



**UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL**

**SIMPLIFICACIÓN DE UN MODELO DE PLANIFICACIÓN MINERA CON  
AGREGACIÓN A PRIORI Y A POSTERIORI PARA CODELCO**

**MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL**

**RICARDO VEGA CARRIZO**

**PROFESOR GUÍA:  
ANDRÉS WEINTRAUB POHORILLE**

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
ALEJANDRO BARRIENTOS MENDOZA  
PATRICIO CONCA KEHL**

**SANTIAGO DE CHILE  
AGOSTO 2008**

## RESUMEN EJECUTIVO

El presente Trabajo de Título se enfoca dentro del marco teórico de la planificación minera. A su vez, una de las herramientas básicas para la planificación minera es el modelo de bloques, el cual consiste en una representación discreta de un yacimiento determinado a través de un muestreo ordenado de las características del terreno. La planificación de extracción de estos bloques se entiende en este caso como la determinación del año en que cada uno de ellos será extraído a lo largo de un horizonte dado. Para ello se contó con un Problema de Programación Mixta, el cual al ser ejecutado en alguna herramienta computacional (en este caso CPLEX) entrega la solución óptima de extracción. Además se contó con una agregación ‘a priori’ de los bloques en clusters como situación inicial, realizada en el trabajo de título de Ximena Schultz.

El trabajo tiene como objetivo reducir aun más el modelo, de forma de poder ocuparlo en Análisis de Escenarios con Procesos Estocásticos (el cual requiere ejecutar el modelo alrededor de 3.000 veces) y además crear un modelo corporativo para CODELCO. Es además deseable que la solución encontrada no tenga un error mayor al 10% que la original, y en particular inferior al 3% con respecto a la agregación “a priori” ya mencionada.

La metodología utilizada para llevar a cabo la simplificación consistió en tres etapas. Primero, hubo una etapa de fijación de variables binarias donde muchas de ellas fueron fijadas en 0 cuando era posible determinar que al tomar el valor 1 se transgredía alguna restricción. Luego vino una segunda etapa donde se compactaron la mayoría de los datos que alimentan el problema, reemplazándose grandes matrices con ceros y unos por pequeños archivos de pares ordenados. La última etapa consistió en realizar una segunda agregación (“a posteriori”) de modo de formar grupos de clusters de forma similar a la agregación “a priori”, para disminuir el número de variables utilizando criterios distintos a la primera.

Finalmente se implementaron exitosamente 4 agregaciones distintas (con un máximo de 2, 3, 4 ó 5 clusters por grupo cada una), donde la mejor de ellas presenta una reducción del 80% del tiempo de ejecución y un 3% de error con respecto al modelo con agregación “a priori”. Considerando que la agregación “a priori” presentaba una reducción del tiempo de ejecución del 74% con un 3,62% de error con respecto al modelo original, el modelo final queda con una reducción del tiempo de ejecución acumulada del 95% con un 6,51% de error acumulado, con lo cual se cumple que el error entre el modelo final y el original es inferior a 10%.

## ÍNDICE

<b>I. INTRODUCCIÓN</b>	<b>4</b>
<b>II. DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO</b>	<b>6</b>
<b>II.i PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</b>	<b>6</b>
<b>II.ii SITUACIÓN INICIAL</b>	<b>8</b>
<b>II.iii JUSTIFICACIÓN</b>	<b>11</b>
<b>II.iv SOLUCIÓN PROPUESTA</b>	<b>12</b>
<b>II.v OBJETIVOS</b>	<b>12</b>
<b>II.vi METODOLOGÍA</b>	<b>13</b>
<b>II.vii CONTEXTO DEL TRABAJO</b>	<b>14</b>
<b>III. DESARROLLO DEL PROYECTO</b>	<b>15</b>
<b>III.i PREPARACIÓN DEL MODELO</b>	<b>17</b>
<b>III.ii AGREGACIÓN DE CLUSTERS</b>	<b>21</b>
<b>III.iii IMPLEMENTACIÓN</b>	<b>27</b>
<b>IV. RESULTADOS</b>	<b>32</b>
<b>V. CONCLUSIONES</b>	<b>36</b>
<b>V.i CONCLUSIONES SOBRE EL PROYECTO</b>	<b>36</b>
<b>V.ii CONSIDERACIONES FUTURAS</b>	<b>37</b>
<b>V.iii METODOLOGÍA PROPUESTA</b>	<b>37</b>
<b>VI. BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>41</b>
<b>VII. ANEXOS</b>	<b>42</b>

## I. INTRODUCCIÓN

La planificación minera concerniente a este trabajo consiste principalmente en definir cómo se explotará un yacimiento determinado en el horizonte de tiempo sobre el cual se planifica, de modo de obtener los máximos beneficios posibles. El yacimiento y sus subsectores se dividen en cubos de 20 metros de arista los que se conocen como “unidades básicas de cubicación” (UBC)<sup>1</sup>, los cuales presentan varias características, como por ejemplo su ubicación, su ley de cobre y molibdeno, el costo y tiempo de extracción, etc.

De esta forma se construye un Modelo de Programación Mixta<sup>2</sup> de gran tamaño (con variables enteras y lineales) cuyas variables binarias indican si determinada UBC se extrae durante cierto período o no. Este modelo cuenta con un sinnúmero de restricciones, las cuales se aseguran de que la solución encontrada sea posible llevarla a la práctica. Éstas incluyen – por ejemplo – que se respete la capacidad de extracción con que se cuenta, la capacidad de transporte de las vías ferroviarias, la cantidad de días asociada a cada período (por ejemplo los años bisiestos tienen un día más), etc. Por otra parte, en la función objetivo aparecen parámetros como por ejemplo el precio del cobre y los costos asociados a la extracción de mineral.

Dadas las grandes dimensiones que presenta el modelo, el cual tarda alrededor de dos minutos en ejecutarse (tomando sólo la instancia de prueba ya que el completo tarda más de dos horas), se hace necesario implementar simplificaciones que permiten obtener resultados en menor tiempo. Una simplificación ya ha sido implementada para este problema, la cual fue tomada del ejemplo de la planificación forestal, tesis de Sáez, 1991 “Técnicas de clasificación para agregación de problemas de planificación forestal”, donde tuvo éxito<sup>3</sup>.

La primera de estas agregaciones se trata de la agregación de las UBC que dan origen al problema en grandes conglomerados (clusters) que puedan ser considerados una gran entidad que las representa. Así, las variables binarias harán referencia a un cluster (grupo de UBCs) y no a cada una de las UBC que lo componen, bajando el número de variables de forma considerable. Dado que esta agregación se produce antes de definir el modelo, se conoce como agregación ‘a priori’. La situación inicial de esta tesis incluye esta primera agregación ya implementada en forma exitosa con

---

<sup>1</sup> Ver capítulo II.i para una definición más detallada

<sup>2</sup> El modelo original se encuentra en ‘Anexos’

<sup>3</sup> Ver punto (2) de la bibliografía

una reducción del tiempo de ejecución de un 74%. Esta primera etapa fue implementada en la tesis de Schultz, 2007 “Agregación de un modelo de planificación minera utilizando análisis de cluster a priori”.

La segunda agregación tiene como objetivo simplificar aún más el modelo de modo que sea útil para hacer un análisis de escenarios con procesos estocásticos, para lo cual se requiere ejecutarlo aproximadamente 3.000 veces, como también para obtener un modelo corporativo que incluya las distintas divisiones de CODELCO. De esta forma una reducción del tiempo de ejecución del modelo traería consigo un importante ahorro de costos computacionales; además, una disminución del número de variables implicaría tener que ejecutar el modelo menos veces, por lo que también implicaría un ahorro. Todos estos beneficios representan los principales objetivos de este trabajo y los que le anteceden, dentro de los cuales se encuentra la ya mencionada tesis de “agregación a priori” y la tesis de Pereira M., 2007 “Construcción de un modelo agregado de planificación minera”. Esta última tesis implementa la agregación de variables usando la Teoría de Zipkin (ver capítulo **III.iii “Implementación”**) y si bien la idea original era implementar la segunda agregación utilizando esta metodología, finalmente se optó por otra que se encuentra descrita en el mismo capítulo.

La naturaleza de esta segunda agregación consiste entonces en crear grupos de clusters de forma tal que el modelo se reduzca aún más. La metodología y la implementación de los resultados (grupos de clusters) obtenidos tendrán un carácter flexible en la búsqueda de encontrar una solución que reduzca el tiempo de ejecución y las variables del modelo y que al mismo tiempo presente un error moderado (menor a un 3% se considera aceptable).

Finalmente es importante consignar que cualquier otra alteración del modelo – aparte de la agregación de clusters – que vaya en beneficio de los objetivos planteados en el trabajo, será incluida dentro de este informe como parte del proceso. Estas alteraciones atacan principalmente algunas ineficiencias en la programación que hacen que la ejecución del modelo resulte más lenta. La primera modificación que se realizó fue compactar lo máximo posible los datos de entrada del modelo de modo que la lectura fuese rápida; por ejemplo en el caso de existir grandes matrices donde la mayor parte de los elementos son cero, se reemplazaron por pares ordenados que describen la posición de los elementos no nulos. La segunda modificación llevada a cabo corresponde a la fijación de variables, es decir, aquellas variables binarias del modelo cuyo valor pueda ser

determinado a través de un análisis de las restricciones, fueron fijadas en dicho valor antes de la ejecución del modelo. Estas buenas prácticas computacionales (las cuales aparecen en mayor detalle en el capítulo III.i “Preparación del Modelo”) fueron implementadas a sugerencia del matemático Andreas Bley, quien tuvo una activa participación en el mejoramiento del formato del modelo.

## II. DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO

### II.i PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La cubicación de un yacimiento en minería, representa una de las herramientas más importantes a la hora de abordar el problema de la planificación minera. Esto consiste básicamente en modelar de forma discreta el yacimiento como una cuadrícula tridimensional de bloques homogéneos de dimensiones fijas. De esta forma, para cada uno de estos bloques imaginarios se toma una muestra del mineral en su interior de modo de determinar las características de cada bloque. Estas características pueden ser: ley de cobre, ley de molibdeno, toneladas, etc. El ejemplo de la Figura 1 muestra la discretización de un yacimiento ficticio, el cual está formado por bloques homogéneos de 20 m. de arista.

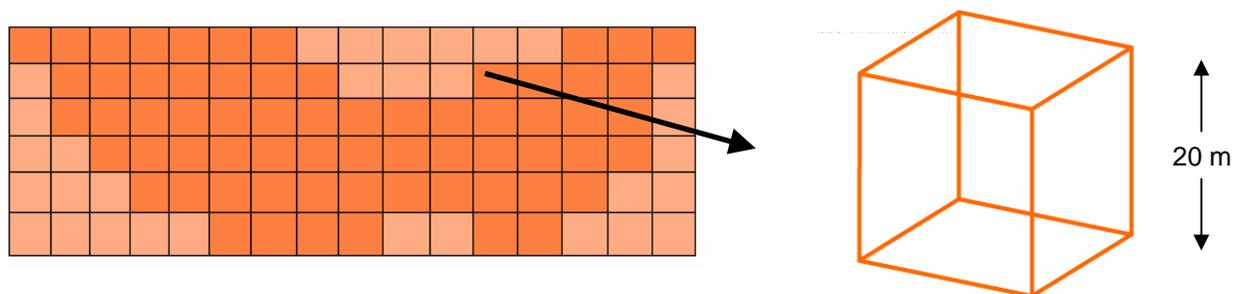


Figura 1: Cubicación de un yacimiento en UBCs de 20m. de arista  
Fuente: Elaboración propia

La planificación minera, en este caso, consiste en determinar en qué período (dentro de un horizonte determinado) se extraerá cada uno de estos bloques. Para ello se crea un Modelo de

Programación Mixta utilizando alguna herramienta computacional (en este caso CPLEX) de modo de determinar la forma de extracción que maximice el beneficio. Este modelo debe incorporar tanto los ingresos por las ventas del mineral como los costos de explotación y transporte asociados. Además debe respetar restricciones que dicen relación con la capacidad de las máquinas con que se cuenta y con la secuencia lógica de extracción de los bloques.

Para el desarrollo del presente trabajo se ocupó una instancia que comprende 11 subsectores de la mina El Teniente de CODELCO. Esta mina es subterránea y por lo tanto presenta características particulares en su método de extracción de mineral.

Algunas de estas características son:

- Para acceder a las zonas mineralizadas se construyen labores subterráneas desde la superficie, las cuales pueden ser túneles, piques o rampas para tener acceso en forma horizontal, vertical o inclinada respectivamente.

- Al contrario del caso de una mina a rajo abierto, la secuencia de extracción para una mina subterránea se realiza desde abajo hacia arriba, de modo que dentro de las restricciones del modelo se encuentra una relación de precedencia, la cual establece que para poder extraer una determinada UBC en un período arbitrario  $T$ , ya deben haber sido extraídas todas las UBCs que se encuentren debajo de ella.

- El método de explotación utilizado en El Teniente es el Panel Caving. En explotación de minas se denomina “caving” a operaciones destinadas a provocar el hundimiento de la roca, aprovechando las tensiones internas y la fuerza de gravedad. Mediante el uso de explosivos se socava la base de la columna de roca, de modo de fragmentar paulatinamente la columna hacia arriba para que ésta ceda, cayendo en puntos especialmente ubicados para captar el material.

- Todo lo que se extrae se procesa, no existe la “ley de corte” como en las minas a rajo abierto, la cual corresponde a la ley mínima que debe tener el mineral extraído para ser procesado. Esta es la principal diferencia que tendrá el modelamiento de la mina subterránea respecto a las de rajo abierto ya que éstas últimas necesitan una variable binaria adicional que determine la decisión de procesar o no el mineral extraído.

Si bien cuando se proceda a crear el modelo corporativo de CODELCO, la mayoría de las minas presentará características completamente distintas a la instancia con que trabajó – por ser

muchas de ellas a rajo abierto – la metodología que se detalla más adelante es absolutamente replicable a cualquiera de ellas.

## II.ii SITUACIÓN INICIAL

### MODELO ORIGINAL

Antes de describir la situación inicial en que se encontraba el modelo previo a la realización de este trabajo, es necesario revisar cuál ha sido su evolución desde el modelo original hasta la agregación “a priori” realizada por Ximena Schultz.

Inicialmente el modelo no presentaba agregaciones, de modo que para cada UBC del yacimiento ficticio de la Figura 2 se tiene una variable binaria  $Z(t)$ , la cual vale 1 si dicha UBC se extrae el período  $t$  y 0 en caso contrario.

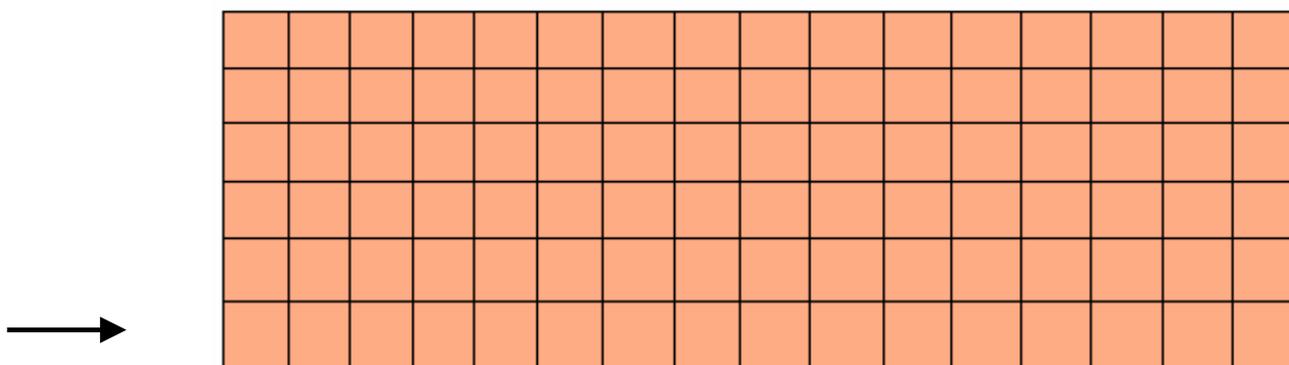


Figura 2: Cada una de estas UBCs tiene su propia variable binaria  $Z(t)$  asociada

Fuente: Elaboración propia

El número de UBCs es variable dependiendo del subsector en que se encuentran; este número oscila entre 500 y 80.000 unidades.

Para planificar la extracción de estas UBCs se cuenta con un Problema de Programación Mixta similar al que se encuentra en anexos, el cual incluye todas las restricciones que deben respetarse debido a capacidad de transporte, secuencia de extracción (hacia arriba), velocidad de

extracción para cada UBC, etc. La función objetivo considera principalmente los beneficios por la venta de cobre y molibdeno menos los costos de operación.

También es interesante notar que en la figura anterior se debe comenzar a extraer mineral desde la izquierda en la dirección que indica la flecha, por lo tanto, para la fila inferior de UBCs también existe una restricción de secuencia en el sentido horizontal. Una vez extraída esta fila sólo queda la restricción de secuencia hacia arriba, es decir, para las demás filas no es necesario extraer las UBCs de izquierda a derecha.

## **AGREGACIÓN A PRIORI**

La primera agregación (“a priori”, realizada por Ximena Schultz) consistió en una clusterización de estas UBCs, de modo en lugar de trabajar con ellos se trabajará con clusters. Es decir, el nuevo problema a resolver es determinar en qué período es conveniente extraer cada uno de ellos durante el horizonte de tiempo definido de modo de obtener los máximos beneficios posibles.

La clusterización consiste básicamente en agrupar las UBCs mediante el método K-means, el cual forma K clusters con las UBCs de modo que la semejanza entre las UBCs que queden en el mismo cluster sea la máxima posible y la semejanza entre UBCs de distintos clusters sea mínima. Además se requiere que no se formen clusters imposibles de extraer según la secuencia lógica del modelo.

Para obtener un valor que represente la “distancia” (el inverso de la cual es la semejanza) entre dos UBCs se calcula la diferencia entre ambas para los siguientes parámetros:

***Tonelaje*** – con una ponderación de 0.1

***Ley de Cobre*** – con una ponderación de 0.25

***Ley de Molibdeno*** – con una ponderación de 0.05

***Velocidad de Extracción*** – con una ponderación de 0.6

Estas ponderaciones fueron establecidas según conocimiento de expertos.

Una vez obtenidos los clusters se procedió a recalcular los parámetros antes mencionados para cada cluster, lo cual se obtiene con la suma o el promedio ponderado de los valores originales según sea el caso. Por ejemplo, el tonelaje de un cluster se calcula mediante la suma del tonelaje de las UBCs que contiene, sin embargo, la ley de cobre del cluster se obtiene con el promedio de la ley de corte de cada UBC, ponderada por el tonelaje.

Finalmente, en la Figura 3 se puede observar que las UBCs originales que describían de forma discreta el yacimiento fueron reemplazadas por clusters que presentan formas irregulares.

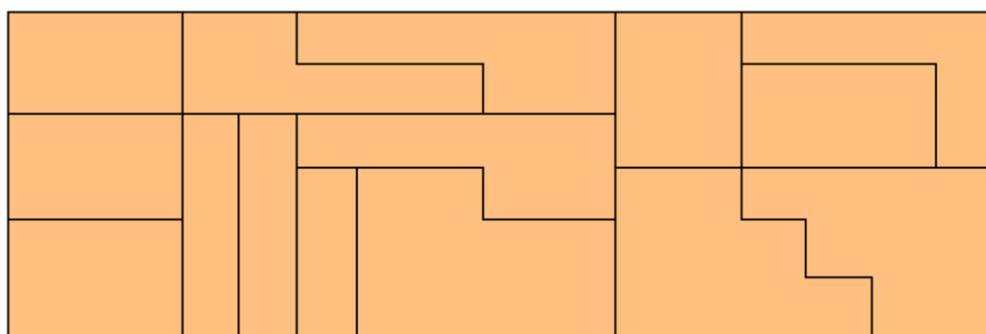


Figura 3: Las UBCs originales del modelo han sido reemplazadas por clusters

Fuente: Elaboración propia

El principal resultado de esta clusterización es que el número de variables se ve reducido considerablemente, ya que ahora se tiene una variable  $Z(t)$  para cada cluster, la cual es binaria y vale 1 si el cluster se extrae el período  $t$  y 0 en caso contrario. Esto tuvo como consecuencia la una reducción porcentual del 73,68% del tiempo de ejecución con un error asociado del 3,62% en la función objetivo.

Algunos efectos negativos de la clusterización fue la pérdida de precisión en algunos valores asociados a las UBCs del modelo original. Por ejemplo, existe un parámetro que indica los días promedio de extracción para cada UBC, y no es evidente cómo calcular los días promedio de extracción para los clusters a partir de esa información; esto se debe a la forma irregular que presentan los clusters. No sería válido sumar estos días ya que para algunos clusters, dos o más UBCs pueden ser extraídas simultáneamente (si se encuentran una al lado de la otra) y en otros casos deben extraerse en forma secuencial (si se encuentran una debajo de la otra). Por esta razón, este valor se aproxima como la altura promedio del cluster por la velocidad de extracción.

Dado lo anterior, lo que se busca obtener durante el presente trabajo es formar grupos de clusters de modo que el modelo se reduzca aún más. Tanto los criterios de agregación como su implementación en el modelo tendrán un carácter flexible para así probar distintos casos y quedarse con el que dé mejores resultados según los objetivos planteados.

Es importante notar que el modelo de la situación inicial cuenta con un total de 7.687 clusters, repartidos en 11 subsectores de la mina subterránea El Teniente de CODELCO.

### **II.iii JUSTIFICACIÓN**

Si bien puede parecer excesivo el pretender seguir simplificando un modelo que ya en su oportunidad tuvo un proceso de agregación exitosa, es necesario tener en cuenta lo siguiente:

- La instancia de prueba con que se está trabajando consta sólo de 11 subsectores de la división El Teniente de CODELCO con un horizonte de 5 años, pero se busca sentar las bases para la creación de un modelo corporativo que incluya todas las divisiones de CODELCO durante un horizonte de al menos 25 años. Los subsectores con los que se está trabajando fueron considerados sólo hasta donde se alcanzaría a explotar durante 5 años.

- El paso siguiente al presente trabajo consiste en ocupar el modelo obtenido para realizar análisis de escenarios de incertidumbre (principalmente con el precio del cobre), los cuales – dado el nivel de variables actual – requiere ejecutar el modelo aproximadamente 3.000 veces. También se tiene que una reducción del número de variables del problema implica una disminución proporcional del número de veces que el modelo debe ejecutarse (esto es independiente de la reducción que esto implicaría en el tiempo de ejecución).

- Además, dado que varios de los parámetros del modelo tienen relación con la infraestructura disponible (por ejemplo, la capacidad de las vías ferroviarias), éste permitiría apoyar la toma de decisiones al obtenerse la el valor de los beneficios con distintas configuraciones. Es decir, distintas alternativas de inversión podrían ser rápidamente evaluadas.

## **II.iv SOLUCIÓN PROPUESTA**

La solución propuesta para llevar a cabo la agregación de clusters corresponde a ocupar el algoritmo Leader Type (que será explicado más adelante) el cual puede ser programado en cualquier lenguaje – en este caso JAVA – y que irá entregando los grupos de clusters que se vayan formando en archivos de texto. Además se programará con otros fines anexos como lo son la fijación de variables y la reducción de datos, los cuales corresponden a las buenas prácticas computacionales explicadas anteriormente y que son explicados en mayor detalle más adelante.

## **II.v OBJETIVOS**

Para este trabajo los objetivos son los siguientes:

### **OBJETIVOS GENERALES:**

- Reducir el Modelo de Programación Mixta utilizando agregación de clusters ‘a posteriori’ sobre la situación inicial – la cual ya incluye una agregación de bloques ‘a priori’ – de modo de sentar las bases para la confección de un modelo corporativo que permita incluir todas las divisiones de CODELCO en un horizonte de 25 años, obteniendo soluciones cercanas a la original y con menores tiempos de ejecución. Si bien este modelo corporativo estaba pensado para 5 años, la importancia de realizarlo a 25 años radica en que se puede incluir parte del yacimiento que no alcanza a ser explotado en 5 años. Se entiende que la metodología utilizada para llevar a cabo este trabajo deberá ser replicable para los casos que queden fuera del alcance.

### **OBJETIVOS ESPECÍFICOS:**

- Lograr que el modelo entregue soluciones en menor tiempo al original y a la agregación a priori.
- Obtener soluciones con el menor error posible con respecto al problema original, y con un error menor al 3% con respecto a la agregación de bloques ‘a priori’.
- Reducir el número de variables.
- Desarrollar un modelo que respete las restricciones intrínsecas del problema (secuencia, capacidad de las vías ferroviarias, etc.)

## II.vi METODOLOGÍA

Dentro de la metodología que se aplicará para llevar a cabo la agregación de clusters ‘a posteriori’ se distinguen tres etapas esenciales del proceso:

- Definir el criterio de agregación que se le aplicará a los clusters que formen un grupo. Estos criterios pueden ser variados y se pretende probar con distintas combinaciones de modo de definir cual es la mejor forma de agrupar los clusters. También es necesario definir un nivel de agregación, es decir, determinar qué tan grandes serán los grupos de clusters que se formarán. Esto adquiere gran relevancia dado que siendo ésta la segunda agregación que se aplica al mismo problema, existe riesgo de caer en la infactibilidad en caso de intentar agregar demasiado el modelo.
- Aplicar el algoritmo Leader Type para que una vez definidos los criterios de agregación anteriormente mencionados se proceda a crear los grupos. El funcionamiento específico del algoritmo Leader Type será explicado en la sección “Desarrollo del Proyecto”. La ejecución de todos los procedimientos internos serán programados en JAVA.
- Implementar los resultados obtenidos en la agregación en el modelo original, el cual se encuentra en formato GAMS (plataforma que incluye CPLEX). Existen varias formas de implementar la agregación y la conveniencia de cada una de ellas se analizará de modo de elegir la que entregue los mejores resultados.

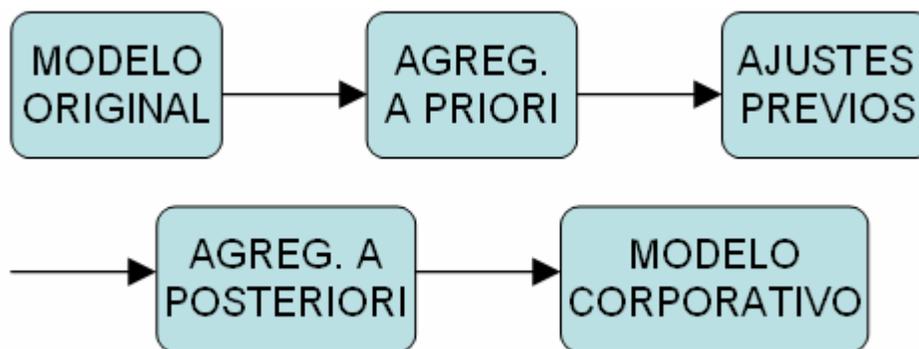
Aparte del proceso de agregación antes descrito existen etapas previas, las cuales pretenden aplicar otras simplificaciones al modelo que no tengan relación con el problema en sí. Aspectos que se pueden mejorar incluyen una reorganización de los datos, los cuales muchas veces pueden ser compactados para facilitar su lectura por parte de los programas computacionales, lo cual podría gatillar una reducción del tiempo de ejecución. También se contempla un análisis de las restricciones del Modelo de Programación Mixta para analizar la posibilidad de fijar variables cuyos valores puedan ser determinados antes de la optimización.

## II.vii CONTEXTO DEL TRABAJO

Si bien el presente trabajo tiene sus propios objetivos específicos, cuyo grado de cumplimiento puede ser determinado directamente a partir de los resultados obtenidos, es necesario considerar que el contexto en el cual se encuentra inmerso tiene un alcance mucho más amplio y que debe ser considerado como el enfoque principal al momento de realizar cualquier análisis.

Lo anterior se puede ver reflejado en el objetivo general del trabajo, el cual consiste en determinar la forma de simplificar el Modelo de Programación Mixta con que se planifica la extracción de las distintas minas de CODELCO. Este modelo corporativo no puede ser implementado por el momento dado el tamaño del problema y de la gran cantidad de información; y tampoco es posible optimizar cada una de las minas en forma independiente debido a la existencia de restricciones que integran a cada una de ellas – como por ejemplo la cantidad de ingresos que CODELCO debe entregar anualmente al Estado de Chile.

De esta forma el proceso completo de simplificación del modelo original queda descrito en el siguiente diagrama:



Sólo las etapas denominadas “Ajustes Previos” y “Agregación a Posteriori” caen dentro del alcance del presente trabajo y por lo tanto la medición de los indicadores relevantes a los objetivos será referida al aporte de ellas. Es decir, se hará una comparación entre la Agregación a Priori y la Agregación a Posteriori en los resultados. No obstante lo anterior, es posible dar algunos indicios del progreso alcanzado con respecto al objetivo general del proyecto, pero sólo relativo a la

instancia con la que se está trabajando ya que hasta este punto aun no se cuenta con el modelo corporativo que incluya todas las minas de CODELCO.

La obtención de resultados positivos durante estas etapas – sumado a los ya obtenidos en la “Agregación a Priori” – tendrá como principal consecuencia el contar con una metodología clara y replicable para la confección del modelo corporativo, el cual será una versión simplificada del modelo original que incluye la totalidad de las minas de CODELCO y un horizonte de 25 años.

La etapa denominada “Ajustes Previos” si bien consiste sólo en una serie de sencillos cálculos y transformaciones de datos, debe ser analizada independientemente dado su alto impacto en los resultados. Esta etapa incluye más que nada una serie de “buenas prácticas” computacionales, las cuales entregan un modelo substancialmente mejorado pero teóricamente equivalente.

Finalmente, lo que se espera de este proyecto es que defina la metodología y los pasos a seguir para pasar desde el modelo original al modelo corporativo simplificado. Aunque es evidente que para el caso de las minas de CODELCO a rajo abierto (que son la mayoría) el modelo de planificación minera es distinto, es posible hacer con ellas un procedimiento análogo al de este trabajo para producir los mismos efectos.

### **III DESARROLLO DEL PROYECTO**

Antes de proceder a explicar lo que se hizo durante el proyecto, es necesario describir claramente la instancia con las que se trabajó y explicar en qué consiste, para futuras referencias. Esta instancia en particular corresponde a 11 subsectores de la división El Teniente de CODELCO, cuyos nombres son: Hw, Fw, DR1, DR3, DR4, ES, NN, Plc, Pln, PN, RD. Cada uno de estos subsectores corresponde a un yacimiento de esta mina subterránea como el de la Figura 4. El hecho de que esta mina sea subterránea tiene varias implicancias en la confección del modelo, pero éstas no son de importancia para el desarrollo del presente proyecto. Lo que sí es relevante es que estos subsectores son independientes uno del otro por lo cual hay que trabajarlos por separado.

El tamaño de estos subsectores (definido como el número de clusters que incluye) es bastante variable, donde los más pequeños (Hw, RD) pueden presentar tamaños inferiores a 100 clusters y los más grandes (ES, NN) superiores a 2.000 clusters.

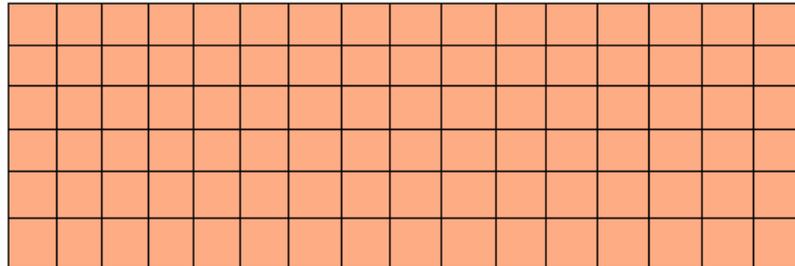


Figura 4: Modelo de bloques (UBCs) para un yacimiento ficticio

Fuente: Elaboración propia

También es necesario tener en cuenta que antes del inicio de este proyecto (situación inicial) se cuenta con una clusterización ‘a priori’ de los bloques para cada subsector. En la Figura 5 se muestra el mismo ejemplo anterior con la clusterización mencionada, donde cada color corresponde a un cluster distinto.

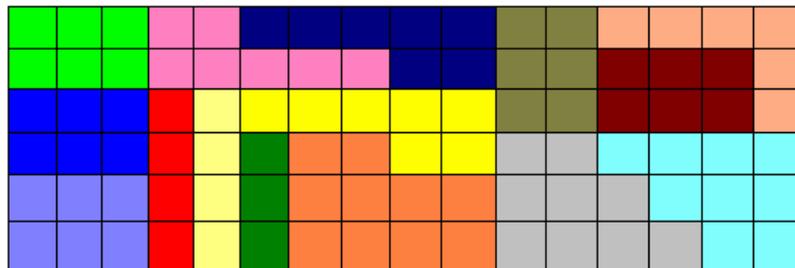


Figura 5: Las UBCs de un mismo color pertenecen al mismo cluster

Fuente: Elaboración propia

### III.i PREPARACIÓN DEL MODELO

Como fue explicado en la sección ‘Metodología’, antes de empezar con la agregación de clusters se procedió a compactar los archivos de datos (parámetros) que aparecen en el modelo de modo de agilizar su lectura por parte del software que se ocupó para resolverlo (CPLEX). Además se realizó una revisión de las restricciones del modelo de modo de encontrar variables cuyo valor quede definido de antemano. Esta sencilla pero efectiva etapa del proyecto fue realizada a sugerencia del matemático Andreas Bley.

#### (a) Compactación de Archivos

Como se puede apreciar en el Anexo N°1 – “Modelo de Programación Mixta” – algunos de sus parámetros incluyen datos como por ejemplo *Abajo* y *Antes*, los cuales dan cuenta de los clusters que se encuentran “debajo” o “antes” (según la secuencia predeterminada de extracción horizontal) de otros clusters. Esta información actualmente se encuentra en matrices de  $N \times N$  (donde  $N$  es el número de clusters de un subsector particular) las cuales presentan un 1 en la posición  $(i,j)$  si el cluster  $i$  se encuentra inmediatamente “debajo” o “antes” del cluster  $j$  y 0 si no. Es fácil darse cuenta entonces que para los subsectores más grandes, estas matrices pueden llegar a contener alrededor de 5 millones de datos. Sin embargo, esta matriz es de baja densidad, es decir, el número de unos es considerablemente menor que el número de ceros, por lo cual puede ser reemplazada por un archivo de pares ordenados, donde el par ordenado  $(i,j)$  aparece si y sólo si se cumple la condición mencionada. La Figura 6 muestra un ejemplo de un archivo ficticio donde una matriz se compacta en pares ordenados.

table	ABEx								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	1	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	1	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0

→

ABEx	
1	4
2	6
3	9
4	7
5	9
6	7
7	8
7	9
8	9

Figura 6: La matriz de precedencia a la izquierda se reemplazada por pares ordenados a la derecha

Fuente: Elaboración propia

Hay que tener en cuenta que el ejemplo anterior es de un tamaño reducido, pero para los casos más grandes la cantidad de datos se reduce en forma exponencial.

### (b) Fijación de Variables

Una de las características de todo proceso de extracción de mineral es lo que es conocido como la ‘velocidad de extracción’. De este modo existe cierto mineral al cual se tiene acceso más fácil y otro al cual no se puede acceder antes de cierto tiempo. Para el caso del modelo con que se está trabajando, para cada cluster existe un parámetro llamado  $\beta_{Abajo}$ , el cual nos indica el número de días que deben pasar antes de que el cluster este accesible para su extracción. De esta forma, si por ejemplo un cluster es inaccesible antes del año 4, entonces se sabe de antemano que la variable binaria de extracción  $Z$  valdrá 0 para los años 1, 2 y 3. Para hacer estos cálculos podemos analizar la restricción N°6 del modelo:

$$Z_{ka}^t \cdot \beta_{Abajo_k} \leq \sum_{m=1}^t DP^m \quad (1)$$

En esta restricción, el parámetro  $DP(t)$  representa la cantidad de días laborales del período  $t$ . Además  $k$  es un índice que recorre los clusters del subsector  $a$ .

Si llamamos  $\mathbf{M}$  al siguiente cociente:

$$\frac{\sum_{u=1}^t DP^t}{\beta Abajo_k} \quad (2)$$

La ecuación (2) representa el cociente entre la cantidad de días transcurridos desde el inicio del horizonte de tiempo hasta  $t$  y la cantidad de días necesaria para extraer el mineral que antecede a la UBC que estamos analizando. Por ende, si  $\mathbf{M}$  es mayor o igual a 1 implica que ya se tiene acceso al cluster, y si  $\mathbf{M}$  es menor que 1 entonces aún no han transcurrido suficientes días para extraer el mineral que antecede a la UBC en cuestión. Matemáticamente esto puede verificarse despejando  $\mathbf{Z}$  en la ecuación (1), resultando las siguientes posibilidades:

**a)  $\mathbf{Z} \leq \mathbf{M}$ , donde  $\mathbf{M} < 1$ :**

En este caso, dado que  $\mathbf{Z}$  es una variable binaria es posible fijarla en 0 y eliminar la restricción del modelo.

**b)  $\mathbf{Z} \leq \mathbf{M}$ , donde  $\mathbf{M} \geq 1$ :**

En este caso no es posible fijar el valor de  $\mathbf{Z}$ , pero se puede eliminar la restricción ya que es inactiva.

También se calculó para cada cluster el **Año-Crítico**, es decir, en qué año se puede recién tener acceso a él para extraerlo. En el ejemplo de la Figura 7 el cluster de color verde no puede extraerse antes de los de color blanco según la secuencia lógica de extracción de la mina subterránea.

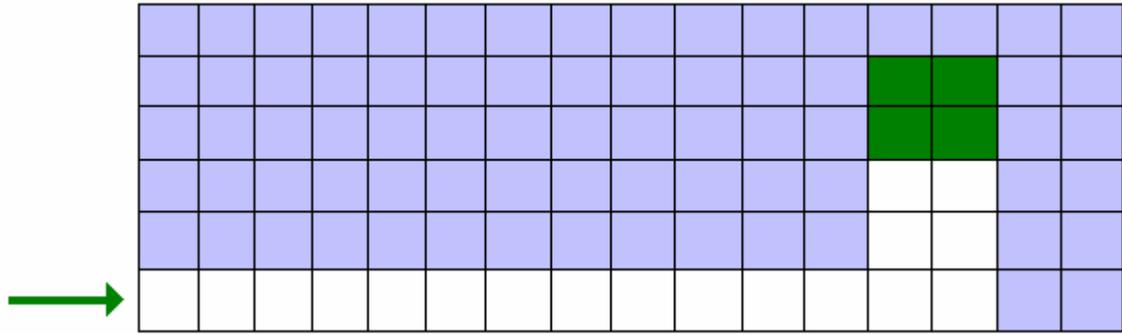


Figura 7: Antes de extraer el cluster verde deben extraerse los clusters blancos

Fuente: Elaboración propia

De esta forma si en total se requieren por ejemplo 1.000 días para poder extraer los clusters de color blanco – es decir  $\beta_{\text{Abajo}} = 1.000$  – entonces se puede concluir que el cluster de color verde no podrá ser extraído el año 1 ni el año 2, sino que recién el año 3.

Matemáticamente esto puede verse en la restricción anterior:

Para  $t = 1$ :

$$M = (362,5) / 1000 = 0,3625$$

$$Z \leq 0,3625$$

Dado que  $Z$  es binaria (0 ó 1) y menor que 0,3625 se sabe de antemano que su valor es 0 para  $t = 1$ .

Para  $t = 2$ :

$$M = (362,5+362,5) / 1000 = 0,725$$

$$Z \leq 0,725$$

Dado que  $Z$  es binaria (0 ó 1) y menor que 0,725 se sabe de antemano que su valor es 0 para  $t = 2$ .

Para  $t = 3$ :

$$M = (362,5+362,5+363,5) / 1000 = 1,0885$$

$$Z \leq 1,0885$$

Dado que  $Z$  es binaria (0 ó 1) esta restricción no es activa y por lo tanto puede ser eliminada del modelo. Además esto indica que en  $t = 3$  recién puede extraerse el cluster verde, entonces se define el **Año-Crítico** igual a 3.

Es directo ver que para  $t > 3$  la restricción seguirá siendo inactiva y por lo tanto puede ser eliminada del modelo.

Luego de implementar estas simplificaciones, el modelo se redujo a 1/3 del tamaño inicial, lo cual es ya un gran avance en cuanto a los objetivos del proyecto. Los resultados en términos de tiempo de ejecución se verán en la sección ‘Resultados’.

### III.ii AGREGACIÓN DE CLUSTERS

Antes de explicar cómo se procedió a agregar los clusters es necesario definir cuáles fueron los criterios con los que se agregó. Si bien se intentaron distintos tipos de criterios, la mayor parte de ellos dio como resultado la infactibilidad. Algunos de los criterios que no tuvieron éxito son:

- **Tonelaje:** El definir el tonelaje como medida de similitud para ocupar como criterio de agregación dio como resultado el juntar en un mismo grupo los clusters grandes y en otro los clusters más chicos, con lo cual la agregación resultó infactible.
- **Ley de Cu, Ley de Mo:** Tanto la ley de cobre como la de molibdeno, ya fueron en su momento ocupadas como criterio para la agregación ‘a priori’, por lo cual se obtuvo como resultado el hacer un trabajo redundante con el anterior, lo cual causó infactibilidad.
- **Columnas de la Matriz A:** Las restricciones del modelo definen implícitamente una matriz **A**, en la cual cada columna representa una variable y cada fila, una restricción. Uno de los criterios que se intentó aplicar fue el calcular la similitud entre las columnas asociadas a cada par de variables ocupando alguna distancia (por ejemplo Euclidiana). Sin embargo, la matriz **A** resultó ser poco densa para el cálculo de distancias ya que aproximadamente 1 de cada 9.000 coeficientes era distinto de 0.

Finalmente los criterios que sí se utilizaron con éxito para la agregación fueron:

- **Año-Crítico:** El mismo Año-Crítico calculado en la parte anterior se ocupó como criterio, por lo tanto para cada grupo formado, todos los clusters deben tener el mismo Año-Crítico.

- **Vecino:** Se definió el requisito excluyente que para que un cluster pudiera ingresar a un grupo deba ser ‘vecino’ de al menos uno de los clusters que ya pertenecen al grupo. Dos clusters son vecinos si al menos un bloque de uno es adyacente a un bloque del otro.

- **Tamaño de Grupo:** Se definió un tamaño de grupo, es decir, cada grupo no podía tener más de N clusters. Se realizaron agregaciones para distintos valores de N (2, 3, 4 y 5).

La Figura 8 muestra el diagrama de flujo del algoritmo Leader Type ocupado para llevar a cabo la agregación de clusters.

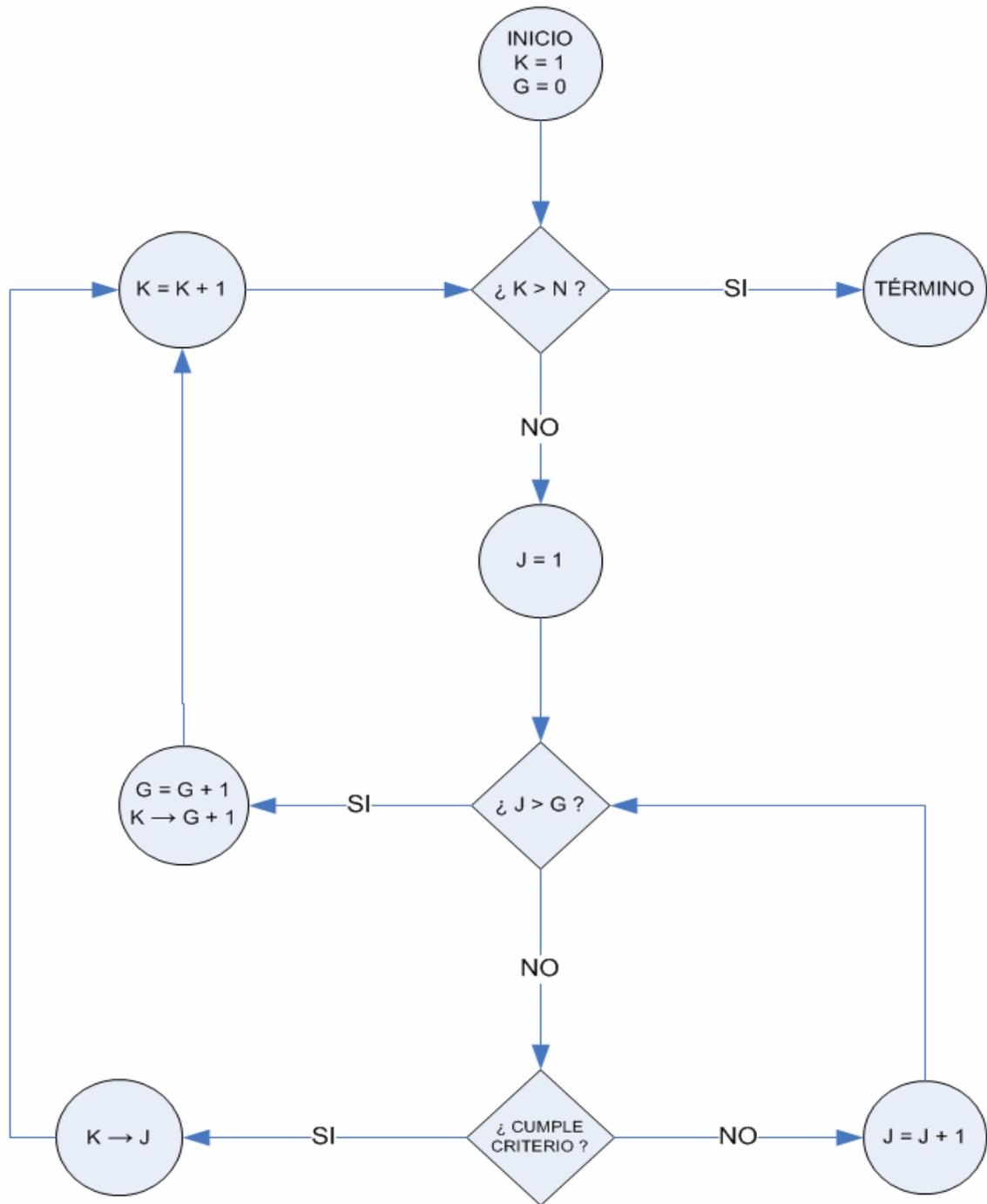


Figura 8: El algoritmo Leader Type a diferencia del K-means crea grupos a partir de 0

Fuente: Elaboración propia

En el diagrama anterior se ocupan las siguientes variables:

- **K:** Es un índice que recorre los clusters.
- **N:** Es el número de clusters total del subsector con el que se está trabajando.
- **J:** Índice que recorre los grupos de clusters ya formados.
- **G:** Es el número de grupos formados.

El funcionamiento del algoritmo Leader Type es el siguiente:

1. Inicialmente no existen grupos, de modo que se crea un grupo (Grupo 1) que contiene al cluster número 1. Es necesario señalar que el número asociado a cada cluster tiene sólo un carácter correlativo, sin embargo existen algunas zonas – especialmente en la base del subsector – donde clusters consecutivos son vecinos (por ejemplo en la Figura 9 más adelante los clusters 10 y 11 son vecinos).

2. Para el cluster número 2 se evalúa si cumple el criterio de entrada al Grupo 1. Si lo cumple, entonces se asigna este cluster a este grupo, de lo contrario se crea un nuevo grupo (Grupo 2) que contiene al cluster número 2.

3. Para el cluster **K** se recorren todos los grupos que se hayan formado hasta ese entonces hasta encontrar uno donde el cluster cumpla el criterio de entrada para ser asignado a ese grupo. Si el cluster no cumple el criterio en ningún grupo entonces se crea un nuevo grupo que contiene sólo al cluster **K**.

4. El punto anterior se repite hasta que todos los clusters hayan sido incluidos en algún grupo, al cabo de lo cual el algoritmo termina.

Es necesario notar que el algoritmo debe ejecutarse en forma independiente para cada subsector y por lo tanto el nivel de agregación puede variar de un subsector a otro.

La principal consecuencia de esta agregación es que ahora se tiene una variable binaria **Z(t)** para cada cluster, la cual valdrá 1 si dicho cluster se extrae en el período **t** y 0 en caso contrario.

Las Figuras 9 y 10 que aparecen a continuación sirven para clarificar de mejor forma cómo interactúan las dos agregaciones que se discuten en este trabajo. La Figura 9 muestra la primera agregación ‘a priori’ la cual fue realizada en una tesis anterior<sup>4</sup> en donde cada color representa un cluster que incluye cierto número de UBCs.

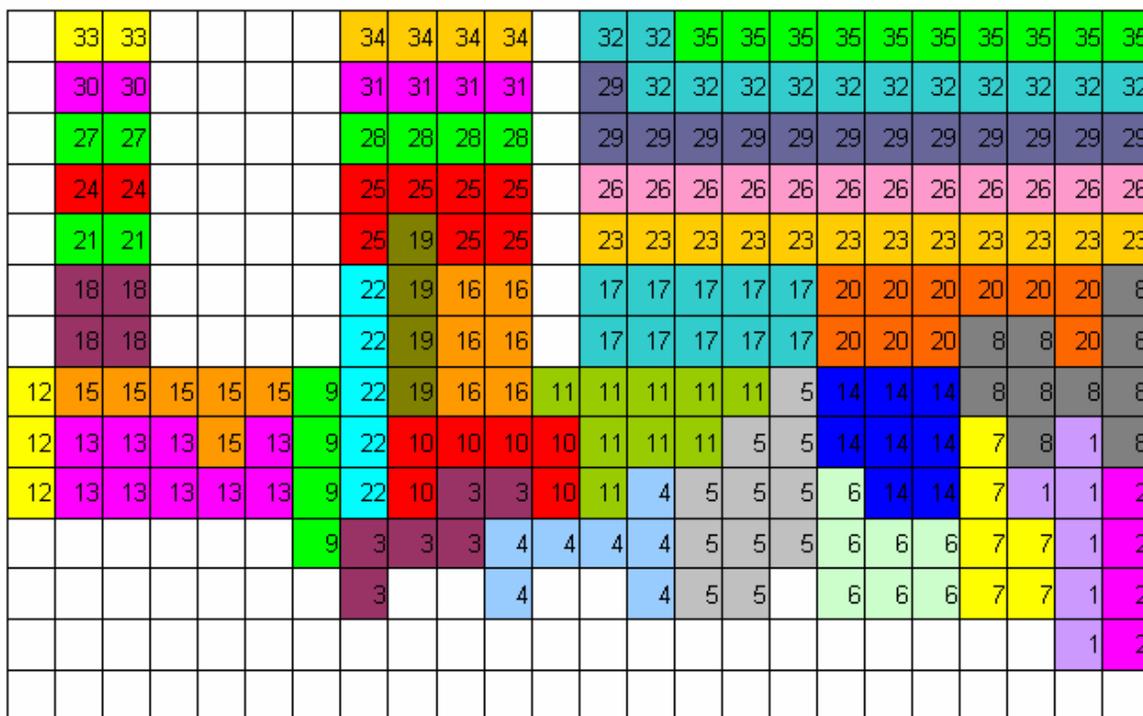


Figura 9: Las 230 UBCs originales han sido agrupadas en 35 clusters para el subsector Hw

Fuente: Elaborado por Ximena Schultz

Este ejemplo corresponde al subsector Hw y se puede apreciar que cada UBC (cada cuadrado de la figura) pertenece a un determinado cluster.

Aquí se puede ejemplificar de mejor manera el concepto de **Año-Crítico**, es decir, el año en que recién se puede empezar a extraer un determinado cluster. Para extraer el cluster número 34 (arriba en el centro, incluye 4 UBCs) es necesario extraer primero los clusters 31, 28, 25, 22, 19, 16, 10, 3 y 4 ya que todos éstos se encuentran directa o indirectamente debajo de él. Por esta razón el cluster 34 presenta un **Año-Crítico** igual a 3, es decir, la extracción de los clusters debajo de él tarda entre 2 y 3 años.

<sup>4</sup> Ver el punto (4) de la bibliografía



### III.iii IMPLEMENTACIÓN

La implementación de la agregación en el modelo fue relativamente sencilla. Lo que se hizo fue agregar al modelo igualdades entre los clusters que quedaron en un mismo grupo. De esta forma, si los clusters 1, 2, 7 y 8 pertenecen al Grupo 1, se añadieron las siguientes igualdades:

$$\left. \begin{array}{l} Z(2) = Z(1) \\ Z(7) = Z(1) \\ Z(8) = Z(1) \end{array} \right\} \text{ Para todo } t$$

En este caso CPLEX realiza los reemplazos necesarios antes de correr el modelo para que el número de variables se vea efectivamente reducido.

Una de las principales ventajas de ocupar este sencillo sistema de implementación es su flexibilidad. Durante el transcurso del proyecto, el formato del modelo sufrió considerables cambios tanto definitivos (como por ejemplo la reducción de datos) como de prueba, y para todas las versiones la implementación de la agregación fue la misma.

### METODOLOGÍAS DESCARTADAS

No obstante lo anterior, en primeras etapas del desarrollo del proyecto se optó por otra metodología para implementar la agregación obtenida. Éste método corresponde a la teoría de Zipkin para la agregación de variables en un Problema de Programación Lineal.

## TEORÍA DE ZIPKIN

La teoría de Zipkin para Problemas de Programación Lineal consiste en modificar la matriz **A** de restricciones del modelo:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & c x \\ \text{s.a.} & Ax \leq b \\ \text{donde} & x \geq 0 \end{array}$$

En dicha matriz **A** cada fila corresponde a una restricción y cada columna está asociada a una variable. El objetivo es entonces encontrar columnas que sean similares entre sí, ya sea midiendo la distancia euclidiana (o cualquier otro tipo de distancia definida para vectores) o mediante cualquier otro método que determine qué variables es conveniente agrupar.

Una vez obtenido un set de grupos de variables (y por ende de columnas) se procede a reducir la matriz **A** reemplazando las columnas de un grupo por una nueva columna que corresponde a una combinación lineal de las columnas originales. Esta combinación lineal se obtiene multiplicando los valores de las columnas originales por ponderadores arbitrarios; por ejemplo si se está agrupando 5 columnas cada columna podría tener un ponderador igual a  $1/5$  (es decir, el ponderador es  $1/n$ , donde  $n$  es el número de columnas en el grupo). Sin embargo, si las variables asociadas a las columnas con las que se está trabajando presentan características que sirvan para determinar qué tan representativas son en la función objetivo (por ejemplo para el caso de los clusters de mineral, aquéllos que tengan más toneladas tendrán un mayor impacto que los más pequeños), éstas podrían ocuparse para determinar los ponderadores.

La Figura 11 que aparece a continuación corresponde a la matriz **A** de restricciones del modelo. En ella se seleccionan las columnas que representen a las variables que hayan quedado en un mismo grupo. Luego estas columnas se condensan en una sola, la cual corresponde a una combinación lineal de ellas.

$A =$	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17
	A21	A22	A23	A24	A25	A26	A27
	A31	A32	A33	A34	A35	A36	A37
	A41	A42	A43	A44	A45	A46	A47
	A51	A52	A53	A54	A55	A56	A57
	A61	A62	A63	A64	A65	A66	A67
	A71	A72	A73	A74	A75	A76	A77

Figura 11: Las tres columnas seleccionadas serán reemplazadas por una combinación lineal de ellas

Fuente: Elaboración propia

Finalmente, una vez que se hayan efectuado todos los reemplazos el modelo se ve reducido ya que el número de columnas es menor al original. Esta metodología fue implementada en la tesis de Pereira M., 2007, “Construcción de un modelo agregado de planificación minera”, sin embargo fue aplicada directamente en el modelo de bloques original.

Durante el presente trabajo, se intentó aplicar la Teoría de Zipkin esta vez al modelo ya agregado “a priori” por Ximena Shultz. Es necesario notar que esta teoría corresponde a una metodología para implementar una agregación ya obtenida por otros medios (como por ejemplo la que se obtuvo en este trabajo). En este caso “implementar” se refiere a la forma de integrar la agregación obtenida en el modelo, es decir, cómo lograr que el nuevo modelo tenga efectivamente un menor número de variables. Por ejemplo, en la agregación “a priori” la implementación de la agregación se llevó a cabo integrando varias UBCs a un cluster, para lo cual todos los parámetros – como las toneladas o ley de cobre – de las UBCs fueron sumadas o promediadas para obtener los parámetros relacionados a los clusters (ver capítulo II.ii “Situación Inicial”). En el presente trabajo, la agregación de clusters en grupos se implementó a través de igualdades entre clusters de un mismo grupo de modo de forzar a CPLEX a realizar los reemplazos de las variables correspondientes (como fue visto al comienzo de este capítulo). Y por su parte, la implementación

de la agregación en la Teoría de Zipkin corresponde al anteriormente mencionado reemplazo de grupos de columnas por una combinación lineal de ellas en el modelo.

La implementación de la Teoría de Zipkin en este trabajo no obtuvo buenos resultados. De todas las veces que se ejecutó el modelo nunca se llegó a una solución, es decir, éste seguía ejecutándose durante más de una hora, luego de lo cual se abortó manualmente cada vez para probar algunos cambios<sup>5</sup>. Estos cambios consistieron ya sea en cambiar las ponderaciones de la combinación lineal de las columnas que se agregan o bien en ocupar una agregación distinta como *input*. En cuanto a las distintas ponderaciones ocupadas éstas fueron: igual ponderación para cada columna ( $1/n$ ) donde  $n$  es el número de columnas de un determinado grupo, ponderación por el tonelaje del cluster asociado a cada columna y ponderación por la ley de cobre del cluster asociado a cada columna. En cuanto a las distintas agregaciones utilizadas, éstas corresponden a las encontradas según lo expuesto en III.ii “Agregación de Clusters” para tamaños de grupo con un máximo de 2, 3, 4 o 5 clusters (es decir fueron 4 agregaciones distintas).

Al no obtenerse resultados positivos con la metodología finalmente se abandonó esta línea de trabajo. Dado que el modelo nunca entregó una solución tampoco fue posible obtener alguna estadística sobre cuánto tardaba su ejecución ni cuál era el error asociado a la agregación.

Algunas de las razones por las cuales esta metodología resultó ser inconveniente incluyen:

1. Como se observó anteriormente, la matriz **A** tiene aproximadamente 1 de cada 9.000 coeficientes distintos de 0, por lo que su densidad es muy baja. Al hacer combinaciones lineales de las columnas, esta densidad aumenta, y si bien el número de variables se ve reducido, el número de cálculos internos que debe realizar CPLEX no baja.

2. Otra desventaja que presenta este proceder consiste en que con estos reemplazos de columnas, el modelo original pierde el sentido y sólo quedan restricciones numéricas que no son interpretables ni se pueden relacionar con las originales. Esto provoca que al software se le deba alimentar directamente con esta matriz, ya que es imposible describirla a través de restricciones convencionales. De esta forma, ahora los ceros – cuya existencia era ignorada por el software – pasan a ser cifras válidas y que deben ser consideradas a la hora de hacer todos los cálculos,

---

<sup>5</sup> Sólo las primeras dos veces se esperó hasta una hora, las siguientes ejecuciones no se esperó más de 10 min.

causando por ende que la ejecución del modelo resulte incluso más lenta que la anterior. De hecho, su ejecución debió ser abortada cada vez que se intentó, dado que no se llegaba a ningún resultado.

**3.** Por último existe además el problema de la poca flexibilidad que tiene el método, ya que para cada cambio en el formato del modelo se necesita realizar el procedimiento desde el principio.

Dadas estas desventajas fue que finalmente se utilizó la metodología mencionada al comienzo del capítulo la cual es independiente del formato del modelo y que sólo incluye igualdades entre clusters de un mismo grupo, por lo que su única intervención sobre el modelo es la de reducir el número de variables (y por consiguiente el tiempo de ejecución) a costa de reducir el espacio factible. En ningún caso hay que convertir los datos sumando toneladas ni ponderando leyes de mineral ya que los clusters como entidad siguen existiendo.

#### IV. RESULTADOS

La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos para las distintas agregaciones tanto en la reducción del tiempo de ejecución como en el error con respecto a la situación inicial:

	Max clusters por grupo	Número de Variables	Tiempo ejecución (seg) Programación Mixta	Error Asociado	Agregación Infactible
Situación Inicial	-	7687	139.2	-	-
Mejorado	-	7687	48.6	-	-
Agg2	2	5949	86.2	3.04%	DR1, DR4
Agg3	3	4882	20.9	4.11%	DR1, DR4
Agg4	4	4232	21.7	5.33%	DR1, DR4, Plc
Agg5	5	4050	134.4	6.94%	DR1, DR4, Plc
Agg2 (Zp)	2	5949	27.8	3.00%	DR1, DR4
Agg3 (Zp)	3	4882	25.3	4.06%	DR1, DR4
Agg4 (Zp)	4	4232	21.8	5.12%	DR1, DR4, Plc
Agg5 (Zp)	5	4050	105.9	6.83%	DR1, DR4, Plc

Tabla 1: Resultados del error y tiempo de ejecución para las 4 agregaciones obtenidas

#### EXPLICACIÓN TABLA 1:

**FILAS** (Cada fila corresponde a un modelo distinto según las etapas del proyecto)

- **Situación Inicial:** Corresponde al modelo con agregación “a priori” realizado por Ximena Schultz.
- **Mejorado:** Corresponde al modelo obtenido luego de la etapa de mejoramiento del modelo a través de las buenas prácticas computacionales explicadas en el capítulo III.i “Preparación del Modelo”
- **Agg2, Agg3, Agg4 y Agg5:** Corresponden a la implementación de 4 agregaciones “a posteriori” según lo establecido en el capítulo III.ii “Agregación de Clusters” con un máximo de 2, 3, 4 y 5 clusters por grupo respectivamente.
- **Agg2(Zp), Agg3(Zp), Agg4(Zp) y Agg5(Zp):** Corresponden a las mismas agregaciones anteriores, pero incluyendo una variable **Zp** que se explica más adelante.

## COLUMNAS

- **Max clusters por grupo:** Indica el número máximo de clusters por grupo ocupado como criterio de agregación.
- **Número de Variables:** Indica la cantidad de grupos de clusters que se obtuvo con cada agregación “a posteriori”.
- **Tiempo ejecución:** Indica el tiempo de ejecución (en segundos) que tardó en ejecutarse el modelo de programación mixta.
- **Error Asociado:** Representa el error obtenido en la función objetivo con respecto al modelo denominado “Situación Inicial”.
- **Agregación Infactible:** Indica los subsectores donde la agregación correspondiente resultó infactible.

Las agregaciones que aparecen en esta tabla se diferencian en el número máximo de clusters por grupo (primera columna) el cual corresponde a uno de los criterios de agregación vistos en **III.ii “Agregación de Clusters”**. Es importante notar que las agregaciones que presentan un  $(Z_p)$  son aquellas que incluyen una variable auxiliar  $Z_p$  la cual recopila el valor de la variable  $Z$  por grupos en lugar de clusters. Es decir, suponiendo que el Grupo 1 contiene los clusters 1, 2, 7 y 8, además de las igualdades explicadas anteriormente:

$$Z(2) = Z(1)$$

$$Z(7) = Z(1)$$

$$Z(8) = Z(1)$$

Se agrega una última igualdad:

$$Z_p(1) = Z(1)$$

Esta variable auxiliar tiene como única finalidad el facilitar la lectura de la solución encontrada para la programación de las siguientes etapas en que se ocupe el modelo, por ejemplo para realizar los procesos estocásticos de análisis de escenarios. De esta manera las variables  $Z_p(n)$  contiene la solución para el grupo  $n$  (es decir, 1 si el grupo  $n$  se extrae en determinado período y 0

si no), y por lo tanto el programador sólo deberá leer esta variable sin la necesidad de examinar los grupos. Con respecto a esta variable es interesante notar que si bien no tiene ninguna influencia teórica en el modelo – es decir, los modelos con y sin esta variable son equivalentes ya que no aparece ni en las restricciones ni en la función objetivo – los resultados obtenidos tanto para el tiempo de ejecución como para el error asociado a la agregación son distintos. De esto se infiere que la presencia de esta variable **Z<sub>p</sub>** tiene algún efecto en la forma en que CPLEX resuelve el modelo.

También se puede apreciar en la Tabla 1 que la agregación de algunos subsectores resultó infactible, por lo que fueron dejados intactos en el modelo, es decir, en ellos cada cluster es un grupo.

Finalmente, la fila destacada en verde en la tabla representa la agregación que presentó los mejores resultados. El tiempo de ejecución para el Modelo de Programación Mixta bajó a un 20% de su valor con respecto a la situación inicial, en tanto el número de variables disminuyó al 77%. El error alcanzó el 3% cumpliéndose así la meta propuesta en los objetivos del proyecto.

## RESULTADOS EN CONTEXTO

Ahora corresponde revisar el avance global que ha tenido el proyecto desde el modelo original, pasando por la agregación “a priori” (realizada por Ximena Shultz) y finalizando con lo realizado en este trabajo, lo cual incluye la preparación del modelo, la agregación “a posteriori” y su implementación (ver capítulo **III. “Desarrollo del Proyecto”**). La Tabla 2 a continuación muestra los resultados acumulados para cada etapa del proyecto:

	Tiempo ejecución (seg)	Reducción acumulada	Error acumulado
Original	528.9	-	-
Agregación "a priori"	139.2	74%	3.62%
Modelo Mejorado	48.6	91%	3.62%
Modelo Final	27.8	95%	6.51%

Tabla 2: La reducción del tiempo de ejecución y el error acumulados durante las distintas etapas

Hay que notar que el error acumulado final no corresponde a la suma de los errores ya que cada uno de ellos corresponde al error con respecto a la etapa anterior. Es decir, el error de 3.62% de la agregación “a priori” es con respecto al modelo original y el error de 3% del modelo final es con respecto a la agregación “a priori”. Para obtener el error acumulado del modelo final con respecto al original hay que calcular:

$$E = 100\% - (100\% - 3.62\%) * (100\% - 3\%) = 6.51\%$$

Para visualizar de mejor manera el aporte de cada etapa a la reducción del modelo, el Gráfico “Tiempo de Ejecución v/s Error” muestra los mismos resultados anteriores.



Gráfico “Tiempo de ejecución v/s Error”: Se muestra el aporte de las dos etapas de reducción del modelo

Se puede apreciar que ambas etapas del proyecto logran una reducción considerable del tiempo de ejecución, pero la agregación “a priori” lo logra con menor pérdida de precisión (proporcionalmente), es decir, logra reducir más tiempo de ejecución por cada 1% de error adicional, lo cual se ve reflejado por la pendiente más empinada que presenta. No obstante es importante resaltar el gran aporte que implica la etapa de “Preparación del Modelo”, la cual entrega un modelo mejorado con menor tiempo de ejecución y sin aumentar el error acumulado, lo cual se ve reflejado en la línea vertical del gráfico.

## V. CONCLUSIONES

### V.I. CONCLUSIONES SOBRE EL PROYECTO

La conclusión principal de este proyecto es que es posible volver a agregar exitosamente un modelo de bloques obteniendo resultados positivos tanto en la reducción del tiempo de ejecución como en la obtención de un error moderado con respecto a la solución original. Incluso si se considera el modelo mejorado como referencia, se obtiene que la agregación ‘a posteriori’ logra reducir a un 57% el tiempo de ejecución. Al incluir los efectos del mejoramiento del modelo y agregación en forma conjunta, la reducción del tiempo de ejecución baja a un 20% del valor original, las variables a un 77% y el error se mantiene en un 3% con respecto a la situación inicial.

No obstante lo anterior, es de suma importancia encontrar los criterios adecuados para la segunda agregación. Si estos criterios son los mismos que los utilizados en la agregación ‘a priori’ se comete el error de realizar un proyecto redundante con el anterior, lo cual sería análogo a que la agregación ‘a priori’ tuviera como objetivo crear clusters más grandes. Dado que esto resultó infactible para la agregación ‘a priori’ no es el camino a seguir. En cambio, se pueden escoger criterios que tengan más relación con la solución del sistema; en este caso, el uso del **Año-Crítico** (primer año en que el cluster es alcanzable) está directamente relacionado con el sentido que tienen las variables **Z** del modelo, las cuales determinan en qué año se extrae dicho cluster.

Otra de las conclusiones importantes del proyecto reside en la conveniencia de ocupar un método de implementación de la agregación encontrada que sea sencillo y flexible. Hay que notar que el único efecto que tuvo la agregación sobre el modelo fue la reducción del espacio factible mediante las igualdades que se añaden entre clusters del mismo grupo; aparte de esto se puede considerar que el modelo queda absolutamente intacto, con lo cual no se pierde información. Es decir, las características de los clusters tanto físicas (ley de Cu, tonelaje, etc.) como secuenciales (predecesores, tiempo de extracción, etc.) siguen siendo las mismas; no hay necesidad de calcular promedios de leyes ni de velocidad de extracción. Además la solución obtenida queda en función de las variables originales del problema (es decir, los clusters) por lo que es innecesario realizar un proceso de desagregación.

Otro punto que resultó de gran utilidad para el cumplimiento de los objetivos de este proyecto, fue la etapa de mejoramiento del modelo, esto es la fijación de variables y la reducción de datos. La conclusión es que es siempre importante realizar un análisis de las restricciones del problema e interpretarlas de forma correcta, especialmente cuando se tienen variables binarias, las cuales al sólo tener 2 posibles valores pueden llegar a quedar fijas a través de alguna de las restricciones. Dentro de este punto también es relevante señalar la importancia de conocer el funcionamiento de las herramientas que se están ocupando.

## **V.ii      CONSIDERACIONES FUTURAS**

Dados los resultados obtenidos durante la realización del proyecto, queda abierta la posibilidad de crear un modelo corporativo para CODELCO que incluya todas las divisiones con un horizonte de planificación de 25 años. La sencillez y flexibilidad de la metodología utilizada permite que volver a implementar tanto las agregaciones como el mejoramiento del modelo sea fácilmente replicable, independientemente de la naturaleza de la mina (ya sea subterránea o a rajo abierto).

También queda propuesto el utilizar el modelo obtenido para realizar análisis de escenarios de incertidumbre, con procesos estocásticos enfocados principalmente en la variabilidad que presenta el precio del cobre. En ese sentido, la disminución de las variables a un 77% del total aporta otra cuota de ahorro en costos computacionales al disminuir en similar proporción las veces que es necesario ejecutar el modelo.

## **V.iii      METODOLOGÍA PROPUESTA**

Si bien no es posible hasta este punto hacer una extrapolación que permita cuantificar los ahorros computacionales que aportará el proyecto completo a la solución del modelo corporativo una vez que esté listo, sí es posible plantear una metodología que permita llegar a una simplificación considerable del modelo original. El paso que faltaría a continuación es confeccionar el modelo corporativo definitivo, el cual consiste en aplicar la presente metodología al modelo

original, es decir, a una instancia que incluya todas las minas de CODELCO por un horizonte de tiempo de 25 años, de la misma forma en que ésta ha sido aplicada a una instancia de prueba.

La metodología consiste en las siguientes etapas (incluyendo las que caen fuera del alcance de esta tesis):

#### **AGREGACIÓN A PRIORI:**

Durante esta etapa lo que se hace es una agregación de las UBCs del modelo original en clusters. Una de las principales características de esta agregación es que implica una modificación de la estructura del modelo original. Es decir, muchas de las restricciones deben ser adaptadas para trabajar con clusters, y la información que antes se tenía para varios bloques debe ser incorporada (ya sea promediando o sumando según sea el caso) en un solo cluster. Para la instancia de prueba se obtuvo una reducción del 73,68% del tiempo de ejecución.

#### **PREPARACIÓN DEL MODELO:**

Corresponde a lo visto en el capítulo **III.i “Preparación del Modelo”** del presente trabajo. La idea principal en esta etapa es que el modelo presente el formato más eficiente posible en lo que a tiempo de ejecución se refiere. A pesar de que consiste en un procedimiento bastante sencillo y casi rutinario, es importante destacarlo dentro del proyecto completo dado el impacto que presenta en los resultados. Para la instancia de prueba esta etapa logra disminuir en un 65,09% el tiempo de ejecución (acumulado: 90,81%)

#### **AGREGACIÓN A POSTERIORI:**

Etapla descrita en los capítulos **III.ii “Agregación de Clusters y III.iii Implementación”** del presente trabajo. Consiste netamente en agregarle igualdades al modelo, las cuales fuerzan a dos o más clusters a ser extraídos en el mismo período. En este punto es importante ocupar criterios de agregación que sean distintos a los de la etapa “Agregación a Priori” y que estén enfocados en lograr la factibilidad del modelo resultante. Si bien en este trabajo se proponen algunos es posible que existan otros, sobre todo para las minas que sean distintas en su forma y lógica de extracción – por ejemplo a rajo abierto. Esta agregación logró una reducción del 42,8% del tiempo de ejecución con respecto al punto anterior (acumulado: 94,74%), el cual presenta un error del 3% con respecto al modelo con Agregación a Priori (el cual presentaba un error del 3,62% con respecto al modelo original) con lo que el error acumulado llega al 6,51%.

## **CREACIÓN DEL MODELO CORPORATIVO:**

Consiste en la aplicación de todos los puntos anteriores al modelo original completo, es decir, que incluya todas las divisiones de CODELCO y que presente un horizonte de 25 años. Es incierto saber el tamaño que tendrá el modelo final o si la reducción de tiempo de ejecución será en una proporción similar a la obtenida para la instancia de prueba dado que para cada mina se tendrá un modelo con características distintas.

Respecto del modelo corporativo es importante notar que la mayoría de las minas de CODELCO son a rajo abierto. Este tipo de minas presenta varias diferencias con respecto a una mina subterránea como fue expuesto en el capítulo **II.i “Planteamiento del Problema”**. Algunas de estas diferencias abren oportunidades de mejora para la aplicación de las agregaciones “a priori” y “a posteriori” a las minas de rajo abierto, por ejemplo:

1. En las minas de rajo abierto existe la posibilidad de no procesar algún bloque de mineral extraído si su ley de mineral es muy baja. Existe una “ley de corte”, la cual corresponde a una ley tal que sólo el mineral extraído que presente una ley mayor a ella (la ley de corte) se procesa. Si bien el modelo de programación entera para estos casos no incluye una ley de corte como la recientemente explicada, sí existe la posibilidad de no procesar determinado bloque. De esta forma se evita procesar mineral cuyo beneficio neto – es decir, precio de venta menos costos de procesamiento – sea inferior a cero. Dentro de la literatura pueden encontrarse nuevas herramientas que podrían ser aplicadas en este caso. En Boland, 2007, “LP-based disaggregation approaches to solving the open pit mining production scheduling problem with block processing selectivity”, se plantea la posibilidad de desagregar los clusters o grupos de bloques obtenidos para modelar la decisión de procesamiento de mineral (manteniendo la agregación para modelar la decisión de extracción). Esta desagregación no es completa de modo que también existe una reducción del número de variables binarias, pero entrega – según el autor – una consistente mejoría en el valor de la función objetivo. A diferencia de la etapa de extracción, el procesamiento del mineral no presenta grandes complicaciones lógicas en el modelo (como por ejemplo la secuencia entre bloques, ángulo de extracción, etc.); presenta capacidades y costo. El artículo plantea la conveniencia de desagregar los clusters para el procesamiento de mineral dado el impacto que esta decisión tiene en el valor presente neto (VPN) de la solución encontrada. Queda abierta entonces la posibilidad de aplicar esta metodología al momento de agregar las demás minas al modelo (las de rajo abierto).

2. Otra gran diferencia entre los dos tipos de mina es el método de extracción que presenta cada una de ellas. Como fue visto anteriormente, la mina El Teniente utiliza el Panel Caving, el cual tiene como objetivo provocar el hundimiento de la roca aprovechando las tensiones internas y la fuerza de gravedad. En cambio para el caso de una mina a rajo abierto el proceso de extracción es más selectivo, es decir, se puede ir a extraer una determinada cantidad de más alta ley durante los primeros años de modo de maximizar el VPN. La lógica de extracción en este caso es inversa al caso anterior, es decir, se comienza a extraer desde la superficie hacia abajo y – naturalmente – un bloque no puede ser extraído antes que se extraigan los que están encima de él. También existe la restricción que al ir explotando un yacimiento, la excavación no puede superar un ángulo máximo de inclinación dado. De esta forma para extraer un determinado bloque no sólo es necesario extraer antes los que están encima sino que todos los que queden dentro del cono definido por dicho ángulo hacia la superficie. Además, extraer este bloque será económicamente conveniente sólo si el beneficio neto (precio de venta menos costos de extracción y producción de los bloques que sean procesados) de la suma de estos bloques sea mayor que cero. Ramazan, en “The new Fundamental Tree Algorithm for production scheduling of open pit mines” (2007) aprovecha estos conceptos para proponer una nueva metodología de agregación. En ella, se forman nuevas entidades elementales a partir de los bloques originales, llamadas *Fundamental Trees* (FTs), los cuales cumplen con los requisitos de extracción tanto físicos como económicos. También se plantea un algoritmo sencillo con el cual formar estos FTs de manera única. Esta agregación es una interesante alternativa a la agregación “a priori” con análisis de clusters (realizada por Ximena Schultz) para el caso de una mina a rajo abierto y queda entonces abierta la posibilidad de comparar ambos métodos e implementar el que presente los mejores resultados.

## VI. BIBLIOGRAFÍA Y FUENTES DE INFORMACIÓN

- (1) Weintraub A., Sáez G. y Yadlin M. 1997. “Aggregation procedures in forest management planning using cluster analysis”. *Forest Science* 43(2)
- (2) Sáez G, 1991. “Técnicas de clasificación para agregación de problemas de planificación forestal”. Tesis para optar al título de Magíster en Gestión de Operaciones. Universidad de Chile, Departamento de Ingeniería Industrial.
- (3) Pereira M., 2007. “Construcción de un modelo agregado de planificación minera”. Memoria para optar al título de Ingeniero Civil Industrial. Universidad de Chile, Departamento de Ingeniería Industrial.
- (4) Schultz X., 2007. “Agregación de un modelo de planificación minera utilizando análisis de cluster a priori”. Memoria para optar al título de Ingeniero Civil Industrial. Universidad de Chile, Departamento de Ingeniería Industrial.
- (5) Boland N, et al, 2007. “LP-based disaggregation approaches to solving the open pit mining production scheduling problem with block processing selectivity”. *Computers and Operations Research*, doi:[10.1016/j.cor.2007.12.006](https://doi.org/10.1016/j.cor.2007.12.006)
- (6) Salih Ramazan, 2007. “The new Fundamental Tree Algorithm for production scheduling of open pit mines”. *European Journal of Operational Research* 177, p. 1153-1156.

## VII ANEXOS

### VII.i ANEXO N°1: “MODELO DE PROGRAMACIÓN MIXTA”

#### Índices:

- $t$  : Periodos del horizonte de evaluación.
- $a$  : Sectores (o subsectores) de Explotación.
- $k$  : Clusters de Mineral.

#### Parámetros:

##### ➤ Generales:

- $AñoIni_a$  : Año inicio de vida útil del subsector a.
- $AñoFin_a$  : Año fin de vida útil del subsector a.
- $Min\_T$  : Mínima producción [Tpd] en los subsectores.
- $Max\_T_a^t$  : Máxima producción [Tpd] en el subsector a en el periodo t.
- $MT\_Up$  : Máximo incremento de producción [Tpd] en los subsectores entre periodos.
- $MT\_Dn$  : Máximo decremento de producción [Tpd] en el subsector a entre periodos.
- $Dp^t$  : Duración [días] del periodo t.
- $TonIni_a$  : Toneladas iniciales extraídas del subsector a.
- $PCu^t$  : Precio de venta del cobre en el periodo t.
- $PMo^t$  : Precio de venta del molibdeno en el periodo t.

- $dctoCu^t$  : Descuento de fundición en el precio del cobre en el periodo t.
- $dctoMo^t$  : Descuento de fundición en el precio del molibdeno en el periodo t.
- $desc(t)$  : Factor de descuento en el VAN para el periodo t.
- $AreaMx_a$  : Área máxima ha habilitar en el periodo t.
- $AreaMn_a$  : Área mínima ha habilitar en el periodo t.

➤ Propias de los clusters:

- $Abajo_{ka}$  : Clusters que se encuentran inmediatamente debajo del cluster k.
- $Base_a$  : Clusters que se encuentran en la base del subsector a.
- $Antes_{ka}$  : Clusters que se encuentran antes de k. Solo definido para las bases.
- $\beta Prom_{ka}$  : Tiempo necesario para extraer el cluster k del subsector a.
- $\beta Abajo_{ka}$  : Tiempo necesario para extraer clusters debajo de k del subsector a.
- $Area_{ka}$  : Área de influencia del cluster basal k perteneciente al subsector a.
- $Tone_{ka}$  : Toneladas de mineral que tiene cluster k en el subsector a.
- $LeyCu_{ka}$  : Ley de Cobre que tiene el cluster k en el subsector a.
- $LeyMo_{ka}$  : Ley de Molibdeno que tiene el cluster k en el subsector a.

➤ Capacidades de Proceso y Flujo

- $CAP$  : Capacidad máxima relacionada con los subsectores en cada periodo.
- $CAPv^t$  : Capacidad máxima conjunta entre subsectores en el periodo t.

- $CAPf$  : Capacidad máxima de las vías ferroviarias en cada periodo.
- Coeficientes Tecnológicos (transformación de productos)
  - $CTCu^t$  : Coeficiente de transformación de cobre en el periodo t.
  - $CTMo^t$  : Coeficiente de transformación de molibdeno en el periodo t.
- Costos
  - $CA_a$  : Costo fijo de incorporación de  $1m^2$  de área en el subsector a.
  - $CVext_a$  : Costo variable de extracción para el subsector a.
  - $CVextUp$  : Costo variable de incremento de extracción para los subsectores.
  - $CVextDn$  : Costo variable de decremento de extracción para los subsectores.
  - $CVfc^t$  : Costo de flujo caro durante el periodo t.
  - $CVfb^t$  : Costo de flujo barato durante el periodo t.
  - $CVfa^t$  : Costo de flujo desde el sector a durante el periodo t.

**Variables:**

- $Z_{ka}^t$  :  $\begin{cases} 1 & \text{Si se extrae el cluster k del subsector a en el período t.} \\ 0 & \text{Si no.} \end{cases}$
- $Ton_a^t$  : Tonelaje extraído [Tpd] en subsector a en el período t.
- $TonCu_a^t$  : Tonelaje extraído de cobre en subsector a en el periodo t.
- $TonMo_a^t$  : Tonelaje extraído de molibdeno en subsector a en el periodo t.
- $TonUp_a^t$  : Incremento de producción [Tpd] en subsector a en el periodo t con respecto al periodo anterior.
- $TonDn_a^t$  : Decremento de producción [Tpd] en subsector a en el periodo t con respecto al periodo anterior.

- $f_a^t$  : Flujo [Tpd] que salen del subsector a en el periodo t.
- $fb^t$  : Flujo [Tpd] que llega por el camino barato a la última estación en el periodo t.
- $fc^t$  : Flujo [Tpd] que llega por el camino caro a la última estación en el periodo t.

### Restricciones:

1. Naturaleza de las variables:

$$Z_{ka}^t \in \{0,1\} \quad \forall k, a, t$$

$$Ton_a^t \geq 0 \quad \forall a, t$$

$$TonCu_a^t \geq 0 \quad \forall a, t$$

$$TonMo_a^t \geq 0 \quad \forall a, t$$

$$TonUp_a^t \geq 0 \quad \forall a, t$$

$$TonDn_a^t \geq 0 \quad \forall a, t$$

$$f_a^t \geq 0 \quad \forall a, t$$

$$fb^t \geq 0 \quad \forall t$$

$$fc^t \geq 0 \quad \forall t$$

2. Explotar una vez el cluster en el horizonte:

$$\sum_{t=1}^T Z_{ka}^t \leq 1 \quad \forall k, a$$

3. Respetar secuencia hacia arriba.

$$Z_{ka}^t \leq \sum_{u=1}^t Z_{sa}^u \quad \forall k, a, t, s \in Abajo_{ka}$$

4. Respetar secuencia de bases hacia el lado.

$$Z_{ka}^t \leq \sum_{u=1}^t Z_{Antes_{ka}^u} \quad \forall k \in Base_a, a, t$$

5. Respetar los días de explotación.

$$Z_{ka}^t \cdot \beta Prom_k \leq DP^t + \lambda \quad \forall k, a, t$$

6. Respetar los días de explotación hacia arriba.

$$Z_{ka}^t \cdot \beta Abajo_k \leq \sum_{u=1}^t DP^u \quad \forall k, a, t$$

7. Definir tonelada extraída.

$$Ton_a^t = \frac{\sum_{k=1}^K (Z_{ka}^t \cdot Tone_{ka})}{DP_a^t} \quad \forall a, t$$

8. Definir tonelada de cobre extraída.

$$TonCu_a^t = \sum_{k=1}^K (Z_{ka}^t \cdot Tone_{ka} \cdot LeyCu_{ka}) \quad \forall a, t$$

9. Definir tonelada de molibdeno extraída.

$$TonMo_a^t = \sum_{k=1}^K (Z_{ka}^t \cdot Tone_{ka} \cdot LeyMo_{ka}) \quad \forall a, t$$

10. Respetar cotas de producción.

$$Min\_T \leq Ton_a^t \leq Max\_T_a^t \quad \forall a, t$$

11. Definir incremento en la producción.

$$TonUp_a^t \geq Ton_a^t - Ton_a^{t-1} \quad \forall a, t \in (AnoIni, Anofin]$$

12. Definir incremento para primer año.

$$TonUp_a^{AnoIni} \geq Ton_a^{AnoIni} - TonIni_a \quad \forall a$$

13. Respetar máximo incremento.

$$TonUp_a^t \leq MT\_Up \quad \forall a, t$$

14. Definir decremento en la producción.

$$TonDn_a^t \geq Ton_a^{t-1} - Ton_a^t \quad \forall a, t \in (AnoIni, Anofin]$$

15. Definir decremento para primer año.

$$TonDn_a^{AnoIni} \geq TonIni_a - Ton_a^{AnoIni} \quad \forall a$$

16. Respetar máximo decremento.

$$TonDn_a^t \leq MT\_Dn \quad \forall a, t$$

17. Definición flujo.

$$f_a^t = \frac{\sum_{k=1}^K (Z_{ka}^t \cdot Tone_{ka})}{DP_a^t} \quad \forall a, t$$

18. Respetar capacidades de los subsectores.

$$f_a^t \leq CAP \quad \forall a, t$$

19. Respetar capacidades conjuntas de los subsectores.

$$f_{DR1}^t + f_{DR3}^t + f_{DR4}^t \leq CAPV^t \quad \forall t$$

20. Respetar capacidades de las vías ferroviarias.

$$\sum_{a=1}^A f_a^t \leq CAPf \quad \forall t$$

21. Conservación de flujos.

$$\sum_{a=1}^A f_a^t = f_c^t + f_b^t \quad \forall t$$

22. Definición flujo barato.

$$f_b^t \leq CAP \quad \forall t$$

23. Respetar cotas de áreas de extracción.

$$AreaMnExt_a \leq \sum_{t=1}^T \sum_{k \in Base_a} (Z_{ka}^t \cdot Area_{ka}) \quad \forall a$$

$$\sum_{t=1}^T \sum_{k \in Base_a} (Z_{ka}^t \cdot Area_{ka}) \leq AreaMxExt_a \quad \forall a$$

**Función Objetivo:**

$$\max B - CV$$

**Beneficios:**

$$B = \sum_{a=1}^A \sum_{t=1}^T desc(t) \cdot (ToneCu_a^t \cdot (PCu^t - dctoCu^t) \cdot CTCu^t + TonMo_a^t \cdot (PMo^t - dctoMo^t) \cdot CTMo^t)$$

**Costos Variables de Extracción y Flujo:**

$$CV = \sum_{t=1}^T desc(t) \cdot \left( \begin{aligned} & \left[ \sum_{a=1}^A (CVext_a \cdot Ton_a^t \cdot DP^t) + \sum_{a=1}^A \sum_{k \in Base_a} (CA_a \cdot Z_{ka}^t \cdot Area_{ka}) + \right. \\ & \left. \sum_{a=1}^A (CVextUP \cdot TonUp_a^t \cdot DP^t) + \sum_{a=1}^A (CVextDn \cdot TonDn_a^t \cdot DP^t) \right] \\ & + CVfc^t \cdot fc^t \cdot DP^t + CVfb^t \cdot fb^t \cdot DP^t + \sum_{a=1}^A (CVf_a \cdot f_a^t \cdot DP^t) \end{aligned} \right)$$