones de la propiedad B.6, se cumplen las condiciones del Teorema de Banach, por lo que se tienen la unicidad y la convergencia.

□

Nuevamente en condiciones de dispersión suficientemente alta se asegura la convergencia del punto fijo. Sin embargo, las simulaciones realizadas muestran que en la práctica se obtiene convergencia aún en condiciones menos restrictivas, e incluso se ha obtenido convergencia para funciones de costos no lineales.

Punto fijo de Equilibrio.

La función de equilibrio fue presentada en la ecuación (B-4). A continuación se demuestra una serie de propiedades para esta función. Cabe destacar que aunque el punto fijo no resulta con solución única, es posible mostrar una propiedad de unicidad en un sentido levemente distinto.

Propiedad B.8. Unicidad y convergencia del algoritmo estándar para la función de equilibrio restringida en una dimensión.

La función $g^{\alpha}:\Re^{|h|-1}\rightarrow\Re^{|h|-1}$ que se obtiene de fijar una de las componentes de la función de equilibrio *f* en el valor α, tiene un único punto fijo y el algoritmo estándar converge a la solución desde cualquier punto de partida.

Demostración.

Sean $M_1 = \inf_{hvi} b_{hvi} + t_{hvi}$ y $M_2 = \sup_{hvi} b_{hvi} + t_{hvi}$ con ambos valores reales por hipótesis. Sea $\alpha\in\Re$ fijo y $k\leq|h|$ el índice de un cluster de agentes cualquiera. Sea la función $g^{\alpha}:\Re^{|h|-1}\rightarrow\Re^{|h|-1}$ que fija la componente *h* en el valor α y asigna a $z\in\Re^{|h|-1}$ el valor $g^{\alpha}(z)=[f_h(z_1,\ldots,z_{k-1},\alpha,z_{k+1},\ldots,z_{|h|})-(M_2-M_1)]_{h\neq k}\in\Re^{|h|-1}$.

Sea además $M\in\Re$ fijo, tal que $M \geq \left|\alpha - 2(M_2 - M_1) + \frac{1}{\mu}\ln\frac{H_h}{H}\right|$ >0, el intervalo cerrado K=[-M,M] y el conjunto $K^{|h|-1}\subseteq\Re^{|h|-1}$. Se observa que $\alpha\in K$.

La función g_α es continuamente diferenciable y, por el teorema 3, es Liptschitziana en cualquier bola abierta A de $\Re^{|h|-1}$ que contenga a $\mathrm{K}^{|h|-1}$, con constante de Lipschitz $L = \max_{z \in A} \|J_g(z)\|$ donde J_g es el jacobiano de la función g_α, que resulta:

$$J_g = \left[\left(\frac{\partial g_{\alpha h}}{\partial b_p}\right)\right]_{|h|-1 \times |p|-1}$$

donde

$$\frac{\partial g_{\alpha h}}{\partial b_p} = \sum_{vi} \frac{S_{vi} \exp(\mu(B_{hvi} - r_{vi}))}{\sum_{wj} S_{wj} \exp(\mu(B_{hwj} - r_{wj}))} \frac{H_p \exp(\mu B_{pvi})}{\sum_g H_g \exp(\mu B_{gvi})}$$

Entonces la norma matricial $||\cdot||_\infty$ para el jacobiano resulta:

$$\begin{aligned}\|J_g\| &= \max_{h \neq 1} \sum_{p \neq 1} \sum_{vi} \frac{S_{vi} \exp(\mu(B_{hvi} - r_{vi}))}{\sum_{wj} S_{wj} \exp(\mu(B_{hwj} - r_{wj}))} \frac{H_p \exp(\mu B_{pvi})}{\sum_g H_g \exp(\mu B_{gvi})} \\ &= \max_{h \neq 1} \sum_{vi} \frac{S_{vi} \exp(\mu(B_{hvi} - r_{vi}))}{\sum_{wj} S_{wj} \exp(\mu(B_{hwj} - r_{wj}))} \left(1 - \frac{H_1 \exp(\mu B_{1vi})}{\sum_g H_g \exp(\mu B_{gvi})}\right) \\ &< 1\end{aligned}$$

pues $\frac{H_1 \exp(\mu B_{1vi})}{\sum_g H_g \exp(\mu B_{gvi})} > 0$ debido a que B_{hvi} es acotado en A $\forall hvi$.

Por lo tanto, g_α es contractiva en A. Por otro lado, dado que $\alpha \in$K, se tiene que la restricción de g_α a $\mathrm{K}^{|h|-1}$ cumple $g_\alpha:\mathrm{K}^{|h|-1} \rightarrow \mathrm{K}^{|h|-1}$ (Ver demostración de propiedad B.3). Luego, como $\mathrm{K}^{|h|-1} \subseteq$A es cerrado, g_α cumple con las hipótesis del teorema de banach y, por lo tanto, se tiene la propiedad.

□

La unicidad demostrada y la propiedad anterior, nos permiten descubrir la siguiente condición necesaria y suficiente para la existencia de la solución de punto fijo de equilibrio.

Propiedad B.9. Condición necesaria y suficiente para la existencia de soluciones del punto fijo de equilibrio.

La función *f* tiene punto fijo si y sólo si $\sum_{vi} S_{vi} = \sum_h H_h$.

Demostración.

La demostración de la propiedad de existencia B.3, asegura que si $\sum_{vi} S_{vi} = \sum_{h} H_{h}$ entonces existe un punto fijo para f.

Sea $\sum_{vi} S_{vi} > \sum_{h} H_{h}$, $\alpha \in \Re$ y $z \in \Re^{|h|-1}$ un punto fijo de la función g^{α} definida en la propiedad B.8, donde $k \leq |h|$ es la componente que se fija. Se tiene que $\sum_{vi} S_{vi} P_{h/vi} = H_{h}$ $\forall h \neq k$, y por lo tanto, $\sum_{vi} S_{vi} P_{k/vi} > H_{k}$, lo que significa que, a pesar que $f_h(z)=z$ $\forall h \neq k$, se tiene $f_1(z)>\alpha$, por lo que $x=(z_1,\ldots,z_{k-1},\alpha,z_{k+1},\ldots,z_{|h|})$ no es punto fijo de f.

Si $y \in \Re^{|h|}$ es punto fijo de f, entonces si Se define $\alpha=f_k(x) \in \Re$ resulta que $[y_h]_{h \neq k}$ es punto fijo de g^{α}. Luego, por la unicidad de la propiedad B.8, se debe tener que $y_h = z_h$ $\forall h \neq k$, lo que implica $y=f(y)=x$, que es una contradicción pues x no es punto fijo de *f.* Luego, *f* no tiene punto fijo.

De manera análoga se demuestra que si $\sum_{vi} S_{vi} < \sum_{h} H_{h}$ entonces f no tiene punto fijo, lo que concluye la demostración.

□

Si bien la función definida en la propiedad B.8 tiene solución única, la función *f* no la tiene, como demuestra en la siguiente propiedad.

Propiedad B.10: Existencia de una línea recta de soluciones del punto fijo de equilibrio.

Si *f* posee una solución de punto fijo entonces posee infinitas soluciones sobre una recta.

Demostración.

Sea x una solución de punto fijo, es decir, tal que $f(x)=x$. Es fácil ver que $x+b$ también, lo es para cualquier *b* vector constante en $\Re^h$, es decir, se tiene $f(x+b)=x+b$. Esto prueba que si *f* tiene un punto fijo entonces tiene infinitos puntos fijos sobre una recta.

□

La siguiente propiedad muestra que aunque *f* tenga infinitas soluciones sobre una recta, existe una y sólo una recta con tal propiedad.

Propiedad B.11. Unicidad de la línea recta de soluciones del punto fijo de equilibrio.

Todos los puntos fijos de *f* se encuentran sobre una única recta.

Demostración.

Sean x e y dos soluciones de punto fijo para *f*. Sea k≤|h| y $f_k(x)=\alpha\in\Re$ y $f_k(x)=\beta\in\Re$, junto a las funciones g^{α} y g^{β} definida como en la propiedad B.8, donde k es el índice de la componente fijada. Se tiene que $[x_h]_{h\neq k}\in\Re^{|h|-1}$ es punto fijo de g^{α}, que por la propiedad B.8 es único. A la vez, el único punto fijo de g^{β} es $[y_h]_{h\neq k}\in\Re^{|h|-1}$.

Por otro lado, sea $\gamma\in\Re$, si $z\in\Re^{|h|-1}$ es punto fijo de g^{α} se tiene que $z+\gamma = g_{\alpha}(z)+\gamma = g_{\alpha+\gamma}(z+\gamma)$, por lo que $w = z+\gamma$ es punto fijo de $g^{\alpha+\gamma}$.

Luego, tomando $\gamma=\beta-\alpha$, se tiene que $x=y+\gamma$, esto es, x e y pertenecen a una misma recta en $\Re^{|h|}$.

□

Es importante destacar que, a pesar de que no se demuestra convergencia para la solución de punto fijo de *f,* en las simulaciones realizadas se encontró que converge de forma muy eficiente a pesar de no ser contractivo (resulta no expansivo, es decir con constante de Liptschitz igual a 1).

Punto fijo Global RB&SM.

No ha sido posible en el período de desarrollo de este trabajo, encontrar condiciones suficientes para la existencia, ni para la convergencia de algún algoritmo para la función global de punto fijo RB&SM, esquemáticamente presentada en (B-1).

Sin embargo, la experiencia acumulada de simulaciones permite concluir que existen soluciones pero no se tiene unicidad. En efecto, la siguiente propiedad muestra este hecho.

Propiedad B.12: Existencia de una línea recta de soluciones del punto fijo global.

Si *RB&SM* posee una solución de punto fijo entonces posee infinitas soluciones sobre una recta.

Demostración.

Sea ($b_{\cdot}$,$P_{\cdot/\cdot\cdot}$,$P_{\cdot\cdot}$,b ;$t_{\cdots}$,$R^{\cdot}_{\cdot}$) una solución de RB&SM, entonces por la propiedad B.5, la tupla ($b_{\cdot}+\alpha$,$P_{\cdot/\cdot\cdot}$,$P_{\cdot\cdot}$,$b-\alpha$;$t_{\cdots}$,$R^{\cdot}_{\cdot}$) también es solución de RB&SM. Esto prueba que si *RB&SM* tiene un punto fijo entonces tiene infinitos puntos fijos sobre una recta.

□

Notar que en la propiedad anterior existe una transferencia entre las componentes de utilidad b_h y la constante b que define el nivel de rentas en la ciudad. Sin embargo, b_h+b es idéntica en todos los equilibrios y, por lo tanto, todos ellos entregan la misma localización (probabilidades LMN de oferta y demanda). A pesar de esto el equilibrio RB&SM podría tener más de una línea recta con soluciones, pues no está probado que exista una única localización de equilibrio.

Es importante destacar que los algoritmos más eficientes utilizados hasta ahora basan su funcionamiento en el cálculo de los puntos fijos parciales de manera secuencial. Esto asegura que las propiedades aquí presentadas son un aporte al modelo RB&SM y al cálculo de los equilibrios.

B.3 Otras propiedades de RB&SM.

En esta sección se presentan otras propiedades enunciadas en el texto y están asociadas con equilibrios RB&SM regulados.

Propiedad B.13: Suficiencia de los equilibrios no regulados.

Toda localización de equilibrio RB&SM regulado puede ser alcanzado vía impuestos (subsidios) con un equilibrio RB&SM no regulado.

Demostración.

Sea *e*=$\left(b_{\bullet},P_{\bullet/\bullet\bullet},P_{\bullet\bullet},\gamma_{\bullet},b;t_{\bullet\bullet\bullet},R_{\bullet}^{\bullet}\right)$ un equilibrio RB&SM regulado. Este equilibrio es exactamente el mismo, en términos de localización, que el asociado al equilibrio no regulado caracterizado por $\left(b_{\bullet},P_{\bullet/\bullet\bullet},P_{\bullet\bullet},b;t_{\bullet\bullet\bullet}-\gamma_{\bullet}\right)$.

□

Propiedad B.14. Invarianza de la localización ante traslaciones homogéneas de los subsidios.

La traslación homogénea de subsidios no afecta la localización de RB&SM.

Demostración:

Sea *e*=$\left(b_{\bullet},P_{\bullet/\bullet\bullet},P_{\bullet\bullet},\gamma_{\bullet},b;t_{\bullet\bullet\bullet},R_{\bullet}^{\bullet}\right)$ un equilibrio RB&SM regulado o no. Este equilibrio es exactamente el mismo, en términos de localización, que el asociado al equilibrio regulado caracterizado por $\left(b_{\bullet},P_{\bullet/\bullet\bullet},P_{\bullet\bullet},\gamma_{\bullet},b-a;t_{\bullet\bullet\bullet}+a,R_{\bullet}^{\bullet}\right)$ donde *a* es un subsidio homogéneo (idéntico para todos los agentes y localizaciones).

□

Propiedad B.15. Invarianza de la localización ante transferencias entre utilidad y subsidios.

Una localización RB&SM se puede obtener para cualquier nivel de utilidad con la inclusión de subsidios adecuados.

Demostración:

La postura está compuesta de la suma entre b_h y el subsidio, luego, como una transferencia de uno a otro no modifica esta suma, las posturas permanecen invariantes. Esto significa que la localización también lo hace.

□

Propiedad B.16: Subsidios Inductores de equilibrio RB&SM

Dados $\varepsilon>0$ y niveles de utilidad b_h cualquiera, toda localización H_{hvi} factible es alcanzable a través del modelo RB&SM, con utilidades b_h dado y para el nivel de aproximación ε, con la inclusión de los subsidios $t_{hvi}+t_{vi}$ definidos por:

$$t_{hvi}=\begin{cases}\frac{1}{\mu}\ln\left(\frac{H_{hvi}}{H_h S_{vi}}\right)-B_{hvi}\left(\frac{H_{hvi}}{S_{vi}},S_{vi}\right)-b_h & S_{vi}>0\wedge H_{hvi}>0\\ \frac{1}{\mu}\ln\left(\frac{\varepsilon}{H_h S_{vi}}\right)-B_{hvi}\left(\frac{H_{hvi}}{S_{vi}},S_{vi}\right)-b_h & S_{vi}>0\wedge H_{hvi}=0\\ 0 & S_{vi}=0\end{cases}\quad\forall hvi$$

$$t_{vi}=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{S_{vi}}{H}\right)-\left[r_{vi}\left(H_{hvi},S_{vi},t_{hvi},b_h\right)-c_{vi}\left(S_{\bullet\bullet}\right)\right] & S_{vi}>0\\ \frac{1}{\lambda}\ln(\delta)-\left[r_{vi}\left(H_{hvi},S_{vi},t_{hvi},b_h\right)-c_{vi}\left(S_{\bullet\bullet}\right)\right] & S_{vi}=0\end{cases}\quad\forall vi$$

Demostración:

Se considera $S_{vi}=\sum_h H_{hvi}$, $H=\sum_{hvi} H_{hvi}$, $\delta=\varepsilon/H$ y el primer conjunto de subsidios t_{hvi} enunciado. Este subsidio es solución del punto fijo de demanda de RB&SM para el valor deseado de b_h.

Si a continuación se agrega el siguiente conjunto de subsidios que se enuncia, esta vez a la oferta, se soluciona el punto fijo de oferta de RB&SM, reproduciendo la localización y oferta buscadas para todos los casos de localización y oferta no nulos, y se obtiene $H_{hvi}=\varepsilon$ y $S_{vi}=\varepsilon$ en los casos respectivamente nulos.

□

Propiedad B.17: Unicidad de los subsidios inductores de equilibrio RB&SM.

Dados niveles de utilidad b_h, los subsidios indicados en la propiedad B.15 son únicos salvo traslaciones homogéneas.

Demostración:

Sea H_{hvi}, $\sum_h H_{hvi} = S_{vi}$ la localización que se desea alcanzar, $t^1_{hvi} = t_{hvi} + t_{vi}$ los subsidios de la propiedad B.16 y t^2_{hvi} otro conjunto de subsidios que también induce la localización deseada. Si se define $P_{h/vi} = H_{hvi}/S_{vi}$, es fácil ver que el único conjunto de subsidios que impone este valor de probabilidad como resultado del LMN de demanda de RB&SM, para las utilidades prefijadas, es de la forma $t_{hvi} + \lambda_{vi}$. Sea también $P_{vi} = S_{vi}/S$, se comprueba de manera sencilla que el único conjunto de subsidios que impone, además de lo anterior, este valor de probabilidad como resultado del LMN de oferta de RB&SM, es de la forma $t_{hvi} + \lambda_{vi} = t_{hvi} + t_{vi} + \lambda$ donde λ es un valor cualquiera.

Luego, como t^2_{hvi} induce la misma localización que $t^1_{hvi} = t_{hvi} + t_{vi}$, se concluye que $t^2_{hvi} = t^1_{hvi} + \lambda$.

□

Anexo C.

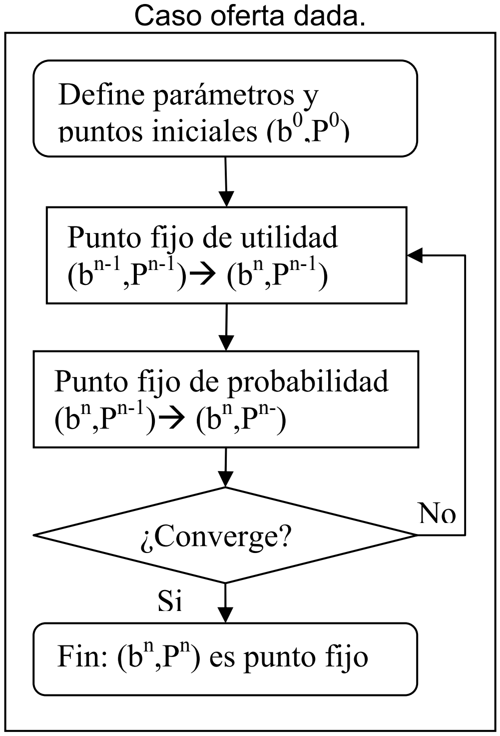
Esquemas de algoritmos de solución.

C.1 Algoritmos para el equilibrio RB&SM.

El equilibrio RB&SM corresponde a una solución de un sistema de punto fijo. Su versión más compleja posee cuatro variables que deben ser resueltas simultáneamente: la utilidad *b*, la probabilidad de localización *P,* la oferta *S* y en el caso regulado los precios sombra de las regulaciones activas γ.

Esquemáticamente los algoritmos utilizados para resolver el equilibrio se presentan en las siguientes figuras. La primera muestra el algoritmo para el caso con oferta prefijada en que dado *S*, el problema se reduce a encontrar soluciones en *P* y *b*.

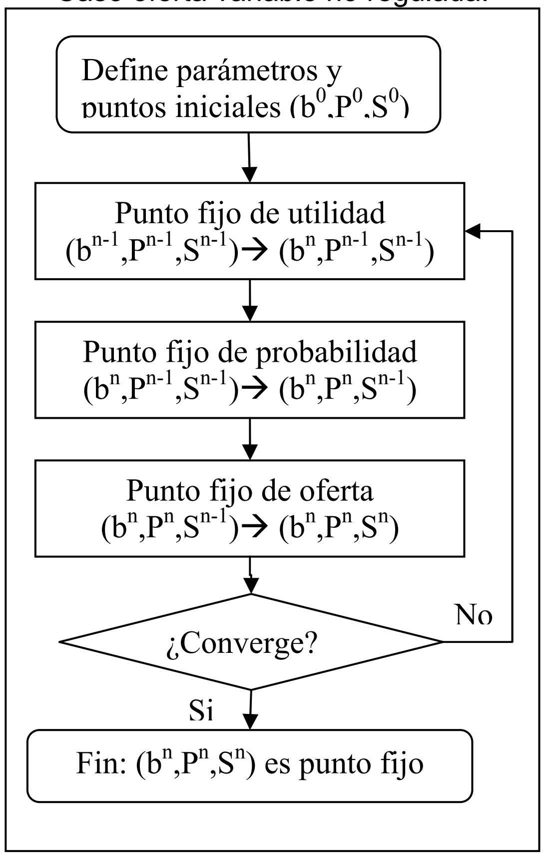
Figura C.1
Esquema de algoritmo de solución para el equilibrio RB&SM
Caso oferta dada.



Fuente: Elaboración propia.

La siguiente figura muestra el esquema del algoritmo para resolver el siguiente caso más complejo en que se deben además de *P* y *b*, la oferta *S* sin regulaciones.

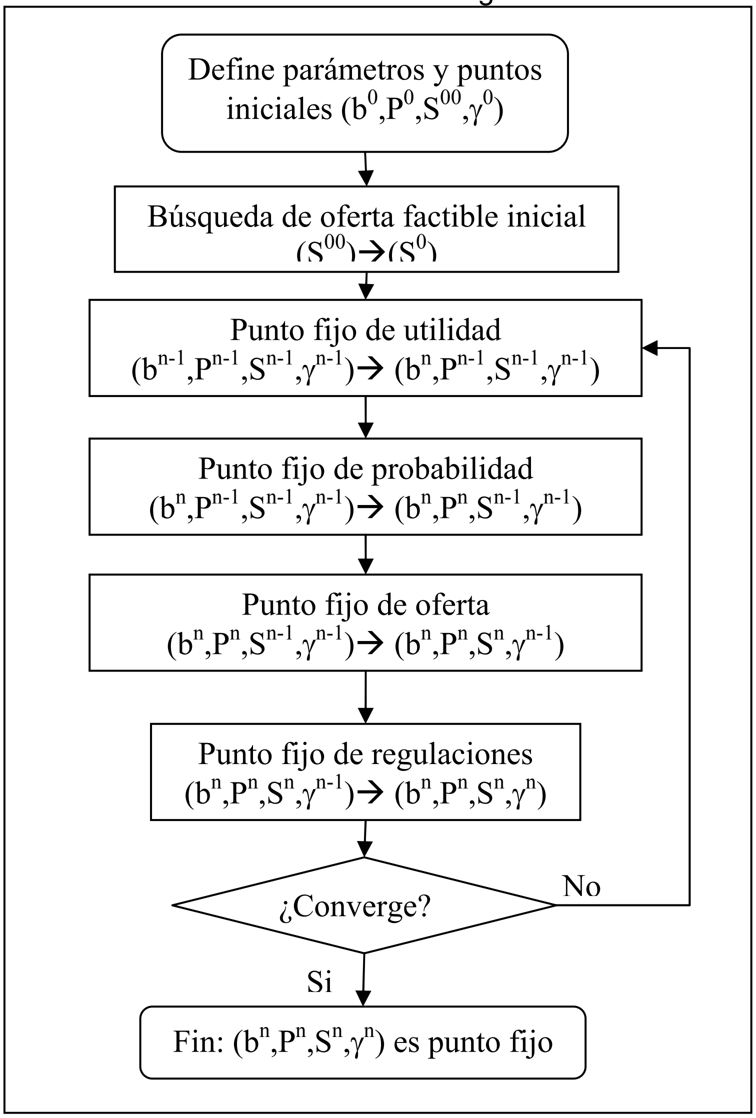
Figura C.2
Esquema de algoritmo de solución para el equilibrio RB&SM
Caso oferta variable no regulada.



Fuente: Elaboración propia.

Finalmente, la figura C.3 muestra el algoritmo de solución para el caso más complejo de oferta variable regulada. Este caso requiere la búsqueda una oferta inicial factible, y dado que las restricciones de RB&SM en oferta son únicamente lineales, se aplicar en esta etapa la Fase I estándar del modelo SIMPLEX para encontrarla.

Figura C.3
Esquema de algoritmo de solución para el equilibrio RB&SM
Caso oferta variable regulada.



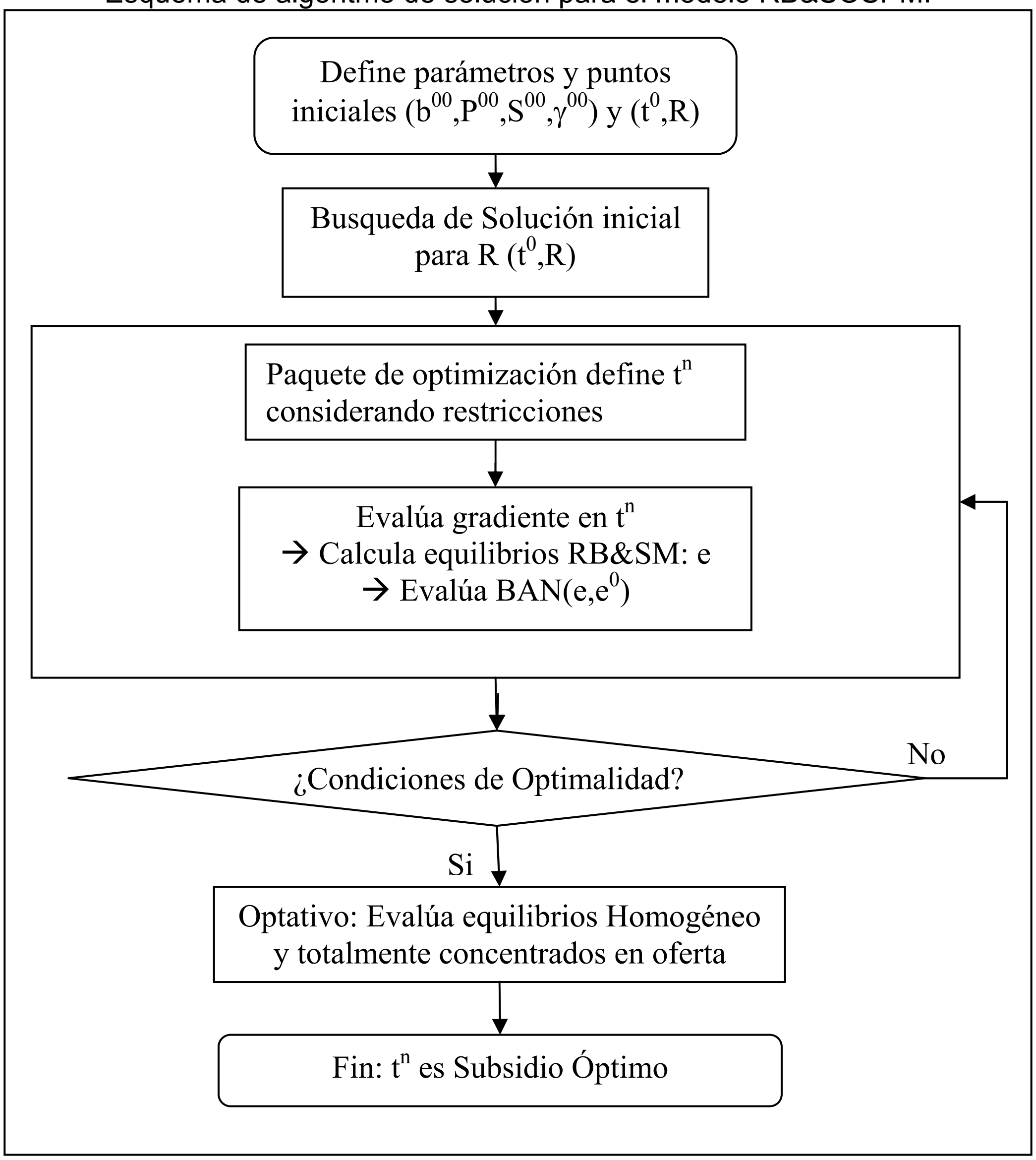
Fuente: Elaboración propia.

C.2 Algoritmo para el modelo RB&SOSPM.

Esquemáticamente el algoritmo utilizado para resolver el modelo RB&SOSPM se presenta en la siguiente figura.

El algoritmo optimiza el subsidio t dado un conjunto de regulaciones *R* y resuelve en cada paso de la optimización un equilibrio RB&SM, lo que le aporta gran complejidad.

Figura C.4
Esquema de algoritmo de solución para el modelo RB&SOSPM.



Fuente: Elaboración propia.

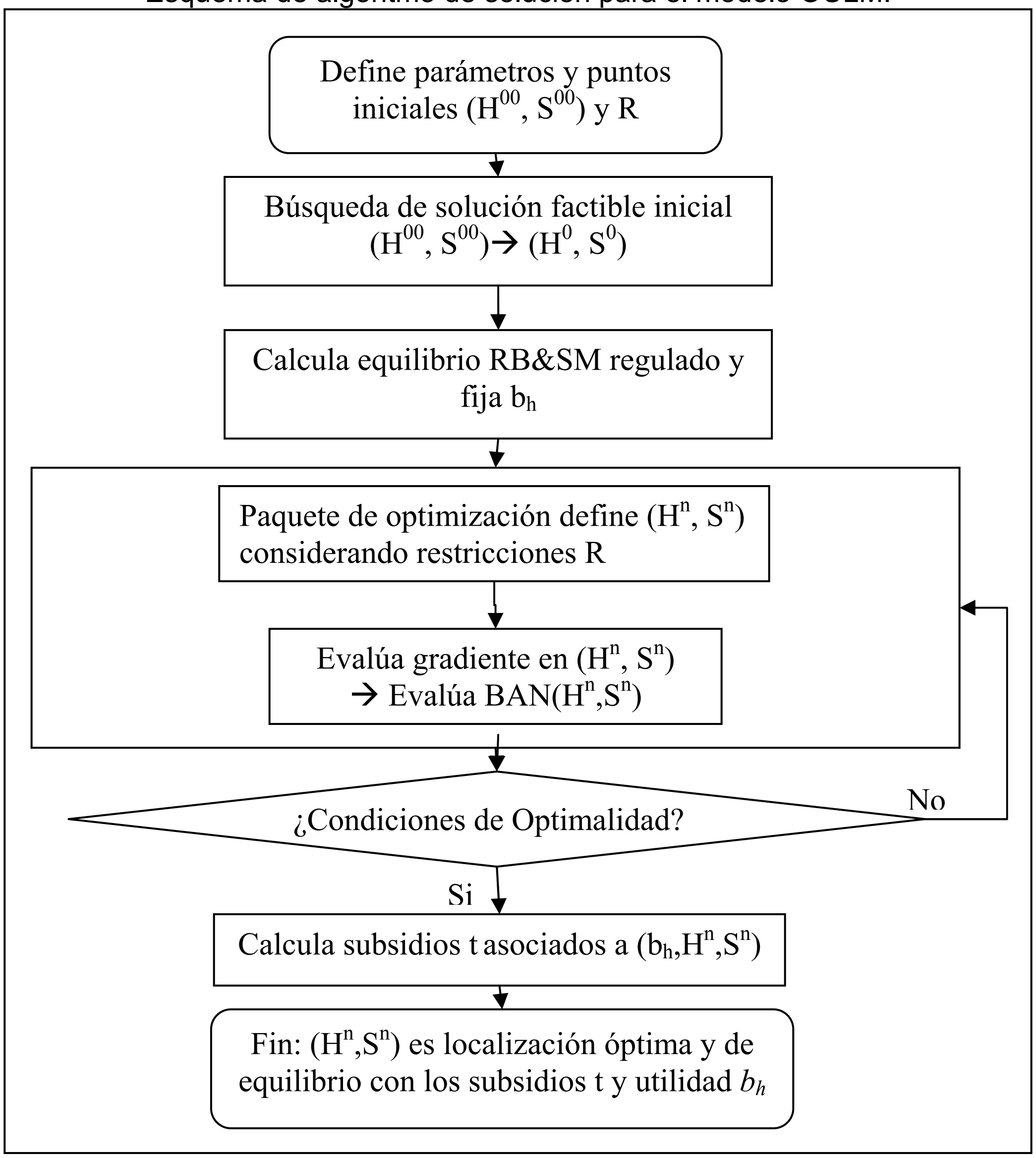
El último paso es optativo pues permite detectar cuándo los óptimos son completamente concentrados en oferta. En efecto, dado que las funciones LMN que definen el sistema de punto fijo para el equilibrio RB&SM no pueden producir concentración del tipo “Todo-Nada” es necesario evaluar fuera del algoritmo estos casos cuando así se requiere.

Cabe comentar que para el caso de oferta variable se utiliza el equilibrio no regulado, debido a que en RB&SOSPM toda la información de restricciones se ha traspasado al problema de optimización en subsidios. La única excepción a este hecho se pude aplicar al equilibrio inicial cuando así se desea.

C.3 Algoritmo para el modelo OULM.

El Modelo de Localización Urbana Óptima (OULM) encuentra la localización *H* y la oferta *S* que maximizan el beneficio agregado, sujeto a un conjunto de regulaciones exógenas *R.* Esquemáticamente el algoritmo utilizado para resolver se presenta en la siguiente figura.

Figura C.5
Esquema de algoritmo de solución para el modelo OULM.



Fuente: Elaboración propia.

Notar que b_h puede ser prefijado en cualquier valor, pero el esquema presenta un valor que resulta razonable y corresponde a aquel asociado al equilibrio RB&SM no subsidiado.