UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMÁTICA

DISTRIBUCIONES CUASI-ESTACIONARIAS EN MODELOS DE POBLACIONES.

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

JORGE IGNACIO PRADO GUZMÁN

PROFESOR GUÍA:
SR. SERVET MARTÍNEZ AGUILERA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
SR. JAIME SAN MARTÍN ARISTEGUI
SR: JOAQUÍN FONTBONA TORRES

SANTIAGO DE CHILE
OCTUBRE 2010

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: JORGE PRADO GUZMÁN
FECHA: 04/11/2010
PROF. GUÍA: Sr. SERVET MARTÍNEZ AGUILERA

DISTRIBUCIONES CUASI-ESTACIONARIAS EN MODELOS DE POBLACIONES.

El tema principal de esta tesis es estudiar la dinámica de poblaciones basados en procesos de ramificación discretos, en particular se estudiaron los procesos de Bienaymé-Galton-Watson (BGW).

El problema de extinción o crecimiento a infinito de la población se analizó condicionando a las trayectorias no extintas, lo que en el límite genera distribuciones cuasi-estacionarias, los límites de Yaglom y la construcción del q-proceso.

Se estudió la descomposición teórica de la población, entre partículas que se extinguen casi-seguramente y partículas con línea de descendencia infinita, encontrándose una fuerte relación analítica entre las distribuciones de ambos tipos.

Posteriormente, para dar una interpretación probabilista de esta descomposición, se construyó una simulación de los dinámica mortal-inmortal, basados en los procesos de ramificación multi-tipos y se encontraron condiciones para su convergencia.

AGRADECIMIENTOS

Quería tan solo intentar vivir aquello que tendía a brotar espontáneamente de mi.
¿ Por qué habría de serme tan difícil ? ...

Al momento de recapitular lo hecho en estos últimos años, recuerdo esta frase que leí de niño, pero ahora con un especial sentido, paso de ser un tímido pensamiento a realidad. Por la misma, no podría dejar de agradecer a todos los que me acompañaron y ayudaron a desarrollarme emocional e intelectualmente.

Agradezco en primer lugar a mi familia, mi papá, mi mamá y mi hermana, que confiaron y me apoyaron en todas las decisiones que tomé, por muy descabelladas que sonaran, siempre las respetaron.

A mis compañeros de oficina, grandes amigos que me dieron animo y con sus comentarios fueron la primera trinchera. A Félix, Claudio, Julio, Víctor, Tomás, Jero, Guido y Omar, a la 435 en pleno.

Al profesor Servet Martínez por aguantar mi desorden y ayudarme a encausar mis dudas. A Joaquín Fonbona y Jaime San Martín que me revelaron el mundo de los procesos estocásticos y a todos los profesores que me enseñaron lo fascinante que puede llegar a ser las matemáticas.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La teoría de procesos de ramificación ha sido un área de constante actividad investigativa desde el siglo XIX con los estudios sobre extinción de apellidos en la aristocracia británica efectuados por F.Galton (1822-1911) y H.W.Watson (1827-1903), quienes asociaron fertilidad con probabilidades de descendencia representativas, las cuales replicaban a su vez en las próximas generaciones.

En la actualidad los procesos de ramificación poseen una gran importancia tanto en el campo de matemáticas abstractas como aplicadas y sus áreas de injerencia incluyen disciplinas como biología, genética, medicina, ciencias de los materiales, ciencias de la computación y teoría de colas, abordando problemas tan diversos como la evolución de genes mutantes en una población hasta la propagación de neutrones en una reacción nuclear.

El trabajo aquí presentado está organizado de forma constructiva. En la primera parte se entregan las definiciones básicas y resultados clásicos de convergencia asintótica de procesos de ramificación. Se le dará especial énfasis a los procesos condicionados a no extinguirse y el comportamiento de poblaciones antes de su extinción. Posteriormente se analizará la descomposición de un proceso de ramificación supercrítico entre el proceso que se extingue casi seguramente y aquel en que los individuos son inmortales. Finalmente se estudiarán variantes de un proceso de ramificación subcrítico que aproximen la interacción entre partículas inmortales y mortales de un proceso supercrítico.

Capítulo 2

Bienaymé-Galton-Watson (BGW)

2.1. Construcción

El proceso de Bienaymé-Galton-Watson (BGW) es el proceso de ramificación más estudiado y que puede ser descrito como sigue:

Una única partícula ancestro vive por una unidad el tiempo y al morir produce una cantidad aleatoria de hijos de acuerdo a una distribución determinada. A su vez, cada partícula hijo vive por una unidad de tiempo y al morir produce una cantidad aleatoria de descendientes de acuerdo a la misma distribución. El número de descendientes de cada partícula es independiente de su progenitor y del resto de las partículas. Este comportamiento se replica en cada generación.

Matemáticamente un BGW, se representa como una cadena de Markov homogénea a tiempo discreto $Z = (Z_n : n \in \mathbb{Z}_+)$ con valores en $\mathbb{Z}_+$ cuyas probabilidades de transición se definen en términos de una distribución de probabilidad de descendencia $\nu = (\nu_k : k \in \mathbb{Z}_+)$.

De esta forma

$$P(i,j) := \mathbb{P}(Z_{n+1} = j | Z_n = i) = \begin{cases} \nu_j^{*i} & i \geq 1 \quad j \geq 0. \\ \delta_{0,j} & i = 0 \quad j \geq 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $\delta_{i,j}$ es la delta de Kronecher(i,j) y ν^{*i} es la i-ésima convolución de ν.

Dicho de otra forma, Z satisface la condición de recurrencia:

$$Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} \xi_j^{(n)} \qquad n = 0, 1, 2, ... \quad ; \tag{2.2}$$

donde $\left(\xi_j^{(n)} : j = 1, 2, ... \quad n = 0, 1, \cdots\right)$ son v.a.'s independientes e igualmente distribuidas según ν. Notaremos por ξ una v.a. con distribución ν.

Notación 2.1 *Denotaremos* $Z = (Z_n : n \in \mathbb{Z}_+)$ *al BGW con 1 partícula inicial y para* $k \geq 1$ $Z^{(k)} = (Z_n^{(k)} : n \in \mathbb{Z}_+)$ *el BGW con* k *partículas iniciales. Por convención* $Z = Z^{(1)}$.

Propiedad Aditiva o de Ramificación

El proceso $Z^{(k)}$ es la suma de k copias independientes de procesos de ramificación Z.

Definición 2.1 (Función Generadora de Probabilidad)

Para el análisis del BGW estudiaremos su función generadora de probabilidad (fgp) $f(s) := \mathbb{E}[s^{Z_1}] = \mathbb{E}[s^{\xi}] = \sum_{k\geq 0} \nu_k s^k$, $s \in \mathbb{C}; |s| \leq 1$ *y sus iteradas* $f_0 = s$; $f_1(s) = f(s)$; $f_{n+1}(s) = f_n\left(f(s)\right)$.

Observemos que por la propiedad de ramificación:

$$\mathbb{E}\left[s^{Z_n^{(i)}}\right] = \left[\mathbb{E}\left[s^{Z_n}\right]\right]^i \qquad y \qquad \mathbb{E}\left[s^{Z_n}|Z_{n-1} = k\right] = \mathbb{E}\left[s^{\sum_{j=1}^k \xi_j^{(n)}}\right] = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{E}\left[s^{\xi_j}\right] = f(s)^k \; ;$$

luego $\qquad f_{(n)}(s) := \mathbb{E}\left[s^{Z_n}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k\geq 0} f(s)^k \mathbb{1}_{\{Z_{n-1}=k\}}\right] = \mathbb{E}\left[f(s)^{Z_{n-1}}\right] = f_{n-1}\left(f(s)\right) \; ;$

resumiendo $\quad \mathbb{E}\left[s^{Z_n^{(i)}}\right] = \left[f_n(s)\right]^i . \qquad (2.3)$

Notación 2.2 *De ahora en adelante denotaremos* $P_k(i,j)$ *a la probabilidad de transición del BGW* Z *en* k *pasos desde* i *a* j. *Es decir,* $P_k(i,j) := \mathbb{P}(Z_k = j | Z_0 = i)$.

Ocupando esta notación, la ecuación (2.3) se reescribe:

$$\sum_{j\geq 0} P_n(i,j)s^j = \Big[f_n(s)\Big]^i \ . \tag{2.4}$$

Definición 2.2 *Se designará* $\boldsymbol{m}$ *y* $\boldsymbol{\sigma}^2$ *a la esperanza y varianza de la distribución de descendencia del BGW respectivamente.*

Las propiedades básicas siguientes se encuentran en [AN72] y [H63].

Notemos que gracias a la ecuaciones (2.3) y (2.4), los momentos del proceso se pueden expresar en función de su fgp y sus derivadas.

$$\mathbb{E}\big[Z_1\big] = f'(1) = \boldsymbol{m} \ .$$

Además

$$\mathbb{E}\big[Z_n\big] = f_n'(1) = f_{n-1}'\big(f(1)\big)f'(1) = f_{n-1}'(1)f'(1) = \boldsymbol{m}^n \ .$$

Luego usando:

$$f_n''(1) = f_{n-1}''\big(f(1)\big)\big[f'(1)\big]^2 + f_{n-1}'\big(f(1)\big)f''(1) = \boldsymbol{m}^2 f_{n-1}''(1) + \boldsymbol{m}^{n-1}f''(1) \ ,$$

se obtiene por iteración

$$f_n''(1) = \boldsymbol{m}^2 f_{n-1}''(1) + \boldsymbol{m}^{n-1}f''(1) = \boldsymbol{m}^{2n-2}f_1''(1) + \boldsymbol{m}^{2n-3}f''(1) \ ,$$

de donde:

$$f_n''(1) = f''(1)\Big[\boldsymbol{m}^{n-1} + \boldsymbol{m}^n + \boldsymbol{m}^{n+1} + ... + \boldsymbol{m}^{2n-3} + \boldsymbol{m}^{2n-2}\Big] \ ,$$

$$\mathbb{V}ar(Z_n) = f_n''(1) + f_n'(1) - [f_n'(1)]^2 = \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{m}^{n-1}\frac{\boldsymbol{m}^n-1}{\boldsymbol{m}-1} & \boldsymbol{m} \neq 1 \ . \\ n\boldsymbol{\sigma}^2 & \boldsymbol{m} = 1 \ . \end{cases} \tag{2.5}$$

Definición 2.3 (Extinción) *Se define el tiempo de extinción* $\mathcal{T} := \inf\big\{n \geq 0 : Z_n = 0\big\}$ *y la probabilidad de extinción* $\mathbb{P}(\mathcal{T} < \infty) = \mathbb{P}(Z_n = 0 \text{ para algún } n \geq 1)$.

Definición 2.4 *Sea* $\boldsymbol{q}$ *la menor raíz no negativa negativa de* $f(t) = t$.

Hipótesis 2.1 *Para evitar casos triviales, supondremos que* $\nu_0 + \nu_1 < 1$ *y que* $\nu_j \neq 1$ *para todo* j*. De esta forma* $f(\cdot)$ *es estrictamente convexa.*

Lema 2.1.1

- *Si* $t \in [0, \boldsymbol{q})$ *entonces* $f_n(t) \nearrow \boldsymbol{q}$ *cuando* $n \to \infty$ *.*
- *Si* $t \in (\boldsymbol{q}, 1)$ *entonces* $f_n(t) \searrow \boldsymbol{q}$ *cuando* $n \to \infty$ *.*
- *Si* $t = \boldsymbol{q}$ *entonces* $f_n(t) = \boldsymbol{q}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *.*

Teorema 2.1.2 (Probabilidad de Extinción)
La probabilidad de extinción de Z *es la primera raíz de de* $f(t) = t$ *.*

Demostración Observar que por el Lema 2.1.1 y el Teorema de Convergencia monótona;

$$\mathbb{P}(\mathcal{T} < \infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = \boldsymbol{q} \ .$$

■

Teorema 2.1.3 (Transiencia)
Para todo $k \geq 1$ *se tiene que* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) = 0$ *. Además,*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} Z_n = \infty\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} Z_n = 0\right) = 1 - \boldsymbol{q} \ .$$

Demostración Observemos que los estados $k = 1, 2, \cdots$ son transientes, pues:

$$\mathbb{P}(Z_{n+j} = k \text{ algún } j \geq 1 | Z_n = k) \leq \left\{ \begin{array}{ccc} \nu_1^k & \text{si} & \nu_0 = 0 \\ 1 - \nu_0^k & \text{si} & \nu_0 \neq 0 \end{array} \right\} < 1 \ ,$$

luego, por la propiedad de Markov, para cada $k \geq 1$ $\quad \mathbb{P}\left(Z_n = k \text{ para infinitos } n\right) = 0.$

Para concluir notemos que:

$$\mathbb{P}\left(\left(\left\{\lim_{n\to\infty} Z_n = \infty\right\} \cup \left\{Z_n = 0 \text{ algún } n\right\}\right)^c\right) = \mathbb{P}\Big(\exists M < \infty \text{ tal que } Z_n \in [1, M], \text{ infinitos } n\Big) = 0$$

■

Más detalles sobre las propiedades de transiencia del BGW se describen en [H63] y [AN72].

A partir del Teorema 2.1.2 surge una clasificación natural del BGW de acuerdo a su extinción.

Definición 2.5

Diremos que el proceso es **subcrítico si $\boldsymbol{m} < 1$, crítico si $\boldsymbol{m} = 1$ y supercrítico si $\boldsymbol{m} > 1$**

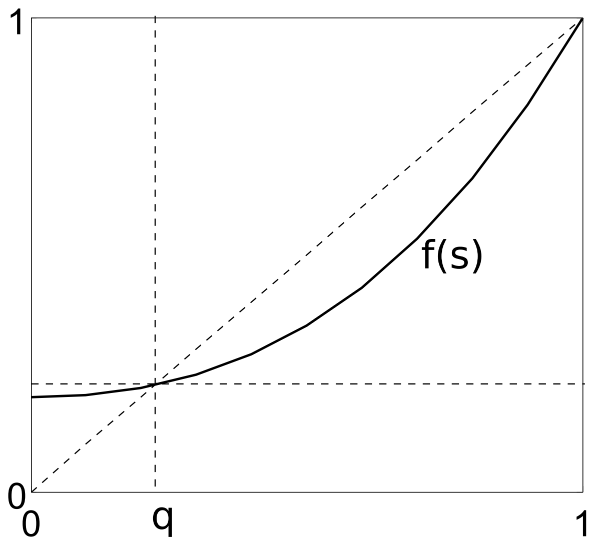

Figura 2.1: $\boldsymbol{m} > 1$

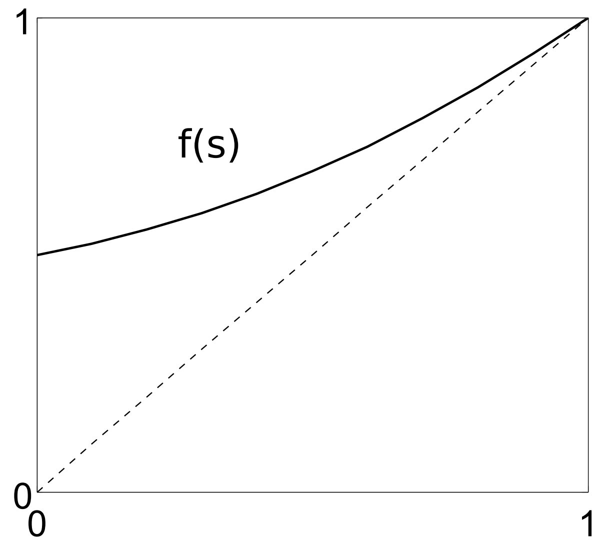

Figura 2.2: $\boldsymbol{m} \leq 1$

Por convexidad se desprende que si $\boldsymbol{m} > 1$, entonces $\boldsymbol{q} < 1$ y análogamente si $\boldsymbol{m} \leq 1$ entonces $\boldsymbol{q} = 1$. (Ver [AN72]).

2.2. Teoremas límites

Como todo modelo de población, es de interés comprender su comportamiento a largo plazo. Ya sabemos, gracias al Teorema 2.1.3, que Z_n se extingue o crece a ∞ cuando $n \to \infty$.

En esta sección se buscará comprender la naturaleza de este comportamiento dual, obteniendo una serie de resultados útiles en la caracterización del BGW a largo plazo.

Como primera observación, notar que si $0 < \boldsymbol{m} < \infty$, entonces $W_n := \frac{Z_n}{\boldsymbol{m}^n}$ es martingala con respecto a la filtración natural $\mathscr{F}_n = \sigma(\{Z_k : k = 0, 1, \cdots, n\})$, pues es adaptada y por la propiedad de Markov:

$$\mathbb{E}[W_{n+k}|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}\left[\frac{Z_{n+k}}{\boldsymbol{m}^{n+k}}\Big|Z_n\right] = \sum_{i\geq 0} \frac{i\mathbb{E}[Z_k|Z_0=1]}{\boldsymbol{m}^{n+k}}\mathbb{1}_{Z_n=i} = \sum_{i\geq 0}\frac{i}{\boldsymbol{m}^n}\mathbb{1}_{Z_n=i} \overset{cs}{=} W_n \ .$$

Además como $\mathbb{E}[W_n] = 1 \quad \forall n \geq 0$ y $W_n \geq 0$, entonces existe una v.a. W tal que $\lim_{n\to\infty} W_n = W$ casi seguramente. (Ver [W91]).

La observación anterior ya entrega un resultado sobre el comportamiento a largo plazo del BGW, mostrando que $Z_n(w)$ crece como $\boldsymbol{m}^n W(w)$, lo que confirma la estrecha relación entre el BGW y un símil estocástico de la ley de crecimiento geométrica de poblaciones Maltusiana. No obstante, la observación anterior no caracteriza a W, es más, en el caso subcrítico, sabemos que con probabilidad 1, el BGW se extingue, en otras palabras, W es 0.

Para evitar la degeneración del proceso, se estudian los procesos condicionados $\{Z_n|Z_n > 0\}$.

Notación 2.3 *A la j-ésima derivada de $\frac{d^j}{ds^j}f_n(s)$ la denotaremos $f_n^{(j)}(s)$.*

Observemos que, f_n es una serie de potencias con coeficientes no negativos, luego es infinitamente derivable en $(0,1)$ y satisface

$$f_{n+1}^{(j)}(s) \geq f'\big(f_n(s)\big)f_n^{(j)}(s) \ . \tag{2.6}$$

Lema 2.2.1 (Radio Monótono) *(ver [AN72])*
Si $\nu_1 > 0$ entonces

$$\frac{P_n(1,j)}{P_n(1,1)} \nearrow \pi_j \leq \infty \qquad j \geq 1 \ .$$

Demostración Es directo que la condición $\nu_1 > 0$ implica $P_n(1,1) > 0$ para todo $n \geq 1$, además de la ecuación (2.6).

$$\frac{P_{n+1}(1,j)}{P_{n+1}(1,1)} = \frac{1}{j!}\frac{f^{(j)}_{n+1}(0)}{f'_{n+1}(0)} \geq \frac{1}{j!}\frac{f'\big(f_n(0)\big)f^{(j)}_n(0)}{f'\big(f_n(0)\big)f'_n(0)} = \frac{1}{j!}\frac{f^{(j)}_n(0)}{f'_n(0)} = \frac{P_n(1,j)}{P_n(1,1)} \ .$$

■

Definición 2.6 *Llamaremos* $\boldsymbol{\gamma} = f'(\boldsymbol{q})$.

Teorema 2.2.2 *Si* $\nu_1 > 0$ *entonces* $\pi := (\pi_j : j \in \mathbb{N})$ *satisface la ecuación*

$$\boldsymbol{\gamma}\pi_j = \sum_{k\geq 1}\pi_k P_1(k,j) \qquad \textit{para todo} \quad j \geq 1 \ . \tag{2.7}$$

Demostración De $\quad P_{n+1}(1,1) = f'_{n+1}(0) = f'\big(f_n(0)\big)f'_n(0) = f'\big(f_n(0)\big)P_n(1,1)$ se deduce,

$$\Rightarrow \quad \frac{P_{n+1}(1,1)}{P_n(1,1)} = f'\big(f_n(0)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} f'(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\gamma} \ . \tag{2.8}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P_{n+1}(1,j)}{P_{n+1}(1,1)}\frac{P_{n+1}(1,1)}{P_n(1,1)} = \sum_{k\geq 1}\frac{P_n(1,k)P_1(k,j)}{P_n(1,1)} \ . \tag{2.9}$$

Tomando límite a ambos lados de la ecuación (2.9) obtenemos el resultado por el Teorema de Convergencia Monótona. ■

Observemos que gracias al Teorema 2.2.2 se tiene que $\pi_n < \infty$ para todo $n \geq 1$.
En efecto, por construcción $\pi_1 = 1$ y $\boldsymbol{\gamma} \leq 1$. Si además suponemos $\nu_0 > 0$. Por contradicción, si existe n tal que $\pi_n = \infty$ entonces:

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}\pi_1 = \sum_{j\geq 1}\pi_j P_1(j,1) \geq \pi_n P_1(n,1) = \pi_n n \nu_1 \nu_0^{n-1} = \infty \ .$$

En el caso $\nu_0 = 0$, por contradicción sea $h = \text{ínf}\{j \geq 2 : \pi_j = \infty\}$. Notemos que en este caso $P_n(1,1) = \nu_1^n$ y $P_n(i,j) = 0 \quad \forall\, n \geq 1 \ , \ i < j$. Sea $a_n^{(h)} := \frac{P_n(1,h)}{P_n(1,1)}$,

$$\begin{aligned} a_{n+1}^{(h)} &= \frac{P_{n+1}(1,h)}{P_{n+1}(1,1)} = \frac{\sum_{j\geq 1}P_n(1,j)P(j,h)}{\nu_1^{n+1}} = \sum_{j=1}^{h}\frac{P_n(1,j)P(j,h)}{\nu_1^{n+1}} \ , \\ &= a_n^{(h)}\nu_1^{h-1} + \frac{1}{\nu_1}\sum_{j=1}^{h-1}\frac{P_n(1,j)}{P_n(1,1)}P(j,h) \leq a_n^{(h)}\nu_1^{h-1} + \frac{1}{\nu_1}\sum_{j=1}^{h-1}\pi_j P(j,h) \ , \\ &\leq a_n^{(h)}\nu_1^{h-1} + C_h \ . \end{aligned}$$

Donde $C_h < \infty$. Ahora iterando la desigualdad anterior,

$$\begin{aligned}
a_{n+1}^{(h)} &\leq \nu_1^{h-1} a_n^{(h)} + C_h \ , \\
\nu_1^{h-1} a_n^{(h)} &\leq \nu_1^{h-1} \left[\nu_1^{h-1} a_{n-1}^{(h)} + C_h \right] \ , \\
&\vdots \\
\left[\nu_1^{h-1} \right]^{n-1} a_2^{(h)} &\leq \left[\nu_1^{h-1} \right]^{n-1} \left[\nu_1^{h-1} a_1^{(h)} + C_h \right] \ ,
\end{aligned}$$

Sumando, obtenemos que:

$$a_{n+1}^{(h)} \leq \left[\nu_1^{h-1} \right]^n a_1^{(h)} + C_h \sum_{j=0}^{n-1} \left[\nu_1^{h-1} \right]^j \ .$$

Como $\nu_1 < 1$ se tiene que la sucesión $\left(a_n^{(h)} : n \geq 1 \right)$ es acotada, luego $\pi_h < \infty$.

Nota 2.1
Observemos que en el caso $\nu_0 = 0$ *, gracias a* (2.7)*, el vector* $\pi^{[k]} := (\pi_j : j = 1, ..k) \in \mathbb{R}^k$ *corresponde al vector propio fila asociado al valor propio de Perron-Frobenius de la matriz* $P^{[k]} := (P_1(i,j) : i,k \in \{1,..,k\})$ *, pues tenemos que:*

$$\boldsymbol{\gamma} \pi_k = \sum_{j=1}^{k} \pi_j P_1(j,k) \ .$$

Además notemos que $\boldsymbol{\gamma} = \nu_1$ *y la matriz* $P^{[k]}$ *es triangular superior con valores propios* $\{\nu_1, \nu_1^2, .., \nu_1^k\}$*. De esta forma, el Teorema de Perron-Frobenius asegura que* $\pi^{[k]}$ *queda completamente determinado por* $P^{[k]}$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *.*

$$\pi_k = \frac{1}{\nu_1 - \nu_1^k} \sum_{j=1}^{k-1} \pi_j P_1(j,k) \ .$$

Definición 2.7 *Llamaremos* $\mathscr{P}$ *a la función* $\mathscr{P}(s) = \sum_{n \geq 1} \pi_n s^n$ *donde la serie converja.*

Observar que gracias a la relación (2.7) $\mathscr{P}(\cdot)$ satisface

$$\mathscr{P}[f(s)] = \boldsymbol{\gamma} \mathscr{P}(s) + \mathscr{P}(\nu_0) \ . \tag{2.10}$$

cuando s y ν_0 están en su región de convergencia.

Teorema 2.2.3 (ver [AN72]) *Sea* $\nu_1 > 0$, *entonces* $\mathscr{P}(s)$ *converge para* $0 \le s < 1$. *Además* $\sum_{j\ge 1} \pi_j$ *converge si* $\boldsymbol{m} < 1$ *y diverge si* $\boldsymbol{m} \ge 1$.

Demostración Gracias al Teorema 2.2.2

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}\pi_1 = \sum_{j\ge 1} \pi_j P_1(j,1) = \sum_{j\ge 1} \pi_j j \nu_0^{j-1}\nu_1 \ge \frac{\nu_1}{\nu_0}\mathscr{P}(\nu_0) \ .$$

Luego $\mathscr{P}(\nu_0) < \infty$, además como $\mathscr{P}(f_n(0)) = \boldsymbol{\gamma}\mathscr{P}(f_{n-1}(0)) + \mathscr{P}(\nu_0) \Rightarrow \mathscr{P}(f_n(0)) < \infty$ para todo n y como $\mathscr{P}(\cdot)$ es continua y creciente, se concluye que

$$\mathscr{P}(s) < \infty \qquad 0 \le s < \boldsymbol{q} \ .$$

Por otro lado, observar que iterando (2.10)

$$\mathscr{P}(f_n(s)) = \boldsymbol{\gamma}^n \mathscr{P}(s) + \mathscr{P}(\nu_0)[1 + \boldsymbol{\gamma} + \cdots + \boldsymbol{\gamma}^{n-2}] \ . \tag{2.11}$$

Volviendo a la demostración en el caso $\boldsymbol{m} < 1$ se tiene que $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{m} < 1$, gracias a (2.11) fijando $s < 1$

$$\mathscr{P}(1) = \lim_{n\to\infty} \mathscr{P}(f_n(s)) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\gamma}^n \mathscr{P}(s) + \mathscr{P}(\nu_0)\sum_{k=0}^{n-2} \boldsymbol{\gamma}^k < \infty \ .$$

Por el mismo argumento, en el caso $\boldsymbol{m} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{\gamma} = 1$, luego se concluye que $\mathscr{P}(1)$ diverge.

En el caso $\boldsymbol{m} > 1$ se tiene que $\boldsymbol{\gamma} < 1$, luego por (2.11)

$$\mathscr{P}(\boldsymbol{q}) = \mathscr{P}(\nu_0)\frac{1}{1-\boldsymbol{\gamma}} < \infty \ .$$

Ahora fijando $\boldsymbol{q} < s < 1$

$$\mathscr{P}(s) \le \lim_{n\to\infty} \sum_{j\ge 1} \frac{P_n(1,j)}{P_n(1,1)} s^j = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(s) - f_n(0)}{f_n'(0)} \le \lim_{n\to\infty} \frac{f_n'(s)}{f_n'(0)} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{f'(f_k(s))}{f'(f_k(0))} \ .$$

Ahora usaremos el resultado siguiente:

Sea $(u_n : n \ge 1)$ una sucesión tal que $\sum_{n\ge 1} |u_n| < \infty$. Entonces $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} (1+u_n)$ converge . (Ver [R87] Teorema 15.5).

En nuestra demostración, basta que $\sum_{k\geq 0}\left[\frac{f'(f_k(s))}{f'(f_k(0))}-1\right]<\infty$ para concluir que $\mathscr{P}(s)<\infty$ para todo $\boldsymbol{q}<s<1$.

En el caso $\boldsymbol{m}>1$ se tiene $f'(\boldsymbol{q})<1$. Sea $\varepsilon>0$ tal que $f'(\boldsymbol{q}+\varepsilon)<1$. Sea $n^*\in\mathbb{N}$ tal que $f_{n^*}(s)<\boldsymbol{q}+\varepsilon$.

$$
\begin{aligned}
\frac{f'\Big(f_{n^*+k}(s)\Big)-f'\Big(f_{n^*+k}(0)\Big)}{f'\Big(f_{n^*+k}(0)\Big)} &\leq \frac{f''\Big(f_{n^*+k}(s)\Big)\Big(f_{n^*+k}(s)-f_{n^*+k}(0)\Big)}{f'(0)} ,\\
&\leq \frac{f''(\boldsymbol{q}+\varepsilon)}{f'(0)}\Big(f_{n^*+k}(s)-f_{n^*+k}(0)\Big) ,\\
&\leq \frac{f''(\boldsymbol{q}+\varepsilon)}{f'(0)}f'(\boldsymbol{q}+\varepsilon)\Big(f_{n^*+k-1}(s)-f_{n^*+k-1}(0)\Big) ,\\
&\leq \frac{f''(\boldsymbol{q}+\varepsilon)}{f'(0)}\Big(f_{n^*}(s)-f_{n^*}(0)\Big)\Big[f'(\boldsymbol{q}+\varepsilon)\Big]^k .
\end{aligned}
$$

De esta forma

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0}\left[\frac{f'(f_k(s))}{f'(f_k(0))}-1\right] &= \sum_{k=0}^{n^*}\left[\frac{f'(f_k(s))}{f'(f_k(0))}-1\right]+\sum_{k\geq n^*}\left[\frac{f'(f_k(s))}{f'(f_k(0))}-1\right] ,\\
&\leq const(s) \ +\frac{f''(\boldsymbol{q}+\varepsilon)}{f'(0)}\Big(f_{n^*}(s)-f_{n^*}(0)\Big)\sum_{k\geq 0}\Big[f'(\boldsymbol{q}+\varepsilon)\Big]^k<\infty .
\end{aligned}
$$

donde la última desigualdad es gracias a que $f'(\boldsymbol{q}+\varepsilon)<1$ y se concluye.

Para finalizar, fijando $\boldsymbol{q}<s<1$ reordenando los términos de (2.11) se tiene que

$$
\mathscr{P}(s)=\frac{1}{\boldsymbol{\gamma}^n}\left(\mathscr{P}(f_n(s))-\frac{1-\boldsymbol{\gamma}^n}{1-\boldsymbol{\gamma}}\mathscr{P}(\nu_0)\right) . \tag{2.12}
$$

por argumento diagonal, podemos construir una sucesión $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ tal que $f_n(s_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Además $\boldsymbol{\gamma}^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Finalmente, reemplazando s_n en (2.12) se concluye que $\mathscr{P}(S_n)\nearrow\infty$ es decir, $\mathscr{P}(1)=\infty$.

■

Teorema 2.2.4 (Teorema del Radio [AN72])
Sea $\nu_1 > 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+m}(i,j)}{P_n(k,l)} = \boldsymbol{\gamma}^m \frac{i\boldsymbol{q}^i \pi_j}{k\boldsymbol{q}^k \pi_l} \qquad \textit{para todo } m \geq 0 \quad i \geq 1 \quad j \geq 1 \ .$$

Demostración Sea $s \in [0,1)$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{j\geq 1} \frac{P_n(i,j)}{P_n(1,1)} s^j &= \frac{f_n^i(s) - f_n^i(0)}{P_n(1,1)} = \frac{\Big[f_n(s) - f_n(0)\Big] \sum_{k=1}^{i} f_n^{i-k}(s) f_n^{k-1}(0)}{P_n(1,1)} \ , \\ &= \Big[f_n^{i-1}(s) + f_n^{i-2}(s) f_n(0) + \ldots + f_n(0)^{i-1}\Big] \sum_{j\geq 1} \frac{P_n(1,j)}{P_n(1,1)} \ , \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} i\boldsymbol{q}^{i-1} \sum_{j\geq 0} \pi_j s^j < \infty \ . \end{aligned} \tag{2.13}$$

La convergencia de (2.13) es gracias a los Lemas 2.1.1 y 2.2.1 el Teorema 2.2.3.
Por otro lado, gracias al Teorema de Continuidad de la función generadora (ver [G05]), se obtiene

$$\frac{P_n(i,j)}{P_n(1,1)} \to i\boldsymbol{q}^{i-1}\pi_j \qquad \text{, pero por (2.8)} \qquad \frac{P_{n+m}(1,1)}{P_n(1,1)} \to \boldsymbol{\gamma}^m \ .$$

combinando ambos resultados se obtiene el resultado. ∎

2.3. Distribuciones cuasi-estacionarias

Ya se vio en el Teorema 2.1.3 que el BGW Z alcanza 0 o diverge a ∞ por lo que no posee una distribución de probabilidad estacionaria, salvo el caso trivial de la masa de Dirac en 0. Probaremos esta afirmación por contradicción. Supongamos que existe $\lambda = (\lambda_j : j \in \mathbb{Z}_+)$ distribución de probabilidad estacionaria, entonces :

- Sea $\nu_0 > 0$. Se tiene $P_1(j,0) > 0$ para todo $j \geq 1$ y $P_1(0,0) = 1$,

  $$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \lambda_0 = \sum_{j\geq 0} \lambda_j P_1(j,0) = \lambda_0 + \sum_{j \geq 1} \lambda_j P_1(j,0) \; . \\ &\Rightarrow \quad \lambda_j = 0 \text{ para todo } j \geq 1 \; . \end{aligned}$$

  Esto implica $\lambda = \delta_0$

- Si $\nu_0 = 0$. Se tiene $P_1(i,j) = 0$ si $i > j$. Sea $k = \text{ínf}\{l > 0 : \nu_l > 0\}$, entonces $P_1(i,j) = 0$ para todo $j < ik$. Sea $h = \text{ínf}\{l > 0 : \lambda_h > 0\}$,

  $$\Rightarrow \quad \lambda_h = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{h}{k} \rfloor} \lambda_i P_1(i,h) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \text{si } k \geq 2 \\ \lambda_h P_1(h,h) & \text{si } k = 1 \end{array} \right\} < \lambda_h \; .$$

  De donde se concluye que no existe $h > 0$ tal que $\lambda_h > 0$, en otras palabras $\lambda = \delta_0$.

Cabe destacar que gracias al Teorema 2.2.2, $(\pi_k : k \geq 1)$ es una medida estacionaria en el caso $\boldsymbol{\gamma} = 1$, además en este caso, por el Teorema 2.2.3 se tiene $\sum\limits_{k\geq 1} \pi_k = \infty$.

Para entender lo que pasa antes de la extinción, se define una distribución cuasi-estacionaria (QSD) como una medida de probabilidad ν que satisface

$$\mathbb{P}_\nu(X_n = a | \mathcal{T} > n) = \nu(a) \qquad \forall \, a \geq 1 \quad n \geq 0 \; . \tag{2.14}$$

De la definición es directo que para todo $j \geq 1$,

$$\mathbb{P}_\nu(Z_n = j) = \nu(j) \mathbb{P}_\nu(\mathcal{T} > n) \; .$$

entonces por la propiedad de Markov

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\nu(\mathcal{T} > n+k) &= \sum_{j \geq 1} \mathbb{P}_\nu(\mathcal{T} > n+k \; ; \; Z_n = j) = \mathbb{P}_\nu(\mathcal{T} > n) \sum_{j\geq 1} \mathbb{P}_j(\mathcal{T} > k) \nu(j) \; , \\ &= \mathbb{P}_\nu(\mathcal{T} > n) \mathbb{P}_\nu(\mathcal{T} > k) \; . \end{aligned} \tag{2.15}$$

De la relación (2.15) obtenemos que el tiempo de extinción $\mathcal{T}$ bajo $\mathbb{P}_\nu$ posee una distribución geométrica, más detalles ver [FMP92] .

Dentro de las QSD se enfocará al estudio de una ley de probabilidad Υ llamada límite de Yaglom, que cuando existe satisface

$$\Upsilon(a) := \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_x(X_n = a | \mathcal{T} > n) \qquad \forall\, a \in \mathbb{N} \quad n \geq 0\ , \tag{2.16}$$

con condición inicial δ_x para $x \neq 0$.

Otro caso que se abordará son leyes condicionales del tipo que, cuando el supuesto límite existe, verifica:

$$\mathbb{P}_x^{\uparrow}(\Theta) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}_x(\Theta | \mathcal{T} > n+k) \qquad \forall\, \Theta \in \mathscr{F}_n\ , \tag{2.17}$$

donde la ley $\mathbb{P}^{\uparrow}$ define un proceso $X^{\uparrow}$ llamado Q-proceso.

A partir de los Lemas 2.1.1 y 2.2.1, junto con el Teorema 2.2.4 de la sección anterior, se busca caracterizar la convergencia del BGW condicionado para no extinción de esta forma construir QSD asociadas al BGW.

Teorema 2.3.1 (Teorema 8.1 [AN72]) *Sea $\boldsymbol{q} > 0$ entonces para todo $j \geq 1$ existe el límite*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_1(Z_n = j | n < \mathcal{T} < \infty) = \alpha_j\ . \tag{2.18}$$

además si $\boldsymbol{m} \neq 1$, entonces $\alpha = (\alpha_j : j \in \mathbb{N})$ es una distribución de probabilidad, cuya función generadora de probabilidad $\mathscr{B}(s) = \sum_{j\geq 1} \alpha_j s^j$ es solución de

$$\mathscr{B}\left(\frac{f(s\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{q}}\right) = \boldsymbol{\gamma}\mathscr{B}(s) + (1-\boldsymbol{\gamma})\ . \tag{2.19}$$

Si además $\nu_1 > 0$ entonces

$$\mathscr{B}(s) = \frac{\mathscr{P}(s\boldsymbol{q})}{\mathscr{P}(\boldsymbol{q})}\ . \tag{2.20}$$

Demostración

Primero veamos el caso $\boldsymbol{m} \leq 1$, sabemos que $\mathbb{P}(\mathcal{T} < \infty) = 1$,

Sea $\mathscr{B}_n(s) := \mathbb{E}\left[s^{Z_n} | n < \mathcal{T} < \infty\right] = \mathbb{E}\left[s^{Z_n} | n < \mathcal{T}\right]$,

$$\begin{aligned}\mathscr{B}_n(s) =& \sum_{j\geq 0} s^j \mathbb{P}(Z_n = j | n < \mathcal{T}) = \frac{\sum_{j\geq 1} s^j \mathbb{P}(Z_n = j)}{\mathbb{P}(n < \mathcal{T})} = \frac{f_n(s) - f_n(0)}{1 - f_n(0)}\ ,\\ =& 1 - \frac{1 - f_n(s)}{1 - f_n(0)} = 1 - G_n(s)\ .\end{aligned}$$

Se demostrará que $G_n(s) \to G(s)$. Sea $\Gamma(s) := \frac{1-f(s)}{1-s}$, de esta forma

$$G_n(s) = \frac{\Gamma\big(f_{n-1}(s)\big)}{\Gamma\big(f_{n-1}(0)\big)} G_{n-1}(s) \ . \tag{2.21}$$

Observemos que $f(1) \geq f(s) + (1-s)f'(s)$, luego

$$\Gamma'(s) = \frac{-f'(s)(1-s) + (1-f(s))}{(1-s)^2} \geq \frac{-(1-f(s)) + (1-f(s))}{(1-s)^2} = 0 \ .$$

es decir, $f_n(\cdot)$ y $\Gamma(\cdot)$ son crecientes, por lo que $G_n(s)$ es creciente en n y por definición $G_n(s) \leq 1$. Luego $\lim\limits_{n\to\infty} G_n(s) \equiv G(s)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \mathscr{B}_n(s) \equiv \mathscr{B}(s)$ existen.
Por otro lado

$$G_n(f(s)) = G_{n-1}(s)\Gamma(f_n(0)) \ . \tag{2.22}$$

Además como $f_n(s) \xrightarrow[n\to\infty]{} \boldsymbol{q} = 1$ y $\Gamma(s) \xrightarrow[s\to 1]{} f'(1) = \boldsymbol{m}$ se concluye que

$$G(f(s)) = \boldsymbol{m}G(s) \ . \tag{2.23}$$

Pero por construcción $\mathscr{B}(s) = 1 - G(s)$ y por la relación (2.23) ,

$$\mathscr{B}[f(s)] = 1 - G[f(s)] = 1 - \boldsymbol{m}G(s) = 1 - \boldsymbol{m}(1 - \mathscr{B}(s)) = 1 - \boldsymbol{m} + \boldsymbol{m}\mathscr{B}(s) \ . \tag{2.24}$$

recordemos que estamos en el caso $\boldsymbol{m} \leq 1$, luego $\boldsymbol{q} = 1$ y $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{m}$, y se concluye (2.19).

En el caso en que $\boldsymbol{m} > 1$ se tiene $\boldsymbol{q} < 1$. Definimos $f^*(s) := \frac{f(s\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{q}}$ y sea $Z^* := (Z_n^* : n \in \mathbb{Z}_+)$ el BGW con fgp $f^*(\cdot)$.

Por inducción se verifica que el iterado es $f_n^*(s) = \frac{f_n(s\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{q}}$. Siguiendo con la notación, sea $\boldsymbol{m}^* = (f^*)'(1) = f'(q) \leq 1$, $\boldsymbol{q}^*$ la primera raíz de $f^*(s) = s$ y $\mathcal{T}^*$ el tiempo de extinción de Z^* .

De vuelta a la demostración, por el Lema 2.1.1

$$\begin{aligned}
\mathscr{B}_n(s) =& \mathbb{E}\left[s^{Z_n} | n < \mathcal{T} < \infty\right] = \sum_{j\geq 0} s^j \mathbb{P}(Z_n = j | n < \mathcal{T} < \infty) \ , \\
=& \frac{\sum\limits_{j\geq 1} P_n(1,j)\boldsymbol{q}^j s^j}{\sum\limits_{k\geq 1} P_n(1,k)\boldsymbol{q}^k} = \frac{f_n(s\boldsymbol{q}) - f_n(0)}{f_n(\boldsymbol{q}) - f_n(0)} = \frac{\frac{f_n(s\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{q}} - \frac{f_n(0)}{\boldsymbol{q}}}{1 - \frac{f_n(0)}{\boldsymbol{q}}} \ , \\
=& \frac{f_n^*(s) - f_n^*(0)}{f_n^*(\boldsymbol{q}^*) - f_n^*(0)} = \mathbb{E}\left[s^{Z_n^*} | n < \mathcal{T}^* < \infty\right] \ .
\end{aligned}$$

Además, $\boldsymbol{m}^* \leq 1$ y nos reducimos a el caso anterior, donde se concluye (2.18), además satisface (2.24). Luego

$$\mathscr{B}[f^*(s)] = 1 - \boldsymbol{m}^* + \boldsymbol{m}^*\mathscr{B}(s) \Rightarrow \mathscr{B}\left(\frac{f(s\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{q}}\right) = 1 - \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}\mathscr{B}(s)\ .$$

Para completar la demostración, si además $\nu_1 > 0$,

$$\mathbb{P}(Z_n = j | n < \mathcal{T} < \infty) = \frac{P_n(1,j)\boldsymbol{q}^j}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} P_n(1,k)\boldsymbol{q}^k} = \frac{\left[\frac{P_n(1,j)}{P_n(1,1)}\right]\boldsymbol{q}^j}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[\frac{P_n(1,k)}{P_n(1,1)}\right]\boldsymbol{q}^l} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi_j\boldsymbol{q}^j}{\mathscr{P}(\boldsymbol{q})}\ . \tag{2.25}$$

■

En el caso $\boldsymbol{m} = 1$ el Teorema 2.3.1 es trivial en el sentido que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = j | n < \mathcal{T} < \infty) = 0$ para todo $j \geq 0$, pues gracias a la relación (2.24) $\mathscr{B}(f(s)) = \mathscr{B}(s)$ luego $\mathscr{B}(s) \equiv 0$, por esta razón el Teorema 2.3.1 se modifica como sigue.

Teorema 2.3.2 *Sea $\nu_0 > 0$, $\nu_1 > 0$ y $\boldsymbol{m} = 1$ entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = j | Z_n > 0\ Z_{n+1} = 0) = \frac{\pi_j\nu_0^j}{\sum_{i\geq 1}\pi_i\nu_0^i} := \theta_j\ . \tag{2.26}$$

Se tiene además que $\sum\limits_{j\geq 1}\theta_j = 1$ y su función generadora $\Theta(s) = \sum\limits_{j\geq 1}\theta_j s^j$ se relaciona con $\mathscr{P}(s)$ por:

$$\Theta(s) = \frac{\mathscr{P}(s\nu_0)}{\mathscr{P}(\nu_0)}\ . \tag{2.27}$$

Demostración

$$\mathbb{P}(Z_n = j | Z_n > 0\ Z_{n+1} = 0) = \frac{P_n(1,j)\nu_0^j}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} P_n(1,k)\nu_0^k} = \frac{\left[\frac{P_n(1,j)}{P_n(1,1)}\right]\nu_0^j}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[\frac{P_n(1,k)}{P_n(1,1)}\right]\nu_0^l} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi_j\nu_0^j}{\mathscr{P}(\nu_0)}\ . \tag{2.28}$$

Se concluye por el Teorema de Convergencia Dominada. ■

Cabe destacar que si $\boldsymbol{q} > 0$ y $\nu_1 > 0$, el Teorema 2.3.1 se puede generalizar en el sentido:

$$\mathbb{P}(Z_n = j | n+k < \mathcal{T} < \infty) = \frac{P_n(1,j)\sum_{l=1}^{\infty} P_k(j,l)\boldsymbol{q}^l}{\sum_{l=1}^{\infty} P_{n+k}(j,l)\boldsymbol{q}^l} = \frac{\left[\frac{P_n(1,j)}{P_n(1,1)}\right]\sum_{l=1}^{\infty} P_k(j,l)\boldsymbol{q}^l}{\sum_{l=1}^{\infty}\left[\frac{P_{n+k}(j,l)}{P_{n+k}(1,1)}\right]\boldsymbol{q}^l}\frac{P_n(1,1)}{P_{n+k}(1,1)} ,$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi_j \sum_{l=1}^{\infty} P_k(j,l)\boldsymbol{q}^l}{\boldsymbol{\gamma}^k \mathscr{P}(\boldsymbol{q})} = \frac{\pi_j\left[f_k^j(\boldsymbol{q}) - f_k^j(0)\right]}{\boldsymbol{\gamma}^k \mathscr{P}(\boldsymbol{q})} = \frac{\pi_j[\boldsymbol{q}^j - f_k^j(0)]}{\boldsymbol{\gamma}^k \mathscr{P}(\boldsymbol{q})} := \beta_j(k) .$$

Observar que por el Teorema 2.2.3 $\mathscr{P}(\boldsymbol{q}) < \infty$ ssi $\boldsymbol{m} \neq 1$, luego $\beta(k) := (\beta_j(k) : j \in \mathbb{N})$ es distribución de probabilidad para cada $k \geq 1$ si $\boldsymbol{m} \neq 1$, pues por (2.10),

$$\mathscr{P}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\gamma}\mathscr{P}(\boldsymbol{q}) + \mathscr{P}(f(0)) \quad \text{y} \quad \mathscr{P}(f_n(0)) = \boldsymbol{\gamma}\mathscr{P}(f_{n-1}(0)) + \mathscr{P}(f(0)) ,$$

$$\mathscr{P}(f_n(0)) - \mathscr{P}(\boldsymbol{q}) \;=\; \boldsymbol{\gamma}[\mathscr{P}(f_{n-1}(0)) - \mathscr{P}(\boldsymbol{q})] = \boldsymbol{\gamma}^{n-1}[\mathscr{P}(f(0)) - \mathscr{P}(\boldsymbol{q})] = \boldsymbol{\gamma}^n \mathscr{P}(\boldsymbol{q}) .$$

$$\text{Luego} \qquad \sum_{j\geq 1} \beta_j(n) = \frac{\mathscr{P}(\boldsymbol{q}) - \mathscr{P}(f_n(0))}{\boldsymbol{\gamma}^n \mathscr{P}(\boldsymbol{q})} = 1 . \tag{2.29}$$

En el caso $\boldsymbol{m} = 1$ se procede análogamente al Teorema 2.3.2 ,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_n = j | \mathcal{T} = n+k) &= \frac{P_n(1,j)\sum_{i\geq 1} P_{k-1}(j,i)P_1(i,0)}{\sum_{i\geq 1} P_{n+k-1}(1,i)P_1(i,0)} ,\\ &= \frac{\left[\frac{P_n(1,j)}{P_n(1,1)}\right][P_k(j,0) - P_{k-1}(j,0)]}{\sum_{i\geq 1}\left[\frac{P_{n+k-1}(1,i)}{P_{n+k-1}(1,1)}\right][f(0)]^i}\frac{P_n(1,1)}{P_{n+k-1}(1,1)} ,\\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi_j[f_k^j(0) - f_{k-1}^j(0)]}{\boldsymbol{\gamma}^{k-1}\mathscr{P}(f(0))} = \frac{\pi_j[f_k^j(0) - f_{k-1}^j(0)]}{\mathscr{P}(f(0))} := \hat{\beta}_j(k) .\end{aligned} \tag{2.30}$$

donde la última igualdad es debido a que $\boldsymbol{m} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{q} = 1$ y $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{m} = 1$, además $\hat{\beta}(k) := (\hat{\beta}_j(k) : j =\in \mathbb{N})$ es distribución de probabilidad, pues por (2.10)

$$\sum_{j\geq 1}\hat{\beta}_j(k) = \frac{\mathscr{P}(f_k(0)) - \mathscr{P}(f_{k-1}(0))}{\mathscr{P}(f(0))} = 1 .$$

Teorema 2.3.3 *Si $\nu_1 > 0$ y $\boldsymbol{q} > 0$ entonces para cada $k \geq 1$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = j | n + k < \mathcal{T} < \infty) := \beta_j(k) \; . \tag{2.31}$$

donde $\sum_{j\geq 1} \beta_j(k) = 1$ si $\boldsymbol{m} \neq 1$ y si $\boldsymbol{m} = 1$ entonces $\beta_j(k) = 0$. Si además $\boldsymbol{m} = 1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = j | \mathcal{T} = n + k) := \hat{\beta}_j(k) \; . \tag{2.32}$$

donde $\sum_{j\geq 1} \hat{\beta}_j(k) = 1$.

Nota 2.2 *En [AN72] el Teorema anterior se demuestra sin la hipótesis $\nu_1 > 0$.*

Claramente el Teorema 2.3.3 es una sencilla extensión del Teorema 2.3.1. Distinto sería que en la ecuación (2.31) en vez de tomar límite en n, se analice el límite en k.

Suponiendo $\boldsymbol{q} > 0$ y $\nu_1 > 0$. Sea $n_1 \leq \cdots \leq n_\alpha$; $i_1, \cdots, i_\alpha$ enteros positivos :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_{n_1} = i_1, \cdots, &Z_{n_\alpha} = i_\alpha | n_\alpha + k < \mathcal{T} < \infty) \; , \\
&= \mathbb{P}(Z_{n_1} = i_1, \cdots, Z_{n_\alpha} = i_\alpha) \frac{\sum_{j\geq 1} P_k(i_\alpha, j)\boldsymbol{q}^j}{\sum_{j\geq 1} P_{n_\alpha + k}(1, j)\boldsymbol{q}^j} \; , \\
&= \mathbb{P}(Z_{n_1} = i_1, \cdots, Z_{n_\alpha} = i_\alpha) \frac{P_k(1,1)}{P_{n_\alpha+k}(1,1)} \frac{\sum_{j\geq 1} \left[\frac{P_k(i_\alpha, j)}{P_k(1,1)}\right] \boldsymbol{q}^j}{\sum_{j\geq 1} \left[\frac{P_{n_\alpha+k}(1,j)}{P_{n_\alpha+k}(1,1)}\right] \boldsymbol{q}^j} \; , \\
&\xrightarrow[k\to\infty]{} \mathbb{P}(Z_{n_1} = i_1, \cdots, Z_{n_\alpha} = i_\alpha) \frac{i_\alpha \boldsymbol{q}^{i\alpha - 1} \sum_{j\geq 1} \pi_j \boldsymbol{q}^j}{\boldsymbol{\gamma}^{n_\alpha} \sum_{j\geq 1} \pi_j \boldsymbol{q}^j} \; , \\
&= \mathbb{P}(Z_{n_1} = i_1, \cdots, Z_{n_\alpha} = i_\alpha) \frac{i_\alpha \boldsymbol{q}^{i\alpha - 1}}{\boldsymbol{\gamma}^{n_\alpha}} \; .
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Donde la convergencia es asegurada por el Teorema 2.2.4 .

Definiendo

$$\mathbb{P}^{\uparrow}(i_1, \cdots, i_\alpha) := \mathbb{P}(Z_{n_1} = i_1, \cdots, Z_{n_\alpha} = i_\alpha) \frac{i_\alpha \boldsymbol{q}^{i\alpha - 1}}{\boldsymbol{\gamma}^{n_\alpha}} \; . \tag{2.34}$$

Además tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq 1} P_n(i,j)\frac{j\boldsymbol{q}^{j-i}}{i\boldsymbol{\gamma}^n} &= \frac{\sum_{j\geq 1} P_n(i,j) j\boldsymbol{q}^{j-1}}{i\boldsymbol{\gamma}^n\boldsymbol{q}^{i-1}} = \frac{1}{i\boldsymbol{\gamma}^n\boldsymbol{q}^{i-1}}\frac{d}{ds}\big[f_n(s)^i\big]\Big|_{s=\boldsymbol{q}} ,\\ &= \frac{i\big[f_n(\boldsymbol{q})\big]^{i-1}\big[f_n(s)\big]'_{s=\boldsymbol{q}}}{i\boldsymbol{\gamma}^n\boldsymbol{q}^{i-1}} = \frac{i\boldsymbol{q}^{i-1}\big[f'(\boldsymbol{q})\big]^n}{i\boldsymbol{\gamma}^n\boldsymbol{q}^{i-1}} = 1 .\end{aligned}$$

De esta forma, $\mathbb{P}^{\uparrow}$ es función de probabilidad y por ende define un proceso al que denotaremos $Z^{\uparrow}$. Como Z es cadena de Markov, de (2.34) se tiene que $Z^{\uparrow}$ es cadena de Markov con transiciones

$$\mathbb{P}(Z^{\uparrow}_{n+k} = j | Z^{\uparrow}_k = i) = P_n(i,j)\frac{j\boldsymbol{q}^{j-i}}{i\boldsymbol{\gamma}^n} . \tag{2.35}$$

Al proceso $\mathbb{Z}^{\uparrow}$ lo llamaremos **Q-proceso** asociado a Z.

Teorema 2.3.4

- *Si* $\boldsymbol{m} > 1$ *entonces el Q-proceso es recurrente positivo.*
- *Si* $\boldsymbol{m} = 1$ *entonces el Q-proceso es transiente.*
- *Si* $\boldsymbol{m} < 1$ *entonces el Q-proceso es recurrente positivo si y solo si* $\sum_{k\geq 1}(k\log k)p_k < \infty$.

La demostración está en [AN72] .

Capítulo 3

Modificaciones del BGW

3.1. Inmigración

Hasta ahora, nuestro análisis solo ha considerado el crecimiento de poblaciones aisladas, es decir, su crecimiento solo depende de la ramificación de ella misma. Una generalización realista en este esquema, es agregar la posibilidad de inmigración de individuos desde una fuente externa.

Esta generalización desde el punto de vista matemático es interesante pues ayuda a comprender el comportamiento del Q-proceso definido en la sección anterior.

Consideremos el BGW Z con distribución de descendencia ξ. De (2.2) se tiene:

$$Z_0^{(i)} = i \qquad ; \qquad Z_{n+1}^{(i)} = \sum_{j=1}^{Z_n^{(i)}} \xi_j^{(n)} \qquad n \geq 0 \ ,$$

donde $\left(\xi_j^{(n)} : j = 1, 2, \cdots \ ; \ n = 0, 1, \cdots\right)$ son v.a.'s independientes, con distribución ξ. Consideremos la familia de v.a.'s $(Y_k : k \in \mathbb{N})$ i.i.d. distribuidas según ζ e independientes de $\left(\xi_j^{(n)} : j = 1, 2, \cdots \ ; \ n = 0, 1, \cdots\right)$.

El proceso $X = \left(X_n^{(i)} : n \in \mathbb{Z}_+\right)$ tal que satisface la recurrencia:

$$X_0^{(i)} = i \qquad ; \qquad X_n^{(i)} = \sum_{j=1}^{X_{n-1}^{(i)}} \xi_j^{(n)} + Y_n \qquad n \geq 1 \, , \tag{3.1}$$

Lo llamaremos proceso de ramificación con inmigración (BPI) y condición inicial $i \geq 1$ con distribución intrínseca ξ e inmigración ζ.

Sea $f(\cdot)$ la fgp asociada a Z y $g(s)$ la fgp de Y_1 , es decir, $f(s) = \mathbb{E}\left[s^{\xi}\right]$ y $g(s) = \mathbb{E}\left[s^{Y_1}\right] = \mathbb{E}\left[s^{Y_n}\right]$.

$$h_{1,k}(s) := \mathbb{E}\left[s^{X_1^{(k)}}\right] = \mathbb{E}\left[s^{\xi_1 + \cdots + \xi_k + Y_1}\right] = g(s)[f(s)]^k \qquad k \geq 0 \, , \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} h_{n+1,i}(s) :=& \mathbb{E}\left[s^{X_{n+1}^{(i)}}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[s^{\sum_{k=1}^{X_n^{(i)}} \xi_j^{(n+1)} + Y_{n+1}} \middle| X_n^{(i)}\right]\right] = g(s)\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[s^{\sum_{k=1}^{X_n^{(i)}} \xi_j^{(n+1)}} \middle| X_n^{(i)}\right]\right] \, , \\ =& g(s)\mathbb{E}\left[\sum_{\lambda \geq 0} \mathbb{1}_{\{X_n^{(i)} = \lambda\}} \mathbb{E}\left[s^{\sum_{k=1}^{X_n^{(i)}} \xi_j^{(n+1)}} \middle| X_n^{(i)} = \lambda\right]\right] = g(s)\mathbb{E}\left[\sum_{\lambda \geq 0} \mathbb{1}_{\{X_n^{(i)} = \lambda\}} [f(s)]^{\lambda}\right] \, , \\ =& g(s)\mathbb{E}\left[[f(s)]^{X_n^{(i)}}\right] = g(s) h_{n,i}(f(s)) \, . \end{aligned} \tag{3.3}$$

iterando los cálculos anteriores

$$\begin{aligned} h_{n,i}(s) &= g(s) h_{n-1,i}(f(s)) = g(s)\Big[g(f(s)) h_{n-2,i}(f_2(s))\Big] \, , \\ &= g(s) \cdots g\big(f_{n-2}(s)\big) h_{1,k}\big(f_{n-1}(s)\big) = g(s) \cdots g\big(f_{n-2}(s)\big) g\big(f_{n-1}(s)\big) \left[f_n(s)\right]^k \, , \\ &= \left[f_n(s)\right]^k \prod_{i=0}^{n-1} g\big(f_k(s)\big) \, . \end{aligned}$$

De esta forma, queda caracterizado completamente el BPI a partir de $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$.

Definición 3.1

Denotaremos $BPI(f,g)$ al proceso de ramificación con inmigración tal que $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$ son las funciones generadoras de probabilidad del BGW intrínseco y de la inmigración respectivamente.

De vuelta al Q-proceso $Z^{\uparrow}$, observamos que:

- En el caso $\boldsymbol{m} \geq 1$ se tiene que $\boldsymbol{q} = 1$ $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{m}$ y luego

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[s^{Z_n^{\uparrow}} | Z_0^{\uparrow} = i\right] &= \sum_{j\geq 0} \mathbb{P}(Z_n^{\uparrow} = j | Z_0^{\uparrow} = i) s^j = \sum_{j \geq 1} \mathbb{P}(Z_n = j | Z_0 = i) \frac{j s^j}{i \boldsymbol{m}^n} \ , \\
&= \frac{s}{i\boldsymbol{m}^n} \sum_{j\geq 1} \mathbb{P}_n(i,j) j s^{j-1} = \frac{s}{\boldsymbol{m}^n} f_n'(s) [f_n(s)]^{i-1} \ . \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

donde la última igualdad es gracias a

$$\frac{d}{ds}[f_n(s)]^i = i f_n'(s)[f_n(s)]^{i-1} = \frac{d}{ds}\left[\sum_{j\geq 0} \mathbb{P}_n(i,j) s^j\right] = \sum_{j\geq 1} \mathbb{P}_n(i,j) j s^{j-1} \ .$$

De acá se concluye que el proceso $(Z_n^{\uparrow} - 1 : n \in \mathbb{Z}_+)$ es un $BPI(f, \frac{f'}{\boldsymbol{m}})$, pues

$$\mathbb{E}\left[s^{Z_n^{\uparrow}-1} | Z_0 - 1 = i\right] = \frac{1}{s}\mathbb{E}\left[s^{Z_n^{\uparrow}} | Z_0 = i+1\right] = [f_n(s)]^i \frac{f_n'(s)}{\boldsymbol{m}} = [f_n(s)]^i \prod_{k=o}^{n-1} \frac{f'(f_k(s))}{\boldsymbol{m}} \ .$$

- En el caso $\boldsymbol{m} < 1$ y $\boldsymbol{q} > 0$, se tiene que

$$\mathbb{E}\left[s^{Z_n^{\uparrow}} | Z_0^{\uparrow} = i\right] = \sum_{j\geq 1} \mathbb{P}_n(Z_n = j | Z_0 = i) \frac{j \boldsymbol{q}^{j-i}}{i \boldsymbol{\gamma}^n} s^j = \frac{s\boldsymbol{q}}{i\boldsymbol{\gamma}^n \boldsymbol{q}^i} \sum_{j\geq 1} \mathbb{P}_n(i,j) j (s\boldsymbol{q})^{j-1} \qquad (3.5)$$

por otro lado

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}[f_n(s\boldsymbol{q})]^i &= i f_n'(s\boldsymbol{q})\boldsymbol{q}[f_n(s\boldsymbol{q})]^{i-1} = \frac{d}{ds}\left[\sum_{j\geq 0} \mathbb{P}_n(i,j)(s\boldsymbol{q})^j\right] \ , \\
&= \boldsymbol{q} \sum_{j\geq 1} \mathbb{P}_n(i,j) j (s\boldsymbol{q})^{j-1} \ . \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

resumiendo (3.5) y (3.6) obtenemos que

$$\mathbb{E}\left[s^{Z_n^{\uparrow}} | Z_0^{\uparrow} = i\right] = s \frac{i f_n'(s\boldsymbol{q})\boldsymbol{q}[f_n(s\boldsymbol{q})]^{i-1}}{i\boldsymbol{\gamma}^n \boldsymbol{q}^i} = s\left[\frac{f_n(s\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{q}}\right]^{i-1} \frac{f_n'(s\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{\gamma}^n} \ . \qquad (3.7)$$

Recordando $f^*(s) = \frac{f(s\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{q}}$, el proceso $(Z_n^{\uparrow} - 1 : n \in \mathbb{N})$ es un $BPI(f^*, \frac{(f^*)'}{\boldsymbol{m}^*})$ pues

$$\mathbb{E}\left[s^{Z_n^{\uparrow}-1} \middle| Z_0^{\uparrow} = i\right] = \left[\frac{f_n(s\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{q}}\right]^i \frac{f_n'(s\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{\gamma}^n} \ . \qquad (3.8)$$

donde $\frac{f_n(s\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{q}}$ es la n-ésima iterada de $\frac{f(s\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{q}}$ además

$$\frac{f_n'(s\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{\gamma}^n} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{f'(f_k(s\boldsymbol{q}))}{\boldsymbol{\gamma}} \ .$$

3.2. Descomposición de un BGW supercrítico

Consideremos un proceso de ramificación supercrítico $Z = (Z_n : n = \mathbb{Z}_+)$ definido en un espacio de probabilidad filtrado $\big(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P}\big)$ con $\mathscr{F}_n = \sigma\big(Z_k : k \leq n\big)$ la filtración natural, en este caso, $\boldsymbol{q} < 1$ y si suponemos $f(0) > 0$ se tiene que $\boldsymbol{q} > 0$.

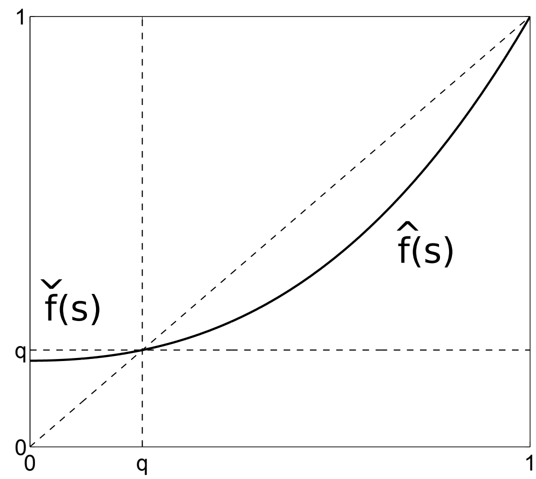

Figura 3.1: descomposición del BGW.

Tal como se aprecia en la Figura 3.1 mediante una simple transformación es posible descomponer $f(\cdot)$ en 2 funciones generadoras de probabilidad, las cuales están íntimamente relacionadas entre sí y con la función original, en esta sección se dará una interpretación probabilística de esta relación y su rol en las distribuciones cuasi-estacionarias del proceso original.

Se definen las transformaciones

$$\breve{f}(s) = \frac{f\big(s\boldsymbol{q}\big)}{\boldsymbol{q}} \qquad \text{para } 0 \leq s \leq 1\ ; \tag{3.9}$$

$$\widehat{f}(s) = \frac{f\big(s(1-\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{q}\big) - \boldsymbol{q}}{1-\boldsymbol{q}} \qquad \text{para } 0 \leq s \leq 1\ ; \tag{3.10}$$

claramente $\breve{f}(\cdot)$ y $\widehat{f}(\cdot)$ son series de potencias con términos no negativos a valores en $[0,1]$, además $\breve{f}(1) = \widehat{f}(1) = 1$ luego son funciones generadoras de probabilidad.

Sea $\widehat{Z} = \Big(\widehat{Z}_n : n \in \mathbb{Z}_+\Big)$ el BGW con función generadora de probabilidad $\widehat{f}(\cdot)$, definido en el espacio $\big(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}, \widehat{\mathbb{P}}\big)$.

Cabe destacar que la probabilidad de extinción de $\widehat{Z}$, que llamaremos $\widehat{\boldsymbol{q}}$ es 0, luego $\widehat{Z}$ no se extingue. Por otro lado,

$$\widehat{\boldsymbol{m}} = \left(\widehat{f}\right)'(1) = \lim_{s \nearrow 1} \left(\frac{f(s(1-\boldsymbol{q})+\boldsymbol{q})-\boldsymbol{q}}{1-\boldsymbol{q}} \right)' = \lim_{s \nearrow 1} f'(s(1-\boldsymbol{q})+\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{m} \; .$$

además se demuestra por inducción que sus iteradas son:

$$\widehat{f}_n(s) = \frac{f_n\big(s(1-\boldsymbol{q})+\boldsymbol{q}\big)-\boldsymbol{q}}{1-\boldsymbol{q}} \; .$$

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_2(s) &= \frac{f\Big(\widehat{f}(s)(1-\boldsymbol{q})+\boldsymbol{q}\Big)-\boldsymbol{q}}{1-\boldsymbol{q}} = \frac{f\Big(\frac{f(s(1-\boldsymbol{q})+\boldsymbol{q})-\boldsymbol{q}}{1-\boldsymbol{q}}(1-\boldsymbol{q})+\boldsymbol{q}\Big)-\boldsymbol{q}}{1-\boldsymbol{q}} = \frac{\widehat{f}_2(s(1-\boldsymbol{q})+\boldsymbol{q})-\boldsymbol{q}}{1-\boldsymbol{q}} \; . \\
\widehat{f}_n(s) &= \widehat{f}_{n-1}(\widehat{f}(s)) \overset{H.I.}{=} \frac{f_{n-1}\big(\widehat{f}(s)(1-\boldsymbol{q})+\boldsymbol{q}\big)-\boldsymbol{q}}{1-\boldsymbol{q}} = \frac{f_{n-1}\Big(\frac{f(s(1-\boldsymbol{q})+\boldsymbol{q})-\boldsymbol{q}}{1-\boldsymbol{q}}(1-\boldsymbol{q})+\boldsymbol{q}\Big)-\boldsymbol{q}}{1-\boldsymbol{q}} \; , \\
&= \frac{f_n(s(1-\boldsymbol{q})+\boldsymbol{q})-\boldsymbol{q}}{1-\boldsymbol{q}} \; .
\end{aligned}$$

Se definen los conjuntos

$$\begin{aligned}
A &= \{\omega : Z_n(\omega) \to \infty \text{ cuando } n \to \infty\} \; . && (3.11) \\
B &= \{\omega : Z_n(\omega) = 0 \text{ algún } n \geq 1\} \; . && (3.12)
\end{aligned}$$

Por el Teorema 2.1.3 sabemos que $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$ además sabemos que $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(A) = \boldsymbol{q} \in (0,1)$.

Recordemos que por construcción, dada una trayectoria ω , $Z_n(\omega)$ corresponde a la cantidad de individuos vivos en la etapa n. Definamos el proceso

$$Z_n^*(\omega) := \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \in B \; . \\ \begin{array}{c}\text{la cantidad de individuos de } Z_n(\omega) \\ \text{con línea de descendencia infinita}\end{array} & \text{si } \omega \in A \; . \end{cases}$$

Es importante destacar que los individuos con línea de descendencia infinita no son medibles con respecto a $\mathscr{F}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $(\mathscr{F}_n^A : n \geq 0)$ la filtración donde cada $\mathscr{F}_n^A$ es la σ-álgebra resultado del refinamiento de $\mathscr{F}_n$ intersección A.

Se define la probabilidad $\mathbb{P}^A(\Theta) = \frac{\mathbb{P}(\Theta \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$ para todo $\Theta \in \mathscr{F}^A$ observar que $\left(A, \mathscr{F}^A, (\mathscr{F}_n^A)_{n\geq 0}, \mathbb{P}^A\right)$ define un espacio de probabilidad filtrado.

Teorema 3.2.1 (Ver [AN72]) *El proceso* $\widehat{Z} = (\widehat{Z}_n : n \in \mathbb{Z}_+)$ *definido en* $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}, \widehat{\mathbb{P}})$ *y el proceso* Z^* *definido en* $(A, \mathscr{F}_A, (\mathscr{F}_n^A)_{n\geq 0}, \mathbb{P}_A)$ *son equivalentes en el sentido de las leyes finito dimensionales.*

Demostración Se demostrará que Z^* en $(A, \mathscr{F}_A, (\mathscr{F}_n^A)_{n\geq 0}, \mathbb{P}_A)$ es un proceso Markoviano con las mismas probabilidades de transición que $\widehat{Z}$.

Notar que $Z_0^* \equiv 1$ en A, luego $\mathbb{P}_A(Z_0^* = 1) = \widehat{\mathbb{P}}(\widehat{Z}_0 = 1)$.

Antes de continuar con el análisis de la etapa n, observar que por la propiedad de ramificación de Z_n, asegura que condicional a Z_n, cada partícula Z_n^* es independiente de $\{Z_k^* : k \leq n-1\}$ y del resto de partículas en su misma etapa. Además Z_n^* son partículas con línea de descendencia infinita, provenientes de Z_{n-1}^*, en otras palabras, es un proceso Markoviano de ramificación con alguna ley de reproducción.

Sea $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_A(Z_1^* = k) &= \frac{\mathbb{P}(Z_1^* = k \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(Z_1^* = k)}{1 - \boldsymbol{q}} = \frac{\sum_{l\geq k} \mathbb{P}(Z_1^* = k | Z_1 = l)\mathbb{P}(Z_1 = l)}{1 - \boldsymbol{q}} , \\
&= \frac{1}{1 - \boldsymbol{q}} \sum_{l \geq k} \binom{l}{k} (1 - \boldsymbol{q})^k \boldsymbol{q}^{l-k} \mathbb{P}(Z_1 = l) .
\end{aligned}$$

donde la última igualdad es por la propiedad de ramificación que asegura en cada etapa, condicional al número total de partículas, que cada una es independiente y con probabilidad de extinción $\boldsymbol{q}$, en otras palabras, en cada etapa, condicional al número total de partículas, las partículas inmortales se distribuyen según una binomial con de probabilidad $1 - \boldsymbol{q}$.

Notemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\geq 1} s^k \mathbb{P}_A(Z_1^* = k) &= \frac{1}{1-\boldsymbol{q}} \sum_{k\geq 1} s^k \sum_{l\geq k} \binom{l}{k} (1-\boldsymbol{q})^k \boldsymbol{q}^{l-k} \mathbb{P}(Z_1 = l) \;, \\
&= \frac{1}{1-\boldsymbol{q}} \sum_{l\geq 1} \mathbb{P}(Z_1 = l) \sum_{k\geq 1}^{l} \binom{l}{k} (1-\boldsymbol{q})^k \boldsymbol{q}^{l-k} s^k \;, \\
&= \frac{1}{1-\boldsymbol{q}} \sum_{l\geq 1} \mathbb{P}(Z_1 = l) \Big[\big(s(1-\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{q}\big)^l - \boldsymbol{q}^l \Big] \;, \\
&= \frac{1}{1-\boldsymbol{q}} \Big[f\big(s(1-\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{q}\big) - f(\boldsymbol{q}) \Big] = \widehat{f}(s) \;.
\end{aligned}
$$

lo que demuestra que el proceso Z_n^* en $(A, \mathscr{F}_A, (\mathscr{F}_n^A)_{n\geq 0}, \mathbb{P}_A)$ tiene la misma ley de reproducción que el proceso $\widehat{Z}_n$ en $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}, \widehat{\mathbb{P}})$.

■

Teorema 3.2.2 (Ver [AN72]) *Para todo* $\varepsilon > 0$

$$
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\omega : \omega \in A, \; \left| \frac{Z_n^*(\omega)}{Z_n(\omega)} - (1-\boldsymbol{q}) \right| > \varepsilon \right) = 0 \;.
$$

Demostración Sea $\varepsilon > 0$, se definen los conjuntos

$$
\begin{aligned}
E_n &= \left\{ \omega : \left| \frac{Z_n^*(\omega)}{Z_n(\omega)} - (1-\boldsymbol{q}) \right| > \varepsilon \right\} && \text{para } n \geq 0 \;, \\
F_{n,k} &= \{\omega : Z_n(\omega) = k\} && \text{para } n \geq 0 \quad k \geq 1 \;, \\
F_n &= \bigcup_{k\geq 1} F_{n,k} = \{\omega : Z_n > 0\} && \text{para } 0 \leq s \leq 1 \;,
\end{aligned}
$$

Por convergencia dominada se tiene que

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(A \cap \left| \frac{Z_n^*}{Z_n} - (1-\boldsymbol{q}) \right| > \varepsilon \right) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A \cap E_n) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n \cap F_n) \;, \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{F\geq 1} \mathbb{P}(E_n \cap F_{n,k}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{F\geq 1} \mathbb{P}(E_n | F_{n,k}) \mathbb{P}(F_{n,k}) \;.
\end{aligned}
$$

por otro lado

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_n | F_{n,k}) &= \mathbb{P}\left(\left| \frac{Z_n^*}{Z_n} - (1-\boldsymbol{q}) \right| > \varepsilon \Big| Z_n = k \right) \;, \\
&= \mathbb{P}\left(\left| \frac{Z_n^*}{Z_n} - \mathbb{E}\left[\frac{Z_n^*}{Z_n} \Big| Z_n = k \right] \right| > \varepsilon \Big| Z_n = k \right) \;, \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{V}ar \left(\frac{Z_n^*}{Z_n} \Big| Z_n = k \right) = \frac{(1-\boldsymbol{q})\boldsymbol{q}}{\varepsilon^2 k} \;.
\end{aligned}
$$

Resumiendo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_n \cap A) &\leq \frac{(1-\boldsymbol{q})\boldsymbol{q}}{\varepsilon^2} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \mathbb{P}(F_{n,k}) = \frac{(1-\boldsymbol{q})\boldsymbol{q}}{\varepsilon^2} \mathbb{E}\left[\frac{1}{Z_n} \mathbb{1}_{\{Z_n > 0\}}\right] , \\ &= \frac{(1-\boldsymbol{q})\boldsymbol{q}}{\varepsilon^2} \left(\mathbb{E}\left[\frac{1}{Z_n} \mathbb{1}_{\{Z_n > 0\}} \mathbb{1}_A\right] + \mathbb{E}\left[\frac{1}{Z_n} \mathbb{1}_{\{Z_n > 0\}} \mathbb{1}_B\right] \right) .\end{aligned}$$

Observar que $Z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$ en A , luego $\frac{1}{Z_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ en $F_n \cap A$, de esta forma,

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{Z_n} \mathbb{1}_{\{Z_n > 0\}} \mathbb{1}_A\right] \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 .$$

Además $Z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ en B , luego $F_n \cap B \xrightarrow[n \to \infty]{} \phi$ y $\frac{1}{Z_n} \leq 1$ en B, y se concluye que:

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{Z_n} \mathbb{1}_{\{Z_n > 0\}} \mathbb{1}_B\right] \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 .$$

$\blacksquare$

3.3. BGW v/s descomposición

La descomposición anterior permite escribir el BGW como suma de partículas *'mortales'* y otras *'inmortales'* donde las partículas mortales solo tienen hijos mortales, en cambio las inmortales tienen descendencia de ambos tipos.

$$Z_n(\omega) = X_n(\omega) + Y_n(\omega) \qquad \text{para todo } n \geq 1 \ ;$$

donde X_n corresponde a partículas mortales y Y_n corresponde las inmortales.

Recordar que gracias al Teorema 3.2.1, la descendencia inmortal de un BGW condicionado a que $Z_0 = 1$ e inmortal, la podemos representar como:

$$\begin{aligned} &Y_0 = 1 \ , \qquad X_0 = 0 \ ; \\ &Y_{n+1}(\omega) = \sum_{j=1}^{Y_n(\omega)} \widehat{\xi}_j^{(n)}(\omega) \qquad \text{para todo } n \geq 0 \ ; \end{aligned}$$

donde $\left(\widehat{\xi}_j^{(n)} : j = 1, 2, \cdots \ ; \ n = 0, 1, \cdots\right)$ son v.a.'s i.i.d. distribuidas con función generadora de probabilidad $\widehat{f}(s) = \frac{f(s(1-\boldsymbol{q})+\boldsymbol{q})-\boldsymbol{q}}{1-\boldsymbol{q}}$.

Por otro lado, recordando que

$$\mathbb{E}\left[s^{Z_1} \middle| \begin{matrix} Z_0 \\ \text{mortal} \end{matrix} \right] = \sum_{j\geq 0} s^j \frac{\mathbb{P}_1(1,j)\boldsymbol{q}^j}{\boldsymbol{q}} = \frac{f(s\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{q}} \ , \tag{3.13}$$

$$\mathbb{E}\left[s^{Z_1} \middle| \begin{matrix} Z_0 \\ \text{inmortal} \end{matrix} \right] = \sum_{j\geq 1} s^j \frac{\mathbb{P}_1(1,j)(1-\boldsymbol{q}^j)}{1-\boldsymbol{q}} = \frac{f(s) - f(s\boldsymbol{q})}{1-\boldsymbol{q}} \ , \tag{3.14}$$

De esta forma, condicionando a que $Z_0 = 1$ y mortal, podemos escribir,

$$\begin{aligned} &Y_0 = 0 \ , \qquad X_0 = 1 \ ; \\ &Z_{n+1}(\omega) = \sum_{j=1}^{Z_n(\omega)} \breve{\xi}_j^{(n)}(\omega) = \sum_{j=1}^{X_n(\omega)} \breve{\xi}_j^{(n)}(\omega) = X_{n+1}(\omega) \qquad \text{para todo } n \geq 0 \ ; \end{aligned}$$

donde $\left(\breve{\xi}_j^{(n)} : j = 1, 2, \cdots \ ; \ n = 0, 1, \cdot\right)$ son v.a.'s i.i.d. y por (3.13) distribuidos con función generadora de probabilidad $\breve{f}(s) = \frac{f(s\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{q}}$.

Análogamente, condicionado a $Z_0 = 1$ e inmortal y observando que por definición de Y_{n+1} es parte de Z_{n+1}, podemos reescribir

$$Y_0 = 1 \ , \qquad X_0 = 0 \ ;$$
$$Z_{n+1}(\omega) = \sum_{j=1}^{Z_n(\omega)} \bar{\xi}_j^{(n)}(\omega) = \sum_{j=1}^{X_n(\omega)} \breve{\xi}_j^{(n)}(\omega) + \sum_{j=1}^{Y_n(\omega)} \left[\widehat{\xi}_j^{(n)}(\omega) + \phi_j^{(n)}(\omega)\right] \qquad \text{para todo } n \geq 0 \ ;$$

donde $\left(\bar{\xi}_j^{(n)} : j = 0, 1, \cdots \ ; \ n = 0, 1, \cdots\right)$ son v.a.'s i.i.d. y por (3.14) distribuidas con función generadora de probabilidad $\bar{f}(s) = \frac{f(s) - f(s\boldsymbol{q})}{1 - \boldsymbol{q}}$.

Además $\left(\phi_j^{(n)} : j = 1, 2, \cdots \ ; \ n = 0, 1, \cdots\right)$ son v.a.'s i.i.d. y representan la descendencia mortal de un padre inmortal y son independientes de $\left\{\widehat{\xi}_j^{(n)} : j = 1, 2, \cdots \ ; \ n = 0, 1, \cdots\right\}$. A la función generadora de $\phi_1^{(0)}$ la designaremos $f_\phi(\cdot)$.

Resumiendo

$$\begin{aligned}
\bar{f}_{n+1}(s) := \mathbb{E}\left[s^{Z_{n+1}} \middle| \begin{matrix} Z_0 \\ \text{inmortal} \end{matrix}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[s^{\sum_{j=1}^{Y_n} \widehat{\xi}_j^{(n+1)} + \phi_j^{(n+1)} + \sum_{j=1}^{X_n} \breve{\xi}_j^{(n+1)}} \, |\sigma(X_n, Y_n)\right] \middle| X_0 = 0; \ Y_0 = 1\right] \ , \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{\substack{a \geq 0 \\ b \geq 1}} \mathbb{1}_{\left\{\substack{X_n = a \\ Y_n = b}\right\}} \mathbb{E}\left[s^{\sum_{j=1}^{Y_n} \widehat{\xi}_j^{(n+1)} + \phi_j^{(n+1)} + \sum_{j=1}^{X_n} \breve{\xi}_j^{(n+1)}} \middle| X_n = a; \ Y_n = b\right] \middle| X_0 = 0; \ Y_0 = 1\right] \ , \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{\substack{a \geq 0 \\ b \geq 1}} \mathbb{1}_{\left\{\substack{X_n = a \\ Y_n = b}\right\}} \left(\frac{f(s(1 - \boldsymbol{q}) + \boldsymbol{q}) - \boldsymbol{q}}{1 - \boldsymbol{q}}\right)^b (f_\phi(s))^b \left(\frac{f(s\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{q}}\right)^a \middle| X_0 = 0; \ Y_0 = 1\right] \ , \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\frac{f(s(1 - \boldsymbol{q}) + \boldsymbol{q}) - \boldsymbol{q}}{1 - \boldsymbol{q}}\right)^{Y_n} (f_\phi(s))^{Y_n} \left(\frac{f(s\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{q}}\right)^{X_n} \middle| X_0 = 0; \ Y_0 = 1\right] \ . \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Pero por construcción el BGW Z condicionado a que la partícula original es inmortal es un BGW con función generadora $\widehat{f}(s) = \frac{f(s) - f(s\boldsymbol{q})}{1 - \boldsymbol{q}}$, luego satisface:

$$\bar{f}_{n+1}(s) = \bar{f}_n\left(\frac{f(s) - f(s\boldsymbol{q})}{1 - \boldsymbol{q}}\right) = \left(\frac{f(s) - f(s\boldsymbol{q})}{1 - \boldsymbol{q}}\right)^{\circ(n+1)} \ . \qquad (3.16)$$

Observando que las relaciones (3.15) y (3.16) son válidas para todo $n \geq 0$ se concluye que la función generadora de la descendencia mortal de padres inmortales es:

$$f_\phi(s) = \frac{f(s) - f(s\boldsymbol{q})}{f(s(1-\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{q}) - \boldsymbol{q}} \ . \tag{3.17}$$

De esta forma, queda de manifiesto que existe una estrecha relación entre las dos funciones resultantes de la descomposición de la fgp de un BGW supercrítico, y la probabilidad de extinción del proceso original, la duda es si a partir de solo una de las dos, es posible reconstruir o en su defecto aproximar la función faltante.

Con tal objetivo, observemos que se tienen las siguientes restricciones.

Lema 3.3.1

Sea $f(s) = \sum_{j\geq 0} \alpha_k s^j$ una serie de potencias estrictamente convexa, con coeficientes no-negativos, tal que $f(1) = 1$ y $f'(1) < 1$. Sea $k^* = \text{ínf}\{k \geq 2 : \alpha_k > 0\}$ y $x^* > 1$ tal que

$$\alpha_0 + \alpha_1 x^* + \alpha_k \left(x^*\right)^k = x^* \ .$$

Si el radio de convergencia de $f(\cdot)$ es mayor o igual a x^*. Entonces existe $\mathbf{a} \in (1, \infty)$ tal que $f(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$.

Demostración

Por contradicción, supongamos que no existe $a^* \in (1, \infty)$ tal que $f(a^*) = a^*$, entonces $f(s) < s$ para todo $s \in (1, R)$ donde R es su radio de convergencia.

Sea $g(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_k s^k$, notar que por construcción $g(s) < f(s)$ para todo $s \in (0, x^*]$, entonces $x^* < f(x^*)$.

■

Lema 3.3.2

Sea $\varphi(\cdot)$ función generadora de probabilidad, que satisface las hipótesis del Lema 3.3.1. Entonces existe una única constante $\mathbf{a} \in (0,1)$ y una única función generadora de probabilidad $\psi(\cdot)$ tal que la tupla $\big(\varphi, \psi\big)$ corresponde a la descomposición de un BGW supercrítico.

Demostración

Sea $\mathbf{a} \in (0,1)$, por identificar y $\psi(\cdot)$ la extensión buscada de $\varphi(\cdot)$, luego $\psi(\cdot)$ es fgp tal que $\psi(0) = 0$ y $\psi'(1) > 1$.

Observemos de existir tal $\psi(\cdot)$, es posible escribir la extensión resultante de la forma:

$$\Phi(s) = \begin{cases} \mathbf{a}\varphi\left(\frac{s}{\mathbf{a}}\right) & \text{si } s \in [0, \mathbf{a}] \ . \\ \mathbf{a} + (1-\mathbf{a})\psi\left(\frac{s-\mathbf{a}}{1-\mathbf{a}}\right) & \text{si } s \in (\mathbf{a}, 1] \ . \end{cases} \tag{3.18}$$

De donde, por continuidad de su derivada n-ésima en $s = \mathbf{a}$, se satisface la familia de ecuaciones

$$\frac{1}{\mathbf{a}^{j-1}}\varphi^{(j)}(1) = \frac{1}{(1-\mathbf{a})^{j-1}}\psi^{(j)}(0) \qquad \text{para todo } j \geq 1 \ . \tag{3.19}$$

Es decir, de existir $\psi(\cdot)$, por Taylor se concluye que

$$\psi(s) = \sum_{j\geq 0} \frac{s^j}{j!}\psi^{(j)}(0) = \sum_{j\geq 1} \frac{s^j}{j!}\left(\frac{1-\mathbf{a}}{\mathbf{a}}\right)^{j-1}\varphi^{(j)}(1) \ . \tag{3.20}$$

Observar que la función definida en (3.20) es una serie de potencias con coeficientes no-negativos, luego para que sea función generadora de probabilidad solo falta imponer $\psi(1) = 1$.

$$\psi(1) \;=\; \left(\frac{1-\mathbf{a}}{\mathbf{a}}\right)\sum_{j\geq 1}\left(\frac{1-\mathbf{a}}{\mathbf{a}}\right)^{j}\frac{\varphi^{(j)}(1)}{j!} = \left(\frac{1-\mathbf{a}}{\mathbf{a}}\right)\left[\varphi\left(\frac{1}{\mathbf{a}}\right) - \varphi(1)\right] \ .$$

Es decir, eligiendo $\mathbf{a}$ tal que $\varphi\left(\frac{1}{\mathbf{a}}\right) = \frac{1}{\mathbf{a}}$, y gracias al Lema 3.3.1 se concluye la existencia de $\mathbf{a}$, de esta forma el par $\big(\varphi, \psi\big)$ corresponde a la descomposición de un BGW supercrítico.

■

Ahora en forma análoga, si poseemos un BGW que se extingue con probabilidad 0 con fgp $\psi(\cdot)$, la duda es si existe un BGW en la que $\psi(\cdot)$ corresponde a la distribución su inmortal.

Lema 3.3.3
Sea $\psi(s) = \sum_{j\geq 1} \alpha_j s^j$ función generadora de probabilidad estrictamente convexa con coeficientes no negativos, tal que

$$\inf_{j\geq 1} \left\{ \frac{\alpha_j}{(j+1)\alpha_{j+1}} \right\} > 0 \tag{3.21}$$

Entonces existe $\mathbf{a} \in (0,1)$ y una función generadora de probabilidad $\varphi(\cdot)$ que extiende a $\psi(\cdot)$, donde el par $\big(\varphi, \psi\big)$ corresponde a la descomposición de un BGW supercrítico.

Demostración
Sea $0 < \lambda < \inf\limits_{j\geq 1} \left\{ \frac{\alpha_j}{(j+1)\alpha_{j+1}} \right\}$ fijo.

En primer lugar, observar que dada la hipótesis, el radio de convergencia de ψ debe ser infinito, pues

$$\alpha_k > \lambda(k+1)\alpha_{k+1} > \cdots > \frac{\lambda^n (k+n)!}{k!}\alpha_{k+n} \, .$$

Es decir $\alpha_{n+1} < \frac{\alpha_1}{\lambda^n (n+1)!}$. Luego $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\alpha}_n = 0$.

Sea $\mathbf{a} := \frac{\lambda}{1+\lambda} \in (0,1)$ y $\varphi(\cdot)$ la extensión buscada.

Observemos que análogamente al caso anterior, de existir, $\varphi(\cdot)$ satisface:

$$\frac{1}{\mathbf{a}^{j-1}}\varphi^{(j)}(1) = \frac{1}{(1-\mathbf{a})^{j-1}}\psi^{(j)}(0) \qquad \text{para todo } j \geq 1 \, . \tag{3.22}$$

Por Taylor se concluye que

$$\varphi(s) = \sum_{j\geq 0} \frac{(s-1)^j}{j!}\varphi^{(j)}(1) = 1 + \sum_{j\geq 1} \frac{(s-1)^j}{j!} \left(\frac{\mathbf{a}}{1-\mathbf{a}}\right)^{j-1} \psi^{(j)}(0) \, . \tag{3.23}$$

Observar que la función definida en (3.24) es una serie de potencias con coeficientes no-negativos, pues para todo $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
\varphi^{(k)}(0) &= \sum_{j\geq k} j(j-1)\cdots(j-k+1)\frac{(-1)^{j-k}}{j!}\lambda^{j-1}\psi^{(j)}(0) \ , \\
&= \sum_{j\geq k} \frac{1}{(j-k)!}(-1)^{j-k}\lambda^{j-1}\psi^{(j)}(0) = \sum_{j\geq 0}\frac{1}{j!}(-1)^{j}\lambda^{j+k-1}\psi^{(j+k)}(0) \ , \\
&= \lambda^{k-1}\psi^{(k)}(-\lambda) \ . \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

pero notar que $\psi^{(k)}(-\lambda) > 0$ para todo $k \geq 1$ pues

$$\begin{aligned}
\psi^{(k)}(-\lambda) &= \sum_{j\geq 0}\frac{(-\lambda)^j}{j!}\psi^{(k+j)}(0) \ , \\
&= \sum_{j\geq 0}\frac{\lambda^{2j}}{(2j)!}\left[\psi^{(k+2j)}(0) - \frac{\lambda}{2j+1}\psi^{(k+2j+1)}(0)\right] \ , \\
&= \sum_{j\geq 0}\frac{\lambda^{2j}(k+2j)!}{(2j)!}\left[\alpha_{k+2j} - \frac{\lambda(k+2j+1)}{2j+1}\alpha_{(k+2j+1)}\right] \ , \\
&> \sum_{j\geq 0}\frac{\lambda^{2j}(k+2j)!}{(2j)!}\left[\alpha_{k+2j} - \lambda(k+2j+1)\alpha^{(k+2j+1)}\right] > 0 \ .
\end{aligned}$$

luego para que sea función generadora de probabilidad solo falta comprobar $\varphi(0) \in (0,1)$

$$\varphi(0) \;=\; 1 + \frac{1}{\lambda}\sum_{j\geq 1}\frac{1}{j!}(-\lambda)^j\psi^{(j)}(0) = 1 + \frac{1}{\lambda}\psi(-\lambda) \ .$$

Pero notar que $\psi(-\lambda) < 0$ y

$$\psi'(0) < 1 \ \Rightarrow \ -\lambda < \psi(-\lambda) \ \Rightarrow \ 1 + \frac{1}{\lambda}\psi(-\lambda) > 0 \ .$$

■

Para continuar con el análisis de la descomposición del BGW supercrítico, es importante recalcar la relación que posee con las distribuciones cuasi-estacionarias vistas anteriormente con la transformación $\breve{f}(\cdot)$ definida en (3.9), pues tanto la distribución de Yaglom (Teorema 2.3.1) y en la representación del Q-proceso en (3.8) quedan completamente determinadas a partir de $\breve{f}(\cdot)$.

El caso de $\widehat{f}$ definida en (3.10) es distinto, pues el Teorema 2.3.1 dice que la distribución de Yaglom asociada es nula. Por otro lado, no esta definido su Q-proceso, pues la probabilidad de extinción del proceso asociado a $\widehat{f}(\cdot)$ es 0. Por tal motivo, es necesario generalizar la noción de Q-proceso, en el caso supercrítico, de manera de incluir el caso $\boldsymbol{q} = 0$.

Sea $(Z_n : n = 0,1,2\cdots)$ un BGW supercrítico, en este caso $\boldsymbol{q} \neq 1$ y consideremos $n_1 \leq \cdots \leq n_\alpha$; $i_1, \cdots, i_\alpha$ enteros positivos, entonces :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Z_{n_1} = i_1, \cdots, Z_{n_\alpha} = i_\alpha \mid T > n_\alpha + k) \\
&\qquad = \mathbb{P}(Z_{n_1} = i_1, \cdots, Z_{n_\alpha} = i_\alpha) \frac{\sum_{j\geq 1} P_k(i_\alpha, j)}{\sum_{j\geq 1} P_{n_\alpha+k}(1,j)} , \\
&\qquad = \mathbb{P}(Z_{n_1} = i_1, \cdots, Z_{n_\alpha} = i_\alpha) \frac{1 - P_k(i_\alpha, 0)}{1 - P_{n_\alpha+k}(1,0)} , \\
&\qquad \xrightarrow{k\to\infty} \mathbb{P}(Z_{n_1} = i_1, \cdots, Z_{n_\alpha} = i_\alpha) \frac{1 - \boldsymbol{q}^{i_\alpha}}{1 - \boldsymbol{q}} . \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

Definiendo

$$\mathbb{P}^{\uparrow\uparrow}(i_1, \cdots, i_\alpha) \equiv \mathbb{P}(Z_{n_1} = i_1, \cdots, Z_{n_\alpha} = i_\alpha) \frac{1 - \boldsymbol{q}^{i_\alpha}}{1 - \boldsymbol{q}} . \qquad (3.26)$$

y notando que

$$\sum_{j\geq 1} P_n(i,j) \frac{1 - \boldsymbol{q}^j}{1 - \boldsymbol{q}^i} = \frac{\left[f_n(1)^i - f_n(0)^i\right] - \left[f_n(\boldsymbol{q})^i - f_n(0)^i\right]}{1 - \boldsymbol{q}^i} = \frac{1 - \boldsymbol{q}^i}{1 - \boldsymbol{q}^i} = 1 .$$

Se concluye que $\mathbb{P}^{\uparrow\uparrow}$ es función de probabilidad y por ende define un proceso al que denotaremos $Z^{\uparrow\uparrow}$. Como $(Z_n : n = 1,2,\cdots)$ es cadena de Markov, de (2.34) se tiene que $(Z_n^{\uparrow\uparrow} : n = 1,2,\cdots)$ es cadena de Markov con transiciones :

$$\mathbb{P}(Z^{\uparrow}_{n+k} = j | Z^{\uparrow}_k = i) = P_n(i,j) \frac{1 - \boldsymbol{q}^j}{1 - \boldsymbol{q}^i} . \qquad (3.27)$$

Por otro lado notemos que

$$\mathbb{E}\left[s^{Z_1^{\uparrow\uparrow}} \middle| Z_0^{\uparrow\uparrow} = i \right] = \frac{1}{1 - \boldsymbol{q}^i} \sum_{j\geq 1} P_n(i,j)(1 - \boldsymbol{q}^j) s^j = \frac{f(s^i) - f(s\boldsymbol{q})^i}{1 - \boldsymbol{q}^i} .$$

Esta noción es una construcción alternativa del Q-proceso.

3.4. Aproximación de un BGW supercrítico

La idea de esta sección es a partir de la descomposición de un BGW supercrítico vista en secciones anteriores, construir un proceso aproximado, de esta manera evitar condicionar en $A = \{\omega : Z_n(\omega) \to \infty \text{ cuando } n \to \infty\}$ que es $\mathscr{F}_\infty$ medible.

Como primera aproximación, sea $Z = (Z_n : n = 0, 1, 2 \cdots)$ un BGW supercrítico definido en $\big(\Omega, \mathscr{F}, \big(\mathscr{F}_n\big)_{n\geq 0}, \mathbb{P}\big)$ con fgp $f(\cdot)$, tal que $f(0) > 0$, desde el cual construiremos una aproximación del proceso inmortal asociado.

Consideremos la familia de BGW $Z^k = (Z_n^k : n = 0, 1, 2 \cdots)$ para $k = 0, 1, 2, 3 \cdots$ definidos en $\big(\Omega, \mathscr{F}, \big(\mathscr{F}_{n+k}\big)_{n\geq 0}, \mathbb{P}\big)$ donde Z_n^k es el número de partículas de Z_n que tienen línea de descendencia de largo mayor o igual a k.

Observemos que por la propiedad de ramificación

$$\mathbb{P}(Z_n^k = i | Z_n = j) = \binom{j}{i} \Big[1 - P_k(1,0)\Big]^i P_k(1,0)^{j-i} \qquad \text{para } i \leq j \ , \ n \geq 0 \ .$$

De esta forma, podemos calcular su función generadora de probabilidad de la etapa n $\psi_{k,n}(\cdot)$ como sigue:

$$\begin{aligned}
\psi_{k,n}(s) &:= \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(Z_n^k = i | Z_n^k > 0) s^i \ , \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(Z_{n+k} > 0)} \sum_{i\geq 1} s^i \sum_{j\geq i} \mathbb{P}(Z_n^k = i | Z_n = j) \mathbb{P}(Z_n = j) \ , \\
&= \frac{1}{1 - P_{n+k}(1,0)} \sum_{i\geq 1} s^i \sum_{j\geq i} \binom{j}{i} \Big[1 - P_k(1,0)\Big]^i P_k(1,0)^{j-i} P_n(1,j) \ , \\
&= \frac{1}{1 - P_{n+k}(1,0)} \sum_{j\geq 1} P_n(1,j) \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} \Big[1 - P_k(1,0)\Big]^i P_k(1,0)^{j-i} s^i \ , \\
&= \frac{1}{1 - P_{n+k}(1,0)} \sum_{j\geq 1} P_n(1,j) \bigg(\Big[s\big(1 - P_k(1,0)\big) + P_k(1,0)\Big]^j - P_k(1,0)^j \bigg) \ , \\
&= \frac{1}{1 - P_{n+k}(1,0)} \bigg[f_n\Big(s\big(1 - P_k(1,0)\big) + P_k(1,0)\Big) - f_n\Big(P_k(1,0)\Big)\bigg] \ , \\
&= \frac{1}{1 - f_{n+k}(0)} \bigg[f_n\Big(s\big(1 - f_k(0)\big) + f_k(0)\Big) - f_{n+k}(0)\bigg] \ .
\end{aligned}$$

Es directo que la familia $(\mathbb{Z}^k : k \geq 1)$ converge en distribución al proceso inmortal definido en el Teorema (3.2.1) y es la aproximación directa del proceso inmortal.
Para continuar el análisis de Z_n^k podemos calcular sus derivadas

$$\begin{aligned}
\psi_{k,n}^{(j)}(s) &= \frac{\big(1-f_k(0)\big)^j}{1-f_{n+k}(0)} f_n^{(j)}\Big(s\big(1-f_k(0)\big)+f_k(0)\Big) \; . \\
\psi_{k,n}^{(j)}(0) &= \frac{\big(1-f_k(0)\big)^j}{1-f_{n+k}(0)} f_n^{(j)}\Big(f_k(0)\Big) \; .
\end{aligned}$$

Ocupando el Lema (3.3.2), para $\mathbf{a} \in (0,1)$, encontramos una distribución de partículas condicionadas a morir, tales que extienden al $\psi(\cdot)$.

$$\varphi_{k,n}(s) = 1 + \sum_{j\geq 1} \frac{(s-1)^j}{j!} \left(\frac{\mathbf{a}}{1-\mathbf{a}}\right)^{j-1} \frac{\big(1-f_k(0)\big)^j}{1-f_{n+k}(0)} f_n^{(j)}\Big(f_k(0)\Big) \; .$$

tomando $\mathbf{a} = f_k(0)$, por simplicidad.

$$\begin{aligned}
\varphi_{k,n}(s) &= 1 + \frac{1-f_k(0)}{f_k(0)\big(1-f_{n+k}(0)\big)} \sum_{j\geq 1} \frac{(s-1)^j}{j!} f_k(0)^j f_n^{(j)}\Big(f_k(0)\Big) \; , \\
&= 1 + \frac{1-f_k(0)}{f_k(0)\big(1-f_{n+k}(0)\big)} \sum_{j\geq 1} \frac{(sf_k(0)-f_k(0))^j}{j!} f_n^{(j)}\Big(f_k(0)\Big) \; , \\
&= 1 + \frac{1-f_k(0)}{f_k(0)\big(1-f_{n+k}(0)\big)} \Big(f_n\big(sf_k(0)\big) - f_{n+k}(0)\Big) \; , \\
&= \frac{1-f_k(0)}{f_k(0)\big(1-f_{n+k}(0)\big)} f_n\big(sf_k(0)\big) + \frac{1-f_n(0)}{1-f_{n+k}(0)} \; .
\end{aligned}$$

Resumiendo, es posible escribir la extensión de nuestro proceso inmortal aproximado.

$$f_{k,n}(s) = \mathbf{a}\varphi_{k,n}\left(\frac{s}{\mathbf{a}}\right) \quad = \quad \frac{1-f_k(0)}{1-f_{n+k}(0)} f_n(s) + \frac{f_k(0)\big(1-f_n(0)\big)}{1-f_{n+k}(0)} \; .$$

3.5. Simulación de la dinámica mortal-inmortal

Inspirados en los procesos de ramificación con mutación de tipos (ver [KT75], [M09], [P10]), se crea un proceso que simule la dinámica entre partículas mortales e inmortales existente en el BGW, bajo las siguientes reglas o lineamientos:

- Existen solo 2 tipos de partículas: partículas mortales e inmortales.
- Las partículas mortales tienen distribución de descendencia ξ y todos su hijos son mortales.
- Las partículas inmortales tienen distribución de descendencia $\bar{\xi}$ y el tipo al que pertenecen sus hijos depende de una Bernoulli independiente para cada hijo, si es 1 es mortal y si es 0 inmortal.

De esta forma queda definido el proceso $\widehat{Z} = \Big(\widehat{Z}_n : n = 1, 2\cdots\Big)$

$$\widehat{Z}_n = X_n + Y_n \quad ; \qquad X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} \xi_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{Y_n} \sum_{j=1}^{\bar{\xi}_i^{(n)}} B(n,i,j) \qquad n = 0, 1, \cdots \quad ;$$

$$Y_{n+1} = \sum_{i=1}^{Y_n} \sum_{j=1}^{\bar{\xi}_i^{(n)}} \big[1 - B(n,i,j)\big] \qquad n = 0, 1, \cdots \quad ;$$

Donde las v.a.'s $\Big(B(n,i,j) : n = 1, 2\cdots \ ; \ i = 1, 2\cdots \ ; \ j = 1, 2\cdots\Big)$ son Bernoulli independientes de parámetro θ , $\Big(\xi_i^{(n)} : i = 1, 2, \cdots \ ; \ n = 1, 2\cdots\Big)$ y $\Big(\bar{\xi}_i^{(n)} : i = 1, 2, \cdots \ ; \ n = 1, 2\cdots\Big)$ son v.a.'s i.i.d. e independientes entre sí y de $\Big(B(n,i,j) : n = 1, 2\cdots \ ; \ i = 1, 2\cdots \ ; \ j = 1, 2\cdots\Big)$.

De esta forma queda representado $X = (X_n : n \in \mathbb{Z}_+)$ el proceso de partículas mortales e $Y = (Y_n : n \in \mathbb{Z}_+)$ el de partículas inmortales. Además, al igual que en la sección anterior, supondremos como dato la disribución de ξ que representa la descendencia mortal, por lo que suprondemos que $\mathbb{E}[\xi] < 1$.

Observemos que por construcción, el proceso $\Big((X_n, Y_n) : n \in \mathbb{Z}_+\Big)$ es Markoviano.

Propiedad de ramificación

Similarmente a la propiedad de ramificación de BGW, el proceso $\widehat{Z} = X + Y$ con condición inicial a partículas mortales y b partículas inmortales es igual en ley a la suma de a copias independientes de $\widehat{Z}$ partiendo de solo una partícula mortal más la suma de b copias independientes de $\widehat{Z}$ partiendo de solo 1 partícula inmortal.

Notación 3.1 *Denotaremos $\widehat{Z}^{(a,b)}$ al proceso con condición inicial, a partículas mortales y b partículas inmortales.*

Bajo esta notación la propiedad de ramificación se reescribe

$$\widehat{Z}_n^{(a,b)} \overset{ley}{=} \sum_{i=1}^{a} \widehat{Z}_{n,i}^{(1,0)} + \sum_{j=1}^{b} \widehat{Z}_{n,j}^{(0,1)} \ . \tag{3.28}$$

Observemos que si llamamos $f(s) = \mathbb{E}\left[s^{\xi}\right]$, $g(s) = \mathbb{E}\left[s^{\bar{\xi}}\right]$, para todo a y b en $\mathbb{Z}_+$ y $n \geq 1$ se satisfacen la relaciones:

$$\mathbb{E}\left[s^{\widehat{Z}_1^{(a,b)}}\right] = f(s)^a g(s)^b \quad \text{y} \quad \mathbb{E}\left[s^{\widehat{Z}_n^{(a,b)}}\right] = f_n(s)^a \mathbb{E}\left[s^{\widehat{Z}_n^{(0,1)}}\right]^b \ .$$

Luego si llamamos $B(n,\theta)$ una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y θ obtenemos que:

$$\begin{aligned} H_{n+1}(s) :=& \mathbb{E}_{(0,1)}\left[s^{\widehat{Z}_{n+1}}\right] = \mathbb{E}_{(0,1)}\left[\mathbb{E}\left[s^{\widehat{Z}_{n+1}}\big|(X_1,Y_1)\right]\right] \ , \\ =& \mathbb{E}_{(0,1)}\left[f_n(s)^{X_1} H_n(s)^{Y_1}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[f_n(s)^{B(\bar{\xi},\theta)} H_n(s)^{\bar{\xi}-B(\bar{\xi},\theta)}\big|\bar{\xi}\ \right]\right] \ , \\ =& \mathbb{E}\left[H_n(s)^{\bar{\xi}}\left(\frac{f_n(s)}{H_n(s)}\theta + 1 - \theta\right)^{\bar{\xi}}\right] = g\Big(\theta f_n(s) + (1-\theta)H_n(s)\Big) \ . \end{aligned} \tag{3.29}$$

La penúltima igualdad es por $\mathbb{E}\left[s^{B(n,\theta)}\right] = (s\theta + 1 - \theta)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\theta \in (0,1)$.

Ocupando la relación de recurrencia (3.29) se tiene que $(H_n(0) : n \geq 1)$ es creciente y por definición $H_n(0) \leq 1$, luego converge. Llamemos $L = \lim_{n\to\infty} H_n(0)$. Probaremos esta última afirmación por inducción. Notemos que $H_1(s) = g(s)$. Luego

$$H_2(0) - H_1(0) = g\big(\theta f(0) + (1-\theta)g(0)\big) - g(0) > 0 \ .$$

para el caso n-ésima notemos que, si suponemos $H_k(0) > H_{k-1}(0)$ para todo $k \leq n$. Entonces:

$$\theta f_n(0) + (1-\theta)H_n(0) > \theta f_{n-1}(0) + (1-\theta)H_{n-1}(0) \ .$$

luego como $g(\cdot)$ es creciente, se tiene que:

$$H_{n+1}(0) - H_n(0) = g\Big(\theta f_n(0) + (1-\theta)H_n(0)\Big) - g\Big(\theta f_{n-1}(0) + (1-\theta)H_{n-1}(0)\Big) > 0 \; .$$

Además, notemos que L satisface la ecuación:

$$L = g\Big(\theta + (1-\theta)L\Big) \; . \tag{3.30}$$

Por otro lado, si definimos por recurrencia

$$\begin{aligned} G_1(s) &= g(s) \; ; \\ G_{n+1}(s) &= g\Big(\theta + (1-\theta)G_n(s)\Big) \qquad \text{para } n \geq 1 \; ; \end{aligned}$$

Notemos que por construcción $H_n(s) \leq G_n(s)$ para todo $s \in [0,1]$. Además por el Teorema 2.1.1 $G_n(s) \to x_0$ para todo $s \in [0,1)$ donde x_0 es la primera raíz no negativa de

$$g\Big(\theta + (1-\theta)s\Big) = s \; . \tag{3.31}$$

De (3.30) y (3.31) concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} H_n(0) = \lim_{n\to\infty} G_n(s) = L \; .$$

Por otro lado, notemos que $g(\cdot)$ y $f_n(\cdot)$ son crecientes, luego $H_n(\cdot)$ son crecientes $\forall\ n \geq 1$, como además $H_n(s) \leq G_n(s)$ se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} H_n(s) = L \qquad\qquad \text{para todo } s \in [0,1) \; . \tag{3.32}$$

Además , si denotamos $\widehat{L} := \theta + (1-\theta)L$, se tiene que $\widehat{L}$ corresponde a la intersección la curva $g(s)$ y la recta $R(s) = \frac{s-\theta}{1-\theta}$.

De esta forma, si denotamos $\boldsymbol{m} = f'(1)$, se tiene que $L < 1$ ssi $\widehat{L} < 1$ ssi $\frac{\boldsymbol{m}}{1-f(0)} > \frac{1}{1-\theta}$.

Luego podemos concluir que $\widehat{Z}$ no se extingue ssi

$$\theta < 1 - \frac{1-f(0)}{\boldsymbol{m}} \; .$$

El análisis previo es original, un análisis alternativo para encontrar la condición de no extinción, es ocupar la función generadora de probabilidad del proceso, que es el realizado en [KT75]:

Definición 3.2
Se define la función generadora de probabilidad del par (X_n, Y_n) *como:*

$$F_n(s_1, s_2) = \Big(f_n^{(X)}(s_1, s_2), f_n^{(Y)}(s_1, s_2)\Big)$$

donde:

$$f_n^{(X)}(s_1, s_2) := \mathbb{E}\left[s_1^{X_n} s_2^{Y_n} \,|X_0 = 1, Y_0 = 0\right] \ . \tag{3.33}$$

$$f_n^{(Y)}(s_1, s_2) := \mathbb{E}\left[s_1^{X_n} s_2^{Y_n} \,|X_0 = 0, Y_0 = 1\right] \ . \tag{3.34}$$

Observemos que

$$\mathbb{E}\left[s_1^{X_n} s_2^{Y_n} \Big| X_0 = 1 \ ; \ Y_0 = 0\right] = \mathbb{E}\left[s_1^{X_n} \,|X_0 = 1\right] = f_n(s_1) \ .$$

Además

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[s_1^{X_1} s_2^{Y_1} \Big| X_0 = a \ ; \ Y_0 = b\right] &= \mathbb{E}\left[s_1^{\sum_{i=1}^{a} \xi_i + \sum_{i=1}^{b} B(\bar{\xi}_i,\theta)} s_2^{\sum_{i=1}^{b} \bar{\xi}_i - \sum_{i=1}^{b} B(\bar{\xi}_i,\theta)} \right] \ , \\
&= f(s_1)^a \mathbb{E}\left[s_1^{B(\bar{\xi},\theta)} s_2^{\bar{\xi} - B(\bar{\xi},\theta)}\right]^b = f(s_1)^a \mathbb{E}\left[\sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\{\bar{\xi}=k\}} s_2^k \mathbb{E}\left[\left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{B(k,\theta)}\right]\right]^b \ , \\
&= f(s_1)^a \mathbb{E}\left[s_2^{\bar{\xi}} \left(\frac{s_1}{s_2}\theta + 1 - \theta\right)^{\bar{\xi}}\right]^b = f(s_1)^a g\big(\theta s_1 + (1-\theta)s_2\big)^b \ .
\end{aligned} \tag{3.35}$$

De esta forma:

$$f_n^{(X)}(s_1, s_2) = f(s_1) \ . \tag{3.36}$$

$$f_n^{(Y)}(s_1, s_2) = g\big(\theta s_1 + (1-\theta)s_2\big) \ . \tag{3.37}$$

Para calcular la probabilidad de extinción ocuparemos el siguiente resultado (ver [M09])

$$\mathbb{P}(X_n = 0; Y_n = 0 | X_0 = k_1, Y_0 = k_2) = \left[U_n^{(X)}\right]^{k_1} \left[U_n^{(Y)}\right]^{k_2} \ . \tag{3.38}$$

Donde $U_n^{(X)}$ y $U_n^{(X)}$ son las soluciones del sistema

$$\begin{aligned}
U_0^{(X)} &= 0 \ , & U_0^{(Y)} &= 0 \ , \\
U_n^{(X)} &= f_1^{(X)}\big(U_{n-1}^{(X)}, U_{n-1}^{(Y)}\big) \ , & U_n^{(Y)} &= f_1^{(Y)}\big(U_{n-1}^{(X)}, U_{n-1}^{(Y)}\big) \ ,
\end{aligned}$$

Ocupando los resultados de (3.36) y (3.37) obtenemos que $U_n^{(X)} = f_n(0)$ y $U_n^{(Y)} = H_n(0)$.

Para un completo análisis del proceso $\widehat{Z}$ es necesario estudiar la matriz de esperanza.

Definición 3.3 (Matriz de esperanzas)
Se define como:

$$M := \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{(1,0)}[X_1] & \mathbb{E}_{(1,0)}[Y_1] \\ \mathbb{E}_{(0,1)}[X_1] & \mathbb{E}_{(0,1)}[Y_1] \end{bmatrix} . \tag{3.39}$$

Observemos que por construcción de $\widehat{Z}$

$$M = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[\xi] & 0 \\ \theta\mathbb{E}[\bar{\xi}] & (1-\theta)\mathbb{E}[\bar{\xi}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m} & 0 \\ \frac{\theta\boldsymbol{m}}{1-f(0)} & \frac{(1-\theta)\boldsymbol{m}}{1-f(0)} \end{bmatrix} . \tag{3.40}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big[(X_{n+1},Y_{n+1})\Big|(X_n,Y_n)\Big] &= \left(\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{X_n}\xi_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{Y_n}\sum_{j=1}^{\bar{\xi}_i^{(n)}} B(n,i,j)\,\middle|\,\begin{matrix}X_n\\Y_n\end{matrix}\right], \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{Y_n}\sum_{j=1}^{\bar{\xi}_i^{(n)}}[1-B(n,i,j)]\,\middle|\,\begin{matrix}X_n\\Y_n\end{matrix}\right]\right) \\ &= \left(X_n\mathbb{E}[\xi] + Y_n\theta\mathbb{E}[\bar{\xi}], Y_n(1-\theta)\mathbb{E}[\bar{\xi}]\right) = (X_n,Y_y)\cdot M . \end{aligned}$$

En general, por la propiedad de Markov aplicada a (X,Y), se demuestra que

$$\mathbb{E}[(X,Y)_{n+r}|(X,Y)_n] = X_n \cdot M^r \text{ para todo } n \geq 1 ,\ r \geq 1 . \tag{3.41}$$

Resumiendo, si definimos como condición inicial de $\widehat{Z}$ una distribución Bernoulli de parametro θ independiente. Obtenemos:

$$F_n := \theta\mathbb{E}_{(1,0)}\left[s^{\widehat{Z}_n}\right] + (1-\theta)\mathbb{E}_{(0,1)}\left[s^{\widehat{Z}_n}\right] . \tag{3.42}$$

De esta forma, gracias a (3.31)

$$\lim_{n\to\infty} F_n = \theta + (1-\theta)L := \widehat{L} , \tag{3.43}$$

donde $\widehat{L}$ satisface $g(\widehat{L}) = \frac{\widehat{L}-\theta}{1-\theta}$.

Para finalizar la construcción de una simulación de la dinámica mortal-inmortal basta con elegir θ tal que $\widehat{L}$ se agual a $\boldsymbol{q}$. Reemplazando $g(s) = \frac{f(s)-f(0)}{1-f(0)}$, por (3.31) obtenemos que:

$$f(\widehat{L}) = (\widehat{L} - \theta)\frac{1-f(0)}{1-\theta} + f(0) = \widehat{L}\left[\frac{1-f(0)}{1-\theta}\right] + \frac{f(0)-\theta}{1-\theta} \ . \tag{3.44}$$

Por otro lado, si se impone como regla adicional que las partículas inmortales tienen al menos 1 hijo inmortal queda definida una variación del modelo anterior $\tilde{Z} = \left(\tilde{Z}_n : n = 1, 2\cdots\right)$ definida como sigue:

$$\tilde{Z}_n = X_n + Y_n \quad ; \qquad X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} \xi_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{Y_n} \sum_{j=1}^{\bar{\xi}_i^{(n)}-1} B(n,i,j) \qquad n = 0, 1, \cdots \quad ;$$

$$Y_{n+1} = Y_n + \sum_{i=1}^{Y_n} \sum_{j=1}^{\bar{\xi}_i^{(n)}-1} \left[1 - B(n,i,j)\right] \qquad n = 0, 1, \cdots \quad ;$$

Donde se consideran las v.a.'s $\big(B(n,i,j) : n = 1, 2\cdots \ i = 1, 2\cdots \ j = 1, 2\cdots\big)$ i.i.d. con distribución Bernoulli de parámetro θ , $\left(\xi_i^{(n)} : i = 1, 2, \cdots \ n = 1, 2\cdots\right)$ y $\left(\bar{\xi}_i^{(n)} : i = 1, 2, \cdots \ n = 1, 2\cdots\right)$ son v.a.'s i.i.d. e independientes entre si y de $\big(B(n,i,j) : n = 1, 2\cdots \ i = 1, 2\cdots \ j = 1, 2\cdots\big)$.

Análogamente al modelo anterior consideremos $f(s) = \mathbb{E}\left[s^{\xi}\right]$ y $g(s) = \mathbb{E}\left[s^{\bar{\xi}}\right]$. Observemos que el par (X, Y) es Markoviano y posee una propiedad de ramificación:

El proceso $\tilde{Z}$ con condición inicial a partículas mortales y b partículas inmortales es igual en ley a la suma de a copias independientes de $\tilde{Z}$ con condición inicial solo 1 partícula mortal más la suma de b copias independientes de $\tilde{Z}$ con condición inicial solo 1 partícula inmortal.

Se denotará $\tilde{Z}^{(a,b)}$ al proceso con condición inicial a partículas normales y b partículas inmortales.

De esta forma , podemos calcular:

$$
\begin{aligned}
H_{n+1}(s) :=& \mathbb{E}\left[s^{\tilde{Z}^{(0,1)}_{n+1}}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[s^{\sum\limits_{i=1}^{X_n}\xi_i^{(n)}+\sum\limits_{j=1}^{Y_n}\bar{\xi}_i^{(n)}}\,\middle|\begin{matrix}X_1\\ Y_1\end{matrix}\right]\middle|\begin{matrix}X_0=0\\ Y_0=1\end{matrix}\right] \ ,\\
=&\mathbb{E}\left[\sum_{\substack{a\geq 0\\ b\geq 0}}\mathbb{1}_{\left\{\substack{X_1=a\\ Y_1=b}\right\}}\mathbb{E}\left[s^{\tilde{Z}^{(a,b)}_{n}}\right]\middle|\begin{matrix}X_0=0\\ Y_0=1\end{matrix}\right] = \mathbb{E}\left[f_n(s)^{X_1}\mathbb{E}\left[s^{\tilde{Z}^{(0,1)}_{n}}\right]^{Y_1}\middle|\begin{matrix}X_0=0\\ Y_0=1\end{matrix}\right] \ ,\\
=&\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[f_n(s)^{B(\bar{\xi}-1,\theta)}H_n(s)^{\bar{\xi}-B(\bar{\xi}-1,\theta)}\,\middle|\bar{\xi}\right]\right] = \mathbb{E}\left[H_n(s)^{\bar{\xi}}\left(\frac{f_n(s)}{H_n(s)}\theta+1-\theta\right)^{\bar{\xi}-1}\right] \ ,\\
=&\mathbb{E}\left[H_n(s)\left(\theta f_n(s)+(1-\theta)H_n(s)\right)^{\bar{\xi}-1}\right] = H_n(s)\frac{g\big(\theta f_n(s)+(1-\theta)H_n(s)\big)}{\theta f_n(s)+(1-\theta)H_n(s)} \ .
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

Definiendo como condición inicial $\tilde{Z}_0 = B\tilde{Z}_0^{(1,0)} + (1-B)\tilde{Z}_0((0,1))$ donde B corresponde a una variable aleatoria Bernoulli de parámetro θ independiente de $Z(\tilde{0},1)$ y de $Z(\tilde{1},0)$.

De esta forma:

$$
F_{n+1}(s) := \mathbb{E}\left[s^{\tilde{Z}_{n+1}}\right] = \theta\mathbb{E}\left[s^{\tilde{Z}^{(1,0)}_{n+1}}\right] + (1-\theta)\mathbb{E}\left[s^{\tilde{Z}^{(0,1)}_{n+1}}\right] = \theta f_{n+1}(s) + (1-\theta)H_{n+1}(s) \ .
\tag{3.46}
$$

Luego la recurrencia (3.45) se reescribe.

$$
\begin{aligned}
H_1(s) =& g(s) \ ;\\
H_{n+1}(s) =& H_n(s)\frac{g\big(F_n(s)\big)}{F_n(s)} = g(s)\prod_{k=1}^{n}\frac{g(F_k(s))}{F_k(s)} \ ;
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

Resumiendo los resultados de (3.46) y (3.47) obtenemos:

$$
F_{n+1}(s) = \theta f_{n+1}(s) + (1-\theta)g(s)\prod_{k=1}^{n}\frac{g(F_k(s))}{F_k(s)} \ .
\tag{3.48}
$$

Reemplazando $g(s) = \frac{f(s)-f(0)}{1-f(0)}$ que corresponde a forzar a la distribución $f(\cdot)$ a tomar valores mayores o iguales a 1.

$$
F_n(s) = \theta f_n(s) + (1-\theta)\frac{f(s)-f(0)}{1-f(0)}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{F_k(s)}\frac{f\big(F_k(s)\big)-f(0)}{1-f(0)} \ .
\tag{3.49}
$$

Para analizar la convergencia de $F_n(s)$ utilizaremos el resultado siguiente:
Sea $(u_n : n \geq 1)$ una sucesión tal que $0 \leq u_n < 1$. Entonces $\prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n) > 0$ si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$. Ver [R87] teorema 15.5 .

A partir de este teorema, podemos concluir que $F_n(s) \to \theta$ cuando $n \to \infty$.

Primero, observemos que, definiendo $\psi(x) = \frac{1}{x}\frac{f(x)-f(0)}{1-f(0)}$ se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\psi(0) =& \frac{\nu_1}{1-f(0)} < 1 \qquad \text{y} \qquad \psi(1) = 1 \qquad \text{además} \\
\psi'(x) =& \frac{1}{1-f(0)}\frac{xf'(x)-f(x)+f(0)}{x^2} = \frac{1}{1-f(0)}\frac{1}{x^2}\sum_{j\geq 2}(j-1)\nu_j x^j > 0 \qquad \text{y} \\
\psi''(x) =& \frac{1}{1-f(0)}\frac{x^3 f''(x)-2x^2f'(x)+2xf(x)-2xf(0)}{x^4} = \frac{1}{1-f(0)}\frac{1}{x^3}\sum_{j\geq 3}(j^2-3j+2)\nu_j x^j > 0
\end{aligned}
$$

Obtenemos que $\psi(x) < \frac{\nu_1}{1-f(0)} + x\left(1-\frac{\nu_1}{1-f(0)}\right)$, de esta forma:

$$
\begin{aligned}
1-\psi\left(F_j(s)\right) >& 1-\left[\frac{\nu_1}{1-f(0)} + F_j(s)\left(1-\frac{\nu_1}{1-f(0)}\right)\right] = \left(1-\frac{\nu_1}{1-f(0)}\right)\left(1-F_j(s)\right) \ , \\
&= \left(1-\frac{\nu_1}{1-f(0)}\right)\left(1-\theta f_n(s) - (1-\theta)\frac{f(s)-f(0)}{1-f(0)}\prod_{i=1}^{n-1}\left[\frac{1}{F_i(s)}\frac{f\left(F_i(s)\right)-f(0)}{1-f(0)}\right]\right) \ , \\
&> \left(1-\frac{\nu_1}{1-f(0)}\right)\left(1-\theta-(1-\theta)\frac{f(s)-f(0)}{1-f(0)}\right) \ , \\
&= \left(1-\frac{\nu_1}{1-f(0)}\right)(1-\theta)\left(1-\frac{f(s)-f(0)}{1-f(0)}\right) > 0 \ . \qquad (3.50)
\end{aligned}
$$

De esta forma concluimos que $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Big[1-\psi\big(F_j(s)\big)\Big] \nearrow \infty$ luego

$$
\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\psi\big(F_i(s)\big) = \lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{F_i(s)}\frac{f\big(F_i(s)\big)-f(0)}{1-f(0)} = 0 \ .
$$

De esta la última relación concluimos que $F_n(s) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$.

Para finalizar la construcción de la simulación en este caso basta con elegir $\theta = \boldsymbol{q}$.

Capítulo 4

Conclusiones

A lo largo del estudio de procesos de ramificación, hemos llegado a distintos resultados y observaciones. Cabe destacar la inestabilidad del proceso, es decir, o se extingue o crece a infinito (Teorema 2.1.3), lo que obligó a condicionar para buscar distribuciones de equilibrio. Este motivo nos llevó a estudiar el comportamiento de los individuos antes de su extinción, ocupando distintos tipos de condicionamientos basados principalmente en los trabajos de [AN72] y [H63] (Teoremas 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 y el Q-Proceso).

Una observación importante en el análisis de las medidas estacionarias del proceso de ramificación, es la relación que existe entre la distribución definida en 2.2.1 con el vector propio de Perron-Frobenius (Nota 2.1).

Los principales resultados se encuentran en el capítulo 3, donde se estudia la descomposición de la población en partículas que se extinguen casi-seguramente y las partículas con linea de descendencia infinita. Se encontró una fuerte relación analítica entre las transformacíones que definen la descomposición (Lemas 3.3.2 y 3.3.1) y para dar una interpretación probabilistica de la misma, se estudiaron distintas modificaciones del proceso original, que aproximen esta descomposición, pues no se obtiene en forma natural ya que se basa en condicionar a un conjunto que no está en la filtración (Secciones 3.4 y 3.5).

Nuestro estudio podría continuarse basicamente en 2 direcciones, la primera sería estudiar una extensión a procesos de ramificación a tiempo y espacio continuo, en particular, sería intersante comprender las repercusiones de la separación mortal-inmortal en ramificación continua y en la medida puntual asociada. Por otro lado, una segunda extención tiene que ver con el estudio de distribuciones cuasi-estacionarias en procesos multitipos.

Bibliografía

[AN72] K. Athreya; P. Ney , *Branching Processes* , Springer-Verlag, 1972.

[BFM08] J. Bertoin; J. Fontbona; S. Martínez , *On prolific individuals in a supercritical continuous-state branching process* , J. Appl. Probab. 45 (2008), no. 3, 714-726.

[CCLMMSM09] P. Cattiaux; P. Collet; A. Lambert; S. Martínez; S. Méléard; J. San Martín, *Quasi-stationary distributions and diffusion models in population dynamics* , Ann. Probab. 37 (2009), no. 5, 1926-1969.

[FMP92] P. Ferrari; S. Martínez; P. Picco, *Existence of nontrivial quasi-stationary distributions in the birth-death chain* , Adv. in Appl. Probab. 24 (1992), no. 4, 795-813.

[G99] J. Geiger, *Elementary new proofs of classical limit theorems for Galton-Watson processes* , J. Appl. Probab. 36 (1999), no. 2, 301-309.

[G05] A. Gut , *Probability: a graduate course* , Springer, 2005.

[H63] T. Harris , *The Theory of Branching Processes* , Springer-Verlag, 1963.

[KT75] S. Karlin; H. Taylor, H , *A first course in stochastic processes.* , Academic Press, 1975.

[K06] A. Kyprianou , *Introductory lectures on fluctuations of Lèvy processes with applications* , Springer, 2006.

[LM06] A. Lagerås; A. Martin-Löf , *Genealogy for supercritical branching processes* , J. Appl. Probab. 43 (2006), no. 4, 1066-1076.

[L07] A. Lambert , *Quasi-stationary distributions and the continuous-state branching process conditioned to be never extinct* , Electron. J. Probab. 12 (2007), no. 14, 420-446.

[L08] A. Lambert , *Population dynamics and random genealogies* , Stoch. Models 24 (2008), suppl. 1, 45-163.

[M09] S. Méléard , *Modèles aléatoires en Ecologie et Evolution* , Ecole Polytechnique, 2009.

[P10] S. Pénisson , *Conditional Limit Theorems for Multitype Branching Processes and Illustration in Epidemiological Risk Analysis* , Thèse de doctorat, Universität Potsdam , 2010.

[R87] W. Rudin , *Real and Complex analysis* , MacGraw-Hill, 1987.

[S08] D. Simon , *Survie et généalogies dans quelques modèles de dynamique des populations* , Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot , 2008.

[W91] D. Williams , *Probability with martinagales* , Cambridge University Press, 1991.