

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

DESARROLLO DE ESTRATEGIA PARA EL USO ÓPTIMO
DE LA ENERGÍA EN UN VEHÍCULO SOLAR

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL
ELECTRICISTA

EDUARDO JAVIER ARANDA GONZÁLEZ

PROFESOR GUÍA:
GUILLERMO GONZÁLEZ REES

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
HÉCTOR AGUSTO ALEGRIA
MANUEL DUARTE MERMOUD

SANTIAGO DE CHILE
ABRIL 2008

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TITULO DE
INGENIERO CIVIL ELECTRICISTA
POR: EDUARDO JAVIER ARANDA GONZÁLEZ
FECHA: 19/05/2008
PROF. GUIA: Sr. GUILLERMO GONZÁLEZ REES

“DESARROLLO DE ESTRATEGIA PARA EL USO ÓPTIMO DE LA ENERGÍA EN UN VEHÍCULO SOLAR”

El propósito de la presente memoria es analizar de qué forma debe comandarse un vehículo solar para que recorra un trayecto dado en un tiempo mínimo, considerando que la energía disponible para su movimiento es la principal restricción para este tipo de vehículos.

En primer lugar, se desarrolla un modelo en variables de estado para el vehículo solar “Eolian 850”, diseñado y construido por alumnos de ingeniería y de diseño de la Universidad de Chile. Se describe la dinámica del vehículo en su eje longitudinal al plano de simetría considerando las fuerzas resistivas y la fuerza de tracción que actúan sobre el auto que es representado como una masa puntual. Se realiza un modelo de las pérdidas en el sistema de tracción y se determinan sus parámetros. En la modelación del banco de baterías de litio polímero del auto se utiliza el modelo equivalente simplificado de parámetros concentrados de la batería de litio y se realizan pruebas experimentales para determinar la tensión interna del banco necesaria para utilizar el modelo.

El problema de optimización se aborda como un problema de control óptimo, partiendo desde una situación simplificada del problema hasta un caso más completo y cercano a la realidad. Utilizando tres grupos de supuestos simplificadores se encontraron soluciones analíticas al problema de optimización.

El caso más general del problema se aborda en forma numérica discretizando las ecuaciones de estado del modelo del auto y utilizando un software de optimización no lineal con restricciones.

Para alcanzar el óptimo, se deben realizar variaciones de la velocidad que dependen de las variaciones en la velocidad del viento, de la presencia de pendientes en la ruta, de variaciones espaciales de la potencia solar y de la tensión variable en el banco de baterías. Sin embargo, estas variaciones no permiten reducir en forma significativa el tiempo total de recorrido con respecto a mantener una velocidad constante.

“Hemos llegado donde muchos no han llegado”
Jorge Arnoldo González G.

Agradecimientos

Quisiera agradecer, en primer lugar, a mi familia, en especial a mis padres a quienes nunca podré devolverle la mano: María Antonieta González, Vicente Aranda y Valentina Aranda. A mis tíos Waldo Aranda y Omar Aranda por su influencia y complicidad en mi ingreso a la FCFM.

A mi primera profesora de música Sonia Bueno por abrirme la puerta hacia el mundo de la música. Por su dedicación y enseñanzas agradezco a los profesores de música de la Facultad de Artes de la Universidad de Chile: Lila Solís, Bárbara Osses, Ximena Matamoros, Enriqueta Brunetto y Fernando Carrasco.

Al profesor guía de este trabajo, Sr. Guillermo González, por sus observaciones. Al profesor René Garreaud por su apoyo en la sección de estimación de la radiación solar. Al profesor Ernesto Bianchi por transmitir su experiencia en la forma de trabajar y su ayuda en las pruebas al banco de baterías.

Al gran equipo EOLIAN con quienes vivimos una experiencia inolvidable: Adio Stefoni, Álvaro Jesam, Andrés Rojas, Alfredo de la Quintana, Claudio Vergara, Diego Huarapil, Gerdin Heinz, Jaime Fariña, Jaime Muñoz, Juan Pablo Castillo, Manuel Vargas, Patricio Mendoza, Rodrigo Palma, Arturo Searle, Carlos Gherardelli, Cristobal Jofré, Enrique Muñoz, Felipe Herrera, Francisco Bozzo, Hugo Muñoz, Pablo Gibson, Pablo Jiménez, Vladimir Ovalle, Aldrin Rocha, Astrid Osorio, Camilo Anabalón, Cecilia Huerta, Diego Roa, José Antonio Marín, Renata Lubbert.

Índice de Contenido

RESUMEN DE LA MEMORIA	I
AGRADECIMIENTOS	III
ÍNDICE DE CONTENIDO	IV
LISTA DE SÍMBOLOS	VI
ÍNDICE DE TABLAS	X
ÍNDICE DE FIGURAS	XI
CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN	1
1.1 TRABAJOS RELACIONADOS	2
1.2 OBJETIVOS Y APORTE DE LA MEMORIA	4
1.2.1 Objetivo General	4
1.2.2 Objetivos Específicos	4
1.3 ESTRUCTURA DE LA MEMORIA.....	5
CAPÍTULO 2 MODELACIÓN DEL AUTO	6
2.1 FUERZAS RESISTIVAS.....	8
2.1.1 Fuerza de Rodadura	8
2.1.2 Fuerza Aerodinámica	11
2.1.3 Fuerza Gradiente	12
2.2 SISTEMA DE TRACCIÓN ELÉCTRICO.....	13
2.2.1 Fuerza de Tracción.....	15
2.2.2 Pérdidas en el Sistema de Tracción.....	20
2.3 BANCO DE BATERÍAS.....	29
2.3.1 Modelo Simple del Banco de Baterías - Energía Acumulada	31
2.3.2 Modelo Completo del Banco de Baterías de Litio	32
Tensión Interna del Banco de Baterías	34
Simulación y Validación del Modelo de la Batería.....	36
2.4 MODELO INTEGRADO DEL VEHÍCULO.....	40
2.4.1 Modelo Integrado Simple.....	43
2.4.2 Modelo Integrado Completo	45

CAPÍTULO 3	CONTROL ÓPTIMO.....	48
3.1	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN	48
3.1.1	Funcional de Costo	49
3.1.2	Restricciones.....	50
3.2	SOLUCIÓN ANALÍTICA.....	52
3.2.1	Solución Analítica Bajo el Grupo de Supuestos N° 1.....	54
	Resumen de la Solución	61
	Ejemplo 1	62
	Ejemplo 2.....	64
3.2.2	Solución Analítica Bajo el Grupo de Supuestos N° 2.....	67
	Resumen de la Solución	71
	Ejemplo 3.....	72
3.2.3	Solución Analítica Bajo el Grupo de Supuestos N° 3.....	77
	Resumen de la Solución	79
	Ejemplo 4.....	81
3.3	PLANTEAMIENTO EN FORMA NUMÉRICA UTILIZANDO EL MODELO INTEGRADO SIMPLE. PÉRDIDAS EN EL SISTEMA DE TRACCIÓN.....	83
3.3.1	Soluciones a Casos de Interés.....	87
	Aceleración Desde el Reposo.....	88
	Pendiente Positiva.....	90
	Pendiente Negativa	92
	Ejemplo con una Ruta Real.....	94
3.4	PLANTEAMIENTO EN FORMA NUMÉRICA UTILIZANDO EL MODELO INTEGRADO COMPLETO.....	98
3.4.1	Soluciones a Casos de Interés.....	101
	Contraste con Ejemplo 1	103
	Ejemplo en Condiciones Constantes.....	105
CAPÍTULO 4	ESTIMACIÓN DE LA RADIACIÓN SOLAR	107
CAPÍTULO 5	CONCLUSIONES	113
REFERENCIAS	120

Lista de Símbolos

Símbolo	Significado	Página
A	Área frontal	11
A_p	Área del panel solar	107
$a_{0,1,2}$	Parámetros de la aceleración del auto	41
a_x	Aceleración horizontal del auto	17
b	Parámetro de la aceleración del auto	41
C_1	1ª Restricción en la variable de control	54
C_2	2ª Restricción en la variable de control	54
C_D	Coefficiente de fricción	11
$C_D A$	Área de fricción	11
C_{rr}	Coefficiente de rodadura	8
C_{rr1}	Coefficiente de rodadura a velocidad cero	10
C_{rr2}	Factor de velocidad	10
D	Día del año	108
E	Energía banco de baterías	31
E_i	Tensión interna de la batería	32
E_{max}	Energía máxima banco de baterías	51
E_{min}	Energía mínima banco de baterías	51
F_A	Fuerza aerodinámica	11
F_G	Fuerza gradiente	12
F_R	Fuerza resistiva	8
F_{ro}	Fuerza de rodadura	8
F_T	Fuerza de tracción	16
f_m	Factor de masa	41
f_v	Aceleración resistiva en función de la velocidad	42

Símbolo	Significado	Página
f_x	Aceleración resistiva en función de la posición	42
g	Aceleración de gravedad	9
H	Hamiltoniano	54
h_v	Función $h_v(v, v_v)$	68
h_{v0}	Función $h_v(v, v_v = 0)$	69
I	Corriente por las baterías	33
I_a	Corriente de armadura del motor	21
I_{max}	Corriente máxima admisible en la descarga de las baterías	51
I_{min}	Corriente mínima admisible en la carga de las baterías	51
I_r	Momento de inercia de las ruedas	15
J	Funcional de costo	50
$k_{0,1,2}$	Parámetros de las pérdidas en el sistema de tracción	23
M	Masa del vehículo	9
M_e	Masa equivalente	40
m	Número óptico de masa	109
N	Número de intervalos de una ruta	84
P_a	Presión atmosférica	109
P_b	Potencia baterías hacia el sistema de tracción	18
P_c	Potencia alimentación electrónica	18
P_e	Potencia en el eje de la rueda desarrollada por el motor	16
P_{in}	Potencia entrada al sistema de tracción	18
P_L	Pérdidas en el sistema de tracción	20
P_{Lb}	Pérdidas en el banco de baterías	101
P_M	Potencia máxima admisible hacia sistema de tracción	50
P_R	Potencia regenerativa máxima desde sistema de tracción	50
P_s	Potencia solar (a la salida del MPPT)	18
Q_{out}	Carga extraída desde la batería	29
R_d	Resistencia de difusión	32

Símbolo	Significado	Página
$R_d C_d$	Constante de tiempo tensión de difusión	32
R_k	Resistencia cinética	33
$R_k C_k$	Constante de tiempo tensión cinética	32
R_s	Resistencia serie	32
$R_s(t)$	Radiación solar	107
r	Radio de la rueda	16
S_c	Constante solar	107
S_E	Restricción en el estado energía	77
t_0	Tiempo inicial	50
t_f	Tiempo final	50
t_{sn}	Hora del medio día solar	108
U_b	Tensión en las baterías	33
U_{bmax}	Tensión máxima admisible en las baterías	51
U_{bmin}	Tensión mínima admisible en las baterías	51
U_d	Tensión de difusión	32
U_i	Tensión definida para simplificar la notación	46
U_k	Tensión cinética	32
u	Acción de control	43
v	Velocidad horizontal	8
v_{max}	Velocidad máxima del auto	51
v_{min}	Velocidad mínima del auto	51
v_v	Velocidad del viento longitudinal respecto al eje X del auto	11
W_v	Peso del vehículo	8
X	Eje longitudinal al plano de simetría del vehículo	6
x	Posición horizontal	8
Y	Ecuación estado salida	44
α_r	Aceleración angular	15
γ	Función multiplicadora de Lagrange	77

Símbolo	Significado	Página
ΔT	Amplitud térmica	109
δ_{SD}	Declinación solar	108
ε	Error de estimación	24
η_{mppt}	Eficiencia del MPPT	107
η_p	Eficiencia del panel.	107
η_T	Eficiencia sistema de tracción	18
θ	Pendiente de la trayectoria	8
$\lambda_{1,2,3}$	Funciones multiplicadoras de Lagrange	55
$\mu_{1,2}$	Funciones multiplicadoras de Lagrange	55
ξ	Vector de parámetros de velocidad	84
ρ_a	Densidad del aire	11
σ_c	Fracción de cielo cubierto	108
τ	Transmisividad	108
Φ	Latitud	108
Ψ	Ángulo cenit	107
ω_r	Velocidad angular	16
\mathfrak{T}_e	Torque en el eje de la rueda producido por el motor	16

Índice de Tablas

TABLA 2.1 EQUIVALENCIA ENTRE LA VELOCIDAD ANGULAR ω , DEL MOTOR Y LA VELOCIDAD v DEL AUTO.	23
TABLA 2.2 ESPECIFICACIONES DE LA CELDA SLPB75106100 Y DEL BANCO DE BATERÍAS.....	30
TABLA 3.1 GRUPO DE SUPUESTOS N° 1 CONSIDERADOS PARA LA SOLUCIÓN ANALÍTICA.	52
TABLA 3.2 GRUPO DE SUPUESTOS N° 2 CONSIDERADOS PARA LA SOLUCIÓN ANALÍTICA	53
TABLA 3.3 GRUPO DE SUPUESTOS N° 3 CONSIDERADOS PARA A SOLUCIÓN ANALÍTICA	53
TABLA 3.4 PARÁMETROS DEL AUTO UTILIZADOS EN LAS SOLUCIONES NUMÉRICAS.	62
TABLA 3.5 COMPARACIÓN ENTRE LA ESTRATEGIA ÓPTIMA Y DE VELOCIDAD CONSTANTE PARA EL CASO DEL EJEMPLO 2 QUE CONSIDERA VELOCIDAD DEL VIENTO VARIABLE EN EL TIEMPO.....	66
TABLA 3.6 COMPARACIÓN ENTRE ESTRATEGIA ÓPTIMA Y DE VELOCIDAD CONSTANTE PARA EL CASO DEL EJEMPLO 3 DONDE LA POTENCIA SOLAR DEPENDE DEL TIEMPO Y DE LA POSICIÓN x	75
TABLA 3.7 PARÁMETROS DEL AUTO UTILIZADOS EN LAS SOLUCIONES NUMÉRICAS.	87
TABLA 3.8 COMPARACIÓN ENTRE ESTRATEGIA ÓPTIMA Y DE VELOCIDAD CONSTANTE PARA EL CASO DEL EJEMPLO CON UNA RUTA REAL.....	96
TABLA 3.9 PARÁMETROS PARA EL MODELO DEL VEHÍCULO INTEGRADO COMPLETO CONSIDERADO EN LAS SOLUCIONES NUMÉRICAS.	102
TABLA 4.1 MATRIZ DE DECISIÓN PARA ASIGNAR VALOR A LA TRANSMISIVIDAD.....	109

Índice de Figuras

FIGURA 2.1 SISTEMA DE COORDENADAS FIJO AL VEHÍCULO.	6
FIGURA 2.2 DIAGRAMA DE CONTROL PARA UN BRUSHLESS DC MOTOR.	13
FIGURA 2.3 DIAGRAMA DE TORQUE Y FUERZA SOBRE LA RUEDA DE TRACCIÓN.	15
FIGURA 2.4 FLUJO DE POTENCIAS A TRAVÉS DEL SISTEMA ELÉCTRICO DE POTENCIA DEL VEHÍCULO.	18
FIGURA 2.5 PÉRDIDAS P_L EN EL SISTEMA DE TRACCIÓN, ENTREGADAS POR EL FABRICANTE, V/S POTENCIA P_e EN EL EJE A DISTINTAS VELOCIDADES ANGULARES.	23
FIGURA 2.6 PÉRDIDAS P_L EN EL SISTEMA DE TRACCIÓN V/S POTENCIA P_e EN EL EJE A BAJAS VELOCIDADES. LÍNEA CONTINUA: PÉRDIDAS ESTIMADAS A PARTIR DEL MODELO. ASTERISCOS: PÉRDIDAS ENTREGADAS POR EL FABRICANTE.	26
FIGURA 2.7 PÉRDIDAS P_L EN EL SISTEMA DE TRACCIÓN V/S POTENCIA P_e EN EL EJE A ALTAS VELOCIDADES. LÍNEA CONTINUA: PÉRDIDAS ESTIMADAS A PARTIR DEL MODELO. ASTERISCOS: PÉRDIDAS ENTREGADAS POR EL FABRICANTE.	26
FIGURA 2.8 EFICIENCIA η_T EN EL SISTEMA DE TRACCIÓN V/S POTENCIA P_e EN EL EJE A BAJAS VELOCIDADES. LÍNEA CONTINUA: EFICIENCIAS ESTIMADAS A PARTIR DEL MODELO. ASTERISCOS: EFICIENCIAS ENTREGADAS POR EL FABRICANTE.	27
FIGURA 2.9 EFICIENCIA η_T EN EL SISTEMA DE TRACCIÓN V/S POTENCIA P_e EN EL EJE A BAJAS VELOCIDADES. LÍNEA CONTINUA: EFICIENCIAS ESTIMADAS A PARTIR DEL MODELO. ASTERISCOS: EFICIENCIAS ENTREGADAS POR EL FABRICANTE.	28
FIGURA 2.10 MODELO EQUIVALENTE SIMPLIFICADO DE PARÁMETROS CONCENTRADOS DE LA BATERÍA.	32
FIGURA 2.11 TENSIÓN INTERNA DEL BANCO DE BATERÍAS E_i EN FUNCIÓN DE LA CARGA EXTRAÍDA Q_{out} . DATOS OBTENIDOS EXPERIMENTALMENTE PARA EL BANCO DE BATERÍAS DEL VEHÍCULO EOLIAN.	35
FIGURA 2.12 DIAGRAMA IMPLEMENTADO EN MATLAB SIMULINK PARA EL MODELO EQUIVALENTE SIMPLIFICADO DE PARÁMETROS CONCENTRADOS DE LA BATERÍA.	36
FIGURA 2.13 CORRIENTE POR EL BANCO DE BATERÍAS. DATOS OBTENIDOS POR EL SISTEMA DE COMUNICACIONES Y MONITOREO (SCM) DEL AUTO EOLIAN EN HIDDEN VALLEY (DARWIN, AUSTRALIA) EL 17 DE OCTUBRE DE 2007.	37

FIGURA 2.14 TENSIÓN EN BORNES DEL BANCO DE BATERÍA. TENSIÓN U_b MEDIDA (LÍNEA NEGRA) Y TENSIÓN U_b ESTIMADA POR EL MODELO (LÍNEA ROJA).....	37
FIGURA 2.15 TENSIÓN EN BORNES DEL BANCO DE BATERÍA A CORRIENTE CONSTANTE DE 8 [A] V/S CARGA EXTRAÍDA Q_{out} . TENSIÓN U_b MEDIDA (LÍNEA NEGRA) Y TENSIÓN U_b ESTIMADA POR EL MODELO (LÍNEA ROJA).....	38
FIGURA 3.1 VELOCIDAD ÓPTIMA V/S VELOCIDAD DEL VIENTO.....	60
FIGURA 3.2 RUTA DE EJEMPLO PARA EL CONTROL ÓPTIMO BAJO EL GRUPO DE SUPUESTOS N° 1. ELEVACIÓN h SOBRE EL NIVEL DEL MAR V/S POSICIÓN x	63
FIGURA 3.3 VELOCIDAD v (LÍNEA NEGRA) Y POTENCIA DE ENTRADA P_{in} (LÍNEA AZUL) ÓPTIMA V/S POSICIÓN x	63
FIGURA 3.4 VELOCIDAD DEL VIENTO v_v V/S TIEMPO (HORA DEL DÍA) EN EL CASO DEL EJEMPLO 2.....	64
FIGURA 3.5 VELOCIDAD ÓPTIMA v V/S TIEMPO (HORA DEL DÍA) EN EL CASO DEL EJEMPLO 2 QUE CONSIDERA VELOCIDAD DEL VIENTO VARIABLE EN EL TIEMPO.....	65
FIGURA 3.6 POTENCIA SOLAR S_s PARA UN DÍA DESPEJADO UTILIZADA PARA EL EJEMPLO 3... ..	72
FIGURA 3.7 ATENUACIÓN $\alpha(x)$ DE LA POTENCIA SOLAR EN FUNCIÓN DE LA POSICIÓN x UTILIZADA PARA EL EJEMPLO 3.	73
FIGURA 3.8 VELOCIDADES ÓPTIMAS v V/S POSICIÓN x PARA DIFERENTES VELOCIDADES INICIALES, EN EL CASO DEL EJEMPLO 3.....	74
FIGURA 3.9 VELOCIDAD v ÓPTIMA V/S POSICIÓN x EN EL CASO DEL EJEMPLO 3 DONDE LA POTENCIA SOLAR DEPENDE DEL TIEMPO Y DE LA POSICIÓN x	74
FIGURA 3.10 ENERGÍA E DEL BANCO DE BATERÍAS V/S POSICIÓN x EN LA ESTRATEGIA ÓPTIMA (LÍNEA NEGRA) Y DE VELOCIDAD CONSTANTE (LÍNEA AZUL) PARA EL CASO DEL EJEMPLO 3, DONDE LA POTENCIA SOLAR DEPENDE DE LA POSICIÓN x	76
FIGURA 3.11 VELOCIDAD v (LÍNEA NEGRA) Y POTENCIA DE BATERÍAS P_b (LÍNEA AZUL) ÓPTIMA V/S POSICIÓN x EN EL CASO EN QUE UNA DE LAS RESTRICCIONES EN EL ESTADO SE ALCANZA.....	81
FIGURA 3.12 ENERGÍA E DEL BANCO DE BATERÍAS (LÍNEA NEGRA) Y ELEVACIÓN h (LÍNEA AZUL) V/S POSICIÓN x EN EL CASO EN QUE UNA DE LAS RESTRICCIONES EN EL ESTADO SE ALCANZA.....	81
FIGURA 3.13 DISCRETIZACIÓN DE LA RUTA EN N INTERVALOS.	84

FIGURA 3.14 VELOCIDAD v (LÍNEA NEGRA) Y POTENCIA DE ENTRADA P_m (LÍNEA AZUL) ÓPTIMAS v/s TIEMPO PARA UNA ACELERACIÓN DESDE EL REPOSO. CASO QUE CONSIDERA PÉRDIDAS EN EL SISTEMA DE TRACCIÓN.....	88
FIGURA 3.15 PÉRDIDAS P_L EN EL SISTEMA DE TRACCIÓN v/s TIEMPO DURANTE LA ACELERACIÓN DESDE EL REPOSO. CASO QUE CONSIDERA PÉRDIDAS EN EL SISTEMA DE TRACCIÓN.	89
FIGURA 3.16 VELOCIDAD v ÓPTIMA (LÍNEA NEGRA) Y ELEVACIÓN h (LÍNEA AZUL) v/s POSICIÓN x DEL VEHÍCULO, EN EL CASO DE UNA PENDIENTE POSITIVA. CASO QUE CONSIDERA PÉRDIDAS EN EL SISTEMA DE TRACCIÓN.	90
FIGURA 3.17 POTENCIA DE ENTRADA P_m ÓPTIMA (LÍNEA NEGRA) Y ELEVACIÓN h (LÍNEA AZUL) v/s POSICIÓN, EN EL CASO DE UNA PENDIENTE POSITIVA. CASO QUE CONSIDERA PÉRDIDAS EN EL SISTEMA DE TRACCIÓN.....	90
FIGURA 3.18 ACELERACIÓN a_x ÓPTIMA (LÍNEA NEGRA) Y ELEVACIÓN h (LÍNEA AZUL) v/s POSICIÓN x DEL VEHÍCULO, EN EL CASO DE UNA PENDIENTE POSITIVA. CASO QUE CONSIDERA PÉRDIDAS EN EL SISTEMA DE TRACCIÓN.	91
FIGURA 3.19 VELOCIDAD v ÓPTIMA (LÍNEA NEGRA) Y ELEVACIÓN h (LÍNEA AZUL) v/s POSICIÓN x DEL VEHÍCULO, EN EL CASO DE UNA PENDIENTE NEGATIVA. CASO QUE CONSIDERA PÉRDIDAS EN EL SISTEMA DE TRACCIÓN.	92
FIGURA 3.20 POTENCIA DE ENTRADA P_m ÓPTIMA (LÍNEA NEGRA) Y ELEVACIÓN h (LÍNEA AZUL) v/s POSICIÓN x , EN EL CASO DE UNA PENDIENTE NEGATIVA. CASO QUE CONSIDERA PÉRDIDAS EN EL SISTEMA DE TRACCIÓN.	92
FIGURA 3.21 ACELERACIÓN a_x ÓPTIMA (LÍNEA NEGRA) Y ELEVACIÓN h (LÍNEA AZUL) v/s POSICIÓN x DEL VEHÍCULO, EN EL CASO DE UNA PENDIENTE NEGATIVA. CASO QUE CONSIDERA PÉRDIDAS EN EL SISTEMA DE TRACCIÓN.	93
FIGURA 3.22 ELEVACIÓN h SOBRE EL NIVEL DEL MAR DE LA RUTA v/s POSICIÓN x	94
FIGURA 3.23 PENDIENTES θ EN LA RUTA v/s POSICIÓN x	94
FIGURA 3.24 VELOCIDAD v ÓPTIMA (LÍNEA NEGRA) Y CONSTANTE (LÍNEA ROJA) v/s TIEMPO t . CASO QUE CONSIDERA PÉRDIDAS EN EL SISTEMA DE TRACCIÓN.....	95
FIGURA 3.25 PÉRDIDAS EN EL SISTEMA DE TRACCIÓN P_L v/s TIEMPO t . PÉRDIDAS A VELOCIDAD ÓPTIMA (LÍNEA NEGRA), PÉRDIDAS A VELOCIDAD CONSTANTE (LÍNEA ROJA).	97
FIGURA 3.26 RUTA DE EJEMPLO PARA EL CONTROL ÓPTIMO CON MODELO COMPLETO PARA LAS BATERÍAS. ELEVACIÓN h SOBRE EL NIVEL DEL MAR v/s POSICIÓN x	103

FIGURA 3.27 VELOCIDAD v (LÍNEA NEGRA) Y POTENCIA DE ENTRADA P_{in} (LÍNEA AZUL) ÓPTIMAS (UTILIZANDO MODELO COMPLETO PARA LAS BATERÍAS) PARA LA RUTA DE LA FIGURA 3.26 V/S POSICIÓN x	104
FIGURA 3.28 PÉRDIDAS EN EL BANCO DE BATERÍAS P_{Lb} (LÍNEA NEGRA) Y CORRIENTE POR LA BATERÍA I (LÍNEA AZUL) ÓPTIMAS (UTILIZANDO MODELO COMPLETO PARA LAS BATERÍAS) PARA LA RUTA DE LA FIGURA 3.26 V/S POSICIÓN x	104
FIGURA 3.29 TENSIÓN DEL BANCO BATERÍAS U_b (LÍNEA NEGRA) Y CORRIENTE DEL BANCO DE BATERÍAS (LÍNEA AZUL) I ÓPTIMAS (UTILIZANDO MODELO COMPLETO PARA LAS BATERÍAS) V/S TIEMPO.	105
FIGURA 3.30 VELOCIDAD v ÓPTIMA ANTES DE ALCANZAR RESTRICCIÓN DE TENSIÓN EN EL BANCO (UTILIZANDO MODELO COMPLETO PARA LAS BATERÍAS) V/S TIEMPO t . SE OBSERVA UNA PEQUEÑA VARIACIÓN EN LA VELOCIDAD v	106
FIGURA 3.31 VELOCIDAD v ÓPTIMA CUANDO SE ALCANZA RESTRICCIÓN DE TENSIÓN EN EL BANCO (UTILIZANDO MODELO COMPLETO PARA LAS BATERÍAS) V/S TIEMPO t	106
FIGURA 4.1 RADIACIÓN MÁXIMA V/S AMPLITUD TÉRMICA DEL DÍA, DATOS DEL CENTRO DE SANTIAGO DURANTE LOS AÑOS 2006 Y 2007.	110
FIGURA 4.2 INSOLACIÓN MEDIDA Y ESTIMADA, DATOS DEL CENTRO DE SANTIAGO DURANTE LOS AÑOS 2006 Y 2007.	111
FIGURA 4.3 AMPLITUD TÉRMICA DE LOS DÍAS ENTRE EL 9 Y 23 DE ABRIL, 2006.	112
FIGURA 4.4 RADIACIÓN SOLAR MEDIDA Y ESTIMADA PARA LOS DÍAS ENTRE EL 9 Y 23 DE ABRIL DEL 2006 EN SANTIAGO CENTRO.	112

Capítulo 1

Introducción

Durante el año 2006 y verano del 2007, se llevó a cabo en la Universidad de Chile el diseño y construcción del primer auto solar desarrollado en el país con la aspiración de participar en la carrera de autos solares más prestigiosa del mundo: “Panasonic World Solar Challenge” (PWSC) que se realizó en Octubre del año 2007 en Australia.

El primer vehículo fue un prototipo construido con el objetivo de validar al equipo y tratar de cautivar a auspiciadores para poder construir un auto más competitivo que pudiese participar en la carrera. Finalmente se construyó un vehículo solar bautizado con el nombre de “Eolian 850” con el cual se participó en la carrera PWSC del año 2007, obteniendo el lugar 14 entre 23 autos en la categoría.

La carrera PWSC consiste en recorrer 3000 km desde la ciudad de Darwin hasta Adelaide, utilizando como fuente de energía únicamente la radiación solar y la energía inicial en el banco de baterías[27].

Una vez construido el auto, surge la pregunta de cómo manejarlo en forma óptima. Como es lógico en una carrera, el objetivo es llegar en el menor tiempo posible al final del recorrido. La respuesta para cumplir ese objetivo sería manejar el auto a la mayor velocidad posible todo el tiempo, lo cual sería posible si es que no existiera la fuerte restricción de la energía disponible para el movimiento del vehículo.

Los vehículos solares utilizan tan sólo entre 45 y 60 kWh para recorrer los 3000 km entre Darwin y Adelaide, mientras que autos convencionales lo hacen utilizando del orden de 180 litros de gasolina, lo que equivale a 1.7 MWh aproximadamente.

Entonces, el verdadero desafío para un vehículo solar es ser lo más eficiente posible, con el fin de utilizar en la mejor forma posible la energía disponible. Es por esto que en el diseño del vehículo se debe hacer hincapié en minimizar la masa del auto, en lograr una forma aerodinámica adecuada, minimizar roces en los rodamientos y deformaciones en los neumáticos y tener un sistema eléctrico eficiente para que el vehículo tenga un bajo consumo. Pero, además de diseñar un vehículo con estas características, se debe considerar la forma en que se maneje el auto, ya que tiene influencia en su desempeño. Es por esta razón que en esta memoria se aborda el tema del control óptimo de un vehículo solar, dando respuesta a la pregunta de cómo se debe manejar el auto para utilizar la energía de manera óptima desde el punto de vista del tiempo.

1.1 Trabajos Relacionados

Un software llamado “SunGuesser” [37], implementado en una hoja de cálculo de Microsoft Excel, fue utilizado por el equipo “Sunchief” de la Universidad de Illinois en la carrera de autos solares “Sunrayce” del año 1995 desarrollada en Estados Unidos. El programa permitía encontrar la velocidad cruceo óptima a la que debía ir el vehículo en cada uno de los días de la competencia, es decir, para cada día se buscaba una velocidad constante tal que el tiempo total de recorrido fuese mínimo. Teniendo la velocidad como entrada, el programa estimaba cuánta energía sería consumida por el auto durante cada día y de cuánta energía solar dispondría. Con esto se calculaba la cantidad de energía disponible en el banco de baterías al final de cada día. La restricción utilizada en la optimización fue que la energía en las baterías al final de cada día fuese mayor que cero.

Un segundo trabajo desarrollado en la Universidad de Illinois acerca del control óptimo para un vehículo solar fue publicado el año 1999 [9]. Allí se presenta un modelo del auto más detallado que en [37]. El modelo considera la potencia consumida por el vehículo en función de su velocidad, la eficiencia del motor descrita por dos rectas que relacionan la potencia de entrada al motor con la potencia en el eje del motor, el uso de una cadena para la transmisión hacia la rueda y considera además un modelo óhmico para el banco de baterías (la tensión en bornes del banco de baterías cae en forma lineal con la corriente).

Se propone una funcional de costo para minimizar la carga eléctrica de la batería utilizada por el auto sumado a una penalización por el uso de corriente por el banco de baterías. Luego, utilizando el principio del máximo de Pontryagin, se plantean las ecuaciones que son condiciones necesarias para encontrar el óptimo. Estas ecuaciones son resueltas en forma numérica para diferentes tipos de escenarios como aceleración desde el reposo, subidas y bajadas de pendientes.

Trabajos sobre el control óptimo aplicado a trenes se han desarrollado tanto a nivel nacional como internacional[20][10][33][19]. Si bien es cierto que la forma de plantear el problema es similar, las condiciones y objetivos son diferentes. El objetivo es minimizar la energía consumida por el tren o analizar el tradeoff entre el consumo energético del tren y el tiempo total que tarda de ir de una estación a otra. Además hay restricciones sobre la aceleración del tren para comodidad de los pasajeros y no existen restricciones sobre la cantidad de energía utilizada.

1.2 Objetivos y Aporte de la Memoria

El aporte de esta memoria es construir modelos para el auto solar Eolian, lo que permitirá conocer, entender y predecir su comportamiento. También aportará en el análisis del control óptimo del auto solar para una trayectoria dada en diferentes situaciones y de ese modo disponer de una estrategia para la gestión óptima de la energía para un auto solar.

1.2.1 Objetivo General

El objetivo general de esta memoria es analizar el problema de conducción óptima de un vehículo solar que debe recorrer una trayectoria dada.

1.2.2 Objetivos Específicos

Los objetivos específicos de este trabajo son:

- Desarrollar un modelo para el vehículo solar
 - Encontrar ecuaciones de movimiento para el auto
 - Obtener un modelo del banco de baterías del vehículo
 - Estimar la eficiencia del sistema de tracción eléctrico
- Obtener un modelo para predecir la radiación solar
- Abordar, utilizando el modelo desarrollado, el problema de optimización de un vehículo solar que debe recorrer una ruta dada.

1.3 Estructura de la Memoria

En el Capítulo 2 se presenta en detalle un modelo en variables de estado que describe el comportamiento dinámico del auto solar. Se describen las fuerzas resistivas que actúan sobre el vehículo y el sistema de tracción eléctrico utilizado en el auto. Se encuentran expresiones para la fuerza de tracción del vehículo y para las pérdidas existentes en el sistema de tracción. El modelo además considera la modelación del banco de baterías del vehículo. Se utilizarán dos modelos para el banco, uno simple que sólo describe la forma en que se almacena o utiliza la energía disponible en el banco de baterías y otro, que además de esto, permite modelar la tensión en los bornes del banco.

En el Capítulo 3 se aborda el problema de optimización utilizando el modelo descrito en el Capítulo 2, describiendo las restricciones del problema y la funcional de costo utilizada. Se resuelve el problema de optimización en forma analítica, considerando tres grupos de supuestos simplificadores, los cuales permiten un desarrollo analítico, y se presenta una solución numérica del problema para el caso más general que no considera los supuestos simplificadores.

Para resolver el problema de optimización es necesario conocer en forma anticipada la potencia que se obtiene de la radiación solar. Las condiciones climáticas y geográficas determinan la magnitud de la radiación solar durante el día y en consecuencia de la potencia que se dispondrá para el movimiento del auto a través de la ruta a recorrer. Por esta razón, en el Capítulo 4 se muestran dos modelos para la radiación solar y métodos para poder realizar una predicción de ésta.

En el Capítulo 5 se presentan las conclusiones del trabajo realizado y se proponen trabajos futuros.

Capítulo 2

Modelación del Auto

En este capítulo se presenta la modelación en variables de estado para el auto solar que considera dos aspectos. El primero es la descripción del movimiento del auto en el eje X del sistema de coordenadas fijo al vehículo (Figura 2.1). Se representa al auto como una sola masa concentrada en su centro de gravedad, donde actúan fuerzas resistivas y una fuerza de tracción.

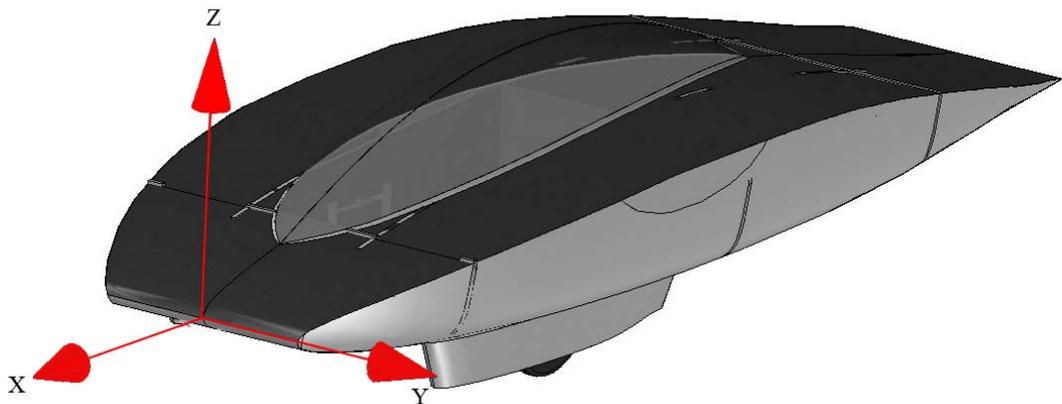


Figura 2.1 Sistema de coordenadas fijo al vehículo.

El segundo aspecto que se debe tomar en cuenta en la modelación del vehículo solar es el banco de batería. Para la modelación del banco se utilizarán dos modelos; uno simple que únicamente considera la forma en que se acumula o utiliza la energía disponible en el banco de baterías para el movimiento del auto y otro que se denominará “modelo completo”, puesto que además de describir la forma en que se almacena la energía, modela la tensión en bornes del banco en función de la corriente y la carga eléctrica extraída.

En consecuencia, se presentarán dos modelos para el vehículo que considera los dos aspectos mencionados: el modelo integrado simple, que considera el modelo simple de las baterías y el modelo integrado completo, que utiliza el modelo completo para el banco de baterías. En ambos modelos del vehículo la entrada es la potencia que suministran las baterías hacia el sistema de tracción del auto. En el caso de tomar valores negativos, esta potencia es la que reciben las baterías desde el panel solar y/o del sistema de tracción.

El modelo integrado simple tiene tres estados: la posición del auto, la velocidad del auto y la energía disponible en el banco de baterías. El modelo integrado completo tiene cinco estados: la posición del auto, la velocidad del auto, carga eléctrica extraída del banco de baterías, tensión cinética y de difusión[2] del banco de baterías. En ambos, la potencia solar captada por el panel y la velocidad del viento longitudinal con respecto al eje del auto aparecen como perturbaciones medidas en el modelo.

En la sección 3.3 y en la sección 3.4, el modelo es discretizado para dar solución numérica al problema de optimización.

2.1 Fuerzas resistivas

Son tres las fuerzas que se oponen al movimiento de un vehículo que se mueve sobre una carretera: la fuerza de rodadura F_{ro} , la fuerza aerodinámica F_A y la fuerza gradiente F_G . La fuerza resistiva total es:

$$F_R = F_{ro} + F_A + F_G \quad (2.1)$$

2.1.1 Fuerza de Rodadura

A bajas velocidades, esta fuerza resistiva es la más significativa que actúa sobre el auto. Su presencia se debe principalmente a las deformaciones y deslizamientos que sufren los neumáticos al rodar sobre el piso[15][8]. La fuerza de rodadura se modela por:

$$F_{ro} = C_{rr}(v)W_v \cos(\theta(x)) \quad (2.2)$$

donde:

$$C_{rr}(v) \quad \text{Coeficiente de rodadura.} \quad \text{Adimensional} \quad (2.3)$$

$$W_v \quad \text{Peso del vehículo.} \quad [N] \quad (2.4)$$

$$\theta(x) \quad \text{Pendiente de la trayectoria en la posición } x. \quad [rad] \quad (2.5)$$

$$x \quad \text{Posición horizontal del vehículo.} \quad [m] \quad (2.6)$$

$$v = \dot{x} \quad \text{Velocidad horizontal del vehículo.} \quad [m/s] \quad (2.7)$$

En una carretera, no es común encontrar pendientes mayores al 12% (6.9 grados). Para estas pendientes el coseno es cercano a uno, $\cos(6.9) = 0.992 \approx 1$, de modo que es razonable considerar $\cos(\theta(x)) \approx 1$. Luego el modelo para la fuerza de rodadura es[15][34]:

$$F_{ro} = C_{rr}(v)Mg \quad (2.8)$$

donde:

$$M \quad \text{Masa del vehículo.} \quad [kg] \quad (2.9)$$

$$g \quad \text{Aceleración de gravedad.} \quad [m/s^2] \quad (2.10)$$

La interpretación de este modelo es que si el peso sobre las ruedas es mayor, mayor serán las deformaciones que sufrirán los neumáticos y por lo tanto la fuerza de rodadura se incrementa. Discusiones y resultados empíricos acerca de la dependencia de la fuerza de rodadura con el peso de un vehículo, se puede encontrar en[8].

El coeficiente de rodadura es un parámetro que se ve afectado por diversas variables como la temperatura, presión, material y diseño del neumático, la velocidad del auto, estado del pavimento, alineación y número de ruedas del vehículo[15][8][7].

Para estudiar la influencia de la velocidad sobre el coeficiente de rodadura, se han realizado diversas pruebas empíricas. Clark y Dodge muestran que a velocidades menores de 80 km/h el coeficiente de rodadura tiene una pequeña dependencia con la velocidad y es cercano a una constante, mientras que para velocidades sobre 96 km/h, la tendencia es que el coeficiente aumente levemente[8]. Sin embargo, en[15] y [12] muestran que el coeficiente de rodadura se incrementa linealmente con la velocidad y sugieren los siguientes valores respectivamente para el coeficiente:

$$\begin{aligned} C_{rr} &= 0.01 + 6.22 \cdot 10^{-5} v \\ C_{rr} &= 0.0066 + 2.86 \cdot 10^{-5} v \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde la velocidad v está en km/h.

Con esto, el coeficiente de rodadura se modela como una función afín con la velocidad del auto:

$$C_{rr}(v) = C_{rr1} + C_{rr2}v \quad (2.12)$$

donde:

$$C_{rr1} \quad \text{Coeficiente de rodadura a velocidad cero.} \quad \text{Adimensional} \quad (2.13)$$

$$C_{rr2} \quad \text{Factor de velocidad.} \quad [s/m] \quad (2.14)$$

Finalmente la fuerza de rodadura se modela por:

$$F_{ro} = (C_{rr1} + C_{rr2}v)Mg \quad (2.15)$$

2.1.2 Fuerza Aerodinámica

La fuerza resistiva aerodinámica es dominante sobre el vehículo a velocidades altas (superiores a 70 [km/h]). Su origen se debe a separaciones del flujo de aire en la superficie del auto, cuando esto ocurre, se produce una baja presión en la parte posterior del vehículo y en consecuencia se origina una fuerza que tira el auto hacia atrás. Su presencia se debe también a roces existentes entre el aire y la superficie del vehículo, los cuales se incrementan cuando existen imperfecciones en la superficie [34][7].

La fuerza aerodinámica es proporcional al cuadrado de la velocidad del auto relativa a la componente de viento que es longitudinal con respecto al eje X del auto (ver Figura 2.1)[34]:

$$F_A = \frac{1}{2} C_D A \rho_a (v + v_v)^2 \quad (2.16)$$

Donde:

$$C_D A \quad \text{Área de fricción.} \quad [m^2] \quad (2.17)$$

$$C_D \quad \text{Coeficiente de fricción.} \quad \text{Adimensional} \quad (2.18)$$

$$A \quad \text{Área frontal.} \quad [m^2] \quad (2.19)$$

$$\rho_a \quad \text{Densidad del aire.} \quad [kg/m^3] \quad (2.20)$$

$$v \quad \text{Velocidad horizontal del vehículo.} \quad [m/s] \quad (2.21)$$

$$v_v \quad \text{Velocidad del viento longitudinal} \quad [m/s] \quad (2.22)$$

con respecto al eje X del auto.

El área frontal del auto está definida como la máxima área de sección transversal vista desde el frente del vehículo.

La velocidad del viento v_v , se considera positiva cuando va en contra del movimiento del auto y negativa cuando el viento es a favor.

2.1.3 Fuerza Gradiente

La fuerza gradiente actúa sobre el vehículo cuando existen pendientes en la ruta. Esta fuerza está dada por:

$$F_G = Mg \operatorname{sen}(\theta(x)) \quad (2.23)$$

Finalmente, de las ecuaciones (2.15), (2.16) y (2.23), la fuerza resistiva total que actúa sobre el vehículo es:

$$F_R(x, v, v_v) = \frac{1}{2} C_D A \rho_a (v + v_v)^2 + C_{rr2} Mgv + C_{rr1} Mg + Mg \operatorname{sen}(\theta(x)) \quad (2.24)$$

La fuerza resistiva producida por la acción de los frenos hidráulicos del vehículo, no será incluida en el modelo, debido a que en operación normal del vehículo solar en carretera, los frenos hidráulicos no se utilizan y para reducir la velocidad se usa el freno regenerativo del motor, que se considera como una fuerza de tracción negativa. (Ver sección 2.2).

2.2 Sistema de Tracción Eléctrico

El sistema de tracción de EOLIAN, se compone de un motor de corriente continua de imanes permanentes y sin escobillas (Brushless DC motor) SC-M150-08[25] y el controlador EV-C200-92 [26], de la empresa New Generation Motors Corporation (NGM).

En un motor de corriente continua convencional, la conmutación se realiza en forma física, las escobillas rozan las delgas del colector conectándolas eléctricamente con las bobinas. En cambio, en un motor sin escobillas la conmutación se realiza en forma electrónica, la posición del rotor es medida con tres sensores de efecto Hall y de acuerdo a las señales binarias entregadas por estos sensores, se determina la secuencia de conmutación para las bobinas.

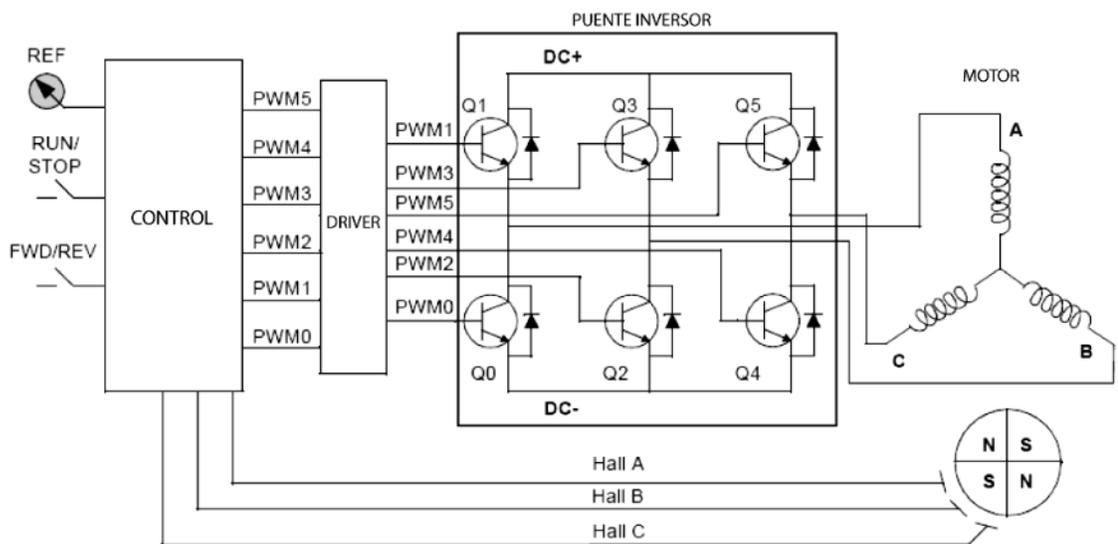


Figura 2.2 Diagrama de Control para un Brushless DC motor.

Este tipo de motor es muy similar a un motor síncrono, la principal diferencia entre ellos es que el motor síncrono desarrolla una fuerza electro motriz sinusoidal comparada con una rectangular o trapezoidal del Brushless DC motor.

El uso de un motor de este tipo tiene varias ventajas en comparación con un motor de corriente continua convencional o con un motor de inducción. Poseen una muy buena relación entre el torque desarrollado por el motor y su tamaño y su peso, de ese modo, es atractivo para aplicaciones en donde el peso y el espacio son factores importantes. Motores de este tipo, requieren muy poca mantención, tienen larga vida útil, son menos ruidosos y tienen alta eficiencia[38][1].

En particular, el rotor del motor SC-M150-08 va acoplado a la rueda, es decir, la transmisión es directa, lo que permite eliminar ineficiencias que se producen cuando la transmisión es por cadena o correa. Por esa razón el motor sólo desarrolla velocidades de hasta 1700 rpm (cuando está sin carga)[24].

2.2.1 Fuerza de Tracción

Se quiere encontrar una expresión para la fuerza de tracción sobre vehículo. Con la segunda ley de Newton para sistemas rotatorios, se tiene:

$$\sum \mathfrak{T} = I_r \alpha_r \quad (2.25)$$

donde:

$$\sum \mathfrak{T} \quad \text{Sumatoria de torques.} \quad [Nm] \quad (2.26)$$

$$I_r \quad \text{Momento de inercia de las ruedas.} \quad [kgm^2] \quad (2.27)$$

$$\alpha_r \quad \text{Aceleración angular de la rueda.} \quad [rad/s^2] \quad (2.28)$$

El torque generado por el motor permite producir la fuerza de tracción F_T en la dirección de movimiento del auto.

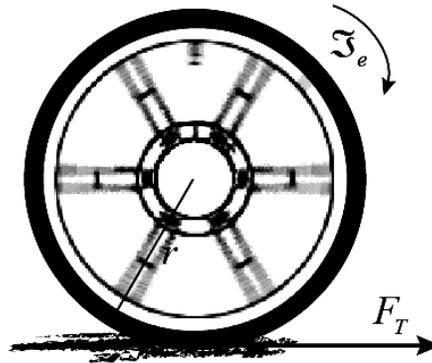


Figura 2.3 Diagrama de torque y fuerza sobre la rueda de tracción.

Como se dijo antes, el rotor del motor va acoplado a la rueda, entonces, el torque en el eje de la rueda es el mismo que el torque ejercido por el motor. Aplicando (2.25) en la rueda de tracción del auto (ver Figura 2.3), se deduce que:

$$\mathfrak{T}_e = F_T r + I_r \alpha_r \quad (2.29)$$

donde:

\mathfrak{T}_e	Torque en el eje de la rueda producido por el motor.	[Nm]	(2.30)
------------------	---	------	--------

F_T	Fuerza de tracción.	[N]	(2.31)
-------	---------------------	-----	--------

r	Radio de la rueda.	[m]	(2.32)
-----	--------------------	-----	--------

Por otro lado, la potencia de salida del motor está relacionada con el torque en el eje mediante la expresión:

$$P_e = \mathfrak{T}_e \omega_r \quad (2.33)$$

donde:

P_e	Potencia en el eje de la rueda desarrollada por el motor.	[W]	(2.34)
-------	--	-----	--------

ω_r	Velocidad angular.	[rad / s]	(2.35)
------------	--------------------	-----------	--------

De (2.29) y (2.33) se deduce que:

$$F_T = \frac{P_e}{\omega_r r} - \frac{I_r \alpha_r}{r} \quad (2.36)$$

La velocidad del auto corresponde al radio de la rueda por la velocidad angular:

$$v = r\omega_r \quad (2.37)$$

La aceleración horizontal del auto, definida por $a_x = \ddot{x}$, es igual al radio de la rueda multiplicado por la aceleración angular

$$a_x = r\alpha_r \quad (2.38)$$

Utilizando (2.36), (2.37) y (2.38) se obtiene que la fuerza de tracción es:

$$F_T = \frac{P_e}{v} - \frac{I_r}{r^2} a_x \quad (2.39)$$

Cuando el motor funciona como generador, la potencia en el eje P_e toma valores negativos, es decir, se está inyectando potencia a través del sistema de tracción que se almacena en las baterías, en este caso la fuerza de tracción (2.39) es negativa transformándose en una fuerza resistiva que frena al auto, a esto se le llama freno regenerativo.

La potencia que dispone el vehículo para su movimiento proviene de dos fuentes: el panel solar y el banco de baterías. En la Figura 2.4 se muestra un diagrama del sistema eléctrico de potencia del auto solar.

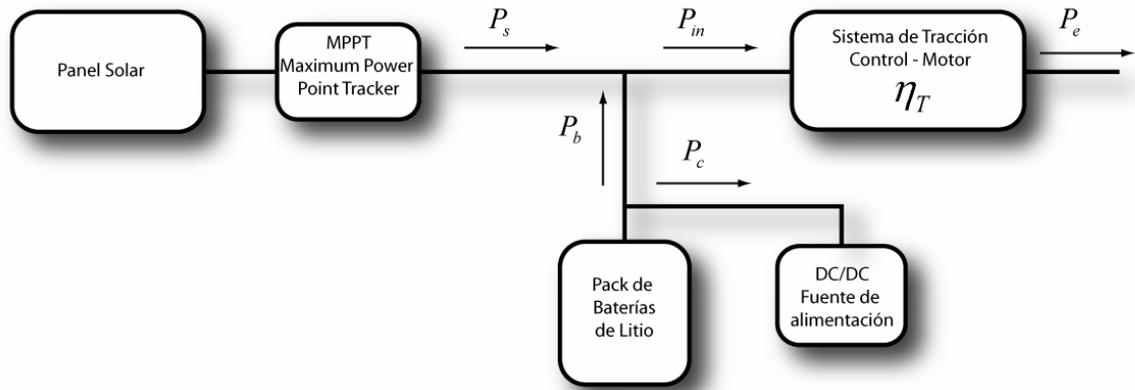


Figura 2.4 Flujo de potencias a través del sistema eléctrico de potencia del vehículo.

En la Figura 2.4 el significado de las variables es el siguiente:

P_s	Potencia solar (a la salida del MPPT).	[W]
P_b	Potencia baterías hacia el sistema de tracción.	[W]
P_c	Potencia alimentación electrónica	[W]
P_{in}	Potencia entrada al sistema de tracción.	[W]
P_e	Potencia en el eje del motor.	[W]
η_T	Eficiencia sistema de tracción	Adimensional

La potencia del panel solar se obtiene mediante un dispositivo llamado “Maximum Power Point Tracker*” (MPPT) el cual permite trabajar en el punto de máxima potencia de la curva V v/s I del panel solar y de ese modo obtener la máxima potencia del panel [32].

La potencia en el eje del motor P_e es equivalente a la potencia de entrada al sistema de tracción P_{in} multiplicada por su eficiencia η_T :

$$P_e = \eta_T P_{in} \quad (2.40)$$

Pero la potencia de entrada del sistema de tracción es equivalente a la suma entre la potencia solar P_s y la potencia de baterías P_b , en consecuencia:

$$P_{in} = P_s + P_b \quad (2.41)$$

Reemplazando (2.41) en (2.40), se obtiene:

$$P_e = \eta_T (P_s + P_b) \quad (2.42)$$

Reemplazando (2.42) en (2.39) se obtiene que la expresión para la fuerza de tracción es:

$$F_T(v, a_x, P_b, P_s) = \frac{\eta_T (P_s + P_b)}{v} - \frac{I_r}{r^2} a_x \quad (2.43)$$

* La traducción de MPPT: “Seguidor del Punto de Máxima Potencia”.

2.2.2 Pérdidas en el Sistema de Tracción

En esta sección se describirá el origen de las pérdidas en el sistema de tracción y se encontrará una expresión para modelar las pérdidas P_L en función de la potencia en el eje P_e y la velocidad v del vehículo.

Las pérdidas P_L en el sistema de tracción se deben a pérdidas debidas a la rotación del motor, a perdidas debido al campo magnético, pérdidas resistivas y pérdidas en el puente inversor del controlador[25].

Las pérdidas están dadas por la diferencia entre la potencia de entrada al sistema de tracción y la potencia en el eje del motor.

$$P_L = P_{in} - P_e \quad (2.44)$$

Las pérdidas debidas a la rotación del motor, se producen por roces en los rodamientos y por resistencia aerodinámica de las partes rotatorias del motor. Estas pérdidas se incrementan al aumentar la velocidad de giro del motor.

Las pérdidas debidas al campo magnético, son producidas por las corrientes de Foucault y por histéresis en el estator. Las pérdidas resistivas se deben al efecto Joule. Finalmente, las pérdidas en el puente inversor se producen por la conmutación (switching) para el control de la corriente a través de las bobinas[29].

En este modelo de pérdidas del sistema de tracción, se consideran las pérdidas resistivas, las por roces en los rodamientos (rodadura) y una tercera componente empírica.

Las pérdidas resistivas P_{Lr} en el motor son proporcionales al cuadrado de la corriente de armadura I_a del motor:

$$P_{Lr} \propto I_a^2. \quad (2.45)$$

Por otro lado, la corriente de armadura del motor es proporcional al torque del motor [11]:

$$I_a \propto \mathfrak{T}_e \quad (2.46)$$

Con (2.45) y (2.46) se concluye que las pérdidas resistivas son proporcionales al cuadrado del torque del motor:

$$P_{Lr} \propto \mathfrak{T}_e^2 \quad (2.47)$$

En consecuencia, utilizando (2.33), (2.37) y (2.47) se concluye que las pérdidas resistivas son proporcionales al cuadrado de la razón entre la potencia en el eje y la velocidad:

$$P_{Lr} \propto \left(\frac{P_e}{v} \right)^2 \quad (2.48)$$

Debido a que el motor desarrolla bajas velocidades, se utilizará un coeficiente de rodadura constante para el motor, de modo que las pérdidas P_{Lro} debidas a la rotación del motor son proporcionales a la velocidad del auto:

$$P_{Lro} \propto v \quad (2.49)$$

La tercera componente de las pérdidas en el sistema de tracción es empírica y permite ajustar de buena forma el modelo. Esta componente empírica de pérdidas P_{Le} es proporcional al módulo de la potencia en el eje del motor:

$$P_{Le} \propto |P_e| \quad (2.50)$$

Las pérdidas en el sistema de tracción se modelan como la suma de las componentes (2.48), (2.49) y (2.50):

$$P_L = P_{Lr} + P_{Le} + P_{Lro} \quad (2.51)$$

En consecuencia, las pérdidas P_L están dadas por:

$$P_L = k_2 \frac{P_e^2}{v^2} + k_1 |P_e| + k_0 v \quad (2.52)$$

Para encontrar los parámetros k_0 , k_1 y k_2 de la expresión (2.52) se utilizaron los datos de las pérdidas entregadas por el fabricante [24] y se aplicó el método de mínimos cuadrados [23] para la expresión (2.52).

Los datos de las pérdidas para distintas velocidades se muestran en la Figura 2.5:

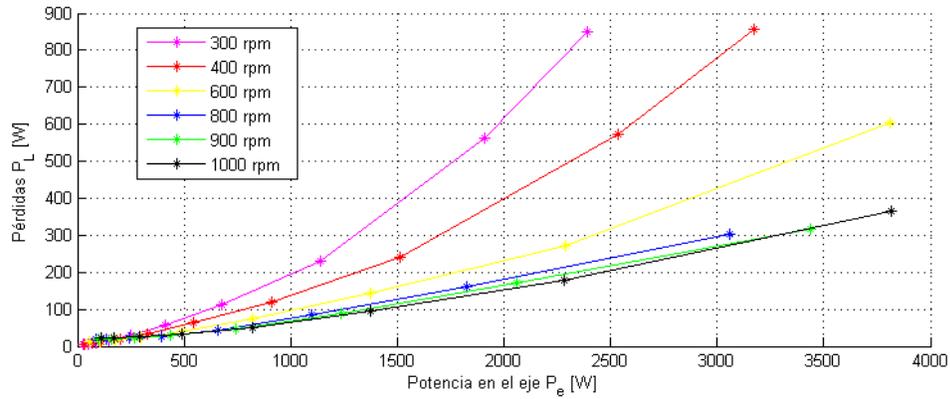


Figura 2.5 Pérdidas P_L en el sistema de tracción, entregadas por el fabricante, v/s potencia P_e en el eje a distintas velocidades angulares.

Los datos de las pérdidas se entregan para diferentes velocidades angulares del motor, considerando que el radio de la rueda del auto es de $r = 0.25 [m]$. La equivalencia entre la velocidad angular del motor y la velocidad v del auto se muestra en la Tabla 2.1:

Velocidad angular del motor [rpm]	Velocidad auto [km/h]
300	28.3
400	37.7
600	56.5
800	75.4
900	84.8
1000	94.3

Tabla 2.1 Equivalencia entre la velocidad angular ω_r del motor y la velocidad v del auto.

Se busca el vector de parámetros $[k_0 \ k_1 \ k_2]$ que minimice el error cuadrático medio V para N mediciones definido por [23]:

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = \frac{1}{N} (P_L - \hat{P}_L)^T (P_L - \hat{P}_L) \quad (2.53)$$

donde $\varepsilon = [\varepsilon_1 \ \cdots \ \varepsilon_N]^T$ es el error de estimación:

$$\varepsilon = P_L - \hat{P}_L \quad (2.54)$$

P_L son las pérdidas entregadas por el fabricante y \hat{P}_L las pérdidas estimadas a partir del modelo.

El vector de parámetros que minimiza el error cuadrático medio se obtiene a partir de [16]:

$$\begin{bmatrix} \hat{k}_2 \\ \hat{k}_1 \\ \hat{k}_0 \end{bmatrix} = (X^T X)^{-1} X^T P_L \quad (2.55)$$

donde la matriz X son los datos de entrada al modelo:

$$X = \begin{bmatrix} \frac{P_{e1}^2}{v_1^2} & P_{e1} & v_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{P_{eN}^2}{v_N^2} & P_{eN} & v_N \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Utilizando los datos de las pérdidas entregados por el fabricante, Figura 2.5 y la ecuación (2.55), se estimaron los parámetros para el modelo (2.52). Los resultados son los siguientes:

$$\begin{aligned} \hat{k}_0 &= 0.59 \text{ [N]} \\ \hat{k}_1 &= 0.043 \text{ [-]} \\ \hat{k}_2 &= 0.00785 \text{ [s/kg]} \end{aligned} \quad (2.57)$$

En la estimación, la raíz del error cuadrático medio (RMSE, por su sigla en inglés), definido en (2.53), fue de:

$$RMSE = \sqrt{V} = 8.8 \text{ [W]} \quad (2.58)$$

Los resultados del modelo comparado con los datos entregados por el fabricante para las pérdidas del sistema se muestran en la Figura 2.6 y en la Figura 2.7.

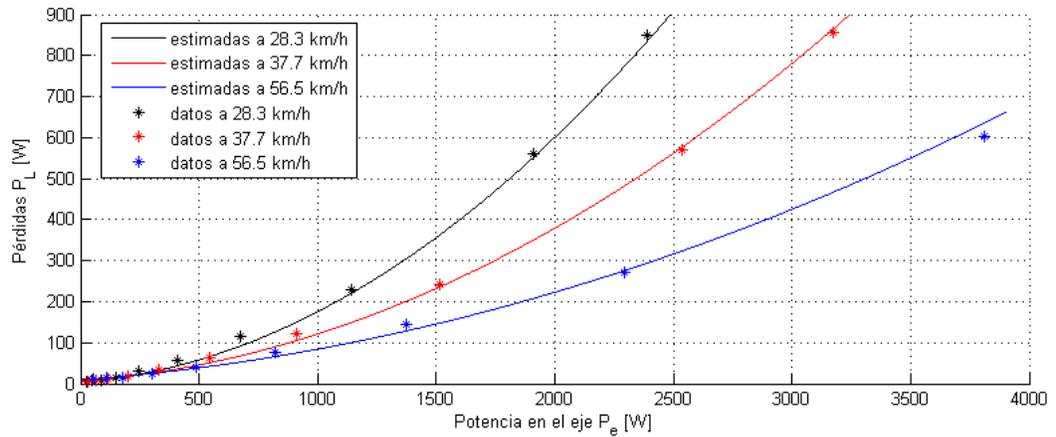


Figura 2.6 Pérdidas P_L en el sistema de tracción v/s potencia P_e en el eje a bajas velocidades.
 Línea continua: pérdidas estimadas a partir del modelo.
 Asteriscos: pérdidas entregadas por el fabricante.

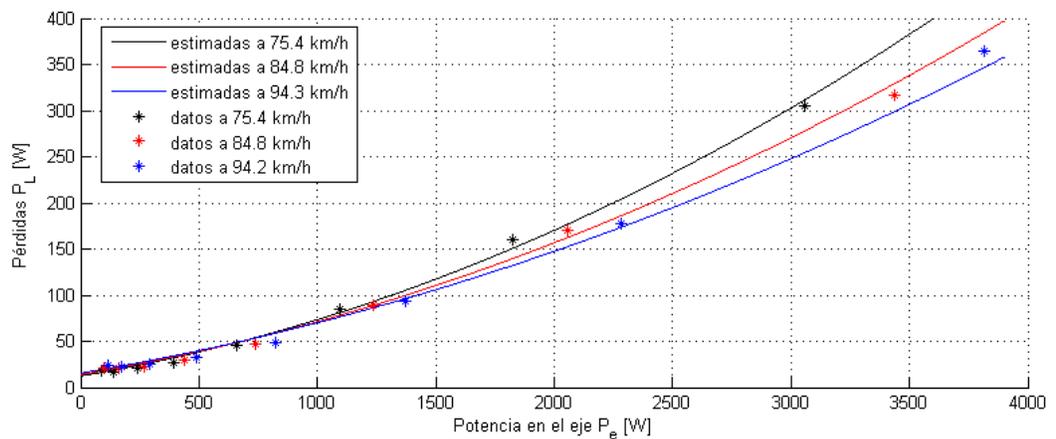


Figura 2.7 Pérdidas P_L en el sistema de tracción v/s potencia P_e en el eje a altas velocidades.
 Línea continua: pérdidas estimadas a partir del modelo.
 Asteriscos: pérdidas entregadas por el fabricante.

A partir de la expresión (2.52) para las pérdidas P_L , se puede determinar una expresión para la eficiencia η_T del sistema de tracción, de la siguiente forma:

$$\eta_T = \frac{P_e}{P_e + P_L} = \frac{P_e}{k_2 \frac{P_e^2}{v^2} + (k_1 + 1)|P_e| + k_0 v} \quad (2.59)$$

La Figura 2.8 y la Figura 2.9 contrastan la expresión (2.59) obtenida para la eficiencia η_T del sistema de tracción, con los datos entregados por el fabricante.

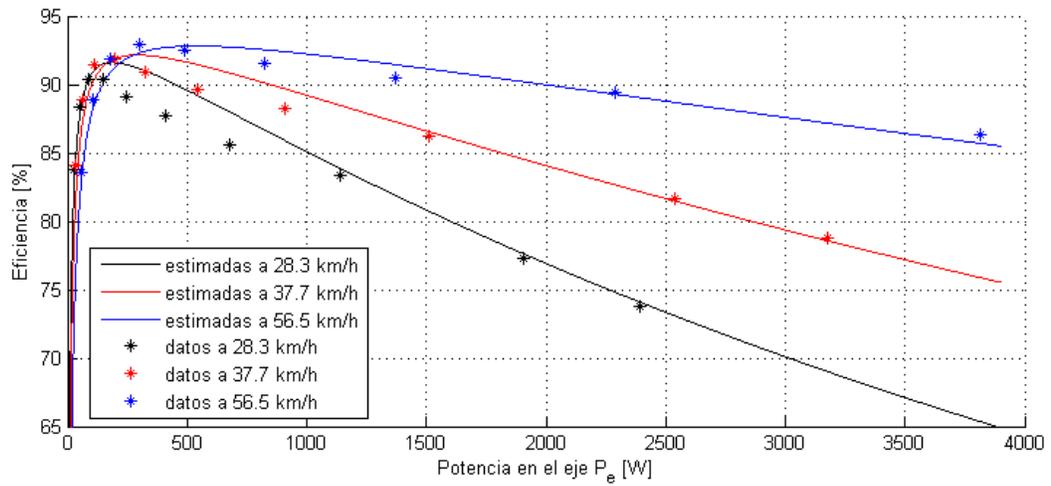


Figura 2.8 Eficiencia η_T en el sistema de tracción v/s potencia P_e en el eje a bajas velocidades.

Línea continua: eficiencias estimadas a partir del modelo.

Asteriscos: eficiencias entregadas por el fabricante.

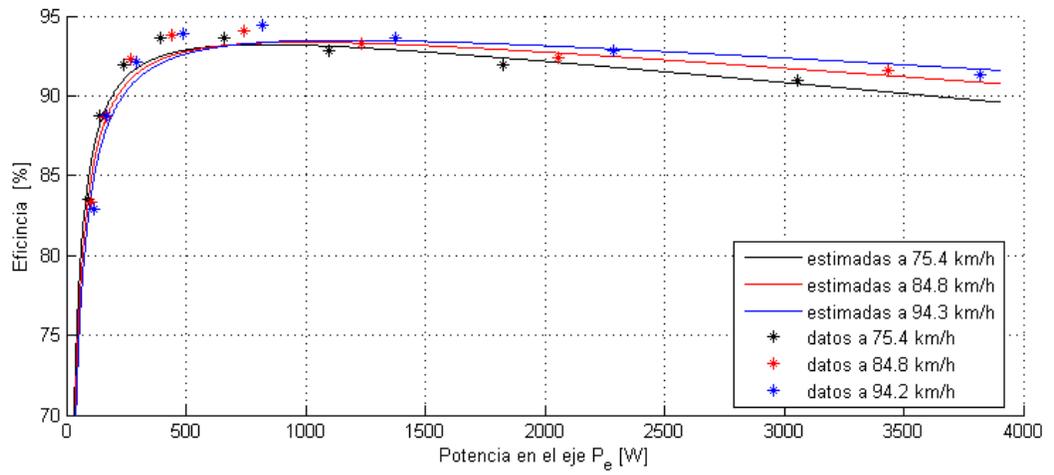


Figura 2.9 Eficiencia η_T en el sistema de tracción v/s potencia P_e en el eje a bajas velocidades.
Línea continua: eficiencias estimadas a partir del modelo.
Asteriscos: eficiencias entregadas por el fabricante.

2.3 Banco de Baterías

El vehículo Eolian utiliza un banco de baterías de litio polímero, que tiene la ventaja de tener una energía específica muy alta comparada con otras tecnologías, lo que en consecuencia significa poder almacenar una cantidad de energía minimizando la masa total del banco.

A continuación se dan algunas definiciones importantes relativas a las baterías que se utilizarán en esta sección:

Energía específica:

Es la energía almacenada por unidad de masa. Se expresa en $[Wh/kg]$.

Q_{out} Carga extraída desde la batería:

Es la carga eléctrica, medida en ampere horas, que ha sido extraída a la batería durante un proceso de descarga, es decir que al comenzar una descarga, este valor es nulo.

SoC Estado de carga:

(State of Charge) Representa el valor de la carga eléctrica que está presente en la batería. Si se expresa en valor porcentual, el 100 % indica batería completamente cargada.

Tensión de cut-off o de corte:

Tensión a la cual la descarga de una celda o batería debe finalizar.

Capacidad nominal:

Es la carga eléctrica que puede ser extraída a una celda o batería completamente cargada bajo condiciones nominales de descarga especificadas por el fabricante.

En las especificaciones técnicas del PWSC [28] se establece una masa máxima de 30 kg para un banco de baterías de litio polímero. El banco de baterías utilizado en el auto, está compuesto por 24 unidades series cada una de ellas compuesta por 8 celdas en paralelo marca Kokam, modelo SLPB75106100 [21]. Cada celda SLPB75106100 tiene una capacidad nominal de 8 Ah, 3.7 [V] nominal y una masa de 0.155 [kg]. Luego el banco completo resulta con una capacidad de 64 Ah y una tensión de 88.8 [V] nominal. Las principales especificaciones se muestran en la Tabla 2.2.

		Celda	Banco de baterías
Capacidad nominal		8 [Ah]	64 [Ah]
Tensión nominal		3.7 [V]	88.8 [V]
Condiciones de carga	Corriente máxima	8 [A]	64 [A]
	Tensión máxima	4.2 [V]	100.8 [V]
Condiciones de descarga	Corriente continua	8 [A]	64 [A]
	Corriente Peak	40 [A]	320 [A]
	Tensión de corte	3 [V]	72 [V] [†]
Temperatura de operación	Carga	0 a 40 °C	0 a 40 °C
	Descarga	-20 a 50 °C	-20 a 50 °C
Masa		0.155 [kg]	29.8 [kg]

Tabla 2.2 Especificaciones de la celda SLPB75106100 y del banco de baterías.

[†] En la practica es imposible que las 24 unidades series que componen el banco estén exactamente equilibradas en tensión, entonces la tensión de corte del banco será determinada por la primera unidad serie que alcance 3 [V] y en consecuencia la tensión de corte del banco será mayor que 72 [V].

2.3.1 Modelo Simple del Banco de Baterías - Energía Acumulada

Utilizando como supuesto que la batería tiene eficiencia energética perfecta, lo cuál es razonable para un banco de baterías de litio como el utilizado en el auto, la variación de la energía en el banco está dada por:

$$\dot{E} = -P_b - P_c \quad (2.60)$$

donde:

E	Energía disponible en el banco de baterías.	[J]
P_b	Potencia baterías hacia sistema de tracción.	[W]
P_c	Potencia de alimentación de la electrónica.	[W]

El consumo de la electrónica del vehículo, representado por P_c , se supondrá como una constante. La potencia de baterías P_b se considera positiva cuando fluye desde las baterías hacia el motor y negativa cuando fluye hacia las baterías.

2.3.2 Modelo Completo del Banco de Baterías de Litio

El modelo equivalente simplificado de parámetros concentrados de la batería de litio se indica en la Figura 2.10 [22][2]. La tensión cinética U_k y de difusión U_d varían en función de la corriente aplicada y este fenómeno ocurre a una tasa constante [22], lo cual es modelado por las dos ramas RC paralelo, la resistencia R_s modela la resistencia serie total de la batería. La tensión interna E_i modela la tensión en equilibrio de la batería que depende de la carga extraída Q_{out} desde la batería.

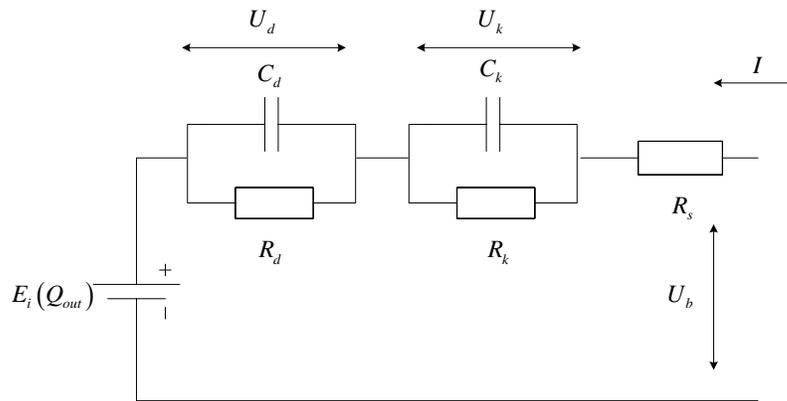


Figura 2.10 Modelo equivalente simplificado de parámetros concentrados de la batería.

En la Figura 2.10:

E_i	Tensión interna de la batería	[V]
U_d	Tensión de difusión	[V]
$R_d C_d$	Constante de tiempo tensión de difusión	[s]
R_d	Resistencia de difusión	[Ω]
U_k	Tensión cinética	[V]
$R_k C_k$	Constante de tiempo tensión cinética	[s]

R_k	Resistencia cinética	$[\Omega]$
R_s	Resistencia serie	$[\Omega]$
I	Corriente por las baterías	$[A]$
U_b	Tensión en las baterías	$[V]$

Resolviendo el circuito de la Figura 2.10 y, al igual que en la sección 2.3.1 se asume que la batería tiene eficiencia energética perfecta, las ecuaciones que modelan el comportamiento de la batería son:

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_k &= \frac{1}{C_k} \left(I - \frac{U_k}{R_k} \right) \\
 \dot{U}_d &= \frac{1}{C_d} \left(I - \frac{U_d}{R_d} \right) \\
 \dot{Q}_{out} &= I
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

$$U_b = E_i(Q_{out}) - U_k - U_d - R_s I \tag{2.62}$$

La corriente I por las baterías se considera positiva cuando las baterías se están descargando y negativa cuando se están cargando.

Tensión Interna del Banco de Baterías

La tensión interna de la batería E_i tiene una pequeña dependencia con la temperatura y una pequeña dependencia con la cantidad de ciclos de la batería, de modo que se puede considerar que la tensión interna sólo depende de la carga extraída Q_{out} [3].

Para aplicar la ecuación (2.62) del modelo de la batería, es necesario conocer cómo varía la tensión interna en función de la carga extraída. Para obtener la tensión interna del banco, se aplicó el método experimental llamado “tensión de relajación” [3] que consiste en extraer una carga conocida al banco, luego detener la descarga y esperar un tiempo adecuado de modo que la tensión en bornes de la batería alcance el equilibrio y se pueda interpretar como la tensión interna del banco.

En el laboratorio de tracción del Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Chile se realizó esta prueba. Se procedió a descargar el banco de Eolian con corriente constante de 8 [A], durante intervalos de tiempo conocidos medidos con un cronómetro (se consideraron intervalos de 15 y 7.5 minutos), con esto se calculó la carga extraída al banco en cada intervalo. Luego se detuvo la descarga y se esperó un tiempo de media hora para medir la tensión en bornes de la batería, tensión que se interpretó como tensión interna.

Con este procedimiento se obtuvieron 27 puntos para la tensión interna en función de la carga extraída, los cuales se grafican en la Figura 2.11.

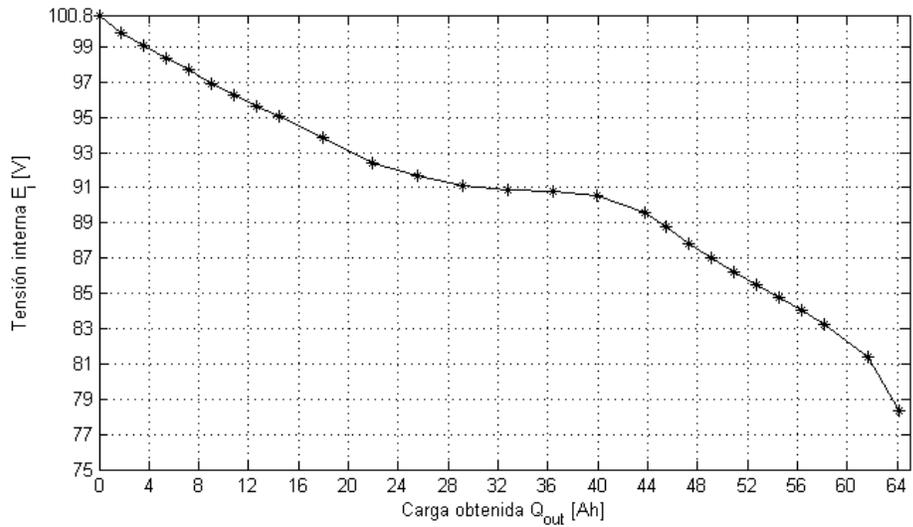


Figura 2.11 Tensión interna del banco de baterías E_i en función de la carga extraída Q_{out} . Datos obtenidos experimentalmente para el banco de baterías del vehículo Eolian.

Con la curva de tensión interna es posible obtener el estado de carga (SoC) del banco de baterías. Para esto, se debe medir la tensión en bornes cuando la batería ha estado en reposo, es decir cuando la tensión en bornes haya alcanzado su equilibrio con una corriente nula. La tensión en bornes se interpreta como tensión interna y utilizando la curva graficada en la Figura 2.11 se puede obtener la carga extraída y en consecuencia el estado de carga. Ahora, con este método se pueden tener errores en la estimación del estado de carga cuando la tensión en bornes es del orden de 91 [V], debido a que en esa zona la curva es muy plana.

Simulación y Validación del Modelo de la Batería

El modelo de la batería dado por las ecuaciones (2.61) y (2.62) fue implementado en Matlab Simulink, el diagrama se muestra en la Figura 2.12.

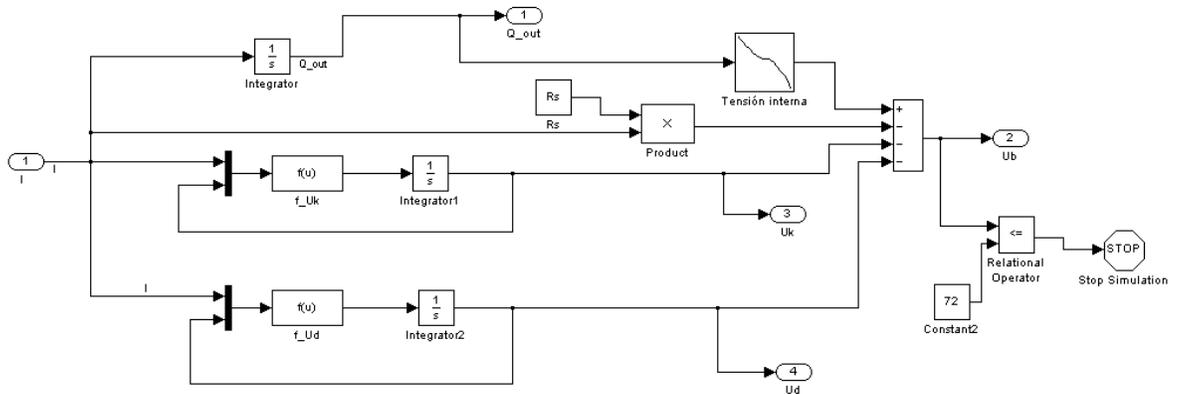


Figura 2.12 Diagrama implementado en Matlab Simulink para el modelo equivalente simplificado de parámetros concentrados de la batería.

Los parámetros utilizados en el modelo son los calculados en [22] mediante el espectro de impedancia medido para una batería de litio, los parámetros son:

$$C_k \quad C_k = 0.5693 \quad [h/\Omega]$$

$$R_k \quad R_k = 0.0276 \quad [\Omega]$$

$$C_d \quad C_d = 3454 \quad [h/\Omega]$$

$$R_d \quad R_d = 0.0396 \quad [\Omega]$$

$$R_s \quad R_s = 0.04 \quad [\Omega]$$

Para observar el desempeño del modelo se comparan datos medidos de la tensión U_b , obtenidos por el Sistema de Comunicaciones y Monitoreo (SCM) [36] del auto Eolian en Hidden Valley (Darwin, Australia) el 17 de octubre de 2007, con la tensión U_b obtenida con el modelo. De los datos disponibles, se seleccionó una entrada de corriente con grandes variaciones, la que se muestra en la Figura 2.13. La comparación entre las tensiones medidas y estimadas se muestra en Figura 2.14.

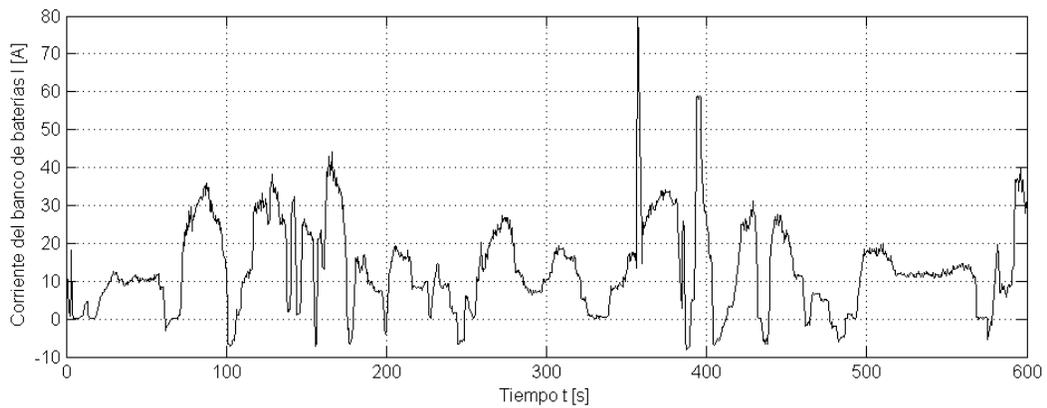


Figura 2.13 Corriente por el banco de baterías. Datos obtenidos por el Sistema de Comunicaciones y Monitoreo (SCM) del auto Eolian en Hidden Valley (Darwin, Australia) el 17 de octubre de 2007.

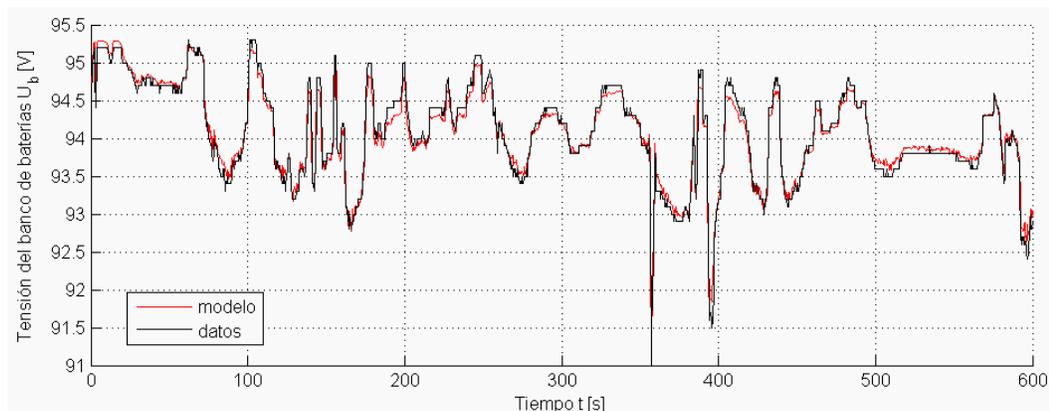


Figura 2.14 Tensión en bornes del banco de batería. Tensión U_b medida (línea negra) y tensión U_b estimada por el modelo (línea roja).

La comparación entre las tensiones medidas y estimadas de la Figura 2.14, la raíz del error cuadrático medio (RMSE) fue de 0.099 [V], prácticamente equivalente al error que existe en la medición de la tensión, que es de 0.1 [V].

Además del experimento para obtener la tensión interna del banco, en el laboratorio de tracción se realizó una prueba de descarga del banco a corriente constante de 8 [A], la cual consiste en descargar el banco manteniendo la corriente constante en 8 [A] hasta que alguna de las celdas que componen el banco llegue a su tensión de corte. Los datos de la tensión U_b medidos y estimados por el modelo se muestran en la Figura 2.15.

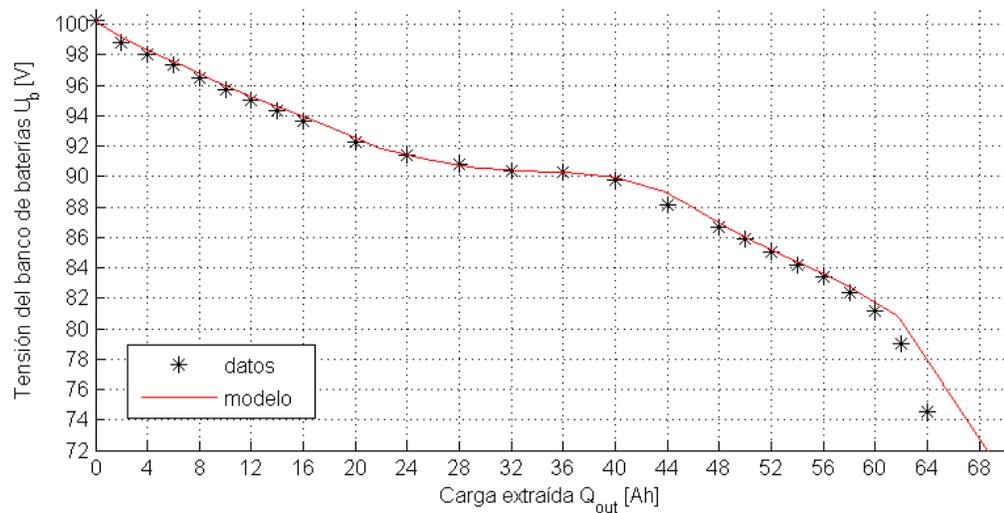


Figura 2.15 Tensión en bornes del banco de batería a corriente constante de 8 [A] v/s carga extraída Q_{out} . Tensión U_b medida (línea negra) y tensión U_b estimada por el modelo (línea roja).

En la Figura 2.15 se muestra que en la última parte de la curva, cuando el banco de baterías está casi vacío, el modelo sobre estima la tensión U_b lo que implica que el modelo sobre estima la capacidad del banco en estas condiciones de descarga.

En la prueba de descarga, la tensión de corte del banco fue de 74.5 [V] y la carga extraída fue de 64[Ah], es decir, que la capacidad del banco, bajo estas condiciones de descarga, es de 64 [Ah] (exactamente la capacidad nominal del banco). Para la misma tensión de corte el modelo estima una carga extraída de 66.6 [Ah], lo que implicaría que la capacidad del banco, en estas condiciones de descarga, sería de 66.6 [Ah]. Esta diferencia se puede deber a un error en los datos de la última parte de la curva de tensión interna encontrada (ver Figura 2.11).

Los parámetros del modelo de baterías se han considerado constantes, en general no lo son. Viendo el espectro de impedancia de una batería de litio, para distintas condiciones de estado de carga, se ha encontrado que los parámetros de este modelo tienen una pequeña dependencia con el estado de carga de la batería [22], pero esta dependencia es mucho menor con respecto a la dependencia que tienen los parámetros con la temperatura[4].

2.4 Modelo Integrado del Vehículo

En esta sección se agrupan todos los elementos explicados las secciones 2.1, 2.2 y 2.3 (fuerzas resistivas, sistema de tracción y banco de baterías) para concluir las ecuaciones en variables de estado que modelan íntegramente el vehículo solar. Se consideran dos modelos, aquél que utiliza el modelo simple de las baterías y aquél que utiliza el modelo completo.

Se han encontrado las expresiones para las fuerzas resistivas (sección 2.1) que actúan sobre el vehículo, para la fuerza de tracción (sección 2.2.1) y para las pérdidas en el sistema de tracción (sección 2.2.2). Entonces, utilizando la segunda ley de Newton, la dinámica del auto se modela por:

$$Ma_x = F_T(v, a_x, P_b, P_s) - F_R(x, v, v_v) \quad (2.63)$$

Reemplazando en (2.63) las expresiones para la fuerza resistiva (2.24) y de tracción (2.43) se obtiene:

$$\left(M + \frac{I_r}{r^2}\right)a_x = \frac{\eta_T(P_s + P_b)}{v} - \frac{1}{2}C_D A(v + v_v)^2 - C_{rr2}Mgv - C_{rr1}Mg - Mg\text{sen}(\theta(x)) \quad (2.64)$$

Se define la *masa equivalente* M_e como:

$$M_e = M + \frac{I_r}{r^2} \quad (2.65)$$

y se define el *factor de masa* f_m como:

$$f_m = \frac{M_e}{M} \quad (2.66)$$

Luego, con las definiciones dadas en (2.65) y (2.66), la expresión (2.64) se puede escribir de la forma:

$$a_x = \frac{\eta_T (P_s + P_b)}{M_e v} - \frac{C_D A \rho_a}{2M_e} (v + v_v)^2 - C_{rr2} f_m^{-1} g v - C_{rr1} f_m^{-1} g - f_m^{-1} g \text{sen}(\theta(x)) \quad (2.67)$$

Definiendo los siguientes parámetros:

$$b \quad b = M_e^{-1} \eta_T \quad [kg^{-1}] \quad (2.68)$$

$$a_2 \quad a_2 = \frac{C_D A \rho_a}{2M_e} \quad [m^{-1}] \quad (2.69)$$

$$a_1 \quad a_1 = C_{rr2} f_m^{-1} g \quad [s^{-1}] \quad (2.70)$$

$$a_0 \quad a_0 = C_{rr1} f_m^{-1} g \quad [m/s^2] \quad (2.71)$$

se obtiene:

$$a_x = \frac{b(P_s + P_b)}{v} - a_2 (v + v_v)^2 - a_1 v - a_0 - f_m^{-1} g \text{sen}(\theta(x)) \quad (2.72)$$

Es conveniente, al igual que en [20], definir la función $f_v(v, v_v)$, que es la aceleración resistiva que depende de la velocidad, y la función $f_x(x)$ que es la aceleración resistiva causada por el gradiente y que depende de la posición:

$$\begin{aligned} f_v(v, v_v) &= a_2(v + v_v)^2 + a_1v + a_0 \\ f_x(x) &= f_m^{-1} g \operatorname{sen}(\theta(x)) \end{aligned} \quad (2.73)$$

Reemplazando (2.73) en (2.72) se obtiene la ecuación diferencial que modela la dinámica del auto:

$$a_x = \ddot{x} = \frac{b(P_s + P_b)}{v} - f_v(v, v_v) - f_x(x) \quad (2.74)$$

2.4.1 Modelo Integrado Simple

El modelo integrado del auto, utilizando el modelo simple de las baterías (sección 2.3.1), está dado por las expresiones (2.74), que describe la dinámica del auto, y por (2.60) que describe la variación de la energía en el banco de baterías. Para escribir el modelo en variables de estado se debe considerar lo siguiente:

Estados

x	Posición horizontal del vehículo	[m]
v	Velocidad horizontal del vehículo	[m/s]
E	Energía disponible en el banco de baterías	[J]

Entrada – Control

$u = P_b$	Potencia baterías hacia el sistema de tracción	[W]
-----------	--	---------

Perturbaciones medidas

P_s	Potencia solar (a la salida del MPPT)	[W]
v_v	Velocidad del viento longitudinal con respecto al eje del auto	[m/s]

Con esto, el modelo en variables de estado es:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \frac{b(P_s + u)}{v} - f_v(v, v_v) - f_x(x) \\ \dot{E} &= -u - P_c\end{aligned}\tag{2.75}$$

y la ecuación estado salida es:

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}\tag{2.76}$$

Si en lugar de utilizar la expresión (2.43) para la fuerza de tracción, se utiliza (2.39) y escribiendo la potencia de baterías como:

$$P_b = P_{in} - P_s = P_L + P_e - P_s\tag{2.77}$$

Se puede escribir el modelo en forma equivalente de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \frac{M_e^{-1}P_e}{v} - f_v(v, v_v) - f_x(x) \\ \dot{E} &= P_s - P_e - P_L(P_e, v) - P_c\end{aligned}\tag{2.78}$$

donde la entrada al modelo, en este caso, es la potencia P_e en el eje del motor.

2.4.2 Modelo Integrado Completo

Este modelo se compone del modelo completo para las baterías (2.61) y la expresión (2.74) que describe la dinámica del auto, con esto se encontrará el modelo integrado completo del vehículo en variables de estado.

Estados

x	Posición horizontal del vehículo	[m]
v	Velocidad horizontal del vehículo	[m/s]
U_k	Tensión cinética	[V]
U_d	Tensión de difusión	[V]
Q_{out}	Carga extraída desde las baterías.	[Ah]

Entrada – Control

$u = P_b$	Potencia baterías hacia el sistema de tracción	[W]
-----------	--	---------

Perturbaciones medidas

P_s	Potencia solar (a la salida del MPPT)	[W]
v_v	Velocidad del viento longitudinal con respecto al eje del auto	[m/s]

Para expresar el modelo en función de la acción de control $u = P_b$, se debe expresar la corriente en función de la potencia de baterías hacia el sistema de tracción P_b . La tensión en bornes de la batería U_b multiplicada por la corriente I por las baterías es igual a la potencia de baterías hacia el sistema de tracción P_b más la potencia constante de alimentación de la electrónica P_c :

$$P_b + P_c = U_b I \quad (2.79)$$

Reemplazando (2.62) en (2.79) se obtiene:

$$P_b + P_c = (E_i(Q_{out}) - U_k - U_d)I - R_s I^2 \quad (2.80)$$

Para simplificar la notación se define la tensión U_i :

$$U_i = E_i(Q_{out}) - U_k - U_d \quad (2.81)$$

Reemplazando (2.81) en (2.80) se obtiene:

$$R_s I^2 - U_i I + P_b + P_c = 0 \quad (2.82)$$

Despejando la corriente I por las baterías de la ecuación (2.82) se obtiene I en función de la potencia de baterías hacia el sistema de tracción P_b .

$$I = \frac{U_i}{2R_s} - \sqrt{\left(\frac{U_i}{2R_s}\right)^2 - \frac{P_b + P_c}{R_s}} \quad (2.83)$$

La solución negativa de (2.82) tiene sentido físico: cuando las potencias P_b y P_c son nulas, la corriente por la baterías debe ser nula.

Utilizando (2.61), (2.74) y (2.83) se obtiene la ecuación en variables de estado:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= v \\
 \dot{v} &= \frac{b(P_s + u)}{v} - f_v(v, v_v) - f_x(x) \\
 \dot{U}_k &= \frac{1}{C_k} \left(\frac{U_i}{2R_s} - \sqrt{\left(\frac{U_i}{2R_s}\right)^2 - \frac{u + P_c}{R_s}} - \frac{U_k}{R_k} \right) \\
 \dot{U}_d &= \frac{1}{C_d} \left(\frac{U_i}{2R_s} - \sqrt{\left(\frac{U_i}{2R_s}\right)^2 - \frac{u + P_c}{R_s}} - \frac{U_d}{R_d} \right) \\
 \dot{Q}_{out} &= \frac{U_i}{2R_s} - \sqrt{\left(\frac{U_i}{2R_s}\right)^2 - \frac{u + P_c}{R_s}}
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

Por lo tanto la ecuación estado salida es:

$$\dot{Y} = \begin{pmatrix} x \\ v \\ U_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ v \\ \frac{U_i}{2} + \sqrt{\left(\frac{U_i}{2}\right)^2 - R_s(u + P_c)} \end{pmatrix} \tag{2.85}$$

Capítulo 3

Control Óptimo

En este capítulo se abordará el problema del control óptimo, que consiste en encontrar la acción de control u que minimice una funcional de costo de tiempo final, sujeto a restricciones que se dan tanto en los estados como en el control.

Las soluciones al problema de optimización se darán de dos formas: analítica y numérica. Para el caso analítico se usará el modelo integrado simple de tres estados del vehículo y las soluciones se encontrarán basándose en tres grupos de supuestos simplificadores, los cuales permiten realizar un desarrollo analítico. El caso más general del problema, sin los supuestos simplificadores, se resolverá en forma numérica discretizando las ecuaciones de estado del modelo integrado simple (2.78) y las del modelo integrado completo (2.84), se utilizará el software de optimización no lineal con restricciones (NLP) “*fmincon*” del Optimization Toolbox de Matlab [35].

3.1 Planteamiento del Problema de Optimización

El problema de optimización consiste en encontrar la acción de control u que minimice el tiempo total que tarda un vehículo solar en recorrer una ruta específica propuesta, utilizando los modelos descritos en el Capítulo 2 junto con las restricciones en los estados y en el control u que se describirán en la sección 3.1.2 y la funcional de costo que se detalla en la sección 3.1.1.

3.1.1 Funcional de Costo

En el planteamiento del problema de optimización, se pueden considerar diferentes criterios para establecer una funcional de costo o de mérito.

En una carrera, como el World Solar Challenge (WSC), donde se conoce la distancia total que se quiere recorrer, es adecuado plantear una funcional de costo que minimice el tiempo total del recorrido; sin embargo, al considerar el problema de tiempo mínimo, se tienen algunas dificultades, como por ejemplo, se requiere conocer la potencia de entrada $P_s(x, t)$ para todo el horizonte de tiempo de la carrera. Por lo tanto, se requiere una predicción de la radiación solar con un horizonte de 5 a 7 días, la cual puede estar afectada de mucha incertidumbre.

Considerando el problema del WSC, se podría considerar, alternativamente, una funcional de mérito para maximizar la distancia recorrida en un intervalo de tiempo. En cada día de carrera del WSC, se debe correr durante 9 horas, entonces podría considerarse como tiempo final las 9 horas y considerar un remanente final en el banco de baterías como condición terminal y maximizar la distancia recorrida en cada día. Por supuesto, con esta alternativa no se encuentra el óptimo global, pero podría considerarse como estrategia válida, ya que sólo se requeriría conocer $P_s(x, t)$ para el día actual.

En algunos trabajos donde se aborda el problema de optimización, se ha considerado una funcional de costo de la forma [9]:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (1 + 0.01I(t))I(t)dt = \int_{t_0}^{t_f} I(t)dt + 0.01 \int_{t_0}^{t_f} I^2(t)dt \quad (3.1)$$

Es decir, se minimiza la carga en las baterías necesaria para satisfacer las condiciones del problema, lo que se representa en el primer término de (3.1), sumado a una penalización por el uso de la corriente por en el banco de baterías, segundo término de (3.1).

La funcional de costo que aquí se propone, es aquella que minimiza el tiempo para ir de una posición inicial $x(t_0)$ a la posición final $x(t_f)$, esto es:

$$J = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} dt \quad (3.2)$$

3.1.2 Restricciones

Por una parte, las restricciones en el vehículo, se deben a las potencias máximas admisibles en el sistema de tracción, esto se traduce en:

$$-P_R \leq P_{in} \leq P_M \quad (3.3)$$

donde P_M es la potencia máxima que se puede inyectar al sistema de tracción y P_R es la potencia regenerativa máxima que se obtiene al utilizar el freno regenerativo (página 17).

Considerando que la potencia de entrada es $P_{in} = P_s + u$ (ecuación (2.41)), se deducen las restricciones sobre el control:

$$-P_R - P_s \leq u \leq P_M - P_s \quad (3.4)$$

Las cotas en la velocidad del vehículo son:

$$v_{min} \leq v \leq v_{max} \quad (3.5)$$

La velocidad máxima v_{max} en el vehículo tiene origen en la velocidad máxima de giro del motor, también podría deberse a los límites legales de velocidad impuestos en una carretera. Se considera la restricción de velocidad mínima v_{min} , debido a que el modelo del vehículo no está definido para velocidad nula.

Los límites en la capacidad energética del banco de baterías, determinan las siguientes restricciones:

$$E_{min} \leq E \leq E_{max} \quad (3.6)$$

donde E_{max} y E_{min} corresponden a la capacidad energética máxima y mínima para el banco de baterías en Wh, respectivamente.

Las restricciones (3.6) se utilizarán con el modelo simple de las baterías, pero en la práctica las restricciones sobre el banco de baterías no están dadas por su capacidad energética, si no que por sus límites en las corrientes y tensiones admisibles tanto para la carga, como para la descarga del banco de baterías (ver Tabla 2.2). Estas restricciones son:

$$-I_{min} \leq I \leq I_{max} \quad (3.7)$$

$$U_{bmin} \leq U_b \leq U_{bmax} \quad (3.8)$$

3.2 Solución Analítica

Con el fin de obtener una solución al problema planteado en la sección 3.1 se han considerado, para fines analíticos, tres grupos de supuestos que permiten analizar el problema en una forma simplificada. El primer grupo de supuestos es la forma más simple del problema que se analiza, en los siguientes grupos se van relajando los supuestos acercándose cada vez más al caso real. En todas las soluciones analíticas se utilizará el modelo integrado simple de tres estados para el vehículo.

Se presenta una solución analítica para cada grupo de supuestos, las cuales tienen en común considerar un sistema de tracción perfectamente eficiente. El caso que considera un sistema de tracción con pérdidas, se analiza en forma numérica en la sección 3.3.

Los grupos de supuestos considerados son:

GRUPO DE SUPUESTOS N° 1
<ul style="list-style-type: none">• Las restricciones en los estados no se alcanzan, es decir, sólo se consideran las restricciones en el control.• La potencia solar depende sólo del tiempo y no de la posición $P_s = P_s(t)$.• El sistema de tracción es perfectamente eficiente, es decir, la eficiencia en el sistema de tracción es constante $\eta_T = 1$ o, equivalentemente, las pérdidas son nulas $P_L = 0$.

Tabla 3.1 Grupo de supuestos N° 1 considerados para la solución analítica.

GRUPO DE SUPUESTOS N° 2
<ul style="list-style-type: none"> • Las restricciones en los estados no se alcanzan. • La potencia solar depende del tiempo y de la posición $P_s = P_s(x, t)$. • El sistema de tracción es perfectamente eficiente: $\eta_T = 1$.

Tabla 3.2 Grupo de supuestos N° 2 considerados para la solución analítica

GRUPO DE SUPUESTOS N° 3
<ul style="list-style-type: none"> • Las restricciones en los estados se pueden alcanzar. • La potencia solar depende del tiempo y de la posición $P_s = P_s(x, t)$. • El sistema de tracción es perfectamente eficiente: $\eta_T = 1$.

Tabla 3.3 Grupo de supuestos N° 3 considerados para a solución analítica

3.2.1 Solución Analítica Bajo el Grupo de Supuestos N° 1

A continuación se dará una solución analítica al problema de optimización planteado, bajo el grupo de supuestos n° 1 detallados en la Tabla 3.1.

Recordar que la ecuación de estado es:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \frac{b(P_s + u)}{v} - f_v(v, v_v) - f_x(x) \\ \dot{E} &= -u - P_c\end{aligned}\tag{3.9}$$

Con los supuestos considerados sólo se tienen restricciones en el control u , que escritas en forma canónica son:

$$C_1 = -(P_R + P_s + u) \leq 0\tag{3.10}$$

$$C_2 = P_s - P_M + u \leq 0\tag{3.11}$$

Como se dijo en la sección 3.1.1, la funcional de costo es:

$$J = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} dt$$

Con esto, el Hamiltoniano del sistema es [5]:

$$H = L + \lambda^T f + \mu^T C$$

$$H = 1 + \lambda_1 v + \lambda_2 \left(\frac{b(P_s + u)}{v} - f_v - f_x \right) - \lambda_3 (u + P_c) - \mu_1 (P_R + P_s + u) + \mu_2 (P_s - P_M + u)\tag{3.12}$$

donde los multiplicadores $\mu_i(t)$ son [5]:

$$\mu_i(t) \begin{cases} > 0 & C_i(u) = 0 \\ = 0 & C_i(u) < 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Las condiciones necesarias para una solución estacionaria son [5][6][18]:

1. Las ecuaciones de coestado, que determinan tres ecuaciones diferenciales siguientes:

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = \lambda_2 f'_x \quad (3.14)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial v} = -\lambda_1 + \lambda_2 \left(\frac{b(P_s + u)}{v^2} + f'_v \right) \quad (3.15)$$

$$\dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial H}{\partial E} = 0 \quad (3.16)$$

2. Del principio del Máximo de Pontryagin, se obtiene la siguiente ecuación algebraica:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \lambda_2 \frac{b}{v} - \lambda_3 - \mu_1 + \mu_2 = 0 \quad (3.17)$$

3. La condición de transversalidad

$$H(t_f) = 0 \quad (3.18)$$

Notar que en este caso, como la potencia solar depende explícitamente del tiempo, el sistema (3.9) no es autónomo [13], luego el Hamiltoniano no es una integral del sistema.

A continuación se verá que el control óptimo que minimiza el tiempo de recorrido, bajo los supuestos planteados, tiene 3 fases posibles.

Fase 1 $\mu_1 > 0$ $\mu_2 = 0$

En esta fase, como $\mu_1 > 0$, de (3.13) se tiene que la restricción en el control $C_1(u)$ (ver (3.10)) se alcanza, es decir:

$$C_1(u) = 0 \quad \Rightarrow \quad u = u_{min} = -(P_R + P_s) \quad (3.19)$$

y de la ecuación (3.17), como $\mu_1 > 0$ $\mu_2 = 0$, se obtiene:

$$\lambda_2 \frac{b}{v} - \lambda_3 = \mu_1 > 0 \quad (3.20)$$

En esta fase la potencia $u = P_b$ en las baterías es la mínima posible (3.19), condición que corresponde a cargar el banco con la máxima potencia disponible, es decir, con la potencia solar P_s más la potencia máxima del freno regenerativo P_R .

Fase 2 $\mu_1 = 0 \quad \mu_2 > 0$

En esta segunda fase, como $\mu_2 > 0$, se alcanza la restricción $C_2(u)$ (ver (3.11)) en el control, entonces de (3.13) se tiene que:

$$C_2(u) = 0 \Rightarrow u = u_{max} = P_M - P_s \quad (3.21)$$

y de la ecuación (3.17), como $\mu_1 = 0 \quad \mu_2 > 0$, se obtiene:

$$\lambda_2 \frac{b}{v} - \lambda_3 = -\mu_2 < 0 \quad (3.22)$$

En esta fase, el control debe entregar la máxima potencia posible al sistema de tracción.

Fase 3 $\mu_1 = 0 \quad \mu_2 = 0$

A continuación se analiza lo que ocurre cuando ninguna de las restricciones en el control se alcanza. En este caso, de (3.17):

$$\lambda_2 \frac{b}{v} - \lambda_3 = 0 \quad (3.23)$$

De la ecuación (3.16) se deduce que λ_3 es constante y bajo los supuestos planteados en un principio (grupo de supuestos N° 1, ver Tabla 3.1), la eficiencia η_T es constante, luego el parámetro b es constante (ver ecuación (2.68)), de ese modo, de (3.23) se concluye que la fracción $\frac{\lambda_2}{v}$ es constante y gracias a esto es posible integrar la ecuación (3.14):

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_2 f'_x = \frac{\lambda_2}{v} \frac{df_x}{dt} \quad (3.24)$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_2}{v} f_x + c_1 \quad (3.25)$$

Reemplazando (3.25) en la ecuación (3.15) se obtiene:

$$\dot{\lambda}_2 = \lambda_2 \left(\frac{b(P_s + u)}{v^2} + f'_v \right) - \frac{\lambda_2}{v} f_x - c_1 \quad (3.26)$$

Derivando (3.23) se tiene que:

$$\dot{\lambda}_2 b = \lambda_3 \dot{v} \quad (3.27)$$

Reemplazando (3.26) y (3.9) en (3.27) se obtiene:

$$\frac{\lambda_2 b^2 (P_s + u)}{v^2} + \lambda_2 b f'_v - \frac{\lambda_2 b}{v} f_x - c_1 b = \frac{\lambda_3 b (P_s + u)}{v} - \lambda_3 f_v - \lambda_3 f_x \quad (3.28)$$

Usando (3.23), la ecuación (3.28) se puede dejar en términos de la constante λ_3 :

$$\frac{\lambda_3 b (P_s + u)}{v} + \lambda_3 v f'_v - \lambda_3 f_x - c_1 b = \frac{\lambda_3 b (P_s + u)}{v} - \lambda_3 f_v - \lambda_3 f_x \quad (3.29)$$

Resolviendo la ecuación (3.29) resulta:

$$\lambda_3 f_v + \lambda_3 v f'_v - c_1 b = 0 \quad (3.30)$$

Lo interesante de esta última ecuación (ecuación (3.30)), es que es independiente de la potencia solar $P_s(t)$ y de la gradiente $f_x(x)$.

Derivando f_v , definida en (2.73), con respecto a v :

$$f'_v = 2a_2(v + v_v) + a_1 \quad (3.31)$$

Reemplazando las expresiones para f_v y f'_v , de (2.73) y (3.31), en (3.30) da como resultado:

$$\lambda_3(a_2(v + v_v)^2 + a_1v + a_0) + \lambda_3v(2a_2(v + v_v) + a_1) - c_1b = 0 \quad (3.32)$$

De (3.32) se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado para la velocidad óptima:

$$v^2 + \left(\frac{4a_2v_v + 2a_1}{3a_2} \right)v + \frac{a_2\lambda_3v_v^2 + a_0\lambda_3 - c_1b}{3a_2\lambda_3} = 0 \quad (3.33)$$

Resolviendo (3.33) y considerando el resultado de valor positivo, se obtiene que la velocidad óptima en la fase 3 es:

$$v(t) = -\frac{2a_2v_v(t) + a_1}{3a_2} + \frac{1}{3} \sqrt{v_v^2(t) + \frac{4a_1}{a_2}v_v(t) + \frac{a_1^2}{a_2^2} + \frac{3c_1b}{a_2\lambda_3} - \frac{3a_0}{a_2}} \quad (3.34)$$

En particular, si la velocidad del viento es nula, la velocidad óptima está dada por:

$$v(v_v = 0) = -\frac{a_1}{3a_2} + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{a_1^2}{a_2^2} + \frac{3c_1b}{a_2\lambda_3} - \frac{3a_0}{a_2}} \quad (3.35)$$

Se ha encontrado que la tercera fase del control óptimo, consiste en mantener una velocidad que sólo varía con la velocidad del viento. En particular, si la velocidad del viento es constante, se debe mantener una velocidad constante.

Despejando $\frac{c_1}{\lambda_3}$ de la ecuación (3.35), la velocidad óptima expresada en (3.34) se puede escribir en función de $v(v_v = 0)$:

$$v(t) = -\frac{2a_2 v_v(t) + a_1}{3a_2} + \frac{1}{3} \sqrt{v_v^2(t) + \frac{4a_1}{a_2} v_v(t) + \left(3v(v_v = 0) + \frac{a_1}{a_2}\right)^2} \quad (3.36)$$

Considerando los órdenes de magnitud de los parámetros del vehículo, la velocidad óptima es decreciente con la velocidad del viento. Por ejemplo, si la velocidad óptima del auto cuando no hay viento es $v(v_v = 0) = 50 \text{ [km/h]}$ y utilizando los parámetros de la Tabla 3.4 la velocidad óptima en función de la velocidad del viento es:

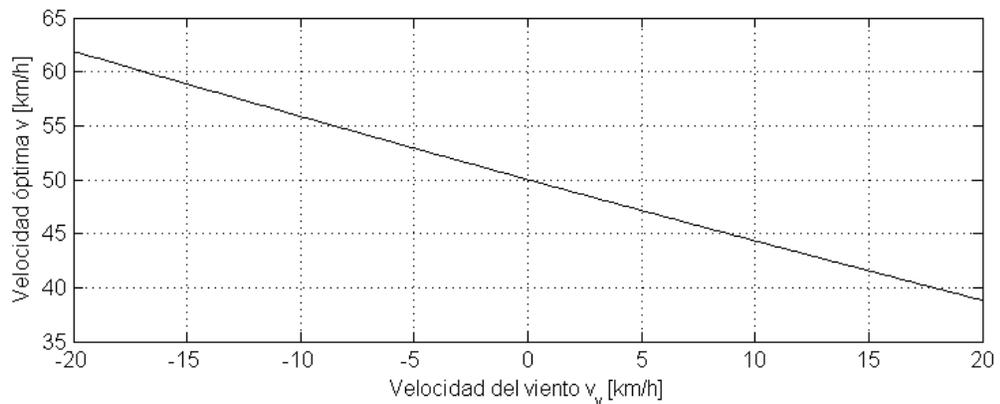


Figura 3.1 Velocidad óptima v /s velocidad del viento.

Resumen de la Solución

En resumen, cuando las restricciones en los estados no se alcanzan, la potencia solar sólo depende del tiempo y el sistema de tracción es perfectamente eficiente, el control óptimo tiene tres fases:

Fase 1

La potencia en las baterías es mínima, el sistema de tracción regenera al máximo.

$$u = u_{min} = -(P_R + P_s)$$

P_R se determina de la restricción de potencia en el sistema de tracción (3.3).

Fase 2

La potencia en las baterías es la máxima posible, al sistema de tracción se le inyecta la máxima potencia posible.

$$u = u_{max} = P_M - P_s$$

P_M se determina de la restricción de potencia en el sistema de tracción (3.3).

Fase 3

En esta fase se realiza un control de velocidad.

$$u \in (u_{min}, u_{max}) = (-(P_R + P_s), P_M - P_s)$$

Donde la referencia de velocidad es:

$$v(t) = -\frac{2a_2 v_v(t) + a_1}{3a_2} + \frac{1}{3} \sqrt{v_v^2(t) + \frac{4a_1}{a_2} v_v(t) + \left(3v(v_v = 0) + \frac{a_1}{a_2}\right)^2}$$

Con b , a_0 , a_1 y a_2 dados por (2.68), (2.71), (2.70) y (2.69) respectivamente. La fracción c_1/λ_3 de la ecuación (3.34) o la constante $v(v_v = 0)$ de la ecuación (3.36) para determinar la velocidad óptima se deben escoger de modo que el banco de baterías se utilice completamente durante el trayecto.

Ejemplo 1

A continuación se indica el control óptimo para la ruta indicada en la Figura 3.2. La velocidad del viento se consideró nula. En forma analítica y considerando el grupo de supuestos N° 1 planteados en la Tabla 3.1 se ha determinado la forma que tienen el control óptimo en cada una de las tres fases, pero es difícil determinar en qué instantes de tiempo el control pasa de una fase a otra y en qué circunstancias el control se encuentra en una fase determinada. Por esto, los resultados de este ejemplo se obtuvieron en forma numérica, como se explicará en la sección 3.3, considerando el grupo de supuestos N° 1 (ver Tabla 3.1). Para el ejemplo se utilizó $P_R = P_M = 4000[W]$ para las restricciones sobre el control u y los parámetros indicados en la Tabla 3.4.

M_e	Masa equivalente	345 [kg]
f_m	Factor de masa	1.01471 [-]
$C_D A$	Área de fricción	0.15 [m ²]
ρ_a	Densidad del aire	1.22 [kg/m ³]
C_{rr1}	Coefficiente de rodadura a velocidad cero	0.008 [-]
C_{rr2}	Factor de velocidad	$0.1789 \cdot 10^{-3}$ [s/m]
g	Aceleración de gravedad	9.81 [m/s ²]

Tabla 3.4 Parámetros del auto utilizados en las soluciones numéricas.

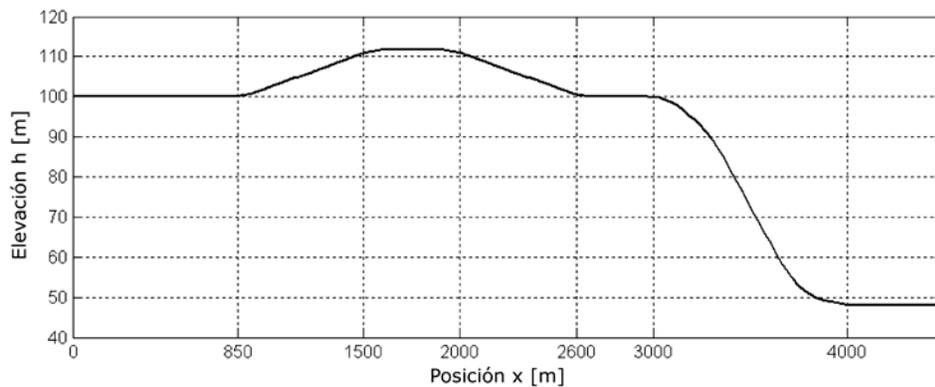


Figura 3.2 Ruta de ejemplo para el control óptimo bajo el grupo de supuestos N° 1. Elevación h sobre el nivel del mar v/s posición x .

Los resultados de la velocidad y potencia de entrada P_{in} óptimas, se muestran en el siguiente gráfico.

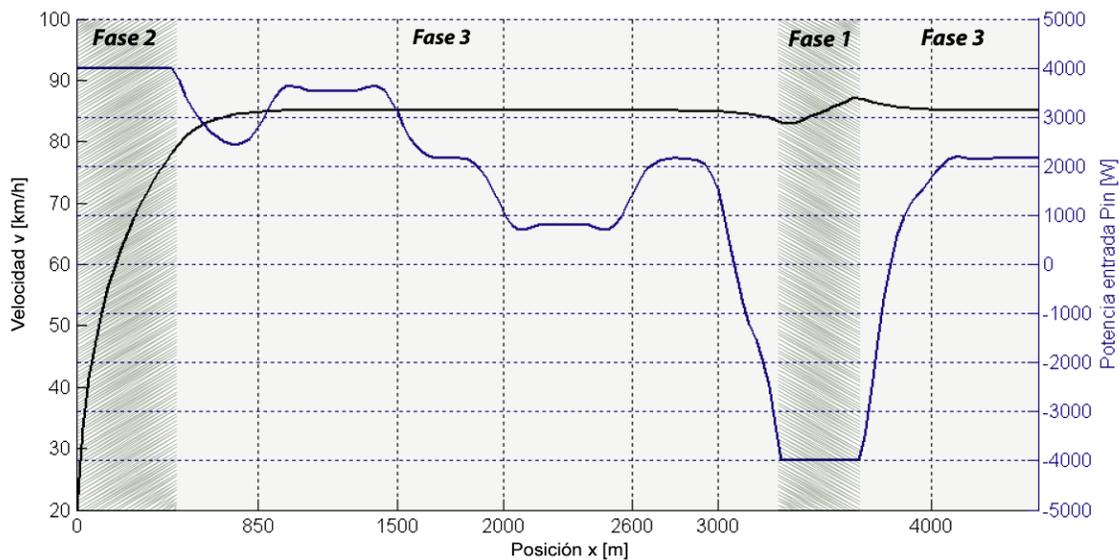


Figura 3.3 Velocidad v (línea negra) y potencia de entrada P_{in} (línea azul) óptima v/s posición x .

El auto parte con una velocidad inicial de 20[km/h] , para acelerar el vehículo se inyecta la máxima potencia admisible al sistema de tracción (control en fase 2), lo que es razonable debido que al suponer que el sistema de tracción es perfectamente eficiente, es posible acelerar rápidamente el vehículo sin tener pérdidas en el sistema de tracción. Luego se aplica un control para mantener la velocidad constante (control en fase 3), en esta fase la velocidad es constante independiente de las pendientes de la ruta. Cuando aparece la pendiente más pronunciada de la ruta, pendiente negativa de 5 grados, no es posible mantener la referencia de velocidad y el control se satura en su límite inferior regenerando al máximo y almacenando energía en el banco de baterías (fase 1).

Ejemplo 2

A continuación se analiza el control óptimo cuando se considera velocidad del viento no nula en función del tiempo durante el recorrido del vehículo por una trayectoria sin pendientes. La velocidad del viento se considera una perturbación medida y se indica en la Figura 3.4. Para el ejemplo se utilizan los parámetros indicados en la Tabla 3.4.

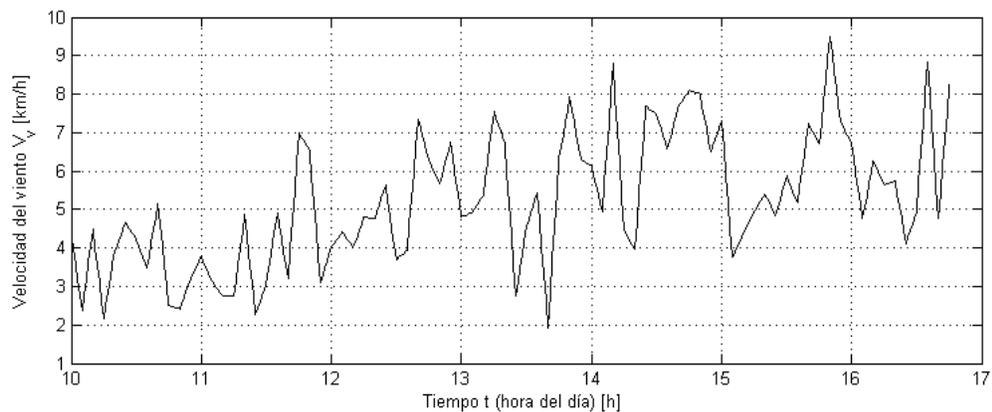


Figura 3.4 Velocidad del viento v_v v/s tiempo (hora del día) en el caso del Ejemplo 2.

La velocidad óptima, considerando el grupo de supuesto N° 1 (ver Tabla 3.1), se encuentra a partir de la ecuación (3.34) o (3.36) . La fracción c_1/λ_3 de la ecuación (3.34) o la constante $v(v_v = 0)$ de la ecuación (3.36) para determinar la velocidad óptima se deben escoger de modo que el banco de baterías se utilice completamente durante el trayecto. Si se escogen valores elevados de estas constantes ocurrirá que el banco se descargará completamente antes de finalizar el recorrido y si se escogen valores bajos, al finalizar el recorrido, habrá un excedente de energía en las baterías que podría haber sido empleado para aumentar la velocidad y así reducir el tiempo total de recorrido.

Si se considera una energía inicial en el banco de baterías de 800 [Wh], la velocidad óptima que hace que el banco se utilice totalmente se obtiene, para este ejemplo, con $v(v_v = 0) = 54 [km/h]$ en la ecuación (3.36). La velocidad óptima se indica en la Figura 3.5.

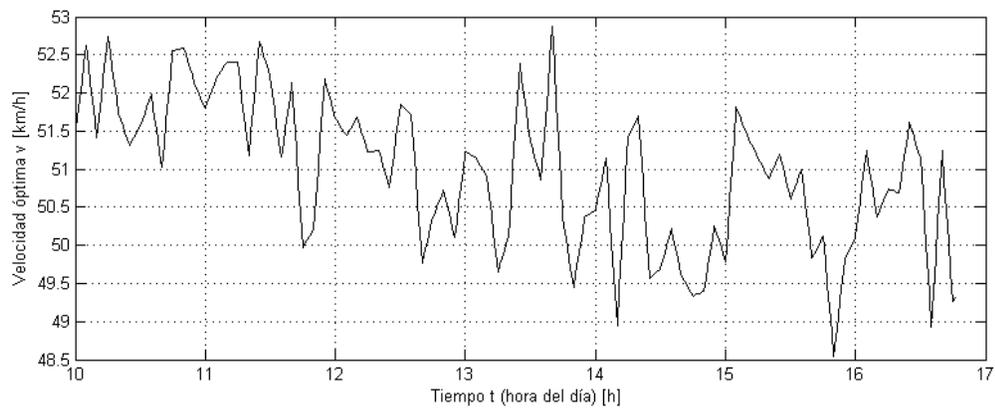


Figura 3.5 Velocidad óptima v v/s tiempo (hora del día) en el caso del Ejemplo 2 que considera velocidad del viento variable en el tiempo.

En la Tabla 3.5 se muestra la comparación entre realizar la estrategia óptima para recorrer la trayectoria, que toma en cuenta la velocidad del viento variable en el tiempo y la estrategia de mantener una velocidad constante.

	Estrategia velocidad constante	Estrategia óptima
Distancia total	345 [km]	345 [km]
Hora de partida	10:00	10:00
Energía inicial del banco de baterías	800 [Wh]	800 [Wh]
Energía final del banco de baterías	0 [Wh]	0 [Wh]
Energía solar captada	4890.6 [Wh]	4888.8[Wh]
Energía total consumida	5690.2 [Wh]	5688.8 [Wh]
Velocidad promedio	50.96 [km/h]	50.98 [km/h]
Tiempo de recorrido	24372 [s]	24360 [s]

Tabla 3.5 Comparación entre la estrategia óptima y de velocidad constante para el caso del Ejemplo 2 que considera velocidad del viento variable en el tiempo.

Al utilizar la estrategia óptima se realizan variaciones de la velocidad del vehículo en función de la velocidad del viento medida, lo que permite aprovechar de mejor forma la energía y reducir el tiempo total de recorrido. A pesar de esto, la reducción de tiempo en este ejemplo no es significativa, se logra reducir tan sólo 12 segundos con respecto a la estrategia de velocidad constante, lo que equivale a una reducción del 0.05 % en los 345 kilómetros de la ruta.

3.2.2 Solución Analítica Bajo el Grupo de Supuestos N° 2

Se analizará el control óptimo para el vehículo en el caso en el que la potencia solar depende del tiempo y de la posición. Esta solución es válida bajo el grupo de supuestos n° 2 (ver Tabla 3.2).

En este caso, el control óptimo difiere con la solución presentada en la sección 3.2.1 sólo en la fase 3.

Fase 3 $\mu_1 = 0$ $\mu_2 = 0$

Cuando las restricciones en el control no se alcanzan, de (3.17) se tiene:

$$\lambda_2 \frac{b}{v} - \lambda_3 = 0 \quad (3.37)$$

Como la potencia solar en este caso depende de la posición x , la ecuación de coestado para λ_1 que resulta de derivar el Hamiltoniano (3.12) con respecto a x es:

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = \lambda_2 f'_x - \frac{\lambda_2 b}{v} \frac{\partial P_s}{\partial x} \quad (3.38)$$

Utilizando (3.37), la ecuación de coestado (3.38) se puede escribir en términos de λ_3 :

$$\dot{\lambda}_1 = \frac{\lambda_3 b}{v} f'_x - \lambda_3 \frac{\partial P_s}{\partial x} \quad (3.39)$$

Derivando (3.37) se obtiene:

$$\dot{\lambda}_2 b = \lambda_3 \dot{v} \quad (3.40)$$

Reemplazando en (3.40), las expresiones para $\dot{\lambda}_2$ y \dot{v} dadas por (3.15) y (3.9) respectivamente, se tiene:

$$-\lambda_1 b + \lambda_2 b \left(\frac{b(P_s + u)}{v^2} + f'_v \right) = \lambda_3 \frac{b(P_s + u)}{v} - \lambda_3 f_v - \lambda_3 f_x \quad (3.41)$$

Escribiendo (3.41) en términos de λ_3 :

$$-\lambda_1 b + \lambda_3 \frac{b(P_s + u)}{v} + \lambda_3 v f'_v = \lambda_3 \frac{b(P_s + u)}{v} - \lambda_3 f_v - \lambda_3 f_x \quad (3.42)$$

Reduciendo términos en (3.42) resulta:

$$-\lambda_1 b + \lambda_3 (v f'_v + f_v) + \lambda_3 f_x = 0 \quad (3.43)$$

Es conveniente definir la siguiente función h_v :

$$h_v(v, v_v) = v f'_v + f_v \quad (3.44)$$

Con esta definición, la ecuación (3.43) se escribe:

$$-\lambda_1 b + \lambda_3 h_v + \lambda_3 f_x = 0 \quad (3.45)$$

Derivando (3.45) con respecto al tiempo, se obtiene:

$$-\dot{\lambda}_1 b + \lambda_3 \dot{h}_v + \lambda_3 f'_x v = 0 \quad (3.46)$$

Reemplazando (3.39) en la ecuación anterior, resulta:

$$-\left(\frac{\lambda_3 v}{b} f'_x - \lambda_3 \frac{\partial P_s}{\partial x} \right) b + \lambda_3 \dot{h}_v + \lambda_3 f'_x v = 0 \quad (3.47)$$

Finalmente se obtiene el control óptimo está gobernado por:

$$\dot{h}_v = -b \frac{\partial P_s}{\partial x} \quad (3.48)$$

Reemplazando f_v (2.73) y f'_v (3.31) en (3.44), la función h_v resulta:

$$h_v(v, v_v) = v f'_v + f_v = 3a_2 v^2 + (4a_2 v_v + 2a_1) v + a_2 v_v^2 + a_0 \quad (3.49)$$

Si la velocidad del viento es nula, se tiene que:

$$h_v(v, 0) = h_{v_0} = 3a_2 v^2 + 2a_1 v + a_0 \quad (3.50)$$

La ecuación (3.48) muestra que si la potencia solar obtenida es decreciente con la posición, como $b > 0$, la función h_v es creciente. En el caso que la velocidad del viento es nula, se tiene que h_{v_0} es creciente. Y como la función h_{v_0} es estrictamente creciente con la velocidad del vehículo, entonces se concluye que la velocidad del vehículo se incrementa en la medida que la potencia solar decrece con la posición. Por el contrario, si la potencia solar aumenta con la posición, la velocidad óptima disminuye.

Para velocidad del viento nula, la ecuación (3.48) resulta:

$$\dot{h}_{v_0} = (6a_2v + 2a_1)\dot{v} = -b \frac{\partial P_s}{\partial x} \quad (3.51)$$

Lo que implica que la velocidad óptima se obtiene a partir de:

$$\dot{v} = -\frac{b}{2(3a_2v + a_1)} \frac{\partial P_s}{\partial x} \quad (3.52)$$

Este resultado, muestra que la velocidad del vehículo debe ser mayor en las zonas nubladas de la ruta, de ese modo se reduce el tiempo en que el vehículo está expuesto a baja potencia solar y se aumenta el tiempo de exposición a potencias solares mayores.

Al igual que el resultado presentado en la sección 3.2, las pendientes de la ruta no tienen influencia sobre la velocidad óptima del vehículo.

Resumen de la Solución

En resumen, cuando las restricciones en los estados no se alcanzan, el sistema de tracción es perfectamente eficiente y la potencia solar depende del tiempo y de la posición del vehículo, las tres fases del control óptimo son:

Fase 1

La potencia en las baterías es mínima, el sistema de tracción regenera al máximo.

$$u = u_{min} = -(P_R + P_s)$$

P_R se determina de la restricción de potencia en el sistema de tracción (3.3).

Fase 2

La potencia en las baterías es la máxima posible, al sistema de tracción se le inyecta la máxima potencia posible.

$$u = u_{max} = P_M - P_s$$

P_M se determina de la restricción de potencia en el sistema de tracción (3.3).

Fase 3

Las restricciones en el control no se alcanzan, luego:

$$u \in (u_{min}, u_{max}) = (-(P_R + P_s), P_M - P_s)$$

Y el control óptimo está gobernado por (3.48):

$$\dot{h}_v = -b \frac{\partial P_s}{\partial x}$$

donde:

$$h_v(v, v_v) = 3a_2 v^2 + (4a_2 v_v + 2a_1)v + a_2 v_v^2 + a_0$$

Con b , a_0 , a_1 y a_2 dados por (2.68), (2.71), (2.70) y (2.69) respectivamente. La condición de velocidad inicial en la ecuación (3.48) se debe escoger de modo que el banco de baterías se utilice completamente durante el trayecto.

Ejemplo 3

Sea una trayectoria sin pendientes de 100 km de largo, donde la potencia solar varía con la posición. Los primeros 30 km de la ruta están completamente despejados y luego se empieza a nublar hasta que a partir del kilómetro 70, la potencia solar captada es del 70 % con respecto a la de una zona despejada. La velocidad del viento se considera nula en este ejemplo y el auto parte su recorrido a las 12:00 del día.

Para modelar esto, se considera que la potencia solar está dada por:

$$P_s(x, t) = S_s(t) \alpha(x) \quad (3.53)$$

Donde $S_s(t)$ es la potencia solar para un día despejado (t en horas del día):

$$S_s(t) = 800 \operatorname{sen} \left(\left(\frac{t}{2} - 3 \right) \frac{\pi}{7} \right) \quad [\text{W}] \quad (3.54)$$

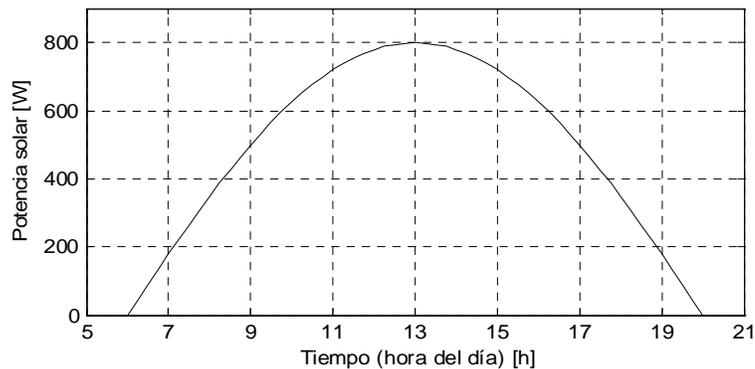


Figura 3.6 Potencia solar S_s para un día despejado utilizada para el Ejemplo 3.

$\alpha(x)$ es la atenuación de la potencia solar en la ruta debido a la nubosidad. Para el caso del ejemplo, la atenuación se grafica en la Figura 3.7:

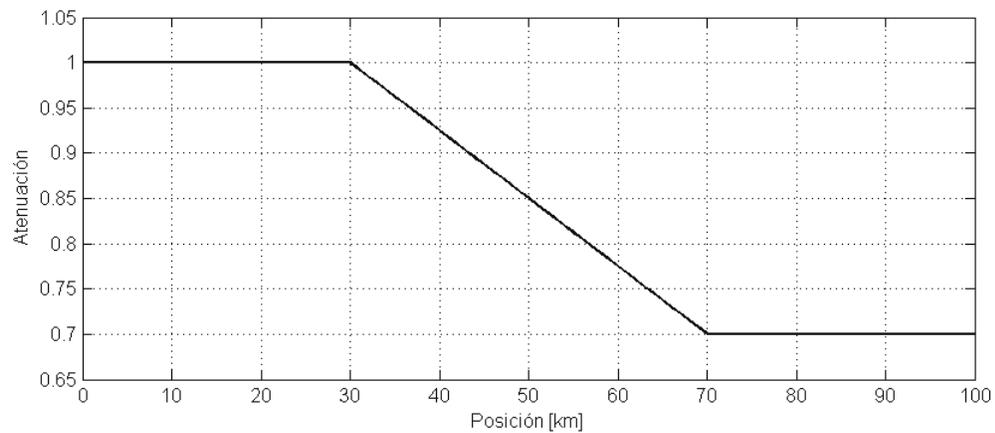


Figura 3.7 Atenuación $\alpha(x)$ de la potencia solar en función de la posición x utilizada para el Ejemplo 3.

Con los resultados analíticos presentados en la sección 3.2.2, sabemos a priori que el control óptimo consiste en mantener una velocidad constante durante los 30 primeros kilómetros, luego como la potencia solar comienza a atenuarse, la velocidad se incrementa hasta mantener una velocidad constante a partir del kilómetro 70, velocidad que es mayor a la inicial.

La velocidad óptima del vehículo, en este caso, se encuentra resolviendo numéricamente la ecuación (3.52), claramente, la solución encontrada depende de la velocidad inicial que se considere. La Figura 3.8 muestra resultados de velocidades óptimas para diferentes velocidades iniciales del vehículo.

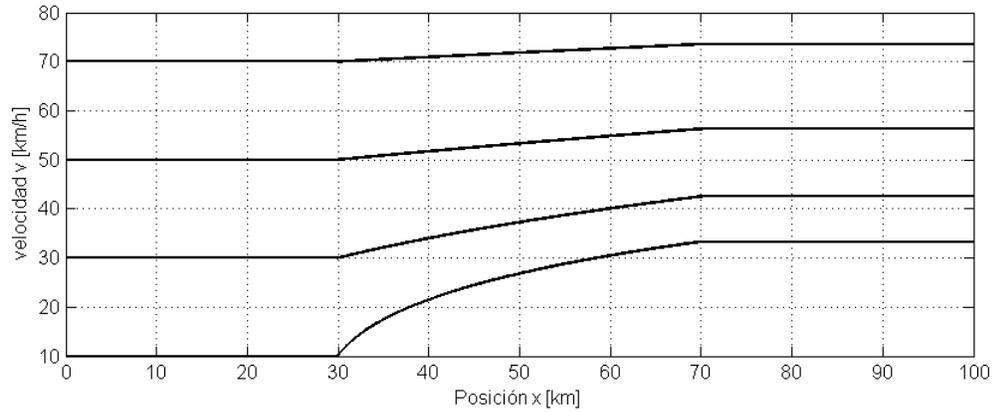


Figura 3.8 Velocidades óptimas v v/s posición x para diferentes velocidades iniciales, en el caso del Ejemplo 3.

La velocidad inicial que se debe escoger para realizar el recorrido depende de la energía con la que se disponga, si se escoge una velocidad muy elevada, ocurrirá que el banco de baterías se descargará completamente antes de finalizar el trayecto y si se escoge una muy baja, al final del recorrido quedará un excedente en el banco que podría haber sido utilizado para aumentar la velocidad. Por ejemplo, si hay una energía inicial en el banco de baterías de 300 Wh, la velocidad óptima que hace que el banco se utilice completamente se indica en la Figura 3.9.

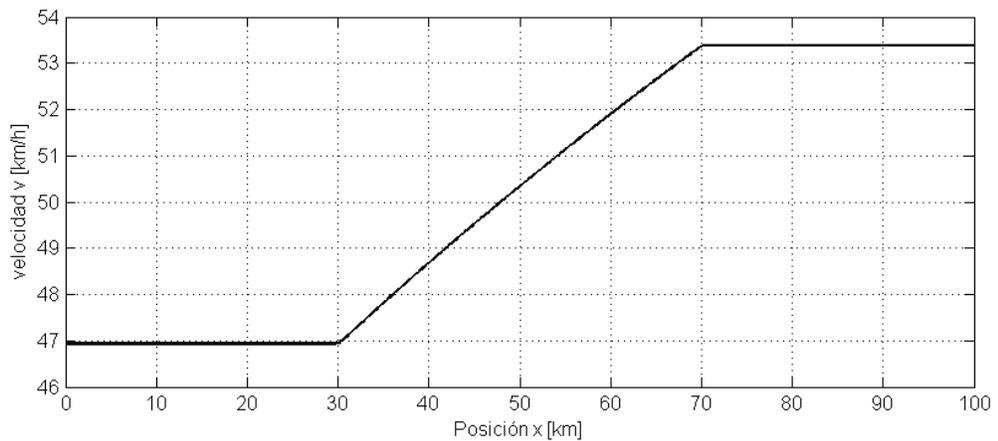


Figura 3.9 Velocidad v óptima v/s posición x en el caso del Ejemplo 3 donde la potencia solar depende del tiempo y de la posición x .

La Tabla 3.6 muestra la comparación entre la estrategia óptima de velocidad presentada en la Figura 3.9, que tiene en consideración las variaciones de la potencia solar con respecto a la posición y la estrategia de seguir una velocidad constante, la cual no considera estas variaciones.

	Estrategia velocidad constante	Estrategia óptima
Distancia total	100 [km]	100 [km]
Hora de partida	12:00	12:00
Energía inicial del banco de baterías	300 [Wh]	300 [Wh]
Energía final del banco de baterías	0 [Wh]	0 [Wh]
Energía solar captada	1349.4 [Wh]	1359.1 [Wh]
Energía total consumida	1649.4 [Wh]	1659.1 [Wh]
Velocidad promedio	49.99 [km/h]	50.05 [km/h]
Tiempo de recorrido	7201.0 [s]	7192.5 [s]

Tabla 3.6 Comparación entre estrategia óptima y de velocidad constante para el caso del Ejemplo 3 donde la potencia solar depende del tiempo y de la posición x .

La estrategia de velocidad constante es óptima cuando no existen variaciones de la potencia solar con respecto a la posición del vehículo $\left(\frac{\partial P_s}{\partial x} = 0\right)$, pero en este caso, la estrategia óptima sugiere al vehículo permanecer por mayor tiempo en la zona donde la potencia solar es mayor y de ese modo captar mayor energía, lo que permite reducir el tiempo de recorrido del vehículo. Sin embargo, en este ejemplo, la estrategia óptima permite reducir tan sólo 8.5 segundos el tiempo total de recorrido con respecto a la estrategia de velocidad constante en los 100 km de la ruta, lo que corresponde una reducción en tiempo, no muy significativa, de un 0.12% entre la estrategia óptima y la de velocidad constante.

En la estrategia óptima, el vehículo tiene una velocidad menor durante el tramo de mayor potencia solar, de modo que durante el primer tramo almacena energía en el banco de baterías para luego utilizarla en el tramo de menor potencia solar. Como se muestra en la Tabla 3.6 al utilizar la estrategia de velocidad constante, el auto consume menor cantidad de energía, pero también, capta menor cantidad de energía solar y en definitiva se tarda mayor cantidad de tiempo en recorrer el tramo que cuando se utiliza la estrategia óptima.

La energía disponible en el banco de baterías para la estrategia óptima y de velocidad constante, se muestra en la Figura 3.10.

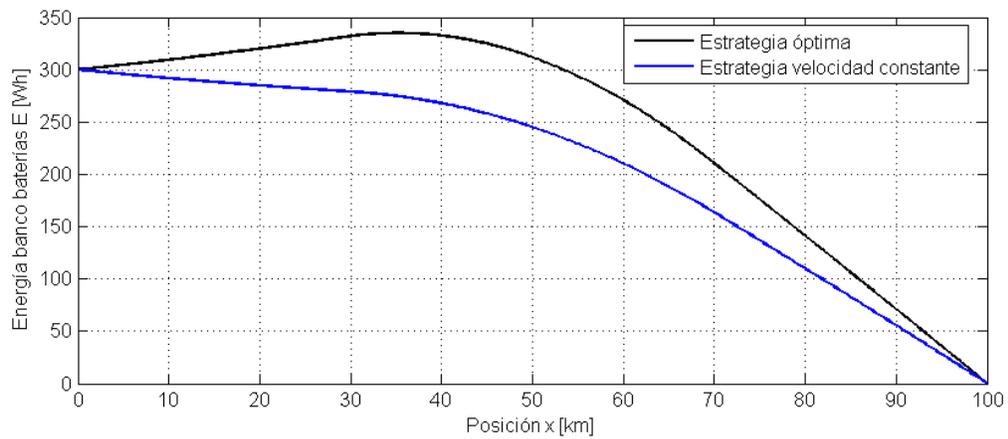


Figura 3.10 Energía E del banco de baterías v/s posición x en la estrategia óptima (línea negra) y de velocidad constante (línea azul) para el caso del Ejemplo 3, donde la potencia solar depende de la posición x .

3.2.3 Solución Analítica Bajo el Grupo de Supuestos N° 3

Se analiza el caso en que una de las restricciones en el estado se alcanza (grupo de supuestos N° 3 Tabla 3.3). La restricción más crítica, es la cota inferior en la capacidad energética del banco:

$$S_E = E_{min} - E \leq 0 \quad (3.55)$$

En este caso el Hamiltoniano es [5]:

$$H = L + \lambda^T f + \mu^T C + \gamma S^{(q)}$$

donde q es el número de derivadas temporales para que $S^{(q)}$ dependa explícitamente de la variable de control u . Además se debe cumplir [5]:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &\geq 0 \text{ y } S_E^{(q)} = 0 \text{ cuando } S_E = 0 \\ \gamma(t) &= 0 \text{ cuando } S_E < 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

La restricción de desigualdad en la variable de estado E (3.55) es de primer orden ($q = 1$).

$$\dot{S}_E(u) = -\dot{E} = u + P_c \quad (3.57)$$

La solución a este problema tiene una cuarta fase.

$$\mathbf{Fase 4} \quad \mu_1 = 0 \quad \mu_2 = 0 \quad \gamma \geq 0$$

Cuando la restricción (3.55) se alcanza ($S_E = 0$), es decir el banco llegó a su carga mínima, de (3.56) y (3.57) se deduce que el control óptimo es:

$$\dot{S}_E(u) = 0 \Rightarrow u = -P_c \quad (3.58)$$

Lo que significa que el banco de baterías no puede seguir siendo descargado. La potencia de entrada al sistema de tracción en esta fase es:

$$P_{in} = P_s - P_c \quad (3.59)$$

Resumen de la Solución

En resumen, cuando una restricción en el estado de energía se puede alcanzar, el sistema de tracción es perfectamente eficiente y la potencia solar depende del tiempo y de la posición del vehículo, el control óptimo tiene cuatro fases:

Fase 1

La potencia en las baterías es mínima, el sistema de tracción regenera al máximo.

$$u = u_{min} = -(P_R + P_s)$$

P_R se determina de la restricción de potencia en el sistema de tracción (3.3).

Fase 2

La potencia en las baterías es la máxima posible, al sistema de tracción se le inyecta la máxima potencia posible.

$$u = u_{max} = P_M - P_s$$

P_M se determina de la restricción de potencia en el sistema de tracción (3.3).

Fase 3

Las restricciones en el control y en el estado no se alcanzan, luego:

$$u \in (u_{min}, u_{max}) = (-(P_R + P_s), P_M - P_s)$$

Y el control óptimo está gobernado por (3.48):

$$\dot{h}_v = -b \frac{\partial P_s}{\partial x}$$

donde:

$$h_v(v, v_v) = 3a_2 v^2 + (4a_2 v_v + 2a_1)v + a_2 v_v^2 + a_0$$

Con b , a_0 , a_1 y a_2 dados por (2.68), (2.71), (2.70) y (2.69) respectivamente. La condición de velocidad inicial en la ecuación (3.48) se debe escoger de modo que el banco de baterías se utilice completamente durante el trayecto.

Fase 4

El banco de baterías llega a su energía mínima (restricción en el estado (3.55)), el control óptimo está dado por (3.58)

$$\dot{S}_E(u) = 0 \Rightarrow u = -P_c$$

El banco de baterías no puede seguir siendo descargado. La potencia de entrada al sistema de tracción en esta fase es (3.59):

$$P_{in} = P_s - P_c$$

La potencia obtenida a través del panel solar debe alimentar la tracción y la electrónica del auto.

Ejemplo 4

En el siguiente ejemplo, el auto debe recorrer 5 km y enfrentar una pendiente de 1 grado. El vehículo parte desde el reposo con energía inicial en banco de baterías nula. Los resultados para el control óptimo, obtenidos numéricamente como se explicará en la sección 3.3, se indican en la Figura 3.11 y en la Figura 3.12:

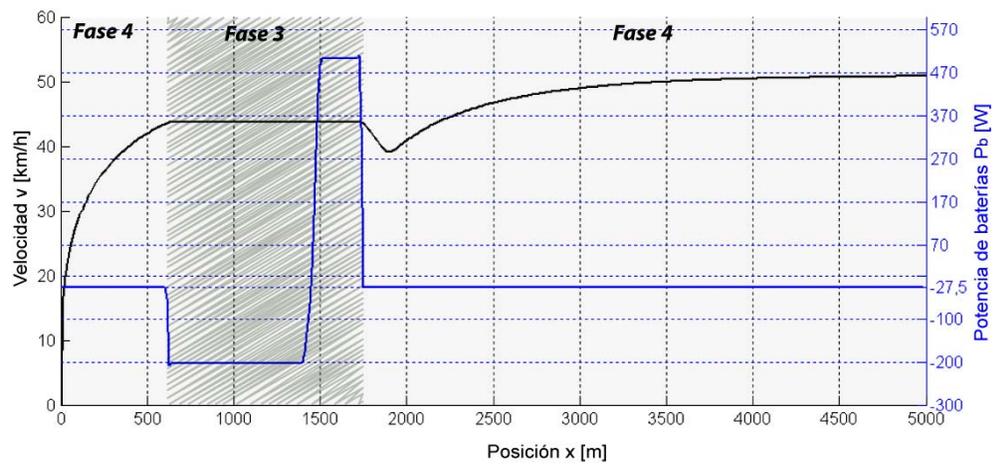


Figura 3.11 Velocidad v (línea negra) y potencia de baterías P_b (línea azul) óptima v/s posición x en el caso en que una de las restricciones en el estado se alcanza.

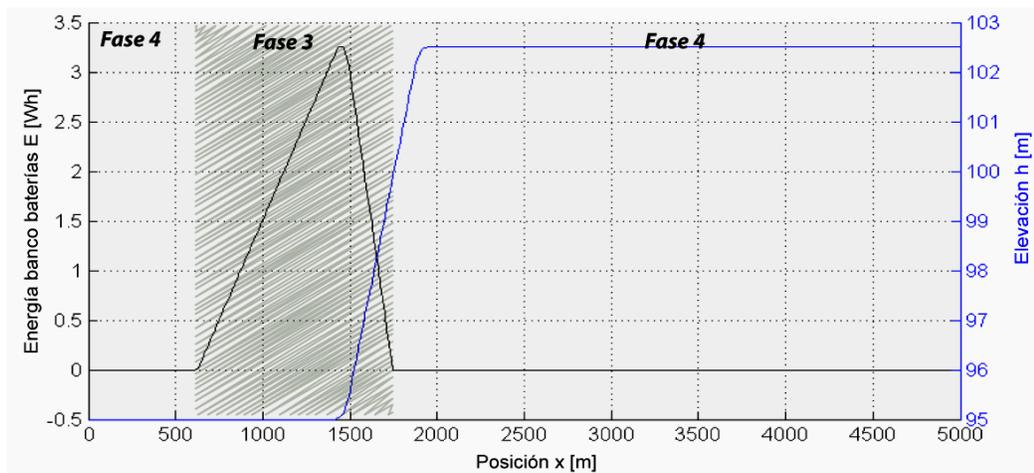


Figura 3.12 Energía E del banco de baterías (línea negra) y elevación h (línea azul) v/s posición x en el caso en que una de las restricciones en el estado se alcanza.

Como el vehículo parte desde el reposo con el banco completamente descargado, debe acelerar con la potencia solar. En la primera parte el control está en fase 4, la potencia de entrada al sistema de tracción está determinada por (3.59), es decir, la potencia obtenida mediante el panel solar debe alimentar la tracción y electrónica del auto.

Luego de acelerar, el vehículo alcanza una velocidad constante (control en fase 3) que le permite cargar el banco de baterías para poder enfrentar la pendiente manteniendo la velocidad.

Poco antes de finalizada la subida, el banco vuelve a descargarse completamente, el control vuelve a fase 4.

3.3 Planteamiento en Forma Numérica Utilizando el Modelo Integrado Simple. Pérdidas en el Sistema de Tracción

En las soluciones analíticas presentadas es posible determinar la forma que tiene el control óptimo en las diferentes fases, pero es complicado determinar en qué instantes de tiempo el control pasa de una fase a otra y bajo qué condiciones el control se encuentra en una fase determinada.

Por esta razón, y para considerar las pérdidas en el sistema de tracción, el problema de optimización se plantea de forma estática determinística, al discretizar las ecuaciones se buscará el vector de parámetros de velocidad que minimice el tiempo total de recorrido del vehículo.

Para resolver el problema de control óptimo dinámico con restricciones de desigualdad en las variables estados (SVIC), se utilizará el método llamado “*optimización dinámica inversa*”[6], que consiste en utilizar a las variables de estado como parámetros desconocidos a ser determinados y la variable de control se despeja a partir de la discretización de las ecuaciones de estado.

Utilizando un software para optimización no lineal con restricciones (NLP), en este caso el “*fmincon*” del Optimization Toolbox de Matlab [35], se determinan los estados desconocidos.

A lo largo de una ruta cualquiera, se consideran N intervalos determinados por las $N+1$ posiciones $X = [x_1 \dots x_{N+1}]$ de la ruta, que se conocen de antemano.

Además, se conocen las pendientes $\Theta = [\theta_1 \dots \theta_N]$ que se suponen constantes en cada intervalo y se conocen las condiciones iniciales v_0 y E_1 , velocidad inicial y energía inicial respectivamente (ver Figura 3.13).

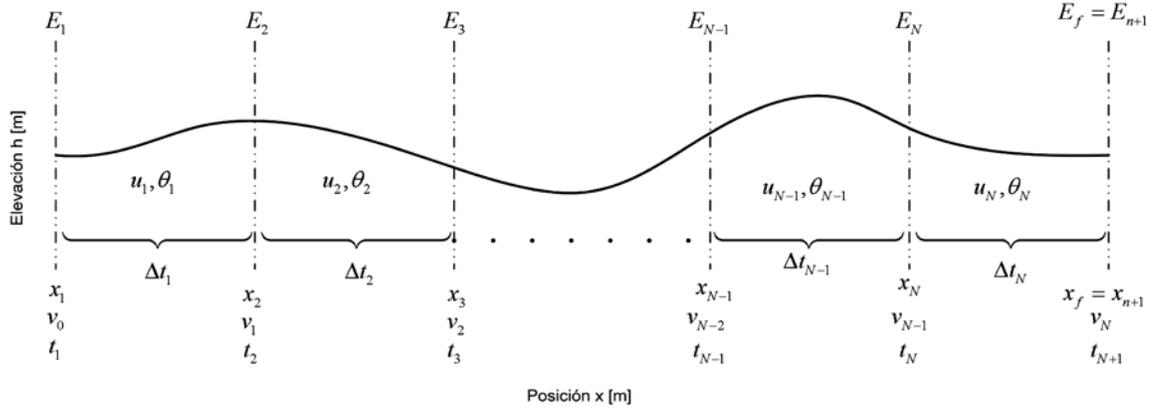


Figura 3.13 Discretización de la ruta en N intervalos.

Entonces, para toda la ruta, se desea encontrar el vector de parámetros de velocidad ξ que minimice el tiempo total del recorrido del auto:

$$\xi = [v_1 \dots v_N] \quad (3.60)$$

O si se prefiere especificar una velocidad final:

$$\xi = [v_1 \dots v_{N-1}] \quad (3.61)$$

La función objetivo es:

$$\text{Min}_{\xi} \left(T_f = \sum_{k=1}^N \Delta t_k \right) \quad (3.62)$$

Las restricciones del problema son (ver sección 3.1.2):

$$-P_R \leq P_e \leq P_M \quad (3.63)$$

$$v_{min} \leq v \leq v_{max} \quad (3.64)$$

$$E_{min} \leq E \leq E_{max} \quad (3.65)$$

De la ecuación (2.78), se tiene que:

$$\dot{v} = a_x(v, f_x, P_e) \quad (3.66)$$

Discretizando la ecuación anterior se obtiene:

$$\dot{v} = \frac{v(t_{k+1}) - v(t_k)}{\Delta t_k} = a_x(\bar{v}_k, f_x(t_k), P_e(t_k)) \quad (3.67)$$

Luego, despejando $P_e(t_k)$ de (3.67), resulta:

$$P_e(t_k) = M_e \left(\frac{v(t_{k+1}) - v(t_k)}{\Delta t_k} + f_v(\bar{v}_k, v_v(t_k)) + f_x(t_k) \right) \bar{v}_k \quad (3.68)$$

donde:

$$\bar{v}_k = \frac{v(t_{k+1}) + v(t_k)}{2} \quad (3.69)$$

El tiempo que transcurre en cada intervalo se aproxima por:

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{\bar{v}_k} \quad (3.70)$$

La energía del banco de baterías al final de cada intervalo es:

$$E_{k+1} = E_1 - \sum_{j=1}^k \Delta t_j (u_j + P_c) \quad (3.71)$$

Finalmente, el control $u_j = P_b(t_j)$ se calcula según (2.77):

$$u_j = P_e(t_j) + P_L(t_j, \bar{v}_j) - P_s(t_j) \quad (3.72)$$

3.3.1 Soluciones a Casos de Interés

En las soluciones numéricas, se considera un auto con los siguientes parámetros:

M_e	Masa equivalente	345 [kg]
f_m	Factor de masa	1.01471 [-]
$C_D A$	Área de fricción	0.15 [m ²]
ρ_a	Densidad del aire	1.22 [kg/m ³]
C_{rr1}	Coefficiente de rodadura a velocidad cero	0.008 [-]
C_{rr2}	Factor de velocidad	$0.1789 \cdot 10^{-3}$ [s/m]
g	Aceleración de gravedad	9.81 [m/s ²]

Tabla 3.7 Parámetros del auto utilizados en las soluciones numéricas.

Bajo el supuesto de sistema de tracción perfectamente eficiente utilizado en las soluciones analíticas (ver sección 3.2), las pendientes no tienen influencia en la determinación del control óptimo. Es de interés conocer ahora, el control óptimo cuando las pérdidas en el sistema de tracción son consideradas en el modelo, para los distintos escenarios que se detallan a continuación.

Aceleración Desde el Reposo

El control óptimo para una aceleración desde el reposo en el caso de sistema de tracción sin pérdidas, sería un control en fase 2 en el primer tramo (ecuación (3.21)), es decir inyectar la máxima potencia P_M al sistema de tracción y luego realizar un control de velocidad en fase 3 según lo visto en la sección 3.2. Pero al existir pérdidas en el sistema de tracción, no es conveniente inyectar la máxima potencia al sistema de tracción cuando la velocidad del vehículo es baja, debido a que en esas condiciones las pérdidas se maximizan.

La velocidad y potencia de entrada P_{in} óptimas, obtenidos en forma numérica como se explicó en 3.3, para una aceleración desde el reposo hasta una velocidad de equilibrio, considerando las pérdidas en el sistema de tracción, se muestran en la Figura 3.14:

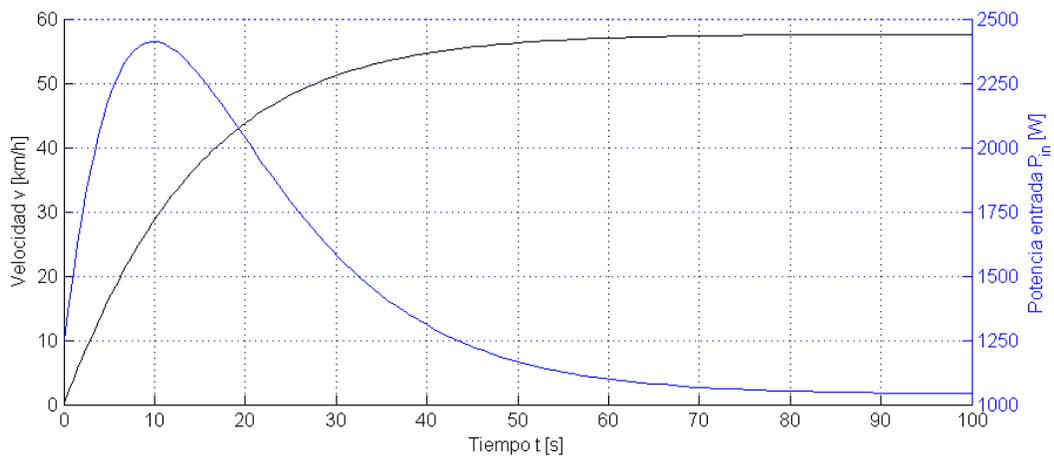


Figura 3.14 Velocidad v (línea negra) y potencia de entrada P_{in} (línea azul) óptimas v/s tiempo para una aceleración desde el reposo. Caso que considera pérdidas en el sistema de tracción.

Las pérdidas en el sistema de tracción, se grafican en la siguiente figura.

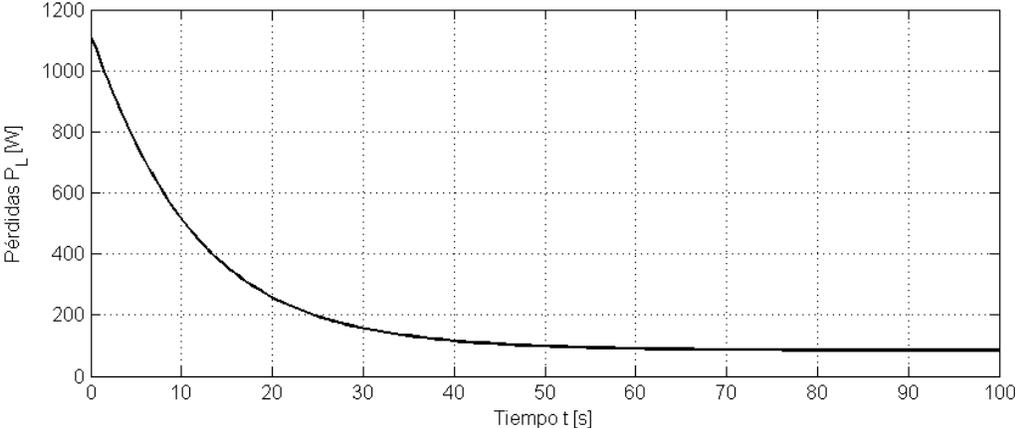


Figura 3.15 Pérdidas P_L en el sistema de tracción v/s tiempo durante la aceleración desde el reposo. Caso que considera pérdidas en el sistema de tracción.

Pendiente Positiva

En el caso de que el vehículo enfrente una pendiente positiva, el control óptimo indica incrementar la velocidad del vehículo anticipándose a la pendiente, luego disminuirla en la pendiente y finalmente retomar la velocidad constante, esto se observa en la Figura 3.16.

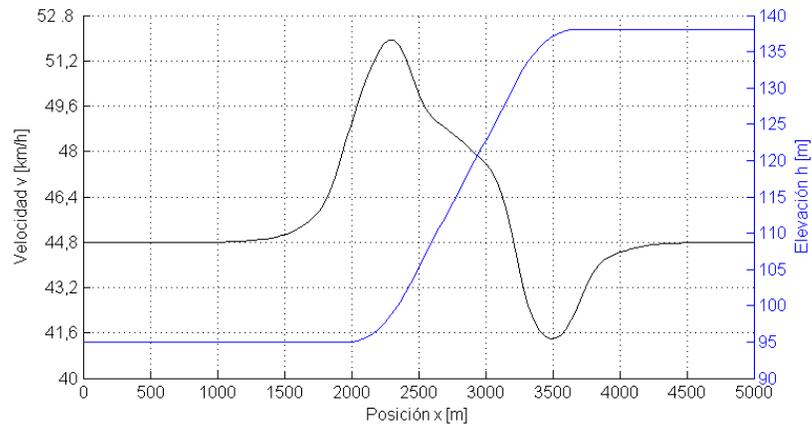


Figura 3.16 Velocidad v óptima (línea negra) y elevación h (línea azul) v/s posición x del vehículo, en el caso de una pendiente positiva. Caso que considera pérdidas en el sistema de tracción.

La potencia de entrada P_{in} óptima se muestra en la Figura 3.17:

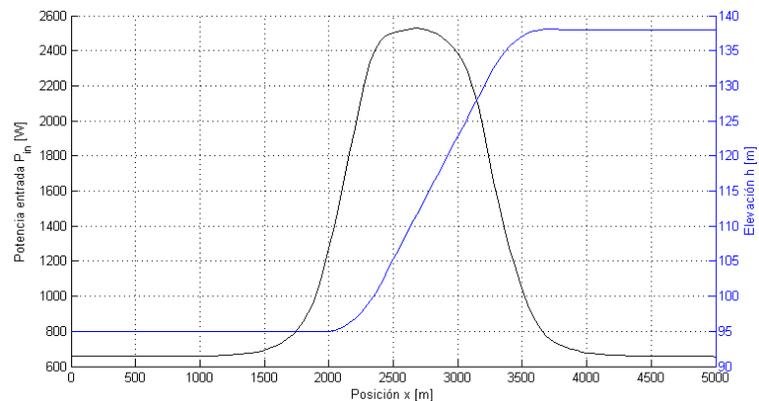


Figura 3.17 Potencia de entrada P_{in} óptima (línea negra) y elevación h (línea azul) v/s posición, en el caso de una pendiente positiva. Caso que considera pérdidas en el sistema de tracción.

El gráfico de la aceleración óptima del vehículo, Figura 3.18, deja claro que el auto acelera antes de enfrentar la pendiente y apenas iniciada la pendiente y durante toda la pendiente, el auto desacelera, una vez finalizado el tramo con pendiente, el auto vuelve a acelerar hasta alcanzar la velocidad constante.

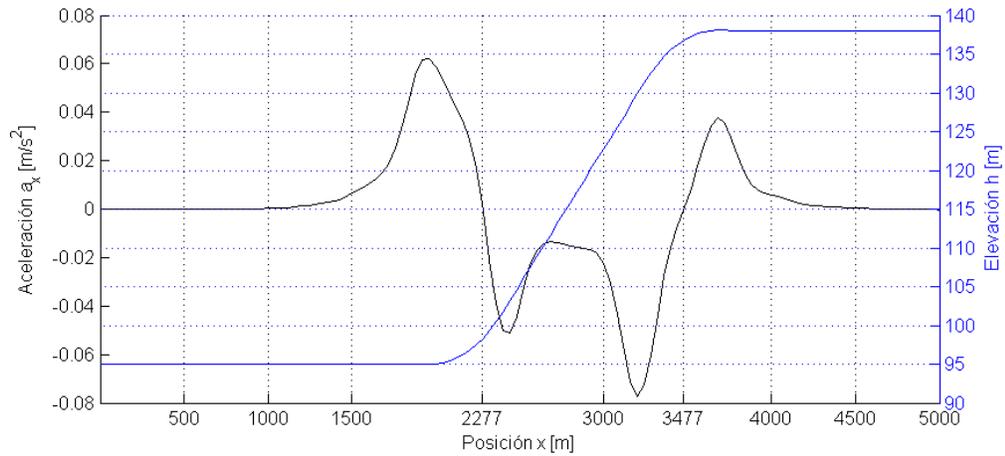


Figura 3.18 Aceleración a_x óptima (línea negra) y elevación h (línea azul) v/s posición x del vehículo, en el caso de una pendiente positiva. Caso que considera pérdidas en el sistema de tracción.

Pendiente Negativa

En el caso de una pendiente negativa en la ruta, el control óptimo señala lo contrario al caso anterior.

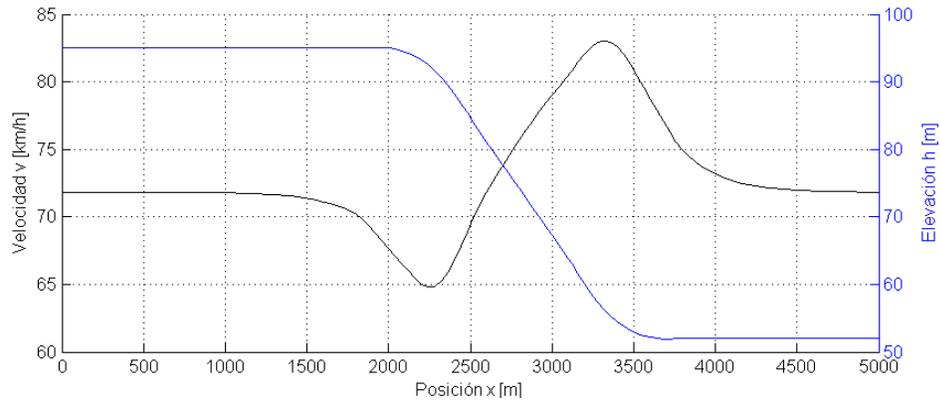


Figura 3.19 Velocidad v óptima (línea negra) y elevación h (línea azul) v/s posición x del vehículo, en el caso de una pendiente negativa. Caso que considera pérdidas en el sistema de tracción.

La velocidad del auto disminuye antes de la pendiente, para luego acelerar con la fuerza gradiente a su favor. Como se ve en la Figura 3.20 la potencia de entrada P_{in} es prácticamente nula durante la bajada. Al finalizar el declive, el auto desacelera para retomar la velocidad de equilibrio.

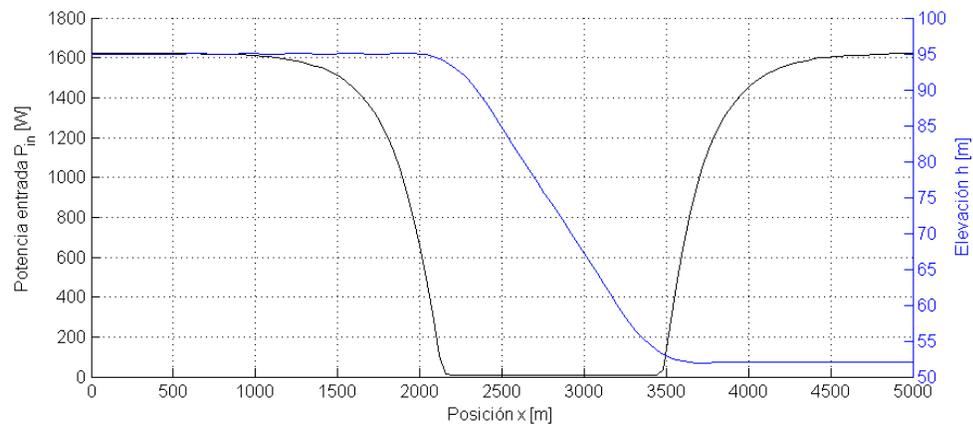


Figura 3.20 Potencia de entrada P_{in} óptima (línea negra) y elevación h (línea azul) v/s posición x , en el caso de una pendiente negativa. Caso que considera pérdidas en el sistema de tracción.

En la Figura 3.21 se puede ver la aceleración del vehículo en función de la posición.

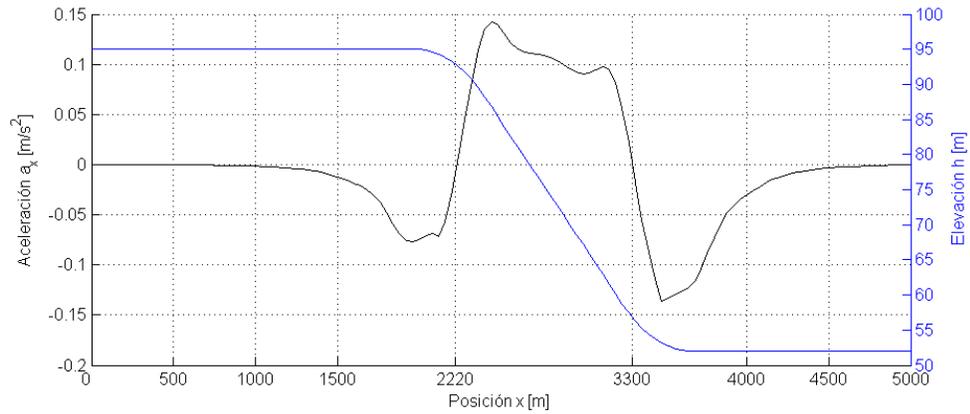


Figura 3.21 Aceleración a_x óptima (línea negra) y elevación h (línea azul) v/s posición x del vehículo, en el caso de una pendiente negativa. Caso que considera pérdidas en el sistema de tracción.

Cuando el vehículo enfrenta una pendiente negativa, desacelera antes de iniciada la pendiente y durante toda la pendiente acelera. Al finalizar la pendiente el vehículo frena para alcanzar su velocidad de equilibrio.

Ejemplo con una Ruta Real

Se analiza la ruta de 99.3 km por la Stuart highway, partiendo desde la ciudad de Darwin. La elevación desde el nivel del mar en el camino, se muestra en la Figura 3.22

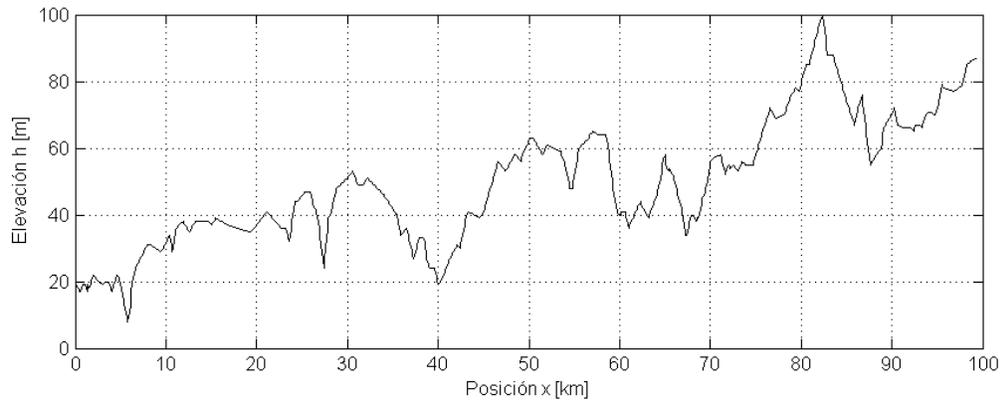


Figura 3.22 Elevación h sobre el nivel del mar de la ruta v/s posición x .

La máxima pendiente en la ruta es de 2° y la mínima alcanza los -2.8° . Las pendientes a lo largo de toda la ruta se muestran en la Figura 3.23:

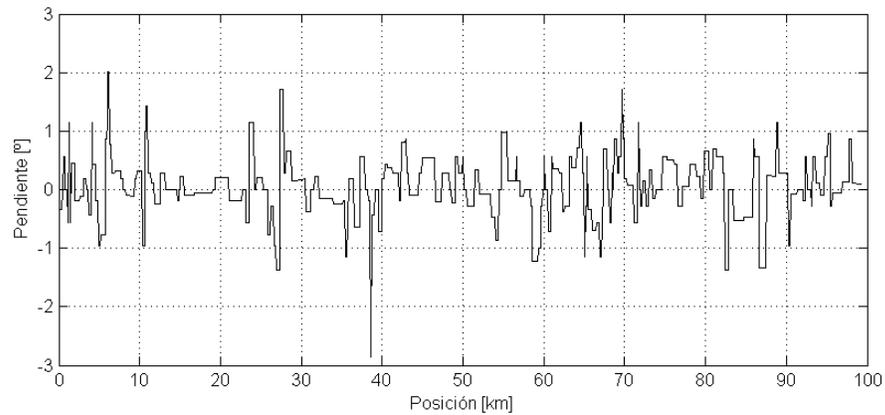


Figura 3.23 Pendientes θ en la ruta v/s posición x .

La ruta se discretizó en intervalos de $100[m]$, con esto resultaron $N = 993$ intervalos.

El resultado de la velocidad óptima, obtenida numéricamente, se contrasta con la estrategia de mantener una velocidad constante durante todo el trayecto.

La velocidad óptima para la ruta se muestra en la siguiente figura:

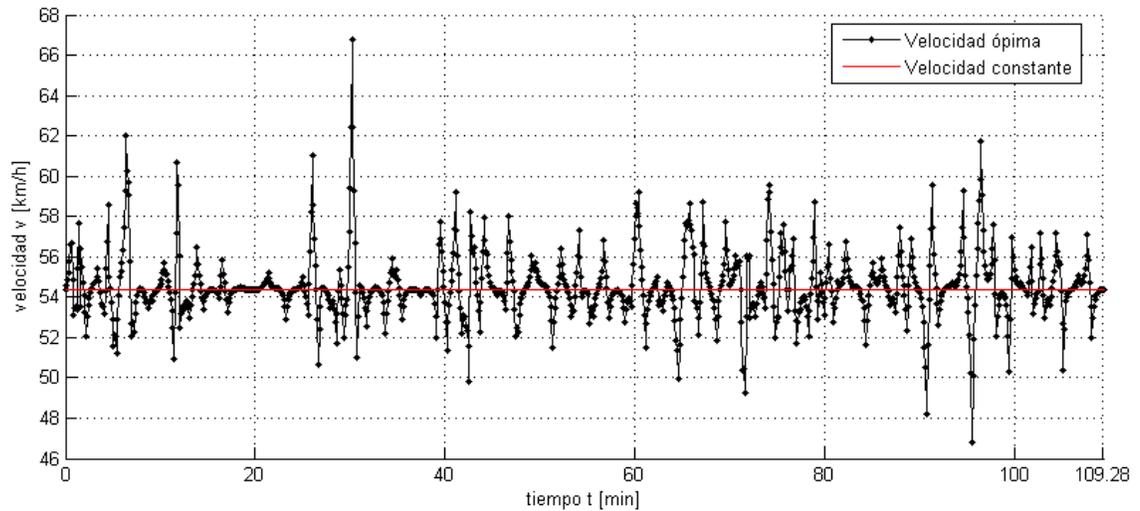


Figura 3.24 Velocidad v óptima (línea negra) y constante (línea roja) v/s tiempo t . Caso que considera pérdidas en el sistema de tracción.

Debido a que se han considerado las pérdidas en el sistema de tracción, la velocidad óptima presenta variaciones debido a la presencia de pendientes en la ruta, algo que no ocurre si se considera un sistema de tracción perfectamente eficiente como se analizó en la sección 3.2.

En la siguiente tabla, se muestra una comparación entre el desempeño de la estrategia óptima para el auto y la estrategia de mantener una velocidad constante:

	Estrategia velocidad constante	Estrategia óptima
Distancia total	99.3 [km]	99.3 [km]
Hora de partida	11:00	11:00
Velocidad inicial v_0	54.4 [km/h]	54.4 [km/h]
Velocidad final v_f	54.4 [km/h]	54.4 [km/h]
Energía inicial del banco de baterías	250 [Wh]	250 [Wh]
Energía final del banco de baterías	0 [Wh]	0 [Wh]
Energía solar captada	1582.9 [Wh]	1579.4 [Wh]
Energía total consumida	1832.9 [Wh]	1829.4 [Wh]
Energía por pérdidas en el sistema de tracción	159.5 [Wh]	151.7 [Wh]
Velocidad promedio	54.4 [km/h]	54.52 [km/h]
Tiempo de recorrido	6571 [s]	6557 [s]

Tabla 3.8 Comparación entre estrategia óptima y de velocidad constante para el caso del Ejemplo con una Ruta Real.

La estrategia óptima, permite reducir el tiempo de recorrido por la trayectoria de 99.3 km en 13.82 segundos respecto a la estrategia de velocidad constante. Es interesante notar que además de tener un tiempo menor, con la estrategia óptima el vehículo consume menos energía que con la estrategia de velocidad constante, pero ambas disminuciones, tanto en el tiempo de recorrido como en el consumo de energía, no son significativas. Con la estrategia óptima se reduce tan solo un 0.2% el consumo energético total y en un 0.21% el tiempo total de recorrido con respecto a la estrategia de mantener una velocidad constante.

En la Figura 3.25 se muestran las pérdidas en el sistema de tracción para la estrategia óptima y la estrategia de velocidad constante, las pérdidas en estrategia óptima son menores y la energía consumida por concepto de pérdidas se reduce en un 4.9% con respecto a la estrategia de velocidad constante, lo que en la práctica podría significar no elevar la temperatura del motor a niveles indeseados, pero como ya se dijo, estas reducciones en las pérdidas no son suficientes para reducir el tiempo de recorrido en forma significativa.

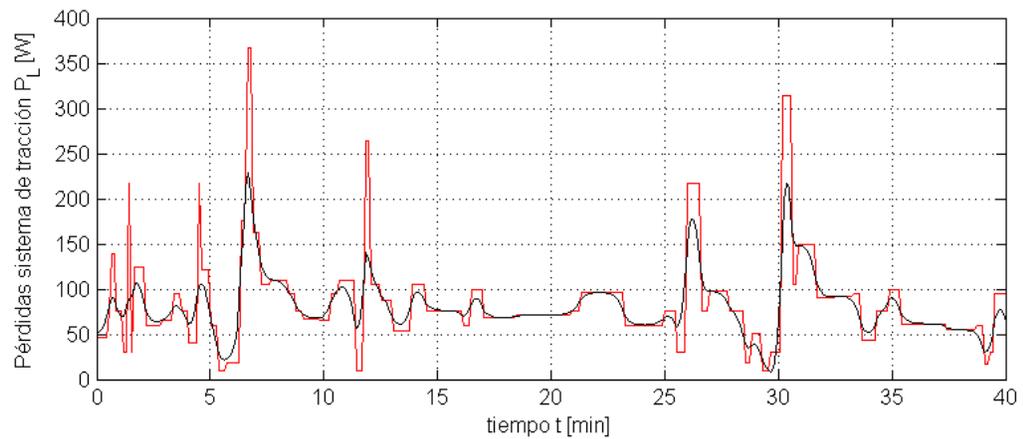


Figura 3.25 Pérdidas en el sistema de tracción P_L v/s tiempo t . Pérdidas a velocidad óptima (línea negra), pérdidas a velocidad constante (línea roja).

3.4 Planteamiento en Forma Numérica Utilizando el Modelo Integrado Completo

Al igual que en la sección 3.3, se planteará el problema como un problema de optimización estática determinística, se utilizará el método de “optimización dinámica inversa” y el software para optimización no lineal con restricciones (NLP) “fmincon” del Optimization Toolbox de Matlab [35] para resolverlo. En este caso se utilizará el modelo del vehículo que incluye el modelo completo de las baterías de litio (ecuaciones (2.84) y (2.85)) que permite incluir las restricciones sobre la tensión en bornes de la batería (ver sección 3.1.2).

De la misma manera que en la sección 3.3, se quiere encontrar el vector de velocidades ξ que minimice el tiempo total de recorrido.

$$\xi = [v_1 \quad \dots \quad v_N] \quad (3.73)$$

La función objetivo de tiempo mínimo está dada por la ecuación (3.62). La acción de control se determina utilizando las ecuaciones (3.74) y (3.75) que se obtienen de (3.67) y (2.77) respectivamente.

$$P_e(t_k) = M_e \left(\frac{v(t_{k+1}) - v(t_k)}{\Delta t_k} + f_v(\bar{v}_k, v_v(t_k)) + f_x(t_k) \right) \bar{v}_k \quad (3.74)$$

$$u(t_k) = P_b(t_k) = P_e(t_k) + P_L(t_k, \bar{v}_k) - P_s(t_k) \quad (3.75)$$

Con la acción de control determinada en (3.75), se calcula la tensión U_i , la corriente I y la tensión U_b del banco de baterías a partir de las siguientes ecuaciones (ver sección 2.4.2):

$$U_i(t_k) = E_i(Q_{out}(t_k)) - U_k(t_k) - U_d(t_k) \quad (3.76)$$

$$I(t_k) = \frac{U_i(t_k)}{2R_s} - \sqrt{\left(\frac{U_i(t_k)}{2R_s}\right)^2 - \frac{u(t_k) + P_c}{R_s}} \quad (3.77)$$

$$U_b(t_k) = U_i(t_k) - R_s I(t_k) \quad (3.78)$$

Luego, los estados restantes por determinar, tensión cinética U_k , tensión de difusión U_d y carga extraída Q_{out} , se pueden calcular mediante la discretización de (2.61):

$$U_k(t_{k+1}) = U_k(t_k) + \frac{\Delta t_k}{C_k} \left(I(t_k) - \frac{U_k(t_k)}{R_k} \right) \quad (3.79)$$

$$U_d(t_{k+1}) = U_d(t_k) + \frac{\Delta t_k}{C_d} \left(I(t_k) - \frac{U_d(t_k)}{R_d} \right) \quad (3.80)$$

$$Q_{out}(t_{k+1}) = Q_{out}(t_k) + \Delta t_k I(t_{k+1}) \quad (3.81)$$

Finalmente las restricciones consideradas son (ver sección 3.1.2):

$$U_{bmin} \leq U_b \leq U_{bmax} \quad (3.82)$$

$$-P_R \leq P_e \leq P_M \quad (3.83)$$

$$v_{min} \leq v \leq v_{max} \quad (3.84)$$

3.4.1 Soluciones a Casos de Interés

Al utilizar el modelo completo para las baterías de litio, las pérdidas de potencia que se producen debido al flujo de corriente por el banco de baterías son consideradas, esto significa que el uso de la corriente por las baterías tiene un grado de penalización.

Las pérdidas en las baterías están dadas por:

$$P_{Lb} = \frac{U_k^2}{R_k} + \frac{U_d^2}{R_d} + R_s I^2 \quad (3.85)$$

Debido a estas pérdidas en el banco de baterías, que hasta ahora no habían sido consideradas, el control óptimo del vehículo se verá afectado de diferentes formas. Puesto que estas pérdidas dependen de la corriente I por las baterías, la forma del control óptimo dependerá del origen de la energía utilizada para el movimiento del vehículo, si la energía utilizada para recorrer una trayectoria proviene en gran parte del banco de baterías, habrán mayores pérdidas en comparación a que esa energía provenga del panel solar, este hecho tendrá influencia en la determinación del control óptimo. Producto de que la tensión en bornes del banco U_b es inconstante y depende en parte del estado de carga del banco, no es equivalente suministrar una potencia cuando el banco está completamente cargado que cuando está a media carga, ya que la corriente será diferente en ambos casos y en consecuencia las pérdidas también lo serán.

Los parámetros del modelo utilizados en las soluciones numéricas se indican en la Tabla 3.9.

M_e	Masa equivalente	345 [kg]
f_m	Factor de masa	1.01471 [-]
$C_D A$	Área de fricción	0.15 [m ²]
ρ_a	Densidad del aire	1.22 [kg/m ³]
C_{rr1}	Coefficiente de rodadura a velocidad cero	0.008 [-]
C_{rr2}	Factor de velocidad	$0.1789 \cdot 10^{-3}$ [s/m]
g	Aceleración de gravedad	9.81 [m/s ²]
C_k	Condensador cinético	0.5693 [hr/ Ω]
R_k	Resistencia cinética	0.0276 [Ω]
C_d	Condensador de difusión	3454 [hr/ Ω]
R_d	Resistencia de difusión	0.0396 [Ω]
R_s	Resistencia serie	0.04 [Ω]

Tabla 3.9 Parámetros para el modelo del vehículo integrado completo considerado en las soluciones numéricas.

Contraste con Ejemplo 1

Considérese el Ejemplo 1 de la sección 3.2.1. El objetivo de este ejemplo es ilustrar la influencia que tienen las pérdidas P_{Lb} en el control óptimo. Para esto se compararán los resultados del Ejemplo 1 de la sección 3.2.1 con los resultados que se obtendrán al utilizar el modelo completo de las baterías de litio. Para poder comparar los resultados, al igual que en la sección 3.2.1, se considerará un sistema de tracción perfectamente eficiente ($P_L = 0$). La ruta del ejemplo se indica en la Figura 3.26.

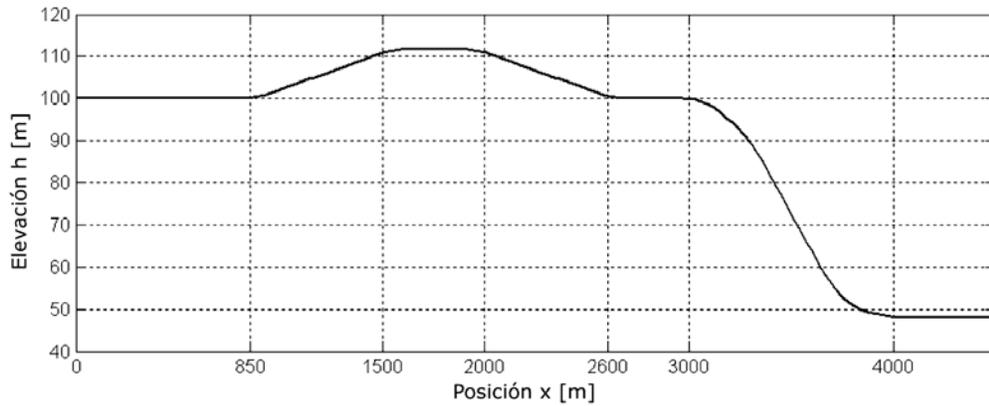


Figura 3.26 Ruta de ejemplo para el control óptimo con modelo completo para las baterías. Elevación h sobre el nivel del mar v/s posición x .

El resultado de la velocidad y potencia de entrada óptimas se muestra en la Figura 3.27. A diferencia del resultado de la sección 3.2.1, al existir pérdidas en el banco de baterías debidas a la corriente por las baterías, ocurre lo mismo que al considerar pérdidas en el sistema de tracción (ver sección 3.3.1), durante pendientes positivas se desacelera (Figura 3.27 entre las posiciones 850 y 1500 [m]) y durante pendientes negativas se acelera (Figura 3.27 entre las posiciones 2000 y 2600 [m]).

Durante la pendiente más pronunciada de la ruta, donde en el caso de la sección 3.2.1 se regeneraba al máximo (ver Figura 3.3), en este caso, debido a que el usar corriente por el banco tiene un costo o penalización debido a las pérdidas, en vez de cargar el banco con la máxima potencia posible y almacenar energía, es más conveniente aumentar un poco la velocidad durante la pendiente negativa y así disminuir en parte la corriente de carga por las baterías, disminuyendo las pérdidas en el banco.

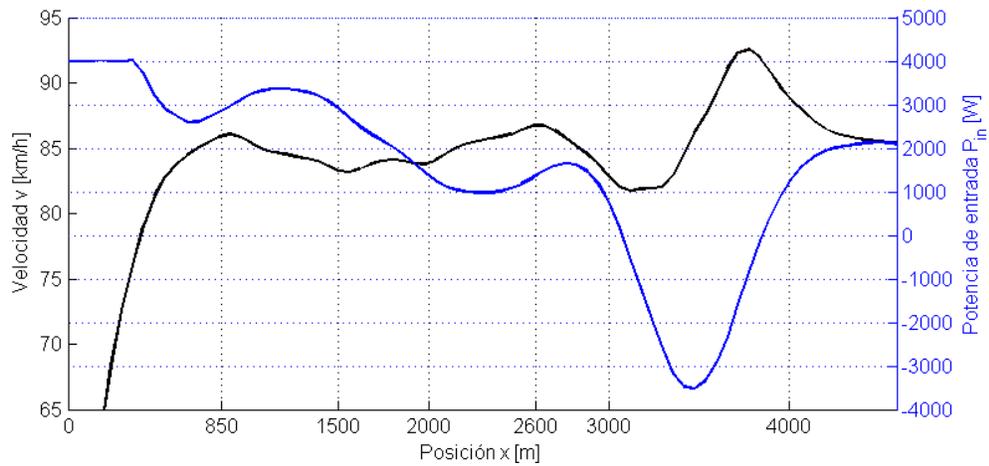


Figura 3.27 Velocidad v (línea negra) y potencia de entrada P_m (línea azul) óptimas (utilizando modelo completo para las baterías) para la ruta de la Figura 3.26 v/s posición x .

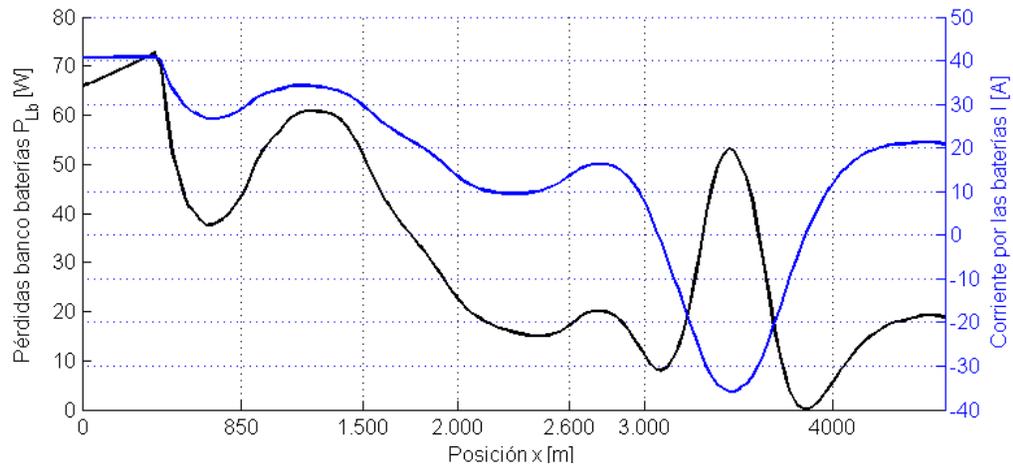


Figura 3.28 Pérdidas en el banco de baterías P_{Lb} (línea negra) y corriente por la batería I (línea azul) óptimas (utilizando modelo completo para las baterías) para la ruta de la Figura 3.26 v/s posición x .

Ejemplo en Condiciones Constantes

Cuando no se consideran las pérdidas en el banco de baterías, el control óptimo en una ruta sin pendientes y sin viento consiste en mantener una velocidad constante. En este ejemplo se verá lo que ocurre al considerar el modelo completo para las baterías bajo estas condiciones.

Para el ejemplo se utilizó una ruta plana, velocidad del viento nula y para observar el efecto de la variación de tensión U_b en el banco, se utilizó potencia solar nula, de manera de variar significativamente el estado de carga del banco. Como restricción, en el ejemplo, se impuso una tensión mínima de 82 [V].

En la Figura 3.29 se muestra la tensión U_b y la corriente I del banco de baterías óptimas, en el gráfico se observa que cuando la restricción de tensión se alcanza, la corriente se va reduciendo de modo de mantener la tensión constante.

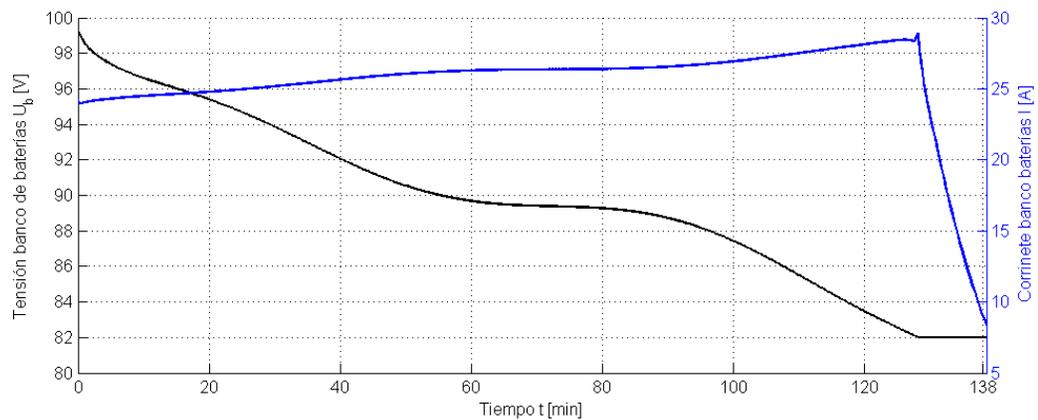


Figura 3.29 Tensión del banco baterías U_b (línea negra) y corriente del banco de baterías (línea azul) I óptimas (utilizando modelo completo para las baterías) v/s tiempo.

En la Figura 3.30 se muestra que la velocidad óptima del auto, antes de que se alcance la restricción de tensión, no es constante, presenta muy pequeñas y lentas variaciones para reducir las pérdidas en el banco.

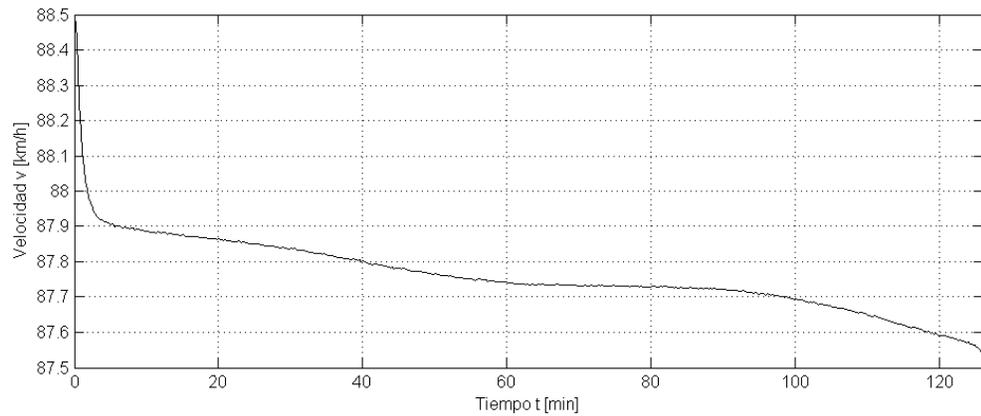


Figura 3.30 Velocidad v óptima antes de alcanzar restricción de tensión en el banco (utilizando modelo completo para las baterías) v/s tiempo t . Se observa una pequeña variación en la velocidad v .

Cuando se alcanza la restricción de tensión en el banco, la velocidad (Figura 3.31) queda determinada por la corriente en el banco que hace que la tensión se mantenga constante.

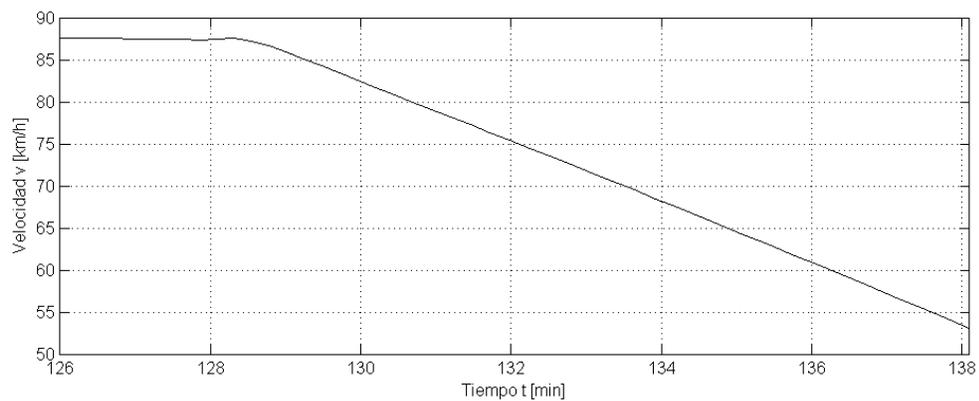


Figura 3.31 Velocidad v óptima cuando se alcanza restricción de tensión en el banco (utilizando modelo completo para las baterías) v/s tiempo t .

Capítulo 4

Estimación de la Radiación Solar

Para poder resolver el problema de optimización, es necesario conocer de antemano la potencia solar P_s con la que el automóvil dispondrá durante su trayectoria. En este capítulo, se muestra de qué forma es posible estimar la potencia solar.

Para un panel solar plano la potencia solar $P_s(t)$ está dada por:

$$P_s(t) = R_s(t) A_p \eta_p \eta_{mppt} \quad (4.1)$$

donde:

$R_s(t)$	Radiación solar.	$[W/m^2]$
A_p	Área del panel solar.	$[m^2]$
η_p	Eficiencia del panel.	Adimensional.
η_{mppt}	Eficiencia del MPPT.	Adimensional.

Un modelo simple, consiste en suponer que la radiación solar está dada por [14][30]:

$$R_s = \begin{cases} S_c \tau \cos(\Psi) & \cos(\Psi) > 0 \\ 0 & \cos(\Psi) \leq 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

donde S_c es la constante solar, equivalente a $1360 [W/m^2]$ [14][30] y τ es la transmisividad atmosférica. La posición del sol se describe mediante el ángulo cenit Ψ , que es el ángulo entre

la normal a la superficie y la posición del sol. El cenit varía geográficamente y temporalmente de acuerdo a la siguiente relación:

$$\cos(\Psi) = \sin(\Phi)\sin(\delta_{SD}) + \cos(\Phi)\cos(\delta_{SD})\cos[0.0833\pi(t - t_{sm})] \quad (4.3)$$

donde Φ es la latitud del lugar, t es el tiempo estándar en horas, t_{sm} es la hora del medio día solar y δ_{SD} es la declinación solar que se puede calcular a partir de:

$$\sin(\delta_{SD}) = 0.39785\sin[4.869 + 0.0172D + 0.03345\sin(6.2238 + 0.0172D)] \quad (4.4)$$

en que D es el día del año, $D \in (1, 365)$.

En el modelo (4.2), para poder conocer la radiación solar, se necesita el valor de la transmisividad, la cual se puede encontrar utilizando la ecuación de Burridge and Gadd[14]:

$$\tau = (0.6 + 0.2\cos(\Psi))(1 - 0.4\sigma_{C_H})(1 - 0.7\sigma_{C_M})(1 - 0.4\sigma_{C_L}) \quad (4.5)$$

donde σ_{C_H} , σ_{C_M} y σ_{C_L} representan la fracción de cielo cubierto por nubosidad alta, media y baja respectivamente.

Para poder estimar la radiación solar a futuro con este modelo, se requiere de una predicción para los parámetros σ_{C_H} , σ_{C_M} y σ_{C_L} .

Otra alternativa para predecir la radiación solar, es utilizando el modelo de Spokas y Forcella[30], que propone que la radiación solar en un día, depende de la amplitud térmica del día, de la posición geográfica del lugar y del día del año. Este modelo, tiene la ventaja de que los datos de entrada necesarios para la estimación son simples de obtener.

La radiación solar incidente resulta de la suma de la radiación solar directa más la difusa:

$$R_s = S_c \tau^m + 0.3(1 - \tau^m) S_c \cos(\Psi) \quad (4.6)$$

donde m es el número óptico de masa que se expresa en función de la presión atmosférica P_a :

$$m = \frac{P_a}{0.1013 \cos(\Psi)} \quad (4.7)$$

Spokas y Forcella proponen para el cálculo de la transmisividad atmosférica lo siguiente:

1. Asignar un valor a la transmisividad de acuerdo a una matriz de decisión que toma en cuenta si hubo o no precipitación el día presente y anterior.
2. Recalcular la transmisividad de acuerdo a la amplitud de temperatura del día.

Condiciones	Valor de τ
Precipitaciones día actual y anterior.	$\tau = 0.3$
Precipitaciones sólo en el día actual.	$\tau = 0.4$
Precipitaciones sólo en el día anterior.	$\tau = 0.6$
No hay precipitaciones en el día actual ni en el anterior. [‡]	$\tau = 0.7$

Tabla 4.1 Matriz de decisión para asignar valor a la transmisividad.

La amplitud térmica del día está definida por la diferencia entre la temperatura máxima y mínima del aire para el día.

$$\Delta T = T_{max} - T_{min} \quad (4.8)$$

[‡] Si la amplitud térmica del día es mayor que 10 °C y no hay precipitaciones en el día actual ni en el anterior, se asume condiciones de cielo despejado.

Si $\Delta T \leq 10 [^{\circ}C]$ y si el lugar no está cerca de los polos ($|\Phi| \leq 60^{\circ}$), la transmisividad atmosférica se recalcula de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\tau = \frac{\tau}{11 - \Delta T} \quad (4.9)$$

Para observar el desempeño de este modelo se utilizaron los datos meteorológicos del año 2006 y 2007 para el centro de la ciudad de Santiago[17].

En la Figura 4.1 se muestra la radiación solar máxima en función la amplitud térmica del día:

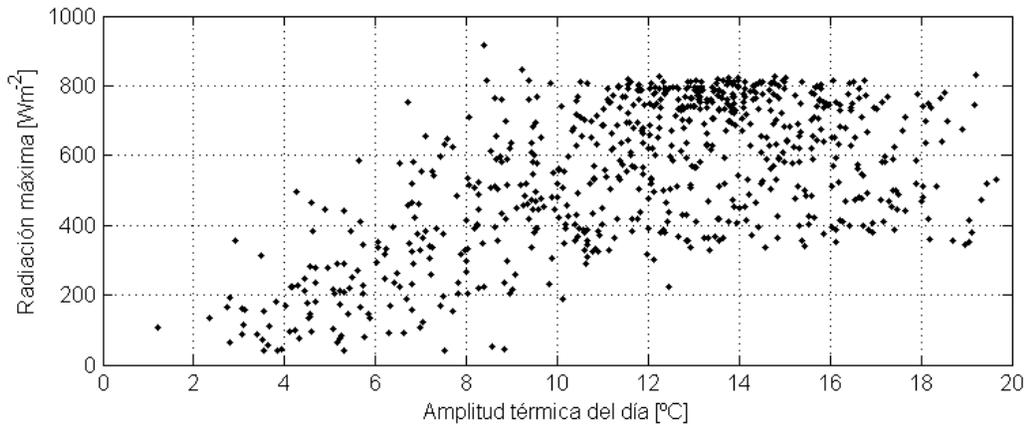


Figura 4.1 Radiación máxima v/s amplitud térmica del día, datos del centro de Santiago durante los años 2006 y 2007.

En la Figura 4.1 se puede observar que efectivamente existe dependencia de la radiación solar con la amplitud térmica del día y que a partir de los 10 °C hay una cierta saturación.

Con los datos meteorológicos y el modelo de Spokas y Forcella, se estimó la radiación solar[§] y se calculó la insolación diaria (energía solar por metro cuadrado para cada día).

La comparación entre la insolación medida y estimada se muestra en la Figura 4.2:

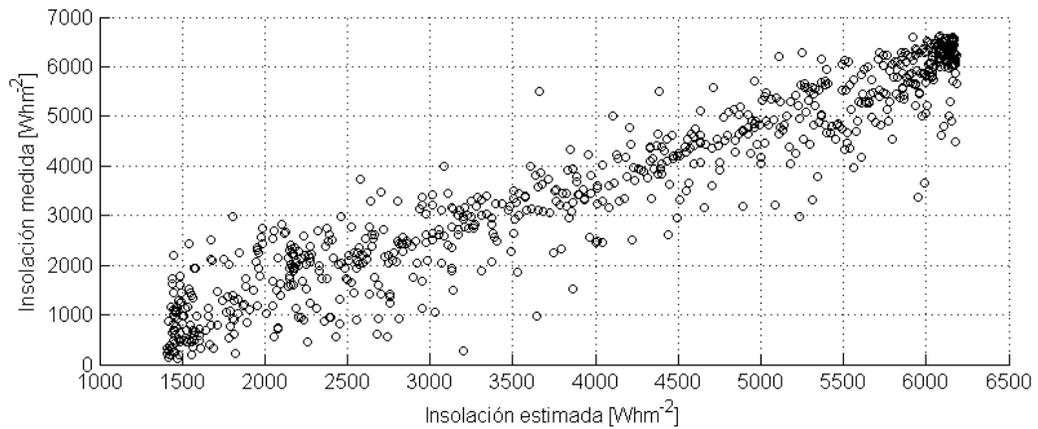


Figura 4.2 Insolación medida y estimada, datos del centro de Santiago durante los años 2006 y 2007.

El coeficiente de correlación entre los datos de Insolación medida y de la Insolación estimada de la Figura 4.2 es de 0.95.

[§] El valor de la transmisividad para cielo despejado utilizado en el modelo fue de $\tau = 0.34$.

A modo de ejemplo, se muestra la estimación de la radiación solar para los días entre el 9 y el 23 de abril del año 2006 para santiago centro. La amplitud térmica de esos días fue:

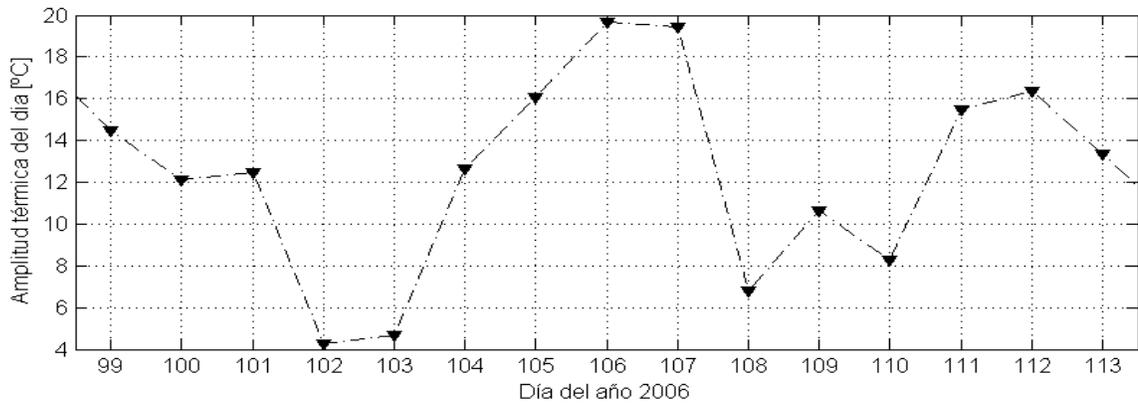


Figura 4.3 Amplitud térmica de los días entre el 9 y 23 de abril, 2006.

Durante los días 103, 109 y 110 hubo precipitaciones, con estos datos, la radiación solar estimada se contrasta con los datos medidos en la Figura 4.4.

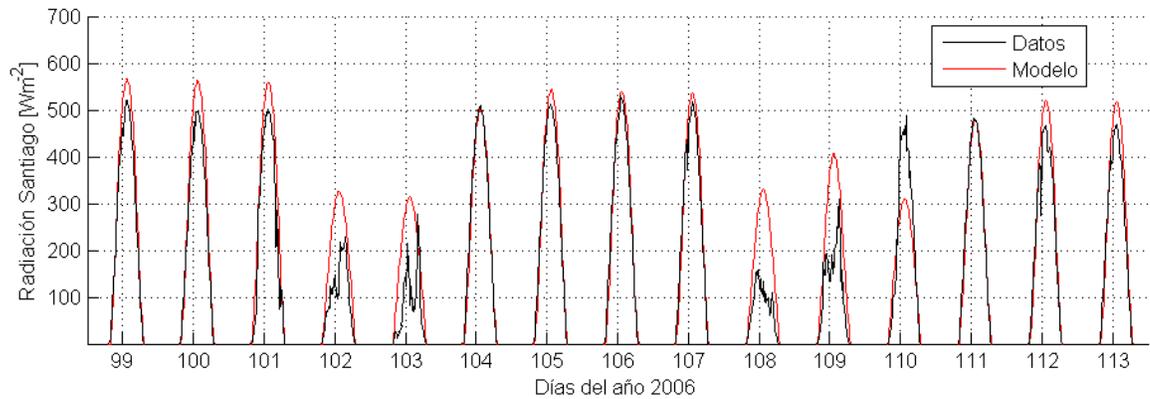


Figura 4.4 Radiación solar medida y estimada para los días entre el 9 y 23 de abril del 2006 en Santiago centro.

Capítulo 5

Conclusiones

En la primera parte de esta memoria, se presentó la modelación del auto solar, que incluyó la descripción de las fuerzas resistivas que actúan sobre el auto, la determinación de la fuerza de tracción, las pérdidas en el sistema de tracción del auto y la modelación del banco de baterías de litio. Con las fuerzas resistivas y de tracción que actúan sobre el eje longitudinal del vehículo se encontraron las ecuaciones de movimiento del auto en ese eje.

Las pérdidas de potencia, existentes en el sistema de tracción del auto, se modelaron con dos componentes fenomenológicas y una empírica, que son funciones de la potencia en el eje y de la velocidad del vehículo. Los parámetros de este modelo fueron determinados utilizando datos de pérdidas entregados por el fabricante del motor – controlador y aplicando el método de mínimos cuadrados, el error raíz cuadrático medio (RMSE) entre los datos entregados por el fabricante y el modelo obtenido fue de 8.8 [W].

En la modelación del banco de baterías se utilizaron dos modelos: en primer lugar uno simple, que sólo describe la forma en que se almacena o utiliza la energía disponible en el banco de baterías y en segundo lugar, se utilizó el modelo equivalente simplificado de parámetros concentrados de la batería de litio, que permitió modelar la tensión del banco en sus bornes. En ambos modelos se utilizó el supuesto de eficiencia energética perfecta para la batería de litio.

Para utilizar el modelo equivalente simplificado de parámetros concentrados de la batería de litio, fue necesario realizar pruebas experimentales para determinar la tensión interna de la batería en función de la carga extraída. Con el método experimental denominado “tensión de relajación” se encontró la curva de tensión interna del banco de baterías. Esta curva, como prácticamente no tiene otra dependencia más que la carga extraída, es una herramienta que permite estimar el estado de carga de la batería. Cuando la batería ha estado en reposo durante un tiempo, es decir, sin corriente y la tensión en bornes ha alcanzado el equilibrio, es posible

conocer su carga disponible midiendo la tensión en bornes, la cual es interpretada como tensión interna. Como trabajo futuro se propone implementar un método de estimación en línea de la tensión interna de la batería, con el objetivo de estimar el estado de carga del banco sin la necesidad de tener la batería en reposo.

Con la tensión interna en función de la carga ya determinada, se compararon datos reales de la tensión en bornes de la batería con datos estimados por el modelo, utilizando una corriente variable, en esta comparación se observó un muy buen desempeño del modelo, dando como resultado que el error raíz cuadrático medio (RMSE) fue de 0.099 [V], prácticamente equivalente al error que existe en la medición de la tensión. Se realizó una segunda comparación de datos reales de la tensión de la batería con datos estimados por el modelo, pero ahora utilizando una corriente constante de 8 [A] (equivalente a un octavo de la capacidad del banco) que descargó completamente el banco. En esta comparación, a partir de los 60 [Ah] de carga extraída, el modelo comenzó a sobre estimar la tensión, lo que en definitiva significa que el modelo sobre estima la capacidad que tiene el banco en estas condiciones de descarga.

El modelo del auto desarrollado, ha servido para analizar el problema de conducción óptima de un vehículo solar que debe recorrer una trayectoria dada en tiempo mínimo.

En primer lugar, el modelo simple desarrollado para el vehículo y tres grupos de supuestos se utilizaron para analizar el problema de optimización en una forma simplificada, lo que permitió encontrar soluciones analíticas para cada uno de estos grupos de supuestos.

Cuando se considera el primer grupo de supuestos, es decir, cuando las restricciones en los estados no se alcanzan, la potencia solar sólo depende del tiempo y un sistema de tracción perfectamente eficiente; el control óptimo presenta tres fases posibles. Las dos primeras, corresponden a situaciones en que las restricciones en la acción de control (potencia P_b en las baterías hacia el sistema de tracción) se alcanzan. En la primera fase, la acción de control es mínima, es decir, se debe regenerar al máximo y en la segunda fase la acción de control es la máxima admisible, es decir se debe inyectar la máxima potencia al sistema de tracción.

La tercera fase del control óptimo, bajo estos supuestos, sugiere que el auto siga una velocidad de referencia que depende de la magnitud de la velocidad del viento. Tomando en cuenta los órdenes de magnitud de los parámetros de un auto solar, la velocidad óptima decrece a medida que la velocidad del viento en contra se incrementa. En el caso de no existir viento durante el recorrido o velocidad del viento constante, lo óptimo es mantener una velocidad constante durante esta fase.

Considerando el segundo grupo de supuestos (las restricciones en los estados no se alcanzan, el sistema de tracción es perfectamente eficiente y la potencia solar depende del tiempo y de la posición del vehículo), se planteó el problema de encontrar el óptimo. En este escenario, el control óptimo tiene tres fases y difiere con el caso anterior sólo en la tercera, en donde las variaciones espaciales en la potencia solar influyen en la determinación de la velocidad óptima del vehículo. El control óptimo en esta fase consiste en permanecer durante un mayor período de tiempo en las zonas de la ruta donde la potencia solar es mayor, permitiendo incrementar la energía solar captada por el vehículo y con ello, disminuir el tiempo total del recorrido.

Con este resultado se concluye que el uso óptimo de la energía en un vehículo solar no consiste, como se podría pensar, en minimizar la energía consumida para recorrer una trayectoria dada, como ocurre en el caso del control óptimo para trenes. Un auto solar, además de consumir, capta energía, de manera que realizar variaciones de velocidad que permitan absorber mayor cantidad de energía a través del panel, puede ser favorable para el objetivo de recorrer una ruta, en tiempo mínimo.

En un tercer grupo de supuestos, se considera la posibilidad de que la restricción inferior en el estado de energía en el banco de baterías se alcance. En ese caso, el control óptimo tiene una cuarta fase. Como se ha alcanzado la restricción de energía mínima para el banco de baterías, éste no puede seguir descargándose, esto implica que, durante esta cuarta fase, la potencia solar adquirida por el panel se utiliza íntegramente en el consumo del sistema de tracción y la electrónica del auto, es decir, que la potencia solar captada determina la velocidad del vehículo.

Para analizar el problema de optimización, considerando las pérdidas en el sistema de tracción y el modelo completo de baterías, se utilizó un planteamiento numérico, se recurrió al método de optimización dinámica inversa y el software para optimización no lineal con restricciones (NLP) “fmincon” del Optimization Toolbox de Matlab. Con el método de optimización inversa se tuvo la ventaja que, al utilizar el estado de velocidad como parámetros desconocidos a ser determinado, es más fácil dar una condición inicial cercana al óptimo, que si se utilizaran directamente la variable de control $u = P_b$ como parámetro desconocido.

Considerando las pérdidas en el sistema de tracción, se analizaron diferentes casos de interés tales como: aceleración desde el reposo, pendiente positiva, pendiente negativa y una ruta real de 99.3 km.

En el caso de aceleración desde el reposo, el control óptimo evita incrementar las pérdidas en el sistema de tracción, para acelerar el vehículo no es óptimo inyectar la máxima potencia posible (a diferencia de lo que ocurre al considerar un sistema de tracción perfectamente eficiente), debido a que a bajas velocidades las pérdidas son elevadas, inyectar la máxima potencia no es conveniente, puesto que incrementa las pérdidas.

Al enfrentar una pendiente positiva, para un recorrido óptimo, el auto acelera antes de comenzar la pendiente y durante toda la pendiente desacelera para luego retomar la velocidad constante. Si acelerara o mantuviese velocidad constante durante la pendiente positiva, las pérdidas en el sistema de tracción se incrementarían. Al enfrentar pendientes negativas, el control óptimo indica lo contrario al caso anterior, desacelerar antes de comenzar el declive y durante la pendiente acelerar con la fuerza gradiente a su favor y al finalizar la pendiente, retomar la velocidad de equilibrio.

Se ha visto que al analizar la forma más simplificada del problema de optimización (considerando que las restricciones en los estados no se alcanzan, el sistema de tracción es perfectamente eficiente, la potencia solar depende sólo del tiempo y la velocidad del viento es nula), el control óptimo consiste en mantener una velocidad constante, el procedimiento de ir paso a paso agregando aspectos que acercan el análisis a la situación real, ha permitido comprender los diferentes motivos por los cuales realizar variaciones en la velocidad, conduce a un resultado óptimo, estos motivos son:

- Variaciones en la velocidad del viento

La fuerza aerodinámica depende del cuadrado de la velocidad del auto relativa a la componente de viento, que es longitudinal con respecto al eje del auto. Si hay variaciones en la velocidad del viento, es posible reducir el consumo del vehículo debido a la fuerza aerodinámica realizando variaciones en la velocidad del auto.

- Presencia de pendientes en la ruta

La presencia de pendientes en la ruta, tienen influencia únicamente por la existencia de ineficiencias, tanto en la batería, como en el sistema de tracción. Las variaciones en la velocidad del auto permiten reducir las pérdidas, con respecto a las pérdidas que se producen al mantener velocidad constante, permitiendo disponer de mayor energía para el movimiento del vehículo y reducir el tiempo de recorrido.

- Potencia solar dependiente de la posición

Cuando la potencia solar presenta variaciones con respecto a la posición, variar la velocidad para mantenerse durante más tiempo en las zonas de la ruta con mayor radiación solar y menos tiempo en las con menor radiación, permite al auto solar captar mayor cantidad de energía, que si llevara una velocidad constante. Al disponer de más energía se incrementa la velocidad promedio y se reduce el tiempo total de recorrido.

- Tensión variable en banco de batería

Producto de que la tensión en el banco es variable, dependiendo del estado de carga, la corriente será diferente para un mismo nivel de potencia entregada por las baterías y en consecuencia las pérdidas en ellas, serán distintas. Por este motivo, la velocidad constante en ningún caso será la óptima, puesto que se requerirá pequeñas y

lentas variaciones de velocidad (prácticamente no son apreciables) para reducir las pérdidas debidas a la corriente por el banco de baterías.

A pesar de los motivos que se han dado, por los cuales se deben realizar variaciones de velocidad para obtener un óptimo, se ha visto que estas variaciones tienen poca influencia en reducir significativamente el tiempo total de recorrido en una ruta.

En el ejemplo de control óptimo con velocidad de viento variable se mostró que la reducción del tiempo total de recorrido en una ruta de 345 km fue de 0.05% con respecto a mantener una velocidad constante durante la trayectoria. Esta reducción en el tiempo total de recorrido es despreciable.

A pesar de realizar variaciones de velocidad para evitar el incremento de las pérdidas en el sistema de tracción, el ejemplo de control óptimo en una ruta real, muestra que la reducción en el consumo energético total del vehículo, comparado con el consumo que implica mantener una velocidad constante, no es en absoluto significativo, en el ejemplo mostrado, esta reducción fue de tan sólo un 0.2% y la diferencia en el tiempo total de recorrido, entre la estrategia óptima y de velocidad constante, tampoco fue significativa, tan sólo de un 0.21%.

Cuando la potencia solar varía con la posición, realizar variaciones en la velocidad permite captar mayor energía solar y utilizarla para reducir el tiempo total de recorrido. En el ejemplo mostrado, se consideró una ruta de 100 km en donde la potencia solar varió hasta un 30% con la posición. La estrategia óptima permitió reducir solamente un 0.12% el tiempo total de recorrido comparado con la estrategia de mantener una velocidad constante.

Debido a que las variaciones de velocidad que se realizan para alcanzar el óptimo no permiten reducir en forma importante el tiempo total de recorrido, aplicar una estrategia de velocidad constante es bastante adecuado y simple de implementar. Por esto, se sugiere que para el control del motor del vehículo se haga un control por referencia de velocidad y no de torque.

Para escoger la velocidad a la cual el vehículo recorrerá la trayectoria es importante tener una predicción de la radiación solar, que determinará con cuanta energía se dispondrá. Debido a que la potencia consumida por el vehículo, en régimen permanente, es una función cúbica con la velocidad, el consumo del vehículo es muy sensible a la velocidad escogida. Teniendo la predicción de la potencia solar y elegida la velocidad, contar con el modelo del vehículo es importante para poder predecir su comportamiento y observar, por ejemplo, los niveles de tensión del banco, cuidando que no bajen de la tensión de corte, para no dañar las baterías.

Para predecir la radiación solar se puede utilizar el modelo que proponen Spokas y Forcella, el cual tiene la ventaja que los datos de entrada del modelo son simples de obtener. De acuerdo con este modelo la radiación solar depende de la amplitud térmica del día (diferencia entre temperatura máxima y mínima del día), de la existencia de precipitaciones del día anterior y presente, de la posición geográfica del lugar y del día del año. Luego, utilizando este modelo, junto con una predicción de la amplitud térmica y existencia de precipitaciones para un día, se puede obtener una predicción de la radiación solar.

Referencias

- [1] ATMEL CORPORATION 2006. AVR443 “Sensor-based control of three phases Brushless DC motor” <http://www.atmel.com>. Atmel Corporation. [consulta: 2007]
- [2] BERGVELD, H. J. 2001. “Battery Management System. Design by Modelling”. Tesis para optar al grado de doctor. Enschede, Universidad de Twente.
- [3] BERGVELD, H. J. 2001. “Direct measurements for Li-ion batteries: the EMF method”. EN: “Battery Management System. Design by Modelling” Tesis para optar al grado de doctor. Enschede, Universidad de Twente. pp 212 – 219.
- [4] BERGVELD, H. J. 2001. “Possible State of Charge indication methods”. EN: “Battery Management System. Design by Modelling” Tesis para optar al grado de doctor. Enschede, Universidad de Twente. pp 193 – 204.
- [5] BRYSON, A. E. and HO, C.Y. 1969. “Applied Optimal Control”. Waltham, MA. Ginn and Company.
- [6] BRYSON, A. E. 1999. “Dynamic Optimization”. Menlo Park, CA. Addison Wesley Longman, Inc.
- [7] CARROLL, D. 2003. “The Winning Solar Car”. Warrendale, SAE International.
- [8] CLARK, S. K. and DODGE, R. N. 1979. “A Handbook for the Rolling Resistance of Pneumatic Tires”. Ann Arbor, Industrial Development Division, Institute of Science and Technology, The University of Michigan.
- [9] DANIELS, M.W. and KUMAR, P.R. 1999. “Racing With the Sun: The Optimal Use of the Solar Powered Automobile”. Control System Magazine IEEE, Volume 19 (3): 12-22.
- [10] DUARTE, M. y HADDAD, N. 1982. “Determinación de trayectorias que reducen el consumo de energía en un ferrocarril metropolitano”. En: Anales del 5º Congreso de la Asociación Chilena de Control Automático, Volumen 1: 280-299.
- [11] EMADI, A. 2005. “Energy – Efficient Electric Motors”. 3ª ed. New York. Marcel Dekker.
- [12] FANCHER, P. S. and WINKLER, C. B. 1984. “Retarders for Heavy Vehicles: Phase III Experimentation and Analysis; Performance, Brake Savings and Vehicle Stability”. Ann Arbor, Transportation Research Institute, The University of Michigan.
- [13] FERDINAND VERHULST. 1996. “Nonlinear Differential equations and Dynamical System”. 2ª ed. Springer.

- [14] GARREAUD, R. y MERUANE, C. 2005. “Módulo 2. Flujos Radiativos”. Proyecto MECESUP 0303. Departamento de Geofísica, Universidad de Chile.
- [15] GILLESPIE, T. 1992. “Fundamentals of Vehicle Dynamics”. Warrendale, Society of Automotive Engineers, Inc.
- [16] GONZÁLEZ, G. 2006. “Identificación de Sistemas. Apuntes del curso EL63E Optimización en Control Automático”. Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Chile.
- [17] GRUPO DE METEOROLOGÍA. “Datos obtenidos del Grupo de Meteorología, Departamento de Geofísica de la Universidad de Chile”. ftp://pillan.dgf.uchile.cl/pub/rgarreau/ESTACION_DGF/. [consulta: 2008]
- [18] HESTENES, M. R. 1966. “Calculus of Variations and Optimal Control Theory”. New York. John Wiley & Sons.
- [19] HOANG, H., POLIS M. and HAURIE A. 1975. “Reducing Energy consumption through Trajectory Optimization for a Metro Network”. IEEE Transactions on Automatic Control, Volume 20 (5): 590 – 595.
- [20] HOWLETT, P.G. and CHENG, J. 1997. “Optimal driving strategies for a train on a track with continuously varying gradient”. Journal of the Australian Mathematical Society, Volume 38 (3): 388-410.
- [21] KOKAM. “SLPB 75106100(8 0Ah) DATASHEET”. http://www.kokam.com/english/product/battery_main.html. [consulta: 2007]
- [22] LEE, J., NAM, O., KIM, J., CHO, B., LEE, J., YUN, H., CHOI, S., KIM, K., KIM, J.H., JUN, S. 2006. “Modeling and Real Time Estimation of Lumped Equivalent Circuit Model of a Lithium Ion Battery”. IEEE, Power Electronics and Motion Control Conference. 12th International: 1536 – 1540.
- [23] LJUNG, L. 1999. “System Identification, Theory for the User”. 2^a ed. Upper Saddle River, N.J. Prentice Hall.
- [24] NEW GENERATION MOTOR CORPORATION. 2002. “NGM Motor Specs” <http://www.ngmcorp.com> [consulta: 2007]
- [25] NEW GENERATION MOTOR CORPORATION. 2002. “SC-M150-00X Electric Motor Operating Manual” <http://www.ngmcorp.com> [consulta: 2007]
- [26] NEW GENERATION MOTOR CORPORATION. 2003. “EVC402 Controller Operating Manual” <http://www.ngmcorp.com> [consulta: 2007]
- [27] PANASONIC WORLD SOLAR CHALLENGE 2006. “Regulations of the Panasonic World Solar Challenge 2007”. <http://www.wsc.org.au/Be.Part.of.It/Technical.Centre/regulations.html>. [consulta: 2007]

- [28] PANASONIC WORLD SOLAR CHALLENGE 2006. “Regulations of the Panasonic World Solar Challenge 2007. Part 2: Technical Regulations”. [http://www.wsc.org.au/Be.Part.of.It/ Technical.Centre/regulations.html](http://www.wsc.org.au/Be.Part.of.It/Technical.Centre/regulations.html). [consulta: 2007]
- [29] RASHID, M. 2001. “Power Electronics Handbook”. Pensacola, Florida. Academic Press.
- [30] SPOKAS, K. and FORCELLA F. 2006. “Estimating hourly incoming solar radiation from limited meteorological data”. *Weed Science*. Volume 54: 182 – 189.
- [31] STULL, R. 2000. “Meteorology for Scientist and Engineers”. 2ª ed. Pacific Grove, CA. Brooks Cole.
- [32] SULLIVAN, C. and POWERS, M. 1993. “A high efficiency maximum power point tracker for photovoltaic arrays in a solar powered race vehicle”. *IEEE Power Electronics Specialists Conference*. 24th Annual: 574 – 580.
- [33] TALUKDAR, S. and KOO, R. 1979. “Multiobjective Trajectory Optimization for Electric Trains”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Volume 24 (6): 888 – 893.
- [34] TAMAI, G. 1999. “The Leading Edge”. Cambridge, Robert Bentley, Inc. Automotive Publishers.
- [35] THE MATHWORKS. 2008. “Optimization Toolbox 4. User’s Guide”. <http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/helpdesk.html>. [consulta: 2007]
- [36] VARGAS, M. 2007. “Auto Solar Eolian. Sistema de Comunicaciones y Monitoreo. Configuración del Sistema Eléctrico de Potencia”. Informe del curso Taller de Desarrollo Tecnológico EL680. Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Chile.
- [37] WRIGHT, G. 1997. “Optimal Energy Management for Solar Car Race”. En: *IEEE 39th Midwest symposium on Circuits and System*. Volume 3: 1011 - 1014.
- [38] YEDAMALE, P. 2003. AN885 “Brushless DC (BLDC) Motor Fundamentals” <http://www.microchip.com>. Microchip Technology Inc. [consulta: 2007]