



**UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA**

**ESTUDIO NUMÉRICO DE LA TURBULENCIA EN ANEURISMAS CEREBRALES**

**MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO**

**FABRIZIO ALEJANDRO GÓMEZ LÓPEZ**

PROFESOR GUÍA:  
ÁLVARO VALENCIA MUSALEM

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
WILLIAMS CALDERÓN MUÑOZ  
RODRIGO HERNÁNDEZ PELLICER

SANTIAGO DE CHILE  
OCTUBRE 2010

## Resumen Ejecutivo

Un aneurisma intracraneal es una dilatación de una porción de la pared de una arteria del cerebro. La probabilidad de ruptura de los aneurismas cerebrales es baja; sin embargo, cuando ella ocurre las consecuencias son fatales en un alto porcentaje de los casos. Para comprender el mecanismo de formación, crecimiento y ruptura de los aneurismas, es de suma importancia conocer la fluidodinámica asociada a la sangre que fluye por la arteria enferma. De esta forma aparece el interés de realizar estudios numéricos de la fluido dinámica de la sangre en aneurismas a través de análisis CFD.

Este tema de memoria, se desarrolla en el marco del último año del proyecto FONDECYT titulado “Flow Dynamics and Arterial Wall Interaction in Realistic Cerebral Aneurysm Models”, proyecto enfocado a la simulación numérica de la fluidodinámica de los aneurismas cerebrales. En particular, en este trabajo de título se busca conocer la influencia de la turbulencia sobre la mecánica de fluidos del aneurisma.

Se modelaron y simularon 12 casos, estudiando la influencia de la turbulencia a través 5 modelos turbulentos del tipo  $k - \epsilon$  y  $k - \omega$ . Se utilizaron dos geometrías en el estudio realizado. Se concluyó que al estudiar la turbulencia con un modelo del tipo  $k - \epsilon$  aparecen diferencias significativas respecto del modelo laminar. Se registran principalmente diferencias en los máximos de los esfuerzos de corte sobre las paredes de los aneurismas. Haciendo el mismo análisis con el modelo  $k - \omega$  no se registraron diferencias importantes con el modelo laminar. Se concluyó entonces que las diferencias registradas entre el modelo turbulento  $k - \epsilon$  y el modelo laminar están asociadas a la dificultad del modelo  $k - \epsilon$  para simular flujos con baja velocidad. El modelo  $k - \omega$ , en cambio, contiene en su formulación matemática correcciones para flujos con baja velocidad que permiten que los resultados no difieran de forma significativa del modelo laminar.

En definitiva se concluyó que la turbulencia no afecta significativamente la fluidodinámica de los aneurismas cerebrales. En particular, no se forman estructuras vorticiales adicionales ni las existentes se intensifican, además; los vectores de velocidad no varían, y los esfuerzos de corte sobre la pared y las presiones no cambian respecto a la formulación laminar.

Se simuló también la fluidodinámica de un aneurisma utilizando un modelo estacionario que permitiera estimar los valores máximos y promedio del flujo. Se obtuvo que este método de aproximación se aleja mucho de los resultados obtenidos por las simulaciones tradicionales con modelos no estacionarios. Por ello se descarta la estrategia de simulación estacionaria.

# Índice

---

<b>Índice de Figuras</b>	<b>v</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>ix</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	1
1.2.1. Objetivo General . . . . .	1
1.2.2. Objetivos Específicos . . . . .	1
1.3. Alcances . . . . .	2
<b>2. Antecedentes</b>	<b>3</b>
2.1. Antecedentes Biológicos . . . . .	3
2.1.1. Historia Natural de los Aneurismas Cerebrales . . . . .	4
2.1.2. Evolución de la Enfermedad . . . . .	5
2.1.3. Tipos de Aneurismas . . . . .	6
2.2. Antecedentes Teóricos Hemodinámicos . . . . .	7
2.2.1. Ecuaciones de Navier Stokes . . . . .	7
2.2.2. Hipótesis Flujo Incompresible . . . . .	7
2.2.3. Fluido no-Newtoniano . . . . .	8

2.2.4. Número de Reynolds . . . . .	9
2.3. Modelación Numérica de la Turbulencia . . . . .	9
2.4. Modelos de Turbulencia $k - \epsilon$ . . . . .	10
2.4.1. Modelo $k - \epsilon$ standard . . . . .	11
2.4.2. Modelo RNG $k - \epsilon$ . . . . .	12
2.4.3. Modelo Realizable $k - \epsilon$ . . . . .	14
2.5. Modelos de Turbulencia $k - \omega$ . . . . .	16
2.5.1. Modelo $k - \omega$ Standard . . . . .	17
2.5.2. Modelo Shear Stress Transport (SST) $k - \omega$ . . . . .	21
2.6. Tratamiento de Zona Cercana a la Pared en Flujos Turbulentos . . . . .	24
2.7. Condiciones de Borde . . . . .	28
2.7.1. Velocidad de Entrada . . . . .	28
2.7.2. Presión a la Salida de la Arteria . . . . .	31
2.7.3. Aproximación Paredes Rígidas . . . . .	33
2.7.4. Condiciones de Borde de Turbulencia . . . . .	33
<b>3. Metodología</b>	<b>35</b>
3.1. Presentación de las Geometrías . . . . .	35
3.2. Escalamiento de las Geometrías Utilizadas . . . . .	36
3.3. Mallado del Modelo . . . . .	38
3.4. Simulación en Fluent . . . . .	39
3.5. Metodología Específica para Fluent . . . . .	41
<b>4. Resultados</b>	<b>44</b>
4.1. Prueba de Malla . . . . .	44

4.2. Validación del Modelo . . . . .	49
4.3. Casos Simulados . . . . .	50
4.4. Resultados en Geometría 1 . . . . .	50
4.4.1. Condición Fluido Newtoniano . . . . .	52
4.4.2. Resultados Transientes . . . . .	54
4.4.3. Resultados en Sístole . . . . .	59
4.4.4. Resultados en Zona Cercana a la Pared . . . . .	67
4.4.5. Simulación con Perfil de Entrada Plano . . . . .	68
4.4.6. Simulación con Modelo Estacionario . . . . .	69
4.5. Resultados en Geometría 2 . . . . .	71
4.5.1. Resultados Transientes . . . . .	72
4.5.2. Resultados en Sístole . . . . .	74
4.6. Simulación en Sístole con otros Modelos de Turbulencia . . . . .	81
4.7. Tiempo de Residencia Dentro de la Arteria . . . . .	82
<b>5. Análisis y Discusión de Resultados</b>	<b>84</b>
5.1. Validación del Modelo . . . . .	84
5.2. Fluidodinámica de la Geometría 1 . . . . .	84
5.3. Fluidodinámica de la Geometría 2 . . . . .	85
5.4. Influencia de la Turbulencia en Simulaciones . . . . .	85
5.5. Diferencias entre Modelos de Turbulencia . . . . .	87
5.6. Influencia del Pulso de Entrada Plano . . . . .	87
5.7. Simulación con modelo Estacionario . . . . .	88
<b>6. Conclusiones</b>	<b>90</b>

<b>Bibliografía</b>	<b>92</b>
<b>A. Rutinas en C para Pulsos de Fluent</b>	<b>95</b>
<b>B. Resultados en Sístole Caso 05. Standard <math>k - \omega</math> Geo. 1</b>	<b>100</b>
<b>C. Resultados en Sístole Caso 12. Standard <math>k - \omega</math> Geo. 2</b>	<b>101</b>

## Índice de Figuras

---

2.1. Esquema de aneurismas cerebrales . . . . .	3
2.2. Aneurisma en el círculo de Willis . . . . .	4
2.3. Esquema capas de las arterias . . . . .	5
2.4. Tipos de aneurismas cerebrales . . . . .	6
2.5. Tipos de aneurismas saculares: a) Lateral, b) Bifurcación, c) Terminal . . . . .	7
2.6. Subdivisiones en la zona cercana a pared . . . . .	25
2.7. Perfiles del pulso de entrada a la arteria . . . . .	30
2.8. Pulso de velocidad a la entrada de la arteria . . . . .	31
2.9. Pulso de presión a la salida de la arteria . . . . .	32
3.1. Presentación de la Geometría N°1. A la izquierda en su formato 3D de imagenes médicas, a la derecha la geometría reconstruida y utilizada en Fluent. . . . .	36
3.2. Presentación de la Geometría N°2. A la izquierda en su formato 3D de imagenes médicas, a la derecha la geometría reconstruida y utilizada en Fluent. . . . .	36
3.3. Dimensiones reales de la arteria . . . . .	37
3.4. Escalamiento de geometrías utilizadas . . . . .	38
3.5. Tipo elementos disponibles en Gambit . . . . .	39
3.6. Ventana gráfica del software Gambit . . . . .	39
3.7. Opciones del solver utilizadas en Fluent . . . . .	41
3.8. Opciones del menú Solutions Control utilizadas en Fluent . . . . .	41

4.1. Prueba malla WSS sobre superficie del aneurisma . . . . .	45
4.2. Prueba malla WSS sobre superficie del aneurisma . . . . .	46
4.3. Prueba malla de la velocidad promedio sobre volumen de la geometría . . . . .	46
4.4. Prueba malla de la velocidad promedio sobre volumen de la geometría . . . . .	47
4.5. Convergencia del WSS medido en un punto del volumen para distintas mallas . . . . .	48
4.6. Prueba malla WSS sobre superficie del aneurisma. Caso modelo turbulento Standard $k - \epsilon$	49
4.7. Error porcentual entre caudal de entrada y salida . . . . .	50
4.8. Puntos estudiados en la geometría 1 . . . . .	51
4.9. Esquema del corte 1 realizado sobre geometría 1 . . . . .	52
4.10. Esquema del corte 2 realizado sobre geometría 1 . . . . .	52
4.11. Esquema del corte 3 realizado sobre geometría 1 . . . . .	52
4.12. Diferencias entre modelo Newtoniano y de Carreau en el pto a . . . . .	53
4.13. Diferencias entre modelo Newtoniano y de Carreau en la cima . . . . .	54
4.14. WSS medido en diferentes puntos del aneurismas. Caso 01 . . . . .	55
4.15. WSS medido en el pto a. Caso 01, 02 y 05 . . . . .	56
4.16. WSS medido en el pto b. Caso 01, 02 y 05 . . . . .	56
4.17. WSS medido en la cima. Caso 01, 02 y 05 . . . . .	57
4.18. WSS sobre pto b. Diferencias registradas entre distintos modelos del tipo $k - \epsilon$ . Casos 02, 03 y 04. . . . .	57
4.19. Presión Estática medida en 3 puntos del aneurisma. Caso 01. . . . .	58
4.20. Presión estática medida en la cima del Aneurisma. Caso 01, 02 y 03. . . . .	58
4.21. Energía cinética turbulenta en el pto a. Caso 02 y 05 . . . . .	59
4.22. Energía cinética turbulenta $k$ en la cima. Caso 02 y 05 . . . . .	59
4.23. Vectores de velocidad sobre corte 1. Comparación entre caso laminar y turbulento. Caso 01 y 02. . . . .	60

4.24. Vectores de velocidad sobre corte 2. Comparación entre caso laminar y turbulento. Caso 01 y 02. . . . .	61
4.25. Vectores de velocidad sobre corte 3. Comparación entre caso laminar y turbulento. Caso 01 y 02. . . . .	62
4.26. Contornos de presión estática sobre geometría 01. Caso 01 y 02. . . . .	63
4.27. Contornos de WSS sobre geometría 01. Caso 01 y 02. . . . .	64
4.28. Contornos de WSS sobre aneurisma 01. Caso 01 y 02. . . . .	65
4.29. Líneas de flujo en la Geometría 01 . . . . .	66
4.30. Puntos de la geometría donde se calculó $y^+$ . . . . .	67
4.31. Variaciones en WSS entre caso laminar y turbulento. Caso 08 y 09 . . . . .	68
4.32. Vectores de velocidad en el corte 3. Caso 08 y 09 . . . . .	69
4.33. Distribución de WSS en aneurisma. Caso 08 y 09 . . . . .	69
4.34. WSS con modelo estacionario versus no-estacionario. Medido en el pto $a$ . . . . .	70
4.35. WSS con modelo estacionario versus no-estacionario. Medido en el pto $b$ . . . . .	70
4.36. WSS con método estacionario versus no estacionario. Medido en la cima . . . . .	71
4.37. Puntos medidos en geometría 2 . . . . .	71
4.38. Esquema corte 4 sobre geometría 2 . . . . .	72
4.39. Esquema corte 5 sobre geometría 2 . . . . .	72
4.40. WSS medidos en 3 puntos del aneurisma. Caso 10. . . . .	73
4.41. WSS medidos en cuello del aneurisma . . . . .	73
4.42. WSS medidos en la cima del aneurisma . . . . .	74
4.43. Energía cinética turbulenta $k$ en la cima . . . . .	74
4.44. Vectores de velocidad sobre plano 4. Caso 10 y 11 . . . . .	76
4.45. Vectores de velocidad sobre plano 5. Caso 10 y 11 . . . . .	77
4.46. Presión estática sobre geometría 2. Caso 10 y 11 . . . . .	78

4.47. Contornos de WSS sobre geometría 2. Caso 10 y 11 . . . . .	79
4.48. Contornos de WSS sobre aneurisma 2. Caso 10 y 11 . . . . .	80
4.49. Pathlines de la geometría 02 . . . . .	81
4.50. Esquema de la inclusión de partículas en el flujo sanguíneo. . . . .	83

## Índice de Tablas

---

2.1. Parámetros del modelo de Carreau para Fluent . . . . .	9
2.2. Características del flujo sanguíneo . . . . .	9
2.3. Constantes empíricas del modelo Standard $k - \epsilon$ . . . . .	12
2.4. Constantes empíricas del modelo Modelo RNG $k - \epsilon$ . . . . .	14
2.5. Valores de constantes empíricas del modelo Realizable $k - \epsilon$ . . . . .	16
2.6. Constantes empíricas del modelo $k - \omega$ Standard . . . . .	21
2.7. Constantes empíricas del modelo SST $k - \omega$ . . . . .	25
2.8. Coeficientes de Fourier para formar pulso de velocidad de entrada. Tramo 1 . . . . .	31
2.9. Coeficientes de Fourier para formar pulso velocidad de entrada. Tramo 2 . . . . .	32
2.10. Coeficientes de Fourier para formar pulso de presión de salida . . . . .	33
2.11. Condiciones de borde de turbulencia . . . . .	34
3.1. Métodos numéricos utilizados en Fluent . . . . .	42
4.1. Densidades de malla en pruebas realizadas . . . . .	45
4.2. Valores de WSS medido en un punto del aneurisma para diferentes densidades de malla .	48
4.3. Densidades de malla en pruebas realizadas . . . . .	49
4.4. Matriz de simulaciones realizadas . . . . .	51
4.5. Caracterización turbulenta en sístole para geo.1 . . . . .	66
4.6. Parámetro $y^+$ medido en nodos cercanos a la pared . . . . .	68

4.7. Caracterización turbulenta en sístole para geo.2 . . . . .	81
4.8. Tiempos de residencia geo.1 . . . . .	83
4.9. Tiempos de residencia geo.2 . . . . .	83
5.1. Máximos WSS medidos en la geometría 1 . . . . .	86
5.2. Máximos WSS medidos en la geometría 2 . . . . .	86
5.3. Tiempos Computacionales asociados a los modelos utilizados . . . . .	87
5.4. Máximos WSS medidos bajo una formulación laminar y una turbulenta $k - \epsilon$ . Caso 08 y 09. . . . .	88
5.5. WSS promedio caso Est. y no Est. . . . .	89
5.6. WSS máximo caso Est. y no Est. . . . .	89

---

## Capítulo 1

### Introducción

---

#### 1.1. Motivación

La investigación a realizar se enmarca dentro de la biomecánica, campo que utilizando los conocimientos de la mecánica, la ingeniería, y otras disciplinas de la ciencia, estudia el comportamiento del cuerpo humano y trata de resolver los problemas derivados de las diversas condiciones a las que puede verse sometido. En particular, aquí se estudia la mecánica de fluidos de la sangre que fluye por arterias cerebrales que padecen de aneurismas. Se busca entender de mejor manera las condiciones que facilitan la formación, crecimiento y ruptura de los aneurismas cerebrales. Para ello, se utilizarán simulaciones numéricas que recreen las condiciones internas de un aneurisma cerebral para luego analizar los resultados de la fluidodinámica obtenida.

#### 1.2. Objetivos

##### 1.2.1. Objetivo General

- Estudiar cómo influye la turbulencia en la fluidodinámica presente en aneurismas cerebrales de casos reales, utilizando simulaciones numéricas (CFD) que recreen las condiciones dentro de las arterias cerebrales.

##### 1.2.2. Objetivos Específicos

- Simular la hemodinámica de aneurismas cerebrales extraídos de casos reales.
- Determinar para las hipótesis de trabajo; laminar y turbulenta, los parámetros fluidodinámicos de interés tales como: vectores de velocidad en la geometría, distribución de presiones, distribución de los esfuerzos de corte en las paredes y posibles estructuras vorticiales.
- Comparar la influencia de la turbulencia y del modelo turbulento utilizado en los resultados flu-

idodinámicos obtenidos.

- Estudiar la influencia de utilizar como condición de borde un perfil de entrada de velocidad de tipo parabólico en contraste con utilizar uno del tipo plano.
- Estudiar la posibilidad de simular aneurismas cerebrales con un modelo estacionario, orientado a estimar las variables máximas o promedio del flujo.

### 1.3. Alcances

- No se reconstruirán nuevas geometrías ni se estudiarán los tratamientos en aneurismas.
- Las simulaciones a realizar no considerarán el efecto de interacción fluido estructura (FSI).
- Las simulaciones considerarán las paredes arteriales como sólido rígido.
- Las simulaciones computacionales serán realizadas en el software CFD Fluent.
- Los modelos de turbulencia utilizados en las simulaciones serán del tipo RANS; tales como los modelos  $k - \epsilon$  y  $k - \omega$ .

---

## Capítulo 2

### Antecedentes

---

#### 2.1. Antecedentes Biológicos

Un aneurisma intracraneal (IA) es una dilatación y/o adelgazamiento de una porción de la pared de una arteria del cerebro (Fig. 2.1). Se presentan frecuentemente en bifurcaciones o ramas del círculo de Willis que corresponde al conjunto de las principales arterias cerebrales (Fig. 2.2). Se estima que en los Estados Unidos alrededor de 27.000 personas sufren cada año hemorragias subaracnoidas (HSA), resultantes de rupturas de aneurismas cerebrales [1]. Este tipo de hemorragia se caracteriza por ubicarse en el espacio subaracnoideo del cerebro y presentar una mortalidad de entre un 20% a un 40%. De esta forma, la ruptura de aneurismas cerebrales provoca frecuentemente catastróficas consecuencias causando severa morbilidad y alta tasa de mortalidad [2]. A pesar de los recientes avances en el diagnóstico y tratamientos de los AI, aún no se logran entender a cabalidad los mecanismos de su formación, desarrollo y ruptura.

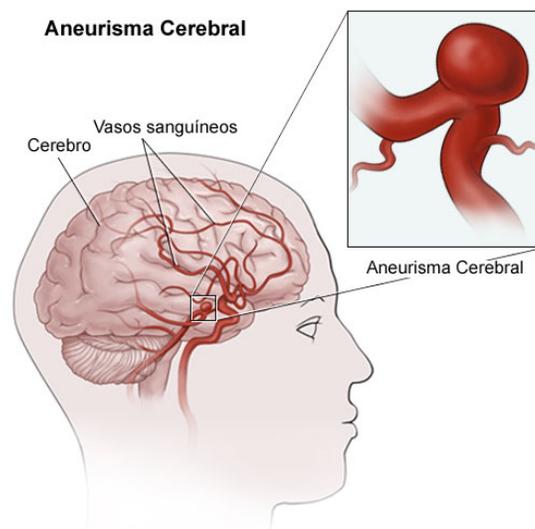


Figura 2.1: Esquema de aneurismas cerebrales

Se debate aún sobre las causas exactas de la enfermedad, puesto que hay factores que hacen sospechar de una etiología adquirida, mientras que otros apoyan la teoría genética. Esta última se sustenta en la aparición de aneurismas asociados a enfermedades del tejido conectivo, y en los casos de aneurismas en familiares cercanos. Como causas adquiridas se considera la exposición al tabaco, el alcohol y algunas drogas [3].

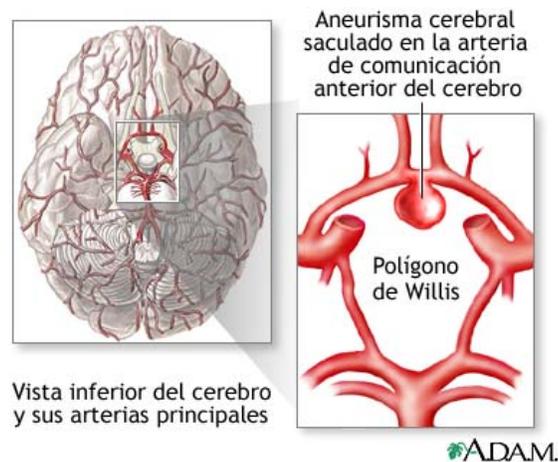


Figura 2.2: Aneurisma en el círculo de Willis

### 2.1.1. Historia Natural de los Aneurismas Cerebrales

La prevalencia de aneurismas en la población general se ha estimado entre un 0,5 – 1%, con un riesgo anual de sangrado de entre 1 – 2%. Estas lesiones pueden ser diagnosticadas en dos situaciones. Por un lado que se encuentre el aneurisma en pacientes que nunca han tenido una HSA y el hallazgo ha sido fortuito al investigar un síntoma no específico mediante algún procedimiento de diagnóstico; o bien, en los casos de despistaje por sospecha de aneurismas. El tratamiento ideal en todos estos casos todavía es objeto de discusión y para clarificar los resultados será necesario esperar la finalización de un estudio prospectivo que se está llevando a cabo. En varios estudios se reportó que el mayor riesgo de sangrado se relaciona con el tamaño del aneurisma. Cuando miden entre 5 – 7mm, la incidencia de sangrado es mayor, sin que se excluya la posibilidad de sangrado de los aneurismas de menor tamaño. Sin embargo, en un análisis de la literatura de los artículos publicados hasta la fecha referidos a aneurismas incidentales, no se encontró variable alguna que fuera predecible de sangrado [4]. La morbilidad encontrada fue del 4% y la mortalidad del 1%.

Por otra parte, diferentes estudios han mostrado que tras una HSA, existe un riesgo de resangrado de un 3-4% en las primeras 24 horas, un riesgo de un 1-2% durante el primer mes y alrededor de un 3% después de los tres primeros meses [5]. En los casos que se trataron conservadoramente, las

incidencias de resangrado registradas en el primer mes oscilaron entre un 20-30 %. La mortalidad ligada al resangrado se cifra en un 70 % [6].

### 2.1.2. Evolución de la Enfermedad

Las arterias cerebrales se clasifican dentro de las arterias musculares, las cuales están constituidas por tres capas, desde la más exterior a la más interior son: adventicia, media e íntima (Fig. 2.3). La adventicia es rica en colágeno; en tanto que la media es una capa prominentemente muscular y la íntima es una capa elástica que está diseñada para soportar las presiones pulsantes del flujo sanguíneo [7]. Cuando se forma el aneurisma, sus paredes arteriales se van degradando. Las capas íntimas y adventicias prácticamente desaparecen y en vez de eso se genera tejido conectivo. Además, el espesor de la pared del aneurisma es por lo menos un orden de magnitud menor que el de la arteria sana, de hecho, las paredes de los aneurismas son transparentes. La ruptura se presenta, generalmente, en el domo del aneurisma. Es poco frecuente que se presente en las paredes laterales y menos aún en el cuello.

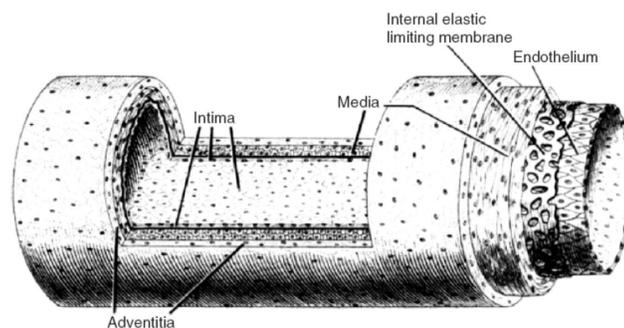


Figura 2.3: Esquema capas de las arterias

Se sabe poco en cuanto al proceso de crecimiento de aneurismas. Se postula que ciertas inestabilidades en el sólido pueden facilitar el crecimiento acelerado de la malformación, como también la presencia de resonancias hemodinámicas provocadas por vorticidades al interior de los sacos aneurismales [8]. Es interesante notar este efecto principalmente sobre aneurismas terminales, los cuales reciben el flujo pulsante directamente en el interior del aneurisma. En estos casos la turbulencia se genera incluso a bajas velocidades. Este efecto se ha corroborado midiendo durante cirugías el ruido sobre las paredes en este tipo aneurismas [8]. En estas circunstancias los pacientes están bajo la influencia de drogas que bajan su presión hasta 50 mmHg. Inclusive en estas condiciones es posible escuchar el ruido provocado por la turbulencia dentro de los sacos aneurismales. Lo anterior, avalaría la hipótesis de que un posible efecto de resonancia generaría el crecimiento

de los aneurismas.

### 2.1.3. Tipos de Aneurismas

Según su forma los aneurismas se pueden clasificar en tres tipos: saculares, fusiformes y disecantes. Tanto a los aneurismas saculares como los fusiformes se les llama aneurismas verdaderos, puesto que representan una dilatación de la pared arterial. En cambio, a los aneurismas disecantes se les llama aneurismas falsos, puesto que en realidad se producen debido a un rasgamiento de la capa interna que posibilita que la sangre fluya entre las capas arteriales. En la Fig. 2.4 se ilustran los tipos de aneurismas. Entre los aneurismas saculares se distinguen tres categorías dadas por la ubicación de la dilatación. Se tienen los aneurismas terminales, laterales y de bifurcación, mostrados en la Fig. 2.5. La historia natural de los aneurismas puede dividirse en tres etapas: patogénesis (formación), crecimiento y ruptura. En general, esta enfermedad no presenta síntomas hasta bien avanzada su evolución. Se estima que estos no aparecen hasta que el diámetro del aneurisma ha llegado a unos 6-11 mm [9]. Alcanzada esta condición el riesgo de rompimiento es muy alto.

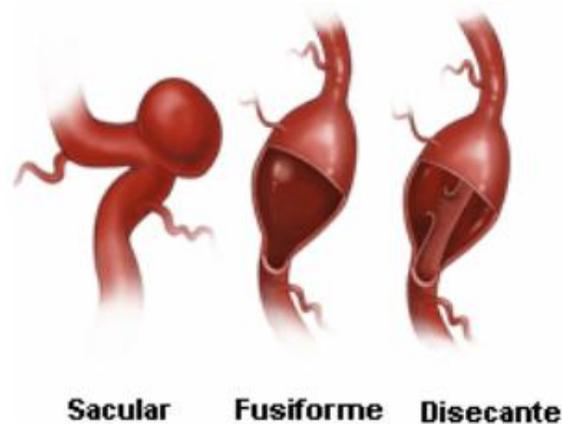


Figura 2.4: Tipos de aneurismas cerebrales

Se sabe que las arterias cerebrales son más propensas a desarrollar aneurismas que el resto de las del cuerpo, puesto que las paredes de éstas son más delgadas y no poseen una capa externa que las soporte [9].



Figura 2.5: Tipos de aneurismas saculares: a) Lateral, b) Bifurcación, c) Terminal

## 2.2. Antecedentes Teóricos Hemodinámicos

### 2.2.1. Ecuaciones de Navier Stokes

La técnica general para obtener las ecuaciones que gobiernan la fluidodinámica es considerar un pequeño volumen de control a través del cual se mueve el fluido. Se impone la conservación de la masa, y que la tasa de cambio de cada componente del momentum lineal sea igual a cada componente de la fuerza aplicada. Esto produce cinco ecuaciones que combinadas con una ecuación de estado, proveen de suficiente información para la determinación de las seis variables:  $p$ ,  $T$ ,  $\rho$  y  $\vec{v}$  en sus tres componentes. De este razonamiento se deducen las ecuaciones de Navier-Stokes, obteniendo una ecuación de la conservación de masa (o continuidad) (Ec. 2.1); y una ecuación de conservación de momentum (Ec. 2.2).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}^T - \vec{\tau}) = \vec{f}^B \quad (2.2)$$

En estas ecuaciones,  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\vec{v}$  su velocidad,  $\vec{\tau}$  su tensor de esfuerzos, y  $\vec{f}^B$  el vector de fuerzas externas actuantes sobre el fluido. El tensor de esfuerzos se define como:

$$\vec{\tau} = -(p + \lambda \nabla \cdot \vec{v})I + 2\mu e \quad (2.3)$$

Donde  $p$  es la presión,  $\lambda$  un segundo coeficiente de viscosidad,  $I$  la matriz identidad,  $\mu$  la viscosidad dinámica y  $e = \frac{1}{2}(\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T)$ .

### 2.2.2. Hipótesis Flujo Incompresible

Se dice que el flujo es incompresible si la densidad permanece aproximadamente constante a lo largo de todo el flujo. Los líquidos son en la práctica muy poco compresibles, por lo que esta

aproximación es completamente aplicable a este caso donde el fluido de trabajo es sangre. Al considerar la densidad constante, las ecuaciones de Navier Stokes se reducen a lo mostrado por las Ecs. 2.4 y 2.5.

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.4)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}^T - \vec{\tau}) = \vec{f}^B \quad (2.5)$$

El tensor de esfuerzos queda como:

$$\tau = -pI + 2\mu e \quad (2.6)$$

### 2.2.3. Fluido no-Newtoniano

Comúnmente cuando se simula la vasculatura del cuerpo humano se utiliza la hipótesis de flujo newtoniano, dado que el tamaño de las partículas en suspensión en la sangre es 4-5 órdenes de magnitud menores al radio de las arterias. Así, el comportamiento de este fluido se asemejaría al de un continuo ideal. En las arterias del cerebro, en cambio, dado las mínimas dimensiones de las geometrías es razonable cuestionar la hipótesis de flujo newtoniano. En investigaciones numéricas realizadas sobre aneurismas cerebrales se ha considerado la sangre tanto como un fluido newtoniano [10], como un fluido no newtoniano [9].

Para efectos de este trabajo se tratará la sangre como fluido no newtoniano. Para modelar esta condición del fluido sanguíneo, se usará el modelo de Carreau. En este modelo la viscosidad del fluido varía en función de la tasa de deformación al que está expuesto. La ecuación Ec. 2.7 es la que rige este modelo.

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty}) \cdot [1 + (\dot{\gamma} \cdot \lambda)^2]^{(n-1)/2} \quad (2.7)$$

donde  $\mu_{\infty}$ ,  $\mu_0$  y  $n$  son constantes del fluido, y  $\lambda$  es la constante de tiempo. Por otro lado,  $\dot{\gamma}$  es la tasa de deformación, definida como:

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (2.8)$$

Los parámetros del modelo de Carreau utilizados, son los del estudio [11]. Estos parámetros se muestran en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1: Parámetros del modelo de Carreau para Fluent

Constante Tiempo $\lambda$ [s]	3,313
Power Law $n$	0,3568
Temperatura Referencia [k]	300
Viscosidad Corte Cero $\mu_0$	0,056
Viscosidad Corte Infinito $\mu_\infty$	0,0035
Energía de Activación $\alpha$	0

Tabla 2.2: Características del flujo sanguíneo

$v$	0,5	[m/s]
$\mu$	0,0035	[Pa · s]
$D$	1,85	[mm]

#### 2.2.4. Número de Reynolds

En la mecánica de fluidos, el grupo adimensional que define el tipo de flujo es el número de Reynolds mostrado en la Ec. 2.9. Este grupo depende de las características físicas del fluido y de la geometría por la cual este se mueve. En el cálculo del número de Reynolds,  $D$  representa el diámetro hidráulico de la cañería por donde transita el fluido,  $\vec{v}$  la velocidad media del flujo en una sección, y  $\mu$  la viscosidad dinámica del fluido. Para sangre que fluye por un aneurisma, se tiene :

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} \quad (2.9)$$

Al calcular el  $Re$  en las condiciones mostradas por la Tabla 2.2 se obtiene un  $Re = 278 < 2000$ , es decir un flujo laminar. Ahora bien, se debe considerar que este cálculo fue realizado considerando las condiciones a la entrada de la arteria, pero en la zona cercana al aneurisma existen irregularidades geométricas que hacen sospechar de un flujo turbulento.

### 2.3. Modelación Numérica de la Turbulencia

Cada vez que la turbulencia está presente en algún fenómeno físico, aparece como el factor dominante sobre las otras variables del problema. Por ello, una acertada modelación de la turbulencia aumenta en gran medida la calidad de los resultados obtenidos. Los flujos turbulentos se caracterizan por las fluctuaciones en sus variables fluidodinámicas (presión, velocidad, temperatura, concentración) en espacios y tiempos pequeños. Se producen fluctuaciones no estacionarias en flujos inicialmente estacionarios.

Los fenómenos de transporte de masa, cantidad de movimiento y energía se ven notablemente amplificados por efecto de la turbulencia. Esto se debe a las fluctuaciones del movimiento turbulento. Si bien estas fluctuaciones tienen lugar a escalas mucho mayores que la escala molecular, producen efectos difusivos semejantes a los del carácter molecular (al menos cualitativamente).

Actualmente no es posible la resolución exacta de las ecuaciones de N-S para el caso turbulento. Sin embargo, en los últimos años debido a la rápida evolución de los computadores y al desarrollo de algoritmos específicos, ha habido un gran avance en su resolución numérica (CFD). La resolución directa de las ecuaciones de Navier-Stokes, o DNS (“Direct Numerical Simulation”) es la manera más evidente y precisa de predecir un flujo turbulento. Se resuelven todas las escalas espaciales y temporales del flujo turbulento sin promedios o aproximaciones. Los únicos errores provienen de las discretizaciones numéricas. La idea es tan sencilla como difícil de llevar a la práctica por lo alto de su costo computacional. Sin embargo, su utilización práctica queda limitada a geometrías sencillas con Reynolds bajos. Dentro del amplio rango de escalas espaciales y temporales de los flujos turbulentos, son las grandes escalas las más efectivas en el transporte de propiedades, mientras que las menores escalas son más débiles y su capacidad de transporte es menor. Teniendo esto en cuenta, se puede intentar simular más exactamente las escalas mayores, dando lugar a la simulación de los torbellinos grandes, o LES (“Large Eddy Simulation”). Debido a la mayor universalidad y homogeneidad de las escalas pequeñas, cabe esperar que estos modelos sean simples y que los ajustes necesarios cuando se apliquen a flujos diferentes sean escasos. Aún así, este tipo de simulación es exigente en cuanto a capacidad de los ordenadores y al tiempo de cálculo.

El tipo de aproximaciones que con más frecuencia se utiliza en aplicaciones de ingeniería para predecir flujos turbulentos son las basadas en métodos estadísticos para su estudio. Surgen así los modelos basados en el promedio de Reynolds de las ecuaciones de Navier-Stokes, o modelos RANS (“Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations”). En aplicaciones ingenieriles se está más interesado en los efectos del flujo medio que en los detalles de las fluctuaciones. Por ello, se adopta una aproximación estadística, promediando las ecuaciones de conservación (“time-averaging”) durante un periodo de tiempo mucho más grande que el periodo característico de las fluctuaciones turbulentas. En particular, el software CFD Fluent consta de varios modelos RANS posibles de implementar en las simulaciones. En este trabajo se utilizarán los detallados a continuación.

#### **2.4. Modelos de Turbulencia $k - \epsilon$**

De los diferentes métodos RANS, el modelo  $k - \epsilon$  aparece como el más expandido en los análisis CFD. Este modelo consta de dos ecuaciones, es decir, incluye dos ecuaciones de transporte adi-

cionales para representar las propiedades del flujo turbulento. La primera variable de transporte es la energía cinética turbulenta,  $k$ . La segunda variable de transporte es la tasa de disipación turbulenta,  $\epsilon$ . Esta, es la variable que determina la escala de la turbulencia.

Al modelo  $k - \epsilon$  se le considera semi-empírico dado que la deducción de la ecuación de transporte para  $k$  es derivada desde la ecuación exacta, mientras que la ecuación de transporte para  $\epsilon$  fue deducida de razonamientos físicos y mediciones empíricas.

#### 2.4.1. Modelo $k - \epsilon$ standard

Es el más simple de los modelos completos de turbulencia. Se convertido en un modelo muy utilizado en los cálculos de flujos en ingeniería. La robustez, economía y razonable grado de exactitud en los resultados para una amplia gama de problemas de fluidodinámica, explican su popularidad en la industria.

El modelo queda descrito por una Ec. de energía (2.10) y una Ec. de la tasa de disipación (2.11). Por otro lado, la viscosidad turbulenta se modela usando la Ec. 2.12.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b + \rho \epsilon - Y_M. \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \epsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} (G_k G_{3\epsilon} G_b) - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k}. \quad (2.11)$$

$$\mu_t = \rho \frac{C_\mu \cdot k^2}{\epsilon}. \quad (2.12)$$

Donde:

- $G_k$  representa la generación de energía cinética turbulenta debido a los principales gradientes de velocidad.
- $G_b$  representa la generación de energía cinética turbulenta debido a la presencia de un campo gravitacional distinto de cero y/o gradientes de temperatura.
- $Y_M$  representa la contribución de la dilatación fluctuante de la compresibilidad en flujos turbulentos.
- $\sigma_k$  y  $\sigma_\epsilon$  son los números de Prandtl turbulentos para  $k$  y  $\epsilon$ .
- $C_{1\epsilon}$ ,  $C_{2\epsilon}$ ,  $C_{3\epsilon}$  y  $C_\mu$  son constantes empíricas mostradas en la Tabla 2.3.

Tabla 2.3: Constantes empíricas del modelo Standard  $k - \epsilon$

$C_\mu$	0.09
$\sigma_k$	1
$\sigma_\epsilon$	1.3
$C_{1\epsilon}$	1.44
$C_{2\epsilon}$	1.92

#### 2.4.2. Modelo RNG $k - \epsilon$

Este modelo deriva de las ecuaciones instantáneas de N-S, utilizando una técnica matemática llamada "Renormalization Group" (RNG). Es similar en forma al modelo  $k - \epsilon$  standard, pero incluye algunas mejoras:

- El método RNG incluye un término adicional para la ecuación de  $\epsilon$ , que presenta mejoras en la exactitud para flujos con deformaciones rápidas.
- Se considera el efecto de los remolinos en la turbulencia, de manera que se mejoran los cálculos en flujos que contienen remolinos.
- La teoría de RNG provee de una fórmula analítica para el cálculo de los números turbulentos de Prandtl, mientras que el modelo  $k - \epsilon$  usa valores constantes definidos por el usuario.
- Mientras que en general el modelo  $k - \epsilon$  es válido para flujo con números de Reynolds altos, la teoría RNG provee de una fórmula diferencial derivada analíticamente para la viscosidad efectiva presente en flujos con Reynolds bajos. Un efectivo uso de este aspecto depende, sin embargo, de un correcto tratamiento de la zona cercana a la pared.

Estas mejoras hacen al modelo RNG  $k - \epsilon$  más exacto y confiable que el modelo  $k - \epsilon$  standard. Las ecuaciones de transporte para el modelo RNG  $k - \epsilon$  corresponden a las Ecs. 2.13 y 2.14.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_k \mu_{eff} \frac{\partial k}{\partial x_j}) + G_k + G_b - \rho \epsilon - Y_M. \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \epsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_\epsilon \mu_{eff} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j}) + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} (G_k + C_{3\epsilon} G_b) - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} - R_\epsilon. \quad (2.14)$$

donde:

- $G_k$  representa la generación de energía cinética turbulenta debido a los principales gradientes de velocidad.

- $G_b$  representa la generación de energía cinética turbulenta debido a la presencia de un campo gravitacional distinto de cero y/o gradientes de temperatura.
- $Y_M$  representa la contribución de la dilatación fluctuante de la compresibilidad en flujos turbulentos.
- $\alpha_k$  y  $\alpha_\epsilon$  son los números de Prandtl inversos efectivos turbulentos para  $k$  y  $\epsilon$ .

### Modelación de la Viscosidad Efectiva

El procedimiento de la eliminación de la escala en la teoría RNG resulta en una ecuación para la viscosidad turbulenta:

$$d\left(\frac{\rho^2 k}{\sqrt{\epsilon \mu}}\right) = 1,72 \frac{\hat{\nu}}{\sqrt{\hat{\nu}^3 - 1 + C_\nu}} d\hat{\nu}, \quad (2.15)$$

donde:

$$\hat{\nu} = \mu_{eff}/\mu \quad (2.16)$$

$$C_\nu \approx 100 \quad (2.17)$$

Luego se integra la Ec. 2.15 para obtener una descripción exacta de cómo la viscosidad efectiva varía con el número de Reynolds (o la escala de la turbulencia), permitiéndole al modelo manejar de mejor manera flujos con Reynolds bajos y en zonas cercanas a la pared. En el límite de Reynolds muy altos, la ecuación anterior se tiende a parecer a la Ec. 2.18.

$$\mu_t = \rho \frac{C_\mu \cdot k^2}{\epsilon} \quad (2.18)$$

con  $C_\mu = 0,0845$ , derivada del modelo RNG  $k - \epsilon$ . Cabe destacar lo parecido de este valor al original del modelo  $k - \epsilon$  standard cercano a 0,09.

### Modificación RNG por la Rotación.

La turbulencia es afectada comúnmente por la rotación del flujo principal. Este modelo contiene una modificación que permite considerar apropiadamente los efectos de la rotación en la viscosidad efectiva. La modificación tiene la forma funcional mostrada por la Ec. 2.19:

$$\mu_t = \mu_{t0} \cdot f\left(\alpha_s, \Omega, \frac{k}{\epsilon}\right) \quad (2.19)$$

donde  $\mu_{t_0}$  es el valor de la viscosidad calculado sin la influencia de la rotación del flujo. Es decir, usando la Ec. 2.12 o la Ec.2.18.  $\Omega$  es el número característico de la rotación calculado por FLUENT, y  $\alpha_s$  es la constante de rotación que asume diferentes valores dependiendo si el flujo es rotacional-dominante o medianamente afectado por la rotación. Para flujos medianamente afectados por la rotación (situación por default en FLUENT)  $\alpha_s$  toma un valor de 0,05 y no puede ser modificado. Para flujos con mayor rotación se puede utilizar un valor mayor.

### Cálculo los Números de Pradtl Inversos Efectivos.

Los números de Pradtl inversos efectivos,  $\alpha_k$  y  $\alpha_\epsilon$ , son calculados utilizando la Ec. 2.20, derivada analíticamente de la teoría de RNG.

$$\left| \frac{\alpha - 1,3929}{\alpha_0 - 1,3929} \right|^{0,631} \cdot \left| \frac{\alpha + 2,3929}{\alpha_0 + 2,3929} \right|^{0,3679} = \frac{\mu_{mol}}{\mu_{eff}} \quad (2.20)$$

donde  $\alpha_0=1$ . En el límite de Reynolds altos ( $\mu_{mol}/\mu_{eff} \ll 1$ ),  $\alpha_k = \alpha_\epsilon \approx 1,393$ .

### Término $R_\epsilon$ en la ecuación para $\epsilon$ .

La mayor diferencia entre el modelo Standard y RNG  $k - \epsilon$  es el término adicional incluido en este último modelo, dado por la Ec. 2.21.

$$R_\epsilon = \frac{C_\mu \rho \eta^3 (1 - \eta/\eta_0) \epsilon^2}{1 + \beta \eta^3} \frac{1}{k} \quad (2.21)$$

con  $\eta = Sk/\epsilon$ ,  $\eta_0 = 4,38$  y  $\beta = 0,012$

### Constantes del modelo RNG.

Este modelo posee constante derivadas analíticamente de la teoría RNG. Estos valores son los mostrados por la Tabla 2.4.

Tabla 2.4: Constantes empíricas del modelo Modelo RNG  $k - \epsilon$

$C_{1\epsilon}$	1,42
$C_{2\epsilon}$	1,68

### 2.4.3. Modelo Realizable $k - \epsilon$

Es un modelo de desarrollo relativamente reciente. Se diferencia del modelo standard principalmente en dos aspectos:

- El modelo realizable  $k - \epsilon$  contiene una nueva formulación para la viscosidad turbulenta.

- Posee una nueva ecuación de transporte para la tasa de disipación de energía turbulenta  $\epsilon$ , que se deriva de una ecuación exacta de transporte de las fluctuaciones medias de las vorticidades.

El término “Realizable”, expresa que el modelo satisface una construcción matemática en las tensiones de Reynolds, consistente con la física de los flujos turbulentos. Ni el modelo  $k - \epsilon$  Standard ni el RNG cumplen con la condición “Realizable”.

El cumplir con esta condición tiene la ventaja inmediata que el modelo se torna más exacto para predecir la tasa de crecimiento de los jets planares y circulares. También es probable obtener mejores desempeños en flujos que involucran rotaciones, fronteras con adversos gradientes de presión, separación y recirculación.

En general los modelos Realizable y RNG presentan mejoras sustanciales respecto del modelo  $k - \epsilon$  Standard en los casos en que el flujo presenta curvaturas, vórtices y rotación. Dado que el Realizable  $k - \epsilon$  es un modelo relativamente nuevo, aún no está tan claro en qué situaciones mejora los resultados del modelo RNG. Sin embargo, se estima que el modelo Realizable es el modelo más robusto de los del tipo  $k - \epsilon$ .

Las ecuaciones de transporte para este modelo son las Ecs. 2.22 y 2.23.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho k u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \epsilon - Y_M \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \epsilon u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + \rho C_1 S_\epsilon - \rho C_2 \frac{\epsilon^2}{k + \sqrt{\nu \epsilon}} + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} C_{3\epsilon} G_b \quad (2.23)$$

donde,

$$C_1 = \max\left[0, 43, \frac{\eta}{\eta+5}\right], \quad \eta = S \frac{k}{\epsilon} \quad \text{y} \quad S = \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}}$$

Se debe notar que la ecuación para  $k$  es muy parecida a los modelos anteriores a excepción de la constantes. Para  $\epsilon$  en cambio, la ecuación se torna bastante diferente.

### **Modelación de la Viscosidad Turbulenta en el modelo Realizable.**

Al igual que en los modelos anteriores, la viscosidad turbulenta se calcula como:

$$\mu_t = \rho \frac{C_\mu \cdot k^2}{\epsilon} \quad (2.24)$$

La diferencia entre el modelo Realizable  $k - \epsilon$ , el Standard y el RNG, es que  $C_\mu$  ya no es una constante y se calcula como aparece en la Ec. 2.25.

$$C_\mu = \frac{1}{A_0 + A_S \frac{kU^*}{\epsilon}} \quad (2.25)$$

donde:

$$U^* \equiv \sqrt{S_{ij}S_{ij} + \widetilde{\Omega}_{ij}\widetilde{\Omega}_{ij}}$$

$$\widetilde{\Omega}_{ij} = \Omega_{ij} - 2\epsilon_{ijk}\omega_k$$

$$\Omega_{ij} = \overline{\Omega_{ij}} - \epsilon_{ijk}\omega_k$$

Se tiene que  $\overline{\Omega_{ij}}$  es la tasa media de variación del tensor de rotación en un flujo rotacional de velocidad  $\omega_k$ . Las constantes del modelo son  $A_0 = 4,04$  y  $A_S = \sqrt{6}\cos(\phi)$ ; donde,

$$\phi = \frac{1}{3}\cos^{-1}(\sqrt{6}W), \quad W = \frac{S_{ij}S_{jk}S_{ki}}{S^3}, \quad \widetilde{S} = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right).$$

Esto puede ser visto como  $C_\mu$  en función del esfuerzo medio o de la tasa de rotación; la velocidad angular del sistema de rotación; y los campos turbulentos ( $k$  y  $\epsilon$ ).

### Constantes del Modelo Realizable $k - \epsilon$

Las constantes del modelo  $C_2$ ,  $\sigma_k$  y  $\sigma_\epsilon$  han sido establecidas de tal forma que el modelo funcione bien para ciertos flujos canónicos. Las constantes del modelo se muestran en la Tabla 2.5.

Tabla 2.5: Valores de constantes empíricas del modelo Realizable  $k - \epsilon$

$\sigma_k$	1
$\sigma_\epsilon$	1,2
$C_{1\epsilon}$	1,44
$C_2$	1,9

### 2.5. Modelos de Turbulencia $k - \omega$

El modelo  $k - \omega$  es un modelo empírico basado en los modelos de transporte de ecuaciones para la turbulencia  $k$  y la tasa específica de disipación  $\omega$ . El modelo ha sido modificado a través de los años. Se han añadido términos para las ecuaciones de  $k$  y  $\omega$ , los cuales han mejorado la exactitud de los resultados.

Dentro de estos modelos cae el modelo  $k - \omega$  Standard y el SST  $k - \omega$ . Ambos tienen formas similares con ecuaciones de transporte para  $k$  y  $\omega$ .

### 2.5.1. Modelo $k - \omega$ Standard

Este modelo está basado en la fórmula de Wilcox [12], la cual incorpora modificaciones para números de Reynolds bajos, compresibilidad y transmisión del corte del flujo (Shear Flow) a través del fluido.

#### Ecuaciones de Transporte para $k - \omega$ Standard

Las ecuaciones de transporte para la energía cinética turbulenta se muestra en la Ec. 2.26, mientras que la ecuación para la tasa específica de disipación turbulenta se muestra en la Ec. 2.27

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j}) + G_k - Y_k \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \omega u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j}) + G_\omega - Y_\omega \quad (2.27)$$

En estas ecuaciones se tiene que:

- $G_k$  representa la generación de energía turbulenta debido a los gradientes de velocidad.
- $G_\omega$  representa la generación de  $\omega$
- $\Gamma_k$  y  $\Gamma_\omega$  representan la difusividad efectiva para  $k$  y  $\omega$  respectivamente.
- $Y_k$  y  $Y_\omega$  representan la disipación de  $k$  y  $\omega$  debido a la turbulencia.

#### Modelación de la Difusividad Efectiva

La difusividad efectiva para el modelo  $k - \omega$  está dada por las Ecs. 2.28 y 2.29, para  $k$  y  $\omega$  respectivamente.

$$\Gamma_k = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \quad (2.28)$$

$$\Gamma_\omega = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \quad (2.29)$$

donde  $\sigma_k$  y  $\sigma_\omega$  son los números Prandtl turbulentos para  $k$  y  $\omega$ , respectivamente. La viscosidad turbulenta  $\mu_t$ , se calcula combinando  $k$  y  $\omega$  como sigue:

$$\mu_t = \alpha^* \frac{\rho k}{\omega}$$

### Corrección de bajos números de Reynolds.

El coeficiente  $\alpha^*$  pondera a la viscosidad turbulenta causando una corrección para números de Reynolds bajos. Dada por:

$$\alpha^* = \alpha_\infty^* \left( \frac{\alpha_0^* + Re_t/Re_k}{1 + Re_t/Re_k} \right) \quad (2.30)$$

donde

$$Re_t = \frac{\rho k}{\mu \omega} \quad (2.31)$$

$$R_k = 6 \quad (2.32)$$

$$\alpha_0^* = \frac{\beta_i}{3} \quad (2.33)$$

$$\beta_i = 0,072 \quad (2.34)$$

Se debe notar que para valores altos del número de Reynolds,  $\alpha^* = \alpha_\infty^* = 1$ .

### Modelación de la Producción de Turbulencia.

#### Producción de $k$

El término  $G_k$  representa la producción de energía cinética turbulenta. De la ecuación exacta de transporte para  $k$ , el término se define como aparece en la Ec. 2.35.

$$G_k = -\overline{\rho u_i' u_j'} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (2.35)$$

Para evaluar  $G_k$  de manera de ser consistente con la hipótesis de Boussinesq:

$$G_k = \mu_t S^2 \quad (2.36)$$

donde  $S$  es el módulo de la tasa media del tensor de deformación, definida en el mismo modo que en el modelo  $k - \epsilon$ .

## Producción de $\omega$

La producción de  $\omega$  esta dada por la Ec. 2.37

$$G_\omega = \alpha \frac{\omega}{k} G_k \quad (2.37)$$

El coeficiente  $\alpha$  está dado por:

$$\alpha = \frac{\alpha_\infty}{\alpha^*} \left( \frac{\alpha_0 + Re_t/R_\omega}{1 + Re_t/R_\omega} \right) \quad (2.38)$$

Donde  $R_\omega = 2,95$ ,  $\alpha^*$  y  $Re_t$  están dados por las Ecs. 2.30 y 2.31 respectivamente. Notar que para altos números de Reynolds en el modelo  $k - \omega$ ,  $\alpha = \alpha_\infty$ .

## Modelación de la Disipación Turbulenta

### Disipación de $k$

La disipación turbulenta para  $k$  está dada por la Ec. :

$$Y_k = \rho \beta^* f_{\beta^*} k \omega \quad (2.39)$$

donde,

$$f_{\beta^*} = \begin{cases} 1 & \chi_k \leq 0 \\ \frac{1+680\chi_k^2}{1+400\chi_k^2} & \chi_k > 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

y,

$$\chi_k = \frac{1}{\omega^3} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (2.41)$$

además,

$$\beta^* = \beta_i^* [1 + \zeta^* F(M_t)] \quad (2.42)$$

$$\beta_i^* = \beta_\infty^* \left( \frac{4/15 + (Re_t/R_\beta)^4}{1 + (Re_t/R_\beta)^4} \right) \quad (2.43)$$

$$\zeta^* = 1,5 \quad (2.44)$$

$$R_\beta = 8 \quad (2.45)$$

$$\beta_\infty^* = 0,09 \quad (2.46)$$

## Disipación de $\omega$

La disipación de  $\omega$  está dada por la Ec. 2.47:

$$Y_\omega = \rho\beta f_\beta \omega^2 \quad (2.47)$$

donde

$$f_\beta = \frac{1 + 70\chi_\omega}{1 + 80\chi_\omega} \quad (2.48)$$

$$\chi_\omega = \left| \frac{\Omega_{ij}\Omega_{jk}S_{ki}}{(\beta_\infty^*\omega)^3} \right| \quad (2.49)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.50)$$

El tensor de la tasa de deformación,  $S_{ij}$  se define como,

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.51)$$

También se tiene que:

$$\beta = \beta_i \left[ 1 - \frac{\beta_i^*}{\beta_i} \zeta F(M_t) \right] \quad (2.52)$$

con  $\beta_i^*$  y  $F(M_t)$  definidas en las Ecs. 2.43 y 2.53, respectivamente.

## Corrección de Compresibilidad

La función de compresibilidad,  $F(M_t)$ , está dada por:

$$F(M_t) = \begin{cases} 0 & M_t \leq M_{t0} \\ M_t^2 - M_{t0}^2 & M_t > M_{t0} \end{cases} \quad (2.53)$$

donde,

$$M_t^2 = \frac{2k}{a^2} \quad (2.54)$$

$$M_{t0} = 0,25 \quad (2.55)$$

$$a = \sqrt{\gamma RT} \quad (2.56)$$

Se debe notar que en su forma incompresible,  $\beta_i^* = \beta_\infty^*$ .

Tabla 2.6: Constantes empiricas del modelo  $k - \omega$  Standard

Constante	Valor	Constante	Valor
$\alpha_{\infty}^*$	1	$R_k$	6
$\alpha_{\infty}$	0,52	$R_{\omega}$	2,95
$\alpha_0$	0,11	$\zeta^*$	1,5
$\beta_{\infty}^*$	0,09	$M_{t0}$	0,25
$\beta_i$	0,072	$\sigma_k$	2
$R_{\beta}$	8	$\sigma_{\omega}$	2

### Constantes del Modelo $k - \omega$ Standard

Las constantes del modelo se muestran en la Tabla 2.6.

### 2.5.2. Modelo Shear Stress Transport (SST) $k - \omega$

Adicionalmente al modelo  $k - \omega$  standard existe una variación llamada Shear Stress Transport (Transporte del Esfuerzo de Corte), denominada así por la definición de la viscosidad turbulenta que es modificada para contabilizar el transporte del principal esfuerzo de corte turbulento. Este aspecto le da la ventaja al modelo SST sobre los modelos  $k - \epsilon$  Standard y  $k - \omega$  Standard. Otra modificación corresponde a la adición de un término de difusión cruzada en la ecuación de  $\omega$ , y una ecuación de unión que asegure que el modelo se comporte apropiadamente en las zonas cercanas y lejanas a las paredes.

### Ecuaciones de Transporte para el modelo SST $k - \omega$

Las ecuaciones del modelo SST tienen una forma similar a las del modelo  $k - \omega$  Standard. Existe una ecuación para  $k$  (Ec. 2.57) y otra para  $\omega$  (Ec. 2.58):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j}) + \tilde{G}_k - Y_k \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \omega u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\Gamma_{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}) + G_{\omega} - Y_{\omega} + D_{\omega} \quad (2.58)$$

En estas ecuaciones se tiene que:

- $\tilde{G}_k$  representa la generación de energía cinética turbulenta por efecto de los gradientes de velocidad

- $G_\omega$  representa la generación de  $\omega$ . Es decir, la tasa específica de variación de la energía turbulenta.
- $\Gamma_k$  y  $\Gamma_\omega$  representan la difusividad efectiva de  $k$  y  $\omega$  respectivamente.
- $Y_k$  y  $Y_\omega$  representan la disipación de  $k$  y  $\omega$  por efecto de la turbulencia.
- $D_\omega$  representa el término de difusión cruzada

### Modelación de la Difusividad Efectiva.

Las difusividades efectivas en el modelo SST  $k - \omega$  estan dadas por las Ecs. 2.59 y 2.60.

$$\Gamma_k = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \quad (2.59)$$

$$\Gamma_\omega = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \quad (2.60)$$

donde  $\sigma_k$  y  $\sigma_\omega$  son los números turbulentos de Prandtl para  $k$  y  $\omega$ , respectivamente. La viscosidad turbulenta  $\mu_t$  es calculada como aparece en la Ec. 2.61.

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \frac{1}{\max[\frac{1}{\alpha^*}, \frac{SF_2}{a_1\omega}]} \quad (2.61)$$

donde  $S$  es la magnitud de la tasa de deformación y además,

$$\sigma_k = \frac{1}{F_1/\sigma_{k,1} + (1 - F_1)/\sigma_{k,2}} \quad (2.62)$$

$$\sigma_\omega = \frac{1}{F_1/\sigma_{\omega,1} + (1 - F_1)/\sigma_{\omega,2}} \quad (2.63)$$

Se tiene que  $\alpha^*$  se definio en la Ec. 2.30, y las funciones de ajuste  $F_1$  y  $F_2$  están dadas por las Ecs. 2.64 y 2.67.

$$F_1 = \tanh(\phi_1^4) \quad (2.64)$$

$$\phi_1 = \min[\max(\frac{\sqrt{k}}{0,09\omega y}, \frac{500\mu}{\rho y^2\omega}), \frac{4\rho k}{\sigma_{\omega,2} D_\omega^+ y^2}] \quad (2.65)$$

$$D_\omega^+ = \max[2\rho \frac{1}{\sigma_{\omega,2}} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-10}] \quad (2.66)$$

$$F_2 = \tanh(\phi_2^2) \quad (2.67)$$

$$\phi_2 = \left[ \max\left(2 \frac{\sqrt{k}}{0,09\omega y}, \frac{500\mu}{\rho y^2 \omega}\right) \right] \quad (2.68)$$

donde  $y$  es la distancia a la pared y  $D_\omega^+$  es la parte positiva del término de difusión cruzada.

### Modelación de la Producción de Turbulencia

El término  $\widetilde{G}_k$  representa la producción de energía cinética, definido en la Ec. 2.69.

$$\widetilde{G}_k = \min(G_k, 10\rho\beta^*k\omega) \quad (2.69)$$

donde  $G_k$  se define de la misma forma que en el modelo  $k - \omega$  (Ec. 2.36).

### Producción de $\omega$

El término  $G_\omega$  representa la producción de  $\omega$  y se define en la Ec. :

$$G_\omega = \frac{\alpha}{\nu} G_k \quad (2.70)$$

Se debe notar que esta formulación difiere del modelo  $k - \omega$  Standard. La diferencia entre los dos modelos también existe en el modo en que el término  $\alpha_\infty$  es evaluado. Mientras que en el modelo  $k - \omega$  standard,  $\alpha_\infty$  es definido como una constante (0,52); en el modelo SST este término se define como aparece en la Ec. 2.71.

$$\alpha_\infty = F_1\alpha_{\infty,1} + (1 - F_1)\alpha_{\infty,2} \quad (2.71)$$

donde

$$\alpha_{\infty,1} = \frac{\beta_{i,1}}{\beta_\infty^*} - \frac{\kappa^2}{\sigma_{\omega,1}\sqrt{\beta_\infty^*}} \quad (2.72)$$

$$\alpha_{\infty,2} = \frac{\beta_{i,2}}{\beta_\infty^*} - \frac{\kappa^2}{\sigma_{\omega,2}\sqrt{\beta_\infty^*}} \quad (2.73)$$

y  $\kappa$  es 0,41.

### Modelación de la Disipación Turbulenta

#### Disipación de $k$

El término  $Y_k$  representa la disipación de energía cinética turbulenta, y se define de manera similar que en el modelo  $k - \omega$  Standard. La diferencia radica en la forma en que el término  $f_{\beta^*}$  es evaluado.

En el modelo Standard se define como una función por tramos; mientras que en el modelo SST,  $f_{\beta^*}$  es constante e igual a 1. Por ello se tiene que:

$$Y_k = \rho\beta^*k\omega \quad (2.74)$$

### Disipación de $\omega$

El término  $Y_\omega$  representa la disipación de  $\omega$ , y se define de manera similar que en el modelo  $k-\omega$  Standard. La diferencia radica en el modo en que el término  $\beta_i$  y  $f_\beta$  son evaluados. En el modelo Standard,  $\beta_i$  es una constante (0,072) y  $f_\beta$  es definido en la Ec. 2.48. Para el modelo SST,  $f_\beta$  es igual a 1. Entonces,

$$Y_k = \rho\beta\omega^2 \quad (2.75)$$

En lugar de tener un valor constante para  $\beta_i$ , se tiene que,

$$\beta_i = F_1\beta_{i,1} + (1 - F_1)\beta_{i,2} \quad (2.76)$$

donde  $F_1$  se obtiene de la Ec. 2.64

### Modificación de la Difusión Cruzada

El modelo SST está basado tanto en el modelo Standard  $k-\omega$  como en el  $k-\epsilon$ . Para ligar ambas teorías, el modelo SST ha ido transformado las ecuaciones basadas en  $k$  y  $\omega$ , las cuales llevan a la introducción de un término de difusión cruzada  $D_\omega$  mostrado en 2.77.

$$D_\omega = 2(1 - F_1)\rho\sigma_{\omega,2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (2.77)$$

### Constantes del Modelo SST

Las constantes se muestran en la Tabla 2.7.

## 2.6. Tratamiento de Zona Cercana a la Pared en Flujos Turbulentos

Los flujos turbulentos son significativamente afectados por la presencia de las paredes. En la zona muy cercana a la pared, la caída de la viscosidad, reduce las fluctuaciones tangenciales de la velocidad. El modelamiento de la región cercana a la pared tiene un fuerte impacto en la fidelidad de las soluciones numéricas obtenidas. Después de todo, las paredes son la principal fuente de

Tabla 2.7: Constantes empíricas del modelo SST  $k - \omega$

$\sigma_{k,1}$	1.176
$\sigma_{\omega,1}$	2.0
$\sigma_{k,2}$	1.0
$\sigma_{\omega,2}$	1.168
$a_1$	0.31
$\beta_{i,1}$	0.075
$\beta_{i,2}$	0.0828

vorticidades y turbulencia. Inicialmente modelos como el  $k - \epsilon$  son válidos en la zona central de la geometría, o mejor dicho, en las zonas suficientemente lejanas de las paredes. El modelo  $k - \omega$  fue formulado para todo el dominio bajo mallas suficientemente finas [20]. Numerosos experimentos han mostrado que la zona cercana a la pared puede ser separada en tres capas (Fig. 2.6). La capa más espesa denominada “viscous sublayer”, donde el flujo es casi laminar y la viscosidad juega un rol muy importante en el momentum, y en la transferencia de calor y masa. La capa más externa es denominada “fully-turbulent layer”, que es donde la turbulencia juega un rol mayor. Finalmente existe una zona intermedia (“buffer layer”) donde los efectos de la viscosidad y la turbulencia son igualmente importantes.

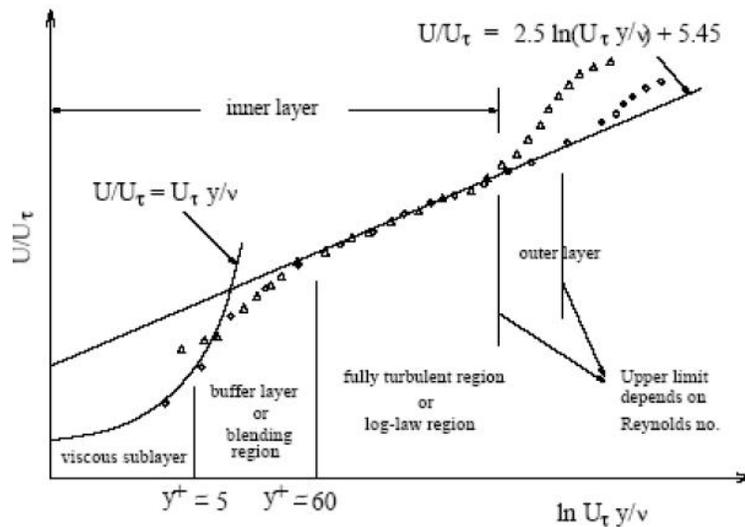


Figura 2.6: Subdivisiones en la zona cercana a pared

## Wall Functions vs Near Wall Models

Tradicionalmente han existido dos aproximaciones para tratar la región cercana a la pared. En una aproximación la región interna afectada por la viscosidad (“viscous sublayer”, “buffer layer”) no es resuelta. En cambio, fórmulas semi-empíricas llamadas “Wall Functions” son usadas para unir la región afectada por la viscosidad y la zona turbulenta. En otra aproximación, los modelos de turbulencia son modificados para habilitar la región afectada por la viscosidad para ser calculada con una malla en toda la pared, incluyendo la capa viscosa. En el software Fluent se le denomina a esta aproximación, “Near Wall Modelling”. La aproximación “Wall Function”, es popular debido a que es económica, robusta y genera resultados razonablemente exactos. Es una opción práctica para el tratamiento de las zonas cercanas a la pared en simulaciones de flujos de la industria. Debido a esto, en este trabajo se utilizará este tipo de aproximación. Fluent posee cuatro diferentes funciones de pared para su utilización: Standard Wall Functions, Non-Equilibrium Wall, Enhanced Wall Treatment y User-Defined Wall Functions. En este estudio se utilizará el tipo “Enhanced Wall Treatment” puesto que es válida para modelos del tipo  $k - \epsilon$  como  $k - \omega$ .

### Enhanced Wall Treatment

El tratamiento de pared mejorado es un método de modelamiento de la zona cercana a la pared que combina un modelo de dos capas con funciones de pared mejoradas (Enhanced Wall Function). Este modelamiento es el utilizado por Default en los métodos de turbulencia  $k - \omega$  y puede usarse optativamente en los modelos de turbulencia  $k - \epsilon$ . En este modelo de aproximación a la pared el entorno completo es dividido en dos capas: una capa afectada por la viscosidad, y una capa turbulenta

### Modelo de dos Capas para Enhanced Wall Treatment

En el modelo de la zona cercana a la pared de Fluent, la región afectada por la viscosidad es completamente resuelta hasta la capa intermedia. El modelo de dos capas es una parte integrante del Enhanced Wall Treatment y es usado para especificar tanto  $\epsilon$ , como la viscosidad turbulenta en los nodos cercanos a la pared. En esta aproximación el dominio completo es subdividido en una zona afectada por la viscosidad y una región completamente turbulenta. La división entre las dos zonas está dada por la distancia a la pared, basado en el número Reynolds  $Re_y$ , definido como:

$$Re_y = \frac{\rho y k}{\mu} \quad (2.78)$$

donde  $y$  es la distancia normal desde la pared al centro de las celdas.

En la región turbulenta ( $Re_y > Re_y^* = 200$ ), se utilizan los modelos  $k - \epsilon$  o RSM. Por otro lado, en la región afectada por la viscosidad ( $Re_y < Re_y^*$ ) se utiliza el modelo de una ecuación de Wolfstein [13]. En aquel modelo de una ecuación el momentum y la energía se definen como se detalló en la Sección 2.4. Sin embargo, la viscosidad turbulenta sale de:

$$\mu_{t,2Layer} = \rho_\mu l_\mu \sqrt{k} \quad (2.79)$$

donde el largo de escala esta dado por:

$$l_\mu = y c_l (1 - e^{\frac{-Re_y}{A\mu}}) \quad (2.80)$$

La formulación de dos capas para la viscosidad turbulenta descrita arriba es usada como parte del Enhanced Wall Treatment, en donde la definición de las dos capas está suavemente ligada con la definición de  $\mu_t$  de la región externa (números de Reynolds altos). Esta definición se muestra en la Ec. 2.81.

$$\mu_{t,enh} = \lambda_\epsilon \mu_t + (1 - \lambda_\epsilon \mu_{t,2Layer}) \quad (2.81)$$

donde  $\mu_t$  es la viscosidad asociada a un número de Reynolds alto, calculada con el método turbulento que se está utilizando en la formulación del problema. La función de enlace  $\lambda_\epsilon$  se define de tal forma que es igual a 1 lejos de la pared y cercana a cero muy cerca de ella. La función de enlace elegida es:

$$\lambda_\epsilon = \frac{1}{2} [1 + \tanh(\frac{Re_y - Re_y^*}{A})] \quad (2.82)$$

La constante  $A$  determina el ancho de la función de enlace. Se define el ancho tal que el valor de  $\lambda_\epsilon$  esté dentro del 1 % del campo de variación de  $Re_y$ , luego queda como:

$$A = \frac{|\Delta Re_y|}{\tanh(0,98)} \quad (2.83)$$

Típicamente  $|\Delta Re_y|$  tomará valores entre un 5 % a un 20 % de  $Re_y^*$ . El principal objetivo de la función de enlace es permitir la convergencia del modelo aun cuando la solución del modelo  $k - \epsilon$  en la capa más externa no coincida con la formulación de dos capas.

El campo  $\epsilon$  se calcula como:

$$\epsilon = \frac{k^{3/2}}{l_\epsilon} \quad (2.84)$$

La longitud de escala se calcula nuevamente como:

$$l_\epsilon = y c_l (1 - e^{-Re_y/A_\epsilon}) \quad (2.85)$$

Las constantes de esta formulación están dadas por:

$$c_l = \kappa C_\mu^{-3/4} \quad (2.86)$$

$$A_\mu = 70 \quad (2.87)$$

$$A_\epsilon = 2c_l \quad (2.88)$$

## 2.7. Condiciones de Borde

Para la correcta definición del problema fluidodinámico a resolver, se deben imponer condiciones de borde que aseguren la convergencia de las soluciones obtenidas. Aquellas condiciones de Borde se definen a continuación:

- A la entrada de la arteria se supondrá una condición de velocidad (Velocity Inlet), que representa el flujo sanguíneo (pulsante) a través tiempo. Es decir, se tiene un perfil de velocidad a la entrada para cada instante de tiempo.
- A la salida de la arteria se supondrá una condición de presión (Pressure Outlet), que representa la presión interna del fluido, la cual ejerce una resistencia.
- Se tratará las paredes arteriales como un sólido rígido.
- Se deben indicar los parámetros de turbulencia en las entradas y salidas de la arteria, calculados a partir de las condiciones del flujo y la geometría.

### 2.7.1. Velocidad de Entrada

En los trabajos de título realizados anteriormente se han utilizado distintas estrategias para la modelación de un pulso sanguíneo de velocidad de entrada que dependa del tiempo. En el trabajo de Botto [14] se utilizó un pulso particular de una persona sana (sin problemas en su sistema circulatorio), lo cual limita en cierta forma los resultados obtenidos. En el trabajo de Ledermann [15], por su parte, para cada geometría se utilizó el pulso característico de la persona. Si bien esto último posee la ventaja de hacer simulaciones más realistas, presenta el problema de la sensibilidad

en los resultados al depender del pulso sanguíneo particular y no ser comparable entre sí. Una solución intermedia fue la utilizada por Araya [8], quien obtuvo la expresión matemática de 36 pulsos sanguíneos extraídos de exámenes Doppler, para luego generar un pulso promedio utilizable en todas las geometrías. En este trabajo de título, se utilizará el mismo pulso sanguíneo de entrada de Araya, mostrado en la Fig. 2.8.

Para un flujo laminar, viscoso, unidireccional y estacionario al interior de un tubo se deduce a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes, que el perfil de velocidades sobre una superficie normal al flujo es parabólico y es ampliamente conocido como perfil de Poiseuille. Si el gradiente de presión en el tubo es  $k_s$ , entonces el perfil de velocidades de Poiseuille está dado por la Ec. 2.89.

$$u_s(r) = \frac{k_s}{4\mu}(r^2 - a^2) \quad (2.89)$$

Sin embargo, estas condiciones simplificadas no se cumplen al interior de las arterias, puesto que el flujo es pulsante; es decir, la velocidad no solo depende de la variable longitudinal, sino que también de la temporal. En este caso, para obtener el perfil de velocidades a la entrada de la geometría se utiliza la ecuación de Womersley tal como lo recomienda Zamir [16]. La solución supone que el perfil de velocidades es la superposición del perfil de Poiseuille y de un perfil de velocidades oscilatorias. De esta manera, la velocidad total sobre una sección transversal de la tubería está dada por la suma de la solución estacionaria de Poiseuille  $u_s$  y la velocidad oscilatoria  $u_\Phi$  como se indica en la Ec. 2.90.

$$u_t(r, t) = u_s(r) + u_\Phi(r, t) \quad (2.90)$$

Ahora bien, cabe recordar que en este trabajo se contrasta un modelo laminar con un modelo turbulento. Es sabido que en tuberías que contienen un flujo laminar el perfil de velocidad de entrada tiende a ser parabólico. En tuberías con flujo turbulento, en cambio, el perfil tiende a ser plano con ciertas irregularidades. Esto se aprecia en la Fig. 2.7. Por esta razón, se simulará comparando el modelo laminar-turbulento, pero para ambos perfiles de velocidad de entrada.

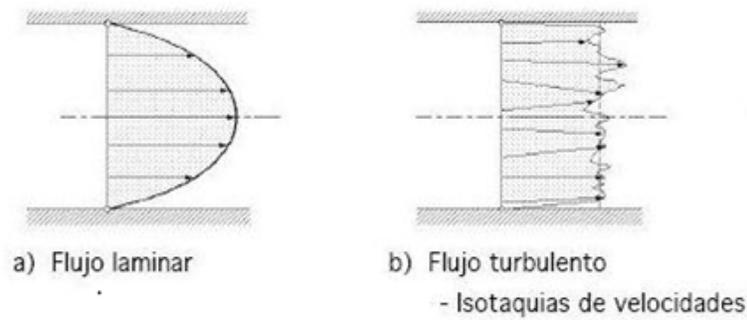


Figura 2.7: Perfiles del pulso de entrada a la arteria

La magnitud de la velocidad está dada por un ajuste a una curva de Fourier de los datos proporcionados del pulso de entrada. Esto se realizó en MATLAB y permitió conseguir los coeficientes de Fourier. Para esta tarea se debe ir al Toolbox de Matlab y luego a Curve Fitting. Se debe ingresar los datos y ajustar una aproximación de Fourier de orden 8, que es lo mayor que permite el programa. Con este método se consiguen aproximaciones bastante buenas con  $R^2$  cercanos a 0,98. La ecuación de velocidad en función del tiempo queda descrita entonces por una función de Fourier mostrada en la Ec. 2.91. Allí, a y b son los vectores de coeficientes de Fourier para el coseno y seno respectivamente. Los coeficientes de Fourier se muestran en las Tablas 2.8 y 2.9. Es necesario definir la velocidad en dos tramos (dos ecuaciones de Fourier), puesto que inicialmente comienza desde cero y luego el pulso adopta su forma sinusoidal. Se parte con velocidad nula pues la experiencia ha reportado que mejora la convergencia de las simulaciones. El tramo 1 va de 0-0,3 segundos, mientras que el tramo 2 va de los 0,3-1,7 segundos. De esta forma se genera un flujo pulsante de velocidad de entrada, que sigue la dirección axial al ingresar a la arteria.

$$v(t) = a_0 + \sum_{i=1}^8 [a_i \cos(i\omega t) + b_i \sin(i\omega t)] \quad (2.91)$$

Tabla 2.8: Coeficientes de Fourier para formar pulso de velocidad de entrada. Tramo 1

Coef. Vel. Tramo 1		
0	0.3193	0.0
1	-0.07645	0.006205
2	-0.1371	0.08925
3	-0.04113	-0.03142
4	-0.0701	-0.04841
5	0.003085	0.005186
6	0.008735	-0.01399
7	-0.009794	0.01974
8	0.006335	0.01092
$\omega$	3.37	

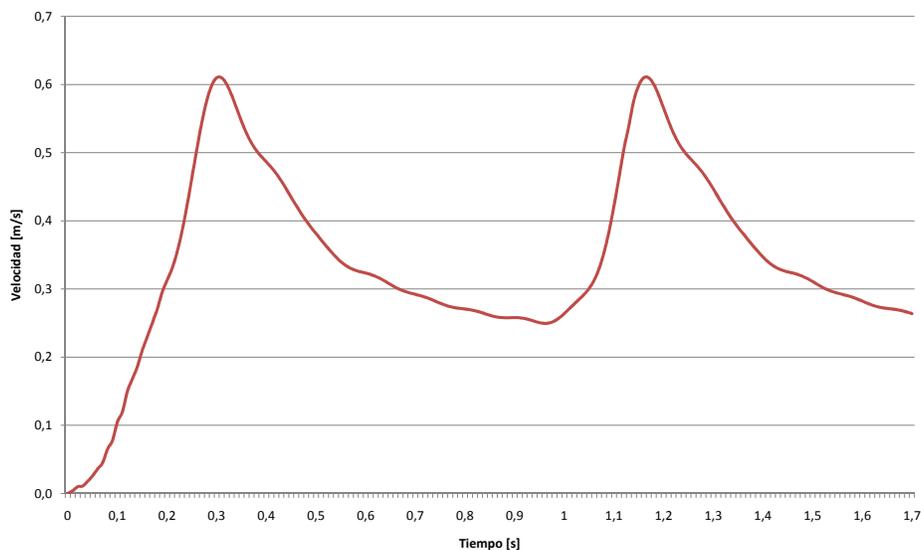


Figura 2.8: Pulso de velocidad a la entrada de la arteria

### 2.7.2. Presión a la Salida de la Arteria

Esta condición aparece dado que el flujo de sangre forma un circuito cerrado dentro del volumen considerado. Luego, si se considera un corte transversal de la arteria (la salida), aparece una presión ejercida por el fluido no considerado. Para replicar este efecto se considera una presión que varía con el tiempo y está en fase con el pulso sanguíneo. Este pulso oscila entre los 80 y 120 [mmHg].

Tabla 2.9: Coeficientes de Fourier para formar pulso velocidad de entrada. Tramo 2

Coef. Vel. Tramo 2		
0	0.3568	0.0
1	-0.1191	0.05152
2	0.008027	-0.06563
3	0.02799	0.01698
4	-0.01321	0.01325
5	-0.004042	-0.01376
6	0.008983	0.003437
7	-0.00439	0.004566
8	-0.001583	-0.00375
$\omega$	7.26	

En la Fig. 2.9 se muestra el pulso de presión promedio impuesto a la salida. Este pulso comienza de cero, para mejorar la convergencia de las simulaciones y alcanzar el valor máximo para una persona sana (no hipertensa). Por esta razón también se definió el pulso en dos tramos. El tramo 1 (0-0,3 segundos) queda descrito por la Ec. 2.92, mientras que el tramo 2 (0,3-1,7 segundos) queda definido por un ajuste de Fourier utilizando los coeficientes mostrados en la Tabla 2.10.

$$P(t) = 3,41E^9 \cdot t^5 - 1,124E^9 \cdot t^4 + 1,129E^8 \cdot t^3 - 2,92E^6 \cdot t^2 + 5,774E^4 \cdot t - 25 \quad (2.92)$$

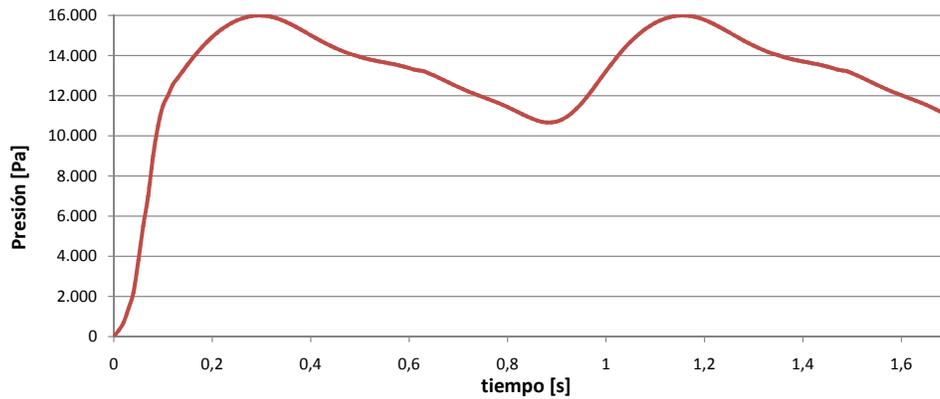


Figura 2.9: Pulso de presión a la salida de la arteria

Tabla 2.10: Coeficientes de Fourier para formar pulso de presión de salida

Coef. Pres. Tramo 2		
0	13410	0
1	-1981	915,3
2	-708,8	-550
3	32,06	-178,7
4	28,08	-114,8
5	39,2	-39,84
6	16,61	9,128
7	1,949	23,2
8	-5,744	19,28
$\omega$	7,3334	

### 2.7.3. Aproximación Paredes Rígidas

Se aproxima las paredes arteriales como paredes rígidas para facilitar la resolución del modelo numérico. Esta consideración resulta ser bastante buena para arterias pequeñas como las capilares, pero no tan buena para arterias de mayor diámetro [17]. Esto ocurre puesto que se puede sobreestimar los esfuerzos de corte, aun cuando no cambia la distribución de estos sobre la pared.

### 2.7.4. Condiciones de Borde de Turbulencia

Estos parámetros tienen como objetivo definir la escala y la intensidad de la turbulencia en la entrada y/o salida de la arteria. Se calcula en base a las condiciones fluidodinámicas propias del problema, tales como: velocidad promedio, longitud característica de la geometría y la densidad del fluido. En esta memoria se utilizan métodos de turbulencia de tipo  $k - \epsilon$  y de tipo  $k - \omega$ , por lo cual los parámetros a calcular corresponden a  $k$ ,  $\epsilon$  y  $\omega$ .

El primer paso en la determinación de los parámetros fluidodinámicos es calcular la intensidad de la turbulencia  $I$ , lo cual se hace según la Ec. 2.93. En esta fórmula  $Re_{Dh}$  es el N° Reynolds calculado en la Ec. 2.9, donde se obtuvo un valor de 278. Con esto se obtiene una intensidad turbulenta de un 8%. Luego se debe calcular la escala de la turbulencia,  $l$ . Este parámetro se calcula con la Ec. 2.94, donde  $L$  es el diámetro hidráulico de la geometría que en este caso corresponde al diámetro de la arteria. Teniendo estos parámetros se puede calcular la energía cinética turbulenta  $k$ , a través de la Ec. 2.95; la tasa de disipación de energía turbulenta  $\epsilon$ , a través de la Ec. 2.96; y la tasa de variación de  $\epsilon$ , es decir  $\omega$ , a través de la Ec. 2.97. Donde  $u_{avg}$  es la velocidad promedio en

Tabla 2.11: Condiciones de borde de turbulencia

Parámetro	Símbolo	Geo 01	Geo 02
Densidad [ $Kg/m^3$ ]	$\rho$	1050	1050
Viscosidad [ $Kg/ms$ ]	$\mu$	0,0035	0,0035
Diámetro [ $m$ ]	$D$	0,002	0,003
Vel prom [ $m/s$ ]	$u_{avg}$	0,5	0,5
Nº Reynolds	$Re_{Dh}$	278,1	430,3
Intensidad Turbulenta	$I$	8 %	7 %
Escala de la Turbulencia	$l$	0,00013	0,00020
Energia turbulenta [ $m^2/s^2$ ]	$k$	0,00235	0,00211
Cte empirica del modelo	$C_\mu$	0,09	0,09
Tasa disipacion turb. [ $m^2/s^3$ ]	$\epsilon$	0,14	0,08
Tasa especí. disipación Turb.	$\omega$	682,04	417,40

el flujo y  $C_\mu$  es la constante del modelo de turbulencia. Un resumen de los parámetros obtenidos, para ambas geometrías consideradas en la memoria, se muestra en la Tabla 2.11.

$$I = \frac{u'}{u_{avg}} = 0,16(Re_{Dh})^{-1/8} \quad (2.93)$$

$$l = 0,07L \quad (2.94)$$

$$k = \frac{3}{2}(u_{avg}I)^2 \quad (2.95)$$

$$\epsilon = C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{l} \quad (2.96)$$

$$\omega = \frac{k^{1/2}}{C_\mu^{1/4} l} \quad (2.97)$$

---

## Capítulo 3

### Metodología

---

Para la preparación de los casos se trabajó básicamente con 3 programas: Solid Edge, para visualizar y escalar las geometrías; Gambit para realizar el mallado y la imposición de las condiciones de borde; y Fluent para realizar las simulaciones fluidodinámicas.

#### 3.1. Presentación de las Geometrías

En este estudio se simuló dos geometrías distintas las cuales fueron reconstruidas a partir de imágenes médicas 3D captadas con un Angiografo Rotacional. Las imágenes médicas fueron proporcionadas por el Instituto de Neurocirugía Asenjo de la Universidad de Chile [18], que ha trabajado conjuntamente con el Departamento de Ingeniería Mecánica en el marco de investigaciones numéricas de Aneurismas Cerebrales. En particular las dos geometrías contenidas en este trabajo fueron reconstruidas en el trabajo [19]. La reconstrucción se realiza a partir de estas imágenes en 3D y con la ayuda de una serie de softwares tales como 3DS Max y Rhinoceros. Al final del proceso se obtiene las geometrías en formato .STP, compatible con el software de mallado Gambit. Las arterias simuladas serán denominadas Geometría 1 (Fig. 3.1) y Geometría 2 (Fig. 3.2), correspondientes al Caso 13 y Caso 15 trabajados en [19].

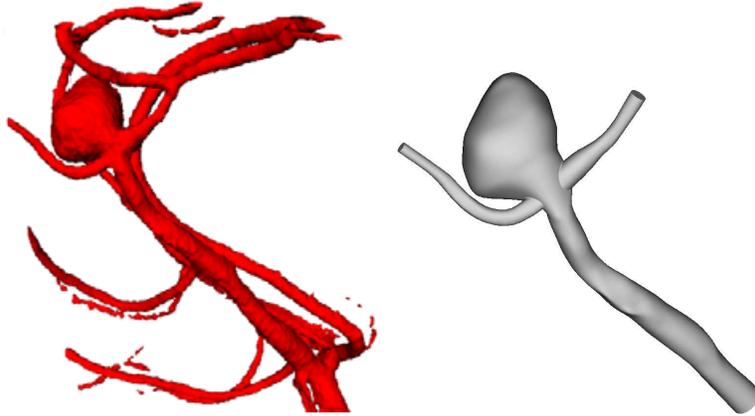


Figura 3.1: Presentación de la Geometría N°1. A la izquierda en su formato 3D de imágenes médicas, a la derecha la geometría reconstruida y utilizada en Fluent.

El Geometría 1 corresponde a un aneurisma del tipo sacular terminal. Por su parte el Caso 2 corresponde a un aneurisma también sacular pero del tipo Lateral.

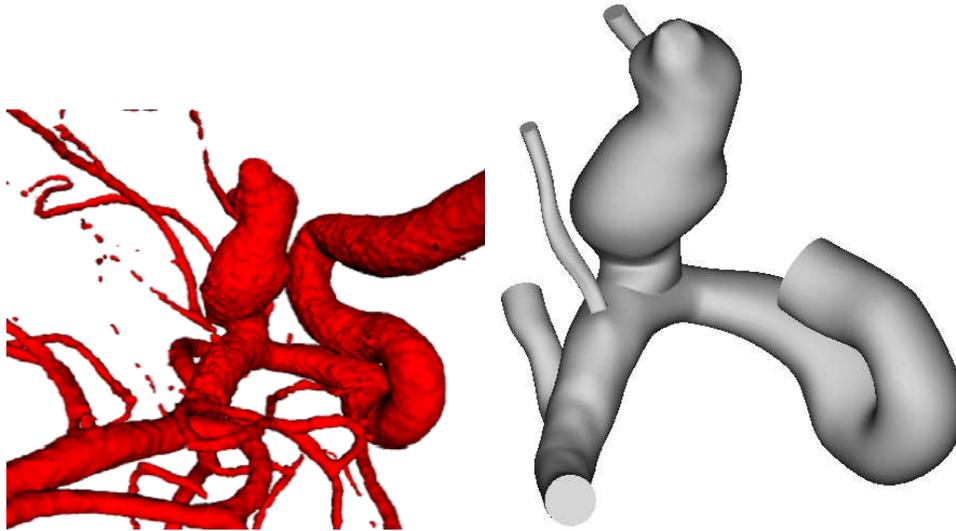


Figura 3.2: Presentación de la Geometría N°2. A la izquierda en su formato 3D de imágenes médicas, a la derecha la geometría reconstruida y utilizada en Fluent.

### 3.2. Escalamiento de las Geometrías Utilizadas

Una tarea muy importante de realizar corresponde al escalamiento de las geometrías. Este proceso consiste en procurar que las dimensiones que posee el modelo importado a Fluent, sean las dimensiones reales de la geometría (del orden de los milímetros) y no ocurran errores de magnitud de escala por efecto de las sucesivas importaciones entre programas gráficos. Para tal efecto, se

comparan las dimensiones reales de la arteria con la del modelo importado en Fluent. Se posee inicialmente una fotografía de la geometría real que contiene 3 mediciones; el ancho del cuello del aneurisma, su largo y el ancho del domo (Fig. 3.3). Se procede a realizar mediciones sobre la geometría con el software Solid Edge, cuidando de hacer coincidir el zoom y posición de la geometría con las fotos existentes. De esta forma las mediciones serán comparables y se podrá obtener un factor de escalamiento que servirá para estimar el radio real de entrada de la arteria. Para hacer coincidir la geometría con la fotografía se puede importar esta última a Solid Edge mediante Formato/Vista (Fig. 3.4). Se obtienen 3 factores de escalamiento los cuales se promedian y utilizan para estimar un radio y área de entrada.

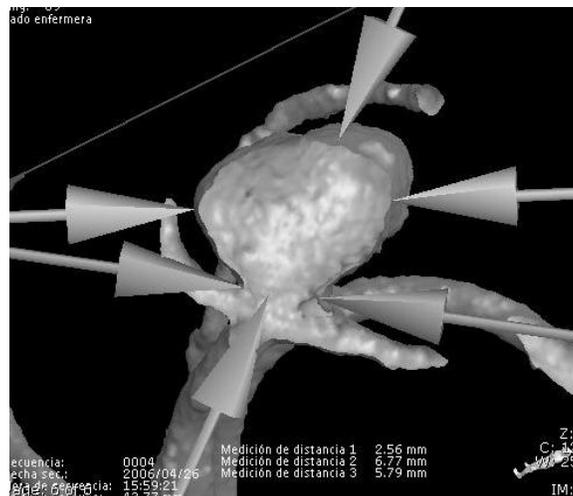


Figura 3.3: Dimensiones reales de la arteria

Posterior al mallado de la geometría en Gambit, se debe importar geometría a Fluent. En esta etapa se debe realizar el proceso de escalamiento definitivo. Se mide en Fluent el área de entrada de la arteria importada, a través de Report/Proyect Areas. Este valor se compara con el estimado en la etapa anterior, obteniéndose el coeficiente de escalamiento. Ahora se realiza el escalamiento de la geometría con Grid/Scale.

Se puede chequear cuál es el nuevo volumen de la geometría escalada mediante Grid/Check.

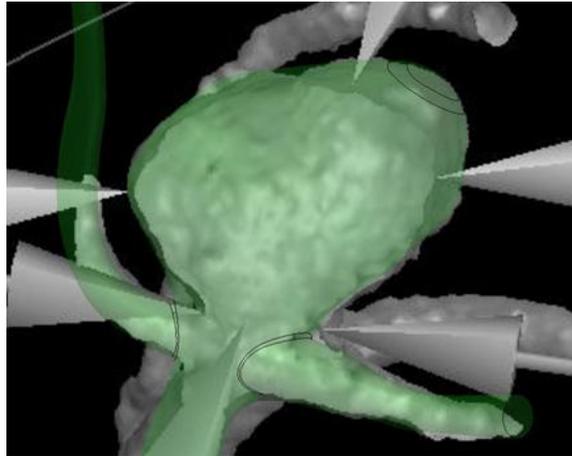


Figura 3.4: Escalamiento de geometrías utilizadas

### 3.3. Mallado del Modelo

Tanto el mallado de la geometría, como la imposición de la condiciones de borde del problema deben ser implementadas en Gambit, software complementario a Fluent. El proceso se inicia al importar la geometría a Gambit en formato .STP. Luego, se procede a mallar el volumen. En esta etapa se debe considerar dos aspectos que son de interés. Por una parte se debe especificar el tipo de volumen finito a utilizar; y por otra, el algoritmo de mallado. En este caso el tipo de elemento a utilizar son tetrahedros híbridos y como algoritmo de mallado "Tgrid". Esto genera una malla formada principalmente de tetrahedros, pero que puede contener algunos elementos del tipo hexahedricos, piramidales o wedge según sea apropiado (Fig. 3.5). Además de lo anterior, se debe especificar la distancia entre nodos, que entregará la densidad de malla final. Esta decisión es fundamental pues una densidad de malla muy grande derivará en una pobre calidad de los resultados, mientras que una densidad demasiado fina encarecerá en demasía los costos computacionales de la simulación.

Posterior al mallado se deben imponer las condiciones de Borde de Superficie, y de Volumen. Respecto de las condiciones de borde de superficie conviene inicialmente agrupar todas las superficies que conforman la arteria, todas las superficies que conforman el aneurisma, todas las entradas, y todas las salidas. Esto ha mostrado en trabajos anteriores [19] que facilita la convergencia del modelo y disminuye posibles errores en los resultados. Esto se realiza en la sección Geometry/Group/Create Group. De esta forma las condiciones de Borde quedan como: una condición de pared, "Wall" tanto para el grupo Arteria como para el grupo Aneurisma; una condición "Velocity Inlet" para la(s) entrada(s); y una condición "Pressure Outlet" para la(s) Salida(s). Como condición de borde de volumen se debe imponer que se trata de un fluido ("Fluid") y no un sólido.

Finalmente se debe exportar la geometría en formato .msh, que puede ser leída y compilada por Fluent. Un esquema de la ventana gráfica de Gambit es mostrado por la Fig. 3.6.

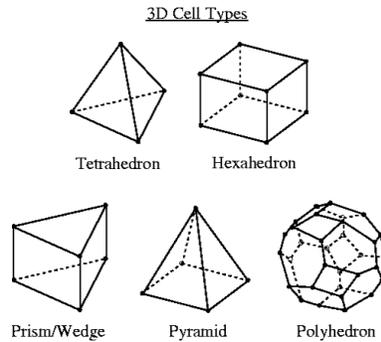


Figura 3.5: Tipo elementos disponibles en Gambit

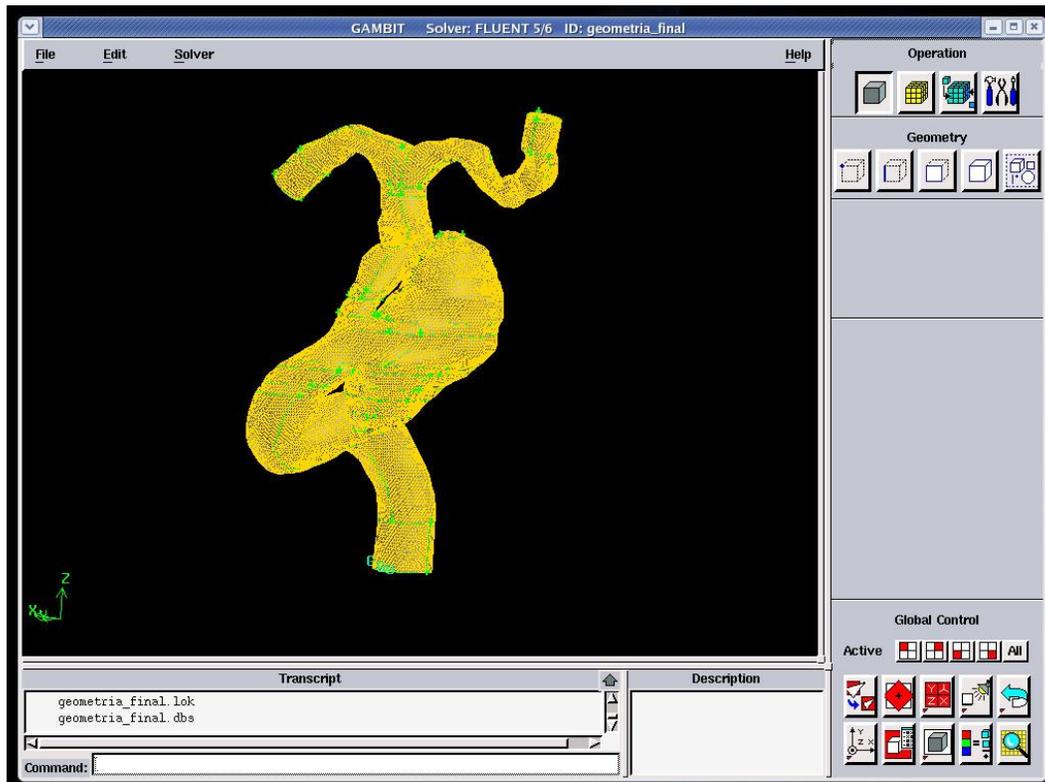


Figura 3.6: Ventana gráfica del software Gambit

### 3.4. Simulación en Fluent

Las simulaciones se realizaron en el software CFD Fluent 6.3, operado en el sistema operativo Centos (Basado en Red Hat de Linux). El primer paso es abrir el programa y digitar 3ddp, lo

que permitirá trabajar con un modelo en 3D y con doble precisión numérica. Esto permite que los resultados no sean truncados y que se emplee la mayor cantidad de recursos computacionales en evitar la propagación de los errores. Posteriormente hay que abrir un archivo del tipo Case y seleccionar el archivo \*.msh, exportado desde Gambit. La primera tarea importante de realizar en Fluent es el escalamiento de la geometría. Una vez escalada la geometría se puede implementar las características del caso en estudio que permitirán realizar las iteraciones necesarias.

### **Métodos de resolución numéricos utilizados**

Se utilizará el método de cálculo segregado-implícito de segundo orden, que entregará una mayor precisión en los resultados. El solver usado es "Pressure Based Solver" (Fig. 3.7). Este solver emplea un algoritmo que pertenece a la clase general de métodos de proyección. En estos métodos, la continuidad del campo de velocidad se logra resolviendo una ecuación de presión. Dicha ecuación deriva de las ecuaciones de continuidad y de momentum, de forma que el campo de velocidades corregido por la ecuación de presión satisfaga la ecuación de continuidad [20].

Por otro lado, se utilizará una discretización de segundo orden para la ecuación Presión y una discretización según Ley de Potencias para la ecuación de Momentum (Fig. 3.8). En la Tabla 3.1, se muestra un resumen de los parámetros fluidodinámicos y los métodos numéricos implementados en Fluent.

Como método de acoplamiento de las ecuaciones de Presión-Velocidad se utilizará SIMPLEC, que contiene varias mejoras respecto del método por Default de Fluent, SIMPLE.



Figura 3.7: Opciones del solver utilizadas en Fluent

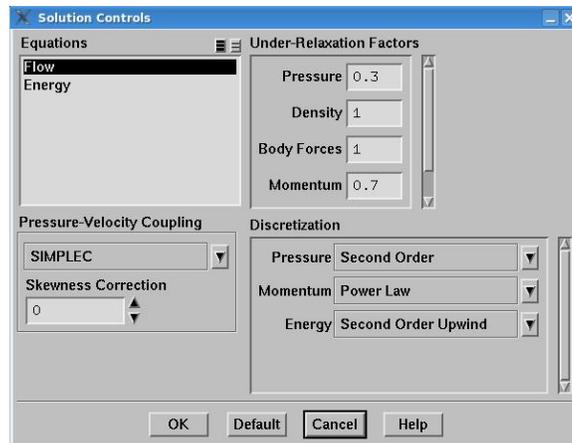


Figura 3.8: Opciones del menú Solutions Control utilizadas en Fluent

### 3.5. Metodología Específica para Fluent

1. Definir modelo Viscosidad: Laminar o Turbulento. Ir a → Define/Models/Viscous.
2. Tipo de Solver: Segregado Implícito. Segundo Orden. Pressure Based Solver. Ir a → Define/Solver

Tabla 3.1: Métodos numéricos utilizados en Fluent

<b>Valores Fluidodinámicos</b>	
Velocidad Promedio	$U = 0,5[m/s]$
Temperatura Constante	$T = 310[K]$
Densidad Promedio	$\rho = 1050[Kg/m^3]$
Viscosidad Dinámica [Caso Newtoniano]	$\nu = 0,00319[Pa \cdot s]$
<b>Modelo Numérico de Solución</b>	
Laminar-Turbulento	
Formulación Segregada-Implicita	
Segundo Orden	
Pressure Based Solver	
<b>Modelos solución Ec. Masa y Momentum</b>	
Presión	Segundo Orden
Acoplamiento Pres-Vel	SIMPLEC
Momentum	Ley de Potencia

3. Propiedades de la Sangre: Ir a  $\rightarrow$  Define/Materials
4. Condiciones de Operación: Define/Operation Conditions  $\rightarrow$  14.000 Pa.
5. Definir Pulso de Entrada y Salida: Ir a  $\rightarrow$  Define/User Define/Functions/Compiled. Se debe cargar el archivo en código C, compilarlo con nombre "libudf", y luego cargar la carpeta generada con este mismo nombre. Ver anexo A.
6. Fijar las condiciones de borde antes cargadas al modelo: Ir a  $\rightarrow$  Define/Boundary Conditions. Para la Salida y Entrada.
7. Definir Método Numéricos: Ir a  $\rightarrow$  Solve/Controls/Solutions. Acoplamiento por SIMPLEC. Discretización Ec. de Presión de Segundo Orden y Discretización de Ec. Momentum por Ley de Potencias.
8. Se debe inicializar la Velocidad y Presión en Cero. Para la Turbulencia iniciar con el valor de  $k, \epsilon$  y/u  $\omega$ , según corresponda: Ir a  $\rightarrow$  Solve/Initialize/Initialize.
9. Programar las variables que se quieren medir en el tiempo: Ir a  $\rightarrow$  Solve/Monitors/Surface.
10. Definir cada cuántas iteraciones o cada cuánto tiempo se quieren guardar las iteraciones \*.dat. Estos archivos son los que permiten realizar el análisis de los resultados posterior a la simulación: Ir a  $\rightarrow$  File/Write/Autosave.

11. Finalmente se puede iterar: Ir a  $\rightarrow$  Solve/Iterate. En este caso se realizan 170 pasos de tiempo de 0,01 seg cada uno. Esto genera un tiempo de simulación de 1,7 seg. Esto corresponde a dos ciclos sanguíneos completos. Se señala un número máximo de 50 iteraciones por time step.

---

## Capítulo 4

### Resultados

---

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos en las simulaciones realizadas a las dos geometrías en estudio, bajo distintas hipótesis de trabajo. Previo a esto, se realizó una prueba de malla para determinar el número definitivo de elementos a utilizar en el mallado de las geometrías. Los resultados de las simulaciones contemplan dos aspectos básicos de observar. Primero se puede mirar el transiente de las variables de interés a través del tiempo. Variables como esfuerzo de corte en la pared WSS, presión estática sobre la pared y energía turbulenta. Por otro lado se pueden analizar los resultados de las mismas variables mencionadas anteriormente en instantes puntuales de interés, tales como la sístole y/o diástole. Esto es, los instantes de mayor y menor presión sanguínea en el flujo y por ende de mayor o menor velocidad de entrada en la arteria.

#### 4.1. Prueba de Malla

El objetivo de esta sección es determinar el número de elementos a utilizar en el mallado del volumen de la geometría, también conocido como densidad de malla. Se busca que los resultados obtenidos sean independientes de la densidad utilizada. Para esta tarea se procedió a generar 7 casos de la geometría 1, con densidades variables desde 60.000 a los 500.000 elementos. Considerando que esta geometría tiene un volumen de  $160mm^3$ , se puede calcular la densidad de malla para cada caso generado (ver Tabla 4.3).

Se registró a través del tiempo, la tendencia seguida por dos variables: el esfuerzo de corte (WSS) promedio sobre la superficie del aneurisma, y la velocidad promedio sobre su volumen. Luego de tener los 7 casos simulados se puede comparar gráficamente las diferencias registradas en estos parámetros según las distintas densidades utilizadas. Se observó para ambas variables que a medida que se aumenta la fineza de la malla, se registran máximos cada vez mayores. En particular esto se aprecia de manera más pronunciada en las Figs. 4.1 y 4.2. En estas figuras se observa que el máximo WSS registrado varía hasta tender a estabilizarse a partir de los 300.000 elementos. Al seguir aumentando la densidad de malla el WSS no sigue aumentando, por lo que en la Fig. 4.2 se sobreponen las líneas de 400.000 y 500.000 elementos. Al mirar la variable velocidad (Figs.

Tabla 4.1: Densidades de malla en pruebas realizadas

Nº Elementos	Densidad [ $el/mm^3$ ]
60.000	375
120.000	750
200.000	1250
260.000	1625
300.000	1875
400.000	2500
500.000	3125

4.3 y 4.4), se observa una tendencia bastante parecida aunque menos pronunciada que en el caso anterior. Es decir, a partir de los 400.000 elementos se estabiliza la velocidad máx. medida y no vale la pena seguir aumentando la densidad de malla.

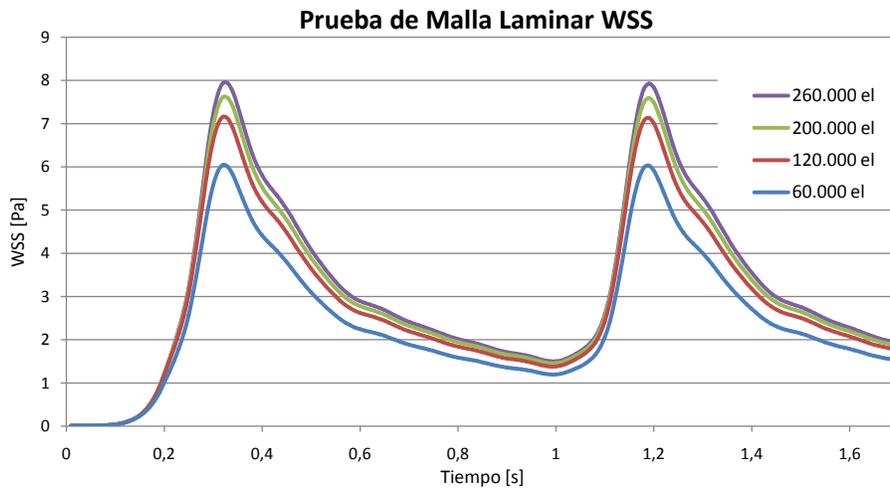


Figura 4.1: Prueba malla WSS sobre superficie del aneurisma

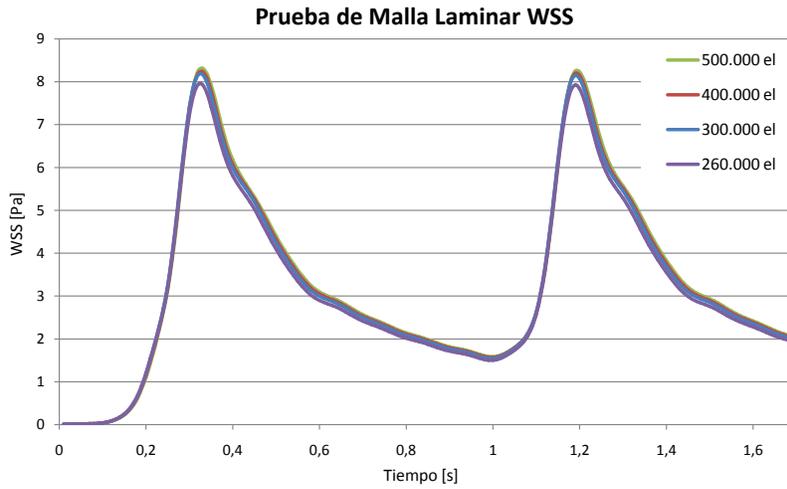


Figura 4.2: Prueba malla WSS sobre superficie del aneurisma

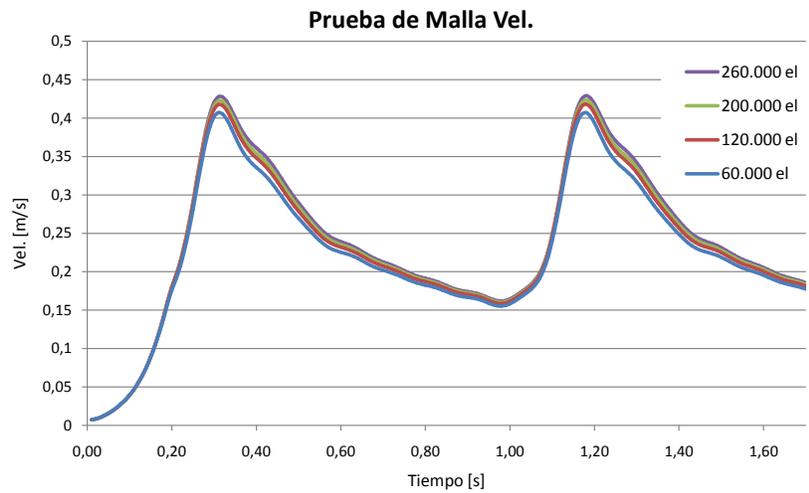


Figura 4.3: Prueba malla de la velocidad promedio sobre volumen de la geometría

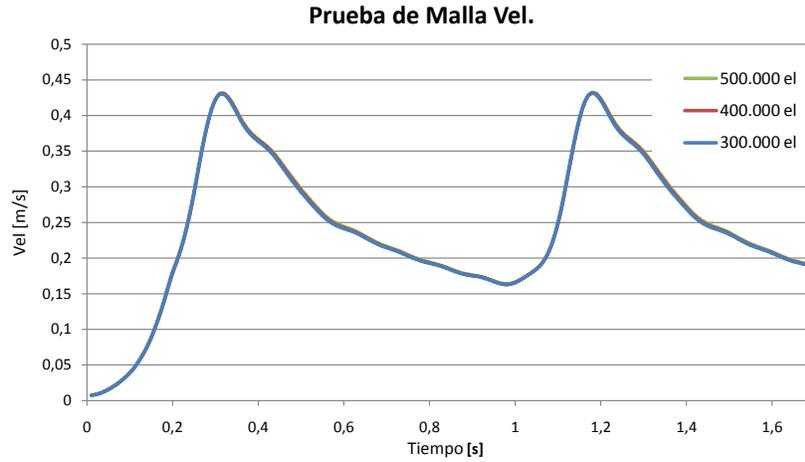


Figura 4.4: Prueba malla de la velocidad promedio sobre volumen de la geometría

Otro estudio para comprobar la convergencia de los resultados al utilizar mallas suficientemente finas se puede observar en la Fig. 4.5. En este gráfico se muestra el WSS medido en un punto del aneurisma con con mallados cada vez más finos. Es clara la convergencia de la variable entre las dos mallas más finas. El seguir aumentando la densidad por sobre los 400.000 elementos provoca diferencias en la variable medida de apenas un 0,7 %. Para comprobar esta convergencia numéricamente, se puede recurrir a un esquema de extrapolación con el objeto de el orden del error que se está cometiendo [21] el no seguir afinando la malla. Para calcular el orden del error de truncación se pueden usar los datos medidos para la variable WSS en un punto del volumen con tres tamaños de mallada distintos. Suponiendo que  $X_t$  es el valor real de la variable medida en un punto, se puede plantear lo siguiente:

$$X_t = X_i + Ch_i^n \quad (4.1)$$

donde  $X_i$  es el valor de la variable calculado con una malla  $i$ , que posee un espaciamiento  $h_i$ . El coeficiente  $n$  corresponde al orden error de truncación. Suponiendo  $C$  independiente de  $h$ , se puede plantear la siguiente relación:

$$\frac{X_1 - X_2}{X_2 - X_3} = \frac{h_1^n - h_2^n}{h_2^n - h_3^n} \quad (4.2)$$

Luego si  $h_1/h_2 = h_2/h_3 = \lambda$ , entonces:

$$n = \ln \frac{X_1 - X_2}{X_2 - X_3} / \ln \lambda \quad (4.3)$$

Utilizando los valores de las tres mallas más finas de la Tabla 4.2, se obtiene un  $n = 1,9$ . Este valor resulta ser bastante bueno y habla de un alto nivel de confianza en que la malla utilizada es lo suficientemente fina [21]. De este modo se establece como 400.000 el número mínimo de elementos con que se debe mallar la geometría 1. Esto corresponde a una densidad de malla de  $2500 \text{ el/mm}^3$ .

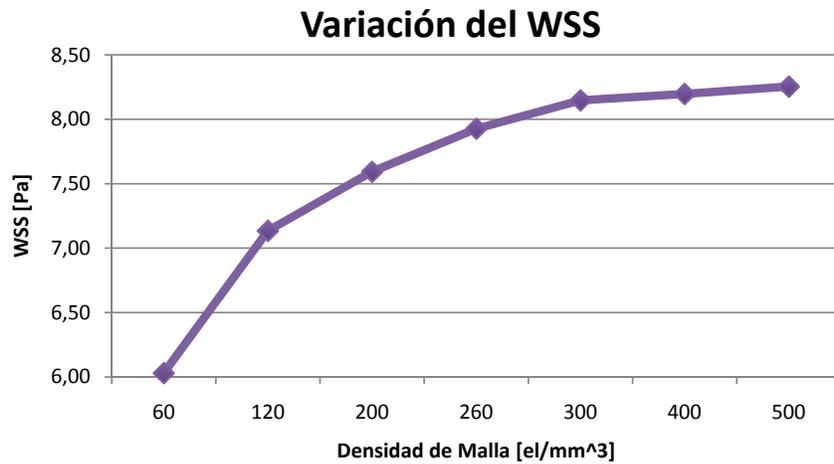


Figura 4.5: Convergencia del WSS medido en un punto del volumen para distintas mallas

Tabla 4.2: Valores de WSS medido en un punto del aneurisma para diferentes densidades de malla

Nº Elementos	h	WSS max	error %	error % acum
60	1,80	6,03	–	0 %
120	1,40	7,13	15,5 %	15,5 %
200	1,20	7,59	6,0 %	31,0 %
260	1,06	7,93	4,2 %	37,0 %
300	1,00	8,15	2,7 %	41,2 %
400	0,92	8,20	0,6 %	43,9 %
500	0,84	8,25	0,7 %	44,5 %

Se debe notar que la densidad de malla encontrada corresponde a la del caso laminar. Por ello y dado que comúnmente los flujos turbulentos suelen ser muy sensibles a la densidad de malla, se decidió realizar la misma prueba de malla sobre un rango más acotado para el modelo turbulento. El resultado de esto se muestra en la Fig. 4.6, donde se observa el WSS sobre la superficie del aneurisma para tres densidades de malla. Se encontró que la densidad de malla para el caso laminar, es también suficiente para el turbulento. En otras palabras las diferencias encontradas

entre la simulación con 400.00 y 500.000 elementos fueron ínfimas. De este modo se confirman los 400.000 elementos para el mallado de la geometría 1, que genera una densidad de  $2500 \text{ el/mm}^3$ . Considerando la densidad de malla obtenida para la geometría 1 y el volumen de la geometría 2, se calcula el número mínimo de elementos para mallar sobre esta última. Se busca que ambas geometrías compartan la misma densidad de malla para que de esta forma los resultados entre ellas sean comparables.

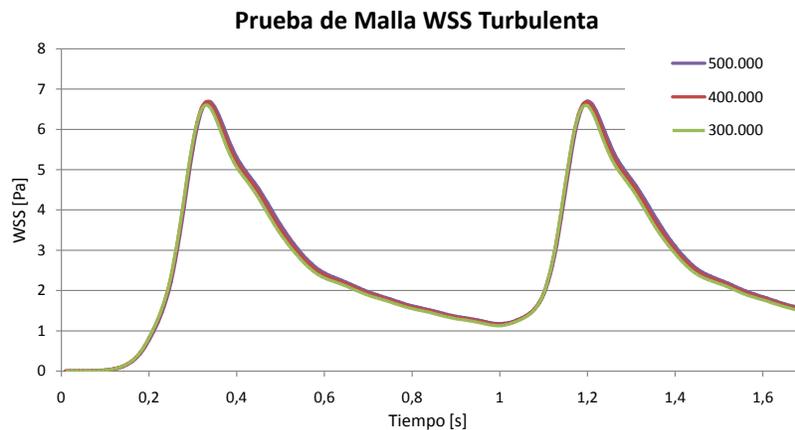


Figura 4.6: Prueba malla WSS sobre superficie del aneurisma. Caso modelo turbulento Standard  $k - \epsilon$

Un resumen de las densidades utilizadas en este trabajo puede ser visto en la Tabla 4.3.

Tabla 4.3: Densidades de malla en pruebas realizadas

Geo.	Volumen [ $mm^3$ ]	Nº Elementos	Densidad de Malla [ $el/mm^3$ ]
1	158	400.000	2532
2	297	800.000	2694

## 4.2. Validación del Modelo

Esta etapa consiste en verificar que el modelo fluidodinámico implementado cumple con la Ec. de la conservación de masa. Para ello se procedió a verificar el caudal del fluido de entrada versus el registrado en las salidas. El resultado de esto puede ser visto en la Fig. 4.7, donde se aprecia el error porcentual a través del tiempo entre el caudal de entrada y salida. Esto se midió con un modelo laminar en la geometría 1.

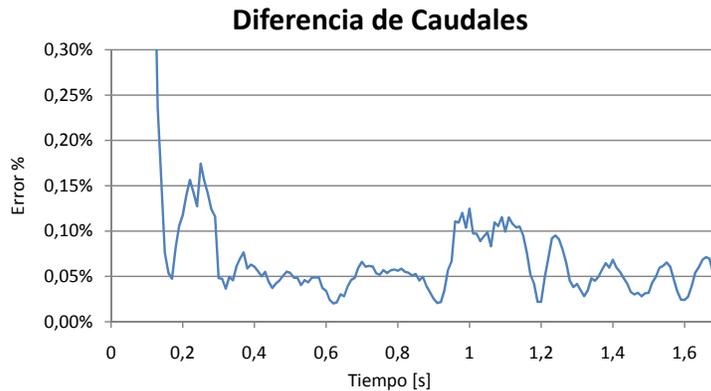


Figura 4.7: Error porcentual entre caudal de entrada y salida

### 4.3. Casos Simulados

En esta memoria se simularon 12 diferentes casos, relativos a dos geometrías y con distintos modelos de turbulencia. La primera geometría corresponde a un aneurisma sacular terminal, y la segunda a uno del tipo sacular lateral. El objetivo de esto es que los resultados obtenidos no sean particulares a un tipo de geometría. Se estudió también la influencia de la turbulencia sobre la hemodinámica de los aneurismas. Para ello, se simuló sobre el caso laminar y sobre 5 modelos de turbulencia: modelo  $k - \epsilon$  Standard, modelo RNG  $k - \epsilon$ , modelo Realizable  $k - \epsilon$ , modelo  $k - \omega$  Standard y el modelo SST  $k - \omega$ . También se quiere conocer si estos resultados obtenidos están influenciados por el perfil del flujo de entrada, que tiende a ser parabólico en el caso laminar y semi-plano en el caso turbulento. Por ello se realizaron simulaciones con ambas condiciones de borde.

En la Tabla 4.4 se muestra la matriz de simulaciones realizadas, que incluye los casos considerandos y las hipótesis de cada uno.

### 4.4. Resultados en Geometría 1

En la geometría 1 se definieron tres puntos de medición de las características fluidodinámicas del aneurisma. Se definieron dos puntos sobre el cuello del aneurisma terminal, y un punto sobre la cima (Fig. 4.8). Además, para analizar mejor la fluidodinámica interna se realizaron los tres cortes mostrados por las Figs. 4.9, 4.10 y 4.11. El corte 1 corresponde a un corte transversal sobre el cuello del aneurisma. El corte 2 es un plano longitudinal que permite ver toda la zona de la deformación. Finalmente el plano 3 es un corte transversal del aneurisma y la arteria.

Tabla 4.4: Matriz de simulaciones realizadas

Nº Caso	Geometría Simulada	Tipo Flujo	Cod.	Pulso Entrada
1	Geo. 01	Laminar	Lam	Parabólico
2	Geo. 01	Standard $k - \epsilon$	ske	Parabólico
3	Geo. 01	RNG $k - \epsilon$	rngke	Parabólico
4	Geo. 01	Realizable $k - \epsilon$	rke	Parabólico
5	Geo. 01	Standard $k - \omega$	skw	Parabólico
6	Geo. 01	SST $k - \omega$	SSTkw	Parabólico
7	Geo. 01	Laminar (Estacionario)	Lam. St	Parabólico
8	Geo. 01	Laminar	Lam	Plano
9	Geo. 01	Standard $k - \epsilon$	ske	Plano
10	Geo. 02	Laminar	Lam	Parabólico
11	Geo. 02	Standard $k - \epsilon$	ske	Parabólico
12	Geo. 02	Standard $k - \omega$	skw	Parabólico

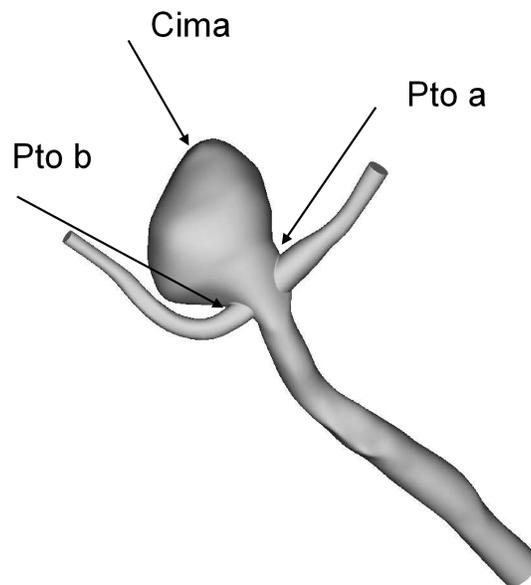


Figura 4.8: Puntos estudiados en la geometría 1

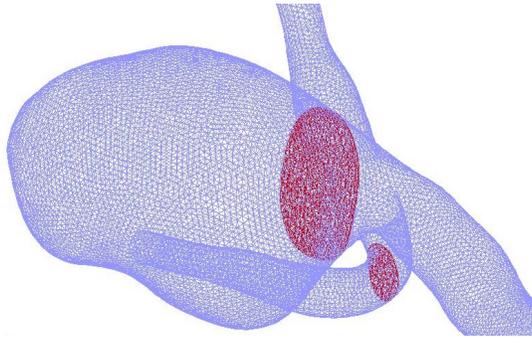


Figura 4.9: Esquema del corte 1 realizado sobre geometría 1

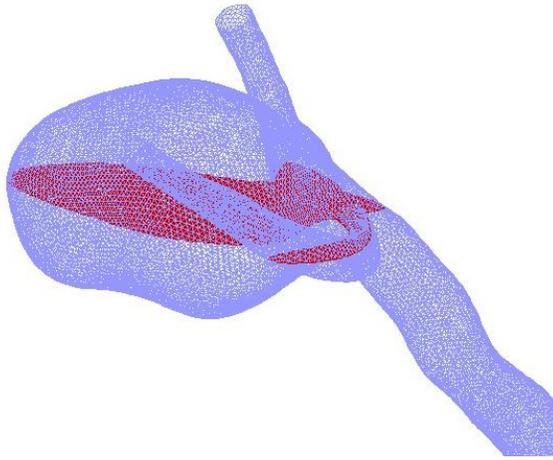


Figura 4.10: Esquema del corte 2 realizado sobre geometría 1

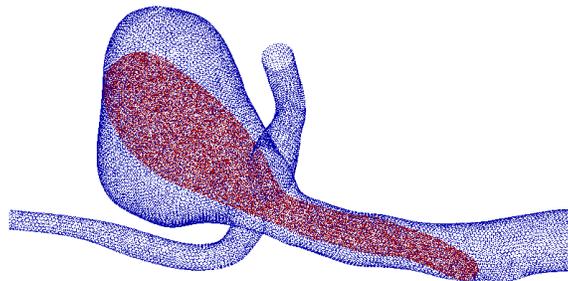


Figura 4.11: Esquema del corte 3 realizado sobre geometría 1

#### 4.4.1. Condición Fluido Newtoniano

Inicialmente se trabajó la sangre como un fluido no-Newtoniano con un modelo de Carreau. Si bien esto es lo correcto según las características de las arterias cerebrales, se plantea un problema

dado que cuando se calcula para un flujo turbulento existen modelos de viscosidad asociados al fluido, que hacen que el modelo de Carreau ya no sea válido. En ese caso se indica una viscosidad base y el modelo de turbulencia se encarga de calcular la viscosidad adecuada a cada instante y en cada zona del flujo. Dado lo anterior se realizó una simulación para comprobar las discrepancias de los resultados al simular el caso laminar con un modelo de sangre newtoniano y compararlo con el modelo de Carreau. Como resultado de esto, se observa que parámetros como el esfuerzos de corte sobre un punto del aneurisma tienden a variar en ambos simulaciones en una fracción que depende del lugar aneurisma donde se mida la variable. En general, con el modelo Newtoniano se tiende a sobreestimar los esfuerzos de corte sobre el aneurisma, lo cual se puede visualizar en las Figs. 4.12 y 4.13 que presentan el WSS en los dos puntos medidos: en la base y en la cima de la deformación.

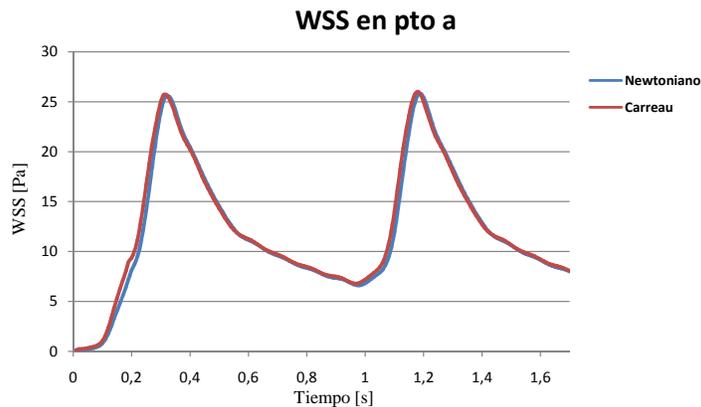


Figura 4.12: Diferencias entre modelo Newtoniano y de Carreau en el pto a

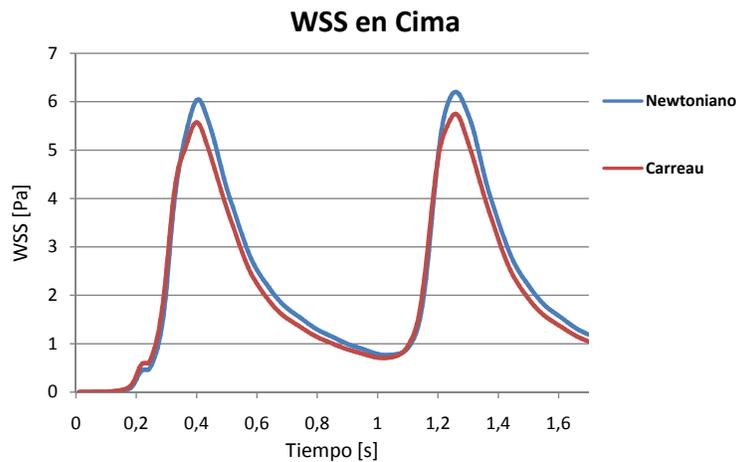


Figura 4.13: Diferencias entre modelo Newtoniano y de Carreau en la cima

#### 4.4.2. Resultados Transientes

En esta sección se reportan los resultados de las variables en estudio a través del tiempo. Se simularon 170 pasos de tiempo, de 0,01 seg. cada paso. Esto genera un tiempo de simulación de 1,7 seg. Este tiempo corresponde a dos pulsos sanguíneos completos. El pulso de entrada tiene una zona de máxima velocidad que coincide con la sístole del corazón (alrededor de los 1,16 seg de iteración), y posee una zona de mínima velocidad correspondiente a la diástole del corazón (0,98 seg de iteración).

Se registró la tendencia seguida por el WSS, la presión y la velocidad en dos zonas muy importante de un aneurisma: el cuello y la cima.

En la Fig. 4.14 se observa el WSS sobre los puntos definidos del aneurisma durante los dos ciclos iterados. Se observa que los esfuerzos de corte en los puntos ubicados sobre el cuello tienen a ser bastante mayores que en la zona de la cima. Este fenómeno se puede explicar dado que el fluido que llega a la zona del aneurisma se encuentra con una recirculación al tratar de ingresar, lo cual disminuye la velocidad de impacto del fluido en la cima, disminuyendo el esfuerzo de corte medido en esa zona. En el cuello, en cambio, el fluido impacta directamente con la velocidad que trae de aguas abajo, de manera que la velocidad de impacto es mayor, intensificando el esfuerzo de corte medido. Los esfuerzos registrados en la Fig. 4.14 corresponden al caso base 01, es decir, flujo laminar y perfil parabólico. Se observa que en los 3 puntos medidos, el esfuerzo de corte posee una tendencia muy parecida a la del flujo de entrada. Esto ocurre pues el esfuerzo de corte depende íntegramente de la velocidad del fluido sobre la pared y de su viscosidad. Se aprecian 2 máximos del WSS atribuibles a la sístole de cada uno de los dos ciclos simulados. De manera

similar se aprecia una zona con bajo esfuerzo de corte atribuible a la diástole del segundo ciclo simulado.

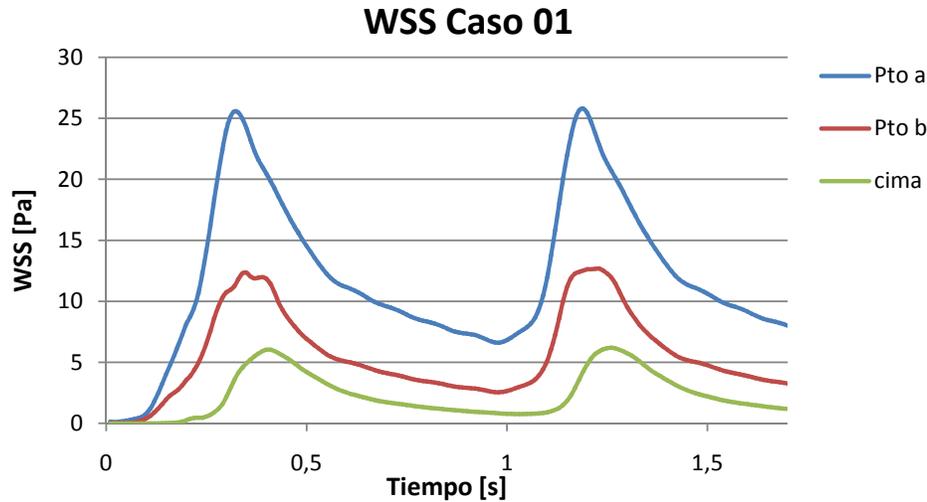


Figura 4.14: WSS medido en diferentes puntos del aneurismas. Caso 01

Una vez establecida la tendencia del modelo laminar, se procede a estudiar la turbulencia en el flujo. En las Figs. 4.15 y 4.16, se observa el esfuerzo de corte en los casos laminar, turbulento con un modelo Standard  $k - \epsilon$  y turbulento con un modelo del tipo Standard  $k - \omega$ . Se midió en los dos puntos pertenecientes al cuello del aneurisma. En estas figuras se aprecia que existe una variación al utilizar un modelo laminar, respecto de uno turbulento Standard  $k - \epsilon$ . En la Fig. 4.17 se muestra también la comparación para distintos modelos pero medido en la cima del aneurisma. En esta zona se aprecia una diferencia considerablemente mayor al caso anterior. Por otro lado, si se compara el caso laminar con el modelo  $k - \omega$ , las diferencias son mínimas. Esto ocurre en los 3 puntos medidos del aneurisma.

También se pueden comparar las diferencias encontradas utilizando modelos de turbulencia de la misma familia. En la Fig. 4.18 se presentan los esfuerzos de corte medidos sobre el cuello del aneurisma según distintos modelos de la familia de los  $k - \epsilon$ . Apenas se pueden apreciar dos líneas dado que los resultados son casi idénticos entre los tres modelos  $k - \epsilon$ . Situación similar ocurre para los dos modelos del tipo  $k - \omega$ .

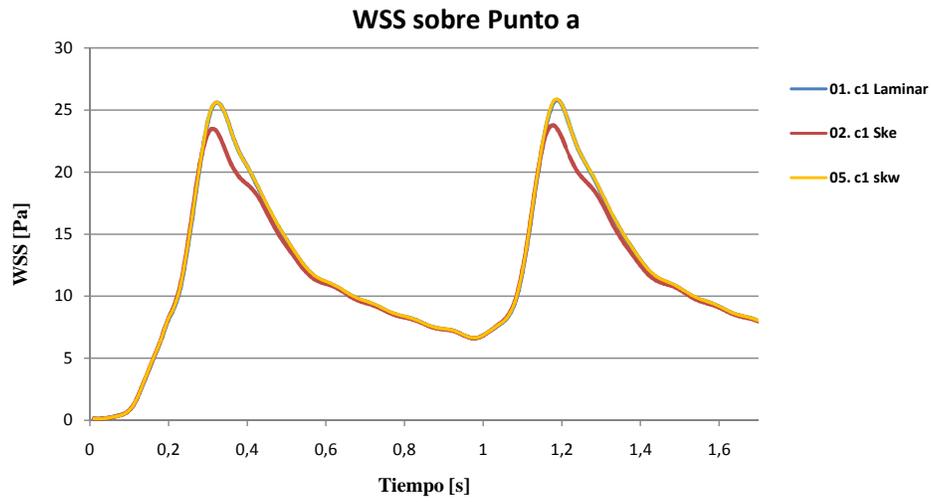


Figura 4.15: WSS medido en el pto a. Caso 01, 02 y 05

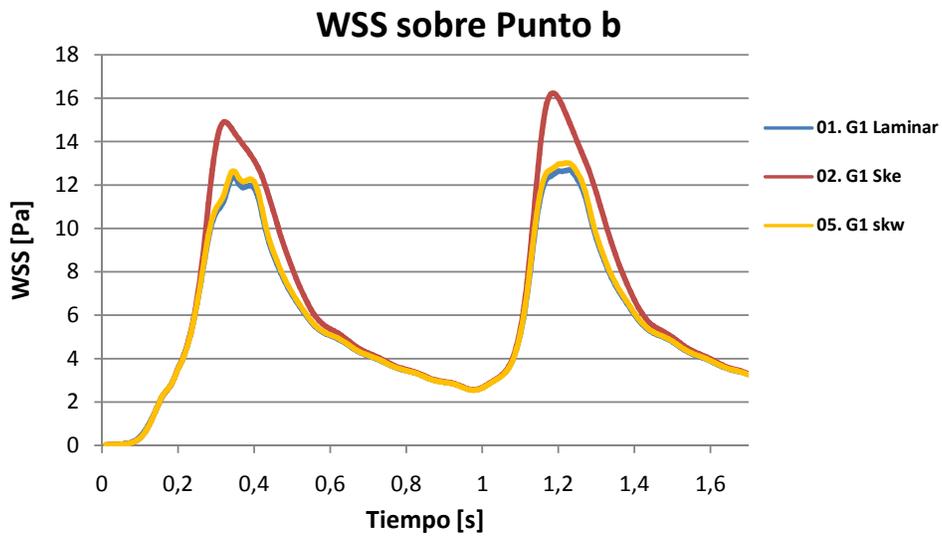


Figura 4.16: WSS medido en el pto b. Caso 01, 02 y 05

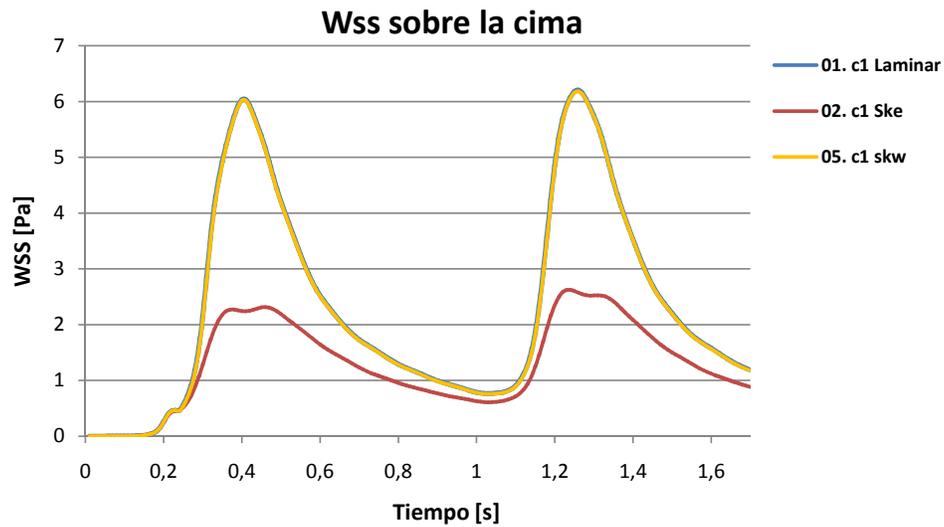


Figura 4.17: WSS medido en la cima. Caso 01, 02 y 05

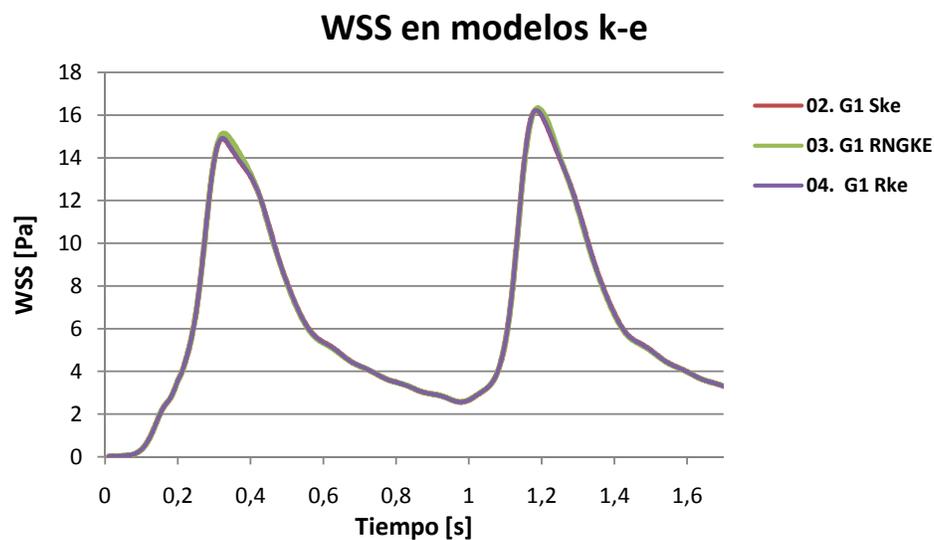


Figura 4.18: WSS sobre pto b. Diferencias registradas entre distintos modelos del tipo  $k - \epsilon$ . Casos 02, 03 y 04.

Por otra parte, se midió la presión estática en los mismos puntos mencionados anteriormente lo cual puede ser visto en la Fig. 4.19, correspondiente al Caso 01. Se ve que las diferencias de presión medida en distintos puntos del aneurisma son ínfimas, incluso menores al 0,5%. Además, la presión estática medida en un mismo punto de la cima para el modelo laminar, el turbulento  $k - \epsilon$  y el turbulento  $k - \omega$  presenta diferencias muy pequeñas apenas apreciables en el gráfico de la Fig. 4.20, que da cuenta de esta situación.

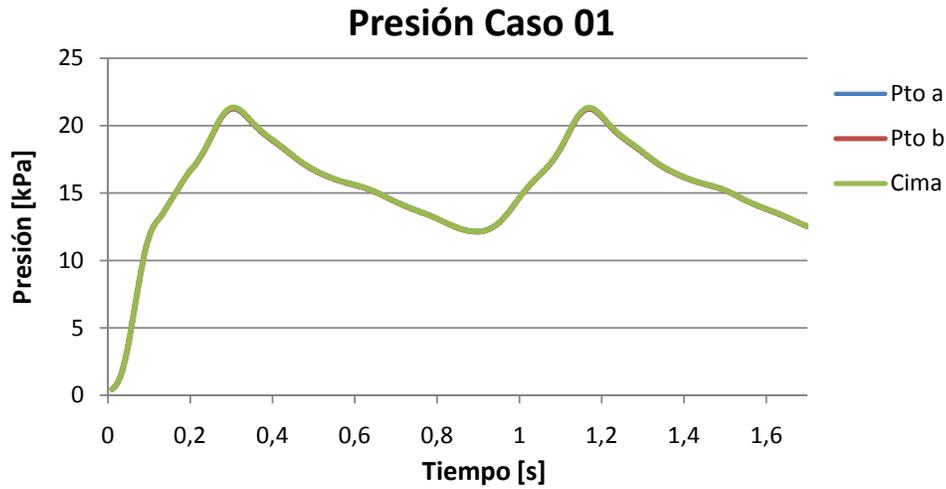


Figura 4.19: Presión Estática medida en 3 puntos del aneurisma. Caso 01.

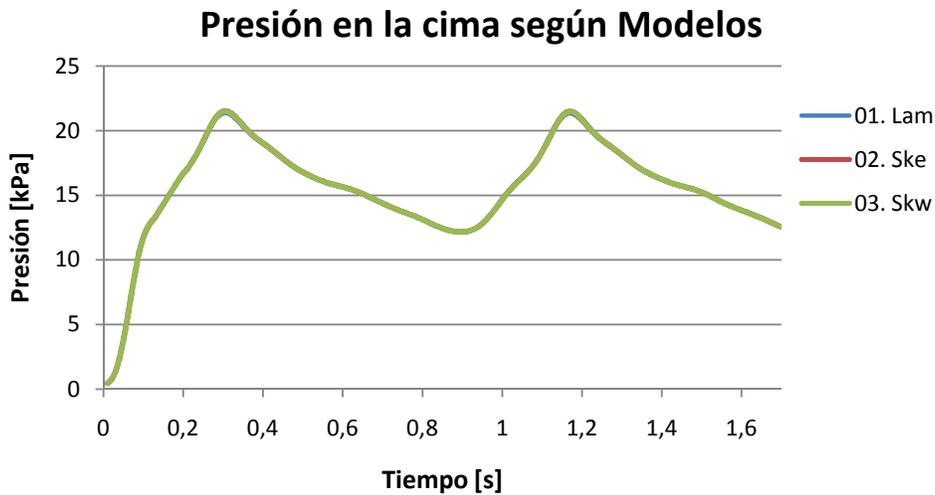


Figura 4.20: Presión estática medida en la cima del Aneurisma. Caso 01, 02 y 03.

Dadas las diferencias registradas al simular con modelos  $k-\epsilon$  y  $k-\omega$ , aparece el interés de observar cómo varía la energía cinética turbulenta  $k$  medida para los mismos puntos del aneurisma con cada modelo. En la Fig. 4.21 se registra lo medido en el pto a, mientras que en la Fig. 4.22 se registra lo observado para la cima. En ambos gráficos se observa la tendencia que al utilizar un modelo  $k-\omega$  la energía registrada es mucho menor, de hecho varios órdenes de magnitud menor en el caso de la cima. Esta generación de energía podría explicar los menores esfuerzos de corte registrados con el modelo  $k-\epsilon$ .

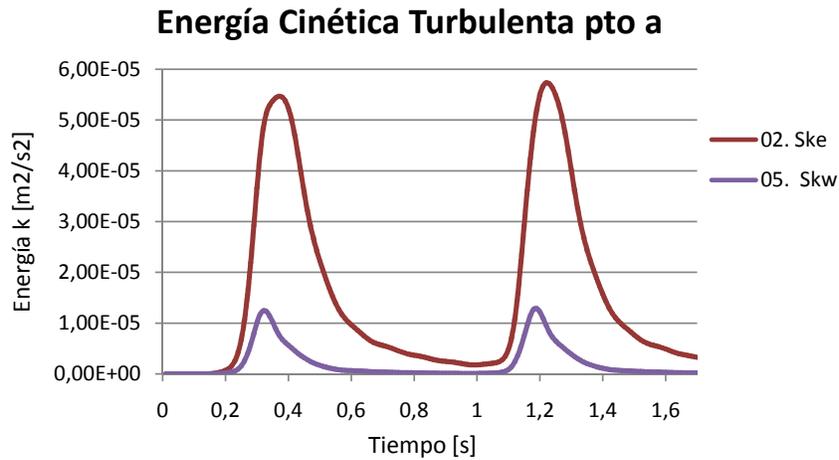


Figura 4.21: Energía cinética turbulenta en el pto a. Caso 02 y 05

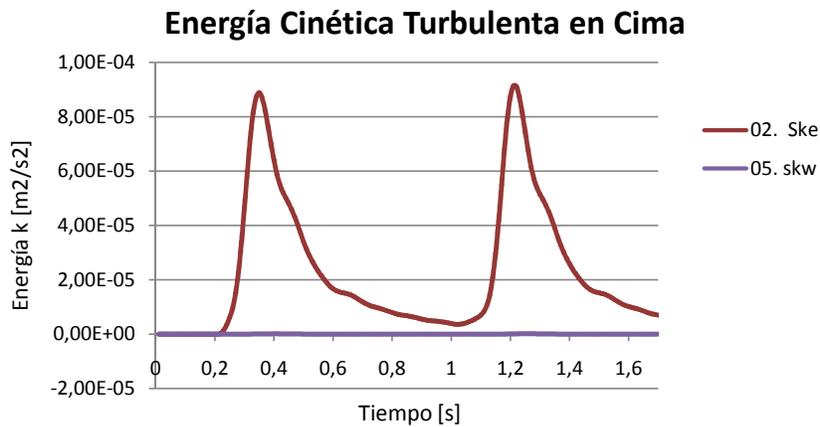


Figura 4.22: Energía cinética turbulenta  $k$  en la cima. Caso 02 y 05

#### 4.4.3. Resultados en Sístole

La sístole corresponde a la fase donde el corazón se contrae y bombea sangre. Esto genera en el ciclo cardiaco el momento de mayor velocidad y desde luego el de mayores esfuerzos de corte sobre las paredes de las arterias. En las Figuras 4.23, 4.24, 4.25 se muestran los vectores de velocidad en los cortes 1, 2 y 3 respectivamente. Se muestra el corte tanto en el caso laminar como en el turbulento standard  $k - \epsilon$ . Al respecto se puede indicar que no se registran importantes diferencias en las velocidades medidas con ambos modelos. Más aún las direcciones vectoriales de la velocidad y las estructurales vorticiales encontradas son idénticas. La única variación existente corresponde

a la intensidad de la velocidad que en el caso laminar tiende a ser ligeramente superior. Un análisis detallado de cada corte permite visualizar en el corte 1 la presencia de dos cortes de estructuras vorticiales, denominado  $v_1$  y  $v_2$  que van desde el centro del cuello hacia las paredes. En el corte 3 se aprecia otro corte de la gran estructura vorticial presente dentro del aneurisma y que genera la recirculación en esa zona. Se le denomina  $v_3$ .

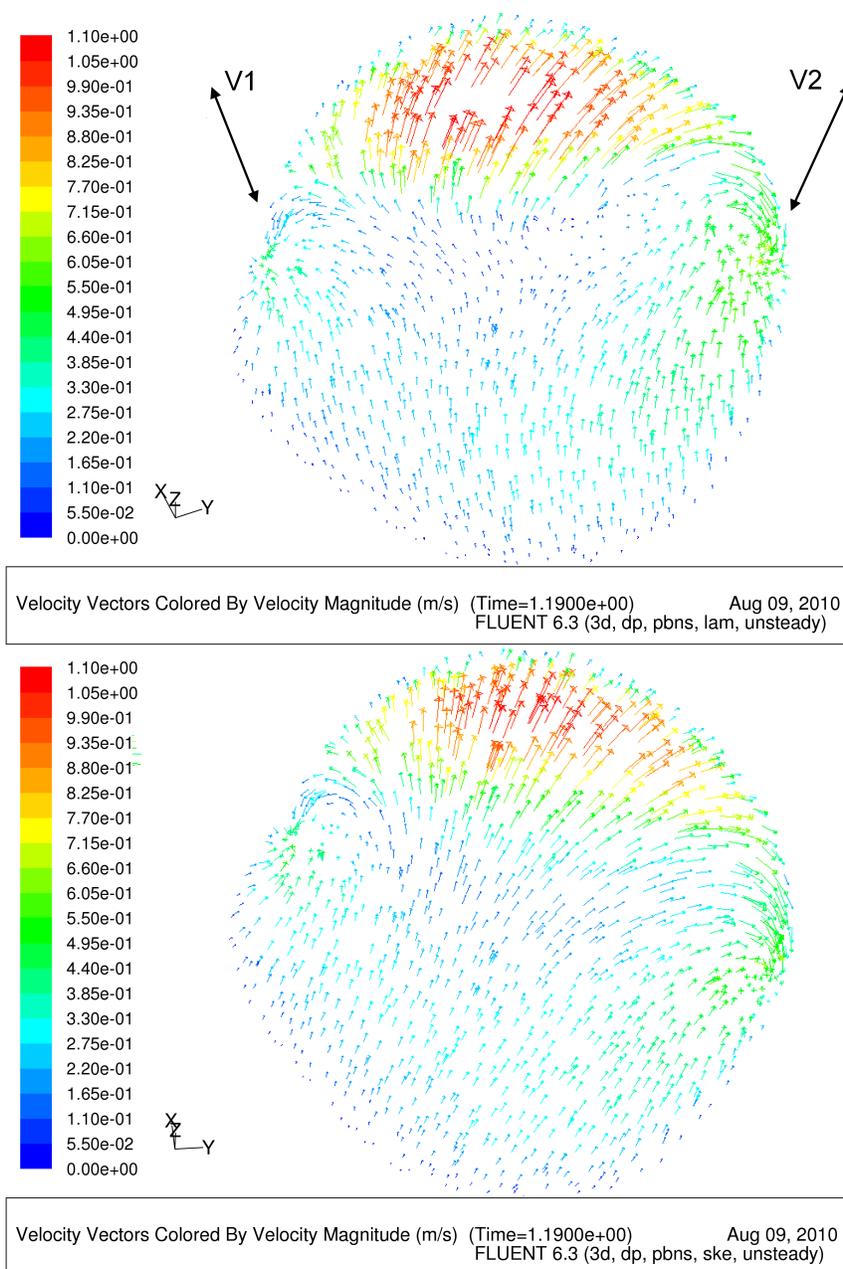


Figura 4.23: Vectores de velocidad sobre corte 1. Comparación entre caso laminar y turbulento. Caso 01 y 02.

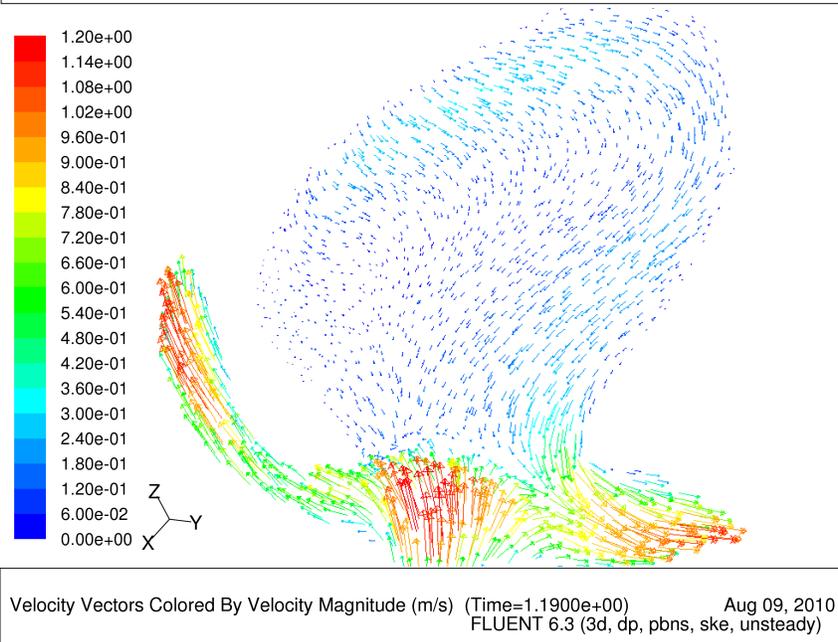
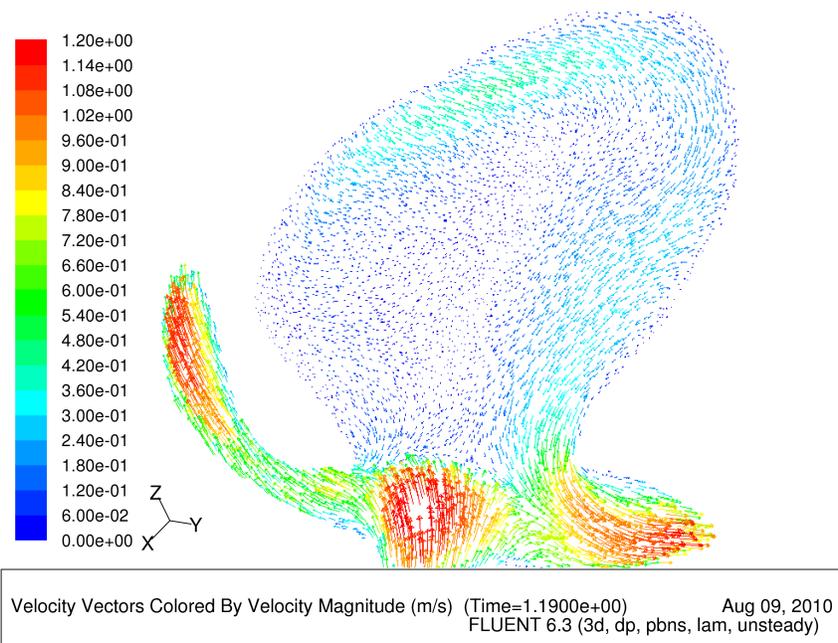


Figura 4.24: Vectores de velocidad sobre corte 2. Comparación entre caso laminar y turbulento. Caso 01 y 02.

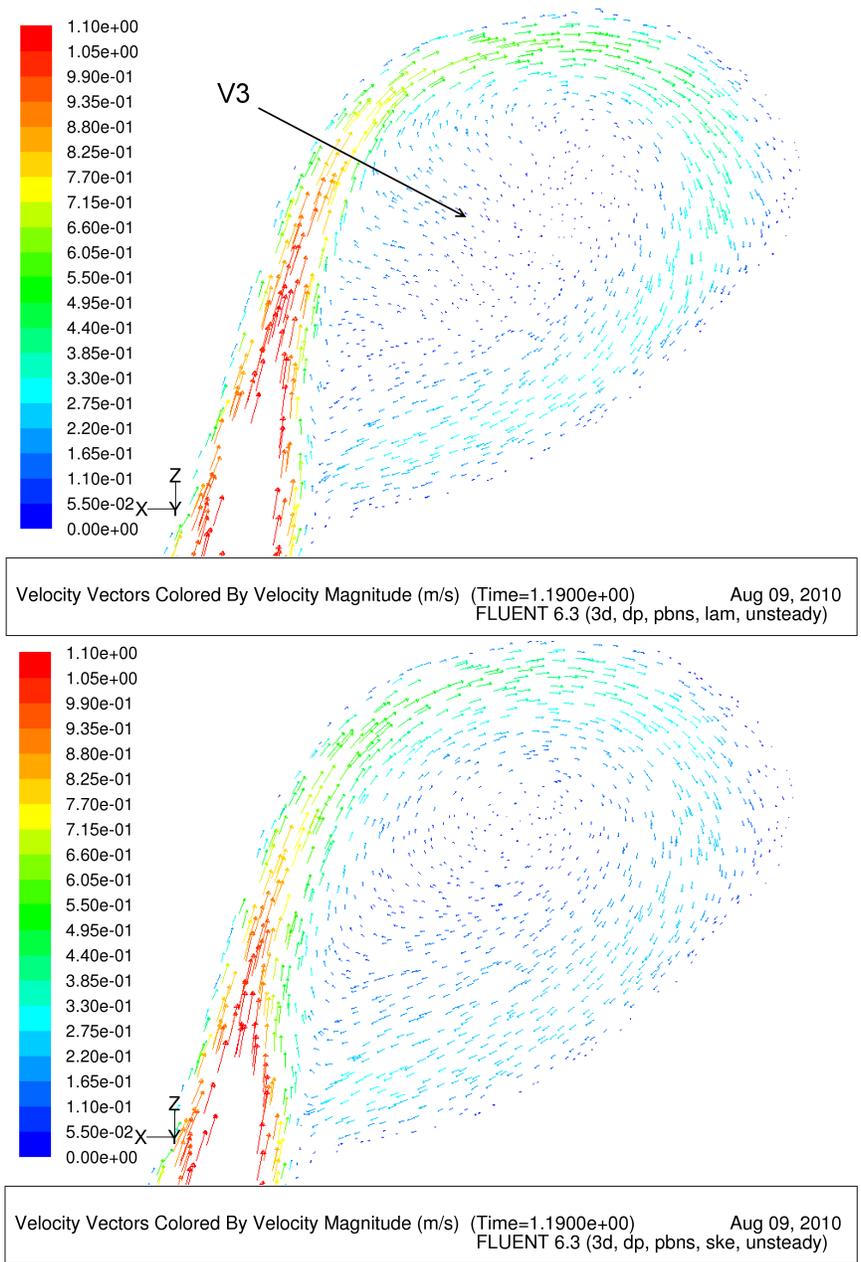


Figura 4.25: Vectores de velocidad sobre corte 3. Comparación entre caso laminar y turbulento. Caso 01 y 02.

Otro antecedente de relevancia es la distribución de presiones en toda la geometría. Esto se observa en la Fig. 4.26 extraída del caso 01 y 02. Dentro del aneurisma existe la misma presión, superior a la registrada en las salidas. En el caso laminar esta presión tiende a ser ligeramente superior. Un análisis parecido se puede realizar sobre la superficie del aneurisma midiendo el esfuerzo de corte sobre las paredes (Fig. 4.28). Esta figura permite apreciar con mayor claridad las diferencias

registradas entre los dos modelos. Se observan mayores esfuerzos de corte para el caso laminar respecto del turbulento  $k - \epsilon$ . Esta diferencia es máxima en la zona central del aneurisma.

Cabe destacar que en todas las variables medidas en esta sección, no existen diferencias apreciables al comparar el caso  $k - \omega$  con el laminar, como tampoco se observaron en la sección de Resultados Transientes.

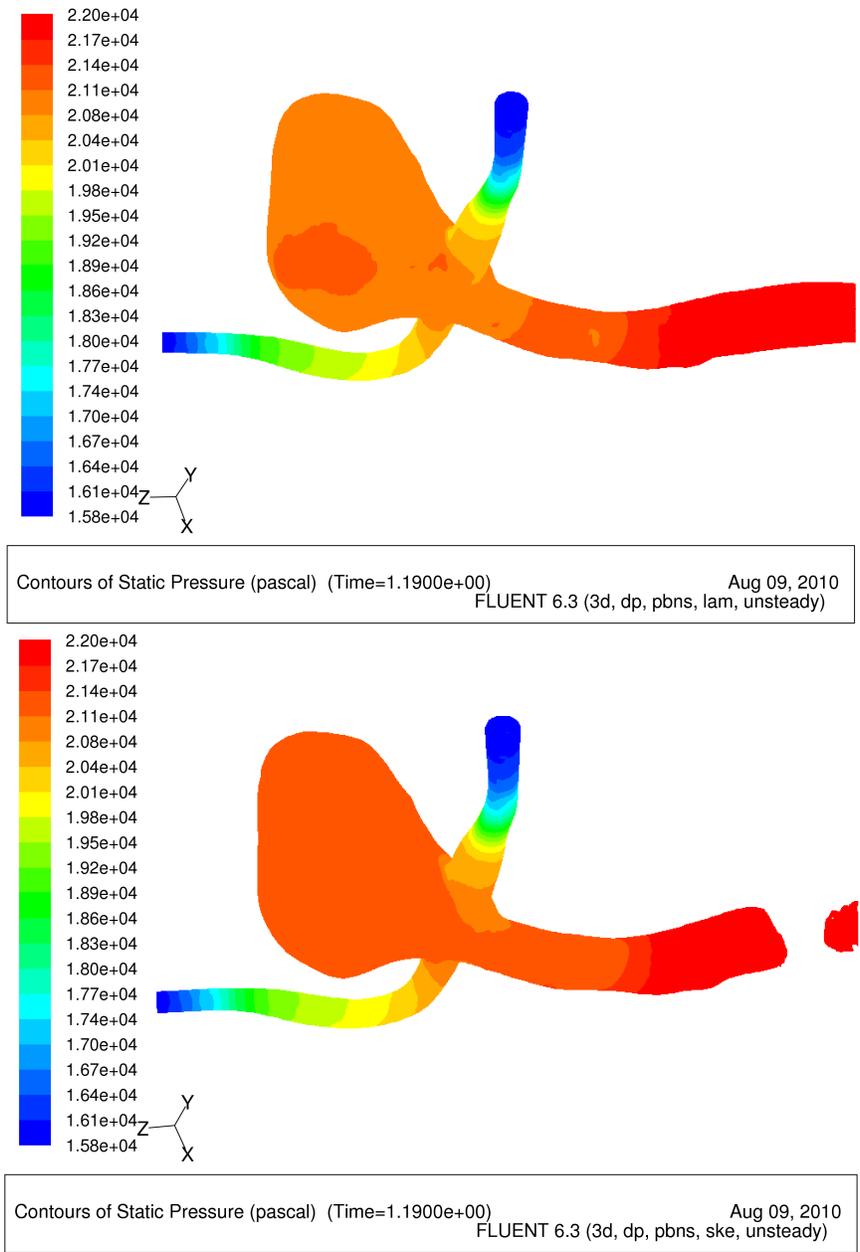
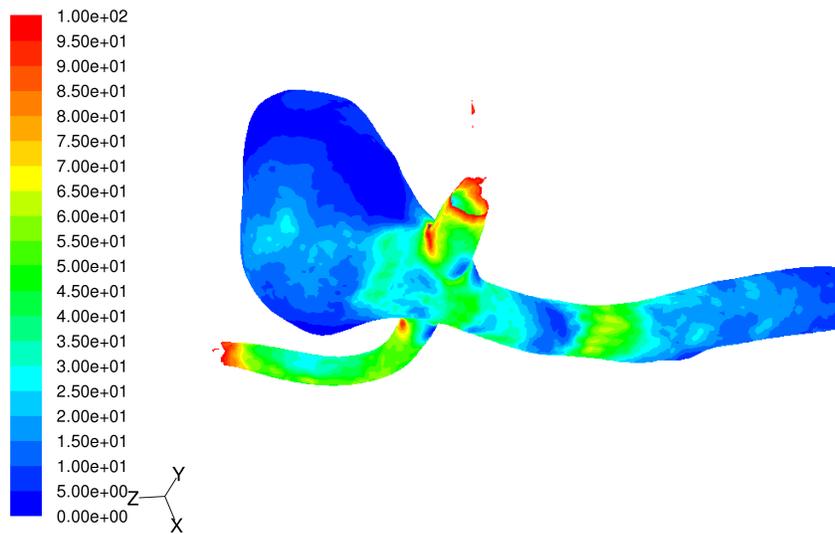
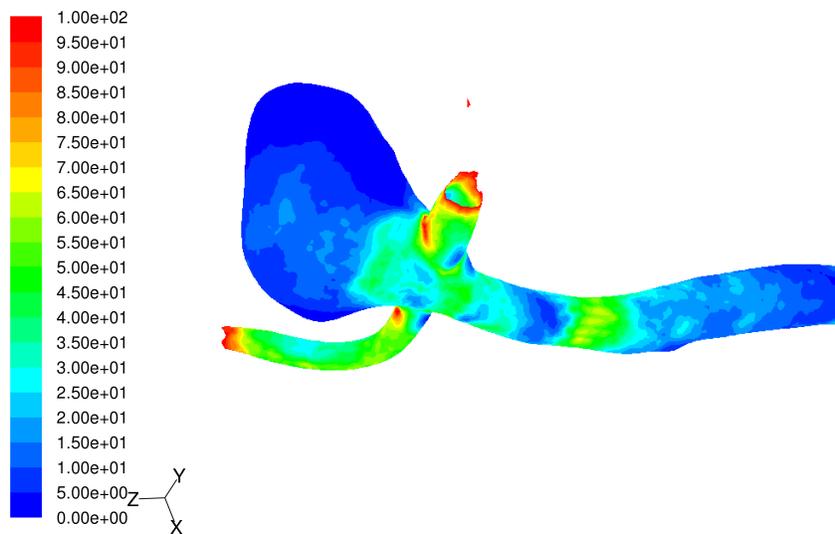


Figura 4.26: Contornos de presión estática sobre geometría 01. Caso 01 y 02.



Contours of Wall Shear Stress (pascal) (Time=1.1900e+00) Aug 09, 2010  
 FLUENT 6.3 (3d, dp, pbns, lam, unsteady)



Contours of Wall Shear Stress (pascal) (Time=1.1900e+00) Aug 09, 2010  
 FLUENT 6.3 (3d, dp, pbns, ske, unsteady)

Figura 4.27: Contornos de WSS sobre geometría 01. Caso 01 y 02.

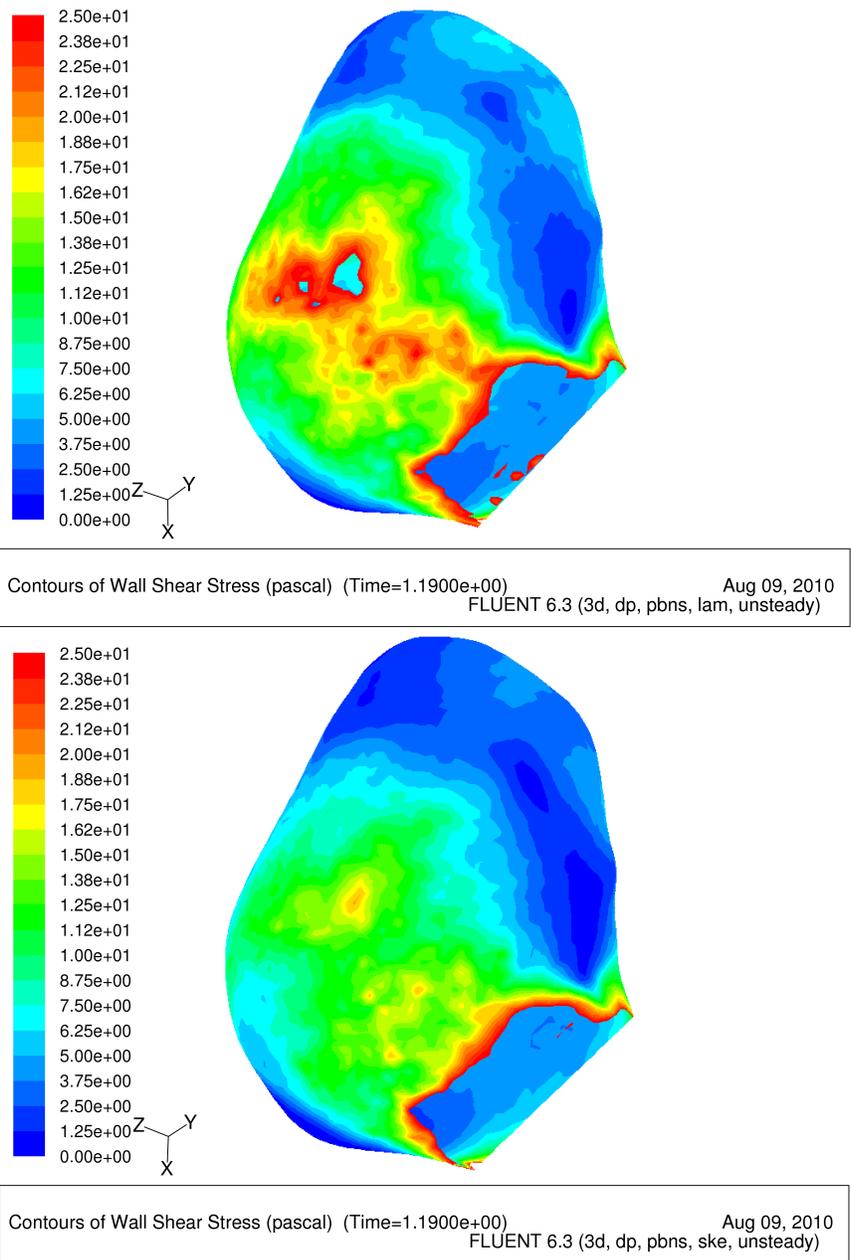


Figura 4.28: Contornos de WSS sobre aneurisma 01. Caso 01 y 02.

Al analizar las líneas de flujo mostradas en la Fig. 4.29 se aprecia que cierta parte del fluido que ingresa por la entrada va directamente hacia las salidas pero otra fracción entra a la zona de la deformación generando la ya mencionada recirculación. Este fenómeno a su vez impide el ingreso de más fluido a esta zona.

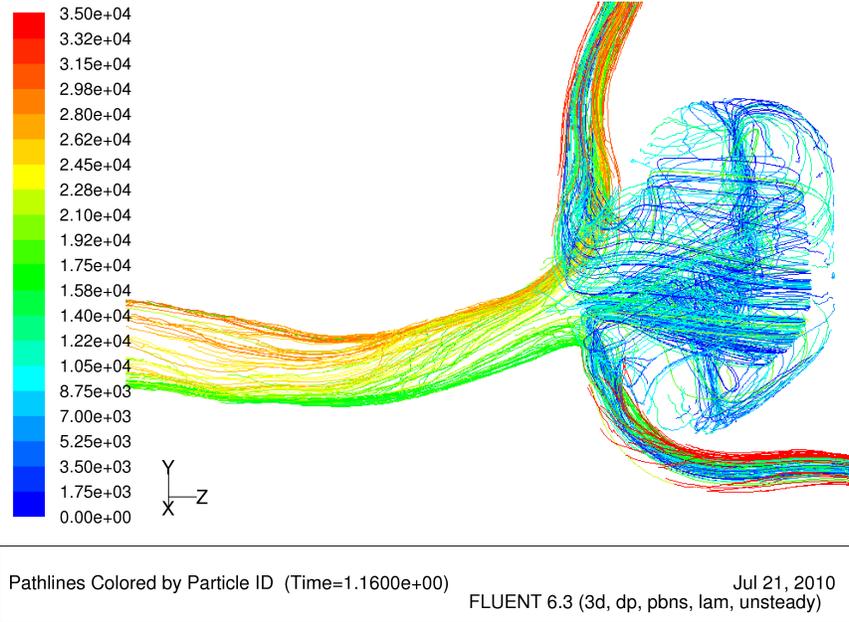


Figura 4.29: Líneas de flujo en la Geometría 01

**Caracterización Turbulenta en la Sístole**

En los modelos anteriores se utilizó un modelo turbulento aun cuando el número de Reynolds calculado en la entrada de la arteria fue de 278. Sin embargo, considerando lo intrincada de la geometría estudiada se asumió que en ciertas partes de la deformación el flujo deriva en turbulento. Para comprobar esta hipótesis se calcula el número de Reynolds en la parte más ancha de la dilatación que posee un diámetro mucho mayor al de la entrada de la arteria. Esto genera un número de Reynolds de 1550 en el caso laminar y 1450 con el modelo turbulento  $k - \epsilon$ . Esto da cuenta de un flujo de carácter turbulento en esa zona y justifica el estudio de la turbulencia realizado en esta memoria. Un resumen de lo anterior se muestra en la Tabla 4.5.

Tabla 4.5: Caracterización turbulenta en sístole para geo.1

Zona	$Re$
Entrada Arteria	278
Aneurisma (Modelo Lam.)	1550
Aneurisma (Modelo Turb. $k - \epsilon$ )	1450

#### 4.4.4. Resultados en Zona Cercana a la Pared

En esta sección se calculó el parámetro  $y^+$  en 3 puntos seleccionados de la geometría y mostrados en la Fig. 4.30. Este parámetro permite conocer si en los nodos cercanos a la pared son importantes las fuerzas viscosas o bien la turbulencia tiene un papel preponderante. Se calculó para los modelos de turbulencia  $k - \epsilon$  Standard (caso 02) y  $k - \omega$  Standard (caso 05). El parámetro  $y^+$  se define como aparece en la Ec. 4.4:

$$y^+ = \frac{y_p \rho C_\mu^{1/4} k_p^{1/2}}{\mu} \quad (4.4)$$

donde,

- $k_p$  es la energía turbulenta en un punto p cercano a la pared
- $y_p$  es la distancia desde el punto p a la pared
- $C_\mu$  es la constante del modelo turbulento

De esta forma se obtiene lo mostrado por la Tabla 4.6, donde se observan valores muy bajos de  $y^+$  a lo largo de la arteria. Esto da cuenta que en los nodos cercanos a la pared se está dentro de la capa viscosa y el tratamiento de pared utilizado toma un papel muy relevante. Además, a medida que se avanza por la arteria y se acerca a la zona del aneurisma se va incrementando el valor registrado para esta variable. Lo anterior se explica debido a que cerca del aneurisma existe un diámetro de arteria mucho mayor y desde luego un  $Re$  más elevado.

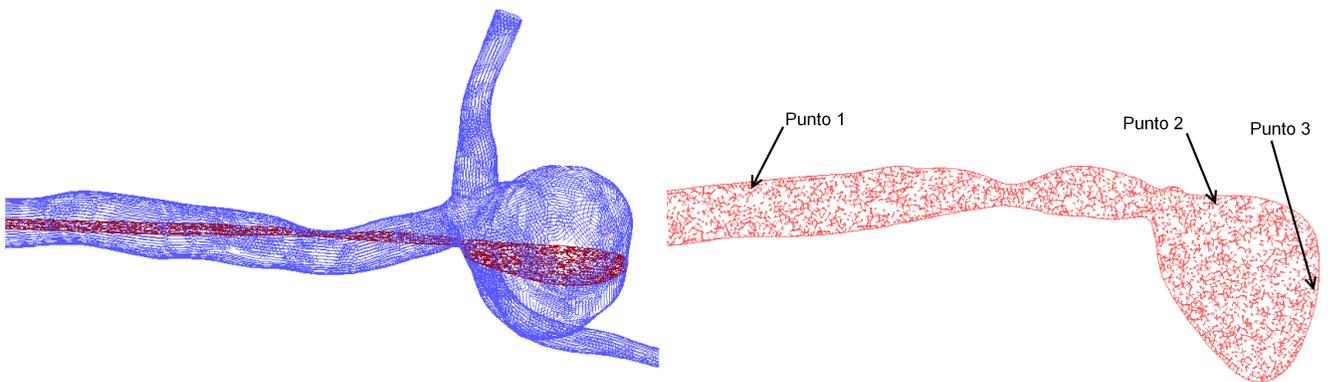


Figura 4.30: Puntos de la geometría donde se calculó  $y^+$

Tabla 4.6: Parámetro  $y^+$  medido en nodos cercanos a la pared

	$k - \epsilon$	$k - \omega$
$y_1^+$	0,023	0,026
$y_2^+$	0,198	0,014
$y_3^+$	0,347	0,032

#### 4.4.5. Simulación con Perfil de Entrada Plano

En esta sección se simuló también utilizando un perfil de entrada plano para corroborar si esta condición de borde tendría algún efecto en las diferencias registradas entre el modelo laminar y el turbulento  $k - \epsilon$ . Al analizar los resultados de los casos 08 y 09, se obtuvo la misma tendencia observada anteriormente. Es decir, al estudiar la turbulencia con un modelo del tipo  $k - \epsilon$  se subestiman los WSS registrados. Esto puede ser apreciado en la Fig. 4.31.

En la Fig. 4.32 pueden visualizarse los vectores de velocidad en el corte 3, y en la Fig. 4.33 la distribución de esfuerzos de corte sobre la superficie del aneurisma.

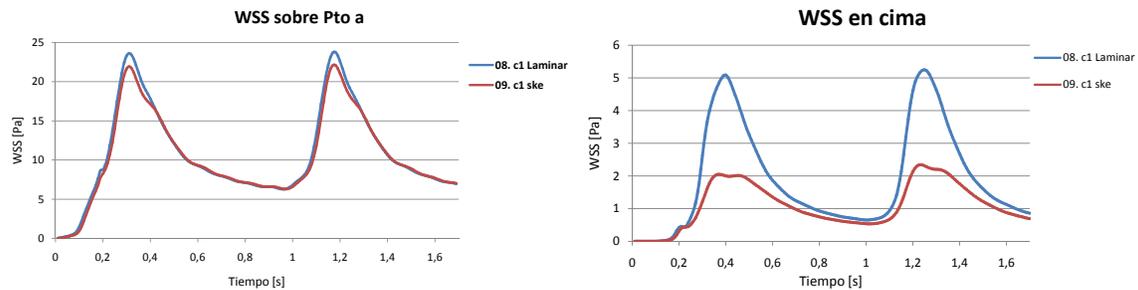


Figura 4.31: Variaciones en WSS entre caso laminar y turbulento. Caso 08 y 09

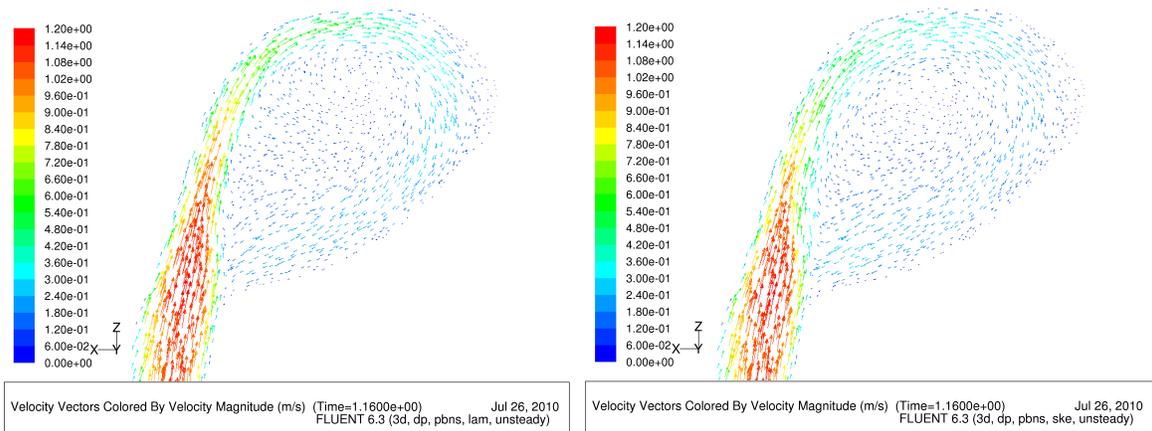


Figura 4.32: Vectores de velocidad en el corte 3. Caso 08 y 09

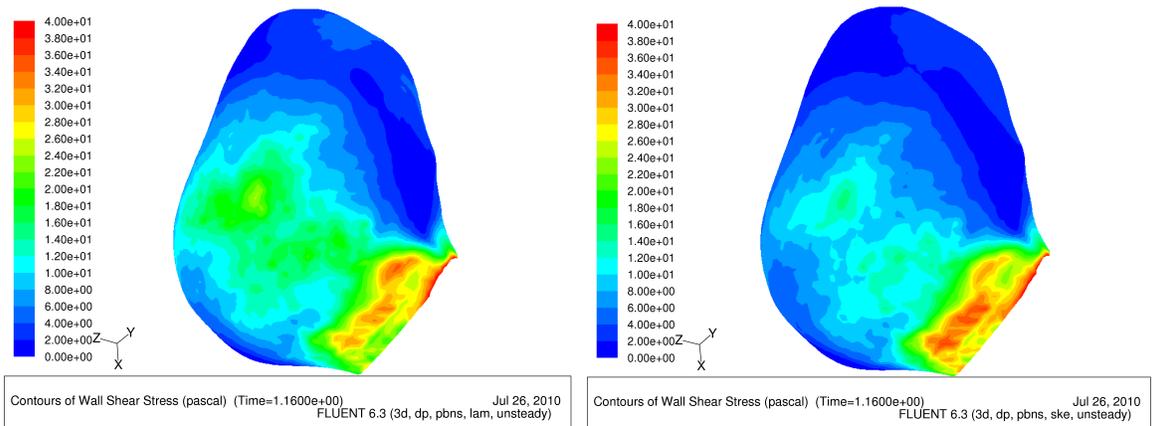


Figura 4.33: Distribución de WSS en aneurisma. Caso 08 y 09

#### 4.4.6. Simulación con Modelo Estacionario

En esta sección se estudia la factibilidad de realizar estudios de la mecánica de fluidos en aneurismas cerebrales utilizando modelos de simulación estacionarios, donde sólo se estudien las variables máximas y promedio del flujo. Para este fin se procede a iterar el caso base 01 con un modelo estacionario utilizando un pulso de entrada de velocidad promedio constante. Posteriormente se realiza lo mismo, pero utilizando un pulso de máxima de velocidad de entrada.

En las figuras 4.34, 4.35 y 4.36 se muestra el resultado de las iteraciones descritas versus la simulación no estacionaria de dos ciclos. Se muestra el esfuerzo de corte sobre punto *a*, sobre punto *b* y sobre la cima, respectivamente.

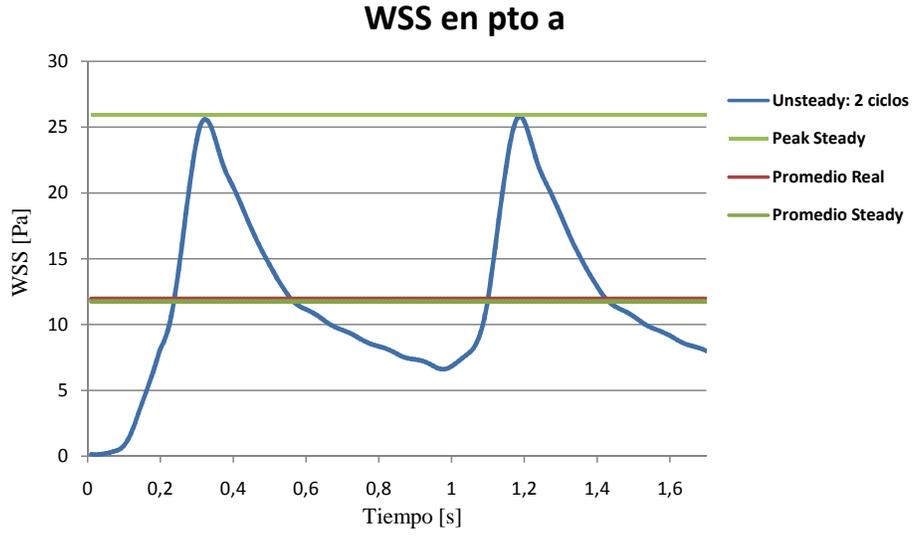


Figura 4.34: WSS con modelo estacionario versus no-estacionario. Medido en el pto *a*

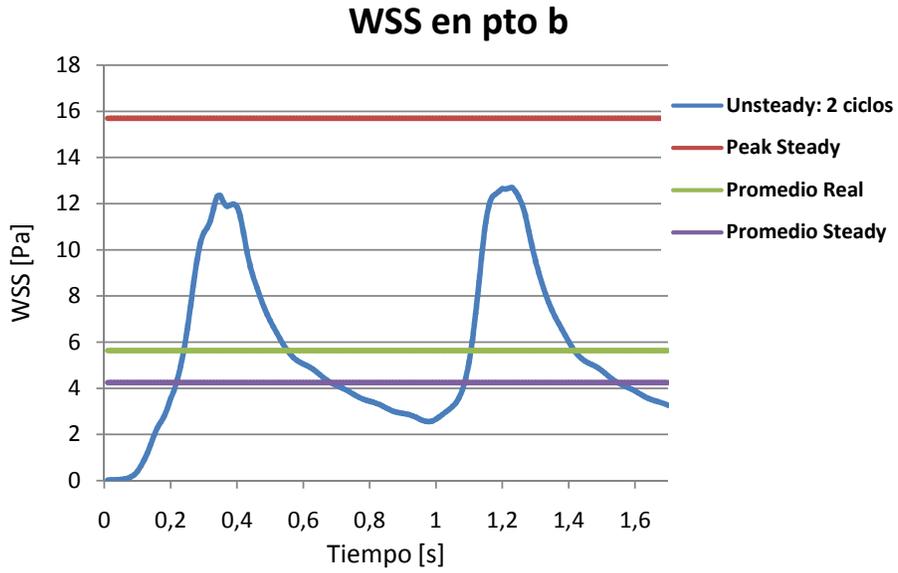


Figura 4.35: WSS con modelo estacionario versus no-estacionario. Medido en el pto *b*

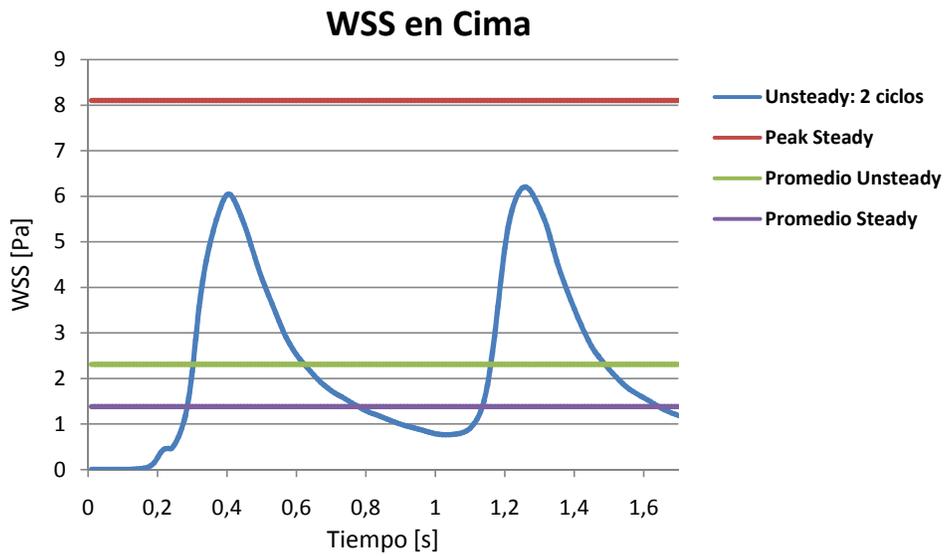


Figura 4.36: WSS con método estacionario versus no estacionario. Medido en la cima

#### 4.5. Resultados en Geometría 2

En esta geometría al igual que en la anterior se definieron tres puntos dentro del aneurisma con el objeto de estudiar la fluidodinámica dependiendo de la zona de la deformación. Uno de ellos está ubicado en el cuello, otro en la mitad y el tercero en la cima, según se observa en la Fig. 4.37. Asimismo se realizaron 2 cortes sobre la geometría, definidos como el corte 4, mostrado en la Fig. 4.38; y el corte 5, mostrado en la Fig. 4.39.

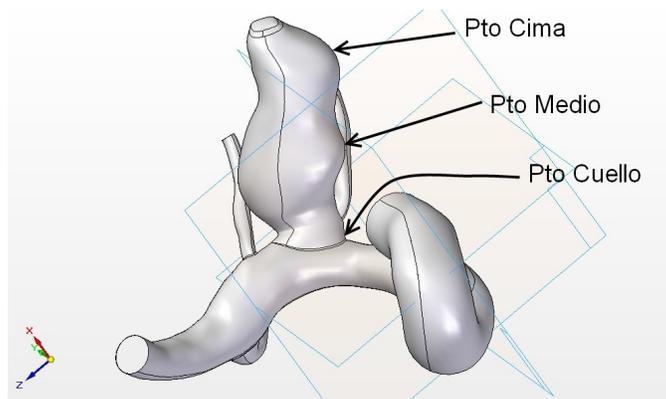


Figura 4.37: Puntos medidos en geometría 2



Figura 4.38: Esquema corte 4 sobre geometría 2

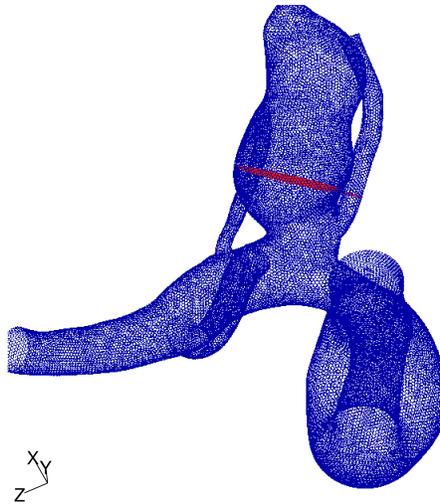


Figura 4.39: Esquema corte 5 sobre geometría 2

#### 4.5.1. Resultados Transientes

Se midieron los esfuerzos de corte, la presión y la energía turbulenta en los puntos 4, 5 y 6. En la Fig. 4.40 se muestran los esfuerzos de corte registrados en los 3 puntos del aneurisma. Este gráfico da cuenta de que los esfuerzos sobre el aneurisma son máximos en el cuello y van disminuyendo a medida que se acerca a la cima. Por otro lado, las Figuras 4.41 y 4.42 muestran la comparación de los resultados al simular la geometría con un modelo laminar, con un modelo turbulento  $k - \epsilon$ , y con un modelo turbulento  $k - \omega$ . La Fig. 4.41 muestra la situación en el cuello donde se observa

que las diferencias entre laminar y  $k - \epsilon$  existen pero son relativamente bajas llegando al 7%. Esta situación cambia bastante al mirar la cima (Fig. 4.42) dado que la diferencia entre los dos modelos sobrepasa el 200%. Entre el caso laminar y el caso turbulento utilizando un modelo  $k - \omega$  no se registran diferencias importantes en ninguno de los puntos del aneurisma.

Al igual que en la geometría anterior en la cima la energía cinética  $k$  asociada al modelo  $k - \epsilon$  tiende a ser varios órdenes de magnitud superior a la calculada con el modelo  $k - \omega$ . Esto se aprecia en la Fig. 4.43.

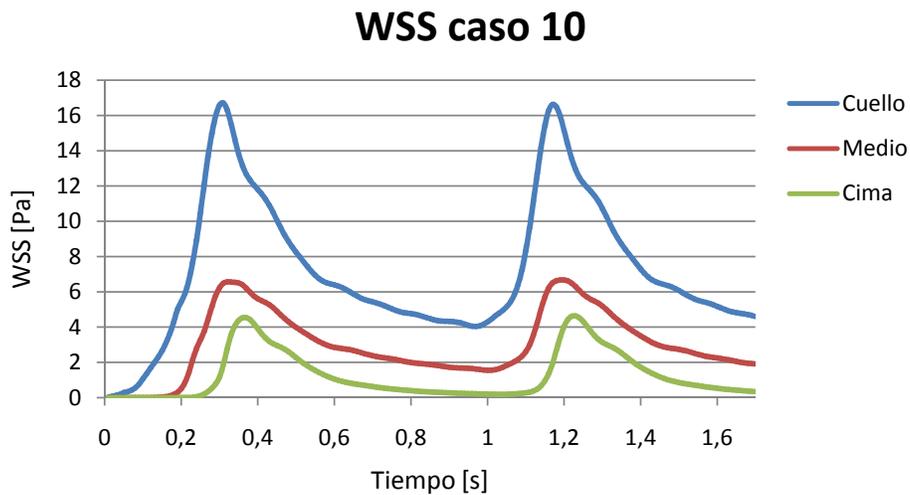


Figura 4.40: WSS medidos en 3 puntos del aneurisma. Caso 10.

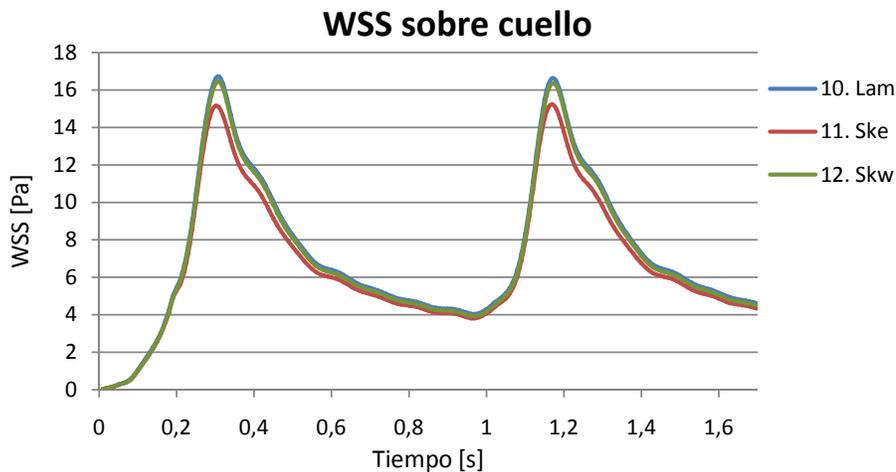


Figura 4.41: WSS medidos en cuello del aneurisma

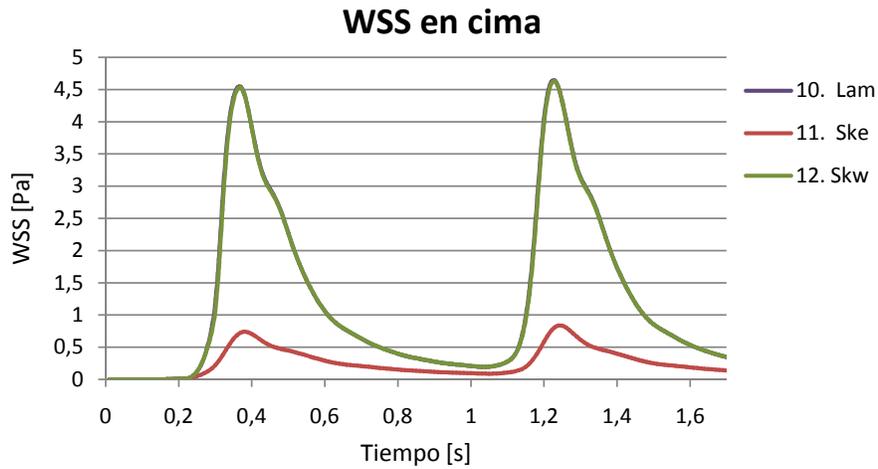


Figura 4.42: WSS medidos en la cima del aneurisma

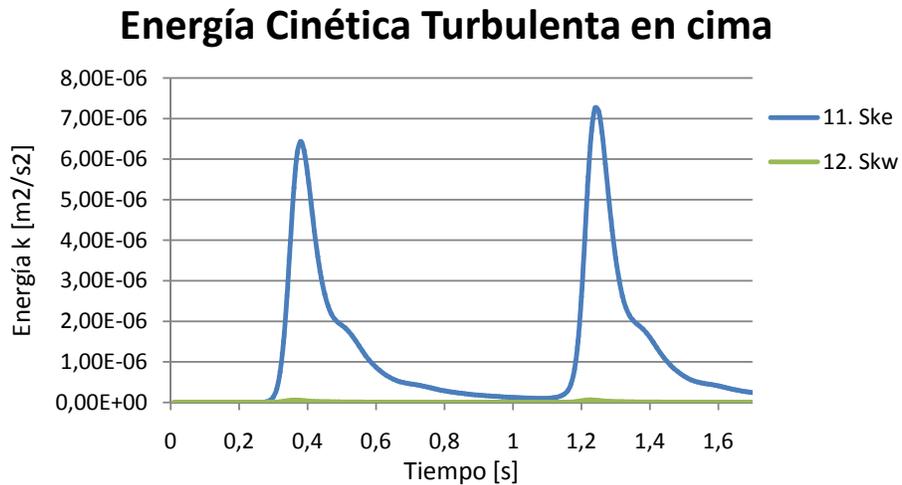


Figura 4.43: Energía cinética turbulenta  $k$  en la cima

#### 4.5.2. Resultados en Sístole

En la Fig. 4.44 se muestran los vectores de velocidad para el corte 4 correspondiente a un corte transversal del aneurisma. Se observan dos estructuras vorticiales formadas dentro del volumen. Existe un vórtice de mayor velocidad de recirculación en la parte inferior del aneurisma y otra con mucho menor intensidad y velocidad ubicado en la parte superior de la deformación. El extenso volumen del aneurisma es lo que permite que se formen dos zonas de vorticidades tan claramente marcadas. Esto genera también gradientes importantes de velocidad dentro de la deformación, de manera que en la cima las velocidades tienden a ser muy bajas o casi nulas. En el corte 5,

mostrado por la Fig. 4.45 se aprecian dos cortes más de las mismas estructuras vorticiales descritas anteriormente.

Al estudiar la influencia de la turbulencia en la fluidodinámica obtenida, se obtiene en general la misma tendencia registrada con la geometría 1. Utilizando un modelo laminar se registran velocidades ligeramente superiores que utilizando un modelo turbulento  $k - \epsilon$ , aun cuando las direcciones y estructuras vorticiales en ambos casos son casi idénticas. Entre el modelo laminar y el modelo turbulento  $k - \omega$  no se registran diferencias importantes.

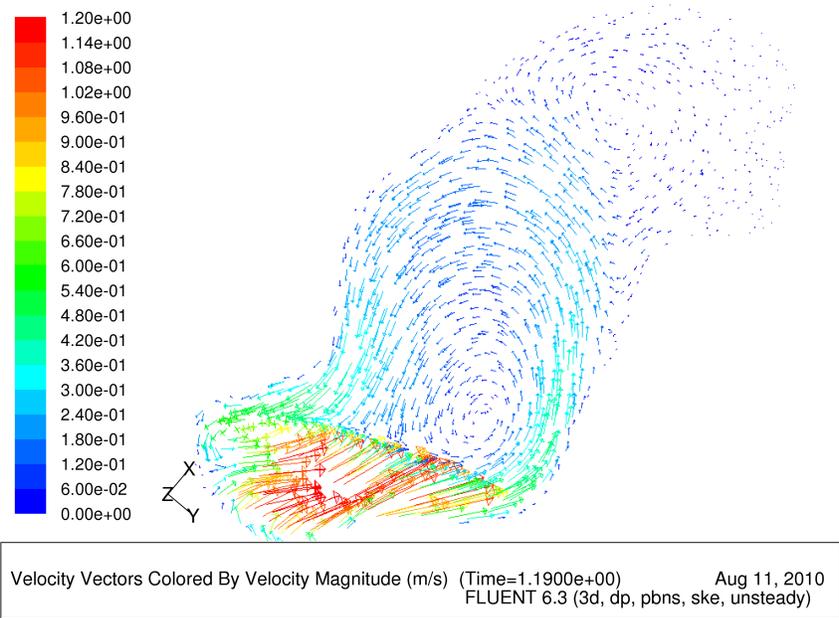
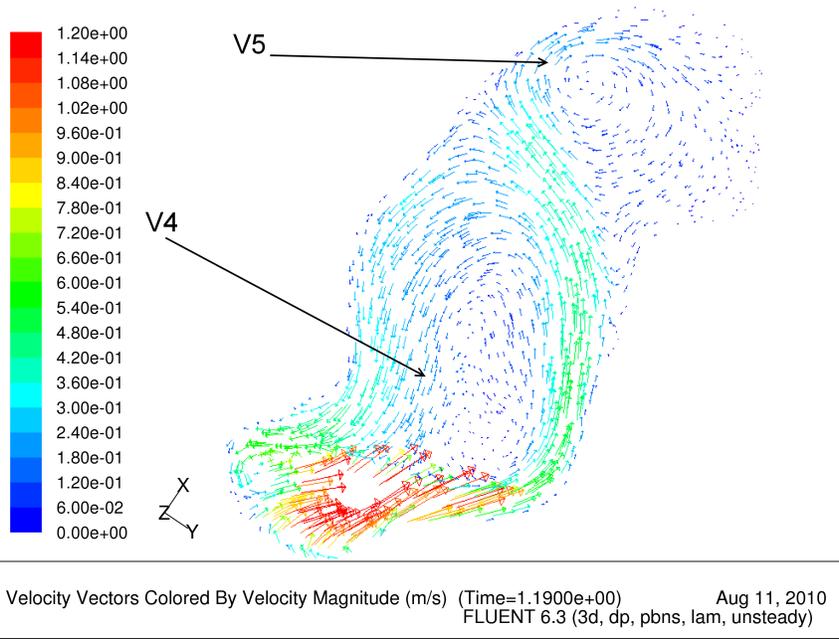


Figura 4.44: Vectores de velocidad sobre plano 4. Caso 10 y 11

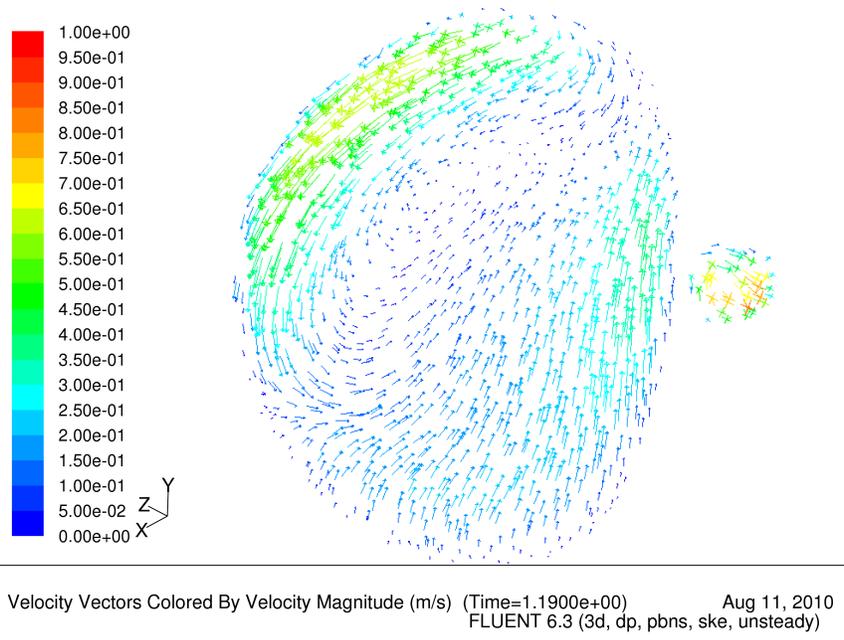
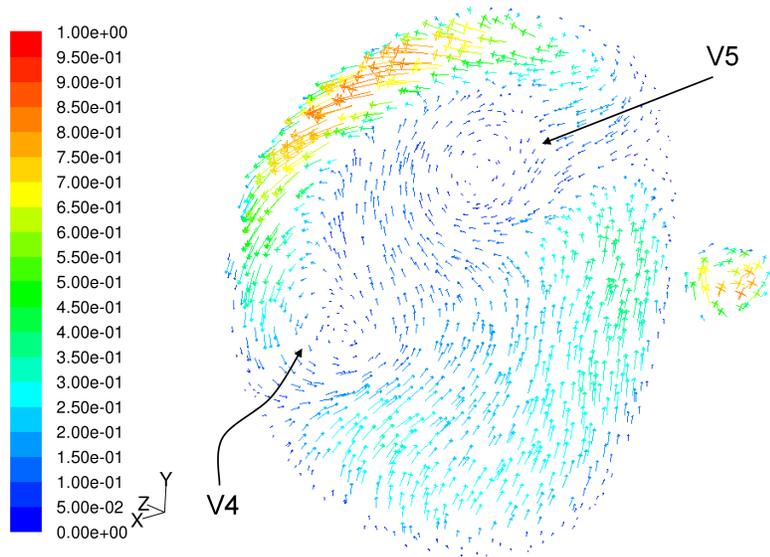
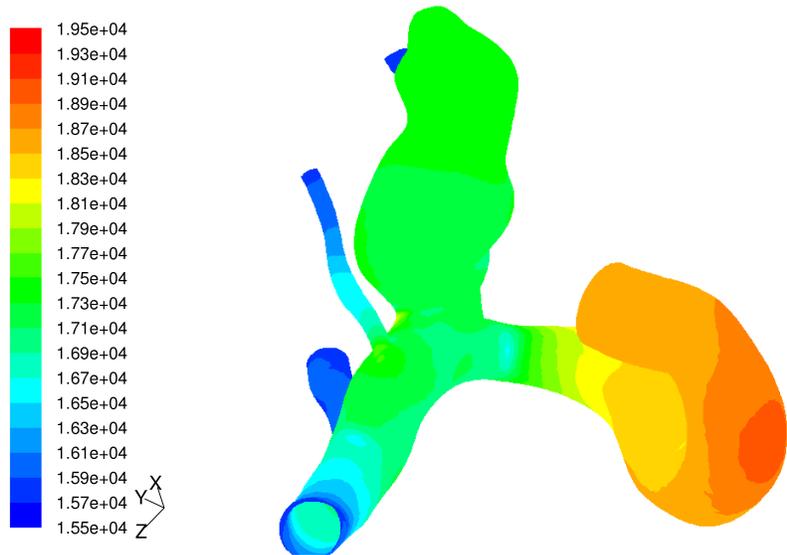
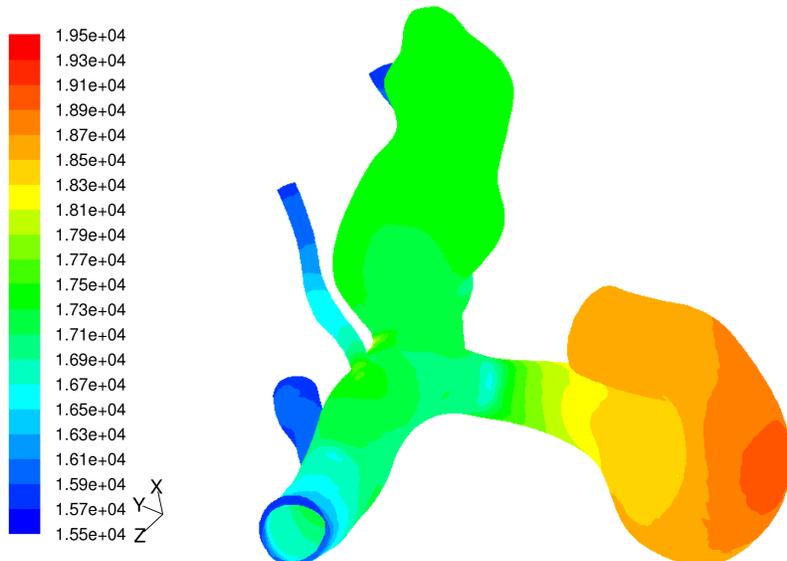


Figura 4.45: Vectores de velocidad sobre plano 5. Caso 10 y 11

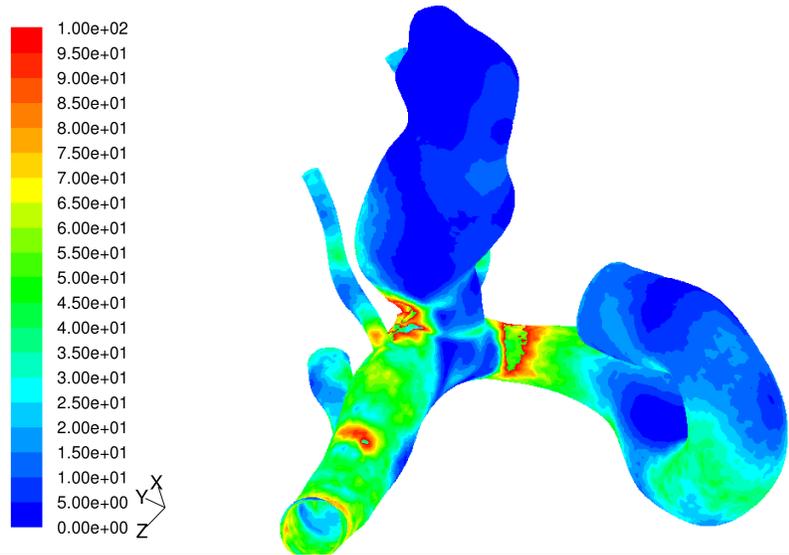


Contours of Static Pressure (pascal) (Time=1.1900e+00) Aug 11, 2010  
 FLUENT 6.3 (3d, dp, pbns, lam, unsteady)

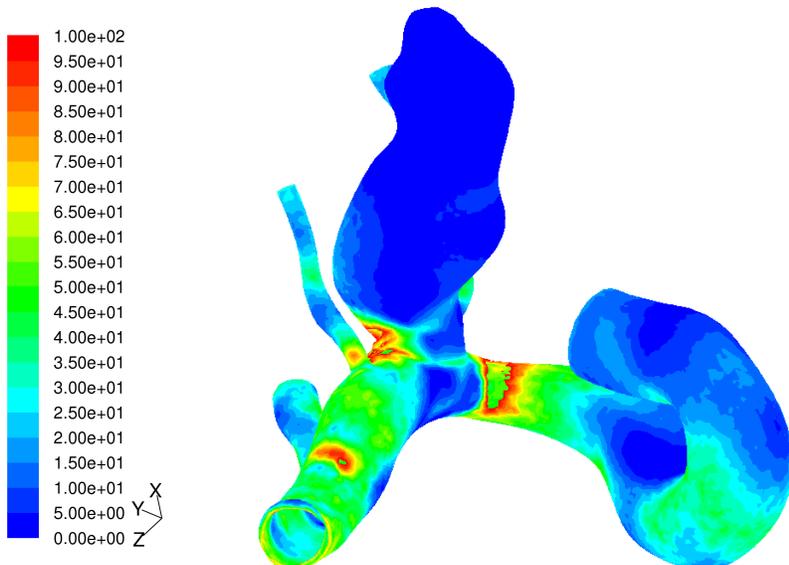


Contours of Static Pressure (pascal) (Time=1.1900e+00) Aug 11, 2010  
 FLUENT 6.3 (3d, dp, pbns, ske, unsteady)

Figura 4.46: Presión estática sobre geometría 2. Caso 10 y 11



Contours of Wall Shear Stress (pascal) (Time=1.1900e+00) Aug 11, 2010  
 FLUENT 6.3 (3d, dp, pbns, lam, unsteady)



Contours of Wall Shear Stress (pascal) (Time=1.1900e+00) Aug 11, 2010  
 FLUENT 6.3 (3d, dp, pbns, ske, unsteady)

Figura 4.47: Contornos de WSS sobre geometría 2. Caso 10 y 11

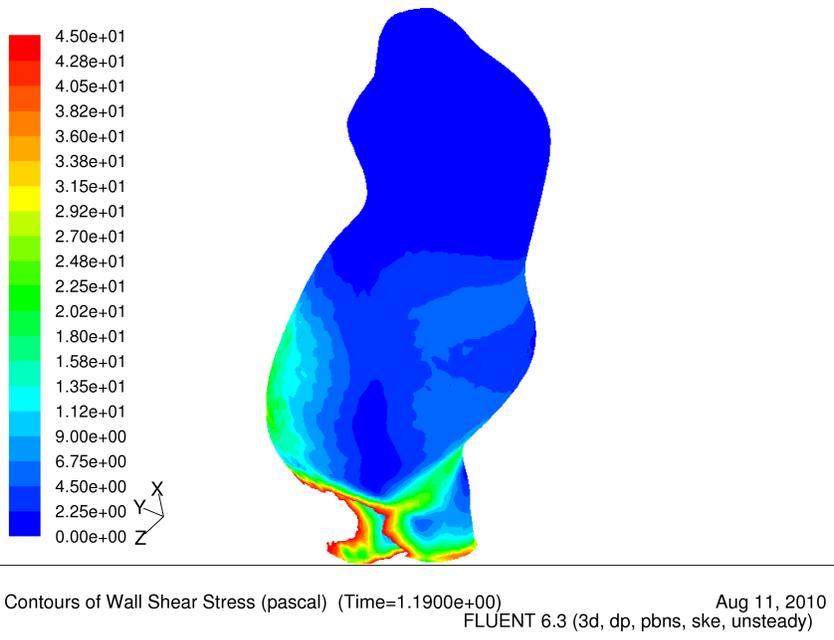
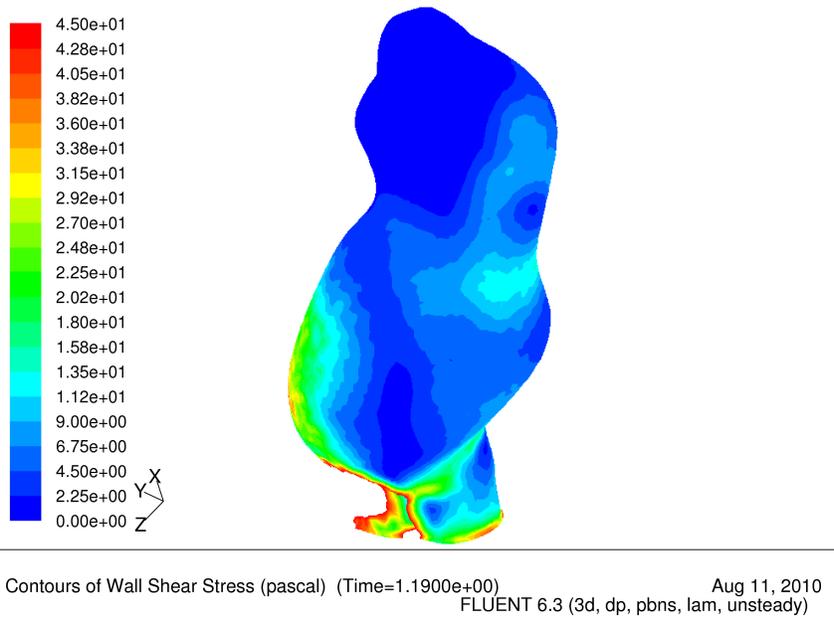


Figura 4.48: Contornos de WSS sobre aneurisma 2. Caso 10 y 11

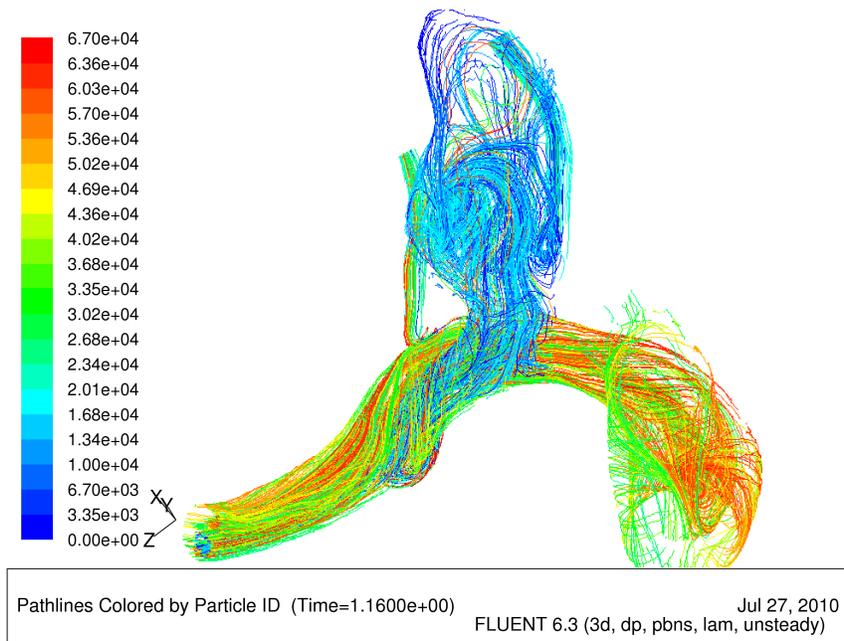


Figura 4.49: Pathlines de la geometría 02

### Caracterización Turbulenta en la Sístole

Razonando igual que con la geometría 1, se recalcula el número de Reynolds en la parte más ancha de la dilatación para comprobar el carácter del flujo en esa zona. Se obtiene un Reynolds de 980 utilizando el modelo laminar y 910 con el modelo turbulento  $k - \epsilon$ . Es decir, el flujo sigue estando dentro del rango laminar según el número de Reynolds. Además, este número presenta una pequeña variación al ser calculado por diferentes modelos ya sea laminar o turbulento. Un resumen de lo anterior se muestra en la Tabla 4.7.

Tabla 4.7: Caracterización turbulenta en sístole para geo.2

Zona	$Re$
Entrada Arteria	450
Aneurisma (Modelo Lam.)	980
Aneurisma (Modelo Turb. $k - \epsilon$ )	910

### 4.6. Simulación en Sístole con otros Modelos de Turbulencia

En este capítulo no se mostró la totalidad de los resultados obtenidos en la sístole para todos los modelos estudiados. Los resultados adicionales no mostrados aquí se detallan en el Anexo B para

la Geo1, y en el Anexo C para la Geo2.

#### 4.7. Tiempo de Residencia Dentro de la Arteria

En esta sección se estudió el tiempo de permanencia (residencia) de una partícula dentro del volumen de control del fluido. Para ello se procedió a lanzar en la entrada de la arteria partículas esféricas de hidrógeno de un diámetro muy pequeño ( $10^{-8}m$ ), las cuales debido a su baja densidad y tamaño viajan por la arteria por efecto del momentum de la sangre. Además de esta fuerza que favorece el movimiento de las esferas existe una fuerza de arrastre en contra de este. Un balance de fuerzas se muestra en las Ec. 4.5.

$$F_s - F_A = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (4.5)$$

donde  $F_s$  es la fuerza inercial de la sangre y  $F_A$  es la fuerza de arrastre de la esfera opuesta al movimiento. Para calcular el arrastre en esferas se utiliza la ley de Stokes. De esta forma  $F_A$  se reduce a lo mostrado por la Ec. 4.6.

$$F_A = 3\phi\mu D\vec{v} \quad (4.6)$$

con lo que la ecuación de movimiento se reduce a:

$$F_s - 3\phi\mu D\vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (4.7)$$

Cabe destacar que el hecho de que sean partículas muy pequeñas y de densidad muy baja respecto a la de la sangre, permite que la inclusión de estas partículas no afecta de ninguna manera la fluidodinámica del problema.

De los resultados obtenidos es interesante notar la diferencia en los tiempos de residencia promedio alcanzados por partículas que ingresan a la zona del aneurisma y aquellas que no lo hacen y siguen su camino a través de la arteria, dejando el volumen de control por las salidas (Ver Fig. 4.50). En la Tabla 4.8 se muestran los tiempos de residencia promedio para partículas dentro de la geometría 1. Se observa que las partículas que ingresan al aneurisma poseen un tiempo de residencia bastante mayor, dado por la recirculación presente en esa zona. En la Tabla 4.9, se observa la misma medición pero realizada en la geometría 2. En este caso los tiempos registrados son bastante mayores debido al gran volumen de esta arteria y de su aneurisma. Por ello, se debió medir durante un tiempo mayor para lograr que las partículas ingresaran a la zona del aneurisma. En

esta geometría también se registraron tiempos de residencia mayores en aquellas partículas que ingresan a la zona del aneurisma, lo que confirma la recirculación existente en esa zona.

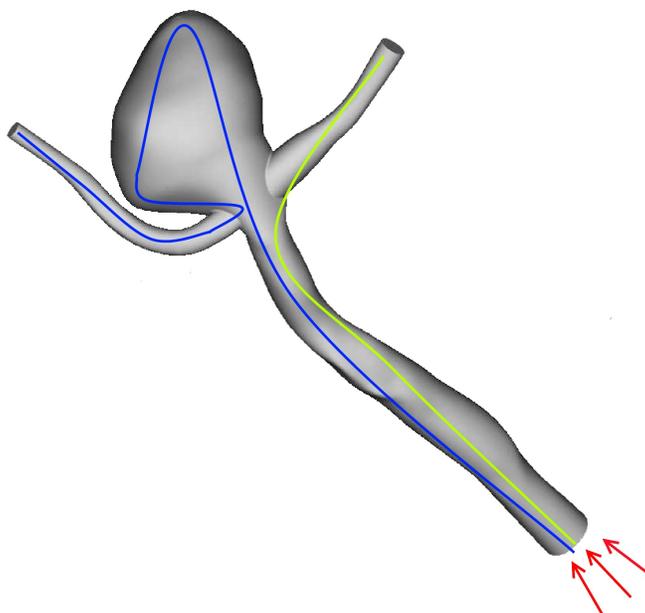


Figura 4.50: Esquema de la inclusión de partículas en el flujo sanguíneo.

Tabla 4.8: Tiempos de residencia geo.1

Partículas	Tiempo Prom [s]	Std Dev [s]	% Aum.
Arteria	0,428	0,19	—
Aneurisma	0,601	0,34	41 %

Tabla 4.9: Tiempos de residencia geo.2

Partícula	Tiempo Prom [s]	Std Dev [s]	% Aum.
Arteria	0,8	0,17	—
Aneurisma	1,34	0,18	68 %

---

## Capítulo 5

### Análisis y Discusión de Resultados

---

#### 5.1. Validación del Modelo

El modelo numérico implementado logró ser validado dada las mínimas diferencias registradas entre el caudal de entrada y salida. En promedio esta diferencia a través del tiempo llega a un 0,13%. Considerando este valor y los residuos máximos aceptados para las variables más importantes del flujo (0,001), se posee un grado importante de confianza en los resultados numéricos obtenidos.

Por otro lado, la prueba de malla realizada permite asegurar que los resultados son independientes de la densidad de malla utilizada. Esto se verificó exhaustivamente para la geometría 1, midiendo el WSS sobre la superficie del aneurisma y la velocidad promedio sobre el volumen. No se justificaba utilizar una malla mayor dado que la variable medida aumentada sólo en un 0,7%, lo cual es muy bajo considerando el costo computacional de elevar la fineza de la malla.

#### 5.2. Fluidodinámica de la Geometría 1

En esta geometría se observa una recirculación importante en la zona de la deformación. Debido a esto parte del fluido que debiera ingresar a esta zona no lo hace, chocando contra el fluido que recircula. Este fluido que choca finalmente termina saliendo por algunas de las dos salidas del aneurisma. Además, una parte del fluido que se encuentra dentro del aneurisma va saliendo por la zona cercana a la pared y dejando la arteria por la salida que alcanza mayores velocidades. Esta salida corresponde a la del lado donde se ubica el pto a, descrito en la Fig. 4.8. Dentro del aneurisma las velocidades son bastante bajas en comparación con la arteria.

Respecto de la presión estática se puede mencionar que se registra una presión alta asociada a la entrada de la arteria que va disminuyendo al acercarse a la zona del aneurisma. La zona del aneurisma constituye una zona de isopresión. Las salidas registran una zona de menor presión, dada por la condición de borde para esa zona.

En la superficie del aneurisma los esfuerzos de corte presentan una distribución clara, donde los mayores valores se registran en la zona cercana al cuello, que es donde se produce el impacto

entre el fluido que recircula dentro de la deformación y el fluido que viene de la arteria principal. En la zona superior disminuye el esfuerzo de corte dado que el fluido llega con menor velocidad por el efecto de la recirculación antes mencionada.

Al mirar las líneas de flujo de la geometría (Fig. 4.29) se confirma la recirculación generada por el fluido presente dentro del aneurisma, así como también se observa el impacto del fluido que viene aguas abajo desde la arteria.

### **5.3. Fluidodinámica de la Geometría 2**

A diferencia de la geometría anterior en este caso se trata de un aneurisma del tipo lateral, lo cual hace variar la forma en que el fluido impacta la zona de la deformación, haciéndola menos directa. Esta geometría se caracteriza además por el gran volumen de su aneurisma, que corresponde a una estructura muy alargada. Por esta razón, al mirar los vectores de velocidad en un corte transversal del aneurisma, se aprecian dos zonas claras de vorticidades. Una de ellas en la parte baja de la deformación y la otra en la parte alta.

La vorticidad inferior presenta velocidades mayores que la vorticidad superior dado que en la primera se produce el choque con el fluido que viene de la arteria. La vorticidad superior es menos intensa debido a que la velocidad con que el fluido llega a esa zona es mucho menor.

Respecto de la distribución de presiones en la geometría se observa que los mayores valores se alcanzan en la entrada y estos disminuyen al llegar a la zona del aneurisma. Aquí se aprecia otra vez una zona de isopresiones.

Se observan los mayores esfuerzos de corte sobre el aneurisma en la zona del cuello. Se registran valores bastante elevados si se les compara con el resto del aneurisma, y más aun con la cima. Los bajos valores de los esfuerzos de corte en la cima son atribuibles a la baja velocidad que alcanza el fluido en la zona de la recirculación superior. Esto se explica por varias razones. Por una parte, existe una vorticidad en la zona cercana al cuello que le impide al fluido llegar libremente a la zona superior. Por tanto, la fracción de fluido que logra llegar a la vorticidad superior lo hace con una velocidad reducida. En esta zona las velocidades son muy bajas o incluso nulas. Por otro lado, la totalidad del fluido que ingresa al aneurisma pierde parte de su energía cinética por efecto del choque producido en la zona del cuello, en contra del fluido que recircula en la zona baja de la deformación.

### **5.4. Influencia de la Turbulencia en Simulaciones**

En ambas geometrías se visualizó la misma tendencia al estudiar el efecto de la turbulencia en la fluidodinámica. Se observó que existen diferencias importantes en la fluidodinámica obtenida

al simular la sangre con un modelo laminar o como uno turbulento  $k - \epsilon$ . Sucede que para el caso laminar se registran valores ligeramente mayores en las magnitudes de la velocidad, aún cuando las direcciones de los vectores de velocidad y las estructuras vorticiales en ambos casos son casi idénticas. Estas diferencias se acentúan al analizar los WSS medidos en ciertos puntos del aneurisma. Haciendo un análisis en los 3 puntos medidos para las geometrías 1 y 2 se obtiene lo mostrado en las Tablas 5.1 y 5.3, donde se analizan los máximos de los esfuerzos de corte registrados con el modelo laminar, con el  $k - \epsilon$  y con el  $k - \omega$ .

Tabla 5.1: Máximos WSS medidos en la geometría 1

Modelo	WSS Pto a	Dif. %	WSS Pto b	Dif. %	WSS Cima	Dif. %	Promedio
Lam	25,80	–	12,53	–	6,18	–	–
$Sk - \epsilon$	23,42	-9,2 %	16,21	29,4 %	2,60	-57,8 %	32,2 %
$Sk - \omega$	25,86	0,2 %	12,83	2,4 %	6,16	-0,3 %	1,0 %

Tabla 5.2: Máximos WSS medidos en la geometría 2

Modelo	WSS Pto a	Dif. %	WSS Pto b	Dif. %	WSS Cima	Dif. %	Promedio
Lam	15,94	–	6,67	–	4,62	–	–
$Sk - \epsilon$	14,47	-9,3 %	5,48	-17,9 %	0,76	-83,6 %	36,9 %
$Sk - \omega$	15,73	-1,4 %	6,45	-3,3 %	4,59	-0,6 %	1,8 %

En la primera tabla se observa que sobre el punto  $a$  de la geometría 1 se registran los mayores máximos, por lo que se deduce corresponde al punto asociado a la salida donde se alcanza la mayor velocidad. En este punto las diferencias entre el modelo Laminar y turbulento Standard  $k - \epsilon$  son en promedio del 9 %, lo cual comienza a ser una diferencia significativa. Ahora bien, al mirar la situación sobre el punto  $b$  se obtienen diferencias mucho más importantes que se confirman en la cima, al tener una diferencia de cerca del 60 %. Este hecho es de suma importancia pues a pesar que en la cima se registran los menores valores en esfuerzos de corte, es precisamente en esa zona donde la mayoría de los aneurismas cerebrales se rompen. De esta forma, al estudiar la turbulencia con un modelo  $k - \epsilon$  se podría estar subestimando de forma importante el esfuerzo de corte que genera la ruptura del aneurisma. Distinta situación ocurre al estudiar la turbulencia con un modelo  $k - \omega$ . En este caso se observan mínimas diferencias en los WSS medidos en cada punto respecto del modelo laminar, siendo la mayor en el pto  $b$  con un 3 %. Este hecho es de suma importancia y habla de que las simulaciones con el modelo  $k - \epsilon$  no consiguen recrear adecuadamente las condiciones de un flujo turbulento dentro de la arteria. Esto implica que si bien se puede simular un flujo turbulento, debe hacerse utilizando un modelo del tipo  $k - \omega$ .

Entre modelos de turbulencia de la misma familia; es decir, Standard, RNG y Realizable para  $k - \epsilon$ ; y Standard y SST para el  $k - \omega$ ; las diferencias encontradas son ínfimas y menores al 1 % en promedio.

### 5.5. Diferencias entre Modelos de Turbulencia

En la sección anterior se expuso que al estudiar la turbulencia con un modelo  $k - \epsilon$  se encuentran resultados que discrepan del modelo laminar. Sin embargo, al realizarlo con un modelo  $k - \omega$  se obtiene ínfimas diferencias. El principal motivo que puede explicar este hecho es que los modelos  $k - \omega$  poseen una corrección para los números de Reynolds bajos, situación que se presenta en el flujo en estudio. En efecto, el número de Reynolds calculado en la entrada para ambas geometrías tiende a ser muy bajo, principalmente por la baja velocidad del flujo y las dimensiones de la arteria.

Otro aspecto que puede ser de importancia en las diferencias encontradas entre los modelos de turbulencia corresponde a la energía turbulenta. Consistentemente en cada punto y en ambas geometrías la energía cinética turbulenta registrada es bastante mayor medida con los modelos de turbulencia  $k - \epsilon$ , respecto de la medida con los modelos  $k - \omega$ . Esto podría explicar que parte de la energía del fluido se invierte en generar la turbulencia dentro del aneurisma, disminuyendo la velocidad de impacto y por ello los WSS medidos.

En términos de simulación, el modelo turbulento  $k - \epsilon$  demora un 38 % más que la simulación laminar. A su vez, el caso  $k - \omega$  es un 33 % mas lento que el modelo  $k - \epsilon$ . Esto es de suma importancia pues no se puede pretender ahorrar tiempo en las simulaciones turbulentas ocupando un modelo  $k - \epsilon$ , dada la poca validez del método comprobada en la sección anterior.

Tabla 5.3: Tiempos Computacionales asociados a los modelos utilizados

Modelo	T. Ite. (h)	% Aumento Lam	% Aumento ske
Lam	12	–	–
Standard $k - \epsilon$	16,5	38 %	–
Standard $k - \omega$	18	50 %	33 %

### 5.6. Influencia del Pulso de Entrada Plano

Los primeros estudios de turbulencia se realizaron con un pulso parabólico tanto para el caso laminar como el turbulento. Se sabe que para el caso turbulento esto no es muy válido por lo que se simuló nuevamente ambos casos (08 y 09) con un pulso plano. El objetivo era conocer si se mantendría la tendencia observada utilizando esta condición de borde.

Al simular con un perfil de entrada plano se obtuvo que si bien los máximos de los esfuerzos de corte y de la velocidad varían respecto de los casos anteriores, la tendencia observada se mantiene. Es decir, al estudiar la turbulencia con un modelo del tipo  $k - \epsilon$  los resultados obtenidos varían significativamente respecto del caso laminar. En particular estas diferencias se acentúan al acercarse a la cima del aneurisma. En la Tabla 5.4 se observan las diferencias en los esfuerzos de corte máximos registrados en los tres puntos medidos del aneurisma bajo un modelo Laminar y uno Turbulento Standard  $k - \epsilon$ . Las variaciones punto a punto entre los dos modelos son casi del mismo orden que utilizando un pulso parabólico, aunque disminuyen alrededor de un 2 % en cada caso.

Tabla 5.4: Máximos WSS medidos bajo una formulación laminar y una turbulenta  $k - \epsilon$ . Caso 08 y 09.

Modelo	Pto a	Dif. %	Pto b	Dif. %	Cima	Dif. %	Promedio
Lam	23,8	–	11,1	–	5,2	–	–
$sk - \epsilon$	22,1	-7,0 %	14,1	27,7 %	2,3	-56,0 %	30,2 %

## 5.7. Simulación con modelo Estacionario

En esta sección se estudió la fluidodinámica de los aneurismas cerebrales utilizando modelos estacionarios. En un primer estudio se procedió a simular utilizando pulso de entrada de velocidad promedio, registrando el valor de los esfuerzos de corte en los 3 puntos medidos del aneurisma 1. Se procede entonces a comparar los valores de esta prueba con el promedio de los WSS de las simulaciones no-estacionariadas. Esta comparación se muestra en la Tabla 5.5. Se observa que los WSS medidos en un mismo punto del aneurisma tienden a ser bastante distintos, aun cuando el grado de diferencia depende de la zona en que se midió la variable. Si bien en el cuello esta diferencia es bastante menor (-1,6 %), al acercarse a la cima esta diferencia se incrementa muchísimo llegando a un -40 %. En general esta prueba refleja que al tratar de estimar el WSS promedio utilizando una simulación estacionaria, se subestima su valor en un porcentaje que dependerá de la zona de la deformación en que se esté midiendo.

En el segundo estudio se simuló el caso estacionario con un pulso de entrada de velocidad máxima, midiendo los WSS en los mismos puntos antes descritos. Se realizó luego la comparación con la simulación no estacionaria, lo cual se muestra en la Tabla 5.6. La tabla muestra que existen diferencias significativas entre los WSS máximos medidos en ambos modelos. Esta variación indica que en general con el modelo estacionario se tiende a sobrestimar los valores de los WSS máximos medidos puntualmente en el aneurisma. El porcentaje de variación depende de la zona. Mientras que en el cuello la diferencia es menor a un 10 %, en la cima llega hasta un 250 %.

Cabe destacar que tanto las líneas de flujo como las estructurales vorticiales encontradas, coinciden con la simulación no Estacionaria. Esto hace suponer que el problema de la simulación estacionaria tiene que ver con un efecto transiente del flujo sanguíneo sobre la mecánica de fluidos del aneurisma.

En resumen, se descarta completamente el modelo estacionario para simular la fluidodinámica de aneurismas cerebrales. Más aun, no es posible obtener patrón que indique el orden del error que se comete al utilizar este modelo, dado que este varía según el punto del aneurisma en que se está midiendo la variable.

Tabla 5.5: WSS promedio caso Est. y no Est.

Caso	Pto a	Dif %	Pto b	Dif %	Cima	Dif %	Promedio
No est.	12,0	0,0 %	5,6	0,0 %	2,31	0,0 %	0 %
Est.	11,8	-1,6 %	4,2	-24,7 %	1,38	-40,1 %	22 %

Tabla 5.6: WSS máximo caso Est. y no Est.

Caso	Pto a	Dif %	Pto b	Dif %	Cima	Dif %	Promedio
No est.	23,6	0,0 %	12,7	0,0 %	6,18	0,0 %	0 %
Est.	25,9	9,6 %	15,7	23,7 %	8,10	250,7 %	95 %

---

## Capítulo 6

### Conclusiones

---

En base a lo mostrado en este trabajo de título se puede llegar a las siguientes conclusiones:

- Se logró modelar y simular 12 casos de aneurismas cerebrales a partir de dos geometrías reales extraídas de una base de datos, considerando las condiciones dentro de la arteria cerebral.
- Se encontró que las diferencias registradas al modelar la sangre como fluido Newtoniano versus un fluido no Newtoniano de Carreau, son mayores en la cima del aneurisma llegando a un 17%. En el cuello las diferencias son menores, llegando a un 5%. En general al utilizar un fluido con densidad constante se tiende a sobreestimar los esfuerzos de corte del aneurisma.
- Se concluye que al estudiar la turbulencia en aneurismas cerebrales con un modelo de turbulencia  $k-\epsilon$ , se obtiene resultados significativamente diferentes al modelo laminar. En general, se tiende a subestimar los esfuerzos de corte en las paredes del aneurisma. Tanto las líneas de flujo de velocidad como las estructuras vorticiales no varían significativamente.
- Al estudiar la turbulencia pero utilizando un modelo del tipo  $k-\omega$  los resultados obtenidos no varían respecto del modelo laminar, ya sea en los esfuerzos de corte máximos encontrados, las líneas de flujo de velocidad y las estructuras vorticiales.
- Se concluye que la turbulencia no afecta de manera significativa la fluidodinámica de los aneurismas cerebrales. Ahora bien, el estudio en detalle de la transición a régimen turbulento en aneurismas cerebrales debe hacerse utilizando un modelo de turbulencia de la familia de los  $k-\omega$ . Esto también aplica a los posibles estudios con pulsos sanguíneos con alguna alteración cardíaca.
- Las diferencias en los resultados entre las simulaciones con modelos del tipo  $k-\epsilon$  son ínfimas, ya sea utilizando el modelo estándar, el RNG o el Realizable. Lo mismo ocurre con los modelos del tipo  $k-\omega$ , donde no existe diferencia entre los resultados del modelo estándar con el SST.
- Los efectos de la turbulencia en la fluidodinámica descritos anteriormente, aplican tanto a aneurismas saculares del tipo terminal, como saculares del tipo lateral.

- Se encontró que el perfil de entrada (plano o parabólico) tampoco es un factor de importancia en los efectos que produce la turbulencia sobre la fluidodinámica. Para ambos perfiles se registró la misma tendencia.
- Se encontraron diferencias significativas en los esfuerzos de corte (máximos y promedio) estimados con un modelo de simulación estacionario. Por ello se descarta esta estrategia de simulación como una opción válida para reducir los tiempos de simulación.
- No se encontró un patrón que permita estimar el error cometido al realizar simulaciones de aneurismas cerebrales con un modelo estacionario. Esto ocurre dado que el error cometido varía punto a punto, dependiendo de la zona del aneurisma.

## Bibliografía

---

- [1] SCHIEVINK WI. *Intracranial aneurysms*. N Engl J Med 1997; 336: 28–40.
- [2] JUVELA S. *Treatment options of unruptured intracranial aneurysms*. Stroke 2004; 35: 372–374.
- [3] BILGUVAR, KAYA, KATSUHITO , NIEMELA. *Susceptibility loci for intracranial aneurysm in European and Japanese populations*. Nat Genet advanced online publication 2008.
- [4] INAGAWA, HIRANO A. *Autopsy study of unrupture incidental aneurysm*. Surg. Neurol 1990; 361–365.
- [5] GUGLIELMI G, VIÑUELA F, DION J. *Electrothrombosis of saccular aneurysms via endovascular approach*. Neurosurg 1991; 75: 8–14.
- [6] DRAKE C. *Evolutions of intracranial aneurysm surgery*. Can. Surg 27 1984; 549-555.
- [7] MARTÍNEZ J. *Anestesia para la cirugía de Aneurismas Cerebrales, Parte 1*. <http://www.uam.es/departamentos/medicina/anesnet/forconred/neuro/aneurismas/aneurismas1.htm>. [Accesada el 13 Mayo 2010].
- [8] ARAYA S. *Simulación de la hemodinámica en modelos de aneurismas cerebrales incluyendo la interacción fluido-estructura*. Trabajo de título, Dpto Ingeniería Mecánica Universidad de Chile. Enero 2008.
- [9] PÉREZ J. *Simulación fluido-dinámica de tratamiento endovascular en modelos de aneurismas cerebrales reales*. Trabajo de Título, Dpto Ingeniería Mecánica Universidad de Chile. Diciembre 2008.
- [10] PAÁL G. *Flow in simplified and real models of intercranial aneurysms*. Int. J. Heat and Fluid Flow 28 (2007).
- [11] SIEBERT M., FODOR P. *Newtonian and Non-Newtonian Blood Flow over a Backward-Facing Step- A Case Study*. Physics Department, Cleveland State University. Excerpt from the proceedings of the Comsol Conference 2009 Boston.
- [12] WILCOX D.C. *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, Inc., La Canada, California, 1998.

- [13] WOLFSTEIN M. *The Velocity and Temperature Distribution of One-Dimensional Flow with Turbulence Augmentation and Pressure Gradient* Int. J. Heat Mass Transfer, 12:301-318, 1969.
- [14] BOTTO S. *Simulación de la Hemodinámica de en una Geometría Aproximada de Aneurisma con un Modelo de Tratamiento Endovascular*. Trabajo de Título , Dpto Ingeniería Mecánica. Universidad de Chile, Agosto 2005.
- [15] LEDERMANN D. *Modelación de Aneurismas Cerebrales: Simulación fluidodinámica y estructural*. Trabajo de Título , Dpto Ingeniería Mecánica. Universidad de Chile, 2006.
- [16] ZAMIR, M. *The Physics of Pulsatile Flow*. Springer, New York. 2000.
- [17] SHOJIMA M., OSHIMA M., TAKAGI K., TOROII R., HAYAKAWA M. *Magnitude and role of wall shear stress on cerebral aneurysm: computational fluid dynamic study of 20 middle cerebral artery aneurysms*. Stroke 2004; 35; 2500-2505
- [18] *Instituto de Neurocirugía Asenjo* La sección de Neurorradiología Intervencional. [En Línea] <http://www.neurorradiologia.cl/2010/intervencional.php> [Consultada el 30 Abril 2010].
- [19] MORALES H. *Simulación de la hemodinámica de geometrías 3D aproximadas de aneurismas y análisis estadístico de los casos*. Trabajo de título, Dpto Ingeniería Mecánica Universidad de Chile, Agosto 2006.
- [20] *Fluent 6.3 User Guide*. Fluent Inc.
- [21] DE VAHL DAVIS G. *Natural Convection of Air in a Square Cavity: A Bench Mark Numerical Solution* International Journey of Numerical Methods in Fluids, Vol. 3, 249-264 (1983).
- [22] HASHIMOTO T. *Intracranial aneurysms: links among inflammation, hemodynamics and vascular remodeling*. University of California Postprints 2006, Paper 2439.
- [23] JIANG J., STROTHER C. *Computational Fluid Dynamics Simulations of Intracranial Aneurysms at Varying Heart Rates: A Patient-Specific Study*. Journal of Biomechanical Engineering, Vol. 131. Agosto 2009.
- [24] ZÁRATE A. *Simulación Flujo sanguíneo en aneurismas cerebrales*. Trabajo de título, Dpto Ingeniería Mecánica Universidad de Chile, Diciembre 2004.
- [25] FIGUEROA H. *Análisis de Sensibilidad en Simulaciones de Aneurismas Cerebrales considerando interacción Fluido Estructura*. Trabajo de título, Dpto Ingeniería Mecánica Universidad de Chile. Enero 2008.
- [26] SFORZA D., PUTMAN C., CEBRAL J. *Hemodynamics of Cerebral Aneurysms*. Annual Review of Fluid Mechanics, Junio 2008.

- [27] K. KHANAFER K. *Turbulence Significantly Increases Pressure and Fluid Shear Stress in an Aortic Aneurysm Model under Resting and Exercise Flow Conditions*. *Annals of Vascular Surgery* 2007; 21: 67-74.
- [28] RAMOS E., CISTERNAS G. *Computational Fluid Dynamics*. Proceeding of the Routh UNAM Supercomputing Conference.

---

## **Anexo A**

### **Rutinas en C para Pulsos de Fluent**

---

Aqui se muestra la rutina en código C, necesaria de implementar para introducir los pulsos de entrada y salida en Fluent.

A continuación la rutina del pulso de velocidad de entrada, pulso de womersley; y luego Pulso de presión de Salida, pulso plano:

pulsoparabolico13

```

#include "udf.h"
#include "math_ga.h"
#define RADIO 0.00093313
#define NU 3.0381E-6

DEFINE_PROFILE(vel_womersley, t, i)
{
    int k=1;
    real alpha,alpha2;
    real x[ND_ND]; /* this will hold the position vector */
    real rx,ry,rz,r,r_adim;
    real rp[ND_ND];
    face_t f;
    real time;
    complex Q1[NC];
    complex Q2[NC];

    double a1[NC]={ 0.3193,-0.07645,-0.1371,-0.04113,-0.0701,0.003085,0.008735,-0.009794,0.006335};
    double b1[NC]={ 0.0,0.006205,0.08925,-0.03142,-0.04841,0.005186,-0.01399,0.01974,0.01092};

    double a2[NC]={0.3568,-0.1191,0.008027,0.02799,-0.01321,-0.004042,0.008983,-0.00439,-0.001583};
    double b2[NC]={0.0,0.05152,-0.06563,0.01698,0.01325,-0.01376,0.003437,0.004566,-0.00375};

    Q1[0].Real=1.0,Q1[0].Imag=b1[0]/a1[0];
    /* construccion de los coeficientes complejos */
    for(k=1;k<NC;++k){
        Q1[k].Real=a1[k]/a1[0];
        Q1[k].Imag=b1[k]/a1[0];
    }
    Q2[0].Real=1.0,Q2[0].Imag=b2[0]/a2[0];
    /* construccion de los coeficientes complejos */
    for(k=1;k<NC;++k){
        Q2[k].Real=a2[k]/a2[0];
        Q2[k].Imag=b2[k]/a2[0];
    }
    time=RP_Get_Real("flow-time");
    rp[0]=0.0;rp[1]=0.0;rp[2]=0.0;
    /* Periodo del pulso y parametro de womersley */
    alpha=RADIO*sqrt(3.37/NU);
    alpha2=RADIO*sqrt(7.306/NU);
    begin_f_loop(f, t)
    {
        F_CENTROID(x, f, t);
        rx=x[0]-rp[0];
        ry=x[1]-rp[1];
        rz=x[2]-rp[2];
        r=sqrt(rx*rx+ry*ry+rz*rz);
        r_adim=r/RADIO;

        if(time>=0.0 && time < 0.2){
            F_PROFILE(f, t, i)=a1[0]*womersley(alpha,Q1,r_adim,-3.37*time);}

        if(time>=0.2 && time < 2){
            F_PROFILE(f, t, i)=a2[0]*womersley(alpha2,Q2,r_adim,-7.26*time);}
    }
    end_f_loop(f,t)
}

DEFINE_PROFILE(pres_salida, t, i)
{
    int k=1;
    real time;
    real x[ND_ND]; /* this will hold the position vector */
    face_t f;

    double a2[NC]={13410,-1981,-708.8,32.06,28.08,39.2,16.61,1.949,-5.744};
    double b2[NC]={0,915.3,-550,-178.7,-114.8,-39.84,9.128,23.2,19.28};
    complex Q2[NC];

    Q2[0].Real=1.0,Q2[0].Imag=b2[0]/a2[0];
    /* construccion de los coeficientes complejos */
    for(k=1;k<NC;++k){
        Q2[k].Real=a2[k]/a2[0];
        Q2[k].Imag=b2[k]/a2[0];
    }
    time=RP_Get_Real("flow-time");
    begin_f_loop(f, t)
    {
        F_CENTROID(x,f,t);

        if(time>=0.0 && time < 0.13){
            F_PROFILE(f, t, i)=3.441e+009*time*time*time*time*time-1.124e+009*time*time*time*time
                +1.129e+008*time*time*time-2.92e+006*time*time+5.774e+004*time-25.0;}

        if(time>=0.13 && time < 3){
            F_PROFILE(f, t, i)=a2[0]*fourier1(Q2,-7.334*time);}
    }
    end_f_loop(f, t)
}

```

Para poder compilar la rutina de manera adecuada, esta debe incorporar un archivo complementario .h que contenga la definición de las funciones, que se muestra a continuación:

```

                                math_ga
void math_ga();
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

#define PI 3.14159265
#define NC 9          /* Numero de coeficientes de Fourier (periodo fundamental + (NC-2)*armonicos + valor DC)*/
#define NC2 6

typedef struct{
    double Real;
    double Imag;
}complex;

int sign(double x){
    return (int)(x/fabs(x));
}

double preal(complex Z1){
    return Z1.Real;
}

complex r2c(double x){
    complex Z;
    Z.Real=x;Z.Imag=0.0;
    return Z;
}

complex csum_ga(complex Z1, complex Z2){
    complex Z;
    Z.Real=Z1.Real+Z2.Real;
    Z.Imag=Z1.Imag+Z2.Imag;
    return Z;
}

complex cdiff_ga(complex Z1, complex Z2){
    complex Z;
    Z.Real=Z1.Real-Z2.Real;
    Z.Imag=Z1.Imag-Z2.Imag;
    return Z;
}

complex cmult_ga(complex Z1, complex Z2){
    complex Z;
    double a,b,c,d;
    a=Z1.Real,b=Z1.Imag,c=Z2.Real,d=Z2.Imag;
    Z.Real=a*c-b*d,Z.Imag=a*d+b*c;
    return Z;
}

complex conj_ga(complex Z){
    complex Y;
    double Zr=Z.Real;
    double Zi=Z.Imag;
    Y.Real=Zr;
    Y.Imag=-Zi;
    return Y;
}

double cabs_ga(complex Z1){
    return sqrt(preal(cmult_ga(Z1,conj_ga(Z1))));
}

complex cdiv_ga(complex Z1, complex Z2){
    complex Z,Za;
    Za=cmult_ga(Z1,conj_ga(Z2));
    Z.Real=Za.Real/(cabs_ga(Z2)*cabs_ga(Z2));
    Z.Imag=Za.Imag/(cabs_ga(Z2)*cabs_ga(Z2));
    return Z;
}

complex cexp_ga(complex Z1){
    complex Z;

```

```

                                math_ga
double a,b;
a=Z1.Real,b=Z1.Imag;
Z.Real=exp(a)*cos(b);
Z.Imag=exp(a)*sin(b);
return Z;
}

complex csqrt_ga(complex Z1){
double a,b,c,d;
complex Z;
a=Z1.Real,b=Z1.Imag;
c=0.5*sqrt(2)*sqrt(sqrt(a*a+b*b)+a);
d=0.5*sqrt(2)*(double)(sign(b))*sqrt(sqrt(a*a+b*b)-a);
Z.Real=c,Z.Imag=d;
return Z;
}

complex ccos_ga(complex Z1){
double a,b,c,d;
complex Z;
a=Z1.Real,b=Z1.Imag;
c=cos(a)*cosh(b);
d=-sin(a)*sinh(b);
Z.Real=c,Z.Imag=d;
return Z;
}

complex csin_ga(complex Z1){
double a,b,c,d;
complex Z;
a=Z1.Real,b=Z1.Imag;
c=sin(a)*cosh(b);
d=cos(a)*sinh(b);
Z.Real=c,Z.Imag=d;
return Z;
}

complex bessell_ga(int n,complex Z){
complex Y;
double Zr,Zi,dt,Theta,Yr,Yi;
dt=0.1;
Theta=0;
Zr=Z.Real;Zi=Z.Imag;
Yr=0,Yi=0;
while(Theta<=PI){
Yr=Yr+cosh(Zi*sin(Theta))*(cos(n*Theta)*cos(Zr*sin(Theta))+sin(n*Theta)*sin(Zr*sin(Theta)));
Yi=Yi+sinh(Zi*sin(Theta))*(sin(n*Theta)*cos(Zr*sin(Theta))-cos(n*Theta)*sin(Zr*sin(Theta)));
Theta=Theta+dt;
}
Yr=Yr*dt/PI;
Yi=Yi*dt/PI;
Y.Real=Yr;Y.Imag=Yi;
return Y;
}

double fourier1(complex Q[NC],double t){
register int k;
complex Im;
complex Z,Za;
Im.Real=0.0;Im.Imag=1.0;
Z=Q[0];
for(k=1;k<NC;++k){
Za=cmult_ga(Q[k],cexp_ga(cmult_ga(Im,r2c((double)(k)*t)));
Z=csum_ga(Z,Za);
}
return Z.Real;
}

double fourier2(complex Q[NC2],double t){
register int k;
complex Im;
complex Z,Za;
Im.Real=0.0;Im.Imag=1.0;
Z=Q[0];
for(k=1;k<NC2;++k){
Za=cmult_ga(Q[k],cexp_ga(cmult_ga(Im,r2c((double)(k)*t)));
Z=csum_ga(Z,Za);
}
return Z.Real;
}

```

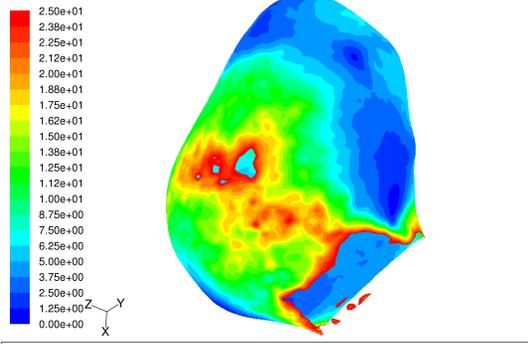
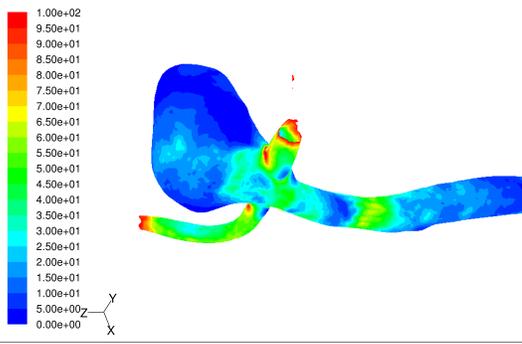
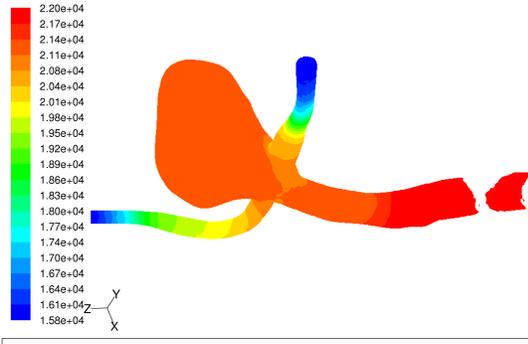
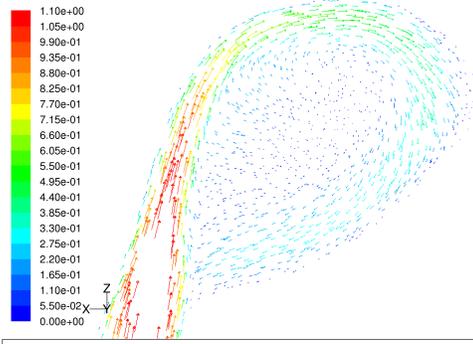
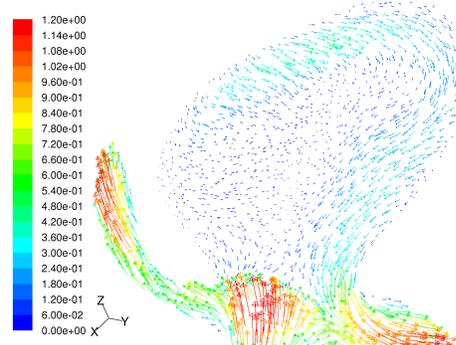
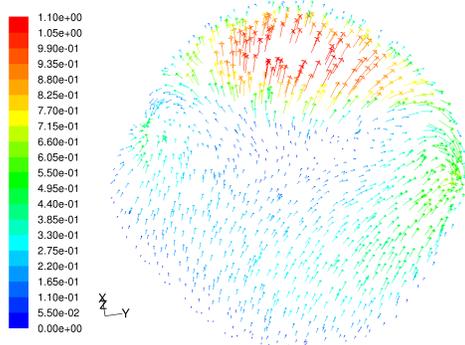
```

                                math_ga
}
double womersley(double alpha,complex Q[NC],double r_adim, double t){
    register int k;
    double x;
    complex U[NC],Im,Lambda,aux,aux2,aux3,Zeta,u;
    u.Real=0.0,u.Imag=0.0;
    Im.Real=0.0;Im.Imag=1.0;
    x=2.0*(1.0-r_adim*r_adim);
    U[0]=cmult_ga(Q[0],r2c(x));
    /* construccion de los coeficientes de velocidad complejos */
    for(k=1;k<NC;++k){
        aux=r2c(alpha*sqrt((double)(k)/2.0));
        Lambda=cmult_ga(cdiff_ga(Im,r2c(1.0)),aux);
        Zeta=cmult_ga(Lambda,r2c(r_adim));
        aux=cmult_ga(Q[k],Lambda);
        aux2=cdiff_ga(bessel_ga(0,Lambda),bessel_ga(0,Zeta));
        aux3=cdiff_ga(cmult_ga(Lambda,bessel_ga(0,Lambda)),cmult_ga(r2c(2.0),bessel_ga(1,Lambda)));
        U[k]=cmult_ga(aux,cdiv_ga(aux2,aux3));
    }
    /* Construccion de la velocidad */
    u=U[0];
    for(k=1;k<NC;++k){
        aux=cmult_ga(Im,r2c((double)(k)*t));
        u=csum_ga(u,cmult_ga(U[k],cexp_ga(aux)));
    }
    return u.Real;
}

```

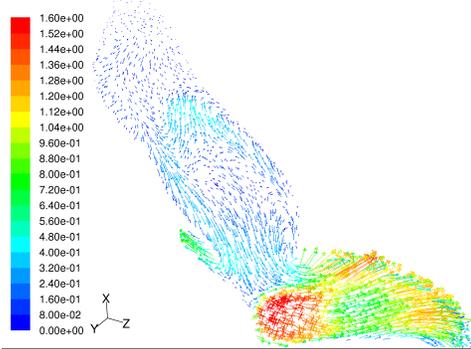
## Anexo B

### Resultados en Sístole Caso 05. Standard $k - \omega$ Geo. 1

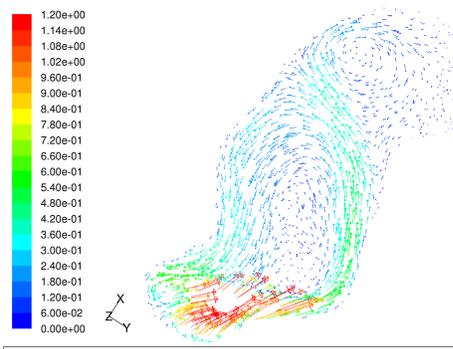


## Anexo C

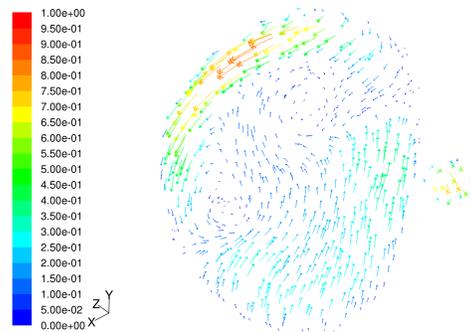
### Resultados en Sístole Caso 12. Standard $k - \omega$ Geo. 2



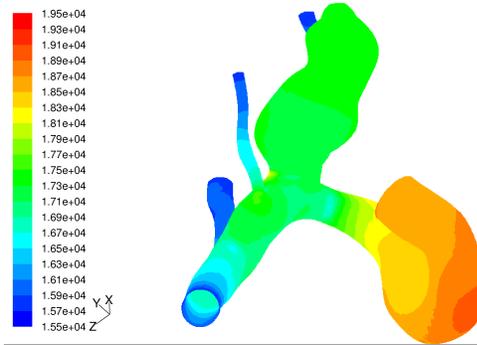
Velocity Vectors Colored By Velocity Magnitude (m/s) (Time=1.1900e+00) Aug 11, 2010  
FLUENT 6.3 (3d, dp, pbns, skw, unsteady)



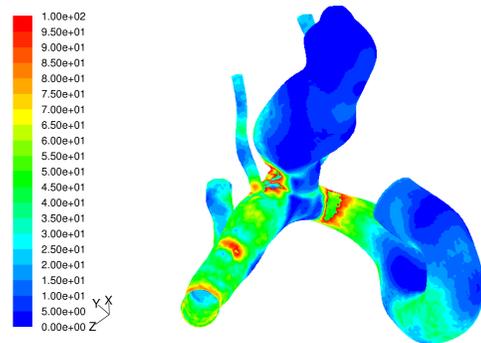
Velocity Vectors Colored By Velocity Magnitude (m/s) (Time=1.1900e+00) Aug 11, 2010  
FLUENT 6.3 (3d, dp, pbns, skw, unsteady)



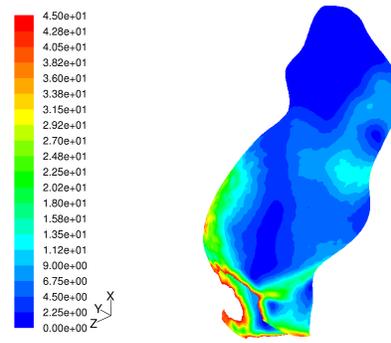
Velocity Vectors Colored By Velocity Magnitude (m/s) (Time=1.1900e+00) Aug 11, 2010  
FLUENT 6.3 (3d, dp, pbns, skw, unsteady)



Contours of Static Pressure (pascal) (Time=1.1900e+00) Aug 11, 2010  
FLUENT 6.3 (3d, dp, pbns, skw, unsteady)



Contours of Wall Shear Stress (pascal) (Time=1.1900e+00) Aug 11, 2010  
FLUENT 6.3 (3d, dp, pbns, skw, unsteady)



Contours of Wall Shear Stress (pascal) (Time=1.1900e+00) Aug 11, 2010  
FLUENT 6.3 (3d, dp, pbns, skw, unsteady)