



**UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL**

**PROGRAMACION DINAMICA ESTOCASTICA EN UN PROBLEMA
DE PLANIFICACION MINERA**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN GESTION DE
OPERACIONES

MEMORIA PARA OPTAR AL TITULO DE INGENIERO CIVIL
INDUSTRIAL

MARIO EDUARDO GUAJARDO ANDRADES

PROFESOR GUÍA:
SR. RAFAEL EPSTEIN NUMHAUSER

MIEMBROS DE LA COMISION:
SR. ANDRES WEINTRAUB POHORILLE
SR. GUILLERMO ALFREDO DURAN
SR. FELIPE AZOCAR HIDALGO

SANTIAGO DE CHILE
2007



**UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL**

**PROGRAMACION DINAMICA ESTOCASTICA EN UN PROBLEMA
DE PLANIFICACION MINERA**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN GESTION DE
OPERACIONES

MEMORIA PARA OPTAR AL TITULO DE INGENIERO CIVIL
INDUSTRIAL

MARIO EDUARDO GUAJARDO ANDRADES

PROFESOR GUÍA:
SR. RAFAEL EPSTEIN NUMHAUSER

MIEMBROS DE LA COMISION:
SR. ANDRES WEINTRAUB POHORILLE
SR. GUILLERMO ALFREDO DURAN
SR. FELIPE AZOCAR HIDALGO

SANTIAGO DE CHILE
OCTUBRE, 2007

RESUMEN DE TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN GESTIÓN DE OPERACIONES Y AL
TÍTULO DE INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL
POR: MARIO EDUARDO GUAJARDO ANDRADES
FECHA: 09/08/2007
PROFESOR GUÍA: RAFAEL EPSTEIN NUMHAUSER

“PROGRAMACIÓN DINÁMICA ESTOCÁSTICA EN UN PROBLEMA DE PLANIFICACIÓN MINERA”

Se propone un modelo y una metodología de resolución para abordar un problema de planificación minera de largo plazo considerando la estocasticidad del precio del mineral. La mina es modelada como un conjunto de bloques, cada uno caracterizado por su ley promedio, tonelaje y ubicación relativa. El precio del mineral es modelado según un proceso estocástico a tiempo continuo de uso frecuente en la literatura. El planificador decide el instante en que se debe comenzar la extracción de cada bloque, considerando la aleatoriedad del precio y las relaciones de vecindad entre ellos.

El problema es abordado mediante un modelo de programación dinámica estocástica a tiempo continuo, cuyo valor óptimo es, en general, difícil de calcular. Para ello se discretiza la distribución del proceso estocástico del precio y se formula un problema de programación dinámica estocástica a tiempo discreto, representativo del original, que permite aproximar su valor óptimo.

Esta metodología de carácter numérico es comparada experimentalmente con otro enfoque más analítico de una investigación precedente. Los resultados obtenidos presentan un margen de error bajo para un amplio rango de precios iniciales y, en la mayoría de los casos, la aproximación es más cercana al óptimo que la aproximación propuesta por ese enfoque. Además, la metodología demanda desarrollos matemáticos más sencillos y es más flexible a la incorporación de elementos adicionales. Por ejemplo, permite incorporar fácilmente un costo de mantenimiento para reflejar de mejor forma los costos de la operación minera. También se extiende el modelo incorporando las opciones de abandonar el proyecto y de invertir en capacidad y se estudia experimentalmente el impacto que otorgan al proyecto estas opciones.

Finalmente, se plantea un modelo que integra los cuatro aspectos anteriores: el modelo base, el costo de mantenimiento, la opción de abandono y la opción de invertir en capacidad.

Índice

1. Introducción	1
1.1. Descripción general	2
1.2. Objetivos	3
1.2.1. Objetivo general	3
1.2.2. Objetivos específicos	3
1.3. Metodología	3
1.4. Estructura del documento	4
2. Marco Teórico	5
3. Descripción del Problema y Modelación	7
3.1. Secuencias y timing de extracción	7
3.2. Estocasticidad del precio	9
3.3. Definición del problema y un modelo a tiempo continuo	11
4. Metodología de Resolución	15
4.1. Discretización	15
4.1.1. Estados y probabilidades de transición	16
4.1.2. Beneficio de transición	22
4.2. Modelo a tiempo discreto	23
4.3. Método de programación lineal	24
5. Modelos Particulares y Experiencias Numéricas	27
5.1. Modelo base	27
5.2. Costo de mantenimiento	40
5.3. Opción de abandono	45
5.4. Inversión en capacidad	52
5.5. Modelo integrado	60
6. Conclusiones e Investigación Futura	73
6.1. Conclusiones	73
6.2. Investigación futura	75

A. Fundamentos de Cálculo Estocástico y Demostraciones	81
A.1. Algunos conceptos esenciales	81
A.2. Movimiento Browniano o Proceso de Wiener	81
A.3. Teorema de Existencia y Unicidad	82
A.4. Fórmula de Ito en 1 Dimensión	83
A.5. Resolución de la ecuación diferencial estocástica del movimiento Browniano geométrico	83
A.6. Cálculo del ingreso	85
B. Algoritmo de Generación de Precios y Estados	86
C. Parámetros	88
C.1. Caracterización de bloques	88
C.2. Arcos de vecindad	88
C.3. Distancias	89
C.4. Secuencias	89
C.5. Otros parámetros	89

Índice de figuras

1.1. Evolución del precio del cobre 1987-2006.	1
3.1. Ejemplo de un conjunto de bloques.	8
4.1. Árbol de precios generado.	18
4.2. Ejemplo de una ocurrencia particular.	19
5.1. Valor óptimo F y aproximación FM para la secuencia N1.	33
5.2. Error porcentual de las aproximaciones FL y FM para la secuencia N1.	33
5.3. Valor óptimo F y aproximación FM para la secuencia N2.	34
5.4. Error porcentual de las aproximaciones FL y FM para la secuencia N2.	34
5.5. Valor óptimo F y aproximación FM para la secuencia N3.	35
5.6. Error porcentual de las aproximaciones FL y FM para la secuencia N3.	35
5.7. Valor óptimo F y aproximación FM para la secuencia N4.	36
5.8. Error porcentual de las aproximaciones FL y FM para la secuencia N4.	36
5.9. Valor óptimo F y aproximación FM para la secuencia N5.	37
5.10. Error porcentual de las aproximaciones FL y FM para la secuencia N5.	37
5.11. Valor óptimo F y aproximación FM para la secuencia N6.	38
5.12. Error porcentual de las aproximaciones FL y FM para la secuencia N6.	38
5.13. Valor óptimo F y aproximación FC para la secuencia N1.	41
5.14. Valor óptimo F y aproximación FC para la secuencia N2.	42
5.15. Valor óptimo F y aproximación FC para la secuencia N3.	42
5.16. Valor óptimo F y aproximación FC para la secuencia N4.	43
5.17. Valor óptimo F y aproximación FC para la secuencia N5.	43
5.18. Valor óptimo F y aproximación FC para la secuencia N6.	44
5.19. Diferencia entre FA y FS para la secuencia N1.	49
5.20. Diferencia entre FA y FS para la secuencia N2.	49
5.21. Diferencia entre FA y FS para la secuencia N3.	50
5.22. Diferencia entre FA y FS para la secuencia N4.	50
5.23. Diferencia entre FA y FS para la secuencia N5.	51

ÍNDICE DE FIGURAS

5.24. Diferencia entre FA y FS para la secuencia N6.	51
5.25. Diferencia entre FK y FN para la secuencia N1.	57
5.26. Diferencia entre FK y FN para la secuencia N2.	57
5.27. Diferencia entre FK y FN para la secuencia N3.	58
5.28. Diferencia entre FK y FN para la secuencia N4.	58
5.29. Diferencia entre FK y FN para la secuencia N5.	59
5.30. Diferencia entre FK y FN para la secuencia N6.	59
5.31. Valor aproximado de FI para la secuencia N1.	66
5.32. Valor aproximado de FI para la secuencia N2.	66
5.33. Valor aproximado de FI para la secuencia N3.	67
5.34. Valor aproximado de FI para la secuencia N4.	67
5.35. Valor aproximado de FI para la secuencia N5.	68
5.36. Valor aproximado de FI para la secuencia N6.	68
5.37. Diferencia entre FI y FC para la secuencia N1.	69
5.38. Diferencia entre FI y FC para la secuencia N2.	70
5.39. Diferencia entre FI y FC para la secuencia N3.	70
5.40. Diferencia entre FI y FC para la secuencia N4.	71
5.41. Diferencia entre FI y FC para la secuencia N5.	71
5.42. Diferencia entre FI y FC para la secuencia N6.	72

Índice de tablas

4.1. Ejemplo de generación de precios y probabilidades.	21
5.1. Resultados del modelo base.	32
5.2. Resultados considerando costo de mantenimiento.	41
5.3. Resultados considerando opción de abandono.	48
5.4. Resultados considerando opción de ampliar capacidad.	56
5.5. Resultados del modelo integrado.	65
C.1. Caracterización de la instancia de experimentación.	88
C.2. Relación de vecindad entre bloques de la instancia de experimentación.	88
C.3. Distancia entre los bloques.	89
C.4. Orden de extracción de los bloques en cada secuencia evaluada.	89
C.5. Otros parámetros.	89

Capítulo 1

Introducción

La volatilidad que el precio de commodities como el cobre experimenta en los mercados mundiales, provoca que la toma de decisiones de la planificación minera se dé en un ambiente muy dinámico y de alta incertidumbre. El siguiente gráfico muestra la errante trayectoria del precio nominal del cobre en un tramo de 20 años.

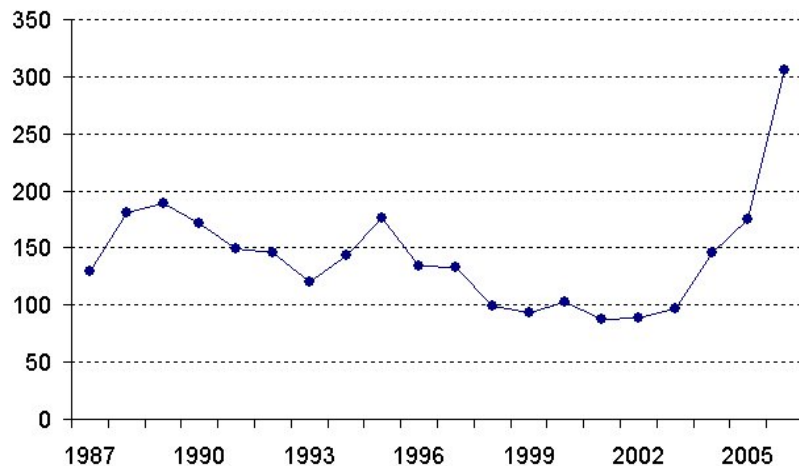


Figura 1.1: Evolución del precio del cobre 1987-2006 (en dólares de 2006, deflactados por el Índice de Precios al Productor de Estados Unidos, [8]).

En este contexto, la modelación estocástica de un problema de planificación minera cobra un rol importante, sobre todo en un país como Chile, principal productor mundial de cobre y cuya industria cuprífera ha mostrado un crecimiento sostenido en los últimos años. Según cifras de Cochilco [8], durante el período 1987-2006 la producción chilena de cobre experimentó un crecimiento a una tasa promedio anual de 7.47%. En particular, la producción chilena de cobre llegó a 5,360.8 miles de TM en 2006, un 0.76% por sobre las 5,320.5 miles de TM producidas en 2005. El favorable precio del metal en los mercados internacionales posibilitó que los ingresos por exportaciones de cobre aumentaran 87.76% con respecto al año 2005, alcanzando los 33,350.6 millones de dólares.

En el plano académico encontramos una amplia gama de trabajos abocados a planificación minera en un ambiente determinístico, varios de ellos de exitosa aplicación. También hay trabajos en un ambiente estocástico, pero en general, éstos yacen en un nivel que privilegia aspectos analíticos por sobre la representatividad de los modelos. La motivación principal de esta tesis es desarrollar una investigación académica que contribuya a acortar un poco esa brecha, aterrizando algunas herramientas que dispone la teoría y condensarlas en un modelo y una metodología de resolución en el contexto de planificación minera de largo plazo.

A continuación se procederá a describir brevemente este proyecto, sus objetivos y la metodología de investigación a utilizar.

1.1. Descripción general

La planificación minera de largo plazo busca aumentar el valor de proyectos mineros en extensos horizontes de evaluación, generalmente desde 10 años hacia arriba, y abarca una serie de aspectos estratégicos sobre la producción. Decisiones referentes al diseño de la secuencia de extracción de una mina, la capacidad de procesamiento y la programación cronológica de la extracción de los distintos espacios físicos de una mina son ejemplos de decisiones de planificación minera de largo plazo. En este trabajo nos enfocaremos principalmente en esta última, a la cual nos referiremos también como “timing” de extracción.

El problema consiste entonces en calcular el valor óptimo de un proyecto de desarrollo minero ante precios aleatorios, cuando el planificador decide el momento en el que cada espacio físico de la mina es explotado. Posteriormente, consideraremos además las opciones de abandono e inversión en capacidad. Si bien el diseño de la secuencia de extracción y otros aspectos constituirán parámetros conocidos del problema, la metodología a desarrollar debe ser capaz de evaluar el desempeño del proyecto bajo distintas secuencias y conjuntos de parámetros.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Formular y resolver en forma aproximada un modelo para un problema de planificación minera considerando la estocasticidad del precio del mineral.

1.2.2. Objetivos específicos

- Modelar un problema de planificación minera incorporando la estocasticidad del precio del mineral.
- Proponer una metodología para resolver en forma aproximada el modelo.
- Estudiar empíricamente el desempeño de la metodología propuesta.

1.3. Metodología

Utilizaremos la metodología clásica de la investigación operativa (ver, por ejemplo, Hillier y Lieberman [17]) que, en un nivel general, contempla el desarrollo de cuatro etapas: formulación del problema, construcción del modelo, solución y validación.

La primera etapa consiste en identificar la problemática en estudio y su entorno, especificar sus objetivos y sus alternativas de decisión. Aspectos como la definición del horizonte de evaluación y del nivel de las decisiones involucradas son parte de esta etapa, que será desarrollada en la primera mitad del Capítulo 3.

La construcción del modelo consiste en formular una representación abstracta de la realidad, generalmente mediante expresiones matemáticas. Esta etapa, que será tratada en la segunda mitad del Capítulo 3, abarca la definición de las variables del problema, sus restricciones y las medidas de efectividad.

La etapa de resolución tiene como fin encontrar la solución del modelo formulado en la etapa anterior. Si el problema es muy complejo, puede ser conveniente construir métodos de aproximación. En particular, nuestro enfoque pretende aproximar el valor óptimo del modelo mediante una metodología de carácter numérico, que será desarrollada en el Capítulo 4.

Finalmente, la validación consiste en analizar la capacidad del modelo de adecuarse a la realidad de la problemática estudiada. Si se detectan resultados no satisfactorios, puede implicar volver a las etapas anteriores y realizar las correcciones que corresponda. La validación de un modelo generalmente consiste en llevar a cabo una prueba retrospectiva, esto es, comparar los resultados que entrega el modelo en instancias cuya solución se conoce en base a otras metodologías. Esta etapa será desarrollada en la primera sección del Capítulo 5.

1.4. Estructura del documento

El resto del documento se organiza de la manera siguiente:

En el Capítulo 2 describiremos brevemente el contexto teórico en el cual se enmarca este trabajo, reseñando algunas investigaciones relacionadas.

En el Capítulo 3 especificaremos el problema en estudio y formularemos un modelo para abordarlo.

En el Capítulo 4, propondremos una metodología de resolución del modelo.

En el Capítulo 5, estudiaremos modelos particulares a partir del modelo desarrollado en el Capítulo 3 y reportaremos los experimentos realizados.

Finalmente, en el Capítulo 6 concluiremos y presentaremos oportunidades de investigación futura que pueden derivarse de este trabajo.

Capítulo 2

Marco Teórico

La literatura presenta una amplia gama de trabajos de investigación y aplicación abocados a la planificación de operaciones mineras, como por ejemplo Lane [20], Goic [16] y Santibáñez [24]. Mientras el primero propone una metodología de evaluación de proyectos mineros en función de las leyes de corte, los siguientes son casos exitosos de aplicaciones de modelos de optimización a la planificación de largo plazo en minería de cobre, en un nivel más desagregado. Estos trabajos no consideran el riesgo asociado a la volatilidad del precio del cobre, sino que lo incorporan como un parámetro conocido *a priori* para todo el horizonte de evaluación. En general, considerar la aleatoriedad de esa variable es una tarea difícil.

Una dificultad que surge al incorporar la estocasticidad del precio de commodities a los problemas de planificación es la de construir un modelo representativo que capture su volatilidad. Un estudio interesante al respecto se reporta en Schwartz [25], donde se analizan tres modelos y el autor concluye que es muy importante considerar reversión a la media en el precio para evaluar proyectos. La reversión a la media se refiere a la tendencia que tendría el precio (o una función del precio) a regresar a su promedio. Un problema que se presenta en este tipo de modelos es cómo calcular este valor. El cálculo depende del período histórico considerado para calcular el promedio del precio que, eventualmente, puede abarcar *shocks* del mercado que distorsionen la medición. Schwartz y Smith [26] intentan corregir esta limitante, considerando al nivel de equilibrio también como una variable aleatoria.

Engel y Valdés [14] estudian la capacidad predictiva de varios modelos y concluyen que los de series cronológicas entregan mejores predicciones de mediano plazo que modelos econométricos.

A pesar de los esfuerzos de la academia y de las propias empresas mineras por desarrollar buenos modelos predictivos, los vaivenes del mercado suelen presentar sorpresas difíciles de anticipar. El titular de un reciente artículo periodístico es decidor [29]:

“Cobre anota quinta alza consecutiva y expertos subirán proyección de precios: en sólo cinco jornadas, el metal acumula un alza de 47 centavos de dólar”.

No es motivo de esta tesis discernir entre un modelo y otro de acuerdo a su capacidad predictiva, sino aceptar como parámetro una familia de procesos estocásticos para abordar un problema de planificación y proponer una metodología que lo resuelva en forma exacta o aproximada.

Un enfoque que ha recibido especial atención en las últimas dos décadas es el de opciones reales, que considera posibilidades que enfoques tradicionales de evaluación de proyectos no logran captar, como por ejemplo las de espera, apertura, clausura y abandono de un proyecto. Esta metodología otorga mayor flexibilidad que una clásica como la del VPN y, por lo tanto, conduce a mayores valores respecto a cuando se evalúa el proyecto sin considerarlas (Fernández y Contreras [15]). Ejemplos de modelos de opciones reales en proyectos mineros los encontramos en Brennan y Schwartz [4] y en Cortázar et al. [5]. En particular, este último incorpora, además de la aleatoriedad del precio, la de las leyes. Una limitante de estos trabajos es que suelen simplificar una serie de aspectos, como las funciones de costo y la heterogeneidad del recurso minero, privilegiando la tratabilidad analítica por sobre la realidad de las prácticas habituales de la industria minera.

Cherian et al. [7] consideran la estocasticidad del precio de recursos no renovables, en el contexto de una mina, considerando dependencia de los costos de extracción en la tasa de extracción y en el material extraído, pero no profundizan mayormente en cómo modelar la mina.

Caldentey et al. [6] corrigen parcialmente las carencias de los trabajos anteriores, pero sus resultados sólo son válidos para un proceso estocástico particular del precio del cobre.

En los siguientes capítulos profundizaremos algunos de los temas introducidos en esta contextualización, a medida que sean requeridos. En particular, en los Capítulos 3 y 4 reseñaremos fundamentos de programación dinámica estocástica y en el Apéndice A, algunas definiciones y desarrollos esenciales de cálculo estocástico.

Capítulo 3

Descripción del Problema y

Modelación

En este capítulo definiremos el problema en estudio y formularemos un modelo para abordarlo en su forma general, en cuanto a que el proceso estocástico del precio del commodity adquirirá una forma parametrizada en dos funciones y a que la función de beneficios asociada a la producción tampoco será particularizada. El desarrollo intentará generalizar un modelo presentado por Caldentey et al. [6].

3.1. Secuencias y timing de extracción

Consideremos una mina como una colección de N bloques, cada uno caracterizado por su ley promedio, tonelaje y ubicación espacial relativa. La colección de bloques puede ser vista como un grafo no dirigido $G = (V, A)$, en que los vértices $i \in V = \{1, \dots, n\}$ denotan los bloques y el conjunto de arcos A contiene los pares (i, j) tales que los bloques i y j son vecinos.

Sea \tilde{V} un subconjunto de V . Definimos el conjunto de adyacencia del conjunto \tilde{V} como $\Lambda(\tilde{V}) = \{j \in V \setminus \tilde{V} : \exists i \in \tilde{V} \wedge (i, j) \in A\}$.

Sea $V_0 \subseteq V$ el conjunto que contiene los bloques que pueden ser escogidos como primer bloque a extraer.

Una secuencia de extracción factible $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_N)$ se define como una permutación de los elementos del conjunto V , tal que $\pi_1 \in V_0$ y $\pi_i \in \Lambda(\{\pi_1, \dots, \pi_{i-1}\}) \forall i = 2, \dots, N$. Esto significa que una secuencia de extracción para ser factible debe cumplir que el primer bloque en ser extraído pertenece al conjunto de bloques que efectivamente pueden ser extraídos en primer lugar y además, que todo bloque posterior se puede extraer sólo después que al menos

uno de sus vecinos ya ha sido extraído. Esto atiende a razones de seguridad y estabilidad de la mina.

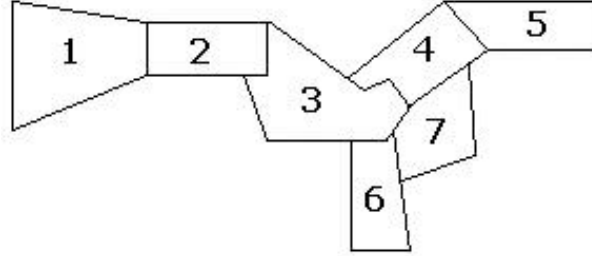


Figura 3.1: Ejemplo de un conjunto de bloques.

En el ejemplo de la Figura 3.1, el conjunto de vértices es $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y el conjunto de arcos de vecindad es $A = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 6), (3, 7), (4, 5), (4, 7), (6, 7)\}$. El conjunto de adyacencia de $\tilde{V} = \{6, 7\}$ es $\Lambda(\tilde{V}) = \{3, 4\}$. Definamos $V_0 = \{1, 5\}$ y consideremos las siguientes secuencias:

- $\pi^{(1)} = \{1, 2, 3, 6, 4, 7, 5\}$
- $\pi^{(2)} = \{5, 4, 3, 2, 7, 6, 1\}$
- $\pi^{(3)} = \{4, 5, 3, 2, 1, 6, 7\}$
- $\pi^{(4)} = \{1, 2, 6, 3, 4, 7, 5\}$

Las secuencias $\pi^{(1)}$ y $\pi^{(2)}$ son factibles, pues 1 y 5 están en V_0 y todo bloque es extraído después que al menos uno de sus vecinos ha sido extraído.

La secuencia $\pi^{(3)}$ no es factible porque el bloque 4 no pertenece a V_0 .

La secuencia $\pi^{(4)}$ tampoco es factible, porque el bloque 6 se extrae antes que todos sus vecinos (notar que $\Lambda(\{6\}) = \{3, 7\}$ y que en la permutación definida por $\pi^{(4)}$ los nodos 3 y 7 aparecen después que 6).

Además de la secuencia, un aspecto a considerar en la planificación de largo plazo de una mina es el *timing* de extracción. Éste refiere a los instantes del tiempo en que cada bloque debe ser extraído. Supondremos que dos bloques no pueden ser extraídos al mismo tiempo

y que, una vez que un bloque comienza a ser extraído, terminará de ser explotado en su totalidad antes de iniciar la extracción del bloque siguiente. El planificador decide el tiempo que transcurre entre la extracción de un bloque y el inicio de la explotación del siguiente, esto es, tiene la opción de esperar.

Una estrategia de producción abarca una serie de aspectos. En primer lugar, una problemática de interés es definir la secuencia en que los bloques de la mina serán extraídos. Por otro lado, la capacidad de producción dispuesta para la producción incidirá directamente en los costos y en la tasa de extracción. Además, el tiempo al cual cada bloque comienza a ser extraído influirá en el ingreso monetario debido al precio percibido y al descuento a valor presente del flujo que genera.

En esta tesis nos remitiremos al problema de evaluar proyectos cuando la secuencia es fijada *a priori* y nos centraremos en la variable referente al timing de extracción. En las experiencias numéricas, evaluaremos y compararemos el desempeño de distintas secuencias de extracción y extenderemos la toma de decisiones incorporando la opción de abandono y de inversión en capacidad. En la discusión final fijaremos algunas directrices para incorporar el diseño de la secuencia como variable de decisión del problema.

3.2. Estocasticidad del precio

En un ambiente determinístico, en que los precios futuros son conocidos, calcular el valor óptimo de un proyecto de desarrollo minero en el contexto anterior es una tarea abordable. Por el contrario, cuando el precio es una variable aleatoria esta tarea puede ser mucho más compleja.

Sea S_t el precio del cobre en el instante t . Consideraremos un comportamiento estocástico para esta variable según la siguiente ecuación:

$$dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dB_t \quad (3.1)$$

$$S_0 = s_0 > 0, \quad (3.2)$$

donde:

- S_0 es el precio inicial del cobre.
- dB_t representa la variación de un movimiento Browniano estándar ($E(B_t) = 0, V(B_t) = t$).¹
- La función $\mu(t, S_t)$ puede ser interpretada como una tendencia de variación de crecimiento o decrecimiento del precio en el corto plazo. En la literatura esta función se conoce como el “drift” del proceso.
- La función $\sigma(t, S_t)$ está asociada a la volatilidad del precio y denota la magnitud del efecto de ésta en la variación de corto plazo.

Las funciones $\mu(t, S_t)$ y $\sigma(t, S_t)$ típicamente utilizadas para modelar el precio del cobre satisfacen las condiciones para que la ecuación 3.1 - 3.2 tenga solución única. En el Apéndice A.3 se especifica mayor detalle a este respecto.

El proceso estocástico S_t representado por la ecuación 3.1 es conocido como proceso de Ito. Varios modelos que han sido propuestos para modelar el precio de commodities como el cobre corresponden a formas particulares de este proceso. Un estudio interesante que, entre otros, analiza un modelo con reversión a la media de esta naturaleza se reporta en Schwartz [25]. La reversión a la media se refiere a la tendencia que tendría el precio (o una función del precio) a regresar a su promedio. Por ejemplo, eligiendo $\mu(t, S_t) = k(\gamma - S_t)$ se logra el efecto de que cuando S_t es mayor que γ , siendo k y S_t valores positivos, la variación en el término dt es negativa. Por el contrario, si S_t es menor que γ , entonces la variación en dt es positiva y si S_t es igual a γ el aporte a la variación del término en dt es cero. Por lo tanto, si el parámetro γ correspondiera al promedio del precio del commodity, la tendencia del movimiento sería la de regresar a su media. El parámetro k denota la “velocidad” o “intensidad” con que se da esta tendencia de reversión.

En otros trabajos, como en Brennan y Schwartz [4], el precio es modelado como un movimiento Browniano geométrico, esto es, definiendo en la Ecuación 3.1 $\mu(t, S_t) = \mu S_t$ y $\sigma(t, S_t) = \sigma S_t$. La intuición detrás de estas funciones es que S_t en el corto plazo debiera

¹Ver definición en el Apéndice A.2.

mostrar crecimiento y variabilidad en proporción al nivel en que se encuentra el proceso. Este modelo presenta bondades analíticas que le han reportado cierta popularidad. Por otro lado, puede conllevar a sobreestimaciones, debido a una posible explosión exponencial en el largo plazo.

3.3. Definición del problema y un modelo a tiempo continuo

Consideremos el problema que enfrenta un planificador que decide el timing del proyecto y desea evaluar una secuencia de extracción, ante la aleatoriedad del precio del cobre. Esta variable y otras asociadas a la naturaleza del problema, tales como la ley del mineral en los bloques, los costos de extracción y la capacidad de producción definen la utilidad esperada del proyecto.

En la práctica, otros factores como la ley, podrían también ser estocásticos. En esta tesis nos abocaremos sólo a la estocasticidad del precio. El resto de los factores constituirán parámetros determinísticos que agruparemos en un conjunto Z y variables de estado que agruparemos en un conjunto Γ .

Sea F_j el máximo de la utilidad esperada (descontada) cuando quedan j bloques por explotar. Cada bloque en la secuencia definirá una “etapa”. Por convención, para una secuencia dada indexaremos por N al primero de los N bloques a extraer y así sucesivamente, hasta denotar por 1 al último bloque. En algunos casos nos referiremos como etapa (j) a la que en sentido cronológico corresponde a la $(N - j + 1)$ -ésima etapa.

Denotaremos por τ a la variable que decide el instante en que el bloque j comienza a ser extraído², medido desde que se terminó de extraer el bloque $j + 1$ (o desde $t = 0$ si es que $j = N$, para el primer bloque de la secuencia en evaluación), y por T_j al tiempo que demora extraer el bloque j , que supondremos conocido y puede ser función del conjunto de parámetros Z y las variables de estado Γ . El horizonte de evaluación es, en principio, infinito. Éste no es un supuesto inapropiado en la planificación de grandes mineras, cuyas reservas

²Con algo más de rigor, podríamos denotarla por τ_j pues la decisión está asociada a cada etapa. Hemos omitido el subíndice para mayor simplicidad en la notación.

pueden proveer producción hasta por más de cien años. En la versión discreta acotaremos el horizonte como la suma de los tiempos de extracción T_j y los valores τ que permitamos.

La utilidad esperada a partir de la etapa del bloque j puede ser escrita como la suma de dos funciones. Una primera función $g(\cdot)$ que denote la utilidad percibida durante esa etapa, que puede depender del conjunto de parámetros Z , del valor de las variables de estado Γ^j en el inicio de la etapa j , de la decisión τ y del precio inicial S_0^j en esa etapa. La segunda función computará el valor esperado de la utilidad desde la próxima etapa en adelante, esto es, desde cuando quedan $j - 1$ bloques por explotar.

Luego, para un bloque genérico j , el tomador de decisiones debe resolver:

$$F_j(Z, \Gamma^j, S_0^j) = \max_{\tau \geq 0} \mathbb{E} \left[g(Z, \Gamma^j, \tau, S_0^j) + e^{-r(\tau + T_j(Z, \Gamma^j))} F_{j-1}(Z, \Gamma^{j-1}, S_{\tau + T_j(Z, \Gamma^j)}) | S_0^j = s_0 \right] \quad (3.3)$$

s.a.

$$F_0(Z, \Gamma^0, S^0) = 0 \quad \forall S^0 \geq 0, \forall \Gamma^0 \quad (3.4)$$

En particular, $F_N(Z, \Gamma^N, S_0^N)$ es el valor esperado total del proyecto.

La Ecuación 3.3 es conocida en programación dinámica como *Ecuación de Bellman* (Bertsekas y Tsitsiklis [2]). La función $g(\cdot)$ puede ser interpretada como el “beneficio de transición” obtenido en la etapa asociada al bloque j . El segundo término en el lado derecho corresponde a la utilidad esperada cuando quedan $j - 1$ bloques por extraer. Esta etapa ($j - 1$) se enfrenta $\tau + T_j(Z, \Gamma^j)$ unidades de tiempo después que la etapa (j), esto es, después de que transcurren el tiempo de espera τ para comenzar a explotar el bloque j y el tiempo $T_j(Z, \Gamma^j)$ que demora extraer el bloque j . El valor F_{j-1} es entonces descontado a tasa r un tiempo $\tau + T_j(Z, \Gamma^j)$ y el precio inicial en esta etapa es $S_{\tau + T_j(Z, \Gamma^j)}$. Descontaremos según la tasa libre de riesgo r , utilizando un enfoque de evaluación neutral al riesgo. Este enfoque es comúnmente utilizado en la evaluación de proyectos mineros, en base a la existencia de un mercado de contratos futuros para commodities como el cobre y a argumentos de no arbitraje (Brennan y Schwartz [4]).

El término Γ^{j-1} denota el valor de las variables de estado al inicio de la etapa ($j - 1$), que son función del estado en la etapa anterior, la decisión y los parámetros.

La Ecuación 3.4 corresponde a la etapa residual, que supondremos tiene valor cero, cualquiera sea el estado final.

Descompondremos g como la suma de dos funciones, una que depende de la decisión, los parámetros y las variables de estado, y otra que además depende del precio:

$$g(Z, \Gamma^j, \tau, S_0^j) = g_d(Z, \Gamma^j, \tau) + g_e(Z, \Gamma^j, \tau, S_0^j) \quad (3.5)$$

Es razonable formular esta descomposición: g_d puede corresponder a una función de costos y g_e a una función de ingresos. En casos que la separación no aplique, bastará con definir una de las dos funciones anteriores como idénticamente nula.

Para efectos de nuestro problema, la función g_d definirá un parámetro determinístico y, salvo que se pretenda realizar un desarrollo analítico más acabado de F_j , la forma que adopte no imprime mayor o menor complejidad al problema. Sea $\tilde{g}_d(Z, \Gamma^j, t, \tau)$ la utilidad (o “desutilidad”) instantánea asociada a estos costos. Se tiene entonces que la utilidad total G_d^j percibida en la etapa del bloque j y que no depende del precio es:

$$G_d^j = g_d(Z, \Gamma^j, \tau) = \int_0^{\tau+T_j(Z, \Gamma^j)} e^{-rt} \tilde{g}_d(Z, \Gamma^j, t, \tau) dt \quad (3.6)$$

Analógamente, para la parte de g que sí se ve afectada por la naturaleza estocástica del precio, definimos $\tilde{g}_e(Z, \Gamma^j, t, S_t)$ como la utilidad instantánea reportada por la operación. Supondremos que no se perciben ingresos durante el tiempo τ , esto es, durante el lapso de espera se tiene $\tilde{g}_e(\cdot) = 0$. Luego, la utilidad esperada total G_e^j percibida en la etapa del bloque j , condicional en que el precio spot al inicio de su explotación es S , está dada por:

$$\begin{aligned}
 G_e^j &= E [g_e(Z, \Gamma^j, \tau, S_0^j) | S_\tau = S] \\
 &= E \left[\int_0^{\tau+T_j(Z, \Gamma^j)} e^{-rt} \tilde{g}_e(Z, \Gamma^j, t, S_t) dt | S_\tau = S \right] \\
 &= E \left[\int_0^\tau e^{-rt} \tilde{g}_e(Z, \Gamma^j, t, S_t) dt + \int_\tau^{\tau+T_j(Z, \Gamma^j)} e^{-rt} \tilde{g}_e(Z, \Gamma^j, t, S_t) dt | S_\tau = S \right] \\
 &= E \left[\int_0^\tau e^{-rt} \tilde{g}_e(Z, \Gamma^j, t, S_t) dt | S_\tau = S \right] + E \left[\int_\tau^{\tau+T_j(Z, \Gamma^j)} e^{-rt} \tilde{g}_e(Z, \Gamma^j, t, S_t) dt | S_\tau = S \right] \\
 &= 0 + e^{-r\tau} E \left[\int_0^{T_j(Z, \Gamma^j)} e^{-rt} \tilde{g}_e(Z, \Gamma^j, t + \tau, S_{t+\tau}) dt | S_\tau = S \right]
 \end{aligned}$$

Como resultado final de este capítulo, utilizamos las partes anteriores para formular un modelo a tiempo continuo del problema en estudio. En la etapa j el tomador de decisiones debe resolver:

$$F_j(Z, \Gamma^j, S_0^j) = \max_{\tau \geq 0} \mathbb{E} \left[G_e^j + G_d^j + e^{-r\{\tau+T_j(Z, \Gamma^j)\}} F_{j-1}(Z, \Gamma^{j-1}, S_{\tau+T_j(Z, \Gamma^{j-1})}) | S_0^j = s_0 \right] \quad (3.7)$$

s.a.

$$F_0(Z, \Gamma^0, S^0) = 0 \quad \forall S^0 \geq 0, \forall \Gamma^0 \quad (3.8)$$

$$dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dB_t \quad (3.9)$$

$$S_0 = s_0 > 0, \quad (3.10)$$

Nos referiremos a este problema como el Problema de Planificación Minera a tiempo continuo (PPM(tc)). En general, computar el valor de F_j es una tarea difícil debido a la naturaleza estocástica de S_t . Sólo familias particulares de funciones $\mu(\cdot)$ y $\sigma(\cdot)$ permiten encontrar formas cerradas para dicho valor y, en el caso general, se requiere otro tipo de técnicas para computarlo como, por ejemplo, métodos numéricos. Proponer una metodología que permita resolver el problema en forma aproximada será motivo del próximo capítulo.

Capítulo 4

Metodología de Resolución

En este capítulo desarrollaremos una metodología para aproximar el valor óptimo F_j del PPM(tc). La idea general se basa en discretizar el tiempo y generar precios y probabilidades de transición, para formular un problema de programación dinámica estocástica a tiempo discreto, representativo del problema original.

4.1. Discretización

La estructura tradicional de un problema de programación dinámica estocástica a tiempo discreto considera resolver en cada etapa (k) del horizonte el siguiente problema (ver, por ejemplo, Bertsekas [1]):

$$J_k^*(i) = \min_{\mu \in U(i)} \sum_{j \in I} p(i, \mu, j)(g(i, \mu, j) + \beta J_{k-1}^*(j)) \quad (4.1)$$

Donde:

- I es el conjunto de estados.
- i es el estado al inicio de la etapa (k) y j es el estado al inicio de la etapa ($k - 1$).
- μ es la variable de control o decisión.
- $p(i, \mu, j)$ es la probabilidad de pasar de i a j bajo el control μ .
- $g(i, \mu, j)$ es el costo de transición de i a j bajo el control μ .
- $J_k^*(i)$ es el costo esperado óptimo desde cuando quedan k etapas, partiendo desde el estado i . Es conocida en la literatura como la función *Cost-to-go óptimo*.
- $U(i)$ es el conjunto de decisiones factibles de tomar en el estado i .

- β es un factor de descuento ($0 < \beta \leq 1$).

Para una etapa k en estado inicial i , una política de decisiones $\tilde{\mu}(i)$ es óptima si:

$$\tilde{\mu}(i) = \arg \min_{\mu \in U(i)} \sum_{j \in I} p(i, \mu, j)(g(i, \mu, j) + \beta J_{k-1}^*(j)) \quad (4.2)$$

En nuestro problema, definiremos cada etapa como el número de bloques que resta por explotar en la secuencia de extracción evaluada. La variable de control corresponde al tiempo τ que se espera a partir del inicio de esa etapa para comenzar a explotar el bloque correspondiente. Los estados poseen una componente aleatoria dada por el precio del metal y otra determinística correspondiente a los elementos de Γ .

Si definimos una manera “apropiada” de construir un conjunto discreto de precios iniciales para cada etapa, las transiciones que pueden ocurrir desde una etapa a otra junto a sus respectivas probabilidades, y una función de costo de transición desde un estado a otro bajo la decisión τ , el problema resultante puede contribuir a encontrar una aproximación cercana al valor óptimo del PPM(tc).

El desarrollo siguiente en parte está basado en el capítulo 4 de Kushner y Dupuis [19], donde se introduce el método de aproximación a cadena de Markov. La idea general consta de dos partes principales. Por un lado, generaremos los estados y las transiciones posibles desde una etapa a otra, y las respectivas probabilidades de transición. Además, definiremos una aproximación apropiada de la función de costos original para la cadena resultante, en el sentido de su representatividad y posibilidades de cómputo.

4.1.1. Estados y probabilidades de transición

Dado un precio inicial s para una etapa (j) cualquiera, nos interesa computar los valores s' que “pueden” (con probabilidad positiva) ser el precio inicial en la etapa $(j - 1)$ ¹, dado que la decisión en la etapa (j) fue τ y el tiempo que demoró explotar el bloque j fue T_j , y la respectiva probabilidad $p(s, j, \tau, s')$ de pasar del precio s al precio s' en la transición de la etapa (j) a la $(j - 1)$ bajo el control τ .

¹Recordar que indexamos los bloques en orden inverso a la secuencia; la “etapa (j)” corresponde a cuando quedan j bloques por extraer.

Para definir dichos estados y transiciones posibles, utilizaremos la aproximación del movimiento Browniano a un paseo al azar simétrico. Ésta consiste en asignar signo positivo o negativo equiprobablemente a la variación dB_t en el proceso 3.1 y aproximarla a \sqrt{dt} (su orden de variación). En términos formales, consideremos el movimiento Browniano B_t , un parámetro $h > 0$ y un conjunto de puntos en el conjunto $D_h = \{0, \pm h, \pm 2h, \dots\}$. Sea $\{\xi_n^h, n < \infty\}$ un paseo al azar en el conjunto D_h y consideremos los intervalos de interpolación $\Delta t^h = h^2$. Luego, aproximamos B_t por una función $\xi^h(t)$, llamada *interpolación continua*, definida de la siguiente manera:

$$\xi^h(t) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{t}{h^2} \rfloor - 1} h \rho_i, \quad (4.3)$$

donde los ρ_i son variables aleatorias independientes que toman los valores ± 1 con probabilidad $1/2$.²

Usaremos siempre la misma interpolación y el mismo intervalo de interpolación, por lo que simplificaremos la notación y nos referiremos al paso de tiempo simplemente como Δt .

Si el precio del commodity en $t = 0$ es s_0 , nuestra aproximación define dos precios posibles para el instante Δt , igualmente probables:

$$P(\tilde{S}_{\Delta t} = s' | S_0 = s_0) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } s' = s_0 + \mu(\Delta t, s_0)\Delta t + \sigma(\Delta t, s_0)\sqrt{\Delta t} \\ 1/2 & \text{si } s' = s_0 + \mu(\Delta t, s_0)\Delta t - \sigma(\Delta t, s_0)\sqrt{\Delta t} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Y, en general, dado $n \in \mathbb{N}$ y un precio $\tilde{S}_{(n-1)\Delta t} = s$ para $t \in [(n-1)\Delta t, n\Delta t)$, en el intervalo $[n\Delta t, (n+1)\Delta t)$ se define:

$$P(\tilde{S}_{t+\Delta t} = s' | \tilde{S}_t = s) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } s' = s + \mu((n-1)\Delta t, s)\Delta t + \sigma((n-1)\Delta t, s)\sqrt{\Delta t} \\ 1/2 & \text{si } s' = s + \mu((n-1)\Delta t, s)\Delta t - \sigma((n-1)\Delta t, s)\sqrt{\Delta t} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

²En [19], Kushner y Dupuis referencian trabajos abocados a estudiar la convergencia de $\xi^h(t)$ a B_t (Billingsley [3], Ethier y Kurtz [13]).

Notar el carácter Markoviano del proceso estocástico $\{\tilde{S}_{n\Delta t}, n < \infty\}$, esto es, la información contenida en $\tilde{S}_{(n-1)\Delta t}$ es suficiente para conocer la ley de la variable aleatoria $\tilde{S}_{n\Delta t}$.³

$$P(\tilde{S}_{n\Delta t} = s_{n\Delta t} | S_0 = s_0, \tilde{S}_{\Delta t} = s_{\Delta t}, \dots, \tilde{S}_{(n-1)\Delta t} = s_{(n-1)\Delta t}) = P(\tilde{S}_{n\Delta t} = s_{n\Delta t} | \tilde{S}_{(n-1)\Delta t} = s_{(n-1)\Delta t}) \quad (4.4)$$

Existe un *trade-off* entre construir una malla más refinada de precios v/s las posibilidades de lidiar con el fenómeno conocido como *the curse of dimensionality*: mientras más transiciones posibles consideremos al generar la distribución, aumenta la cantidad de estados y, por lo tanto, el problema de programación dinámica se vuelve más difícil de resolver.

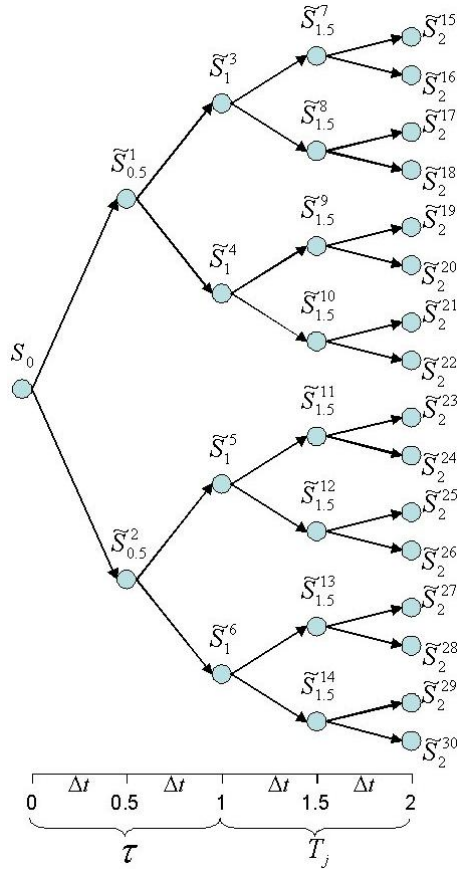


Figura 4.1: Árbol de precios generado.

³Para procesos con tendencia o volatilidad dependientes explícitamente del tiempo, los estados del proceso deben incluir la componente tiempo (en nuestra versión discreta, esta información corresponde a los subíndices de las v.a. $\tilde{S}_{n\Delta t}$).

La Figura 4.1 representa el árbol de precios generados a partir de S_0 , para $\Delta t = 0.5$, $\tau = 1$, $T_j = 1$. Las hojas terminales representan los precios posibles de enfrentar cuando restan $j - 1$ bloques por explotar, dado que el precio cuando restaban j bloques por explotar era S_0 , se esperó 1 unidad de tiempo para comenzar a explotar el bloque j y el tiempo que tomó su extracción (conocido *a priori*) fue 1 unidad de tiempo. Las trayectorias generadas son $2^4 = 16$, que definen los 16 precios iniciales posibles de enfrentar al inicio de la etapa del próximo bloque a extraer en la secuencia.

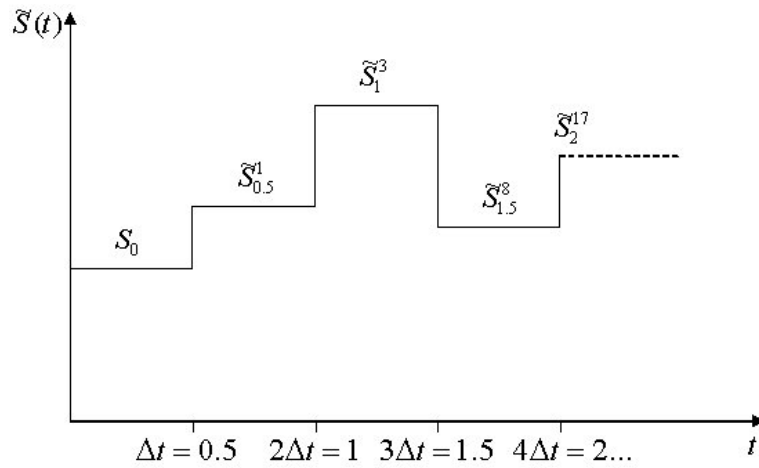


Figura 4.2: Ejemplo de una ocurrencia particular.

La Figura 4.2 denota las interpolaciones \tilde{S}_t para una trayectoria particular del árbol de la Figura 4.1, cuando en todas las transiciones la tendencia es al alza, excepto en la tercera ramificación. Dados $\tau = 1$ y $T_j = 1$, el precio inicial para la próxima etapa en esta ocurrencia es \tilde{S}_2^{17} .

En horizontes de evaluación largos la dimensión que puede alcanzar el árbol de precios dificulta las posibilidades de implementar su uso. Por ello, es útil incorporar en la definición de estados un mecanismo que reduzca la cantidad de nodos. Ésta puede ser realizada en base a minimización de alguna métrica probabilística, como se sugiere en Dupacova et al. [11], o también mediante métodos de agregación de nodos y etapas como en Klassen [18]. Una buena revisión del estado del arte a este respecto se reporta en Dupacova et al. [12].

En nuestro problema, utilizaremos una regla simple de agregación en base a la cercanía de los valores computados. Supongamos que contamos con un arreglo ordenado de los precios s' de la etapa $(j - 1)$ a los que se puede pasar desde un precio inicial s en la etapa (j) , bajo el control τ . Si recorremos el arreglo de menor a mayor, permitiremos agregar todos los precios hasta que se supere una diferencia ε arbitraria respecto al primer nodo y computaremos su promedio \bar{s} . Si el número de nodos originales agregados en \bar{s} es n y el número total de precios originalmente generados para la etapa $(j - 1)$ es N , asignaremos probabilidad $p(s, j, \tau, \bar{s}) = n/N$. Repetiremos sucesivamente este procedimiento con el conjunto de nodos restantes, a partir del primer precio que no fue agregado.

Consideremos el siguiente ejemplo: $\mu(t, S_t) = k(\gamma - \ln(S_t))S_t$, $\sigma(t, S_t) = \sigma S_t$, $k = 0.369$, $\gamma = 4.854$, $\sigma = 0.5$, $\Delta t = 0.5$, $\varepsilon = 3$, $(\tau + T_j)/\Delta t = 5$ y un precio inicial $S_0 = 150$ Usc/lb. La primera columna de la Tabla 4.1 muestra los valores generados (en Usc/lb) antes de la agregación, la segunda columna presenta los precios generados después de la agregación, que serán los considerados como precio inicial del próximo bloque en la secuencia, y la tercera exhibe la probabilidad respectiva.

s'	\bar{s}	Probabilidad
35.32	35.32	0.03125
44.84	46.30	0.0625
47.76		
51.66	51.66	0.03125
56.99	56.99	0.03125
61.15	61.15	0.03125
64.51	65.52	0.0625
66.53		
71.15	72.55	0.0625
73.95		
79.25	79.25	0.03125
84.53	85.47	0.0625
86.41		
90.85	91.76	0.0625
92.68		
99.42	99.42	0.03125
104.20	104.20	0.03125
111.40	111.40	0.03125
114.50	114.50	0.03125
120.93	122.20	0.0625
123.46		
133.52	133.52	0.03125
144.54	144.54	0.03125
151.34	151.34	0.03125
164.42	165.61	0.0625
166.79		
182.53	182.53	0.03125
198.82	198.82	0.03125
229.88	229.88	0.03125
258.92	258.92	0.03125
285.22	285.22	0.03125
428.25	428.25	0.03125

Tabla 4.1: Ejemplo de generación de precios y probabilidades.

Necesitamos también discretizar el tiempo para definir los valores de la variable τ que conformarán los conjuntos $U(\cdot)$ con las decisiones posibles de tomar en cada estado. Para evitar el aumento desmesurado del tamaño del problema, resulta conveniente acotar la cardinalidad de estos conjuntos. Un mecanismo para esto es permitir un conjunto de τ posibles de mayor cardinal para los períodos iniciales y reducirlo o bien forzar el valor de τ a cero para etapas posteriores. Esto no necesariamente conllevará a una pérdida significativa de calidad de la aproximación, debido al descuento en el tiempo del flujo en etapas más avanzadas. Para efectos de implementación, fijaremos un τ máximo para cada etapa (j) y convendremos en que τ sólo puede tomar valores múltiplos de Δt .

Para efectos del cómputo de las probabilidades y estados en nuestro problema, dada una magnitud Δt , una decisión τ y el tiempo T_j que demora extraer un bloque, aproximaremos

el tiempo que transcurre entre el inicio de la etapa (j) y la etapa ($j - 1$), por el entero más cercano a $(\tau + T_j)/\Delta t$. Luego, las trayectorias del precio generadas entre la etapa (j) y la etapa ($j - 1$) son $2^{\lceil \frac{\tau + T_j}{\Delta t} \rceil}$.

En el Apéndice B se presenta un algoritmo de generación de precios y probabilidades de transición que formaliza los desarrollos de esta sección. En adelante, denotaremos entonces por $p(s, j, \tau, s')$ a la probabilidad de pasar del precio s al precio s' en un lapso de tiempo $\tau + T_j$, y por $ST(s, j, \tau)$ al conjunto que contiene todos los precios s' a los que se puede pasar desde el precio s en un lapso de tiempo $\tau + T_j$.

4.1.2. Beneficio de transición

Según la naturaleza de la función de ingresos y según cómo se descuenta el tiempo en los intervalos que definen los pasos Δt , se pueden formular distintas aproximaciones para G_e^j , la parte del beneficio de transición que sí depende del precio. A continuación especificaremos la adaptación a nuestro modelo de dos alternativas presentadas en [19]. En el Capítulo 5 describiremos formas más acabadas para $g(\cdot)$, de acuerdo a los modelos particulares que estudiemos en las instancias numéricas.

Una primera aproximación $\tilde{G}1_e^j$ está dada por un “descuento constante” de los flujos en cada intervalo $[n\Delta t, (n + 1)\Delta t)$, al tiempo $n\Delta t$, como si el pago de todo el intervalo debiera realizarse al principio de éste:

$$\tilde{G}1_e^j = e^{-r\tau} E \left[\sum_{n=0}^{T_j-1} e^{-rn\Delta t} \tilde{g}_e(Z, \Gamma^j, t + \tau, \tilde{S}_{(n\Delta t + \tau)/\Delta t}) \Delta t \mid S_\tau = S \right] \quad (4.5)$$

Una aproximación alternativa $\tilde{G}2_e^j$ está dada por un “descuento continuo” de los flujos, como si a cada instante del intervalo $[n\Delta t, (n + 1)\Delta t)$ se percibiera un ingreso $\tilde{g}_e(Z, \Gamma^j, t + \tau, \tilde{S}_{(n\Delta t + \tau)/\Delta t})$, esto es:

$$\begin{aligned}\tilde{G}_e^j &= e^{-r\tau} E \left[\sum_{n=0}^{T_j-1} \tilde{g}_e(Z, \Gamma^j, t + \tau, \tilde{S}_{(n\Delta t + \tau)/\Delta t}) \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} e^{-rt} dt \middle| S_\tau = S \right] \\ &= e^{-r\tau} E \left[\sum_{n=0}^{T_j-1} \tilde{g}_e(Z, \Gamma^j, t + \tau, \tilde{S}_{(n\Delta t + \tau)/\Delta t}) \frac{e^{-nr\Delta t} - e^{-(n+1)r\Delta t}}{r} \middle| S_\tau = S \right]\end{aligned}$$

Denotaremos genéricamente por \tilde{G}_e^j a la aproximación de G_e^j utilizada. Recordemos además que en el beneficio de transición hay una componente G_d^j , pero que no se ve afectada por el precio y su cómputo puede ser realizado mediante el cálculo diferencial tradicional.

4.2. Modelo a tiempo discreto

Utilizando la discretización de la sección anterior, formulamos el siguiente modelo de programación dinámica estocástica a tiempo discreto para aproximar el valor óptimo F_j del PPM(tc):

$$J_j^*(s_0, \Gamma^j, Z) = \max_{\tau \in U(s_0, \Gamma^j)} \sum_{s' \in ST(s_0, j, \tau)}^n p(s_0, j, \tau, s') (G_d^j + \tilde{G}_e^j + e^{-r(\tau + T_j)} J_{j-1}^*(s', \Gamma^{j-1}, Z)) \quad (4.6)$$

$$J_0^*(s, \Gamma^0, Z) = 0 \quad \forall s \geq 0, \forall \Gamma^0 \quad (4.7)$$

Nos referiremos a este problema como el Problema de Planificación Minera a tiempo discreto (PPM(td)) y su valor óptimo $J_j^*(\cdot)$ será nuestra aproximación del valor óptimo $F_j(\cdot)$ del (PPM(tc)).

En la literatura encontramos varios algoritmos de resolución para problemas de programación dinámica a tiempo discreto (ver, por ejemplo, [2]). En este trabajo utilizaremos el método de programación lineal, debido principalmente a que varios desarrollos en planificación minera de largo plazo realizados para problemas en un ambiente determinístico se basan en programación lineal, por lo que se espera sentar un antecedente con esta técnica en un ambiente estocástico que apunte a la conjunción futura de ambos tipos de modelos.

4.3. Método de programación lineal

A modo de introducción del método, consideremos algunos aspectos preliminares. Primero, para cualquier vector $J = J(J(1), \dots, J(|I|))$ consideremos el vector TJ , también de $|I|$ componentes definidas como:

$$(TJ)(i) = \min_{\mu \in U(i)} \sum_{j=0}^{|I|} p(i, \mu, j)(g(i, \mu, j) + \beta J(j)) \quad \forall i \in \{1, \dots, |I|\}, \quad (4.8)$$

donde por convención se define $J(0) = 0$.

T puede ser visto como un operador que transforma el vector J en el vector TJ . Definamos además T^k como la composición del operador T un total de k veces:

$$(T^k J)(i) = (T(T^{k-1} J))(i) \quad \forall i \in \{1, \dots, |I|\} \quad (4.9)$$

$$(T^0 J)(i) = J(i) \quad \forall i \in \{1, \dots, |I|\} \quad (4.10)$$

Se puede demostrar ([2]) que el vector *Cost-to-go* óptimo J^* de la Ecuación 4.1 satisface:

$$J^* = TJ^*, \quad (4.11)$$

y, además, que J^* es la única solución de la Ecuación 4.11.

También se puede demostrar que para todo vector J se cumple:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^k J = J^* \quad (4.12)$$

De lo anterior se tiene entonces:

$$J \leq TJ \leq T^2 J \leq \dots \leq \lim_{k \rightarrow \infty} T^k J = J^* \quad (4.13)$$

Considerando la Ecuación 4.11 y los extremos de la Ecuación 4.13, para todo J se cumple:

$$J \leq J^* = TJ^* \quad (4.14)$$

El resultado 4.14 sugiere que el óptimo J^* es el J más grande que satisface la desigualdad $J \leq TJ$. Volviendo a la definición 4.8, esta desigualdad corresponde al siguiente sistema de desigualdades:

$$J(i) \leq \min_{\mu \in U(i)} \sum_{j=0}^{|I|} p(i, \mu, j)(g(i, \mu, j) + \beta J(j)) \quad \forall i \in \{1, \dots, |I|\} \quad (4.15)$$

Notar que este sistema es no lineal. Sin embargo, cada una de sus desigualdades puede ser equivalentemente representada por un conjunto de restricciones lineales de la forma siguiente:

$$J(i) \leq \sum_{j=0}^{|I|} p(i, \mu, j)(g(i, \mu, j) + \beta J(j)) \quad \forall i \in \{1, \dots, |I|\}, \forall \mu \in U(i) \quad (4.16)$$

El conjunto de desigualdades 4.16 define un poliedro en $\mathbb{R}^{|I|}$. En particular, los valores óptimos $J^*(i^1), \dots, J^*(i^{|I|})$ que genera la política óptima del problema 4.1 conforman la solución del siguiente problema de optimización en las variables $\lambda_1, \dots, \lambda_{|I|}$:

$$\text{máx} \sum_i c_i \lambda_i \quad (4.17)$$

s.a.

$$\lambda_i \leq \sum_{j=0}^{|I|} p(i, \mu, j)(g(i, \mu, j) + \beta \lambda_j) \quad \forall i \in \{1, \dots, |I|\}, \forall \mu \in U(i) \quad (4.18)$$

$$\lambda_0 = 0 \quad (4.19)$$

Donde todos los coeficientes c_i de la función objetivo son positivos. En particular, si se conoce el estado inicial i_0 bastará con maximizar λ_{i_0} .

Notar que este problema tiene $|I|$ variables (una por cada estado) y M_I restricciones, en que $M_I = 1 + \sum_{i=1}^{|I|} |U(i)|$. Por lo tanto, a medida que los cardinales del conjunto de estados y del conjunto de decisiones crecen, el problema se torna más complejo y el uso de recursos demandado se vuelve mayor.

El problema 4.17 - 4.19 define el método de programación lineal para resolver problemas de programación dinámica estocástica con criterio de minimización de costos. Evidentemente, si en vez de minimizar costo se desea maximizar utilidad, basta cambiar el sentido de la desigualdad 4.18 y utilizar un criterio de minimización en 4.17.

La literatura provee numerosas investigaciones sobre programación lineal y su uso en diversas áreas. Ejemplos de aplicaciones en minería los encontramos en Goic [16] y Santibáñez [24]. Debido a sus múltiples aplicaciones, se han desarrollado algoritmos y softwares comerciales especializados en la resolución de problemas de programación lineal. Es el caso del algoritmo Simplex y el paquete CPLEX, respectivamente.

Aplicando el método de programación lineal al PPM(td) de la Sección 4.2, el PPL resultante es el siguiente:

$$\text{mín } \lambda_{s_0, N, \Gamma^N} \quad (4.20)$$

s.a.

$$\lambda_{s, j, \Gamma^j} \geq \sum_{s' \in ST(s, j, \tau)} p(s, j, \tau, s') [G_d^j + \tilde{G}_e^j + e^{-r(\tau+T_j)} \lambda_{s', j-1, \Gamma^{j-1}}] \quad \forall s, j, \Gamma^j, \forall \tau \in U(s, j, \Gamma^j) \quad (4.21)$$

$$\lambda_{s, 0, \Gamma^0} = 0 \quad \forall s, \Gamma^0 \quad (4.22)$$

Notar que tanto el precio s como el índice j de los bloques son parte del estado en cada etapa y que no indexamos el conjunto de parámetros Z a las variables λ , para simplificar notación y poner énfasis en que éstas solamente están asociadas a los estados.

En el próximo capítulo explicitaremos modelos para problemas particulares y reportaremos los resultados de su implementación en instancias numéricas.

Capítulo 5

Modelos Particulares y Experiencias Numéricas

Dividiremos este capítulo en cinco secciones. Primero, trabajaremos en un modelo base, utilizando la misma data de una investigación precedente e intentaremos validar nuestro enfoque. Luego, modificaremos la función de costos de ese problema, que no considera costo de mantenimiento, y realizaremos nuevos experimentos considerando este concepto. En un tercer set de experimentos, incorporaremos la opción de abandonar el proyecto. Luego, incorporaremos la opción de invertir en capacidad. Finalmente, formularemos un modelo que integre todos los elementos anteriores.

5.1. Modelo base

Nos enfocaremos ahora en el problema presentado por Caldentey et al. en [6] y lo abordaremos como un caso particular del PPM(tc).

Consideremos $\mu(t, S_t) = \mu S_t$ y $\sigma(t, S_t) = \sigma S_t$, esto es, modelamos el precio del cobre como un movimiento Browniano geométrico. Como se muestra en el Apéndice A.5, en este caso la ecuación diferencial estocástica 3.1 - 3.2 puede ser resuelta analíticamente y S_t adopta la siguiente forma:

$$S_t = s_0 e^{\{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t\}} \quad (5.1)$$

En particular, los autores consideran un drift μ en función de la tasa libre de riesgo r y del *convenience yield*. Éste puede ser interpretado como un flujo que acumula el poseedor del commodity spot, pero no el poseedor de un contrato futuro (Brennan y Schwartz [4]). Suponiendo que ρ es una constante de proporcionalidad entre el convenience yield y la tasa libre de riesgo, consideran $\mu = r - \rho$.¹

¹En primera instancia consideran que el precio del cobre sigue un movimiento con reversión a la media de

El ingreso y el costo instantáneo de la operación, correspondientes a las funciones $\tilde{g}_e(\cdot)$ y $\tilde{g}_d(\cdot)$ del modelo de la Sección 3.3, respectivamente, son modelados como:

$$\tilde{g}_e(K, L^j, j, t, S_t) = KL^j S_t \quad (5.2)$$

$$\tilde{g}_d(K, A^j, j, t, \tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < \tau \\ -KA^j & \text{si } \tau \leq t \leq \tau + T_j \end{cases} \quad (5.3)$$

Donde:

- K es la capacidad de producción.
- L^j es la ley de cobre promedio del bloque j .
- A^j es el costo marginal de producción del bloque j .

La Ecuación 5.2 supone que el material del bloque j es procesado continuamente a máxima capacidad. Luego, por cada unidad de tiempo, se obtienen KL^j unidades de producto final, que son vendidas inmediatamente al precio spot S_t .

Por su parte, la función de costos en la Ecuación 5.3 se explica bajo los supuestos de que no se incurre en costo de mantenimiento y que el material del bloque j es procesado continuamente a máxima capacidad: procesar K unidades de material en cada unidad de tiempo significa un costo instantáneo KA^j ; esto se contabiliza sólo durante el tiempo en que se está produciendo, i.e., desde τ hasta $\tau + T_j$.

Vale mencionar que el costo A^j considerado depende de la secuencia de extracción. En un contexto de minería subterránea, los costos generalmente crecen a medida que el punto de extracción se aleja del bloque inicial, debido a operaciones de habilitación y transporte.

un factor, como en Schwartz [25], que luego transforman a un movimiento Browniano geométrico utilizando argumentos matemáticos y de *contingent claims analysis* (ver Capítulo 4 en Dixit y Pindyck [10]). Una vez que la transformación es realizada y la existencia de una medida de probabilidad equivalente queda bien definida, el proceso 5.1 puede ser utilizado correctamente.

Intentando capturar este hecho, el costo marginal es modelado como: $A^j = a + bd_{\pi_1, \pi_j}$, donde a y b son constantes positivas, y d_{π_1, π_j} es la distancia entre el bloque j y el primer bloque de la secuencia en evaluación.

El tiempo que demora extraer el bloque j es calculado como función de la capacidad de producción y de la cantidad de material Q_j contenida en el bloque j . Si se produce continuamente a máxima capacidad, se tiene:

$$T_j(Q_j, K) = \frac{Q_j}{K} \quad (5.4)$$

El conjunto de parámetros de este problema, además del precio inicial S_0 , es entonces $Z = (r, \rho, \sigma, K, \pi, Q^j, L^j, A^j)$. Notar además, que los estados pueden ser definidos simplemente por la tupla (s, j) , por lo que simplificaremos nuestra notación y omitiremos el término Γ . El problema presentado puede ser escrito como una forma particular del PPM(tc) de la Sección 3.3:

$$F_j(S_0^j) = \max_{\tau \geq 0} \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} \int_0^{T_j(Q_j, K)} e^{-rt} K L^j S_{t+\tau} dt - \int_{\tau}^{\tau+T_j(Q_j, K)} e^{-rt} K A^j dt \right. \\ \left. + e^{-r\{\tau+T_j(Q_j, K)\}} F_{j-1}(S_{\tau+T_j(Q_j, K)}) \mid S_0^j = s_0 \right] \quad (5.5)$$

s.a.

$$F_0(S^0) = 0 \quad \forall S^0 \geq 0 \quad (5.6)$$

$$dS_t = (r - \rho)S_t dt + \sigma S_t dB_t \quad (5.7)$$

$$S_0 = s_0 > 0, \quad (5.8)$$

Para un precio spot S al inicio de la explotación del bloque j , las definiciones anteriores posibilitan el cálculo explícito de G_e^j , según se muestra en el Apéndice A.6:

$$G_e^j = e^{-r\tau} S K L^j \frac{1 - e^{-\rho T_j(Q_j, K)}}{\rho} = e^{-r\tau} S R_j \quad (5.9)$$

El coeficiente R_j , definido de manera obvia, puede ser interpretado como una “cantidad modificada” del material contenido en el bloque j .

A su vez, el cálculo de G_d^j es directo:

$$G_d^j = - \int_{\tau}^{\tau+T_j(Q_j,K)} e^{-rt} K A^j dt = -e^{-r\tau} K A^j \frac{1 - e^{-rT_j(Q_j,K)}}{r} = -e^{-r\tau} C_j \quad (5.10)$$

El coeficiente C_j , también definido de manera obvia, corresponde al costo de producción del bloque j descontado hasta el momento de inicio de su explotación.

Definamos las probabilidades y estados según la Sección 4.1.1 y $\tilde{G}_e^j = e^{-r\tau} s_0 R_j$. El PPM(td) que formulamos entonces como aproximación del PPM(tc) es el siguiente:

$$J_j^*(s_0) = \max_{\tau \in U(s_0,j)} \sum_{s' \in ST(s_0,j,\tau)} p(s_0, j, \tau, s') (e^{-r\tau} (s_0 R_j - C_j) + e^{-r(\tau+T_j)} J_{j-1}^*(s')) \quad (5.11)$$

$$J_0^*(s) = 0 \quad \forall s \geq 0 \quad (5.12)$$

Finalmente, el modelo de programación lineal que resuelve este PPM(td) es el siguiente:

$$\text{mín } \lambda_{s_0,N} \quad (5.13)$$

s.a.

$$\lambda_{s,j} \geq \sum_{s' \in ST(s,j,\tau)} p(s, j, \tau, s') [e^{-r\tau} (s R_j - C_j) + e^{-r(\tau+T_j)} \lambda_{s',j-1}] \quad \forall (s, j) \in I, \forall \tau \in U(s, j) \quad (5.14)$$

$$\lambda_{s,0} = 0 \quad \forall s \quad (5.15)$$

En la Desigualdad 5.14, el costo de transición no depende de s' . Como la sumatoria está hecha a través de todos los s' posibles, dicha restricción puede ser replanteada de la siguiente manera:

$$\lambda_{s,j} \geq e^{-r\tau} (s R_j - C_j) + e^{-r(\tau+T_j)} \sum_{s' \in ST(s,j,\tau)} p(s, j, \tau, s') \lambda_{s',j-1} \quad \forall (s, j) \in I, \forall \tau \in U(s, j) \quad (5.16)$$

Para comparar los resultados de nuestro modelo, usamos la misma data utilizada en [6] y evaluamos seis secuencias con doce precios iniciales (ver Apéndice C). Tanto en esta sección de experimentos como en las siguientes utilizaremos $\varepsilon = 1$ Usc/lb. Se realizaron tres conjuntos de corridas, considerando en un caso $U(s, j) = \{0\} \forall (s, j)$ y $\Delta t = 0.5$; en otro caso $U(s, j) = \{0, 1, \dots, 5\} \forall (s, j) : j \in \{9, 10\}$, $U(s, j) = \{0\} \forall (s, j) : j \in \{1, \dots, 8\}$ y $\Delta t = 1$; y,

por último, $U(s, j) = \{0, 1, 2\} \forall (s, j) : j \in \{8, 9, 10\}$, $U(s, j) = \{0\} \forall (s, j) : j \in \{1, \dots, 7\}$ y $\Delta t = 0.8$.

El algoritmo de generación de precios fue programado en Delphi. El modelo de programación lineal fue implementado en GAMS y resuelto con el solver CPLEX, en un computador Core(TM)2 de 2.66 Ghz y 2 GB RAM. El resumen con los mejores resultados para cada precio inicial se muestra en las columnas FM de la Tabla 5.1.

En [6], los autores derivan una ecuación diferencial para F_j y computan su solución, entregando el valor óptimo F . Adicionalmente, mediante un algoritmo de agregación de bloques y desarrollos analíticos, entregan una cota inferior FL para aproximar el valor de F . Ambos valores se exhiben también en la Tabla 5.1. Además, se muestra una columna con el error relativo de las aproximaciones FL y FM , calculado como:

$$\text{Error FM} = \frac{|FM - F|}{F} \times 100 \%$$

$$\text{Error FL} = \frac{|FL - F|}{F} \times 100 \%$$

CAPÍTULO 5. MODELOS PARTICULARES Y EXPERIENCIAS NUMÉRICAS

Precio S_0	N1					N2				
	F	FL	Error FL	FM	Error FM	F	FL	Error FL	FM	Error FM
50	607	552	9.06 %	468	22.98 %	556	499	10.25 %	409	26.35 %
100	1,367	1,251	8.49 %	1,252	8.40 %	1,255	1,130	9.96 %	1,111	11.45 %
150	2,143	2,007	6.35 %	2,055	4.12 %	1,975	1,812	8.25 %	1,852	6.23 %
200	2,926	2,803	4.20 %	2,859	2.28 %	2,704	2,534	6.29 %	2,610	3.49 %
250	3,721	3,614	2.88 %	3,671	1.34 %	3,446	3,295	4.38 %	3,358	2.55 %
300	4,509	4,416	2.06 %	4,477	0.71 %	4,183	4,053	3.11 %	4,123	1.43 %
350	5,298	5,219	1.49 %	5,288	0.18 %	4,921	4,810	2.26 %	4,886	0.70 %
400	6,097	6,030	1.10 %	6,104	0.11 %	5,670	5,577	1.64 %	5,641	0.51 %
450	6,888	6,832	0.81 %	6,914	0.37 %	6,410	6,335	1.17 %	6,408	0.03 %
500	7,679	7,635	0.57 %	7,657	0.29 %	7,152	7,092	0.84 %	7,120	0.45 %
550	8,480	8,446	0.40 %	8,466	0.17 %	7,902	7,859	0.54 %	7,883	0.24 %
600	9,272	9,248	0.26 %	9,273	0.01 %	8,644	8,617	0.31 %	8,647	0.03 %
Precio S_0	N3					N4				
	F	FL	Error FL	FM	Error FM	F	FL	Error FL	FM	Error FM
50	598	543	9.20 %	466	22.12 %	599	541	9.68 %	430	28.18 %
100	1,350	1,232	8.74 %	1,229	8.98 %	1,352	1,227	9.25 %	1,195	11.59 %
150	2,120	1,975	6.84 %	2,019	4.77 %	2,123	1,967	7.35 %	1,978	6.85 %
200	2,896	2,761	4.66 %	2,814	2.82 %	2,901	2,751	5.17 %	2,787	3.92 %
250	3,684	3,567	3.18 %	3,612	1.95 %	3,691	3,562	3.49 %	3,601	2.43 %
300	4,465	4,363	2.28 %	4,409	1.26 %	4,474	4,363	2.48 %	4,409	1.45 %
350	5,247	5,159	1.68 %	5,210	0.71 %	5,259	5,164	1.81 %	5,224	0.67 %
400	6,040	5,965	1.24 %	6,012	0.46 %	6,054	5,975	1.30 %	6,037	0.28 %
450	6,823	6,762	0.89 %	6,812	0.16 %	6,840	6,776	0.94 %	6,849	0.13 %
500	7,607	7,558	0.64 %	7,610	0.04 %	7,627	7,577	0.66 %	7,599	0.37 %
550	8,401	8,364	0.44 %	8,417	0.19 %	8,423	8,388	0.42 %	8,402	0.25 %
600	9,186	9,160	0.28 %	9,163	0.25 %	9,211	9,189	0.24 %	9,204	0.08 %
Precio S_0	N5					N6				
	F	FL	Error FL	FM	Error FM	F	FL	Error FL	FM	Error FM
50	587	535	8.86 %	465	20.83 %	602	549	8.80 %	467	22.44 %
100	1,325	1,213	8.45 %	1,221	7.87 %	1,356	1,245	8.19 %	1,242	8.42 %
150	2,078	1,945	6.40 %	1,999	3.82 %	2,125	1,996	6.07 %	2,033	4.33 %
200	2,837	2,717	4.23 %	2,780	2.02 %	2,901	2,786	3.96 %	2,826	2.58 %
250	3,608	3,505	2.85 %	3,567	1.14 %	3,689	3,590	2.68 %	3,625	1.73 %
300	4,373	4,283	2.06 %	4,348	0.57 %	4,469	4,384	1.90 %	4,419	1.12 %
350	5,138	5,062	1.48 %	5,136	0.03 %	5,251	5,178	1.39 %	5,219	0.61 %
400	5,914	5,849	1.10 %	5,928	0.23 %	6,043	5,982	1.01 %	6,022	0.35 %
450	6,681	6,628	0.79 %	6,650	0.46 %	6,827	6,777	0.73 %	6,820	0.10 %
500	7,449	7,406	0.58 %	7,432	0.23 %	7,611	7,571	0.53 %	7,617	0.08 %
550	8,226	8,194	0.39 %	8,217	0.11 %	8,404	8,375	0.35 %	8,387	0.20 %
600	8,995	8,972	0.26 %	9,002	0.07 %	9,189	9,169	0.22 %	9,187	0.03 %

Tabla 5.1: Resultados del modelo base.

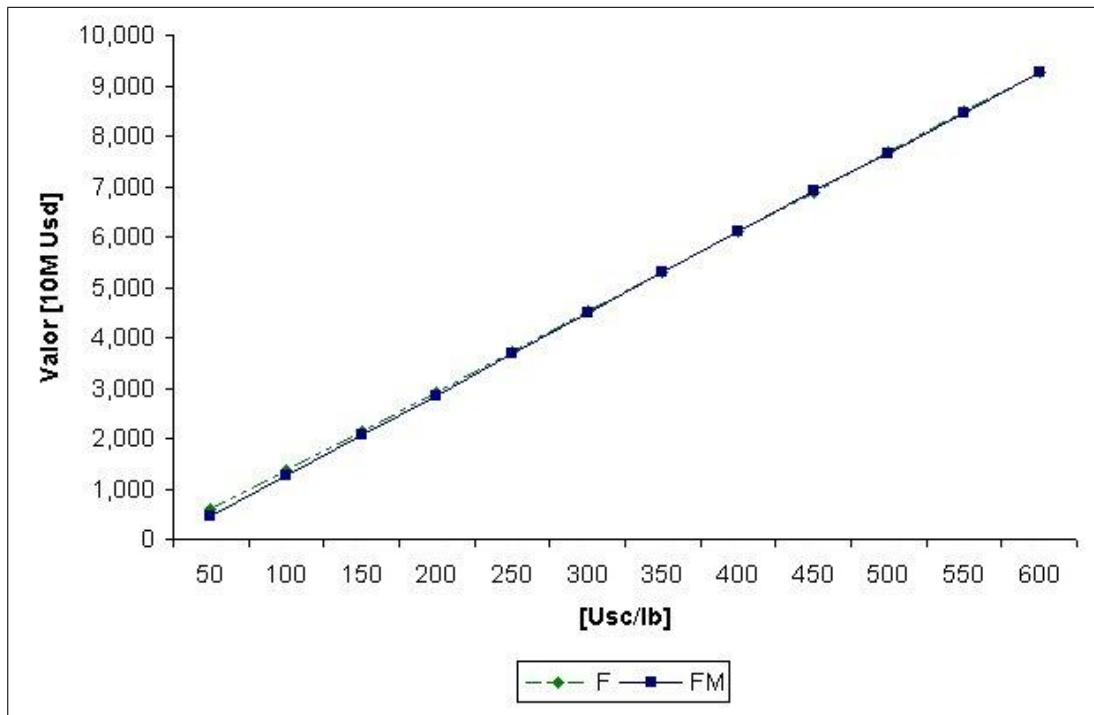


Figura 5.1: Valor óptimo F y aproximación FM para la secuencia N1.

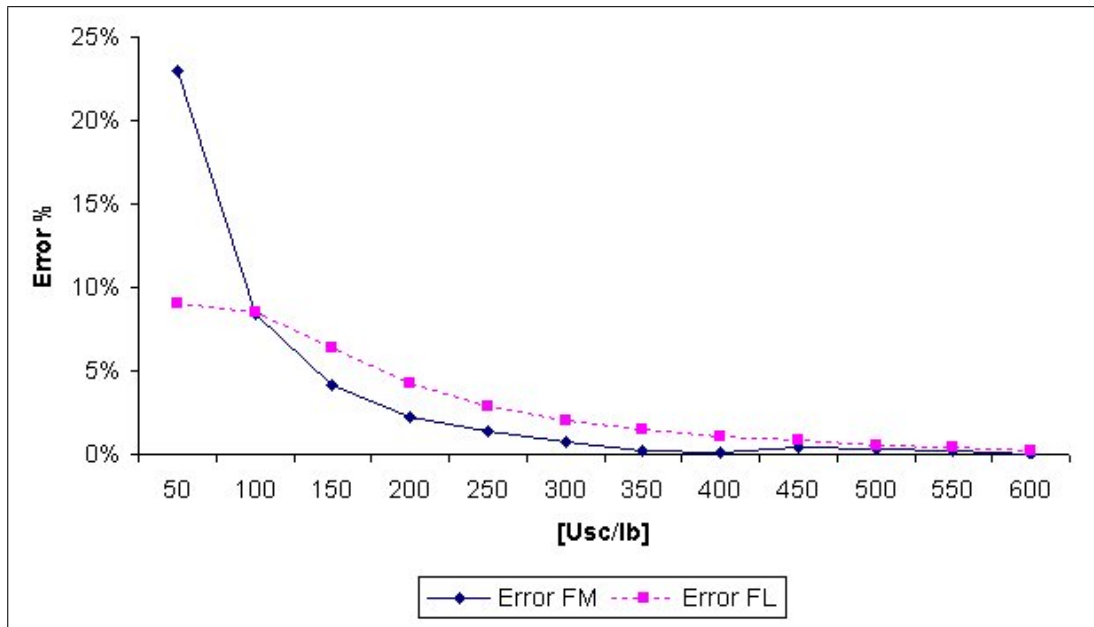


Figura 5.2: Error porcentual de las aproximaciones FL y FM para la secuencia N1.

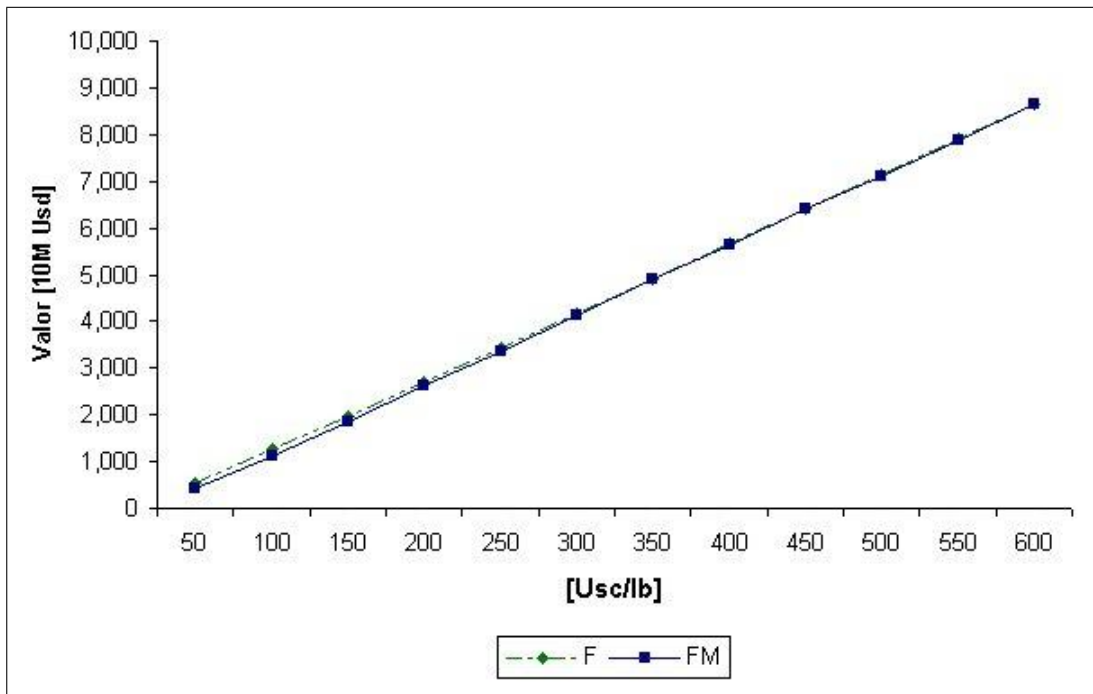


Figura 5.3: Valor óptimo F y aproximación FM para la secuencia N2.

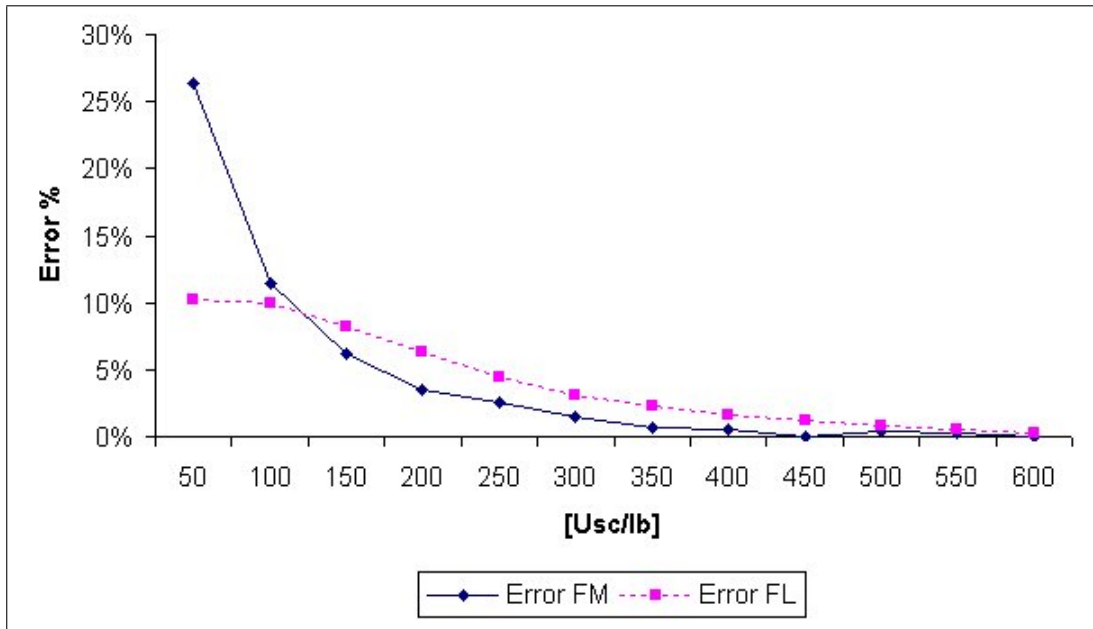


Figura 5.4: Error porcentual de las aproximaciones FL y FM para la secuencia N2.

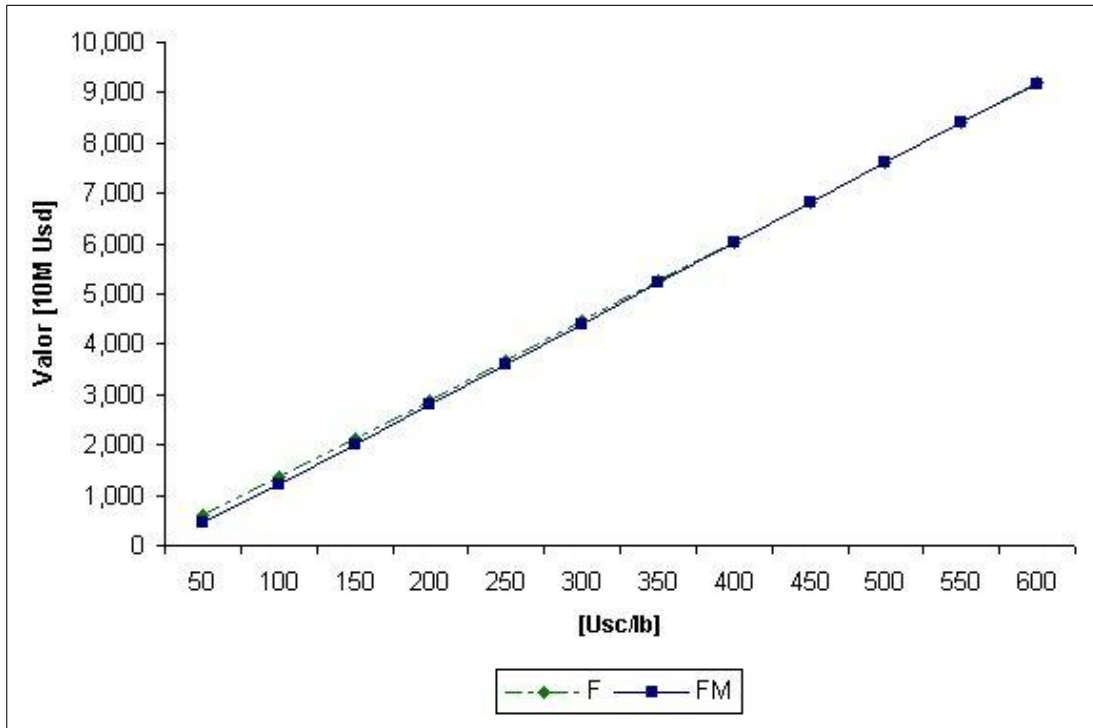


Figura 5.5: Valor óptimo F y aproximación FM para la secuencia N3.

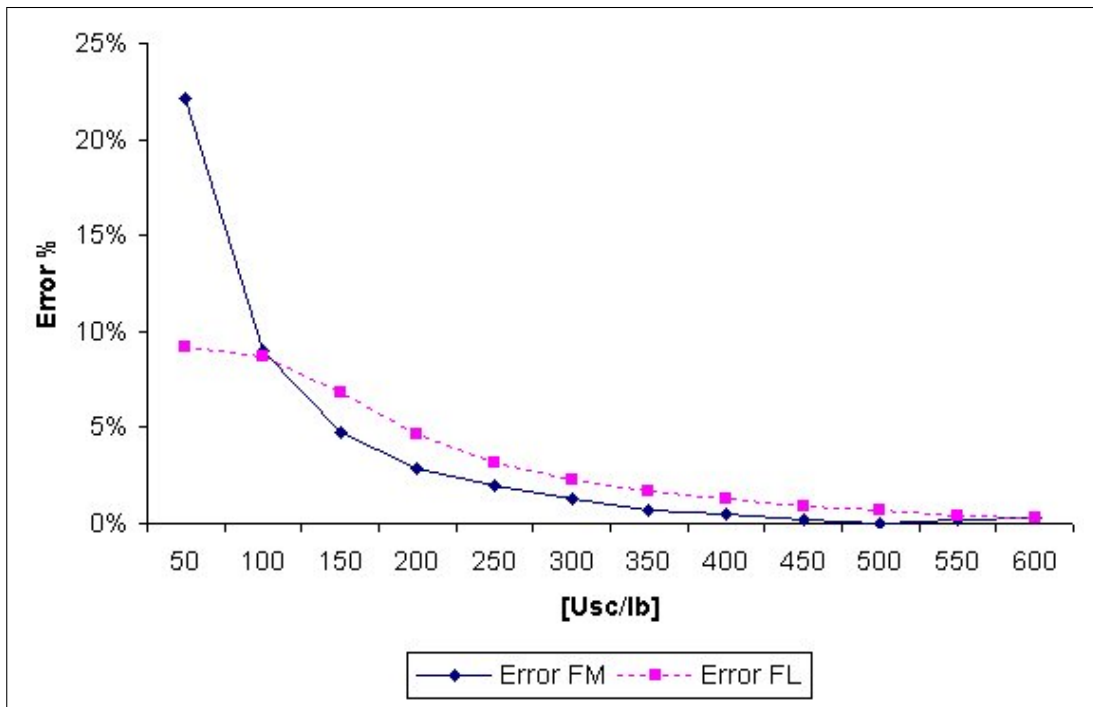


Figura 5.6: Error porcentual de las aproximaciones FL y FM para la secuencia N3.

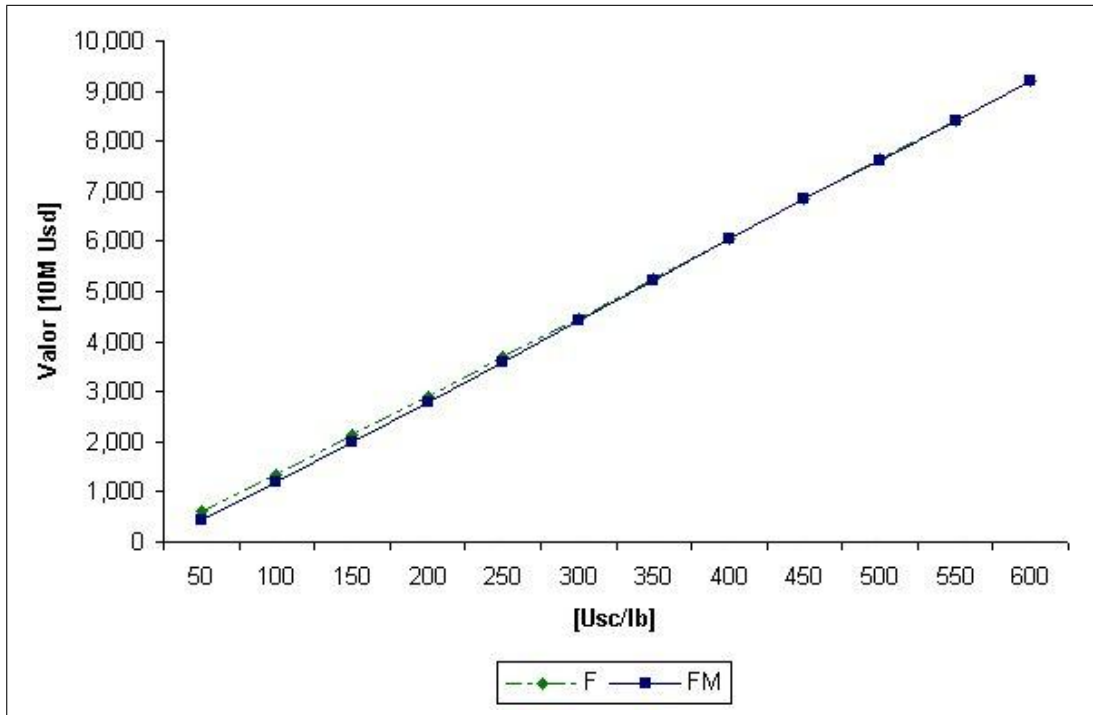


Figura 5.7: Valor óptimo F y aproximación FM para la secuencia N4.

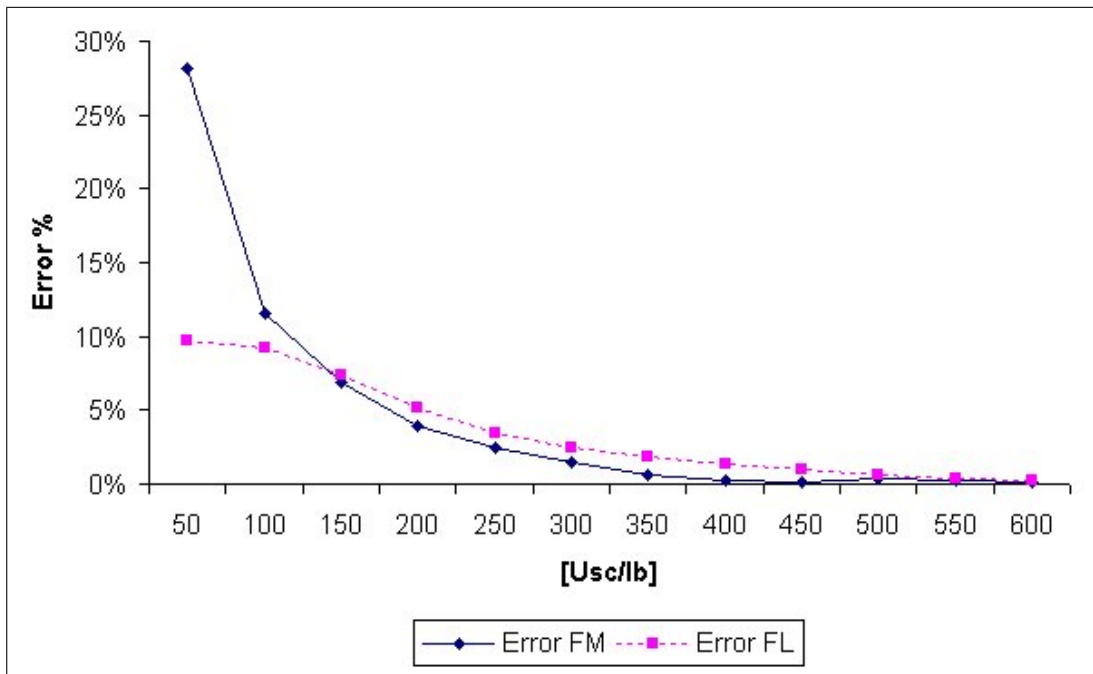


Figura 5.8: Error porcentual de las aproximaciones FL y FM para la secuencia N4.

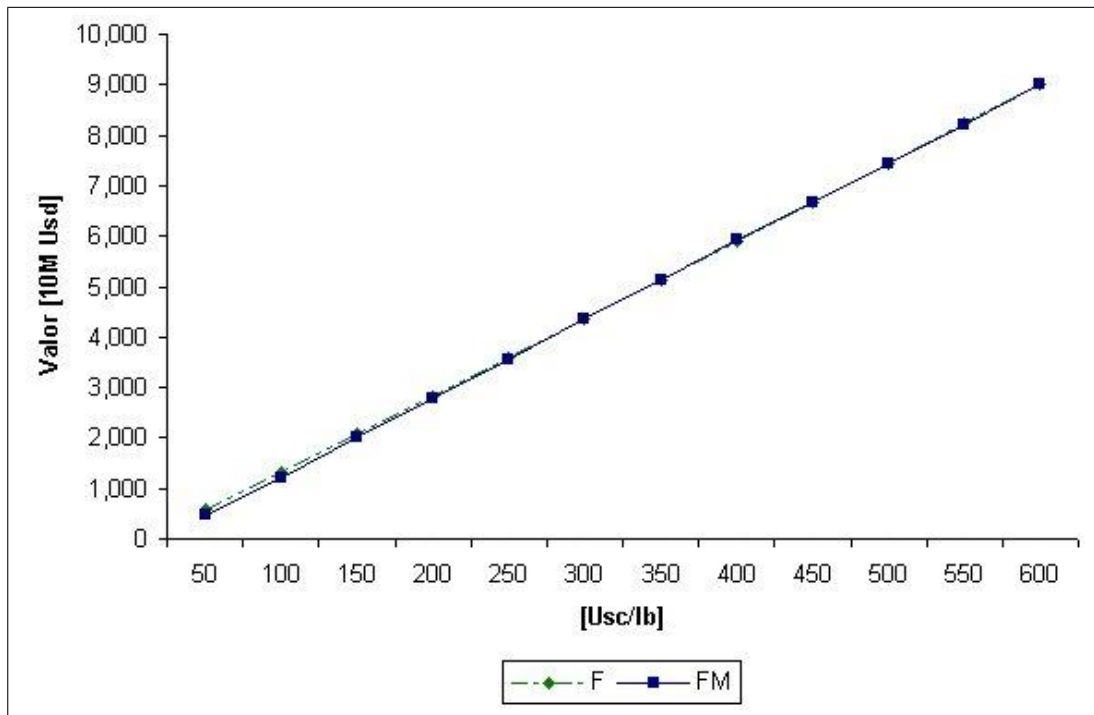


Figura 5.9: Valor óptimo F y aproximación FM para la secuencia N5.

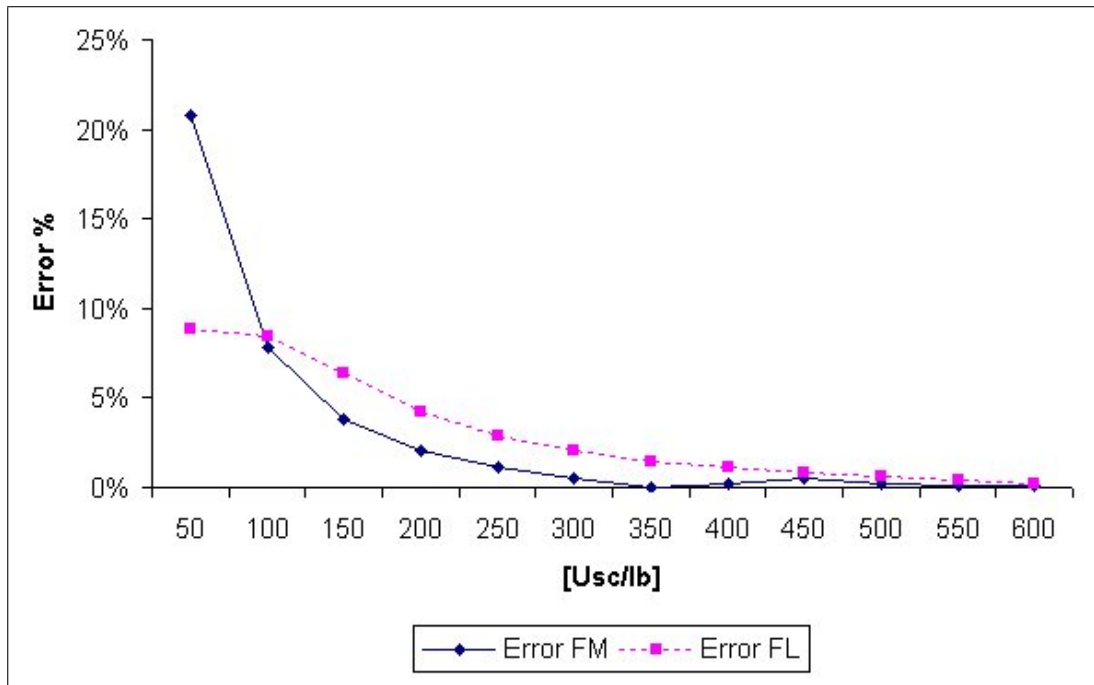


Figura 5.10: Error porcentual de las aproximaciones FL y FM para la secuencia N5.

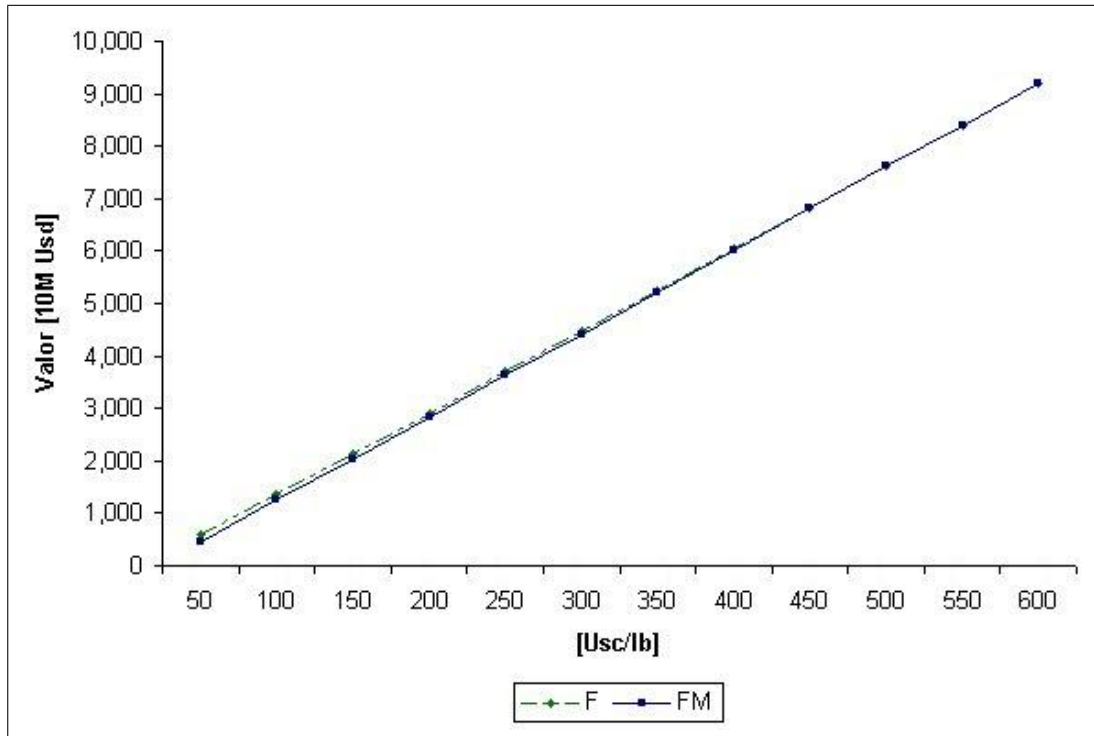


Figura 5.11: Valor óptimo F y aproximación FM para la secuencia N6.

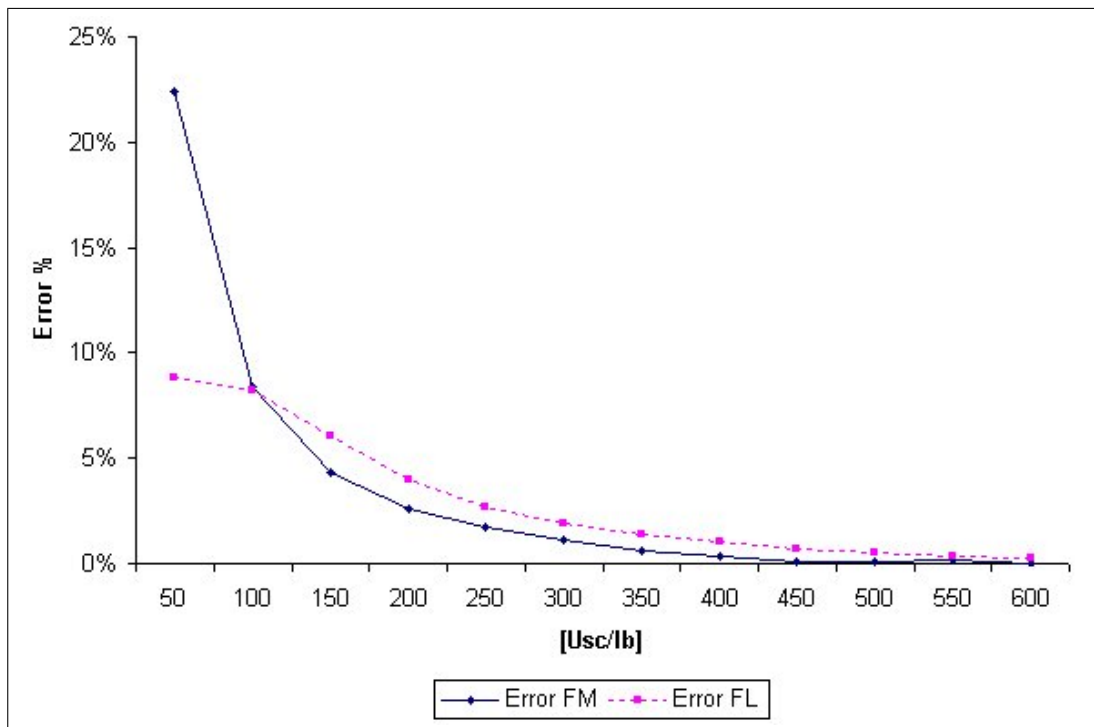


Figura 5.12: Error porcentual de las aproximaciones FL y FM para la secuencia N6.

Los gráficos al comienzo de cada página denotan la proximidad de las curvas F y FM para cada secuencia evaluada. Los gráficos al final de cada página muestran el error relativo de las aproximaciones FL y FM al valor F .

En general, se aprecia que nuestra aproximación FM posee un muy buen comportamiento para precios en el intervalo $[350, 600]$, con un error de orden menor al 1% y un promedio de 0.25%. Para el intervalo $[150, 300]$ la calidad de la aproximación es algo menor, con un margen de error que va desde el 0.57% hasta el 6.85% y un promedio de 2.70%. En el intervalo de precios más bajos $[50, 100]$, el porcentaje de error es significativo, en promedio de 16.63% y en más de una secuencia se llega hasta niveles por sobre el 20%. Esto puede ser explicado por la definición del conjunto $U(s, j)$ que acota los valores que puede tomar el tiempo τ . A menor precio, acelerar el comienzo de la producción tiende a subestimar significativamente la opción de esperar precio más altos. Esto explica el alto gap de la aproximación en el intervalo de precios más bajos. Por el contrario, a medida que se incrementa el precio inicial, la estrategia de comenzar a explotar inmediatamente todos o algunos de los bloques es mejor, pues se evita un descuento más fuerte del flujo y, por lo tanto, la aproximación de FM a F es mejor en los intervalos de precios más altos.

En el total de 72 corridas, la aproximación FM está más cerca que FL del óptimo F en 62 casos, equivalentes al 86.1%, siendo los 10 casos restantes escenarios en que el precio inicial está en el intervalo $[50, 100]$; para todas las secuencias, nuestra aproximación FM es mejor que FL cuando el precio inicial se encuentra en el intervalo $[150, 600]$. La discretización utilizada y la resolución del subproblema generado para los pasos Δt y conjuntos $U(s, j)$ especificados, entregan entonces buenas aproximaciones en un amplio rango de precios. Empíricamente, se observa mayor proximidad al valor óptimo del problema original a medida que aumentamos el precio. Sin embargo, en algunos casos nuestra aproximación FM sobreestima el valor del proyecto, por ejemplo, en la secuencia N2 cuando el precio inicial es 600 Usc/lb. Esto podría ser explicado por una sobreestimación de la magnitud de los precios generados para la secuencia a partir de ese precio.

Finalmente, es interesante observar el desempeño relativo de las distintas secuencias estudiadas. Notar que según F y FL la mejor secuencia es N1. Bajo nuestra aproximación FM

también se tiene que la secuencia N1 otorga el mayor valor para el proyecto.

5.2. Costo de mantenimiento

Una de las ventajas del enfoque de resolución que utilizamos radica en la flexibilidad que permite a la forma que adopte la función de costos $\tilde{g}_d(\cdot)$, pues para efectos del PPM(td) un cambio en ésta se reporta sólo como el cambio del valor de un conjunto de parámetros, lo que no altera la metodología de resolución.

Consideremos ahora que existe un costo de mantenimiento asociado al proyecto por cada unidad de tiempo, independiente de si se está o no extrayendo. Es razonable pensar que este costo crece con la capacidad. Lo denotaremos por $\tilde{H}(K)$. Cuando se incluye este concepto en la función de costos, la definición 5.3 cambia a lo siguiente:

$$\tilde{g}_d(K, A^j, j, t, \tau) = \begin{cases} -\tilde{H}(K) & \text{si } 0 \leq t < \tau \\ -\tilde{H}(K) - KA^j & \text{si } \tau \leq t \leq \tau + T_j \end{cases} \quad (5.17)$$

Luego, el valor de G_d^j es:

$$G_d^j = - \int_0^{\tau+T_j(Q_j, K)} e^{-rt} \tilde{H}(K) dt - \int_{\tau}^{\tau+T_j(Q_j, K)} e^{-rt} KA^j dt \quad (5.18)$$

$$= -\tilde{H}(K) \frac{1 - e^{-r\{\tau+T_j(Q_j, K)\}}}{r} - e^{-r\tau} KA^j \frac{1 - e^{-rT_j(Q_j, K)}}{r} \quad (5.19)$$

El PPM(tc) 5.5 - 5.8, el PPM(td) 5.11 - 5.12 y el PPL 5.13 - 5.16 mantienen su estructura con este nuevo valor del parámetro G_d^j .

Implementamos el modelo considerando una función de costo de mantenimiento proporcional a la capacidad: $\tilde{H}(K) = \alpha K$.

Usamos la misma data del Apéndice C, $\alpha = 5$, $U(s, j) = \{0, 1, 2\} \forall (s, j) : j \in \{8, 9, 10\}$, $U(s, j) = \{0\} \forall (s, j) : j \in \{1, \dots, 7\}$ y $\Delta t = 0.8$. La Tabla 5.2 muestra en las columnas FC los resultados obtenidos para las seis secuencias y doce precios iniciales evaluados, y el valor óptimo F cuando no se consideraba dicho costo.

CAPÍTULO 5. MODELOS PARTICULARES Y EXPERIENCIAS NUMÉRICAS

Precio S_0	N1		N2		N3		N4		N5		N6	
	F	FC	F	FC	F	FC	F	FC	F	FC	F	FC
50	607	180	556	101	598	172	599	152	587	182	602	185
100	1,367	972	1,255	814	1,350	948	1,352	918	1,325	946	1,356	964
150	2,143	1,773	1,975	1,546	2,120	1,739	2,123	1,701	2,078	1,721	2,125	1,751
200	2,926	2,578	2,704	2,288	2,896	2,532	2,901	2,485	2,837	2,500	2,901	2,544
250	3,721	3,386	3,446	3,037	3,684	3,330	3,691	3,276	3,608	3,286	3,689	3,342
300	4,509	4,191	4,183	3,778	4,465	4,125	4,474	4,064	4,373	4,067	4,469	4,134
350	5,298	5,002	4,921	4,530	5,247	4,926	5,259	4,859	5,138	4,853	5,251	4,932
400	6,097	5,817	5,670	5,284	6,040	5,727	6,054	5,657	5,914	5,643	6,043	5,735
450	6,888	6,627	6,410	6,039	6,823	6,526	6,840	6,449	6,681	6,428	6,827	6,532
500	7,679	7,435	7,152	6,792	7,607	7,323	7,627	7,242	7,449	7,213	7,611	7,330
550	8,480	8,250	7,902	7,552	8,401	8,129	8,423	8,040	8,226	8,005	8,404	8,133
600	9,272	9,061	8,644	8,303	9,186	8,930	9,211	8,835	8,995	8,793	9,189	8,933

Tabla 5.2: Resultados considerando costo de mantenimiento.

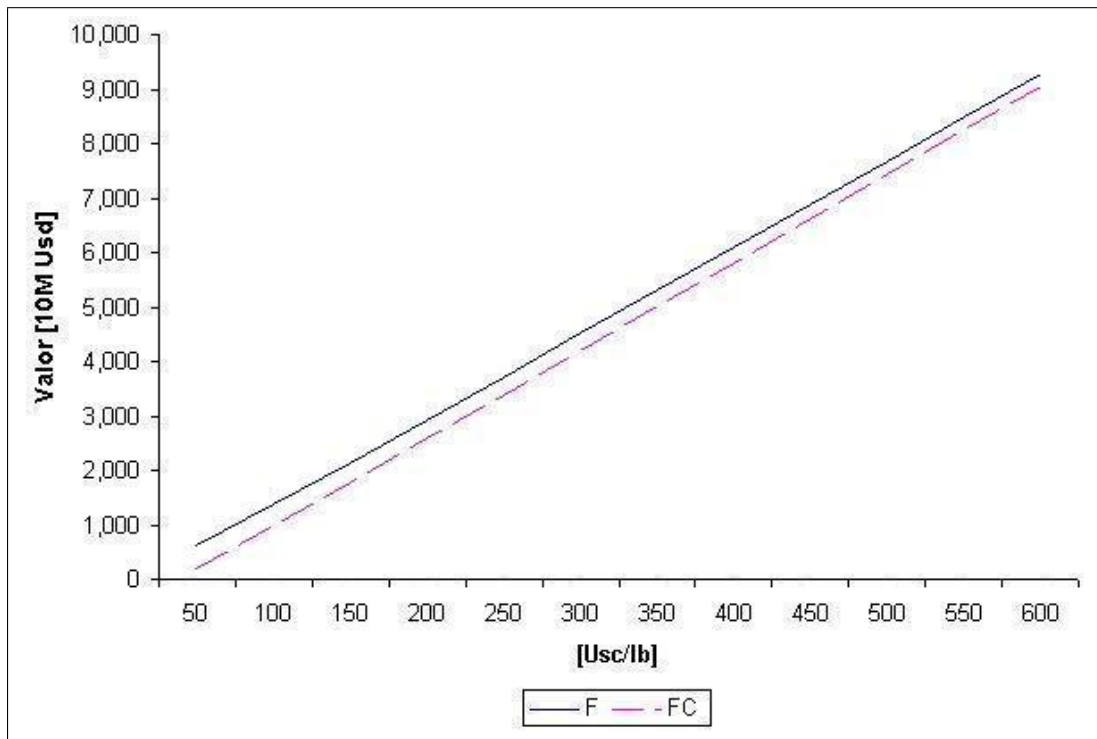


Figura 5.13: Valor óptimo F y curva de la aproximación con costo de mantenimiento FC para la secuencia N1.

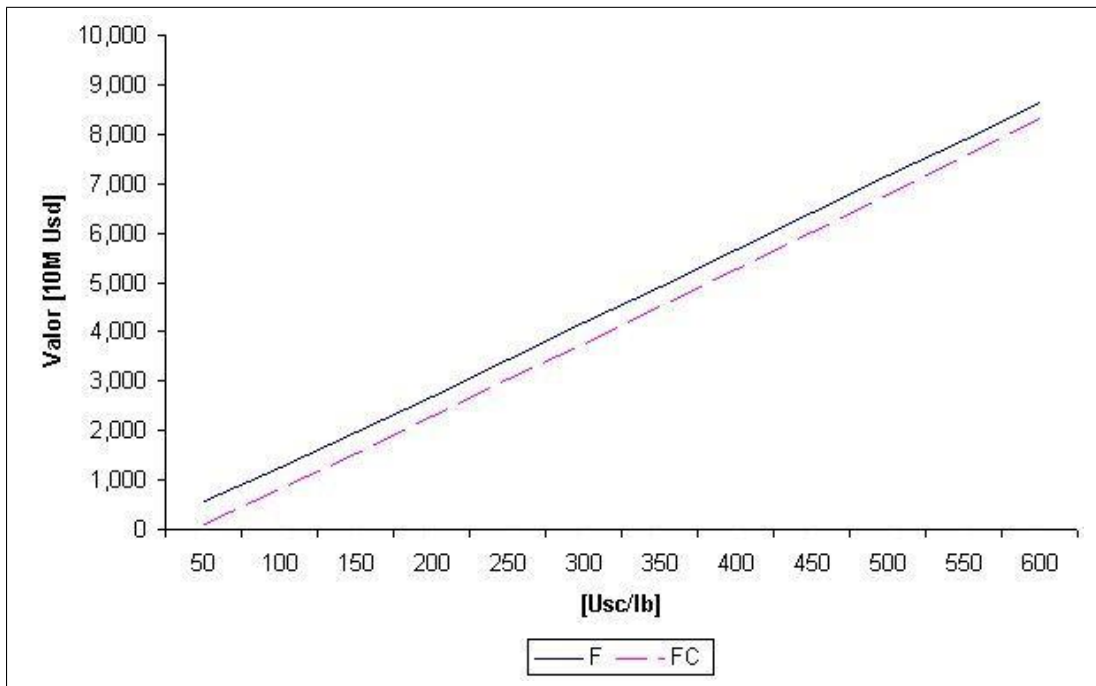


Figura 5.14: Valor óptimo F y curva de la aproximación con costo de mantenimiento FC para la secuencia N2.

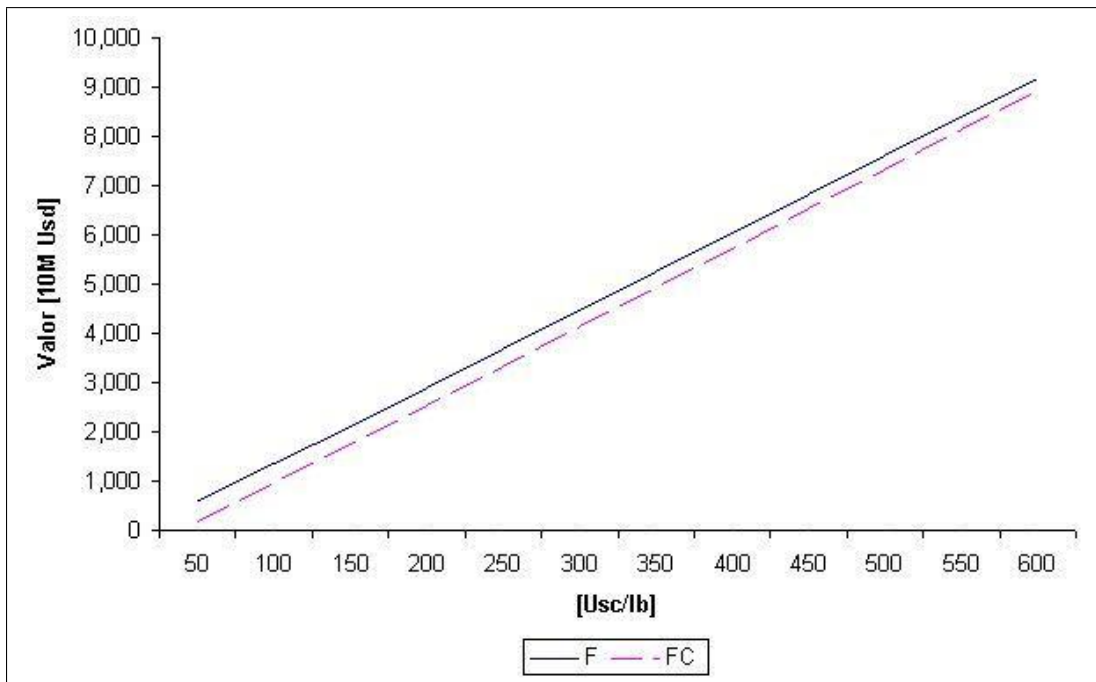


Figura 5.15: Valor óptimo F y curva de la aproximación con costo de mantenimiento FC para la secuencia N3.

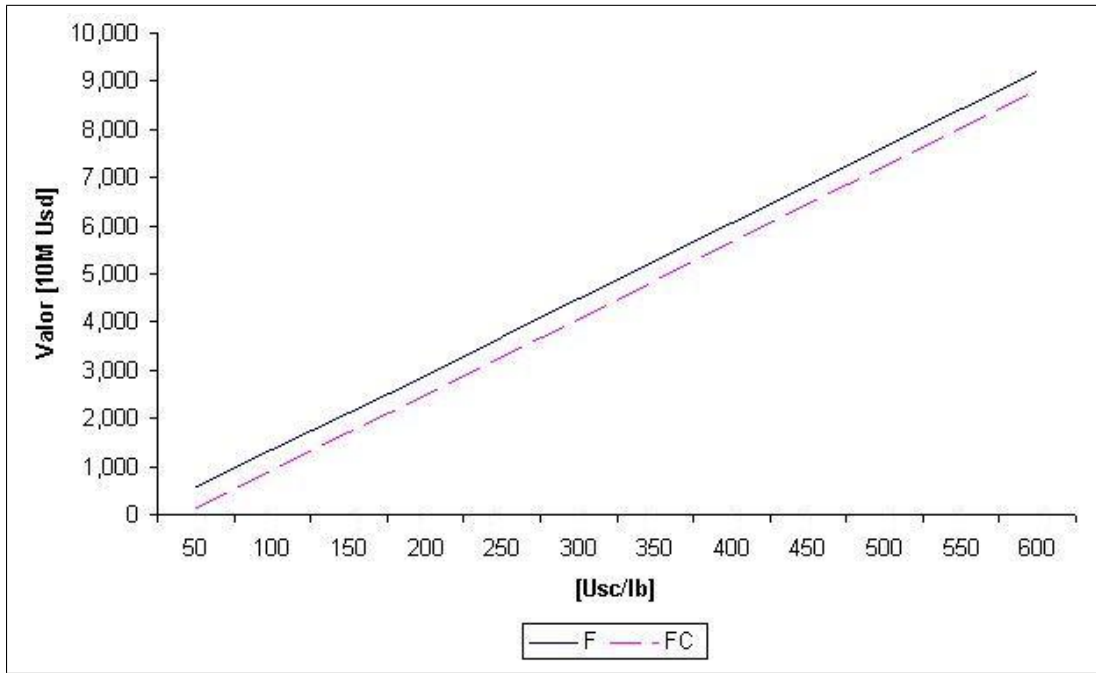


Figura 5.16: Valor óptimo F y curva de la aproximación con costo de mantenimiento FC para la secuencia N4.

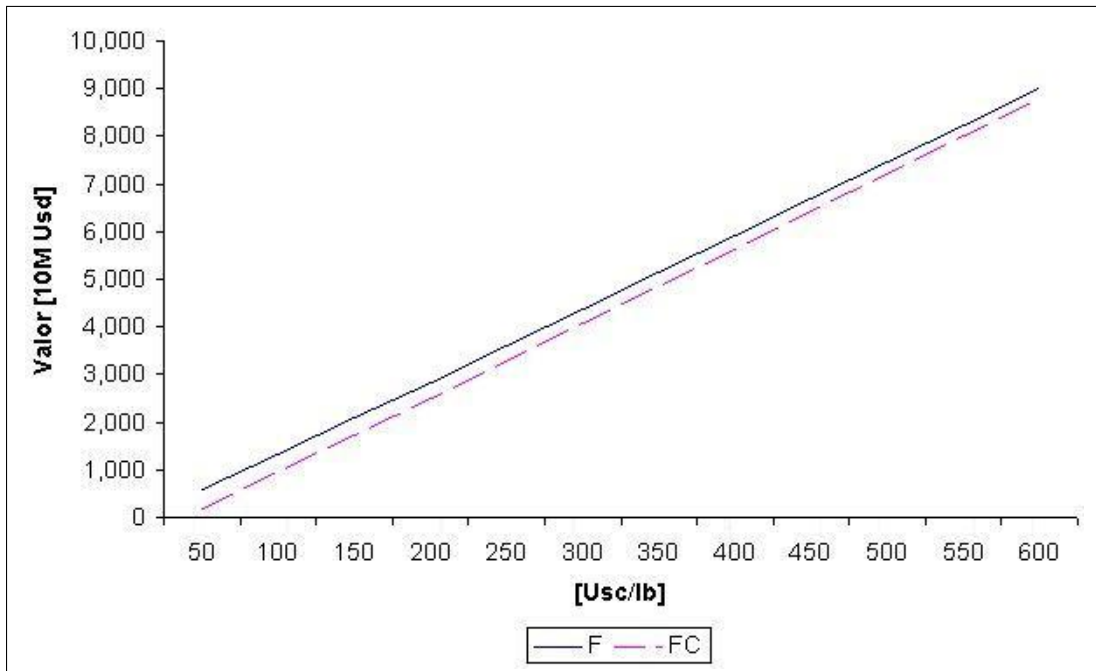


Figura 5.17: Valor óptimo F y curva de la aproximación con costo de mantenimiento FC para la secuencia N5.

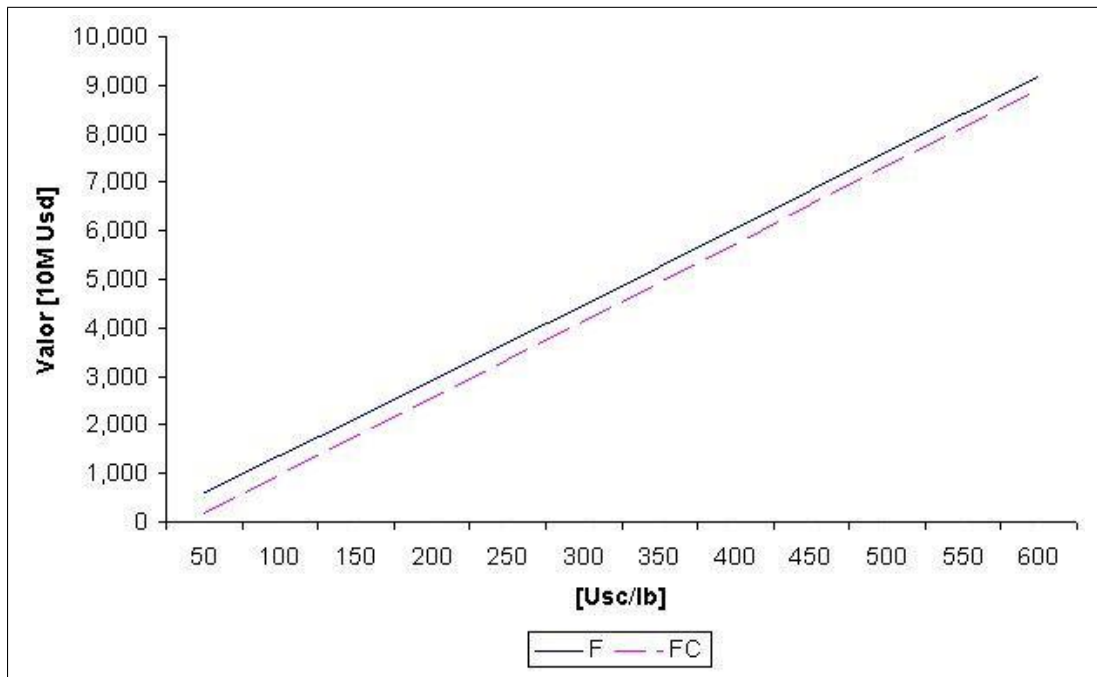


Figura 5.18: Valor óptimo F y curva de la aproximación con costo de mantenimiento FC para la secuencia N6.

La línea continua de los gráficos de las Figuras 5.13 - 5.18 muestra la curva F , mientras que la línea punteada bosqueja la curva FC . Se observa que el efecto de agregar el costo de mantenimiento es el desplazamiento hacia abajo de la curva del valor del proyecto, pero prácticamente no modifica su forma. Esto es razonable, pues para efectos del problema, el nuevo ítem de costo se reporta como una disminución del valor del parámetro G_d^j .

Notar que la diferencia entre F y FC decrece a medida que aumenta el precio inicial. Explicamos este hecho porque cuando el precio inicial es mayor es menos probable que los precios en el futuro decrezcan a niveles tales que sea más conveniente esperar y, por lo tanto, la estrategia óptima tiende a ser comenzar la producción inmediatamente en todas las etapas. Esto implicaría que el costo incurrido por concepto de mantenimiento tienda a decrecer en cierto intervalo de precios iniciales, pues el tiempo total de la operación es menor. Además, como el modelo base considera que no se incurre en costos al mantener parada la producción, se esperaría que la estrategia óptima para computar el valor F pueda permitir ventanas más amplias de tiempo ocioso.

La mejor secuencia según FC sigue siendo N1 para todos los precios iniciales, excepto

para $S_0 = 50$ Usc/lb, donde el mayor valor de FC se logra para N6.

5.3. Opción de abandono

Hasta el momento sólo hemos considerado el problema del timing de extracción. Una extensión interesante es estudiar el mismo problema de la Sección 5.1, pero además considerando que el proyecto puede ser abandonado al inicio de cualquier etapa. En nuestro enfoque, esto se traduce en la declaración de una variable de estado adicional como parte de la componente Γ . Llamaremos h_j a esta variable, que es de naturaleza binaria, y se define como sigue:

$$h_j = \begin{cases} 0 & \text{si el proyecto está abandonado al inicio de la etapa } j \\ 1 & \text{si el proyecto está en operación al inicio de la etapa } j \end{cases} \quad (5.20)$$

Adicionalmente, el PPM(tc) debe ser extendido agregando una variable de decisión que llamaremos y_j , definida para cada etapa j de la siguiente manera:

$$y_j = \begin{cases} 0 & \text{si se decide abandonar el proyecto en la etapa } j \\ 1 & \text{si se decide continuar con el proyecto en la etapa } j \end{cases} \quad (5.21)$$

Los precios y probabilidades de transición se calculan del mismo modo que en los problemas anteriores. Las transiciones ahora deben considerar la decisión de abandono, esto es, si en una etapa se decide abandonar el proyecto, el estado h en todas las etapas siguientes debe ser cero:

$$h_{j-1} = \begin{cases} 0 & h_j = 0 \vee (h_j = 1 \wedge y_j = 0) \\ 1 & h_j = 1 \wedge y_j = 1 \end{cases} \quad (5.22)$$

Supondremos que el beneficio residual de abandonar depende de la etapa y de la capacidad y lo denotaremos por $B(j, K)$.

Para aproximar el valor óptimo de este nuevo problema, extendemos el PPM(td) según el siguiente modelo de programación dinámica estocástica a tiempo discreto:

$$\begin{aligned}
 J_j^*(s_0, 1) = & \max_{\tau \in U(s_0, j), y_j \in \{0, 1\}} \sum_{s' \in ST(s_0, j, \tau)} p(s_0, j, \tau, s') \{e^{-r\tau} (s_0 R_j(K) - C_j(K)) \\
 & + e^{-r(\tau+T_j)} J_{j-1}^*(s', 1)\} y_j + B(j, K)(1 - y_j)
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

$$J_0^*(s, 1) = 0 \quad \forall s \tag{5.24}$$

El modelo de programación lineal asociado a este nuevo problema es entonces el siguiente:

$$\text{mín } \lambda_{s_0, N, 1} \tag{5.25}$$

s.a.

$$\lambda_{s, j, 1} \geq e^{-r\tau} (s R_j - C_j) + e^{-r(\tau+T_j)} \sum_{s' \in ST(s, j, \tau)} p(s, j, \tau, s') \lambda_{s', j-1, 1} \tag{5.26}$$

$$\forall s, j : (s, j, 1) \in I, \quad \forall \tau : (\tau, 1) \in U(s, j, 1)$$

$$\lambda_{s, j, 1} \geq B(j, K) \quad \forall s, j : (s, j, 1) \in I, \quad \forall \tau : (\tau, 0) \in U(s, j, 1) \tag{5.27}$$

$$\lambda_{s, j, 0} = 0 \quad \forall s, j : (s, j, 0) \in I \tag{5.28}$$

$$\lambda_{s, 0, h} = 0 \quad \forall s, h : (s, 0, h) \in I \tag{5.29}$$

Implementamos el modelo anterior utilizando la misma data del Apéndice C para comparar el desempeño de la estrategia comenzar la producción inmediatamente en todas las etapas. Utilizamos $B(j, K) = 0 \quad \forall j$, $\Delta t = 0.5$ y $U(s, j, 1) = \{(0, 0), (0, 1)\} \quad \forall (s, j)$ (Notar que debido a la restricción 5.28 y la definición 5.22 la especificación de U cuando $h = 0$ se torna irrelevante). Las columnas *FA* de la Tabla 5.3 muestran los resultados obtenidos para las distintas secuencias y precios iniciales. Además se muestra una columna con los valores *FS*

obtenidos para el modelo base, considerando $\Delta t = 0.5$ y $U(s, j) = \{0\} \forall (s, j)$, y la diferencia absoluta y porcentual entre los valores FA y FS .

CAPÍTULO 5. MODELOS PARTICULARES Y EXPERIENCIAS NUMÉRICAS

Precio S_0	N1				N2			
	FS	FA	$FA - FS$	Diferencia %	FS	FA	$FA - FS$	Diferencia %
50	394	488	94	23.97 %	253	406	153	60.59 %
100	1,201	1,260	59	4.92 %	1,017	1,117	100	9.82 %
150	2,007	2,051	44	2.18 %	1,776	1,852	76	4.28 %
200	2,814	2,849	36	1.26 %	2,540	2,603	63	2.48 %
250	3,621	3,651	30	0.82 %	3,303	3,358	55	1.66 %
300	4,429	4,455	26	0.58 %	4,064	4,112	48	1.18 %
350	5,236	5,260	24	0.45 %	4,831	4,874	43	0.89 %
400	6,044	6,065	21	0.35 %	5,592	5,631	39	0.70 %
450	6,852	6,871	19	0.28 %	6,355	6,392	37	0.58 %
500	7,657	7,675	18	0.23 %	7,120	7,154	34	0.47 %
550	8,466	8,482	16	0.19 %	7,883	7,915	32	0.40 %
600	9,273	9,288	15	0.16 %	8,647	8,676	30	0.34 %
Precio S_0	N3				N4			
	FS	FA	$FA - FS$	Diferencia %	FS	FA	$FA - FS$	Diferencia %
50	363	478	115	31.58 %	352	481	129	36.60 %
100	1,166	1,243	77	6.60 %	1,159	1,246	87	7.50 %
150	1,963	2,023	60	3.04 %	1,975	2,041	66	3.36 %
200	2,765	2,814	50	1.80 %	2,787	2,843	55	1.99 %
250	3,564	3,607	43	1.20 %	3,601	3,650	49	1.35 %
300	4,365	4,403	38	0.86 %	4,409	4,452	43	0.98 %
350	5,163	5,197	34	0.66 %	5,224	5,262	38	0.73 %
400	5,965	5,996	32	0.53 %	6,037	6,072	35	0.58 %
450	6,763	6,792	29	0.43 %	6,849	6,882	33	0.47 %
500	7,567	7,593	27	0.35 %	7,660	7,690	30	0.39 %
550	8,362	8,387	25	0.30 %	8,475	8,503	28	0.33 %
600	9,163	9,187	23	0.25 %	9,290	9,316	26	0.28 %
Precio S_0	N5				N6			
	FS	FA	$FA - FS$	Diferencia %	FS	FA	$FA - FS$	Diferencia %
50	380	474	94	24.77 %	398	489	90	22.62 %
100	1,163	1,222	59	5.10 %	1,197	1,254	57	4.73 %
150	1,947	1,992	45	2.30 %	1,996	2,038	42	2.09 %
200	2,729	2,765	36	1.33 %	2,794	2,829	35	1.24 %
250	3,513	3,544	31	0.88 %	3,593	3,622	29	0.81 %
300	4,298	4,325	27	0.63 %	4,393	4,418	25	0.57 %
350	5,082	5,106	24	0.47 %	5,192	5,215	23	0.44 %
400	5,865	5,887	22	0.37 %	5,991	6,012	21	0.35 %
450	6,650	6,670	20	0.30 %	6,791	6,810	20	0.29 %
500	7,432	7,450	18	0.24 %	7,587	7,605	18	0.23 %
550	8,217	8,234	17	0.21 %	8,387	8,404	16	0.19 %
600	9,002	9,018	16	0.18 %	9,187	9,202	15	0.16 %

Tabla 5.3: Resultados considerando opción de abandono.

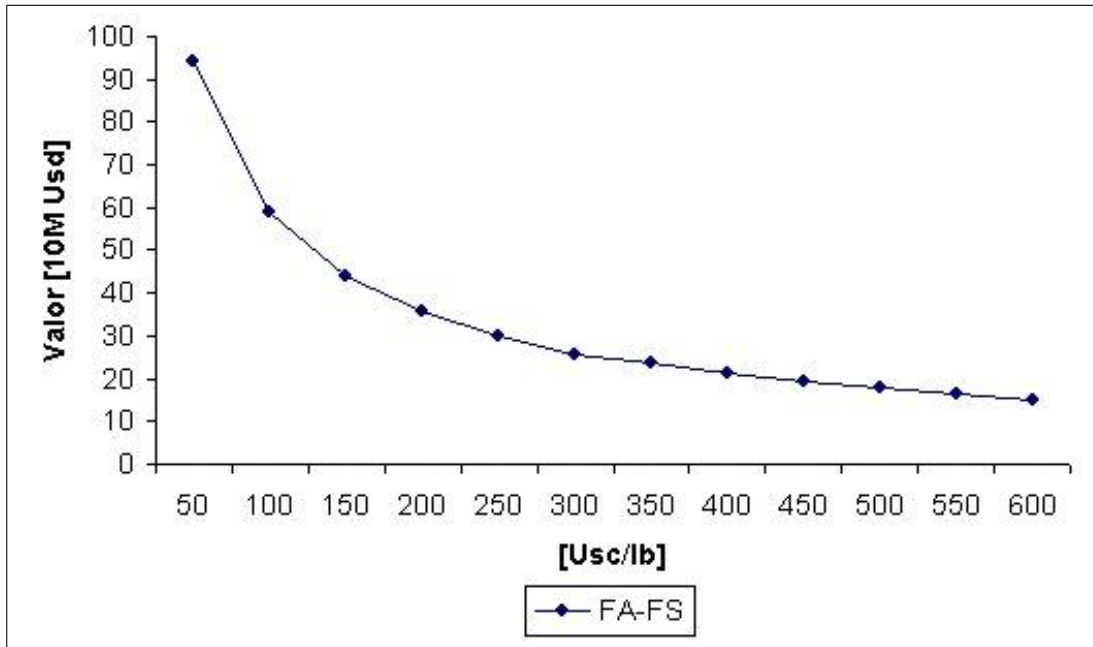


Figura 5.19: Valor aproximado de la opción de abandono para la secuencia N1.

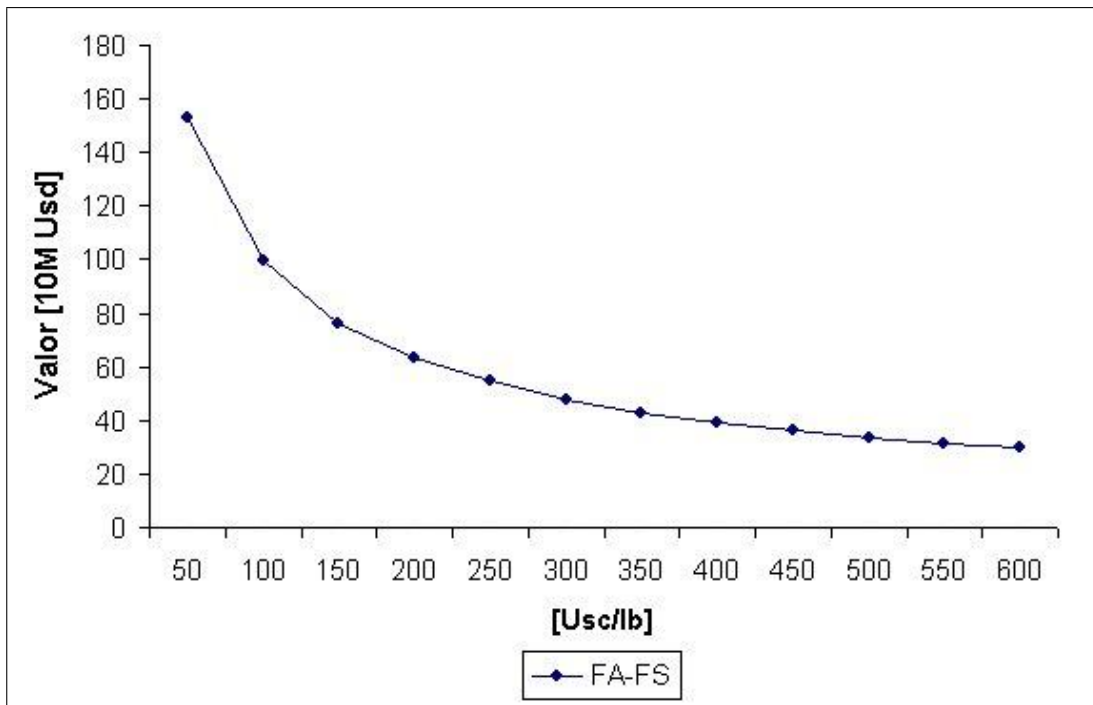


Figura 5.20: Valor aproximado de la opción de abandono para la secuencia N2.

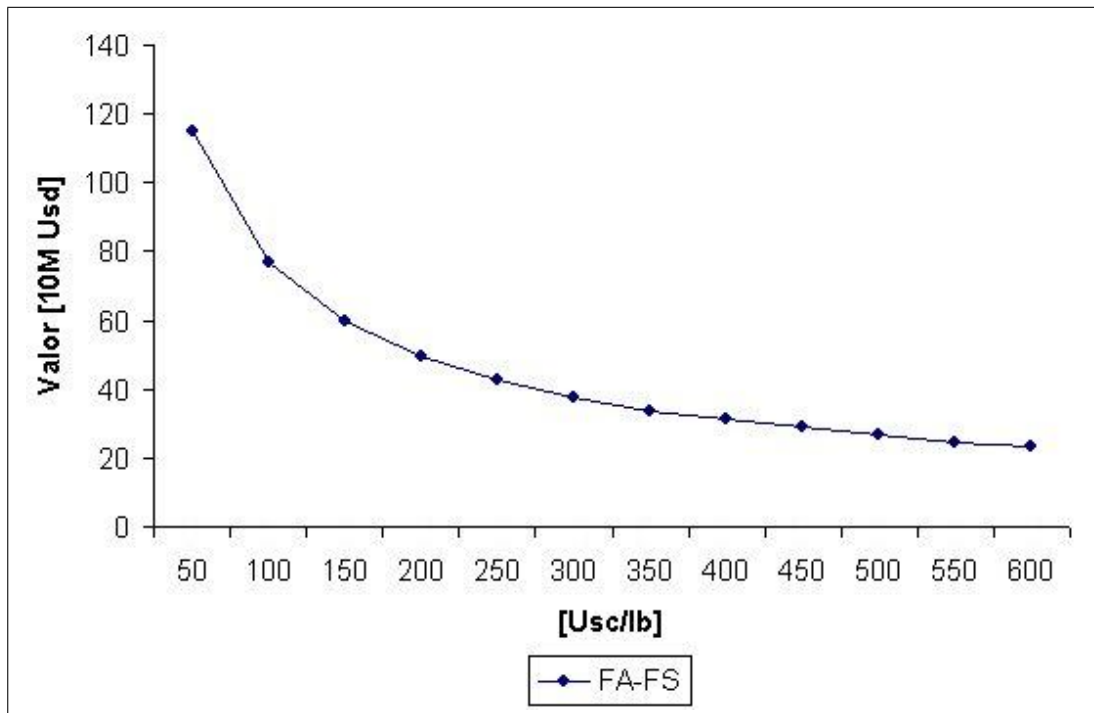


Figura 5.21: Valor aproximado de la opción de abandono para la secuencia N3.

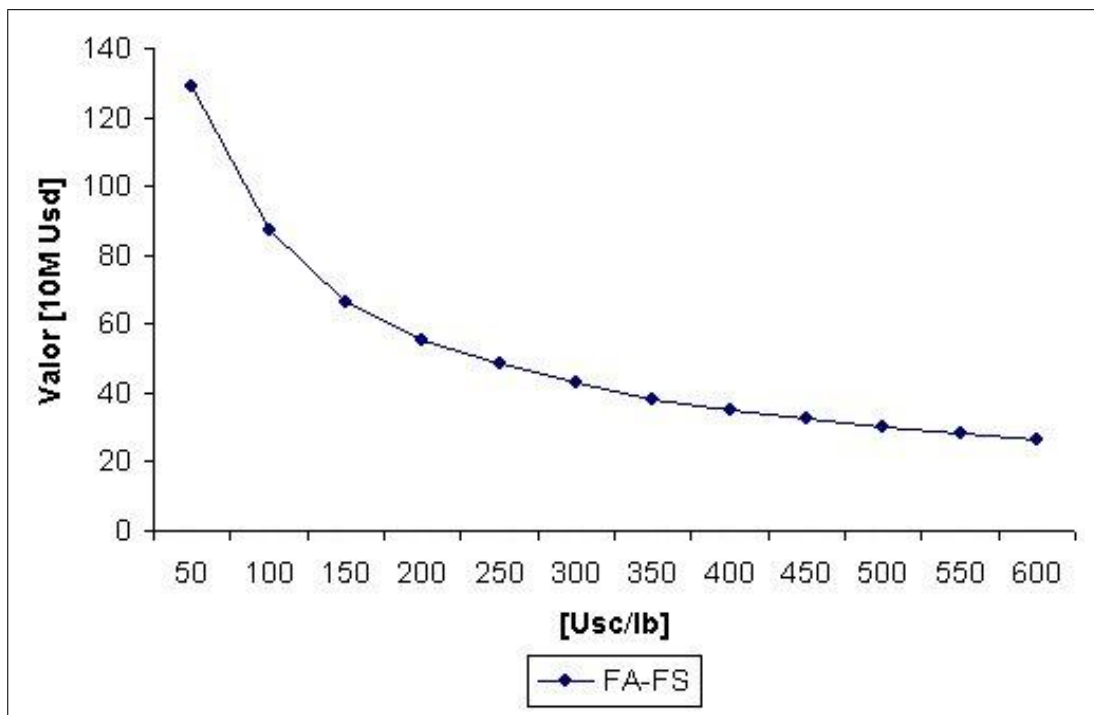


Figura 5.22: Valor aproximado de la opción de abandono para la secuencia N4.

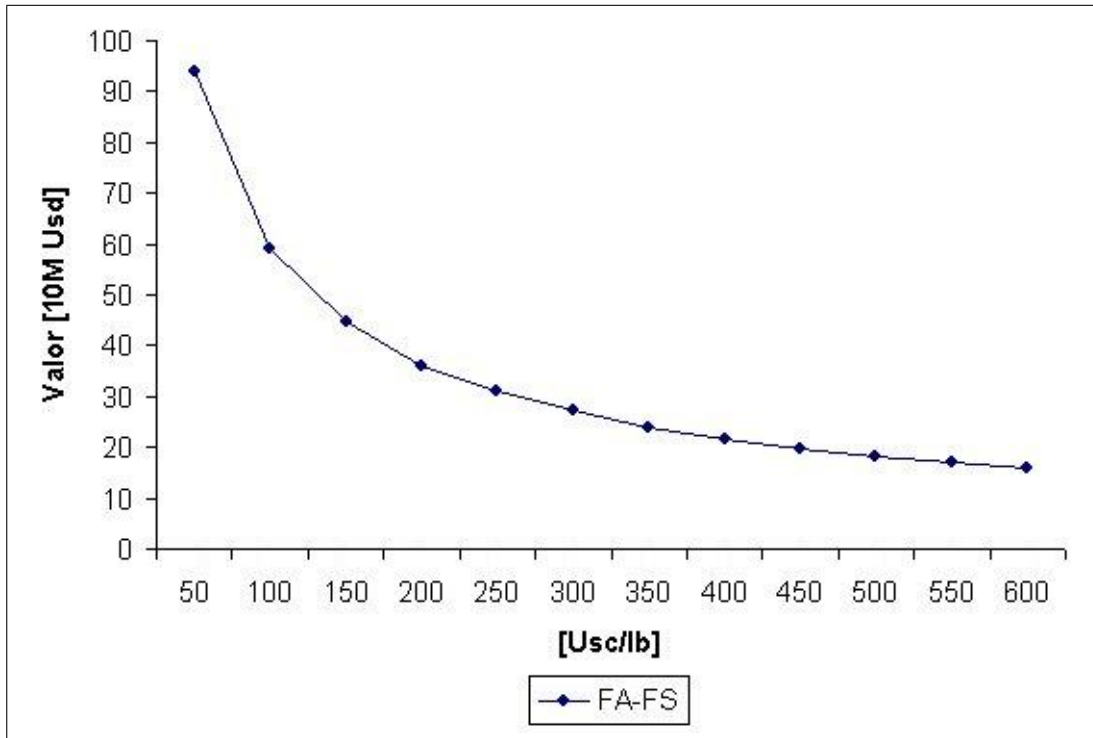


Figura 5.23: Valor aproximado de la opción de abandono para la secuencia N5.

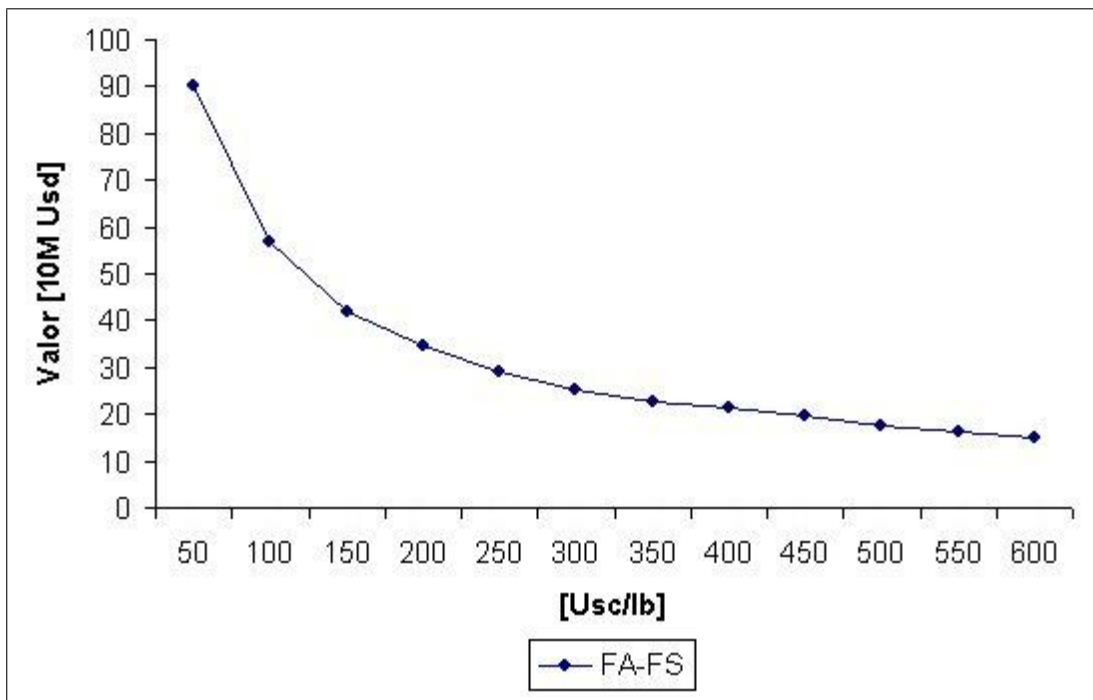


Figura 5.24: Valor aproximado de la opción de abandono para la secuencia N6.

Los gráficos de las Figuras 5.19 - 5.24 muestran la curva generada por la diferencia ($FA - FS$), que interpretamos como una aproximación al valor de la opción de abandono. Se observa que su valor decrece a medida que aumenta el precio inicial. Esto es razonable, pues a mayor precio la producción se vuelve más rentable y la probabilidad de alcanzar niveles de precios bajos que hagan preferible abandonar el proyecto, se torna menor.

Notar también que para la secuencia N2, que es la peor de todas las secuencias evaluadas, el valor de la opción de abandono es mayor, lo cual es también razonable: una secuencia menos rentable valora más la posibilidad de abandono.

Por último, se puede observar que según esta aproximación, la mejor secuencia del proyecto bajo la estrategia de comenzar la producción inmediatamente en todas las etapas difiere cuando se considera o no la opción de abandono, para el intervalo de precios iniciales $[350, 450]$, siendo N4 mejor que N1 cuando sí se tiene la opción de abandonar el proyecto.

5.4. Inversión en capacidad

Consideremos ahora el modelo base de la Sección 5.1 y la opción de invertir en capacidad de producción. Se cuenta con una capacidad inicial K , que puede ser ampliada a capacidad $\bar{K} > K$, a un costo de inversión $D_{\bar{K}}$. Si en una etapa se decide llevar a cabo la ampliación, la nueva capacidad estará disponible a partir de la etapa siguiente.

Para modelar el problema, extendemos el PPM(td) agregando una variable de estado K^j que denota la capacidad al inicio de la etapa j y una variable de decisión x_j que toma el valor 1 si se decide ampliar la capacidad en la etapa j y 0 si no. El estado se conforma entonces por la componente aleatoria s y las componentes determinísticas (j, K^j) . El conjunto de decisiones $U(s, j, K^j)$ contiene tuplas (τ, x_j) cuando la capacidad es K y sólo valores τ cuando la capacidad es \bar{K} .

Notamos que una vez que se ha decidido ampliar la capacidad, el problema vuelve a tomar la forma del caso base, pero con los parámetros computados en función del valor \bar{K} . Abordamos el problema mediante el siguiente modelo:

$$\begin{aligned}
 J_j^*(s, K) = & \max_{\tau \in U(s, j), x_j \in \{0, 1\}} \sum_{s' \in ST(s, j, K, \tau)} p(s, j, K, \tau, s') \{e^{-r\tau} (sR_j(K) - C_j(K) - x_j D_{\bar{K}}) \\
 & + e^{-r(\tau + T_j(K))} ((1 - x_j) J_{j-1}^*(s', K) + x_j J_{j-1}^*(s', \bar{K}))\} \quad (5.30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_j^*(s, \bar{K}) = & \max_{\tau \in U(s, j)} \sum_{s' \in ST(s, j, \bar{K}, \tau)} p(s, j, \bar{K}, \tau, s') \{e^{-r\tau} (sR_j(\bar{K}) - C_j(\bar{K})) + e^{-r(\tau + T_j(\bar{K}))} J_{j-1}^*(s', \bar{K})\} \\
 & \quad (5.31)
 \end{aligned}$$

$$J_0^*(s, K) = J_0^*(s, \bar{K}) = 0 \quad \forall s \quad (5.32)$$

En el subproblema 5.30 se decide el timing y si se invierte en capacidad, mientras que el subproblema 5.31 computa los valores óptimos si es que ya se ha decidido ampliar la capacidad. Dado un precio inicial s_0 , el problema de programación lineal que resuelve este modelo es el siguiente:

$$\text{mín } \lambda_{s_0, N} + \sum_{s, j} \xi_{s, j} \quad (5.33)$$

s.a.

$$\lambda_{s, j} \geq e^{-r\tau} (sR_j(K) - C_j(K)) + e^{-r(\tau + T_j(K))} \sum_{s' \in ST(s, j, K, \tau)} p(s, j, K, \tau, s') \lambda_{s', j-1} \quad (5.34)$$

$$\forall s, j : (s, j, K) \in I, \quad \forall \tau : (\tau, 0) \in U(s, j, K)$$

$$\lambda_{s, j} \geq e^{-r\tau} (sR_j(K) - C_j(K) - D_{\bar{K}}) + e^{-r(\tau + T_j(K))} \sum_{s' \in ST(s, j, K, \tau)} p(s, j, K, \tau, s') \xi_{s', j-1} \quad (5.35)$$

$$\forall s, j : (s, j, K) \in I, \quad \forall \tau : (\tau, 1) \in U(s, j, K)$$

$$\lambda_{s, 0} = 0 \quad \forall s : (s, 0, K) \in I \quad (5.36)$$

$$\xi_{s,j} \geq e^{-r\tau}(sR_j(\bar{K}) - C_j(\bar{K})) + e^{-r(\tau+T_j(\bar{K}))} \sum_{s' \in ST(s,j,\bar{K},\tau)} p(s,j,\bar{K},\tau,s') \xi_{s',j-1} \quad (5.37)$$

$$\forall s, j : (s, j, \bar{K}) \in I, \forall \tau \in U(s, j, \bar{K})$$

$$\xi_{s,0} = 0 \quad \forall s : (s, 0, \bar{K}) \in I \quad (5.38)$$

El problema anterior puede ser resuelto en dos fases, una primera en que computemos el valor óptimo de las variables $\xi_{s,j}$, como si la capacidad \bar{K} ya hubiese sido instalada, y una segunda fase en que encontremos el valor óptimo de las variables $\lambda_{s,j}$. Resolvemos entonces los siguientes dos PPLs:

■ **PPL 5.4.1**

$$\text{mín} \sum_{s,j} \xi_{s,j} \quad (5.39)$$

s.a.

$$\xi_{s,j} \geq e^{-r\tau}(sR_j(\bar{K}) - C_j(\bar{K})) + e^{-r(\tau+T_j(\bar{K}))} \sum_{s' \in ST(s,j,\bar{K},\tau)} p(s,j,\bar{K},\tau,s') \xi_{s',j-1} \quad (5.40)$$

$$\forall s, j : (s, j, \bar{K}) \in I, \forall \tau \in U(s, j, \bar{K})$$

$$\xi_{s,0} = 0 \quad \forall s : (s, 0, \bar{K}) \in I \quad (5.41)$$

■ **PPL 5.4.2**

$$\text{mín} \lambda_{s_0,N} \quad (5.42)$$

s.a.

$$\lambda_{s,j} \geq e^{-r\tau}(sR_j(K) - C_j(K)) + e^{-r(\tau+T_j(K))} \sum_{s' \in ST(s,j,K,\tau)} p(s,j,K,\tau,s') \lambda_{s',j-1} \quad (5.43)$$

$$\forall s, j : (s, j, K) \in I, \forall \tau : (\tau, 0) \in U(s, j, K)$$

$$\lambda_{s,j} \geq e^{-r\tau}(sR_j(K) - C_j(K) - D_{\bar{K}}) + e^{-r(\tau+T_j(K))} \sum_{s' \in ST(s,j,K,\tau)} p(s, j, K, \tau, s') \xi_{s',j-1} \quad (5.44)$$

$$\forall s, j : (s, j, K) \in I, \forall \tau : (\tau, 1) \in U(s, j, K)$$

$$\lambda_{s,0} = 0 \quad \forall s : (s, 0, K) \in I \quad (5.45)$$

En el PPL 5.4.2 los $\xi_{s',j}$ son parámetros que representan el valor óptimo desde la etapa (j) en adelante si es que la capacidad es \bar{K} y el precio inicial es s' . Estos parámetros pueden ser obtenidos resolviendo el PPL 5.4.1, donde los $\xi_{s',j}$ juegan el rol de variables.

Observemos que los precios y probabilidades generados cuando la capacidad es K no necesariamente coinciden con aquellos cuando la capacidad es \bar{K} , pues los tiempos de procesamiento T_j dependen de la capacidad. Por este motivo, para un s_2 tal que no computemos explícitamente el valor $\xi_{s_2,j}$ al resolver el PPL 5.4.1, aproximaremos el parámetro correspondiente en el PPL 5.4.2 por el valor $\xi_{s_1,j}$ siendo s_1 el precio más cercano a s_2 para el que sí se ha computado su valor.

Implementamos el modelo utilizando la misma data del Apéndice C, $U(s, j) = \{0, 1, 2\}$ $\forall (s, j) : j \in \{8, 9, 10\}$, $U(s, j) = \{0\}$ $\forall (s, j) : j \in \{1, \dots, 7\}$ y $\Delta t = 0.8$. La Tabla 5.4 muestra los resultados obtenidos para doce precios iniciales, seis secuencias y cuatro diferentes costos de ampliación de capacidad: $D_{\bar{K}}^1 = 0$, $D_{\bar{K}}^2 = 5$ [Us/(Ton/año)], $D_{\bar{K}}^3 = 7.5$ [Us/(Ton/año)], $D_{\bar{K}}^4 = 12.5$ [Us/(Ton/año)]. Las columnas FK^1 , FK^2 , FK^3 y FK^4 muestran las aproximaciones respectivas, mientras que la columna FN muestra la aproximación cuando no se tiene la opción de ampliar la capacidad usando los mismos parámetros.

CAPÍTULO 5. MODELOS PARTICULARES Y EXPERIENCIAS NUMÉRICAS

Precio S_0	N1					N2				
	FN	FK^1	FK^2	FK^3	FK^4	FN	FK^1	FK^2	FK^3	FK^4
50	459	516	464	462	461	367	408	373	371	369
100	1,252	1,398	1,272	1,266	1,259	1,085	1,211	1,105	1,099	1,095
150	2,055	2,307	2,094	2,085	2,072	1,816	2,077	1,852	1,844	1,833
200	2,859	3,230	2,923	2,897	2,878	2,563	2,960	2,613	2,603	2,593
250	3,671	4,163	3,760	3,731	3,698	3,315	3,848	3,393	3,373	3,355
300	4,477	5,090	4,615	4,573	4,532	4,058	4,739	4,163	4,136	4,100
350	5,288	6,026	5,463	5,387	5,345	4,811	5,632	4,928	4,877	4,838
400	6,104	6,964	6,331	6,242	6,183	5,566	6,534	5,669	5,626	5,569
450	6,914	7,898	7,212	7,120	7,039	6,322	7,438	6,509	6,420	6,342
500	7,722	8,829	8,057	7,959	7,832	7,076	8,340	7,355	7,234	7,138
550	8,538	9,772	8,950	8,846	8,708	7,837	9,247	8,200	8,052	7,967
600	9,350	10,706	9,803	9,692	9,524	8,589	10,147	8,994	8,803	8,704
Precio S_0	N3					N4				
	FN	FK^1	FK^2	FK^3	FK^4	FN	FK^1	FK^2	FK^3	FK^4
50	447	476	453	452	450	425	466	429	427	426
100	1,226	1,317	1,246	1,241	1,236	1,195	1,313	1,208	1,204	1,201
150	2,019	2,197	2,058	2,049	2,040	1,978	2,201	2,004	1,996	1,986
200	2,814	3,085	2,875	2,861	2,846	2,765	3,099	2,808	2,799	2,783
250	3,612	3,980	3,692	3,678	3,656	3,559	4,005	3,624	3,604	3,589
300	4,409	4,870	4,508	4,481	4,453	4,348	4,911	4,432	4,400	4,362
350	5,210	5,771	5,326	5,296	5,251	5,143	5,822	5,238	5,210	5,166
400	6,012	6,671	6,141	6,118	6,075	5,941	6,739	6,083	6,053	5,998
450	6,812	7,566	6,969	6,927	6,885	6,735	7,652	6,905	6,874	6,811
500	7,610	8,463	7,823	7,784	7,729	7,528	8,561	7,717	7,667	7,608
550	8,417	9,369	8,654	8,589	8,541	8,327	9,480	8,563	8,519	8,455
600	9,217	10,267	9,480	9,407	9,356	9,123	10,393	9,390	9,305	9,248
Precio S_0	N5					N6				
	FN	FK^1	FK^2	FK^3	FK^4	FN	FK^1	FK^2	FK^3	FK^4
50	452	516	462	459	456	460	524	466	464	462
100	1,221	1,377	1,255	1,247	1,237	1,242	1,404	1,264	1,257	1,252
150	1,999	2,258	2,070	2,050	2,035	2,033	2,313	2,073	2,066	2,052
200	2,780	3,159	2,893	2,866	2,834	2,826	3,233	2,896	2,874	2,860
250	3,567	4,069	3,716	3,679	3,634	3,625	4,162	3,733	3,690	3,656
300	4,348	4,973	4,559	4,499	4,451	4,419	5,085	4,583	4,526	4,472
350	5,136	5,888	5,385	5,313	5,239	5,219	6,016	5,406	5,331	5,273
400	5,928	6,804	6,250	6,171	6,079	6,022	6,950	6,268	6,174	6,093
450	6,714	7,716	7,090	7,007	6,873	6,820	7,879	7,124	7,024	6,908
500	7,500	8,627	7,972	7,880	7,730	7,617	8,807	7,989	7,889	7,755
550	8,292	9,546	8,836	8,737	8,587	8,421	9,746	8,883	8,759	8,620
600	9,080	10,461	9,674	9,575	9,480	9,221	10,676	9,742	9,583	9,415

Tabla 5.4: Resultados considerando opción de ampliar capacidad.

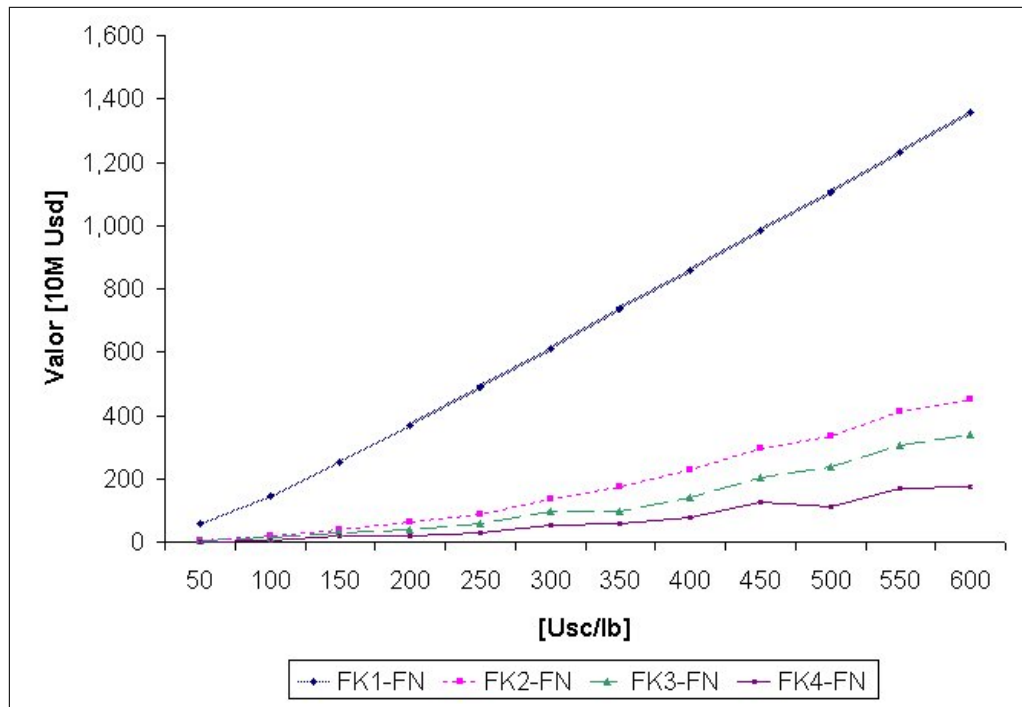


Figura 5.25: Valor aproximado de la opción de invertir en capacidad para distintos costos de inversión en función del precio inicial, secuencia N1.

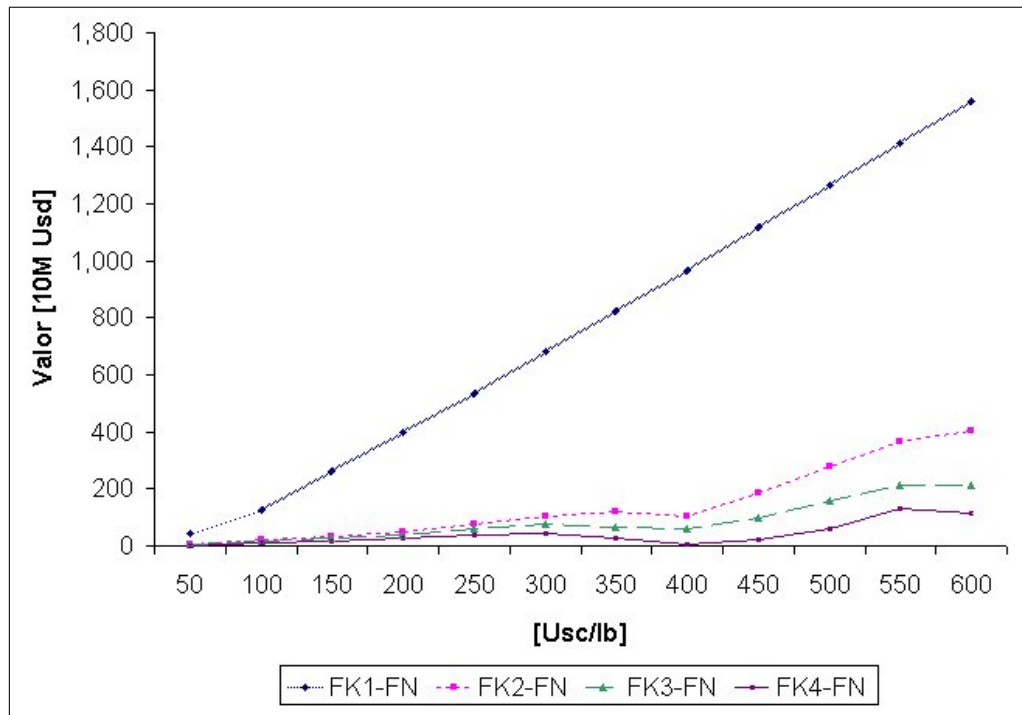


Figura 5.26: Valor aproximado de la opción de invertir en capacidad para distintos costos de inversión en función del precio inicial, secuencia N2.

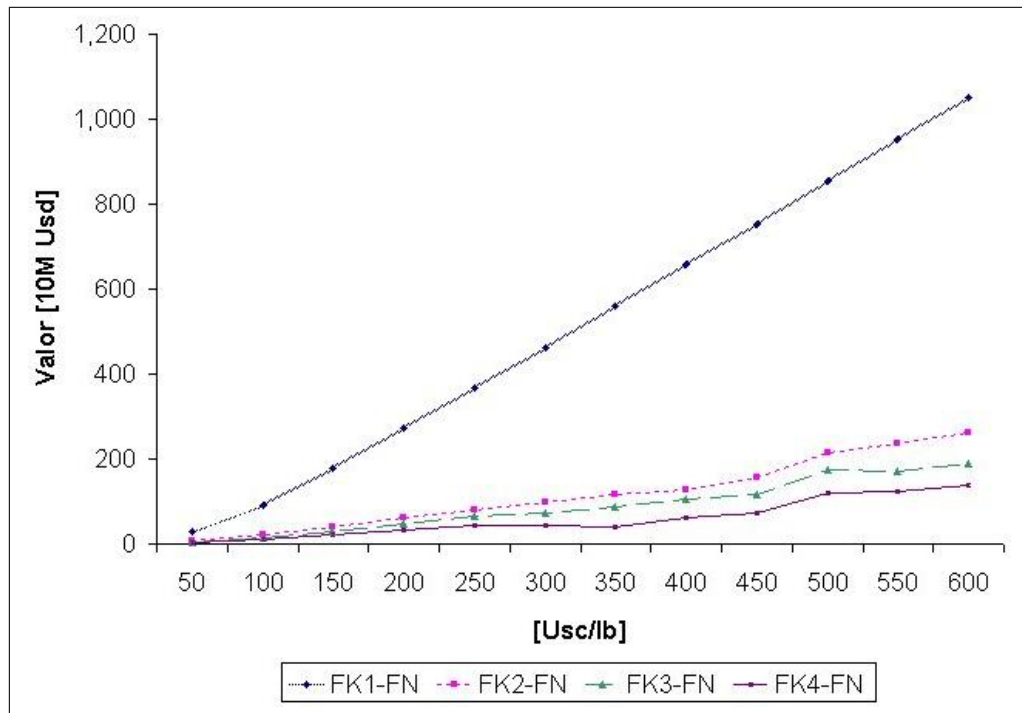


Figura 5.27: Valor aproximado de la opción de invertir en capacidad para distintos costos de inversión en función del precio inicial, secuencia N3.

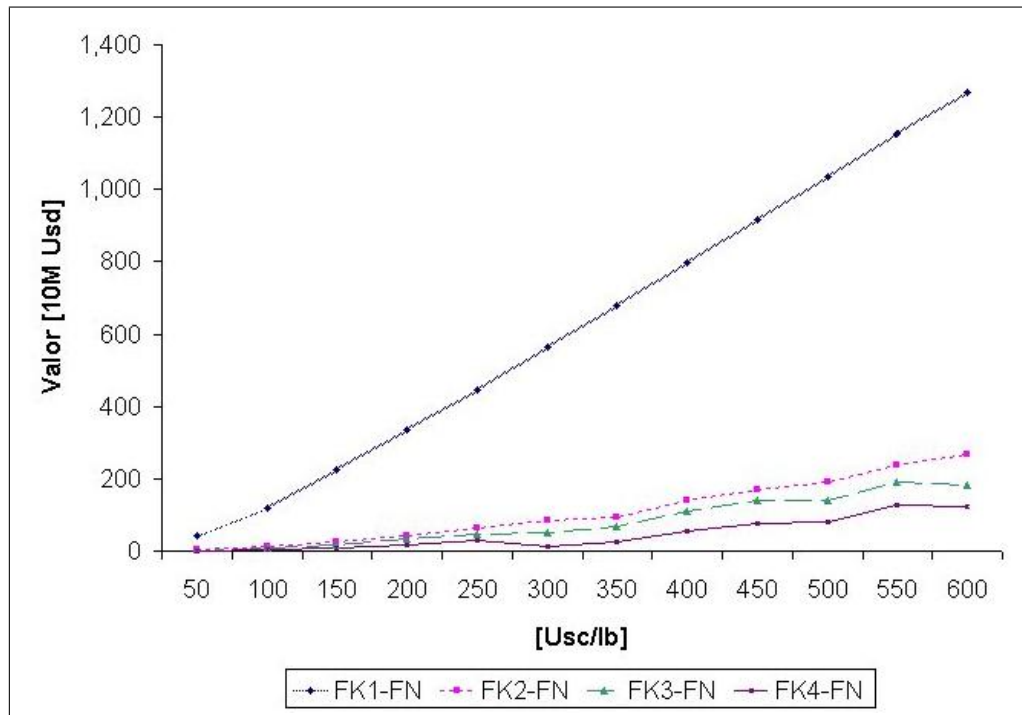


Figura 5.28: Valor aproximado de la opción de invertir en capacidad para distintos costos de inversión en función del precio inicial, secuencia N4.

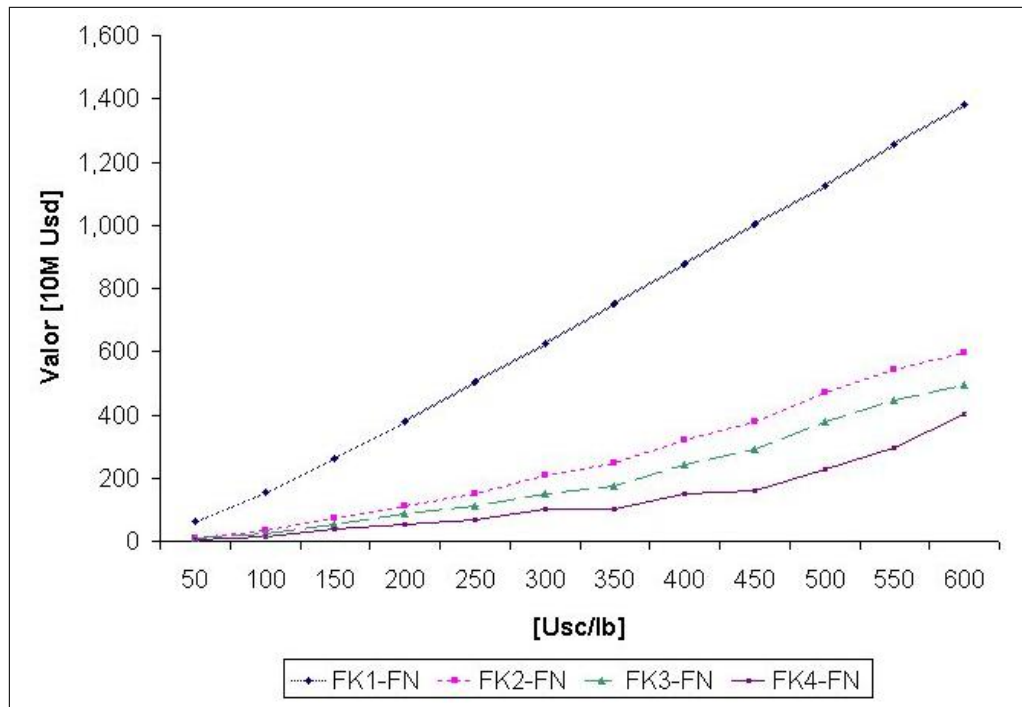


Figura 5.29: Valor aproximado de la opción de invertir en capacidad para distintos costos de inversión en función del precio inicial, secuencia N5.

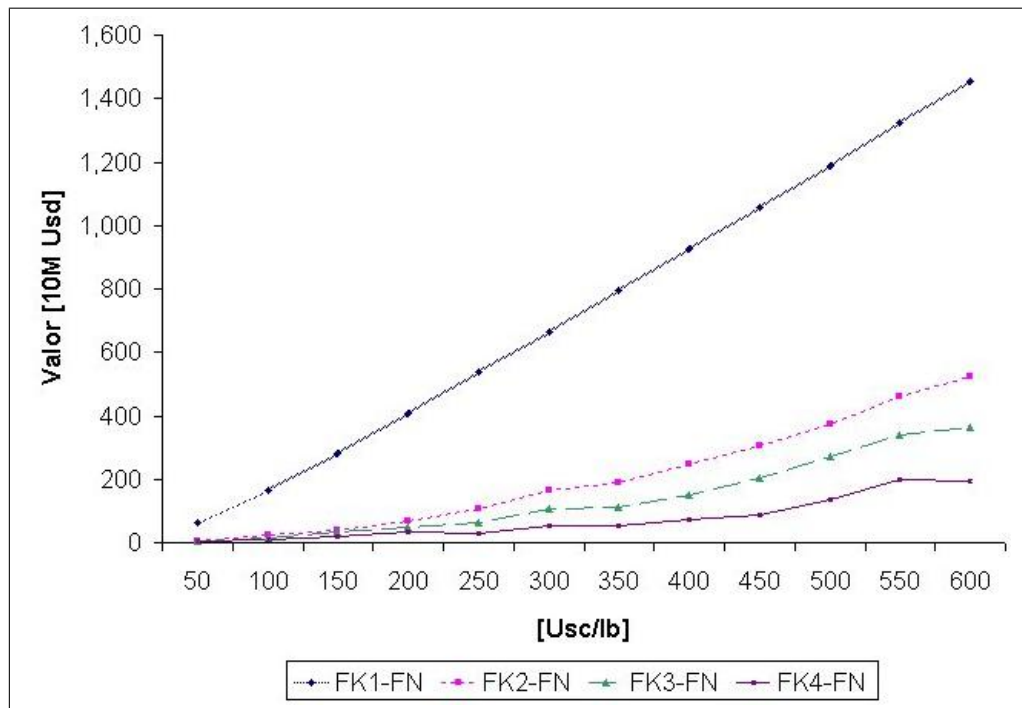


Figura 5.30: Valor aproximado de la opción de invertir en capacidad para distintos costos de inversión en función del precio inicial, secuencia N6.

Los gráficos de las Figuras 5.25 - 5.30 muestran la diferencia entre FN y FK para los distintos costos de inversión considerados. En general, el valor de la opción se incrementa con el precio inicial. Para las mejores secuencias las curvas denotan un crecimiento más acentuado desde precios menores. Por ejemplo, para N1 cuando el costo de la inversión es $D_{\bar{K}}^2$, se aprecia que la opción de invertir en capacidad incrementa el valor del proyecto de extracción en más de un 3% para precios iniciales mayores o iguales a los 300 Usc/lb; para las secuencias N5 y N6 el efecto es más notorio desde precios iniciales más bajos, desde los 150 Usc/lb y 250 Usc/lb, respectivamente. Es interesante notar que para el rango de precios iniciales [50, 200] la secuencia que conlleva a un mejor valor esperado es N6.

Para las peores secuencias la opción de invertir en capacidad tiene un menor impacto. Por ejemplo, en la secuencia N2 el aumento de 3% se logra recién cuando el precio inicial es de 400 Usc/lb. En tanto, en la secuencia N4 nunca se logra este incremento y, con un precio inicial de 600 Usc/lb, el aumento es de sólo 2.9%.

Por último, es claro que a mayor costo de la inversión en capacidad mayor es el precio para el cual el incremento en el valor óptimo del proyecto se torna más significativo.

5.5. Modelo integrado

En esta sección formularemos un modelo que integre los cuatro casos anteriores, esto es, que considere el modelo base de la Sección 5.1, el costo de mantenimiento, la opción de abandono y la opción de invertir en capacidad.

Como variables de decisión, además de la variable de timing τ , consideraremos la variable x_j que vale 1 si se decide ampliar la capacidad en la etapa j y 0 si no, y la variable y_j que toma el valor 1 si se decide continuar con la extracción en la etapa j y 0 si se abandona.

El estado consta de cuatro componentes: la etapa j , el precio inicial de la etapa s_0 , la capacidad K y una variable binaria h_j que indica si el proyecto ha sido abandonado o no.

Abandonar tiene un beneficio residual $B(j, K)$. Al igual que en la Sección 5.2, sea $\tilde{H}(K)$ el costo de mantener una capacidad K por una unidad de tiempo y sea $H_j(K)$ el costo de mantenimiento total en la etapa j . A su vez, la ampliación a una capacidad \bar{K} significa una inversión $D_{\bar{K}}$.

Para abordar este problema, formulamos la siguiente extensión del PPM(td):

$$\begin{aligned}
 J_j^*(s, K, 1) = & \max_{\tau \in U(s,j), x_j \in \{0,1\}, y_j \in \{0,1\}} \sum_{s' \in ST(s,j,K,\tau)} p(s, j, K, \tau, s') \{e^{-r\tau}(sR_j(K) - C_j(K) - H_j(K) - x_j D_{\bar{K}}) \\
 & + e^{-r(\tau+T_j(K))}((1 - x_j)J_{j-1}^*(s', K, 1) + x_j J_{j-1}^*(s', \bar{K}, 1))\} y_j \\
 & + B(j, K)(1 - y_j)
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

$$\begin{aligned}
 J_j^*(s, \bar{K}, 1) = & \max_{\tau \in U(s,j), y_j \in \{0,1\}} \sum_{s' \in ST(s,j,\bar{K},\tau)} p(s, j, \bar{K}, \tau, s') \{e^{-r\tau}(sR_j(\bar{K}) - C_j(\bar{K}) - H_j(\bar{K})) \\
 & + e^{-r(\tau+T_j(\bar{K}))} J_{j-1}^*(s', \bar{K}, 1)\} y_j \\
 & + B(j, \bar{K})(1 - y_j)
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

$$J_0^*(s, K, 1) = J_0^*(s, \bar{K}, 1) = 0 \quad \forall s \tag{5.48}$$

En el subproblema 5.46 se maximiza el valor esperado desde la etapa j en adelante con el control sobre el timing de extracción y las opciones de abandono y ampliación de capacidad. En el subproblema 5.47 se maximiza el valor esperado a partir de la etapa j como si ya se hubiese ampliado la capacidad y las variables de control son sólo el timing y si se abandona el proyecto o no. El PPL que resuelve este modelo es el siguiente:

$$\min \lambda_{s_0, N, 1} + \sum_{s,j} \xi_{s,j,1} \tag{5.49}$$

s.a.

$$\lambda_{s,j,1} \geq e^{-r\tau}(sR_j(K) - C_j(K) - H_j(K)) + e^{-r(\tau+T_j(K))} \sum_{s' \in ST(s,j,K,\tau)} p(s, j, K, \tau, s') \lambda_{s',j-1,1} \tag{5.50}$$

$$\forall s, j : (s, j, K, 1) \in I, \quad \forall \tau : (\tau, 0, 1) \in U(s, j, K, 1)$$

$$\lambda_{s,j,1} \geq e^{-r\tau}(sR_j(K) - C_j(K) - H_j(K) - D_{\bar{K}}) + e^{-r(\tau+T_j(K))} \sum_{s' \in ST(s,j,K,\tau)} p(s, j, K, \tau, s') \xi_{s',j-1,1} \quad (5.51)$$

$$\forall s, j : (s, j, K, 1) \in I, \forall \tau : (\tau, 1, 1) \in U(s, j, K, 1)$$

$$\lambda_{s,j,1} \geq B(j, K) \quad \forall s, j : (s, j, K, 1) \in I, \forall \tau : (\tau, 0, 0) \in U(s, j, K, 1) \quad (5.52)$$

$$\lambda_{s,0,h} = 0 \quad \forall s, h : (s, 0, h) \in I \quad (5.53)$$

$$\xi_{s,j,1} \geq e^{-r\tau}(sR_j(\bar{K}) - C_j(\bar{K}) - H_j(\bar{K})) + e^{-r(\tau+T_j(\bar{K}))} \sum_{s' \in ST(s,j,\bar{K},\tau)} p(s, j, \bar{K}, \tau, s') \xi_{s',j-1,1} \quad (5.54)$$

$$\forall s, j : (s, j, \bar{K}, 1) \in I, \forall \tau : (\tau, 1) \in U(s, j, \bar{K}, 1)$$

$$\xi_{s,j,1} \geq B(j, \bar{K}) \quad \forall s, j : (s, j, \bar{K}, 1) \in I, \forall \tau : (\tau, 0) \in U(s, j, \bar{K}, 1) \quad (5.55)$$

$$\xi_{s,0,h} = 0 \quad \forall s, h : (s, 0, h) \in I \quad (5.56)$$

Al igual que en la Sección 5.4, separamos este PPL y lo resolvemos en dos fases:

■ PPL 5.5.1

$$\text{mín} \sum_{s,j} \xi_{s,j,1} \quad (5.57)$$

s.a.

$$\xi_{s,j,1} \geq e^{-r\tau}(sR_j(\bar{K}) - C_j(\bar{K}) - H_j(\bar{K})) + e^{-r(\tau+T_j(\bar{K}))} \sum_{s' \in ST(s,j,\bar{K},\tau)} p(s, j, \bar{K}, \tau, s') \xi_{s',j-1,1} \quad (5.58)$$

$$\forall s, j : (s, j, \bar{K}, 1) \in I, \forall \tau : (\tau, 1) \in U(s, j, \bar{K}, 1)$$

$$\xi_{s,j,1} \geq B(j, \bar{K}) \quad \forall s, j : (s, j, \bar{K}, 1) \in I, \forall \tau : (\tau, 0) \in U(s, j, \bar{K}, 1) \quad (5.59)$$

$$\xi_{s,0,h} = 0 \quad \forall s, h : (s, 0, h) \in I \quad (5.60)$$

■ PPL 5.5.2

$$\text{mín } \lambda_{s_0, N, 1} \quad (5.61)$$

s.a.

$$\lambda_{s,j,1} \geq e^{-r\tau}(sR_j(K) - C_j(K) - H_j(K)) + e^{-r(\tau+T_j(K))} \sum_{s' \in ST(s,j,K,\tau)} p(s, j, K, \tau, s') \lambda_{s',j-1,1} \quad (5.62)$$

$$\forall s, j : (s, j, K, 1) \in I, \forall \tau : (\tau, 0, 1) \in U(s, j, K, 1)$$

$$\lambda_{s,j,1} \geq e^{-r\tau}(sR_j(K) - C_j(K) - H_j(K) - D_{\bar{K}}) + e^{-r(\tau+T_j(K))} \sum_{s' \in ST(s,j,K,\tau)} p(s, j, K, \tau, s') \xi_{s',j-1,1} \quad (5.63)$$

$$\forall s, j : (s, j, K, 1) \in I, \forall \tau : (\tau, 1, 1) \in U(s, j, K, 1)$$

$$\lambda_{s,j,1} \geq B(j, K) \quad \forall s, j : (s, j, K, 1) \in I, \forall \tau : (\tau, 0, 0) \in U(s, j, K, 1) \quad (5.64)$$

$$\lambda_{s,0,h} = 0 \quad \forall s, h : (s, 0, h) \in I \quad (5.65)$$

En el PPL 5.5.2 los $\xi_{s',j,1}$ son parámetros y sus valores pueden obtenerse resolviendo el PPL 5.5.1, donde juegan el rol de variables. Estos dos problemas son de menor dimensión que la formulación 5.49 - 5.56, lo que facilita su resolución.

Implementamos el modelo para distintos precios iniciales y secuencias, utilizando la data del Apéndice C, los mismos parámetros de las Secciones 5.2 y 5.4, y considerando $B(j, K) = B(j, \bar{K}) = 0 \forall j$. La Tabla 5.5 y los gráficos de las Figuras 5.31 - 5.36 muestran los resultados obtenidos para distintos costos de inversión en capacidad.

CAPÍTULO 5. MODELOS PARTICULARES Y EXPERIENCIAS NUMÉRICAS

Precio S_0	N1				N2			
	FI^1	FI^2	FI^3	FI^4	FI^1	FI^2	FI^3	FI^4
50	356	316	315	313	277	238	237	235
100	1,258	1,072	1,065	1,058	982	906	900	896
150	2,063	1,870	1,858	1,845	1,798	1,637	1,630	1,619
200	2,936	2,692	2,665	2,643	2,665	2,380	2,371	2,360
250	3,858	3,525	3,489	3,453	3,543	3,151	3,131	3,114
300	4,767	4,375	4,324	4,282	4,419	3,915	3,888	3,853
350	5,696	5,220	5,137	5,088	5,303	4,674	4,623	4,587
400	6,630	6,085	5,997	5,924	6,198	5,412	5,370	5,315
450	7,560	6,966	6,873	6,779	7,097	6,233	6,160	6,083
500	8,488	7,812	7,711	7,569	7,995	7,076	6,969	6,876
550	9,427	8,713	8,598	8,451	8,900	7,919	7,786	7,703
600	10,359	9,578	9,440	9,265	9,798	8,711	8,535	8,436
Precio S_0	N3				N4			
	FI^1	FI^2	FI^3	FI^4	FI^1	FI^2	FI^3	FI^4
50	357	302	301	299	295	277	276	275
100	1,095	1,045	1,041	1,035	1,110	1,005	1,001	998
150	1,974	1,832	1,824	1,815	1,939	1,780	1,772	1,763
200	2,826	2,635	2,621	2,607	2,818	2,572	2,563	2,548
250	3,684	3,447	3,432	3,411	3,715	3,378	3,360	3,345
300	4,568	4,256	4,229	4,203	4,602	4,171	4,143	4,110
350	5,465	5,070	5,040	4,996	5,505	4,980	4,953	4,910
400	6,355	5,880	5,858	5,815	6,416	5,823	5,793	5,739
450	7,256	6,701	6,663	6,621	7,325	6,638	6,608	6,549
500	8,141	7,556	7,518	7,462	8,233	7,448	7,399	7,342
550	9,040	8,382	8,320	8,273	9,150	8,294	8,251	8,189
600	9,935	9,207	9,134	9,086	10,034	9,082	9,020	8,969
Precio S_0	N5				N6			
	FI^1	FI^2	FI^3	FI^4	FI^1	FI^2	FI^3	FI^4
50	350	307	304	302	364	312	311	309
100	1,224	1,047	1,039	1,029	1,265	1,057	1,050	1,045
150	2,009	1,841	1,823	1,808	2,045	1,843	1,836	1,822
200	2,870	2,651	2,624	2,594	2,938	2,652	2,632	2,618
250	3,764	3,463	3,429	3,385	3,855	3,480	3,440	3,407
300	4,651	4,300	4,244	4,197	4,759	4,324	4,270	4,217
350	5,557	5,122	5,050	4,980	5,687	5,139	5,066	5,011
400	6,468	5,982	5,905	5,816	6,617	5,997	5,906	5,828
450	7,376	6,818	6,737	6,607	7,544	6,850	6,750	6,640
500	8,284	7,697	7,607	7,460	8,468	7,713	7,613	7,483
550	9,202	8,559	8,462	8,312	9,402	8,596	8,482	8,346
600	10,114	9,395	9,299	9,207	10,329	9,454	9,306	9,140

Tabla 5.5: Resultados del modelo integrado.

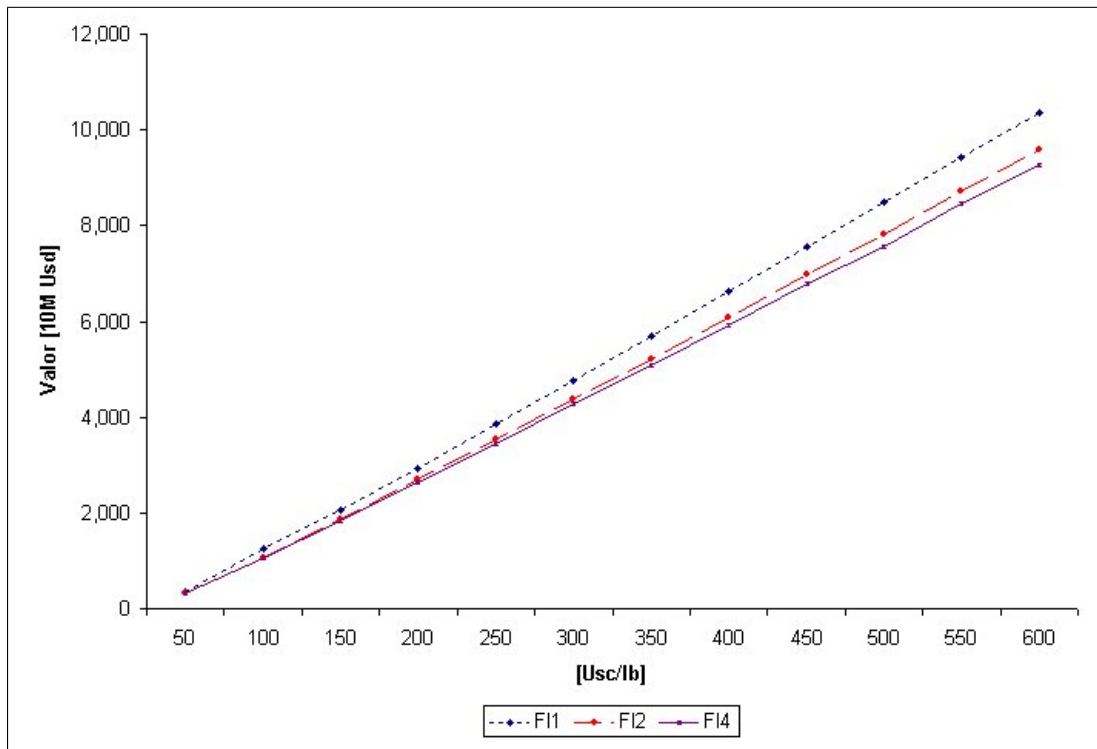


Figura 5.31: Aproximación del valor óptimo del modelo integrado en función del precio inicial para distintos costos de inversión, secuencia N1.

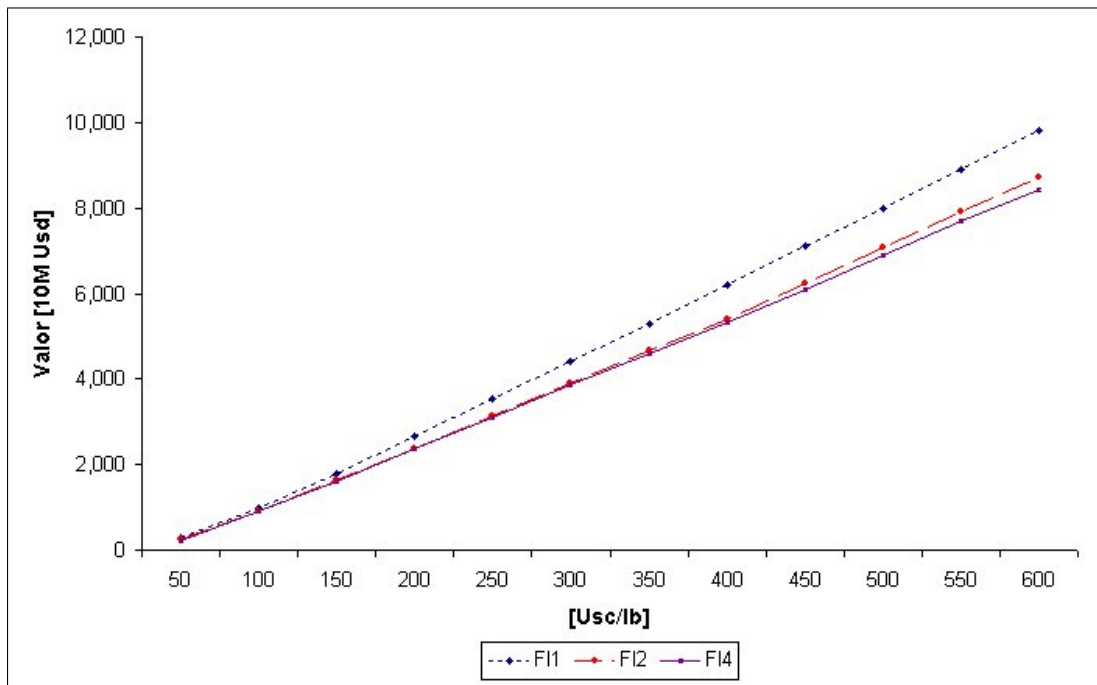


Figura 5.32: Aproximación del valor óptimo del modelo integrado en función del precio inicial para distintos costos de inversión, secuencia N2.

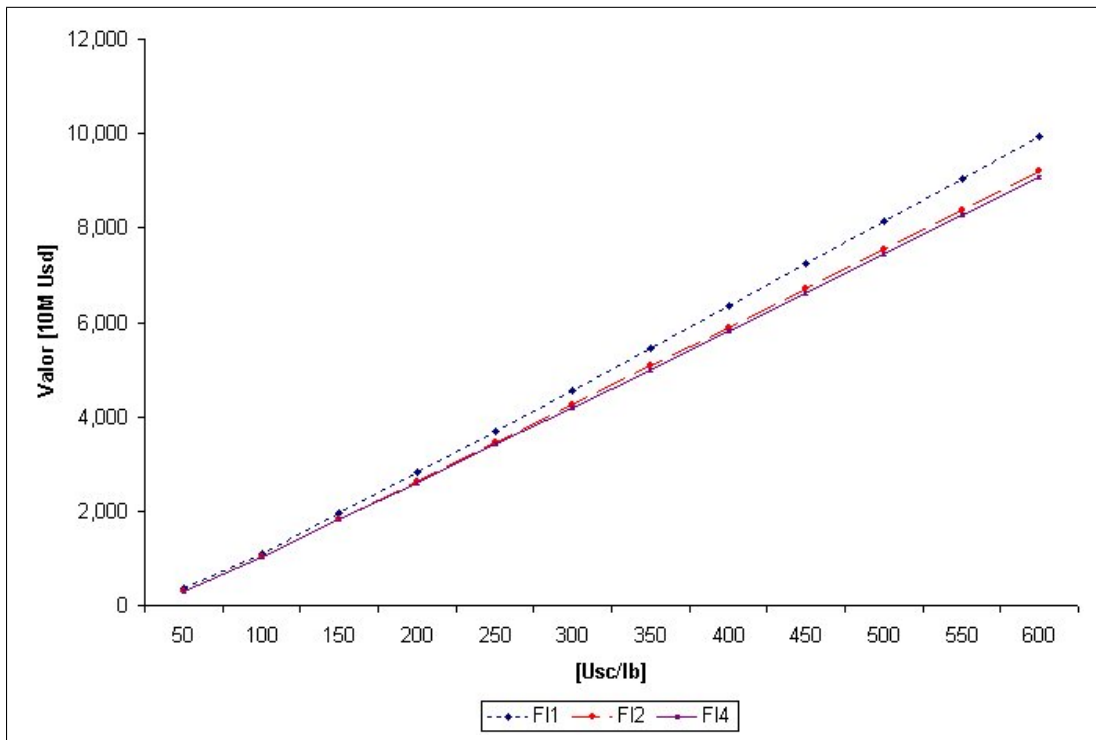


Figura 5.33: Aproximación del valor óptimo del modelo integrado en función del precio inicial para distintos costos de inversión, secuencia N3.

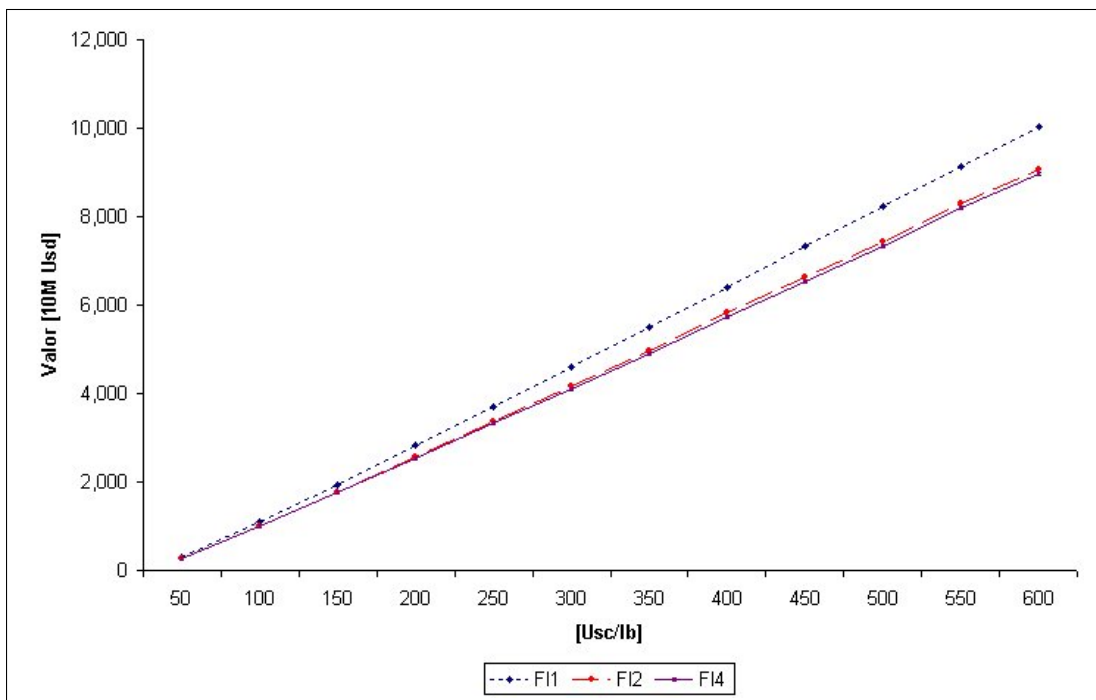


Figura 5.34: Aproximación del valor óptimo del modelo integrado en función del precio inicial para distintos costos de inversión, secuencia N4.

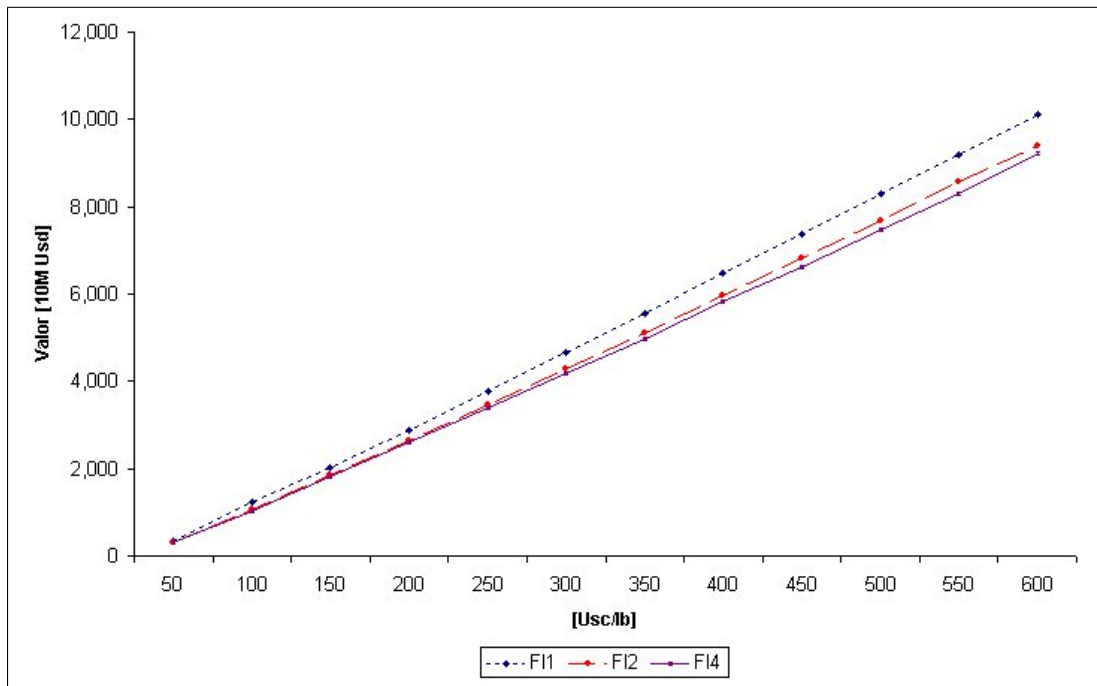


Figura 5.35: Aproximación del valor óptimo del modelo integrado en función del precio inicial para distintos costos de inversión, secuencia N5.

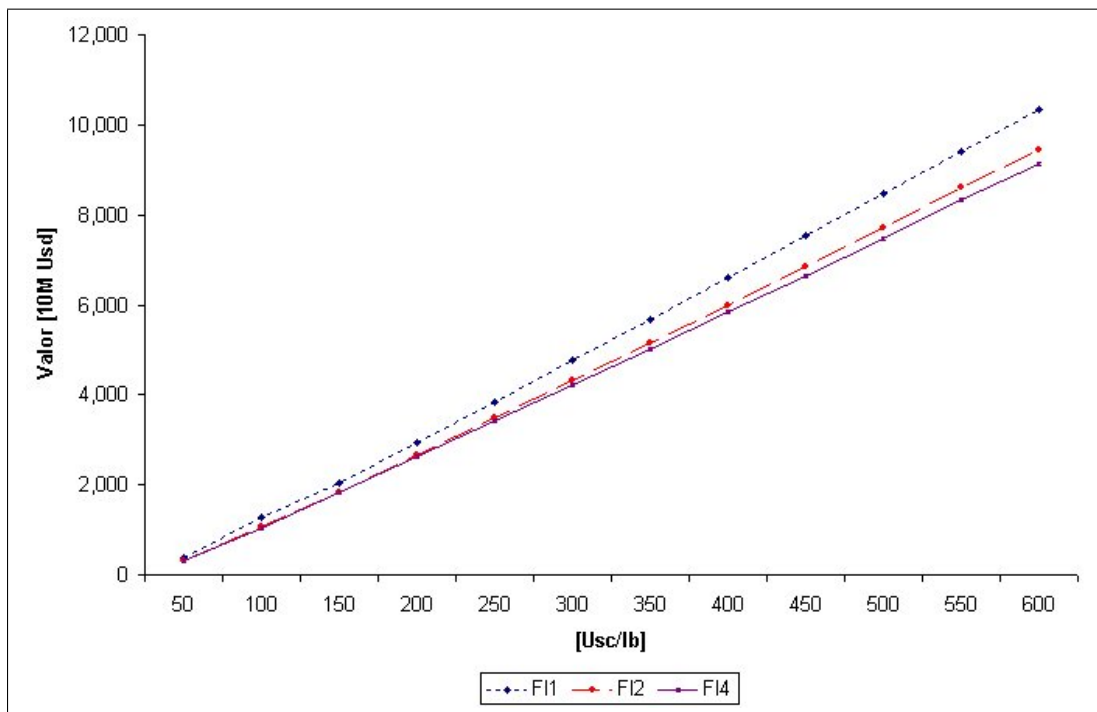


Figura 5.36: Aproximación del valor óptimo del modelo integrado en función del precio inicial para distintos costos de inversión, secuencia N6.

Se puede observar que el valor del proyecto se incrementa junto al precio inicial y disminuye con el costo de la inversión en capacidad. Para el intervalo de precios más bajos la diferencia entre las curvas es prácticamente imperceptible, lo que explicamos porque se cuenta con la opción de abandono. Por el contrario, a mayores precios, las curvas se separan y la inversión en capacidad se torna más atractiva. La secuencia N1 muestra un mejor desempeño en todos los casos, excepto en el intervalo de precios menores cuando el costo de ampliación es D_K^2 donde es superada por N6.

Los gráficos de las Figuras 5.37 - 5.42 muestran la diferencia entre la aproximación FI del valor óptimo del modelo integrado y la aproximación FC del modelo de la Sección 5.2, cuando considerábamos el costo de mantenimiento pero no las opciones de abandono e inversión en capacidad. Interpretamos esta diferencia como una aproximación del valor que otorga al proyecto tener estas opciones.

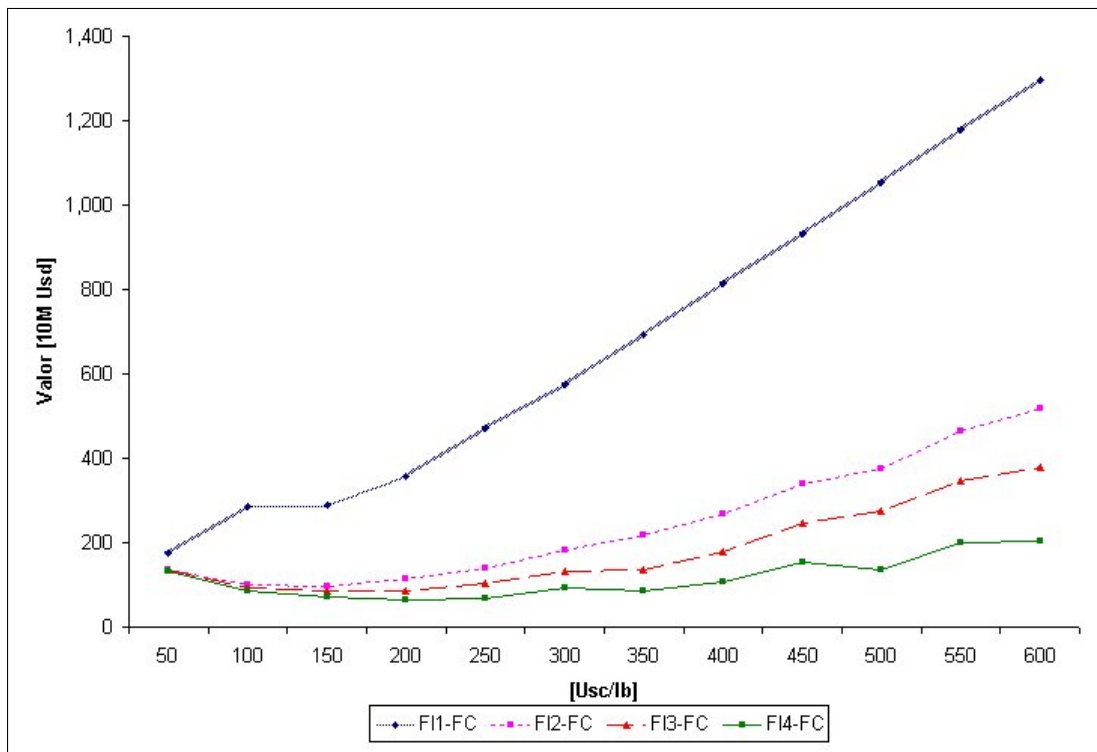


Figura 5.37: Diferencia entre FI y FC en función del precio inicial para distintos costos de inversión, secuencia N1.

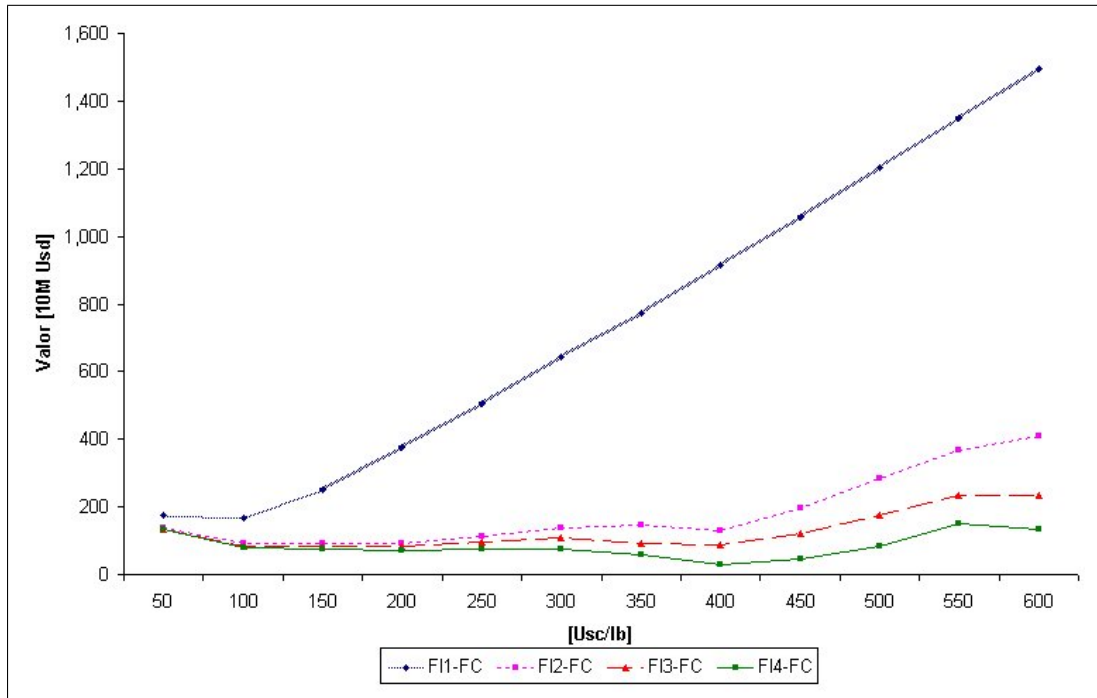


Figura 5.38: Diferencia entre FI y FC en función del precio inicial para distintos costos de inversión, secuencia N2.

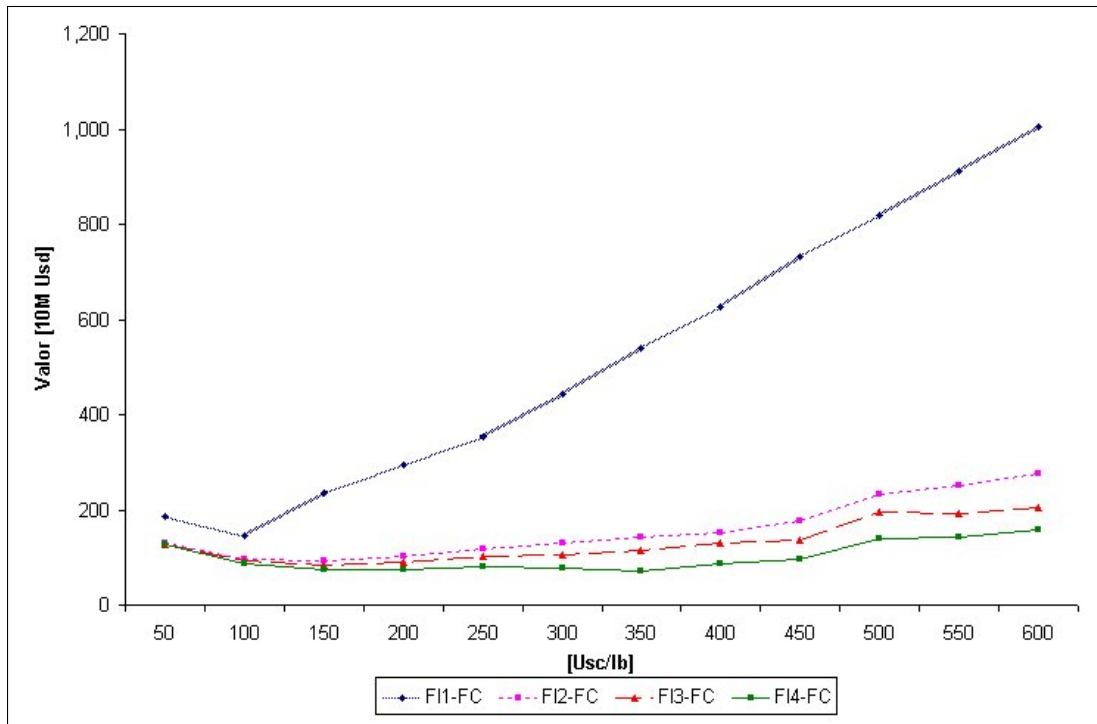


Figura 5.39: Diferencia entre FI y FC en función del precio inicial para distintos costos de inversión, secuencia N3.

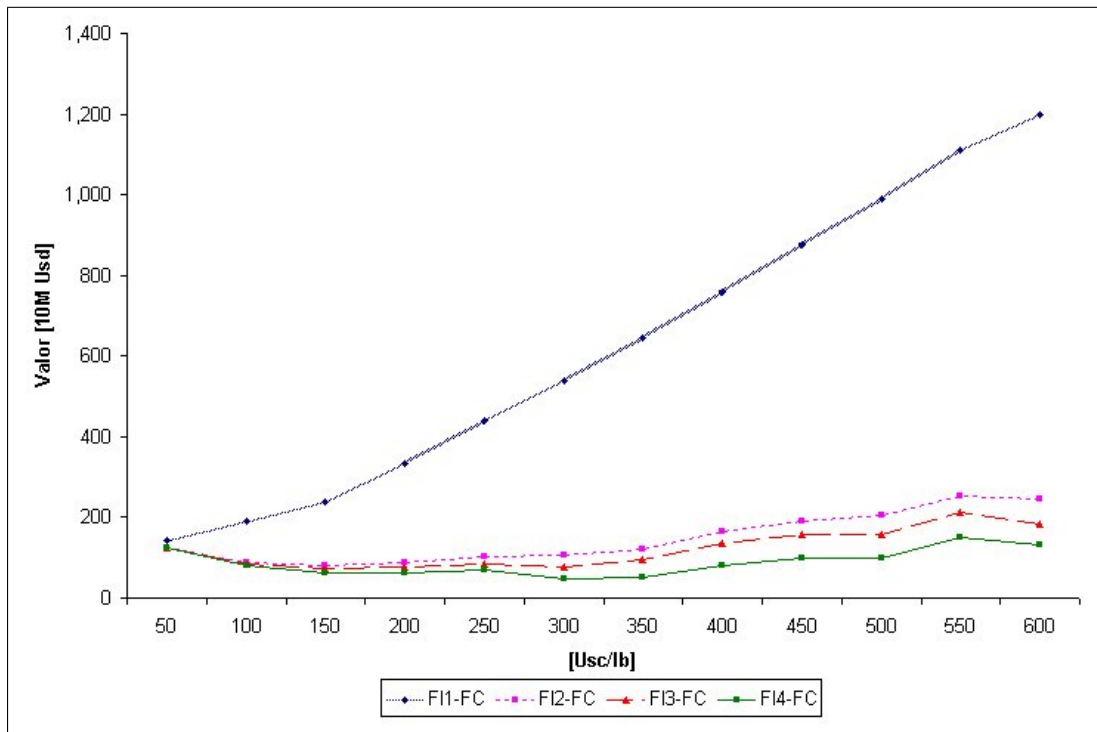


Figura 5.40: Diferencia entre FI y FC en función del precio inicial para distintos costos de inversión, secuencia N4.

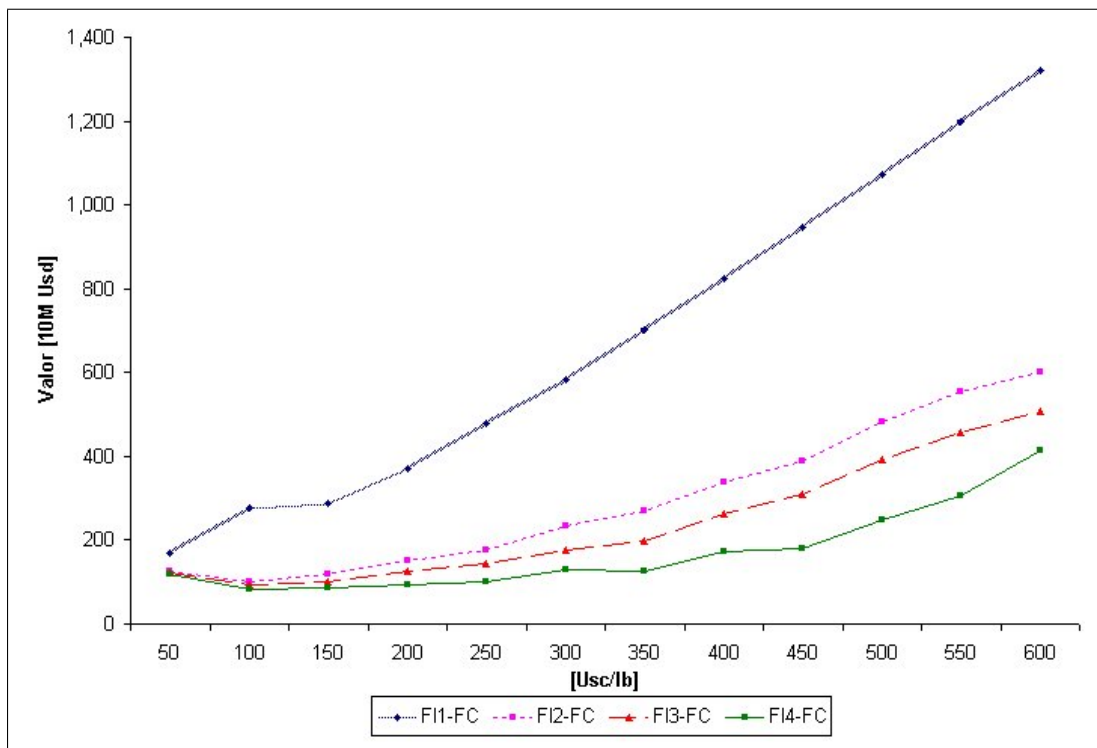


Figura 5.41: Diferencia entre FI y FC en función del precio inicial para distintos costos de inversión, secuencia N5.

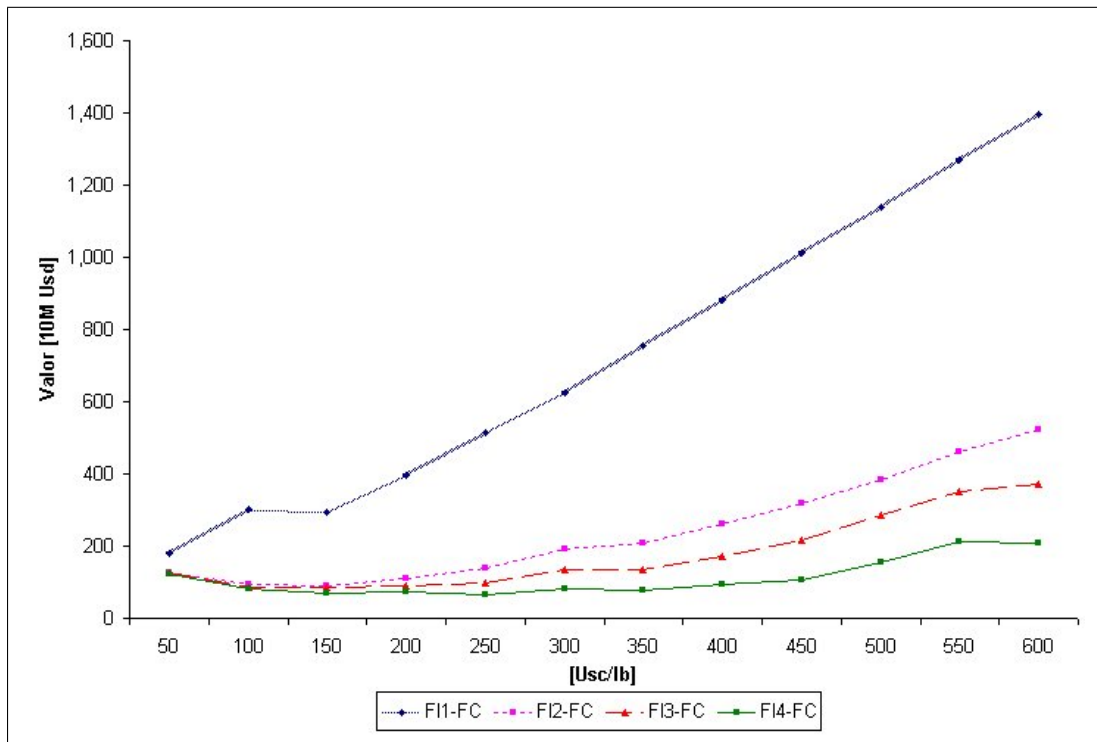


Figura 5.42: Diferencia entre FI y FC en función del precio inicial para distintos costos de inversión, secuencia N6.

En general, se tiene que a mayor precio inicial mayor es el incremento de valor que otorgan las opciones al proyecto. En particular, para las curvas en que el costo de la inversión en capacidad es mayor que cero, cuando el precio inicial es 50 Usc/lb el incremento en valor es mayor que cuando el precio es 100 Usc/lb. Lo mismo ocurre cuando comparamos precio inicial 100 Usc/lb con 150 Usc/lb. Explicamos este hecho por la opción de abandono, que tiene mayor impacto para el intervalo de precios menores. La diferencia de *FI* sobre *FC* en el menor precio inicial es de órdenes superiores al 60% y para una mala secuencia como N2, superior al 100%.

Desde el precio inicial 150 Usc/lb, en general se tiene que el incremento de valor de *FI* sobre *FC* aumenta con el precio, lo que interpretamos como un efecto de la opción de invertir en capacidad. Este hecho es más notorio para las mejores secuencias, como N1, N5 y N6 que, aun para el costo más alto de inversión D_{K4} , muestran un incremento de valor entre 2% y 5%. Para la peor secuencia, N2, el crecimiento es menos acentuado y recién a partir de los 400 Usc/lb empieza a tener más impacto, pero en órdenes no superiores al 2%.

Capítulo 6

Conclusiones e Investigación Futura

6.1. Conclusiones

Se ha formulado un modelo de planificación minera de largo plazo, incorporando la estocasticidad del precio del cobre mediante un proceso estocástico utilizado frecuentemente en la literatura, teniendo en cuenta la heterogeneidad del recurso minero en cuanto a ley, tonelaje, costo de producción y ubicación espacial relativa. Luego se ha planteado una metodología de resolución que, en base a un enfoque numérico, sugiere cómo aproximar el valor óptimo del problema en estudio. La metodología intenta ser flexible a aspectos como la función de costos, el modelo del precio y a la incorporación de opciones de decisión al proyecto en evaluación. Sin embargo, se debe cuidar que la dimensión del problema permita implementarlo y resolverlo mediante un uso razonable de recursos. Existe un *trade-off* entre la calidad de la aproximación que entrega la metodología y las posibilidades de resolver el problema con una utilización de recursos razonable. En las experiencias numéricas reportadas se lidia con este aspecto ajustando los pasos de tiempo Δt y el conjunto de decisiones posibles para cada estado $U(\cdot)$.

En un primer modelo, el caso base, consideramos como única variable de decisión el timing de extracción. Los resultados reportados en la Sección 5.1 presentan un margen de error bajo para un amplio rango de precios iniciales: de 0.25 % en promedio para los precios iniciales experimentados en el intervalo [350, 600] y de 2.70 % en [150, 300]. Para los precios iniciales en el rango de los menores valores considerados, [50, 100], el error relativo promedio es significativamente más alto, llegando a 16.63 %. La aproximación lograda es más cercana al óptimo que la aproximación reportada por Caldentey et al. [6] en 62 de las 72 instancias experimentadas y los procedimientos matemáticos desarrollados son más sencillos.

Luego de validar la metodología en ese primer set de experimentos, se aplicó a un modelo

con una función de costos que, además de considerar los asociados a la extracción, considera el concepto de mantenimiento. La aproximación obtenida sugiere que el efecto de agregar este ítem es un desplazamiento hacia abajo en la curva del valor del proyecto, pero no altera mayormente su forma. La incorporación de este costo para efectos del problema de la Sección 5.1 y la metodología de resolución, sólo provoca un cambio en el valor de los parámetros G_d^j .

Posteriormente, en la Sección 5.3 extendimos el modelo base incorporando la opción de abandonar el proyecto. Los experimentos realizados comparan el valor aproximado de la política de extracción continua cuando existe dicha opción y cuando no. Interpretamos la diferencia entre estos dos valores como una aproximación al valor de la opción. Los resultados denotan que este valor decrece a medida que aumenta el precio inicial, situación razonable pues a mayor precio inicial la probabilidad de caer a precios que hagan más conveniente abandonar el proyecto es menor.

Luego, en la Sección 5.4 incorporamos al modelo base la opción de invertir en capacidad y lo resolvimos en dos fases. El valor de la opción aumenta con el precio inicial. Para las mejores secuencias, el impacto es mayor desde un rango de precios iniciales menor que para las peores secuencias.

Finalmente, en la Sección 5.5 planteamos un modelo que integra todos los elementos anteriores: el modelo base, el costo de mantenimiento, la opción de abandono y la opción de invertir en capacidad. La resolución de este modelo también la realizamos en dos fases. Las experiencias numéricas reportadas indican que el valor del proyecto aumenta con el precio inicial y disminuye con el costo de inversión en capacidad. Al comparar los resultados de este modelo con aquél en que sólo considerábamos el caso base y el costo de mantenimiento, se observó el impacto de incorporar las opciones de abandono y ampliación. Para un rango de precios iniciales bajos, la primera denota un impacto significativo, sobre todo para las peores secuencias. A medida que aumenta el precio inicial, la opción de invertir en capacidad imprime mayor valor al proyecto, principalmente en las mejores secuencias.

Tanto la modificación de la función de costos como la incorporación de las opciones de abandono e inversión en capacidad dan cuenta de la flexibilidad de nuestro enfoque.

Este trabajo difiere de trabajos anteriores que intentan considerar el carácter estocástico

de los precios, como [4], por su mayor acercamiento a las prácticas reales de la industria minera incorporando la heterogeneidad del recurso minero en cuanto a ley, tonelaje y costos de producción, además de considerar secuencias de extracción respetando relaciones de vecindad. A su vez, difiere de [6], un trabajo que corrige la debilidad anterior, primero al considerar un modelo y una metodología de resolución más general, que no requieren de condiciones fuertes sobre el proceso estocástico del precio del commodity ni sobre la función de beneficios, y además, porque la matemática involucrada para computar la aproximación es más sencilla. Esto contribuye a mejorar las posibilidades de considerar aspectos adicionales de la planificación minera.

Por último, además del interés práctico que pueda despertar esta investigación, en el plano académico la conjunción de elementos en esta tesis confluyen desde diversos puntos, entre otros: programación dinámica, cálculo estocástico, generación de escenarios y programación lineal. En particular, la conjugación de este último con los anteriores reporta especial interés, pues una parte importante de los desarrollos en un ambiente determinístico en planificación minera de largo plazo han sido abordadas mediante programación lineal (Goic [16], Santibáñez [24]). En la próxima sección discutiremos posibles extensiones de este trabajo y oportunidades de investigación futura.

6.2. Investigación futura

En primer lugar, resulta interesante incorporar el diseño de la secuencia como variable de decisión del problema. A nivel de modelo, esto puede ser abordado declarando en el estado un vector binario, tal que su posición i -ésima tiene valor 1 si el bloque i (indexado previamente) no ha sido extraído y valor 0 en caso contrario. Las transiciones deberían considerar que la componente del vector que toma el valor 0 desde una etapa a otra es tal que al menos una de las componentes que denotan a sus bloques vecinos tenía valor 0. En la práctica, incorporar este aspecto puede ser difícil, dependiendo de las dimensiones de la instancia en estudio; el efecto *the curse of dimensionality*, referente al crecimiento exponencial del tamaño del problema a medida que aumenta el número de estados y decisiones posibles, puede demandar un alto uso de recursos. Otras decisiones posibles de considerar son las de apertura o clausura temporal del proyecto.

Una línea de trabajo paralela apunta a utilizar distintos modelos para el precio del commodity y estudiar cómo esto afecta al valor óptimo del proyecto (o a su aproximación) y al desempeño relativo de las políticas de decisiones. La metodología propuesta es flexible a este concepto y el problema estudiado puede constituir un caso interesante para explorar el efecto de usar distintos modelos.

Desde el punto de vista práctico, un aspecto interesante es incorporar restricciones de modelos determinísticos que han sido aplicados en la planificación real de empresas mineras, como los reportados en [16] y [24]. A nivel conceptual, esto podría ser incorporado parcialmente en la definición del conjunto de decisiones factibles $U(\cdot)$. Adicionalmente, se podría investigar la relación de la función J^* con las variables de decisión de esos trabajos.

Desde el punto de vista teórico hay temas que, si bien no son parte central de esta investigación, están relacionados y sería interesante explorarlos. Por un lado, un aspecto por desarrollar es el estudio de la convergencia de las aproximaciones al valor óptimo de la función objetivo. Kushner y Dupuis [19] estudian condiciones de consistencia local de los métodos, cuando el paso de tiempo tiende a cero y desarrollan aproximaciones para familias de procesos que respetan dichas condiciones. En algunos casos puede ser conveniente especializar la aproximación del proceso estocástico 3.1, omitiendo el paseo al azar y utilizando recursos más sofisticados. Además, definir pasos Δt distintos para cada interpolación \tilde{S}_t puede conllevar a mejorar la aproximación. Por ejemplo, para procesos en que la tendencia $\mu(t, S_t)$ toma valores altos para ciertos niveles de S_t , puede ser mejor utilizar pasos pequeños y pasos más amplios en un rango de valores bajos de S_t . Miller y Rice [21] generan aproximaciones discretas a distribuciones continuas en base a cuadratura gaussiana, que permiten igualar los momentos de ambos tipos de distribución al nivel que se desee. Una combinación de este enfoque, con técnicas de reducción de escenarios como las reportadas en Dupacova et al. [11] y Klassen [18], pueden ayudar a conseguir una distribución discreta representativa para nuestro problema.

Finalmente, en vías de abordar problemas de dimensiones mayores, ya sea porque el número de bloques sea muy grande o porque las decisiones posibles de tomar en cada estado sean muchas, puede ser interesante utilizar técnicas para resolver el PPL 4.20 - 4.22 ya sea

en su forma exacta, mediante algún tipo de descomposición, o en alguna forma aproximada. Investigaciones al respecto las encontramos en Trick y Zin [28] y en De Farias y Van Roy [9]. Mientras la primera utiliza algoritmos basados en la generación de restricciones, la segunda formula un PPL reduciendo el número de variables mediante la parametrización del problema apostando a una forma de la función objetivo en régimen estacionario. Este tipo de aproximaciones son un campo por explorar y existen casos exitosos en la literatura, pero que generalmente han debido pasar por una fase de prueba y error prolongada.

Bibliografía

- [1] Bertsekas D.P. *Dynamic Programming and Stochastic Control*. Mathematics in Science and Engineering, Volume 125, 1976.
- [2] Bertsekas D.P., Tsitsiklis J.N. *Neuro-Dynamic Programming*, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 1996.
- [3] Billingsley P. *Convergence of Probability Measures*. John Wiley, New York, 1986.
- [4] Brennan M., Schwartz E. *Evaluating natural resources investments*. Journal of Business, 58, 135-157, 1985.
- [5] Cortázar Gonzalo, Schwartz Eduardo S., Casassus Jaime. *Optimal exploration investments under price and geological-technical uncertainty: a real options model*. R&D Management, 31 (2), 181-189, 2001.
- [6] Caldentey R., Epstein R., Sauré D. *Optimal Exploitation of a Nonrenewable Resource*. Working paper, 01 Mayo 2006.
- [7] Cherian Joseph A., Patel Jayendu, Khripko Ilya. *Optimal Extraction of Nonrenewable Resources When Prices are Uncertain and Costs Cumulate*. Working paper, January 1998.
- [8] Cochilco. *Anuario: Estadísticas del Cobre y Otros Minerales 1987-2006*. <http://www.cochilco.cl/>, ISSN 0716-8462, 2007.
- [9] De Farias D.P., Van Roy B. *The Linear Programming Approach to Approximate Dynamic Programming*. Operations Research, Vol. 51, No. 6 (850-865), 2003.
- [10] Dixit Avinash, Pindyck Robert. *Investment Under Uncertainties*. Princeton University Press, NJ, 1994.
- [11] Dupacova J., Growe-Kuska N., Romisch W. *Scenario Reduction in Stochastic Programming*. Mathematical Programming, Ser. A 95, 493-511, 2003.

BIBLIOGRAFÍA

- [12] Dupacova J., Consigli G., Wallace S.W. *Scenarios for Multistage Stochastic Programs*. Annals of Operations Research, 100, 25-53, 2000.
- [13] Ethier S.N., Kurtz T.G. *Markov Processes: Characterization and Convergence*. Wiley, New York, 1986.
- [14] Engel E., Valdés R. *Prediciendo el Precio del Cobre: ¿Más Allá del Camino Aleatorio?*. Documento de Trabajo No. 100, Centro de Economía Aplicada (CEA), Universidad de Chile, 2001.
- [15] Fernández Viviana, Contreras Eduardo. *Una Nueva Metodología para la Evaluación de Proyectos de Inversión: Las Opciones Reales*. Trend Management, Vol. 6, 86-95, Mayo 2004.
- [16] Goic M. *Formulación e implementación de un modelo de programación matemática para la planificación de largo plazo en minería a cielo abierto*. Trabajo de Título, Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile, 2003.
- [17] Hillier Frederick S., Lieberman Gerald J. *Introducción a la investigación de operaciones*. McGraw-Hill, sexta edición, 1997.
- [18] Klassen P. *Financial Asset-Pricing Theory and Stochastic Programming Models for Asset / Liability Management: A Synthesis*. Management Science, Vol. 44, Nro. 1 (31-48), 1998.
- [19] Kushner H.J., Dupuis P. *Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time*. Springer, 2nd Edition, Febrero de 2001.
- [20] Lane K. *The Economic Definition of Ore: Cut-Off Grades in Theory and Practice*. Mining Journal Books Limited, 1988.
- [21] Miller A.C., Rice T.R. *Discrete approximations of probability distributions*. Management Science, Vol. 29, Nro. 3 (352-362), 1983.
- [22] Oksendal Bernt. *Stochastic Differential Equations, An Introduction With Applications*. Springer-Verlag Heidelberg New York, 5th Edition, 2002.

BIBLIOGRAFÍA

- [23] Ross Sheldon M. *Stochastic Processes*. John Wiley & Sons Inc., 2nd Edition, 1996.
- [24] Santibáñez P. *Metodología para la evaluación y optimización de planes mineros de largo plazo*. Trabajo de Título, Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile, 2000.
- [25] Schwartz E. *The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging*. The Journal of Finance, volume 52, issue 3, 1997.
- [26] Schwartz E., Smith J. *Short-Term Variations and Long-Term Dynamics in Commodity Prices*. Management Science, Vol. 46, Nro. 7 (893-911), 2000.
- [27] Steele J. Michael. *Stochastic Calculus and Financial Applications*. Springer, 2001.
- [28] Trick Michael A., Zin Stanley E. *A Linear Programming Approach to Solving Stochastic Dynamic Programs*. Manuscrito no publicado, 1993.
- [29] Zúñiga, Pamela. Artículo periodístico en *La Tercera*, sección Negocios, pág. 27, 12 de Abril de 2007.

Apéndice A

Fundamentos de Cálculo Estocástico y Demostraciones

Este anexo está basado en Oksendal [22], Ross [23] y Steele [27].

A.1. Algunos conceptos esenciales

- La terna (Ω, \mathcal{F}, P) es un *espacio de probabilidad* si Ω es un conjunto, \mathcal{F} es una colección de subconjuntos de Ω tal que: (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$, (ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$, y (iii) para cualquier colección contable de $A_i \in \mathcal{F}$ se tiene $\bigcup A_i \in \mathcal{F}$; y P es una función desde \mathcal{F} a $[0, 1]$ tal que $P(\Omega) = 1$ y para toda colección disjunta $\{A_i\}$ de elementos de \mathcal{F} se tiene $P(\bigcup A_i) = \sum P(A_i)$.

\mathcal{F} es llamada una σ -álgebra y P la *medida de probabilidad*.

- Una *variable aleatoria* es una función $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ con la propiedad que $\{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F} \forall x \in \mathbb{R}$. Se dice entonces que tal X es *medible* con respecto a \mathcal{F} .
- El espacio L^p está conformado por todas las variables aleatorias X tal que $E[|X|^p] < \infty$.
- Si una colección $\{\mathcal{F}_t\}$ de sub- σ -álgebras de \mathcal{F} tiene la propiedad que $s \leq t$ implica $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, entonces la colección es llamada una *filtración*; y si las variables aleatorias $\{X_t, 0 \leq t < \infty\}$ son tales que cada X_t es \mathcal{F}_t medible, entonces se dice que X_t es *adaptada* a la filtración.

A.2. Movimiento Browniano o Proceso de Wiener

Un proceso estocástico $\{X_t, t \geq 0\}$ es un movimiento Browniano o Proceso de Wiener si:

1. $X_0 = 0$.
2. $\{X_t, t \geq 0\}$ tiene incrementos independientes y estacionarios.
3. $\forall t > 0$, X_t distribuye según una Normal de media 0 y varianza c^2t .

En particular, cuando $c = 1$, el proceso se conoce como *Movimiento Browniano Estándar* y lo denotaremos por B_t .

A.3. Teorema de Existencia y Unicidad

Si los coeficientes de la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \quad (\text{A.1})$$

$$X_0 = x_0 > 0, \quad (\text{A.2})$$

para $0 \leq t \leq T$ satisfacen la condición de Lipschitz de “espacio-variable”

$$|\mu(t, x) - \mu(t, y)|^2 + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 \leq K|x - y|^2 \quad (\text{A.3})$$

y la condición de “crecimiento espacial”

$$|\mu(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq K(1 + |x|^2), \quad (\text{A.4})$$

entonces existe una solución continua y adaptada X_t de la ecuación diferencial estocástica A.1 que es uniformemente acotada en $L^2(dP)$:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} E(X_t^2) < \infty \quad (\text{A.5})$$

Además, si X_t e Y_t son soluciones continuas de la Ecuación A.1 y uniformemente acotadas en L^2 , entonces:

$$P(X_t = Y_t \forall t \in [0, T]) = 1 \quad (\text{A.6})$$

A.4. Fórmula de Ito en 1 Dimensión

Sea X_t un proceso de Ito dado por

$$dX_t = u(t, X_t)dt + v(t, X_t)dB_t$$

Sea $g(t, x) \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$ (i.e., g es dos veces continuamente diferenciable en $[0, \infty) \times \mathbb{R}$).

Luego

$$Y_t = g(t, X_t)$$

es también un proceso de Ito, y

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) \cdot (dX_t)^2,$$

donde $(dX_t)^2 = (dX_t) \cdot (dX_t)$ es computado de acuerdo a las reglas

$$dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0, dB_t \cdot dB_t = dt$$

A.5. Resolución de la ecuación diferencial estocástica del movimiento Browniano geométrico

La ecuación que nos interesa resolver en la Sección 5.1 es:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \tag{A.7}$$

$$S_0 = s_0 > 0, \tag{A.8}$$

Supondremos una solución del tipo $S_t = f(t, B_t)$. Al aplicar la fórmula de Ito a esta relación se tiene:¹

$$dS_t = \left\{ f_t(t, B_t) + \frac{1}{2} f_{ss}(t, B_t) \right\} dt + f_s(t, B_t) dB_t \tag{A.9}$$

De la igualación de coeficientes de las ecuaciones A.7 y A.9 se concluye que $f(t, s)$ debe cumplir las siguientes dos ecuaciones:

¹Usamos notación abreviada para las derivadas, por ejemplo: $f_t = \frac{\partial f}{\partial t}$.

$$\mu f(t, s) = f_t(t, s) + \frac{1}{2} f_{ss}(t, s) \quad (\text{A.10})$$

$$\sigma f(t, s) = f_s(t, s) \quad (\text{A.11})$$

Éstas son ecuaciones diferenciales ordinarias de fácil resolución. La EDO A.11 posee una solución exponencial de la forma

$$f(t, s) = e^{\sigma s + g(t)}, \quad (\text{A.12})$$

donde $g(\cdot)$ es una función arbitraria. Utilizando A.12 en A.10, se verifica que $g(\cdot)$ debe cumplir:

$$g'(t) = \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \quad (\text{A.13})$$

Luego, la solución de la Ecuación A.7 - A.8 es:

$$S_t = s_0 e^{\{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma B_t\}} \quad (\text{A.14})$$

A.6. Cálculo del ingreso

$$\begin{aligned}
 G_e^j = E [g_e(K, L^j, j, \tau, S_0^j) | S_\tau = S] &= e^{-r\tau} E \left[\int_0^{T_j(Q_j, K)} e^{-rt} KL^j S_{t+\tau} dt | S_\tau = S \right] \\
 &= e^{-r\tau} KL^j \int_0^{T_j(Q_j, K)} e^{-rt} E [S_{t+\tau} | S_\tau = S] dt \\
 &= e^{-r\tau} KL^j \int_0^{T_j(Q_j, K)} e^{-rt} E \left[S e^{\{(r-\rho-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma B_t\}} \right] dt \\
 &= e^{-r\tau} KL^j \int_0^{T_j(Q_j, K)} S e^{(-\rho-\frac{1}{2}\sigma^2)t} E [e^{\sigma B_t}] dt \\
 &= e^{-r\tau} KL^j \int_0^{T_j(Q_j, K)} S e^{(-\rho-\frac{1}{2}\sigma^2)t} e^{\frac{\sigma^2 t}{2}} dt \\
 &= e^{-r\tau} KL^j \int_0^{T_j(Q_j, K)} S e^{-\rho t} dt \\
 &= e^{-r\tau} SKL^j \frac{1 - e^{-\rho T_j(Q_j, K)}}{\rho}
 \end{aligned}$$

Apéndice B

Algoritmo de Generación de Precios y Estados

- **Entrada:** Conjunto de nodos V (ordenado según la secuencia a evaluar π), tiempos T_j y $\tau_{max}(j)$, paso Δt , precio inicial S_0 , funciones $\mu(t, S_t)$ y $\sigma(t, S_t)$.
- **Salida:** Un total de $|V|$ conjuntos $CS_0(j)$ de precios iniciales (un conjunto para cada etapa (j)), conjuntos $ST(s, j, \tau)$ para cada s posible al inicio de cada etapa (j) que contienen los precios iniciales posibles de observar en la próxima etapa bajo el control τ , y valores $p(s, j, \tau, s')$ equivalentes a la probabilidad de pasar del precio s al precio s' desde la etapa del bloque j al $j-1$ bajo el control τ (tales que $\sum_{s' \in ST(s, j, \tau)} p(s, j, \tau, s') = 1$).

- **Algoritmo (en pseudo-código):**

```
SGenAc(1)=S0
For j = 1 to |V|
  For h = 1 to |SGenAc|
    For τ = 0 to τmax(j)
      FijarLargo(SPadre,1)
      SPadre(1)=SGenAc(h)
      FijarLargo(SHijo,2)
      For k = 1 to τ + Tj
        For i = 1 to 2k-1
          SHijo(i) = SPadre(i) + μ(Count(t), s)Δt + σ(Count(t), s)√Δt
          SHijo(i + 2k-1) = SPadre(i) + μ(Count(t), s)Δt - σ(Count(t), s)√Δt
          i=i+1
        If(k < τ + Tj){
          FijarLargo(SPadre,2k-1)
          SPadre = SHijo
          FijarLargo(SHijo,2k)
        }
      k = k + 1
    OrdenarAscendentemente(SHijo)
```

APÉNDICE B. ALGORITMO DE GENERACIÓN DE PRECIOS Y ESTADOS

```

card_Act = 1
Sp = Shijo(1)
Suma = Sp
m = 1
FijarLargo(Precio,1)
FijarLargo(Frecuencia,1)
For i = 2 to 2τ+Tj
  Sa=Shijo(i)
  If (Sa - Sp < ε) {
    card_Act = card_Act + 1
    Suma=Suma + Sa
    If(i = 2τ+Tj){
      Precio(m) = suma/card_Act
      Frecuencia(m) = card_Act
    }
  }
  If (Sa - Sp ≥ ε) {
    Precio(m) = suma/card_Act
    Frecuencia(m) = card_Act
    m = m +1
  }
  FijarLargo(Precio,m)
  FijarLargo(Frecuencia,m)
  Sp = Sa
  Suma = Sp
  card_Act = 1
  If(i = 2τ+Tj){
    Precio(m) = suma/card_Act
    Frecuencia(m) = card_Act
  }
}
i=i+1
FijarLargo(Prob,m)
For k = 1 to m
  Prob(SGenAc(h),j,τ,Precio(k)) = Frecuencia(k)/2τ+Tj
  ST(SGenAc(h),j,τ)=ST(SGenAc(h),j,τ) ∪{Precio(k)}
k=k+1
SPactAux= SPactAux ∪ Precio
τ = τ + 1
h = h + 1
CS0(j) = SPactAux
SGenAc=SPactAux
j=j+1

```

Apéndice C

Parámetros

C.1. Caracterización de bloques

Bloque	Q_j [Ton]	L_j [%]	T_j [año]
1	21,415,510	0.827	2.93
2	21,268,610	0.915	2.91
3	29,526,438	0.823	4.04
4	28,351,480	0.881	3.88
5	24,854,221	0.845	3.40
6	23,931,346	0.848	3.28
7	21,476,937	0.768	2.94
8	26,110,339	0.727	3.58
9	14,913,691	0.694	2.04
10	13,126,378	0.776	1.80

Tabla C.1: Material Q_j , ley de cobre L_j y tiempo de extracción T_j de la instancia de experimentación.

C.2. Arcos de vecindad

Bloque	Vecinos
1	2,3
2	1,3,5,7
3	1,2,4,5
4	3
5	2,3,6,7
6	5
7	1,2,5,8
8	1,7,9
9	8,10
10	9

Tabla C.2: Relación de vecindad entre bloques de la instancia de experimentación.

C.3. Distancias

$d_{i,j}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	90	190	321	191	314	159	189	275	367
2	90	0	102	234	174	295	157	240	350	438
3	190	102	0	133	233	336	182	299	424	507
4	321	234	133	0	343	425	272	399	532	607
5	191	174	233	343	0	124	327	380	454	547
6	314	295	336	425	124	0	450	503	569	661
7	159	157	182	272	327	450	0	128	263	335
8	189	240	299	399	380	503	128	0	136	209
9	275	350	424	532	454	569	263	136	0	93
10	367	438	507	607	547	661	335	209	93	0

Tabla C.3: Distancia (en metros) entre los bloques.

C.4. Secuencias

Secuencia	Orden de Extracción
N1	1-2-3-4-5-6-7-8-9-10
N2	10-9-8-7-1-2-5-3-4-6
N3	4-3-2-1-7-8-9-10-5-6
N4	6-5-2-1-3-4-7-8-9-10
N5	1-2-7-8-9-10-5-6-3-4
N6	1-2-5-3-7-8-6-4-9-10

Tabla C.4: Orden de extracción de los bloques en cada secuencia evaluada.

C.5. Otros parámetros

Nombre	Valor
K	7,3 [MM ton / año]
r	12 %
ρ	6 %
a	4.857
b	0.0162
σ	0.5

Tabla C.5: Otros parámetros.